

שער 3

שיעור 3 (המשך)

3.1 דילמה האסיר

דוגמה 3.1 (דילמה האסיר)

משחק פשוט מאוד, ויחד עם זאת מהרבה בחינות, הוא המשחק הידוע בשם "דילמה האסיר". המשחק מופיע בספרות בקורס הסיפור הבא.

שני עבריין אליס (שחקן 1) ובוב (שחקן 2) ביצעו פשע חמור ונעצרו. בהעדר כל הוכחות אחרות, הדרך היחידה שבה יכולה המשטרה להציג הרשעה על עבירה זו היא שאחד העצורים (או שניהם) מודעה. בביצוע המעשה. בחקירותם העמידה המשטרה כל אחד מהעצורים בפני החלטה הבאה:

- אם אליס מלשינה ובוב שותק אליס יוצאת חופשי ובוב מקבל 10 שנים מאסר.
- אם בוב מלשין ולאليس שותקת, בוב יוצא חופשי ולאليس מקבלת 10 שנים מאסר.
- אם שניהם שותקים, יש בידי המשטרה ראיות להרשעתם בעבירות פחותות (למשל, העלמת מס) שMOVEDIL למאסר של שנה אחת לכל אחד.
- אם שניהם מלשינים המשטרה מבקשת להתחשב בשיתוף הפעולה שלהם ולגוזר את עונשם ל-6 שנים מאסר לכל אחד.
 - א) רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית.
 - ב) מצאו את הפתרון באסטרטגיות שלוטות חזק.
 - ג) מצאו את השיווי משקל של המשחק.

פתרונות:

א) נסמן:

C_1 = האסטרטגיה של אליס "MLSINA".

D_1 = האסטרטגיה של אליס "SHOTKA".

C_2 = האסטרטגיה שבוב "MLSIN".

D_2 = האסטרטגיה שבוב "SHOTK".

המשחק בצורה אסטרטגית הינו:

		2 בוב	C_2	D_2
1 אליס		C_1	-6, -6	0, -10
		D_1	-10, 0	-1, -1

(ב)

	2	C_2	D_2
1			
C_1	-6, -6	0, +10	
D_1	-10, -10	-1, -1	

	2	C_2	
1			
C_I	-6, -6		
D_I	-10, -10		

	2	C_2	
1			
C_1	-6, -6		
D_1	-10, -10		

לכן לפי הכללים של שחקנים רצינליים, שחקן I ישמש באסטרטגיה C_{II} , שחקן II ישמש באסטרטגיה D_I והתשלום הסופי יהיה:

$$u_1(C_1, C_2) = -6, \quad u_2(C_1, C_2) = -6.$$

(ג)

	2	C_2	D_2
1			
C_1	<u>-6</u> , <u>-6</u>	0, -10	
D_1	-10, -10	-1, <u>-1</u>	

השוווי משקל הוא

$$s^* = (C_1, C_2), \quad u(s^*) = (-6, -6).$$

■

דוגמה 3.2 (מלחמת המינים)

המשחק המשחק הבא נקרא "מלחמת המינים" (battle of the sexes). שמו של המשחק בא מהתיאור הבא. זוג מתכנן בילוי למצאה שבת. האפשרויות העומדות לרשותם הם קונצרט (C) או צפייה במשחק כדורגל (F). הגבר (שחקן I) מעדיף צפייה במשחק הכדורגל, בעוד האישה (שחקן II) מעדיפה את הקונצרט, אך שניהם מעדיפים להיות יחד גם אם הבילוי המשותף הוא הפחות עדיף בעיניהם. המשחק בצורה אסטרטגית מתוואר למטה. מצאו את כל שוויי משקל.

	II	C	F
I			
C	1, 2	0, 0	
F	0, 0	2, 1	

פתרונות:

	II	C	F
I			
C	<u>1</u> , <u>2</u>	0, 0	
F	0, 0	<u>2</u> , <u>1</u>	

דוגמה 3.3 (משחק תיאום)

המשחק המתואר בטבלה למטה שיקל משפחה של משחקים הנקראים "משחקי תיאום" (coordination games).

	<i>II</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>I</i>			
<i>A</i>	<u>1</u> , <u>1</u>	0, 0	
<i>B</i>	0, 0	<u>3</u> , <u>3</u>	

מצאו את כל שיווי משקל במשחק.

פתרונות:

הווקטור אסטרטגי אשר שיווי משקל הימן: $s^* = (B, b)$ ו- $s^* = (A, a)$.

הגדרה 3.1 תשובה טובה בית

(ההגדרה הזאת היא אותה הגדרה של תשובה טובה ביותר ב- 2.4. אני פשוט כתבתי אותה כאן שוב לנוחות.)

יהי s_{-i} וקטור אסטרטגיות של השחקנים לא- i . אסטרטגיה s_i של שחקן i נקראת **תשובה טובה ביותר** אם s_{-i}

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{t_i \in S_i} u_i(t_i, s_{-i}).$$

הגדרה 3.2 הגדרות שקולות של שיווי משקל

ההגדרות הבאות של שיווי משקל שקולות:

- וקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ נקרא שיווי משקל נאש אם לכל שחקן $i \in N$ ולכל $s_i \in S_i$ מתקיים

$$u_i(s^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*).$$

- וקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ נקרא שיווי משקל נאש אם לכל שחקן $i \in N$ האסטרטגיה s_i^* היא תשובה טובה ביותר ל- s_{-i}^* .

3.2 תחרות דו-אPOL על פי Cournot

דוגמה 3.4 (דו-אPOL)

שני יצרנים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתרחרים על שוק הקונס הפטונציאליים. היצרנים מחליטים סימולטנית על הכמות שהם ייצורו, וההיעול הכלול קובע את מחיר המוצר, שהוא זהה לשני היצרנים. נסמן ב- q_1 וב- q_2 את הכמות של יצרנים 1 ו- 2 בהתאם. אז הכמות הכוללת של מוצרים בשוק היא $q_1 + q_2$. נניח כי המחיר של יחידה שווה ל-

$$2 - q_1 - q_2 .$$

עלות הייצור של יחידה לשחקן הראשון היא $0 > c_1$ ולשחקן השני היא $0 > c_2$. האם קיים שווי משקל במשחק זה, ואם כן, מה הוא?

פתרון:

זהו משחק שני שחקנים (היצרנים 1 ו- 2) שבו קבוצת האסטרטגיות של כל שחקן היא $[0, \infty]$. אם שחקן 1 בוחר באסטרטגיה q_1 ושחקן q_2 בוחר באסטרטגיה q_2 , התשלום לשחקן 1 הוא

$$u_1(q_1, q_2) = q_1(2 - q_1 - q_2) - q_1c_1 = q_1(2 - c_1 - q_1 - q_2) , \quad (*)$$

והתשלום לשחקן 2 הוא

$$u_2(q_1, q_2) = q_2(2 - q_1 - q_2) - q_2c_2 = q_2(2 - c_2 - q_1 - q_2) . \quad (\#)$$

התשובה הטובה ביותר של שחקן 1 לאסטרטגיה q_2 של שחקן 2 הוא ערך q_1 המביא למקסימום את $u_1(q_1, q_2)$: $u_1(q_1, q_2) \rightarrow q_1 \mapsto u_1(q_1, q_2)$

$$\frac{\partial u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = 0 .$$

על ידי גזירה של אגף ימין של משווה (*) נקבל את התנאי $2 - c_1 - 2q_1 - q_2 = 0$ או

$$q_1 = \frac{2 - c_1 - q_2}{2} . \quad (1*)$$

באוטו אופן, התשובה הטובה ביותר של שחקן 2 לאסטרטגיה q_1 של שחקן 1 היא ערך q_2 שבו הנזרת של $u_2(q_1, q_2)$ ביחס ל- q_2 מותאמת. על ידי גזירה נקבל

$$q_2 = \frac{2 - c_2 - q_1}{2} . \quad (2*)$$

פתרון המשוואות (1*) ו- (2*) נותן

$$q_1^* = \frac{2 - 2c_1 + c_2}{3} , \quad q_2^* = \frac{2 - 2c_2 + c_1}{3} .$$

זה אומנם שווי משקל וזהו שווי משקל היחיד של המשחק. התשלומים של השחקנים בשווי משקל זה הם

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{2 - 2c_1 + c_2}{3} \right)^2 = (q_1^*)^2 , \quad u_2(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{2 - 2c_2 + c_1}{3} \right)^2 = (q_2^*)^2 .$$

כעת נוכיח כי ה策ם אסטרטגיות (q_1^*, q_2^*) מהוות נקודת שווי משקל. יש להוכיח כי q_1^* תשובה טובה ביותר ליותר לשחקן 1 ביחס ל- q_2^* ולהפוך.

$$u(q_1, q_2^*) = q_1(2 - c_1 - q_1 - q_2^*) = -q_1^2 + (2 - c_1 - q_2^*)q_1 .$$

לכן (q_1^*, q_2^*) פולינום מסדר 2 של q_1 , כאשר המקדם של q_1^2 הוא 1. לכן המקסימום המתתקבל הוא

$$q_1 = \frac{(2 - c_1 - q_2^*)}{2} = \frac{\left(2 - c_1 - \frac{2-2c_2+c_1}{3}\right)}{2} = q_1^* .$$

בפרט q_1^* תשובה טובה ביותר של שחקן 2 ביחס ל- q_2^* .

דוגמה 3.5 (דו-אPOL)

שניהם ייצרנים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאליים. יהיו q_1 כמות המוצר שייצרן 1 מייצר ו- q_2 כמות המוצר שייצרן 2 מייצר. הכמות הכוללת של מוצרים בשוק היא

$$Q = q_1 + q_2 .$$

יהי $P(Q)$ המחיר של יחידה של המוצר בשוק:

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & Q < a \\ 0 & Q \geq a \end{cases} .$$

הפרמטר a נקרא **פרמטר הביקוש**. הפרמטר זה מכמת את הביקוש של המוצר בשוק. נניח כי עלות הייצור של יחידה לייצרן 1 ועלות הייצור של יחידה וליצרן 2 נתונות על ידי

$$C_1(q_1) = cq_1 , \quad C_2(q_2) = cq_2 .$$

מצאו את השוויי משקל של המשחק.

פתרונות:

זהו משחק שני שחקנים. נקרא לשחקן 1 אליס ולשחקן 2 בוב. הכמות q_1 אשר אליס בוחרת היא האסטרטגיה שלו. וכמו כן הכמות q_2 אשר בוב בוחר היא האסטרטגיה שלו. $q_1 \in [0, \infty]$, או במלילים אחרות $(\infty, 0]$, ובאותה מידה $q_2 \in [0, \infty]$ מקבל כל ערך בתחום $(\infty, 0]$.

אם שחקן 1 בוחר באסטרטגייה q_1 ושחקן 2 בוחר באסטרטגייה q_2 , התשלום לשחקן 1 הוא

$$u_1(q_1, q_2) = q_1(a - q_1 - q_2) - q_1c = q_1(a - c - q_1 - q_2) ,$$

והתשלום לשחקן 2 הוא

$$u_2(q_1, q_2) = q_2(a - q_1 - q_2) - q_2c = q_2(a - c - q_1 - q_2) .$$

במשחק שני שחקנים ווקטור אסטרטגיות (s_1^*, s_2^*) שוויי משקל אם הווקטור אסטרטגיות (q_1^*, q_2^*) הוא שוויי משקל אם לכל שחקן:

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = \max_{0 \leq q_1 < \infty} u_1(q_1, q_2^*) = \max_{0 \leq q_1 \leq \infty} [q_1(a - c - q_1 - q_2^*)]$$

-1

$$u_2(q_1^*, q_2^*) = \max_{0 \leq q_2 < \infty} u_2(q_1^*, q_2) = \max_{0 \leq q_2 \leq \infty} [q_2(a - c - q_1^* - q_2)] .$$

המקסימום של $u_1(q_1, q_2^*)$ לפי q_1 מתקיים בנקודת שבה הנגזרת מתואפסת:

$$\frac{\partial u_1(q_1, q_2^*)}{\partial q_1} = a - c - 2q_1 - q_2^* \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow q_1^* = \frac{a - c - q_2^*}{2} .$$

ובאותה מידת המקסימום של $u_2(q_1^*, q_2)$ לפि q_2 מתקיים בנקודת הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_2(q_1^*, q_2)}{\partial q_2} = a - c - q_1^* - 2q_2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow q_2^* = \frac{a - c - q_1^*}{2}.$$

לפיכך, אם הצמד כמויות (q_1^*, q_2^*) שווי משקל אז חכמיות חייבות לקיים את התנאים

$$q_1^* = \frac{1}{2}(a - q_2^* - c), \quad q_2^* = \frac{1}{2}(a - q_1^* - c).$$

הפתרון למערכת זו הינו

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a - c}{3}.$$

■

דוגמה 3.6 (דו-אPOL)

שני יצרנים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתרחרים על שוק הקונינס הפוטנציאליים. יהיו q_1 כמות המוצר שיצרן 1 מייצר ו- q_2 כמות המוצר שיצרן 2 מייצר. שחקן 1 בוחר במחיר של המוצר שלו להיות p_1 ליחידה, ושחקןן 2 בוחר במחיר של המוצר שלו להיות p_2 ליחידה. הכמות q_1 שחקן 1 צריך לייצר נקבע על ידי הפונקציה

$$q_1 = a - p_1 + bp_2$$

כאשר $0 < b$ והכמות q_2 שחקן 2 צריך לייצר נקבע על ידי הפונקציה

$$q_2 = a - p_2 + bp_1.$$

מצאו את השוויי משקל של המשחק.

פתרון:

נניח כי אליס שחקן 1 ובוב שחקן 2. במשחק זה המחירسئلיס בוחרת, p_1 הוא האסטרטגיה שלו והמחיר שבודב בוחר, p_2 הוא האסטרטגיה שלו. הערכות האפשריים של p_1 הם מ- 0 עד ∞ , כלומר $p_1 \in [0, \infty]$ ובאותה מידת $p_2 \in [0, \infty]$.

אם אליס (שחקן 1) בוחרת באסטרטגיה p_1 ובוב (שחקן 2) בוחר באסטרטגיה q_2 , אז אליס מקבלת את התשלום

$$u_1(p_1, p_2) = p_1 q_1 - cq_1 = (p_1 - c)(a - p_1 + bp_2)$$

ובוב מקבל את התשלום

$$u_2(p_1, p_2) = p_2 q_2 - cq_2 = (p_2 - c)(a - p_2 + bp_1)$$

הווקטור אסטרטגיות (p_1^*, p_2^*) שוויי משקל אם התנאים הבאים מתקיימים:

$$u_1(p_1^*, p_2^*) = \max_{0 \leq p_1 < \infty} u_1(p_1, q_2^*) = \max_{0 \leq p_1 < \infty} [(p_1 - c)(a - p_1 + bp_2^*)]$$

-1

$$u_2(p_1^*, p_2^*) = \max_{0 \leq p_2 < \infty} u_2(p_1^*, p_2) = \max_{0 \leq p_2 < \infty} [(p_2 - c)(a - p_2 + bp_1^*)]$$

המקסימום של $u_1(p_1, p_2^*)$ מתקבל בנקודת הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_1(p_1, p_2^*)}{\partial p_1} = a - 2p_1 + bp_2^* + c \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow p_1^* = \frac{a + c + bp_2^*}{2},$$

והמקסימום של $u_2(p_1^*, p_2)$ ביחס p_2 מתקיים בנקודת הנגזרת מותאמת:

$$\frac{\partial u_2(p_1^*, p_2)}{\partial p_2} = a - 2p_2 + bp_1^* + c \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad p_2^* = \frac{a + c + bp_1^*}{2} .$$

לפייכן, אם הוקטוור אסטרטגיות (p_1^*, p_2^*) נקודת שווי משקל של המשחק או המהירים p_1^*, p_2^* חייביםקיימים את התנאים

$$p_1^* = \frac{a + c + bp_2^*}{2} , \quad p_2^* = \frac{a + c + bp_1^*}{2} .$$

הפתרון למערכת זו הינו

$$p_1^* = p_2^* = \frac{a + c}{2 - b} .$$

