

שאלות שונות

שאלה 1 תהי $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(א) מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

(ב) הוכיחו כי A לא הפיכה.

(ג) נתון הפולינום $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 3x + 3$. הוכיחו כי $f(A)$ הפיכה.

שאלה 2

(א) תהי $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ מצאו J צורת ז'ורדן ו- P הפיכה כך ש- $A = PJP^{-1}$.

(ב) חשבו את $A^7 \cdot \begin{pmatrix} 51 \\ 12 \\ 36 \\ 18 \end{pmatrix}$

שאלה 3 תהי $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 2 & -i & 4 \\ 0 & 0 & 7i \end{pmatrix}$

(א) מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

(ב) יהי $f(x)$ הפולינום $f(x) = x^3 - 7ix^2 - x + 7i + 4$. הוכיחו כי המטריצה $f(A)$ הפיכה.

שאלה 4

(א) תהי $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(ב) הוכיחו כי A לכסינה.

- (ג) הוכיחו כי כל הערכים עצמיים של A יהיו ממשיים.
- (ד) הוכיחו כי הערכים עצמיים לא יהיו כולם שווים ל-1 בערך מוחלט.
- (ה) יהיו $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ הווקטורים העצמיים של A . הוכיחו כי

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0$$

לכל $1 \leq i, j \leq 6, i \neq j$.

שאלה 5 תהי $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

- (א) הוכיחו כי כל הערכים העצמיים יהיו ממשיים.
- (ב) הוכיחו כי הערך מוחלט של כל ערך עצמי של A יהיה 1.
- (ג) הוכיחו כי קיימת Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $A = QD\bar{Q}$.

שאלה 6 תהי $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(א) האם A הפיכה? אם כן מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

(ב) הוכיחו כי A לא הפיכה.

(ג) הוכיחו כי

$$A = \frac{1}{3}A^2 + \frac{1}{4}A^3 - \frac{1}{12}A^4.$$

שאלה 7 תהי $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(א) האם A לכסינה? אם כן, מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

(ב) האם A הפיכה? נמקו את תשובתכם.

(ג) יהי $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x + 1$. הוכיחו כי המטריצה $f(A)$ הפיכה.

שאלה 8 תהי $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(א) האם A לכסינה? אם כן מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

(ב) הוכיחו כי

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(-I + 3A + A^2 - A^3).$$

(ג) הוכיחו כי

$$A^{-2} = \frac{7}{4}I - \frac{1}{4}A - \frac{3}{4}A^2 + \frac{1}{4}A^3.$$

שאלה 9 תהי $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(א) האם A לכסינה? אם כן מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

(ב) הוכיחו כי

$$A^{-1} = -2I - 2A^2 + A^3.$$

(ג) הוכיחו כי

$$A^{-2} = 4I - 2A + 5A^2 - 2A^3.$$

שאלה 10 תהי $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(א) האם A לכסינה? אם כן, מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

(ב) חשבו את $A^{99} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(ג) הוכיחו כי

$$A^4 = 15A^3 - 14A^2.$$

שאלה 11 תהי $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ המטריצה $\cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & -i \\ 0 & 0 & -i & i \\ -i & i & 0 & 3 \\ i & -i & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(א) האם A לכסינה אוניטרית? אם כן מצאו Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $A = QDQ^{-1}$.

(ב) יהי $u \in \mathbb{C}^4$ הווקטור $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. חשבו את $A^{10} \cdot u$.

שאלה 12 תהי $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. האם A לכסינה? אם כן מצאו P הפיכה

ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

(א) הוכיחו כי $A^{-1} = \frac{3-3i}{2}I + \frac{9i}{4}A - \frac{3+3i}{4}A^2 + \frac{1}{4}A^3$

(ב) הוכיחו כי $A^{-2} = \frac{-9i}{4}I + \frac{21i+21}{8}A - 2A^2 + \frac{3-3i}{8}A^3$

שאלה 13 תהי $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} -i & i & i & i \\ i & -i & i & i \\ i & i & -i & i \\ i & -i & i & i \end{pmatrix}$

(א) האם A לכסינה? אם כן מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

(ב) הוכיחו כי $A = -\frac{i}{2}A^2 - \frac{1}{4}A^3 - \frac{i}{8}A^4$

שאלה 14 תהי $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1+i \\ 0 & -1-i & 0 \end{pmatrix}$

(א) מצאו את הערכים עצמיים של A .

(ב) מצאו בסיס אורתונורמלי המורכב מווקטורים עצמיים של A .

(ג) חשבו את e^A .

שאלה 15 יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה \mathbb{F} . יהיו $a, b \in V$ ווקטורים של V . הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

$$\langle a, b \rangle = 0 \text{ אם ורק אם } \|a\| \leq \|a + kb\| \text{ לכל סקלר } k \in \mathbb{F}.$$

שאלה 16 יהי $n \in \mathbb{Z}_+$ מספר טבעי. תהי $\{a_1, \dots, a_n\} \in \mathbb{R}$ קבוצה של n מספרים ממשיים, ותהי $\{b_1, \dots, b_n\} \in \mathbb{R}$ קבוצה של n מספרים ממשיים. הוכיחו כי

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n k a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{b_k^2}{k} \right)$$

שאלה 17 יהי F מרחב מכפלה פנימית על השדה \mathbb{R} של פונקציות המוגדרות על הקטע $[-\pi, \pi]$, עם מכפלה פנימית שמוגדרת

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)g(x)$$

לכל $f, g \in F$. יהי $n \in \mathbb{Z}_+$ מספר טבעי. הוכיחו כי הקבוצת ווקטורים

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

אורתונורמלית.

שאלה 18 הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענה הבאה:

קיימת מכפלה פנימית $\langle \cdot, \cdot \rangle$ של ווקטורים ב- \mathbb{R}^2 כך לכל ווקטור $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ הנורמה ניתנת ע"י הנוסחה

$$\|u\|^2 = |x_1| + |x_2|,$$

כאשר $|x|$ מסמן את הערך מוחלט של x .

שאלה 19 תהי $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ מטריצות שמתחלפות, כלומר $AB = BA$. נניח כי הערכים עצמיים של A שונים זה מזה. הוכיחו כי קיים ווקטור $u \in \mathbb{R}^2$ אשר הוא ווקטור עצמי של A וגם ווקטור עצמי של B .

שאלה 20 תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית. יהיו $a \in \mathbb{F}^n$ ווקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ_1 ו- b ווקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ_2 . נניח גם ש- $\lambda_1 \neq \lambda_2$. הוכיחו כי הווקטורים a ו- b בלתי תלויים לינאריים.

שאלה 21 תהי $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 2i & 0 & 1 \\ -2i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2i \\ 1 & 0 & 2i & 0 \end{pmatrix}$.

(א) ללא חישוב ישר, הוכיחו כי A לכסינה אוניטרית.

(ב) ללא חישוב ישר, הוכיחו כי הערכים העצמיים של A ממשיים.

(ג) מצאו אוניטרית Q ו- D אלכסונית כך ש-

$$A = QDQ^{-1}.$$

שאלה 22 תהי $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. מצאו צורת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P

כך ש- $A = PJP^{-1}$.

שאלה 23

תהי $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. מצאו צורת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש-

$$A = PJP^{-1}$$

שאלה 24 תהי $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ מטריצה נורמלית. נניח כי הערכים העצמיים של A הם

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = -1 + i, \quad \lambda_3 = 2, \quad \lambda_4 = 3,$$

ונניח כי המרחבים העצמיים הם

$$V_{1+i} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_{-1+i} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

שימו לב כי המרחב העצמי ששייך לערך עצמי $\lambda_4 = 3$ לא נתון בכוונה. יהי $a \in \mathbb{C}^4$ הווקטור $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(א) מצאו את $A \cdot a$.

(ב) מצאו את $A^4 \cdot a$.

(ג) מצאו את המטריצה A .

שאלה 25 תהי $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ מטריצה נורמלית. נניח כי הערכים עצמיים של A הם

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 5 + 5i, \quad \lambda_3 = -5 + 5i,$$

והמרחבים עצמיים הם

$$V_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_{5+5i} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

שימו לב כי המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda_3 = -5 + 5i$ לא נתון בכוונה. יהי $a \in \mathbb{C}^4$ הווקטור

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

(א) מצאו את $A \cdot a$.

(ב) מצאו את $A^4 \cdot a$.

(ג) מצאו את המטריצה A .

שאלה 26 תהי $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{3} & i \end{pmatrix}$$

(א) ללא חישוב ישר, הוכיחו כי A לכסינה אוניטרית.

(ב) ללא חישוב ישר, הוכיחו כי לא כולם הערכים העצמיים של A ממשיים.

(ג) מצאו Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $A = QDQ^{-1}$.

שאלה 27 תהי $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -i & 0 & 0 \\ i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & i \\ 0 & 0 & -i & 4 \end{pmatrix}$$

(א) ללא חישוב ישר, הוכיחו כי A לכסינה אוניטרית.

(ב) הוכיחו כי כל הערכים עצמיים של A ממשיים.

(ג) מצאו Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $A = QDQ^{-1}$.

שאלה 28 נתונים $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, כך ש- $x, y, z, w > 0$ ו- $x + y + z + w \leq 4$. הוכיחו כי

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} \geq 4.$$

שאלה 29 תהי $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ מטריצה ריבועית מצורה כללית $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

(א) הוכיחו כי הפולינום האופייני היא $p_A(x) = x^2 - (a + d)x + ad - bc$

(ב) הוכיחו כי $p_A(x) = x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A)$

(ג) יהיו $B, C \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ אשר מקיימים את היחס $B = BC - CB$. הוכיחו את הטענות הבאות:

(1) $\text{tr}(B) = 0$

(2) $B^2 = -\det(B)I$

(3) $\det(B) = 0$

(4) $B^2 = 0$ (מטריצה האפס).

שאלה 30 תהי $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(א) הוכיחו כי $A^{-1} = \frac{1}{24}A^4 - \frac{11}{24}A^3 + \frac{15}{8}A^2 - \frac{85}{24}A + \frac{74}{24}I$

(ב) הוכיחו כי $A^{-2} = \frac{859}{144}I - \frac{2605}{288}A + \frac{511}{96}A^2 - \frac{395}{288}A^3 + \frac{37}{288}A^4$

שאלה 31 תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצות ריבועיות. נניח כי ל- A ול- B יש אותם ערכים עצמיים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

(לא בהכרח שכולם שונים). נניח גם כי ל- A ו- B יש אותם ווקטורים עצמיים u_1, \dots, u_n , כאשר u_i הווקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ_i . הוכיחו שאם הערכים עצמיים u_1, \dots, u_n בלתי תלויים לינאריים אז $A = B$.

שאלה 32 קבעו אם המטריצות הבאות דומות:

(א) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(ב) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ג}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ד}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -33i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3i \\ 33i & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -17i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3i & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -9i \\ 3i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9i & 93 \end{pmatrix} \quad \text{שאלה 33} \quad \text{תהי } A \in \mathbb{C}^{8 \times 8} \text{ המטריצה}$$

א) הוכיחו כי A לכסינה אוניטרית.

ב) הוכיחו כי כל הערכים עצמיים של A יהיו ממשיים.

ג) הוכיחו כי קיים ערך עצמי λ של A כך ש- $|\lambda| \neq 1$.

ד) הוכיחו כי כל הערכים עצמיים של A^{100} יהיו ממשיים.

שאלה 34 תהי $T : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ האופרטור

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = a + 7b + (7a + b)x + (2c + 9d)x^2 + (9c + 2d)x^3.$$

א) מצאו בסיס של ווקטורים של $\mathbb{R}_3[x]$ המורכב מווקטורים עצמיים של T .

ב) חשבו את $T^5(3 + 2x + 5x^2 + 7x^3)$.

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a - 6ib & 6ia + 5b \\ c & 2d \end{pmatrix} \quad \text{שאלה 35} \quad \text{תהי } T : \mathbb{C}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2} \text{ האופרטור}$$

א) מצאו בסיס של ווקטורים של $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ המורכב מווקטורים עצמיים של T .

ב) חשבו את $T \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

ג) הוכיחו כי $T^4 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14642 - 7320i & 7321 - 14640i \\ 3 & 112 \end{pmatrix}$.

שאלה 36 תהי $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ האופרטור

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a - 3ib \\ 3ia + 5b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

(א) מצאו בסיס של ווקטורים של $\mathbb{C}^{4 \times 4}$ המורכב מווקטורים עצמיים של T .

(ב) חשבו את $T \begin{pmatrix} 2i \\ -i \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

(ג) הוכיחו כי $T^5 \begin{pmatrix} 2i \\ -i \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16368 + 32800i \\ -32736 - 16400i \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

שאלה 37 הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\sum_{k=1}^n \sqrt{k \cdot 2^k} \leq \sqrt{(n^2 + n) \cdot (2^n - 1)}$

שאלה 38 איזו נוסחה מגדירה מכפלה פנימית במרחב של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[-1, 1]$?

(א) $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g^2(x) dx$

(ב) $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 4f(x)g(x) dx$

(ג) $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) \sin x dx$

(ד) $\langle f, g \rangle = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 f(x)g(x)x^8 dx$

שאלה 39 תהי $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ מטריצה עם ערכים עצמיים $\lambda = -1$ ו- $\lambda = 3$. הוכיחו כי $A^{n+1} = a_n A + b_n I$ כאשר

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n, \quad a_2 = 7, \quad a_1 = 2.$$

שאלה 40 תהי $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ מטריצה אורתוגונלית ו- $|A| = 1$. נניח כי $\lambda = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ ערך עצמי של A .

(א) מצאו את כל הערכים העצמיים של A .

(ב) נתון כי $A^{100} = aA^2 + bA + cI$. מצאו את הערכים של a, b, c .

שאלה 41 תהי $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ עם ערכים עצמיים 4 ו-2. הוכיחו כי לכל n טבעי, $A^n = b_n A + c_n I$, כאשר $c_{n+1} = 8b_n$ ו- $b_{n+1} = 2b_n + c_n$.

שאלה 42 תהי $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית כך שהפולינום המינימלי הוא

$$m_A(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3).$$

נתון הפולינום

$$f(x) = x^6 + 6x^4 + 11x^2 + 7x - 2.$$

(א) האם המטריצה $f(A)$ הפיכה?

(ב) הוכיחו כי A לא אוניטרית.

(ג) הוכיחו כי A לא צמודה לעצמה.

(ד) עכשיו נניח כי $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$.

(1) מצאו את כל הערכים העצמיים של A .

(2) הוכיחו כי A לכסינה.

שאלה 43 יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל המרחב $\mathbb{R}[x]$ (פולינום ממשיים) עם המכפלה פנימית $\langle f, g \rangle =$

$$\int_0^1 dx f(x)g(x).$$

(א) מצאו בסיס אורתוגונלי לתת-מרחב $U \subset V$ שמוגדר

$$U = \text{span} \{1 - x, 1 - x^2, 1 + x, 4 + 4x^3\}.$$

(ב) מצאו את ההיטל של הפולינומים הבאים על U :

$$p(x) = 33 - 55x + 123x^2 - 67x^3, \quad q(x) = x + x^4.$$

שאלה 44 תהי $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$.

(א) הוכיחו כי אם סכום של האיברים בכל שורה שווה ל-5 או $\lambda = 5$ ערך עצמי של A .

(ב) נניח כי $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. הוכיחו כי $\lambda = 0$ ערך עצמי של B .

(ג) הוכיחו כי

$$B^4 \cdot (B - 5I) = 0.$$

(ד) הוכיחו כי לא קיים ערך עצמי של B חוץ מ- $\lambda = 0$ ו- $\lambda = 5$.

שאלה 45 תהי $A \in \mathbb{F}^{3 \times 3}$. בכל המקרים הבאים, קבעו אם A הפיכה. אם לא, הסבירו מדוע. אם כן, מצאו ביטוי של A^{-1} כצירוף לינארי של חזקות של המטריצה A .

(א) הערכים עצמיים של A הם $\lambda = i$, $\lambda = -i$ ו- $\lambda = 0$.

(ב) $\lambda = i$, $\lambda = -i$ ו- $\lambda = -1$.

שאלה 46 תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. נניח כי $u \in \mathbb{F}^n$ ווקטור עצמי של A וגם ווקטור עצמי של B . הוכיחו כי $\det(AB - BA) = 0$.

שאלה 47

(א) תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. נניח כי $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ערכים עצמיים של A וכולם שונים זה מזה. יהי u_1 ווקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ_1 , u_2 ווקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ_2 , ו- u_3 ווקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ_3 . הוכיחו כי u_1, u_2, u_3 בת"ל.

(ב) עכשיו נניח כי A אוניטרית. הוכיחו כי u_1, u_2, u_3 אורתוגונלית.

(ג) אם A אוניטרית, האם ייתכן ש- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ יהיו כולם ממשיים? נמקו את תשובתכם.

שאלה 48 תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ שמקיימות

$$AB - BA = 2B.$$

נניח כי λ ערך עצמי של A עם רכיב הממשי הגדול ביותר. יהי u הווקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ . הוכיחו כי $Bu = 0$.

שאלה 49 נגדיר V להיות מרחב ווקטורי של כל הסדרות הממשייות:

$$V = \{(a_i)_{i=1}^{\infty} = (a_1, a_2, \dots)\}$$

נגדיר U להיות התת-מרחב

$$U = \{(a_i)_{i=1}^{\infty} \in V \mid a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n, \quad n = 1, 2, \dots\}.$$

תהי $T : U \rightarrow U$ העתקה לינארית שמוגדרת

$$T(a_1, a_2, \dots) = (a_2, a_3, \dots).$$

(א) מצאו את הערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של T .

(ב) בעזרת הפתרון של סעיף הקודם, מצאו את הסדרה $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ שמקיימת $a_1 = 2, a_2 = 7$.

שאלה 50

(א) תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הגדירו מהו ווקטור עצמי של A .

(ב) נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

(1) מצאו את הערכים עצמיים ומרחבים עצמיים של A .

(2) האם A לכסינה? נמקו את תשובתכם.

(3) אם A לכסינה, מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש- $D = P^{-1}AP$.

(4) חשבו את $A^{2019} \cdot \begin{pmatrix} 2020 \\ 2020 \\ 2020 \end{pmatrix}$.

(ג) תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

(1) λ הינו ערך עצמי של A אם ורק אם λ הינו ערך עצמי של A^t .

(2) u הינו ווקטור עצמי של A אם ורק אם u הינו ווקטור עצמי של A^t .

שאלה 51 תהי $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ מטריצה ניתנת ע"י $A = \begin{pmatrix} 3 & i & 1 \\ -i & 3 & -i \\ 1 & i & 3 \end{pmatrix}$. האם A לכסינה אוניטרית? אם כן,

מצאו Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $A = Q \cdot D \cdot \bar{Q}$.

שאלה 52 תהי $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ מטריצה ריבועית נורמלית עם ערכים עצמיים $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. נניח כי המרחב

עצמי של $\lambda = 1$ הוא

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

חשבו את:

(א) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(ב) $A^{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(ג) מצאו את המטריצה A .

שאלה 53 תהי $A \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$ מטריצה ריבועית כך שהפולינום האופייני שלה הוא

$$p_A(x) = (x-5)^6(x-4)^4(x-1)^2$$

והפולינום המינימלי הוא

$$m_A(x) = (x-5)^4(x-4)^2(x-1).$$

שאלה 54

תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. הוכיחו את הטענות הבאות:

- (א) אם A הפיכה אז $A^{-1} \in \text{span}\{I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$.
- (ב) הקבוצה $\{I_n, A, A^2, \dots, A^m\}$ ת"ל אם ורק אם קיים פולינום שונה מאפס $P(x) \in \mathbb{F}[x]$ מסדר m לכל היותר כך ש $P(A) = 0$.
- (ג) $A^m \in \text{span}\{I_n, A, A^2, \dots, A^{m-1}\}$ אם ורק אם קיים פולינום $p(x) \in \mathbb{R}_m[x]$ כך ש $p(A) = 0$.

שאלה 55

תהינה $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצות דומות ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ סקלר. נניח ש $P(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום. הוכיחו ש

$$P(A) = \lambda I_n$$

אם ורק אם

$$P(B) = \lambda I_n$$

כך

שאלה 56 תהי $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1+3i \\ 0 & -1-3i & 0 \end{pmatrix}$

(א) מצאו את הערכים עצמיים של A .

(ב) מצאו בסיס אורתונורמלי המורכב מווקטורים עצמיים של A .

(ג) חשבו את e^A .

שאלה 57 תהי $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ מטריצה עם ערכים עצמיים $\lambda = 1$ ו- $\lambda = -2$. הוכיחו כי $A^{n+1} = a_n A + b_n I$ כאשר

$$a_{n+2} = -a_{n+1} + b_{n+1} = -a_{n+1} + 2a_n, \quad a_2 = 3, \quad a_1 = -1.$$

שאלה 58 הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\sum_{k=1}^n \sqrt{k \cdot 3^k} \leq \frac{1}{2} \sqrt{(n^2 + n) \cdot 3(3^n - 1)}$

שאלה 59 תהי $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ עם ערכים עצמיים 5 ו-3. הוכיחו כי לכל n טבעי, $A^n = b_n A + c_n I$ כאשר

$$c_{n+1} = 15b_n, \quad b_{n+1} = 2b_n + c_n.$$

שאלה 60 נתונים $x, y, z, w, s, t \in \mathbb{R}$ כך ש- $x, y, z, w, s, t > 0$ ו- $x + y + z + w + s + t \leq 6$. הוכיחו כי

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} \geq 6.$$

פתרונות

שאלה 1

(א) פולינום האופייני:

$$\begin{aligned}
 p_A(x) = |xI - A| &= \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & x+2 & -10 & -2 \\ -1 & 0 & x+2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & x-1 \end{vmatrix} \\
 &= (x-2) \begin{vmatrix} x+2 & -10 & -2 \\ 0 & x+2 & 1 \\ 0 & -2 & x-1 \end{vmatrix} \\
 &= (x-2)(x+2) \begin{vmatrix} x+2 & 1 \\ -2 & x-1 \end{vmatrix} \\
 &= (x-2)(x+2)((x+2)(x-1) + 2) \\
 &= (x-2)(x+2)(x^2 + x) \\
 &= (x-2)(x+2)x(x+1).
 \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = -2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = -1$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 0$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 1.

כל הערכים עצמיים שונים לכן המטריצה לכסינה.

מרחב עצמי שייך לערך עצמי -2:

$$\begin{aligned}
 (A + 2I) &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{4R_2-5R_1 \\ 4R_3-R_1 \\ 4R_4+3R_1}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & 12 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow \frac{1}{8} \cdot R_2 \\ R_3 \leftrightarrow R_4}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow 5R_3 - 8R_2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 52 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_3 \rightarrow 5R_3 - 8R_2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

פתרון: $(x, y, z, w) = (0, y, 0, 0) = y(0, 1, 0, 0)$, $y \in \mathbb{R}$. לפיכך:

$$V_{-2} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

כל הערכים עצמיים שונים לכן המטריצה לכסינה.

מרחב עצמי שייד לערך עצמי -1 :

$$\begin{aligned} (A + I) &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3R_2 - 5R_1 \\ 3R_3 - R_1 \\ R_4 + R_1}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 30 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow \frac{-1}{3} \cdot R_2 \\ R_4 \rightarrow 3R_4 + 2R_3}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow -\frac{1}{3} \cdot R_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

פתרון: $(x, y, z, w) = (0, -8w, -w, w) = (0, -8, -1, 1)w$, $w \in \mathbb{R}$. לפיכך:

$$V_{-1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

כל הערכים עצמיים שונים לכן המטריצה לכסינה.

מרחב עצמי שייד לערך עצמי 0 :

$$\begin{aligned}
 (A + 0 \cdot I) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2R_2 - 5R_1 \\ 2R_3 - R_1 \\ 2R_4 + 3R_1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 20 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow \frac{-1}{4} \cdot R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_3}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \frac{1}{2} R_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

פתרון: $(x, y, z, w) = (0, \frac{3}{2}w, -\frac{1}{2}w, w) = (0, 3, 1, 2)w, \quad w \in \mathbb{R}$ לפיכך:

$$V_0 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

מרחב עצמי שייך לערך עצמי 0:

$$\begin{aligned}
 (A - 2 \cdot I) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow R_3 \\ R_3 \rightarrow R_4 \\ R_4 \rightarrow R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 5 & -4 & 10 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 5R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -4 & 30 & 7 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow 4R_2 + 7R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -16 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_1 \rightarrow 4R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -16 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 5R_3} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

פתרון: $(x, y, z, w) = (\frac{3}{2}z, \frac{5}{4}w, -\frac{2}{5}w, w) = (-\frac{3}{5}w, \frac{5}{4}w, -\frac{2}{5}w, w) = (12, 25, 8, -20)w, \quad w \in \mathbb{R}$ לפיכך:

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 12 \\ 25 \\ 8 \\ -20 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -12 & 0 & 0 \\ 1 & -25 & -8 & -3 \\ 0 & -8 & -1 & -1 \\ 0 & 20 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ב) למטריצה A יש ערך עצמי שווה ל-0 לכן A לא הפיכה.

(ג) נשים לב כי $p_A(x) = (x-2)x(x+1)(x+2) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$

$$f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 3x + 3 = p_A(x) + x + 3.$$

לכן

$$f(A) = p_A(A) + A + 3I.$$

לפי משפט קיילי-המילטון $p_A(A) = 0$ לכן

$$f(A) = 3I + A.$$

נקח את הדטרמיננטה:

$$|f(A)| = |3I + A| = (-1)^4 | -3I - A| = | -3I - A| = p_A(-3).$$

-3 לא ערך עצמי של A לכן $p_A(-3) \neq 0$ לכן $|f(A)| \neq 0$ לכן $f(A)$ הפיכה.

שאלה 2

(א) פולינום האופייני:

$$\begin{aligned} p_A(x) = |xI - A| &= \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1) \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x-2 & -2 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)x \begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)x((x-2)(x-1) - 2) \\ &= (x-1)x(x^2 - 3x) \\ &= x^2(x-1)(x-3). \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 0$ מריבוי אלגברי 2.

$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 1.

פולינום האופייני:

$$p_A(x) = x^2(x-1)(x-3)$$

האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$x(x-1)(x-3), \quad x^2(x-1)(x-3).$$

נבדוק $x(x-1)(x-3)$

$$A(A-I)(A-3I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

לכן

$$m_A(x) = x^2(x-1)(x-3).$$

לפיכך הצורת ז'ורדן היא

$$J = \begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_1(1) & \\ & & J_1(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} (A - 0 \cdot I) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_4 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

פתרון: $(x, y, z, w) = (-y, y, 0, 0) = y(-1, 1, 0, 0), \quad y \in \mathbb{R}$. לפיכך:

$$V_0 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

נסמן את הווקטור עצמי ב- $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. נחשב את הווקטור עצמי המוכלל. נסמן $u_2 = (x, y, z, w)$ ונפתור $(A - 0 \cdot I)u_2 = u_1$

$$\begin{aligned} (A - 0 \cdot I) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{2R_4 - R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

פתרון: $y \in \mathbb{R}$, $(x, y, z, w) = (-y + 2, y, -1, 1)$. נציב $y = 0$ ונקבל

$$u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

כל הערכים עצמיים שונים לכן המטריצה לכסינה.

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned} (A - I) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 + R_1 \\ R_3 - R_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow 3 \cdot R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

פתרון: $(x, y, z, w) = (x, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0)x$, $x \in \mathbb{R}$. לפיכך:

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{נסמן את הווקטור עצמי}$$

כל הערכים עצמיים שונים לכן המטריצה לכסינה.

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 3$:

$$(A - 3 \cdot I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + R_3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x, y, z, w) = (\frac{1}{2}y + z + \frac{1}{2}w, \frac{1}{3}z, 2w, w) = (17, 4, 12, 6)w$ $w \in \mathbb{R}$. לפיכך:

$$V_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$u_4 = \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{נסמן את הווקטור עצמי}$$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_1(1) & \\ & & J_1(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 17 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 51 \\ 12 \\ 36 \\ 18 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} = 3u_4 \quad \text{ב)}$$

$$A^7 \begin{pmatrix} 51 \\ 12 \\ 36 \\ 18 \end{pmatrix} = A^7 \cdot 3u_4 = 3A^7 u_4 = 3 \cdot 3^7 u_4 = 3^8 u_4 = 6561 \cdot u_4 = \begin{pmatrix} 111537 \\ 26244 \\ 78732 \\ 39366 \end{pmatrix}$$

שאלה 3

(א) נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned} p_A(x) = |xI - A| &= \begin{vmatrix} x-i & -1 & 0 \\ -2 & x+i & -4 \\ 0 & 0 & x-7i \end{vmatrix} \\ &= (x-7i) \begin{vmatrix} x-i & -1 \\ -2 & x+i \end{vmatrix} \\ &= (x-7i) ((x-i)(x+i) - 2) \\ &= (x-7i)(x^2 + 1 - 2) \\ &= (x-7i)(x^2 - 1) \\ &= (x-7i)(x+1)(x-1) . \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

1. $\lambda = 7i$ מריבוי אלגברי 1.

1. $\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.

1. $\lambda = -1$ מריבוי אלגברי 1.

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 7i$.

$$\begin{aligned} (A - 7iI) &= \begin{pmatrix} -6i & 1 & 0 \\ 2 & -8i & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow 6iR_2 + 2R_1} \begin{pmatrix} -6i & 1 & 0 \\ 0 & 50 & 24i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_1 \rightarrow -\frac{1}{6i}R_1 \\ R_2 \rightarrow \frac{1}{50}R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{6} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{12i}{25} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - \frac{i}{6}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{25} \\ 0 & 1 & \frac{12i}{25} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

פתרון: $(x, y, z) = (\frac{-2}{25}z, \frac{-12i}{25}z, z) = (\frac{-2}{25}, \frac{-12i}{25}, 1)z, z \in \mathbb{C}$

$$V_{7i} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 12i \\ -25 \end{pmatrix} \right\} .$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1$.

$$\begin{aligned}
 (A - I) &= \begin{pmatrix} -1+i & 1 & 0 \\ 2 & -1-i & 4 \\ 0 & 0 & -1+7i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{-1+i} \cdot R_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} & 0 \\ 2 & -1-i & 4 \\ 0 & 0 & -1+7i \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1+7i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow 4R_3 - (-1+7i)R_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

פתרון: $(x, y, z) = (\frac{1+i}{2}y, y, 0) = (\frac{1+i}{2}, 1, 0)y, y \in \mathbb{C}$

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = -1$.

$$\begin{aligned}
 (A + I) &= \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 0 \\ 2 & 1-i & 4 \\ 0 & 0 & 1+7i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{1+i} \cdot R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & 0 \\ 2 & 1-i & 4 \\ 0 & 0 & 1+7i \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1+7i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow 4R_3 - (1+7i)R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

פתרון: $(x, y, z) = (\frac{-1+i}{2}y, y, 0) = (\frac{-1+i}{2}, 1, 0)y, y \in \mathbb{C}$

$$V_{-1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1+i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_{7i} & u_{-1} & u_1 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1+i & 1+i \\ -12i & 2 & 2 \\ 25 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(ב) הפולינום האופייני הוא $p_A(x) = (x+1)(x-1)(x-7i) = x^3 - 7ix^2 - x + 7i$ לכן

$$f(x) = x^3 - 7ix^2 - x + 7i + 4 = p_A(x) + 4$$

לפי משפט קיי-המילטון $p_A(A) = 0$ אז

$$f(A) = p_A(A) + 4I = 4I .$$

מכאן

$$|f(A)| = |4I| = 4^3 = 64 \neq 0$$

כלומר $|f(A)| \neq 0$ אז $f(A)$ הפיכה.

שאלה 4

(א) נשים לב כי A סימטרית:

$$A^t = A .$$

בנוסף $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, בפרט A ממשית, לכן

$$\bar{A} = A ,$$

כלומר A צמודה לעצמה.

לפי משפט לכסון אוניטרית, מטריצה שצמודה לעצמה לכסינה אוניטרית, לפיכך A לכסינה.

(ב) הערכים עצמיים של מטריצה הצמודה לעצמה ממשיים, לכן הערך עצמי של A יהיו כולם ממשיים.

(ג) A נורמלית. ז"א כל ערך עצמי של A יהיה 1 בערך מוחלט אם ורק אם A אוניטרית ($\bar{A} \cdot A = I$).
 A לא אוניטרית לכן לא ייתכן שהערך מוחלט של כל ערך עצמי יהיה 1.

(ד) A נורמלית לכן A לכסינה אוניטרית לכן הווקטורים עצמיים מהווים בסיס אורתונורמלי.

שאלה 5

(א) $\bar{A} = A$, כלומר A צמודה לעצמה לכן כל הערכים עצמיים של A יהיו ממשיים.

(ב) $A \cdot \bar{A} = I$ כלומר A אוניטרית, לכן הערך מוחלט של כל ערך עצמי של A יהיה 1.

(ג) A צמודה לעצמה לכן A נורמלית לכן A לכסינה אוניטרית.

שאלה 6

(א) נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned}
 p_A(x) &= |xI - A| \\
 &= \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & -1 \\ -10 & x+2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & x-3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \\
 &= (x-1) \begin{vmatrix} x+2 & 0 & 0 \\ 5 & x-3 & -1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -10 & x+2 & 0 \\ -1 & 5 & x-3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= (x-1)(x+2) \begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x+2 & 0 \\ 5 & x-3 \end{vmatrix} \\
 &= (x-1)(x+2)(x-3)(x-1) - (x+2)(x-3) \\
 &= (x+2)(x-3) [(x-1)^2 - 1] \\
 &= (x+2)(x-3)x(x-2)
 \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = -2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 0$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 1.

כל הערכים עצמיים שונים לכן A לכסינה.

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = -2$

$$\begin{aligned}
 (A + 2I) &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3R_2-10R_1 \\ 3R_3-R_1 \\ 3R_4-R_1}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -15 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{10R_4+8R_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_3 \rightarrow -\frac{1}{10} \cdot R_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2 \cdot R_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_3 \rightarrow -\frac{1}{15} \cdot R_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

פתרון: $(x, y, z, w) = (-\frac{1}{3}w, z, z, 0) = (0, z, z, 0) = (0, 1, 1, 0)z, z \in \mathbb{R}$

$$V_{-2} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} (A - 0 \cdot I) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - 10R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow 2R_3 - 5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 6 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow -\frac{1}{2} \cdot R_2 \\ R_3 \rightarrow \frac{1}{6} \cdot R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{25}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

פתרון: $(x, y, z, w) = (-w, -5w, -\frac{25}{3}w, w) = (-1, -5, -\frac{25}{3}, 1)w, w \in \mathbb{R}$

$$V_0 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 25 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 2$

$$\begin{aligned} (A - 2I) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 + 10R_1 \\ R_3 + R_1 \\ R_4 + R_1}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 10 \\ 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow 4R_3 - 5R_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow -\frac{1}{4} \cdot R_2 \\ R_3 \rightarrow -\frac{1}{4} \cdot R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

פתרון: $(x, y, z, w) = (w, \frac{5}{2}w, \frac{21}{2}w, w) = (1, \frac{5}{2}, \frac{21}{2}, 1)w, w \in \mathbb{R}$

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 21 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 2$

$$\begin{aligned}
 (A - 3I) &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2R_2+10R_1 \\ 2R_3+R_1 \\ 2R_4+R_1}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & 0 & 10 \\ 0 & -10 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow -\frac{1}{2} \cdot R_1 \\ R_2 \rightarrow -\frac{1}{10} \cdot R_2 \\ R_4 \rightarrow 7R_4 - 3R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

פתרון: $(x, y, z, w) = (\frac{1}{2}w, w, z, 0) = (0, 0, 1, 0)z, \quad z \in \mathbb{R}$

$$V_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & | & | \\ u_{-2} & u_0 & u_2 & u_3 \\ | & | & | & | \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & -15 & 5 & 0 \\ 1 & -25 & 21 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ב) למטריצה A יש ערך עצמי 0 לפיכך A לא הפיכה.

(ג) הפולינום האופייני של A הוא

$$p_A(x) = (x - 3)(x - 2)x(x + 2) = x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x.$$

לפי משפט קיילי המילטון $p_A(A) = 0$ לכן

$$A^4 - 3A^3 - 4A^2 + 12A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{12}(-A^4 + 3A^3 + 4A^2) = -\frac{1}{12}A^4 + \frac{1}{4}A^3 + \frac{1}{3}A^2.$$

שאלה 7

(א) נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned}
p_A(x) = |xI - A| &= \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & x+2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & x-3 & x-1 \\ -1 & 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \\
&= (x-1) \begin{vmatrix} x+2 & -1 & -1 \\ 5 & x-3 & x-1 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & x-3 & x-1 \\ -1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \\
&\quad + 2 \begin{vmatrix} -1 & x+2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & x+2 & -1 \\ -1 & 5 & x-3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)(x+2) \begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} + (x-1) \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} - (x-1) \begin{vmatrix} 5 & x-3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&\quad - 2 \begin{vmatrix} x-3 & x-1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & x-1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & x-3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&\quad - 2 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} - 2(x+2) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad - 1 \begin{vmatrix} 5 & x-3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (x+2) \begin{vmatrix} -1 & x-3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x+2)(x^2 - 4x + 2)(x-1) + (5x-4)(x-1) + (x+2)(x-1) \\
&\quad - 2x(x-2) \\
&\quad + 2(-(5x-4) + (x+2)x-4) \\
&\quad + x+2 - (x+2)(x-2) - 4 \\
&= (x-1)(x+2)(x^2 - 4x + 2) + 2(x-1)(3x-1) - 2x(x-2) \\
&\quad + 2(x^2 - 3x) \\
&\quad + x+2 - x^2 \\
&= (x-1)(x+2)(x^2 - 4x + 2) + 2(x-1)(3x-1) - 2x(x-2) \\
&\quad + x^2 - 5x + 2 \\
&= x^4 - 3x^3 + x^2 + x \\
&= x(x-1)(x^2 - 2x - 1) \\
&= x(x-1)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2}) .
\end{aligned}$$

ערכים עצמים:

$\lambda = 0$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 1 - \sqrt{2}$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 1 + \sqrt{2}$ מריבוי אלגברי 1.

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 0$

$$\begin{aligned}
 (A - 0 \cdot I) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1 \\ R_4-R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{4R_3-7R_2 \\ 4R_3-3R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R-2 \rightarrow R_2+3R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 V_0 &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1$

$$\begin{aligned}
(A - I) &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\substack{R_3 - R_1 \\ R_4 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 + R_2 \\ R_4 - R_2}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow 2R_1 + 3R_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

פתרון: $(x, y, z, w) = (-\frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z, w, w) = (-\frac{1}{2}w, \frac{1}{2}w, w, w) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1)w, \quad w \in \mathbb{R}$

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1 - \sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
(A - (1 - \sqrt{2})I) &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} - 3 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & \sqrt{2} + 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\substack{-\sqrt{2}R_2 + R_1 \\ -\sqrt{2}R_3 + R_1 \\ -\sqrt{2}R_4 + R_1}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} - 2 & 1 - \sqrt{2} \\ 0 & 5\sqrt{2} + 2 & -2(\sqrt{2} + 2) & 1 - \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} + 2 & -\sqrt{2} - 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow -3\sqrt{2}R_3 + (2+5\sqrt{2})R_2 \\ R_4 \rightarrow -3\sqrt{2}R_4 + (2+5\sqrt{2})R_2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} - 2 & 1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + \sqrt{2}R_3} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} - 2 & 1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} - 2 & 1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2 \rightarrow (-\sqrt{2} + 1)R_3} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3\sqrt{2} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 2R_3} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

פתרון:

$$(x, y, z, w) = (-\sqrt{2}y - \frac{3}{\sqrt{2}}w, \frac{1}{\sqrt{2}}z, -w, w) = (w - \frac{3}{\sqrt{2}}w, \frac{-1}{\sqrt{2}}w, -w, w) = (1 - \frac{3}{\sqrt{2}}w, \frac{-1}{\sqrt{2}}w, -w, w), w \in \mathbb{R}$$

$$V_{1-\sqrt{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}-3 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1 + \sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
 (A - (1 + \sqrt{2})I) &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} - 3 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 2 - \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{\sqrt{2}R_2 + R_1 \\ \sqrt{2}R_3 + R_1 \\ \sqrt{2}R_4 + R_1}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3\sqrt{2} & \sqrt{2} - 2 & \sqrt{2} + 1 \\ 0 & 2 - 5\sqrt{2} & 2(\sqrt{2} - 2) & \sqrt{2} + 1 \\ 0 & 2 - \sqrt{2} & \sqrt{2} - 2 & -1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow 3\sqrt{2}R_3 + (2 - 5\sqrt{2})R_2 \\ R_4 \rightarrow 3\sqrt{2}R_4 + (2 - 5\sqrt{2})R_2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3\sqrt{2} & \sqrt{2} - 2 & \sqrt{2} + 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - \sqrt{2}R_3} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3\sqrt{2} & \sqrt{2} - 2 & \sqrt{2} + 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3\sqrt{2} & \sqrt{2} - 2 & \sqrt{2} + 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_2 \rightarrow (\sqrt{2} + 1)R_3} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3\sqrt{2} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 2R_3} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

פתרון:

$$(x, y, z, w) = (\sqrt{2}y + \frac{3}{\sqrt{2}}w, -\frac{1}{\sqrt{2}}z, -w, w) = (w + \frac{3}{\sqrt{2}}w, \frac{1}{\sqrt{2}}w, -w, w) = (1 + \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -1, 1)w, \quad w \in$$

\mathbb{R}

$$V_{1+\sqrt{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}+3 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_{1+\sqrt{2}} & u_1 & u_{1-\sqrt{2}} & u_0 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{3}{\sqrt{2}} & -1 & 1-\frac{3}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

שאלה 8

(א) הפולינום האופייני הוא

$$\begin{aligned} p_A(x) = |xI - A| &= \begin{vmatrix} x & -1 & -2 & -\sqrt{5} \\ -1 & x & -1 & -1 \\ 0 & 0 & x-1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & -1 & -\sqrt{5} \\ -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x & -1 & -2 \\ -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} - x(x-1) \begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} \\ &= 2(x^2 - 1) - x(x-1)(x^2 - 1) \\ &= (-x^2 + x + 2)(x^2 - 1) \\ &= -(x-2)(x+1)(x^2 - 1) \\ &= -(x-2)(x+1)^2(x-1) \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

2. $\lambda = -1$ מריבוי אלגברי

1. $\lambda = 1$ מריבוי אלגברי

1. $\lambda = 2$ מריבוי אלגברי

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = -1$

$$\begin{aligned}
 (A + I) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & -1 & 1 - \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & -1 & 1 - \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow 2R_4 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & -1 & 1 - \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & -1 & 1 - \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 - \sqrt{5} \\ 0 & 0 & -1 & 1 - \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - (2 - \sqrt{5})R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 - \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 V_{-1} &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1$

$$\begin{aligned}
 (A - I) &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{5} + 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_4 \rightarrow 3R_4 + 2R_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{5} + 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} - 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{5} + 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_3 \rightarrow -\frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{5} + 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - \sqrt{5}R_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{5} + 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 V_1 &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 2$

$$\begin{aligned}
 (A - 2I) &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_2 \rightarrow 2R_2 + R_1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & -3 & 4 & \sqrt{5} + 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - R_3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & -3 & 4 & \sqrt{5} + 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_2 \rightarrow -2R_2 - (2 + \sqrt{5})R_3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 6 & \sqrt{5} - 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_1 \rightarrow 2R_1 + \sqrt{5}R_3} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 - \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 6 & \sqrt{5} - 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_1 \rightarrow (\sqrt{5} - 6)R_1 - (4 - \sqrt{5})R_2} \begin{pmatrix} 24 - 4\sqrt{5} & 8\sqrt{5} - 36 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & \sqrt{5} - 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{4}R_1} \begin{pmatrix} 6 - \sqrt{5} & 2\sqrt{5} - 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & \sqrt{5} - 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

פתרון:

$$\left(\frac{9-2\sqrt{5}}{6-\sqrt{5}}y, y, \frac{6-\sqrt{5}}{6}z, -2w, w \right) = \left(\frac{-9+2\sqrt{5}}{3}w, \frac{-6+\sqrt{5}}{3}w, -2w, w \right) = \left(\frac{-9+2\sqrt{5}}{3}, \frac{-6+\sqrt{5}}{3}, -2, 1 \right)w, \quad w \in \mathbb{R}$$

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -9 + 2\sqrt{5} \\ -6 + \sqrt{5} \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim V_{-1} + \dim V_1 + \dim V_2 = 3 < \dim \mathbb{R}^4$$

לכן A לא לכסינה.

(ב) הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = (x-2)(x-1)(x+1)^2 = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2.$$

לפי משפט קיילי-המילטון:

$$p_A(A) = 0 \Rightarrow A^4 - A^3 - 3A^2 + A + 2I = 0$$

נעביר אגפים ונקבל

$$I = \frac{1}{2}(-A + 3A^2 + A^3 - A^4) = \frac{1}{2}A(-I + 3A + A^2 - A^3) = A\left(-\frac{1}{2}I + \frac{3}{2}A + \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A^3\right)$$

מכאן

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}I + \frac{3}{2}A + \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A^3$$

ג) נכפיל את הביטוי בסעיף ב' ב- A^{-1} :

$$\begin{aligned} A^{-2} &= -\frac{1}{2}A^{-1} + \frac{3}{2}I + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^2 \\ &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}I + \frac{3}{2}A + \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A^3\right) + \frac{3}{2}I + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^2 \\ &= \frac{1}{4}I - \frac{3}{4}A - \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}A^3 + \frac{3}{2}I + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^2 \\ &= \frac{7}{4}I - \frac{1}{4}A - \frac{3}{4}A^2 + \frac{1}{4}A^3 \end{aligned}$$

שאלה 9

$$\begin{aligned} p_A(x) = |xI - A| &= \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & x & -1 & -1 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -2 \\ -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} \\ &= -x(x-2) + 1 - x^2(x^2 - 2x - 1) \\ &= -x^2 + 2x + 1 - x^2(x^2 - 2x - 1) \\ &= (x^2 - 2x - 1)(-x^2 - 1) \\ &= (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})(x + i)(x - i) \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$$1. \lambda = 1 + \sqrt{2} \text{ מריבוי אלגברי } 1.$$

$$1. \lambda = 1 - \sqrt{2} \text{ מריבוי אלגברי } 1.$$

$$1. \lambda = i \text{ מריבוי אלגברי } 1.$$

$$1. \lambda = -i \text{ מריבוי אלגברי } 1.$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1 - \sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
(A - (1 - \sqrt{2})I) &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & \sqrt{2}-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2 \rightarrow (1+\sqrt{2})R_2 - R_1} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\begin{matrix} R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \\ R_4 \rightarrow (-1+\sqrt{2})R_4 + R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4-\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_4 \rightarrow -\sqrt{2}R_4 - (4-\sqrt{2})R_3} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_1 \rightarrow (1-\sqrt{2})R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1-\sqrt{2} & 2(1-\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
V_{1-\sqrt{2}} &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1 + \sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
(A - (1 + \sqrt{2})I) &= \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} - 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} - 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2 \rightarrow (1 - \sqrt{2})R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} - 1 & 1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} - 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \\ R_4 \rightarrow (-1 - \sqrt{2})R_4 + R_2}} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} - 1 & 1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} + 4 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_4 \rightarrow \sqrt{2}R_4 - (4 + \sqrt{2})R_3} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} - 1 & 1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} - 1 & 1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_1 \rightarrow (1 + \sqrt{2})R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 + \sqrt{2} & 2(1 + \sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} - 1 & 1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
V_{1+\sqrt{2}} &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = i$

$$\begin{aligned}
 (A - iI) &= \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -i & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -i \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & 1 \\ 2-i & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -i \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - (2-i)R_1} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & 1 \\ 0 & 2+2i & i & -2+i \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -i \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_2 \rightarrow (2+2i)R_2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2+2i & -2+6i \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -i \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_4 \rightarrow iR_4 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2+2i & -2+6i \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\begin{matrix} R_3 \rightarrow iR_3 \\ R_2 \rightarrow \frac{1}{2}R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1+i & -1+3i \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_2 \rightarrow iR_2 - (-1+3i)R_3} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & 1 \\ 0 & 4i & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2/4i} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

פתרון:

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{1}{2}w + iw - w, \frac{-i}{2}w, -iw, w\right) = \left(-\frac{1}{2} + i, \frac{-i}{2}, -i, 1\right)w, \quad w \in \mathbb{R}$$

$$V_i = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1+2i \\ -i \\ -2i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = -i$

$$V_{-i} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1-2i \\ i \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

כל הערכים עצמיים שונים לכן A לכסינה.

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_{1+\sqrt{2}} & u_i & u_{-i} & u_{1-\sqrt{2}} \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & -1+2i & -1-2i & 1-\sqrt{2} \\ 1 & -i & i & 1 \\ 0 & -2i & 2i & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(א) הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 2x - 1) = x^4 - 2x^3 - 2x - 1.$$

לפי משפט קיילי המילטון $p_A(A) = 0$ לפיכך

$$A^4 - 2A^3 - 2A - I = 0.$$

נעביר אגפים:

$$I = A^4 - 2A^3 - 2A \Rightarrow I = A(A^3 - 2A^2 - 2I).$$

מכאן

$$A^{-1} = A^3 - 2A^2 - 2I.$$

(ב) נכפיל מצד שמאל ב- A^{-1} :

$$\begin{aligned} A^{-2} &= A^2 - 2A - 2A^{-1} \\ &= A^2 - 2A - 2A^3 + 4A^2 + 4I \\ &= 5A^2 - 2A - 2A^3 + 4I. \end{aligned}$$

שאלה 10

(א) נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned}
 p_A(x) = |xI - A| &= \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -3 & -1 \\ -2 & x-4 & -6 & -1 \\ -3 & -6 & x-9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \\
 &= (x-1) \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -3 \\ -2 & x-4 & -6 \\ -3 & -6 & x-9 \end{vmatrix} \\
 &= (x-1)(x-1) \begin{vmatrix} x-4 & -6 \\ -6 & x-9 \end{vmatrix} + 2(x-1) \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -3 & x-9 \end{vmatrix} - 3(x-1) \begin{vmatrix} -2 & x-4 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} \\
 &= (x-1)^2 ((x-9)(x-4) - 36) + 2(x-1) (-2(x-9) - 18) - 3(x-1) (12 + 3(x-4)) \\
 &= (x-1)^2 (x^2 - 13x) - 4x(x-1) - 9x(x-1) \\
 &= (x-1)^2 (x^2 - 13x) - 13x(x-1) \\
 &= x(x-1)^2 (x-13) - 13x(x-1) \\
 &= x(x-1) ((x-1)(x-13) - 13) \\
 &= x(x-1) (x^2 - 14x) \\
 &= x^2(x-1) (x-14) .
 \end{aligned}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 0$

$$\begin{aligned}
 (A - 0 \cdot I) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

פתרון: $(x, y, z, w) = (-2y - 3z, y, z, 0) = (-2, 1, 0, 0)y + (-3, 0, 1, 0)z, y, z \in \mathbb{R}$

$$V_0 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 14$

$$\begin{aligned}
 (A - 14 \cdot I) &= \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow 13R_2 + 2R_1 \\ R_3 \rightarrow 13R_3 + 3R_1}} \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -126 & 84 & 15 \\ 0 & 84 & -56 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_4 \rightarrow -\frac{1}{13}R_4} \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -126 & 84 & 15 \\ 0 & 21 & -14 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow 126R_3 + 21R_2} \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -126 & 84 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 819 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_4 \rightarrow 819R_4 - R_3} \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -126 & 84 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 819 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow \frac{1}{819}R_3} \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -126 & 84 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 15R_3} \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -126 & 84 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_3} \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -126 & 84 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_1 \rightarrow 28R_1 - R_2} \begin{pmatrix} -364 & 182 & 0 & 0 \\ 0 & -126 & 84 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow \frac{1}{182}R_1 \\ R_2 \rightarrow \frac{1}{42}R_2}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{y}{2}, \frac{2}{3}z, z, 0\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0\right)z, \quad z \in \mathbb{R} \quad \text{פתרון:}$$

$$V_{14} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1$

$$\begin{aligned}
 (A - I) &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_2 \\ R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_3 \\ R_3 \rightarrow R_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & \frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\begin{matrix} R_1 \rightarrow 2R_1 \\ R_2 \rightarrow 6R_2 \\ R_3 \rightarrow 3R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 13 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_1 \rightarrow 5R_1 - R_3 \\ R_2 \rightarrow 5R_2 + R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 10 & 15 & 17 & 0 \\ 0 & 15 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\begin{matrix} R_1 \rightarrow 3R_1 - 17R_2 \\ R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 30 & -210 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{30}R_1} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

פתרון: $(x, y, z, w) = (7y, \frac{-1}{5}z, \frac{-5}{13}w, w) = (\frac{7}{13}w, \frac{1}{13}w, \frac{-5}{13}w, w) = (\frac{7}{13}, \frac{1}{13}, \frac{-5}{13}, 1)w$, $w \in \mathbb{R}$

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -5 \\ 13 \end{pmatrix} \right\}.$$

הריבוי גאומטרי שווה לריבוי אלגברי של כל ערך עצמי לכן A לכסינה.

$$D = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_{14} & u_1 & u_0 & u'_0 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ב)

$$A^{99} \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A^{99} \cdot 4 \cdot u_0 = 4A^{99} \cdot u_0 = 4 \cdot 0 \cdot u_0 = 0.$$

הפולינום האופייני הוא

(ג)

$$(x - 14)(x - 1)x^2 = x^4 - 15x^3 + 14x^2.$$

לפי משפט קיילי המילטון: $p_A(A) = 0$ לכן

$$A^4 - 15A^3 + 14A^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A^4 = 15A^3 - 14A^2 .$$

שאלה 11

(א)

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{10}} & 0 & -i\sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{10}} & 0 & i\sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

(ב) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ווקטור עצמי ששייך לערך עצמי 0. לכן

$$A^{10}u = 0^{10}u = 0 .$$

שאלה 12

(א) נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned} p_A(x) = |xI - A| &= \begin{vmatrix} x-2i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x-i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1) \begin{vmatrix} x-2i & -1 & 0 \\ 0 & x-i & 0 \\ 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)(x-1) \begin{vmatrix} x-2i & -1 \\ 0 & x-i \end{vmatrix} \\ &= (x-2)(x-1)(x-2i)(x-i) \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 2i$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = i$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 2i$

$$\begin{aligned}
 (A - 2iI) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & -1-2i & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1-2i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1-2i \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & -1-2i & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1-2i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-2i & 2 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_3 \rightarrow R_3 + (1+2i)R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 + iR_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1-2i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

פתרון: $(x, y, z, w) = ((2i-1)w, 0, 0, w) = (2i-1, 0, 0, 1)w, w \in \mathbb{C}$

$$V_{2i} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1+2i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 2$

$$\begin{aligned}
 (A - 2I) &= \begin{pmatrix} 2i-2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i-2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow (2i+2)R_1} \begin{pmatrix} -8 & 2i+2 & 0 & 0 \\ 0 & i-2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_4 \rightarrow 8R_4 + R_1} \begin{pmatrix} -8 & 2i+2 & 0 & 0 \\ 0 & i-2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2i+2 & 8 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow (i+2)R_2} \begin{pmatrix} -8 & 2i+2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2i+2 & 8 & -8 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_4 \rightarrow (-2i+2)R_4} \begin{pmatrix} -8 & 2i+2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \rightarrow -\frac{1}{5}R_2 \\ R_4 \rightarrow \frac{1}{8}R_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} -8 & 2i+2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\begin{matrix} R_3 \rightarrow R_3 + R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} -8 & 2i+2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} -8 & 2i+2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = i$

$$\begin{aligned}
(A - iI) &= \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-i & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1-i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1-i \\ 0 & -1 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_1 \rightarrow -iR_1} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1-i \\ 0 & -1 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 1-i \\ 0 & -1 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2 \rightarrow -iR_2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & -i-1 \\ 0 & -1 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & -i-1 \\ 0 & 0 & 2-2i & -i-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_3 \rightarrow (2+2i)R_3} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & -i-1 \\ 0 & 0 & 8 & -4i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -4iR_2 + (1+i)R_3} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & -4i & 4+8i & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow \frac{i}{4}R_2 \\ R_3 \rightarrow \frac{1}{4}R_3}} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

פתרון:

$$(x, y, z, w) = (iy, (2-i)z, \frac{i}{2}w, w) = (\frac{i}{2} - 1, i + \frac{1}{2}, \frac{i}{2}, 1)w, \quad w \in \mathbb{C}$$

$$V_i = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2+i \\ 1+2i \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1$

$$\begin{aligned}
 (A - I) &= \begin{pmatrix} 2i-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow (-2i-1)R_1} \begin{pmatrix} 5 & -2i-1 & 0 & 0 \\ 0 & i-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{5R_4 - R_1} \begin{pmatrix} 5 & -2i-1 & 0 & 0 \\ 0 & i-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2i+1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{-i-1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 5 & -2i-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2i+1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 + R_2 \\ R_4 \rightarrow (-2i-1)R_2}} \begin{pmatrix} 5 & -2i-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2i-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & | & | \\ u_{2i} & u_2 & u_i & u_1 \\ | & | & | & | \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -1+2i & 0 & -2+i & 0 \\ 0 & 0 & 1+2i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ב) הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = (x-2)(x-1)(x-i)(x-2i) = x^4 - (3+3i)x^3 + 9ix^2 + (6-6i)x - 4.$$

לפי משפט קיילי המילטון, $p_A(A) = 0$ לפיכך:

$$A^4 - (3+3i)A^3 + 9iA^2 + (6-6i)A - 4I = 0$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{4} (A^4 - (3+3i)A^3 + 9iA^2 + (6-6i)A) \\
 &= \frac{1}{4} A (A^3 - (3+3i)A^2 + 9iA + (6-6i)I) \\
 &= A \left(\frac{1}{4}A^3 - \frac{(3+3i)}{4}A^2 + \frac{9i}{4}A + \frac{(3-3i)}{2}I \right).
 \end{aligned}$$

מכאן

$$A^{-1} = \frac{1}{4}A^3 - \frac{(3+3i)}{4}A^2 + \frac{9i}{4}A + \frac{(3-3i)}{2}I.$$

ג) נכפיל ב- A^{-1} :

$$\begin{aligned} A^{-2} &= \frac{1}{4}A - \frac{(3+3i)}{4}A + \frac{9i}{4}I + \frac{(3-3i)}{2}A^{-1} \\ &= \frac{1}{4}A - \frac{(3+3i)}{4}A + \frac{9i}{4}I + \frac{(3-3i)}{2} \left(\frac{1}{4}A^3 - \frac{(3+3i)}{4}A^2 + \frac{9i}{4}A + \frac{(3-3i)}{2}I \right) \\ &= \frac{1}{4}A - \frac{(3+3i)}{4}A + \frac{9i}{4}I + \frac{(3-3i)}{8}A^3 - \frac{(3+3i)(3-3i)}{8}A^2 + \frac{(3-3i) \cdot 9i}{4}A + \left(\frac{3-3i}{2} \right)^2 I \\ &= \frac{-9i}{4}I + \frac{21i+21}{8}A - 2A^2 + \frac{3-3i}{8}A^3 . \end{aligned}$$

שאלה 13

(א) נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned}
 p_A(x) &= |xI - A| = \begin{vmatrix} x+i & -i & -i & -i \\ -i & x+i & -i & -i \\ -i & -i & x+i & -i \\ -i & i & -i & x-i \end{vmatrix} \\
 &= (x+i) \begin{vmatrix} x+i & -i & -i \\ -i & x+i & -i \\ i & -i & x-i \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} -i & -i & -i \\ -i & x+i & -i \\ -i & -i & x-i \end{vmatrix} - i \begin{vmatrix} -i & x+i & -i \\ -i & -i & -i \\ -i & i & x-i \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} -i & x+i & -i \\ -i & -i & x+i \\ -i & i & -i \end{vmatrix} \\
 &= (x+i)^2 \begin{vmatrix} x+i & -i \\ -i & x-i \end{vmatrix} + i(x+i) \begin{vmatrix} -i & -i \\ i & x-i \end{vmatrix} - i(x+i) \begin{vmatrix} -i & x+i \\ i & -i \end{vmatrix} \\
 &\quad + \begin{vmatrix} x+i & -i \\ -i & x-i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -i & -i \\ -i & x-i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -i & x+i \\ -i & -i \end{vmatrix} \\
 &\quad - \begin{vmatrix} -i & -i \\ i & x-i \end{vmatrix} + i(x+i) \begin{vmatrix} -i & -i \\ -i & x-i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -i & -i \\ -i & i \end{vmatrix} \\
 &\quad + \begin{vmatrix} -i & x+i \\ i & -i \end{vmatrix} - i(x+i) \begin{vmatrix} -i & x+i \\ -i & -i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -i & -i \\ -i & i \end{vmatrix} \\
 &= (x+i)^2 (x^2 + 2) + i(x+i)(-2 - ix) - i(x+i)(-ix) \\
 &\quad + 2 + x^2 + ix - 2 + ix \\
 &\quad + ix + 2 + i(x+i)(-ix) - 2 \\
 &\quad - ix - i(x+i)(ix - 2) + 2 \\
 &= x^4 + 2ix^3 + 4x^2 + 8ix \\
 &= x(x - 2i)(x + 2i)^2
 \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

2. $\lambda = -2i$ מריבוי אלגברי

1. $\lambda = 2i$ מריבוי אלגברי

1. $\lambda = 0$ מריבוי אלגברי

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = -2i$

$$\begin{aligned}
(A + 2iI) &= \begin{pmatrix} i & i & i & i \\ i & i & i & i \\ i & i & i & i \\ i & -i & i & 3i \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow -iR_1 \\ R_2 \rightarrow -iR_2 \\ R_3 \rightarrow -iR_3 \\ R_4 \rightarrow -iR_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_4 \\ R_3 \rightarrow R_2 \\ R_4 R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow 2R_3 + R_2 \\ R_4 \rightarrow 4R_4 - R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

פתרון: $(x, y, z, w) = (-z - 2w, w, z, w) = (-1, 0, 1, 0)z + (-2, 1, 0, 1)w$, $z, w \in \mathbb{C}$

$$V_{-2i} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 0$

$$\begin{aligned}
(A - 0 \cdot I) &= \begin{pmatrix} -i & i & i & i \\ i & -i & i & i \\ i & i & -i & i \\ i & -i & i & i \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow iR_1 \\ R_2 \rightarrow -iR_2 \\ R_3 \rightarrow -iR_3 \\ R_4 \rightarrow -iR_4}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

פתרון: $(x, y, z, w) = (-w, -w, -w, w) = (-1, -1, -1, 1)w$, $w \in \mathbb{C}$

$$V_0 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 2i$

$$\begin{aligned} (A - 2iI) &= \begin{pmatrix} -3i & i & i & i \\ i & -3i & i & i \\ i & i & -3i & i \\ i & -i & i & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow iR_1 \\ R_2 \rightarrow -iR_2 \\ R_3 \rightarrow -iR_3 \\ R_4 \rightarrow -iR_4}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow iR_1 \\ R_2 \rightarrow -iR_2 \\ R_3 \rightarrow -iR_3 \\ R_4 \rightarrow -iR_4}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow 3R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow 3R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow 3R_4 - R_1}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow 2R_3 + R_2 \\ R_4 \rightarrow 4R_4 - R_2}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + R_3} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &V_{2i} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

עבור כל ערך עצמי הריבוי גאומטרי שווה לריבוי אלגברי לכן A לכסינה.

$$D = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_{2i} & u_{-2i} & u'_{-2i} & u_0 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ב) הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = x(x - 2i)(x + 2i)^2 = x^4 + 2ix^3 + 4x^2 + 8ix.$$

לפי משפט קיילי המילטון, $p_A(A) = 0$ לכן

$$A^4 + 2iA^3 + 4A^2 + 8iA = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{i}{2}A^2 - \frac{1}{4}A^3 - \frac{i}{8}A^4.$$

שאלה 14

(א) נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= |xI - A| = \begin{vmatrix} x-5 & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & 1-i \\ 0 & 1+i & x \end{vmatrix} \\ &= (x-5) \begin{vmatrix} x+1 & 1-i \\ 1+i & x \end{vmatrix} \\ &= (x-5)(x(x+1) - 2) \\ &= (x-5)(x+2)(x-1). \end{aligned}$$

ערכים עצמיים: $\lambda = 1, \lambda = -2, \lambda = 5$.
כל הערכים עצמיים שונים לכן A לכסינה.

(ב) נשים לב כי $\bar{A} = A$, כלומר A צמודה לעצמה ולכן A נורמלית ולכן הווקטורים עצמיים מהווים בסיס אורתוגונלי.

$$A = QDQ^{-1}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 5$

$$\begin{aligned} (A - 5I) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1+i \\ 0 & -1-i & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow -\frac{1}{6}R_2 \\ R_2 \rightarrow \frac{-1+i}{2}R_3 \\ R_3 \rightarrow R_1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{6} - \frac{i}{6} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} - \frac{5i}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{6} - \frac{i}{6} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} - \frac{5i}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{6} - \frac{i}{6} \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} - \frac{7i}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_2 \rightarrow 3(7+7i)R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{6} - \frac{i}{6} \\ 0 & 0 & 98 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{98}R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{6} - \frac{i}{6} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

פתרון: $(x, y, z) = (1, 0, 0)x$, $x \in \mathbb{C}$

$$V_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = -2$

$$(A + 2I) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1+i \\ 0 & -1-i & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 + (1+i)R_2]{R_1 \rightarrow \frac{1}{7}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1+i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x, y, z) = (0, (1-i)z, z), z \in \mathbb{C}$

$$V_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1$

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1+i \\ 0 & -1-i & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -2R_3 + (1+i)R_2]{R_1 \rightarrow \frac{1}{4}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1+i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x, y, z) = (0, \frac{-1+i}{2}z, z), z \in \mathbb{C}$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1+i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_5 & u_{-2} & u_1 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & -1+i \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ג) לכל פונקציה $f(x)$,

$$f(A) = f(QDQ^{-1}) = Qf(D)Q^{-1}.$$

לכן

$$e^A = e^{QDQ^{-1}} = Qe^DQ^{-1}.$$

$$f(D) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} \quad \text{כיצד נחשב } e^D? \text{ נשים לב כי אם } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad \text{באותה מידה, לכן}$$

$$e^A = e^{QDQ^{-1}} = Qe^DQ^{-1} = Q \begin{pmatrix} e^5 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & e^1 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

שאלה 15 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad k = 1 \in \mathbb{R}.$$

$$\|a\| = 1, \quad \|a + kb\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = 9.$$

$$\langle a, b \rangle \neq 0 \text{ ו- } \|a\| < \|a + kb\|$$

שאלה 16 נגדיר ווקטורים $u, w \in \mathbb{R}^n$: יהי

$$u = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\sqrt{1}} \\ \frac{a_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{a_3}{\sqrt{3}} \\ \vdots \\ \frac{a_n}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} \sqrt{1} \cdot b_1 \\ \sqrt{2} \cdot b_2 \\ \sqrt{3} \cdot b_3 \\ \vdots \\ \sqrt{n} \cdot b_n \end{pmatrix}.$$

$$a_k, b_k \in \mathbb{R}$$

$$(u, w) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{k} b_k = \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k, \quad \|u\|^2 = (u, u) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{k}, \quad \|w\|^2 = (w, w) = \sum_{k=1}^n k \cdot b_k^2.$$

לפי אי-השוויון קושי-שוורץ:

$$|(u, w)|^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|w\|^2.$$

לכן נקבל

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right\|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{k} \right\|^2 \cdot \left\| \sum_{k=1}^n k \cdot b_k \right\|^2.$$

שאלה 17

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin(nx) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{n} [-\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} [-\cos(n\pi) + \cos(-n\pi)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(nx) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{n} [\sin(nx)]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} [\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)] \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

לכל $n \neq m, n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\sin(mx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{\sin(mx)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin(mx) \cos(nx) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx [\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos((m+n)x)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)x)}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos((m+n)\pi)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)\pi)}{m-n} + \frac{\cos(-(m+n)\pi)}{m+n} + \frac{\cos(-(m-n)\pi)}{m-n} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos((m+n)\pi)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)\pi)}{m-n} + \frac{\cos((m+n)\pi)}{m+n} + \frac{\cos((m-n)\pi)}{m-n} \right] \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

לכל $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin(nx) \cos(nx) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin(2nx) \\
&= \frac{1}{2\pi} [\cos(2nx)]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} [\cos(2n\pi) - \cos(-2n\pi)] \\
&= \frac{1}{2\pi} [\cos(2n\pi) - \cos(2n\pi)] \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

לכל $n \neq 0, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin^2(nx) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx (1 - \cos(2nx)) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[x + \frac{\sin(2nx)}{2n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} [2\pi + \sin(2n\pi) - \sin(-2n\pi)] \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \\
&= 1.
\end{aligned}$$

לכל $n \neq 0, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos^2(nx) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx (1 + \cos(2nx)) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[x + \frac{\sin(2nx)}{2n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} [2\pi + \sin(2n\pi) - \sin(-2n\pi)] \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} [\pi - (-\pi)] \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \\
&= 1.
\end{aligned}$$

שאלה 18

יהיו

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{R}^2$$

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle \quad \Rightarrow \quad 2\langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2.$$

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(|x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| - |x_1| - |x_2| - |y_1| - |y_2|)$$

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ נניח ש-}$$

אז

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(|0| + |1| - |1| - |0| - |-1| - |1|) = -1.$$

$$\langle -3u, v \rangle = \frac{1}{2}(|-4| + |1| - |-3| - |0| - |-1| - |1|) = 0.$$

$\langle -3u, v \rangle = 3 \neq \langle u, v \rangle$, כלומר $\langle \cdot, \cdot \rangle$ לא מקיים לינאריות. לכן $\langle \cdot, \cdot \rangle$ לא יכול להיות מכפלה פנימית.

שאלה 19 נניח כי u ווקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ . אז

$$Au = \lambda u.$$

נכפיל מצד שמאל ב- B :

$$BAu = B\lambda u = \lambda Bu.$$

נציב $BA = AB$:

$$ABu = \lambda Bu \quad \Rightarrow \quad A(Bu) = \lambda(Bu).$$

ז"א Bu ווקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ .

כל הערכים עצמיים שונים לכן הריבוי גאומטרי של הערך עצמי λ הוא 1. לכן בהכרח

$$Bu = \alpha u$$

כאשר $\alpha \in \mathbb{R}$ סקלר.

u ווקטור עצמי אז $u \neq 0$. באותה מידה Bu ווקטור עצמי אז $Bu \neq 0$. לכן $\alpha \neq 0$. לכן קיבלנו כי $Bu = \alpha u$ לכן u ווקטור עצמי של B .

שאלה 20

נוכיח כי a, b בת"ל. נרשום

$$\alpha_1 a + \alpha_2 b = 0 \quad (*)$$

כאשר α_1, α_2 סקלרים. נכפיל ב- A :

$$A\alpha_1 a + A\alpha_2 b = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \lambda_1 a + \alpha_2 \lambda_2 b = 0. \quad (**)$$

נכפיל (*) ב- λ_1 :

$$\lambda_1 \alpha_1 a + \lambda_1 \alpha_2 b = 0 \quad (***)$$

נקח את החיסור (*2)-(*3):

$$\lambda_1 \alpha_2 b - \lambda_2 \alpha_2 b = 0 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \alpha_2 b = 0 .$$

b ווקטור עצמי $\Leftrightarrow b \neq 0$.

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ (נתון) $\Leftrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, לכן

$$\alpha_2 = 0 .$$

נציב זה ב- (*1) ונקבל

$$\alpha_1 a = 0 .$$

a ווקטור עצמי $\Leftrightarrow a \neq 0$ לפיכך

$$\alpha_1 = 0 .$$

לכן (*1) מתקיים רק אם $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ לפיכך a, b בת"ל.

שאלה 21

(א)

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2i & 0 & 1 \\ -2i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2i \\ 1 & 0 & 2i & 0 \end{pmatrix} = A ,$$

ז"א A צמודה לעצמה, $A \Leftarrow$ נורמלית, $A \Leftarrow$ לכסינה אוניטרית.

(ב) A צמודה לעצמה \Leftarrow כל הערכים עצמיים ממשיים.

(ג) הערכים עצמיים של A הם:

$\lambda_1 = 1$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda_2 = -1$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda_3 = 3$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda_4 = -3$ מריבוי אלגברי 1.

המחרב עצמי ששייך לערך עצמי 1:

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

המחרב עצמי ששייך לערך עצמי -1:

$$V_{-1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

המחרב עצמי ששייך לערך עצמי 3:

$$V_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

המחרב עצמי ששייך לערך עצמי 3-:

$$V_{-3} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נסמן את הווקטורים עצמיים ב-

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ווקטורים עצמיים של מטריצה שצמודה לעצמה, ששייכים לערכים עצמיים שונים הם אורתוגונליים. נשאר רק להרכיב בסיס אורתונורמלי:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \frac{v_4}{\|v_4\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -i & -i & i & i \\ i & -i & i & -i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{Q} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & i & -i & 1 \\ 1 & i & i & 1 \\ 1 & -i & -i & 1 \\ -1 & -i & i & 1 \end{pmatrix}.$$

קל ללבדוק כי

$$Q\bar{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{4 \times 4}.$$

לכן

$$A = QD\bar{Q}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ כאשר}$$

שאלה 22 נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned}
 p_A(x) = |xI - A| &= \begin{vmatrix} x & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & x & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix} \\
 &= x \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ -3 & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & x & 0 \\ -5 & 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix} \\
 &= x^2 \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ -6 & x & 0 \\ 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix} + 4 \cdot 0 \\
 &= x^2(x-2) \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} \\
 &= x^3(x-2)^2.
 \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

2. $\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 2.

3. $\lambda = 0$ מריבוי אלגברי 3.

המרחב עצמי ששייך לערך עצמי 0:

$$V_0 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

המרחב עצמי ששייך לערך עצמי 2:

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$x(x-2), \quad x^2(x-2), \quad x^3(x-2), \quad x(x-2)^2, \quad x^2(x-2)^2, \quad x^3(x-2)^2.$$

נבדוק $x(x-2)$

$$A \cdot (A - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נבדוק $x^2(x-2)$

$$A^2 \cdot (A - 2I) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נבדוק $x^3(x-2)$

$$A^3 \cdot (A - 2I) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 12 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 24 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נבדוק $x(x-2)^2$

$$\begin{aligned} A \cdot (A - 2I)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (A - 2I) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -22 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

נבדוק $x^2(x-2)^2$

$$A^2 \cdot (A - 2I)^2 = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -22 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$m_A(x) = x^2(x - 2)^2.$$

לכן הצורת ז'ורדן הינה:

$$J = \begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{0} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

נסמן הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי 0:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} \quad \text{נחשב ווקטור עצמי מוכלל. נסמו}$$

$$(A - 0 \cdot I) u_2 = \alpha v_1 + \beta v_2$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha - \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 5\beta \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5\alpha \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow R_5 \\ R_2 \rightarrow R_1 \\ R_5 \rightarrow R_2}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5\alpha \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha - \beta \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 5\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow 6R_3 + 8R_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5\alpha \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha - \beta \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 3(-2\alpha - \beta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18(-2\alpha - \beta) + 40\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

קיים פתרון אם $\beta = \frac{18\alpha}{11} \Leftrightarrow 18(-2\alpha - \beta) + 40\beta = 0$. לכן נקבל

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5\alpha \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{11} \cdot 40\alpha \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & -\frac{1}{11} \cdot 120\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ווקטור מוכלל לא יכול להיות ווקטור האפס, אז נבחר את הפרמטר α כך שהפתרון לא יהיה ווקטור האפס.

נבחר $\alpha = 11$, ואז הפתרון הוא:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

נבחר $s = 0, t = 0$. נקבל

נציב $\alpha = 11, \beta = 0$ בווקטור עצמי $u_1 = \alpha v_1 + \beta v_2$ ונקבל

$$u_1 = \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 0 \\ 90 \\ 55 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

עכשיו אנחנו צריכים ווקטור עצמי שלישי אשר בלתי תלוי לינארי ביחס ל- u_1 ו- u_2 . נקח

$$u_3 = v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נסמן הווקטור עצמי ששייך לערך עצמי 2:

$$u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

נחשב ווקטור עצמי מוכלל. נסמו

$$u_5 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

$$(A - 2 \cdot I) u_5 = u_4$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$. נבחר $t = 0$ ונקבל

$$u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 & 11 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 90 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 55 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0 \ 1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2 \ 1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

שאלה 23

שב את הפולינום האופייני:

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x & -4 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ -3 & -2 & x-2 & -5 \\ -3 & 0 & 0 & x-7 \end{vmatrix} \\ = (x-7)(x-2)^2(x+2) .$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 2.

$\lambda = -2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 7$ מריבוי אלגברי 1.

המרחב עצמי ששייך לערך עצמי 2:

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

המרחב עצמי ששייך לערך עצמי -2:

$$V_{-2} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} .$$

המרחב עצמי ששייך לערך עצמי 7:

$$V_7 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$(x+2)(x-2)(x-7) , \quad (x-2)^2(x+2)(x-7) .$$

נבדוק $(x+2)(x-2)(x-7)$

$$(A+2I)(A-2I)(A-7I) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$m_A(x) = (x-2)^2(x+2)(x-7) .$$

לכן הצורת ז'ורדן הינה:

$$J = \begin{pmatrix} J_2(2) & & \\ & J_1(-2) & \\ & & J_1(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{7} \end{pmatrix}$$

נסמן את הווקטור עצמי ששייך לערך עצמי 0:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

נחשב ווקטור עצמי מוכלל. נסמו $u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{pmatrix}$

$$(A - 2 \cdot I) u_2 = u_1$$

הפתרון הוא $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ z \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$. נבחר $z = 0$ ונקבל

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

נסמן הווקטור עצמי ששייך לערך עצמי -2:

$$u_3 = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

נסמן הווקטור עצמי ששייך לערך עצמי 7:

$$u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

נחשב ווקטור עצמי מוכלל.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -12 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(2) & & \\ & J_1(-2) & \\ & & J_1(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{7} \end{pmatrix}$$

(א) משפט הפירוק הספקטרלי:

$$A \cdot a = (1+i)P_{V_{1+i}}(a) + (-1+i)P_{V_{-1+i}}(a) + 2P_{V_2}(a) + 3P_{V_3}(a) .$$

$$P_{V_3}(a) = a - P_{V_{1+i}}(a) - P_{V_{-1+i}}(a) - P_{V_2}(a)$$

לכן

$$P_{V_{1+i}}(a) = \frac{\langle a, u_{1+i} \rangle}{\|u_{1+i}\|^2} u_{1+i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

$$P_{V_{-1+i}}(a) = \frac{\langle a, u_{-1+i} \rangle}{\|u_{-1+i}\|^2} u_{-1+i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

$$P_{V_2}(a) = \frac{\langle a, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$P_{V_3}(a) = a - P_{V_{1+i}}(a) - P_{V_{-1+i}}(a) - P_{V_2}(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$A \cdot a = (1+i) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1+i) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+i \\ 9 \\ 8 \\ 1+5i \end{pmatrix}$$

(ב)

$$A^4 \cdot a = (1+i)^4 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1+i)^4 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 3^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 243 \\ 64 \\ -20 \end{pmatrix}$$

(ג)

$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot e_1 = (1+i)P_{V_{1+i}}(e_1) + (-1+i)P_{V_{-1+i}}(e_1) + 2P_{V_2}(e_1) + 3P_{V_3}(e_1)$$

$$P_{V_{1+i}}(e_1) = \frac{\langle e_1, u_{1+i} \rangle}{\|u_{1+i}\|^2} u_{1+i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_{-1+i}}(e_1) = \frac{\langle e_1, u_{-1+i} \rangle}{\|u_{-1+i}\|^2} u_{-1+i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_2}(e_1) = \frac{\langle e_1, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_3}(e_1) = e_1 - P_{V_{1+i}}(e_1) - P_{V_{-1+i}}(e_1) - P_{V_2}(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot e_1 = (1+i) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + (-1+i) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot e_2 = (1+i)P_{V_{1+i}}(e_2) + (-1+i)P_{V_{-1+i}}(e_2) + 2P_{V_2}(e_2) + 3P_{V_3}(e_2)$$

$$P_{V_{1+i}}(e_2) = \frac{\langle e_2, u_{1+i} \rangle}{\|u_{1+i}\|^2} u_{1+i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_{-1+i}}(e_2) = \frac{\langle e_2, u_{-1+i} \rangle}{\|u_{-1+i}\|^2} u_{-1+i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_2}(e_2) = \frac{\langle e_2, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_3}(e_2) = e_1 - P_{V_{1+i}}(e_2) - P_{V_{-1+i}}(e_2) - P_{V_2}(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot e_3 = (1+i)P_{V_{1+i}}(e_3) + (-1+i)P_{V_{-1+i}}(e_3) + 2P_{V_2}(e_3) + 3P_{V_3}(e_3)$$

$$\begin{aligned}
P_{V_{1+i}}(e_3) &= \frac{\langle e_3, u_{1+i} \rangle}{\|u_{1+i}\|^2} u_{1+i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \\
P_{V_{-1+i}}(e_3) &= \frac{\langle e_3, u_{-1+i} \rangle}{\|u_{-1+i}\|^2} u_{-1+i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \\
P_{V_2}(e_3) &= \frac{\langle e_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \\
P_{V_3}(e_3) &= e_3 - P_{V_{1+i}}(e_3) - P_{V_{-1+i}}(e_3) - P_{V_2}(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

$$A \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot e_4 = (1+i)P_{V_{1+i}}(e_4) + (-1+i)P_{V_{-1+i}}(e_4) + 2P_{V_2}(e_4) + 3P_{V_3}(e_4)$$

$$P_{V_{1+i}}(e_4) = \frac{\langle e_4, u_{1+i} \rangle}{\|u_{1+i}\|^2} u_{1+i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} .$$

$$P_{V_{-1+i}}(e_4) = \frac{\langle e_4, u_{-1+i} \rangle}{\|u_{-1+i}\|^2} u_{-1+i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_2}(e_4) = \frac{\langle e_4, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_3}(e_4) = e_4 - P_{V_{1+i}}(e_4) - P_{V_{-1+i}}(e_4) - P_{V_2}(e_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ Ae_1 & Ae_2 & Ae_3 & Ae_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

שאלה 25

(א) משפט הפירוק הספקטרלי:

$$A \cdot a = 3P_{V_3}(a) + (5 + 5i)P_{V_{5+5i}}(a) + (-5 + 5i)P_{V_{-5+5i}}(a).$$

$$P_{V_{-5+5i}}(a) = a - P_{V_3}(a) - P_{V_{5+5i}}(a)$$

לכן

$$P_{V_3}(a) = \frac{\langle a, u_3 \rangle}{\|u_3\|^2} u_3 + \frac{\langle a, u'_3 \rangle}{\|u'_3\|^2} u'_3 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_{5+5i}}(a) = \frac{\langle a, u_{5+5i} \rangle}{\|u_{5+5i}\|^2} u_{5+5i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_{-5+5i}}(a) = a - P_{V_3}(a) - P_{V_{5+5i}}(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot a = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + (5+5i) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (-5+5i) \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50+5i \\ 27 \\ 21 \\ 5+50i \end{pmatrix}$$

(ב)

$$A^4 \cdot a = 3^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + (5+5i)^4 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + (-5+5i)^4 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2500 \\ 729 \\ 567 \\ -25000 \end{pmatrix}$$

$$.e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ג}$$

$$A \cdot e_1 = 3P_{V_3}(e_1) + (5+5i)P_{V_{5+5i}}(e_1) + (-5+5i)P_{V_{-5+5i}}(e_1)$$

$$P_{V_3}(e_1) = \frac{\langle e_1, u_3 \rangle}{\|u_3\|^2} u_3 + \frac{\langle e_1, u'_3 \rangle}{\|u'_3\|^2} u'_3 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_{5+5i}}(e_1) = \frac{\langle e_1, u_{5+5i} \rangle}{\|u_{5+5i}\|^2} u_{5+5i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_{-5+5i}}(e_1) = e_1 - P_{V_3}(e_1) - P_{V_{5+5i}}(e_1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot e_1 = (5 + 5i) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + (-5 + 5i) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5i \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot e_2 = 3P_{V_3}(e_2) + (5 + 5i)P_{V_{5+5i}}(e_2) + (-5 + 5i)P_{V_{-5+5i}}(e_2)$$

$$P_{V_3}(e_2) = \frac{\langle e_2, u_3 \rangle}{\|u_3\|^2} u_3 + \frac{\langle e_2, u'_3 \rangle}{\|u'_3\|^2} u'_3 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_{5+5i}}(e_2) = \frac{\langle e_2, u_{5+5i} \rangle}{\|u_{5+5i}\|^2} u_{5+5i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_{-5+5i}}(e_2) = e_2 - P_{V_3}(e_2) - P_{V_{5+5i}}(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot e_2 = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot e_3 = 3P_{V_3}(e_3) + (5 + 5i)P_{V_{5+5i}}(e_3) + (-5 + 5i)P_{V_{-5+5i}}(e_3)$$

$$P_{V_3}(e_3) = \frac{\langle e_3, u_3 \rangle}{\|u_3\|^2} u_3 + \frac{\langle e_3, u'_3 \rangle}{\|u'_3\|^2} u'_3 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_{5+5i}}(e_1) = \frac{\langle e_1, u_{5+5i} \rangle}{\|u_{5+5i}\|^2} u_{5+5i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_{-5+5i}}(e_3) = e_3 - P_{V_3}(e_3) - P_{V_{5+5i}}(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot e_3 = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot e_4 = 3P_{V_3}(e_4) + (5 + 5i)P_{V_{5+5i}}(e_4) + (-5 + 5i)P_{V_{-5+5i}}(e_4)$$

$$P_{V_3}(e_4) = \frac{\langle e_4, u_3 \rangle}{\|u_3\|^2} u_3 + \frac{\langle e_4, u'_3 \rangle}{\|u'_3\|^2} u'_3 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_{5+5i}}(e_4) = \frac{\langle e_4, u_{5+5i} \rangle}{\|u_{5+5i}\|^2} u_{5+5i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_{-5+5i}}(e_4) = e_1 - P_{V_3}(e_4) - P_{V_{5+5i}}(e_4) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot e_4 = (5 + 5i) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + (-5 + 5i) \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 5i \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ Ae_1 & Ae_2 & Ae_3 & Ae_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5i & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5i \end{pmatrix}$$

(א)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{3} & i \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5i & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} & -i \end{pmatrix}.$$

$$\bar{A} \cdot A = \begin{pmatrix} 12 & 22\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 22\sqrt{2} & 89 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 37 & -12i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 12i\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \bar{A} = \begin{pmatrix} 12 & 22\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 22\sqrt{2} & 89 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 37 & -12i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 12i\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix},$$

לכן $A \cdot \bar{A} = \bar{A} \cdot A$ לכן A נורמלית לכן A לכסינה אוניטרית.

(ב)

$\bar{A} \neq A$ לכן A לא צמודה לעצמה, אבל A נורמלית. הערכים עצמיים של מטריצה נורמלית ממשיים אם ורק אם המטריצה צמודה לעצמה. A לא צמודה לעצמה לפיכך לא כל הערכים עצמיים יהיו ממשיים.

(ג)

$$\begin{aligned} p_A(x) = |xI - A| &= \begin{vmatrix} x-2 & -2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -2\sqrt{2} & x-9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-5i & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} & x-i \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & x-9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-5i & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & x-i \end{vmatrix} \\ &= ((x-2)(x-9) - 8) ((x-5i)(x-i) + 12) \\ &= (x^2 - 11x + 10) (x^2 - 6ix + 7) \\ &= (x-10)(x-1)(x-7i)(x+i) \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

1. $\lambda = 10$ מריבוי אלגברי 1.

1. $\lambda = 7i$ מריבוי אלגברי 1.

1. $\lambda = -i$ מריבוי אלגברי 1.

1. $\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 10

$$\begin{aligned}
 (A - 10I) &= \begin{pmatrix} -8 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 + 5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{3} & -10 + i \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_4 \rightarrow (-10+5i)R_4 + 2\sqrt{3}R_3} \begin{pmatrix} -8 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 + 5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 107 - 60i \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} -8 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 + 5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 V_{10} &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.
 \end{aligned}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $7i$

$$V_{7i} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{3}i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $-i$

$$V_{-i} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 1

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_{10} & u_{7i} & u_{-i} & u_1 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -i\sqrt{3} & \frac{i}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

שאלה 27

(א)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -i & 0 & 0 \\ i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & i \\ 0 & 0 & -i & 4 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -i & 0 & 0 \\ i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & i \\ 0 & 0 & -i & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{A} = A$$

לכן A צמודה לעצמה ולכן A נורמלית לכן A לכסינה אוניטרית.

(ב)

הערכים עצמיים של מטריצה נורמלית ממשיים אם ורק אם המטריצה צמודה לעצמה. A צמודה לעצמה לפיכך כל הערכים עצמיים יהיו ממשיים.

(ג)

ערכים עצמיים:

1. $\lambda = 5$ מריבוי אלגברי 1.

2. $\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 2.

1. $\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 5

$$V_5 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 3

$$V_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 1

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_5 & u_3 & u'_3 & u_1 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ i & -i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

שאלה 28 נגדיר ווקטורים $a, b \in \mathbb{R}^4$:

$$a = \begin{pmatrix} \sqrt{x} \\ \sqrt{y} \\ \sqrt{z} \\ \sqrt{w} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}} \\ \frac{1}{\sqrt{y}} \\ \frac{1}{\sqrt{z}} \\ \frac{1}{\sqrt{w}} \end{pmatrix}.$$

תהי \langle, \rangle המכפלה הפנימית הסטנדרטית של \mathbb{R}^4 . לפי אי-השוויון קושי-שוורץ:

$$|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|.$$

$$\langle a, b \rangle = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{z} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} + \sqrt{w} \cdot \frac{1}{\sqrt{w}} = 4.$$

$$\|a\| = \sqrt{x + y + z + w}, \quad \|b\| = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}}.$$

נציב את הביטויים האלה באי-שוויון קושי-שוורץ ונקבל

$$4 \leq \sqrt{x + y + z + w} \cdot \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}} \leq \sqrt{4} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}}$$

לכן

$$\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}} \geq \sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} \geq 4.$$

שאלה 29

(א)

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix} = (x-a)(x-d) - bc = x^2 - (a+d)x + ad - bc .$$

$$\text{tr}(A) = a + d \text{ ו- } \det(A) = ad - bc \quad \text{לכן} \quad (ב)$$

$$p_A(x) = x^2 - (a+d)x + ad - bc = x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A) .$$

$$B = BC - CB \quad \text{נקח את העקבה של הביטוי הזה ונקבל} \quad (1) \quad (ג)$$

$$\text{tr}(B) = \text{tr}(BC - CB) = \text{tr}(BC) - \text{tr}(CB) = \text{tr}(BC) - \text{tr}(BC) = 0 ,$$

$$\text{בסעיף ב' הוכחנו כי אם } B \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \text{ אז הפולינום האופייני שלה היא} \quad (2)$$

$$p_B(x) = x^2 - \text{tr}(B)x + \det(B) .$$

$$\text{בסעיף ג' (1) מצאנו כי } \text{tr}(B) = 0 \text{ לפיכך}$$

$$p_B(x) = x^2 + \det(B) .$$

לפי משפט קייילי-המילטון כל מטריצה מאפסת את הפולינום האופייני שלה, לכן

$$p_B(B) = B^2 + \det(B)I = 0 \quad \Rightarrow \quad B^2 = -\det(B)I , \quad (\#)$$

(3)

$$B = BC - CB \quad \Rightarrow \quad B^2 = B^2C - BCB , \quad (*1)$$

$$B = BC - CB \quad \Rightarrow \quad B^2 = BCB - CB^2 , \quad (*2)$$

$$: (*2) + (*1)$$

$$2B^2 = B^2C - CB^2 .$$

$$\text{נציב } (\#), \text{ כלומר } B^2 = -\det(B)I \text{ ונקבל}$$

$$-2 - \det(B)I = -\det(B)I \cdot C + C \cdot \det(B)I = -\det(B)C + \det(B)C = 0 ,$$

$$\text{ולכן } \det(B) = 0 .$$

$$B^2 = -\det(B)I \quad (2) \quad \text{ומסעיף ג' (3) } \det(B) = 0 \text{ לכן } B^2 = 0 . \quad (4)$$

שאלה 30

(א) המטריצה משולדית לכן הערכים עצמיים הם האיברים על האלכסון. לכן הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)(x-4) = x^5 - 11x^4 + 45x^3 - 85x^2 + 74x - 24.$$

לפי משפט קיילי המילטון $p_A(A) = 0$ לכן $A^5 - 11A^4 + 45A^3 - 85A^2 + 74A - 24I$. נעביר אגפים ונקבל

$$24I = A^5 - 11A^4 + 45A^3 - 85A^2 + 74A$$

לכן

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{24}A^5 - \frac{11}{24}A^4 + \frac{45}{24}A^3 - \frac{85}{24}A^2 + \frac{74}{24}A \\ &= A \left(\frac{1}{24}A^4 - \frac{11}{24}A^3 + \frac{15}{8}A^2 - \frac{85}{24}A + \frac{37}{12}I \right) \end{aligned}$$

מכאן

$$A^{-1} = \frac{1}{24}A^4 - \frac{11}{24}A^3 + \frac{15}{8}A^2 - \frac{85}{24}A + \frac{37}{12}I.$$

(ב) נכפיל ב- A^{-1} :

$$\begin{aligned} A^{-2} &= \frac{1}{24}A^3 - \frac{11}{24}A^2 + \frac{15}{8}A - \frac{85}{24}I + \frac{37}{12}A^{-1} \\ &= \frac{1}{24}A^3 - \frac{11}{24}A^2 + \frac{15}{8}A - \frac{85}{24}I + \frac{37}{12} \left(\frac{1}{24}A^4 - \frac{11}{24}A^3 + \frac{15}{8}A^2 - \frac{85}{24}A + \frac{37}{12}I \right) \\ &= \frac{859}{144}I - \frac{2605}{288}A + \frac{511}{96}A^2 - \frac{395}{288}A^3 + \frac{37}{288}A^4. \end{aligned}$$

שאלה 31 ל- A ו- B יש n ווקטורים עצמיים בלתי-תלויים לינאריים, לכן A ו- B לכסינות. נגדיר

$$P = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | & | \\ u_1 & u_2 & & u_{n-1} & u_n \\ | & | & & | & | \end{pmatrix}$$

P הפיכה בגל שהעמודות בת"ל. לכן

$$P^{-1}AP = D, \quad P^{-1}BP = D$$

כאשר D מטריצה אלכסונית אשר האיברים על האלכסון הם הערכים עצמיים:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

מכאן

$$P^{-1}AP = D = P^{-1}BP,$$

לכן $P^{-1}AP = P^{-1}BP$. נכפיל מצד שמאל ב- P ומצד ימין ב- P^{-1} ונקבל $A = B$.

שאלה 32

(א) אם A ו- B דומות אז הדטרמיננטות שוות. אז נבדוק את הדטרמיננטות:

$$|A| = 3, \quad |B| = 6,$$

כלומר $|A| \neq |B|$ לכן A ו- B לא דומות.

(ב) $|A| = -5 = |B|$ אז הדטרמיננטות לא עוזרות לבדוק אם A ו- B דומות.

נזכיר כי אם A ו- B דומות אז העקבות שוות.

$$\text{tr}(A) = 3, \quad \text{tr}(B) = 4,$$

כלומר $\text{tr}(A) \neq \text{tr}(B)$ ולכן A ו- B לא דומות.

(ג)

$$|A| = 6 = |B|.$$

$$\text{tr}(A) = 5 = \text{tr}(B).$$

נבדוק את הפולינום האופייני של A :

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x+1 & -6 \\ 2 & x-6 \end{vmatrix} = (x+1)(x-6) + 12 = x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2).$$

הערכים עצמיים של A הם 2 ו-3 והם שונים, לכן קיימת P הפיכה כך ש-

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = PBP^{-1}$$

לכן A ו- B דומות.

(ד)

$$|A| = 6 = |B|.$$

$$\text{tr}(A) = 5 = \text{tr}(B).$$

הפולינומים האופייניים של A ושל B זהים:

$$p_A(x) = (x-3)(x-2) = p_B(x).$$

לכן הערכים עצמיים של A ו- B הם 2 ו-3. לכן קיימים מטריצות הפיכות P ו- S כך ש-

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad S^{-1}BS = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

לפיכך

$$P^{-1}AP = S^{-1}BS \Rightarrow PS^{-1}BSP^{-1} = A.$$

נגדיר $U = PS^{-1}$ ונשים לב כי $U^{-1} = SP^{-1}$, כך שונקבל

$$UBU^{-1} = A.$$

לכן A ו- B דומות.

שאלה 34

(א) המטריצה המייצגת של האופרטור לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_3[x]$ $E = \{1, x, x^2, x^3\}$:

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

ערכים עצמיים:

1. $\lambda = 11$ מריבוי אלגברי 1.

1. $\lambda = 8$ מריבוי אלגברי 1.

1. $\lambda = -7$ מריבוי אלגברי 1.

1. $\lambda = -6$ מריבוי אלגברי 1.

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 11

$$V_{11} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ווקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי 11:

$$u_{11} = x^2 + x^3.$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 8

$$V_8 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

ווקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי 8:

$$u_8 = 1 + x.$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי -7

$$V_{-7} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ווקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי -7 :

$$u_{-7} = -x^2 + x^3.$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי -6

$$V_{-6} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

ווקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי -6 :

$$u_{-6} = -1 + x.$$

(ב) נסמן הווקטור $3 + 2x + 5x^2 + 7x^3$ לפי הבסיס הסטנדרטי ב- \mathcal{B} $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

נשים לב כי המטריצה המייצגת $[T]_{\mathcal{B}}$ ממשית וסימטרית, ולכן $[T]_{\mathcal{B}}$ נורמלית. לפיכך לפי המשפט הפירוק הספקטרלי,

$$[T]^5 a = 11^5 P_{V_{11}}(a) + 8^5 P_{V_8}(a) + (-7)^5 P_{V_{-7}}(a) + (-6)^5 P_{V_{-6}}(a)$$

$$P_{V_{11}}(a) = \frac{1}{\|u_{11}\|^2} \langle a, u_{11} \rangle u_{11} = \frac{12}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_8}(a) = \frac{1}{\|u_8\|^2} \langle a, u_8 \rangle u_8 = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_{-7}}(a) = \frac{1}{\|u_{-7}\|^2} \langle a, u_{-7} \rangle u_{-7} = \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_{-6}}(a) = \frac{1}{\|u_{-6}\|^2} \langle a, u_{-6} \rangle u_{-6} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$[T]^5 a = 11^5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + 8^5 \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-7)^5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-6)^5 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78032 \\ 85808 \\ 983113 \\ 949499 \end{pmatrix}$$

לפיכך:

$$T^5(3 + 2x + 5x^2 + 7x^3) = 78032 + 85808x + 983113x^2 + 949499x^3.$$

שאלה 35

(א) המטריצה המייצגת של האופרטור לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 5 & -6i & 0 & 0 \\ 6i & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

ערכים עצמיים:

1. $\lambda = 11$ מריבוי אלגברי 1.

1. $\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 1.

1. $\lambda = -1$ מריבוי אלגברי 1.

1. $\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 11

$$V_{11} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

ווקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי 11:

$$u_{11} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 2

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ווקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי 2:

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי -1

$$V_{-1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

ווקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי -1:

$$u_{-1} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 1

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

ווקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי 1:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ב) נסמן הווקטור $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ לפי הבסיס הסטנדרטי ב-ס $a = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

נשים לב כי המטריצה המייצגת $[T]_E$ ממשית וסימטרית, ולכן $[T]_E$ נורמלית. לפיכך לפי המשפט הפירוק הספקטרלי,

$$[T]^4 a = 11^4 P_{V_{11}}(a) + 2^4 P_{V_2}(a) + (-1)^4 P_{V_{-1}}(a) + 1^4 P_{V_1}(a)$$

$$P_{V_{11}}(a) = \frac{1}{\|u_{11}\|^2} \langle a, u_{11} \rangle u_{11} = \frac{-2i+1}{2} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{i}{2} \\ -i + \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_2}(a) = \frac{1}{\|u_2\|^2} \langle a, u_2 \rangle u_2 = \frac{7}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_{-1}}(a) = \frac{1}{\|u_{-1}\|^2} \langle a, u_{-1} \rangle u_{-1} = \frac{2i+1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{i}{2} \\ i + \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_1}(a) = \frac{1}{\|u_1\|^2} \langle a, u_1 \rangle u_1 = \frac{3}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$[T]^4 a = 11^4 \cdot \begin{pmatrix} -1 - \frac{i}{2} \\ -i + \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 + \frac{i}{2} \\ i + \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14642 - 7320i \\ 7321 - 14640i \\ 3 \\ 112 \end{pmatrix}$$

לפיכך:

$$T^4 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14642 - 7320i & 7321 - 14640i \\ 3 & 112 \end{pmatrix}.$$

שאלה 36

(א) המטריצה המייצגת של האופרטור לפי הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{C}^4 $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 5 & -3i & 0 & 0 \\ 3i & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ערכים עצמיים:

1. $\lambda = 8$ מריבוי אלגברי 1.

1. $\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 1.

2. $\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 2.

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 8

$$V_8 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

ווקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי 8:

$$u_8 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 2

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

ווקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי 2:

$$u_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 1

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

ווקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי -1:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(ב) נסמן הווקטור לפי הבסיס הסטנדרטי ב- $a = \begin{pmatrix} 2i \\ -i \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

נשים לב כי המטריצה המייצגת $[T]_E$ נורמלית.
לפיכך לפי המשפט הפירוק הספקטרלי,

$$[T]a = 8P_{V_8}(a) + 2P_{V_2}(a) + P_{V_1}(a)$$

$$P_{V_8}(a) = \frac{1}{\|u_8\|^2} \langle a, u_8 \rangle u_8 = \frac{-2-i}{2} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i - \frac{1}{2} \\ -1 - \frac{i}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_2}(a) = \frac{1}{\|u_2\|^2} \langle a, u_2 \rangle u_2 = \frac{2-i}{2} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i + \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{i}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_1}(a) = \frac{1}{\|u_1\|^2} \langle a, u_1 \rangle u_1 + \frac{1}{\|u'_1\|^2} \langle a, u'_1 \rangle u'_1 = 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$[T]a = 8 \cdot \begin{pmatrix} i - \frac{1}{2} \\ -1 - \frac{i}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} i + \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{i}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 10i \\ -6 - 5i \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ג

$$T^5 a = 8^5 \cdot \begin{pmatrix} i - \frac{1}{2} \\ -1 - \frac{i}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2^5 \begin{pmatrix} i + \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{i}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16368 + 32800i \\ -32736 - 16400i \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

שאלה 37 יהי V המרחב המכפלה פנימית הסטנדרטית מעל הדה \mathbb{R} . נגדיר את שני ווקטורים $a, b \in V$:

$$a = \begin{pmatrix} \sqrt{1} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \vdots \\ \sqrt{n} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2^{1/2} \\ 2^{2/2} \\ 2^{3/2} \\ \vdots \\ 2^{n/2} \end{pmatrix}.$$

לפי אי-השוויון קושי שוורץ:

$$|\langle a, b \rangle| = \|a\| \cdot \|b\|.$$

$$\langle a, b \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{1} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \vdots \\ \sqrt{n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2^{1/2} \\ 2^{2/2} \\ 2^{3/2} \\ \vdots \\ 2^{n/2} \end{pmatrix} \right\rangle = 2^{1/2} \cdot \sqrt{1} + 2^{2/2} \cdot \sqrt{2} + 2^{3/2} \cdot \sqrt{3} + \dots + 2^{n/2} \cdot \sqrt{n} = \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \cdot 2^{k/2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{k \cdot 2^k}.$$

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle} = \sqrt{\sqrt{1} \cdot \sqrt{1} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} = \sqrt{\sum_{k=1}^n k}.$$

נציב $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n \cdot (n+1)$ ונקבל

$$\|a\| = \sqrt{\frac{1}{2}n \cdot (n+1)}.$$

$$\|b\| = \sqrt{\langle b, b \rangle} = \sqrt{2^{1/2} \cdot 2^{1/2} + 2^{2/2} \cdot 2^{2/2} + 2^{3/2} \cdot 2^{3/2} + \dots + 2^{n/2} \cdot 2^{n/2}} = \sqrt{\sum_{k=1}^n 2^k}$$

נציב $\sum_{k=1}^n 2^k = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2(2^n - 1)$ ונקבל

$$\|b\| = \sqrt{2(2^n - 1)}.$$

לפיכך לפי אי-השוויון קושי שזורץ:

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \cdot 2^{k/2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{k \cdot 2^k} \leq \sqrt{\frac{1}{2}n \cdot (n+1)} \cdot \sqrt{2(2^n - 1)} = \sqrt{(n^2 + n) \cdot (2^n - 1)}.$$

שאלה 38

(א) לא מכפלה פנימית. הסבר: נניח כי $f(x) = 1$, $g(x) = \sqrt{3}x$.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot 3x^2 dx = 2.$$

$$\langle f, 2g \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot 12x^2 dx = 4.$$

$\langle f, 2g \rangle \neq 2 \langle f, g \rangle$ לכן הנוסחה לא שומרת על ליניאריות לכן היא לא מכפלה פנימית.

(ב) מכפלה פנימית. הסבר:

1. לינאריות

לכל f, g, h פונקציות שרציפות ב- $[-1, 1]$.

$$\langle f + h, g \rangle = \int_{-1}^1 4(f(x) + h(x))g(x) dx = \int_{-1}^1 4f(x)g(x) dx + \int_{-1}^1 4h(x)g(x) dx = \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle .$$

לכל f, g, h פונקציות שרציפות ב- $[-1, 1]$ ו- α סקלר: $[-1, 1]$.

$$\langle \alpha f, g \rangle = \int_{-1}^1 4\alpha f(x)g(x) dx = \alpha \int_{-1}^1 4f(x)g(x) dx = \alpha \langle f, g \rangle .$$

2. סימטריות

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 4f(x)g(x) dx = \int_{-1}^1 4g(x)f(x) dx = \langle g, f \rangle .$$

3. חיוביות

$$\langle f, f \rangle = \int_{-1}^1 4f^2(x) dx \geq 0 ,$$

ו- $\langle f, f \rangle = 0$ אם ורק אם $f(x) = 0$.

(ג) לא מכפלה פנימית. דוגמה נגדית: $f(x) = (1 - x)$,

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x)^2 \sin x dx = 2 \cos(1) - 2 \sin(1) < 0 .$$

כלומר חיוביות לא מתקיימת.

(ד) מכפלה פנימית. הסבר:

1. לינאריות

לכל f, g, h פונקציות שרציפות ב- $[-1, 1]$.

$$\langle f + h, g \rangle = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 x^8(f(x) + h(x))g(x) dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 x^8 f(x)g(x) dx + \frac{1}{3} \int_{-1}^1 x^8 h(x)g(x) dx = \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle .$$

לכל f, g, h פונקציות שרציפות ב- $[-1, 1]$ ו- α סקלר: $[-1, 1]$.

$$\langle \alpha f, g \rangle = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 x^8 \alpha f(x)g(x) dx = \frac{1}{3} \alpha \int_{-1}^1 x^8 f(x)g(x) dx = \alpha \langle f, g \rangle .$$

2. סימטריות

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 x^8 f(x)g(x) dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 x^8 g(x)f(x) dx = \langle g, f \rangle .$$

3. חיוביות

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 x^8 f^2(x) dx \geq 0 ,$$

ו- $\langle f, f \rangle = 0$ אם ורק אם $f(x) = 0$.

שאלה 39 הפולינום האופייני של A הוא

$$p_A(x) = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3 .$$

לפי משפט קיילי-המילטון,

$$A^2 - 2A - 3I = 0 .$$

לפיכך

$$A^2 = 2A + 3I . \quad (*)$$

לכן $a_1 = 2, b_1 = 3$. כעת נכפיל (*) ב- A :

$$\begin{aligned} A^3 &= A \cdot A^2 \\ &= 2A^2 + 3A \\ &= 2(2A + 3I) + 3A \\ &= 7A + 6I . \end{aligned}$$

לכן $a_2 = 7, b_2 = 6$. באופן כללי,

$$\begin{aligned} A^{n+2} &= A \cdot A^{n+1} \\ &= A(a_n A + b_n I) \\ &= a_n A^2 + b_n A \\ &= a_n(2A + 3I) + b_n A \\ &= (2a_n + b_n)A + 3a_n I . \end{aligned}$$

מכאן

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n , \quad b_{n+1} = 3a_n .$$

לכן קיבלנו כלל נסיגה

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n , \quad a_2 = 7 , \quad a_1 = 2 .$$

שאלה 40

(א) בגלל ש- A מטריצה ממשית, ו- $\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ ערך עצמי של A , אז הצמוד $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ גם ערך עצמי של A . כיוון ש- $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ אז יש ל- A ערך עצמי שלישי λ_3 . המכפלה של כל הערכים עצמיים שווה לדטרמיננטה של A , כלומר $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = |A|$. לכן

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right) \cdot \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right) \cdot \lambda_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = 1 .$$

(ב) הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = \left(x - \left[\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right] \right) \left(x - \left[\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right] \right) (x - 1) = x^3 - 1 .$$

לפי משפט קיילי המילטון:

$$p_A(A) = A^3 - I = 0 \quad \Rightarrow \quad A^3 = I .$$

$$A^{100} = (A^3)^{33} \cdot A = I^{33} \cdot A = A ,$$

לכן $c = 0, b = 1, a = 0$.

שאלה 41 הפולינום האופייני הוא $p_A(x) = (x - 4)(x + 2) = x^2 - 2x - 8$. לפי משפט קיילי המילטון, לפיכך $p_A(A) = 0$

$$A^2 - 2A - 8I = 0 \quad \Rightarrow \quad A^2 = 2A + 8I .$$

לכן $c_2 = 8, b_2 = 2$. נרשום

$$A^n = b_n A + c_n I .$$

נכפיל ב- A :

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = (b_n A + c_n I) A = b_n A^2 + c_n A = b_n (2A + 8I) + c_n A = (2b_n + c_n) A + 8b_n I .$$

מכאן

$$b_{n+1} = 2b_n + c_n , \quad c_{n+1} = 8b_n .$$

שאלה 42

(א)

$$m_A(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3) = x^6 + 6x^4 + 11x^2 + 6$$

לכן

$$f(x) = x^6 + 6x^4 + 11x^2 + 7x - 2 = m_A(x) + 7x - 8 .$$

נציב A :

$$f(A) = m_A(A) + 7A - 8I = 7A - 8I .$$

$$|f(A)| = |7A - 8I| = \left| 7 \left(A - \frac{8}{7}I \right) \right| = 7^n \left| A - \frac{8}{7}I \right|$$

$f(A) \Leftarrow |f(A)| \neq 0 \Leftarrow \left| A - \frac{8}{7}I \right| \neq 0 \Leftarrow A$ לא שורש של הפולינום המינימלי $\Leftarrow \frac{8}{7}$ לא ערך עצמי של A הפיכה.

(ב)

$$m_A(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3) = (x + i)(x - i)(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{3}i)(x - \sqrt{3}i) .$$

השורשים הם

$$i, -i, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i, \sqrt{3}i, -\sqrt{3}i .$$

לכן הערכים עצמיים הם $\lambda_6 = -\sqrt{3}i, \lambda_5 = \sqrt{3}i, \lambda_4 = -\sqrt{2}i, \lambda_3 = \sqrt{2}i, \lambda_2 = -i, \lambda_1 = i$.
אם מטריצה אוניטרית אז הערך מוחלט של כל ערך עצמי שווה 1.
קיימים ערכים עצמיים של A שעבורם הערך מוחלט לא שווה ל-1 לכן A לא אוניטרית.

(ג) אם A צמודה לעצמה אז כל הערכים עצמיים יהיו ממשיים. לא כל הערכים עצמיים של A ממשיים אז A לא צמודה לעצמה.

(ד) כל ערך עצמי של A שורש של הפולינום המינימלי. ל- $m_A(x)$ יש 6 שורשים:

$$i, -i, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i, \sqrt{3}i, -\sqrt{3}i.$$

(2) לכן הערכים עצמיים הם $\lambda_6 = -\sqrt{3}i, \lambda_5 = \sqrt{3}i, \lambda_4 = -\sqrt{2}i, \lambda_3 = \sqrt{2}i, \lambda_2 = -i, \lambda_1 = i$.
 $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ ול- A יש 6 ערכים עצמיים. בפרט הריבוי אלגברי של כל ערך עצמי הוא 1 וכל הערכים עצמיים שונים זה מזה, אז A לכסינה.

שאלה 43

(א) נסמן

$$v_1 = 1 - x, \quad v_2 = 1 - x^2, \quad v_3 = 1 + x, \quad v_4 = 4 + 4x^3.$$

$$u_1 = v_1 = 1 - x.$$

$$\|u_1\|^2 = \int_0^1 dx (1 - x)^2 = \frac{1}{3}.$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1.$$

$$\langle v_2, u_1 \rangle = \int_0^1 dx (1 - x)(1 - x^2) = \frac{5}{12}.$$

$$u_2 = 1 - x^2 - \frac{\left(\frac{5}{12}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)}(1 - x) = -\frac{1}{4} + \frac{5x}{4} - x^2.$$

$$\|u_2\|^2 = \int_0^1 dx (1 - x^2)^2 = \frac{1}{80}.$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2.$$

$$\langle v_3, u_1 \rangle = \int_0^1 dx (1 + x)(1 - x) = \frac{2}{3}.$$

$$\langle v_3, u_2 \rangle = \int_0^1 dx (1 + x) \left(-\frac{1}{4} + \frac{5x}{4} - x^2 \right) = \frac{1}{12}.$$

$$u_3 = 1 + x - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)}(1 - x) - \frac{\left(\frac{1}{12}\right)}{\left(\frac{1}{80}\right)} \left(-\frac{1}{4} + \frac{5x}{4} - x^2 \right) = \frac{20x^2}{3} - \frac{16x}{3} + \frac{2}{3}.$$

$$\|u_3\|^2 = \int_0^1 dx \left(\frac{20x^2}{3} - \frac{16x}{3} + \frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{9} .$$

$$u_4 = v_4 - \frac{\langle v_4, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_4, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \frac{\langle v_4, u_3 \rangle}{\|u_3\|^2} u_3 .$$

$$\langle v_4, u_1 \rangle = \int_0^1 dx (1-x)(4+4x^3) = \frac{11}{5} .$$

$$\langle v_4, u_2 \rangle = \int_0^1 dx (4+4x^3) \left(-\frac{1}{4} + \frac{5x}{4} - x^2 \right) = \frac{1}{4} .$$

$$\langle v_4, u_3 \rangle = \int_0^1 dx (4+4x^3) \left(\frac{20x^2}{3} - \frac{16x}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{26}{15} .$$

$$u_4 = 4+4x^3 - \frac{\left(\frac{11}{5}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)}(1-x) - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{80}\right)} \left(-\frac{1}{4} + \frac{5x}{4} - x^2 \right) - \frac{\left(\frac{26}{15}\right)}{\left(\frac{4}{9}\right)} \left(\frac{20x^2}{3} - \frac{16x}{3} + \frac{2}{3} \right) = 4x^3 - 6x^2 + \frac{12x}{5} - \frac{1}{5} .$$

קיבלנו בסיס אורתוגונלי:

$$\left\{ u_1 = 1-x , \quad u_2 = -\frac{1}{4} + \frac{5x}{4} - x^2 , \quad u_3 = \frac{20x^2}{3} - \frac{16x}{3} + \frac{2}{3} , \quad u_4 = 4x^3 - 6x^2 + \frac{12x}{5} - \frac{1}{5} \right\}$$

$$.P_U(p(x)) = p(x) \text{ לכן } p(x) = \text{span} \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \quad (\text{ב})$$

$$\frac{\langle u_1, q(x) \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \frac{3(1-x)}{5}$$

$$\frac{\langle u_2, q(x) \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \frac{32}{7} \left(-x^2 + \frac{5x}{4} - \frac{1}{4} \right)$$

$$\frac{\langle u_3, q(x) \rangle}{\|u_3\|^2} u_3 = \frac{33}{35} \left(\frac{20x^2}{3} - \frac{16x}{3} + \frac{2}{3} \right)$$

$$\frac{\langle u_4, q(x) \rangle}{\|u_4\|^2} u_4 = \frac{1}{2} \left(4x^3 - 6x^2 + \frac{12x}{5} - \frac{1}{5} \right)$$

$$P_U(q(x)) = \frac{\langle u_1, q(x) \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle u_2, q(x) \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 + \frac{\langle u_3, q(x) \rangle}{\|u_3\|^2} u_3 + \frac{\langle u_4, q(x) \rangle}{\|u_4\|^2} u_4 = 2x^3 - \frac{9x^2}{7} + \frac{9x}{7} - \frac{1}{70} .$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} & A_{2,5} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} & A_{3,5} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} & A_{4,5} \\ A_{5,1} & A_{5,2} & A_{5,3} & A_{5,4} & A_{5,5} \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{נגדיר } u \text{ ונסמן} \quad (\text{א})$$

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} A_{1,1} + A_{1,2} + A_{1,3} + A_{1,4} + A_{1,5} \\ A_{2,1} + A_{2,2} + A_{2,3} + A_{2,4} + A_{2,5} \\ A_{3,1} + A_{3,2} + A_{3,3} + A_{3,4} + A_{3,5} \\ A_{4,1} + A_{4,2} + A_{4,3} + A_{4,4} + A_{4,5} \\ A_{5,1} + A_{5,2} + A_{5,3} + A_{5,4} + A_{5,5} \end{pmatrix} .$$

אם סכום של האיברים בכל שורה שווה ל- 5 אז

$$\begin{aligned} A_{1,1} + A_{1,2} + A_{1,3} + A_{1,4} + A_{1,5} &= 5 \\ A_{2,1} + A_{2,2} + A_{2,3} + A_{2,4} + A_{2,5} &= 5 \end{aligned}$$

וכן הלה, ונקבל

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5u ,$$

ז"א 5 ערך עצמי של A ששייך לווקטור עצמי $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ב) במטריצה B יש שורות זהות (ועמודות זהות) לכן $|B| = 0$ לכן B לא הפיכה לכן ל- B יש ערך עצמי ששווה ל- 0.

(ג) נחשב את הפולינום האופייני של B :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = 5B .$$

$$B^3 = B \cdot B^2 = B \cdot 5B = 5B^2 = 25B$$

$$B^4 = B \cdot B^3 = B \cdot 25B = 25B^2 = 125B .$$

$$B^5 = B \cdot B^4 = B \cdot 125B = 125B^2 = 625B .$$

$$B^5 - 5B^4 = 0 .$$

(ד) מסעיף הקודם B מאפסת את הפולינום $f(x) = x^5 - 5x^4 = x^5(x - 5) = 0$. הפולינום המינימלי מחלק כל פולינום שמתאפס ע"י B . נניח שלפולינום המינימלי יש שורשים מלבד 5 ו- 0 . אז הפולינום המינימלי לא מחלק את $f(x)$. סתירה.

שאלה 45

(א) A לא הפיכה. הסבר:

$$|A| = i \cdot (-i) \cdot 0 = 0$$

לכן A לא הפיכה.

(ב) A הפיכה. הסבר:

$$|A| = i \cdot (-i) \cdot (-1) = 1.$$

פולינום אופייני:

$$p_A(x) = (x + i)(x - i)(x + 1) = x^3 + x^2 + x + 1.$$

לפי משפט קיילי-המילטון:

$$p_A(A) = 0 \Rightarrow A^3 + A^2 + A + I = 0 \Rightarrow I = -(A^3 + A^2 + A) = A \cdot (-A^2 - A - I).$$

לפיכך

$$A^{-1} = -A^2 - A - I.$$

שאלה 46 $Au = \alpha u$ ו- $Bu = \beta u$ כאשר $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ סקלרים.

$$(AB - BA)u = ABu - BAu = \beta Au - \alpha Bu = (\alpha\beta - \beta\alpha)u = 0$$

כלומר $(AB - BA)u = 0$.

u ווקטור עצמי לכן $u \neq 0$ לכן $|AB - BA| = 0$.

שאלה 47

(א) נוכיח כי u_1, u_2 בת"ל. נרשום

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0 \quad (*)1$$

כאשר α_1, α_2 סקלרים. נכפיל ב- A :

$$A\alpha_1 u_1 + A\alpha_2 u_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2 = 0. \quad (*)2$$

נכפיל (*)1 ב- λ_1 :

$$\lambda_1 \alpha_1 u_1 + \lambda_1 \alpha_2 u_2 = 0 \quad (*)3$$

נקח את החיסור (*2)-(*3):

$$\lambda_1 \alpha_2 u_2 - \lambda_2 \alpha_2 u_2 = 0 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \alpha_2 u_2 = 0 .$$

$u_2 \neq 0 \Leftrightarrow$ ווקטור עצמי u_2
 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (נתון) $\Leftrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, לכן

$$\alpha_2 = 0 .$$

נציב זה ב- (*1) ונקבל

$$\alpha_1 u_1 = 0 .$$

$u_1 \neq 0 \Leftrightarrow$ ווקטור עצמי u_1 לפיכך

$$\alpha_1 = 0 .$$

לכן (*1) מתקיים רק אם $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ לפיכך u_1, u_2 בת"ל.

נוכיח כי u_1, u_2, u_3 בת"ל. נרשום

$$\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 = 0 \quad (\#1)$$

כאשר $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ סקלרים. נכפיל ב- A :

$$A\beta_1 u_1 + A\beta_2 u_2 + A\beta_3 u_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 \beta_1 u_1 + \lambda_2 \beta_2 u_2 + \lambda_3 \beta_3 u_3 = 0 . \quad (\#2)$$

נכפיל (#1) ב- λ_3 :

$$\lambda_3 \beta_1 u_1 + \lambda_3 \beta_2 u_2 + \lambda_3 \beta_3 u_3 = 0 \quad (\#3)$$

נקח את החיסור (#2)-(#3):

$$(\lambda_3 - \lambda_1) \beta_1 u_1 + (\lambda_3 - \lambda_2) \beta_2 u_2 = 0 .$$

u_1 ו- u_2 בת"ל אז זה מתקיים רק אם

$$(\lambda_3 - \lambda_1) \beta_1 = 0 , \quad (\lambda_3 - \lambda_2) \beta_2 = 0 .$$

u_1, u_2 ווקטורים עצמיים לכן $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$
 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \Leftrightarrow \lambda_3 - \lambda_1 \neq 0$ ו- $\lambda_3 - \lambda_2 \neq 0$.
 לכן $\beta_1 = 0$ ו- $\beta_2 = 0$.
 נציב זה ב- (#1):

$$\beta_3 u_3 = 0 .$$

$u_3 \neq 0 \Leftrightarrow$ ווקטור עצמי u_3 לכן

$$\beta_3 = 0 .$$

מצאנו כי (#3) מתקיים רק אם $\beta_1, \beta_2, \beta_3 = 0$ לכן u_1, u_2, u_3 בת"ל.

ווקטורים עצמיים של המטריצה אוניטרית מהווים בסיס אורתוגונלי. (ב)
 לפי זה, אם A אוניטרית אז הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ מהווה בסיס אורתוגונלי.

ג) לא.

אם A אוניטרית אז הערך מוחלט של על ערך עצמי יהיה 1. יש לנו 3 ערכים עצמיים שונים, אז כדי שהערך מוחלט של כל אחד ייה שווה ל-1. אז בהכרח לפחות אחד יהיה מספר מרוכב.

שאלה 48

$$ABu - BAu = 2Bu \quad \Rightarrow \quad ABu - \lambda Bu = 2Bu \quad \Rightarrow \quad ABu = (\lambda + 2)Bu .$$

נגדיר $w = Bu$. נניח כי $w \neq 0$. אז

$$Aw = (\lambda + 2)w .$$

ז"א $\lambda + 2$ ערך עצמי של A ששייך לווקטור עצמי w .
 $\operatorname{Re}(\lambda + 2) > \operatorname{Re} \lambda$. סתירה. לכן $w = Bu = 0$.

שאלה 49

א) נשים לב שכל סדרה $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in U$ נקבע ע"י השני האיברים הראשונים: a_1, a_2 , בגלל שהאיברים הבאים ניתנים ע"י הכלל נסיגה $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$. אז נקח לדוגמה $(a_1, a_2) = (1, 0), (0, 1)$ ונקבל בסיס $B = \{u_1, u_2\}$ של U כאשר

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \\ 21 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \\ 20 \\ \vdots \end{pmatrix} .$$

המטריצה המייצגת A של T לפי בסיס B הוא

$$A \equiv [T]_B = \begin{pmatrix} | & | \\ T(u_1) & T(u_2) \\ | & | \end{pmatrix}$$

$$T(u_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 21 \\ \vdots \end{pmatrix} = 0 \cdot u_1 + 3 \cdot u_2, \quad T(u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 20 \\ \vdots \end{pmatrix} = 1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 .$$

לכן

$$A = [T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

הפולינום האופייני של A :

$$p_A(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) .$$

הערכים עצמיים הם $-1, 3$.

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = -1$:

$$(A + I) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$V_{-1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

נסמן את הווקטור עצמי ששייך לע"ע -1 ב- v_{-1} . ז"א

$$v_{-1} = 1 \cdot u_1 - 1 \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \\ 21 \\ \vdots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \\ 20 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 3$:

$$(A - 3I) = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$V_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

נסמן את הווקטור עצמי ששייך לע"ע 3 ב- v_3 . ז"א

$$v_3 = 1 \cdot u_1 + 3 \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \\ 21 \\ \vdots \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \\ 20 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \\ 27 \\ 81 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

נמצא את הווקטורים עצמיים ששייכים לערך עצמי -1 :

$$T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

כך ש-

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} .$$

מכאן אנחנו נקבל את היחס

$$a_{n+1} = -a_n , \quad n = 1, 2, \dots .$$

לכן הסדרה $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ סדרה גיאומטרית עם איבר ראשון a_1 ומנת הסדרה -1 . לכן

$$a_i = (-1)^{i-1} a_1 .$$

נמצא את הווקטורים עצמיים ששייכים לערך עצמי 3:

$$T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

כך ש-

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

מכאן אנחנו נקבל את היחס

$$a_{n+1} = 3a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

לכן הסדרה $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ סדרה גיאומטרית עם איבר ראשון a_1 ומנת הסדרה 3. לכן

$$a_i = 3^{i-1}a_1.$$

(ב) מסעיף א' הסדרות

$$v_{-1} = ((-1)^{i-1})_{i=1}^{\infty}, \quad v_3 = (3^{i-1})_{i=1}^{\infty}$$

מהוות בסיס של U שמורכב מווקטורים עצמיים של T . (שימו לב שנבחר $a_1 = 1$). לפיכך כל סדרה $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ ניתן לרשום בצירוף לינארי של הווקטורים האלה:

$$(a_i)_{i=1}^{\infty} = \alpha v_{-1} + \beta v_3 = \alpha ((-1)^{i-1})_{i=1}^{\infty} + \beta (3^{i-1})_{i=1}^{\infty}$$

כאשר $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ סקלרים. נניח ש- $a_1 = 2$ ו- $a_2 = 7$. אז

$$\begin{aligned} 2 &= a_1 = \alpha + \beta, \\ 7 &= a_2 = -\alpha + 3\beta. \end{aligned}$$

הפתרון למערכת הזאת הוא

$$\alpha = -\frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{9}{4}.$$

לפיכך

$$\begin{aligned} (a_i)_{i=1}^{\infty} &= -\frac{1}{4} ((-1)^{i-1})_{i=1}^{\infty} + \frac{9}{4} (3^{i-1})_{i=1}^{\infty} \\ &= \frac{1}{4} ((-1)^i + 3^{i+1})_{i=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

לפיכך

$$a_n = \frac{1}{4} ((-1)^n + 3^{n+1}).$$

שאלה 50

(א) ווקטור עצמי $u \in \mathbb{F}^n, u \neq \bar{0}$ נקרא ווקטור עצמי של $\mathbb{F}^{n \times n}$, אם קיים סקלר $\lambda \in \mathbb{F}$ כך ש- $A \cdot \lambda = \lambda \cdot u$.

(ב) 1. נחשב את הפולינום האופייני של A :

$$\begin{aligned} p_A(x) &= |xI - A| \\ &= \begin{vmatrix} x-4 & 5 & -2 \\ -5 & x+7 & -3 \\ -6 & 9 & x-4 \end{vmatrix} \\ &= (x-4) \begin{vmatrix} x+7 & -3 \\ 9 & x-4 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -6 & x-4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -5 & x+7 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} \\ &= (x-4)((x+7)(x-4) + 27) - 5(-5(x-4) - 18) - 2(-45 + 6(x+7)) \\ &= (x-4)(x^2 + 3x - 1) - 5(-5x + 2) - 2(-3 + 6x) \\ &= (x-4)(x^2 + 3x - 1) - 5(-5x + 2) - 2(-3 + 6x) \\ &= x^3 + 3x^2 - x - 4x^2 - 12x + 4 + 25x - 10 + 6 - 12x \\ &= x^3 - x^2 \\ &= x^2(x - 1). \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 0$ מריבוי אלגבכי 2.

$\lambda = 1$ מריבוי אלגבכי 1.

נחשב את המרחב עצמי ששייך לערך עצמי 0:

$$\begin{aligned} (A - 0 \cdot I|0) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow 4R_2 - 5R_1 \\ R_3 \rightarrow 4R_3 - 6R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow 3R_1 - 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow \frac{1}{12}R_1 \\ R_2 \rightarrow -\frac{1}{3}R_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\text{פתרון: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ לכן המרחב עצמי ששייך לערך עצמי 0 הינו} \end{aligned}$$

$$V_0 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

בפרט $\dim V_0 = 1$.

נחשב את המרחב עצמי ששייך לערך עצמי 1:

$$\begin{aligned} (A - 1 \cdot I|0) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow 3R_2 - 5R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{3}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ לכן המרחב עצמי ששייך לערך עצמי 0 הינו

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

בפרט $\dim V_1 = 1$.

(2) שיטה 1:

נשים לב כי $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. מאחר וסכום המימדים של המרחבים העצמיים השונים הוא $\dim V_0 + \dim V_1 = 2 \neq \dim 3$ אז A לא ניתנת ללכסון.

שיטה 2:

עבור הערך עצמי $\lambda = 0$, הריבוי אלגברי לא שווה להריבוי גיאומטרי לכן A לא לכסינה. לא רלוונטי.

(3)

(4)

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2020 \\ 2020 \\ 2020 \end{pmatrix} = A \cdot 2020 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2020 \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

הווקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הינו ווקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי $\lambda = 1$, לכן

$$A^{2019} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1^{2019} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ לפיכך}$$

$$A^{2019} \cdot \begin{pmatrix} 2020 \\ 2020 \\ 2020 \end{pmatrix} = A^{2019} \cdot 2020 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2020 \cdot A^{2019} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2020 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2020 \\ 2020 \\ 2020 \end{pmatrix}.$$

הטענה נכונה. הוכחה:

(1) ג

שיטה 1

λ ערך עצמי של A לכן

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow |(A - \lambda I)^t| = 0 \Rightarrow |A^t - (\lambda I)^t| = 0 \Rightarrow |A^t - \lambda I| = 0$$

לכן λ ערך עצמי של A^t .

שיטה 2

התנאים הבאים שקולים:

(1) λ הינו ערך עצמי של A .

(2) המטריצה $A - \lambda I$ איננה הפיכה.

(3) המטריצה

$$(A - \lambda I)^t = A^t - (\lambda I)^t = A^t - \lambda I$$

איננה הפיכה.

(4) λ הינו ערך עצמי של A^t .

הסבר:

(1) שקול ל- (2) לפי המשפט: λ ע"ע של A אם $A - \lambda I$ איננה הפיכה.

(2) שקול ל- (3) לפי המשפט: מטריצה הפיכה אם $A - \lambda I$ איננה הפיכה.

(3) שקול ל- (4) לפי אותו המשפט שהשתמשנו בו להראות את " (1) שקול ל- (2)".

(2) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ הווקטור } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ווקטור עצמי של } A \text{ ששייך לערך עצמי } \lambda = 0.$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ אבל } u \text{ לא ווקטור עצמי של המשוואות}$$

שאלה 51 $A = \bar{A}$ לכן A צמודה לעצמה לכן A נורמלית לכן A לכסינה אוניטרית לפי משפט הלכסון אוניטרית.

נמצא את הפולינום האופייני של A :

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & -i & -1 \\ i & x-3 & i \\ -1 & -i & x-3 \end{vmatrix} \\ = (x-5)(x-2)^2.$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 5$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 2.

המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 2$:

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 5$:

$$V_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נסמן הווקטורים בבסיס של V_2 ב- $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. ונסמן הווקטור של הבסיס של V_5 ב- $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$.

$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. נבנה בסיס אורתוגונלי של V_2 ע"י שיטת גרם שמידט:

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \|u_1\|^2 = 2.$$

$$\begin{aligned} u_2 &= v_2 - \frac{1}{\|u_1\|^2} \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1 \\ &= \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

בסה"כ קיבלנו בסיס אורתוגונלי של V_2 :

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ i \end{pmatrix} \right\}.$$

כעת נבנה בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{ \hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \hat{u}_2 = \sqrt{\frac{1}{6}} \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ i \end{pmatrix} \right\}.$$

בבסיס של V_5 יש רק ווקטור אחד ופיכך הבסיס כבר אורתוגונלי. נסמן הבסיס האורתוגונלי של V_5 ב-

$$\left\{ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

נבנה בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{ \hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

העמודות של המטריצה Q הנדרשת הן הווקטורים בבסיסים האורתונורמליים של המרחבים העצמיים:

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{i}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

והמטריצה האלכסונית D הנדרשת היא המטריצה שעל האלכסון הראשי שלה יש את הערכים העצמיים של A באותו סדר שהוקטורים העצמיים מופיעים ב- Q :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

שאלה 52

(א) נסמן $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. לפי המשפט הפירוק הספקטרלי:

$$A \cdot w = \lambda_1 P_{V_{\lambda_1}}(w) + \lambda_2 P_{V_{\lambda_2}}(w) ,$$

כאשר λ_1, λ_2 הערכים העצמיים של A ו- $P_{V_{\lambda_i}}(w)$ ההיטל של w על המרחב העצמי V_{λ_i} ששייך לערך עצמי λ_i . נציב $\lambda_2 = 2, \lambda_1 = 1$:

$$A \cdot w = 1 \cdot P_{V_1}(w) + 2 \cdot P_{V_2}(w) . \quad (\#1)$$

נחשב את $P_{V_1}(w)$ (ההיטל של $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ על המרחב עצמי V_1). נצטרך לבסיס אורתוגונלי של V_1 : נסמן

$$V_1 = \left\{ x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נבנה בסיס אורתוגונלי ע"י התהליך גרם שמידט:

$$u_1 = x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \|u_1\|^2 = 2 .$$

$$\begin{aligned} u_2 &= x_2 - \frac{1}{\|u_1\|^2} \langle x_2, u_1 \rangle \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

נבחר בסיס אורתוגונלי של V_1 :

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$P_{V_1}(w) = P_{V_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{\langle w, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle w, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

$$\|u_1\|^2 = 2, \quad \|u_2\|^2 = 6.$$

$$\langle w, u_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1, \quad \langle w, u_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 11.$$

$$P_{V_1}(w) = P_{V_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \frac{11}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}. \quad (\#2)$$

$$P_{V_2}(w) = w - P_{V_1}(w) \quad (\#3)$$

נציב (#2) ו- (#3) ב- (#1):

$$\begin{aligned} A \cdot w &= 1 \cdot P_{V_1}(w) + 2 \cdot P_{V_2}(w) \\ &= P_{V_1}(w) + 2(w - P_{V_1}(w)) \\ &= 2w - P_{V_1}(w) \\ &= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(ב)

$$\begin{aligned} A^{10}w &= \lambda_1^{10} P_{V_{\lambda_1}}(w) + \lambda_2^{10} P_{V_{\lambda_2}}(w) \\ &= 1^{10} P_{V_1}(w) + 2^{10} P_{V_2}(w) \\ &= P_{V_1}(w) + 2^{10} (w - P_{V_1}(w)) \\ &= (1 - 1024) P_{V_1}(w) + 1024w \\ &= -1023 P_{V_1}(w) + 1024w \\ &= -1023 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} + 1024 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -340 \\ -339 \\ 345 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ג

$$A = \begin{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

לפי משפט הפירוק הספקטרלי:

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= 1 \cdot P_{V_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot P_{V_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot P_{V_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - P_{V_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= -P_{V_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

מאותה מידה:

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -P_{V_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -P_{V_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} P_{V_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_1 \right\rangle}{\|u_1\|^2} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 \right\rangle}{\|u_2\|^2} \\ &= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{2} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{6} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{V_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_1 \right\rangle}{\|u_1\|^2} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 \right\rangle}{\|u_2\|^2} \\
&= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{2} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{6} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{V_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 \right\rangle}{\|u_1\|^2} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 \right\rangle}{\|u_2\|^2} \\
&= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{2} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{6} \\
&= \frac{2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -P_{V_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -P_{V_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -P_{V_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

לפיכך

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

אפשרות 4)

[illegible]

שאלה 54

(א) הפולינום האופייני הוא פולינום מתוקן לכן יש לו את הצורה

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + x^n.$$

לפי המשפט קיילי-המילטון, A מאפסת את הפולינום האופייני שלה. ז"א

$$\alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + A^n = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 I = -\alpha_1 A - \dots - A^n = A \left((-\alpha_1)I + (-\alpha_2)A + \dots + (-1)A^{n-1} \right)$$

הקבוע α_0 בהפולינום האופייני שווה ל- $|A|$. A הפיכה (נתון) לכן $|A| \neq 0$ לכן $\alpha_0 \neq 0$ לכן ההופכית α_0^{-1} קיימת. נכפיל ב- α_0^{-1} ונקבל:

$$I = A \left(\left(\frac{-\alpha_1}{\alpha_0} \right) I + \left(\frac{-\alpha_2}{\alpha_0} \right) A + \dots + \left(\frac{-1}{\alpha_0} \right) A^{n-1} \right)$$

מכאן נקבל כי

$$A^{-1} = \left(\frac{-\alpha_1}{\alpha_0} \right) I + \left(\frac{-\alpha_2}{\alpha_0} \right) A + \dots + \left(\frac{-1}{\alpha_0} \right) A^{n-1}$$

ולפיכך

$$A^{-1} \in \text{span} \{I, A, \dots, A^{n-1}\} \text{ .}$$

(ב) נניח ש- $\{I_n, A, A^2, \dots, A^m\}$ ת"ל. אז קיימים סקלירס שאינם כולם אפסים כך ש-

$$\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{m-1} A^{m-1} + \alpha_m A^m = 0$$

מכאן A מאפסת $\sum_{i=0}^m \alpha_i x^i$ שהוא פולינום שונה מאפס מסדר m לכל היותר. להיפך, נניח ש- $P(x) = \sum_{i=0}^m \alpha_i x^i$ אינו פולינום האפס כך ש- $P(A) = 0$. אז

$$\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \dots + \alpha_m A^m = 0$$

הוא צירוף לנארי לא טריוויאלי.

ג) נניח ש $A^m \in \text{span}\{I_n, A, A^2, \dots, A^{m-1}\}$ אז קיימים סקלרים כך ש

$$A^m = \alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{m-1} A^{m-1}$$

ז"א

$$A^m - \alpha_{m-1} A^{m-1} - \alpha_{m-2} A^{m-2} - \dots - \alpha_1 A - \alpha_0 I_n = 0$$

לכן A מאפסת את

$$P(x) = x^m - \alpha_{m-1} x^{m-1} - \dots - \alpha_1 x - \alpha_0 \in \mathbb{F}[x].$$

נניח ש- A מאפסת את הפולינום

$$Q(x) = \beta_m x^m + \beta_{m-1} x^{m-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0 \in \mathbb{F}[x]$$

כאשר $Q(x) \in \mathbb{R}_m[x]$. כיוון ש הסדר של $Q(x)$ הוא m אז $\beta_m \neq 0$. נעביר אגפים:

$$\beta_m A^m = -(\beta_{m-1} A^{m-1} + \dots + \beta_1 A + \beta_0 I_n)$$

נחלק שני האגפים ב β_m :

$$A^m = -\left(\frac{\beta_{m-1}}{\beta_m} A^{m-1} + \dots + \frac{\beta_1}{\beta_m} A + \frac{\beta_0}{\beta_m} I_n\right)$$

קיבלנו כי $A^m \in \text{span}\{I_n, A, A^2, \dots, A^{m-1}\}$.

שאלה 55

$A, B \Rightarrow$ דומות לכן קיימת $C \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הפיכה כך ש $B = C^{-1}AC$. לכן

$$P(B) = P(C^{-1}AC) = C^{-1}P(A)C$$

אם $P(A) = \lambda I_n$ אז

$$P(B) = C^{-1}\lambda I_n C = \lambda I_n.$$

\Leftarrow

לכן $A = CBC^{-1}$

$$P(A) = P(CBC^{-1}) = CP(B)C^{-1}$$

אם $P(B) = \lambda I_n$ אז

$$P(A) = C\lambda I_n C^{-1} = \lambda I_n.$$

שאלה 56

א) הפולינום האופייני הוא $p_A(x) = (x+2)(x-2)(x-5)$. ערכים עצמיים:

$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = -2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 5$ מריבוי אלגברי 1.

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} : \text{מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 2}$$

$$V_{-2} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1-3i \\ 5 \end{pmatrix} \right\} : \text{מרחב עצמי ששייך לערך עצמי -2}$$

$$V_5 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1+3i \\ 2 \end{pmatrix} \right\} : \text{מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 5}$$

(ב) נשים לב כי $\bar{A} = A$, כלומר A צמודה לעצמה ולכן A נורמלית ולכן הווקטורים עצמיים מהווים בסיס אורתוגונלי.

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-3i & 0 & -1+3i \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ו- } D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ כאשר } A = QDQ^{-1}$$

(ג) לכל פונקציה $f(x)$,

$$f(A) = f(QDQ^{-1}) = Qf(D)Q^{-1}.$$

לכן

$$e^A = e^{QDQ^{-1}} = Qe^DQ^{-1}.$$

$$f(D) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} \text{ כיצד נחשב } e^D? \text{ נשים לב כי אם } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ אלכסונית אז}$$

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \text{ באותה מידה}$$

$$e^A = e^{QDQ^{-1}} = Qe^DQ^{-1} = Q \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^5 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

שאלה 57 הפולינום האופייני של A הוא

$$p_A(x) = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2.$$

לפי משפט קיילי-המילטון,

$$A^2 + A - 2I = 0.$$

לפיכך

$$A^2 = -A + 2I . \quad (*)$$

לכן $a_1 = -1, b_1 = 2$. כעת נכפיל (*) ב- A :

$$\begin{aligned} A^3 &= A \cdot A^2 \\ &= -A^2 + 2A \\ &= -(-A + 2I) + 2A \\ &= 3A - 2I . \end{aligned}$$

לכן $a_2 = 3, b_2 = -2$. באופן כללי,

$$\begin{aligned} A^{n+2} &= A \cdot A^{n+1} \\ &= A(a_n A + b_n I) \\ &= a_n A^2 + b_n A \\ &= a_n(-A + 2I) + b_n A \\ &= (-a_n + b_n)A + 2a_n I . \end{aligned}$$

מכאן

$$a_{n+1} = -a_n + b_n , \quad b_{n+1} = 2a_n .$$

לכן קיבלנו כלל נסיגה

$$a_{n+2} = -a_{n+1} + b_{n+1} = -a_{n+1} + 2a_n , \quad a_2 = 3 , \quad a_1 = -1 .$$

שאלה 58 יהי V המרחב המכפלה פנימית הסטנדרטית מעל הדה \mathbb{R} . נגדיר את שני ווקטורים $a, b \in V$:

$$a = \begin{pmatrix} \sqrt{1} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \vdots \\ \sqrt{n} \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 3^{1/2} \\ 3^{2/2} \\ 3^{3/2} \\ \vdots \\ 3^{n/2} \end{pmatrix} .$$

לפי אי-השוויון קושי שוורץ:

$$|\langle a, b \rangle| = \|a\| \cdot \|b\| .$$

$$\langle a, b \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{1} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \vdots \\ \sqrt{n} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 3^{1/2} \\ 3^{2/2} \\ 3^{3/2} \\ \vdots \\ 3^{n/2} \end{pmatrix} \right\rangle = 3^{1/2} \cdot \sqrt{1} + 3^{2/2} \cdot \sqrt{2} + 3^{3/2} \cdot \sqrt{3} + \dots + 3^{n/2} \cdot \sqrt{n} = \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \cdot 3^{k/2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{k \cdot 3^k} .$$

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle} = \sqrt{\sqrt{1} \cdot \sqrt{1} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} = \sqrt{\sum_{k=1}^n k} .$$

$$\sum_{k=1}^n = \frac{1}{2}n \cdot (n+1) \text{ נציב ונקבל}$$

$$\|a\| = \sqrt{\frac{1}{2}n \cdot (n+1)}.$$

$$\|b\| = \sqrt{\langle b, b \rangle} = \sqrt{3^{1/2} \cdot 3^{1/2} + 3^{2/2} \cdot 3^{2/2} + 3^{3/2} \cdot 3^{3/2} + \dots + 3^{n/2} \cdot 3^{n/2}} = \sqrt{\sum_{k=1}^n 3^k}$$

נשים לב כי $\sum_{k=1}^n 3^k$ הוא טור הנדסי אשר האיבר הראשון שלו הוא 3 והמנת הסדרה היא 3. הנוסחה לסכום של n

איברים של טור הנדסי עם איבר ראשון a ומנת הסדרה q היא $\sum_{k=1}^n a \cdot q^{k-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$. נציב $a=3$ ו- $q=3$

$$\text{ונקבל} \quad \sum_{k=1}^n 3 \cdot 3^{k-1} = \sum_{k=1}^n 3^k = \frac{3(1-3^n)}{1-3} = \frac{3(3^n-1)}{2}$$

$$\|b\| = \sqrt{\frac{3(3^n-1)}{2}}.$$

לפיכך לפי אי-השוויון קושי שוורץ:

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \cdot 3^{k/2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{k \cdot 3^k} \leq \sqrt{\frac{1}{2}n \cdot (n+1)} \cdot \sqrt{\frac{3(3^n-1)}{2}} = \sqrt{(n^2+n) \cdot \frac{3}{4} \cdot (3^n-1)} = \frac{1}{2} \sqrt{(n^2+n) \cdot 3(3^n-1)}.$$

שאלה 59

הפולינום האופייני הוא $p_A(x) = (x-5)(x+3) = x^2 - 2x - 15$. לפי משפט קיילי המילטון, $p_A(A) = 0$.

לפיכך

$$A^2 - 2A - 15I = 0 \quad \Rightarrow \quad A^2 = 2A + 15I.$$

לכן $c_2 = 15$, $b_2 = 2$

נרשום

$$A^n = b_n A + c_n I.$$

נכפיל ב- A :

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = (b_n A + c_n I) A = b_n A^2 + c_n A = b_n (2A + 15I) + c_n A = (2b_n + c_n) A + 15b_n I.$$

מכאן

$$b_{n+1} = 2b_n + c_n, \quad c_{n+1} = 15b_n.$$

שאלה 60 נגדיר ווקטורים $a, b \in \mathbb{R}^6$

$$a = \begin{pmatrix} \sqrt{x} \\ \sqrt{y} \\ \sqrt{z} \\ \sqrt{w} \\ \sqrt{s} \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}} \\ \frac{1}{\sqrt{y}} \\ \frac{1}{\sqrt{z}} \\ \frac{1}{\sqrt{w}} \\ \frac{1}{\sqrt{s}} \\ \frac{1}{\sqrt{t}} \end{pmatrix}.$$

תהי \langle, \rangle המכפלה הפנימית הסטנדרטית של \mathbb{R}^6 . לפי אי-השוויון קושי-שוורץ:

$$|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\| .$$

$$\langle a, b \rangle = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{z} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} + \sqrt{w} \cdot \frac{1}{\sqrt{w}} + \sqrt{s} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} + \sqrt{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} = 6 .$$

$$\|a\| = \sqrt{x + y + z + w + s + t} , \quad \|b\| = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t}} .$$

נציב את הביטויים האלה באי-שוויון קושי-שוורץ ונקבל

$$6 \leq \sqrt{x + y + z + w + s + t} \cdot \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t}} \leq \sqrt{6} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t}}$$

לכן

$$\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t}} \geq \sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} \geq 6 .$$