

## שיעור 6

### אי-כריעות

### 6.1 השפות $L_d$ , $L_{\text{halt}}$ , $L_{\text{acc}}$ לא כריעות

**הגדרה 6.1**  $L_{\text{acc}}$

$$L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} \in RE \setminus R$$

**הגדרה 6.2**  $L_{\text{halt}}$

$$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ עוצרת על } M\} \in RE \setminus R$$

**הגדרה 6.3**  $L_d$

$$L_d = \{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M)\} \notin RE$$

**משפט 6.1**  $L_{\text{acc}} \in RE$

$$L_{\text{acc}} \in RE .$$

**הוכחה:** מכיוון ש-  $L(U) = L_{\text{acc}}$  כאשר  $U$  המכונת טיורינג האוניברסלית אשר מקבלת את  $L_{\text{acc}}$ , לכן  $L_{\text{acc}} \in RE$ . ■

**משפט 6.2**  $L_{\text{halt}} \in RE$

$$L_{\text{halt}} \in RE .$$

**הוכחה:** נבנה מ"ט  $U'$  שהיא למעשה  $U$  פרט למקום שבו  $U$  עצמה ודחתה,  $U'$  תעוצר ותקבל.

נווכיח כי  $U'$  מקבלת את  $L_{\text{halt}}$ :

אם  $x \in L_{\text{halt}}$

$w$  עוצרת על  $M$  ו-  $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$

$x$  עוצרת ומקבלת את  $U' \Leftarrow$

אם  $x \notin L_{\text{halt}}$  ⇐ שני מקרים:

•  $U'$  דוחה את  $x$ .

•  $M$  לא עוצרת על  $U'$  לא עוצרת על  $w$ .

### משפט 6.3 $L_d \notin RE$

$$L_d \notin RE .$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי  $L_d \in RE$ .

• אם  $M$  מקבלת את  $L_d$  ⇐

$$. L(M_d) = L_d \Leftarrow$$

נבדוק ריצה של  $M_d$  על  $\langle M_d \rangle$ :

• אם  $L(M_d) \neq L_d \Leftarrow \langle M_d \rangle \notin L_d \Leftarrow \langle M_d \rangle \in L(M_d)$

• אם  $L(M_d) \neq L_d \Leftarrow \langle M_d \rangle \in L_d \Leftarrow \langle M_d \rangle \notin L(M_d)$

בשני המקרים קיבלנו סתיירה לכך ש-  $L_d \notin RE$  ולכן  $L(M_d) = L_d$ .

### משפט 6.4 $L_{\text{acc}} \text{ לא בריעה}$

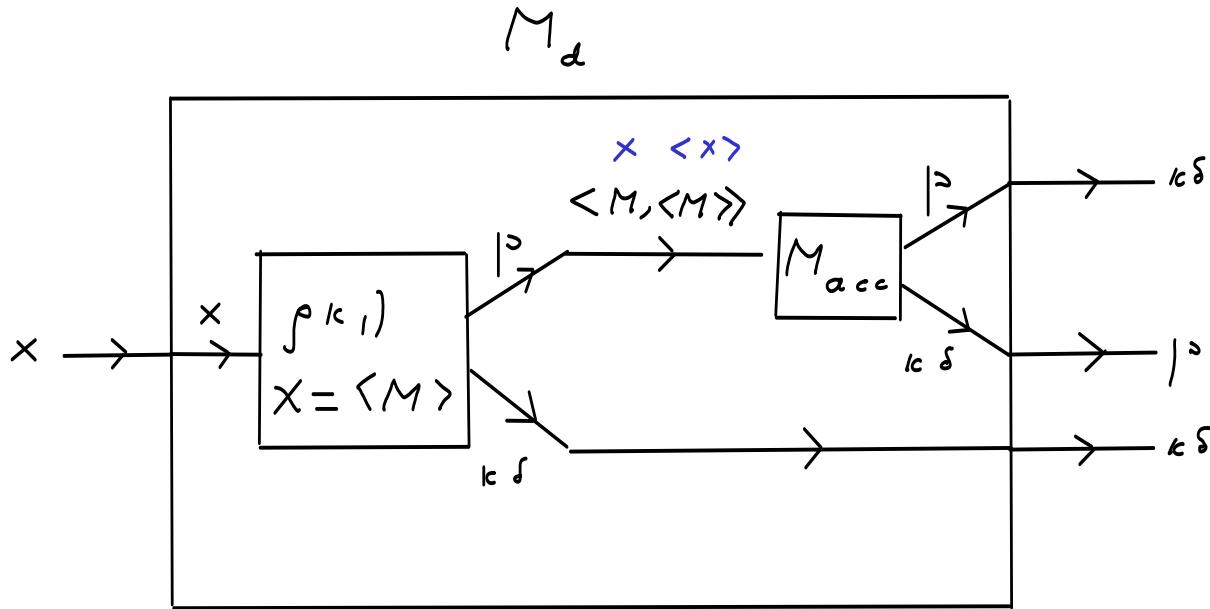
$$L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} \notin R .$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי  $L_{\text{acc}} \in R$  ותהי  $M_{\text{acc}}$  המכריעה את  $L_{\text{acc}}$ .

נשתמש ב-  $M_{\text{acc}}$  כדי לבנות מ"ט  $M_d$  המכריעה את  $L_d$  (בסתירה לכך ש-  $L_d \notin RE$  כפי שהוכחנו במשפט 6.3).

$$L_d = \{\langle M, w \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M)\} .$$

התאור של  $M_d$ 

: $x$  על קלט  $= M_d$

**1)** בודקת האם  $x = \langle M \rangle$ . אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

**2)** מחשבת את  $\langle x \rangle = \langle\langle M \rangle\rangle$

**3)** מרייצה את  $\langle M, \langle M \rangle \rangle$  על  $M_{acc}$

- אם  $M_{acc}$  מקבלת  $M_d \Leftarrow$  דוחה.

- אם  $M_{acc}$  דוחה  $\Leftarrow$  מקבלת.

כעת נוכיח כי  $M_d$  מכירעה את  $L_d$ :

אם  $x \in L_d$

$\langle M \rangle \notin L(M) \wedge x = \langle M \rangle \Leftarrow$

$\langle M, \langle M \rangle \rangle$  דוחה את הזוג  $\Leftarrow M_{acc}$

$x$  מקבלת את  $M_d \Leftarrow$

אם  $x \notin L_d$  שני מקרים:

$x$  דוחה את  $M_d \Leftarrow x \neq \langle M \rangle$  :**(1)**

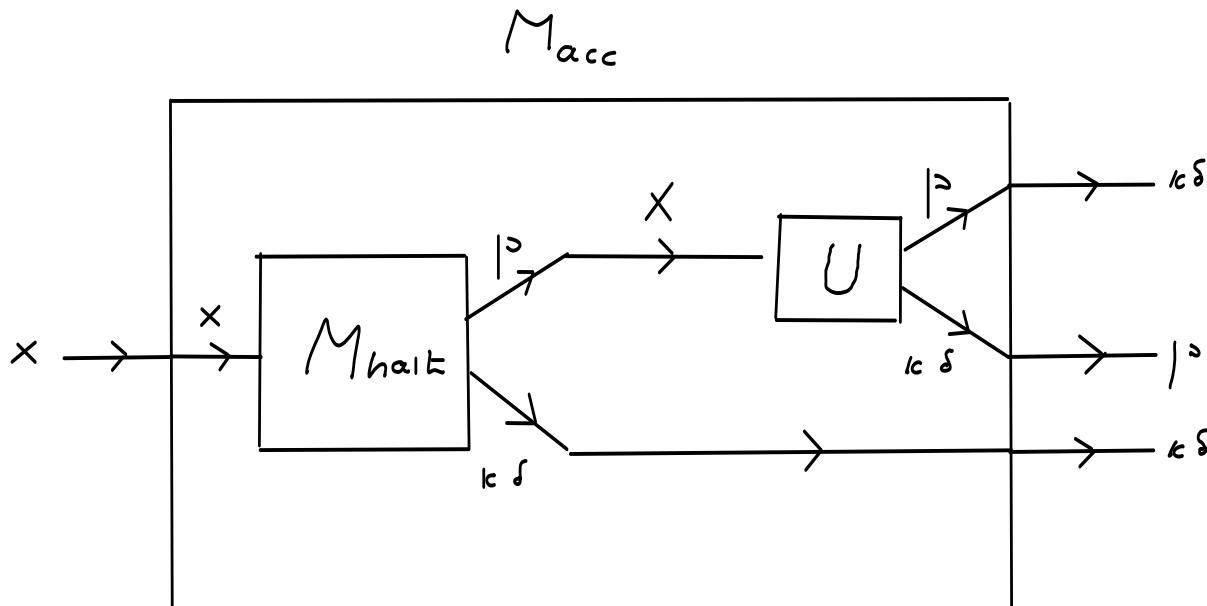
מקרה (2):  $\langle M \rangle \in L(M) \wedge x = \langle M \rangle$

$\langle M, \langle M \rangle \rangle$  מקבלת את זוג  $M_{acc} \Leftarrow$

$x$  דוחה את  $M_d \Leftarrow$

**משפט 6.5 לא כרעה**  $L_{\text{halt}}$ 

$$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ עצרת על } M \} \notin R .$$

**הוכחה:**נניח בשילhouette כי  $L_{\text{halt}} \in R$  ותהי  $M_{\text{halt}} \in R$  מ"ט המכריעה את  $L_{\text{halt}}$ .נשתמש בו- כדי לבנות מ"ט המכריעה את  $L_{\text{acc}}$  (בסתירה לכך ש- כפי שהוכחנו במשפט 6.4 ).התאור של  $M_{\text{acc}}$  $x$  על קלט :  $M_{\text{acc}}$ 1) מ裏יצה את  $M_{\text{acc}}$  על  $x$ 

- אם  $M_{\text{acc}}$  דוחה  $M_{\text{halt}}$  דוחה.
- אם  $M_{\text{acc}}$  מקבלת  $M_{\text{halt}}$  מ裏יצה את  $U$  על  $x$  ועונה כמוה.

אבחנהנוכיח כי  $M_{\text{acc}}$  מכריעה את  $L_{\text{acc}}$ אם  $x \in L_{\text{acc}}$ 

$$\langle w \rangle \in L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$$

מקבלת את  $x$  וגם  $U$  מקבלת את  $x$   $M_{\text{halt}} \Leftarrow$ מקבלת את  $M_{\text{acc}}$   $\Leftarrow$  $.x$  מקבלת את  $M_{\text{acc}}$   $\Leftarrow$

אם  $x \notin L_{\text{acc}}$  ⇔ שני מקרים:

מקרה (1)  $x \neq \langle M, w \rangle$ :

דוחה את  $M_{\text{halt}} \Leftarrow$   
דוחה את  $x \cdot M_{\text{acc}} \Leftarrow$

מקרה (2)  $\langle w \rangle \notin L(M)$  ו-  $x = \langle M, w \rangle$ :

מקרה (א):  $M$  לא עוצרת על  $w$  דוחה את  $x$ .

מקרה (ב):  $M$  דוחה את  $w$  מקבלת את  $x$  אבל  $M_{\text{halt}} \Leftarrow$  דוחה את  $x$ .

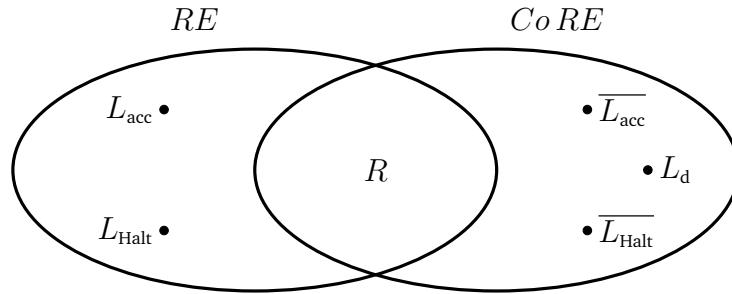
הראנו כי  $M_{\text{acc}}$  מכיריעת  $L_{\text{acc}}$  בסתייה לכך ש-  $L_{\text{acc}} \notin R$ .  
 $L_{\text{halt}} \notin R$  לכן

## משפט 6.6

$$L_{\text{acc}} \in RE \setminus R \Rightarrow \bar{L}_{\text{acc}} \notin RE ,$$

$$L_{\text{halt}} \in RE \setminus R \Rightarrow \bar{L}_{\text{halt}} \notin RE ,$$

$$L_d \notin RE \setminus R .$$



## 6.2 השפה $L_E$ לא כריעה

### הגדרה 6.4 השפה $L_E$

$$L_E = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\} .$$

### משפט 6.7 $L_E \notin R$

$$L_E \notin R .$$

כלומר  $L_E$  לא כריעה.

הוכחה:

נניח בשילילה כי  $L_E$  כריעה. אז נבנה מ"ט  $M_{\text{acc}}$  המכיריעת  $L_{\text{acc}}$  באופן הבא.

בנייה של  $M_w$

ראשית נגדיר את המ"ט  $M_w$ :

על כל קלט  $x = M_w$ :

(1) אם  $x \neq w$  ⇐ דוחה.

(2) אם  $x = w$  אז מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוות.

### אבחנה

אם  $x = w$  מקבלת את  $w$  אז  $L(M_w) = \Sigma^*$ .

אם  $x \neq w$  או אם  $M$  דוחה את  $w$  אז  $L(M_w) = \emptyset$ .

### בנייה של $M_{\text{acc}}$

נניח כי קיימת מ"ט  $M_E$  המכrica את  $L_E$ . אז נבנה מ"ט  $M_{\text{acc}}$  המכrica את  $L_{\text{acc}}$ :

על כל קלט  $x = M_{\text{acc}}$ :

(1) אם  $x \neq \langle M, w \rangle$  ⇐ דוחה.

(2) אם  $x = \langle M, w \rangle$ , בעזרת התאור  $\langle M, w \rangle$ , בונה מ"ט  $M_w$ :

(3) מריצה  $M_E$  על  $M_w$ :

(4) • אם  $M_E$  מקבלת ⇐ דוחה.

• אם  $M_E$  דוחה ⇐ מקבלת.

### נכונות

$\langle M_w \rangle$  דוחה  $M_E$  ⇐  $L(M_w) = \Sigma^* \neq \emptyset$  ⇐  $w \in L(M)$  ו-  $x = \langle M, w \rangle$  ⇐  $x \in L_{\text{acc}}$  מקבלת.  $M_{\text{acc}}$  ⇐

אם  $x \notin L_{\text{acc}}$  ⇐ שני מקרים:

מקרה 1:  $M_{\text{acc}}$  מקבלת  $M_E$  ⇐  $L(M_w) = \emptyset$  ⇐  $x \neq \langle M, w \rangle$

מקרה 2:  $M_{\text{acc}}$  ⇐  $\langle M_w \rangle$   $M_E$  ⇐  $L(M_w) = \emptyset$  ⇐  $w \notin L(M)$  ו-  $x = \langle M, w \rangle$

### לסיכום:

אם  $L_E$  כרעה אז אפשר לבנות מ"ט  $M_{\text{acc}}$  המכrica את  $L_{\text{acc}}$  בסתייה לכך ש-  $L_{\text{acc}} \notin R$ .  
לכן  $L_E \notin R$ .

**משפט 6.8**  $L_E \notin RE$

$L_E \notin RE$

הוכחה:  
הרעיון

נבנה מ"ט א"ד  $N$  המתקבלת את

$$\bar{L}_E = \{\langle M \rangle \mid L(M) \neq \emptyset\}$$

 $\square$  על קלט  $:x = N$ (1) אם  $x \neq \langle M \rangle \Leftarrow$  דוחה.(2) אם  $x \in N$  בוחרת מילה  $w \in \Sigma^*$   $w$  באופן א"ד.(3) מರיצה  $M$  על  $w$ .• אם  $M$  מקבלת  $N$  מקבלת.• אם  $M$  דוחה  $N$  דוחה.הוכחת הנכונותאם  $x \in \bar{L}_E$  $L(M) \neq \emptyset \wedge x = \langle M \rangle \Leftarrow$  $w \in L(M) \Leftarrow \text{קיימת מילה } w \in \Sigma^* \text{ כך ש-}$  $w \Leftarrow \exists \text{ נייחוש } w \in \Sigma^* \text{ כך ש } M \text{ מקבלת את } w$  $x = \langle M \rangle \Leftarrow \text{קיים חישוב של } N \text{ המכל את }$  $.x \in L(N) \Leftarrow$ לכן קיימת מ"ט א"ד  $N$  המתקבלת את השפה  $\bar{L}_E$  שכן  $\bar{L}_E \in RE$ cut נוכיח כי  $.L_E \notin RE$ 

$.L_E \in R$ , 5.1 הוכחנו לעלה ש-  $\bar{L}_E \in RE$ . לכן  $L_E \in RE$  משפט או בסתרה לכך ש-  $L_E \notin R$ .  
 $L_E \notin RE$  לכן  $L_E \notin R$ .

**6.3 השפה  $L_{EQ}$  לא כריעה****הגדרה 6.5**

$$L_{EQ} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\}$$

**משפט 6.9**

$$L_{EQ} \notin R$$

השפה  $L_{EQ}$  לא כריעה.

נניח בשלילה כי  $L_{EQ}$  כריעה. תהי  $M_{EQ}$  מ"ט המכריעה את  $L_E$  באופן הבא.

### בנייה של $M_E$

על כל קלט  $x = M_E$

• אם  $x \neq \langle M \rangle$  דוחה. **(1)**

• אם  $x$ , מריצה  $M_\emptyset$  על  $M_{EQ}$  כאשר  $\langle M, M_\emptyset \rangle$  המ"ט שדוחה כל קלט. **(2)**

• אם  $M_{EQ}$  מקבלת  $M_E$  מתקבלת. **(3)**

• אם  $M_{EQ}$  דוחה דוחה. **(4)**

### נכונות

אם  $x \in L_E$

$L(M) = \emptyset \wedge x = \langle M \rangle \Leftarrow$

$L(M) = L(M_\emptyset) \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle \in L_{EQ} \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle$  מקבלת  $M_{EQ} \Leftarrow$

$M_E$  מקבל. **(5)**

אם  $x \notin L_E$  שני מקרים:

• מקרה 1:  $M_E \Leftarrow x \neq \langle M \rangle$

• מקרה 2:  $L(M) \neq \emptyset \wedge x = \langle M \rangle \Leftarrow$

$L(M) \neq L(M_\emptyset) \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle \notin L_{EQ} \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle$  דוחה  $M_{EQ} \Leftarrow$

$M_E$  דוחה. **(6)**

### לסיכום:

אם  $L_E \notin R$  כריעה אז אפשר לבנות מ"ט  $M_E$  המכריעה את  $L_E$  בסתיירה למשפט 6.7 האומר ש-  
 $L_{EQ} \notin R$  לכן  $L_{EQ} \notin RE$ .

**משפט 6.10**  $L_{EQ} \notin RE$

$L_{EQ} \notin RE$

לא קבילה.  $L_{EQ}$

### הוכחה:

נניח בשלילה כי  $L_{EQ}$  קבילה. תהי  $M_{EQ}$  מ"ט המכבלת את  $L_E$  באופן הבא.

בנייה של  $M_E$ 

$x$  על כל קלט  $= M_E$

1 אם  $x \neq \langle M \rangle$  דוחה.

2 אם  $x$ , מריצה  $M_\emptyset$  על  $M_{EQ}$  כאשר  $\langle M, M_\emptyset \rangle$  המ"ט שדוחה כל קלט.

• אם  $M_{EQ}$  מקבלת  $\Leftarrow$  מקבלת.

נכונות

אם  $x \in L_E$

$L(M) = \emptyset \wedge x = \langle M \rangle \Leftarrow$

$L(M) = L(M_\emptyset) \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle \in L_{EQ} \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle$  מקבלת  $M_{EQ} \Leftarrow$

$M_E$  מקבל.

**לסיכום:**

אם  $L_E \notin RE$  קבילה אז אפשר לבנות מ"ט  $M_E$  המקבלת את  $L_E$  בסתיויה למשפט 6.8 האומר ש-  
לכן  $.L_{EQ} \notin RE$

**משפט 6.11**  $\bar{L}_{EQ} \notin RE$

$\bar{L}_{EQ} \notin RE$ .

**הוכחה:**

נניח בשליליה כי  $\bar{L}$  קבילה. תהי  $M_{\bar{acc}}$  מ"ט המקבלת את  $\bar{L}_{EQ}$ . אז נבנה מ"ט  $M_{EQ}$  המקבלת את  $\bar{L}_{EQ}$  קבילה. אוסף הבא.

בנייה של  $M_1$ 

ראשית נגדיר מ"ט  $M_1$  באוסף הבא:

$x$  על קלט  $= M_1$

1) מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוות.

בנייה של  $M_{\bar{acc}}$ 

$x$  על כל קלט  $= M_{\bar{acc}}$

1 אם  $x \neq \langle M, w \rangle$  מקבלת.

(2) אם  $x = \langle M, w \rangle$  אז  $M_1$  בונה  $.M$ .

(3) מריצה  $\langle M_1, M^* \rangle$  על  $M_{\overline{EQ}}$  כאשר  $M^*$  המ"ט שמקבלת כל קלט.

(4) • אם  $M_{\overline{EQ}}$  מקבלת  $\Leftarrow$  מקבלת.

### נכונות

אם  $x \in L_{\overline{\text{acc}}}$

לא מקבלת  $M \Leftarrow$

$L(M_1) = \emptyset \Leftarrow$

$\langle M_1, M^* \rangle \in L_{\overline{EQ}} \Leftarrow$

$\langle M_1, M^* \rangle$  מקבלת  $M_{\overline{EQ}} \Leftarrow$

$M_{\overline{\text{acc}}} \Leftarrow$  מקבל.

### **סיכום:**

אם  $L_{\overline{\text{acc}}} \notin RE$  קבילה או אפשר לבנות מ"ט  $M_{\overline{\text{acc}}}$  בסתירה למשפט 6.6 האומר ש-  
לכן  $L_{\overline{EQ}} \notin RE$ .

## 6.4 סיכום: כרייעות וקבילות של שפות

קבילה	כרייעה	
✓	✗	$L_{\text{acc}}$
✗	✗	$\overline{L}_{\text{acc}}$
✗	✗	$L_d$
✓	✗	$L_{\text{Halt}}$
✗	✗	$\overline{L}_{\text{Halt}}$
✗	✗	$L_E$
✓	✗	$\overline{L}_E$
✗	✗	$L_{\text{EQ}}$
✗	✗	$\overline{L}_{\text{EQ}}$
✗	✗	$L_{\text{REG}}$
✗	✗	$L_{\text{NOTREG}}$