עבודה עצמית 8

שאלה 1 לכל אחת מהקבוצות הבאות קבע האם היא ת"ל או בת"ל:

א) $\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,11)\}$

ב) $\{(2,1,-1),(1,-2,1),(7,-4,1)\}$

ג) $\{(2,1,-1),(1,-2,1)\}$

לכל אחת מהקבוצות התלויות לינארית שמצאות, רשמו צרוף לינארי לא טריוויאלי של איברי הקבוצה הנותן את וקטור האפס.

שאלה 2

תן דוגמא לשתי קבוצות S, T המוכלות ב - $\mathbb{R}^4$ כך ש- $S \subseteq T$ ומתקיים:

א) T בת"ל ו- S בת"ל.

ב) T ת"ל ו- S ת"ל.

ג) T ת"ל ו- S בת"ל.

שאלה 3

תהיינה $X \subseteq Y$ קבוצות של וקטורים ב - $\mathbb{R}^n$. הוכח או הפרך:

א) אם X בת"ל אז Y בת"ל.

ב) אם Y בת"ל אז X בת"ל.

ג) אם $0 \in X$ אז X ת"ל.

ד) אם מספר הוקטורים ב - X קטן מ - n אז X בת"ל.

שאלה 4 נתונה הקבוצה

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \ , \ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} \right\}$$

א) מצאו לאילו ערכי a הקבוצה היא בת"ל.

ב) מצאו לאילו ערכי a הקבוצה פורשת את $\mathbb{R}^3$.

ג) לכל אחד מערכי a עבורם הקבוצה אינה בת"ל, בטאו את אחד הוקטורים כצ"ל של שני האחרים.

ד) נתונה הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ a+4 \\ 3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 4 \\ a-5 \\ 6 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 3 \\ a^2+\sqrt{5} \\ 9 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ 8a \\ 9a-4 \end{pmatrix} \right\}$$

מצאו לאילו ערכי a הקבוצה היא בת"ל.

שאלה 5 תהי $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$ קבוצה בת"ל ב - $\mathbb{R}^n$. הוכח:

א) הקבוצה $\{\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_3, \mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_3, 2\mathrm{v}_1 + 3\mathrm{v}_2\}$ היא בת"ל.

ב) הקבוצה $\{\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_3, \mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_3, 2\mathrm{v}_1 + 3\mathrm{v}_2 + 3\mathrm{v}_3\}$ היא ת"ל.

שאלה 6 תהי $S = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3, \mathrm{v}_4\}$ קבוצת בת"ל ב - $\mathbb{R}^n$. קבע לאילו ערכים של k מתקיים:

הקבוצה

$$T = \{\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_3 + k\mathrm{v}_4, \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 + 2\mathrm{v}_3 + \mathrm{v}_4, 2\mathrm{v}_1 + 2\mathrm{v}_3 - \mathrm{v}_4, k\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2 + k\mathrm{v}_3 - 2\mathrm{v}_4\}$$

בת"ל. לכל אחד מערכי k עבורו הקבוצה T היא ת"ל, רשמו את אחד הוקטורים ב- T כצרוף לינארי של שאר הוקטורים ב - T.

שאלה 7 לכל אחת מהקבוצות הבאות קבע האם היא תלויה לינארית. אם כן, רשום צ"ל לא טריויאלי של איברי הקבוצה הנותן את וקטור האפס.

א)

$$\left\{2t^3 + t^2 + t + 1, 3t^3 + 3t + 2, t^3 + 2t^2 - 2t + 1\right\}$$

ב)

$$\left\{3t^3 + 8t^2 - 8t + 7, t^3 + 4t^2 - 2t + 3, t^3 + 6t^2 - t + 4\right\}$$

ג)

$$\left\{t^3 + 3t^2 + 6t + 3, -3t^3 + 2t - 1, t^3 + t^2 - t\right\}$$

ד)

$$\left\{2t^3 + t^2 + t + 1, 3t^3 + 2, t, 0\right\}$$

שאלה 8 .לכל אחת מהקבוצות הבאות קבע האם היא תלויה לינארית. אם כן, רשום צ"ל לא טריויאלי של איברי הקבוצה הנותן את וקטור האפס.

א)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} .$$

ג)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} .$$

שאלה 9 לאילו ערכי k הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & k \end{pmatrix} \right\}$ היא ת"ל?

שאלה 10 נסמן $g(t) = e^t + 5e^{2t-1} - 3e^{3t-1}$,

$$T = \{ f_1 = e^{t+1},\ f_2(t) = e^{2t-1}\ ,\ f_3(t) = e^{3t}\ .$$

האחרים $g(t) \in \text{span}(T)$? אם כן, הציגו אותו כצ"ל של איברי T. הסבחרו מדוע $T \cup \{g(t)\}$ ת"ל?

שאלה 11 יהי V מרחב ווקטורי, $T : V \to V$ טרנספורמציה לינארית. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדיתאת הטענה הבאה :

לכל וקטורים $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n$ כך ש $T(\mathrm{v}_1), \ldots, T(\mathrm{v}_n)$ בת"ל, גם $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n$ בהכרח בת"ל.

שאלה 12 נתונות הקבוצות הבאות במרחב הוקטורי של כל הפונקציות מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}$. הראו שכל אחת מהקבוצות היא בת"ל.

א)

$$\{ f_1 = \sin t,\ f_2(t) = \cos t\ ,\ f_3(t) = t\ \}.$$

ב)

$$\{ f_1 = 1,\ f_2(t) = t + 1\ ,\ f_3(t) = e^{t+1}\ \}.$$

ג)

$$\{ f_1 = e^{t+1},\ f_2(t) = e^{2t+1}\ ,\ f_3(t) = e^{3t+1}\ \}.$$

שאלה 13 נסמן ב $F(\mathbb{R})$ את המרחב הווקטורי של כל הפונקציות מ- $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$.

א) תן דוגמה של שלושה ווקטורים תלויים ליניארית ב $F(\mathbb{R})$.

ב) תהיינה $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ פונקציות גזירות. הוכח או הפרך:

1) אם הקבוצה $\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ ת"ל אז גם הקבוצה $\{f_1'(x), \ldots, f_n'(x)\}$ ת"ל.

2) אם הקבוצה $\{f_1'(x), \ldots, f_n'(x)\}$ ת"ל אז גם הקבוצה $\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ ת"ל.

שאלה 14 יהי V מרחב וקטורי, $A = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subseteq V$, $B = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_m\} \subseteq V$, $A \cap B = \emptyset$.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א) אם קבוצת וקטורים $A \cup B$ היא בלתי תלויה לינארית., אז $\mathrm{span}(A) \cap \mathrm{span}(B) = \{\bar{0}\}$.

ב) אם $\mathrm{span}(A) \cap \mathrm{span}(B) = \{\bar{0}\}$ אז קבוצת וקטורים $A \cup B$ היא בלתי תלויה לינארית.

שאלה 15

א) תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times 2}$ כאשר F שדה. נתון שקיימים $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in \mathbb{F}^2$ כך ש $A\mathrm{v}_1 = A\mathrm{v}_2 = 0$ וכן $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ בת"ל.
הוכיחו ש- $A = 0$.

ב) תהי A מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$ המקיימת את המשוואה

$$A^2 + 5A + I = 0 \ .$$

הוכיחו ש- A הפיכה ומצאו את A^{-1}.

שאלה 16

תהי

$$S = \left\{ v_1 = 1 + 2x + 3x^2, \quad v_2 = 2 + 5x + 2x^2 + 11x^3, \quad v_3 = 1 + 4x - 5x^2 + 10x^3 \right\}$$

קבוצת וקטורים במרחב וקטורי $\mathbb{R}[x]$.

א) האם S תלוייה לינארית? אם כן, מצאו צירוף לינארי לא טריוויאלי של וקטורי S הנותן את וקטור האפס.

ב) האם וקטור $u = -x + 4x^2 - 3x^3$ שייך לפרישה הלינארית של v_1, v_2, v_3? אם כן, בטאו אותו כצירוף לינארי של וקטורי S. אם לא, נמקו מדוע.

פתרונות

שאלה 1

א)

שיטה 1

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}\ , \qquad \text{Det}(A)=-6\ ,$$

$\text{Det}(A)\neq 0$ לכן הוקטורים בת"ל.

שיטה 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות לכן הוקטורים בת"ל.

ב) שיטה 1

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\ , \qquad \text{Det}(A)=0$$

לכן הוקטורים ת"ל.

שיטה 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

יש שתי עמודות מובילות לכן הוקטורים ת"ל. $k_1=-2k_3$, $k_2=-3k_3$, $k_2=-3$.

$$-2(1,2,-1)-3(1,-2,1)+(7,-4,1)=\bar{0}\ .$$

ג) שיטה 1

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\\-1&1\end{pmatrix}\ , \qquad \text{Det}(A^tA)=35\ ,$$

$\text{Det}(A^tA)\neq 0$ לכן הקבוצה בת"ל.

<u>שיטה 2</u>

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\\-1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&1\\0&5\\0&3\end{pmatrix}$$

שתי עמודות מובילות, לכן הוקטורים בת"ל.

שאלה 2

א)

$$T=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\ , \qquad S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ב)

$$T=\{\bar{0}\}\ , \qquad S=\{\bar{0}\}$$

ג)

$$T=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\ , \qquad S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

שאלה 3

א) <u>נתון:</u> $X,Y\in\mathbb{R}^n$, $X\subseteq Y$.

<u>טענה:</u> X בת"ל $\Leftarrow$ Y בת"ל.

<u>דוגמה נגדית:</u>

$X=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^2$ בת"ל, $Y=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^2$ ת"ל.

ב) <u>נתון:</u> $X\subseteq Y$, Y בת"ל.

צריך להוכיח: X בת"ל.

הוכחה:

נניח מדרך השלילה, $X = \{\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_n\}$ ת"ל. לכן קיימים סקלרים $k_1, \dots, k_n$ שלא כולם אפסים כך ש- $k_1\mathrm{v}_1 + \ldots + k_n\mathrm{v}_n = \bar{0}$. $X \subseteq Y \Leftarrow \mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_n \in Y$. מכאן נובע ש Y ת"ל. סתירה.

ג) נתון: $X \subseteq Y$, $\bar{0} \in X$

צ"ל : X ת"ל

הוכחה :

לכל $\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_n \in X$ מתקיים

$$0 \cdot \mathrm{v}_1 + \ldots 0 \cdot \mathrm{v}_n + 1 \cdot \bar{0} = \bar{0}\ .$$

לכן X ת"ל.
■

ד) טענה: מספר הוקטורים ב - X קטן מ - $n \Leftarrow X$ בת"ל.

דוגמה נגדית:

$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^2$ ת"ל.

שאלה 4

א) הקבוצה בת"ל אם כל העמודות מובילות במטריצה מדורגת:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & a-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

עבור $a \neq 1$ יש שלוש עמודות מובילות, לכן u_3,u_2,u_1 בת"ל.

ב)

ג) $a = 1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$k_1 = -k_2$, $k_3 = 0$, $k_2 \in \mathbb{R}$.
$k_2 = 1 \Leftarrow k_1 = -1$

$$-u_1 + 2u_2 + 0 \cdot u_3 = \bar{0}$$

$\blacksquare$

ד) אי אפשר שהקבוצה של 4 וקטורים השייכים ל $\mathbb{R}^3$ תהיה בת"ל: יש בקבוצה יותר וקטורים מן המימד של המרחב: $\mathrm{Dim}(\mathbb{R}^3)=3$.

שאלה 5

א) שיטה 1:

הקבוצה $S=\{\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3, \mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3, 2\mathrm{v}_1+3\mathrm{v}_2\}$ בת"ל אם למטריצה $A=\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3 & \mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3 & 2\mathrm{v}_1+3\mathrm{v}_2\end{pmatrix}$ יש דטרמינטה שונה מ- 0.

$$A=\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3 & \mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3 & 2\mathrm{v}_1+3\mathrm{v}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&3\\1&1&0\end{pmatrix}$$

ואז

$$\det(A)=\det\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&3\\1&1&0\end{pmatrix}=-3\cdot\det\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3\end{pmatrix}\ .$$

$\det\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3\end{pmatrix}\neq 0$ בגלל שהקבוצה $\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3\}$ בת"ל. לכן $\det(A)\neq 0$ והקבוצה S בת"ל.

שיטה 2:

$$k_1(\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3)+k_2(\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3)+k_3(2\mathrm{v}_1+3\mathrm{v}_2)=\bar{0}$$
$$(k_1+2k_3)\mathrm{v}_1+(k_1+k_2+3k_3)\mathrm{v}_2+(k_1+k_2)\mathrm{v}_3=\bar{0}$$

$\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3$ בת"ל לכן

$$\left.\begin{aligned}k_1+2k_3&=0\\k_1+k_2+3k_3&=0\\k_1+k_2&=0\end{aligned}\right\}\qquad\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&3\\1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&-3\end{pmatrix}$$

למערכת פתרון יחיד: $k_1=0$, $k_2=0$, $k_3=0$ לכן הוקטורים בת"ל.

ב) שיטה 1:

הקבוצה $S=\{\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3, \mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3, 2\mathrm{v}_1+3\mathrm{v}_2+3\mathrm{v}_3\}$ ת"ל אם למטריצה $A=\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3 & \mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3 & 2\mathrm{v}_1+3\mathrm{v}_2\end{pmatrix}$ יש דטרמינטה שווה ל- 0.

$$A=\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3 & \mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3 & 2\mathrm{v}_1+3\mathrm{v}_2+3\mathrm{v}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&3\\1&1&3\end{pmatrix}$$

ואז

$$\det(A)=\det\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\2&3&3\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1&\mathrm{v}_2&\mathrm{v}_3\end{pmatrix}=0\cdot\det\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1&\mathrm{v}_2&\mathrm{v}_3\end{pmatrix}=0\ .$$

לכן הקבוצה S ת"ל.

<u>שיטה 2</u>:

$$k_1(\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3)+k_2(\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3)+k_3(2\mathrm{v}_1+3\mathrm{v}_2+3\mathrm{v}_3)=\bar{0}$$
$$(k_1+2k_3)\mathrm{v}_1+(k_1+k_2+3k3_3)\mathrm{v}_2+(k_1+k_2+3k_3)\mathrm{v}_3=\bar{0}$$

$\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3$ בת"ל לכן

$$\left.\begin{aligned}k_1+2k_3&=0\\k_1+k_2+3k_3&=0\\k_1+k_2+3k_3&=0\end{aligned}\right\}\qquad\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&3\\1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$k_1=-2k_3$, $k_2=-k_3$, $k_3\in\mathbb{R}$.
למערכת יש פתרון לא טריוויאלי, לכן הוקטורים ת"ל.

<u>שאלה 6</u>

<u>שיטה 1</u>

הקבוצה T בת"ל אס"ם

$$x(\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_3+k\mathrm{v}_4)+y(\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+2\mathrm{v}_3+\mathrm{v}_4)+z(\mathrm{v}_1+2\mathrm{v}_3-\mathrm{v}_4)+w(k\mathrm{v}_1-\mathrm{v}_2+k\mathrm{v}_3-2\mathrm{v}_4)=0$$

מתקיימת רק אם $(x,y,z,w)=(0,0,0,0)$:

$$(x+y+z+kw)\mathrm{v}_1+(y+w)\mathrm{v}_2+(x+2y+2z+k)\mathrm{v}_3+(kx+y-z-2w)\mathrm{v}_4=0$$

תהי $A=\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_3+k\mathrm{v}_4&\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+2\mathrm{v}_3+\mathrm{v}_4&2\mathrm{v}_1+2\mathrm{v}_3-\mathrm{v}_4&k\mathrm{v}_1-\mathrm{v}_2+k\mathrm{v}_3-2\mathrm{v}_4\end{pmatrix}$ ניתן לכתוב A בצורה

$$A=\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1&\mathrm{v}_2&\mathrm{v}_3&\mathrm{v}_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&2&k\\0&1&0&-1\\1&2&2&k\\k&1&-1&-2\end{pmatrix}\ .$$

T בת"ל אם"ם $0 \neq \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & k \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & k \\ k & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & k \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & k \\ k & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = &\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & k \\ k & 1 & -1-2k & -2 \end{vmatrix} \\
=&(-1-2k) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & k \end{vmatrix} \\
=&(-1-2k) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\
=&(-1-2k) \cdot (-1) \\
=&1+2k \ .
\end{aligned}$$

ולכן הקבצוה בת"ל אם $k \neq -\frac{1}{2}$.

<u>שיטה 2</u>

$$x(\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_3 + k\mathrm{v}_4) + y(\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 + 2\mathrm{v}_3 + \mathrm{v}_4) + z(\mathrm{v}_1 + 2\mathrm{v}_3 - \mathrm{v}_4) + w(k\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2 + k\mathrm{v}_3 - 2\mathrm{v}_4) = 0$$
$$(x+y+z+kw)\mathrm{v}_1 + (y+w)\mathrm{v}_2 + (x+2y+2z+k)\mathrm{v}_3 + (kx+y-z-2w)\mathrm{v}_4 = 0 = \bar{0}$$

$\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3, \mathrm{v}_4$ בת"ל לכן

$$\left.\begin{aligned} x+y+z+kw &= 0 \\ y+w &= 0 \\ x+2y+2z+kw &= 0 \\ kx+y-z-2w &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & k \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & k \\ k & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to$$

כל העמודות מובילות אם $k = -\frac{1}{2}$.

<u>שאלה 7</u>

א)

$$u_1 = 2t^3 + t^2 + t + 1, \qquad u_2 = 3t^3 + 3t + 2, \qquad u_3 = t^3 + 2t^2 - 2t + 1$$
$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \bar{0}$$
$$k_1(2t^3 + t^2 + t + 1) + k_2(3t^3 + 3t + 2) + k_3(t^3 + 2t^2 - 2t + 1) = \bar{0}$$
$$\left.\begin{aligned} 2k_1 + 3k_2 + k_3 &= 0 \\ k_1 + 2k_3 &= 0 \\ k_1 + 3k_2 - 2k_3 &= 0 \\ k_1 + 2k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_1-2R_4]{\substack{R_2\to R_1-2R_2\\ R_3\to R_1-2R_3}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 עמודות מובילות, לכן u_1, u_2, u_3 בת"ל.

ב)

$$u_1 = 3t^3 + 8t^2 - 8t + 7, \qquad u_2 = t^3 + 4t^2 - 2t + 3, \qquad u_3 = t^3 + 6t^2 - t + 4$$

$$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = \bar{0}$$

$$k_1(3t^3 + 8t^2 - 8t + 7) + k_2(t^3 + 4t^2 - 2t + 3) + k_3(t^3 + 6t^2 - t + 4) = \bar{0}$$

$$\left.\begin{aligned} 3k_1 + k_2 + k_3 &= 0 \\ 8k_1 + 4k_2 + 6k_3 &= 0 \\ -8k_1 - 2k_2 - 1k_3 &= 0 \\ 7k_1 + 3k_2 + 4k_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 6 \\ -8 & -2 & -1 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to -7R_1+3R_4]{\substack{R_2\to -8R_1+3R_2\\ R_3\to 8R_1+3R_3}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_2-2R_1} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2\to \frac{1}{2}R_2]{R_1\to -\frac{1}{6}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k_1 = \frac{1}{2}k_2 \ , \qquad k_2 = -\frac{5}{2}k_3 \ , \qquad k_3 \in \mathbb{R}$$

u_1, u_2, u_3 ת"ל.

נציב $k_3 = 2 \Leftarrow k_1 = 1$, $k_2 = -5$.

$$u_1 - 5u_2 + 2u_3 = \bar{0} \ .$$

ג)

$$u_1 = t^3 + 3t^2 + 6t + 3, \qquad u_2 = -3t^3 + 2t - 1, \qquad u_3 = t^3 + t^2 - t$$

$$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = \bar{0}$$

$$k_1(t^3 + 3t^2 + 6t + 3) + k_2(-3t^3 + 2t - 1) + k_3(t^3 + t^2 - t) = \bar{0}$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 + k_3 &= 0 \\ 3k_1 + k_3 &= 0 \\ 6k_1 + 2k_2 - k_3 &= 0 \\ 3k_1 - k_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4-3R_1]{\substack{R_2\to -3R_1+R_2 \\ R_3\to R_3-6R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 20 & -7 \\ 0 & 8 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to 9R_4-8R_2]{R_3\to 9R_3-20R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן u_1, u_2, u_3 בת"ל.

ד)

$$0\cdot(2t^3+t^2+t+1)+0\cdot(3t^3+2)+0\cdot t+1\cdot 0=\bar{0}$$

לכן הוקטורים ת"ל.

<u>שאלה 8</u>

א)

$$u_1=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

נרשום u_1, u_2, u_3 כוקטורים ב $\mathbb{R}^4$ ע"י איזומורפיזם:

$$u_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

נדרג את המטריצה המורכבת מהוקטורים:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 10 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות לכן u_1, u_2, u_3 בת"ל.

ב)

$$0\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן הוקטורים ת"ל.

ג)

$$u_1=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}\ ,\qquad u_2=\begin{pmatrix}2&3\\5&7\end{pmatrix}\ ,\qquad u_3=\begin{pmatrix}0&3\\1&0\end{pmatrix}\ ,\qquad u_4=\begin{pmatrix}1&4\\1&2\end{pmatrix}\ ,\qquad u_5=\begin{pmatrix}1&3\\1&4\end{pmatrix}\ .$$

$\dim M_{2\times2}(\mathbb{R})=4$ לכן כל 5 וקטורים במרחב הזה הם ת"ל.
נמצא צירוף לינארי הלא טריוויאלי ששווה לוקטור האפס:

$$\begin{pmatrix}1&2&0&1&1\\1&3&3&4&3\\2&5&1&1&1\\3&7&0&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&-\frac{25}{4}\\0&1&0&0&\frac{11}{4}\\0&0&1&0&-2\\0&0&0&1&\frac{7}{4}\end{pmatrix}$$

$$k_1=\frac{25}{4}k_5\ ,\qquad k_2=-\frac{11}{4}\ ,\qquad k_3=2k_5\ ,\qquad k_4=-\frac{7}{4}k_5\ ,\qquad k_5\in\mathbb{R}\ .$$

$$25\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}-11\begin{pmatrix}2&3\\5&7\end{pmatrix}+8\begin{pmatrix}0&3\\1&0\end{pmatrix}-7\begin{pmatrix}1&4\\1&2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1&3\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

שאלה 9

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\\2&5&-1\\3&7&k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&-4\\0&0&k-4\end{pmatrix}$$

$\underline{k\neq4}$

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&-4\\0&0&k-4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\to4R_4+(k-4)R_3}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&-4\\0&0&0\end{pmatrix}$$

עבור $k\neq4$ קיבלנו 3 עמודות מובילות ולכן הוקטורים בת"ל.

$\underline{k=4}$

נקבל

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&-4\\0&0&0\end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות לכן הוקטורים בת"ל.
מסקנה: לא קיים k עבורו הוקטורין ת"ל.

שאלה 11

הטענה נכונה. הסבר:

נתון: $T:V\to V$ העתקה לינארית. $T(\mathrm{v}_1),\dots,T(\mathrm{v}_n)$ בת"ל.

צריך להוכיח: $\mathrm{v}_1,\dots,\mathrm{v}_n$ בת"ל.

הוכחה: נוכיח דרך השלילה. נניח כי $\mathrm{v}_1,\dots,\mathrm{v}_n$ ת"ל. אז קיימים סקלרים $k_1,\dots,k_n$ שכולם אפסים כך ש

$$k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_n\mathrm{v}_n=\bar{0}\ .$$

לכן

$$T(k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_n\mathrm{v}_n)=T(\bar{0})=\bar{0}$$

$\Leftarrow$

$$k_1\cdot T(\mathrm{v}_1)+\ldots+k_n\cdot T(\mathrm{v}_n)=\bar{0}$$

ז"א $T(\mathrm{v}_1),\dots,T(\mathrm{v}_n)$ ת"ל.
בסתירה לכך ש- $T(\mathrm{v}_1),\dots,T(\mathrm{v}_n)$ בת"ל.

שאלה 11 $g(t)=e^t+5e^{2t-1}-3e^{3t-1}$

$$T=\{f_1=e^{t+1},\ f_2(t)=e^{2t-1}\ ,\ f_3(t)=e^{3t}\ .$$

$$g(t)=e\cdot e^t+5\cdot e^{2t-1}-\frac{3}{e}\cdot e^{3t}=e\cdot f_1(t)+5\cdot f_2(t)-\frac{3}{e}\cdot f_3(t)\ .$$

לכן $g(t)=\mathrm{span}(f_1,f_2,f_3)$. $T\cup\{g(t)\}$ ת"ל כי $g(t)-e\cdot f_1(t)+5\cdot f_2(t)-\frac{3}{e}\cdot f_3(t)=\bar{0}$.

שאלה 12

א)

$$\{f_1=\sin t,\ f_2(t)=\cos t\ ,\ f_3(t)=t\ \}.$$

$$k_1f_1(t)+k_2f_2(t)+k_3f_3(t)=\bar{0}\ .$$

$$k_1\sin t+k_2\cos t+k_3t=\bar{0}.$$

נציב $t=0 \Leftarrow k_2=0$.

נציב $t=\frac{\pi}{2} \Leftarrow \begin{cases} k_1+\frac{\pi}{2}k_3 &=0\\ \pi k_3 &=0\end{cases}$. $\Leftarrow \begin{cases} k_1 &=0\\ k_3 &=0\end{cases}$. לכן הוקטורים בת"ל.

ב)

$$\{f_1=1,\ f_2(t)=t+1\ ,\ f_3(t)=e^{t+1}\ \}.$$

הקבוצה בת"ל עם הוורונסקיאן שונה מאפס לכל t:

$$W(t)=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3\\ f_1' & f_2' & f_3'\\ f_1'' & f_2'' & f_3''\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & t+1 & e^{t+1}\\ 0 & 1 & e^{t+1}\\ 0 & 0 & e^{t+1}\end{vmatrix}=e^{t+1}\neq 0 \qquad \forall t$$

ז"א $W(t)\neq 0$ לכל t ולכן הקבוצה בת"ל.

ג)

$$\{f_1=e^{t+1},\ f_2(t)=e^{2t+1}\ ,\ f_3(t)=e^{3t+1}\ \}.$$

הקבוצה בת"ל עם הוורונסקיאן שונה מאפס לכל t:

$$W(t)=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3\\ f_1' & f_2' & f_3'\\ f_1'' & f_2'' & f_3''\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{t+1} & e^{2t+1} & e^{3t+1}\\ e^{t+1} & 2e^{2t+1} & 3e^{3t+1}\\ e^{t+1} & 4e^{2t+1} & 9e^{3t+1}\end{vmatrix}=e^{6t+3}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=2e^{6t+3}\neq 0 \qquad \forall t$$

ז"א $W(t)\neq 0$ לכל t ולכן הקבוצה בת"ל.

שאלה 13

א) $\{f_1(x)=x,\ f_2(x)=2x\}$ ת"ל כי $2f_1-f_2=\bar{0}$.

ב) **1)**

<u>נתון</u>: $f_1,\dots,f_n$ גזירות, $f_1,\dots,f_n$ ת"ל.

<u>צ"ל</u>: $f_1',\dots,f_n'$ ת"ל.

<u>הוכחה</u>: $f_1,\dots,f_n$ ת"ל, לכן קיימים $k_1,\dots,k_n$ שלא כלם אפסים כך ש

$$k_1f_1+\ldots+k_nf_n=\bar{0}$$

$$(k_1f_1+\ldots+k_nf_n)'=k_1f_1'+\ldots+k_nf_n'=\bar{0}$$

לכן $f_1',\dots,f_n'$ ת"ל.

2)

<u>דוגמה נגדית</u>: $f_1(x)=\frac{x^2}{2}$, $f_2(x)=x^2+1$

$$f_1'(x)=x\ ,\qquad f_2'(x)=2x$$

f_1', f_2' ת"ל, כי $2f_1'-f_2'=\bar{0}$.
נוכיח כי f_1, f_2 בת"ל:

$$k_1\frac{x^2}{2}+k_2(x^2+1)=\bar{0} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{k_1}{2}+k_2\right)=0$$

לכל $x\in\mathbb{R}$. $x=0 \Leftarrow k_2=0 \Leftarrow k_1x^2=0$ לכל $x\in\mathbb{R}$ $\Leftarrow k_1=0$.

שאלה 14

א) אם קבוצת וקטורים $A\cup B$ היא בת"ל, אז $\mathrm{span}(A)\cap\mathrm{span}(B)=\{\bar{0}\}$.

הוכחה:

<u>נתון</u>: $A\subseteq V$, $B\subseteq V$, $A\cap B=\emptyset$, $A\cup B$ בת"ל.

<u>צריך להוכיח</u>: $\mathrm{span}(A)\cap\mathrm{span}(B)=\{\bar{0}\}$

<u>הוכחה:</u>

נוכיח דרך השלילה. נניח $A\cup B$ בת"ל וקיים $\mathrm{x}\in\mathrm{span}(A)\cap\mathrm{span}(B)$ כך ש $\mathrm{x}\neq\bar{0}$. אז

$$\mathrm{x}=\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_nu_n=\beta_1\mathrm{v}_1+\ldots+\beta_m\mathrm{v}_m$$

כך ש

$$\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_nu_n-\beta_1\mathrm{v}_1-\ldots-\beta_m\mathrm{v}_m=\bar{0}\ .$$

כיוון ש $A\cup B$ בת"ל, אז $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=\beta_1=\ldots=\beta_m=0$. ז"א $\mathrm{x}=\bar{0}$. סתירה.

ב) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ ,\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}\subset\mathbb{R}^2\ ,\qquad B=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\subset\mathbb{R}^2$$

$A\cap B=\emptyset$ ו $\mathrm{span}(A)\cap\mathrm{span}(B)=\{\bar{0}\}$.

$$A\cup B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ ,\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\ ,\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$A\cup B$ קבוצת תלויה לינארית.

שאלה 15

א) תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times 2}$ כאשר F שדה. נתון שקיימים $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\in\mathbb{F}^2$ כך ש $A\mathrm{v}_1=A\mathrm{v}_2=0$ וכן $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2$ בת"ל. הוכיחו ש- $A=0$.

<u>נתון:</u> $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2$ בת"ל, $A\mathrm{v}_1=\bar{0}$,$A\mathrm{v}_2=\bar{0}$.

<u>צריך להוכיח::</u> $A=0$

<u>הוכחה:</u>

$A\mathrm{v}_1=\bar{0}$ ו- $A\mathrm{v}_2=\bar{0}$ יהיו $k_1,k_2\in F$ סקלירם כך ש- $k_1\neq 0,k_2,\neq 0$. אז

$$k_1\cdot A\mathrm{v}_1+k_2\cdot A\mathrm{v}_2=\bar{0}\qquad\Rightarrow\qquad A\cdot(k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2)=\bar{0}\ .$$

ז"א $A=0$ או $k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2=0$.
אם $k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2=0$ אז קיים צירוף לינארי של $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2$ השווה לאפס עם מקדמים שלא כולם אפסים.
ואז $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2$ ת"ל.
וזאת בסתירה לכך ש- $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2$ בת"ל.

לכן $A=0$.

ב) <u>נתון:</u> $A^2+5A+I=0$.
<u>לכן</u>

$$A^2+5A=-I\quad\Rightarrow\quad A(A+5I)=-I\quad\Rightarrow\quad |A|\cdot|A+5I|=(-1)^n\ .$$

נניח כי A לא הפיכה $\Leftarrow$ $|A|=0$ ואז נקבל כי $(-1)^n=0$. סתירה.

לכן A הפיכה.

$$-A(A+5I)=I \quad \Rightarrow \quad A^{-1}=-(A+5I)\ .$$

שאלה 16 נסמן

$$p_1=1+2x+3x^2+4x^3\ , \qquad p_2=2+5x+2x^2+11x^3\ , \qquad p_3=1+4x-5x^2+10x^3\ .$$

א)

$$\begin{aligned} \alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2+\alpha_3 p_3 &=0\\ \Rightarrow \qquad \alpha_1\left(1+2x+3x^2+4x^3\right)+\alpha_2\left(2+5x+2x^2+11x^3\right)+\alpha_3\left(1+4x-5x^2+10x^3\right) &=0\\ \Rightarrow \quad (\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3)1+(2\alpha_2+5\alpha_2+4\alpha_3)x+(3\alpha_2+2\alpha_2-5\alpha_3)x^2+(4\alpha_2+11\alpha_2+10\alpha_3)x^3 &=0 \end{aligned}$$

נקבל את המערכת

$$\begin{aligned} \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3 &=0\\ 2\alpha_2+5\alpha_2+4\alpha_3 &=0\\ 3\alpha_2+2\alpha_2-5\alpha_3 &=0\\ 4\alpha_2+11\alpha_2+10\alpha_3 &=0\ . \end{aligned}$$

נרשום את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 2 & 5 & 4\\ 3 & 2 & -5\\ 4 & 11 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4-4R_1]{\substack{R_2\to R_2-2R_1\\ R_3\to R_3-3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -4 & -8\\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4-3R_1]{R_3\to R_3+4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(3,-2,1)\alpha_3, \alpha_3\in\mathbb{R}$. למערכת קיים פתרון לא טריוויאלי לכן הווקטורים ת"ל. נציב את הפתרון בצירוף הלינארי

$$\alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2+\alpha_3 p_3=0 \qquad \xrightarrow{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(3,-2,1)\alpha_3} \qquad 3p_1-2p_2+p_3=0\ .$$

ונקבל

ב) במילים אחרות עלנו לבדוק האם $p_4\in\text{span}\{p_1,p_2,p_3\}$. מסעיף הקודם מצאנו כי p_1,p_2 בת"ל אבל p_1,p_2,p_3 ת"ל, כלומר רק הווקטורים p_1,p_2 מהווים בסיס של התת מרחב (אשר מימדו שווה 2). לפי זה יספיק לבדוק האם $p_4\in\text{span}\{p_1,p_2\}$. כלומר האם $\exists\ \beta_1,\beta_2$ המקיימים

$$\begin{aligned} \beta_1 p_1+\beta_2 p_2 &=p_4\\ \Rightarrow \qquad \beta_1\left(1+2x+3x^2+4x^3\right)+\beta_2\left(2+5x+2x^2+11x^3\right) &=-x+4x^2-3x^3\\ \Rightarrow \quad (\beta_1+2\beta_2)\,1+(2\beta_1+5\beta_2)\,x+(3\beta_1+2\beta_2)\,x^2+(4\beta_1+11\beta_2)\,x^3 &=-x+4x^2-3x^3 \end{aligned}$$

מכאן נקבל את המערכת הבאה:

$$\begin{aligned} \beta_1 + 2\beta_2 &= 0 \\ 2\beta_1 + 5\beta_2 &= -1 \\ 3\beta_1 + 2\beta_2 &= 4 \\ 4\beta_1 + 11\beta_2 &= -3 \ . \end{aligned}$$

אם למערכת יש פתרון אז p_4 הוא צירוף לינארי של p_1, p_2 אחרת לא!

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 11 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4\to R_4-4R_1]{\substack{R_2\to R_2-2R_1 \\ R_3\to R_3-3R_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4\to R_4-3R_1]{R_3\to R_3+4R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון לכן $p_4 \in \text{span}\{S\}$.