

# שיעור 10

## המחלקה P והמחלקה NP

### 10.1 המחלקה $P$

- המחלקה  $P$  היא אוסף כל הבעיה שקיים עboroן אלגוריתם המכרייע אותה בזמן פולינומיAli.
- אלגוריתם מכרייע  $\equiv$  מ"ט דטרמיניסטי , בעית הכרעה  $\equiv$  שפה ,
- אלגוריתם  $A$  מכרייע בעיה בזמן פולינומיAli אם קיים קבוע  $c > 0$  כך שזמן הריצה של  $A$  על כל קלט  $w$  חסום ע"י  $O(|w|^c)$ .

### 10.2 דוגמאות לבעיות ב- $P$

$$PATH = \{ \langle G, s, t \rangle \mid \text{גרף } G \text{ מכיל מסלול מ- } s \text{ ל- } t \} \in P \quad (1)$$

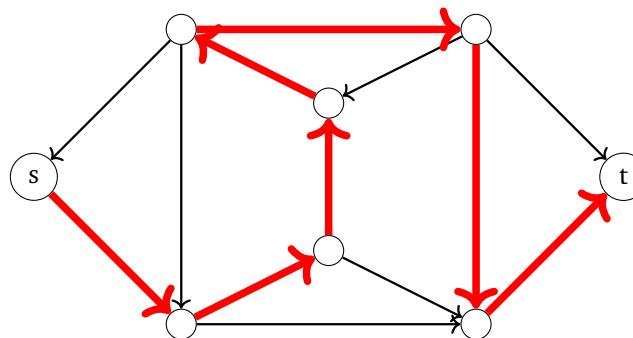
$$RELPRIME = \{ \langle x, y \rangle \mid x \text{ ו- } y \text{ זרים} \} \in P \quad (2)$$

### 10.3 בעית המסלול המילטוני HAMPATH

#### הגדרה 10.1 HAMPATH

בහינתן גרף מכון  $(V, E)$  ושני קודקודים  $s, t \in V$ . מסלול המילטוני מ-  $s$  ל-  $t$  ב-  $G$  הוא מסלול מ-  $s$  ל-  $t$  שעובר דרך כל קודקוד בגרף בדיקוק פעם אחת.

לדוגמה:



#### הגדרה 10.2 בעית HAMPATH

קלוט: גרף מכון  $G = (V, E)$  ושני קודקודים  $s, t \in V$ .

פלט: האם  $G$  מכיל מסלול המילוטוני מ-  $s$  ל-  $t$  ?

$$HAMPATH = \{\langle G, s, t \rangle \mid \text{האם } G \text{ מכיל מסלול המילוטוני מ- } s \text{ ל- } t \text{ ?}\}$$

נשאל שאלת: האם  $HAMPATH \in P$  ?

לא ידוע האם קיים אלגוריתם המכריע את  $HAMPATH$  בזמן פולינומיAli (שאלת פתוחה).

- בהינתן קלט  $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH$ , האם  $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH$  ?
- נעה על שאלת אחרת:

בהינתן קלט  $y$ , ומחרוזת  $w$ , האם  $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH$  ?

- ניתן לבדוק האם  $y$  היא מסלול המילוטוני מ-  $s$  ל-  $t$  ב-  $G$  בזמן פולינומיAli ולענות בהתאם.
- במקרה זה, אומרים כי  $HAMPATH$  ניתנת לאיומות בזמן פולינומיAli.

## 10.4 אלגוריתם איומות

### הגדרה 10.3 אלגוריתם איומות

אלגוריתם איות עבור בעיה  $A$  הוא אלגוריתם  $V$  כך שלכל קלט  $\Sigma^* \in w$  מתקיים:

( $w, y \in A$  אם ורק אם קיימת מחרוזת (עדות)  $y$  באורך פולינומיAli ב-  $|w|$  כך ש-  $V$  מקבל את הזוג  $(w, y)$ )  
כלומר:

- אם  $w \in A$  . $\exists y : V(w, y) = T \iff w \in A$
- אם  $w \notin A$  . $\forall y : V(w, y) = F \iff w \notin A$

### הערה 10.1

- זמן ריצה של אלגוריתום איות נמדד ביחס לגודל הקלט  $|w|$ .
- אלגוריתם איות פולינומיAli אם הוא רץ בזמן פולינומיAli.

## 10.5 המחלקה NP

### הגדרה 10.4 המחלקה NP

המחלקה NP היא אוסף כל הבעיה שקיים עבורן אלגוריתם איות פולינומיAli.

### משפט 10.1 $HAMPATH \in NP$

בעיית המסלול המילוטוני :  $HAMPATH$

קלט: גраф מכון  $G = (V, E)$  ושני קודקודים  $s, t \in V$

פלטו: האם  $G$  מכיל מסלול המילטוני מ-  $s$  ל-  $t$  ?

$$HAMPATH = \{ \langle G, s, t \rangle \mid G \text{ גראף מכוכן המכיל מסלול המילטוני מ- } s \text{ ל- } t \}$$

הוכחה כי  $HAMPATH \in NP$

הוכחה: בניית אלגוריתם אimotoת  $V$  עבור  $HAMPATH$ .

$V$  על קלט  $(\langle G, s, t \rangle, y)$ :

1) בודק האם  $y$  היא סדרה של

$$u_1, u_2, \dots, u_n$$

השונים זה מזה.

- אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

2) בודק האם  $u_n = t$  ו-  $u_1 = s$ .

- אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

3) בודק שככל הצלעות  $(u_i, u_{i+1})$  (לכל  $n \leq i \leq 1$ ) קיימות ב-  $G$ .

- אם כן  $\Leftarrow$  מקבל.

- אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

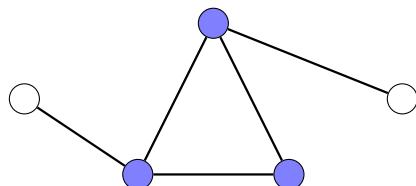
### נכונות

- זמן הריצה של האלגוריתם הוא פולינומילי בגודל הקלט.
- אם  $G$  מכיל מסלול המילטוני מ-  $s$  ל-  $t$   $\Leftarrow$  עבור  $y$  שהוא קידוד של מסלול זה,  $V$  קיבל את הזוג  $(\langle G, s, t \rangle, y)$ .
- אם  $G$  לא מכיל מסלול המילטוני מ-  $s$  ל-  $t$   $\Leftarrow$  לכל  $y$ , האלגוריתם ידחה את הזוג  $(\langle G, s, t \rangle, y)$ .

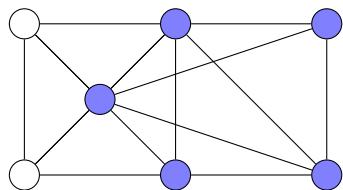


### הגדרה 10.5 קליקה

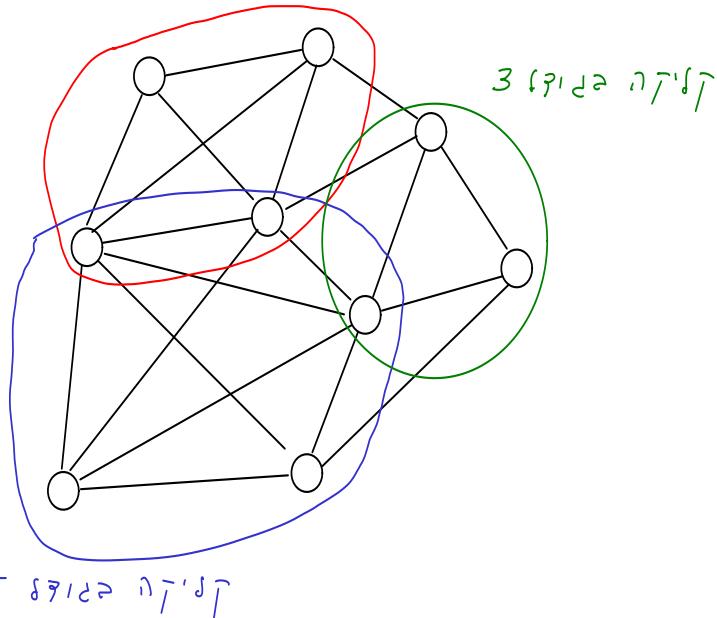
בහינתנו גראף לא מכוכן  $G = (V, E)$ , קליקה ב-  $G$  היא תת-קובוצה של קודקודים  $C \subseteq V$  כך שלכל שני קודקודים  $u, v \in C$  מתקיים  $(u, v) \in E$ .



קליקה בגודל 3 :  $k = 3$

קliquה בגודל 5 : $k = 5$ 

הliquה הגדולה ביותר

**הגדרה 10.6 בעיית הקלliquה**קלט: גרף לא מכוון  $G = (V, E)$  ומספר  $k$ .פלט: האם  $G$  קלliquה בגודל  $k$ ?

$$\text{CLIQUE} = \{\langle G, k \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל קלliquה בגודל } k\}$$

**משפט 10.2 CLIQUE  $\in NP$** 

$$\text{CLIQUE} \in NP.$$

**הוכחה:** בניית אלגוריתם אימות  $V$  עבור CLIQUE .על קלט  $(\langle G, k \rangle, y)$  :1) בודק האם  $y$  היא קבוצה של  $k$  קודקודים שונים מ-  $G$  .

- אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

2) בודק האם כל שני קודקודים מ-  $y$  מחוברים בצלע ב-  $G$  .

- אם כן  $\Leftarrow$  מקבל.

- אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

■

### הגדרה 10.7 בעיית $SubSetSum$

קלט: קבוצת מספרים  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ומספר  $t$ .

פלט: האם קיימת תת-קבוצה של  $S$  שסכום איבריה שווה  $t$ ?

$$SubSetSum = \left\{ \langle S, t \rangle \mid \sum_{x \in Y} x = t \text{ כך ש- } Y \subseteq S \right\}$$

### משפט 10.3 $SubSetSum \in NP$

$SubSetSum \in NP$ .

**הוכחה:** נבנה אלגוריתם אimoto  $V$  עבור  $.SubSetSum$

: על קלט  $(\langle S, t \rangle, y) = V$

1) בודק האם  $y$  היא תת-קבוצה של  $S$ .

- אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

2) בודק האם סכום המספרים ב-  $y$  שווה  $t$ .

- אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

- אחרת  $\Leftarrow$  מקבל.

■

## 10.6 הקשר בין NP למ"ט א"ד

NP=Non-deterministic polynomial-time.

### משפט 10.4

לכל בעיה  $A$ :

$A \in NP$  אם ורק אם קיימת מ"ט א"ד המכריעה את  $A$  בזמן פולינומיAli.

### דוגמה 10.1

نبנה מ"ט א"ד  $M$  המכריעה את  $CLIQUE$  בזמן פולינומיAli.

: על קלט  $\langle G, k \rangle = M$

- בוחרת באופן א"ד קבוצה  $y$  של  $k$  קודקודים מ-  $G$ .

- בודקת האם כל שני קודקודים מ-  $y$  מחוברים בצלע ב-  $G$ .

- \* אם כן  $\Leftarrow$  מקבלת.
- \* אחרת  $\Leftarrow$  דוחה.

אלגוריתם אimoto  $\equiv$  מ"ט א"ד.

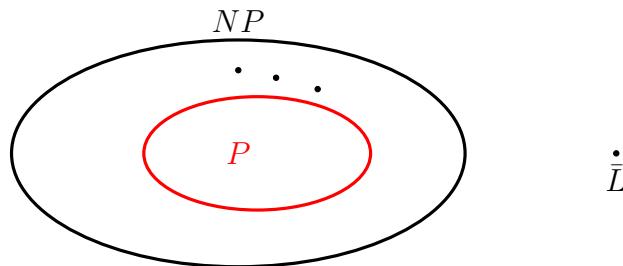
## 10.7 הקשר בין המחלקה P ו- NP

$P$  = כל הבעיות שניתן להכרייה בזמן פולינומיAli.

$NP$  = כל הבעיות שניתן לאמת בזמן פולינומיAli.

### משפט 10.5

$$P \subseteq NP .$$



שאלה פתוחה: האם  $P = NP$

### משפט 10.6

$P$  סגורה תחת משלים.

הוכחה: אם  $\bar{A} \in P$  אז גם  $A \in P$ .

### הגדרה 10.8

$$CoNP = \{A \mid \bar{A} \in NP\} .$$

לדוגמה:

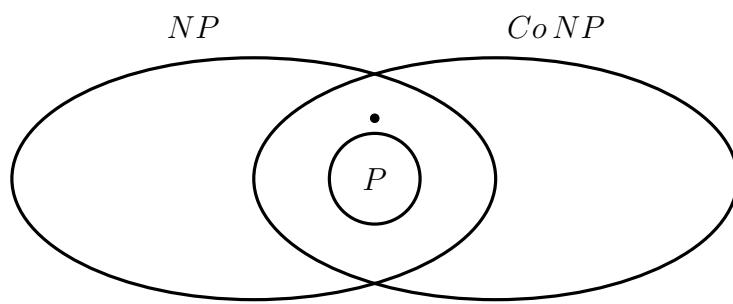
$$\overline{HAMPATH} \in CoNP .$$

$$\overline{CLIQUE} \in CoNP .$$

שאלה פתוחה: האם  $NP = CoNP$

### משפט 10.7

$$P \subseteq NP \cap CoNP .$$



שאלה פתוחה: האם  $P = NP \cap Co\ NP$ ?

נדון בשאלה המרכזית: האם  $P = NP$ ?

### הגדרה 10.9 פונקציה פולינומיאלית

בහינתן פונקציה  $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ , אומרים כי  $f$  חסיבה בזמן פולינומיאלי אם קיים אלגוריתם (מ"ט דטרמיניסטי) המחשב את  $f$  בזמן פולינומיאלי.

### הגדרה 10.10 רדוקציה פולינומיאלית

בහינתן שתי הבעיות  $A$  ו-  $B$ . אומרים כי  $A$  ניתנת לרדוקציה פולינומיאלית ל-  $B$ , ומסמנים  $A \leqslant_P B$ , אם קיימת פונקציה  $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  המקיים:

(1) חסיבה בזמן פולינומיאלי

(2) לכל  $w \in \Sigma^*$ :

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B .$$

### משפט 10.8 משפט הרדוקציה

לכל שתי בעיות  $A$  ו-  $B$ , אם  $A \leqslant_P B$  אז  $A \in P$

(1) אם  $A \in P$  אז  $B \in P$ .

(2) אם  $A \in NP$  אז  $B \in NP$ .

מסקנה מ- (1) ו- (2):

(3) אם  $A \notin P$  אז  $B \notin P$ .

(4) אם  $B \notin NP$  אז  $A \notin NP$ .

**הוכחה:** מכיוון שקיימת רדוקציה  $B \leqslant_P A$ , קיימת פונקציה  $f$  חסיבה בזמן פולינומיאלי המקיים, לכל  $w \in \Sigma^*$ ,

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B .$$

יהי  $M_f$  האלגוריתם שמחשבת את  $f$  בזמן פולינומיאלי.

(1) נוכחות כי אם  $B \in P$  אז  $.A \in P$ .

יהי  $M_B$  האלגוריתם שמכריע את  $B$  בזמן פולינומיאלי. נבנה אלגוריתם  $M_A$  המכrüע את  $A$  בזמן פולינומיאלי.

התאור של  $M_A$ 

= על כל קלט  $w$ :  $M_A$

1. מחשב את  $f(w)$  ע"י  $M_f$
2. מרים את  $M_B$  על ( $f(w)$  ועונה כמוות).

נוכיח כי  $M_A$  מכריע את  $A$  בזמן פולינומיAli:

- אם  $M_B$  מקבל את  $w$   $\Leftarrow f(w) \in B \Leftarrow w \in A$
- ואם  $M_A$  דוחה את  $M_B$   $\Leftarrow f(w) \notin B \Leftarrow w \notin A$

נוכיח כי זמן הריצה של  $M_A$  הוא פולינומיAli בגודל הקלט  $|w|$  בזמן פולינומיAli:

- נסמן ב-  $P_f$  את הפולינום של  $M_f$ .
- נסמן ב-  $P_B$  את הפולינום של  $M_B$ .

זמן הריצה של  $M_A$  על קלט  $w$  שווה

$$P_f(|w|) + P_B(|f(w)|)$$

מכיוון ש-  $(|f(w)| \leq P_f(|w|))$ , הזמן הריצה של  $M_A$  על  $w$  חסום ע"י

$$P_f(|w|) + P_B(P_f(|w|)) = P_f(|w|) + (P_B \circ P_f)(|w|)$$

כאשר  $P_B \circ P_f$  מסמן את ההרכבה של שני פולינומים. לכן  $M_A$  רץ בזמן פולינומיAli בגודל  $|w|$ .

