אלגברה לינארית 1
סמסטר א' תשפ"ד
שאלות חזרה

שאלה 1 בהינתן מערכת לינארית בעלת 2 משוואות ו-3 משתנים מעל $\mathbb{Z}_3$, רשמו את כל האפשרויות למספר הפתרונות של המשוואה.

שאלה 2 (מבחן תשפ"א סמסטר ב מועד א)

תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. הוכיחו או הרפיכו:

א) אם $AB = B$ ו- $B \neq 0$ אז A היא מטריצה היחידה.

ב) $|A - B| = |A| - |B|$

שאלה 3 (מבחן תשע"ט סמסטר 1 מועד ב)

נאמר שמטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית אם $A^t = A$. הוכח או הפרך: אם $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ סימטריות אז AB סימטרית.

שאלה 4 (מבחן תשפ סמסטר א מועד ב)

תהיינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$. הוכיחו או הפריכו:

א) $|A + B| = |B + A|$

ב) אם $AB = AC$ אז $|B| = |C|$.

ג) אם קיים $\mathrm{v} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ כך ש- $(AB)\mathrm{v} = 0$ אז $|A| = 0$ או $|B| = 0$.

שאלה 5 תהיינה $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A \neq 0$. הוכח או הפרך:

א. אם $AB = AC$ אז $B = C$.

ב. אם $AB = 0$ אז $A = 0$ או $B = 0$.

שאלה 6 פתרו את המערכות הבאות מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x+y-2z &=0 \\ 2x-y+z &=0 \\ x+y-z &=6 \end{aligned}$$

שאלה 7 נסמן $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. מצאו את $A^2-4A+2I$.

שאלה 8 תהיינה $A,B,C\in M_n$. הוכח או הפרך:

אם $AB=AC$ אז $B=C$.

שאלה 9 חשבו את המטריצה ההפוכה של $A=\begin{pmatrix} -5 & 8 & 0 \\ -5 & 9 & 1 \\ -4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ בעזרת זה פתרו את המערכת

$$\begin{aligned} -5x+8y &=1 \\ -5x+9y+z &=2 \\ -4x+7y+2z &=3 \end{aligned}$$

שאלה 10 **(מבחן תשע"ט סמסטר ב מועד ב)**

פתרו את המערכת הבא בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{cases} 2x+y+z &= 3 \\ x+2y+z &= 0 \\ x+y+2z &= 0 \end{cases}$$

שאלה 11 פתרו את המערכת הבא בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{aligned} -5x-4y+5z-2t &= -2 \\ 4x-y-5z-2t &= -9 \\ 4x-y-4z-t &= -10 \\ 2x-y-3z-2t &= -5 \end{aligned}$$

שאלה 12 פתרו את המערכות הבאות מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2x + y - 4z =& 0 \\ 4x + 5y + z =& 0 \\ 2x + 3y - z =& 6 \end{aligned}$$

שאלה 13 נסמן $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. מצאו את $A^2 - 3A + 2I$.

שאלה 14 תהיינה $A, B \in M_n$. הוכח או הפרך:

אם $AB = 0$ ו- $A \neq 0$, אז B איננה הפיכה.

שאלה 15 תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. הוכח או הפרך: $(AB)^2 = A^2B^2$.

שאלה 16 חשבו את המטריצה ההפוכה של $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ בעזרת זה פתרו את המערכת

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z =& 0 \\ 4x + 2y + z =& 2 \\ 4x + 6y + 2z =& 3 \end{aligned}$$

שאלה 17 פתרו את המערכת הבא בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{aligned} -5x - 4y + 5z - 2t =& -2 \\ 4x - y - 5z - 2t =& -9 \\ 4x - y - 4z - t =& -10 \\ 2x - y - 3z - 2t =& -5 \end{aligned}$$

שאלה 18 בהינתן מערכת לינארית בעלת 3 משוואות ו-4 משתנים מעל $\mathbb{Z}_5$, רשום את כל האפשרויות למספר הפתרונות של המשוואה.

שאלה 19 תהיינה $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A \neq 0$.

הוכח או הפרך:

אם $AB = AC$ אז $B = C$.

שאלה 20 תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A\neq 0,\ \ B\neq 0$. הוכח או הפרך:

$$AB=BA$$

שאלה 21 תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A\neq 0,\ \ B\neq 0$. הוכח או הפרך:

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$$

שאלה 22 תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A\neq 0,\ \ B\neq 0$. הוכח או הפרך:

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

שאלה 23 תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A\neq 0$. הוכח או הפרך:
אם $AB=0$ אז $A=0$ או $B=0$.

שאלה 24 תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A\neq 0,\ \ B\neq 0$. הוכח או הפרך:

$$(AB)^t=A^tB^t$$

שאלה 25 תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A\neq 0,\ \ B\neq 0$. הוכח או הפרך:

$$(A+B)^t=A^t+B^t$$

פתרונות

שאלה 1

- אם יש שורה סתירה אז למערכת 0 פתרונות. אחרת, יתכנו המקרי הבאים:
- משתנה חופשי אחד ואז למערכת יש 3 פתרונות.
- 2 משתנים חופשיים ואז למערכת יש 3^2 פתרונות.

$\blacksquare$

שאלה 2

א) הטענה איננה נכונה. דוגמא נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\ .$$

מתקיים $AB=B$, $B\neq 0$ אבל A איננה מטריצת היחידה.

ב) הטענה איננה נכונה. דוגמא נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\ .$$

מתקיים

$$|A-B|=\left|\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right|=-1$$

ו

$$|A|-|B|=0-0=0\neq|A-B|\ .$$

$\blacksquare$

שאלה 3

<u>דומגה נגדית:</u>

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\3&2\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}$$

קל לראות ש A,B סימטריות: $A^t=A$, $B^t=B$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}5&1\\8&3\end{pmatrix}$$

AB איננה סימטרית כי $AB\neq(AB)^t=\begin{pmatrix}5&8\\1&3\end{pmatrix}$.

$\blacksquare$

שאלה 4

א) טענה נכונה. הסבר:

$A+B=B+A$ לכן $|A+B|=|B+A|$.

ב) דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

$$A\cdot B=A\cdot C=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad |B|=1\ ,\ |C|=0\ .$$

ג) טענה נכונה. הסבר:

אם קיים $\mathrm{v}\neq\bar{0}\in\mathbb{R}^n$ כך ש $(AB)\mathrm{v}=0$, אז למערכת משוואת הומוגנית $(A\cdot B)\cdot X=0$ יש אינסוף פתרונות, לכן $|A\cdot B|=0$, ז"א

$$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|=0\ .$$

מכאן $|B|=0$ או $|A|=0$.

■

שאלה 5

תהיינה $A,B,C\in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A\neq 0$.

א. <u>אם $AB=AC$ אז $B=C$.</u>

לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

$$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad AC=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,$$

$AB=AC$ אבל $B\neq C$.

ב. <u>אם $AB=0$ אז $A=0$ או $B=0$.</u>

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

$$A\cdot B=0\ ,\qquad A\neq 0\ ,B\neq 0\ .$$

■

שאלה 6

$$\begin{aligned} x+y-2z &= 0 \\ 2x-y+z &= 0 \\ x+y-z &= 6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + \frac{5}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + \frac{1}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$(x,y,z) = (2,10,6)$$

■

שאלה 7

נכתוב A בצורה $A = (a_1 \ a_2 \ a_3)$ כאשר

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

כך ש-

$$A\cdot a_1=\begin{pmatrix}2&0&1\\4&2&-5\\0&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}=2a_1+4a_2+0a_3=\begin{pmatrix}4\\16\\4\end{pmatrix}$$

$$A\cdot a_2=\begin{pmatrix}2&0&1\\4&2&-5\\0&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=0a_1+2a_2+a_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$$

$$A\cdot a_3=\begin{pmatrix}2&0&1\\4&2&-5\\0&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix}=a_1-5a_2+3a_3=\begin{pmatrix}5\\-21\\4\end{pmatrix}$$

סך הכל

$$A^2=A\cdot A=(A\cdot a_1\ A\cdot a_2\ A\cdot a_3)=\begin{pmatrix}4&1&5\\16&-1&-21\\4&5&4\end{pmatrix}$$

$$A^2-4A+2I=\begin{pmatrix}4&1&5\\16&-1&-21\\4&5&4\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}2&0&1\\4&2&-5\\0&1&3\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&-7&-1\\4&1&-6\end{pmatrix}$$

■

שאלה 8

<u>אם $AB=AC$ אז $B=C$</u>:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

$$A\cdot B=A\cdot C=0\ ,\qquad B\neq C\ .$$

■

שאלה 9

$$A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-11&16&-8\\-6&10&-5\\-1&-3&5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot b=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-11&16&-8\\-6&10&-5\\-1&-3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-3\\-1\\8\end{pmatrix}\ .$$

■

שאלה 10

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 1 - 1 = 4$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 9$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$x = \frac{9}{4}\ , \qquad y = \frac{-3}{4}\ , \qquad z = \frac{-3}{4}\ .$$

■

שאלה 11

$$\begin{aligned} -5x - 4y + 5z - 2t &= -2 \\ 4x - y - 5z - 2t &= -9 \\ 4x - y - 4z - t &= -10 \\ 2x - y - 3z - 2t &= -5 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & -5 & -2 \\ 4 & -1 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad , \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & -5 & -2 \\ 4 & -1 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 5 & -2 \\ -9 & -1 & -5 & -2 \\ -10 & -1 & -4 & -1 \\ -5 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & -2 & 5 & -2 \\ 4 & -9 & -5 & -2 \\ 4 & -10 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -16$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & -4 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -9 & -2 \\ 4 & -1 & -10 & -1 \\ 2 & -1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & -5 & -9 \\ 4 & -1 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 8$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1 \ , \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 4 \ , \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1 \ , \qquad t = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -2 \ .$$

■

שאלה 12

$$\begin{aligned} 2x + y - 4z =& 0 \\ 4x + 5y + z =& 0 \\ 2x + 3y - z =& 6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1, R_3 \to R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -\frac{1}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$(x, y, z) = (-7, 6, -2)$$

■

שאלה 13 נסמן $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. מצאו את $A^2 - 3A + 2I$. נכתוב A בצורה $A = (a_1 \ a_2 \ a_3)$ כאשר

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כך ש-

$$A\cdot a_1=\begin{pmatrix}3&0&2\\0&2&5\\0&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\quad=3\cdot a_1+0\cdot a_2+0\cdot a_3=\begin{pmatrix}9\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$A\cdot a_2=\begin{pmatrix}3&0&2\\0&2&5\\0&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\quad=0\cdot a_1+2\cdot a_2+2\cdot a_3=\begin{pmatrix}4\\14\\6\end{pmatrix}$$

$$A\cdot a_3=\begin{pmatrix}3&0&2\\0&2&5\\0&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}\quad=2\cdot a_1+5\cdot a_2+a_3=\begin{pmatrix}8\\15\\11\end{pmatrix}$$

סך הכל

$$A^2=A\cdot A=(A\cdot a_1\ A\cdot a_2\ A\cdot a_3)=\begin{pmatrix}9&4&8\\0&14&15\\0&6&11\end{pmatrix}$$

$$A^2-3A+2I=\begin{pmatrix}9&4&8\\0&14&15\\0&6&11\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}3&0&2\\0&2&5\\0&2&1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&4&2\\0&10&0\\0&0&10\end{pmatrix}$$

■

שאלה 14

אם $AB=0$ ו- $A\neq 0$ אז B איננה הפיכה.

טענה נכונה. הסבר:

נניח בדרך השלילה ש $A\cdot B=0$ ו- $A\neq 0$ ו- B הפיכה. אז קיימת B^{-1}. לכן

$$A\cdot B\cdot B^{-1}=0\quad\Rightarrow\quad A=0\ .$$

סתירה!

■

שאלה 15 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad AB=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\ ,\qquad (AB)^2=\begin{pmatrix}3&6\\3&6\end{pmatrix}\ ,$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\ ,\qquad B^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad A^2B^2=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\ .$$

■

שאלה 16 חשבו את המטריצה ההפוכה של $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ בעזרת זה פתרו את המערכת

$$\begin{aligned} 3x+2y+z &= 1 \\ 4x+2y+z &= 2 \\ 4x+6y+2z &= 3 \end{aligned}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 8 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\cdot b = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 8 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -5 \end{pmatrix} .$$

■

שאלה 17 פתרו את המערכת הבא בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{aligned} -5x-4y+5z-2t &= -2 \\ 4x-y-5z-2t &= -9 \\ 4x-y-4z-t &= -10 \\ 2x-y-3z-2t &= -5 \end{aligned}$$

$$A=\begin{pmatrix} -5 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & -5 & -2 \\ 4 & -1 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} , \qquad b=\begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} -5 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & -5 & -2 \\ 4 & -1 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -2 & -4 & 5 & -2 \\ -9 & -1 & -5 & -2 \\ -10 & -1 & -4 & -1 \\ -5 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} -5 & -2 & 5 & -2 \\ 4 & -9 & -5 & -2 \\ 4 & -10 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -16$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} -5 & -4 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -9 & -2 \\ 4 & -1 & -10 & -1 \\ 2 & -1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & -5 & -9 \\ 4 & -1 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 8$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1 \ , \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 4 \ , \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1 \ , \qquad t = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -2 \ .$$

■

שאלה 18

- אם יש שורה סתירה אז למערכת 0 פתרונות. אחרת, למערכת יש פתרונות. יתכנו המקרי הבאים:
- משתנה חופשי אחד ואז למערכת יש 5 פתרונות.
- 2 משתנים חופשיים ואז למערכת יש 5^2 פתרונות.
- 3 משתנים חופשיים ואז למערכת יש 5^3 פתרונות.
- 4 משתנים חופשיים ואז למערכת יש 5^4 פתרונות.

■

שאלה 19

אם $AB = AC$ אז $B = C$:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = A \cdot C = 0 \ , \qquad B \neq C \ .$$

■

שאלה 20

לא נכונה. הטענה לא בהכרח מתקיים. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq AB \ .$$

■

שאלה 21

הטענה לא נכונה.

$$\begin{aligned} (A+B)^2 &= (A+B)(A+B) \\ &= A \cdot A + B \cdot A + A \cdot B + B \cdot B \\ &= A^2 + BA + AB + B^2 \end{aligned}$$

שים לב ש $AB = BA$ לא בהכרח מתקיים ולכן

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

באופן כללי.

■

שאלה 22 הטענה לא נכונה.

$$\begin{aligned}(A+B)(A-B) =& A \cdot A + B \cdot A - A \cdot B - B \cdot B \\ =& A^2 + BA - AB - B^2\end{aligned}$$

שים לב ש $AB = BA$ לא בהכרח מתקיים ולכן

$$(A+B)(A-B) \neq A^2 + AB - BA - B^2$$

באופן כללי.

■

שאלה 23 לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad a > 0, b > 0 \ .$$

■

שאלה 24 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \qquad (AB) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad (AB)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \qquad A^t B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq (AB)^t$$

■

שאלה 25 הטענה נכונה. הסבר:

$$\left((A+B)^t\right)_{ij} = \left(A^t + B^t\right)_{ij} = \left(A^t\right)_{ij} + \left(B^t\right)_{ij} = A_{ji} + B_{ji} = (A+B)_{ji} = \left((A+B)^t\right)_{ij}$$

שים לב ששתי מטריצות שוות אם"ם הרכיבים שווים. כיוון שהרכיבים שווים, אז

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

■
