

## שיעור 3

### מכונות טיורינג מרובת סרטים

#### 1.3. מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה היוריסטית

מכונת טיורינג מרובת סרטים (מטמ"ס) היא הכללה של מ"ט עם סרט יחיד. ההבדל הוא של מטמ"ס ישנו מספר סופי של סרטים, נניח  $k > 1$  סרטים.



- לכל סרט יש ראש שלו.
- בתחילת העבודה הקלט  $w$  כתוב בתחילת הסרט הראשון וכל הסרטים ריקים. הראשים בכל סרט מוצבאים על הטא הראשון הסרט, והמכונה נמצאת במצב התחלתי  $q_0$ .
- בכל צעד חישוב, לפי המצב הנוכחי ול-  $k$  התווים שמתוחת ל-  $k$  הראשים, המכונה מחליט לאיזה מצב לעבור, מה לכתוב מתחת לכל אחד מ-  $k$  הראשים ולאן להזיא את הראש בכל אחד מ-  $k$  הסרטים.
- הראשים של הסרטים יכולים לזרז באופן בלתי- תלוי בהתאם לפונקציית המעברים של המטמ"ס.

#### 2. מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה פורמלית

##### הגדרה 3.1 מכונת טיורינג מרובת סרטים

מכונת טיורינג מרובת סרטים היא שבייעה:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר  $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}$  מוגדרים כמו מ"ט עם סרט יחיד (ראו הגדרה 1.2).  
ההבדל היחיד בין מ"ט עם סרט יחיד לבין מטב"ס הוא הפונקציית המעברים. עבור מטמ"ס הפונקציית המעברים היא מצורה הבא:

$$\delta_k : (Q \setminus \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$$

**דוגמה 3.1**

$$\delta_k \left( q, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left( p, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \\ L \end{pmatrix} \right).$$

**3.3 קונפיגורציה של מטמ"ס**

הכללה של קונפיגורציה של מ"ט עם סרט יחיד:

$$\begin{pmatrix} u_1 q \ v_1 \\ u_2 q \ v_2 \\ \vdots \\ u_k q \ v_k \end{pmatrix}$$

**דוגמה 3.2**

בנו מטמ"ס שמכריעת את השפה:

$$L_{w^R} = \{w = \{a, b\}^* \mid w = w^R\}.$$

כלומר שפת הפלינדרומים.

**פתרון:**

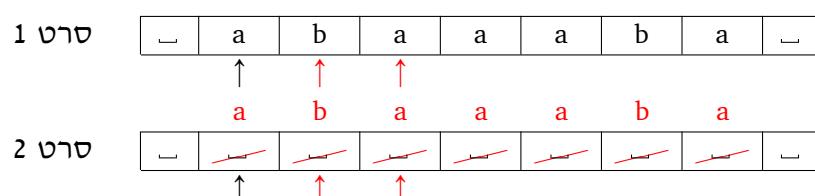
בנייה מ"ט עם שני סרטים:

תאואר המכונה:

נסמן  $M_2$  המ"ט עם 2 סרטים שמכריעת את השפה  $L_{w^R}$ .

על הקלט  $w = M_2$ :

(1) מעתיקת את  $w$  לסרט 2.



(2) מזיהה את הראש בشرط 1 לתו הראשון ב-  $w$  ואת הראש בشرط 2 לתו האחרון ב-  $w$ .

(3) משווה בין התווים שמתוחת לראשים:

- אם התו שמתוחת לראש 1 הוא  $\sqsubset$

$$\text{.acc} \Leftarrow$$

- אם התווים שמתוחת לראשים שונים  $\text{.rej} \Leftarrow$

- אחרת מזיהה את הראש בشرط 1 ימינה ואת הראש בشرط 2 שמאליה, וחוזרת לשלב (3).

הfonקציית המעברים של  $M_2$  היא:

$$\delta\left(q_0, \begin{pmatrix} a \\ \sqsubset \end{pmatrix}\right) = \left(q_0, \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}\right),$$

$$\delta\left(q_0, \begin{pmatrix} b \\ \sqsubset \end{pmatrix}\right) = \left(q_0, \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}\right),$$

$$\delta\left(q_0, \begin{pmatrix} \sqsubset \\ \sqsubset \end{pmatrix}\right) = \left(q_{\text{back}}, \begin{pmatrix} \sqsubset \\ \sqsubset \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ S \end{pmatrix}\right),$$

$$\delta\left(q_0, \begin{pmatrix} \sqsubset \\ \sqsubset \end{pmatrix}\right) = \left(q_{\text{back}}, \begin{pmatrix} \sqsubset \\ \sqsubset \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ S \end{pmatrix}\right),$$

$$\delta\left(q_{\text{back}}, \begin{pmatrix} \sqsubset \\ \sqsubset \end{pmatrix}\right) = \left(q_{\text{check}}, \begin{pmatrix} \sqsubset \\ \sqsubset \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}\right),$$

$$\delta\left(q_{\text{check}}, \begin{pmatrix} \sigma \\ \sigma \end{pmatrix}\right) = \left(q_{\text{check}}, \begin{pmatrix} \sigma \\ \sigma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ L \end{pmatrix}\right),$$

$$\delta\left(q_{\text{check}}, \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix}\right) = \left(q_{\text{rej}}, \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S \\ S \end{pmatrix}\right),$$

$$\delta\left(q_{\text{check}}, \begin{pmatrix} \sqsubset \\ \sqsubset \end{pmatrix}\right) = \left(q_{\text{acc}}, \begin{pmatrix} \sqsubset \\ \sqsubset \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S \\ S \end{pmatrix}\right).$$

נשים לב כי הסיבוכיות זמן של המcona עם שני סרטים,  $M_2$  היא  $O(|w|)$ , כאשר  $w$  האורך של המילה.

כעת נבנה מ"ט עם סרט ייחיד שמכריעת את השפה  $L_{W^R}$ .

תאור המcona:

נסמן  $M_1$  המcona עם סרט ייחיד שמכריעת את השפה  $L_{w^R}$

על הקלט  $w = M_1$

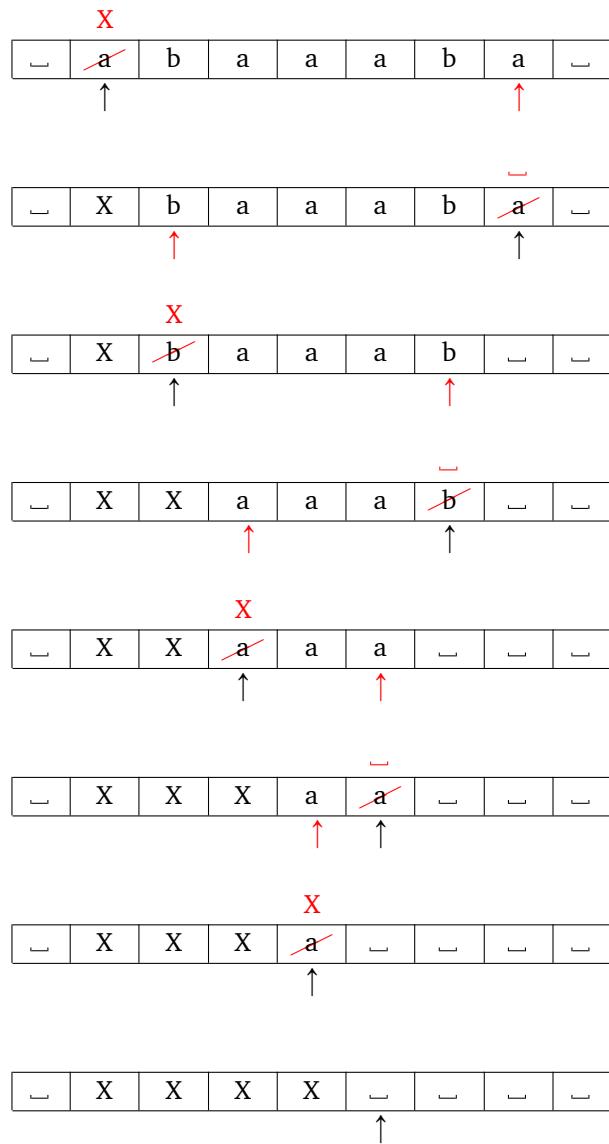
(1) אם התו שמתוחת לראש הוא  $\sqsubset$  אז  $.acc \leftarrow M_1$

(2) זוכרת את התו שמתוחת לראש ומוחקתו אותו ע"י  $X$ .

(3) מזיהה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאל ל-  $\sqsubset$ .

• אם התו שמתוחת לראש הוא  $X$   $.acc \Leftarrow X$

- אם הトー שונה מהתו שזכורנו  $\Leftarrow \text{ rej}$ .
- מוחק את הトー שמתהית לראש ע"י  $\_$ , מזיה את הראש שמאלוה עד הトー הראשון מימין לו  $- X$  וחזרת לשלב (1).



## 3.4 שיקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

מ"ט עם סרט יחיד היא מקרה פרטי של מטמ"ס.

### משפט 3.1 שיקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

לכל מטמ"ס  $M$  קיימת מ"ט עם סרט יחיד  $M'$  השקולה לו  $M$ .

כלומר, לכל קלט  $w \in \Sigma^*$ :

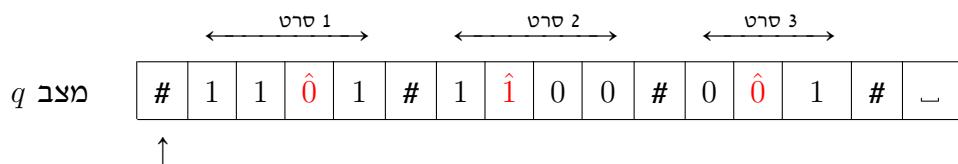
- אם  $M$  מקבלת את  $w$   $\Leftarrow M'$  מקבלת את  $w$ .
- אם  $M$  דוחה את  $w$   $\Leftarrow M'$  דוחה את  $w$ .
- אם  $M$  לא עוצרת על  $w$   $\Leftarrow M'$  לא עוצרת על  $w$ .

הוכחה:

בhinint מטמ"ס  $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q'_0, q'_{acc}, q'_{rej})$  עם  $k$  סרטים, נבנה מ"ט עם סרט יחיד  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{acc}, q_{rej})$  שהskolla ל-  $M$  באופן הבא:

רעיון הבנייה:

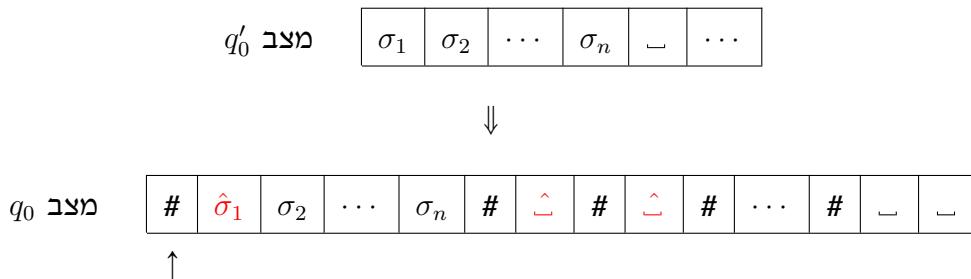
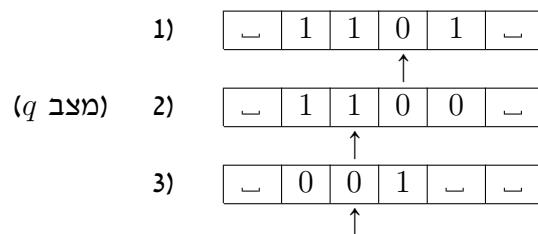
בhinint קלט  $M'$ ,  $w \in \Sigma^*$  תבצע "סימולציה" של ריצה  $M$  על  $w$ .

 $M$ -ב $M'$ -ב

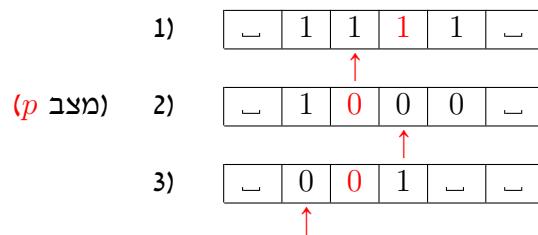
- $M'$  תשמור את התוכן של  $k$  הסרטים של  $M$  על הסרט, רק שההתוכן של סרט  $i$  יופיע בין  $\#_i$  ל-  $\#_{i+1}$ .
- $M'$  תשמור את המיקום של הראשיים של  $M$  ע"י הכפלת הא"ב  $\Gamma$ .  
כלומר, לכל אות  $\alpha \in \Sigma$ ,  $M'$  תשמור שתי אותיות  $\alpha$  ו-  $\hat{\alpha}$  ב-  $\Gamma'$ , כך ש-  $\hat{\alpha}$  תסמן את התו שמתוחת בראש בכל סרט.
- בכל צעד חישוב,  $M'$  סורקת את הסרט שלה משמאלי לيمין כדי ללמידה מהם התווים שמתוחת בראשים (התווים שמשמעותם ב-  $\hat{\alpha}$ ).
- $M'$  משתמש בפונקציית המעברים  $\delta_k$  של  $M$  כדי לחשב את המעבר הבא.
- $M'$  סורקת את הסרט שלה משמאלי לימין כדי לעדכן את הסרטים ואת המיקום הראשיים בהם.

תאור הבנייה של  $M'$ :**1) שלב האיתחול**

בhinint קלט  $M'$ ,  $w = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$  מתחילה את הקונFIGורציה ההתחלתית של  $M$  על הסרט שלה.

$M$ -ב $M'$ -ב(2) תאור צעד חישוב של  $M$  $M$ -ב

$$\delta_k \left( q, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left( p, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ R \\ L \end{pmatrix} \right)$$



M' ב-

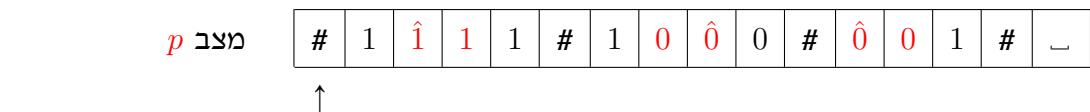
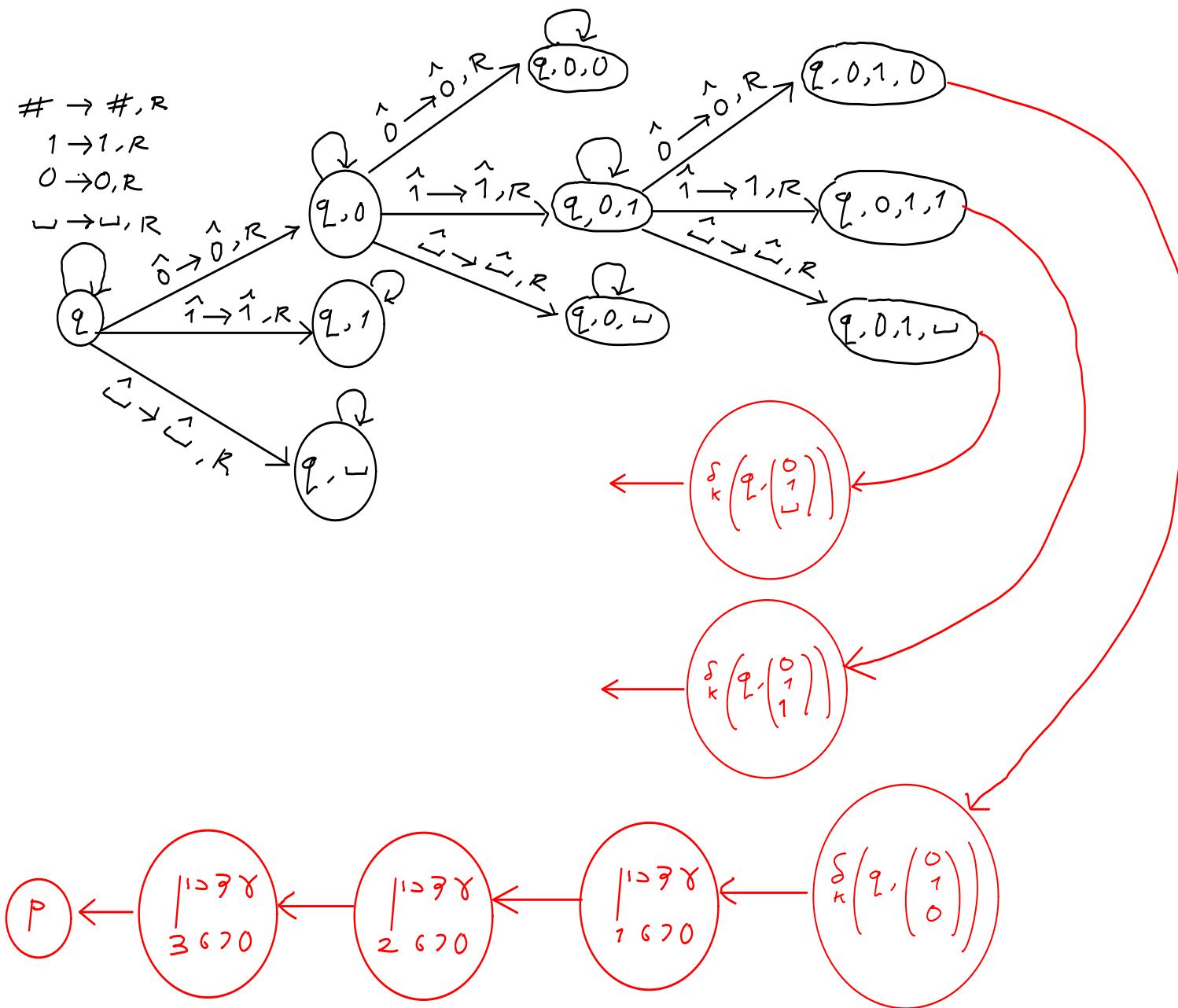
↓

- איסוף מידע
  - $M'$  סורק את הסרט שלא משמאלי לימיין ומזהה את התווים שמסומנים ב- $\hat{a}$ . מידע זה ניתן לשמר במצבים. לדוגמה:

$$q, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

זה אפשרי מכיוון שמספר המצבים הנדרש הוא סופי:

$$|Q| \times |\Gamma|^k$$



• עדכון הסרטים

- אם בכלל שלב  $M$  מזיהה אחד מן הראשיים הויירוטואליים ימינה אל סימן  $\#$ , פעולה זו מצינית שמכונת  $M$  הזיהה את הראש המתאים אל החלק הריק שטרם נקרא של הסרט. لكن  $M$  כותבתתו על המשבצת הזו ומזיהה את כל התוכן של הסרט בין התא הזה לבין התא  $\#$  הימני ביותר בתחום אחד ימינה. לאחר מכן ממשיכת את הסימולציה כרגע.