מרחב אוקלידי: מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$.

מרחב אוניטרי: מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$.

הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי V מעל $\mathbb{R}$:
לכל $u, \mathrm{v}, w \in V$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{R}$:

1) סימטריות: $\langle u, \mathrm{v} \rangle = \langle \mathrm{v}, u \rangle$

2) ליניאריות: $\langle u + \mathrm{v}, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle \mathrm{v}, w \rangle$
$\langle \lambda u, \mathrm{v} \rangle = \lambda \langle u, \mathrm{v} \rangle$

3) חיוביות: $\langle u, u \rangle \geq 0.$
$\langle u, u \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$

הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי V מעל $\mathbb{C}$:
לכל $u, \mathrm{v}, w \in V$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{C}$:

1) הרמיטיות: $\langle u, \mathrm{v} \rangle = \overline{\langle \mathrm{v}, u \rangle}$

2) ליניאריות: $\langle u + \mathrm{v}, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle \mathrm{v}, w \rangle$
$\langle \lambda u, \mathrm{v} \rangle = \lambda \langle u, \mathrm{v} \rangle$

3) חיוביות: $\langle u, u \rangle \geq 0$
$\langle u, u \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$

אי-שוויון קושי שוורץ: $|\langle u, \mathrm{v} \rangle| \leq \|u\| \cdot \|\mathrm{v}\|$

אי-שוויון המשולש: $\|u + \mathrm{v}\| \leq \|u\| + \|\mathrm{v}\|$

היטל אורתוגונלי של ווקטור v על תת מרחב בעל בסיס אורתוגונלי $u_1, \ldots, u_n$:

$$P_U(\mathrm{v}) = \frac{\langle \mathrm{v}, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle \mathrm{v}, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 + \cdots + \frac{\langle \mathrm{v}, u_n \rangle}{\|u_n\|^2} u_n \ .$$

תהליך גרם שמידט לבניית בסיס אורתוגונלי:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \mathrm{v}_1 \ , \\
u_2 &= \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \\
u_3 &= \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \\
&\vdots \\
u_n &= \mathrm{v}_n - \frac{\langle \mathrm{v}_n, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_n, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \ldots - \frac{\langle \mathrm{v}_n, u_{n-1} \rangle}{\|u_{n-1}\|^2} u_{n-1} \ .
\end{aligned}$$

$\lambda \in \mathbb{F}$ **ערך עצמי** ו- $u \in \mathbb{F}^n$ **ווקטור עצמי** ($u \neq 0$) של מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ אם: $Au = \lambda u$

פולינום אופייני של מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$: $p_A(\lambda) = |\lambda I - A|$

בסיס אורתונורמלי:

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. בסיס אורתונורמלי, מסומן $\{b_1,\ldots,b_n\}$, מקיים את התנאי

$$\langle b_i, b_j\rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} , \qquad 1 \leq i,j \leq n \ .$$

כל וקטור $u \in V$ ניתן לרשום בבסיס אורתונורמלי:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, b_i\rangle\, b_i$$

סימון חלופי:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \langle u, b_1\rangle \\ \langle u, b_2\rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_i\rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_n\rangle \end{pmatrix}_B$$

יהי $T: V \to V$ אופרטור. המצרטיצה המייצגת על פי בסיס B היא

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \langle T(b_1), b_1\rangle & \langle T(b_2), b_1\rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_1\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_1\rangle \\ \langle T(b_1), b_2\rangle & \langle T(b_2), b_2\rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_2\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_2\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_i\rangle & \langle T(b_2), b_i\rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_i\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_i\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_n\rangle & \langle T(b_2), b_n\rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_n\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_n\rangle \end{pmatrix} .$$

כלומר האיבר ה- ij של המטריצה המייצגת של T על פי הבסיס B היא . $[T]_{ij} = \langle T(b_j), b_i\rangle$

ההגדרה של אופרטור הצמוד:

אם $T: V \to V$ אופרטור, ו- $u, w \in V$ שני וקטורים כלשהם של V, אזי האופרטור הצמוד של T מוגדר כך שמתקיים

$$\langle T(u), w\rangle = \langle u, T^*(w)\rangle \ . \qquad (*1)$$

מההגדרה (1*) נובע:

$$\langle T^*(u), w\rangle = \langle u, T(w)\rangle \qquad (*2)$$

נוסחה ל- $T(u)$ ו- $T^*(u)$ במונחי בסיס אורתונורמלי $\{b_1,\cdots,b_n\}$:

$$T(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(u), b_i\rangle\, b_i \qquad (*3)$$

$$T^*(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u, T(b_i)\rangle\, b_i \qquad (*4)$$

משפט:

(*5)
$$T^{**} = T$$

משפט: המטריצה המייצגת של אופרטור צמוד T^* נתונה ע"י

(*6)
$$[T^*] = [T]^*$$

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית.

A הרמיטית:	$A = A^*$
A אנטי-הרמיטית:	$A^* = -A$
A אוניטרית:	$AA^* = I = A^*A$
A נורמלית:	$AA^* = A^*A$

יהי $T : V \to V$ אופרטור מעל מרחב וקטורי V. נסמן המטריצה המייצגת $A = [T]$.

T צמוד לעצמו:	$A = A^*$	$\Leftrightarrow$	$T = T^*$
T אנטי-הרמיטי:	$A^* = -A$	$\Leftrightarrow$	$T^* = -T$
T אוניטרי:	$AA^* = I = A^*A$	$\Leftrightarrow$	$TT^* = I_V = T^*T$
T נורמלי:	$AA^* = A^*A$	$\Leftrightarrow$	$TT^* = T^*T$