חישוביות וסיבוכיות

מועד א'

פתרון לדוגמא

ד"ר יוחאי טוויטו,   ,   ד"ר ירמיהו מילר,   .

סמסטר א, תשפ"ה'

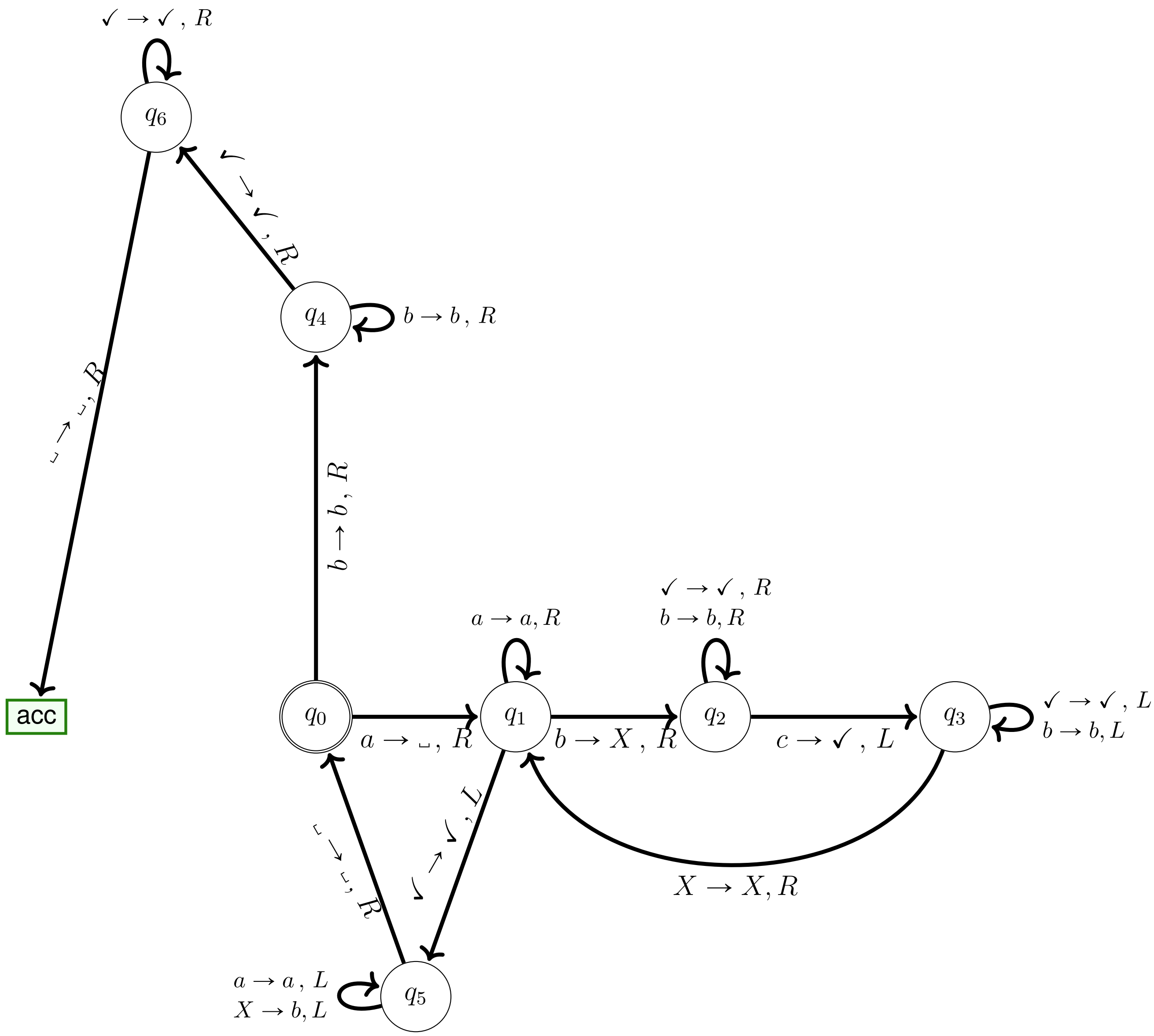
מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הינן פתרונות לדוגמא. ניתן לפתור חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *

פתרונות

שאלה 1: מכונת טיורינג 20 נקודות

סעיף א'



פתרונות

סעיף ב' הפונקציה שאותה המכונה מחשבת היא הפונקציה:

$$f(x) = x \mod 3 \ .$$

כלומר, המכונה מחשבת את שארית החלוקה ב- 3 של המספר האונרי הנתון כקלט.

סעיף ג' הפונקציה שאותה המכונה מחשבת היא הפונקציה:

$$f\left(1^i\#1^j\right) = 1^{|i-j|} \ .$$

כלומר, המכונה מחשבת את הערך המוחלט של ההפרש בין שני מספרים $1^i, 1^j$, הנתונים בקלט.
הסבר:

$$q_0\ 1\#1 \ \vdash\ q_1\#1 \ \vdash_*\ \#1q_1 \ \vdash\ \#q_2 1 \ \vdash_*\ q_{\text{back}} \sqcup \# \ \vdash\ q_0\# \ \vdash\ \text{acc}\ .$$

לכן $f(1\#1) = 0$.

$$q_0\ 11\#1 \ \vdash\ q_1\ 1\#1 \ \vdash_*\ 1\#1q_1 \ \vdash\ 1\#q_2 1 \ \vdash_*\ q_{\text{back}} \sqcup 1\# \ \vdash\ q_0\ 1\#$$

$$\vdash\ q1\ \# \ \vdash\ \#q_1 \sqcup \ \vdash\ q_2\ \# \sqcup \ \vdash\ q_4 \sqcup 1 \ \vdash\ \sqcup\ \text{acc}\ 1$$

לכן $f(11\#1) = 1$.

נסתכל על קלט כללי $1^i\#1^j$ כאשר $i \geqslant j$:

$$q_0\ 1^i\#1^j \ \vdash_*\ 1^{i-1}\#q_1 1^j \ \vdash_*\ 1^{i-1}\#1^j q_1 \sqcup \ \vdash\ 1^{i-1}\#1^{j-1}q_2 1 \ \vdash\ 1^{i-1}\#1^{j-2}q_{\text{back}}\ 1 \sqcup$$

$$\vdash_*\ q_{\text{back}} \sqcup 1^{i-1}\#1^{j-1} \ \vdash\ q_0\ 1^{i-1}\#1^{j-1}$$

$$\vdots$$

$$\vdash_*\ q_0\ 1^{i-j}\#\sqcup \ \vdash_*\ 1^{i-j-1}\#q_1\sqcup \ \vdash\ 1^{i-j-1}q_2\# \ \vdash\ 1^{i-j-2}q_4\ 11 \ \vdash_*\ q_4 \sqcup 1^{i-j}$$

$$\vdash\ \text{acc}\ 1^{i-j}$$

לכן

$$f(1^i\#1^j) = 1^{i-j}\ , \qquad i \geqslant j\ . \qquad (*1)$$

נסתכל על קלט כללי $1^i\#1^j$ כאשר $i < j$:

$$
\begin{aligned}
q_0\ 1^i\#1^j \quad &\vdash_* \quad 1^{i-1}\#q_1 1^j \quad \vdash_* \quad 1^{i-1}\#1^j q_1 \sqcup \quad \vdash \quad 1^{i-1}\#1^{j-1}q_2 1 \quad \vdash \quad 1^{i-1}\#1^{j-2}q_{\text{back}}\ 1 \sqcup \\
&\vdash_* \quad q_{\text{back}} \sqcup 1^{i-1}\#1^{j-1} \quad \vdash \quad q_0\ 1^{i-1}\#1^{j-1} \\
&\vdots \\
&\vdash_* \quad q_0\ \#1^{j-i} \sqcup \quad \vdash \quad \text{acc}\ 1^{j-i} \sqcup
\end{aligned}
$$

לכן

$$f(1^i\#1^j) = 1^{j-i}\ , \qquad i < j\ . \tag{*2}$$

המשוואות (*1) ו- (*2) אומרות ש:

$$f(1^i\#1^j) = 1^{|i-j|}\ . \tag{*3}$$

שאלה 2: וריאציות על מכונת טיורינג 20 נקודות

כיוון ראשון: לכל מכונה ממודל OR קיימת מכונה שקולה ממודל TS

תהי $M_{OR} = \left(Q^{OR}, \Sigma^{OR}, \Gamma^{OR}, \delta^{OR}, q_0^{OR}, q_{\text{acc}}^{OR}, q_{\text{rej}}^{OR}\right)$ מכונה ממודל OR.
נבנה מכונה שקולה $M_{TS} = \left(Q^{TS}, \Sigma^{v}, \Gamma^{TS}, \delta^{TS}, q_0^{TS}, q_{\text{acc}}^{TS}, q_{\text{rej}}^{TS}\right)$ ממודל TS.
כל הרכיבים של המכונה M_{TS} יהיו זהים לרכיבים של המכונה M_{OR} מלבד פונקציית המעברים.
נגדיר את פונקציית המעברים δ^{TS}.

מעברי תנועה

נניח ש δ^{OR} מכילה את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q, \sigma) = (p, \text{move})$$

כאשר:

$$p, q \in Q^{OR}\ , \qquad \sigma \in \Gamma^{OR}\ , \qquad \text{move} \in \{L, R\}\ .$$

אז ב- δ^{TS} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{TS}(q, \sigma) = (p, \sigma, \text{move})$$

מעברי כתיבה

נניח ש δ^{OR} מכילה את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q, \sigma) = (p, \tau)$$

כאשר:

$$p, q \in Q^{OR}\ , \qquad \sigma, \tau \in \Gamma^{OR}\ .$$

אז ב- δ^{TS} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{TS}\left(q, \sigma\right) = \left(p, \tau, S\right)$$

<u>כיוון שני: לכל מכונה ממודל TS קיימת מכונה שקולה ממודל OR</u>

תהי $\left(Q^{TS}, \Sigma^{TS}, \Gamma^{TS}, \delta^{TS}, q_0^{TS}, q_{\text{acc}}^{TS}, q_{\text{rej}}^{TS}\right)$ $M_{TS} =$ מכונה ממודל TS.

נבנה מכונה שקולה $\left(Q^{OR}, \Sigma^{OR}, \Gamma^{OR}, \delta^{OR}, q_0^{OR}, q_{\text{acc}}^{OR}, q_{\text{rej}}^{OR}\right)$ $M_{OR} =$ ממודל OR.

במעברים בהן המכונה M_{TS} כותבת אות וגם זזה ימינה או שמאלה ,לא יתכן מעבר שקול יחיד במכונה ממודל OR. לכן נמיר חלק מהמעברים במכונה M_{TS} לשני מעברים עוקבים במכונה M_{OR}. במעבר הראשון נכתוב אות ובמעבר השני נבצע את התזוזה.

לשם כך, נצטרך מצבי ביניים חדשים, שיחברו בין המעברים . לכלמצב ? נגדיר שני מצבי ביניים ייחודיים q^L ו- q^R. כלומר:

$$Q^{OR} = Q^{TS} \cup \left\{q^L \mid q \in Q^{TS}\right\} \cup \left\{q^R \mid q \in Q^{TS}\right\}\ .$$

נגדיר כעת את δ^{OR} תוך שימוש במצבי ביניים.

מצבי הביניים תמיד יבצעו תזוזה שמאלה או ימינה בלבד, לכל אות שבסרט. פורמלית:

$$\forall q \in Q^{TS}\ ,\ \sigma \in \Gamma^{TS}:\quad \delta^{OR}\left(q^R, \sigma\right) = \left(q, R\right)\ ,$$
$$\forall q \in Q^{TS}\ ,\ \sigma \in \Gamma^{TS}:\quad \delta^{OR}\left(q^L, \sigma\right) = \left(q, L\right)\ .$$

עבור מעברים בהן מתבצעת כתיבה ותנועה, נגדיר את δ^{OR} תוך שימוש במצבי ביניים.

בהינתן מעבר עם תנועה ימינה:

$$\delta^{TS}\left(q, \sigma\right) = \left(p, \tau, R\right)\ .$$

כאשר:

$$q, p \in Q^{TS}\ , \qquad \sigma, \tau \in \Gamma^{TS}$$

אז ב- δ^{OR} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}\left(q, \sigma\right) = \left(p^R, \tau\right)\ .$$

באופן דומה, בהינתן מעבר עם תנועה שמאלה:

$$\delta^{TS}\left(q, \sigma\right) = \left(p, \tau, L\right)\ .$$

כאשר:

$$q, p \in Q^{TS}\ , \qquad \sigma, \tau \in \Gamma^{TS}$$

אז ב- δ^{OR} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}\left(q, \sigma\right) = \left(p^L, \tau\right)\ .$$

במעברים בהם המכונה M_{TS} אינה מבצעת תנועה (נשארת במקום) לא נשתמש במצבי הביניים. כלומר, בהינתן מעבר בו המכונה נשארת במקום:

$$\delta^{TS}(q,\sigma)=(p,\tau,S)$$

כאשר:

$$q,p\in Q^{TS}\ ,\qquad \sigma,\tau\in\Gamma^{TS}$$

אז ב δ^{OR} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q,\sigma)=(p,\tau)\ .$$

שאלה 3: התזה של צ'רץ' טיורינג 20 נקודות

סעיף א' השפה שהדקדוק G יוצר היא:

$$L(G)=\left\{a^n b^n c^n\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

סעיף ב'

$$L(G)=\left\{w\in\Sigma^*\ \middle|\ \#_a(w)=\#_b(w)=\#_c(w)\right\}$$

כלומר, שפת כל המילים בהן מספר שווה של אותיות a, אותיות b, ואותיות c.

שאלה 4: אי-כריעות 20 נקודות

נתון: השפה $L_{M_1\cup M_2}$ מוגדרת:

$$L_{M_1\cup M_2}=\left\{\langle M_1,M_2,w\rangle\ \middle|\ w\in L(M_1)\cup L(M_2)\right\}$$

ז"א $L_{M_1\cup M_2}$ השפה שכוללת כל המחרוזות $\langle M_1,M_2,w\rangle$ כאשר w שייך לאחת השפות $L(M_1)$ או $L(M_2)$ לפחות.

צריך להוכיח: קיימת רדוקציה התאמה בין השפה A_{TM} לשפה $L_{M_1\cup M_2}$, כלומר

$$A_{TM}\leqslant L_{M_1\cup M_2}\ .$$

הגדרת הרדוקציה:

בהינתן $\langle M,w\rangle$ קלט של A_{TM} ניצור $\langle M_1,M_2,w\rangle$ קלט של $L_{M_1\cup M_2}$ כך שמתקיים התנאי הבא:

$$\begin{aligned}\langle M,w\rangle\in A_{TM}\quad&\Rightarrow\quad\langle M_1,M_2,w\rangle\in L_{M_1\cup M_2}\ ,\\ \langle M,w\rangle\notin A_{TM}\quad&\Rightarrow\quad\langle M_1,M_2,w\rangle\notin L_{M_1\cup M_2}\ .\end{aligned}$$

נגדיר את פונקציית הרוקציה באופן הבא:

$M_1=$ "על כל קלט x $M_1\leftarrow$ rej."

$M_2=$ "על כל קלט x:

- מריצה M על w ועונה כמוה.

נכונות הרדוקציה:

כיוון $\Leftarrow$

אם $\langle M, w\rangle \in A_{TM}$

$\Leftarrow$ $w \in L(M)$

$\Leftarrow$ $w \in L(M_2)$.

$\Leftarrow$ $w \in L(M_2) \cup \varnothing$

$\Leftarrow$ $w \in L(M_2) \cup L(M_1)$

$\Leftarrow$ $\langle M_1, M_2, w\rangle \in L_{M_1 \cup M_2}$.

כיוון $\Rightarrow$

אם $\langle M, w\rangle \notin A_{TM}$

$\Leftarrow$ $w \notin L(M)$.

$\Leftarrow$ $w \notin L(M_2)$.

$\Leftarrow$ $w \notin L(M_2)$ וגם $w \notin L(M_1)$ (כי השפה של M_1 היא $\varnothing$).

$\Leftarrow$ $\langle M_1, M_2, w\rangle \notin L_{M_1 \cup M_2}$.

שאלה 5: סיבוכיות זמן 20 נקודות

פונקצית הרדוקציה:

נגדיר פונקצית הרדוקציה f שבהינתן זוג $\langle G, k\rangle \in IS$, (הקלט של IS), יוצרת $\langle G', k'\rangle \in VC$, (הקלט של VC), אשר מקיימת את התנאי:

$$\langle G, k\rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G', k'\rangle \in VC\ . \tag{*2}$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

פתרונות

1) בהינתן הגרף $G=(V,E)$, אז הגרף G' הוא אותו גרף $G=(V,E)$.

2) $k' = |V| - k$.

<u>נכונות הרדוקציה</u>

כעת נוכיח שמתקיים: $\langle G', k' \rangle \in VC \quad \Leftrightarrow \quad \langle G, k \rangle \in IS$.

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

בהינתן גרף $G=(V,E)$ ושלם k.
נניח כי $\langle G, k \rangle \in IS$.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה S בגודל k לפחות: $|S| \geqslant k$.

$\Leftarrow$ אם $u_1, u_2 \in S$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.
כלומר, כל שני קדקודים ב- S לא מחוברים בצלע ב- G.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:
אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \notin S$ או $u_2 \notin S$.

$\Leftarrow$ אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \in V \backslash S$ או $u_2 \in V \backslash S$.

$\Leftarrow$ התת-קבוצה $V \backslash S$ היא כיסוי קודקודים של G.
$|S| \geqslant k$ ו- $|V \backslash S| = |V| - S$ לכן $|V \backslash S| \leqslant |V| - k$.

$\Leftarrow$ $G' = G$ מכיל כיסוי קודקודים U בגודל $|V| - k \leqslant= k'$ לכל היותר.

$\Leftarrow$ $\langle G', k' \rangle \in VC$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

בהינתן גרף G' ושלם k'.
נניח כי $\langle G', k' \rangle \in VC$.

$\Leftarrow$ $G' = (V,E)$ מכיל כיסוי קדקודים U בגודל k' לכל היותר: $|U| \leqslant k'$.

$\Leftarrow$ אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \in U$ או $u_2 \in U$.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:
אם $u_1 \notin U$ וגם $u_2 \notin U$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:
אם $u_1 \in V \backslash U$ וגם $u_2 \in V \backslash U$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

פתרונות

$\Leftarrow$ התת-קבוצה $S = V \backslash U$ היא קבוצה בלתי תלויה.

$|S| = |V| - |U|$ ו- $|U| \leqslant k'$ אז $|S| \geqslant |V| - k'$.

$\Leftarrow$ $G' = G$ מכיל קבוצה בלתי תלויה S בגודל $|V| - k' = k$ לפחות.

$\Leftarrow$ $\langle G, k\rangle \in IS$.