עבודה 8: צורת ז'ורדן של מטריצה.

שאלה 1 תהי $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ מטריצה המקיימת $p_A(x) = (x-1)^3(x-2)^3$. מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A.

שאלה 2 תהי $A \in \mathbb{R}^{8\times 8}$ מטריצה המקיימת $m_A(x) = (x+3)^3(x-2)^2$, $p_A(x) = (x+3)^6(x-2)^2$. מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A.

שאלה 3 תהי $A \in \mathbb{R}^{8\times 8}$ מטריצה המקיימת $m_A(x) = (x+3)^3(x-6)^2$. מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A.

שאלה 4 נתונה $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ המקיימת

$$2A = A^2 + I \ .$$

מצאו את כל הצורות ז'ורדן האפשרויות של A.

שאלה 5 מצאו את הפולינום האופייני והמינימלי של מטריצה A ואת צורות ז'ורדן האפשרויות.

א)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ב)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ג)
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ד)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ה)
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ו)
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

שאלה 6 תהי $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ מטריצה המקיימת

$$m_A(x) = (x-4)^2(x-2)(x-1)\ , \qquad p_A(x) = (x-4)^4(x-2)(x-1)\ ,$$

כאשר $p_A(x)$ הפולינום האופייני של A ו- $m_A(x)$ הפולינום המינימלי שלה. מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A.

שאלה 7 הביאו את מטריצה $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ לצורת ז'ורדון J ומצאו מטריצה הפיכה P כך ש $J = P^{-1}AP$.

א) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

ב) $$A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}$$

ג) $$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

ד) $$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$$

ה) $$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ו) $$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$$

ז) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

שאלה 8

א) תהי $A \in M_{7\times 7}(\mathbb{R})$ מטריצה המקיימת

$$m_A(x) = (x-3)^3(x-1)\ , \qquad p_A(x) = (x-3)^5(x-1)^2\ .$$

מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A.

ב) מצאו את צורת ז'ורדן של A אם ידוע שהריבוי הגאומטרי של ערך עצמי $\lambda = 3$ שווה ל- 2.

תשובות

שאלה 1

$A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$, $p_A(x) = (x-1)^3(x-2)^3$.

האפשרויות לפולינום המינימלי:

1. $(x-1)(x-2)$
2. $(x-1)^2(x-2)$
3. $(x-1)^3(x-2)$
4. $(x-1)(x-2)^2$
5. $(x-1)^2(x-2)^2$
6. $(x-1)^3(x-2)^2$
7. $(x-1)(x-2)^3$
8. $(x-1)^2(x-2)^3$
9. $(x-1)^3(x-2)^3$

האפשרויות צורת ז'ורדן:

1. $\underline{(x-1)(x-2)}$:

$$J = \begin{pmatrix} J_1(1) & & & & & \\ & J_1(1) & & & & \\ & & J_1(1) & & & \\ & & & J_1(2) & & \\ & & & & J_1(2) & \\ & & & & & J_1(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. $\underline{(x-1)^2(x-2)}$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(1) & & & & \\ & J_1(1) & & & \\ & & J_1(2) & & \\ & & & J_1(2) & \\ & & & & J_1(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

3. $\underline{(x-1)^3(x-2)}$

$$J=\begin{pmatrix} J_3(1) & & & \\ & J_1(2) & & \\ & & J_1(2) & \\ & & & J_1(2) \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

4. $\underline{(x-1)(x-2)^2}$

$$J=\begin{pmatrix} J_1(1) & & & & \\ & J_1(1) & & & \\ & & J_1(1) & & \\ & & & J_2(2) & \\ & & & & J_1(2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. $\underline{(x-1)^2(x-2)^2}$

$$J=\begin{pmatrix} J_2(1) & & & \\ & J_1(1) & & \\ & & J_2(2) & \\ & & & J_1(2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6. $\underline{(x-1)^3(x-2)^2}$

$$J=\begin{pmatrix} J_3(1) & & \\ & J_2(2) & \\ & & J_1(2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7. $\underline{(x-1)(x-2)^3}$

$$J = \begin{pmatrix} J_1(1) & & & \\ & J_1(1) & & \\ & & J_1(1) & \\ & & & J_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

8. $\underline{(x-1)^2(x-2)^3}$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(1) & & \\ & J_1(1) & \\ & & J_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

9. $\underline{(x-1)^3(x-2)^3}$

$$J = \begin{pmatrix} J_3(1) & \\ & J_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

שאלה 2

$A \in \mathbb{R}^{8\times 8}$ מטריצה המקיימת $m_A(x) = (x+3)^3(x-2)^2$, $p_A(x) = (x+3)^6(x-2)^2$.
האפשרויות לצורת ז'ורדן:

$$\begin{pmatrix} J_3(-3) & & \\ & J_3(-3) & \\ & & J_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} J_3(-3) & & & \\ & J_2(-3) & & \\ & & J_1(-3) & \\ & & & J_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} J_3(-3) & & & & \\ & J_1(-3) & & & \\ & & J_1(-3) & & \\ & & & J_1(-3) & \\ & & & & J_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>שאלה 3</u>

$A \in \mathbb{R}^{8\times 8}$, $m_A(x) = (x+3)^3(x-6)^2$. האפשרויות לפולינום האופייני:

1. $p_A(x) = (x+3)^3(x-6)^5$
2. $p_A(x) = (x+3)^4(x-6)^4$
3. $p_A(x) = (x+3)^5(x-6)^3$
4. $p_A(x) = (x+3)^6(x-6)^2$

האפשרויות לצורת ז'ורדן:

1. <u>$p_A(x) = (x+3)^3(x-6)^5$, $m_A(x) = (x+3)^3(x-6)^2$</u>:

$$\begin{pmatrix} J_3(-3) & & & \\ & J_2(6) & & \\ & & J_2(6) & \\ & & & J_1(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

או

$$\begin{pmatrix} J_3(-3) & & & & \\ & J_2(6) & & & \\ & & J_1(6) & & \\ & & & J_1(6) & \\ & & & & J_1(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

.2 <u>$p_A(x) = (x+3)^4(x-6)^4$, $m_A(x) = (x+3)^3(x-6)^2$</u>:

$$\begin{pmatrix} J_3(-3) & & & \\ & J_1(-3) & & \\ & & J_2(6) & \\ & & & J_2(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

או

$$\begin{pmatrix} J_3(-3) & & & & \\ & J_1(-3) & & & \\ & & J_2(6) & & \\ & & & J_1(6) & \\ & & & & J_1(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

.3 <u>$p_A(x) = (x+3)^5(x-6)^3$, $m_A(x) = (x+3)^3(x-6)^2$</u>:

$$\begin{pmatrix} J_3(-3) & & & \\ & J_2(-3) & & \\ & & J_2(6) & \\ & & & J_1(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

או

$$\begin{pmatrix} J_3(-3) & & & & \\ & J_1(-3) & & & \\ & & J_1(-3) & & \\ & & & J_2(6) & \\ & & & & J_1(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

4. $m_A(x) = (x+3)^3(x-6)^2$, $p_A(x) = (x+3)^6(x-6)^2$:

$$\begin{pmatrix} J_3(-3) & & \\ & J_3(-3) & \\ & & J_2(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

או

$$\begin{pmatrix} J_3(-3) & & & \\ & J_2(-3) & & \\ & & J_1(-3) & \\ & & & J_2(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

או

$$\begin{pmatrix} J_3(-3) & & & & \\ & J_1(-3) & & & \\ & & J_1(-3) & & \\ & & & J_1(-3) & \\ & & & & J_2(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

שאלה 4

$$2A = A^2 + I \qquad \Rightarrow \qquad A^2 - 2A + I = 0$$

לכן A מאפסת את הפולינום

$$Q(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \ .$$

הפולינום המינימלי מחלק כל פולינום שמתאפס ע"י A. בפרט, הפולינום המינימלי מחלק את $Q(x)$. לכן האפשרויות ל- $m_A(x)$ הן $x-1$ ו- $(x-1)^2$.

<u>$m_A(x) = x-1$</u>:

$$J = \begin{pmatrix} J_1(1) & & \\ & J_1(1) & \\ & & J_1(1) \end{pmatrix}$$

<u>$m_A(x) = (x-1)^2$</u>:

$$J = \begin{pmatrix} J_2(1) & \\ & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 5

א)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
p_A(x) = |xI - A| = & \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1-x & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2-x & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -x \end{vmatrix} \\
=&(-1) \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 0 \\ -4 & -1-x & 0 \\ -17 & -6 & -1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 0 \\ -4 & -1-x & 0 \\ 7 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \\
=&(-1)\cdot(-1) \begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ -4 & -1-x \end{vmatrix} - x(2-x) \begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ -4 & -1-x \end{vmatrix} \\
=&(3-x)(-1-x) + 4 - x(2-x)\left((3-x)(-1-x)+4\right) \\
=&-3 + x - 3x + x^2 + 4 - x(2-x)\left(-3+x-3x+x^2+4\right) \\
=&x^2 - 2x + 1 - x(2-x)\left(-2x+x^2+1\right) \\
=&(x-1)^2 - x(2-x)(x-1)^2 \\
=&(x-1)^2\left(1 - x(2-x)\right) \\
=&(x-1)^2\left(x^2-2x+1\right) \\
=&(x-1)^4 \ .
\end{aligned}$$

לכן $p_A(x) = (x-1)^4$. אפשרויות לפולינום המינימלי:

$$(x-1) \ , \qquad (x-1)^2 \ , \qquad (x-1)^3 \ , \qquad (x-1)^4 \ .$$

נבדוק $(x-1)$:

$$A-I=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\-4&-2&0&0\\7&1&1&1\\-17&-6&-1&-1\end{pmatrix}\neq 0_{4\times 4}\ .$$

נבדוק $(x-1)^2$:

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\-4&-2&0&0\\7&1&1&1\\-17&-6&-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&0&0\\-4&-2&0&0\\7&1&1&1\\-17&-6&-1&-1\end{pmatrix}=0_{4\times 4}\ .$$

לכן $m_A(x)=(x-1)^2$.

$$J=\begin{pmatrix}J_2(1)&\\&J_2(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

או

$$J=\begin{pmatrix}J_2(1)&&\\&J_1(1)&\\&&J_1(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

ב) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ המטריצה משולשת לכן הערכים עצמיים הם האיברים על האלכסון: $\lambda=1$ מריבוי אלגברי 4. לכן: $p_A(x)=(x-1)^4$.

אפשרויות לפולינום המינימלי:

$$(x-1)\ ,\qquad (x-1)^2\ ,\qquad (x-1)^3\ ,\qquad (x-1)^4\ .$$

נבדוק $(x-1)$:

$$A-I=\begin{pmatrix}0&2&3&4\\0&0&2&3\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\neq 0_{4\times 4}\ .$$

נבדוק $(x-1)^2$:

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}0&2&3&4\\0&0&2&3\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2&3&4\\0&0&2&3\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&4&12\\0&0&0&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\neq 0_{4\times4}\ .$$

נבדוק $(x-1)^3$:

$$(A-I)^3=\begin{pmatrix}0&2&3&4\\0&0&2&3\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&4&12\\0&0&0&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&8\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\neq 0_{4\times4}$$

לכן $m_A(x)=(x-1)^4$.

$$J=J_4(1)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

ג)

$$A=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&0&-1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}p_A(x)=|xI-A|=&\begin{vmatrix}-2-x&0&0&0\\-1&1-x&0&0\\1&-1&-x&-1\\1&1&1&2-x\end{vmatrix}\\
=&(-2-x)\begin{vmatrix}1-x&0&0\\-1&-x&-1\\1&1&2-x\end{vmatrix}\\
=&(-2-x)(1-x)\begin{vmatrix}-x&-1\\1&2-x\end{vmatrix}\\
=&(-2-x)(1-x)\left(-x(2-x)+1\right)\\
=&(-2-x)(1-x)\left(x-1\right)^2\\
=&(x+2)(x-1)^3\ .\end{aligned}$$

לכן $p_A(x)=(x+2)(x-1)^3$ האפשרויות לפולינום המינימלי:

$$(x+2)(x-1)\ ,\qquad (x+2)(x-1)^2\ ,\qquad (x+2)(x-1)^3\ .$$

נבדוק $(x+2)(x-1)$:

$$(A+2I)(A-I)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&3&0&0\\1&-1&2&-1\\1&1&1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&0&0&0\\-1&0&0&0\\1&-1&-1&-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&-3&-3&-3\\1&3&3&3\end{pmatrix}$$

נבדוק $(x+2)(x-1)^2$:

$$(A+2I)(A-I)^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&-3&-3&-3\\1&3&3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&0&0&0\\-1&0&0&0\\1&-1&-1&-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן $m_A(x)=(x+2)(x-1)^2$. האפשרויות לצורת ז'ורדן:

$$J=\begin{pmatrix}J_2(1)&&\\&J_1(1)&\\&&J_1(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

ד) $A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ המטריצה משולשית עליונה לכן

$$p_A(x)=(x-1)^2(x-2)^2\ .$$

האפשרויות לפולינום המינימלי:

$$(x-1)(x-2)\ ,\qquad (x-1)^2(x-2)\ ,\qquad (x-1)(x-2)^2\ ,\qquad (x-1)^2(x-2)^2\ .$$

נבדוק $(x-1)(x-2)$:

$$(A-I)(A-2I)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

נבדוק $(x-1)^2(x-2)$:

$$(A-I)^2(A-2I)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

נבדוק $(x-1)(x-2)^2$:

$$(A-I)(A-2I)^2=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן

$$m_A(x)=(x-1)^2(x-2)^2\ .$$

$$J=\begin{pmatrix} J_2(1) & \\ & J_2(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

ה)

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$p_A(x)=\begin{vmatrix} x+1 & -1 & -1 & -3\\ 0 & x+1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & x+1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & x-1\end{vmatrix}=(x+1)^3(x-1)$$

נבדוק $(x+1)(x-1)$:

$$A-I=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ ,\qquad A+I\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\ .$$

$$(A+I)(A-I)=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ .$$

נבדוק $(x+1)^2(x-1)$:

$$(A+I)^2(A-I)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ .$$

לכן

$$m_A(x)=(x+1)^3(x-1)$$

$$J=\begin{pmatrix} J_3(-1) & \\ & J_1(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ו)
$$A=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&0&-1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$$

$$p_A(x)=\begin{vmatrix}-2&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&0&-1\\1&1&1&2\end{vmatrix}=(x+2)(x-1)(x^2-2x+1)=(x+2)(x-1)^3\ .$$

נבדוק $(x-1)(x+2)$:

$$A+2I=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&3&0&0\\0&-1&2&-1\\1&1&1&4\end{pmatrix}\ ,\qquad A-I=\begin{pmatrix}-3&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&-1&-1&-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\ .$$

$$(A-I)(A+2I)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-3&-3&-3\\0&3&3&3\end{pmatrix}$$

נבדוק $(x-1)^2(x+2)$:

$$(A-I)^2(A+2I)=\begin{pmatrix}-3&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&-1&-1&-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-3&-3&-3\\0&3&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן

$$m_A(x)=(x-1)^2(x+2)\ .$$

$$J=\begin{pmatrix}J_1(-2)&&\\&J_2(1)&\\&&J_1(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

<u>שאלה 6</u>

$$\begin{pmatrix}J_2(4)&&&\\&J_2(4)&&\\&&J_1(2)&\\&&&J_1(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1&0&0&0&0\\0&4&0&0&0&0\\0&0&4&1&0&0\\0&0&0&4&0&0\\0&0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

או

$$\begin{pmatrix} J_2(4) &&&& \\ & J_1(4) &&& \\ && J_1(4) && \\ &&& J_1(2) & \\ &&&& J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

שאלה 7

א)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 2 & 2 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)\begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x+1)(x-1)(x-2) \ .$$

לכן

$$m_A(x) = (x+1)(x-1)(x-2) \ .$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = -1$ מריבוי אלגברי 1,

$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1,

$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 1.

כל הערכים עצמים שונים לכן A לכסינה.

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda = -1$</u>:

$$(A+I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון $(x,y,z) = (0,0,z) = z(0,0,1)$. לכן

$$V_{-1} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נסמן את הוקטור עצמי ב- $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>מרחב עצמי של $\lambda = 1$</u>:

$$(A-I)=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&1&0\\-2&-2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\0&1&0\\0&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to-\frac{1}{2}R_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&2&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון $(x,y,z)=(-z,0,z)=z(-1,0,1)$. לכן

$$V_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\ .$$

נסמן את הוקטור עצמי ב- $u_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

<u>מרחב עצמי של $\lambda=2$:</u>

$$(A-2I)=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&0&0\\-2&-2&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}-1&2&0\\-2&-2&-3\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&-6&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון $(x,y,z)=(-z,-\frac{1}{2}z,z)=z(-1,-\frac{1}{2},1)$. לכן

$$V_2=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}\ .$$

נסמן את הוקטור עצמי ב- $u_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$.

$$J=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ ,\qquad P=\begin{pmatrix}u_1&u_2&u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-2\\0&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}\ .$$

ב) $A=\begin{pmatrix}13&16&16\\-5&-7&-6\\-6&-8&-7\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}|xI-A| &= \begin{vmatrix} x-13 & -16 & -16 \\ 5 & x+7 & 6 \\ 6 & 8 & x+7 \end{vmatrix} \\ &= (x-13)\begin{vmatrix} x+7 & 6 \\ 8 & x+7 \end{vmatrix} + 16\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & x+7 \end{vmatrix} - 16\begin{vmatrix} 5 & x+7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \\ &= (x-13)\left(x^2+14x+1\right) + 16(5x-1) - 16(-6x-2) \\ &= x^3+14x^2+x-13x^2-182x-13+80x-16+96x+32 \\ &= x^3+x^2-7x-182x+91+80x-16+96x+32 \\ &= x^3+x^2-5x+3 \\ &= (x-1)^2(x+3)\end{aligned}$$

לכן הפולינום האופייני הוא $p_A(x)=(x-1)^2(x+3)$.

ערכים עצמיים:

$\lambda=1$ מריבוי אלגברי 2,

$\lambda=-3$ מריבוי אלגברי 1.

$$m_A(x)=(x-1)^2(x+3)\ .$$

$$J=\begin{pmatrix} J_2(1) & \\ & J_1(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda=1$:</u>

$$(A-I)=\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 16 & 16 & 0 \\ -5 & -8 & -6 & 0 \\ -6 & -8 & -8 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון $(x,y,z)=z(-2,\frac{1}{2},1)$.

$$V_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}\ .$$

נסמן את הוקטור עצמי ב- $u_1=\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

<u>וקטור עצמי מוכלל:</u>

$u_2=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(A-I)u_2=u_1\ , \qquad \Rightarrow \qquad (A-I)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ .$$

נרשום את המטירצה המורחבת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 16 & 16 & -4 \\ -5 & -8 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & -8 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $(x,y,z) = \left(-2z-1, \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, z\right)$ $z \in \mathbb{R}$. נציב $z=1$ ונקבל

$$u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda = 3$:</u>

$$(A+3I) = \begin{pmatrix} 10 & 16 & 16 \\ -5 & -10 & -6 \\ -6 & -8 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z) = (-2z, z, z)$ $z \in \mathbb{R}$. נציב $z=1$ ונקבל

$$u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(1) & \\ & J_1(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \ , \qquad P = \begin{pmatrix} u_1, u_2, u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ג)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_A(x) = |xI - A| = & \begin{vmatrix} x-3 & 0 & -8 \\ -3 & x+1 & -6 \\ 2 & 0 & x+5 \end{vmatrix} \\ =& (x+1) \begin{vmatrix} x-3 & -8 \\ 2 & x+5 \end{vmatrix} \\ =& (x+1)\left(x^2+2x+1\right) \\ =& (x+1)^3 \ . \end{aligned}$$

לכן $p_A(x) = (x+1)^3$. ערכים עצמיים:
$\lambda = -1$ מריבוי אלגברי 3.

$$m_A(x) = (x+1)^2 \ .$$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(-1) & \\ & J_1(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda = -1$:</u>

$$(A+I) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to 2R_3 + R_1]{R_2 \to 4R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y, z \in \mathbb{R}$. לכן בסיס של המרחב עצמי V_{-1} הוא

$$V_{-1} = \operatorname{span}\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>וקטור עצמי מוכלל של $\lambda = 1$:</u>
נגדיר וקטור כפרישה של הבסיס של V_{-1}:

$$w_1 = \alpha u_1 + \beta u_2 = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} .$$

נסמן $w_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(A+I) \cdot w_2 = w_1 \qquad \Rightarrow \qquad (A+I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 8 & -2\alpha \\ 3 & 0 & 6 & \beta \\ -2 & 0 & -4 & \alpha \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to 2R_3 + R_1]{R_2 \to 4R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 8 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 4\beta + 6\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta + 3\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון כאשר $2\beta + 3\alpha = 0$ נציב $\alpha = -2$, $\beta = 3$ ונקבל $w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ והמערכת הופכת ל-

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

הפתרון הוא $(x, y, z) = (1 - 2z, y, z)$, $y, z \in \mathbb{R}$. נציב $y = 1, z = 1$ ונקבל

$$w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

כעת אנחנו צריכים וקטור עצמי שני של $\lambda = -1$. נקח $w_3 = u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$P = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad J = \begin{pmatrix} J_2(-1) & \\ & J_1(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

ד)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_A(x) = |xI - A| = & \begin{vmatrix} x & -3 & -3 \\ 1 & x-8 & -6 \\ -2 & 14 & x+10 \end{vmatrix} \\ =& x\left(x^2+2x+4\right) + 3(x-2) - 3(2x-2) \\ =& x\left(x^2+2x+4\right) - 3x \\ =& x\left(x^2+2x+1\right) \\ =& x(x+1)^2 \ . \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 0$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = -1$ מריבוי אלגברי 2.

נמצא את הפולינום המינימלי:

$$A(A+I) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 9 & 6 \\ 2 & -14 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -15 & -9 \\ 3 & -15 & -9 \\ -4 & 20 & 12 \end{pmatrix} \neq 0$$

לכן

$$m_A(x) = x(x+1)^2 \ .$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1(0) & \\ & J_2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda = 0$:</u>

$$(A - 0I) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 8 & 6 & 0 \\ 2 & -14 & -10 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -14 & -10 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to \frac{1}{2} R_3]{R_2 \to \frac{1}{3}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -14 & -10 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1 \to -R_1]{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 8R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $z\in\mathbb{R}$, z $\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$$V_0=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נסמן $u_1=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

<u>מרחב עצמי של $\lambda=-1$:</u>

$$(A+I)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&3&0\\-1&9&6&0\\2&-14&-9&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2+R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&3&0\\0&12&9&0\\0&-20&-15&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{3}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&3&0\\0&4&3&0\\0&-20&-15&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3+5R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&3&0\\0&4&3&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{4}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&3&0\\0&1&\frac{3}{4}&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1-3R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{3}{4}&0\\0&1&\frac{3}{4}&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

פתרון: $z\in\mathbb{R}$, z $\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\-\frac{3}{4}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$$V_{-1}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-3\\-3\\4\end{pmatrix}\right\}$$

נסמן $u_2=\begin{pmatrix}-3\\-3\\4\end{pmatrix}$.

כעת נמצא ווקטור עצמי מוכלל של הערך עצמי $\lambda=-1$:

נסמן $u_3=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ונפתור את המערכת

$$(A+I)u_3=u_2\qquad\Rightarrow\qquad\begin{pmatrix}1&3&3\\-1&9&6\\2&-14&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\4\end{pmatrix}$$

$$(A+I)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -3 \\ -1 & 9 & 6 & -3 \\ 2 & -14 & -9 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 12 & 9 & -6 \\ 0 & -20 & -15 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & -20 & -15 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to \frac{1}{4}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $z\in\mathbb{R}\,,z$ $\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. נציב $z=0$:

$$u_3=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$P=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -3 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} , \qquad J=\begin{pmatrix} J_1(0) & \\ & J_2(-1) \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|cc} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) .$$

ה)
$$A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_A(x) =&|xI-A| = \begin{vmatrix} x-4 & -5 & 2 \\ x+2 & x+2 & -1 \\ x+1 & x+1 & -1 \end{vmatrix} \\ =&(x-4)\left(x^2+x-1\right)+5(2x-1)+2(-x) \\ =&(x-4)\left(x^2+x-1\right)+8x-5 \\ =&x^3+x^2-x-4x^2-4x+4+8x-5 \\ =&x^3-3x^2+3x-1 \\ =&(x-1)^3 . \end{aligned}$$

ערכים עצמיים: $\lambda=1$ מריבוי אלגברי 3.

<u>פולינום מינימלי:</u>

נבדוק $x-1$:

$$A-I=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\neq 0$$

נבדוק $x-1$:

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}3&5&-2\\-2&-3&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&5&-2\\-2&-3&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&-2&1\\-1&-2&1\end{pmatrix}\neq 0$$

לכן $m_A(x)=(x-1)^3$.

$$J=\big(J_3(1)\big)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\ .$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda=1$:</u>

$$(A-I)=\begin{pmatrix}3&5&-2\\-2&-3&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\2&3&-1\\-3&-5&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&-2&2\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן $V_1=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$. נסמן את הוקטור עצמי ב- $u_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

<u>וקטור עצמי מוכלל:</u>

נסמן $u_2=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$$(A-I)u_2=u_1\qquad\Rightarrow\qquad\begin{pmatrix}3&5&-2\\-2&-3&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$(A-I)=\left(\begin{array}{ccc|c}3&5&-2&-1\\-2&-3&1&1\\-1&-1&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&-1\\2&3&-1&-1\\-3&-5&2&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&-1\\0&1&-1&1\\0&-2&2&-2\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&-1\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&-2\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

פתרון: $\alpha\in\mathbb{R}$, $u_2=\begin{pmatrix}-2-\alpha\\1+\alpha\\\alpha\end{pmatrix}$.

נסמן $u_3=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$$(A-I)u_3=u_2\qquad\Rightarrow\qquad\begin{pmatrix}3&5&-2\\-2&-3&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-\alpha\\1+\alpha\\\alpha\end{pmatrix}$$

$$(A-I)=\left(\begin{array}{ccc|c}3&5&-2&-2-\alpha\\-2&-3&1&1+\alpha\\-1&-1&0&\alpha\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&-\alpha\\2&3&-1&-1-\alpha\\-3&-5&2&2+\alpha\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&-\alpha\\0&1&-1&-1+\alpha\\0&-2&2&2-2\alpha\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&-\alpha\\0&1&-1&-1+\alpha\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1-2\alpha\\0&1&-1&-1+\alpha\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

לכל α קיים פתרון. נציב $\alpha=0$ ונקבל $u_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ ו- $u_3=\begin{pmatrix}1-\beta\\-1+\beta\\\beta\end{pmatrix}$ $\beta\in\mathbb{R}$. לכל β קיים פתרון.

נציב $\beta=0$ ונקבל $u_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

$$P=\begin{pmatrix}u_1&u_2&u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad J=J_3(1)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\ .$$

ו) $$A=\begin{pmatrix}3&7&-3\\-2&-5&2\\-4&-10&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}p_A(x)=&|xI-A|=\begin{vmatrix}x-3&-7&3\\2&x+5&-2\\4&10&x-3\end{vmatrix}\\=&(x-3)(x^2+2x+5)+7(2x+2)+3(-4x)\\=&(x-3)(x^2+2x+5)+2x+14\\=&x^3-3x^2+2x^2-6x+5x-15+2x+14\\=&x^3-x^2+x-1\\=&(x-1)(x^2+1)\\=&(x-1)(x+i)(x-i)\end{aligned}$$

ערכים עצמיים:
$\lambda=1$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda=i$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda=-i$ מריבוי אלגברי 1.
פולינום מינימלי:

$$m_A(x)=(x-1)(x+i)(x-i)\ .$$

$$J=\begin{pmatrix}J_1(1)&&\\&J_1(i)&\\&&J_1(-i)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&i&0\\0&0&-i\end{pmatrix}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda = 1$</u>:

$$(A-I)=\begin{pmatrix}2&7&-3\\-2&-6&2\\-4&-10&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&7&-3\\0&1&-1\\0&4&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&7&-3\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}2&0&4\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$V_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda = i$</u>:

$$(A-iI)=\begin{pmatrix}3-i&7&-3\\-2&-5-i&2\\-4&-10&3-i\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&1-2i\\0&1&\frac{1}{2}i-\dfrac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$V_i=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1-2i\\1-i\\2\end{pmatrix}\right\}$$

לכן

$$V_{-i}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1+2i\\1+i\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$$P=\begin{pmatrix}u_1&u_2&u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1-2i&1+2i\\1&1-i&1+i\\1&2&2\end{pmatrix}\ ,\qquad J=\begin{pmatrix}J_1(1)&&\\&J_1(i)&\\&&J_1(-i)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&i&0\\0&0&-i\end{pmatrix}\ .$$

ז) פולינום אופייני:

$$\begin{aligned}p_A(x)=|xI-A|=&\begin{vmatrix}x-1&-1&1\\x+3&3&-3\\2&2&x-2\end{vmatrix}\\=&(x-1)(x^2+x)+3x-2x\\=&x(x^2-1)+x\\=&x^3\ .\end{aligned}$$

ערכים עצמיים:
$\lambda = 0$ מריבוי אלגברי 3.

$$m_A(x)=x^2\ .$$

$$J=\begin{pmatrix}J_2(0)&0\\0&J_1(0)\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|c}0&1&0\\0&0&0\\\hline0&0&\boxed{0}\end{array}\right)$$

<u>מרחב עצמי של- $\lambda = 0$:</u>

$$\left((A-0I) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to-\frac{1}{2}R_2]{R_2\to-\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to RR_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\right)$$

הפתרון הוא $(x,y,z) = (-y+z,y,z) = y(-1,1,0)+z(1,0,1)$ $y,z \in \mathbb{R}$. הבסיס של המרחב עצמי הוא

$$V_0 = \text{span}\left\{u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

<u>וקטור עצמי מוכלל:</u>
נרשום וקטור עצמי כפרישה של הבסיס של V_0:

$$w_1 = \alpha u_1 + \beta u_2 = \begin{pmatrix} -\alpha+\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$(A - 0\cdot I)\cdot w_2 = w_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -\alpha+\beta \\ -3 & -3 & 3 & \alpha \\ -2 & -2 & 2 & \beta \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to 2R_1+R_2]{R_2\to 3R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -\alpha+\beta \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha+3\beta \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha+3\beta \end{array}\right)$$

יש פתרון כאשר $-2\alpha+3\beta = 0$. נציב $\beta = 2$, $\alpha = 3$ ונקבל

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

המערכת נהפכת ל-

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

הפתרון של המערכת הוא $x+y-z=-1 \Leftarrow x = -y+z-1$. נציב $y=1$, $z=1$ ונקבל

$$w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כעת אנחנו צריכים וקטור עצמי שני של $\lambda = -1$. נקח $w_3 = u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$P = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} J_2(0) & 0 \\ 0 & J_1(0) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

שאלה 8

א)

$$\begin{pmatrix} J_3(3) & & & \\ & J_2(3) & & \\ & & J_1(1) & \\ & & & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

או

$$\begin{pmatrix} J_3(3) & & & & \\ & J_1(3) & & & \\ & & J_1(3) & & \\ & & & J_1(1) & \\ & & & & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ב) ריבוי גאומטרי שווה למספר הבלוקים של אותו ערך עצמי, לכן, עבור $\lambda = 3$ צריך להיות שני בלוקים. לכן הצורת ז'ורדן היא:

$$\begin{pmatrix} J_3(3) & & & \\ & J_2(3) & & \\ & & J_1(1) & \\ & & & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$