שעור 11
משפט הפירוק הפרימרי

הגדרה 11.1 צמצום של T ל- W

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $T:V\to V$ אופרטור. יהי $W\subseteq V$ תת- מרחב T שמור. האופרטור $T\big|_W$ המוגדר על ידי

$$T\big|_W(w)=T(w)$$

נקרא **הצמצום של T ל-** W

משפט 11.1

יהי V מרחב וקטורי מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $T:V\to V$ אופרטור.
יהיו $p_1(x),p_2(x)$ שני פולינומים זרים.
(ז"א קיימים פולינומים $q_1(x),q_2(x)$ כך ש- $p_1(x)q_1(x)+p_2(x)q_2(x)=1$)
נסמן

$$V_1=\ker\left(p_1\left(T\right)\right)\ ,\qquad V_2=\ker\left(p_2\left(T\right)\right)\ .$$

נסמן גם

$$p(x)=p_1(x)p_2(x)\ .$$

1) V_1,V_2 הם תת-מרחבים T- שמורים.

2) $V_1\cap V_2=\{0\}$.

3) אם T מאפסת את $p(x)$ אז $V=V_1\oplus V_2$.

4) נניח ש- V נוצר סופית מעל $\mathbb{F}$. אם $p(x)=m_T(x)$ ואם $p_1(x),p_2(x)$ מתוקנים ולא קבועים, אז

א) $p_1(x)$ הוא הפולינום המינמלי של $T\big|_{V_1}$ ו-

ב) $p_2(x)$ הוא הפולינום המינמלי של $T\big|_{V_2}$.

הוכחה:

1) לכל $u\in V$ מתקיים $p_1(T)T(u)=Tp_1(T)(u)$.

$\Leftarrow$ אם $p_1(T)(u)=0$ אז גם $p_1(T)T(u)=Tp_1(T)(u)=0$.

$\Leftarrow$ V_1 הוא תת-מרחב T שמור.

ההוכחה עבור V_2 זהה.

2) מאחר ש- $p_1(x),p_2(x)$ זרים אז קיימים $q_1(x),q_2(x)\in\mathbb{F}[x]$ כך ש- $q_1(x)p_1(x)+q_2(x)p_2(x)=1$.
לכפיכך

$$q_1(T)p_1(T)+q_2(T)p_2(T)=I_V\ .$$

לכן לכל $u\in V$,

$$q_1(T)p_1(T)(u)+q_2(T)p_2(T)(u)=u\ . \qquad (*)$$

נניח כי $u\in V_1\cap V_2$. כלומר נניח ש- $p_1(T)(u)=0$ ו- $p_2(T)(u)=0$. ממשוואה (*) נקבל

$$q_1(T)(0)+q_2(T)(0)=u\ .$$

ז"א $u=0$, כנדרש.

3) מכיוון שכבר הוכחנו ש- $V_1\cap V_2=\{0\}$, נותר להראות שאם T מאפסת את $p(x)$ אז לכל $u\in V$ קיימים $u_1\in V_1$, $u_2\in V_2$, כך ש- $u=u_1+u_2$. בהינתן $u\in V$ נסמן

$$u_1=q_2(T)p_2(T)\ ,\qquad u_2=q_1(T)p_1(T)\ .$$

ממשוואה (*) נובע ש- $u=u_1+u_2$.

נוכיח כי $u_1\in\ker\left(p_1(T)\right)$, $u_2\in\ker\left(p_1(T)\right)$.

$$p_1(T)\left(u_1\right)=q_2(T)p_2(T)p_1(T)\left(u\right)=q_2(T)p(T)\left(u\right)=q_2(0)=0\ .$$

כלומר, $u_1\in\ker\left(p_1\left(T\right)\right)$ כנדרש.

בדומה מראים $u_2\in\ker\left(p_2\left(T\right)\right)$.

4) מטענה **??**, $p_1\left(T\big|_{V_1}\right)=p_1\left(T\right)\big|_{V_1}$.

לכן, מאחר ש- $V_1=\ker\left(p_1(T)\right)$ נובע שלכל $u\in V_1$ מתקיים

$$p_1\left(T\big|_{V_1}\right)(u)=p_1\left(T\right)\big|_{V_1}(u)=p_1\left(T\right)(u)=0\ .$$

כלומר, $T\big|_{V_1}$ מאפסת את $p_1(x)$. כדי להוכיח ש- $p_1(x)$ הוא הפולינום המינימלי של $T\big|_{V_1}$. נותר להראות ש- $T\big|_{V_1}$ לא מאפסת פולינום שמעלתו קטנה ממעלתו של- $p_1(x)$ פרט לפולינומם האפס.

יהי $q(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינום שונה מאפס שמעלתו קטנה ממעלתו של $p_1(x)$.

נסמן $k(x)=q(x)p_2(x)$. נבחין ש- $k(x)$ אינו פולינום האפס.

$$\deg(k)=\deg(q)+\deg(p_2)<\deg(p_1)+\deg(p_2)=\deg(p)=\deg\left(m_T\right)\ .$$

נניח בשלילה כי $q(x)$ מתאפס על ידי $T\big|_{V_1}$. נוכיח כי $k(x)$ על ידי T.

ואמנם בהינתן $u\in V$ ניעזר בכך ש- $p(x)=m_T(x)$ ובתוצאת סעיף ג' ונסיק שקיימים $u_1\in V_1$, $u_2\in V_2$, שך ש- $u=u_1+u_2$. מכאן

$$k(T)(u)=k(T)(u_1)+k(T)(u_2)$$

נראה ששני המחוברים באגף ימין של השוויון האחרון הם 0:

$$k(T)(u_1)=p_2(T)q(T)(u_1)=p_2(T)=0\ .$$

כמו כן,

$$k(T)(u_2)=q(T)p_2(T)(u_2)=q(0)=0\ .$$

הראינו שלכל $u\in V$, $k(T)(u)=0$. כלומר, $k(x)$ מתאפס על ידי T. בסך הכל הראינו ש- T מאפס פולינום שונה מאפס שמעלתו קטנה ממעלתו של $m_T(x)$. זו סתירה לתכונת המינימליות של $m_T(x)$.

■

משפט 11.2

יהי V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $T:V\to V$ אופרטור.
נניח ש- $m_T(x)$ מתפרק מעל $\mathbb{F}$ למכפלת שני פולינומים מתוקנים, זרים ולא קבועים

$$m_T(x)=m_1(x)m_2(x)\ .$$

נסמן $V_1=\ker\left(m_1(T)\right)$ ונסמן $V_2=\ker\left(m_2(T)\right)$.

1) שני המרחבים V_1,V_2 הם תת-מרחבים T שמורים לא טריוויאליים ומתקיים $V=V_1\oplus V_2$.

2) $m_1(x)$ הוא פולינום המינימלי של $T\big|_{V_1}$ ו- $m_2(x)$ הוא פולינום המינימלי של $T\big|_{V_2}$.

3) יהי B_1 בסיס ל- V_1 ויהי B_2 בסיס ל- V_2. המטריצה המייצגת את T בבסיס $B=B_1\cup B_2$ של V היא מטריצת הבלוקים האלכסונית

$$[T]_B=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}$$

כאשר $A_1=\left[T\big|_{V_1}\right]_{B_1}$ ו- $A_2=\left[T\big|_{V_2}\right]_{B_2}$.

הוכחה:

1) הטענה ש- V_1 ו- V_2 תת-מרחבים שמורים, ושמתקיים $V=V_1\oplus V_2$ נובעת ישירות מסעיפים (1) ו- (3) של משפט 11.1. כדי להשלים את הוכחת סעיף (1), יש להראות ששני המרחבים V_1,V_2 אינם טריוויאלים.

נניח בשלילה ש- $V_1=\{0\}$. משמשוואה $V=V_1\oplus V_2$ נובע $V=V_2$. כלומר $V=\ker\left(m_2(T)\right)$.

באופן שקול: T מאפסת את $m_2(x)$. אולם מאחר שאנחנו מניחים שהפולינומים $m_1(x)$ ו- $m_2(x)$ אינם קבועים, נובע מהשמשוואה $m_T(x)=m_1(x)m_2(x)$ שמעלתו של $m_2(x)$ קטנה ממעלתו של $m_T(x)$.

זו סתירה לכך ש- $m_T(x)$ הוא הפולינום המינימלי של T.

בדומה מראים ש- V_2 אינו מרחב האפס.

2) סעיף (2) נובע ישירות מסעיף (4) של משפט 11.1.

3)

■

דוגמה 11.1

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $T:V\to V$ אופרטור. נניח ש-

$$m_T(x)=x^2-x\ .$$

אם נסמן $m_1(x)=x-1$ ו- $m_2(x)=x$. אז

$$m_T(x)=m_1(x)m_2(x)$$

הואפירוק למכפלת שני פולינומים מתוקנים, זרים ולא קבועים.
נסמן $V_1=\ker\left(m_1(T)\right)$ ונסמן $V_2=\ker\left(m_2(T)\right)$. כלומר

$$V_1=\ker\left(T-I_V\right)\ ,\qquad V_2=\ker\left(T\right)\ .$$

באופן שקול, V_1 הוא המרחב העצמי של $\lambda=1$ ו- V_2 הוא המרחב העצמי של $\lambda=0$.
ממשפט 11.2 נובע ש- $V=V_1\oplus V_2$.

דוגמה 11.2

נתונה המטריצה $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ הבאה: $A=\begin{pmatrix}-3&1&-1\\-7&5&-1\\-6&6&-2\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
p_A(x)=&\begin{vmatrix}x+3&-1&1\\7&x-5&1\\6&-6&x+2\end{vmatrix}\\
=&(x+3)\begin{vmatrix}x-5&1\\-6&x+2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}7&1\\6&x+2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}7&x-5\\6&-6\end{vmatrix}\\
=&(x+3)\left(x^2-3x-4\right)+7x+8+(-42-6x+30)\\
=&(x+3)\left(x^2-3x-4\right)+x-4\\
\\
=&(x+3)\left((x-4)(x+1)\right)+x-4\\
=&(x-4)\left((x+1)(x+3)+1\right)\\
=&(x-4)\left(x^2+4x+4\right)\\
=&(x-4)\left(x+2\right)^2
\end{aligned}$$

הפולינום המינימלי הוא $m_A(x)=(x-4)\left(x+2\right)^2$.
נחשוב על מטריצה זו כעל המריצה המייצגת את $T_A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ בבסיס הסטנדרטיץ נסמן

$$m_1(x)=(x-4)\ ,\qquad m_2(x)=(x+2)^2\ .$$

אלו שני פולינומים זרים. כמו כן,

$$m_{T_A}(x)=m_1(x)m_2(x)\ .$$

נסמן

$$V_1=\ker\left(m_1\left(T_A\right)\right)\ ,\qquad V_2=\ker\left(m_2\left(T_A\right)\right)\ .$$

נוודא את קיום תכונות (1)-(3) של משפט 11.2:

1) V_1 הוא המרחב הפתרונות של המערכת $(A-4I)u=0$.

חישוב ישר מראה ש- V_1 נפרש על ידי הווקטור $u_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. ברור ש- u_1 הוא וקטור עצמי של T_A השייך לערך העצמי 4. בפרט, V_1 הוא תת-מרחב T_A שמור לא טריוויאלי.

בדומה, V_2 הוא המרחב הפתרונות של המערכת $(A+2I)^2u=0$.

על ידי חישוב ישיר נגלה שהקבוצה $\left\{u_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},u_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ היא בסיס ל- V_2.

על ידי חישובים ישירים נוספים נגלה ש-

$$T_A(u_2)=Au_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}=-2u_2-u_3\ ,\quad T_A(u_3)=Au_3=-2u_3\ ,$$

ולכן V_2 הוא תת-מרחב T_A שמור לא טריוויאלי. לבסוף מאחר ש- $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ נובע ש- $\{u_1, u_2, u_3\}$ בלתי ללויה ליניארית ולכן $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$.

(2 נסמן ב- $B_1 = \{u_1\}$, $B_2 = \{u_2, u_3\}$. מהחישובים שהבאנו לעלי נובע $T_A(u_1) = -4u_1 \Leftarrow$ ולכן $T_A\big|_{V_1}(u_1) = 4u_1$

$$\left[T_A\big|_{V_1}\right]_{B_1} = (4) \ .$$

$T_A(u_2) = -2u_2 - u_3$ ו- $T_A(u_3) = -2u_3 \Leftarrow T_A\big|_{V_2}(u_2) = -2u_2 - u_3$ ו- $T_A\big|_{V_2}(u_3) = -2u_3$

$$\left[T_A\big|_{V_2}\right]_{B_2} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \ .$$

מכאן $m_{T_A}\big|_{V_1}(x) = x - 4$ ו- $m_{T_A}\big|_{V_2}(x) = (x+2)^2$.

(3 הוכחנו כי

$$[T_A]_{B_1 \cup B_2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \ .$$

משפט 11.3

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $T : V \to V$ אופרטור ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$.

(1 אם λ אינו ערך עצמי של T, אז לכל k טבעי

$$\ker\left(T - \lambda I_V\right)^k = \{0\} \ .$$

(2 נניח ש- V נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$. אם λ הוא ערך עצמי של T. הריבוי של השורש λ ב- $m_T(x)$ הוא המספר הטבעי המינימלי b המקיים

$$\ker\left(T - \lambda I_V\right)^b = \ker\left(T - \lambda I_V\right)^{b+1}$$

ולכל $c > b$ מתקיים

$$\ker\left(T - \lambda I_V\right)^b = \ker\left(T - \lambda I_V\right)^c \ .$$

לשון אחר, ישנו מספר טבעי b כך שמתקיים

$$\{0\} \subset \ker\left(T - \lambda I_V\right) \subset \quad \cdots \quad \subset \ker\left(T - \lambda I_V\right)^b = \ker\left(T - \lambda I_V\right)^{b+1} = \quad \cdots$$

נדגיש שההכללות עד $\ker\left(T - \lambda I_V\right)^b$ הן כולן הכלות ממש.

הוכחה:

(1 נוכיח את הטענה באינדוקציה.

<u>שלב הבסיס:</u>

עבור $k = 1$, עבור $u \in V$ מתקיים:

$u \in \ker(T - \lambda I_V)$ אם ורק אם $T(u) = \lambda u$ $\Leftrightarrow$ λ ערך עצמי או $u = 0$.

לכן אם λ אינו ערך עצמי של T אז בהכרח $u = 0$ ולכן $\ker(T - \lambda I_V) = \{0\}$.

<u>שלב המעבר:</u>

נניח שהטענה מתקיים עבור $k = m$, כלומר אם λ אינו ערך עצמי של T אז $\ker(T - \lambda I_V)^m = \{0\}$.

נניח ש- λ אינו ערך עצמי של T ו- $u \in \ker(T - \lambda I_V)^{m+1}$:

$$(T - \lambda I_V)^{m+1}(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad (T - \lambda I_V)^m \big((T - \lambda I_V)(u)\big) = 0 \ .$$

ז"א $(T - \lambda I_V)(u) \in \ker(T - \lambda I_V)^m$.

מההנחת האינדוקציה נובע $(T - \lambda I_V)(u) = 0$.

מהמקרה $k = 1$ שאותו כבר הוכחנו, נסיק $u = 0$. ולכן $\ker(T - \lambda I_V)^{m+1} = \{0\}$.

(2 אם λ ערך עצמי של T אזי λ שורש של הפולינום המינימלי $m_T(x)$.

לכן קיים פולינום $q(x)$ כך ש-

$$m_T(x) = (x - \lambda)^b q(x) \ .$$

שני הפולינומים $m_T(x)$ ו- $(x - \lambda)^b$ מתקונים לכן גם $q(x)$ מתוקן.

- אם $q(x)$ פולינום קבוע (במקרה זה האפשרות היחידה היא $q(x) = 1$) אז T העתקה בעלת ערך עצמי יחיד ו- $m_T(x) = (x - \lambda)^b$.

  $\Leftarrow$ $m_T(T) = (T - \lambda I)^b = 0$ ולכן $c > b$ מתקיים

  $$(T - \lambda I)^c = (T - \lambda I)^{c-b}(T - \lambda I)^b = (T - \lambda I)^{c-b} m_T(T) = 0 \ .$$

  לכן $\ker(T - \lambda I)^b = \ker(T - \lambda I)^c = V$.

  b הוא הטבעי המינימלי עבורו זה מתקיים.

  נניח בשלילה שקיים $b' < b$ עבורו $\ker(T - \lambda I)^{b'} = \ker(T - \lambda I)^{b'+1}$,

  בפרט $\ker(T - \lambda I)^{b-1} = \ker(T - \lambda I)^b = V$

  ולכן $(T - \lambda I)^{b-1} = 0$ בסתירה לכך ש- $m_T(x)$ הוא הפולינום המינימלי.

- נניח ש- $q(x)$ לא פולינום קבוע. מכיוון ש- $q(\lambda) \neq 0$ אז $(x - \lambda)^b$ ו- $q(x)$ זרים.

  לכן ממשפט 11.2 נובע ש- $V = V_1 \oplus V_2$ כאשר V_1, V_2 הם תת-מרחבים T שמורים לא טריוויאיים המקיימים

  $$V_1 = \ker(T - \lambda I_V)^b \ , \qquad V_2 = \ker q(T) \ ,$$

  וכן

  $$m_{T|_{V_1}}(x) = (x - \lambda)^b \ , \qquad m_{T|_{V_2}}(x) = q(x) \ .$$

  ולכן $m_{T|_{V_1}}(T|_{V_1}) = (T|_{V_1} - \lambda I_{V_1})^b = 0$ ולכן לכל $c \geq b$ מתקיים

  $$(T|_{V_1} - \lambda I_{V_1})^c = (T|_{V_1} - \lambda I_{V_1})^{c-b}(T|_{V_1} - \lambda I_{V_1})^b = (T|_{V_1} - \lambda I_{V_1})^{c-b} m_{T|_{V_1}}(T|_{V_1}) = 0 \ .$$

  לכן $\ker(T|_{V_1} - \lambda I_{V_1})^b = \ker(T|_{V_1} - \lambda I_{V_1})^c = V|_{V_1}$.

  b הוא הטבעי המינימדי עבורו זה מתקיים.

  נניח בשלילה שקיים $b' < b$ עבורו $\ker(T|_{V_1} - \lambda I)^{b'} = \ker(T|_{V_1} - \lambda I)^{b'+1}$,

  בפרט $\ker(T|_{V_1} - \lambda I)^{b-1} = \ker(T|_{V_1} - \lambda I)^b = V$

  ולכן $(T|_{V_1} - \lambda I)^{b-1} = 0$ בסתירה לכך ש- $m_{T|_{V_1}}(x)$ הוא הפולינום המינימלי.

לסיכום הוכחנו כי b הוא הטבעי המינימלי שעבורו

$$\ker\left(T|_{V_1}-\lambda I_{V_1}\right)^b=\ker\left(T|_{V_1}-\lambda I_{V_1}\right)^{b+1}$$

ולכן $c>b$

$$\ker\left(T|_{V_1}-\lambda I_{V_1}\right)^b=\ker\left(T|_{V_1}-\lambda I_{V_1}\right)^c \ .$$

בנוסף לכל m טבעי מתקיים:

$$\ker\left(T|_{V_1}-\lambda I_{V_1}\right)^m=\ker\left(T-\lambda I\right)^m\big|_{V_1}$$

לכן, כדי לסיים את ההוכחה די להוכיח שלכל m טבעי מתקיים

$$\ker\left(T-\lambda I\right)^m\big|_{V_1}=\ker\left(T-\lambda I\right)^m \ .$$

יהי $u\in\ker\left(T-\lambda I\right)^m$.

מכיוון ש- $V=V_1\oplus V_2$ נרשום $u=u_1+u_2$ כאשר $u_1=\in V_1, u_2\in V_2$.

עלינו להוכיח כי $u_2=0$. אמנם:

$$0=\left(T-\lambda I_V\right)^m(u)=\left(T-\lambda I_V\right)^m(u_1)+\left(T-\lambda I_V\right)^m(u_2) \ .$$

V_1,V_2 הם תת-מרחבים $\left(T-\lambda I_V\right)^m$ שמורים. כלומר $(T-\lambda I_V)^m(u_1)\in V_1$ ו- $(T-\lambda I_V)^m(u_2)\in V_2$.

לכן מאחר ש- $V=V_1\oplus V_2$ ממשוואה $\left(T-\lambda I_V\right)^m(u_1)+\left(T-\lambda I_V\right)^m(u_2)=0$ נובע

$$\left(T-\lambda I_V\right)^m(u_2)=0 \ .$$

לכן

$$\left(T-\lambda I_V\right)^m\big|_{V_2}(u_2)=\left(T\big|_{V_2}-\lambda I_{V_2}\right)^m(u_2)=0 \ .$$

לפי סעיף (1), מכיוון ש- λ אינו ערך עצמי של $T\big|_{V_2}$ אזי $\ker\left(T\big|_{V_2}-\lambda I_{V_2}\right)^m=\{0\}$ לכן $u_2=0$.

■

משפט 11.4

(1 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $T:V\to V$ אופרטור. נניח שמתקיים

$$m_T(x)=(x-\lambda_1)^{b_1}(x-\lambda_2)^{b_2}\quad\cdots\quad(x-\lambda_k)^{b_k}$$

כאשר $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ הם סקלרים שונעם ו- $b_1,b_2,\ldots,b_k$ מספרים טבעיים. אז לכל $b_i, 1\leq i\leq k$ הוא המספר הטבעי המינימלי המקיים

המקיים

$$\ker\left(T-\lambda I_V\right)^{b_i}=\ker\left(T-\lambda I_V\right)^{b_i+1}$$

ולכל $c>b_i$ מתקיים

$$\ker\left(T-\lambda I_V\right)^{b_i}=\ker\left(T-\lambda I_V\right)^c \ .$$

(2 תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נניח שמתקיים

$$m_A(x)=(x-\lambda_1)^{b_1}(x-\lambda_2)^{b_2}\quad\cdots\quad(x-\lambda_k)^{b_k}$$

כאשר $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ הם סקלרים שונעם ו- $b_1,b_2,\ldots,b_k$ מספרים טבעיים. אז לכל $b_i, 1\leq i\leq k$ הוא המספר הטבעי המינימלי המקיים

$$\text{rank}\,(A-\lambda I)^{b_i} = \text{rank}\,(A-\lambda I)^{b_i+1}$$

ולכל $c > b_i$ מתקיים

$$\text{rank}\,(A-\lambda I)^{b_i} = \text{rank}\,(A-\lambda I)^{c}\ .$$

הוכחה:

(1 הטענה זו נובעת מטענה 11.3.

נסמן $V=\mathbb{F}^n$. מכיוון ש- $m_A(x)=m_{T_A}(x)$ נסיק מסעיף (1) ש- b_i הוא המספר הטבעי המינימל המקיים

$$\ker\,(T_A-\lambda I_V)^{b_i} = \ker\,(T_A-\lambda I_V)^{b_i+1}$$

ושלכל $c > b_i$ מתקיים

$$\ker\,(T_A-\lambda I)^{b_i} = \ker\,(T_A-\lambda I)^{c}\ .$$

(2 לכל k טבעי

$$\ker\,(T_A-\lambda_i I_V)^{k} \subseteq \ker\,(T_A-\lambda_i I_V)^{k+1}\ .$$

בנוסף מתקיים ש-

$\ker\,(T_A-\lambda_i I_V)^{k} = \ker\,(T_A-\lambda_i I_V)^{k+1}$ אם ורק אם $\dim\left(\ker\,(T_A-\lambda_i I_V)^{k}\right) = \dim\left(\ker\,(T_A-\lambda_i I_V)^{k+1}\right)$.

לכן:

$\ker\,(T_A-\lambda_i I_V)^{k} = \ker\,(T_A-\lambda_i I_V)^{k+1}$ אם ורק אם $\text{rank}\,(A-\lambda_i I)^{k} = \text{rank}\,(A-\lambda_i I)^{k+1}$.

אנחנו מסיקים ש- b_i הוא המספר הטבעי המינימלי המקיים

$$\text{rank}\,(A-\lambda I)^{b_i} = \text{rank}\,(A-\lambda I)^{b_i+1}$$

ושלכל $c > b_i$ מתקיים

$$\text{rank}\,(A-\lambda I)^{b_i} = \text{rank}\,(A-\lambda I)^{c}\ .$$

■

דוגמה 11.3

היעזרו במשפט 11.4 בשביל למצוא את הפולינום המינימלי של המטריצה $B\in\mathbb{R}^{4\times 4}$ הבאה:

$$B=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&0&-1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$$

פתרון:

הפולינום האופייני הוא

$$p_B(x) = |xI - B| = \begin{vmatrix} x+2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2) \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ -1 & -1 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2)(x-1) \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2)(x-1)\left(x^2 - 2x + 1\right)$$

$$= (x+2)(x-1)^3 \ .$$

נובע שקיים $1 \leq b \leq 3$ כך ש- $m_B(x) = (x+2)(x-1)^b$. נבחין ש-

$$B - I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad (B-I)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad (B-I)^3 = \begin{pmatrix} -27 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

ברור שמתקיים $\text{rank}(B-I) > 1$ וכן $\text{rank}(B-I)^2 = \text{rank}(B-I)^3 = 1$. מחלק (2) של משפט 11.4 נובע ש- $b = 2$.

משפט 11.5 משפט הפירוק הפרימרי

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $T : V \to V$ אופרטור. נניח ש- $m_T(x)$ מתפרק מעל $\mathbb{F}$ למכפלת $k \geq 2$ פולינומים מתוקנים זרים בזוגות ולא קבועים:

$$m_T(x) = m_1(x) m_2(x) \quad \cdots \quad m_k(x) \ .$$

עבור $1 \leq i \leq k$ נסמן $V_i = \ker\left(m_i(T)\right)$ ונקבע בסיס B_i ל- V_i.

(1 לכל $1 \leq i \leq k$, V_i הוא תת-מרחב T- שמור לא טריוויאלי ומתקיים

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \quad \cdots \quad \oplus V_k$$

(2 לכל $1 \leq i \leq k$:

$$m_{T|_{V_i}}(x) = m_i(x) \ .$$

(3 המטריצה המייצגת את T בבסיס $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ של V היא מטריצת הבלוקים

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$$

כאשר $A_i = [T|_{V_i}]_{B_i}$.

הוכחה: נוכיח את הטענה באינדוקציה על k.

<u>שלב הבסיס</u>

עבור $k = 2$ הטענה הוכחה במשפט 11.2.

<u>שלב המעבר</u>

נניח שהטענה נכונה עבור k ונוכיח עבור $k+1$. נסמן:

$$r_k(x) = m_1(x)m_2(x) \quad \cdots \quad m_k(x) \ .$$

נשים לב ש- $m_T(x) = r_k(x)m_{k+1}(x)$ הוא פירוק של $m_T(x)$ למכפלת פולינומים מתוקנים לא קבועים. יתרה מכך, מאחר ש- $m_1(x), m_2(x), \ldots, m_{k+1}(x)$ זרים בזוגות אז $r_k(x)$ ו- $m_{k+1}(x)$ הם זרים.

נסמן $W = \ker\left(r_k(x)\right)$ ונקבע בסיס B' של W.
ממסקנה 11.2, (כלומר מהמקרה $k=2$) נובע ש- $V = W \oplus V_{k+1}$ הוא פירוק של V לסכום ישי של שני תת-מרחבים T שמורים לא טריוויאליים המקיימים $r_k(x) = m_{T|_W}(x)$, $m_{k+1}(x) = m_{T|_{V_{k+1}}}(x)$. כמו כן, המטריצה המייצגת את T בבסיס $B = B' \cup B$ של V היא מטריצת הבלוקים האלכסונית

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A_{k+1} \end{pmatrix}$$

כאשר $A = [T|_W]_{B'}$. עבור $1 \leq i \leq k$ נסמן $W_i = \ker\left(m_i\left(T|_W\right)\right)$.
מכיוון ש-

$$m_{T|_W} = r_k(x) = m_1(x)m_2(x)\ldots m_k(x)$$

נובע מהנחת האינדוקציה ש-

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$$

הוא פירוק של W לסכום ישר של תת -מרחבים $T|_W$ שמורים לא טריוויאליים המקיימים $m_{T|_{W_i}}(x) = m_i(x)$.
■

דוגמה 11.4

יהי $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^4$. יהי $T : V \to V$ אופרטור המוגדר

$$T\left(e_1\right) = e_1 + 2e_3 \ , \quad T\left(e_2\right) = e_2 + e_4 \ , \quad T\left(e_3\right) = e_1 \ , \quad T\left(e_4\right) = -e_2 + 2e_4 \ .$$

1) הוכיחו ש- $m_T(x) = (x-2)(x+1)(x^2-3x+3)$ והוכיחו שבאגף הימין של השוויון האחרון רשומים שלושה פולינומים זרים בזוגות.

2) נסמן

$$W_1 = \ker\left(T - 2I\right) \ , \quad W_2 = \ker(T + I) \ , \quad W_3 = \ker\left(T^2 - 3T + 3\right) \ .$$

עבור $i = 1, 2, 3$ מצאו בסיס B_i ל- W_i.

3) עבור W_1, W_2, W_3 והבסיסים שמצאתם בסעיף ב, ודאו את קיום תכונות (1)-(3) במשפט 11.5.

פתרון:

1) מהנתון נובע שעבור $u \in \text{span}\{e_1, e_3\}$ מתקיים $T(u) \in \text{span}\{e_1, e_3\}$ ושעבור $u \in \text{span}\{e_2, e_4\}$ מתקיים $T(u) \in \text{span}\{e_2, e_4\}$.

כלומר $V_1 = \text{span}\{e_1, e_3\}$ ו- $V_2 = \text{span}\{e_2, e_4\}$ תת-מרחבים T שמורים.

בהתאם, בבסיס $E' = \{e_1, e_3, e_2, e_4\}$ של $\mathbb{R}^4$ נקבל

$$[T]_{E'} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

כאשר

$$A_1 = [T|_{V_1}]_{\{e_1,e_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad A_2 = [T|_{V_2}]_{\{e_2,e_4\}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

מחישוב ישיר נקבל

$$p_{A_1}(x) = (x-2)(x+1) \ , \quad p_{A_2}(x) = x^2 - 3x + 3 \ .$$

אין שורש משותף לשניים מהפולינומים $p_{A_2}(x), (x-2), (x-1)$ נובע שאלו שלושה פולינומים זרים בזוגות. לכן $p_{A_1}(x)$ ו- $p_{A_2}(x)$ זרים.

המטריצות A_1 ו- A_2 הן מטריצות לא סלקריות מסדר 2×2, ולכן נסיק ש-

$$m_{A_1}(x) = p_{A_1}(x) \ , \qquad m_{A_2}(x) = p_{A_2}(x) \ .$$

כזכור, $m_{A_1}(x) = m_{T|_{V_1}}(x)$ ו- $m_{A_2}(x) = m_{T|_{V_2}}(x)$. נסיק ש-

$$m_T(x) = \text{lcm}\left((x-2)(x+1), x^2 - 3x + 3\right)$$

כבר הוכחנו ש- $(x-2)(x+1)$ זר ל- $x^2 - 3x + 3$, אז

$$m_T(x) = (x-2)(x+1)(x^2 - 3x + 3) \ .$$

2) W_1 הוא מרחב הפתרונות של המערכת $([T]_E - 2I)\, u = 0$,

W_2 הוא מרחב הפתרונות של המערכת $([T]_E + I)\, u = 0$,

W_3 הוא מרחב הפתרונות של המערכת $([T]_E^2 - 3[T]_E + 3I)\, u = 0$.

מהנתון נקבל

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

על ידי חישוב ישיר נקבל ש -

W_1 נפרש על ידי $\{e_1 + e_3\}$,

W_2 נפרש על ידי $\{e_1 - 2e_3\}$,

W_3 נפרש על ידי $\{e_2, e_4\}$.

לכן

$$B_1 = \{e_1 + e_3\} \ , \qquad B_2 = \{e_1 - 2e_3\} \ , \qquad B_3 = \{e_2, e_4\}$$

הם בסיסים של W_1, W_2, W_3 בהתאמה.

3) W_1 ו- W_2 הם מרחבים עצמיים ובפרט כל אחד מהם הוא תת-מרחב T שמור.

$W_3 = V_2$. כבר הוכחנו בסעיף (1) ש- V_2 הוא תת-מרחב T שמור.

מכיוון ש- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ נובע שהקבוצה $\{e_1+e_3, e_1-2e_3, e_2, e_4\}$ בלתי תלויה, ולכן $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.

ההעתקה $T|_{W_1}$ היא העתקה סקלרית המתאימה לסקלר 2 ולכן $m_{T|_{W_1}} = x-2$.

ההעתקה $T|_{W_2}$ היא העתקה סקלרית המתאימה לסקלר -1 ולכן $m_{T|_{W_2}} = x+1$.

מכיוון ש- $W_3 = V_2$ נובע ש- $m_{T|_{W_3}}(x) = p_{A_2}(x) = x^2-3x+3$.

לבסוף, בבסיס $B = \{e_1+e_3, e_1-2e_3, e_2, e_4\}$ נקבל

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ונשים לב ש-

$$[T|_{W_1}]_{B_1} = (2) \ , \qquad [T|_{W_2}]_{B_2} = (-1) \ , \qquad [T|_{W_3}]_{B_3} = A_2 \ .$$

משפט 11.6

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $T: V \to V$ אופרטור. נניח ש-

$$m_T(x) = (x-\lambda_1)^{b_1}(x-\lambda_2)^{b_2} \quad \cdots \quad (x-\lambda_k)^{b_k}$$

כאשר $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ הם סקלרים שונים ו- $b_1, b_2, \ldots, b_k$ הם מספרים טבעיים. עבור $1 \leq i \leq k$ נסמן $V_i = \ker(T-\lambda_i I_V)^{b_i}$ ונסמן $a_i = \dim(V_i)$. נקבע בסיס B_i ל- V_i.
לכל $1 \leq i \leq k$ מתקיים:

1) V_i הוא תת-מרחב T שמור לא טריוויאלי ומתקיים $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \quad \cdots \quad \oplus V_k$

2) $m_{T|_{V_i}}(x) = (x-\lambda_i)^{b_i}$

3) $p_{T|_{V_i}}(x) = (x-\lambda_i)^{a_i}$

4) המטריצה המייצגת את T בבסיס $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k$ של V היא מטריצת הבלוקים האלכסונית

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$$

כאשר $A_i = \left[T|_{V_i}\right]_{B_i}$.

5) $p_T(x) = (x-\lambda_1)^{a_1}(x-\lambda_2)^{a_2} \quad \cdots \quad (x-\lambda_k)^{a_k}$.

הוכחה: עבור כל $1 \leq i \leq k$ נסמן $m_i(x) = (x-\lambda_i)^{b_i}$. בסימונים אלו, השוויון הנתון במשפט הוא

$$m_T(x) = m_1(x)m_2(x)\cdots m_k(x)$$

כאשר $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ הם סקלרים שונים. השוויון האחרון הוא פירוק של $m_T(x)$ למכפלת k פולינומים מתוקנים זרים בזוגות ולא קבועים. לפיכך:

1) נובע ממשפט 11.5.

2) נובע ממשפט 11.5.

3)

4) נובע ממשפט 11.5.

5)

■