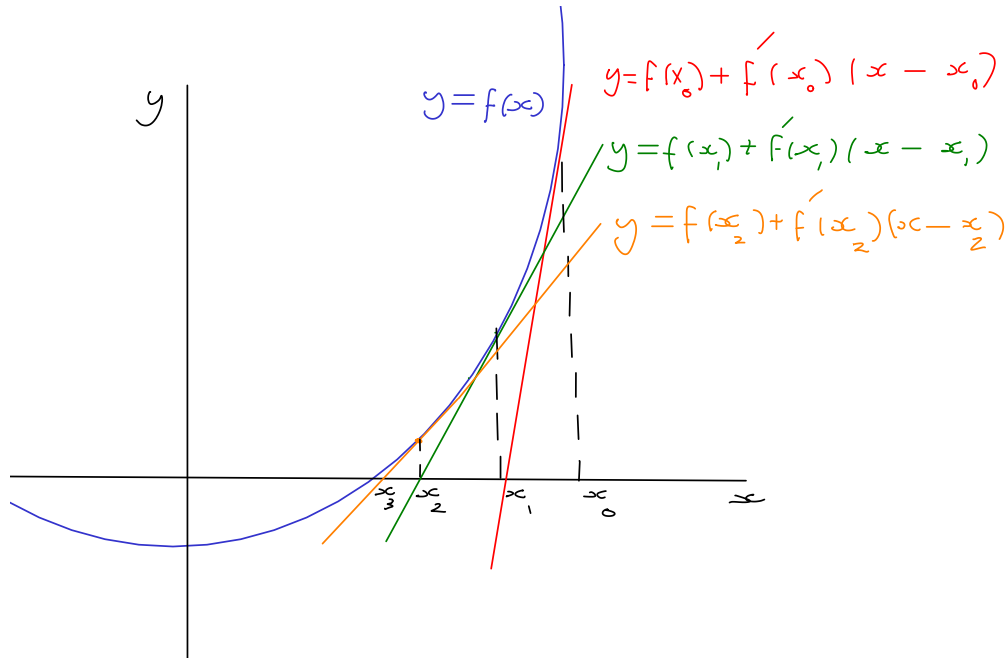


שיעור 6

נגזרת מסדר גבוה, נגזרת של פונקציה הפוכה, פרמטרית וסתומה

שיטת המשיקים של ניוטון לפתרון המקורב של משוואות

שוטה זו מבוססת על קירוב הפונקציה $f(x)$ ע"י המשיק $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ בנקודה התחלתית x_0 ומציאת השורש x_1 של משיק זה."



שלב 1 נבחר נקודה התחלתית x_0

שלב 2 נחשב משוואת המשיק בנקודה x_0 :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

שלב 3 נמצוא נקודת חיתוך של משיק זו עם ציר ה- x :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

שלב 4 נחזור לשלבים 1-3 עם נקודת התחלתית x_1 במקום x_0 :

שלב' 1 נתחיל עם נקודת התחלתית x_1 הנמצא בשלב הקודם.

שלב' 2 נחשב משוואת המשיק בנקודה x_1 :

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

שלב' 3 נמצוא נקודת חיתוך של משיק זו עם ציר ה- x :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

שלב' 4 נחזור לשלבים 1-3 עם נקודת התחלתית x_2 במקום x_1 :

וכן הלאה...

דוגמא.

מצא את שורש אחד של פונקציה $f(x) = x^2 - x - 13$.

פיתרון.

נתחיל עם נקודה התחלתית $x_0 = 10$:

$f(x_0) = 85$	$x_0 = 10$	$n = 0$
$f(x_1) = 11.56$	$x_1 = 4.6$	$n = 1$
$f(x_2) = 1.98741$	$x_2 = 3.19024$	$n = 2$
$f(x_3) = 0.136437$	$x_3 = 2.82087$	$n = 3$
$f(x_4) = 0.00086398$	$x_4 = 2.79148$	$n = 4$



נגזרת של פונקציה סתומה

דוגמא.

מהו משוואת המשיק לקו של הפונקציה $x^2 + y^2 = 1$ בנקודה $(y \geq 0)$ $x = 0.5$.

פיתרון.

נגזור את שני הצדדים:

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}$$

שים לב

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

, לכן עבור $y \geq 0$ נקבל

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

מכאן בנקודה $x = 0.5$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ו- $y' = \frac{-1}{\sqrt{3}}$. לכן משוואת המשיק בנקודה $x = 0.5$ היא

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right).$$



דוגמא.

נתונה $e^x - x - y + xe^y = 0$ מצא את משוואת המשיק בנקודה $(0, 1)$.

פיתרון.

נגזור שני הצדדים:

$$e^x - 1 - y' + e^y + xy'e^y = 0 .$$

נציב את הנקודה $(0, 1)$ ונקבל

$$1 - 1 - y'(0) + e = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(0) = e .$$

לכן משוואת המשיק היא

$$y = 1 + ex .$$

■

דוגמא.

מצא את משוואת המשיק והנורמל לקו

$$e^x y + \ln(xy + 1) = 1$$

בנקודה שבה $x = 0$.

פיתרון.

נציב $x = 0$ לתוך המשוואה:

$$e^0 y + \ln(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 .$$

נגזור את שני הצדדים של המשוואה:

$$e^x y + e^x y' + \frac{1}{xy + 1} \cdot (y + xy') = 0$$

נציב את הנקודה $(0, 1)$:

$$1 + y' + 1 \cdot (1 + 0 \cdot y') = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -2 .$$

לכן עבור משוואת המשיק נקבל

$$y = 1 - 2x$$

ועבור משוואת הנורמל נקבל

$$y = 1 + \frac{x}{2} .$$

■

דוגמא.

פונקציה $y(x)$ מוגדרת בצורה סתומה ע"י המשוואה

$$xe^{2y} + y \ln x + \sin(2y) = 1 .$$

מצא את הזווית שהמשיק בנקודה $A(1, 0)$ יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

פיתרון.

שים לב, הנגזרת של פונקציה $y(x)$ בנקודה A שווה ל \tan של הזווית שהמשיק יוצר עם ציר ה- x . לכן מספיק למצוא את הנגזרת בנקודה זו.

$$e^{2y} + 2xy'e^{2y} + y' \ln x + \frac{y}{x} + 2 \cos(2y) \cdot y' = 0 .$$

נציב את הנקודה $A(1, 0)$:

$$1 + 2y'(1) + y'(1) \ln(1) + \frac{0}{1} + 2 \cos(2 \cdot 0) \cdot y'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + 2y'(1) + 2y'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(1) = -\frac{1}{4} .$$

$$\blacksquare \quad \alpha = \arctan \left(-\frac{1}{4} \right) = -14.3^\circ \quad \text{ולפי } \tan \alpha = -\frac{1}{4} \quad \text{לכן}$$

נגזרת של פונקציה הפוכה

נניח ש $y = f^{-1}(x)$ אז $x = f(y)$ כלומר

$$y = f^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f(y) .$$

להיעזר בכלל השרשרת נגזור את שני הצדדים של $x = f(y(x))$

$$x' = f(y)'_y \cdot y(x)'_x \quad \Rightarrow \quad 1 = f(y)'_y \cdot y(x)'_x \quad \Rightarrow \quad y(x)'_x = \frac{1}{f(y)'_y}$$

שים לב $y(x) = f^{-1}(x)$ לפי ההגדרה לעיל אז נקבל היחס

$$f^{-1}(x)'_x = \frac{1}{f(y)'_y} .$$

דוגמא.

מהי הנגזרת של $y = \arcsin(x)$.

פיתרון.

$$y = \arcsin(x) \quad \Rightarrow \quad x = \sin(y) .$$

הפונקציה ההפוכה היא $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$ והפונקציה f היא $f(y) = \sin y$. לכן לפי הנוסחה,

$$\arcsin(x)'_x = \frac{1}{\sin(y)'_y} = \frac{1}{\cos y}$$

נשתמש בזהות $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ שנובע ל- $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ ונקבל

$$\arcsin(x)'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

או שקול, מכיוון ש $x = \sin y$,

$$\arcsin(x)'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} .$$



דוגמא.

מהי הנגזרת של $y = \arctan(x)$.

פיתרון.

$$y = \arctan(x) \Rightarrow x = \tan(y) .$$

הפונקציה ההפוכה היא $f^{-1}(x) = \arctan(x)$ והפונרציה f היא $f(y) = \tan y$. לכן לפי הנוסחה,

$$\arctan(x)'_x = \frac{1}{\tan(y)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

נשתמש בזהות $\tan^2 y + 1 = \frac{1}{\cos^2 y}$ שנובע ל- $\cos^2 y = \frac{1}{\tan^2 y + 1}$ ונקבל

$$\arctan(x)'_x = \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

או שקול, מכיוון ש $x = \tan y$,

$$\arctan(x)'_x = \frac{1}{1 + x^2} .$$

**פונקציה פרמטרית**

פונקציה פרמטרית היא פונקציה הנתונה בצורה

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

באמצעות פרמטר t .

דוגמא.

נתונה הפונקציה

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$$

הבע אותו בצורה קנונית.

פיתרון.

$$y = t^2 = (t^3)^{2/3} = x^{2/3} .$$



נגזרת של פונקציה פרמטרית

בהינתן פונקציה בצורה פרמטרית

$$y = f(t) , \quad x = g(t) .$$

מכאן

$$t = g^{-1}(x)$$

זאת אומרת ניתן להסתכל אל הפרמטר t כפונקציה של x . ע"י כלל השרשרת,

$$y'_x = f'(t)_x = f'(t)_t \cdot t'_x = f'(t)_t \cdot g^{-1}(x)'_x$$

$$\text{אבל } g^{-1}(x)'_x = \frac{1}{g'(t)'_t} \text{ ולכן}$$

$$y'_x = \frac{f'(t)'_t}{g'(t)'_t} .$$

דוגמא.

נתונה הפונקציה

$$x = \ln(t+2) , \quad y = t^2 - 3t .$$

מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y(x)$ בנקודה שבה $x = 0$.

פיתרון.

נציב $x = 0$:

$$\ln(t+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad t+2 = 1 \quad \Rightarrow \quad t = -1 .$$

נציב את $t = -1$ לתוך הנוסחה של y :

$$y = (-1)^2 - 3(-1) = 4 .$$

נגזור את הפונקציה הפרמטרית:

$$x'_t = \frac{1}{t+2} , \quad y'_t = 2t - 3 , \quad \Rightarrow \quad y'_x = \frac{2t-3}{\left(\frac{1}{t+2}\right)} = (t+2)(2t-3)$$

נציב $t = -1$:

$$y'_x = (1)(-2-3) = -5 .$$

משוואת המשיק:

$$y = 4 - 5x .$$

■

דוגמא.

מצאו את משוואת המשיק והנורמל לגרף הפונקציה $y(x)$ הנתונה ע"י

$$x = (t-2)e^t , \quad y = t^2 + t - 1$$

בנקודה שבה $t = 0$.

פיתרון.

בנקודה $t = 0$,

$$x = -2, \quad y = -1.$$

הנגזרת היא

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t + 1}{(t - 1)e^t}$$

ובנקודה $t = 0$:

$$y'_x(t = 0) = -1.$$

משוואת המשיק:

$$y = -1 - (x + 2).$$

משוואת הנורמל:

$$y = -1 + (x + 2)$$



דוגמא.

נתונה הפונקציה

$$x = 4 \cos t, \quad y = 3 \sin t.$$

מהי המשוואת המשיק בנקודה $(4, 3)$.

פיתרון.

שים לב ע"י הזהוי $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ ניתן לבטא הפונקציה בצורה

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

וזו דווקא הצורה של משוואה של אליפסה.

הנקודה $(2, 3\sqrt{3}/2)$ מתאימה לערך $t = \pi/3$.

$$x(t)'_t = -4 \sin t, \quad y(t)'_t = 3 \cos t.$$

בנקודה $t = \pi/3$,

$$x'_t = -2\sqrt{3}, \quad y'_t = 3/2,$$

ולכן לפי הנוסחה

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-\sqrt{3}}{4}.$$

משוואת המישק:

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}(x - 2).$$



גזירה באמצעות לוגריתמים

דוגמא.

מצא את הנגזרת של הפונקציה

$$y = \frac{(x^2 + 2) \sqrt[4]{(x-1)^3} e^x}{(x+5)^3}$$

פיתרון.

נפעיל \ln על שני הצדדים:

$$\ln y = \ln(x^2 + 2) + \frac{3}{4} \ln(x-1) + x - 3 \ln(x+5)$$

נגזור את שני הצדדים:

$$\frac{1}{y} y' = \frac{2x}{x^2 + 2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}$$

מכאן

$$y' = y \left[\frac{2x}{x^2 + 2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5} \right]$$

$$y' = \frac{(x^2 + 2) \sqrt[4]{(x-1)^3} e^x}{(x+5)^3} \left[\frac{2x}{x^2 + 2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5} \right]$$

■

דוגמא.

מצא את הנגזרת של

$$y = x^x .$$

פיתרון.

$$y = x^x \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln x^x = x \ln x .$$

נגזור את שני הצדדים:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 .$$

מכאן

$$y' = y (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1) .$$

■

דוגמא.

מצא את הנגזרת של

$$y = (\sin 2x)^{x^2+1} .$$

פיתרון.

$$\ln y = (x^2 + 1) \cdot \ln(\sin 2x) .$$

נגזור את שני הצדדים:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2x \cdot \ln(\sin 2x) + (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{\sin 2x} \cdot 2 \cos 2x ,$$

מכאן

$$\begin{aligned} y' &= y \left[2x \cdot \ln(\sin 2x) + (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{\sin 2x} \cdot 2 \cos 2x \right] \\ y' &= (\sin 2x)^{x^2+1} \left[2x \cdot \ln(\sin 2x) + (x^2 + 1) \cdot \frac{2 \cos(2x)}{\sin 2x} \right] \\ y' &= (\sin 2x)^{x^2+1} \left[2x \cdot \ln(\sin 2x) + (x^2 + 1) \cdot 2 \tan 2x \right] . \end{aligned}$$



נגזרת מסדר גבוהה

$f(x)'$	נגזרת ראשונה
$f(x)''$ או $f(x)^{(2)}$	נגזרת שניה
$f(x)'''$ או $f(x)^{(3)}$	נגזרת שלישית
$f(x)^{(4)}$	נגזרת רביעית
$f(x)^{(5)}$	נגזרת חמישית
$f(x)^{(n)}$	נגזרת ה- n

דוגמא.

$\sin x$	$f(x)$
$\cos x$	$f(x)'$
$-\sin x$	$f(x)''$
$-\cos x$	$f(x)^{(3)}$
$\sin x$	$f(x)^{(4)}$

נגזרת מסדר גבוה של פונקציה סתומה

דוגמא.

נתונה הפונקציה $x^2 + y^2 = 1$ מהי הנגזרת השניה של y ?

פיתרון.

נגזור את שני הצדדים:

$$2x + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y} .$$

נגזור שוב פעם:

$$2 + 2y'y' + 2yy'' = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{-1 - (y')^2}{y} = \frac{-1 - \frac{x^2}{y^2}}{y} = - = \frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}.$$

■

דוגמא.נתונה הפונקציה $e^x + xy = 1$ מהי הנגזרת השניה של y ?**פיתרון.**

נגזור את שני הצדדים:

$$e^x + y + xy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{(e^x + y)}{x}.$$

נגזור שוב פעם:

$$\begin{aligned} y'' &= -\left(\frac{(e^x + y') \cdot x - (e^x + y)}{x^2}\right) = -\left(\frac{e^x \cdot x - (e^x + y) - e^x - y}{x^2}\right) \\ &= -\left(\frac{e^x \cdot (x - 2) - 2y}{x^2}\right) \\ &= -\left(\frac{e^x \cdot (x - 2) - \frac{2(1 - e^x)}{x}}{x^2}\right) \\ &= -\left(\frac{e^x x(x - 2) - 2(1 - e^x)}{x^3}\right) \end{aligned}$$

■

נגזרת מסדר גבוה של פונקציה פרמטרית

בהינתן פונקציה פרמטרית

$$y = y(t), \quad x = x(t).$$

הנגזרת הראשונה היא

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

דרך זה נקבל פונקציה פרמטרית חדשה:

$$y'_x = y'_x(t), \quad x = x(t).$$

נגזור אותה לפי אותו כלל ונקבל

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

דוגמא.

$$y = \sin t, \quad x = \cos t.$$