המחלקה למדעי המחשב

ל' בתשרי תשפ"ה 01/11/24
08 : 30 – 11 : 30

אלגברה 2

מועד ג'

מרצים: ד"ר זהבה צבי , ד"ר ירמיהו מילר.

תשפ"ד סמסטר ב'

השאלון מכיל 5 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (2 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.

==

שאלה 1 (25 נקודות)

א) (19 נק') תהי $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ מטריצה ניתנת ע"י $A = \begin{pmatrix} 2 & -6i & -1 \\ 6i & 2 & 6i \\ -1 & -6i & 2 \end{pmatrix}$.
האם A לכסינה אוניטרית? אם כן, מצאו Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $A = QD\bar{Q}$.

ב) (6 נק') תהי $M \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ מטריצה מסדר 2×2 מעל שדה $\mathbb{F}$.
הוכיחו כי M מקיימת

$$M^2 = \mathrm{Tr}(M)M - |M|I$$

כאשר $|M|$ הדטרמיננטה של M, $\mathrm{Tr}(M)$ העקבה של M ו- I המטריצה היחידה מסדר 2×2.

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ מטריצה ממשית מסדר 5×5 שמוגדרת $A = \begin{pmatrix} 1 & 14 & -9 & 8 & 16 \\ 0 & 2 & 5 & 10 & 17 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

א) (13 נק') מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשרויות של A.

ב) (6 נק') יהי $f(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ פולינום מסדר 2. האם יתכן כי $f(A) = 0$?
נמקו את תשובתכם.

ג) (6 נק') יהי $g(x) \in \mathbb{R}_{\leq 5}[x]$ פולינום מסדר 5 עבורו $g(4) = 0$. האם יתכן כי $g(A) = 0$?
נמקו את תשובתכם.

שאלה 3 (25 נקודות)

א) (15 נק') יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל המרחב $\mathbb{R}[x]$ (פולינום ממשיים) עם המכפלה פנימית

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} dx\, f(x)g(x)$$

לכל $f, g \in \mathbb{R}[x]$. מצאו בסיס אורתוגונלי לתת-מרחב $U \subset V$ שמוגדר

$$U = \mathrm{span}\left\{1 + x, 1 - x^2, 1 - 2x, 1 + 2x^3\right\} \ .$$

ב) (10 נק') הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:
הנוסחה

$$\langle f,g\rangle = \int_{-2}^{1} xf(x)g(x)\,dx \ ,$$

כאשר f,g פונקציות גזירות ב- $\mathbb{R}$, מהווה מכפלה פנימית.

שאלה 4 (25 נקודות)

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית והפיכה. יהי $\lambda\in\mathbb{R}$ ערך עצמי של A ויהי u וקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ.

א) (8 נק') הוכיחו ש- u הינו וקטור עצמי של A^{-1} ומצאו את הערך עצמי השייך ל- u.

ב) (8 נק') הוכיחו ש- u הינו וקטור עצמי של A^k (כאשר k מספר שלם ו- $k\geq 2$) ומצאו את הערך עצמי השייך ל- u.

ג) (9 נק') תהיינה $B,C\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות ריבועיות.
הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענה הבאה:
אם w ווקטור עצמי של B וגם ווקטור עצמי של C אז $\det\left(BC-CB\right)=0$.

שאלה 5 (25 נקודות)

תהי $A\in\mathbb{C}^{2\times 2}$ המטריצה שמוגדרת $A=\begin{pmatrix} a & b-a\\ 0 & b\end{pmatrix}$ כאשר $a,b\in\mathbb{C}$ סקלרים.

א) (5 נק') מצאו את כל הערכים העצמיים של A.

ב) (5 נק') מצאו את כל הווקטורים העצמיים של A.

ג) (5 נק') האם A לכסינה? אם כן מצאו $P\in\mathbb{C}^{2\times 2}$ הפיכה ו- $D\in\mathbb{C}^{2\times 2}$ אלכסונית כך ש- $A=PDP^{-1}$.

ד) (10 נק') חשבו את A^k לכל מספר שלם חיובי k.

פתרונות

שאלה 1 (25 נקודות)

א) (19 נק')

$$A=\begin{pmatrix}2&-6i&-1\\6i&2&6i\\-1&-6i&2\end{pmatrix}\ ,\qquad \bar{A}=\begin{pmatrix}2&-6i&-1\\6i&2&6i\\-1&-6i&2\end{pmatrix}\ .$$

$A=\bar{A}$ לכן A צמודה לעצמה $\Leftarrow$ A נורמלית $\Leftarrow$ A לכסינה אוניטרית.

$$A=PDP^{-1}\ ,\qquad D=\begin{pmatrix}10&0&0\\0&-7&0\\0&0&3\end{pmatrix}\ ,\qquad P=\begin{pmatrix}2&3&-1\\3i&-4i&0\\2&3&1\end{pmatrix}\ .$$

$$A=QD\bar{Q}\ ,\qquad D=\begin{pmatrix}10&0&0\\0&-7&0\\0&0&3\end{pmatrix}\ ,\qquad Q=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{17}}&\frac{3}{\sqrt{34}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{3i}{\sqrt{17}}&-2i\sqrt{\frac{2}{17}}&0\\\frac{2}{\sqrt{17}}&\frac{3}{\sqrt{34}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\ .$$

ב) (6 נק') תהי $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. הפולינום האופייני של M הינו

$$p_M(x)=|xI-M|=x^2-(a+d)x+ad-bc=x^2-\text{Tr}(M)x+|M|\ .$$

לפי משפט קיילי-המילטון M מאפסת את הפולינום האופייני שלה: $p_M(M)=0$.

$$M^2-\text{Tr}(M)M+|M|I=0\quad\Rightarrow\quad M^2=\text{Tr}(M)M+|M|I\ .$$

שאלה 2 (25 נקודות)

א) (13 נק')

ב) (6 נק') לא אפשרי.

A משולשית לכן הע"עים של A הינם $\lambda=1$, $\lambda=2$, $\lambda=3$. כל ע"ע של A הוא שורש של הפולינום המינימלי $m_A(x)$. לכן הדרגה של $m_A(x)$ היא לפחות 3.

אם $f(A)=0$ אז A מאפסת פולינום של דרגה אשר פחות מהדרגה של הפולינום המינימלי, בסתירה לכך שהפולינום המינימלי הוא הפולינום בעל דרגה הנמוך ביותר אשר מתאפס ע"י A.

ג) (6 נק')

שאלה 3 (25 נקודות)

א) (15 נק')

ב) (10 נק') לא מכפלה פנימית. דוגמה נגדית: $f(x) = g(x) = 1$.

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \int_{-2}^{1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = -\frac{3}{2} < 0$$

ז"א תכונת חיוביות לא מתקיימת.

שאלה 4 (25 נקודות)

א) (8 נק')
A הפיכה לכן קיימת A^{-1}. בנוסף אם A הפיכה אז כל הע"עים שונים מ-0 לכן $\lambda \neq 0$.

$$Au = \lambda u \quad \Rightarrow \quad u = \lambda A^{-1}u \quad \Rightarrow \quad A^{-1}u = \frac{1}{\lambda}u$$

ב) (8 נק')
$Au = \lambda u$. דרך אינדוקציה אפשר להוכיח כי $A^k u = \lambda^k u$ לכל $k \geq 1$. לכן הע"ע של A^k ששייך לווקטור עצמי u הינו λ^k.

ג) (9 נק')
הטענה נכונה. הוכחה:
יהיו λ_B ו- λ_C ע"עים של B ו- C ששייכים לווקטור עצמי משותף u. אז

$$Bu = \lambda_B u \ , \qquad Cu = \lambda_C u \ .$$

מכאן

$$(BC - CB)u = BCu - CBu = \lambda_C Bu - \lambda_B Cu = \lambda_C \lambda_B u - \lambda_B \lambda_C u = 0 \ .$$

u ווקטור עצמי $\Leftarrow$ $u \neq 0$. לכן המטריצה $BC - CB$ לא הפיכה ולכן $\det(BC - CB) = 0$.

שאלה 5 (25 נקודות)

א) (5 נק')
A משולשית לכן הע"עים הינם $\lambda = a$ ו- $\lambda = b$.

ב) (5 נק')
יש שתי אפשרויות: (1) $a \neq b$ ו- (2) $a = b$.

<u>אפשרות (1): $a \neq b$</u>

נניח כי $a \neq b$.

$$A - aI = \begin{pmatrix} 0 & b-a \\ 0 & b-a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 0 & b-a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \dfrac{1}{b-a} R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המרחב עצמי של $\lambda = a$ הינו $V_a = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. לכן $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו"ע ששייך לע"ע $\lambda = a$.

$$A - bI = \begin{pmatrix} a-b & b-a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \dfrac{1}{a-b} R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המרחב עצמי של $\lambda = b$ הינו $V_b = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. לכן $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ו"ע ששייך לע"ע $\lambda = b$.

<u>אפשרות (2): $a = b$</u>

כעת נניח כי $a = b$. אז $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. ז"א יש רק ערך עצמי אחד: $\lambda = a$.

$$A - aI = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המרחב עצמי של $\lambda = a$ הינו $V_a = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. לכן $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו- $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ הם ו"עים ששייכים לע"ע $\lambda = a$.

ג) (5 נק')
<u>אפשרות (1): $a \neq b$</u>

ל- A יש שני ערכים עצמיים שונים לכן A לכסינה.

$$A = PDP^{-1} , \qquad D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} , \qquad P = \begin{pmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

<u>אפשרות (2): $a = b$</u>

A כבר אלכסונית.

$$A = P'D'P'^{-1} \ , \qquad D' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \ , \qquad P' = \begin{pmatrix} | & | \\ w_1 & w_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

ד) (5 נק')

<u>אפשרות (1): $a \neq b$</u>

$$A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix} P^{-1} \ .$$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. לכן

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^k & -b^k \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$$

<u>אפשרות (2): $a = b$</u>

A אלכסונית לכן

$$A^k = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & a^k \end{pmatrix} \ .$$