

שיעור 5

תכונות סגירות של R ו- RE

5.1 הגדרה של השפות R ו- RE

הגדרה 5.1

אוסף השפות הכריעות מסומן R ומוגדר

$$R = \{L \subseteq \Sigma^* : L \text{ קיימת מ"ט המכreira את } L\}.$$

הגדרה 5.2

אוסף השפות הקבילות מסומן RE ומוגדר

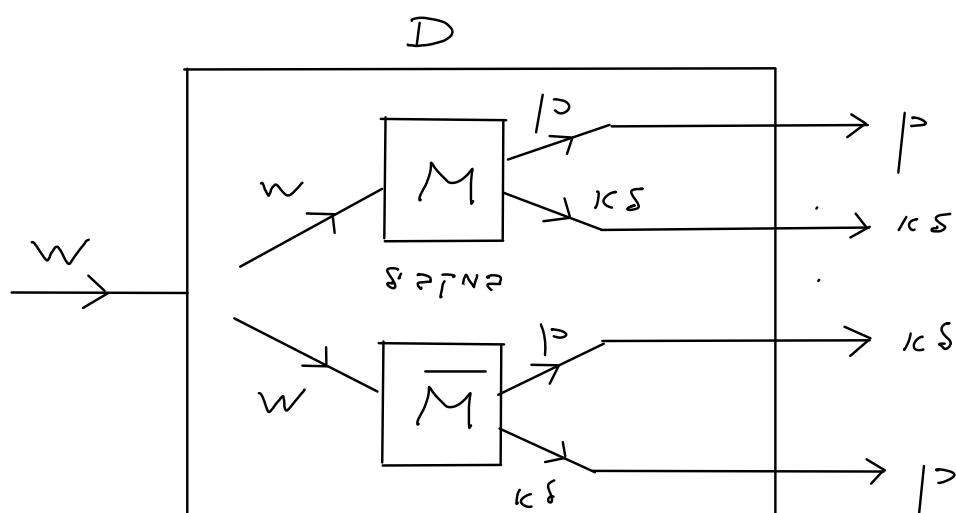
$$RE = \{L \subseteq \Sigma^* : L \text{ קיימת מ"ט מקבלת את } L\}.$$

лемה 5.1

אם $L \in R$ אז $\bar{L} \in RE$ וגם $L \in RE$

הוכחה: תהי M מ"ט מקבלת את L ותהי \bar{M} מ"ט מקבלת את \bar{L} .

נבנה מ"ט D המכreira את L .



על קלט $w = D$:

1) D מעתקה את w לסדרת נוספת.

2) מריצה במקביל את M על w ואת \bar{M} על העותק של w .

- אם M מקבלת D \Leftrightarrow מקבלת.
- אם \bar{M} מקבלת D דוחה.
- אם M דוחה $D \Leftrightarrow$ דוחה.
- אם \bar{M} דוחה $D \Leftrightarrow$ מקבלת.

נוכיח כי D מכירעה את L .

אם $w \in L$

$w \in L(M) \Leftrightarrow$

(w מקבלת את w) או (\bar{M} דוחה את w) \Leftrightarrow

עוצרת ומתקבלת את w .

אם $w \notin L$

$w \in \bar{L} \Leftrightarrow$

$w \in L(\bar{M}) \Leftrightarrow$

(w מקבלת את w) או (M דוחה את w) \Leftrightarrow

עוצרת ודוחה את w .

משפט 5.1 סגירות של השפות הכריעות

סגורה תחת: R

- 1) איחוד
- 2) חיתוך
- 3) משלימים
- 4) שרשור
- 5) סגור קלין

משפט 5.2 סגירות של השפות הקבילות

סגורה תחת: RE

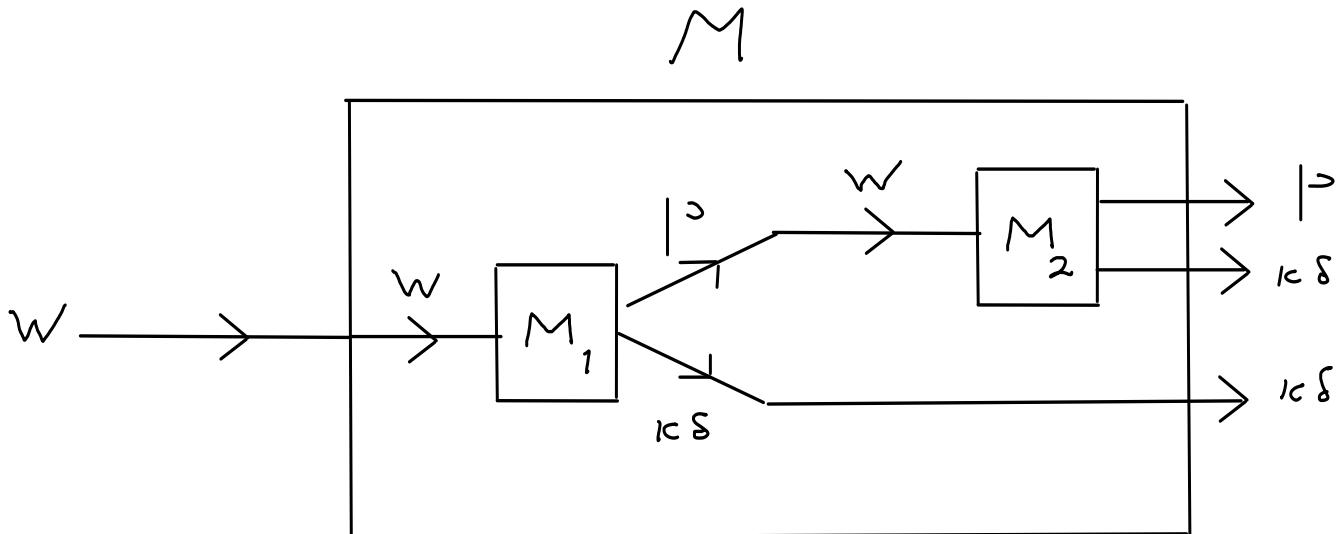
- 1) איחוד
- 2) חיתוך
- 3) שרשור
- 4) סגור קלין

1) חיתוך:

(א) סגורה תחת חיתוך R

נוכיח כי לכל שתי שפות $L_1 \cap L_2 \in R$ מתקיים $L_1, L_2 \in R$ המכריעה את $L_1 \cap L_2$.

תהי M_1 ו- M_2 מ"ט המכרייעות את L_1 ו- L_2 בהתאם. נבנה מ"ט M המכריעה את $L_1 \cap L_2$.

תאור הבנייה

על קלט $w = M$:

1) מעתיקת את w לסדרת נוספת.

2) מרכיבת את M_1 על w .

- אם M_1 דוחה $M \Leftarrow$ דוחה.

- אחרת M מרכיבת את M_2 על העותק של w ועונה כמוותה.

נכונות:

נוכיח כי M מכריעה את $L_1 \cap L_2$.

אם $w \in L_1 \cap L_2$

$w \in L_2$ וגם $w \in L_1 \Leftarrow$

w מקבלת את w וגם M_1 מקבלת את w \Leftarrow

M מקבלת את w \Leftarrow

אם $w \notin L_1 \cap L_2$

$w \notin L_2$ או $w \notin L_1 \Leftarrow$

w דוחה את w או M_2 דוחה את w \Leftarrow

M דוחה את w \Leftarrow

(ב) סגורה תחת חיתוך RE

nocih ci lcl shi shfot $L_1, L_2 \in RE$ matk'ym $L_1 \cap L_2 \in RE$.

tahiyeh M_1 - M_2 shti m'conot tivrigg m'kbelot at L_1 - L_2 b'hetamah.
n'bna m'yt M m'kbelat at $L_1 \cap L_2$ ba'otzo open cmoh (א).

(2) **איחוד:**

(א) סגורה תחת איחוד R

nocih ci ldl shi shfot $L_1, L_2 \in R$ matk'ym $L_1 \cup L_2 \in R$.

tahiyeh M_1 m'yt m'kri'ah at L_1 - M_2 m'yt m'kri'ah at L_2
n'bna m'yt M m'kri'ah at $L_1 \cup L_2$.

תאור הבנייה

عل קלט $w = M$:

(1) מעתיקה את w לסדרת נסף.

(2) M מריצה את M_1 על w .

- אם M_1 מקבלת $M \Leftarrowtail$ מקבלת.
- אחרת, M מריצה את M_2 על העותק של w ועונה כמווה.

(ב) סגורה תחת איחוד RE

nocih ci lcl shi shfot $L_1, L_2 \in RE$ matk'ym $L_1 \cup L_2 \in RE$.

tahiyeh M_1 m'yt m'kbelat at L_1 - M_2 m'yt m'kbelat at L_2 .
n'bna m'yt a'd M m'kbelat at $L_1 \cup L_2$.

תאור הבנייה

על קלט $w = M$:

(1) M בוחרת באופן a'd $i \in \{1, 2\}$

(2) M מריצה את M_i על w ועונה כמווה.

(3) **שרשור:**

(א) סגורה תחת שרשור R

nocih ci lcl shi shfot $L_1, L_2 \in R$ matk'ym $L_1 \cdot L_2 \in R$ casr

$$L_1 \cdot L_2 = \{w = w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\} .$$

tahiyeh M_1 m'yt m'kri'ah at L_1 - M_2 m'yt m'kri'ah at L_2
n'bna m'yt a'd M m'kri'ah at $L_1 \cdot L_2$.

תאור הבנייה

על קלט $w = M$:

- 1) M בוחרת באופן א"ד חלוקה של w ל-
 $w = w_1 w_2$.
 2) מרים את M_1 על w_1
 • אם D דוחה $M \Leftarrow D$
 • אחרת, M מרים את M_2 על w_2 ועונה כמוות.

(ב) סגורה תחת שרשור
 RE סגורה תחת שרשור באותו אופן כמו ב- (א)

4) * קליני

(א) R סגורה תחת * קליני

נוכיח כי לכל שפה L :

$$L \in R \Rightarrow L^* \in R$$

כasher

$$L^* = \{w = w_1 w_2 \cdots w_k \mid \forall 1 \leq i \leq k, w_i \in L\} .$$

תהי M מ"ט המכיריה את L .

نبנה מ"ט M^* א"ד המכיריה את L^* .

תאור הבנייה

על קלט $w = M^*$:

1) אם $w = \varepsilon$ אז M^* מקבלת.

2) אחרת M^* בוחרת באופן א"ד חלוקה של w ל-

3) לכל $1 \leq i \leq k$

מרים את M על w_i .

• אם M דוחה את w_i $M^* \Leftarrow w_i$ דוחה.

• אחרת חוזרים לשלב 3).

4) אם M קיבלה את כל המחרוזות $\{w_i\}$ אז M^* מקבלת.

(ב) RE סגורה תחת * קליני

5) משלים

(א) R סגורה תחת המשלים

נוכיח כי

$$L \in R \Rightarrow \bar{L} \in R ,$$

כasher

$$\bar{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\} .$$

תהי M מ"ט המכיריה את L .

نبנה מ"ט \bar{M} המכיריה את \bar{L} .

על קלט $w = \bar{M}$:

(1) מרייצה את M על w .

- אם M מקבלת דוחה.

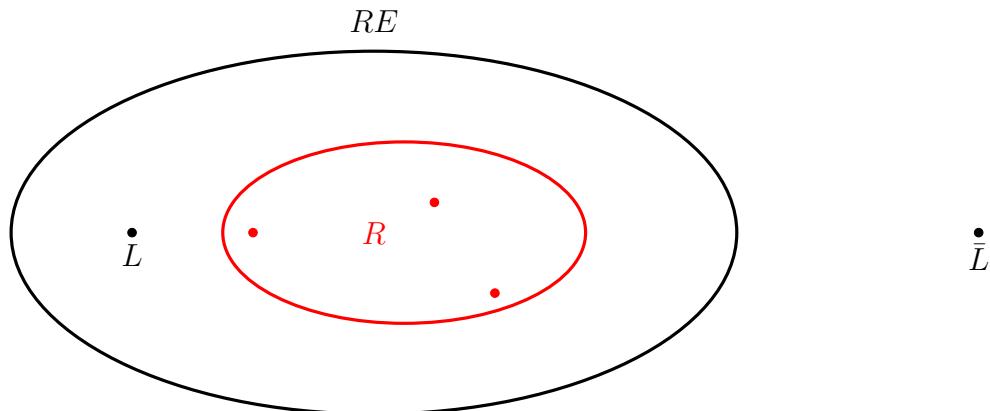
- אם דוחה M מקבלת.

ב) אינה סגורה תחת המשלימים



משפט 5.3 אינה סגורה תחת המשלימים

$L \in RE \setminus R \Rightarrow \bar{L} \notin RE$.



הוכחה:

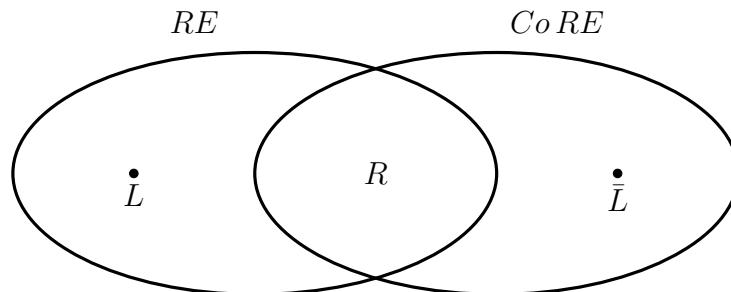
נניח כי $\bar{L} \in RE$ ונניח בשילילה כי $L \in RE \setminus R$.

אזי לפי טענת עזר (лемה 5.1), $L \in R$ או סטירה.



הגדרה 5.3

$Co\ RE = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \bar{L} \in RE\}$.



אבחנה

לפי למה 5.1:

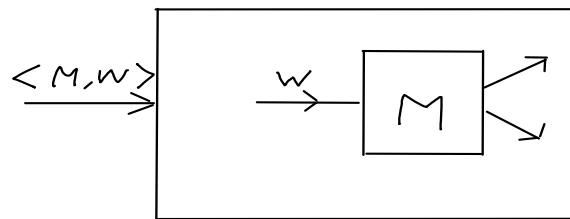
$$RE \cap Co\ RE = R.$$

5.2 קידוד של מ"ט דטרמיניסטי

הגדרה 5.4 קידוד של מ"ט

בاهינתן קבוצה O של עצמים מופשטים (למשל מכונת טיורינג, תוכנית מחשב, גרפ'). הקידוד של O , מסומן $\langle O \rangle$, הוא מיפוי של O אל מהירות מעל אלףית סופי ששי בו לפחות שני סימנים. במידה ויש רב עצמים O_1, \dots, O_k נסמן את הקידוד שלהם $\langle O_1, O_2, \dots, O_k \rangle$.

5.3 מ"ט אוניברסלית U



מ"ט אוניברסלית U מקבלת כקלט זוג, קידוד של מילה $\langle w \rangle$ וקידוד של מ"ט $\langle M \rangle$, וביצעת סימולציה של ריצה של M על w ועונה בהתאם.

תאור הפעולה של U

U על קלט x :

(1) בודקת אם x הוא קידוד של מ"ט $\langle M \rangle$ וקידוד של מילה $\langle w \rangle$.

- אם לא \Leftarrow דוחה.

(2) מבצעת סימולציה של M על w :

1	6	7	0	$\langle M \rangle$	-	$\langle w \rangle$...
---	---	---	---	---------------------	---	---------------------	-----

2	6	7	0	$\langle \# \rangle$	-	$\langle w \rangle$...
---	---	---	---	----------------------	---	---------------------	-----

- רושמת את הקוניגורציה ההתחלתית w_{q_0} על סרט 2.
- מחשבת את הקוניגורציה הבאה בעזרת טבלת המעברים.
- בסוף כל מעבר בין שתי קוניגורציות, U בודקת אם המצב הנוכחי הוא q_{acc} .

* אם כן U עוצרת ומתקבלת.

- * לאחרת U בודקת האם המצב הוא q_{rej} .
- * אם כן U עוצרת ודוחה.
- * אחרת U ממשיכה לكونפיגורציה הבאה.

מהי השפה של U ?

לכל x :

$$\text{אם } U \text{ דוחה את } x \Leftrightarrow x \neq \langle M, w \rangle \quad (1)$$

$$\text{אם } x = \langle M, w \rangle \quad (2)$$

- אם M מקבלת w מקבלת U את x .
- אם M דוחה את w דוחה את U .
- אם M לא עוצרת על w לא עוצרת על U .

$$L(U) = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} .$$

הגדרה 5.5 L_{acc}

$$L_{\text{acc}} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} \in \text{RE} \setminus \text{R}$$

הגדרה 5.6 L_{halt}

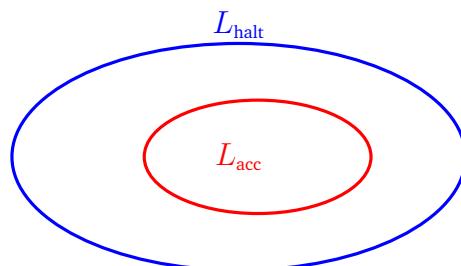
$$L_{\text{halt}} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \text{ עוצרת על } M \} \in \text{RE} \setminus \text{R}$$

הגדרה 5.7 L_{d}

$$L_{\text{d}} = \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \} \notin \text{RE}$$

אבחנה:

$$L_{\text{acc}} \subseteq L_{\text{halt}} .$$



משפט 5.4

$$L_{\text{acc}} \in RE .$$

הוכחה: מכיוון ש- $L_{\text{acc}} \in RE$ מקבלת את U , $L(U) = L_{\text{acc}}$.

משפט 5.5

$$L_{\text{halt}} \in RE .$$

הוכחה: נבנה מ"ט U' שהוא למעשה U פרט למקום שבו U עצמה ומחטה, U' תעצור ותקבל.

נווכיח כי U' מקבלת את L_{halt} :

אם $x \in L_{\text{halt}}$

ו- M עוצרת על w $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$

x עוצרת ומתקבלת את $U' \Leftarrow$

אם $x \notin L_{\text{halt}}$ שני מקרים:

. x דוחה את $U' \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$ •

. M לא עוצרת על $U' \Leftarrow w$ לא עוצרת על $x = \langle M, w \rangle$ •

