אלגברה לינארית סמסטר סתו 2022-23
עבודה עצמית 5

שאלות

שאלה 1 לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבע האם היא תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

א) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x=y=-z\}$

ב) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x=3y\}$

ג) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|y=z^2\}$

ד) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x+y-z=0\}$

ה) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x+y\geq 0\}$

ו) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x=0\}$

ז) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x+y=-z\}$

ח) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x\geq 0,y\geq 0\}$

ט) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x+y-z=1\}$

י) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2=0\}$

שאלה 2 לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבע האם היא תת מרחב של $P_2(\mathbb{R})$ (מרחב הפולינומים ממעלה עד 2, סימונים נוספים למרחב $P_2(x)$,$P_2(\mathbb{R})$).

א) $W=\{ax^2+bx+c\in\mathbb{P}_2(\mathbb{R})|b=0\}$

ב) $W=\{ax^2+bx+c\in\mathbb{P}_2(\mathbb{R})|a+b+c=0\}$

ג) $W=\{ax^2+bx+c\in\mathbb{P}_2(\mathbb{R})|a>b>c\}$

ד) $W=\{ax^2+bx+c\in\mathbb{P}_2(\mathbb{R})|a=b=c\}$

ה) $W = \{p \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}$

ו) $W = \{p \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 1\}$

ז) $W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) | a, b, c \in \mathbb{C}, a + b = \bar{c}\}$

שאלה 3 לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבע האם היא תת מרחב של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

א) $W = \left\{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) | A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\right\}$

ב) $W = \left\{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) | A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0\right\}$

ג) $W = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \quad | \quad |A| = 0\}$

ד) $W = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \quad | \quad |A| \neq 0\}$

ה) $W = \left\{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) | A \cdot B = 0, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\right\}$

שאלה 4 לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבע האם היא תת מרחב של $\{f | f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}\}$.

א) $W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | f(1) = 0\}$

ב) $W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | f(1) + f(2) = 0\}$

ג) $W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)\}$

ד) $W = \left\{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = (f(x))^2\right\}$

שאלה 5 יהי V מרחב וקטורי ויהיו W_1, W_2 תת מרחבים של V.

א) הוכח:

$$W_1 \cap W_2 = \{x \in V | x \in W_1 \wedge x \in W_2\}$$

הינו תת-מרחב של V.

ב) הוכח:

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1 \ , \ w_2 \in W_2\}$$

הינו תת-מרחב של V.

ג) הפרך:

$$W_1 \cup W_2 = \{x \in V | x \in W_1 \vee x \in W_2\}$$

הינו תת-מרחב של V.

שאלה 6 לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבע האם היא תת מרחב של $P(\mathbb{R})$ (מרחב הפולינומים עם מקדמים ממשיים):

א) $W = \{p \in P(\mathbb{R}) | \deg(p) = 3\}$

ב) $W = \{p \in P(\mathbb{R}) | \deg(p) \text{ even} \cup \{\bar{0}\}\}$

ג) $W = \{p \in P(\mathbb{R}) | p(0) \in \mathbb{Z}\}$

פתרונות

שאלה 1

א) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x=y=-z\}$

דוגמה: $(1,1,-1)\in W$.

1) הוקטור האפס $\bar{0}=(0,0,0)$ מקיים את התנאי $x=y=-z$ לכן $\bar{0}\in W$.

2) נניח ש- $u_1=(x_1,y_1,z_1)\in W$ וגם $u_2=(x_2,y_2,z_2)\in W$. לפי זה u_1, u_2 מקיימים את התנאי

(*) $$x_1=y_1=-z_1\ ,\qquad x_2=y_2=-z_2\ .$$

נקח הוקטור $u_1+u_2=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$. נובע מ- **(*)** כי

$$x_1+x_2=y_1+y_2=-z_1-z_2=-(z_1+z_2)\ .$$

כלומר u_1+u_2 מקיים את התנאי של W, ולכן $u_1+u_2\in W$.

3) נניח $u=(x,y,z)\in W$ ו- k סקלר. כיוון ש- $u\in W$ אז

(#) $$x=y=-z\ .$$

נקח הוקטור $ku=(kx,ky,kz)$. מ- **(#)** נובע כי $kx=ky=k(-z)=-(kz)$, כלומר ku מקיים את התנאי ולכן $ku\in W$.

הוכחנו ש- W תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.
■

ב) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x=3y\}$

דוגמה: $(3,1,2)\in W$.

1) הוקטור האפס $\bar{0}=(0,0,0)$ מקיים את התנאי $x=3y$ לכן $\bar{0}\in W$.

2) נניח ש- $u_1=(x_1,y_1,z_1)\in W$ וגם $u_2=(x_2,y_2,z_2)\in W$. אז

(*) $$x_1=3y_1\ ,\qquad x_2=3y_2\ .$$

מתקיים. נקח הוקטור $u_1+u_2=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$. מ- **(*)** נובע כי

$$x_1+x_2=3y_1+3y_2=3(y_1+y_2)\ .$$

ז"א u_1+u_2 מקיים את התנאי של W, ולפיו $u_1+u_2\in W$.

3) נניח $u=(x,y,z)\in W$ ו- k סקלר. כיוון ש- $u\in W$ אז

(#) $$x=3y\ .$$

נקח הוקטור $ku=(kx,ky,kz)$. מ- **(#)** נקבל $k\cdot x=k\cdot(3y)=3\cdot(ky)$, ולפי זה ku מקיים את התנאי, ז"א $ku\in W$.

הוכחנו ש- W תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

■

ג) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = z^2\}$

לדוגמה: $u = (1,9,3)$.

W אינו תת-מרחב. דוגמה נגדית:

$u = (0,2,4) \in W$ כי $2^2 = 4$ אבל $3u = (0,6,12)$ ו- $6^2 \neq 12$. לכן $u \notin W$.

■

ד) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0\}$

לדוגמה: $u = (1,1,2) \in W$.

1) הוקטור האפס $\bar{0} = (0,0,0)$ מקיים את התנאי $x + y - z = 0$ לכן $\bar{0} \in W$.

2) נניח ש- $u_1 = (x_1, y_1, z_1) \in W$ וגם $u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in W$. אז

(*) $$x_1 + y_1 - z_1 = 0 \ , \qquad x_2 + y_2 - z_2 = 0 \ .$$

מתקיים. נקח הוקטור $u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. מ- **(*)**,

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = 0$$

ולכן $u_1 + u_2$ מקיים את התנאי של W, ז"א $u_1 + u_2 \in W$.

3) נניח $u = (x,y,z) \in W$ ו- k סקלר. כיוון ש- $u \in W$ אז

(#) $$x + y - z = 0 \ .$$

נקח הוקטור $ku = (kx, ky, kz)$. כתוצאה של **(#)** נקבל $k \cdot (x + y - z) = 0 \quad \Rightarrow \quad = k \cdot x + k \cdot y - k \cdot z = 0$, לכן ku מקיים את התנאי, ז"א $ku \in W$.

הוכחנו ש- W תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

■

ה) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y \geq 0\}$

לדוגמה: $(1,1,0) \in W$.

W אינו תת-מרחב. דוגמה נגדית:

$u = (1,2,3) \in W$ כי $1 + 2 + 3 \geq 0$. נבחר $k = -1$. אז $k \cdot u = (-1,-2,-3) \notin W$ כי $-1 - 2 < 0$.

■

ו) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0\}$

לדוגמה: $(0,1,2) \in W$.

1) הוקטור האפס $\bar{0}=(0,0,0)$ מקיים את התנאי $x=0$ לכן $\bar{0}\in W$.

2) נניח ש- $u_1=(x_1,y_1,z_1)\in W$ וגם $u_2=(x_2,y_2,z_2)\in W$. אז

(*)
$$x_1=0\ ,\qquad x_2=0\ .$$

מתקיים. נקח הוקטור $u_1+u_2=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$. מ- **(*)** נובע כי $(x_1+x_2)=0$. לכן u_1+u_2 מקיים את התנאי של W, ז"א $u_1+u_2\in W$.

3) נניח $u=(x,y,z)\in W$ ו- k סקלר. כיוון ש- $u\in W$ אז

(#)
$$x=0\ .$$

נקח הוקטור $ku=(kx,ky,kz)$. מ- **(#)** נקבל $kx=0 \qquad\Rightarrow\qquad k\cdot(x)=0$, אזי ku מקיים את התנאי, ז"א $ku\in W$.

הוכחנו ש- W תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

■

ז) $\underline{W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x+y=-z\}}$

לדוגמה $(1,1,-2)\in W$.

1) $\bar{0}=(0,0,0)$, $0+0=-0 \Leftarrow \bar{0}\in W$.

2) נקח $u_1=(x_1,y_1,z_1)\in W$, וגם $u_2=(x_2,y_2,z_2)\in W$.
ז"א $x_1+y_1=-z_1$, $x_2+y_2=-z_2$. אז

$$u_1+u_2=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$$

$$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)=(x_1+y_1)+(x_2+y_2)=-z_1-z_2=-(z_1+z_2)$$

לכן $u_1+u_2\in W$.

3) נניח $u=(x,y,z)\in W$, $k\in\mathbb{R}$. $\Leftarrow$ $x+y=-z$.

$$ku=(kx,ky,kz)\qquad , \qquad kx+ky=k(x+y)=k(-z)=-kz$$

לכן $ku\in W$.

מסקנה: W תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

■

ח) $\underline{W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x\geq0,y\geq0\}}$

לדוגמה: $(1,1,1)\in W$.

W אינו תת-מרחב. דוגמה נגדית:

$$u=(1,1,1)\in W$$

אבל

$$-1\cdot u=(-1,-1,-1)\notin W\ .$$

■

ט) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y-z=1\}$

דוגמה: $(1,1,1) \in W$.

אינו תת-מרחב בגלל ש- $W \notin (0,0,0) = \bar{0}$ כי $0+0-0 \neq 1$. לכן W לא תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

■

י) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2=0\}$

הוקטור היחידי שמקיים את התנאי הוא וקטור האפס: $\bar{0} = (0,0,0)$, ז"א $W = \{\bar{0}\}$.

1) $\bar{0} \in W$.

2) $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0} \in W$.

3) $k \cdot \bar{0} = \bar{0}$

לכן W תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

■

שאלה 2

א) $W = \{ax^2+bx+c \in P_2(\mathbb{R}) | b=0\}$. (דוגמה: $x^2+1 \in W$).

1) $\bar{0} = 0x^2+0x+0 \in W$.

2) נניח $u_1 = a_1x^2+c_1 \in W$, $u_2 = a_2x^2+c_2 \in W$. אזי

$$u_1+u_2 = (a_1+a_2)x^2+(c_1+c_2) \in W$$

3) נקח $u = ax^2+c \in W$. אז לכל $k \in \mathbb{R}$

$$k \cdot u = (ka_1)x^2 + kc \in W \ .$$

מסקנה: W תת-מרחב של $P_2(\mathbb{R})$.

■

ב) $W = \{ax^2+bx+c \in P_2(\mathbb{R}) | a+b+c=0\}$ (דוגמה: $x^2+x-2 \in W$).

1) $\bar{0} = 0x^2+0x+0 \in W$.

2) נניח $u_1 = a_1x^2+b_1x+c_1 \in W$, $u_2 = a_2x^2+b_2x+c_2 \in W$.

אז $a_1+b_1+c_1=0$ וגם $a_2+b_2+c_2=0$.

$$u_1+u_2 = (a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2) \ .$$

$$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2) = (a_1+b_1+c_1)+(a_2+b_2+c_2) = 0+0=0 \ .$$

לכן $u_1+u_2 \in W$.

3) נקח $u = ax^2+bx+c \in W$. ז"א $a+b+c=0$. אז לכל $k \in \mathbb{R}$

$$k \cdot u = (ka)x^2+(kb)x+(kc)\ .$$

$$ka+kb+kc = k(a+b+c) = k \cdot 0 = 0\ .$$

לכן $ku \in W$.

מסקנה: W תת-מרחב של $P_2(\mathbb{R})$.

■

ג) $W = \{ax^2+bx+c \in P_2(\mathbb{R}) | a > b > c\}$
דוגמה נגדית: $u = 3x^2+2x+1 \in W$ כי $3>2>1$.
אבל $(-1)\cdot u = -3x^2-2x-1 \notin W$ כי $-3<-2<-1$.

■

ד) $W = \{ax^2+bx+c \in P_2(\mathbb{R}) | a=b=c\}$ (דוגמה: $x^2+x+1 \in W$)
ז"א $W = \{ax^2+ax+a \in P_2(\mathbb{R}) | a \in \mathbb{R}\}$.

1) $\bar{0} = 0x^2+0x+0 \in W$. (עבור $a=0$).

2) נניח $u_1 = a_1x^2+a_1x+a_1 \in W$ ו- $u_2 = a_2x^2+a_2x+a_2 \in W$.
אז $u_1+u_2 = (a_1+a_2)x^2+(a_1+a_2)x+(a_1+a_2) \in W$.

3) נניח $u = ax^2+ax+a \in W$ ו- k סקלר. אז

$$ku = k(ax^2+ax+a) = (ka)x^2+(ka)x+ka \in W$$

מסקנה: W תת מרחב של $P_2(\mathbb{R})$.

■

ה) $W = \{p \in P_2(\mathbb{R}) | p(1)=0\}$ (דוגמה: $x^2+x-2 \in W$) נסמן $p(x) = ax^2+bx+c$.
$p(1)=0 \Leftarrow a+b+c=0$. ז"א $W = \{ax^2+bx+c \in P_2(\mathbb{R}) | a+b+c=0\}$. הוכחנו בסעיף ב' שזה תת מרחב של $P_2(\mathbb{R})$.

■

ו) $W = \{p \in P_2(\mathbb{R}) | p(1)=1\}$
$\bar{0} = 0x^2+0x+0 \notin W$ כי $\bar{0}(1) = 0\cdot 1^2+0\cdot 1+0 \neq 1$.

■

■

שאלה 3

א) $$W = \left\{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

1) $\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$ (עבור $a=0$, $b=0$)

2) נניח $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$.

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} \in W$$

3) נניח $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in W$. אז לכל $k \in \mathbb{R}$, $k \cdot A = \begin{pmatrix} ka & 0 \\ 0 & kb \end{pmatrix} \in W$.

לכן W תת מרחב של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

■

ב) $$W = \left\{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0 \right\}$$

דומגה: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W$.

$\bar{0} \not\in W$ כי $\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ($c = 0$). לכן W לא תת מרחב של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

■

ג) $W = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid |A| = 0\}$

דוגמה נגדית: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, אז $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin W$. לכן W לא תת מרחב של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

■

ד) $W = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid |A| \neq 0\}$ $W \not\ni \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ כי $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

לכן W לא תת מרחב של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

■

ה) $$W = \left\{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | A \cdot B = 0, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \right\}$$

דוגמה: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$

1) $\bar{0} \in W$ כי $\bar{0} \cdot A = 0$

2) נניח $A_1, A_2 \in W$. ז"א $A_1 \cdot B = 0$, $A_2 \cdot B = 0$. אז

$$(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B = 0 + 0 = 0$$

לכן $A_1 + A_2 \in W$.

3) נניח $A \in W$ ז"א $A \cdot B = 0$. אז לכל סקלר k, $(kA) \cdot B = k(A \cdot B) = k \cdot 0 = 0$.

לכן $A \in W$.

לכן W תת מרחב של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

■

שאלה 4

א) $W=\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}|f(1)=0\}$
לדוגמה: $f(x)=x-1$.

1) $\bar{0}=(y=0) \Leftarrow \bar{0}(1)=0 \Leftarrow \bar{0}\in W$.

2) נניח $f,g\in W$. $\Leftarrow$ $f(1)=0$ וגם $g(1)=0$.
אז $(f+g)(1)=f(1)+g(1)=0+0=0$.
לכן $f+g\in W$.

3) נניח $f\in W \Leftarrow f(1)=0$. אז לכל $k\in\mathbb{R}$,

$$(k\cdot f)(1)=k\cdot(f(1))=k\cdot 0=0\ .$$

לכן $kf\in W$.
מסקנה: W ת"מ של $F(\mathbb{R})$.
■

ב) $W=\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}|f(1)+f(2)=0\}$
דוגמה: $f(x)=(x-1)(x-2)$.

1) $\bar{0}=(y=0) \Leftarrow \bar{0}(1)=0$, $\bar{0}(2)=0$, $\Leftarrow \bar{0}(1)+\bar{0}(2)=0$.
לכן $\bar{0}\in W$.

2) נניח $f_1,f_2\in W$. $\Leftarrow$ $f_1(1)+f_1(2)=0$ וגם $f_2(1)+f_2(2)=0$.
אז $(f_1+f_2)(1)+(f_1+f_2)(2)=[f(1)+f_1(2)]+[f_2(1)+f_2(2)]=0+0=0$.
לכן $f_1+f_2\in W$.

3) נניח $f\in W \Leftarrow f(1)+f(2)=0$. אז לכל $k\in\mathbb{R}$,

$$(k\cdot f)(1)+(k\cdot f)(2)=k\cdot(f(1)+f(2))=k\cdot 0=0\ .$$

לכן $kf\in W$.
מסקנה: W ת"מ של $F(\mathbb{R})$.
■

ג) $W=\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}|\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(-x)\}$
דוגמה: $f(x)=x^2$.

1) $\bar{0}(x)=\bar{0}(-x)=0$ לכל $x\in\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ $\bar{0}\in W$.

2) נניח $f,g\in W$ ז"א $f(x)=f(-x)$, $g(x)=g(-x)$.
אז $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=f(-x)+g(-x)=(f+g)(-x)$
לכן $f+g\in W$.

3) נניח $f\in W$, $k\in\mathbb{R}$. אז $f(x)=f(-x)$. לכן $(kf)(x)=k(f(x))=kf(-x)=(kf)(-x)$
לכן $kf\in W$.
מסקנה: W ת"מ של $F(\mathbb{R})$.
■

ד) $W=\left\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}\middle|\forall x\in\mathbb{R}, f(x^2)=(f(x))^2\right\}$
דוגמה נגדית: $f(x)=x^2\in W$, $g(x)=1\in W$,

$$(f+g)(x)=x^2+1\notin W\ .$$

מסקנה: W לא ת"מ של $F(\mathbb{R})$.
■

שאלה 5

א) נתון: W_1,W_2 תת מרחבים של V.
צ"ל: $W_1\cap W_2$ תת מרחבים של V.
הוכחה:

1) צ"ל: $\bar{0}\in W_1\cap W_2$.

$$\left\{\begin{array}{l} W_1 \text{ תת-מרחב, לכן } \bar{0}\in W_1\\ W_2 \text{ תת-מרחב, לכן } \bar{0}\in W_2\end{array}\right. \Rightarrow \bar{0}\in W_1\cap W_2.$$

2) נקח $u_1,u_2\in W_1\cap W_2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} u_1\in W_1, & u_1\in W_2, \text{ וגם}\\ u_2\in W_1, & u_2\in W_2\end{array}\right\}$

$$\left\{\begin{array}{l} W_1 \text{ תת-מרחב, לכן } u_1+u_2\in W_1\\ W_2 \text{ תת-מרחב, לכן } u_1+u_2\in W_2\end{array}\right. \Rightarrow u_1+u_2\in W_1\cap W_2.$$

3) נניח $u\in W_1\cap W_2$, $k\in\mathbb{R}$.
אז $u\in W_1$, $u\in W_2$.

$$\left\{\begin{array}{l} W_1 \text{ תת-מרחב, לכן } ku\in W_1\\ W_2 \text{ תת-מרחב, לכן } ku\in W_2\end{array}\right. \Rightarrow ku\in W_1\cap W_2.$$

מסקנה: $W_1\cap W_2$ תת-מרחב של V.
■

ב) $\underline{W_1+W_2=\{w_1+w_2 : w_1\in W_1\ ,\ w_2\in W_2\}}$

צ"ל: W_1+W_2 תת מרחב של V.

1) W_1 תת-מרחב $\Leftarrow \bar{0}\in W_1$, ו- W_2 תת-מרחב $\Leftarrow \bar{0}\in W_2$.

$\bar{0}=\bar{0}+\bar{0} \Rightarrow \bar{0}\in W_1+W_2$.

2) נקח $u,v\in W_1+W_2$. $\Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} u=w_1+w_2, & w_1\in W_1, & w_2\in W_2\\ v=w_1'+w_2', & w_1'\in W_1, & w_2'\in W_2\end{array}\right\}$

W_1 תת מרחב, לכן $w_1+w_1'\in W_1$,
W_2 תת מרחב, לכן $w_2+w_2'\in W_2$,
אז

$$u+v=(w_1+w_2)+(w_1'+w_2')=\overbrace{(w_1+w_1')}^{\in W_1}+\overbrace{(w_2+w_2')}^{\in W_2}$$

לכן $u+v\in W_1+W_2$.

3) נניח כי $u\in W_1+W_2$. $\Leftarrow$ $u=w_1+w_2$, $w_1\in W_1$ ו- $w_2\in W_2$.

אז לכל $k\in\mathbb{R}$,

$$ku=k(w_1+w_2)=kw_1+kw_2 \ .$$

$$\left.\begin{cases} W_1 \text{ ת"מ, לכן } kw_1\in W_1 \\ W_2 \text{ ת"מ, לכן } kw_2\in W_2 \end{cases}\right. \Rightarrow ku\in W_1+W_2 .$$

מסקנה: W_1+W_2 תת-מרחב של V.

■

ג) $\underline{W_1\cup W_2=\{x\in V|x\in W_1\vee x\in W_2\}}$

דוגמה נגדית:

$$W_1=\{(x,y)|y=x\}\ , \qquad W_2=\{(x,y)|y=2x\}$$

W_1, W_2 תת-מרחבים של $\mathbb{R}^2$.

$u=(1,1)\in W_1$ אז $u=W_1\cup W_2$.

$v=(1,2)\in W_2$ אז $v=W_1\cup W_2$.

$u+v=(2,3)$, $u+v\notin W_1$ וגם $u+v\notin W_2$.

לכן $u+v\notin W_1\cup W_2$.

■

שאלה 6

א) $W=\{p\in P(\mathbb{R})|\deg(p)=3\}$

דוגמה: $p=x^3+x^2+x+1\in W$.

$\bar{0}\notin W$ כי $\deg(\bar{0})=0$

לכן W לא תת-מרחב של $p(\mathbb{R})$.

■

ב) $W=\{p\in P(\mathbb{R})|\deg(p)\ \text{even}\cup\{\bar{0}\}\}$

דוגמה: $p=x^2+1\in W$.

דוגמה נגדית: $p=x^2+x+1\in W$, $q=-x^2+x\in W$,

$p+q=2x+1\notin W$ כי $\deg(p+q)=1$.

לכן W לא תת-מרחב של $P(\mathbb{R})$.

■

ג) $W=\{p\in P(\mathbb{R})|p(0)\in\mathbb{Z}\}$

דוגמה: $p=x+1\in W$ כי $1\in\mathbb{Z}$.

W לא תת-מרחב של $P(\mathbb{R})$.

דוגמה נגדית: $p=x+1\in W$,

$W \notin \pi + x \cdot \pi = p \cdot \pi$ כי $\mathbb{Z} \notin \pi$.

$\blacksquare$