#### תרגילים: שפות כריעות ושפות קבילות

# שאלה $L^*$ מוגדרת: בהינתן השפה $L^*$ מוגדרת:

$$L^* = \{\varepsilon\} \cup \{w = w_1 w_2 \cdots w_k \mid \forall \ 1 \le i \le k \ , \ w_i \in L\}$$

- L בהינתן מכונת טיורינג M המקבלת שפה בהינתן בהינתן בהינת א $L^{\ast}$  המקבלת את המקבלת  $M^{\ast}$  דטרמיניסטית אי דטרמינט טיורינג אי
- .L המכריעה שפה M המכונת טיורינג בהינתן מכונת טיורינג אי דטרמיניסטית  $M^*$  המכריעה את בנו מכונט טיורינג אי
- שאלה 2 האם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה.  $L(M) \in R \ \, \lambda + L(M) \in CoRE$  לכל מכונת טיורינג M, אם M
- שאלה לבעיה פתוחה. האם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה.  $L_2 \in Co\,RE \,\,$  או  $L_1 \in RE \,\,$  אזי  $L_1 \cap L_2 \in R$ 
  - -שאלה 4 הוכיחו כי לכל 3 שפות  $L_1, L_2, L_3$  כך ש
    - $L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \Sigma^*$  .1
    - $1 \leq i,j \leq 3$  , $i \neq j$  לכל ל $L_i \cap L_j = \emptyset$  .2
  - $1 \leq i \leq 3$  לכל  $L_i \in R$  הוכיחו כי  $1 \leq i \leq 3$  לכל ל

#### תשובות

### שאלה 1

L את מכונת טיורנג שמזהה את M

 $L^*$  אי-דטרמיניסטית אמקבלת אי-דטרמיניסטית טיורינג  $M^*$ 

### תאור הבנייה

:w על קלט  $=M^*$ 

. אם w=arepsilon מקבלת. w=arepsilon

 $k \in \mathbb{N}^+$  כאשר  $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$  ל- w ל- מלוקה של אי דטרמיניסטי דטרמיניסטי אווקה  $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$  בוחרת באופן אי

i < i < k לכל.

. מריצה את  $w_i$  על M על מריצה  $M^* ullet$ 

.(3 קיבלה חוזרים לשלב M אם \*

.4 אזי  $M^*$  אזי  $\{w_i\}$  אזי כל המחרוזות אזי M מקבלת.

ניתנת לחישוב - מספר הפירוקים האפשריים ל- w הוא סופי ולכן הניחוש הוא סופי, לפיכך כתיבה -  $M^st$  על הסרט והרצת M ניתן לחישוב.

 $\underline{L^{*}}=L\left( M^{*}
ight)$  :הוכחת נכונות

⇒ כיוון

 $w\in L\left(M^{st}
ight)$  נניח כי

. קיבלה M ( $1 \leq i \leq k$ )  $w_i$  כך שעבור כל ( $k \in \mathbb{N}^+$ )  $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_k$  קיבלה m

L(M) = L כל  $w_i \in L(M)$  בפרט,  $w_i \in L(M)$ 

 $w_i \in L \Leftarrow$ 

 $w = w_1 w_2 \dots w_k \in L^* \Leftarrow$ 

 $L(M^*) \subseteq L^* \Leftarrow$ 

# $\Rightarrow$ כיוון

 $w \in L^*$  נניח כי

 $(1 \leq i \leq k) \ w_i \in L$  כך שכל ( $k \in \mathbb{N}^+$ )  $w = w_1 w_2 \cdots w_k$  קיימת חלוקה  $k \in \mathbb{N}^+$ 

w תנחש את הפירוק הזה עבור  $M^* \Leftarrow$ 

כזה  $w_i$  כזה תקבל כל M

w תקבל את  $M^* \Leftarrow$ 

 $w \in L(M^*) \Leftarrow$ 

 $L^* \subset L(M^*) \Leftarrow$ 

 $L\left(M^{st}
ight)=L^{st}$  אזי אזי  $L^{st}\subseteq L\left(M^{st}
ight)$  ו-  $L\left(M^{st}
ight)\subseteq L^{st}$  אזי שלכן, מאחר ומצאנו ש

.L את מכונת טיורנג שמכריעה את מכונת טיורנג  $M^*$  אי-דטרמיניסטית המכריעה את  $M^*$ 

#### תאור הבנייה

:w על קלט  $=M^*$ 

- .1. אם w=arepsilon מקבלת.
- $k \in \mathbb{N}^+$  כאשר  $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$  ל- w ל- בוחרת באופן אי דטרמיניסטי חלוקה של  $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$  בוחרת באופן אי
  - $1 \le i \le k$  לכל.
  - $.w_i$  על M מריצה את  $M^*$
  - . דוחה  $M^*$  אם M דוחה או  $M^*$
  - אחרת אם M קיבלה חוזרים לשלב 3).  $\ast$
  - .4 אזי  $M^*$  אזי  $\{w_i\}$  אזי המחרוזות  $\{w_i\}$  אזי את כל מקבלת.

ניתנת לחישוב - מספר הפירוקים האפשריים ל- w הוא סופי ולכן הניחוש הוא סופי, לפיכך כתיבה -  $M^st$  על הסרט והרצת M ניתן לחישוב.

# $L^{st}=L\left( M^{st} ight)$ הוכחת נכונות:

 $\Leftarrow$  כיוון

 $w\in L\left(M^{st}
ight)$ ננית כי

- קיבלה. M ( $1 \leq i \leq k$ )  $w_i$  כך שעבור כל ( $k \in \mathbb{N}^+$ )  $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_k$  קיימת חלוקה
  - L(M) = L בפרט, בפרט.  $w_i \in L(M)$  כל
    - $w_i \in L \Leftarrow$
    - $w = w_1 w_2 \dots w_k \in L^* \Leftarrow$ 
      - $L(M^*) \subseteq L^* \Leftarrow$

### $\Rightarrow$ כיוון

 $w \in L^*$  נניח כי

- $(1 \leq i \leq k) \ w_i \in L$  כך שכל ( $k \in \mathbb{N}^+$ )  $w = w_1 w_2 \cdots w_k$  קיימת חלוקה  $k \in \mathbb{N}^+$ 
  - w תנחש את הפירוק הזה עבור  $M^* \Leftarrow$ 
    - כזה  $w_i$  כזה תקבל כל M כזה  $\Leftarrow$ 
      - w תקבל את  $M^* \Leftarrow$ 
        - $w \in L(M^*) \Leftarrow$
        - $L^* \subseteq L(M^*) \Leftarrow$

 $L\left(M^{*}
ight)=L^{*}$  אזי אזי  $L^{*}\subseteq L\left(M^{*}
ight)$  -ו  $L\left(M^{*}
ight)\subseteq L^{*}$  אזי ישחר ומצאנו ש

## שאלה 2 הטענה נכונה:

 $L(M) \in RE$  . ההגדרה: מתקיים, לפי מתקיים, לכל לכל מכונת טיורינג מתקיים, לפי אזי  $L(M) \in Co\:RE$  לכן, אם  $L(M) \in RE \cap Co\:RE = R$  .

# שאלה 3 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

יהי
$$L_1=L_{\Sigma^*}
otin RE$$
 כאשר

$$L_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^* \}$$

$$.L_2=\overline{L_{\Sigma^*}}$$
 ותהי

$$L_1\cap L_2=\emptyset\in R$$
 -בורר ש-

$$\mathcal{L}_1 
otin Co\,RE$$
 מצד שני,  $L_1 = L_{\Sigma^*} 
otin RE$  וגם

$$L_2 
otin RE$$
 וגם  $L_2 = \overline{L_{\Sigma^*}} 
otin Co\,RE$  -י

### שאלה 4

#### שיטה 1

 $1 \leq i \leq 3$  לכל  $L_i$  את המקבלת את מכונת טיורינג מכיוון ש-  $L_i \in RE$  קיימת מכונת טיורינג  $M_i^*$  המכריעה את לכל  $1 \leq i \leq 3$  באופן הבא.

 $M_3^*$  -ו  $M_2^*$  את הבנייה עבור דומה אפשר לבאופן באופן את הבנייה עבור  $M_1^*$ 

:w על קלט  $=M_1^*$ 

 $M_1,M_2,M_3$  מריצה במקביל את שלושת מריצה פריצה •

. אם 
$$M_1^* \Leftarrow \eta$$
 מקבלת סקבלת אם ס

. דוחה 
$$M_2^* \Leftarrow \pi$$
 קיבלה  $M_2 \circ$ 

. דוחה 
$$M_3^* \Leftarrow$$
 קיבלה  $M_3$  דוחה ס

#### נכונות הבנייה:

 $.L_1$  את מכרעיה  $M_1^st$  נראה כי

.w את מקבלת  $M_1^* \Leftarrow w$  את מקבלת  $M_1 \Leftarrow w \in L_1$ אם א

.w את דוחה את דוחה את מקבלת את או מקבלת את מקבלת מקבלת  $M_2 \Leftarrow w \in M_2 \cup M_3 \Leftarrow w \notin L_1$  אם

#### שיטה 2

 $ar{L}_1 \in RE$  נשים לב כי RE תחת איחוד, גם  $L_2 \in RE$  וגם וגם  $L_2 \in RE$  נשים לב כי  $L_3 = ar{L}_1$  ואס

 $L_1 \in R$  ניתן להוכיח וגם , $\bar{L}_1 \in RE$  וגם וגם וגם אזי קיבלנו ש-

 $.L_3$  -ו רבור עבור כנ"ל