12 התפלגות נורמלית 8-8

12.1 התפלגות נורמלית

תפלגות נורמאלית היא אחת ההתפלגויות הנפוצות ביותר בעולם הסטטיסטי וההסתברותי. לדוגמא, המשקל או הגובה של אוכלוסיה מסויימת, לחץ הדם של קבוצת אנשים גדולה, ה אורך החיים של מכוניות במדינה כלשהי, ועוד.

התוצאה הממוצעת של סדרת ניסויים בלתי תלויים מתפלגת נורמאלית !

הדרך הטובה ביותר לתאר התפלגות נורמאלית היא באמצעות עקומת פעמון כמתואר באיור:

באיור מוצגים גרפים אשר נראים כמו פעמונים. הכל אחד מהם מייצג את הצפיפות של ההתפלגות הנורמאלית.

12.1 הגדרה. (צפיפות של התפלגות נורמאלית)

הנוסחה האלגברית של הפונקציית הצפיפות $f_X(x)$ של משתנה מקרי X אשר מתפלג נורמאלי היא מסומן ב $n(x,\mu,\sigma)$ כאשר

$$n(x,\mu,\sigma) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

פרמטרים של ההתפלגות הנורמאלית הם μ אשר מייצגת את התוחלת, מרכז הפעמון, ו- σ אשר מייצגת את סטיית התקן של ההתפלגות ובאה לידי ביטוי ברוחב הפעמון (מידת הפיזור). משתנה מקרי נורמאלי כזה נסמן ב

$$X \sim N(\mu,\sigma)\ .$$

באיור לעייל מוצגות מספר התפלגויות בעלות פרמטרים שונים. ניתן לראות כיצד שינוי של התוחלת וסטיית התקן משנות את מבנה ההתפלגות. צפיפות ההתפלגות הנורמאלית בעלת מספר תכונות חשובות. בראש ובראשונה הצפיפות היא תמיד חיובית ושואפת לאפס בגבולות כאשר $x \to \pm\infty$.

בנוסף, כמתואר באיור להלן, התפלגות נורמאלית היא סימטרית סביב μ (התוחלת), והיא קמורה בקטע $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ ואחרת קעורה. מן הסתם, ובדומה לכל פונקצית צפיפות, השטח התחום בין גרף הפונקציה לציר ה x שווה ל-1 כנדרש מתנאי הנרמול.

12.2 חוק. (תוחלת של התפלגות נורמאלית) התוחלת של התפלגות נורמאלית $X \sim N(\mu, \sigma)$, בעל צפיפות $f_X(x) = n(x, u, \sigma) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$, היא

$$E[X] = \mu \ .$$

הוכחה.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

מחליפים את המשתנה x ב

$$y := \frac{(x-\mu)}{\sqrt{2\sigma^2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \sqrt{2\sigma^2}y + \mu$$

כך ש $y'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}$ ומקבלים

$$\begin{aligned} E[X] =& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, y'(x)\ \left(\sqrt{2\sigma^2}y + \mu\right)\ e^{-y^2} \\ =& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\ \left(\sqrt{2\sigma^2}y + \mu\right)\ e^{-y^2} \\ =& \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\ y e^{-y^2} + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\ e^{-y^2} \end{aligned}$$

ישר מהתוצאות

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{-t^2} = \sqrt{\pi}\ , \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dt\ t\ e^{-t^2} = 0,$$

מקבלים

$$E[X] =\mu \ .$$

כנדרש. ■

12.3 חוק. (שונות של התפלגות נורמאלית) השונות של התפלגות נורמאלית $X \sim N(\mu, \sigma)$, בעל צפיפות $f_X(x) = n(x, u, \sigma) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$, היא

$$V(X) = \sigma^2 \ .$$

הוכחה.

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^2\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

מחליפים את המשתנה x ב

$$y := \frac{(x-\mu)}{\sqrt{2\sigma^2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \sqrt{2\sigma^2}y + \mu \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 = 2\sigma^2 y^2 + \mu^2 + 2\sqrt{2\sigma^2}y$$

כך ש $y'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}$ ומקבלים

$$\begin{aligned} E[X^2] =& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, y'(x) \ \left(2\sigma^2 y^2 + 2\sqrt{2\sigma^2} y + \mu^2\right) \ e^{-y^2} \\ =& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \ 2\sigma^2 y^2 \ e^{-y^2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \ 2\sqrt{2\sigma^2} y \ e^{-y^2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \ \mu^2 \ e^{-y^2} \end{aligned}$$

ישר מהתוצאות

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \ e^{-t^2} = \sqrt{\pi} \ , \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dt \ t \ e^{-t^2} = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dt \ t^2 \ e^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

מקבלים

$$E[X^2] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \ 2\sigma^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mu^2 \sqrt{\pi} = \sigma^2 + \mu^2 \ .$$

לכן

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

כנדרש. ■

12.2 שטח התחום בין גרף הפונקציית הצפיפות הנורמאלית לציר ה x

12.4 חוק. (שטח התחום בין גרף הפונקציית הצפיפות לציר ה x)

הגרף של פונקציית הצפיפות כלשהי $f_X(x)$ היא כך שהשטח התחום בין גרף הפונקציית הצפיפות לציר ה x בין הערכים $x = a$ ו- $x = b$ ($a < b$) הוא שווה להסתברות כי המשתנה מקרי X נמצא בין הערכים a ו- b:

$$P(a < X < b) = \int_a^b dx \ f_X(x) \ .$$

לכן, עבר הגרף של הצפיפות הנורמאלית (עקומת פעמון) להלן, ההסתברות כי $a < X < b$ הוא שווה ל

$$P(a < X < b) = \int_a^b dx \ n(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b dx \ e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \ .$$

השטח זו מוצג ע"י השטח של האזור המוצל באיור.

12.5 הגדרה. (מ"מ נורמאלי סטנדרדי)
ההתפלגות של משתנה מקרי נורמאלי בעל תוחלת $\mu = 0$ ושונות $\sigma^2 = 1$ נקרא משתנה מקרי נורמאלי סטנדרדי.

12.6 חוק. (צימצום מ"מ נורמאלי לצורת נורמאלי סטנדרדי)
עבור משתנה מקרי נורמאלי כלשהו X, ניתן לבטא אותו במונחים של משתנה מקרי Z, בעל תוחלת $\mu = 0$, ושונות $\sigma^2 = 0$ ע"י היחס

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \ .$$

על כן, כאשר $X = x$ אזי $Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$. לכן כאשר הערך של X נמצא בין הערכים $x = x_1$ ו- $x = x_2$ הערך של מ"מ Z נמצא בין הערכים $z_1 = \dfrac{x_1-\mu}{\sigma}$ ו- $z_2 = \dfrac{x_2-\mu}{\sigma}$. כתוצאה

$$\begin{aligned} P(a < X < b) =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b dx \ \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} dz \ e^{-z^2/2} \\ =& \int_{z_1}^{z_2} dz \ n(z,0,1) = P(z_1 < Z < z_2) \ . \end{aligned}$$

במילים, ההתפלגויות $n(x,\mu,\sigma)$ ו- $n(z,0,1)$ הם מתוארים באיור להלן. מאחר שיש לכל הערכים של X הנמצאים בין x_1 ו- x_2 ערכים המתאימים של Z הנמצאים בין z_1 ו- z_2, אזי השטח התחום בין גרף של הצפיפות של X בין x_1 ו- x_2 הוא שווה ל השטח התחום בין גרף של הצפיפות של Z בין z_1 ו- z_2.

12.7 חוק. (פונקציית ההתפלגות המצטברת של מ"מ נורמאלי) הפונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי המתפלג נורמאלי, $F_X(x)$, נתון ע"י הנוסחאה

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x dt \ n(t,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x dt \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z dt \ e^{-t^2/2}$$

או

$$F_X(x) = \Phi(z)$$

כאשר $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ ו-

$$\Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z dt \ e^{-t^2/2} \ .$$

אפשר לבטא את הפה"מ של מ"מ נורמאלי בצורה

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

כאשר הפונקצייה $\operatorname{erf}(z)$ מוגדרת להיות האינטגרל $\operatorname{erf}(z) := \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^z dt \ e^{-t^2}$.

הוכחה. שים לב ש

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z dt \ e^{-t^2/2} =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z dt \ e^{-t^2/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 dt \ e^{-t^2/2} \\ =& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z/\sqrt{2}} dt \ e^{-t^2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 dt \ e^{-t^2} \\ =& \frac{1}{2}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) + 1\right) \end{aligned}$$

לכן

$$F_X(x) = \Phi(z) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

■

12.8 חוק. () נובע מחוק 12.7 כי נתון w כך ש ל- $w\%$ של אנשים מתוך אוכלוסיה נתונה יש $X < x_1$, אפשר לחשב את הערך x_1 ע"י

$$x_1 = \sqrt{2} \ \operatorname{erf}^{-1}(2w-1) \ .$$

12.3 שימוש בטבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.400000	0.000337	0.000325	0.000313	0.000302	0.000291	0.000280	0.000270	0.000260	0.000251	0.000242
−3.300000	0.000483	0.000466	0.000450	0.000434	0.000419	0.000404	0.000390	0.000376	0.000362	0.000349
−3.200000	0.000687	0.000664	0.000641	0.000619	0.000598	0.000577	0.000557	0.000538	0.000519	0.000501
−3.100000	0.000968	0.000935	0.000904	0.000874	0.000845	0.000816	0.000789	0.000762	0.000736	0.000711
−3.000000	0.001350	0.001306	0.001264	0.001223	0.001183	0.001144	0.001107	0.001070	0.001035	0.001001
−2.900000	0.001866	0.001807	0.001750	0.001695	0.001641	0.001589	0.001538	0.001489	0.001441	0.001395
−2.800000	0.002555	0.002477	0.002401	0.002327	0.002256	0.002186	0.002118	0.002052	0.001988	0.001926
−2.700000	0.003467	0.003364	0.003264	0.003167	0.003072	0.002980	0.002890	0.002803	0.002718	0.002635
−2.600000	0.004661	0.004527	0.004396	0.004269	0.004145	0.004025	0.003907	0.003793	0.003681	0.003573
−2.500000	0.006210	0.006037	0.005868	0.005703	0.005543	0.005386	0.005234	0.005085	0.004940	0.004799
−2.400000	0.008198	0.007976	0.007760	0.007549	0.007344	0.007143	0.006947	0.006756	0.006569	0.006387
−2.300000	0.010724	0.010444	0.010170	0.009903	0.009642	0.009387	0.009137	0.008894	0.008656	0.008424
−2.200000	0.013903	0.013553	0.013209	0.012874	0.012545	0.012224	0.011911	0.011604	0.011304	0.011011
−2.100000	0.017864	0.017429	0.017003	0.016586	0.016177	0.015778	0.015386	0.015003	0.014629	0.014262
−2.000000	0.022750	0.022216	0.021692	0.021178	0.020675	0.020182	0.019699	0.019226	0.018763	0.018309
−1.900000	0.028717	0.028067	0.027429	0.026803	0.026190	0.025588	0.024998	0.024419	0.023852	0.023295
−1.800000	0.035930	0.035148	0.034380	0.033625	0.032884	0.032157	0.031443	0.030742	0.030054	0.029379
−1.700000	0.044565	0.043633	0.042716	0.041815	0.040930	0.040059	0.039204	0.038364	0.037538	0.036727
−1.600000	0.054799	0.053699	0.052616	0.051551	0.050503	0.049471	0.048457	0.047460	0.046479	0.045514
−1.500000	0.066807	0.065522	0.064255	0.063008	0.061780	0.060571	0.059380	0.058208	0.057053	0.055917
−1.400000	0.080757	0.079270	0.077804	0.076359	0.074934	0.073529	0.072145	0.070781	0.069437	0.068112
−1.300000	0.096800	0.095098	0.093418	0.091759	0.090123	0.088508	0.086915	0.085343	0.083793	0.082264
−1.200000	0.115070	0.113139	0.111232	0.109349	0.107488	0.105650	0.103835	0.102042	0.100273	0.098525
−1.100000	0.135666	0.133500	0.131357	0.129238	0.127143	0.125072	0.123024	0.121000	0.119000	0.117023
−1.000000	0.158655	0.156248	0.153864	0.151505	0.149170	0.146859	0.144572	0.142310	0.140071	0.137857
−0.900000	0.184060	0.181411	0.178786	0.176186	0.173609	0.171056	0.168528	0.166023	0.163543	0.161087
−0.800000	0.211855	0.208970	0.206108	0.203269	0.200454	0.197663	0.194895	0.192150	0.189430	0.186733
−0.700000	0.241964	0.238852	0.235762	0.232695	0.229650	0.226627	0.223627	0.220650	0.217695	0.214764
−0.600000	0.274253	0.270931	0.267629	0.264347	0.261086	0.257846	0.254627	0.251429	0.248252	0.245097
−0.500000	0.308538	0.305026	0.301532	0.298056	0.294599	0.291160	0.287740	0.284339	0.280957	0.277595
−0.400000	0.344578	0.340903	0.337243	0.333598	0.329969	0.326355	0.322758	0.319178	0.315614	0.312067
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−0.300000	0.382089	0.378280	0.374484	0.370700	0.366928	0.363169	0.359424	0.355691	0.351973	0.348268
−0.200000	0.420740	0.416834	0.412936	0.409046	0.405165	0.401294	0.397432	0.393580	0.389739	0.385908
−0.100000	0.460172	0.456205	0.452242	0.448283	0.444330	0.440382	0.436441	0.432505	0.428576	0.424655
0.000000	0.500000	0.503989	0.507978	0.511966	0.515953	0.519939	0.523922	0.527903	0.531881	0.535856
0.100000	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555670	0.559618	0.563559	0.567495	0.571424	0.575345

0.200000	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.606420	0.610261	0.614092
0.300000	0.617911	0.621720	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
0.400000	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242	0.680822	0.684386	0.687933
0.500000	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401	0.708840	0.712260	0.715661	0.719043	0.722405
0.600000	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754903
0.700000	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785236
0.800000	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802337	0.805105	0.807850	0.810570	0.813267
0.900000	0.815940	0.818589	0.821214	0.823814	0.826391	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913
1.000000	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428	0.857690	0.859929	0.862143
1.100000	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.879000	0.881000	0.882977
1.200000	0.884930	0.886861	0.888768	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.300000	0.903200	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736
1.400000	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888
1.500000	0.933193	0.934478	0.935745	0.936992	0.938220	0.939429	0.940620	0.941792	0.942947	0.944083
1.600000	0.945201	0.946301	0.947384	0.948449	0.949497	0.950529	0.951543	0.952540	0.953521	0.954486
1.700000	0.955435	0.956367	0.957284	0.958185	0.959070	0.959941	0.960796	0.961636	0.962462	0.963273
1.800000	0.964070	0.964852	0.965620	0.966375	0.967116	0.967843	0.968557	0.969258	0.969946	0.970621
1.900000	0.971283	0.971933	0.972571	0.973197	0.973810	0.974412	0.975002	0.975581	0.976148	0.976705
2.000000	0.977250	0.977784	0.978308	0.978822	0.979325	0.979818	0.980301	0.980774	0.981237	0.981691
2.100000	0.982136	0.982571	0.982997	0.983414	0.983823	0.984222	0.984614	0.984997	0.985371	0.985738
2.200000	0.986097	0.986447	0.986791	0.987126	0.987455	0.987776	0.988089	0.988396	0.988696	0.988989
2.300000	0.989276	0.989556	0.989830	0.990097	0.990358	0.990613	0.990863	0.991106	0.991344	0.991576
2.400000	0.991802	0.992024	0.992240	0.992451	0.992656	0.992857	0.993053	0.993244	0.993431	0.993613
2.500000	0.993790	0.993963	0.994132	0.994297	0.994457	0.994614	0.994766	0.994915	0.995060	0.995201
2.600000	0.995339	0.995473	0.995604	0.995731	0.995855	0.995975	0.996093	0.996207	0.996319	0.996427
2.700000	0.996533	0.996636	0.996736	0.996833	0.996928	0.997020	0.997110	0.997197	0.997282	0.997365
2.800000	0.997445	0.997523	0.997599	0.997673	0.997744	0.997814	0.997882	0.997948	0.998012	0.998074
2.900000	0.998134	0.998193	0.998250	0.998305	0.998359	0.998411	0.998462	0.998511	0.998559	0.998605
3.000000	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999
3.100000	0.999032	0.999065	0.999096	0.999126	0.999155	0.999184	0.999211	0.999238	0.999264	0.999289
3.200000	0.999313	0.999336	0.999359	0.999381	0.999402	0.999423	0.999443	0.999462	0.999481	0.999499
3.300000	0.999517	0.999534	0.999550	0.999566	0.999581	0.999596	0.999610	0.999624	0.999638	0.999651
3.400000	0.999663	0.999675	0.999687	0.999698	0.999709	0.999720	0.999730	0.999740	0.999749	0.999758

12.9 דוגמא. נתון התפלגות נורמאלי סטנדרדי, מצאו את השטח התחום בין הגרף לציר ה x

1. לצד הימין של $z = 1.84$
2. בין הערכים $z = -1.97$ ו- $z = 0.86$.

פיתרון. .

1. השטח לצד הימין של $z = 1.84$ שווה ל- 1 פחות השטח לצד שמאול של $z = 1.84$, קרי
$$1 - 0.9671 = 0.0329.$$
2. השטח בין הערכים $z = -1.97$ ו- $z = 0.86$ שווה לשטח לצד שמאול של $z = 0.86$ פחות השטח לצד שמאול של $z = -1.97$, קרי
$$0.8051 - 0.0244 = 0.7807 \ .$$

■

12.10 דוגמא. נתון מ"מ X בעל התפלגות נורמאלי עם הפרמטרים
$$\mu = 50 \ , \quad \sigma = 10 \ ,$$
מצאו את ההסתברות אשר ל- X יש ערך בין 45 לבין 62.

פיתרון. הערכים של הz המתאים ל- $x_1 = 45$ ו- $x_2 = 62$ הם
$$z_1 = \frac{45-50}{10} = -0.5 \ , \qquad z_2 = \frac{62-50}{10} = 1.2 \ .$$
לכן
$$\begin{aligned} P(45 < X < 62) =& P(-0.5 < Z < 1.2) \\ =& P(Z < 1.2) - P(Z < -0.5) \\ =& 0.8849 - 0.3085 \\ =& 0.5764 \ . \end{aligned}$$

■

לעתים יש צורך למצוא את הערך של z המתאים להסתברות נתון אשר נמצא בין הערכים בהטבלה. בהתרגילים לעייל מצאנו ערך של z עם ערך של x נתון. עכשיו עושים החישוב ההפוך: נתון ערך של שטח שלתחום של הגרף, או נתון ערך של ההסתברות , מחפשים את הערך של z ולאחר מכן מחפשים את הערך של x על ידי הנוסחאה
$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \sigma \ z + \mu \ .$$

12.11 דוגמא. נתון התפלגות נורמאלי עם הפרמטרים
$$\mu = 40, \quad \sigma = 6,$$
מצאו את הערך של x אשר יש לו את ההסתברות של

1. 45% של השטח לצד שמאול,
2. 14% של השטח לצד ימין.

פיתרון. 1. מחפשים ערך של z כך ש 0.45 של השטח כולו נמצא לצד שמאול שלו. מהטבלה נמצא ש
$$P(Z < -0.13) = 0.45 \ ,$$
לכן הz הנדרש הוא -0.13 ולכן
$$x = 6(-0.13) + 40 = 39.22 \ .$$