תרגילים: גרם שמידט,

שאלה 1 נתון התת מרחב

$$U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

של המרחב מכפלה פנימית $\mathbb{C}^3$.

א) מצאו בסיס אורתוגונלי.

ב) מצאו בסיס אורתונומרלי.

שאלה 2 מצאו בסיס אורתוגונלי של התת-מרחב

$$U = \text{span}\left\{ \text{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \text{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \text{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \right\}$$

של המרחב מכפלה פנימית $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

שאלה 3 מצאו בסיס אורתוגונלי של התת-מרחב

$$U = \text{span}\left\{ \text{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \ , \text{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \ , \text{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \ , \text{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \qquad \right\}$$

של המרחב מכפלה פנימית $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

שאלה 4 יהי $V = R_{\leq 2}[x]$ מרחב מכפלה פנימית עם המכפלה הפנימית הבאה:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx \ .$$

ונתבונן בתת המרחב הבא: $W = \text{span}\{1, x\}$.

א) מצאו בסיס אורתוגונלי ל W.

ב) השלימו את הבסיס האורתוגונלי שמצאתם בסעיף א לבסיס אורתוגונלי למרחב V.

ג) נסמן ב- $P_W : V \to V$ את אופרטור ההטלה האורתוגנלית על W. נניח ש- B הוא הבסיס הסדור שמצאתם בסעיף ב של V כך שאברי הבסיס B_W הם האברים הראשונים. מצאו את $[P_W]_B^B$.

שאלה 5

נתון מרחב ווקטורי $\mathbb{R}_3[x]$ עם מכפלה פנימית אינטגרלית בקטע $[-1, 1]$:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) \ .$$

א) מצאו בסיס אורתוגונלי למרחב $V = \text{span}\{1-3x, x, 5x^3+8\}$.

ב) מצאו את ההיטל האורתוגונלי של כל אחד מהווקטורים:

$$w_1 = 38 - 16x + 24x^3 \ , \qquad w_2 = 3x^2 + 5x^3 \ ,$$

שאלה 6 נתון מרחב וקטורי $\mathbb{R}_3[x]$ (פולינומים מדרגה 3 לכל היותר) עם מכפלה פנימית אינטגרלית בקטע $[-1,1]$:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\, dx \ .$$

מצאו בסיס אורתוגונלי למרחב $U = \text{span}\{1, x, x^2\}$.

תשובות

שאלה 1

א) נבנה בסיס אורתוגונלי של V_2 ע"י שיטת גרם שמידט:

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} , \qquad \|u_1\|^2 = 2 \ .$$

$$\begin{aligned} u_2 =& \mathrm{v}_2 - \frac{1}{\|u_1\|^2} \langle \mathrm{v}_2, u_1 \rangle \cdot u_1 \\ =& \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

בסה"כ קיבלנו בסיס אורתוגונלי של V_2:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} , u_2 = \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ i \end{pmatrix} \right\} \ .$$

ב) כעת נבנה בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{ \hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} , \hat{u}_2 = \sqrt{\frac{1}{6}} \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ i \end{pmatrix} \right\} \ .$$

שאלה 2

נמצא בסיס א"ג של $\{\mathrm{v}_1 \ , \mathrm{v}_2 \ , \mathrm{v}_3\}$.

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\|u_1\|^2 = \mathrm{tr}\left(u_1^t \cdot u_1\right) = \mathrm{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle = \mathrm{tr}\left(u_1^t\cdot \mathrm{v}_2\right) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} = 1 \ .$$

לכן

$$u_2 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \ .$$

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle = \mathrm{tr}\left(u_1^t\cdot \mathrm{v}_3\right) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\right) = 0 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle = \mathrm{tr}\left(u_2^t\cdot \mathrm{v}_3\right) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\right) = 2 \ .$$

$$\|u_2\|^2\mathrm{tr}\left(u_2^t\cdot u_2\right) = \frac{6}{7}\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right) = 2 \ .$$

$$u_3 = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

לכן בסיס אורתונורמלי:

$$U = \left\{u_1 = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \ , \quad u_3 = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\} \ .$$

<u>שאלה 3</u> נשים לב כי הקבוצה $\{\mathrm{v}_1 \ , \mathrm{v}_2 \ , \mathrm{v}_3\}$ בת"ל ו- $\mathrm{v}_4 = 2\mathrm{v}_3$. לכן $\dim(U) = 3$. נמצא בסיס א"ג של $\{\mathrm{v}_1 \ , \mathrm{v}_2 \ , \mathrm{v}_3\}$.

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix} \ .$$

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1$$

$$\|u_1\|^2 = \mathrm{tr}\left(u_1^t\cdot u_1\right) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix} = 14 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle = \mathrm{tr}\left(u_1^t\cdot \mathrm{v}_2\right) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix}0&1\\4&0\end{pmatrix} = 2 \ .$$

לכן

$$u_2 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{7}&\frac{5}{7}\\4&-\frac{3}{7}\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-1&5\\4&-3\end{pmatrix} \ .$$

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle = \mathrm{tr}\left(u_1^t \cdot \mathrm{v}_3\right) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right) = 15 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle = \mathrm{tr}\left(u_2^t \cdot \mathrm{v}_3\right) = \frac{6}{7}\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{15}{14} & -\frac{15}{7} \\ 0 & \frac{25}{14} \end{pmatrix} = \frac{5}{14}\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \ .$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} -\frac{85}{78} & -\frac{80}{39} \\ \frac{20}{39} & \frac{45}{26} \end{pmatrix}$$

לכן בסיס אורתונוגונלי:

$$U = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{6}{7}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad u_3 = \begin{pmatrix} -\frac{85}{78} & -\frac{80}{39} \\ \frac{20}{39} & \frac{45}{26} \end{pmatrix} \right\} \ .$$

שאלה 4

$V = R_{\leq 2}[x]$ מרחב מכפלה פנימית:

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx \ .$$

נסמן

$$W = \mathrm{span}\left\{u_1 = 1, u_2 = x\right\} \ .$$

א) נמצא בסיס אורתוגונלי ל W.

$$\mathrm{v}_1 = u_1 = 1 \ .$$

$$\|\mathrm{v}_1\|^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_2 =& u_2 - \frac{\langle u_2, \mathrm{v}_1\rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\mathrm{v}_1 \\ =& x - \frac{\langle x, 1\rangle}{1} \cdot 1 \\ =& x - \langle x, 1\rangle \ . \end{aligned}$$

$$\langle x, 1\rangle = \int_0^1 dx\, 1 \cdot x = \int_0^1 dx\, x = \int_0^1 dx\, x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

לכן

$$\mathrm{v}_2 = x - \frac{1}{2} \ .$$

לכן נקבל הבסיס האורתונורמלי

$$B = \left\{\mathrm{v}_1 = 1, \mathrm{v}_2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)\right\}$$

$\|\mathrm{v}_1\|^2 = 1$ ו-

$$\|\mathrm{v}_2\|^2 = \langle \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_2 \rangle = \int_0^1 dx \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \ .$$

לכן נקבל הבסיס האורתונורמלי

$$\hat{B} = \left\{1, \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right\}$$

ב) נמצא בסיס אורתוגונלי של $W^{\perp}$. נסמן $p(x) = a + bx + cx^2$.

$$p(x) \in W^{\perp} \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle p(x), 1 \rangle = 0 \ , \ \langle p(x), x \rangle = 0 \ .$$

$$\langle a + bx + cx^2, 1 \rangle = \int_0^1 dx \ \left(a + bx + cx^2\right) = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$$

$$\langle a + bx + cx^2, x \rangle = \int_0^1 dx \, x \cdot \left(a + bx + cx^2\right) = \int_0^1 dx \ \left(ax + bx^2 + cx^3\right) = \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4}$$

$$\left.\begin{aligned} a + \tfrac{b}{2} + \tfrac{c}{3} &= 0 \\ \tfrac{a}{2} + \tfrac{b}{3} + \tfrac{c}{4} & \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} 6a + 3b + 2c &= 0 \\ 6a + 4b + 3c &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \ \rightarrow \ \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $(a,b,c) = \left(\frac{1}{6}, -1, 1\right) c = \frac{1}{6}(1, -6, 6)\, c$ לכן

$$B_{W^{\perp}} = \left\{1 - 6x + 6x^2\right\}$$

ג) לכל $w \in W$:

$$P_W(w) = w \ .$$

לכל $w^{\perp} \in W^{\perp}$:

$$P_W(w^{\perp}) = 0 \ .$$

לכן

$$[P_W]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

■

<u>שאלה 5</u>

א) נסמן

$$\mathrm{v}_1 = 1-3x, \quad \mathrm{v}_2 = x \ , \quad \mathrm{v}_3 = 5x^3+8 \ .$$

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = 1-3x \ .$$

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\|u_1\|^2 = \int_{-1}^{1} dx\,(1-3x)^2 = \left[\frac{(1-3x)^3}{-9}\right]_{-1}^{1} = \frac{(-2)^3-4^3}{-9} = \frac{-72}{-9} = 8 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} dx\, x(1-3x) = \int_{-1}^{1} dx\, \left(x-3x^2\right) = \left[\frac{x^2}{2} - x^3\right]_{-1}^{1} = -2 \ .$$

לכן

$$u_2 = \frac{x+1}{4} \ .$$

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} dx\, \left(5x^3+8\right)(1-3x) = \int_{-1}^{1} dx\, \left(5x^3-15x^4+8-24x\right) = \left[\frac{5x^4}{4} - 3x^5 + 8x - 12x^2\right]_{-1}^{1} = 10 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle = \int_{-1}^{1} dx\, \frac{1}{4}(x+1)\left(5x^3+8\right) = \int_{-1}^{1} dx\, \left(\frac{5x^4}{4} + \frac{5x^3}{4} + 2x + 2\right) = \left[\frac{x^5}{4} + \frac{5x^4}{16} + x^2 + 2x\right]_{-1}^{1} = \frac{9}{2} \ .$$

$$\|u_2\|^2 = \int_{-1}^{1} dx\, \left(\frac{x+1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\int_{-1}^{1} dx\, (x+1)^2 = \frac{1}{16}\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{6} \ .$$

לכן

$$\begin{aligned} u_3 =& 5x^3+8 - \frac{10}{8}(1-3x) - \frac{\left(\frac{9}{2}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)} \cdot \left(\frac{x+1}{4}\right) \\ =& 5x^3+8-\frac{5}{4}+\frac{15x}{4}-\frac{27}{4}\cdot(x+1) \\ =& 5x^3+8-\frac{32}{4}-\frac{12x}{4} \\ =& 5x^3+8-8-3x \\ =& 5x^3-3x \ . \end{aligned}$$

בסיס אורתונוגונלי:

$$U = \left\{ u_1 = 1-3x, \quad u_2 = \frac{x+1}{4} \ , \quad u_3 = 5x^3-3x \right\} \ .$$

ב) $w_1 \in U$ לכן

$$P_U(w_1) = w_1 \ .$$

$$P_U(w_2) = \frac{\langle w_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 + \frac{\langle w_2, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 + \frac{\langle w_2, u_3\rangle}{\|u_3\|^2}u_3$$

$$\langle w_2, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} dx \ \left(5x^3+3x^2\right)(1-3x) = \int_{-1}^{1} dx \ \left(-15x^4-4x^3+3x^2\right) = \left[-3x^5-x^4+x^3\right]_{-1}^{1} = -4 \ .$$

$$\langle w_2, u_2\rangle = \int_{-1}^{1} dx \ \frac{1}{4}(x+1)\left(5x^3+3x^2\right) = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} dx \ \left(5x^4+8x^3+3x^2\right) = \frac{1}{4}\left[x^5+2x^4+x^3\right]_{-1}^{1} = 1 \ .$$

$$\begin{aligned}
\langle w_2, u_3\rangle &= \int_{-1}^{1} dx \ \left(5x^3-3x\right)\left(5x^3+3x^2\right) \\
&= \int_{-1}^{1} dx \ \left(25x^6+15x^5-15x^4-9x^3\right) \\
&= \left[\frac{25x^7}{7}+\frac{5x^6}{2}-3x^5-\frac{9x^4}{4}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{25}{7}+\frac{5}{2}-3-\frac{9}{4}-\left(\frac{25\cdot(-1)}{7}+\frac{5}{2}-3\cdot(-1)-\frac{9}{4}\right) \\
&= \frac{25}{7}+\frac{25}{7}-3-3 \\
&= \frac{50}{7}-6 \\
&= \frac{50-42}{7} \\
&= \frac{8}{7} \ .
\end{aligned}$$

$$\|u_3\|^2 = \int_{-1}^{1} dx \ \left(5x^3-3x\right)^2 = \int_{-1}^{1} dx \left(25x^6-30x^4+9x^2\right) = \left[\frac{25x^7}{7}-6x^5+3x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{7} \ .$$

$$\begin{aligned}
P_U(w_2) &= \frac{-4}{8}(1-3x) + \frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)}\left(\frac{x+1}{4}\right) + \frac{\left(\frac{8}{7}\right)}{\left(\frac{8}{7}\right)}\left(5x^3-3x\right) \\
&= \frac{-1}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{6}{4}(x+1)+5x^3-3x \\
&= \frac{-1}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{3}{2}+5x^3-3x \\
&= 1+3x+5x^3-3x \\
&= 1+5x^3 \ .
\end{aligned}$$

שאלה 6

נסמן

$$\mathrm{v}_1 = 1, \quad \mathrm{v}_2 = x \ , \quad \mathrm{v}_3 = x^2 \ .$$

$U = \text{span}\left\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\right\}$.

נבנה בסיס אורתוגונלי באמצעות תהליך גרם שמידט:

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = 1 \ .$$

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\|u_1\|^2 = \int_{-1}^{1} dx\,(1)^2 = [x]_{-1}^{1} = 2 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} dx\, x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0 \ .$$

לכן

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = x - \frac{0}{2} x = x \ .$$

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} dx\, x^2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle = \int_{-1}^{1} dx\, x^2 \cdot x = \int_{-1}^{1} dx\, x^3 = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0 \ .$$

$$\|u_2\|^2 = \int_{-1}^{1} dx\, x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \ .$$

לכן

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = x^2 - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{2} \cdot 1 - \frac{0}{\left(\frac{2}{3}\right)} x = x^2 - \frac{1}{3}$$

קיבלנו בסיס אורתוגונלי של U:

$$U = \left\{ u_1 = 1, \quad u_2 = x \ , \quad u_3 = x^2 - \frac{1}{3} \right\} \ .$$