שיעור 10
משפטים יסודיים של פונקציות גזירות

10.1 תרגילים לשימוש בחקרית פונקציה

דוגמה 10.1

הוכיחו שלכל x חיובי מתקיים $4\ln x - 1 < x^4$.

פתרון:
נגדיר
$$f(x) = x^4 - 4\ln x + 1 \ .$$
נוכיח כי $f(x) > 0$ לכל $x > 0$.

שים לבת תחום הגדרתה של f הוא $x > 0$.
$$f'(x) = 4x^3 - \frac{4}{x} \ .$$
נחפש נקודות קריטיות. לכל x בתחום הגדרתה של f ($x > 0$):
$$f'(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 4x^3 - \frac{4}{x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 4(x^4 - 1) = 0 \ ,$$
אזי הנקודה $x = 1$ היא נקודת קריטית. נעשה חקירה:

x	$x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

לכן הנקודה $x = 1$ היא מינימום, ז"א $f(1)$ הוא ערך המינימאלי של הפונקציה. מכיוון ש- $f(1) = 5$ ז"א ערך חיובי, אז $f(x) > 0$ לכל $x > 0$.

■

דוגמה 10.2

מצאו את מספר השורשים הממשיים של המשוואת
$$x^3 - 6x^2 + 9x - 10$$

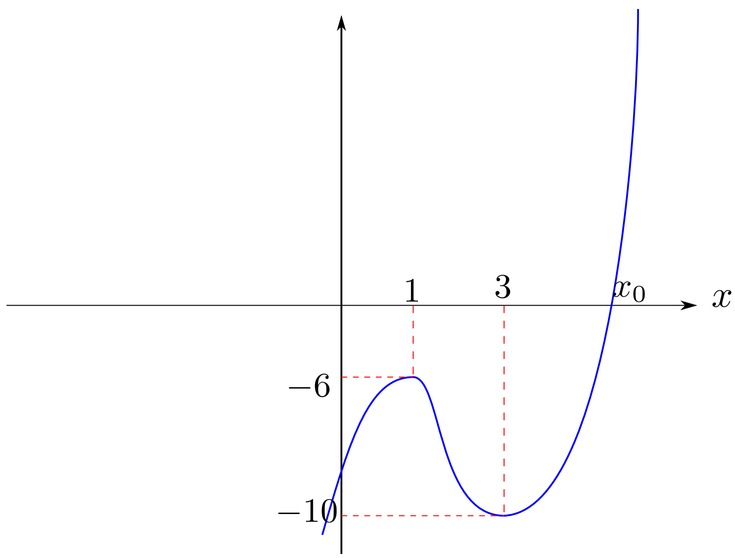
פתרון:
נגדיר $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10$.
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \ .$$
מכאן $f'(x) = 0$ בנקודות $x = 1, 3$.

x	$x<1$	$1<x<3$	$x>3$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$x=3$ נקודה מינימום מקומי $f(3)=-10$

$x=1$ נקודה מקסימום מקומי $f(1)=-6$

לכן יש שורש אחד למשוואה.



■

דוגמה 10.3

הוכיחו כי למשוואת

$$6x^6-6x^4+1=0$$

אין פתרונות ממשיים.

פתרון:

נגדיר $f(x)=6x^6-6x^4+1$.

$f(x)>0$ לכל x.

■

דוגמה 10.4

הוכיחו כי לכל $x\neq 0$ מתקיים

$$\left|\frac{1}{2x}+\arctan x\right|\geq\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ .$$

פתרון:

נגדיר $f(x)=\frac{1}{2x}+\arctan x$. התחום ההגדרה של הפונקציה היא $\mathrm{Dom}(f)=\{x\neq 0\}$.

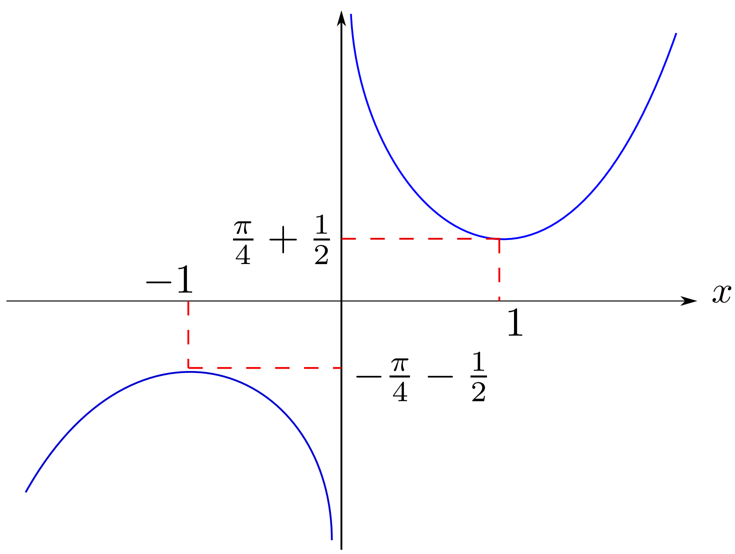
$$f'(x)=-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2-1}{2x^2(x^2+1)}$$

ולפיו $f'(x)=0$ בנקודה $x=\pm 1$.

x	$x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$x>1$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$x=1$ נקודה מינימום מקומי $f(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

$x=-1$ נקודה מקסימום מקומי $f(-1)=-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$



ז"א $f(x)>\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ או $f(x)<-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. לכן

$$\left|\frac{1}{2x}+\arctan x\right|\geq\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ .$$

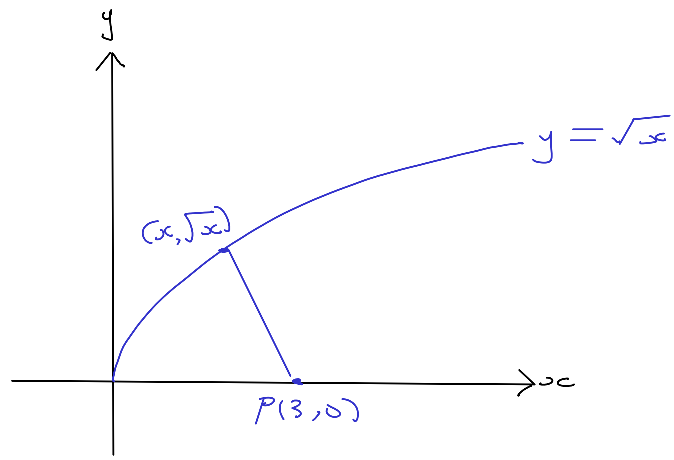
■

10.2 בעיות קיצון

דוגמה 10.5

על הקו $y=\sqrt{x}$ מצא את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $P(3,0)$.

פתרון:



נבחר נקודה שרירותית $(x,\sqrt{x})$ על גרף הפונקציה $y=\sqrt{x}$. נרשום את הנוסחה למרחק בין שתי נקודות $P(3,0)$ ו- $(x,\sqrt{x})$:

$$d=\sqrt{(x-3)^2+(\sqrt{x}-0)^2}=\sqrt{(x-3)^2+x}\ .$$

מכאן

$$d^2=(x-3)^2+x\ .$$

יש למצוא x שעבורו d^2 יקבל ערך מינימלי:

$$\left(d^2\right)'_x=2(x-3)+1=2x-5$$

מכאן $(d^2)'_x=0$ כאשר $x=2.5$.

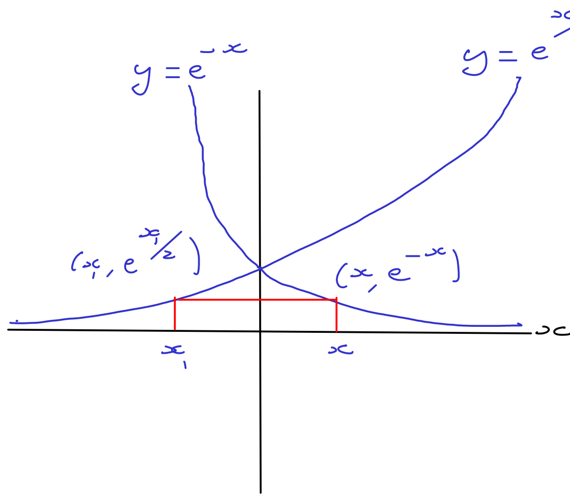
תשובה סופית: הנקודה הקרובה ביותר היא $(2.5,f(2.5))=(2.5,\sqrt{2.5})$.

■

דוגמה 10.6

בין הגרפים של פונקציה $y=e^{-x}$ ו- $y=e^{x/2}$ וציר ה- x חסום מלבן. מצא את שטח המקסימלי האפשרי של המלבן הזה.

פתרון:



$$e^{x_1/2}=e^{-x} \qquad \Rightarrow \qquad x_1=-2x \ .$$

$$S=(x+|x_1|)e^{-x}=3x\cdot e^{-x} \ .$$

$$S'_x=3e^{-x}-3xe^{-x}=3e^{-x}(1-x) \ .$$

שים לב $S'_x=0$ בנקודה $x=1$. לכן הנקודה $x=1$ מקסימום מקומי.

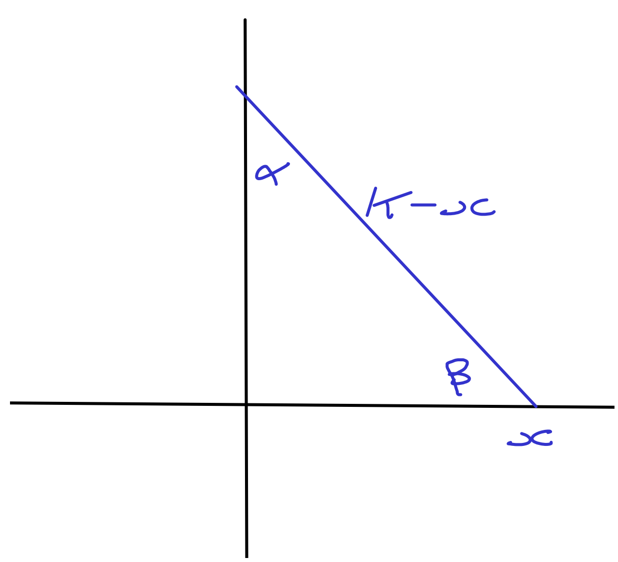
$$S_{\max}=3\cdot 1\cdot e^{-1}=\frac{3}{e} \ .$$

■

דוגמה 10.7

מצא את הזווית של משולש ישר זוויות בעל השטח הגדול ביותר שבו סכום אורכי היתר ואחד הניצבים שווה ל- K.

פתרון:



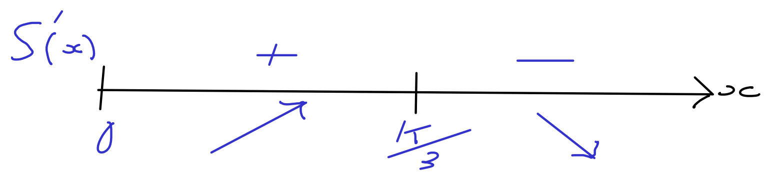
נסמן את אורכי אחד הניצבים ב-x. אז אורך היתר הוא $k-x$ ואורך הניצב השני הוא

$$\sqrt{(k-x)^2-x^2}=\sqrt{k^2-2kx}$$

אז

$$\begin{aligned}
S&=\frac{x\cdot\sqrt{k^2-2kx}}{2}\\
S'_x&=x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-2k}{2\sqrt{k^2-2kx}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k^2-2kx}\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{-kx}{\sqrt{k^2-2kx}}+\sqrt{k^2-2kx}\right]\\
&=\frac{1}{2\sqrt{k^2-2kx}}\left(-kx+k^2-2kx\right)\\
&=\frac{1}{2\sqrt{k^2-2kx}}k\left(k-3x\right)
\end{aligned}$$

$S'_x=0$ כאשר $x=\frac{k}{3}$.



$x=\frac{k}{3}$ נקודת מקסימום.

$$\sin\alpha=\frac{x}{k-x}=\frac{\frac{k}{3}}{k-\frac{k}{3}}=\frac{1}{2}\ ,\qquad\Rightarrow\qquad\alpha=\frac{\pi}{6}\ .$$

הזווית השניה

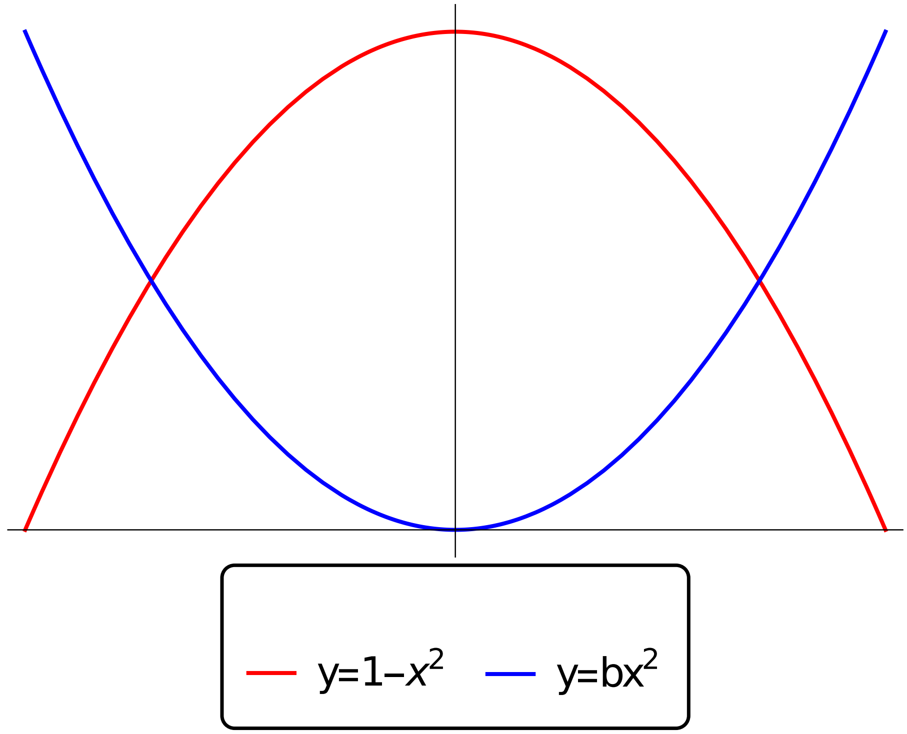
$$\beta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\ .$$

■

דוגמה 10.8

נתונות שתי פונקציות $f(x)=1-x^2$, $g(x)=bx^2$, ($b>0$). הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודות A ו- B. מצא את ערכו של b שעבורו אורך הקטע AO יהיה מינימאלי, כאשר O ראשיתהצירים. צייר ואת הסקיצה המתאימה.

פתרון:



נקודת חיתוך:

$$1 - x^2 = bx^2 \qquad \Rightarrow \qquad (x, y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{b+1}}\,,\, \frac{b}{1+b}\right)$$

$$d^2 = OA^2 = (x_A - x_O)^2 + (y_A + y_O)^2 = \frac{1}{b+1} + \frac{b^2}{(1+b)^2}$$

$$\left(d^2\right)'_b = \frac{b-1}{(b+1)^3}\ .$$

$$\left(d^2\right)'_b = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b = 1\ .$$

■

דוגמה 10.9 להעשרה בלבד

מצאו לאילו ערכי הפרמטר a השטח החסום ע"י הקווים $x = 0$, $y = 0$, $y = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2a^2}$ יהיה מינימדי וחשבו את השטח המינימלי.

פתרון:

נסמן ב $S(a)$ (עבור $a > 0$) את הפונקציה המתארת את השטח המבוקש ונחשב את המקסימום.

$$S(a) = \int_0^a \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2a^2}\right) = \left[\arctan(x) + \frac{x}{2a^2}\right]_0^a = \arctan(a) + \frac{1}{2a}\ .$$

$$S'(a) = \frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{2a^2} = \frac{a^2-1}{2a^2(1+a^2)} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = \pm 1\ .$$

כיוון ש $a > 0$ אז $a = 1$.

$$S(a=1) = \arctan(1) + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ .$$

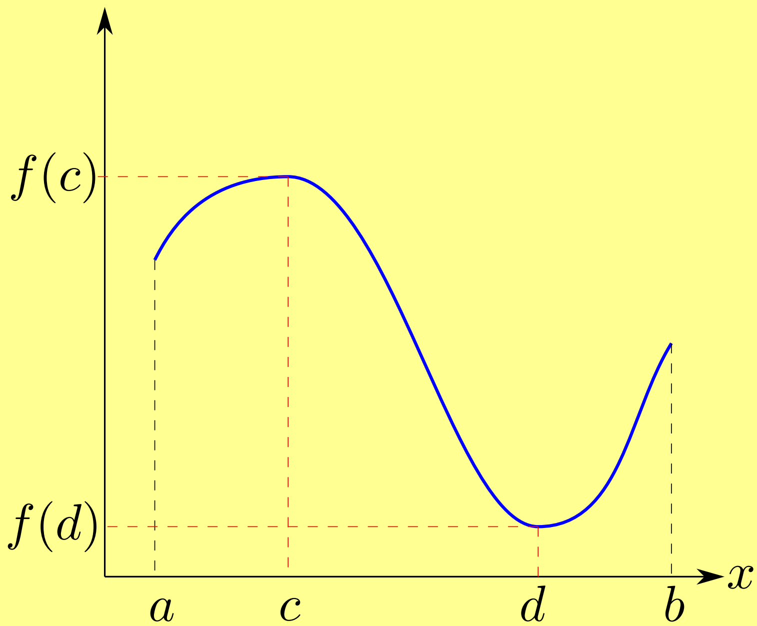
■

10.3 משפטי ויירשטראס: חסימות של פונקציה רציפה בקטע סגור

משפט 10.1 פונקציה רציפה בקטע סגור מקבלת ערכי מינימום ומקסימום (ויירשטראס)

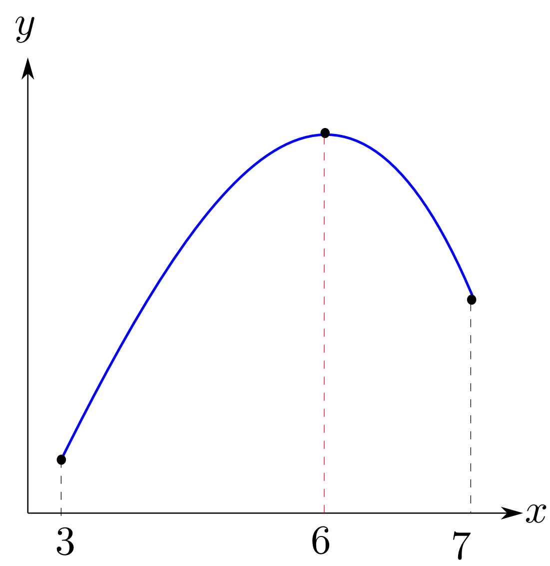
תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$. אז $f(x)$ מקבלת בקטע זו את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר עבור קטע זו. ז"א קיים מספרים c ו- d בקטע $[a,b]$ כך ש

$$f(d) \leq f(x) \leq f(c) \qquad \forall x \in [a,b] \ .$$



דוגמה 10.10

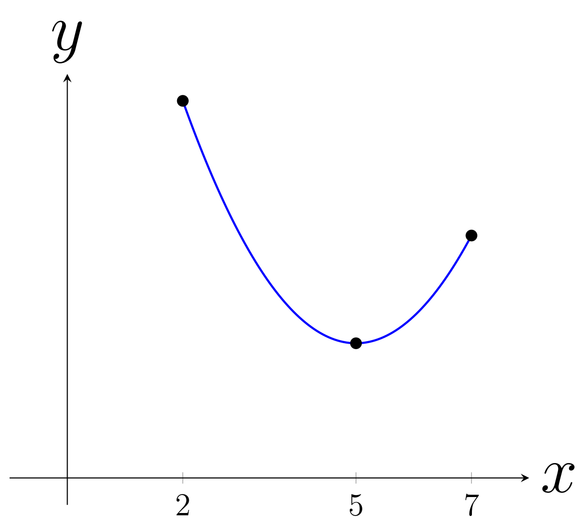
$f(x) = -(x-2)(x-10)$ רציפה בקטע $[3,7]$.



מינימום	$f(3)$
מקסימום	$f(6)$

דוגמה 10.11

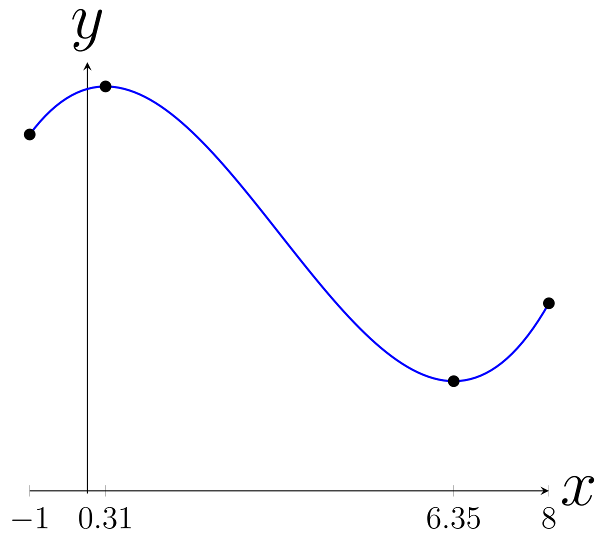
$f(x)=x^2-10x+30$ רציפה בקטע $[2,7]$.



מינימום	$f(5)$
מקסימום	$f(2)$

דוגמה 10.12

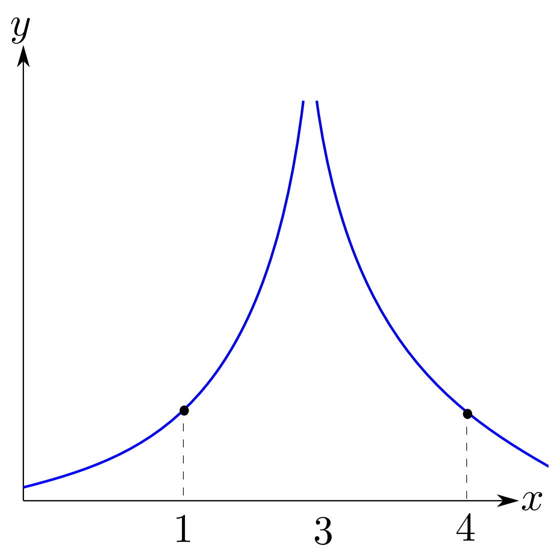
$f(x)=x^3-10x^2+6x+150$ רציפה בקטע $[-1,8]$.



מקסימום	$f(0.31)$
מינימום	$f(6.35)$

דוגמה 10.13

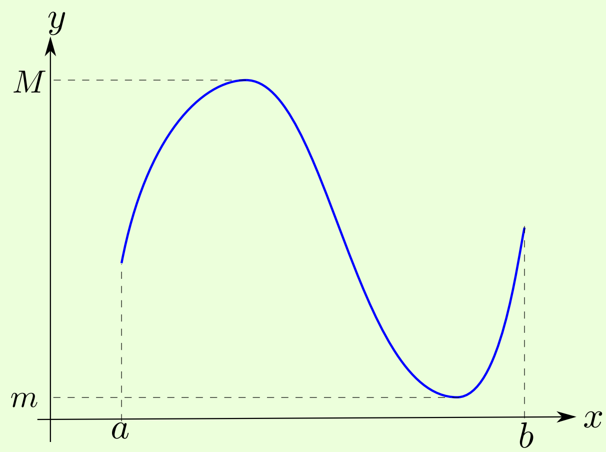
$f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ בקטע $I=[1,4]$. f לא רציפה בקטע I ולכן לא מקבלת ערך מינימום.



למה 10.1 חסימות של פוקציה רציפה בקטע סגור

אם פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$, אז $f(x)$ חסומה בקטע זו. ז"א קיימים מספרים m ו- M כך ש

$$m\leq f(x)\leq M \qquad \forall x\in[a,b]\ .$$



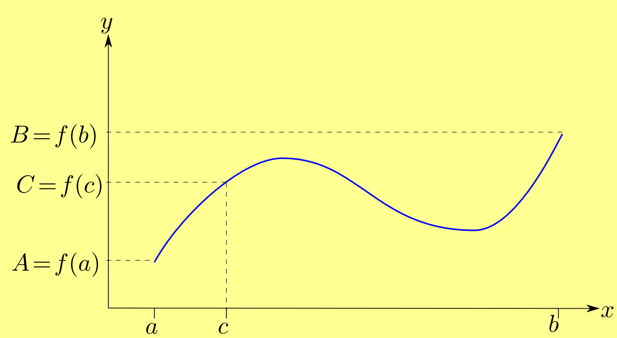
10.4 משפט ערך הביניים של פוקציה

משפט 10.2 משפט ערך הביניים

תהי פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$. נניח ש $f(x)$ מקבלת בקצוות של הקטע ערכים שונים:

$$f(a)=A\ ,\qquad f(b)=B\ ,\qquad A\neq B\ .$$

אז f מקבלת בקטע זו את כל הערכים בין A ו- B.



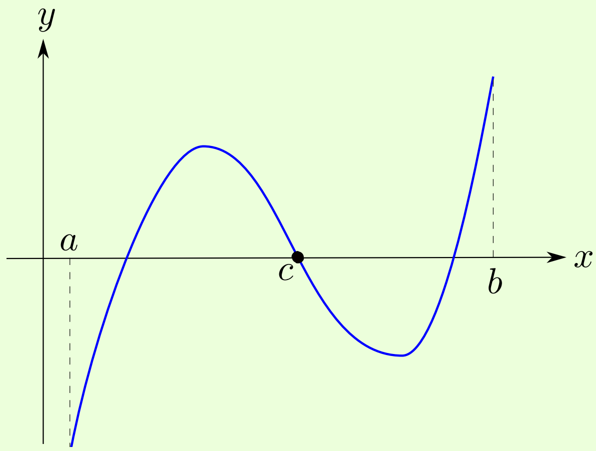
למה 10.2 משפט בולזנו

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$. נניח שבקצוות הקטע, f מקבלת ערכים עם סימנים שונים. כלומר

$$f(a)>0, f(b)<0\ ,\qquad \text{או} \qquad f(a)<0, f(b)>0\ .$$

זאת אומרת $f(a)\cdot f(b)<0$. אז קיימת לפחות נקודה אחד c, בקטע $a<c<b$ שבה

$$f(c)=0\ .$$



דוגמה 10.14

הוכיחו כי למשוואה

$$e^{2x+1} + x^2 - 5 = 0$$

יש שורש ממשי אחת ומצא אותו עם דיוק של שתי ספרות.

פתרון:

נגדיר פונקציה

$$f(x) = e^{2x+1} + x^2 - 5 \ .$$

שים לב

$$f(0) = -5 + e < 0 \ , \qquad f(1) = -4 + e^3 > 0 \ .$$

מכיוון ש- $f(x)$ פונקציה אלמנטרית ומוגדרת בקטע $[0,1]$, אז f רציפה בקטע זו. $f(0) < 0$ ו- $f(1) > 0$ לכן לפי משפט בולזנו (משפט 10.2) קיים c בתחום $0 < c < 1$ כך ש- $f(c) = 0$.

■

דוגמה 10.15

הוכיחו כי למשוואה $x^{101} + 2x - 2 = 0$ קיים פתרון אחד והוא יחיד.

פתרון:

<u>קיום</u>

נגדיר פונקציה $f(x) = x^{101} + 2x - 2$. נשים לב כי $f(1) = 1$ ו- $f(0) = -2$. לפי משפט ערך הביניים קיימת $c \in [-2, 1]$ שבה $f(c) = 0$.

<u>יחידות</u>

$$f'(x) = 101x^{100} + 2 \ .$$

$f'(x) \geq 2$ לכל x ⇐ $f'(x) > 0$ לכל x ⇐ f עולה ממש לכל x ⇐ f חד-חד-ערכית לכל x לכן השורש יחיד. ■

10.5 משפט פרמה

משפט 10.3 משפט פרמה

נניח ש- $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה בקטע פתוח (a,b).

אם c נקודת קיצון (מקסימום או מינימום) פנימית של פונקציה $f(x)$ אז

$$f'(c) = 0 \ .$$

10.6 משפט רול

משפט 10.4 רול

נניח ש- $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה בקטע פתוח (a,b).

אם $f(a) = f(b)$, אז קיימת לפחות נקודה אחד $c \in (a,b)$ כך ש-

$$f'(c) = 0 \ .$$

הוכחה: $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$. לכן לפי משפט וויארטראס (עין משפט 10.1 לעיל) היא מקבלת בקטע הזה את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר. נסמן אותם ב- M ו- m בהתאמה. ישנן 2 אפשרויות.

<u>מצב 1.</u> <u>$m = M$</u>

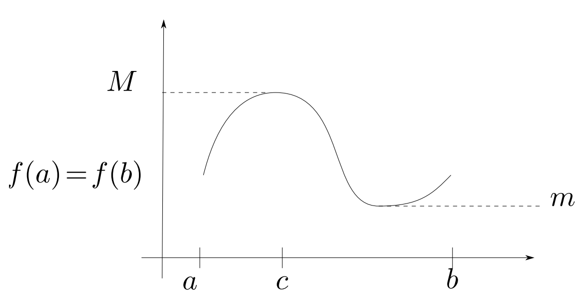
אם $m = M$ אז $f(x)$ פונקציה קבועה, ולכן $f'(x) = 0$ לכל $a < x < b$.

<u>מצב 2.</u> <u>$m < M$</u>

מכיוון ש- $f(a) = f(b)$, אז f מקבלת לפחות אחד הערכים מתוך m ו- M בנקודה c בפנים הקטע הפתוח (a,b).

<u>נניח כי f מקבלת הערך M בפנים הקטע (a,b)</u>

כלומר קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש- $f(c) = M$. ז"א לכל $x \in (a,b)$, $f(x) \leq f(c)$.
נוכיח כי $f'(c) = 0$:



$$f'_-(c) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$$

בגלל ש- $f(c+\Delta x) - f(c) \leq 0$ ו- $\Delta x < 0$.

$$f'_+(c) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$$

בגלל ש- $f(c+\Delta x) - f(c) \leq 0$ ו- $\Delta x > 0$. $f(x)$ גזירה בנקודה c, אז בהכרח $f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c)$.
לכן $f'(c) = 0$.

נניח כי f מקבלת הערך m בפנים הקטע (a,b)

קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש- $f(c) = m$. ז"א לכל $x \in (a,b)$, $f(x) \geq f(c)$.
נוכיח כי $f'(c) = 0$:

$$f'_-(c) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$$

בגלל ש- $f(c+\Delta x) - f(c) \geq 0$ ו- $\Delta x < 0$.

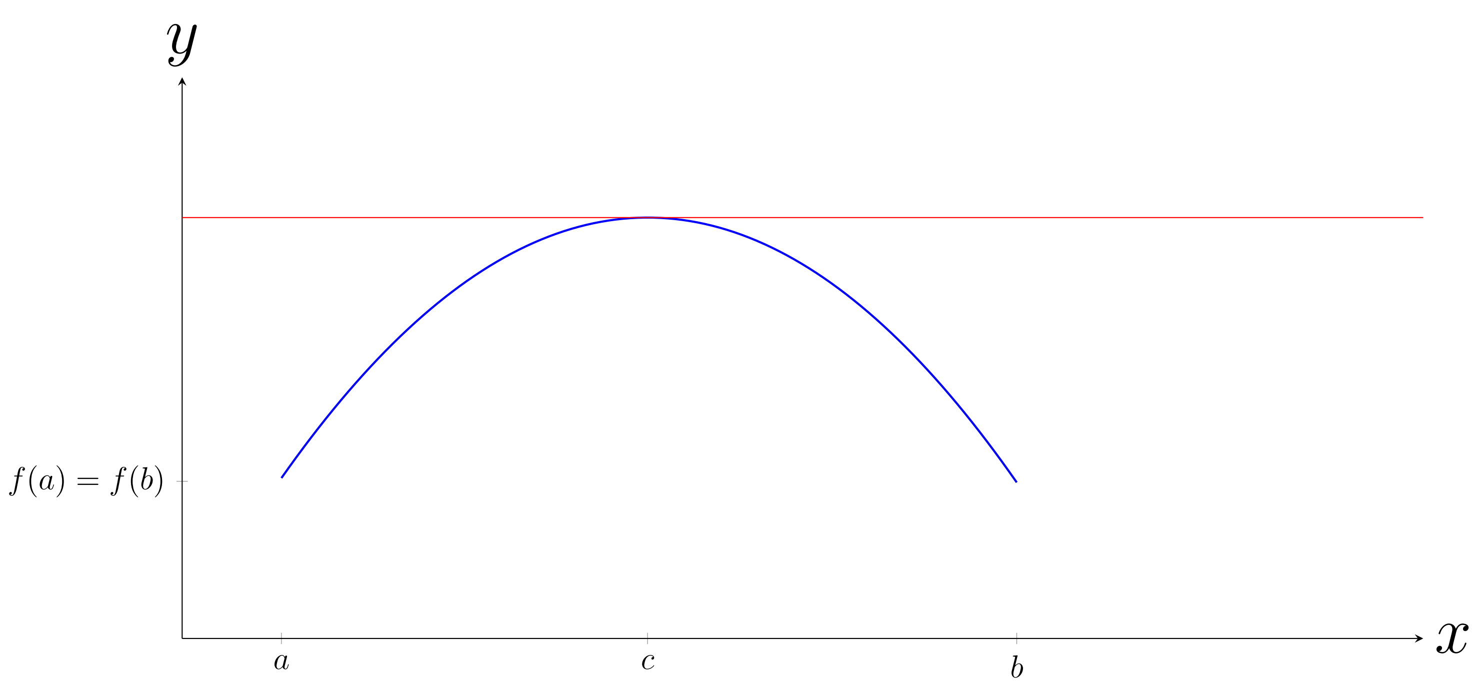
$$f'_+(c) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$$

בגלל ש- $f(c+\Delta x) - f(c) \geq 0$ ו- $\Delta x > 0$. $f(x)$ גזירה בנקודה c, אז בהכרח $f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c)$.
לכן $f'(c) = 0$.

■

10.6 משמעות של משפט רול

בגרף של פונקציה קיימת נקודה c שבה המשיק מקביל לציר ה- x.



10.7 משפט קושי

משפט 10.5 משפט ערך הממוצע המוכלל של קושי

נניח ש- $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות רציפות בקטע סגור $[a,b]$ וגזירות בקטע פתוח (a,b), ו- $g'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$.

אז קיימת לפחות נקודה אחת $c\in(a,b)$ כך ש-

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\ .$$

או שקול

$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(c)=\big(g(b)-g(a)\big)f'(c)\ .$$

הוכחה: נגדיר פונקציה $h(x)=f(x)-tg(x)$, כאשר t פרמטר שנבחור כך ש- $h(a)=h(b)$. ז"א

$$h(a)=h(b)\quad\Rightarrow\quad f(a)-tg(a)=f(b)-tg(b)\quad\Rightarrow\quad t\left(g(b)-g(a)\right)=f(b)-f(a)\quad\Rightarrow\quad t=\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}\ .$$

f ו- g רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b), לכן גם h רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). לפי משפט רול קיימת $c\in(a,b)$ שבה $h'(c)=0$. לפיכך

$$0=h'(c)=f'(c)-tg'(c)=f'(c)-\left(\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}\right)g'(c)\ .$$

מכאן

$$f'(c)=\left(\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}\right)g'(c)\ .$$

■

10.8 משפט לגרנז'

למה 10.3 משפט ערך הממוצע של לגרנז'

לכל פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b), קיימת לפחות נקודה אחת $c\in(a,b)$ כך ש-

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)\ .$$

הוכחה: נגדיר $g(x)=x$ ונשתמש במשפט קושי 10.5:

קיים c כך ש- $a<c<b$ ו

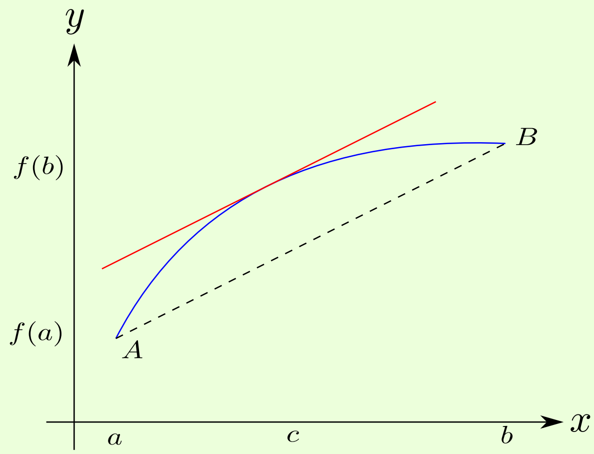
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\ .$$

שים לב $g(b)=b$, $g(a)=a$, $g'(c)=1$ לכן

$$\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}=f'(c)\ .$$

■

למה 10.4 המשמעות של משפט לגרנז



הביטוי $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ הוא השיפוע של הקו AB. המשיק בנקודה c מקביל לקו AB.

למה 10.5

אם $f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$ אז $f(x)$ פונקציה קבועה בקטע (a,b).

הוכחה: יהיו

$$a<x_1<x_2<b\ .$$

לפי משפט לגרנז' 10.3 קיים $c\in(x_1,x_2)$ כך ש-

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_2-x_1)\ .$$

לפי הנתון, $f'(c)=0$ לכן $f(x_1)=f(x_2)$ לכל $x_1,x_2\in(a,b)$. ז"א $f(x)$ פונקציה קבועה. ■

למה 10.6

אם $f'(x)=g'(x)$ לכל $x\in(a,b)$ אז קיים c כך ש- $f(x)=g(x)+c$.

הוכחה: תהי

$$h(x)=f(x)-g(x).$$

מכאן

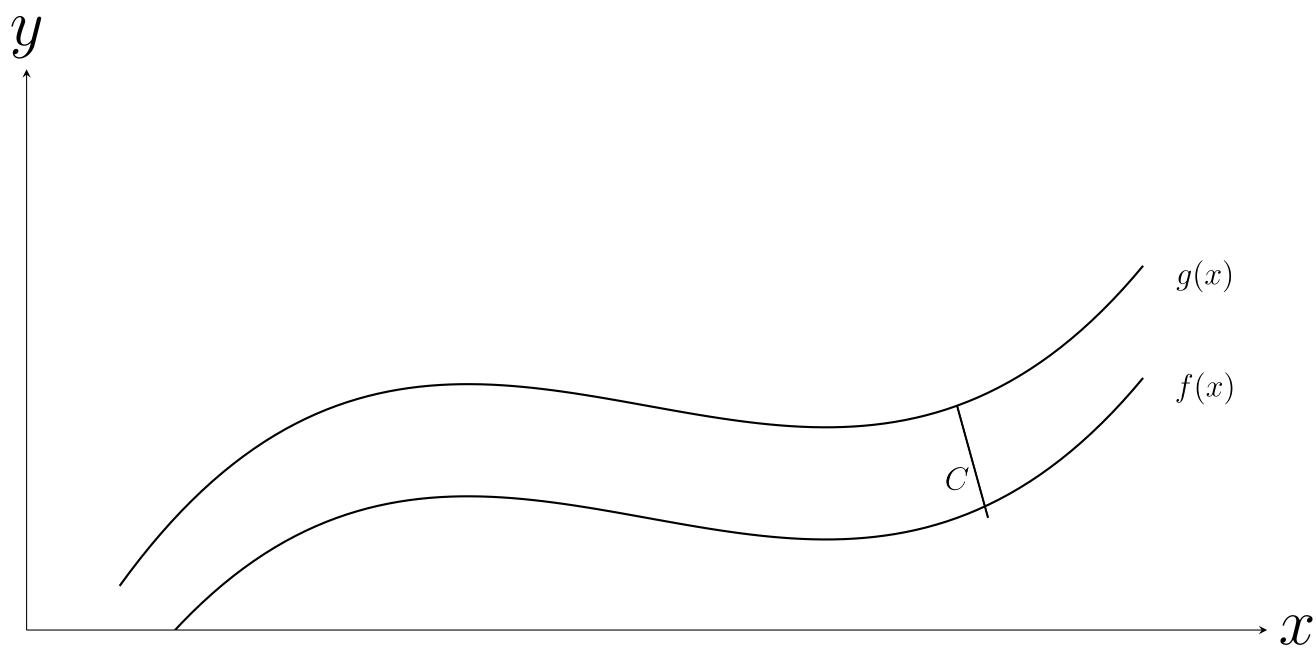
$$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$$

לכל $x\in(a,b)$. לכן לפי למה 10.5 $h(x)$ פונקציה קבועה, ז"א קיים c כך ש $h(x)=c$ לכל $x\in(a,b)$. כלומר

$$f(x)=g(x)+c$$

לכל $x\in(a,b)$.

■



10.9 דוגמאות

דוגמה 10.16

הוכיחו כי $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ לכל $x \in (-1,1)$.

פתרון:
תהי

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x\ .$$

אז

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

לכל $x \in (-1,1)$. לפי למה **10.6**, $f(x) = c$ לכל $-1 < x < 1$.

נמצא את c:

נציב $x = 0$ ונקבל

$$f(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

לכן $c = \frac{\pi}{2}$. ■

דוגמה 10.17

הוכיחו שלכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

פתרון:
נציב $f(x) = \sin x$.

שים לב $f(x)$ רציפה בקטע $[y,x]$ וגזירה בקטע (y,x). לכן קיים $c\in(y,x)$ כך ש

$$f(x)-f(y)=f'(c)\cdot(x-y)\ ,$$

כלומר

$$\sin x-\sin y=\cos c\cdot(x-y)\qquad\Rightarrow\qquad|\sin x-\sin y|=|\cos c|\cdot|x-y|\ .$$

אבל $|\cos c|\leq 1$ אז

$$|\sin x-\sin y|=|\cos c|\cdot|x-y|\leq|x-y|\ .$$

■

דוגמה 10.18

הוכיחו כי לכל $0<x<y$, $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$\frac{x-y}{x}<\ln\left(\frac{x}{y}\right)<\frac{x-y}{y}\ .$$

פתרון:

נגדיר $f(x)=\ln x$. שים לב $f(x)$ רציפה בקטע $[x,y]$ וגזירה בקטע (x,y). לכן לפי משפט לגרנז' 10.3, קיים $c\in(x,y)$ כך ש

$$f(y)-f(x)=f'(c)\cdot(y-x)\ .$$

ז"א

$$\ln y-\ln x=\frac{1}{c}\cdot(y-x)\qquad\Rightarrow\qquad\ln x-\ln y=\frac{1}{c}\cdot(x-y)\qquad\Rightarrow\qquad\ln\frac{x}{y}=\frac{x-y}{c}\ .\qquad\textbf{(\#)}$$

שים לב $0<c<y\Leftarrow\frac{1}{y}<\frac{1}{c}$, לכן

$$\frac{y-x}{y}<\frac{y-x}{c}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{x-y}{y}>\frac{x-y}{c}\ .$$

לכן לפי (#) נקבל

$$\ln\frac{x}{y}<\frac{x-y}{y}\ .$$

שים לב $0<x<c\Leftarrow\frac{1}{c}<\frac{1}{x}$, לכן

$$\frac{y-x}{c}<\frac{y-x}{x}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{x-y}{c}>\frac{x-y}{x}\ .$$

לכן לפ (#)

$$\ln\frac{x}{y}>\frac{x-y}{x}\ .$$

■

דוגמה 10.19

יהיו $f(x)$, $g(x)$ פונקציות גזירות בקטע (a,b). תהי $c \in (a,b)$ נקודה שבה

(#1) $$f(c) = g(c)$$

ו-

(#2) $$f'(x) > g'(x) \qquad \forall x \in (a,b)\ ,\ x < c\ .$$

הוכיחו כי

(#3) $$g(x) > f(x) \qquad \forall x \in (a,b)\ ,\ x < c\ .$$

פתרון:
יהי $h(x) := f(x) - g(x)$. לפי **(#2)**, $h'(x) > 0$ לכל $x \in (a,b)\ ,\ x < c$. **אז לפי משפט לגרנז' 10.3**, $h(x)$ עולה מונוטונית. לכן

(#4) $$h(n) > h(m) \qquad \Leftrightarrow \qquad n > m \qquad \forall m,n < c\ .$$

אבל $h(c) = 0$, לכן

(#5) $$h(x) < 0 \quad \forall x < c\ .$$

ומכאן

(#6) $$f(x) - g(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) > f(x) \quad \forall x < c\ .$$

■

דוגמה 10.20

יהיו $f(x)$, $g(x)$ פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b) כך ש-

(1*) $$f(a) = g(a)$$

אם

(2*) $$f'(x) < g'(x) \qquad \forall x \in (a,b)\ ,$$

הוכיחו כי

(3*) $$f(x) < g(x) \qquad \forall x \in (a,b]\ .$$

פתרון:
יהי $h(x) := f(x) - g(x)$. לפי **(1*)**,

(4*) $$h(a) = 0\ .$$

לפי **(2*)**,

(5*) $$h'(x) < 0 \qquad \forall x \in (a,b).$$

לכל $x \in (a,b)$, $x < c$. אז לפי משפט לגרנז' 10.3, $h(x)$ יורדת מונוטונית. לכן

(6*) $$h(n) < h(m) \qquad \Leftrightarrow \qquad n > m \qquad \forall m,n < (a,b) \ .$$

אבל לפי (4*) $h(a) = 0$, לכן

(7*) $$h(x) < 0 \quad \forall a < x \leq b \ .$$

ומכאן

(8*) $$f(x) - g(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) > f(x) \quad \forall x \in (a,b] \ .$$

■

דוגמה 10.21

הוכיחו כי למשוואה

$$x^3 - 7x^2 + 25x + 8 = 0$$

יש פתרון יחיד.

פתרון:

נגדיר

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 25x + 8 \ .$$

שים לב

$$f(0) = 8 \ , \qquad f(-1) = -25 \ ,$$

אז לפי משפט ערך ביניים 10.2, קיימת לפחות נקודה אחת שבה הפונקציה מקבלת הערך 0. נניח שקיימת יותר מנקודה אחת, a, b, שבהן

$$f(a) = f(b) = 0 \ .$$

$f(x)$ פולינום ולכן היא רציפה וגזירה בכל x. לכן לפי משפט רול 10.4, קיים נקודה $c \in (a,b)$ כל ש-

(#) $$f'(c) = 0.$$

שים לב,

$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 25$$

לכן אם (#) מתקיים,

$$3c^2 - 14c + 25 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{7 \pm \sqrt{26}i}{3}$$

סתירה. לכן אין יותר מפתרון אחד. ■

דוגמה 10.22

הוכיחו שלכל ערכים ממשיים a ו- b מתקיים

$$|\arctan(2b) - \arctan(2a)| \leq 2\,|b-a|$$

פתרון:

פונקציה $f(x) = \arctan(x)$ היא אלמנטרית ומוגדרת לכל x ממשי. לכן היא רציפה וגזירה לכל x ממשי ולכן מקיימת את תנאיי משפט לגרנז' 10.3 עבור גל קטע $[a,b]$. לכן קיים ערך c מקטע זו כך ש-

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \ .$$

מכאן

$$\frac{|f(b)-f(a)|}{|b-a|} = |f'(c)| \qquad (**)$$

שים לב,

$$f'(x) = \frac{2}{1+4x^2}$$

ולכן לפי (**),

$$\frac{|\arctan(2b)-\arctan(2a)|}{|b-a|} = \frac{2}{1+4c^2} \leq 2$$

מש"ל. ■

דוגמה 10.23

תהיי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). ידוע כי

$$f(a)=f(b)=0 \ .$$

הראו שקיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש -

$$f(c)+f'(c)=0 \ .$$

רמז: הסתכלו על פונקציה $g(x)=e^x f(x)$

פתרון:

נתון:

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b).

$f(a)=f(b)=0$.

צריך להוכיח:

$f(c)+f'(c)=0$.

הוכחה:

נגדיר $g(x)=e^x f(x)$.
$f(x)$ רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b), ו e^x רציפה וגזירה לכל x. לכן $g(x)$ רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b).

$f(a) = f(b) = 0$ (נתון) לכן $g(a) = e^a f(a) = 0$, $g(b) = e^b f(b) = 0$, ז"א

$$g(a) = g(b) = 0 \ .$$

לפי משפט רול קיימת $c \in (a,b)$ כך ש $g'(c) = 0$. ז"א

$$e^c f(c) + e^c f'(c) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e^c \left(f(c) + f'(c) \right) = 0$$

$e^c > 0$ לכל c ממשי, לכן $f(c) + f'(c) = 0$.

■