

# חדו"א 1

## סמסטר א' תשפד

### שאלות חזרה

## רציפות

### שאלה 1

מצאו את סוג נקודת אי רציפות של פונקציה

$$f(x) = \frac{|x+3|}{x+3}.$$

שרטטו את גרף הפונקציה.

### שאלה 2

מהן נקודות אי רציפות של פונקציה  $f(x) = \frac{\sin x}{|\sin x|}$ ? מצאו את סוגן ושרטטו את גרף הפונקציה.

### שאלה 3

עבור איזה ערכי  $A$  הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0 \end{cases}$$

רציפה לכל  $x$  ממשי?

### שאלה 4

עבור אילו ערכי פרמטר  $a$  הפונקציה

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x^2}{\sin(ax) - 1}$$

רציפה ללכ  $x > 0$ ?

### שאלה 5

נתונה פונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(\sqrt{a^2 + 1} \cdot x)}{2x^2} & x < 0 \\ b & x = 0 \\ x + 5 & x > 0 \end{cases}$$

(א) עבור אילו ערכי  $a, b$  הפונקציה  $f(x)$  רציפה בנקודה  $x = 0$ ?

(ב) עבור אילו ערכי  $a, b$ ,  $x = 0$  היא נקודת אי רציפות ממין ראשון?

(ג) עבור אילו ערכי  $a, b$ ,  $x = 0$  היא נקודת אי רציפות?

## 1 חישוב גבולות, כלל לופיטל

### שאלה 6

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x^2 - 4}$$

### שאלה 7

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{1/x} = [\infty^0]$$

נגדיר  $f(x) = (\ln x)^{1/x}$ . נפעיל  $\ln$  על שני הצדדים:

$$\ln(f(x)) = \frac{1}{x} \ln(\ln x) = \frac{\ln(\ln x)}{x}$$

$$f(x) = e^{\ln(f(x))/x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln(\ln x)/x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln x)}{x}} \stackrel{\text{לופיטל}}{=} e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot 1}} = e^0 = 1.$$

### שאלה 8

$$f(x) = |\sqrt{4x+25}| + 5$$

נתונה פונקציה

(א) מצאו את תחום ההגדרה ואת התמונה של הפונקציה  $f(x)$ .

(ב) מצאו את הפונקציה ההפוכה ל-  $f(x)$ .

(ג) מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של הפונקציה ההפוכה.

(ד) שרטטו את סקיצות הגרפים של שתי הפונקציות (פונקציה  $f(x)$  והפונקציה ההפוכה). על אותה מערכת צירים.

(ה) שרטטו את הגרף של הפונקציה  $f(|x|)$ .

(ו) שרטטו את הגרף של הפונקציה  $|f^{-1}(x)|$ .

## שאלה 9

נתונה הפונקציה  $f(x) = |x^2 - 16| + 7$ .

(א) מצאו את תחום ההגדרה של  $f(x)$ .

(ב) מצאו את התמונה של  $f(x)$ .

(ג) שרטטו את סקיצת הגרף של  $f(x)$ .

## פתרונות

### שאלה 1

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{|x+3|}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x+3}{x+3} = 1 ,$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{|x+3|}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{-(x+3)}{x+3} = -1 ,$$

$x = -3$  נקודת אי רציפות ממין ראשון.

### שאלה 2

$x = n\pi \Leftrightarrow \sin x = 0$  נקודות אי רציפות.

עבור  $n$  זוגי:

$$\lim_{x \rightarrow n\pi^+} \frac{\sin x}{|\sin x|} = \lim_{x \rightarrow n\pi^+} \frac{\sin x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow n\pi^-} \frac{\sin x}{|\sin x|} = \lim_{x \rightarrow n\pi^-} \frac{\sin x}{-\sin x} = -1$$

$x = n\pi$  עבור  $n$  זוגי נק' אי רציפות ממין ראשון.

עבור  $n$  אי-זוגי:

$$\lim_{x \rightarrow n\pi^+} \frac{\sin x}{|\sin x|} = \lim_{x \rightarrow n\pi^+} \frac{\sin x}{-\sin x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow n\pi^-} \frac{\sin x}{|\sin x|} = \lim_{x \rightarrow n\pi^-} \frac{\sin x}{\sin x} = 1$$

$x = n\pi$  עבור  $n$  אי זוגי נק' אי רציפות ממין ראשון.

### שאלה 3

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} \stackrel{\text{לפיטל}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\frac{1}{3(1+x)^{-2/3}}} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{2/3}}{(1+x)^{1/2}} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/6} = \frac{3}{2} .$$

לכן  $f(x)$  רציפה בנקודה  $x = 0$  עבור  $A = \frac{3}{2}$ .

### שאלה 4

$f(x)$  תהיה רציפה לכל  $x > 0$  כאשר  $\sin(ax) \neq 1$  לכל  $x > 0$ . זה מתקיים רק עבור  $a = 0$ .

### שאלה 5

(א) הגדרת רציפות בנקודה  $x_0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) .$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2(\sqrt{a^2+1} \cdot x)}{2x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{\sin(\sqrt{a^2+1} \cdot x)}{x} \right]^2 = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \left( \frac{\sin(\sqrt{a^2+1} \cdot x)}{\sqrt{a^2+1} \cdot x} \right) \cdot \sqrt{a^2+1} \right]^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{a^2+1})^2 = \frac{a^2+1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+5) = 5 .$$

$$f(0) = b .$$

לכן

$$b = 5 , \quad \frac{a^2 + 1}{2} = 5 ,$$

$$a^2 + 1 = 10 , \quad a^2 = 9 , \quad a = \pm 3 .$$

תשובה סופית:  $f(x)$  רציפה בנקודה  $x = 0$  עבור  $a = 3$  או  $-3$  וגם  $b = 5$ .

(ב) הגדרת נק' אי רציפות ממין ראשון:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) .$$

$$\text{לכן } \frac{a^2 + 5}{2} \neq 5 \Leftrightarrow a \neq -3 \text{ וגם } a \neq 3 \text{ לכל } b .$$

(ג) הגדרת נק' אי רציפות ממין סליקה:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0) .$$

$$\text{ז"א } \frac{a^2 + 1}{2} = 5 \Leftrightarrow b \neq 5 \text{ או } a = 3 \text{ או } a = -3 \text{ } b \neq 5 .$$

## שאלה 6

דרך 1: אוילר

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x^2-4} &= \left[ \frac{0}{0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x-2} \cdot \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x+2} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 1 \\ &= -\frac{1}{4} . \end{aligned}$$

דרך 2: כלל לופיטל

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x^2-4} &= \left[ \frac{0}{0} \right] \\ &\stackrel{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cos(x+2)}{2x} \\ &= -\frac{1}{4} . \end{aligned}$$

## שאלה 8

(א)

$$4x + 25 \stackrel{!}{\geq} 0 \Rightarrow x \geq -\frac{25}{4} .$$

$$\text{Dom}(f) = \left[-\frac{25}{4}, \infty\right) \text{ לכן}$$

$$\left|\sqrt{4x+25}\right| \geq 0 \Rightarrow \left|\sqrt{4x+25}\right| + 5 \geq 5 \Rightarrow f(x) \geq 5 .$$

$$\text{Im}(f) = [5, \infty) \text{ לכן}$$

(ב)

$$\left|\sqrt{4x+25}\right| + 5 = y$$

$$\left|\sqrt{4x+25}\right| = y - 5$$

$$4x + 25 = (y - 5)^2$$

$$4x = (y - 5)^2 - 25$$

$$x = \frac{1}{4} ((y - 5)^2 - 25)$$

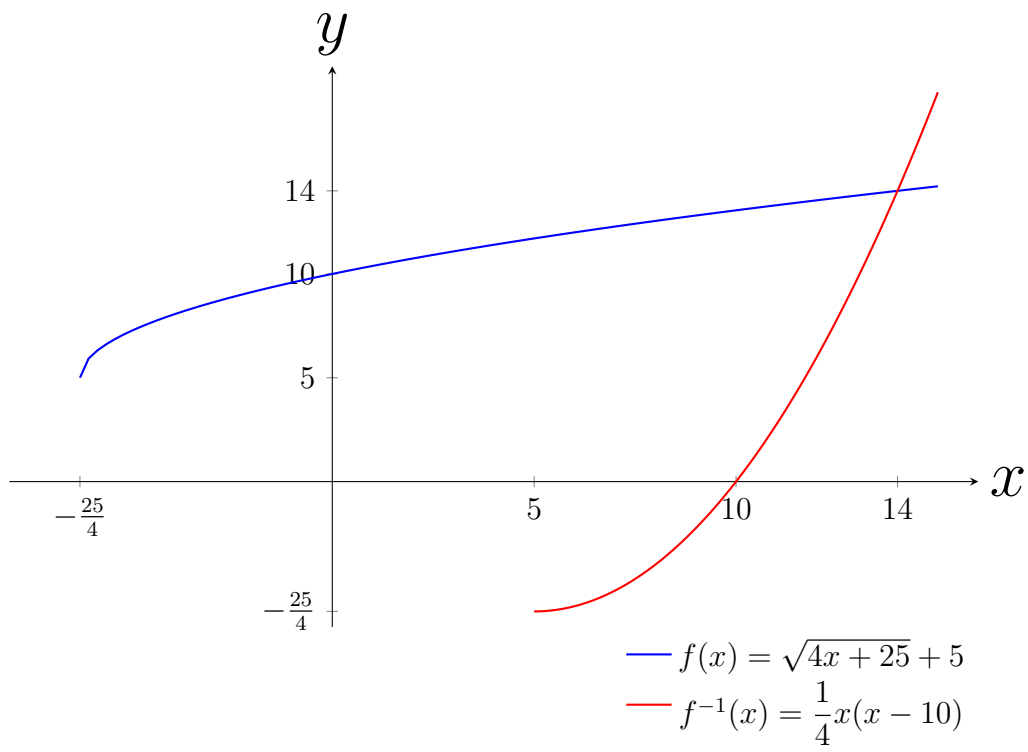
לפיכך

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{4} ((x - 5)^2 - 25) = \frac{1}{4} (x^2 - 10x) = \frac{1}{4} x (x - 10)$$

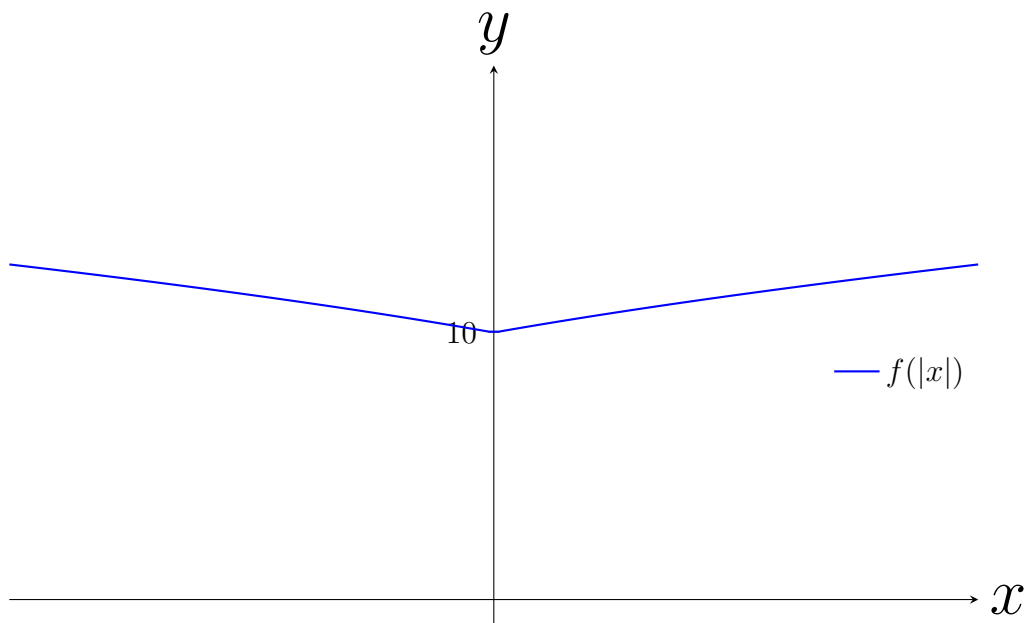
$$\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Im}(f) = [5, \infty) \quad (\text{ג})$$

$$\text{Im}(f^{-1}) = \text{Dom}(f) = \left[-\frac{25}{4}, \infty\right)$$

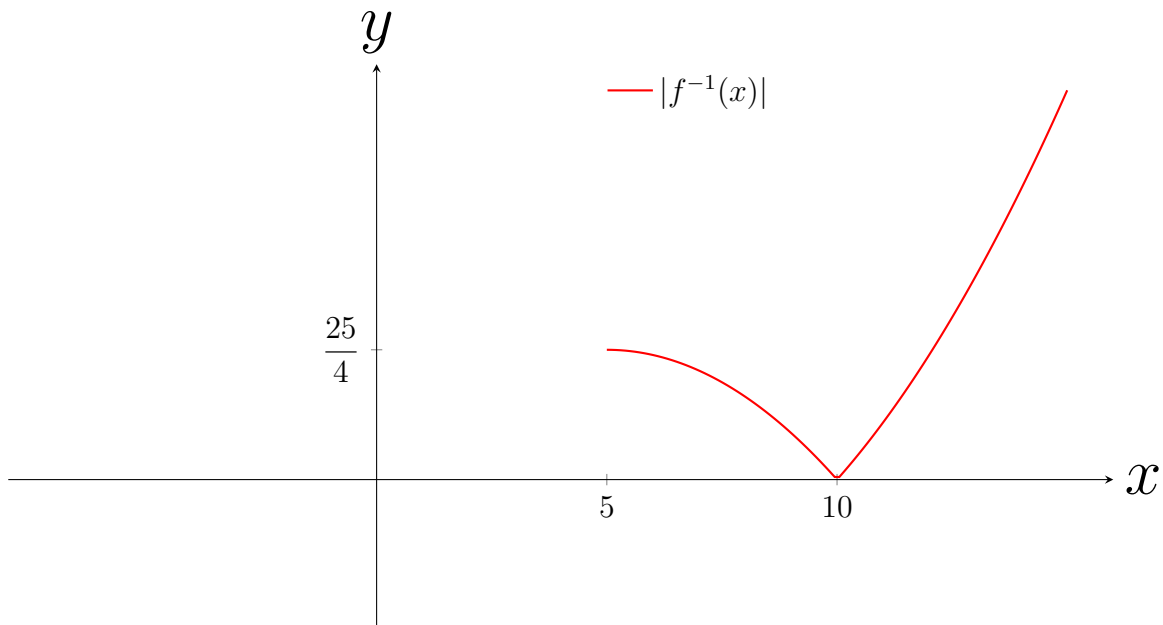
(ד)



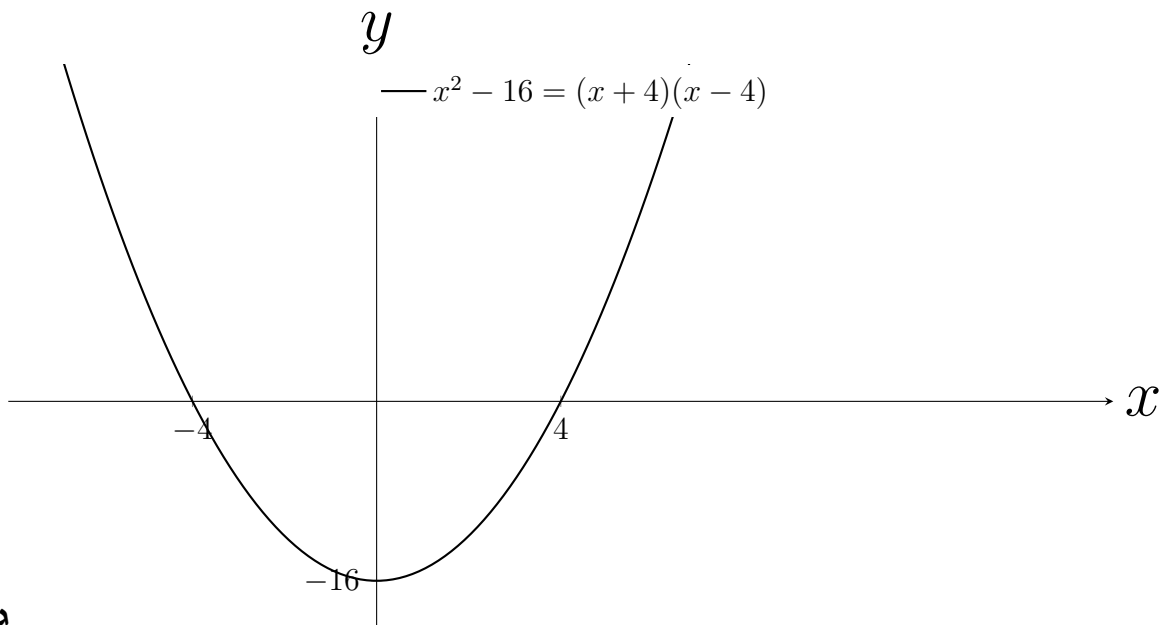
(ה)



(ו)

**שאלה 9****(א)** תחום ההגדרה:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ .**(ב)** תמונה:

$$|x^2 - 16| \geq 0 \Rightarrow |x^2 - 16| + 7 \geq 7 \Rightarrow f(x) \geq 7.$$

לפיכך  $\text{Im}(f) = [7, \infty)$ .**(ג)**



