חדו"א

מועד ב'

מרצה:

תשע"ח סמסטר א'

השאלון מכיל עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דף נוסחאות מצורף לשאלון (עמודים בפורמט $A4$).

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות בלבד מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** בלבד מתוך **שתיים**.

==

שאלות 1 ו- 2 - חובה!

שאלה 1 חקרו באופן מלא את הפונקציה

$$f(x) = \frac{2-x^2}{e^x}$$

(תחום הגדרה, חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) ציירו את סקיצת הגרף של הפונקציה.

שאלה 2

א) הגדירו את המושג: פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע x_0.

ב) הוכיחו כי אם פונקציה גזירה בנקודה x_0, אז היא גם רציפה בנקודה הזאת.

ג) הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את העטנה הבאה: אם פונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה x_0 אז היא גזירה בנקודה הזאת. נמקו את תשובתכם.

ענה על 3 מתוך 4 השאלות 3-6:

שאלה 3

א) מצאו את נפח הגוף הנוצר ע"י סיבוב של צורה מישורית, שמוגבלת ע"י הקווים: $x=1$, $x=4$, $y=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}}$ סביב ציר ה- x. ציירו את הסקיצה המתאימה.

ב) הוכיחו כי למשוואה $x^2+\ln x=0$ קיים שורש ממשי יחיד.

שאלה 4 חשבו את הגבולות הבאים:

א) $\lim_{x\to\infty} x^2\left(e^{1/x}-1-\frac{1}{x}\right)$

ב) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x}$

ג) עבור אילו ערכי פרמטר a הפונקציה $f(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{x^2}{\sin(ax)-1}$ רציפה בכל תחום הגדרתה?

שאלה 5 פתרו את האינטגרלים הבאים:

א) $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x^3+2x^2}\,dx$

ב) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x\sqrt{\ln(\sin x)}}\,dx$

ג) הוכיחו את הכלל: אם $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ אז לכל קבוע c מתקיים $\lim\limits_{x\to a}(c\cdot f(x))=cL$.

שאלה 6

א) המשוואה $y+\cos(xy)+x=1$ מגדירה את y כפונקציה של x. מצאו את המשיק של הפונקציה בנקודה שבה $x=0$.

ב) חשבו את האינטגרל הלא אמיתי $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{(1-x)^3}}\,dx$

שאלה 7 הוכיחו כי לכל $x\neq 0$ מתקיים

$$\left|\frac{1}{2x}+\arctan x\right|\le\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ .$$

שאלה 8 הוכיחו שהמשיקים לגרפים של הפונקציות $y=\sqrt{ax}$ ו- $y=\sqrt{0.5a^2-ax}$ $(a>0)$ בנקודות החיתוך שלהם מאונכים זה לזה.

פתרונות

שאלה 1

שלב 1 תחום הגדרה: כל x.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0,2)$,$(-\sqrt{2},0)$,$(\sqrt{2},0)$.

x	$x<-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$	$\sqrt{2}<x$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: אין.

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: $y=0$.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת: אין.

שלב 6 תחומי עליה וירידה:

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-2}{e^x}$$

נקודות קריטיות:

$$(1-\sqrt{3},3.04437)=(-0.732051,3.04437)$$

ו-

$$(1+\sqrt{3},-0.355635)=(2.73205,-0.355635)\ .$$

x	$x<1-\sqrt{3}$	$x=1-\sqrt{3}$	$1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3}$	$x=1+\sqrt{3}$	$x>1+\sqrt{3}$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	מקס	$\searrow$	מינימום	$\nearrow$

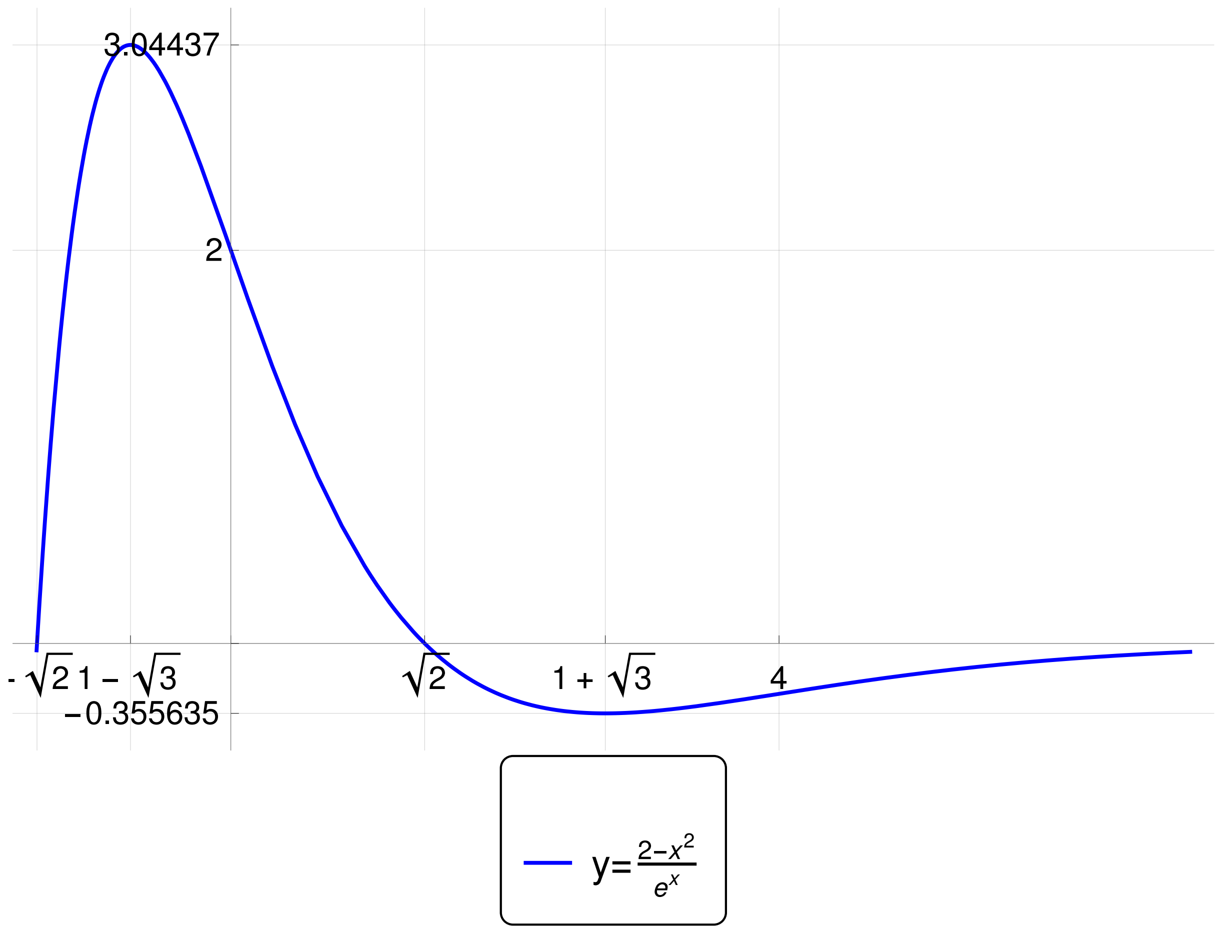
שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x)=-\frac{x(x-4)}{e^x}$$

נקודות פיתול: $(0,2)$ ו- $(4,-0.256419)$.

x	$x<0$	$x=0$	$0<x<4$	$x=4$	$x>4$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	קמורה $\downarrow$	פיתול	קמורה $\uparrow$	פיתול	קמורה $\downarrow$

שלב 8 שרטוט:



שאלה 2

א)

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)\ .$$

ב) אם f גזירה ב- x_0 אז לפי ההגדרה הגבולות $\lim_{x\to x_0^+}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$ ו- $\lim_{x\to x_0^-}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$ קיימים

וזהים. על סמך זה,

$$\lim_{x\to x_0^+}(f(x)-f(x_0)) = \lim_{x\to x_0^+}(x-x_0)\cdot\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) = \lim_{x\to x_0^+}(x-x_0)\cdot\lim_{x\to x_0^+}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$
$$= \lim_{x\to x_0^+}(x-x_0)\cdot f'(x_0) = 0\cdot f'(x_0) = 0\ ,$$

ולכן

(1*)
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)\ ,$$

ו-

$$\lim_{x\to x_0^-}(f(x)-f(x_0)) = \lim_{x\to x_0^-}(x-x_0)\cdot\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) = \lim_{x\to x_0^-}(x-x_0)\cdot\lim_{x\to x_0^+}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$
$$= \lim_{x\to x_0^-}(x-x_0)\cdot f'(x_0) = 0\cdot f'(x_0) = 0\ ,$$

ו

(2*)
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)\ .$$

מ (1*) ו- (2*) נקבל

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

ולפיו $f(x)$ רציפה ב- x_0.

ג) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $f(x)=|x|$. הפונרציה רציפה ב- $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^-}|x| = \left|\lim_{x\to 0^-} x\right| = |0| = 0\ ,$$

$$\lim_{x\to 0^+}|x| = \left|\lim_{x\to 0^+} x\right| = |0| = 0\ ,$$

ו- $f(0)=0$, לכן לפי הגדרת רציפות בנקודה $f(x)=|x|$ רציסה ב- $x=0$.

נבדוק גזירות ב- $x=0$:

$$f'(0^-) = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1\ ,$$
$$f'(0^+) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1\ ,$$

ז"א הנגזרות החד צדדיות $f'(0^-)$ ו- $f'(0^+)$ לא זהים ולכן $f(x)=|x|$ אינה גזירה ב- $x=0$.

שאלה 3

א)

$$V = \pi \int_1^4 f(x)^2 dx = \pi \int_1^4 \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}} \right)^2 dx = \pi \int_1^4 \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt[2]{x}} dx = \pi \int_2^4 e^u \, du = \pi \, e^2(e^2-1) \ .$$

ב) נגדיר $f(x) = x^2 + \ln x$. $f(1) = 1 > 0$ ו- $f(1/e) = 1/e^2 - 1 < 0$, לכן לפי משפט ערך ביניים קיימת c כך ש- $f(c) = 0$. נוכיח שהנקודה הזאת יחידה. שים לב תחום הגדרה של $f(x)$ הוא $x > 0$.

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x} \ .$$

לכל x בתחום הגדרה של f ($x > 0$) $f'(x) > 0$. ז"א f $\uparrow$ ממש. לכן השורש יחיד.

שאלה 4

א)

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(e^{1/x}-1-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{1/x}-1-\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{1/x}-1-\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\cdot e^{1/x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(\frac{-2}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(x\cdot e^{1/x}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\cdot x\cdot\left(e^{1/x}-1\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(e^{1/x}-1\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(e^{1/x}-1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(-\frac{1}{x^2}e^{1/x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\cdot e^{1/x}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot e^{1/\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot e^{0}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1$$

$$=\frac{1}{2}$$

ב)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x} =1\ .$$

ג)

$$a = 0\ .$$

שאלה 5

א) $$\int \frac{x^2-2}{x^3+2x^2}\,dx = \frac{1}{x} + \frac{\log(x)}{2} + \frac{1}{2}\log(x+2) + C$$

ב) $$\int \frac{\cos x}{\sin x\sqrt{\ln(\sin x)}}\,dx = 2\sqrt{\log(\sin(x))} + C$$

ג) יהי $\epsilon > 0$. כיוון ש- $\lim_{x\to a} f(x) = L$ אז לפי ההגדרה של גבול, קיים $\delta > 0$ כך ש-

$$0 < |x-a| < \delta \quad\Rightarrow\quad |f(x)-L| < \frac{\epsilon}{|c|}\ .$$

כדי להוכיח את הטענה יש להראות כי

$$0 < |x-a| < \delta \quad\Rightarrow\quad |cf(x)-cL| < \frac{\epsilon}{|c|}\ .$$

נניח כי $0 < |x-a| < \delta$. אז

$$|cf(x)-cL| = |c|\,|f(x)-L| < |c|\cdot\frac{\epsilon}{|c|} < \epsilon\ ,$$

מש"ל.

שאלה 6

א) נציב $x=0$ לתוך המשוואה ונמצאו כי בנקודה $x=0$

$$y(0)+2=1 \qquad\Rightarrow\qquad y(0)=-1\ .$$

נגזור את המשוואה:

$$y' - \sin(xy)\cdot y - \sin(xy)\cdot xy' + 1 = 0$$

נציב $x=0$:

$$y'(0)+1=0 \qquad y'(0)=-1\ .$$

לכן משוואת המשיק לישר בנקודה $(0,0)$ היא

$$y - y(0) = y'(0)\cdot(x-0) \qquad\Rightarrow\qquad y = 1-x\ .$$

ב)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{(1-x)^3}}\,dx = 4\ .$$

שאלה 7

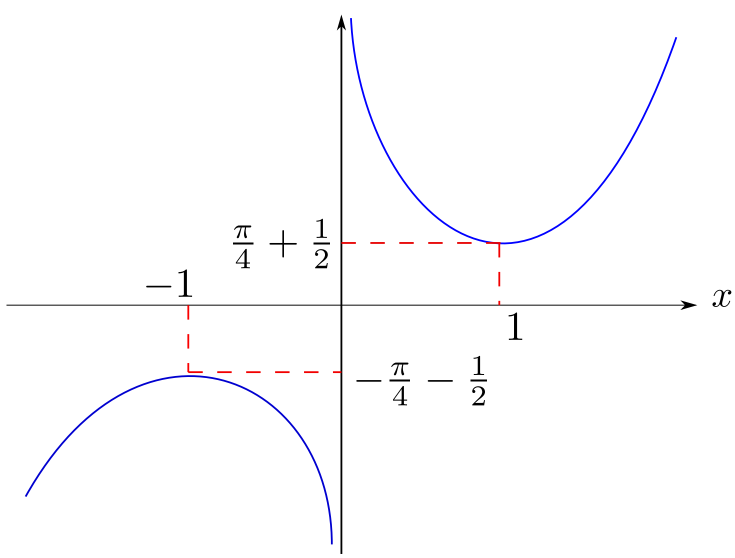
נגדיר $f(x) = \frac{1}{2x} + \arctan x$. התחום ההגדרה של הפונקציה היא $\mathrm{Dom}(f) = \{x \neq 0\}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{2x^2(x^2+1)}$$

ולפיו $f'(x) = 0$ בנקודה $x = \pm 1$.

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$x = 1$ נקודה מינימום מקומי $f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$
$x = -1$ נקודה מקסימום מקומי $f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$



ז"א $f(x) > \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ או $f(x) < -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. לכן

$$\left|\frac{1}{2x} + \arctan x\right| \geq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ .$$

שאלה 8

$$\sqrt{ax}=\sqrt{0.5a^2-ax} \qquad \Rightarrow \qquad ax=0.5a^2-ax \qquad \Rightarrow \qquad 2ax=0.5a^2 \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{a}{4}\ .$$

נקודות חיתוך: $(a/4,a/2)$.

תהי $f(x)=\sqrt{ax}$ ו- $g(x)=\sqrt{0.5a^2-ax}$.

$$f'(\tfrac{a}{4})=\frac{a}{2\sqrt{\frac{a^2}{4}}}=\frac{a}{a}=1\ .$$

$$g'(\tfrac{a}{4})=\frac{-a}{2\sqrt{0.5a^2-\frac{a^2}{4}}}=\frac{-a}{2\sqrt{0.25a^2}}=\frac{-a}{a}=-1\ .$$