

שיעור 12

רذוקציות פולינומיאליות

CLIQUE 12.1 - NP היא - שלמה

משפט 12.1 $CLIQUE \in NPC$

הבעית CLIQUE היא (ראו הגדרה 10.5):

$$CLIQUE = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ מכיל קליקה בגודל } k \}.$$

היא NP - שלמה CLIQUE

הוכחה:

1) הוכחנו כי $CLIQUE \in NP$ במשפט 10.2.

2) נוכח כי $NP \leq_P CLIQUE$ קשה ע"י רذוקציה.

פונקציית הרذוקציה

בhinintן נוסחת ϕ 3CNF מעל n משתנים x_1, x_2, \dots, x_n המכילה m פסוקיות, ניצור זוג $\langle G, k \rangle$ ונוכח כי

$$\langle \phi \rangle \in 3SAT \Leftrightarrow \langle G, k \rangle \in CLIQUE.$$

בנייה את הגרף G באופן הבא:

הקודקודים של G :

לכל פסוקית C_i ב- ϕ המכילה 3 ליטרלים ניצור שלשה 3 קודקודים המתאימים להחטறלים של C_i :



הצלעות של G :

נבחר בין כל שני קודקודים פרט לזוגות הבאים:

- זוג קודקודים המתאימים למשתנה ומשלים שלו.
- זוג קודקודים שנמצאים באותו שלושה.

לדוגמא:

$$\phi = \left(\begin{array}{c} \textcolor{red}{T} \\ x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \end{array} \right) \wedge \left(\begin{array}{c} \textcolor{red}{T} \\ \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \end{array} \right) \wedge \left(\begin{array}{c} \textcolor{red}{T} \\ \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \end{array} \right)$$

$C_1 \qquad \qquad C_2 \qquad \qquad C_3$



נקבע $k = m$.

נכונות הרדוקציה

1) ניתן לבנות את G בזמן פולינומיאלי בגודל ϕ .

2) נוכחה כי

$$\langle \phi \rangle \in 3SAT \Leftrightarrow \langle G, k \rangle \in CLIQUE .$$

כיוון \Leftarrow

- נניח כי ϕ ספיקה ונסתכל על השמה המספקת את ϕ .
- בכל פסוקית C_i ב- ϕ יש לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך T .
- נבחר מכל שלשה t_i בקודקוד אחד המתאים לליטרל שקיבל ערך T ב- C_i ונוסיף אותו לקליקה.
- מספר הקודקודים שבחרנו שווה k וכל שניים מהם מחוברים בצלע כי לא בחרנו שני קודקודים מאותה שלשה ולא בחרנו שני קודקודים המתאימים לשינוי ומשלים שלו.
- ולכן G מכיל קליקה בגודל k .

כיוון \Rightarrow

- נניח כי G מכיל קליקה בגודל k ונסתכל על קליקה כזו.
- לפי הבנייה הקליקה מכילה בדיזוק קודקוד אחד מכל שלשה t_i . ניתן השמה למשתנים של ϕ כך שהליטרל שמתאים לקודקוד שנמצא בклיקה יקבל ערך T .
- השמה זו אפשרית מכיוון שהקליקה לא מכילה שני קודקודים המתאימים לשינוי ומשלים שלו.

- בנוסף לשם זו מספקת את ϕ מכיוון שהקליקה מכילה קודקוד מכל שלשה t_i ולכן הliterל המתאים לקודקוד בשלה t_i קיבל ערך T ולכן הוא מספק את הפסוקית C_i .
- לכן ϕ ספיקה.

■

12.2 בעיית הקבוצה הבלתי תלויות

הגדרה 12.1 קבוצה בלתי תלויות

בاهינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, קבוצה בלתי תלויות ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $S \subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $S \in S$, $u, v \in S$ מתקיים $(u, v) \notin E$.



קבוצת בלתי תלויות בגודל 3: $k = 3$



קבוצת בלתי תלויות בגודל 3: $k = 3$

הגדרה 12.2 בעיית IS

קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר k .

פלט: האם קיימת קבוצה בלתי תלויות ב- G בגודל k ?

$$IS = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויות בגודל } k \}$$

משפט 12.2 $IS \in NPC$

הבעיה IS היא NP - שלמה.

הוכחה:

$$(1) \underline{IS \in NP}$$

בנייה אלגוריתם אimoto V עבור IS . $V = \langle G, k \rangle$ על קלט:

- בודק האם y היא קבוצה של k קודקודים מ- G השוניים זה מזה.
 - אם לא \Rightarrow דוחה.
- בודק האם כל שני קודקודים מ- y לא מחוברים בצלע ב- G .
 - אם כן \Rightarrow מקבל.

- אם לא \Rightarrow דוחה.

(2) נוכחות CIQUE $\leq_P IS$

פונקציית הרדוקציה:

בhinתן זוג $\langle G, k \rangle$ הקלט של CLIQUE, ניצור זוג $\langle G', k' \rangle$, הקלט של IS, ונוכח כי:

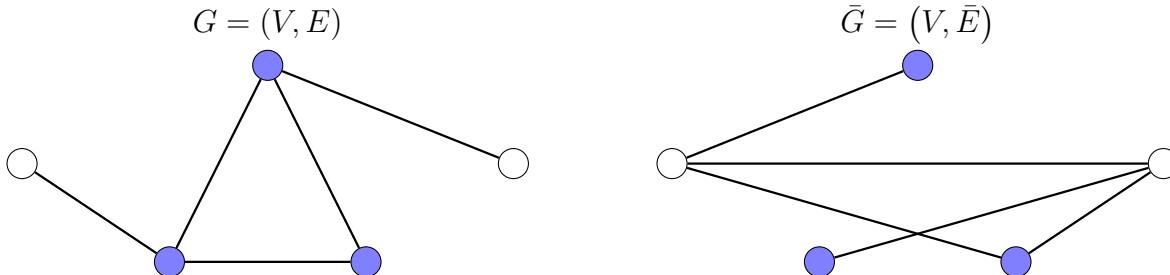
$$\langle G, k \rangle \in CLIQUE \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in IS .$$

הfonקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקייםים:

$$\begin{aligned} 1) \text{ נניח שהגרף הוא } & G = (V, E) \\ \text{ אז הגרף } G' \text{ הוא הגרף המשלים של } & G = (V, E) \text{ כאשר } G' = \bar{G} = (V, \bar{E}) \\ \bar{E} = \{(u_1, u_2) \mid (u_1, u_2) \notin E\} . & \end{aligned}$$

$$.k' = k \quad (2)$$

לדוגמא, בהינתן הגרף $G = (V, E)$ שמכיל קliquה בגודל $k = 3$, הפונקציית הרדוקציה R מוחירה את הגרף $\bar{G} = (V, \bar{E})$ ואת המספר $k' = k = 3$, כמתואר בתרשימים למטה:



נכונות הרדוקציה

$$\begin{aligned} 1) \text{ ניתן לבנות } G' \text{ בזמן פולינומיائي בגודל } & G . \\ \langle G, k \rangle \in CLIQUE \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in IS . & \end{aligned}$$

כיוון

בhinתן גרף $G = (V, E)$ ושלם

נניח כי $\langle G, k \rangle \in CLIQUE$.

$G \Leftarrow$ מכיל קliquה S בגודל k .

\Leftarrow אם $u_1, u_2 \in S$ (אם u_1, u_2 שני קודקודים בקliquה S אי $.(u_1, u_2) \in E$)

כלומר, כל שני קודקודים ב- S **מחוברים** בצלע של G .

\Leftarrow אם $u_1, u_2 \in S$ אי $.(u_1, u_2) \notin \bar{E}$

כלומר, כל שני קודקודים ב- S **לא מחוברים** בצלע של המשלים של הגרף \bar{G} , דהיינו $.G'$.

\Leftarrow אותה הקבוצה S היא קבוצה בלתי תלوية ב- G' בגודל $k' = k$.

\Leftarrow G' מכיל קבוצה בלתי תלوية בגודל k' .

$\langle G', k' \rangle \in IS \Leftarrow$

כיוון \Rightarrow

בhinתן גרף G' ושלם k' .

$\langle G', k' \rangle \in IS$.

$\Leftarrow G'$ מכיל קבוצה בלתי תלوية S בגודל k' .

\Leftarrow אם $u_1, u_2 \in S$ איזי $(u_1, u_2) \notin \bar{E}$.

כלומר, כל שני קדוקודים ב- S לא מחוברים בצלע של G' .

\Leftarrow אם $u_1, u_2 \in S$ איזי $(u_1, u_2) \in E$.

כלומר, כל שני קדוקודים ב- S מחוברים בצלע של $G(V, E)$.

\Leftarrow אותה הקבוצה S היא קליקה ב- G בגודל $k' = k$.

$\Leftarrow G$ מכיל קליקה בגודל k .

$\Leftarrow \langle G, k \rangle \in CLIQUE$.

■

12.3 בעית הcisוי בקדוקודים

הגדרה 12.3 cisוי בקדוקודים

בhinתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, cisוי בקדוקודים ב- G הוא תת-קבוצה של קודוקודים $C \subseteq V$ כך שלכל צלע $S \in C$, $u \in C$ וותקיים $v \in S$ $u \neq v$.



cisוי בקדוקודים בגודל 2: $k = 2$



cisוי בקדוקודים בגודל 5: $k = 5$



cisוי בקדוקודים בגודל 5: $k = 5$

12.4 הבעיה VC

הגדירה 12.4 בעיית VC

קלט: גראף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר k .

פלט: האם קיימים כיסוי בקודקודים ב- G בגודל k ?

$$VC = \{\langle G, k \rangle \mid \text{גראף לא מכוון המכיל כיסוי בקודקודים בגודל } k\}$$

משפט 12.3 $VC \in NPC$

הבעיה VC היא NP - שלמה.

הוכחה:

$$\underline{VC \in NP}$$

בנייה אלגוריתם אימות VC עבור $.VC$ על קלט $(\langle G, k \rangle, y) = V$:

- בודק האם כל צלע ב- G מכילה לפחות קצה אחד ב- y .

○ אם כן \Rightarrow מקבל.

○ אם לא \Rightarrow דוחה.

$$\underline{\text{נוכיח כי } VC \text{ היא } NP\text{-קשה ע"י רדוקציה}}$$

פונקציית הרדוקציה:

בהתנחת זוג $\langle G, k \rangle$ הקלט של IS , נוצר זוג $\langle G', k' \rangle$ הקלט של VC ונוכיח כי

$$\langle G, k \rangle \in IS \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in VC .$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

$$\begin{aligned} 1) \text{ נניח שהגרף הוא } &G = (V, E) \\ \text{ אז הגרף } G' \text{ הוא אותו גראף } &G = (V, E) \end{aligned}$$

$$.k' = |V| - k \quad (2)$$

נכונות הרדוקציה

1) ניתן לבנות G' בזמן פולינומיאלי בגודל G .

$$2) \text{ נוכיח כי } \langle G, k \rangle \in IS \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in VC .$$

כיוון \Leftarrow

בהתנחת גראף $G = (V, E)$ ושלם k .

$$\text{נניח כי } \langle G, k \rangle \in IS .$$

$\Leftarrow G$ מכיל קבוצה בלתי תלויות S בגודל k .
 \Leftarrow אם $u_1 \in S$ וגם $u_2 \in S$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.
 כלומר, כל שני קדוקודים ב- S לא מחוברים בצלע ב- G .

\Leftarrow השלילה הלוגית של הגרירה הזאת היא:
 אם $u_2 \notin S$ אז $u_1 \notin S$ או $(u_1, u_2) \in E$.
 \Leftarrow אם $u_2 \in V \setminus S$ אז $u_1 \in V \setminus S$ או $(u_1, u_2) \in E$.
 \Leftarrow $k' = |V| - k$ היא כיסוי קדוקודים ב- G בגודל k' .
 \Leftarrow הגרף $G' = G$ מכיל כיסוי קדוקודים בגודל k' .
 $\Leftarrow \langle G', k' \rangle \in VC$ \Leftarrow

כיוון \Rightarrow

בהינתן גרף G' ושלם k' .
 $\langle G', k' \rangle \in VC$.

$\Leftarrow G''$ מכיל כיסוי בקדוקודים C בגודל k'' .
 \Leftarrow אם $u_2 \in C$ אז $u_1 \in C$ או $(u_1, u_2) \in E$.
 \Leftarrow השלילה הלוגית של הגרירה הזאת היא:
 אם $(u_1, u_2) \notin E$ אז $u_2 \notin C$ ו $u_1 \notin C$.
 \Leftarrow אם $(u_1, u_2) \notin E$ וגם $u_2 \in V \setminus C$ אז $u_1 \in V \setminus C$.
 \Leftarrow כל שני קדוקודים ב- $V \setminus C$ לא מחוברים בצלע ב- G'' .
 \Leftarrow $k = |V| - k'$ היא קבוצת בלתי תלויות ב- G'' בגודל k .
 \Leftarrow הגרף $G = G'$ מכיל קבוצה בלתי תלויות בגודל k .



PARTITION 12.5

הגדרה 12.5 בעית PARTITION

קלט: קבוצת מספרים שלמים $.S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
פלט: האם קיימת תת-קבוצה $Y \subseteq S$ כך ש-

$$\sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in S \setminus Y} y$$

$$PARTITION = \left\{ S \mid \sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in S \setminus Y} y \text{ קבוצת שלמים, וקיימת תת-קבוצה } Y \subseteq S \text{ כך ש-} \right\}$$

12.6 רדוקציות פולינומיאליות

משפט 12.4 רדוקציות פולינומיאליות

$$\begin{aligned}
 SAT &\leqslant_P 3SAT \\
 3SAT &\leqslant_P CLIQUE \\
 CLIQUE &\leqslant_P IS \\
 IS &\leqslant_P VC \\
 SubSetSum &\leqslant_P PARTITION \\
 HAMPATH &\leqslant_P HAMCYCLE
 \end{aligned}$$

משפט 12.7 שפות NP שלמות**משפט 12.5 שפות NP- שלמות**

(משפט קוק לוין) SAT - שלמה. $3SAT$ - שלמה. $HAMPATH$ - שלמה. $CLIQUE$ - שלמה. IS - שלמה. VC - שלמה.