שיעור 1
מכונות טיורינג

1.1 הגדרה של מכונת טיורינג

הגדרה 1.1 מכונת טיורינג (הגדרה היוריסטית)

הקלט והסרט

- מכונת טיורינג (מ"ט) קורא קלט.
- הקלט עצמו נמצא על סרט אינסופי מחולק למשבצות.
- כל תו של הקלט כתוב במשבצת אחת של הסרט.
- במכונת טיורינג אנחנו מניחים שהסרט אינסופי לשני הכיוונים.
  * משמאל לתחילת הקלט יש רצף אינסופי של תווי רווח "␣".
  * מימין לסוף הקלט יש רצף אינסופי של תווי רווח "␣".

$\cdots$	␣	␣	a	b	b	b	a	a	␣	␣	␣	$\cdots$

הראש

- במצב ההתחלתי הראש בקצה השמאלי של הקלט.

$\cdots$	␣	␣	a	b	b	b	a	a	␣	␣	␣	$\cdots$
			$\uparrow$									

- הראש יכול לזוז ימינה על הסרט וגם שמאלה על הסרט.
- הראש קורא את התוכן של המשבצת שבה הוא נמצא.
- הראש יכול לכתוב על משבצת, אבל רק על המשבצת שבה הראש נמצא.

תאור העבודה של המכונה

- בתחילת הריצה, הקלט כתוב התחילת הסרט כאשר מימינו נמצא רצף אינסופי של תווי ␣ -ים.
- הראש מצביע על התא הראשון בסרט והמכונה נמצאת במצב התחלתי q_0.

q_0	$\cdots$	␣	␣	a	b	b	b	a	a	␣	␣	␣	$\cdots$
				$\uparrow$									

- בכל צעד חישוב, בהתאם למצב הנוכחי ולאות שמתחת לראש (התו הנקרא), המכונה מחליטה:
  * לאיזה מצב לעבור
  * מה לכתוב מתחת לראש (התו הנכתב)
  * לאן להזיז את הראש (תא אחד ימינה, או תא אחד שמאלה, או להישאר במקום).
- למכונה ישנם שני מצבים מיוחדים:
  * q_{acc}: אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל- q_{acc} היא עוברת ומקבלת.
  * q_{rej}: אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל- q_{rej} היא עוברת ודוחה.
- אם המכונה לא מגיעה ל- q_{acc} או q_{rej} היא תמשיך לרוץ לנצח.

הגדרה 1.2 מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעיה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר:

Q	קבוצת מצבים סופית ולא ריקה	
Σ	אלפבית הקלט	$\sqcup \notin \Sigma$
Γ	אלפבית הסרט	$\Sigma \subseteq \Gamma\,,\ \sqcup \in \Gamma$
δ	פונקצית המעברים	$\delta : (Q \backslash \{q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}\} \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$
q_0	מצב התחלתי	
q_{acc}	מצב מקבל יחיד	
q_{rej}	מצב דוחה יחיד	

דוגמה 1.1

נבנה מכונת טיורינג אשר מקבלת מילה אם היא בשפה

$$L = \left\{ w \in \{a,b\}^* \middle| \#a_w = \#b_w \right\} \ .$$

ז"א השפת כל המילים עם מספר שווה אותיות a ו b.

הרעיון של האלגוריתם של המכונה היא כדלקמן:

- נסרוק את הקלט משמאל לימין, נחפש את האות a הראשונה, נסמן אותה איכשהו כ"נקראת".
- אחר כך נחפש b תואם.
  - אם מצאנו b תואם נסמן אותו כ"נקרא", נחזור לתחילת הקלט ונתחיל סיבוב חדש.
  - אם לא מצאנו b תואם אז המכונה תדחה.
- אם נגיע לסיבוב שבו אינן נשארות אף אותיות לא a:
  - אם יש b לא מסומן אז המכונה תדחה.
  - אחרת אם לא נשאר אף b לא מסומן אז המכונה תקבל.

כעת נתאר את הפאודו-קוד של המכונה, כדלקמן.

פסאודו-קוד

1) סורקים את הקלט משמאול לימין.
- אם לא מצאנו a וגם לא מצאנו b $\Leftarrow$ מקבלת.
- אם האות הראשונה שהראש מצא היא a, כותבים עליו ✓, חוזרים לתחילת הקלט ועוברים לשלב 2).
- אם האות הראשונה שהראש מצא היא b, כותבים עליו ✓, חוזרים לתחילת הקלט ועוברים לשלב 3).

2) סורקים את הקלט משמאול לימין.
- אם לא מצאנו b $\Leftarrow$ דוחה.
- אם מצאנו b כותבים עליו ✓, חוזרים לתחילת הקלט וחוזרים לשלב 1).

3) סורקים את הקלט משמאול לימין.
- אם לא מצאנו a $\Leftarrow$ דוחה.
- אם מצאנו a כותבים עליו ✓, חוזרים לתחילת הקלט וחוזרים לשלב 1).

כעת נתן הגדרה פורמלית של המכונת טיורינג שמבצעת את האלגוריתם הזה.

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר Q הקבוצת המצבנים הבאה:

$$Q = \{q_0, q_a, q_b, q_{\text{back}}, q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}\} \ .$$

המשמעותם של כל המצבים נרשמים בטבלה למטה:

q_0	המצב ההתחלתי. אליו נחזור אחרי כל סבב התאמה של זוג אותיות.
q_a	מצב שבו ראינו a ומחפשים b תואם.
q_b	מצב שבו ראינו b ומחפשים a תואם.
q_{back}	מצב שנשתמש בו כדי לחזור לקצה השמאלי של הקלט ולהתחיל את הסריקה הבאה (סבב ההתאמה הבא).
q_{acc}	מצב מקבל.
q_{rej}	מצב דוחה.

האלפבית של הקלט, Σ, והלפבית של הסרט, Γ, הינן:

$$\Sigma = \{\texttt{a}, \texttt{b}\} \ , \qquad \Gamma = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \sqcup, \checkmark\} \ .$$

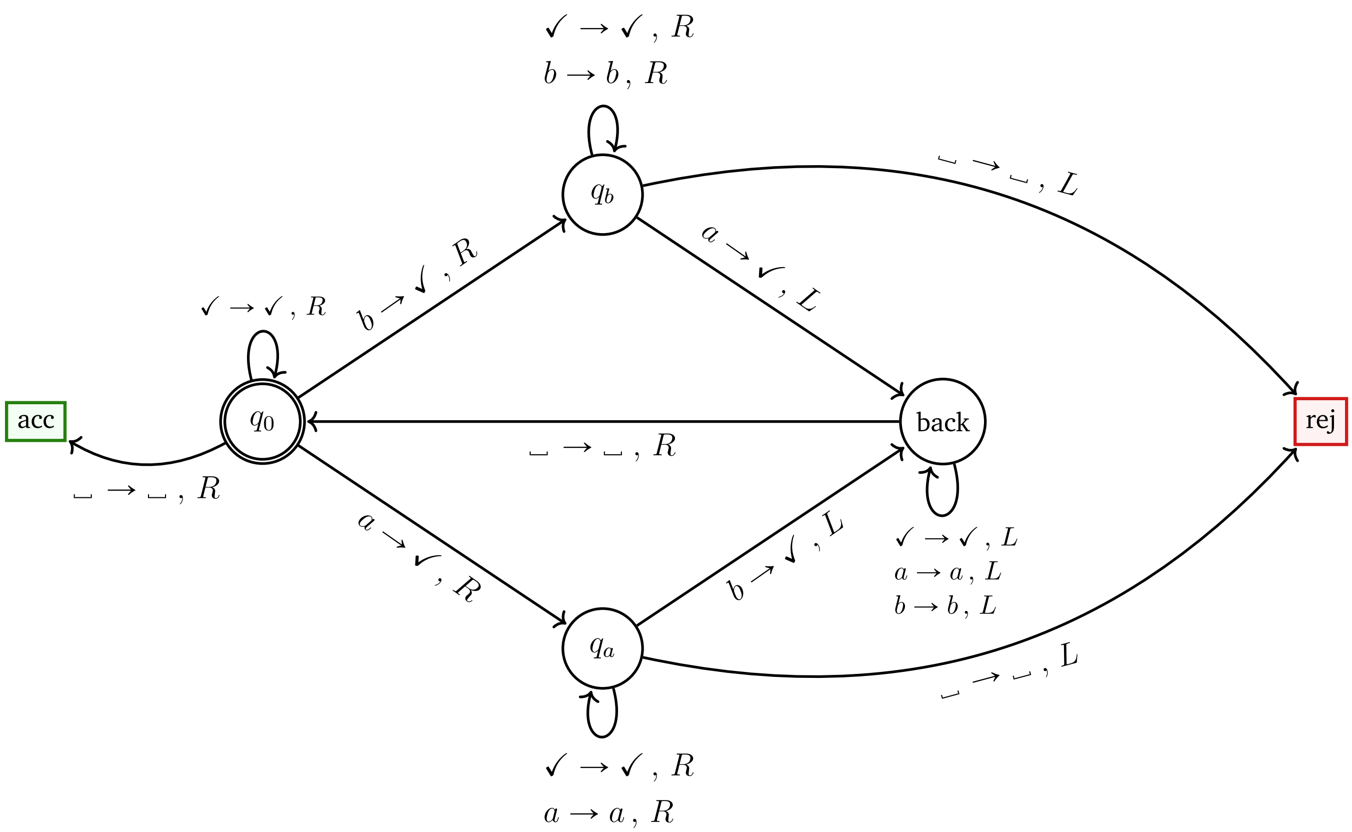
הפונקצית המעברים $\delta : Q \times \Sigma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ היא מוגדרת כדלקמן.

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, \texttt{a}) &= (q_a, \checkmark, R) \ , \\
\delta(q_0, \texttt{b}) &= (q_b, \checkmark, R) \ , \\
\delta(q_0, \sqcup) &= (q_{\text{acc}}, \sqcup, R) \ , \\
\delta(q_a, \checkmark) &= (q_a, \checkmark, R) \ , \\
\delta(q_a, \texttt{a}) &= (q_a, \texttt{a}, R) \ , \\
\delta(q_a, \texttt{b}) &= (q_{\text{back}}, \checkmark, L) \ , \\
\delta(q_b, \checkmark) &= (q_b, \checkmark, R) \ , \\
\delta(q_b, \texttt{b}) &= (q_a, \texttt{b}, R) \ , \\
\delta(q_b, \texttt{a}) &= (q_{\text{back}}, \checkmark, L) \ .
\end{aligned}$$

לעתים קל יותר לרשום את פונקציית המעבירים δ כטבלה:

$Q \backslash \Gamma$	a	b	$\sqcup$	$\checkmark$
q_0	$(q_a, \checkmark, R)$	$(q_b, \checkmark, R)$	$(q_{\text{acc}}, \sqcup, R)$	$(q_0, \checkmark, R)$
q_a	$(q_a, \texttt{a}, R)$	$(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$	$(q_{\text{rej}}, \sqcup, L)$	$(q_a, \checkmark, R)$
q_b	$(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$	$(q_b, \texttt{b}, R)$	$(q_{\text{rej}}, \sqcup, L)$	$(q_b, \checkmark, R)$
q_{back}	$(q_{\text{back}}, \texttt{a}, L)$	$(q_{\text{back}}, \texttt{b}, L)$	$(q_0, \sqcup, R)$	$(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$

<u>תרשים מצבים</u>



דוגמה 1.2

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה aab.

פתרון:

$\sqcup$	q_0	a	a	b	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	q_a	a	b	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	a	q_a	b	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	q_{back}	a	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	q_{back}	$\checkmark$	a	$\checkmark$	$\sqcup$
q_{back}	$\sqcup$	$\checkmark$	a	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	q_0	$\checkmark$	a	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	q_0	a	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_a	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	rej	$\checkmark$	$\sqcup$

דוגמה 1.3

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה abbbaa.

פתרון:

$\sqcup$	q_0	a	b	b	b	a	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	q_a	b	b	b	a	a	$\sqcup$
$\sqcup$	q_{back}	$\checkmark$	$\checkmark$	b	b	a	a	$\sqcup$
q_{back}	$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	b	b	a	a	$\sqcup$
$\sqcup$	q_0	$\checkmark$	$\checkmark$	b	b	a	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	q_0	$\checkmark$	b	b	a	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_0	b	b	a	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_b	b	a	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	b	q_b	a	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_{back}	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_{back}	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	q_{back}	$\checkmark$	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	q_{back}	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
q_{back}	$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	q_0	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	q_0	$\checkmark$	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_0	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_0	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_b	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_{back}	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_{back}	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_{back}	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	q_{back}	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	q_{back}	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$
q_{back}	$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	q_0	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	q_0	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_0	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_0	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_0	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_0	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_0	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$	q_{acc}

הגדרה 1.3 קונפיגורציה

תהי $M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג. **קונפיגורציה** של M הינה מחרוזת

$$u q \sigma \mathrm{v}$$

כאשר משמעות:

$$u, \mathrm{v} \in \Gamma^* \ , \qquad \sigma \in \Gamma \ , \qquad q \in Q \ .$$

- q מצב המכונה,
- σ הסימון במיקום הראש
- u תוכן הסרט משמאל לראש,
- v תוכן הסרט מימין לראש.

דוגמה 1.4 (המשך של דוגמה 1.2)

u	q	σ	v
$\sqcup$	q_0	a	a b $\sqcup$
$\sqcup\checkmark$	q_a	a	b $\sqcup$
$\sqcup$ $\checkmark$ a	q_a	b	$\sqcup$
$\sqcup$ $\checkmark$	q_{back}	a	$\checkmark$ $\sqcup$
$\sqcup$	q_{back}	$\checkmark$	a $\checkmark$ $\sqcup$
$\sqcup$	q_{back}	$\sqcup$	$\checkmark$ a $\checkmark$ $\sqcup$
$\sqcup$	q_0	$\checkmark$	a $\checkmark$ $\sqcup$
$\sqcup$ $\checkmark$	q_0	a	$\checkmark$ $\sqcup$
$\sqcup$ $\checkmark$ $\checkmark$	q_a	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$ $\checkmark$ $\checkmark$ $\checkmark$	q_a	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup$ $\checkmark$ $\checkmark$	q_{rej}	$\checkmark$	$\sqcup$

דוגמה 1.5

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת כל מילה בשפה

$$L = \{a^n \mid n = 2^k \ , \ k \in \mathbb{N}\}$$

ז"א מילים בעלי מספר אותיות a אשר חזקה של 2.

פתרון:

ראשית נשים לב למשפט הבא:

משפט 1.1

מספר שלם n שווה לחזקה אי-שלילית של 2, כלומר $n = 2^k \quad (k \geqslant 0)$ אם ורק אם קיים שלם m עבורו חילוק של n ב- 2 בדיוק m פעמים נותן 1.

הוכחה:

כיוון $\Leftarrow$

אם $n = 2^k \ (k \geqslant 0)$ אז $\frac{n}{2^k} = 1$.

כיוון $\Rightarrow$

אם קיים $m \geqslant 0$ עבורו $\frac{n}{2^m} = 1$ אז $n = 2^m$ ולכן n שווה לחזקה אי-שלילית של 2. ■

לאור המשפט הזה נבנה אלגוריתם אשר מחלק את מספר האותיות במילה ב- 2 שוב ושוב בצורה איטרטיבית.

- אם אחרי סיבוב מסויים נקבל מספר אי-זוגי שונה מ- 1, אז אין מצב שמספר האותיות a הוא חזקה של 2.
- בצד שני אם אחרי סיבוב כלשהו נקבל בדיוק a אחת הנשארת, ז"א אחרי מספר מסוים של חילוקים של המספר אותיות a קיבלנו 1, אזי מובטח לנו שהמספר של אותיות a הוא שווה לחזקה של 2.

כעת נסביר כיצד המכונת טיורינג מבצעת את השיטה הזאת בפועל כדלקמן.

1) במצב ההתחלתי יש מחרוזת של רצף אותיות a כתובה על הסרט והראש נמצא מתחת האות הראשונה.

␣	␣	a	a	a	a	a	a	a	a	␣	␣
		↑									

2) עוברים על הקלט משמאל לימין ומבצעים מחיקה לסירוגין של האות a. כלומר, אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר וכן הלאה, עד שמגיעים לקצה הימין של המילה.

␣	␣	✓	a	✓	a	✓	a	✓	a	␣	␣
									↑		

3) אחרי שהראש הגיע לסוף המילה:

- אם מצאנו אות a אחת בדיוק ⇐ המכונה תקבל.
- אם כתוב ✓ בתו האחרון ⇐ המכונה תדחה.
- אחרת, אם כתוב a בתו האחרון הראש חוזר לתחילת המחרוזת וחוזרים לשלב 2).

כדוגמה של מילה המתקבלת על ידי האלגוריתם, למטה רשומות האיטרציות של האלגוריתם הזה על המילה $w = aaaaaaaa$ (8 אותיות a). במצב ההתחלתי הסרט נראה כדלקמן.

␣	␣	a	a	a	a	a	a	a	a	␣	␣
		↑									

איטרציה 1) לבסוף האיטרציה $i = 1$ הסרט נראה כך:

␣	␣	✓	a	✓	a	✓	a	✓	a	␣	␣
									↑		

התו האחרון a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

איטרציה 2) בסוף האיטרציה $i = 2$ הסרט נראה כך:

␣	␣	✓	✓	✓	a	✓	✓	✓	a	␣	␣
									↑		

התו הראשון הוא a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

איטרציה 3) לאחר האיטרציה $i = 3$ הסרט נראה כך:

␣	␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	a	␣	␣
									↑		

התו האחרון הוא a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

איטרציה 4) באיטרציה $i = 4$ יש אות a אחת בדיוק אז המכונה מקבלת.

כדוגמה של מילה הלא המתקבלת על ידי האלגוריתם, למטה רשומות האיטרציות של האלגוריתם הזה על המילה $w = aaaaaa$ (6 אותיות a).
במצב ההתחלתי הסרט נראה כדלקמן.

␣	␣	a	a	a	a	a	a	␣	␣
		↑							

איטרציה 1) לבסוף האיטרציה $i = 1$ הסרט נראה כך:

␣	␣	✓	a	✓	a	✓	a	␣	␣
							↑		

התו האחרון a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

איטרציה 2) בסוף האיטרציה $i = 2$ הסרט נראה כך:

␣	␣	✓	✓	✓	a	✓	✓	␣	␣
							↑		

התו הראשון הוא ✓ אז דוחה.

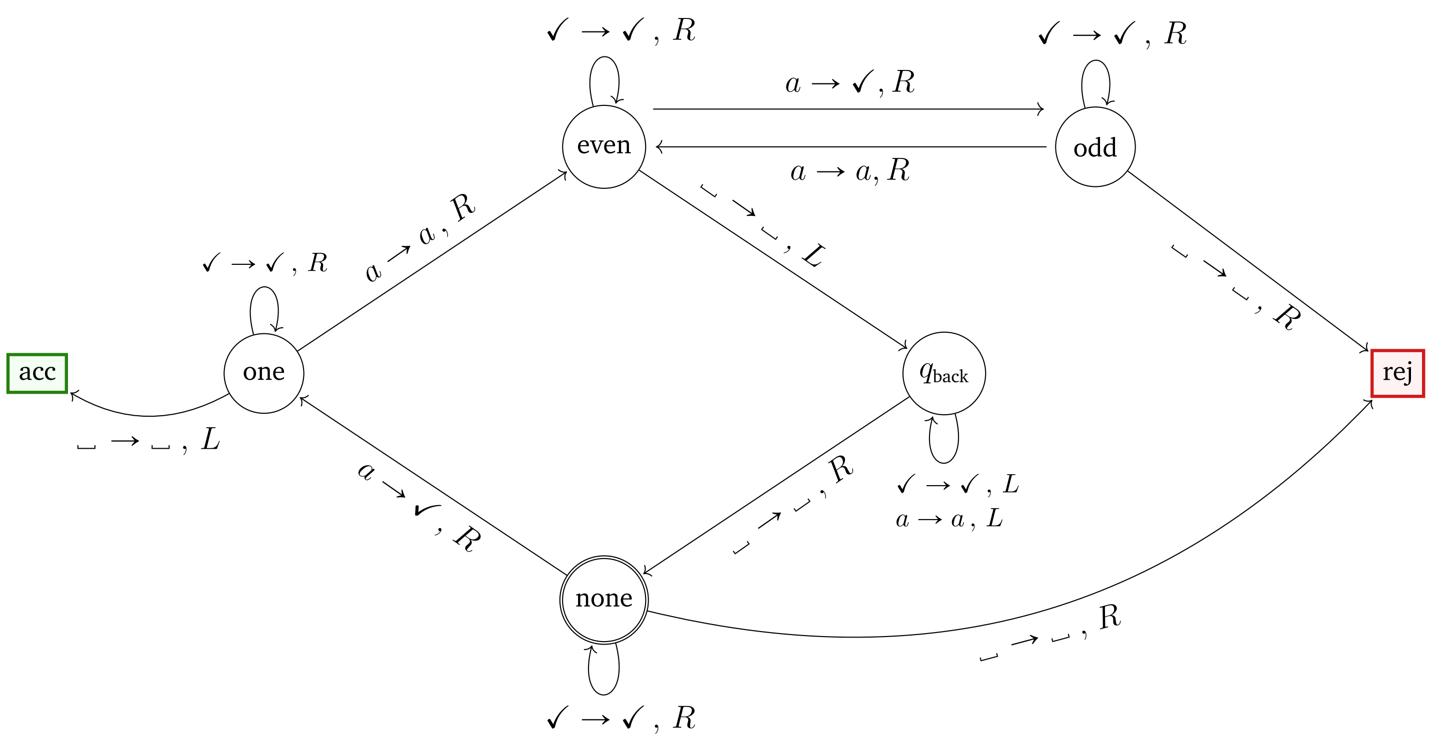
כעת נתן הגדרה פורמלית של המכונת טיורנג שמקבלת השפה הזאת:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}) \ ,$$

כאשר $\Sigma = \{a\}$, $\Gamma = \{a, \sqcup, \checkmark\}$, והקבוצת המצבים היא $Q = \{q_0, \text{one}, \text{even}, \text{odd}, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}$ כאשר המשמעותם הם מפורטים למטה:

- מצב none: מצב התחלתי. עדיין לא קראנו a בסבב סריקה זה.
- מצב one: קראנו a בודד.
- מצב even: קראנו מספר זוגי של a .
- מצב odd: קראנו מספר אי-זוגי של a .
- מצב q_{back}: חזרה שלמאלה.

הפונקצית המעברים מתוארת על ידי התרשים מצבים למטה.



דוגמה 1.6

בדקו אם המילה aaaa מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.5.

פתרון:

␣	none	a	a	a	a	␣
␣	✓	one	a	a	a	␣
␣	✓	a	even	a	a	␣
␣	✓	a	✓	odd	a	␣
␣	✓	a	✓	a	even	␣
␣	✓	a	✓	back	a	␣
␣	✓	a	back	✓	a	␣
␣	✓	back	a	✓	a	␣
␣	back	✓	a	✓	a	␣

back	␣	✓	a	✓	a	␣
␣	none	✓	a	✓	a	␣
␣	✓	none	a	✓	a	␣
␣	✓	✓	one	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	one	a	␣
␣	✓	✓	✓	a	even	␣
␣	✓	✓	✓	back	a	␣
␣	✓	✓	back	✓	a	␣
␣	✓	back	✓	✓	a	␣
␣	back	✓	✓	✓	a	␣
back	␣	✓	✓	✓	a	␣
␣	none	✓	✓	✓	a	␣
␣	✓	none	✓	✓	a	␣
␣	✓	✓	none	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	none	a	␣
␣	✓	✓	✓	✓	one	␣
␣	✓	✓	✓	acc	✓	␣

u	q	σ	v
␣	none	a	aaa ␣
␣ ✓	one	a	aa ␣
␣ ✓ a	even	a	a ␣
␣ ✓ a ✓	odd	a	␣
␣ ✓ a ✓ a	even	␣	␣
␣ ✓ a ✓	back	a	␣
␣ ✓ a	back	✓	a ␣
␣ ✓	back	a	✓ a ␣
␣	back	✓	a ✓ a ␣
␣	back	␣	✓ a ✓ a ␣
␣	none	✓	a ✓ a ␣
␣✓	none	a	✓ a ␣
␣✓✓	one	✓	a ␣
␣✓✓✓	one	a	␣
␣✓✓✓ a	even	␣	␣
␣✓✓✓	back	a	␣
␣✓✓	back	✓ a	␣
␣✓	back	✓	✓ a ␣
␣	back	✓	✓✓ a ␣
␣	back	␣	✓✓✓ a ␣
␣	none	✓	✓✓ a ␣
␣✓	none	✓	✓ a ␣
␣✓✓	none	✓	a ␣
␣✓✓✓	none	a	␣
␣✓✓✓✓	one	␣	␣
␣✓✓✓	acc	✓	␣

דוגמה 1.7

בדקו אם המילה aaa מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.5.

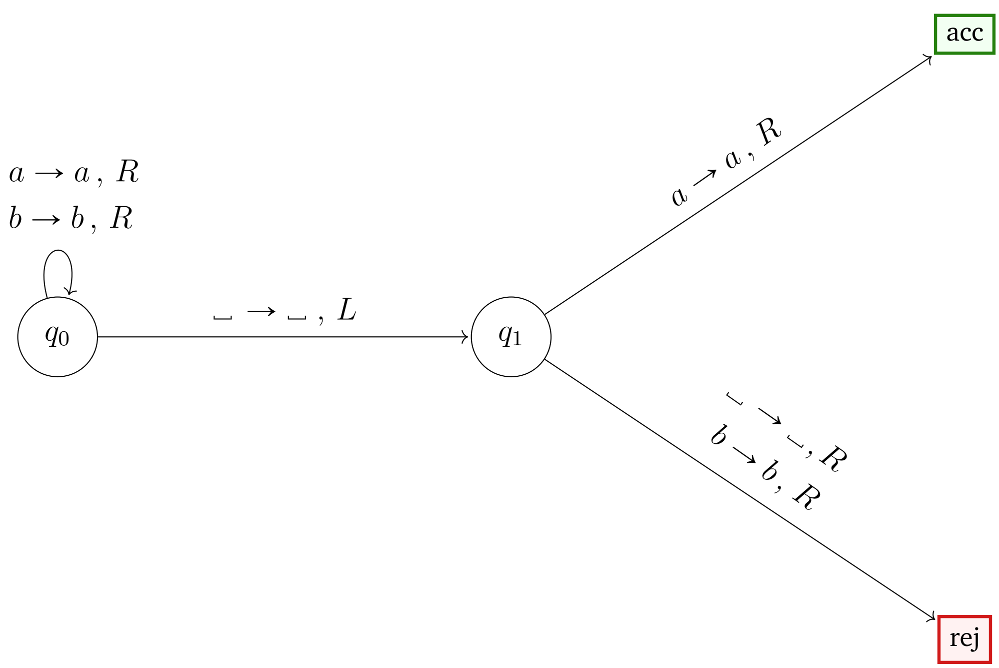
פתרון:

$\sqcup$	none	a	a	a	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	one	a	a	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	a	even	a	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	a	✓	odd	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	a	✓	$\sqcup$	rej

u	q	σ	v
$\sqcup$	none	a	aa $\sqcup$
$\sqcup$ ✓	one	a	a $\sqcup$
$\sqcup$ ✓ a	even	a	$\sqcup$
$\sqcup$ ✓ a ✓	odd	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup$ ✓ a ✓ $\sqcup$	rej	$\sqcup$	$\sqcup$

דוגמה 1.8

מהי השפה של המכונה למטה:



פתרון:

(1 סורקים את הקלט משמאל לימין.

- אם התו הנקרא a או b עוברים לתו ימינה הבא וחוזרים לשלב 1).

- אם התו הנקרא $\sqcup$ אז הגענו לסוף הקלט, ועוברים לשלב 2).

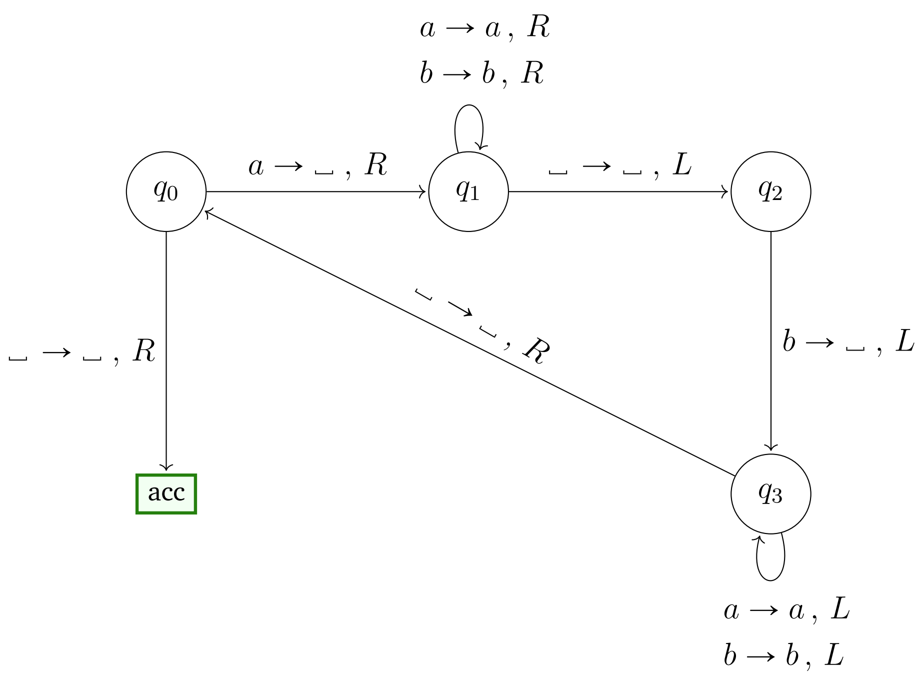
2) עוברים שמאלה לתו הארון של המילה.

- אם התו הנקרא $a \Leftarrow$ מקבל.
- אחרת דוחה.

לכן המכונה מקבלת שפת המילים המסתיימות באות a.

דוגמה 1.9

מהי השפה של המכונה למטה:



פתרון:

1) במצב ההתחלתי:

- אם התו הנקרא $\sqcup \Leftarrow$ מקבל.
- אם התו הנקרא a מורידים אותו על ידי $\sqcup$ ועוברים לשלב 2).
- אחרת $\Leftarrow$ דוחה.

2) עוברים ימינה עד שמגיעים לסוף המילה.

- אם התו האחרון הוא b, מורידים אותו על ידי $\sqcup$, חוזרים לתחילת המילה וחוזרים לשלב 1).
- אחרת דוחה.

בכל איטרציה המכונה מורידה תו a בתחילת המילה וחוזרת ומורידה תו b תואם בסוף המילה. בכל איטרציה אם המכונה לא מוצאת b תואם בסוף המילה היא דוחה המילה. אחרת אם המכונה לא דחתה המילה וכל האותיות נמחקות אז המילה מתקבלת. לכן המכונה מקבלת שפת המילים

$$\left\{a^n b^n \middle| n \geqslant 0\right\}\ .$$

הגדרה 1.4 גרירה בצעד אחד

תהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{\text{acc}},q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M.
נסמן

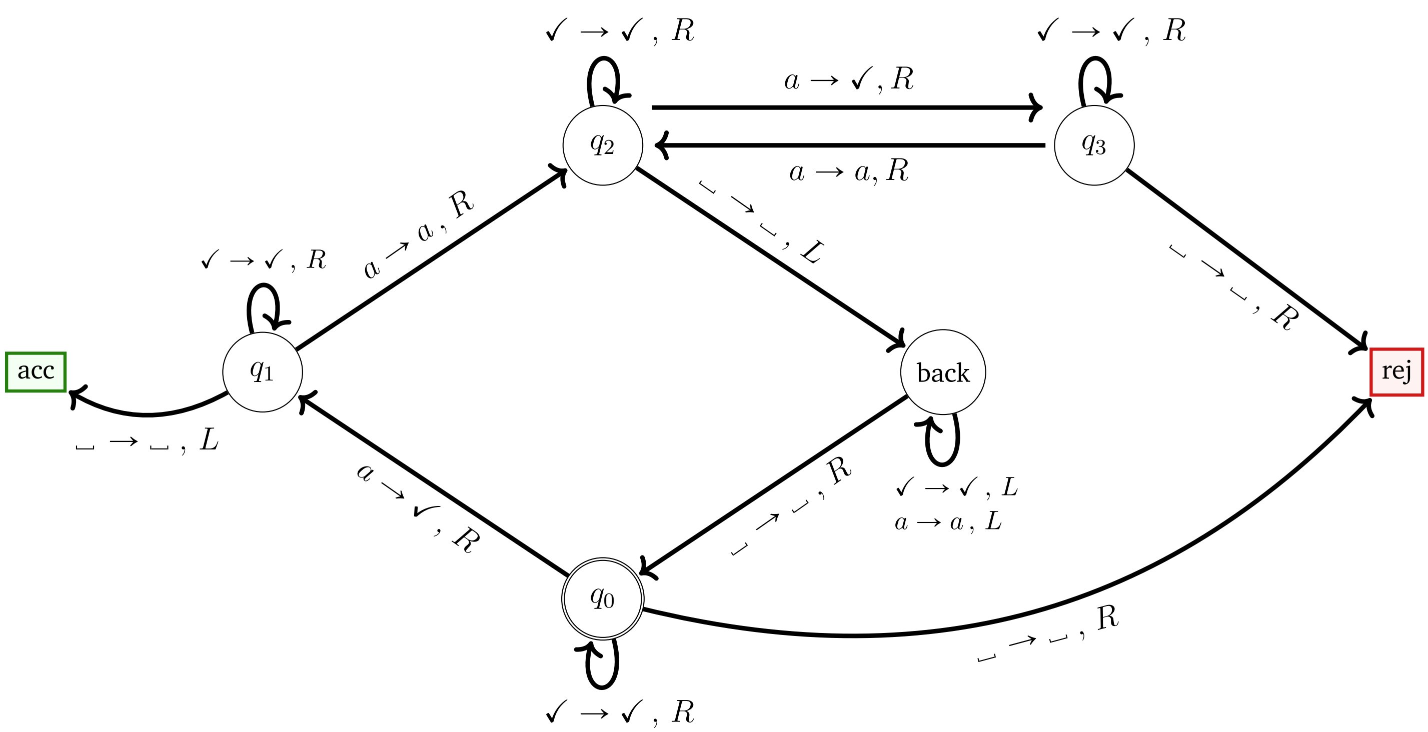
$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם כשנמצאים ב- c_1 עוברים ל- c_2 בצעד בודד.

דוגמה 1.10 (המשך של דוגמה 1.5)

עבור המכונת טיורינג שמתוארת בתרשים למטה מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \ \vdash_M \ \checkmark\checkmark q_1 \checkmark a$$



הגדרה 1.5 גרירה בכללי

תהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{\text{acc}},q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M.
נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

אם ניתן לעבור מ- c_1 ל- c_2 ב- 0 או יותר צעדים.

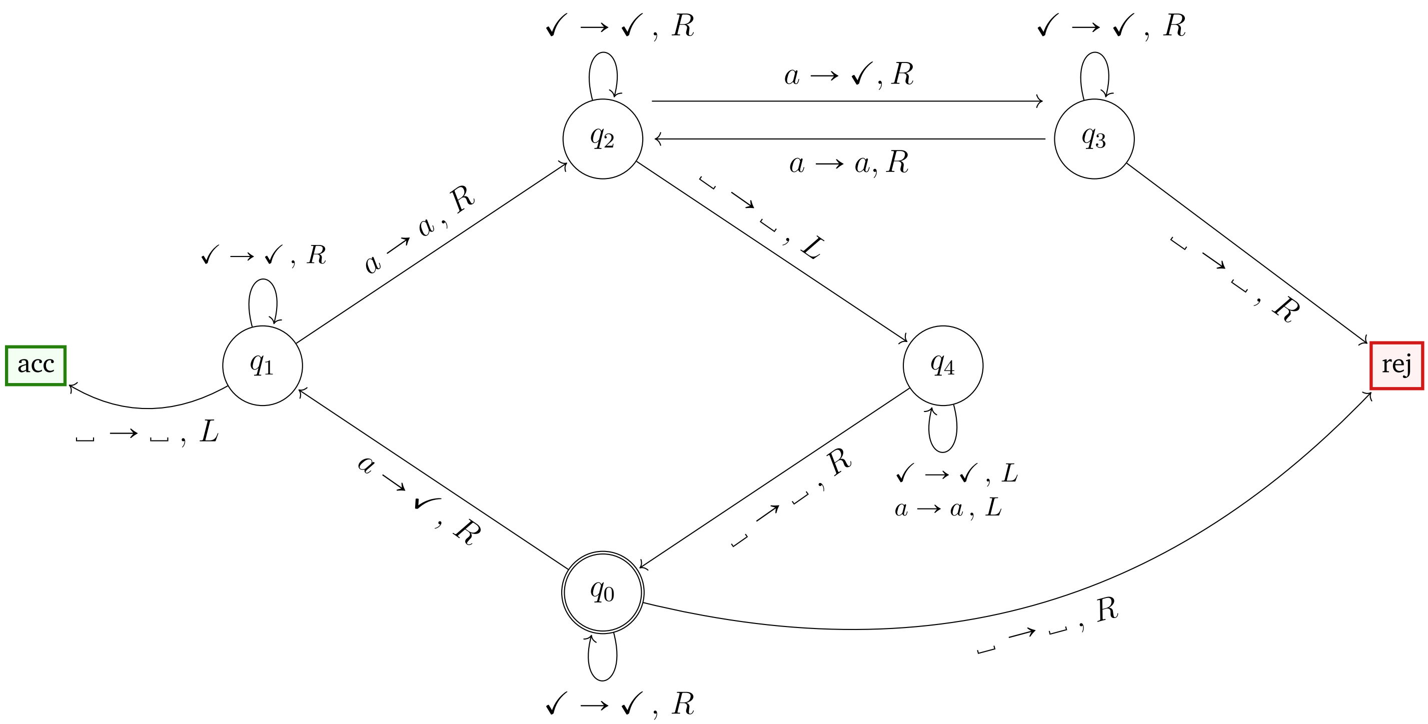
דוגמה 1.11 (המשך של דוגמה 1.5)

עבור המכונת טיורינג שמתוארת בתרשים למטה מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \ \vdash_M^* \ \checkmark\checkmark\checkmark q_4 a$$

בגלל ש:

$$\begin{aligned} \checkmark q_0 a \checkmark a &\vdash_M \checkmark\checkmark q_1 \checkmark a \\ &\vdash_M \checkmark\checkmark\checkmark q_1 a \\ &\vdash_M \checkmark\checkmark\checkmark a q_2 \sqcup \\ &\vdash_M \checkmark\checkmark\checkmark q_4 a \ . \end{aligned}$$



הגדרה 1.6 קבלה ודחייה של מחרוזת

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ מכונת טיורינג, ו- $w \in \Sigma^*$ מחרוזת. אומרים כי:

- M **מקבלת** את w אם
$$q_0 w \quad \vdash_M^* \quad u\ q_{acc}\, \sigma\, \mathrm{v}$$
כאשר $\sigma \in \Gamma$, $u, \mathrm{v} \in \Gamma^*$ כלשהם.
- M **דוחה** את w אם
$$q_0 w \quad \vdash_M^* \quad u\ q_{rej}\ \sigma\ \mathrm{v}$$
כאשר $\sigma \in \Gamma$, $u, \mathrm{v} \in \Gamma^*$ כלשהם.

הגדרה 1.7 הכרעה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \mathrm{acc}, q_{rej})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מכריעה** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים:

- $w \in L \Leftarrow M$ מקבלת את w.
- $w \notin L \Leftarrow M$ דוחה את w.

הגדרה 1.8 קבלה של שפה

תהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{\text{acc}}\,,\,q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L\subseteq\Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מקבלת** את L אם לכל $w\in\Sigma^*$ מתקיים:

- אם $w\in L$ אז M מקבלת את w.
- אם $w\notin L$ אז M לא מקבלת את w.

במקרה כזה כאשר M מקבלת את השפה L, נכתוב ש-

$$L(M)=L\ .$$

1.2 טבלת המעברים

דוגמה 1.12

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$L=\left\{w=\{a,b,c\}^*\middle|\#a_w=\#b_w=\#c_w\right\}$$

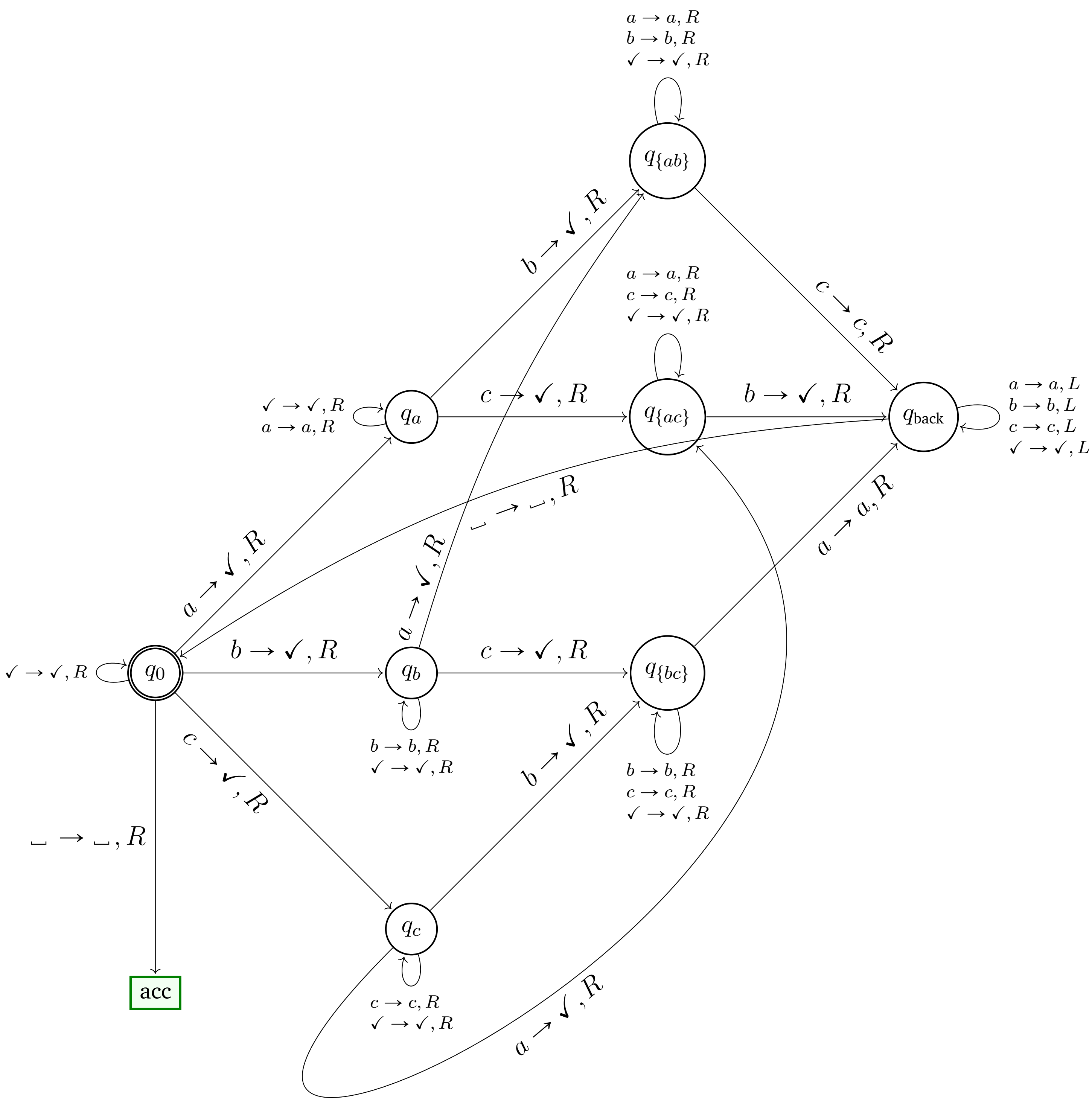
פתרון:

נתאר את המכונה על ידי הטבלת המעברים של המכונה. הסימן S מסמן כל זוג אותיות שונות מהקבוצה $\{a,b,c\}$ ללא חשיבות לסדר. כלומר:

$$S=\{a,b\}\ ,\quad S=\{b,c\}\ ,\quad S=\{a,c\}\ .$$

מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
q_0	σ	$q.\sigma$	$\checkmark$	R	$\sigma\in\{a,b,c\}$
$q.\sigma$	σ	$q.\sigma$	$\circlearrowleft$	R	$\sigma\in\{a,b,c\}$
$q.\sigma$	τ	$q.\{\sigma\tau\}$	$\checkmark$	R	$\sigma,\tau\in\{a,b,c\}\ \wedge\ \sigma\neq\tau$
$q.S$	σ	$q.S$	σ	R	$\sigma\in S$
qS	σ	q_{back}	$\checkmark$	L	$\sigma\notin S$
q_{back}	$a,b,c,\checkmark$	q_{back}	$\circlearrowleft$	L	
q_0	$\sqcup$	q_{acc}	$\circlearrowleft$	R	
q_{back}	$a,b,c,\checkmark$	q_{back}	$\circlearrowleft$	L	
q_{back}	$\sqcup$	q_0	$\circlearrowleft$	R	

כעת נתאר את המכונה על ידי תרשים המצבים של המכונה:



$a \to a, R$
$b \to b, R$
$\checkmark \to \checkmark, R$
$q_{\{ab\}}$
$b \to \checkmark, R$
$c \to c, R$
$a \to a, R$
$c \to c, R$
$\checkmark \to \checkmark, R$
$\checkmark \to \checkmark, R$
$a \to a, R$
q_a
$c \to \checkmark, R$
$q_{\{ac\}}$
$b \to \checkmark, R$
q_{back}
$a \to a, L$
$b \to b, L$
$c \to c, L$
$\checkmark \to \checkmark, L$
$\sqcup \to \sqcup, R$
$a \to \checkmark, R$
$a \to \checkmark, R$
$a \to a, R$
$\checkmark \to \checkmark, R$
q_0
$b \to \checkmark, R$
q_b
$c \to \checkmark, R$
$q_{\{bc\}}$
$b \to b, R$
$\checkmark \to \checkmark, R$
$c \to \checkmark, R$
$b \to \checkmark, R$
$b \to b, R$
$c \to c, R$
$\checkmark \to \checkmark, R$
$\sqcup \to \sqcup, R$
q_c
acc
$c \to c, R$
$\checkmark \to \checkmark, R$
$a \to \checkmark, R$

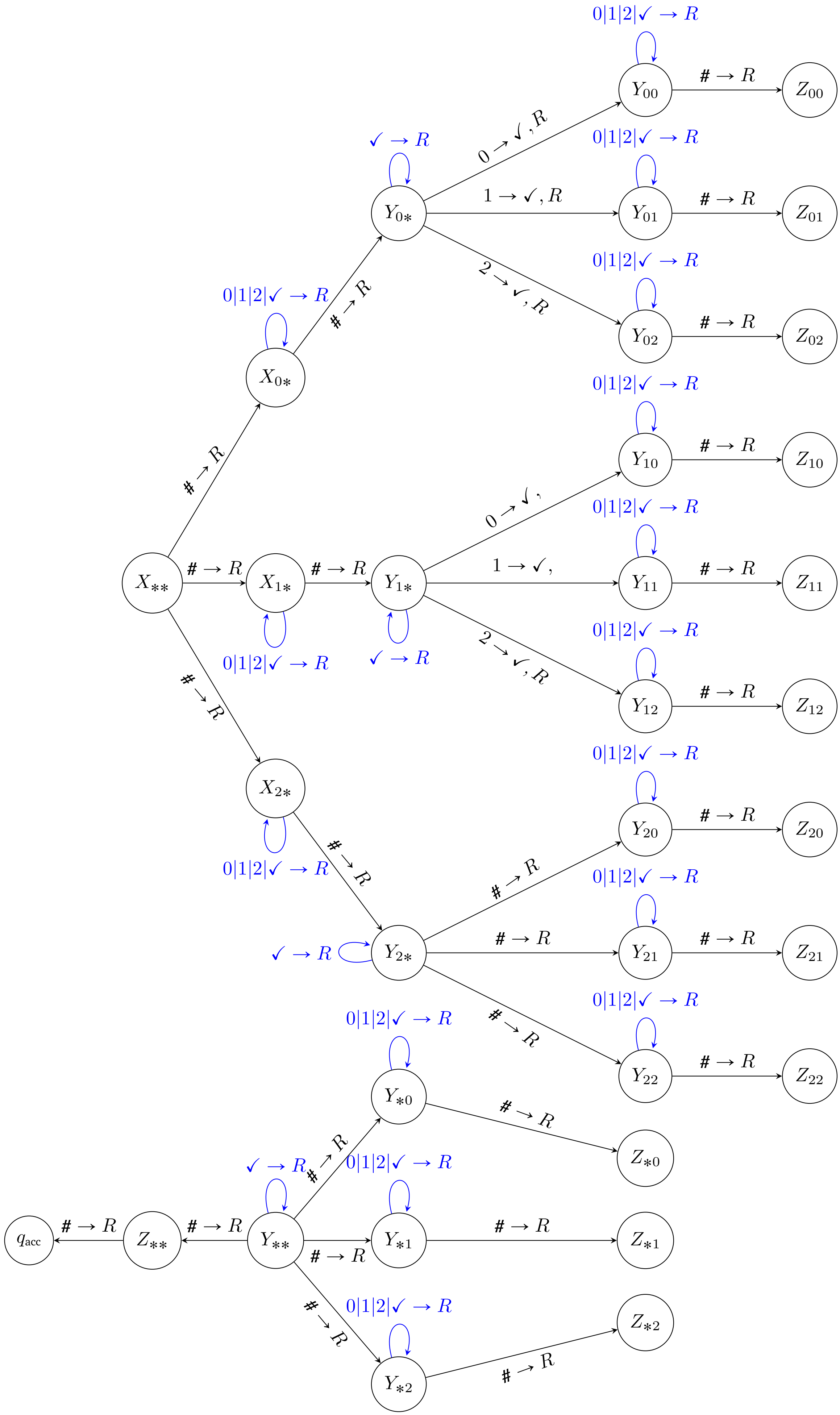
דוגמה 1.13

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$\left\{x_1 \ldots x_k \# y_1 \ldots y_k \# z_1 \ldots z_k \,\middle|\, x_i, y_i, z_i \in \{0,1,2\}\ ,\ \forall i, x_i \geqslant z_i \geqslant y_i\right\}$$

פתרון:

מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
$X**$	σ	$X\sigma*$	$\checkmark$	R	
$X**$	$\checkmark$	$X**$	$\checkmark$	R	
$X\sigma*$	$0,1,2,\checkmark$	$X\sigma*$	$\circlearrowleft$	R	
$X\tau*$	#	$Y\tau*$	$\circlearrowleft$	R	
$Y\tau*$	σ	$Y\tau\sigma$	$\circlearrowleft$	R	
$Y\tau*$	$\checkmark$	$Y\tau*$	$\circlearrowleft$	R	
$Y\tau\sigma$	$0,1,2,\checkmark$	$Y\tau\sigma$	$\circlearrowleft$	R	
$Y\tau_1\tau_2$	#	$Z\tau_1\tau_2$	$\circlearrowleft$	R	
$Z\tau_1\tau_2$	$\checkmark$	$Z\tau_1\tau_2$	$\circlearrowleft$	R	
$Z\tau_1\tau_2$	σ	q_{back}	$\checkmark$	L	
$Z**$	$\sqcup$	q_{acc}	$\circlearrowleft$	R	$\tau_1 \geqslant \sigma \geqslant \tau_2$
q_{back}	$0,1,2,\checkmark$	q_{back}	$\circlearrowleft$	L	
q_{back}	$\sqcup$	$X**$	$\circlearrowleft$	R	


X_{**}
X_{0*}
X_{1*}
X_{2*}
Y_{0*}
Y_{1*}
Y_{2*}
Y_{00}
Y_{01}
Y_{02}
Y_{10}
Y_{11}
Y_{12}
Y_{20}
Y_{21}
Y_{22}
Z_{00}
Z_{01}
Z_{02}
Z_{10}
Z_{11}
Z_{12}
Z_{20}
Z_{21}
Z_{22}
Y_{*0}
Y_{*1}
Y_{*2}
Z_{*0}
Z_{*1}
Z_{*2}
Y_{**}
Z_{**}
q_{acc}
$\# \to R$
$0|1|2|\checkmark \to R$
$\checkmark \to R$
$0 \to \checkmark, R$
$1 \to \checkmark, R$
$2 \to \checkmark, R$
$0 \to \checkmark,$
$1 \to \checkmark,$

1.3 חישוב פונקציות

הגדרה 1.9 מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה f

תהי $f:\Sigma_1^*\to\Sigma_2^*$ ותהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{\text{acc}},q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג.
אומרים כי M מחשבת את f אם:

- $\Sigma=\Sigma_1$ ו- $\Sigma_2\subset\Gamma$.
- לכל $w\in\Sigma_1^*$ מתקיים $q_0 w\vdash q_{\text{acc}}f(w)$.

דוגמה 1.14 חיבור אונרי

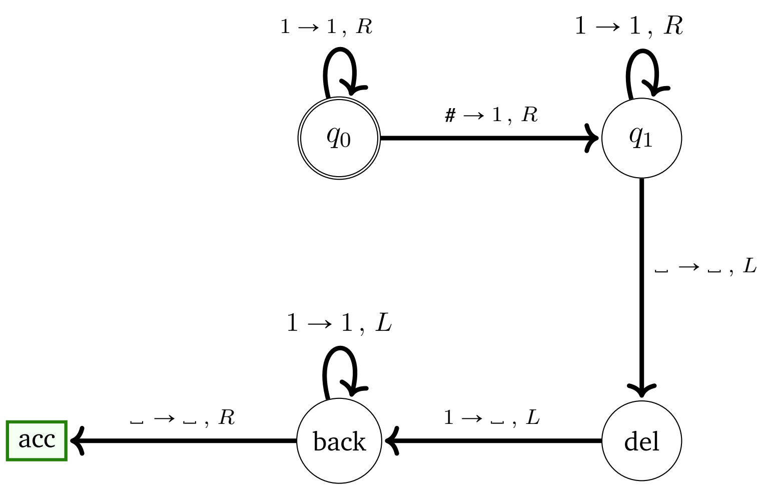
בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i\#1^j$$

ומחזירה את פלט

$$1^{i+j}\ .$$

פתרון:



דוגמה 1.15 כפל אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i\#1^j$$

ומחזירה את פלט

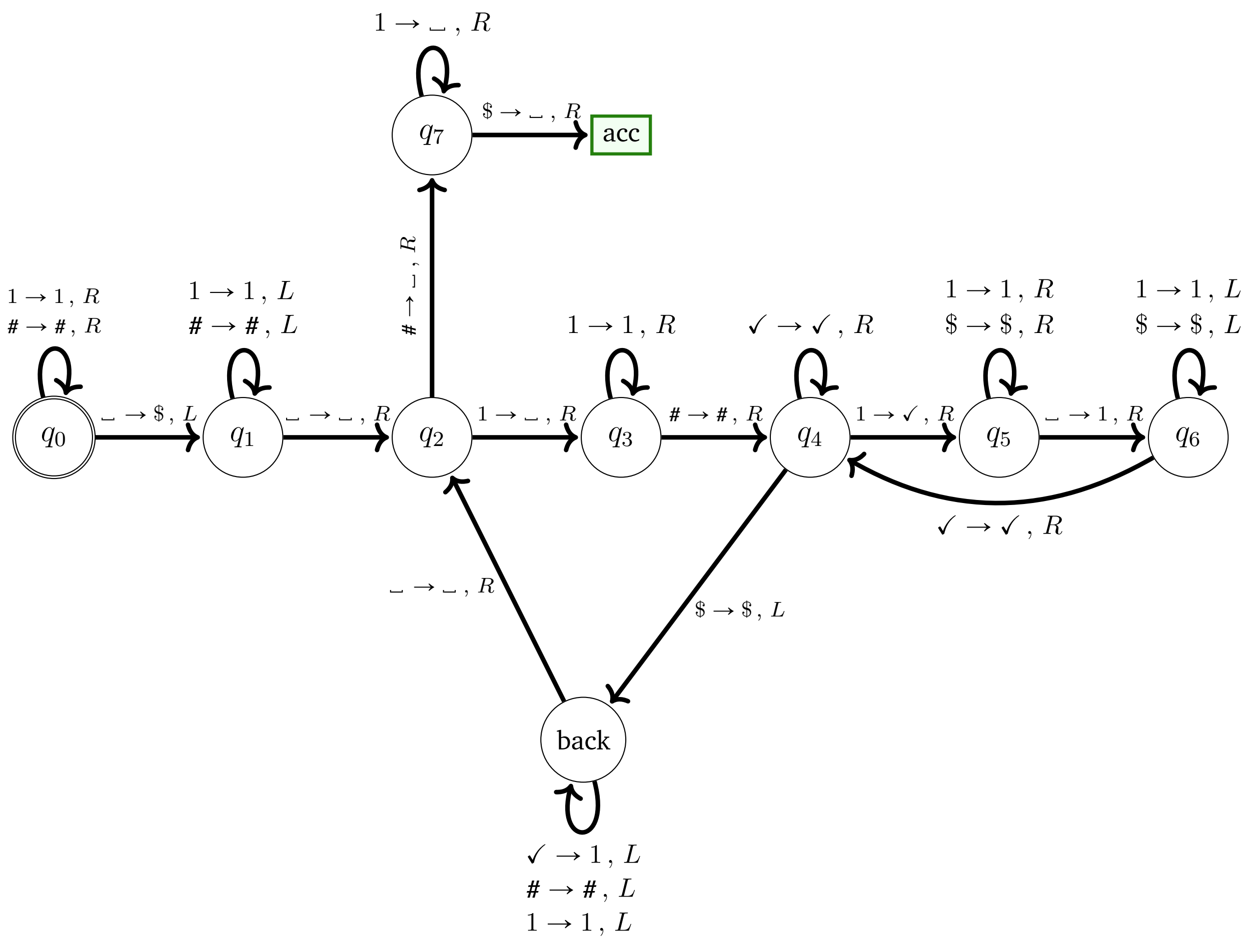
$$1^{i\cdot j}\ .$$

פתרון:

- לדוגמה, נניח שהקלט הוא 2 כפול 2.
  הקלט הוא 11#11.
- נרצה להבדיל בין הקלט לבין הפלט.

לכן בתחילת הריצה, נתקדם ימינה עד סוף הקלט ונוסיף שם את התו $.
לאחר מכן נחזור לתחילת הקלט.

- על כל אות 1 במילה השמאלית נעתיק את המילה הימנית לאחר סימן ה- $.
- לאחר מכן נשאיר רק את התווים שלאחר סימן ה $. כלומר, נמחק את כל מה שאינו פלט.



μ	q	σ	ν
␣	q_0	1	1#11␣
␣11#11	q_1	␣	␣
␣11#11	q_1	$	␣
␣	q_1	␣	11#11$
␣	q_2	1	1#11$
␣ ␣	q_3	1	#11$
␣ ␣1#	q_4	1	1$
␣ ␣1#✓	q_5	1	$
␣ ␣1#✓1$	q_5	␣	␣
␣ ␣1#✓1$1	q_6	␣	␣
␣ ␣1#	q_6	✓	1$1 ␣
␣ ␣1#✓	q_4	1	$1 ␣
␣ ␣1#✓✓	q_5	$	1 ␣
␣ ␣1#✓✓$1	q_5	␣	␣
␣ ␣1#✓✓$11	q_6	␣	␣
␣ ␣1#✓	q_6	✓	$11␣

␣ ␣1#✓✓	q_4	$	11␣
␣ ␣1#✓	back	✓	$11␣
␣	back	␣	1#11$11␣
␣ ␣	q_2	1	#11$11␣
␣ ␣ ␣	q_3	#	11$11␣
␣ ␣ ␣#	q_4	1	1$11␣
␣ ␣ ␣#✓	q_5	1	$11␣
␣ ␣ ␣#✓1$11	q_5	␣	␣
␣ ␣ ␣#✓1$111	q_6	␣	␣
␣ ␣ ␣#	q_6	✓	1$111␣
␣ ␣ ␣#✓	q_4	1	$111␣
␣ ␣ ␣#✓✓	q_5	$	111␣
␣ ␣ ␣#✓✓$111	q_5	␣	␣
␣ ␣ ␣#✓✓$1111	q_6	␣	␣
␣ ␣ ␣#✓	q_4	✓	$1111
␣ ␣ ␣#✓✓	q_4	$	1111
␣ ␣ ␣#✓	back	✓$	1111
␣ ␣	back	␣	#11$1111
␣ ␣ ␣	q_2	#	11$1111
␣ ␣ ␣ ␣	q_7	1	1$1111
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_7	$	1111
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣	acc	1	111