

חדו"א 1

סמסטר א' תשפד

שאלות חזרה

שאלה 1 מצאו את סוג נקודת אי רציפות של פונקציה

$$f(x) = \frac{|x+3|}{x+3}.$$

שרטטו את גרף הפונקציה.

שאלה 2 עבור איזה ערכי A הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{4x}, & x \neq 0, \\ A & x = 0 \end{cases}$$

רציפה לכל x ממשי?

שאלה 3 נתונה פונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(\sqrt{a^2+1} \cdot x)}{2x^2} & x < 0 \\ b & x = 0 \\ x+5 & x > 0 \end{cases}$$

(א) עבור אילו ערכי a, b הפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה $x=0$?

(ב) עבור אילו ערכי a, b , $x=0$ היא נקודת אי רציפות ממין ראשון?

(ג) עבור אילו ערכי a, b , $x=0$ היא נקודת אי רציפות?

שאלה 4 הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) סכום של שתי פונקציות זוגיות נותנת פונקציה זוגית.

(ב) סכום של שתי פונקציות אי-זוגיות נותנת פונקציה אי-זוגית.

(ג) מכפלה או מנה של שתי פונקציות זוגיות נותנת פונקציה זוגית.

(ד) מכפלה או מנה של שתי פונקציות אי-זוגיות נותנת פונקציה זוגית.

(ה) מכפלה או מנה של פונקציה זוגית עם פונקציה אי-זוגית נותנת פונקציה זוגית.

שאלה 5 הוכיחו את הטענות הבאות.

- (א) אם $f(x)$ פונקציה עולה ממש ו- $g(x)$ פונקציה עולה ממש אז הפונקציה $(f + g)(x)$ פונקציה עולה ממש.
- (ב) אם $f(x)$ פונקציה יורדת ממש ו- $g(x)$ פונקציה יורדת ממש אז הפונקציה $(f + g)(x)$ פונקציה יורדת ממש.
- (ג) אם $f(x)$ פונקציה עולה ממש בקטע D , ואם $f(x) > 0$ לכל $x \in D$ אזי בקטע D הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ יורדת ממש.
- (ד) אם $f(x)$ פונקציה יורדת ממש בקטע D , ואם $f(x) > 0$ לכל $x \in D$ אזי בקטע D הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ עולה ממש.

שאלה 6 חשבו את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x + 2)}{x^2 - 4}$$

שאלה 7 הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- (א) תני $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה. אם $f(x)$ עולה ממש אז f על \mathbb{R} .
- (ב) נתונה פונקציה $f(x)$. אם $f(x)$ פונקציה ליניארית אשר לא פונקציה קבועה אז $f(x)$ עולה ממש.
- (ג) אם $f(x)$ פונקציה חסומה אז היא גם חח"ע.
- (ד) אם $f(x)$ פונקציה חסומה אז היא גם מונוטונית.

שאלה 8

$$f(x) = |\sqrt{4x + 25}| + 5$$

נתונה הפונקציה

- (א) מצאו את תחום ההגדרה ואת התמונה של הפונקציה $f(x)$.
- (ב) מצאו את הפונקציה ההפוכה ל- $f(x)$.
- (ג) מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של הפונקציה ההפוכה.
- (ד) שרטטו את סקיצות הגרפים של שתי הפונקציות (פונקציה $f(x)$ והפונקציה ההפוכה). על אותה מערכת צירים.
- (ה) שרטטו את הגרף של הפונקציה $f(|x|)$.
- (ו) שרטטו את הגרף של הפונקציה $|f^{-1}(x)|$.

שאלה 9

נתונה הפונקציה $f(x) = |x^2 - 16| + 7$.

(א) מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$.

(ב) מצאו את התמונה של $f(x)$.

(ג) שרטטו את סקיצת הגרף של $f(x)$.

שאלה 10

נתונה פונקציה $f(x) = |\sqrt{9x + 25}| + 3$.

(א) מצאו את תחום ההגדרה ואת התמונה של הפונקציה $f(x)$.

(ב) מצאו את הפונקציה ההפוכה ל- $f(x)$.

(ג) מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של הפונקציה ההפוכה.

(ד) שרטטו את סקיצות הגרפים של שתי הפונקציות (פונקציה $f(x)$ והפונקציה ההפוכה).

(ה) שרטטו את הגרף של הפונקציה $f(|x|)$.

שאלה 11

נתונה פונקציה $f(x) = \frac{x+2}{x-4}$.

(א) מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$.

(ב) בררו את סימני הפונקציה

(ג) תארו את התנהגות הפונקציה סביב נקודות אי הגדרה ובדקו אם יש אסימפטוטה אנכית.

(ד) בררו את התנהגות הפונקציה בתהליכים $x \rightarrow \infty$ ו- $x \rightarrow -\infty$ ומצאו אסימפטוטות אופקיות.

(ה) ציירו את הסקיצה של גרף הפונקציה על סמך התוצאות של הסעיפים

שאלה 12

נתונה פונקציה $f(x) = \frac{3}{2x+6}$.

(א) מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$.

(ב) בררו את סימני הפונקציה

(ג) תארו את התנהגות הפונקציה סביב נקודות אי הגדרה ובדקו אם יש אסימפטוטה אנכית.

(ד) בררו את התנהגות הפונקציה בתהליכים $x \rightarrow \infty$ ו- $x \rightarrow -\infty$ ומצאו אסימפטוטות אופקיות.

(ה) ציירו את הסקיצה של גרף הפונקציה על סמך התוצאות של הסעיפים.

שאלה 13 עבור הפונקציה $f(x) = \frac{24}{4x-8} + 1$

- (א) מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$.
- (ב) מצאו את הנקודות חיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- (ג) בררו את סימני הפונקציה
- (ד) תארו את התנהגות הפונקציה סביב נקודות אי הגדרה ובדקו אם יש אסימפטוטה אנכית.
- (ה) בררו את התנהגות הפונקציה בתהליכים $x \rightarrow \infty$ ו- $x \rightarrow -\infty$ ומצאו אסימפטוטות אופקיות.
- (ו) ציירו את הסקיצה של גרף הפונקציה על סמך התוצאות של הסעיפים.

שאלה 14

(א) חשבו את הגבולות הבאים

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x + 2 \sin x}{\tan x} \quad (2)$$

(ב) מצאו את הגבולות החד צדדיים של הפונקציה

$$f(x) = \frac{4x}{(x-3)^3}$$

בנקודה $x = 3$. האם קיים $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$? נמקו את תשובתכם.

שאלה 15

נתונה פונקציה $f(x) = |\sqrt{x+3}|$

- (א) מצאו את תחום ההגדרה ואת התמונה של הפונקציה $f(x)$.
- (ב) מצאו את הפונקציה ההפוכה של $f(x)$.
- (ג) מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של הפונקציה ההפוכה.
- (ד) שרטטו את סקיצות הגרפים של שתי הפונקציות (פונקציה $f(x)$ והפונקציה ההפוכה).
- (ה) שרטטו את הגרף של הפונקציה $f(|x|)$ ו- $\min(f^{-1}(x), 0)$.

שאלה 16

חשבו את הגבולות הבאים

(א) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+2} \right)^{3x-1}$

(ב) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - \sin 2x}{3x + 3 \sin 4x}$

(ג) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{4^x + 2^x}$

שאלה 17

(א) מצאו את ערכי הפרמטרים a, b עבורם הפונקציה הבאה רציפה לכל x ממשי:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases}$$

(ב) הוכיחו כי מכפלה של שתי פונקציות אי זוגית היא פונקציה זוגית.

שאלה 18

נגדיר פונקציה

$$f(x) = 7^{\frac{1}{4x+12}}.$$

(א) מצאו התנהגות של הפונקציה מסביב לנקודה אי הגדרה.

(ב) חשבו את הגבולות של הפונקציה ב- ∞ וב- $-\infty$.

(ג) היעזרו בסעיפים א' וב' ושרטטו סקיצה של גרף הפונקציה כולל אסימפטוטות אופקיות ואסימפטוטות אנכיות שלה.

שאלה 19

(א) נתונה פונקציה $f(x) = x^2 - 2x$ שרטט את סקיצת הגרף של כל אחת מהפונקציות הבאות:

$$|f(x)|, f(|x|), f(-|x|).$$

(ב) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $y = \sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{8 - x}$.

שאלה 20

(א) הגדרו את המושג "אסימטוטה אנכית של פונקציה $f(x)$ ".

(ב) תנו דוגמה של פונקציה $f(x)$ המ קיימת

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} = \infty.$$

(ג) עבור הפונקציה $f(x) = 2^{\left(\frac{x}{1-x}\right)}$

(1) מצאו את תחום ההגדרה

(2) ברר ואת סימני הפונקציה

(3) מצא ואת נקודות אי הרציפות של $f(x)$ ובררו את סוגן.

(4) בדקו את התנהגות של הפונקציה מסביב נקודות אי-הגדרה ובררו אם לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית.

(5) בררו את התנהגות הפונקציה בתהליכים $x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$

(6) ציירו את הסקיצה של גרף הפונקציה על סמך התוצאות של הסעיפים הקודמים.

שאלה 21 (בוחר תשע"ג סמסטר א')

חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$

(ב) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - \sin(x)}{\sin(4x) - \sin(2x)}$

שאלה 22

נתונה פונקציה $f(x) = \sqrt{2x - 6}$

(א) מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של הפונקציה $f(x)$.

(ב) מצאו את הפונקציה ההפוכה ל- $f(x)$.

(ג) מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של הפונקציה ההפוכה.

(ד) סרטטו את סקיצות הגרפים של שתי הפונקציות (פונקציה $f(x)$ והפונקציה ההפוכה).

שאלה 23

חשבו את הגבולות הבאים

(א) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 5x} - x)$

(ב) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) + \sin x}{\sin x - \sin(2x)}$

שאלה 24

(א) חשבו את הגבולות הבאים

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2 + 5x + 6} \right)^{2x+1} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot 5^x + 3^x}{3 \cdot 5^x + 2^x} \right) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4 \sin(3x) + \sin(5x)}{x + \tan(8x)} \right) \quad (3)$$

(ב) נתונה הפונקציה $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x \leq 2 \\ 3x - 5 & x > 2 \end{cases}$. האם הגבול $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ קיים? נמקו את תשובתכם.

שאלה 25 לאילו ערכים אי-שליליים a יש לפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + a}$ נקודת אי-רציפות סליקה?

שאלה 26

נתונה פונקציה $f(x) = |\sqrt{x+3}| - 4$.

(א) מצאו את תחום ההגדרה ואת התמונה של הפונקציה $f(x)$.

(ב) מצאו את הפונקציה ההפוכה ל- $f(x)$.

(ג) מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של הפונקציה ההפוכה.

(ד) שרטטו את סקיצות הגרפים של שתי הפונקציות (פונקציה $f(x)$ והפונקציה ההפוכה).

(ה) שרטטו את הגרף של הפונקציה $|f(x)|$.

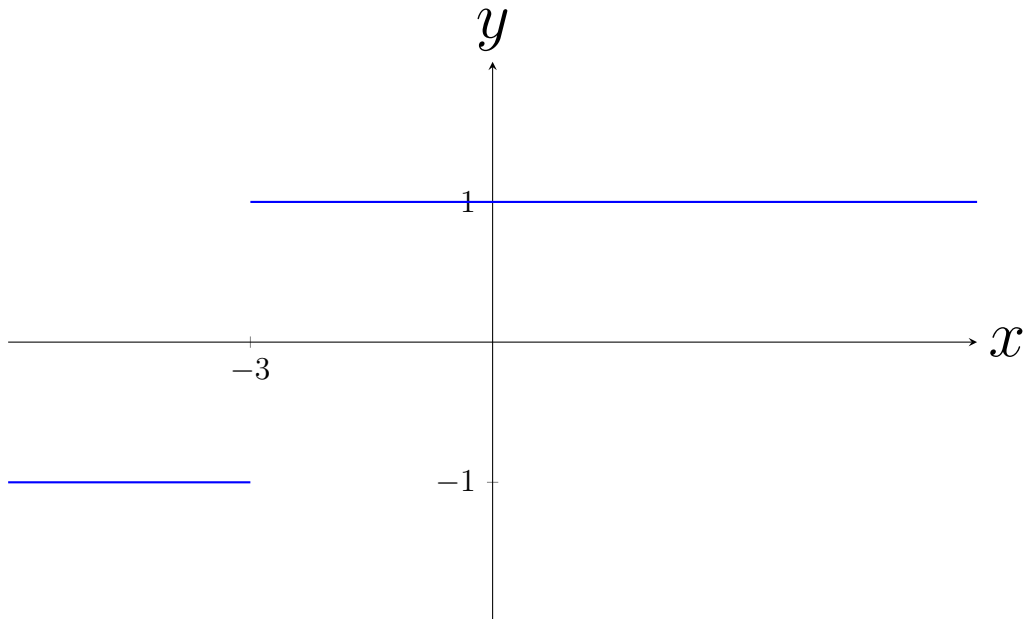
פתרונות

שאלה 1

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{|x+3|}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x+3}{x+3} = 1 ,$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{|x+3|}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{-(x+3)}{x+3} = -1 ,$$

$x = -3$ נקודת אי רציפות ממין ראשון.



$$f(x) = \frac{|x+3|}{x+3}$$

שאלה 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{4x} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{4x(\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{4(\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= \frac{1}{4(\sqrt{0^+ + 1} + 1)} \\ &= \frac{1}{8} . \end{aligned}$$

באותו חישוב

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{8} .$$

לכן

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \stackrel{!}{=} f(0) \Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{8} = A$$

לפיכך $f(x)$ רציפה בנקודה $x = 0$ עבור $A = \frac{1}{8}$.

שאלה 3

(א) נבדוק רציפות בנקודת תפר ב- $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2(\sqrt{a^2+1} \cdot x)}{2x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{\sin(\sqrt{a^2+1} \cdot x)}{x} \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\left(\frac{\sin(\sqrt{a^2+1} \cdot x)}{\sqrt{a^2+1} \cdot x} \right) \cdot \sqrt{a^2+1} \right]^2 \\ &= \frac{\sqrt{a^2+1}}{2}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 5) = 5.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \stackrel{!}{=} f(0) \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2+1}}{2} = 5 = b \Rightarrow b = 5, \frac{\sqrt{a^2+1}}{2} = 5$$

לכן

$$b = 5, \frac{\sqrt{a^2+1}}{2} = 5 \Rightarrow a^2 + 1 = 10 \Rightarrow a^2 = 9, a = \pm 3.$$

תשובה סופית: $f(x)$ רציפה בנקודה $x = 0$ עבור $a = 3$ או -3 וגם $b = 5$.

(ב) הגדרת נק' אי רציפות ממין ראשון:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

הרי

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow \frac{a^2+5}{2} \neq 5 \Rightarrow a^2+1 \neq 10 \Rightarrow a^2 \neq 9 \Rightarrow a \neq 3, -3.$$

לכן $x = 0$ תהיה נקודת אי-רציפות ממין ראשון אם $a \neq 3, -3$ לכל b .

(ג) הגדרת נק' אי רציפות ממין סליקה:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a).$$

הרי

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq f(0) \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2+1}}{2} = 5 \neq b \Rightarrow a = \pm 3, b \neq 5.$$

ז"א $x = 0$ תהיה נקודת אי-רציפות סליקה אם $a = \pm 3$ ו- $b \neq 5$.

שאלה 4

(א) נתון: f, g פונקציות זוגיות.

צריך להוכיח: $f + g$ פונקציה זוגית.

הוכחה:

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) \stackrel{\text{כי } f, g \text{ זוגיות}}{=} f(x) + g(x) = (f + g)(x).$$

(ב) נתון: f, g פונקציות אי-זוגיות.

צריך להוכיח: $f + g$ פונקציה אי-זוגית.

הוכחה:

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) \stackrel{\text{כי } f, g \text{ אי-זוגיות}}{=} -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x)) = -(f + g)(x).$$

(ג) נתון: f, g פונקציות זוגיות.

צריך להוכיח: $f \cdot g$ פונקציה זוגית ו- $\frac{f}{g}$ פונקציה זוגית.

הוכחה:

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) \stackrel{\text{כי } f, g \text{ זוגיות}}{=} f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x).$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-x) = \left(\frac{f(-x)}{g(-x)}\right) \stackrel{\text{כי } f, g \text{ זוגיות}}{=} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \left(\frac{f}{g}\right)(x).$$

(ד) נתון: f, g פונקציות אי-זוגיות.

צריך להוכיח: $f \cdot g$ פונקציה זוגית ו- $\frac{f}{g}$ פונקציה זוגית.

הוכחה:

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) \stackrel{\text{כי } f, g \text{ אי-זוגיות}}{=} [-f(x)] \cdot [-g(x)] = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x).$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-x) = \left(\frac{f(-x)}{g(-x)}\right) \stackrel{\text{כי } f, g \text{ אי-זוגיות}}{=} \left(\frac{-f(x)}{-g(x)}\right) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \left(\frac{f}{g}\right)(x).$$

(ה) דוגמה נגדית:

$$f(x) = x^2 \text{ פונקציה זוגית.}$$

$$g(x) = x \text{ פונקציה אי-זוגית.}$$

$$(f \cdot g)(x) = x^3 \text{ פונקציה אי-זוגית.}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x \text{ פונקציה אי-זוגית.}$$

שאלה 5

(א) נתון: f, g פונקציות עולות ממש.

צריך להוכיח: $f + g$ פונקציה עולה ממש.

הוכחה:

f עולה ממש אז

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b) .$$

g עולה ממש אז

$$a < b \Rightarrow g(a) < g(b) .$$

לפיכך

$$f(a) + g(a) < f(b) + g(b) .$$

קיבלנו כי

$$a < b \Rightarrow (f + g)(a) < (f + g)(b)$$

ז"א הפונקציה $f + g$ עולה ממש.

(ב)

נתון: f, g פונקציות יורדות ממש.

צריך להוכיח: $f + g$ פונקציה יורדת ממש.

הוכחה:

f יורדת ממש אז

$$a < b \Rightarrow f(a) > f(b) .$$

g יורדת ממש אז

$$a < b \Rightarrow g(a) > g(b) .$$

לפיכך

$$f(a) + g(a) > f(b) + g(b) .$$

קיבלנו כי

$$a < b \Rightarrow (f + g)(a) > (f + g)(b)$$

ז"א הפונקציה $f + g$ יורדת ממש.

(ג)

נתון: $f(x)$ עולה ממש בקטע D , ו- $f(x) > 0$ לכל $x \in D$.

צ"ל: $\frac{1}{f(x)}$ יורדת ממש בקטע D .

הוכחה:

f עולה ממש בקטע D . לכן לכל $a, b \in D$

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b) .$$

לכל $x \in D$ $f(x) > 0$ לכן

$$a < b \Rightarrow \frac{1}{f(a)} > \frac{1}{f(b)} .$$

ז"א הפונקציה $\left(\frac{1}{f}\right)(x)$ יורדת ממש בקטע D .

(ד) נתון: $f(x)$ יורדת ממש בתחום D , ו- $f(x) > 0$ לכל $x \in D$.

צ"ל: $\frac{1}{f(x)}$ עולה ממש בתחום D .

הוכחה:

f יורדת ממש בקטע D . לכן לכל $a, b \in D$:

$$a < b \Rightarrow f(a) > f(b) .$$

לכל $x \in D$ $f(x) > 0$ לכן

$$a < b \Rightarrow \frac{1}{f(a)} < \frac{1}{f(b)} .$$

ז"א הפונקציה $\left(\frac{1}{f}\right)(x)$ עולה ממש בתחום D .

שאלה 6

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x^2-4} &= \left[\frac{0}{0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x-2} \cdot \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x+2} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 1 \\ &= -\frac{1}{4} . \end{aligned}$$

שאלה 7

(א) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$f(x) = e^x .$$

f עולה ממש אבל f לא על \mathbb{R} . הרי

$$\text{Im}(f) = (0, \infty) \neq \mathbb{R} .$$

(ב) הטענה נכונה. הוכחה:

$f(x)$ לינארית ולא פונקציה קבועה. ז"א הצורה הכללית של הפונקציה הינה

$$f(x) = mx + n , \quad m \neq 0 .$$

$$m \neq 0 \text{ או } m > 0 \text{ או } m < 0.$$

נניח כי $m > 0$. נוכיח כי f עולה ממש, דרך השלילה.

נניח כי f לא עולה ממש. אז קיימים $a \neq b \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$a < b \Rightarrow f(a) \not\leq f(b).$$

$$\text{נציב } f(x) = mx + b:$$

$$a < b \Rightarrow ma + n \not\leq mb + n$$

ז"א

$$a < b \Rightarrow ma \not\leq mb$$

$m > 0$ אז נחלק ב- m ונקבל

$$a < b \Rightarrow a \not\leq b$$

בסתירה לכך ש- $a < b$. לכן אם $f(x) = mx + n$ ($m > 0$) אז f עולה ממש.

נניח כי $m < 0$. נוכיח כי f יורדת ממש, דרך השלילה.

נניח כי f לא יורדת ממש. אז קיימים $a \neq b \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$a < b \Rightarrow f(a) \not\geq f(b).$$

$$\text{נציב } f(x) = mx + b:$$

$$a < b \Rightarrow ma + n \not\geq mb + n$$

ז"א

$$a < b \Rightarrow ma \not\geq mb$$

$m < 0$ אז נחלק ב- m ונקבל

$$a < b \Rightarrow a \not\geq b$$

בסתירה לכך ש- $a < b$. לכן אם $f(x) = mx + n$ ($m < 0$) אז f יורדת ממש.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ הפונקציה $f(x) = \sin x$.

$f(x)$ חסומה. הרי:

$$-1 \leq \sin x \leq 1.$$

אבל $f(x)$ לא חח"ע. הרי:

$$\sin(0) = \sin(\pi) = 0.$$

(ג)

טענה לא נכונה. הרי בסעיף הקודם הוכחנו כי אם פונקציה חסומה היא לא בהכרח חח"ע, למשל

$f(x) = \sin x$ חסומה אבל לא חח"ע.

מכיוון שפונקציה חח"ע אם ורק אם היא מונוטונית, לכן אם פונקציה חסומה היא לא בהכרח מונוטונית.

שאלה 8

(א)

$$4x + 25 \stackrel{!}{\geq} 0 \Rightarrow x \geq -\frac{25}{4}.$$

$$\text{Dom}(f) = \left[-\frac{25}{4}, \infty\right) \text{ לכן}$$

$$\left|\sqrt{4x+25}\right| \geq 0 \Rightarrow \left|\sqrt{4x+25}\right| + 5 \geq 5 \Rightarrow f(x) \geq 5.$$

$$\text{Im}(f) = [5, \infty) \text{ לכן}$$

(ב)

$$\left|\sqrt{4x+25}\right| + 5 = y$$

$$\left|\sqrt{4x+25}\right| = y - 5$$

$$4x + 25 = (y - 5)^2$$

$$4x = (y - 5)^2 - 25$$

$$x = \frac{1}{4}((y - 5)^2 - 25)$$

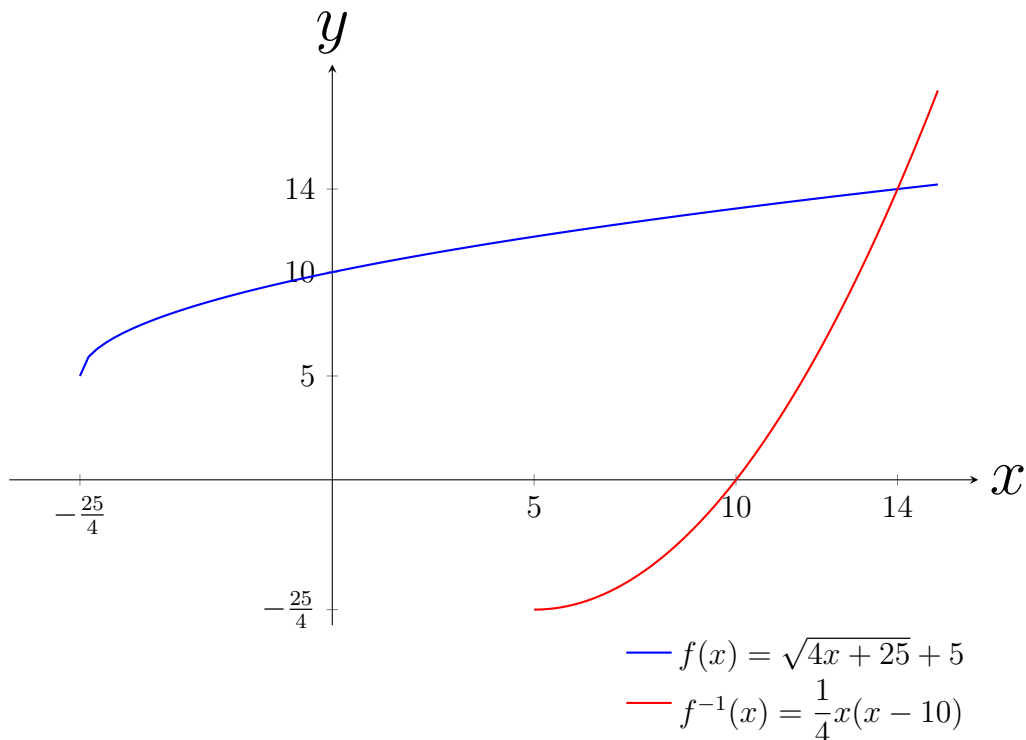
לפיכך

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{4}((x - 5)^2 - 25) = \frac{1}{4}(x^2 - 10x) = \frac{1}{4}x(x - 10)$$

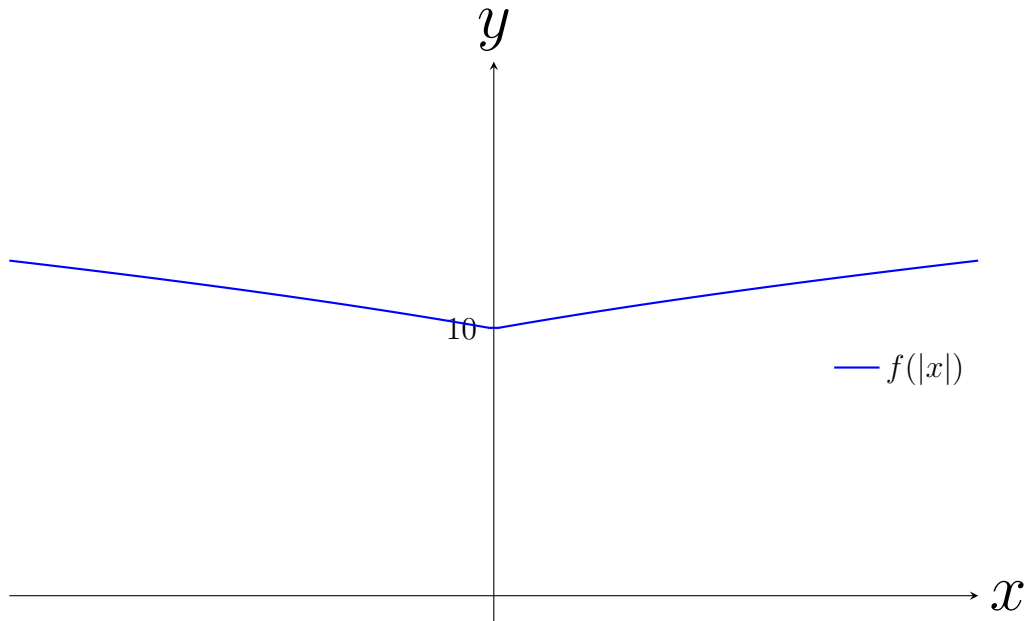
$$\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Im}(f) = [5, \infty) \quad (ג)$$

$$\text{Im}(f^{-1}) = \text{Dom}(f) = \left[-\frac{25}{4}, \infty\right)$$

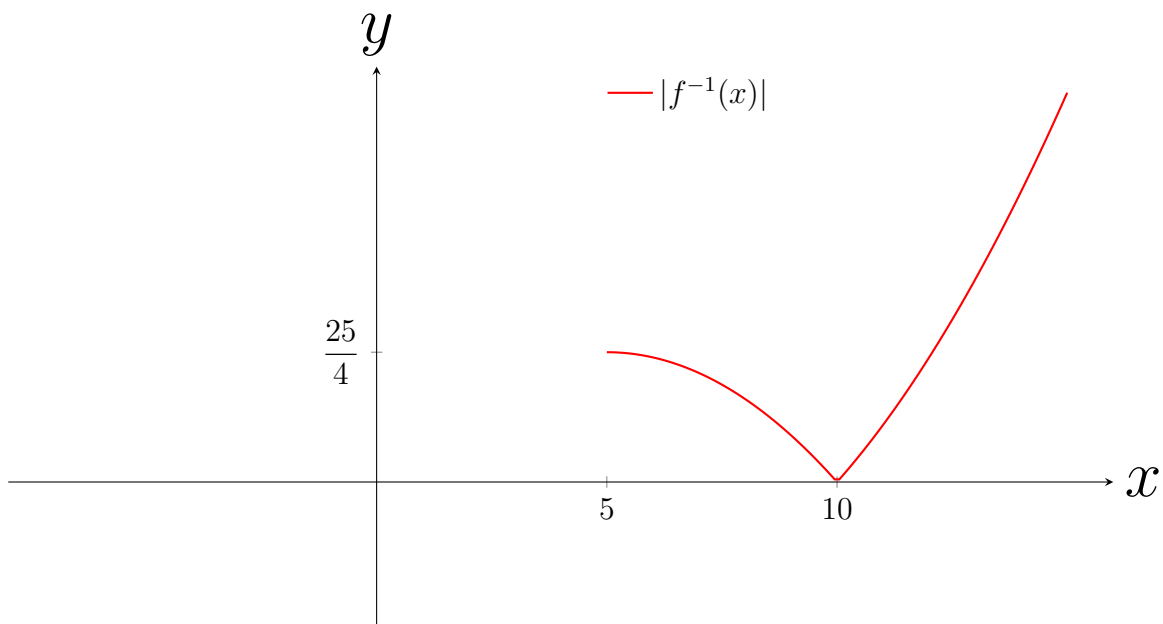
(ד)



(ה)



(ו)



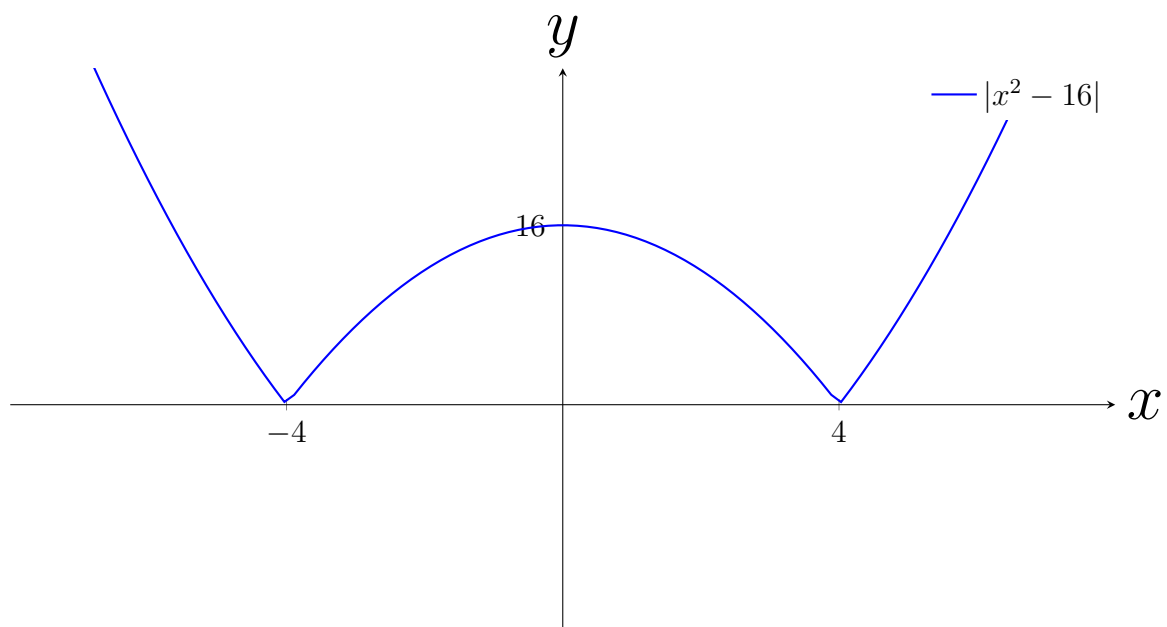
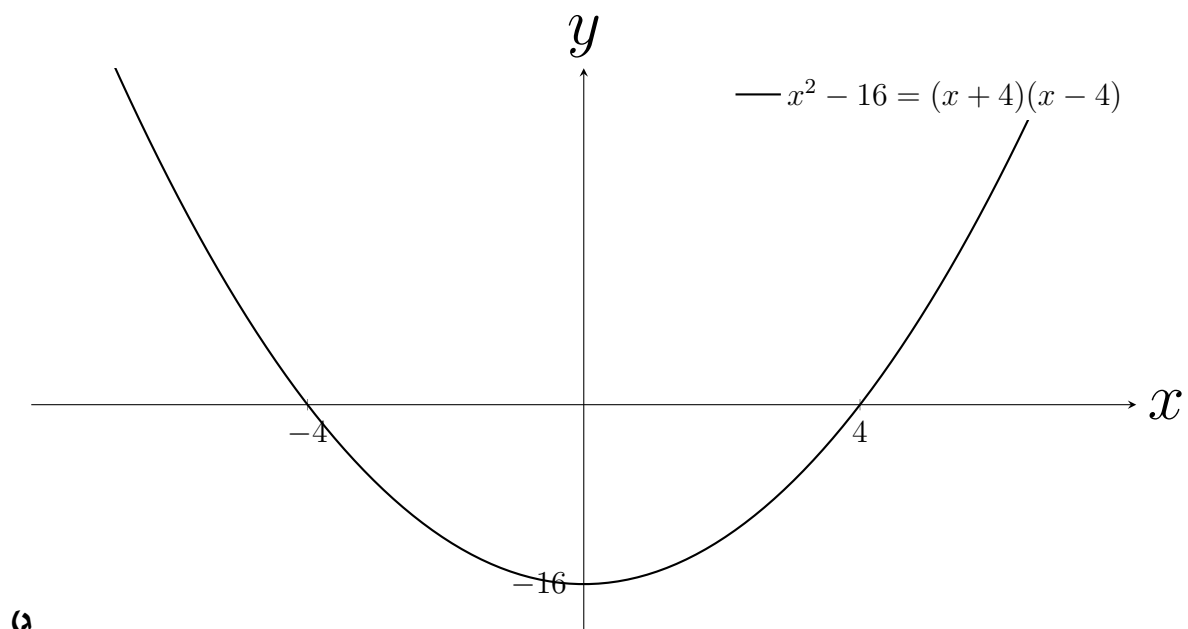
שאלה 9

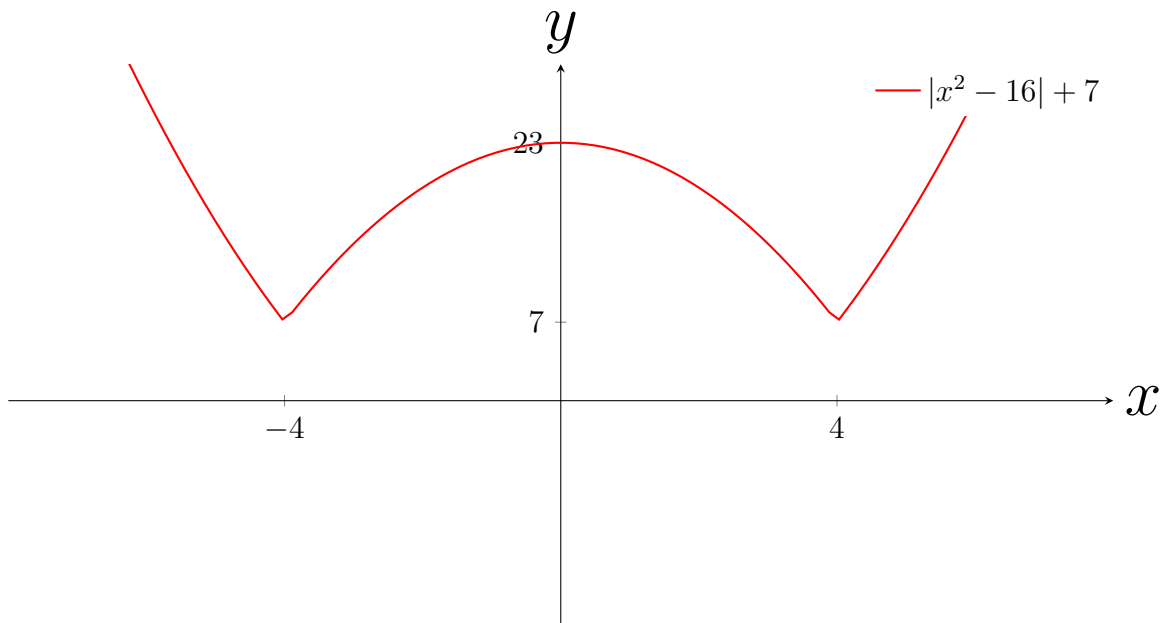
(א) תחום ההגדרה: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(ב) תמונה:

$$|x^2 - 16| \geq 0 \Rightarrow |x^2 - 16| + 7 \geq 7 \Rightarrow f(x) \geq 7.$$

לפיכך $\text{Im}(f) = [7, \infty)$.



**שאלה 10**

$$\text{Dom}(f) = \left[-\frac{25}{9}, \infty \right) \quad \text{א}$$

$$\text{Im}(f) = [3, \infty)$$

ב

$$\left| \sqrt{9x + 25} \right| + 3 = y$$

$$\left| \sqrt{9x + 25} \right| = y - 3$$

$$9x + 25 = (y - 3)^2$$

$$9x = (y - 3)^2 - 25 = y^2 - 6y + 9 - 25 = y^2 - 6y - 16 = (y - 8)(y + 2)$$

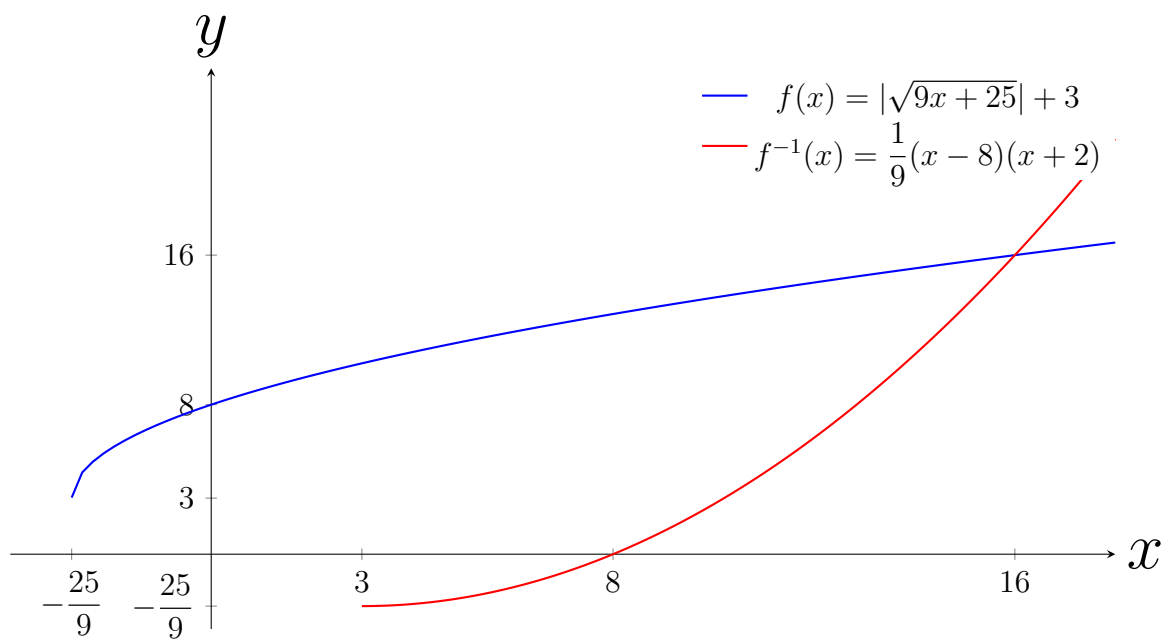
$$x = \frac{(y - 8)(y + 2)}{9}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{9} (x^2 - 6x - 16) = \frac{1}{9} (x - 8)(x + 2) .$$

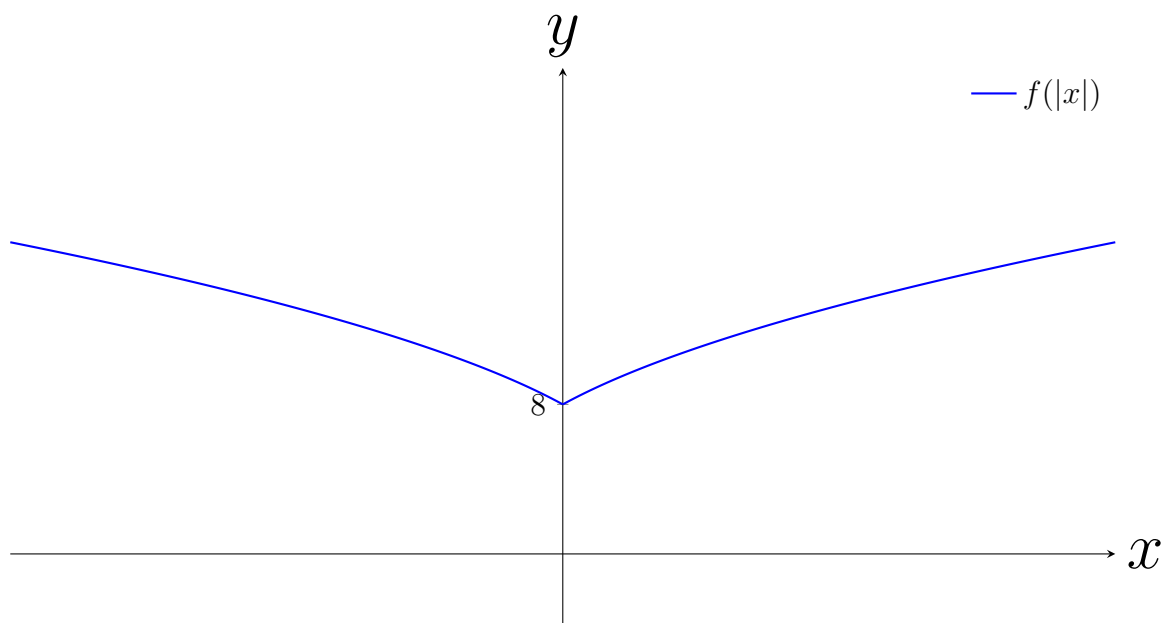
$$\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Im}(f) = [3, \infty) \quad \text{ג}$$

$$\text{Im}(f^{-1}) = \text{Dom}(f) = \left[-\frac{25}{9}, \infty \right)$$

ד



(ה)



שאלה 11

$\text{Dom}(f) = \{x \neq 4\}$ (א)

(ב)

x	$x < -2$	$-2 < x < 4$	$x > 4$
$f(x)$	+	-	+

(ג) יש נקודת אי-הגדרה ב- $x = 4$.

בנקודה אי-הגדרה יש אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x+2}{x-4} = \frac{6}{4^- - 4} = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x+2}{x-4} = \frac{6}{4^+ - 4} = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

לפיכך יש אסימפטוטה אנכית ב- $x = 4$.

(ד) אם $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ כאשר A מספר סופי אומרים כי $y = A$ אסימפטוטה אופקית ב- ∞ .

אם $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$ כאשר B מספר סופי אומרים כי $y = B$ אסימפטוטה אופקית ב- $-\infty$.

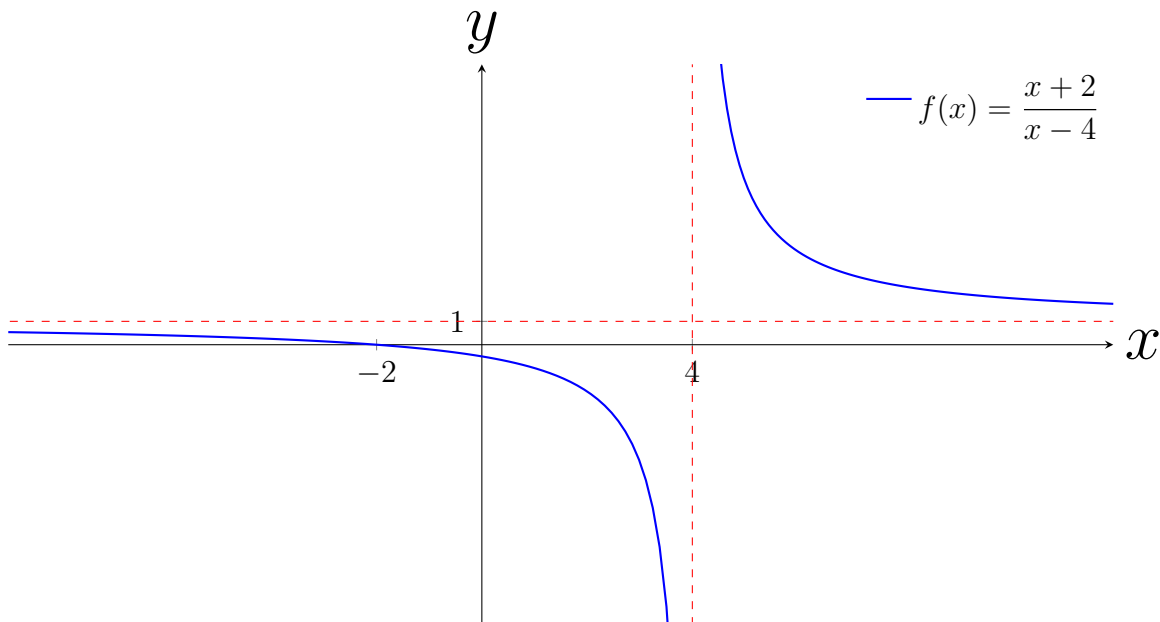
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x-4} = 1,$$

לפיכך $y = 1$ אסימפטוטה אופקית ב- ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x-4} = 1.$$

לפיכך $y = 1$ אסימפטוטה אופקית ב- $-\infty$.

(ה)



שאלה 12

(א) $\text{Dom}(f) = \{x \neq -3\}$. $f(x) = \frac{3}{2x+6} = \frac{3}{2(x+3)}$

(ב)

x	$x < -3$	$x > -3$
$f(x)$	$-$	$+$

(ג) יש נקודת אי-הגדרה ב- $x = -3$.

בנקודה אי-הגדרה יש אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{3}{2(x+3)} = \frac{3}{2(-3^-+3)} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{3}{2(x+3)} = \frac{3}{2(-3^++3)} = \frac{3}{0^+} = \infty$$

לפיכך יש אסימפטוטה אנכית ב- $x = -3$.(ד) אם $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ כאשר A מספר סופי אומרים כי $y = A$ אסימפטוטה אופקית ב- ∞ .אם $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$ כאשר B מספר סופי אומרים כי $y = B$ אסימפטוטה אופקית ב- $-\infty$.

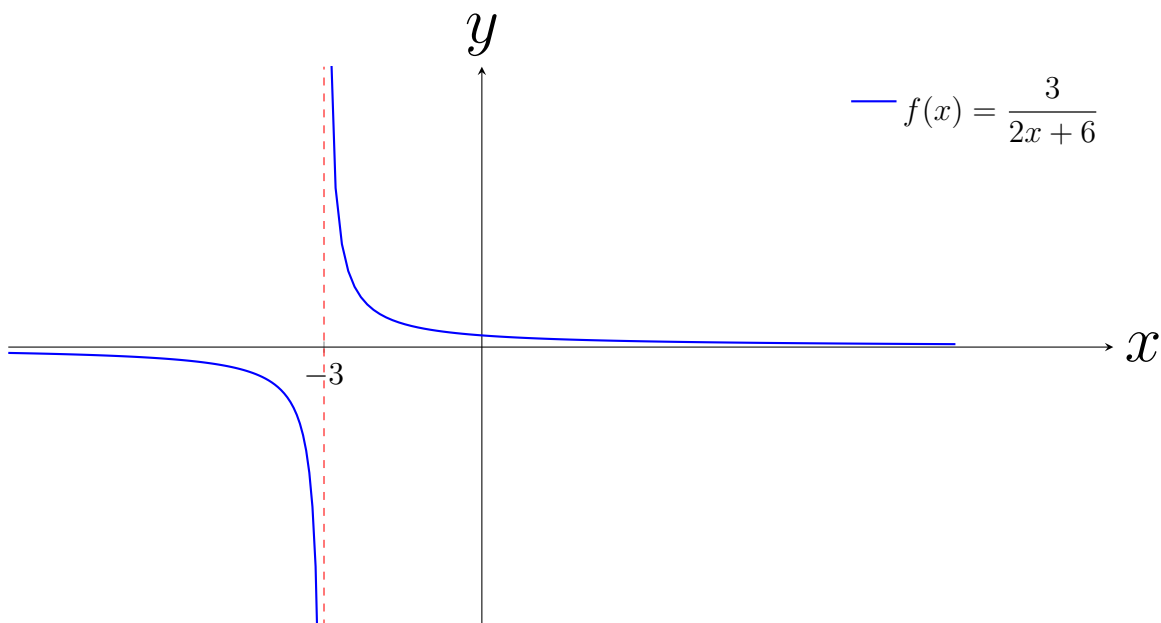
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{2(x+3)} = 0 ,$$

לפיכך $y = 0$ אסימפטוטה אופקית ב- ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{2(x+3)} = 0 .$$

לפיכך $y = 0$ אסימפטוטה אופקית ב- $-\infty$.

(ה)



שאלה 13

(א) תחום ההגדרה:

$$4x - 8 \neq 0 \Rightarrow 4x \neq 8 \Rightarrow x \neq 2 .$$

לפיכך: $\text{Dom}(f) = \{x \neq 2\}$.

(ב) נקודות חיתוך עם ציר ה- x :

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{24}{4x - 8} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{24}{4x - 8} = -1 \Rightarrow 24 = -4x + 8 \Rightarrow 16 = -4x \Rightarrow x = -4 .$$

נקודות חיתוך עם ציר ה- y :

$$f(0) = \frac{24}{-8} + 1 = -2 .$$

(ג) סימני הפונקציה: נציב מספר קטן מ -10 :

$$f(-10) = \frac{24}{-40 - 8} + 1 = \frac{24}{-48} + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} > 0$$

נציב מספר גדול מ -2 :

$$f(-2) = \frac{24}{-12 - 8} + 1 = \frac{24}{-16} + 1 = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2} < 0$$

x	$x < -4$	$x > -4$
$f(x)$	+	-

יש נקודת אי-הגדרה ב- $x = 2$.

(ד) בנקודה אי-הגדרה יש אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{24}{4x - 8} + 1 \right) = \frac{24}{4 \cdot 2^+ - 8} + 1 = \frac{24}{8^+ - 8} + 1 = \frac{24}{0^+} + 1 = \infty + 1 = \infty .$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{24}{4x - 8} + 1 \right) = \frac{24}{4 \cdot 2^- - 8} + 1 = \frac{24}{8^- - 8} + 1 = \frac{24}{0^-} + 1 = -\infty + 1 = -\infty .$$

לפיכך יש אסימפטוטה אנכית ב- $x = 2$.

(ה) אם $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ כאשר A מספר סופי אומרים כי $y = A$ אסימפטוטה אופקית ב- ∞ .

אם $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$ כאשר B מספר סופי אומרים כי $y = B$ אסימפטוטה אופקית ב- $-\infty$.

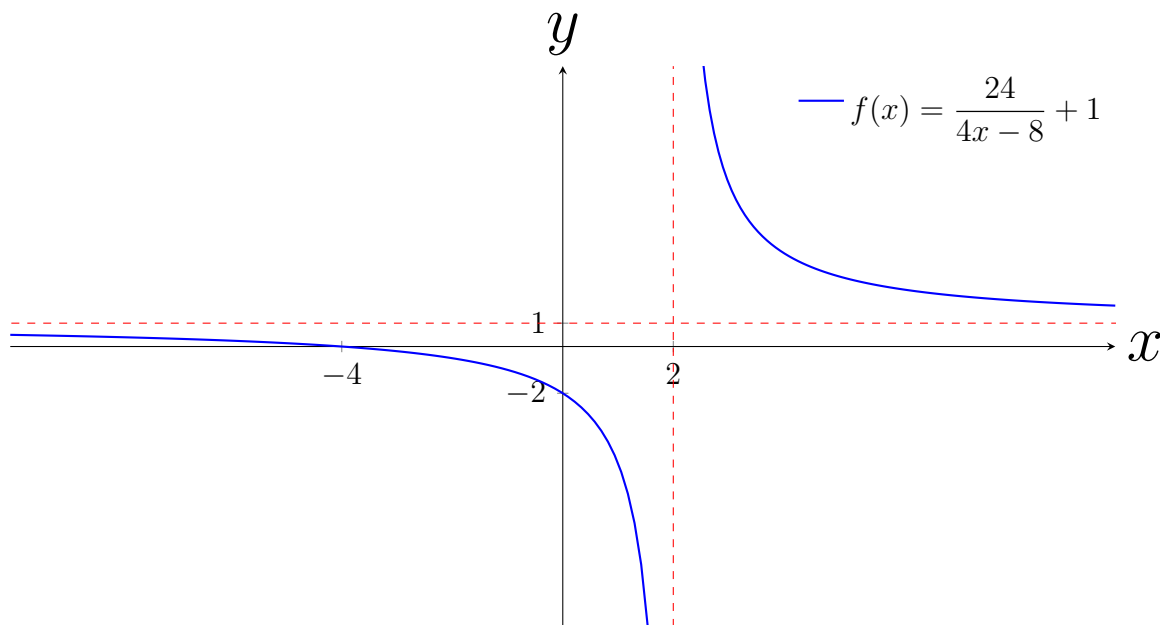
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{24}{4x - 8} + 1 \right) = \frac{24}{4 \cdot \infty - 8} + 1 = \frac{24}{\infty - 8} + 1 = \frac{24}{\infty} + 1 = 0^+ + 1 = 1^+$$

לפיכך $y = 1$ אסימפטוטה אופקית ב- ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{24}{4x-8} + 1 \right) = \frac{24}{4 \cdot (-\infty) - 8} + 1 = \frac{24}{-\infty - 8} + 1 = \frac{24}{-\infty} + 1 = 0^- + 1 = 1^-$$

לפיכך $y = 1$ אסימפטוטה אופקית ב- $-\infty$.

(1)



שאלה 14

(א) (1)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x+3}{2x+1} - 1 \right)^{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x+3-2x-1}{2x+1} \right)^{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x+1} \right)^{\frac{2x+1}{2} \cdot \frac{2}{2x+1} \cdot (x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{2x+1} \right)^{\frac{2x+1}{2}} \right]^{\frac{2}{2x+1} \cdot (x+1)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x+1)}{2x+1}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+2}{2x+1}} \\ &= e^1 = e. \end{aligned}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x + 2 \sin x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{4x+2 \sin x}{x} \right)}{\left(\frac{\tan x}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(4 + 2 \cdot \frac{\sin x}{x} \right)}{\left(\frac{\tan x}{x} \right)} = \frac{\left(4 + 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)}{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \right)} = \frac{4 + 2 \cdot 1}{1} = 6.$$

(ב)

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{4x}{(x-3)^3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{4 \cdot 3}{(x-3)^3} = 12 \cdot \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x-3)^3} = 12 \cdot \left(\frac{1}{(0^-)^3} \right) = \frac{12}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{4x}{(x-3)^3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{4 \cdot 3}{(x-3)^3} = 12 \cdot \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-3)^3} = 12 \cdot \left(\frac{1}{(0^+)^3} \right) = \frac{12}{0^+} = +\infty .$$

הגבול $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ לא קיים בגלל שהגבולות החד צדדים לא קיימים. לפיכך כך ש $x = 3$ נקודת אי-רציפות מסוג שני.

שאלה 15

(א) תחום הגדרה:

$$\text{Dom}(f) = \{x \geq 3\} = [3, \infty) .$$

תמונה:

$$|\sqrt{x+3}| \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 .$$

$$\text{Im}(f) = [0, \infty) \text{ לפיכך}$$

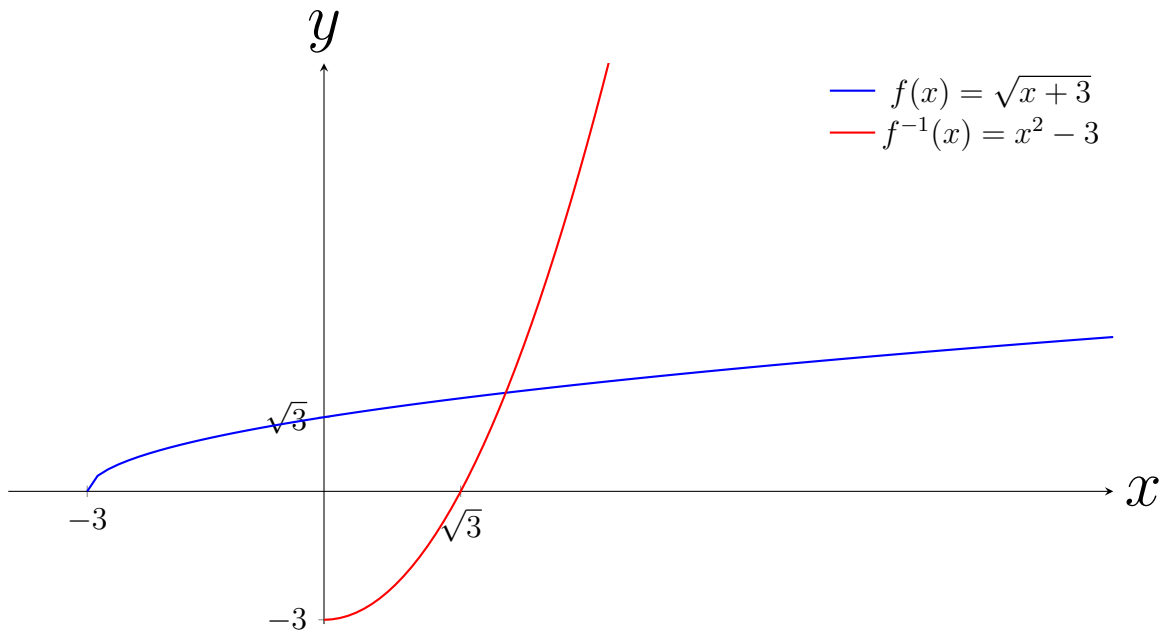
(ב)

$$\begin{aligned} |\sqrt{x+3}| &= y \\ x+3 &= y^2 \\ x &= y^2 - 3 \\ f^{-1}(x) &= x^2 - 3 . \end{aligned}$$

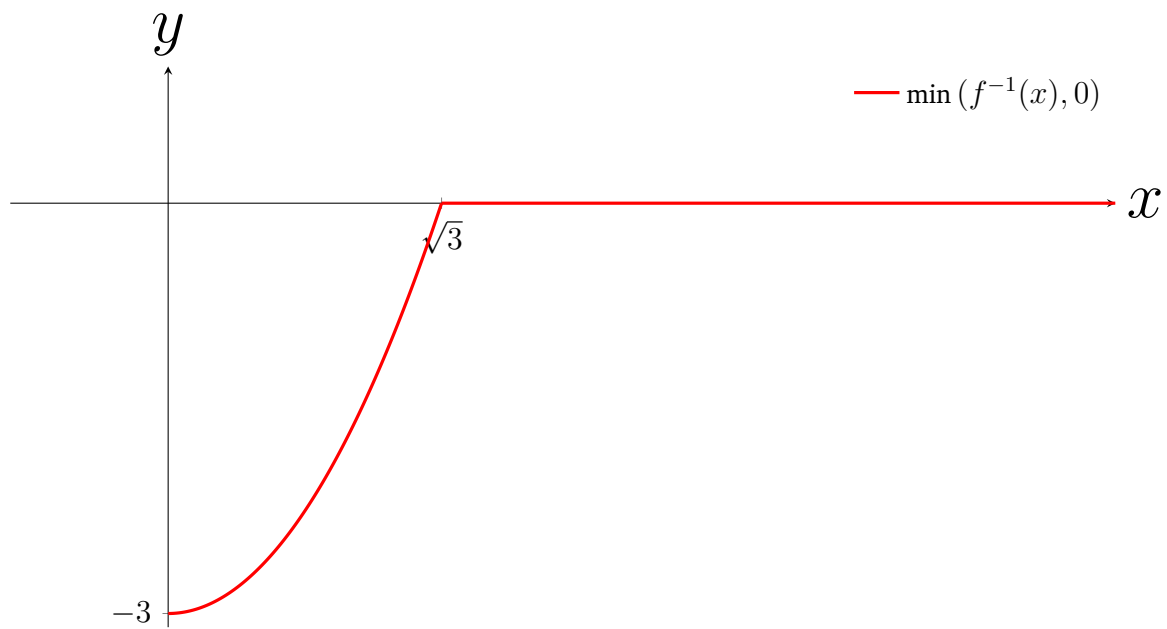
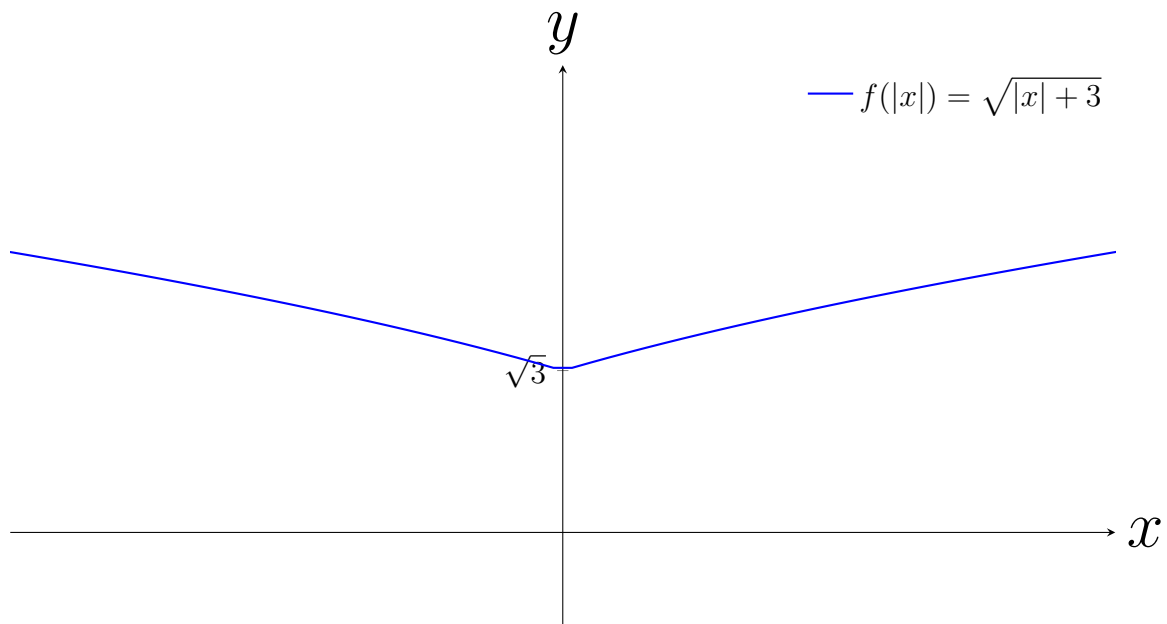
$$\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Im}(f) = [0, \infty) \quad \text{ג}$$

$$\text{Im}(f^{-1}) = \text{Dom}(f) = [-3, \infty)$$

(ד)



(ה)

שאלה 16

(א)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+2} \right)^{3x-1} = 1^\infty$$

לא מוגדר.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+2} \right)^{3x-1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x-1}{3x+2} - 1 \right)^{3x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x-1-3x-2}{3x+2} \right)^{3x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{3x+2} \right)^{3x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{3x+2} \right)^{\left(\frac{3x+2}{-3}\right) \left(\frac{-3}{3x+2}\right) (3x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-3}{3x+2} \right)^{\frac{3x+2}{-3}} \right]^{\frac{-3(3x-1)}{3x+2}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-9x+3}{3x+2}} \\ &= e^{-3}.\end{aligned}$$

(ב)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - \sin 2x}{3x + 3 \sin 4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{5x - \sin 2x}{x} \right)}{\left(\frac{3x + 3 \sin 4x}{x} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(5 - \frac{\sin 2x}{x} \right)}{\left(3 + \frac{3 \sin 4x}{x} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(5 - 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \right)}{\left(3 + 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sin 4x}{4x} \right)} \\ &= \frac{\left(5 - 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \right)}{\left(3 + 12 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \right)} \\ &= \frac{(5 - 2 \cdot 1)}{(3 + 12 \cdot 1)} \\ &= \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

(ג)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{4^x + 2^x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2^x}{4^x} \right)}{\left(\frac{4^x + 2^x}{4^x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2^x}{4^x} \right)}{\left(\frac{4^x}{4^x} + \frac{2^x}{4^x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{4} \right)^x}{\left(\frac{4}{4} \right)^x + \left(\frac{2}{4} \right)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{4} \right)^x}{1 + \left(\frac{2}{4} \right)^x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{4} \right)^x}{1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{4} \right)^x} \\ &= \frac{0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0.\end{aligned}$$

שאלה 17

(א) נדרש רציפות בנקודת תפר $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax + b) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \stackrel{!}{=} f(0) \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{2} = b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{2} .$$

נדרש רציפות בנקודת תפר $x = \pi$:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin(x)}{2x} = \frac{\sin(\pi)}{2\pi} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} a \cos x = a \cos(\pi) = -a$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) \stackrel{!}{=} f(\pi) \quad \Rightarrow \quad 0 = -a = -a \quad \Rightarrow \quad a = 0 .$$

נתון: $f(x)$, פונקציות אי זוגיות.

צריך להוכיח: $(f \cdot g)(x)$ פונקציה זוגית.

הוכחה:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(-x) &= f(-x) \cdot g(-x) \\ &= f(x) \cdot g(x) \\ &= [-f(x)] \cdot [-g(x)] \end{aligned}$$

(בלל ש- $f(-x) = -f(x)$ ו- $g(-x) = -g(x)$)

$$\begin{aligned} &= [f(x)] \cdot [g(x)] \\ &= f(x)g(x) \\ &= (f \cdot g)(x) \end{aligned}$$

לפיכך $f \cdot g$ פונקציה זוגית.

שאלה 18

(א) נרשום $f(x)$ בצורה

$$f(x) = 7^{\frac{1}{4x+12}} = 7^{\frac{1}{4(x+3)}} .$$

ל- $f(x)$ יש נקודת אי-הגדרה ב- $x = -3$.

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \left(7^{\frac{1}{4(x+3)}} \right) = 7^{\frac{1}{4 \cdot 0^-}} = 7^{\frac{1}{0^-}} = 7^{-\infty} = 0 .$$

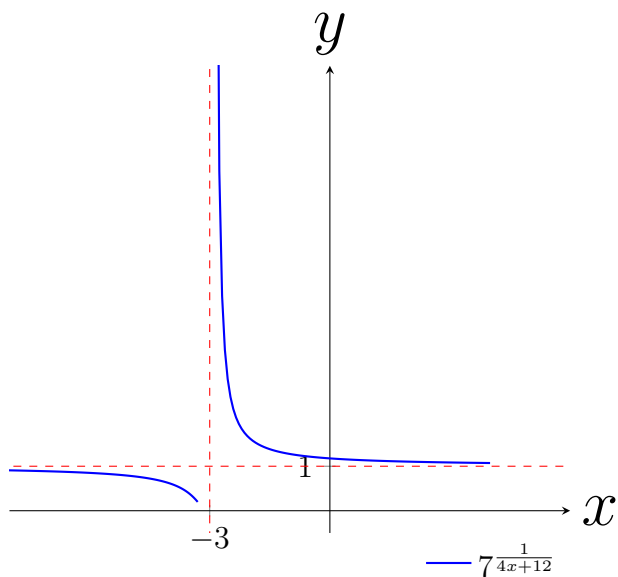
$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \left(7^{\frac{1}{4(x+3)}} \right) = 7^{\frac{1}{4 \cdot 0^+}} = 7^{\frac{1}{0^+}} = 7^{\infty} = \infty .$$

(ב)

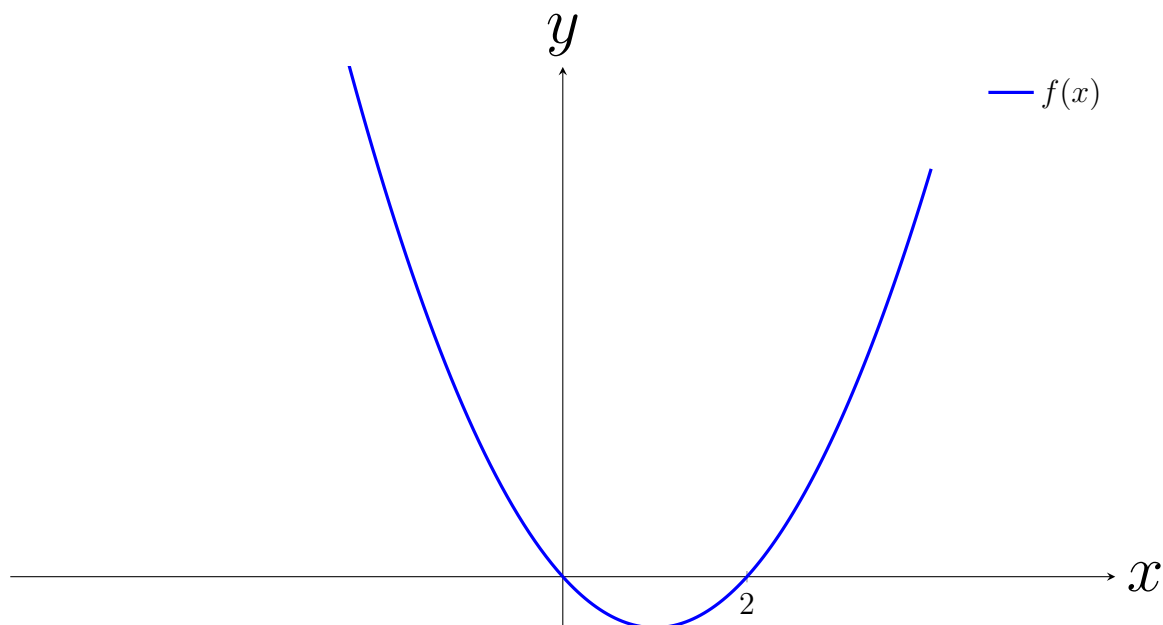
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(7^{\frac{1}{4(x+3)}} \right) = 7^{\frac{1}{4(\infty+3)}} = 7^{\frac{1}{4 \cdot \infty}} = 7^{\frac{1}{\infty}} = 7^0 = 1 .$$

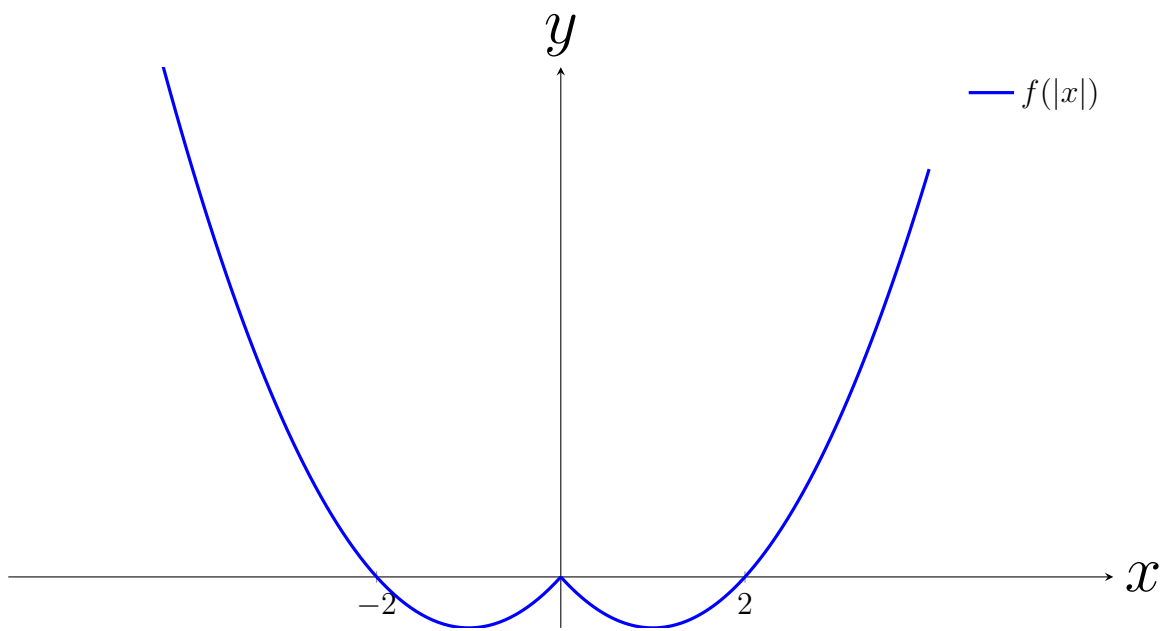
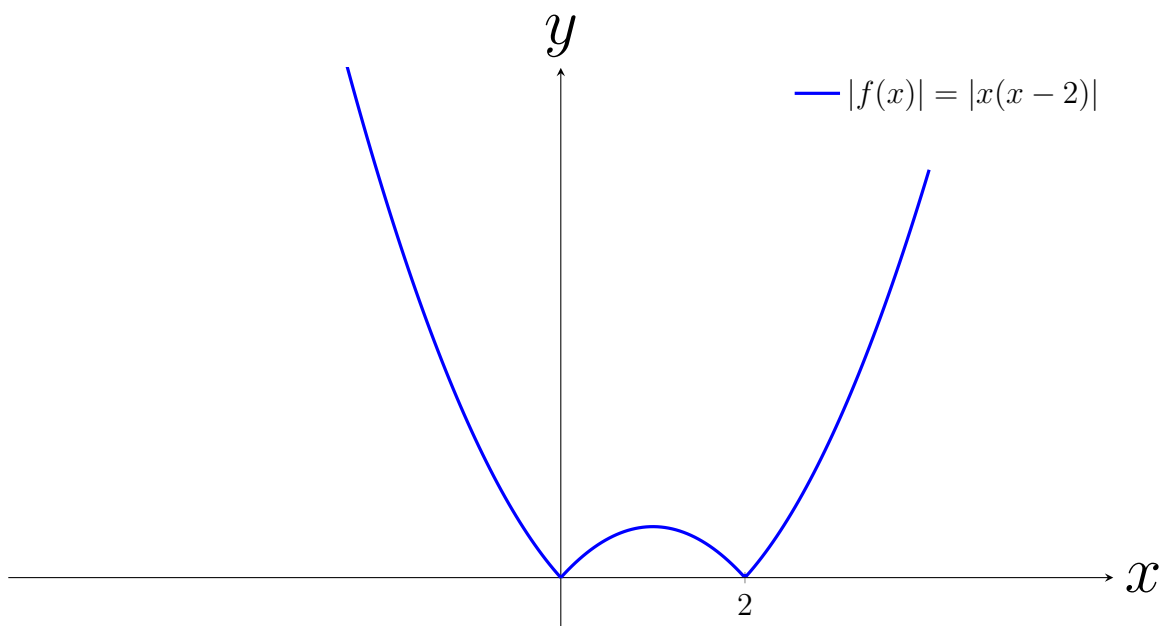
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(7^{\frac{1}{4(x+3)}} \right) = 7^{\frac{1}{4(-\infty+3)}} = 7^{\frac{1}{4 \cdot (-\infty)}} = 7^{\frac{1}{-\infty}} = 7^0 = 1 .$$

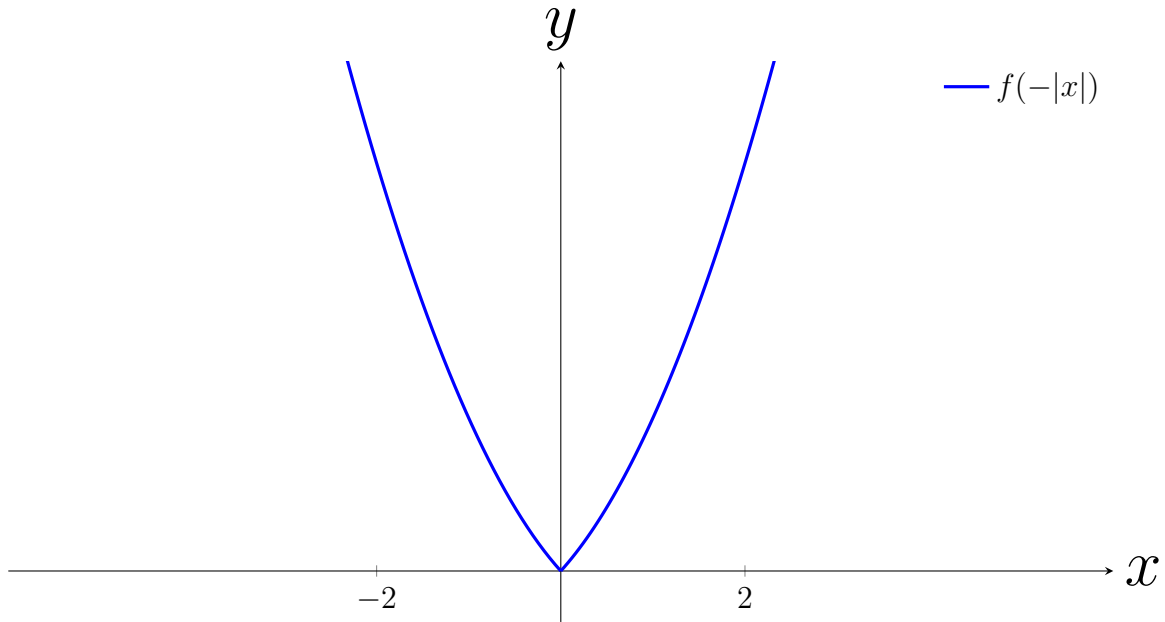
(ג)

**שאלה 19**

$$f(x) = x^2 - 2x = x(x - 2) \quad (\text{א})$$







(ב)

$$y = \sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{8 - x}$$

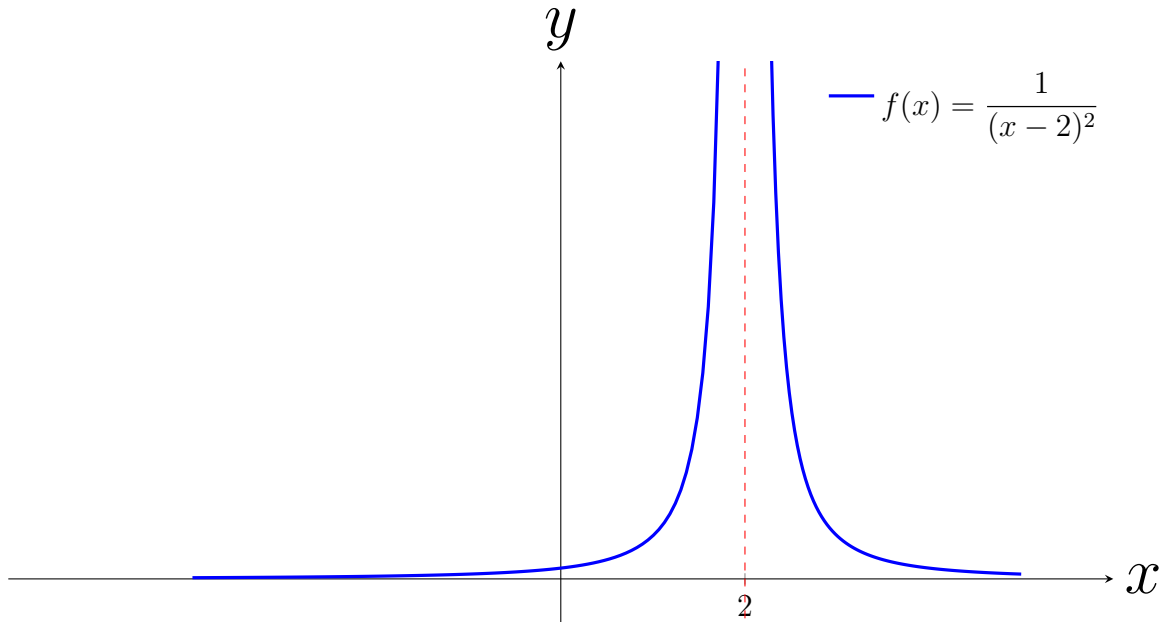
$$\begin{cases} x^2 - 4x \geq 0 \\ 8 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x - 4) \geq 0 \\ x \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{x \leq 0\} \cup \{x \geq 4\} \\ x \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \{x \leq 0\} \cup \{4 \leq x \leq 8\}$$

תחום הגדרה: $\text{Dom}(f) = (-\infty, 0] \cup [4, 8]$

שאלה 20

(א) אם $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ או $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ אז אומרים כי קיים אסימפטוטה אנכית בנקודה $x = a$.

(ב) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$



(ג) $f(x) = 2^{\frac{x}{1-x}}$
תחום הגדרה: (1)

$$1 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1.$$

(2) לפיכך $\text{Dom}(f) = \{x \neq 1\}$
 2^a לכל $a \in \mathbb{R}$ חיובי, לכן

$$2^{\frac{x}{1-x}} > 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

(3) לכל x בתחום ההגדרה. לפיכך $f(x) > 0$ לכל $x \neq 1$.
יש נקודת אי-הגדרה ב- $x = 1$. נבדוק את הסוג של הנקודת אי-רציפות שם:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2^{\left(\frac{x}{1-x}\right)} = 2^{\left(\frac{1^-}{1-1^-}\right)} = 2^{\left(\frac{1}{0^+}\right)} = 2^\infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2^{\left(\frac{x}{1-x}\right)} = 2^{\left(\frac{1^+}{1-1^+}\right)} = 2^{\left(\frac{1}{0^-}\right)} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

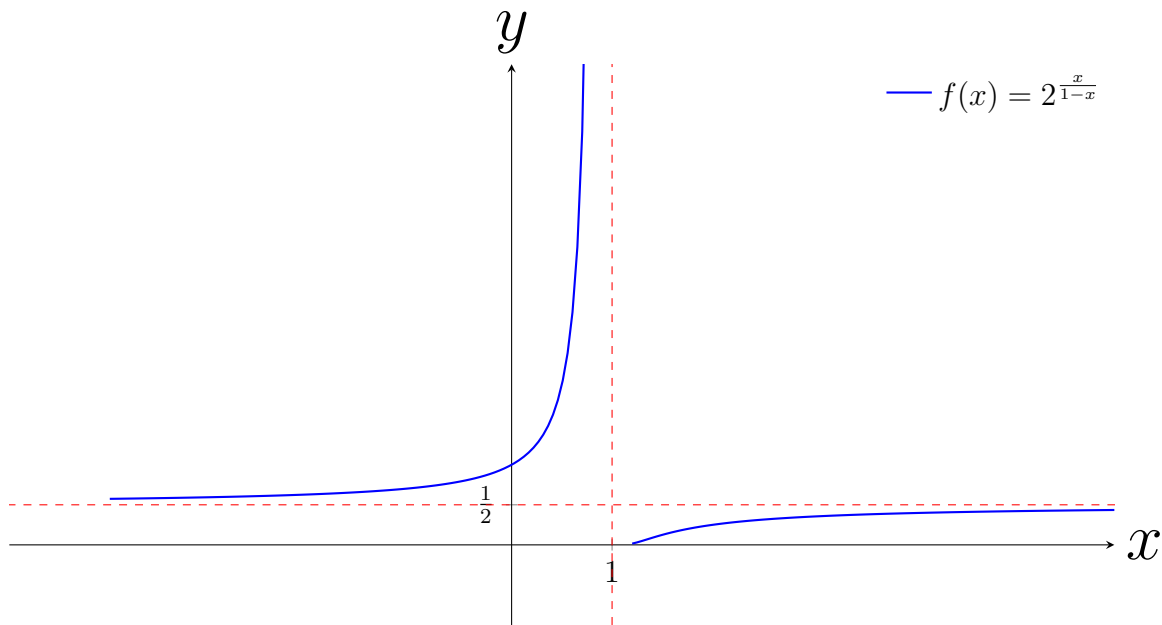
(4) לכן $x = 1$ נקודת אי רציפות ממין 2.
לפי התוצאות של הסעיף הקודם, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty$ ו- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$ לפיכך $x = 1$ אסימפטוטה אנכית מצד שמאל. (5)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{\left(\frac{x}{1-x}\right)} = 2^{\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1-x}\right)} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$2^{\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1-x}\right)} = 2^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)} = 2^{-1} = \frac{1}{2}.$$

לפיכך $y = \frac{1}{2}$ אסימפטוטה אופקית.

(6)

**שאלה 21**

(א)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{(\sqrt{x^2 + 2x} + x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2x}{x}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x^2 + 2x} + x}{x}\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} + 1\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(\sqrt{\frac{x^2 + 2x}{x^2}} + 1\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1\right)} \\
 &= \frac{2}{\left(\sqrt{1 + \frac{2}{\infty}} + 1\right)} \\
 &= \frac{2}{(\sqrt{1 + 0} + 1)} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

(ב)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - \sin(x)}{\sin(4x) - \sin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin(2x)}{2x} - \frac{\sin(x)}{x}}{\frac{4 \sin(4x)}{4x} - \frac{2 \sin(2x)}{2x}} = \frac{2 - 1}{4 - 2} = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = |\sqrt{2x - 6}| \quad \textbf{שאלה 22}$$

(א) תחום ההגדרה של $f(x)$:

$$2x - 6 \geq 0 \Rightarrow 2(x - 3) \geq 0 \Rightarrow x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$$

$$\text{Dom}(f) = [3, \infty)$$

$$|\sqrt{2x - 6}| \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$\text{Im}(f) = [0, \infty) \quad \text{לפיכך}$$

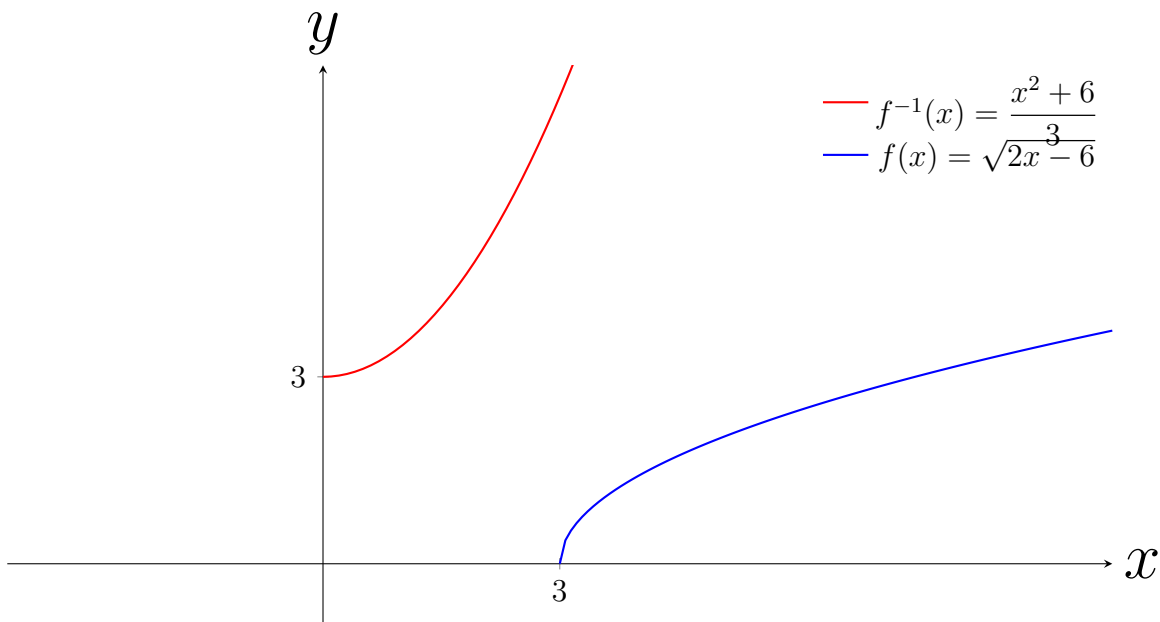
(ב)

$$\begin{aligned} |\sqrt{2x - 6}| &= y \\ 2x - 6 &= y^2 \\ 2x &= y^2 + 6 \\ x &= \frac{y^2 + 6}{2} \end{aligned}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 6}{2} \quad \text{לכן}$$

(ג) התמונה של הפונקציה המקורית היא $\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Im}(f(x)) = [0, \infty)$
 $\text{Im}(f^{-1}) = \text{Dom}(f(x)) = [3, \infty)$

(ד)



שאלה 23

(א)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 5x} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 5x} - x) \frac{(\sqrt{x^2 - 5x} + x)}{(\sqrt{x^2 - 5x} + x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x - x^2}{\sqrt{x^2 - 5x} + x} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x}{\sqrt{x^2 - 5x} + x} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{-5x}{x}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x^2 - 5x} + x}{x}\right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5}{\left(\frac{\sqrt{x^2 - 5x}}{x} + 1\right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5}{\left(\sqrt{\frac{x^2 - 5x}{x^2}} + 1\right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5}{\left(\sqrt{1 - \frac{5}{x}} + 1\right)} \\
&= \frac{-5}{\left(\sqrt{1 - \frac{5}{\infty}} + 1\right)} \\
&= \frac{-5}{(\sqrt{1 - 0} + 1)} \\
&= \frac{-5}{\sqrt{1} + 1} \\
&= \frac{-5}{2} .
\end{aligned}$$

(ב)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) + \sin x}{\sin x - \sin(2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(3x) + \sin x}{x}}{\frac{\sin x - \sin(2x)}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(3x)}{x} + \frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin(2x)}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 \sin(3x)}{3x} + \frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin x}{x} - \frac{2 \sin(2x)}{2x}} \\
&= \frac{3 + 1}{1 - 2} \\
&= -4 .
\end{aligned}$$

שאלה 24

(א) (1)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2 + 5x + 6} \right)^{2x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2}{x^2 + 5x + 6} - 1 \right)^{2x+1} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2 - x^2 - 5x - 6}{x^2 + 5x + 6} \right)^{2x+1} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5x - 6}{x^2 + 5x + 6} \right)^{2x+1} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5x - 6}{x^2 + 5x + 6} \right)^{\frac{x^2 + 5x + 6}{-5x - 6} \cdot \frac{-5x - 6}{x^2 + 5x + 6} \cdot (2x+1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-5x - 6}{x^2 + 5x + 6} \right)^{\frac{x^2 + 5x + 6}{-5x - 6}} \right]^{\frac{(-5x - 6)(2x+1)}{x^2 + 5x + 6}} \\
&= \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5x - 6}{x^2 + 5x + 6} \right)^{\frac{x^2 + 5x + 6}{-5x - 6}} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-5x - 6)(2x+1)}{x^2 + 5x + 6}} \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-10x^2 - 17x - 6}{x^2 + 5x + 6}} \\
&= e^{-10}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot 5^x + 3^x}{3 \cdot 5^x + 2^x} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{2 \cdot 5^x + 3^x}{5^x}}{\frac{3 \cdot 5^x + 2^x}{5^x}} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot \frac{5^x}{5^x} + \frac{3^x}{5^x}}{3 \cdot \frac{5^x}{5^x} + \frac{2^x}{5^x}} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + \left(\frac{3}{5}\right)^x}{3 + \left(\frac{2}{5}\right)^x} \right) \\
&= \left(\frac{2 + \left(\frac{3}{5}\right)^\infty}{3 + \left(\frac{2}{5}\right)^\infty} \right) \\
&= \left(\frac{2 + 0}{3 + 0} \right) \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4 \sin(3x) + \sin(5x)}{x + \tan(8x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{4 \sin(3x) + \sin(5x)}{x}}{\frac{x + \tan(8x)}{x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{4 \sin(3x)}{x} + \frac{\sin(5x)}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{\tan(8x)}{x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4 \cdot \frac{3 \sin(3x)}{3x} + \frac{5 \sin(5x)}{5x}}{1 + \frac{8 \tan(8x)}{8x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4 \cdot 3 + 5}{1 + 8} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{12 + 5}{9} \right) \\ &= \frac{17}{9}\end{aligned}$$

(ב)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x - 5) = 1, & \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 2x) = 8, & f(2) &= 8 \\ && \text{ז"א הגבולות } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \text{ ו- } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) && \text{קיימים אבל} \\ && \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &\neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)\end{aligned}$$

לכן $x = 2$ נק' אי רציפות ממין ראשון.

שאלה 25 נרשום את $f(x)$ בצורה הבאה:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + a} = \frac{x(x + 2)}{x + a}.$$

אם $a = 2$:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}.$$

במקרה זה הנקודה $x = -2$ נקודת אי-רציפות סליקה, מכיוון ש-

$$f(-2) = \frac{0}{0}$$

אשר לא מוגדר.

אם $a = 0$:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x}.$$

במקרה זה הנקודה $x = 0$ נקודת אי-רציפות סליקה, כיוון ש-

$$f(0) = \frac{0}{0}$$

אשר לא מוגדר.

שאלה 26

(א) תחום ההגדרה:

$$x + 3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -3$$

$$\text{Dom}(f) = [-3, \infty)$$

(ב) תמונה:

$$|\sqrt{x+3}| \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x+3}| - 4 \geq -4$$

$$\text{Im}(f) = [-4, \infty)$$

(ג)

$$|\sqrt{x+3}| - 4 = y$$

$$|\sqrt{x+3}| = y + 4$$

$$x + 3 = (y + 4)^2$$

$$x = (y + 4)^2 - 3 = y^2 + 8y + 13$$

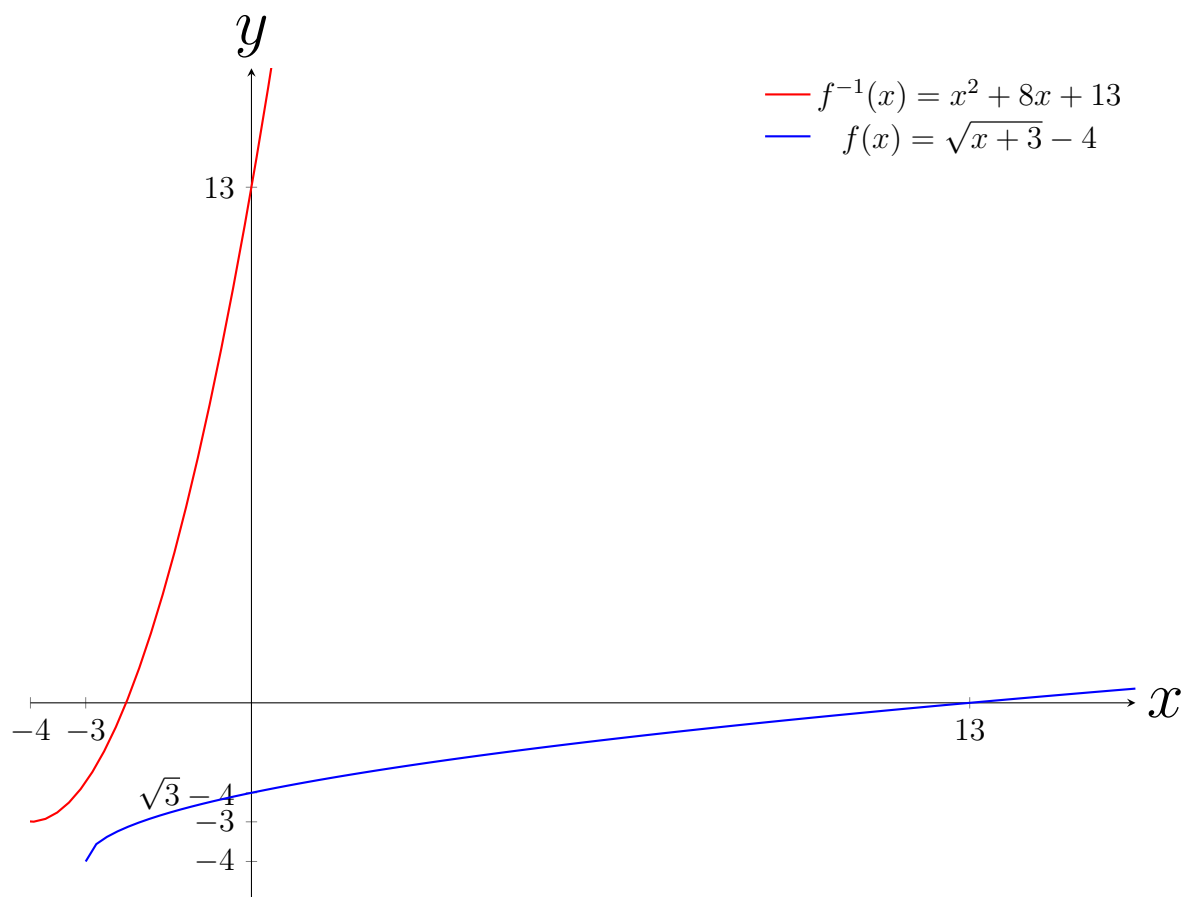
לפיכך

$$f^{-1}(x) = (x + 4)^2 - 3 = x^2 + 8x + 13 .$$

$$\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Im}(f) = [-4, \infty) \quad (\text{ד})$$

$$\text{Im}(f^{-1}) = \text{Dom}(f) = [-3, \infty)$$

(ה)



6

