

שיעור 4

משפט קיילי-המילטון ופולינום מינימלי

4.1 הצבה של מטריצה ריבועית בפולינום

הגדרה 4.1 הצבה של מטריצה ריבועית בפולינום

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית מעל שדה \mathbb{F} . יהי

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_k x^k$$

פולינום כאשר $\alpha_i \in \mathbb{F}$ סקלרים. הצבה של A בפולינום p מוגדרת להיות

$$p(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_k A^k$$

כאשר I_n המטריצה היחידה של $\mathbb{F}^{n \times n}$.

דוגמה 4.1

יהיו $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $p(x) = 2x^2 - 2x - 4$. חשבו את $p(A)$.

פתרון:

$$p(x) = 2x^2 - 2x - 4 = 2(x-2)(x+1).$$

$$p(A) = 2(A - I_2)(A + I_2) = 2 \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 24 & 32 \end{pmatrix}.$$

דוגמה 4.2

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ו- $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \in \mathbb{R}_3[x]$. פרקו $p(x)$ לגורמים לינאריים והשתמשו בפירוק זה כדי לחשב שוב את ההצבה של A ב- $p(x)$.

פתרון:

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x+1).$$

$$p(A) = (A - I_3)(A - 2I_3)(A + I_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 10 \\ -5 & 1 & 18 \\ 1 & -5 & 26 \end{pmatrix}$$

משפט 4.1

תהי $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית ויהי $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום. אז

$$p(D) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

הוכחה: תרגיל בית

משפט 4.2

תהינה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ו- $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. נניח ש- $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה הפיכה. מתקיים:

$$(BAB^{-1})^k = BA^k B^{-1}.$$

הוכחה: נוכיח ע"י אינדוקציה.

בסיס: עבור $k = 1$

$$(BAB^{-1})^1 = BA^1 B^{-1}.$$

מעבר:

נניח ש- $(BAB^{-1})^k = BA^k B^{-1}$. (ההנחת האינדוקציה). נוכיח ש- $(BAB^{-1})^{k+1} = BA^{k+1} B^{-1}$.

$$\begin{aligned} (BAB^{-1})^{k+1} &= (BAB^{-1})^k \cdot BAB^{-1} \\ &= BA^k B^{-1} \cdot BAB^{-1} \quad (\text{ההנחת האינדוקציה}) \\ &= BA^k \cdot \underbrace{(B^{-1}B)}_{=I} \cdot AB^{-1} \\ &= BA^k \cdot I \cdot AB^{-1} \\ &= BA^k \cdot AB^{-1} \\ &= BA^{k+1} B^{-1}. \end{aligned}$$

משפט 4.3

תהינה $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצות דומות. כלומר קיימת P הפיכה כך ש- $B = PAP^{-1}$. נניח ש- $Q(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום. אז

$$Q(A) = PQ(B)P^{-1}.$$

הוכחה: נסמן $Q(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_k x^k$.

$$\begin{aligned} Q(A) &= \alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_k A^k \\ &= \alpha_0 I + \alpha_1 (PBP^{-1}) + \dots + \alpha_k (PBP^{-1})^k \\ &= \alpha_0 PP^{-1} + \alpha_1 (PBP^{-1}) + \dots + \alpha_k (PBP^{-1})^k \end{aligned}$$

(לפי משפט 4.2) $(PBP^{-1})^k = PB^k P^{-1}$ לכן נקבל

$$\begin{aligned} Q(A) &= \alpha_0 PP^{-1} + \alpha_1 PBP^{-1} + \dots + \alpha_k PB^k P^{-1} \\ &= P (\alpha_0 I + \alpha_1 B + \dots + \alpha_k B^k) P^{-1} \\ &= PQ(B)P^{-1}. \end{aligned}$$

משפט 4.4

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ לכסינה, כלומר קיימת P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.
נניח ש- $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. אז אז לכל $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ מתקיים

$$q(A) = P \begin{pmatrix} q(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1}$$

הוכחה: נסמן $D = P^{-1}AP$. לפי משפט 4.3,

$$P^{-1}q(A)P = q(P^{-1}AP) = q(D).$$

לפי משפט 4.1,

$$q(D) = \begin{pmatrix} q(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

לכן נקבל

$$P^{-1}q(A)P = \begin{pmatrix} q(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q(\lambda_n) \end{pmatrix},$$

מכאן נובע כי

$$q(A) = P \begin{pmatrix} q(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1}.$$

דוגמה 4.3

חשבו את ההצבה של $A = \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 20 & -11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ בפולינום $Q(x) = x^{100} + 2x^{51} - 3$.

פתרון:

הערכים עצמיים של A הם $\lambda = -1$ ו- $\lambda = 1$. המרחבים עצמיים הם

$$V_{-1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

לכן $A = PDP^{-1}$ כאשר $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ו- $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} q(A) &= P \begin{pmatrix} q(-1) & 0 \\ 0 & q(1) \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 20 & -12 \\ 40 & -24 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

דוגמה 4.4

תהינה $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצות דומות ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ סקלר. נניח ש $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום. הוכיחו:

$$p(A) = \lambda I_n \text{ אם } p(B) = \lambda I_n$$

הוכחה: \Rightarrow

A, B דומות לכן קיימת $C \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הפיכה כך ש $B = C^{-1}AC$. לכן לפי 4.3,

$$p(B) = p(C^{-1}AC) = C^{-1}p(A)C$$

אם $p(A) = \lambda I_n$ אז

$$p(B) = C^{-1}\lambda I_n C = \lambda I_n.$$

\Leftarrow

$A = CBC^{-1}$ לכן לפי 4.3,

$$p(A) = p(CBC^{-1}) = Cp(B)C^{-1}.$$

לכן אם $p(B) = \lambda I_n$ אז

$$p(A) = C\lambda I_n C^{-1} = \lambda I_n.$$



4.2 הצבת של העתקה ליניארית בפולינום

הגדרה 4.2 הצבה של העתקה ליניארית בפולינום

יהי V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} , נניח ש $T : V \rightarrow V$ אופרטור ליניארי ו- $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_k x^k$ פולינום. נגדיר את האופרטור הליניארי $p(T) : V \rightarrow V$ ע"י

$$p(T) = \alpha_0 I_V + \alpha_1 T + \dots + \alpha_k T^k$$

כאשר I_V האופרטור הזהות $I_V(u) = u$ לכל $u \in V$.
 $p(T)$ נקראת ההצבה של T ב- p .

דוגמה 4.5

יהי $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ אופרטור המוגדר ע"י

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y \\ 2x + y \end{pmatrix}.$$

חשבו את $p(T)$ עבור $p(x) = 3x^2 - 4x - 1$ תוך כדי שימוש של המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T .

פתרון:

שיטה 1

הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^2 הוא $E = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. המטריצה המייצגת הסטנדרטית מוגדרת

$$[T]_E = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(e_1)]_E & [T(e_2)]_E \\ | & | \end{pmatrix} \text{ נקבל}$$

$$[T(e_1)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [T(e_2)]_E = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{לכן } [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ נשתמש בנוסחה}$$

$$[p(T)]_E = p([T]_E).$$

נחשב $p([T]_E)$:

$$p([T]_E) = 3([T]_E)^2 - 4[T]_E - I_3 = 3 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 - 4 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -6 \\ 4 & -20 \end{pmatrix}$$

לכן לכל וקטור $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} [p(T)u]_E &= [p(T)]_E \cdot [u]_E \\ &= p([T]_E) [u]_E \\ &= \begin{pmatrix} -20 & -6 \\ 4 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -20x - 6y \\ 4x - 20y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

שיטה 2

$$\begin{aligned} p(T) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 3T^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 4T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 3T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 3 \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -15 \\ 12 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -20 \\ 4 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(T) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 3T^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 4T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3T \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3 \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -18 \\ -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ -20 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(T) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= p \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -20x - 6y \\ 4x - 20y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

דוגמה 4.6

יהי $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ אופרטור שמוגדר ע"י

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y \\ 2x + y \end{pmatrix} .$$

חשבו את ההצבה $p(T)$ עבור $p(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

פתרון:

נחשב את המטריצה המייצגת של T שמוגדרת

$$[T]_E = \begin{pmatrix} \left| \begin{matrix} [T(e_1)]_E \\ [T(e_2)]_E \end{matrix} \right| \\ \left| \begin{matrix} [T(e_1)]_E \\ [T(e_2)]_E \end{matrix} \right| \end{pmatrix}$$

$$[T(e_1)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} , \quad [T(e_2)]_E = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ לכן}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^2 - 4x + 1 = (3x - 1)(x - 1) \\ p([T]_E) &= (3[T]_E - I)([T]_E - I) \\ &= \left(3 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -18 & -6 \\ 4 & -18 \end{pmatrix} \\ p(T) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= p([T]_E) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -6 \\ 4 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18x - 6y \\ 4x - 18y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

דוגמה 4.7

נסמן $p(x) = 2x^2 + 3x - 4 \in \mathbb{R}[x]$ יהי $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ שמוגדר ע"י

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + 2y \end{pmatrix}.$$

חשבו את $p(T)$.

פתרון:

$$\begin{aligned} p(T) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 2T^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix} \\ p(T) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \end{pmatrix} \\ p(T) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= p \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= x \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x - 9y \\ 9x + 8y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

דוגמה 4.8

יהי $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ אופרטור שמוגדר ע"י

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 3x + 7y \end{pmatrix}.$$

חשבו את $p(T)$ עבור $p(x) = 5x^2 - 6x + 1$ תוך כדי שימוש של המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T .

פתרון:

שיטה 1

הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^2 הוא $E = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. ההגדרה של המטריצה המייצגת הסטנדרטית

$$[T]_E = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(e_1)]_E & [T(e_2)]_E \\ | & | \end{pmatrix} \text{ היא}$$

$$[T(e_1)]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad [T(e_2)]_E = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix},$$

לכו נקבל $[T]_E = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. ניתן לפרק את $p(x)$ לגורמים לינאריים:

$$p(x) = 5x^2 - 6x + 1 = (5x - 1)(x - 1).$$

בלהיעזר בפירוק הזה נחשב את $p([T]_E)$:

$$\begin{aligned} p([T]_E) &= (5([T]_E) - I_2)([T]_E - I_2) \\ &= \left(5 \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 9 & -10 \\ 15 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -21 & -78 \\ 117 & 174 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לכן עבור וקטור $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} [p(T)u]_E &= [p(T)]_E \cdot [u]_E \\ &= \begin{pmatrix} -21 & -78 \\ 117 & 174 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -21x - 78y \\ 117x + 174y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

שיטה 2

$$\begin{aligned} p(T) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 5T^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 6T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 5T \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 5 \begin{pmatrix} -2 \\ 27 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -21 \\ 117 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(T) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 5T^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 6T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 5T \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 5 \begin{pmatrix} -18 \\ 43 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -90 \\ 215 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -42 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -78 \\ 174 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(T) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= p \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -21x - 78y \\ 117x + 174y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

בדיוק כמו הפתרון המתקבל ע"י שיטה 1.

דוגמה 4.9

נגדיר $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ע"י

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y + z \\ 2x - y + z \\ x + y + z \end{pmatrix}.$$

נסמן $p(x) = x^2 + x - 2 \in \mathbb{R}[x]$. יהי E הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^3 .

א חשבו את $[p(T)]_E$.

ב היעזרו בחישוב בסעיף א' כדי למצוא את $p(T)$.

פתרון:

סעיף א $[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. ניתן לפרק את $p(x)$ כ- $p(x) = (x-1)(x+2)$. לכן

$$[p(T)]_E = ([T]_E - I_3) ([T]_E + 2I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

סעיף ב' לכן

$$\begin{aligned}
 p(T) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= [p(T)]_E \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 &= x [p(T)]_E \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y [p(T)]_E \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z [p(T)]_E \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= x \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= x \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 5x + y + 5z \\ x + 5y + 3z \\ 4x + 4y + 2z \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

משפט 4.5

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} ותהי $T: V \rightarrow V$ נניח ש $p \in \mathbb{F}[x]$. אם $u \in V$ וקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי λ , אז u וקטור עצמי של $p(T)$ ששייך לערך עצמי $p(\lambda)$. כלומר, אם

$$T(u) = \lambda u$$

אז

$$p(T)(u) = p(\lambda)u.$$

הוכחה: ראו משפט 3.18 למעלה:

$$\begin{aligned}
 p(T)(u) &= (\alpha_0 + \alpha_1 T + \dots + \alpha_k T^k)(u) \\
 &= (\alpha_0 + \alpha_1 T(u) + \dots + \alpha_k T^k(u)) \\
 &= (\alpha_0 + \alpha_1 \lambda u + \dots + \alpha_k \lambda^k u) \\
 &= (\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_k \lambda^k) u \\
 &= p(\lambda)u.
 \end{aligned}$$

■

4.3 איפוס פולינום על ידי מטריצה

הגדרה 4.3 איפוס פולינום ע"י מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ויהי $p(x) \in \mathbb{F}[x]$. אומרים כי A מאפסת את $p(x)$ אם

$$p(A) = 0_{n \times n}$$

כאשר $0_{n \times n}$ מטריצה האפס של $\mathbb{F}^{n \times n}$.

משפט 4.6 מטריצות דומות מאפסות אותו פולינום

אם A ו- B מטריצות דומות, אז הפולינום f מתאפס ע"י A אם"ס הוא מתאפס ע"י B .

הוכחה: נניח ש $f(A) = 0$. נוכיח ש $f(B) = 0$:
נסמן

$$f(x) = \alpha_k x^k + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

אז

$$f(A) = \alpha_k A^k + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0.$$

A ו- B מטריצות דומות לכן קיימת מטריצה הפיכה C כך ש

$$A = C^{-1} B C.$$

לכן

$$\alpha_k (C^{-1} B C)^k + \dots + \alpha_1 (C^{-1} B C) + \alpha_0 I = 0.$$

$$(C^{-1} B C)^k = C^{-1} B^k C \quad (\text{לפי משפט 4.2}) \text{ לכן נקבל}$$

$$C^{-1} (\alpha_k B^k + \dots + \alpha_1 B + \alpha_0 I) C = 0.$$

C הפיכה אז נכפיל מצד שמאל ב- C ומצד ימין ב- C^{-1} ונקבל

$$\alpha_k B^k + \dots + \alpha_1 B + \alpha_0 I = 0.$$

קיבלנו ש

$$f(B) = 0.$$

משפט 4.7

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

א. $A^n \in \text{sp}\{I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$ אם"ס קיים פולינום $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ מסדר n כך ש $p(A) = 0$.

ב. הקבוצה $\{I_n, A, A^2, \dots, A^n\}$ ת"ל אם"ס קיים פולינום שונה מאפס $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ מסדר n לכל היותר כך ש- $p(A) = 0$.

הוכחה:

סעיף א. נניח ש $A^n \in \text{sp}\{I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$. אז קיימים סקלרים כך ש-

$$A^n = \alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1}$$

ז"א

$$A^n - \alpha_{n-1} A^{n-1} - \alpha_{n-2} A^{n-2} - \dots - \alpha_1 A - \alpha_0 I_n = 0$$

לכן A מאפסת את

$$p(x) = x^n - \alpha_{n-1} x^{n-1} - \dots - \alpha_1 x - \alpha_0 \in \mathbb{F}[x].$$

נניח ש- A מאפסת את הפולינום

$$Q(x) = \beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0 \in \mathbb{F}[x]$$

מסדר n , כלומר $Q(A) = 0$. נניח ש $\beta_n \neq 0$. אז

$$\beta_n A^n = -(\beta_{n-1} A^{n-1} + \dots + \beta_1 A + \beta_0 I_n)$$

נחלק שני האגפים ב β_n :

$$A^n = -\left(\frac{\beta_{n-1}}{\beta_n} A^{n-1} + \dots + \frac{\beta_1}{\beta_n} A + \frac{\beta_0}{\beta_n} I_n\right)$$

קיבלנו כי $A^n \in \text{sp}\{I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$.

סעיף ב. נניח ש- $\{I_n, A, A^2, \dots, A^n\}$ ת"ל. אז קיימים סקלרים שאינם כולם אפסים כך ש-

$$\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \alpha_n A^n = 0$$

מכאן A מאפסת $\sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$ שהוא פולינום שונה מאפס מסדר n לכל היותר.

להיפך, נניח ש- $p(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$ אינו פולינום האפס כך ש $p(A) = 0$. אז

$$\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \dots + \alpha_n A^n = 0$$

הוא צירוף לנארי לא טריוויאלי.

■

4.4 איפוס פולינום על ידי העתקה לינארית

הגדרה 4.4 איפוס פולינום על ידי העתקה לינארית

יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור ויהי $p(x) \in \mathbb{F}[x]$. אומרים כי T מאפס את $p(x)$ אם $p(T) = 0$ כאשר 0 מסמן את העתקת האפס.

דוגמה 4.10

נתון $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדר ע"י

$$T(x, y) = (-y, x)$$

חשבו את $f(T)$ כאשר $f(x)$ הפולינום

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1.$$

פתרון:

$$T^2(x, y) = T(T(x, y)) = T(-y, x) = (-x, -y)$$

$$T^3(x, y) = T(T^2(x, y)) = T(-x, -y) = (y, -x)$$

לכן

$$f(T) = (y, -x) - (-x, -y) + (-y, x) - (x, y) = (0, 0).$$

4.5 משפט קיילי-המילטון (Cayley-Hamilton)

משפט 4.8 משפט קיילי-המילטון

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. אם $p_A(x)$ הוא הפולינום האופייני של A אז

$$p_A(A) = 0_{n \times n}$$

כאשר $0_{n \times n}$ מטריצה האפס של $\mathbb{F}^{n \times n}$.

דוגמה 4.11

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ נתונה}$$

(א) בדקו ש- $p_A(A) = 0$.

(ב) חשבו את A^2 ללא חישוב ישיר.

פתרון:

(א)

$$p_A(\lambda) = |\lambda - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda$$

$$\begin{aligned} p_A(A) &= A^2 - 2A = A(A - 2I) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ב) לפי קיילי-המילטון $p_A(A) = 0$ לכן

$$A^2 - 2A = 0 \quad \Rightarrow \quad A^2 = 2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

דוגמה 4.12

נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. מצאו את A^{-1} בעזרת משפט קיילי המילטון.

פתרון:

הפולינום האופייני של A הוא:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) - 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 1$$

לכן

$$p_A(A) = A^2 - 4A + I = 0 \quad \Rightarrow \quad 4A - A^2 = I \quad \Rightarrow \quad A(4I - A) = I. \quad (*)$$

$|A| = 1$ לכן A הפיכה. נכפיל (*) ב- A^{-1} ונקבל $4I - A = A^{-1}$, ולכן

$$A^{-1} = 4I - A = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

דוגמה 4.13

נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

להיעזר במשפט קיילי המילטון חשבו את A^3 ו- A^{-1} .

פתרון:

הפולינום האופייני של A הוא

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -1 & 1 \\ 5 & \lambda - 3 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda + 4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 3) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ -6 & \lambda + 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & \lambda + 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & \lambda - 3 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 3) ((\lambda - 3)(\lambda + 4) + 6) + (5(\lambda + 4) - 6) + (-30 - 6(\lambda - 3)) \\ &= (\lambda + 3)(\lambda + 3)(\lambda - 2) + 5\lambda + 14 - 6\lambda - 12 \\ &= (\lambda + 3)(\lambda + 3)(\lambda - 2) - \lambda + 2 \\ &= (\lambda + 3)(\lambda + 3)(\lambda - 2) - (\lambda - 2) \\ &= (\lambda - 2) ((\lambda + 3)(\lambda + 3) - 1) \\ &= (\lambda - 2) (\lambda^2 + 6\lambda + 8) \\ &= (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda + 4) \\ &= \lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda - 16. \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = -2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = -4$ מריבוי אלגברי 1.

נבדוק אם A הפיכה דרך הדטרמיננטה:

$$|A| = p_A(0) = -16 \neq 0$$

לכן A הפיכה.

לפי משפט קיילי-המילטון,

$$p_A(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad A^3 + 4A^2 - 4A - 16I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad A^3 = -4A^2 + 4A + 16I_3$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 6 \\ 6 & -2 & 6 \\ 12 & -12 & 16 \end{pmatrix}$$

לכן

$$A^3 = -4 \begin{pmatrix} 10 & -6 & 6 \\ 6 & -2 & 6 \\ 12 & -12 & 16 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 & 28 & -28 \\ -44 & 36 & -28 \\ -72 & 72 & -64 \end{pmatrix}$$

לפי משפט קיילי-המילטון,

$$p_A(A) = 0 \Rightarrow A^3 + 4A^2 - 4A - 16I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = \frac{1}{16}A^3 + \frac{1}{4}A^2 - \frac{1}{4}A = \left(\frac{1}{16}A^2 + \frac{1}{4}A - \frac{1}{4}I_3 \right) A$$

ז"א

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{16}A^2 + \frac{1}{4}A - \frac{1}{4}I_3 \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 10 & -6 & 6 \\ 6 & -2 & 6 \\ 12 & -12 & 16 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{7}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.14 דוגמה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכיחו את הטענות הבאות:

א.

$$A^n \in \text{sp} \{I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$$

ב. אם A הפיכה אז

$$A^{-1} \in \text{sp} \{I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$$

ג. עבור

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

מבלי לחשב ישירות מטריצות הופכיות, מצאו את A^{-1} ואת A^{-2} .

פתרון:

סעיף א. לפי משפט ק"ה A מאפסת את $p_A(x)$. כלומר

$$p_A(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1A + \alpha_0I_n = 0.$$

לכן

$$A^n = -\alpha_{n-1}A^{n-1} - \dots - \alpha_1A - \alpha_0I_n \in \text{sp} \{I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}.$$

סעיף ב. לפי משפט ק"ה A מאפסת את $p_A(x)$ כלומר

$$p_A(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1A + \alpha_0I_n = 0 ,$$

לכן

$$-\alpha_0I_n = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1A . \quad (*)$$

$|A| = p_A(0)$. מכיוון ש- A הפיכה אז $\alpha_0 \neq 0$ ו α_0^{-1} קיים. נכפיל את שני האגפים של $(*)$ ב $:\frac{-1}{\alpha_0}A^{-1}$

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_0}A^{n-1} - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0}A^{n-2} - \dots - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}I_n . \quad (\#)$$

לכן קיבלנו כי

$$A^{-1} \in \text{sp} \{I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}\} .$$

סעיף ג.

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= |\lambda I_3 - A| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & \lambda - 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 5)(\lambda + 1)^2 \\ &= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 \end{aligned}$$

$$p_A(A) = A^3 - 3A^2 - 9A - 5I_n = 0 \quad \Rightarrow \quad I_n = \frac{1}{5}A^3 - \frac{3}{5}A^2 - \frac{9}{5}A = A \left(\frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A - \frac{9}{5}I_3 \right)$$

אזי

$$A^{-1} = \frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A - \frac{9}{5}I_3 . \quad (*1)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{לכן}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{9}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

כדי למצוא את A^{-2} נכפיל את שני אגפי $(*1)$ ב A^{-1} ונקבל:

$$A^{-2} = \frac{1}{5}A - \frac{3}{5}I_3 - \frac{9}{5}A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{9}{5} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 17 & -8 & -8 \\ -8 & 17 & -8 \\ -8 & -8 & 17 \end{pmatrix} .$$

משפט 4.9 קיילי-המילטון עבור העתקות

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} ויהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור. T מאפס את הפולינום האופייני שלה.

דוגמה 4.15

נתון אופרטור ליניארי $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ שמוגדר ע"י

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x + y + 12z \\ -8x + 2y + 15z \\ -2x + 5z \end{pmatrix}$$

הוכיחו ש- T הפיך באמצעות משפט ק"ה וחשבו $T^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

פתרון:

הממ"ס היא

$$A = [T]_E = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 12 \\ -8 & 2 & 15 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

אז הפולינום האופייני

$$\begin{aligned} p_A(x) &= |xI - A| \\ &= \begin{vmatrix} x+6 & -1 & -12 \\ 8 & x-2 & -15 \\ 2 & 0 & x-5 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} -1 & -12 \\ x-2 & -15 \end{vmatrix} + (x-5) \begin{vmatrix} x+6 & -1 \\ 8 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= 2(15 + 12x - 24) + (x-5)((x+6)(x-2) + 8) \\ &= -18 + 24x + (x-5)(x^2 + 4x - 4) \\ &= x^3 - x^2 + 2. \end{aligned}$$

האיבר החופשי שונה מאפס לכן T הפיך. לפי משפט ק"ה:

$$T^3 - T^2 + 2I = 0$$

כאשר האגף הימין הוא אופרטור האפס. נפעיל T^{-1} על המשוואה ונקבל:

$$T^2 - T + 2T^{-1} = 0$$

לכן

$$T^{-1} = -\frac{1}{2}T^2 + \frac{1}{2}T$$

4.6 הפולינום המינימלי של מטריצה

הגדרה 4.5 פולינום המינימלי

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית. הפולינום המינימלי הוא פולינום מתוקן מצורה

$$m(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{k-1} x^{k-1} + x^k, \quad (\#)$$

כאשר $k \geq 1$ כך ש:

$$m(A) = 0 \quad (1)$$

(2) k היא הסדר הנמוכה ביותר מבין הפולינומים מצורה (#) שמתאפסים ע"י A .

נסמן את הפולינום המינימלי של A ב- $m_A(x)$.

משפט 4.10 ל- $m_A(x)$ ול- $p_A(x)$ יש בדיוק אותם גורמים אי-פריקים.

ל- $m_A(x)$ ול- $p_A(x)$ יש בדיוק אותם גורמים אי-פריקים. כלומר

$$m_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0.$$

הוכחה:

נניח ש $m_A(\lambda) = 0$.

אז $m_A(x) = q(x)(x - \lambda)$ כאשר $\deg q(x) < \deg m_A(x)$ (נוסחת איוקליד לחיזוק פולינומים).
 $m_A(x)$ הוא הפולינום המינימלי של A לכן $q(A) \neq 0$.
 נגדיר וקטורים v ו- w כך ש- $w = q(A)v \neq \bar{0}$.

$$\bar{0} = m_A(A)v = (A - \lambda I)q(A)v = (A - \lambda I)w,$$

לכן

$$Aw = \lambda w.$$

ז"א w וקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ של A .
 לכן $p_A(\lambda) = 0$.

נניח ש $p_A(\lambda) = 0$.

אז λ ערך עצמי של A .
 נניח ש- w הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ . אז

$$Aw = \lambda w.$$

לכן

$$m_A(A)w = m_A(\lambda)w.$$

$m_A(A) = 0$ לכן $m_A(\lambda)w = 0$.
 w וקטור עצמי אז $w \neq \bar{0}$, לכן $m_A(\lambda) = 0$.

משפט 4.11 מטריצה מאפסת הפולינום המינימלי של מטריצה שאליה היא דומה

תהינה $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצות ריבועיות. יהי $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A ויהי $m_B(x)$ הפולינום המינימלי של B . אם A, B מטריצות דומות אז

$$m_A(B) = 0$$

ו-

$$m_B(A) = 0.$$

הוכחה: A ו- B דומות לכן קיימת P הפיכה כך ש- $A = PBP^{-1}$. לפי משפט 4.3:

$$m_A(A) = P \cdot m_A(B) \cdot P^{-1}$$

P הפיכה אז נכפיל מצד ימין ב- P ומצד שמאל ב- P^{-1} :

$$P^{-1} \cdot m_A(A) \cdot P = m_A(B).$$

$$m_A(B) = 0 \text{ לכן } m_A(A) = 0$$

משפט 4.12 למטריצות דומות יש אותו פולינום מינימלי

תהינה $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצות דומות. ל- A ו- B יש אותו פולינום מינימלי.

הוכחה: A ו- B דומות \Leftrightarrow ל- A ו- B יש אותם ערכים עצמיים (לפי משפט 3.21).

יהי $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A ו- $m_B(x)$ הפולינום המינימלי של B . כיוון של- A ו- B אותם ערכים עצמיים אז $m_A(x)$ ו- $m_B(x)$ מתפרקים לאותם גורמים לינאריים:

$$m_A(x) = (x - \lambda_1)^{d_1} \dots (x - \lambda_k)^{d_k}, \quad m_B(x) = (x - \lambda_1)^{e_1} \dots (x - \lambda_k)^{e_k}.$$

A ו- B דומות אז $m_A(B) = 0$ ו- $m_B(A) = 0$ (לפי משפט 4.11 למעלה).

כעת נוכיח דרך השלילה כי $d_i = e_i$ לכל $1 \leq i \leq k$ ולכן הפולינומים m_A ו- m_B זהים.

נניח כי עבור אחד הגורמים, $d_i \neq e_i$.

אם $d_i < e_i$, כיוון ש- $m_A(B) = 0$ אז מתקיים ש- B מאפסת פולינום מדרגה נמוכה יותר מ- $m_B(x)$. בסתירה לכך כי $m_B(x)$ הוא הפולינום המינימלי של B .

אם $e_i < d_i$, כיוון ש- $m_B(A) = 0$ אז מתקיים ש- A מאפסת פולינום מדרגה נמוכה יותר מ- $m_A(x)$. בסתירה לכך כי $m_A(x)$ הוא הפולינום המינימלי של A .

משפט 4.13 לכסינה אא"ם לפולינום מינימלי יש גורמים לינאריים שונים

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ויהי $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A . לכסינה מעל \mathbb{F} אס"ם כל הגורמים האי-פריקים של $m_A(x)$ הם לינאריים ושונים. כלומר A לכסינה אס"ם $m_A(x)$ מתפרק ל-

$$m_A(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_i) \dots (x - \lambda_k).$$

הוכחה: נניח ש- A לכסינה.

יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ הערכים עצמיים השונים של A .
קיימת P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש-

$$A = PDP^{-1},$$

כאשר

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

$$m_A(x) = m_D(x).$$

נוכיח כי $m_A(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_k)$

$$\begin{aligned} m_A(A) &= m_A(PDP^{-1}) \\ &= Pm_A(D)P^{-1} \end{aligned}$$

(לפי משפט 4.4)

$$\begin{aligned} &= P \begin{pmatrix} m_A(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_A(\lambda_1) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_A(\lambda_k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & m_A(\lambda_k) \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{(לפי משפט 4.1)} \\ &= P \cdot 0_{n \times n} \cdot P^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

לכן $m_A(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_k)$

4.7 תרגילים על הפולינום המינימלי

4.16 דוגמה

אם הפולינום המינימלי של מטריצה A הוא $m(x) = (x - 1)(x - 2)$, אז A לכסינה.

4.17 דוגמה

נניח A מטריצה מעל \mathbb{R} כך שהפולינום המינימלי שלה הוא

$$m_A(x) = (x - 1)(x - 2)^2$$

אז A לא לכסינה.

דוגמה 4.18

נניח ש

$$p_A(x) = (x-1)^2(x-2)^2$$

אז

$$m_A(x) \neq (x-1)(x-2)(x-3)$$

כי $m_A(x) \nmid p_A(x)$.

דוגמה 4.19

נניח ש

$$p_A(x) = (x-1)(x-2)x$$

אז

$$m_A(x) = (x-1)(x-2)x.$$

דוגמה 4.20

נניח ש

$$p_A(x) = (x-1)^2(x-2)^2$$

מהן האפשרויות עבור m_A ?

פתרון:

ישנן 4 אפשרויות:

$$(x-1)(x-2), \quad (x-1)^2(x-2), \quad (x-1)(x-2)^2, \quad (x-1)^2(x-2)^2.$$

(אם A נתונה אפשר לבדוק איזה מהם מתאפס ע"י A . יש להציב את A בכל אחד מהפולינומים)

דוגמה 4.21

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{מצאו את הפולינום המינימלי של}$$

פתרון:

$$p_A(x) = (x-2)^3(x-5).$$

האפשרויות ל- $m_A(x)$ הם

$$f_1(x) = (x-2)(x-5), \quad f_2(x) = (x-2)^2(x-5), \quad f_3(x) = (x-2)^3(x-5).$$

נציב את A :

$$\begin{aligned} f_1(A) &= (A - 2I)(A - 5I) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(A) &= (A - 2I)^2(A - 5I) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$m_A(x) = f_2(x) = (x - 2)^2(x - 5) \text{ לכן}$$

4.22 דוגמה

תהינה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

האם A ו- B דומות?

פתרון:

$$p_A(x) = (x - 2)^2 = p_B(x)$$

A אלכסונית. B לא לכסינה, כי עבור הערך עצמי $\lambda = 2$, הריבוי אלגברי שווה 2 אבל הריבוי גאומטרי שווה

1.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim V_2 = 1.$$

$$m_A(x) = x - 2, \quad m_B(x) = (x - 2)^2.$$

לכן A ו- B לא דומות.

דוגמה 4.23

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכיחו שכל ערך עצמי של A הוא שורש של הפולינום המינימלי.

הוכחה: נניח ש λ_0 ערך עצמי של A . אז

$$p_A(x) = (x - \lambda_0)^k \cdot q(x) ,$$

$k \geq 1$. ז"א, ב- $p_A(x)$ יש גורם אי פריק $(x - \lambda_0)$. לכן, לפי משפט 4.10, הוא מופיע גם ב- $m_A(x)$. ז"א

$$m_A(x) = (x - \lambda_0)^l \cdot t(x) .$$

ז"א

$$m_A(\lambda_0) = 0 .$$

דוגמה 4.24

תהי A מטריצה ריבועית כך שהפולינום המינימלי שלה הוא $m_A(x) = (x - 1)^2$. יהי $f(x) = x^2 + 4x + 3$. הוכיחו כי המטריצה $f(A)$ הפיכה.

פתרון:

$$(A - I)^2 = 0 \Leftrightarrow m_A(A) = 0$$

$$f(A) = A^2 + 4A + 3I = (A^2 - 2A + I) + 6A + 2I = (A - I)^2 + 6A + 2I = 6A + 2I .$$

נוכיח כי $|6A + 2I| \neq 0$ בדרך השלילה.

נניח ש $|6A + 2I| = 0$. אז

$$|6A + 2I| = \left| 6\left(A + \frac{1}{3}I\right) \right| = 6^n \left| A + \frac{1}{3}I \right| = 0$$

ז"א $\lambda = -\frac{1}{3}$ ערך עצמי של A . לכן הוא חייב להיות שורש של הפולינום המינימלי. סתירה.

דוגמה 4.25

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ מצאו את הפולינום המינימלי של } A$$

פתרון:

הפולינום האופייני של A הוא

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 .$$

לכו האפשרויות בשביל הפולינום מינימלי הן

$$f_1(x) = x_2 , \quad f_2(x) = (x - 2)^2 , \quad f_3(x) = (x - 2)^3 .$$

$$f_1(A) = A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$f_2(A) = (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן הפולינום המינימלי הוא

$$m_A(x) = (x - 2)^2.$$

דוגמה 4.26

מצאו את הפולינום המינימלי והפולינום האופייני של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I.$$

פתרון:

הפולינום האופייני של A הוא

$$p_A(x) = (x - 4)^3.$$

A מטריצה סקלרית (מטריצה סקלרית היא מצורה αI כאשר α סקלר). הפולינום המינימלי של מטריצה סלרית הוא $m_A(x) = (x - \alpha)$. לכן הפולינום המינימלי של A הוא

$$m_A(x) = x - 4.$$

4.8 *משפטים: חילוק פולינומים, פולינום המינימלי ופולינומים שמתאפסים ע"י מטריצה

משפט 4.14

הפולינום המינימלי הוא יחיד.

הוכחה: נניח שיש שני פולינומים $f_1(x)$ ו- $f_2(x)$, $f_1(x) \neq f_2(x)$ מאותו סדר, כלומר

$$f_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{k-1} x^{k-1} + x^k,$$

$$f_2(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_{k-1} x^{k-1} + x^k.$$

כך ש $f_1(A) = 0$ ו- $f_2(A) = 0$, אז

$$(f_1 - f_2)(A) = 0.$$

$(f_1 - f_2)(x)$ פולינום מסדר קטן מ- k . סתירה.



משפט 4.15 משפט חילוק של פולינומים

יהיו $f(x), g(x)$ פולינומים כך ש- $\deg g \leq \deg f$. אז קיימים פולינומים $q(x), r(x)$ יחידים כך ש

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

כאשר

$$\deg r(x) < \deg g(x), \quad \deg g(x) \leq \deg f(x).$$

משפט 4.16 פולינום שמתאפס ע"י A מחלק את הפולינום המינימלי

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית ויהי $f(x)$ פולינום. אם $f(A) = 0$ אז

$$m_A(x) \mid f(x).$$

הוכחה: נחלק את $f(x)$ ב- $m_A(x)$. לפי משפט חילוק פולינומים,

$$f(x) = m_A(x) \cdot q(x) + r(x)$$

כאשר $\deg r(x) < \deg m_A(x)$. אז

$$f(A) = q(A)m_A(A) + r(A).$$

$$r(A) = 0 \text{ ו } m_A(A) = 0 \text{ לכן } r(A) = 0.$$

ז"א או $r(x)$ הוא הפולינום האפס או הוא לא פולינום האפס אבל $r(x)$ מתאפס ע"י A .
 $m_A(x)$ הוא הפולינום המינימלי ו $\deg r(x) < \deg m_A(x)$, כלומר $m_A(x)$ הוא הפולינום מדרגה הכי נמוכה המתאפס ע"י A .

לכן $r(A) = 0$ אם $r(x) = 0$, כלומר $r(x)$ פולינום האפס.
 כלומר קיבלנו ש- $f(x) = q(x) \cdot m_A(x)$ ולכן $m_A(x) \mid f(x)$.

מסקנה 4.1 פולינום המינימלי מחלק את הפולינום האופייני

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית. אם $p_A(x)$ הפולינום האופייני ו- $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A , אז

$$m_A(x) \mid p_A(x).$$

הוכחה: לפי משפט קיילי המילטון, $p_A(A) = 0$. הפולינום המינימלי מחלק כל פולינום המתאפס ע"י A , לכן $m_A(x) \mid p_A(x)$.

משפט 4.17 $p_A(x)$ מחלק כל פולינום המתאפס ע"י A בחזקת הסדר של A .

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית. יהי $p_A(x)$ הפולינום האופייני של A . אם A מאפסת את הפולינום $f(x)$, כלומר אם $f(A) = 0$, אז

$$p_A(x) \mid f^n(x).$$

הוכחה: $\deg p_A(x) = n$. $f(A) = 0$ אז $f(x)$ אינו פולינום קבוע, ז"א $\deg f(x) \geq 1$, ולכן $\deg f^n(x) \leq \deg p_A(x)$.

נחלק $f^n(x)$ ב- $p_A(x)$ ע"י האלגוריתם איוקלידי:

$$f^n(x) = q(x)p_A(x) + r(x), \quad (*)1$$

$$\deg r(x) < \deg p_A(x) \leq \deg f^n(x)$$

$m_A(x) | p_A(x)$ אז $p_A(x) = q_1(x)m_A(x)$ נציב זה ב- $(*)1$ ונקבל

$$f^n(x) = q_1(x)q(x)m_A(x) + r(x). \quad (*)2$$

$f(A) = 0$ לכן $f^n(A) = 0$ לכן $f^n(x) | m_A(x)$.
נניח ש- $r(x) \neq 0$ ב- $(*)2$. אז $m_A(x) \nmid f^n(x)$. סתירה.

משפט 4.18 גורם אי-פריק של הפולינום האופייני מחלק כל פולינום המתאפס ע"י A .

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית. יהי $p_A(x)$ הפולינום האופייני של A . אם גורם אי פריק של $p_A(x)$ ו- $f(x)$ פולינום המתאפס ע"י A , כלומר אם $f(A) = 0$, אז

$$(x - \lambda_0) | f(x).$$

הוכחה:

אם $(x - \lambda_0)$ גורם אי-פריק של $p_A(x)$, אז λ_0 ערך עצמי של A .
נחלק $f(x)$ ב- $(x - \lambda_0)$. כלומר לפי משפט חילוק פולינומים קיימים פולינומים יחידים $q(x), r(x)$ כך ש-

$$f(x) = q(x)(x - \lambda_0) + r(x)$$

כאשר $\deg r(x) < \deg (x - \lambda_0) \leq \deg f(x)$.

$\deg r(x) = 0$ אז $\deg (x - \lambda_0) = 1$.

ז"א $r(x)$ פולינום קבוע: $r(x) = c \in \mathbb{F}$ כאשר c סקלר.

יהי v וקטור עצמי השייך ל- λ_0 . אז

$$0 = f(A)v = q(A)(A - \lambda_0 I)v + cv$$

v הוא הוקטור עצמי השייך ל- λ_0 , אז

$$(A - \lambda_0 I)v = Av - \lambda_0 v = \lambda_0 v - \lambda_0 v = 0$$

לכן $c = 0$, ואז נקבל

$$f(x) = q(x)(x - \lambda_0),$$

ז"א $(x - \lambda_0) | f(x)$.