

# שעור 12

## שונות

### 12.1 לכסון אורתוגונלי

#### הגדרה 12.1 מטריצה לכסינה אורתוגונלית

מטריצה  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  לכסינה אורתוגונלית אן קיימת מטריצה אורתוגונלית  $U$  ומטריצה אלכסונית  $D$  כך ש-

$$A = UDU^{-1} = UDU^t.$$

#### הגדרה 12.2 מטריצה סימטרית

מטריצה  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  נקראת מטריצה סימטרית אם

$$A = A^t.$$

#### משפט 12.1 מטריצה לכסינה אורתוגונלית היא סימטרית

מטריצה  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  שלכסינה אורתוגונלית היא בהכרח מטריצה סימטרית.

**הוכחה:** נניח כי  $A$  לכסינה אורתוגונלית.

ז"א קיימת  $D$  אלכסונית ו-  $U$  אורתוגונלית כך ש-

$$A = UDU^{-1} = UDU^t.$$

לפיכך

$$A^t = (UDU^t)^t = (U^t)^t D^t U^t = UDU^t = A.$$

■

#### משפט 12.2 תנאי מספיק למטריצה סימטרית

מטריצה  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  היא מטריצה סימטרית אם ורק אם

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

לכל  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , כאשר  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  המכפלה הפנימית הסטנדרטית של  $\mathbb{R}^n$ .

**הוכחה:** נניח כי  $A$  סימטרית. אזי

$$(Ax, y) = (Ax)^t y = x^t A^t y = (x, A^t y) = (x, Ay)$$

נניח כי  $(Ax, y) = (x, Ay)$ . נרשום

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

כאשר  $a_i \in \mathbb{R}^n$  העמודות של המטריצה  $A$ .

$$(Ae_i, e_j) = (a_i, e_j) = A_{ji} = A \text{ של } (j, i) \text{ רכיב}$$

$$(e_i, Ae_j) = (e_i, a_j) = A_{ij} = A \text{ של } (i, j) \text{ רכיב}$$

לכן

$$(Ae_i, e_j) = (e_i, Ae_j) \Rightarrow A_{ji} = A_{ij} \Rightarrow A^t = A.$$

ז"א  $A$  סימטרית.

### כלל 12.1 תכונות של מספרים מרוכבים

- כל מספר  $z \in \mathbb{C}$  ניתן לרשום בצורה  $z = a + ib$  כאשר  $a, b \in \mathbb{R}$ .
- $i^2 = -1$ .
- נתון מספר מרוכב  $z \in \mathbb{C}$  מצורה  $z = a + ib$ . נגדיר הצמוד של  $z$  לפי  $\bar{z} = a - ib$ .
- $z \in \mathbb{R}$  אם ורק אם  $\bar{z} = z$ .
- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ .
- נתון  $z \in \mathbb{C}$ . הערך מוחלט של  $z$  מסומן  $|z|$  ומוגדר  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .
- $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$ .
- לכל  $z, w \in \mathbb{C}$  מתקיים  $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ .

### משפט 12.3 הערכים עצמיים של מטריצה סימטרית ממשיים

אם  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  סימטרית אז כל הערכים עצמיים של  $A$  ממשיים.

**הוכחה:** לפי משפט הפירוק הפרימרי, ל- $A$  יש ערכים עצמיים  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (לא בהכרח שונים).

לכל  $u = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ , הסקלר  $a = \bar{u}Au$  ממשי:

$$\begin{aligned} a &= (u^*)^t Au = (u^*)^t A^t u \quad (A \text{ סימטרית}) \\ &= (Au^*)^t u = u^t (Au^*) \quad (\text{משפט 12.2}) \\ &= u^t A^* u^* \quad (A \text{ ממשי}) \\ &= a^*. \end{aligned}$$

נניח כי  $u = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$  ווקטור עצמי של  $A$  ששייך לערך עצמי  $\lambda_i$ . אזי

$$\bar{u}Az = \bar{u}\lambda_i u = \lambda_i \bar{u}u = \lambda_i (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)$$

$u$  ווקטור עצמי  $u \neq 0 \Leftrightarrow \exists z_k \neq 0 \Leftrightarrow (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2) \neq 0$ .  
בנוסף  $(|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)$  ממשי, ו- $\bar{u}Az$  ממשי. לכן  $\lambda_i$  בהכרח ממשי.

## משפט 12.4 מטריצה ממשית לכסינה אורתוגונלית אם"ס היא סימטרית

נתונה  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  מטריצה ממשית.  $A$  לכסינה אורתוגונלית אם ורק אם היא סימטרית.

**הוכחה:** נניח כי  $A$  לכסינה אורתוגונלית.  
ז"א קיימת  $D$  אלכסונית ו-  $U$  אורתוגונלית כך ש-

$$A = UDU^{-1} = UDU^t.$$

אזי

$$A^t = (UDU^t)^t = (U^t)^t D^t U^t = UDU^t = A.$$

נניח כי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  סימטרית. נוכיח באמצעות אינדוקציה על  $n$  כי היא לכסינה אורתוגונלית.

### שלב הבסיס

עבור  $A \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ , כלומר  $A = a$  כאשר  $a \in \mathbb{R}$  סקלר.

$$A = a = UDU^t$$

כאשר  $U = (1) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$  אורתוגונלית ו-  $D = (a) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$  אלכסונית.

### שלב האינדוקציה

נניח כי כל מטריצה סימטרית מסדר  $(n-1) \times (n-1)$  לכסינה אורתוגונלית (ההנחת האינדוקציה).

לכל מטריצה קיימת לפחות ווקטור עצמי אחד.

לכן נניח כי  $v_1$  ווקטור עצמי של  $A$  ששייך לערך עצמי  $\lambda_1$  ונניח כי  $\|v_1\| = 1$ .  
 $A$  סימטרית לכן  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  (משפט 12.3).  
נשלים  $\{v_1\}$  לבסיס של  $\mathbb{R}^n$ :

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

נבצע התהליך של גרם שמידט כדי להמיר בסיס זה לבסיס אורתוגונלי של  $\mathbb{R}^n$ :

$$B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\},$$

כאשר  $u_1 = v_1$ ,  $u_2 = v_2 - \frac{(v_2, u_1)}{\|u_1\|^2} u_1$  וכן הלאה.  
נגדיר

$$P = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ u_1 & u_2 & & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

נשים לב כי  $P$  היא המטריצה המעבר מבסיס הסטנדרטי לבסיס  $B$ .  
 $P^{-1} = P^t$ .

נתבונן על המטריצה  $P^{-1}AP = P^tAP$ . נשים לב כי היא סימטרית

$$(P^tAP)^t = P^tA^t(P^t)^t = P^tA^tP = P^tAP.$$

והעמודה הראשונה הינה

$$P^{-1}APe_1 = P^{-1}Au_1 = P^{-1}\lambda_1u_1 = \lambda_1P^{-1}u_1 = \lambda_1[u_1]_B = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

לפיכך  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$  כאשר  $0$  בלוק עם  $n-1$  אפסים ו- $B$  מטריצה סימטרית מסדר  $(n-1) \times (n-1)$ .

לפי ההנחת האינדוקציה  $B$  לכסינה אורתוגונלית. ז"א קיימת  $U' \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  אורתוגונלית ו- $D' \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  אלכסונית כך ש- $B = U'D'U'^{-1} = U'D'U'^t$ .

לכן

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U'D'U'^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U'^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U' \end{pmatrix}^{-1}$$

נכפיל מצד שמאל ב- $P$  ומצד ימין ב- $P^{-1}$ :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U' \end{pmatrix}^{-1} P^{-1}$$

$$\text{נגדיר } U = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U' \end{pmatrix} \text{ ו- } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix} \text{ ז"א}$$

$$A = UDU^{-1}.$$

נשים לב כי  $U$  אורתוגונלית ו- $D$  אלכסונית. לפיכך  $A$  לכסינה אורתוגונלית.

■

## 12.2 שילוש לכיסון של מטריצה לפי פולינום מינימלי

### הגדרה 12.3 צמצום של העתקה

נתון מרחב ווקטורי  $V$  ונתונה אופרטור  $T: V \rightarrow V$ . נניח כי  $W \subset V$  תת-מרחב  $T$ -שמור של  $V$ . נניח כי  $v \in V$  ווקטור של  $V$ .

נגדיר קבוצת פולינומים  $S_T(v, W)$  כך שכל פולינום  $g \in S_T(v, W)$  מקיים את התנאי

$$g(T)v \in W.$$

הקבוצה  $S_T(v, W)$  תקרא המנחה  $T$ .

### הגדרה 12.4

נתון  $S_T(v, W)$ . הפולינום המתוקן של דרגה הקטנה ביותר ב- $S_T(v, W)$  נקרא מנחה- $T$  מינימלי.

### משפט 12.5

נניח כי  $T$  conductor של  $v$  ונניח כי  $g$  המנחה- $T$  מינימלי.

$$f \in S_T(v, W) \Leftrightarrow g \mid f.$$

**הוכחה:** נניח כי  $f \in S_T(v, W)$ . נוכיח כי  $g \mid f$  דרך השלילה. ז"א נניח כי  $g \nmid f$ . לפי כלל אוקליד,

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) - q(x)g(x) = r(x).$$

כאשר  $\deg(r) < \deg(g) \leq \deg(f)$ .

נניח כי  $f, g \in S_T(v, W)$  לכן  $f(T)v \in W$  ו-  $g(T)v \in W$ . לכן גם  $q(T)g(T)v \in W$  בגלל ש-  $W$  תת-מרחב  $T$  שמור. לפיכך  $r(T)v \in W$  אך  $\deg(r) < \deg(g)$ , בסתירה לכך ש-  $g$  הפולינום של דרגה קטנה ביותר המקיים  $g(T)v \in W$ .

נניח כי  $f \mid g$ .  
 $f(T)v = q(T)g(T)v \Leftarrow f(x) = q(x)g(x) \Leftarrow$   
 $g(T)v \in W$  לכן  $q(T)g(T)v \in W$  בגלל ש-  $W$  תת-מרחב  $T$ -שמור.  
 לכן  $f(T)v \in W$ .

## משפט 12.6

נניח כי  $T$ -conductor  $S_T(v, W)$ . נניח כי  $g$  המנחה- $T$  מינימלי ו-  $m_T$  הפולינום המינימלי של  $T$ . אז  $g \mid m_T$ .

**הוכחה:** נוכיח כי  $g \mid m_T$  דרך השלילה.  
 נניח כי  $g \nmid m_T$ . לפי כלל אוקליד:

$$m_T(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

$$\deg(r) < \deg(g) \leq \deg(m_T)$$

$$0 = m_T(T) = g(T)q(T) + r(T) = 0 + r(T) \Rightarrow r(T) = 0$$

בסתירה לכך כי  $m_T(T)$  הפולינום המינימלי.

## משפט 12.7

$$m_T \in S_T(v, W)$$

**הוכחה:** נניח כי  $g(x)$  המנחה- $T$  מינימלי. לפי משפט 12.6,  $g \mid m_T$ .  
 לכן לפי משפט 12.5,  $m_T \in S_T(v, W)$ .

## משפט 12.8

נניח כי  $V$  מרחב ווקטורי  $T : V \rightarrow V$  אופרטור. נניח כי  $W \subset V$  תת מרחב  $T$  שמור. קיים  $\alpha \in V \notin W$  כך ש-

$$(T - \lambda)\alpha \in W$$

כאשר  $\lambda$  ערך עצמי של  $T$ .

**הוכחה:**

נוכיח כי המנחה- $T$  המינימלי של  $\alpha$  ל-  $W$  הוא פולינום לינארי.

נניח כי  $\beta$  כל ווקטור שב-  $V$  אבל לא ב-  $W$ , כלומר  $\beta \in V \notin W$ . יהי  $g$  המנחה- $T$  המינימלי של  $\beta$  ל-  $W$ .  
 משפט 12.6  $g \mid m_T \Leftarrow g(x) = (x - \lambda_i)h(x) \Leftarrow$  כאשר  $\lambda_i$  ערך עצמי של  $T$  ו-  $h(x)$  פולינום.

$g$  הפולינום של דרגה קטנה ביותר כך ש-  $g(T)\beta \in W$  לכן  $\alpha = h(T)\beta \notin W$ .

לכן

$$(T - \lambda_i I)\alpha = (T - \lambda_i)h(T)\beta = g(T)\beta \in W$$

בגלל ש-  $g(T)$  המנחה-  $T$  המינימלי של  $\beta$ .**משפט 12.9** $T$  לכסינה אם ורק אם  $m_T$  מתפרק לגורמים לינאריים שונים:

$$m_T(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n).$$

**הוכחה:** נניח כי  $m_T(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$ .נניח כי  $W = \text{span}\{u_1, \dots, u_k\}$  כאשר  $u_1, \dots, u_k$  הווקטורים עצמיים של  $T$ , ו-  $W \neq V$ . לפי משפט 12.8 קיים  $\alpha \notin W$  וערך עצמי  $\lambda_i$  של  $T$  כך שהווקטור  $\beta = (T - \lambda_i I)\alpha \in W$ .מכיוון ש-  $\beta \in W$  אז  $\beta = u_1 + \dots + u_k$ , כאשר  $Tu_i = \lambda_i u_i$  לכל  $1 \leq i \leq k$ .

לכן

$$h(T)\beta = h(\lambda_1)u_1 + \dots + h(\lambda_k)u_k \in W. \quad (*)$$

לכל פולינום  $h$ .

$$m_T(x)\beta = (x - \lambda_i)q(x) \quad (**)$$

כאשר  $q(x)$  פולינום.

לפי ממשט השארית,

$$q(x) = (x - \lambda_i)h(x) + q(\lambda_i) \quad (***)$$

כאשר  $q(x)$  פולינום. לכן

$$q(T)\alpha - q(\lambda_i)\alpha = h(T)(T - \lambda_i I)\alpha = h(T)\beta \quad (****)$$

לפי (\*),  $h(T)\beta \in W$ .

מכיוון ש-

$$0 = m_T(T)\alpha = (T - \lambda_i)q(T)\alpha,$$

כלומר  $q(T)\alpha$  ווקטור עצמי של  $T$  ששייך לערך עצמי  $\lambda_i$ , אז  $q(T)\alpha \in W$ .לכן לפי (\*\*\*\*),  $q(\lambda_i)\alpha \in W$ .אבל  $\alpha \notin W$ , לכן  $q(\lambda_i) = 0$ .אז לפי (\*\*), לא כל השורשים של  $m_T$  שונים. סתירה!

## משפט 12.10

$T$  ניתנת לשילוש אם ורק אם  $m_T$  מתפרק לגורמים לינאריים (לא בהכרח שונים):

$$m_T(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \cdots (x - \lambda_k)^{r_k} .$$

**הוכחה:** נניח כי  $m_T(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \cdots (x - \lambda_k)^{r_k}$  אנחנו רוצים למצוא בסיס  $\beta_1, \dots, \beta_n$  כך ש-

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

נדרוש כי

$$T(\beta_i) = a_{1i}\beta_1 + \cdots + a_{ii}\beta_i .$$

ז"א  $T(\beta_i) \in \{\beta_1, \dots, \beta_i\}$

יהי  $W = \{0\} \subset V$

לפי משפט 12.8  $\exists \alpha \in V \setminus \{0\}$  כך ש-  $(T - \lambda_1)\alpha \in \{0\}$  ז"א

$$(T - \lambda_1 I)\alpha = 0 \Rightarrow T\alpha = \lambda_1 \alpha ,$$

ז"א  $\alpha$  ווקטור עצמי של  $T$ .

$$[T(\beta_1)]_{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ נבחר } \beta_1 = \alpha \text{ אז}$$

יהי  $W_1 = \{\beta_1\} \subset V$ . נשים לב כי  $W_1$  תת מרחב  $T$  שמור.

לפי משפט 12.8  $\exists \alpha \in V \setminus W_1$  כך ש-  $(T - \lambda_2)\alpha \in W_1$  ז"א

$$(T - \lambda_2 I)\alpha = k\beta_1 \Rightarrow T(\alpha) = k\beta_1 + \lambda_2 \alpha ,$$

נבחר  $\beta_2 = \alpha$  אז  $T(\beta_2) = k\beta_1 + \lambda_2 \beta_2$

שימו לב,  $\beta_2 \notin W_1$  ו-  $\beta_1 \in W_1$  לכן  $\{\beta_1, \beta_2\}$  בלתי תלויים לינארית.

$$[T(\beta_2)]_{\beta} = \begin{pmatrix} k \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

נמשיך עם התהליך הזה:

יהי  $W_i = \{\beta_1, \dots, \beta_i\} \subset V$ . נשים לב כי  $W_i$  תת מרחב  $T$  שמור.

לפי משפט 12.8  $\exists \alpha \in V \setminus W_i$  כך ש-  $(T - \lambda_j)\alpha \in W_i$  ז"א

$$(T - \lambda_j I)\alpha = c_1\beta_1 + \cdots + c_i\beta_i \Rightarrow T(\alpha) = c_1\beta_1 + \cdots + c_i\beta_i + \lambda_j \alpha .$$

שימו לב,  $\alpha \notin W_i$  לכן  $\alpha$  בלתי תלוי לינאריית מ-  $\{\beta_1, \dots, \beta_i\}$ .

נבחר  $\beta_{i+1} = \alpha$

$$.[T(\beta_{i+1})]_{\beta} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \lambda_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

נניח כי  $T$  ניתנת לשילוש.

$\Leftarrow$  קיים בסיס עבורו המטריצה המייצגת  $[T]$  לכסין.

$\Leftarrow$  הפולינום האופייני של  $T$  מתפרק לגורמים לינאריים (לא בהכרח שונים).

$m \Leftarrow m \mid p$  מתפרק לגורמים לינאריים (לא בהכרח שונים).

