עבודה 7: תת מרחבים שמורים.

שאלה 1 יהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ אופרטור לינארי המוגדר ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x-y\\0\end{pmatrix}$. האם תתי המרחבים הבאים הם שמורים ?

א) $W_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

ב) $W_2=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

ג) $W_3=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

שאלה 2 יהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ אופרטור שמוגדר ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x+y\end{pmatrix}$. מצאו תת מרחב $W\subset\mathbb{R}^2$ כך ש- W הוא תת-מרחב T שמור לא טריוויאלי.

שאלה 3 יהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ אופרטור שמוגדר ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\x+y\\0\end{pmatrix}$. מצאו תת מרחבים $U\subset W\subset\mathbb{R}^3$ כך ש- W הוא תת-מרחב T שמור לא טריוויאלי אבל U לא תת-מרחב T שמור.

שאלה 4 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $T:V\to V$ ו- $S:V\to V$ אופרטורים. יהי $\lambda\in\mathbb{F}$ סקלר ויהי $W\subseteq V$ מרחב העצמי של λ ביחס לאופרטור T. הוכיחו שאם האופרטורים S ו- T מתחלפים, כלומר אם $TS=ST$, אז W הוא תת-מרחב S שמור.

שאלה 5 יהי V מרחב וקטורי ויהי $T:V\to V$ אופרטור. נגדיר את הקבוצה $\text{Orb}_T\subset V$ כך שלכל $u\in V$,

$$\text{Orb}_T(u)=\text{span}\left\{u,T(u),T^2(u),T^3(u),\dots\right\}\ .$$

א) הוכיחו כי Orb_T תת-מרחב של V.

ב) הוכיחו כי Orb_T תת-מרחב T שמור.

שאלה 6 יהי $T:V\to V$ אופרטור. נניח ש- $U\subseteq V$ T שמור ו- $W\subseteq V$ T שמור. הוכיחו:

א) $U\cap W$ הוא T שמור.

ב) $U+W$ הוא T שמור.

ג) $T(U)$ הוא T שמור.

שאלה 7 נתון אופרטור לינארי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ שמוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6x+y+12z\\-8x+2y+15z\\-2x+5z\end{pmatrix}\ .$$

בדקו אם התת מרחב $W=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ הוא T שמור.

תשובות

שאלה 1

א) $W_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$ לכל $u \in W_1$ קיימים סקלרים α_1, α_2 כך ש-

$$u = \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\0\end{pmatrix} \ .$$

$$T(u) = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_1-\alpha_2\\0\end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (\alpha_1-\alpha_2) \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in W_1 \ .$$

לכן W_1 תת-מרחב שמור.

ב) $W_2 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

לכל $u \in W_2$ קיימים סקלרים α כך ש-

$$u = \alpha \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\end{pmatrix} \ .$$

$$T(u) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in W_2 \ .$$

לכן W_2 תת-מרחב שמור.

ג) $W_3 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$

לכל $u \in W_3$ קיימים סקלרים α כך ש-

$$u = \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix} \ .$$

$$T(u) = \begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\0\end{pmatrix} \notin W_3 \ .$$

לכן W_3 אינו תת-מרחב שמור.

שאלה 2 התמונה של T היא תת-מרחב של T הנפרש ע"י שני וקטורים:

$$\text{Im } T = \text{span}\left\{u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\text{Im } T$ תת-מרחב T שמור.

שאלה 3 התמונה של T היא תת-מרחב של T הנפרש ע"י שני וקטורים:

$$\text{Im } T = \text{span}\left\{u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$W = \text{Im } T$ תת-מרחב T שמור.

לעומת זאת,

$$T(u_1) = u_2$$

לכן $U = \text{span}\{u_2\} \subset W$ אינו תת-מרחב T שמור.

שאלה 4 יהי $w \in W$ כאשר W המרחב עצמי של T השייך לערך עצמי λ. כלומר

$$T(w) = \lambda w.$$

צריך להוכיח שאם $S(w) = w'$ אז $w' \in W$, כלומר $T(w') = \lambda w'$.

נניח ש $S(w) = w'$. אז

$$T(w') = T\left(S(w')\right) = TS(w')\ .$$

$TS = ST$ (נתון) אז

$$T(w') = T\left(S(w)\right) = TS(w) = ST(w) = S(\lambda w) = \lambda S(w) = \lambda w'\ .$$

קיבלנו ש- $T(w') = \lambda w'$, כלומר w' וקטור עצמי של T, לכן $S(w) = w' \in W$. לכן W תת-מרחב S- שמור.

שאלה 5

א) Orb_T פרישה של וקטורים של V, וכל פרישה של וקטורים של V היא תת-מרחב של V.

ב) נוכיח שלכל $w \in \text{Orb}_T(u)$, מתקיים $T(w) \in \text{Orb}_T(u)$. נסמן

$$w = a_1 T^{n_1}(u) + a_2 T^{n_2}(u) + \ldots + a_k T^{n_k}(u)\ .$$

$$T(w) = a_1 T^{n_1+1}(u) + a_2 T^{n_2+1}(u) + \ldots + a_k T^{n_k+1}(u) \in \text{Orb}_T(u)$$

כנדרש.

שאלה 6

א) יהי $a \in U \cap W$. הוקטור $a \in U$ ו- U הוא T שמור, לכן

$$T(a) \in U \ .$$

הוקטור $a \in W$ גם, ו- W הוא T שמור, לכן

$$T(a) \in W \ .$$

לכן $T(a) \in U$ ו- $T(a) \in W$, ולכן $T(a) \in U \cap W$ לכל $a \in U \cap W$.

ב) לכל $a \in U$ ו- $b \in W$,

$$T(a) \in U \ , \qquad T(b) \in W$$

לכל $a \in U$ ו- $b \in W$, הוקטור $a + b \in U + W$ ו-

$$T(a+b) = T(a) + T(b) \in U + W \ .$$

ג) לכל $a \in U$,

$$T(a) \in U$$

לכן

$$T(T(a)) \in U \ .$$

שאלה 7

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 17 \\ 5 \end{pmatrix} \notin W$$

לכן W אינו T- שמור.