שיעור 11
אינגרלים קוויים

11.1 אינגרל הקווי מסוג ראשון

משפט 11.1 אינטגרל קווי מסוג ראשון 1

אם עקום מישורי L מוגדר כגרף של הפונקציה $\{y = \gamma(x) \ , |a \leq x \leq b\}$
אז האינטגרל הקווי של פונקציה $f(x,y)$ דרך הקו של γ מוגדר להיות

$$\int\limits_L f(x,y)\ dl = \int_a^b f\left(x, \gamma(x)\right) \sqrt{1+\gamma'(x)^2}\, dx$$

משפט 11.2 אינטגרל קווי מסוג ראשון 2

אם עקום מישורי L מוגדר באופן פרמטרי

$$\{x = x(t) \ , \ y = y(t) \ , \ | \ \alpha \leq t \leq \beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה $f(x,y)$ דרך הקו של L מוגדר להיות

$$\int\limits_L f(x,y)\ dl = \int_\alpha^\beta f\left(x(t), y(t)\right)\ \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\, dt$$

משפט 11.3 אינטגרל קווי מסוג ראשון 3

אם L הוא עקום במרחב תלת-ממדי המוגדר באופן

$$\{x = x(t) \ , \ y = y(t) \ , \ z = z(t) \ | \ \alpha \leq t \leq \beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה $f(x,y,z)$ דרך הקו של L מוגדר להיות

$$\int\limits_L f(x,y,z)\ dl = \int_\alpha^\beta f\left(x(t), y(t), z(t)\right)\ \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\, dt$$

דוגמה 11.1

מצאו את המסה של הקשת $\begin{cases} y = x^2 \\ 1 \leq x \leq 10 \end{cases}$ בעלת צפיפות מסה קווי $\rho = \dfrac{y}{x}$.

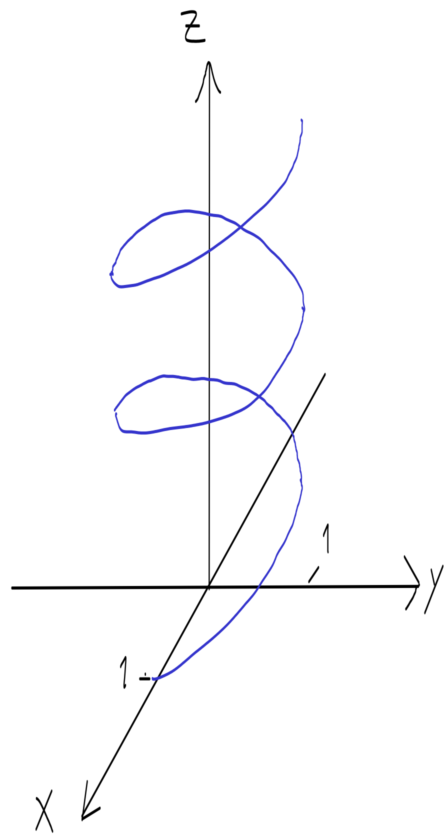
פתרון:

$$\begin{aligned}
M &= \int\limits_L \rho(x,y)dl \\
&= \int_1^{10} \frac{x^2}{x} \cdot \sqrt{1+(2x)^2}dx \\
&= \int_1^{10} x \cdot \sqrt{1+4x^2}dx \\
&= \int_1^{10} \frac{t'}{8} \cdot \sqrt{t}dx \\
&= \frac{1}{8}\int_{t=5}^{t=401} \cdot\sqrt{t}dt \\
&= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[t^{3/2}\right]_{t=5}^{t=401} \\
&= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[401^{3/2} - 5^{3/2}\right] \\
&= 668.24
\end{aligned}$$

דוגמה 11.2

חשבו את אורך הקשת של קו הבורג (helix) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$ בעלת צפיפות מסה קווי $\rho = \dfrac{y}{x}$.

פתרון:



$$
\begin{aligned}
L &= \int_L dl \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt \\
&= 2\sqrt{2}\pi
\end{aligned}
$$

משפט 11.4 אורך הקשת

האינטגרל הקווי

$$\int_L dl$$

נותן את אורך הקשת L.

משפט 11.5 מסה של הקשת

האינטגרל הקווי

$$\int_L f(x,y,z)\ dl$$

נותן את המסה של הקשת L בעלת צפיפות ליניארית $f(x,y,z)$.

דוגמה 11.3

חשב את אורך הקשת של קו הבורג:

$$\{x=\cos t\ ,\ \ y=\sin t\ ,\ \ z=t\ ,\ \ 0\leq t\leq 2\pi\}$$

פתרון:

לפי כלל ??

$$\int_L dl=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}=\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1^2}=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}=2\pi\sqrt{2}\ .$$

11.2 אינטגרל הקווי מסוג שני

כדי לחשב את האינטגרל של שדה וקטורי מצורה

$$\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\hat{\boldsymbol{\imath}}+Q(x,y)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

דרך המסלול L משתמשים ב **האינטגרל הקווי מסוג שני.**

לדוגמא, העבודת השדה הוקטורי $\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\hat{\boldsymbol{\imath}}+Q(x,y)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ בהעברת חלקיק מהנקודה A לנקודה B לאורך המסלול L ניתן ע"י

$$W=\int_L\left[P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right]\ .$$

דרך החישוב של אינטגרל קווי מסוג שני תלויה באופן הגדרת המסלול L של האינטגרציה.

משפט 11.6 אינטגרל קווי מסוג שני 1

אם המסלול מישורי L מוגדר כגרף של הפונקציה $\{y=\gamma(x)\ ,|a\leq x\leq b\}$
אז האינטגרל הקווי של פונקציה $\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\hat{\boldsymbol{\imath}}+Q(x,y)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ דרך הקו של γ מוגדר להיות

$$\int_L\left[P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right]=\int_a^b dx\ P\left(x,\gamma(x)\right)+\int_a^b dx\ y'(x)\ Q\left(x,\gamma(x)\right)$$

משפט 11.7 אינטגרל קווי מסוג שני 2

אם המסלול מישורי L מוגדר באופן פרמטרי

$$\{x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ ,\ \mid \alpha \le t \le \beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה $\boldsymbol{F}(x,y) = P(x,y)\hat{\boldsymbol{i}} + Q(x,y)\hat{\boldsymbol{j}}$ דרך הקו של L מוגדר להיות

$$\int\limits_L [P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = \int_\alpha^\beta dt\ x'(t)\ P\left(x(t)\ ,\ y(t)\right) + \int_\alpha^\beta dt\ y'(t)\ Q\left(x(t)\ ,\ y(t)\right)$$

משפט 11.8 אינטגרל קווי מסוג שני 3

אם L הוא המסלול במרחב תלת-ממדי המוגדר באופן

$$\{x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ ,\ z = z(t) \mid \alpha \le t \le \beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה $\boldsymbol{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\hat{\boldsymbol{i}} + Q(x,y,z)\hat{\boldsymbol{j}} + R(x,y,z)\hat{\boldsymbol{k}}$ דרך הקו של L מוגדר להיות

$$\int\limits_L [P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz]$$
$$= \int_\alpha^\beta dt\ x'(t)\ P\left(x(t),y(t),z(t)\right) + \int_\alpha^\beta dt\ y'(t)\ Q\left(x(t),y(t),z(t)\right) + \int_\alpha^\beta dt\ z'(t)\ R\left(x(t),y(t),z(t)\right)$$

דוגמה 11.4 אינטגרל קווי מסוג שני

חשבו את

$$\int_L [(x+2y)dx + (y-x)dy]$$

לאורך הפרבולה $y = x^2$ מ- $A(1,1)$ ל- $B(3,9)$.

פתרון:

לפי כלל **??**,

$$\int_L [(x+2y)dx + (y-x)dy] = \int_1^3 dx\left(x + 2x^2\right) + \int_1^3 dx \cdot 2x \cdot \left(x^2 - x\right)$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3}\right]_1^3 + \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right]_1^3$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2}\right]_1^3$$
$$=44$$

אם $L : \{x = x(t), y = y(t), a \le t \le b\}$ מתחילה ונגמרת באותה הנקודה $(x(a) = x(b), y(a) = y(b))$

נאמר שהיא מסילה סגורה ונסמן $\oint_L$ במקום $\int_L$ כדי לסמן אינטגרל מסילתי לאורך L.

דוגמה 11.5 אינטגרל קווי מסוג שני

חשבו את

$$\int_L [y\ dx + x\ dy]$$

לאורך הקשת

$$\{x = -\sin t\ ,\ \ y = \cos t\}$$

מ- $t = 0$ עד ל- $t = 2\pi$.

פתרון:

לפי כלל ??,

$$\begin{aligned}\int_L [y\ dx + x\ dy] &= \int_0^{2\pi} dt\ \ \cos t \cdot \cos t + \int_0^{2\pi} dt\ \ (-\sin t) \cdot (-\sin t) \\ &= \int_0^{2\pi} dt\ \ \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) \\ &= \int_0^{2\pi} dt\ \ 1 \\ &= 2\pi\ .\end{aligned}$$

11.3 תכונות של אינטגרלים קוויים

משפט 11.9 תכונה חשובה של אינטגרל קווי

1) בהינתן מסילה L_{AB} מ- A ל- B נסמן ב- L_{BA} את המסילה ההולכת בכיוון ההפוך מ- B ל- A. אז

$$\int_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{L_{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

2) בהינתן מסילות L_{AB} מ- A ל- B ו- L_{BC} מ- B ל- C נסמן ב- L_{AC} את המסילה המשורשרת המתקבלת, אז

$$\int_{L_{AC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{L_{BC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

3) עבור מסלול מרחבי L הנתון ע"י $\left\{ \begin{array}{c} x = x(t), y = y(t), z = z(t) \\ a \leq t \leq b \end{array} \right.$ ופונקציה וקטורית

אז $\bar{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

$$\begin{aligned}&\int P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\\ &= \int_a^b P\left(x(t),y(t),z(t)\right)x'(t)dt + \int_a^b Q\left(x(t),y(t),z(t)\right)y'(t)dt + \int_a^b R\left(x(t),y(t),z(t)\right)z'(t)dt\end{aligned}.$$

11.4 נוסחת גרין

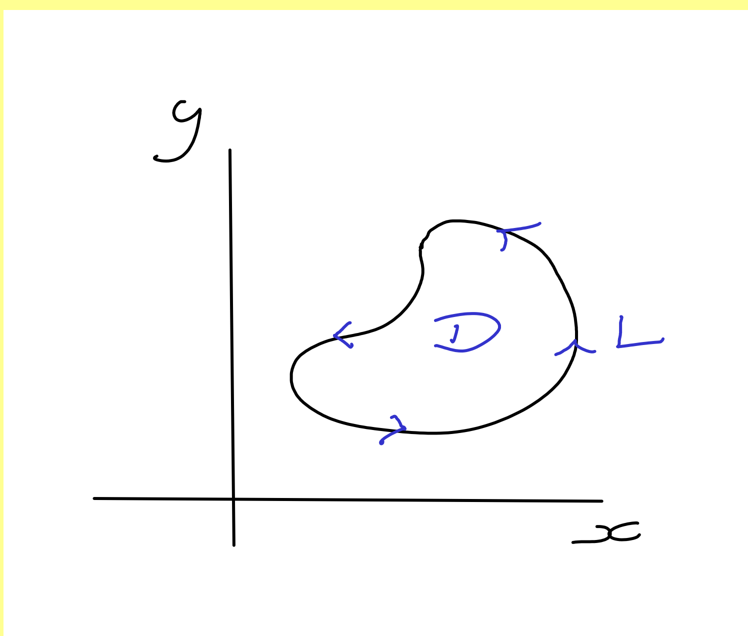
משפט 11.10 נוסחת גרין

אם L מסלול מישורי סגור ו- P,Q גזירות, אז

$$\oint_L \left[P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy\right] = \iint_D dx\ dy\ \left(Q'_x - P'_y\right)\ .$$

כאשר D התחום החסום על ידי L ונמצא משמאל ל-L. בפרט, שטח התחום $S(D)$ נתון ע"י

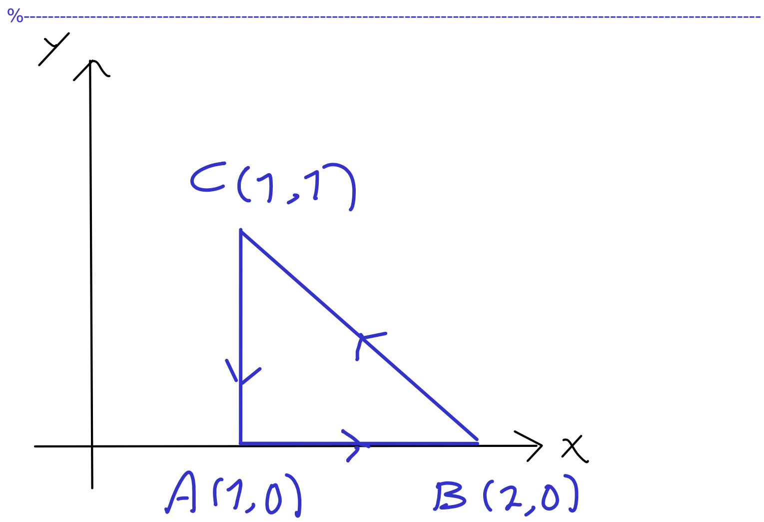
$$S(D) = \oint_L x\,dy = -\oint_L y\,dx = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx\ .$$



דוגמה 11.6

חשבו את $I = \oint_L \frac{2}{x+y}dx + \frac{1}{x+y}dy$ לאורך המשולש שקדקודיו $A(1,0)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$.

פתרון:

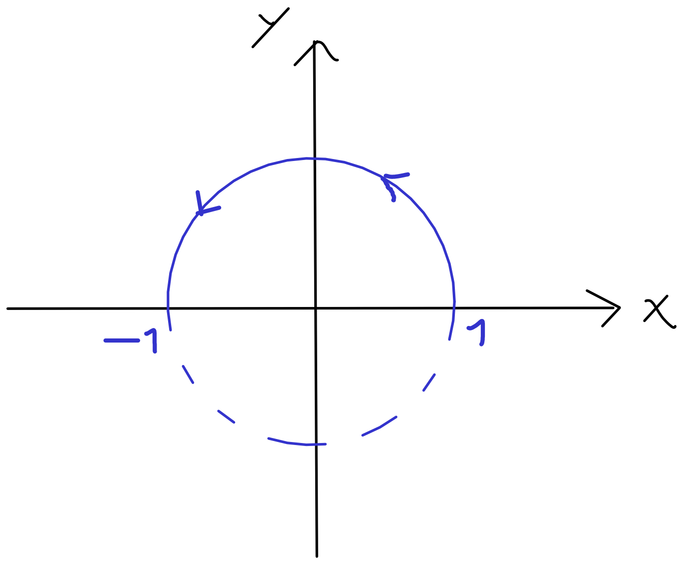


$$
\begin{aligned}
I &= \oint_L \frac{2}{x+y}\,dx + \frac{1}{x+y}dy \\
&= \iint_D \left(\frac{-1}{(x+y)^2} + \frac{2}{(x+y)^2}\right)dx\,dy \\
&= \int_1^2 dx \int_0^{2-x} dy\, \frac{1}{(x+y)^2} dx\,dy \\
&= \int_1^2 dx \left[\frac{-1}{x+y}\right]_0^{2-x} \\
&= \int_1^2 dx \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{x}\right) \\
&= \left[\frac{-x}{2} + \ln x\right]_1^2 \\
&= \ln 2 - \frac{1}{2}\ .
\end{aligned}
$$

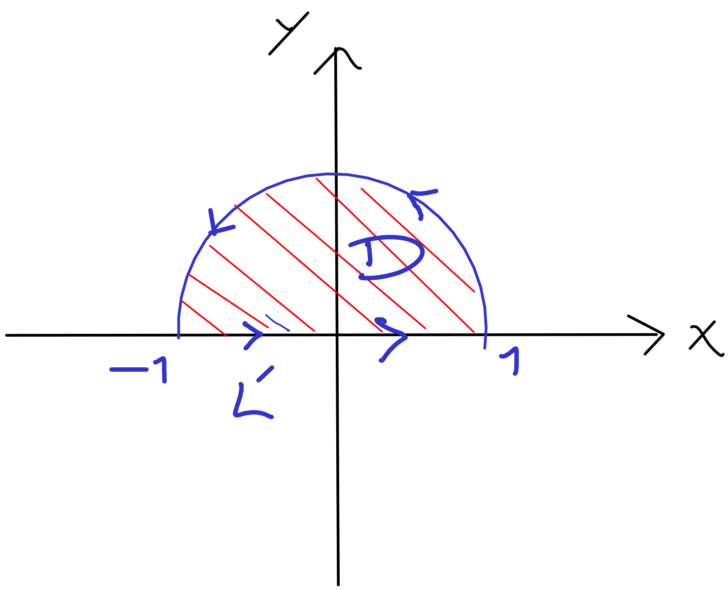
דוגמה 11.7

חשבו את $I = \int\limits_L \left(x^4 + e^x - y\right) dx + \left(x^2 + y^5 + y^2 e^y\right) dy$ לאורך המסלול $x^2 + (\sqrt{y})^4$ מימין לשמאל.

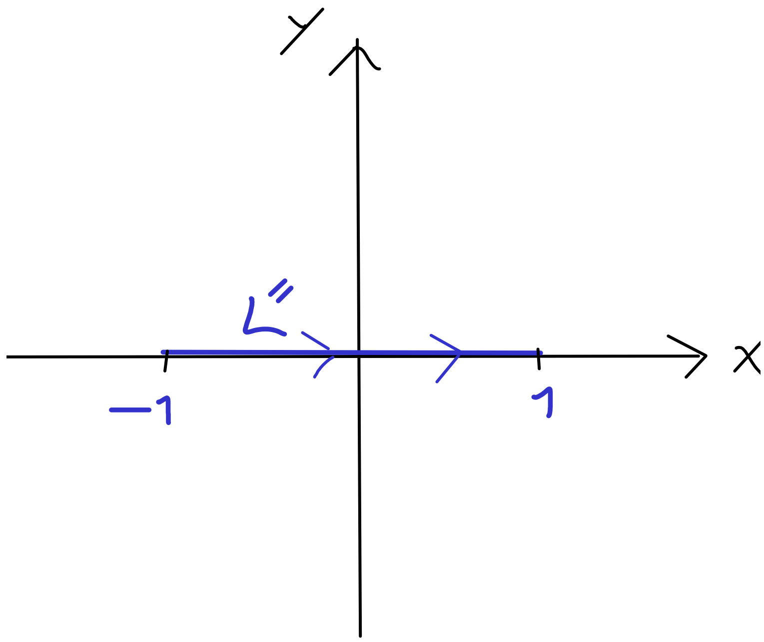
פתרון:



$x^2 + (\sqrt{y})^4 \Leftarrow$ $\begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ נסגור את המסלול כך:



כלומר נשרשר עם המסלול



$$\oint_{L'} = \int_{L} + \int_{L''}$$

$$\oint_{L'} Pdx - Qdy = \iint_{D} (2x+1)dx\,dy$$

$$= \int_0^1 r\,dr \int_0^{\pi} (2r\cos\theta + 1)\,d\theta$$
$$= \int_0^1 r\,[2r\sin\theta + \theta]_{\theta=0}^{\pi}\,dr$$
$$= \int_0^1 \pi \cdot r dr$$
$$= \left[\frac{\pi r^2}{2}\right]_0^1$$
$$= \frac{\pi}{2}\ .$$

$$\int_{L''} P\,dx + Q\,dy = \int_{-1}^{1} P(x,0)dx + \int_{-1}^{1} Q(x,0)\cdot 0\,dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \left(x^4 + e^x\right) dx$$
$$= \left[\frac{x^5}{5} + e^x\right]_{-1}^{1}$$
$$= \left[\frac{2}{5} + e + \frac{1}{e}\right]$$

לכן

$$I = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{2}{5} + e - \frac{1}{e}\right)$$

משפט 11.11 אי-תלות של אינטגרל קווי במסלול האינטגרציה

אם

$$Q'_x = P'_y$$

מתקיימים, אז

(א)

$$\oint_L [P(x,y)\ dx + Q(x,y)]\ \ dy = 0$$

עבור כל מסלול סגור L

(ב) קיימת פונקציה $U(x,y)$ שעבורה הדיפרנציאל שלה הינה

$$dU(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\ ,$$

כך שהאינטגרל הקווי של $P(x,y)\hat{\boldsymbol{i}} + Q(x,y)\hat{\boldsymbol{j}}$ דרך מסלול שרירותי L מנקודה A לנקודה B ניתן ע"י

$$\int_{AB} [P\,dx + Q\,dy] = \int_{AB} dU = U(B) - U(A)\ ,$$

כלומר האינטגרל הקווי $\int_{AB} [P\,dx + Q\,dy]$ אינו תלוי במסלול האינטגרציה העובר מ-A ל-B.

11.5 דוגמאות

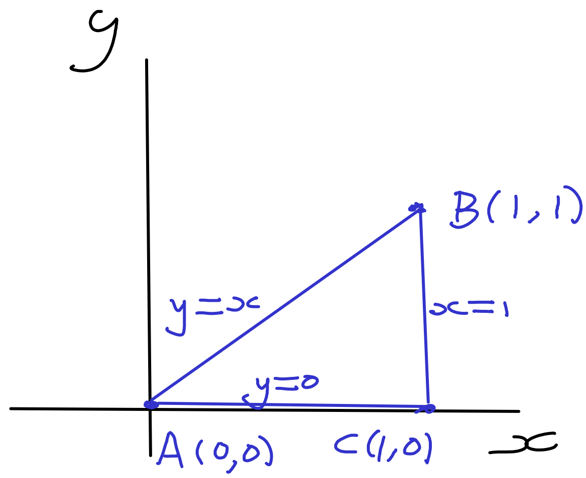
דוגמה 11.8 ח

שב את האינטגרל הבא כאשר המסלול L הוא המצולע בעל קדקודים נתונים:

$$\int_L (x+y)\ dl$$

$A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(1,0)$.

פתרון:



$$\begin{aligned}\int_L dl\ (x+y) =& \left[\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}\right] (x+y)\ dl \\ =& \int_0^1 dx\,\sqrt{1+(x)'}\,(x+x) + \int_1^0 dy\,(1+y) + \int_1^0 dx\,(x+0) \\ =& \sqrt{2}\left[x^2\right]_0^1 + \left[y+\frac{y^2}{2}\right]_1^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^0 \\ =& \sqrt{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \sqrt{2}-2\ .\end{aligned}$$

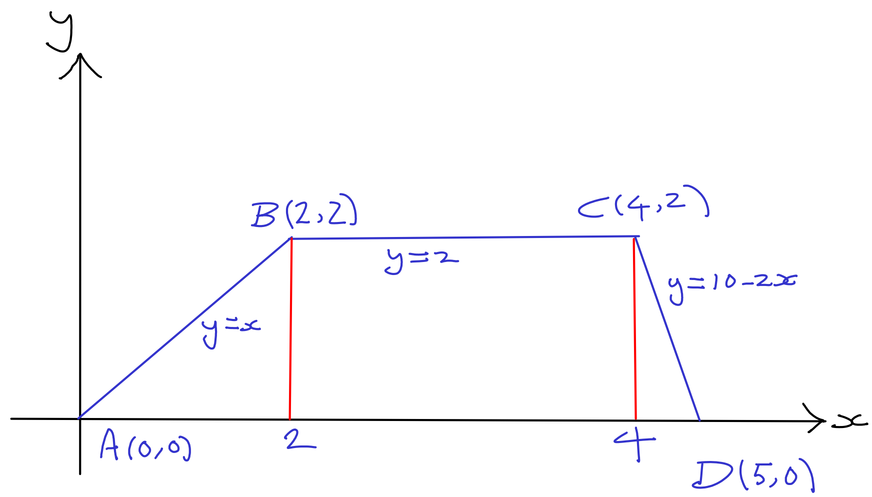
דוגמה 11.9 נוסחת גרין

חשבו את האינטגרל הבא כאשר המסלול L הוא המצולע בעל קדקודים נתונים:

$$\oint_L (xy\ dx + (x-y)\ dy)$$

$.D(5,0)$,$C(4,2)$,$B(2,2)$,$A(0,0)$

פתרון:



המסלול סגור ולכן ניתן להשתמש בנוסחת גרין (כלל **??**):

$$I=\oint_L (Pdx+Qdy)=\iint_D dx\ dy\ \left(Q'_x-P'_y\right)$$

כאן

$$P(x,y)=xy\ ,\qquad Q(x,y)=x-y\ ,\qquad Q'_x=1\ ,\qquad P'_y=x\ ,$$

ולכן

$$\begin{aligned}
I=&\int_0^2 dx\int_0^x dy\,(1-x)+\int_2^4 dx\int_0^2 dy\,(1-x)+\int_4^5 dx\int_0^{-2x+10} dy\,(1-x)\\
=&\int_0^2 dx\ x\,(1-x)+\int_2^4 dx\ 2\,(1-x)+\int_4^5 dx\ \ (1-x)\,(-2x+10)\\
=&\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\left[2x-x^2\right]_2^4+\ \left[10x-\frac{11x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}\right]_4^5\\
=&4-\frac{8}{3}+(8-16-4+4)+\left(-\frac{10}{3}\right)\\
=&2-\frac{8}{3}+(8-16-4+4)+\left(-\frac{10}{3}\right)\\
=&-12\ .
\end{aligned}$$

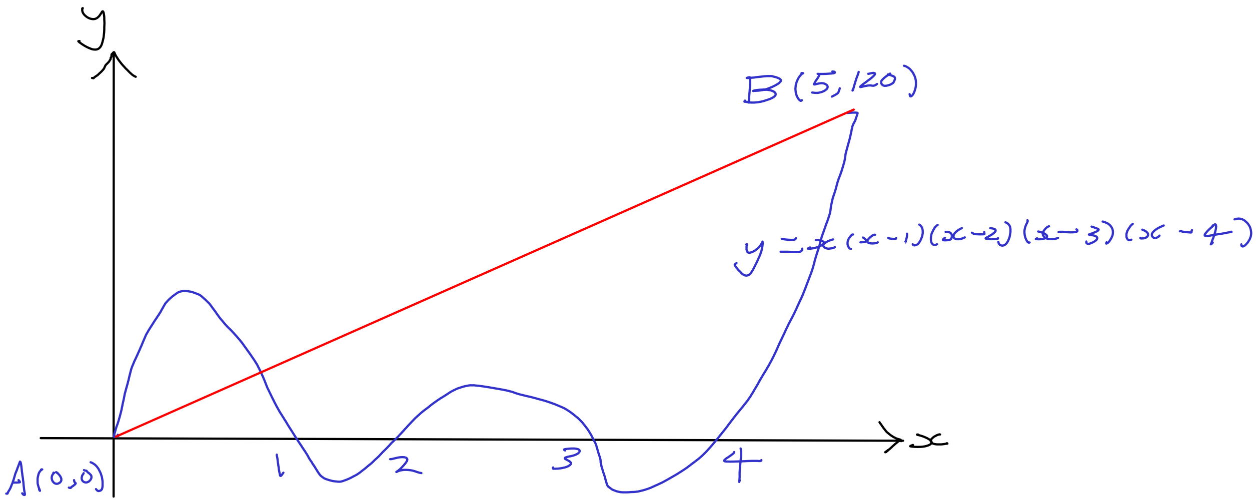
דוגמה 11.10 אי-תלות של אינטגרל קווי במסלול

חשבו את האינטגרל

$$\int_L ((2x-y)dx+(3y-x)dy)$$

עבור המסלול L הקטע של העקום $y=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ בין הנקודות $A(0,0)$, $B(5,120)$.

פתרון:



האינטגרל הוא

$$\int_L (P(x,y)dx + Q(x,y)dy)$$

כאשר

$$P(x,y) = 2x - y \ , \qquad Q(x,y) = 3y - x \ .$$

שים לב:

$$P'_y = Q'_x = -1$$

ולפיו מותר להשתמש בכלל **??**, האורם כי קיימת פונקציה $U(x,y)$ כך ש-

$$dU(x,y) = P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy$$

והאינטגרל אינו תלוי בהמסלול אלא רק על הנקודה התחלתי $A(0,0)$ והנקודה הסופי $B(5,120)$. הפונקציה $U(x,y)$ הינה

$$U(x,y) = \int dx\ P(x,y) = \int dx\ (2x-y) = x^2 - xy + p(y)$$

כאשר $p(y)$ פונקציה התלוי רק על המשתנה y ו-

$$U(x,y) = \int dy\ Q(x,y) = \int dy\ (3y-x) = \frac{3y^2}{2} - xy + q(x)$$

כאשר $q(x)$ פונקציה התלוי רק על המשתנה x. נשוואה אותן ונקבל

$$U(x,y) = x^2 + \frac{3y^2}{2} - xy \ .$$

לכן לפי כלל **??**,

$$\int\limits_L (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \int\limits_{AB} dU(x,y) = U(B) - U(A) = 5^2 + \frac{3 \cdot 120^2}{2} - 5 \cdot 120 = 21025 \ .$$

דוגמה 11.11 נוסחת גרין

חשבו את האינטגרל

$$\oint\limits_L ((x+y)\ dx + (x-y)\ dy)$$

לפי המסלול L הניתן ע"י

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

פתרון:

המסלול סגור ולכן ניתן להשתמש בנוסחת גרין (כלל **??**) האומר כי

$$I = \oint\limits_L (P\ dx + Q\ dy) = \iint\limits_D dx\ dy\ \left(Q'_x - P'_y\right)$$

כאן

$$P(x,y) = x+y\ , \qquad Q(x,y) = x-y\ , \qquad \Rightarrow \quad Q'_x = 1\ , \qquad P'_y = 1\ .$$

ולכן

$$I = \iint\limits_D\ dx\ dy\ \ (1-1) = 0.$$

דוגמה 11.12 אינטגרל הקווי מסוג שני

חשבו את האינטגרל

$$\oint\limits_L (xy\ dx + (x-y)\ dy)$$

לפי המסלול L הניתן ע"י

$$x = a \cdot \cos t\ , \quad y = b \cdot \sin\ t$$

בכיוון נגד השעון.

פתרון:

מתקבלים המסלול הסגור ע"י הטווח

$$0 \le t \le 2\pi$$

כך שלפי בלל **??**,

$$
\begin{aligned}
I =& \oint\limits_L (xy\ dx + (x-y)\ dy) \\
=& \int_0^{2\pi} dt\, (x(t)y(t)\ \dot{x} + (x(t)-y(t))\dot{y}) \\
=& \int_0^{2\pi} dt\, \left(-a^2 b\ \cos t \cdot \sin^2 t + (a \cdot \cos t - b \cdot \sin t) b \cdot \cos t\right) \\
=& \int_0^{2\pi} dt\, \left(-a^2 b\ \cos t \cdot \sin^2 t + ab \cdot \cos^2 t - b^2 \cdot \sin t \cdot \cos t\right) \\
=& \int_0^{2\pi} dt\, \left(-a^2 b\ \cos t \cdot \sin^2 t + ab \cdot \frac{1}{2}(1+\cos 2t) - b^2 \cdot \sin t \cdot \cos t\right) \\
=& \left[-a^2 b\, \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{abt}{2} - \frac{ab}{4}\sin 2t - \frac{b^2}{2} \cdot \sin^2 t\right]_0^{2\pi} \\
=& \pi ab\ .
\end{aligned}
$$