

**чисוביות וסיבוכיות****מועד ב'**

ד"ר יוחאי טויטו, ד"ר ירמי יהו מילר  
סמסטר א, תשפ"ה

מספר העמוד הנוכחי ומספר העמודים הכוללים בשאלון מופיעים בחתית כל עמוד. בהצלחה!

**הנחיות למדור בחינות****שאלוני בחינה**

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- לשאלון הבחינה יש לצרף כריכה בלבד.
- יש להחזיר את השאלון ביחד עם המחברת/כריכה.

**שימוש במחשבונים**

- ניתן להשתמש במחשבון.
- לא ניתן להשתמש במחשבון.

**חומר עזר**

- לא ניתן להשתמש בחומר עזר כלל.
- ניתן להשתמש בחומר עזר/דף נוסחות, כמפורט:
- הבחינה עם חומר פתוח  מותר להשתמש בכל חומר עזר מודפס או כתוב.

## הנחיות

נא קראו בעיון את הנחיות הבאות בטרם תחילו לפתרו את הבדיקה. מומלץ לקרוא בקצרה את כל השאלות לפני שמתחלים לפתור את הבדיקה. ניתן לענות על השאלות בכל סדר שתרצה.

1. המבחן כולל 5 שאלות. יש לענות על כולן.
2. שאלות הבדיקה שוות משקל - כל שאלה 20 נקודות.
3. כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תזלגו על שלבים.
4. המבחן כולל נספחים, לשימושכם. הסתיעו בהם במידת הצורך.
5. הקפידו על כתב יד ברוח וקריא.
6. הקפידו לרשום בגודל ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
7. כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבלתם. רק הן נבדקות !
8. ניתן לקחת את השאלון כאשר הבדיקה מסתיימת.

**בהצלחה!**

## הבחינה

### שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

#### סעיף א' (10 נקודות)

נתון אלפבית הקלט  $\Sigma = \{a, b, c\}$  ונתונה השפה הבאה:

$$L = \{a^i b^j c^{2i+3j} \mid i, j \in \mathbb{N}^+\}$$

תארו מכונת טיורינג סטנדרטית (כלומר, במודל הבסיסי) שמכריעה את השפה.

בטעיף זה עלייכם לתאר את המכונה בצורה גרפית בעזרת תרשימים \ דיאגרמת מצבים בלבד, ולא בדרך כלל. כלומר, לא בעזרת טבלת מעברים, לא בעזרת פסאודו-קוד, וכיוצא באלו.

תזכורת,  $\mathbb{N}^+$  היא קבוצת הטבעיים החוביים (כלומר, ללא המספר אפס).

#### סעיף ב' (10 נקודות)

בנומכונת טיורינג סטנדרטית (כלומר, במודל הבסיסי) שמכריעת את השפה הבאה:

$$L = \{x_1 \dots x_k \# y_1 \dots y_k \# z_1 \dots z_k \mid x_i, y_i, z_i \in \{0, \dots, 9\} \wedge \forall_i (z_i \neq x_i \wedge z_i \neq 2y_i \wedge z_i \geq x_i + y_i)\}$$

את המכונה יש לתאר בעזרת טבלת המעברים בלבד. אין לתאר את המכונה בעזרת תרשימים ו/או פסאודו-קוד (טיור או מילול).

### שאלה 2: וריאציות על מכונות טיורינג (20 נקודות)

נסמן ב- $T$  את מודל מכונת הטיורינג הבסיסי. במודל זה בכל צעד ניתן לזרז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר באותו המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לשני הצדדים. בתחילת החישוב הראש נמצא בתחילת הקלט.

נסמן ב- $O$  את מודל מכונת הטיורינג עם סרט ימינה בלבד. במודל זה בכל צעד ניתן לזרז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר באותו המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לכיוון אחד בלבד - ימינה. בתחילת החישוב, הקלט ממוקם בקצתה השמאלי של הסרט והראש נמצא בתחילת הקלט. החישוב מתנהל כמו המכונה במודל  $T$  למעט כאשר הראש נמצא במשבצת השמאלית ביותר הסרט וצריך לזרז שמאלה - במקרה זה הראש נשאר באותו מקום ולא זו.

הוכחו כי המודל  $T$  והמודל  $O$  שקולים חישובית. כיתבו הוכחה מלאה ומפורטת. אל תלגגו על שלבים. תארו באופן מפורט את פונקציית המעברים בשני כיווני הוכחה. העזרו בטבלת מעברים בכדי לתאר באופן מלא את פונקציית המעברים.

### שאלה 3:

### התזה של צ'רץ'-טיוירינג (20 נקודות)

#### סעיף א' (10 נקודות)

נתון הבדיקה הבא. מהי השפה שהבדיקה יוצר? כמובן, מהי  $L(G)$ ? כתבו את השפה בצורה פורמלית, ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של השפה.

$$\begin{aligned} G = & (V, \Sigma, R, S) , \\ V = & \{S, C, D, E, \$, \#\}, \\ \Sigma = & \{a\} , \\ R = & \{ \end{aligned}$$

$$S \rightarrow \$Ca\# ,$$

$$S \rightarrow a ,$$

$$S \rightarrow \varepsilon ,$$

$$Ca \rightarrow aaC ,$$

$$\$D \rightarrow \$C ,$$

$$C\# \rightarrow D\# ,$$

$$C\# \rightarrow E ,$$

$$aD \rightarrow Da ,$$

$$aE \rightarrow Ea ,$$

$$\$E \rightarrow \varepsilon .$$

}

#### סעיף ב' (10 נקודות)

נתון הבדיקה הבא. מהי השפה שהבדיקה יוצר? כמובן, מהי  $L(G)$ ? כתבו את השפה בצורה פורמלית,

ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של השפה.

$$\begin{aligned}
 G &= (V, \Sigma, R, S) , \\
 V &= \{S, B, C, H\}, \\
 \Sigma &= \{a, b, c\} , \\
 R &= \{ \\
 &\quad S \rightarrow aSBC , \\
 &\quad S \rightarrow aBC , \\
 &\quad CB \rightarrow HB , \\
 &\quad HB \rightarrow HC , \\
 &\quad HC \rightarrow BC , \\
 &\quad aB \rightarrow ab , \\
 &\quad bB \rightarrow bb , \\
 &\quad bC \rightarrow bc , \\
 &\quad cC \rightarrow cc . \\
 \}
 \end{aligned}$$

#### **שאלה 4: אי כריעות (20 נקודות)**

נתונה השפה הבאה:

$$L_{\geq 3} = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| \geq 3\}$$

$L_{\geq 3}$  מכילה קידודים של מכונות טירינג שמקבלות לפחות  $k$  מילימ' שנות.

##### **סעיף א' (10 נקודות)**

הוכחו כי  $L_{\geq 3}$  שפה קבילה.

##### **סעיף ב' (10 נקודות)**

הוכחו כי  $L_{\geq 3}$  לא כריעה.

#### **שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)**

עמוד 5 מטור 6

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד 7 בוטינסקי 84 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il) | חייג: \*טפסת

בע"ת סכום התת קבוצה  $SUBSETSUM$ : בהינתן קבוצת מספרים שלמים  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ומספר שלם  $t$ , האם קיימת תת קבוצה  $Y \subseteq S$  שסכום איבריה הוא  $t$ .

בע"ת סכום התת קבוצה כשפה פורמלית:

$$SUBSETSUM = \left\{ \langle S, t \rangle \mid t = \sum_{y \in Y} y \text{ קבוצת שלמים, } t \text{ שלם וקיימת תת-קבוצה } Y \subseteq S \text{ כך ש-} \right\}$$

בע"ת החלוקת ( $PARTITION$ ) מוגדרת באופן הבא:

בhinתן קבוצת מספרים שלמים  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  האם קיימת חלוקה לשתי קבוצות  $A_1$  ו-  $A_2$  כך ש:

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \bullet$$

$$A_1 \cup A_2 = A \bullet$$

$$\sum_{a_i \in A_1} a_i = \sum_{a_i \in A_2} a_i = \frac{1}{2} \sum_{a_i \in A} a_i \bullet$$

בע"ת החלוקת כשפה פורמלית:

$$PARTITION = \left\{ A \mid \begin{array}{l} A \text{ קבוצת שלמים וקיימות } A_1, A_2 \subset A \text{ כך ש:} \\ A_1 \cup A_2 = A \text{ ו } A_1 \cap A_2 = \emptyset \text{ וגם } \sum_{a \in A_1} a = \sum_{a \in A_2} a = \frac{1}{2} \sum_{a \in A} a \end{array} \right\}$$

הוכחו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה  $SUBSETSUM$  לשפה  $PARTITION$ . כלומר:

$$SUBSETSUM \leq_P PARTITION .$$

בשאלה זו עליכם:

### סעיף א' (8 נקודות)

להגיד במדויק את הרדוקציה.

### סעיף ב' (6 נקודות)

להראות שהרדוקציה היא רדוקציית התאמה.

### סעיף ג' (6 נקודות)

להראות שהרדוקציה פולינומיאלית.

**תוכן העניינים**

8	1 מכונות טיורינג
9	2 וריאציות של מכונות טיורינג
10	3 התזה של צ'רצ'-טיורינג
14	4 אי-כריעות
18	5 סיבוכיות זמן
21	6 נוסחאות נוספות

## 1 מכונות טיורינג

### הגדרה 1: מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שבעיה .

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$  . קבוצת מצבים סופיות

$\Sigma \neq \emptyset$  א"ב קלט סופי

$\Sigma \subseteq \Gamma$ ,  $\_\in \Gamma$  א"ב סרט סופי

$\delta : (Q \setminus \{\text{rej}, \text{acc}\} \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$  פונקציית המעברים

מצב הinitialי  $q_0$

מצב מקבל  $\text{acc}$

מצב דוחה  $\text{rej}$

### הגדרה 2: קונפיגורציה

תהי  $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$  מכונת טיורינג.

**קונפיגורציה** של  $M$  הינה מחרוזת

$$uq\sigma v, \quad u, v \in \Gamma^*, \quad \sigma \in \Gamma, \quad q \in Q.$$

**משמעות:**

$q$  מצב המכונה,

$\sigma$  הסימן במקומות הראש

$u$  תוכן הסרט משמאלי לראש,

$v$  תוכן הסרט מימין לראש.

### הגדרה 3: גירה

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$  מכונת טיורינג, ותהיינה  $c_1$  ו-  $c_2$  קונפיגורציות של  $M$ .

נסמן

$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים,  $c_1$  גורר את  $c_2$ ) אם כמפורטים ב-  $c_1$  עוברים ל-  $c_2$  בצעד אחד.

נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

אם ניתן לעبور מ-  $c_1$  ל-  $c_2$  ב- 0 או יותר צעדים.

### הגדרה 4: קבלה ודחיה של מחרוזות

תהי  $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$  מכונת טיורינג, ו-  $w \in \Sigma^*$  מחרוזת.

נאמר כי:

- $M$  מקבלת את  $w$  אם  $q_0 w \vdash_M^* u \text{ acc } \sigma v$

- $M$  דוחה את  $w$  אם  $q_0 w \vdash_M^* u \text{ rej } \sigma v$  כאשר  $\Gamma \in u, \sigma \in \Gamma^*, v \in \text{כלשהם}$ .

#### הגדרה 5: הכרעה של שפה

תהי  $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$  מכונת טיורינג, ו-  $L \subseteq \Sigma^*$  שפה. נאמר כי  $M$  מכריעה את  $L$  אם לכל  $\Sigma^* \in w$  מתקאים

- $M \Leftarrow w \in L$  מקבלת את  $w$ .
- $M \Leftarrow w \notin L$  דוחה את  $w$ .

#### הגדרה 6: קבלה של שפה

תהי  $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$  מכונת טיורינג, ו-  $L \subseteq \Sigma^*$  שפה. נאמר כי  $M$  מקבלת את  $L$  אם לכל  $\Sigma^* \in w$  מתקאים

- אם  $w \in L$  מקבלת את  $w$ .
  - אם  $w \notin L$  לא מקבלת את  $w$ .
- במקרה כזה נכתב ש-  $L(M) = L$ .

#### הגדרה 7: חישוב פונקציות

תהי  $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$  מכונת טיורינג ותהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$  אס: נאמר כי  $M$  מחשבת את  $f$  אם:

- $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \Gamma$
- לכל  $\Sigma_1^* \in w$  מתקיים  $.q_0 w \vdash_M^* \text{acc } f(w)$

## 2 וריאציות של מכונות טיורינג

#### הגדרה 8: מודל חישוב

מודל חישובי = אוסף של מכונות שעבורם מוגדרים המושגים של הכרעה וקבלת של שפות.

#### הגדרה 9: מודלים שקולים חישובית

יהיו  $A, B$  מודלים חישוביים. נאמר כי  $A$  ו-  $B$  שקולים אם לכל שפה  $L$ :

- קיימת מכונה במודל  $A$  שמכריעה את  $L$  אם ו רק קיימת מכונה כזו במודל  $B$ .
- קיימת מכונה במודל  $A$  שמקבלת את  $L$  אם ו רק קיימת מכונה כזו במודל  $B$ .

**הגדרה 10: מכונות שקולות חישובית**

שתי מכונות הן שקולות חישובית אם הן מקבלות ודווחות בדיקת אותן המילים.

**משפט 1: מכונות טיורינג עם סרט ימינה בלבד**

מודול מ"ט טם סרט אינסופי לכיוון אחד בלבד (מודול O) שקול למודל אינסופי בשני הכוונים (מודול T).  
כלומר, לכל שפה  $L$ :

- יש מ"ט מודול O שמקבלת את  $L$  אם ו רק אם יש מ"ט במודל T שמקבלת את  $L$ .
- יש מ"ט מודול O שמכריעה את  $L$  אם ו רק אם יש מ"ט במודל T שמכריעה את  $L$ .

**משפט 2: מכונות טיורינג מרובת סרטים**

במכונות טיורינג מרובות סרטים:

- יתכנו מספר סטרים.

מספר הסרטים סופי וקבוע מראש בזמן בנייה המ"ט, ואיןו תלוי בקלט או במהלך החישוב.

- לכל סרט יש ראש נפרד.

הפעולות (תנועה וכתיבה) בכל סרט נעשית בנפרד.

בפרט, הראשים יכולים לאוז בכיוונים שונים בסרטים שונים.

- ישנו בקר מרכזי יחיד, שקובע את הפעולות בכל אחד מהסרטים, על סמך המידע שמתתקבל מכל הסרטים.

לכן, תוכן סרט אחד יכול להשפיע על הפעולות בשאר הסרטים.

- בתחילת החישוב, הקלט נמצא הסרט הראשון ושאר הסרטים ריקים.

**משפט 3:**

לכל  $k$ , המודל של מ"ט עם  $k$  סטרים שקול חישובי למודל של מ"ט עם סרט אחד.

**משפט 4:**

קיבלה ודיחיה של מחרוזות:

עבור מ"ט לא דטרמיניסטיבית  $N$  ומחרוזת  $w$ :

- $N$  מקבלת את  $w$  אם קיים חישוב של  $N$  על  $w$  שmagiu לנצח מקבל.
- $N$  דוחה את  $w$  אם כל החישובים של  $N$  על  $w$  עצרים בנצח דוחה.

הכרעה וקיבלה של שפות:

עבור מ"ט לא דטרמיניסטיבית  $N$  ושפה  $L$ :

- $N$  מכיריה את  $L$  אם  $N$  מקבלת אצ' כל המילים ב-  $L$  ודוחה את כל המילים שאין ב-  $L$ .
- $N$  מקבלת את  $L$  אם  $N$  מקבלת אצ' כל המילים ב-  $L$  ולא מקבלת את כל המילים שאין ב-  $L$ .

**משפט 5:**

לכל מ"ט לא דטרמיניסטיבית קיימת מ"ט דטרמיניסטיבית שcola.

**3 התזה של צ'רצ'-טיורינג**

שמות נרדפים לשפות כריעות ושפות קבילות

Acceptable languages	שפות קבילות	Decideable languages	שפות כריעות
recognizable languages	שפות ניתנות לייחוי	Recursive languages	שפות רקורסיביות
Semi-decidable languages	שפות כריעות למחצה		
Partially-decidable languages			
Recursively enumerable languages	שפות הניתנות למנייה רקורסיביות		

**משפט 7: סגירות שפות קבילות**

- איחוד
- חיתוך
- שרשור
- סגור קלין

**משפט 6: סגירות שפות כריעות**

השפות הכריעות סגורות תחת:

- איחוד
- חיתוך
- משלים
- שרשור
- סגור קלין

**משפט 8: היחס בין הכרעה לקבלה**

אם שפה הינה כרעה אז היא קבילה.  
 אם שפה ומשלים שלה קבילות אז היא כרעה.

**הגדרה 11: שפת סימפל  
משתנים**

- טבאים: ..., j, i
- מקבלים כערך מספר טבעי.
- מערכים: ..., C[], B[], A[] בכל תא ערך מתוך א"ב Γ אין סופיים.
- אתחול: הקלט נמצא בתאים הראשונים של [A].

כל שאר המשתנים מאותחלים ל-0.

**פעולות**

- השמה בקבוע:

$$i=3, B[i]="#"$$

- השמה בין משתנים:

$$i=k, A[k]=B[i]$$

- פעולות חשבונ:

$$x = y + z, x = y - z, x = y \cdot z$$

**תנאים**

$B[i] == A[j]$  •

(מערכיים).

$x >= y$  •

(משתנים טבאיים).

כל משתנה מופיע רק פעם אחת בכל פעולה או תנאי.

#### זרימה

• סדרה פקודות ממספרות.

• `goto`: מותנה ולא מותנה.

• עצירה עם ערך חזרה.

```

1 one = 1
2 zero = 0
3 B[zero] = "0"
4 i=0
5 j=i
6 if A[i] == B[zero] goto 9
7 i=j + one
8 goto 3
9 C[one] = A[j]
10 if C[one] == A[zero] goto 12
11 stop(0)
12 stop(1)
```

#### הגדרה 12: קבלת ודוחיה של מחוזות בשפה SIMPLE

עבור קלט

w ותוכנית

P בשפת SIMPLE. נאמר כי

- P מקבלת את w אם הריצה של P על w עוצרת עם ערך חזרה 1.
- P דוחה את w אם הריצה של P על w עוצרת עם ערך חזרה 0.

#### הגדרה 13: הכרעה וקבלת של שפה

עבור שפה L ותוכנית P בשפת SIMPLE. נאמר כי

- P מכירעה את L אם היא מקבלת את המילים שב- L ודוחה את אלה שלא ב- L.
- P מקבלת את L אם היא מקבלת את כל ורקי המילים ב- L.

#### משפט 9:

המודלים של מכונת טיורינג ותוכניות SIMPLE שקולים.

**משפט 10: מ"ט ותוכניות מחשב**

מ"ט חזקה לפחות כמו תוכנית משחוב.  
כל תוכנית משחוב ניתנת למימוש במ"ט.

לכן, כל שפה שהינה כריעה ע"י מחשב היא גם כריעה ע"י מ"ט.  
וכמו כן, שפה שהינה קבילה ע"י מחשב היא גם קבילה ע"י מ"ט.

**הגדרה 14: דקדוקים כלליים**

בדקdock כללי, מצד שמאל של כלל יצירה יכולה להופיע מחרוזת (לא ריקה) כלשהי.  
פורמלית, כלל יצירה בדקדוק כללי הוא מהצורה

$$\gamma \rightarrow u$$

כאשר  $(V \cup \Sigma)^*$ ,  $\gamma \in (V \cup \Sigma)^+$ .

**משפט 11:**

תהי  $L$  שפה.  $L$  קבילה אם ו רק אם קיים דקדוק כללי  $G$  כך ש-  $L(G) = L$ .

מודל חישובי	דקdock	משפחת שפות
מכונת טיורינג	כללי	קבילות
אוטומט מחסנית	חסר הקשר	חסירות הקשר
אוטומט סופי	רגולרי	רגולריות

**משפט 12:**

כל שפה חסרת הקשר אינה כריעה.

**משפט 13: התזה של צ'רצ' טיורינג**

התזה של צ'רצ' טיורינג מודל מ"ט מגלה את המושג האבסטראקטי של "אלגוריתם".  
כלומר, כל אלגוריתם שנitinן לתיאור כתהיליך מכנייסטיubo שבו:

- התהיליך מתבצע סדרה של צעדים.
- כל צעד מצריך כמהות סופית של "עובדת".

ניתן גם לתיאור כמ"ט.

בפרט, אין מודל מכנייסטי / אוטומטי יותר ממ"ט.

## 4 אי-כריעות

### הגדרה 15: השפה ATM

$$ATM = \{(P, w) \mid P(w) = 1\} .$$

השפה ATM כוללת את כל הזוגות של מחרוזות  $w$ ,  $P$  כך ש:

- $P$  היא קוד (תקין) של תוכנית.
- $w$  מחרוזת.

- מתקיים שם מרכיבים את התוכנית  $P$  על הקלט  $w$  אז התוכנית עוצרת עם ערך חזרה 1.
- הגדרה חלופית:**

$$ATM = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ מקבלת את } M\}$$

השפה  $A_{TM}$  כוללת את כל הזוגות של מחרוזות  $\langle M, w \rangle$  של כל מכונת טיורינג  $M$  וכל קלט  $w$  כך ש-  $M$  מקבלת את  $w$ .

### סיכום 1: התוכנה U

התוכנה  $U$  היא תוכנה שמקבלת כקלט זוג מחרוזות  $w$ ,  $P$  ופועלת כך:

- $U$  מחזירה את ערך החזרה שהתקבל מהריצה של  $P$  על  $w$ .
- מರיצה את התוכנה  $P$  על קלט  $w$  (במקרה שבו  $P$  אינה תוכנית מחשב תקינה אז  $U$  מחזירה ערך 0).

נשים לב שם מרכיבים את  $P$  לא עוצרת על  $w$  אז גם  $U$  לא עוצרת על הזוג  $w, P$ .

התוכנה  $U$  פועלת באופן דומה לאופן שבו מערכת הפעלה מפעילה תוכנות אחרות.

התוכנה  $U$  נקראת גם "תוכנה אוניברסלית" (או, בעולם מכונות טיורינג: "מכונת טיורינג אוניברסלית") כיון שהיא תוכנה אחת שمدמה כל תוכנה אחרת.

$U$  היא תוכנית שמקבלת את  $ATM$ . כמובן:

$$L(U) = ATM .$$

מסקנה:  $ATM$  קבילה.

### שיטת ההוכחה:

אם שפה הינה קבילה אבל לא כריעה, אז המשלימים שלה בהכרח אינה קבילה.  
לכן, בשביל להוכיח שפה אינה קבילה, די להוכיח שהשפה לא כריעה, והמשלים שלה כן קבילה.

### הגדרה 16: השפה HALT

$$HALT = \{(P, w) \mid P(w) \downarrow\} .$$

השפה HALT כוללת את כל הזוגות של מחרוזות  $w$ ,  $P$  כך ש:

- $P$  היא קוד (תקין) של תוכנית.
- $w$  מחרוזת.

- מתקיים שם מרכיבים את התוכנית  $P$  על הקלט  $w$  אז התוכנית עוצרת (הסימן  $\downarrow$  מסמן עצירה).)

בUPIIT העצירה קבילה אבל לא כריעה.

כיוון שכך, המשלים שלו לא כריעה ולא קבילה.

#### הגדרה חלופית:

$$HALT_{TM} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ מוגדרת על } M\}$$

השפה  $HALT_{TM}$  כוללת את כל הזוגות של מחרוזות  $\langle M, w \rangle$  של כל מכונת טיורינג  $M$  וכל קלט  $w$  כך ש- $M$  עוצרת על  $w$ .

#### הגדרה 17: השפה E

$$E = \{P \mid L(P) = \emptyset\}$$

השפה  $E$  כוללת את כל המחרוזות  $P$  כך ש-

- $P$  היא קוד (תקין) של תוכנית.
- השפה של  $P$  ריקה.

כלומר, לכל קלט  $w$ , הריצה של  $P$  על  $w$  לא מחזירה 1.

#### הגדרה חלופית:

$$E_{TM} = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\}$$

השפה  $E_{TM}$  כוללת את כל מחרוזות  $\langle M \rangle$  של כל מכונת טיורינג  $M$  כך ש- $M$  לא מקבלת אף מילה. במילים אחרות, השפה של  $M$  ריקה:  $L(M) = \emptyset$ .

#### הגדרה 18: השפה EQ

$$EQ = \{(P_1, P_2) \mid L(P_1) = L(P_2)\}.$$

השפה  $EQ$  כוללת את כל זוגות המחרוזות  $P_1, P_2$  כך ש:

- $P_1, P_2$  הינם קודים (תרינים) של תוכניות.
- השפות של  $P_1, P_2$  זהות.

כלומר,  $P_1, P_2$  מקבלות בדיקת אוטן המילים.

#### הגדרה חלופית:

$$EQ_{TM} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\}$$

השפה  $EQ_{TM}$  כוללת את כל זוגות של מכונות טיורינג  $\langle M_1, M_2 \rangle$  שמקבלות בדיקת אוטן המילים. במילים אחרות, השפות של  $M_1$  ו-  $M_2$  זהות:  $L(M_1) = L(M_2)$ .

כריעה	קבילה	
✓	✗	$ATM$
✗	✗	$\overline{ATM}$
✓	✗	$HALT$
✗	✗	$\overline{HALT}$
✗	✗	$E$
✓	✗	$\overline{E}$
✗	✗	$EQ$
✗	✗	$\overline{EQ}$

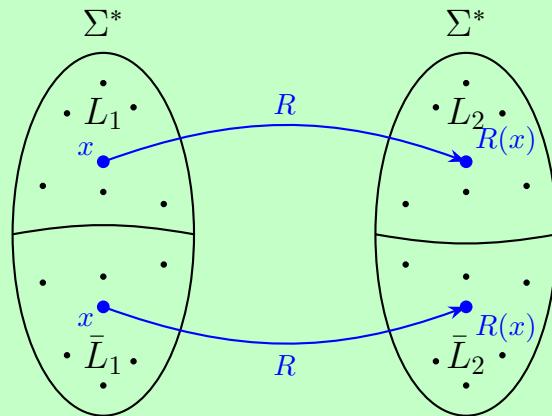
**הגדרה 19: הרדוקציה**

רדוקציית התאמה  $L_2 \subseteq \Omega_2$  מקבוצה  $L_1 \subseteq \Omega_1$  (many to one reduction) לקבוצה הינה **פונקציה**

$$R : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$$

כך שלכל  $x \in \Omega_1$  מתקיים:

$$x \in L_1 \Leftrightarrow R(x) \in L_2 .$$



**סיכום:** רימית רדוקציה התאמה ניתנת לחישוב מ-  $L_1 \leq_m L_2$ .

**משפט 14: משפט הרדווקציה**

**טענה:**  
אם:

- $L_2$  קבילה
- $L_1 \leq L_2$
- או  $L_1$  קבילה.

- $L_2$  כריעה
- $L_1 \leq L_2$
- או  $L_1$  כריעה.

**מסקנה:**  
אם:

- $L_1$  לא קבילה
- $L_1 \leq L_2$
- או  $L_2$  לא קבילה.

- $L_1$  לא כריעה
- $L_1 \leq L_2$
- או  $L_2$  לא כריעה.

**מתכוון להוכחה ששפה  $L_2$  לא קבילה:**

1. בחר שפה  $L_1$  לא קבילה.
2. מצא רדווקציית התאמה ניתנת לחישוב מה-  $L_1$  ל-  $L_2$ .

**מתכוון להוכחה ששפה  $L_2$  לא כריעה:**

1. בחר שפה  $L_1$  לא כריעה.
2. מצא רדווקציית התאמה ניתנת לחישוב מה-  $L_1$  ל-  $L_2$ .

**משפט 15: תכונות של רדווקציות**

$A$	$\leq_m$	$B$
כריעת	$\Leftarrow$	כריעת
לא כריעת	$\Rightarrow$	לא כריעת

$A$	$\leq_m$	$B$
קבילת	$\Leftarrow$	קבילת
לא קבילה	$\Rightarrow$	לא קבילה

**משפט 16: לכל שפה קיימת רדווקציה ל-**  $A_{TM}$   
**מכל שפה כריעת A קיימת רדווקציה חישובית ל-**  $A_{TM}$ .

כלומר

$$A \leq_m A_{TM} .$$

**משפט 17: רדוקציה משפות בריעות**

מכל שפה כריעה קיימת רדוקציה חסיבה לכל שפה אחרת שאינה  $\emptyset$  או  $\Sigma^*$ .

**הגדרה 20:**

$$NOTREG = \{P \mid L(P) \text{ לא רגולרית}\}.$$

השפה NOT-REG כוללת את כל המחרוזות  $P$  כך ש:

- $P$  אינה קוד (תקין) של תוכנית.
- השפה של  $P$  לא רגולרית.

**הגדרה חלופית:**

$$NOTREG_{TM} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית}\}.$$

השפה  $NOTREG_{TM}$  כוללת את כל המחרוזות  $\langle M \rangle$  של מ"ט  $M$  כך שהשפה של  $M$  לא רגולרית.

**משפט 18: השפה  $NOT - REG$  אינה קבילה.**

השפה  $NOT - REG$  אינה קבילה.

**5 סיבוכיות זמן****הגדרה 21: זמן הריצה**

זמן הריצה של מכונת טיורינג  $M$  על קלט  $w$  הוא מספר צעדי החישוב ש-  $M$  מבצעת על  $w$ .

**הגדרה 22: סיבוכיות זמן ריצה**

תהי  $M$  מ"ט דטרמיניסטי אשר עוצרת על כל קלט. **זמן הריצה או הסיבוכיות זמן** של  $M$  היא פונקציה  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  :  $f$ , כאשר  $f(n)$  המספר צעדי חישוב המקסימלי ש-  $M$  מבצעת על קלט  $w$  של אורך  $n$ .

אם  $f(n)$  זמן הריצה של  $M$ , אומרים כי  $M$  רץ בזמן  $f(n)$  וש-  $M$  היא  $(f(n))$  זמן מכונת טיורינג

**הגדרה 23: מחלוקת של סיבוכיות זמן**

המחלקת הסיבוכיות זמן מסומנת  $((t(n)) \text{TIME})$  ומוגדרת להיות אוסף של כל השפות אשר ניתן להכרעה על ידי מכונת טיורינג בזמן  $((t(n))O)$ .

**משפט 19:**

הגדרת זמן הריצה שנתנו היא תליה במודל של מכונת הטיורинг שאיתו אנחנו עוסדים.

**משפט 20:**

תהי  $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  פונקציה (asm 타입) מ"ט.

$$t(n) \geq n$$

אז לכל מכונת טיריניג  $O(t(n))$  רב-סרטי קיימת מ"ט  $O(t^2(n))$  עם סרט אחד.

**הגדרה 24: זמן הריצה של מ"ט לא דטרמיניסטיבית**

תהי  $N$  מכונת טיריניג לא דטרמיניסטיבית.

זמן הריצה של  $N$  מוגדרת להיות הפונקציה  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  :  $f(n)$  הוא המספר הצעדים המקסימלי אשר  $N$  מתוק כל הענפים של החישוב שלו על קלט של אורך  $n$ .

**משפט 21:**

תהי  $t(n)$  פונקציה המקיים  $n \geq t(n)$ . כל מ"ט  $O(t(n))$  לא דטרמיניסטיבית  $N$  סרט אחד, שcolaה למוכנת טיריניג  $2^{O(t(n))}$  דטרמיניסטיבית סרט אחד.

**הגדרה 25: מכונת טיריניג פולינומית**

מכונת טיריניג  $M$  תיקרא פולינומית או עיליה אם קיים  $\mathbb{N} \in c$  כך ש-  $M$  פועלת בסיבוכיות זמן ריצה  $O(n^c)$ .

**הגדרה 26: המחלקה P**

המחלקה  $P$  היא אוסף השפות שקיימת מכונת טיריניג פולינומיאלית  $M$  המכדרעה אותן. ככלומר:

$$P = \bigcup_k \text{TIME}(n^k).$$

**הגדרה 27: אלגוריתם אimotoות**

אלגוריתם אimotoות של שפה  $A$  הוא אלגוריתם  $V$  כך ש-:

$$A = \{w \mid V \text{ מקבל } \langle w, c \rangle \text{ על פי}\}$$

במילים, אלגוריתם אimotoות הוא אלגוריתם  $V$  אשר מאמת כי הקלט  $w$  שייך לשפה  $A$  על פי התנאי  $c$ , שנקרא*אישור* (certification).

אנחנו מגדירים את זמן הריצה של  $V$  על פי האורך של  $w$ . לכן אלגוריתם אimotoות זמן-פולינומיאלי רץ בזמן פולינומיאלי  $O(n^k)$  כאשר  $n$  האורך של  $w$ .

**הגדרה 28: מחלקה הסיבוכיות NP**

- המחלקה NP היא מחלקה השפות שניתן לאמתן באמצעות אלגוריתם זמן-פולינומיאלי.

הגדרה חלופית למחלקה NP הינה:

- המחלקה NP היא מחלקה השפות שניתן להכרעה באמצעות מ"ט אי-דטרמיניסטיבית זמן-פולינומיאלית.

למטה במשפט 22.

**משפט 22:** אם  $A \in NP$  ניתן לאimotoות ע"י  $N_{TM}$  שפה  $A$  כלשהי שיכת למחלקה  $NP$  אם ורק אם  $A$  ניתנת להכרעה על ידי מכונות טיורינג אי-דטרמיניסטיבית זמן-פולינומיאלית.

**הגדרה 29:** פונקציה הניתנת לחישוב זמן-פולינומיאלי פונקציה  $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  : ניתנת לחישוב זמן-פולינומיאלי אם קיימת מ"ט זמן-פולינומיאלית  $M$ , עבורה על הקלט  $w$ ,  $M$  עוצרת עם  $f(w)$  על הסרט שלה.

**הגדרה 30:** פונקציה שנייה לרזוקציה זמן-פולינומיאלית השפה  $A$  ניתנת לרזוקציה זמן-פולינומיאלית לשפה  $B$ , שנסמן  $B \leqslant_P A$ , אם קיימת פונקציה שתניתת לחישוב זמן-פולינומיאלית  $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  כך שלכל

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B .$$

הfonקציה  $f$  נקראת **רזוקציה זמן-פולינומיאלית** של  $A$  ל-  $B$ .

**משפט 23:** אם  $A \in P$  אז  $B \in P$  ו-  $A \leqslant_P B$ .  
אם  $B \in P$  אז  $A \leqslant_P B$ .

**משפט 24:** SAT-3 ניתנת לרזוקציה זמן-פולינומיאלית ל- CLIQUE בהביית SAT-3 ניתנת לרזוקציה זמן-פולינומיאלית לביעית CLIQUE:  
 $3SAT \leqslant_p CLIQUE$  .

**מסקנה 1:**  $CLIQUE \in P \Rightarrow 3SAT \in P$   
לפי המשפט 23 וממשפט 24:

אם  $3SAT \in P$  אז  $CLIQUE \in P$

**הגדרה 31:** NP-שלמות שפה  $B$  היא NP-שלמה או שלמה ב- NP (NP-complete) אם היא מקיימת את שני התנאים הבאים:  
(1)  $B \in NP$  וגם  
(2)  $A \in NP$   $A \leqslant_p B$  עבור כל  $A \leqslant_p B$ .  
במילים פשוטות: כל  $A$  ב- NP ניתנת לרזוקציה זמן-פולינומיאלית ל-  $B$ .

**הגדרה 32:** NP קשה אם שפה  $B$  מקיימת את תכונה (2) אולם לא בהכרח את תכונה (1) בהגדרה 31 אז אומרים כי  $B$ -קשה או קשה ב- NP (NP-hard).

**משפט 25:**אם  $B \in P$  אז  $B \in NP$ - שלמה ו-**משפט 26: אסוציאטיביות של  $NP$  שלמות**  
אם השני תנאים הבאים מתקיימים:

- (1)  $B$  היא שפה  $NP$ - שלמה.
- (2) קיימת  $C \in NP$  עבורה  $B \leq_p C$  אז  $C$  שפה  $NP$ - שלמה.

**משפט 27: משפט קוק לוין**הבעית  $SAT$  היא  $NP$  - שלמה.**משפט 28: 3-SAT הינו  $NP$  שלמה.**אם  $3-SAT$  היא  $NP$  שלמה.

## 6 נושאות נוספות

**הגדרה 33: הבעית הספיקות SAT**

$$SAT = \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ היא נוסחה בוליאנית ספיקה} \}$$

במילים, בעית  $SAT$  שואלת את השאלה: בהינתן נוסחה שמכילה רק קשרים  $\wedge$ ,  $\vee$  ו-  $\neg$  ("גם", "או" ו"לא"), האם קיימות השמה של ערכי אמת למשתנים כך שהנוסחה  $\phi$  תקבל ערך אמת? אם קיימת השמה כזו אז נאמר כי הנוסחה  $\phi$  ספיקה.

**הגדרה 34: הבעית 3-SAT**

$$3SAT = \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ היא נוסחת בוליאנית בצורה 3CNF ספיקה.} \}$$

במילים,  $3SAT$  היא הבעית  $SAT$  שמוגדר בהגדרה 33 במקרה הנוסחה שהנוסחה היא בצורה 3CNF. דוגמה של נוסחה בצורה 3CNF היא:

$$(x_1 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$$

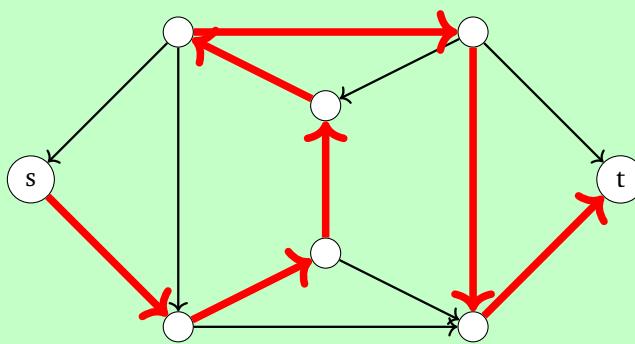
**הגדרה 35: הבית PATH**בහינתן גרף מכוון  $G = (V, E)$ .הבעית PATH שואלת את השאלה הבאה: בהינתן גרף מכוון  $G = (V, E)$ , וקודקודים  $s$  ו-  $t$ . האם הגרף  $G$  מסלול בין קודקוד  $s$  לבין קודקוד  $t$ .

$$PATH = \{ \langle G, s, t \rangle \mid t \text{ נמצא במסלול מכיוון } s \text{ ל-} t \} .$$

**הגדרה 36: מסלול המילטוני**נתון גרף מכובן  $G = (V, E)$ .מסלול המילטוני מקדקוד  $s$  לקדקוד  $t$  הוא מסלול אשר עובר דרך כל קדקוד בדיקות אחת.**הגדרה 37: הביעת מסלול המילטוני HAMPATH**בහינתו גраф מכובן  $G = (V, E)$  וקדקודים  $s$  ו-  $t$ .הבעית המסלול המילטוני שואלת את השאלה: האם קיים מסלול המילטוני מקדקוד  $s$  לקדקוד  $t$ ?

$$HAMPATH = \{\langle G, s, t \rangle \mid \text{גרף } G \text{ מכיל מסלול המילטוני מ- } s \text{ ל- } t\}$$

התרשימים למטה מראה דוגמה של מסלול המילטוני בגרף מכובן.

**הגדרה 38:**בහינתו שלמים  $x$ ,  $y$ .הבעיה RELPRIME שואלת את השאלה: האם  $x$ ,  $y$  זרים.

$$RELPRIME = \{\{x, y\} \in \mathbb{N} \mid \gcd(x, y) = 1\}$$

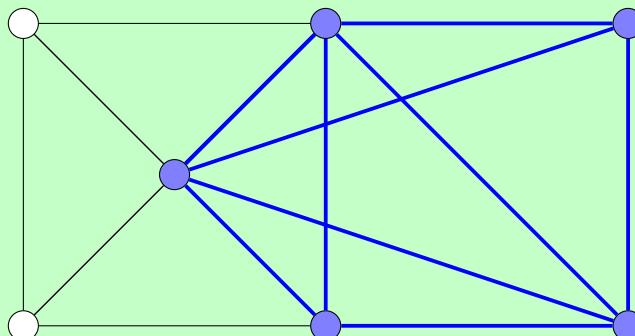
**הגדרה 39: קליקה**

נתון גרף לא מכובן.

- קליקה בgraf לא מכובן הוא תת-graf שבו כל זוג קדקודים קשורים על ידי קשת.

- $k$ - קליקה היא קליקה שבו יש בדיקוק  $k$  קדקודים.

התרשימים למטה מראה דוגמה של 5- קליקה.



**הגדרה 40: בעיית הקליקה**

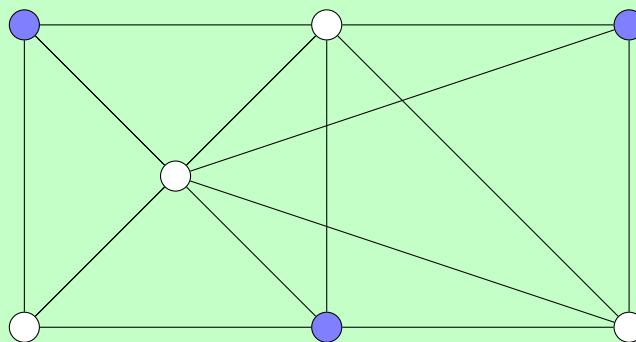
נתון גרף לא מכוון  $G = (V, E)$ . בעיית הליקה שואלת את השאלה:  
אם הגרף  $G$  מכיל קליקה בגודל  $k$ .  
בשפה פורמלית:

$$CLQ = \{\langle G, k \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון שמכיל קליקה בגודל } k \text{ לפחות.}\}$$

**הגדרה 41: קבוצה בלתי תלויות**

נתון גרף לא מכוון  $G = (V, E)$ . קבוצה בלתי תלויות ב-  $G$  היא תת-קבוצה של קדוקודים  $S \subseteq V$  כך שלכל שני קדוקודים  $S \in S$ ,  $u_1, u_2$  מתקאים  $(u_1, u_2) \notin E$ .

התרשימים למטה מראה דוגמה של גרף לא מכוון  $G$  שמכיל קבוצה בלתי תלויות בגודל 3.

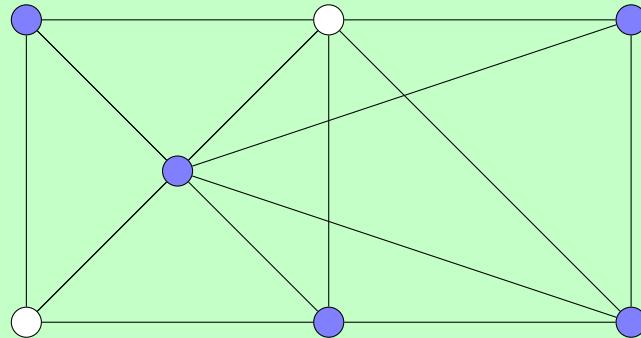
**הגדרה 42: בעיית קבוצה הבלתי תלויות (IS)**

בהינתן גרף לא מכוון  $G = (V, E)$  ומספר טבעי  $k$ .  
הבעיה IS שואלת את השאלה: האם קיימת קבוצה בלתי תלויות ב-  $G$  בגודל  $k$  לפחות.  
בשפה פורמלית:

$$IS = \{\langle G, k \rangle \mid G \text{ מכיל קבוצה בלתי תלויות בגודל } k \text{ לפחות.}\}$$

**הגדרה 43: כיסוי קדוקודים**

בהינתן גרף לא מכוון  $G = (V, E)$ :  
כיסוי קדוקודים ב-  $G$  הוא תת-קבוצה של קדוקודים  $V \subseteq C$  כך שלכל צלע  $(u_1, u_2) \in E$  מתקיים:  
 $u_1 \in C$  או  $u_2 \in C$ .  
הgraf למטה מכיל כיסוי קדוקודים בגודל 5.

**הגדרה 44: ה בעית כיסוי קדקודים (VC)**בහינתן גרף לא מקוון  $G = (V, E)$  ומספר טבעי  $k$ .

ה בעית כיסוי קדקודים שואלת את השאלה הבאה:

האם קיימים כיסוי בקדקודים ב-  $G$  בגודל  $k$  ?

בשפה פורמלית:

$$VC = \{\langle G, k \rangle \mid G \text{ מכיל כיסוי בקדקודים בגודל } k\}.$$

**משפט 29: שפות NP- שלמות**(משפט קווק לוין)  $SAT$   $-NP$ -שלמה. $3SAT$   $-NP$ -שלמה. $HAMPATH$   $-NP$ -שלמה. $CLIQUE$   $-NP$ -שלמה. $INDEPENDENT-SET$   $-NP$ -שלמה. $VERTEX-COVER$   $-NP$ -שלמה.

## **פתרונות**

### **חישוביות וסיבוכיות**

**מועד ב'**

### **פתרון לדוגמא**

ד"ר יוחאי טויטו, ד"ר ירמייהו מילר.

סמינר א, תשפ"ה'

מסקר זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הין פתרונות לדוגמא. ניתן לפתרו חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

עמוד 1 מתוך 10

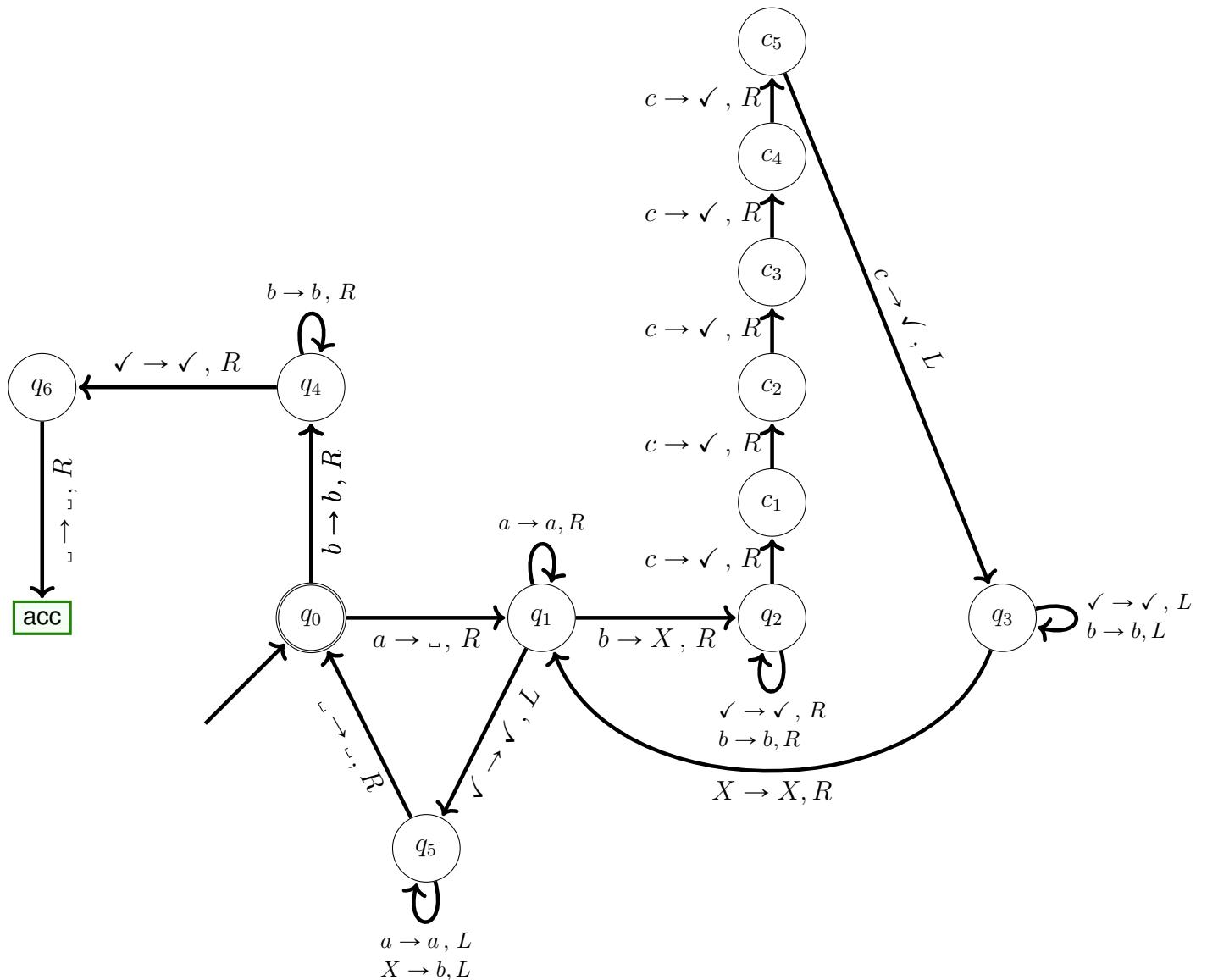
**המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון**

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד 7 בוטינסקי 84 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il) | חייג: \*טפסת

## שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

### סעיף א' (10 נקודות)

כל מעברים לא מופיעים בתרשים, עוברים למצוב rej.



עמוד 2 מתוך 10

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון | קמפוס אשדוד 77245,84 | קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | חיניג: \*

## פתרונות

### סעיף ב' (10 נקודות)

$$\sigma \in \{0, \dots, 9\} , \quad \tau \in \{0, \dots, 9, *\} .$$

מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזזה	תנאי
$X.*.*$	$\sigma$	$X.\sigma.*$	✓	$R$	
$X.*.*$	✓	$X.*.*$	∅	$R$	
$X.\sigma.*$	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	$X.\sigma.*$	∅	$R$	
$X.\tau.*$	#	$Y.\tau.*$	∅	$R$	
$Y.\tau.*$	$\sigma$	$Y.\tau.\sigma$	✓	$R$	
$Y.\tau.*$	✓	$Y.\tau.*$	∅	$R$	
$Y.\tau.\sigma$	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	$Y.\tau.\sigma$	∅	$R$	
$Y.\tau_1.\tau_2$	#	$Z.\tau_1.\tau_2$	∅	$R$	
$Z.\tau_1.\tau_2$	✓	$Z.\tau_1.\tau_2$	∅	$R$	
$Z.\tau_1.\tau_2$	$\sigma$	back	✓	$L$	$\sigma \neq \tau_1 \wedge \sigma \neq 2\tau_2 \wedge \sigma \geq \tau_1 + \tau_2$
$Z.*.*$	—	acc	∅	$R$	
back	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	back	∅	$L$	
back	—	$X.*.*$	∅	$R$	

כל שאר המעברים עוברים ל  $re$ .

### שאלה 2: וריאציות על מכונות טיורינג (20 נקודות)

#### כיוון ראשון

עמוד 3 מתוך 10

**המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון**

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בל 84100 | קמפוס אשדוד צבティנסקי 84 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il) | ח揖ג: \*טפסת

## פתרונות

תהי

$$M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O) ,$$

במודל O החד כיווני. נבנה מכונה

$$M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T) ,$$

שકולה במודל הדו כיווני T.

רכיבי המ"ט  $M^T$  זהים לאלו של המ"ט  $M^O$ , מלבד מהתמונה שהראש של  $M^O$  לא זו מעבר לקצה השמאלי של הקלט.

לכן כדי ש-  $M^T$  תהיה שколה ל-  $M^O$  יש להוסיף מעברים לפונקציית המעברים של  $M^T$  כדי שהראש של  $M^T$  לא זו מעבר לקצה השמאלי של הקלט.

הרעיון הוא לסמן את המשבצת שמאלי לתחילת הקלט עם סימן מיוחד \$, ועוד להוסיף מעברים לפונקציית המעברים של  $M^T$  שmbטחים שאם הראש נמצא למשבצת שמוסמנת \$ אז הוא מיד חוזר ו-  $M^T$  חוזרת למצב ההתחלתי של המ"ט  $M^O$ . זה מתבצע על ידי הוספת השורות האלו למטה לטבלת המעברים של  $M^T$ :

תנאי	תזהה	כתובת	מצב חדש	סימון	מצב
$q_0^T$	$\sigma$	$q_{\$}$	$\emptyset$	$L$	
$q_{\$}$	-	$q_0^O$	\$	$R$	
$q$	\$	$q$	\$	$R$	$\forall q \in Q^O$

$$Q^T = Q^O \cup \{q_0^T, q_{\$}\} , \quad \Sigma^T = \Sigma^O , \quad \Gamma^T = \Gamma^O \cup \{ \$ \} , \quad \text{acc}^T = \text{acc}^O , \quad \text{rej}^T = \text{rej}^O .$$

### כיוון שני

תהי

$$M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T) ,$$

במודל T הדו כיווני. נבנה

$$M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O) ,$$

במודל O החד כיווני.

נתאר סימולציה של הוכנה החד-כיוונית במודל הדו-כיוונית.

הרעיון הוא לסמן קו על הסרט במשבצת באמצע הקלט, ואז לקלפל את הסרט בקו זהה. באופן זהה נקבל סרט עם קצה שמאלי ואינסוף ימינה. במשבצות של הסרט החדש המקלפל יש שני תווים, אחד למעלה ( $U$ ) ואחד למטה ( $D$ ), מלבד מנוקדות הקיפול שבו יש משבצת אחת שמוסמנת \$.

באופן זהה אפשר לסמלץ את המכונה  $M^O$  במכונה  $M^T$  על ידי הוספת המעברים הבאים לטבלת המעברים של  $M^T$ : לכל  $\Gamma^T, \sigma, \pi \in \Sigma^T$ :

עמוד 4 מתוך 10

## פתרונות

תנאי	תזזה	כתיבה	מצב חדש	סימן	מצב
תזזה שמאליה: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$	$\pi$	$p.D$	$\pi$	$\tau$	$q.D$
	$\sigma$				
תזזה שמאליה: $(q, \sqcup) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$	$\sigma$	$p.U$	$\tau$	$\pi$	$q.U$
	$\pi$				
תזזה ימינה: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$	$\sqcup$	$p.D$	$\sqcup$	$\tau$	$q.D$
תזזה ימינה: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$	$\sqcup$	$p.U$	$\tau$	$\sqcup$	$q.U$
תזזה ימינה: $(q, \sqcup) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$	$\sqcup$	$p.D$	$\sqcup$	$\tau$	$q.D$
תזזה ימינה: $(q, \sqcup) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$	$\sqcup$	$p.U$	$\tau$	$\sqcup$	$q.U$
תזזה שמאלה:	$\emptyset$	$q.U$	$\emptyset$	$R$	$q.D$
תזזה ימינה:	$\emptyset$	$q.D$	$\emptyset$	$R$	$q.U$
<b>אתחול</b>					
$q_0^O$	$\tau$	$q.\tau$	$\emptyset$	$R$	$\tau \in \Sigma \cup \{\sqcup\}$ $\sigma \in \Sigma$
$q.\sigma$	$\tau$	$q.\tau$	$\sqcup$	$R$	
$q.\sqcup$	$\sqcup$	back	$\sqcup$	$L$	
back	$\sqcup$	back	$\emptyset$	$L$	
back	$\emptyset$	$q_0^T.D$	$\emptyset$	$R$	
<b>סיום</b>					
$acc^T.D$	הכל	$acc^O$			
$acc^T.U$	הכל	$acc^O$			
$rej^T.D$	הכל	$rej^O$			
$rej^T.U$	הכל	$rej^O$			
<b>כל השאר עובריסל-זע</b>					

עמוד 5 מתוך 10

**המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון**

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בל 84100 | קמפוס אשדוד צ'טוטינסקי 84 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il) | טלפונים: \*  
חיביג: \*

$$\Gamma^O \supseteq (\Gamma^T \times \Gamma^T) \cup \{ \$ \} .$$

### **שאלה 3: התזה של צ'רץ'-טיירינג (20 נקודות)**

#### **סעיף א' (10 נקודות)**

$$S \rightarrow \$Ca\# \rightarrow \$aaC\# \rightarrow \$aaE \rightarrow \$aEa \rightarrow \$Eaa \rightarrow aa$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \$Ca\# \rightarrow \$aaC\# \rightarrow \$aaD\# \rightarrow \$aDa\# \rightarrow \$Daa\# \rightarrow \$Caa\# \\ &\rightarrow \$aaCa\# \rightarrow \$aaaaC\# \rightarrow \$aaaaE \rightarrow \$aaaEa \rightarrow \$aaEaa \rightarrow \$aEaaa \rightarrow \$Eaaaa \\ &\rightarrow aaaa \end{aligned}$$

באמצעות אינדוקציה על  $k$  ניתן להוכיח כי

$$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid w = \varepsilon \vee (w = a^{2^n}, n \in \mathbb{N}) \} .$$

#### **סעיף ב' (10 נקודות)**

$$S \rightarrow aBC \rightarrow abC \rightarrow abc$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSBC \rightarrow aaBCBC \rightarrow aaBHBC \rightarrow aaBBCC \rightarrow aabBCC \rightarrow aabbCC \\ &\rightarrow aabbcC \rightarrow aabbcc . \end{aligned}$$

אפשר להוכיח, ע"י אינדוקציה על  $n$ , כי

$$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid w = a^n b^n c^n, n \in \mathbb{N}^+ \} .$$

### **שאלה 4: אי כריעות (20 נקודות)**

עמוד 6 מתוך 10

**המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון**

קמפוס באור שביע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד 7 בוטינסקי 84 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il) | חייג: \*טפסת

## פתרונות

### סעיף א' (10 נקודות)

נבנה מ"ט א-דטרמיניסטי  $M_{L_{\geq 3}}$  המכrlעה את  $L_{\geq 3}$ .

התיאור הבא הוא תיאור של תוכנית א-דטרמיניסטי של המוכנת טירינג  $.M_{L_{\geq 3}}$

**על קלט  $x$ :**

1.  $M_{L_{\geq 3}}$  בודקת האם הקלט  $x$  הוא מכונת טירינג.

אם לא אז  $M_{L_{\geq 3}}$  דוחה.

2.  $M_{L_{\geq 3}}$  בוחרת באופן א-דטרמיניטי 3 מילימ  $w_1, w_2, w_3$ .

- מרים את  $M$  על  $w_1$ .

- \* אם  $M$  דוחה  $\Leftarrow M_{L_{\geq 3}}$  דוחה.

- מרים את  $M$  על  $w_2$ .

- \* אם  $M$  דוחה  $\Leftarrow M_{L_{\geq 3}}$  דוחה.

- מרים את  $M$  על  $w_3$  ועונה כמוות.

נכונות.

$$|L(M)| \geq 3 \dashv x = \langle M \rangle \Leftarrow x \in L_{\geq 3}$$

$$\Leftarrow \exists 3 \text{ מילימ } w_1, w_2, w_3 \text{ המתקבלים ב- } M.$$

$$\Leftarrow \exists \text{ ריצה של } M_{L_{\geq 3}} \text{ בה תבחר את } w_1, w_2, w_3 \text{ ותריץ עליהם את } M \text{ ותקבל}$$

$$\text{מקבלת את } x.$$

$$\Leftarrow x \notin L_{\geq 3} \text{ שני מקדים:}$$

$$\text{מצב 1. } \langle M \rangle \Leftarrow x \neq \langle M \rangle \text{ דוחה את } L.$$

$$\text{מצב 2. } |L(M)| < 3 \dashv x = \langle M \rangle.$$

$$\Leftarrow \text{ לכל 3 מילימ שונות } w_1, w_2, w_3 \text{ לפחות אחת מהן לא מקבלת ב- } M.$$

$$\Leftarrow \text{ בכל ריצה של } M_{L_{\geq 3}} \text{ בה היא תבחר 3 מילימ } w_1, w_2, w_3 \text{ השונות זו מזו, ולפחות אחת הריצות}$$

$$\text{של } M \text{ על מילימ אלו תדחה או לא תעוצר}$$

$$\Leftarrow \text{ בכל ריצה של } M_{L_{\geq 3}} \text{ על } x, M_{L_{\geq 3}} \text{ תדחה או לא תעוצר}$$

$$\Leftarrow \text{ לא מקבלת את } x.$$

### סעיף ב' (10 נקודות)

נבנה רדוקציה מ-  $A_{TM}$

הfonקציית הרדוקציה היא:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

## פתרונות

כאשר  $M$  היא מ"ט הדוחה כל קלט ו-  $M'$  היא מ"ט שעלה כל קלט  $x$  מריצה את  $M$  ועונה כמוות.

**אבחנה**

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

כוננות הרדוקציה

**נניח ש-**  $x \in A_{TM}$

- . $w \in L(M)$  -**1**  $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$
- . $f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow$
- . $L(M') = \Sigma^* \Leftarrow$
- . $|L(M')| = \infty \Leftarrow$
- . $f(x) \in L_{\geq 3} \Leftarrow$

**נניח ש-**  $x \notin A_{TM}$   
או יש שני מקרים:

**מצב 1:**  $x \neq \langle M, w \rangle$

- . $|L(M_\emptyset)| = 0$  -**1**  $f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \Leftarrow$
- . $f(x) \notin L_{\geq 3} \Leftarrow$

**מצב 2:**  $x \in \langle M, w \rangle$

- . $f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow$
- . $L(M') = \emptyset \Leftarrow$
- . $|L(M')| = 0 \Leftarrow$
- . $f(x) \notin L_{\geq 3} \Leftarrow$

## שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

**סעיף א' (8 נקודות)**

בנייה פונקציית הרדוקציה  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  שמוגדרת

$$f(\langle S, t \rangle) = \langle A \rangle$$

כאשר  $\langle A \rangle$  קלט של  $SUBSETSUM$  ו-  $\langle S, t \rangle$  קלט של  $PARTITION$

עמוד 8 מתוך 10

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד צבוטינסקי 84 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il) | חייג: \*

## **פתרונות**

$$\sigma = \sum_{x \in S} x \text{ י'נ' } (1)$$

2) נגדיר את הקבוצה החדשה  $A$  על ידי הוספת האיבר  $2t - \sigma$  לקבוצת  $S$ :

$$A = S \cup \{\sigma - 2t\}.$$

## **סעיף ב' (6 נקודות)**

כין

**בנייה ש-**  $\langle S, t \rangle \in SUBSETSUM$

$\leftarrow \text{קיימת תת-קבוצה } S \subseteq Y \text{ כך ש-} y$

$$\sum_{x \in A} x = \sum_{x \in S} x + \sigma - 2t = 2\sigma - 2t \Leftarrow$$

$\Leftarrow$  אם נגדיר  $A_2 = A \setminus A - 1 A_1 = Y \cup \{\sigma - 2t\}$

$$\sum_{x \in A_1} x = \sum_{x \in Y} x + \sigma - 2t = t + \sigma - 2t = \sigma - t$$

121

$$\sum_{x \in A_2} x = \sum_{x \in A \setminus A_1} x = \sum_{x \in A} x - \sum_{x \in A_1} x = 2\sigma - 2t - (\sigma - t) = \sigma - t .$$

$$\sum_{x \in A_1} x = \sum_{x \in A_2} x = \frac{1}{2} \sum_{x \in A} x \Leftarrow$$

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap (A \setminus A_1) = \emptyset$$

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A \setminus A_1) = A$$

**קיימת חלוקה של**  $A$  **של**  $A_1, A_2 \subset A$   $\Leftarrow$

$.f(x) = \langle A \rangle \in PARTITION \Leftarrow$

כ'יל ⇒

**נניח ש-**  $\langle A \rangle \in PARTITION$

$\Leftarrow$  קיימות תת-קבוצות  $A_1, A_2 \subseteq S'$  כך ש:

$$\sum_{x \in A_1} x = \sum_{x \in A_2} x = \frac{1}{2} \sum_{x \in A} x$$

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap (A \setminus A_1) = \emptyset$$

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A \setminus A_1) = A$$

פתרונות

$\Leftarrow$  לפי הבניית הרכזקציה:  $S \cup A = \{\sigma - 2t\} \cup S$  קבוצת שלמים -

$.S = A \setminus \{\sigma - 2t\} \Leftarrow \text{קיימת הקבוצה}$

$\Leftrightarrow$  מכיוון ש:  $S \cup \{\sigma - 2t\} = A_1, A_2 \cup A = \{\sigma - 2t\}$  מהוות חלוקה של  $A$  אז  $\sigma - 2t$  שייך ל-  $A_1$  או  $A_2$ .  
**ולא** הגבתת כלליות נניח ש:  $\{\sigma - 2t\} \in A_1$

$\leftarrow \text{קיימת הקבוצה } A_1 \setminus \{\sigma - 2t\}$

נגידר הקבוצה: ⇐

$$Y = A_1 \setminus \{\sigma - 2t\} \quad \subseteq \quad A \setminus \{\sigma - 2t\} = S.$$

←

$$\sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in A_1} y - (\sigma - 2t) = \frac{1}{2} \sum_{y \in A} y - (\sigma - 2t) = \frac{1}{2} (2\sigma - 2t) - (\sigma - 2t) = t .$$

$\Leftrightarrow$  קיימת תת-קבוצה  $S \subseteq Y$  כך ש:

$\langle S, t \rangle \in SUBSETSUM \Leftarrow$

סעיף ג' (6 נקודות)

הfonקציית הרדווקציה  $f$ , על קלט  $\langle S, t \rangle$  מוחזירה את הפלט  $\langle A \rangle$  כאשר  $\{A = S \cup \{\sigma - 2t\}$

לכן, על קלט  $\langle S, t \rangle$  הפונקציה  $f$  תבצע כך:

**שלב 1)** מחשבת את הסכום  $\sigma$  של כל האיברים שבקבוצה  $S$

**שלב 2)** מחשבת את החיסור  $2t - \sigma$

... $\cup \{\sigma - zt\}$  בינה לבין הנקודות

- שלב (1) עולה  $O(|S|)$  צעדים.
  - שלב (2) עולה  $O(|S|)$  צעדים.
  - שלב (3) עולה  $n$  צעדים לכל היותר.

לכן בסה"כ הסיכויים זמן של  $f$  היא:

$$O(|S|) + O(|S|) + O(n) = O(n) .$$