המחלקה למדעי המחשב

תשפ"ג

חדו"א 2

מועד ב'

מרצים: ד'ר ירמיהו מילר,

תשפ"ג סמסטר ב'

השאלון מכיל 5 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (2 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות בלבד מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** בלבד מתוך **שתיים**.

==

שאלות 1-2 חובה

שאלה 1 (20 נק')

נתונה הפונקציה

$$f\left(x,y\right)=x^2+3xy-y^2-5x-y+7$$

א) (10 נק') מצאו את נקודות המקסימום והמינימום המקומי של הפונקציה $f(x,y)$.

ב) (10 נק') מצאו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימאלי אותם מקבלת הפונקציה $f(x,y)$ בתחום החסום על ידי הקווים $x=0, y=1, x+y=3$.

שאלה 2 **(22 נק')**

א) (10 נק') מצאו את תחום ההתכנסות של טור החזקות

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{4^n n \ln(n)}$$

וקבעו האם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר בנקודה $x=-2$.

ב) (12 נק') סרטטו את תחום האינטגרציה, החליפו את סדר האינטגרציה וחשבו:

$$\int_0^1 dy \int_{2y-1}^{y} y\,dx$$

יש לפתור 3 שאלות מבין השאלות 3-6

שאלה 3 **(16 נק')**

נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=e^{xy}-z^2$ והנקודה $M(2,1,e)$.

א) (12 נק') מצאו את משוואת המישור המשיק למשטח הרמה של $f(x,y,z)$ העובר דרך הנקודה M.

ב) (4 נק') מצאו נקודה $P(x,y,z)$ לאורך הישר

$$\begin{cases} \frac{x-1}{-3}=\frac{y-1}{1} \\ z=0 \end{cases}$$

שעבורה מתקיים $\frac{df}{d\overrightarrow{MP}}(M)=0$.

שאלה 4 **(16 נק')**

א) (12 נק') קבעו את המצב ההדדי בין המישור המשיק בנקודה $P(1,1,0)$ למשטח

$$x^2y+xyz-2y^2z+xz^2+2x+3y+z=6$$

לבין הישר

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{1}$$

אם המישור והישר מקבילים, חשבו את המרחק ביניהם ואם הם נחתכים, מצאו את נקודת החיתוך.

ב) (4 נק') הוכיחו או הפריכו באמצעות דוגמא נגדית: אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה וחיובית אז $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

שאלה 5 (16 נק')

א) (10 נק') בהינתן הנקודות

$$A\left(1,0,1\right),\ B\left(1,2,-1\right),\ C\left(0,1,-1\right),\ D\left(k^2,k-2,k\right)$$

מצאו את הערך k עבורו הנקודה D תהיה הקרובה ביותר למישור ABC וחשבו את נפח הפירמידה $ABCD$.

ב) (6 נק') הוכיחו כי אם לסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ קיים גבול, אז הוא יחיד.

שאלה 6 (16 נק')

נתון התחום המישורי

$$D:\begin{cases} x^2+y^2\le 9 \\ -x\le y\le \sqrt{3}x \end{cases}$$

א) (10 נק') סרטטו את התחום D וחשבו את השטח שלו.

ב) (6 נק') חשבו את מסת התחום בסעיף א' בהינתן צפיפות המסה $\mu\left(x,y\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

יש לפתור שאלה 1 מבין השאלות 7-8

שאלה 7 (10 נק')

נתונות הנקודות $A\left(-1,2,4\right)$ ו-$B\left(2,1,1\right)$. מצאו את הנקודה על מישור xz שסכום מרחקיה מהנקודות A ו-B הוא מינימאלי.

שאלה 8 (10 נק')

סדרה נתונה על ידי נוסחאת נסיגה (רקורסיה)

$$\begin{cases} a_{n+1}=\frac{4a_n}{a_n+2} \\ a_1=1 \end{cases}$$

הראו כי לכל n מתקיים $0<a_n<2$ וכי הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה עולה. הסיקו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

פתרונות

שאלה 1

א) תחילה, נמצא את הנקודות הקריטיות של הפונקציה

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x+3y-5 \\ 3x-2y-1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$$

זו מערכת לינארית של שתי משוואות בשני נעלמים כאשר הדטרמיננטה של מטריצת המקדמים היא $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$ ולכן קיים למערכת פתרון יחיד

$$x=1, \; y=1$$

כלומר, מתקבלות הנקודה הקריטית הבאה

$$P_1\,(1,1)$$

בכדי לסווג את הנקודות הקריטיות, נחשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני ונשתמש במבחן הנגזרת השניה

$$f''_{xx}=2, \; f''_{yy}=-2, \; f''_{xy}=f''_{yx}=3$$

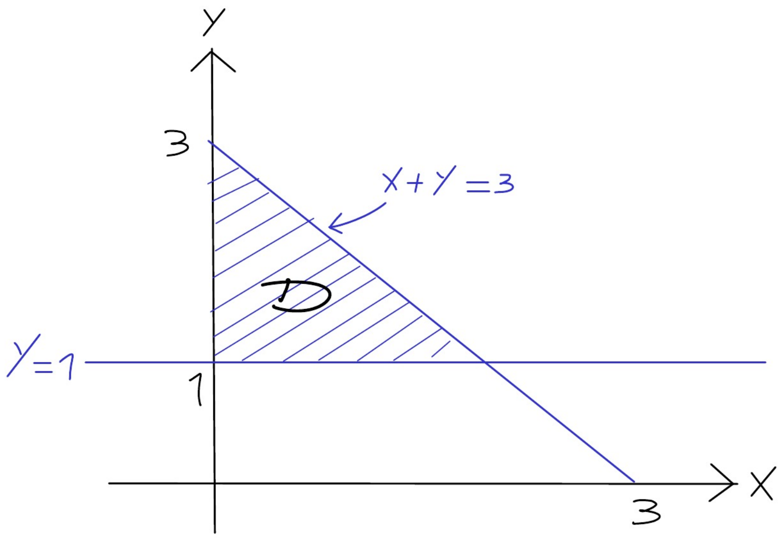
ולכן

$$\Delta\,(P_1) = 2\cdot(-2)-3^2 = -13 < 0$$

ולכן, הנקודה P_1 היא נקודת אוכף.

ב) תחילה, נשים לב שהתחום בשאלה הוא המשולש שקודקודיו הם

$$P_2\,(0,1)\,,\,P_3\,(0,3)\,,\,P_4\,(2,1)$$



ונשים לב שהנקודה P_1 נמצאת בתוך התחום. כעת, נבדוק האם ישנן נקודות קריטיות בתנאי לאורך הצלעות של המשולש

- הישר האנכי נתון על ידי

$$\begin{cases} x = 0 \\ 1 \le y \le 3 \end{cases}$$

ועל ידי הצבה של $x = 0$ בפונקציה נקבל

$$g_1(y) = f(0, y) = -y^2 - y + 7$$

שהנקודה הקריטית שלה מתקבלת כאשר

$$g_1'(y) = -2y - 1 \stackrel{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{2}$$

שזו נקודה הנמצאת מחוץ לתחום.

- הישר האופקי נתון על ידי

$$\begin{cases} y = 1 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

ועל ידי הצבה של $y = 1$ בפונקציה נקבל

$$g_2(x) = f(x, 1) = x^2 - 2x + 5$$

שהנקודה הקריטית שלה מתקבלת כאשר

$$g_2'(x) = 2x - 2 \stackrel{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; x = 1$$

כלומר, נקודה קריטית מתקבלת בנקודה $P_1(1, 1)$.

• הישר האלכסוני נתון על ידי

$$\begin{cases} y = 3 - x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ועל ידי הצבה של $x = 0$ בפונקציה נקבל

$$g_3(x) = f(x, 3-x) = x^2 + 3x(3-x) - (3-x)^2 - 5x - (3-x) + 7 = -3x^2 + 11x - 5$$

שהנקודה הקריטיות שלה מתקבלות כאשר

$$g_3'(x) = -6x + 11 \stackrel{!}{=} 0 \;\; \Rightarrow \;\; x = \frac{11}{6}$$

הנמצאת מחוץ לתחום.

כאשר נציב את כל הנקודות הקריטיות שהתקבלו ואת הקודקודים של המשולש, נקבל את הערכים הבאים

$$\begin{aligned} f(P_1) &= 4 \\ f(P_2) &= g_1(1) = 5 \\ f(P_3) &= g_1(3) = -5 \\ f(P_4) &= g_2(2) = 5 \end{aligned}$$

לכן, המקסימום של הפונקציה בתחום הוא $f(P_2) = f(P_4) = 5$ והמינימום הוא $f(P_3) = -5$.

<u>שאלה 2</u>

א) נציב, תחילה, $z = x - 2$ ונקבל את הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{4^n n \ln(n)}$$

אשר רדיוס ההתכנסות שלו נתון על ידיד

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \to \infty} (4^n n \ln(n)) = 4$$

כלומר, הטור מתכנס בהחלט עבור $|z| < 4$ ומתבדר עבור $|z| > 4$. כעת נבדוק את התכנסות הטור בקצוות הקטע. אם נציב את הערך $z = 4$ נקבל את הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{4^n n \ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$$

שהוא טור מתבדר לפי מבחן האינטגרל שכן

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln(x)} &= \lim_{B\to\infty}\int_2^{B}\frac{dx}{x\ln(x)}\\ \left\{\begin{array}{c} t=\ln x\\ dt=\frac{dx}{x}\end{array}\right\} &= \lim_{B\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln B}\frac{dt}{t}\\ &= \lim_{B\to\infty}\left(\ln|t|\right|_{t=\ln 2}^{\ln B}\\ &= \lim_{B\to\infty}\left(\ln\ln B-\ln\ln 2\right)=\infty\end{aligned}$$

מצד שני, אם, נציב $z=-4$ נקבל את הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-4)^n}{4^n n\ln(n)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$$

שהוא טור מתכנס, לפי מבחן לייבניץ (פירוט בהמשך), ומכאן שהטור מתכנס בתנאי עבור $z=-4$ (שכן טור הערכים המוחלטים מתבדר לפי המקרה $z=4$).

<u>שימו לב:</u> בדיקת ההתכנסות לפי מבחן לייבניץ מוכיחה התכנסות אבל לא התכנסות בתנאי, את זו ניתן להסיק רק מכך שהטור מתכנס אבל לא מתכנס בהחלט.

כעת, נבצע בדיקת התכנסות לטור עבור $z=-4$. בכדי להראות כי הטור מתכנס לפי מבחן לייבניץ, מספיק לשים לב כי הסדרה $a_n=\frac{1}{n\ln(n)}$ היא סדרה

- חיובית, לפי הגדרה.
- יורדת, שכן הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x\ln(x)}$ פונקציה יורדת שכן בתחום $(2,\infty)$ מתקיים כי

$$f'(x)=-\frac{\ln x+1}{(x\ln x)^2}<0$$

- שואפת ל-0.

אם כן, תחום ההתכנסות הוא $-4\le z<4$ מההצבה של $z=x-2$ נקבל $-4\le x-2<4$, כלומר תחום ההתכנסות של הטור הוא הקטע $-2\le x<6$ כאשר ההתכנסות היא בהחלט עבור $-2<x<6$ וההתכנסות ב-$x=-2$ היא בתנאי.

ב) נרשום

$$I=\int_0^1 dy\int_{2y-1}^{y}y\,dx=\iint_D ydxdy$$

כאשר התחום D נתון על ידי

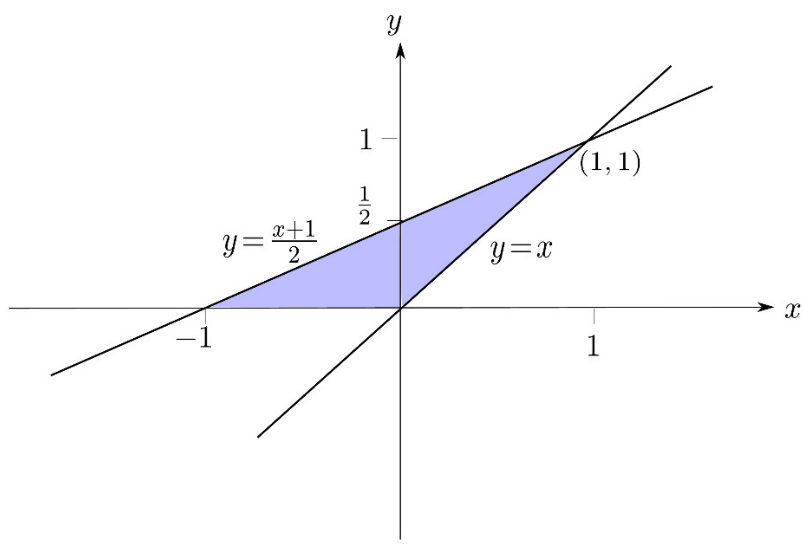
$$D=\left\{(x,y)\mid \begin{array}{c}0\le y\le 1\\ 2y-1\le x\le y\end{array}\right\}=\left\{(x,y)\mid \begin{array}{c}-1\le x\le 0\\ 0\le y\le \frac{x+1}{2}\end{array}\right\}\cup\left\{(x,y)\mid \begin{array}{c}0\le x\le 1\\ x\le y\le \frac{x+1}{2}\end{array}\right\}$$

ולכן,

$$I=\iint_D ydxdy=\int_{-1}^{0}dx\int_{0}^{\frac{x+1}{2}}y\,dy+\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{\frac{x+1}{2}}y\,dy$$

בכדי לחשב את האינטגרל, ניעזר דווקא בצורה המקורית שלו

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 dy\int_{2y-1}^{y}y\,dx\\&=\int_0^1 y\left[y-(2y-1)\right]dy\\&=\int_0^1\left(-y^2+y\right)dy\\&=\left(-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}\right|_{y=0}^{1}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$



שאלה 3

א) נחשב, תחילה, את הגרדיאנט של הפונקציה בנקודה

$$\nabla f=\begin{pmatrix}ye^{xy}\\xe^{xy}\\-2z\end{pmatrix}$$

$$\nabla f\left(M\right)=\begin{pmatrix}e^2\\2e^2\\-2e\end{pmatrix}$$

ולכן, נורמל למישור המשיק יהיה נתון על ידי הוקטור $\overline{N}=(e,2e,-2)$ ומכאן שניתן לרשום את משוואת המישור המשיק כך

$$e\,(x-2)+2e\,(y-1)-2\,(z-e)=0$$
$$\Rightarrow ex+2ey-2z-2e=0$$

הנקודות P שעבורן $\frac{df}{d\overrightarrow{MP}}(M)=0$ מהוות, למעשה, את המישור המשיק למשטח הרמה מסעיף 1. על כן, למעשה, התבקשנו למצוא את נקודת החיתוך בין הישר והמישור. נמצא, תחילה, הצגה פרמטרית לישר

$$\begin{cases} x\,(t)=1-3t \\ y\,(t)=1+t \\ z\,(t)=0 \end{cases}$$

ונציב אותה במשוואת המישור

$$e\,(1-3t)+2e\,(1+t)-2\,(0)-2e=0\Rightarrow t=1$$

כלומר, נקודת החיתוך היא $P\,(-2,2,0)$.

שאלה 4

א) תחילה, נבדוק שהנקודה $P\,(1,1,0)$ אכן נמצאת על משטח הרמה 6 של הפונקציה

$$F\,(x,y,z)=x^2y+xyz-2y^2z+xz^2+2x+3y+z$$

על ידי הצבה

$$F\,(P)=1+0-0+0+2+3+0=6$$

כעת נחשב את הנורמל למשטח על ידי כך שנחשב את הגרדיאנט של F בנקודה

$$\nabla F=\begin{pmatrix} 2xy+yz+z^2+2 \\ x^2+xz-4yz+3 \\ xy-2y^2+2xz+1 \end{pmatrix}$$
$$\nabla F\,(P)=(4,4,0)$$

ולכן ניתן לבחור את הוקטור הנורמל למישור המשיק $F\,(x,y,z)=6$ להיות $\overline{N}=(1,1,0)$ ואת משוואת המישור להיות

$$1\cdot(x-1)+1\cdot(y-1)+0\cdot(z-0)=0\Rightarrow x+y-2=0$$

מצד שני, וקטור הכיוון של הישר נתון על ידי $\overline{a}=(1,2,1)$. מכיוון ש-

$$\overline{N}\cdot\overline{a}=(1,1,0)\cdot(1,2,1)=3\neq 0$$

נובע שהישר נחתך עם המישור. בכדי לחשב את נקודת החיתוך, נרשום הצגה פרמטרית של הישר

$$\begin{cases} x = t+2 \\ y = 2t+3 \\ z = t+2 \end{cases}$$

ונציב זאת במשוואת המישור

$$(t+2) + (2t+3) - 2 = 0 \Rightarrow t = -1$$

כלומר, נקודת החיתוך היא

$$Q\,(1,1,1)$$

ב) הטענה לא נכונה. דוגמא נגדית

$$a_n = 2 + (-1)^n$$

שהיא סדרה חסומה וחיוביות, שכן

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 2k+1 \\ 3 & n = 2k \end{cases}$$

ולכן, $a_n \geq 1$ לכל n וגם $1 \leq a_n \leq 3$. מצד שני, הסדרה לא ממתכנסת שכן אחרת הסדרה $a_n - 2 = (-1)^n$ היתה מתכנסת בניגוד לכך שראינו בכיתה כי זו סדרה מתבדרת.

שאלה 5

א) נחשב תחילה את משוואת המישור ABC

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0,2,-2) \times (-1,1,-2) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2,2,2)$$

ולכן ניתן לבחור את הוקטור $\overline{N} = (1,-1,-1)$ להיות הנורמל למישור ABC. מכאן שאת משוואת המישור ניתן לרשום בצורה

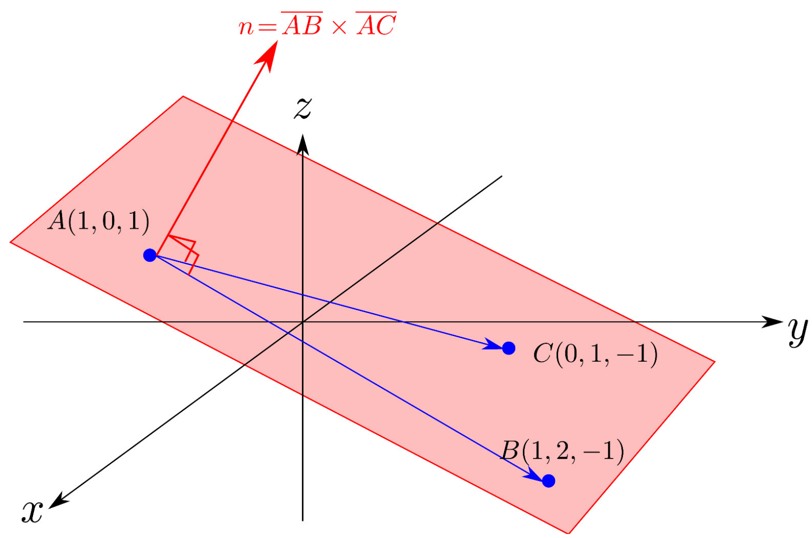
$$1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y-0) - 1 \cdot (z-1) = 0 \Rightarrow x - y - z = 0$$

לכן, את המרחק של הנקודה D מהמישור ניתן לחשב על ידי

$$d = \frac{|(k^2) - (k-2) - (k)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{|k^2 - 2k + 2|}{\sqrt{3}} = \frac{(k-1)^2 + 1}{\sqrt{3}} > 0$$

המרחק המינימאלי מתקבל עבור $k=1$ בנקודה $D\,(1,-1,1)$. נפח הפירמידה עבור ערך זה של D הוא

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\left|(-2,2,2)\cdot(0,-1,0)\right|=\frac{1}{3}$$



ב) נניח שקיימים לסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שני גבולות K ו-L וניקח

$$\varepsilon=\frac{|K-L|}{3}$$

נניח כי $L\neq K$, אז $\varepsilon>0$. מהגדרת הגבול, קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים $|a_n-K|<\varepsilon$ וגם קיים M כך שלכל $n>M$ מתקיים $|a_n-L|<\varepsilon$. לכן, עבור $n>\max\{M,N\}$ (ויש אינסוף כאלה) מתקיים

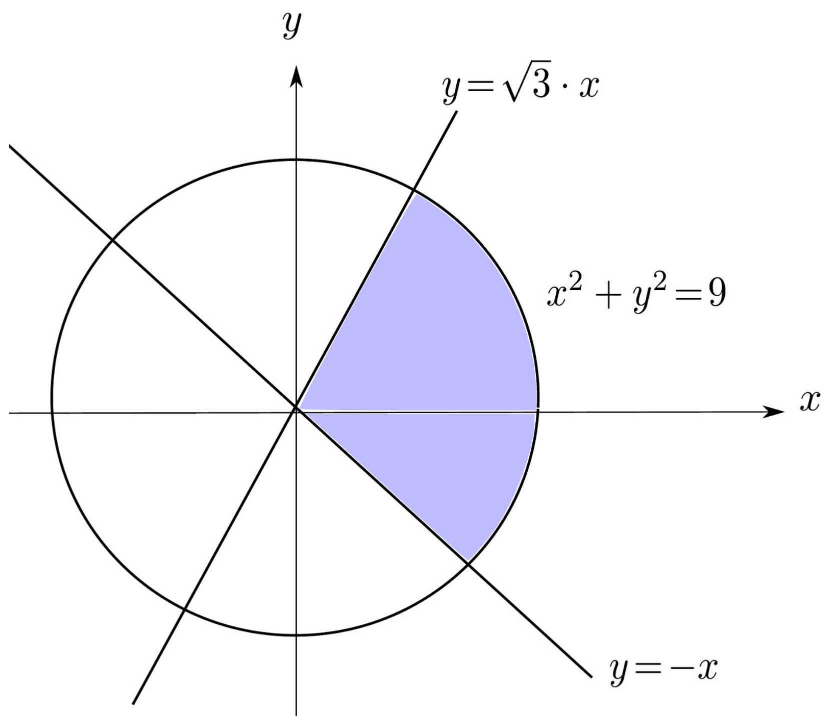
$$|K-L|=|(K-a_n)-(L-a_n)|\leq|K-a_n|+|L-a_n|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon=\frac{2\,|K-L|}{3}$$

כלומר, $3\,|K-L|<2\,|K-L|$ וזאת בסתירה לכך ש-$|K-L|>0$.

שאלה 6

א) בקואורדינטות קוטביות

$$D:\begin{cases}\rho\leq 3\\ -\frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{3}\end{cases}$$



שכן את אי-השיוויון השני ניתן לרשום מחדש כך

$$-\rho\cos\varphi \le \rho\sin\varphi \le \sqrt{3}\rho\cos\varphi \Rightarrow -1 \le \tan\varphi \le \sqrt{3}$$

ולכן שטח התחום נתון על ידי

$$S_D = \iint_D dxdy = \iint_D \rho d\rho d\varphi = \int_0^3 \rho d\rho \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi = \frac{9}{2}\frac{7}{12}\pi = \frac{21\pi}{8}$$

ב) את מסת התחום ניתן לחשב באמצעות

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \\ &= \iint_D \frac{\rho\cos\varphi}{\rho}\rho d\rho d\varphi \\ &= \int_0^3 \rho d\rho \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\varphi d\varphi \\ &= \frac{9}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{9\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{4} \end{aligned}$$

שאלה 7

מישור xz נתון על ידי המשוואה $y=0$, נשים לב ששתי הנקודות A ו-B אינן על המישור ושתיהן נמצאות "מימין" למישור (כן ערך ה-y של שתיהן חיובי). נשים לב גם שאם $B^*(2,-1,1)$ היא השיקוף של B ביחס למישור xz, אז לכל נקודה $P(x,y,z)$ על המישור מתקיים שהמרחק $d(P,B)=d(P,B^*)$. כלומר, ניתן לנסח את הבעיה מחדש כך: מצאו את הנקודה על מישור xz שסכום מרחקיה מהנקודות A ו-B^* הוא מינימאלי. מצד שני, אם P היא נקודת החיתוך של הקטע AB^* עם מישור xz אז

$$d(P,A)+d(P,B^*)=d(A,B^*)$$

ולכל נקודה אחרת על המישור, Q, מתקבל משולש AB^*Q במרחב ומאי-שיוויון המשולש מתקיים

$$d(A,B^*)\le d(Q,A)+d(Q,B^*)$$

כלומר, הנקודה המבוקשת P היא נקודת החיתוך בין הקטע AB^* לבין מישור xz. אם נרשום הצגה פרמטרית של הישר נקבל

$$M(t)=A+t\overrightarrow{AB^*}=(-1,2,4)+t(3,-3,-3)=(-1+3t,2-3t,4-3t)$$

ומהצבה במשוואת המישור נקבל

$$2-3t=0\Rightarrow t=\frac{2}{3}$$

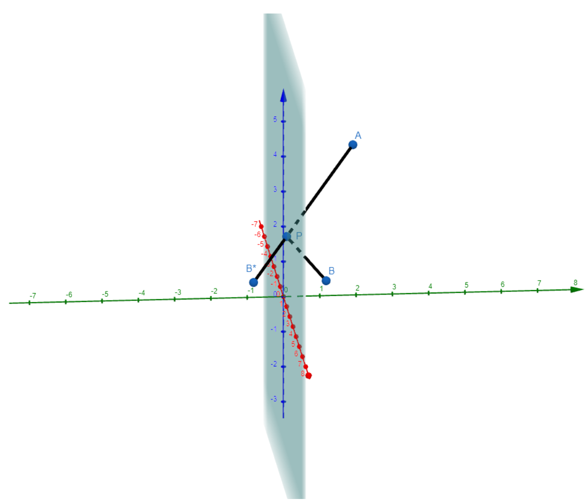
ולכן נקודת החיתוך היא

$$P=M\left(\frac{2}{3}\right)=(1,0,2)$$

ומתקיים

$$\begin{aligned} d(P,A)+d(P,B^*) &= \sqrt{2^2+(-2)^2+(-2)^2}+\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2} \\ &= 2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3} \\ &= \sqrt{3^2+(-3)^2+(-3)^2}=d(A,B^*) \end{aligned}$$

כנדרש.



שאלה 8

את הטענה הראשונה נוכיח באינדוקציה.
מקרה בסיס - עבור $n=1$ מתקיים $0<a_1=1<2$.
מעבר - נניח כי $0<a_n<2$. אם כן, ברור כי $a_{n+1}=\frac{4a_n}{a_n+2}>0$ אך גם

$$\begin{aligned} a_{n+1}<2 &\Leftrightarrow \frac{4a_n}{a_n+2}<2 \\ &\Leftrightarrow 4a_n<2a_n+4 \\ &\Leftrightarrow 2a_n<4 \\ &\Leftrightarrow a_n<2 \end{aligned}$$

כנדרש.
בנוסף, קל לבדוק כי הסדרה עולה שכן לכל n מתקיים

$$a_{n+1}=\frac{4a_n}{a_n+2}>\frac{4a_n}{2+2}=a_n$$

אם כן, הסדרה עולה וחסומה ולכן מתכנסת. נסמן את גבולה ב-L (כלומר, $\lim_{n\to\infty}a_n=L$) ונחשב אותו

$$L=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n}{a_n+2}=\frac{4L}{L+2}$$

ומכאן

$$L=\frac{4L}{L+2}\Rightarrow L^2-2L=0\Rightarrow L=0,2$$

מכיוון ש-$0<a_n<a_{n+1}<2$ לכל n, נובע כי בהכרח

$$\lim_{n\to\infty}a_n=2$$