שעור 3
ערכים עצמיים ווקטוירם עצמיים

3.1 ערכיים עצמיים, ווקטורים עצמיים של מטריצות

הגדרה 3.1 ערך עצמי ווקטור עצמי של מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$. וקטור $\mathrm{v} \in F^n$ שלא שווה לוקטור האפס ($\mathrm{v} \neq \bar{0}$) יקרא וקטור עצמי של A אם קיים סקלר $\lambda \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$A \cdot \mathrm{v} = \lambda \mathrm{v} \ .$$

λ נקרא ערך עצמי של A ששייך לוקטור עצמי v. המשוואה הזאת נקראת משוואת ערך עצמי של A.

דוגמה 3.1

נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \ ,$$

קבעו אם כל אחד מהוקטורים הבאים, הוא וקטור עצמי של A ומצאו את הערך עצמי המתאים:

(א) $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(ב) $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ג) $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

פתרון:

(א)

$$A \cdot \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 8u_1 .$$

ולכן u_1 הוא הוקטור עצמי של A השייך לערך עצמי

$$\lambda_1 = 8 \ .$$

(ב)

$$A \cdot \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0u_2 .$$

ולכן u_2 הוא הוקטור עצמי של A השייך לערך עצמי

$$\lambda_2 = 0 \ .$$

(ג)

$$A\cdot u_3=\begin{pmatrix}2&4\\3&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\neq\lambda\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

ולכן u_3 אינו וקטור עצמי של A.

דוגמה 3.2

נתונה מטריצה

$$A=\begin{pmatrix}4&8\\1&6\end{pmatrix}\ ,$$

קבעו אם כל אחד מהוקטורים הבאים, הוא וקטור עצמי של A ומצאו את הערך עצמי המתאים:

(א) $u_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

(ב) $u_2=\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$

(ג) $u_3=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

פתרון:

(א)

$$A\cdot u_1=\begin{pmatrix}4&8\\1&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\10\end{pmatrix}\neq\lambda u_1.$$

ולכן u_1 אינו וקטור עצמי של A.

(ב)

$$A\cdot u_2=\begin{pmatrix}4&8\\1&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}=2u_2.$$

ולכן u_2 הוא הוקטור עצמי של A השייך לערך עצמי

$$\lambda=2\ .$$

(ג)

$$A\cdot u_3=\begin{pmatrix}4&8\\1&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\8\end{pmatrix}=8\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

ולכן u_3 הוא הוקטור עצמי של A השייך לערך עצמי $\lambda=8$.

דוגמה 3.3

הראו ש $u_1=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$, $u_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ הינם וקטורי עצמיים של המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}5&0\\2&0\end{pmatrix}$$

פתרון:

$$A \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} \quad = 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$A \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן u_1 הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda_1 = 2$ ו u_2 הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda_2 = 0$.

משפט 3.1

ערך עצמי של מטריצה יכול להיות 0.
וקטור האפס לא יכול להיות וקטור עצמי של מטריצה.

משפט 3.2 המשוואה האופייני של מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, ויהי v וקטור עצמי של A ששייך לערך עמצי λ. אז לפי הגדרה 3.1,

$$A \cdot \mathrm{v} = \lambda \mathrm{v} \ ,$$

נעביר אגפים:

$$\bar{0} = \lambda \mathrm{v} - A\mathrm{v} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{0} = (\lambda I - A)\, \mathrm{v}$$

כאשר I המטריצה היחידה של $\mathbb{F}^{n\times n}$. קיבלנו את המשוואה

$$(\lambda I - A)\, \mathrm{v} = \bar{0} \ .$$

v וקטור עצמי אז הוא לא יכול להיות וקטור האפס. לכן הדטרמיננטה של המטריצה $(\lambda I - A)$ שווה ל- 0. כלומר

$$|\lambda I - A| = 0 \ .$$

המשוואה הזאת נקראת **משוואת האופייני של A.**

הצד שמאל נקרא **הפולינום האופייני של A** ומסומן $p_A(\lambda)$. כלומר

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| \ .$$

משפט 3.3 סדר של פולינום האופייני

אם $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, אז הפולינום האופייני $p_A(x)$ של A מסדר n.

משפט 3.4 מרחב עצמי

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ויהי λ ערך עצמי של A. נסמן ב- V_λ הקבוצה של כל הוקטורים עצמיים ששייכים לערך עצמי λ, בתוספת הוקטור האפס.
V_λ תת-מרחב של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

הוכחה: תרגיל בית. ∎

משפט 3.5 מרחב עצמי של ערך עצמי λ שווה למרחב האפס של $A - \lambda I$

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, יהי λ ערך עצמי של A ויהי V_λ מרחב העצמי של A. אז

$$V_\lambda = \mathrm{Nul}\,(A - \lambda I) \ .$$

הוכחה: נוכיח כי $V_\lambda \subseteq \text{Nul}\,(A-\lambda I)$.

יהי u וקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי A. ז"א u מקיים את משוואת הערך עצמי:

$$A\cdot u=\lambda u \qquad \Rightarrow \qquad (A-\lambda I)\cdot u=\bar{0}$$

כאשר $\bar{0}\in\mathbb{F}^n$ וקטור האפס. לכן $u\in\text{Nul}(A-\lambda I)$ לכל וקטור $u\in V_\lambda$. לכן

$$V_\lambda \subseteq \text{Nul}\,(A-\lambda I)\ .$$

נוכיח כי $\text{Nul}\,(A-\lambda I)\subseteq V_\lambda$.

יהי $u\in\text{Nul}\,(A-\lambda I)$. ז"א

$$(A-\lambda I)\,u=\bar{0} \qquad \Rightarrow \qquad A\cdot u=\lambda u\ .$$

ז"א u וקטור עצמי של u ששייך לערך עצמי λ. לכן $u\in V_\lambda$ לכל $u\in\text{Nul}\,(A-\lambda I)$. לכן

$$\text{Nul}(A-\lambda I)\subseteq V_\lambda\ .$$

■

הגדרה 3.2 ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי של ערך עצמי של מטריצה

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ויהי u_i ערך עצמי λ_i.

הריבוי אלגברי של λ_i הוא הריבוי של λ_i בפולינום האופייני של A. כלומר אם

$$|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\quad\cdots\quad(\lambda-\lambda_i)^{m_i}\quad\cdots\quad(\lambda-\lambda_l)^{m_l}\ ,$$

אז הריבוי אלגברי של λ_i הוא m_i.

הריבוי גיאומטרי של λ_i הוא המימד של המרחב עצמי שלו. כלומר אם

$$V_{\lambda_i}=\{u_1,\ldots,u_k\}$$

אז ל- λ_i יש k וקטורים עצמיים ואומרים כי הריבוי גיאומטרי של λ_i הוא k.

דוגמה 3.4

מצאו את כל הערכים עצמיים והוקטורים עצמיים של המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\ .$$

פתרון:
נרשום את הפולינום האופייני של המטריצה:

$$|\lambda I-A|=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-3&\lambda-2\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda-1)(\lambda-2)-6=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda^2-3\lambda-4=0$$

או שקול

$$(\lambda-4)(\lambda+1)=0$$

ולכן לפולינום אופייני יש שני פתרונות:
$\lambda = 4$
$\lambda = -1$.
נמצא את הוקטורים עצמיים של כל אחד של הערכים עצמיים ע"י למצוא את $\text{Nul}\left(A - \lambda I\right)$.

$\underline{\lambda = 4}$

$$(A - \lambda I \mid \bar{0}) \overset{\lambda=4}{=} (A - 4I \mid \bar{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. נסמן

$$V_4 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} .$$

V_4 הוא ה **מרחב עצמי** השייך לערך עצמי $\lambda = 4$. נסמן

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

u_1 הוא הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 4$.
$\dim(V_4) = 1$ לכן הריכוי גיאומטרי של $\lambda = 4$, הוא 1.

$\underline{\lambda = -1}$

$$(A - \lambda I \mid \bar{0}) \overset{\lambda=-1}{=} (A + I \mid \bar{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

הפתרון הוא: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ נסמן

$$V_{-1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} .$$

V_{-1} הוא המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda = -1$. נסמן

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

u_2 הוא הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = -1$.
$\dim(V_{-1}) = 1$ לכן הריכוי גיאומטרי של $\lambda = -1$, הוא 1.

דוגמה 3.5

מצאו את כל הערכים עצמיים והוקטורים עצמיים של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

פתרון:

נרשום את הפולינום האופייני של המטריצה:

$$|\lambda I - A| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-1)(\lambda-2)\left((\lambda-2)^2-1\right) = 0 \ .$$

$$\begin{aligned} (\lambda-1)(\lambda-2)\left(\lambda^2-4\lambda+4-1\right) &= 0 \\ (\lambda-1)(\lambda-2)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right) &= 0 \\ (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-1) &= 0 \\ (\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-3) &= 0 \end{aligned}$$

קיימים 3 ערכים עצמיים:

$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 2.

$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 1.

<u>$\lambda = 1$</u>

$$(A - \lambda I \mid \bar{0}) \overset{\lambda=1}{=} (A - I \mid \bar{0}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

הפתרון הוא $z, w \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1$ הוא

$$V_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בבסיס של V_1 ישנם שני וקטורים. נסמן

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

u_1 ו- u_2 הם הוקטורים עצמיים ששייכים לערך עצמי $\lambda = 1$.

כיוון ש $\dim(V_1) = 2$, אומרים כי **הריבוי גאומטרי** של הערך עצמי $\lambda = 1$, הוא 2.

<u>$\lambda = 2$</u>

$$(A-2I \mid \bar{0}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ y \in \mathbb{R}.$ המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 2$ הוא

$$V_2 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

בביס של V_2 יש וקטור אחד. נסמן

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

u_3 הוא הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 2$. כיוון ש $\dim(V_2) = 1$, אז אומרים כי הריבוי גאומטרי של הערך עצמי $\lambda = 2$, הוא 1.

$\underline{\lambda = 3}$

$$(A-3I\mid \bar{0})=\left(\begin{array}{cccc|c} -1&0&0&1&0\\ 0&-1&-1&-1&0\\ -1&-1&-1&0&0\\ 0&0&0&-2&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_2\to -R_2]{R_1\to -R_1}\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&-1&0\\ 0&1&1&1&0\\ -1&-1&-1&0&0\\ 0&0&0&-2&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4\to -\frac{1}{2}R_4]{R_3\to R_3+R_1}\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&-1&0\\ 0&1&1&1&0\\ 0&-1&-1&1&0\\ 0&0&0&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&-1&0\\ 0&1&1&1&0\\ 0&0&0&2&0\\ 0&0&0&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_4-2R_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&-1&0\\ 0&1&1&1&0\\ 0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

פתרון: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\ z\in\mathbb{R}.$ המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=3$ הוא

$$V_3=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

בבסיס של V_3 יש וקטור אחד:

$$u_4=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\ .$$

u_4 הוא הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=3$. כיוון ש- $\dim(V_3)=1$ אז אומרים כי הריבוי גאומטרי של הערך עצמי $\lambda=3$, הוא 1.

3.2 לכסון של מטריצה

הגדרה 3.3 לכסינות של מרטיצות

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. A תקרא לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית. כלומר אם קיימת מטריצה הפיכה $P\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ומטריצה אלכסונית $D\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש-

$$D=P^{-1}AP\ .$$

משפט 3.6 לכסינות של מרטיצות

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. אם הוקטורים עצמיים של A מהווה בסיס של $\mathbb{F}^n$ אז A לכסינה.

נסמן הוקטורים עצמיים ב- $\{u_1,\ldots,u_n\}$ ששייכים לערכים עצמיים $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ בהתאמה (הערכים עצמיים לא בהכרח שונים זה מזה). מכאן נובע ש-

$$D=P^{-1}AP \qquad \Leftrightarrow \qquad A=PDP^{-1}$$

כאשר $D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\ldots&0\\0&\lambda_2&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&\ldots&\lambda_n\end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית ו $P=\begin{pmatrix}|&|&&|\\u_1&u_2&\ldots&u_n\\|&|&&|\end{pmatrix}$ מטריצה הפיכה.

הוכחה: $A\cdot u_i=\lambda_i u_i$ לכל $1\leq i\leq n$. לכן

$$\begin{aligned}A\cdot P&=\begin{pmatrix}|&|&&|\\A\cdot u_1&A\cdot u_2&\ldots&A\cdot u_n\\|&|&&|\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}|&|&&|\\\lambda_1u_1&\lambda_2u_2&\ldots&\lambda_nu_n\\|&|&&|\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}|&|&&|\\u_1&u_2&\ldots&u_n\\|&|&&|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\ldots&0\\0&\lambda_2&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&\ldots&\lambda_n\end{pmatrix}\\&=PD\ .\end{aligned}$$

כלומר $AP=PD$. נתון כי הוקטורים עצמיים מהווים בסיס, אז $\{u_1,\ldots,u_n\}$ ולכן P הפיכה. לכן P^{-1} קיימת ומותר להכפיל מצד שמאל ב- P^{-1}. נקבל

$$A=P^{-1}PD\ .$$

■

משפט 3.7 קריטירון 1 ללכסינות של מטריצה

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. אם ל- A יש n ערכים עצמיים **שונים** ב- $\mathbb{F}$, אז A לכסינה.

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 3.8 קריטירון 2 ללכסינות של מטריצה: סכום המימדים של מרחבים העצמיים

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. A לכסינה אם"ם סכום המימדים של המרחבים העצמיים השונים שווה ל- n.

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 3.9 קריטירון 3 ללכסינות של מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם

1. הפולינום האופייני שלה מתפרק למכפלה של גורמים ליניאריים מעל $\mathbb{F}$, לא בהכרח שונים, ו-
2. הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי שווה לריבוי הגיאומטרי שלו,

אז A לכסינה מעל $\mathbb{F}$.

הוכחה: תרגיל בית. ■

3.3 ערכים עצמיים של טרנספורמציות ליניאריות

הגדרה 3.4 אופרטור ליניארי

יהי V מרחב וקטורי. טרנספורציה ליניארי $T: V \to V$ נקראת אופרטור ליניארי.

הגדרה 3.5 אופרטור לכסין

אופרטור ליניארי $T: V \to V$ נקראת לכסין אם קיים בסיס של V כך ש- $[T]_B$ אלכסונית.

ז"א קיים בסיס $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ של V כך ש-

$$T(b_1) = \lambda_1 b_1 \ , \qquad T(b_2) = \lambda_2 b_2, \quad \ldots \quad , T(b_n) = \lambda_n b_n \ .$$

אז

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(לא כל ה- λ בהכרח שונים זה מזה)

הגדרה 3.6 ערך עצמי ווקטור עצמי של אופרטור ליניארי

תהי $T: V \to V$ אופרטור ליניארי ו- λ סקלר. λ נקרא **ערך עצמי** של T אם קיים וקטור $u \neq 0$ כך ש-

$$T(u) = \lambda u \ .$$

u נקרא
וקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ.

משפט 3.10

אופרטור ליניארי $T:V\to V$ לכסינה אם"ם קיים בסיס של V המורכב מוקטורים עצמיים.

הוכחה: $\Rightarrow$

נניח ש T לכסינה. ז"א קיים בסיס $U=\{u_1,\ldots,u_n\}$ כך ש-

$$T(u_1)=\lambda_1 u_1\ , \qquad T(u_2)=\lambda_2 u_2, \quad \ldots \quad , T(u_n)=\lambda_n u_n\ .$$

אז

$$[T]_U=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

(לא כל ה- λ בהכרח שונים זה מזה).

$\Leftarrow$

נניח שקיים בסיס $U=\{u_1,\ldots,u_n\}$ שמורכב מוקטורים עצמיים. ז"א קיימים סקלרים $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ כך ש-

$$T(u_1)=\lambda_1 u_1\ , \quad \ldots \quad , T(u_n)=\lambda_n u_n\ .$$

לכן

$$[T]_U=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

אלכסונית. ■

הגדרה 3.7 פולינום האופייני של אופרטור ליניארי

תהי $T:V\to V$ אופרטור ליניארי. נניח ש A המטריצה המייצגת של T לפי בסיס B. אז הפולינום

$$p_T(\lambda)=|\lambda I-A|$$

נקרא הפולינום האופייני של T.

הגדרה 3.8 ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי של ערך עצמי של אופרטור ליניארי

נניח $T:V\to V$ אופרטור ליניארית ו- λ ערך עצמי.

1) הריבוי האלגברי של λ הוא הריבוי של λ בפולינום האופייני.

2) הריבוי הגאומטרי של λ הוא $\dim(V_\lambda)$, כלומר, מספר הוקטורים העצמיים הבת"ל השייכים ל- λ.

דוגמה 3.6

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\3x+2y\end{pmatrix}$$

חפשו את הוקטורים עצמיים של T כך ש- $T(u)=\lambda u$.
האם T לכסינה?

פתרון:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\3x+2y\end{pmatrix}$$

כאשר $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$ המטריצה המייצגת של האופרטור.

פולינום האופייני:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-3&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)-6=\lambda^2-3\lambda-4=(\lambda-4)(\lambda+1)=0\ .$$

ערכים עצמיים:
$\lambda=-1$
$\lambda=4$.

$\underline{\lambda=4}$

$$(A-4I)=\begin{pmatrix}-3&2\\3&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-3&2\\0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $y, y\in\mathbb{R}$ $\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. לכן המרחב עצמי של $\lambda=4$ הוא $V_4=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$. נסמן הוקטור עצמי שלו ב- $u_1=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

$\underline{\lambda=-1}$

$$(A+I)=\begin{pmatrix}2&2\\3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $y, y\in\mathbb{R}$ $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. לכן המרחב עצמי של $\lambda=-1$ הוא $V_{-1}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$. נסמן הוקטור עצמי שלו ב- $u_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

u_1,u_2 בת"ל:

$$\begin{pmatrix}u_1&u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1\\0&-5\end{pmatrix}$$

לכן הם מהווים בסיס של $\mathbb{R}^2$. לכן T לכסינה.

$$T(u_1)=4\cdot u_1\ ,\qquad T(u_2)=-1\cdot u_2\ .$$

משפט 3.11

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי לכסיו.
נניח ש- $[T]_B$ המטריצה המייצגת של T לפי בסיס B.
יהיו $u_1,\ldots,u_n$ הוקטורים עצמיים של T לפי בסיס B, ששייכים לערכים עצמיים $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ (הם לא בהכרח שונים זה מזה).
אז

$$[T]_B = PDP^{-1}$$

או באופן שקול

$$P^{-1}[T]_B P = D$$

כאשר $P=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ ו- $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

הוכחה:

$$\begin{aligned} [T]_B P =& [T]_B \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T]_B u_1 & [T]_B u_2 & \ldots & [T]_B u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \ldots & \lambda_n u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ =& PD \ , \end{aligned}$$

כלומר, $[T]_B P = PD$. הוקטורים עצמיים $u_1,\ldots,u_n$ בת"ל, אז P הפיכה לכן P^{-1} קיימת. לכן מותר להכפיל מצד ימין ב- P^{-1}. נקבל: ולכן

$$[T]_B = PDP^{-1}$$

ומכאן נובע כי

$$P^{-1}[T]_B P = D$$

■

משפט 3.12

תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית ו λ_0 ערך עצמי. אם m הריבוי האלגברי ו- k הריבוי הגיאומטרי של λ_0, אז

$$k \leq m \ .$$

במילים: הריבוי הגיאומטרי קטן או שווה לריבוי האלגברי.

הוכחה: נניח ש- λ_0 ערך עצמי מריבוי אלגברי m וריבוי גיאומטרי k.
ז"א קיימים k וקטורים בת"ל $u_1,\ldots,u_k$ ששייכים לערך עצמי λ_0.
נשלים אותו לבסיס של V:

$$B=\{u_1,\ldots,u_k,u_{k+1},\ldots,u_n\}\ .$$

נחשב את המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס B:

$$T(u_1)=\lambda_0 u_1\ ,\quad \ldots\quad ,T(u_k)=\lambda_0 u_k$$

לכן

$$[T]_B=\left(\begin{array}{cccc|c}\lambda_0&0&\cdots&0&\\0&\lambda_0&\cdots&0&\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&*\\0&0&\cdots&\lambda_0&\\\hline 0&0&\cdots&0&\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&A'\\0&0&\cdots&0&\end{array}\right)$$

הפולינום הופייני של A הוא

$$p_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\left|\left(\begin{array}{cccc|c}\lambda-\lambda_0&0&\cdots&0&\\0&\lambda-\lambda_0&\cdots&0&\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&*\\0&0&\cdots&\lambda-\lambda_0&\\\hline 0&0&\cdots&0&\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\lambda I-A'\\0&0&\cdots&0&\end{array}\right)\right|$$

נחשב את הדטרמיננטה דרך העמודה הראשונה:

$$p_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)\cdot\left|\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda-\lambda_0&\cdots&0&\\\vdots&\ddots&\vdots&*\\0&\cdots&\lambda-\lambda_0&\\\hline 0&\cdots&0&\\\vdots&\ddots&\vdots&\lambda I-A'\\0&\cdots&0&\end{array}\right)\right|$$

עד שנקבל

$$p_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k\,|\lambda I-A'|=(\lambda-\lambda_0)^k p_{A'}(\lambda)$$

לכן הריבוי האלגברי גדול או שווה ל- k. ■

דוגמה 3.7

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&3\\-1&3&1\end{pmatrix}$$

א מצאו את הערכים העצמיים ומרחבים עצמיים של A.

ב האם A לכסינה? אם כן, רשמו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש

$$D=P^{-1}AP\ .$$

פתרון:

א

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & -3 \\ 1 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 \\ -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1+\lambda \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$
$$=(\lambda+1)\left((\lambda+1)(\lambda-1)-9\right)-(0-(1+\lambda))$$
$$=(\lambda+1)(\lambda^2-1-9+1)$$
$$=(\lambda+1)(\lambda^2-9)$$
$$=(\lambda+1)(\lambda+3)(\lambda-3)$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=-1$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=3$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=-3$ מריבוי אלגברי 1.

$\underline{\lambda=-1}$

$$(A+I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $y\in\mathbb{R}\quad y,\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda=-1$ הוא

$$V_{-1}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

הווקטור עצמי של $\lambda=-1$ הוא $u_1=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$.

$\dim(V_{-1})=1$ לכן הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי $\lambda=-1$, הוא 1.

$\underline{\lambda=3}$

$$(A-3I) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & -12 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $z\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{z}{4}\\ \frac{3}{4}z\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda=3$ הוא

$$V_3=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$$

הוקטור עצמי של הערך עצמי $\lambda=3$ הוא

$$u_2=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}\ .$$

$\dim(V_3)=1$ לכן הריבוי גיאומטרי של הערך עצמי $\lambda=3$, הוא 1.

$\underline{\lambda=-3}$

$$(A+3I)=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&3\\-1&3&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&3\\0&6&9\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $z\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}z\\-\frac{3}{2}z\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda=-3$ הוא

$$V_{-3}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}\right\}$$

הוקטור עצמי של הערך עצמי $\lambda=-3$ הוא

$$u_3=\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}\ .$$

$\dim V_{-3}=1$ לכן הריבוי גיאומטרי של הערך עצמי $\lambda=-3$, הוא 1.

ב $\dim V_1+\dim V_3+\dim V_{-3}=3$ לכן קיים בסיס של $\mathbb{R}^3$:

$$u_1=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\quad u_2=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}\ ,\quad u_3=\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}\ .$$

ומטריצה A לכסינה:

$$D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}\ ,\qquad P=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&3&-3\\0&4&2\end{pmatrix}\ .$$

דוגמה 3.8

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

א מצאו את הערכים העצמיים ומרחבים עצמיים של A.

ב האם A לכסינה? אם כן, רשמו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש

$$D = P^{-1}AP \ .$$

פתרון:

א

$$\begin{aligned}
|\lambda I - A| =& \begin{vmatrix} \lambda-5 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} \\
=&(\lambda-5)\begin{vmatrix} \lambda-5 & 2 \\ 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & \lambda-5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\
=&(\lambda-5)\left((\lambda-5)^2-4\right) + 2\left(-2(\lambda-5)-4\right) + 2\left(-4-2(\lambda-5)\right) \\
=&(\lambda-5)\left(\lambda^2-10\lambda+21\right) + 2\left(-2\lambda+6\right) + 2\left(-2\lambda+6\right) \\
=&(\lambda-5)(\lambda-7)(\lambda-3) - 4(\lambda-3) - 4(\lambda-3) \\
=& (\lambda-3)\left((\lambda-5)(\lambda-7)-8\right) \\
=& (\lambda-3)\left(\lambda^2-12\lambda+35-8\right) \\
=& (\lambda-3)\left(\lambda^2-12\lambda+27\right) \\
=& (\lambda-3)(\lambda-9)(\lambda-3)
\end{aligned}$$

$\lambda=3$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 2.

$\lambda=9$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 1.

<u>$\lambda=3$</u>

$$(A-3I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda=3$ הוא

$$V_3 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(V_3)=2$ אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי $\lambda=3$, הוא 2.

$\underline{\lambda = 9}$

$$(A-9I) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda = 9$ הוא

$$V_9 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(V_9) = 1$, אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי הוא 1.

ב $\dim\ V_3 = 2$, $\dim\ V_9 = 1$.

$$\dim V_3 + \dim V_9 = 3 \ .$$

לכן קיים בסיס של $\mathbb{R}^3$ המורכב מוקטורים עצמיים:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

ומטריצה A לכסינה:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \ , \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

$$D = P^{-1}AP$$

דוגמה 3.9

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

האם A לכסינה?

פתרון:

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| =& \begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -12\\ -1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}\\ =&(\lambda-1)\lambda(\lambda-1)=0\end{aligned}$$

$\lambda=0$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 1.
$\lambda=1$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 2.

<u>$\lambda=1$</u>

$$(A-I)=\begin{pmatrix}0&0&12\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\y\\0\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda=1$ הוא

$$V_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(V_1)=1$ אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי $\lambda=1$ הוא 1.

<u>$\lambda=0$</u>

$$(A-0\cdot I)=\begin{pmatrix}1&0&12\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda=0$ הוא

$$V_0=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(V_0)=1$ אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי $\lambda=0$ הוא 1.
$\dim\, V_1=1$, $\dim\, V_0=1$.

$$\dim V_1+\dim V_0=2<\dim(\mathbb{R}^3)\ .$$

לכן לא קיים בסיס של $\mathbb{R}^3$ המורכב מוקטורים עצמיים. לכן A לא לכסינה.

משפט 3.13 קריטירון 1 ללכסינות של אופרטור

יהי V מרחב עצמי מעל $\mathbb{F}$, ויהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי. נניח ש- $\dim(V) = n$. אם ל- T יש n ערכים עצמיים **שונים** ב- $\mathbb{F}$, אז T לכסינה.

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 3.14 קריטירון 2 ללכסינות של אופרטור: סכום המימדים של מרחבים העצמיים

יהי V מרחב עצמי מעל $\mathbb{F}$, ויהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי. נניח ש- $\dim(V) = n$. T לכסין אם"ם סכום המימדים של המרחבים העצמיים השונים שווה ל- n.

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 3.15 קריטירון 3 ללכסינות של אופרטור

יהי V מרחב עצמי מעל $\mathbb{F}$, ויהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי. אם

1. הפולינום האופייני של T מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$, לא בהכרח שונים, ו-
2. הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי שווה לריבוי הגיאומטרי שלו,

אז T לכסין מעל $\mathbb{F}$.

הוכחה: תרגיל בית. ■

דוגמה 3.10

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. האם A לכסינה מעל $\mathbb{R}$?
2. האם A לכסינה מעל $\mathbb{C}$?

פתרון:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

1. $p_A(\lambda)$ לא מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{R}$, לכן A לא לכסינה מעל $\mathbb{R}$.
2.
$$\lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i) = 0$$
$\lambda = i$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 1.
$\lambda = -i$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 1.

$\underline{\lambda = i}$

$$(A-iI)=\begin{pmatrix}-i & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}-i & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-iy\\ y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-i\\ 1\end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda=i$ הוא

$$V_i=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-i\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(V_i)=1$ אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי הוא 1.

<u>$\lambda=-i$</u>

$$(A+iI)=\begin{pmatrix}i & 1\\ -1 & i\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}i & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}iy\\ y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda=-i$ הוא

$$V_{-i}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(V_{-i})=1$ אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי הוא 1.

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}\ ,\qquad D=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}\ ,\qquad D=P^{-1}AP\ .$$

משפט 3.16 וקטורים עצמיים ששייכים לערכים עצמיים שונים בת"ל

נתון $T:V\rightarrow V$ אופרטור ליניארי. וקטורים עצמיים של T ששייכים לערכים עצמיים שונים הם בת"ל.

הוכחה: <u>נתון:</u>

$T:V\rightarrow V$ אופרטוא ליניארי,
$\lambda_1,\ \ldots\ ,\lambda_n$ ערכים עצמיים שונים ששייכים לוקטורים עצמיים $u_1,\ \ldots\ ,u_n$ של T.

<u>צריך להוכיח:</u>

$u_1,\ \ldots\ ,u_n$ בת"ל.

<u>הוכחה:</u>

נוכיח את הטענה ע"י אינדוקציה על n.

<u>שלב הבסיס:</u>

עבור $n=1$: $u_1 \neq \bar{0}$, לכן הוא בת"ל.

<u>שלב האינדוקציה:</u>

נניח שעבור $n>1$, n וקטורים עצמיים ששייכים ל n ערכים עצמיים שונים בת"ל. נניח $u_1,\ldots,u_{n+1}$ וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}$. נרשום

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1} u_{n+1} = \bar{0} \qquad (*)$$

אז

$$\alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \ldots + \alpha_n T(u_n) + \alpha_{n+1} T(u_{n+1}) = \bar{0}$$

$$\alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n u_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} u_{n+1} = \bar{0} \qquad (*1)$$

נכפיל (*) ב λ_{n+1}:

$$\alpha_1 \lambda_{n+1} u_1 + \alpha_2 \lambda_{n+1} u_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_{n+1} u_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} u_{n+1} = \bar{0} \qquad (*2)$$

נחסיר (*2) מ (*1):

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_{n+1})u_1 + \alpha_2(\lambda_2-\lambda_{n+1})u_2 + \ldots + \alpha_n(\lambda_n-\lambda_{n+1})u_n + \alpha_{n+1}\cancelto{0}{(\lambda_{n+1}-\lambda_{n+1})}u_n = \bar{0}$$

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_{n+1})u_1 + \alpha_2(\lambda_2-\lambda_{n+1})u_2 + \ldots + \alpha_n(\lambda_n-\lambda_{n+1})u_n = \bar{0} \qquad (*3)$$

לפי ההנחת האינדוקציה הוקטורים $u_1,\ldots,u_n$ בת"ל. לכן

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_{n+1}) = 0\ , \quad \ldots \quad , \alpha_n(\lambda_n-\lambda_{n+1}) = 0\ . \qquad (*4)$$

כל הערכים העצמיים שונים זה מזה, כלומר $\lambda_i - \lambda_{n+1} \neq 0$ לכל $i=1,\ldots,n$. לכן

$$\alpha_1 = 0\ , \quad \ldots \quad , \alpha_n = 0\ . \qquad (*5)$$

נציב (*5) ב- (*) ונקבל

$$\alpha_1 u_1 = \bar{0}$$

$u_1 \neq 0$ כי הוא וקטור עצמי לכן $\alpha_1 = 0$. לכן (*) מצקיים רק אם כל המקודמים $\alpha_1, \quad \ldots \quad , \alpha_{n+1} = 0$ לכן הוקטורים עצמיים $u_1, \quad \ldots \quad , u_{n+1}$ בת"ל.

■

3.4 שימושים של לכסון מטריצה

משפט 3.17 חזקה של מטריצה הדומה למטריצה אלכסונית

אם A לכסינה, אז קיימת מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D=P^{-1}AP$. לכן

$$A^n=PD^nP^{-1} .$$

הוכחה:

נוכיח את הטענה ע"י אינדוקציה.

שלב הבסיס:

עבור $n=1$, $D=P^{-1}AP \Leftarrow A=PDP^{-1}$.

שלב האינדוקציה:

נניח שעבור n מתקיים $A^n=PD^nP^{-1}$. אז

$$A^{n+1}=(PD^nP^{-1})\cdot PDP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$$

■

דוגמה 3.11

נתונה המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

1. מצאו את הערכים עצמיים והמרחבים עצמיים של A.
2. האם A לכסינה? אם כן רשמו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D=P^{-1}AP$.
3. חשבו את A^{1001}.

פתרון:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda&-1\\-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-1)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$$

$\lambda=1$ מריבוי אלגברי 2.
$\lambda=-1$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=1$

$$(A-I)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+z\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

מרחב עצמי:

$$V_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\underline{\lambda = -1}$

$$(A+I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מרחב עצמי:

$$V_{-1} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim V_1 + \dim V_{-1} = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

לכן A לכסינה.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{1001} = PD^{1001}P^{-1}$$

נמצא את P^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$D^{1001} = \begin{pmatrix} 1^{1001} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{1001} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{1001} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. לכן

$$A^{1001} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

משפט 3.18

אם u וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי λ, כלומר $A \cdot u = \lambda u$ אז

$$A^n u = \lambda^n u \ .$$

הוכחה: נוכיח את הטענה ע"י אינדוקציה.

<u>שלב הבסיס:</u>

עבור $n = 1$, $A \cdot u = \lambda u$ מתקיים כי נתון ש- u וקטור עצמי של A.

<u>שלב האינדוקציה:</u>

נניח שעבור $n > 1$, $A^n u = \lambda^n u$. אז

$$A^{n+1}u = A\left(A^n u\right) = A\lambda^n u = \lambda^n A u = \lambda^n \cdot \lambda u = \lambda^{n+1}u \ .$$

■

דוגמה 3.12

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

א מצאו את הערך עצמי ווקטור עצמי של A.

ב האם A לכסינה? אם כן רשמו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D = P^{-1}AP$.

ג חשבו את $A^{2023}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

פתרון:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 4 & 0 \\ -1 & \lambda+4 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda & 4 \\ -1 & \lambda+4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+4) = (\lambda-1)(\lambda+2)^2 = 0$$

$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda = -2$ מריבוי אלגברי 2.
<u>$\lambda = -2$</u>

$$(A+2I) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מרחב עצמי:

$$V_{-2} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

<u>$\lambda = 1$</u>

$$(A-I) = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מרחב עצמי:

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim V_1 + \dim V_{-2} = 1 + 1 = 2 < \dim \mathbb{R}^3$$

לכן A לא לכסינה.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ וקטור עצמי השייך ל $\lambda = -2$, לכן

$$A^{2023} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2)^{2023} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^{2024} \\ -2^{2023} \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.5 משפטים נוספים הקשורים ללכסון של מטריצה

משפט 3.19 דטרמיננטה של מטריצה משולשית שווה למכפלה של איברי האלכסון הראשי

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה משולשית עליונה או משולשית תחתונה. הדטרמיננטה של A שווה למכפלה של האיברים על האלכסון הראשי. כלומר

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} , \qquad |A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \ldots a_{nn} \ .$$

הוכחה: אידוקציה על n.

<u>שלב הבסיס:</u>

עבור $n = 1$ הטענה נכונה באופן טריוויאלי.
כלומר נתון $A \in \mathbb{F}^{1\times 1}$. נסמן $A = (a)$ כאשר a האיבר היחיד במטריצה A.

$$|A| = a \ .$$

A מטריצה משולשית, והאיבר היחיד על האלכסון הראשי הוא a. לכן המכפלה של האיברים על האלכסון ראשי פשוט שווה ל- a. לכן $|A|$ שווה למכפלה של האיברים על האלכסון הראשי של A.

<u>שלב האינקודציה:</u>

נניח שהטענה נכונה עבור $n = N$ (הנחת האינדוקציה). נוכיח אותה עבור $n = N + 1$.

תהי $A\in\mathbb{F}^{N\times N}$ מטריצה משולשית עליונה:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\ldots&a_{1,N}&a_{1,N+1}\\0&a_{22}&a_{23}&\ldots&a_{2,N}&a_{2,N+1}\\0&0&a_{33}&\ldots&a_{3,N}&a_{3,N+1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\ldots&a_{N,N}&a_{N,N+1}\\0&0&0&\ldots&0&a_{N+1,N+1}\end{pmatrix}$$

נחשב הדטרמיננטה על השורה האחרונה:

$$|A|=a_{N+1,N+1}\cdot\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\ldots&a_{1,N}\\0&a_{22}&a_{23}&\ldots&a_{2,N}\\0&0&a_{33}&\ldots&a_{3,N}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\ldots&a_{N,N}\end{vmatrix}$$

לפי ההנחת האינדוקציה הדטרמיננטה של מטריצה $N\times N$ משולשית עליחונה שווה למכפלה של האיברים על האלכסון הראשי, לכן

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\ldots&a_{1,N}\\0&a_{22}&a_{23}&\ldots&a_{2,N}\\0&0&a_{33}&\ldots&a_{3,N}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\ldots&a_{N,N}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\ldots a_{N,N}\ .$$

לכן

$$|A|=a_{11}\cdot a_{22}\ldots a_{N,N}\cdot a_{N+1,N+1}$$

■

משפט 3.20 ערכים העצמיים של מטריצה משולשית

הערכים העצמיים של מטריצה משולשית עליונה (או משולשית תחתונה) הם האיברים הנמצאים על האלכסון הראשי.

הוכחה: תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ משולשית, ויהיו $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ האיברים על האלכסון הראשי. אז

$$\lambda I-A$$

גם מטריצה משולשית והאיברים על האלכסון הראשי הם $\{\lambda-\alpha_1,\lambda-\alpha_2,\ldots,\lambda-\alpha_n\}$. הדטרמיננטה של מטריצה משולשית היא המכפלה של האיברים על האלכסון הראשי, לכן לכן

$$|\lambda I-A|=(\lambda-\alpha_1)\cdot(\lambda-\alpha_2)\ldots(\lambda-\alpha_n)$$

לכן הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda)=(\lambda-\alpha_1)\cdot(\lambda-\alpha_2)\ldots(\lambda-\alpha_n)=0\ .$$

השורשים הם

$$\lambda=\alpha_1,\quad\lambda=\alpha_2,\quad\ldots\quad\lambda=\alpha_n\ .$$

ז"א הערכים עצמיים שווים לאיברים על האלכסון הראשי. ■

הגדרה 3.9 הגדרת דמיון בין מטריצות

תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נאמר ש- A ו- B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה $P\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש-

$$B=P^{-1}AP\ .$$

משפט 3.21 פולינום האופייני של מטריצות דומות

אם A ו- B דומות אז יש להן אותו פולינום אופייני, ולכן אותם ערכים עצמיים.

הוכחה:

$$\begin{aligned}
f_B(x)&=|xI-B|\\
&=\left|xI-P^{-1}AP\right|\\
&=\left|P^{-1}xIP-P^{-1}AP\right|\\
&=\left|P^{-1}\left(xI-A\right)P\right|\\
&=\left|P^{-1}\right|\left|xI-A\right|\left|P\right|\\
&=\left|P\right|^{-1}\left|xI-A\right|\left|P\right|\\
&=\left|xI-A\right|\left|P\right|^{-1}\left|P\right|\\
&=\left|xI-A\right|\\
&=f_A(x)
\end{aligned}$$

■

משפט 3.22 קיום ווקטור עצמי של אופרטור ליניארית

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית.
קיים לפחות וקטור עצמי אחד של T.

הוכחה: נניח ש- $\dim(V)=n$. יהי $u_1\neq\bar{0}\in V$. הקבוצה

$$\left\{u_1,T\left(u_1\right),T^2\left(u_1\right),\ldots,T^n\left(u_1\right)\right\}$$

תלויה לינארית כי יש בה $n+1$ וקטורים. לכן הצירוף ליניארי הבא מתקיים רק אם אחד המקדמים $a_0,\ldots,a_n$ שונה מאפס:

$$a_0u_1+a_1T\left(u_1\right)+a_2T^2\left(u_1\right)+\ldots+a_nT^n\left(u_1\right)=\bar{0}\ . \tag{*1}$$

נרשום את זה בצורה

$$\left(a_0+a_1T+a_2T^2+\ldots+a_nT^n\right)u_1=\bar{0}\ .$$

בצד שמאל יש הצבת העתקה בפולינום מסדר n. לפי המשפט היסודי של האלגברה יש לפולינום הזה פירוק לגורמים ליניאריים:

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n=c(z-\lambda_1)\ldots(z-\lambda_n)$$

$c\neq 0\in\mathbb{C}$, $\lambda_i\in\mathbb{C}$, $1\leq i\leq n$. לכן ניתן לפרק את (*1) כ:

$$a_0u_1+a_1T\left(u_1\right)+a_2T^2\left(u_1\right)+\ldots+a_nT^n\left(u_1\right)=c\left(T-\lambda_1I\right)\ldots\left(T-\lambda_nI\right)u_1=\bar{0}\ . \tag{*2}$$

$c\neq 0\in\mathbb{C}$. אם קיים פתרון $u_1\neq 0$ למשוואה הומוגונית ב- (*2) אז בהכרח הדטרמיננטה של המטריצה שמכפילה u_1 שווה לאפס. לפיכך

$$\left|c\left(T-\lambda_1I\right)\ldots\left(T-\lambda_nI\right)\right|=c\left|T-\lambda_1I\right|\ldots\left|T-\lambda_nI\right|=0\ . \tag{*3}$$

לכן קיים i $(1\leq i\leq n)$ עבורו $\left|T-\lambda_iI\right|=0$ לכן ל- T יש לפחות ערך עצמי אחד.

■