המחלקה למדעי המחשב

$18/10/23$ תשפ"ג
$16:30-19:30$

אלגברה 2

מועד ב'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר, ד'ר שי סרוסי.

תשפ"ג סמסטר ק'

השאלון מכיל 12 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (8 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.

==

שאלה 1

א) (18 נק') תהי $A \in \mathbb{C}^{3\times3}$ מטריצה ניתנת ע"י $A = \begin{pmatrix} 2 & -i & 1 \\ i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$.

1) (12 נק')
האם A לכסינה אוניטרית? אם כן, מצאו Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $A = Q \cdot D \cdot \bar{Q}$.

2) (6 נק')
נתון הפולינום $f(x) \in \mathbb{R}_3[x]$:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16 \ .$$

מצאו את המטריצה $f(A)$.

ב) (7 נק')
יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $T : V \to V$ ו- $S : V \to V$ העתקות צמודות לעצמן. הוכיחו ש $S \cdot T$ צמודה לעצמה אם ורק אם S ו- T מתחלפות ($S \cdot T = T \cdot S$).

שאלה 2

א) (10 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. הוכיחו כי $A^{-2} = -\frac{1}{4}\left(A^2 - 5I\right)$

ב) (15 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו את הטענות הבאות:

1) (5 נק')
אם λ ערך עצמי של A אז λ ערך עצמי של A^t.

2) (5 נק')
אם A הפיכה אז $A^{-1} \in \text{span}\left\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\right\}$.

3) (5 נק')
$A^m \in \text{span}\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{m-1}\}$ אם ורק אם קיים פולינום $p(x) \in \mathbb{R}_m[x]$ כך ש- $p(A) = 0$.

שאלה 3

א) (15 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ מטריצה ריבועית נורמלית עם ערכים עצמיים $\lambda = 5$ ו- $\lambda = 1$. נניח כי המרחב העצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 5$ הוא

$$V_{\lambda=5} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

מצאו את המטריצה A.

ב) (5 נק')
תהיינה $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ו- $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ כך ש- B הרמיטית ו- C אוניטרית. אם B ו- C מתחלפות אז המטריצה $B \cdot C$ נורמלית.

ג) (5 נק') יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב ווקטורי V. הוכיחו כי התת-מרחב T $\ker$ הוא T-שמור לכל אופרטור T.

שאלה 4

א) (15 נק') יהי $V = \mathbb{R}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. ונתבונן בתת המרחב

$$U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

1) מצאו בסיס אורתוגנולי ל- U.

2) מצאו בסיס אורתוגנולי ל- $U^\perp$.

3) **(5 נק')**

ב) (10 נק') תהיינה $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ו- $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ פונקציות במרחב של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[-1, 1]$. הוכיחו או הפריכו כי הנוסחה

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f^2(x) g(x)\, dx$$

מגדירה מכפלה פנימית.

1) (5 נק') יהיו $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ו- $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ווקטורים של $\mathbb{C}^2$. הוכיחו או הפריכו כי הנוסחה

$$\langle a, b\rangle = \lambda_1 a_1 b_1 + \lambda_2 a_2 b_2 \ ,$$

כאשר $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ סקלרים, מגדירה מכפלה פנימית.

שאלה 5

א) (15 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ מטריצה ריבועית כך שהפולינום האופייני שלה הוא

$$p_A(x) = (x-3)^4(x-2)^4(x-1)^2$$

והפולינום המינימלי הוא

$$m_A(x) = (x-3)^2(x-2)^2(x-1)\ .$$

1) (10 נק') רשמו את כל האפשרויות לצורת ז'ורדן של A.

2) (5 נק') נתון כי הריבוי גיאומטרי של הערך עצמי $\lambda = 3$ הוא 2 והריבוי גיאומטרי של הערך עצמי $\lambda = 2$ הוא 2. רשמו את הצורת ז'ורדן של A.

ב) (10 נק') תהי $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

1) (5 נק') אם אפס לא ערך עצמי של B אז B הפיכה.

2) (5 נק') אם B הפיכה אז B לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

פתרונות

שאלה 1

א) (18 נק')

1) (12 נק') $\bar{A}=A$ לכן A צמודה לעצמה לכן A נורמלית לכן A לכסינה אוניטרית לפי משפט הלכסון אוניטרית.

נמצא את הפולינום האופייני של A:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & i & -1 \\ -i & x-2 & -i \\ -1 & i & x-2 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)\left((x-2)^2-1\right) - i\left(-i(x-2)-i\right) - (1+x-2) \\ &= (x-2)\left(x^2-4x+3\right) + (-x+2-1) - (x-1) \\ &= (x-2)(x-3)(x-1) - 2x + 2 \\ &= (x-2)(x-3)(x-1) - 2(x-1) \\ &= (x-1)\left((x-2)(x-3)-2\right) \\ &= (x-1)\left(x^2-5x+6-2\right) \\ &= (x-1)\left(x^2-5x+4\right) \\ &= (x-1)(x-4)(x-1) \\ &= (x-1)^2(x-4) \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=4$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=1$ מריבוי אלגברי 2.

<u>מרחב העצמי ששייך ל- $\lambda=1$</u>

$$(A-I) = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-iR_1} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z)=(i,1,0)y+(-1,0,1),y,z\in\mathbb{R}$.

$$V_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

<u>מרחב העצמי ששייך ל- $\lambda=4$</u>

$$(A-4I) = \begin{pmatrix} -2 & -i & 1 \\ i & -2 & i \\ 1 & -i & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to 2R_3+R_1]{R_2\to 2R_2+iR_1} \begin{pmatrix} -2 & -i & 1 \\ 0 & -3 & 3i \\ 0 & -3i & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{-1}{3}R_2} \begin{pmatrix} -2 & -i & 1 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & -3i & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3+3iR_2} \begin{pmatrix} -2 & -i & 1 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+iR_2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to\frac{-1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z)=(1,i,1)z, z\in\mathbb{R}$.

$$V_4 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

נסמן הווקטורים בבסיס של V_1 ב- $\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. ונסמן הווקטור של הבסיס של V_4 ב- $\mathrm{v}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$. נבנה בסיס אורתוגונלי של V_1 ע"י שיטת גרם שמידט:

$$u_1=\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad \|u_1\|^2=2\ .$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \mathrm{v}_2-\frac{1}{\|u_1\|^2}\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle\cdot u_1 \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}-\frac{1}{2}\left\langle\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle\cdot\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}-\frac{1}{2}\cdot i\cdot\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

בסה"כ קיבלנו בסיס אורתוגונלי של V_1:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 2 \end{pmatrix} \right\} .$$

כעת נבנה בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{ \hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 2 \end{pmatrix} \right\} .$$

בבסיס של V_4 יש רק ווקטור אחד ופיכך הבסיס כבר אורתוגונלי. נסמן הבסיס האורתוגונלי של V_4 ב-

$$\left\{ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

נבנה בסיס אורתנורמלי:

$$\left\{ \hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

העמודות של המטריצה Q הנדרשת הן הווקטורים בבסיסים האורתונורמליים של המרחבים העצמיים:

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

והמטריצה האלכסונית D הנדרשת היא המטריצה שעל האלכסון הראשי שלה יש את הערכים העצמיים של A באותו סדר שהווקטורים העצמיים מופיעים ב-Q:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2) (6 נק')

$$f(x) = (x-4)^2(x-1) .$$

$$f(A) = Q \cdot f(D) \cdot Q^{-1} = Q \cdot \begin{pmatrix} f(4) & 0 & 0 \\ 0 & f(1) & 0 \\ 0 & 0 & f(1) \end{pmatrix} \cdot \bar{Q} = Q \cdot \begin{pmatrix} f(4) & 0 & 0 \\ 0 & f(1) & 0 \\ 0 & 0 & f(1) \end{pmatrix} \cdot \bar{Q} = \mathbb{0}_{3\times 3} .$$

ב) (7 נק')

נתון כי האופרטורים T ו- S צמודים לעצמם.

נניח כי $S \cdot T$ צמוד לעצמו.

$$\begin{aligned} & \overline{S \cdot T} = S \cdot T && \text{(לפי ההנחה ש-}ST\text{ צמוד לעצמו)} \\ \Rightarrow\ & \bar{T} \cdot \bar{S} = S \cdot T && \text{(לפי הגדרה של הצמוד)} \\ \Rightarrow\ & T \cdot S = S \cdot T && \text{(}T\text{ ו- }S\text{ צמודים לעצמם)}\ . \end{aligned}$$

נניח כי S ו- T מתחלפים.

$$\begin{aligned} & \overline{TS} = \overline{TS} && \\ \Rightarrow\ & \overline{TS} = \overline{ST} && \text{(}T\text{ ו- }S\text{ מתחלפים)} \\ \Rightarrow\ & \overline{TS} = \bar{T} \cdot \bar{S} && \text{(לפי ההגדרה של הצמוד)} \\ \Rightarrow\ & \overline{TS} = T \cdot S && \text{(}T\text{ ו- }S\text{ צמודים לעצמם)}\ . \end{aligned}$$

<u>שאלה 2</u>

א) 1) המטריצה משולשית לכן הערכים עצמיים הם האיברים על האלכסון הראשי. לכן הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = (x+1)(x-1)(x+2)(x-2) = (x^2-1)(x^2-4) = x^4 - 5x^2 + 4\ .$$

לפי המשפט קיילי-המילטון, A מאפסת את הפולינום האופייני שלה, כלומר $p_A(A) = 0$ לכן

$$A^4 - 5A^2 + 4I = 0 \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{-1}{4}\left(A^4 - 5A^2\right) = A \cdot \left(\frac{-1}{4}\left(A^3 - 5A\right)\right)$$

לכן

$$A^{-1} = \frac{-1}{4}\left(A^3 - 5A\right)\ .$$

נחשב את צד הימין:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ , \qquad A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

לכן

$$\frac{-1}{4}\left(A^3-5A\right)=\frac{-1}{4}\left[-\begin{pmatrix}1&7&0&2\\0&8&0&0\\0&0&-8&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&5&0&10\\0&10&0&0\\0&0&-10&0\\0&0&0&-5\end{pmatrix}\right]$$

$$=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix}4&-2&0&8\\0&2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0&2\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

לכן $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0&2\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.

2) קיבלנו כי $A^{-1}=\frac{-1}{4}\left(A^3-5A\right)$. נכפיל את שני האגפים מצד שמאל ב- A^{-1} ונקבל:

$$A^{-2}=\frac{-1}{4}\left(A^2-5I\right)$$

באחד שלבים הקודמים קיבלנו כי $A^2=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. נציב ונקבל כי

$$A^{-2}=\frac{-1}{4}\left[\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}-5I\right]=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix}-4&3&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{4}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0&0\\0&0&\frac{1}{4}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

ב) **1)** נניח כי λ ערך עצמי של מטריצה A. ז"א

$$|\lambda I-A|=0\ .$$

הדטרמיננטה נשמרת ע"י שיחלוף לכן

$$\left|(\lambda I - A)^t\right| = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left|\lambda I - A^t\right| = 0$$

לכן λ שורש של הפולינום האופייני של A^t לכן λ ערך עצמי של A^t.

2) הפולינום האופייני הוא פולינום מתוקן לכן יש לו את הצורה

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + x^n \ .$$

לפי המשפט קיילי-המילטון, A מאפסת את הפולינום האופייני שלה. ז"א

$$\alpha_0 I + \alpha_1 A + \ldots + A^n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_0 I = -\alpha_1 A - \ldots - A^n = A\left((-\alpha_1)I + (-\alpha_2)A + \ldots + (-1)A^{n-1}\right)$$

הקבוע α_0 בהפולינום האופייני שווה ל- $|A|$. A הפיכה (נתון) לכן $|A| \neq 0$ לכן $\alpha_0 \neq 0$ לכן ההופכית α_0^{-1} קיימת. נכפיל ב- α_0^{-1} ונקבל:

$$I = A\left(\left(\frac{-\alpha_1}{\alpha_0}\right) I + \left(\frac{-\alpha_2}{\alpha_0}\right) A + \ldots + \left(\frac{-1}{\alpha_0}\right) A^{n-1}\right)$$

מכאן נקבל כי

$$A^{-1} = \left(\frac{-\alpha_1}{\alpha_0}\right) I + \left(\frac{-\alpha_2}{\alpha_0}\right) A + \ldots + \left(\frac{-1}{\alpha_0}\right) A^{n-1}$$

ולפיכך

$$A^{-1} \in \text{span}\left\{I, A, \cdots, A^{n-1}\right\} \ .$$

3) נניח ש $A^m \in \text{span}\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{m-1}\}$. אז קיימים סקלרים שך ש

$$A^m = \alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_{m-1} A^{m-1}$$

ז"א

$$A^m - \alpha_{m-1} A^{m-1} - \alpha_{m-2} A^{m-2} - \ldots - \alpha_1 A - \alpha_0 I_n = 0$$

לכן A מאפסת את

$$P(x) = x^m - \alpha_{m-1} x^{m-1} - \ldots - \alpha_1 x - \alpha_0 \in \mathbb{F}[x] \ .$$

נניח ש- A מאפסת את הפולינויום

$$Q(x) = \beta_m x^m + \beta_{m-1} x^{m-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0 \in \mathbb{F}[x]$$

כאשר $Q(x) \in \mathbb{R}_m[x]$. כיוון ש הסדר של $Q(x)$ הוא m אז $\beta_m \neq 0$. נעביר אגפים:

$$\beta_m A^m = -\left(\beta_{m-1} A^{m-1} + \ldots + \beta_1 A + \beta_0 I_n\right)$$

נחלק שני האגפים ב β_m:

$$A^m = -\left(\frac{\beta_{m-1}}{\beta_m} A^{m-1} + \ldots + \frac{\beta_1}{\beta_m} A + \frac{\beta_0}{\beta_m} I_n\right)$$

קיבלנו כי $A^m \in \text{span}\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{m-1}\}$.

שאלה 3

א) A נורמלית. לכן, לפי משפט הפירוק הספקטרלי, לכל וקטור $w \in \mathbb{R}^2$:

$$A \cdot w = 1 \cdot P_{V_1}(w) + 5 \cdot P_{V_5}(w)$$

ולפי נוסחת השלמה:

$$P_{V_1}(w) + P_{V_5}(w) = w \qquad \Rightarrow \qquad P_{V_1}(w) = w - P_{V_5}(w) \ .$$

מכאן נובע כי

$$A \cdot w = w + 4 \cdot P_{V_5}(w)$$

נבנה את המטריצה A לפי הנוסחה:

$$A = \begin{pmatrix} A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

נמצא $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ע"י משפט הפירוק הספקטרלי:

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4P_{V_5}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4P_{V_5}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

לכן

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ב)

נתון:

B הרמיטית לכן $\bar{B}=B$.
C אוניטרית, לכן $\bar{C}\cdot C=C\cdot\bar{C}=I$.

צריך להוכיח:

$T=B\cdot C=C\cdot B$ נורמלית.

הוכחה:

$$\begin{aligned} T\cdot\bar{T} &=(B\cdot C)\cdot(\bar{C}\cdot\bar{B}) && \text{(הגדרה של הצמודה)}\\ &=B\cdot C\cdot\bar{C}\cdot\bar{B} && (C \text{ ו } B \text{ מתחלפות})\\ &=B\cdot\bar{B} && (C \text{ אוניטרית})\\ &=B^2 && (B \text{ צמודה לעצמה}) \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}\cdot T &=\overline{(B\cdot C)}\cdot(C\cdot B)\\ &=\bar{C}\cdot\bar{B}\cdot C\cdot B && \text{(הגדרה של הצמודה)}\\ &=\bar{C}\cdot\bar{B}\cdot B\cdot C && (C \text{ ו } B \text{ מתחלפות})\\ &=\bar{C}\cdot B\cdot B\cdot C && (B \text{ צמודה לעצמה})\\ &=\bar{C}\cdot C\cdot B\cdot B && (C \text{ ו } B \text{ מתחלפות})\\ &=B\cdot B && (C \text{ אוניטרית})\\ &=B^2 \ . \end{aligned}$$

לכן $T\cdot\bar{T}=\bar{T}\cdot T$ ולכן T נורמלית.

ג) לכל $u\in\ker T$,

$$T(u)=0\ .$$

לכן $0\in\ker T$ לכן $T(u)\in\ker T$ לכל $u\in\ker T$ לכן $\ker T$ הוא תת-מרחב ש T- שמור.

שאלה 4

א) נסמן:

$$U=\operatorname{span}\left\{\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix},\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix},\mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\\1\end{pmatrix},\mathrm{v}_4=\begin{pmatrix}8\\9\\-9\\4\end{pmatrix}\right\}$$

נמצא תחילה בסיס למרחב:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 3 & 9 \\ 1 & -3 & -3 & -9 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4-R_1]{\substack{R_2\to R_2-2R_1\\ R_3\to R_3-R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & -5 & -6 & -17 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-5R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\to 9R_4+2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2\to -R_2]{R_3\to \frac{1}{9}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ז"א רק הווקטורים $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ בת"ל. המימד של U הוא 3 והווקטורים $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ מהווים בסיס של U. נבצע גרם שמידט על הבסיס שמצאנו:

1) נסמן

$$U = \mathrm{span}\left\{ \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad \|u_1\|^2 = 7 \ .$$

$$\begin{aligned} u_2 =& \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \\ =& \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

נבחור
$\|u_2\|^2 = 19$.

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}u_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2$$
$$= \begin{pmatrix}3\\3\\-3\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{7}\left\langle \begin{pmatrix}3\\3\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{19}\left\langle \begin{pmatrix}3\\3\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-4\\1\end{pmatrix}\right\rangle \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-4\\1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$\|u_3\|^2 = 2$. בסיס אורתוגונלי למרחב U:

$$B_U = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-4\\1\end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

2)

$$U = \mathrm{span}\left\{ \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix}, \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix}3\\3\\-3\\1\end{pmatrix}, \mathrm{v}_4 = \begin{pmatrix}8\\9\\-9\\4\end{pmatrix} \right\}$$

תזכורת:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \in U^{\perp} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}, u_i \right\rangle = 0 \ , \quad \forall\ 1 \le i \le 3 \ .$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{9} & 0 \end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x,y,z,w) = \left(1, \frac{-10}{9}, \frac{2}{9}, 1\right) w$$

נבחור $U^{\perp} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}\right\}$. לפיכך בסיס אורתוגונלי של $U^{\perp}$ הוא

$$B_{U^{\perp}} = \left\{\begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}\right\}$$

ב) 1) הנוסחה אינה מגדירה מכפלת פנימית. תכונת לינאריות לא מתקיימת:

$$\langle \alpha f, g\rangle = \int_{-1}^{1} (\alpha f)^2(x) g(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \alpha^2 f^2(x) g(x)\, dx = \alpha^2 \int_{-1}^{1} f^2(x) g(x)\, dx = \alpha^2 \langle f, g\rangle \neq \alpha \langle f, g\rangle \ .$$

2) הנוסחה אינה מגדירה מ"פ. דוגמה נגדית: $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$,

$$\begin{aligned} \langle a, b\rangle &= 1 \cdot 1 \cdot i + 1 \cdot 0 \cdot 0 = i \ , \\ \langle b, a\rangle &= 1 \cdot i \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 0 = i \ , \\ \overline{\langle a, b\rangle} &= -\, i \end{aligned}$$

$\langle b, a\rangle \neq \overline{a, b}$.

שאלה 5

א) 1)

אפשרות 1)

$$\begin{pmatrix} J_2(3) & & & & & \\ & J_2(3) & & & & \\ & & J_2(2) & & & \\ & & & J_2(2) & & \\ & & & & J_1(1) & \\ & & & & & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אפשרות 2)

$$\begin{pmatrix} J_2(3) & & & & & & \\ & J_1(3) & & & & & \\ & & J_1(3) & & & & \\ & & & J_2(2) & & & \\ & & & & J_2(2) & & \\ & & & & & J_1(1) & \\ & & & & & & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אפשרות 3)

$$\begin{pmatrix} J_2(3) & & & & & & \\ & J_2(3) & & & & & \\ & & J_2(2) & & & & \\ & & & J_1(2) & & & \\ & & & & J_1(2) & & \\ & & & & & J_1(1) & \\ & & & & & & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אפשרות 4)

$$\begin{pmatrix} J_2(3) & & & & & & & \\ & J_1(3) & & & & & & \\ & & J_1(3) & & & & & \\ & & & J_2(2) & & & & \\ & & & & J_1(2) & & & \\ & & & & & J_1(2) & & \\ & & & & & & J_1(1) & \\ & & & & & & & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) עבור כל ערך עצמי של A, מספר הבלוקים שווה לריבוי גיאומטרי שלו. לכן

$$A = \begin{pmatrix} J_2(3) &&&&& \\ & J_2(3) &&&& \\ && J_2(2) &&& \\ &&& J_2(2) && \\ &&&& J_1(1) & \\ &&&&& J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ב) **1)** הטענה נכונה. הוכחה:

הפולינום האופייני של מטריצה B הוא $p_B(x) = |xI - B|$ כאשר I מטריצה היחידה של $\mathbb{R}^{n\times n}$. כל פוליניום מתפרק לגורמים לינאריים (לא בהכרח שונים) מעל $\mathbb{C}$, לכן

$$p_B(x) = |xI - B| = (x - \lambda_1)\cdots(x - \lambda_n) \ .$$

אם 0 לא ערך עצמי של B אז 0 לא שורש של הפולינום האופייני.
לפיכך $p_B(0) \neq 0 \Leftarrow |-B| \neq 0 \Leftarrow |B| \neq 0 \Leftarrow B$ הפיכה.

2) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$|B| = 1 \neq 0$ לכן B הפיכה. הפולינום האופייני של B הוא

$$p_B(x) = |xI - B| = x^2 + 1 \ .$$

$p_B(x)$ לא מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{R}$ לכן B לא לכסינה מעל $\mathbb{R}$.