שעור 4
משחקים בצורה אסטרטגית רחבה ושיווי משקל נאש

4.1 הגדרה של משחק בצורה רחבה אסטרטגית

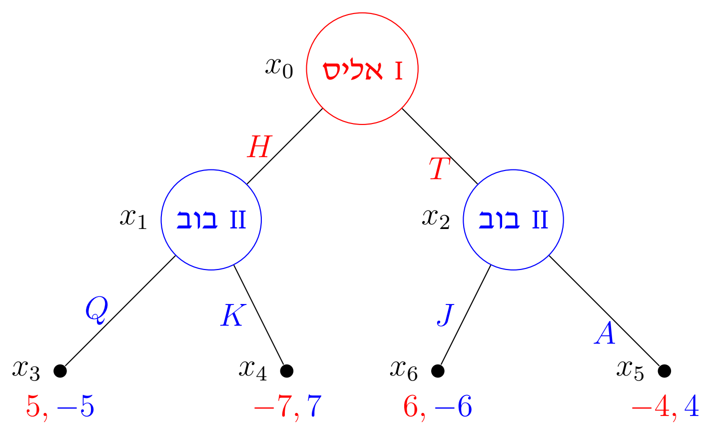
דוגמה 4.1 (התאמת מטבעות אם ידיעה שלמה)

נתבונן על המשחק הבא:

שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
אחר כך, אם אליס בחרה H אז שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).
אחרת אם אליס בחרה T בוב בוחר קלף נסיך (J) או קלף אס (A).

- אם אליס בחרה H ובוב בחר Q אז בוב משלם לאליס 5₪.
- אם אליס בחרה H ובוב בחר K אז אליס משלם לבוב 7₪.
- אם אליס בחרה T ובוב בחר J אז בוב משלם לאליס 6₪.
- אם אליס בחרה T ובוב בחר A אז אליס משלם לבוב 4₪.

ניתן לרשום את עץ המשחק **בצורה רחבה אסטרטגית**:



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H, T.
אומרים כי לשחקן I יש **קבוצה ידיעה אחת**.
לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I = (H, T) \ .$$

לשקחן II יש שני קדקודים x_1, x_2 בהם הוא מקבל החלטה.
אומרים גם כי לשחקן II יש 2 קבוצות ידיעה, x_1, x_2 אשר מייצגות שתי אפשריות שונות המנובעות מההחלטה הקודמת של שחקן I בקדקוד x_0.
כל קבוצת ידיעה מכילה הפעולות הבאות:

$$x_1 : (Q, K) \qquad x_2 : (J, A)$$

מכיוון שלשחקן II יש שתי קבוצתצ ידיעה x_1, x_2 ובכל אחד יש שתי פעולות אפשריות, אז יש לבוב $2\times 2=4$ אסטרטגיות:

$$S_{II}=(Q/J\ ,\ Q/A\ ,\ K/J\ ,\ K/A)$$

(נהוג לרשום את האסטרטגיות מלמעלה עד למטה ומשמאל לימון.)
הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

I \ II	Q/J	Q/A	K/J	K/A
H	$5,-5$	$5,-5$	$-7,7$	$-7,7$
T	$6,-6$	$-4,4$	$6,-6$	$-4,4$

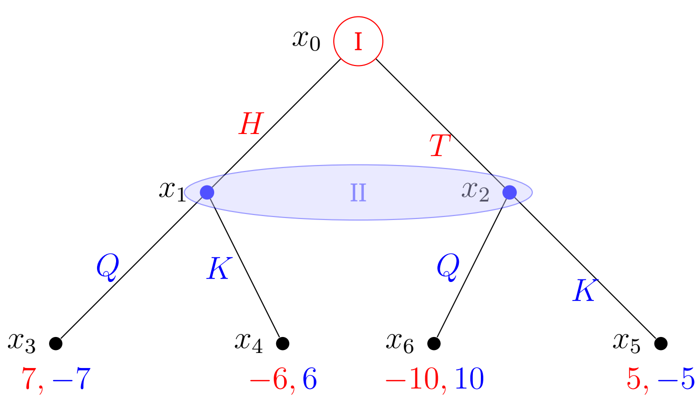
דוגמה 4.2 (התאמת מטבעות אם ידיעה לא שלמה)

בשונה לדוגמה הקודמת נתבונן על המשחק הבא עבורו שחקן II לא יודע את ההחלטה של שחקן I עד סוף המשחק.

שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
אחר כך, בלי ידיעה של הבחיר השל אליס, שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).

- אם אליס בחרה H ובוב בחר Q אז בוב משלם לאליס ₪7.
- אם אליס בחרה H ובוב בחר K אז אליס משלם לבוב ₪6.
- אם אליס בחרה T ובוב בחר Q אז אליס משלם לבוב ₪10.
- אם אליס בחרה T ובוב בחר K אז בוב משלם לאליס ₪5.

ניתן לרשום את עץ המשחק **בצורה רחבה אסטרטגית**:



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H,T.
כלומר לאליס יש **קבוצה ידיעה אחת**.
לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I=(H,T)\ .$$

בניגוד לדוגמה הקודמת, לבוב (שקחן II) יש רק קבוצת ידעיה אחת שמכילה שני קדקודים.
ז"א בוב לא יודע איזה אופציה אליס בחרה, H או T, אז בוב לא יודע על איזה קדקוד הוא נמצא, x_1 או x_2.
בגלל שהוא לא יודע מה ההחלטה של אליס, הוא בוחר בין רק שתי אסשריות, בלי ידיעה של ההחלטה של אליס.

לכן אנחנו מסתכלים אל הקדקודים $x_1 x_2$ **כקבוצת ידיעה אחת** שממנה יוצאות רק שתי הפעולות:

$$x_1 x_2 : (Q, K) \ ,$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של בוב הינה

$$S_{II} = (Q \ , \ K)$$

נשים לב כי מכל אחד של הקדקודים x_1 ו- x_2 יוצאות אותן קבוצת פעולות. אחרת בוב היה יודע מה ההחלטה של אליס.

$I \backslash II$	Q	K
H	$7, -7$	$-6, 6$
T	$-10, 10$	$5, -5$

דוגמה 4.3 (התאמת מטבעות אם ידיעה שלמה)

שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
אחר כך שחקן II (בוב) בוחר H או T.

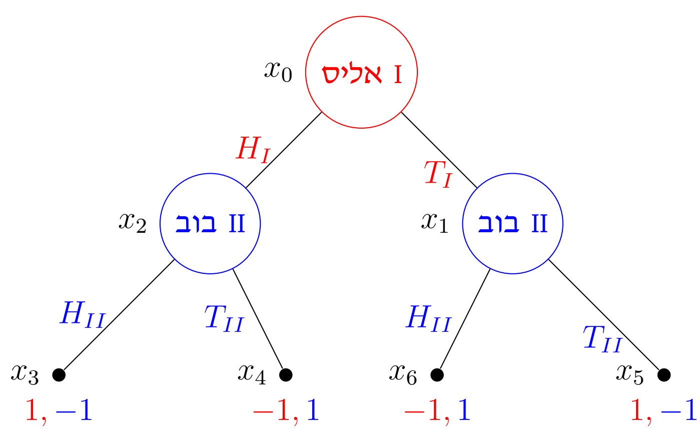
- אם שני השחקנים בוחרים באותו צד, משלם שחקן השני לשחקן הראשון ₪1.
- אם הם בוחרים בצדדים שונים, משלם שחקן הראשון לשחקן השני ₪1.

סעיף א) רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית רחבה.

סעיף ב) רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית בלבד.

פתרון:

סעיף א) נשים לב שזה משחק עם ידיעה שלמה. לכן עץ המשחק הינו



סעיף ב) לשחקן I (אליס) יש קבוצת ידיעה אחת:

$$x_0 : \ (H_I, T_I) \ .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של אליס היא

$$S_I = (H_I, T_I) \ .$$

לשחקן II (בוב) יש שתי קבוצות ידיעה של :

$$x_1 : \ (H_{II}, T_{II}) \ , \qquad x_2 : \ (H_{II}, T_{II}) \ .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של אליס היא

$$S_{II} = (H_{II}/H_{II} \ , H_{II}/T_{II} \ , \ T_{II}/H_{II} \ , \ T_{II}/T_{II}) \ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

$I \backslash II$	H_{II}/H_{II}	H_{II}/T_{II}	T_{II}/H_{II}	T_{II}/T_{II}
H_I	$1,-1$	$1,-1$	$-1,1$	$-1,1$
T_I	$-1,1$	$1,-1$	$-1,1$	$1,-1$

■

דוגמה 4.4 (התאמת מטבעות אם ידיעה לא שלמה)

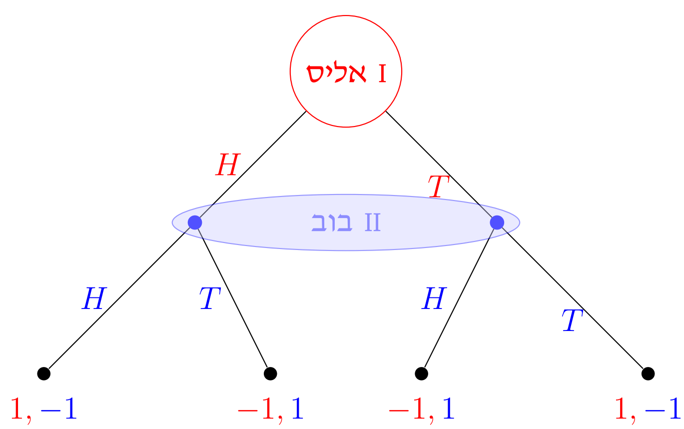
שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי). הוא רושם בחירותו על פתק, חותם עליו ומעביר אותו לשופט.
אחר כך שחקן II (בוב) בוחר H או T. רושם בחירותו על פתק, חותם עליו ומעביר אותו לשופט.

- אם שני השחקנים בוחרים באותו צד, משלם שחקן השני לשחקן הראשון ₪1.
- אם הם בוחרים בצדדים שונים, משלם שחקן הראשון לשחקן השני ₪1.

סעיף א) רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית רחבה.

סעיף ב) רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית בלבד.

פתרון:
נשים לב שזה משחק עם ידיעה לא שלמה, בגלל ששחקן II (בוב) לא יודע מה ההחלטה של שחקן I (אליס). לכן עץ המשחק הוא:



קבוצות ידיעה של שחקן I (אליס):

$$x_0 : \ (H_I, T_I) \ .$$

קבוצות ידיעה של שחקן II (בוב):

$$x_1 x_2 : \ (H_{II}, T_{II}) \ .$$

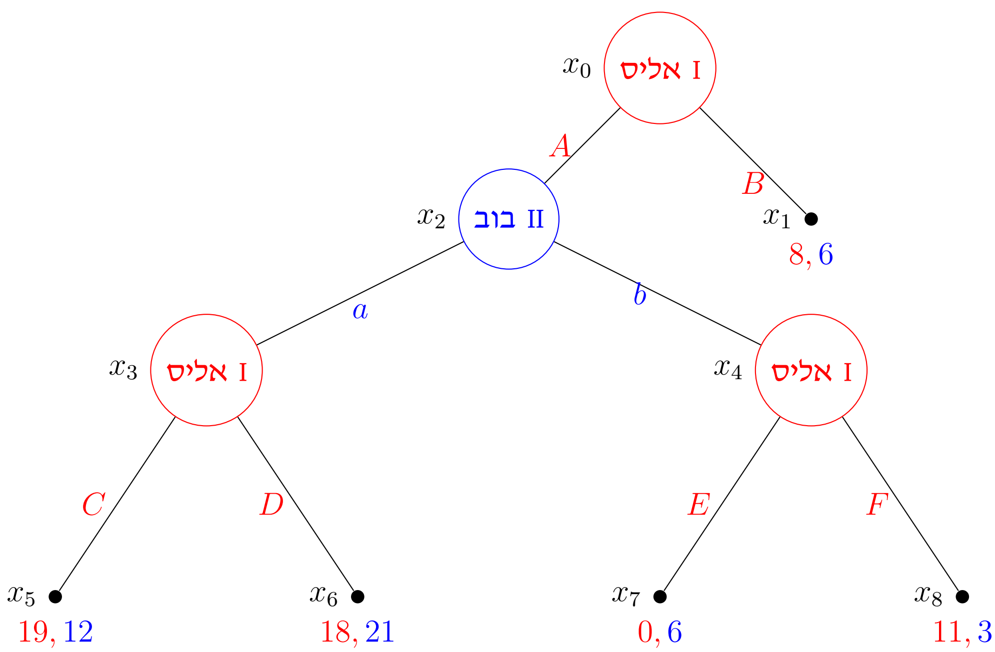
מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

$I \backslash II$	H_{II}	T_{II}
H_I	$1,-1$	$-1,1$
T_I	$-1,1$	$1,-1$

■

דוגמה 4.5 ()

נתון המשחק הבא בצורה רחבה אסטרטגית. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

במשחק הזה, אליס (שחקן I) פותח עם המהלך הראשון, ואחר כך בוב מבצע המהלך השני, ואז אליס מבצע מהלך שוב.

המשחק הוא משחק עם ידיעה שלמה.

לאליס יש שלוש קבוצות ידיעה:

$$x_0: \ (A,B) \ , \qquad x_3: \ (C,D) \ , \qquad x_4: \ (E,F) \ .$$

בכל אחד של הקדקודים האלה לאליס יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לה $2 \times 2 \times 2 = 8$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_I = (A/C/E \ , \ A/C/F \ , \ A/D/E \ , \ A/D/F \ , \ B/C/E \ , \ B/C/F \ , \ B/D/E \ , \ B/D/F) \ .$$

לבוב יש קבוצת ידיעה אחת:

$$x_2: \ (a,b) \ .$$

בקבוצת ידיעה הזאת של בוב יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לו 2 קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a \ , \ b) \ .$$

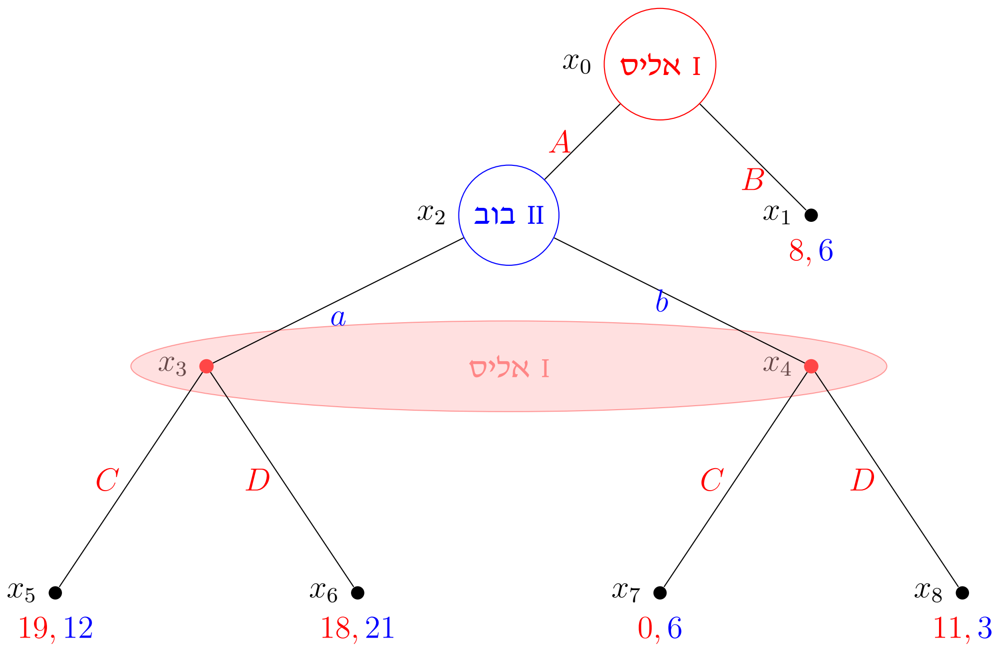
מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

$I \backslash II$	a	b
$A/C/E$	$19,12$	$0,6$
$A/C/F$	$19,12$	$11,3$
$A/D/E$	$18,21$	$0,6$
$A/D/F$	$18,21$	$11,3$
$B/C/E$	$8,6$	$8,6$
$B/C/F$	$8,6$	$8,6$
$B/D/E$	$8,6$	$8,6$
$B/D/F$	$8,6$	$8,6$

■

דוגמה 4.6 ()

נתון המשחק הבא בצורה רחבה אסטרטגית. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

שימו לב, בהשוואה עם הדוגמה הקודמת, הקדקודים x_3 ו- x_4 באותה קבוצת ידיעה של אליס בגלל שהיא לא ידועת מה ההחלטה של בוב בקדקוד x_2, כלומר אליס לא יודעת אם בוב בחר a או b. לכן הפעולות היוצאות מקדקוד x_3 הן אותן פעולות שיוצאות מקדקוד x_4, בגלל שאם היו פעולות אפשריות שונות היוצאות ב- x_3 ו- x_4, אז אליס היתה יודעת איזה פעולה בוב בחר, a או b. כלומר אם לאליס יש החלטה בין הפעולות E ו- F אז היא היתה ידועת שהיא נמצאת בקדקוד x_4 בעץ המשחק ובוב בחר b. ולהפך, אם היתה לה בחירה בין הפעולות C ו- D במקום הבחירה בין הפעולות E ו- F אז היא היתה יודעת שהיא נמצאת ב- x_3 ושבוב בחר a.

לאליס יש שתי קבוצות ידיעה:

$$x_0:\ (A,B)\ ,\qquad x_3x_4:\ (C,D)\ .$$

בכל אחד של הקדקודים האלה לאליס יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לה $2\times 2=4$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_I=(A/C\ ,\ A/D\ B/C\ B/D)\ .$$

לבוב יש קבוצות ידיעה אחת:

$$x_2:\ (a,b)\ .$$

בקבוצת ידיעה הזאת של בוב יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לו 2 קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a \ , \ b) \ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

I \ II	a	b
A/C	$19, 12$	$0, 6$
A/D	$18, 21$	$11, 3$
B/C	$8, 6$	$8, 6$
B/D	$8, 6$	$8, 6$

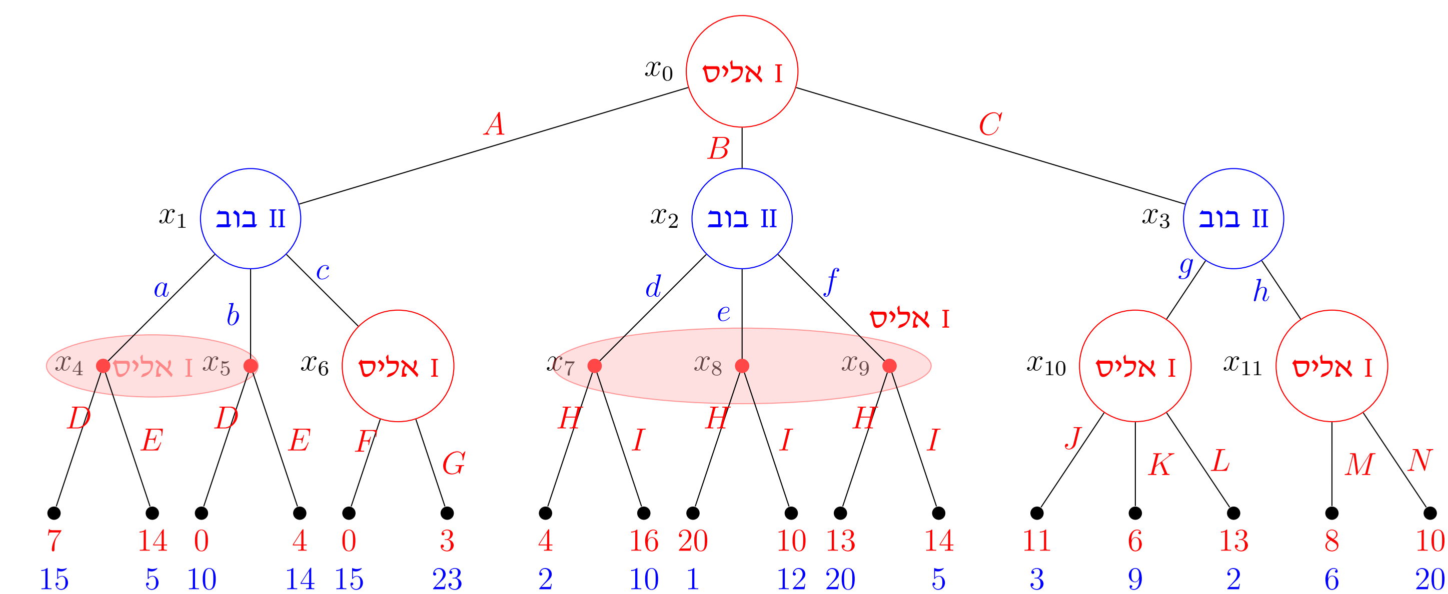
■

כלל 4.1 פעולות שיוצאות מקבוצת ידיעה ללא ידיעה שלמה

לשחקן יש אותה קבוצה של פעולות אפשריות בכל קדקוד שמוכל אותה קבוצת ידיעה.

דוגמה 4.7 ()

נתון המשחק הבא בצורה רחבה אסטרטגית. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

המשחק הוא משחק עם ידיעה לא שלמה.

לאליס יש 5 קבוצות ידיעה:

$$x_0: \ (A, B, C) \ , \qquad x_4x_5: \ (D, E) \ , \qquad x_6: \ (F, G) \ , \qquad x_7x_8x_9: (H, I) \ , \qquad x_10: \ (J, K, L) \ , \qquad x_{11}: \ (M, N) \ .$$

לכן יהיו לאליס $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 144$ קבוצות אסטרטגיות.

$$S_I = (A/D/E/F/G/H/J/M \ , \ A/D/E/F/G/H/J/N \ , \ldots \ , C/E/G/I/L/N) \ .$$

לבוב יש 3 קבוצות ידיעה:

$$x_1 : \ (a,b,c) \ , \quad x_2 : \ (d,e,f) \ , \quad x_3 : \ (g,h) \ .$$

לכן לבוב יהיו: $3\times 3\times 2=18$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a/d/g \ , \ a/d/h \ , \ldots \ , c/f/h) \ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד

■

4.2 שיטת תשובה הטובה ביותר למציאת שיווי משקל נאש

הגדרה 4.1 ווקטור אסטרטגיות

נתון משחק עם N שחקנים.

נניח כי לחקן 1 יש קבוצה של אסטרטגיות אפשריות S_1,
לחקן 2 יש קבוצה של אסטרטגיות אפשריות S_2,
...
ולחקן N יש קבוצה של אסטרטגיות אפשריות S_N.

ווקטור אסטרטגיות הוא רשימה של אסטרטגיות

$$(s_1, s_2, \ldots, s_N)$$

כאשר $s_1\in S_1$ אסטרטגיה של שחקן 1, $s_2\in S_2$ אסטרטגיה של שחקן 2,
...ו- $s_N\in S_N$ אסטרטגיה של שחקן N.

הגדרה 4.2 שיווי משקל נאש במשחקים עם שני שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים 1 ו- 2. נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, ו- S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2.

קבוצת אסטרטגיות $s^*=(s_1^*,s_2^*)$ נקראת **שיווי משקל נאש (שמ"ן)** אם התנאים הבאים מתקיימים:

$$u_1\left(s_1^*,s_2^*\right) \geq u_1\left(s_1,s_2^*\right) \qquad \text{לכל } s_1\in S_1 \ ,$$

$$u_{II}\left(s_1^*,s_2^*\right) \geq u_{II}\left(s_1^*,s_2\right) \qquad \text{לכל } s_2\in S_2 \ ,$$

הגדרה 4.3 שיווי משקל נאש במשחקים עם שלוש שחקנים

נתון משחק עם שלושׁ שחקנים 1, 2 ו- 3. נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2 ו- S_3 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 3.

קבוצת אסטרטגיות $s^*=(s_1^*,s_2^*,s_3^*)$ נקראת **שיווי משקל נאש**

אם התנאים הבאים מתקיימים:

$$u_1(s_1^*,s_2^*,s_3^*) \geq u_1(s_1,s_2^*,s_3^*) \qquad \text{לכל } s_1 \in S_1 \ ,$$

$$u_2(s_1^*,s_2^*,s_3^*) \geq u_2(s_1^*,s_2,s_3^*) \qquad \text{לכל } s_2 \in S_2 \ ,$$

$$u_3(s_1^*,s_2^*,s_3^*) \geq u_3(s_1^*,s_2^*,s_3) \qquad \text{לכל } s_3 \in S_3 \ ,$$

הגדרה 4.4 תשובה הטובה ביותר במשחקים עם שני שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים 1 ו- 2.
נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, ו- S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2.

- אסטרטגיה $t_1 \in S_1$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 1 לווקטור אסטרטגיות (t_1,s_2) אם

$$u_1(t_1,s_2) = \max_{s_1\in S_1} u_1(s_1,s_2) \ .$$

- אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 2 לווקטור אסטרטגיות (s_1,t_2) אם

$$u_2(s_1,t_2) = \max_{s_2\in S_2} u_2(s_1,s_2) \ .$$

הגדרה 4.5 תשובה הטובה ביותר במשחקים עם שלוש שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים $1,2$ ו- 3.
נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2, ו- S_3 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 3,

- אסטרטגיה $t_1 \in S_1$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 1 לווקטור אסטרטגיות (t_1,s_2,s_3) אם

$$u_1(t_1,s_2,s_3) = \max_{s_1\in S_1} u_1(s_1,s_2,s_3) \ .$$

- אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 2 לווקטור אסטרטגיות (s_1,t_2,s_3) אם

$$u_2(s_1,t_2,s_3) = \max_{s_2\in S_2} u_2(s_1,s_2,s_3) \ .$$

- אסטרטגיה $t_3 \in S_3$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 3 לווקטור אסטרטגיות (s_1,s_2,t_3) אם

$$u_3(s_1,s_2,t_3) = \max_{s_3\in S_3} u_3(s_1,s_2,s_3) \ .$$

4.3 דוגמאות

דוגמה 4.8 (מציאת שיווי משקל נאש במשחק עם שני שחקנים)

נתון המשחק בצורה אסטרטגית הבאה:

$I \backslash II$	x	y	z
a	$2,1$	$0,0$	$1,2$
b	$0,3$	$2,2$	$3,1$
c	$1,1$	$3,2$	$2,2$

פתרון:

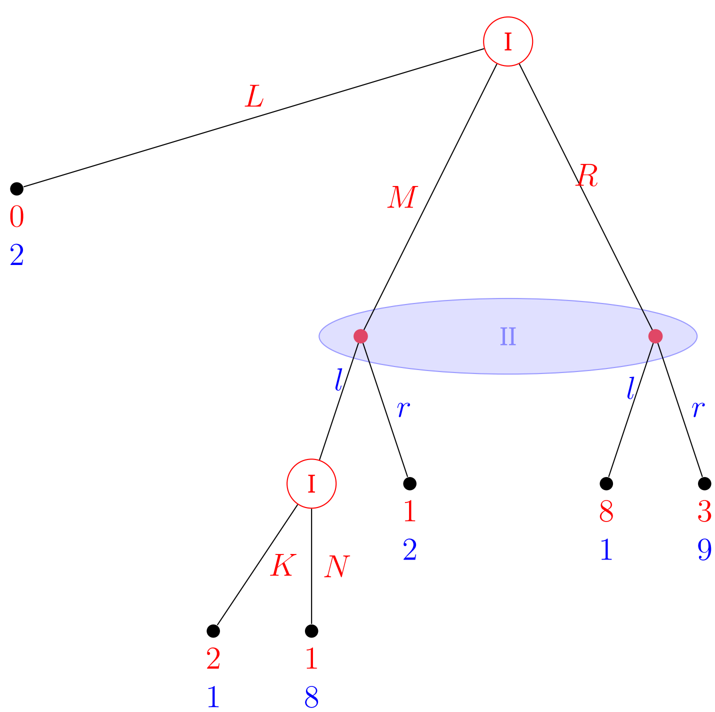
$I \backslash II$	x	y	z
a	$2,1$	$0,0$	$1,2$
b	$0,3$	$2,2$	$3,1$
c	$1,1$	$3,2$	$2,2$

לכן ווקטור אסטרטגיות של שיווי משקל נאש הינו

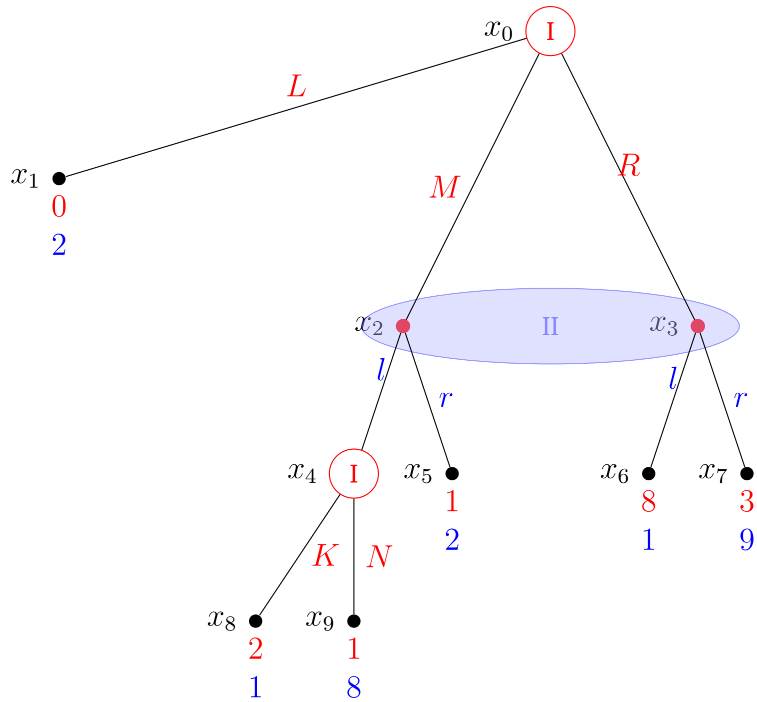
$$(s_1^*, s_2^*) = (c, y) \ .$$

■

דוגמה 4.9 ()



פתרון:



קבוצת אסטרטגיות של שחקן 1:

$$S_1 = (L/K \ , \ M/K \ , \ R/K \ , \ L/N \ , \ M/N \ , \ R/N \ ) \ .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן 2:

$$S_2 = (l, r) \ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית של המשחק היא:

I \ II	l	r
L/K	$0,2$	$0,2$
M/K	$2,1$	$1,2$
R/K	$8,1$	$3,9$
L/N	$0,2$	$0,2$
M/N	$1,8$	$1,2$
R/N	$8,1$	$3,9$

נשתמש בשיטת תשובה טובה ביותר כדי למצוא את השיווי משקל של המשחק:

I \ II	l	r
L/K	$0,2$	$0,2$
M/K	$2,1$	$1,2$
R/K	$8,1$	$3,9$
L/N	$0,2$	$0,2$
M/N	$1,8$	$1,2$
R/N	$8,1$	$3,9$

לכן הווקטור אסטרטגיות

$$(s_1^*, s_2^*) = (R/N, r)$$

שיווי משקל וגם הווקטור אסטרטגיות

$$(s_1^*, s_2^*) = (R/K, r)$$

שיווי משקל.

■