

עבודה עצמית 6

שאלה 1 לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבעו האם היא תת מרחב של \mathbb{R}^3 .

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = -z \right\} \quad \text{א)}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = 3y \right\} \quad \text{ב)}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y = z^2 \right\} \quad \text{ג)}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \right\} \quad \text{ד)}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y \geq 0 \right\} \quad \text{ה)}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \right\} \quad \text{ו)}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = -z \right\} \quad \text{ז)}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0 \right\} \quad \text{ח)}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 1 \right\} \quad \text{ט)}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\} \quad \text{י)}$$

שאלה 2 לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבעו האם היא תת מרחב של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ (מרחב

הפולינומים ממעלה עד 2).

$$W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid b = 0\} \quad \text{א)}$$

$$W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid a + b + c = 0\} \quad \text{ב)}$$

$$W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid a > b > c\} \quad \text{ג)}$$

$$W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid a = b = c\} \quad \text{ד)}$$

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid p(1) = 0\} \quad \text{ה)}$$

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid p(1) = 1\} \quad \text{ו)}$$

$$W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}_{\leq 2}[x] \mid a, b, c \in \mathbb{C}, a + b = \bar{c}\} \quad \text{ז)}$$

שאלה 3

לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבעו האם היא תת מרחב של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

$$W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{א)}$$

$$W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0 \right\} \quad \text{ב)}$$

$$W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid |A| = 0 \right\} \quad \text{ג)}$$

$$W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid |A| \neq 0 \right\} \quad \text{ד)}$$

$$W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A \cdot B = 0, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{ה)}$$

שאלה 4 לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבעו האם היא תת מרחב של $\{f \mid f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}\}$.

$$W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid f(1) = 0\} \quad \text{א)}$$

$$W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid f(1) + f(2) = 0\} \quad \text{ב)}$$

$$W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)\} \quad \text{ג)}$$

$$W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = (f(x))^2\} \quad \text{ד)}$$

שאלה 5 יהי V מרחב ווקטורי ויהיו W_1, W_2 תת מרחבים של V .

א) הוכיחו:

$$W_1 \cap W_2 = \{x \in V \mid x \in W_1 \wedge x \in W_2\}$$

הינו תת-מרחב של V .

(ב) הוכיחו:

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

הינו תת-מרחב של V .

(ג) הפריכו:

$$W_1 \cup W_2 = \{x \in V | x \in W_1 \vee x \in W_2\}$$

הינו תת-מרחב של V .

שאלה 6 לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבעו האם היא תת מרחב של $\mathbb{R}[x]$ (מרחב הפולינומים עם מקדמים ממשיים):

(א) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | \deg(p) = 3\}$

(ב) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | \deg(p) \text{ even} \cup \{\bar{0}\}\}$

(ג) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | p(0) \in \mathbb{Z}\}$

פתרונות

שאלה 1

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = -z \right\} \quad (\text{א})$$

$$\text{דוגמה: } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in W$$

$$\text{תנאי 1) הווקטור האפס } \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ מקיים את התנאי } x = y = -z \text{ לכן } \bar{0} \in W$$

$$\text{תנאי 2) נניח ש- } u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in W \text{ וגם } u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in W \text{ לפי זה } u_1, u_2 \text{ מקיימים את התנאי של } W:$$

$$x_1 = y_1 = -z_1, \quad x_2 = y_2 = -z_2. \quad (*)$$

$$\text{נבדוק אם הווקטור } u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \text{ שייך ל- } W \text{ נובע מ- } (*) \text{ כי}$$

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = -z_1 - z_2 = -(z_1 + z_2).$$

$$\text{כלומר } u_1 + u_2 \text{ מקיים את התנאי של } W, \text{ ולכן } u_1 + u_2 \in W.$$

$$\text{תנאי 3) נניח } u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \text{ ו- } k \text{ סקלר. כיוון ש- } u \in W \text{ אז}$$

$$x = y = -z. \quad (\#)$$

$$\text{נבדוק אם הווקטור } ku = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix} \text{ שייך ל- } W \text{ מ- } (\#) \text{ נובע כי } kx = ky = k(-z) = -(kz) \text{ כלומר } ku \text{ מקיים את התנאי של } W \text{ ולכן } ku \in W.$$

הוכחנו ש- W מקיים את כל התנאים של תת-מרחב לפיכך W תת-מרחב של \mathbb{R}^3 .

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = 3y \right\} \quad (\text{ב})$$

$$\text{דוגמה: } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in W$$

תנאי 1 הווקטור האפס $\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ מקיים את התנאי $x = 3y$ לכן $\bar{0} \in W$.

תנאי 2 נניח ש- $u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in W$ וגם $u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in W$. אז

$$x_1 = 3y_1, \quad x_2 = 3y_2. \quad (*)$$

מתקיים. נבדוק אם הווקטור $u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$ שייך ל- W . מ- (*) נובע כי

$$x_1 + x_2 = 3y_1 + 3y_2 = 3(y_1 + y_2).$$

ז"א $u_1 + u_2 \in W$ ולפי W , ולפי W .

תנאי 3 נניח $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W$ ו- k סקלר. כיוון ש- $u \in W$ אז

$$x = 3y. \quad (\#)$$

נבדוק אם הווקטור $ku = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$ שייך ל- W . מ- (#) נקבל $kx = k \cdot (3y) = 3 \cdot (ky)$, ולפי זה $ku \in W$ מקיים את התנאי של W , ז"א $ku \in W$.

הוכחנו ש- W מקיים את כל התנאים של תת-מרחב לפיכך W תת-מרחב של \mathbb{R}^3 .

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y = z^2 \right\} \quad (א)$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ לדוגמה:}$$

W אינו תת-מרחב. דוגמה נגדית:

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in W \text{ כי } 2^2 = 4 \text{ אבל } 3u = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} \text{ ו- } 6^2 \neq 12 \text{ לכן } u \notin W.$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \right\} \quad (ב)$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in W \text{ לדוגמה:}$$

תנאי 1 הווקטור האפס $\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ מקיים את התנאי $x + y - z = 0$ לכן $\bar{0} \in W$.

תנאי 2 נניח ש- $u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in W$ וגם $u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in W$. זאת אומרת

$$x_1 + y_1 - z_1 = 0, \quad x_2 + y_2 - z_2 = 0. \quad (*)$$

מתקיים. נבדוק אם הווקטור $u_1 + u_2 \in W$:

$$u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}.$$

נבדוק אם $u_1 + u_2$ מקיים את התנאי של W :

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = \underbrace{x_1 + y_1 - z_1}_{=0} + \underbrace{x_2 + y_2 - z_2}_{=0} = 0$$

כאשר $x_1 + y_1 - z_1 = 0$ מכיוון ש- $u_1 \in W$ ו- $x_2 + y_2 - z_2 = 0$ מכיוון ש- $u_2 \in W$. לכן $u_1 + u_2$ מקיים את התנאי של W , ז"א $u_1 + u_2 \in W$.

תנאי 3 נניח $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W$ ו- k סקלר. כיוון ש- $u \in W$ אז

$$x + y - z = 0. \quad (\#)$$

נבדוק אם הווקטור $ku = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix} \in W$. כתוצאה של $(\#)$ נקבל

$$k \cdot (x + y - z) = 0 \quad \Rightarrow \quad = k \cdot x + k \cdot y - k \cdot z = 0,$$

לכן ku מקיים את התנאי של W , ז"א $ku \in W$.

הוכחנו ש- W מקיים את כל התנאים של תת-מרחב לפיכך W תת-מרחב של \mathbb{R}^3 .

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y \geq 0 \right\} \quad (ה)$$

$$\text{לדוגמה: } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W.$$

W אינו תת-מרחב. דוגמה נגדית:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in W \text{ כי } 1 + 2 + 3 \geq 0. \text{ נבחר } k = -1.$$

$$k \cdot u = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \notin W \text{ בגלל ש- } -1 - 2 < 0.$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \right\} \quad (*)$$

$$\text{לדוגמה: } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in W.$$

$$\text{תנאי 1) הווקטור האפס } \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ מקיים את התנאי } x = 0 \text{ לכן } \bar{0} \in W.$$

$$\text{תנאי 2) נניח ש- } u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in W \text{ וגם } u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in W \text{ אז}$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0. \quad (*)$$

$$\text{מתקיים. נבדוק אם הווקטור } u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \text{ שייך ל- } W.$$

$$\text{מ- (*) נובע כי } (x_1 + x_2) = 0. \text{ לכן } u_1 + u_2 \text{ מקיים את התנאי של } W, \text{ ז"א } u_1 + u_2 \in W.$$

$$\text{תנאי 3) נניח } u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \text{ ו- } k \text{ סקלר. כיוון ש- } u \in W \text{ אז}$$

$$x = 0. \quad (#)$$

$$\text{נבדוק אם הווקטור } ku = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix} \text{ שייך ל- } W.$$

$$\text{מ- (#) נקבל}$$

$$k \cdot (x) = 0 \quad \Rightarrow \quad kx = 0,$$

$$\text{אזי } ku \text{ מקיים את התנאי של } W, \text{ ז"א } ku \in W.$$

הוכחנו ש- W מקיים את כל התנאים של תת-מרחב לפיכך W תת-מרחב של \mathbb{R}^3 .

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = -z \right\} \quad (**)$$

$$\text{לדוגמה } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in W.$$

$$\text{תנאי 1) } \bar{0} \in W \Leftarrow 0 + 0 = -0, \bar{0} = (0, 0, 0)$$

תנאי 2 נניח ש- $u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in W$ וגם $u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in W$ נבדוק אם הווקטור $u_1 + u_2$ שייך ל- W . נבדוק אם הווקטור

$$u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

מקיים את התנאי של W :

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = -z_1 - z_2 = -(z_1 + z_2)$$

לכן $u_1 + u_2 \in W$.

תנאי 3 נניח $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W$, $k \in \mathbb{R}$. נבדוק אם הווקטור $ku \in W$.

$$ku = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}, \quad kx + ky = k(x + y) = k(-z) = -kz$$

לכן $ku \in W$ לפיכך W תת-מרחב של \mathbb{R}^3 .

הוכחנו ש- W מקיים את כל התנאים של תת-מרחב לפיכך W תת-מרחב של \mathbb{R}^3 .

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0 \right\} \quad (ח)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W \text{ לדוגמה.}$$

W אינו תת-מרחב. דוגמה נגדית:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$$

אבל

$$-1 \cdot u = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin W.$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 1 \right\} \quad (ט)$$

$$\text{דוגמה: } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$$

$$\text{אינו תת-מרחב בגלל ש- } \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W \text{ כי } 0 + 0 - 0 \neq 1. \text{ לכן } W \text{ לא תת-מרחב של } \mathbb{R}^3.$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\} \quad \text{,}$$

$$\text{הווקטור היחיד שמקיים את התנאי הוא ווקטור האפס: } \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ז"א } W = \{\bar{0}\}.$$

$$\bar{0} \in W \quad \textbf{(1)}$$

$$\bar{0} + \bar{0} = \bar{0} \in W \quad \textbf{(2)}$$

$$k \cdot \bar{0} = \bar{0} \quad \textbf{(3)}$$

הוכחנו ש- W מקיים את כל התנאים של תת-מרחב לפיכך W תת-מרחב של \mathbb{R}^3 .

שאלה 2

$$W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid b = 0\} \quad \textbf{(א)}$$

לדוגמה: $x^2 + 1 \in W$.

$$\bar{0} = 0x^2 + 0x + 0 \in W \quad \textbf{(1 תנאי)}$$

$$\textbf{(2 תנאי)}$$

נניח $u_1 = a_1x^2 + c_1 \in W$, $u_2 = a_2x^2 + c_2 \in W$ אזי

$$u_1 + u_2 = (a_1 + a_2)x^2 + (c_1 + c_2) \in W$$

$$\textbf{(3 תנאי)}$$

נקח $u = ax^2 + c \in W$ אז לכל $k \in \mathbb{R}$

$$k \cdot u = (ka_1)x^2 + kc \in W.$$

מסקנה: W תת-מרחב של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

$$W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid a + b + c = 0\} \quad \textbf{(ב)}$$

לדוגמה: $x^2 + x - 2 \in W$.

$$\bar{0} = 0x^2 + 0x + 0 \in W \quad \textbf{(1 תנאי)}$$

$$\textbf{(2 תנאי)}$$

נניח $u_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1 \in W$, $u_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2 \in W$

$$\text{אז } a_1 + b_1 + c_1 = 0 \text{ וגם } a_2 + b_2 + c_2 = 0$$

$$u_1 + u_2 = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2).$$

$$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) = (a_1 + b_1 + c_1) + (a_2 + b_2 + c_2) = 0 + 0 = 0.$$

$$\text{לכן } u_1 + u_2 \in W$$

תנאי 3 נקח $u = ax^2 + bx + c \in W$. אז $a + b + c = 0$ לכל $k \in \mathbb{R}$.

$$k \cdot u = (ka)x^2 + (kb)x + (kc).$$

$$ka + kb + kc = k(a + b + c) = k \cdot 0 = 0.$$

לכן $ku \in W$.

מסקנה: W תת-מרחב של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

$$W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid a > b > c\} \quad \text{ג}$$

W לא תת-מרחב. דוגמה נגדית: $u = 3x^2 + 2x + 1 \in W$ בגלל ש- $3 > 2 > 1$.

אבל $(-1) \cdot u = -3x^2 - 2x - 1 \notin W$ בגלל ש- $-3 < -2 < -1$.

$$W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid a = b = c\} \quad \text{ד}$$

לדוגמה: $x^2 + x + 1 \in W$.

ז"א ניתן לרשום W בצורה $W = \{ax^2 + ax + a \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid a \in \mathbb{R}\}$.

תנאי 1 $\bar{0} = 0x^2 + 0x + 0 \in W$ (עבור $a = 0$).

תנאי 2 נניח $u_1 = a_1x^2 + a_1x + a_1 \in W$ ו- $u_2 = a_2x^2 + a_2x + a_2 \in W$.

$$u_1 + u_2 = (a_1 + a_2)x^2 + (a_1 + a_2)x + (a_1 + a_2) \in W$$

תנאי 3 נניח $u = ax^2 + ax + a \in W$ ו- k סקלר. אז

$$ku = k(ax^2 + ax + a) = (ka)x^2 + (ka)x + ka \in W$$

מסקנה: W תת מרחב של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

$$W = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid p(1) = 0\} \quad \text{ה}$$

לדוגמה: $x^2 + x - 2 \in W$.

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$p(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0.$$

ז"א ניתן לרשום W כך:

$$W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid a + b + c = 0\}.$$

הוכחנו בסעיף ב' שזה תת מרחב של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

$$W = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid p(1) = 1\} \quad \text{ו}$$

$\bar{0}(1) = 0 \cdot 1^2 + 0 \cdot 1 + 0 \neq 1$ בגלל ש- $\bar{0} = 0x^2 + 0x + 0 \notin W$.

לפיכך W לא תת-מרחב.

$$W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) \mid a, b, c \in \mathbb{C}, a + b = \bar{c}\} \quad \text{ז}$$

W לא תת-מרחב. דוגמה נגדית: $p(x) = x^2 + ix + (1 - i) \in W$.

$$(1+i) \cdot p = (1+i)x^2 + (-1+i)x + 2$$

$$(1+i) + (-1+i) = 2i \neq 2$$

מסקנה, W לא תת-מרחב של $P_2(\mathbb{C})$.

שאלה 3

$$W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{(א)}$$

$$\text{תנאי 1) } \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W \text{ (עבור } a=0, b=0 \text{)}$$

$$\text{תנאי 2) נניח } A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} \in W$$

$$\text{תנאי 3) נניח } A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in W \text{ אז לכל } k \in \mathbb{R}, k \cdot A = \begin{pmatrix} ka & 0 \\ 0 & kb \end{pmatrix} \in W$$

לכן W תת מרחב של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

$$W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0 \right\} \quad \text{(ב)}$$

$$\text{דוגמה: } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W$$

$$W \not\subset \mathbb{R}^{2 \times 2} \text{ בגלל ש- } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (c=0) \text{ לא תת מרחב של } \mathbb{R}^{2 \times 2} \text{ לכן } W \text{ לא תת מרחב של } \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

$$W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid |A| = 0 \right\} \quad \text{(ג)}$$

$$\text{לא תת מרחב. דוגמה נגדית: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin W \text{ לכן } W \text{ לא תת מרחב של } \mathbb{R}^{2 \times 2} \text{ אז}$$

$$W = \{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid |A| \neq 0 \} \quad \text{(ד)}$$

$$|0_{2 \times 2}| = 0 \text{ כי } 0_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W$$

לכן W לא תת מרחב של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

$$W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A \cdot B = 0, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{(ה)}$$

$$\text{דוגמה: } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

תנאי 1 $0_{2 \times 2} \cdot B = 0$ כי $0_{2 \times 2} \in W$

תנאי 2 נניח $A_1, A_2 \in W$. אז $A_1 \cdot B = 0$ ו- $A_2 \cdot B = 0$.

$$(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B = 0 + 0 = 0$$

לכן $A_1 + A_2 \in W$.

תנאי 3 נניח $A \in W$ אז $A \cdot B = 0$.

אז לכל סקלר k מתקיים $(kA) \cdot B = k(A \cdot B) = k \cdot 0 = 0$.

לכן $kA \in W$.

לכן W תת מרחב של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

שאלה 4

א $W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | f(1) = 0\}$
לדוגמה: $f(x) = x - 1$.

תנאי 1

$$\bar{0}(x) = 0 \Rightarrow \bar{0}(1) = 0 \Rightarrow \bar{0} \in W.$$

תנאי 2 נניח $f, g \in W$ אז $f(1) = 0$ וגם $g(1) = 0$.

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$$

לכן $f + g \in W$.

תנאי 3 נניח $f \in W$ אז $f(1) = 0$. אז לכל $k \in \mathbb{R}$,

$$(k \cdot f)(1) = k \cdot (f(1)) = k \cdot 0 = 0.$$

לכן $kf \in W$.

מסקנה: W ת"מ של $F(\mathbb{R})$.

ב $W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | f(1) + f(2) = 0\}$
דוגמה: $f(x) = (x - 1)(x - 2)$.

תנאי 1

$$\bar{0}(x) = 0 \Rightarrow \bar{0}(1) = 0, \bar{0}(2) = 0 \Rightarrow \bar{0}(1) + \bar{0}(2) = 0$$

לכן $\bar{0} \in W$.

תנאי 2 נניח $f_1, f_2 \in W$ אז $f_1(1) + f_1(2) = 0$ וגם $f_2(1) + f_2(2) = 0$.

אז

$$(f_1 + f_2)(1) + (f_1 + f_2)(2) = [f_1(1) + f_1(2)] + [f_2(1) + f_2(2)] = 0 + 0 = 0.$$

לכן $f_1 + f_2 \in W$.

תנאי 3 נניח $f \in W$ אז $f(1) + f(2) = 0$. אז לכל $k \in \mathbb{R}$,

$$(k \cdot f)(1) + (k \cdot f)(2) = k \cdot (f(1) + f(2)) = k \cdot 0 = 0.$$

לכן $kf \in W$.

מסקנה: W ת"מ של $F(\mathbb{R})$.

$$W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)\} \quad (ג)$$

$$f(x) = x^2 \text{ דוגמה:}$$

תנאי 1

$$\bar{0}(x) = \bar{0}(-x) = 0$$

$$\bar{0} \in W \text{ לכל } x \in \mathbb{R} \text{ לפיכך}$$

$$f, g \in W \text{ נניח } f(x) = f(-x), g(x) = g(-x) \text{ אז } (f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f+g)(-x)$$

$$f+g \in W \text{ לכן}$$

$$f \in W, k \in \mathbb{R} \text{ אז } kf(x) = f(-x) \text{ לכן } kf \in W \text{ נניח } (3) \text{ תנאי}$$

$$(kf)(x) = k(f(x)) = kf(-x) = (kf)(-x)$$

$$kf \in W \text{ לכן}$$

$$F(\mathbb{R}) \text{ מסקנה: } W \text{ ת"מ של}$$

$$W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = (f(x))^2\} \quad (ד)$$

$$f(x) = x^2 \in W, g(x) = 1 \in W \text{ דוגמה נגדית:}$$

$$(f+g)(x) = x^2 + 1 \notin W.$$

$$F(\mathbb{R}) \text{ מסקנה: } W \text{ לא ת"מ של}$$

שאלה 5

$$(א) \text{ נתון: } W_1, W_2 \text{ תת מרחבים של } V. \text{ צריך להוכיח: } W_1 \cap W_2 \text{ תת מרחבים של } V. \text{ הוכחה:}$$

$$\bar{0} \in W_1 \cap W_2 \text{ צריך להוכיח: (תנאי 1)}$$

$$\bar{0} \in W_1 \cap W_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{0} \in W_1 \text{ לכן תת-מרחב, } W_1 \\ \bar{0} \in W_2 \text{ לכן תת-מרחב, } W_2 \end{cases}$$

$$(2) \text{ תנאי } \left\{ \begin{array}{l} u_1 \in W_1, u_2 \in W_1 \\ u_1 \in W_2, u_2 \in W_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow u_1, u_2 \in W_1 \cap W_2 \text{ נקח וגם}$$

$$u_1 + u_2 \in W_1 \cap W_2 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 \in W_1 \text{ לכן תת-מרחב, } W_1 \\ u_1 + u_2 \in W_2 \text{ לכן תת-מרחב, } W_2 \end{cases}$$

$$u \in W_1 \cap W_2, k \in \mathbb{R} \text{ נניח (תנאי 3)}$$

$$u \in W_1, u \in W_2$$

$$ku \in W_1 \cap W_2 \Leftrightarrow \begin{cases} ku \in W_1 \text{ לכן תת-מרחב, } W_1 \\ ku \in W_2 \text{ לכן תת-מרחב, } W_2 \end{cases}$$

מסקנה: $W_1 \cap W_2$ תת-מרחב של V .

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\} \quad (\text{ב})$$

צריך להוכיח: $W_1 + W_2$ תת-מרחב של V .

תנאי 1 $\bar{0} \in W_1 \Leftrightarrow W_1$ תת-מרחב, $\bar{0} \in W_2 \Leftrightarrow W_2$ תת-מרחב.

$$\bar{0} \in W_1 + W_2 \Leftrightarrow \bar{0} = \bar{0} + \bar{0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_2 \in W_2, w_1 \in W_1, u = w_1 + w_2, \\ w'_2 \in W_2, w'_1 \in W_1, v = w'_1 + w'_2, \end{array} \right\} \Leftrightarrow u, v \in W_1 + W_2 \quad (\text{תנאי 2})$$

W_1 תת-מרחב, לכן $w_1 + w'_1 \in W_1$,

W_2 תת-מרחב, לכן $w_2 + w'_2 \in W_2$,

אז

$$u + v = (w_1 + w_2) + (w'_1 + w'_2) = \overbrace{(w_1 + w'_1)}^{\in W_1} + \overbrace{(w_2 + w'_2)}^{\in W_2}$$

לכן $u + v \in W_1 + W_2$.

תנאי 3 נניח כי $u \in W_1 + W_2$ כי $u = w_1 + w_2$ ו- $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$.

אז לכל $k \in \mathbb{R}$

$$ku = k(w_1 + w_2) = kw_1 + kw_2.$$

$$ku \in W_1 + W_2 \Leftrightarrow \begin{cases} kw_1 \in W_1 \text{ לכן } W_1 \text{ ת"מ,} \\ kw_2 \in W_2 \text{ לכן } W_2 \text{ ת"מ,} \end{cases}$$

מסקנה: $W_1 + W_2$ תת-מרחב של V .

$$W_1 \cup W_2 = \{x \in V | x \in W_1 \vee x \in W_2\} \quad (\text{ג})$$

דוגמה נגדית:

$$W_1 = \{(x, y) | y = x\}, \quad W_2 = \{(x, y) | y = 2x\}$$

W_1, W_2 תת-מרחבים של \mathbb{R}^2 .

$$u = (1, 1) \in W_1 \text{ אז } u \in W_1 \cup W_2$$

$$v = (1, 2) \in W_2 \text{ אז } v \in W_1 \cup W_2$$

$$u + v = (2, 3) \notin W_1, u + v \notin W_2 \text{ וגם } u + v \notin W_1 \cup W_2 \text{ לכן}$$

שאלה 6

$$W = \{p \in \mathbb{R}[x] | \deg(p) = 3\} \quad (\text{א})$$

$$p = x^3 + x^2 + x + 1 \in W \text{ דוגמה:}$$

$$\deg(\bar{0}) = 0 \text{ כי } \bar{0} \notin W$$

לכן W לא תת-מרחב של $p(\mathbb{R})$.

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \text{ even} \cup \{\bar{0}\}\} \quad \text{ב)}$$

דוגמה: $p(x) = x^2 + 1 \in W$.

W לא תת-מרחב. דוגמה נגדית: $p(x) = x^2 + x + 1 \in W$, $q(x) = -x^2 + x \in W$,

$p(x) + q(x) = 2x + 1 \notin W$ כי $\deg(p + q) = 1$.

לכן W לא תת-מרחב של $\mathbb{R}[x]$.

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(0) \in \mathbb{Z}\} \quad \text{ג)}$$

דוגמה: $p(x) = x + 1 \in W$ כי $1 \in \mathbb{Z}$.

W לא תת-מרחב של $\mathbb{R}[x]$.

דוגמה נגדית: $p(x) = x + 1 \in W$,

$\pi \cdot p = \pi \cdot x + \pi \notin W$ בגלל ש- $\pi \notin \mathbb{Z}$.