אלגברה לינארית סמסטר סתו 2022-23
עבודה עצמית 7

שאלה 1 לכל אחת מהקבוצות הבאות קבע האם היא ת"ל או בת"ל:

א) $\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,11)\}$

ב) $\{(2,1,-1),(1,-2,1),(7,-4,1)\}$

ג) $\{(2,1,-1),(1,-2,1)\}$

לכל אחת מהקבוצות התלויות לינארית שמצאות, רשמו צרוף לינארי לא טריוויאלי של איברי הקבוצה הנותן את וקטור האפס.

שאלה 2

תן דוגמא לשתי קבוצות S, T המוכלות ב - $\mathbb{R}^4$ כך ש- $S \subseteq T$ ומתקיים:

א) T בת"ל ו- S בת"ל.

ב) T ת"ל ו- S ת"ל.

ג) T ת"ל ו- S בת"ל.

שאלה 3

תהיינה $X \subseteq Y$ קבוצות של וקטורים ב - $\mathbb{R}^n$. הוכח או הפרך:

א) אם X בת"ל אז Y בת"ל.

ב) אם Y בת"ל אז X בת"ל.

ג) אם $0 \in X$ אז X ת"ל.

ד) אם מספר הוקטורים ב - X קטן מ - n אז X בת"ל.

שאלה 4 נתונה הקבוצה

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \ , \ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} \right\}$$

א) מצאו לאילו ערכי a הקבוצה היא בת"ל.

ב) מצאו לאילו ערכי a הקבוצה פורשת את $\mathbb{R}^3$.

ג) לכל אחד מערכי a עבורם הקבוצה אינה בת"ל, בטאו את אחד הוקטורים כצ"ל של שני האחרים.

ד) נתונה הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ a+4 \\ 3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 4 \\ a-5 \\ 6 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 3 \\ a^2+\sqrt{5} \\ 9 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ 8a \\ 9a-4 \end{pmatrix} \right\}$$

מצאו לאילו ערכי a הקבוצה היא בת"ל.

שאלה 5 תהי $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$ קבוצה בת"ל ב - $\mathbb{R}^n$. הוכח:

א) הקבוצה $\{\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3, \mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3, 2\mathrm{v}_1+3\mathrm{v}_2\}$ היא בת"ל.

ב) הקבוצה $\{\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3, \mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3, 2\mathrm{v}_1+3\mathrm{v}_2+3\mathrm{v}_3\}$ היא ת"ל.

שאלה 6 תהי $S=\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3, \mathrm{v}_4\}$ קבוצת בת"ל ב - $\mathbb{R}^n$. קבע לאילו ערכים של k מתקיים:

הקבוצה

$$T=\{\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_3+k\mathrm{v}_4, \mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+2\mathrm{v}_3+\mathrm{v}_4, 2\mathrm{v}_1+2\mathrm{v}_3-\mathrm{v}_4, k\mathrm{v}_1-\mathrm{v}_2+k\mathrm{v}_3-2\mathrm{v}_4\}$$

בת"ל. לכל אחד מערכי k עבורו הקבוצה T היא ת"ל, רשמו את אחד הוקטורים ב- T כצרוף לינארי של שאר הוקטורים ב - T.

שאלה 7 לכל אחת מהקבוצות הבאות קבע האם היא תלויה לינארית. אם כן, רשום צ"ל לא טריויאלי של איברי הקבוצה הנותן את וקטור האפס.

א)

$$\{2t^3+t^2+t+1, 3t^3+3t+2, t^3+2t^2-2t+1\}$$

ב)

$$\{3t^3+8t^2-8t+7, t^3+4t^2-2t+3, t^3+6t^2-t+4\}$$

ג)

$$\{t^3+3t^2+6t+3, -3t^3+2t-1, t^3+t^2-t\}$$

ד)

$$\{2t^3+t^2+t+1, 3t^3+2, t, 0\}$$

שאלה 8 לכל אחת מהקבוצות הבאות קבע האם היא תלויה לינארית. אם כן, רשום צ"ל לא טריויאלי של איברי הקבוצה הנותן את וקטור האפס.

א)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

ג)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

שאלה 9 לאילו ערכי k הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & k \end{pmatrix} \right\}$ היא ת"ל?

שאלה 10 נסמן $g(t) = e^t + 5e^{2t-1} - 3e^{3t-1}$,

$$T = \{f_1 = e^{t+1},\ f_2(t) = e^{2t-1}\ ,\ f_3(t) = e^{3t}\ .$$

האחרים $g(t) \in \mathrm{sp}(T)$? אם כן, הציגו אותו כצ"ל של איברי T. הסבחרו מדוע $T \cup \{g(t)\}$ ת"ל?

שאלה 11 נתונות הקבוצות הבאות במרחב הוקטורי של כל הפונקציות מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}$. הראו שכל אחת מהקבוצות היא בת"ל.

א)

$$\{f_1 = \sin t,\ f_2(t) = \cos t\ ,\ f_3(t) = t\ \}.$$

ב)

$$\{f_1 = 1,\ f_2(t) = t + 1\ ,\ f_3(t) = e^{t+1}\ \}.$$

ג)

$$\{f_1 = e^{t+1},\ f_2(t) = e^{2t+1}\ ,\ f_3(t) = e^{3t+1}\ \}.$$

שאלה 12 נסמן ב $F(\mathbb{R})$ את המרחב הווקטורי של כל הפונקציות מ- $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$.

א) תן דוגמה של שלושה ווקטורים תלויים ליניארית ב $F(\mathbb{R})$.

ב) תהיינה $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ פונקציות גזירות. הוכח או הפרך:

(1) אם הקבוצה $\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ ת"ל אז גם הקבוצה $\{f_1'(x), \ldots, f_n'(x)\}$ ת"ל.

(2) אם הקבוצה $\{f_1'(x), \ldots, f_n'(x)\}$ ת"ל אז גם הקבוצה $\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ ת"ל.

פתרונות

שאלה 1

א)

שיטה 1

$$A=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&11\end{pmatrix}\ ,\qquad \mathrm{Det}(A)=-6\ ,$$

$\mathrm{Det}(A)\neq 0$ לכן הוקטורים בת"ל.

שיטה 2

$$\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&11\end{pmatrix}\ \to\ \begin{pmatrix}1&4&7\\0&-3&-6\\0&0&2\end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות לכן הוקטורים בת"ל.

■

ב) שיטה 1

$$A=\begin{pmatrix}2&1&7\\1&-2&-4\\-1&1&1\end{pmatrix}\ ,\qquad \mathrm{Det}(A)=0$$

לכן הוקטורים ת"ל.

שיטה 2

$$\begin{pmatrix}2&1&7\\1&-2&-4\\-1&1&1\end{pmatrix}\ \to\ \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

יש שתי עמודות מובילות לכן הוקטורים ת"ל. $k_1=-2k_3$, $k_2=-3k_3$, $k_2=-3$.

$$-2(1,2,-1)-3(1,-2,1)+(7,-4,1)=\bar{0}\ .$$

■

ג) <u>שיטה 1</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad \mathrm{Det}(A^t A) = 35 \ ,$$

$\mathrm{Det}(A^t A) \neq 0$ לכן הקבוצה בת"ל.

<u>שיטה 2</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

שתי עמודות מובילות, לכן הוקטורים בת"ל.

■

שאלה 2

א)

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} , \qquad S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

■

ב)

$$T = \{\bar{0}\} \ , \qquad S = \{\bar{0}\}$$

■

ג)

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} , \qquad S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

■

שאלה 3

א) נתון: $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X \subseteq Y$.

טענה: X בת"ל $\Leftarrow$ Y בת"ל.

דוגמה נגדית:

$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ בת"ל, $Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ת"ל.

■

ב) נתון: $X \subseteq Y$, Y בת"ל.

צריך להוכיח: X בת"ל.

הוכחה:

נניח מדרך השלילה, $X = \{\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ ת"ל. לכן קיימים סקלרים $k_n, \ldots, k_1$ שלא כולם אפסים כך ש- $k_1\mathrm{v}_1 + \ldots + k_n\mathrm{v}_n = \bar{0}$. $X \subseteq Y \Leftarrow \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n \in Y$. מכאן נובע ש Y ת"ל. סתירה.

■

ג) נתון: $X \subseteq Y$, $\bar{0} \in X$

צ"ל : X ת"ל

הוכחה :

לכל $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n \in X$ מתקיים

$$0 \cdot \mathrm{v}_1 + \ldots 0 \cdot \mathrm{v}_n + 1 \cdot \bar{0} = \bar{0} \ .$$

לכן X ת"ל.

■

ד) טענה: מספר הוקטורים ב - X קטן מ - n $\Leftarrow$ X בת"ל.

דוגמה נגדית:

$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^2$ ת"ל.

■

שאלה 4

א) הקבוצה בת"ל אם כל העמודות מובילות במטריצה מדורגת:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&a&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&a-1&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&a-1&a-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

עבור $a\neq 1$ יש שלוש עמודות מובילות, לכן u_1,u_2,u_3 בת"ל.
■

ב) ■

ג) $a=1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\1&1&2\\1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{array}\right)$$

$k_1=-k_2$, $k_3=0$, $k_2\in\mathbb{R}$.
$k_2=1\Leftarrow k_1=-1$

$$-u_1+2u_2+0\cdot u_3=\bar{0}$$

■

ד) אי אפשר שהקבוצה של 4 וקטורים השייכים ל $\mathbb{R}^3$ תהיה בת"ל: יש בקבוצה יותר וקטורים מן המימד של המרחב: $\mathrm{Dim}(\mathbb{R}^3)=3$.
■

שאלה 5

א) שיטה 1:

הקבוצה $S=\{\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3,\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3,2\mathrm{v}_1+3\mathrm{v}_2\}$ בת"ל אם למטריצה $A=\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3&\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3&2\mathrm{v}_1+3\mathrm{v}_2\end{pmatrix}$ יש דטרמינטה שונה מ- 0.

$$A=\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3&\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3&2\mathrm{v}_1+3\mathrm{v}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1&\mathrm{v}_2&\mathrm{v}_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&3\\1&1&0\end{pmatrix}$$

ואז

$$\det(A)=\det\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1&\mathrm{v}_2&\mathrm{v}_3\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&3\\1&1&0\end{pmatrix}=-3\cdot\det\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1&\mathrm{v}_2&\mathrm{v}_3\end{pmatrix}\ .$$

$\det\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1&\mathrm{v}_2&\mathrm{v}_3\end{pmatrix}\neq 0$ בגלל שהקבוצה $\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3\}$ בת"ל. לכן $\det(A)\neq 0$ והקבוצה S בת"ל.

<u>שיטה 2</u>:

$$k_1(\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3)+k_2(\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3)+k_3(2\mathrm{v}_1+3\mathrm{v}_2)=\bar{0}$$
$$(k_1+2k_3)\mathrm{v}_1+(k_1+k_2+3k3_3)\mathrm{v}_2+(k_1+k_2)\mathrm{v}_3=\bar{0}$$

$\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3$ בת"ל לכן

$$\left.\begin{aligned} k_1+2k_3 &=0\\ k_1+k_2+3k_3 &=0\\ k_1+k_2 &=0\end{aligned}\right\} \qquad \begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&3\\1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&-3\end{pmatrix}$$

למערכת פתרון יחיד: $k_1=0$, $k_2=0$, $k_3=0$ לכן הוקטורים בת"ל.

■

ב) <u>שיטה 1</u>:

הקבוצה $S=\{\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3,\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3,2\mathrm{v}_1+3\mathrm{v}_2+3\mathrm{v}_3\}$ ת"ל אם למטריצה $A=\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3 & \mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3 & 2\mathrm{v}_1+3\mathrm{v}_2\end{pmatrix}$ יש דטרמינטה שווה ל- 0.

$$A=\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3 & \mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3 & 2\mathrm{v}_1+3\mathrm{v}_2+3\mathrm{v}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&3\\1&1&3\end{pmatrix}$$

ואז

$$\det(A)=\det\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\2&3&3\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3\end{pmatrix}=0\cdot\det\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3\end{pmatrix}=0\ .$$

לכן הקבוצה S ת"ל.

<u>שיטה 2</u>:

$$k_1(\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3)+k_2(\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3)+k_3(2\mathrm{v}_1+3\mathrm{v}_2+3\mathrm{v}_3)=\bar{0}$$
$$(k_1+2k_3)\mathrm{v}_1+(k_1+k_2+3k3_3)\mathrm{v}_2+(k_1+k_2+3k_3)\mathrm{v}_3=\bar{0}$$

$\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3$ בת"ל לכן

$$\left.\begin{aligned} k_1+2k_3 &=0\\ k_1+k_2+3k_3 &=0\\ k_1+k_2+3k_3 &=0\end{aligned}\right\} \qquad \begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&3\\1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$k_1=-2k_3$, $k_2=-k_3$, $k_3\in\mathbb{R}$.

למערכת יש פתרון לא טריוויאלי, לכן הוקטורים ת"ל.

■

שאלה 6

<u>שיטה 1</u>

הקבוצה T בת"ל אס"ם

$$x(\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_3+k\mathrm{v}_4)+y(\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+2\mathrm{v}_3+\mathrm{v}_4)+z(\mathrm{v}_1+2\mathrm{v}_3-\mathrm{v}_4)+w(k\mathrm{v}_1-\mathrm{v}_2+k\mathrm{v}_3-2\mathrm{v}_4)=0$$

מתקיימת רק אם $(x,y,z,w)=(0,0,0,0)$:

$$(x+y+z+kw)\mathrm{v}_1+(y+w)\mathrm{v}_2+(x+2y+2z+k)\mathrm{v}_3+(kx+y-z-2w)\mathrm{v}_4=0$$

תהי $A=\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_3+k\mathrm{v}_4 & \mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+2\mathrm{v}_3+\mathrm{v}_4 & 2\mathrm{v}_1+2\mathrm{v}_3-\mathrm{v}_4 & k\mathrm{v}_1-\mathrm{v}_2+k\mathrm{v}_3-2\mathrm{v}_4\end{pmatrix}$ ניתן לכתוב A בצורה

$$A=\begin{pmatrix}\mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3 & \mathrm{v}_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&2&k\\0&1&0&-1\\1&2&2&k\\k&1&-1&-2\end{pmatrix}\ .$$

T בת"ל אס"ם $\det\begin{pmatrix}1&1&2&k\\0&1&0&-1\\1&2&2&k\\k&1&-1&-2\end{pmatrix}\neq 0$:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1&1&2&k\\0&1&0&-1\\1&2&2&k\\k&1&-1&-2\end{vmatrix}=&\begin{vmatrix}1&1&0&k\\0&1&0&-1\\1&2&0&k\\k&1&-1-2k&-2\end{vmatrix}\\ =&(-1-2k)\cdot\begin{vmatrix}1&1&k\\0&1&-1\\1&2&k\end{vmatrix}\\ =&(-1-2k)\cdot\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\1&2&0\end{vmatrix}\\ =&(-1-2k)\cdot(-1)\\ =&1+2k\ .\end{aligned}$$

ולכן הקבצוה בת"ל אם $k\neq-\frac{1}{2}$.

<u>שיטה 2</u>

$$x(\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_3+k\mathrm{v}_4)+y(\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+2\mathrm{v}_3+\mathrm{v}_4)+z(\mathrm{v}_1+2\mathrm{v}_3-\mathrm{v}_4)+w(k\mathrm{v}_1-\mathrm{v}_2+k\mathrm{v}_3-2\mathrm{v}_4)=0$$
$$(x+y+z+kw)\mathrm{v}_1+(y+w)\mathrm{v}_2+(x+2y+2z+k)\mathrm{v}_3+(kx+y-z-2w)\mathrm{v}_4=0=\bar{0}$$

$\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3,\mathrm{v}_4$ בת"ל לכן

$$\left.\begin{aligned}x+y+z+kw&=0\\y+w&=0\\x+2y+2z+kw&=0\\kx+y-z-2w&=0\end{aligned}\right\}\qquad\begin{pmatrix}1&1&2&k\\0&1&0&-1\\1&2&2&k\\k&1&-1&-2\end{pmatrix}\rightarrow$$

כל העמודות מובילות אם $k=-\frac{1}{2}$.

$\blacksquare$

שאלה 7

א)

$$u_1=2t^3+t^2+t+1, \qquad u_2=3t^3+3t+2, \qquad u_3=t^3+2t^2-2t+1$$

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=\bar{0}$$

$$k_1(2t^3+t^2+t+1)+k_2(3t^3+3t+2)+k_3(t^3+2t^2-2t+1)=\bar{0}$$

$$\left.\begin{aligned} 2k_1+3k_2+k_3 &= 0\\ k_1+2k_3 &= 0\\ k_1+3k_2-2k_3 &= 0\\ k_1+2k_2+k_3 &= 0\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 3 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_1-2R_4]{\substack{R_2\to R_1-2R_2\\ R_3\to R_1-2R_3}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & -3 & 5\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

3 עמודות מובילות, לכן u_1, u_2, u_3 בת"ל.

$\blacksquare$

ב)

$$u_1=3t^3+8t^2-8t+7, \qquad u_2=t^3+4t^2-2t+3, \qquad u_3=t^3+6t^2-t+4$$

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=\bar{0}$$

$$k_1(3t^3+8t^2-8t+7)+k_2(t^3+4t^2-2t+3)+k_3(t^3+6t^2-t+4)=\bar{0}$$

$$\left.\begin{aligned} 3k_1+k_2+k_3 &= 0\\ 8k_1+4k_2+6k_3 &= 0\\ -8k_1-2k_2-1k_3 &= 0\\ 7k_1+3k_2+4k_3 &= 0\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1\\ 8 & 4 & 6\\ -8 & -2 & -1\\ 7 & 3 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to -7R_1+3R_4]{\substack{R_2\to -8R_1+3R_2\\ R_3\to 8R_1+3R_3}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 10\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_2-2R_1} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1\to -\frac{1}{6}R_1\\ R_2\to \frac{1}{2}R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{5}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$k_1=\frac{1}{2}k_2\ , \qquad k_2=-\frac{5}{2}k_3\ , \qquad k_3\in\mathbb{R}$$

u_1, u_2, u_3 ת"ל.

נציב $k_3=2 \Leftarrow k_1=1$, $k_2=-5$.

$$u_1 - 5u_2 + 2u_3 = \bar{0} \ .$$

■

ג)

$$u_1 = t^3 + 3t^2 + 6t + 3, \qquad u_2 = -3t^3 + 2t - 1, \qquad u_3 = t^3 + t^2 - t$$

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \bar{0}$$

$$k_1(t^3 + 3t^2 + 6t + 3) + k_2(-3t^3 + 2t - 1) + k_3(t^3 + t^2 - t) = \bar{0}$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 + k_3 &= 0 \\ 3k_1 + k_3 &= 0 \\ 6k_1 + 2k_2 - k_3 &= 0 \\ 3k_1 - k_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 3R_1]{\substack{R_2 \to -3R_1 + R_2 \\ R_3 \to R_3 - 6R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 20 & -7 \\ 0 & 8 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to 9R_4 - 8R_2]{R_3 \to 9R_3 - 20R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן u_1, u_2, u_3 בת"ל.

■

ד)

$$0 \cdot (2t^3 + t^2 + t + 1) + 0 \cdot (3t^3 + 2) + 0 \cdot t + 1 \cdot 0 = \bar{0}$$

לכן הוקטורים ת"ל.

■

שאלה 8

א)

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} , \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

נרשום u_1, u_2, u_3 כוקטורים ב $\mathbb{R}^4$ ע"י איזומורפיזם:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

נדרג את המטריצה המורכבת מהוקטורים:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 10 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות לכן u_1, u_2, u_3 בת"ל.

■

ב)

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן הוקטורים ת"ל.

■

ג)

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} , \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} , \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad u_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} , \qquad u_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} .$$

$\dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$ לכן כל 5 וקטורים במרחב הזה הם ת"ל.
נמצא צירוף לינארי הלא טריוויאלי ששווה לוקטור האפס:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{25}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

$$k_1 = \frac{25}{4} k_5 , \qquad k_2 = -\frac{11}{4} , \qquad k_3 = 2k_5 , \qquad k_4 = -\frac{7}{4} k_5 , \qquad k_5 \in \mathbb{R} .$$

$$25 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 11 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 9

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & k-4 \end{pmatrix}$$

<u>$k \neq 4$</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & k-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to 4R_4+(k-4)R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עבור $k \neq 4$ קיבלנו 3 עמודות מובילות ולכן הוקטורים בת"ל.

<u>$k = 4$</u>

נקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות לכן הוקטורים בת"ל.

מסקנה: לא קיים k עבורו הוקטורין ת"ל.

■

<u>שאלה 10</u> $g(t) = e^t + 5e^{2t-1} - 3e^{3t-1}$

$$T = \{f_1 = e^{t+1},\ f_2(t) = e^{2t-1}\ ,\ f_3(t) = e^{3t}\ .$$

$$g(t) = e \cdot e^t + 5 \cdot e^{2t-1} - \frac{3}{e} \cdot e^{3t} = e \cdot f_1(t) + 5 \cdot f_2(t) - \frac{3}{e} \cdot f_3(t)\ .$$

לכן $g(t) = \mathrm{sp}(f_1, f_2, f_3)$. $T \cup \{g(t)\}$ ת"ל כי $g(t) - e \cdot f_1(t) + 5 \cdot f_2(t) - \frac{3}{e} \cdot f_3(t) = \bar{0}$.

■

<u>שאלה 11</u>

א)

$$\{f_1 = \sin t,\ f_2(t) = \cos t\ ,\ f_3(t) = t\ \}.$$

$$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) + k_3 f_3(t) = \bar{0}\ .$$

$$k_1 \sin t + k_2 \cos t + k_3 t = \bar{0}.$$

נציב $t = 0 \Leftarrow k_2 = 0$.

נציב $t = \frac{\pi}{2} \Leftarrow$ $\begin{cases} k_1 + \frac{\pi}{2} k_3 & = 0 \\ \pi k_3 & = 0 \end{cases}$. $\Leftarrow$ $\begin{cases} k_1 & = 0 \\ k_3 & = 0 \end{cases}$. לכן הוקטורים בת"ל.

ב)

$$\{f_1 = 1,\ f_2(t) = t+1\ ,\ f_3(t) = e^{t+1}\ \}.$$

הקבוצה בת"ל עם הוורונסקיאן שונה מאפס לכל t:

$$W(t) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t+1 & e^{t+1} \\ 0 & 1 & e^{t+1} \\ 0 & 0 & e^{t+1} \end{vmatrix} = e^{t+1} \neq 0 \qquad \forall t$$

ז"א $W(t) \neq 0$ לכל t ולכן הקבוצה בת"ל.

ג)

$$\{f_1 = e^{t+1},\ f_2(t) = e^{2t+1}\ ,\ f_3(t) = e^{3t+1}\ \}.$$

הקבוצה בת"ל עם הוורונסקיאן שונה מאפס לכל t:

$$W(t) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{t+1} & e^{2t+1} & e^{3t+1} \\ e^{t+1} & 2e^{2t+1} & 3e^{3t+1} \\ e^{t+1} & 4e^{2t+1} & 9e^{3t+1} \end{vmatrix} = e^{6t+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2e^{6t+3} \neq 0 \qquad \forall t$$

ז"א $W(t) \neq 0$ לכל t ולכן הקבוצה בת"ל.

■

שאלה 12

א) $\{f_1(x) = x,\ f_2(x) = 2x\}$ ת"ל כי $2f_1 - f_2 = \bar{0}$.

ב) **1)**

נתון: $f_1, \ldots, f_n$ גזירות, $f_1, \ldots, f_n$ ת"ל.

צ"ל: $f_1', \ldots, f_n'$ ת"ל.

הוכחה: $f_1, \ldots, f_n$ ת"ל, לכן קיימים $k_1, \ldots, k_n$ שלא כלם אפסים כך ש

$$k_1 f_1 + \ldots + k_n f_n = \bar{0}$$

$$(k_1 f_1 + \ldots + k_n f_n)' = k_1 f_1' + \ldots + k_n f_n' = \bar{0}$$

לכן $f_1', \ldots, f_n'$ ת"ל.

2)

דוגמה נגדית: $f_1(x) = \dfrac{x^2}{2}$, $f_2(x) = x^2 + 1$

$$f_1'(x) = x\ , \qquad f_2'(x) = 2x$$

f_1', f_2' ת"ל, כי $2f_1' - f_2' = \bar{0}$.

נוכיח כי f_1, f_2 בת"ל:

$$k_1 \frac{x^2}{2} + k_2(x^2 + 1) = \bar{0} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{k_1}{2} + k_2\right) = 0$$

לכל $x \in \mathbb{R}$. $x = 0 \Leftarrow k_2 = 0 \Leftarrow k_1 x^2 = 0$ לכל $x \in \mathbb{R} \Leftarrow k_1 = 0$.

■