המחלקה למדעי המחשב

07/03/25 ז' באדר תשפ"ה
08 : 30 – 11 : 30

אלגברה ליניארית 2

מועד א'

מרצה: ד"ר ירמיהו מילר .

תשפ"ה סמסטר א'

השאלון מכיל 5 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

===

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (2 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.

===

שאלה 1 (25 נקודות)

א) (19 נק')

נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ מצאו צורת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $J = P^{-1}AP$.

ב) (3 נק')

תהי $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ מטריצה שמוגדרת $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

הוכיחו כי $f(B) \neq 0$ כאשר $f(x)$ הפולינום $f(x) = x(x-1)$.

ג) (3 נק')

חשבו את e^B.

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ מטריצה בעלת שני ערכים עצמיים שונים λ_1, λ_2.

יהיו $f(x) = a + bx + x^2$ ו- $p(x) = c + dx + x^2$ פולינומים כך ש- $f(A) = 0$ וגם $p(A) = 0$.

א) (7 נק') הוכיחו כי $a = c$ וגם $b = d$.

ב) (6 נק') נתון כי $a = 1$. האם יתכן ש- λ_1 ו- λ_2 ממשיים? נמקו את תשובתכם.

ג) (6 נק') בנוסף נתון כי $b = 0$. חשבו את λ_1 ו- λ_2.

ד) (6 נק') הוכיחו: $A^2 + A^4 = 0$.

שאלה 3 (25 נקודות)

א) (19 נקודות)

נתון מרחב וקטורי $\mathbb{R}_3[x]$ (פולינומים מדרגה 3 לכל היותר) עם מכפלה פנימית אינטגרלית בקטע $[-1,1]$:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx\ .$$

1) (11 נקודות) מצאו בסיס אורתוגונלי למרחב $U = \operatorname{span}\{1, 1-x, x^2\}$.

2) (8 נקודות) מצאו את ההיטל האורתוגונלי של כל אחד מהווקטוררים: $w_1 = 2 - 12x + 19x^2$, $w_2 = 2x^3$, על תת המרחב U.

ב) (6 נק') הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענה הבאה:

קיימת מכפלה פנימית $\langle , \rangle$ של וקטורים ב- $\mathbb{R}^2$ כך לכל וקטור $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ הנורמה ניתנת ע"י הנוסחה

$$\|u\|^2 = |x_1| + |x_2|,$$

כאשר $|x|$ מסמן את הערך מוחלט של x.

שאלה 4 (25 נקודות) תהי $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ מטריצה שמוגדרת $A = \begin{pmatrix} -i & 2i & 0 \\ 2i & 0 & 2i \\ 0 & 2i & i \end{pmatrix}$.

א) (3 נק') האם A לכסינה אוניטרית? נמקו את תשובתכם.

ב) (12 נק') אם כן מצאו D אלכסונית ו- Q אוניטרית כך ש- $A = QD\bar{Q}$.

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב וקטורי V.
הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הענות הבאות:

ג) (5 נק') אם T צמוד לעצמו אז כל ערך עצמי של T ממשי.

ד) (5 נק') אם λ ערך עצמי של T אז $\bar{\lambda}$ ערך עצמי של $\bar{T}$.

שאלה 5 (25 נקודות)

תהי $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ העתקה נורמלית. נניח כי הערכים עצמיים של T הם $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$ והמרחבים עצמיים הם

$$V_{-4} = \text{span}\left\{-1 + x^2\right\} \ , \qquad V_{-1} = \text{span}\left\{1 - x + x^2\right\} \ .$$

נתון וקטור a של המרחב וקטורי $\mathbb{R}^3$: $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

א) (10 נקודות) מצאו את $T(a)$.

ב) (5 נקודות) מצאו את $T^4(a)$.

תהיינה $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

ג) (5 נקודות) אם A צמודה לעצמה ו- B צמודה לעצמה, אזי גם $A \cdot B$ צמודה לעצמה.

ד) (5 נקודות) אם A צמודה לעצמה ו- B צמודה לעצמה, אזי גם $A + B$ צמודה לעצמה.

פתרונות

שאלה 1

א) (19 נק')

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} x-2 & -2 & -2 \\ 2 & x & -2 \\ -2 & -2 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)\left(x(x-2)-4\right) + 2\left(2(x-2)-4\right) - 2\left(-4+2x\right)$$

$$\begin{aligned}
&=(x-2)\left(x^2-2x-4\right)+2\left(2x-8\right)-2\left(2x-4\right)\\
&=(x-2)\left(x^2-2x-4\right)+4x-16-4x+8\\
&=(x-2)\left(x^2-2x-4\right)-8\\
&=x^3-2x^2-4x-2x^2+4x+8-8\\
&=x^3-4x^2\\
&=x^2\left(x-4\right)
\end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=0$ מריבוי אלגברי 2.

$\lambda=4$ מריבוי אלגברי 1.

האפשרויות לפולינום המינימלי הן $x(x-4)$ ו- $x(x-4)$.

נבדוק $x(x-4)$:

$$A(A-4I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \neq 0$$

לכן הפולינום המינימלי הוא

$$m_A(x) = x^2(x-4)\ .$$

לפי המבנה של הפולינום האופייני והפולינום המינימלי הצורת ז'ורדן של A היא

$$J = J_2(0)\oplus J_1(4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\ .$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda=4$</u>

$$\text{Nul}(A-4I) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3+R_1]{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $V_4 = \text{span}\left\{u_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

<u>מרחב עצמי של $\lambda=0$</u>

$$\mathrm{Nul}(A-0I)=\begin{pmatrix}2&2&2\\-2&0&2\\2&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2+R_1}\begin{pmatrix}2&2&2\\0&2&4\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&2&4\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן $V_0=\mathrm{span}\left\{u_0=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$

<u>וקטור עצמי מוכלל</u>

נפתור את המערכת $Aw=u_0$. המטריצה המורחבת הינה

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&2&2&1\\-2&0&2&-2\\2&2&2&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2+R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&2&2&1\\0&2&4&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&-2&2\\0&2&4&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2\to\frac{1}{2}R_2]{R_1\to\frac{1}{2}R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&1\\0&1&2&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z+1\\-2z-\frac{1}{2}\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\alpha+\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

נציב $\alpha=0$ ואז נקבל את הפתרון $w=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$. לכן

$$A=PJP^{-1}\ ,\qquad J=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&4\end{pmatrix}\ ,\qquad P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-\frac{1}{2}&0\\1&0&1\end{pmatrix}\ .$$

ב) (3 נק') פולינום אופייני של B:

$$p_B(x)=\left|xI-B\right|=\begin{vmatrix}x-1&-2\\1&x-4\end{vmatrix}=(x-1)(x-4)+2=x^2-5x+6=(x-3)(x-2)\ .$$

הערכים עצמיים של B הם $\lambda=2$ ו- $\lambda=3$.
מכאן הפולינום המינימלי הוא $m_B(x)=(x-2)(x-3)$.
נניח בשלילה כי $f(B)=0$. אז $m_B(x)|f(x)$.
הגענו לסתירה לכן $f(B)\neq 0$.

ג) (3 נק') כל הערכים עצמיים של B שונים לכן B לכסינה:

$$B=PDP^{-1}$$

כאשר $P=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$ ו- $D=\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$.
לכל פונקציה אלמנטרית:

$$f(B)=Pf(D)P^{-1}$$

ולכל מטריצה אלכסונית $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$:

$$f(D)=\operatorname{diag}\left(f\left(\lambda_1\right),\ldots,f\left(\lambda_n\right)\right)\ .$$

לכן

$$e^B=P\begin{pmatrix}e^3&0\\0&e^2\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^3&0\\0&e^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-e^2&0\\0&-e^3\end{pmatrix}$$

שאלה 2

א) למטריצה A יש שני ערכים עצמיים שונים לכן הפולינום המינימלי הוא

$$m_A(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)=x^2-(\lambda_1+\lambda_2)x+\lambda_1\lambda_2$$

A מאפסת את $f(x)\Leftarrow f(x)=m_A(x)$
(אחרת יהיו שני פולינומים מסדר 2 שמתאפסים ע"י A בסתירה לכך שהפולינום המינימלי יחיד).
A מאפסת את $p(x)\Leftarrow p(x)=m_A(x)$
(אחרת יהיו שני פולינומים מסדר 2 שמתאפסים ע"י A בסתירה לכך שהפולינום המינימלי יחיד).
לכן

$$f(x)=m_A(x)=p(x)\quad\Rightarrow\quad f(x)=p(x)$$

לכן $a=c$, $b=d$.

ב)

$$a=1\quad\Rightarrow\quad\lambda_1\lambda_2=1$$

בנוסף $\lambda_2\neq\lambda_1$ לכן לא יתכן ש λ_1 ו- λ_2 ממשיים, אלא $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$.

ג) $b=0$ לכן $\lambda_1+\lambda_2=0$ לכן $\lambda_1=-\lambda_2$
לכן $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$.

ד) הפולינום המינימלי הוא $m_A(x)=(x+i)(x-i)=x^2+1$ לכן $A^2+I=0$ לכן $A^4+A^2=0$.

שאלה 3

א) נסמן

$$\mathrm{v}_1=1,\quad \mathrm{v}_2=1-x\ ,\quad \mathrm{v}_3=x^2\ .$$

$$u_1=\mathrm{v}_1=1\ .$$

$$u_2=\mathrm{v}_2-\frac{\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1$$

$$\|u_1\|^2=\int_{-1}^{1}dx\,(1)^2=2\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle=\int_{-1}^{1}dx\,(1-x)=2\ .$$

לכן

$$u_2=-x\ .$$

$$u_3=\mathrm{v}_3-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2$$

$$\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle=\int_{-1}^{1}dx\,x^2=\frac{2}{3}\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle=\int_{-1}^{1}dx\,(-x)x^2=0\ .$$

$$\|u_2\|^2=\int_{-1}^{1}dx\,(-x)^2=\frac{2}{3}\ .$$

לכן

$$u_3=x^2-\frac{1}{3}\ .$$

בסיס אורתונוגונלי:

$$U=\left\{u_1=1,\quad u_2=-x\ ,\quad u_3=x^2-\frac{1}{3}\right\}\ .$$

ב) $w_1 \in U$ לכן $P_U(w_1) = w_1$.

$$\begin{aligned} P_U(w_2) =& \frac{\langle w_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 + \frac{\langle w_2, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 + \frac{\langle w_2, u_3\rangle}{\|u_3\|^2}u_3 \\ =& 0 + \frac{\left(-\frac{2}{5}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)}(-x) + 0 \\ =& \frac{3x}{5} \ . \end{aligned}$$

ג) יהיו

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ , \qquad \mathrm{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \ , \qquad u, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^2$$

$$\|u+\mathrm{v}\|^2 = \|u\|^2 + \|\mathrm{v}\|^2 + 2\langle u, \mathrm{v}\rangle \qquad \Rightarrow \qquad 2\langle u, \mathrm{v}\rangle = \|u+\mathrm{v}\|^2 - \|u\|^2 - \|\mathrm{v}\|^2 \ .$$

$$\langle u, \mathrm{v}\rangle = \frac{1}{2}\left(|x_1+y_1| + |x_2+y_2| - |x_1| - |x_2| - |y_1| - |y_2|\right)$$

נניח ש- $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

אז

$$\langle u, \mathrm{v}\rangle = \frac{1}{2}\left(|0| + |1| - |1| - |0| - |-1| - |1|\right) = -1 \ .$$

$$\langle -3u, \mathrm{v}\rangle = \frac{1}{2}\left(|-4| + |1| - |-3| - |0| - |-1| - |1|\right) = 0 \ .$$

$\langle -3u, \mathrm{v}\rangle \neq 3 = -3\langle u, \mathrm{v}\rangle$, כלומר $\langle , \rangle$ לא מקיים לינאריות. לכן $\langle , \rangle$ לא יכול להיות מכפלה פנימית.

שאלה 4

א)

$$A = \begin{pmatrix} -i & 2i & 0 \\ 2i & 0 & 2i \\ 0 & 2i & i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} i & -2i & 0 \\ -2i & 0 & -2i \\ 0 & -2i & -i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A\bar{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \bar{A}A$$

לכן A נורמלית ולכן לכסינה אוניטרית.

ב) A נורמלית לכן היא לכסינה אוניטרית. נמצא את הפולינום אופייני:

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \left|\lambda I - A\right| \\
&= \begin{vmatrix} \lambda+i & -2i & 0 \\ -2i & \lambda & -2i \\ 0 & -2i & \lambda-i \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+i)\left[\lambda(\lambda-i)+4\right] - 2i\left[+2i\left(\lambda-i\right)\right] \\
&= (\lambda+i)\left[\lambda^2 - i\lambda + 4\right] + 4\left(\lambda - i\right) \\
&= \lambda^3 - i\lambda^2 + 4\lambda + i\lambda^2 + \lambda + 4i + 4\lambda - 4i \\
&= \lambda^3 + 9\lambda \\
&= \lambda\left(\lambda^2+9\right) \\
&= \lambda\left(\lambda-3i\right)\left(\lambda+3i\right)
\end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 3i$ ריבוי אלגברי 1 .

$\lambda = -3i$ ריבוי אלגברי 1 .

$\lambda = 0$ ריבוי אלגברי 1 .

<u>מרחב עצמי של $\lambda = 3i$:</u>

$$(A-3iI) = \begin{pmatrix} -4i & 2i & 0 \\ 2i & -3i & 2i \\ 0 & 2i & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to 2R_2 + R_1} \begin{pmatrix} -4i & 2i & 0 \\ 0 & -4i & 4i \\ 0 & 2i & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to 2R_3 + R_2} \begin{pmatrix} -4i & 2i & 0 \\ 0 & -4i & 4i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1 \to \frac{i}{2} R_1]{R_2 \to \frac{i}{4} 2R_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: z $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z}{2} \\ z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{R}$.

$$V_{3i} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

נסמן את הווקטור עצמי:

$$\mathrm{v}_{3i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda = -3i$:</u>

$$(A+3iI)=\begin{pmatrix}2i&2i&0\\2i&3i&2i\\0&2i&4i\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}2i&2i&0\\0&i&2i\\0&2i&4i\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\begin{pmatrix}2i&2i&0\\0&i&2i\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3\to -iR_2]{R_1\to -\frac{1}{2}R_1}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $z\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2z\\-2z\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $z\in\mathbb{R}$.

$$V_{-3i}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נסמן את הווקטורר עצמי:

$$\text{v}_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\ .$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda=0$:</u>

$$(A-0I)=\begin{pmatrix}-i&2i&0\\2i&0&2i\\0&2i&i\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+2R_1}\begin{pmatrix}-i&2i&0\\0&4i&2i\\0&2i&i\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to 2R_3-R_2}\begin{pmatrix}-i&2i&0\\0&4i&2i\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1\to iR_1]{R_2\to \frac{-i}{2}R_2}\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $z\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-z\\-\frac{z}{2}\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $z\in\mathbb{R}$.

$$V_0=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

נסמן את הווקטור עצמי:

$$\text{v}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\ .$$

$$A=PDP{-}1\ .$$

$$.P=\begin{pmatrix}| & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}3i & 0 & 0 \\ 0 & -3i & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

נחשב בסיס אורתוגונלי באמצעות התהליך גרם שמידט:

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\ ,\qquad v_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad v_3=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\ .$$

$$u_1=v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$u_2=v_2-\frac{\langle v_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\rangle}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$u_3=v_3-\frac{\langle v_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{\langle v_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\rangle}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{9}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

לכן מצאנו את הבסיס אורתוגונלי

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\ ,\qquad u_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad u_3=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\ .$$

ננרמל:

$$\hat{u}_1=\frac{u_1}{\|u_1\|}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\ ,\qquad \hat{u}_2=\frac{u_2}{\|u_2\|}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad \hat{u}_3=\frac{u_3}{\|u_3\|}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\ .$$

$$A=QD\bar{Q}=QDQ^{-1}\ ,\quad D=\begin{pmatrix}3i & 0 & 0\\ 0 & -3i & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ ,\qquad Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}\ .$$

ג) טענה נכונה. הוכחה:

נניח $T: V \to V$ העתקה צמודה לעצמה, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v}) = \lambda \mathrm{v}$. אז

$$\begin{aligned} \langle T(\mathrm{v}), \mathrm{v} \rangle &= \langle \lambda \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle && \text{(}\mathrm{v}\text{ וקטור עצמי של }T\text{)} \\ &= \lambda \langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle && \text{(לינאריות של מכפלה פנימית)} \end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned} \langle T(\mathrm{v}), \mathrm{v} \rangle &= \langle \mathrm{v}, \bar{T}(\mathrm{v}) \rangle && \text{(הגדרה של העתקה צמודה)} \\ &= \langle \mathrm{v}, T(\mathrm{v}) \rangle && \text{(}T\text{ צמודה לעצמה)} \\ &= \langle \mathrm{v}, \lambda \mathrm{v} \rangle && \text{(}\mathrm{v}\text{ וקטור עצמי של }T\text{)} \\ &= \bar{\lambda} \langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle && \text{(לינאריות חלקית של מכפלה פנימית)} \end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda \langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle \quad \Rightarrow \quad (\lambda - \bar{\lambda}) \langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle = 0 \ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v} \neq 0 \Leftarrow \langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle \neq 0 \Leftarrow (\lambda - \bar{\lambda}) = 0 \Leftarrow \lambda = \bar{\lambda}$.

ד)

$$\begin{aligned} \langle T(u), u \rangle &= \langle \lambda u, u \rangle && \text{(}u\text{ וקטור עצמי)} \\ &= \lambda \langle u, u \rangle && \text{(לינאריות של מכפלה פנימית)} \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle T(u), u \rangle &= \langle u, \bar{T}(u) \rangle && \text{(}u\text{ הגדרה של העתקה צמודה)} \\ &= \langle u, \mu u \rangle && \text{(}u\text{ וקטור עצמי של }\bar{T}\text{)} \\ &= \bar{\mu} \langle u, u \rangle && \text{(לינאריות חלקית של מכפלה פנימית)} \ . \end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda \langle u, u \rangle - \bar{\mu} \langle u, u \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - \bar{\mu}) \langle u, u \rangle = 0 \ .$$

u וקטור עצמי לכן $u \neq \bar{0}$ לכן $\langle u, u \rangle \neq 0$ לכן $(\lambda - \bar{\mu}) = 0$ לכן $\lambda = \bar{\mu}$.

שאלה 5 (25 נקודות)

א) (10 נקודות) T העתקה נורמלית. לפיכך לפי משפט הפירוק הספקטרלי:

$$[T] \cdot a = \lambda_1 P_{V_{\lambda_1}}(a) + \lambda_2 P_{V_{\lambda_2}}(a) + \lambda_3 P_{V_{\lambda_3}}(a) \ .$$

לכן $P_{V_{\lambda_3}}(a) = a - P_{V_{\lambda_1}}(a) - P_{V_{\lambda_2}}(a)$

$$[T] \cdot a = \lambda_1 P_{V_{\lambda_1}}(a) + \lambda_2 P_{V_{\lambda_2}}(a) + \lambda_3 \left(a - P_{V_{\lambda_1}}(a) - P_{V_{\lambda_2}}(a) \right) \ .$$

$$P_{V_{\lambda_1}}(a) = \frac{\langle a, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

$$P_{V_{\lambda_2}}(a)=\frac{\langle a,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2=\frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{3}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\ .$$

$$[T]\cdot a=(-4)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+2\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}\ .$$

לפיכך $T(a)=2+3x-2x^2$.

ב) (5 נקודות)

לפיכך לפי משפט הפירוק הספקטרלי:

$$[T]^4\cdot a=\lambda_1^4P_{V_{\lambda_1}}(a)+\lambda_2^4P_{V_{\lambda_2}}(a)+\lambda_3^4P_{V_{\lambda_3}}(a)\ .$$

לכן $P_{V_{\lambda_3}}(a)=a-P_{V_{\lambda_1}}(a)-P_{V_{\lambda_2}}(a)$

$$[T]^4\cdot a=\lambda_1^4P_{V_{\lambda_1}}(a)+\lambda_2^4P_{V_{\lambda_2}}(a)+\lambda_3^4\left(a-P_{V_{\lambda_1}}(a)-P_{V_{\lambda_2}}(a)\right)\ .$$

$$[T]^4\cdot a=(-4)^4\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+(-1)^4\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+2^4\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-119\\15\\137\end{pmatrix}\ .$$

לפיכך $T^4(a)=-119+15x+137x^2$.

ג) (5 נק') טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$.

$\bar{A}=A$ לכן A צמודה לעצמה.

$\bar{B}=B$ אז B צמודה לעצמה.

$$AB=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\ .$$

$$\overline{AB}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\neq AB\ .$$

ד) (5 נק') טענה נכונה.

$$\overline{A+B}=\bar{A}+\bar{B}=A+B\ .$$