עבודה עצמית 2 טורים מספריים

שאלה 1 רשמו בעזרת סימן Σ את הסכומים הבאים:

א) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$

ב) $\frac{2}{5}+\frac{4}{8}+\frac{6}{11}+\frac{8}{14}+\dots$

ג) $1+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}+\dots$

שאלה 2 חשבו את הסכומים הבאים:

א) $\sum_{n=2}^{5}(-1)^n(n+1)^3$

ב) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

ג) $\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}$

ד) $\sum_{k=1}^{5}\tan\left(\frac{\pi k}{100}\right)$

שאלה 3 הגדירו מהי סדרת הסכומים החלקיים של טור מספרי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ומהו הסכום של הטור. הוכיחו על סמך הגדרת הסכום של טור מספרי כי

א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$.

ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n}=\frac{3}{2}$.

שאלה 4 נסחו את התנאי ההכרחי להתכנסות של טור מספרי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. תנו דוגמה של טור שעבורו

א) התנאי ההכרחי להתכנסות אינו מתקיים.

ב) התנאי ההכרחי להתכנסות מתקיים והטור מתכנס.

ג) התנאי ההכרחי להתכנסות מתקיים והטור מתבדר.

שאלה 5 הגדירו מהי השארית R_n של טור מספרי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ומצאו את R_n של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n}$.

שאלה 6 הגדירו מהי התכסות בהחלט והתכנסות בתנאי. תנו דוגמה של טור מספרי שהוא:

א) מתכנס בהחלט.

ב) מתכנס בתנאי.

שאלה 7 בררו את התכנסות הטורים הבאים:

א) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$$

ב) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$$

ג) $$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\tfrac{1}{n^2}\right)$$

ד) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

ה) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2+2}{3n^2+5}\right)^n$$

ו) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+3}{n^3+n+1}$$

ז) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(3n+1)!}$$

ח) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n^3}{n^5\sqrt{n}}$$

שאלה 8 בררו את התכנסות הטורים הבאים (מתכנס בהחלט או בתנאי, מתבדר):

א) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n\cdot(n+1)}$$

ב) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(13n)}{n^3+n^2+\sin^4 n}$$

ג) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n^{4/3}}$$

ד) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)}{n!}$

ה) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$

ו) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^5}{n^5+7}$

שאלה 9 **(30 נקודות)**

בדקו את ההתכנסות של

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \ .$$

פתרונות

<u>שאלה 1</u>

א) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

ב)

ג)

<u>שאלה 3</u>

א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} = \frac{3}{2}$.

<u>שאלה 7</u>

א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$ מתכנס.

נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$. הטור מתכנס כי $\frac{7}{6} > 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{1}{n^{7/6}}\right)} \right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n} \cdot n^{7/6}}{(n+1)\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/3} \cdot n^{7/6}}{(n+1)n^{1/2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{9/6}}{(n+1)n^{1/2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{(n+1)n^{1/2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)} \\
&=1
\end{aligned}$$

לכן לפי מבחן השוואה גבולי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$ מתכנס.

ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$ מתבדר.

שיטה 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n+1} > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n+1} > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n+2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2\cdot 2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}1$$

מתבדר. לכן לפי מבחן השוואה, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n+1}$ מתבדר.

שיטה 2:

לפי מבחן דלמבר,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(2^n+1)}{(2^{n+1}+1)n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)}{\left(2+\frac{1}{2^n}\right)} = \infty$$

לכן הטור מתבדר.

ג) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ מתכנס.

נתבונן בטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. הטור הזה מתכנס. נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 \neq 0$$

לכן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ מתכנס.

ד) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ מתכנס.

נשתמש במבחן האינטגרל: נגדיר $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^2 x}$ יורדת בקטע $[2,\infty)$:

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \int_2^{\infty}\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

נגדיר $t=\ln x \Leftarrow t'=\dfrac{1}{x}$.

$x=2$	$t=\ln 2$
$x=\infty$	$t=\ln\infty=\infty$

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty} \frac{1}{t^2} \cdot t'\, dx &= \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt \\ &= \left[\frac{1}{t^2}\right]_{\ln 2}^{\infty} \\ &= \left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\ln 2}\right] \\ &= -\frac{1}{\ln 2} \ .\end{aligned}$$

האינטגרל מתכנס, לכן גם הטור מתכנס.

ה) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2+2}{3n^2+5}\right)^n$ מתבדר.

לפי מבחן קושי,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{5n^2+2}{3n^2+5}\right)^n\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+2}{3n^2+5} = \frac{5}{3} > 1$$

לכן הטור מתבדר.

ו) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+3}{n^3+n+1}$ מתבדר.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3}{n^3+n+1} = 1 \ .$$

לכן לפי התנאי ההכרחי להתכנסות טור, הטור מתבדר.

ז) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(3n+1)!}$ מתכנס.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(3n+1)!}{(3(n+1)+1)! \cdot 3^n} = 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)!}{(3n+4)!} = 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(3n+2)(3n+3)(3n+4)} = 0 < 1 \ .$$

לכן לפי מבחן דלמבר הטור מתכנס.

ח) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n^3}{n^5\sqrt{n}}$ מתבדר.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n^3}{n^5\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^{11/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^{11/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^{11/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$$

הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ מתכנס כי $\frac{5}{2} > 1$.

נבדוק התכנסות הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^{11/2}}$ לסי מבחן דלמבר:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}n^{11/2}}{(n+1)^{11/2} \cdot 3^n} = 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^{11/2}}{(n+1)^{11/2}} = 3 > 1$$

לכו הטור מתבדר.
סכום שני טורים מתבדרים הוא טור מתבדר.

שאלה 8

א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n\cdot(n+1)}$ מתכנס בתנאי.

נבדוק התכנסות בהחלט. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n\cdot(n+1)}$.

נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{(2n+1)}{n\cdot(n+1)}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)n}{n\cdot(n+1)} = 2 \neq 0$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר, לכן לפי מבחן השוואה גבולי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n\cdot(n+1)}$ מתבדר.
כלומר הטור הנתון לא מתכנס בהחלט.

נבדוק את התכנסות בתנאי לפי מבחן לייבניץ:

1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{n+1} = 0\ .$$

2) נבדוק שהסדרה $\left\{\frac{2n+1}{n^2+n}\right\}$ יורדת מונוטונית:

$$a_n = \frac{2n+1}{n^2+n} = \frac{2+\frac{1}{n}}{n+1}\ ,$$

$$a_{n+1} = \frac{2+\frac{1}{n+1}}{n+2} < \frac{2+\frac{1}{n+1}}{n+1} < \frac{2+\frac{1}{n}}{n+1} = a_n$$

ז"א $a_{n+1} < a_n$ לכן הסדרה יורדת.
לפיכך לפי מבחן ליבניץ הטור מתכנס בתנאי.

ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(13n)}{n^3+n^2+\sin^4 n}$ מתכנס בהחלט.

$$\left|\frac{\cos(13n)}{n^3+n^2+\sin^4 n}\right| \leq \frac{1}{n^3}$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ מתכנס, לכן הטור הנתון מתכנס בהחלט.

ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n^{4/3}}$ מתכנס בהחלט.

$$\left|\frac{\cos(\pi n)}{n^{4/3}}\right| \leq \frac{1}{n^{4/3}}$$

הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ מתכנס, לכן הטור הנתון מתכנס בהחלט.

ד) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)}{n!}$ מתכנס בהחלט.

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)}{n!}\right| \leq \frac{1}{n!}$$

נבדוק את התכנסות הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ לפי מבחן דלמבר:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)}{\left(\frac{1}{n!}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \ .$$

לכן הטור מתכנס.
לפי מבחן השוואהת הטור הנתון מתכנס בהחלט.

ה) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$ מתבדר.

לא קיים $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$ לכן לפי התנאי ההכרחי להתכנסות טורים, הטור מתבדר.

ו) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^5}{n^5+7}$ מתבדר.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5}{n^5+7} = 1$ לכן לפי התנאי ההכרחי להתכנסות טורים, הטור מתבדר.

<u>שאלה 9</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ , \qquad a_n = \frac{n!}{n^n} \ .$$

נשתמש מבחן דלמבר לבדוק התכנסות:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{(n+1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty}(n+1)\cdot\frac{n^n}{(n+1)\cdot(n+1)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\cancel{(n+1)}\cdot\frac{n^n}{\cancel{(n+1)}\cdot(n+1)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{n}{n+1} &= 1+\frac{1}{\alpha} \\
\frac{n}{n+1}-1 &= \frac{1}{\alpha} \\
\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+1} &= \frac{1}{\alpha} \\
\frac{n-(n+1)}{n+1} &= \frac{1}{\alpha} \\
\frac{-1}{n+1} &= \frac{1}{\alpha} \\
\frac{n+1}{-1} &= \alpha\ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha\cdot\frac{n}{\alpha}} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha\cdot\left(\frac{-n}{n+1}\right)} \\
&= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n}{n+1}\right)} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n}{n+1}\right)} \\
&= e^{-1} \\
&= \frac{1}{e} < 1\ .
\end{aligned}
$$

לכן לפי מבחן דלמבר הטור מתכנס.