חדו"א 1 סמסטר א' תשפד

עבודת עצמית 8: משפטים יסודיים של פונקציות גזירות בעיות קיצון

שאלה 1 על הקו המוגדר ע"י המשוואה $x^2 - y^2 = 1$ מצא את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(0,1)$.

שאלה 2 על גרף הפונקציה $y = \frac{1}{x^3}$ מצא את הנקודה הקרובה ביותר לישר $y + 3x = 1$.

שאלה 3 בין הגרפים של פונקציה $y = e^{-x}$ ו- $y = e^{x/2}$ וציר ה- x חסום מלבן. מצא את שטח המקסימלי האפשרי של המלבן הזה.

שאלה 4 מצא את הזווית של משולש ישר זווית בעל השטח הגדול ביותר שבו סכום אורכי היתר ואחד הניצבים שווה ל- K.

שאלה 5 נתונות שתי פונקציות $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = bx^2$, ($b > 0$). הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודות A ו- B. מצא את ערכו של b שעבורו אורך הקטע AO יהיה מינימאלי, כאשר O ראשיתהצירים. צייר ואת הסקיצה המתאימה.

שאלה 6 מצאו את הנקודה על המעגל $x^2 + y^2 = 16$ הקרובה ביותר לנקודה $A(6,5)$.

שאלה 7

על העקומה $x^2 + y^2 = 4$ מצא את כל הנקודות $M(x_0, y_0)$ שבהן המשיק לעקומה מקביל לקו $x + y = 1$.

שאלה 8 **(להעשרה בלבד)** מצאו לאילו ערכי הפרמטר a השטח החסום ע"י הקווים $x = 0$, $y = 0$, $y = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{1+x^2}$ יהיה מינימדי וחשבו את השטח המינימלי.

שאלה 9 מצא את C עבורו $f(x) = g(x) + C$ או הוכח שהוא לא קיים.

א) $f(x) = \frac{\cos^4 x}{4} - \frac{\cos^2 x}{2}$ ו- $g(x) = \frac{\sin^4 x}{4}$.

ב) $f(x) = \arcsin x$ ו- $g(x) = -\arccos x$.

ג) $f(x) = \frac{\cos^2 x}{2}$ ו- $g(x) = \frac{\sin^2 x}{2}$.

<u>רמז</u>: השתמש במשפט הבא: אם $f'(x) = g'(x)$ אז $f(x) = g(x) + C$, כאשר C מספר קבוע.

שאלה 10 הוכיחו שהפונקציה $f(x) = 3x - \sin(2x)$ עולה בכל $\mathbb{R}$.

שאלה 11 הוכיחו שלמשוואה $x + e^{2x} = 2$ יש פתרון יחיד.

שאלה 12 לאילו ערכי a ו b מתקיים

$$\lim_{x\to\infty} \left(xe^{1/x} - ax - b\right) = 0 \ .$$

שאלה 13 לאילו ערכי a ו b הישר $y = bx$ משיק לפרבולה $y = x^2 + a$?

שאלה 14 מצא את הזוויות של משולש ישר זווית בעל השטח הגדול ביותר שבו סכום אורכי היתר ואחד הניצבים שווה ל- K.

שאלה 15 בדקו שהפונקציה $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ מקיימת את את תנאי משפט לגרנז' בקטע $[-2,-1]$ ומצאו את הנקודה c המופיע במשפט.

שאלה 16 יהי $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ פולינום המוגדר על קטע סגור $[a, b]$. הוכיחו שהנקודה c שבמשפט לגרנז' יוצאת במרכז הקטע.

שאלה 17 תהי $f(x)$ פונקציה גזירה על כל הישר הממשי. נניח ש- $f'(x) \le 7$ לכל x ממשי וכן $f(9) = 68$, $f(1) = 20$. הוכיחו כי $54 \le f(7) \le 62$.

שאלה 18 תהי $f(x)$ פונקציה גזירה על כל הישר הממשי. נניח ש- $|f'(x)| \le 5$ לכל x ממשי וכן $f(2) = 10$. הוכיחו כי $0 \le f(4) \le 20$.

שאלה 19 תהי $f(x)$ גזירה לכל x ונניח כי $f'(x) \le 4$ לכל x ו- $f(-3) = 2$. הוכיחו כי $f(0) \le 14$.

שאלה 20 נתונה פונקציה $f(x)$ גזירה לכל x. נניח כי $f'(x) \le 3$ לכל x ו- $f(-2) = 5$. הוכיחו כי $f(1) \le 14$.

שאלה 21 הוכיחו את האי-שוויונים הבאים בעזרת משפט לגרנז':

א) $\dfrac{b-a}{b} < \ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{b-a}{a}$ $(0 < a < b)$.

ב) $\dfrac{b-a}{\cos^2 a} < \tan(b) - \tan(a) < \dfrac{b-a}{\cos^2 b}$ $(0 < a < b < \dfrac{\pi}{2})$.

ג) $a \cdot 2^{a-1} < 3^a - 2^a < a \cdot 3^{a-1}$ $(a > 1)$.

ד) $\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$ $(x > 0)$

ה) $\sin 73^\circ - \sin 28^\circ < \dfrac{\pi}{4}$

ו) $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$ לכל $x, y \in \mathbb{R}$.

שאלה 22 הוכיחו כי לכל $0 < x < y$, $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\frac{x-y}{x} < \ln\left(\frac{x}{y}\right) < \frac{x-y}{y} \ .$$

שאלה 23 יהיו $f(x)$, $g(x)$ פונקציות גזירות בקטע (a,b). תהי $c \in (a,b)$ נקודה שבה

(#1)
$$f(c) = g(c)$$

ו-

(#2)
$$f'(x) > g'(x) \qquad \forall x \in (a,b)\ ,\ \ x < c\ .$$

הוכיחו כי

(#3)
$$g(x) > f(x) \qquad \forall x \in (a,b)\ ,\ \ x < c\ .$$

שאלה 24 יהיו $f(x)$, $g(x)$ פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b) כך ש-

(1*)
$$f(a) = g(a)$$

אם

(2*)
$$f'(x) < g'(x) \qquad \forall x \in (a,b)\ ,$$

הוכיחו כי

(3*)
$$f(x) < g(x) \qquad \forall x \in (a,b]\ .$$

שאלה 25 הוכיחו כי למשוואה

$$x^3 - 7x^2 + 25x + 8 = 0$$

יש פתרון יחיד.

שאלה 26 הוכיחו שלכל ערכים ממשיים a ו- b מתקיים

$$|\arctan(2b) - \arctan(2a)| \leq 2\,|b-a|$$

שאלה 27 תהיי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). ידוע כי

$$f(a) = f(b) = 0\ .$$

הראו שקיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש -

$$f(c) + f'(c) = 0\ .$$

רמז: הסתכלו על פונקציה $g(x) = e^x f(x)$

שאלה 28 הוכיחו או הפריכו: למשוואה $e^x = -x$ יש 2 שורשים.

שאלה 29

א) הוכיחו כי למשוואה $e^x = (1+x)^2$ יש שלושה שורשים לכל היותר.

ב) הוכיחו כי למשוואה $e^x = (1+x)^2$ יש לפחות שלושה שורשים.

שאלה 30

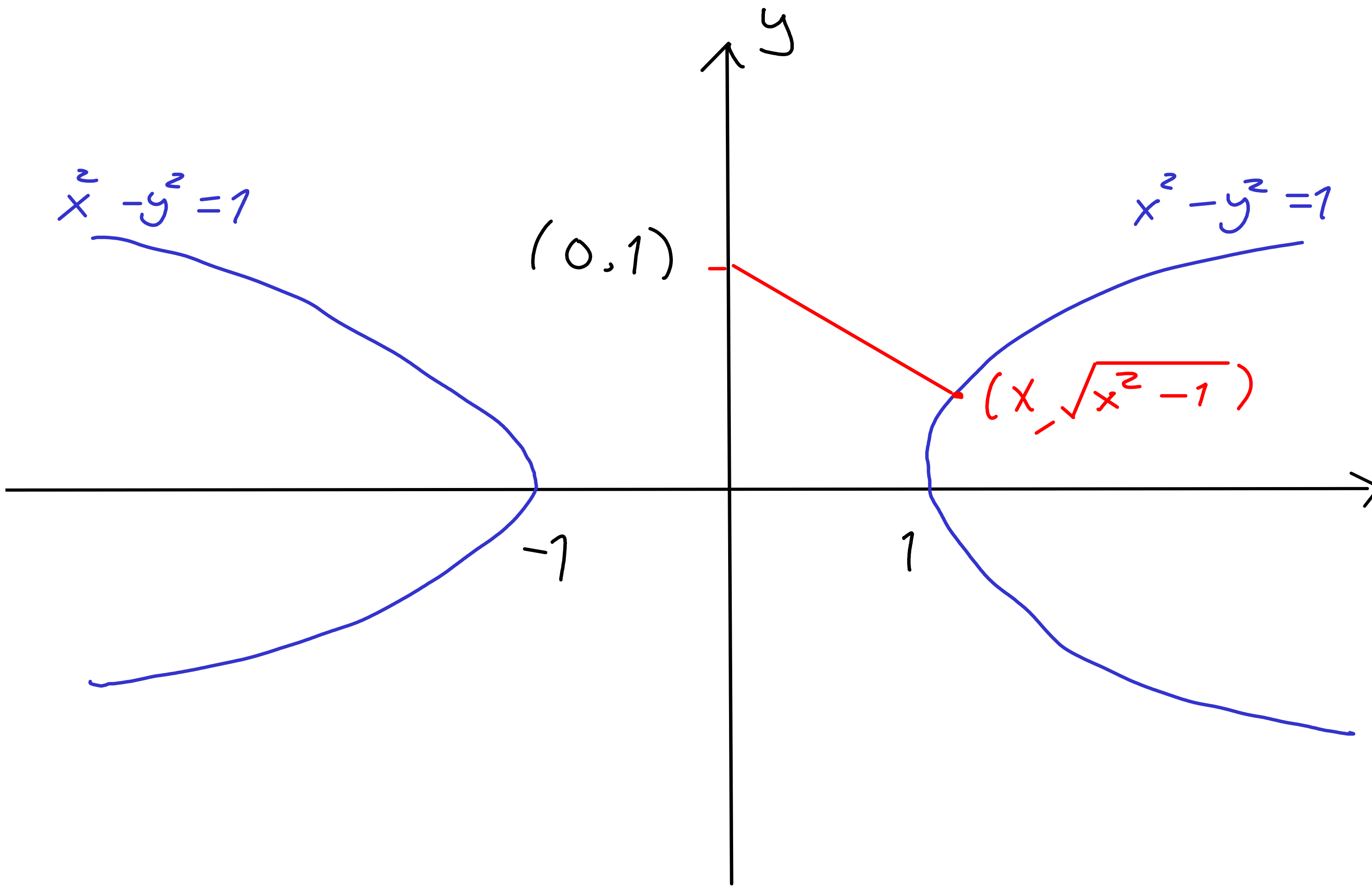
תהי $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה בקטע $(0,1)$. יהי $f(0) = 0$ ו- $f(x) > 0$ לכל $x \in (0,1]$. הוכיחו כי קיימת $c \in (0,1)$ כך ש-

$$\frac{f'(1-c)}{f(1-c)} = \frac{2f'(c)}{f(c)}\ .$$

רמז: הגדירו את פונקציה $g(x) = f(x)^2 f(1-x)$.

תשובות

<u>שאלה 1</u>



נבחר נקודה שרירותית על הגרף:

$$(x, \sqrt{x^2-1})$$

המרחק בינה לבין הנקודה $(0,1)$ הוא

$$d = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x^2-1}-1)^2} \qquad \Rightarrow \qquad d^2 = x^2 + x^2 - 1 - 2\sqrt{x^2-1} + 1 = 2x^2 - 2\sqrt{x^2-1}$$

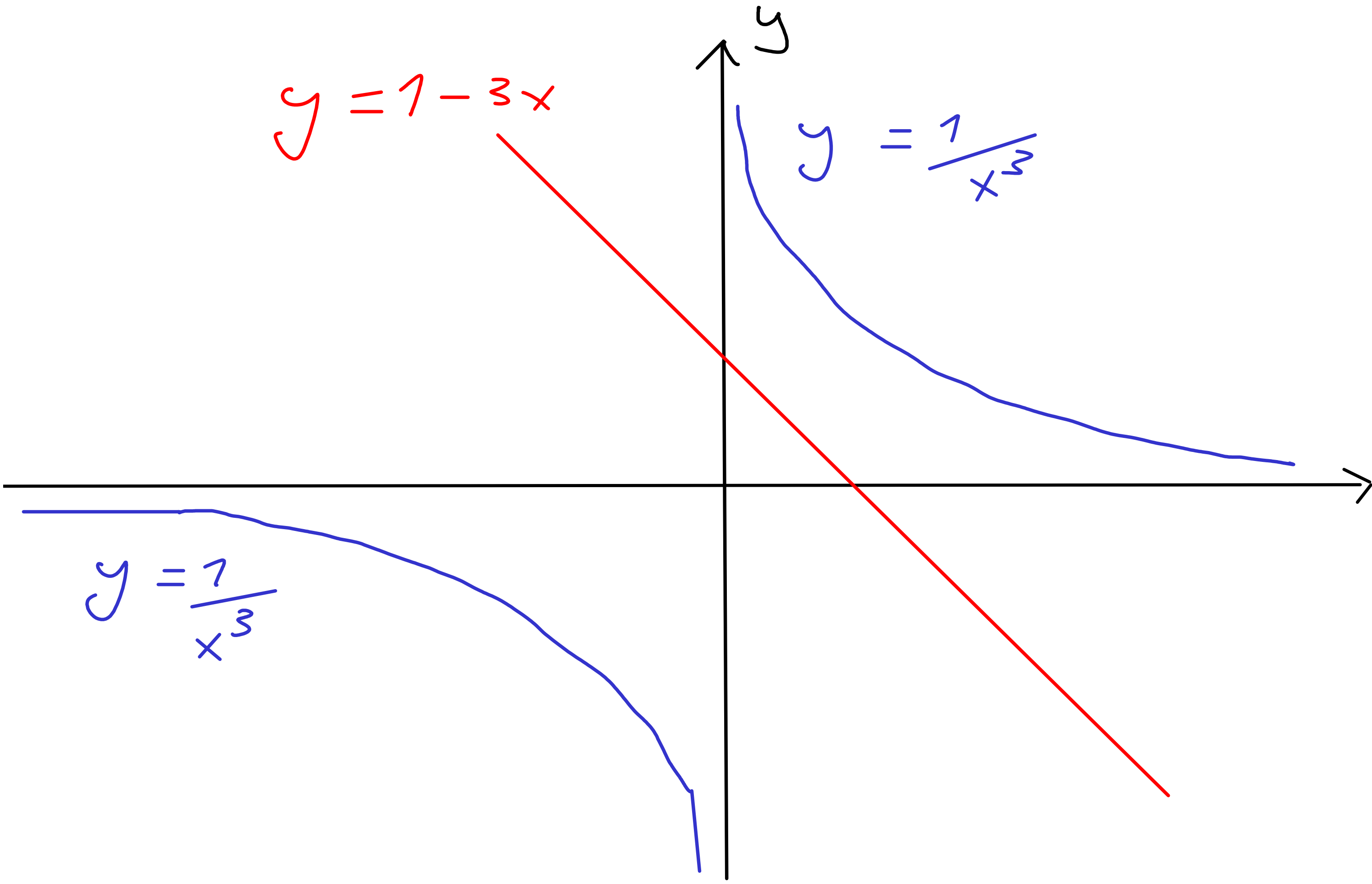
נמצא את המינימום של d^2:

$$\left(d^2\right)' = 4x - 2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x\left(2\sqrt{x^2-1}-1\right)}{\sqrt{x^2-1}} = 0$$

$$\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}\,, \qquad x^2 - 1 = \frac{1}{4}\,, \qquad x^2 = \frac{5}{4}\,, \qquad x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\,.$$

תשובה סופית: $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

שאלה 2

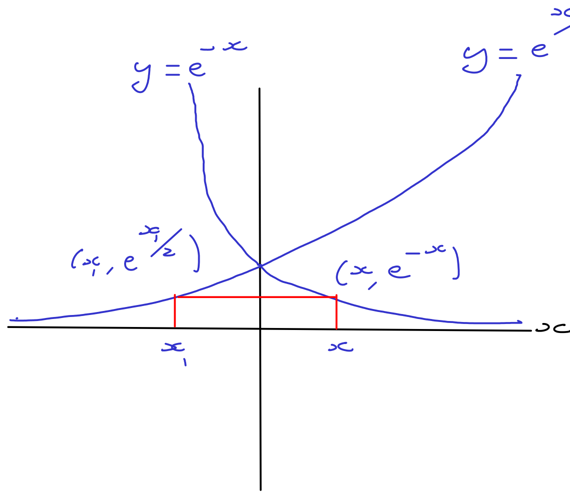


הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה על גרף הפונקציה בה שיפוע המשיק שווה לשיפוע של הקו הישר (המשיק מקביל לקו $y = 1 - 3x$). ז"א

$$y; = -\frac{3}{x}^4 = -3 \qquad \Rightarrow \qquad x^4 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1\ .$$

תשובה סופית: $(1, 1)$.

שאלה 3

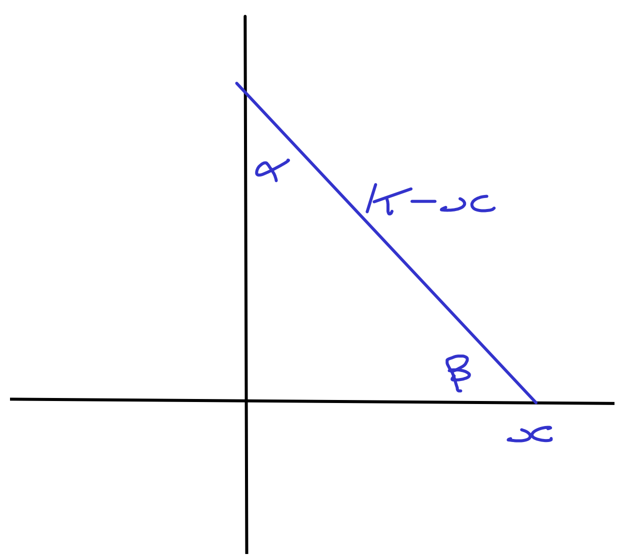


$$e^{x_1/2} = e^{-x} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = -2x \ .$$
$$S = (x + |x_1|)e^{-x} = 3x \cdot e^{-x} \ .$$
$$S'_x = 3e^{-x} - 3xe^{-x} = 3e^{-x}(1-x) \ .$$

שים לב $S'_x = 0$ בנקודה $x = 1$. לכן הנקודה $x = 1$ מקסימום מקומי.

$$S_{\max} = 3 \cdot 1 \cdot e^{-1} = \frac{3}{e} \ .$$

שאלה 4



נסמן את אורכי אחד הניצבים ב-x. אז אורך היתר הוא $k - x$ ואורך הניצב השני הוא

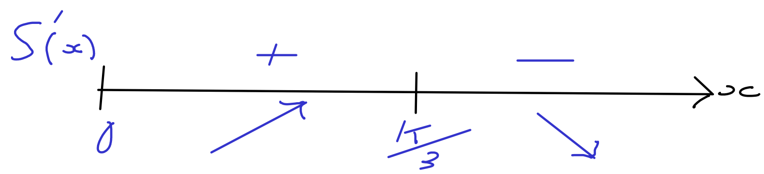
$$\sqrt{(k-x)^2 - x^2} = \sqrt{k^2 - 2kx}$$

אז

$$S = \frac{x \cdot \sqrt{k^2 - 2kx}}{2}$$

$$
\begin{aligned}
S'_x =& x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2k}{2\sqrt{k^2-2kx}} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{k^2-2kx} \\
=& \frac{1}{2}\left[\frac{-kx}{\sqrt{k^2-2kx}} + \sqrt{k^2-2kx}\right] \\
=& \frac{1}{2\sqrt{k^2-2kx}}\left(-kx+k^2-2kx\right) \\
=& \frac{1}{2\sqrt{k^2-2kx}} k\left(k-3x\right)
\end{aligned}
$$

$S'_x = 0$ כאשר $x = \frac{k}{3}$.



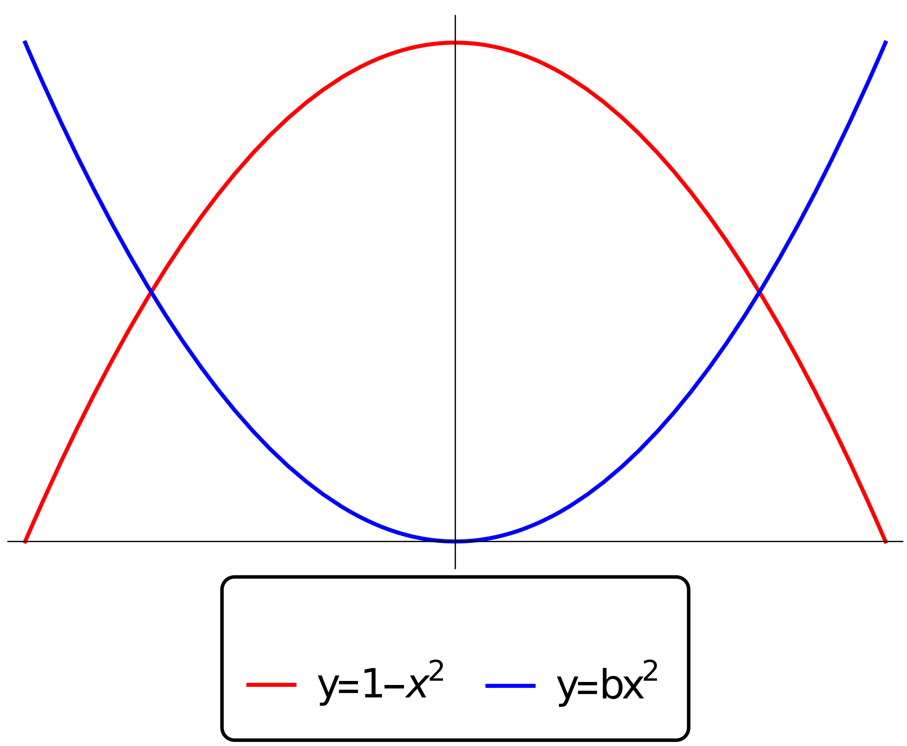
$x = \frac{k}{3}$ נקודת מקסימום.

$$
\sin\alpha = \frac{x}{k-x} = \frac{\frac{k}{3}}{k-\frac{k}{3}} = \frac{1}{2} \,, \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{\pi}{6} \,.
$$

הזווית השניה

$$
\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \,.
$$

שאלה 5



נקודת חיתוך:

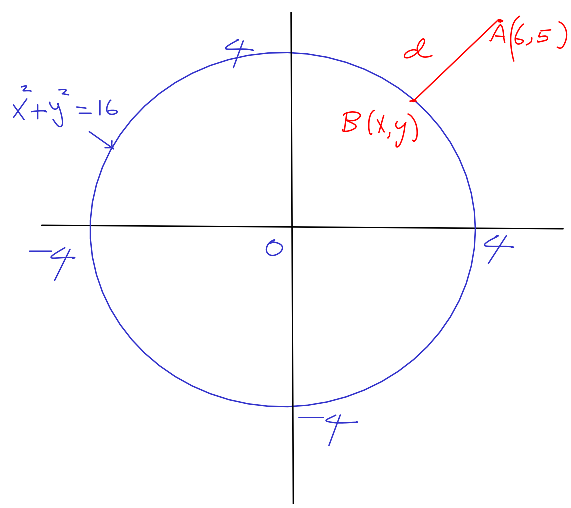
$$
1-x^2 = bx^2 \qquad \Rightarrow \qquad (x,y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{b+1}}\,, \frac{b}{1+b}\right)
$$

$$d^2 = OA^2 = (x_A - x_O)^2 + (y_A + y_O)^2 = \frac{1}{b+1} + \frac{b^2}{(1+b)^2}$$

$$\left(d^2\right)'_b = \frac{b-1}{(b+1)^3} \ .$$

$$\left(d^2\right)'_b = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b = 1 \ .$$

<u>שאלה 6</u>



תהי $B(x,y)$ הנקודה על המעגל הקרובה ביותר לנקודה A. המרחק בריבוע בין A ל- B הוא

$$d^2 = (6-x)^2 + (5-y)^2 \ .$$

יש למזער את d^2 לפי x.

נפתח סוגריים ונקבל:

$$d^2 = x^2 - 12x + y^2 - 10y + 61$$

נציב את $y^2 = 16 - x^2$ ממשוואת המעגל ונקבל:

$$d^2 = -12x - 10y + 77$$

ואז נציב $y = \pm\sqrt{16-x^2}$ ממשוואת המעגל:

$$d^2 = \mp 10\sqrt{16-x^2} - 12x + 77 \ .$$

יש למזער d^2 לפי x:

$$\left(d^2\right)'_x = \mp \frac{10x}{\sqrt{16-x^2}} - 12 = 0$$

הפתרון הוא

$$x_B = \frac{24}{\sqrt{61}} = \mp 3.07289 \ ,$$

וכדי לקבל ה- y המתאים נציב במשוואת המעגל ונקבל $y_B = \dfrac{20}{\sqrt{61}} = 2.56074$. הנקודה הקרובה ביותר ל $A(6,5)$ היא $(3.07289, 2.56074)$ בעוד הנקודה הרחוקה ביותר היא $(-3.07289, 2.56074)$. לכן התשובה הסופית היא $B = (3.07289, 2.56074)$.

שאלה 7 השיפוע של הקו $x+y=1$, או שקול $y=1-x$, הוא $m=-1$. לכן יש לחפש את כל הנקודות על העקומה שבהן השיפוע של המשיק שווה -1. נגזור את משוואת העקומה:

$$2x+2y\cdot y'=0 \qquad \Rightarrow \qquad y'=-\frac{x}{y} \ .$$

נציב $y'=-1$ ונקבל

$$-\frac{x}{y}=-1 \qquad \Rightarrow \qquad y=x \ . \tag{*}$$

נציב את היחס הזה לתוך משוואת העקומה, קרי $x^2+y^2=4$ ונקבל:

$$2x^2=4 \qquad \Rightarrow \qquad x_1=\sqrt{2}\ , \quad x_2=-\sqrt{2}\ .$$

נציב את הערכים האלה במשוואת המשיק (*) . עבור $x_1=\sqrt{2}$ נקבל $y_1=\sqrt{2}$ ועבור $x_2=-\sqrt{2}$ נקבל $y_2=-\sqrt{2}$. לכן מצאנו שתי נקודות על העקומה שבהן המשיק מקביל להקו: $P_1(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $P_2(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

שאלה 8 נסמן ב $S(a)$ (עבור $a>0$) את הפונקציה המתארת את השטח המבוקש ונחשב את המקסימום.

$$S(a)=\int_0^a\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2a^2}\right)=\left[\arctan(x)+\frac{x}{2a^2}\right]_0^a=\arctan(a)+\frac{1}{2a}\ .$$

$$S'(a)=\frac{1}{1+a^2}-\frac{1}{2a^2}=\frac{a^2-1}{2a^2(1+a^2)}\overset{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad a=\pm 1\ .$$

כיוון ש $a>0$ אז $a=1$.

$$S(a=1)=\arctan(1)+\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ .$$

שאלה 9 נשתמש במשפט הבא: אם $f'(x)=g'(x)$ אז $f(x)=g(x)+C$, כאשר C מספר קבוע.

א)

$$\begin{aligned}
f'(x)=&\frac{4\cos^3 x\cdot(-\sin x)}{4}-\frac{2\cos x\cdot(-\sin x)}{2}\\
&=-\cos^3 x\sin x+\cos x\sin x\\
&=\sin x\cos x\left(1-\cos^2 x\right)\\
&=\sin x\cos x\cdot\sin^2 x\\
&=\sin^3 x\cos x\ ,
\end{aligned}$$

ו-

$$g'(x)=\frac{4\sin^3 x\cdot\cos x}{4}=\sin^3 x\cos x\ ,$$

ולכן קיים C כך ש- $f(x)=g(x)+C$. שים לב

$$\begin{aligned} g(x) = & \frac{\sin^4 x}{4} \\ = & \frac{1}{4}\sin^2 x \cdot \sin^2 x \\ = & \frac{1}{4}\left(1-\cos^2 x\right)\cdot\left(1-\cos^2 x\right) \\ = & \frac{1}{4}\left(1-2\cos^2 x+\cos^4 x\right) \\ = & \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{1}{4}\cos^4 x \\ = & \frac{1}{4}+f(x) \end{aligned}$$

לכן $f(x)=g(x)-\frac{1}{4}$ ו- $C=\frac{1}{4}$.

ב) הנגזרות של arcsin ו arccos הן $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ו $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. שימו לב שיש להם סימנים שונים. לכן, נתון $f(x)=\arcsin x$ ו- $g(x)=-\arccos x$ (שימו לב לסימן של g) אז $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ו- $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ כלומר הנגזרות שוות. לכן קיים C כך ש- $f(x)=g(x)+C$. נציב $x=0$ ונמצא כי $C=\frac{\pi}{2}$.

ג)

$$f'(x)=\frac{2\cos x\cdot(-\sin x)}{2}=-\sin x\cos x$$

ו-

$$g'(x)=\frac{2\sin x\cdot\cos x}{2}=\sin x\cos x$$

ולכן $f'(x)\neq g'(x)$ ולפי המשפט לא קיים C כך ש- $f(x)=g(x)+C$.

שאלה 10

$$f'(x)=3+2\cos(2x)$$

$\cos(2x)$ פונקציה חסומה: $-1\leq\cos(2x)\leq 1$ לכן

$$2\leq 3+2\cos(2x)\leq 4 \qquad \Rightarrow \qquad 2\leq f'(x)\leq 4$$

ז"א $f'(x)\geq 0$, ולפיו $f(x)$ עולה לכל x.

שאלה 11

נגדיר $f(x)=x+e^{2x}-2$. נוכיח כי קיים שורש לפונקציה $f(x)$.

$f(0)=-1<0$, ו $f(1)=6.380$. $f(x)$ אלמנטרית ומוגדרת בקטע $[0,1]$ לכן היא רציפה וגזירה בקטע הזה. $f(0)<0$, $f(1)>0$. לכן לפי משפט בולצנו קיים c כך ש $f(c)=0$.

נוכיח שהשורש יחיד:

$f'(x)=1+2e^{2x}>0$ לכל x, ז"א $f(x)$ עולה מונוטונית לכל x, לכן השורש הוא יחיד.

שאלה 12

$$\lim_{x\to\infty}\left(xe^{1/x}-ax-b\right)=0\ .$$

זאת ההגדרה של אסימפטוטה משופעת.

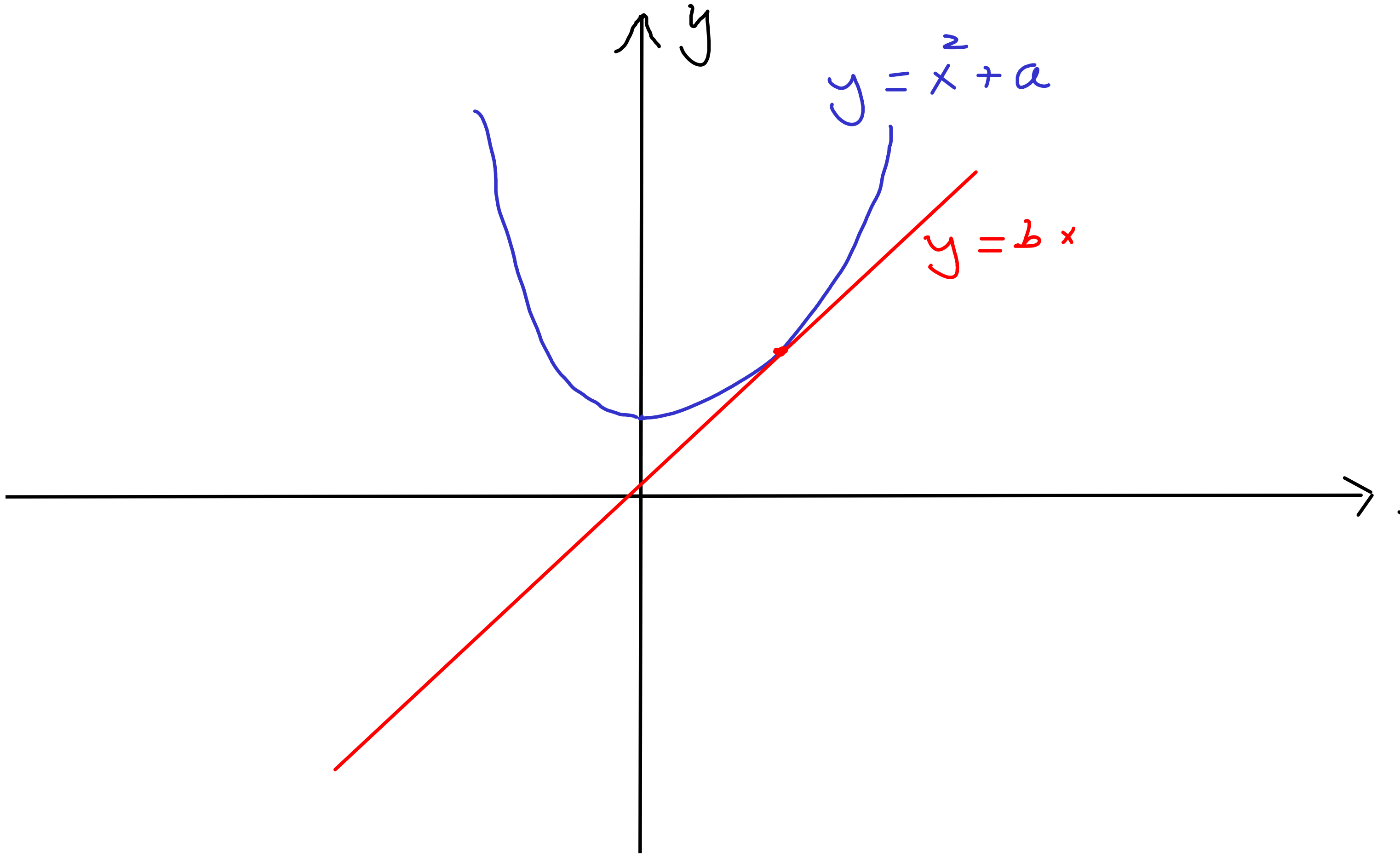
$$a=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{xe^{1/x}}{x}\right)\ ,\qquad b=\lim_{x\to\infty}\left(xe^{1/x}-ax\right)\ ,$$

$$a=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{xe^{1/x}}{x}\right)=1$$

$$\begin{aligned}
b&=\lim_{x\to\infty}\left(xe^{1/x}-ax\right)\\
&=\lim_{x\to\infty}\left(xe^{1/x}-x\right)\\
&=\lim_{x\to\infty}x\left(e^{1/x}-1\right)\\
&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}}\right)\\
&\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}}\right)\\
&=1
\end{aligned}$$

תשובה סופית: $a=1$, $b=1$.

שאלה 13



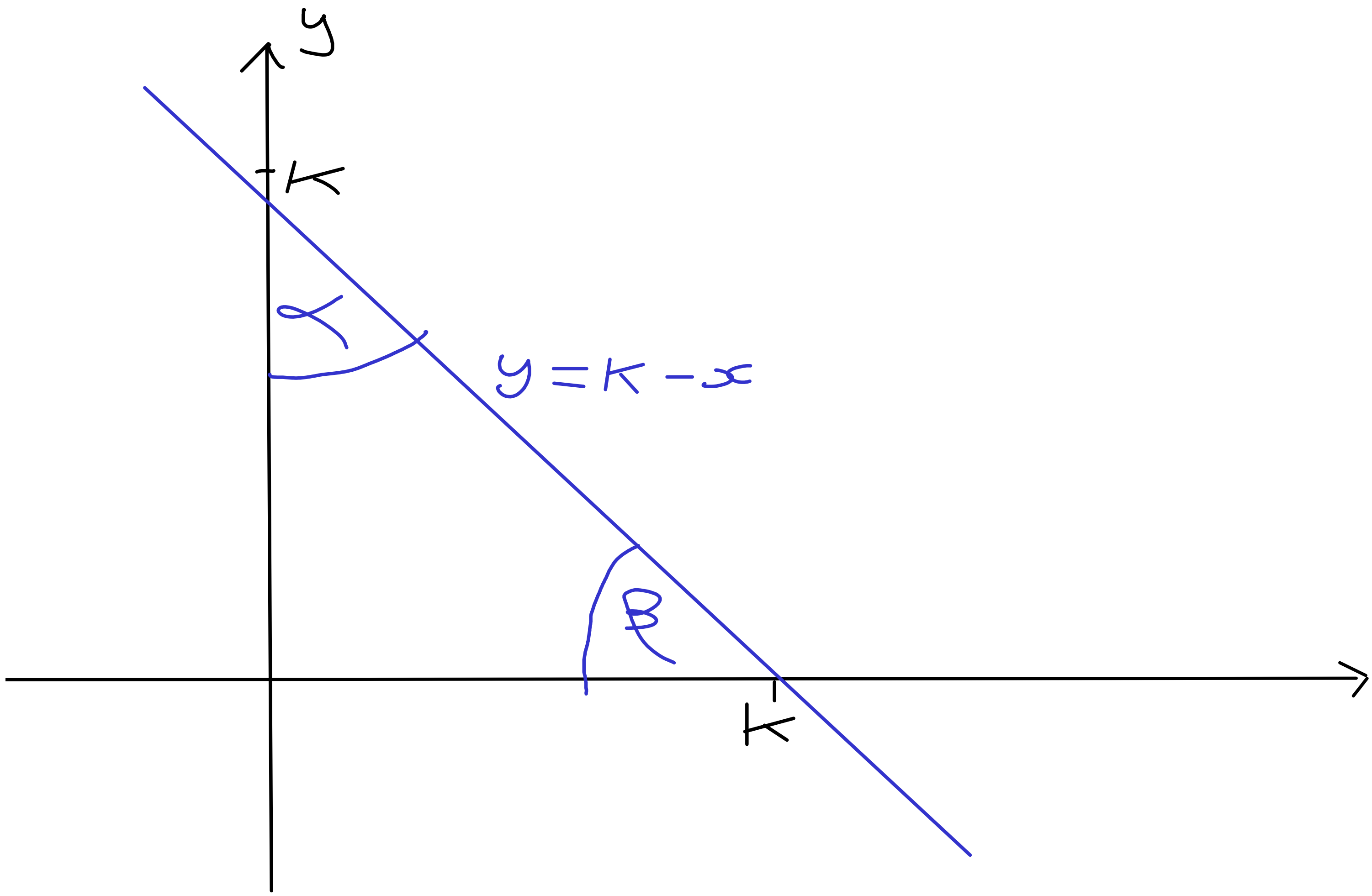
הקו $y = bx$ משיק לפרבולה כאשר יש נקודת חיתוך אחת עם הפרבולה. ז"א

$$x^2 + a = bx \qquad \Rightarrow \qquad x^2 - bx + a = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

יש פתרון אחד כאשר

$$b^2 - 4a = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b = \pm\sqrt{4a}\ , \quad a \geq 0$$

<u>שאלה 14</u>



נסמן ב x את האורך של ניצב אחד, אז אורך היתר $k-x$. לכן, אורך הניצב השני:

$$\sqrt{(k-x)^2-x^2}=\sqrt{k^2-2kx}\ .$$

אז שטח המשולש שווה

$$S=\frac{x\cdot\sqrt{k^2-2kx}}{2}$$

נמתא את x עבורו S מקסימלי:

$$S'=\frac{1}{2}\left(\sqrt{k^2-2kx}+\frac{x\cdot(-2k)}{2\sqrt{k^2-2kx}}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{k(k-3x)}{\sqrt{k^2-2kx}}\ .$$

S'	$+$	0	$-$
S	$\nearrow$	מקס	$\searrow$

$x=\dfrac{k}{3}$ נקודת מקסימום. לכן

$$\sin\alpha=\frac{k}{3\cdot(k-\frac{k}{3})}=\frac{1}{2}\qquad\Rightarrow\qquad\alpha=30^\circ,\quad\beta=90^\circ-30^\circ=60^\circ\ .$$

תשובה סופית:
.$\beta = 60^\circ$,$\alpha = 30^\circ$

שאלה 15

$f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ זאת פונקציה אלמנטרית ומוגדרת בקטע $[-2,-1]$.

$f'(x) = -\dfrac{8}{x^3}$ מוגדרת בקטע הזה, ז"א $f(x)$ גזירה בקטע $(-2,-1)$. לכן לפי משפט לגרנז', קיימת נקודה c כך ש

$$f(-1) = f(-2) = f'(c)(-1-(-2))$$

ז"א

$$\frac{4}{(-1)^2} - \frac{4}{(-2)^2} = -\frac{8}{c^3} \ .$$

$\Downarrow$

$$\frac{-8}{c^3} \qquad \Rightarrow \qquad c = -\frac{2}{\sqrt[3]{3}} \ .$$

שאלה 16

משפט לגרנז' $\Leftarrow$ $\exists\, c \in (a,b)$ כך ש

$$P(b) - P(a) = (b-a)P'(c)$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha b^2 + \beta b + \gamma - \alpha a^2 - \beta a - \gamma = (b-a)\left(2\alpha c + \beta\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha(b^2 - a^2) + \beta(b-a) = (b-a)\left(2\alpha c + \beta\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha(b+a)(b-a) + \beta(b-a) = (b-a)\left(2\alpha c + \beta\right)$$

נחלק אגף השמאל ואגף הימין בגורם משותף של $(b-a)$ ונקבל:

$$\alpha(b+a) + \beta = 2\alpha c + \beta \qquad \Rightarrow \qquad \alpha(b+a) = 2\alpha c \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{b+a}{2} \ .$$

שאלה 17

<u>נוכיח $f(7) \le 62$:</u>

לפי משפט לגרנז', קיימת $c \in [1,7]$ כך ש-

(1*)

$$\frac{f(7)-f(1)}{7-1} = f'(c) \le 7 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(7)-f(1)}{6} \le 7 \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad f(7) - 20 \le 42 \quad \Rightarrow \quad f(7) \le 62 \ .$$

<u>נוכיח $f(7) \ge 54$:</u>

לפי משפט לגרנז', קיימת $c \in [7,9]$ כך ש-

(2*)

$$\frac{f(9)-f(7)}{9-7} = f'(c) \le 7 \ \Rightarrow\ \frac{f(9)-f(7)}{2} \le 7 \ \Rightarrow\ 68 - f(7) \le 14 \ \Rightarrow\ \ 68 \le 14 + f(7) \ \Rightarrow\ 54 \le f(7)\ .$$

לפיכך לפי (1*) ו- (2*):

$$54 \le f(7) \le 62\ .$$

שאלה 18 נתון כי $|f'(x)| \le 5$ ז"א $-5 \le f'(x) \le 5$.

<u>נוכיח $f(4) \le 20$:</u>

לפי משפט לגרנז', קיימת $c \in [2,4]$ כך ש-

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2} = f'(c) \le 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(4)-10}{2} \le 5 \quad \Rightarrow \quad f(4)-10 \le 10 \quad \Rightarrow \quad f(4) \le 20\ . \qquad (1*)$$

<u>נוכיח $f(4) \ge 0$:</u>

לפי משפט לגרנז', קיימת $c \in [2,4]$ כך ש-

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2} = f'(c) \ge -5 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(4)-10}{2} \ge -5 \quad \Rightarrow \quad f(4)-10 \ge -10 \quad \Rightarrow \quad f(4) \ge 0\ . \qquad (1*)$$

לפיכך לפי (1*) ו- (1*):

$$0 \le f(4) \le 10\ .$$

שאלה 19 נתון:

$f(-3)=2$ ו- $f'(x) \le 4$ לכל x. לפי משפט לגרנז' קיים $c \in (-3,0)$ כך ש-

$$\frac{f(0)-f(-3)}{0-(-3)} = f'(c)\ . \qquad (\#1)$$

נתון כי $f'(c) \le 4$. נציב (#1):

$$\frac{f(0)-f(-3)}{3} \le 4\ .$$

נציב $f(-3)=2$ ונקבל

$$\frac{f(0)-2}{3} \le 4 \qquad \Rightarrow \qquad f(0)-2 \le 12 \qquad \Rightarrow \qquad f(0) \le 14\ .$$

שאלה 20 נתון:

$f(-2)=5$ ו- $f'(x)\leq 3$ לכל x.

לפי משפט לגרנז' קיים $c\in(-2,1)$ כך ש-

$$\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=f'(c)\ . \qquad \textbf{(\#1)}$$

נתון כי $f'(c)\leq 3$. נציב **(#1)**:

$$\frac{f(1)-f(-2)}{3}\leq 3\ .$$

נציב $f(-2)=5$ ונקבל

$$\frac{f(1)-5}{3}\leq 3 \qquad \Rightarrow \qquad f(1)-5\leq 9 \qquad \Rightarrow \qquad f(1)\leq 14\ .$$

לכן מצאנו כי

$$f(1)\leq 14$$

שאלה 21

א) צריך להוכיח:

$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$ $(0<a<b)$.

$\ln(x)$ רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b) לכל $0<a<b$. לכן לפי משפט לגרנז' קיימת $c\in[a,b]$ כך ש- $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ ז"א

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{(b-a)}{c}\ .$$

שים לב $0<a<c<b$ כך ש-

$$\frac{(b-a)}{b}<\frac{(b-a)}{c}<\frac{(b-a)}{a}\ ,$$

ולכן

$$\frac{(b-a)}{b}<\ln\left(\frac{b}{a}\right)<\frac{(b-a)}{a}\ .$$

ב) צריך להוכיח:

$\frac{b-a}{\cos^2 a}<\tan(b)-\tan(a)<\frac{b-a}{\cos^2 b}$ $(0<a<b<\frac{\pi}{2})$.

$\tan(x)$ רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b) לכל $0<a<b<\pi/2$. לכן לפי משפט לגרנז' קיימת $c\in[a,b]$ כך ש- $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ ז"א

$$\tan(b)-\tan(a)=(b-a)\frac{1}{\cos^2 c}\ .$$

שים לב $\frac{\pi}{2} > b > c > a > 0$ והפונקציה $\cos x$ מונוטומית $\downarrow$ ממש בקטע זו, ולכן

$$\cos a > \cos c > \cos b \ .$$

$\cos x$ חיובי בקטע $[0,\pi/2]$ אז

$$\cos^2 a > \cos^2 c > \cos^2 b \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\cos^2 a} < \frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 b} \ .$$

לכן נקבל

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan(b) - \tan(a) = \frac{b-a}{\cos^2 b} \ .$$

ג) צריך להוכיח:

$a \cdot 2^{a-1} < 3^a - 2^a < a \cdot 3^{a-1}$ $(a > 1)$.

$f(x) = x^a$ $a > 1$ רציפה בכל x וגזירה בכל x, ובפרט בקטע $[2,3]$. לכן לפי משפט לגרנז' קיימת $c \in (2,3)$ כך ש-

$$\frac{f(3)-f(2)}{3-2} = f'(c) \qquad \Rightarrow \qquad 3^a - 2^a = a \cdot c^{a-1} \ . \qquad (\#)$$

שים לב, עבור $c \in (2,3)$ ו- $a > 1$, $a \cdot 2^{a-1} < a \cdot c^{a-1} < a \cdot 3^{a-1}$. נציב $3^a - 2^a = a \cdot c^{a-1}$ מביטוי (#) ונקבל

$$a \cdot 2^{a-1} < 3^a - 2^a < a \cdot 3^{a-1} \ .$$

ד) צריך להוכיח:

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \quad (x > 0)$$

לפי משפט לגרנז' קיימת $c \in (0,x)$ כך ש-

$$\frac{\arctan x - \arctan 0}{x-0} = \arctan(c)' = \frac{1}{1+c^2}$$

ז"א

$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{1}{1+c^2} \ .$$

נכפיל ב-x:

$$\arctan x = \frac{x}{1+c^2} \ . \qquad (\#1)$$

בגלל ש- $0 < c < x$ אז

$$\frac{x}{1+c^2} > \frac{x}{1+x^2} \ , \qquad (\#2)$$

ו-

$$\frac{x}{1+c^2} < x \ . \qquad (\#3)$$

לכן, מ (#2) ו- (#3) נקבל

(#4)
$$\frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+c^2} < x \ .$$

לפי (#1) נציב $\arctan x$ ב- $\frac{x}{1+c^2}$ ונקבל

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \ .$$

ה) צריך להוכיח:

$$\sin 73^\circ - \sin 28^\circ < \frac{\pi}{4}$$

נעבר לרדיאנים:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ רדיאן}$$

לכן

$$28^\circ = \frac{28\pi}{180} \ , \qquad 73^\circ = \frac{73\pi}{180} \ .$$

לכן

$$\sin(28^\circ) = \sin\left(\frac{28\pi}{180}\right) \ , \qquad \sin(73^\circ) = \sin\left(\frac{73\pi}{180}\right) \ .$$

לכן צריך להוכיח כי

$$\sin\left(\frac{73\pi}{180}\right) - \sin\left(\frac{28\pi}{180}\right) < \frac{\pi}{4} \ .$$

נקח קטע $\left[\frac{28\pi}{180}, \frac{73\pi}{180}\right]$. $f(x)$ רציפה בקטע הזה, וגזירה בקטע הפתוח, לכן קיים c כך ש $\frac{28\pi}{180} < c < \frac{73\pi}{180}$ ו

$$\sin\left(\frac{73\pi}{180}\right) - \sin\left(\frac{28\pi}{180}\right) = \cos c \cdot \left(\frac{73\pi}{180} - \frac{28\pi}{180}\right)$$

$0 < \cos c < 1$ ו $\frac{73\pi}{180} - \frac{28\pi}{180} < \frac{\pi}{4}$. ז"א

$$\sin\left(73^\circ\right) - \sin\left(28^\circ\right) < \frac{\pi}{4} \ .$$

ו) צריך להוכיח:

$|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$ לכל $x, y \in \mathbb{R}$.

נגדיר $f(x) = \sin x$. f רציפה בכל x וגזירה לכל x. לכם לפי משפט לגרנז', לכל x, y $x > y$ קיימת $c \in [x,y]$ כך ש-

$$\frac{\sin y - \sin x}{y-x} = \sin'(c) = \cos c \qquad \Rightarrow \qquad \sin y - \sin x = (y-x) \cdot \cos c \ .$$

נקח את הערך מוחלט ונקבל

$$|\sin y-\sin x|=|(y-x)\cdot\cos c|=|y-x|\cdot|\cos c|\ .$$

או שקול

$$|\sin x-\sin y|=|x-y|\cdot|\cos c|\ .$$

$\cos c$ חסומה: $-1\le\cos c\le 1$ אז $0\le|\cos c|\le 1$. לכן

$$|\sin x-\sin y|\le|x-y|\ .$$

שאלה 22 נגדיר $f(x)=\ln x$. שים לב $f(x)$ רציפה בקטע $[x,y]$ וגזירה בקטע (x,y). לכן לפי משפט לגרנז' **??**, קיים $c\in(x,y)$ כך ש

$$f(y)-f(x)=f'(c)\cdot(y-x)\ .$$

ז"א

$$\ln y-\ln x=\frac{1}{c}\cdot(y-x)\qquad\Rightarrow\qquad\ln x-\ln y=\frac{1}{c}\cdot(x-y)\qquad\Rightarrow\qquad\ln\frac{x}{y}=\frac{x-y}{c}\ .\qquad\text{(\#)}$$

שים לב $0<c<y \Leftarrow \frac{1}{c}<\frac{1}{y}$, לכן

$$\frac{y-x}{y}<\frac{y-x}{c}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{x-y}{y}>\frac{x-y}{c}\ .$$

לכן לפי (#) נקבל

$$\ln\frac{x}{y}<\frac{x-y}{y}\ .$$

שים לב $0<x<c \Leftarrow \frac{1}{x}<\frac{1}{c}$, לכן

$$\frac{y-x}{c}<\frac{y-x}{x}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{x-y}{c}>\frac{x-y}{x}\ .$$

לכן לפ (#)

$$\ln\frac{x}{y}>\frac{x-y}{x}\ .$$

שאלה 23 יהי $h(x):=f(x)-g(x)$. לפי (#2), $h'(x)>0$ לכל $x\in(a,b)\ ,\quad x<c$. אז לפי משפט לגרנז' **??**, $h(x)$ עולה מונוטונית. לכן

$$h(n)>h(m)\qquad\Leftrightarrow\qquad n>m\qquad\forall m,n<c\ .\qquad\text{(\#4)}$$

אבל $h(c)=0$, לכן

$$h(x)<0\quad\forall x<c\ .\qquad\text{(\#5)}$$

ומכאן

$$f(x)-g(x)<0\quad\Rightarrow\quad g(x)>f(x)\quad\forall x<c\ .\qquad\text{(\#6)}$$

שאלה 24 יהי $h(x) := f(x) - g(x)$. לפי (1*),

(4*)
$$h(a) = 0 \ .$$

לפי (2*),

(5*)
$$h'(x) < 0 \qquad \forall x \in (a,b).$$

לכל $x \in (a,b)$, $x < c$. אז לפי משפט לגרנז' **??**, $h(x)$ יורדת מונוטונית. לכן

(6*)
$$h(n) < h(m) \qquad \Leftrightarrow \qquad n > m \qquad \forall m,n < (a,b) \ .$$

אבל לפי (4*) $h(a) = 0$, לכן

(7*)
$$h(x) < 0 \quad \forall a < x \leq b \ .$$

ומכאן

(8*)
$$f(x) - g(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) > f(x) \quad \forall x \in (a,b] \ .$$

שאלה 25 נגדיר

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 25x + 8 \ .$$

שים לב

$$f(0) = 8 \ , \qquad f(-1) = -25 \ ,$$

אז לפי משפט ערך ביניים **??**, קיימת לפחות נקודה אחת שבה הפונקציה מקבלת הערך 0. נניח שקיימת יותר מנקודה אחת, a, b, שבהן

$$f(a) = f(b) = 0 \ .$$

$f(x)$ פולינום ולכן היא רציפה וגזירה בכל x. לכן לפי משפט רול **??**, קיים נקודה $c \in (a,b)$ כל ש-

(#)
$$f'(c) = 0.$$

שים לב,

$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 25$$

לכן אם (#) מתקיים,

$$3c^2 - 14c + 25 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{7 \pm \sqrt{26}i}{3}$$

סתירה. לכן אין יותר מפתרון אחד.

שאלה 26 פונקציה $f(x) = \arctan(x)$ היא אלמנטרית ומוגדרת לכל x ממשי. לכן היא רציפה וגזירה לכל x ממשי ולכן מקיימת את תנאיי משפט לגרנז' **??** עבור גל קטע $[a,b]$. לכן קיים ערך c מקטע זו כך ש-

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \ .$$

מכאן

(**)
$$\frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} = |f'(c)|$$

שים לב,

$$f'(x) = \frac{2}{1+4x^2}$$

ולכן לפי (**),

$$\frac{|\arctan(2b) - \arctan(2a)|}{|b-a|} = \frac{2}{1+4c^2} \le 2$$

מש"ל.

שאלה 27

<u>נתון:</u>

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b).

$f(a) = f(b) = 0$.

<u>צריך להוכיח:</u>

$f(c) + f'(c) = 0$.

<u>הוכחה:</u>

נגדיר $g(x) = e^x f(x)$.
$f(x)$ רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b), ו e^x רציפה וגזירה לכל x. לכן $g(x)$ רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b).

$f(a) = f(b) = 0$ (נתון) לכן $g(a) = e^a f(a) = 0$, $g(b) = e^b f(b) = 0$, ז"א

$$g(a) = g(b) = 0 \ .$$

לפי משפט רול קיימת $c \in (a,b)$ כך ש $g'(c) = 0$. ז"א

$$e^c f(c) + e^c f'(c) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e^c \left(f(c) + f'(c) \right) = 0$$

$e^c > 0$ לכל c ממשי, לכן $f(c) + f'(c) = 0$.

שאלה 28

נגדיר $f(x) = e^x + x$. נניח כי ל- $f(x)$ יש 2 שורשים. אז לפי רול קיימת c כך ש- $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = e^x + 1 \ .$$

לא קיימת נקודה שבה הנגזרת מתאפסת, בסתירה לכך שקיימת c שבה $f'(c) = 0$.

שאלה 29

א) נגדיר

$$f(x) = e^x - (1+x)^2 \ .$$

נוכיח כי ל- $f(x)$ יש שלושה שורשים לכל היותר, דרך השלילה.
נניח שיש ל- $f(x)$ ארבעה שורשים.

אם היו ארבעה שורשים אזי לפי רול הנגזרת הראשונה מתאפסת לפחות שלוש פעמים.
שוב לפי רולהנגזרת השנייה תתאפס לפחות פעמיים.
הנגזרת השנייה הינה

$$f''(x) = e^x - 2 \ .$$

ז"א הנגזרת מתאפסת רק פעם אחת, בסתירה לכך שהנגזרת מתאפסת פעמיים. לאור זאת אין ארבעה שורשים.

ב) נגדיר

$$f(x) = e^x - (1+x)^2 \ .$$

$$f(-2) = \frac{1}{e^2} - 1 < 0 \ , \qquad f(-1) = \frac{1}{e} > 0, \qquad f(0) = -1 < 0 \ , \qquad f(3) = e^3 - 16 > 0 \ .$$

לכן לפי משפט ערך הביניים:

קיימת $c_1 \in (-2,-1)$ שבה $f(c_1) = 0$,

קיימת $c_2 \in (-1,0)$ שבה $f(c_2) = 0$,

וקיימת $c_3 \in (0,3)$ שבה $f(c_3) = 0$.

שאלה 30

נגדיר $g(x) = f(x)^2 f(1-x)$.

$$g(0) = f(0)^2 \cdot f(1) = 0 \ , \qquad g(1) = f(1)^2 f(0) = 0 \ .$$

לכן לפי משפט רול קיימת $c \in [0,1]$ כך ש- $g'(c) = 0$.

$$g'(x) = 2f(x)f'(x)f(1-x) + f(x)^2 f'(1-x)\cdot(-1) = f(x)\left[2f'(x)f(1-x) - f(x)f'(1-x)\right] \ .$$

$$g'(c) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(c)\left[2f'(c)f(1-c) - f(c)f'(1-c)\right] = 0$$

לכל $c \in (0,1)$ נתון כי $f(c) > 0$. לכן $2f'(c)f(1-c) - f(c)f'(1-c) = 0$. לכן

$$\frac{f'(1-c)}{f(1-c)} = \frac{2f'(c)}{f(c)} \ .$$