עבודה עצמית 10

שאלה 1 לכל אחת מהפונקציות הבאות $T:\mathbb{R}^3 \to V$ קבעו אם היא העתקה לינארית:

א) $V=\mathbb{R}^4$, T מוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\0\\0\\2x+z\end{pmatrix}$

ב) $V=\mathbb{R}$, T מוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x-y-z$

ג) $V=\mathbb{R}^2$, T מוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\z+1\end{pmatrix}$

ד) $V=\mathbb{R}^2$, T מוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\xz\end{pmatrix}$

ה) $V=\mathbb{R}^3$, T מוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+z\\x+y\\z\end{pmatrix}$

ו) $V=\mathbb{R}^2$, T מוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x^2\end{pmatrix}$

ז) $V=\mathbb{R}^3$, T מוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\|x|\\x+y\end{pmatrix}$

שאלה 2 לכל אחת מההעתקות הלינאריות שמצאתם בשאלה 1,

א) מצאו מטריצה מייצגת סטנדרטית.

ב) האם ההעתקה חח"ע?

ג) האם ההעתקה על?

ד) מצאו את הגרעין של ההעתקה.

ה) מצאו את התמונה של ההעתקה.

ו) מצאו את $W=\{x\in\mathbb{R}^3 | T(x)=T(e_1)\}$ כאשר $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

שאלה 3 נתונה פונקציה $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+2x\\4x+3y-2z\\kx+3y+(k-3)z\end{pmatrix}$$

א) הוכיחו כי T העתקה לינארית.

ב) מצאו את ערכי k עבורם T חח"ע.

ג) מצאו את ערכי k עבורם T על.

ד) עבור ערכי k שמצאתם בסעיף ב', מצאו את $T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

שאלה 4 נתונה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י:

$$T(e_1)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\ ,\qquad T(e_2)=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\ ,\qquad T(e_3)=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\ ,$$

כאשר e_1,e_2,e_3 הינם וקטורי היחידה ב- $\mathbb{R}^3$.

א) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

ב) האם T חח"ע?

ג) האם T על?

שאלה 5 נתונה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המקיימת:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\ ,\qquad T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\ ,\qquad T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}\ .$$

מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

שאלה 6 תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית ותהי $\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3\}$ קבוצה ת"ל ב- $\mathbb{R}^n$. נסמן $S=\{T(\mathrm{v}_1),T(\mathrm{v}_2),T(\mathrm{v}_3)\}$. הוכיחו או הפריכו: אם ב- S יש 3 וקטורים אז S ת"ל.

שאלה 7 נתונה העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ המקיימת:

$$T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\ ,\qquad T\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\ .$$

מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T ואת הנוסחא של T.

שאלה 8 תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ טרנספורמציה לינארית ותהי $S=\{\mathrm{v}_1,\dots,\mathrm{v}_k\}$ קבוצה בלתי תלויה ליניארית של וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$. הוכיחו או הפריכו:

א) אם T על אז $\{T(\mathrm{v}_1),\dots,T(\mathrm{v}_k)\}$ בת"ל.

ב) אם T חח"ע אז $\{T(\mathrm{v}_1),\dots,T(\mathrm{v}_k)\}$ בת"ל.

שאלה 9 נתונה העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^5$ המוגדרת ע"י:

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+2x_2+3x_3\\4x_1+6x_3\\7x_1+8x_2+9x_3\\x_1+3x_2+5x_3\\0\end{pmatrix}\ .$$

א) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

ב) האם T היא על $\mathbb{R}^5$? האם T חח"ע?

ג) האם קיים $x\in\mathbb{R}^3$ כך ש- $T(x)=\begin{pmatrix}1\\4\\7\\1\\0\end{pmatrix}$? רמז: ניתן לענות על שאלה זו מבלי לבצע חישובים. האם קיים יותר ממקור אחד לוקטור $\begin{pmatrix}1\\4\\7\\1\\0\end{pmatrix}$?

ד) האם קיים $x\in\mathbb{R}^3$ כך ש- $T(x)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$?

שאלה 10 נתונה העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המקיימת:

$$T(e_1)+T(e_3)=T(e_2)\ ,\qquad T(e_1)+T(e_2)+T(e_3)\ .$$

הוכיחו ש- $e_1\in\mathrm{Ker}(T)$.

שאלה 11 נתונה טרנספורמציה ליניארית $T:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b+3c\\2b+3c+4d\\5a+3c+4d\end{pmatrix}\ .$$

א) מצאו את המטריצה הסטנדרטית A של הטרנספורמציה.

ב) מצאו בסיס ואת המימד של $\mathrm{Im}(T)$ ו $\mathrm{Ker}(T)$.

ג) מצאו בסיס ואת המימד של $\mathrm{Row}(A)$.

ד) האם T חד חד ערכית ? האם T על?

ה) האם

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T)$$?

שאלה 12

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות הוכיחו שהיא טרנספורמציה לינארית ובדקו האם הטרנספורמציה היא חד-חד ערכית? האם היא טרנספורמציה "על"?

א) $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ המוגדרת ע"י $T(M) = A \cdot M$, כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

ב) $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ המוגדרת ע"י

$$T(p) = p'$$

$\forall P \in \mathbb{R}_3[x]$.

שאלה 13

נתונה טרנספורמציה ליניארית $T : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ המוגדרת באמצעות המטריצה הסטנדרטית A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

א) מצאו את $T\left(p(t)\right)$ כאשר

$$p(t) = 3p_1(t) - p_2(t) \ , \qquad p_1(t) = t - 2t^3 \ , \qquad p_2(t) = 1 - t^2 \ ,$$

ב) מצאו בסיס ואת הממד של $\mathrm{Ker}(T)$.

ג) האם T היא טרנספורמציה חד-חד ערכית? האם T היא טרנספורמציה על?

שאלה 14

נגדיר $V = \mathrm{sp}\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$ ופונקציה $D : V \to V$ ע"י $D(f) = f'$.

א) בדקו אם D טרנספורמציה ליניארית.

ב) רשמו את המטריצה סטנדרטית A של הטרנספורמציה ביחס לבסיס $B = \{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$.

ג) חשבו $D(3e^x - 5e^{2x} + e^{3x})$.

ד) האם D היא טרנספורמציה חד-חד- ערכית? האם D היא טרנספורמציה על?

ה) מצאו בסיס ואת הממד של $\text{Ker}(D)$ ו $\text{Im}(D)$.

שאלה 15 נתונה העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המקיימת:

$$T(e_1)+T(e_3)=T(e_2)\ , \qquad T(e_1)+T(e_2)+T(e_3)\ .$$

א) הוכיחו ש- $e_1\in\text{Ker}(T)$.

ב) $\dim\left(\text{Ker}(T)\right)$.

שאלה 16 נתונה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}_2[x]$ המקיימת:

$$T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=1+3x^2\ ,T\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=3+x+7x^2\ ,T\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=4+3x+6x^2\ ,T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=-3-2x-5x^2\ .$$

א) רשמו את הנוסחא ל T. כלומר $\ldots = T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.

ב) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

ג) מצאו את כל המטריצות $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש- $T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=1+2x-x^2$.

ד) מצאו את המימד ובסיס של $\text{Im}(T)$.

ה) מצאו את המימד ובסיס של $\text{Ker}(T)$.

ו) האם T חד-חד ערכית? האם T על?

ז) מצאו את המטריצה המייצגת של ההעתקה ביחס לבסיסים הסדורים

$$B=\left\{b_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},b_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$$

של $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ו-

$$E=\{1,x,x^2\}$$

של $\mathbb{R}_2[x]$ בהתאמה.

שאלה 17

א) נתונה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^3$,

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=\begin{pmatrix}a+3b+4c\\2a+5b+c\\ka-2b+3c\end{pmatrix}$$

1) רשמו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.
2) עבור אילו ערכי הפרמטר k ההעתקה T היא איזומורפיזם?
3) לכל ערך של הפרמטר k מצאו את המימד ובסיס של הגרעין.
4) עבור כל ערך של k קבעו את המספר המקסימלי של וקטורים בלתי תלויים לינארית השייכים לגרעין. נמקו את תשובותכם.
5) לכל ערך של הפרמטר k מצאו ואת המימד ובסיס של $\mathrm{Im}(T)$.
6) עבור אילו ערכי k כל שלושה וקטורים של התמונה הם תלוים לינארית? נמקו את תשובתכם.

שאלה 18

נתונה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}^{2\times 3}$ המוגדרת ע"י:

$$T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=\begin{pmatrix} a+b+2c+d & a+2b+3c+d & 2a+4b \\ b+c & -a+3c-d & 5c+4d \end{pmatrix}$$

לכל $a+bx+cx^2+dx^3\in\mathbb{R}_3[x]$.

א) מצאו את המטריצה הייצגת הסטנדרטית של T.

ב) מצאו בסיס ומימד של $\mathrm{Im}(T)$.

ג) מצאו בסיס ומימד של $\mathrm{Ker}(T)$.

ד) מצאו את המטריצה המייצגת של ההעתקה ביחס לבסיס

$$B=\left\{b_1=x, b_2=1-x, b_3=x+x^2, b_4=x-x^2+x^3\right\}$$

של $\mathbb{R}_3[x]$ וביחס לבסיס

$$C=\left\{c_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, c_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, c_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, c_4=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}, c_5=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, c_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right\}$$

של $\mathbb{R}^{3\times 2}$.

שאלה 19 הוכיחו את הטענות הבאות או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

א) נתונה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$.
אם $m>n$ אז $\mathrm{Ker}(T)=\{\bar{0}\}$.

ב) נתונה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$.
אם $m<n$ אז $\mathrm{Ker}(T)\neq\{\bar{0}\}$.

ג) נתונה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. יהי B בסיס של $\mathbb{R}^n$, ויהי C בסיס של $\mathbb{R}^m$.
אזי T חח"ע אם ורק אם המרחב האפס של $[T]_C^B$ הוא $\{\bar{0}\}$, כאשר $[T]_C^B$ המטריצה המייצגת ביחס לבסיסים B ו C.

פתרונות

שאלה 1

א) $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\0\\0\\2x+z\end{pmatrix}$:

T העתקה לינארית.

ב) $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x-y-z$:

T העתקה לינארית.

ג) $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\z+1\end{pmatrix}$:

דוגמה נגדית:

$$u=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad T(u)=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\ ,\qquad T(2u)\neq 2\cdot T(u)\ .$$

ד) $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\xz\end{pmatrix}$:

דוגמה נגדית:

$$u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\ ,\qquad T(u)=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\ ,\qquad T(2u)\neq 2\cdot T(u)\ .$$

ה) $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+z\\x+y\\z\end{pmatrix}$:

T העתקה לינארית.

ו) $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x^2\end{pmatrix}$:

דוגמה נגדית:

$$u=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad T(u)=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}\ ,\qquad T(3u)\neq 3\cdot T(u)\ .$$

ז) $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\|x|\\x+y\end{pmatrix}$:

דוגמה נגדית:

$$u=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad T(u)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad T(-2\cdot u)\neq -2\cdot T(u)\ .$$

שאלה 2 הטרנספורמציות הלינאריות הן **1)**, **2)** ו **5)**.

1) $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\0\\0\\2x+z\end{pmatrix}$

א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\\2&0&1\end{pmatrix}$$

ב) נמצאו את המדורגת של המטריצה המייצגת הסטנדרטית A:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\\2&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

T לא חח"ע כי לא כל העמודות מובילות.

ג) T לא על כי יש שורות אפסים.

ד)

$$x=-\frac{1}{2}z\ ,\qquad y=\frac{1}{2}z\ ,\qquad z\in\mathbb{R}\ .$$

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}z\\\frac{1}{2}z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Ker}(T)=\left\{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}z\\\frac{1}{2}z\\z\end{pmatrix}\middle|\, z\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\dim\left(\mathrm{Ker}(T)\right)=1$$

בסיס של $\mathrm{Ker}(T)$:

$$\left\{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}\right\} .$$

ה)

$$\mathrm{Im}(T)=\mathrm{sp}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim\left(\mathrm{Im}(T)\right)=2$ בסיס של $\mathrm{Im}(T)$:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ו)

$$T(e_1)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$W=\left\{u\in\mathbb{R}^3|T(u)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}\right\}=\left\{u\in\mathbb{R}^3|A\cdot u=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\2&0&1&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{1}{2}&1\\0&1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$x=1-\frac{1}{2}z\ ,\qquad y=\frac{1}{2}z\ ,\qquad z\in\mathbb{R}$$

$$W=\left\{\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}z\\ \frac{1}{2}z\\ z\end{pmatrix}\middle|z\in\mathbb{R}\right\}$$

2) $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x-y-z$

א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ב) T לא חח"ע כי לא כל העמודות מובילות.

ג) T על $\mathbb{R}$ כי אין שורות אפסים.

ד)

$$x = y + z \ , \qquad y, z \in \mathbb{R} \ .$$

$$\begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker}(T) = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$\dim\left(\text{Ker}(T)\right) = 2$. בסיס של $\text{Ker}(T)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ה)

$$\text{Im}(T) = \text{sp}(1) \ .$$

$\dim\left(\text{Im}(T)\right) = 1$.

בסיס של $\text{Im}(T)$ הוא 1

ו)

$$T(e_1) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad W = \{u \in \mathbb{R}^3 | T(u) = 1\} = \{u \in \mathbb{R}^3 | A \cdot u = 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x - y - z = 1 \right\}$$

5) $$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y \\ z \end{pmatrix}$$

א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ב) נמצאו את המדורגת של המטריצה המייצגת הסטנדרטית A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

T לא חח"ע כי לא כל העמודות מובילות.

ג) T לא על $\mathbb{R}^3$ כי יש שורת אפסים.

ד) $x=-y$, $z=0$, $y\in\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix}-y\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$\dim\left(\text{Ker}(T)\right)=1$.

$\dim\left(\text{Ker}(T)\right)=1$ בסיס של $\text{Ker}(T)$:

$$\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ה)

$$\text{Im}(T)=\text{sp}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim\left(\text{Im}(T)\right)=2$

בסיס של $\text{Im}(T)$:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ו)

$$T(e_1)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad .$$

$$W=\left\{u\middle|A\cdot u=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&1&0&1\\0&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$x=1-y$ $y,z\in\mathbb{R}$.

$$W=\left\{\begin{pmatrix}1-y\\y\\z\end{pmatrix}\middle|y,z,\in\mathbb{R}\right\}$$

שאלה 3

א)

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+2z\\4x+3y-2z\\kx+3y+(k-3)z\end{pmatrix}$$

$$u_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\quad,\qquad u_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\quad.$$

$$\begin{aligned}T(u_1+u_2)=&T\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix}\\=&\begin{pmatrix}x_1+x_2+y_1+y_2+2(z_1+z_2)\\4(x_1+x_2)x+3(y_1+y_2)-2(z_1+z_2)\\k(x_1+x_2)+3(y_1+y_2)+(k-3)(z_1+z_2)\end{pmatrix}\\=&\begin{pmatrix}x_1+y_1+2z_1\\4x_1+3y_1-2z_1\\kx_1+3y_1+(k-3)z_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2+y_2+2z_2\\4x_2+3y_2-2z_2\\kx_2+3y_2+(k-3)z_2\end{pmatrix}\\=&T(u_1+T(u_2)\end{aligned}$$

לכל $u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ וסקלר m:

$$\begin{aligned}T(mu)=&T\begin{pmatrix}mx\\my\\mz\end{pmatrix}\\=&\begin{pmatrix}mx+my+2(mz)\\4(mx)x+3(my)-2(mz)\\k(mx)+3(my)+(k-3)(mz)\end{pmatrix}\\=&m\begin{pmatrix}x+y+2z\\4x+3y-2z\\kx+3y+(k-3)z\end{pmatrix}\\=&mT(u)\end{aligned}$$

לכן T לינארית.

ב) המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\4&3&-2\\k&3&k-3\end{pmatrix}$$

נמצאו את המדורגת של המטריצה המייצגת הסטנדרטית A:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\4&3&-2\\k&3&k-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&10\\0&0&9k-33\end{pmatrix}$$

T חח"ע עבור $k\neq\dfrac{11}{3}$.

ג) T על עבור $k\neq\dfrac{11}{3}$.

ד) $k=\dfrac{11}{3}$.

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\4\\\frac{53}{3}\end{pmatrix}$$

שאלה 4 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$

$$T(e_1)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\ ,\qquad T(e_2)=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\ ,\qquad T(e_3)=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\ ,$$

א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix}$$

ב) נמצאו את המדורגת של המטריצה המייצגת הסטנדרטית A:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&5\\0&-2&-4\end{pmatrix}$$

T לא חח"ע כי יש עמודה לא מובילה.

ג) T על $\mathbb{R}^2$ כי אין שורת אפסים.

שאלה 5 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\ ,\qquad T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\ ,\qquad T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}\ .$$

$$e_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad T(e_2)=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

$$e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad T(e_3)=\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$$

לכן המטריצה המייצגת הסטנדרטית הינה

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&5\end{pmatrix}$$

שאלה 6

נתון:

$T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית,

$\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\} \in \mathbb{R}^n$ ת"ל.

צריך להוכיח:

$S = \{T(\mathrm{v}_1), T(\mathrm{v}_2), T(\mathrm{v}_3)\}$ ת"ל .

הוכחה:

$\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$ ת"ל, לכן קיימים סקלרים k_1, k_2, k_3 שלא כולם אפסים כך ש

$$k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2 + k_3\mathrm{v}_3 = \bar{0} \ .$$

אז

$$T\left(k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2 + k_3\mathrm{v}_3\right) = T(\bar{0})$$
$$k_1T\left(\mathrm{v}_1\right) + k_2T\left(\mathrm{v}_2\right) + k_3T\left(\mathrm{v}_3\right) = \bar{0}$$

קיבלנו צירוף לינארי לא טריוויאלי. ז"א $T\left(\mathrm{v}_1\right)$,$T\left(\mathrm{v}_2\right)$,$T\left(\mathrm{v}_3\right)$ ת"ל.

שאלה 7 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \ , \qquad T\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \ .$$

הוקטורים $\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ו $\mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ בת"ל, $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, לכן v_1, v_2 מהווה בסיס של $\mathbb{R}^2$.

אז

$$e_1 = x_1\mathrm{v}_1 + y_1\mathrm{v}_2 \ ,$$
$$e_2 = x_2\mathrm{v}_1 + y_2\mathrm{v}_2 \ ,$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}3&1&1\\4&2&0\end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to 3R_2-4R_1} \left(\begin{array}{cc|c}3&1&1\\0&2&-4\end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|c}3&1&1\\0&1&-2\end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{cc|c}3&0&3\\0&1&-2\end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to \frac{1}{3}R_1} \left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&-2\end{array}\right)$$

$x_1 = 1$, $y_1 = -2$.

לכן

$$e_1 = \mathrm{v}_1 - 2\mathrm{v}_2 \ .$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}3&1&0\\4&2&1\end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to 3R_2-4R_1} \left(\begin{array}{cc|c}3&1&0\\0&2&3\end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|c}3&1&0\\0&1&\frac{3}{2}\end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{cc|c}3&0&-\frac{3}{2}\\0&1&\frac{3}{2}\end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to \frac{1}{3}R_1} \left(\begin{array}{cc|c}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&\frac{3}{2}\end{array}\right)$$

$x_2 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{3}{2}$.

לכן

$$e_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{v}_1 + \frac{3}{2}\mathrm{v}_2 \ .$$

לכן

$$T(e_1) = T(\mathrm{v}_1) - 2T(\mathrm{v}_2) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\-8\\-9\end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = -\frac{1}{2}T(\mathrm{v}_1) + \frac{3}{2}T(\mathrm{v}_2) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\7\\\frac{15}{2}\end{pmatrix}$$

לכן המטריצה המייצגת הסטנדרטית היא

$$A = \begin{pmatrix}-7 & \frac{5}{2}\\-8 & 7\\-9 & \frac{15}{2}\end{pmatrix}$$

<u>שאלה 8</u> $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ טרנספורמציה לינארית
$S = \{\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_k\}$ בת"ל.

א) <u>דוגמה נגדית:</u>

$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(u) = \bar{0}$ לכל $u \in \mathbb{R}^2$.
$S = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל.

$$T(\mathrm{v}_1) + T(\mathrm{v}_2) = \bar{0}$$

$\Leftarrow$ $T(\mathrm{v}_1)$, $T(\mathrm{v}_2)$ ת"ל.

ב) <u>נתון:</u>

T חח"ע.

$$x_1 T(\mathrm{v}_1) + \ldots + x_k T(\mathrm{v}_k) = \bar{0}$$

$\Leftarrow$

$$T\left(x_1 \mathrm{v}_1 + \ldots + x_k \mathrm{v}_k\right) = \bar{0}$$

$\Leftarrow$

$$x_1 \mathrm{v}_1 + \ldots + x_k \mathrm{v}_k \in \mathrm{Ker}(T)\ .$$

T חח"ע לכן $\mathrm{Ker}(T) = \{\bar{0}\}$. מכאן נובע:

$$x_1 \mathrm{v}_1 + \ldots + x_k \mathrm{v}_k = \bar{0}\ .$$

$\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_k$ בת"ל $\Leftarrow$ $x_1 = 0, \ldots, x_k = 0$. ז"א $T(\mathrm{v}_1), \ldots, T(\mathrm{v}_k)$ בת"ל.

<u>שאלה 9</u> $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 + 2x_2 + 3x_3\\4x_1 + 6x_3\\7x_1 + 8x_2 + 9x_3\\x_1 + 3x_2 + 5x_3\\0\end{pmatrix}\ .$$

א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ב) נמצאו את המדורגת שת המטריצה המייצגת הסטנדרטית A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

T לא על $\mathbb{R}^5$ כי יש שורות אפסים. T לא חח"ע כי לא כל העמודות מובילות.

ג)

$$T(u) = A \cdot u = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ זאת העמודה הראשונה של A, לכן $T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

T לא חח"ע, לכן לוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ יש אינסוף מקורות.

ד)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

אין פתרון, לכן לוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ אין מקור.

שאלה 10

נתון:

$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית,

$$T(e_1)+T(e_3)=T(e_2)\ ,\qquad T(e_1)+T(e_2)+T(e_3)\ .$$

צריך להוכיח: $e_1\in\text{Ker}(T)$

הוכחה:

$$T(e_1)=T(e_2)-T(e_3)=T(e_2)-(T(e_1)+T(e_2))=-T(e_1)$$

לכן

$$2T(e_1)=\bar{0}\qquad\Rightarrow\qquad T(e_1)=\bar{0}\qquad\Rightarrow\qquad e_1\in\text{Ker}(T)\ .$$

שאלה 11 $T:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^3$

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b+3c\\2b+3c+4d\\5a+3c+4d\end{pmatrix}\ .$$

א) מטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&2&3&4\\5&0&3&4\end{pmatrix}$$

ב)

$$\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&2&3&4\\5&0&3&4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-5R_1}\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&2&3&4\\0&-10&-12&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-4\\0&1&0&-10\\0&0&1&8\end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Im}(T)$:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim\left(\text{Im}(T)\right)=3$.

פתרון למערכת הומוגנית:

$$x_1=4x_4\ ,\qquad x_2=10x_4\ ,\qquad x_3=-8x_4\ .$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=x_4\begin{pmatrix}4\\10\\-8\\1\end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Ker}(T)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -8 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim\left(\text{Ker}(T)\right) = 1$.

ג) $\dim\left(\text{Row}(A)\right) = 3$ - מספר השורות השונות מ 0.

בסיס של $\text{Row}(A)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \right\}$$

ד) T לא חח"ע כי לא כל העמודות מובילות. T על $\mathbb{R}^3$ כי אין שורות אפסים.

ה)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \in \text{Im}(T)$$

כי T טרנספורמציה על $\mathbb{R}^3$.

שאלה 12 $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$

א)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(M) = A \cdot M$$

לכל $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

1) לכל $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$T(M_1 + M_2) = A \cdot (M_1 + M_2) = A \cdot M_1 + A \cdot M_2 = T(M_1) + T(M_2) \ .$$

2) לכל $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ולכל סקלר k,

$$T(kM) = A \cdot (kM) = kA \cdot M = kT(M) \ .$$

לכן T ליניארית.

$$T(E_1) = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(E_2) = T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T(E_3) = T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(E_4) = T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

T חח"ע ועל.

ב) $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_2[x]$

$$T(p)=p'$$

$\forall P\in\mathbb{R}_3[x]$.

1) לכל $p_1,p_2\in R_3[x]$,

$$T(p_1+p_2)=(p_1+p_2)'=p_1'+p_2'=T(p_1)+T(p_2)\ .$$

2) לכל $p\in R_3[x]$ ולכל סקלר k,

$$T(kp)=(kp)'=kp'=kT(p)\ .$$

לכן T לינארית.

$$T(1)=0\ ,\qquad T(t)=1\ ,\qquad T(t^2)=2t\ ,\qquad T(t^3)=3t^2\ .$$

מטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

T לא חח"ע כי לא כל העמודות מובילות.
T על $R_3[x]$ כי אין שורות אפסים.

שאלה 13

א)

$$p(t)=3p_1(t)-p_2(t)\ ,\qquad p_1(t)=t-2t^3\ ,\qquad p_2(t)=1-t^2\ ,$$
$$T(p(t))=3T(p_1(t))-T(p_2(t))$$

$$T\left(p_1(t)\right)_E=\begin{pmatrix}2&0&1&0\\-1&-1&0&3\\0&1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-7\\-1\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad T\left(p_1(t)\right)=-7t-t^2$$

$$T\left(p_2(t)\right)_E=\begin{pmatrix}2&0&1&0\\-1&-1&0&3\\0&1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad T\left(p_2(t)\right)=1-t+2t^2$$

$$T\left(p(t)\right) = 3(-7-t^2) - (1-t+2t^2) = 1-20t-5t^2 \ .$$

ב)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-8}{3} \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -\frac{4}{3}x_4 \ , \qquad x_2 = \frac{13}{3}x_4 \ , \qquad x_3 = \frac{8}{3}x_4 \ , \qquad x_4 \in \mathbb{R} \ .$$

בסיס של $\text{Ker}(T)$:

$$-\frac{4}{3} + \frac{13}{3}t + \frac{8}{3}t^2 + t^3$$

ג) T לא חח"ע כי יש עמודה לא מובילה.
T על $\mathbb{R}_2[x]$
כי אין שורת אפסים.

שאלה 14

$$V = \text{sp}\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$$

$D : V \to V$

$$D(f) = f' \ .$$

א) **1)** לכל $f_1, f_2 \in V$,

$$D(f_1+f_2) = (f_1+f_2)' = f_1' + f_2' = D(f_1) + D(f_2) \ .$$

2) לכל $f \in V$ ולכל סקלר k,

$$D(kf) = (kf)' = kf' = kD(f) \ .$$

לכן T לינארית.

ב)

$$D\left(e^x\right) = e^x = 1\cdot e^x + 0\cdot e^{2x} + 0\cdot e^{3x}$$
$$D\left(e^{2x}\right) = 2e^{2x} = 0\cdot e^x + 2\cdot e^{2x} + 0\cdot e^{3x}$$
$$D\left(e^{3x}\right) = 3e^{3x} = 0\cdot e^x + 0\cdot e^{2x} + 3\cdot e^{3x}$$

$$D_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ג)

$$\left[3e^x-5e^{2x}+e^{3x}\right]_B=\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}$$

$$D_B\cdot\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-10\\3\end{pmatrix}$$

$$D\left(3e^x-5e^{2x}+e^{3x}\right)=3e^x-10e^{2x}+3e^{3x}\ .$$

ד) D חח"ע ועל כי כל העמודות מובילות ואין שורות אפסים.

ה) בסיס של $\mathrm{Im}(T)$:

$$\left\{e^x,e^{2x},e^{3x}\right\}\ .$$

$\dim\left(\mathrm{Im}(T)\right)=3$.

$\dim\left(\mathrm{Nul}(T)\right)=0$, אין בסיס.

שאלה 15 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$$T(e_1)+T(e_3)=T(e_2)\ ,\qquad T(e_1)+T(e_2)+T(e_3)\ .$$

א)

$$T(e_1)+T(e_3)=T(e_2)\ ,\quad T(e_1)+T(e_2)+T(e_3)\ ,\qquad\Rightarrow\qquad 2T(e_1)+T(e_3)+T(e_2)=T(e_2)+T(e_3)$$

$\Leftarrow$

$$T(e_1)=\bar{0}\quad\Rightarrow\quad e_1\in\mathrm{Ker}(T)\ .$$

ב)

$$T(e_3)-T(e_2)=T(e_2)-T(e_3)\quad\Rightarrow\quad T(e_3-e_2)=-T(e_3-e_2)\quad\Rightarrow\quad 2T(e_3-e_2)=\bar{0}\quad\Rightarrow\quad e_3-e_2\in\mathrm{Ker}(T)$$

$$e_3-e_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

בת"ל.

שאלה 16 $T:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}_2[x]$ המקיימת:

$$T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=1+3x^2\ ,T\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=3+x+7x^2\ ,T\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=4+3x+6x^2\ ,T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=-3-2x-5x^2\ .$$

המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4&-3\\0&1&3&-2\\3&7&6&-5\end{pmatrix}$$

א)

$$A\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&4&-3\\0&1&3&-2\\3&7&6&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+3b+4c-3d\\b+3c-2d\\3a+7b+6c-5d\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(a+3b+4c-3d)+(b+3c-2d)\,x+(3a+7b+6c-5d)\,x^2$$

ב)

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4&-3\\0&1&3&-2\\3&7&6&-5\end{pmatrix}$$

ג)

$$A\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&4&-3&5\\0&1&3&-2&2\\3&7&6&-5&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-5&3&-5\\0&1&3&-2&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}a&=5c-3d-5\\b&=-3c+3d+2\end{cases}\ ,\qquad c,d\in\mathbb{R}\ .$$

ד) $\dim\left(\mathrm{Im}(T)\right)=2$. בסיס של $\mathrm{Im}(T)$:

$$\{1+3x^2,3+x+7x^2\}\ .$$

ה) $\dim\left(\mathrm{Ker}(T)\right)=2$.

$$\begin{cases}a&=5c-3d\\b&=-3c+3d\end{cases}\ ,\qquad c,d\in\mathbb{R}\ .$$

$$c\begin{pmatrix}5\\-3\\1\\0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}-3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$$

בסיס של $\mathrm{Ker}(T)$:

$$\left\{\begin{pmatrix}5&-3\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3&2\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

ו) T לא חח"ע כי יש עמודה לא מובילה.

ז) T לא על כי יש שורת אפסים.

ח)

$$B=\left\{b_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},b_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$E=\{1,x,x^2\}$$

$$T(b_1)=1+3x^2\ ,\qquad T(b_2)=4+x+10x^2\ ,\qquad T(b_3)=8+4x+16x^2\ ,\qquad T(b_4)=5+2x+11x^2\ .$$

$$[T]_B^E=\begin{pmatrix}1&4&8&5\\0&1&4&2\\3&10&10&11\end{pmatrix}\ .$$

שאלה 17

א) 1) רשמו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.
המטריצה המייצגת הסטנדרטית מוגדרת להיות

$$A=\begin{pmatrix}|&|&|\\T(e_1)&T(e_2)&T(e_3)\\|&|&|\end{pmatrix}$$

כאשר $e=\left\{e_1=1,\ e_2=x,\ e_3=x^2\right\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$. לפי הנסוחה הנתונה בשביל T:

$$T\left(e_1\right)=T\left(1+0\cdot x+0\cdot x^2\right)=\begin{pmatrix}1\\2\\k\end{pmatrix}$$

$$T\left(e_2\right)=T\left(0+1\cdot x+0\cdot x^2\right)=\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}$$

$$T\left(e_3\right)=T\left(0+0\cdot x+1\cdot x^2\right)=\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$$

לכן המטריצה המייצגת הסטנדרטית היא

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4\\2&5&1\\k&-2&3\end{pmatrix}$$

■

2) עבור אילו ערכי הפרמטר k ההעתקה T היא איזומורפיזם?

נדרג את המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to kR_1 - R_3]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 3k+2 & 4k-3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 3k+2 & 4k-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - (2+3k)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -17(k+1) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -\frac{1}{17} R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

ההעתקה T איזומורפיזם אם היא חח"ע ועל.

T על אם במדורגת המתקבלת מהמטריצה המייצגת הסטנדרטית A קיים איבר מוביל בכל שורה.

T חח"ע אם במדורגת המתקבלת מהמטריצה המייצגת הסטנדרטית A קיים איבר מוביל בכל עמודה.

לכן T איזומורפיזם לכל $k \neq -1$.

■

3) לכל ערך של הפרמטר k מצאו את המימד ובסיס של הגרעין.

$\underline{k \neq -1}$

$\text{Ker}(T) \cong \text{Nul}(A)$.

לפי המדורגת של A מסעיף הקודם, $\text{Nul}(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, לכן

$$\text{Ker}(T) = \left\{0 \cdot x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2\right\} = \{\bar{0}\}$$

$\dim\left(\text{Ker}(T)\right) = 0$.

$\underline{k = -1}$

$\text{Ker}(T) \cong \text{Nul}(A)$. המדורגת של A היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הפתרון של המערכת ההומוגנית של A הוא

$$\left.\begin{aligned} x+3y+4z &= 0 \\ y+7z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x &= -3y-4z \\ y &= -7z \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x &= 17z \\ y &= -7z \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} z$$

ז"א הבסיס של $\text{Nul}(A)$ הוא

$$B\left(\text{Nul}(A)\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 17 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

לכן

$$B\left(\ker(T)\right) = \left\{17-7x+x^2\right\} \ .$$

$\dim\left(\ker(T)\right) = 1$.

■

4) עבור כל ערך של k קבעו את המספר המקסימלי של וקטורים בלתי תלויים לינארית השייכים לגרעין. נמקו את תשובותכם.

■

5) לכל ערך של הפרמטר k מצאו את המימד ובסיס של $\text{Im}\ T$.

$\underline{k \neq -1}$

$\text{Im}(T) \cong \text{Col}(A)$.

המדורגת של A היא $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$. כל העמודות מובילות לכן בסיס של $\text{Col}(A)$ הינו

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

לכן בסיס של $\text{Im}(T)$ הינו

$$\left\{1+2x+kx^2, 3+5x-2x^2, 4+x+3x^2\right\}$$

$\dim\left(\text{Im}(T)\right) = 3$.

$\underline{k = -1}$

$\text{Im}(T) \cong \text{Col}(A)$. המדורגת של A היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עמודות 1 ו 2 מובילות לכן בסיס של $\text{Col}(A)$ הינו

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k=-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

לכן בסיס של $\text{Im}(T)$ הינו

$$\left\{1+2x-x^2\ , 3+5x-2x^2\right\}$$

$\dim\left(\text{Im}(T)\right)=2$.

■

6) עבור אילו ערכי k כל שלושה וקטורים של התמונה הם תלוים לינארית ? נמקו את תשובתכם.

■

שאלה 18

א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T היא:

$$A=\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \\ [T(e_1)]_E & [T(e_2)]_E & [T(e_3)]_E & [T(e_4)]_E \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

כאשר $\{e_1=1,\ e_2=x,\ e_3=x^2,\ e_4=x^3\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_3[x]$ ו E הבסיס הסטנדרטית של $\mathbb{R}^{2\times 3}$.

$$[T\left(e_1\right)]_E=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\quad [T\left(e_2\right)]_E=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\quad [T\left(e_3\right)]_E=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\ ,\quad [T\left(e_4\right)]_E=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\ .$$

לכן

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

ב) $\mathrm{Im}(T) \sim \mathrm{col}(A)$

נדרג את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_5 \to R_5 - R_2]{\substack{R_3 \to R_3 - 2R_2 \\ R_4 \to R_4 - R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to -\frac{1}{6} R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_5 \to R_5 - 5R_3]{R_4 \to R_4 - 4R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כל ה4 עמודות מובילות לכן $\dim(\mathrm{col}(A)) = 4$. בסיס של $\mathrm{Im}(T)$:

$$B\left(\mathrm{Im}(T)\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

ג) כיוון ש

$$\dim\left(\mathrm{col}(A)\right) + \dim\left(\mathrm{Nul}(A)\right) = 4$$

אז

$$\dim\left(\mathrm{Nul}(A)\right) = 0$$

ולכן

$$\mathrm{Ker}(T) = \{\bar{0}\} \ .$$

ד) נרשום הבסיס $\{b_1=x, b_2=1-x, b_3=x+x^2, b_4=x-x^2+x^3\}$ ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_3[x]$, $\{e_1=1,\ e_2=x,\ e_3=x^2,\ e_4=x^3\}$: כך ש

$$b_1=e_2\ ,\quad b_2=e_1-e_2\ ,\quad b_3=e_2+e_3\ ,\quad b_4=e_2-e_3+e_4\ .$$

לכן

$$T(b_1)=T(e_2)=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$T(b_2)=T(e_1)-T(e_2)=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\\-1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$T(b_3)=T(e_2)+T(e_3)=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\\3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\4\\2\\3\\5\end{pmatrix}$$

$$T(b_4)=T(e_2)-T(e_3)+T(e_4)=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\\3\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\4\\0\\-4\\-1\end{pmatrix}\ .$$

נרשום הבסיס

$$C=\left\{c_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},c_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},c_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},c_4=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},c_5=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},c_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right\}$$

במונחי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{2\times 3}$:

$$E=\left\{E_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},E_4=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},E_5=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},E_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

:

$$E_1 = c_5 \ , \quad E_2 = c_1 \ , \quad E_3 = c_2 \ , \quad E_4 = c_6 \ , \quad E_5 = c_3 \ , \quad E_6 = c_4 - c_3 \ .$$

לכן

$$T(b_1) = E_1 + 2E_2 + 4E_3 + E_4 \qquad = c_5 + 2c_1 + 4c_2 + c_6 \qquad = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C \ ,$$

$$T(b_2) = -E_2 - 2E_3 - E_4 - E_5 \qquad = -c_1 - 2c_2 - c_6 - c_3 \qquad = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_C \ ,$$

$$T(b_3) = 3E_1 + 5E_2 + 4E_3 + 2E_4 + 3E_5 + 5E_6 \qquad = 3c_5 + 5c_1 + 4c_2 + 2c_6 + 3c_3 + 5(c_4 - c_3) \qquad = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_C \ ,$$

$$T(b_4) = 4E_3 - 4E_5 - E_6 \qquad = 4c_2 - 4c_3 - (c_4 - c_3) \qquad = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C \ .$$

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [T(b_1)]_C & [T(b_2)]_C & [T(b_3)]_C & [T(b_4)]_C \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 19

א) דוגמה נגדית:

$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\0\\0\end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Ker}(T)$ הוא $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

ב) תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה לינארית. אם $n>m$ אז $\ker(T)\neq\{\bar{0}\}$.

<u>הוכחה:</u>

המטריצה המייצגת הסטנדרטית $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ מסדר $m\times n$ עבור ו $m<n$. כלומר, כמות העמודות יותר מכמות השורות. לכן

$$\dim\left(\text{col}(A)\right)<n\ .$$

כיוון ש

$$\dim\left(\text{col}(A)\right)+\dim\left(\text{Nul}(A)\right)=n$$

אז

$$\dim\left(\text{Nul}(A)\right)\geq 1\ .$$

לכן

$$\dim\left(\text{Ker}(T)\right)\geq 1\ ,$$

ז"א

$$\text{Ker}(T)\neq\{\bar{0}\}\ .$$

ג) <u>הוכחה:</u>

<u>נניח כי T חח"ע.</u>

יהי v וקטור השייך ל $\text{Ker}(T)$. אז $T(\text{v})=\bar{0}$, אז

$$T(\text{v})=\bar{0}=T(\bar{0})\ .$$

לכן $\text{v}=0$ בגלל ש T חח"ע. לכן $\text{Ker}(T)=\{\bar{0}\}$.

<u>נניח כי $\text{Ker}(T)=\{\bar{0}\}$.</u>

יהי $T\left(\text{v}_1\right)=T\left(\text{v}_2\right)$ עבור $\text{v}_1,\text{v}_2\in\mathbb{R}^n$. אז

$$T(\text{v}_1-\text{v}_2)=T(\text{v}_1)-T(\text{v}_2)=\bar{0}$$

לכן

$$\text{v}_1-\text{v}_2\in\text{Ker}(T)=\{\bar{0}\}\ .$$

ז"א

$$\text{v}_1-\text{v}_2=\bar{0}\qquad\Rightarrow\qquad\text{v}_1=\text{v}_2$$

ולכן T חח"ע.