מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

דפי נוסחאות

קומבינטוריקה

מדגם סדור עם החזרה: $n\cdot n\cdot\ldots\cdot n=n^k$

מדגם סדור ללא החזרה: $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}=(n)_k$

מדגם לא סדור ללא החזרה: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$

הסתברות מותנית

יהיו A ו- B מאורעות במרחב הסתברות. ההסתברות ש A קרה בתנאי B מוגדרת ע"י: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

1. נוסחת הכפל: $P(B\cap A)=P(B|A)\cdot P(A)=P(A|B)\cdot P(B)$
2. נוסחת ההסתברות השלימה: $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)\cdot P(A_i)$ עבור $A_1,\ldots,A_n$ מאורעות זרים בזוגות ומקיימים $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$
3. נוסחת בייס: $P(A_j|B)=\frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i)}$
4. A ו B ייקראו מאורעות בלתי תלויים אם מתקיים השוויון: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

משתנה מיקרי חד ממדי

1. **משתנה מיקרי בדיד (חד מימדי)** משתנה מקרי X נקרא משתנה חד מימדי בדיד אם הוא מקבל סדרה של ערכים (סופית או אינסופית) והפונקציה $P(X=k)=f_X(k)$ נקראת פונקצית ההסתברות של המשתנה המקרי X.
   תכונות: $\sum_k f_X(k)=1$ $\quad\quad$ $f_X(k)\ge 0\quad\forall k$
2. **פונקצית התפלגות מצטברת** פונקצית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי X מסומנת ע"י $F_X(x)$ ומוגדרת כפונקציה שתחומה הוא הישר הממשי וטווחה הקטע $[0,1]$ ומקיימת $F_X(x)=P(X\le x)\ \forall x$.
3. **תוחלת של משתנה מקרי בדיד** יהי c מספר קבוע: ו-X משתנה מיקרי בדיד בעל פונקצית הסתברות $f_X(k)$ אזי: התוחלת של X היא: $E(X)=\sum_k k\cdot f_X(k)$.
   תכונות של תוחלת $E(c)=c$, $E(cX)=cE(X)$, $E(X_1\pm X_2)=E(X_1)\pm E(X_2)$
4. **שונות של משתנה מקרי בדיד** $V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$.
   תכונות של שונות $V(cX)=c^2V(X)$, $V(X\pm c)=V(X)$.

משתנים מקרים בדידים מיוחדים

התפלגות בינומית: מבצעים n ניסויים בלתי תלויים. לכל ניסוי יש 2 תוצאות אפשריות: הצלחה עם הסתברות p או כישלון עם הסתברות q. X סופר את מס' הצלחות ב -n הניסויים.

$$X \sim B(n,p) \qquad P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \quad k=0,1,\dots n \qquad E(X)=np \qquad V(X)=npq$$

התפלגות גיאומטרית: מבצעים ניסויים בלתי תלויים עם הסתברות להצלחה p וכישלון q. X סופר את מס' הניסויים עד להצלחה הראשונה (כולל).

$$X \sim G(p) \qquad 0 \le p \le 1 \quad f_X(k)=\begin{cases} pq^{k-1} & k=1,2,\dots \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad E(X)=\frac{1}{p} \qquad V(X)=\frac{q}{p^2} \quad P(X>k)=q^k$$

פואסוני: משתנה זה סופר את מס' האירועים שהתרחשו ביחידת זמן.
λ הוא הקצב הממוצע ליחידת הזמן.

$$X \sim P(\lambda). \qquad P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad k=0,1,\dots \quad E(X)=\lambda \quad V(X)=\lambda$$

משתנים מקרים רציפים מיוחדים

התפלגות אחידה $X \sim U(\alpha,\beta)$:

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & \alpha<x<\beta \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad E(X)=\frac{\alpha+\beta}{2} \quad V(X)=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

התפלגות מעריכית: $X \sim Exp(\lambda) \quad \lambda>0$

<u>פונקציית צפיפות</u>:

$$f(X)=\begin{cases} \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot X} & X\ge 0 \\ 0 & X<0 \end{cases}$$

<u>פונקציית התפלגות</u>:

$$F(X)=\begin{cases} 0 & X\le 0 \\ 1-e^{-\lambda\cdot X} & X\ge 0 \end{cases}$$

<u>תוחלת ושונות</u>:

$$V(X)=\frac{1}{\lambda^2} \quad ; \quad E(X)=\frac{1}{\lambda}$$

התפלגות נורמלית- טבלאות רלוונטיות בהמשך דפי הנוסחאות.

משפט הגבול המרכזי

יהי X משתנה מקרי בעל תוחלת μ וסטיית תקן σ, $X_1,...,X_n$ מדגם מקרי מתוך X אזי:

כאשר $n \geq 30$ או לכל n במקרה ש X מתפלג נורמלית, מתקיים

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}), \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) ,$$

קירוב נורמלי להתפלגות בינומית

יהי $X \sim B(n,p)$ אז עבור $n \geq 30$ $X \sim N(np, npq)$

תיקון רציפות: $P(a \leq X \leq b)$ כמשתנה בדיד שווה ל - $P(a-0.5 < X < b+0.5)$ כמשתנה רציף.

רווח סמך ובדיקת השערות לתוחלת

1. באחד המקרים: א) σ **ידוע,** $n \geq 30$ **ב)** σ **ידוע,** $n < 30$ **ו** $\overline{X}$ **מתפלג נורמלית**

רווח סמך ברמת סמך $(1-\alpha)100\%$

$$\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

בדיקת השערות ברמת מובהקות α

$H_0 : \mu \leq \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ $C = \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\overline{X} \geq C$ – H_0 נדחית; $\overline{X} < C$ - H_0 מתקבלת

$H_0 : \mu \geq \mu_0$, $H_1 : \mu < \mu_0$ $C = \mu_0 - z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\overline{X} \leq C$ – H_0 נדחית, $\overline{X} > C$ - H_0 מתקבלת

$H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ $C_1 = \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $C_2 = \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\overline{X} \leq C_1$ או $\overline{X} \geq C_2$ - H_0 נדחית, $C_1 < \overline{X} < C_2$ - H_0 מתקבלת

2. σ **לא ידוע,** $n \geq 30$

רווח סמך ברמת סמך $(1-\alpha)100\%$

$$\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

בדיקת השערות ברמת מובהקות α

$H_0 : \mu \leq \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ $C = \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}}$ $\overline{X} \geq C$ – H_0 נדחית, $\overline{X} < C$ - H_0 מתקבלת

$H_0 : \mu \geq \mu_0$, $H_1 : \mu < \mu_0$ $C = \mu_0 - z_{1-\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}}$ $\overline{X} \leq C$ – H_0 נדחית, $\overline{X} > C$ - H_0 מתקבלת

$H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ $C_1 = \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$, $C_2 = \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$ $\overline{X} \leq C_1$ או $\overline{X} \geq C_2$ - H_0 נדחית, $C_1 < \overline{X} < C_2$ - H_0 מתקבלת

3. σ **לא ידוע,** $n<30$, $\overline{X}$ מתפלג נורמלית

רווח סמך ברמת סמך $(1-\alpha)100\%$

$$\overline{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

בדיקת השערות ברמת מובהקות α

$H_0:\mu\le\mu_0$
$H_1:\mu>\mu_0$

$C=\mu_0+t_{1-\alpha}^{n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$

$\overline{X}\ge C$ – H_0 נדחית, $\overline{X}<C$ - H_0 מתקבלת

$H_0:\mu\ge\mu_0$
$H_1:\mu<\mu_0$

$C=\mu_0-t_{1-\alpha}^{n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$

$\overline{X}\le C$ – H_0 נדחית, $\overline{X}>C$ - H_0 מתקבלת

$H_0:\mu=\mu_0$
$H_1:\mu\ne\mu_0$

$C_1=\mu_0-t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$

$C_2=\mu_0+t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$

$\overline{X}\le C_1$ או $\overline{X}\ge C_2$ - H_0 נדחית, $C_1<\overline{X}<C_2$ - H_0 מתקבלת

פונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה נורמלי סטנדרטי, $\Phi(z)$

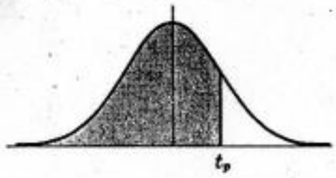
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

טבלת עזר: z כפונקציה של $\Phi(z)$

$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z
.50	0	.91	1.341	.995	2.576
.55	.126	.92	1.405	.999	3.090
.60	.253	.93	1.476	.9995	3.291
.65	.385	.94	1.555	.9999	3.719
.70	.524	.95	1.645	.99995	3.891
.75	.674	.96	1.751	.99999	4.265
.80	.842	.97	1.881	.999995	4.417
.85	1.036	.98	2.054	.999999	4.753
.90	1.282	.99	2.326	.9999999	5.199

TABLE

PERCENTILE VALUES (t_p) FOR STUDENT'S t DISTRIBUTION
with n degrees of freedom
(shaded area = p)



n	$t_{.995}$	$t_{.99}$	$t_{.975}$	$t_{.95}$	$t_{.90}$	$t_{.80}$	$t_{.75}$	$t_{.70}$	$t_{.60}$	$t_{.55}$
1	63.66	31.82	12.71	6.31	3.08	1.376	1.000	.727	.325	.158
2	9.92	6.96	4.30	2.92	1.89	1.061	.816	.617	.289	.142
3	5.84	4.54	3.18	2.35	1.64	.978	.765	.584	.277	.137
4	4.60	3.75	2.78	2.13	1.53	.941	.741	.569	.271	.134
5	4.03	3.36	2.57	2.02	1.48	.920	.727	.559	.267	.132
6	3.71	3.14	2.45	1.94	1.44	.906	.718	.553	.265	.131
7	3.50	3.00	2.36	1.90	1.42	.896	.711	.549	.263	.130
8	3.36	2.90	2.31	1.86	1.40	.889	.706	.546	.262	.130
9	3.25	2.82	2.26	1.83	1.38	.883	.703	.543	.261	.129
10	3.17	2.76	2.23	1.81	1.37	.879	.700	.542	.260	.129
11	3.11	2.72	2.20	1.80	1.36	.876	.697	.540	.260	.129
12	3.06	2.68	2.18	1.78	1.36	.873	.695	.539	.259	.128
13	3.01	2.65	2.16	1.77	1.35	.870	.694	.538	.259	.128
14	2.98	2.62	2.14	1.76	1.34	.868	.692	.537	.258	.128
15	2.95	2.60	2.13	1.75	1.34	.866	.691	.536	.258	.128
16	2.92	2.58	2.12	1.75	1.34	.865	.690	.535	.258	.128
17	2.90	2.57	2.11	1.74	1.33	.863	.689	.534	.257	.128
18	2.88	2.55	2.10	1.73	1.33	.862	.688	.534	.257	.127
19	2.86	2.54	2.09	1.73	1.33	.861	.688	.533	.257	.127
20	2.84	2.53	2.09	1.72	1.32	.860	.687	.533	.257	.127
21	2.83	2.52	2.08	1.72	1.32	.859	.686	.532	.257	.127
22	2.82	2.51	2.07	1.72	1.32	.858	.686	.532	.256	.127
23	2.81	2.50	2.07	1.71	1.32	.858	.685	.532	.256	.127
24	2.80	2.49	2.06	1.71	1.32	.857	.685	.531	.256	.127
25	2.79	2.48	2.06	1.71	1.32	.856	.684	.531	.256	.127
26	2.78	2.48	2.06	1.71	1.32	.856	.684	.531	.256	.127
27	2.77	2.47	2.05	1.70	1.31	.855	.684	.531	.256	.127
28	2.76	2.47	2.05	1.70	1.31	.855	.683	.530	.256	.127
29	2.76	2.46	2.04	1.70	1.31	.854	.683	.530	.256	.127
30	2.75	2.46	2.04	1.70	1.31	.854	.683	.530	.256	.127
40	2.70	2.42	2.02	1.68	1.30	.851	.681	.529	.255	.126
60	2.66	2.39	2.00	1.67	1.30	.848	.679	.527	.254	.126
120	2.62	2.36	1.98	1.66	1.29	.845	.677	.526	.254	.126
∞	2.58	2.33	1.96	1.645	1.28	.842	.674	.524	.253	.126

נושא: זהויות טריגונומטריות, נגזרות ואינטגרלים

זהויות טריגונומטריות:

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \;,\quad \sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \;,\quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \;,\quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

כללי גזירה:

מכפלה:

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

הרכבה:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

מנה:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

הפוכה:

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$$

טבלת נגזרות ואינטגרלים בסיסיים:

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \;,\; n \neq -1$	$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot \ln a},\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \;,\; \int e^x\,dx = e^x + C$	$(a^x)' = a^x\cdot \ln a,\quad (e^x)' = e^x$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \;,\; \int \cos x\,dx = \sin x + C$	$(\sin x)' = \cos x \;,\; (\cos x)' = -\sin x$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tg\,x + C$	$(tg\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\int \frac{-1}{\sin^2 x}dx = ctg\,x + C$	$(ctg\,x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos x + C$	$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctg\,x + C$	$(arctg\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$\int \frac{-1}{1+x^2}dx = arcctg\,x + C$	$(arcctg\,x)' = \frac{-1}{1+x^2}$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+p}}dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+p}\right\rvert + C$	