

המחלקה למדעי המחשב

13 – 12 – 22
09 : 10 – 10 : 40

חדו"א 1 למדעי המחשב

בוחן אמצע סמסטר

מרצים: ד"ר יבגניה אקרמן ד"ר ירמיהו מילר

תשפ"ג סמסטר א'

השאלון מכיל עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (עמודים בפורמט A4), מצורפים לשאלון.
- אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:
- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לענות על שאלות 1-3.

שאלה 1 (25 נקודות)

נתונה פונקציה $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$.

- (1) (4 נק') מצאו את תחום ההגדרה ואת התמונה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) (6 נק') מצאו את הפונקציה ההפוכה ל- $f(x)$.
- (3) (4 נק') מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של הפונקציה ההפוכה.
- (4) (6 נק') שרטטו את סקיצות הגרפים של שתי הפונקציות (פונקציה $f(x)$ והפונקציה ההפוכה).
- (5) (5 נק') שרטטו את הגרף של הפונקציה $|f(x)|$.

שאלה 2 (25 נקודות)

עבור הפונקציה $f(x) = \frac{4}{x(x-2)}$

- (1) (4 נק') מצאו את תחום ההגדרה, החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, וסימני הפונקציה.
- (2) (7 נק') בררו את התנהגות הפונקציה באינסוף. האם קיימת אסימפטוטה אופקית? נמקו את תשובתכם.
- (3) (7 נק') בררו את התנהגות הפונקציה סביב נקודות אי הגדרה. האם קיימת אסימפטוטה אנכית? נמקו את תשובתכם.
- (4) (7 נק') ציירו את הסקיצה של גרף הפונקציה על סמך התוצאות של הסעיפים הקודמים.

שאלה 3 (25 נקודות)

(1) (15 נק') חשבו את הגבולות הבאים

(א) (5 נק') $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2 + 2x + 1} \right)^{x+1}$

(ב) (5 נק') $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3 \cdot 8^x + 2^x}{4 \cdot 8^x + 3^x} \right)$

(ג) (5 נק') $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \sin(2x) + \sin(4x)}{x + \tan(4x)} \right)$

- (2) (10 נק') נתונה הפונקציה $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & x \leq 4 \\ 4x - 5 & x > 4 \end{cases}$. האם הגבול $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ קיים? נמקו את תשובתכם.

שאלה 4 (25 נקודות)

א) (15 נק') עבור הפונקציה הבאה בדקו אם ישנן נקודות אי רציפות בנקודות התפר, וקבעו את סוגן:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1 + e^{2/x} & x < 0 \end{cases}$$

ב) (10 נק') לאילו ערכים אי-שליליים a יש לפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + a}$ נקודת אי-רציפות סליקה?

פתרונות

שאלה 1

(1) (4 נק')

$\{x \geq -1\}$	תחום הגדרה
$\{y \geq -2\}$	תמונה

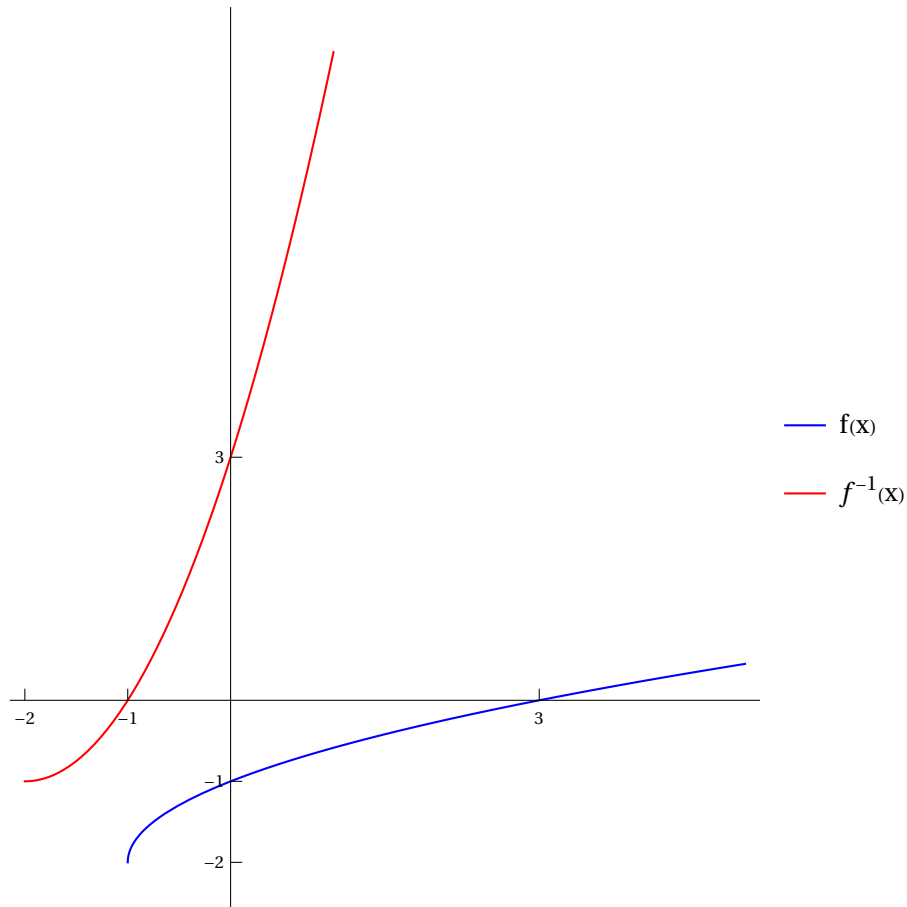
(2) (6 נק')

$$f^{-1}(x) = x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3) .$$

(3) (4 נק')

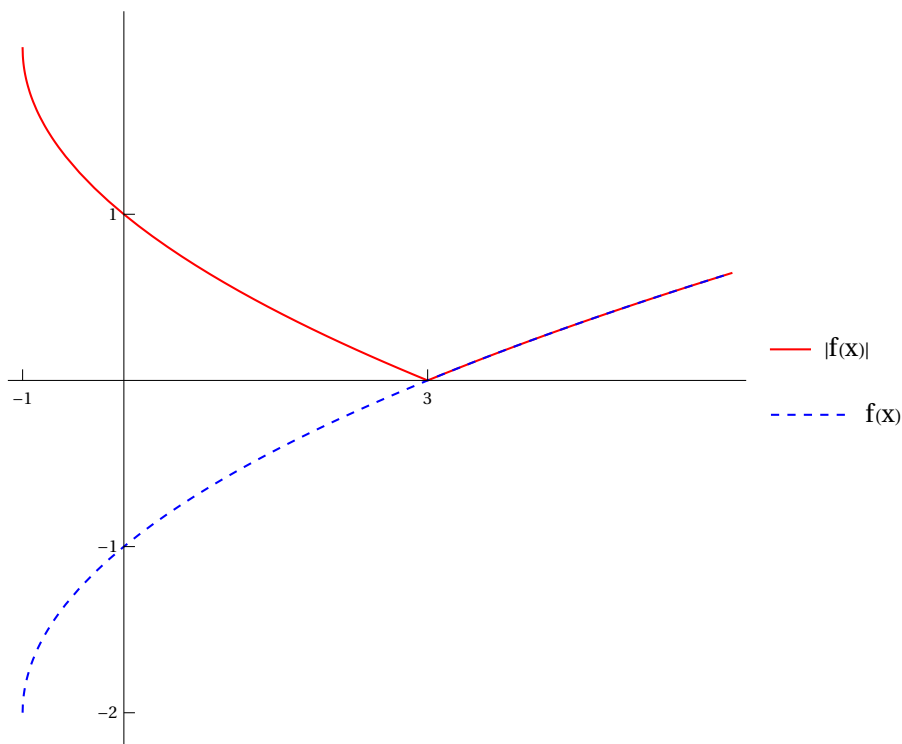
$\{x \geq -2\}$	תחום הגדרה
$\{y \geq -1\}$	תמונה

(4) (6 נק')



(5) (5 נק')

$|f(x)|$



שאלה 2

(1) (4 נק') תחום הגדרה: $\{x \neq 0, 2\}$

נקודות חיתוך: אין.

סימני הפונקציה:

x	$x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
$f(x)$	+	-	+

(2) (7 נק')

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x(x-2)} = \frac{4}{\infty \cdot (\infty - 2)} = \frac{4}{\infty} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x(x-2)} = \frac{4}{-\infty \cdot (-\infty - 2)} = \frac{4}{\infty} = 0^+$$

לכן $y = 0$ אסימפטוטה אופקית ב $x = \pm\infty$.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245,84 | www.sce.ac.il | חייג: *מפחזס

(3) (7 נק')

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4}{x(x-2)} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{x(x-2)} = -\infty$$

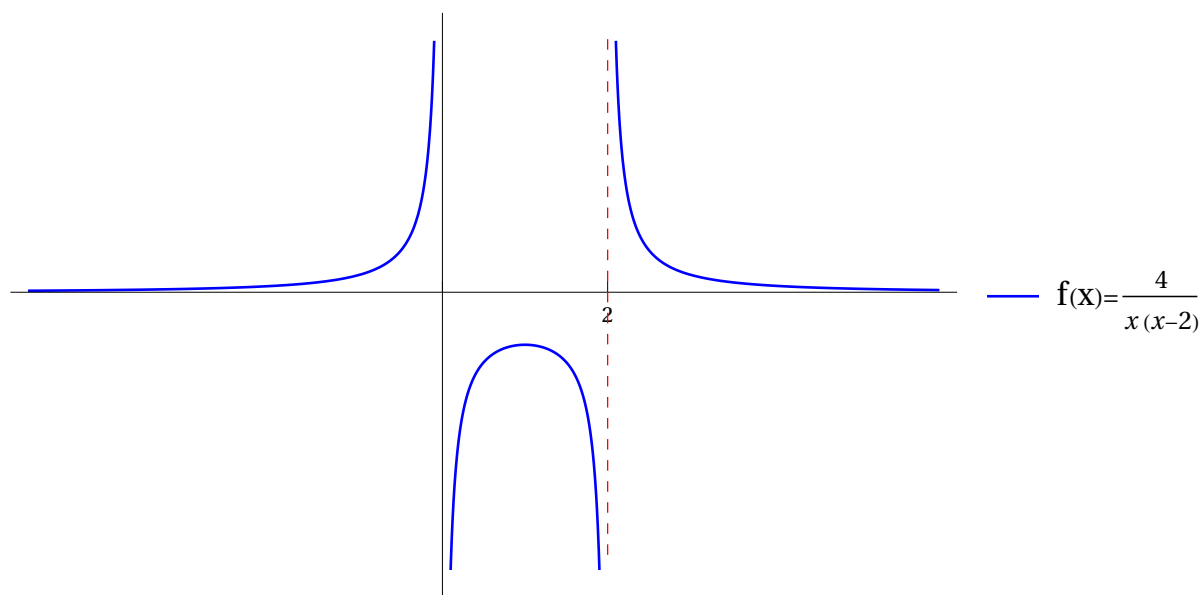
לכן קיימת אסימפטוטה אנכית ב $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4}{x(x-2)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{x(x-2)} = +\infty$$

לכן קיימת אסימפטוטה אנכית ב $x = 2$.

(4) (7 נק')



שאלה 3 (25 נקודות)

(1) (15 נק')

(א) (5 נק')

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2 + 2x + 1} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2} \right)^{-(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x + 1}{x^2} \right)^{-(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x + 1}{x^2} \right)^{\frac{2x + 1}{x^2} \cdot \frac{-(x+1)(2x+1)}{x^2}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-(x+1)(2x+1)}{x^2}} \\ &= e^{-2}. \end{aligned}$$

(ב) (5 נק')

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3 \cdot 8^x + 2^x}{4 \cdot 8^x + 3^x} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{3 \cdot 8^x}{8^x} + \frac{2^x}{8^x}}{\frac{4 \cdot 8^x}{8^x} + \frac{3^x}{8^x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3 \cdot \left(\frac{8}{8}\right)^x + \left(\frac{2}{8}\right)^x}{4 \left(\frac{8}{8}\right)^x + \left(\frac{3}{8}\right)^x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3 \cdot 1 + \left(\frac{2}{8}\right)^x}{4 \cdot 1 + \left(\frac{3}{8}\right)^x} \right) \\ &= \left(\frac{3 \cdot 1 + \left(\frac{2}{8}\right)^\infty}{4 \cdot 1 + \left(\frac{3}{8}\right)^\infty} \right) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(ג) (5 נק')

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \sin(2x) + \sin(4x)}{x + \tan(4x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \frac{\sin(2x)}{x} + \frac{\sin(4x)}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{\tan(4x)}{x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \frac{2 \sin(2x)}{2x} + \frac{4 \sin(4x)}{4x}}{1 + \frac{4 \tan(4x)}{4x}} \right) \\ &= \left(\frac{3 \cdot 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} + 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{4x}}{1 + 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(4x)}{4x}} \right) \\ &= \left(\frac{6 + 4}{1 + 4} \right) \\ &= 2\end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & x \leq 4 \\ 4x - 5 & x > 4 \end{cases} \quad (2) \text{ (10 נק')}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (x^2 - 3x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (4x - 5) = 11,$$

נקודת אי-רציפות סוג ראשון. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$

שאלה 4

(א) (15 נק')

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + e^{2/x}) = 1 + e^{2/0^-} = 1 + e^{-\infty} = 1 + \frac{1}{e^\infty} = 1 + \frac{1}{\infty} = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x)}{x} = 2 \frac{\sin(2x)}{2x} = 2$$

$$f(0) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{נק' אי-רציפות ממין ראשון.}$$

(ב) (10 נק')

$$:a = 3$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -3, \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -3,$$

$f(-3)$ לא מוגדרת, אז $x = -3$ נק' אי-רציפות סליקה.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

$$:a = 0$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3,$$

$f(0)$ לא מוגדרת, אז $x = 0$ נק' אי-רציפות סליקה.