'

שעור 6
משחק בייסיאני

6.1 משחק בייסיאני

במשחק עם מידע מלא, כל פונקצית התשלום של כל השחקן היא ידיעה משותפת. בניגוד, במשחק עם מידע לא מלא, יש לפחות שחקן אחד עם אי-ודאות על פונקית התשלום של לפחות שחקן אחד אחר.

דוגמה נפוצה של משחק אם מידע לא מלא היא מכרז סגור, שבו השחקנים לא יודעים את ההצעות של שאר השחקנים.

הגדרה 6.1 משחק בייסיאני

הצורה הנורמלית של משחק בייסיאני n שחקנים היא

$$G = \{ \{A_1, \ldots, A_n\} , \ \{T_1, \ldots, T_n\} , \ \{p_1, \ldots, p_n\} , \ \{u_1, \ldots, u_n\} \}$$

כאשר

- A_i הקבוצת הפעולות של שחקן i.
- $T_i = (t_i^1, t_i^2, \ldots)$ הקבוצות הטיפוסים של שחקן i.
- p_i מסמן את **האמונה** של שחקן i בטיפוסים האפשריים של שאר ה- $n-1$ שחקנים ומוגדר

$$p_i = P\left(t_{-i} | t_i\right)$$

כאשר $t_{-i} = (t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n)$.

לפי הרסיניי (1967) התזמון של משחק בייסיאני הוא לפי הסדר הבא:

1) צעד גורל בוחר בווקטור טיפוסים $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ כאשר t_i נבחר מהקבוצת טיפוסים האפשריים T_i.

2) שחקן הגורל מגלה t_i לשחקן i אבל לא לאף שחקן אחר.

3) השחקנים בוחרים בפעולות. שחקן 1 בוחר בפעולה a_1 מקבוצת הפעולות A_1, שחקן 2 בוחר בפעולה a_2 מקבוצת הפעולות A_2, וכן הלא.

4) שחקן i מקבל תשלום

$$u_i\left(a_1, a_2, \ldots, a_n; t_i\right) \ .$$

אנחנו מניחים שזה ידיעה משותפת שבשלב 1 של התזמון של משחק בייסיאני, שחקן הגורל בוחר בוקטור טיפוסים $t = (t_1, \ldots, t_n)$ לפי פונקצית ההסתברות $p(t)$.
כאשר שחקן הגורל מגלה את t_i לשחקן i, הוא מחשב את האמונה

$$p_i = P\left(t_{-i} | t_i\right) = \frac{P\left(t_{-i} \cap t_i\right)}{P\left(t_i\right)} = \frac{P\left(t_{-i} \cap t_i\right)}{\sum\limits_{t_{-i} \in T_{-i}} P\left(t_{-i} \cap t_i\right)}$$

דוגמה 6.1 ()

אליס (שחקן I שחקן השורה) ובוב (שחקן II שחקן העמודה) משחקים משחק שבו פונקצית התשלומים היא אחת משתי פונקציות התשלומים המופיעות למטה. במשחק זה יש לבוב שתי סעולות אפשריות a ו- b ולאליס יש שתיים או שלוש פעולות אפשריות, כתלות בפונקצית התשלומים שנבחרה.

$t_1 = \text{buy}$:

המשחק הנסתר G_1

$I \backslash II$	a	b
U	$1,0$	$0,2$
V	$0,3$	$1,0$

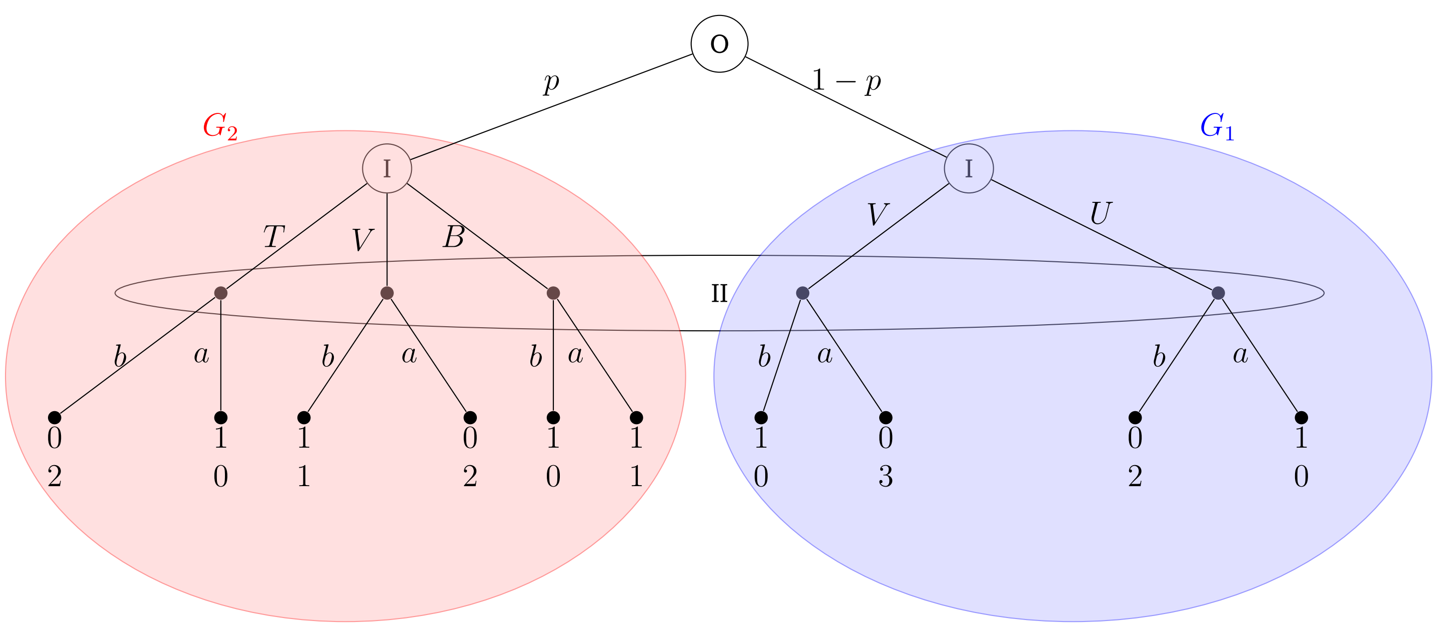
$t_1 = \text{sell}$:

המשחק הנסתר G_2

$I \backslash II$	a	b
U	$1,1$	$1,0$
V	$0,2$	$1,1$
W	$1,0$	$0,2$

אליס יודעת את פונקצית התשלומים (ולכן היא בפרט יודעת אם ברשותה שתיים או שלוש פעולות) ובוב יודע רק שפונקציות התשלומים ניתנות או על ידי המירצה G_1 או על ידי המטריצה G_2. הוא מייחס הסתברות p לכך שנטריצת התשלומים היא G_1 והסתברות $1-p$ לכך שמטריצת התשלומים היא G_2. תיאור זה ידיעה משותפת בין אליס ובוב.

- הקבוצת בטיפוסים של שחקן I הן
$$T_1 = (\text{buy}, \text{sell}) \quad , \quad T_2 = (t_2) \ .$$
לשחקן II יש רק טיפוס אחד שנסמן $T_2 = \{t_2\}$.
- הפעולות האפשריים של I הן
$$A_1 = (U, V, W)$$
והפעולות האפשריים של II הן
$$A_2 = (a, b) \ .$$
- יש רק אפשרות אחת לאמונה של שחקן I:
$$p_1 = P\left(t_2 | t_1 = \text{buy}\right) = 1$$
יש שתי אפשרויות לאמונה של שחקן II:
$$p_2 = P\left(t_1 = \text{buy} | t_2\right) \ , \qquad p_2 = P\left(t_1 = \text{sell} | t_2\right) \ .$$
נסמן $P\left(t_1 = \text{buy} | t_2\right) = p$ ו- $P\left(t_1 = \text{sell} | t_2\right) = 1-p$.



מצב אמונות זה הוא מצב האמונות של השחקנים במשחק בצורה רחבה המופיע לעיל. ברגע שהשחקנים באים לשחק את פעולותיהם. במשחק זה צעד גורל בוחר את G_1 ו- G_2 לפי ההסתברויות p ו- $1-p$ בהתאמה. הבחירה נודעת לאליס אך לא לבוב. בעץ המשחק כל משחק נסתר מוקף באליפסה. אף אחד משני המשחקים הנסתרים אינו תת-משחק מכיוון שישנה קבוצת ידיעה המכילה קדקודים בשניהם.

הגדרה 6.2 אסטרטגיה במשחק בייסיאני

נתון בייסיאני:

$$G=\{(A_1,\ldots,A_n)\,,\ (T_1,\ldots,T_n)\,,\ (p_1,\ldots,p_n)\,,\ u_1,\ldots,u_n\}\ .$$

אסטרטגיה של שחקן i היא פונקציה $s_i(t_i)$ אשר משייכת לכל $t_i\in T_i$ פעולה a_i שבוחר שחקן i מטיפוס t_i עת פי האסטרטגיה s_i.

דוגמה 6.2 (דילמה השריף)

שריף עומד מול חשוד חמוש. שניהם צריכים להחליט בו זמנית אם לירות בשני או לא.

החשוד יכול להיות מטיפוס "פושע" או מטיפוס "אזרח". לשריף יש רק טיפוס אחד. החשוד יודע את טיפוסו ואת טיפוס השריף, אך השריף אינו יודע את טיפוסוו של החשוד. לפיכך, יש מידע לא שלם. לכן המשחק זה הוא משחק בייסיאני.

השריף מעדיף להגן על עצמו ולירות אם החשוד יורה, או לא לירות אם החשוד לא עושה זאת (גם אם החשוד עבריין). החשוד מעדיף לירות אם הוא עבריין, גם אם השריף לא יורה, אבל מעדיף לא לירות אם הוא אזרח, גם אם השריף יורה.

רשמו את המשחק בצורה רחבה ובצורה אסטרטגית.

פתרון:

נקרא לחשוד שחקן I ונקרא לשריף שחקן II. השריף מייחס הסתברות p לכך שחשוד הוא מטיפוס "פושע" והסתברות $1-p$ שהחשוד מטיפוס "אזרח".

שני השחקנים מודעים להסתברות הזו.

משחק זה מוגדר על ידי

$$G=\{N,(A_1,A_2),(T_1,T_2),(p_1,p_2),(u_1,u_2)\}$$

- כאשר קבוצת השחקנים הינה

$$N=\{I,II\}=\{\text{שריף},\text{חשוד}\}\ .$$

- קבוצת הפעולות הן

$$A_1=\{a_1^1,a_1^2\}=\{\text{לא לירות},\text{לירות}\}\ ,\qquad A_2=\{a_2^1,a_2^2\}=\{\text{לא לירות},\text{לירות}\}\ .$$

- הטיפוסים הינם

$$T_{\text{חשוד}}=T_1=\{t_1^1,t_1^2\}=\{\text{אזרח},\text{פשוע}\}\ ,\qquad T_{\text{שריף}}=T_2=\{t_2\}\ .$$

- יש שתי אפשרויות לאמונה של שחקן II (השריף):

$$p_2=P\left(t_1=\text{פושע}|t_2\right)=p\ ,\qquad p_2=P\left(t_1=\text{אזרח}|t_2\right)=1-p\ .$$

- הפונקצית התשלומים ניתנת בהצורה אסטרטגית למטה:

$t_{\text{חשוד}} =$ אזרח

חשוד I \ שריף II	shoot	not shoot
shoot	$-3, -1$	$-1, -2$
not shoot	$-2, -1$	$0, 0$

$t_{\text{חשוד}} =$ פושע

חשוד I \ שריף II	shoot	not shoot
shoot	$0, 0$	$2, -2$
not shoot	$-2, -1$	$-1, 1$

האסטרטגיה של שחקן I (החשוד), לפי התיאור בשאלה, היא

$$s_1\left(t_1 = \text{פושע}\right) = \text{לא לירות}\ , \qquad s_1\left(t_1 = \text{פושע}\right) = \text{לירות}\ .$$

כעת נמצא את השווי משקל הבייסיאני.
אם טיפוסו של החשוד הוא "פושע", האסטרטגיה השולטת של החשוד היא "לירות".
אם טיפוסו של החשוד הוא "אזרח", האסטרטגיה השולטת של החשוד היא "לא לירות".
לאחר סילוק של אסטרטגיות הנשלטות חזק,
אם השריף יורה הוא יקבל תשלום 0 בהסתברות p ויקבל תשלום -1 בהסתברות $1-p$. כלומר תוחלת התשלום של השריף היא $p-1$.
אם השריף לא יורה הוא יקבל תשלום -2 בהסתברות p ויקבל תשלום 0 בהסתברות $1-p$. כלומר תוחלת התשלום של השריף היא $-2p$.

לפיכך השריף תמיד יורה אם

$$p-1 > -2p \quad \Rightarrow \quad p > \frac{1}{3}\ .$$

■

הגדרה 6.3 שווי משקל נאש בייסיאני

נתון משחק בייסיאני:

$$G = \{(A_1, \ldots, A_n)\ ,\ (T_1, \ldots, T_n)\ ,\ (p_1, \ldots, p_n)\ ,\ u_1, \ldots, u_n\}\ .$$

הווקטור אסטרטגיות $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ הוא שווי משקל נאש בייסיאני אם לכל שחקן i ולכל טיפוס $t_i \in T_i$:

$$\sum_{t_{-i} \in T_i} u_i\left(s_1^*(t_1), \ldots, s_i^*(t_i), \ldots, s_n^*(t_n)\right) P(t_{-i}|t_i) = \max_{a_i \in A_i} \sum_{t_{-i} \in T_i} u_i\left(s_1^*(t_1), \ldots, a_i, \ldots, s_n^*(t_n)\right) P(t_{-i}|t_i)$$

ז"א אף שחקן לא רוצה לשנות את האסטרטגיה שלו (שלה), גם אם השינוי הוא בפעולה אחת בטיפוס אחד.

הגדרה 6.4 משחק שני שחקנים בייסיאני

הצורה הנורמלית של משחק בייסיאני 2 שחקנים היא

$$G = \{(A_1, A_2)\ ,\ (T_1, T_2)\ ,\ (p_1, p_2)\ ,\ u_1, u_2\}$$

כאשר

- $A_1 = \{a_1, b_1, \ldots\}$ קבוצת הפעולות לשחקן 1 ו- $A_2 = \{a_2, b_2, \ldots\}$ קבוצת הפעולות לשחקן 2
- T_1 קבוצת ערכים פרטיים של שחקן 1 ו- T_2 קבוצת ערכים פרטיים של שחקן 2.

- p_1 מסמן את ההסתברות לפי שחקן 1, שהערך פרטי של שחקן 2 הוא t_2 בידיעה שהערך פרטי שלו הוא t_1:
$$p_1 = P\left(t_2|t_1\right)$$
וכן p_2 מסמן את ההסתברות לפי שחקן 2, שהערך פרטי של שחקן 1 הוא t_1 בידיעה שהערך פרטי שלו הוא t_2:
$$p_2 = P\left(t_1|t_2\right)$$
- u_1 פונקציית התשלום של שחקן 1 שהיא פונקציה של הפעולות $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ והערך הפרטי שלו $t_1 \in T_1$ שידוע רק לשחקן 1:
$$u_1(a_1, a_2, t_1)$$
וכן u_2 פונקציית התשלום של שחקן 2 שהיא פונקציה של הפעולות $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ והערך הפרטי שלו $t_2 \in T_2$ שידוע רק לשחקן 2:
$$u_2(a_1, a_2, t_2)\ .$$

הגדרה 6.5 אסטרטגיה במשחק שני שחקנים בייסיאני

נתון משחק שני שחקנים בייסיאני:
$$G = \left\{\left(A_1, A_2\right),\ \left(T_1, T_2\right),\ \left(p_1, p_2\right),\ u_1, u_2\right\}\ .$$
אסטרטגיה לשחקן 1 היא פונקציה $s_1(t_1)$ של $t_1 \in T_1$ כך שלכל $t_1 \in T_1$ הפונקציה $s_1(t_1)$ נותנת פעולה $a_1 \in A_1$
$$s_1 : t_1 \mapsto a_1\ .$$
וכן אסטרטגיה של שחקן 2 היא פונקציה $s_2(t_2)$ של $t_2 \in T_2$ כך שלכל $t_2 \in T_2$ הפונקציה $s_2(t_2)$ נותנת פעולה $a_2 \in A_2$
$$s_2 : t_2 \mapsto a_2\ .$$

הגדרה 6.6 שיווי משקל נאש בייסיאני

נתון משחק שני שחקנים בייסיאני:
$$G = \left\{\left(A_1, A_2\right),\ \left(T_1, T_2\right),\ \left(p_1, p_2\right),\ u_1, u_2\right\}\ .$$
הווקטור אסטרטגיות (s_1^*, s_2^*) הוא שיווי משקל נאש בייסיאני אם
$$\sum_{t_2\in T_2} u_1\left(s_1^*(t_1), s_2^*(t_2)\right) P(t_2|t_1) = \max_{a_1\in A_1} \sum_{t_2\in T_2} u_1\left(a_1, s_2^*(t_2)\right) P(t_2|t_1)$$
$$\sum_{t_1\in T_1} u_2\left(s_1^*(t_1), s_2^*(t_2)\right) P(t_1|t_2) = \max_{a_2\in A_2} \sum_{t_1\in T_1} u_2\left(s_1^*(t_1), a_2\right) P(t_1|t_2)$$

דוגמה 6.3 (מלחמת המינים עם ידיעה לא שלמה)

זוג מתכנן בילוי למוצא שבת. האפשרויות העומדות לרשותם הן מסעדה (Restaurant (R)) או צפייה במשחק כדורגל, (Football (F)). הגבר Pete (P) מעדיף צפייה במשחק הכדורגל בעוד האישה Camilla (C) מעדיפה את המסעדה אך שניהם מעדיפים להיות ביחד גם אם הבילוי המשותף הוא הפחות עדיף בעיניהם.

Camilla מקבלת תשלום $2 + t_c$ אם שניהם הולכים למסעדה כאשר t_c ערך פרטי שידוע רק ל- Camilla ולא ל- Pete.

Pete מקבל תשלום $2+t_p$ אם שניהם הולכים למשחק כדורגל כאשר t_p ערך פרטי שידוע רק ל- Pete ולא ל- Camilla.

Camilla \ Pete	Restaurant	Football
Restaurant	$2+t_c, 1$	$0, 0$
Football	$0, 0$	$1, 2+t_p$

הערך הפרטי t_C מתפלג אחיד בטווח $[0,x]$ ו t_P מתפלג אחיד בטווח $[0,x]$.
t_P ו- t_C בלתי תלויים.

Camilla משחקת R אם t_C גדול מערך מסויים α, אחרת היא משחקת F.

Pete משחק F אם t_P גדול מערך מסויים β, אחרת הוא משחק R.

מצאו את הערכים של α ו- β עבורם הווקטור אסטרטגיות $(R,F)=(s_1^*,s_2^*)$ שיווי משקל נאש בייסיאני של המשחק.

פתרון:

C \ P	R	F
R	$2+t_c, 1$	$0, 0$
F	$0, 0$	$1, 2+t_p$

$$G=\{(A_C,A_P),(T_C,T_P),(p_C,p_P),u_C,u_P\}$$

t_C ו- t_P מתפלגים אחידה בתחום $[0,x]$ והם בלתי תלויים, לכן

$$p_C=P(t_C|t_P)=P(t_C)\ ,\qquad p_P=P(t_P|t_C)=P(t_P)\ .$$

$$A_C=\{\text{Restaurant},\text{Football}\}=\{R,F\}\ ,\qquad A_P=\{\text{Restaurant},\text{Football}\}=\{R,F\}\ .$$

Camilla משחקת R בהסתברות $\dfrac{x-\alpha}{x}$ ומשחקת F בהסתברות $\dfrac{\alpha}{x}$.

Pete משחק F בהסתברות $\dfrac{x-\beta}{x}$ ומשחק R בהסתברות $\dfrac{\beta}{x}$.

תשלום ל- Camilla אם היא משחקת R:

$$u_1(s_1=R)=\frac{\beta}{x}(2+t_C)+\left(\frac{x-\beta}{x}\right)\cdot 0=\frac{\beta}{x}(2+t_C)\ .$$

תשלום ל- Camilla אם היא משחקת F:

$$u_1(s_1=F)=\frac{\beta}{x}\cdot 0+\left(\frac{x-\beta}{x}\right)\cdot 1=\frac{1-\beta}{x}\ .$$

$$u_1(s_1=R)\geq u_1(s_1=F) \quad\Rightarrow\quad \frac{\beta}{x}\left(2+t_C\right)\geq \frac{x-\beta}{x} \quad\Rightarrow\quad t_C\geq \frac{x-\beta}{\beta}-2=\frac{x}{\beta}-3 \stackrel{!}{=} \alpha \ .$$

תשלום ל- Pete אם הוא משחק R:

$$u_2\left(s_2=R\right)=\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)\cdot 1+\frac{\alpha}{x}\cdot 0=1-\frac{\alpha}{x} \ .$$

תשלום ל- Pete אם הוא משחק F:

$$u_2\left(s_2=F\right)=\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)\cdot 0+\frac{\alpha}{x}\left(2+t_P\right)=\frac{\alpha}{x}\left(2+t_P\right) \ .$$

$$u_2(s_2=F)\geq u_2(s_2=R) \quad\Rightarrow\quad \frac{\alpha}{x}\left(2+t_P\right)\geq 1-\frac{\alpha}{x} \quad\Rightarrow\quad \left(2+t_P\right)\geq \frac{x}{\alpha}-1 \quad\Rightarrow\quad t_P\geq \frac{x}{\alpha}-3 \stackrel{!}{=} \beta \ .$$

הפתרון של המערכת הוא

$$\frac{x}{\left(\frac{x}{\beta}-3\right)}-3=\beta \quad\Rightarrow\quad x-\frac{3x}{\beta}+9=x-3\beta \quad\Rightarrow\quad -\frac{3x}{\beta}+9+3\beta=0 \quad\Rightarrow\quad -3x+9\beta+3\beta^2=0$$

$$\Rightarrow\quad \beta^2+3\beta-x=0 \quad\Rightarrow\quad \beta=\frac{-3+\sqrt{9+4x}}{2} \ .$$

לכן $\frac{x}{\alpha}-3=\beta$

$$\alpha=\frac{x}{3+\beta}=\frac{2x}{3+\sqrt{9+4x}}=\frac{2x}{3+\sqrt{9+4x}}\cdot\left(\frac{3-\sqrt{9+4x}}{3-\sqrt{9+4x}}\right)=\frac{-3+\sqrt{9+4x}}{2}=\beta$$

לכן התשובה סופית היא האסטרטגיה $(s_1^*,s_2^*)=(R,F)$ שיווי משקל אם

$$t_C\geq\alpha=\frac{-3+\sqrt{9+4x}}{2} \ , \qquad t_P\geq\beta=\frac{-3+\sqrt{9+4x}}{2} \ .$$

■

דוגמה 6.4 (מכרז מחיר ראשון)

במכרז מחיר ראשון שני שחקנים $i=1,2$ מתחרים על קניית מוצר מסוים. שחקן 1 מעריך שהמוצר שווה v_1 ושחקן 2 מעריך כי המוצר שווה v_2. ז"א אם שחקן i מנצח ומשלם מחיר p אז הרווח שלו יהיה v_i-p. ההערכות של השני שחקנים הם בלתי תלויים ומפולגים אחיד בתחום $[0,1]$. השחקן עם ההצעה הגבוה ביותר מנצח ומשלם את מחיר שווה להצעה שלו. השחקן השני לא משלם כלום. במקרה של תיקו מטילים מטבע. השחקנים אדישי סיכון.

פתרון:

$$G=\left\{\left(A_1,A_2\right),\left(T_1,T_2\right),\left(p_1,p_2\right),u_1,u_2\right\}$$

קבוצת הפעולות של שחקן 1 היא ההצעות האפשריות שלו, $b_1\in[0,\infty)$ וקבוצת הפעולות של שחקן 2 היא ההצעות האפשריות שלו $b_2\in[0,\infty)$

$$A_1=[0,\infty) \ , \qquad A_2=[0,\infty) \ .$$

הקבוצה T_1 של ערכים פרטיים של שחרן 1 היא הקבוצה של ההערכות $\mathrm{v}_1\in[0,1]$ של המוצר שלו, וכמו כן T_2 הוא הקבוצה של ההערכות $\mathrm{v}_2\in[0,1]$. לכן

$$T_1=[0,1] \ , \qquad T_2=[0,1] \ .$$

השתי ההערכות $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ בלתי תלויות לכן $p_1 = P(\mathrm{v}_2 = \beta | \mathrm{v}_1 = \alpha) = P(\mathrm{v}_2 = \beta) = \beta$ ז"א שחקן 1 מאמין כי הערך של v_2 הוא β בהסתברות β בלי קשר לערך של v_1. ולהפך, $p_2 = P(\mathrm{v}_1 = \alpha | \mathrm{v}_2 = \beta) = P(\mathrm{v}_1 = \alpha) = \alpha$ ז"א שחקן 2 מאמין כי הערך של v_1 הוא α בהסתברות α בלי קשר לערך של v_2.

$$u_1(b_1, b_2, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2) = \begin{cases} \mathrm{v}_1 - b_1 & b_1 > b_2 \\ \dfrac{\mathrm{v}_1 - b_1}{2} & b_1 = b_2 \\ 0 & b_1 < b_2 \end{cases} , \qquad u_2(b_1, b_2, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2) = \begin{cases} \mathrm{v}_2 - b_2 & b_2 > b_1 \\ \dfrac{\mathrm{v}_2 - b_2}{2} & b_2 = b_1 \\ 0 & b_2 < b_1 \end{cases} ,$$

הווקטור אסטרטגיות $\left(b_1^*(\mathrm{v}_1), b_2^*(\mathrm{v}_2)\right)$ שיווי משקל נאש בייסיאני אם

$$u_1\left(b_1^*, b_2^*, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\right) = \max_{b_1} \left[(\mathrm{v}_1 - b_1)\, P\left(b_1 > b_2^*(\mathrm{v}_2)\right) + \frac{1}{2} (\mathrm{v}_1 - b_1)\, P\left(b_1 = b_2^*(\mathrm{v}_2)\right) \right]$$

ו-

$$u_2\left(b_1^*, b_2^*, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\right) = \max_{b_2} \left[(\mathrm{v}_2 - b_2)\, P\left(b_2 > b_1^*(\mathrm{v}_1)\right) + \frac{1}{2} (\mathrm{v}_2 - b_2)\, P\left(b_2 = b_1^*(\mathrm{v}_1)\right) \right]$$

אנחנו משערים כי קיים שיווי משקל לינארי:

$$b_1^*(\mathrm{v}_1) = a_1 + c_1 \mathrm{v}_1 , \qquad b_2^*(\mathrm{v}_2) = a_2 + c_2 \mathrm{v}_2 .$$

נניח כי שחקן 2 בוחר באסטרטגיה $b_2^*(\mathrm{v}_2) = a_2 + c_2 \mathrm{v}_2$. אז עבור הערך v_2, תשובה טובה ביותר b_1^* לשחקן 1 מקיימת

$$\begin{aligned} u_1\left(b_1^*, b_2^*, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\right) &= \max_{b_1} \left[(\mathrm{v}_1 - b_1)\, P\left(b_1 > a_2 + c_2 \mathrm{v}_2\right) + \frac{1}{2} (\mathrm{v}_1 - b_1) \cancelto{0}{P\left(b_1 = a_2 + c_2 \mathrm{v}_2\right)} \right] \\ &= \max_{b_1} (\mathrm{v}_1 - b_1)\, P\left(\mathrm{v}_2 < \frac{b_1 - a_2}{c_2} \right) \\ &= \max_{b_1} (\mathrm{v}_1 - b_1) \left(\frac{b_1 - a_2}{c_2} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial b_1} \left(\frac{1}{c_2} (\mathrm{v}_1 - b_1)(b_1 - a_2) \right) = \frac{\mathrm{v}_1 + a_2 - 2b_1}{c_2} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad b_1^* = \frac{\mathrm{v}_1 + a_2}{2}$$

נניח כי שחקן 1 בוחר באסטרטגיה $b_1^*(\mathrm{v}_1) = a_1 + c_1 \mathrm{v}_1$. אז עבור הערך v_1, תשובה טובה ביותר b_2^* לשחקן 2 מקיימת

$$\begin{aligned} u_2\left(b_1^*, b_2^*, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\right) &= \max_{b_2} \left[(\mathrm{v}_2 - b_2)\, P\left(b_2 > a_1 + c_1 \mathrm{v}_1\right) + \frac{1}{2} (\mathrm{v}_2 - b_2) \cancelto{0}{P\left(b_2 = a_1 + c_1 \mathrm{v}_1\right)} \right] \\ &= \max_{b_2} (\mathrm{v}_2 - b_2)\, P\left(\mathrm{v}_1 < \frac{b_2 - a_1}{c_1} \right) \\ &= \max_{b_2} (\mathrm{v}_2 - b_2) \left(\frac{b_2 - a_1}{c_1} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial b_2} \left(\frac{1}{c_1} (\mathrm{v}_2 - b_2)(b_2 - a_1) \right) = \frac{\mathrm{v}_2 + a_1 - 2b_2}{c_1} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad b_2^* = \frac{\mathrm{v}_2 + a_1}{2}$$

לכן

$$b_1^* = \frac{\mathrm{v}_1}{2} + \frac{a_2}{2} = a_1 + c_1 \mathrm{v}_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{2} , \quad a_1 = \frac{a_2}{2} ,$$

$$b_2^* = \frac{\mathrm{v}_2}{2} + \frac{a_1}{2} = a_2 + c_2 \mathrm{v}_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{1}{2} \ , \quad a_2 = \frac{a_1}{2} \ .$$

הפתרון למערכת זה היא

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 0 \ , \quad c_2 = \frac{1}{2} \ , \quad a_2 = 0 \ .$$

לפיכך האסטרטגיות של שיווי משקל הן

$$b_1^*(\mathrm{v}_1) = \frac{\mathrm{v}_1}{2} \ , \qquad b_2^*(\mathrm{v}_2) = \frac{\mathrm{v}_2}{2} \ .$$

■

דוגמה 6.5 (דואפול עם ערכים פרטיים)

שני יצרנים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתרחים על שוק הקונים הפוטנציאלים. היצרנים מחליטים על הכמות שהם ייצרו, וההיצע הכולל קובע את מחיר המוצר, שהוא זהה לשני היצרנים. נסמן ב- q_1 וב- q_2 את הכמויות שמיצרים היצרנים 1 ו- 2 בהתאמה. אזי הכמות הכוללת של המוצרים בשוק הוא q_1+q_2. נניח כי המחיר של יחידה שווה ל- $P=a-q_1-q_2$ כאשר a פרמטר הביקוש. עלות הייצור של יחידה ליצרן הראשון וליצרן 2 הוא c.
הפרמטר הביקוש a שווה ל- a^H (ביקוש גבוהה) או a^L (ביקוש נמוך). הערך של a ידוע ליצרן הראשון אך אינה ידוע ליצרן השני. כל שיצרן זה יודע הוא שהפרמטר הביקוש שווה ל- a^L בהסתברות θ או a^H בהסתברות $1-\theta$.

מה הם התנאים על a_H, a_L, θ ו- c כך ש- הכמויות q_1, q_2 חיוביים בשיווי משקל.

מהו השיווי משקל נאש הבייסיאני של המשחק?

פתרון:

כמות של יצרן 1: q_1. כמות של יצרן 2: q_2.

מחיר ליחדה אחת של המוצר: $P=a-q_1-q_2$.

עלות ליחידה לשחקן 1 ולשחקן 2: $c=1$.

פרמטר הביקוש לשחקן 1: $a=a^H$ או $a=a^L$ והוא ידוע לשחקו 1 ולא לשחקן 2.

עבור שחקן 2: $a=a^L$ בהסתברות θ ו- $a=a^H$ בהסתברות $1-\theta$.

צורה בייסיאנית של המשחק:

- $N=\{1,2\}$.
- $T_1=\{a^L,a^H\}$, $T_2=\{1\}$.
- $p_{II}\left(t_1=a^L|t_2=1\right)=p_{II}\left(t_1=a^L\right)=\theta$.
- $p_{II}\left(t_1=a^H|t_2=1\right)=p_{II}\left(t_1=a^H\right)=1-\theta$.
- $A_1=\{q_1^H,q_1^L\}$, $A_2=\{q_2\}$.

- פורנצית תשלום לשחקן 1:

$$u_1\left(s_1(t_1), s_2(t_2), t_1\right)$$

פורנצית תשלום לשחקן 2:

$$u_2\left(s_1(t_1), s_2(t_2), t_2=1\right)$$

-

$$s_1(t=a^H)=q_1^H\ , \qquad s_2(t_2=a^L)=q_1^L\ , \qquad s_2(t_2=1)=q_2\ .$$

לשחקן 1, אם $a=a^H$:

$$u_1(s_1(t=a^H), s_2(t_2), t_1=a^H)=u_1(q_1^H, q_2)=q_1^H(a-q_1^H-q_2-c)\ .$$

לשחקן 1, אם $a=a^L$:

$$u_1(s_1(t=a^L), s_2(t_2), t_1=a^L)=u_1(q_1^L, q_2)=q_1^L(a-q_1^L-q_2-c)\ .$$

לשחקן 2, $s_1(t_1=q^L)=q_1^L$ בהסתברות θ ו- $s_1(t_1=a^H)=q_1^H$ בהסתברות $1-\theta$.

$$u_2\left(s_1(t_1), s_2(t_2), t_2=1\right)=u_1\left(q_1^H, q_1^L, q_2\right)=q_2\left(\theta a^L+(1-\theta)a^H-\theta q_1^L-(1-\theta)q_1^H-q_2-c\right)$$

$$\frac{\partial u_1\left(q_1^H, q_2\right)}{\partial q_1^H}=a-c-2q_1^H-q_2\stackrel{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad q_1^{H*}=\frac{a_H-c-q_2}{2}\ .$$

$$\frac{\partial u_1\left(q_1^L, q_2\right)}{\partial q_1^L}=a-c-2q_1^L-q_2\stackrel{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad q_1^{L*}=\frac{a_L-c-q_2}{2}\ .$$

$$\frac{\partial u_2\left(q_1^L, q_1^H, q_2\right)}{\partial q_2}=\theta a^L+(1-\theta)a^H-\theta q_1^L-(1-\theta)q_1^H-2q_2-c\stackrel{!}{=}0$$

$$\Rightarrow\quad q_2^*=\frac{\theta a^L+(1-\theta)a^H-\theta q_1^L-(1-\theta)q_1^H+c}{2}\ .$$

הפתרון למערכת זו הוא

$$q_2^*=\frac{\theta a_H+(1-\theta)a_L-c}{3}$$
$$q_1^H=\frac{(3-\theta)a_H-(1-\theta)a_L-2c}{6}$$
$$q_1^L=\frac{(2+\theta)a_L-\theta a_H-2c}{6}$$

התנאים עבורם $q_2\geq 0$ הם

$$q_2\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \theta a_H+(1-\theta)a_L-c\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \theta\geq\frac{c-a_L}{a_H-a_L}\ .$$

$$q_1(a_L)\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{(2+\theta)a_L-\theta a_H-2c}{6}\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \theta\leq\frac{2(c-a_L)}{a_H-a_L}\ .$$

$$q_1(a_H)\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{(3-\theta)a_H-(1-\theta)a_L-2c}{6}\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \theta\leq\frac{2c-3a_H+a_L}{a_H-a_L}\ .$$

■