

שיעור 4

הרצאה 4: ערך המקסמין ומשחקים סכום אפס

4.1 ביטחון: מושג המקסמין

אליס (שחקן 1) ובוב (שחקן 2) משחקים את המשחק הבא:

		בוב 2	<i>L</i>	<i>R</i>
		אליס 1		
		<i>T</i>	2, 1	2, -20
		<i>M</i>	3, 0	-10, 1
		<i>B</i>	-100, 2	3, 3

נסמן את כל התשובות הטובות ביותר של השחקנים:

		בוב 2	<i>L</i>	<i>R</i>
		אליס 1		
		<i>T</i>	2, <u>1</u>	2, -20
		<i>M</i>	<u>3</u> , 0	-10, <u>1</u>
		<i>B</i>	-100, 2	<u>3</u> , <u>3</u>

מכאן השיווי משקל היחיד במשחק זה הוא $s^* = (B, R)$ עם תשלום (B, R) . אך בחירות השחקנים של אסטרטגיות אלה מסוכנות!

אליס עשויה להסס מאד לבחור *B*, מחשש שהוא בוב (שחקן 2) יבחר *L* (אם מושום שאין רצונלי אם בטעות). כיוון שהתשלום של (B, L) קטסטרופי בשבייל אליס, יתכן שהוא תחילה אסטרטגיה *T* המבטיח לה תשלום 2 ללא סיכון להפסיד 100.

אם כן בוב חושב שיש סיכוי שאليس תבחר *T* הוא יחשוש מלבחור את אסטרטגיה שיווי המשקל *R* ולהסתכן בתשלום 20. לאור זה יתכן בוב ישחק אסטרטגיה *L*.

למעשה, אסטרטגיה *T* של אליס (שחקן 1) מבטיחה התשלום הטובה ביותר ביותר שניתן לקבל מבי "לסמו" על הרציונליות של שחקן 2, ובהנחות הפסימיות ביותר על ההתנהגותו של בוב (שחקן 2).

באופן כללי, נתון משחק שני שחקנים. נניח כי שחקן 1 משחק אסטרטגיה $S_1 \in S_1$. התשלום הנמוך ביותר שהוא עלול לקבל הוא

$$\min_{t_2 \in S_2} u_1(s_1, t_2) .$$

שחקן 1 יכול לבחור באסטרטגיה s_1 הממקסמת ערך זה. כמובן, בלי לסמוק על הרציונליות של שאר השחקנים הוא יכול להבטיח לעצמו

$$y_1 = \max_{s_1 \in S_1} \min_{t_2 \in S_2} u_1(s_1, t_2) .$$

הגודל y_1 נקרא **ערך המקסמין** של שחקן 1 או **רמת הביטחון** של שחקן 1. אסטרטגיה s_1 המבטיח ערך זה נקראת **אסטרטגיה מקסמין**.

דוגמה 4.1 (ערך המקסמין)

מצאו את הערך המקסמין של כל השחקנים במשחק הבא:

1	2	L	R
<i>T</i>	2, 1	2, -20	
<i>M</i>	3, 0	-10, 1	
<i>B</i>	-100, 2	3, 3	

פתרונות:

1	2	L	R	$\min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$
<i>T</i>	2, 1	2, -20	2	
<i>M</i>	3, 0	-10, 1	-10	
<i>B</i>	-100, 2	3, 3	-100	

$$\underline{v}_1 = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) = 2 .$$

1	2	L	R
<i>T</i>	2, 1	2, -20	
<i>M</i>	3, 0	-10, 1	
<i>B</i>	-100, 2	3, 3	
$\min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2)$	0	-20	

$$\underline{v}_2 = \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2) = 0 .$$

ערך המקסמין של שחקן-1 הוא 2, וסטרטגיית המקסמין המבטיחה תשלום זה היא *T*.

ערך המקסמין של שחקן-2 הוא 0, וסטרטגיית המקסמין המבטיחה תשלום זה היא *L*.

נהוג לרשום את התשלומים המינימלים בטבלה אחת:

1	2	L	R	$\min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$
<i>T</i>	2, 1	2, -20	2	
<i>M</i>	3, 0	-10, 1	-10	
<i>B</i>	-100, 2	3, 3	-100	
$\min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2)$	0	-20	$\underline{v}_1 = 2$	$\underline{v}_2 = 0$

בתרשים זה, מימין בכל שורה מופיע התשלום הנמוך ביותר לשחקן 1 אם היא בוחרת באסטרטגייה המתאימה לשורה זו. ומתחתי לכל עמודה מופיע התשלום הנמוך ביותר לשחקן 2, אם הוא בוחר באסטרטגייה המתאימה לעמודה זו. בפינה הימנית תחתונה של התרשים, באדום מופיעים המקסמינים של השחקנים.

משמעותו של שחקן 2 הוא: אם שני השחקנים בוחרים באסטרטגיות המקסימין שלהם, אז הוקטור אסטרטגי של המשחק הוא (T, L) והתשלומים הם $(2, 1)$.
■
 שחקן 2 מקבל תשלום 1, אשר גבואה יותר מהמаксימין שלו ($1 < 2$).
■

דוגמה 4.2 (ערך המקסימין)

נתון משחק עם שני שחקנים בצורה אסטרטגית כמתואר בטבלה.

	2 1	L	R
T	3, 1	0, 4	
B	2, 3	1, 1	

- א) מצאו אסטרטגיה מקסימין של שחקן 1 והרמת הביטחון שלו.
- ב) מצאו אסטרטגיה מקסימין של שחקן 2 והרמת הביטחון שלו.
- ג) מהם התשלומים לשני השחקנים אם שניהם בוחרים באסטרטגיות המקסימין שלהם.

פתרונות:

(א)

	II I	L	R	$\min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$
T	3, 1	0, 4		0
B	2, 3	1, 1		1

$$\underline{u}_1 = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) = 1 .$$

ערך המקסימין של שחקן 1 הוא 1 ואסטרטגיית המקסימין שלו היא B .

(ב)

	2 1	L	R
T	3, 1	0, 4	
B	2, 3	1, 1	
$\min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2)$	1	1	

$$\underline{u}_2 = \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2) = 1 .$$

ערך המקסימין של שחקן 2 הוא 1. גם L וגם R הן אסטרטגיות מינימום.

(ג)

	2 1	L	R	$\min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$
T	3, 1	0, 4		0
B	2, 3	1, 1		1
$\min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2)$	1	1	$\underline{v}_1 = 1$	$\underline{v}_2 = 1$

לכן כאשר שחקן 1 בוחר באסטרטגייה המקסימין שלו, B , וכאשר שחקן 2 בוחר באסטרטגייה המינימין שלו (L או R) התשלום עשוי להיות $u(B, L) = (2, 3)$ או $u(B, R) = (1, 1)$. או (1, 1), עבר (B, R) , בהתאם לאסטרטגיית המקסימין שיבחר שחקן 2.

■

4.2 משפטים: היחס בין שיווי משקל ואסטרטגיית מקסימין

משפט 4.1

במשחק n שחקנים, אם אסטרטגיה s_i^* של שחקן i שולטת (לא בהכרח חזק) על כל שאר האסטרטגיות שלו, אז

א) s_i^* היא אסטרטגיית מקסימין של שחקן i .

ב) s_i^* היא תשובה טובה ביותר של שחקן i לכל וקטור אסטרטגיות של שאר השחקנים.

הוכחה:

א) תהי s_i^* אסטרטגיה ששולטת (לא בהכרח חזק) על כל שאר האסטרטגיות של שחקן i .

תהי $s_i \in S_i$ אסטרטגיה של שחקן i ותהי $t_{-i} \in S_{-i}$ אסטרטגיה של $-i$ כך ש-

$$u_i(s_i^*, t_{-i}) = \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i^*, s_{-i}).$$

אז

$$\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i^*, s_{-i}) = u_i(s_i^*, t_{-i}) \geq u_i(s_i, t_{-i}) \geq \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}).$$

או במילים שקולות: $\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i})$ נ"ז

$$\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i^*, s_{-i}) = \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}) = v_i.$$

לפיכך s_i^* היא אסטרטגיה מקסימין של שחקן i .

ב) s_i^* שולטת חלש על כל שאר האסטרטגיות, אז לכל $s_{-i} \in S_{-i}$ מתקיים

$$u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(s_i^*, s_{-i}).$$

מכאן s_i^* היא תשובה טובה ביותר של שחקן i לכל וקטור אסטרטגיות s_{-i} של שאר השחקנים.

■

משפט 4.2

במשחק n שחקנים, אם לכל שחקן i יש אסטרטגיה s_i^* שליטה (לא בהכרח חזק) על כל שאר האסטרטגיות שלו, אז התנאים הבאים מתקיימים.

א) הווקטור אסטרטגיות (s_1^*, \dots, s_n^*) הוא שווי משקל של המשחק.

ב) לכל שחקן i , s_i^* היא אסטרטגיית מקסימין של שחקן i .

הוכחה:

א) נניח כי (s_1^*, \dots, s_n^*) וקטור אסטרטגיות כך ש- s_i^* שליטה על כל שאר האסטרטגיות של שחקן i . אז לפי המשפט 4.1 (חלק ב') למעלה, s_i^* היא תשובה טובה ביותר של שחקן i לכל ווקטור אסטרטגיות s_{-i} של שאר השחקנים. אז

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$$

לכל שחקן i . לפיכך הווקטור אסטרטגיות (s_1^*, \dots, s_n^*) הוא נקודת שווי משקל.

ב) לפי המשפט 4.1 (חלק א'), s_i^* היא אסטרטגיית מקסימין של שחקן i .

לפיכך הווקטור אסטרטגיות (s_1^*, \dots, s_n^*) הוא ווקטור אסטרטגיות מקסימין.

лемה 4.1

במשחק n שחקנים. אם לכל שחקן יש אסטרטגיה s_i^* שליטה חזק על כל שאר האסטרטגיות שלו, אז התנאים הבאים מתקיימים:

א) הווקטור אסטרטגיות (s_1^*, \dots, s_n^*) הוא שווי המשקל היחיד של המשחק.

ב) הווקטור אסטרטגיות (s_1^*, \dots, s_n^*) הוא הווקטור אסטרטגיות מקסימין היחיד של המשחק.

הוכחה: תרגיל בית.

משפט 4.3

אם s^* היא שווי משקל אז $\underline{v}_i \leq u_i(s^*) \leq \overline{v}_i$ לכל שחקן i .

הוכחה: לכל אסטרטגיה $s_i \in S_i$

$$u_i(s_i, s_{-i}^*) \geq \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}) .$$

לפי ההגדרה של שווי משקל, $u_i(s^*) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}^*)$. מכאן

$$u_i(s^*) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}^*) \geq \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}) = \underline{v}_i .$$

4.3 משחקים שני שחקנים סכום אפס

הגדרה 4.1 משחק שני שחקנים סכום אפס

משחק שני שחקנים נקרא **משחק סכום אפס** אם לכל זוג אסטרטגיות (s_1, s_2) מתקיים

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0.$$

במילים אחרות, משחק שני שחקנים סכום אפס הוא מערכת סגורה מבחינת התשלומים: כל שחקן אחד מרוויח מהשחקן השני מפסיד.
ברור אך כי שבמשחק כזה האינטרטסטים של שני השחקנים מנוגדים לחלוטים.

דוגמה 4.3 (משחק שני שחקנים סכום אפס)

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס הבא.

	2 1	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>R</i>
<i>T</i>	3, -3	-5, 5	-2, 2	
<i>M</i>	1, -1	4, -4	1, -1	
<i>B</i>	6, -6	-3, 3	-5, 5	

מצאו את האסטרטגיה מקסימין של כל שחקן.

פתרון:

2 1	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>R</i>	$\min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$
<i>T</i>	3, -3	-5, 5	-2, 2	-5
<i>M</i>	1, -1	4, -4	1, -1	1
<i>B</i>	6, -6	-3, 3	-5, 5	-5
$\min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2)$	-6	-4	-1	$\underline{v}_1 = 1$ $\underline{v}_2 = -1$

אסטרטגיות המקסימין: $s^* = (M, R)$



הגדרה 4.2 פונקציית תשלום של משחק שני שחקנים סכום אפס

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס. לכל וקטור אסטרטגיות (s_1, s_2) , פונקציית ההתשלום של המשחק מסומנת (s_1, s_2) ומוגדרת

$$U(s_1, s_2) = u_1(s_1, s_2) = -u_2(s_1, s_2).$$

דוגמה 4.4 (המשך של דוגמה 4.3)

התלא למטרה מראה את פונקציית התשלום של המשחק סכום אפס בדוגמה הקודמת, לכל וקטור אסורוגיות של המשחק.

	2	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>R</i>
1				
<i>T</i>	3	-5	-2	
<i>M</i>	1	4	1	
<i>B</i>	6	-3	-5	

$$U(M, L) = 1 .$$

למשל,

הגדרה 4.3 מטריצת המשחק של משחק שני שחקנים סכום אפס

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס ויהי U פונקציית התשלום של המשחק. תהי S_1 קבוצה סודרת של האסטרטגיות של שחקן 1:

$$S_1 = (s_1^1, s_1^2, \dots, s_1^m)$$

ותהי S_2 קבוצה סודרת של האסטרטגיות של שחקן 2:

$$S_2 = (s_2^1, s_2^2, \dots, s_2^n)$$

המטריצת המשחק היא מטריצה $n \times m$ אשר האיבר ה- i, j , נתון על ידי

$$A_{ij} = U(s_1^i, s_2^j) .$$

דוגמה 4.5 (המץ של דוגמה 4.3)

מטריצת המשחק של המשחק בדוגמה הקודמת הינה

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & -3 & -5 \end{pmatrix} .$$

משפט 4.4 המקסמין והמינימקס של משחק

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס.

ערך המקסמין של שחקן 1 נתון על ידי

$$\underline{v}_1 = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} U(s_1, s_2) .$$

זהה רמת הביטחון של שחקן 1 במשחק: התשלום שהוא יכול להבטיח לעצמו.

הערך המקסמין של שחקן 2 הוא

$$\underline{v}_2 = \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2) = \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} [-U(s_1, s_2)] = \max_{s_2 \in S_2} [-\max_{s_1 \in S_1} U(s_1, s_2)] = -\min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} U(s_1, s_2)$$

נדיר הערך המקסמין של המשחק מסומן \underline{v} ומוגדר

$$\underline{v} = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} U(s_1, s_2) .$$

הערך המינימקס של המשחק מסומן \bar{v} ומוגדר

$$\bar{v} = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} U(s_1, s_2)$$

המשמעות:

שחקן 1 יכול להבטיח שיקבל לפחות \underline{v} .

שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר \bar{v} .

סטרטגיה של שחקן 1 המבטיח את \underline{v} נקראת **סטרטגיה מקסימין**.
סטרטגיה של שחקן 2 המבטיח את \bar{v} נקראת **סטרטגיה מינימקס**.

דוגמה 4.6 (המקסמין ומינימקס של מששס"א)

נתון המשחק סכום אפס הבא בצורה אסטרטגית.

	2 1	L	R
T	3, -3	-2, 2	
B	-1, 1	5, -5	

מצאו את המקסמין, המינימקס האסטרטגיה מקסימין והסטרטגיה מינימקס של המשחק.

פתרון:

הfonקציית התשלום של המשחק היא:

	2 1	L	R
T	3	-2	
B	-1	5	

נחשב את המקסמין והמינימקס על פי הטללא של הפונקציית תשלום:

	2 1	L	R	$\min_{s_2 \in S_2} U$
T	3	-2	-2	-2
B	-1	5	-1	-1
$\max_{s_1 \in S_1} U$	3	5	$\bar{v} = 3$	$\underline{v} = -1$

$$\underline{v} = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} U = -1 ,$$

$$\bar{v} = \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} U = 3 .$$

הסטרטגיה המקסמין של שחקן 1 היא B .

הסטרטגיה המינימקס של שחקן 2 היא L .



דוגמה 4.7 (המקסמין ומינימקס של משש"א)

מצאו את ערך המקסמין, ערך המינימקס, אסטרטגיה מקסמין וסטרטגיה מינימקס של המשחק סכום אפ"ב הבא:

	2	L	R
1			
T	-2	5	
B	3	0	

פתרון:

הfonקציית התשלום כבר נתנו בשאלתנו. נחשב את המקסמין והמינימקס על פי הטבלה של הפונקציית תשלום:

	2	L	R	$\min_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2)$
1				
T	-2	5		-2
B	3	0		0
$\max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2)$	3	5		$\underline{v} = 5$
				$\bar{v} = 5$

ערך המקסמין של המשחק הוא . 0

ערך המינימקס של המשחק הוא . 3

סטרטגיה המקסמין היא: B .

סטרטגיה המינימקס היא: L .

משמעותו:

שחקן 1 אינו יכול להבטיח יותר מ- 0 וסטרטגיה המקסמין היא B .

שחקן 2 אינו יכול להבטיח (שיעורם) פחות מ- 3 וסטרטגיה המינימקס היא L .

הגדרה 4.4 ערך המשחק ואסטרטגיות אופטימליות

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס.

אם מתקיים $\bar{v} = \underline{v}$ אז אומרם כי הadol

$$v = \underline{v} = \bar{v}$$

הוא **הערך של המשחק**.

במקרה זה הוקטור אסטרטגיות אשר מבטיח הערך של המשחק נקרא **וקטור אסטרטגיות אופטימלי**.

דוגמה 4.8 (משחק סכום אפס אשר יש לו ערך)

נתון המשחק שני שחקנים סכום אפס הבא.

	2	L	C	R
1				
T	3	-5	-2	
M	1	4	1	
B	6	-3	-5	

נחשב את המקסמין והמינימקס שלו:

2	L	C	R	$\min_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2)$
1				
T	3	-5	-2	-5
M	1	4	1	1
B	6	-3	-5	-5
$\max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2)$	6	4	1	$\underline{v} = 1$
				$\bar{v} = 1$

$$\bar{v} = 1 = \underline{v}$$

לכן הערך המשחק הוא $\underline{v} = 1$.

הוקטור אסטרטגיות האופטימלי הוא :

שחקן 1 יכול להבטיח שיקבל לפחות 1 באמצעות האסטרטגיה האופימלית M .
שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר 1 באמצעות האסטרטגיה האופימלית R .

נשים לב $s = (M, R)$ גם שיווי משקל נאש של המשחק.

4.4 משפט המקסמין

משפט 4.5 משפט המקסמין

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס. יהיו \underline{v} הערך המקסמין ו- \bar{v} הערך המינימקס. אז

$$\underline{v} \leq \bar{v}.$$

הוכחה: תהי A המטריצה של המשחק. אז

$$\underline{v} = \max_i \min_j A_{ij}, \quad \bar{v} = \min_j \max_i A_{ij}.$$

נשים לב כי לכל i , מתקיים $\min_j A_{ij} \leq A_{ij}$.

ולכל j , מתקיים $\max_i A_{ij} \geq A_{ij}$.

מכאן

$$\min_j A_{ij} \leq A_{ij} \leq \max_i A_{ij}$$

ולכן

$$\min_j A_{ij} \leq \max_i A_{ij} \quad (*)$$

נשים לב כי הצד ימין לא תלוי על i . כלומר (*) מתקיימת לכל i . בפרט, ניתן לחת את ה- i אשר מקסם את הצד ימין והרי נקבל

$$\max_i \min_j A_{ij} \leq \max_i A_{ij} \quad (\#)$$

כעת נשים לב כי הצד שמאל לא תלוי על j . כלומר (#) מתקיימת לכל j . בפרט, ניתן לחת את ה- j אשר מזעך את הצד ימין והרי נקבל

$$\max_i \min_j A_{ij} \leq \min_j \max_i A_{ij}$$

מש"ל.

4.5 משפט השקילות בין שווי משקל לבין אסטרטגיה אופטימלית

משפט 4.6

אם למשחק שני שחקנים סכום אפס יש ערך v , ואם $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ הן אסטרטגיות אופטימליות לשחקנים, אז s^* הוא שווי משקל עם תשלום $u = (v, -v)$.

הוכחה: אם נניח ש- s_1^* היא אסטרטגיה אופטימלית לשחקן 1 במשחק שערך v או $v < \min_{s_2 \in S_2} u(s_1^*, s_2)$, ולכן

$$u(s_1^*, s_2) \geq v .$$

באותה מידת אם נניח ש- s_2^* היא אסטרטגיה אופטימלית לשחקן 2 במשחק שערך v או $v < \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2^*)$, ולכן

$$u(s_1, s_2^*) \leq v .$$

לסיכום, אם s_1^*, s_2^* אסטרטגיות אופטימליות אז

$$u(s_1^*, s_2) \geq v \quad \forall s_2 \in S_2 , \quad (*1)$$

$$u(s_1, s_2^*) \leq v \quad \forall s_1 \in S_1 . \quad (*2)$$

על ידי הצבת s_2^* במשוואה (*1), נקבל כי $v \geq u(s_1^*, s_2^*)$.

על ידי הצבת s_1^* במשוואה (*2), נקבל כי $v \leq u(s_1^*, s_2^*)$.

לכן

$$v = u(s_1^*, s_2^*) .$$

נציב זאת במשוואות (*1) ו- (*2) ונקבל

$$u(s_1^*, s_2) \geq u(s_1^*, s_2^*) \Rightarrow -u_2(s_1^*, s_2) \geq -u_2(s_1^*, s_2^*) \Rightarrow u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_2(s_1^*, s_2) .$$

- $\forall s_2 \in S_2$

$$u(s_1, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2^*) \Rightarrow u_1(s_1, s_2^*) \leq u_1(s_1^*, s_2^*) \Rightarrow u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*) .$$

$\forall s_1 \in S_1$.

לכן (s_1^*, s_2^*) הוא שווי משקל עם תשלום $(v, -v)$.

משפט 4.7

במשחק שני שחקנים סכום אפס, אם (s_1^*, s_2^*) הוא שווי משקל, אז יש למשחק ערך $v = u(s_1^*, s_2^*)$ והסטרטגיות (s_1^*, s_2^*) הן אסטרטגיות אופטימליות.

הוכחה: מכיוון ש- (s_1^*, s_2^*) הוא שווי משקל, שום שחקן אינו יכול להרוויח על ידי סטייה:

$$u_1(s_1, s_2^*) \leq u_1(s_1^*, s_2^*) \Rightarrow u(s_1, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2^*) \quad \forall s_1 \in S_1 , \quad (\#1)$$

$$u_2(s_1^*, s_2) \leq u_2(s_1^*, s_2^*) \Rightarrow -u_2(s_1^*, s_2) \geq -u_2(s_1^*, s_2^*) \Rightarrow u(s_1^*, s_2) \geq u(s_1^*, s_2^*) \quad \forall s_2 \in S_2 . \quad (\#2)$$

נסמן $v = u(s_1^*, s_2^*)$ ונוכיח כי v אכן ערך המשחק.
ממשוואה (#2) נקבל

$$u(s_1^*, s_2) \geq v \quad \forall s_2 \in S_2 \Rightarrow \min_{s_2 \in S_2} u(s_1^*, s_2) \geq v \Rightarrow \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u(s_1^*, s_2) \geq v \Rightarrow \underline{v} \geq v .$$

ממשוואה (#1) נקבל

$$u(s_1, s_2^*) \leq v \quad \forall s_1 \in S_1 \Rightarrow \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2^*) \leq v \Rightarrow \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2) \leq v \Rightarrow \bar{v} \leq v .$$

מכיוון ש- $\underline{v} \leq \bar{v}$ מתקיים תמיד אזי
 $v \leq \underline{v} \leq \bar{v} \leq v$.

ולפיכך בהכרח

$$\underline{v} = v = \bar{v} .$$

הגדרה 4.5 נקודת אוף

במשחק שני שחקנים סכום אפס, זוג אסטרטגיות (s_1^*, s_2^*) נקרא **נקודת אוף** של הפונקציה $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ אם

$$\begin{aligned} u(s_1^*, s_2^*) &\geq u(s_1, s_2^*) \quad \forall s_1 \in S_1 , \\ u(s_1^*, s_2^*) &\leq u(s_1^*, s_2) \quad \forall s_2 \in S_2 . \end{aligned}$$

במילים אחרות, u הוא המספר הגדל ביותר בעמודה s_2^* והקטן ביותר בשורה s_1^* .

אם אנחנו רושמים את (s_1, s_2) בהצגת מטריצה:

$$A_{ij} = u(s_{1,i}, s_{2,j})$$

אז הזוג אסטרטגיות (s_{i^*}, s_{j^*}) הוא נקודת אוף אם

$$\begin{aligned} A_{i^*j^*} &\geq A_{ij^*} \quad \forall i , \\ A_{i^*j^*} &\leq A_{i^*j} \quad \forall j . \end{aligned}$$

משפט 4.8 יחס בין נקודת אוף וקטור אסטרטגיות

במשחק שני שחקנים סכום אפס. (s_1^*, s_2^*) היא נקודת אוף אם ורק אם

- s_1^* היא אסטרטגיה אופטימלית לשחקן 1,

- s_2^* היא אסטרטגיה אופטימלית לשחקן 2.

במקרה זה (s_1^*, s_2^*) הוא ערך המשחק.

ניסוח חלופי של המשפט:

$$\left. \begin{array}{l} A_{i^*j^*} \geq A_{ij^*} \quad \forall i \\ A_{i^*j^*} \leq A_{i^*j} \quad \forall j \end{array} \right\} \Rightarrow \max_i \min_j A_{ij} = \min_j \max_i A_{ij} = v$$

הוכחה: יהי משחק שני שחקנים סכום אפס. נניח כי (s_1^*, s_2^*) נקודת אוקף:

$$u(s_1^*, s_2^*) \geq u(s_1, s_2^*) \quad \forall s_1 \in S_1 , \quad (1*)$$

$$u(s_1^*, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2) \quad \forall s_2 \in S_2 . \quad (2*)$$

(1*) מתקיים אם ורק אם

$$u(s_1^*, s_2^*) \geq \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2^*) \geq \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2) = \bar{v} .$$

(2*) מתקיים אם ורק אם

$$u(s_1^*, s_2^*) \leq \min_{s_2 \in S_2} u(s_1^*, s_2) \leq \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2) = \underline{v} .$$

לפי משפט המשפט המקסימין 4.5: $\underline{v} \leq \bar{v}$. לכן

$$u(s_1^*, s_2^*) \leq \underline{v} \leq \bar{v} = u(s_1^*, s_2^*) \Rightarrow \underline{v} = \bar{v} = v .$$

