תורת המשחקים

תוכן העניינים

שעור 1
משחקים בצורה רחבה

1.1 הגדרת צורה הרחבה של משחק

התיאור הכי טבעי של משחק הוא **הצורה הרחבה**.

הגדרה 1.1 משחק בצורה רחבה

הצורה רחבה של משחק ניתנת על ידי הקבוצה

$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_1, V_2, V_3, \ldots\}, O, u) \ ,$$

כאשר

1) N הוא קבוצה סופית של **השחקנים**.

2) V קבוצת **הקדקודים** של עץ המשחק.

קדקוד מייצג החלטה של שחקן.

3) E קבוצת **הקשתות** או **הצלעות** של עץ המשחק.

כל צלע הולך בין שני קדקודים. צלע מייצג אסטרטגיה של שחקן, אשר נקבעת על ידי ההחלטתו שמסומנת בקדקוד שממנו הצלע יוצא.

4) x_0 הוא הקדקוד של **המצב ההתחלתי** של המשחק.

5) V_1 הוא הקבוצה של קדקודים שבהן שחקן 1 מקבל החלטה, V_2 הקבוצת קדקודים בהן שחקן 2 מקבל החלטה, וכן הלאה.

בכללי, V_i הקבוצה קדקודים בהם שחקן i מקבל החלטה ונקראת הקבוצת ידיעה של שחקן i.

6) O הוא **קבוצת התוצאות** האפשריות.

התוצאות מצויינות ב **נקודות סיום** (**עלים**) של עץ המשחק.

7) u **פונקצית התשלום** המתאימה לכל ווקטור אסטרטגיות של המשחק תשלום לכל שחקן.

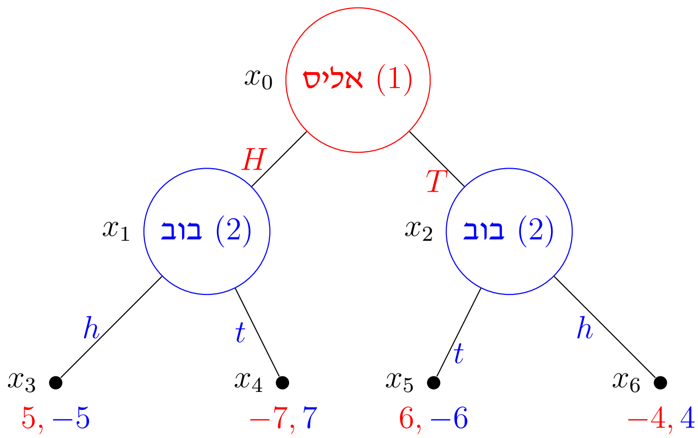
דוגמה 1.1 (משחק התאמת המטבעות)

אליס בוחרת אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי). היא רושמת בחירותה על פתק, חותמת עליו ומעבירה אותו לשופט. אחר כך בוב בוחר H או T, רושם בחירותו על פתק, חותם עליו ומעביר אותו לשופט.

- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר h אז בוב משלם לאליס 5₪.
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר t אז אליס משלמת לבוב 7₪.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר h אז בוב משלם לאליס 6₪.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר t אז אליס משלמת לבוב 4₪.

רשמו את המשחק בצורה רחבה.

פתרון:
תהי אליס שחקן 1 ובוב שחקן 2.



$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_1, V_2\}, O, u)\ .$$

שחקנים: $N = \{\text{אליס}, \text{בוב}\} = \{1, 2\}$.
קדקודים: $V = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.
קשתות: $E = \{x_0x_1\ , x_0x_2\ ,\ x_1x_3\ ,\ x_1x_4\ ,\ x_2x_5\ ,\ x_2x_6\}$.
מצב המשחק ההתחלתי: x_0.
קדקודים:
קבוצות ידיעה של שחקן 1: $V_1 = \{\ x_0(H, T)\ \}\ .$
קבוצת ידיעה של שחקן 2: $V_2 = \{\ x_1(h, t)\ ,\ x_2(h, t)\ \}\ .$
תוצאות אפשרייות: $O = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}\ .$
פונקציית התשלום:

$$u_1(H, h) = 5\ ,\qquad u_2\,(H, h) = -5\ ,$$
$$u_1(H, t) = -7\ ,\qquad u_2\,(H, t) = 7\ ,$$
$$u_1(T, h) = -4\ ,\qquad u_2\,(T, h) = 4\ ,$$
$$u_1(T, t) = 6\ ,\qquad u_2\,(T, t) = -6\ .$$

■

הגדרה 1.2 קבוצת אסטרטגיות של שחקן

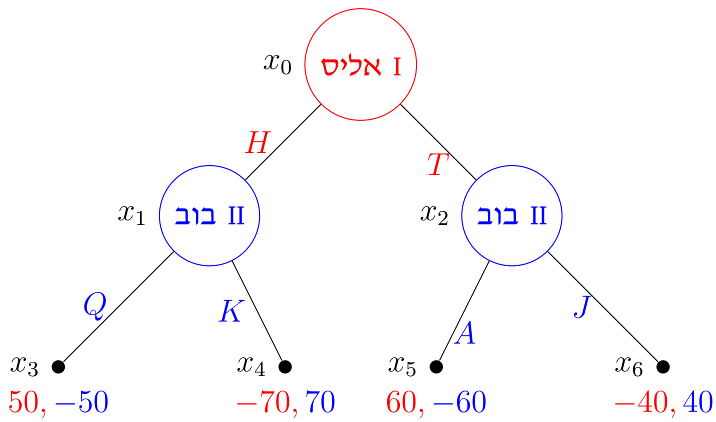
נתון משחק N -שחקנים.
נסמן ב- S_i את הקבוצה של כל האסטרטגיות האפשריות של שחקן i במשחק.

דוגמה 1.2 (מטבע וקלפים)

נתבונן על המשחק הבא:

שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
אחר כך, אם אליס בוחרת H אז שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).
אחרת אם אליס בוחרת T בוב בוחר קלף נסיך (J) או קלף אס (A).

- אם אליס בוחרת H ובוב בחר Q אז בוב משלם לאליס ₪50.
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר K אז אליס משלם לבוב ₪70.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר J אז בוב משלם לאליס ₪60.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר A אז אליס משלם לבוב ₪40.



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H, T.
אומרים כי לשחקן I יש **קבוצה ידיעה אחת** שנסמן

$$V_I = \{\ x_0(H,T)\ \}$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I = (H,T)\ .$$

לשקחן II יש שני קדקודים x_1, x_2 בהם הוא מקבל החלטה.
אומרים גם כי לשחקן II יש 2 קבוצות ידיעה, x_1, x_2 אשר מייצגות שתי אפשריות שונות המנובעות מההחלטה הקודמת של שחקן I בקדקוד x_0.
הקבוצות ידיעה של שחקן II הינן:

$$V_{II} = \{\ x_1(Q,K)\ ,\ x_2(J,A)\ \}$$

מכיוון שלשחקן II יש שתי קבוצות ידיעה x_1, x_2 ובכל אחד יש שתי פעולות אפשריות, אז יש לבוב $2 \times 2 = 4$ אסטרטגיות:

$$S_{II} = (Q/J\ ,\ Q/A\ ,\ K/J\ ,\ K/A)$$

מטבע וקלפים

הגדרה 1.3 ווקטור אסטרטגיות של משחק

נתון משחק n -שחקנים.
נניח כי שחקן 1 משחק לפי אסטרטגיה s_1, שחקן 2 משחק לפי אסטרטגיה s_2, ... ושחקן n משחק לפי אסטרטגיה s_n.
אז הווקטור אסטרטגיות של המשחק הינו

$$s = (s_1, s_2, \dots, s_n)\ .$$

הגדרה 1.4 פונקצית תשלום

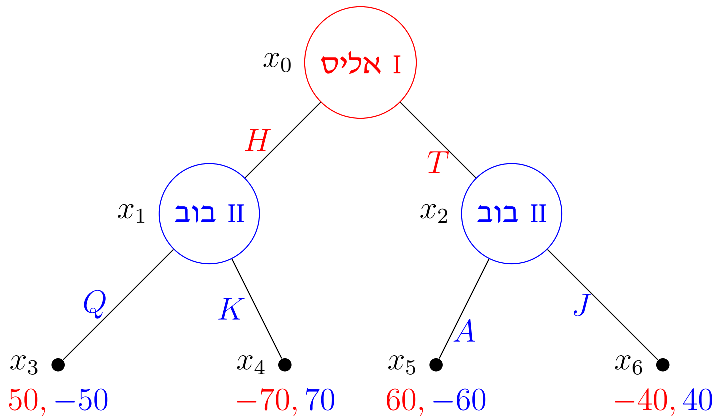
נתון משחק n- שחקנים. פונקצית תשלום $u : S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ היא פונקציה אשר משייכת לכל וקטור אסטרטגיות של המשחק, תשלום לכל שחקן.

נניח כי שחקן 1 משחק לפי אסטרטגיה s_1, שחקן 2 משחק לפי אסטרטגיה s_2, ... ושחקן n משחק לפי אסטרטגיה s_n. ז"א הווקטור האסטרטגיות של המשחק הינו $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$.
פונקצית התשלום של המשחק מקבלת את הווקטור אסטרטגיות ומחזירה תשלום לכל שחקן:

$$u(s_1, s_2, \ldots, s_n) = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

כאשר u_1 התשלום לשחקן 1, u_2 התשלום לשחקן 1, ... ו- u_n התשלום לשחקן n.

דוגמה 1.3 (המשך של דוגמה 1.2)



- נניח כי אליס משחקת לפי האסטרטגיה $s_I = H$ ובוב משחק לפי האסטרטגיה $s_{II} = Q/A$.
הווקטור אסטרטגיות של המשחק הוא
$$s = (s_I, s_{II}) = (H, Q/A) \ .$$
- אם אליס משחקת לפי האסטרטגיה $s_I = H$ ובוב משחק לפי האסטרטגיה $s_{II} = Q/J$.
הווקטור אסטרטגיות של המשחק הוא
$$s = (s_I, s_{II}) = (H, Q/J) \ .$$
- וכן הלאה.

בסה"כ למשחק הזה יש 8 ווקטורי אסטרטגיות:

$$\begin{aligned}
(s_I, s_{II}) &= (H, Q/A) \ , \\
(s_I, s_{II}) &= (H, Q/J) \ , \\
(s_I, s_{II}) &= (H, K/A) \ , \\
(s_I, s_{II}) &= (H, K/J) \ , \\
(s_I, s_{II}) &= (T, Q/A) \ , \\
(s_I, s_{II}) &= (T, Q/J) \ , \\
(s_I, s_{II}) &= (T, K/A) \ , \\
(s_I, s_{II}) &= (T, K/J) \ .
\end{aligned}$$

הפונקצית תשלום של המשחק הינו

$$
\begin{aligned}
u(H,Q/A) &= (50,-50) \ , \\
u(H,Q/J) &= (50,-50) \ , \\
u(H,K/A) &= (-70,70) \ , \\
u(H,K/J) &= (-70,70) \ , \\
u(T,Q/A) &= (60,-60) \ , \\
u(T,Q/J) &= (-40,40) \ , \\
u(T,K/A) &= (60,-60) \ , \\
u(T,K/J) &= (-40,40) \ .
\end{aligned}
$$

1.2 משחקים עם ידיעה שלמה והצורה אסטרטגית

הגדרה 1.5 משחק עם ידיעה שלמה

בכל שלב של המשחק, כל שחקן יודע את כל ההחלטות של שאר השחקנים לפני אותו שלב, ולכן הוא יודע בדיוק אילו פעולות נעשו על ידי כל שאר השחקנים.
כתוצאה, כל שחקן, כשמגיע תורו יודע בדיוק באיזה קודקוד בעץ המשחק הוא נמצא.

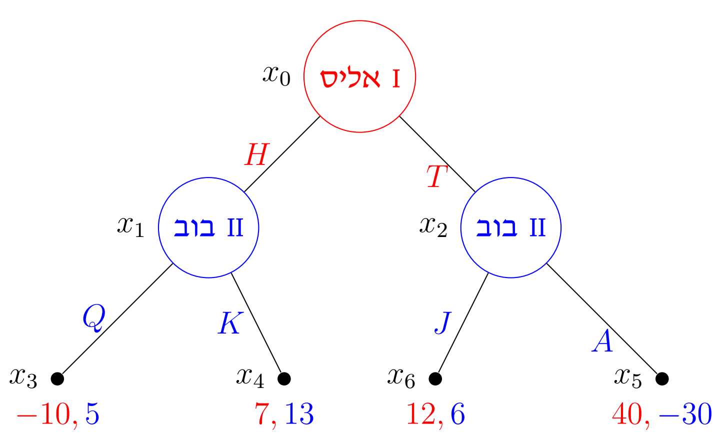
דוגמה 1.4 (משחק מטבע וקלף עם ידיעה שלמה)

נתבונן על המשחק הבא:

שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
אחר כך, אם אליס בוחרת H אז שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).
אחרת אם אליס בוחרת T בוב בוחר קלף נסיך (J) או קלף אס (A).

- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר Q אז בוב מקבל 5₪ ואליס מפסידה 10₪
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר K אז אליס מקבלת 7₪ ובוב מקבל 13₪
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר J אז בוב מקבל 6₪ ואליס מקבלת 12₪.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר A אז אליס מקבלת 40₪ ובוב מפסיד 30₪

ניתן לרשום את עץ המשחק **בצורה רחבה אסטרטגית:**



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H,T.
ז"א4 לשחקן I יש **קבוצה ידיעה אחת**:

$$x_0(H,T)\ .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I=(H,T)\ .$$

לשקחן II יש שני קדקודים x_1,x_2 בהם הוא מקבל החלטה.
אז לשחקן II יש 2 קבוצות ידיעה,

$$V_{II}=\{x_1(Q,K)\ ,\ x_2(J,A)\ \}\ .$$

אשר מייצגות שתי אפשריות שונות המנובעות מההחלטה הקודמת של שחקן I בקדקוד x_0.
מכיוון שלשחקן II יש שתי קבוצתצ ידיעה x_1,x_2 ובכל אחד יש שתי פעולות אפשריות, אז יש לבוב4 $2\times 2=4$ אסטרטגיות:

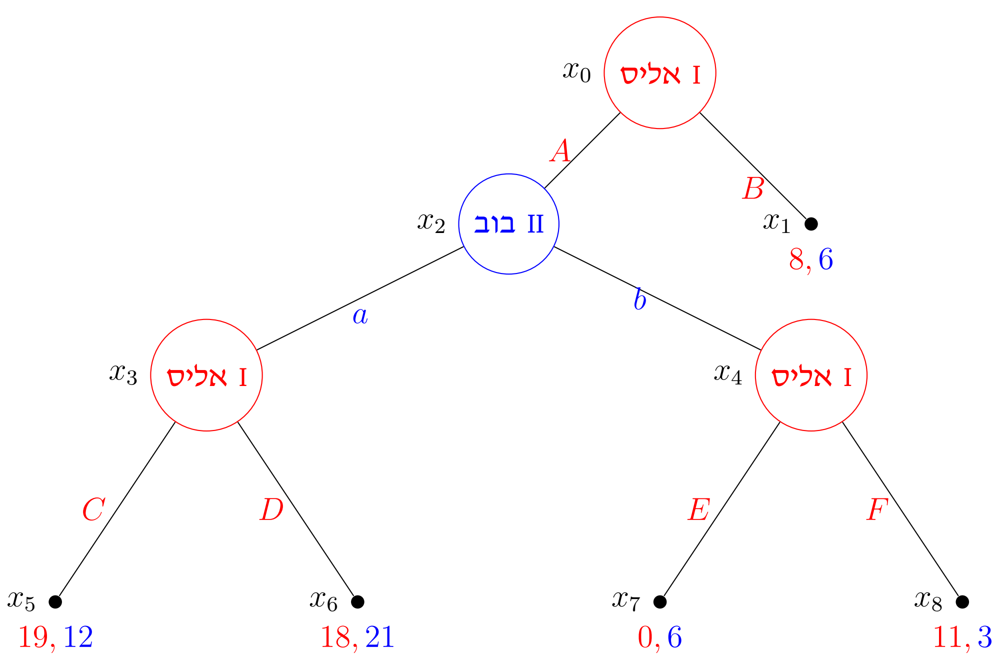
$$S_{II}=(Q/J\ ,\ Q/A\ ,\ K/J\ ,\ K/A)$$

(נהוג לרשום את האסטרטגיות מלמעלה עד למטה ומשמאל לימון.)
ניתן לרשום את המשחק **בצורה אסטרטגית**:

I \ II	Q/J	Q/A	K/J	K/A
H	$-10,5$	$-10,5$	$7,13$	$7,13$
T	$12,6$	$40,-30$	$12,6$	$40,-30$

דוגמה 1.5 ()

נתון המשחק הבא בצורה רחבה. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

במשחק הזה, אליס (שחקן I) פותח עם המהלך הראשון, ואחר כך בוב מבצע המהלך השני, ואז אליס מבצע מהלך שוב.

המשחק הוא משחק עם ידיעה שלמה.

לאליס יש שלוש קבוצות ידיעה:

$$x_0 \ (A,B) \ , \qquad x_3 \ (C,D) \ , \qquad x_4 \ (E,F) \ .$$

בכל אחד של הקדקודים האלה לאליס יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לה $2\times2\times2=8$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_I=(A/C/E \ , \ A/C/F \ , \ A/D/E \ , \ A/D/F \ , \ B/C/E \ , \ B/C/F \ , \ B/D/E \ , \ B/D/F) \ .$$

לבוב יש קבוצות ידיעה אחת:

$$x_2 \ (a,b) \ .$$

בקבוצת ידיעה הזאת של בוב יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לו 2 קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II}=(a \ , \ b) \ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

I \ II	a	b
$A/C/E$	$19,12$	$0,6$
$A/C/F$	$19,12$	$11,3$
$A/D/E$	$18,21$	$0,6$
$A/D/F$	$18,21$	$11,3$
$B/C/E$	$8,6$	$8,6$
$B/C/F$	$8,6$	$8,6$
$B/D/E$	$8,6$	$8,6$
$B/D/F$	$8,6$	$8,6$

■

1.3 משחקים עם ידיעה לא שלמה

הגדרה 1.6 משחק עם ידיעה לא שלמה

משחק עם ידיעה לא שלמה הוא משחק בו לפחות שחקן לא יודע את ההחלטה של שחקן אחר בקדקוד הקודם שממנו יוצא צלע לקדקוד החלטה שלו.
כתוצאה, השחקן אשר לו יודע את ההחלטה של שחקן אחר, לא יודע באיזה קדקוד הוא נמצא בעץ המשחק.

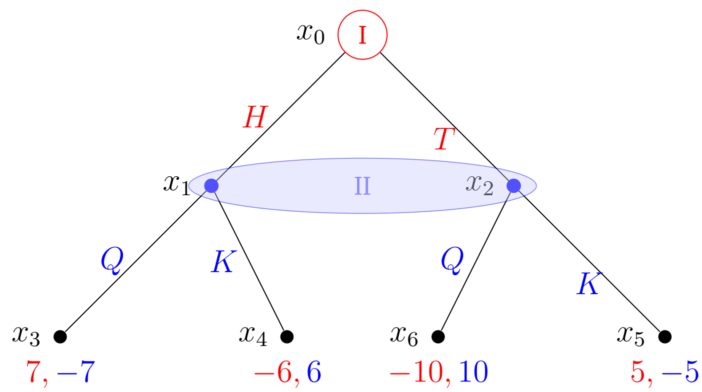
דוגמה 1.6 (משחק מטבע וקלף עם ידיעה לא שלמה)

בשונה לדוגמה הקודמת נתבונן על המשחק הבא עבורו שחקן II לא יודע את ההחלטה של שחקן I עד סוף המשחק.

שחקן I (אליס) בוחרת אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
אחר כך, **בלי ידיעה של הבחירה של אליס**, שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).

- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר Q אז בוב משלם לאליס 7₪.
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר K אז אליס משלם לבוב 6₪.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר Q אז אליס משלם לבוב 10₪.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר K אז בוב משלם לאליס 5₪.

נרשום את המשחק **בצורה רחבה**:



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H,T.
כלומר לאליס יש **קבוצה ידיעה אחת**:

$$V_I = \{ \ x_0(H,T) \ \} \ .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I = (H,T) \ .$$

בניגוד לדוגמה הקודמת, לבוב (שקחן II) יש רק קבוצת ידעיה אחת שמכילה שני קדקודים.
ז"א בוב לא יודע איזה אופציה אליס בחרה, H או T. אז בוב לא יודע על איזה קדקוד הוא נמצא, x_1 או x_2.
בגלל שהוא לא יודע מה ההחלטה של אליס, הוא בוחר בין רק שתי אפשרויות, בלי ידיעה של ההחלטה של אליס.
לכן אנחנו מסתכלים אל הקדקודים x_1x_2 **כקבוצת ידיעה אחת** שממנה יוצאות רק שתי הפעולות:

$$V_{II} = \{ \ x_1x_2(Q,K) \ \} \ .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של בוב הינה

$$S_{II} = (Q \ , \ K)$$

נשים לב כי מכל אחד של הקדקודים x_1 ו- x_2 יוצאות אותן קבוצת פעולות. אחרת בוב היה יודע מה ההחלטה של אליס.

כעת נרשום את הצורה האסטרטגית של המשחק:

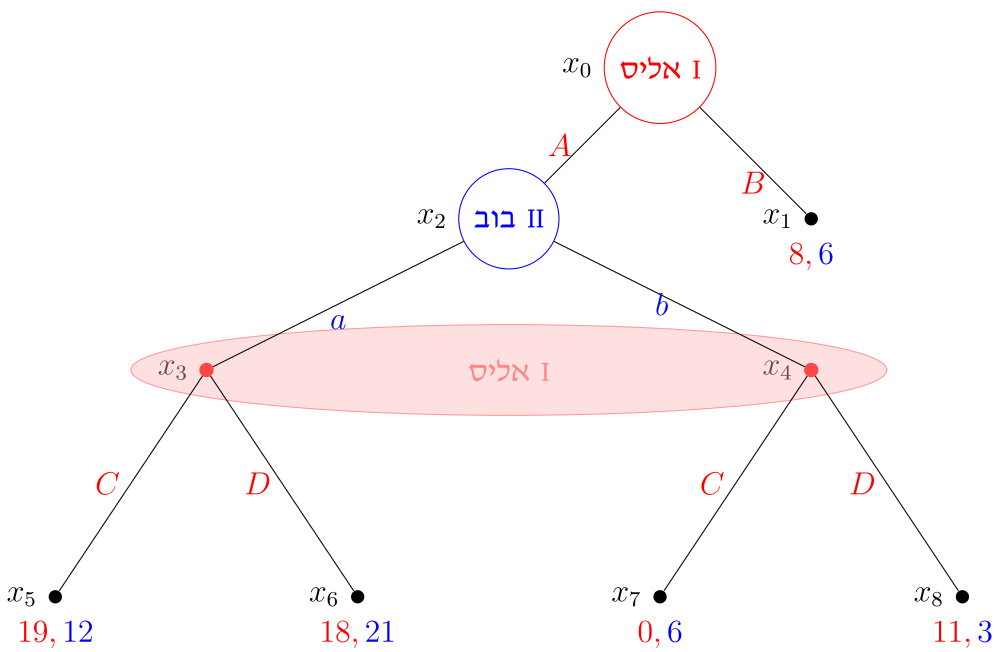
I \ II	Q	K
H	$7,-7$	$-6,6$
T	$-10,10$	$5,-5$

כלל 1.1 פעולות שיוצאות מקבוצת ידיעה ללא ידיעה שלמה

לשחקן יש אותה קבוצה של פעולות אפשריות בכל קדקוד שמוכל אותה קבוצת ידיעה.

דוגמה 1.7 (משחק עם ידיעה לא שלמה)

נתון המשחק הבא בצורה רחבה. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

שימו לב, דומה לדוגמה הקודמת, הקדקודים x_3 ו- x_4 באותה קבוצת ידיעה של אליס בגלל שהיא לא ידועת מה ההחלטה של בוב בקדקוד x_2, כלומר אליס לא יודעת אם בוב בחר a או b. לכן הפעולות היוצאות מקדקוד x_3 הן אותן פעולות שיוצאות מקדקדוד x_4, בגלל שאם היו פעולות אפשריות שונות היוצאות ב- x_3 ו- x_4, אז אליס היתה יודעת איזה פעולה בוב בחר, a או b. כלומר אם לאליס יש החלטה בין הפעולות E ו- F אז היא היתה ידועת שהיא נמצאת בקדקדוד x_4 בעץ המשחק ובוב בחר b. ולהפך, אם היתה לה בחירה בין הפעולות C ו- D במקום הבחירה בין הפעולות E ו- F אז היא היתה יודעת שהיא נמצאת ב- x_3 ושבוב בחר a.

לאליס יש שתי קבוצות ידיעה:

$$x_0 \ (A,B) \ , \qquad x_3x_4 \ (C,D) \ .$$

בכל אחד של הקדקודים האלה לאליס יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לה $4 = 2 \times 2$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_I = (A/C \ , \ A/D \ , \ B/C \ , \ B/D) \ .$$

לבוב יש קבוצות ידיעה אחת:

$$x_2 : \ (a,b) \ .$$

בקבוצת ידיעה הזאת של בוב יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לו 2 קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a \ , \ b) \ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

I \ II	a	b
A/C	$19, 12$	$0, 6$
A/D	$18, 21$	$11, 3$
B/C	$8, 6$	$8, 6$
B/D	$8, 6$	$8, 6$

■

1.4 משחק עם מהלכי גורל

במשחקים שבהם עסקנו עד כה, המעבר ממצב למצב נעשה על ידי אחד השחקנים. מודל כזה מתאים למשחקים כגון שחמט ודמקה, אך לא למשחקי קלפים או קוביה (כמו פוקר או שש־בש), שבהם מעבר ממצב למצב יכול להיעשות על ידי תהליך מקרי: במשחקי קלפים אנחנו טורפים את הקלפים שבחפיסה, ובשש־בש אנו מטילים קוביה. ניתן לחשוב גם על סיטואציות שבהן המעבר ממצב למצב תלוי בגורמים מקריים אחרים, כגון ירידת גשם, רעידת אדמה או נפילת הבורסה. מעבר מסוג זה נקרא **מהלך גורל**. ההרחבה של המודל שלנו תיעשה על ידי כך שחלק מהקדקודים בעץ המשחק (V, E, x_0) יסומנו כמהלכי גורל. הצלעות היוצאות מקדקוד המתאים למהלך גורל מתאימות לתוצאות האפשריות של ההגרלה וליד כל צלע כזו נרשמת ההסתברות לקבלת התוצאה המתאימה.

הגדרה 1.7 משחק בצורה רחבה עם מהלכי גורל

משחק בצורה רחבה עם מהלכי גורל ניתן ע"י הווקטור

$$\Gamma = \left(N, V, E, x_0, \{V_0, V_1, V_2, V_3, \ldots\}, O, u, (p_x)_{x\in V_0}\right) \ ,$$

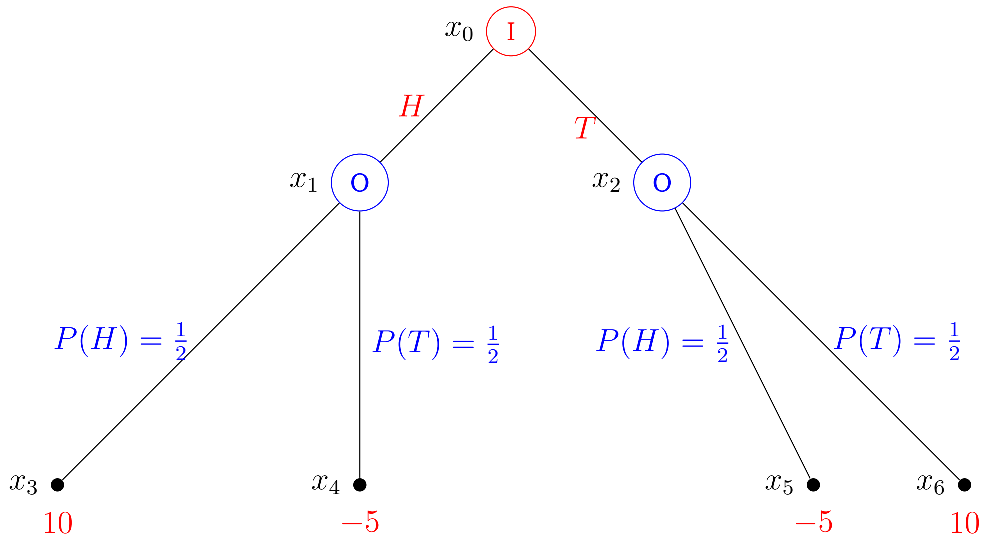
כאשר המשמעות של כל האיברים אותו דבר להגדרה של משחק בצורה רחבה כפי שנתון בהגדרה 1.1. ההבדל היחיד הוא הקבוצת קדקודים V_0, אשר מסמן את הקבוצה של הקדקודים בהם יש הגרלה על ידי **שחקן הגורל**.

לכל קדקוד $x \in V_0$, אנחנו משייכים הסתברות לכל צלע שיוצא ממנו.

דוגמה 1.8 (משחק עם מהלך גורל)

שחקן בוחר H ("עץ") או T ("פלי"). אחרי שהשחקן בוחר, הוא מטיל מטבע. אם המטבע מראה את בחירתו, הוא מנצח ומקבל 10 ₪. אם לא הוא מפסיד 5 ₪. שרטטו את המשחק בצורה רחבה.

פתרון:



$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_1, V_2\}, O, u) \ .$$

שחקנים: $N = \{I\} = \{1, 2\}$.

קדקודים: $V = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

קשתות: $E = \{x_0x_1 \ , x_0x_2 \ , \ x_1x_3 \ , \ x_1x_4 \ , \ x_2x_5 \ , \ x_2x_6\}$.

מצב המשחק ההתחלתי: x_0.

קדקודים:

קבוצות ידיעה של שחקן 1: $V_1 = \{ \ x_0(H, T) \ \}$.

קבוצת ידיעה של שחקן 2: $V_0 = \left\{ \ x_1 \left(P(H) = \frac{1}{2}, P(T) = \frac{1}{2} \right) \ , \ x_2 \left(P(H) = \frac{1}{2}, P(T) = \frac{1}{2} \right) \ \right\}$.

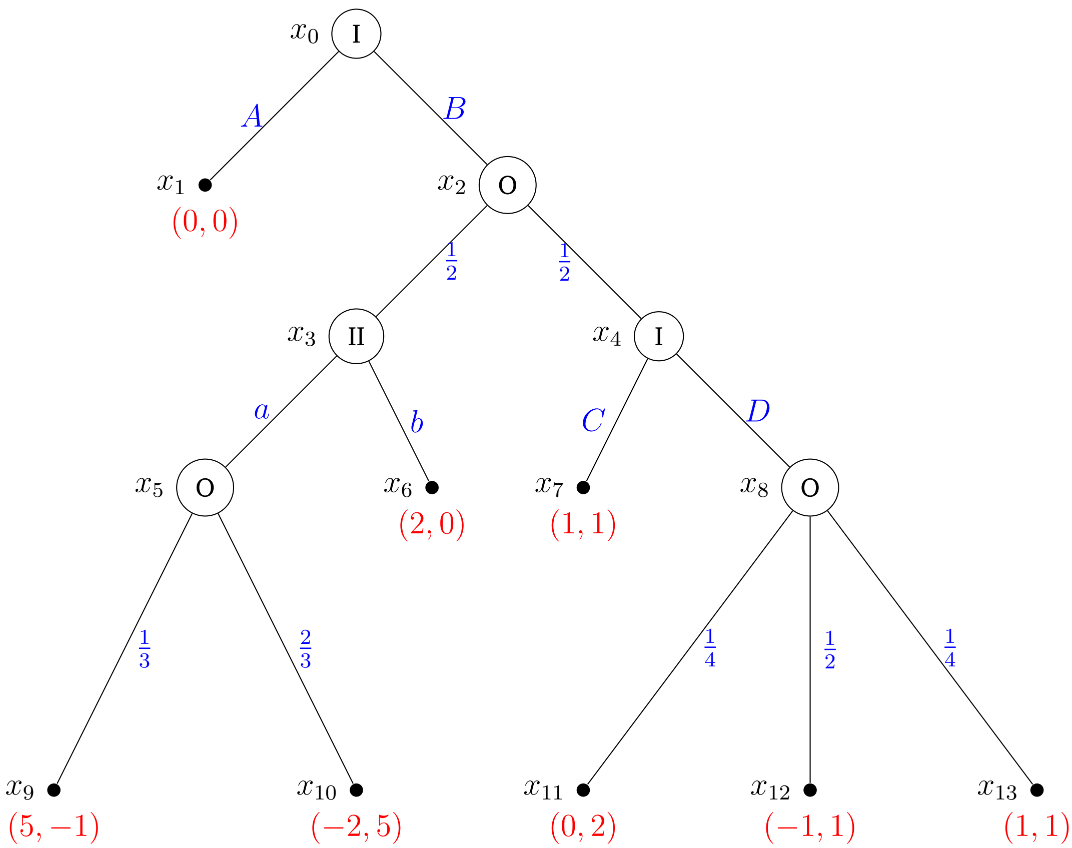
תוצאות אפשריות: $O = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

פונקציית התשלום:

$$\begin{aligned} u(H) &= \frac{1}{2} \cdot (10) + \frac{1}{2}(-5) &&= \frac{5}{2} \ , \\ u(T) &= \frac{1}{2} \cdot (-5) + \frac{1}{2} \cdot (10) &&= \frac{5}{2} \ . \end{aligned}$$

■

דוגמה 1.9 (אסטרטגיות במשחק עם מהלכי גורל)



קבוצות ידיעה של שחקן I:

$$x_0(A,B)\ , \qquad x_4(C,D)\ .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I = (A/C\ ,\ A/D\ ,\ B/C\ ,\ B/D\ )\ .$$

קבוצות ידיעה של שחקן II:

$$x_3(a,b)\ .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן I:

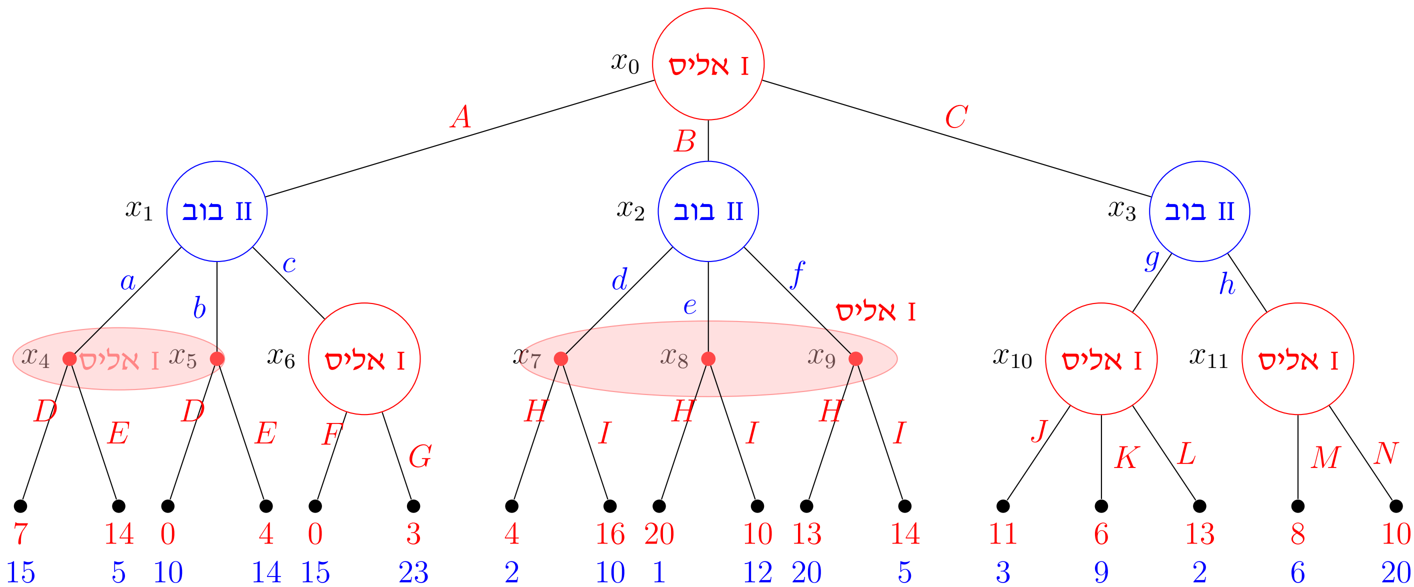
$$S_{II} = (a\ ,\ b\ )\ .$$

פונקצית התשלום:

$$u\,(A/C,a) = (0,0)\ ,$$
$$u\,(A/D,a) = (0,0)\ ,$$
$$u\,(B/C,a) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(5,-1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(-2,5) + \frac{1}{2}(1,1) = \left(\frac{2}{3},\frac{7}{6}\right)\ ,$$
$$u\,(B/D,a) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(5,-1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(-2,5) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(0,2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-1,1) + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}(1,1) = \left(-\frac{1}{48},\frac{33}{16}\right)\ ,$$
$$u\,(A/C,b) = (0,0)\ ,$$
$$u\,(A/D,b) = (0,0)\ ,$$
$$u\,(B/C,b) = \frac{1}{2}(2,0) + \frac{1}{2}(1,1) = \left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\ ,$$
$$u\,(B/D,b) = \frac{1}{2}(2,0) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(0,2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-1,1) + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}(1,1) = \left(-\frac{11}{16},\frac{9}{16}\right)\ ,$$

דוגמה 1.10 ()

נתון המשחק הבא בצורה רחבה אסטרטגית. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

המשחק הוא משחק עם ידיעה לא שלמה.

לאליס יש 5 קבוצות ידיעה:

$$x_0: \ (A, B, C) \ , \qquad x_4x_5: \ (D, E) \ , \qquad x_6: \ (F, G) \ , \qquad x_7x_8x_9: (H, I) \ , \quad x_10: \ (J, K, L) \ , \quad x_{11}: \ (M, N) \ .$$

לכן יהיו לאליס $144 = 2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$ קבוצות אסטרטגיות.

$$S_I = (A/D/E/F/G/H/J/M \ , \ A/D/E/F/G/H/J/N \ , \ldots \ , C/E/G/I/L/N) \ .$$

לבוב יש 3 קבוצות ידיעה:

$$x_1: \ (a, b, c) \ , \quad x_2: \ (d, e, f) \ , \quad x_3: \ (g, h) \ .$$

לכן לבוב יהיו: $18 = 2 \times 3 \times 3$ קבוצות אסטרטגיות:

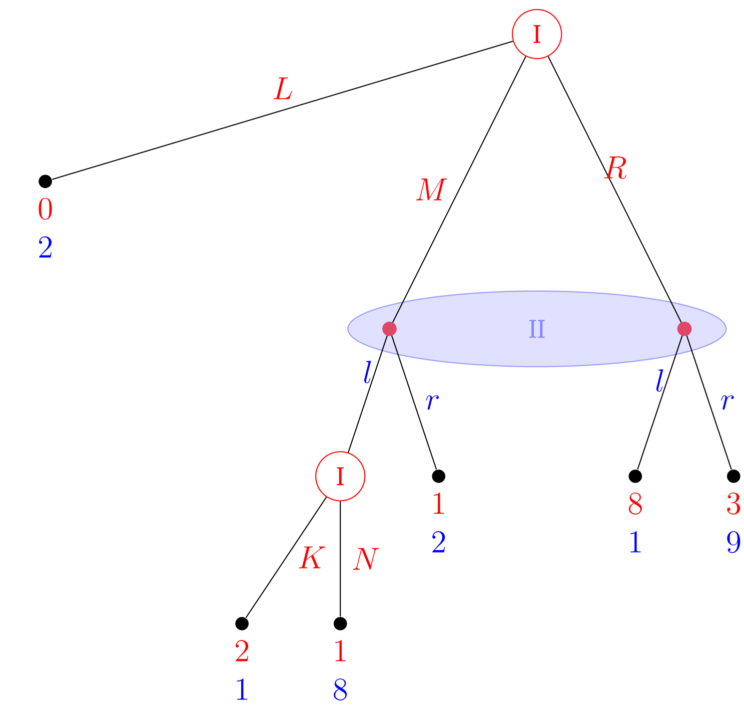
$$S_{II} = (a/d/g \ , \ a/d/h \ , \ldots \ , c/f/h) \ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד

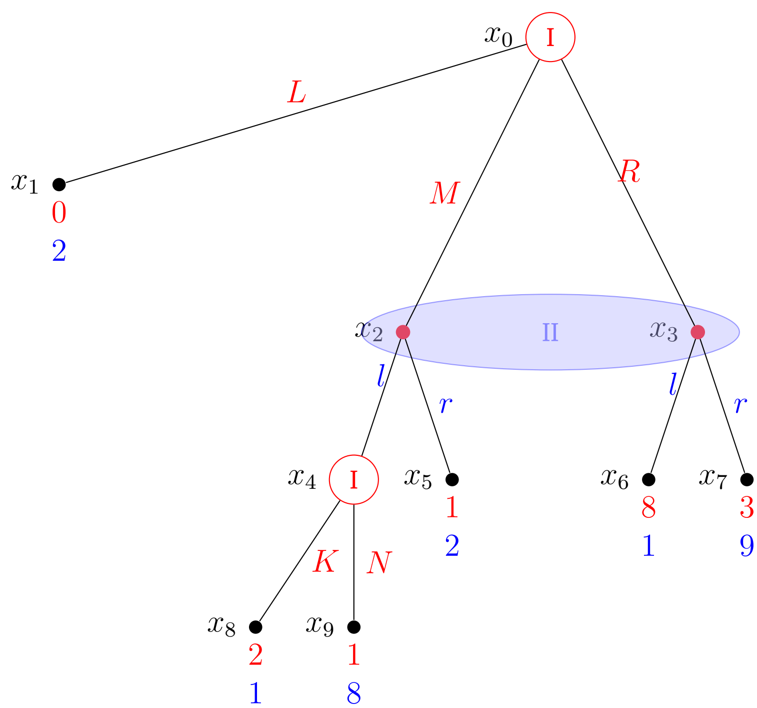
■

דוגמה 1.11 (משחק)

רשמו את המשחק הבא בצורה אסטרטגית.



פתרון:



קבוצת אסטרטגיות של שחקן 1:

$$S_1 = (L/K\ ,\ M/K\ ,\ R/K\ ,\ L/N\ ,\ M/N\ ,\ R/N\ )\ .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן 2:

$$S_2 = (l, r)\ .$$

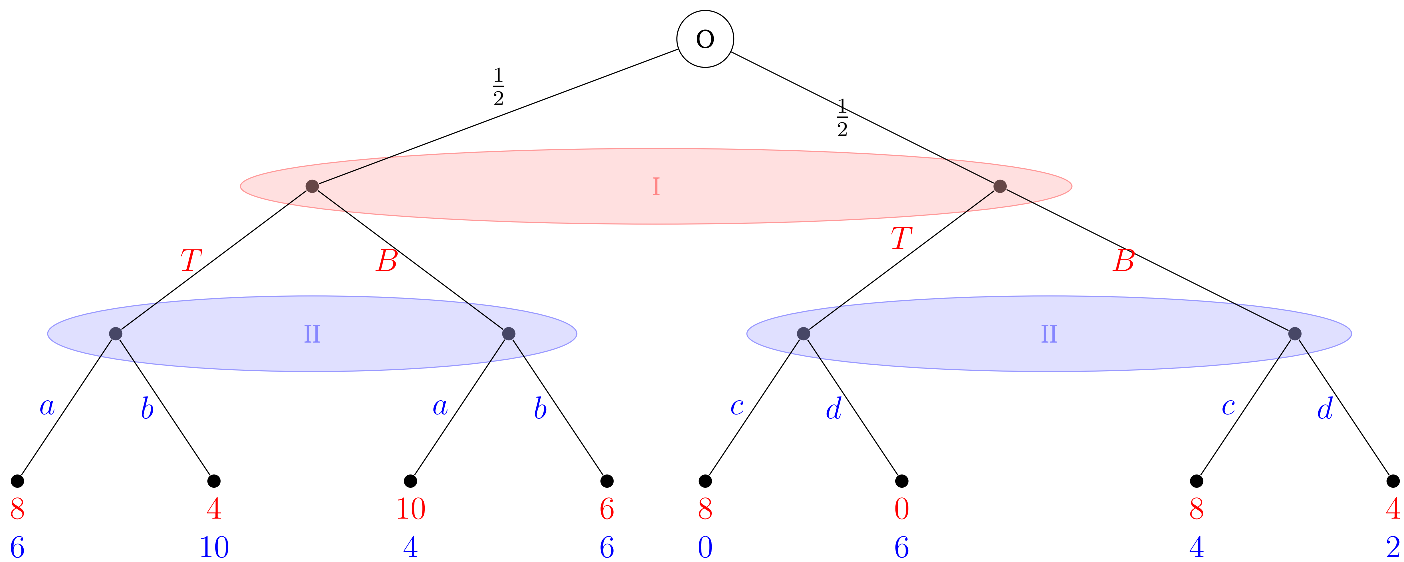
מכאן הצורה אסטרטגית של המשחק היא:

$I \setminus II$	l	r
L/K	$0,2$	$0,2$
M/K	$2,1$	$1,2$
R/K	$8,1$	$3,9$
L/N	$0,2$	$0,2$
M/N	$1,8$	$1,2$
R/N	$8,1$	$3,9$

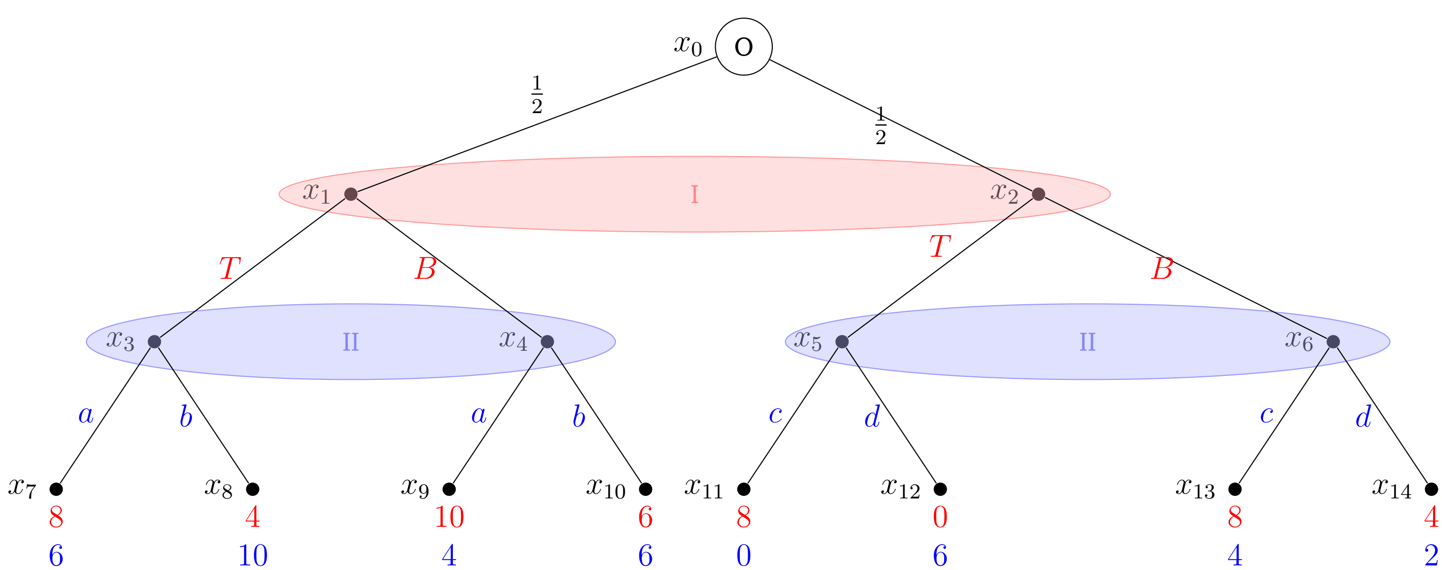
■

דוגמה 1.12 (משחק עם ידיעה לא שלמה עם מהלכ גורל)

רשמו את המשחק הבא בצורה אסטרטגית.



פתרון:



קבוצות ידיעה של שחקן I:

$$x_1x_2 : (T,B) \ .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I = (T,B) \ .$$

קבוצות ידיעה של שחקן II:

$$x_3x_4 : (a,b) \ , \qquad x_5x_6 : (c,d) \ .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן II:

$$S_{II} = (a/c \ , \ a/d \ , \ b/c \ , \ b/d) \ .$$

$I \backslash II$	a/c	a/d	b/c	b/d
T	$\frac{1}{2}(8,6)+\frac{1}{2}(8,0)$	$\frac{1}{2}(8,6)+\frac{1}{2}(0,6)$	$\frac{1}{2}(4,10)+\frac{1}{2}(8,0)$	$\frac{1}{2}(4,10)+\frac{1}{2}(0,6)$
B	$\frac{1}{2}(10,4)+\frac{1}{2}(8,4)$	$\frac{1}{2}(10,4)+\frac{1}{2}(4,2)$	$\frac{1}{2}(6,6)+\frac{1}{2}(8,4)$	$\frac{1}{2}(6,6)+\frac{1}{2}(4,2)$

$I \backslash II$	a/c	a/d	b/c	b/d
T	$(4,3)$	$(4,6)$	$(6,5)$	$(2,8)$
B	$(9,6)$	$(7,3)$	$(7,5)$	$(5,4)$

■

שעור 2
משחקים בצורה אסטרטגית, שליטה ושיווי משקל נאש

2.1 הגדרה של משחק בצורה אסטרטגית

הגדרה 2.1 משחק בצורה אסטרטגית

הצורה אסטרטגית או **צורה נורמלית** של משחק n- שחקנים היא קבוצה

$$G = (N \ , \ (S_1, S_2, \ldots, S_n) \ , \ (u_1, u_2, \ldots, u_n))$$

שבה

(1 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ היא קבוצת שחקנים סופית.

(2 S_i היא קבוצת האסטרטגיות של שחקן i $(1 \leq i \leq n)$

(3 u_i היא פונקציית התשלום של שחקן i:

$$u_i : S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \to \mathbb{R}$$

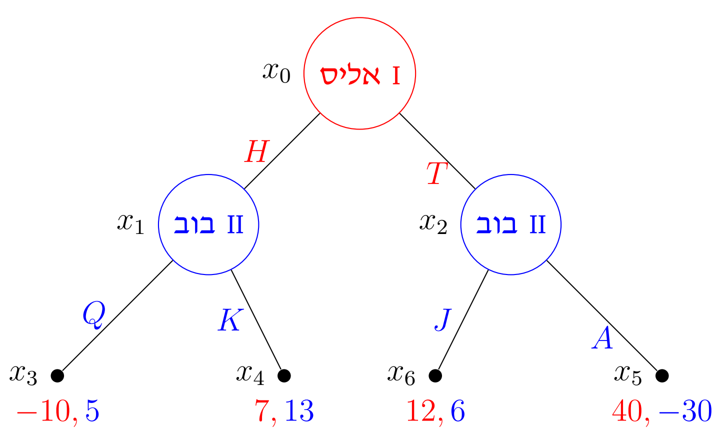
אשר מקבלת וקטור אסטרטגיות של המשחק $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ (כאשר $s_i \in S_i$ אסטרטגיה של שחקן i) ומחזירה מספר ממשי שווה לתשלום של שחקן i.

דוגמה 2.1 (משחק של מטבע וקלף משחק)

רשמו את הצורה אסטרטגית של הדוגמה הבאה שנתונה בצורה רחבה (ראו דוגמה 1.4).

פתרון:

ניתן לרשום את עץ המשחק **בצורה רחבה אסטרטגית**:



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H, T.

ז"א לשחקן I יש **קבוצה ידיעה אחת**:
$$x_0(H,T)\ .$$
לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה
$$S_I=(H,T)\ .$$
לשקחן II יש שני קדקודים x_1,x_2 בהם הוא מקבל החלטה.
אז לשחקן II יש 2 קבוצות ידיעה,
$$V_{II}=\{x_1(Q,K)\ ,\ x_2(J,A)\ \}\ .$$
אשר מייצגות שתי אפשריות שונות המנובעות מההחלטה הקודמת של שחקן I בקדקוד x_0.
מכיוון שלשחקן II יש שתי קבוצותצ ידיעה x_1,x_2 ובכל אחד יש שתי פעולות אפשריות, אז יש לבוב4 $2\times 2=4$ אסטרטגיות:
$$S_{II}=(Q/J\ ,\ Q/A\ ,\ K/J\ ,\ K/A)$$
(נהוג לרשום את האסטרטגיות מלמעלה עד למטה ומשמאל לימון.)
ניתן לרשום את המשחק **בצורה אסטרטגית**:

$I \backslash II$	Q/J	Q/A	K/J	K/A
H	$-10,5$	$-10,5$	$7,13$	$7,13$
T	$12,6$	$40,-30$	$12,6$	$40,-30$

מכאן
$$G=(N,(S_I,S_{II}),(u_I,u_{II}))$$
כאשר הקבוצת שחקנים היא
$$N=\{\text{בוב},\text{אליס}\}=\{I,II\}\ ,$$
האסטרטגיות של המשחק הן $S=(S_I,S_{II})$, כאשר הקבוצת אסטרטגיות של שחקן I היא
$$S_I=(H,T)$$
והקבוצת אסטרטגיות של שחקן II היא
$$S_{II}=(Q/J,Q/A,K/J,K/A)\ ,$$
והפונקציות תשלומים הן
$$\begin{aligned}
u_I(H,Q/J)&=-10\ ,\\
u_I(H,Q/A)&=-10\ ,\\
u_I(H,K/J)&=7\ ,\\
u_I(H,K/A)&=7\ ,\\
u_I(T,Q/J)&=12\ ,\\
u_I(T,Q/A)&=40\ ,\\
u_I(T,K/J)&=12\ ,\\
u_I(T,K/A)&=40\ ,
\end{aligned}$$
ו-

$$\begin{aligned} u_{II}(H, Q/J) =& 5 \ , \\ u_{II}(H, Q/A) =& 5 \ , \\ u_{II}(H, K/J) =& 13 \ , \\ u_{II}(H, K/A) =& 13 \ , \\ u_{II}(T, Q/J) =& 6 \ , \\ u_{II}(T, Q/A) =& -30 \ , \\ u_{II}(T, K/J) =& 6 \ , \\ u_{II}(T, K/A) =& -30 \ . \end{aligned}$$

■

2.2 סימונים

הגדרה 2.2

תהי $N = \{1, \ldots, n\}$ קבוצת סופית, ולכל $i \in N$ תהי A_i קבוצה כלשהי.
נסמן ב- A_i

$$A = \bigtimes_{i \in N} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

את המכפלה הקרטיזית של כל הקבוצות A_i.
לכל $i \in N$ נגדיר

$$A_{-i} = \bigtimes_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} A_j = A_1 \times A_2 \times A_{i-1} \times A_{i+1} \ldots \times A_n$$

את המכפלה הקרטיזית של כל הקבוצות A_j למעט הקבוצה A_i.
איבר ב- A_{-i} מסומן ב-

$$x_{-i} = (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, x_n) \ .$$

זהו הווקטור ה- $(n-1)$ ממדי הנוצר מ- $(a_1, \ldots, a_n) \in A$ על ידי השמטת הקואורדינטה i.

2.3 מושג השליטה

הגדרה 2.3 אסטרטגיה נשלטת חזק במשחק n שחקנים

אסטרטגיה s_i של שחקן i נקראת **נשלטת חזק** אם קיימת אסטרטגיה t_i של שחקן i כך שלכל וקטור אסטרטגיות s_{-i} של שאר השחקנים מתקיים

$$u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(t_i, s_{-i}) \ .$$

במילים אחרות, s_i נשלטת חזק ע"י t_i אם מתקיים

$$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) < u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

לכל וקטור אסטרטגיות $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ של שאר השחקנים.
במקרה כזה נאמר ש- s_i **נשלטת חזק** על ידי t_i, או ש- t_i **שולטת חזק** על s_i.

למה 2.1 אסטרטגיה נשלטת חזק במשחק 2 שחקנים

לפי הגדרה 2.3, במשחק 2 שחקנים, אסטרטגיה s_1 של שחקן 1 נשלטת חזק ע"י אסטרטגיה t_1 של שחקן 1 אם

$$u_1(s_1,s_2) < u(t_1,s_2)$$

לכל אסטרטגיה s_2 של שחקן 2.

באותה מידה אסטרטגיה s_2 של שחקן 2 נשלטת חזק ע"י אסטרטגיה t_2 של שחקן 2 אם

$$u_1(s_1,s_2) < u(s_1,t_2)$$

לכל אסטרטגיה s_1 של שחקן 1.

דוגמה 2.2 (אסטרטגיות נשלטות חזק)

נתון המשחק הבא בצורה אסטקטגית.

א) מצאו אסטרטגיה הנשלטת חזק של שחקן I.

ב) מצאו אסטרטגיה הנשלטת חזק של שחקן II.

$I \backslash II$	L	M	R
T	$1,0$	$1,2$	$4,1$
B	$0,3$	$0,1$	$2,0$

פתרון:

א)

$$0 = u_I(B,L) < u_I(T,L) = 1 \ ,$$

$$0 = u_I(B,M) < u_I(T,M) = 1 \ ,$$

$$2 = u_I(B,R) < u_I(T,R) = 4 \ .$$

לכן אסטרטגיה B נשלטת חזק על ידי T. סימון

$$B \prec T \ .$$

ב)

$$1 = u_{II}(T,R) < u_{II}(T,M) = 2 \ ,$$

$$0 = u_{II}(B,R) < u_{II}(B,M) = 1 \ .$$

לכן אסטרטגיה R נשלטת חזק על ידי M:

$$R \prec M \ .$$

■

2.4 הנחות של רציונליות בתורת המשחקים

משפט 2.1 הנחות של רציונליות בתורת המשחקים

1) שחקן רציונלי לא ישתמש באסטרטגיה נשלטת חזק.

2) כל השחקנים במשחק רציונליים.

3) העובדה שכל השחקנים רציונליים היא ידיעה משותפת בין כל השחקנים.

2.5 סילוק חוזר

תחת הנחות של משפט 2.1, ניתן לסלק אסטרטגיות נשלטת חזק, ולהגיע לפתרון של המשחק.

דוגמה 2.3 (סילוק חוזר)

נתון המשחק הבא, מצאו את הפתרון באסטרטגיות שולטות חזק, והתשלום הסופי של המשחק.

$I \backslash II$	L	M	R
T	$1,0$	$1,2$	$0,1$
B	$0,3$	$0,1$	$2,0$

פתרון:

$I \backslash II$	L	M	~~R~~
T	$1,0$	$1,2$	~~$0,1$~~
B	$0,3$	$0,1$	~~$2,0$~~

$\xrightarrow{R\prec M}$

$I \backslash II$	L	M
T	$1,0$	$1,2$
~~B~~	~~$0,3$~~	~~$0,1$~~

$\xrightarrow{B\prec T}$

$I \backslash II$	L	M
T	~~$1,0$~~	$1,2$

$\xrightarrow{L\prec M}$

$I \backslash II$	M
T	$1,2$

לכן לפי הכללים של שחקנים רציונליים, שחקן I ישתמש באסטרטגיה T, שחקן II ישתמש באסטרטגיה M והתשלום הסופי יהיה:

$$u_I(T,M)=1 \ , \qquad u_{II}(T,M)=2 \ .$$

■

דוגמה 2.4 (דילמה האסיר)

משחק פשוט מאוד, ויחד עם זאת מהרבה בחינות, הוא המשחק הידוע בשם "דילמה האסיר". המשחק מופיע בספרות בצורת הסיפור הבא.

שני עבריינים אליס (שחקן 1) ובוב (שחקן 2) ביצעו פשע חמור ונעצרו. בהעדר כל הוכחות אחרות, הדרך היחידה שבה יכולה המשטרה להשיג הרשעה על עבירה זו היא שאחד העצורים (או שניהם) מודה. בביצוע

המעשה. בחקירתם העמידה המשטרה כל אחד מהעצורים בפני ההחלטה הבאה:

- אם אליס מלשינה ובוב שותק אליס יוצאת חופשי ובוב מקבל 10 שנים מאסר.
- אם בוב מלשין ואליס שותקת, בוב יוצא חופשי ואליס מקבלת 10 שנים מאסר.
- אם שניהם שותקים, יש בידי המשטרה ראיות להרשעתם בעבירות פחותות (למשל, העלמת מס) שמוביל למאסר של שנה אחת לכל אחד.
- אם שניהם מלשינים המשטרה מבקשת להתחשב בשיתוף הפעולה שלהם ולגזור את עונשם ל־6 שנות מאסר לכל אחד.

רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית ומצאו את הפתרון באסטרטגיות שולטות חזק.

פתרון:

נסמן:

$C_1 =$ האסטרטגיה שאליס "מלשינה".
$D_1 =$ האסטרטגיה שאליס "שותקת".
$C_2 =$ האסטרטגיה שבוב "מלשין".
$D_2 =$ האסטרטגיה שבוב "שותק".

המשחק בצורה אסטרטגית הינו:

1 אליס \ 2 בוב	C_2	D_2
C_1	$-6,-6$	$0,-10$
D_1	$-10,0$	$-1,-1$

1 \ 2	C_2	D_2
C_1	$-6,-6$	$0,-10$
D_1	$-10,-10$	$-1,-1$

$\xrightarrow{D_2 \prec C_2}$

1 \ 2	C_2
C_I	$-6,-6$
D_I	$\cancel{-10,-10}$

$\xrightarrow{D_I \prec C_1}$

1 \ 2	C_2
C_1	$-6,-6$

לכן לפי הכללים של שחקנים רציונליים, שחקן I ישתמש באסטרטגיה C_1, שחקן 2 ישתמש באסטרטגיה C_{II} והתשלום הסופי יהיה:

$$u_1(C_1,C_2) = -6\ , \qquad u_2(C_1,C_2) = -6\ .$$

■

2.6 שיווי משקל נאש

הגדרה 2.4 תשובה טובה ביותר במשחק n שחקנים

נתון משחק n שחקנים. יהי s_{-i} וקטור אסטרטגיות של השחקנים ללא i. אסטרטגיה s_i של שחקן i נקראת **תשובה טובה ביותר** ל- s_{-i} אם מתקיים

$$u_i\left(s_i,s_{-i}\right) = \max_{t_i\in S_i} u_i\left(t_i,s_{-i}\right)\ .$$

במילים אחרות, האסטרטגיה s_i של שחקן i היא תשובה טובה ביותר בתגובה לאסטרטגיות $(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+2}, \ldots, s_n)$ של שאר השחקנים אם אסטרטגיה s_i נותנת לשחקן i התשלום המקסימלי מתוך כל האסטרטגיות האחרות $t_i \in S_i$ של שחקן i:

$$u_i\left(s_1, s_2, \ldots s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n\right) = \max_{t_i \in S_i} u_i\left(s_1, s_2, \ldots s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \ldots, s_n\right) \ .$$

הוא

למה 2.2 תשובה טובה ביותר במשחק 2 שחקנים

לפי הגדרה 2.4, במשחק 2 שחקנים, אסטרטגיה s_1 של שחקן 1 היא התשובה הטובה ביותר בתגובה לאסטרטגיה s_2 של שחקן 2 אם מתקיים

$$u_1(s_1, s_2) = \max_{t_1 \in S_1} u_1(t_1, s_2) \ ,$$

או במילים אחרות

$$u_1(s_1, s_2) \geq u_1(t_1, s_2) \quad \forall t_1 \in S_1 \ .$$

באותה מידה, אסטרטגיה s_2 של שחקן 2 היא התשובה הטובה ביותר בתגובה לאסטרטגיה s_1 של שחקן 1 אם מתקיים

$$u_2(s_1, s_2) = \max_{t_2 \in S_2} u_1(s_1, t_2) \ ,$$

או במילים אחרות

$$u_2(s_1, s_2) \geq u_2(s_1, t_2) \quad \forall t_2 \in S_2 \ .$$

הגדרה 2.5 שיווי משקל נאש

נתון משחק n שחקנים. וקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ נקרא **שיווי משקל נאש** אם לכל שחקן $i \in N$ ולכל אסטרטגיה $s_i \in S_i$ של שחקן i, מתקיים

$$u_i\left(s^*\right) \geq u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right) \ .$$

ז"א, אם כל השחקנים משחקים לפי הוקטור אסטרטגיות של השיווי משקל $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$. אם שחקן i בוחר בכל אסטרטגיה אחרת s_i, התשלום שלו(שלה) תמיד יהיה פחות מהתשלום שהוא מקבל ע"י הוקטור אסטרטגיות של השיווי משקל s^*:

$$u_i\left(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*\right) \geq u_i\left(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*\right)$$

לכל אסטרטגיה s_i של שחקן i.

וקטור התשלום $u\left(s^*\right)$ נקרא **תשלום שיווי משקל**.

למה 2.3 שיווי משקל נאש במשחק 2 שחקנים

לפי הגדרה 2.5, עבור משחק 2 שחקנים, ווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ הוא שיווי משקל אם מתקיימים:

$$\begin{aligned} u_1\left(s_1^*, s_2^*\right) &\geq u_1\left(s_1, s_2^*\right) && \forall s_1 \in S_1 \ , \\ u_2\left(s_1^*, s_2^*\right) &\geq u_1\left(s_1^*, s_2\right) && \forall s_2 \in S_2 \ . \end{aligned}$$

משפט 2.2 שיווי משקל הוא תשובה טובה ביותר לכל שחקן

נתון משחק n שחקנים. וקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ הוא **שיווי משקל** אם לכל שחקן i האסטרטגיה s_i^* היא תשובה טובה ביותר ל- $s_{-i}^* = \left(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*\right)$.

הוכחה: תרגיל בית. ■

דוגמה 2.5 (שיווי משקל נאש במשחק 2 שחקנים)

נתון המשחק בצורה אסטרטגית הבא:

1 \ 2	x	y	z
a	$2,1$	$0,0$	$1,2$
b	$0,3$	$2,2$	$3,1$
c	$1,1$	$3,2$	$2,2$

פתרון:

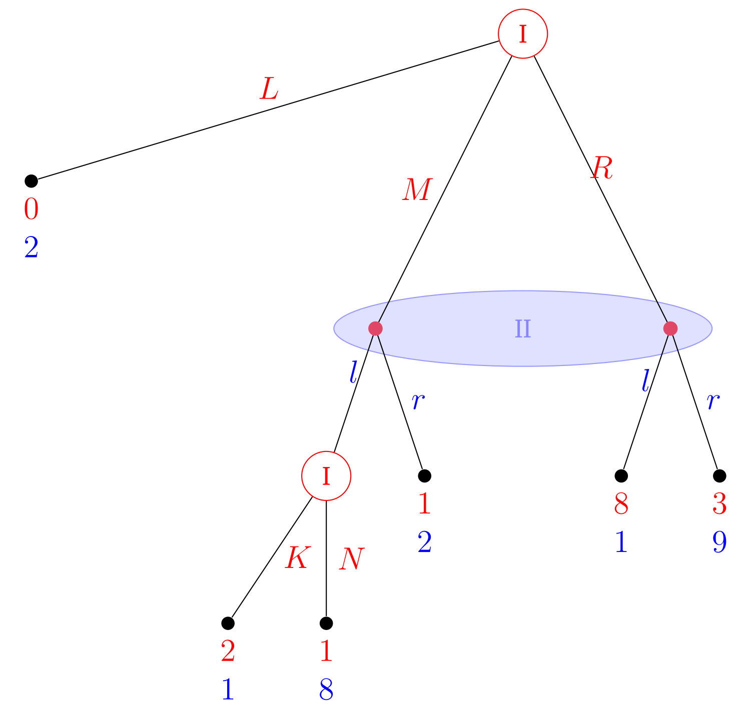
1 \ 2	x	y	z
a	$\color{blue}{2},1$	$0,0$	$1,\color{red}{2}$
b	$0,\color{red}{3}$	$2,2$	$\color{blue}{3},1$
c	$1,1$	$\color{blue}{3},\color{red}{2}$	$2,\color{red}{2}$

לכן ווקטור אסטרטגיות של שיווי משקל נאש הינו

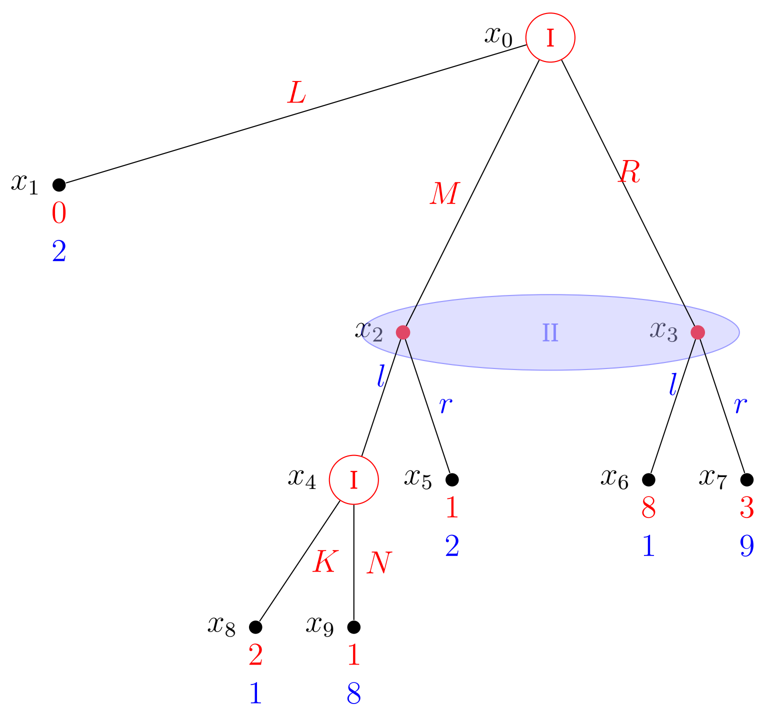
$$(s_1^*, s_2^*) = (c, y) \ .$$

■

דוגמה 2.6 (שיווי משקל משחק 2 שחקנים)



פתרון:



קבוצת אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I = (L/K\ ,\ M/K\ ,\ R/K\ ,\ L/N\ ,\ M/N\ ,\ R/N\ )\ .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן II:

$$S_{II} = (l, r)\ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית של המשחק היא:

$I \backslash II$	l	r
L/K	$0,2$	$0,2$
M/K	$2,1$	$1,2$
R/K	$8,1$	$3,9$
L/N	$0,2$	$0,2$
M/N	$1,8$	$1,2$
R/N	$8,1$	$3,9$

נשתמש בשיטת תשובה טובה ביותר כדי למצוא את השיווי משקל של המשחק:

$I \backslash II$	l	r
L/K	$0,2$	$0,2$
M/K	$2,1$	$1,2$
R/K	$8,1$	$3,9$
L/N	$0,2$	$0,2$
M/N	$1,8$	$1,2$
R/N	$8,1$	$3,9$

לכן הווקטור אסטרטגיות

$$(s_1^*, s_2^*) = (R/N, r)$$

שיווי משקל וגם הווקטור אסטרטגיות

$$(s_1^*, s_2^*) = (R/K, r)$$

שיווי משקל.

■

2.7 משפט השקילות שין אסטרטגיה השולטת חזק יחידה ושיווי משקל

משפט 2.3

אם הווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ שיווי משקל נאש, אז s^* הוא פתרון באסטרטגיות השולטות חזק.

הוכחה:
משפט זו אומר שאם הווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ הוא שיווי משקל נאש, אז s^* תישאר לאחר תהליך סילוק חוזר של אסטרטגיות הנשלטות חזק.

נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ שיווי משקל נאש אבל הוא לא פתרון באסטרטגיות שולטות חזק.
אם כן אז תהי s_i^* האסטרטגיה הראשונה שיורדת בתהליך סילוק חוזר.

ז"א קיימת אסטרטגיה $t_i \in S_i$ אשר שולטת חזק ב- s_i^*, כלומר

$$u_i\left(s_1, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n\right) < u_i\left(s_1, \ldots, t_i, \ldots, s_n\right) \quad . \tag{\#1}$$

לכל $s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n$ אשר עדיין נשארות בתהליך.

בפרט, מכיוון שהאסטרטגיות $s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*$ עדיין נשארות בתהליך אחרי מחיקת אסטרטגיה s_i^*, אז לפי (#1) מתקיים

$$u_i\left(s_1^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*\right) < u_i\left(s_1^*, \ldots, t_i, \ldots, s_n^*\right) \quad . \tag{\#2}$$

בסתירה לכך ש $s^* = \left(s_1^*, \ldots, s_n^*\right)$ הוא שיווי משקל. ■

משפט 2.4

אם ווקטור אסטרטגיות $s^* = \left(s_1^*, \ldots, s_n^*\right)$ הוא פתרון באסטרטגיות שולטות חזק אז s^* הוא השיווי משקל היחיד של המשחק.

הוכחה: נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי $\left(s_1^*, \ldots, s_n^*\right)$ הוא הווקטור אסטרטגיות היחיד שנשאר אחרי סילוק חוזר, אבל הוא לא שיווי משקל.
אם כן אז בהכרח קיימת אסטרטגיה s_i של שחקן i עבורה

$$u_i\left(s_1^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*\right) < u_i\left(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*\right) \quad . \tag{*1}$$

האסטרטגיה s_i נמחקה במהלך התהליך סילוק חוזר.
לכן בהכרח קיימת אסטרטגיה s_i' אשר שולטת חזק ב- s_i, כלומר

$$u_i\left(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n\right) < u_i\left(s_1, \ldots, s_i', \ldots, s_n\right) \quad . \tag{*2}$$

לכל אסטרטגיות $s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots s_n$ אשר נשארות בתהליך סילוק חוזר.

בפרט, האסטרטגיות $\left(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*\right)$ נשארות בתהליך אפילו אחרי שהורדנו s_i^*.
לכן, לפי (*2),

$$u_i\left(s_1^*, \ldots, s_i, \ldots, s_n^*\right) < u_i\left(s_1^*, \ldots, s_i', \ldots, s_n^*\right) \quad . \tag{*3}$$

אם $s_i' = s_i^*$ אז (*3) סותר את (*1).

אם לא אז קיימת אסטרטגיה אחרת s_i'' אשר שולטת חזק ב- s_i'.
לכן במקום (*2) ו- (*3) נקבל

$$u_i\left(s_1, \ldots, s_i', \ldots, s_n\right) < u_i\left(s_1, \ldots, s_i'', \ldots, s_n\right) \quad . \tag{*2'}$$

$$u_i\left(s_1^*, \ldots, s_i', \ldots, s_n^*\right) < u_i\left(s_1^*, \ldots, s_i'', \ldots, s_n^*\right) \quad . \tag{*3'}$$

אם $s_i'' = s_i^*$ אז (*3') סותר את (*1). אם לא אז התהליך ממשיך עד שנגיע לסתירה ל- (*1).
■

שעור 3
שיווי משקל נאש (המשך)

3.1 דילמה האסיר

דוגמה 3.1 (דילמה האסיר)

משחק פשוט מאוד, ויחד עם זאת מהרבה בחינות, הוא המשחק הידוע בשם "דילמה האסיר". המשחק מופיע בספרות בצורת הסיפור הבא.

שני עבריינים אליס (שחקן 1) ובוב (שחקן 2) ביצעו פשע חמור ונעצרו. בהעדר כל הוכחות אחרות, הדרך היחידה שבה יכולה המשטרה להשיג הרשעה על עבירה זו היא שאחד העצורים (או שניהם) מודה. בביצוע המעשה. בחקירתם העמידה המשטרה כל אחד מהעצורים בפני ההחלטה הבאה:

- אם אליס מלשינה ובוב שותק אליס יוצאת חופשי ובוב מקבל 10 שנים מאסר.
- אם בוב מלשין ואליס שותקת, בוב יוצא חופשי ואליס מקבלת 10 שנים מאסר.
- אם שניהם שותקים, יש בידי המשטרה ראיות להרשעתם בעבירות פחותות (למשל, העלמת מס) שמוביל למאסר של שנה אחת לכל אחד.
- אם שניהם מלשינים המשטרה מבקשת להתחשב בשיתוף הפעולה שלהם ולגזור את עונשם ל-6 שנות מאסר לכל אחד.

א) רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית.

ב) מצאו את הפתרון באסטרטגיות שולטות חזק.

ג) מצאו את השיווי משקל של המשחק.

פתרון:

א) נסמן:

$C_1 =$ האסטרטגיה שאליס "מלשינה".

$D_1 =$ האסטרטגיה שאליס "שותקת".

$C_2 =$ האסטרטגיה שבוב "מלשין".

$D_2 =$ האסטרטגיה שבוב "שותק".

המשחק בצורה אסטרטגית הינו:

בוב 2 / אליס 1	C_2	D_2
C_1	$-6,-6$	$0,-10$
D_1	$-10,0$	$-1,-1$

ב)

1 \ 2	C_2	D_2
C_1	$-6,-6$	$0,-10$
D_1	$-10,-10$	$-1,-1$

$\xrightarrow{D_2 \prec C_2}$

1 \ 2	C_2
C_I	$-6,-6$
D_I	$\cancel{-10,-10}$

$\xrightarrow{D_I \prec C_1}$

1 \ 2	C_2
C_1	$-6,-6$

לכן לפי הכללים של שחקנים רציונליים, שחקן I ישתמש באסטרטגיה C_1, שחקן 2 ישתמש באסטרטגיה C_{II} והתשלום הסופי יהיה:

$$u_1(C_1,C_2)=-6\ ,\qquad u_2(C_1,C_2)=-6\ .$$

ג)

1 \ 2	C_2	D_2
C_1	$\underline{-6}\,,\ \underline{-6}$	$\underline{0},-10$
D_1	$-10,-10$	$-1\,,\ \underline{-1}$

השיווי משקל הוא

$$s^*=(C_1,C_2)\ ,\qquad u\left(s^*\right)=(-6,-6)\ .$$

■

דוגמה 3.2 (מלחמת המינים)

המשחק המשחק הבא נקרא "מלחמת המינים" (battle of the sexes). שמו של המשחק בא מהתיאור הבא. זוג מתכנן בילוי למוצא שבת. האפשרויות העומדות לרשותם הן קונצרט (C) או צפייה במשחק כדורגל (F). הגבר (שחקן I) מעדיף צפייה במשחק הכדורגל, בעוד האישה (שחקן II) מעדיפה את הקונצרט, אך שניהם מעדיפים להיות יחד גם אם הבילוי המשותף הוא הפחות עדיף בעיניהם. השמחק בצורה אסטרטגית מתואר למטה. מצאו את כל שיווי משקל.

I \ II	C	F
C	$1,2$	$0,0$
F	$0,0$	$2,1$

פתרון:

I \ II	C	F
C	$\underline{1}\,,\ \underline{2}$	$0,0$
F	$0,0$	$\underline{2}\,,\ \underline{1}$

■

דוגמה 3.3 (משחק תיאום)

המשחק המתואר בטבלה למטה שייך למשפחה של משחקים הנקראים "משחקי תיאום" (coordination games).

I \ II	a	b
A	$\underline{1}\,,\,\underline{1}$	$0,0$
B	$0,0$	$\underline{3}\,,\,\underline{3}$

מצאו את כל שיווי משקל במשחק.

פתרון:

הווקטורי אסטרטגיות אשר שיווי משקל הינם: $s^*=(A,a)$ ו- $s^*=(B,b)$. ■

הגדרה 3.1 תשובה טובה ביות

(ההגדרה הזאת היא אותה הגדרה של תשובה טובה ביותר ב- 2.4. אני פשוט כתבתי אותה כאן שוב לנוחות.)

יהי s_{-i} וקטור אסטרטגיות של השחקנים ללא i. אסטרטגיה s_i של שחקן i נקראת **תשובה טובה ביותר ל-** s_{-i} אם מתקיים

$$u_i\left(s_i,s_{-i}\right)=\max_{t_i\in S_i}u_i\left(t_i,s_{-i}\right)\ .$$

הגדרה 3.2 הגדרות שקולות של שיווי משקל

ההגדרות הבאות של שיווי משקל שקולות:

- וקטור אסטרטגיות $s^*=\left(s_1^*,\ldots,s_n^*\right)$ נקרא שיווי משקל נאש אם לכל שחקן $i\in N$ ולכל $s_i\in S_i$ מתקיים
$$u_i\left(s^*\right)\geq u_u\left(s_i,s_{-i}^*\right)\ .$$
- וקטור אסטרטגיות $s^*=\left(s_1^*,\ldots,s_n^*\right)$ נקרא שיווי משקל נאש אם לכל שחקן $i\in N$ האסטרטגיה s_i^* היא תשובה טובה ביותר ל- s_{-i}^*.

3.2 תחרות דואפול על פי Cournot

דוגמה 3.4 (דואפול)

שני יצרניים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאלים. היצרנים מחליטים סימולטנית על הכמות שהם ייצרו, וההיצע הכולל קובע את מחיר המוצר, שהוא זהה לשני היצרנים. נסמן ב- q_1 וב- q_2 את הכמויות שמייצרים היצרנים 1 ו- 2 בהתאמה. אזי הכמות הכוללת של מוצרים בשוק היא q_1+q_2. נניח כי המחיר של יחידה שווה ל-

$$2-q_1-q_2 \ .$$

עלות הייצור של יחידה ליצרן הראשון היא $c_1>0$ וליצרן השני היא $c_2>0$. האם קיים שיווי משקל במשחק זה, ואם כן, מה הוא?

פתרון:

זהו משחק שני שחקנים (היצרנים 1 ו- 2) שבו קבוצת האסטרטגיות של כל שחקן היא $[0,\infty)$. אם שחקן 1 בוחר באסטרטגיה q_1 ושחקן q_2 בוחר באסטרטגיה q_2, התשלום לשחקן 1 הוא

$$u_1(q_1,q_2)=q_1(2-q_1-q_2)-q_1c_1=q_1(2-c_1-q_1-q_2) \ , \tag{*}$$

והתשלום לשחקן 2 הוא

$$u_2(q_1,q_2)=q_2(2-q_1-q_2)-q_1c_2=q_2(2-c_2-q_1-q_2) \ . \tag{\#}$$

התשובה הטובה ביותר של שחקן 1 לאסטרטגיה q_2 של שחקן 2 הוא ערך q_1 המביא למקסימום את $u_1(q_1,q_2)$. הפונקציה $q_1\mapsto u_1(q_1,q_2)$ היא פונקציה ריבועית עם מקסימום בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_1(q_1,q_2)}{\partial q_1}=0 \ .$$

על ידי גזירה של אגף ימין של משוואה (*) נקבל את התנאי $2-c_1-2q_1-q_2=0$ או

$$q_1=\frac{2-c_1-q_2}{2} \ . \tag{1*}$$

באותו אופן, התשובה הטובה ביותר של שחקן 2 לאסטרטגיה q_1 של שחקן 1 היא ערך q_2 שבו הנגזרת של $u_2(q_1,q_2)$ לפי q_2 מתאפסת. על ידי גזירה נקבל

$$q_2=\frac{2-c_2-q_1}{2} \ . \tag{2*}$$

פתרון המשוואות (1*) ו- (2*) נותן

$$q_1^*=\frac{2-2c_1+c_2}{3} \ , \qquad q_2^*=\frac{2-2c_2+c_1}{3} \ .$$

זה אמנם שיווי משקל וזהו שיווי משקל היחיד של המשחק. התשלומים של השחקנים בשיווי משקל זה הם

$$u_1\left(q_1^*,q_2^*\right)=\left(\frac{2-2c_1+c_2}{3}\right)^2=(q_1^*)^2 \ , \qquad u_2\left(q_1^*,q_2^*\right)=\left(\frac{2-2c_2+c_1}{3}\right)^2=(q_2^*)^2 \ .$$

כעת נוכיח כי הצמד אסטרטגיות (q_1^*,q_2^*) מהווה נקודת שיווי משקל. יש להוכיח כי q_1^* תשובה טובה ביותר לשחקן 1 ביחס ל- q_2^* ולהפך.

$$u(q_1,q_2^*)=q_1(2-c_1-q_1-q_2^*)=-q_1^2+(2-c_1-q_2^*)q_1 \ .$$

לכן $u(q_1,q_2^*)$ פולינום מסדר 2 של q_1, כאשר המקדם של q_1^2 הוא -1. לכן המקסימום המתקבל הוא

$$q_1=\frac{(2-c_1-q_2^*)}{2}=\frac{\left(2-c_1-\frac{2-2c_2+c_1}{3}\right)}{2}=q_1^*\ .$$

בפרט q_1^* תשובה טובה ביותר של שחקן 2 ביחס ל- q_2^*.

■

דוגמה 3.5 (דואפול)

שני יצרניים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאלים. יהי q_1 כמות המוצר שיצרן 1 מייצר ו- q_2 כמות המוצר שיצרן 2 מייצר. הכמות הכוללת של מוצרים בשוק היא

$$Q=q_1+q_2\ .$$

יהי $P(Q)$ המחיר של יחידה של המוצר בשוק:

$$P(Q)=\begin{cases}a-Q & Q<a\\ 0 & Q\geq a\end{cases}\ .$$

הפרמטר a נקרא **פרמטר הביקוש**. הפרמטר הזה מכמת את הביקוש של המוצר בשוק. נניח כי עלות הייצור של יחידה ליצרן 1 ועלות הייצור של יחידה וליצרן 2 נתונות על ידי

$$C_1(q_1)=cq_1\ ,\qquad C_2(q_2)=cq_2\ .$$

מצאו את השיווי משקל של המשחק.

פתרון:

זהו משחק שני שחקנים. נקרא לשחקו 1 אליס ולשחקן 2 בוב.
הכמות q_1 אשר אליס בוחרת היא האסטרטגיה שלה. וכמו כן הכמות q_2 אשר בוב בוחר היא האסטרטגיה שלו. q_1 מקבל כל ערך בתחום $[0,\infty)$, או במילים אחרות $q_1\in[0,\infty)$, ובאותה מידה $q_2\in[0,\infty)$.

אם שחקן 1 בוחר באסטרטגיה q_1 ושחקן 2 בוחר באסטרטגיה q_2, התשלום לשחקן 1 הוא

$$u_1(q_1,q_2)=q_1(a-q_1-q_2)-q_1c=q_1(a-c-q_1-q_2)\ ,$$

והתשלום לשחקן 2 הוא

$$u_2(q_1,q_2)=q_2(a-q_1-q_2)-q_1c=q_2(a-c-q_1-q_2)\ .$$

במשחק שני שחקנים ווקטור אסטרטגיות (s_1^*,s_2^*) שיווי משקל אם הווקטור אסטרטגיות (q_1^*,q_2^*) הוא שיווי משקל אם לכל שחקן:

$$u_1(q_1^*,q_2^*)=\max_{0\leq q_1<\infty}u_1(q_1,q_2^*)=\max_{0\leq q_1\leq\infty}\left[q_1\left(a-c-q_1-q_2^*\right)\right]$$

ו-

$$u_2(q_1^*,q_2^*)=\max_{0\leq q_2<\infty}u_1(q_1^*,q_2)=\max_{0\leq q_2<\infty}\left[q_2\left(a-c-q_1^*-q_2\right)\right]\ .$$

המקסימום של $u_1(q_1,q_2^*)$ לפי q_1 מתקבל בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_1(q_1,q_2^*)}{\partial q_1}=a-c-2q_1-q_2^*\stackrel{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad q_1^*=\frac{a-c-q_2^*}{2}\ .$$

ובאותה מידה המקסימום של $u_2(q_1^*,q_2)$ לפי q_2 מתקבל בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_2(q_1^*,q_2)}{\partial q_2}=a-c-q_1^*-2q_2\overset{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad q_2^*=\frac{a-c-q_1^*}{2} \ .$$

לפיכך, אם הצמד כמויות (q_1^*,q_2^*) שיווי משקל אז הכמויות חייבות לקיים את התנאים

$$q_1^*=\frac{1}{2}(a-q_2^*-c) \ , \qquad q_2^*=\frac{1}{2}(a-q_1^*-c) \ .$$

הפתרון למערכת זו הינו

$$q_1^*=q_2^*=\frac{a-c}{3} \ .$$

■

דוגמה 3.6 (דואפול)

שני יצרניים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאלים. יהי q_1 כמות המוצר שיצרן 1 מייצר ו- q_2 כמות המוצר שיצרן 2 מייצר. שחקן 1 בוחר במחיר של המוצר שלו להיות p_1 ליחידה, ושחקן 2 בוחר במחיר של המוצר שלו להיות p_2 ליחידה. הכמות q_1 ששחקן 1 צריך לייצר נקבע על ידי הפונקציה

$$q_1=a-p_1+bp_2$$

כאשר $b>0$ והכמות q_2 ששחקן 2 צריך לייצר נקבע על ידי הפונקציה

$$q_2=a-p_2+bp_1 \ .$$

מצאו את השיווי משקל של המשחק.

פתרון:
נניח כי אליס שחקן 1 ובוב שחקן 2. במשחק זה המחיר שאליס בוחרת, p_1 הוא האסטרטגיה שלה והמחיר שבוב בחור, p_2 הוא האסטרטגיה שלו. הערכים האפשריים של p_1 הם מ- 0 עד ∞, כלומר $p_1\in[0,\infty]$ ובאותה מידה $p_2\in[0,\infty]$.

אם אליס (שחקן 1) בוחרת באסטרטגיה p_1 ובוב (שחקן 2) בוחר באסטרטגיה q_2, אז אליס מקבלת את התשלום

$$u_1(p_1,p_2)=p_1q_1-cq_1=(p_1-c)(a-p_1+bp_2)$$

ובוב מקבל את התשלום

$$u_2(p_1,p_2)=p_2q_2-cq_2=(p_2-c)(a-p_2+bp_1)$$

הווקטור אסטרטגיות (p_1^*,p_2^*) שיווי משקל אם התנאים הבאים מתקיימים:

$$u_1(p_1^*,p_2^*)=\max_{0\le p_1<\infty}u_1(p_1,q_2^*)=\max_{0\le p_1<\infty}[(p_1-c)(a-p_1+bp_2^*)]$$

ו-

$$u_2(p_1^*,p_2^*)=\max_{0\le p_2<\infty}u_1(p_1^*,p_2)=\max_{0\le p_2<\infty}[(p_2-c)(a-p_2+bp_1^*)]$$

המקסימום של $u_1(p_1,p_2^*)$ ביחס p_1 מתקבל בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_1(p_1,p_2^*)}{\partial p_1}=a-2p_1+bp_2^*+c\overset{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad p_1^*=\frac{a+c+bp_2^*}{2} \ ,$$

והמקסימום של $u_2(p_1^*, p_2)$ ביחס p_2 מתקבל בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_2(p_1^*, p_2)}{\partial p_2} = a - 2p_2 + bp_1^* + c \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad p_2^* = \frac{a + c + bp_1^*}{2} \ .$$

לפיכך, אם הווקטור אסטרטגיות (p_1^*, p_2^*) נקודת שיווי משקל של המשחק אז המחירים p_1^*, p_2^* חייבים לקיים את התנאים

$$p_1^* = \frac{a + c + bp_2^*}{2} \ , \qquad p_2^* = \frac{a + c + bp_1^*}{2} \ .$$

הפתרון למערכת זו הינו

$$p_1^* = p_2^* = \frac{a + c}{2 - b} \ .$$

■

שעור 4
ערך המקסמין ומשחקים סכום אפס

4.1 ביטחון: מושג המקסמין

אליס (שחקן 1) ובוב (שחקן 2) משחקים את המשחק הבא:

אליס 1 \ בוב 2	L	R
T	$2,1$	$2,-20$
M	$3,0$	$-10,1$
B	$-100,2$	$3,3$

נסמן את כל התשובות הטובות ביותר של השחקנים:

אליס 1 \ בוב 2	L	R
T	$2,\underline{1}$	$2,-20$
M	$\underline{3},0$	$-10,\underline{1}$
B	$-100,2$	$\underline{3},\underline{3}$

מכאן השיווי משקל היחיד במשחק זה הוא $s^*=(B,R)$ עם תשלום. אך בחירות השחקנים של אסטרטגיות אלה מסוכנות!

אליס עשויה להסס מאוד לבחור B, מחשש שמא בוב (שחקן 2) יבחר L (אם משום שאינו רציונלי אם בטעות). כיוון שהתשלום של (B,L) קטסטרופי בשביל אליס, ייתכן שהיא תשחק אסטרטגיה T המבטיחה לה תשלום 2 ללא סיכון להפסיד 100.

אם כן בוב חושב שיש סיכוי שאליס תבחר T הוא יחשוש מלבחור את אסטרטגיה שיווי המשקל R ולהסתכן בתשלום -20.
לאור זה ייתכן בוב ישחק אסטרטגיה L.

למעשה, אסטרטגיה T של אליס (שחקן 1) מבטיחה התשלום הטובה ביותר שניתן לקבל מבלי "לסמוך" על הרציונליות של שחקן 2, ובהנחות הפסימיות ביותר על ההתנהגותו של בוב (שחקן 2.)

באופן כללי, נתון משחק שני שחקנים. נניח כי שחקן 1 משחק אסטרטגיה $s_1\in S_1$. התשלום הנמוך ביותר שהוא עלול לקבל הוא

$$\min_{t_2\in S_2} u_1\left(s_1,t_2\right) \ .$$

שחקן 1 יכול לבחור באסטרטגיה s_1 הממקסמת ערך זה. כלומר, בלי לסמוך על הרציונליות של שאר השחקנים הוא יכול להבטיח לעצמו

$$\underline{\mathrm{v}}_1=\max_{s_1\in S_1}\min_{t_2\in S_2} u_1(s_1,t_2) \ .$$

הגודל $\underline{\mathrm{v}}_1$ נקרא **ערך המקסמין** של שחקן 1 או **רמת הביטחון** של שחקן 1.
אסטרטגיה s_1 המבטיחה ערך זה נקראת **אסטרטגיה מקסמין**.

דוגמה 4.1 (ערך המקסמין)

מצאו את הערך המקסמין של כל השחקנים במשחק הבא:

1 \ 2	L	R
T	$2,1$	$2,-20$
M	$3,0$	$-10,1$
B	$-100,2$	$3,3$

פתרון:

1 \ 2	L	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$
T	$2,1$	$2,-20$	2
M	$3,0$	$-10,1$	-10
B	$-100,2$	$3,3$	-100

$$\underline{v}_1=\max_{s_1\in S_1}\min_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)=2\ .$$

1 \ 2	L	R
T	$2,1$	$2,-20$
M	$3,0$	$-10,1$
B	$-100,2$	$3,3$
$\min\limits_{s_1\in S_1} u_2(s_1,s_2)$	0	-20

$$\underline{v}_2=\max_{s_2\in S_2}\min_{s_1\in S_1} u_2(s_1,s_2)=0\ .$$

ערך המקסמין של שחקן-1 הוא 2, ואסטרטגית המקסמין המבטיחה תשלום זה היא T.

ערך המקסמין של שחקן-2 הוא 0, ואסטרטגית המקסמין המבטיחה תשלום זה היא L.

נהוג לרשום את התשלומים המינימלים בטבלה אחת:

1 \ 2	L	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$
T	$2,1$	$2,-20$	2
M	$3,0$	$-10,1$	-10
B	$-100,2$	$3,3$	-100
$\min\limits_{s_1\in S_1} u_2(s_1,s_2)$	0	-20	$\underline{v}_1=2$ \ $\underline{v}_2=0$

בתרשים זה, מימין בכל שורה מופיע התשלום הנמוך ביותר לשחקן 1 אם היא בוחרת באסטרטגיה המתאימה לשורה זה. ומתחת לכל עמודה מופיע התשלום הנמוך ביותר לשחקן 2, אם הוא בוחר באסטרטגיה המתאימה לעמודה זו. בפינה הימינית תחתונה של התרשים, באדום מופיעים המקסמין של השחקנים.

שימו לב: אם שני השחקנים בוחרים באסטרטגיות המקסמין שלהם, אז הווקטור אסטרטגיות של המשחק הוא (T,L) והתשלומים הם $(2,1)$.
שחקן 2 מקבל תשלום 1, אשר גבוהה יותר מהמקסמין שלו ($\underline{\mathrm{v}}_2=1$).

■

דוגמה 4.2 (ערך המקסמין)

נתון משחק עם שני שחקנים בצורה אסטרטגית כמתואר בטבלה.

1 \ 2	L	R
T	$3,1$	$0,4$
B	$2,3$	$1,1$

א) מצאו אסטרטגיה מקסמין של שחקן 1 והרמת הביטחון שלו.

ב) מצאו אסטרטגיה מקסמין של שחקן 2 והרמת הביטחון שלו.

ג) מהם התשלומים לשני השחקנים אם שניהם בוחרים באסטרטגיות המקסמין שלהם.

פתרון:

א)

I \ II	L	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$
T	$3,1$	$0,4$	0
B	$2,3$	$1,1$	1

$$\underline{\mathrm{v}}_1=\max_{s_1\in S_1}\min_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)=1\ .$$

ערך המקסמין של שחקן 1 הוא 1 ואסטרטגית המקסמין שלו היא B.

ב)

1 \ 2	L	R
T	$3,1$	$0,4$
B	$2,3$	$1,1$
$\min\limits_{s_1\in S_1} u_2(s_1,s_2)$	1	1

$$\underline{\mathrm{v}}_2=\max_{s_2\in S_2}\min_{s_1\in S_1} u_1(s_1,s_2)=1\ .$$

ערך המקסמין של שחקן 2 הוא 1. גם L וגם R הן אסטרטגיות מקסמין.

ג)

1 \ 2	L	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$
T	$3,1$	$0,4$	0
B	$2,3$	$1,1$	1
$\min\limits_{s_1\in S_1} u_2(s_1,s_2)$	1	1	$\underline{\mathrm{v}}_1=1$ / $\underline{\mathrm{v}}_2=1$

לכן כאשר שחקן 1 בוחר באסטרטגיה המקסמין שלו, B, וכאשר שחקן 2 בוחר באסטרטגיה המסמין שלו (L או R) התשלום עשוי להיות $u(B,L)=(2,3)$ או $u(B,R)=(1,1)$. או $(1,1)$ עבור (B,R), בהתאם לאסטרטגית המקסמין שיבחר שחקן 2.

■

4.2 משפטים: היחס בין שיווי משקל ואסטרטגית מקסמין

משפט 4.1

במשחק n שחקנים, אם אסטרטגיה s_i^* של שחקן i שולטת (לא בהכרח חזק) על כל שאר האסטרטגיות שלו, אז

א) s_i^* היא אסטרטגית מקסמין של שחקן i.

ב) s_i^* היא תשובה טובה ביותר של שחקן i לכל ווקטור אסטרטגיות של שאר השחקנים.

הוכחה:

א) תהי s_i^* אסטרטגיה ששולטת (לא בהכרח חזק) על כל שאר האסטרטגיות של שחקן i.

תהי $s_i\in S_i$ אסטרטגיה של שחקן i ותהי $t_{-i}\in S_{-i}$ אסטרטגיה של $-i$ כך ש-

$$u_i\left(s_i^*,t_{-i}\right)=\min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i\left(s_i^*,s_{-i}\right) \ .$$

אז

$$\min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i\left(s_i^*,s_{-i}\right)=u_i\left(s_i^*,t_{-i}\right)\geq u_i\left(s_i,t_{-i}\right)\geq \min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i\left(s_i,s_{-i}\right) \ .$$

ז"א $\min\limits_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i\left(s_i^*,s_{-i}\right)\geq \min\limits_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i\left(s_i,s_{-i}\right)$ או במילים שקולות:

$$\min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i\left(s_i^*,s_{-i}\right)=\max_{s_i\in S_i}\min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i\left(s_i,s_{-i}\right)=\underline{\mathrm{v}}_i \ .$$

לפיכך s_i^* היא אסטרטגיה מקסמין של שחקן i.

ב) s_i^* שולטת חלש על כל שאר האסטרטגיות, אז לכל $s_{-i}\in S_{-i}$ מתקיים

$$u_i\left(s_i,s_{-i}\right)\leq u_i\left(s_i^*,s_{-i}\right) \ .$$

מכאן s_i^* היא תשובה טובה ביותר של שחקן i לכל ווקטור אסטרטגיות s_{-i} של שאר השחקנים.

■

משפט 4.2

במשחק n שחקנים, אם לכל שחקן i יש אסטרטגיה s_i^* ששולטת (לא בהכרח חזק) על כל שאר האסטרטגיות שלו, אז התנאים הבאים מתקיימים.

א) הווקטור אסטרטגיות $\left(s_1^*,\cdots,s_n^*\right)$ הוא שיווי משקל של המשחק.

ב) לכל שחקן i, s_i^* היא אסטרטגית מקסמין של שחקן i.

הוכחה:

א) נניח כי $\left(s_1^*,\cdots,s_n^*\right)$ ווקטור אסטרטגיות כך ש- s_i^* שולטת על כל שאר האסטרטגיות של שחקן i.

אז לפי משפט 4.1 (חלק ב') למעלה, s_i^* היא תשובה טובה ביותר של שחקן i לכל ווקטור אסטרטגיות s_{-i} של שאר השחקנים. ז"א

$$u_i(s_i^*,s_{-i}) \geq u_i(s_i,s_{-i})$$

לכל שחקן i. לפיכך הווקטור אסטרטגיות $s^*=\left(s_1^*,\cdots,s_n^*\right)$ הוא נקודת שיווי משקל.

ב) לפי משפט 4.1 (חלק א'), s_i^* היא אסטרטגית מקסמין של שחקן i.

לפיכך הווקטור אסטרטגיות $s^*=\left(s_1^*,\cdots,s_n^*\right)$ הוא ווקטור אסטרטגיות מקסמין.

■

למה 4.1

במשחק n שחקנים. אם לכל שחקן יש אסטרטגיה s_i^* ששולטת חזק על כל שאר האסטרטגיות שלו, אז התנאים הבאים מתקיימים:

א) הווקטור אסטרטגיות $\left(s_1^*,\ldots,s_n^*\right)$ הוא שיווי המשקל היחיד של המשחק.

ב) הווקטור אסטרטגיות $\left(s_1^*,\ldots,s_n^*\right)$ הוא הווקטור אסטרטגיות מקסמין היחיד של המשחק.

הוכחה: תרגיל בית.

■

משפט 4.3

אם s^* היא שיווי משקל אז $u_i\left(s^*\right) \geq \underline{\mathrm{v}}_i$ לכל שחקן i.

הוכחה: לכל אסטרטגיה $s_i \in S_i$,

$$u_i\left(s_i,s_{-i}^*\right) \geq \min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i\left(s_i,s_{-i}\right) \ .$$

לפי ההגדרה של שיווי משקל, $u_i\left(s^*\right)=\max_{s_i\in S_i} u_i\left(s_i,s_{-i}^*\right)$. מכאן

$$u_i\left(s^*\right)=\max_{s_i\in S_i} u_i\left(s_i,s_{-i}^*\right) \geq \max_{s_i\in S_i}\min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i\left(s_i,s_{-i}\right)=\underline{\mathrm{v}}_i \ .$$

■

4.3 משחקי שני שחקנים סכום אפס

הגדרה 4.1 משחק שני שחקנים סכום אפס

משחק שני משחקים נקרא **משחק סכום אפס** אם לכל זוג אסטרטגיות (s_1,s_2) מתקיים

$$u_1(s_1,s_2)+u_2(s_1,s_2)=0\ .$$

במילים אחרות, משחק שני שחקנים סכום אפס הוא מערכת סגורה מבחינת התשלומים: כל ששחקן אחד מרוויח השחקן השני מפסיד.
ברור אז כן שבמשחק כזה האינטרטסטים של שני השחקנים מנוגדים לחלוטים.

דוגמה 4.3 (משחק שני שחקנים סכום אפס)

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס הבא.

1 \ 2	L	C	R
T	$3,-3$	$-5,5$	$-2,2$
M	$1,-1$	$4,-4$	$1,-1$
B	$6,-6$	$-3,3$	$-5,5$

מצאו את האסטרטגיה מקסמין של כל שחקן.

פתרון:

1 \ 2	L	C	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$
T	$3,-3$	$-5,5$	$-2,2$	-5
M	$1,-1$	$4,-4$	$1,-1$	1
B	$6,-6$	$-3,3$	$-5,5$	-5
$\min\limits_{s_1\in S_1} u_2(s_1,s_2)$	-6	-4	-1	$\underline{\mathrm{v}}_1=1$ \ $\underline{\mathrm{v}}_2=-1$

אסטרטגיות המקסמין: $s^*=(M,R)$.

■

הגדרה 4.2 פונקצית תשלום של משחק שני שחקנים סכום אפס

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס. לכל ווקטור אסטרטגיות (s_1,s_2), פונקצית התשלום של המשחק מסומנת $u(s_1,s_2)$ ומוגדרת

$$U(s_1,s_2)=u_1(s_1,s_2)=-u_2(s_1,s_2)\ .$$

דוגמה 4.4 (המשך של דוגמה 4.3)

הטלא למטה מראה את פונקצית התשלום של המשחק סכום אפס בדוגמה הקודמת, לכל ווקטור אסורוגיות של המשחק.

1 \ 2	L	C	R
T	3	-5	-2
M	1	4	1
B	6	-3	-5

למשל,

$$U(M,L)=1\ .$$

הגדרה 4.3 מטריצת המשחק של משחק שני שחקנים סכום אפס

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס ויהי U פונקצית התשלום של המשחק.
תהי S_1 קבוצה סודרת של האסטרטגיות של שחקן 1:

$$S_1=\left(s_1^1,s_1^2,\ldots,s_1^m\right)$$

ותהי S_2 קבוצה סודרת של האסטרטגיות של שחקן 2:

$$S_2=\left(s_2^1,s_2^2,\ldots,s_2^n\right)$$

המטריצת המשחק היא מטריצה $m\times n$ אשר האיבר ה- i,j ניתן על ידי

$$A_{ij}=U\left(s_1^i,s_2^j\right)\ .$$

דוגמה 4.5 (המשך של דוגמה 4.3)

מטריצת המשחק של המשחק בדוגמה הקודמת הינה

$$A=\begin{pmatrix}3&-5&-2\\1&4&1\\6&-3&-5\end{pmatrix}\ .$$

משפט 4.4 המקסמין והמינמקס של משחק

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס.

ערך המקסמין של שחקן 1 נתון על ידי

$$\underline{\mathrm{v}}_1=\max_{s_1\in S_1}\min_{s_2\in S_2}u_1(s_1,s_2)=\max_{s_1\in S_1}\min_{s_2\in S_2}U(s_1,s_2)\ .$$

זוהי רמת הביטחון של שחקן 1 במשחק: התשלום שהוא יכול להבטיח לעצמו.

הערך המקסמין של שחקן 2 הוא

$$\underline{\mathrm{v}}_2=\max_{s_2\in S_2}\min_{s_1\in S_1}u_2(s_1,s_2)=\max_{s_2\in S_2}\min_{s_1\in S_1}\left[-U(s_1,s_2)\right]=\max_{s_2\in S_2}\left[-\max_{s_1\in S_1}U(s_1,s_2)\right]=-\min_{s_2\in S_2}\max_{s_1\in S_1}U(s_1,s_2)$$

נגדיר הערך המקסמין של המשחק מסומן $\underline{\mathrm{v}}$ ומוגדר

$$\underline{\mathrm{v}}=\max_{s_1\in S_1}\min_{s_2\in S_2}U(s_1,s_2)\ .$$

הערך המינמקס של המשחק מסומן $\bar{\mathrm{v}}$ ומוגדר

$$\bar{\mathrm{v}} = \min_{s_2\in S_2} \max_{s_1\in S_1} U(s_1,s_2)$$

המשמעות:
שחקן 1 יכול להבטיח שיקבל לפחות $\underline{\mathrm{v}}$.
שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר $\bar{\mathrm{v}}$.

אסטרטגיה של שחקן 1 המבטיחה את $\underline{\mathrm{v}}$ נקראת **אסטרטגיה מקסמין**.
אסטרטגיה של שחקן 2 המבטיחה את $\bar{\mathrm{v}}$ נקראת **אסטרטגיה מינמקס**.

דוגמה 4.6 (המקסמין ומינמקס של משחק סכום אפס)

נתון המשחק סכום אפס הבא בצורה אסטרטגית.

1 \ 2	L	R
T	$3,-3$	$-2,2$
B	$-1,1$	$5,-5$

מצאו את המקסמין, המינמקס האסטרטגיה מקסמין והאסטרטגיה מינמקס של המשחק.

פתרון:
הפונקצית התשלום של המשחק היא:

1 \ 2	L	R
T	3	-2
B	-1	5

נחשב את המקסמין והמינמקס על פי הטבלא של הפונקצית תשלום:

1 \ 2	L	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} U$
T	3	-2	-2
B	-1	5	-1
$\max\limits_{s_1\in S_1} U$	3	5	$\underline{\mathrm{v}}=-1$ / $\bar{\mathrm{v}}=3$

$$\underline{\mathrm{v}} = \max_{s_1\in S_1} \min_{s_2\in S_2} U = -1 \ ,$$

$$\bar{\mathrm{v}} = \max_{s_2\in S_2} \min_{s_1\in S_1} U = 3 \ .$$

האסטרטגיה המקסמין של שחקן 1 היא B.
האסטרטגיה המינמקס של שחקן 2 היא L.

■

דוגמה 4.7 (המקסמין ומינמקס של מששס"א)

מצאו את ערך המקסמין, ערך המינמקס, אסטרטגיה מקסמין ואסטרטגיה מינמקס של המשחק סכום אפס הבא:

1 \ 2	L	R
T	-2	5
B	3	0

פתרון:

הפונקצית התשלום כבר נתון בשאלה. נחשב את המקסמין והמינמקס על פי הטבלא של הפונקצית תשלום:

1 \ 2	L	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u(s_1,s_2)$
T	-2	5	-2
B	3	0	0
$\max\limits_{s_1\in S_1} u(s_1,s_2)$	3	5	$\underline{\mathrm{v}}=0$, $\bar{\mathrm{v}}=5$

ערך המקסמין של המשחק הוא . $\underline{\mathrm{v}} = \max\limits_{s_1\in S_1} \min\limits_{s_2\in S_2} u(s_1,s_2) = 0$

ערך המינמקס של המשחק הוא . $\bar{\mathrm{v}} = \min\limits_{s_2\in S_2} \max\limits_{s_1\in S_1} u(s_1,s_2) = 3$

אסטרטגיה המקסמין היא: B.

אסטרטגיה המינמקס היא: L.

משמעות:

שחקן 1 אינו יכול להבטיח יותר מ- 0 ואסטרטגיה המקסמין היא B.

שחקן 2 אינו יכול להבטיח (שישלם) פחות מ- 3 ואסטרטגיה המינמקס היא L. ■

הגדרה 4.4 ערך המשחק ואסטרטגיות אופטימליות

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס.

אם מתקיים $\underline{\mathrm{v}} = \bar{\mathrm{v}}$ אז אומרים כי הגודל

$$\mathrm{v} = \underline{\mathrm{v}} = \bar{\mathrm{v}}$$

הוא **הערך של המשחק**.

במקרה זה הווקטור אסטרטגיות אשר מבטיח הערך של המשחק נקרא **ווקטור אסטרטגיות אופטימלי**.

דוגמה 4.8 (משחק סכום אפס אשר יש לו ערך)

נתון המשחק שני שחקנים סכום אפס הבא.

$1 \backslash 2$	L	C	R
T	3	-5	-2
M	1	4	1
B	6	-3	-5

נחשב את המקסמין והמינמקס שלו:

$1 \backslash 2$	L	C	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u(s_1,s_2)$
T	3	-5	-2	-5
M	1	4	1	1
B	6	-3	-5	-5
$\max\limits_{s_1\in S_1} u(s_1,s_2)$	6	4	1	$\underline{\mathrm{v}}=1$, $\bar{\mathrm{v}}=1$

$$\bar{\mathrm{v}} = 1 = \underline{\mathrm{v}}$$

לכן הערך המשחק הוא $\mathrm{v}=1$.

הוקטור אסטרטגיות האופטימלי הוא : $s^*=(s_1^*,s_2^*)=(M,R)$.

שחקן 1 יכול להבטיח שיקבל לפחות 1 באמצעות האסטרטגיה האופימלית M.

שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר 1 באמצעות האסטרטגיה האופימלית R.

נשים לב $s=(M,R)$ גם שיווי משקל נאש של המשחק.

4.4 משפט המקסמין

משפט 4.5 משפט המקסמין

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס. יהי $\underline{\mathrm{v}}$ הערך המקסמין ו- $\bar{\mathrm{v}}$ הערך המינמקס. אזי

$$\underline{\mathrm{v}} \le \bar{\mathrm{v}} \ .$$

הוכחה: תהי A המטריצה של המשחק. אז

$$\underline{\mathrm{v}} = \max_i \min_j A_{ij} \ , \qquad \bar{\mathrm{v}} = \min_j \max_i A_{ij} \ .$$

נשים לב כי לכל i, מתקיים $\min\limits_j A_{ij} \le A_{ij}$,

ולכל j, מתקיים $\max\limits_i A_{ij} \ge A_{ij}$.
מכאן

$$\min_j A_{ij} \le A_{ij} \le \max_i A_{ij}$$

ולכן

$$\min_j A_{ij} \leq \max_i A_{ij} \qquad (*)$$

נשים לב כי הצד ימין לא תלוי על i. ז"א משוואה (*) מתקיימת לכל i. בפרט, ניתן לקחת את ה- i אשר ממקסם את הצד ימין והרי נקבל

$$\max_i \min_j A_{ij} \leq \max_i A_{ij} \qquad (\#)$$

כעת נשים לב כי הצד שמאל לא תלוי על j. ז"א משוואה (#) מתקיימת לכל j. בפרט, ניתן לקחת את ה- j אשר ממזער את הצד ימין והרי נקבל

$$\max_i \min_j A_{ij} \leq \min_j \max_i A_{ij}$$

מש"ל. ■

4.5 משפט השקילות בין שיווי משקל לבין אסטרטגיה אופטימלית

משפט 4.6

אם למשחק שני שחקנים סכום אפס יש ערך v, ואם $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ הן אסטרטגיות אופטימליות לשחקנים, אזי $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ הוא שיווי משקל עם תשלום $u = (\mathrm{v}, -\mathrm{v},)$.

הוכחה: אם נניח ש- s_1^* היא אסטרטגיה אופטימלית לשחקן 1 במשחק שערכו v אז $\min_{s_2 \in S_2} u(s_1^*, s_2) = \mathrm{v}$, ולכן לכל $s_2 \in S_2$ מתקיים

$$u(s_1^*, s_2) \geq \mathrm{v} \ .$$

באותה מידה אם נניח ש- s_2^* היא אסטרטגיה אופטימלית לשחקן 2 במשחק שערכו v אז $\max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2^*) = \mathrm{v}$, ולכן לכל $s_1 \in S_1$ מתקיים

$$u(s_1, s_2^*) \leq \mathrm{v} \ .$$

לסיכום, אם s_1^*, s_2^* אסטרטגיות אופטימליות אז

$$u(s_1^*, s_2) \geq \mathrm{v} \qquad \forall s_2 \in S_2 \ , \qquad (*1)$$

$$u(s_1, s_2^*) \leq \mathrm{v} \qquad \forall s_1 \in S_1 \ . \qquad (*2)$$

על ידי הצבת s_2^* במשוואה (*1), נקבל כי $u(s_1^*, s_2^*) \geq \mathrm{v}$.
על ידי הצבת s_1^* במשוואה (*2), נקבל כי $u(s_1^*, s_2^*) \leq \mathrm{v}$.
לכן

$$\mathrm{v} = u(s_1^*, s_2^*) \ .$$

נציב זאת במשוואות (*1) ו- (*2) ונקבל

$$u(s_1^*, s_2) \geq u(s_1^*, s_2^*) \quad \Rightarrow \quad -u_2(s_1^*, s_2) \geq -u_2(s_1^*, s_2^*) \quad \Rightarrow \quad u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_2(s_1^*, s_2) \ .$$

$\forall s_2 \in S_2$ ו-

$$u(s_1, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2^*) \quad \Rightarrow \quad u_1(s_1, s_2^*) \leq u_1(s_1^*, s_2^*) \quad \Rightarrow \quad u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*) \ .$$

$\forall s_1 \in S_1$.
לכן (s_1^*, s_2^*) הוא שיווי משקל עם תשלום $(\mathrm{v}, -\mathrm{v})$. ■

משפט 4.7

במשחק שני שחקנים סכום אפס, אם $s^*=(s_1^*,s_2^*)$ הוא שיווי משקל, אזי יש למשחק ערך $\mathrm{v}=u(s_1^*,s_2^*)$, והאסטרטגיות $s^*=(s_1^*,s_2^*)$ הן אסטרטגיות אופטימליות.

הוכחה: מכיוון ש- (s_1^*,s_2^*) הוא שיווי משקל, שום שחקן אינו יכול להרוויח על ידי סטייה:

$$u_1(s_1,s_2^*)\le u_1(s_1^*,s_2^*) \quad\Rightarrow\quad u(s_1,s_2^*)\le u(s_1^*,s_2^*) \quad \forall s_1\in S_1 \ , \qquad (\#1)$$

$$u_2(s_1^*,s_2)\le u_2(s_1^*,s_2^*) \quad\Rightarrow\quad -u_2(s_1^*,s_2)\ge -u_2(s_1^*,s_2^*) \quad\Rightarrow\quad u(s_1^*,s_2)\ge u(s_1^*,s_2^*) \quad \forall s_2\in S_2 \ . \qquad (\#2)$$

נסמן $\mathrm{v}=u(s_1^*,s_2^*)$ ונוכיח כי v אמנם ערך המשחק.

ממשוואה (#2) נקבל

$$u(s_1^*,s_2)\ge \mathrm{v} \quad \forall s_2\in S_2 \quad\Rightarrow\quad \min_{s_2\in S_2} u(s_1^*,s_2)\ge \mathrm{v} \quad\Rightarrow\quad \max_{s_1\in S_1}\min_{s_2\in S_2} u(s_1^*,s_2)\ge \mathrm{v} \quad\Rightarrow\quad \underline{\mathrm{v}}\ge \mathrm{v} \ .$$

ממשוואה (#1) נקבל

$$u(s_1,s_2^*)\le \mathrm{v} \quad \forall s_1\in S_1 \quad\Rightarrow\quad \max_{s_1\in S_1} u(s_1,s_2^*)\le \mathrm{v} \quad\Rightarrow\quad \min_{s_2\in S_2}\max_{s_1\in S_1} u(s_1,s_2)\le \mathrm{v} \quad\Rightarrow\quad \bar{\mathrm{v}}\le \mathrm{v} \ .$$

מכיוון ש- $\underline{\mathrm{v}}\le\bar{\mathrm{v}}$ מתקיים תמיד אזי

$$\mathrm{v}\le\underline{\mathrm{v}}\le\bar{\mathrm{v}}\le\mathrm{v} \ .$$

ולפיכך בהכרח

$$\underline{\mathrm{v}}=\mathrm{v}=\bar{\mathrm{v}} \ .$$

■

הגדרה 4.5 נקודת אוכף

במשחק שני שחקנים סכום אפס, זוג אסטרטגיות (s_1^*,s_2^*) נקרא **נקודת אוכף** של הפונקציה $u:S_1\times S_2\to\mathbb{R}$ אם

$$u(s_1^*,s_2^*)\ge u(s_1,s_2^*) \qquad \forall s_1\in S_1 \ ,$$
$$u(s_1^*,s_2^*)\le u(s_1^*,s_2) \qquad \forall s_2\in S_2 \ .$$

במילים אחרות, $u(s_1^*,s_2^*)$ הוא המספר הגדול ביותר בעמודה s_2^* והקטן ביותר בשורה s_1^*.

אם אנחנו רושמים את $u(s_1,s_2)$ בהצגת מטריצה:

$$A_{ij}=u(s_{1,i},s_{2,j})$$

אז הזוג אסטרטגיות (s_{i^*},s_{j^*}) הוא נקודת אוכף אם

$$A_{i^*j^*}\ge A_{ij^*} \quad \forall i \ ,$$
$$A_{i^*j^*}\le A_{i^*j} \quad \forall j \ .$$

משפט 4.8 יחס בין נקודת אכף ווקטור אסטרטגיות

במשחק שני שחקנים סכום אפס. $u(s_1^*,s_2^*)$ היא נקודת אוכף אם ורק אם

- s_1^* היא אסטרטגיה אופטימלית לשחקן 1,
- s_2^* היא אסטרטגיה אופטימלית לשחקן 2.

במקרה זה $u\left(s_1^*,s_2^*\right)$ הוא ערך המשחק.

ניסוח חלופי של המשפט:

$$\left.\begin{array}{ll} A_{i^*j^*}\geq A_{ij^*} & \forall i \\ A_{i^*j^*}\leq A_{i^*j} & \forall j \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \max_i \min_j A_{ij} = \min_j \max_i A_{ij} = \mathrm{v}$$

הוכחה: יהי G משחק שני שחקנים סכום אפס. נניח כי $\left(s_1^*,s_2^*\right)$ נקודת אוכף:

$$u\left(s_1^*,s_2^*\right)\geq u\left(s_1,s_2^*\right) \qquad \forall s_1\in S_1\ , \tag{1*}$$

$$u\left(s_1^*,s_2^*\right)\leq u\left(s_1^*,s_2\right) \qquad \forall s_2\in S_2\ . \tag{2*}$$

(1*) מתקיים אם ורק אם

$$u\left(s_1^*,s_2^*\right)\geq \max_{s_1\in S_1} u\left(s_1,s_2^*\right)\geq \min_{s_2\in S_2}\max_{s_1\in S_1} u\left(s_1,s_2\right)=\bar{\mathrm{v}}\ .$$

(2*) מתקיים אם ורק אם

$$u\left(s_1^*,s_2^*\right)\leq \min_{s_2\in S_2} u\left(s_1^*,s_2\right)\leq \max_{s_1\in S_1}\min_{s_2\in S_2} u\left(s_1,s_2\right)=\underline{\mathrm{v}}\ .$$

לפי משפט המקסמין 4.5: $\underline{\mathrm{v}}\leq\bar{\mathrm{v}}$. לכן

$$u\left(s_1^*,s_2^*\right)\leq\underline{\mathrm{v}}\leq\bar{\mathrm{v}}=u\left(s_1^*,s_2^*\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathrm{v}}=\bar{\mathrm{v}}=\mathrm{v}\ .$$

■

שעור 5
אסטרטגיות מעורבות

5.1 הגדרה של אסטרטגיות מעורבות

הגדרה 5.1 אסטרטגיות מעורבות

יהי $G=\left(N,(S_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}\right)$ משחק בצורה אסטרטגית שבו קבוצות האסטרטגיות של השחקנים סופיות.

נניח כי $S_1=\left(s_1^1,s_1^2,\ldots,s_1^n\right)$ קבוצת אסטרטגיות של שחקן 1,
ונניח כי X_1 היא פונקציית ההסתברות של הקבוצת אסטרטגיות S_1:

$$X_1:S_1\to[0,1]\ .$$

קבוצת אסטרטגיה מעורבת של שחקן 1 מסומן X_1 ומוגדר להיות הקבוצה

$$X_1(S_1)=\left\{X_1\left(s_1^1\right),X_1\left(s_1^2\right),\ldots,X_1\left(s_1^n\right)\right\}$$

כאשר:

$X_1\left(s_1^1\right)=$ ההסתברות לשחקן 1 לשחק לפי האסטרטגיה s_1^1,
$X_1\left(s_1^2\right)=$ ההסתברות לשחקן 1 לשחק לפי האסטרטגיה s_1^2,
וכן הלא.

באופן כללי, נניח כי $S_i=\left(s_i^1,s_i^2,\ldots,s_i^m\right)$ קבוצת אסטרטגיות של שחקן 1.
קבוצת אסטרטגיה מעורבת של שחקן i מסומן X_i ומוגדר להיות הקבוצה

$$X_i(S_i)=\left\{X_i\left(s_i^1\right),X_i\left(s_i^2\right),\ldots,X_i\left(s_i^m\right)\right\}$$

כאשר:

$X_i\left(s_i^1\right)=$ ההסתברות לשחקן i לשחק לפי האסטרטגיה s_i^1,
$X_i\left(s_i^2\right)=$ ההסתברות לשחקן i לשחק לפי האסטרטגיה s_i^2,
וכן הלא.

סימון: ניתן לסמן אסטרטגיה מעורבת עם אותיות גדולות, ולסמן את ההסתברויות עצמן עם אותיות קטנות. למשל

$$X\left(S_1\right)=\left\{X\left(s_1^1\right),X\left(s_1^2\right),\ldots,X\left(s_1^n\right)\right\}=\left\{x_1,x_2,\ldots,x_n\right\}$$

ז"א $x_1=X\left(s_1^1\right)$ מסמן את ההסתברות ששחקן 1 ישחק לפי אסטרטגיה s_1^1, ו- $x_2=X\left(s_1^2\right)$ מסמן את ההסתברות ששחקן 2 ישחק לפי אסטרטגיה s_1^2.

לפי תכונת החיובית של פונקציית הסתברות,

$$0\leq X\left(s_i\right)\leq 1 \qquad (*1)$$

לכל $s_i\in S_i$ ולפי תכונת הנרמול של פונקציית הסתברות, אם X אסטרטגיה מעורבת של שחקן i אז מתקיים

$$X\left(s_i^1\right)+X\left(s_i^2\right)+\ldots+X\left(s_i^n\right)=1\ . \qquad (*2)$$

תכונות (1*) ו- (2*) אומרות כי הקבוצה X היא **סימפלקס**.

דוגמה 5.1 (אסטרטגיה מעורבת)

דוגמה 1) נניח שקבוצת האסורוגיות הטהורות של שחקן היא 1

$$S_1=\{A,B,C\}\ .$$

את האסטרטגיות המעורבת X שבה הוא בוחר כל אסטרטגיה טהורה בהסתברות $\frac{1}{3}$ נסמן על יד

$$X(S_1) = \{X(A), X(B), X(C)\} = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)$$

דוגמה 2 אם $S_1 = \{H, T\}$, האוסף של כל האסטרטגיות המעורבות, X של שחקן 1 מסומן

$$\Sigma_1 = \left\{ \{X(H), X(T)\} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; 0 \le x_1, x_2 \le 1, x_1 + x_1 = 1 \right\} .$$

במקרה זה הקבוצה Σ_1 שקולה לקטע ב- $\mathbb{R}^2$ המחבר את $(1,0)$ עם $(0,1)$.

דוגמה 3 אם $S_2 = \{L, M, R\}$, אוסף של כל האסטרטגיות המעורבות Y של שחקן 2 מסומן

$$\Sigma_2 = \left\{ \{Y(L), Y(M), Y(R)\} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; 0 \le y_1, y_2, y_3 \le 1 \;,\; y_1 + y_2 + y_3 = 1 \right\} .$$

במקרה זה Σ_2 שקולה למשולש ב- $\mathbb{R}^3$ שקדקודיו הם הנקודות $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ו- $(0,0,1)$.

דוגמה 5.2 (וקטור אסטרטגיות מעורב)

נתון המשחק G באסטרטגיות טהורות הנתון למטה:

$I \backslash II$	A	B
α	$1,1$	$2,-7$
β	$3,-2$	$5,6$

נניח כי באסטרטגיות מעורבות שחקן 1 משחק לפי אסטרטגיה A בהסתברות $\dfrac{1}{3}$ ולפי אסטרטגיה B בהסתברות $\dfrac{2}{3}$, ושחקן 2 משחק לפי אסטרטגיה α בהסתברות $\dfrac{2}{5}$ ולפי אסטרטגיה β בהסתברות $\dfrac{3}{5}$. וקטור האסטרגיות המעורב של שחקן 1 הוא

$$X = (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

ווקטור האסטרגיות המעורב של שחקן 2 הוא

$$Y = (y_1, y_2) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) .$$

המשחק בצורה אסטרטגית מעורבת הינה

$I \backslash II$	$\frac{1}{3}(A)$	$\frac{2}{3}(B)$
$\frac{2}{5}(\alpha)$	$1,1$	$2,-7$
$\frac{3}{5}(\beta)$	$3,-2$	$5,6$

שימו לב X ו- Y הם סימפלקסים, בגלל ש- $x_1 + x_2 = 1$ ו- $y_1 + y_2 = 1$.

דוגמה 5.3 (וקטור אסטרטגיות מעורב)

נתון המשחק G באסטרטגיות טהורות הנתון למטה:

I \ II	L	C	R
t	$0,2$	$2,-7$	$3,2$
m	$3,-2$	$5,4$	$2,9$
b	$3,-2$	$5,6$	$7,-8$

נניח כי באסטרטגיות מעורבות שחקן 1 משחק לפי אסטרטגיה L בהסתברות $\frac{1}{7}$, לפי אסטרטגיה C בהסתברות $\frac{2}{7}$, ולפי אסטרטגיה R בהסתברות $\frac{4}{7}$, ושחקן 2 משחק לפי אסטרטגיה t בהסתברות $\frac{1}{9}$, לפי אסטרטגיה m בהסתברות $\frac{4}{9}$, ולפי אסטרטגיה b בהסתברות $\frac{5}{9}$.

וקטור האסטרגיות המעורב של שחקן 1 הוא

$$X=(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{4}{7}\right)$$

ווקטור האסטרגיות המעורב של שחקן 2 הוא

$$Y=(y_1,y_2,y_3)=\left(\frac{1}{9},\frac{4}{9},\frac{5}{9}\right)\ .$$

המשחק בצורה אסטרטגית מעורבת הינה

I \ II	$\frac{1}{7}\,(L)$	$\frac{2}{7}\,(C)$	$\frac{4}{7}\,(R)$
$\frac{1}{9}\,(t)$	$0,2$	$2,-7$	$3,2$
$\frac{4}{9}\,(m)$	$3,-2$	$5,4$	$2,9$
$\frac{5}{9}\,(b)$	$3,-2$	$5,6$	$7,-8$

שימו לב X ו- Y הם סימפלקסים, בגלל ש- $x_1+x_2+x_3=\frac{1}{7}+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=1$ ו- $y_1+y_2+y_3=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{5}{9}=1$.

הגדרה 5.2 ההרחבה של משחק לאסטרטגיות מעורבות

יהי $G=\left(N,(S_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}\right)$ משחק בצורה אסטרטגית.
ההרחבה של G לאסטרטגיות מעורבות הוא המשחק

$$\Gamma=\left(N,(\Sigma_i)_{i\in N},(U_i)_{i\in N}\right) \tag{5.1}$$

כאשר:
Σ_i מסמן את האוסף של כל האסורוגיות המעורבות $X_i\,(S_i)$ של שחקן i,
ו- U_i מסמן את פונקצית התשלום של שחקן i אשר מוגדרת

$$U_i\left(X_1,\ldots,X_N\right)=\sum_{s_1\in S_1,\ldots,s_N\in S_N} u_i(s_1,\ldots,s_n)X_1(s_1)X_2(s_2)\ldots X_n(s_n)\ . \tag{5.2}$$

דוגמה 5.4 (פונקצית התשלום של משחק באסטרטגיות מעורבות)

נתון המשחק G באסטרטגיות טהורות:

$I \backslash II$	a	b
α	$1,1$	$2,-7$
β	$3,-2$	$5,6$

ונתון הוקטור האסטרגיות המעורבות של שחקן 1:

$$X = (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

והוקטור אסטרטגיות מעורבות של שחקן 2:

$$Y = (y_1, y_2) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) \ .$$

ההרחבה של המשחק לאסטרטגיות מעורבות הינה

$I \backslash II$	$x_1\,(a)$	$x_2\,(b)$
$y_1\,(\alpha)$	$1,1$	$2,-7$
$y_2\,(\beta)$	$3,-2$	$5,6$

$=$

$I \backslash II$	$\frac{1}{3}\,(a)$	$\frac{2}{3}\,(b)$
$\frac{2}{5}\,(\alpha)$	$1,1$	$2,-7$
$\frac{3}{5}\,(\beta)$	$3,-2$	$5,6$

פונקצית התשלום של של שחקן i היא התוחלת התשלום של שחקן i:

$$U_1(X,Y) = 1x_1x_2 + 2x_2y_1 + 3x_1y_2 + 5x_2y_2 = \frac{59}{15} \ .$$

$$U_2(X,Y) = 1x_1x_2 - 7x_2y_1 - 2x_1y_2 + 6x_2y_2 = \frac{4}{15} \ .$$

ניתן לרשום את פונקצית התשלום במונחי המטריצות התשלומים של שחקן 1 ו- שחקן 2 בנפרד. המטריצת התשלומים של המשחק הינה

$$U = \begin{pmatrix} (1,1) & (2,-7) \\ (3,-2) & (5,6) \end{pmatrix}$$

והמטריצת התשלומים של השחקנים הנפרדים הינן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \ .$$

A המטיצת התשלומים של שחקן 1 ו- B המטירצת התשלומים של שחקן 2. במונחי A ו- B הפונקציות התשלומים שלהם באסטרטגיות מעורבות הן

$$U_1(X,Y) = X^tAY = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$U_2(X,Y) = X^tBY = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

דוגמה 5.5 (וקטור אסטרטגיות מעורב)

נתון המשחק G באסטרטגיות טהורות:

I \ II	L	C	R
t	$0,2$	$2,-7$	$3,2$
m	$3,-2$	$5,4$	$2,9$
b	$3,-2$	$5,6$	$7,-8$

ונתון וקטור האסטרגיות המעורבות של שחקן 1:

$$X=(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{4}{7}\right)$$

ווקטור האסטרגיות המעורבות של שחקן 2:

$$Y=(y_1,y_2,y_3)=\left(\frac{1}{9},\frac{4}{9},\frac{5}{9}\right)\ .$$

המשחק בצורה אסטרטגית מעורבת הינה

I \ II	$x_1\,(L)$	$x_2\,(C)$	$x_3\,(R)$
$y_1\,(t)$	$0,2$	$2,-7$	$3,2$
$y_2\,(m)$	$3,-2$	$5,4$	$2,9$
$y_3\,(b)$	$3,-2$	$5,6$	$7,-8$

=

I \ II	$\frac{1}{7}\,(L)$	$\frac{2}{7}\,(C)$	$\frac{4}{7}\,(R)$
$\frac{1}{9}\,(t)$	$0,2$	$2,-7$	$3,2$
$\frac{4}{9}\,(m)$	$3,-2$	$5,4$	$2,9$
$\frac{5}{9}\,(b)$	$3,-2$	$5,6$	$7,-8$

פונקצית התשלום של של שחקן i היא התוחלת התשלום של שחקן i:

$$U_1(X,Y)=0\cdot x_1x_2+2x_2y_1+3x_1y_2+3x_3y_1+3x_1y_2+5x_2y_2+2x_3y_2+3x_1y_3+5x_2y_3+7x_3y_3=\frac{107}{21}\ .$$

$$U_2(X,Y)=2x_1y_1-7x_1y_2+2x_1y_3-2x_2y_1+4x_2y_2+9x_2y_3-2x_3y_1+6x_3y_2-8x_3y_3=\frac{10}{21}\ .$$

ניתן לרשום את פונקצית התשלום במונחי המטריצות התשלומים של שחקן 1 ו- שחקן 2 בנפרד. המטריצת התשלומים של המשחק הינה

$$U=\begin{pmatrix}(0,2)&(2,-7)&(3,2)\\(3,-2)&(5,4)&(2,9)\\(3,-2)&(5,6)&(7,-8)\end{pmatrix}$$

והמטריצת התשלומים של השחקנים הנפרדים הינן

$$A=\begin{pmatrix}0&2&3\\3&5&2\\3&5&7\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}2&-7&2\\-2&4&9\\-2&6&-8\end{pmatrix}\ .$$

A המטיצת התשלומים של שחקן 1 ו- B המטירצת התשלומים של שחקן 2. במונחי A ו- B הפונקציות התשלומים שלהם באסטרטגיות מעורבות הן

$$U_1(X,Y)=X^tAY=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&3\\3&5&2\\3&5&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$$U_2(X,Y)=X^tBY=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-7&2\\-2&4&9\\-2&6&-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

5.2 שיווי משקל נאש ועקרון האדישות

הגדרה 5.3 שיווי משקל האש באסטרטגיות מעורבות

יהי $G=\left(N,(S_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}\right)$ משחק בצורה אסטרטגית ויהי $\Gamma=\left(N,(\Sigma_i)_{i\in N},(U_i)_{i\in N}\right)$ ההרחבה שלו לאסטרטגיות מעורבות. וקטור אסטרטגיות $\sigma^*=(X_1^*,\ldots,X_N^*)$ הוא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות אם התנאי הבא מתקיים

$$U_i\left(\sigma^*\right)\geq U_i\left(X_i,\sigma_{-i}^*\right)\ . \tag{5.3}$$

משפט 5.1 עקרון האדישות

יהי σ^* שיווי משקל במשחק בצורה אסטרטגית, ותהיינה s_i ו- $\hat{s}_i$ שתי אסטרטגיות טהורות של שחקן i. אם $\sigma_i^*\left(s_i\right)>0$ וכן $\sigma_i^*\left(\hat{s}_i\right)>0$ אזי

$$U_i\left(s_i,\sigma_{-i}^*\right)=U_i\left(\hat{s}_i,\sigma_{-i}^*\right) \tag{5.4}$$

הוכחה: נניח בשלילה כי משוואה (5.4) אינה מתקיימתף ובלי הגבלת הכלליות נניח כי

$$U_i\left(s_i,\sigma_{-i}^*\right)>U_i\left(\hat{s}_i,\sigma_{-i}^*\right)\ . \tag{5.5}$$

תהי σ_i האסטרטגיה של שחקן i המוגדרת באופן הבא:

$$\sigma_i(t_i)\triangleq\begin{cases}\sigma_i^*\left(t_i\right) & t_i\notin\{s_i,\hat{s}_i\}\ ,\\ 0 & t_i=\hat{s}_i\ ,\\ \sigma_i^*\left(s_i\right)+\sigma_i^*\left(\hat{s}_i\right) & t_i=s_i\ .\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
U_i\left(\sigma_i,\sigma_{-i}^*\right)&=\sum_{t_i\in S_i}\sigma\left(t_i\right)U_i\left(t_i,\sigma_{-i}^*\right) && (5.6)\\
&=\sum_{t_i\notin\{s_i,\hat{s}_i\}}\sigma^*\left(t_i\right)U_i\left(t_i,\sigma_{-i}^*\right)+\left(\sigma^*\left(s_i\right)+\sigma^*\left(\hat{s}_i\right)\right)U_i\left(s_i,\sigma_{-i}^*\right) && (5.7)\\
&>\sum_{t_i\notin\{s_i,\hat{s}_i\}}\sigma^*\left(t_i\right)U_i\left(t_i,\sigma_{-i}^*\right)+\sigma^*\left(s_i\right)U_i\left(s_i,\sigma_{-i}^*\right)+\sigma^*\left(\hat{s}_i\right)U_i\left(\hat{s}_i,\sigma_{-i}^*\right) && (5.8)\\
&=\sum_{t_i\in S_i}\sigma^*\left(t_i\right)U_i\left(t_i,\sigma_{-i}^*\right) && (5.9)\\
&=U_i\left(\sigma^*\right)\ . && (5.10)
\end{aligned}$$

קיבלנו כי $U_i\left(\sigma_i,\sigma_{-i}^*\right)>U_i\left(\sigma^*\right)$ בסתירה לכך ש- σ^* שיווי משקל. ■

דוגמה 5.6 ()

נתון משחק שני שחקנים (שאינו סכום אפס) בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

$I \backslash II$	L	R
T	$1,8$	$9,2$
B	$7,1$	$2,5$

מצאו את השיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

$I \backslash II$	$y(L)$	$(1-y)(R)$
$x(T)$	$1,8$	$9,2$
$(1-x)(B)$	$7,1$	$2,5$

$$U_1(x,y) = (2(1-x)+9x)(1-y)+(7(1-x)+x)y = -13xy+7x+5y+2 \ .$$

$$U_2(x,y) = (5(1-x)+2x)(1-y)+(7x+1)y = 10xy-3x-4y+5 \ .$$

לפי עקרון האדישות:

$$\begin{aligned} U_1(T,y^*) =& U_1(B,y^*) \\ \Rightarrow \quad U_1(1,y^*) =& U_1(0,y^*) \\ \Rightarrow \quad 9-8y^* =& 2+5y^* \\ \Rightarrow \quad y^* =& \frac{7}{13} \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2(x^*,L) =& U_2(x^*,R) \\ \Rightarrow \quad U_2(x^*,1) =& U_2(x^*,0) \\ \Rightarrow \quad 1+7x^* =& 5-3x^* \\ \Rightarrow \quad x^* =& \frac{2}{5} \ . \end{aligned}$$

לכן השיווי משקל הוא

$$X^* = \left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right) \ , \qquad Y^* = \left(\frac{7}{13},\frac{6}{13}\right) \ .$$

■

דוגמה 5.7 ()

נתון משחק שני שחקנים (שאינו סכום אפס) בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

$I \backslash II$	L	R
T	$5,5$	$-2,-2$
B	$4,4$	$3,3$

מצאו את השיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

$I \backslash II$	$y(L)$	$(1-y)(R)$
$x(T)$	$5,5$	$-2,-2$
B	$4,4$	$3,3$

$$U_1\left(x,y\right) = (3(1-x)-2x)(1-y)+(4(1-x)+5x)y = 6xy-5x+y+3 \ .$$
$$U_2\left(x,y\right) = (3(1-x)-2x)(1-y)+(4(1-x)+5x)y = 6xy-5x+y+3 \ .$$

לפי עקרון האדישות:

$$\begin{aligned} U_1\left(T,y^*\right) =& U_1\left(B,y^*\right) \\ \Rightarrow \quad U_1\left(1,y^*\right) =& U_1\left(0,y^*\right) \\ \Rightarrow \quad -2+7y^* =& 3+y^* \\ \Rightarrow \quad y^* =& \frac{5}{6} \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2\left(x^*,L\right) =& U_2\left(x^*,R\right) \\ \Rightarrow \quad U_2\left(x^*,1\right) =& U_2\left(x^*,0\right) \\ \Rightarrow \quad 4+x^* =& 3-5x^* \\ \Rightarrow \quad x^* =& -\frac{1}{6} \notin [0,1] \ . \end{aligned}$$

אין השיווי משקל באסרטגיות מעורבות. ■

משפט 5.2 נוסחאות שיווי משקל למשחק שני-שחקנים ריבועי

יהי $G=(\{1,2\},\{S_1,S_2\},\{u_1,u_2\})$ משחק שני שחקנים ריבועי
שבו לכל שחקן יש n אסטרטגיות טהורות.

יהי $X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ וקטור אסטרטגיות שיווי משקל של שחקן 1,

יהי $Y^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ וקטור אסטרטגיות שיווי משקל של שחקן 2

תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצת התשלומים של שחקן 1, תהי $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצת התשלומים של שחקן 2,

ויהו U_1^* ו- U_2^* התשלומי שיווי משקל של שחקן 1 ושחקן 2 בהתאמה.

אזי

$$X^{*t} = \frac{e^t A^{-1}}{\langle e, A^{-1}e\rangle} \ , \qquad U_1^* = \langle X^*, AY^*\rangle = \frac{1}{\langle e, A^{-1}e\rangle}$$
$$Y^* = \frac{B^{-1}e}{\langle e, B^{-1}e\rangle} \ , \qquad U_2^* = \langle X^*, BY^*\rangle = \frac{1}{\langle e, B^{-1}e\rangle} \ .$$

כאשר $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ וקטור של $\mathbb{R}^n$ שבו כל איבר שווה ל- 1.

הוכחה:

- לפי עקרון האדישות,

$$X^{*t}A = u_1 e^t \ .$$

לכן

$$X^{*t} = u_1 e^t A^{-1} \ .$$

מכיוון שהסכום של ההסתברויות שווה ל- 1 אז

$$1 = X^{*t}e = u_1 e^t A^{-1} e \qquad \Rightarrow \qquad u_1 = \frac{1}{e^t A^{-1} e} = \frac{1}{\langle e, A^{-1}e \rangle} \ .$$

על ידי הצבה בביטוי הקודם נקבל

$$X^{*t} = \frac{e^t A^{-1}}{\langle e, A^{-1}e \rangle} \ .$$

- באותה מידה לפי עקרון האדישות,

$$BY^* = u_2 e \ .$$

לכן

$$Y^* = u_2 B^{-1} e \ .$$

מכיוון שהסכום של ההסתברויות שווה ל- 1 אז

$$1 = e^t X^* = u_2 e^t B^{-1} e \qquad \Rightarrow \qquad u_2 = \frac{1}{e^t B^{-1} e} = \frac{1}{\langle e, B^{-1}e \rangle} \ .$$

על ידי הצבה בביטוי הקודם נקבל

$$Y^* = \frac{A^{-1}e}{\langle e, B^{-1}e \rangle} \ .$$

- $$\begin{aligned} U_1^* &= \langle X^*, AY^* \rangle = X^{*t} A Y^* \\ &= \frac{e^t A^{-1} A B^{-1} e}{\langle e, A^{-1}e \rangle \langle e, B^{-1}e \rangle} \\ &= \frac{e^t B^{-1} e}{\langle e, A^{-1}e \rangle \langle e, B^{-1}e \rangle} \\ &= \frac{\langle e, B^{-1}e \rangle}{\langle e, A^{-1}e \rangle \langle e, B^{-1}e \rangle} \\ &= \frac{1}{\langle e, A^{-1}e \rangle} \ . \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} U_2^* &= \langle X^*, BY^* \rangle = X^{*t} B Y^* \\ &= \frac{e^t A^{-1} B B^{-1} e}{\langle e, A^{-1}e \rangle \langle e, B^{-1}e \rangle} \\ &= \frac{e^t A^{-1} e}{\langle e, A^{-1}e \rangle \langle e, B^{-1}e \rangle} \\ &= \frac{\langle e, A^{-1}e \rangle}{\langle e, A^{-1}e \rangle \langle e, B^{-1}e \rangle} \\ &= \frac{1}{\langle e, B^{-1}e \rangle} \ . \end{aligned}$$

■

דוגמה 5.8 ((

$I \backslash II$	a	b	c
α	$1,1$	$1,2$	$2,1$
β	$1,2$	$3,1$	$0,1$
γ	$2,-1$	$1,1$	$1,2$

פתרון:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&3&0\\2&1&1\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\-1&1&2\end{pmatrix}\ .$$

$$A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-3&-1&6\\1&3&-2\\5&-1&-2\end{pmatrix}\ ,\qquad B^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1&3&-1\\5&-3&-1\\-3&3&3\end{pmatrix}\ .$$

לכן

$$U_1^*=\frac{1}{\langle e,A^{-1}e\rangle}=\frac{4}{3}\ .$$

$$U_2^*=\frac{1}{\langle e,B^{-1}e\rangle}=\frac{6}{5}\ .$$

$$X^*=U_1^*e^tA^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\ ,$$

$$Y^*=U_2^*B^{-1}e=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\ .$$

■

מסקנה 5.1 נוסחאות שיווי משקל למשחק שני-שחקנים סכום-אפס ריבועי

במשחק סכום אפס ריבועי שבו לכל שחקן יש n אסטרטגיות טהורות. אם A המטריצת המשחק אז הווקטורי אסטרטגיות שיווי משקל X^* ו- Y^* של שחקן 1 (שחקן השורות) ושחקן 2 (שחקן העמודות), והתשלום שיווי משקל נתונים על ידי

$$X^{*t}=\frac{e^tA^{-1}}{\langle e,A^{-1}e\rangle}\ ,\qquad Y^*=\frac{B^{-1}e}{\langle e,B^{-1}e\rangle}\ ,\qquad U=\langle X^*,AY^*\rangle=\frac{1}{\langle e,A^{-1}e\rangle}\ .$$

משפט 5.3

יהי $G=\left(N,(S_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}\right)$ משחק בצורה אסטרטגית ו- Γ ההרחבה שלו לאסטרטגיות מעורבות. וקטור אסטרטגיות מעורבות σ^* הוא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות במשחק Γ אם ורק אם לכל שחקן $i\in N$ ולכל אסטרטגיה טהורה $s_i\in S_i$ מתקיים

$$U_i(\sigma^*)\geq U_i\left(s_i,\sigma^*_{-i}\right)\ . \tag{5.11}$$

הוכחה: σ^* שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות במשחק Γ אז

$$U_i\left(\sigma^*\right) \geq U_i\left(X_i, \sigma^*_{-i}\right)$$

לכל שחקן i ולכל אסטרטגיה מעורבת $X_i \in \Sigma_i$.

כל אסטרטגיה טהורה היא אסטרטגיה מעורבת, אז

$$U_i\left(\sigma^*\right) \geq U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right)$$

לכל שחקן i ולכל אסטרטגיה טהורה $s_i \in S_i$.

להוכחת הכיוון ההפוך, נניח כי וקטור האסטרטגיות המעורבות σ^* מקיים את המשוואה (5.11) לכל שחקן $i \in N$ ולכל אסטרטגיה טהורה $s_i \in S_i$.
אזי לכל אסטרטגיה מעורבת σ_i של שחקן i:

$$U_i\left(X_i, \sigma^*_{-i}\right) = \sum_{s_i \in S_i} X_i\left(s_i\right) U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) \tag{5.12}$$

$$\leq \sum_{s_i \in S_i} X_i\left(s_i\right) U_i\left(\sigma^*\right) \tag{5.13}$$

$$= U_i\left(\sigma^*\right) \sum_{s_i \in S_i} X_i\left(s_i\right) = U_i\left(\sigma^*\right)\ , \tag{5.14}$$

כאשר השוויון (5.12) נובע מכך ש- U_i היא פונקציה מולטי-לינארית והאי-שוויון (5.13) נובע מהאי-שוויון (5.11).
בפרט, σ^* הוא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות ב- Γ. ■

מסקנה 5.2

יהי σ^* שיווי משקל במשחק בצורה אסטרטגית, ותהיינה s_i ו- $\hat{s}_i$ שתי אסטרטגיות טהורות של שחקן i.

1) אם $U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) < U_i\left(\sigma^*\right)$ אז $X_i^*\left(s_i\right) = 0$.

2) אם $U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) < U_i\left(\hat{s}_i, \sigma^*\right)$ אז $X_i^*\left(s_i\right) = 0$.

3) אם $X_i^*\left(s_i\right) > 0$ ו- $X_i^*\left(\hat{s}_i\right) > 0$ אז $U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) = U_i\left(\hat{s}_i, \sigma^*_{-i}\right)$.

4) אם s_i נשלטת חזק על ידי $\hat{s}_i$ אז $X_i^*\left(s_i\right) = 0$.

הוכחה:

1) נניח $U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) < U_i\left(\sigma^*\right)$.
נניח בשלילה כי $X_i^*\left(s_i\right) > 0$. לפי עקרון האדישות לכל אסטרטגיה טהורה $\hat{s}_i$ עבורה $X_i^*\left(\hat{s}_i\right) > 0$ מתקיים $U_i\left(\hat{s}_i, \sigma^*_{-i}\right) = U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right)$ לכן

$$\begin{aligned} U_i\left(\sigma^*\right) &= \sum_{\hat{s}_i \in S_i} X_i^*\left(\hat{s}_i\right) U_i\left(\hat{s}_i, \sigma^*_{-i}\right) \\ &= \sum_{\substack{\hat{s}_i \in S_i \\ X_i^*(\hat{s}_i) > 0}} X_i^*\left(\hat{s}_i\right) U_i\left(\hat{s}_i, \sigma^*_{-i}\right) \\ &= \sum_{\substack{\hat{s}_i \in S_i \\ X_i^*(\hat{s}_i) > 0}} X_i^*\left(\hat{s}_i\right) U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) \\ &= U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) \end{aligned}$$

בסתירה לכך ש- $U_i\left(s_i,\sigma_{-i}^*\right)<U_i\left(\sigma^*\right)$.

2)

$$U_i\left(s_i,\sigma_{-i}^*\right)<U_i\left(\hat{s}_i,\sigma_{-i}^*\right)\overset{\text{אדישות}}{=}U_i\left(\sigma^*\right)$$

ז"א $U_i\left(s_i,\sigma_{-i}^*\right)<U_i\left(\sigma^*\right)$ ולכן לפי סעיף א' $\sigma_i^*\left(s_i\right)=0$.

3) עקרון האדישות (משפט 5.1).

4) נניח כי s_i נשלטת חזק על ידי $\hat{s}_i$. אזי

$$u_i\left(s_i,s_{-i}\right)<u_i\left(\hat{s}_i,s_{-i}\right)\qquad\forall s_{-i}\in S_{-i}\ .$$

מכאן

$$\begin{aligned}U_i\left(s_i,\sigma_{-i}^*\right)&=\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\sigma_{-i}^*u_i\left(s_i,s_{-i}\right)\\&<\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\sigma_{-i}^*u_i\left(\hat{s}_i,s_{-i}\right)\\&=U_i\left(\hat{s}_i,\sigma_{-i}^*\right)\end{aligned}$$

ז"א

$$U_i\left(s_i,\sigma_{-i}^*\right)<U_i\left(\hat{s}_i,\sigma_{-i}^*\right)$$

ולכן לפי סעיף ב' $X_i^*\left(s_i\right)=0$.

■