

אלגברה 2

מועד ב'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר, ד"ר שי סרוסי.

תשפ"ג סמסטר ק'

השאלון מכיל 12 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (8 עמודים בפורמט A4), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.

שאלה 1

א (18 נק') תהי $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ מטריצה ניתנת ע"י

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -i & 1 \\ i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$$

(12 נק') (1)

האם A לכסינה אוניטרית? אם כן, מצאו Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $A = Q \cdot D \cdot \bar{Q}$.

(6 נק') (2)

נתון הפולינום $f(x) \in \mathbb{R}_3[x]$:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16.$$

מצאו את המטריצה $f(A)$.

(7 נק') (ב)

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} ויהיו $T : V \rightarrow V$ ו- $S : V \rightarrow V$ העתקות צמודות לעצמן. הוכיחו ש $S \cdot T$ צמודה לעצמה אם ורק אם S ו- T מתחלפות ($S \cdot T = T \cdot S$).

שאלה 2

א (10 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ המטריצה

$$A^{-2} = -\frac{1}{4}(A^2 - 5I) \text{ הוכיחו כי } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(15 נק') (ב) תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. הוכיחו את הטענות הבאות:

(5 נק') (1)

אם λ ערך עצמי של A אז λ ערך עצמי של A^t .

(5 נק') (2)

אם A הפיכה אז $A^{-1} \in \text{span}\{I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$.

(5 נק') (3)

$A^m \in \text{span}\{I_n, A, A^2, \dots, A^{m-1}\}$ אם ורק אם קיים פולינום $p(x) \in \mathbb{R}_m[x]$ כך ש- $p(A) = 0$.

שאלה 3

(א) (15 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ מטריצה ריבועית נורמלית עם ערכים עצמיים $\lambda = 5$ ו- $\lambda = 1$. נניח כי המרחב העצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 5$ הוא

$$V_{\lambda=5} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

מצאו את המטריצה A .

(ב) (5 נק') תהינה $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ו- $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ כך ש- B הרמיטית ו- C אוניטרית. אם B ו- C מתחלפות אז המטריצה $B \cdot C$ נורמלית.

(ג) (5 נק') יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור במרחב ווקטורי V . הוכיחו כי התת-מרחב $\ker T$ הוא T -שמור לכל אופרטור T .

שאלה 4

(א) (15 נק') יהי $V = \mathbb{R}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. ונתבונן בתת המרחב

$$U = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

(1) מצאו בסיס אורתוגנולי ל- U .

(2) מצאו בסיס אורתוגנולי ל- U^\perp .

(3) (5 נק')

(ב) (10 נק') תהינה $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ו- $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות במרחב של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[-1, 1]$. הוכיחו או הפריכו כי הנוסחה

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f^2(x)g(x) dx$$

מגדירה מכפלה פנימית.

(1) (5 נק') יהיו $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ו- $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ווקטורים של \mathbb{C}^2 . הוכיחו או הפריכו כי הנוסחה

$$\langle a, b \rangle = \lambda_1 a_1 b_1 + \lambda_2 a_2 b_2,$$

כאשר $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ סקלרים, מגדירה מכפלה פנימית.

שאלה 5

א) (15 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$ מטריצה ריבועית כך שהפולינום האופייני שלה הוא

$$p_A(x) = (x - 3)^4(x - 2)^4(x - 1)^2$$

והפולינום המינימלי הוא

$$m_A(x) = (x - 3)^2(x - 2)^2(x - 1).$$

(1) (10 נק') רשמו את כל האפשרויות לצורת ז'ורדן של A .

(2) (5 נק') נתון כי הריבוי גיאומטרי של הערך עצמי $\lambda = 3$ הוא 2 והריבוי גיאומטרי של הערך עצמי $\lambda = 2$ הוא 2. רשמו את הצורת ז'ורדן של A .

ב) (10 נק') תהי $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

(1) (5 נק') אם אפס לא ערך עצמי של B אז B הפיכה.

(2) (5 נק') אם B הפיכה אז B לכסינה מעל \mathbb{R} .

פתרונות

שאלה 1

(א) (18 נק')

(1) (12 נק') $\bar{A} = A$ לכן A צמודה לעצמה לכן A נורמלית לכן A לכסינה אוניטרית לפי משפט הלכסון אוניטרית.

נמצא את הפולינום האופייני של A :

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & i & -1 \\ -i & x-2 & -i \\ -1 & i & x-2 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)((x-2)^2 - 1) - i(-i(x-2) - i) - (1+x-2) \\ &= (x-2)(x^2 - 4x + 3) + (-x + 2 - 1) - (x-1) \\ &= (x-2)(x-3)(x-1) - 2x + 2 \\ &= (x-2)(x-3)(x-1) - 2(x-1) \\ &= (x-1)((x-2)(x-3) - 2) \\ &= (x-1)(x^2 - 5x + 6 - 2) \\ &= (x-1)(x^2 - 5x + 4) \\ &= (x-1)(x^2 - 5x + 4) \\ &= (x-1)(x-4)(x-1) \\ &= (x-1)^2(x-4) \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

1. $\lambda = 4$ מריבוי אלגברי 1.

2. $\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 2.

מרחב העצמי ששייך ל- $\lambda = 1$

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - iR_1} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x, y, z) = (i, 1, 0)y + (-1, 0, 1)z, y, z \in \mathbb{R}$.

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מרחב העצמי ששייך ל- $\lambda = 4$

$$\begin{aligned}
 (A - 4I) &= \begin{pmatrix} -2 & -i & 1 \\ i & -2 & i \\ 1 & -i & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow 2R_3 + R_1]{R_2 \rightarrow 2R_2 + iR_1} \begin{pmatrix} -2 & -i & 1 \\ 0 & -3 & 3i \\ 0 & -3i & -3 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{-1}{3}R_2} \begin{pmatrix} -2 & -i & 1 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & -3i & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 3iR_2} \begin{pmatrix} -2 & -i & 1 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + iR_2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{-1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

פתרון: $(x, y, z) = (1, i, 1)z, z \in \mathbb{R}$.

$$V_4 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נסמן הווקטורים בבסיס של V_1 ב- $v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. ונסמן הווקטור של הבסיס של V_4 ב- $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$.

נבנה בסיס אורתוגונלי של V_1 ע"י שיטת גרם שמידט:

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|u_1\|^2 = 2.$$

$$\begin{aligned}
 u_2 &= v_2 - \frac{1}{\|u_1\|^2} \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1 \\
 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot i \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

בסה"כ קיבלנו בסיס אורתוגונלי של V_1 :

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

כעת נבנה בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{ \hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

בבסיס של V_4 יש רק ווקטור אחד ופיכך הבסיס כבר אורתוגונלי. נסמן הבסיס האורתוגונלי של V_4 ב-

$$\left\{ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

נבנה בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{ \hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

העמודות של המטריצה Q הנדרשת הן הווקטורים בבסיסים האורתונורמליים של המרחבים העצמיים:

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

והמטריצה האלכסונית D הנדרשת היא המטריצה שעל האלכסון הראשי שלה יש את הערכים העצמיים של A באותו סדר שהווקטורים העצמיים מופיעים ב- Q :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) (6 נק')

$$f(x) = (x - 4)^2(x - 1).$$

$$f(A) = Q \cdot f(D) \cdot Q^{-1} = Q \cdot \begin{pmatrix} f(4) & 0 & 0 \\ 0 & f(1) & 0 \\ 0 & 0 & f(1) \end{pmatrix} \cdot \bar{Q} = Q \cdot \begin{pmatrix} f(4) & 0 & 0 \\ 0 & f(1) & 0 \\ 0 & 0 & f(1) \end{pmatrix} \cdot \bar{Q} = 0_{3 \times 3}.$$

(ב) (7 נק')

נתון כי האופרטורים T ו- S צמודים לעצמם.

נניח כי $S \cdot T$ צמוד לעצמו.

$$\begin{aligned} \overline{S \cdot T} &= S \cdot T \quad (\text{לפי ההנחה ש-} ST \text{ צמוד לעצמו}) \\ \Rightarrow \bar{T} \cdot \bar{S} &= S \cdot T \quad (\text{לפי הגדרה של הצמוד}) \\ \Rightarrow T \cdot S &= S \cdot T \quad (T \text{ ו-} S \text{ צמודים לעצמם}). \end{aligned}$$

נניח כי S ו- T מתחלפים.

$$\begin{aligned} \overline{TS} &= \overline{TS} \\ \Rightarrow \overline{TS} &= \overline{ST} \quad (T \text{ ו-} S \text{ מתחלפים}) \\ \Rightarrow \overline{TS} &= \bar{T} \cdot \bar{S} \quad (\text{לפי ההגדרה של הצמוד}) \\ \Rightarrow \overline{TS} &= T \cdot S \quad (T \text{ ו-} S \text{ צמודים לעצמם}). \end{aligned}$$

שאלה 2

א) (1 המטריצה משולשית לכן הערכים עצמיים הם האיברים על האלכסון הראשי. לכן הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = (x+1)(x-1)(x+2)(x-2) = (x^2-1)(x^2-4) = x^4 - 5x^2 + 4.$$

לפי המשפט קיי-לי-המילטון, A מאפסת את הפולינום האופייני שלה, כלומר $p_A(A) = 0$ לכן

$$A^4 - 5A^2 + 4I = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{-1}{4} (A^4 - 5A^2) = A \cdot \left(\frac{-1}{4} (A^3 - 5A) \right)$$

לכן

$$A^{-1} = \frac{-1}{4} (A^3 - 5A).$$

נחשב את צד הימין:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

לכן

$$\frac{-1}{4} (A^3 - 5A) = \frac{-1}{4} \left[- \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{לכן}$$

(2) קיבלנו כי $A^{-1} = \frac{-1}{4} (A^3 - 5A)$. נכפיל את שני האגפים מצד שמאל ב- A^{-1} ונקבל:

$$A^{-2} = \frac{-1}{4} (A^2 - 5I)$$

באחד שלבים הקודמים קיבלנו כי $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. נציב ונקבל כי

$$A^{-2} = \frac{-1}{4} \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 5I \right] = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) (ב) נניח כי λ ערך עצמי של מטריצה A . אז

$$|\lambda I - A| = 0.$$

הדטרמיננטה נשמרת ע"י שיחלוף לכן

$$|(\lambda I - A)^t| = 0 \quad \Rightarrow \quad |\lambda I - A^t| = 0$$

לכן λ שורש של הפולינום האופייני של A^t לכן λ ערך עצמי של A^t .

(2) הפולינום האופייני הוא פולינום מתוקן לכן יש לו את הצורה

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + x^n.$$

לפי המשפט קיילי-המילטון, A מאפסת את הפולינום האופייני שלה. ז"א

$$\alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + A^n = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 I = -\alpha_1 A - \dots - A^n = A \left((-\alpha_1)I + (-\alpha_2)A + \dots + (-1)A^{n-1} \right)$$

הקבוע α_0 בהפולינום האופייני שווה ל- $|A|$. A הפיכה (נתון) לכן $|A| \neq 0$ לכן $\alpha_0 \neq 0$ לכן ההופכית α_0^{-1} קיימת. נכפיל ב- α_0^{-1} ונקבל:

$$I = A \left(\left(\frac{-\alpha_1}{\alpha_0} \right) I + \left(\frac{-\alpha_2}{\alpha_0} \right) A + \dots + \left(\frac{-1}{\alpha_0} \right) A^{n-1} \right)$$

מכאן נקבל כי

$$A^{-1} = \left(\frac{-\alpha_1}{\alpha_0} \right) I + \left(\frac{-\alpha_2}{\alpha_0} \right) A + \dots + \left(\frac{-1}{\alpha_0} \right) A^{n-1}$$

ולפיכך

$$A^{-1} \in \text{span} \{I, A, \dots, A^{n-1}\}.$$

(3) נניח ש $A^m \in \text{span}\{I_n, A, A^2, \dots, A^{m-1}\}$ אז קיימים סקלרים שך ש

$$A^m = \alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{m-1} A^{m-1}$$

ז"א

$$A^m - \alpha_{m-1} A^{m-1} - \alpha_{m-2} A^{m-2} - \dots - \alpha_1 A - \alpha_0 I_n = 0$$

לכן A מאפסת את

$$P(x) = x^m - \alpha_{m-1} x^{m-1} - \dots - \alpha_1 x - \alpha_0 \in \mathbb{F}[x].$$

נניח ש- A מאפסת את הפולינום

$$Q(x) = \beta_m x^m + \beta_{m-1} x^{m-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0 \in \mathbb{F}[x]$$

כאשר $Q(x) \in \mathbb{R}_m[x]$. כיוון ש הסדר של $Q(x)$ הוא m אז $\beta_m \neq 0$. נעביר אגפים:

$$\beta_m A^m = -(\beta_{m-1} A^{m-1} + \dots + \beta_1 A + \beta_0 I_n)$$

נחלק שני האגפים ב β_m :

$$A^m = - \left(\frac{\beta_{m-1}}{\beta_m} A^{m-1} + \dots + \frac{\beta_1}{\beta_m} A + \frac{\beta_0}{\beta_m} I_n \right)$$

קיבלנו כי $A^m \in \text{span}\{I_n, A, A^2, \dots, A^{m-1}\}$.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

שאלה 3

א) A נורמלית. לכן, לפי משפט הפירוק הספקטרלי, לכל וקטור $w \in \mathbb{R}^2$:

$$A \cdot w = 1 \cdot P_{V_1}(w) + 5 \cdot P_{V_5}(w)$$

ולפי נוסחת השלמה:

$$P_{V_1}(w) + P_{V_5}(w) = w \quad \Rightarrow \quad P_{V_1}(w) = w - P_{V_5}(w).$$

מכאן נובע כי

$$A \cdot w = w + 4 \cdot P_{V_5}(w)$$

נבנה את המטריצה A לפי הנוסחה:

$$A = \left(A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

נמצא $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ע"י משפט הפירוק הספקטרלי:

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4P_{V_5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4P_{V_5} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

לכן

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(ב)

נתון:

B הרמיטית לכן $\bar{B} = B$
 C אוניטרית, לכן $\bar{C} \cdot C = C \cdot \bar{C} = I$

צריך להוכיח:

$T = B \cdot C = C \cdot B$ נורמלית.

הוכחה:

$$\begin{aligned} T \cdot \bar{T} &= (B \cdot C) \cdot (\bar{C} \cdot \bar{B}) && \text{(הגדרה של הצמודה)} \\ &= B \cdot C \cdot \bar{C} \cdot \bar{B} && \text{(מתחלפות } B \text{ ו } C) \\ &= B \cdot \bar{B} && \text{(} C \text{ אוניטרית)} \\ &= B^2 && \text{(} B \text{ צמודה לעצמה).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{T} \cdot T &= \overline{(B \cdot C)} \cdot (C \cdot B) \\ &= \bar{C} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot B && \text{(הגדרה של הצמודה)} \\ &= \bar{C} \cdot \bar{B} \cdot B \cdot C && \text{(מתחלפות } B \text{ ו } C) \\ &= \bar{C} \cdot B \cdot B \cdot C && \text{(} B \text{ צמודה לעצמה)} \\ &= \bar{C} \cdot C \cdot B \cdot B && \text{(מתחלפות } B \text{ ו } C) \\ &= B \cdot B && \text{(} C \text{ אוניטרית)} \\ &= B^2. \end{aligned}$$

לכן $T \cdot \bar{T} = \bar{T} \cdot T$ ולכן T נורמלית.

(ג) לכל $u \in \ker T$,

$$T(u) = 0.$$

$0 \in \ker T$ לכן $T(u) \in \ker T$ לכל $u \in \ker T$ הוא תת-מרחב ש $-T$ שמור.

שאלה 4

(א) נסמן:

$$U = \text{span} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

נמצא תחילה בסיס למרחב:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 3 & 9 \\ 1 & -3 & -3 & -9 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & -5 & -6 & -17 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow 9R_4 + 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow \frac{1}{9}R_3 \\ R_2 \rightarrow -R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

ז"א רק הווקטורים v_1, v_2, v_3 בת"ל. המימד של U הוא 3 והווקטורים v_1, v_2, v_3 מהווים בסיס של U . נבצע גרם שמידט על הבסיס שמצאנו:

1) נסמן

$$\begin{aligned}
 U &= \text{span} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\
 u_1 &= v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|u_1\|^2 = 7. \\
 u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \\
 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245,84 | www.sce.ac.il | חייג: *מפחנזס

נבחר
 $\|u_2\|^2 = 19$

$$\begin{aligned} u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{19} \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\|u_3\|^2 = 2$. בסיס אורתוגונלי למרחב U :

$$B_U = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(2)

$$U = \text{span} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

תזכורת:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in U^\perp \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, u_i \right\rangle = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq 3.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{9} & 0 \end{array} \right)$$

פתרון:

$$(x, y, z, w) = \left(1, -\frac{10}{9}, \frac{2}{9}, 1 \right) w$$

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

נבחר $U^\perp = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$. לפיכך בסיס אורתוגונלי של U^\perp הוא

$$B_{U^\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

(ב) 1 הנוסחה אינה מגדירה מכפלת פנימית. תכונת לינאריות לא מתקיימת:

$$\langle \alpha f, g \rangle = \int_{-1}^1 (\alpha f)^2(x) g(x) dx = \int_{-1}^1 \alpha^2 f^2(x) g(x) dx = \alpha^2 \int_{-1}^1 f^2(x) g(x) dx = \alpha^2 \langle f, g \rangle \neq \alpha \langle f, g \rangle .$$

(2) הנוסחה אינה מגדירה מ"פ. דוגמה נגדית: $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$,

$$\langle a, b \rangle = 1 \cdot 1 \cdot i + 1 \cdot 0 \cdot 0 = i ,$$

$$\langle b, a \rangle = 1 \cdot i \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 0 = i ,$$

$$\overline{\langle a, b \rangle} = -i$$

$$\langle b, a \rangle \neq \overline{\langle a, b \rangle}$$

שאלה 5

(א) 1

אפשרות 1

$$\begin{pmatrix} J_2(3) & & & & & & & & \\ & J_2(3) & & & & & & & \\ & & J_2(2) & & & & & & \\ & & & J_2(2) & & & & & \\ & & & & J_1(1) & & & & \\ & & & & & J_1(1) & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245,84 | www.sce.ac.il | חייג: *מפחפח

(2) עבור כל ערך עצמי של A , מספר הבלוקים שווה לריבוי גיאומטרי שלו. לכן

$$A = \begin{pmatrix} J_2(3) & & & & & & & & \\ & J_2(3) & & & & & & & \\ & & J_2(2) & & & & & & \\ & & & J_2(2) & & & & & \\ & & & & J_1(1) & & & & \\ & & & & & J_1(1) & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

(1 ב) הטענה נכונה. הוכחה:

הפולינום האופייני של מטריצה B הוא $p_B(x) = |xI - B|$ כאשר I מטריצה היחידה של $\mathbb{R}^{n \times n}$. כל פולינום מתפרק לגורמים לינאריים (לא בהכרח שונים) מעל \mathbb{C} , לכן

$$p_B(x) = |xI - B| = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n).$$

אם 0 לא ערך עצמי של B אז 0 לא שורש של הפולינום האופייני. לפיכך $0 \neq p_B(0) \Leftarrow |-B| \neq 0 \Leftarrow |B| \neq 0$ הפיכה.

(2) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$|B| = 1 \neq 0$ לכן B הפיכה. הפולינום האופייני של B הוא

$$p_B(x) = |xI - B| = x^2 + 1.$$

$p_B(x)$ לא מתפרק לגורמים לינאריים מעל \mathbb{R} לכן B לא לכסינה מעל \mathbb{R} .