

# שיעור 8

## פולינום מקלורן וטיילור, כלל לופיטל

### 8.1 נוסחת טיילור ומקלורן

כדי למצוא ערכים של פונקציה מקרבים אותה באמצעות פולינום.

#### משפט 8.1 משפט טיילור

תהי  $f$  פונקציה מוגדרת בסביבה של נקודה  $a$  וגזירה לפחות  $n + 1$  פעמים בנקודה  $a$ . אז לכל  $x$  בסביבה לנקודה  $a$  קיימת נקודה  $c$  בין  $a$  ל-  $x$  כך ש-

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}$$

הנוסחה זו נקראת נוסחת טיילור. האיבר הסופי

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}$$

נקרא השארית. זאת אומרת

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x)$$

פולינום טיילור מסדר  $n$

נוסחת מקלורן היא נוסחת טיילור עבור  $a = 0$ .

#### משפט 8.2 מקלורן

תהי  $f$  פונקציה מוגדרת בסביבה של נקודה  $0$  וגזירה לפחות  $n + 1$  פעמים בנקודה  $0$ . אז לכל  $x$  בסביבה לנקודה  $0$  קיימת נקודה  $c$  בין  $0$  ל-  $x$  כך ש-

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

כאשר

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}x^{n+1}.$$

## 8.2 דוגמאות

### 8.1 דוגמה

$$\underline{f(x) = e^x}$$

נרשום פולינום מקלורן מסדר  $n$ :

$$f(0) = e^0 = 1$$

ו-

$$f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$$

לכן

$$f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1 ,$$

ונקבל

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} .$$

### 8.2 דוגמה

$$\underline{f(x) = \sin x}$$

נרשום פולינום מקלורן מסדר  $n$ :

$$f(0) = \sin(0) = 0 .$$

ו-

$$f'(x) = \cos x , \quad f'(0) = \cos(0) = 1 .$$

$$f''(x) = -\sin x , \quad f''(0) = -\sin(0) = 0 .$$

$$f'''(x) = -\cos x , \quad f'''(0) = -\cos(0) = -1 .$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x , \quad f^{(4)}(0) = \sin(0) = 0 .$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x , \quad f^{(5)}(0) = \cos(0) = 1 .$$

$$f^{(6)}(x) = -\sin x , \quad f^{(6)}(0) = -\sin(0) = 0 .$$

$$f^{(7)}(x) = -\cos x , \quad f^{(7)}(0) = -\cos(0) = -1 .$$

לכן

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} .$$

### 8.3 דוגמה

$$\underline{f(x) = \cos x}$$

נרשום פולינום מקלורן מסדר  $n$ :

$$f(0) = \cos(0) = 1 .$$

$$f'(x) = -\sin x, \quad f'(0) = -\sin(0) = 0.$$

$$f''(x) = -\cos x, \quad f''(0) = -\cos(0) = -1.$$

$$f^{(3)}(x) = \sin x, \quad f^{(3)}(0) = \sin(0) = 0.$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x, \quad f^{(4)}(0) = \cos(0) = 1.$$

$$f^{(5)}(x) = -\sin x, \quad f^{(5)}(0) = -\sin(0) = 0.$$

$$f^{(6)}(x) = -\cos x, \quad f^{(6)}(0) = -\cos(0) = -1.$$

$$f^{(7)}(x) = \sin x, \quad f^{(7)}(0) = \sin(0) = 0.$$

לכן

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$

## 8.4 דוגמה

רשמו את פולינום מקלורן מסדר 3 עבור הפונקציה  $y = \arctan(x+1)$ .

**פתרון:**

$$f(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2 + 1}, \quad f'(0) = \frac{1}{2}.$$

$$f''(x) = \frac{-2(x+1)}{((x+1)^2 + 1)^2}, \quad f''(0) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

$$P_2(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}.$$

## 8.5 דוגמה

ידוע שפולינום מקלורן מסדר 3 של פונקציה  $f(x)$  הוא  $x + 2x^2 - x^3$ . חשב את  $f''(0) \cdot f'''(0)$ .

**פתרון:**

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 = x + 2x^2 - x^3.$$

לכן

$$f'(0) = 1, \quad \frac{f''(0)}{2!} = 2, \quad \frac{f^{(3)}(0)}{3!} = -1$$

$$f''(0) \cdot f'''(0) = 4 \cdot (-6) = -24 .$$

## 8.6 דוגמה

רשמו פולינום מקלורן מסדר 2 עבור פונקציה  $y(x)$  הנתונה בצורה סתומה:

$$xy + y^3 = \cos(2x) .$$

### פתרון:

נציב  $x = 0$ :

$$y(0)^3 = \cos(2 \cdot 0) = 1 \quad \Rightarrow \quad y(0) = 1 .$$

נגזור את שני הצדדים:

$$y + xy' + 3y^2 \cdot y' = -2 \sin(2x)$$

נציב  $y(0) = 1, x = 0$ :

$$1 + 3 \cdot 1^2 \cdot y'(0) = -2 \sin(2 \cdot 0) \quad \Rightarrow \quad 1 + 3 \cdot y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(0) = -\frac{1}{3} .$$

נגזור את שני הצדדים פעם שניה:

$$y' + y' + xy'' + 6y \cdot (y')^2 + 3y^2 \cdot y'' = -4 \cos(2x)$$

נציב  $y'(0) = -\frac{1}{3}, y(0) = 1, x = 0$ :

$$-\frac{2}{3} + 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 3y'' = -4 \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 3y'' = -4 \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{4}{3} .$$

$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{3 \cdot 2!}x^2 = 1 - \frac{x}{3} - \frac{2}{3}x^2$$

## 8.7 דוגמה

רשמו פולינום מקלורן מסדר 2 עבור פונקציה  $y(x)$  הנתונה בצורה פרמטרית:

$$x = \ln(t+2) , \quad y = t^2 - 3t .$$

### פתרון:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(t+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1 .$$

לכן

$$y = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) = 4 .$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t-3}{\frac{1}{t+2}} = (2t-3)(t+2) = 2t^2 + t - 6 .$$

$$y'_x(t = -1) = -5 .$$

$$y_x'' = \frac{(y_x')_t}{x_t'} = \frac{4t+1}{\frac{1}{t+2}} = (4t+1)(t+2) .$$

$$y_x''(t=-1) = -3 .$$

לכן

$$P_2(x) = 5 - 5x - \frac{3x^2}{2!} = 4 - 5x - \frac{3x^2}{2} .$$

## 8.3 כלל לופיטל

### משפט 8.3 כלל לופיטל

יהיו  $f(x)$ ,  $g(x)$  פונקציות רציפות וגזירות בסביבה של נקודה  $a$ . אם התנאים הבאים מתקיימים:

1.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

או

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty , \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$

2.  $g'(x) \neq 0$  בסביבה של  $a$ ,

3. הגבול  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  קיים וסופי,

אז

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

## 8.4 דוגמאות

### 8.8 דוגמה

קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \cdot \ln x}$$

פתרון:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \cdot \ln x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{(x \cdot \ln x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \ln x} \\ &= \frac{1}{(1 + \ln 1)} = \frac{1}{(1 + 0)} = 1 \end{aligned}$$

## 8.9 דוגמה

קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{2x^2}$$

**פתרון:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{2x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 6x)'}{(2x^2)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin 6x}{4x} . \end{aligned}$$

דרך 1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin 6x}{4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(6 \sin 6x)'}{(4x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{36 \cdot \cos 6x}{4} \\ &= \frac{36 \cdot \cos 0}{4} \\ &= \frac{36}{4} . \end{aligned}$$

דרך 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin 6x}{4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{4} \cdot \frac{\sin 6x}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{36}{4} \cdot \frac{\sin 6x}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{36}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} \\ &= \frac{36}{4} . \end{aligned}$$

## 8.10 דוגמה

קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan 3x}{\tan 5x}$$

**פתרון:**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan 3x}{\tan 5x} &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(\tan 3x)'}{(\tan 5x)'} \\
&= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}} \\
&= \frac{3}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x} \\
&= \frac{3}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{1}{2}(1 + \cos 10x)}{\frac{1}{2}(1 + \cos 6x)} \\
&= \frac{3}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(1 + \cos 10x)}{(1 + \cos 6x)} \\
&= \frac{3}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(1 + \cos 10x)'}{(1 + \cos 6x)'} \\
&= \frac{3}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-10 \cdot \sin 10x}{-6 \cdot \sin 6x} \\
&= \frac{5}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin 10x}{\sin 6x} \\
&= \frac{5}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(\sin 10x)'}{(\sin 6x)'} \\
&= \frac{5}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{10 \cdot \cos 10x}{6 \cdot \cos 6x} \\
&= \frac{25}{9} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos 10x}{\cos 6x} \\
&= \frac{25}{9} \cdot \frac{\cos(5\pi)}{\cos(3\pi)} \\
&= \frac{25}{9} \cdot \frac{-1}{-1} \\
&= \frac{25}{9} .
\end{aligned}$$

## 8.11 דוגמה

קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} x \right) (2 - x) \right]$$

**פתרון:**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2} \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} x \right) (2 - x) \right] &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{\cot \left( \frac{\pi}{4} x \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{\frac{\pi}{4} \cdot \frac{-1}{\sin^2 \left( \frac{\pi}{4} x \right)}} \\
&= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \right)}} \\
&= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \right)}} \\
&= \frac{4}{\pi} .
\end{aligned}$$

## 8.12 דוגמה

קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right)$$

**פתרון:**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1 - \ln x}{(x - 1) \cdot \ln x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1 - \ln x)'}{((x - 1) \cdot \ln x)'} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 1/x}{\ln x + (x - 1)/x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - 1/x)'}{(\ln x + (x - 1)/x)'} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1/x^2}{1/x + 1/x^2} \\
&= \frac{1}{2} .
\end{aligned}$$

## 8.13 דוגמה

קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{1/x^2}$$

**פתרון:**



$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{1/x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 + (\cos 2x - 1))^{1/(\cos 2x - 1)} \right]^{(\cos 2x - 1)/x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{(\cos 2x - 1)/x^2} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x - 1)/x^2} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} (-2 \sin 2x)/2x} \\
 &= e^{-2} .
 \end{aligned}$$

תהי  $f(x) = (\cos 2x)^{1/x^2}$  אז

$$\ln f(x) = \frac{1}{x^2} \ln \cos(2x)$$

ו-

$$f(x) = e^{\ln f(x)} .$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos(2x)}{x^2}} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin(2x)}{2x \cos 2x}} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{(-2)}{\cos 2x}} \\
 &= e^{-2} .
 \end{aligned}$$

■