המחלקה למדעי המחשב

$29/11/23 12:00 - 26/11/23 12:00$ תשפ"ג

# אלגברה 2

## מועד ב'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר, ד'ר שי סרוסי.

תשפ"ג סמסטר ק'

**השאלון מכיל 12 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).**

**בהצלחה!**

===========================================================

**אחר / הערות**

- יש לפתור את כל השאלות.
- המשקל של כל שאלה מפורט להלן:
  - שאלה 1: 30 נקודות.
  - שאלה 2: 20 נקודות.
  - שאלה 3: 20 נקודות.
  - שאלה 4: 30 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבירו היטב את מהלך הפתרון. תשובה ללא הסבר (גם נכונה) לא תתקבל.
- אסור לחלוטין לקבל עזרה מסטודנט אחר או מאף אחד.
- עליכם להעלות את הפתרונות שלכם דרך אתר המודל של הקורס אלגברה 2 למדמ"ח לא יאוחר משעה $12:00$ ביום ד' $23-11-29$. פתרונות שהוגשו אחרי המועד הזה לא יתקבלו.
- מותר להשתמש בחומר של הקורס, התרגילים של הקורס והספרים של הקורס בלבד, אבל אסור להשתמש בשום מקורות אחרים.
- אחרי הגשת פתרונות אתם תקבלו הזמנה למבחן קצר בעל פה על הפתרונות שלכם. ייתכן שלא תעבור את המבחן או יורידו נקודות במקרה שאתם לא יכולים להסביר הפתרונות שלכם היטב.
- **סטודנט יהיה זכאי להגיש ערעור / בקשות שונות לגבי הבוחן במשך 5 ימים בלבד מיום קבלת הציון.**

===========================================================

**שאלה 1** תהי $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i & -i \\ 0 & 0 & -i & i \\ -i & i & 0 & 3 \\ i & -i & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

**א)** האם $A$ לכסינה אוניטרית? אם כן מצאו $Q$ אוניטרית ו- $D$ אלכסונית כך ש- $A = QD\bar{Q}$.

**ב)** יהי $u \in \mathbb{C}^4$ הווקטור $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. חשבו את $A^{10} \cdot u$.

**שאלה 2** תהי $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**א)** הוכיחו כי $A^{-1} = \frac{7}{6}I + A - \frac{4}{3}A^2 + \frac{1}{6}A^4$.

**ב)** הוכיחו כי $A^{-2} = \frac{859}{144}I - \frac{2605}{288}A + \frac{511}{96}A^2 - \frac{395}{288}A^3 + \frac{37}{288}A^4$.

**שאלה 3** תהי $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ האופרטור

$$T\left(a + bx + cx + dx^2\right) = a + 7b + (7a + b)x + (2c + 9d)x^2 + (9c + 2d)x^3 \ .$$

**א)** מצאו בסיס של וקטורים של $\mathbb{R}_3[x]$ המורכב מווקטורים עצמיים של $T$.

**ב)** חשבו את $T^5\left(3 + 2x + 5x^2 + 7x^3\right)$.

**שאלה 4** יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbb{F}$. יהיו $a, b \in V$ וקטורים של $V$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

$\langle a, b\rangle = 0$ אם ורק אם $\|a\| \leq \|a + kb\|$ לכל סקלר $k \in \mathbb{F}$.

# פתרונות

## שאלה 1

**א)**

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{10}} & 0 & -i\sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{10}} & 0 & i\sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad D=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

**ב)** $u=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ ווקטור עצמי ששייך לערך עצמי $0$. לכן

$$A^{10}u=0^{10}u=0\ .$$

## שאלה 2

**א)** המטריצה משולדית לכן הערכים עצמיים הם האיברים על האלכסון. לכן הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x)=(x-1)^2(x-2)(x-3)(x-4)=x^5-11x^4+45x^3-85x^2+74x-24\ .$$

לפי משפט קיילי המילטון $p_A(A)=0$ לכן $A^5-11A^4+45A^3-85A^2+74A-24I$. נעביר אגפים ונקבל

$$24I=A^5-11A^4+45A^3-85A^2+74A$$

לכן

$$\begin{aligned} I=&\frac{1}{24}A^5-\frac{11}{24}A^4+\frac{45}{24}A^3-\frac{85}{45}A^2+\frac{74}{24}A \\ =&A\left(\frac{1}{24}A^5-\frac{11}{24}A^4+\frac{15}{8}A^3-\frac{85}{24}A^2+\frac{37}{12}A\right) \end{aligned}$$

מכאן

$$A^{-1}=\frac{1}{24}A^4-\frac{11}{24}A^3+\frac{15}{8}A^2-\frac{85}{24}A+\frac{37}{12}I\ .$$

**ב)** נכפיל ב- $A^{-1}$:

$$\begin{aligned}
A^{-2} =& \frac{1}{24}A^3 - \frac{11}{24}A^2 + \frac{15}{8}A - \frac{85}{24}I + \frac{37}{12}A^{-1}\\
=& \frac{1}{24}A^3 - \frac{11}{24}A^2 + \frac{15}{8}A - \frac{85}{24}I + \frac{37}{12}\left(\frac{1}{24}A^4 - \frac{11}{24}A^3 + \frac{15}{8}A^2 - \frac{85}{24}A + \frac{37}{12}I\right)\\
=& \frac{859}{144}I - \frac{2605}{288}A + \frac{511}{96}A^2 - \frac{395}{288}A^3 + \frac{37}{288}A^4 \ .
\end{aligned}$$

## שאלה 3

**א)** המטריצה המייצגת של האופרטור לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_3[x]$ $E = \{1, x, x^2, x^3\}$:

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \end{pmatrix} .$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 11$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 8$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = -7$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = -6$ מריבוי אלגברי 1.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 11</u>

$$V_{11} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} .$$

וקטור עצמי של $T$ ששייך לערך עצמי 11:

$$u_{11} = x^2 + x^3 .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 8</u>

$$V_8 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} .$$

וקטור עצמי של $T$ ששייך לערך עצמי 8:

$$u_8 = 1 + x \ .$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $-7$

$$V_{-7} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\} \ .$$

וקטור עצמי של $T$ ששייך לערך עצמי $-7$:

$$u_{-7} = -x^2 + x^3 \ .$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $-6$

$$V_{-6} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \ .$$

וקטור עצמי של $T$ ששייך לערך עצמי $-6$:

$$u_{-6} = -1 + x \ .$$

**ב)** נסמן הווקטור $3 + 2x + 5x^2 + 7x^3$ לפי הבסיס הסטנדרטי ב-ס $a = \begin{pmatrix}3\\2\\5\\7\end{pmatrix}$.

נשים לב כי המטריצה המייצגת $[T]_E$ ממשית וסימטרית, ולכן $[T]_E$ נורמלית.
לפיכך לפי המשפט הפירוק הספקטרלי,

$$[T]^5 a = 11^5 P_{V_{11}}(a) + 8^5 P_{V_8}(a) + (-7)^5 P_{V_{-7}}(a) + (-6)^5 P_{V_{-6}}(a)$$

$$P_{V_{11}}(a) = \frac{1}{\|u_{11}\|^2} \langle a, u_{11}\rangle \, u_{11} = \frac{12}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \ .$$

$$P_{V_8}(a) = \frac{1}{\|u_8\|^2}\langle a, u_8\rangle\, u_8 = \frac{5}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} .$$

$$P_{V_{-7}}(a) = \frac{1}{\|u_{-7}\|^2}\langle a, u_{-7}\rangle\, u_{-7} = \frac{2}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix} .$$

$$P_{V_{-6}}(a) = \frac{1}{\|u_{-6}\|^2}\langle a, u_{-6}\rangle\, u_{-6} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} .$$

$$[T]^5 a = 11^5\begin{pmatrix}0\\0\\6\\6\end{pmatrix} + 8^5\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{5}{2}\\0\\0\end{pmatrix} + (-7)^5\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix} + (-6)^5\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{-1}{2}\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}78032\\85808\\983113\\949499\end{pmatrix}$$

לפיכך:

$$T^5(3+2x+5x^2+7x^3) = 78032 + 85808x + 983113x^2 + 949499x^3 .$$

**<u>שאלה 4</u>** הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$a = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 , \qquad b = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 , \qquad k = 1 \in \mathbb{R} .$$

$$\|a\| = 1 , \qquad \|a+kb\|^2 = \left\|\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right\| = 3 .$$

$\|a\| < \|a+kb\|$ ו- $\langle a, b\rangle \neq 0$.