אלגברה ליניארית 1 למדמ"ח

תוכן העניינים

1 מערכות לינאריות **3**

מערכות של משוואות לינאריות 3

פתרון של מערכות לינאריות 4

מטריצת המקדמים ומטריצה המורחבת 7

אלגוריתם הדרוג של גאוס-ג'ורדן 11

קיום וכמות פתרונות למערכת לינארית 19

2 שדות **24**

קבוצות מספרים וסימוליהן 24

מספרים מרוכבים 24

מערכות לינאריות מעל $\mathbb{C}$ 27

קבוצת השאריות בחלוקה ב- p 27

מערכות לינאריות מעל Z_p 30

שדות 34

3 כפל מטריצות וייצוג מערכת באמצעות AX=b **37**

מושג של מטריצה 37

סוגים שונים של מטריצות 37

חיבור מטריצות וכפל מטריצה בסקלר 37

מטריצה משוחלפת 39

כפל מטריצה בוקטור 39

כפל מטריצות 40

מטריצות הפיכות 43

כיצד למצוא ההופכית 45

4 דטרמיננטות וכלל קרמר **48**

הגדרה של דטרמיננטה של מטריצה ריבועית 48

כלל קרמר 57

5 מרחבים וקטורי **58**

מרחבים וקטורים 58

דוגמאות מרכזיות של מרחבים וקטורים 59

6 תת מרחב **62**

7 צירוף לינארי ופרישה לינארית **68**

הגדרה של צרוף לינארי 68

פרישה לינארי 72

8 תלות לינארית **77**
הגדרה של תלות לינארית 77
תכונות של תלות לינארית 81

9 מימד ובסיס **84**
בסיס של מרחב וקטורי 84
מציאת בסיס ומימד של תת מרחב 88

10 חיתוך וסכום תת מרחב **95**
הגדרה של חיתוך וסכום של תתי מרחבים 95
משפט המימדים של סכום וחיתוך 97
כיצד למצוא בסיס ומימד של סכום וחיתוך ת"מ 100

11 סכום ישר **103**

שיעור 1
מערכות לינאריות

מערכות של משוואות לינאריות

1.1 הגדרה: משוואה לינארית במשתנים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ היא משוואה שניתן להציגה בצורה

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

כאשר $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$.

תרגיל: קבעו מי בין המשוואות הבאות היא לינארית:

$$\begin{aligned} 7x_1 + 3x_2 =& 34 \\ 3x + 7y + \sqrt{2} =& 5 \\ 3x + 7y + \sqrt{2}z =& 5 \\ 3x + 7y + \sqrt{z} =& 5 \\ 3xy + 7y =& 5 \end{aligned}$$

1.2 הגדרה: מערכת לינארית היא אוסף של m משוואות $(m \in \mathbb{N})$ ב- n משתנים $(n \in \mathbb{N})$.

דוגמא. בהמערכת הבאה

$$\begin{aligned} x + y =& 4 \\ x - y =& 2 \end{aligned}$$

יש 2 משוואות ו-2 משתנים, x ו-y:

משתנה 1		משתנה 2			
$\downarrow$		$\downarrow$			
x	$+$	y	$=$	4	משוואה 1
x	$-$	y	$=$	2	משוואה 2

דוגמא. בהמערכת הבאה

$$\begin{aligned} x + y - z =& 4 \\ x - 2y + 3z =& 7 \end{aligned}$$

יש 2 משוואות ו- 3 משתנים, x ו-y:

משתנה 1		משתנה 2		משתנה 3			
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$			
x	$+$	y	$-$	z	$=$	4	משוואה 1
x	$-$	$2y$	$+$	$3z$	$=$	7	משוואה 2

דוגמא. בהמערכת הבאה

$$\begin{aligned} x + y - z + w =& 3 \\ x - 2y + 8z - 7w =& 7 \\ x - 2y + 3z + 2w =& 7 \\ x - 2y + 3z - 9w =& 10 \end{aligned}$$

יש 4 משוואות ו- 4 משתנים, x, y, z ו- w:

	משתנה 1		משתנה 2		משתנה 3		משתנה 4	
	$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$	
משוואה 1	x	$+$	y	$-$	z	$+$	$w=$	4
משוואה 2	x	$-$	$2y$	$+$	$8z$	$-$	$7w=$	7
משוואה 3	x	$-$	$2y$	$+$	$3z$	$+$	$2w=$	7
משוואה 4	x	$-$	$2y$	$+$	$3z$	$-$	$9w=$	10

באופן כללי מערכת של m משוואות ב- n משתנים ניתן לכתוב בצורה

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n =& b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n =& b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n =& b_m \end{aligned}$$

1.3 הגדרה: פתרון של מערכת לינארית כנ"ל הוא רשימה של מספרים

$$(s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

כך שהצבתם במשתנים המתאימים תהפוך כל משוואה לאמת.

דוגמא. המערכת לינארית הבאה

$$\begin{aligned} x+y =& 4 \\ x-y =& 2 \end{aligned}$$

יש לה פתרון

$$(x,y) = (3,1)\ .$$

במילים אחרות אם נציב $x=3$ ו- $y=1$ בהמערכת נמצא כי האגף השמאול הוא אותו דבר לאגף הימין בכל אחד מן המשוואות.

פתרון של מערכות לינאריות

דוגמא. פיתרו את המערכת הלינארית הבאה:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 =& 4 \\ 3x_1 + 4x_2 =& 2 \end{aligned}$$

פיתרון. כותבים את המערכת בצורה:

$$\begin{array}{lcccc} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & = 4 \\ \boldsymbol{R_2}: & 3x_1 & + & 4x_2 & = 2 \end{array}$$

כדי לבטל את x_1 במשוואה השנייה נבצע את הפעולה $R_2 - 3R_1$ ונקבל

$$\begin{array}{lcccc} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & = 4 \\ \boldsymbol{R_2}: & & & -2x_2 & = -10 \end{array}$$

מחלקים את משוואה השנייה ב- -2, כלומר $R_2 \to -\frac{1}{2}R_2$:

$$\begin{array}{rrcrl} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & =4 \\ \boldsymbol{R_2}: & & & x_2 & =5 \end{array}$$

קיבלנו $x_2=5$. עכשיו מציבים $x_2=5$ בהמשוואה הראשונה ונקבל

$$x_1+2\cdot 5=4 \quad \Rightarrow \quad x_1=-6 \ .$$

לכן הפתרון הוא

$$(x_1,x_2)=(-6,5) \ .$$

■

דוגמא. פיתרו את המערכת הלינארית הבאה:

$$\begin{aligned} 5x_1+3x_2 &=12 \\ 20x_1+8x_2 &=20 \end{aligned}$$

פיתרון. כותבים את המערכת בצורה:

$$\begin{array}{rrcrl} \boldsymbol{R_1}: & 5x_1 & + & 10x_2 & =45 \\ \boldsymbol{R_2}: & 20x_1 & - & 5x_2 & =90 \end{array}$$

במשוואה ראשונה כדי להפוך את המקדם של ה x_1 ל 1 מבצעים את הפעולה $R_1 \to \frac{1}{5}R_1$:

$$\begin{array}{rrcrl} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & =9 \\ \boldsymbol{R_2}: & 20x_1 & - & 5x_2 & =90 \end{array}$$

כדי לבטל את x_1 במשוואה השנייה נבצע את הפעולה R_2-20R_1 ונקבל

$$\begin{array}{rrcrl} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & =9 \\ \boldsymbol{R_2}: & & & -45x_2 & =-90 \end{array}$$

מחלקים את משוואה השנייה ב- -45, כלומר $R_2 \to -\frac{1}{45}R_2$:

$$\begin{array}{rrcrl} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & =9 \\ \boldsymbol{R_2}: & & & x_2 & =2 \end{array}$$

קיבלנו $x_2=2$. עכשיו מציבים $x_2=2$ בהמשוואה הראשונה ונקבל

$$x_1+2\cdot 2=4 \quad \Rightarrow \quad x_1=5 \ .$$

לכן הפתרון הוא

$$(x_1,x_2)=(5,2) \ .$$

■

דוגמא. פיתרו את המערכת הלינארית הבאה:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3 &=6 \\ 2x_1-3x_2+2x_3 &=14 \\ 3x_1+x_2-x_3 &=-2 \end{aligned}$$

פיתרון.

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ \boldsymbol{R_2}: & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 14 \\ \boldsymbol{R_3}: & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}$$

מבצעים את הפעולה $R_2 \to R_2 - 2R_1$ ומקבלים

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ \boldsymbol{R_2}: & & - & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \\ \boldsymbol{R_3}: & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}$$

מבצעים את הפעולה $R_3 \to R_3 - 3R_1$ ומקבלים

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ \boldsymbol{R_2}: & & - & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \\ \boldsymbol{R_3}: & & - & 5x_2 & - & 10x_3 & = & -20 \end{array}$$

מחליפים את השורות R_2 ו- R_3:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ \boldsymbol{R_2}: & & - & 5x_2 & - & 10x_3 & = & -20 \\ \boldsymbol{R_3}: & & - & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \end{array}$$

מכפילים את השורה R_2 ב- $-\frac{1}{5}$, כלומר $R_2 \to -\frac{1}{5}R_2$:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ \boldsymbol{R_2}: & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ \boldsymbol{R_3}: & & - & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \end{array}$$

מבצעים את הפעולה $R_3 \to R_3 + 7R_2$ ומקבלים

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ \boldsymbol{R_2}: & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ \boldsymbol{R_3}: & & & & & 10x_3 & = & 30 \end{array}$$

$R_3 \to \frac{1}{10}R_3$:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ \boldsymbol{R_2}: & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ \boldsymbol{R_3}: & & & & & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$R_1 \to R_1 - 3R_3$:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & & & = & -3 \\ \boldsymbol{R_2}: & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ \boldsymbol{R_3}: & & & & & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_3$:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & & & = & -3 \\ \boldsymbol{R_2}: & & & x_2 & & & = & -2 \\ \boldsymbol{R_3}: & & & & & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$R_1 \to R_1 - 2R_2$:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & & & & & = & 1 \\ \boldsymbol{R_2}: & & & x_2 & & & = & -2 \\ \boldsymbol{R_3}: & & & & & x_3 & = & 3 \end{array}$$

לכן הפתרון שקיבלנו הוא

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -2, 3)\ .$$

בדיקה:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2\cdot(-2) & + & 3\cdot 3 & = & 6 \\ 2\cdot 1 & - & 3\cdot(-2) & + & 2\cdot 3 & = & 14 \\ 3\cdot 1 & + & (-2) & - & 3 & = & -2 \end{array}$$

■

מטריצת המקדמים ומטריצה המורחבת

למערכת $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6 \\ 2x_1-3x_2+2x_3=14 \\ 3x_1+x_2-x_3=-2 \end{cases}$ נתאים שתי מטריצות:

המטריצה המורחבת של המערכת $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$ והמטריצה המקדמים של המערכת $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

נפתור את התרגיל לעיל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{5} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 7R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{10} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3 \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2 \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2 \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

1.4 הגדרה: (פעולות אלמנטריות)

ישנם שלוש פעולות אלמנטריות:

פעולה 1: החלפת שתי שורות $R_i \leftrightarrow R_j$

פעולה 2: הכפלת שורה בסקלר $\alpha \neq 0$ $R_i \to \alpha \cdot R_i$

פעולה 3: הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת $R_i \to R_i + \alpha \cdot R_j$

1.5 הגדרה: (איבר המוביל)

בהינתן מטריצה (ללא קשר למערכת לינארית), האיבר הראשון משמאל השונה מאפס בכל שורה, נקרא איבר מוביל.

דוגמא. במטריצה

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

האיבר המוביל של השורה הראשונה הוא 3, האיבר המוביל של השורה השנייה הוא 4, ולשורה השלישית אין איבר מוביל מכיוון שהשורה השלילית היא כולה אפסים.

1.6 הגדרה: (מטריצה מדורגת)

מטריצה תיקרא מדורגת אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. שורות שכולן 0, אם ישנן, נמצאות מתחת השורות שלא כולן 0.
2. מספר האפסים לפני איבר מוביל הולך וגדל משורה לשורה עד שמגיעים לשורות אפסים, אם ישנן.

דוגמא. (מטריצות מדורגות)

1 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ מדורגת

2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ מדורגת

3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ לא מדורגת

4 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ לא מדורגת

5 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ לא מדורגת

1.7 הגדרה: (מטריצה מדורגת קנונית)

מטריצה A תיקרא <u>מדורגת קנונית</u> אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

1. שורות שכולן 0 נמצאות מתחת השורות שלא כולן 0.
2. מספר האפסים לפני איבר מוביל הולך וגדל משורה לשורה עד שמגיעים לשורות אפסים.
3. כל איבר מוביל $= 1$.
4. כל איבר המוביל (שחייב שווה 1) הוא האיבר היחיד האינו שווה ל 0 בעמודה שלו.

שימו לב, לפי תנאים 1 ו- 2 מטריצה חייבת להיות מדורגת כדי להיות גם מדורגת קנונית.

דוגמא. (מטריצות מדורגות קנוניות)
המטריצות הבאות מדורגות קנוניות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המטריצות הבאות לא מדורגות קנוניות:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ תנאי 1 לא מתקיים.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ תנאי 2 לא מתקיים.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ תנאי 3 לא מתקיים.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ תנאי 4 לא מתקיים.

אלגוריתם הדרוג של גאוס-ג'ורדן

בהסבר הבא נשתמש בפעולה 1, פעולה 2 ופעולה 3 מן הפעולות האלמנטריות בהגדרה 1.4. כדי להפוך מטריצה למטריצה מדורגת קנונית יש לעקוב את השלבים הבאים, קרי האלגוריתם הדרוג של גאוס-ג'ורדן:

שלב 1 אם המטריצה היא מטריצה האפס, אז סיימנו.

שלב 2 מחפשים את העמודה הרשאשונה שאיננה כולה אפס, נבחר איבר בעמודה זו , נחלק את השורה שלו בערכו (פעולה 2) על מנת לקבל 1.

שלב 3 נעביר את השורה הזו לשורה ראשונה (פעולה 1).

שלב 4 ע"י פעולות מסוג של פעולה 3, נאפס את כל האיברים שמתחת ה 1 באותה העמודה.

שלב 5 נבצע את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת (לאחר השמטת שורה ראשונה, ו"חלק שמאלי" של אפסים).

עד עכשיו המטריצה מדובר בצורה מדורגת. על מנת לקבל מטריצה מדורגת קנונית, נבצע את שלב האחרון:

שלב 6 נאפס את כל האיברים מעל כל 1 המוביל ל 0 בעזרת פעולה 3.

דוגמא. (אלגורתם הדרוג של גאוס-ג'ורדן)
פתרו את המערכת

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &=1\\ 2x_1-x_2+3x_3 &=3\\ 3x_1-3x_2+6x_3 &=5\end{aligned}$$

פיתרון. המטריצה המורחבת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 3\\ 3 & -3 & 6 & 5\end{array}\right)$$

נפתור את המערכת ע"י האלגוריתם.

שלב 1 המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים הלא שווה אפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2 העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס היא העמודה הרשאשונה. האיבר המוביל הוא 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 3\\ 3 & -3 & 6 & 5\end{array}\right)$$

אז נמשיך לשלב 3.

שלב 3 השורה הזו (עם 1 המוביל) הוא כבר נמצא בשורה הראשונה אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4 נאפס כל איבר באותה עמודה של ה1 המוביל שמתחת ה 1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 3\\ 3 & -3 & 6 & 5\end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 1 & 1\\ 3 & -3 & 6 & 5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 1 & 1\\ 0 & -6 & 3 & 2\end{array}\right)$$

כך כל איבר בעמודה של ה1 המוביל (שמתחת ה-1 המוביל) שווה 0.

שלב 5 חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

שלב 1' המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים הלא שווה אפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2' העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס היא העמודה השנייה. נבחר $a=-3$ בשורה השנייה ונחלק את שורה השנייה ב -3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -6 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

שלב 3' שורה השנייה הוא כבר בשורה הראשונה של המטריצה החלקית אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4' נאפס כל איבר באותה עמודה של ה1 המוביל שמתחת ה 1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -6 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

כך כל איבר בעמודה של ה1 המוביל (שמתחת ה 1 המוביל) שווה 0.

שלב 5' אין צורך לחזור לשלבים 1-4 בגלל שבשורה הסופית האיבר המוביל כבר שווה 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

שלב 6' הצבת אחור: המערכת המתאימה היא

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & -\frac{1}{3} & x_3 & = & -\frac{1}{3} \\ & & & & x_3 & = & 0 \end{array}$$

מהמשוואה השלישית:

$$x_3 = 0 \ .$$

נציב $x_3=0$ במשוואה שנייה:

$$x_2 - \frac{1}{3}\cdot(0) = -\frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = -\frac{1}{3} \ .$$

נציב $x_3=0$ ו- $x_2=-\frac{1}{3}$ במשוואה ראשונה:

$$x_1 - \frac{1}{3} + 0 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \frac{4}{3} \ .$$

לכן הפתרון הוא

$$(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) \ .$$

■

דוגמא. (אלגורתם הדרוג של גאוס-ג'ורדן)
נהפוך את המטריצה הבאה למטריצה מדורגת:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & -6 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 2 & 19 \end{pmatrix}$$

שלב 1 המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים הלא שווה אפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2 העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס היא העמודה השנייה. נבחר $a=-2$ בשורה השנייה ונחלק את שורה השנייה ב -2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & -6 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 2 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{2}\cdot R_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 2 & 19 \end{pmatrix}$$

שלב 3 מחליפים שורות R_1 ו- R_2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 2 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 2 & 19 \end{pmatrix}$$

שימו לב ה-1 המוביל בשורה הראשונה מוקף.

שלב 4 **(א)** לוקחים 2 כפול שורה הראשונה משורה השלישית:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 2 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 2 & 19 \end{pmatrix}$$

(ב) לוקחים 2 כפול שורה הראשונה משורה הרביעית:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 2 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 3R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 22 \end{pmatrix}$$

כך כל איבר בעמודה של ה1 המוביל (שמתחת ה-1 המוביל) שווה 0.

שלב 5 חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת (המוקפת במעגל האדום להלן):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 22 \end{pmatrix}$$

שלב 1' המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים הלא שווה אפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2' העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא העמודה רביעית:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 22 \end{pmatrix}$$

נבחר $a = 2$ בשורה השנייה ונחלק את שורה השנייה ב 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2} \cdot R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 22 \end{pmatrix}$$

שלב 3' השורה כבר בשורה ראשונה של המטריצה החלקית.

שלב 4' נאפס כל איבר שמתחת ה 1 המוביל: לוקחים 5 כפול שורה השנייה משורה הרביעית:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 5 \cdot R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

כך כל איבר בעמודה של ה1 המוביל (שמתחת ה 1 המוביל) שווה 0.

שלב 5' חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת (המוקפת במעגל האדום להלן):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

שלב 1'' המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים הלא שווה אפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2'' העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא עמודה חמישית:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

נבחר $a = 2$ בשורה השלישית ונחלק את שורה השנייה ב 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{2} \cdot R_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

שלב 3" שורה השלישית כבר בשורה הראשונה של המטריצה החלקית.

שלב 4" מוסיפים $\frac{1}{2}$ כפול שורה השלישית לשורה הרביעית:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + \frac{1}{2}\cdot R_4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שלב 5" אין עוד שורות אז נמשיך לשלב 6.

שלב 6" נאפס את כל איבר מעל ה 1 המוביל:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}\cdot R_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + \cdot R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסוף קיבלנו מטריצה מדורגת קנונית, כנדרש.

דוגמא. (פתרון מערכת ע"י שיטת גאוס)
פיתרו את המערכת לינארית הבאה ע"י השיטה של גאוס-ג'ורדן:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & 3y & - & z & = & 24 \\ 6x & - & y & + & 2z & = & -9 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & -3\ . \end{array}$$

פיתרון.
המטריצה המורחבת של המערכת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & 24 \\ 6 & -1 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

שלב 1 המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים הלא שווה אפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2 העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס היא העמודה ראשונה.
נחלק את שורה הראשונה ב 4:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & 24 \\ 6 & -1 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{4}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 6 & -1 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

שלב 3 ה 1 המוביל כבר בשורה הראשונה אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4 נאפס כל איבר באותה עמודה של ה1 המוביל שמתחת ה 1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 6 & -1 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 6\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -15 \end{array}\right)$$

כך כל איבר בעמודה של ה1 המוביל (שמתחת ה-1 המוביל) שווה 0 .

שלב 5 חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת

שלב 1' המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים הלא שווה אפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2' העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא העמודה השנייה.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -15 \end{array}\right)$$

נבחר $a = \frac{1}{2}$ ונכפיל שורה השלישית ב 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \end{array}\right)$$

שלב 3' מחליפים שורות R_2 ו- R_3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \end{array}\right)$$

שלב 4' נאפס כל איבר שמתחת ה 1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + \frac{11}{2} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & 42 & -210 \end{array}\right)$$

שלב 5' חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת :

שלב 1" המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים הלא שווה אפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2" העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא העמודה השלישית.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & 42 & -210 \end{array}\right)$$

נחלק שורה השלישית ב- 42:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & 42 & -210 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{42} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

שלב 3" השורה (עם ה 1 המוביל) כבר בשורה ראשונה של המטריצה החלקית אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4" כל איבר באותה עמודה של ה 1 שמתחת ה 1 המוביל כבר שווה 0.

שלב 5" אין לנו עוד שורות אז נמשיך לשלב 6

שלב 6" נאפס את כל איבר מעל ה 1 המוביל (הצבת אחור):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+\frac{1}{4}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{19}{4} \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-7\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{19}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{3}{4}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

קיבלנו מטריצה מדורגת קנונית.

המערכת המתאימה היא

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 1 \\ x_2 \qquad &= 5 \\ x_3 &= -5 \ . \end{aligned}$$

כך נקבל את הפתרון

$$(x_1,x_2,x_3)=(1,5,-5) \ .$$

■

דוגמא. (פתרון מערכת ע"י שיטת גאוס)
פיתרו את המערכת לינארית הבאה ע"י השיטה של גאוס-ג'ורדן:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & & = 3 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & = 18 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = 10 \ . \end{array}$$

פיתרון.
המטריצה המורחבת של המערכת היא

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & -2 & 4 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

שלב 1 המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים הלא שווה אפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2 העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס היא העמודה ראשונה.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & -2 & 4 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

האיבר המוביל כבר שווה 1 אז נמשיך לשלב 3.

שלב 3 השורה כבר בשורה הראשונה, כלומר

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & -2 & 4 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4 נאפס כל איבר באותה עמודה של ה1 המוביל שמתחת ה 1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & -2 & 4 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2\cdot R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

כך כל איברעמודה של ה1 המוביל (שמתחת ה 1 המוביל) שווה 0.

שלב 5 חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת (המוקפת במעגל האדום להלן):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

שלב 1' המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים הלא שווה אפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2' העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא העמודה השנייה.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

שלב 3' מחליפים שורות R_2 ו- R_3:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

שלב 4' כל איבר שמתחת ה 1 המוביל כבר שווה 0 אז נמשיך לשלב 5.

שלב 5' חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת (המוקפת במעגל האדום להלן):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

שלב 1'' המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים הלא שווה אפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2'' העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא העמודה השלישית.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

נחלק שורה השלישית ב- 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to \frac{1}{2}\cdot R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

שלב 3" השורה (עם ה 1 המוביל) כבר בשורה ראשונה של המטריצה החלקית אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4" כל איבר באותה עמודה של ה 1 שמתחת ה 1 המוביל כבר שווה 0.

שלב 5" אין לנו עוד שורות אז נמשיך לשלב 6

שלב 6" נאפס את כל איבר מעל ה 1 המוביל (הצבת אחור):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

קיבלנו מטריצה מדורגת קנונית.

המערכת המתאימה היא

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & & + & x_4 & = 3 \\ & x_2 & & + & x_4 & = 4 \\ & & x_3 & + & 2x_4 & = 6 \ . \end{array}$$

המשתנים x_1, x_2 ו- x_3 מתאימים ל ה- 1 המובילים, לכן הם המשתנים התלויים, ו- x_4 הוא המשתנה החופשי. לכן ע"י לפתור המערכת מקבלים תשובות בשביל המשתמים התלויים במונחים של המשתנה החופשי, x_4. כך נקבל את הפתרון

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - x_4 \ , \\ x_2 &= 4 - x_4 \ , \\ x_3 &= 6 - 2x_4 \ . \end{aligned}$$

נציב ב- x_4 את המשתנה החופשי t, כך שניתן לצייג את הפתרון בצורה

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3 - t, 4 - t, 6 - 2t, t) \ , \qquad t \in \mathbb{R} \ .$$

■

קיום וכמות פתרונות למערכת לינארית

1.8 הגדרה: (משתנה תלוי ומשתנה חופשי)

עבור מטריצה מורחבת של מערכת לינארית, נגדיר:

- משתנה שמתאים לו איבר מוביל יקרא משתנה **תלוי** .
- משתנה שלא מתאים לו איבר מוביל יקרא משתנה **חופשי** .

דוגמא. משתנה תלוי ומשתנה חופשי

נתונה המערכת $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3= & 0 \\ 11x_2-7x_3= & 0 \end{cases}$ שנתאים לו מטריצה מורחבת $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & -7 & 0 \\ 0 & 11 & -7 & 0 \end{array}\right)$

1.9 משפט. (קיום וכמות פתרונות למערכת לינארית I)

בהינתן מערכת לינארית, ישנם האפשרויות הבאות לפתרונות של המערכת:

1 אם יש **שורה סתירה** במטריצה מורחבת מדורגת, אין פתרון למערכת כאשר שורה סתירה היא שורה מהצורה

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \end{array}\right)$$

2 אם יש **שורה כולה אפס** במטריצה המורחבת ישנן אינסוף פתרונות.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \end{array}\right)$$

3 אם כמות המשתנים גדולה מכמות השוואות יהיו אינסוף פתרונות. כלומר, במונחים של המטריצה המקדמים $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, אם $m<n$, אז יהיו אינסוף פתרונות.

דוגמא. נתונה המטריצה המורחבת הבאה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

האם למערכת הלינארית המתאימה יש פתרון? אם כן, כמה?

פיתרון. נשים לב שהמטריצה מדורגת. יש אינסוף פתרונות בגלל שיש שורה כולה אפס. נרשום את המשוואות המתקבלות

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & & & & & = & 6 \\ & & 3y & & & = & -6 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 0 \end{array}$$

כלומר

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= -2 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

לכן, יש אינסוף פיתרונות, והפתרון הככלי הוא

$$(3,-2,z) \quad z\in\mathbb{R}\ .$$

■

דוגמא. נתונה המטריצה המורחבת הבאה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 33 & 44 & 234 & 1122 & 343 \\ 0 & 23 & 44 & 667 & 87 \\ 0 & 0 & 0 & 2344 & 5767 \end{array}\right)$$

האם למערכת הלינארית המתאימה יש פתרון? אם כן, כמה?

פיתרון. כן יש פתרון (בגלל שאין שורה סתירה), אבל בגלל שכמות המשתנים ($n = 4$) יותר מכמות המשוואות ($m = 3$) אז יהיו אינסוף פתרונות. נוכל להשתמש ברעיון של "הבצה לאחור":

$$\begin{array}{ccccccccc} 33x_1 & + & 44x_2 & + & 234x_3 & + & 1122x_4 & = 343 \\ & & 23x_2 & + & 44x_3 & + & 667x_4 & = 87 \\ & & & & & & 23554x_4 & = 5767 \end{array}$$

שימו לב, קיבלנו שלמערכת יש אינסוף פתרונות לו בגלל שכמות המשתנים גדולה מכמות השוואות. ■

תרגיל: תנו דוגמה למערכת בה כמות המשתנים גדולה מכמות המשוואות ואן לה אינסוף פתרונות.

פיתרון. כאשר תהיה שורה סתירה. למשל,

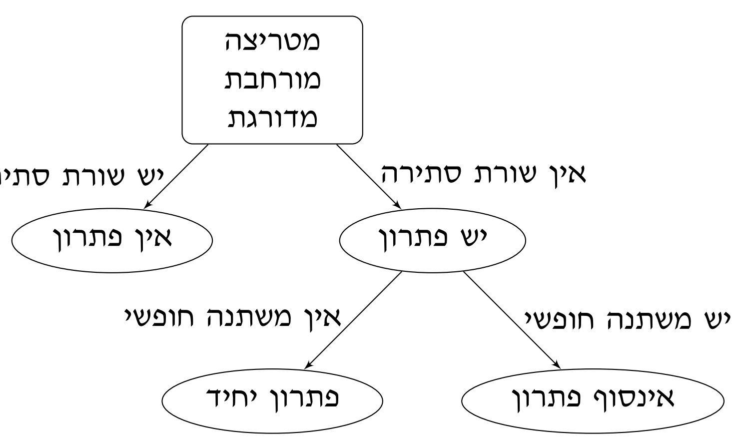
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

■

1.10 משפט. (קיום וכמות פתרונות למערכת לינארית II)

1. למערכת לינארית עם מקדמים ממשיים יש פתרון אם ורק אם במטריצה מורחבת מדורגת אין שורה סתירה, כאשר שורה סתירה היא שורה מהצורה $(0\ 0\ \ldots\ 0|b)$ כאשר $b \neq 0$.
2. אם למערכת יש פתרון אז יתכנו 2 אפשרויות:
   (א) יש פתרון יחיד,
   (ב) יש פתרון אינסוף.

נסכם בעזרת עץ:



תרגיל: נתונה המערכת הלינארית הבאה:

$$\begin{aligned} x + (a-1)y - z =& 4 \\ (a+1)x + (2a-2)y + (a-4)z =& a+10 \\ (a+2)x + (3a-3)y + (2a-7)z =& a+17 \end{aligned}$$

עבור אילו ערכי הפרמטר a למערכת יש

1. פתרון יחיד
2. אין פתרון
3. אינסוף פתרונות?

במקרה של אינסוף פתרונות רשוף את הפתרון הכללי.

פיתרון.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ a+1 & 2a-2 & a-4 & a+10 \\ a+2 & 3a-3 & 2a-7 & a+17 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-(a+1)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ 0 & -a^2+2a-1 & 2a-3 & 6-3a \\ a+2 & 3a-3 & 2a-7 & a+17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-(a+2)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ 0 & -a^2+2a-1 & 2a-3 & 6-3a \\ 0 & -a^2+2a-1 & 3a-5 & 9-3a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ 0 & -a^2+2a-1 & 2a-3 & 6-3a \\ 0 & 0 & a-2 & 3 \end{array}\right)$$

לכן למערכת יש פתרון יחיד אם ורק אם (אס"ם) $a-2\neq 0$ וגם $(-a^2+2a-1)\neq 0$, כלומר $a\neq 1,2$.

עבור $a=1$ נקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן למערכת אינסוף פתרונות. מתקבל

$$x=1\ ,\ y\in\mathbb{R}\ ,\ z=-3\ .$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$(1,y,-3)$$

כאשר $y\in\mathbb{R}$.

עבור $a=2$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

וקיבלנו שורת סתירה לכן אין פתרון. ■

תרגיל: מצאו את כמות הפתרונות של המערכת הבאה:

$$\begin{aligned} x+\left(\sqrt{\pi^2+e}-1\right)y-z &=4 \\ \left(\sqrt{\pi^2+e}+1\right)x+\left(2\sqrt{\pi^2+e}-2\right)y+\left(\sqrt{\pi^2+e}-4\right)z &=\sqrt{\pi^2+e}+10 \\ \left(\sqrt{\pi^2+e}+2\right)x+\left(3\sqrt{\pi^2+e}-3\right)y+\left(2\sqrt{\pi^2+e}-7\right)z &=\sqrt{\pi^2+e}+17 \end{aligned}$$

פיתרון. המטריצה המורחבת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \left(\sqrt{\pi^2+e}-1\right) & -1 & 4 \\ \left(\sqrt{\pi^2+e}+1\right) & \left(2\sqrt{\pi^2+e}-2\right) & \left(\sqrt{\pi^2+e}-4\right) & \sqrt{\pi^2+e}+10 \\ \left(\sqrt{\pi^2+e}+2\right) & \left(3\sqrt{\pi^2+e}-3\right) & \left(2\sqrt{\pi^2+e}-7\right) & \sqrt{\pi^2+e}+17 \end{array}\right)$$

מבצעים הפעולות האלמנטריות הבאות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \left(\sqrt{\pi^2+e}-1\right) & -1 & 4 \\ \left(\sqrt{\pi^2+e}+1\right) & \left(2\sqrt{\pi^2+e}-2\right) & \left(\sqrt{\pi^2+e}-4\right) & \sqrt{\pi^2+e}+10 \\ \left(\sqrt{\pi^2+e}+2\right) & \left(3\sqrt{\pi^2+e}-3\right) & \left(2\sqrt{\pi^2+e}-7\right) & \sqrt{\pi^2+e}+17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-\left(\sqrt{\pi^2+e}+1\right)R_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \sqrt{e+\pi^2}-1 & -1 & 4 \\ 0 & -e+2\sqrt{e+\pi^2}-\pi^2-1 & 2\sqrt{e+\pi^2}-3 & 6-3\sqrt{e+\pi^2} \\ \sqrt{e+\pi^2}+2 & 3\sqrt{e+\pi^2}-3 & 2\sqrt{e+\pi^2}-7 & \sqrt{e+\pi^2}+17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-\left(\sqrt{\pi^2+e}+2\right)R_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \sqrt{e+\pi^2}-1 & -1 & 4 \\ 0 & -e+2\sqrt{e+\pi^2}-\pi^2-1 & 2\sqrt{e+\pi^2}-3 & 6-3\sqrt{e+\pi^2} \\ 0 & -e+2\sqrt{e+\pi^2}-\pi^2-1 & 3\sqrt{e+\pi^2}-5 & 9-3\sqrt{e+\pi^2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \sqrt{e+\pi^2}-1 & -1 & 4 \\ 0 & -e+2\sqrt{e+\pi^2}-\pi^2-1 & 2\sqrt{e+\pi^2}-3 & 6-3\sqrt{e+\pi^2} \\ 0 & 0 & \sqrt{e+\pi^2}-2 & 3 \end{array}\right)$$

■

1.11 חוק: אם ניתן להגיע ממטריצה A למטריצה B ע"י ביצוע מספר סופי של פעולות שורה אלמנטריות, אז ניתן להגיע מהמטריצה B למטריצה A ע"י ביצוע הפעולות ההפוכות.

הוכחה. לכל פעולה יש את הפעולה ההפוכה לה.

- ההפוכה ל $R_i \leftrightarrow R_j$ היא $R_i \leftrightarrow R_j$.
- ההפוכה ל $R_i \to \alpha \cdot R_i$ היא $R_i \to \frac{1}{\alpha}R_i$
- ההפוכה ל $R_i \to R_i + \alpha R_j$ היא $R_i \to R_i - \alpha R_j$.

■

1.12 הגדרה: (שקולות שורה)

תהיינה A ו- B מטריצות. נאמר שהן שקולות שורה אם ניתן להגיע מאחת לשניה ע"י ביצוע מספר סופי פעולות שורה אלמנטריות.

1.13 חוק: אם המטריצות המורחבות של שתי מערכות לינאריות הן שקולות, אז לשתי המערכות יש אותה קבוצת פתרון. כלומר, כל פתרון של המערכת הראשונה הוא פתרון של השניה, ולהיפך.

דוגמא. האם המערכות $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 12 & 21 \\ 15 & -10 & 30 & 5 \end{array}\right)$ ו- $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 14 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & 6 & 1 \end{array}\right)$ שקולות שורה?

פיתרון. אם נכתוב את המערכות בצורה

$$\begin{array}{c|ccc|c} \boldsymbol{R_1} & 1 & -2 & 3 & 7 \\ \boldsymbol{R_2} & 3 & 9 & 12 & 21 \\ \boldsymbol{R_3} & 15 & -10 & 30 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc|c} \boldsymbol{R_1}' & 2 & -4 & 6 & 14 \\ \boldsymbol{R_2}' & 1 & 3 & 4 & 7 \\ \boldsymbol{R_3}' & 3 & -2 & 6 & 1 \end{array}$$

אז קל לראות כי $R_1' = 2R_2$, $R_2' = \frac{1}{3}R_2$, ו- $R_3' = \frac{1}{5}R_3$ ולכן מכיוון שאפשר להגיע ממטריצה הראשונה למטריצה השנייה דרך פעולות אלמנטריות, אז המטריצות הן שקולות שורה. ■

שיעור 2
שדות

קבוצות מספרים וסימוליהן

המספרים הטבעיים	$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$
המספרים השלמים	$\mathbb{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$
המספרים הרציונלים	$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\middle\|m,n\in\mathbb{Z},n\neq 0\right\}$
המספרים הממשיים	$\mathbb{R}$

מספרים מרוכבים

2.1 הגדרה: (מספר מרוכב)
מספר מרוכב הינו זוג (a,b) של מספרים ממשיים. נסמן ב- $\mathbb{C}$ את קבוצת המספרים המרוכבים:

$$\mathbb{C}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2=\{\text{ זוגות סדורים של מספרים ממשיים }\}$$

נגדיר פעולות חיבור וכפל על הקבוצה $\mathbb{C}$.
<u>חיבור</u>:

$$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$$

<u>כפל</u>:

$$(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1)$$

שימו לב, כי שני מספרים מרוכבים $z_1=(a_1,b_1)$ ו- $z_2=(a_2,b_2)$ הם שווים אם"ם $a_1=a_2$ ו- $b_1=b_2$. יהיו a_1 ו- a_2 מספרים ממשיים. אז

$$(a_1,0)+(a_2,0)=(a_1+a_2,0)\ ,\qquad (a_1,0)\cdot(a_2,0)=(a_1a_2,0)\ .$$

ז"א שההתאמה $(a,0)\mapsto a$ שומרת על פעולות החיבור והכפל. כמו כן לכל מספר מרוכב z מתקיים

$$z=z+(0,0)$$

ו-

2.2 הגדרה: (i) המספר המרוכב $(0,1)$ יסומן באות i.

התכונהה מיוחדת של המספר i היא

$$i^2=i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)=(0.0-1\cdot 1,0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)=-1\ .$$

כפי שנהוג עבור מספרים ממשיים גם כאן המוסכמה היא שפעולת הכפל קודמת לחיבור, ולכן ניתן להשמיט סוגריים לפעמים. למשל

$$z_1 + z_2 \cdot z_3 := z_1 + (z_2 \cdot z_3) \ .$$

חישוב קצר עבור $a, b \in \mathbb{R}$ מראה ש-

$$a + b \cdot i = (a,0) + (b,0) \cdot (0,1) = (a,0) + (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (a,0) + (0,b) = (a,b) \ .$$

לכן נהוג לכתוב מספר מרוכב $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ בצורה $z = a + bi$. בסימון זה פעולות החשבון הן

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i \ , \\ (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \ .\end{aligned}$$

עבור $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$.

2.3 הגדרה: (ההופכי החיבורי המספר הנגדי)
יהי $z = a + ib$ מספר מרוכב. **המספר הנגדי** של z הוא המספר המרוכב היחיד w כך ש־

$$z + w = 0 \ .$$

המספר הנגדי יסומן ב $-z$ וניתן ע"י

$$-z = -a + (-b) i \ .$$

2.4 הגדרה: (המספר ההופכי הכפלי)
יהי $z = a + ib$ מספר מרוכב. **המספר ההופכי** של z הוא המספר המרוכב היחיד w כך ש־

$$z \cdot w = 1 \ ,$$

והוא יסומן ב- z^{-1} וניתן ע"י

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} \ .$$

דוגמא.
ההפכי הכפלי של $2 + i$ הוא $\frac{2}{5} + \frac{-1}{5} \cdot i$

דוגמא.
ההפכי הכפלי של i הוא $-i$.

כנהוג ,לעתים נשמיט את סימן הכפל, ונרשום $z_1 z_2$ במקום $z_1 \cdot z_2$. בשל תכונות האסוציאטיביות מותר במקרים מסוימים להשמיט סוגריים, למשל

$$z_1 z_2 z_2 := (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

עוד סימונים נוחים הם

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 \cdot z_2^{-1}$$

ו-

$$z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2) \ .$$

בהנתן מספר ממשי אי־שלילי a נסמן ב־ $\sqrt{a} = a^{1/2}$ את השורש הריבועי האי־שלילי של a.

2.5 הגדרה: (הצמוד)
הצמוד ל המספר המרוכב $z=a+bi$ הוא המספר המרוכב

$$\bar{z}:=a-bi\ .$$

2.6 הגדרה: (הערך המוחלט)
הערך המוחלט של $z=a+bi$ הוא המספר הממשי

$$|z|:=\sqrt{a^2+b^2}\ .$$

שימו לב $a^2+b^2\geq 0$ ולכן $|z|$ מוגדר ו- $|z|\geq 0$.

2.7 משפט. (הצמוד)
יהי z מספר מרוכב.

1) $z=0 \quad\Leftrightarrow\quad |z|=0$.

2) $|z|=\sqrt{\bar{z}z}$.

3) אם $z\neq 0$ הרי $\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$

2.8 משפט. (הצמוד)
יהיו z, z_1, z_2 מספרים מרוכבים.

1) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$.

2) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$.

3) $\bar{\bar{z}}=z$.

4) $z=\bar{z}$ אם ורק אם $z\in\mathbb{R}$.

5) אם $z=bi$ כאשר $b\in\mathbb{R}$, אז $\bar{z}=-z$.

לשם מה יש לנו צורך במספרים מרוכבים? נתבונן במשוואה

$$x^2+2=0\ .$$

אין לה פתרון ב- $\mathbb{R}$. אולם אם נעבור למשוואה השקולה $x^2=-2$ רואים שיש פתרונות מרוכבים $x:=\sqrt{2}\cdot i$ ו- $x:=-\sqrt{2}\cdot i$. בדומה קל לראות שלכל משוואה ריבועית

$$Ax^2+Bx+C=0$$

עם מקדמים ממשיים יש פתרונות מרוכבים

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\ .$$

מערכות לינאריות מעל $\mathbb{C}$

דוגמא.

פתרו את המערכת $\begin{cases}(1+i)z_1+(1-i)z_2=3i\\ 3z_1+(2-i)z_2=4\ .\end{cases}$ מעל $\mathbb{C}$.

פיתרון.

$$\left(\begin{array}{cc|c}1+i & 1-i & 3i\\ 3 & 2-i & 4\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to 3R_1-(1+i)R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1+i & 1-i & 3i\\ 0 & -4i & -4+5i\end{array}\right)$$

$$-4iz_2=-4+5i\quad\Rightarrow\quad z_2=\frac{-4+5i}{-4i}=\frac{(-4+5i)4i}{(-4i)(4i)}=\frac{-16i-20}{16}=-\frac{5}{4}-i\ .$$

$$(1+i)z_1+(1-i)z_2=3i\ \Rightarrow\ (1+i)z_1+(1-i)\cdot\left(-\tfrac{5}{4}-i\right)=3i\ \Rightarrow\ (1+i)z_1+\left(-\tfrac{9}{4}+\tfrac{1}{4}\cdot i\right)=3i$$

$$\Rightarrow\qquad (1+i)z_1+=\tfrac{9}{4}+\tfrac{11}{4}\cdot i\qquad\Rightarrow\quad z_1=\frac{\frac{1}{4}+\frac{11}{4}\cdot i}{1+i}=\frac{5}{2}+\frac{1}{4}i\ .$$

■

קבוצת השאריות בחלוקה ב- p

2.1 הגדרה: (קבוצת השארית בחלוקה ב-p)

לכל מספר ראשוני p הקבוצה $\mathbb{Z}_p$ היא קבוצת הסימנים

$$\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\ldots,\bar{p}-\bar{1}\}$$

פעולות החשבון מוגדרות כך: יהיו i ו- j שני מספרים מבין $0,1,\ldots,p-1$. החיבור מוגדר ע"י

$$\bar{i}+\bar{j}:=\bar{k}$$

כאשר $\bar{k}$ היא השארית של $i+j$ אחרי חלוקה ב- p. הכפל מוגדר ע"י

$$\bar{i}\cdot\bar{j}:=\bar{l}$$

כאשר $\bar{l}$ היא השארית של $i\cdot j$ אחרי חלוקה ב- p. התכונות הבאות מגדירות את הקבוצה:

(א) כל איבר הוא מספר שלם וחיובי.

(ב) לכל איבר בהקבוצה יש שארית שונה עם חלוקה ב-p.

(ג) מספרים עם אותה השאריות שווים זה לזה.

(ד) לכל מספר שלם k נתאים איבר ב- $\mathbb{Z}_p$ שיסומן $\bar{k}$ ויוגדר

$$\bar{k}=\mod(k,p)\ .$$

דוגמא. $\mathbb{Z}_3$ (קבוצה השאריות בחלוקה ב-3)

$$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} \ .$$

יש לקבוצה $\mathbb{Z}_3$ התכונות הבאות:

(א) כל איבר הוא מספר שלם וחיובי.

(ב) לכל איבר בהקבוצה יש שארית שונה עם חלוקה ב-3.

(ג) מספרים עם אותה השאריות שווים זה לזה.

(ד) לכל מספר שלם k נתאים איבר ב- $\mathbb{Z}_3$ שיסומן $\bar{k}$ ויוגדר

$$\bar{k} = \mod(k,3) \ .$$

$$\begin{aligned}
\bar{0} &= \mod(0,3) && = \bar{0} \\
\bar{1} &= \mod(1,3) && = \bar{1} \\
\bar{2} &= \mod(2,3) && = \bar{2} \\
\\
\bar{3} &= \mod(3,3) && = \bar{0} \\
\bar{4} &= \mod(4,3) && = \bar{1} \\
\bar{5} &= \mod(5,3) && = \bar{2} \\
\\
\bar{6} &= \mod(6,3) && = \bar{0} \\
\bar{7} &= \mod(7,3) && = \bar{1} \\
\bar{8} &= \mod(8,3) && = \bar{2} \\
&\vdots \\
\overline{122} &= \mod(122,3) && = \bar{2} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

איברים בקבוצה $\mathbb{Z}_3$ המתאימים למספרים שלמים שליליים:

שימו לב,

$$\overline{-1} = \bar{2}$$

בגלל ש

$$-1 = 3 \cdot (-1) + 2 \ ,$$

ו

$$\overline{-2} = \bar{1}$$

בגלל ש

$$-2 = 3 \cdot (-1) + 1 \ ,$$

ו

$$\overline{-3} = \bar{0}$$

בגלל ש

$$-3 = 3 \cdot (-1) + 0 \ .$$

עוד דוגמאות:

$$\begin{aligned}
\bar{0} &= \text{mod}\,(0,3) &&= \bar{0}\\
\overline{-1} &= \text{mod}\,(-1,3) &&= \bar{2}\\
\overline{-2} &= \text{mod}\,(-2,3) &&= \bar{1}\\
\\
\overline{-3} &= \text{mod}\,(-3,3) &&= \bar{0}\\
\overline{-4} &= \text{mod}\,(-4,3) &&= \bar{2}\\
\overline{-5} &= \text{mod}\,(-5,3) &&= \bar{1}\\
\\
\overline{-6} &= \text{mod}\,(-6,3) &&= \bar{0}\\
\overline{-7} &= \text{mod}\,(-7,3) &&= \bar{2}\\
\overline{-8} &= \text{mod}\,(-8,3) &&= \bar{1}\\
&\vdots\\
\overline{-122} &= \text{mod}\,(-122,3) &&= \bar{1}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

עבור $\mathbb{Z}_3$ טבלאות החיבור והכפל נראות כך:

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

שימו לב, $\bar{1} = \bar{2}\cdot\bar{2}$, ולכן $\bar{2} = \bar{2}^{-1}$. כלומר $\bar{2}$ הוא המספר ההופכי של $\bar{2}$ ב- $\mathbb{Z}_3$.

בדומה $\bar{0} = \bar{1}+\bar{2}$ ולכן $\bar{1} = \overline{-2}$. כלומר $\bar{1}$ הוא המספר הנגדי של $\bar{2}$ ב- $\mathbb{Z}_3$.

2.2 הגדרה: חיבור וכפל של איברים של $\mathbb{Z}_p$:

יהי $p\in\mathbb{N}$ מספר ראשוני ותהי

$$\mathbb{Z}_n = \{\bar{0},\bar{1},\ldots,\overline{p-1}\}\ ,$$

קבוצת השאריות בחלוקה ב- n. לכל $\bar{a},\bar{b}\in\mathbb{Z}_p$ נגדיר

$$\bar{a}+\bar{b} = \overline{a+b}\ ,$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \overline{a\cdot b}\ .$$

דוגמא.

חשבו ב- $\mathbb{Z}_{11}$:

(א) $\bar{3}\cdot\bar{7}$

(ב) $\bar{2}\cdot\bar{8}$

(ג) $-\bar{3}$

(ד) $(\bar{3})^{-1}$

פיתרון.

(א) $\bar{3}\cdot\bar{7}=\overline{21}=\overline{10}$

(ב) $\bar{2}\cdot\bar{8}=\overline{16}=\bar{5}$

(ג) . $\bar{3}+\bar{8}=\overline{11}=\bar{0} \quad\Rightarrow\quad -\bar{3}=\bar{8}$

(ד) . $\bar{3}\cdot\bar{4}=\overline{12}=\bar{1} \quad\Rightarrow\quad (\bar{3})^{-1}=\bar{4}$

■

2.3 משפט: עבור $p\in\mathbb{N}$ ראשוני, לכל איבר השונה מאפס בקבוצה $\mathbb{Z}_p=\{\bar{0},\bar{1},\cdots\overline{p-1}\}$ יש הופכי.

מערכות ליניאריות מעל Z_p

דוגמא. פתור את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_3$:

$$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3=&\bar{0}\\ x_1-x_2-x_3=&\bar{0}\\ x_1+\bar{2}x_2+x_3=&\bar{1}\end{aligned}$$

פיתרון. המטריצה המורחבת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{1}&-\bar{1}&-\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{1}\end{array}\right)$$

נבצע שיטת גאוס:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{1}&-\bar{1}&-\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{1}\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&-\bar{2}=\bar{1}&-\bar{2}=\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{1}\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{0}&-\bar{1}&\bar{1}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{2}&\bar{1}\end{array}\right)$$

כדי להפוך האיבר המוביל בשורה השלישית ל $\bar{1}$ בהתאם עם שיטת גאוס אנחנו צריכים ההופכי של $\bar{2}$. מכיוון

$$\bar{2}\cdot\bar{2}=\bar{4}=\bar{1}\qquad\Rightarrow\qquad(\bar{2})^{-1}=\bar{2}\ .$$

לכן נבצע את הפעולה הבאה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{2}&\bar{1}\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to\bar{2}R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\end{array}\right)$$

עכשיו נאפס כל איבר מעל ה $\bar{1}$ המוביל ע"י הפעולות הבאות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1-R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}&-\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_2\to R_2-R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&-\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\end{array}\right)$$

ולמערכת יש פתרון יחיד:

$$(x_1,x_2,x_3)=(\bar{0},\bar{1},\bar{2})\ .$$

■

דוגמא. פתור את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3=&\bar{0}\ ,\\ x_1-x_2-x_3=&\bar{1}\ .\end{aligned}$$

פיתרון. המטריצה המורחבת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{1}&-\bar{1}&-\bar{1}&\bar{1}\end{array}\right)\ .$$

שיטת גאוס:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{1}&-\bar{1}&-\bar{1}&\bar{1}\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&-\bar{2}&-\bar{2}&\bar{1}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{3}&\bar{3}&\bar{1}\end{array}\right)\ .$$

כדי להפוך את ה $\bar{3}$ (האיבר המוביל) בשורה השנייה ל- $\bar{1}$, אנחנו צריכים לדעת מהי ההופכי של $\bar{3}$ ב- $\mathbb{Z}_5$. נגלה כי

$$\bar{3}\cdot\bar{2}=\bar{6}=\bar{1}\quad\Rightarrow\quad(\bar{3})^{-1}=\bar{2}\ ,$$

ולכן

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{3}&\bar{3}&\bar{1}\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to\bar{2}\cdot R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{2}\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}&-\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{2}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}&\bar{3}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{2}\end{array}\right)\ .$$

המערכת המתאימה היא

$$\begin{aligned}x_1=&\bar{3}\ ,\\ x_2+x_3=&\bar{2}\end{aligned}$$

ולכן הפתרון סופי הוא

$$\begin{aligned}x_1=&\bar{3}\ ,\\ x_2=&\bar{2}-x_3\ .\end{aligned}$$

כלומר,

$$(x_1,x_2,x_3)=(\bar{3},\bar{2}-x_3,x_3)\ ,\qquad x_3\in\mathbb{Z}_5$$

ושים לב שלמערכת יש חמישה פתרונות:

פתרון 1: $x_3=\bar{0} \quad \Rightarrow \quad (\bar{3},\bar{2},\bar{0})$

פתרון 2: $x_3=\bar{1} \quad \Rightarrow \quad (\bar{3},\bar{1},\bar{1})$

פתרון 3: $x_3=\bar{2} \quad \Rightarrow \quad (\bar{3},\bar{0},\bar{2})$

פתרון 4: $x_3=\bar{3} \quad \Rightarrow \quad (\bar{3},\overline{-1},\bar{3}) \quad =(\bar{3},\bar{4},\bar{3})$

פתרון 5: $x_3=\bar{4} \quad \Rightarrow \quad (\bar{3},\overline{-2},\bar{4}) \quad =(\bar{3},\bar{3},\bar{3})$

■

דוגמא. פתור את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{aligned} x_1+\bar{2}x_2+\bar{4}x_3 &= \bar{0}\ , \\ \bar{2}x_1-\bar{3}x_2+x_3 &= \bar{0}\ . \end{aligned}$$

פיתרון.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{2} & -\bar{3} & \bar{4} & \bar{0} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-\bar{2}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & -\bar{7} & -\bar{7} & \bar{0} \end{array}\right) \quad = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

לכן

$$x_1+\bar{2}x_2+\bar{4}x_3=\bar{0}\ , \qquad x_2,x_3\in\mathbb{Z}_7$$

והפתרון הוא

$$x_1=-\bar{2}x_2-\bar{4}x_3=\bar{5}x_2+\bar{3}x_3\ , \qquad x_2,x_3\in\mathbb{Z}_7\ .$$

כלומר

$$(x_1,x_2,x_3)=(\bar{5}x_2+\bar{3}x_3,x_2,x_3)\ , \qquad x_2,x_3\in\mathbb{Z}_7\ .$$

נשים לב שלמערכת יש $7^2=49$ פתרונות. ■

דוגמא. תנו דוגמה למערכת לינארית בעלת 27 פתרונות.

פיתרון.

מערכת 1 : המערכת

$$0x=0$$

מעל $\mathbb{Z}_{27}$.

<u>הסבר:</u> זוהי מערכת של משוואה אחת במשתנה אחד, וכל איבר של $\mathbb{Z}_{27}$ משווה פתרון של המערכת.

מערכת 2 :

$$x+y+z+w=\bar{0}$$

מעל $\mathbb{Z}_3$.

<u>הסבר:</u> זוהי מערכת של משוואה אחת בארבעה משתנים. למערכת יש שלושה משתני חופשיים ולכן 3^3 פתרונות.

■

דוגמא. פתור את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} x+\bar{3}y+\bar{2}z &= \bar{1} \ , \\ \bar{2}x+\bar{4}y+z &= \bar{3} \ , \\ \bar{3}x+\bar{3}z &= \bar{2} \ . \end{aligned}$$

פיתרון.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} \end{array}\right) \xrightarrow[2R_3\to\bar{2}R_1+R_3]{R_2\to\bar{3}R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_2+\bar{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} x+\bar{3}y+\bar{2}z &= \bar{1} \\ \bar{3}y+\bar{2}z &= \bar{1} \\ z &= \bar{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+\bar{3}y+\bar{2}\cdot\bar{4} &= \bar{1} \\ \bar{3}y+\bar{2}\cdot\bar{4} &= \bar{1} \\ z &= \bar{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+\bar{3}y+\bar{3} &= \bar{1} \\ \bar{3}y+\bar{3} &= \bar{1} \\ z &= \bar{4} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x+\bar{3}y &= \bar{1}-\bar{3}=-\bar{2}=\bar{3} \\ \bar{3}y &= \bar{1}-\bar{3}=-\bar{2}=\bar{3} \\ z &= \bar{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+\bar{3}\cdot\bar{1} &= \bar{3} \\ y &= \bar{1} \\ z &= \bar{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \bar{0} \\ y &= \bar{1} \\ z &= \bar{4} \end{aligned}\right\}$$

■

דוגמא. פתור את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} x+\bar{4}y+z &= \bar{1} \ , \\ \bar{3}x+\bar{2}y+\bar{3}z &= \bar{2} \ , \\ \bar{4}x+y+\bar{4}z &= \bar{3} \ . \end{aligned}$$

פיתרון.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{4} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to\bar{R}_1+R_3]{R_2\to\bar{2}R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} \end{array}\right)$$

שורה סתירה: אין פתרון. ■

דוגמא. פתור את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} \bar{2}x+\bar{3}y+\bar{4}z &= \bar{1} \ , \\ x+\bar{2}y+\bar{3}z &= \bar{0} \ , \\ \bar{3}x+\bar{2}z &= \bar{1} \ . \end{aligned}$$

פיתרון.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_1+R_3]{R_2\to R_1+\bar{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_2+\bar{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{2}x+\bar{3}y+\bar{4}z &= \bar{1} \\ \bar{4}y+\bar{3}z &= \bar{1} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \bar{2}x &= \bar{1}-\bar{4}z-\bar{3}y &&= \bar{1}+\bar{1}z+\bar{2}y \\ \bar{4}y &= \bar{1}-\bar{3}z &&= 1+\bar{2}z \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{2}^{-1}\cdot\bar{1}+\bar{2}^{-1}\cdot\bar{1}z+\bar{2}^{-1}\cdot\bar{2}y &&= \bar{3}+\bar{3}z+y \\ y &= \bar{4}^{-1}+\bar{4}^{-1}\cdot\bar{2}z &&= \bar{4}+\bar{4}\cdot\bar{2}z &&= \bar{4}+\bar{3}z \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \left. x = \bar{3}+\bar{3}z+\bar{4}+\bar{3}z = \bar{7}+\bar{6}z = \bar{2}+zy = \bar{4}+\bar{3}z \right\}$$

תשובה סופית:

$$(x,y,z)=(\bar{2}+z,\bar{4}+\bar{3}z,z) \qquad , z\in\mathbb{Z}_5\ .$$

ישנן 5 פתרונות. ■

שדות

2.4 הגדרה: (שדה)

קבוצה לא ריקה $\mathbb{F}$, שבה פעולת חיבור '$+$' ופעולת כפל '$\cdot$' (הפעולות הדו-מקומיות) מוגדרות על הקבוצה, ויש בקבוצה איבר האפס (0) ואיבר יחידה 1, נקראת שדה אם מתקיים התנאים הבאים:

1) לכל $a,b\in\mathbb{F}$ מוגדר
$$a+b\in\mathbb{F}\ .$$
ז"א הקבוצה $\mathbb{F}$ סגורה לגבי החיבור.

2) לכל $a,b\in\mathbb{F}$ מתקיים
$$a+b=b+a$$
(חוק החילוף).

3) לכל $a,b\in\mathbb{F}$ מתקיים
$$(a+b)+c=a+(b+c)$$
(חוק הקיבוץ).

4) קיים איבר $0\in\mathbb{F}$ כך שלכל $a\in\mathbb{F}$
$$a+0=a\ ,$$
(קיום איבר ניוטרלי בחיבור).

5) לכל $a\in\mathbb{F}$ קיים איבר נגדי $(-a)\in\mathbb{F}$ כך ש
$$a+(-a)=0$$
(קיום איבר נגדי).

6) לכל $a,b\in\mathbb{F}$ מוגדר פעולת הכפל כך ש
$$a\cdot b\in\mathbb{F}$$
(ז"א קבוצה $\mathbb{F}$ סגורה לגבי הכפל)

7) לכל $a,b \in \mathbb{F}$ מתקיים

$$a \cdot b = b \cdot a$$

(חוק החילוף).

8) לכל $a,b,c \in \mathbb{F}$ מתקיים

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

(חוק הקיבוץ)

9) קיים איבר $1 \in \mathbb{F}$ כך שלכל $a \in \mathbb{F}$,

$$a \cdot 1 = a \ , \qquad \text{ו} \qquad 1 \cdot a = a$$

(קייום איבר ניוטרליי לגבי הכפל)

10) לכל $a \in \mathbb{F}$ כך ש $a \neq 0$ קיים איבר $a^{-1} \in \mathbb{F}$ המקיים

$$a \cdot a^{-1} = 1 \ , \qquad \text{ו} \qquad a^{-1} \cdot a = 1 \ .$$

(קייום איבר הופכי)

11) לכל $a,b,c \in \mathbb{F}$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

(חוק הפילוג).

2.5 משפט. ()
יהי $\mathbb{F}$ שדה.

1) האיבר הנדגי החיבורי בתכונה 5 הוא יחיד.

2) האיבר ההפכי הכפלי בתכונה 10 הוא יחיד.

דוגמא.
הקבוצות $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ו- $\mathbb{C}$ עם פעולות החשבון הרגילות הן שדות.

דוגמא.
$\mathbb{N}$ איננה שדה. כדי להראות זאת די למצוא דוגמה נגדית לאחת התכונות. ניקחאת המספר הטבעי 3. לא קיים ל־ 3 הפכי חיבורי.

דוגמא.
$\mathbb{Z}$ איננה שדה. דוגמה נגדית לתכונה 10: לא קיים איבר הופכי למספר השלם . 3.

משפט. ()
יהי $\mathbb{F}$ שדה ו־ a, b איברים.

1) $a \cdot 0 = 0$

2) $a \cdot (-1) = -a$

3) אם $ab=0$ ו- $a\neq 0$ אז $b=0$.

הוכחה.

1) $0+0$, לכן בעזרת חוק הפילוג נקבל

$$a\cdot 0=a\cdot(0+0)=a\cdot 0+a\cdot 0\ .$$

תכונת קיום איבר נגדי ותכונת האפס נותנות לנו

$$0=-(a\cdot 0)+a\cdot 0=-(a\cdot 0)+a\cdot 0+a\cdot 0=0+a\cdot 0=a\cdot 0\ .$$

2) תכונת האחד וחוק הפילוג נותנות

$$a+a\cdot(-1)=a\cdot 1+a\cdot(-1)=a\cdot(1+(-1))\ .$$

עלפי חלק א' ידוע ש־

$$a\cdot(1+(-1))=a\cdot 0=0\ .$$

$a\cdot(-1)=-a$

3) נתון כי $a\neq 0$, ולכן קיים a^{-1}. בעזרת חלק א' מקבלים

$$0=a^{-1}\cdot 0=a^{-1}\cdot(a\cdot b)=(a^{-1}\cdot a)\cdot b=1\cdot b=b\ .$$

מש"ל ■

שיעור 3
כפל מטריצות וייצוג מערכת באמצעות AX=b

מושג של מטריצה

דוגמא.

$$A=\begin{pmatrix}1&5&23&45&2\\12&34&67&87&55\\22&33&66&89&19\end{pmatrix}$$

הרכיב במקום ה- $(3,4)$ הוא 89. נסמן

$$(A)_{34}=89$$

הרכיב במקום ה- $(1,5)$ הוא 2. נסמן

$$(A)_{15}=2$$

הרכיב במקום ה- $(2,3)$ הוא 67. נסמן

$$(A)_{23}=67$$

■

3.6 הגדרה: (רכיב של מטריצה) תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. את הרכיב במקום ה- (i,j) (כלומר האיבר ה- i ועמודה j) נסמן כ- A_{ij}.

סוגים שונים של מטריצות

3.7 הגדרה: (מטריצה ריבועית) מטריצה ריבועית היא מטריצה שמספר שורותיה $=$ מספר עמודותיה. נסמן

$$A\in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \qquad \text{או} A\in M_n(\mathbb{R})$$

הגדרה: (מטריצה אלכסונית) מטריצה ריבועית שכל רכיביה שאינם על האלכסון הראשי הם אפס, תקרא מטריצה אלכסונית.

הגדרה: (מטריצה האפס) מטריצה שכל רכיביה הם אפס, תקרא מטריצת האפס.

חיבור מטריצות וכפל מטריצה בסקלר

דוגמא. (חיבור מטריצות)

$$\begin{pmatrix}1&2&5\\3&4&0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}6&8&9\\11&5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+6&2+8&5+9\\3+11&4+5&0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&10&14\\14&9&4\end{pmatrix}$$

■

חיבור שתי מטריצות אשר מספר שורות ומספר עמודותי שונים אי חוקי, לדוגמה

$$\begin{pmatrix}1&2&5\\3&4&0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$

דוגמא. (כפל מטריצה בסקלר)

$$7 \odot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cdot 1 & 7\cdot 2 \\ 7\cdot 3 & 7\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \end{pmatrix}$$

■

3.8 הגדרה: (שוויון מטריצות) יהיו $A,B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. נאמר ש $A=B$ אם לכל $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ מתקיים

$$A_{ij} = B_{ij}\ .$$

3.9 הגדרה: (חיבור מטריצות) יהיו $A,B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. הסכום

$$A \oplus B$$

יוגדר כך ש-

$$(A\oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$$

כאשר $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, כלומר חיבור הרכיבים המתאימים.

3.10 הגדרה: (כפל מטריצה בסקלר) יהיו $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ו- $\alpha \in \mathbb{R}$. כפל מטריצה A בסקלר α יסומן ב

$$\alpha \odot A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

ויוגדר כך ש-

$$(\alpha\odot A)_{ij} = \alpha \cdot A_{ij}$$

כאשר $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, כלומר הכפלה של כל אחד מאיברי המטריצה ב- α.

3.11 הגדרה: (מטריצה הנגדי) בהינתן מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ המטריצה הנגדי תסומן ב- $-A$ ותוגדר

$$-A \equiv (-1)\odot A\ ,$$

כלומר הכפלת של המטריצה A בהסקלר -1.

3.12 הגדרה: (חיסור מטריצות) בהינתן מטריצה $A,B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ החיסור המסומן ב- $A-B$ יוגדר

$$A - B \equiv A \oplus (-B)\ ,$$

כלומר החיבור (לפי הגדרה 3.9) של המטריצה A והמטריצה הנגדי $-B$ (לפי הגדרה 3.11).

3.13 משפט: יהיו $A,B,C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ו- $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. אזי:

1. חוק החילוף של חיבור מטריצות: $A+B=B+A$.
2. חוק הקיבוץ של חיבור מטריצות: $(A+B)+C = A+(B+C)$
3. $A+0=A$.
4. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.
5. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.
6. $\alpha\cdot(\beta\cdot A) = (\alpha\cdot\beta)\cdot A$.

הוכחה מיידית מההגדרות.

מטריצה משוחלפת

3.14 הגדרה: (מטריצה משוחלפת) בהינתן מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ בגודל $m \times n$, המשוחלפת של A, תסומן A^t, היא מטריצה בגודל $n \times m$ כך שלכל $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, מתקיים

$$A^t_{ji} = A_{ij}$$

דוגמא. (מטריצה משוחלפת) נתונה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ מצאו את המשוחלפת שלה, כלומר A^t.

פיתרון.

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

■

3.15 הגדרה: (מטריצה משוחלפת) עבור $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, מגדירים את A^t, המטריצה המשוחלפת של A, להיות מטריצה בגודל $n \times m$ כך שהעמודה ה- i של A^t היא השורה של A. "החלפת שורות ועמודות".

3.16 משפט: תהיינה A, B מטריצה כך שהסכומים והמכפלות מוגדרים ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. מתקיים:

1.
$$\left(A^t\right)^t = A$$

2.
$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

3.
$$(\alpha A)^t = \alpha A^t$$

4.
$$(AB)^t = B^t A^t$$

שימו לב, הסדר השתנה.

כפל מטריצה בוקטור

דוגמא. (כפל מטריצה בוקטור)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7\cdot 1 \\ 7\cdot 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8\cdot 2 \\ 8\cdot 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9\cdot 3 \\ 9\cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7\cdot 1 + 8\cdot 2 + 9\cdot 3 \\ 7\cdot 4 + 8\cdot 5 + 9\cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 50 \\ 122 \end{pmatrix}$$

3.1 הגדרה: (מכפלה של מטריצה בוקטור)

יהיו $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ו- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. נגדיר

$$Ax = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots x_na_n \ .$$

שימו לב שמתקבל וקטור השייך ל- $\mathbb{R}^m$. שימו לב שניתן לכפול רק כאשר כמות העמודות של המטריצה שווה לכמות הרכיבים של הוקטור.

דוגמא. (מכפלה של מטריצה בוקטור) יהיו $\nu_1\ ,\ \nu_2\ ,\ \nu_3 \in \mathbb{R}^8$. הציגו את $5\nu_1 - 4\nu_2 + 8\nu_3$ בצורה של "מטריצה כפול וקטור".

פיתרון.

$$\begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = 5\nu_1 - 4\nu_2 + 8\nu_3 \ .$$

שימו לב $\begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \in M_{8\times 3}(\mathbb{R})$ ■

דוגמא. בהינתן המערכת לינארית

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 =& 12\ , \\ 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 =& 11 \end{aligned}$$

ניתן לייצג אותה בצורה

$$x_1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$$

ובצורה של משוואה מטריציאלית:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}\ ,$$

או

$$AX = b$$

כאשר $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ו- $b = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$.

כפל מטריצות

דוגמא. (כפל מטריצות)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 3}}_{A} \odot \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \underbrace{21}_{b_1} & \underbrace{22}_{b_2} & \underbrace{23}_{b_3} & \underbrace{24}_{b_4} \end{pmatrix}_{3\times 4} = \begin{pmatrix} A\cdot b_1 & A\cdot b_2 & A\cdot b_3 & A\cdot b_4 \end{pmatrix}$$

כאשר

$$A\cdot b_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}_{2\times 3}\cdot\begin{pmatrix}11\\5\\21\end{pmatrix}_{3\times 1}=\begin{pmatrix}1\cdot 11+2\cdot 5+3\cdot 21\\0\cdot 11+7\cdot 5+8\cdot 21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}84\\203\end{pmatrix}$$

$$A\cdot b_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}_{2\times 3}\cdot\begin{pmatrix}12\\6\\22\end{pmatrix}_{3\times 1}=\begin{pmatrix}1\cdot 12+2\cdot 6+3\cdot 22\\0\cdot 12+7\cdot 6+8\cdot 22\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}90\\218\end{pmatrix}$$

$$A\cdot b_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}_{2\times 3}\cdot\begin{pmatrix}13\\7\\23\end{pmatrix}_{3\times 1}=\begin{pmatrix}1\cdot 13+2\cdot 7+3\cdot 23\\0\cdot 13+7\cdot 7+8\cdot 23\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}96\\233\end{pmatrix}$$

$$A\cdot b_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}_{2\times 3}\cdot\begin{pmatrix}14\\8\\24\end{pmatrix}_{3\times 1}=\begin{pmatrix}1\cdot 14+2\cdot 8+3\cdot 24\\0\cdot 14+7\cdot 8+8\cdot 24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}102\\248\end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}11&12&13&14\\5&6&7&8\\21&22&23&24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}84&90&96&102\\203&218&233&248\end{pmatrix}$$

3.2 הגדרה: (כפל מטריצות) תהיינה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B\in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ כך ש- $B=\begin{pmatrix}b_1&b_2&\dots&b_k\end{pmatrix}$ (שימו לב שמספר העמודות של A שווה למספר השורות של B) אזי

$$A\odot B=\begin{pmatrix}A\cdot b_1&A\cdot b_2&\dots&A\cdot b_k\end{pmatrix}\ .$$

על מנת לחשב את הרכיב במקום ה- (i,j) ב- $A\odot B$ למעשה כופלים שורה i של A בעמודה j של B.
שימו לב שכל עמודה של $A\odot B$ היא צרוף לינארי של עמודות A.

דוגמא. כפל מטריצות

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+0\cdot 0&1\cdot 2+0\cdot 7&1\cdot 3+0\cdot 8\\0\cdot 1+1\cdot 0&0\cdot 2+1\cdot 7&0\cdot 3+1\cdot 8\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}$$

■

דוגמא. כפל מטריצות

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot 0&1\cdot 0+2\cdot 1+3\cdot 0&1\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot 1\\0\cdot 1+7\cdot 0+8\cdot 0&0\cdot 0+7\cdot 1+8\cdot 0&0\cdot 0+7\cdot 0+8\cdot 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}$$

■

3.3 משפט: תהיינה A,B,C מטריצות כך שהסכומים והמכפלות מוגדרים ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. אזי

1. $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot (B\cdot C)$
2. $A\cdot (B+C) = A\cdot B + A\cdot C$
3. $(B+C)\cdot A = B\cdot A + C\cdot A$
4. $\alpha(A\cdot B) = (\alpha\cdot A)\cdot B = A\cdot(\alpha\cdot B)$
5. אם $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ו- I_n מטריצת היחידה בגודל $n\times n$ ו- I_m מטריצת היחידה בגודל $m\times m$ אז

$$I_m A = A = A I_n \ .$$

דוגמא. (כפל מטריצה אינה קומוטטיבית)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 27 \end{pmatrix}$$

אבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 22 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

בגלל שאם $AB=BA$ אז לא בהכרח מתקיים. התכונה הזו נגזרת מן החוק הקובע כי **מכפלה של מטריצות אינה קומוטטיבית** ■

3.4 משפט. (מכפלה של מטריצות אינה קומוטטיבית)

בהינתן מכפלה של שתי מטריצות, סדר כתיבת המטריצות משפיע על התוצאה סופית, כלומר

$$AB\neq BA \quad \Leftrightarrow \quad AB-BA\neq 0 \ .$$

כך מכפלה של מטריצות אינה קומוטטיבית.

דוגמא.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

בגלל שאם $AB=0$ אז לא בהכרח מתקיים כי $A=0$ או $B=0$. ■

דוגמא.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

ו-

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בגלל שאם $AB=BC$ ו- $A\neq 0$ אז לא בהכרח מתקיים כי $B=C$. ■

הדוגמאות אלו דוגמאות של החוקים הבאים:

3.5 משפט: עבור מטריצות A,B,C, לא בהכרח מתקיימים היחסים הבאים:

(א) $AB=BA$

(ב) אם $AB=0$ אז $A=0$ או $B=0$.

(ג) אם $AB=AC$ ו- $A\neq 0$ אז $B=C$.

3.6 הגדרה: (העלאה מטריצה בחזקה)

תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $k\in\mathbb{N}$. נגדיר

$$A^k = \overbrace{A\cdot A\cdot\cdots\cdot A}^{k \text{ פעמים}}$$

אם $A\neq 0$, ונגדיר

$$A^0 = I_n \ .$$

מטריצות הפיכות

דוגמא. בהינתן המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ מהי המטריצה שתסומן ב- A^{-1} כך ש

$$A\cdot A^{-1}=I_{2\times 2}$$

או כך ש-

$$A^{-1}\cdot A=I_{2\times 2}$$

פיתרון. המטריצה A^{-1} נקראת ההופכית של A. התשובה היא

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

■

3.7 הגדרה: (מטריצה הפיכה)
מטריצה $A\in M_n(\mathbb{R})$ תקרא הפיכה אם קיימת $B\in M_n(\mathbb{R})$ כך ש

$$AB=BA=I$$

כאשר I המטריצת יחידה ב- $M_n(\mathbb{R})$. המטריצה B תקרא ההופכית של A.

3.8 משפט. (ההופכית של מטריצה יחידה)
אם קיימת הופכית ל- A אז היא יחידה. נסמן אותה ב- A^{-1}.

הוכחה.

נניח ש- B,C הופכיות של A. מתקיים:

$$C=CI=C(AB)=(CA)B=IB=B\ .$$

■

משפט. (ייחידיות של פתרון למערכת לינארית)
אם $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אז לכל $b\in\mathbb{R}^n$ למשוואה $AX=b$ יש פיתרון יחיד והוא $A^{-1}b$.

הוכחה.
יהי $b\in\mathbb{R}^n$. קל לראות ש- $A^{-1}b$ הוא פתרון של המשוואה, שכן

$$A(A^{-1}b)=(AA^{-1})b=Ib=b\ .$$

נוכיח יחידות:
יהי $u\in\mathbb{R}^n$ פתרון, אזי

$$Au=b.$$

נכפול את שני האגפים משמאל ב- A^{-1} ונקבל

$$\begin{aligned} A^{-1}(Au)&=A^{-1}b\ ,\\ \Rightarrow\quad (A^{-1}A)u&=A^{-1}b\ ,\\ \Rightarrow\quad Iu&=A^{-1}b\ ,\\ \Rightarrow\quad u&=A^{-1}b\ ,\end{aligned}$$

■

דוגמא. פתרו את המערכת

$$\begin{aligned} x_1+2x_2 &=1 \ , \\ 3x_1+4x_2 &=2 \ . \end{aligned}$$

פיתרון. ניתן לייצג את המערכת בצורה

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b}$$

נזכיר ש- $A^{-1}=\left(\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$. נכפול את שני אגפי המשוואה ב- A^{-1} משמאל. נקבל

$$X=A^{-1}b=\left(\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} \ .$$

קל לבדוק שאכן $\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ מהווה פתרון של המשוואה. אכן,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

■

3.9 משפט:

יהיו $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ו- $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ וקטור משתנים, ו- $b=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m$.

למשוואה המטריציאלית $AX=b$ יש אותה קבוצת פתרונות כמו למשוואה הוקטורית

$$x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n=b$$

ואותה קבוצת פתרונות כמו למערכת הלינארית שהמטריצה המורחבת שלה היא

$$(A|b) \ .$$

3.10 משפט:

תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{R})$.

(א) אם A הפיכה אז A^{-1} הפיכה ומתקיים $(A^{-1})^{-1}=A$.

(ב) אם A ו- B הפיכות אז AB הפיכה ומתקיים $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

(ג) אם A הפיכה אז A^t הפיכה ומתקיים $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

הוכחה.

(א)

$$AA^{-1}=I, \qquad A^{-1}A=I \ .$$

(ב)

$$(AB)^{-1}B^{-1}A^{-1}=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I \ .$$

■

כיצד למצוא ההופכית

דוגמא. (הופכית של מטריצה)
בהינתן $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ מהי ההופכית?

פיתרון.
ניתן לכתוב ההופכית בצורה $A^{-1}=\begin{pmatrix}Y&Z\end{pmatrix}$ כאשר Y ו- Z הם וקטורים מעל $\mathbb{R}_2$, כלומר

$$Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\ ,\qquad Z=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\ ,$$

כך ש

$$A\begin{pmatrix}Y&Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow\qquad\begin{pmatrix}AY&AZ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

נפתור

$$AY=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&1\\3&4&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&1\\0&-2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&-2\\0&-2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{2}R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&-2\\0&1&\frac{3}{2}\end{array}\right)$$

נפתור

$$AZ=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&0\\3&4&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&0\\0&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{2}R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

אפשר לפתור יחד:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\3&4&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&-2&-3&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&1\\0&-2&-3&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{2}R_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&1\\0&1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

■

3.11 משפט:
תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$.

$$A \text{ שקולות שורות ל } I \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ הפיכה } .$$

במקרה זה כל סדרה של פעולות שורה אלמנטריות המעבירות את A ל- I תעביר את I ל- A^{-1}.

טכנית, על מנת למצוא הופכית של A, מתבוננים במטריצה $(A|I)$ ומדרגים את A לקבלת I. מבצעים את אותן פעולות בו זמנית על I עד לקבלת $(I|A^{-1})$.

דוגמא. (מבחן תש"פ 1,1)
תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם A הפיכה וגם B הפיכה אז $A+B$ איננה הפיכה.

(ב) אם A הפיכה וגם B הפיכה אז $A+B$ הפיכה.

פיתרון.

(א) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A = I$, $B = I$ שתיהן הפיכות אבל $A + B = 2I$ הפיכה.

(ב) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A = I$, $B = -I$ שתיהן הפיכות אבל $A + B = 0$ איננה הפיכה.

■

דוגמא.

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= 1 \\ 2x-2y+4z &= 2 \\ x+y+5z &= 3 \end{aligned}$$

$$AX=b \quad \Rightarrow \quad X=A^{-1}b$$

כאשר

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \ , \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ , \qquad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_1}$$

$$\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_2}$$

$$\xrightarrow{R_2\to -R_2}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+6R_2}$$

$$\xrightarrow{R_3\to -\frac{1}{14}R_3}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2+2R_3}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-3R_3}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

שיעור 4
דטרמיננטות וכלל קרמר

הגדרה של דטרמיננטה של מטריצה ריבועית

נדון רק במטריצה ריבועית.

4.1 הגדרה: (דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר 1×1 ו- 2×2)
הדטרמיננטה של מטריצה $A\in M_n(\mathbb{R})$, תסומן $\det A$ או $|A|$, היא מספר ממשי. באופן דומה, הדטרמיננטה של מטריצה $A\in M_n(\mathbb{C})$, היא מספר מורכב. נתחיל בדטרמיננטה של מטריצות מסדר 1×1 ו- 2×2:

$$n=1:\quad A=(a),\qquad |A|=a\ ,$$

$$n=2:\quad A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\ ,\quad |A|=(-1)^{1+1}a_{11}|(a_{22})|+(-1)^{1+2}a_{12}|(a_{21})|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\ .$$

דוגמא. (דטרמיננטה)

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\ ,\quad |A|=(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot|(4)|+(-1)^{1+2}\cdot 2\cdot|(3)|=1\cdot 4-2\cdot 3=-2\ .$$

■

4.1 הגדרה: (דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר 3×3)

$$n=3:A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

$$|A|=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\ .$$

דוגמא. (דטרמיננטה)

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\6&0&7\end{pmatrix}\ ,$$

$$\begin{aligned}|A|=&(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}4&5\\0&7\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}0&5\\6&7\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot 3\cdot\begin{vmatrix}0&4\\6&0\end{vmatrix}\ .\\=&1\cdot(4\cdot 7-5\cdot 0)-2(0\cdot 7-5\cdot 6)+3\cdot(0\cdot 0-4\cdot 6)\\=&28+60-72\ ,\\=&16\ .\end{aligned}$$

■

4.2 הגדרה: (המינור של מטריצה)
עבור מטריצה ריבועית A, המינור ה- (i,j) של A הוא הדטרמיננטה של המטריצה הריבועית המתקבלת מ- A ע"י מחיקת שורה i ועמודה j. את המינור ה- (i,j) נסמן ב- M_{ij}.

דוגמא.

עבור $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\6&0&7\end{pmatrix}$ מצאו את M_{11}, M_{12}, M_{23}, M_{32}.

פיתרון.

$$M_{11}=\begin{vmatrix}4&5\\0&7\end{vmatrix}=28\ ,$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix}0&5\\6&7\end{vmatrix}=-30\ ,$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix}1&2\\6&0\end{vmatrix}=-12\ ,$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix}1&3\\0&5\end{vmatrix}=5\ .$$

■

4.3 הגדרה: (דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר $n\times n$)

תהי $A\in M_n(\mathbb{R})=\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}$. הדטרמיננטה של A, תסומן $|A|$, היא

$$\begin{aligned}|A|=&(-1)^{1+1}a_{11}M_{11}+(-1)^{1+2}a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}\\=&a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}\ .\end{aligned}$$

דוגמא.

נסמן $A=\begin{pmatrix}1&5&0\\2&4&-1\\0&-2&0\end{pmatrix}$, מצאו את הדטרמיננטה של המטריצה.

פיתרון.

$$\begin{aligned}|A|=&(-1)^{1+1}\cdot1\cdot\begin{vmatrix}4&-1\\-2&0\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot5\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\0&0\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot0\cdot\begin{vmatrix}2&4\\0&-2\end{vmatrix}\\=&1\cdot(4\cdot0-(-1)\cdot(-2))-5\cdot(2\cdot0-(-1)\cdot0)+0\cdot(2\cdot(-2)-4\cdot0)\\=&-2\ .\end{aligned}$$

נשתעשע....

$$\begin{aligned}|A|\overset{\text{שורה שנייה}}{=}&(-1)^{2+1}\cdot2\cdot\begin{vmatrix}5&0\\-2&0\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\cdot4\cdot\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}1&5\\0&-2\end{vmatrix}\\=&-2\cdot(5\cdot0-0\cdot(-2))-4\cdot(1\cdot0-0\cdot0)+1\cdot(1\cdot(-2)-5\cdot0)\\=&-2\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|A|\overset{\text{עמודה שלישית}}{=}&(-1)^{1+3}\cdot0\cdot\begin{vmatrix}2&4\\0&-2\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}1&5\\0&-2\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\cdot0\cdot\begin{vmatrix}1&5\\2&4\end{vmatrix}\\=&0\cdot(2\cdot(-2)-4\cdot0)+1\cdot(1\cdot(-2)-5\cdot0)+0\cdot(1\cdot4-5\cdot2)\\=&-2\ .\end{aligned}$$

■

הערה:

סימני האיברים הם כך:

$$A=\begin{pmatrix} + & - & + & \ldots \\ - & + & - & \ldots \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

דוגמא.
חשבו

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 19 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \ .$$

פיתרון.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 19 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & 19 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3 = 6 \ .$$

■

4.4 משפט. (דטרמיננטה של מטריצה משולשית)
אם $A\in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה משולשית אז $|A|=a_{11}\cdot a_{22}\cdot \cdots \cdot a_{nn}$, כלומר מכפלת איברי האלכסון הראשי.

דוגמא.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ , \qquad |A|=-2 \ .$$

$A \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} B_1$:

$$B_1=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ , \qquad |B_1|=2 \ .$$

$A \xrightarrow{R_1\to 7R_1} B_2$:

$$B_2=\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ , \qquad |B_2|=-14 \ .$$

$A \xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1} B_3$:

$$B_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \ , \qquad |B_3|=-2 \ .$$

4.5 משפט:
תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$. ניתן לחשב את $|A|$ גם לפי עמודה ראשונה, כלומר

$$|A|=(-1)^{1+1}a_{11}M_{11}+(-1)^{2+1}a_{21}M_{21}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} \ .$$

למעשה, ניתן לחשב את $|A|$ לפי שורה כלשהי או לפי עמודה כלשהי.

דוגמא.
חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix}3&-7&8&9&-6\\0&2&-5&7&3\\0&0&1&5&0\\0&0&2&4&-1\\0&0&0&-2&0\end{pmatrix}$$

פיתרון.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}3&-7&8&9&-6\\0&2&-5&7&3\\0&0&1&5&0\\0&0&2&4&-1\\0&0&0&-2&0\end{vmatrix} &=(-1)^{1+1}\cdot 3\cdot\begin{vmatrix}2&-5&7&3\\0&1&5&0\\0&2&4&-1\\0&0&-2&0\end{vmatrix}\\ &=3\cdot(-1)^{1+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1&5&0\\2&4&-1\\0&-2&0\end{vmatrix}\\ &=6\cdot(-2)=-12\ .\end{aligned}$$

■

4.6 משפט:
אם $A\in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה ריבועית ו- B מטריצה המתקבלת מ- A ע"י הפעולה האלמנטרית:

(1) החלפת 2 שורות, אז
$$|B|=-|A|.$$

(2) הכפלת שורה בסקלר $\alpha\neq 0$, אז
$$|B|=\alpha|A|.$$

(3) הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת, אז
$$|B|=|A|\ .$$

דוגמא.
חשבו את

$$\begin{vmatrix}3&6\\8&4\end{vmatrix}$$

פיתרון.

$$\underbrace{\begin{vmatrix}3&6\\8&4\end{vmatrix}}_{B}=3\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&2\\8&4\end{vmatrix}}_{A}$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix}1&2\\8&4\end{vmatrix}}_{B}=4\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}}_{A}$$

$$\begin{vmatrix}3&6\\8&4\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}1&2\\8&4\end{vmatrix}=3\cdot 4\cdot\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=12\cdot(1-4)=-36\ .$$

■

דוגמא.
חשבו את

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 12 & 15 & 18 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} = ?$$

פיתרון.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 12 & 15 & 18 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 15 & 18 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1} 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 7R_1} 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 24 \cdot (-3) = -72 \ .$$

■

דוגמא.
חשבו את $\begin{vmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 28 & 35 & 42 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix}$

פיתרון.

$$\begin{vmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 28 & 35 & 42 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 28 & 35 & 42 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix} = 7 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix} = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 7^3 \cdot (-3) \ .$$

■

4.7 משפט:

$$|\alpha A| = \alpha^n \cdot |A|$$

כאשר A מסדר $n \times n$.

הערה:

כל מטריצה ריבועית A (מסדר $n\times n$) ניתן להעביר למטריצה מדורגת B ע"י ביצוע מספר סופי של פעולות שורה אלמנטריות מסוג החלפת 2 שורות והוספת שורה אחת לשורה אחרת (בלי פעולת הכפלת שורה בסקלר $\alpha\neq 0$). לכן

$$|A|=(-1)^k|B|$$

כאשר k הור מספר החלפות השורות שביצענו. כמו כן מאחר ו- B משולשית עליונה,

$$|B|=b_{11}\cdot b_{22}\cdot\cdots\cdot b_{nn}\ .$$

4.8 משפט:
תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$. מתקיים:

$$|A|\neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad A \text{ הפיכה.}$$

דוגמא. היעזרו במשפט 4.8 לעיל וקבעו האם המטריצה הבאה הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5\\ 0 & 5 & -3 & -6\\ -6 & 7 & -7 & 4\\ -5 & -8 & 0 & 9\end{pmatrix}$$

פיתרון.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -5\\ 0 & 5 & -3 & -6\\ -6 & 7 & -7 & 4\\ -5 & -8 & 0 & 9\end{vmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3+2R_1} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -5\\ 0 & 5 & -3 & -6\\ 0 & 5 & -3 & -6\\ -5 & -8 & 0 & 9\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -5\\ 0 & 5 & -3 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -5 & -8 & 0 & 9\end{vmatrix}$$

$$=0\ .$$

■

דוגמא.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\ ,\quad |A|=2\ ,$$

$$A^t=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\ ,\quad |A^t|=-2\ .$$

4.9 משפט:
תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$. מתקיים:

$$|A^t|=|A|\ .$$

דוגמא.
נסמן $A=\begin{pmatrix}6&1\\3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&3\\1&2\end{pmatrix}$. מצאו את המטריצה AB ואת הדטרמיננות הבאות: $|A|$, $|B|$, $|AB|$.

פיתרון.

$$\begin{aligned}AB&=\begin{pmatrix}6&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3\\1&2\end{pmatrix}&&=\begin{pmatrix}25&20\\14&13\end{pmatrix}\ ,\\|A|&=12-3&&=9\ ,\\|B|&=8-3&&=5\ ,\\|AB|&=25\cdot13-20\cdot14&&=45\ .\end{aligned}$$

■

4.10 משפט. (משפט המכפלה)
תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{R})$. מתקיים:

$$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|\ .$$

דוגמא.
נתונה $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ ו- $|A|=-2$ מהי A^{2020}?

פיתרון.

$$|A^{2020}|=|\underbrace{A\cdot A\cdot\dots\cdot A}_{\text{פעמים }2020}|=\underbrace{|A|\cdot|A|\cdot\dots\cdot|A|}_{\text{פעמים }2020}=|A|^{2020}$$

ולכן $|A^{2020}|=(-2)^{2020}$. ■

4.11 משפט:
תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $k\in\mathbb{N}$. מתקיים:

$$|A^k|=|A|^k\ .$$

4.12 משפט:
תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה, אז

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}\ .$$

הוכחה.
מתקיים $A^{-1}\cdot A=I$ ולכן $|A\cdot A^{-1}|=|I|$. לפי משפט המכפלה, $|A|\cdot|A^{-1}|=1$. נחלק ב- $|A|\neq0$ ונקבל

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}\ .$$

■

דוגמא.
נתונה $A\in M_3(\mathbb{R})$ המקיימת $A^3=2A^{-1}B$, כאשר $B=\begin{pmatrix}-2&3e&\pi\\0&1&23\\0&0&-1\end{pmatrix}$. מצאו את $|A|$.

פיתרון.
דרך א:
לפי הנתון $A^3=2A^{-1}B$, ולכן $|A^3|=|2A^{-1}B|$. לפי משפט המכפלה, $|A|^3=|2A^{-1}|\cdot|B|$. מאחר ו- $A\in M_3(\mathbb{R})$, נקבל $|A|^3=2^3\cdot|A^{-1}|\cdot|B|$. מכאן,

$$|A|^3=2^3\cdot\frac{1}{|A|}\cdot|B|\ ,$$

ולכן

$$|A|^4=8\cdot|B|=8\cdot 2=16\ ,$$

ונקבל $|A|=\pm 2$.

דרך ב:

$$A\cdot(2A^{-1}B)=A\cdot A^3\quad\Rightarrow\quad A^4=(A\cdot 2A^{-2})B\quad\Rightarrow\quad A^4=(2\cdot AA^{-2})B\quad\Rightarrow\quad A^4=(2\cdot I)B$$
$$A^4=2B\quad\Rightarrow\quad|A^4|=|2B|\quad\Rightarrow\quad|A|^4=2^3\cdot|B|\quad\Rightarrow\quad|A|^4=8\cdot 2=16\ .$$

■

דוגמא.
תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{R})$. הוכח או הפרך:

$$|A+B|=|A|+|B|\ .$$

פיתרון. הטענה איננה נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,$$

$$A+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,$$

$$|A|=0\ ,\qquad |B|=0\ ,$$

$$|A+B|=|I|=1\ ,$$

$$|A+B|\neq|A|+|B|\ .$$

■

דוגמא.
תהיינה $A,B\in M_5(\mathbb{R})$ הפיכות, כך שמתקיים $A+3B^t=0$. חשבו את $|A^{-1}B^2(B^t)^{-1}|$.

פיתרון. נשים לב שלא נכון לכתוב

$$A+3B^t=0 \quad \Rightarrow \quad |A+3B^t|=|0| \quad \Rightarrow \quad |A|+|3B^t|=0\ .$$

נחשב

$$|A^{-1}B^2(B^t)^{-1}|=|A^{-1}|\cdot|B^2|\cdot|(B^t)^{-1}|=\frac{1}{|A|}\cdot|B|^2\cdot\frac{1}{|B^t|}=\frac{1}{|A|}\cdot|B|^2\cdot\frac{1}{|B|}=\frac{|B|}{|A|}\ .$$

לפי הנתון $A+3B^t=0$ ולכן

$$A=-3B^t \quad \Rightarrow \quad |A|=|-3B^t| \quad \Rightarrow \quad |A|=(-3)^5|B^t| \quad \Rightarrow \quad |A|=-243|B| \quad \Rightarrow \quad \frac{|B|}{|A|}=-\frac{1}{243}\ .$$

■

דוגמא.
תהיינה $X,Y\in M_3(\mathbb{R})$ המקיימות

$$XY=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

(א) האם X הפיכה?

(ב) עבור $X=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&-1&0\\4&0&-6\end{pmatrix}$ מצאו את Y.

פיתרון. **(א)** נסמן $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$. לפי הנתון $XY=A$. נשים לב ש- $|A|=-6$ ולפי משפט המכפלה, $|A|=|XY|=|X|\cdot|Y|$. בפרט, $|X|\neq 0$, ולכן X הפיכה.

(ב) לפי הנתון $XY=A$. הוכחנו ש- X הפיכה, נכפול את שני האגפים משמאל בהופכית של X. נקבל $Y=X^{-1}A$. לאחר חישוב, נקבל ש-

$$X^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-2&0\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

לכן

$$Y=X^{-1}A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-2&0\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&0\\1&-6&0\\\frac{2}{3}&-2&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\ .$$

■

כלל קרמר

דוגמא. פתרו את המערכת הבאה בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2 =&1\\ 3x_1+4x_2 =&2 \ . \end{aligned}$$

פיתרון.

$$\begin{array}{rr} x_1+2x_2 = & 1 \\ 3x_1+4x_2 = & 2 \end{array} \qquad \Leftrightarrow \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b}$$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$, ולכן המטריצה הפיכה.

$$\begin{aligned} |A_1(b)| =&\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} &= 0 \ , \\ x_1 =&\frac{|A_1(b)|}{|A|} &= \frac{0}{-2} = 0 \ , \\ |A_2(b)| =&\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} &= -1 \ , \\ x_2 =&\frac{|A_2(b)|}{|A|} &= \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

■

4.13 משפט. (כלל קרמר)

תהי $M_n(\mathbb{R}) \ni A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$ הפיכה. לכל $b \in \mathbb{R}^n$ הפתרון היחיד $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ של המשוואה $AX = b$ מקיים

$$x_i = \frac{|A_{ib}|}{|A|}$$

כאשר

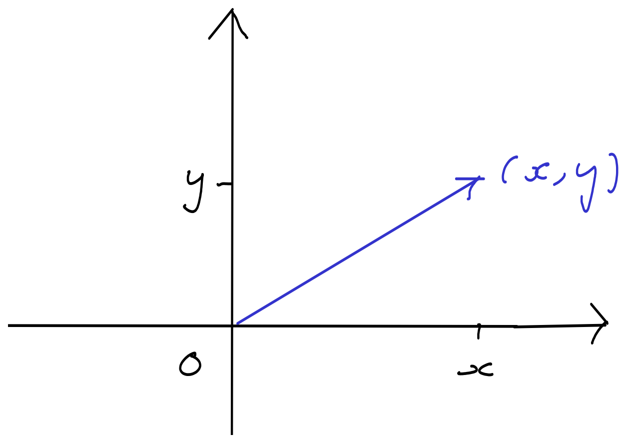
$$A_{ib} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{i-1} & b & a_{i+1} & \ldots & a_n \end{pmatrix} \ ,$$

כלומר המטריצה המתקבלת מ- A ע"י החלפת העמודה ה- i ב- b.

שיעור 5
מרחבים וקטורי

מרחבים וקטורים

באלגברה וקטור במישור תמיד מתחיל בנקודה $(0,0)$. לכן כל וקטור במישור נקבע ע"י הנקודה הסופית שלו (x,y).



לקבוצת כל הוקטורים במישור מסמנים $\mathbb{R}^2$.

<u>פעולות ב- $\mathbb{R}^2$</u>

1) חיבור וקטורים:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

2) כפל של וקטור בסקלר:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

באופן דומה ניתן להגדיר פעולות בין וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) | x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

1) חיבור וקטורים:

$$(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$$

2) כפל של וקטור בסקלר:

$$\alpha \cdot (x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

באופן כללי נגדיר מרחב וקטורי $\mathbb{R}^n$:

5.1 הגדרה: מרחב וקטורי $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ מוגדר להיות הקבוצה של כל הסטים מ n מספרים ממשיים:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) | x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}\} \ .$$

הפעולות הבאות מוגדרות בין וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$:

1) חיבור וקטורים:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

2) כפל של וקטור בסקלר:

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

בדוגמאות האלה הסקלרים שייכים לשדה $\mathbb{R}$.

באופן דומה הסקלרים יכולים להשתייך לשדה אחר, למשל $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$.

ניתן הגדרה כללית של מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$:

5.2 הגדרה: (מרחב וקטורי מעל שדה)
קבוצה לא ריקה V נקראת מרחב וקטורי (מ"ו) מעל שדה $\mathbb{F}$ אם מתקיימים התנאים הבאים (האיברים של V נקראים וקטורים ואיברי $\mathbb{F}$ נקראים סקלרים). לכל וקטורים $u, \mathrm{v}, w \in V$ וסקלירם $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$:

(1) $u + \mathrm{v} \in V$

(2) קיים וקטור $\alpha\, u \in V$

(3) $u + v = v + u$ (חוק החילוף).

(4) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (חוק הקיבוץ).

(5) קיים וקטור $\bar{0} \in V$ (הנקרא וקטור האפס) כך שלכל $u \in V$, מתקיים $\bar{0} + u = u + \bar{0} = u$.

(6) לכל $u \in V$ קיים $-u \in V$ כך ש- $u + (-u) = \bar{0}$.

(7) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

(8) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$.

(9) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha \mathrm{v}$.

(10) $1 \cdot u = u$ (כאשר $1 \in \mathbb{F}$).

דוגמאות מרכזיות של מרחבים וקטורים

1) $\mathbb{F}^n$ **מרחב הוקטורים מעל**

מרחב הוקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$

$(\mathbb{F}^n, +, \cdot)$ עם הפעולות חיבור וקטורים וכפל בסקלר.

2) $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ **מרחב המטריצות מעל** $\mathbb{R}$

קבוצת כל המטריצות מסדר $m \times n$ עם איברים ממשיים.

לכל שתי מטריצות מסדר $m \times n$ מוגדרת פעולת חיבור וכל מטריצה ניתן להכפיל בסקלר השייך ל $\mathbb{R}$.

קל לבדוק שכל האקסיומות של מרחב וקטורי מתקיימות. לכן זה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

3) $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ מרחב המטריצות מעל $\mathbb{C}$

באופן דומה ניתן להגדיר מרחב וקטורי $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ - מרחב וקטורי של כל המטריצות מסדר $m\times n$ עם ריברים מרוכבים (מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$).

4) $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מרחב המטריצות מעל $\mathbb{F}$

באופן כללי $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ - מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.

5) $\mathbb{F}[x]$ מרחב הפולינומים

קבוצת כל הפולינומים עם מקדמים השייכים לשדה $\mathbb{F}$.

מוגדרות פעולות חיבור פולינומים וכפל של פולינומים בסקלר השייך ל- $\mathbb{F}$.

כל האקסיומות של מרחב וקטורי מתקיימות.

6) $F(\mathbb{R})$ קבוצת הפונקציות הממשיות

קבוצת כל הפונקציות הממשיות, ז"א

$$F(\mathbb{R})=\{f : f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}\}$$

מוגדרות פעולות חיבור פונקציות וכפל פונקציה בסקלר מתוך $\mathbb{R}$.

נגדיר חיבור וכפל בסקלר כפי שהוגדרו בחדו"א. לכל $f,g\in F(\mathbb{R})$ ולכל $\alpha\in\mathbb{R}$ נגדיר

$$\begin{aligned}(f+g)(x)=&f(x)+g(x)\ ,\quad \forall x\in\mathbb{R}\ ,\\ (\alpha\cdot f)(x)=&\alpha\cdot f(x)\ ,\qquad \forall x\in\mathbb{R}\ ,\end{aligned}$$

וקטור האפס הוא פונקציה $f(x)=0$.

קבוצה זו עם הפעולות הללו היא מרחב וקטורי.

5.3 דוגמא.
נתון

$$P_1=7+5x+3x^3+4x^7\in\mathbb{R}[x]\ ,\qquad P_2=6+4x+8x^2+3x^7+9x^{13}\in\mathbb{R}[x]\ ,$$

אז

$$\begin{aligned}P_1+P_2=&\left(7+5x+3x^3+4x^7\right)+\left(6+4x+8x^2+3x^7+9x^{13}\right)\\ =&(7+6)+(5+4)x+(0+8)x^2+(3+0)x^3+(4+3)x^7+(0+9)x^{13}\qquad\in\mathbb{R}[x]\ ,\end{aligned}$$

ונתון $\alpha=3$

$$\begin{aligned}\alpha\cdot P_1=&13+9x+8x^2+3x^3+7x^6+9x^{13}\\ =&3\cdot\left(7+5x+3x^3+4x^7\right)\\ =&(3\cdot7)+(3\cdot5)x+(3\cdot3)x^3+(3\cdot4)x^7\\ =&21+15x+9x^3+12x^7\qquad\in\mathbb{R}[x]\ .\end{aligned}$$

■

5.4 דוגמא.
נתבונן בפונקציות

$$f(x) = \sin x \ , \qquad g(x) = 2x + 19 \ ,$$

שתיהן פונקציות השייכות ל- $F(\mathbb{R})$. מתקיים:

$$(7{\cdot}f)(x) = 7 \cdot \sin x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

מיהו וקטור האפס?

פונקציית האפס,

$$O(x) = 0 \ , \quad \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

שימו לב שאכן לכל $f \in V$ מתקיים $f{+}O = f$ כי

$$(f{+}O)(x) = f(x) + O(x) = f(x) + 0 = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

הנגדי של f זו הפונקציה $-f$ שפעולתה

$$((-1){\cdot}f)(x) = (-1) \cdot f(x) = -f(x) \ , \qquad \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

■

שיעור 6
תת מרחב

6.1 הגדרה: (תת מרחב)
נניח כי V מרחב וקטורי מעל שדה, $\mathbb{F}$.

תת קבוצה W של V נקראת תת מרחב (ת"מ) של V אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

(1) $\bar{0} \in W$.

(2) לכל $u, v, \in W$,
$$u + v \in W \ .$$

(3) לכל $u \in W$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים
$$\alpha \cdot u \in W \ .$$

6.2 דוגמא.
נגדיר $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, $W \subseteq \mathbb{R}^2$. האם W ת"מ של $\mathbb{R}^2$?

פיתרון. לא. דוגמה נגדית:
$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \notin W \ .$$

לכן W לא ת"מ של $\mathbb{R}^2$. ■

6.3 דוגמא.
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \middle| k \in \mathbb{R} \right\} \ .$$

$W \subseteq \mathbb{R}^2$. האם W ת"מ של $\mathbb{R}^2$?

פיתרון.

1) לכל $u = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \in W$, $v = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \in W$,
$$u + v = \begin{pmatrix} k+t \\ 2(k+t) \end{pmatrix} \in W \ ,$$

2) לכל $u = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \in W$, ולכל סקלר $t \in \mathbb{R}$,
$$tu = \begin{pmatrix} tk \\ 2(tk) \end{pmatrix} \in W \ ,$$

3)
$$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \in W \ .$$

לכן השלושה התנאים של ת"מ בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W ת"מ של $\mathbb{R}^2$. ■

6.4 דוגמא.

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a\\a+2\end{pmatrix}\middle|a\in\mathbb{R}\right\}\ .$$

האם W ת"מ של $\mathbb{R}^2$?

פיתרון. $W \notin \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\bar{0}$ לכן W לא ת"מ של $\mathbb{R}^2$. ■

6.5 דוגמא.

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\middle|x\geq 0,x,y\in\mathbb{R}\right\}\ .$$

האם W ת"מ של $\mathbb{R}^2$?

פיתרון.
לא. דוגמה נגדית:

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\in W\ ,\qquad (-1)\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}\notin W\ .$$

■

6.6 דוגמא.

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\middle|x^2-y^2=0\right\}\ .$$

האם W ת"מ של $\mathbb{R}^2$?

פיתרון.
לא. דוגמה נגדית:

$$u=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\in W\ ,\qquad v=\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}\in W\ ,\qquad u+v=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}\notin W\ .$$

■

6.7 דוגמא.

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle|\begin{array}{rl}x-2y+z&=0\\y-z&=0\end{array}\right\}\ .$$

האם W ת"מ של $\mathbb{R}^3$?

פיתרון.

כן:

1) צ"ל $\bar{0}\in W$:

$$\bar{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$\left\{\begin{array}{rl}0-2\cdot 0+0 & =0\\ 0-0 & =0\end{array}\right. \Rightarrow \bar{0}\in W .$$

2) נניח $W \ni \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = u$. ז"א מתקיים $\left\{\begin{array}{rl}x-2y+z & =0\\ y-z & =0\end{array}\right.$. נקח סקלר k. צ"ל: $ku\in W$.

$$ku=\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rll}kx-2ky+kz & =k(x-2y+z) & =0\\ ky-kz & =k(y-z) & =0\end{array}\right.$$

לכן $ku\in W$.

3) נקח $W \ni \begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix} = u$, $W \ni \begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} = \mathrm{v}$. ז"א מתקיים

$$\left\{\begin{array}{rl}x_1-2y_1+z_1 & =0\\ y_1-z_1 & =0\end{array}\right. \text{ וגם } \left\{\begin{array}{rl}x_2-2y_2+z_2 & =0\\ y_2-z_2 & =0\end{array}\right.$$

אז

$$u+\mathrm{v}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix}\ .$$

נבדוק אם $u+\mathrm{v}\in W$.

$$(x_1+x_2)-2(y_1+y_2)+(z_1+z_2)=(x_1-2y_1+z_1)+(x_2-2y_2+z_2)=0\ ,$$

$$(y_1+y_2)-(z_1+z_2)=(y_1-z_1)+(y_2-z_2)=0\ ,$$

לכן $u+\mathrm{v}\in W$. לכן השלושה התנאים של ת"מ בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W ת"מ של $\mathbb{R}^3$.

■

6.8 דוגמא.

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\middle| a+b+c=d\right\}\ .$$

האם W ת"מ של $M_{2\times 2}(\mathbb{F})$?

פיתרון.

1)

$$\bar{0}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in W$$

כי $0+0+0=0$.

2) נקח

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W \ .$$

ז"א מתקיים $a+b+c=d$. נקח סקלר k. אז

$$ku = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} \in W \ .$$

$ka+kb+kc=k(a+b+c)=kd$. לכן $ku \in W$.

3)

$$u = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in W \ , \qquad \mathrm{v} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in W \ .$$

צ"ל $u+\mathrm{v} \in W$.

$u \in W \Rightarrow a_1+b_1+c_1=d_1$.

$\mathrm{v} \in W \Rightarrow a_2+b_2+c_2=d_2$.

$$u+\mathrm{v} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix}$$

$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)=(a_1+b_1+c_1)+(a_2+b_2+c_2)=d_1+d_2$ ז"א $u+\mathrm{v} \in W$.

לכן השלושה התנאים של ת"מ בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W ת"מ של $M_{2\times 2}(\mathbb{F})$. ■

6.9 דוגמא.

תהי

$$W = \left\{ p(x) \middle| \deg(p(x)) = 2 \ , p(x) \in \mathbb{F}[x] \right\}$$

קבוצת כל הפולינומים במעלה 2 בדיוק עם מקדמים מתוך שדה $\mathbb{F}$. קבעו אם W ת"מ של $\mathbb{F}[x]$.

פיתרון.

W לא ת"מ של $\mathbb{F}[x]$. הסבר:

$\bar{0} \notin W$. ■

6.10 דוגמא.

נסמן

$$\mathbb{F}_2[x] = \left\{ p(x) \in \mathbb{F}[x] \middle| \deg(p(x)) \leq 2 \right\}$$

קבוצת כל הפולינומים של $\mathbb{F}[x]$ מסדר 2 לכל היותר.

$\mathbb{F}_2[x]$ ת"מ של $\mathbb{F}[x]$.

6.11 דוגמא.

$$W = \left\{ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \middle| f(3) = 0 \right\}$$

$W \subseteq F(\mathbb{R})$. קבעו האם W ת"מ של $F(\mathbb{R})$.

פיתרון.

1) האיבר $\bar{0}$ הינו הפונקציה $f(x)=0$. לכן $\bar{0}(3)=0 \Leftarrow \bar{0}\in W$.

2) אם $f\in W$ ו- $k\in\mathbb{R}$, אז $f(3)=0$ לכן

$$(kf)(3)=k(f(3))=k\cdot 0=0\ .$$

ז"א $kf\in W$.

3) נניח $f,g\in W$, ז"א $f(3)=0$, $g(3)=0$. אז

$$(f+g)(3)=f(3)+g(3)=0+0=0\ ,$$

כלומר $f+g\in W$.

לכן השלושה התנאים של ת"מ בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W ת"מ של $F(\mathbb{R})$. ■

6.12 דוגמא.

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle|\ \begin{array}{rl}3x+y-z&=1\\2x+5y&=0\\-x+10y-z&=5\end{array}\right\}$$

קבעו האם W ת"מ של $\mathbb{R}^3$.

פיתרון.

W לא ת"מ של $\mathbb{R}^3$, $\bar{0}\notin W$. ■

6.13 משפט. (מרחב האפס הוא ת"מ)

לכל מטריצה A מסדר $m\times n$ מעל שדה $\mathbb{F}$, אוסף הפתרונות של מערכת הומוגנית $A\cdot X=0$ הוא ת"מ של $\mathbb{F}^n$.

הוכחה.

נסמן

$$\mathrm{Nul}(A)=\left\{X\middle|A\cdot X=0,X\in\mathbb{F}^n\right\}$$

נוכיח כי $\mathrm{Nul}(A)$ ת"מ של $\mathbb{F}^n$.

1) צ"ל $\bar{0}\in\mathrm{Nul}(A)$, כאשר $\bar{0}$ מטריצה האפס.

$$A\cdot\bar{0}=0\ ,$$

לכן $\bar{0}\in\mathrm{Nul}(A)$.

2) נניח $u,\mathrm{v}\in\mathrm{Nul}(A)$. צ"ל $u+\mathrm{v}\in\mathrm{Nul}(A)$.

$u\in\mathrm{Nul}(A) \Leftarrow A\cdot u=0$.

$\mathrm{v}\in\mathrm{Nul}(A) \Leftarrow A\cdot\mathrm{v}=0$.

לכן

$$A(u+\mathrm{v})=Au+A\mathrm{v}=0+0=0\quad\Rightarrow\quad u+\mathrm{v}\in\mathrm{Nul}(A)$$

3) נקח $u \in \mathrm{Nul}(A)$ וסקלר $k \in \mathbb{F}$. צ"ל $ku \in \mathrm{Nul}(A)$.

$u \in \mathrm{Nul}(A) \Leftarrow A \cdot u = 0$. אז

$$A(ku) = k(Au) = k \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad ku \in \mathrm{Nul}(A) \ .$$

מש"ל.

■

שיעור 7
צירוף לינארי ופרישה לינארית

הגדרה של צרוף לינארי

7.1 הגדרה: (צרוף לינארי)
נניח כי V מרחב וקטורי מעל שדה, $\mathbb{F}$. יהיו $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n \in V$, ו- $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. הוקטור

$$\alpha_1 \mathrm{v}_1 + \alpha_2 \mathrm{v}_2 + \ldots \alpha_n \mathrm{v}_n$$

נקרא **צירוף לינארי (צ"ל)** של הוקטורים $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n$ עם מקדמים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

7.2 דוגמא.

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} , \qquad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$2\mathrm{v}_1 - 5\mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ -19 \\ 8 \end{pmatrix}$$

וקטור $\begin{pmatrix} -8 \\ -19 \\ 8 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של v_1, v_2.

7.3 דוגמא.
האם וקטור $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של הוקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} , \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

? אם כן, רשמו את הצירוף הלינארי.

פיתרון.

$$\mathrm{v} = xu_1 + yu_2 + zu_3 \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ x - y + z &= 4 \\ x + 2z &= 4 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to 3\cdot R_3+2\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to\frac{1}{4}\cdot R_3]{R_2\to -\frac{1}{3}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2+\frac{1}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$x=2$, $y=-1$, $z=1$,

$$\mathrm{v} = 2u_1 - u_2 + u_3 \ .$$

■

7.4 דוגמא.

האם וקטור $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של הוקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \ , \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

? אם כן, רשמו את הצירוף הלינארי.

פיתרון.

$$\mathrm{v} = xu_1 + yu_2 + zu_3 \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -5x - 4y - 3z &= -2 \\ 7x - y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -5 & -4 & -3 & -2 \\ 7 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-7R_1]{R_2\to R_2+5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -5 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{6}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & -15 & -5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+15R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{2} \end{array}\right)$$

אין פתרון ולכן v הוא לא צ"ל של u_1, u_2, u_3. ■

7.5 דוגמא.
בדקו אם וקטור $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}0\\4\\7\end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של הוקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}\ ,\qquad u_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad u_3=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$$

? אם כן, רשמו את הצירוף הלינארי.

פיתרון.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&2&1&0\\2&0&2&4\\3&1&4&7\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3+3R_1]{R_2\to R_2+2R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&2&1&0\\0&4&4&4\\0&7&7&7\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-\frac{7}{4}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&2&1&0\\0&4&4&4\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}-1&2&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&-1&-2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

למערכת ∞ פתרונות, לכן v הוא צ"ל של u_1, u_2, u_3.

הפתרון הכללי:

$$(x,y,z)=(2-z,1-z,z)\ ,\qquad (z\in\mathbb{R})\ .$$

נציב $z=1$, ונקבל

$$\mathrm{v}=u_1+0\cdot u_2+u_3\ .$$

■

7.6 דוגמא.
בטאו את הפולינום $p(x)=-3+4x+x^2$ כצירוף לינארי של

$$p_1(x)=5-2x+x^2\ ,\qquad p_2(x)=-3x+2x^2\ ,\qquad p_3(x)=3+x\ .$$

פיתרון.

$$-3+4x+x^2=\alpha_1(5-2x+x^2)+\alpha_2(-3x+2x^2)+\alpha_3(3+x)$$

השוויון אמור להתקיים לכל $x\in\mathbb{R}$. לכן

$$\left\{\begin{array}{rl} 5\alpha_1+3\alpha_3 &= -3\ , \\ -2\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3 &= 4\ , \\ \alpha_1+2\alpha_2 &= 1\ . \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-5R_1]{R_2\to R_2+2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -10 & 3 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+10R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 52 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to \frac{1}{13}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$\alpha_1=-3$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=4$.

$$p(x)=-3p_1(x)+2p_2(x)+4p_3(x)\ .$$

■

7.7 דוגמא.

רשמו מטריצה $D=\begin{pmatrix}3&1\\1&-1\end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של מטריצות

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}0&2\\0&-1\end{pmatrix}\ .$$

פיתרון.

$$\alpha_1A+\alpha_2B+\alpha_3C=D$$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0&2\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_1+2\alpha_3\\\alpha_1+\alpha_2&\alpha_2-\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 &= 3 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_2 - \alpha_3 &= -1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1 = 3 \ , \alpha_2 = -2 \ , \alpha_3 = -1 \ .$$

ז"א

$$3A - 2B - C = D \ .$$

■

7.8 דוגמא.
האם פונקציה $y = \sin(2x)$ צירוף לינארי של $\sin x$ ו- $\cos x$?

פיתרון.
נניח שקיימים α_1,α_2 כך ש

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = \sin(2x) \ .$$

השוויון אמור להתקיים לכל $x \in \mathbb{R}$.

נציב $x = 0 \Leftarrow \alpha_2 = 0$. $\Leftarrow$

$$\sin(2x) = \alpha_1 \sin x \ .$$

נציב $x = \frac{\pi}{2}$ $\Leftarrow$

$$\alpha_1 = \sin \pi = 0$$

קיבלנו $\sin 2x = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$. סתירה.

לכן לא קיימים α_1, α_2 כך ש

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = \sin(2x) \ .$$

■

פרישה לינארי

7.9 הגדרה: (פרישה לינארי)
נניח כי V מרחב וקטורי מעל שדה, $\mathbb{F}$. יהיו $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n \in V$. הקבוצה

$$\{\alpha_1 \mathrm{v}_1 + \alpha_2 \mathrm{v}_2 + \ldots \alpha_n \mathrm{v}_n | \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}\}$$

נקראת פרישה לינארית של $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n$.

הפרישה של וקטורים מסומן ב $\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$.

ז"א פרישה לינארית זה אוסף כל הצירופים הלינאריים של $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n$.

7.10 משפט: פרישה היא ת"מ

לכל מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$ ולכל $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n \in V$,

$$\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$$

הוא תת מרחב של V.

הוכחה.

1) צ"ל $\bar{0} \in \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$ כי

$$\bar{0} = 0 \cdot \mathrm{v}_1 + \ldots + 0 \cdot \mathrm{v}_n$$

$\Leftarrow$ $\bar{0} \in \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$.

2) נניח $u_1, u_2 \in \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$. צ"ל כי $u_1 + u_2 \in \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$.

לפי הנתון:

$$u_1 = k_1\mathrm{v}_1 + \ldots + k_n\mathrm{v}_n \ , \qquad u_2 = t_1\mathrm{v}_1 + \ldots + t_n\mathrm{v}_n \ .$$

אז

$$u_1 + u_2 = (k_1 + t_1)\mathrm{v}_1 + \ldots + (k_n + t_n)\mathrm{v}_n \ ,$$

ז"א $u_1 + u_2 \in \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$.

3) נניח $u \in \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$, $t \in \mathbb{F}$. צ"ל $tu \in \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$.

$$u = k_1\mathrm{v}_1 + \ldots + k_n\mathrm{v}_n \quad \Rightarrow \quad tu = (tk_1)\mathrm{v}_1 + \ldots + (tk_n)\mathrm{v}_n \in \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n) \ .$$

מש"ל. ■

7.11 דוגמא.
בדקו אם וקטור $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ במרחב וקטורי $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ שייך לפרישה לינארית של $u_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 11 \end{pmatrix}$.

פיתרון.
$\mathrm{v} \in \mathrm{sp}(u_1, u_2, u_3)$ אם ורק אם קיימים סקלרים k_1, k_2, k_3 כך ש

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \mathrm{v} \ .$$

לכן

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix} \ .$$

מקבלים מערכת משוואות:

$$\left\{ \begin{array}{rl} 2k_1 - 3k_2 + k_3 & = -1 \\ k_1 + 2k_2 + 4k_3 & = 3 \\ 4k_1 + 8k_3 & = 4 \\ -k_1 + k_2 - k_3 & = 0 \\ 3k_1 + 5k_2 + 11k_3 & = 8 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_5 \to R_5 - 3R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 4R_1 \\ R_4 \to R_4 + R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון כללי:

$$k_1 = 1 - 2k_3 \ , \qquad k_2 = 1 - k_3 \ , \qquad k_3 \in \mathbb{R} \ .$$

נציב $k_3 = 1 \Leftarrow k_2 = 0$, $k_1 = -1$. נקבל

$$\mathrm{v} = -u_1 + o \cdot u_2 + u_3 \ .$$

לכן

$$\mathrm{v} \in \mathrm{sp}(u_1, u_2, u_3) \ .$$

■

יש שתי דרכים להגדיר ת"מ:

1) ע"י פרישה לינארית

2) ע"י מערכת הומוגנית.

ניתן לעבור מדרך אחת לשניה.

7.12 דוגמא.
נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

הציגו את $\mathrm{Nul}(A)$ בצורת פרישה לינארית.

פיתרון.

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן למערכת ההומוגנית $AX=0$ יש ∞ פתרונות. הפתרון הכללי:

$$\left. \begin{array}{ll} x_1 & = 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_3 & = -2x_4 + 2x_5 \end{array} \right\} x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

ז"א

$$u = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \text{Nul}(A)$$

הצורת הכללית של וקטור ב $\text{Nul}(A)$:

$$u = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

קיבלנו צ"ל של וקטורים

$$\text{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \text{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \text{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

לכן $u \in \text{sp}(\text{v}_1, \text{v}_2, \text{v}_3)$. ז"א $\text{Nul}(A) = \text{sp}(\text{v}_1, \text{v}_2, \text{v}_3)$. ■

7.13 דוגמא.
נתונה מטריצה

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} , u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 18 \\ 21 \end{pmatrix}$$

הציגו את $\text{sp}(u_1, u_2, u_3)$ באוסף של פתרונות של מערכת הומוגנית.

פיתרון.
וקטור $\text{v} \in \text{sp}(u_1, u_2, u_3)$ אם ורק אם קיימים סקלירם k_1, k_2, k_3 כך ש

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \text{v} .$$

ז"א למערכת הזאת קיים פתרון. נסמן $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ ונפתור את המערכת המשוואות

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & x \\ 3 & -2 & -5 & y \\ 2 & 4 & 18 & z \\ 1 & 5 & 21 & w \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & 4 & 3x+y \\ 0 & 0 & 0 & -16x-6y+z \\ 0 & 0 & 0 & x+z-w \end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון כאשר

$$\begin{cases} -16x-6y+z &= 0 \\ x+z-w &= 0 \end{cases}$$

$\blacksquare$

שיעור 8
תלות לינארית

הגדרה של תלות לינארית

8.1 הגדרה: (תלות לינארית)
נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n \in V$. וקטורים $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ נקראים תלוים לינארית אם קיימים סקלרים $k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{F}$ שלא כולם אפסים כך ש-

$$k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2 + \ldots + k_n\mathrm{v}_\mathrm{n} = \bar{0} \ .$$

דוגמא.
$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ תלוים לינארית כי $3\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2 = \bar{0}$.

דוגמא.
$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1+i\\-2\end{pmatrix}$, $\mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}1-i\\2i\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ תלוים לינארית כי $i\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 = \bar{0}$.

דוגמא.
$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2 = \bar{0} \qquad \Rightarrow \qquad \left.\begin{aligned} 2k_1 + 6k_2 &= 0 \\ k_1 + 4k_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$k_1 = 0$, $k_2 = 0$ לכן v_1, v_2 בלתי תלוים לינארית.

דוגמא.
$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$, $\mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ תלוים לינארית כי

$$0 \cdot \mathrm{v}_1 + 0 \cdot \mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_3 = \bar{0} \ .$$

דוגמא.
בדקו אם הוקטורים

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

תלוים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוואלי שלהם ששווה לוקטור האפס.

פיתרון.

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+k_3\mathrm{v}_3=\bar{0}$$

קיבלנו מערכת משוואות הומוגנית:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-4R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$(k_1,k_2,k_3)=(2k_3,-k_3,k_3)\ ,\qquad k_3\in\mathbb{R}\ .$$

למערכת יש פתרון, לכן הוקטורים ת"ל.

נציב $k_3=1$ ונקבל

$$(k_1,k_2,k_3)=(2,-1,1)\ ,$$

ונקבל

$$2\mathrm{v}_1-\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3=\bar{0}$$

■

8.2 משפט. ()

עמודות מטריצה בלתי תלויה לינארית אם ורק אם למערכת $A\cdot X=0$ יש רק פיתרון טריויאלי, ז"א למטריצה המדורגת כל העמודות מובילות.

דוגמא.

האם הוקטורים של מרחב $P_2(\mathbb{R})$

$$p_1(x)=3-x+x^2\ ,\qquad p_2(x)=x+5x^2\ ,\qquad p_3(x)=1\ ,$$

הם תלוים לינארית? אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם שווה לוקטור האפס.

פיתרון.

$$k_1p_1(x)+k_2p_2(x)+k_3p_3(x)=\bar{0}\ ,$$
$$k_1\left(3-x+x^2\right)+k_2\left(x+5x^2\right)+k_3\cdot 1=0+0\cdot x+0\cdot x^2\ ,$$

לכן

$$(3k_1+k_3)+(-k_1+k_2)x+(k_1+5k_2)x^2=0+0\cdot x+0\cdot x^2$$

השוויון אמור להתקיים לכל x, לכן

$$\left.\begin{array}{rl} 3k_1+k_3 &=0\\ -k_1+k_2 &=0\\ k_1+5k_2 &=0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_1-3R_3]{R_2\to R_1+3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -15 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון יחיד $k_1=0,k_2=0,k_3=0$. לכן הוקטורים בת"ל. ■

דוגמא.
במרחב וקטורי $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ נתונים שלושה וקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\ ,\quad u_2=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 4 & -3\end{pmatrix}\ ,\quad u_3=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 4 & -6\end{pmatrix}$$

בדקו אם הוקטורים u_1,u_2,u_3 תלוים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם שווה לוקטור האפס.

פיתרון.

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=\bar{0}\ ,$$

$$k_1\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}5 & -1\\ 4 & -3\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 4 & -6\end{pmatrix}=\bar{0}\ ,$$

לכן

$$\begin{pmatrix}-2k_1+5k_2-k_3 & k_1-k_2+4k_3\\ 4k_2+4k_3 & -k_1-3k_2-6k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ .$$

השוויון אמור להתקיים לכל x, לכן

$$\left.\begin{array}{rl} -2k_1+5k_2-k_3 &=0\\ k_1-k_2+4k_3 &=0\\ 4k_2+4k_3 &=0\\ -k_1-3k_2-6k_3 &=0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_1 - 2R_4]{R_2 \to R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 11 & 11 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_2 - 3R_4]{R_3 \to R_2 - 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

למערכת ההומוגנית יש פתרון יחיד, טריוויאלי, לכן u_1, u_2, u_3

בת"ל. ■

דוגמא.
נתונים וקטורים $\mathrm{v}_1 = x, \mathrm{v}_2 = e^x, \mathrm{v}_3 = x^2$ במרחב וקטורי $f(\mathbb{R})$. בדקו אם הוקטורים תלוים לינארית.

פיתרון.
<u>שיטה 1</u>

$$k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2 + k_3\mathrm{v}_3 = \bar{0}$$

ז"א

$$k_1 x + k_2 e^x + k_3 x^2 = 0$$

לכל $x \in \mathbb{R}$.

נציב $x = 0 \Leftarrow k_2 = 0$.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{נציב } x = 1 & \Rightarrow & k_1 + k_3 = 0 \\ \text{נציב } x = -1 & \Rightarrow & -k_1 + k_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad k_1 = 0 \ , k_3 = 0 \ .$$

לכן הוקטורים בת"ל.

שיטה 2: וורונסקיאן

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & e^x & x^2 \\ 1 & e^x & 2x \\ 0 & e^x & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$W(x) = 0$ לכל x לכן הוקטורים בת"ל. ■

דוגמא.
במרחב וקטורי $\mathbb{Z}_5^3$ נתונים וקטורים

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}\bar{2}\\ \bar{3}\\ \bar{1}\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}\bar{0}\\ \bar{4}\\ \bar{2}\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}\bar{1}\\ \bar{2}\\ \bar{2}\end{pmatrix}\ .$$

בדקו אם הוקטורים תלוים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם שווה לוקטור האפס.

פיתרון.

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+k_3\mathrm{v}_3=\bar{0}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{2}&\bar{0}&\bar{1}&0\\ \bar{3}&\bar{4}&\bar{2}&0\\ \bar{1}&\bar{2}&\bar{2}&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_1+3R_3]{R_1\to R_1+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{2}&\bar{0}&\bar{1}&0\\ \bar{0}&\bar{4}&\bar{3}&0\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{2}&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{2}&\bar{0}&\bar{1}&0\\ \bar{0}&\bar{4}&\bar{3}&0\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{0}&0\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{rl}\bar{2}k_1+k_3&=\bar{0}\\ \bar{4}k_2+\bar{3}k_3&=0\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\left.\begin{array}{rl}\bar{2}k_1&=\bar{4}k_3\\ \bar{4}k_2&=\bar{2}k_3\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\left.\begin{array}{rl}k_1&=\bar{2}k_3\\ k_2&=\bar{3}k_3\end{array}\right\}$$

פתרון

$$(k_1,k_2,k_3)=(\bar{2}k_3,\bar{3}k_3,k_3)\ ,\qquad k_3\in\mathbb{Z}_5\ .$$

נציב $k_3=\bar{1}$ ונקבל $(k_1,k_2,k_3)=(\bar{2},\bar{3},\bar{1})$. ז"א

$$\bar{2}\mathrm{v}_1+\bar{3}\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3=\bar{0}\ .$$

■

תכונות של תלות לינארית

8.3 משפט. (תכונות בסיסיות של תלות לינארית)

<u>**כלל תלות לינארית 1)**</u> וקטור u תלוי לינארית אם ורק אם $u=\bar{0}$.
<u>**כלל תלות לינארית 2)**</u> שני וקטורים תלוים לינארית אם ורק אם אחד מהם הוא צירוף לינארי של הוקטור השני.
<u>**כלל תלות לינארית 3)**</u> וקטורים $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ תלוים לינארית אם ורק אם לפחות אחד מהם הוא צירוף לינארי של שאר הוקטורים.
<u>**כלל תלות לינארית 4)**</u> כל קבוצת וקטורים שמכילה את וקטור האפס, היא תלויה לינארית.
<u>**כלל תלות לינארית 5)**</u> אם $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\in V$ תלוים לינארית, אז כל קבוצת הוקטורים שמכילה את $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ היא תלויה לינארית.
<u>**כלל תלות לינארית 6)**</u> אם קבוצת וקטורים $\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\}$ בת"ל, אז כל תת קבוצה שלה היא בת"ל.

הוכחה.

כלל תלות לינארית 1

u ת"ל אם ורק אם קיים סקלר $k\in\mathbb{F}$ כך ש $ku=\bar{0}\Leftrightarrow u=\bar{0}$.

כלל תלות לינארית 2

v_1, v_2 ת"ל $\Leftrightarrow$ קיימים סקלרים k_1, k_2 שלא כולם אפסים כך ש

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2=\bar{0}$$

נניח בלי הגבלת הכלליות ש $k_1\neq 0$, אז

$$\mathrm{v}_1=\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\mathrm{v}_2\ .$$

כלל תלות לינארית 3

$\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ ת"ל $\Leftrightarrow$ קיימים $k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{F}$ שלא כולם אפסים כך ש

$$k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_n\mathrm{v}_n=\bar{0}\ .$$

נניח ש $k_i\neq 0$. אז זה מתקיים אם ורק אם

$$\mathrm{v}_i=\left(-\frac{k_1}{k_i}\right)\mathrm{v}_1+\ldots+\left(-\frac{k_{i-1}}{k_i}\right)\mathrm{v}_{i-1}+\left(-\frac{k_{i+1}}{k_i}\right)\mathrm{v}_{i+1}+\ldots+\left(-\frac{k_n}{k_i}\right)\mathrm{v}_n$$

כלל תלות לינארית 4

לכל $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\in V$,

$$0\cdot\mathrm{v}_1+\ldots+0\cdot\mathrm{v}_n+1\cdot\bar{0}=\bar{0}$$

לכן $\bar{0},\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ ת"ל.

כלל תלות לינארית 5

נניח ש $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ ת"ל. אז קיימים סקלירים $k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{F}$ שלא כולם אפסים כך ש

$$k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_n\mathrm{v}_n=\bar{0}\ .$$

אז לכל $u_1,\ldots,u_m\in V$ מתקיים:

$$k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_n\mathrm{v}_n+0\cdot u_1+\ldots+0\cdot u_m=\bar{0}$$

לכן $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n,u_1,\ldots,u_m$ ת"ל.

כלל תלות לינארית 6

נוכיח את הטענה בדרך השלילית.

$\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\}$ בת"ל. ז"א הצירוף לינארי הבא

$$k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_n\mathrm{v}_n=\bar{0}$$

מתקיים אם ורק אם $k_1=k_2=\ldots=k_n=0$. נניח שקיימת תת קבוצה של $\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\}$ שהיא תלויה לינארית. כלומר קיימת קבוצה $\{\mathrm{v}_1,\ldots\mathrm{v}_m\}$ שהיא ת"ל. ז"א הצירוף לינארי

$$k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_m\mathrm{v}_m=\bar{0}$$

מתקיים כאשר לפחות אחד של הסקלרים $k_1,\ldots,k_m$ לא שווה אפס. לכן

$$k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_m\mathrm{v}_m+0\cdot\mathrm{v}_{m+1}+\ldots+0\cdot\mathrm{v}_n=\bar{0}$$

מתקיים כאשר לפחות אחד של הסקלרים $k_1,\ldots,k_m$ לא שווה אפס. ז"א מצאנו צירוף לינארי של $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ שבו אחד של הסקלרים לא שווה אפס, ז"א $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ ת"ל. סתירה.

■

דוגמא.
נניח שוקטורים $u,\mathrm{v},w\in V$ בת"ל. הוכיחו כי הוקטורים

$$u+v+w,\quad 2u-4v,\quad u+v-w$$

בת"ל.

פיתרון.
נבנה צ"ל של וקטורים $u+v+w,2u-4v,u+v-w$.

$$k_1(u+\mathrm{v}+w)+k_2(2u-4\mathrm{v})+k_3(u+\mathrm{v}-w)=\bar{0}\ .$$

מכאן

$$(k_1+2k_2+k_3)u+(k_1-4k_2+k_3)\mathrm{v}+(k_1-k_3)w=\bar{0}\ .$$

u,v,w בת"ל, לכן

$$\left.\begin{aligned} k_1+2k_2+k_3&=0\\ k_1-4k_2+k_3&=0\\ k_1-k_3&=0\end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&1&0\\ 1&-4&1&0\\ 1&0&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&1&0\\ 0&-6&0&0\\ 0&-2&-2&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_2-3R_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&1&0\\ 0&-6&0&0\\ 0&0&6&0\end{array}\right)$$

יש פתרון יחיד למערכת: $k_1=k_2=k_3=0$. לכן הוקטורים $u+v+w,2u-4v,u+v-w$ בת"ל. ■

שיעור 9
מימד ובסיס

בסיס של מרחב וקטורי

9.1 הגדרה: (בסיס)
קבוצת וקטורים $V \in \mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ נקראת בסיס של V אם היא מקיימת:

1) $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ בלתי תלוים לינארית.

2) $\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)=V$.

דוגמא.

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\ ,\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\ ,\quad \ldots,e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\ .$$

בסיס של $\mathbb{F}^n$ (בסיס הסטנדרטי).

הוכחה.

1) צ"ל $e_1,\ldots,e_n$ בת"ל.

$$k_1e_1+k_2e_2+\ldots+k_ne_n=\bar{0}$$

$$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\ldots+k_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad k_1=0,k_2=0,\quad k_n=0\ .$$

לכן $e_1,\ldots,e_n$ בת"ל.

2) צ"ל כי $\mathrm{sp}(e_1,\ldots,e_n)=\mathbb{F}^n$.

נקח וקטור שרירותי $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n$. צ"ל $\mathrm{v}=\mathrm{sp}(e_1,\ldots,e_n)$.

$$k_1e_1+\ldots k_ne_n=\mathrm{v}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad k_1=x_1,k_2=x_2,\quad\ldots,\quad k_n=x_n\ .$$

■

דוגמא.

$$E_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ ,\quad E_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ ,\quad\ldots,\quad E_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ ,\quad .$$

בסיס של $M_{2\times3}(\mathbb{F})$ (הבסיס הסטנדרטי).

הוכחה.

1) נוכיח כי $E_1,\ldots,E_6$ בת"ל.

$$k_1E_1+k_2E_2+\ldots+k_6E_6=\bar{0}$$

$$k_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\ldots+k_6\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix}k_1&k_2&k_3\\k_4&k_5&k_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad k_1=0,k_2=0,\quad k_6=0\ .$$

לכן $E_1,\ldots,E_6$ בת"ל.

2) נוכיח כי $\mathrm{sp}(E_1,\ldots,E_6)=M_{2\times3}(\mathbb{F})$.

לכל וקטור $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}\in M_{2\times3}(\mathbb{F})$,

$$\mathrm{v}=aE_1+bE_2+cE_3+dE_4+eE_5+fE_6\ .$$

ז"א

$\mathrm{v}\in\mathrm{sp}(E_1,\ldots,E_6)$.

■

דוגמא.

וקטורים

$$e_1=1\ ,\quad e_2=x\ ,\quad\ldots\ ,\quad e_n=x^n$$

מהווים בסיס (הבסיס הסטנדרטי) של המרחב $\mathbb{F}_n[x]$.

הוכחה.

1) צ"ל $1, x, \ldots, x^n$ בת"ל.

$$k_1 \cdot 1 + k_2 x + \ldots + k_n x^n = \bar{0} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \ldots + 0 \cdot x^n$$

לכל x כאשר

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \quad \ldots, \quad k_n = 0 \ .$$

לכן $1, x, \ldots, x^n$ בת"ל.

2) נוכיח כי $\text{sp}(1, x, \ldots, x^n) = \mathbb{F}_n[x]$.

לכל $p(x) = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{F}_n[x]$ מתקיים

$$p(x) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n$$

ז"א $p(x) = \text{sp}(e_1, \ldots, e_n)$.

■

דוגמא.
בדקו כי הוקטורים

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

מהווה בסיס של $\mathbb{R}^3$.

פיתרון.

1) צ"ל u_1, u_2, u_3 בת"ל.

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \bar{0}$$

זאת מערכת משוואות הומוגניות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 14 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון יחיד: $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$
לכן u_1, u_2, u_3 בת"ל.

2) צ"ל $\text{sp}(u_1, u_2, u_3) = \mathbb{R}^3$.

נקח $\text{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. צ"ל $\text{v} = \text{sp}(u_1, u_2, u_3)$.

<u>דרך 1</u>:

$$xu_1 + yu_2 + zu_3 = \mathrm{v}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 5 & 1 & 4 & c \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 6 & 14 & 5a+c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5a+c-6b \end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון, לכן $\mathrm{v} \in \mathrm{sp}(u_1, u_2, u_3)$.

<u>דרך 2:</u>

למערכת $A \cdot X = 0$ יש פתרון יחיד, לכן מטריצה A הפיכה. מכאן נובע שלכל $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^3$, למערכת $A \cdot X = \mathrm{v}$ יש פתרון יחיד, ז"א $\mathrm{v} \in \mathrm{sp}(u_1, u_2, u_3)$.

■

9.2 משפט. ()
אם במרחב וקטורי V יש בסיס סופי, אז לכל בסיס של V יש את אותו מספר הוקטורים.

9.3 הגדרה: ()
נניח ש V מרחב וקטורי. למספר הוקטורים בבסיס של V קוראים המימד של V.
המימד של מרחב וקטורי יסומן

$$\dim(V) \ .$$

דוגמא.

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{F}^n) &= n \\ \dim(\mathbb{F}^n[x]) &= n+1 \\ \dim(M_{m\times n}(\mathbb{F})) &= m \cdot n \ . \end{aligned}$$

9.4 משפט. (מימד ובסיס של קבוצת וקטורים)
נניח כי V מרחב וקטורי, $\dim(V) = n$. אז

1) כל $n+1$ וקטורים של V הם תלוים לינארית.

2) כל קבוצה של n וקטורים בלתי תלויה לינארית, היא בסיב של V.

3) כל קבוצה של וקטורים שהיא בלתי תלויה לינארית , ניתן להשלים לבסיס של V.

דוגמא.
הוכיחו שהוקטורים

$$u_1 = 1 + x + x^2 \ , \qquad u_2 = 2x + 3x^2 \ , \qquad u_3 = -3x - 4x^2$$

מהווים בסיס של מרחב $\mathbb{R}_2[x]$.

פיתרון.
נוכיח כי u_1, u_2, u_3 בת"ל.

$$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = \bar{0}$$
$$k_1(1 + x + x^2) + k_2(2x + 3x^2) + k_3 - 3x - 4x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$
$$k_1(k_1 + 2k_2 - 3k_3)x + (k_1 + 3k_2 - 4k_3)x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$
$$\left.\begin{aligned} k_1 &= 0 \\ k_1 + 2k_2 - 3k_3 &= 0 \\ k_1 + 3k_2 - 4k_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad k_1 = 0\ , k_2 = 0, k_3 = 0$$

לכן u_1, u_2, u_3 בת"ל.
$\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$, לכן שלושה וקטורים בת"ל מהווים בסיס של $\dim(\mathbb{R}_2[x])$. ■

מציאת בסיס ומימד של תת מרחב

9.1 דוגמא.
מצאו בסיס ומימד של $\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$ כאשר

(1

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \ .$$

(2

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

פיתרון.

(1 נבדוק אם $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ בת"ל:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ בת"ל.
לכן $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ בסיס של $\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$.
$\dim(\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)) = 3$.

(2 נבדוק אם $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ בת"ל:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ ת"ל, אבל $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ בת"ל.
לכן $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ בסיס של $\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$.
$\dim(\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)) = 2$.

■

דוגמא.
מצאו בסיס ואת המימד של תת מרחב הנפרש ע"י הוקטורים

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1&-5\\-4&2\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&5\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}2&-4\\-5&7\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_4=\begin{pmatrix}1&-7\\-5&1\end{pmatrix}\ .$$

בטאו את וקטור $u=\begin{pmatrix}4&-14\\-13&11\end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של הבסיס שמצאתם.

פיתרון.

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+k_3\mathrm{v}_3+k_4\mathrm{v}_4=\bar{0}$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix}1&1&2&1\\-5&1&-4&-7\\-4&-1&-5&-5\\2&5&7&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to R_4-2R_1]{\substack{R_2\to R_2+5R_1\\R_3\to R_3+4R_1}}\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&6&6&-2\\0&3&3&-1\\0&3&3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&3&3&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

הוקטורים v_1, v_2 המתאימים לעמודות המובילות הם בת"ל. לכן v_1, v_2 מהווים בסיס של $\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3,\mathrm{v}_4)$. $\dim(\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3,\mathrm{v}_4))=2$.

$$u=x\mathrm{v}_1+y\mathrm{v}_2\ .$$

$$\begin{pmatrix}1&1&4\\-5&1&14\\-4&-1&-13\\2&5&11\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to R_4-2R_1]{\substack{R_2\to R_2+5R_1\\R_3\to R_3+4R_1}}\begin{pmatrix}1&1&4\\0&6&6\\0&3&3\\0&3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&4\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow k_1=3, k_2=1$

$$u=3\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\ .$$

■

דוגמא.
מצאו בסיס ומימד של $\mathrm{Nul}(A)$ כאשר

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\-2&-4&1&-2\\-1&-2&0&1\end{pmatrix}\ .$$

פיתרון.
$\mathrm{Nul}(A)$ -מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $A\cdot X=0$. נפתור את המערכת:

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\-2&-4&1&-2\\-1&-2&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&0&-1&4\\0&0&-1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&0&-1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&0&-1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון כללי: $\begin{cases} x_1 &= -2x_2+x_4 \\ x_3 &= 4x_4 \end{cases} \Leftarrow x_2,x_4\in\mathbb{R}$. נרשום את הפתרון בצורת וקטור השייך ל $\text{Nul}(A)$:

$$\begin{pmatrix} -2x_2+x_4 \\ x_2 \\ 4x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} -2\\1\\0\\0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 1\\0\\4\\1 \end{pmatrix} \in \text{sp}\left\{\begin{pmatrix} -2\\1\\0\\0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\0\\4\\1 \end{pmatrix}\right\}$$

הוקטורים $\begin{pmatrix} 1\\0\\4\\1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -2\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$ מהווים בסיס של $\text{Nul}(A)$.

$\dim(\text{Nul}(A))=2$ ■

דוגמא.
במרחב $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ נתונים וקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix} 1&3\\1&3 \end{pmatrix}\ ,\qquad u_2=\begin{pmatrix} 1&1\\3&3 \end{pmatrix}\ ,\qquad u_3=\begin{pmatrix} 1&5\\-1&3 \end{pmatrix}\ ,\qquad \text{v}=\begin{pmatrix} a+2&1\\-5&a \end{pmatrix}$$

א) עבור אילו ערכי a וקטור v שייך לפרישה לינארית של u_1,u_2,u_3?

ב) עבור כל ערך של a שמצאתם בסעיף א', בטאו את וקטור v כצירוף לינארי של u_1,u_2,u_3 בשתי דרכים שונות.

ג) לכל ערך של a מצאו את המימד ובסיס של $\text{sp}(u_1,u_2,u_3,\text{v})$.

ד) האם קיימים ערכי a עבורם
$$\text{sp}(u_1,u_2,u_3,\text{v})=M_{2\times2}(\mathbb{R})\ .$$

פיתרון.

א)
$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=\text{v}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&a+2\\3&1&5&1\\3&1&5&1\\3&3&3&a \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3\to R_3-R_1\\ R_4\to R_4-3R_1}]{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&a+2\\0&-2&2&-3a-5\\0&2&-2&-a-7\\0&0&0&-2a-6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&a+2\\0&-2&2&-3a-5\\0&0&0&-4a-12\\0&0&0&-2a-6 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} -4a-12 &=0 \\ -2a-6 &=0 \end{cases} \Leftarrow$ עבור $a=-3$ למערכת יש פתרון, לכן $\text{v}\in\text{sp}(u_1,u_2,u_3)$.

ב) $\underline{a=-3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&-1\\0&-2&2&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to-\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&2&1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{array}\right)$$

$$k_1=1-2k_3\ ,\qquad k_2=-2+k_3\ ,\qquad k_3\in\mathbb{R}\ .$$

נציב $k_3=1$ $\Leftarrow$

$$k_1=-1\ ,\qquad k_2=-1\ ,\qquad k_3=1$$

ונקבל

$$-u_1-u_2+u_3=\mathrm{v}\ .$$

נציב $k_3=0$ $\Leftarrow$

$$k_1=1\ ,\qquad k_2=-2\ ,\qquad k_3=0$$

ונקבל

$$u_1-2u_2+0\cdot u_3=\mathrm{v}\ .$$

ג) עבור $a=-3$:

$$\dim\left(\mathrm{sp}(u_1,u_2,u_3,\mathrm{v})\right)=2$$

מספר העמודות המובילות

בסיס: u_1,u_2.

עבור $a\neq -3$:

$$\dim\left(\mathrm{sp}(u_1,u_2,u_3,\mathrm{v})\right)=3$$

בסיס: u_1,u_2,v.

ד) הוקטורים u_1,u_2,u_3,v ת"ל לכל ערכי a, לכן לא קיימים ערכי a עבורם $\mathrm{sp}(u_1,u_2,u_3,\mathrm{v})=M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

■

דוגמא.

מצאו את המימד ובסיס של תת המרחב הנפרש ע"י הוקטורים

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}\ ,\qquad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\end{pmatrix}\ ,\qquad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\2\end{pmatrix}\ .$$

דוגמא.

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$. לכל ערך של a מצאו את המימד ובסיס של $\mathrm{Nul}(A)$.

פיתרון.

$$\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-aR_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&1&a\\0&a-1&1-a\\0&1-a&1-a^2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\begin{pmatrix}1&1&a\\0&a-1&1-a\\0&0&-a^2-a+2\end{pmatrix}$$

$$-a^2-a+2=0\ \Rightarrow\ a=1,-2$$

<u>עבור $a=1$</u>: מקבלים

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(\text{Nul}(A))=2$ - מספר העמודות הלא מובילות

$$x=-y-z\ , \qquad y\in\mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Nul}(A)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>עבור $a=-2$</u>: מקבלים

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(\text{Nul}(A))=1$ - מספר העמודות הלא מובילות

$$x=z\ , y=z\ , \qquad y\in\mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Nul}(A)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

■

דוגמא.
במרחב $\mathbb{R}_2[x]$ נתונים וקטורים

$$p_1(x)=2-x+x^2\ , \quad p_2(x)=2x-3x^2+x^3\ , \quad p_3(x)=1-x^2\ , \quad p_4(x)=3x-6x^2+x^3\ .$$

א) בדקו אם הוקטורים $p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x)$ תלוים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם ששווה לוקטור האפס.

ב) מצאו בסיס ואת המימד של תת מרחב הנפרש ע"י הוקטורים $p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x)$.

ג) בטאו כל וקטור מתוך $p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x)$ כצירוף לינרי של הבסיס המצאתם בסעיף ב'.

פיתרון.

א)

$$k_1p_1(t)+k_2p_2(t)+k_3p_3(t)+k_4p_4(t)=\bar{0}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לא כל העמודות מובילות, לכן $p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x)$ ת"ל.

$$k_1=k_4\ ,\quad k_2=-k_4\ ,\quad k_3=-2k_4\ ,\qquad k_4\in\mathbb{R}\ .$$

נציב $k_4=1$ $\Leftarrow$

$$k_1=1\ ,\quad k_2=-1\ ,\quad k_3=-2\ .$$

$$p_1-p_2-2p_3+p_4=\bar{0}$$

ב) $\dim(\mathrm{sp}(p_1,p_2,p_3,p_4))=3$ - מספר העמודות המובילות.

בסיס:

p_1,p_2,p_3.

ג)

$$\begin{aligned} p_1(x)=&1\cdot p_1(x)+0\cdot p_2(x)+0\cdot p_3(x) \\ p_2(x)=&0\cdot p_1(x)+1\cdot p_2(x)+0\cdot p_3(x) \\ p_3(x)=&0\cdot p_1(x)+0\cdot p_2(x)+1\cdot p_3(x) \\ p_4(x)=&-p_1(x)+p_2(x)+2\cdot p_3(x)\ . \end{aligned}$$

■

דוגמא.

מצאו את המימד ובסיס של מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z &=0 \\ 2x+4y+5z &=0 \\ 3x+6y+9z &=0 \\ 4x+8y+12z &=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-2R_1 \\ R_3\to R_3-3R_1 \\ R_4\to R_4-4R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פיתרון.
המימד של מרחב הפתרונות הוא 1 - מספר העמודות הלא מובילות

$$x = -2y \ , \quad z = 0 \ , \qquad y \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של מרחב הפתרונות:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

■

שיעור 10
חיתוך וסכום תת מרחב

הגדרה של חיתוך וסכום של תתי מרחבים

10.1 משפט. (חיתוך של ת"מ)
נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, V_1, V_2 תתי מרחבים של V. אז $V_1 \cap V_2$ היא תת מרחב של V.

הוכחה.

1) V_1, V_2 תתי מרחבים, לכן $\bar{0} \in V_1$ וגם $\bar{0} \in V_2$. לכן $\bar{0} \in V_1 \cap V_2$.

2) נניח $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in V_1 \cap V_2 \Leftarrow \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in V_1$ וגם $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in V_2$.
V_1 ת"מ, לכן $\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \in V_1$.
V_2 ת"מ, לכן $\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \in V_2$.
ז"א $\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \in V_1 \cap V_2$.

3) נניח $\mathrm{v} \in V_1 \cap V_2$ ו $k \in \mathbb{F}$.
אז $\mathrm{v} \in V_1$ ו $\mathrm{v} \in V_2$.
V_1 ת"מ לכן $k \cdot \mathrm{v} \in V_1$.
V_2 ת"מ לכן $k \cdot \mathrm{v} \in V_2$.
ז"א $k \cdot \mathrm{v} \in V_1 \cap V_2$.

■

10.2 דוגמא.
עבור V_1,V_2 תתי מרחבים של מ"ו V מעל שדה $\mathbb{F}$, האם $V_1 \cup V_2$ בהכרח ת"מ של V?

פיתרון.
<u>דוגמה נגדית:</u>
$V = \mathbb{R}^2$.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \ , \qquad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \ .$$

אז $V_1 \ni \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 \ni \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, אבל . $\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \notin V_1 \cup V_2$ ■

10.3 משפט. (ת"מ הקטן ביותר)
נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, V_1, V_2 תתי מרחבים של V. אז הקבוצה

$$W = \{\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 | \mathrm{v}_1 \in V_1, \mathrm{v}_2 \in V_2\}$$

היא ת"מ הקטן ביותר שמכיל את V_1 ו V_2.

ז"א לכל ת"מ W' שמכיל את V_1 ו V_2, מתקיים $W \subseteq W'$.

הוכחה.

1) <u>נוכיח ש W ת"מ של V.</u>

א) $V_1 \ni \bar{0}$ וגם $V_2 \ni \bar{0}$. לכן
$$\bar{0} = \bar{0} + \bar{0} \in W \ .$$

ב) נניח $w_1 = u_1 + u_2 \in W$, $w_2 = \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \in W$.
אז $u_1, \mathrm{v}_1 \in V_1$ וגם $u_2, \mathrm{v}_2 \in V_2$.
V_1, V_2 תתי מרחבים.
לכן $u_1 + \mathrm{v}_1 \in V_1$, וגם $u_2 + \mathrm{v}_2 \in V_2$.
מכאן
$$w_1 + w_2 = (u_1 + u_2) + (\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2) = (u_1 + \mathrm{v}_1) + (u_2 + \mathrm{v}_2) \in W \ .$$

ג) נניח $w = u_1 + u_2 \in W$ ו $k \in \mathbb{F}$. אז $u_1 \in V_1$ ו $u_2 \in V_2$. V_1, V_2 תתי מרחבים, לכן $ku_1 \in V_1$, $ku_2 \in V_2$. מכאן
$$kw = k(u_1 + u_2) = ku_1 + ku_2 \in W$$

2) <u>נוכיח כי W התת מרחב הקטן ביותר</u>

ברור כי W מכיל את V_1 ו V_2 כי
לכל $u \in V_1$, $u = u + \bar{0} \in W$
וגם לכל $u \in V_2$, $u = \bar{0} + u \in W$.
נוכיח ש W הוא ת"מ הקטן ביותר שמכיל את V_1 ו V_2.
נניח ש W' איזשהו ת"מ שמכיל את V_1 ו V_2.
נוכיח כי $W \subseteq W'$.
נקח וקטור $w \in W$. אז $w = u_1 + u_2$, כאשר $u_1 \in V_1$, $u_2 \in V_2$.
$V_1 \in W' \Leftarrow u_1 \in W'$.
$V_2 \in W' \Leftarrow u_2 \in W'$.
W' ת"מ, לכן $w = u_1 + u_2 \in W'$.
מש"ל.

■

10.4 הערה.
למרחב W של משפט 10.3 (המשפט הקודם) נקרא הסכום של V_1 ו V_2 ומסומן ב $V_1 + V_2$. ■

10.5 משפט. (סכום של ת"מ שווה לפרישה של האיחוד)

$$V_1 + V_2 = \mathrm{sp}\left(V_1 \cup V_2\right) \ .$$

הוכחה.
<u>נוכיח כי $V_1 + V_2 \subseteq \mathrm{sp}\left(V_1 \cup V_2\right)$:</u>

$V_1, V_2 \subseteq \text{sp}\,(V_1 \cup V_2)$
לכן, לפי משפט 10.3,
$$V_1 + V_2 \subseteq \text{sp}\,(V_1 \cup V_2) \ .$$

נוכיח כי $\text{sp}\,(V_1 \cup V_2) \subseteq V_1 + V_2$:

נניח $w \in \text{sp}\,(V_1 \cup V_2)$. אז קיימים $u_1, \ldots, u_k \in V_1$ ו $\text{v}_1, \ldots, \text{v}_n \in V_2$ וסקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$ כך ש
$$w = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k + \beta_1 \text{v}_1 + \cdots + \beta_n \text{v}_n \ .$$
אז $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k \in V_1$ וגם $\beta_1 \text{v}_1 + \cdots + \beta_n \text{v}_n \in V_2$.
לכן $w \in V_1 + V_2$.

הוכחנו כי $V_1 + V_2 \subseteq \text{sp}\,(V_1 \cup V_2)$ וגם $\text{sp}\,(V_1 \cup V_2) \subseteq V_1 + V_2$ $\Leftarrow$
$$V_1 + V_2 = \text{sp}\,(V_1 \cup V_2) \ .$$

■

10.6 דוגמא.
נקח את המ"ו $V = \mathbb{R}^3$. נקח את התתי מרחבים $\mathbb{R}^3$: $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$, ו $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{R} \right\}$, קווים ישרים ב $\mathbb{R}^3$. אז הסכום שלהם הינו
$$V_1 + V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\} \ ,$$
ומהווה את המישור $z = 0$ ב $\mathbb{R}^3$.

משפט המימדים של סכום וחיתוך

10.7 משפט. (משפט המימדים)
נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, V_1, V_2 תתי מרחבים של V. אז
$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

10.8 הוכחה.
נסמן $\dim(V_1) = k$, $\dim(V_2) = n$, $\dim(V_1 \cap V_2) = m$.
$V_1 \cap V_2 \subseteq V_1$ לכן $m \leq k$.
$V_1 \cap V_2 \subseteq V_2$ לכן $m \leq n$.
נבחר בסיס $u_1, \ldots, u_m$ של $V_1 \cap V_2$.
נשלים אותו לבסיס של V_1 ונקבל

$u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m}$.

נשלים אותו גם לבסיס של V_2:

$u_1,\ldots,u_m,b_1,\ldots,b_{n-m}$.

<u>נוכיח כי $V_1+V_2=\mathrm{sp}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}.\right)$:</u>

נניח $w=\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\in V_1+V_2$. אז

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_1&=\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_mu_m+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}\in V_1\ ,\\ \mathrm{v}_2&=\alpha'_1u_1+\ldots+\alpha'_mu_m+\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}\in V_2\ .\end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2=&\left(\alpha_1+\alpha'_1\right)u_1+\ldots+\left(\alpha_m+\alpha'_m\right)u_m\\ &+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}\\ &+\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}\end{aligned}$$

ז"א

$$\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\in\mathrm{sp}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\right)$$

<u>נוכיח את ההכלה ההפוכה, כלומר $\mathrm{sp}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\right)\in V_1+V_2$:</u>

נניח

$w\in\mathrm{sp}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\right)$

אז קיימים סקלרים $\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots,\beta_{k-m},\gamma_1,\ldots,\gamma_{n-m}$ כך ש

$$w=\alpha_1u_1+\ldots\alpha_mu_m+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}+\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}$$

נסמן

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_1=&\alpha_1u_1+\ldots\alpha_mu_m+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}\\ \mathrm{v}_2=&\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}\end{aligned}$$

אז

$$\mathrm{v}_1\in V_1,\qquad \mathrm{v}_2\in V_2,\qquad w=\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2$$

כלומר $w\in V_1+V_2$.

<u>נשאר להוכיח שוקטורים $\{u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\}$ בת"ל:</u>

נניח:

$$\alpha_1u_1+\ldots\alpha_mu_m+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}+\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}=\bar{0}\ . \qquad (*1)$$

אז

$$\alpha_1u_1+\ldots\alpha_mu_m+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}=-\gamma_1b_1-\ldots-\gamma_{n-m}b_{n-m}:=\mathrm{v}. \qquad (*2)$$

הוקטור באגף השמאל שייך ל V_1.

הוקטור באגף הימין שייך ל V_2.

לכן, לפי (2*) $\mathrm{v} \in V_1 \cap V_2$. $u_1, \ldots, u_m$ בסיס של $V_1 \cap V_2$ (נתון) . לכן קיימים סקלרים $\delta_1, \ldots, \delta_m$ כך ש

$$\mathrm{v} = \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m \ .$$

לכן

$$\begin{aligned}\delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{n-m} b_{n-m} =& \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m - (-\gamma_1 b_1 - \ldots - \gamma_{n-m} b_{n-m}) \\ =& \mathrm{v} - \mathrm{v} \\ =& \bar{0} \ ,\end{aligned}$$

ז"א

$$\delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{n-m} b_{n-m} = \bar{0} \ . \qquad (*3)$$

$u_1, \ldots u_m, b_1, \ldots, b_{n-m}$ בסיס של V_2 (נתון) . לכן הם בת"ל. לכן (3*) מתקיים רק אם

$$\delta_1 = \ldots = \delta_m = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{n-m} = 0 \ . \qquad (*4)$$

מכאן מקבלים מ (1*) כי

$$\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k-m} a_{k-m} = \bar{0} \ . \qquad (*5)$$

$u_1, \ldots u_m, a_1, \ldots, a_{k-m}$ בסיס של V_1 (נתון) , לכן הם בת"ל.
לכן (5*) מתקיים רק אם

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \beta_1 = \ldots = \beta_{k-m} = 0. \qquad (*6)$$

לכן, בגלל שהמקדמים ב (1*) כולם שווים ל 0, כפי שהוכחנו ב (4*) ו (6*), אז הוקטורים
$u_1, \ldots u_m, a_1, \ldots, a_{k-m}, b_1, \ldots . b_{n-m}$ בת"ל. כלומר הם מהווים בסיס של $V_1 + V_2$.
מכאן

$$\dim(V_1 + V_2) = m + (k - m) + (n - m) = k + n - m = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

מש"ל. ■

10.9 מסקנה. ( )
נניח $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ תתי מרחבים ממימד 2, אז $\dim(V_1 \cap V_2) > 0$.

הוכחה.
V_1, V_2 תתי מרחבים של $\mathbb{R}^3$, לכן $\dim(V_1 + V_2) \leq 3$. לפי משפט 10.7,

$$4 = \dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) \leq 3 + \dim(V_1 \cap V_2)$$

לכן

$$\dim(V_1 \cap V_2) \geq 4 - 3 = 1 \ .$$

■

כיצד למצוא בסיס ומימד של סכום וחיתוך ת"מ

נניח כי U, V תתי מרחבים של $\mathbb{R}^n$. ונניח ש

$$\{\mathrm{u}_1,\ldots,\mathrm{u}_k\}$$

בסיס של U ו

$$\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_l\}$$

בסיס של V. כדי למצוא בסיס של $V+W$, נרשום מטריצה Q מסדר $n\times(k+l)$ המורכב מהבסיסים של U ו V:

$$Q=\begin{pmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ \mathrm{u}_1 & \mathrm{u}_2 & \ldots & \mathrm{u}_k & \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \ldots & \mathrm{v}_l \\ | & | & & | & | & | & & | \end{pmatrix}$$

אז המרחב העמודות של $U+V$ שווה למרחב העמודות של Q:

$$\mathrm{col}(Q)=\mathrm{col}(U+V)$$

ובסיס של $\mathrm{col}(Q)$ שווה גם לבסיס של $U+V$:

$$B(Q)=B(U+V)\ .$$

בסיס של $U\cap V$ ניתן למצוא ע"י המרחב האפס של Q, $\mathrm{Nul}(Q)$. נניח כי הוקטור x במרחב האפס של Q, כלומר $\mathrm{x}\in\mathrm{Nul}(Q)\subseteq\mathbb{R}^{k+1}$. נניח כי הרכיבים של x הם

$$\mathrm{x}=\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_k\\ b_1\\ \vdots\\ b_l\end{pmatrix}\ .$$

כיוון שוקטור x ב $\mathrm{Nul}(Q)$ אז

$$Q\cdot\mathrm{x}=\begin{pmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ \mathrm{u}_1 & \mathrm{u}_2 & \ldots & \mathrm{u}_k & \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \ldots & \mathrm{v}_l \\ | & | & & | & | & | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_k\\ b_1\\ \vdots\\ b_l\end{pmatrix}=a_1\mathrm{u}_1+\ldots+a_k\mathrm{u}_k+b_1\mathrm{v}_1+\ldots+b_l\mathrm{v}_l=\bar{0}\ . \tag{1*}$$

עכשיו נעביר את כל האיברים של הבסיס $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_l$ לאגף הימין ונקבל

$$a_1\mathrm{u}_1+\ldots+a_k\mathrm{u}_k=-b_1\mathrm{v}_1-\ldots-b_l\mathrm{v}_l\ . \tag{*2}$$

שימו לב הצירוף לינארי באגף השמאל הוא וקטור של U והצירוף לינארי באגף הימין הוא וקטור של V. נקרא הוקטור הזה y:

$$\mathrm{y}:=a_1\mathrm{u}_1+\ldots+a_k\mathrm{u}_k=-b_1\mathrm{v}_1-\ldots-b_l\mathrm{v}_l\ . \tag{*3}$$

כך קיבלנו וקטור y השייך גם ל U וגם ל V, או במילים אחרות

$$\mathrm{y}\in U\cap V\ .$$

10.10 דוגמא.
נתונים וקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad u_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad u_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad u_4=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix}\ .$$

נסמן

$$V_1=\mathrm{sp}(u_1,u_2)\ ,\qquad V_2=\mathrm{sp}(u_3,u_4)\ .$$

מצאו בסיס ומימד של V_1,V_2 ו $V_1\cap V_2$.

פיתרון.

בסיס של V_1:

$$\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\0&1\\0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

בסיס של V_1:

$$B(V_1)=\{\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2\}$$

$\dim(V_1)=2$.
בסיס של V_2:

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&3\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&3\\0&-1\\0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&3\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

בסיס של V_2:

$$B(V_2)=\{\mathrm{u}_3,\mathrm{u}_4\}$$

$\dim(V_2)=2$.

$$Q=(\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2,\mathrm{u}_3,\mathrm{u}_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&1&0&3\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to R_4-R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&1\\0&1&1&0\\0&-1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4\to R_4-R_2]{R_3\to R_2+R_3}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&1\\0&0&-1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\to R_3+R_4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

העמודות 1, 2, 3 מובילות לכן בסיס של V_1+V_2 הוא

$$B(V_1+V_2)=\{\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2,\mathrm{u}_3\}$$

ו $\dim(V_1+V_2)=3$.

לפי משפט המימדים:

$$\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1\cap V_2)$$

כיוון ש $\dim(V_1)=2$,$\dim(V_2)=2$,$\dim(V_1+V_2)=3$ ו, אז

$$\dim(V_1\cap V_2)=1\ .$$

כדי למצוא בסיס של $V_1\cap V_2$ נמצא את $\text{Nul}Q$. מסעיף הקודם המדורגת של Q היא:

$$Q\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית $Q\mathrm{x}=0$ הוא

$$\left.\begin{aligned}x+y+z+w&=0\\-y-2z+w&=0\\-z+w&=0\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\left.\begin{aligned}x&=-y-z-w\\y&=-2z+w\\z&=w\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\left.\begin{aligned}x&=-w\\y&=-w\\z&=w\end{aligned}\right\}$$

כלומר

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}w$$

לכן בסיס של $\text{Nul}Q$ הוא מורכב וקטור אחד:

$$B\left(\text{Nul}(Q)\right)=\left\{\mathrm{x}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\ .$$

הוקטור x מקיים את משוואת ההומוגנית של Q, לכן

$$Q\cdot\mathrm{x}=\bar{0}\qquad\Rightarrow\qquad(\mathrm{u}_1\ \mathrm{u}_2\ \mathrm{u}_3\ \mathrm{u}_4)\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\bar{0}$$

לכן נקבל

$$-1\cdot\mathrm{u}_1-1\cdot\mathrm{u}_2+1\cdot\mathrm{u}_3+1\cdot\mathrm{u}_4=\bar{0}\qquad\Rightarrow\qquad\mathrm{u}_1+\mathrm{u}_2=\mathrm{u}_3+\mathrm{u}_4\ .$$

נגדיר את שני האגפים להיות הוקטור y:

$$\mathrm{y}:=\mathrm{u}_1+\mathrm{u}_2=\mathrm{u}_3+\mathrm{u}_4$$

נציב את הוקטורים ונמצא כי

$$\mathrm{y}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\end{pmatrix}\ .$$

לכן בסיס של $V\cap U$ הוא

$$B(V\cap U)=\{\mathrm{y}\}=\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

■

שיעור 11
סכום ישר

11.1 דוגמא. (סכום ישר)
נניח ש

$$U_1=\left\{\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}\middle|y,z\in\mathbb{R}\right\}$$

תת מרחב של $\mathbb{R}^3$ ו

$$U_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix}\middle|x,z\in\mathbb{R}\right\}$$

תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.
אז $\dim(U_1)=\dim(U_2)=2$.

$$U_1\cap U_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}\middle|z\in\mathbb{R}\right\}\ ,\dim(U_1\cap U_2)=1\ .$$

$$U_1+U_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\0\\z_2\end{pmatrix}\middle|y_1,z_1,x_2,z_2\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x_2\\y_1\\z_1+z_2\end{pmatrix}\middle|x_2,y_1,z_1+z_2\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}^3\ .$$

אז כל וקטור $U_1+U_2 \ni \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ניתן להציג כסכום של וקטורים של U_1 ו U_2 באינסוף דרכים שונות:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}\ ,$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\\z-z_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\0\\z_0\end{pmatrix}$$

לכל $z_0\in\mathbb{R}$.

11.2 דוגמא.

$$U_1=\left\{\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}\middle|y,z\in\mathbb{R}\right\}$$
$$U_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}\middle|x\in\mathbb{R}\right\}$$

U_1, U_2 תת מרחבים של U_1, U_2.

$$\dim(U_1) = 2 \ , \qquad \dim(U_2) = 1 \ .$$

$$U_1 \cap U_2 = \{\bar{0}\} \ ,$$

$$U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3 \ ,$$

ולכל וקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ יש דרך יחידה להציג אותו כסכום של וקטורים של U_1 ו U_2:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

דוגמה 11.2 היא דוגמה של סכום ישר של תת מרחבים.

11.3 הגדרה: (סכום ישר)
יהיו U_1 ו U_2 שני תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$.
תת מרחב W של מרחב וקטורי V נקרא סכום ישר של U_1 ו U_2 אם ורק אם מתקיימים:

א) $W = U_1 + U_2$

ב) לכל וקטור של W יש הצגה יחידה כסכום של וקטורים ב U_1 וב U_2.

סימון:

$$W = U_1 \oplus U_2$$

הסכום הישר של U_1, U_2.

11.4 משפט. ()
יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, U ו W תת מרחבים של V. אז $V = U \oplus W$ אם ורק אם

א) $V = U + W$

ב) $U \cap W = \{\bar{0}\}$.

11.5 הוכחה.

1) נניח כי $V = U \oplus W$. אז לפי הגדרה 11.3, סכום ישר $V = U + W$. נשאר להוכיח כי $U \cap W = \{\bar{0}\}$.
נניח $\mathrm{v} \in U \cap W$, אז $\mathrm{v} \in U$ וגם $\mathrm{v} \in$. לכן אפשר לרשום

$$\mathrm{v} = \underset{\in U}{\mathrm{v}} + \underset{\in W}{\bar{0}}$$

וגם

$$\mathrm{v} = \underset{\in U}{\bar{0}} + \underset{\in W}{\mathrm{v}}$$

מכיוון שהסכום הוא ישר, יש רק דרך יחידה לרשום את v כסכום של וקטורים של U ו W. לכן $\mathrm{v} = \bar{0}$.

2) נניח כי $V = U + W$ וגם $U \cap W = \{\bar{0}\}$.
נוכיח כי $V = U \oplus W$.

לפי הגדרת סכום ישר 11.3, נשאר להוכיח כי כל וקטור $\mathrm{v} \in V$ ניתן להציג בדרך יחידה כסכום של וקטורים של U ו W.
נקח $\mathrm{v} \in V$. נניח כי $\mathrm{v} = u_1 + \mathrm{w}_1$ וגם $\mathrm{v} = u_2 + \mathrm{w}_2$ כאשר $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$.
אז

$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \qquad \Rightarrow \qquad u_1 - u_2 = w_2 - w_1$$

(כאשר $u_1 - u_2 \in U$ ו $w_2 - w_1 \in W$. לכן

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{\bar{0}\}\ .$$

מכאן, $u_1 - u_2 = \bar{0}$ וגם $w_2 - w_1 = \bar{0}$.
לכן $u_1 = u_2$ וגם $w_1 = w_2$.

■

11.6 דוגמא.
נסמן

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{F} \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{F} \right\}$$

U קבוצת כל המטריצות הסימטריות מסדר 2×2,

W קבוצת כל המטריצות האנטי-סימטריות מסדר 2×2.

U, W תת מרחבים של מרחב וקטורי $M_{2\times 2}(\mathbb{F})$. הראו כי $M_{2\times 2}(\mathbb{F}) = U \oplus W$.

הוכחה.

1) <u>צריך להוכיח:</u> $U \cap W = \{\bar{0}\}$.

נניח $\mathrm{v} \in U \cap W$. $\Leftarrow$

$$\mathrm{v} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ -b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

מכאן, $a_1 = 0$, $c_1 = 0$, $b_1 = b_2$ ו $b_1 = -b_2$.

לכן $b_1 = b_2 = 0$.

ז"א $\mathrm{v} = \bar{0}$.

2) <u>נוכיח כי:</u> $M_{2\times 2}(\mathbb{F}) = U + W$.

לכל מטריצה $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{F}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. נגדיר מטריצות $B = A + A^t$ ו $C = A - A^t$, ז"א

$$B = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix} \in U$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} \in W$$

אז

$$A = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C \in U + W \ .$$

■

11.7 משפט. ()

נניח ש V מרחב וקטורי ממיד n, U תת מרחב של V ממימד m, אז קיים תת מרחב W ממימד $n-m$ כך ש $V = U \oplus W$.

11.8 הוכחה.
נבחר בסיס כלשהו של U:

$$u_1, \ldots, u_m$$

ונשלים אותו לבסיס של V:

$$u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n$$

אז

$$U = \mathrm{sp}(u_1, \ldots, u_m)$$

$$V = \mathrm{sp}(u_1, \ldots, u_n)$$

נגדיר

$$W = \mathrm{sp}(u_{m+1}, \ldots, u_n)$$

נוכיח כי $V = U \oplus W$.

1) לכל $\mathrm{v} \in V$ קיימים סקלרים $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{F}$ כך ש

$$\mathrm{v} = k_1 u_1 + \ldots + k_m u_m + k_{m+1} u_{m+1} + \ldots + k_n u_n$$

נסמן

$$u = k_1 u_1 + \ldots + k_m u_m \in U \ , \qquad w = k_{m+1} u_{m+1} + \ldots + k_n u_n \in W \ .$$

אז $\mathrm{v} = u + w \Leftarrow V = U + W$.

2) נוכיח כי: $U \cap W = \{\bar{0}\}$.

נניח $\mathrm{v} \in U \cap W \Leftarrow \mathrm{v} \in U$ ו $\mathrm{v} \in W$.
לכן

$$\mathrm{v} = k_1 u_1 + \ldots + k_m u_m$$

וגם

$$\mathrm{v} = k_{m+1} u_{m+1} + \ldots + k_n u_n$$

מכאן:

$$k_1u_1 + \ldots + k_mu_m - k_{m+1}u_{m+1} - \ldots - k_nu_n = \bar{0}\ .$$

$u_1, \ldots, u_n$ בת"ל לכן

$$k_1 = 0, \ldots, k_n = 0\ .$$

מכאן מקבלים כי $\mathrm{v} = \bar{0}$.

משל.

■
