שיעור 11
סכום ישר

11.1 דוגמא. (סכום ישר)
נניח ש

$$U_1=\left\{\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}\middle|y,z\in\mathbb{R}\right\}$$

תת מרחב של $\mathbb{R}^3$ ו

$$U_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix}\middle|x,z\in\mathbb{R}\right\}$$

תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.
אז $\dim(U_1)=\dim(U_2)=2$.

$$U_1\cap U_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}\middle|z\in\mathbb{R}\right\}\ ,\dim(U_1\cap U_2)=1\ .$$

$$U_1+U_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\0\\z_2\end{pmatrix}\middle|y_1,z_1,x_2,z_2\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x_2\\y_1\\z_1+z_2\end{pmatrix}\middle|x_2,y_1,z_1+z_2\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}^3\ .$$

אז כל וקטור $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in U_1+U_2$ ניתן להציג כסכום של וקטורים של U_1 ו U_2 באינסוף דרכים שונות:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}\ ,$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\\z-z_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\0\\z_0\end{pmatrix}$$

לכל $z_0\in\mathbb{R}$.

11.2 דוגמא.

$$U_1=\left\{\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}\middle|y,z\in\mathbb{R}\right\}$$
$$U_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}\middle|x\in\mathbb{R}\right\}$$

U_1, U_2 תת מרחבים של U_1, U_2.

$$\dim(U_1) = 2 \ , \qquad \dim(U_2) = 1 \ .$$

$$U_1 \cap U_2 = \{\bar{0}\} \ ,$$

$$U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3 \ ,$$

ולכל וקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ יש דרך יחידה להציג אותו כסכום של וקטורים של U_1 ו U_2:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

דוגמה 11.2 היא דוגמה של סכום ישר של תת מרחבים.

11.3 הגדרה: (סכום ישר)

יהיו U_1 ו U_2 שני תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$.
תת מרחב W של מרחב וקטורי V נקרא סכום ישר של U_1 ו U_2 אם ורק אם מתקיימים:

א) $W = U_1 + U_2$

ב) לכל וקטור של W יש הצגה יחידה כסכום של וקטורים ב U_1 וב U_2.

סימון:

$$W = U_1 \oplus U_2$$

הסכום הישר של U_1, U_2.

11.4 משפט. ()

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, U ו W תת מרחבים של V. אז $V = U \oplus W$ אם ורק אם

א) $V = U + W$

ב) $U \cap W = \{\bar{0}\}$.

11.5 הוכחה.

1) נניח כי $V = U \oplus W$. אז לפי הגדרה 11.3, סכום ישר $V = U + W$. נשאר להוכיח כי $U \cap W = \{\bar{0}\}$.
נניח $\mathrm{v} \in U \cap W$, אז $\mathrm{v} \in U$ וגם $\mathrm{v} \in$. לכן אפשר לרשום

$$\mathrm{v} = \underset{\in U}{\mathrm{v}} + \underset{\in W}{\bar{0}}$$

וגם

$$\mathrm{v} = \underset{\in U}{\bar{0}} + \underset{\in W}{\mathrm{v}}$$

מכיוון שהסכום הוא ישר, יש רק דרך יחידה לרשום את v כסכום של וקטורים של U ו W. לכן $\mathrm{v} = \bar{0}$.

2) נניח כי $V = U + W$ וגם $U \cap W = \{\bar{0}\}$.
נוכיח כי $V = U \oplus W$.

לפי הגדרת סכום ישר 11.3, נשאר להוכיח כי כל וקטור $\mathrm{v} \in V$ ניתן להציג בדרך יחידה כסכום של וקטורים של U ו W.
נקח $\mathrm{v} \in V$. נניח כי $\mathrm{v} = u_1 + \mathrm{w}_1$ וגם $\mathrm{v} = u_2 + \mathrm{w}_2$ כאשר $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$.
אז

$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \qquad \Rightarrow \qquad u_1 - u_2 = w_2 - w_1$$

(כאשר $u_1 - u_2 \in U$ ו $w_2 - w_1 \in W$. לכן

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{\bar{0}\} \ .$$

מכאן, $u_1 - u_2 = \bar{0}$ וגם $w_2 - w_1 = \bar{0}$.
לכן $u_1 = u_2$ וגם $w_1 = w_2$.

■

11.6 דוגמא.
נסמן

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{F} \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{F} \right\}$$

U קבוצת כל המטריצות הסימטריות מסדר 2×2,

W קבוצת כל המטריצות האנטי-סימטריות מסדר 2×2.

U, W תת מרחבים של מרחב וקטורי $M_{2\times2}(\mathbb{F})$. הראו כי $M_{2\times2}(\mathbb{F}) = U \oplus W$.

הוכחה.

1) <u>צריך להוכיח:</u> $U \cap W = \{\bar{0}\}$.

נניח $\mathrm{v} \in U \cap W$. $\Leftarrow$

$$\mathrm{v} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ -b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

מכאן, $a_1 = 0$, $c_1 = 0$, $b_1 = b_2$ ו $b_1 = -b_2$.

לכן $b_1 = b_2 = 0$.

ז"א $\mathrm{v} = \bar{0}$.

2) <u>נוכיח כי:</u> $M_{2\times2}(\mathbb{F}) = U + W$.

לכל מטריצה $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{F}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. נגדיר מטריצות $B = A + A^t$ ו $C = A - A^t$, ז"א

$$B = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix} \in U$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} \in W$$

אז

$$A = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C \in U + W \ .$$

■

11.7 משפט. ()

נניח ש V מרחב וקטורי ממיד n, U תת מרחב של V ממימד m, אז קיים תת מרחב W ממימד $n-m$ כך ש $V = U \oplus W$.

11.8 הוכחה.

נבחר בסיס כלשהו של U:

$$u_1, \dots, u_m$$

ונשלים אותו לבסיס של V:

$$u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n$$

אז

$$U = \mathrm{sp}(u_1, \dots, u_m)$$

$$V = \mathrm{sp}(u_1, \dots, u_n)$$

נגדיר

$$W = \mathrm{sp}(u_{m+1}, \dots, u_n)$$

נוכיח כי $V = U \oplus W$.

1) לכל $\mathrm{v} \in V$ קיימים סקלרים $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{F}$ כך ש

$$\mathrm{v} = k_1 u_1 + \ldots + k_m u_m + k_{m+1} u_{m+1} + \ldots + k_n u_n$$

נסמן

$$u = k_1 u_1 + \ldots + k_m u_m \in U \ , \qquad w = k_{m+1} u_{m+1} + \ldots + k_n u_n \in W \ .$$

אז $\mathrm{v} = u + w \Leftarrow V = U + W$.

2) <u>נוכיח כי:</u> $U \cap W = \{\bar{0}\}$.

נניח $\mathrm{v} \in U \cap W \Leftarrow \mathrm{v} \in U$ ו $\mathrm{v} \in W$.
לכן

$$\mathrm{v} = k_1 u_1 + \ldots + k_m u_m$$

וגם

$$\mathrm{v} = k_{m+1} u_{m+1} + \ldots + k_n u_n$$