שיעור 1
קבוצות של מספרים

1.1 קבוצות של מספרים

קבוצה זה אוסף של עצמים. ישנן שתי דרכים להגדרת קבוצה ספציפית.

דרך 1:

לתת רשימה שלמה של איברים. לדוגמה:
$$A=\{1,2,3,4,5\}$$

דרך 2:

לתת תנאי שמאפיין את איברי הקבוצה, בצורה
$$A=\{x|x \text{ תנאי שמאפיין את } \}$$

לגודמה:
$$A=\{x|2\leq x\leq 5 \text{ מספר ממשי וגם } x\}$$

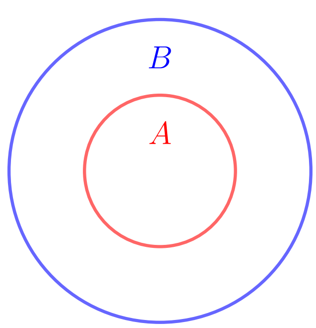
אם $A=\{1,3,4,5\}$ אז $1,3,4,5$ שייכים לקבוצה A ומספרים $1\in A$, $3\in A$, $4\in A$, $5\in A$.

סדר האיברים בקבוצה אינו חשוב, לכן
$$\{1,2,3\}=\{2,1,3\}\ .$$

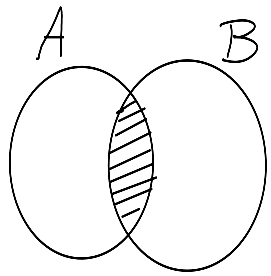
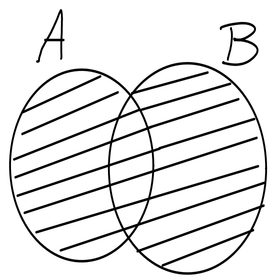
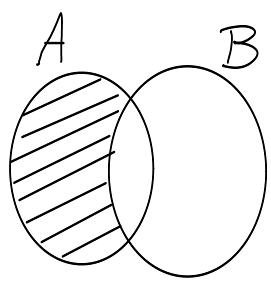
לא משנה כמה פעמים איבר מופיע ברשימה האיברים, ז"א
$$\{1,2,3\}=\{1,2,3,2\}\ .$$

קבוצה ללא איברים מסומנת ב- $\emptyset$. כלומר
$$\emptyset=\{\}\ .$$

אומרים ש- A היא תת קבוצה של B אם כל איבר של A שייך ל- B. מסמנים תת קבוצה בצורה $A\subset B$.



1.2 פעולות בין קבוצות

חיתוך של קבוצות		$A \cap B = \{x \mid x \in A$ וגם $x \in B\}$
איחוד של קבוצות		$A \cup B = \{x \mid x \in A$ או $x \in B\}$
הפרש בין קבוצות		$A - B = \{x \mid x \notin B$ וגם $x \in A\}$

1.3 קבוצות של מספרים

קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

קבוצת המספרים השלמים: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

קבוצת המספרים הרציונלים: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid n \neq 0, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}\}$

שים לב,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}\ .$$

המספרים הרציונלים מקיימים את תכונת הצפיפות. ז"א בין כל שני מספרים רציונלים יש מספר רציונלי

אחר. אבל עדיין קיימות הרבה מאוד נקודות על הציר שלא מתאימות לאף מספר רציונלי.

למה 1.1

לא קיים מספר רציונלי שהריבוע שלו שווה ל-2.

הוכחה: נוכיח בדרך השלילה. נניח שקיים מספר רציונלי $\frac{m}{n}$ כך ש-

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2\ .$$

אפשר להניח ש- $\frac{m}{n}$ שבר מצומצם. אז

$$m^2 = 2n^2\ ,$$

ז"א m^2, מספר זוגי, ולכן גם m מספר זוגי. כלומר ניתן לבטא m כ $m = 2k$ כאשר $k \in \mathbb{Z}$ (k מספר שלם). אז נקבל

$$m = 2k \qquad \Rightarrow \qquad 4k^2 = 2n^2 \qquad \Rightarrow \qquad n^2 = 2k^2\ .$$

לכן n^2 זוגי $\Leftarrow$ n זוגי. זאת אומרת m ו- n מספרים זוגיים. לכן אפשר לצמצם את השבר ב- 2. סתירה. כלומר, לא קיים מספר רציונלי שריבועו שווה ל- 2. ■

אחרי שממלאים את כל הציר, מקבלים את קבוצת המספרים הממשיים, $\mathbb{R}$. ז"א

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

1.4 סביבות וקטעים

$\{x \mid a \le x \le b\}$	$=$	$[a,b]$	קטע סגור
$\{x \mid a < x < b\}$	$=$	(a,b)	קטע פתוח
$\{x \mid a \le x < b\}$	$=$	$[a,b)$	קטע חצי פתוח
$\{x \mid a < x \le b\}$	$=$	$(a,b]$	קטע חצי פתוח
$\{x \mid x \ge a\}$	$=$	$[a,\infty)$	קטע חצי פתוח
$\{x \mid x > a\}$	$=$	(a,∞)	קטע פתוח
$\{x \mid x \le b\}$	$=$	$(-\infty,b]$	קטע חצי פתוח
$\{x \mid x < b\}$	$=$	$(-\infty,b)$	קטע פתוח
$\{x \mid -\infty < x < \infty\} = \mathbb{R}$	$=$	$(-\infty,\infty)$	קטע פתוח

הגדרה 1.1 אי-שוויונים

יהיו $a, A \in \mathbb{R}$ מספרים ממשיים. נגדיר את הסימונים הבאים:

- $a < b$ אם ורק אם המספר $b - a$ חיובי.
- $a \leq b$ אם ורק אם המספר $b - a$ חיובי או שווה ל- 0.
- $a > b$ אם ורק אם המספר $a - b$ חיובי.
- $a \geq b$ אם ורק אם המספר $a - b$ חיובי או שווה ל- 0.

למה 1.2 חוק העברה של אי-השוויונים

יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$. אם $a > b$ ו- $b > c$ אז $a > c$.

הוכחה: $a > b$ אז $a - b$ חיובי.

$b > c$ אז $b - c$ חיובי. לכן
$$(a-b) + (b-c) = a - c$$

חיובי,לפיכך
$$a > c \ .$$

■

משפט 1.1

יהיו b, B מספרים ממשיים כך ש- $b < B$.

א) יהי m מספר ממשי.

אם m חיובי אז
$$mb < mB \ .$$
אם m שלילי אז
$$mb > mB \ .$$

ב) לכל מסמר ממשי N חיובית שלילי או 0.
$$N + b < N + B$$
ו-
$$N - b > N - B \ .$$

ג) יהיו a, A מספרים ממשיים חיוביים.

אם $a < A$ אז $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{A}$.

אם $\dfrac{1}{A} < \dfrac{1}{a}$ אז $A > a$.

הוכחה: * להעשרה בלבד

א) נתון כי $b<B$ ז"א $B-b$ חיובי.

נניח כי m חיובי. המכפלה של שני מספרים חיוביים שווה למספר חיובי, לכן $m\cdot(B-b)$ חיובי. $\Leftarrow$ $mB-mb$ חיובי, לכן

$$mb<mB\ .$$

נניח כי m שלילי. המכפלה של שני מספר חיובי עם מספר שלילי שווה למספר שלילי, לכן $m\cdot(B-b)$ שלילי. $\Leftarrow$ $mB-mb$ שלילי, לכן

$$mb>mB\ .$$

ב) נתון כי $b<B$ ז"א $B-b$ חיובי.

נשים לב כי

$$(N+B)-(N+b)=B-b\ .$$

לפי זה, אם $B-b$ חיובי אז גם $(N+B)-(N+b)$ חיובי.

לפיכך

$$N+b<N+B\ .$$

עבור האי-שוויון השני, נשים לב כי

$$(N-b)-(N-B)=N-b-N+B=-b+B=B-b\ .$$

לפי זה, אם $B-b$ חיובי אז גם $(N-b)-(N-B)$ חיובי.

לפיכך

$$N-b>N-B\ .$$

ג) $a<A$ לכן $A-a$ חיובי.

נתון כי a חיובי ו- A חיובי לכן המכפלה aA חיובי.

נשים לב כי

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{A}=\frac{A-a}{Aa}=(A-a)\cdot\frac{1}{Aa}\ .$$

לפי זה, $\frac{1}{a}-\frac{1}{A}$ שווה למכפלה של שני מספרים חיוביים, $A-a$ ו- $\frac{1}{Aa}$, ולכן חיובי.

לפיכך

$$\frac{1}{a}>\frac{1}{A}\ .$$

עבור אי-השוויון השני, אם $\frac{1}{A}<\frac{1}{a}$ אז לפי סעיף א' לכל m חיובי, $m\cdot\frac{1}{a}>m\frac{1}{A}$.

נציב $m=aA$:

$$aA\cdot\frac{1}{a}>aA\frac{1}{A}\quad\Rightarrow\quad A>a\ .$$

■

דוגמה 1.1 *

הוכיחו טת הטענה הבאה ע"י אינדוקציה מתמטית או בכל דרך אחרת:

לכל מספר טבעי $n \geq 2$:

$$3^n > 3n + 1$$

פתרון:

שלב הבסיס:

עבור $n = 2$ הטענה נכונה:

$$3^2 > 3 \cdot 2 + 1 \ .$$

שלב האינדוקציה:

נניח כי עבור $m > 2$, $3^m > 3m + 1$ (הנחת האינדוקציה). אז

$$3 \cdot 3^m > 3 \cdot (3m + 1) \quad \Rightarrow \quad 3^{m+1} > 9m + 3 = 3m + 6m + 3$$

$m > 2$ אז $6m > 12$. לפיכך

$$3^{m+1} > 3m + 12 + 3 = 3(m + 1) + 12 > 3(m + 1) + 1$$

לכן $3^{m+1} > 3(m + 1) + 1$.

■