דואפול

שאלה 1

א) שני יצרניים מייצרים אותו מוצר שוקולד ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאלים. היצרנים מחליטים בו-זמנית על הכמות שהם ייצרו. ההיצע הכולל קובע את מחיר המוצר, והוא זהה לשני היצרנים. פרמטר הביקוש ידוע לשני השחקנים ושווה ל- 9. עלות הייצור של יחידה ליצרן הראשון היא 2₪ וליצרן השני היא 3₪. חשבו את שיווי המשקל.

ב) מצאו את הרווח לכל יצרן, אם כל יצרן בוחר באסטרטגיה אופטימלית.

ג) נתון משחק שני שחקנים. הוכיחו: אם כל שחקן משחק באסטרטגית שיווי משקל, התשלום לכל שחקן גדול או שווה לערך המקסמין (maxmin) שלו(ה).

שאלה 2 שני יצרניים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאלים. יהי q_1 כמות המוצר שיצרן 1 מייצר ו- q_2 כמות המוצר שיצרן 2 מייצר. שחקן 1 בוחר את המחיר של המוצר שלו להיות p_1 ליחידה, ושחקן 2 בוחר את המחיר של המוצר שלו להיות p_2 ליחידה. הכמות q_1 ששחקן 1 צריך לייצר נקבע על ידי הפונקציה

$$q_1 = a - p_1 + bp_2$$

כאשר $b > 0$ והכמות q_2 ששחקן 2 צריך לייצר נקבע על ידי הפונקציה

$$q_2 = a - p_2 + bp_1 \ .$$

מצאו את השיווי משקל של המשחק.

שאלה 3

א) שני יצרניים מייצרים אותו מוצר ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאלים. היצרנים מחליטים סימולטנית על הכמות שהם ייצרו, וההיצע הכולל קובע את מחיר המוצר, שהוא זהה לשני היצרנים. הפרמטר הביקוש ידיעה משותפת ושווה ל- 18. עלות הייצור של יחידה ליצרן הראשון היא 4₪ וליצרן השני היא 6₪. האם קיים שיווי משקל במשחק זה, ואם כן, מה הוא?

ב) מצאו את הרווח לכל יצרן אם כל יצרן בוחר באסטרטגיה אופטימלית.

ג) תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה אי-סימטרית. תהי A מטריצת התשלומים של משחק שני-שחקנים סכום אפס. הוכיחו: קיים ערך למשחק באסטרטגיות מעורבות אם ורק אם הערך שווה ל- 0.

שאלה 4 נתון משחק קורנוט עם n שחקנים. יהי q_i כמות המוצר הנוצר על יד שחקן i, ויהי $Q = q_1 + \ldots + q_n$ כמות הכוללת בשוק. יהי

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & Q < a \\ 0 & Q \geq a \end{cases} \ .$$

נניח כי העלות לשחקן i לייצר
כמות q_i היא $C_i(q_i)=cq_i$ כאשר $c<a$.

א) מצאו את השיווי משקל של המשחק.

ב) מה קורה אם $n\to\infty$?

שאלה 5 נתון משחק דואפול של קורנוט, כאשר פונקציית המחיר

$$P(Q)=\begin{cases} a-Q & Q<a \\ 0 & Q\geq a \end{cases} .$$

אך לשחקנים יש פונקציות עלות אי-סימטריות:

$$C_1(q_1)=c_1q_1\ , \qquad C_2(q_2)=c_2q_2\ .$$

א) חשבו את השיווי משקל נאש אם $0<c_i<\dfrac{a}{2}$ לכל שחקן?

ב) כיצד התשובה משתנה אם $c_1<c_2<a$ ו- $2c_2>a+c_1$?

פתרונות

שאלה 1

א) הפונקציית המחיר היא $P(Q)=a-Q$ כאשר $Q=q_1+q_2$. הרווח לשחקן 1 הוא

$$u_1=(P-c_1)q_1=(a-Q-c_1)q_1=(a-q_1-q_2-c_1)q_1\ ,$$

והרווח לשחקן 2 הוא

$$u_2=(P-c_2)q_2=(a-Q-c_2)q_2=(a-q_1-q_2-c_2)q_2\ .$$

נציב $c_1=2$, $c_2=3$, $a=9$ ונקבל

$$u_1=(9-q_1-q_2-2)q_1=(7-q_1-q_2)q_1\ ,$$
$$u_2=(9-q_1-q_2-3)q_2=(6-q_1-q_2)q_2\ .$$

בנקודת שיווי משקל:

$$(u_1)'_{q_1}=7-2q_1-q_2\stackrel{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad q_1^*=\frac{7-q_2}{2}\ .$$

בנקודת שיווי משקל:

$$(u_2)'_{q_2}=6-2q_1-q_2\stackrel{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad q_2^*=\frac{6-q_1}{2}\ .$$

נציב התנאי השני בתנאי הראשון:

$$q_1^*=\frac{7-q_2^*}{2}=\frac{7-\left(\frac{6-q_1^*}{2}\right)}{2}=\frac{\left(\frac{8+q_1^*}{2}\right)}{2}=2+\frac{q_1^*}{4}\quad\Rightarrow\quad\frac{3q_1^*}{4}=2\quad\Rightarrow\quad q_1^*=\frac{8}{3}\ .$$

נציב זה בביטוי ל- q_2^* ונקבל

$$q_2^*=\frac{6-q_1^*}{2}=\frac{6-\left(\frac{8}{3}\right)}{2}=\frac{\left(\frac{18}{3}\right)-\left(\frac{8}{3}\right)}{2}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}\ .$$

לפיכך השיווי המשקל של המשחק הוא

$$(q_1^*,q_2^*)=\left(\frac{8}{3},\frac{5}{3}\right)\ .$$

ב)

$$u_1(q_1^*,q_2^*)=\left(9-\frac{8}{3}-\frac{5}{3}-2\right)\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{64}{9}\ .$$
$$u_2(q_1^*,q_2^*)=\left(9-\frac{8}{3}-\frac{5}{3}-3\right)\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{25}{9}\ .$$

ג) תהי $s^* = (s_1^*.s_2^*)$ השיווי המשקל של המשחק.
ז"א s_1^* האסטרטגיה של השיווי המשקל לשחקן I ו- s_2^* האסטרטגיה של השיווי המשקל לשחקן II.
יהי $\underline{\mathrm{v}}_1$ הערך המקסמין של שחקן I ויהי σ_1 האסטרטגיה המקסמין שלו.
s_1^* אסטרטגיה שיווי משקל של I לכן s_1^* תשובה טובה ביותר של I ביחס לכל אסטרטגיה של שחקו II, לכן

$$u_1\left(s_1^*, s_2\right) \geq u_1\left(\sigma_1, s_2\right)$$

לכל אסטרטגיה $s_2 \in S_2$ של שחקן II. בנוסף, מכיוון ש- σ_1 היא האסטרטגיה המקסמין של שחרן I אז בהכרח, אם I משחק σ_1, אז עבור כל אסטרטגיה s_2 של II, התשלום לשחקן I יהיה גדול או שווה ל הערך המקסמין שלו, כלומר

$$u_1\left(\sigma_1, s_2\right) \geq \underline{\mathrm{v}}_1 \ .$$

לפיכך, השני האי-שוויונים האלה ביחד אומרים כי

$$u_1\left(s_1^*, s_2\right) \geq u_1\left(\sigma_1, s_2\right) \geq \underline{\mathrm{v}}_1 \qquad \Rightarrow \qquad u_1\left(s_1^*, s_2\right) \geq \underline{\mathrm{v}}_1 \ ,$$

ז"א התשלום של שחקן I המתקבל מהאסטרטגיה השיווי משקל גדול או שווה לתשלום המתקבל מהאסטרטגיה המקסמין שלו.

על ידי תהליך דומה נקבל כי

$$u_2\left(s_1, s_2^*\right) \geq \underline{\mathrm{v}}_2 \ ,$$

ז"א התשלום של שחקן II המתקבל מהאסטרטגיה השיווי משקל גדול או שווה לתשלום המתקבל מהאסטרטגיה המקסמין שלו.

<u>שאלה 2</u> האסטרטגיות של שחקן 1 הן המחירים p_1 שהוא בוחר, אשר מהווה קבוצה רציפה של ערכים חיוביים, ובאותה מידה האסטרטגיות לשחקן 2 הן הקבוצה הרציפה של מחירים p_2. לכן קבוצת האטסטרגיות של כל שחקן היא $[0,\infty)$.

אם שחקן 1 בוחר באסטרטגיה p_1 ושחקן 2 בוחר באסטרטגיה q_2, התשלום לשחקן 1 הוא

$$u_1(p_1,p_2) = p_1q_1 - cq_1 = (p_1-c)(a-p_1+bp_2)$$

והתשלום לשחקן 2 הוא

$$u_2(p_1,p_2) = p_2q_2 - cq_2 = (p_2-c)(a-p_2+bp_1)$$

הווקטור אסטרטגיות (p_1^*,p_2^*) שיווי משקל אם לכל שחקן:

$$u_1(p_1^*,p_2^*) = \max_{0\leq p_1\leq\infty} u_1(p_1,q_2^*) = \max_{0\leq p_1\leq\infty}\left[(p_1-c)(a-p_1+bp_2^*)\right]$$

ו-

$$u_2(p_1^*,p_2^*) = \max_{0\leq p_2\leq\infty} u_1(p_1^*,p_2) = \max_{0\leq p_2\leq\infty}\left[(p_2-c)(a-p_2+bp_1^*)\right]$$

המקסימום של $u_1(p_1,p_2^*)$ לפי p_1 מתקבל בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_1(p_1,p_2^*)}{\partial p_1} = a - 2p_1 + bp_2^* + c \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad p_1^* = \frac{a+c+bp_2^*}{2} \ ,$$

והמקסימום של $u_2(p_1^*, p_2)$ לפי p_2 מתקבל בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_2(p_1^*, p_2)}{\partial p_2} = a - 2p_2 + bp_1^* + c \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad p_2^* = \frac{a + c + bp_1^*}{2} \ .$$

לפיכך, אם הצמד כמויות (p_1^*, p_2^*) שיווי משקל אז הכמויות חייבות לקיים את התנאים

$$p_1^* = \frac{a + c + bp_2^*}{2} \ , \qquad p_2^* = \frac{a + c + bp_1^*}{2} \ .$$

הפתרון למערכת זו הינו

$$p_1^* = p_2^* = \frac{a + c}{2 - b} \ .$$

<u>שאלה 3</u>

א) פונקצית המחיר:

$$P(Q) = a - Q \ ,$$

כאשר $Q = q_1 + q_2$. הרווח לשחקן 1 הוא

$$u_1 = (P - c_1)q_1 = (a - Q - c_1)q_1 = (a - q_1 - q_2 - c_1)q_1 \ ,$$

והרווח לשחקן 2 הוא

$$u_2 = (P - c_2)q_2 = (a - Q - c_2)q_2 = (a - q_1 - q_2 - c_2)q_2 \ .$$

נציב $c_1 = 4$, $c_2 = 6$, $a = 18$ ונקבל

$$u_1 = (18 - q_1 - q_2 - 4)q_1 = (14 - q_1 - q_2)q_1 \ ,$$
$$u_2 = (18 - q_1 - q_2 - 6)q_2 = (12 - q_1 - q_2)q_2 \ .$$

בנקודת שיווי משקל:

$$(u_1)'_{q_1} = 14 - 2q_1 - q_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_1^* = \frac{14 - q_2}{2} \ .$$

בנקודת שיווי משקל:

$$(u_2)'_{q_2} = 12 - 2q_1 - q_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_2^* = \frac{12 - q_1}{2} \ .$$

נציב התנאי השני בתנאי הראשון:

$$q_1^* = \frac{14 - q_2^*}{2} = \frac{14 - \left(\frac{12 - q_1}{2}\right)}{2} = 4 + \frac{q_1^*}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{3q_1^*}{4} = 4 \quad \Rightarrow \quad q_1^* = \frac{16}{3} \ .$$

נציב זה בביטוי ל- q_2^* ונקבל

$$q_2^* = \frac{10}{3} \ .$$

ב)

$$u_1(q_1^*,q_2^*)=\frac{26}{3}\cdot\frac{16}{3}=\frac{416}{9}\ .$$

$$u_2(q_1^*,q_2^*)=\frac{10}{3}\cdot\frac{10}{3}=\frac{100}{9}\ .$$

ג) התשלום המקסמין של המשחק הוא $\underline{\mathrm{v}}=\max_i\min_j A_{ij}$.
התשלום המינמקס של המשחק הוא $\bar{\mathrm{v}}=\min_j\max_i A_{ij}$.

$$\underline{\mathrm{v}}=\bar{\mathrm{v}}\quad\Leftrightarrow\quad\max_i\min_j A_{ij}=\min_j\max_i A_{ij}\ .$$

A אי-סימטרית לכן $A_{ij}=-A_{ji}$. לכן

$$\min_j\max_i A_{ij}=\min_j\max_i(-A_{ji})=\min_j(-\min_i A_{ji})=-\max_j\min_i A_{ji}=-\max_i\min_j A_{ij}\ .$$

לכן

$$\underline{\mathrm{v}}=\bar{\mathrm{v}}\quad\Leftrightarrow\quad\max_i\min_j A_{ij}=-\max_i\min_j A_{ij}\quad\Leftrightarrow\quad\max_i\min_j A_{ij}=0\ .$$

לכן אם A אי-סימטרית אז למשחק יש ערך אם ורק אם הערך שווה אפס.

<u>שאלה 4</u> הרווח לשחקן i נתון עלי ידי הפונרצית תשלום

$$u_i(q_1,\ldots,q_i,\ldots,q_n)=P(Q)q_i-C_i=(P(Q)-c)\,q_i=(a-Q-c)\,q_i=(a-q_1-q_2-\ldots-q_i-\ldots-q_n-c)\,q_i$$

וקטור אסטרטגיות $(q_1^*,\ldots,q_i^*,\ldots,q_n^*)$ שיווי משקל אם s_i^* תשובה טובה ביותר לשקחן i לכל $1\leq i\leq n$.

$$u_i\left(q_1^*,\ldots,q_i^*,\ldots,q_n^*\right)=\max_{0\leq q_i\leq\infty}u_i\left(q_1^*,\ldots,q_i,\ldots,q_n^*\right)$$

התשלום u_i מקבל ערך מסימלי בנקודה שבה $(u_i)'_{q_i}=0$.

$$\begin{aligned}(u_i)'_{q_i}&=(a-q_1^*-\ldots-q_i^*-\ldots-q_n^*-c)-q_i^*\\&=a-q_1^*-\ldots-2q_i^*-\ldots-q_n^*-c\overset{!}{=}0\\\Rightarrow\quad a-c&=q_1^*+\ldots+2q_i^*+\ldots+q_n^*\end{aligned}$$

לכל $q\leq i\leq n$. מכיוון שאנחנו מקבלים אותו משוואה לכל i, אז בהכרח הערכים של ה- q_i זהים ושווים ל-

$$q_1^*=q_2^*=\ldots=q_i^*=\ldots=q_n^*\ .$$

נציב זה במשוואה הקודם ואז נקבל

$$(n+1)q_i^*=a-c\qquad\Rightarrow\qquad q_i^*=\frac{a-c}{n+1}\ .$$

<u>שאלה 5</u> פונקצית המחיר:

$$P(Q) = a - Q \ ,$$

כאשר $Q = q_1 + q_2$. הרווח לשחקן 1 הוא

$$u_1 = (P - c_1)q_1 = (a - Q - c_1)q_1 = (a - q_1 - q_2 - c_1)q_1 \ ,$$

והרווח לשחקן 2 הוא

$$u_2 = (P - c_2)q_2 = (a - Q - c_2)q_2 = (a - q_1 - q_2 - c_2)q_2 \ .$$

בנקודת שיווי משקל:

$$(u_1)'_{q_1} = (a - c_1 - q_1 - q_2) - q_1 = a - c_1 - 2q_1 - q_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_1^* = \frac{a - c_1 - q_2}{2} \ .$$

בנקודת שיווי משקל:

$$(u_2)'_{q_1} = (a - c_2 - q_1 - q_2) - q_2 = a - c_2 - 2q_1 - q_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_2^* = \frac{a - c_2 - q_1}{2} \ .$$

נציב התנאי השני בתנאי הראשון:

$$q_1^* = \frac{a - c_1 - q_2}{2} = q_1^* = \frac{a - c_1 - \left(\frac{a - c_2 - q_1}{2}\right)}{2} = \frac{a}{4} - \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4} + \frac{q_1^*}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{3q_1^*}{4} = \frac{a}{4} - \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4} = \frac{a - 2c_1 + c_2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad q_1^* = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3} \ .$$

נציב זה בביטוי ל- q_2^* ונקבל

$$q_2^* = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3} \ .$$

$$2c_2 > a + c_1 \quad \Rightarrow \quad a - 2c_2 + c_1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a - 2c_2 + c_1}{3} < 0 \ .$$

לכן בהכרח $q_2 = 0$ בגלל כמות לא יכולה להיות שלילית.