שיעור 11
אינגרלים קוויים

11.1 אינגרל הקווי מסוג ראשון

משפט 11.1 אינטגרל קווי מסוג ראשון 1

אם עקום מישורי L מוגדר כגרף של הפונקציה $\{y=\gamma(x)\ ,|a\leq x\leq b\}$
אז האינטגרל הקווי של פונקציה $f(x,y)$ דרך הקו של γ מוגדר להיות

$$\int\limits_L f(x,y)\ dl=\int_a^b f\left(x,\gamma(x)\right)\sqrt{1+\gamma'(x)^2}\,dx$$

משפט 11.2 אינטגרל קווי מסוג ראשון 2

אם עקום מישורי L מוגדר באופן פרמטרי

$$\{x=x(t)\ ,\ y=y(t)\ ,\ |\ \alpha\leq t\leq\beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה $f(x,y)$ דרך הקו של L מוגדר להיות

$$\int\limits_L f(x,y)\ dl=\int_\alpha^\beta f\left(x(t),y(t)\right)\ \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$$

משפט 11.3 אינטגרל קווי מסוג ראשון 3

אם L הוא עקום במרחב תלת-ממדי המוגדר באופן

$$\{x=x(t)\ ,\ y=y(t)\ ,\ z=z(t)\ |\ \alpha\leq t\leq\beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה $f(x,y,z)$ דרך הקו של L מוגדר להיות

$$\int\limits_L f(x,y,z)\ dl=\int_\alpha^\beta f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$$

דוגמה 11.1

מצאו את המסה של הקשת $\begin{cases} y=x^2\\ 1\leq x\leq 10\end{cases}$ בעלת צפיפות מסה קווי $\rho=\dfrac{y}{x}$.

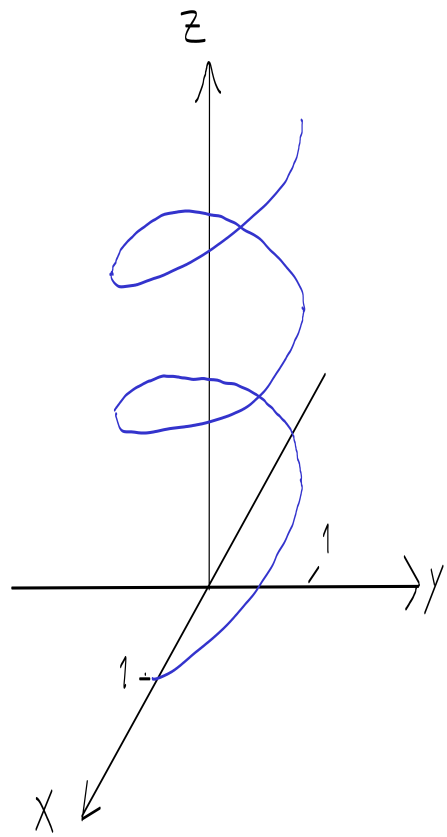
פתרון:

$$
\begin{aligned}
M &= \int\limits_L \rho(x,y)dl \\
&= \int_1^{10} \frac{x^2}{x} \cdot \sqrt{1+(2x)^2}dx \\
&= \int_1^{10} x \cdot \sqrt{1+4x^2}dx \\
&= \int_1^{10} \frac{t'}{8} \cdot \sqrt{t}dx \\
&=\frac{1}{8}\int_{t=5}^{t=401} \cdot\sqrt{t}dt \\
&=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left[t^{3/2}\right]_{t=5}^{t=401} \\
&=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left[401^{3/2}-5^{3/2}\right] \\
&=668.24
\end{aligned}
$$

דוגמה 11.2

חשבו את אורך הקשת של קו הבורג (helix) $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=t \\ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$ בעלת צפיפות מסה קווי $\rho=\frac{y}{x}$.

פתרון:



$$\begin{aligned}L=&\int\limits_L dl\\=&\int_0^{2\pi}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt\\=&\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}dt\\=&\int_0^{2\pi}\sqrt{2}dt\\=&2\sqrt{2}\pi\end{aligned}$$

משפט 11.4 אורך הקשת

האינטגרל הקווי

$$\int\limits_L dl$$

נותן את אורך הקשת L.

משפט 11.5 מסה של הקשת

האינטגרל הקווי

$$\int\limits_L f(x,y,z)\ dl$$

נותן את המסה של הקשת L בעלת צפיפות ליניארית $f(x,y,z)$.

דוגמה 11.3

חשב את אורך הקשת של קו הבורג:

$$\{x=\cos t\ ,\ y=\sin t\ ,\ z=t\ ,\ 0\leq t\leq 2\pi\}$$

פתרון:
לפי כלל 11.3

$$\int_L dl=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}=\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1^2}=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}=2\pi\sqrt{2}\ .$$

11.2 אינטגרל הקווי מסוג שני

כדי לחשב את האינטגרל של שדה וקטורי מצורה

$$\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\hat{\boldsymbol{i}}+Q(x,y)\hat{\boldsymbol{j}}$$

דרך המסלול L משתמשים ב **האינטגרל הקווי מסוג שני.**

לדוגמא, העבודת השדה הוקטורי $\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\hat{\boldsymbol{i}}+Q(x,y)\hat{\boldsymbol{j}}$ בהעברת חלקיק מהנקודה A לנקודה B לאורך המסלול L ניתן ע"י

$$W=\int_L [P(x,y)dx+Q(x,y)dy]\ .$$

דרך החישוב של אינטגרל קווי מסוג שני תלויה באופן הגדרת המסלול L של האינטגרציה.

משפט 11.6 אינטגרל קווי מסוג שני 1

אם המסלול מישורי L מוגדר כגרף של הפונקציה $\{y=\gamma(x)\ ,|a\leq x\leq b\}$
אז האינטגרל הקווי של פונקציה $\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\hat{\boldsymbol{i}}+Q(x,y)\hat{\boldsymbol{j}}$ דרך הקו של γ מוגדר להיות

$$\int_L [P(x,y)dx+Q(x,y)dy]=\int_a^b dx\ P\left(x,\gamma(x)\right)+\int_a^b dx\ y'(x)\ Q\left(x,\gamma(x)\right)$$

משפט 11.7 אינטגרל קווי מסוג שני 2

אם המסלול מישורי L מוגדר באופן פרמטרי

$$\{x=x(t)\ ,\ y=y(t)\ ,\ |\ \alpha\leq t\leq\beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה $\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\hat{\boldsymbol{i}}+Q(x,y)\hat{\boldsymbol{j}}$ דרך הקו של L מוגדר להיות

$$\int_L [P(x,y)dx+Q(x,y)dy]=\int_\alpha^\beta dt\ x'(t)\ P\left(x(t)\ ,\ y(t)\right)+\int_\alpha^\beta dt\ y'(t)\ Q\left(x(t)\ ,\ y(t)\right)$$

משפט 11.8 אינטגרל קווי מסוג שני 3

אם L הוא המסלול במרחב תלת-ממדי המוגדר באופן

$$\{x=x(t)\ ,\ y=y(t)\ ,\ z=z(t)\mid \alpha\leq t\leq\beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה $\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\hat{\boldsymbol{i}}+Q(x,y,z)\hat{\boldsymbol{j}}+R(x,y,z)\hat{\boldsymbol{k}}$ דרך הקו של L מוגדר להיות

$$\begin{aligned}&\int\limits_L [P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz]\\ &=\int_\alpha^\beta dt\ x'(t)\ P\left(x(t),y(t),z(t)\right)+\int_\alpha^\beta dt\ y'(t)\ Q\left(x(t),y(t),z(t)\right)+\int_\alpha^\beta dt\ z'(t)\ R\left(x(t),y(t),z(t)\right)\end{aligned}$$

דוגמה 11.4 אינטגרל קווי מסוג שני

חשבו את

$$\int_L [(x+2y)dx+(y-x)dy]$$

לאורך הפרבולה $y=x^2$ מ- $A(1,1)$ ל- $B(3,9)$.

פתרון:

לפי כלל 11.6,

$$\begin{aligned}\int_L [(x+2y)dx+(y-x)dy]&=\int_1^3 dx\left(x+2x^2\right)+\int_1^3 dx\cdot 2x\cdot\left(x^2-x\right)\\ &=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}\right]_1^3+\left[\frac{2x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}\right]_1^3\\ &=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2}\right]_1^3\\ &=44\end{aligned}$$

אם $L:\{x=x(t),y=y(t),a\leq t\leq b\}$ מתחילה ונגמרת באותה הנקודה $(x(a)=x(b),y(a)=y(b))$ נאמר שהיא מסילה סגורה ונסמן $\oint\limits_L$ במקום $\int\limits_L$ כדי לסמן אינטגרל מסילתי לאורך L.

דוגמה 11.5 אינטגרל קווי מסוג שני

חשבו את

$$\int_L [y\ dx+x\ dy]$$

לאורך הקשת

$$\{x=-\sin t\ ,\ y=\cos t\}$$

מ- $t=0$ עד ל- $t=2\pi$.

פתרון:

לפי כלל 11.7,

$$\begin{aligned}\int_L [y\ dx + x\ dy] &= \int_0^{2\pi} dt\ \ \cos t \cdot \cos t + \int_0^{2\pi} dt\ \left(-\sin t\right) \cdot \left(-\sin t\right)\\ &= \int_0^{2\pi} dt\ \ \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)\\ &= \int_0^{2\pi} dt\ 1\\ &= 2\pi\ .\end{aligned}$$

11.3 תכונות של אינטגרלים קוויים

משפט 11.9 תכונה חשובה של אינטגרל קווי

1) בהינתן מסילה L_{AB} מ- A ל- B נסמן ב- L_{BA} את המסילה ההולכת בכיוון ההפוך מ- B ל- A. אז

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{L_{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

2) בהינתן מסילות L_{AB} מ- A ל- B ו- L_{BC} מ- B ל- C נסמן ב- L_{AC} את המסילה המשורשרת המתקבלת, אז

$$\int\limits_{L_{AC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{L_{BC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

3) עבור מסלול מרחבי L הנתון ע"י $\left\{\begin{array}{c} x = x(t), y = y(t), z = z(t) \\ a \le t \le b \end{array}\right.$ ופונקציה וקטורית $\bar{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ אז

$$\begin{aligned}&\int P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\\ &= \int_a^b P\left(x(t),y(t),z(t)\right)x'(t)dt + \int_a^b Q\left(x(t),y(t),z(t)\right)y'(t)dt + \int_a^b R\left(x(t),y(t),z(t)\right)z'(t)dt\end{aligned}\ .$$

11.4 נוסחת גרין

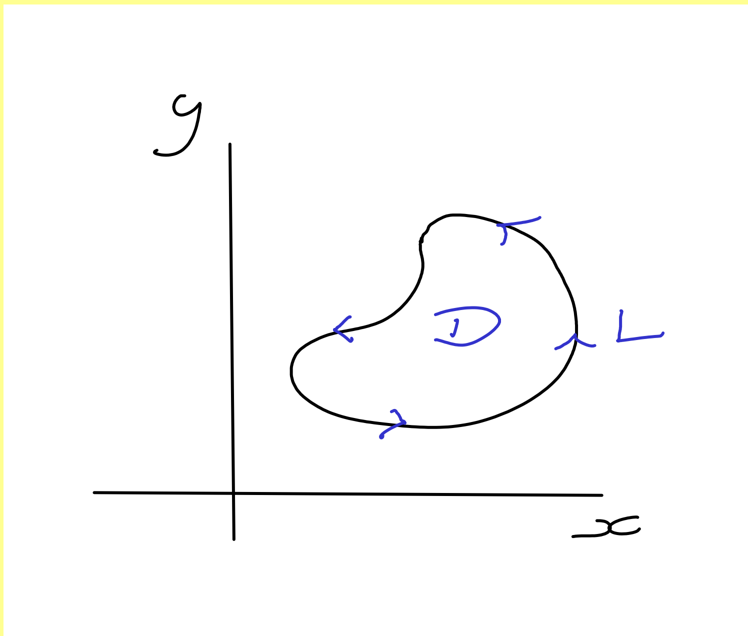
משפט 11.10 נוסחת גרין

אם L מסלול מישורי סגור ו- P,Q גזירות, אז

$$\oint\limits_{L} [P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy] = \iint\limits_{D} dx\ dy\ \left(Q'_x - P'_y\right)\ .$$

כאשר D התחום החסום על ידי L ונמצא משמאל ל-L. בפרט, שטח התחום $S(D)$ נתון ע"י

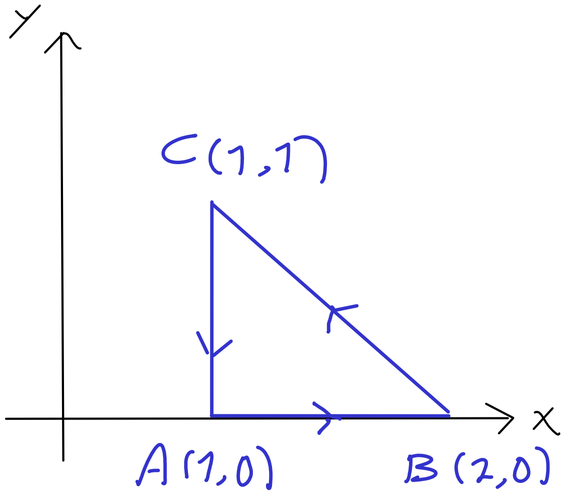
$$S(D) = \oint\limits_{L} x\,dy = -\oint\limits_{L} y\,dx = \frac{1}{2}\oint\limits_{L} x\,dy - y\,dx\ .$$



דוגמה 11.6

חשבו את $I = \oint\limits_{L} \frac{2}{x+y}dx + \frac{1}{x+y}dy$ לאורך המשולש שקדקודיו $A(1,0)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$.

פתרון:

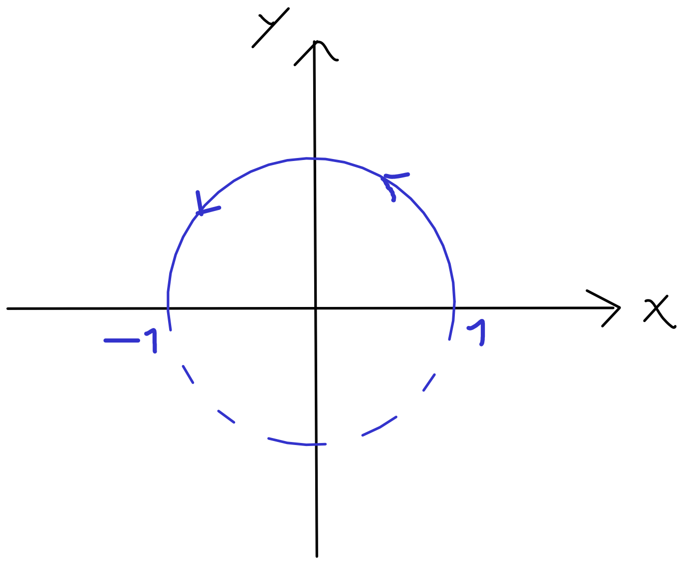


$$
\begin{aligned}
I &= \oint\limits_L \frac{2}{x+y}\,dx + \frac{1}{x+y}dy \\
&= \iint\limits_D \left(\frac{-1}{(x+y)^2} + \frac{2}{(x+y)^2} \right) dx\,dy \\
&= \int_1^2 dx \int_0^{2-x} dy\, \frac{1}{(x+y)^2} dx\,dy \\
&= \int_1^2 dx \left[\frac{-1}{x+y} \right]_0^{2-x} \\
&= \int_1^2 dx \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{x} \right) \\
&= \left[\frac{-x}{2} + \ln x \right]_1^2 \\
&= \ln 2 - \frac{1}{2}\ .
\end{aligned}
$$

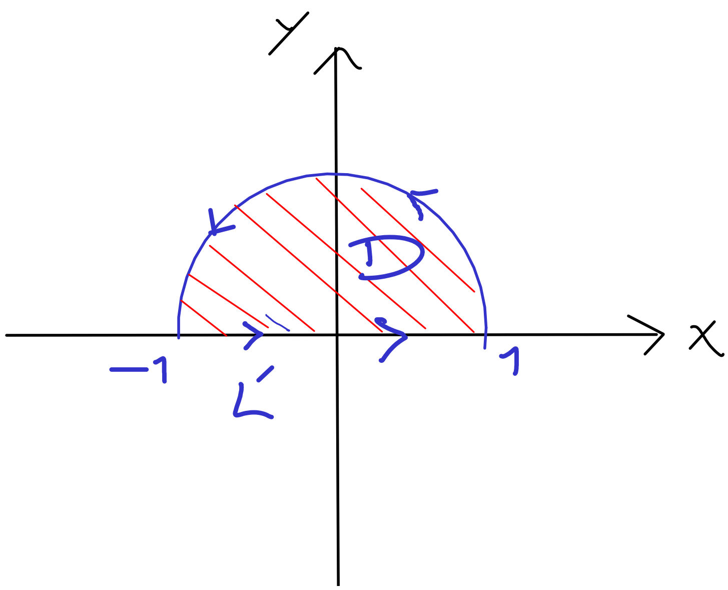
דוגמה 11.7

חשבו את $I = \int\limits_L \left(x^4 + e^x - y\right) dx + \left(x^2 + y^5 + y^2 e^y\right) dy$ לאורך המסלול $x^2 + (\sqrt{y})^4$ מימין לשמאל.

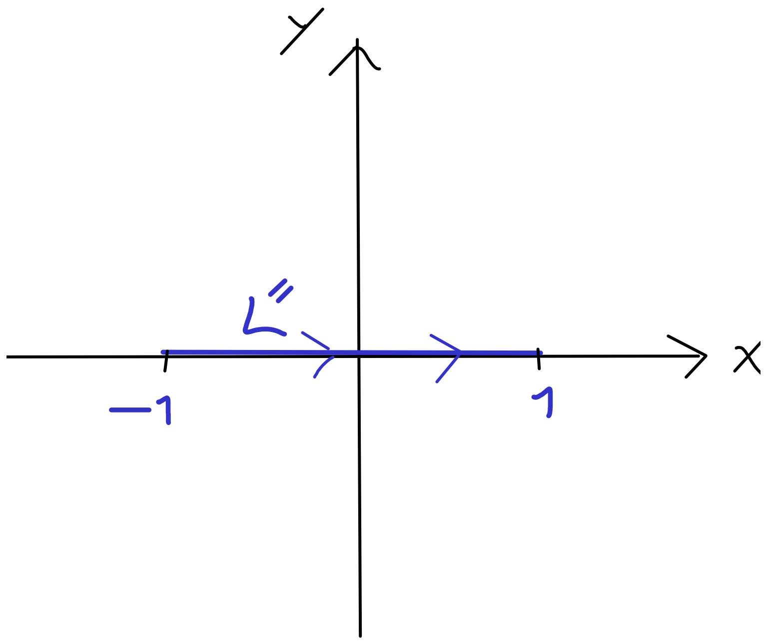
פתרון:



$x^2 + (\sqrt{y})^4 \Leftarrow$ $\begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ נסגור את המסלול כך:



כלומר נשרשר עם המסלול



$$\oint_{L'} = \int_{L} + \int_{L''}$$

$$\oint_{L'} Pdx - Qdy = \iint_{D} (2x+1)dx\,dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 r\,dr \int_0^{\pi} (2r\cos\theta + 1)\,d\theta \\
&= \int_0^1 r\,[2r\sin\theta + \theta]_{\theta=0}^{\pi}\,dr \\
&= \int_0^1 \pi \cdot r dr \\
&= \left[\frac{\pi r^2}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{2}\ .
\end{aligned}$$

$$\int_{L''} P\,dx + Q\,dy = \int_{-1}^{1} P(x,0)dx + \int_{-1}^{1} Q(x,0)\cdot 0\,dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{1} \left(x^4 + e^x\right) dx \\
&= \left[\frac{x^5}{5} + e^x\right]_{-1}^{1} \\
&= \left[\frac{2}{5} + e + \frac{1}{e}\right]
\end{aligned}$$

לכן

$$I = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{2}{5} + e - \frac{1}{e}\right)$$

משפט 11.11 אי-תלות של אינטגרל קווי במסלול האינטגרציה

אם

$$Q'_x = P'_y$$

מתקיים, אז

(א)

$$\oint\limits_L \left[P(x,y)\ dx + Q(x,y)\right]\ dy = 0$$

עבור כל מסלול סגור L

(ב) קיימת פונקציה $U(x,y)$ שעבורה הדיפרנציאל שלה הינה

$$dU(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\ ,$$

כך שהאינטגרל הקווי של $P(x,y)\hat{\boldsymbol{\imath}} + Q(x,y)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ דרך מסלול שרירותי L מנקודה A לנקודה B ניתן ע"י

$$\int\limits_{AB} [P\,dx + Q\,dy] = \int\limits_{AB} dU = U(B) - U(A)\ ,$$

כלומר האינטגרל הקווי $\int\limits_{AB} [P\,dx + Q\,dy]$ אינו תלוי במסלול האינטגרציה העובר מ-A ל-B.

11.5 דוגמאות

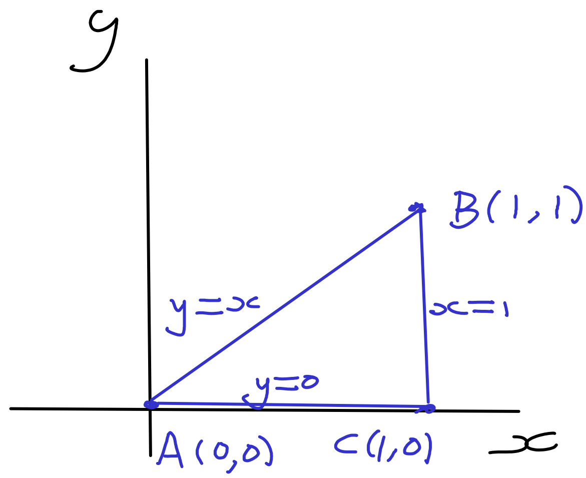
דוגמה 11.8

חשב את האינטגרל הבא כאשר המסלול L הוא המצולע בעל קדקודים נתונים:

$$\int\limits_L (x+y)\ dl$$

$A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(1,0)$.

פתרון:



$$\begin{aligned}\int_L dl\ (x+y) &= \left[\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}\right](x+y)\ dl \\ &= \int_0^1 dx\,\sqrt{1+(x)'}\,(x+x) + \int_1^0 dy\,(1+y) + \int_1^0 dx\,(x+0) \\ &= \sqrt{2}\,\left[x^2\right]_0^1 + \left[y+\frac{y^2}{2}\right]_1^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^0 \\ &= \sqrt{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \sqrt{2} - 2\ .\end{aligned}$$

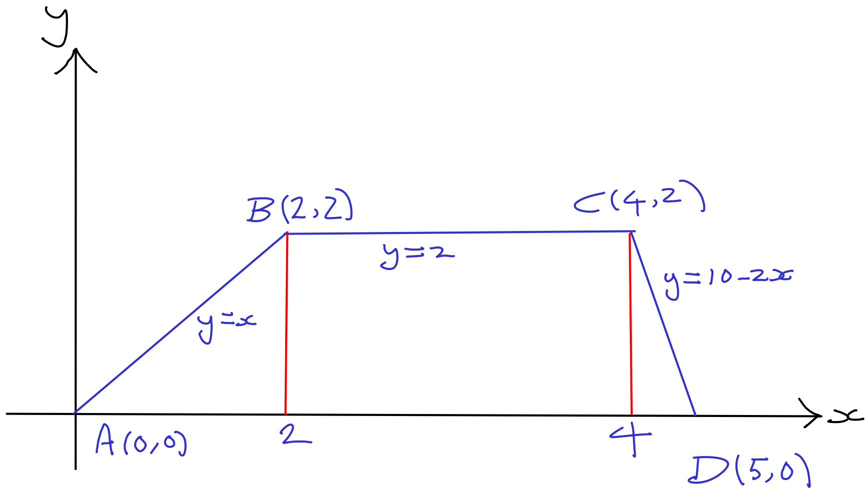
דוגמה 11.9 נוסחת גרין

חשבו את האינטגרל הבא כאשר המסלול L הוא המצולע בעל קדקודים נתונים:

$$\oint_L (xy\ dx + (x-y)\ dy)$$

$A(0,0)$, $B(2,2)$, $C(4,2)$, $D(5,0)$.

פתרון:



המסלול סגור ולכן ניתן להשתמש בנוסחת גרין (כלל 11.10):

$$I=\oint_L (Pdx+Qdy)=\iint_D dx\ dy\ \left(Q'_x-P'_y\right)$$

כאן

$$P(x,y)=xy\ ,\qquad Q(x,y)=x-y\ ,\qquad Q'_x=1\ ,\qquad P'_y=x\ ,$$

ולכן

$$\begin{aligned}
I=&\int_0^2 dx\int_0^x dy\,(1-x)+\int_2^4 dx\int_0^2 dy\,(1-x)+\int_4^5 dx\int_0^{-2x+10} dy\,(1-x)\\
=&\int_0^2 dx\ x\,(1-x)+\int_2^4 dx\ 2\,(1-x)+\int_4^5 dx\ \ (1-x)\,(-2x+10)\\
=&\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\left[2x-x^2\right]_2^4+\ \left[10x-\frac{11x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}\right]_4^5\\
=&4-\frac{8}{3}+(8-16-4+4)+\left(-\frac{10}{3}\right)\\
=&2-\frac{8}{3}+(8-16-4+4)+\left(-\frac{10}{3}\right)\\
=&-12\ .
\end{aligned}$$

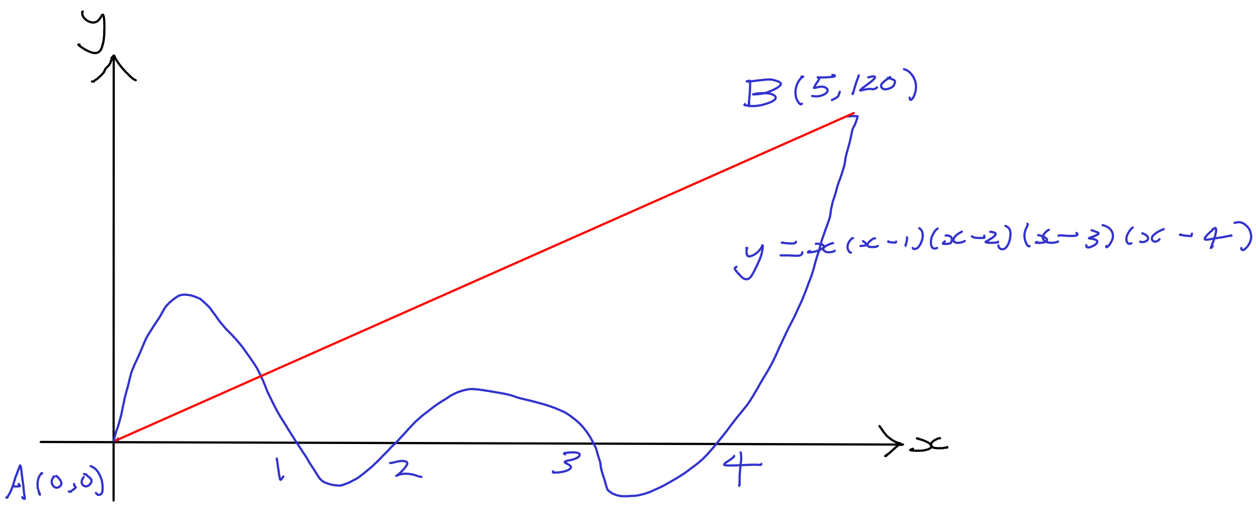
דוגמה 11.10 אי-תלות של אינטגרל קווי במסלול

חשבו את האינטגרל

$$\int_L ((2x-y)dx+(3y-x)dy)$$

עבור המסלול L הקטע של העקום $y=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ בין הנקודות $A(0,0)$, $B(5,120)$.

פתרון:



האינטגרל הוא

$$\int\limits_L (P(x,y)dx + Q(x,y)dy)$$

כאשר

$$P(x,y) = 2x - y \ , \qquad Q(x,y) = 3y - x \ .$$

שים לב:

$$P'_y = Q'_x = -1$$

ולפיו מותר להשתמש בכלל 11.11, האורם כי קיימת פונקציה $U(x,y)$ כך ש-

$$dU(x,y) = P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy$$

והאינטגרל אינו תלוי בהמסלול אלא רק על הנקודה התחלתי $A(0,0)$ והנקודה הסופי $B(5,120)$. הפונקציה $U(x,y)$ הינה

$$U(x,y) = \int dx\ P(x,y) = \int dx\ (2x-y) = x^2 - xy + p(y)$$

כאשר $p(y)$ פונקציה התלוי רק על המשתנה y ו-

$$U(x,y) = \int dy\ Q(x,y) = \int dy\ (3y-x) = \frac{3y^2}{2} - xy + q(x)$$

כאשר $q(x)$ פונקציה התלוי רק על המשתנה x. נשוואה אותן ונקבל

$$U(x,y) = x^2 + \frac{3y^2}{2} - xy \ .$$

לכן לפי כלל 11.11,

$$\int\limits_L (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \int\limits_{AB} dU(x,y) = U(B) - U(A) = 5^2 + \frac{3 \cdot 120^2}{2} - 5 \cdot 120 = 21025 \ .$$

דוגמה 11.11 נוסחת גרין

חשבו את האינטגרל

$$\oint_L ((x+y)\ dx + (x-y)\ dy)$$

לפי המסלול L הניתן ע"י

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ .$$

פתרון:

המסלול סגור ולכן ניתן להשתמש בנוסחת גרין (כלל 11.10) האומר כי

$$I=\oint_L (P\ dx + Q\ dy) = \iint_D dx\ dy\ \left(Q'_x - P'_y\right)$$

כאן

$$P(x,y)=x+y\ ,\qquad Q(x,y)=x-y\ ,\qquad \Rightarrow\quad Q'_x=1\ ,\qquad P'_y=1\ .$$

ולכן

$$I=\iint_D\ dx\ dy\ (1-1)=0.$$

דוגמה 11.12 אינטגרל הקווי מסוג שני

חשבו את האינטגרל

$$\oint_L (xy\ dx + (x-y)\ dy)$$

לפי המסלול L הניתן ע"י

$$x=a\cdot\cos t\ ,\quad y=b\cdot\sin\ t$$

בכיוון נגד השעון.

פתרון:

מתקבלים המסלול הסגור ע"י הטווח

$$0\le t\le 2\pi$$

כך שלפי כלל 11.7,

$$
\begin{aligned}
I =& \oint\limits_L \left(xy\ dx + (x-y)\ dy\right) \\
=& \int_0^{2\pi} dt \left(x(t)y(t)\ \dot{x} + (x(t)-y(t))\dot{y}\right) \\
=& \int_0^{2\pi} dt \left(-a^2 b\ \cos t \cdot \sin^2 t + (a\cdot\cos t - b\cdot\sin t) b\cdot\cos t\right) \\
=& \int_0^{2\pi} dt \left(-a^2 b\ \cos t \cdot \sin^2 t + ab\cdot\cos^2 t - b^2\cdot\sin t\cdot\cos t\right) \\
=& \int_0^{2\pi} dt \left(-a^2 b\ \cos t \cdot \sin^2 t + ab\cdot\frac{1}{2}\left(1+\cos 2t\right) - b^2\cdot\sin t\cdot\cos t\right) \\
=& \left[-a^2 b\,\frac{\sin^3 t}{3} + \frac{abt}{2} - \frac{ab}{4}\sin 2t - \frac{b^2}{2}\cdot\sin^2 t\right]_0^{2\pi} \\
=& \pi ab\ .
\end{aligned}
$$