חישוביות וסיבוכיות

תוכן העניינים

1 מכונות טיורינג **2**
הגדרה היוריסטית של מכונת טיורינג 2
הגדרה פורמלית של מכונת טיורינג 6
טבלת המעברים 19
חישוב פונקציות 23

2 מכונות טיורינג מרובת סרטים **27**

3 מכונות טיורינג מרובת סרטים **30**
מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה היוריסטית 30
מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה פורמלית 30
קונפיגורציה של מטמ"ס 31
שקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד 33

4 מכונות טיורינג מרובת סרטים **38**
הגדרה של מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית 38
עץ החישוב של מ"ט א"ד 40
שקילות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטית 41
השפות R ו- RE 43

שיעור 1
מכונות טיורינג

1.1 הגדרה היוריסטית של מכונת טיורינג

הגדרה 1.1 מכונת טיורינג (הגדרה היוריסטית)

הקלט והסרט

מכונת טיורינג (מ"ט) קורא קלט.
הקלט נמצא על סרט אינסופי.
התווים של הקלט נמצאים במשבצות של הסרט.
במכונת טיורינג אנחנו מניחים שהסרט אינסופי לשני הכיוונים.
משמאל לתחילת הקלט לא כתוב כלום, ומימין לסוף הקלט לא כתוב כלום.
אנחנו מניחים שיש תו הרווח ␣ שנמצא בכל משבצות שאינן משבצות קלט, משמאל לקלט ומימין לקלט.

···	␣	␣	a	b	b	b	a	a	␣	␣	␣	···

הראש

במצב ההתחלתי הראש בקצה השמאלי של הקלט.

···	␣	␣	a	b	b	b	a	a	␣	␣	␣	···
			↑									

הראש יכול לזוז ימינה על הסרט וגם שמאלה על הסרט.
הראש יכול לקרוא את התוכן שנמצא במשבצת הסרט שבה הוא נמצא.
הראש יכול לכתוב על המשבצת הסרט שבה הוא נמצא. הכתיבה נעשית תמיד במיקום הראש.

המצבים

בהתחלה הראש בקצה השמאלי של הקלט והמ"ט במצב התחלתי q_0.
הראש קורא את התו במשבצת הראשונה וכותב עליה לפי הפונקציית המעברים (שנגדיר בהגדרה 1.2). כעת המ"ט במצב חדש q_1.
הראש קורא את התו במשבצת השניה וכותב עליה לפי הפונקציית המעברים ואז המ"ט במצב חדש q_2.
התהליך ממשיך עד שהראש מגיע לקצה הימיני של הקלט, ואז הוא ממשיך לקרוא ולכתוב על כל משבצת בכיוון שמאלה, עד שהוא מגיע לקצה השמאלי.
במ"ט ניתן לטייל על הקלט שוב ושוב לשני הכיוונים.
התהליך מסתיים כאשר המ"ט מגיע למצב מקבל q_{acc} או מצב דוחה q_{rej}.

1.1 דוגמה

נבנה מכונת טיורינג אשר מקבלת מילה אם היא בשפה

$$L = \left\{ w \in \{a,b\}^* \middle| \#a_w = \#b_w \right\} \ .$$

ז"א השפה המורכבת מכל המילים עם מספר שווה אותיות a ו b.

<u>תיאור מילולי</u>

- נסרוק את הקלט משמאל לימין ולכל a נחשף b תואם.
- נניח שראינו במשבצת הראשונה a, נסמן עליה ✓.
- עכשיו נסרוק את יתרת הקלט ונחפש אות b מתאימה ל a שכבר ראינו.
  - אם לא מצאנו ,המילה לא בשפה.
  - אם מצאנו ,נסמן את ה- b התואם ב- ✓.
- נחזור לתחילת הקלט ונעשה סריקה נוספת משמאל לימין.
- במשבצת הראשונה יש ✓ מסיבוב הראשון. הראש פשוט כותב עליה ✓, כלומר משבצת ראשונה נשארת ללא שינוי.
- הראש זז שמאלה למשבצת הבאה. נניח שמצאנו b. נסמן במשבצת ✓.
- נסרוק את יתרת הקלט ונחפש אות a מתאימה ל b שכבר ראינו.
  - אם לא מצאנו ,המילה לא בשפה.
  - אם מצאנו ,נסמן את ה- a התואם ב- ✓.
  - בכל משבצת שיש ✓ כותבים עליה ✓ וממשיכים למשבצת הבאה הימני.
- נחזור לתחילת הקלט ונעשה סריקה נוספת משמאל לימין.
- חוזרים על התהליך שוב ושוב.
  - אם היה מעבר שבו לא מצאנו אות תואמת, המילה לא בשפה.
  - אם כולן היו תואמות ועשינו מעבר שבו הגכנו מקצה לקצה, מרווח לרווח, בלי לראות שום אות, אז המילה בשפה.

כעת נתאר את המ"ט באמצעות המצבי המכונה והפונקציית המעברים.

<u>מצבי המכונה</u>

המצב ההתחלתי. אליו נחזור אחרי כל סבב התאמה של זוג אותיות.	q_0
מצב שבו ראינו a ומחפשים b תואם.	q_a
מצב שבו ראינו b ומחפשים a תואם.	q_b
מצב שנשתמש בו כדי לחזור לקצה השמאלי של הקלט ולהתחיל את הסריקה הבאה (סבב ההתאמה הבא).	back
מצב מקבל.	acc
מצב דוחה.	rej

- כאשר המכונה מגיעה למצב acc היא עוצרת.

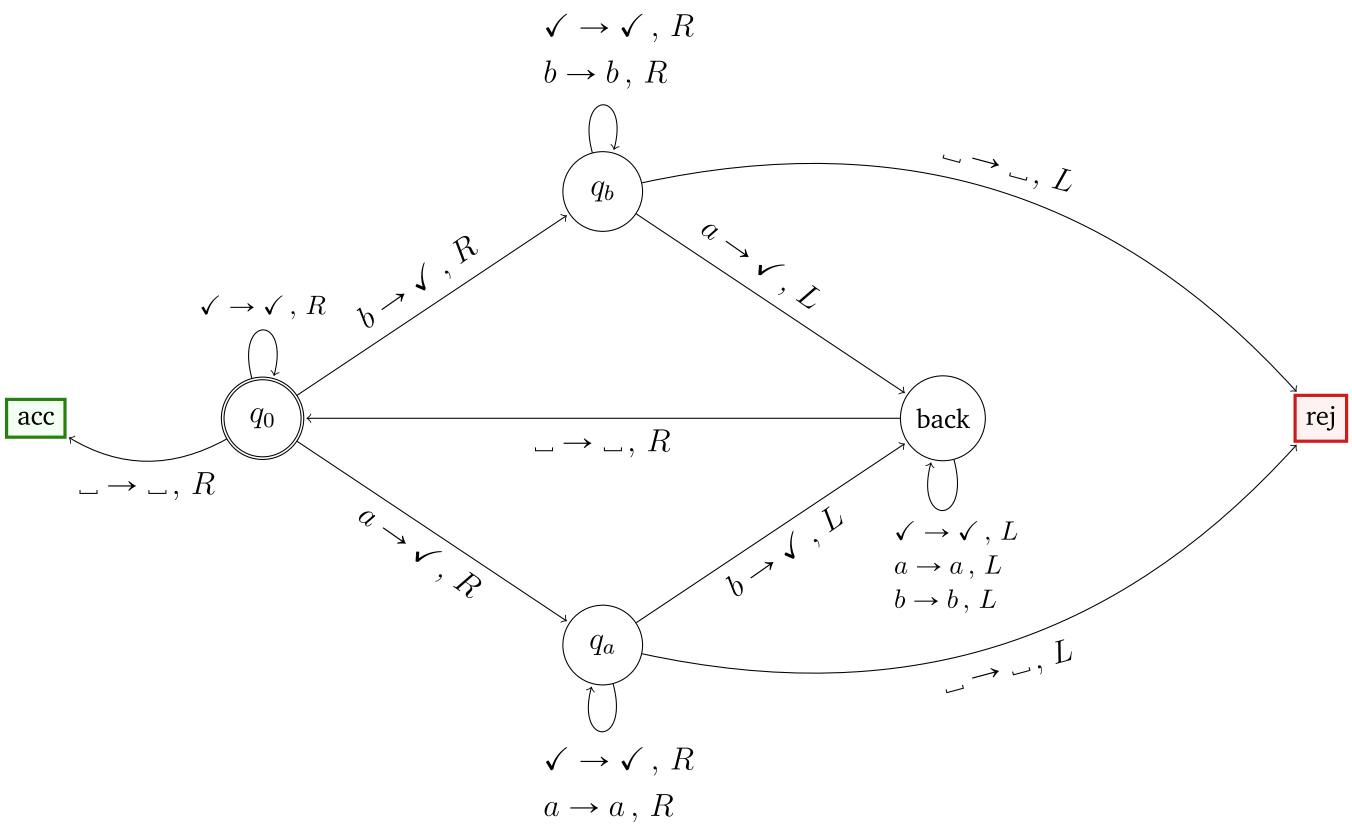
  עצירה במצב acc משמעותה קבלה.

- כאשר המכונה מגיעה למצב rej היא עוצרת.

  עצירה במצב rej משמעותה דחייה.
- רק בשני מצבים אלו המכונה מפסיקה.

  בכל מצב אחר המכונה בהכרח ממשיכה.

<u>**תרשים מצבים**</u>



- בכל צעד המכונה מבצעת שתי פעולות:
  1. כותבת אות במיקום הראש
  2. זזה צעד אחד שמאלה או צעד אחד ימינה.
- בכל צעד המכונה יכולה לעבור למצב אחר או להישאר באותו מצב.

דוגמה 1.2

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה abbbaa.

פתרון:

␣	q_0	a	b	b	b	a	a	␣
␣	✓	q_a	b	b	b	a	a	␣
␣	back	✓	✓	b	b	a	a	␣
back	␣	✓	✓	b	b	a	a	␣
␣	q_0	✓	✓	b	b	a	a	␣

␣	✓	q_0	✓	b	b	a	a	␣
␣	✓	✓	q_0	b	b	a	a	␣
␣	✓	✓	✓	q_b	b	a	a	␣
␣	✓	✓	✓	b	q_b	a	a	␣
␣	✓	✓	✓	back	b	✓	a	␣
␣	✓	✓	back	✓	b	✓	a	␣
␣	✓	back	✓	✓	b	✓	a	␣
␣	back	✓	✓	✓	b	✓	a	␣
back	␣	✓	✓	✓	b	✓	a	␣
␣	q_0	✓	✓	✓	b	✓	a	␣
␣	✓	q_0	✓	✓	b	✓	a	␣
␣	✓	✓	q_0	✓	b	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	q_0	b	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	✓	q_b	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	✓	✓	q_b	a	␣
␣	✓	✓	✓	✓	back	✓	✓	␣
␣	✓	✓	✓	back	✓	✓	✓	␣
␣	✓	✓	back	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	back	✓	✓	✓	✓	✓	␣
␣	back	✓	✓	✓	✓	✓	✓	␣
back	␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	␣
␣	q_0	✓	✓	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	q_0	✓	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	✓	q_0	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	✓	✓	q_0	✓	✓	✓	␣
␣	✓	✓	✓	✓	q_0	✓	✓	␣
␣	✓	✓	✓	✓	✓	q_0	✓	␣
␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	q_0	␣
␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	␣	acc

דוגמה 1.3

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה aab.

פתרון:

␣	q_0	a	a	b	␣
␣	✓	q_a	a	b	␣
␣	✓	a	q_a	b	␣
␣	✓	back	a	✓	␣
␣	back	✓	a	✓	␣
back	␣	✓	a	✓	␣
␣	q_0	✓	a	✓	␣
␣	✓	q_0	a	✓	␣
␣	✓	✓	q_a	✓	␣
␣	✓	✓	✓	q_a	␣
␣	✓	✓	rej	✓	␣

1.2 הגדרה פורמלית של מכונת טיורינג

הגדרה 1.2 מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעיה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$$

כאשר:

Q	קבוצת מצבים סופיות	
Σ	א"ב קלט סופי	$\sqcup \notin \Sigma$
Γ	א"ב סרט סופי	$\Sigma \subseteq \Gamma\,, \sqcup \in \Gamma$ ref
δ	פונקציית המעברים	$\delta : (Q \backslash \{\text{rej}, \text{acc}\} \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$
q_0	מצב התחלתי	
acc	מצב מקבל	
rej	מצב דוחה	

דוגמה 1.4 (המשך דוגמה 1.1)

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$$

$$Q = \{q_0, q_a, q_b, \text{back}, \text{rej}, \text{acc}\}\ .$$

$$\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}\ , \qquad \Gamma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \sqcup, \checkmark\}$$

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, \mathtt{a}) &= (q_a, \checkmark, R)\ ,\\
\delta(q_0, \mathtt{b}) &= (q_b, \checkmark, R)\ ,\\
\delta(q_0, \sqcup) &= (\text{acc}, \sqcup, R)\ ,\\
\delta(q_a, \checkmark) &= (q_a, \checkmark, R)\ ,\\
\delta(q_a, \mathtt{a}) &= (q_a, \mathtt{a}, R)\ ,\\
\delta(q_a, \mathtt{b}) &= (\text{back}, \checkmark, L)\ ,\\
\delta(q_b, \checkmark) &= (q_b, \checkmark, R)\ ,\\
\delta(q_b, \mathtt{b}) &= (q_a, \mathtt{b}, R)\ ,\\
\delta(q_b, \mathtt{a}) &= (\text{back}, \checkmark, L)\ ,
\end{aligned}$$

קל יותר לרשום את פונקציית המעבירים δ כטבלה:

$Q \backslash \Gamma$	a	b	$\sqcup$	$\checkmark$
q_0	$(q_a, \checkmark, R)$	$(q_b, \checkmark, R)$	$(\text{acc}, \sqcup, R)$	$(q_0, \checkmark, R)$
q_a	$(q_a, \mathtt{a}, R)$	$(\text{back}, \checkmark, L)$	$(\text{rej}, \sqcup, L)$	$(q_a, \checkmark, R)$
q_b	$(\text{back}, \checkmark, L)$	$(q_b, \mathtt{b}, R)$	$(\text{rej}, \sqcup, L)$	$(q_b, \checkmark, R)$
back	$(\text{back}, \mathtt{a}, L)$	$(\text{back}, \mathtt{b}, L)$	$(q_0, \sqcup, R)$	$(\text{back}, \checkmark, L)$

הגדרה 1.3 קונפיגורציה

תהי $M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \mathrm{acc}, \mathrm{rej})$ מכונת טיורינג.
קונפיגורציה של M הינה מחרוזת

$$\mu q \sigma \nu$$

כאשר משמעות:

$$\mu, \nu \in \Gamma^* \ , \qquad \sigma \in \Gamma \ , \qquad q \in Q \ .$$

q מצב המכונה,
σ הסימון במיקום הראש
μ תוכן הסרט משמאל לראש,
ν תוכן הסרט מימין לראש.

דוגמה 1.5 (המשך של דוגמה 1.3)

μ	q	σ	ν
$\sqcup$	q_0	a	a b $\sqcup$
$\sqcup\checkmark$	q_a	a	b $\sqcup$
$\sqcup$ $\checkmark$ a	q_a	b	$\sqcup$
$\sqcup$ $\checkmark$	back	a	$\checkmark$ $\sqcup$
$\sqcup$	back	$\checkmark$	a $\checkmark$ $\sqcup$
$\sqcup$	back	$\sqcup$	$\checkmark$ a $\checkmark$ $\sqcup$
$\sqcup$	q_0	$\checkmark$	a $\checkmark$ $\sqcup$
$\sqcup$ $\checkmark$	q_0	a	$\checkmark$ $\sqcup$
$\sqcup$ $\checkmark$ $\checkmark$	q_a	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$ $\checkmark$ $\checkmark$ $\checkmark$	q_a	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup$ $\checkmark$ $\checkmark$	rej	$\checkmark$	$\sqcup$

דוגמה 1.6

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת כל מילה בשפה

$$L = \{a^n \,|\, n = 2^k \;,\; k \in \mathbb{N}\}$$

ז"א מילים בעלי מספר אותיות a אשר חזקה של 2.

פתרון:
ראשית נשים לב:

$n = 2^k$ אם ורק אם אנחנו מקבלים 1 אחרי חילוק של n ב- 2 בדיוק k פעמים, כלומר $\frac{n}{2^k} = 1$.

לאור המשפט הזה נבנה אלגוריתם אשר מחלק את מספר האותיות במילה ב- 2 בצורה איטרטיבית. אם אחרי סבב מסויים נקבל מספר אי-זוגי גדול מ- 1 אז מספר האותיות a במילה לא יכול להיות חזקה של 2. אם אחרי כל הסבבים לא קיבלנו מספר אי-זוגי גדול מ-1 אז מובטח לנו שיש מספר אותיות a אשר חזקה של 2.

- נתון הקלט

$\sqcup$	$\sqcup$	a	a	a	a	a	a	a	a	$\sqcup$	$\sqcup$
		$\uparrow$									

נעבר על סרט הקלט. משמאל לימין.

- מבצעים מחקיה לסירוגין של האות a כלומר אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר וכן הלאה.

$\sqcup$	$\sqcup$	$\checkmark$	a	$\checkmark$	a	$\checkmark$	a	$\checkmark$	a	$\sqcup$	$\sqcup$
									$\uparrow$		

אם אחרי סבב הראשון

* יש $\checkmark$ בתו האחרון $\Leftarrow$ קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 $\Leftarrow$ אין חזקה של 2 אותיות a במילה.
* יש a בתו האחרון $\Leftarrow$ קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ונמשיך לסבב הבא.

- הראש חוזר לתו הראשון של הקלט

␣	␣	✓	a	✓	a	✓	a	✓	a	␣	␣
		↑									

- בסבב הבא חוזרים על התהליך של מחיקה לסירוגין של האות a (אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר)

␣	␣	✓	✓	✓	a	✓	✓	✓	a	␣	␣
									↑		

אם אחרי סבב השני

* יש ✓ בתו האחרון ⇐ קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ⇐ אין חזקה של 2 אותיות a במילה.
* יש a בתו האחרון ⇐ קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ונמשיך לסבב הבא.

- הראש חוזר לתו הראשון של הקלט

␣	␣	✓	✓	✓	a	✓	✓	✓	a	␣	␣
		↑									

- בסבב הבא חוזרים על התהליך של מחיקה לסירוגין של האות a (אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר)

␣	␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	a	␣	␣
									↑		

אם אחרי סבב השלישי

* יש ✓ בתו האחרון ⇐ קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ⇐ אין חזקה של 2 אותיות a במילה.
* יש a בתו האחרון ⇐ קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ונמשיך לסבב הבא.

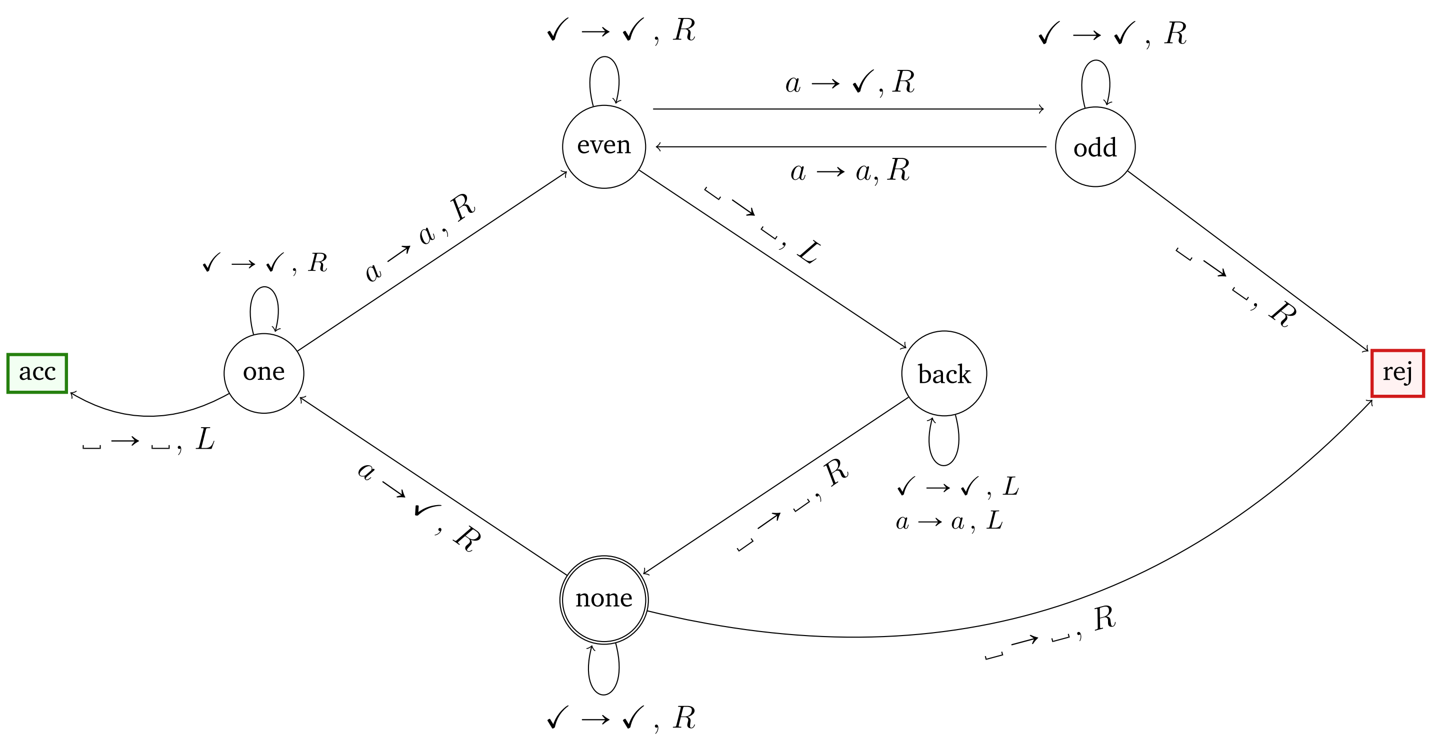
- הראש חוזר לתו הראשון של הקלט.

בסבב האחרון נשאר רק אות a אחת.

לכן לפי המשפט למעלה מובטח לנו כי המילה מורכבת ממספר אותיות a אשר חזקה של 2.

␣	␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	a	␣	␣
		↑									

המכונת טיורינג אשר מקבלת מילים בשפה שעובדת לפי האלגוריתם המתואר למעלה מתואר בתרשים למטה.



המצבים:

מצב none: מצב התחלתי. עדיין לא קראנו a בסבב סריקה זה.
מצב one: קראנו a בודד.
מצב even: קראנו מספר זוגי של a .
מצב odd: קראנו מספר אי-זוגי של a .
מצב back: חזרה שלמאלה.

דוגמה 1.7

בדקו אם המילה

aaaa

מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.6.

פתרון:

␣	none	a	a	a	a	␣
␣	✓	one	a	a	a	␣
␣	✓	a	even	a	a	␣
␣	✓	a	✓	odd	a	␣
␣	✓	a	✓	a	even	␣
␣	✓	a	✓	back	a	␣
␣	✓	a	back	✓	a	␣
␣	✓	back	a	✓	a	␣
␣	back	✓	a	✓	a	␣
back	␣	✓	a	✓	a	␣
␣	none	✓	a	✓	a	␣
␣	✓	none	a	✓	a	␣

␣	✓	✓	one	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	one	a	␣
␣	✓	✓	✓	a	even	␣
␣	✓	✓	✓	back	a	␣
␣	✓	✓	back	✓	a	␣
␣	✓	back	✓	✓	a	␣
␣	back	✓	✓	✓	a	␣
back	␣	✓	✓	✓	a	␣
␣	none	✓	✓	✓	a	␣
␣	✓	none	✓	✓	a	␣
␣	✓	✓	none	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	none	a	␣
␣	✓	✓	✓	✓	one	␣
␣	✓	✓	✓	acc	✓	␣

μ	q	σ	ν
␣	none	a	a a a ␣
␣ ✓	one	a	a a ␣
␣ ✓ a	even	a	a ␣
␣ ✓ a ✓	odd	a	␣
␣ ✓ a ✓ a	even	␣	␣
␣ ✓ a ✓	back	a	␣
␣ ✓ a	back	✓	a ␣
␣ ✓	back	a	✓ a ␣
␣	back	✓	a ✓ a ␣
␣	back	␣	✓ a ✓ a ␣
␣	none	✓	a ✓ a ␣
␣✓	none	a	✓ a ␣
␣✓✓	one	✓	a ␣
␣✓✓✓	one	a	␣
␣✓✓✓ a	even	␣	␣
␣✓✓✓	back	a	␣
␣✓✓	back	✓ a	␣
␣✓	back	✓	✓ a ␣
␣	back	✓	✓✓ a ␣
␣	back	␣	✓✓✓ a ␣
␣	none	✓	✓✓ a ␣
␣✓	none	✓	✓ a ␣
␣✓✓	none	✓	a ␣
␣✓✓✓	none	a	␣
␣✓✓✓✓	one	␣	␣
␣✓✓✓	acc	✓	␣

דוגמה 1.8

בדקו אם המילה

aaa

מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.6.

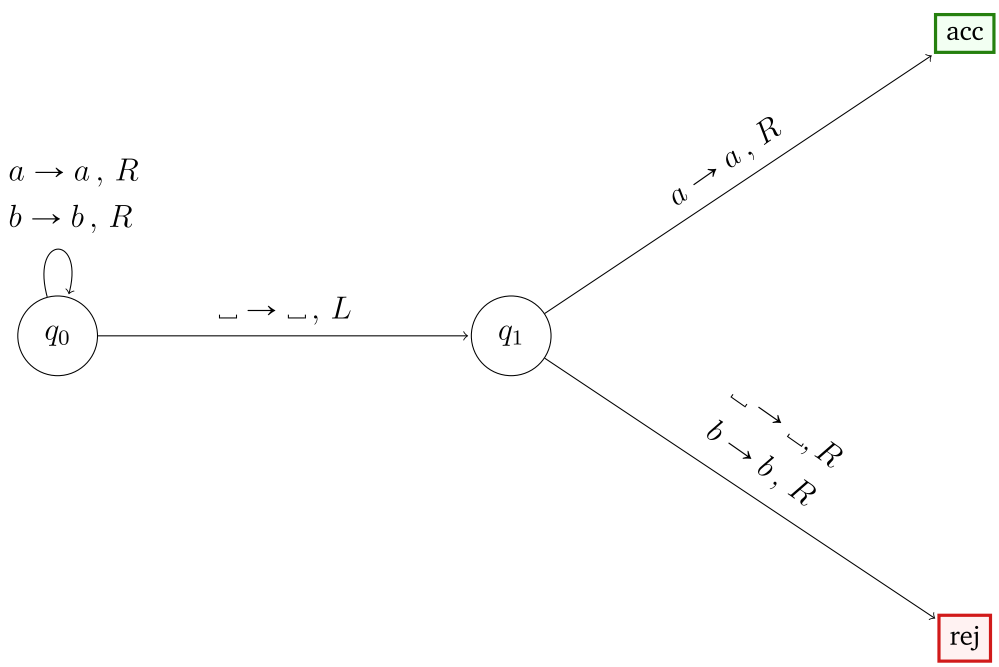
פתרון:

␣	none	a	a	a	␣
␣	✓	one	a	a	␣
␣	✓	a	even	a	␣
␣	✓	a	✓	odd	␣
␣	✓	a	✓	␣	rej

μ	q	σ	ν
␣	none	a	aa ␣
␣ ✓	one	a	a ␣
␣ ✓ a	even	a	␣
␣ ✓ a ✓	odd	␣	␣
␣ ✓ a ✓ ␣	rej	␣	␣

דוגמה 1.9

מהי שפת המכונה:



פתרון:

תיאור מילולי:

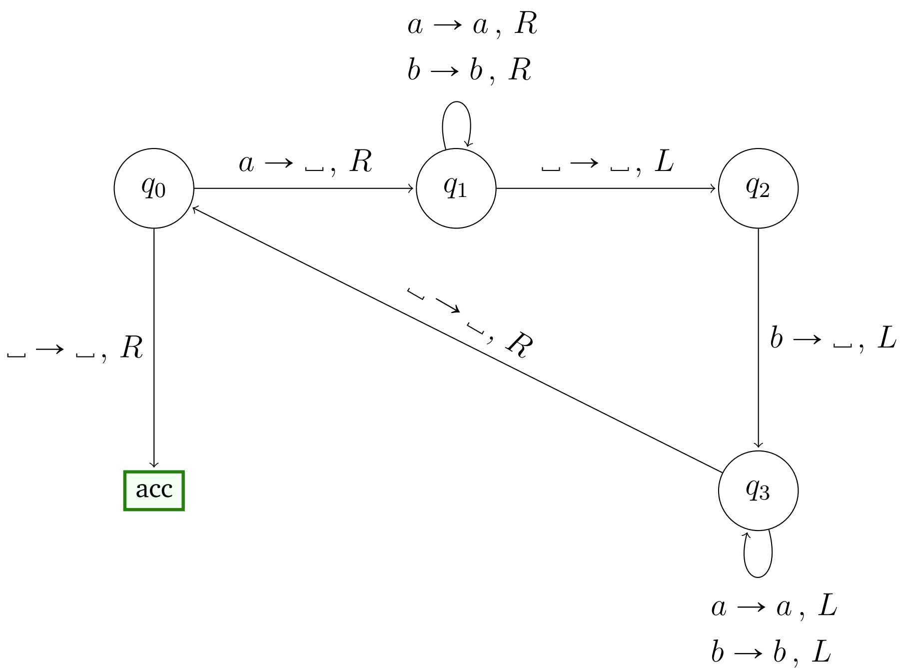
- במצב התחלתי q_0:
  * אם אנחנו רואים a, עוברים למשבצת הבאה לימין הראש.
  * אם אנחנו רואים b, עוברים למשבצת הבהאה לשמאל הראש.

- ממשיכים כך עד שנגיע לתו רווח, כלומר לסוף המילה, ואז עוברים למשבצת לשמאל הראש, כלומר לתו האחרון של המילה.
  - אם אנחנו רואים a, המילה מתקבלת. (ז"א התו האחרון הינו a.)
  - אם אנחנו רואים b, המילה נדחית. (ז"א התו האחרון הינו b.)
  - אם אנחנו רואים תו-רווח המילה נדחית. (ז"א המילה הינה ריקה.)

תשובה סופית: המכונה מקבלת שפת המילים המסתיימות באות a.

דוגמה 1.10

מהי שפת המכונה:



פתרון:

תיאור מילולי:

- במצב התחלתי q_0:
  - * אם אנחנו רואים b, המילה נדחית.
  - * אם אנחנו רואים ␣, המילה מתקבלת.
  - * אם אנחנו רואים a, כותבים עליה ␣ ועוברים למשבצת הבאה לימין הראש, והמ"ט עוברת למצס q_1.
- במצב q_1 אנחנו ראינו a וכתבנו עליה ␣ .
  - * אם אנחנו רואים במשבצת הבאה a או b, ממשיכים למשבצת הבאה לימין והמ"ט נשארת במצב q_1.
  - * אם אנחנו רואים תו רווח (כלומר הגענו לסוף המילה) הראש זז למשבצת השמאלי, כלומר לאות האחרונה של המילה והמ"ט עוברת למצב q_2.
- במצב q_2 ראינו a בתו הראשון, כתבנו עליה ␣ והראש קורא התו האחרון.
  - * אם אנחנו רואים a המילה נדחית.
  - * אם אנחנו רואים ␣, המילה נדחית.
  - * אם אנחנו רואים b כותבים עליה ␣ והמ"ט עוברת למצב q_3.
- במצב q_3 קראנו a בתו הראשון ומחקנו אותה, קראנו b ומחקנו אותה.
- הראש זז משבצת אחת שמאלה עד שיגיע לתו הרשאון ומ"ט חוזרת למצב התחלת q_0.

- המ"ט באופן איטרטיבי, עוברת על הקלט ובכל מעבר:
  - אם יש a בתחילת המילה מורידה אותה ומחליפה אותה עם ␣, אחרת המילה נדחית,
  - אם יש b בסופה של המילה מורידה אותה ומחליפה אותה עם ␣, אחרת המילה נדחית.
- אם לאחר מספר מעברים כאלו הסרט ריק, המ"ט מקבלת, וזה יתקיים לכל מילה ורק למילים בשפה

$$\left\{a^n b^n \middle| n \geqslant 0\right\} \ .$$

תשובה סופית: המכונה מקבלת שפת המילים

$$\left\{a^n b^n \middle| n \geqslant 0\right\} \ .$$

דוגמה 1.11

פתרון:

μ	q	σ	ν
␣ ␣	q_0	a	aaabbbb␣ ␣
␣ ␣ ␣	q_1	a	aabbbb␣ ␣
␣ ␣ ␣ a	q_1	a	abbbb␣ ␣
␣ ␣ ␣ aa	q_1	a	bbbb␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaa	q_1	b	bbb␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaab	q_1	b	bb␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaabb	q_1	b	b␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaabbb	q_1	b	␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaabbbb	q_1	␣	␣
␣ ␣ ␣ aaabbb	q_2	b	␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaabb	q_3	b	␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaab	q_3	b	b␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaa	q_3	b	bb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ aa	q_3	a	bbb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ a	q_3	a	abbb␣␣␣
␣␣␣	q_3	a	aabbb␣␣␣
␣␣	q_3	␣	aaabbb␣␣␣
␣ ␣ ␣	q_0	a	aabbb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣	q_1	a	abbb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ a	q_1	a	bbb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aa	q_1	b	bb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aab	q_1	b	b␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aabb	q_1	b	␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aabbb	q_1	␣	␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aabb	q_2	b	␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aab	q_3	b	␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aa	q_3	b	b␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ a	q_3	a	bb␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣	q_3	a	abb␣ ␣ ␣ ␣

$\sqcup\sqcup\sqcup$	q_3	$\sqcup$	$\text{aabb}\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$	q_0	a	$\text{abb}\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$	q_1	a	$\text{bb}\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\text{a}$	q_1	b	$\text{b}\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\text{ab}$	q_1	b	$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\text{abb}$	q_1	$\sqcup$	$\sqcup\sqcup\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\text{ab}$	q_2	b	$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\text{a}$	q_3	b	$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$	q_3	a	$\text{b}\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$	q_3	$\sqcup$	$\text{ab}\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$	q_0	a	$\text{b}\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$	q_1	b	$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\text{b}$	q_1	$\sqcup$	$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$	q_2	b	$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$	q_3	$\sqcup$	$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$	q_0	$\sqcup$	$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$

הגדרה 1.4 גרירה בצעד אחד

תהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,\text{acc},\text{rej})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M.
נסמן

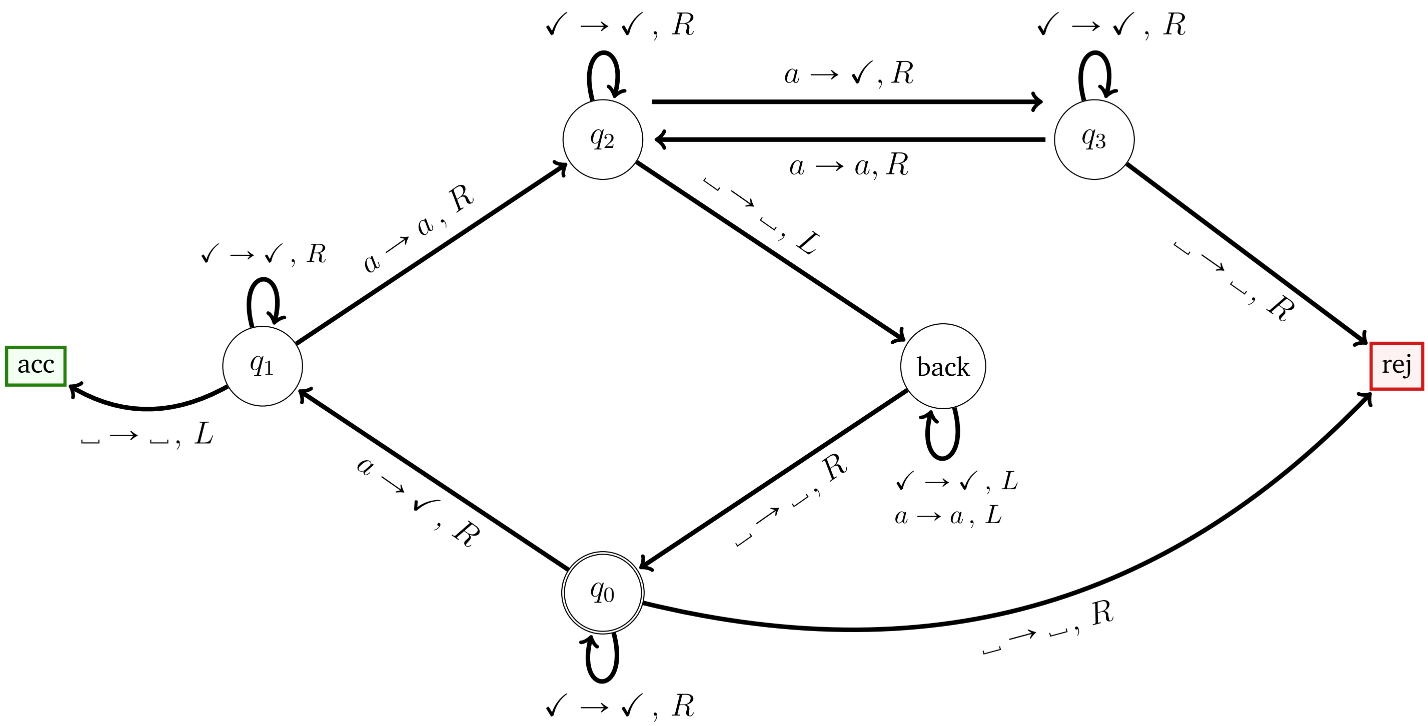
$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם כשנמצאים ב- c_1 עוברים ל- c_2 בצעד בודד.

דוגמה 1.12 (המשך של דוגמה 1.6)

במכונת טיורינג שמתואר בתרשים דמטה (אשר שווה למ"ט בדוגמה 1.6 רק עם סימנוים שונים למצבים) מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \ \vdash_M \ \checkmark\checkmark q_1 \checkmark a$$



הגדרה 1.5 גרירה בכללי

תהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,\text{acc},\text{rej})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M. נסמן

$$c_1 \vdash^*_M c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם ניתן לעבור מ- c_1 ל- c_2 ב- 0 או יותר צעדים.

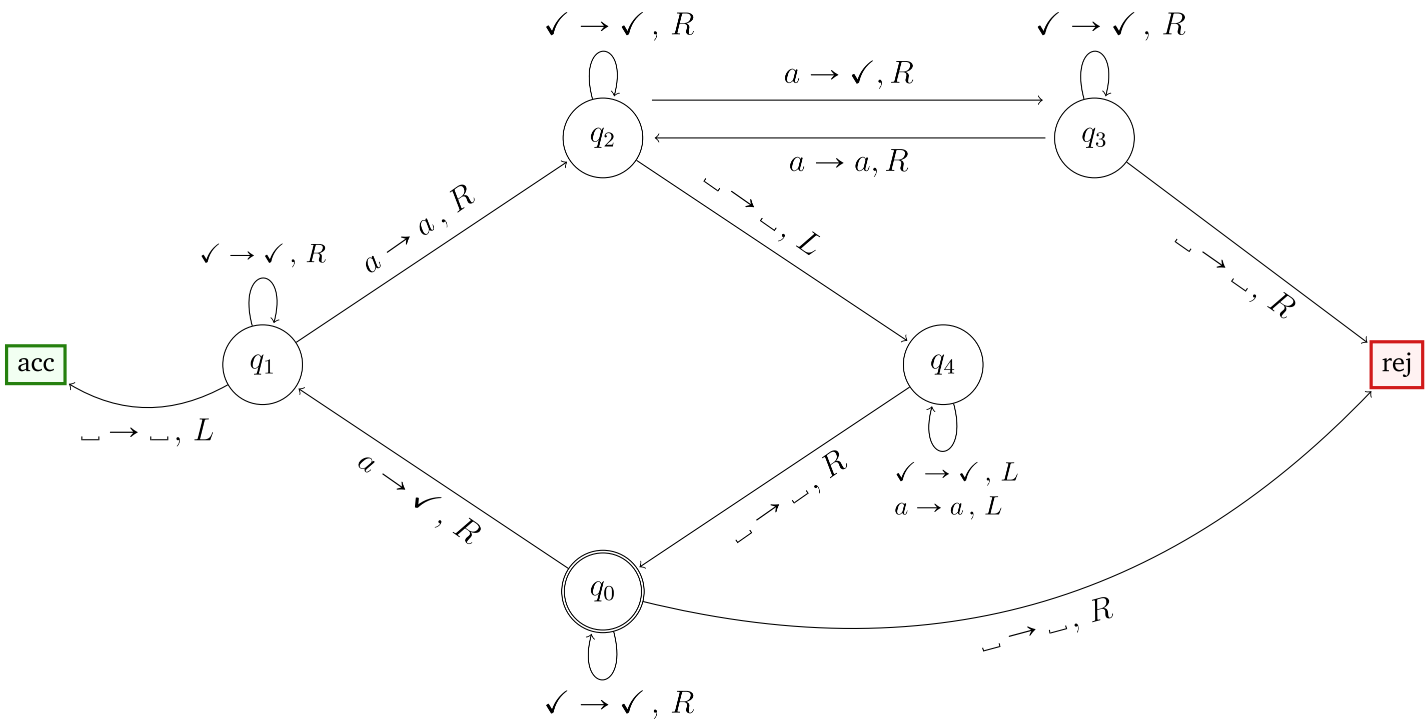
דוגמה 1.13 (המשך של דוגמה 1.6)

במכונת טיורינג שמתואר בתרשים דמטה (אשר שווה למ"ט בדוגמה 1.6 רק עם סימנים שונים למצבים) מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \;\vdash^*_M\; \checkmark\checkmark\checkmark q_4 a$$

כי

$$\begin{aligned}
\checkmark q_0 a \checkmark a \;&\vdash_M \checkmark\checkmark q_1 \checkmark a \\
&\vdash_M \checkmark\checkmark\checkmark q_1 a \\
&\vdash_M \checkmark\checkmark\checkmark a q_2 \sqcup \\
&\vdash_M \checkmark\checkmark\checkmark q_4 a \ .
\end{aligned}$$



הגדרה 1.6 קבלה ודחייה של מחרוזת

תהי
$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$$
מכונת טיורינג, ו-
$$w \in \Sigma^*$$
מחרוזת. אומרים כי

- M **מקבלת** את w אם
$$q_0 w \vdash_M^* u \text{ acc}\, \sigma \,\text{v}$$
עבור $\text{v}, u \in \Gamma^*, \sigma \in \Gamma$ כלשהם,
- M **דוחה** את w אם
$$q_0 w \vdash_M^* u \text{ rej } \sigma \text{ v}$$
עבור $\text{v}, u \in \Gamma^*, \sigma \in \Gamma$ כלשהם.

הגדרה 1.7 הכרעה של שפה

תהי
$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$$
מכונת טיורינג, ו-
$$L \subseteq \Sigma^*$$
שפה. אומרים כי M **מכריעה** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים

- $w \in L \Leftarrow M$ מקבלת את w.
- $w \notin L \Leftarrow M$ דוחה את w.

הגדרה 1.8 קבלה של שפה

תהי
$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}\,, \text{ rej})$$
מכונת טיורינג, ו-
$$L \subseteq \Sigma^*$$
שפה. אומרים כי M **מקבלת** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים

- אם L $w \in$ אז M מקבלת את w.
- אם L $w \notin$ אז M לא מקבלת את w.

במקרה כזה נכתוב ש-
$$L(M) = L \ .$$

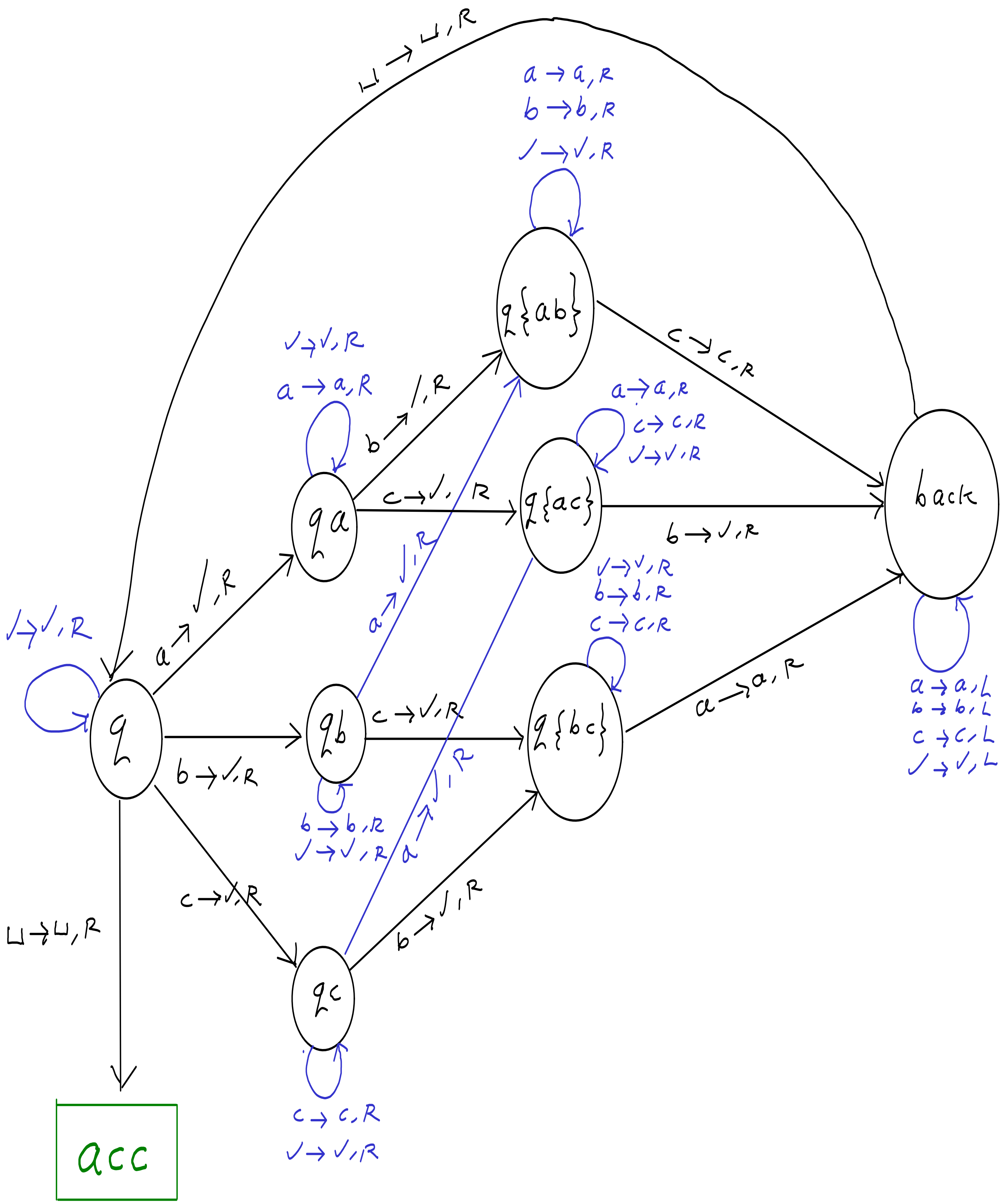
1.3 טבלת המעברים

דוגמה 1.14

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$L = \left\{ w = \{a, b, c\}^* \middle| \#a_w = \#b_w = \#c_w \right\}$$

פתרון:


q
qa
qb
qc
q{ab}
q{ac}
q{bc}
back
acc
√→√,R
a→√,R
b→√,R
c→√,R
⊔→⊔,R
a→a,R
b→b,R
c→c,R
c→c,R
b→√,R
a→a,R
a→a,L
b→b,L
c→c,L
√→√,L

תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון בסרט	מצב
$\sigma \notin S$	R	$\checkmark$	$q.\left(S \cup \{\sigma\}\right)$	σ	$q.S$
$\sigma \in S$	R		$q.S$	σ	$q.S$
	L		back	$a, b, c, \checkmark$	$q/\{a, b, c\}$
	R		acc	$\sqcup$	$q.\varnothing$
	L		back	$a, b, c, \checkmark$	back
	R		$q.\varnothing$	$\sqcup$	back

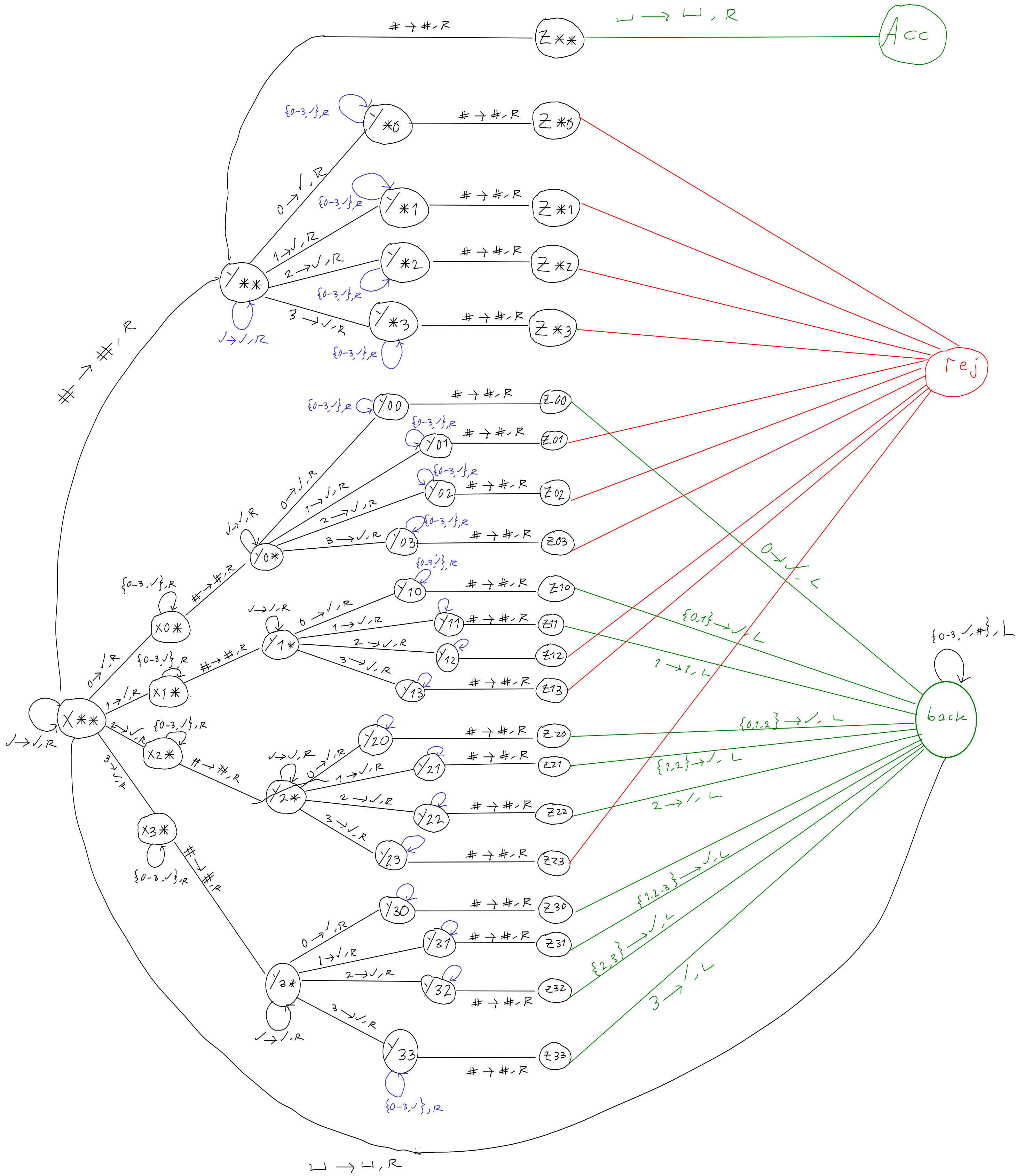
דוגמה 1.15

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$\left\{x_1 \ldots x_k \# y_1 \ldots y_k \# z_1 \ldots z_k \;\middle|\; x_i, y_i, z_i \in \{0, \ldots, 3\} \;,\; \forall i, x_i \geqslant z_i \geqslant y_i\right\}$$

פתרון:

$L = \{x_1 x_2 \# y_1 y_2 \# z_1 z_2 \mid x_i, y_i, z_i \in \{0,1,2,3\} \ \forall i \ x_i \geq z_i \geq y_i\}$



מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
$X**$	σ	$X\sigma*$	$\checkmark$	R	
$X**$	$\checkmark$	$X**$	$\checkmark$	R	
$X\sigma*$	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	$X\sigma*$		R	
$X\tau*$	#	$Y\tau*$		R	
$Y\tau*$	σ	$Y\tau\sigma$		R	
$Y\tau*$	$\checkmark$	$Y\tau*$		R	
$Y\tau\sigma$	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	$Y\tau\sigma$		R	
$Y\tau_1\tau_2$	#	$Z\tau_1\tau_2$		R	
$Z\tau_1\tau_2$	$\checkmark$	$Z\tau_1\tau_2$		R	
$Z\tau_1\tau_2$	σ	back	$\checkmark$	L	
$Z**$	$\llcorner\!\lrcorner$	acc		R	
back	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	back		L	
back	$\llcorner\!\lrcorner$	$X**$		R	

1.4 חישוב פונקציות

הגדרה 1.9 מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה f

תהי $f:\Sigma_1^*\to\Sigma_2^*$ ותהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,\text{acc},\text{rej})$ מכונת טיורינג.
אומרים כי M מחשבת את f אם:

- $\Sigma_1=\Sigma$ ו- $\Sigma_2\subset\Gamma$.
- לכל $w\in\Sigma_1^*$ מתקיים $q_0w\vdash\text{acc}f(w)$.

דוגמה 1.16 חיבור אונרי

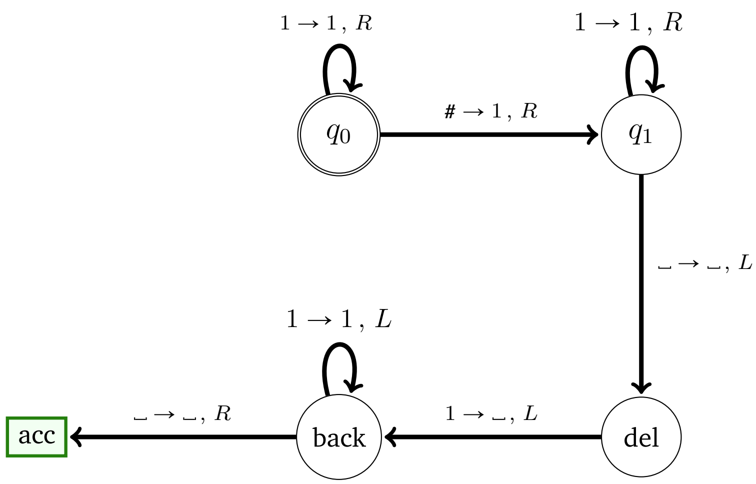
בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i\#1^j$$

ומחזירה את פלט

$$1^{i+j}\ .$$

פתרון:



דוגמה 1.17 כפל אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

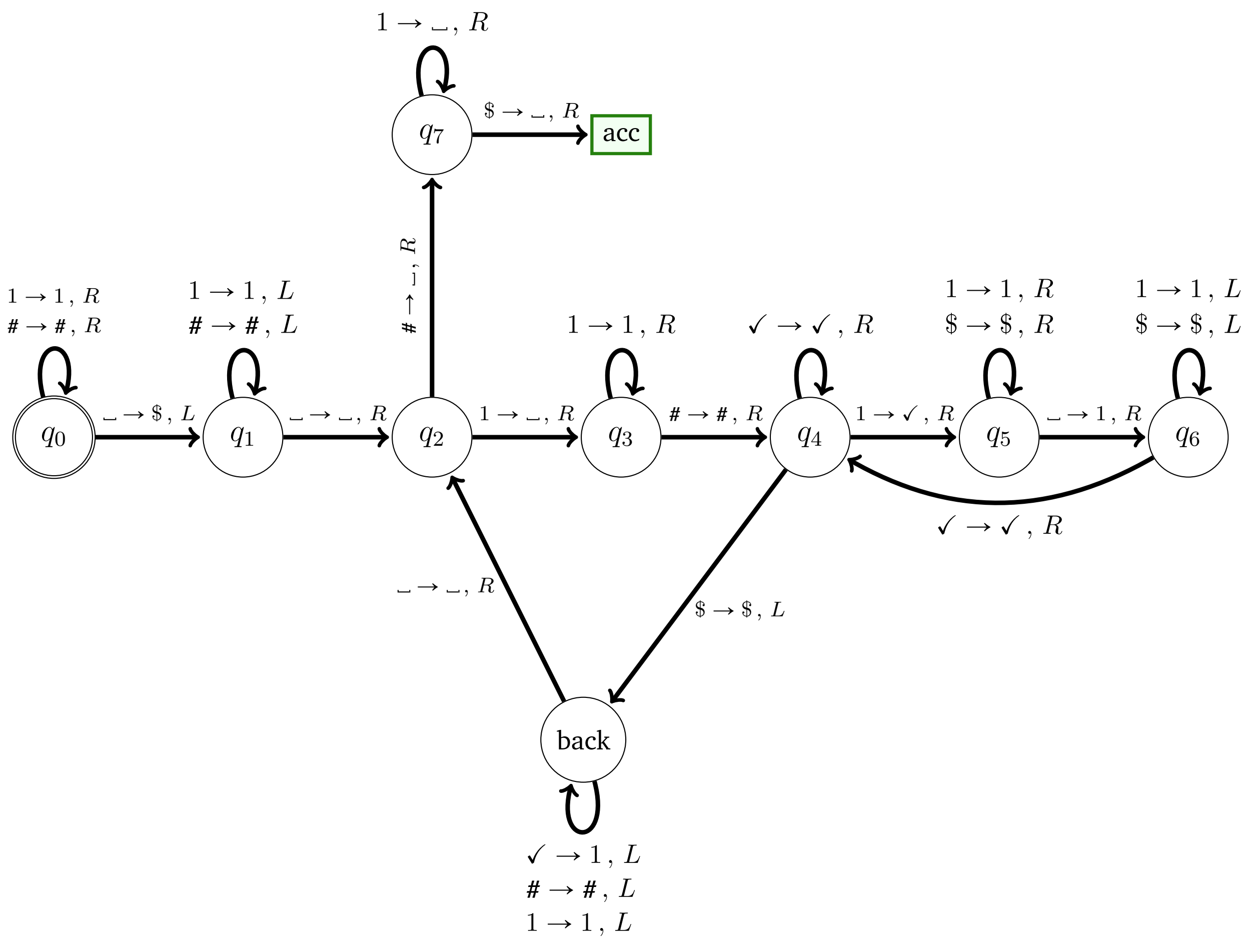
$$1^i\#1^j$$

ומחזירה את פלט

$$1^{i\cdot j}\ .$$

פתרון:

- לדוגמה, נניח שהקלט הוא 2 כפול 2.
  הקלט הוא $11\#11$.
- נרצה להבדיל בין הקלט לבין הפלט.
  לכן בתחילת הריצה, נתקדם ימינה עד סוף הקלט ונוסיף שם את התו $.
  לאחר מכן נחזור לתחילת הקלט.
- על כל אות 1 במילה השמאלית נעתיק את המילה הימנית לאחר סימן ה- $.
- לאחר מכן נשאיר רק את התווים שלאחר סימן ה $. כלומר, נמחק את כל מה שאינו פלט.



μ	q	σ	ν
$\sqcup$	q_0	1	$1\#11\sqcup$
$\sqcup 11\#11$	q_1	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup 11\#11$	q_1	$\$$	$\sqcup$
$\sqcup$	q_1	$\sqcup$	$11\#11\$$
$\sqcup$	q_2	1	$1\#11\$$
$\sqcup\ \sqcup$	q_3	1	$\#11\$$
$\sqcup\ \sqcup 1\#$	q_4	1	$1\$$
$\sqcup\ \sqcup 1\#\checkmark$	q_5	1	$\$$
$\sqcup\ \sqcup 1\#\checkmark 1\$$	q_5	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup\ \sqcup 1\#\checkmark 1\$1$	q_6	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup\ \sqcup 1\#$	q_6	$\checkmark$	$1\$1\ \sqcup$
$\sqcup\ \sqcup 1\#\checkmark$	q_4	1	$\$1\ \sqcup$
$\sqcup\ \sqcup 1\#\checkmark\checkmark$	q_5	$\$$	$1\ \sqcup$
$\sqcup\ \sqcup 1\#\checkmark\checkmark\$1$	q_5	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup\ \sqcup 1\#\checkmark\checkmark\$11$	q_6	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup\ \sqcup 1\#\checkmark$	q_6	$\checkmark$	$\$11\sqcup$
$\sqcup\ \sqcup 1\#\checkmark\checkmark$	q_4	$\$$	$11\sqcup$
$\sqcup\ \sqcup 1\#\checkmark$	back	$\checkmark$	$\$11\sqcup$
$\sqcup$	back	$\sqcup$	$1\#11\$11\sqcup$
$\sqcup\ \sqcup$	q_2	1	$\#11\$11\sqcup$
$\sqcup\ \sqcup\ \sqcup$	q_3	$\#$	$11\$11\sqcup$
$\sqcup\ \sqcup\ \sqcup\#$	q_4	1	$1\$11\sqcup$

␣␣␣#✓	q_5	1	$11␣
␣␣␣#✓1$11	q_5	␣	␣
␣␣␣#✓1$111	q_6	␣	␣
␣␣␣#	q_6	✓	1$111␣
␣␣␣#✓	q_4	1	$111␣
␣␣␣#✓✓	q_5	$	111␣
␣␣␣#✓✓$111	q_5	␣	␣
␣␣␣#✓✓$1111	q_6	␣	␣
␣␣␣#✓	q_4	✓	$1111
␣␣␣#✓✓	q_4	$	1111
␣␣␣#✓	back	✓$	1111
␣␣	back	␣	#11$1111
␣␣␣	q_2	#	11$1111
␣␣␣␣	q_7	1	1$1111
␣␣␣␣␣␣	q_7	$	1111
␣␣␣␣␣␣␣	acc	1	111

שיעור 2
מכונות טיורינג מרובת סרטים

הגדרה 2.1 מודל חישובי

מודל חישובי הוא אוסף של מכונות טיורינג שעבורם מוגדרים המושגים של הכרעה וקבלה של שפות.

הגדרה 2.2 מודלים שקולים חישובית

יהיו A ו- B מודלים חישוביים. אומרים כי A ו- B שקולים אם לכל שפה L התנאים הבאים מתקיימים:

1) קיימת מ"ט במודל A שמכריעה את L אס"ם קיימת מ"ט במודל B שמכריעה את L.

2) קיימת מ"ט במודל A שמקבלת את L אס"ם קיימת מ"ט במודל B שמקבלת את L.

דוגמה 2.1

נסמן ב-T את מודל מכונת הטיורינג הבסיסי.
במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת בסרט.
במודל זה, הסרט הוא אינסופי לשני הכיוונים. ב תחילת החישוב הראש נמצא בתחילת הקלט.

נסמן ב-O את מודל מכונת הטיורינג עם סרט ימינה בלבד.
במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן לה ישאר במקום, באותה המשבצת בסרט.
במודל זה, הסרט הוא אינסופי לכיוון אחד בלבד - ימינה. בתחילת החישוב, הקלט ממוקם בקצה השמאלי של הסרט והראש נמצאת בתחילת הקלט. החישוב מתנהל כמו במכונה במודל, T למעט כאשר הראש נמצא במשבצת השמאלית ביותר בסרט וצריך לזוז ש מאלה– במקרה כזה הראש נשאר במקום ולא זז.

הוכיחו כי המודל T והמודל O שקולים חישובית.

פתרון:

יש להוכיח ש:

- לכל מ"ט במודל O קיימת מ"ט שקולה במודל T.
- לכל מ"ט במודל T קיימת מ"ט שקולה במודל O.

<u>כיוון ראשון</u>

נוכיח כי לכל מ"ט במודל O קיימת מ"ט שקולה במודל T. כלומר:

נתונה $M^O = \left(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O\right)$ במודל O.

נבנה , $M^T = \left(Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T\right)$ שקולה במודל T.

נעבוד רק עם צד ימין של הסרט האינסופי של M^T ואז M^T תהיה שקולה ל- M^O.

רכיבי המ"ט M^T זהים לאלו של המ"ט M^O, מלבד מהתכונה שהראש של M^O לא זז מעבר לקצה השמאולי של הקלט.

לכן כדי ש- M^T תהיה שקולה ל- M^O נוסיף מעברים לפונקצית המעברים של M^T כדי שהראש של M^T לא זז מעבר לקצה השמאולי של הקלט.

הרעיון הוא לסמן את המשבצת שמשמאול לתחילת הקלט עם סימן מיוחד \$, ואז להוסיף מעברים לפונקצית המעברים של M^T שמבטיחים שאם הראש נמצא למשבצת שמסומנת \$ אז הוא מיד חוזר ו- M^T חוזרת למצב ההתחתי של המ"ט M^O. זה מתבצע על ידי הוספת השורות הבאות לטבלת המעברים של M^T:

תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון	מצב
	L	$\circlearrowleft$	$q_\$$	σ	q_0^T
	R	$\$$	q_0^O	$\sqcup$	$q_\$$
$\forall q \in Q^O$	R	$\$$	q	$\$$	q

$$Q^T = Q^O \cup \{q_0^T, q_\$\} \ , \qquad \Sigma^T = \Sigma^O \ , \qquad \Gamma^T = \Gamma^O \cup \{\$\} \ , \qquad \text{acc}^T = \text{acc}^O \ , \qquad \text{rej}^T = \text{rej}^O \ .$$

<u>כיוון שני</u>

נוכיח כי לכל מ"ט במודל T קיימת מ"ט שקולה במודל O. כלומר:

נתונה $M^T = \left(Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T\right)$ במודל T.

נבנה $M^O = \left(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O\right)$ שקולה במודל O.

הרעיון הוא לסמן קו על הסרט במשבת באמצע הקלט, ואז לקפל את הסרט בקו הזה. באופן הזה נקבל סרט עם קצה שמאולי ואינסופי ימינה. במשבצות של הסרט החדש המקופל יש שני תווים, אחד למעלה (U) ואחד למטה (D), מלבד מנקודת הקיפול שבו יש משבצת אחת שמסומנת \$.

באופן הזה אפשר לסמלץ את המכונה M^T במכונה M^O על ידי הוספת המעברים הבאים לטבלת המעברים של M^T. לכל $\tau, \sigma, \pi \in \Gamma^T$:

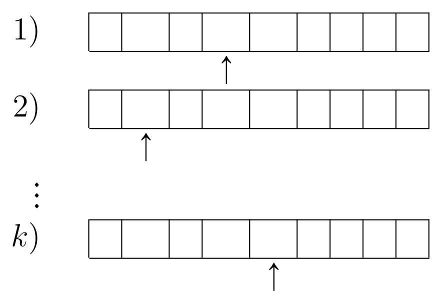
תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון	מצב
תזוזה שמאלה: $(q,\sigma) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,L)$	L	π τ	$p.D$	π σ	$q.D$
	R	τ π	$p.U$	σ π	$q.U$
תזוזה שמאלה: $(q,\text{\textvisiblespace}) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,L)$	L	$\text{\textvisiblespace}$ τ	$p.D$	$\text{\textvisiblespace}$	$q.D$
	R	τ $\text{\textvisiblespace}$	$p.U$	$\text{\textvisiblespace}$	$q.U$
תזוזה ימינה: $(q,\sigma) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,R)$	R	π τ	$p.D$	π σ	$q.D$
	L	τ π	$p.U$	σ π	$q.U$
תזוזה ימינה: $(q,\text{\textvisiblespace}) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,R)$	R	$\text{\textvisiblespace}$ τ	$p.D$	$\text{\textvisiblespace}$	$q.D$
	L	τ $\text{\textvisiblespace}$	$p.U$	$\text{\textvisiblespace}$	$q.U$
	R	$\circlearrowleft$	$q.U$	$\$$	$q.D$
	R	$\circlearrowleft$	$q.D$	$\$$	$q.U$
אתחול					
$\tau \in \Sigma \cup \{\text{\textvisiblespace}\}$ $\sigma \in \Sigma$	R	$\$$	$q.\tau$	τ	q_0^O
	R	$\text{\textvisiblespace}$ σ	$q.\tau$	τ	$q.\sigma$
	L	$\text{\textvisiblespace}$ $\text{\textvisiblespace}$	back	$\text{\textvisiblespace}$	$q.\text{\textvisiblespace}$
	L	$\circlearrowleft$	back	$\text{\textvisiblespace}$ τ	back
	R	$\circlearrowleft$	$q_0^T.D$	$\$$	back
סיום					
			acc^O	הכל	$\text{acc}^T.D$
			acc^O	הכל	$\text{acc}^T.U$
			rej^O	הכל	$\text{rej}^T.D$
			rej^O	הכל	$\text{rej}^T.U$
כל השאר עוברים ל-rej					

$$\Gamma^O \supseteq \left(\Gamma^T \times \Gamma^T\right) \cup \{\$\} \ .$$

שיעור 3
מכונות טיורינג מרובת סרטים

3.1 מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה היוריסטית

מכונת טיורינג מרובת סרטים (מטמ"ס) היא הכללה של מ"ט עם סרט יחיד. ההבדל הוא שלמטמ"ס ישנו מספר סופי של סרטים, נניח $k > 1$ סרטים.



- לכל סרט יש ראש שלו.
- בתחילת העבודה הקלט w כתוב בתחילת הסרט הראשון וכל שאר הסרטים ריקים. הראשים בכל סרט מצביעים על התא הראשון בסרט, והמכונה נמצאת במצב התחלתי q_0.
- בכל צעד חישוב, לפי המצב הנוכחי ול- k התווים שמתחת ל- k הראשים, המכונה מחליטה לאיזה מצב לעבור, מה לכתוב מתחת לכל אחד מ-k הראשים ולאן להזיז את הראש בכל אחד מ-k סרטים.
- הראשים של הסרטים יכולים לזוז באופן בלתי-תלוי בהתאם לפונקצית המעברים של המטמ"ס.

3.2 מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה פורמלית

הגדרה 3.1 מכונט טיורינג מרובת סרטים

מכונת טיורינג מרובת סרטים היא שביעייה:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר Q, Σ, Γ, q_0, q_{acc},q_{rej} מוגדרים כמו מ"ט עם סרט יחיד (ראו הגדרה 1.2).
ההבדל היחיד בין מ"ט עם סרט יחיד לבין מטב"ס הוא הפונקצית המעברים. עבור מטמ"ס הפונקצית המעברים היא מצורה הבאה:

$$\delta_k : (Q \backslash \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$$

דוגמה 3.1

מצב q:

סרט 1	␣	0	1	1	␣	␣
			↑			
סרט 2	␣	1	1	0	1	␣
		↑				
סרט 3	␣	0	1	0	0	␣
				↑		

$\longrightarrow$

מצב p:

סרט 1	␣	0	0	1	␣	␣
				↑		
סרט 2	␣	1	1	0	1	␣
			↑			
סרט 3	␣	0	1	1	0	␣
			↑			

$$\delta_k\left(q,\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\left(p,\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\\L\end{pmatrix}\right)\ .$$

3.3 קונפיגורציה של מטמ"ס

הכללה של קונפיגורציה של מ"ט עם סרט יחיד:

$$\begin{pmatrix}u_1q\ \mathrm{v}_1\\u_2q\ \mathrm{v}_2\\\vdots\\u_kq\ \mathrm{v}_k\end{pmatrix}$$

דוגמה 3.2

בנו מטמ"ס שמכריעה את השפה:

$$L_{w^R}=\left\{w=\{a,b\}^*\ \middle|\ w=w^R\ .\right\}$$

כלומר שפת הפלינדרומים.

פתרון:

נבנה מ"ט עם שני סרטים:

<u>תאור המכונה:</u>

נסמן M_2 המ"ט עם 2 סרטים שמכריעה את השפה L_{w^R}.

$M_2=$ על הקלט w:

(1) מעתיקה את w לסרט 2.

סרט 1	␣	a	b	a	a	a	b	a	␣
		↑	↑	↑					
		a	b	a	a	a	b	a	
סרט 2	␣	$\cancel{␣}$	$\cancel{␣}$	$\cancel{␣}$	$\cancel{␣}$	$\cancel{␣}$	$\cancel{␣}$	$\cancel{␣}$	␣
		↑	↑	↑					

(2) מזיזה את הראש בסרט 1 לתו הראשון ב- w ואת הראש בסרט 2 לתו האחרון ב- w.

(3) משווה בין התווים שמתחת לראשים:

- אם התו שמתחת לראש בסרט 1 הוא $\llcorner\!\lrcorner$ $\Leftarrow$ acc.
- אם התווים שמתחת לראשים שונים $\Leftarrow$ rej.
- אחרת מזיזה את הראש בסרט 1 ימינה ואת הראש בסרט 2 שמאלה, וחוזרת לשלב (3).

הפונקצית המעברים של M_2 היא:

$$\delta\left(q_0,\begin{pmatrix}a\\ \llcorner\!\lrcorner\end{pmatrix}\right)=\left(q_0,\begin{pmatrix}a\\ a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\ R\end{pmatrix}\right)\ ,$$
$$\delta\left(q_0,\begin{pmatrix}b\\ \llcorner\!\lrcorner\end{pmatrix}\right)=\left(q_0,\begin{pmatrix}b\\ b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\ R\end{pmatrix}\right)\ ,$$
$$\delta\left(q_0,\begin{pmatrix}\llcorner\!\lrcorner\\ \llcorner\!\lrcorner\end{pmatrix}\right)=\left(q_{\text{back}},\begin{pmatrix}\llcorner\!\lrcorner\\ \llcorner\!\lrcorner\end{pmatrix},\begin{pmatrix}L\\ L\end{pmatrix}\right)\ .$$

נשים לב כי הסיבוכיות זמן של המכונה עם שני סרטים, M_2 היא $O(|w|)$, כאשר w האורך של המילה.

כעת נבנה מ"ט עם סרט יחיד שמכריעה את השפה L_{W^R}.

<u>תאור המכונה:</u>

נסמן M_1 המכונה עם סרט יחיד שמכריעה את השפה L_{w^R}.

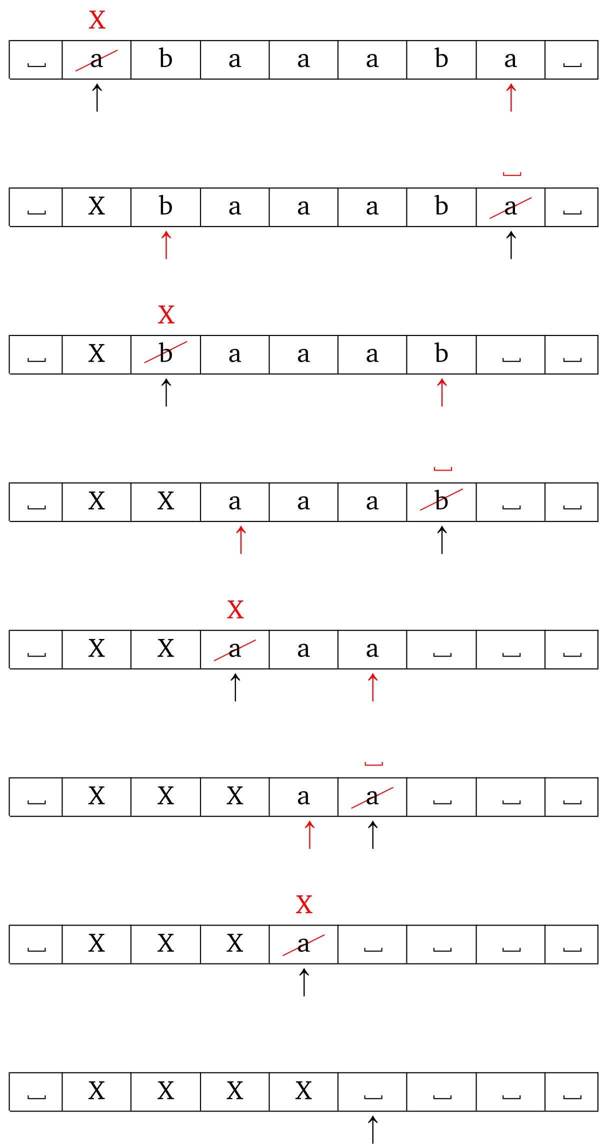
$M_1 =$ על הקלט w:

(1) אם התו שמתחת לראש הוא $\llcorner\!\lrcorner$ אז $M_1 \leftarrow$ acc.

(2) זוכרת את התו שמתחת לראש ומוחקת אותו ע"י X.

(3) מזיזה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאול ל- $\llcorner\!\lrcorner$.

- אם התו שמתחת לראש הוא X $\Leftarrow$ acc.
- אם התו שונה מהתו שזכרנו $\Leftarrow$ rej.
- מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י $\llcorner\!\lrcorner$, מזיזה את הראש שמאולה עד התו הראשון מימין ל- X וחוזרת לשלב (1).



3.4 שקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

מ"ט עם סרט יחיד היא מקרה פרטי של מטמ"ס.

משפט 3.1 שקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

לכל מטמ"ס M קיימת מ"ט עם סרט יחיד M' השקולה ל- M.

כלומר, לכל קלט $w \in \Sigma^*$:

- אם M מקבלת את w $\Leftarrow$ M' מקבלת את w.
- אם M דוחה את w $\Leftarrow$ M' דוחה את w.
- אם M לא עוצרת על w $\Leftarrow$ M' עוצרת על w.

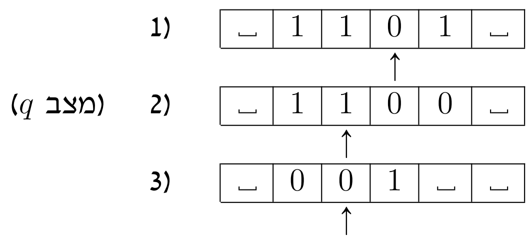
הוכחה:

בהינתן מטמ"ס $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ עם k סרטים, נבנה מ"ט עם סרט יחיד $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', q_{\text{acc}}', q_{\text{rej}}')$ השקולה ל- M באופן הבא:

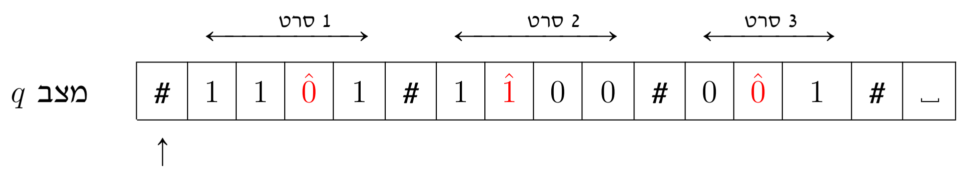
רעיון הבנייה:

בהינתן קלט $w \in \Sigma^*$, M' תבצע "סימולציה" של ריצה M על w.

ב- M



ב- M'



- M' תשמור את התוכן של k הסרטים של M על הסרט, רק שהתוכן של סרט i יופיע בין $\#_i$ ל- $\#_{i+1}$.
- M' תשמור את המיקום של הראשים של M ע"י הכפלת הא"ב Γ.

  כלומר, לכל אות $\alpha \in \Gamma$, M' תשמור שתי אותיות α ו- $\hat{\alpha}$ ב- Γ', כך ש- $\hat{\alpha}$ תסמן את התו שמתחת לראש בכל סרט.
- בכל צעד חישוב, M' סורקת את הסרט שלה משמאל לימין כדי ללמוד מהם התווים שמתחת לראשים (התווים שמסומנים ב- $\hat{\alpha}$).
- M' משתמשת בפונקצית המעברים δ_k של M כדי לחשב את המעבר הבא.
- M' סורקת את הסרט שלה משמאל לימין כדי לעדכן את הסרטים ואת המיקום הראשים בהם.

תאור הבנייה של M':

1) שלב האיתחול

בהינתן קלט $w = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$, M' מאתחלת את הקונפיגורציה ההתחלתית של M על הסרט שלה.

ב- M

	1)	$\sqcup$	σ_1	σ_2	$\cdots$	σ_n	$\sqcup$
			$\uparrow$				
(מצב q_0)	2)	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\cdots$	$\sqcup$	$\sqcup$
			$\uparrow$				
	3)	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\cdots$	$\sqcup$	$\sqcup$
			$\uparrow$				

ב- M'

מצב q_0'	σ_1	σ_2	$\cdots$	σ_n	$\sqcup$	$\cdots$

$$\Downarrow$$

מצב q_0	#	$\hat{\sigma}_1$	σ_2	$\cdots$	σ_n	#	$\hat{\sqcup}$	#	$\hat{\sqcup}$	#	$\cdots$	#	$\sqcup$	$\sqcup$
	$\uparrow$													

2) תאור צעד חישוב של M

ב- M

	1)	$\sqcup$	1	1	0	1	$\sqcup$
					$\uparrow$		
(מצב q)	2)	$\sqcup$	1	1	0	0	$\sqcup$
				$\uparrow$			
	3)	$\sqcup$	0	0	1	$\sqcup$	$\sqcup$
				$\uparrow$			

$$\delta_k\left(q, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \left(p, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}L\\R\\L\end{pmatrix}\right)$$

	1)	$\sqcup$	1	1	1	1	$\sqcup$
				$\uparrow$			
(מצב p)	2)	$\sqcup$	1	0	0	0	$\sqcup$
					$\uparrow$		
	3)	$\sqcup$	0	0	1	$\sqcup$	$\sqcup$
			$\uparrow$				

ב- M'

מצב q

#	1	1	$\hat{0}$	1	#	1	$\hat{1}$	0	0	#	0	$\hat{0}$	1	#	␣
↑															

$$\Downarrow$$

מצב p

#	1	$\hat{1}$	1	1	#	1	0	$\hat{0}$	0	#	$\hat{0}$	0	1	#	␣
↑															

- איסוף מידע
- M' סורקת את הסרט שלה משמאל לימין ומזהה את התווים שמסומנים ב- $\hat{\alpha}$.
  מידע זה ניתן לשמור במצבים. לדוגמה:

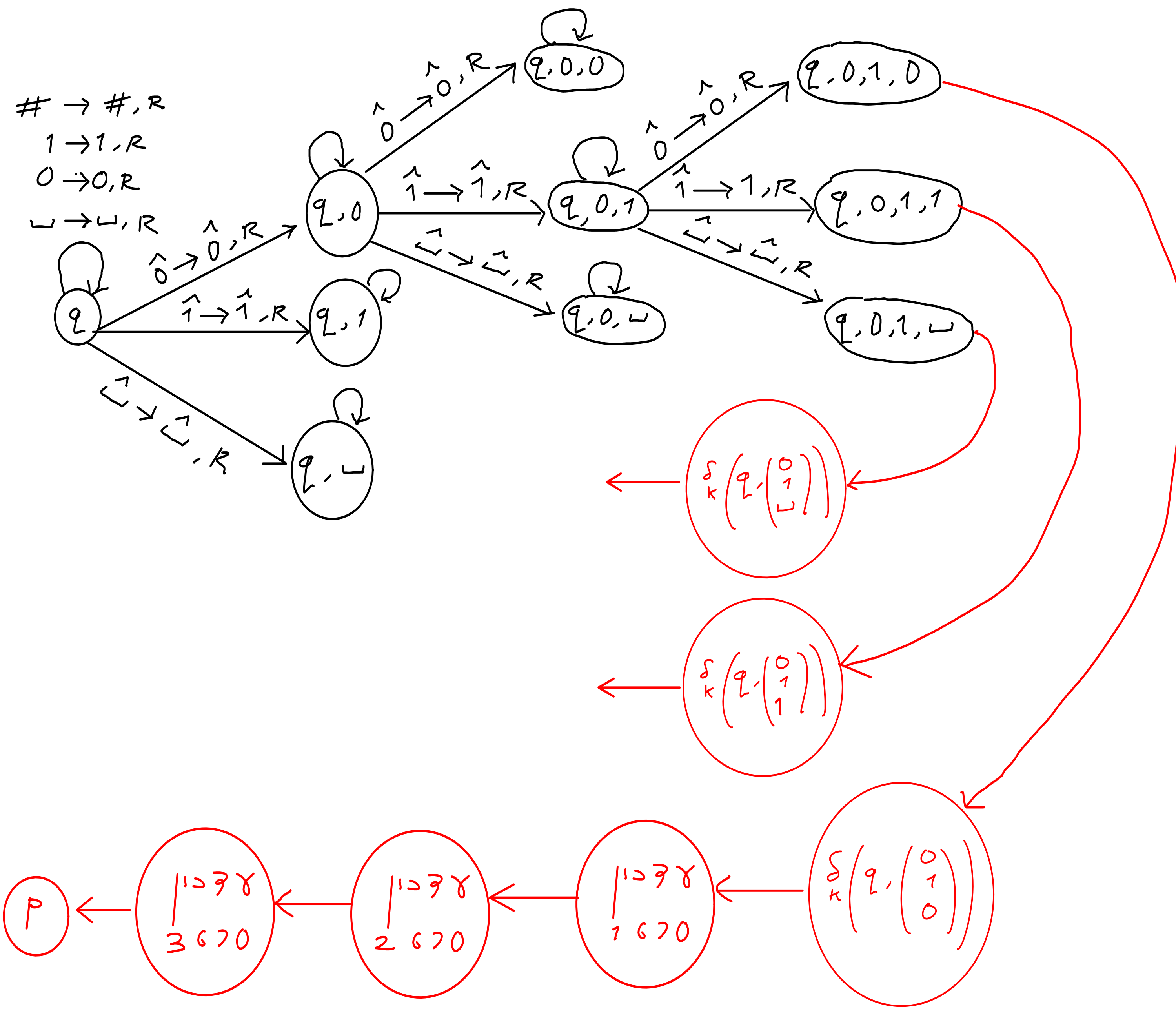
$$q\ ,\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\ .$$

זה אפשרי מכיוון שמספר המצבים הנדרש הוא סופי:

$$|Q|\times|\Gamma|^k\ .$$

מצב q

#	1	1	$\hat{0}$	1	#	1	$\hat{1}$	0	0	#	0	$\hat{0}$	1	#	␣
↑															



מצב p

#	1	$\hat{1}$	1	1	#	1	0	$\hat{0}$	0	#	$\hat{0}$	0	1	#	$\sqcup$

$\uparrow$

- <u>עדכון הסרטים</u>

M' סורקת את הסרט שלה פעם נוספת כדי לפעול על פי פונקצית המעברים, כלומר, לעדכן את התאים שמתחת לראשים ולעדכן את מיקום הראשים.

■

שיעור 4
מכונות טיורינג מרובת סרטים

4.1 הגדרה של מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

הגדרה 4.1 מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית (מ"ט א"ד) היא שביעייה

$$M=(Q,\Sigma,\Gamma,\Delta,q_0,q_{\text{acc}},q_{\text{rej}})$$

כאשר $Q,\Sigma,\Gamma,q_0,q_{\text{acc}},q_{\text{rej}}$ מוגדרים כמו במ"ט דטרמיניסטי.

Δ היא פונקצית המעברים

$$\Delta:(Q\backslash\{q_{\text{acc}},q_{\text{rej}}\})\times\Gamma\to P\left(Q\times\Gamma\times\{L,R,S\}\right)\ .$$

$$\Delta(q,a)=\{(q_1,a,S)\ \ ,\ \ (q_2,b,L)\ \ ,\ \ \ldots\}\ .$$

כלומר, לכל זוג $q\in Q,\alpha\in\Gamma$ ייתכן מספר מעברים אפשריים, 0, 1 או יותר.

- קונפיגורציה של מ"ט א"ד זהה לקונפיגורציה של מ"ט דטרמיניסטית.
- לכל קונפיגורציה ייתכן מספר קונפיגורציות עוקבות.
- לכל מילה $w\in\Sigma^*$ חחתכן מססר ריצות שונות:
  - ריצות שמגיעות ל- q_{acc}.
  - ריצות שמגיעות ל- q_{rej}.
  - ריצות שלא עוצרות.
  - ריצות שנתקעות.

הגדרה 4.2

מילה $w\in\Sigma^*$ מתקבלת במ"ט א"ד M אם קיימת לפחות ריצה אחת שמגיעה ל- q_{acc}.

השפה של מ"ט א"ד M היא

$$L(M)=\left\{w\in\Sigma^*\ \middle|\ \exists u,\text{v}\in\Gamma^*\ \ :\ \ q_0w\vdash_*\ u\ q_{\text{acc}}\ \text{v}\right\}$$

כלומר,

$w\in L(M)$ אם קיימת ריצה אחת שבה M מקבלת את w.

$w\notin L(M)$ אם בכל ריצה של M על w, M דוחה או לא עוצרת, או נתקעת.

הגדרה 4.3 מ"ט א"ד המכריעה שפה L

תהי M מ"ט א"ד.
אומרים כי מ"ט א"ד M מכריעה שפה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $w \in L \Leftarrow L$ M מקבלת את w.
- אם $w \notin L \Leftarrow$ M דוחה את w.

הגדרה 4.4 מ"ט א"ד המקבלת שפה L

תהי M מ"ט א"ד.
אומרים כי מ"ט א"ד M מקבלת שפה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $w \in L \Leftarrow$ M מקבלת את w.
- אם $w \notin L \Leftarrow$ M דוחה את w או M לא עוצרת על w.

דוגמה 4.1

נתונה השפה

$$L = \left\{1^n \;\middle|\; \text{אינו ראשוני } n\right\} \ , \qquad \Sigma = \{1\} \ .$$

בנו מ"ט המכריעה את השפה L.

פתרון:

<u>הרעיון</u>

נבנה מ"ט א"ד N המכריעה את L.

N תבחר באופן א"ד מספר $1 < t < n$ ותבדוק האם t מחלק את n.

					n				
סרט 1	$\sqcup$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cdots$

			t			
סרט 2	$\sqcup$	1	1	1	$\sqcup$	$\cdots$

<u>תאור הבניה</u>

$N =$ על קלט $w = 1^n$:

שלב 1)

- N בוחרת באופן א"ד מספר $1 < t < n$.
- מעתיקה את w לסרט 2.
- עוברת על העותק משמאל לימין, ובכל תא מחליטה באופן א"ד האם להשאיר את ה- 1 או למחוק אותו ע"י X (לדאוג שהמספר שנבחר הוא לא 1 ולא n).

- בסוף המעבר המספר t שנבחר הוא כמות ה- 1 -ים שלא נמחקו.

סרט 1

$\sqcup$	1	1	1	1	$\cdots$	1	1	$\sqcup$	$\cdots$

סרט 2

		X	X			X			
$\sqcup$	1	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	1	$\cdots$	$\cancel{1}$	1	$\sqcup$	$\cdots$

שלב 2) N בודקת האם t שנבחר מחלק את n.

- אם כן $\Leftarrow N$ מקבלת.
- אם לא $\Leftarrow N$ דוחה.

4.2 עץ החישוב של מ"ט א"ד

הגדרה 4.5 עץ החישוב של מ""ט א"ד

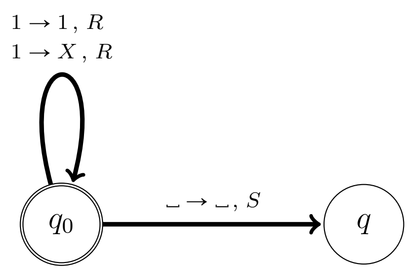
בהינתן מ"ט א"ד M ומילה $w \in \Sigma^*$, עץ החישוב של M ו- w הוא עץ מושרש שבו:

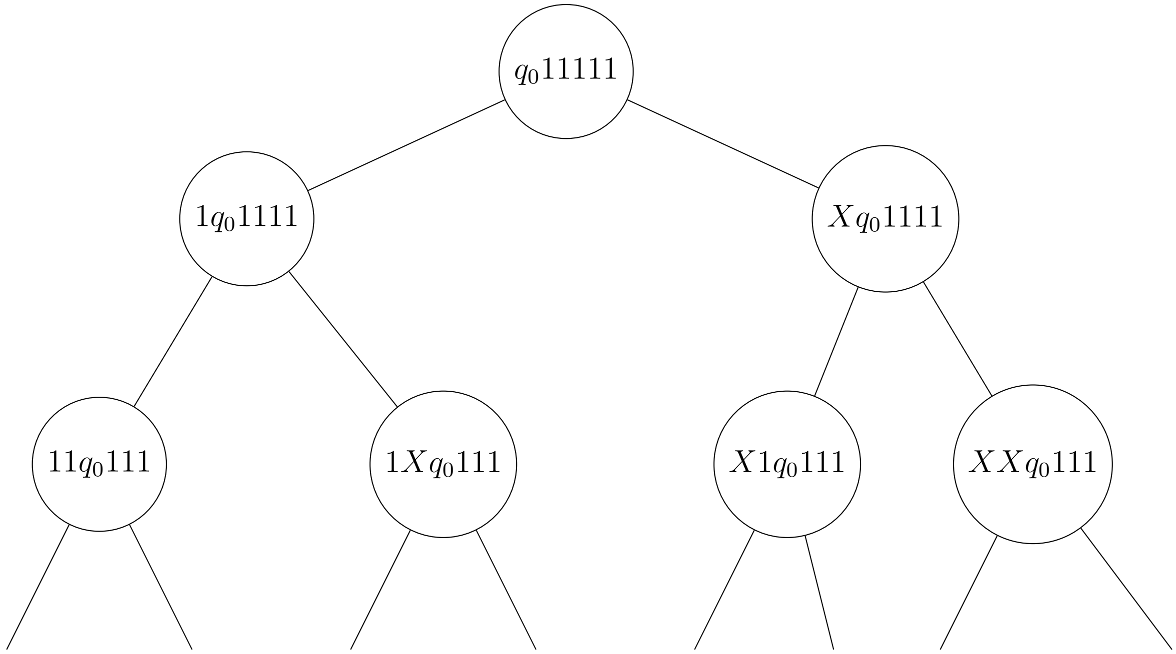
1) כל קדקוד בעץ מתאר קונפיגורציה בחישוב של M על w.

2) שורש העץ מתאר את הקונפיגורציה ההתחלתית q_0w.

3) לכל קדקוד v בעץ הבנים של v הם כל הקדקודים הנובעים מהקונפיגורציה המתוארת ע"י v.

דוגמה 4.2





4.3 שקילות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטית

משפט 4.1 שקילות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטית ב- RE

לכל מ"ט א"ד N קיימת מ"ט דטרמיניסטית D כך ש-

$$L(N) = L(D) .$$

כלומר לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם N מקבלת את w $\Leftarrow$ D תקבל את w.
- אם N לא מקבלת את w $\Leftarrow$ D לא תקבל את w.

הוכחה: בהינתן מ"ט א"ד N נבנה מ"ט דטרמיניסטית D ונוכיח כי

$$L(N) = L(D) .$$

<u>רעיון ההוכחה</u>

בהינתן קלט $w \in \Sigma^*$, D תבצע ריצה של כל החישובים האפשריים של N על w, ואם אחד החישובים מסתיים ב- q_{acc} אז D תעצור ותקבל.

מכיוון שייתכנו חישובים אינסופיים, לא נוכל לסרוק את עץ החישוב לעומק. במקום זה נסרוק את העץ לרוחב. כלומר, נבדוק את כל החישובים באורך 1, ואחרי זה נבדוק את כל החישובים באורך 2, וכן הלאה. אם אחד החישובים הסתיים ב- q_{acc}, אזי D תעצור ותקבל.

<u>תאור הבניה</u>

מכיוון שלכל $q \in Q$ ולכל $\alpha \in \Gamma$:

$$\Delta(q,\alpha) \subseteq Q \times \Gamma \times \{L,R,S\} \ .$$

אזי

$$|\Delta(q,\alpha)| \leqslant |Q| \cdot |\Gamma| \cdot |\{L,R,S\}| = 3|Q| \cdot |\Gamma| \ .$$

נסמן:

$$C = 3|Q| \cdot |\Gamma| \ .$$

- לכל מצב $q \in Q$ ולכל אות $\alpha \in \Gamma$ נמספר את המעברים ב- $\Delta(q,\alpha)$ שרירותית
$$\{0,1,2,\cdots,C-1\} \ .$$
- אם $|\Delta(q,\alpha) = j < C$,
אזי לכל $j \leqslant k \leqslant C-1$
נקבע $k = (q_{\text{rej}},\alpha,S)$.
- נשים לב כי שינוי זה לא משנה את השפה של N.

קידום לקסיקוגרפי:

$$\begin{array}{llllllll}
0 & 00 & 10 & \cdots & (C-1)0 & 000 & & \\
1 & 01 & 11 & \cdots & (C-1)1 & 001 & & \\
2 & 02 & 12 & \cdots & (C-1)2 & 002 & & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & & \\
C-1 & 0(C-1) & 1(C-1) & \cdots & (C-1)(C-1) & 00(C-1) & &
\end{array}$$

הבניה של D

D מכילה 3 סרטים:

					n				
סרט 1	␣	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cdots$
			t						
סרט 2	␣	1	1	1	␣		$\cdots$		
סרט 3	␣	1	1	1	␣		$\cdots$		

$D =$ " על קלט w:

(1 מאתחלת את המחרוזת בסרט 3 ל- 0.

(2 מעתיקה את w לסרט 2.

(3 מריצה את N על w לפי המחרוזת בסרט 3.

- אם N קיבלה את $w \Leftarrow D$ עוצרת ומקבלת.
- אחרת, D מוחקת את סרט 2, מקדמת את המחרוזת בסרט 3 לקסיקוגרפית וחוזרת לשלב 2).

“

■

4.4 השפות R ו- RE

הגדרה 4.6 R

$$R = \{L \subseteq \Sigma^* \ : \ \text{קיימת מ"ט המכריעה את } L\} \ .$$

הגדרה 4.7 RE

$$RE = \{L \subseteq \Sigma^* \ : \ \text{קיימת מ"ט המקבלת את } L\} \ .$$