עבודה עצמית 3 טורי חזקות וטורי פונקציות

שאלה 1 רשמו בעזרת סימן $\sum$ את הסכומים הבאים:

א) $96+48+24+12+\ldots$

ב) $\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 6}+\frac{5}{6\cdot 8}+\frac{7}{8\cdot 10}$

ג) $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{9}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{27}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$

שאלה 2 חשבו את הסכומים הבאים:

א) $\sum_{n=4}^{n=7}(-1)^n(n-2)^2$

ב) $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$

ג) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n+8^n}{10^n}\right)$

ד) $\sum_{n=1}^{99}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

שאלה 3

א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}+2}{n^3+n}$

ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+2^n}{n!}$

ג) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n}{2^n}\right)$

ד) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

שאלה 4 לכל אחד של הטורים הבאים בדקו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר.

א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+1)^2}$

ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2+\sin n}$

ג) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n \ln n}$

ד) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

שאלה 5

א) תנו את ההגדרה של סכום של טור אינסופי והוכיחו על סמך ההגדרה הזאת כי

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = 2 \ .$$

ב) הסבירו למה תנאי הכרחי להתכנסות הטור $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אינו מספיק להתכנסות ותנו דוגמה המתאימה.

ג) תנו את ההגדרה של השארית R_n של הטור ומצאו את הנוסחה ל- R_n עבור הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$.

ד) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ מתכנס והסכום שלו קטן מ 3.

ה) הסבירו את המשמעות של "התכנסות בהחלט" של טור ואת המשמעות של "התכנסות בתנאי" של טור. תנו דוגמאות של כל אחת מהן.

שאלה 6

הסבירו מהו תחום ההתכנסות של טור פונקציות ומצאו את תחום ההתכנסות לכל אחד מהטורים הבאים:

א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(nx)+3\cos(nx)}{n^{6/5}}$

ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{x^n}$

ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln x}}$

ד) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!|x|^n}$

ה) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$ (רמז: השתמשו ב אי-שוויון $\sin x < x$)

ו) $$\sum_{n=1}^{\infty} (\tan x)^n$$

ז) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{|x-2|^n}$$

ח) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5 \cdot x^{2n}}$$

שאלה 7 הסבירו מהו רדיוס התכנסות R של טור חזקות וכיצד ניתן למצוא אותו. תן דוגמה של טור חזקות בעל רדיוס התכנסות:

א) $R = 0$

ב) $R = \infty$

ג) $R = 1$

ד) $R = \frac{1}{3}$

שאלה 8 מצאו את תחום ההתכנסות של טורי החזקות הבאים:

א) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^{7/2}}\right) \cdot x^n$$

ב) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$$

ג) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$$

ד) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n (x+1)^n}{2^n \cdot n^n}$$

ה) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3)^n \cdot x^n}{n!}$$

ו) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^{2n} (x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$$

ז) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

ח) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n \cdot \ln n}$$

שאלה 9 פתחו לטור מקלורן את הפונקציות הבאות ומצא את תחון ההתכנסות של הטור.

א) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

ב) $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$

שאלה 10 הוכיחו כי:

א) $(-1 < x < 1)$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{1-2x+x^2}$.

ב) $(-1 < x < 1)$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

שאלה 11 תנו דוגמה של טור שת חוסהתכנסותו הוא קטע פתוח $(0,2)$.

שאלה 12 מצאו את התחום ההתכנסות של הטור הנתון:

א) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$

ב) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{3^n}$

ג) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$

ד) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{|x|}}$

ה) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{x}\right)^n$

ו) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$

ז) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n$

ח) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2\cos x)^n$

שאלה 13 הגדירו טור הנדסי, נסחו והוכיחו את התנאי של התכנסות של טור הנדסי.

שאלה 14 הסבירו את ההגדרה של רדיוס התכנסות של טור חזקות והסביר כיצד ניתן למצוא את הרדיוס ההתכנסות. תנו דוגמה של טור חזקות שעבורו:

א) $R = 2$

ב) $R = \infty$

ג) $R = 0$

שאלה 15 מצאו את התחום ההתכנסות של הטורי החזקות הבאים:

א) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{n^2} \right) x^n$

ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 x^n}{4^n} \right)$

ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{2^n + 4^n} \right) x^n$

ד) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(x+4)^n}{n^2\sqrt{n}} \right)$

ה) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!} (2x)^n$

ו) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2+1} x^n$

ז) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} (4x)^n$

ח) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$

שאלה 16 פתחן לטור מקלורן את הפונקציות הבאות ומצאו את התחום ההתכנסות של הטור:

א) $f(x) = xe^{2x}$

ב) $f(x) = \frac{x}{2+x}$

ג) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

ד) $f(x) = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

שאלה 17 הוכיחו:

א)

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{1-2x+x^2} \ , \qquad (-1 < x < 1) \ .$$

ב)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln|1-x| \ , \qquad (-1 < x < 1) \ .$$

ג)

שאלה 18

א) תנו דוגמה של טור שעבורו התחום ההתכנסות שלו הוא הקטע $(0,4)$.

ב) הוכיחו:

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \ldots + \frac{2^n}{n!} + \ldots \ .$$

שאלה 19

מצאו את תחום התכנסות של

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^{2n}}{n^3 4^n} \ .$$

פתרונות

שאלה 1

א) $a_n = \dfrac{192}{2^n}$.

ב) $a_n = \dfrac{2n-1}{2n(2n+2)}$.

ג) $a_n = \dfrac{3^n}{(n+1)!}$.

שאלה 6

א)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(nx)+3\cos(nx)}{n^{6/5}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^{6/5}} + 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^{6/5}}$$

$\left|\dfrac{\sin(nx)}{n^{6/5}}\right| \leq \dfrac{1}{n^{6/5}}$. הטור $\dfrac{1}{n^{6/5}}$ מתכנס, לכן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nx)}{n^{6/5}}$ מתכנס בהחלט לכל $x\in\mathbb{R}$.

$\left|\dfrac{\cos(nx)}{n^{6/5}}\right| \leq \dfrac{1}{n^{6/5}}$. הטור $\dfrac{1}{n^{6/5}}$ מתכנס, לכן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(nx)}{n^{6/5}}$ מתכנס בהחלט לכל $x\in\mathbb{R}$.

מסקנה: הטור הנתון מתכנס לכל $x\in\mathbb{R}$ (תחום התכנסות: $\mathbb{R}$).

ב)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n}{x^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln 2}{x}\right)^n$$

הטור מתכנס עבור $\left|\dfrac{\ln 2}{x}\right| < 1 \Leftarrow |x| > \ln 2$.

תשובה סופית: תחום ההתכנסות $(-\infty, \ln 2)\cup(\ln 2,\infty)$.

ג) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\ln x}}$. זה הטור מהצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$. אשר מתכנס לכל $p>1$.

לכן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\ln x}}$ מתכנס עבור

$$\ln x > 1 \qquad \Rightarrow \qquad x > e\ .$$

ד) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!|x|^n}$, $x\neq 0$. נשתמש במבחן דלמבר:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!|x|^n}{(n+1)!|x|^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)|x|} = 0 < 1\ .$$

לכן הטור מתכנס לכל $x \neq 0$.

ה) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$.

$$\left|\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)\right| < \frac{|x|}{3^n} \quad \Rightarrow \quad \left|2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)\right| < \frac{2^n|x|}{3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n|x|}{3^n} = |x| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \ .$$

הטור הזה מתכנס לכל x. לכן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$ מתכנס בהחלט לכל x ממשי.

ו) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\tan x)^n$.

הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\tan x|^n$ מתכנס עבור $|\tan x| < 1$ לכן הטור מתכנס עבור

$$-\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi < x < \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \ .$$

ז) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{|x-2|^n}$. נבדוק לפי מבחן דלמבר:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} \cdot |x-2|^n}{|x-2|^{n+1} \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{|x-2|} \ .$$

עבור $\frac{1}{|x-2|} < 1$ הטור מתכנס, ז"א

$$|x-2| > 1 \quad \Rightarrow \quad x > 3 \text{ או } x < 1 \ .$$

$\frac{1}{|x-2|} > 1$ הטור מתבדר.

עבור $\frac{1}{|x-2|} = 1$ מקבלים טור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$, טור מתבדר כי $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$.

תשובה: תחום ההתכנסות $(-\infty,1) \cup (3,\infty)$.

ח)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5 \cdot x^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5} \left(\frac{1}{x^2}\right)^n \ .$$

נשתמש במבחן קושי:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{(n+1)^5 \cdot x^{2n}}\right)^{1/n} = \frac{1}{x^2} \ .$$

הטור מתכנס עבור

$$\frac{1}{x^2} < 1 \quad \Rightarrow \quad x > 1 \text{ או } x < -1 \ .$$

עבור $\frac{1}{x^2} > 1$ הטור מתבדר, ז"א עבור $-1 < x < 1$.

נבדוק $x = 1$ ו- $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5}$$

נשווה את הטור עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2n+1}{(n+1)^5}\right)}{\left(\frac{1}{n^4}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n+1)n^4}{(n+1)^5}\right) = 2 \neq 0 \ .$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ מתכנס לכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5}$ מתכנס.

תשובה: תחום ההתכנסות הוא $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

שאלה 7

א) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ כאשר $a_n = n^n$. לפי נוסחת קושי רדיוס התכנסות הוא

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{(a_n)^{1/n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{(n^n)^{1/n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n}\right| = 0 \ .$$

ב) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$ כאשר $a_n = \frac{1}{n^n}$. לפי נוסחת קושי רדיוס התכנסות הוא

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{(a_n)^{1/n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{\left(\frac{1}{n^n}\right)^{1/n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{\frac{1}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty} |n| = \infty \ .$$

ג) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n$ כאשר $a_n = n$. לפי נוסחת דלמבר רדיוס התכנסות הוא

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|1 - \frac{1}{n+1}\right| = 1 \ .$$

ד) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (3x)^n$ כאשר $a_n = 3^n$. לפי נוסחת קושי רדיוס התכנסות הוא

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{(a_n)^{1/n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{(3^n)^{1/n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} \ .$$

שאלה 8

א) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^{7/2}}\right) \cdot x^n$ כאשר $a_n = \frac{n^2+5}{n^{7/2}}$. לפי נוסחת דלמבר רדיוס התכנסות הוא

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+5}{n^{7/2}}}{\frac{(n+1)^2+5}{(n+1)^{7/2}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5}{(n+1)^2+5} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{7/2} \\ &=1\ . \end{aligned}$$

לכן הטור מתכנס לכל $|x| < 1 \Leftarrow x < 1$ $-1 < x < 1$.

$\underline{x = 1}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^{7/2}}\right)$.

נשווה עם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n^2+5}{n^{7/2}}\right)}{\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{7/2}+5n^{3/2}}{n^{7/2}} = 1 \neq 0\ .$$

הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ מתכנס לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^{7/2}}\right)$ מתכנס.

$\underline{x = -1}$

הוכחנו קודם כי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^{7/2}}\right)$ מתכנס, לכן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n^2+5}{n^{7/2}}\right)$ מתכנס בהחלט.

תשובה: הטור מתכנס בהחלט בתחום $[-1, 1]$.

ב) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$.

$$
\begin{aligned}
R &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\cdot 2^n}}{\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2^{n+1}}{2^n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 2 \\
&=2 \ .
\end{aligned}
$$

לכן הטור מתכנס לכל $|x|<2 \Leftarrow -2<x<2$.

$\underline{x=2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \ .$$

הטור מתבדר.

$\underline{x=-2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} \ .$$

הטור לאמתכנס בהחלט.

נבדוק התכנסות בתנאי לפי לייבניץ:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

2) הסדרה $\frac{1}{n}$ יורדת מונטונית.

לכן הטור מתכנס בתנאי.

תחום ההתכנסות: $[-2,2)$.
בתחום $(-2,2)$ הטור מתכנס בהחלט.
עבור $x=-2$ הטור מתכנס בתנאי.

ג) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| =\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}} =\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} =\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)= \ 1\ .$$

לכן הטור מתכנס לכל $|x|<1 \Leftarrow x<1$ ‏$-1<x<1$.

$\underline{x=1}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$. הטור מתכנס בתנאי לפי מבחן לייבניץ.

$\underline{x=-1}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(-1)^n\frac{1}{n}$. הטור מתבדר.

תשובה: תחום ההתכנסות: $(-1,1]$.
בקטע $(-1,1)$ הטור מתכנס בהחלט.
בנקודה $x=1$ התכנסות בתנאי.

ד) $\underline{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^n\cdot n^n}}$

נגדיר $y=x+1$ ונרשום את הטור בצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_ny^n \qquad a_n=\frac{(2n-1)^n}{2^n\cdot n^n}$$

נבדוק רדיוס התכנסות לפי נוסחת קושי:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)^{1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{(2n-1)^n}{2^n\cdot n^n}\right)}\right)^{1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n\cdot n^n}{(2n-1)^n}\right)^{1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n-1} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n-1}\right) \\ &=1\ . \end{aligned}$$

לכן הטור מתכנס בהחלט עבור $|y|<1$

$$|x+1|<1 \quad \Rightarrow \quad -1<x+1<1 \quad \Rightarrow \quad -2<x<0\ .$$

$\underline{x=0}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad a_n=\frac{(2n-1)^n}{2^n\cdot n^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^n}{2^n\cdot n^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n = e^{-1/2}\neq 0$$

לכן, לפי התנאי ההכרחי להתכנסות טורים, הטור מתבדר.

$\underline{x=-2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \qquad a_n=\frac{(2n-1)^n}{2^n\cdot n^n}$$

הוכחנו קודם שהטור הזה לא מתכנס בהחלט.

מכיוון ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^n}{2^n n^n}\neq 0$ הטור לא מתכנס בתנאי.

ז"א הטור מתבדר.

תשובה: הטור מתכנס בהחלט בתחום $(-2,0)$.

ה) $\underline{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+3)^n\cdot x^n}{n!}}$

$$
\begin{aligned}
R &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{(n^2+3)^n}{n!}\right)}{\left(\frac{((n+1)^2+3)^{n+1}}{(n+1)!}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+3)^n}{((n+1)^2+3)^{n+1}}\frac{(n+1)!}{n!} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3}{(n+1)^2+3}\right)^n\frac{1}{(n+1)^2+3}\cdot(n+1) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2n+1}{(n+1)^2+3}\right)^n\frac{n+1}{(n+1)^2+3} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2n+1}{(n+1)^2+3}\right)^{\frac{(n+1)^2+3}{2n+1}\cdot n\cdot\frac{2n+1}{(n+1)^2+3}}\frac{n+1}{(n+1)^2+3} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)}{(n+1)^2+3}}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+1)^2+3} \\
&= e^2\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+1)^2+3} \\
&= 0\ .
\end{aligned}
$$

לכן הטור מתכנס בהחלט עבור $x=0$.

ו) $\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}}$

נגדיר $t=x-1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^{2n}t^n}{(3n-2)^{2n}}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}}\right)}\right)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{(2n-1)^2}{(3n-2)^2}\right)}=\frac{9}{4}\ .$$

$\underline{t=\frac{9}{4}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}}\left(\frac{9}{4}\right)^n$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n-1)^2 9}{(3n-2)^2 4}\right)^n\\ &=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{9(4n^2-4n+1)}{4(9n^2-12n+4)}\right)^n\\ &=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{36n^2-36n+4)}{36n^2-48n+16}\right)^n\\ &=e^{1/3}\neq 0\ .\end{aligned}$$

לכן הטור מתבדר.

$\underline{t=\dfrac{-9}{4}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}}\left(\frac{9}{4}\right)^n$$

התנאי ההכרחי לא מתקיים, לכן הטור מתבדר. תשובה סופית: תחום מתכנס בהחלט בתחום $-\dfrac{9}{4}<x-1<\dfrac{9}{4}$. ז"א

$$-\frac{5}{4}<x-1<\frac{13}{4}\ .$$

ז) $\underline{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{n}{2(n+1)}\right)}\right)^{1/n}=2\ .$$

$\underline{x=2}$

$\displaystyle\sum_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

לכן הטור מתבדר.

$\underline{x=-2}$

$\displaystyle\sum_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$.

הטור מתבדר כי התנאי ההחרכי לא מתקיים.
תשובה סופית: הטור מתכנס בהחלט בתחום $(-2,2)$.

ח) $\underline{\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n\cdot\ln n}}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^{n+1}\ln(n+1)}{n3^n\ln n}=3\ .$$

(הסבר: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=1$).

<u>$x=3$</u>

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. לפי מבחן האינטגרל: $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$.

$$\int_2^\infty\frac{1}{x\ln x}\,dx=\int_2^\infty\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\,dx\ .$$

$t=\ln x \Leftarrow t'=\frac{1}{x}$.

$$\int_2^\infty\frac{1}{t}\cdot t'\,dx=\int_{\ln 2}^\infty\frac{1}{t}\,dt\ \ =[\ln 2]_{\ln 2}^{\infty}=\ln\infty-\ln(\ln 2)=\infty\ .$$

האינטגרל מתבדר לכן גם הטור מתבדר.

<u>$x=-3$</u>

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$. הוכחנו קודם שהטור לא מתכנס בהחלט. נבדוק התכנסות בתנאי.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln n}=0$.

$\frac{1}{n\ln n}$ סדרה יורדת מונוטונית.

לכן, לפי מבחן לייבניץ הטור מתכנס בתנאי.

תשובה סופית: תחום התכנסות הוא

$$x\in[-3,3)\ .$$

<u>שאלה 9</u>

א) $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)\ .$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\ ,\qquad \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n\ .$$

לכן

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$$

כלומר

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \ .$$

תחום התכנסות:

$$|x^2| < 1 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x+1) < 0 \quad \Rightarrow \quad -1 < x < 1$$

ב) $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$

$$f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) \ .$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

לכן

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + (-1)^n\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)+1}{2n+1} = 1$$

$x = 1 \Leftarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ מתבדר (משווים עם הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$).

$x = -1 \Leftarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{1}{2n+1}$ מתכנס לפי מבחן לייבניץ.

תחום התכנסות: $x \in [-1, 1)$.

שאלה 19 $[-2, 2]$