שיעור 5
רציפות בקטע והגדרת הנגזרת

רציפות פונקציה בקטע

5.1 הגדרה: (רציפות בקטע בקטע פתוח)
פונקציה $f(x)$ נקראת רציפה בקטע פתוח (a,b) אם היא רציפה בכל נקודה $c\in(a,b)$ ז"א לכל $a<c<b$

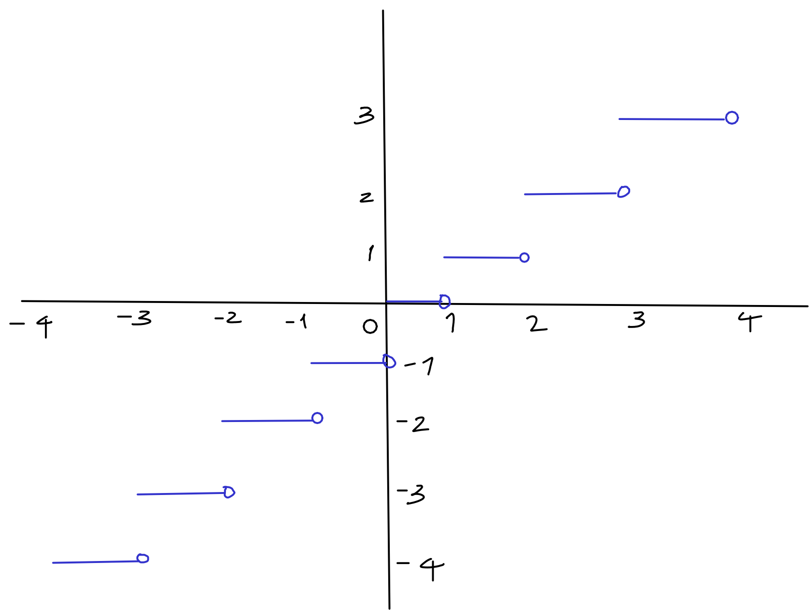
$$\lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c^+} f(x)=f(c)\ .$$

5.2 הגדרה: (רציפות בקטע בקטע סגור)
פונקציה $f(x)$ נקראת רציפה בקטע פתוח $[a,b]$ אם היא רציפה בכל נקודה פנימית של הקטע, כלומר לכל $c\in(a,b)$, וגם

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)\ ,\qquad \lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)\ .$$

5.3 דוגמא. $f(x)=[x]$

הערך השלם של x (ז"א המספר השלם הקרוב ביותר ל x שלא גדול מ x).



נבדוק אם $f(x)$ רציפה בקטע $[1,2]$.

בקטע הסגור $(1,2)$ הפונקציה היא $y=1$ - רציפה.

$$\lim_{x\to 1^+}[x]=1\ ,\qquad \lim_{x\to 2^-}[x]=1\ ,\qquad f(2)=2.$$

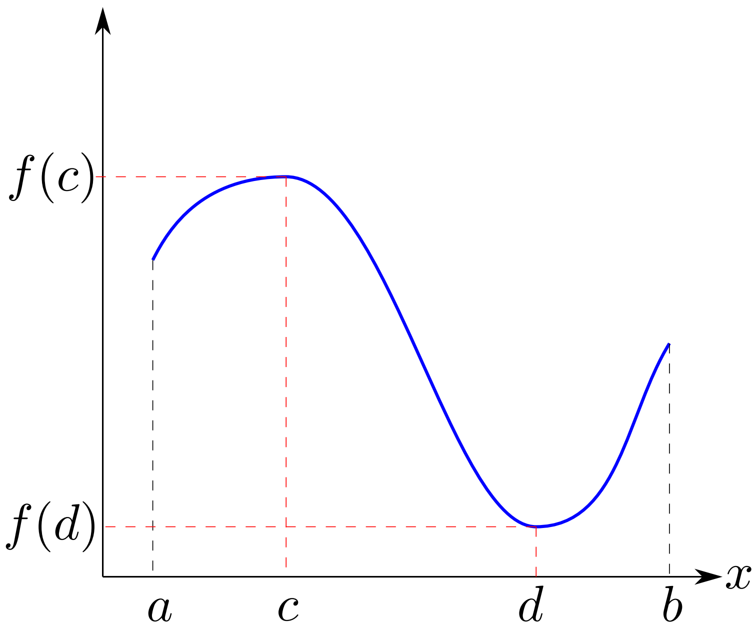
לכן $f(x)$ לא רציפה משמאל בנקודה $x=2$, ו- $f(x)$ רציפה מימים בנקודה $x=1$.

כלומר $f(x)$ לא רציפה בקטע סגור $[1,2]$. $f(x)$ רציפה בקטע $[1,2)$.

משפטים היסודיים של רציפות פונקציה בקטע סגור

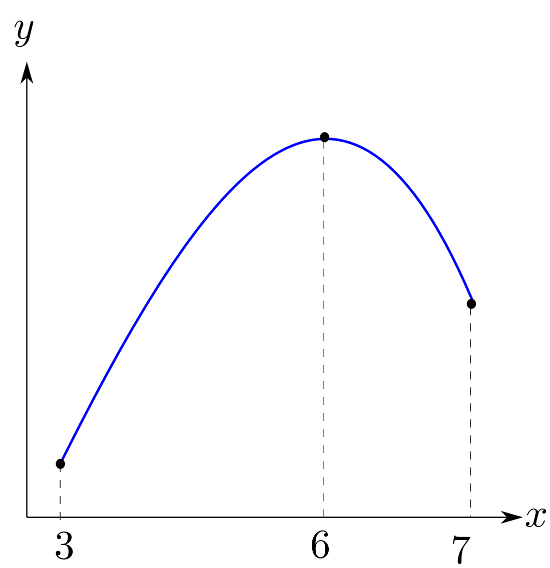
5.4 תורת. (משפט ויירשטראס - ערך גדול ביותר וקטן ביותר של פונקציה)
אם פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$, אז $f(x)$ מקבלת בקטע הזה את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר. ז"א קיים מספרים c ו- d בקטע $[a,b]$ כך ש

$$f(d) \leq f(x) \leq f(c) \qquad \forall x \in [a,b] \ .$$



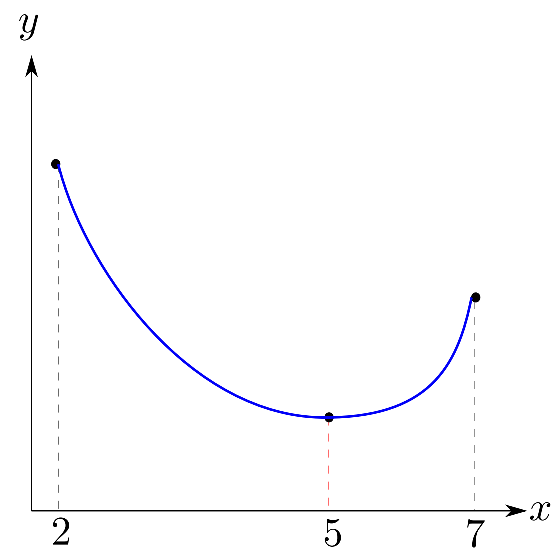
דוגמאות.

1 $f(x) = -(x-2)(x-10)$ רציפה קטע $[3,7]$.



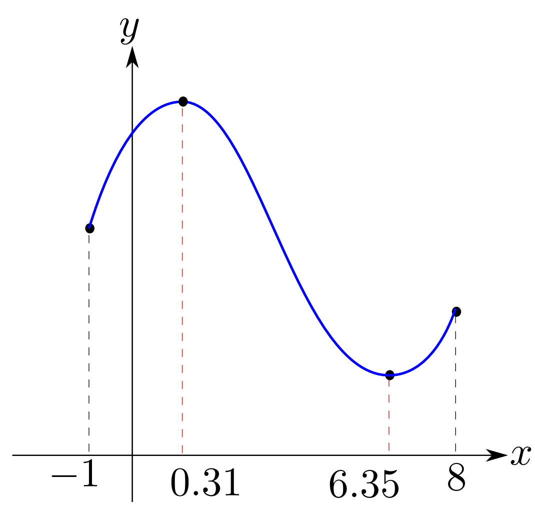
מינימום	$f(3)$
מקסימום	$f(6)$

2 $f(x) = x^2 - 10x + 30$ רציפה קטע $[2,7]$.



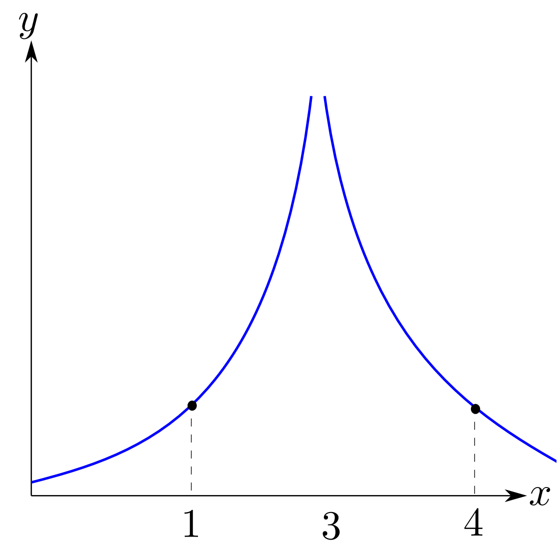
מינימום	$f(5)$
מקסימום	$f(2)$

3 $f(x) = x^3 - 10x^2 + 6x + 150$ רציפה קטע $[2,7]$.



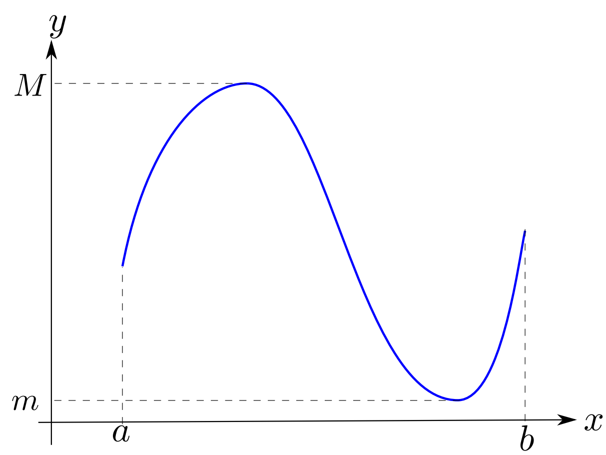
מינימום	$f(0.31)$
מקסימום	$f(6.35)$

4 $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$ בקטע $I = [1,4]$. f לא רציפה בקטע I ולכן לא מקבלת ערך מינימום.

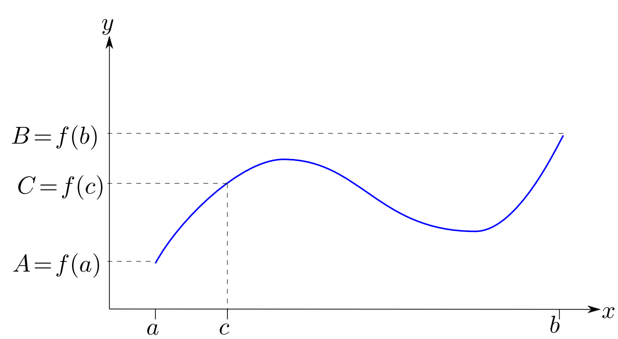


5.5 תורת. (משפט חסימות של פוקציה של וויירשטראס)
אם פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$, אז היא חסומה בקטע הזה. ז"א קיימים מספרים m ו- M כך ש

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall x \in [a,b]\ .$$

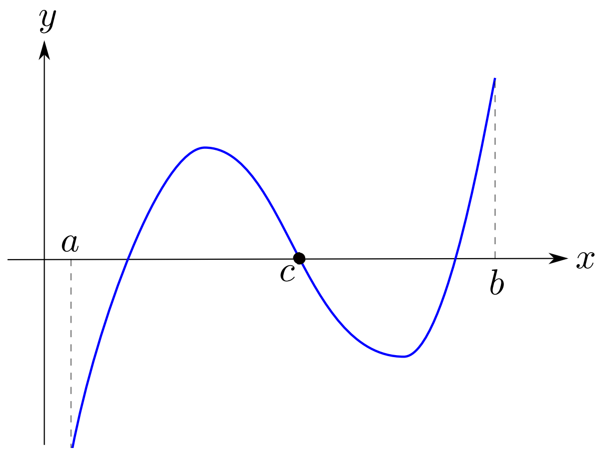


5.6 משפט. (1 משפט ערך הביניים)
אם פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ ומקבלת בקצוות הקטע ערכים שונים (ז"א
$f(a)=A$,$f(b)=B$,$A \neq B$, אז $f(x)$ מקבלת בקטע הזה את כל הערכים בין A ו- B.



5.7 משפט. (משפט ערך הביניים 2 (משפט בולזנו))
נניח ש $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ ובקצוות הקטע $f(x)$ מקבלת ערכים מסימנים שונים, כלומר (ז"א $f(a)\cdot f(b)<0$) אז קיימת לפחות נקודה אחד c, כך ש $a<c<b$ ו-

$$f(c)=0\ .$$



5.8 דוגמא. הוכח כי למשוואה

$$e^{2x+1}+x^2-5=0$$

יש שורש ממשי אחת ומצא אותו עם דיוק של שתי ספרות.

פיתרון.
נגדיר פונקציה

$$f(x)=e^{2x+1}+x^2-5\ .$$

שים לב

$$f(0)=-5+e<0\ ,\qquad f(1)=-4+e^3>0\ .$$

מכיוון ש- $f(x)$ פונקציה אלמנטרית ומוגדרת בקטע $[0,1]$, אז f רציפה בקטע זו. $f(0)<0$ ו- $f(1)>0$ לכן לפי משפט בולזנו (משפט 5.7) קיים c בתחום $0<c<1$ כך ש- $f(c)=0$.

בנוסף f חח"ע בקטע $I=[0,1]$ ולכן f עולה ממש או יורדת ממש (ומכיין ש $f(0)<f(1)$ אז f עולה ממש).
לכן הנקודה שבה $f(c)=0$, יחידה.

$-2.281<0$	$f(0)$
$-1.669<0$	$f(0.1)$
$-0.904<0$	$f(0.2)$
$0.043>0$	$f(0.3)$

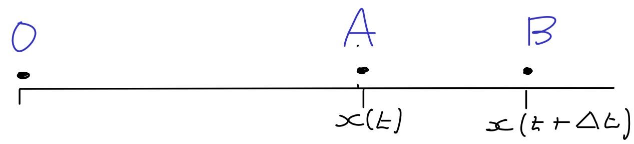
לכן $0.2<c<0.3 \Leftarrow c\approx 0.2$.

$-0.06<0$	$f(0.29)$
$0.043>0$	$f(0.3)$

$0.29<c<0.3 \Leftarrow c\approx 0.29$. ■

מושג הנגזרת

1 המשמעות הפיזית של נגזרת



נניח שגוף הנמצא בנקודה $x(t)$ בזמן התחלתי t, נע לנקודה $x(t+\Delta t)$ ומסתיים שם בזמן סופי $t+\Delta t$. המהירות הממוצעת היא

$$\bar{\mathrm{v}} = \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \ .$$

מכאן המהירות הרגעית בנקודה A היא

$$\mathrm{v} = \lim_{\Delta t\to 0} \bar{\mathrm{v}} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = x'(t) \ .$$

ז"א המשמעות הפיזית של הנגזרת היא מהירות.

2 הגדרת הנגזרת

5.9 הגדרה: (הנגזרת)
הנגזרת של פונקציה $f(x)$ בנקודה x תסומן $f'(x)$ ותוגדר

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \ .$$

דוגמאות.

1. $f(x)=c$

$$c' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = 0 \ .$$

2. $f(x)=x$

$$x' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x} = 1 \ .$$

3. $f(x)=x^2$

$$
\begin{aligned}
(x^2)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2\Delta x \cdot x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x \cdot x + \Delta x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (2 \cdot x + \Delta x) \\
&= 2x \ .
\end{aligned}
$$

$\underline{f(x) = x^n}$ **.4**

$$
\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^{n-k}\Delta x^k + \cdots + \Delta x^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^{n-k}\Delta x^k + \cdots + \Delta x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^{n-k}\Delta x^{k-1} + \cdots + \Delta x^{n-1} \right) \\
&= nx^{n-1} \ .
\end{aligned}
$$

$\underline{f(x) = \ln x}$ **.5**

$$
\begin{aligned}
(\ln x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left[\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x}\right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{x}}\right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \ln\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] \\
&= \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] \\
&= \frac{1}{x} \cdot \ln\left(\lim_{\Delta x \to 0}\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]\right) \\
&= \frac{1}{x} \cdot \ln(e) \\
&= \frac{1}{x} \ .
\end{aligned}
$$

.6 $f(x)=\frac{1}{x}$

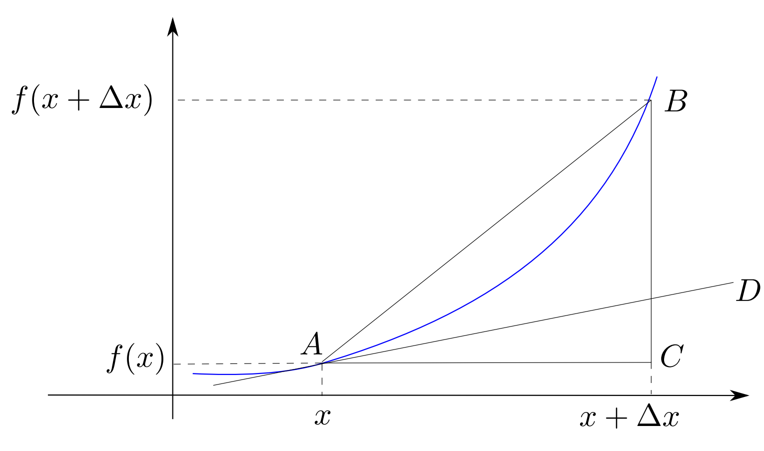
$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{x\cdot(x+\Delta x)\cdot\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x\cdot(x+\Delta x)}\\ &= \frac{-1}{x^2}\ .\end{aligned}$$

.7 $\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\ .\end{aligned}$$

---

3 משמעות הגאומטרית של נגזרת



השיפוע של הגרף בנגודה A מוגדרת להיות השיפוע של המשיק לגרף בנקודה A - ז"א השיפוע של הישר AD. יהי A הנקודה $(x,f(x))$ ו- B הנקודה $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$. אז המיתר AB מתלכד עם המשיק AD בגבול כאשר B מתקרב לנקודה A, וזה מתרחש כאשר $\Delta x\to 0$. לכן ניתן לחשב השיפוע של המשיק ע"י השיפוע של הישר AB בגבול ש- $\Delta x\to 0$. נקבל

$$\text{שיפוע של המשיק} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{BC}{AC} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

אבל אגף הימין הוא דווקא הנגזרת של $f(x)$ בנקודה A, לכן מצאנו כי השיפוע של גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה-x שווה להנגזרת בנקודה הזאת.

משוואת משיק ונורמל

5.10 כלל: (משיק ונורמל של גרף)
משוואת הישר המשיק לקו $y = f(x)$ בנקודה x_0 היא

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

משוואת הישר הנורמל לקו $y = f(x)$ בנקודה x_0 היא

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

5.11 דוגמא. $f(x) = x^2$. מצא את משוואת המשיק ומשוואת הנורמל בנקודה $x = 2$.

פיתרון.
משוואת המשיק:

$$y - 2^2 = 2 \cdot 2(x - 2) \qquad \Rightarrow \qquad y - 4 = 4(x - 2) \ .$$

ומשוואת הנורמל:

$$y - 2^2 = \frac{-1}{2 \cdot 2}(x - 2) \qquad \Rightarrow \qquad y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2) \ .$$

■

גזירות

5.12 הגדרה: (נגזרת החד צדדי)
הנגזרת החד-צדדי מצד שמאל של $f(x)$ בנקודה a מוגדרת להיות הגבול

$$f'(a^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

והנגזרת החד-צדדי מצד ימין של $f(x)$ בנקודה a מוגדרת להיות הגבול

$$f'(a^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \ .$$

5.13 הגדרה: (גזורית)
$f(x)$ נקראת גזירה בנקודה a אם הנגזרת מצד שמאל שווה לנגזרת מצד ימין בנקודה a , כלומר

$$f'(a^-) = f'(a^+) \ .$$

5.14 משפט. (קשר בין גזירות ורציפות)
אם פונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה a אז היא רציפה בנקודה הזאת.

בכיוון ההפוך זה לא מתקיים, ז"א אם פונקציה רציפה בנקודה a, היא לא בהכרח גזירה בה.

5.15 דוגמא.

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0\\ -x & x<0 \end{cases} .$$

נבדוק אם $f(x)$ רציפה בנקודה $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^+}|x|=\lim_{x\to 0^+}x=0\ , \qquad \lim_{x\to 0^-}|x|=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0\ .$$

לכן $f(x)$ רציפה בנקודה $x=0$.

נבדוק אם $f(x)$ גזירה בנקודה $x=0$:

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1\ ,$$
$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1\ .$$

לכן מכיוון ש- $f'_-(0)\neq f'_+(0)$ אז f אינה גזירה ב- $x=0$. ז"א לא קיים משיק בנקודה $x=0$.

5.16 דוגמא.

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0 \end{cases} .$$

נבדוק אם $f(x)$ רציפה בנקודה $x=0$. שים לב $\sin(\frac{1}{x})$ חסומה ולפיו

$$\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0\ .$$

שים לב $f(0)=0$ ולכן $f(x)$ רציפה ב- $x=0$.

נבדוק אם $f(x)$ גזירה בנקודה $x=0$:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(0+\Delta x)\sin\left(\frac{1}{0+\Delta x}\right)-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)}{\Delta x}\ .$$

הגבול לא קיים ולכן $f(x)$ אינה גזירה ב- $x=0$.

כללי הנגזרת

5.17 משפט. (כללים יסודיים של נגזרות)

1. סכום של פונקציות
$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)\ .$$
2. מכפלת פונקציה בסקלר
$$(\alpha f(x))' = \alpha f'(x)\ .$$
3. כלל הכפל
$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\ .$$
4. כלל המנה
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}\ .$$
5. כלל השרשרת
$$[f\left(g(x)\right)]' = f\left(g\right)'_g \cdot g(x)'_x\ .$$

דוגמאות

5.18 דוגמא.
$$\left[\ln\left(x^4-2x^2+6\right)\right]' = \frac{1}{x^4-2x^2+6}\cdot\left(4x^3-4x\right)$$

5.19 דוגמא.
$$\left[7^{x^2-4x}\right]' = 7^{x^2-4x}\cdot \ln 7\cdot (2x-4)\ .$$

5.20 דוגמא. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ בנקודה $A(\pi/2,2)$.

פיתרון.
$$f'(x) = 8\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{2}\ .$$
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -8\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} = -8\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = -2\ .$$
משוואת המשיק:
$$y-2 = -2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$
משוואת הנורמל:
$$y-2 = \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$
■

זווית ביו קווים עקומים

5.21 דוגמא. מצא את הזווית בין הקווים $y=\frac{x}{2}$ ו- $y=\frac{1}{1+x}$ בנקודת החיתוך שלהם שבה $x>0$. צייר את הסקיצה המתאימה.

פיתרון.
<u>נקודת חיתוך:</u>

$$\frac{x}{2}=\frac{1}{x+1} \qquad \Rightarrow \qquad x(x+1)=2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2+x-2=0 \qquad \Rightarrow \qquad x=1 \ .$$

נקודת חיתוך: $(1,0.5)$

<u>שיפוע של y_1:</u>

$$y_1=\frac{x}{2} \ , \qquad y_1'=\frac{1}{2} \ , \qquad y_1'(1)=\frac{1}{2}=m_1 \ .$$

<u>שיפוע של y_2:</u>

$$y_2=\frac{1}{x+1} \ , \qquad y_2'=\frac{-1}{(x+1)^2} \ , \qquad y_1'(1)=\frac{-1}{4}=m_2 \ .$$

<u>חישוב הזווית בין y_1 ו- y_2:</u>

$$\tan\alpha=\frac{|m_1-m_2|}{1+m_1\cdot m_2}=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{6}{7}$$

כך ש-

$$\alpha=40.6^\circ \ .$$

■

נגזרת של פונקציה סתומה

5.22 דוגמא. נתונה הפונקציה $y(x)$ הניתנת ע"י

$$x^2+y^2=1 \ .$$

מצא את הנגזרת $y'(x)$.
