

שיעור 11 אינטגרלים מסויימים

אינטגרל של שברים אלגבריים (פונקציות רציונליות)

11.1 הגדרה: (פונקציה רציונלית)

פונקציה רציונלית (שבר אלגברי) זאת פונקציה מהצורה

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

כאשר $P(x), Q(x)$ פולינומים.

דוגמא. (פונקציה רציונלית)

$$f(x) = \frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} \text{ פונקציה רציונלית: } P(x) = x^4 - 5x + 9, Q(x) = x - 2.$$

11.2 הגדרה: (פונקציה רציונלית אמיתי)

שבר אלגברי

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

נקרא אמיתי אם

$$\deg(P) < \deg(Q).$$

אם שבר אלגברי לא אמיתי, יש לעשות חילוק פולינומים.

דוגמא. (חילוק פולינומים)

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2}.$$

פתרון.

שלב ראשון בחישוב אינטגרל של שבר אלגברי לא אמיתי, להגיע לשבר אלגברי אמיתי ע"י חילוק פולינומים.
ע"י חילוק ארוך:

$$\frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \frac{15}{x - 2}$$

לכן

$$\int \frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = \int \left(x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \frac{15}{x - 2} \right) = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 15 \ln|x - 2| + C.$$



יש 4 סוגים של שברים אלגבריים פשוטים:

סוג 1

$$\frac{A}{x-a}$$

סוג 2

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

סוג 3

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q},$$

כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.

סוג 4

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+1} \quad \text{חשבו את}$$

פיתרון.

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+1} = \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

$$A(x-2) + B(x-1) = 2x+1$$

$$\begin{aligned} x=2 &\Rightarrow B=5 \\ x=1 &\Rightarrow A=-3 \end{aligned}$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+1} dx = \int \left(\frac{-3}{x-1} + \frac{5}{x-2} \right) dx = -3 \ln|x-1| + 5 \ln|x-2| + C.$$

■

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

$$\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2} \quad \text{חשבו את}$$

פיתרון.

$$\frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x-3}.$$

$$A(x-3)^2 + B(x-2) + C(x-3)(x-2) = x^2+4$$

$$\begin{aligned}x = 3 &\Rightarrow B = 13 \\x = 2 &\Rightarrow A = 8 \\x = 0 &\Rightarrow 9A - 2B + 6C = 4 \rightarrow C = -7\end{aligned}$$

$$\int \frac{x^2 + 4}{(x - 2)(x - 3)^2} dx = \int \left(\frac{8}{x - 2} + \frac{13}{(x - 3)^2} - \frac{7}{x - 3} \right) dx = 8 \ln |x - 2| - \frac{13}{x - 3} - 7 \ln |x - 3| + C .$$

■

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^2(x^2 + 1)} \text{ חשבו את}$$

פיתרון.

$$\begin{aligned}\frac{x^3 + 1}{x^2(x^2 + 1)} &= \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} . \\A(x^2 + 1)^2 + Bx(x^2 + 1) + (Cx + D)x^2 &= x^3 + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^3 : \quad B + C &= 1 \\x^2 : \quad A + D &= 0 \\x : \quad B &= 0 \\x^0 : \quad A &= 1\end{aligned}$$

לכן

$$D = -1 , \quad C = 1 .$$

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^2(x^2 + 1)} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x - 1}{x^2 + 1} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| - \arctan(x) + C .$$

■

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

$$I = \int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)} \text{ חשבו את}$$

פיתרון.

$$\begin{aligned}\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)} &= \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 5} . \\A(x^2 - 2x + 5) + (Bx + C)(x - 1) &= 2x^2 - 3x - 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2: & A + B = 2 \\x: & -2A + C - B = -3 \\x^0: & 5A - C = -3\end{aligned}$$

לכן

$$A = -1, \quad B = 3, \quad C = -2.$$

$$I = \int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} dx = \int \left(-\frac{1}{x-1} + \frac{3x-2}{x^2 - 2x + 5} \right) dx = -\ln|x-1| + \int \left(\frac{3x-2}{(x-1)^2 + 4} \right) dx.$$

נגדיר $u = x - 1$:

$$\begin{aligned}I &= \ln|x-1| + \int \frac{3(u+1)-2}{u^2+4} du \\&= \ln|x-1| + \int \frac{3(u+1)-2}{u^2+4} du \\&= \ln|x-1| + 3 \int \frac{u}{u^2+4} du - \int \frac{1}{u^2+4} du \\&= \ln|x-1| + \frac{3}{2} \ln|u^2+4| - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{u}{2}\right) \\&= \ln|x-1| + \frac{3}{2} \ln|(x-1)^2+4| - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)\end{aligned}$$

■

11.1 כלל: (שלבים באינטגרציה של שברים אלגבריים)

שלב 1. לחלק במכנה (חילוק פולינומי) במידה ש $\deg(P) \geq \deg(Q)$.

שלב 2. להציב שבר אלגברי אמיתי כסכום של שברים פשוטים.

שלב 3. לבצע אינטגרציה של כל שבר פשוט.

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

$$I = \int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx$$

פיתרון.

ע"י חילוק ארוך:

$$\frac{x^5 + 2x + 4x + 4}{x^4 + x^3 + 2x^2} = x - 2 + \frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = x - 2 + 4 \left(\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} \right)$$

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = \frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2}$$

$$A(x^2 + 2x + 2) + Bx(x^2 + 2x + 2) + (Cx + D)x^2 = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\begin{aligned}x^3: \quad B + C &= 1 \\x^2: \quad 2A + 2B + D &= 1 \\x: \quad 2A + 2B &= 1 \\x^0: \quad 2A &= 1\end{aligned}$$

לכן

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad D = \frac{1}{2}.$$

$$I = \int \left(x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2} \right) dx = \int \left(x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{(x + 1)^2 + 1} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 4 \int \frac{x + \frac{1}{2}}{(x + 1)^2 + 1} dx.$$

נגדיר $u = x + 1$:

$$\begin{aligned}I &= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 4 \int \frac{u - \frac{1}{2}}{u^2 + 1} du \\&= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2 \ln |u^2 + 1| - 2 \arctan(u) + C \\&= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2 \ln |(x + 1)^2 + 1| - 2 \arctan(x + 1) + C\end{aligned}$$

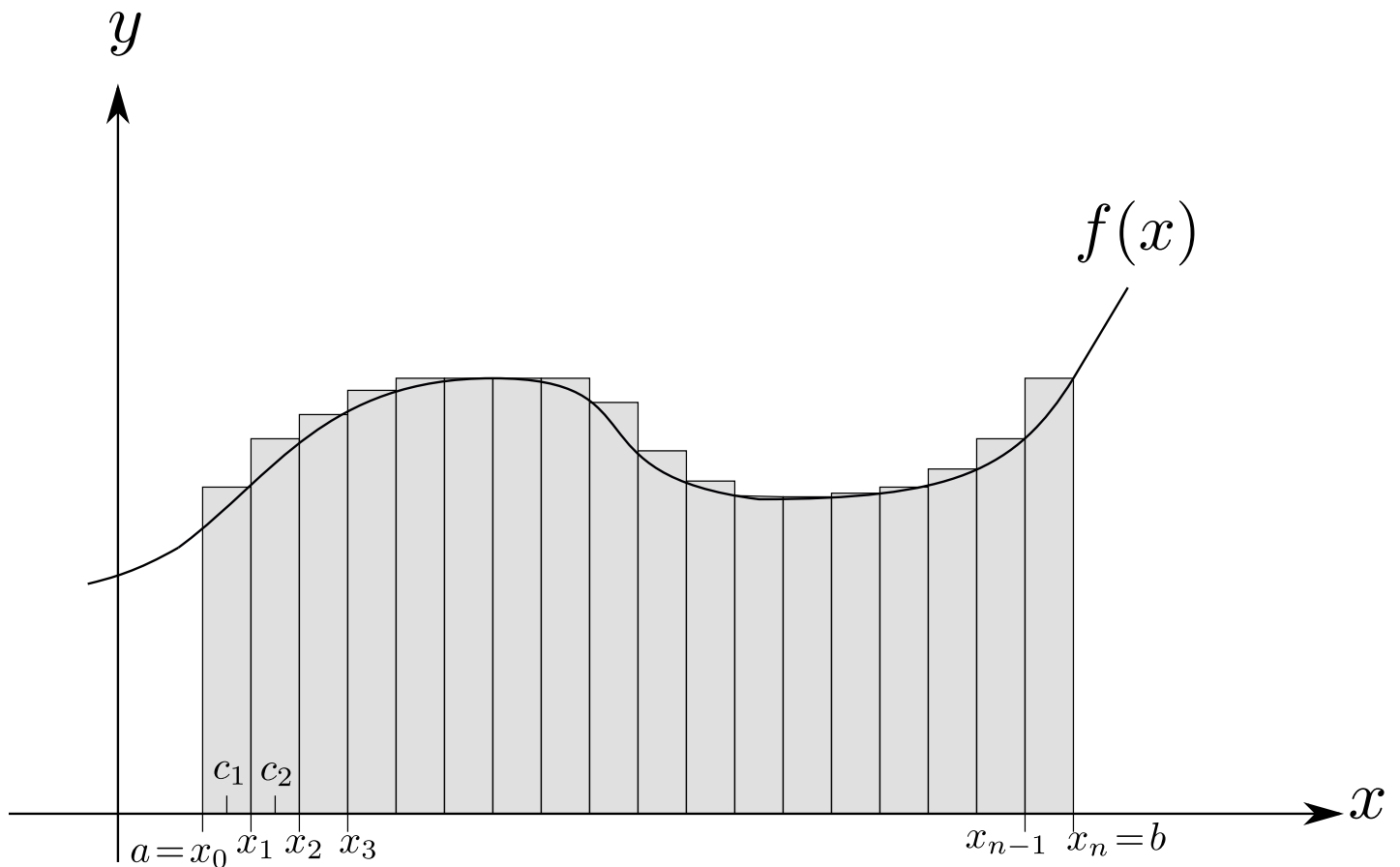
■

אינטגרל מסוים

11.2 הגדרה: (אינטגרל מסוים)

נניח שפונקציה $y = f(x)$ מוגדרת בקטע $[a, b]$. נחלק את הקטע $[a, b]$ לקטעים קטנים על ידי נקודות

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$



מכל קטע $[x_i, x_{i+1}]$ נבחר נקודה c_i באופן שרירותי. נבנה סכום אינטגרלי:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) .$$

נסמן $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. נפעיל את הגבול כאשר $\max(\Delta x_i) \rightarrow 0$. נקבל

$$\lim_{\max(\Delta x_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx .$$

האגף הימין הוא האינטגרל המסויים של $f(x)$ בקטע $[a, b]$.

11.3 משפט. (קיום אינטגרל מסוים)

אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$ אז האינטגרל מסויים $\int_a^b f(x) dx$ קיים.

11.4 משפט. (משמעות הגיאומטרית של אינטגרל מסוים)

אם $f(x) \geq 0$ פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$, אז $\int_a^b f(x) dx$ שווה לשטח הטרפז העקום החסום ע"י הקווים $y = f(x)$, $y = 0$, מלמעלה ו- $x = a$, $x = b$ בצדדים.

11.5 משפט. (נוסחת ניוטון לייבניץ)

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ ואז } \int f(x) dx = F(x) + C \text{ אם}$$

דוגמאות.

$$1. \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - 0 = 9.$$

$$2. \int_{-2}^2 \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{1}{2} \left[\arctan \left(\frac{x}{2} \right) \right]_{-2}^2 = \frac{1}{2} [\arctan(1) - \arctan(-1)] = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] = \frac{\pi}{4}.$$

$$3. \int_e^{e^2} \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = [\ln |\ln x|]_e^{e^2} = [\ln |\ln e^2| - \ln e] = [\ln |2| - 1] = 0.$$

11.6 משפט. (תכונות של אינטגרל מסויים)

$$1. \int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

$$2. \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

$$3. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$4. \text{ עבור } a < c < b \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

$$5. \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

הוכחה.

1.

2.

3.

4.

5.

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

כאשר $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$. לכן

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = (F(x) - F(a))'_x = F'(x) = f(x).$$



דוגמא.

עבור אילו ערכי x לגרף הפונקציה

$$f(x) = \int_0^x e^{-(t+2)^2}$$

יש נקודת פיתול?

פיתרון.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-(x+2)^2} . \\ f''(x) &= -2(x+2)e^{-(x+2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2 . \end{aligned}$$

■

11.7 דוגמא. (החלפת משתנים באינטגרל מסויים)

חשבו את $\int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x} dx$

פיתרון.

נגדיר

$$\begin{aligned} u &= \ln x , \quad u' = \frac{1}{x} , \quad u(e^2) = 2 , \quad u(1) = 0 . \\ \int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x} dx &= \int_0^2 u^2 u' dx = \int_0^2 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3} . \end{aligned}$$

■

11.8 דוגמא. (החלפת משתנים באינטגרל מסויים)

חשבו את $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$

פיתרון.

נגדיר

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{x} , \quad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2u} , \quad u(4) = 2 , \quad u(0) = 0 . \\ \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx &= \int_0^2 \frac{1}{1+u} \cdot 2u \cdot \frac{1}{2u} dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{1+u} \cdot 2u \cdot u' dx \\ &= \int_0^2 \frac{2u}{1+u} du \\ &= \int_0^2 \left(2 - \frac{2}{1+u} \right) du \\ &= [2u - 2 \ln |1+u|]_0^2 \\ &= 4 - 2 \cdot \ln 3 . \end{aligned}$$



11.9 דוגמא. (החלפת משתנים באינטגרל מסויים)

חשבו את $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

פיתרון.
נגדיר

$$u = \sqrt{e^x - 1}, \quad u' = \frac{1}{2\sqrt{e^x - 1}} \cdot e^x = \frac{u^2 + 1}{2u}, \quad u(\ln 2) = 1, \quad u(0) = 0.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx &= \int_0^{\ln 2} u \cdot \frac{u^2 + 1}{2u} \cdot \frac{2u}{u^2 + 1} dx \\ &= \int_0^{\ln 2} u \cdot \frac{2u}{u^2 + 1} \cdot u' dx \\ &= \int_0^1 u \cdot \frac{2u}{u^2 + 1} du \\ &= \int_0^1 \frac{2u^2}{u^2 + 1} du \\ &= \int_0^1 \left(2 - \frac{2}{u^2 + 1} \right) du \\ &= [2u - 2 \arctan(u)]_0^1 \\ &= 2 - 2 \cdot \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$



11.10 דוגמא. (החלפת משתנים באינטגרל מסויים)

חשבו את $\int_{-1}^2 \sqrt{2-x} dx$

פיתרון.
נגדיר

$$u = \sqrt{2-x}, \quad u' = \frac{1}{2\sqrt{2-x}} \cdot (-1) = \frac{-1}{2u}, \quad u(2) = 0, \quad u(-1) = \sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \sqrt{2-x} dx &= \int_{-1}^2 u \cdot (-2u) \cdot \frac{-1}{2u} dx \\ &= \int_{-1}^2 u \cdot (-2u) \cdot u' dx \\ &= \int_{\sqrt{3}}^0 (-2u^2) du \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} 2u^2 du \\ &= \left[\frac{2}{3} u^3 \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{3} 3^{3/2} .\end{aligned}$$

■

11.11 כלל: (אינטגרציה בחלקים באינטגרל מסויים)

$$\begin{aligned}\int_a^b u dv &= [uv]_a^b - \int_a^b v du \\ \int_a^b u v' dx &= [uv]_a^b - \int_a^b v u' dx\end{aligned}$$

11.12 דוגמא. (אינטגרציה בחלקים באינטגרל מסויים)

$$\int_1^e x \cdot \ln x dx$$

חשבו את

פיתרון.

נגדיר

$$u = \ln x , \quad v' = x , \quad u' = \frac{1}{x} , \quad v = \frac{x^2}{2} .$$

$$\begin{aligned}\int_1^e x \cdot \ln x dx &= \left[\ln x \cdot \frac{x^2}{2} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\ln x \cdot \frac{x^2}{2} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx \\ &= \left[\ln x \cdot \frac{x^2}{2} \right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e \\ &= \left[\ln e \cdot \frac{e^2}{2} - \ln 1 \cdot \frac{1}{2} \right] - \left[\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right] , \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} .\end{aligned}$$

■

11.13 דוגמא. (אינטגרציה בחלקים באינטגרל מסויים)

$$\int_0^{\pi} x \cdot \sin x \, dx$$

חשבו את

פיתרון.
נגדיר

$$u = x, \quad v' = \sin x, \quad u' = 1, \quad v = -\cos x.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \cdot \sin x \, dx &= [-x \cdot \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) \, dx \\ &= [-x \cdot \cos x]_0^{\pi} + [\sin x]_0^{\pi} \\ &= [-\pi \cdot \cos \pi + 0 \cdot \cos 0] + \sin \pi - \sin 0 \\ &= \pi. \end{aligned}$$

■

11.14 דוגמא.

$$\int_{-3}^3 e^{-x^2} \sin x \, dx$$

חשבו את

פיתרון.

$$\int_{-3}^3 e^{-x^2} \sin x \, dx = 0$$

■ בגלל ש- $e^{-x^2} \sin x$ פונקציה אי-זוגית והתחום סימטרי ביחס לראשית הצירים.

11.15 דוגמא.

$$I = \int_0^2 \min(x, a) \, dx = 1$$

עבור אילו ערכי a מתקיים

פיתרון.

$$a \leq 0$$

$$I = \int_0^2 a \, dx = [ax]_0^2 = 2a \neq 1.$$

$$a \geq 2$$

$$I = \int_0^2 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 2 \neq 1.$$

$$1 < a < 2$$

$$I = \int_0^a x \, dx + \int_a^2 a \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a + [ax]_a^2 = \frac{a^2}{2} + 2a - a^2 = -\frac{a^2}{2} + 2a = 1 .$$

$$a^2 - 4a + 2 = 0$$

$$a = 2 \pm \sqrt{2}$$

לכן התשובה היא $a = 2 - \sqrt{2}$ ■

11.16 דוגמא.

$$I = \int_0^{2\pi} \cos(\max(x, \pi)) \, dx$$

חשבו את

פיתרון.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(\max(x, \pi)) \, dx &= \int_0^{\pi} \cos(\pi) \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \cos(x) \, dx \\ &= [-x]_0^{\pi} + [\sin x]_{\pi}^{2\pi} \\ &= -\pi . \end{aligned}$$

■

11.17 דוגמא.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2 + 3 \sin x} \, dx$$

חשבו את

פיתרון.

נגדיר

$$\begin{aligned} u &= 2 + 3 \sin x , \quad u' = 3 \cos x . \\ \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2 + 3 \sin x} \, dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{u'}{3}}{u} \, dx \\ &= \int_2^5 \frac{1}{u} \, du \\ &= \left[\ln u \right]_2^5 \\ &= \ln \frac{5}{2} . \end{aligned}$$

■

11.18 דוגמא.

$$I = \int_0^5 |2x - 4| dx \text{ חשבו את}$$

פיתרון.

$$\begin{aligned} \int_0^5 |2x - 4| dx &= \int_2^5 (2x - 4) + \int_0^2 (-(2x - 4)) dx \\ &= \int_2^5 (2x - 4) + \int_0^2 (4 - 2x) dx \\ &= [x^2 - 4x]_2^5 + [4x - x^2]_0^2 \\ &= [25 - 20 - 4 + 8] + [8 - 4] \\ &= 13. \end{aligned}$$

■

11.19 דוגמא.

מצא את ערכו של t ($t > 0$) עבורו האינטגרל $I = \int_0^t (2 - te^{-0.5x}) dx$ היא מקסימאלי. חשבו את הערך המקסימאלי.

פיתרון.

$$F(t) = \int_0^t (2 - te^{-0.5x}) dx = [2x + 2te^{-0.5x}]_0^t = 2t + 2te^{-0.5t} - 2t = 2te^{-0.5t}.$$

$$F'(t) = 2e^{-0.5t} \left(1 - \frac{t}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2.$$

עבור $t = 2$ ל $F(t)$ יש ערך מקסימלי.

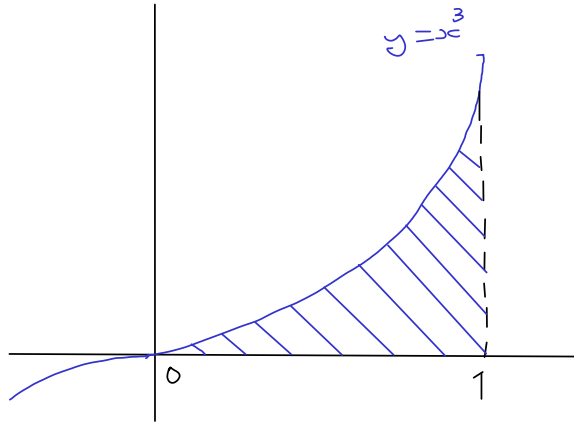
$$F(2) = 2 \cdot 2 \cdot e^{-0.5 \cdot 2} = \frac{4}{e}.$$

■

11.20 דוגמא. (חישוב שטח)

מצאו את השטח החסום ע"י גרף הפונקציה $y = x^3$ והישרים $y = 0$, $x = 1$.

פיתרון.



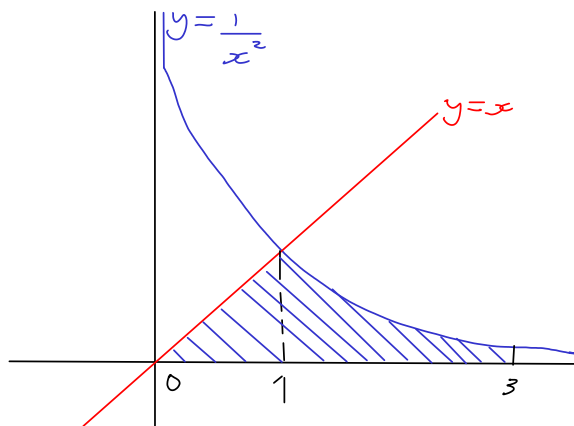
$$S = \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

■

11.21 דוגמא. (חישוב שטח)

מצאו את השטח החסום ע"י $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x$, $x = 3$, $y = 0$.

פיתרון.



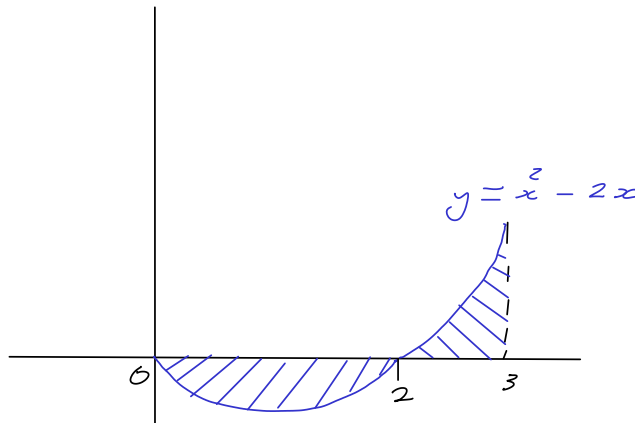
$$S = \int_0^1 x \, dx + \int_1^3 \frac{1}{x^2} \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{1}{x} \right]_1^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{6}.$$

■

11.22 דוגמא. (חישוב שטח)

מצאו את השטח החסום ע"י $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = 3$, $x = 0$.

פיתרון.



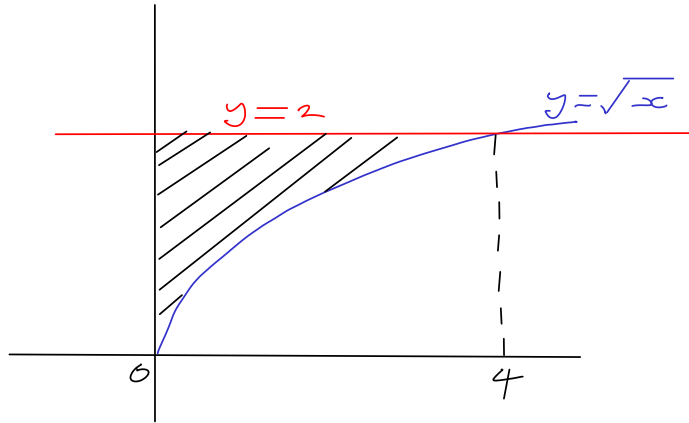
$$\begin{aligned} S &= - \int_0^2 (x^2 - 2x) \, dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) \, dx \\ &= - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^3 \\ &= - \left[\frac{2^3}{3} - 2^2 \right] + \left[\frac{3^3}{3} - 3^2 - \frac{2^3}{3} + 2^2 \right] \\ &= - \frac{8}{3} + 4 + 9 - 9 - \frac{8}{3} + 4 \\ &= \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

■

11.23 דוגמא. (חישוב שטח)

מצאו את השטח החסום ע"י $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = 2$.

פיתרון.



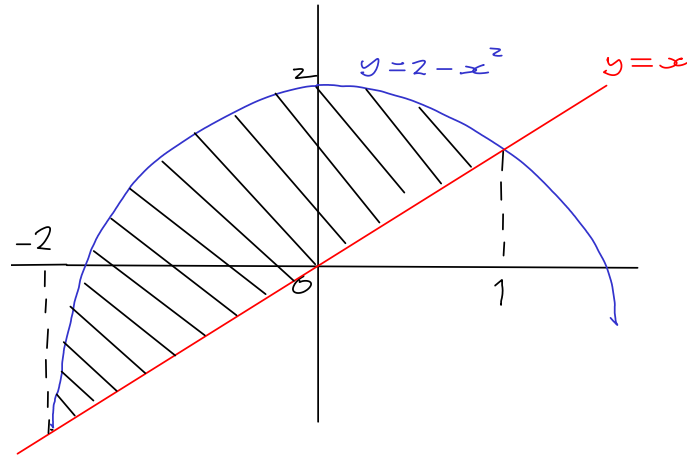
$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^4 2 \, dx - \int_0^4 \sqrt{x} \, dx \\
 &= [2x]_0^4 - \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^4 \\
 &= 8 - \frac{2}{3} \cdot 4^{3/2} \\
 &= \frac{8}{3} .
 \end{aligned}$$

■

11.24 דוגמא. (חישוב שטח)

מצאו את השטח החסום ע"י $y = x$, $y = 2 - x^2$.

פיתרון.



$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx \\
 &= \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 \\
 &= \left[2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right] - \left[-4 + \frac{8}{3} - \frac{4}{2} \right] \\
 &= \frac{9}{2} .
 \end{aligned}$$

■

11.25 דוגמא. (חישוב שטח)

מצאו את השטח החסום ע"י $y = x^2 - 2x + 2$, המשיק לפרבולה הזאת בנקודה $(3, 5)$ וציר ה- y .

פיתרון.

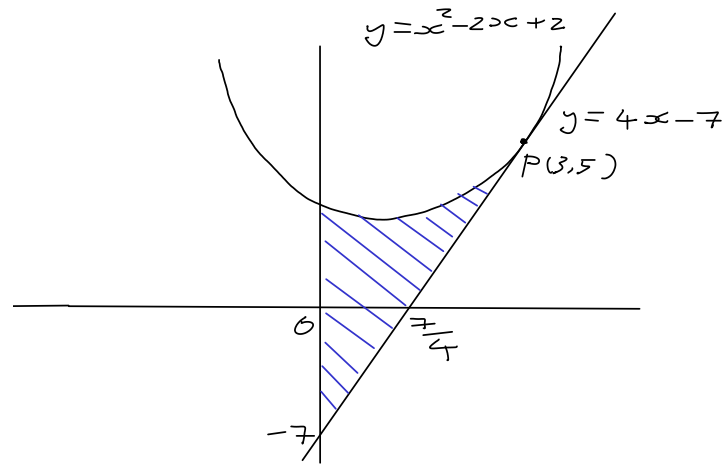
נמצא את משוואת המשיק:

$$y' = 2x - 2$$

$$y'(3) = 4$$

משוואת המשיק:

$$y - 5 = 4(x - 3) \quad \Rightarrow \quad y = 4x - 7 .$$



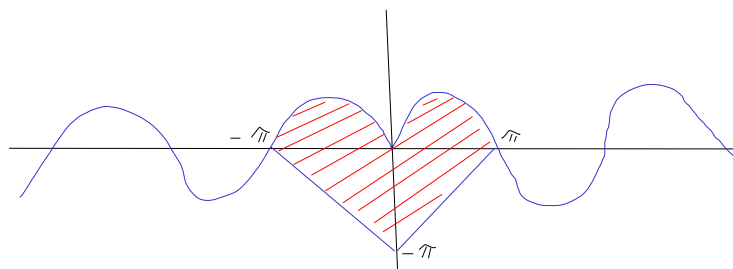
$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^3 ((x^2 - 2x + 2) - (4x - 7)) \, dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right]_0^3 - [2x^2 - 7x]_0^3 \, dx \\
 &= \left[\frac{3^3}{3} - 3^2 + 6 \right] - [18 - 21] \\
 &= 9 .
 \end{aligned}$$

■

11.26 דוגמא. (חישוב שטח)

מצאו את השטח החסום ע"י $y = \sin |x|$, $y = |x| - \pi$.

פיתרון.



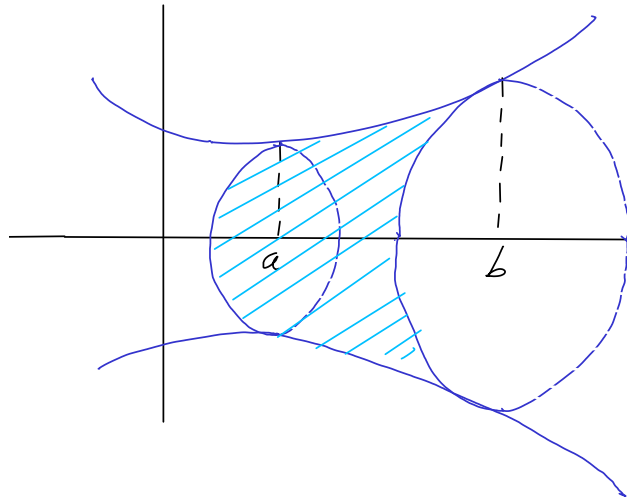
$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\pi} (\sin x - (x - \pi)) dx \\ &= 2 \left[-\cos x - \frac{x^2}{2} + \pi x \right]_0^{\pi} \\ &= 2 \left[1 - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 \right] 0 - 2[-1] \\ &= 4 + \pi^2 . \end{aligned}$$

■

11.27 משפט. (חישוב נפח גוף סיבוב סביב ציר ה- x)

בהינתן גרף של פונקציה $y = f(x)$ בקטע $[a, b]$. הנפח של גוף סיבוב סביב ציר ה- x הוא

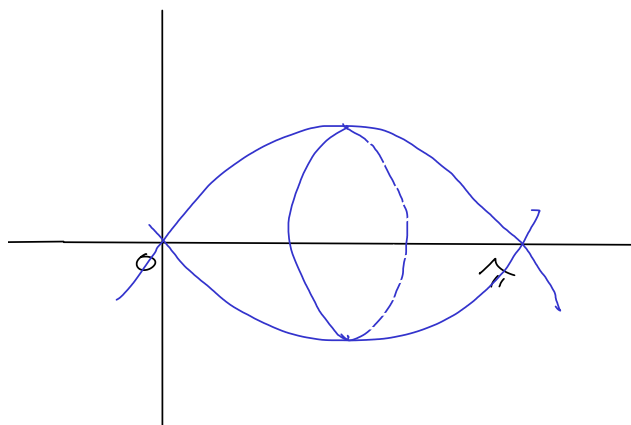
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx .$$



11.28 דוגמא. (חישוב נפח)

מצאו את נפח גוף הסיבוב סביב ציר ה- x של התחום המישורי החסום ע"י $y = \sin x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

פיתרון.



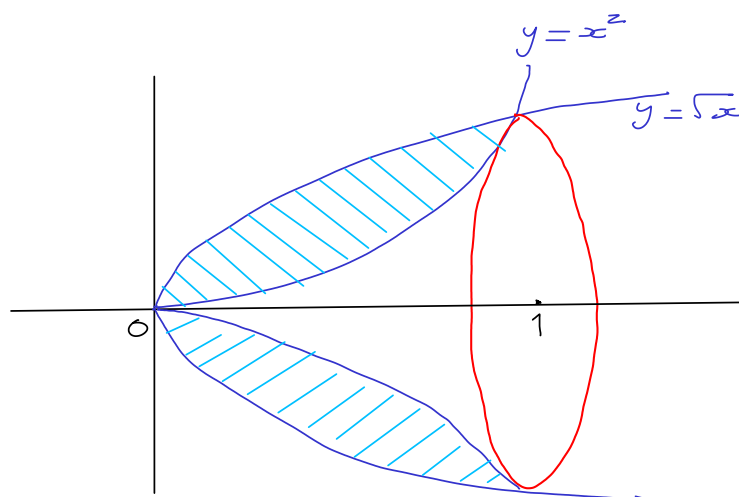
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi^2}{2} . \end{aligned}$$

■

11.29 דוגמא. (חישוב נפח)

מצאו את נפח גוף הסיבוב סביב ציר ה- x של התחום החסום ע"י $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$.

פיתרון.



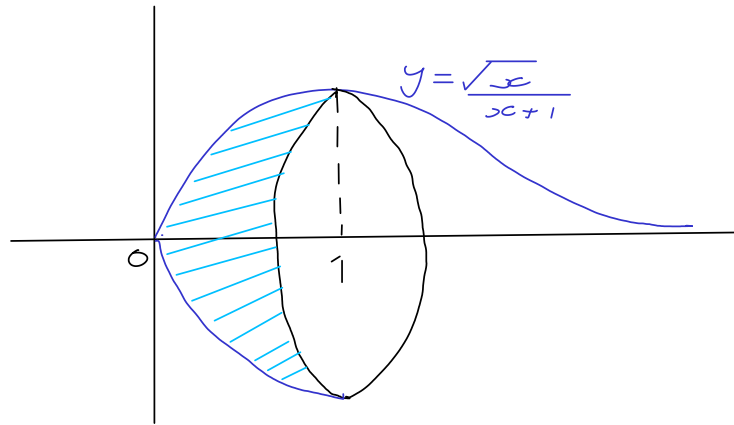
$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_0^1 x^4 dx \\
 &= \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\
 &= \pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right] \\
 &= \frac{3\pi}{10} .
 \end{aligned}$$

■

11.30 דוגמא. (חישוב נפח)

חשבו את נפח גוף הסיבוב סביב ציר ה- x של התחום החסום ע"י $y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ בתחום $0 \leq x \leq 1$.

פיתרון.



$$V = \pi \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} dx .$$

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A+B(x+1)}{(x+1)^2} .$$

$$x: \quad B = 1$$

$$x^0: \quad A + B = 0 \Rightarrow A = -1.$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \pi \left[\frac{1}{x+1} + \ln|x+1| \right]_0^1 = \pi \left[\frac{1}{2} + \ln|2| - 1 \right] = \pi \left(\ln|2| - \frac{1}{2} \right) .$$

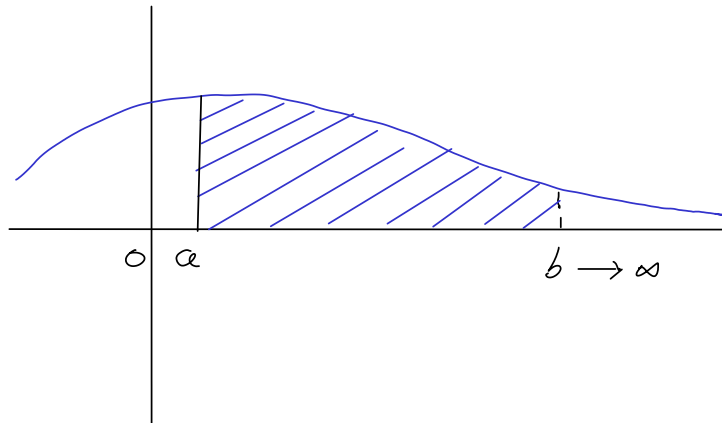
■

אינטגרל לא אמיתי

11.31 הגדרה: (אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון)

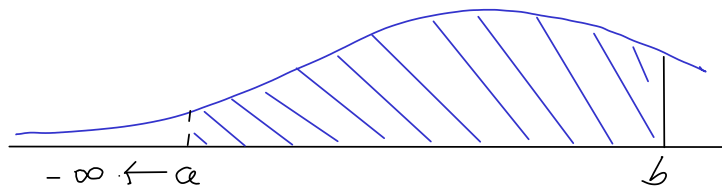
1. נניח שפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע (a, ∞) . אז

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$



2. נניח שפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $(-\infty, b)$. אז

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$



3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$$

לכל $-\infty < c < \infty$.

אם התשובה של האינטגרל הלא אמיתי היא מספר סופי אז אומרים שהאינטגרל מתכנס, אחרת אומרים שהאינטגרל מתבדר.

דוגמא. (אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון)

$$I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \text{ חשבו את}$$

פיתרון.

$$I = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln |b| - \ln |1| = \infty .$$

האינטגרל מתבדר. ■

דוגמא. (אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון)

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \text{ חשבו את}$$

פיתרון.

$$I = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{b} + 1 \right] = 1 .$$

האינטגרל מתכנס. ■

דוגמא. (אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון)

$$I = \int_{-\infty}^0 \cos x dx \text{ חשבו את}$$

פיתרון.

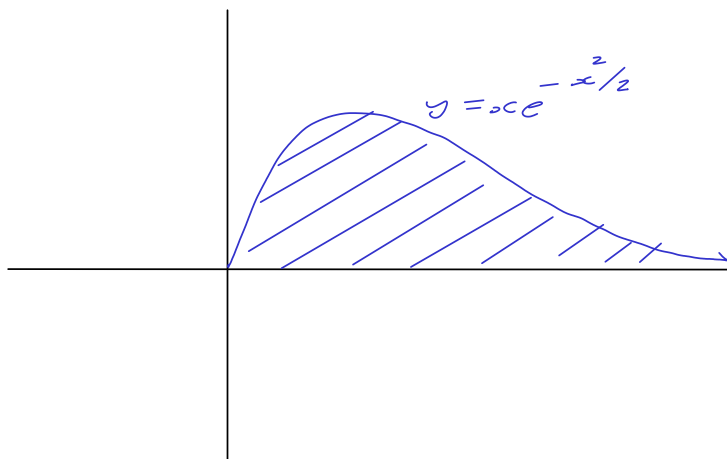
$$I = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \cos x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} [\sin 0 - \sin a] = \lim_{a \rightarrow -\infty} \sin(a)$$

לא קיים. האינטגרל לא מתכנס. ■

דוגמא. (אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון)

$$x \geq 0, y = 0, f(x) = xe^{-x^2/2} \text{ חשבו את השטח החסום ע"י}$$

פיתרון.



$$S = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x e^{-x^2/2} dx.$$

נגדיר

$$u = \frac{x^2}{2}, \quad u' = x.$$

כך

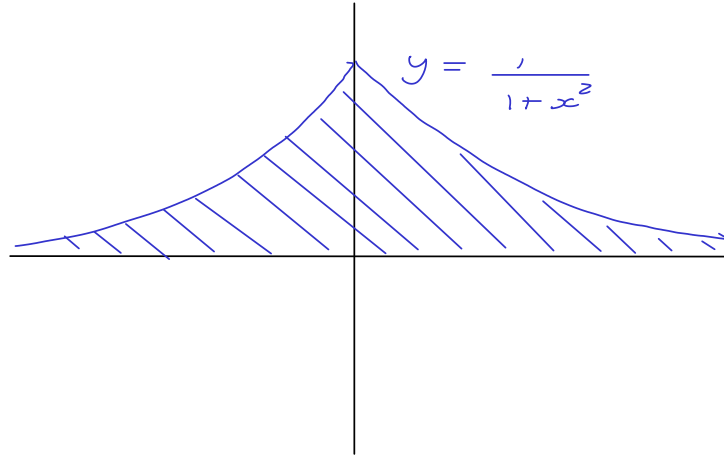
$$\begin{aligned} S &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b u' e^{-u} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-u} du \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-u} + 1] \\ &= 1. \end{aligned}$$

■ האינטגרל מתבדר.

דוגמא. (אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון)

חשבו את השטח החסום ע"י $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, $y = 0$, $x \geq 0$

פיתרון.



$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1} dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{x^2+1} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{x^2+1} dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} [\arctan 0 - \arctan a] + \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctan b - \arctan 0] \\
 &= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 \\
 &= \pi .
 \end{aligned}$$

■

11.32 משפט. (מבחן השוואה הראשון)

נניח שפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפות בקטע $[a, \infty)$ ולכל x השייך לקטע מתקיים

$$0 \leq f(x) \leq g(x) .$$

אז

1. אם $\int_a^{\infty} g(x) dx$ מתכנס אז גם $\int_a^{\infty} f(x) dx$ מתכנס.
2. אם $\int_a^{\infty} f(x) dx$ מתבדר אז גם $\int_a^{\infty} g(x) dx$ מתבדר.

דוגמא. (מבחן השוואה הראשון)

האם מתכנס האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(1+3^x)} dx$

פיתרון.

נגדיר $f(x) = \frac{1}{x^2(1+3^x)}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$. לכל $x \geq 1$ מתקיים $f(x) \leq g(x)$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = 1$$

מתכנס, לכן גם

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2(1+3^x)} dx$$

מתכנס. ■

11.33 משפט. (מבחן השוואה השני)

נניח שפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפות בקטע $[a, \infty)$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, וגם

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

כאשר $0 < k < \infty$. אז $\int_a^\infty f(x) dx$ ו- $\int_a^\infty g(x) dx$ מתכנסים או מתבדרים בו זמנים.

דוגמא. (מבחן השוואה השני)

האם האינטגרל $\int_1^\infty \ln \left(\frac{x^1 + 1}{x^2} \right) dx$ מתכנס?

פיתרון.

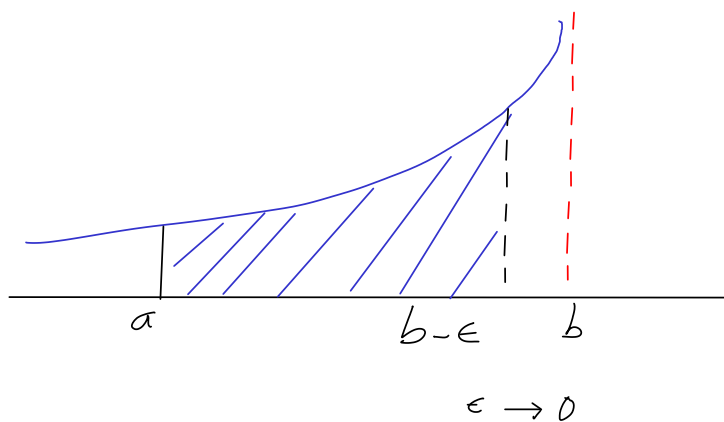
נגדיר $f(x) = \ln \left(\frac{x^1 + 1}{x^2} \right)$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$. אז

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{x^1 + 1}{x^2} \right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{x^2} = \ln e = 1 < \infty$$

■ $\int_1^\infty g(x) dx$ מתכנס, אז גם $\int_1^\infty f(x) dx$ מתכנס.

11.34 הגדרה: (אינטגרל לא אמיתי מסוג שני)

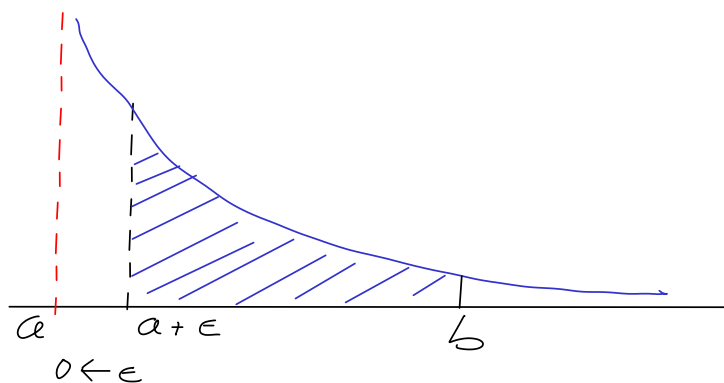
מצב 1. פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$ ו- $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$



אז

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx .$$

מצב 2. פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$ ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$



אז

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx .$$

אם התשובה של האינטגרל הלא אמיתי היא מספר סופי אז אומרים שהאינטגרל מתכנס, אחרת אומרים שהאינטגרל מתבדר.

דוגמא. (אינטגרל לא אמיתי מסוג שני)

חשבו את האינטגרל $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$

פיתרון.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\epsilon} - 1 \right] \\ &= \infty \end{aligned}$$

■

דוגמא. (אינטגרל לא אמיתי מסוג שני)

חשבו את האינטגרל $I = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$

פיתרון.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{3-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\arcsin \left(\frac{x}{3} \right) \right]_0^{3-\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\arcsin \left(\frac{3-\epsilon}{3} \right) - \arcsin 0 \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \arcsin \left(\frac{3-\epsilon}{3} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

■

דוגמא. (הערכת סכומים)

הוכח שלכל n טבעי מתקיים

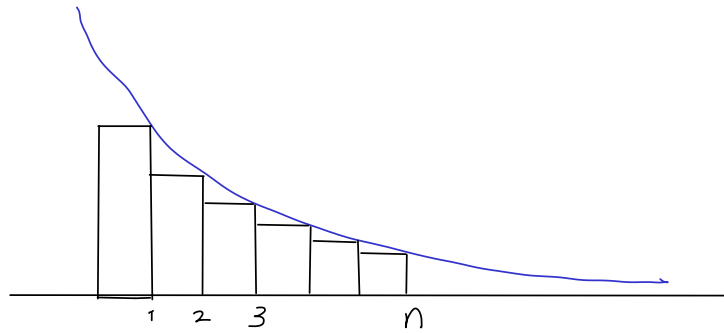
$$\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}} < 2.$$

פיתרון.

נגדיר

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

פונקציה יורדת.



$$f(2) + f(3) + \dots + f(n) < \int_1^n f(x) dx = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}} \right]_1^n = -\frac{2}{\sqrt{n}} + 2 < 2 .$$

■

דוגמא. (הערכת סכומים)

הוכח שלכל n טבעי מתקיים

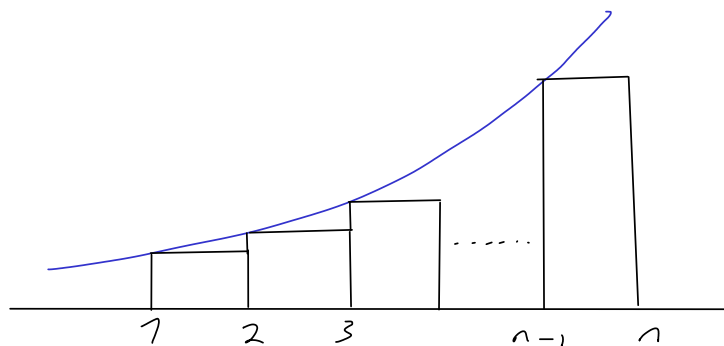
$$\frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 < \frac{n^3}{3} + n^2 .$$

פיתרון.

נגדיר

$$f(x) = x^2$$

פונקציה עולה.



$$f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) < \int_1^n f(x) dx .$$

לכן

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 < \int_1^n x^2 dx = \frac{n^3}{3} - \frac{1}{3}$$

נוסיף לשני הצדדים:

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 < \frac{n^3}{3} - \frac{1}{3} + n^2 < \frac{n^3}{3} + n^2 \quad (1^*)$$