שאלות שונות

שאלה 1 תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ המטירצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

א) מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

ב) הוכיחו כי A לא הפיכה.

ג) נתון הפולינום $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 3x + 3$. הוכיחו כי $f(A)$ הפיכה.

שאלה 2

א) תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ המטירצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. מצאו J צורת ז'ורדן ו- P הפיכה כך ש- $A = PJP^{-1}$.

ב) חשבו את $A^7 \cdot \begin{pmatrix} 51 \\ 12 \\ 36 \\ 18 \end{pmatrix}$.

שאלה 3 תהי $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 2 & -i & 4 \\ 0 & 0 & 7i \end{pmatrix}$.

א) מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

ב) יהי $f(x)$ הפולינום $f(x) = x^3 - 7ix^2 - x + 7i + 4$. הוכיחו כי המטריצה $f(A)$ הפיכה.

שאלה 4

א) תהי $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ב) הוכיחו כי A לכסינה.

ג) הוכיחו כי כל הערכים עצמיים של A יהיו ממשיים.

ד) הוכיחו כי הערכים עצמיים לא יהיו כולם שווים ל- 1 בערך מוחלט.

ה) יהיו $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ הווקטורים העצמיים של A. הוכיחו כי

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0$$

לכל $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 6$.

שאלה 5 תהי $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} .$$

א) הוכיחו כי כל הערכים העצמיים יהיו ממשיים.

ב) הוכיחו כי הערך מוחלט של כל ערך עצמי של A יהיה 1.

ג) הוכיחו כי קיימת Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $A = QD\bar{Q}$.

שאלה 6 תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ המטירצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

א) האם A הפיכה? אם כן מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

ב) הוכיחו כי A לא הפיכה.

ג) הוכיחו כי

$$A = \frac{1}{3}A^2 + \frac{1}{4}A^3 - \frac{1}{12}A^4 .$$

שאלה 7 תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

א) האם A לכסינה? אם כן, מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

ב) האם A הפיכה? נמקו את תשובתכם.

ג) יהי $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x + 1$. הוכיחו כי המטריצה $f(A)$ הפיכה.

שאלה 8 תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

א) האם A לכסינה? אם כן מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

ב) הוכיחו כי

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(-I + 3A + A^2 - A^3\right) \ .$$

ג) הוכיחו כי

$$A^{-2} = \frac{7}{4}I - \frac{1}{4}A - \frac{3}{4}A^2 + \frac{1}{4}A^3 \ .$$

שאלה 9 תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ המטריצה . $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

א) האם A לכסינה? אם כן מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

ב) הוכיחו כי

$$A^{-1} = -2I - 2A^2 + A^3 \ .$$

ג) הוכיחו כי

$$A^{-2} = 4I - 2A + 5A^2 - 2A^3 \ .$$

שאלה 10 תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

א) האם A לכסינה? אם כן, מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

ב) חשבו את $A^{99} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ג) הוכיחו כי
$$A^4 = 15A^3 - 14A^2 \ .$$

שאלה 11 תהי $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i & -i \\ 0 & 0 & -i & i \\ -i & i & 0 & 3 \\ i & -i & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

א) האם A לכסינה אוניטרית? אם כן מצאו Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $A = QD\bar{Q}$.

ב) יהי $u \in \mathbb{C}^4$ הווקטור $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. חשבו את $A^{10} \cdot u$.

שאלה 12 תהי $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. האם A לכסינה? אם כן מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

א) הוכיחו כי $A^{-1} = \frac{3-3i}{2}I + \frac{9i}{4}A - \frac{3+3i}{4}A^2 + \frac{1}{4}A^3$.

ב) הוכיחו כי $A^{-2} = \frac{-9i}{4}I + \frac{21i+21}{8}A - 2A^2 + \frac{3-3i}{8}A^3$.

שאלה 13 תהי $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} -i & i & i & i \\ i & -i & i & i \\ i & i & -i & i \\ i & -i & i & i \end{pmatrix}$.

א) האם A לכסינה? אם כן מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

ב) הוכיחו כי $A = -\frac{i}{2}A^2 - \frac{1}{4}A^3 - \frac{i}{8}A^4$.

שאלה 14 תהי $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1+i \\ 0 & -1-i & 0 \end{pmatrix}$.

א) מצאו את הערכים עצמיים של A.

ב) מצאו בסיס אורתנורמלי המורכב מווקטורים עצמיים של A.

ג) חשבו את e^A.

שאלה 15 יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbb{F}$. יהיו $a, b \in V$ ווקטורים של V. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

$\langle a, b\rangle = 0$ אם ורק אם $\|a\| \leq \|a + kb\|$ לכל סקלר $k \in \mathbb{F}$.

שאלה 16 יהי $n \in \mathbb{Z}_+$ מספר טבעי. תהי $\{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathbb{R}$ קבוצה של n מספרים ממשיים, ותהי $\{b_1, \ldots, b_n\} \in \mathbb{R}$ קבוצה של n מספרים ממשיים. הוכיחו כי

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} k a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{k}\right)$$

שאלה 17 יהי F מרחב מכפלה פנימית על השדה $\mathbb{R}$ של פונקציות המוגדרות על הקטע $[-\pi, \pi]$, עם מכפלה פנימית שמוגדרת

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) g(x)$$

לכל $f, g \in F$. יהי $n \in \mathbb{Z}_+$ מספר טבעי. הוכיחו כי הקבוצת ווקטורים

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}\right\}$$

אורתונורמלית.

שאלה 18 הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענה הבאה:

קיימת מכפלה פנימית $\langle , \rangle$ של ווקטורים ב- $\mathbb{R}^2$ כך לכל ווקטור $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ הנורמה ניתנת ע"י הנוסחה

$$\|u\|^2 = |x_1| + |x_2|,$$

כאשר $|x|$ מסמן את הערך מוחלט של x.

שאלה 19 תהי $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ מטריצות שמתחלפות, כלומר $AB = BA$. נניח כי הערכים עצמיים של A שונים זה מזה. הוכיחו כי קיים ווקטור $u \in \mathbb{R}^2$ אשר הוא ווקטור עצמי של A וגם ווקטור עצמי של B.

שאלה 20 תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. יהיו $a \in \mathbb{F}^n$ ווקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ_1 ו- b ווקטור עתמי ששייך לערך עצמי λ_2. נניח גם ש- $\lambda_1 \neq \lambda_2$. הוכיחו כי הווקטורים a ו- b בלתי תלויים לינאריים.

שאלה 21 תהי $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 2i & 0 & 1 \\ -2i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2i \\ 1 & 0 & 2i & 0 \end{pmatrix}$.

א) ללא חישוב ישר, הוכיחו כי A לכסינה אוניטרית.

ב) ללא חישוב ישר, הוכיחו כי הערכים העצמיים של A ממשיים.

ג) מצאו Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש-

$$A = QD\bar{Q} \ .$$

שאלה 22 תהי $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. מצאו צורת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $A = PJP^{-1}$.

שאלה 23

תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. מצאו צורת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $A = PJP^{-1}$.

שאלה 24 תהי $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ מטריצה נורמלית. נניח כי הערכים עצמיים של A הם

$$\lambda_1 = 1+i \ , \qquad \lambda_2 = -1+i \ , \qquad \lambda_3 = 2 \ , \qquad \lambda_4 = 3 \ ,$$

ונניח כי המרחבים העצמיים הם

$$V_{1+i} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} , \quad V_{-1+i} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} , \quad V_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \ .$$

שימו לב כי המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda_4 = 3$ לא נתון בכוונה. יהי $a \in \mathbb{C}^4$ הווקטור $a = \begin{pmatrix}1\\3\\4\\5\end{pmatrix}$.

א) מצאו את $A \cdot a$.

ב) מצאו את $A^4 \cdot a$.

ג) מצאו את המטריצה A.

שאלה 25 תהי $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ מטריצה נורמלית. נניח כי הערכים עצמיים של A הם

$$\lambda_1 = 3 \ , \qquad \lambda_2 = 5+5i \ , \qquad \lambda_3 = -5+5i \ ,$$

והמרחבים עצמיים הם

$$V_3 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \right\} \ , \quad V_{5+5i} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

שימו לב כי המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda_3 = -5+5i$ לא נתון בכוונה. יהי $a \in \mathbb{C}^4$ הווקטור $a = \begin{pmatrix} 1\\9\\7\\10 \end{pmatrix}$.

א) מצאו את $A \cdot a$.

ב) מצאו את $A^4 \cdot a$.

ג) מצאו את המטריצה A.

שאלה 26 תהי $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{3} & i \end{pmatrix}$.

א) ללא חישוב ישר, הוכיחו כי A לכסינה אוניטרית.

ב) ללא חישוב ישר, הוכיחו כי לא כולם הערכים העצמיים של A ממשיים.

ג) מצאו Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $A = QD\bar{Q}$.

שאלה 27 תהי $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & -i & 0 & 0 \\ i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & i \\ 0 & 0 & -i & 4 \end{pmatrix}$.

א) ללא חישוב ישר, הוכיחו כי A לכסינה אוניטרית.

ב) הוכיחו כי כל הערכים עצמיים של A ממשיים.

ג) מצאו Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $A = QD\bar{Q}$.

שאלה 28 נתונים $x,y,z,w \in \mathbb{R}$, כך ש- $x,y,z,w > 0$ ו- $x+y+z+w \leq 4$. הוכיחו כי

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w} \geq 4\ .$$

שאלה 29 תהי $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ מטריצה ריבועית מצורה כללית $a,b,c,d \in \mathbb{C}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

א) הוכיחו כי הפולינום האופייני היא $p_A(x) = x^2 - (a+d)x + ad - bc$.

ב) הוכיחו כי $p_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A)$.

ג) יהיו $B,C \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ אשר מקיימים את היחס $B = BC - CB$. הוכיחו את הטענות הבאות:

1) $\mathrm{tr}(B) = 0$.

2) $B^2 = -\det(B)I$.

3) $\det(B) = 0$.

4) $B^2 = 0$ (מטריצה האפס).

שאלה 30 תהי $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

א) הוכיחו כי $A^{-1} = \frac{1}{24}A^4 - \frac{11}{24}A^3 + \frac{15}{8}A^2 - \frac{85}{24}A + \frac{74}{24}I$.

ב) הוכיחו כי $A^{-2} = \frac{859}{144}I - \frac{2605}{288}A + \frac{511}{96}A^2 - \frac{395}{288}A^3 + \frac{37}{288}A^4$.

שאלה 31 תהיינה $A,B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות ריבועיות. נניח כי ל- A ול- B יש אותם ערכים עצמיים $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ (לא בהכרח שכולם שונים). נניח גם כי ל- A ו- B יש אותם ווקטורים עצמיים $u_1,\cdots u_n$, כאשר u_i הווקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ_i. הוכיחו שאם הערכים עצמיים $u_1,\cdots u_n$ בלתי תלויים לינאריים אז $A = B$.

שאלה 32 קבעו אם המטריצות הבאות דומות:

א) $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

ב) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

ג) $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

ד) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

שאלה 33 תהי $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -33i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3i \\ 33i & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -17i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3i & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -9i \\ 3i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9i & 93 \end{pmatrix}.$$

א) הוכיחו כי A לכסינה אוניטרית.

ב) הוכיחו כי כל הערכים עצמיים של A יהיו ממשיים.

ג) הוכיחו כי קיים ערך עצמי λ של A כך ש- $|\lambda| \neq 1$.

ד) הוכיחו כי כל הערכים עצמיים של A^{100} יהיו ממשיים.

שאלה 34 תהי $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ האופרטור

$$T\left(a + bx + cx + dx^2\right) = a + 7b + (7a+b)x + (2c+9d)x^2 + (9c+2d)x^3 \ .$$

א) מצאו בסיס של וקטורים של $\mathbb{R}_3[x]$ המורכב מווקטורים עצמיים של T.

ב) חשבו את $T^5\left(3 + 2x + 5x^2 + 7x^3\right)$.

שאלה 35 תהי $T : \mathbb{C}^{2\times 2} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ האופרטור $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a - 6ib & 6ia + 5b \\ c & 2d \end{pmatrix}$.

א) מצאו בסיס של וקטורים של $\mathbb{C}^{2\times 2}$ המורכב מווקטורים עצמיים של T.

ב) חשבו את $T\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

ג) הוכיחו כי $T^4\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14642 - 7320i & 7321 - 14640i \\ 3 & 112 \end{pmatrix}$.

שאלה 36 תהי $T:\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^4$ האופרטור $T\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5a-3ib\\3ia+5b\\c\\d\end{pmatrix}$.

א) מצאו בסיס של ווקטורים של $\mathbb{C}^{4\times 4}$ המורכב מווקטורים עצמיים של T.

ב) חשבו את $T\begin{pmatrix}2i\\-i\\5\\6\end{pmatrix}$.

ג) הוכיחו כי $T^5\begin{pmatrix}2i\\-i\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16368+32800i\\-32736-16400i\\5\\6\end{pmatrix}$.

שאלה 37 הוכיחו כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\sqrt{(n^2+n)\cdot(2^n-1)} \geq \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k\cdot 2^k}$.

שאלה 38 איזו נוסחה מגדירה מכפלה פנימית במרחב של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[-1,1]$?

א) $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)g^2(x)\,dx$

ב) $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} 4f(x)g(x)\,dx$

ג) $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\sin x\,dx$

ד) $\langle f,g\rangle=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)x^8\,dx$

שאלה 39 תהי $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ מטריצה עם ערכים עצמיים $\lambda=-1$ ו- $\lambda=3$. הוכיחו כי $A^{n+1}=a_nA+b_nI$ כאשר

$$a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n\ ,\qquad a_2=7\ ,\quad a_1=2\ .$$

שאלה 40 תהי $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ מטריצה אורתוגונלית ו- $|A|=1$. נניח כי $\lambda=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ערך עצמי של A.

א) מצאו את כל הערכים עצמיים של A.

ב) נתון כי $A^{100}=aA^2+bA+cI$. מצאו את הערכים של a,b,c.

שאלה 41 תהי $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ עם ערכים עצמיים 4 ו- -2. הוכיחו כי לכל n טבעי, $A^n = b_n A + c_n I$ כאשר $b_{n+1} = 2b_n + c_n$ $c_{n+1} = 8b_n$.

שאלה 42 תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית כך שהפולינום המינימלי הוא

$$m_A(x) = \left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)\left(x^2+3\right) \ .$$

נתון הפולינום

$$f(x) = x^6 + 6x^4 + 11x^2 + 7x - 2 \ .$$

א) האם המטריצה $f(A)$ הפיכה?

ב) הוכיחו כי A לא אוניטרית.

ג) הוכיחו כי A לא צמודה לעצמה.

ד) עכשיו נניח כי $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$.

1) מצאו את כל הערכים העצמיים של A.

2) הוכיחו כי A לכסינה.

שאלה 43 יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל המרחב $\mathbb{R}[x]$ (פולינום ממשיים) עם המכפלה פנימית $\langle f,g\rangle = \int_0^1 dx\, f(x)g(x)$ לכל $f,g \in \mathbb{R}[x]$.

א) מצאו בסיס אורתוגונלי לתת-מרחב $U \subset V$ שמוגדר

$$U = \text{span}\left\{1-x, 1-x^2, 1+x, 4+4x^3\right\} \ .$$

ב) מצאו את ההיטל של הפולינומים הבאים על U:

$$p(x) = 33 - 55x + 123x^2 - 67x^3 \ , \qquad q(x) = x + x^4 \ .$$

שאלה 44 תהי $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$.

א) הוכיחו כי אם סכום של האיברים בכל שורה שווה ל- 5 אז $\lambda = 5$ ערך עצמי של A.

ב) נניח כי $B = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$. הוכיחו כי $\lambda = 0$ ערך עצמי של B.

ג) הוכיחו כי

$$B^4 \cdot (B - 5I) = 0 \ .$$

ד) הוכיחו כי לא קיים ערך עצמי של B חוץ מ- $\lambda = 0$ ו- $\lambda = 5$.

שאלה 45 תהי $A \in \mathbb{F}^{3\times 3}$. בכל המקרים הבאים, קבעו אם A הפיכה. אם לא, הסבירו מדוע. אם כן, מצאו ביטוי של A^{-1} כצירוף לינארי של חזקות של המטריצה A.

א) הערכים עצמיים של A הם $\lambda = i$, $\lambda = -i$ ו- $\lambda = 0$.

ב) $\lambda = i$, $\lambda = -i$ ו- $\lambda = -1$.

שאלה 46 תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. נניח כי $u \in \mathbb{F}^n$ ווקטור עצמי של A וגם ווקטור עצמי של B. הוכיחו כי $\det(AB - BA) = 0$.

שאלה 47

א) תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. נניח כי $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ערכים עצמיים של A וכולם שונים זה מזה. יהי u_1 ווקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ_1, u_2 ווקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ_2, ו- u_3 ווקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ_3. הוכיחו כי u_1, u_2, u_3 בת"ל.

ב) עכשיו נניח כי A אוניטרית. הוכיחו כי u_1, u_2, u_3 אורתוגונלית.

ג) אם A אוניטרית, האם ייתכן ש- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ יהיו כולם ממשיים? נמקו את תשובתכם.

שאלה 48 תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ שמקיימות

$$AB - BA = 2B \ .$$

נניח כי λ ערך עצמי של A עם רכיב הממשי הגדול ביותר. יהי u הווקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ. הוכיחו כי $Bu = 0$.

שאלה 49 נגדיר V להיות מרחב ווקטורי של כל הסדרות הממשייות:

$$V = \{(a_i)_{i=1}^{\infty} = (a_1, a_2, \ldots)\}$$

נגדיר U להיות התת-מרחב

$$U = \left\{(a_i)_{i=1}^{\infty} \in V \middle| a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n \ , \quad n = 1, 2, \ldots\right\} \ .$$

תהי $T : U \to U$ העתקה לינארית שמוגדרת

$$T\left(a_1, a_2, \ldots\right) = \left(a_2, a_3, \ldots\right) \ .$$

א) מצאו את הערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של T.

ב) בעזרת הפתרון של סעיף הקודם, מצאו את הסדרה $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ שמקיימת $a_1 = 2$, $a_2 = 7$.

שאלה 50

א) תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הגדירו מהו וקטור עצמי של A.

ב) נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

1) מצאו את הערכים עצמיים ומרחבים עצמיים של A.

2) האם A לכסינה? נמקו את תשובתכם.

3) אם A לכסינה, מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש- $D = P^{-1}AP$.

4) חשבו את $A^{2019} \cdot \begin{pmatrix} 2020 \\ 2020 \\ 2020 \end{pmatrix}$.

ג) תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

1) λ הינו ערך עצמי של A אם ורק אם λ הינו ערך עצמי של A^t.

2) u הינו וקטור עצמי של A אם ורק אם u הינו וקטור עצמי של A^t.

שאלה 51

תהי $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ מטריצה ניתנת ע"י $A = \begin{pmatrix} 3 & i & 1 \\ -i & 3 & -i \\ 1 & i & 3 \end{pmatrix}$. האם A לכסינה אוניטרית? אם כן, מצאו Q אוניטרית ו-D אלכסונית כך ש- $A = Q \cdot D \cdot \bar{Q}$.

שאלה 52

תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ מטריצה ריבועית נורמלית עם ערכים עצמיים $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. נניח כי המרחב עצמי של $\lambda = 1$ הוא

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

חשבו את:

א) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

ב) $A^{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

ג) מצאו את המטריצה A.

שאלה 53

תהי $A \in \mathbb{R}^{12\times 12}$ מטריצה ריבועית כך שהפולינום האופייני שלה הוא

$$p_A(x) = (x-5)^6(x-4)^4(x-1)^2$$

והפולינום המינימלי הוא

$$m_A(x) = (x-5)^4(x-4)^2(x-1) \ .$$

שאלה 54

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו את הטענות הבאות:

א) אם A הפיכה אז $A^{-1} \in \text{span}\left\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\right\}$.

ב) הקבוצה $\left\{I_n, A, A^2, \ldots, A^m\right\}$ ת"ל אם ורק אם קיים פולינום שונה מאפס $P(x) \in \mathbb{F}[x]$ מסדר m לכל היותר כך ש $P(A) = 0$.

ג) $A^m \in \text{span}\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{m-1}\}$ אם ורק אם קיים פולינום $p(x) \in \mathbb{R}_m[x]$ כך ש- $p(A) = 0$.

שאלה 55

תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ סקלר. נניח ש $P(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום. הוכיחו ש

$$P(A) = \lambda I_n$$

אם ורק אם

$$P(B) = \lambda I_n$$

כך

שאלה 56

תהי $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1+3i \\ 0 & -1-3i & 0 \end{pmatrix}$.

א) מצאו את הערכים עצמיים של A.

ב) מצאו בסיס אורתנורמלי המורכב מווקטורים עצמיים של A.

ג) חשבו את e^A.

שאלה 57

תהי $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ מטריצה עם ערכים עצמיים $\lambda = 1$ ו- $\lambda = -2$. הוכיחו כי $A^{n+1} = a_n A + b_n I$ כאשר

$$a_{n+2} = -a_{n+1} + b_{n+1} = -a_{n+1} + 2a_n\ , \qquad a_2 = 3\ , \quad a_1 = -1\ .$$

שאלה 58

הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k \cdot 3^k} \leq \frac{1}{2}\sqrt{(n^2+n)\cdot 3\left(3^n - 1\right)}$.

שאלה 59

תהי $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ עם ערכים עצמיים 5 ו- -3. הוכיחו כי לכל n טבעי, $A^n = b_n A + c_n I$ כאשר $b_{n+1} = 2b_n + c_n$ $c_{n+1} = 15b_n$.

שאלה 60

נתונים $x, y, z, w, s, t \in \mathbb{R}$, כך ש- $x, y, z, w, s, t > 0$ ו- $x + y + z + w + s + t \leq 6$. הוכיחו כי

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} \geq 6\ .$$

פתרונות

שאלה 1

א) פולינום האופייני:

$$p_A(x)=|xI-A|=\begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & x+2 & -10 & -2 \\ -1 & 0 & x+2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&=(x-2)\begin{vmatrix} x+2 & -10 & -2 \\ 0 & x+2 & 1 \\ 0 & -2 & x-1 \end{vmatrix}\\
&=(x-2)(x+2)\begin{vmatrix} x+2 & 1 \\ -2 & x-1 \end{vmatrix}\\
&=(x-2)(x+2)\left((x+2)(x-1)+2\right)\\
&=(x-2)(x+2)\left(x^2+x\right)\\
&=(x-2)(x+2)x(x+1)\ .
\end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=-2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=-1$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=0$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=2$ מריבוי אלגברי 1.

כל הערכים עצמיים שונים לכן המטריצה לכסינה.

<u>מרחב עצמי שייך לערך עצמי -2:</u>

$$(A+2I)=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{4R_3-R_1\\4R_4+3R_1}]{4R_2-5R_1} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3\leftrightarrow R_4]{R_2\to\frac{1}{8}\cdot R_2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to 5R_3-8R_2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 52 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to 5R_3-8R_2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $y \in \mathbb{R}$ $(x,y,z,w) = (0,y,0,0) = y(0,1,0,0),$. לפיכך:

$$V_{-2} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} .$$

כל הערכים עצמיים שונים לכן המטריצה לכסינה.

<u>מרחב עצמי שייך לערך עצמי -1:</u>

$$(A+I) = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\5 & -1 & 10 & 2\\1 & 0 & -1 & -1\\-3 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[R_4+R_1]{\substack{3R_2-5R_1\\3R_3-R_1}} \begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\0 & -3 & 30 & 6\\0 & 0 & -3 & -3\\0 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4\to 3R_4+2R_3]{R_2\to\frac{-1}{3}\cdot R_2} \begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & -10 & -2\\0 & 0 & -3 & -3\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to -\frac{1}{3}\cdot R_3} \begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & -10 & -2\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2+2R_3} \begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & -8 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & -8 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

פתרון: $w \in \mathbb{R}$ $(x,y,z,w) = (0,-8w,-w,w) = (0,-8,-1,1)w,$. לפיכך:

$$V_{-1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\8\\1\\-1\end{pmatrix}\right\} .$$

כל הערכים עצמיים שונים לכן המטריצה לכסינה.

<u>מרחב עצמי שייך לערך עצמי 0:</u>

$$(A+0\cdot I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2R_2-5R_1 \\ 2R_3-R_1 \\ 2R_4+3R_1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 20 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2\to\frac{-1}{4}\cdot R_2 \\ R_4\to R_4+R_3}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-\frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $w\in\mathbb{R}$, $(x,y,z,w) = (0,\frac{-3}{2}w,-\frac{1}{2}w,w) = (0,3,1,2)w$. לפיכך:

$$V_0 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} .$$

מרחב עצמי שייך לערך עצמי 0:

$$(A-2\cdot I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1\to R_3 \\ R_3\to R_4 \\ R_4\to R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 5 & -4 & 10 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-5R_1 \\ R_3\to R_3+3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -4 & 30 & 7 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to 4R_2+7R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -16 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to 4R_1-R_3} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -16 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2+5R_3} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $w\in\mathbb{R}$, $(x,y,z,w) = (\frac{3}{2}z,\frac{-5}{4}w,-\frac{2}{5}w,w) = (-\frac{3}{5}w,\frac{-5}{4}w,-\frac{2}{5}w,w) = (12,25,8,-20)w$.
לפיכך:

$$V_2 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 12 \\ 25 \\ 8 \\ -20 \end{pmatrix} \right\} .$$

$$P=\begin{pmatrix} 0 & -12 & 0 & 0 \\ 1 & -25 & -8 & -3 \\ 0 & -8 & -1 & -1 \\ 0 & 20 & 1 & 2 \end{pmatrix} , \qquad D=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

ב) למטריצה A יש ערך עצמי שווה ל- 0 לכן A לא הפיכה.

ג) נשים לב כי $p_A(x)=(x-2)x(x+1)(x+2)=x^4+x^3-4x^2-4x$.

$$f(x)=x^4+x^3-4x^2-3x+3=p_A(x)+x+3 .$$

לכן

$$f(A)=p_A(A)+A+3I .$$

לפי משפט קיילי-המילטון $p_A(A)=0$ לכן

$$f(A)=3I+A .$$

נקח את הדטרמיננטה:

$$|f(A)|=|3I+A|=(-1)^4|-3I-A|=|-3I-A|=p_A(-3) .$$

-3 לא ערך עצמי של A לכן $p_A(-3)\neq 0$ לכן $|f(A)|\neq 0$ לכן $f(A)$ הפיכה.

שאלה 2

א) פולינום האופייני:

$$\begin{aligned} p_A(x)=|xI-A|=\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} &=(x-1)\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x-2 & -2 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &=(x-1)x\begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &=(x-1)x\left((x-2)(x-1)-2\right) \\ &=(x-1)x\left(x^2-3x\right) \\ &=x^2(x-1)(x-3) . \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=0$ מריבוי אלגברי 2.

$\lambda=1$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=3$ מריבוי אלגברי 1.

פולינום האופייני:

$$p_A(x) = x^2(x-1)(x-3)$$

האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$x(x-1)(x-3)\ , \qquad x^2(x-1)(x-3)\ .$$

<u>נבדוק $x(x-1)(x-3)$.</u>

$$A\,(A-I)\,(A-3I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

לכן

$$m_A(x) = x^2(x-1)(x-3)\ .$$

לפיכך הצורת ז'ורדן היא

$$J = \begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_1(1) & \\ & & J_1(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 0$:</u>

$$(A - 0\cdot I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_4 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z,w) = (-y,y,0,0) = y(-1,1,0,0), \quad y \in \mathbb{R}$. לפיכך:

$$V_0 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\ .$$

נסמן את הווקטור עצמי ב- $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. נחשב את הווקטור עצמי המוכלל. נסמן $u_2 = (x,y,z,w)$ ונפתור $(A - 0 \cdot I)u_2 = u_1$

$$(A - 0 \cdot I) \quad = \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2R_4 - R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $(x,y,z,w) = (-y+2, y, -1, 1), \ \ y \in \mathbb{R}$. נציב $y = 0$ ונקבל

$$u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

כל הערכים עצמיים שונים לכן המטריצה לכסינה.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1$:</u>

$$(A - I) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_4]{R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to 3 \cdot R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $x \in \mathbb{R}$ $(x,y,z,w)=(x,0,0,0)=(1,0,0,0)x,$. לפיכך:

$$V_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} .$$

נסמן את הווקטור עצמי $u_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

כל הערכים עצמיים שונים לכן המטריצה לכסינה.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 3$</u>:

$$(A-3\cdot I) = \begin{pmatrix}-2&1&2&1\\0&-3&1&0\\0&0&-1&2\\0&0&1&-2\end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\to R_4+R_3} \begin{pmatrix}-2&1&2&1\\0&-3&1&0\\0&0&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $w \in \mathbb{R}$ $(x,y,z,w)=(\frac{1}{2}y+z+\frac{1}{2}w, \frac{1}{3}z, 2w, w)=(17,4,12,6)w$. לפיכך:

$$V_3 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}17\\4\\12\\6\end{pmatrix}\right\} .$$

נסמן את הווקטור עצמי $u_4 = \begin{pmatrix}17\\4\\12\\6\end{pmatrix}$.

$$J = \begin{pmatrix}J_2(0)&&\\&J_1(1)&\\&&J_1(3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix}|&|&|&|\\u_1&u_2&u_3&u_4\\|&|&|&|\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&1&17\\-1&0&0&4\\0&-1&0&12\\0&1&0&6\end{pmatrix}$$

ב) $$\begin{pmatrix}51\\12\\36\\18\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}17\\4\\12\\6\end{pmatrix} = 3u_4$$

$$A^7\begin{pmatrix}51\\12\\36\\18\end{pmatrix} = A^7\cdot 3u_4 = 3A^7u_4 = 3\cdot 3^7u_4 = 3^8u_4 = 6561\cdot u_4 = \begin{pmatrix}111537\\26244\\78732\\39366\end{pmatrix}$$

שאלה 3

א) נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned}p_A(x) = |xI-A| =& \begin{vmatrix}x-i & -1 & 0\\ -2 & x+i & -4\\ 0 & 0 & x-7i\end{vmatrix}\\ =&(x-7i)\begin{vmatrix}x-i & -1\\ -2 & x+i\end{vmatrix}\\ =&(x-7i)\left((x-i)(x+i)-2\right)\\ =&(x-7i)(x^2+1-2)\\ =&(x-7i)(x^2-1)\\ =&(x-7i)(x+1)(x-1)\ .\end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=7i$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=1$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=-1$ מריבוי אלגברי 1.

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=7i$.

$$(A-7iI) = \begin{pmatrix}-6i & 1 & 0\\ 2 & -8i & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to 6iR_2+2R_1} \begin{pmatrix}-6i & 1 & 0\\ 0 & 50 & 24i\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[R_2\to\frac{1}{50}R_2]{R_1\to-\frac{1}{6i}R_1} \begin{pmatrix}1 & \frac{i}{6} & 0\\ 0 & 1 & \frac{12i}{25}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{i}{6}R_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{2}{25}\\ 0 & 1 & \frac{12i}{25}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z)=(\frac{-2}{25}z,\frac{-12i}{25}z,z)=(\frac{-2}{25},\frac{-12i}{25},1)z,\ \ z\in\mathbb{C}$.

$$V_{7i}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\12i\\-25\end{pmatrix}\right\}\ .$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1$.

$$(A-I) = \begin{pmatrix} -1+i & 1 & 0 \\ 2 & -1-i & 4 \\ 0 & 0 & -1+7i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to\frac{1}{-1+i}\cdot R_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}-\frac{i}{2} & 0 \\ 2 & -1-i & 4 \\ 0 & 0 & -1+7i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}-\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1+7i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to 4R_3-(-1+7i)R_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}-\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}-\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z) = (\frac{1+i}{2}y, y, 0) = (\frac{1+i}{2}, 1, 0)y,\ \ y\in\mathbb{C}$.

$$V_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = -1$.

$$(A+I) = \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 0 \\ 2 & 1-i & 4 \\ 0 & 0 & 1+7i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to\frac{1}{1+i}\cdot R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-\frac{i}{2} & 0 \\ 2 & 1-i & 4 \\ 0 & 0 & 1+7i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1+7i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to 4R_3-(1+7i)R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z) = (\frac{-1+i}{2}y, y, 0) = (\frac{-1+i}{2}, 1, 0)y,\ \ y\in\mathbb{C}$.

$$V_{-1} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1+i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_{7i} & u_{-1} & u_1 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1+i & 1+i \\ -12i & 2 & 2 \\ 25 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

ב) הפולינום האופייני הוא $p_A(x) = (x+1)(x-1)(x-7i) = x^3 - 7ix^2 - x + 7i$. לכן

$$f(x) = x^3 - 7ix^2 - x + 7i + 4 = p_A(x) + 4$$

לפי משפט קיילי-המילטון $p_A(A) = 0$ אז

$$f(A) = p_A(A) + 4I = 4I \ .$$

מכאן

$$|f(A)| = |4I| = 4^3 = 64 \neq 0$$

כלומר $|f(A)| \neq 0$ אז $f(A)$ הפיכה.

שאלה 4

א) נשים לב כי A סימטרית:

$$A^t = A \ .$$

בנוסף $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$, בפרט A ממשית, לכן

$$\bar{A} = A \ ,$$

כלומר A צמודה לעצמה.
לפי משפט לכסון אוניטרית, מטריצה שצמודה לעצמה לכסינה אוניטרית, לפיכך A לכסינה.

ב) הערכים עצמיים של מטריצה הצמודה לעצמה ממשיים, לכן הערך עצמי של A יהיו כולם ממשיים.

ג) A נורמלית. ז"א כל ערך עצמי של A יהיה 1 בערך מוחלט אם ורק אם A אוניטרית ($\bar{A} \cdot A = I$).
A לא אוניטרית לכן לא ייתכן שהערך מוחלט של כל ערך עצמי יהיה 1.

ד) A נורמלית לכן A לכסינה אוניטרית לכן הווקטורים עצמיים מהווים בסיס אורתונורמלי.

שאלה 5

א) $\bar{A} = A$, כלומר A צמודה לעצמה לכן כל הערכים עצמיים של A יהיו ממשיים.

ב) $A \cdot \bar{A} = I$ כלומר A אוניטרית, לכן הערך מוחלט של כל ערך עצמי של A יהיה 1.

ג) A צמודה לעצמה לכן A נורמלית לכן A לכסינה אוניטרית.

שאלה 6

א) נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned}
p_A(x) =&|xI - A| \\
=&\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & -1 \\ -10 & x+2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & x-3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \\
=&(x-1)\begin{vmatrix} x+2 & 0 & 0 \\ 5 & x-3 & -1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -10 & x+2 & 0 \\ -1 & 5 & x-3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
=&(x-1)(x+2)\begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x+2 & 0 \\ 5 & x-3 \end{vmatrix} \\
=&(x-1)(x+2)(x-3)(x-1) - (x+2)(x-3) \\
=&(x+2)(x-3)\left[(x-1)^2 - 1\right] \\
=&(x+2)(x-3)x(x-2)
\end{aligned}$$

ערכים עצמיים:
$\lambda = -2$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda = 0$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 1.
כל הערכים עצמיים שונים לכן A לכסינה.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = -2$</u>

$$(A+2I) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{3R_3-R_1 \\ 3R_4-R_1}]{3R_2-10R_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -15 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{10R_4+8R_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -\frac{1}{10}\cdot R_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2\cdot R_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -\frac{1}{15}\cdot R_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z,w)=(-\frac{1}{3}w,z,z,0)=(0,z,z,0)=(0,1,1,0)z,\ \ z\in\mathbb{R}$

$$V_{-2}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=0$</u>

$$(A-0\cdot I)\quad=\quad\begin{pmatrix}1&0&0&1\\10&-2&0&0\\1&-5&3&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_2-10R_1\\R_3-R_1\\R_4-R_1}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&-2&0&-10\\0&-5&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to 2R_3-5R_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&-2&0&-10\\0&0&6&50\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_2\to-\frac{1}{2}\cdot R_2\\R_3\to\frac{1}{6}\cdot R_3}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&5\\0&0&1&\frac{25}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z,w)=(-w,-5w,-\frac{25}{3}w,w)=(-1,-5,-\frac{25}{3},1)w,\ \ w\in\mathbb{R}$

$$V_0=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}3\\15\\25\\-3\end{pmatrix}\right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=2$</u>

$$(A-2I)\quad=\quad\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\10&-4&0&0\\1&-5&1&1\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_2+10R_1\\R_3+R_1\\R_4+R_1}}\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\0&-4&0&10\\0&-5&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to 4R_3-5R_2}\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\0&-4&0&10\\0&0&4&-42\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_2\to-\frac{1}{4}\cdot R_2\\R_3\to\frac{-1}{4}\cdot R_3}}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-\frac{5}{2}\\0&0&1&-\frac{21}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z,w)=(w,\frac{5}{2}w,\frac{21}{2}w,w)=(1,\frac{5}{2},\frac{21}{2},1)w,\ \ w\in\mathbb{R}$

$$V_2=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\5\\21\\2\end{pmatrix}\right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 2$</u>

$$(A-3I) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{2R_2+10R_1 \\ 2R_3+R_1 \\ 2R_4+R_1}]{} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & 0 & 10 \\ 0 & -10 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1\to -\frac{1}{2}\cdot R_1 \\ R_2\to -\frac{1}{10}\cdot R_2 \\ R_4\to 7R_4-3R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z,w) = (\frac{1}{2}w, w, z, 0) = (0,0,1,0)z,\ \ z \in \mathbb{R}$

$$V_3 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} , \qquad P = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_{-2} & u_0 & u_2 & u_3 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & -15 & 5 & 0 \\ 1 & -25 & 21 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

ב) למטריצה A יש ערך עצמי 0 לפיכך A לא הפיכה.

ג) הפולינום האופייני של A הוא

$$p_A(x) = (x-3)(x-2)x(x+2) = x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x .$$

לפי משפט קיילי המילטון $p_A(A) = 0$ לכן

$$A^4 - 3A^3 - 4A^2 + 12A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{12}\left(-A^4 + 3A^3 + 4A^2\right) = -\frac{1}{12}A^4 + \frac{1}{4}A^3 + \frac{1}{3}A^2 .$$

<u>שאלה 7</u>

א) נחשב את הפולינום האופייני:

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & x+2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & x-3 & x-1 \\ -1 & 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
=&(x-1)\begin{vmatrix} x+2 & -1 & -1 \\ 5 & x-3 & x-1 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & x-3 & x-1 \\ -1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \\
&+ 2\begin{vmatrix} -1 & x+2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & x+2 & -1 \\ -1 & 5 & x-3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=&(x-1)(x+2)\begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} + (x-1)\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} - (x-1)\begin{vmatrix} 5 & x-3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&- 2\begin{vmatrix} x-3 & x-1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & x-1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & x-3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&- 2\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} - 2(x+2)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&- 1\begin{vmatrix} 5 & x-3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (x+2)\begin{vmatrix} -1 & x-3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=&(x+2)\left(x^2-4x+2\right)(x-1) + (5x-4)(x-1) + (x+2)(x-1) \\
&- 2x(x-2) \\
&+ 2(-(5x-4) + (x+2)x - 4) \\
&+ x + 2 - (x+2)(x-2) - 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=&(x-1)(x+2)\left(x^2-4x+2\right) + 2(x-1)(3x-1) - 2x(x-2) \\
&+ 2(x^2-3x) \\
&+ x + 2 - x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=&(x-1)(x+2)\left(x^2-4x+2\right) + 2(x-1)(3x-1) - 2x(x-2) \\
&+ x^2 - 5x + 2 \\
=&x^4 - 3x^3 + x^2 + x \\
=&x(x-1)(x^2-2x-1) \\
=&x(x-1)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2}) \ .
\end{aligned}$$

ערכים עצמים:

$\lambda = 0$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda = 1-\sqrt{2}$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda = 1+\sqrt{2}$ מריבוי אלגברי 1.

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 0$

$$(A - 0 \cdot I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2-R_1\\R_3-R_1\\R_4-R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{4R_3-7R_2\\4R_3-3R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R-2\to R_2+3R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_0 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1$

$$(A-I) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4-R_1]{R_3-R_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-R_2]{R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4+2R_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2-R_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1-R_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to 2R_1+3R_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z,w) = (-\frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z, w, w) = (-\frac{1}{2}w, \frac{1}{2}w, w, w) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1)w,\ \ w \in \mathbb{R}$

$$V_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1-\sqrt{2}$</u>

$$
\begin{aligned}
(A-(1-\sqrt{2})I) &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}-3 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & \sqrt{2}+2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[\substack{-\sqrt{2}R_2+R_1 \\ -\sqrt{2}R_3+R_1 \\ -\sqrt{2}R_4+R_1}]{} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{2}-2 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 5\sqrt{2}+2 & -2\left(\sqrt{2}+2\right) & 1-\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2}+2 & -\sqrt{2}-2 & -1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\substack{R_3\to-3\sqrt{2}R_3+(2+5\sqrt{2})R_2 \\ R_4\to-3\sqrt{2}R_4+(2+5\sqrt{2})R_2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{2}-2 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_4\to R_4+\sqrt{2}R_3} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{2}-2 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{2}-2 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2-(-\sqrt{2}+1)R_3} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3\sqrt{2} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2\to-\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_1\to R_1+2R_3} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

פתרון:

$(x,y,z,w)=(-\sqrt{2}y-\frac{3}{\sqrt{2}}w,\frac{1}{\sqrt{2}}z,-w,w)=(w-\frac{3}{\sqrt{2}}w,\frac{-1}{\sqrt{2}}w,-w,w)=(1-\frac{3}{\sqrt{2}}1,\frac{-1}{\sqrt{2}},-1,1)w,\ w\in\mathbb{R}$

$$
V_{1-\sqrt{2}}=\left\{\begin{pmatrix} \sqrt{2}-3 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}
$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1+\sqrt{2}$</u>

$$
\begin{aligned}
(A-(1+\sqrt{2})I) \quad &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2}-3 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 2-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[\sqrt{2}R_4+R_1]{\substack{\sqrt{2}R_2+R_1 \\ \sqrt{2}R_3+R_1}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3\sqrt{2} & \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 2-5\sqrt{2} & 2\left(\sqrt{2}-2\right) & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 2-\sqrt{2} & \sqrt{2}-2 & -1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[R_4\to 3\sqrt{2}R_4+(2-5\sqrt{2})R_2]{R_3\to 3\sqrt{2}R_3+(2-5\sqrt{2})R_2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3\sqrt{2} & \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_4\to R_4-\sqrt{R_3}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3\sqrt{2} & \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3\sqrt{2} & \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2-(\sqrt{2}+1)R_3} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3\sqrt{2} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_1\to R_1+2R_3} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

פתרון:

$(x,y,z,w) = (\sqrt{2}y+\frac{3}{\sqrt{2}}w, -\frac{1}{\sqrt{2}}z, -w, w) = (w+\frac{3}{\sqrt{2}}w, \frac{1}{\sqrt{2}}w, -w, w) = (1+\frac{3}{\sqrt{2}}1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -1, 1)w,\ w \in$

$\mathbb{R}$

$$V_{1+\sqrt{2}}=\left\{\begin{pmatrix}\sqrt{2}+3\\1\\-\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\}$$

$$D=\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1-\sqrt{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad P=\begin{pmatrix}|&|&|&|\\u_{1+\sqrt{2}}&u_1&u_{1-\sqrt{2}}&u_0\\|&|&|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\frac{3}{\sqrt{2}}&-1&1-\frac{3}{\sqrt{2}}&-1\\\frac{1}{\sqrt{2}}&1&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\-1&2&-1&0\\1&2&1&1\end{pmatrix}.$$

<u>שאלה 8</u>

א) הפולינום האופייני הוא

$$\begin{aligned}p_A(x)=&|xI-A|=\begin{vmatrix}x&-1&-2&-\sqrt{5}\\-1&x&-1&-1\\0&0&x-1&2\\0&0&1&x\end{vmatrix}\\
=&\begin{vmatrix}x&-1&-\sqrt{5}\\-1&x&-1\\0&0&2\end{vmatrix}-x\begin{vmatrix}x&-1&-2\\-1&x&-1\\0&0&x-1\end{vmatrix}\\
=&2\begin{vmatrix}x&-1\\-1&x\end{vmatrix}-x(x-1)\begin{vmatrix}x&-1\\-1&x\end{vmatrix}\\
=&2(x^2-1)-x(x-1)(x^2-1)\\
=&(-x^2+x+2)(x^2-1)\\
=&-(x-2)(x+1)(x^2-1)\\
=&-(x-2)(x+1)^2(x-1)\end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=-1$ מריבוי אלגברי 2.

$\lambda=1$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=2$ מריבוי אלגברי 1.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=-1$</u>

$$(A+I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & -1 & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4\to R_4-R_2]{R_3\to R_3+2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & -1 & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\to 2R_4+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & -1 & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & -1 & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1+2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2-\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -1 & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-(2-\sqrt{5})R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{-1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1$</u>

$$(A-I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2+R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{5}+1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to 3R_4+2R_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{5}+1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5}-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{5}+1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to -\frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{5}+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1-\sqrt{5}R_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{5}+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 2$</u>

$$
\begin{aligned}
(A-2I) &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2\to 2R_2+R_1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & -3 & 4 & \sqrt{5}+2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_4\to R_4-R_3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & -3 & 4 & \sqrt{5}+2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2\to -2R_2-(2+\sqrt{5})R_3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 6 & \sqrt{5}-6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_1\to 2R_1+\sqrt{5}R_3} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 6 & \sqrt{5}-6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_1\to (\sqrt{5}-6)R_1-(4-\sqrt{5})R_2} \begin{pmatrix} 24-4\sqrt{5} & 8\sqrt{5}-36 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & \sqrt{5}-6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_1\to \frac{1}{4}R_1} \begin{pmatrix} 6-\sqrt{5} & 2\sqrt{5}-9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & \sqrt{5}-6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

פתרון:

$$(\tfrac{9-2\sqrt{5}}{6-\sqrt{5}}y, y, \tfrac{6-\sqrt{5}}{6}z, -2w, w) = (\tfrac{-9+2\sqrt{5}}{3}w, \tfrac{-6+\sqrt{5}}{3}w, -2w, w) = (\tfrac{-9+2\sqrt{5}}{3}, \tfrac{-6+\sqrt{5}}{3}, -2, 1)w,\ \ w \in \mathbb{R}$$

$$V_2 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -9+2\sqrt{5} \\ -6+\sqrt{5} \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{dim}V_{-1} + \text{dim}V_1 + \text{dim}V_2 = 3 < \text{dim}\mathbb{R}^4$$

לכן A לא לכסינה.

ב) הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = (x-2)(x-1)(x+1)^2 = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2\ .$$

לפי משפט קיילי-המילטון:

$$p_A(A)=0 \quad\Rightarrow\quad A^4-A^3-3A^2+A+2I=0$$

נעביר אגפים ונקבל

$$I=\frac{1}{2}\left(-A+3A^2+A^3-A^4\right)==\frac{1}{2}A\left(-I+3A+A^2-A^3\right)=A\left(-\frac{1}{2}I+\frac{3}{2}A+\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{2}A^3\right)$$

מכאן

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}I+\frac{3}{2}A+\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{2}A^3$$

ג) נכפיל את הביטוי בסעיף ב' ב- A^{-1}:

$$\begin{aligned}A^{-2}=&-\frac{1}{2}A^{-1}+\frac{3}{2}I+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}A^2\\=&-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}I+\frac{3}{2}A+\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{2}A^3\right)+\frac{3}{2}I+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}A^2\\=&\frac{1}{4}I-\frac{3}{4}A-\frac{1}{4}A^2+\frac{1}{4}A^3+\frac{3}{2}I+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}A^2\\=&\frac{7}{4}I-\frac{1}{4}A-\frac{3}{4}A^2+\frac{1}{4}A^3\end{aligned}$$

שאלה 9

$$\begin{aligned}p_A(x)=&|xI-A|=\begin{vmatrix}x-2&-1&-2&0\\-1&x&-1&-1\\0&0&x&-1\\0&0&1&x\end{vmatrix}\\=&\begin{vmatrix}x-2&-1&0\\-1&x&-1\\0&0&-1\end{vmatrix}-x\begin{vmatrix}x-2&-1&-2\\-1&x&-1\\0&0&x\end{vmatrix}\\=&-x(x-2)+1-x^2\left(x^2-2x-1\right)\\=&-x^2+2x+1-x^2\left(x^2-2x-1\right)\\=&(x^2-2x-1)(-x^2-1)\\=&(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})(x+i)(x-i)\end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=1+\sqrt{2}$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=1-\sqrt{2}$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=i$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=-i$ מריבוי אלגברי 1.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=1-\sqrt{2}$</u>

$$(A-(1-\sqrt{2})I) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & \sqrt{2}-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to(1+\sqrt{2})R_2-R_1} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4\to(-1+\sqrt{2})R_4+R_2]{R_3\to R_3-R_2} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to-\sqrt{2}R_4-(4-\sqrt{2})R_3} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to(1-\sqrt{2})R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1-\sqrt{2} & 2(1-\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{1-\sqrt{2}} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1+\sqrt{2}$</u>

$$
\begin{aligned}
(A-(1+\sqrt{2})I) &= \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2}-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}-1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2\to(1-\sqrt{2})R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}-1 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}-1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[R_4\to(-1-\sqrt{2})R_4+R_2]{R_3\to R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}-1 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}+4 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_4\to\sqrt{R}_4-(4+\sqrt{2})R_3} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}-1 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}-1 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_1\to(1+\sqrt{2})R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1+\sqrt{2} & 2(1+\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}-1 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$V_{1+\sqrt{2}} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = i$</u>

$$(A-iI) = \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -i & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & 1 \\ 2-i & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2-(2-i)R_1} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & 1 \\ 0 & 2+2i & i & -2+i \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to (2+2i)R_2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2+2i & -2+6i \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to iR_4-R_3} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2+2i & -2+6i \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\,]{\substack{R_3 \to iR_3 \\ R_2 \to \frac{1}{2}R_2}} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1+i & -1+3i \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to iR_2-(-1+3i)R_3} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & 1 \\ 0 & 4i & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2/4i} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$(x,y,z,w) = (\tfrac{1}{2}w + iw - w, \tfrac{-i}{2}w, -iw, w) = (-\tfrac{1}{2}+i, \tfrac{-i}{2}, -i, 1)w, \;\; w \in \mathbb{R}$$

$$V_i = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1+2i \\ -i \\ -2i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = -i$</u>

$$V_{-i} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1-2i \\ i \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

כל הערכים עצמיים שונים לכן A לכסינה.

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_{1+\sqrt{2}} & u_i & u_{-i} & u_{1-\sqrt{2}} \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & -1+2i & -1-2i & 1-\sqrt{2} \\ 1 & -i & i & 1 \\ 0 & -2i & 2i & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

א) הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = \left(x^2+1\right)\left(x^2-2x-1\right) = x^4 - 2x^3 - 2x - 1 .$$

לפי משפט קיילי המילטון $p_A(A) = 0$ לפיכך

$$A^4 - 2A^3 - 2A - I = 0 .$$

נעביר אגפים:

$$I = A^4 - 2A^3 - 2A \quad \Rightarrow \quad I = A(A^3 - 2A^2 - 2I) .$$

מכאן

$$A^{-1} = A^3 - 2A^2 - 2I .$$

ב) נכפיל מצד שמאל ב- A^{-1}:

$$\begin{aligned} A^{-2} =& A^2 - 2A - 2A^{-1} \\ =& A^2 - 2A - 2A^3 + 4A^2 + 4I \\ =& 5A^2 - 2A - 2A^3 + 4I . \end{aligned}$$

שאלה 10

א) נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned}
p_A(x) =&|xI-A| = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -3 & -1 \\ -2 & x-4 & -6 & -1 \\ -3 & -6 & x-9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \\
=&(x-1)\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -3 \\ -2 & x-4 & -6 \\ -3 & -6 & x-9 \end{vmatrix} \\
=&(x-1)(x-1)\begin{vmatrix} x-4 & -6 \\ -6 & x-9 \end{vmatrix} + 2(x-1)\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -3 & x-9 \end{vmatrix} - 3(x-1)\begin{vmatrix} -2 & x-4 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} \\
=&(x-1)^2\left((x-9)(x-4)-36\right) + 2(x-1)\left(-2(x-9)-18\right) - 3(x-1)\left(12+3(x-4)\right) \\
=&(x-1)^2\left(x^2-13x\right) - 4x(x-1) - 9x(x-1) \\
=&(x-1)^2\left(x^2-13x\right) - 13x(x-1) \\
=&x(x-1)^2\left(x-13\right) - 13x(x-1) \\
=&x(x-1)\left((x-1)(x-13)-13\right) \\
=&x(x-1)\left(x^2-14x\right) \\
=&x^2(x-1)\left(x-14\right) \ .
\end{aligned}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 0$</u>

$$\begin{aligned}
(A-0\cdot I) \quad = \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\rightarrow \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

פתרון: $y,z\in\mathbb{R}$, $(x,y,z,w) = (-2y-3z,y,z,0) = (-2,1,0,0)y + (-3,0,1,0)z$.

$$V_0 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 14$</u>

$$(A-14\cdot I) = \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to 13R_3+3R_1]{R_2\to 13R_2+2R_1} \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -126 & 84 & 15 \\ 0 & 84 & -56 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to -\frac{1}{13}R_4} \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -126 & 84 & 15 \\ 0 & 21 & -14 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to 126R_3+21R_2} \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -126 & 84 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 819 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to 819R_4-R_3} \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -126 & 84 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 819 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to \frac{1}{819}R_3} \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -126 & 84 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-15R_3} \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -126 & 84 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1-R_3} \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -126 & 84 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to 28R_1-R_2} \begin{pmatrix} -364 & 182 & 0 & 0 \\ 0 & -126 & 84 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2\to \frac{1}{42}R_2]{R_1\to \frac{1}{182}R_1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z,w) = (\frac{y}{2}, \frac{2}{3}z, z, 0) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0)z,\ \ z\in\mathbb{R}$

$$V_{14} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}\right\} \ .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=1$</u>

$$(A-\cdot I) = \begin{pmatrix} 0&2&3&1\\ 2&3&6&1\\ 3&6&8&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_1]{\substack{R_1\to\frac{1}{2}R_2\\ R_2\to\frac{1}{3}R_3}} \begin{pmatrix} 1&\frac{3}{2}&3&\frac{1}{2}\\ 1&2&\frac{8}{3}&\frac{1}{3}\\ 0&2&3&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1&\frac{3}{2}&3&\frac{1}{2}\\ 0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{6}\\ 0&2&3&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-4R_2} \begin{pmatrix} 1&\frac{3}{2}&3&\frac{1}{2}\\ 0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{6}\\ 0&0&\frac{13}{3}&\frac{5}{3}\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3\to 3R_3]{\substack{R_1\to 2R_1\\ R_2\to 6R_2}} \begin{pmatrix} 2&3&6&1\\ 0&3&-2&-1\\ 0&0&13&5\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2\to 5R_2+R_3]{R_1\to 5R_1-R_3} \begin{pmatrix} 10&15&17&0\\ 0&15&3&0\\ 0&0&13&5\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1\to 3R_1-17R_2\\ R_2\to\frac{1}{3}R_2}} \begin{pmatrix} 30&-210&0&0\\ 0&5&1&0\\ 0&0&13&5\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to\frac{1}{30}R_1} \begin{pmatrix} 1&-7&0&0\\ 0&5&1&0\\ 0&0&13&5\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z,w)=(7y,\frac{-1}{5}z,\frac{-5}{13}w,w)=(\frac{7}{13}w,\frac{1}{13}w,\frac{-5}{13}w,w)=(\frac{7}{13},\frac{1}{13},\frac{-5}{13},1)w,\ \ w\in\mathbb{R}$

$$V_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}7\\1\\-5\\13\end{pmatrix}\right\} .$$

הריבוי גאומטרי שווה לריבוי אלגברי של כל ערך עצמי לכן A לכסינה.

$$D=\begin{pmatrix} 14&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} .$$

$$P=\begin{pmatrix} |&|&|&|\\ u_{14}&u_1&u_0&u_0'\\ |&|&|&| \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&7&-3&-2\\ 2&1&0&1\\ 3&-5&1&0\\ 0&13&0&0 \end{pmatrix} .$$

ב)

$$A^{99}\begin{pmatrix}-8\\4\\0\\0\end{pmatrix}=A^{99}\cdot 4\cdot u_0=4A^{99}\cdot u_0=4\cdot 0\cdot u_0=0 .$$

ג) הפולינום האופייני הוא

$$(x-14)(x-1)x^2=x^4-15x^3+14x^2 .$$

לפי משפט קיילי המילטון: $p_A(A)=0$ לכן

$$A^4-15A^3+14A^2=0 \qquad \Rightarrow \qquad A^4=15A^3-14A^2 \ .$$

שאלה 11

א)

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{10}} & 0 & -i\sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{10}} & 0 & i\sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \end{pmatrix} , \qquad D=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

ב) $u=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ ווקטור עצמי ששייך לערך עצמי 0. לכן

$$A^{10}u=0^{10}u=0 \ .$$

שאלה 12

א) נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned} p_A(x)=&|xI-A|=\begin{vmatrix} x-2i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x-i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \\ =&(x-1)\begin{vmatrix} x-2i & -1 & 0 \\ 0 & x-i & 0 \\ 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix} \\ =&(x-2)(x-1)\begin{vmatrix} x-2i & -1 \\ 0 & x-i \end{vmatrix} \\ =&(x-2)(x-1)(x-2i)(x-i) \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=2i$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=i$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=1$ מריבוי אלגברי 1.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=2i$</u>

$$(A-2iI) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & -1-2i & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1-2i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1-2i \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & -1-2i & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1-2i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-2i & 2 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4+iR_2]{R_3\to R_3+(1+2i)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1-2i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $w \in \mathbb{C}$,$(x,y,z,w) = ((2i-1)w,0,0,w) = (2i-1,0,0,1)w,$

$$V_{2i} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1+2i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 2$</u>

$$(A-2I) = \begin{pmatrix} 2i-2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i-2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to(2i+2)R_1} \begin{pmatrix} -8 & 2i+2 & 0 & 0 \\ 0 & i-2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to 8R_4+R_1} \begin{pmatrix} -8 & 2i+2 & 0 & 0 \\ 0 & i-2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2i+2 & 8 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to(i+2)R_2} \begin{pmatrix} -8 & 2i+2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2i+2 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to(-2i+2)R_4} \begin{pmatrix} -8 & 2i+2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to\frac{1}{8}R_4]{R_2\to-\frac{1}{5}R_2} \begin{pmatrix} -8 & 2i+2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4\to R_4-R_2]{R_3\to R_3+R_2} \begin{pmatrix} -8 & 2i+2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} -8 & 2i+2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = i$</u>

$$(A-iI) = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-i & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1-i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1-i \\ 0 & -1 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to -iR_1} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1-i \\ 0 & -1 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 1-i \\ 0 & -1 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -iR_2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & -i-1 \\ 0 & -1 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & -i-1 \\ 0 & 0 & 2-2i & -i-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to (2+2i)R_3} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & -i-1 \\ 0 & 0 & 8 & -4i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -4iR_2 + (1+i)R_3} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & -4i & 4+8i & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to \frac{1}{4}R_3]{R_2 \to \frac{i}{4}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$(x,y,z,w) = (iy, (2-i)z, \tfrac{i}{2}w, w) = (\tfrac{i}{2}-1, i+\tfrac{1}{2}, \tfrac{i}{2}, 1)w, \ \ w \in \mathbb{C}$$

$$V_i = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2+i \\ 1+2i \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1$</u>

$$(A-I) = \begin{pmatrix} 2i-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to(-2i-1)R_1} \begin{pmatrix} 5 & -2i-1 & 0 & 0 \\ 0 & i-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{5R_4-R_1} \begin{pmatrix} 5 & -2i-1 & 0 & 0 \\ 0 & i-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2i+1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to\frac{-i-1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 5 & -2i-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2i+1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4\to(-2i-1)R_2]{R_3\to R_3+R_2} \begin{pmatrix} 5 & -2i-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & -2i-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

$$D = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_{2i} & u_2 & u_i & u_1 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2i & 0 & -2+i & 0 \\ 0 & 0 & 1+2i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

ב) הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = (x-2)(x-1)(x-i)(x-2i) = x^4 - (3+3i)x^3 + 9ix^2 + (6-6i)x - 4 .$$

לפי משפט קיילי המילטון, $p_A(A) = 0$. לפיכך:

$$A^4 - (3+3i)A^3 + 9iA^2 + (6-6i)A - 4I = 0$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$\begin{aligned} I =& \frac{1}{4}\left(A^4 - (3+3i)A^3 + 9iA^2 + (6-6i)A\right) \\ =& \frac{1}{4}A\left(A^3 - (3+3i)A^2 + 9iA + (6-6i)I\right) \\ =& A\left(\frac{1}{4}A^3 - \frac{(3+3i)}{4}A^2 + \frac{9i}{4}A + \frac{(3-3i)}{2}I\right) . \end{aligned}$$

מכאן

$$A^{-1} = \frac{1}{4}A^3 - \frac{(3+3i)}{4}A^2 + \frac{9i}{4}A + \frac{(3-3i)}{2}I .$$

ג) נכפיל ב- A^{-1}:

$$\begin{aligned}
A^{-2} =&\frac{1}{4}A-\frac{(3+3i)}{4}A+\frac{9i}{4}I+\frac{(3-3i)}{2}A^{-1}\\
=&\frac{1}{4}A-\frac{(3+3i)}{4}A+\frac{9i}{4}I+\frac{(3-3i)}{2}\left(\frac{1}{4}A^3-\frac{(3+3i)}{4}A^2+\frac{9i}{4}A+\frac{(3-3i)}{2}I\right)\\
=&\frac{1}{4}A-\frac{(3+3i)}{4}A+\frac{9i}{4}I+\frac{(3-3i)}{8}A^3-\frac{(3+3i)(3-3i)}{8}A^2+\frac{(3-3i)\cdot 9i}{4}A+\left(\frac{3-3i}{2}\right)^2 I\\
=&\frac{-9i}{4}I+\frac{21i+21}{8}A-2A^2+\frac{3-3i}{8}A^3\ .
\end{aligned}$$

<u>שאלה 13</u>

א) נחשב את הפולינום האופייני:

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x+i & -i & -i & -i \\ -i & x+i & -i & -i \\ -i & -i & x+i & -i \\ -i & i & -i & x-i \end{vmatrix}$$

$$= (x+i)\begin{vmatrix} x+i & -i & -i \\ -i & x+i & -i \\ i & -i & x-i \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} -i & -i & -i \\ -i & x+i & -i \\ -i & -i & x-i \end{vmatrix} - i\begin{vmatrix} -i & x+i & -i \\ -i & -i & -i \\ -i & i & x-i \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} -i & x+i & -i \\ -i & -i & x+i \\ -i & i & -i \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} =&(x+i)^2\begin{vmatrix} x+i & -i \\ -i & x-i \end{vmatrix} + i(x+i)\begin{vmatrix} -i & -i \\ i & x-i \end{vmatrix} - i(x+i)\begin{vmatrix} -i & x+i \\ i & -i \end{vmatrix} \\ &+\begin{vmatrix} x+i & -i \\ -i & x-i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -i & -i \\ -i & x-i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -i & x+i \\ -i & -i \end{vmatrix} \\ &-\begin{vmatrix} -i & -i \\ i & x-i \end{vmatrix} + i(x+i)\begin{vmatrix} -i & -i \\ -i & x-i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -i & -i \\ -i & i \end{vmatrix} \\ &+\begin{vmatrix} -i & x+i \\ i & -i \end{vmatrix} - i(x+i)\begin{vmatrix} -i & x+i \\ -i & -i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -i & -i \\ -i & i \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} =&(x+i)^2\left(x^2+2\right) + i(x+i)(-2-ix) - i(x+i)(-ix) \\ &+2+x^2+ix-2+ix \\ &+ix+2+i(x+i)(-ix)-2 \\ &-ix-i(x+i)(ix-2)+2 \end{aligned}$$

$$= x^4 + 2ix^3 + 4x^2 + 8ix$$

$$= x(x-2i)(x+2i)^2$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = -2i$ מריבוי אלגברי 2.

$\lambda = 2i$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 0$ מריבוי אלגברי 1.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = -2i$</u>

$$\begin{aligned}
(A+2iI) \quad &= \quad \begin{pmatrix} i & i & i & i \\ i & i & i & i \\ i & i & i & i \\ i & -i & i & 3i \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to -iR_4]{\substack{R_1\to -iR_1 \\ R_2\to -iR_2 \\ R_3\to -iR_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[R_4\to R_4-R_1]{\substack{R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3-R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[R_4R_3]{\substack{R_2\to R_4 \\ R_3\to R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to 4R_4-R_2]{R_3\to 2R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

פתרון: $z,w\in\mathbb{C}$ $(x,y,z,w)=(-z-2w,w,z,w)=(-1,0,1,0)z+(-2,1,0,1)w,$.

$$V_{-2i}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=0$</u>

$$\begin{aligned}
(A-0\cdot I) \quad &= \quad \begin{pmatrix} -i & i & i & i \\ i & -i & i & i \\ i & i & -i & i \\ i & -i & i & i \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to -iR_4]{\substack{R_1\to iR_1 \\ R_2\to -iR_2 \\ R_3\to -iR_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[R_4\to R_4-R_1]{\substack{R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3-R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

פתרון: $w\in\mathbb{C}$ $(x,y,z,w)=(-w,-w,-w,w)=(-1,-1,-1,1)w,$.

$$V_0 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 2i$</u>

$$(A-2iI) = \begin{pmatrix}-3i & i & i & i\\ i & -3i & i & i\\ i & i & -3i & i\\ i & -i & i & -i\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_4\to -iR_4}]{\substack{R_1\to iR_1\\ R_2\to -iR_2\\ R_3\to -iR_3}} \begin{pmatrix}3 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_4\to -iR_4}]{\substack{R_1\to iR_1\\ R_2\to -iR_2\\ R_3\to -iR_3}} \begin{pmatrix}3 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_4\to 3R_4-R_1}]{\substack{R_2\to 3R_2-R_1\\ R_3\to 3R_3-R_1}} \begin{pmatrix}3 & -1 & -1 & -1\\ 0 & -8 & 4 & 4\\ 0 & 4 & -8 & 4\\ 0 & -2 & 4 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to 4R_4-R_2]{R_3\to 2R_3+R_2} \begin{pmatrix}3 & -1 & -1 & -1\\ 0 & -8 & 4 & 4\\ 0 & 0 & -12 & 12\\ 0 & 0 & 12 & -12\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_4+R_3} \begin{pmatrix}3 & -1 & -1 & -1\\ 0 & -8 & 4 & 4\\ 0 & 0 & -12 & 12\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}3 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$V_{2i} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

עבור כל ערך עצמי הריבוי גאומטרי שווה לריבוי אלגברי לכן A לכסינה.

$$D = \begin{pmatrix}2i & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2i & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2i & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} .$$

$$P = \begin{pmatrix}| & | & | & |\\ u_{2i} & u_{-2i} & u'_{-2i} & u_0\\ | & | & | & |\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} .$$

ב) הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = x(x-2i)(x+2i)^2 = x^4 + 2ix^3 + 4x^2 + 8ix .$$

לפי משפט קיילי המילטון, $p_A(A)=0$ לכן

$$A^4+2iA^3+4A^2+8iA=0 \qquad \Rightarrow \qquad A=-\frac{i}{2}A^2-\frac{1}{4}A^3-\frac{i}{8}A^4\ .$$

שאלה 14

א) נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned} p_A(x)=&|xI-A|=\begin{vmatrix} x-5 & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & 1-i \\ 0 & 1+i & x \end{vmatrix} \\ =&(x-5)\begin{vmatrix} x+1 & 1-i \\ 1+i & x \end{vmatrix} \\ =&(x-5)\left(x(x+1)-2\right) \\ =&(x-5)(x+2)(x-1)\ . \end{aligned}$$

ערכים עצמיים: $\lambda=1,\lambda=-2,\lambda=5$.
כל הערכים עצמיים שוים לכן A לכסינה.

ב) נשים לב כי $\bar{A}=A$, כלומר A צמודה לעצמה ולכן A נורמלית ולכן הווקטורים עצמיים מהווים בסיס אורתוגונלי.

$A=QDQ^{-1}$.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=5$</u>

$$(A-5I) \qquad = \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1+i \\ 0 & -1-i & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_1]{\substack{R_1\to-\frac{1}{6}R_2 \\ R_2\to\frac{-1+i}{2}\cdot R_3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{6}-\frac{i}{6} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2}-\frac{5i}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{6}-\frac{i}{6} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2}-\frac{5i}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{6}-\frac{i}{6} \\ 0 & 0 & \frac{7}{3}-\frac{7i}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to3(7+7i)R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{6}-\frac{i}{6} \\ 0 & 0 & 98 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to\frac{1}{98}R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{6}-\frac{i}{6} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z)=(1,0,0)x,\ x\in\mathbb{C}$

$$V_5=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=-2$</u>

$$(A+2I) \;=\; \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1+i \\ 0 & -1-i & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3+(1+i)R_2]{R_1\to\frac{1}{7}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1+i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z)=(0,(1-i)z,z),\ z\in\mathbb{C}$

$$V_{-2}=\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=1$</u>

$$(A-I) \;=\; \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1+i \\ 0 & -1-i & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to -2R_3+(1+i)R_2]{R_1\to\frac{1}{4}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1+i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z)=(0,\frac{-1+i}{2}z,z),\ z\in\mathbb{C}$

$$V_{1}=\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1+i \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$D=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

$$Q=\begin{pmatrix} | & | & | \\ u_5 & u_{-2} & u_1 \\ | & | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & -1+i \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\ .$$

ג) לכל פונקציה $f(x)$,

$$f(A)=f(QDQ^{-1})=Qf(D)Q^{-1}\ .$$

לכן

$$e^A=e^{QDQ^{-1}}=Qe^DQ^{-1}\ .$$

כיצד נחשב e^D? נשים לב כי אם $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ אלכסונית אז $f(D)=\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$

באותה מידה
$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} .$$
לכן

$$e^A = e^{QDQ^{-1}} = Qe^DQ^{-1} = Q \begin{pmatrix} e^5 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & e^1 \end{pmatrix} Q^{-1} \ .$$

שאלה 15 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ , \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ , \qquad k = 1 \in \mathbb{R} \ .$$

$$\|a\| = 1 \ , \qquad \|a+kb\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 3 \ .$$

$\|a\| < \|a+kb\|$ ו- $\langle a,b\rangle \neq 0$.

שאלה 16 נגדיר וקטורים $u,w \in \mathbb{R}^n$: יהיו

$$u = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\sqrt{1}} \\ \frac{a_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{a_3}{\sqrt{3}} \\ \vdots \\ \frac{a_n}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \ , \qquad w = \begin{pmatrix} \sqrt{1}\cdot b_1 \\ \sqrt{2}\cdot b_2 \\ \sqrt{3}\cdot b_3 \\ \vdots \\ \sqrt{n}\cdot b_n \end{pmatrix} \ .$$

$a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

$$(u,w) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{k} b_k = \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k \ , \qquad \|u\|^2 = (u,u) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{k} \ , \qquad \|w\|^2 = (w,w) = \sum_{k=1}^n k\cdot b_k^2 \ .$$

לפי אי-השוויון קושי-שוורץ:

$$|(u,w)|^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|w\|^2 \ .$$

לכן נקבל

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right\|^2 \leq \left| \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{k} \right|^2 \cdot \left| \sum_{k=1}^n k \cdot b_k \right|^2 \ .$$

שאלה 17

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \sin(nx) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \cdot \frac{1}{n} \left[-\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi} \left[-\cos(n\pi) + \cos(-n\pi)\right] \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \cos(nx)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{n} \left[\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi} \left[\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)\right]\\ &= 0 \ .\end{aligned}$$

לכל $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$,

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\sin(mx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \frac{\sin(mx)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}\\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \sin(mx)\cos(nx)\\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \left[\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)\right]\\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos((m+n)x)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)x)}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi}\\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos((m+n)\pi)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)\pi)}{m-n} + \frac{\cos(-(m+n)\pi)}{m+n} + \frac{\cos(-(m-n)\pi)}{m-n}\right]\\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos((m+n)\pi)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)\pi)}{m-n} + \frac{\cos((m+n)\pi)}{m+n} + \frac{\cos((m-n)\pi)}{m-n}\right]\\ &= 0 \ .\end{aligned}$$

לכל $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}\\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \sin(nx)\cos(nx)\\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \sin(2nx)\\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\cos(2nx)\right]_{-\pi}^{\pi}\\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\cos(2n\pi) - \cos(-2n\pi)\right]\\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\cos(2n\pi) - \cos(2n\pi)\right]\\ &= 0 \ .\end{aligned}$$

לכל $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \sin^2(nx) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, (1 - \cos(2nx)) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[x + \frac{\sin(2nx)}{2n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[2\pi + \sin(2n\pi) - \sin(-2n\pi) \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \\
&= 1 \ .
\end{aligned}
$$

לכל $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \cos^2(nx) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, (1 + \cos(2nx)) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[x + \frac{\sin(2nx)}{2n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[2\pi + \sin(2n\pi) - \sin(-2n\pi) \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \\
&= 1 \ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\pi - (-\pi) \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \\
&= 1 \ .
\end{aligned}
$$

שאלה 18

יהיו

$$
u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ , \qquad \mathrm{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \ , \qquad u, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^2
$$

$$\|u+\mathrm{v}\|^2=\|u\|^2+\|\mathrm{v}\|^2+2\langle u,\mathrm{v}\rangle \qquad \Rightarrow \qquad 2\langle u,\mathrm{v}\rangle=\|u+\mathrm{v}\|^2-\|u\|^2-\|\mathrm{v}\|^2 \ .$$

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle=\frac{1}{2}\left(|x_1+y_1|+|x_2+y_2|-|x_1|-|x_2|-|y_1|-|y_2|\right)$$

נניח ש- $u=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

אז

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle=\frac{1}{2}\left(|0|+|1|-|1|-|0|-|-1|-|1|\right)=-1 \ .$$

$$\langle -3u,\mathrm{v}\rangle=\frac{1}{2}\left(|-4|+|1|-|-3|-|0|-|-1|-|1|\right)=0 \ .$$

$\langle -3u,\mathrm{v}\rangle \neq 3 = -3\langle u,\mathrm{v}\rangle$, כלומר $\langle,\rangle$ לא מקיים לינאריות. לכן $\langle,\rangle$ לא יכול להיות מכפלה פנימית.

שאלה 19 נניח כי u ווקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ. אז

$$Au=\lambda u \ .$$

נכפיל מצד שמאל ב- B:

$$BAu=B\lambda u=\lambda Bu \ .$$

נציב $BA=AB$:

$$ABu=\lambda Bu \qquad \Rightarrow \qquad A(Bu)=\lambda(Bu) \ .$$

ז"א Bu ווקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ.
כל הערכים עצמיים שונים לכן הריבוי גאומטרי של הערך עצמי λ הוא 1.
לכן בהכרח

$$Bu=\alpha u$$

כאשר $\alpha\in\mathbb{R}$ סקלר.
u ווקטור עצמי אז $u\neq 0$. באותה מידה Bu ווקטור עצמי אז $Bu\neq 0$. לכן $\alpha\neq 0$.
לכן קיבלנו כי $Bu=\alpha u$ לכן u ווקטור עצמי של B.

שאלה 20

נוכיח כי a,b בת"ל. נרשום

$$\alpha_1 a+\alpha_2 b=0 \qquad \text{(*1)}$$

כאשר α_1,α_2 סקלרים. נכפיל ב- A:

$$A\alpha_1 a+A\alpha_2 b=0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1\lambda_1 a+\alpha_2\lambda_2 b=0 \ . \qquad \text{(*2)}$$

נכפיל (*1) ב- λ_1:

$$\lambda_1\alpha_1 a+\lambda_1\alpha_2 b=0 \qquad \text{(*3)}$$

נקח את החיסור (3*)-(2*):

$$\lambda_1\alpha_2 b - \lambda_2\alpha_2 b = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1-\lambda_2)\alpha_2 b = 0 \ .$$

b ווקטור עצמי $\Leftarrow$ $b \neq 0$.
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ (נתון) $\Leftarrow$ $\lambda_1-\lambda_2 \neq 0$, לכן

$$\alpha_2 = 0 \ .$$

נציב זה ב- (1*) ונקבל

$$\alpha_1 a = 0 \ .$$

a ווקטור עצמי $\Leftarrow$ $a \neq 0$ לפיכך

$$\alpha_1 = 0 \ .$$

לכן (1*) מתקיים רק אם $\alpha_1=\alpha_2=0$ לפיכך a,b בת"ל.

שאלה 21

א)

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2i & 0 & 1 \\ -2i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2i \\ 1 & 0 & 2i & 0 \end{pmatrix} = A \ ,$$

ז"א A צמודה לעצמה, $\Leftarrow$ A נורמלית, $\Leftarrow$ A לכסינה אוניטרית.

ב) A צמודה לעצמה $\Leftarrow$ כל הערכים עצמיים ממשיים.

ג) הערכים עצמיים של A הם:
$\lambda_1=1$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda_2=-1$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda_3=3$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda_4=-3$ מריבוי אלגברי 1.
המחרב עצמי ששייך לערך עצמי 1:

$$V_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

המחרב עצמי ששייך לערך עצמי -1:

$$V_{-1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

המחרב עצמי ששייך לערך עצמי 3:

$$V_3 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

המרחב עצמי ששייך לערך עצמי -3:

$$V_{-3} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-i\\i\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נסמן את הווקטורים עצמיים ב-

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}-1\\i\\-i\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\i\\i\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\-i\\-i\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_4 = \begin{pmatrix}-1\\-i\\i\\1\end{pmatrix}\ .$$

ווקטורים עצמיים של מטריצה שצמודה לעצמה, ששייכים לערכים עצמיים שונים הם אורתוגונליים. נשאר רק להרכיב בסיס אורתונורמלי:

$$u_1 = \frac{\mathrm{v}_1}{\|\mathrm{v}_1\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\i\\-i\\1\end{pmatrix}\ ,\quad u_2 = \frac{\mathrm{v}_2}{\|\mathrm{v}_2\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\i\\i\\1\end{pmatrix}\ ,\quad u_3 = \frac{\mathrm{v}_3}{\|\mathrm{v}_3\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-i\\-i\\1\end{pmatrix}\ ,\quad u_4 = \frac{\mathrm{v}_4}{\|\mathrm{v}_4\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-i\\i\\1\end{pmatrix}\ .$$

$$Q = \begin{pmatrix}| & | & | & |\\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4\\ | & | & | & |\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & -1\\ -i & -i & i & i\\ i & -i & i & -i\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\ ,\qquad \bar{Q} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & i & -i & 1\\ 1 & i & i & 1\\ 1 & -i & -i & 1\\ -1 & -i & i & 1\end{pmatrix}\ .$$

קל ללבדוק כי

$$Q\bar{Q} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I_{4\times 4}\ .$$

לכן

$$A = QD\bar{Q}$$

כאשר $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$.

<u>שאלה 22</u> נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned}
p_A(x)=|xI-A|=&\begin{vmatrix} x & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & x & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix}\\
=&x\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ -3 & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & x & 0 \\ -5 & 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix}\\
=&x^2\begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ -6 & x & 0 \\ 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix}+4\cdot 0\\
=&x^2(x-2)\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix}\\
=&x^3(x-2)^2\ .
\end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=2$ מריבוי אלגברי 2.

$\lambda=0$ מריבוי אלגברי 3.

המרחב עצמי ששייך לערך עצמי 0:

$$V_0=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\5\end{pmatrix}\right\}\ .$$

המרחב עצמי ששייך לערך עצמי 2:

$$V_2=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\ .$$

האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$x(x-2),\quad x^2(x-2)\ ,\quad x^3(x-2)\ ,\quad x(x-2)^2\ ,\quad x^2(x-2)^2\ ,\quad x^3(x-2)^2\ .$$

<u>נבדוק $x(x-2)$</u>

$$A\cdot(A-2I)=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>נבדוק $x^2(x-2)$</u>

$$A^2\cdot(A-2I)=A\cdot\begin{pmatrix}0&-8&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&18&0&0&0\\0&20&6&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&18&12&0&0\end{pmatrix}$$

<u>נבדוק $x^3(x-2)$</u>

$$A^3\cdot(A-2I)=A\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&18&12&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&36&24&0&0\end{pmatrix}$$

<u>נבדוק $x(x-2)^2$</u>

$$\begin{aligned}A\cdot(A-2I)^2&=\begin{pmatrix}0&-8&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&18&0&0&0\\0&20&6&0&0\end{pmatrix}\cdot(A-2I)\\&=\begin{pmatrix}0&-8&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&18&0&0&0\\0&20&6&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&4&0&0&0\\0&-2&0&0&0\\0&3&0&0&0\\0&0&6&-2&0\\5&0&0&1&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&16&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&-36&0&0&0\\0&-22&0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

<u>נבדוק $x^2(x-2)^2$</u>

$$A^2\cdot(A-2I)^2 = A\cdot\begin{pmatrix}0&16&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&-36&0&0&0\\0&-22&0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן

$$m_A(x)=x^2(x-2)^2\ .$$

לכן הצורת ז'ורדן הינה:

$$J=\begin{pmatrix}J_2(0)&&\\&J_1(0)&\\&&J_2(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}$$

נסמן הווקטור עצמי ששייך לערך עצמי 0:

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\\5\end{pmatrix}\ ,\qquad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\5\end{pmatrix}\ .$$

נחשב ווקטור עצמי מוכלל. נסמו $u_2=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\s\\t\end{pmatrix}$

$$(A-0\cdot I)\,u_2=\alpha\mathrm{v}_1+\beta\mathrm{v}_2$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}0&4&0&0&0&-2\alpha-\beta\\0&0&0&0&0&0\\0&3&2&0&0&0\\0&0&6&0&0&5\beta\\5&0&0&1&2&5\alpha\end{array}\right)\xrightarrow[R_5\to R_2]{\substack{R_1\to R_5\\R_2\to R_1}}\left(\begin{array}{ccccc|c}5&0&0&1&2&5\alpha\\0&4&0&0&0&-2\alpha-\beta\\0&3&2&0&0&0\\0&0&6&0&0&5\beta\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to6R_3+8R_4}\left(\begin{array}{ccccc|c}5&0&0&1&2&5\alpha\\0&4&0&0&0&-2\alpha-\beta\\0&0&-8&0&0&3(-2\alpha-\beta)\\0&0&0&0&0&18(-2\alpha-\beta)+40\beta\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

קיים פתרון אם $18(-2\alpha-\beta)+40\beta=0 \Leftarrow \beta=\frac{18\alpha}{11}$. לכן נקבל

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5\alpha \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{11}\cdot 40\alpha \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & -\frac{1}{11}\cdot 120\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ווקטור מוכלל לא יכול להיות ווקטור האפס, אז נבחור את הפרמטר α כך שהפתרון לא יהיה ווקטור האפס.

נבחור $\alpha=11$, ואז הפתרון הוא: $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ s\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11\\ -10\\ 15\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ -\frac{1}{5}\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ -\frac{2}{5}\end{pmatrix}$. נבחור $s=0, t=0$ ונקבל

$u_2=\begin{pmatrix} 11\\ -10\\ 15\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$. נציב $\alpha=11$, $\beta=0$ בווקטור עצמי $u_1=\alpha \mathrm{v}_1+\beta \mathrm{v}_2$ ונקבל $u_1=\begin{pmatrix} -40\\ 0\\ 0\\ 90\\ 55\end{pmatrix}$.

עכשיו אנחנו צריכים ווקטור עצמי שלישי אשר בלתי תלוי לינארי ביחס ל- u_1 ו- u_2. נקח $u_3=\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 0\\ 5\\ 0\end{pmatrix}$.

נסמן הווקטור עצמי ששייך לערך עצמי 2:

$$u_4=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

נחשב ווקטור עצמי מוכלל. נסמו $u_5=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ s\\ t\end{pmatrix}$

$$(A-2\cdot I)\,u_5=u_4$$

פתרון: $\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{3}\\1\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\s\\t\end{pmatrix}$. נבחור $t=0$ ונקבל

$$u_5=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{3}\\1\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$P=\begin{pmatrix}| & | & | & | & |\\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5\\ | & | & | & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-40 & 11 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -10 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 15 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\\ 90 & 0 & 5 & 0 & 1\\ 55 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$J=\begin{pmatrix}J_2(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_2(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

שאלה 23

שב את הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned}p_A(x)=|xI-A|=&\begin{vmatrix}x & -4 & 0 & 0\\ -1 & x & 0 & 0\\ -3 & -2 & x-2 & -5\\ -3 & 0 & 0 & x-7\end{vmatrix}\\ =&(x-7)(x-2)^2(x+2)\ .\end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=2$ מריבוי אלגברי 2.

$\lambda=-2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=7$ מריבוי אלגברי 1.

המרחב עצמי ששייך לערך עצמי 2:

$$V_2=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\ .$$

המרחב עצמי ששייך לערך עצמי -2:

$$V_{-2}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-12\\6\\1\\4\end{pmatrix}\right\} \ .$$

המרחב עצמי ששייך לערך עצמי 7:

$$V_{7}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \ .$$

האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$(x+2)(x-2)(x-7) \ , \quad (x-2)^2(x+2)(x-7) \ .$$

<u>נבדוק $(x+2)(x-2)(x-7)$</u>

$$(A+2I)(A-2I)(A-7I)=\begin{pmatrix}2&4&0&0\\1&2&0&0\\3&2&4&5\\3&0&0&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&4&0&0\\1&-2&0&0\\3&2&0&5\\3&0&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7&4&0&0\\1&-7&0&0\\3&2&-5&5\\3&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-10&-20&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן

$$m_A(x)=(x-2)^2(x+2)(x-7) \ .$$

לכן הצורת ז'ורדן הינה:

$$J=\begin{pmatrix}J_2(2)&&\\&J_1(-2)&\\&&J_1(7)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&7\end{pmatrix}$$

נסמן את הווקטור עצמי ששייך לערך עצמי 0:

$$u_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \ .$$

נחשב ווקטור עצמי מוכלל. נסמו $u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{pmatrix}$

$$(A - 2 \cdot I)\, u_2 = u_1$$

הפתרון הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ z \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{pmatrix}$. נבחור $z = 0$ ונקבל

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

נסמן הווקטור עצמי ששייך לערך עצמי -2:

$$u_3 = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad .$$

נסמן הווקטור עצמי ששייך לערך עצמי 7:

$$u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

נחשב ווקטור עצמי מוכלל.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -12 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(2) & & \\ & J_1(-2) & \\ & & J_1(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

שאלה 24

א) משפט הפירוק הספקטרלי:

$$A \cdot a = (1+i)P_{V_{1+i}}(a) + (-1+i)P_{V_{-1+i}}(a) + 2P_{V_2}(a) + 3P_{V_3}(a) \ .$$

$$P_{V_3}(a) = a - P_{V_{1+i}}(a) - P_{V_{-1+i}}(a) - P_{V_2}(a)$$

לכן

$$P_{V_{1+i}}(a) = \frac{\langle a, u_{1+i}\rangle}{\|u_{1+i}\|^2}u_{1+i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\\3\end{pmatrix} \ .$$

$$P_{V_{-1+i}}(a) = \frac{\langle a, u_{-1+i}\rangle}{\|u_{-1+i}\|^2}u_{-1+i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\\2\end{pmatrix} \ .$$

$$P_{V_2}(a) = \frac{\langle a, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\\0\end{pmatrix} \ .$$

$$P_{V_3}(a) = a - P_{V_{1+i}}(a) - P_{V_{-1+i}}(a) - P_{V_2}(a) = \begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix} \ .$$

$$A \cdot a = (1+i)\begin{pmatrix}3\\0\\0\\3\end{pmatrix} + (-1+i)\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\4\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5+i\\9\\8\\1+5i\end{pmatrix}$$

ב)

$$A^4 \cdot a = (1+i)^4 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1+i)^4 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 3^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 243 \\ 64 \\ -20 \end{pmatrix}$$

ג) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot e_1 = (1+i)P_{V_{1+i}}(e_1) + (-1+i)P_{V_{-1+i}}(e_1) + 2P_{V_2}(e_1) + 3P_{V_3}(e_1)$$

$$P_{V_{1+i}}(e_1) = \frac{\langle e_1, u_{1+i}\rangle}{\|u_{1+i}\|^2} u_{1+i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} .$$

$$P_{V_{-1+i}}(e_1) = \frac{\langle e_1, u_{-1+i}\rangle}{\|u_{-1+i}\|^2} u_{-1+i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} .$$

$$P_{V_2}(e_1) = \frac{\langle e_1, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$P_{V_3}(e_1) = e_1 - P_{V_{1+i}}(e_1) - P_{V_{-1+i}}(e_1) - P_{V_2}(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$A\cdot e_1=(1+i)\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\\1/2\end{pmatrix}+(-1+i)\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\\-1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot e_2=(1+i)P_{V_{1+i}}(e_2)+(-1+i)P_{V_{-1+i}}(e_2)+2P_{V_2}(e_2)+3P_{V_3}(e_2)$$

$$P_{V_{1+i}}(e_2)=\frac{\langle e_2,u_{1+i}\rangle}{\|u_{1+i}\|^2}u_{1+i}=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_{-1+i}}(e_2)=\frac{\langle e_2,u_{-1+i}\rangle}{\|u_{-1+i}\|^2}u_{-1+i}=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_2}(e_2)=\frac{\langle e_2,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_3}(e_2)=e_1-P_{V_{1+i}}(e_2)-P_{V_{-1+i}}(e_2)-P_{V_2}(e_2)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$A\cdot e_2=\begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$A\cdot e_3=(1+i)P_{V_{1+i}}(e_3)+(-1+i)P_{V_{-1+i}}(e_3)+2P_{V_2}(e_3)+3P_{V_3}(e_3)$$

$$P_{V_{1+i}}(e_3)=\frac{\langle e_3,u_{1+i}\rangle}{\|u_{1+i}\|^2}u_{1+i}=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_{-1+i}}(e_3)=\frac{\langle e_3,u_{-1+i}\rangle}{\|u_{-1+i}\|^2}u_{-1+i}=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_2}(e_3)=\frac{\langle e_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_3}(e_3)=e_3-P_{V_{1+i}}(e_3)-P_{V_{-1+i}}(e_3)-P_{V_2}(e_3)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$A\cdot e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$A\cdot e_4=(1+i)P_{V_{1+i}}(e_4)+(-1+i)P_{V_{-1+i}}(e_4)+2P_{V_2}(e_3)+3P_{V_3}(e_4)$$

$$P_{V_{1+i}}(e_4)=\frac{\langle e_4,u_{1+i}\rangle}{\|u_{1+i}\|^2}u_{1+i}=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\\1/2\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_{-1+i}}(e_4)=\frac{\langle e_4,u_{-1+i}\rangle}{\|u_{-1+i}\|^2}u_{-1+i}=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\0\\0\\1/2\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_2}(e_4)=\frac{\langle e_4,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_3}(e_4)=e_4-P_{V_{1+i}}(e_4)-P_{V_{-1+i}}(e_4)-P_{V_2}(e_4)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$A\cdot e_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\i\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}|&|&|&|\\Ae_1&Ae_2&Ae_3&Ae_4\\|&|&|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i&0&0&1\\0&3&0&0\\0&0&2&0\\1&0&0&i\end{pmatrix}$$

שאלה 25

א) משפט הפירוק הספקטרלי:

$$A\cdot a=3P_{V_3}(a)+(5+5i)P_{V_{5+5i}}(a)+(-5+5i)P_{V_{-5+5i}}(a)\ .$$

$$P_{V_{-5+5i}}(a)=a-P_{V_3}(a)-P_{V_{-5+5i}}(a)$$

לכן

$$P_{V_3}(a) = \frac{\langle a, u_3 \rangle}{\|u_3\|^2} u_3 + \frac{\langle a, u_3' \rangle}{\|u_3'\|^2} u_3' = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$P_{V_{5+5i}}(a) = \frac{\langle a, u_{5+5i} \rangle}{\|u_{5+5i}\|^2} u_{5+5i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} .$$

$$P_{V_{-5+5i}}(a) = a - P_{V_3}(a) - P_{V_{5+5i}}(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} .$$

$$A \cdot a = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + (5+5i)\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(-5+5i) \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50+5i \\ 27 \\ 21 \\ 5+50i \end{pmatrix}$$

ב)

$$A^4 \cdot a = 3^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + (5+5i)^4 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + (-5+5i)^4 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2500 \\ 729 \\ 567 \\ -25000 \end{pmatrix}$$

ג) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot e_1 = 3P_{V_3}(e_1) + (5+5i)P_{V_{5+5i}}(e_1) + (-5+5i)P_{V_{-5+5i}}(e_1)$$

$$P_{V_3}(e_1)=\frac{\langle e_1,u_3\rangle}{\|u_3\|^2}u_3+\frac{\langle e_1,u_3'\rangle}{\|u_3'\|^2}u_3'=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_{5+5i}}(e_1)=\frac{\langle e_1,u_{5+5i}\rangle}{\|u_{5+5i}\|^2}u_{5+5i}=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\\1/2\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_{-5+5i}}(e_1)=e_1-P_{V_3}(e_1)-P_{V_{5+5i}}(e_1)=\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\\-1/2\end{pmatrix}\ .$$

$$A\cdot e_1=(5+5i)\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\\1/2\end{pmatrix}+(-5+5i)\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\\-1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5i\\0\\0\\5\end{pmatrix}$$

$$A\cdot e_2=3P_{V_3}(e_2)+(5+5i)P_{V_{5+5i}}(e_2)+(-5+5i)P_{V_{-5+5i}}(e_2)$$

$$P_{V_3}(e_2)=\frac{\langle e_2,u_3\rangle}{\|u_3\|^2}u_3+\frac{\langle e_2,u_3'\rangle}{\|u_3'\|^2}u_3'=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_{5+5i}}(e_2) = \frac{\langle e_2, u_{5+5i}\rangle}{\|u_{5+5i}\|^2} u_{5+5i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} .$$

$$P_{V_{-5+5i}}(e_2) = e_2 - P_{V_3}(e_2) - P_{V_{5+5i}}(e_2) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} .$$

$$A \cdot e_2 = 3 \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$A \cdot e_3 = 3P_{V_3}(e_3) + (5+5i)P_{V_{5+5i}}(e_3) + (-5+5i)P_{V_{-5+5i}}(e_3)$$

$$P_{V_3}(e_3) = \frac{\langle e_3, u_3\rangle}{\|u_3\|^2} u_3 + \frac{\langle e_3, u_3'\rangle}{\|u_3'\|^2} u_3' = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} .$$

$$P_{V_{5+5i}}(e_1) = \frac{\langle e_1, u_{5+5i}\rangle}{\|u_{5+5i}\|^2} u_{5+5i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} .$$

$$P_{V_{-5+5i}}(e_3) = e_3 - P_{V_3}(e_3) - P_{V_{5+5i}}(e_3) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} .$$

$$A \cdot e_3 = 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$A \cdot e_4 = 3P_{V_3}(e_4) + (5+5i)P_{V_{5+5i}}(e_4) + (-5+5i)P_{V_{-5+5i}}(e_4)$$

$$P_{V_3}(e_4) = \frac{\langle e_4, u_3\rangle}{\|u_3\|^2}u_3 + \frac{\langle e_4, u_3'\rangle}{\|u_3'\|^2}u_3' = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} .$$

$$P_{V_{5+5i}}(e_4) = \frac{\langle e_4, u_{5+5i}\rangle}{\|u_{5+5i}\|^2}u_{5+5i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\0\\0\\1/2\end{pmatrix} .$$

$$P_{V_{-5+5i}}(e_4) = e_1 - P_{V_3}(e_4) - P_{V_{5+5i}}(e_4) = \begin{pmatrix}-1/2\\0\\0\\1/2\end{pmatrix} .$$

$$A \cdot e_4 = (5+5i)\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\\1/2\end{pmatrix} + (-5+5i)\begin{pmatrix}-1/2\\0\\0\\1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\\0\\5i\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ Ae_1 & Ae_2 & Ae_3 & Ae_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5i & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5i \end{pmatrix}$$

שאלה 26

א)

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{3} & i \end{pmatrix} , \qquad \bar{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5i & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} & -i \end{pmatrix} .$$

$$\bar{A}\cdot A=\begin{pmatrix} 12 & 22\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 22\sqrt{2} & 89 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 37 & -12i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 12i\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix} , \qquad A\cdot\bar{A}=\begin{pmatrix} 12 & 22\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 22\sqrt{2} & 89 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 37 & -12i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 12i\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix} ,$$

לכן $A\cdot\bar{A}=\bar{A}\cdot A$ לכן A נורמלית לכן A לכסינה אוניטרית.

ב) $A\neq\bar{A}$ לכן A לא צמודה לעצמה, אבל A נורמלית.
הערכים עצמיים של מטריצה נורמלית ממשיים אם ורק אם המטריצה צמודה לעצמה.
A לא צמודה לעצמה לפיכך לא כל הערכים עצמיים יהיו ממשיים.

ג)

$$\begin{aligned} p_A(x)=&|xI-A|=\begin{vmatrix} x-2 & -2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -2\sqrt{2} & x-9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-5i & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} & x-i \end{vmatrix} \\ =&\begin{vmatrix} x-2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & x-9 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x-5i & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & x-i \end{vmatrix} \\ =&\left((x-2)(x-9)-8\right)\left((x-5i)(x-i)+12\right) \\ =&\left(x^2-11x+10\right)\left(x^2-6ix+7\right) \\ =&(x-10)(x-1)(x-7i)(x+i) \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:
$\lambda=10$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda=7i$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda=-i$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda=1$ מריבוי אלגברי 1.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 10</u>

$$\begin{aligned}(A-10I) &= \begin{pmatrix} -8 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10+5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{3} & -10+i \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_4\to(-10+5i)R_4+2\sqrt{3}R_3} \begin{pmatrix} -8 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10+5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 107-60i \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} -8 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10+5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$V_{10} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $7i$</u>

$$V_{7i} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{3}i \\ 1 \end{pmatrix}\right\} .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $-i$</u>

$$V_{-i} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right\} .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 1</u>

$$V_{1} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} .$$

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_{10} & u_{7i} & u_{-i} & u_1 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -i\sqrt{3} & \frac{i}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

שאלה 27

א)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -i & 0 & 0 \\ i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & i \\ 0 & 0 & -i & 4 \end{pmatrix} , \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -i & 0 & 0 \\ i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & i \\ 0 & 0 & -i & 4 \end{pmatrix} .$$

$\bar{A} = A$

לכן A צמודה לעצמה ולכן A נורמלית לכן A לכסינה אוניטרית.

ב) הערכים עצמיים של מטריצה נורמלית ממשיים אם ורק אם המטריצה צמודה לעצמה. A צמודה לעצמה לפיכך כל הערכים עצמיים יהיו ממשיים.

ג) ערכים עצמיים:

$\lambda = 5$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 2.

$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 5</u>

$$V_5 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 3</u>

$$V_3 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 1</u>

$$V_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_5 & u_3 & u_3' & u_1 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ i & -i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

<u>שאלה 28</u> נגדיר ווקטורים $a, b \in \mathbb{R}^4$:

$$a = \begin{pmatrix} \sqrt{x} \\ \sqrt{y} \\ \sqrt{z} \\ \sqrt{w} \end{pmatrix} \ , \qquad b = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}} \\ \frac{1}{\sqrt{y}} \\ \frac{1}{\sqrt{z}} \\ \frac{1}{\sqrt{w}} \end{pmatrix} \ .$$

תהי $\langle , \rangle$ המכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^4$. לפי אי-השוויון קושי-שוורץ:

$$|\langle a, b\rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\| \ .$$

$$\langle a, b\rangle = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{z} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} + \sqrt{w} \cdot \frac{1}{\sqrt{w}} = 4 \ .$$

$$\|a\| = \sqrt{x+y+z+w} \ , \qquad \|b\| = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}} \ .$$

נציב את הביטוים האלה באי-שוויון קושי-שוורץ ונקבל

$$4 \leq \sqrt{x+y+z+w} \cdot \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}} \leq \sqrt{4}\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}}$$

לכן

$$\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}} \geq \sqrt{4} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} \geq 4 \ .$$

<u>שאלה 29</u>

א)

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix} = (x-a)(x-d) - bc = x^2 - (a+d)x + ad - bc \ .$$

ב) $\det(A) = ad - bc$ ו- $\mathrm{tr}(A) = a + d$ לכן

$$p_A(x) = x^2 - (a+d)x + ad - bc = x^2 - \mathrm{tr}(A) + \det(A) \ .$$

ג) 1) $B = BC - CB$. נקח את העקבה של הביטוי הזה ונקבל

$$\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(BC - CB) = \mathrm{tr}(BC) - \mathrm{tr}(CB) = \mathrm{tr}(BC) - \mathrm{tr}(BC) = 0 \ ,$$

2) בסעיף ב' הוכחנו כי אם $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ אז הפולינום האופייני שלה היא

$$p_B(x) = x^2 - \mathrm{tr}(B) + \det(B) \ .$$

בסעיף ג' (1) מצאני כי $\mathrm{tr}(B) = 0$ לפיכך

$$p_B(x) = x^2 + \det(B) \ .$$

לפי משפט קיילי-המילטון כל מטריצה מאפסת את הפולינום האופייני שלה, לכן

$$p_B(B) = B^2 + \det(B)I = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B^2 = -\det(B)I \ , \qquad (\#)$$

3)

$$B = BC - CB \qquad \Rightarrow \qquad B^2 = B^2C - BCB \ , \qquad (*1)$$

$$B = BC - CB \qquad \Rightarrow \qquad B^2 = BCB - CB^2 \ , \qquad (*2)$$

(*1) + (*2):

$$2B^2 = B^2C - CB^2 \ .$$

נציב (#), כלומר $B^2 = -\det(B)I$ ונקבל

$$-2 - \det(B)I = -\det(B)I \cdot C + C \cdot \det(B)I = -\det(B)C + \det(B)C = 0 \ ,$$

ולכן $\det(B) = 0$.

4) מסעיף ג) 2) $B^2 = -\det(B)$ ומסעיף ג) 3) $\det(B) = 0$ לכן $B^2 = 0$.

<u>שאלה 30</u>

א) המטריצה משולדית לכן הערכים עצמיים הם האיברים על האלכסון. לכן הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)(x-4) = x^5 - 11x^4 + 45x^3 - 85x^2 + 74x - 24 \ .$$

לפי משפט קיילי המילטון $p_A(A) = 0$ לכן $A^5 - 11A^4 + 45A^3 - 85A^2 + 74A - 24I$. נעביר אגפים ונקבל

$$24I = A^5 - 11A^4 + 45A^3 - 85A^2 + 74A$$

לכן

$$\begin{aligned} I =& \frac{1}{24}A^5 - \frac{11}{24}A^4 + \frac{45}{24}A^3 - \frac{85}{45}A^2 + \frac{74}{24}A \\ =& A\left(\frac{1}{24}A^5 - \frac{11}{24}A^4 + \frac{15}{8}A^3 - \frac{85}{24}A^2 + \frac{37}{12}A\right) \end{aligned}$$

מכאן

$$A^{-1} = \frac{1}{24}A^4 - \frac{11}{24}A^3 + \frac{15}{8}A^2 - \frac{85}{24}A + \frac{37}{12}I \ .$$

ב) נכפיל ב- A^{-1}:

$$\begin{aligned} A^{-2} =& \frac{1}{24}A^3 - \frac{11}{24}A^2 + \frac{15}{8}A - \frac{85}{24}I + \frac{37}{12}A^{-1} \\ =& \frac{1}{24}A^3 - \frac{11}{24}A^2 + \frac{15}{8}A - \frac{85}{24}I + \frac{37}{12}\left(\frac{1}{24}A^4 - \frac{11}{24}A^3 + \frac{15}{8}A^2 - \frac{85}{24}A + \frac{37}{12}I\right) \\ =& \frac{859}{144}I - \frac{2605}{288}A + \frac{511}{96}A^2 - \frac{395}{288}A^3 + \frac{37}{288}A^4 \ . \end{aligned}$$

<u>שאלה 31</u> ל- A ו- B יש n ווקטורים עצמיים בלתי-תלויים לינאריים, לכן A ו- B לכסינות. נגדיר

$$P = \begin{pmatrix} | & | & & | & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_{n-1} & u_n \\ | & | & & | & | \end{pmatrix}$$

P הפיכה בגל שהעמודות בת"ל. לכן

$$P^{-1}AP = D \ , \qquad \text{ו} \qquad P^{-1}BP = D$$

כאשר D מטריצה אלכסונית אשר האיברים על האלכסון הם הערכים עצמיים:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

מכאן

$$P^{-1}AP = D = P^{-1}BP \ ,$$

לכן $P^{-1}AP = P^{-1}BP$. נכפיל מצד שמאל ב- P ומצד ימין ב- P^{-1} ונקבל $A = B$.

שאלה 32

א) אם A ו- B דומות אז הדטרמיננטות שוות. אז נבדוק את הדטרמיננטות:

$$|A| = 3 \ , \qquad |B| = 6 \ ,$$

כלומר $|A| \neq |B|$ לכן A ו- B לא דומות.

ב) $|A| = -5 = |B|$ אז הדטרמיננטות לא עוזרות לבדוק אם A ו-B דומות.

נזכיר כי אם A ו- B דומות אז העקבות שוות.

$$\mathrm{tr}(A) = 3 \ , \qquad \mathrm{tr}(B) = 4 \ ,$$

כלומר $\mathrm{tr}(A) \neq \mathrm{tr}(B)$ ולכן A ו- B לא דומות.

ג)

$$|A| = 6 = |B| \ .$$

$$\mathrm{tr}(A) = 5 = \mathrm{tr}(B) \ .$$

נבדוק את הפולינום האופייני של A:

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x+1 & -6 \\ 2 & x-6 \end{vmatrix} = (x+1)(x-6) + 12 = x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2) \ .$$

הערכים עצמיים של A הם 2 ו- 3 והם שונים, לכו קיימת P הפיכה כך ש-

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = PBP^{-1}$$

לכן A ו- B דומות.

ד)

$$|A| = 6 = |B| \ .$$

$$\mathrm{tr}(A) = 5 = \mathrm{tr}(B) \ .$$

הפולינומים האופיינים של A ושל B זהים:

$$p_A(x) = (x-3)(x-2) = p_B(x) \ .$$

לכן הערכים עצמיים של A ו- B הם 2 ו- 3. לכן קיימים מטריצות הפיכות P ו- S כך ש-

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \ , \qquad S^{-1}BS = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

לפיכך

$$P^{-1}AP = S^{-1}BS \qquad \Rightarrow \qquad PS^{-1}BSP^{-1} = A \ .$$

נגדיר $U = PS^{-1}$ ונשים לב כי $U^{-1} = SP^{-1}$, כך שונקבל

$$UBU^{-1} = A \ .$$

לכן A ו- B דומות.

שאלה 34

א) המטריצה המייצגת של האופרטור לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_3[x]$ $E = \{1, x, x^2, x^3\}$:

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \end{pmatrix} .$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 11$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 8$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = -7$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = -6$ מריבוי אלגברי 1.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 11</u>

$$V_{11} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

וקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי 11:

$$u_{11} = x^2 + x^3 .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 8</u>

$$V_8 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

וקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי 8:

$$u_8 = 1 + x .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי -7</u>

$$V_{-7} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

וקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי -7:

$$u_{-7}=-x^2+x^3\ .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי -6</u>

$$V_{-6}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\ .$$

וקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי -6:

$$u_{-6}=-1+x\ .$$

ב) נסמן הווקטור $3+2x+5x^2+7x^3$ לפי הבסיס הסטנדרטי ב-ס $a=\begin{pmatrix}3\\2\\5\\7\end{pmatrix}$.

נשים לב כי המטריצה המייצגת $[T]_E$ ממשית וסימטרית, ולכן $[T]_E$ נורמלית.
לפיכך לפי המשפט הפירוק הספקטרלי,

$$[T]^5a=11^5P_{V_{11}}(a)+8^5P_{V_8}(a)+(-7)^5P_{V_{-7}}(a)+(-6)^5P_{V_{-6}}(a)$$

$$P_{V_{11}}(a)=\frac{1}{\|u_{11}\|^2}\langle a,u_{11}\rangle u_{11}=\frac{12}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_8}(a)=\frac{1}{\|u_8\|^2}\langle a,u_8\rangle u_8=\frac{5}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_{-7}}(a)=\frac{1}{\|u_{-7}\|^2}\langle a,u_{-7}\rangle u_{-7}=\frac{2}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_{-6}}(a)=\frac{1}{\|u_{-6}\|^2}\langle a,u_{-6}\rangle u_{-6}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$[T]^5 a = 11^5 \begin{pmatrix} 0\\0\\6\\6 \end{pmatrix} + 8^5 \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\\ \frac{5}{2}\\0\\0 \end{pmatrix} + (-7)^5 \begin{pmatrix} 0\\0\\-1\\1 \end{pmatrix} + (-6)^5 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2}\\0\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78032\\85808\\983113\\949499 \end{pmatrix}$$

לפיכך:

$$T^5(3+2x+5x^2+7x^3) = 78032 + 85808x + 983113x^2 + 949499x^3 \ .$$

שאלה 35

א) המטריצה המייצגת של האופרטור לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{C}^{2\times 2}$ $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0\\0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$:

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 5 & -6i & 0 & 0\\ 6i & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 11$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = -1$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 11</u>

$$V_{11} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -i\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

וקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי 11:

$$u_{11} = \begin{pmatrix} -i & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 2</u>

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

וקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי 2:

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי -1</u>

$$V_{-1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \ .$$

וקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי -1:

$$u_{-1} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 1</u>

$$V_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \ .$$

וקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי 1:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

ב) נסמן הווקטור $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ לפי הבסיס הסטנדרטי ב-ס $a = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

נשים לב כי המטריצה המייצגת $[T]_E$ ממשית וסימטרית, ולכן $[T]_E$ נורמלית.
לפיכך לפי המשפט הפירוק הספקטרלי,

$$[T]^4 a = 11^4 P_{V_{11}}(a) + 2^4 P_{V_2}(a) + (-1)^4 P_{V_{-1}}(a) + 1^4 P_{V_1}(a)$$

$$P_{V_{11}}(a) = \frac{1}{\|u_{11}\|^2} \langle a, u_{11}\rangle\, u_{11} = \frac{-2i+1}{2}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\frac{i}{2} \\ -i+\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

$$P_{V_2}(a)=\frac{1}{\|u_2\|^2}\langle a,u_2\rangle u_2=\frac{7}{1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_{-1}}(a)=\frac{1}{\|u_{-1}\|^2}\langle a,u_{-1}\rangle u_{-1}=\frac{2i+1}{2}\begin{pmatrix}i\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+\frac{i}{2}\\i+\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_1}(a)=\frac{1}{\|u_1\|^2}\langle a,u_1\rangle u_1=\frac{3}{1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$[T]^4a=11^4\cdot\begin{pmatrix}-1-\frac{i}{2}\\-i+\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+2^4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1+\frac{i}{2}\\i+\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14642-7320i\\7321-14640i\\3\\112\end{pmatrix}$$

לפיכך:

$$T^4\begin{pmatrix}-2&1\\3&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14642-7320i&7321-14640i\\3&112\end{pmatrix}\ .$$

שאלה 36

א) המטריצה המייצגת של האופרטור לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{C}^4$ $E=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$:

$$[T]_E=\begin{pmatrix}5&-3i&0&0\\3i&5&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\ .$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=8$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=1$ מריבוי אלגברי 2.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 8</u>

$$V_8 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \ .$$

ווקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי 8:

$$u_8 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 2</u>

$$V_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \ .$$

ווקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי 2:

$$u_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 1</u>

$$V_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \ .$$

ווקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי -1:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \qquad u_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ . \ .$$

ב) נסמן הווקטור לפי הבסיס הסטנדרטי ב- $a = \begin{pmatrix} 2i \\ -i \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

נשים לב כי המטריצה המייצגת $[T]_E$ נורמלית.
לפיכך לפי המשפט הפירוק הספקטרלי,

$$[T]a = 8P_{V_8}(a) + 2P_{V_2}(a) + P_{V_1}(a)$$

$$P_{V_8}(a) = \frac{1}{\|u_8\|^2}\langle a, u_8\rangle u_8 = \frac{-2-i}{2}\begin{pmatrix}-i\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i-\frac{1}{2}\\-1-\frac{i}{2}\\0\\0\end{pmatrix} .$$

$$P_{V_2}(a) = \frac{1}{\|u_2\|^2}\langle a, u_2\rangle u_2 = \frac{2-i}{2}\begin{pmatrix}i\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i+\frac{1}{2}\\1-\frac{i}{2}\\0\\0\end{pmatrix} .$$

$$P_{V_1}(a) = \frac{1}{\|u_1\|^2}\langle a, u_1\rangle u_1 + \frac{1}{\|u_1'\|^2}\langle a, u_1'\rangle u_1' = 5\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\\6\end{pmatrix} .$$

$$[T]a = 8\cdot\begin{pmatrix}i-\frac{1}{2}\\-1-\frac{i}{2}\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}i+\frac{1}{2}\\1-\frac{i}{2}\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3+10i\\-6-5i\\5\\6\end{pmatrix}$$

ג)

$$T^5a = 8^5\cdot\begin{pmatrix}i-\frac{1}{2}\\-1-\frac{i}{2}\\0\\0\end{pmatrix} + 2^5\begin{pmatrix}i+\frac{1}{2}\\1-\frac{i}{2}\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-16368+32800i\\-32736-16400i\\5\\6\end{pmatrix} .$$

<u>שאלה 37</u> יהי V המרחב המכפלה פנימית הסטנדרטית מעל הדה $\mathbb{R}$. נגדיר את שני וקטורים $a, b \in V$:

$$a = \begin{pmatrix}\sqrt{1}\\\sqrt{2}\\\sqrt{3}\\\vdots\\\sqrt{n}\end{pmatrix} , \qquad b = \begin{pmatrix}2^{1/2}\\2^{2/2}\\2^{3/2}\\\vdots\\2^{n/2}\end{pmatrix} .$$

לפי אי-השוויון קושי שוורץ:

$$|\langle a, b\rangle| = \|a\|\cdot\|b\| .$$

$$\langle a,b\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}\sqrt{1}\\ \sqrt{2}\\ \sqrt{3}\\ \vdots\\ \sqrt{n}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2^{1/2}\\ 2^{2/2}\\ 2^{3/2}\\ \vdots\\ 2^{n/2}\end{pmatrix}\right\rangle = 2^{1/2}\cdot\sqrt{1}+2^{2/2}\cdot\sqrt{2}+2^{3/2}\cdot\sqrt{3}+\cdots+2^{n/2}\cdot\sqrt{n} = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\cdot 2^{k/2} = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k\cdot 2^k}\ .$$

$$\|a\| = \sqrt{\langle a,a\rangle} = \sqrt{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}k}\ .$$

נציב $\frac{1}{2}n\cdot(n+1) = \sum_{k=1}^{n}$ ונקבל

$$\|a\| = \sqrt{\frac{1}{2}n\cdot(n+1)}\ .$$

$$\|b\| = \sqrt{\langle b,b\rangle} = \sqrt{2^{1/2}\cdot 2^{1/2}+2^{2/2}\cdot 2^{2/2}+2^{3/2}\cdot 2^{3/2}+\cdots+2^{n/2}\cdot 2^{n/2}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}2^k}$$

נציב $2\left(2^n-1\right) = \frac{2\left(2^n-1\right)}{2-1} = \sum_{k=1}^{n}2^k$ ונקבל

$$\|b\| = \sqrt{2\left(2^n-1\right)}\ .$$

לפיכך לפי אי-השוויון קושי שוורץ:

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\cdot 2^{k/2} = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k\cdot 2^k} \leq \sqrt{\frac{1}{2}n\cdot(n+1)}\cdot\sqrt{2\left(2^n-1\right)} = \sqrt{\left(n^2+n\right)\cdot\left(2^n-1\right)}\ .$$

שאלה 38

א) לא מכפלה פנימית. הסבר: נניח כי $f(x)=1$, $g(x)=\sqrt{3}x$.

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} 1\cdot 3x^2dx = 2\ .$$

$$\langle f,2g\rangle = \int_{-1}^{1} 1\cdot 12x^2dx = 4\ .$$

$\langle f,2g\rangle \neq 2\langle f,g\rangle$ לכן הנוסחה לא שומרת על ליניאריות לכן היא לא מכפלה פנימית.

ב) מכפלה פנימית. הסבר:

1. ליניאריות

לכל f,g,h פונקציות שרציפות ב- $[-1,1]$.

$$\langle f+h,g\rangle = \int_{-1}^{1} 4(f(x)+h(x))g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 4f(x)g(x)\,dx + \int_{-1}^{1} 4h(x)g(x)\,dx = \langle f,g\rangle + \langle h,g\rangle \ .$$

לכל f,g,h פונקציות שרציפות ב- $[-1,1]$. ו- α סקלר: $[-1,1]$.

$$\langle \alpha f,g\rangle = \int_{-1}^{1} 4\alpha f(x)g(x)\,dx = \alpha \int_{-1}^{1} 4f(x)g(x)\,dx = \alpha \langle f,g\rangle \ .$$

2. סימטריות

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} 4f(x)g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 4g(x)f(x)\,dx = \langle g,f\rangle \ .$$

3. חיוביות

$$\langle f,f\rangle = \int_{-1}^{1} 4f^2(x)\,dx \geq 0 \ ,$$

ו- $\langle f,f\rangle = 0$ אם ורק אם $f(x)=0$.

ג) לא מכפלה פנימית. דוגמה נגדית: $f(x)=(1-x)$,

$$\langle f,f\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-x)^2 \sin x\,dx = 2\cos(1) - 2\sin(1) < 0 \ .$$

כלומר חיוביות לא מתקיימת.

ד) מכפלה פנימית. הסבר:

1. ליניאריות

לכל f,g,h פונקציות שרציפות ב- $[-1,1]$.

$$\langle f+h,g\rangle = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x^8(f(x)+h(x))g(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x^8 f(x)g(x)\,dx + \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x^8 h(x)g(x)\,dx = \langle f,g\rangle + \langle h,g\rangle \ .$$

לכל f,g,h פונקציות שרציפות ב- $[-1,1]$. ו- α סקלר: $[-1,1]$.

$$\langle \alpha f,g\rangle = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x^8 \alpha f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{3}\alpha \int_{-1}^{1} x^8 f(x)g(x)\,dx = \alpha \langle f,g\rangle \ .$$

2. סימטריות

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x^8 f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x^8 g(x)f(x)\,dx = \langle g,f\rangle \ .$$

3. <u>חיוביות</u>

$$\langle f,f\rangle = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x^8 f^2(x)\,dx \geq 0 \ ,$$

ו- $\langle f,f\rangle = 0$ אם ורק אם $f(x)=0$.

שאלה 39

הפולינום האופייני של A הוא

$$p_A(x)=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3 \ .$$

לפי משפט קיילי-המילטון,

$$A^2-2A-3I=0 \ .$$

לפיכך

$$A^2=2A+3I \ . \qquad (*)$$

לכן $a_1=2$, $b_1=3$. כעת נכפיל (*) ב- A:

$$\begin{aligned} A^3 =& A\cdot A^2\\ =&2A^2+3A\\ =&2(2A+3I)+3A\\ =&7A+6I \ . \end{aligned}$$

לכן $a_2=7$, $b_2=6$. באופן כללי,

$$\begin{aligned} A^{n+2} =& A\cdot A^{n+1}\\ =&A\left(a_nA+b_nI\right)\\ =&a_nA^2+b_nA\\ =&a_n\left(2A+3I\right)+b_nA\\ =&(2a_n+b_n)A+3a_nI \ . \end{aligned}$$

מכאן

$$a_{n+1}=2a_n+b_n \ , \qquad b_{n+1}=3a_n \ .$$

לכן קיבלנו כלל נסיגה

$$a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n \ , \qquad a_2=7 \ , \quad a_1=2 \ .$$

שאלה 40

א) בגלל ש- A מטריצה ממשית, ו- $\lambda_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ערך עצמי של A, אז הצמוד $\lambda_2=\bar{\lambda}_1=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ גם ערך עצמי של A. כיוון ש- $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ אז יש ל- A ל-A ערך עצמי שלישי λ_3. המכפלה של כל הערכים עצמיים שווה לדטרמיננטה של A, כלומר $|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3$. לכן

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\cdot\lambda_3=1 \qquad\Rightarrow\qquad \lambda_3=1 \ .$$

ב) הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x)=\left(x-\left[\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right]\right)\left(x-\left[\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right]\right)(x-1)=x^3-1\ .$$

לפי משפט קיילי המילטון:

$$p_A(A)=A^3-I=0 \qquad \Rightarrow \qquad A^3=I\ .$$

$$A^{100}=\left(A^3\right)^{33}\cdot A=I^{33}\cdot A=A\ ,$$

לכן $a=0$, $b=1$, $c=0$.

שאלה 41 הפולינום האופייני הוא $p_A(x)=(x-4)(x+2)=x^2-2x-8$. לפי משפט קיילי המילטון, $p_A(A)=0$, לפיכך

$$A^2-2A-8I=0 \qquad \Rightarrow \qquad A^2=2A+8I\ .$$

לכן $b_2=2$, $c_2=8$. נרשום

$$A^n=b_nA+c_nI\ .$$

נכפיל ב- A:

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=(b_nA+c_nI)\,A=b_nA^2+c_n=b_n\,(2A+8I)+c_nA=(2b_n+c_n)\,A+8b_nI\ .$$

מכאן

$$b_{n+1}=2b_n+c_n\ , \qquad c_{n+1}=8b_n\ .$$

שאלה 42

א)

$$m_A(x)=\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)\left(x^2+3\right)=x^6+6x^4+11x^2+6$$

לכן

$$f(x)=x^6+6x^4+11x^2+7x-2=m_A(x)+7x-8\ .$$

נציב A:

$$f(A)=m_A(A)+7A-8I=7A-8I\ .$$

$$|f(A)|=|7A-8I|=\left|7\left(A-\frac{8}{7}I\right)\right|=7^n\left|A-\frac{8}{7}I\right|$$

$\frac{8}{7}$ לא שורש של הפולינום המינימלי $\Leftarrow$ $\frac{8}{7}$ לא ערך עצמי של A $\Leftarrow$ $\left|A-\frac{8}{7}I\right|\neq 0$ $\Leftarrow$ $|f(A)|\neq 0$ $\Leftarrow$ $f(A)$ הפיכה.

ב)

$$m_A(x)=\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)\left(x^2+3\right)=(x+i)\,(x-i)\left(x+\sqrt{2}i\right)\left(x-\sqrt{2}i\right)\left(x+\sqrt{3}i\right)\left(x-\sqrt{3}i\right)\ .$$

השורשים הם

$$i,\ -i,\ \sqrt{2}i,\ -\sqrt{2}i,\ \sqrt{3}i,\ -\sqrt{3}i\ .$$

לכן הערכים עצמיים הם $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = \sqrt{2}i$, $\lambda_4 = -\sqrt{2}i$, $\lambda_5 = \sqrt{3}i$, $\lambda_6 = -\sqrt{3}i$.
אם מטריצה אוניטרית אז הערך מוחלט של כל ערל עצמי שווה 1.
קיימים ערכים עצמיים של A שעבורם הערך מוחלט לא שווה ל- 1 לכן A לא אוניטרית.

ג) אם A צמודה לעצמה אז כל הערכים עצמיים יהיו ממשיים. לא כל הערכים עצמיים של A ממשיים אז A לא צמודה לעצמה.

ד) **1)** כל ערך עצמי של A שורש של הפולינום המינימלי. ל- $m_A(x)$ יש 6 שורשים:

$$i,\ -i,\ \sqrt{2}i,\ -\sqrt{2}i,\ \sqrt{3}i,\ -\sqrt{3}i\ .$$

לכן הערכים עצמיים הם $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = \sqrt{2}i$, $\lambda_4 = -\sqrt{2}i$, $\lambda_5 = \sqrt{3}i$, $\lambda_6 = -\sqrt{3}i$.

2) $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ ול- A יש 6 ערכים עצמיים. בפרט הריבוי אלגברי של כל ערך עצמי הוא 1 וכל הערכים עצמיים שונים זה מזה, אז A לכסינה.

שאלה 43

א) נסמן

$$\mathrm{v}_1 = 1 - x\ ,\quad \mathrm{v}_2 = 1 - x^2,\quad \mathrm{v}_3 = 1 + x,\quad \mathrm{v}_4 = 4 + 4x^3\ .$$

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = 1 - x\ .$$

$$\|u_1\|^2 = \int_0^1 dx\,(1-x)^2 = \frac{1}{3}\ .$$

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle = \int_0^1 dx\,(1-x)(1-x^2) = \frac{5}{12}\ .$$

$$u_2 = 1 - x^2 - \frac{\left(\frac{5}{12}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)}(1-x) = -\frac{1}{4} + \frac{5x}{4} - x^2\ .$$

$$\|u_2\|^2 = \int_0^1 dx\,(1-x^2)^2 = \frac{1}{80}\ .$$

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle = \int_0^1 dx\,(1+x)(1-x) = \frac{2}{3}\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle = \int_0^1 dx\,(1+x)\left(-\frac{1}{4} + \frac{5x}{4} - x^2\right) = \frac{1}{12}\ .$$

$$u_3 = 1 + x - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)}(1-x) - \frac{\left(\frac{1}{12}\right)}{\left(\frac{1}{80}\right)}\left(-\frac{1}{4} + \frac{5x}{4} - x^2\right) = \frac{20x^2}{3} - \frac{16x}{3} + \frac{2}{3}\ .$$

$$\|u_3\|^2 = \int_0^1 dx \, \left(\frac{20x^2}{3} - \frac{16x}{3} + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \ .$$

$$u_4 = \mathrm{v}_4 - \frac{\langle \mathrm{v}_4, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_4, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_4, u_3\rangle}{\|u_3\|^2} u_3 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_4, u_1\rangle = \int_0^1 dx \, (1-x)(4+4x^3) = \frac{11}{5} \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_4, u_2\rangle = \int_0^1 dx \, (4+4x^3) \left(-\frac{1}{4} + \frac{5x}{4} - x^2\right) = \frac{1}{4} \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_4, u_3\rangle = \int_0^1 dx \, (4+4x^3) \left(\frac{20x^2}{3} - \frac{16x}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{26}{15} \ .$$

$$u_4 = 4+4x^3 - \frac{\left(\frac{11}{5}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)}(1-x) - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{80}\right)}\left(-\frac{1}{4} + \frac{5x}{4} - x^2\right) - \frac{\left(\frac{26}{15}\right)}{\left(\frac{4}{9}\right)}\left(\frac{20x^2}{3} - \frac{16x}{3} + \frac{2}{3}\right) = 4x^3 - 6x^2 + \frac{12x}{5} - \frac{1}{5} \ .$$

קיבלנו בסיס אורתוגונלי:

$$\left\{ u_1 = 1-x \ , \quad u_2 = -\frac{1}{4} + \frac{5x}{4} - x^2 \ , \quad u_3 = \frac{20x^2}{3} - \frac{16x}{3} + \frac{2}{3} \ , \quad u_4 = 4x^3 - 6x^2 + \frac{12x}{5} - \frac{1}{5} \ . \right\}$$

ב) $p(x) = \text{span}\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ לכן $P_U(p(x)) = p(x)$.

$$\frac{\langle u_1, q(x)\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \frac{3(1-x)}{5}$$

$$\frac{\langle u_2, q(x)\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \frac{32}{7}\left(-x^2 + \frac{5x}{4} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{\langle u_3, q(x)\rangle}{\|u_3\|^2} u_3 = \frac{33}{35}\left(\frac{20x^2}{3} - \frac{16x}{3} + \frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{\langle u_4, q(x)\rangle}{\|u_4\|^2} u_4 = \frac{1}{2}\left(4x^3 - 6x^2 + \frac{12x}{5} - \frac{1}{5}\right)$$

$$P_U(q(x)) = \frac{\langle u_1, q(x)\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle u_2, q(x)\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 + \frac{\langle u_3, q(x)\rangle}{\|u_3\|^2} u_3 + \frac{\langle u_4, q(x)\rangle}{\|u_4\|^2} u_4 = 2x^3 - \frac{9x^2}{7} + \frac{9x}{7} - \frac{1}{70} \ .$$

שאלה 44

א) נגדיר $u=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ ונסמן $A=\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5}\\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} & A_{2,5}\\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} & A_{3,5}\\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} & A_{4,5}\\ A_{5,1} & A_{5,2} & A_{5,3} & A_{5,4} & A_{5,5}\end{pmatrix}$.

$$A\cdot u=\begin{pmatrix} A_{1,1}+A_{1,2}+A_{1,3}+A_{1,4}+A_{1,5}\\ A_{2,1}+A_{2,2}+A_{2,3}+A_{2,4}+A_{2,5}\\ A_{3,1}+A_{3,2}+A_{3,3}+A_{3,4}+A_{3,5}\\ A_{4,1}+A_{4,2}+A_{4,3}+A_{4,4}+A_{4,5}\\ A_{5,1}+A_{5,2}+A_{5,3}+A_{5,4}+A_{5,5}\end{pmatrix} .$$

אם סכום של האיברים בכל שורה שווה ל- 5 אז

$A_{1,1}+A_{1,2}+A_{1,3}+A_{1,4}+A_{1,5}=5$,
$A_{2,1}+A_{2,2}+A_{2,3}+A_{2,4}+A_{2,5}=5$
וכן הלה, ונקבל

$$A\cdot u=\begin{pmatrix}5\\5\\5\\5\\5\end{pmatrix}=5\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=5u\ ,$$

ז"א 5 ערך עצמי של A ששייך לווקטור עצמי $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

ב) במטריצה B יש שורות זהות (ועמודות זהות) לכן $|B|=0$ לכן B לא הפיכה לכן ל- B יש ערך עצמי ששווה ל- 0.

ג) נחשב את הפולינום האופייני של B:

$$B^2=\begin{pmatrix}5&5&5&5&5\\5&5&5&5&5\\5&5&5&5&5\\5&5&5&5&5\\5&5&5&5&5\end{pmatrix}=5B\ .$$

$$B^3=B\cdot B^2=B\cdot 5B=5B^2=25B$$

$$B^4=B\cdot B^3=B\cdot 25B=25B^2=125B\ .$$

$$B^5=B\cdot B^4=B\cdot 125B=125B^2=625B\ .$$

$$B^5-5B^4=0\ .$$

ד) מסעיף הקודם B מאפסת את הפולינום $f(x) = x^5 - 5x^4 = x^5(x-5) = 0$.
הפולינום המינימלי מחלק כל פולינום שמתאפס ע"י B.
נניח שלפולינום המינימלי יש שורשים מלבד מ- 5 ו- 0.
אז הפולינום המינימלי לא מחלק את $f(x)$.
סתירה.

שאלה 45

א) A לא הפיכה. הסבר:

$$|A| = i \cdot (-i) \cdot 0 = 0$$

לכן A לא הפיכה.

ב) A הפיכה. הסבר:

$$|A| = i \cdot (-i) \cdot (-1) = 1 \ .$$

פולינום אופייני:

$$p_A(x) = (x+i)(x-i)(x+1) = x^3 + x^2 + x + 1 \ .$$

לפי משפט קיילי-המילטון:

$$p_A(A) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A^3 + A^2 + A + I = 0 \qquad \Rightarrow \qquad I = -\left(A^3 + A^2 + A\right) = A \cdot \left(-A^2 - A - I\right) \ .$$

לפיכך

$$A^{-1} = -A^2 - A - I \ .$$

שאלה 46

$Au = \alpha u$ ו- $Bu = \beta u$ כאשר $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ סקלרים.

$$(AB - BA)u = ABu - BAu = \beta Au - \alpha Bu = (\alpha\beta - \beta\alpha)u = 0$$

כלומר $(AB - BA)u = 0$.
u ווקטור עצמי לכן $u \neq 0$ לכן $|AB - BA| = 0$.

שאלה 47

א) נוכיח כי u_1, u_2 בת"ל. נרשום

(*1) $$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0$$

כאשר α_1, α_2 סקלרים. נכפיל ב- A:

(*2) $$A\alpha_1 u_1 + A\alpha_2 u_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1\lambda_1 u_1 + \alpha_2\lambda_2 u_2 = 0 \ .$$

נכפיל (*1) ב- λ_1:

(*3) $$\lambda_1\alpha_1 u_1 + \lambda_1\alpha_2 u_2 = 0$$

נקח את החיסור (3*)-(2*):

$$\lambda_1\alpha_2u_2 - \lambda_2\alpha_2u_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1-\lambda_2)\alpha_2u_2 = 0 \ .$$

u_2 ווקטור עצמי $\Leftarrow$ $u_2 \neq 0$.
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ (נתון) $\Leftarrow$ $\lambda_1-\lambda_2 \neq 0$, לכן

$$\alpha_2 = 0 \ .$$

נציב זה ב- (1*) ונקבל

$$\alpha_1u_1 = 0 \ .$$

u_1 ווקטור עצמי $\Leftarrow$ $u_1 \neq 0$ לפיכך

$$\alpha_1 = 0 \ .$$

לכן (1*) מתקיים רק אם $\alpha_1=\alpha_2=0$ לפיכך u_1,u_2 בת"ל.

נוכיח כי u_1,u_2,u_3 בת"ל. נרשום

$$\beta_1u_1+\beta_2u_2+\beta_3u_3 = 0 \qquad (\#1)$$

כאשר β_1,β_2,β_3 סקלרים. נכפיל ב- A:

$$A\beta_1u_1+A\beta_2u_2+A\beta_3u_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1\beta_1u_1+\lambda_2\beta_2u_2+\lambda_3\beta_3u_3 = 0 \ . \qquad (\#2)$$

נכפיל (1#) ב- λ_3:

$$\lambda_3\beta_1u_1+\lambda_3\beta_2u_2+\lambda_3\beta_3u_3 = 0 \qquad (\#3)$$

נקח את החיסור (3#)-(2#):

$$(\lambda_3-\lambda_1)\beta_1u_1 + (\lambda_3-\lambda_2)\beta_2u_2 = 0 \ .$$

u_1 ו- u_2 בת"ל אז זה מתקיים רק אם

$$(\lambda_3-\lambda_1)\beta_1 = 0 \ , \qquad (\lambda_3-\lambda_2)\beta_2 = 0 \ .$$

u_1,u_2 ווקטורים עצמיים לכן $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$.
$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ $\Leftarrow$ $\lambda_3-\lambda_1 \neq 0$ ו- $\lambda_3-\lambda_2 \neq 0$.
לכן $\beta_1=0$ ו- $\beta_2=0$.
נציב זה ב- (1#):

$$\beta_3u_3 = 0 \ .$$

u_3 ווקטור עצמי $\Leftarrow$ $u_3 \neq 0$ לכן

$$\beta_3 = 0 \ .$$

מצאנו כי (3#) מתקיים רק אם $\beta_1,\beta_2,\beta_3=0$ לכן u_1,u_2,u_3 בת"ל.

ב) ווקטורים עצמיים של המטריצה אוניטרית מהווים בסיס אורתוגונלי.
לפי זה, אם A אוניטרית אז הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ מהווה בסיס אורתוגונלי.

ג) לא.
אם A אוניטרית אז הערך מוחלט של על ערך עצמי יהיה 1.
יש לנו 3 ערכים עצמיים שונים, אז כדי שהערך מוחלט של כל אחד ייה שווה ל- 1. אז בהכרך לפחות אחד יהיה מספר מרוכב.

שאלה 48

$$ABu - BAu = 2Bu \qquad \Rightarrow \qquad ABu - \lambda Bu = 2Bu \qquad \Rightarrow \qquad ABu = (\lambda+2)Bu \ .$$

נגדיר $w = Bu$. נניח כי $w \neq 0$. אז

$$Aw = (\lambda+2)w \ .$$

ז"א $\lambda+2$ ערך עצמי של A ששייך לווקטור עצמי w.
$\mathrm{Re}(\lambda+2) > \mathrm{Re}\lambda$. סתירה. לכן $w = Bu = 0$.

שאלה 49

א) נשים לב שכל סדרה $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in U$ נקבע ע"י השני האיברים הראשונים: a_1, a_2, בגלל שהאיברים הבאים ניתנים ע"י הכלל נסיגה $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$. אז נקח לדוגמה $(a_1, a_2) = (1,0), (0,1)$ ונקבל בסיס $B = \{u_1, u_2\}$ של U כאשר

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \\ 21 \\ \vdots \end{pmatrix} \ , \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \\ 20 \\ \vdots \end{pmatrix} \ .$$

המטריצה המייצגת A של T לפי בסיס B הוא

$$A \equiv [T]_B = \begin{pmatrix} | & | \\ T(u_1) & T(u_2) \\ | & | \end{pmatrix}$$

$$T(u_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 21 \\ \vdots \end{pmatrix} = 0 \cdot u_1 + 3 \cdot u_2 \ , \qquad T(u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 20 \\ \vdots \end{pmatrix} = 1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 \ .$$

לכן

$$A = [T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

הפולינום האופייני של A:

$$p_A(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) \ .$$

הערכים עצמיים הם $-1, 3$.
מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = -1$:

$$(A+I)=\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\3&3&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

$$V_{-1}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

נסמן את הווקטור עצמי ששייך לע"ע -1 ב- v_{-1}. ז"א

$$\mathrm{v}_{-1}=1\cdot u_1-1\cdot u_2=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\6\\21\\\vdots\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\2\\7\\20\\\vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\\\vdots\end{pmatrix}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=3$:

$$(A-3I)=\left(\begin{array}{cc|c}-3&1&0\\3&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2+R_1}\left(\begin{array}{cc|c}-3&1&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

$$V_3=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right\}$$

נסמן את הווקטור עצמי ששייך לע"ע 3 ב- v_3. ז"א

$$\mathrm{v}_3=1\cdot u_1+3\cdot u_2=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\6\\21\\\vdots\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\1\\2\\7\\20\\\vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\9\\27\\81\\\vdots\end{pmatrix}$$

נמצא את הווקטורים עצמיים ששייכים לערך עצמי -1:

$$T\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\end{pmatrix}$$

כך ש-

$$\begin{pmatrix}a_2\\a_3\\\vdots\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\end{pmatrix}\ .$$

מכאן אנחנו נקבל את היחס

$$a_{n+1}=-a_n\ ,\qquad n=1,2,\ldots\ .$$

לכן הסדרה $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ סדרה גיאומטרית עם איבר ראשון a_1 ומנת הסדרה -1. לכן

$$a_i=(-1)^{i-1}a_1\ .$$

נמצא את הווקטורים עצמיים ששייכים לערך עצמי 3:

$$T\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\end{pmatrix}$$

כך ש-

$$\begin{pmatrix}a_2\\a_3\\\vdots\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\end{pmatrix}\ .$$

מכאן אנחנו נקבל את היחס

$$a_{n+1}=3a_n\ ,\qquad n=1,2,\ldots\ .$$

לכן הסדרה $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ סדרה גיאומטרית עם איבר ראשון a_1 ומנת הסדרה 3. לכן

$$a_i=3^{i-1}a_1\ .$$

ב) מסעיף א' הסדרות

$$\mathrm{v}_{-1}=\left((-1)^{i-1}\right)_{i=1}^{\infty}\ ,\qquad \mathrm{v}_3=\left(3^{i-1}\right)_{i=1}^{\infty}$$

מהוות בסיס של U שמורכב מווקטורים עצמיים של T. (שימו לב שנבחור $a_1=1$.) לפיכך כל סדרה $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ ניתן לרשום בצירוף לינארי של הווקטורים האלה:

$$(a_i)_{i=1}^{\infty}=\alpha\mathrm{v}_{-1}+\beta\mathrm{v}_{-3}=\alpha\left((-1)^{i-1}\right)_{i=1}^{\infty}+\beta\left(3^{i-1}\right)_{i=1}^{\infty}$$

כאשר $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ סקלרים. נניח ש- $a_1=2$ ו- $a_2=7$. אז

$$\begin{aligned}2=&a_1=\alpha+\beta\ ,\\7=&a_2=-\alpha+3\beta\ .\end{aligned}$$

הפתרון למערכת הזאת הוא

$$\alpha=-\frac{1}{4}\ ,\qquad \beta=\frac{9}{4}\ .$$

לפיכך

$$\begin{aligned}(a_i)_{i=1}^{\infty}=&-\frac{1}{4}\left((-1)^{i-1}\right)_{i=1}^{\infty}+\frac{9}{4}\left(3^{i-1}\right)_{i=1}^{\infty}\\=&\frac{1}{4}\left((-1)^{i}+3^{i+1}\right)_{i=1}^{\infty}\ .\end{aligned}$$

לפיכך

$$a_n=\frac{1}{4}\left((-1)^n+3^{n+1}\right)\ .$$

שאלה 50

א) ווקטור עצמי $u\in\mathbb{F}^n$, $u\neq\bar{0}$ נקרא ווקטור עצמי של $\mathbb{F}^{n\times n}$, אם קיים סקלר $\lambda\in\mathbb{F}$ כך ש- $A\cdot\lambda=\lambda\cdot u$.

ב) 1) נחשב את הפולינום האופייני של A:

$$\begin{aligned}
p_A(x) =&|xI-A|\\
=&\begin{vmatrix} x-4 & 5 & -2\\ -5 & x+7 & -3\\ -6 & 9 & x-4\end{vmatrix}\\
=&(x-4)\begin{vmatrix} x+7 & -3\\ 9 & x-4\end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -5 & -3\\ -6 & x-4\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -5 & x+7\\ -6 & 9\end{vmatrix}\\
=&(x-4)\left((x+7)(x-4)+27\right) - 5\left(-5(x-4)-18\right) - 2\left(-45+6(x+7)\right)\\
=&(x-4)\left(x^2+3x-1\right) - 5\left(-5x+2\right) - 2\left(-3+6x\right)\\
=&(x-4)\left(x^2+3x-1\right) - 5\left(-5x+2\right) - 2\left(-3+6x\right)\\
=&x^3+3x^2-x-4x^2-12x+4+25x-10+6-12x\\
=&x^3-x^2\\
=&x^2(x-1)\ .
\end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=0$ מריבוי אלגבכי 2.

$\lambda=1$ מריבוי אלגבכי 1.

נחשב את המרחב עצמי ששייך לערך עצמי 0:

$$(A-0\cdot I|0)=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0\\ 5 & -7 & 3 & 0\\ 6 & -9 & 4 & 0\end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to 4R_3-6R_2]{R_2\to 4R_2-5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 2 & 0\\ 0 & -6 & 4 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to 3R_1-5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 0 & -4 & 0\\ 0 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow[R_2\to \frac{-1}{3}R_2]{R_1\to \frac{1}{12}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ 1\end{pmatrix}$ לכן המרחב עצמי ששייך לערך עצמי 0 הינו

$$V_0=\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\right\}\ .$$

בפרט $\dim V_0=1$.

נחשב את המרחב עצמי ששייך לערך עצמי 1:

$$(A-1\cdot I|0)=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0\\ 5 & -8 & 3 & 0\\ 6 & -9 & 3 & 0\end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to 3R_2-5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to \frac{1}{3}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

פתרון: $z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ לכן המרחב עצמי ששייך לערך עצמי 0 הינו

$$V_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\ .$$

בפרט $\dim V_1=1$.

2) <u>שיטה 1</u>:

נשים לב כי $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$. מאחר וסכום המימדים של המרחבים העצמיים השונים הוא $\dim V_0+\dim V_1=2\neq\dim 3$ אז A לא ניתנת ללכסון.

<u>שיטה 2</u>:

עבור הערך עצמי $\lambda=0$, הריבוי אלגברי לא שווה להריבוי גיאומטרי לכן A לא לכסינה.

3) לא רלוונטי.

4)

$$A\cdot\begin{pmatrix}2020\\2020\\2020\end{pmatrix}=A\cdot2020\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2020\cdot A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\ .$$

הווקטור $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ הינו ווקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי $\lambda=1$, לכן

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=1^{2019}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=A^{2019}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. לפיכך

$$A^{2019}\cdot\begin{pmatrix}2020\\2020\\2020\end{pmatrix}=A^{2019}\cdot2020\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2020\cdot A^{2019}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2020\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2020\\2020\\2020\end{pmatrix}\ .$$

ג) **1)** הטענה נכונה. הוכחה:

<u>שיטה 1</u>

λ ערך עצמי של A לכן

$$|A-\lambda I|=0\quad\Rightarrow\quad\left|(A-\lambda I)^t\right|=0\quad\Rightarrow\quad\left|A^t-(\lambda I)^t\right|\quad\Rightarrow\quad\left|A^t-\lambda I\right|=0$$

לכן λ ערך עצמי של A^t.

<u>שיטה 2</u>

התנאים הבאים שקולים:

(1) λ הינו ערך עצמי של A.
(2) המטריצה $A-\lambda I$ איננה הפיכה.
(3) המטריצה
$$(A-\lambda I)^t = A^t - (\lambda I)^t = A^t - \lambda I$$
איננה הפכיה.
(4) λ הינו ערך עצמי של A^t.

הסבר:

(1) שקול ל- (2) לפי המשפט: λ ע"ע של A אס"ם $A-\lambda I$ איננה הפיכה.
(2) שקול ל- (3) לפי המשפט: מטריצה הפיכה אס"ם המשוחלפת שלה הפיכה.
(3) שקול ל- (4) לפי אותו המשפט שהשתמשנו בו להראות את " (1) שקול ל- (2)".

2) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. הווקטור $u=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ווקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי $\lambda=0$.

אבל u לא ווקטור עצמי של המשוחלפת $A^t=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.

שאלה 51 $A=\bar{A}$ לכן A צמודה לעצמה לכן A נורמלית לכן A לכסינה אוניטרית לפי משפט הלכסון אוניטרית.

נמצא את הפולינום האופייני של A:

$$p_A(x)=\begin{vmatrix}x-3&-i&-1\\i&x-3&i\\-1&-i&x-3\end{vmatrix}$$
$$=(x-5)(x-2)^2\ .$$

ערכים עצמיים:
$\lambda=5$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda=2$ מריבוי אלגברי 2.
המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=2$:

$$V_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\-1\\0\end{pmatrix}\ .\right\}$$

המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=5$:

$$V_5=\left\{\begin{pmatrix}1\\-i\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נסמן הווקטורים בבסיס של V_2 ב- $\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}i\\-1\\0\end{pmatrix}$. ונסמן הווקטור של הבסיס של V_5 ב-

$\mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. נבנה בסיס אורתוגונלי של V_2 ע"י שיטת גרם שמידט:

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} , \qquad \|u_1\|^2 = 2 .$$

$$\begin{aligned} u_2 =& \mathrm{v}_2 - \frac{1}{\|u_1\|^2} \langle \mathrm{v}_2, u_1 \rangle \cdot u_1 \\ =& \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

בסה"כ קיבלנו בסיס אורתוגונלי של V_2:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ i \end{pmatrix} \right\} .$$

כעת נבנה בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{ \hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \hat{u}_2 = \sqrt{\frac{1}{6}} \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ i \end{pmatrix} \right\} .$$

בבסיס של V_5 יש רק ווקטור אחד ופיכך הבסיס כבר אורתוגונלי. נסמן הבסיס האורתוגונלי של V_5 ב-

$$\left\{ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

נבנה בסיס אורתנורמלי:

$$\left\{ \hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

העמודות של המטריצה Q הנדרשת הן הווקטורים בבסיסים האורתונורמליים של המרחבים העצמיים:

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{i}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

והמטריצה האלכסונית D הנדרשת היא המטריצה שעל האלכסון הראשי שלה יש את הערכים העצמיים של A באותו סדר שהווקטורים העצמיים מופיעים ב-Q:

$$D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$$

שאלה 52

א) נסמן $w=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$. לפי המשפט הפירוק הספקטרלי:

$$A\cdot w=\lambda_1 P_{V_{\lambda_1}}(w)+\lambda_2 P_{V_{\lambda_2}}(w)\ ,$$

כאשר λ_1, λ_2 הערכים העצמיים של A ו- $P_{V_{\lambda_i}}(w)$ ההיטל של w על המרחב העצמי V_{λ_i} ששייך לערך עצמי λ_i. נציב $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$:

$$A\cdot w=1\cdot P_{V_1}(w)+2\cdot P_{V_2}(w)\ . \qquad \text{(\#1)}$$

נחשב את $P_{V_1}(w)$ (ההיטל של $w=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ על המרחב עצמי V_1). נצטרך לבסיס אורתוגונלי של V_1: נסמן

$$V_1=\left\{\mathrm{x}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\mathrm{x}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נבנה בסיס אורתוגונלי ע"י התהליך גרם שמידט:

$$u_1=\mathrm{x}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad \|u_1\|^2=2\ .$$

$$\begin{aligned}u_2=&\mathrm{x}_2-\frac{1}{\|u_1\|^2}\langle\mathrm{x}_2,u_2\rangle\\
=&\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\
=&\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\ .\end{aligned}$$

נבחור בסיס אורתוגונלי של V_1:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

$$P_{V_1}(w) = P_{V_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{\langle w, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle w, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

$$\|u_1\|^2 = 2 \ , \qquad \|u_2\|^2 = 6 \ .$$

$$\langle w, u_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \ , \qquad \langle w, u_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 11 \ .$$

$$P_{V_1}(w) = P_{V_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \frac{11}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} \ . \tag{\#2}$$

$$P_{V_2}(w) = w - P_{V_1}(w) \tag{\#3}$$

נציב (#2) ו- (#3) ב- (#1):

$$\begin{aligned} A \cdot w =& 1 \cdot P_{V_1}(w) + 2 \cdot P_{V_2}(w) \\ =& P_{V_1}(w) + 2\left(w - P_{V_1}(w)\right) \\ =& 2w - P_{V_1}(w) \\ =& 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

ב)

$$\begin{aligned} A^{10} w =& \lambda_1^{10} P_{V_{\lambda_1}}(w) + \lambda_2^{10} P_{V_{\lambda_2}}(w) \\ =& 1^{10} P_{V_1}(w) + 2^{10} P_{V_2}(w) \\ =& P_{V_1}(w) + 2^{10}\left(w - P_{V_1}(w)\right) \\ =& (1 - 1024)\, P_{V_1}(w) + 1024 w \\ =& -1023 P_{V_1}(w) + 1024 w \\ =& -1023 \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} + 1024 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} -340 \\ -339 \\ 345 \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

ג)

$$A=\begin{pmatrix} A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

לפי משפט הפירוק הספקטרלי:

$$\begin{aligned}
A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} &=1\cdot P_{V_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\cdot P_{V_2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\\
&=1\cdot P_{V_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-P_{V_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\\
&=-P_{V_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

מאותה מידה:

$$A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=-P_{V_1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=-P_{V_1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\ ,$$

$$\begin{aligned}
P_{V_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} &=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},u_1\right\rangle}{\|u_1\|^2}+\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},u_2\right\rangle}{\|u_2\|^2}\\
&=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{2}+\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\rangle}{6}\\
&=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{V_1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} &= \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, u_1 \right\rangle}{\|u_1\|^2} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, u_2 \right\rangle}{\|u_2\|^2} \\ &= \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{2} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle}{6} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{V_1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} &= \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, u_1 \right\rangle}{\|u_1\|^2} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, u_2 \right\rangle}{\|u_2\|^2} \\ &= \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{2} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle}{6} \\ &= \frac{2}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -P_{V_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix} \ .$$

$$A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = -P_{V_1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix} \ .$$

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = -P_{V_1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix} \ .$$

לפיכך

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\1 & 4 & -1\\-1 & -1 & 4\end{pmatrix} \ .$$

שאלה 53

אפשרות 1)

$$\begin{pmatrix} J_4(5) & & & & & \\ & J_2(5) & & & & \\ & & J_2(4) & & & \\ & & & J_2(4) & & \\ & & & & J_1(1) & \\ & & & & & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אפשרות 2)

$$\begin{pmatrix} J_4(5) & & & & & & \\ & J_1(5) & & & & & \\ & & J_1(5) & & & & \\ & & & J_2(4) & & & \\ & & & & J_2(4) & & \\ & & & & & J_1(1) & \\ & & & & & & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אפשרות 3)

$$\begin{pmatrix} J_4(5) & & & & & & \\ & J_2(5) & & & & & \\ & & J_2(4) & & & & \\ & & & J_1(4) & & & \\ & & & & J_1(4) & & \\ & & & & & J_1(1) & \\ & & & & & & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אפשרות 4)

$$\begin{pmatrix} J_4(5) &&&&&&& \\ & J_1(5) &&&&&& \\ && J_1(5) &&&&& \\ &&& J_2(4) &&&& \\ &&&& J_1(4) &&& \\ &&&&& J_1(4) && \\ &&&&&& J_1(1) & \\ &&&&&&& J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&5&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&5&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&5&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&5&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&5&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&4&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&4&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&4&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&4&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

שאלה 54

א) הפולינום האופייני הוא פולינום מתוקן לכן יש לו את הצורה

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + x^n \ .$$

לפי המשפט קיילי-המילטון, A מאפסת את הפולינום האופייני שלה. ז"א

$$\alpha_0 I + \alpha_1 A + \ldots + A^n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_0 I = -\alpha_1 A - \ldots - A^n = A\left((-\alpha_1)I + (-\alpha_2)A + \ldots + (-1)A^{n-1}\right)$$

הקבוע α_0 בהפולינום האופייני שווה ל- $|A|$. A הפיכה (נתון) לכן $|A|\neq 0$ לכן $\alpha_0\neq 0$ לכן ההופכית α_0^{-1} קיימת. נכפיל ב- α_0^{-1} ונקבל:

$$I = A\left(\left(\frac{-\alpha_1}{\alpha_0}\right)I + \left(\frac{-\alpha_2}{\alpha_0}\right)A + \ldots + \left(\frac{-1}{\alpha_0}\right)A^{n-1}\right)$$

מכאן נקבל כי

$$A^{-1} = \left(\frac{-\alpha_1}{\alpha_0}\right)I + \left(\frac{-\alpha_2}{\alpha_0}\right)A + \ldots + \left(\frac{-1}{\alpha_0}\right)A^{n-1}$$

ולפיכך

$$A^{-1} \in \text{span}\left\{I, A, \cdots, A^{n-1}\right\} \ .$$

ב) נניח ש- $\{I_n, A, A^2, \ldots, A^m\}$ ת"ל. אז קיימים סקלירם שאינם כולם אפסים כך ש-

$$\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_{m-1}A^{m-1} + \alpha_m A^m = 0$$

מכאן A מאפסת $\sum_{i=0}^m \alpha_i x^i$ שהוא פולינום שונה מאפס מסדר m לכל היותר.
להיפך, נניח ש- $P(x) = \sum_{i=0}^m \alpha_i x^i$ אינו פולינום האפס כך ש $P(A)=0$. אז

$$\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_m A^m = 0$$

הוא צירוף לנארי לא טריוויאלי.

ג) נניח ש $A^m \in \text{span}\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{m-1}\}$. אז קיימים סקלרים כך ש

$$A^m = \alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_{m-1} A^{m-1}$$

ז"א

$$A^m - \alpha_{m-1} A^{m-1} - \alpha_{m-2} A^{m-2} - \ldots - \alpha_1 A - \alpha_0 I_n = 0$$

לכן A מאפסת את

$$P(x) = x^m - \alpha_{m-1} x^{m-1} - \ldots - \alpha_1 x - \alpha_0 \in \mathbb{F}[x] \ .$$

נניח ש- A מאפסת את הפולינויום

$$Q(x) = \beta_m x^m + \beta_{m-1} x^{m-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0 \in \mathbb{F}[x]$$

כאשר $Q(x) \in \mathbb{R}_m[x]$. כיוון ש הסדר של $Q(x)$ הוא m אז $\beta_m \neq 0$. נעביר אגפים:

$$\beta_m A^m = -\left(\beta_{m-1} A^{m-1} + \ldots + \beta_1 A + \beta_0 I_n\right)$$

נחלק שני האגפים ב β_m:

$$A^m = -\left(\frac{\beta_{m-1}}{\beta_m} A^{m-1} + \ldots + \frac{\beta_1}{\beta_m} A + \frac{\beta_0}{\beta_m} I_n\right)$$

קיבלנו כי $A^m \in \text{span}\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{m-1}\}$.

שאלה 55

$\Rightarrow$ A, B דומות לכן קיימת $C \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה כך ש $B = C^{-1}AC$. לכן

$$P(B) = P\left(C^{-1}AC\right) = C^{-1}P(A)C$$

אם $P(A) = \lambda I_n$ אז

$$P(B) = C^{-1}\lambda I_n C = \lambda I_n \ .$$

$\Leftarrow$

$A = CBC^{-1}$ לכן

$$P(A) = P\left(CBC^{-1}\right) = CP(B)C^{-1}$$

אם $P(B) = \lambda I_n$ אז

$$P(A) = C\lambda I_n C^{-1} = \lambda I_n \ .$$

שאלה 56

א) הפולינום האופייני הוא $p_A(x) = (x+2)(x-2)(x-5)$. ערכים עצמיים:
$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda = -2$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda = 5$ מריבוי אלגברי 1.

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 2: $V_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי -2: $V_{-2} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1-3i\\5\end{pmatrix}\right\}$.

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 5: $V_5 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\-1+3i\\2\end{pmatrix}\right\}$.

ב) נשים לב כי $A = \bar{A}$, כלומר A צמודה לעצמה ולכן A נורמלית ולכן הווקטורים עצמיים מהווים בסיס אורתוגונלי.

$A = QDQ^{-1}$ כאשר $D = \begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ ו- $Q = \begin{pmatrix}|&|&|\\u_1&u_2&u_3\\|&|&|\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1&0\\1-3i&0&-1+3i\\5&0&2\end{pmatrix}$.

ג) לכל פונקציה $f(x)$,

$$f(A) = f(QDQ^{-1}) = Qf(D)Q^{-1} \ .$$

לכן

$$e^A = e^{QDQ^{-1}} = Qe^DQ^{-1} \ .$$

כיצד נחשב e^D? נשים לב כי אם $D = \begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}$ אלכסונית אז $f(D) = \begin{pmatrix}f(\lambda_1)&0&\cdots&0\\0&f(\lambda_2)&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&f(\lambda_n)\end{pmatrix}$

באותה מידה $e^D = \begin{pmatrix}e^{\lambda_1}&0&\cdots&0\\0&e^{\lambda_2}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&e^{\lambda_n}\end{pmatrix}$. לכן

$$e^A = e^{QDQ^{-1}} = Qe^DQ^{-1} = Q\begin{pmatrix}e^{-2}&0&0\\0&e^2&0\\0&0&e^5\end{pmatrix}Q^{-1} \ .$$

<u>שאלה 57</u> הפולינום האופייני של A הוא

$$p_A(x) = (x-1)(x+2) = x^2+x-2 \ .$$

לפי משפט קיילי-המילטון,

$$A^2 + A - 2I = 0 \ .$$

לפיכך

$$A^2 = -A + 2I \ . \qquad (*)$$

לכן $a_1 = -1$, $b_1 = 2$. כעת נכפיל (*) ב- A:

$$\begin{aligned} A^3 =& A \cdot A^2 \\ =& -A^2 + 2A \\ =& -(-A + 2I) + 2A \\ =& 3A - 2I \ . \end{aligned}$$

לכן $a_2 = 3$, $b_2 = -2$. באופן כללי,

$$\begin{aligned} A^{n+2} =& A \cdot A^{n+1} \\ =& A\left(a_n A + b_n I\right) \\ =& a_n A^2 + b_n A \\ =& a_n\left(-A + 2I\right) + b_n A \\ =& (-a_n + b_n)A + 2a_n I \ . \end{aligned}$$

מכאן

$$a_{n+1} = -a_n + b_n \ , \qquad b_{n+1} = 2a_n \ .$$

לכן קיבלנו כלל נסיגה

$$a_{n+2} = -a_{n+1} + b_{n+1} = -a_{n+1} + 2a_n \ , \qquad a_2 = 3 \ , \quad a_1 = -1 \ .$$

<u>שאלה 58</u> יהי V המרחב המכפלה פנימית הסטנדרטית מעל הדה $\mathbb{R}$. נגדיר את שני ווקטורים $a, b \in V$:

$$a = \begin{pmatrix} \sqrt{1} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \vdots \\ \sqrt{n} \end{pmatrix} \ , \qquad b = \begin{pmatrix} 3^{1/2} \\ 3^{2/2} \\ 3^{3/2} \\ \vdots \\ 3^{n/2} \end{pmatrix} \ .$$

לפי אי-השוויון קושי שוורץ:

$$|\langle a, b\rangle| = \|a\| \cdot \|b\| \ .$$

$$\langle a, b\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{1} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \vdots \\ \sqrt{n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3^{1/2} \\ 3^{2/2} \\ 3^{3/2} \\ \vdots \\ 3^{n/2} \end{pmatrix} \right\rangle = 3^{1/2}\cdot\sqrt{1} + 3^{2/2}\cdot\sqrt{2} + 3^{3/2}\cdot\sqrt{3} + \cdots + 3^{n/2}\cdot\sqrt{n} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\cdot 3^{k/2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k \cdot 3^k} \ .$$

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a\rangle} = \sqrt{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1} + \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} + \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}\cdot\sqrt{n}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k} \ .$$

נציב $\sum_{k=1}^{n} = \frac{1}{2}n\cdot(n+1)$ ונקבל

$$\|a\| = \sqrt{\frac{1}{2}n\cdot(n+1)}\ .$$

$$\|b\| = \sqrt{\langle b,b\rangle} = \sqrt{3^{1/2}\cdot 3^{1/2} + 3^{2/2}\cdot 3^{2/2} + 3^{3/2}\cdot 3^{3/2} + \cdots + 3^{n/2}\cdot 3^{n/2}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 3^k}$$

נשים לב כי $\sum_{k=1}^{n} 3^k$ הוא טור הנדסי אשר האיבר הראשון שלו הוא 3 והמנת הסדרה היא 3. הנוסחה לסכום של n איברים של טור הנדסי עם איבר ראשון a ומנת הסדרה q היא $\frac{a(1-q^n)}{1-q} = \sum_{k=1}^{n} a\cdot q^{k-1}$. נציב $a=3$ ו- $q=3$ ונקבל $\frac{3(3^n-1)}{2} = \frac{3(1-3^n)}{1-3} = \sum_{k=1}^{n} 3^k = \sum_{k=1}^{n} 3\cdot 3^{k-1}$. לפיכך

$$\|b\| = \sqrt{\frac{3(3^n-1)}{2}}\ .$$

לפיכך לפי אי-השוויון קושי שוורץ:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\cdot 3^{k/2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k\cdot 3^k} \leq \sqrt{\frac{1}{2}n\cdot(n+1)}\cdot\sqrt{\frac{3(3^n-1)}{2}} = \sqrt{(n^2+n)\cdot\frac{3}{4}\cdot(3^n-1)} = \frac{1}{2}\sqrt{(n^2+n)\cdot 3\,(3^n-1)}\ .$$

שאלה 59

הפולינום האופייני הוא $p_A(x) = (x-5)(x+3) = x^2-2x-15$. לפי משפט קיילי המילטון, $p_A(A)=0$, לפיכך

$$A^2-2A-15I=0 \qquad\Rightarrow\qquad A^2 = 2A+15I\ .$$

לכן $b_2=2$, $c_2=15$.

נרשום

$$A^n = b_nA + c_nI\ .$$

נכפיל ב- A:

$$A^{n+1} = A^n\cdot A = (b_nA+c_nI)\,A = b_nA^2 + c_nA = b_n\,(2A+15I) + c_nA = (2b_n+c_n)\,A + 15b_nI\ .$$

מכאן

$$b_{n+1} = 2b_n + c_n\ , \qquad c_{n+1} = 15b_n\ .$$

שאלה 60

נגדיר וקטורים $a,b\in\mathbb{R}^6$:

$$a = \begin{pmatrix}\sqrt{x}\\ \sqrt{y}\\ \sqrt{z}\\ \sqrt{w}\\ \sqrt{s}\\ \sqrt{t}\end{pmatrix}\ ,\qquad b = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{x}}\\ \frac{1}{\sqrt{y}}\\ \frac{1}{\sqrt{z}}\\ \frac{1}{\sqrt{w}}\\ \frac{1}{\sqrt{s}}\\ \frac{1}{\sqrt{t}}\end{pmatrix}\ .$$

תהי $\langle , \rangle$ המכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^6$. לפי אי-השוויון קושי-שוורץ:

$$|\langle a,b\rangle| \leq \|a\|\cdot\|b\| \ .$$

$$\langle a,b\rangle = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{z}\cdot\frac{1}{\sqrt{z}} + \sqrt{w}\cdot\frac{1}{\sqrt{w}} + \sqrt{s}\cdot\frac{1}{\sqrt{s}} + \sqrt{t}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}} = 6 \ .$$

$$\|a\| = \sqrt{x+y+z+w+s+t} \ , \qquad \|b\| = \sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}} \ .$$

נציב את הביטוים האלה באי-שוויון קושי-שוורץ ונקבל

$$6 \leq \sqrt{x+y+z+w+s+t}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}} \leq \sqrt{6}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}}$$

לכן

$$\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}} \geq \sqrt{6} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t} \geq 6 \ .$$