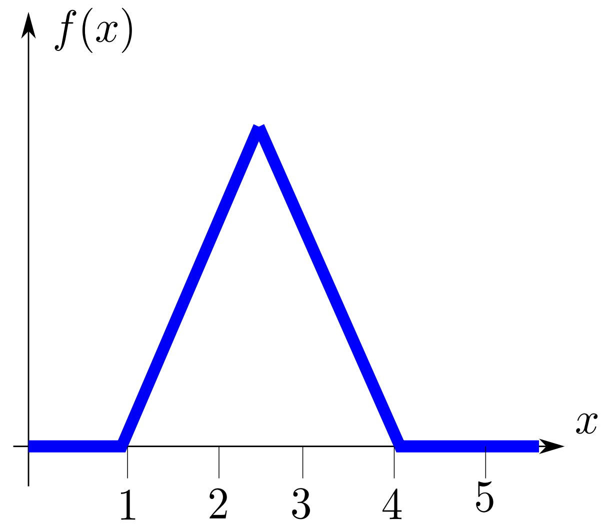
1 שאלה.

מכונה במפעל ברגים אמורה לייצר ברגים בקוטר 3 מ"מ. בפועל, קוטר הברגים אינו מדויק והצפיפות שלו נתונה על ידי איור להלן אשר מראה את צפיפות קוטר הברגים.



רשמו במדויק את פונקצית הצפיפות. מה ההסתברות שקוטר בורג יעלה על 3 מ"מ? על 4 מ"מ?

פיתרון.

יש צורך למצוא את פונקציית הצפיפות בצורה מדוייקת. נשתמש תחילה בתנאי הנרמול. אנחנו יודעים כי השטח שבין הגרף לציר x שווה ל-1 כי כלל השטח מייצג את כל ההסתברות,

$$\int_1^5 f_X(x)\,dx = P(1 \le X \le 5) = 1.$$

נשתמש בנוסחה לשטח משולש (שטח משולש שווה למכפלת הבסיס בחצי הגובה) ונקבל שגובה המשולש h מקיים

$$\frac{4h}{2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad h = 0.5\ .$$

עם כן, יש לנו את הנקודות

$$(1,0), \quad (5,0), \quad (3,0.5)\ .$$

ונוכל למצוא את משוואות הקווים בהתאם. לכן הצפיפות נתונה על ידי

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 \le x \le 3, \\ -\frac{1}{4}(x-5), & 3 \le x \le 5, \\ 0, & x > 5. \end{cases},$$

בעזרת הצפיפות נוכל לחשב ישירות את ההסתברויות המבוקשות.

$$P(X > 3) = \int_3^5 \left(-\frac{1}{4}(x-5)\right)dx \quad = -\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_3^5 = \frac{1}{2},$$

$$P(X > 4) = \int_4^5 \left(-\frac{1}{4}(x-5)\right)dx \quad = -\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_4^5 = \frac{1}{8}.$$

■

2 שאלה.
בקזינו מוצע המשחק הבא: מהמר מטיל קובייה עד שלראשונה מתקבל 6 או עד שהטיל 3 הטלות (הראשונה מבין השניים). על כן הטלה הוא משלם 1 ₪ , ואם התקבל התוצאה 6 בהטלה מסוימת הוא זוכה ב-3 ₪ .

(א) בנה את פונקציית ההסתברות של רווח הקזינו ממהר אחד.

(ב) בערב מסוים שיחקו במשחק זה 64 מהמרים. מה הסיכוי שהקזינו הרוויח יותר מ- 100 ₪ ?

(ג) כמה שחקנים צריכים לשחק בקזינו בערב מסוים כדי להבטיח שבסיכוי של 95% הקזינו ירוויח יותר מ- 100 ₪ ?

פיתרון.

(א)

X	-2	-1	0	3
$f(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3$

(ב)

$$\begin{aligned} E[X] =&(-2)\frac{1}{6} + (-1)\frac{5}{6^2} + 3\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{72} \\ =&1.26\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V[X] =&E[X^2] - (E[X])^2 \\ =&(-2)^2\frac{1}{6} + (-1)^2\frac{5}{6^2} + 3^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 - \left(\frac{91}{72}\right)^2 \\ =&4.42\ . \end{aligned}$$

$$\Sigma_{i=1}^{64}X_i \sim N(64\times 1.26, 64\times 4.42) = N(80.654, 282.88)\ .$$

$$P(\Sigma_{i=1}^{64} > 100) = P\left(Z > \frac{100-80.64}{\sqrt{282.88}}\right) = P(Z > 1.15) = 1-\Phi(1.15) = 1-0.8749 = 0.1251\ .$$

(ג) $n = ?$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\times 1.26, n\times 4.42)$$

$$P(\Sigma_{i=1}^{n}X_i > 100) = 0.95 \quad \Rightarrow \quad P\left(Z > \frac{100-1.26n}{\sqrt{4.42n}}\right) = 0.95$$

■

3 שאלה.

(א) המשקל של ספר אנציקלופדיה מתפלג נורמלית עם ממוצע של 1500 גרם וסטיית התקן של 27 גרם. איזה גודל מדגם מקרי יש לקחת אם רוצים שבביטחון של 95% לא יעלה המשקל הממוצע של הספרים במדגם על 1520 גרם?

(ב) נלקח מדגם אקראי של 50 ספרים. מה ההסתברות שהמשקל הכולל שלהם לא יעלה על 75.5 ק"ג?

פיתרון.

(א) משקל $X \sim N(1500, 27^2)$ ו- $\bar{X} \sim (1500, \frac{27^2}{n})$.
$n = ?$

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \le 1520) =& 0.95 \\ \Rightarrow \quad P\left(Z \le \frac{1520-1500}{27/\sqrt{n}}\right) =& \Phi\left(\frac{20\sqrt{n}}{27}\right) = 0.95\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \frac{20\sqrt{n}}{27} =& 1.645 \\ \Rightarrow \quad \sqrt{n} =& 2.22075 \\ \Rightarrow \quad n \ge& 5\ . \end{aligned}$$

(ב) $n = 50$ אזי $\sum_{i=1}^{50} X_i \sim N(50 \times 1500, 50 \times 27^2)$. לכן

$$P(\Sigma_{i=1}^{50} X_i \le 75500) = P\left(Z \le \frac{75500-75000}{27\sqrt{50}}\right) = \Phi(2.62) = 0.9956\ .$$

■