

## שיעור 7

### אי-כריעות

#### 7.1 השפות $L_d, L_{halt}, L_{acc}$ לא כריעות

##### הגדרה 7.1 $L_{acc}$

$$L_{acc} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} \in RE \setminus R$$

##### הגדרה 7.2 $L_{halt}$

$$L_{halt} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ עוצרת על } w \} \in RE \setminus R$$

##### הגדרה 7.3 $L_d$

$$L_d = \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \} \notin RE$$

##### משפט 7.1 $L_{acc} \in RE$

$$L_{acc} \in RE.$$

**הוכחה:** מכיוון ש- $L(U) = L_{acc}$ , כאשר  $U$  המכונת טיורינג האוניברסלית אשר מקבלת את  $L_{acc}$ , לכן  $L_{acc} \in RE$ .

##### משפט 7.2 $L_{halt} \in RE$

$$L_{halt} \in RE.$$

**הוכחה:** נבנה מ"ט  $U'$  שהיא למעשה  $U$  פרט למקום שבו  $U$  עצרה ודחתה,  $U'$  תעצור ותקבל.

נוכיח כי  $U'$  מקבלת את  $L_{halt}$ :

אם  $x \in L_{halt}$

$\Leftarrow x = \langle M, w \rangle$  ו- $M$  עוצרת על  $w$

$\Leftarrow U'$  עוצרת ומקבלת את  $x$ .

אם  $x \notin L_{\text{halt}} \Leftarrow$  שני מקרים:

•  $U' \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$  דוחה את  $x$ .

•  $x = \langle M, w \rangle$  ו- $M$  לא עוצרת על  $w \Leftarrow U'$  לא עוצרת על  $x$ .

### משפט 7.3 $L_d \notin RE$

$$L_d \notin RE.$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי  $L_d \in RE$ .

$\Leftarrow \exists$  מ"ט  $M_d$  המקבלת את  $L_d$ .

$\Leftarrow L(M_d) = L_d$ .

נבדוק ריצה של  $M_d$  על  $\langle M_d \rangle$ :

• אם  $\langle M_d \rangle \in L(M_d) \Leftarrow \langle M_d \rangle \notin L_d \Leftarrow L(M_d) \neq L_d$ .

• אם  $\langle M_d \rangle \notin L(M_d) \Leftarrow \langle M_d \rangle \in L_d \Leftarrow L(M_d) \neq L_d$ .

בשני המקרים קיבלנו סתירה לכך ש- $L(M_d) = L_d$  ולכן  $L_d \notin RE$ .

### משפט 7.4 $L_{\text{acc}}$ לא כריעה

$$L_{\text{acc}} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} \notin R.$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי  $L_{\text{acc}} \in R$  ותהי  $M_{\text{acc}}$  המ"ט המכריעה את  $L_{\text{acc}}$ .

נשתמש ב- $M_{\text{acc}}$  כדי לבנות מ"ט  $M_d$  המכריעה את  $L_d$  (בסתירה לכך ש- $L_d \notin RE$  כפי שהוכחנו במשפט 7.3).

$$L_d = \{ \langle M, w \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \}.$$



התאור של  $M_d$

$M_d = \text{על קלט } x$

(1) בודקת האם  $x = \langle M \rangle$ . אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

(2) מחשבת את  $\langle \langle x \rangle \rangle = \langle \langle M \rangle \rangle$ .

(3) מריצה את  $M_{acc}$  על הזוג  $\langle M, \langle M \rangle \rangle$ :

• אם  $M_{acc}$  מקבלת  $\Leftarrow M_d$  דוחה.

• אם  $M_{acc}$  דוחה  $\Leftarrow M_d$  מקבלת.

כעת נוכיח כי  $M_d$  מכריעה את  $L_d$ :

אם  $x \in L_d$

$\Leftarrow x = \langle M \rangle$  ו-  $\langle M \rangle \notin L(M)$

$\Leftarrow M_{acc}$  דוחה את הזוג  $\langle M, \langle M \rangle \rangle$

$\Leftarrow M_d$  מקבלת את  $x$ .

אם  $x \notin L_d$  שני מקרים:

מקרה (1):  $x \neq \langle M \rangle \Leftarrow M_d$  דוחה את  $x$ .

מקרה (2):  $x = \langle M \rangle$  ו-  $\langle M \rangle \in L(M)$

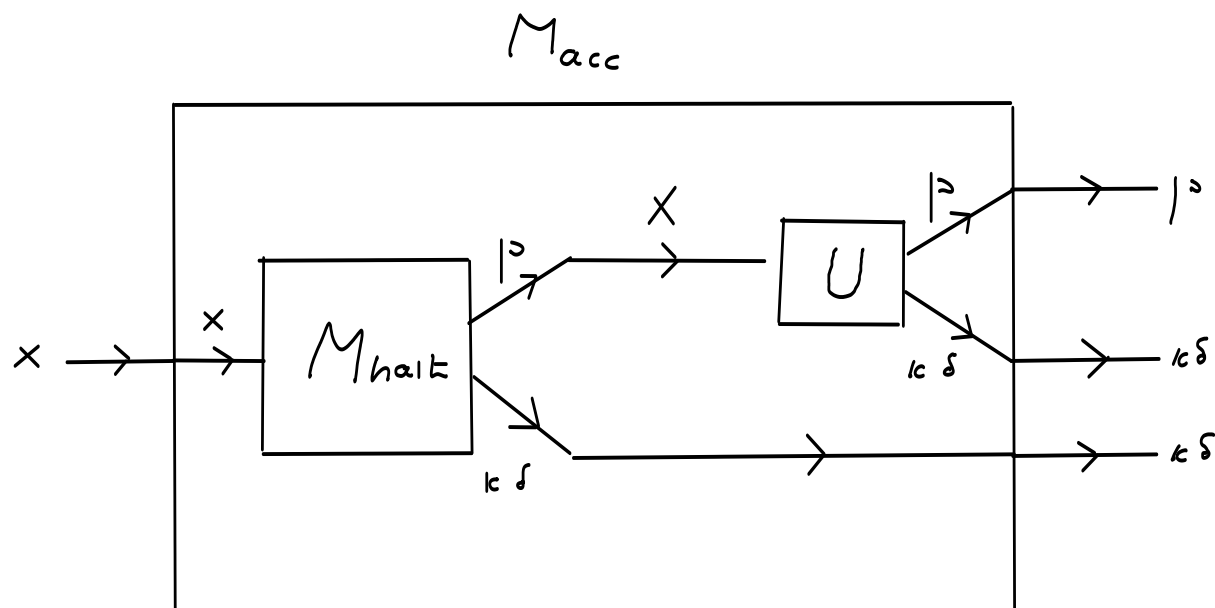
$\Leftarrow M_{acc}$  מקבלת את זוג  $\langle M, \langle M \rangle \rangle$

$\Leftarrow M_d$  דוחה את  $x$ .

משפט 7.5  $L_{\text{halt}}$  לא כריעה

$$L_{\text{halt}} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ עוצרת על } w \} \notin R.$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי  $L_{\text{halt}} \in R$  ותהי  $M_{\text{halt}}$  מ"ט המכריעה את  $L_{\text{halt}}$ .נשתמש ב-  $M_{\text{halt}}$  כדי לבנות מ"ט  $M_{\text{acc}}$  המכריעה את  $L_{\text{acc}}$  (בסתירה לכך ש-  $L_{\text{acc}} \notin R$  כפי שהוכחנו במשפט 7.4).התאור של  $M_{\text{acc}}$  $M_{\text{acc}}$  על קלט  $x$ :(1) מריצה את  $M_{\text{halt}}$  על  $x$ .

- אם  $M_{\text{halt}}$  דוחה  $\Leftarrow M_{\text{acc}}$  דוחה.
- אם  $M_{\text{halt}}$  מקבלת  $\Leftarrow M_{\text{acc}}$  מריצה את  $U$  על  $x$  ועונה כמוה.

אבחנהנוכיח כי  $M_{\text{acc}}$  מכריעה את  $L_{\text{acc}}$ :אם  $x \in L_{\text{acc}}$ 

$$\Leftarrow x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } \langle w \rangle \in L(M)$$

$$\Leftarrow M_{\text{halt}} \text{ מקבלת את } x \text{ וגם } U \text{ מקבלת את } x$$

$$\Leftarrow M_{\text{acc}} \text{ מקבלת את } x.$$

אם  $x \notin L_{acc} \Leftarrow$  שני מקרים:

מקרה (1):  $x \neq \langle M, w \rangle$

$M_{halt}$  דוחה את  $x \Leftarrow$

$M_{acc}$  דוחה את  $x \Leftarrow$

מקרה (2):  $x = \langle M, w \rangle$  ו-  $\langle w \rangle \notin L(M) \Leftarrow$  שני מקרים:

מקרה (א):  $M$  לא עוצרת על  $w \Leftarrow M_{halt}$  דוחה את  $x \Leftarrow M_{acc}$  דוחה את  $x$ .

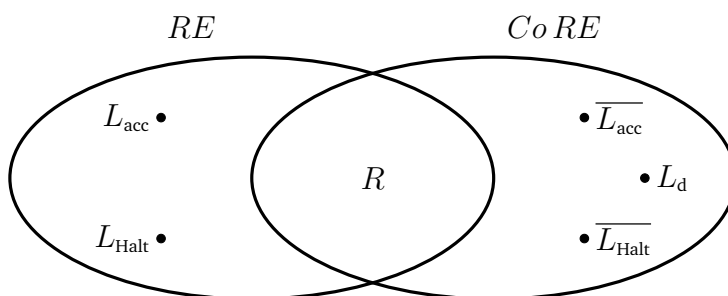
מקרה (ב):  $M$  דוחה את  $w \Leftarrow M_{halt}$  מקבלת את  $x$  אבל  $U$  דוחה את  $x \Leftarrow M_{acc}$  דוחה את  $x$ .

הראנו כי  $M_{acc}$  מכריעה את  $L_{acc}$  בסתירה לכך ש-  $L_{acc} \notin R$ .

לכן  $L_{halt} \notin R$ .

## משפט 7.6

$$\begin{aligned} L_{acc} \in RE \setminus R &\Rightarrow \bar{L}_{acc} \notin RE, \\ L_{halt} \in RE \setminus R &\Rightarrow \bar{L}_{halt} \notin RE, \\ L_d &\notin RE \setminus R. \end{aligned}$$



## 7.2 השפה $L_E$ לא כריעה

### הגדרה 7.4 השפה $L_E$

$$L_E = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset \}.$$

### משפט 7.7 $L_E \notin R$

$$L_E \notin R.$$

כלומר  $L_E$  לא כריעה.

**הוכחה:**

נניח בשלילה כי  $L_E$  כריעה. אז נבנה מ"ט  $M_{acc}$  המכריעה את  $L_{acc}$  באופן הבא.

בנייה של  $M_w$

ראשית נגדיר את המ"ט  $M_w$ :

$$M_w = \text{על כל קלט } x:$$

(1) אם  $x \neq w \Leftarrow$  דוחה.

(2) אם  $x = w$  אז מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוה.

אבחנה

אם  $x = w$  ו-  $M$  מקבלת את  $w$  אז  $L(M_w) = \Sigma^*$ .

אם  $x \neq w$  או אם  $x = w$  ו-  $M$  דוחה את  $w$  אז  $L(M_w) = \emptyset$ .

בנייה של  $M_{\text{acc}}$

נניח כי קיימת מ"ט  $M_E$  המכריעה את  $L_E$ . אז נבנה מ"ט  $M_{\text{acc}}$  המכריעה את  $L_{\text{acc}}$ :

$$M_{\text{acc}} = \text{על כל קלט } x:$$

(1) אם  $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow$  דוחה.

(2) אם  $x = \langle M, w \rangle$ , בעזרת התאור  $\langle M, w \rangle$ , בונה מ"ט  $M_w$ .

(3) מריצה  $M_E$  על  $\langle M_w \rangle$ :

(4) • אם  $M_E$  מקבלת  $\Leftarrow$  דוחה.

• אם  $M_E$  דוחה  $\Leftarrow$  מקבלת.

נכונות

אם  $x \in L_{\text{acc}} \Leftarrow x = \langle M, w \rangle \Leftarrow x = \langle M, w \rangle$  ו-  $w \in L(M) \Leftarrow L(M_w) = \Sigma^* \neq \emptyset \Leftarrow M_E$  דוחה  $\langle M_w \rangle$   $M_{\text{acc}}$  מקבלת.  $\Leftarrow$

אם  $x \notin L_{\text{acc}} \Leftarrow$  שני מקרים:

מקרה 1:  $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow L(M_w) = \emptyset \Leftarrow M_E$  מקבלת  $\langle M_w \rangle$   $M_{\text{acc}}$  דוחה.

מקרה 2:  $x = \langle M, w \rangle$  ו-  $w \notin L(M) \Leftarrow L(M_w) = \emptyset \Leftarrow M_E$  מקבלת  $\langle M_w \rangle$   $M_{\text{acc}}$  דוחה.

לסיכום:

אם  $L_E$  כריעה אז אפשר לבנות מ"ט  $M_{\text{acc}}$  המכריעה את  $L_{\text{acc}}$  בסתירה לכך ש-  $L_{\text{acc}} \notin R$ .  
לכן  $L_E \notin R$ .

**משפט 7.8  $L_E \notin RE$**

$$L_E \notin RE$$

הוכחה:  
הרעיון

נבנה מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית  $N$  המקבלת את

$$\bar{L}_E = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \neq \emptyset \}.$$

$N$  = על קלט  $x$ :

(1) אם  $\langle M \rangle \neq x$  דוחה.

(2) אם  $x = \langle M \rangle$  אז  $N$  בוחרת מילה  $w \in \Sigma^*$  באופן אי-דטרמיניסטית.

(3) מריצה  $M$  על  $w$ .

• אם  $M$  מקבלת  $N$  מקבלת.

• אם  $M$  דוחה  $N$  דוחה.

הוכחת הנכונות

אם  $x \in \bar{L}_E$

$$\Leftrightarrow x = \langle M \rangle \text{ ו- } L(M) \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \text{קיימת מילה } w \in \Sigma^* \text{ כך ש- } w \in L(M)$$

$$\Leftrightarrow \exists \text{ ניחוש } w \in \Sigma^* \text{ כך ש- } M \text{ מקבלת את } w$$

$$\Leftrightarrow \text{קיים חישוב של } N \text{ המקבל את } \langle M \rangle = x$$

$$\Leftrightarrow x \in L(N)$$

לכן קיימת מ"ט א"ד  $N$  המקבלת את השפה  $\bar{L}_E$  לכן  $\bar{L}_E \in RE$ .

כעת נוכיח כי  $L_E \notin RE$ .

נניח בשלילה כי  $L_E \in RE$ . הוכחנו למעלה ש-  $\bar{L}_E \in RE$ . לכן לפי משפט 6.1,  $L_E \in R$ .

זו בסתירה לכך ש-  $L_E \notin R$ .

לכן  $L_E \notin RE$ .

■

## 7.3 השפה $L_{EQ}$ לא כריעה

**הגדרה 7.5**  $L_{EQ}$

$$L_{EQ} = \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2) \}$$

**משפט 7.9**  $L_{EQ} \notin R$

$$L_{EQ} \notin R$$

השפה  $L_{EQ}$  לא כריעה.

הוכחה:

נניח בשלילה כי  $L_{EQ}$  כריעה. תהי  $M_{EQ}$  מ"ט המכריעה את  $L_{EQ}$ . אז נבנה מ"ט  $M_E$  המכריעה את  $L_E$  באופן הבא.

### בנייה של $M_E$

$M_E =$  על כל קלט  $x$ :

(1) אם  $x \neq \langle M \rangle \Leftarrow$  דוחה.

(2) אם  $x = \langle M \rangle$ , מריצה  $M_{EQ}$  על  $\langle M, M_\emptyset \rangle$  כאשר  $M_\emptyset$  המ"ט שדוחה כל קלט.

(3) • אם  $M_{EQ}$  מקבלת  $\Leftarrow$  מקבלת.

• אם  $M_{EQ}$  דוחה  $\Leftarrow$  דוחה.

### נכונות

אם  $x \in L_E$

$\Leftarrow x = \langle M \rangle$  ו-  $L(M) = \emptyset$

$\Leftarrow L(M) = L(M_\emptyset)$

$\Leftarrow \langle M, M_\emptyset \rangle \in L_{EQ}$

$\Leftarrow M_{EQ}$  מקבלת  $\langle M, M_\emptyset \rangle$

$\Leftarrow M_E$  מקבל.

אם  $x \notin L_E$  שני מקרים:

מקרה 1:  $x \neq \langle M \rangle \Leftarrow M_E$  דוחה.

מקרה 2:  $x = \langle M \rangle$  ו-  $L(M) \neq \emptyset$

$\Leftarrow L(M) \neq L(M_\emptyset)$

$\Leftarrow \langle M, M_\emptyset \rangle \notin L_{EQ}$

$\Leftarrow M_{EQ}$  דוחה  $\langle M, M_\emptyset \rangle$

$\Leftarrow M_E$  דוחה.

### לסיכום:

אם  $L_{EQ}$  כריעה אז אפשר לבנות מ"ט  $M_E$  המכריעה את  $L_E$  בסתירה למשפט 7.7 האומר ש-  $L_E \notin R$ .  
לכן  $L_{EQ} \notin R$ .

### **משפט 7.10 $L_{EQ} \notin RE$**

$$L_{EQ} \notin RE$$

$L_{EQ}$  לא קבילה.

### הוכחה:

נניח בשלילה כי  $L_{EQ}$  קבילה. תהי  $M_{EQ}$  מ"ט המקבלת את  $L_{EQ}$ . אז נבנה מ"ט  $M_E$  המקבלת את  $L_E$  באופן הבא.



בנייה של  $M_E$ 

$$M_E = \text{על כל קלט } x:$$

(1) אם  $\langle M \rangle \neq x \Leftarrow$  דוחה.

(2) אם  $x = \langle M \rangle$ , מריצה  $M_{EQ}$  על  $\langle M, M_\emptyset \rangle$  כאשר  $M_\emptyset$  המ"ט שדוחה כל קלט.

(3) • אם  $M_{EQ}$  מקבלת  $\Leftarrow$  מקבלת.

נכונות

אם  $x \in L_E$

$$\Leftarrow \langle M \rangle = x \text{ ו- } L(M) = \emptyset$$

$$\Leftarrow L(M) = L(M_\emptyset)$$

$$\Leftarrow \langle M, M_\emptyset \rangle \in L_{EQ}$$

$$\Leftarrow M_{EQ} \text{ מקבלת } \langle M, M_\emptyset \rangle$$

$$\Leftarrow M_E \text{ מקבל.}$$

לסיכום:

אם  $L_{EQ}$  קבילה אז אפשר לבנות מ"ט  $M_E$  המקבלת את  $L_E$  בסתירה למשפט 7.8 האומר ש-  $L_E \notin RE$ .  
לכן  $L_{EQ} \notin RE$ .

**משפט 7.11  $\bar{L}_{EQ} \notin RE$** 

$$\bar{L}_{EQ} \notin RE.$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי  $\bar{L}_{EQ}$  קבילה. תהי  $M_{EQ}$  מ"ט המקבלת את  $\bar{L}_{EQ}$ . אז נבנה מ"ט  $M_{acc}$  המקבלת את  $\bar{L}_{acc}$  באופן הבא.

בנייה של  $M_1$ 

ראשית נגדיר מ"ט  $M_1$  באופן הבא:

$$M_1 = \text{על קלט } x:$$

(1) מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוה.

בנייה של  $M_{acc}$ 

$$M_{acc} = \text{על כל קלט } x:$$

(1) אם  $\langle M, w \rangle \neq x \Leftarrow$  מקבלת.

(2) אם  $x = \langle M, w \rangle$  אז בונה  $M_1$ .

(3) מריצה  $M_{\overline{EQ}}$  על  $\langle M_1, M^* \rangle$  כאשר  $M^*$  המ"ט שמקבלת כל קלט.

(4) • אם  $M_{\overline{EQ}}$  מקבלת  $\Leftarrow$  מקבלת.

#### נכונות

אם  $x \in L_{\overline{acc}}$

$\Leftarrow M$  לא מקבלת  $w$

$\Leftarrow L(M_1) = \emptyset$

$\Leftarrow \langle M_1, M^* \rangle \in L_{\overline{EQ}}$

$\Leftarrow M_{\overline{EQ}}$  מקבלת  $\langle M_1, M^* \rangle$

$\Leftarrow M_{\overline{acc}}$  מקבל.

#### לסיכום:

אם  $L_{\overline{EQ}}$  קבילה אז אפשר לבנות מ"ט  $M_{\overline{acc}}$  המקבלת את  $L_{\overline{acc}}$  בסתירה למשפט 7.6 האומר ש-  $L_{\overline{acc}} \notin RE$ .  
לכן  $L_{\overline{EQ}} \notin RE$ .

## 7.4 סיכום: כריעות וקבילות של שפות

קבילה	כריעה	
✓	×	$L_{\overline{acc}}$
×	×	$\overline{L_{\overline{acc}}}$
×	×	$L_d$
✓	×	$L_{\text{Halt}}$
×	×	$\overline{L_{\text{Halt}}}$
×	×	$L_E$
✓	×	$\overline{L_E}$
×	×	$L_{\text{EQ}}$
×	×	$\overline{L_{\text{EQ}}}$
×	×	$L_{\text{REG}}$
×	×	$L_{\text{NOTREG}}$