המחלקה למדעי המחשב

תשפ"ג $29/11/2312:00 - 26/11/2312:00$

אלגברה 2

מועד ב'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר, ד'ר שי סרוסי.

תשפ"ג סמסטר ק'

השאלון מכיל 12 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

אחר / הערות

- יש לפתור את כל השאלות.
- המשקל של כל שאלה מפורט להלן:
  - שאלה 1: 30 נקודות.
  - שאלה 2: 20 נקודות.
  - שאלה 3: 20 נקודות.
  - שאלה 4: 30 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבירו היטב את מהלך הפתרון. תשובה ללא הסבר (גם נכונה) לא תתקבל.
- אסור לחלוטין לקבל עזרה מסטודנט אחר או מאף אחד.
- עליכם להעלות את הפתרונות שלכם דרך אתר המודל של הקורס אלגברה 2 למדמ"ח לא יאוחר משעה $12:00$ ביום ד' $23-11-29$. פתרונות שהוגשו אחרי המועד הזה לא יתקבלו.
- מותר להשתמש בחומר של הקורס, התרגילים של הקורס והספרים של הקורס בלבד, אבל אסור להשתמש בשום מקורות אחרים.
- אחרי הגשת פתרונות אתם תקבלו הזמנה למבחן קצר בעל פה על הפתרונות שלכם. ייתכן שלא תעבור את המבחן או יורידו נקודות במקרה שאתם לא יכולים להסביר הפתרונות שלכם היטב.
- **סטודנט יהיה זכאי להגיש ערעור / בקשות שונות לגבי הבוחן במשך 5 ימים בלבד מיום קבלת הציון.**

==

<u>שאלה 1</u> תהי $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. האם A לכסינה? אם כן מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

א) הוכיחו כי $\frac{1}{4}A^3 + \frac{3+3i}{4}A^2 - \frac{9i}{4}A + \frac{3-3i}{2}I = A^{-1}$.

ב) הוכיחו כי $\frac{3-3i}{8}A^3 + 2A^2 - \frac{21i+21}{8}A + \frac{-9i}{4}I = A^{-2}$.

<u>שאלה 2</u> תהי $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 2i & 0 & 1 \\ -2i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2i \\ 1 & 0 & 2i & 0 \end{pmatrix}$.

א) ללא חישוב ישר, הוכיחו כי A לכסינה אוניטרית.

ב) ללא חישוב ישר, הוכיחו כי הערכים העצמיים של A ממשיים.

ג) מצאו Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש-

$A = QD\bar{Q}$.

<u>שאלה 3</u>

תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. מצאו צורת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $A = PJP^{-1}$.

<u>שאלה 4</u> תהי $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ האופרטור $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a-3ib \\ 3ia+5b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

א) מצאו בסיס של וקטורים של $\mathbb{C}^{4\times 4}$ המורכב מווקטורים עצמיים של T.

ב) חשבו את $T\begin{pmatrix} 2i \\ -i \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

ג) הוכיחו כי $T^5 \begin{pmatrix} 2i \\ -i \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16368 + 32800i \\ -32736 - 16400i \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

פתרונות

שאלה 1

א) נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned}
p_A(x) =&|xI-A| = \begin{vmatrix} x-2i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x-i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \\
=&(x-1)\begin{vmatrix} x-2i & -1 & 0 \\ 0 & x-i & 0 \\ 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix} \\
=&(x-2)(x-1)\begin{vmatrix} x-2i & -1 \\ 0 & x-i \end{vmatrix} \\
=&(x-2)(x-1)(x-2i)(x-i)
\end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=2i$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=i$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=1$ מריבוי אלגברי 1.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=2i$</u>

$$(A-2iI) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & -1-2i & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1-2i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1-2i \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & -1-2i & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1-2i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-2i & 2 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4+iR_2]{R_3\to R_3+(1+2i)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1-2i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $w\in\mathbb{C}$ $(x,y,z,w)=((2i-1)w,0,0,w)=(2i-1,0,0,1)w,$,

$$V_{2i}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1+2i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 2$</u>

$$(A-2I) = \begin{pmatrix} 2i-2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i-2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to (2i+2)R_1} \begin{pmatrix} -8 & 2i+2 & 0 & 0 \\ 0 & i-2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to 8R_4 + R_1} \begin{pmatrix} -8 & 2i+2 & 0 & 0 \\ 0 & i-2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2i+2 & 8 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to (i+2)R_2} \begin{pmatrix} -8 & 2i+2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2i+2 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to (-2i+2)R_4} \begin{pmatrix} -8 & 2i+2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to \frac{1}{8}R_4]{R_2 \to -\frac{1}{5}R_2} \begin{pmatrix} -8 & 2i+2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_2]{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} -8 & 2i+2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} -8 & 2i+2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = i$</u>

$$(A-iI) = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-i & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1-i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1-i \\ 0 & -1 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to -iR_1} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1-i \\ 0 & -1 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 1-i \\ 0 & -1 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -iR_2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & -i-1 \\ 0 & -1 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & -i-1 \\ 0 & 0 & 2-2i & -i-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to (2+2i)R_3} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & -i-1 \\ 0 & 0 & 8 & -4i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -4iR_2 + (1+i)R_3} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & -4i & 4+8i & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to \frac{1}{4}R_3]{R_2 \to \frac{i}{4}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$(x,y,z,w) = (iy, (2-i)z, \tfrac{i}{2}w, w) = (\tfrac{i}{2}-1, i+\tfrac{1}{2}, \tfrac{i}{2}, 1)w, \ \ w \in \mathbb{C}$$

$$V_i = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2+i \\ 1+2i \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \right\} .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1$</u>

$$(A-I) = \begin{pmatrix} 2i-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to(-2i-1)R_1} \begin{pmatrix} 5 & -2i-1 & 0 & 0 \\ 0 & i-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{5R_4-R_1} \begin{pmatrix} 5 & -2i-1 & 0 & 0 \\ 0 & i-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2i+1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to\frac{-i-1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 5 & -2i-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2i+1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4\to(-2i-1)R_2]{R_3\to R_3+R_2} \begin{pmatrix} 5 & -2i-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & -2i-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} .$$

$$D = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_{2i} & u_2 & u_i & u_1 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2i & 0 & -2+i & 0 \\ 0 & 0 & 1+2i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

ב) הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = (x-2)(x-1)(x-i)(x-2i) = x^4-(3+3i)x^3+9ix^2+(6-6i)x-4 .$$

לפי משפט קיילי המילטון, $p_A(A)=0$. לפיכך:

$$A^4-(3+3i)A^3+9iA^2+(6-6i)A-4I=0$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$\begin{aligned} I =& \frac{1}{4}\left(A^4-(3+3i)A^3+9iA^2+(6-6i)A\right) \\ =& \frac{1}{4}A\left(A^3-(3+3i)A^2+9iA+(6-6i)I\right) \\ =& A\left(\frac{1}{4}A^3-\frac{(3+3i)}{4}A^2+\frac{9i}{4}A+\frac{(3-3i)}{2}I\right) . \end{aligned}$$

מכאן

$$A^{-1}=\frac{1}{4}A^3-\frac{(3+3i)}{4}A^2+\frac{9i}{4}A+\frac{(3-3i)}{2}I\ .$$

ג) נכפיל ב- A^{-1}:

$$\begin{aligned}A^{-2}=&\frac{1}{4}A-\frac{(3+3i)}{4}A+\frac{9i}{4}I+\frac{(3-3i)}{2}A^{-1}\\=&\frac{1}{4}A-\frac{(3+3i)}{4}A+\frac{9i}{4}I+\frac{(3-3i)}{2}\left(\frac{1}{4}A^3-\frac{(3+3i)}{4}A^2+\frac{9i}{4}A+\frac{(3-3i)}{2}I\right)\\=&\frac{1}{4}A-\frac{(3+3i)}{4}A+\frac{9i}{4}I+\frac{(3-3i)}{8}A^3-\frac{(3+3i)(3-3i)}{8}A^2+\frac{(3-3i)\cdot 9i}{4}A+\left(\frac{3-3i}{2}\right)^2I\\=&\frac{-9i}{4}I+\frac{21i+21}{8}A-2A^2+\frac{3-3i}{8}A^3\ .\end{aligned}$$

שאלה 2

א)

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}0&2i&0&1\\-2i&0&1&0\\0&1&0&-2i\\1&0&2i&0\end{pmatrix}=A\ ,$$

ז"א A צמודה לעצמה, $\Leftarrow$ A נורמלית, $\Leftarrow$ A לכסינה אוניטרית.

ב) A צמודה לעצמה $\Leftarrow$ כל הערכים עצמיים ממשיים.

ג) הערכים עצמיים של A הם:
$\lambda_1=1$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda_2=-1$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda_3=3$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda_4=-3$ מריבוי אלגברי 1.
המחרב עצמי ששייך לערך עצמי 1:

$$V_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\i\\-i\\1\end{pmatrix}\right\}$$

המחרב עצמי ששייך לערך עצמי -1:

$$V_{-1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\ i\\ i\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

המחרב עצמי ששייך לערך עצמי 3:

$$V_{3} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\ -i\\ -i\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

המחרב עצמי ששייך לערך עצמי -3:

$$V_{-3} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\ -i\\ i\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

נסמן את הווקטורים עצמיים ב-

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}-1\\ i\\ -i\\ 1\end{pmatrix} , \quad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\ i\\ i\\ 1\end{pmatrix} , \quad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\ -i\\ -i\\ 1\end{pmatrix} , \quad \mathrm{v}_4 = \begin{pmatrix}-1\\ -i\\ i\\ 1\end{pmatrix} .$$

ווקטורים עצמיים של מטריצה שצמודה לעצמה, ששייכים לערכים עצמיים שונים הם אורתוגונליים. נשאר רק להרכיב בסיס אורתונורמלי:

$$u_1 = \frac{\mathrm{v}_1}{\|\mathrm{v}_1\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ i\\ -i\\ 1\end{pmatrix} , \quad u_2 = \frac{\mathrm{v}_2}{\|\mathrm{v}_2\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ i\\ i\\ 1\end{pmatrix} , \quad u_3 = \frac{\mathrm{v}_3}{\|\mathrm{v}_3\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -i\\ -i\\ 1\end{pmatrix} , \quad u_4 = \frac{\mathrm{v}_4}{\|\mathrm{v}_4\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ -i\\ i\\ 1\end{pmatrix} .$$

$$Q = \begin{pmatrix}| & | & | & |\\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4\\ | & | & | & |\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & -1\\ -i & -i & i & i\\ i & -i & i & -i\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} , \qquad \bar{Q} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & i & -i & 1\\ 1 & i & i & 1\\ 1 & -i & -i & 1\\ -1 & -i & i & 1\end{pmatrix} .$$

קל ללבדוק כי

$$Q\bar{Q} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I_{4\times 4} .$$

לכן
$$A = QD\bar{Q}$$

כאשר $.D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

שאלה 3

שב את הפולינום האופייני:

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x & -4 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ -3 & -2 & x-2 & -5 \\ -3 & 0 & 0 & x-7 \end{vmatrix}$$
$$= (x-7)(x-2)^2(x+2)\ .$$

ערכים עצמיים:
$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 2.
$\lambda = -2$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda = 7$ מריבוי אלגברי 1.

המרחב עצמי ששייך לערך עצמי 2:

$$V_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\ .$$

המרחב עצמי ששייך לערך עצמי -2:

$$V_{-2} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}\ .$$

המרחב עצמי ששייך לערך עצמי 7:

$$V_7 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\ .$$

האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$(x+2)(x-2)(x-7)\ , \quad (x-2)^2(x+2)(x-7)\ .$$

נבדוק $(x+2)(x-2)(x-7)$

$$(A+2I)(A-2I)(A-7I)=\begin{pmatrix}2&4&0&0\\1&2&0&0\\3&2&4&5\\3&0&0&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&4&0&0\\1&-2&0&0\\3&2&0&5\\3&0&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7&4&0&0\\1&-7&0&0\\3&2&-5&5\\3&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-10&-20&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן

$$m_A(x)=(x-2)^2(x+2)(x-7)\ .$$

לכן הצורת ז'ורדן הינה:

$$J=\begin{pmatrix}J_2(2)&&\\&J_1(-2)&\\&&J_1(7)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&7\end{pmatrix}$$

נסמן את הווקטור עצמי ששייך לערך עצמי 0:

$$u_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ .$$

נחשב ווקטור עצמי מוכלל. נסמו $u_2=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\s\end{pmatrix}$

$$(A-2\cdot I)\,u_2=u_1$$

הפתרון הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ z \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{pmatrix}$. נבחור $z = 0$ ונקבל

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

נסמן הווקטור עצמי ששייך לערך עצמי -2:

$$u_3 = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad .$$

נסמן הווקטור עצמי ששייך לערך עצמי 7:

$$u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

נחשב ווקטור עצמי מוכלל.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -12 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(2) & & \\ & J_1(-2) & \\ & & J_1(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

שאלה 4

א) המטריצה המייצגת של האופרטור לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{C}^4$ $E = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$:

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 5 & -3i & 0 & 0 \\ 3i & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 8$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 2.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 8</u>

$$V_8 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

וקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי 8:

$$u_8 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 2</u>

$$V_2 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

וקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי 2:

$$u_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 1</u>

$$V_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\} .$$

וקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי $1-$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} , \qquad u_1' = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} . .$$

ב) נסמן הווקטור לפי הבסיס הסטנדרטי ב- $a = \begin{pmatrix} 2i\\-i\\5\\6 \end{pmatrix}$.

נשים לב כי המטריצה המייצגת $[T]_E$ נורמלית.
לפיכך לפי המשפט הפירוק הספקטרלי,

$$[T]a = 8P_{V_8}(a) + 2P_{V_2}(a) + P_{V_1}(a)$$

$$P_{V_8}(a) = \frac{1}{\|u_8\|^2} \langle a, u_8 \rangle u_8 = \frac{-2-i}{2} \begin{pmatrix} -i\\1\\0\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i - \frac{1}{2}\\ -1 - \frac{i}{2}\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$P_{V_2}(a) = \frac{1}{\|u_2\|^2} \langle a, u_2 \rangle u_2 = \frac{2-i}{2} \begin{pmatrix} i\\1\\0\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i + \frac{1}{2}\\ 1 - \frac{i}{2}\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$P_{V_1}(a) = \frac{1}{\|u_1\|^2} \langle a, u_1 \rangle u_1 + \frac{1}{\|u_1'\|^2} \langle a, u_1' \rangle u_1' = 5 \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\5\\6 \end{pmatrix} .$$

$$[T]a = 8\cdot\begin{pmatrix} i-\frac{1}{2}\\ -1-\frac{i}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} i+\frac{1}{2}\\ 1-\frac{i}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3+10i\\ -6-5i\\ 5\\ 6\end{pmatrix}$$

ג)

$$T^5a = 8^5\cdot\begin{pmatrix} i-\frac{1}{2}\\ -1-\frac{i}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + 2^5\begin{pmatrix} i+\frac{1}{2}\\ 1-\frac{i}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-16368+32800i\\ -32736-16400i\\ 5\\ 6\end{pmatrix}\ .$$