עבודה 0: חזרה של אלגברה 1 - העתקות לינאריות.

שאלה 1 נתונה העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י

$$T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix}2a+3b-c\\3a+5b+2c\\a-2b-3c\end{pmatrix}$$

א) רשמו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T

ב) רשמו את המטריצה המייצגת ביחס לבסיס $B=\{b_1=1,b_2=1+x,b_3=1+x+x^2\}$ של $\mathbb{R}_2[x]$ והבסיס $C=\left\{c_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},c_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},c_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ של $\mathbb{R}^3$.

ג) חשבו את $T(1-x+3x^2)$ ע"י המטירצה המייצגת הסטנדרטית.

ד) חשבו את $T(1-x+3x^2)$ ע"י המטירצה המייצגת $[T]_C^B$ ובדקו שהתשובה מסכימה עם התשובה של הסעיף הקודם.

שאלה 2 נתונה העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י

$$T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix}a+2b+5c\\2b+2c\\-a-3c\end{pmatrix}$$

לכל $a+bx+cx^2\in\mathbb{R}_2[x]$.

א) רשמו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

ב) מצאו את $T(11-x^2)$ דרך המטריצה המייצגת הסדנדרטית.

ג) יהיו $B=\{b_1=1+x+x^2\ ,b_2=-x\ ,b_3=5-x^2\}$ בסיס של מרחב $\mathbb{R}_2[x]$, ו-

$$C=\left\{c_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\ ,c_2=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}\ ,c_3=\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס של $\mathbb{R}^3$. מצאו את המטריצה המייצגת של טרנספורמציה T לפי הבסיסים B ו- C.

ד) בעזרת המטריצה המייצגת שמצאתם, מצאו את $[T(u)]_C$. בדקו שהתשובה מסכימה עם התשובה לסעיף ב'.

שאלה 3 תהי $T:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}_2[x]$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(2a+b+d)+(3a-b+c)x+(b+2c-d)x^2$$

א) מצאו את הממ"ס של T.

ב) מצאו את $[T]_C^B$ כאשר

$$B=\left\{b_1=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},b_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}.\right\}$$

בסיס של $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ו
$C=\{c_1=x,c_2=x^2,c_3=1\}$ בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$.

ג) חשבו את $[T(u)]_C$ כאשר $[u]_B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}_B$.

ד) רשמו אר הוקטור u ביחס לבסיס E של $\mathbb{R}^{2\times 2}$ וחשבו את $A\cdot[u]_E$. בדקו שהתשובה מסכימה עם התשובה של לסעיף הקודם.

שאלה 4

נתונה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}^{2\times 3}$ המוגדרת ע"י:

$$T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=\begin{pmatrix}a+b+2c+d&a+2b+3c+d&2a+4b\\b+c&-a+3c-d&5c+4d\end{pmatrix}$$

לכל $a+bx+cx^2+dx^3\in\mathbb{R}_3[x]$.

א) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

ב) מצאו את המטריצה המייצגת של ההעתקה ביחס לבסיס

$$B=\left\{b_1=x,b_2=1-x,b_3=x+x^2,b_4=x-x^2+x^3\right\}$$

של $\mathbb{R}_3[x]$ וביחס לבסיס

$$C=\left\{c_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},c_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},c_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},c_4=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},c_5=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},c_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right\}$$

של $\mathbb{R}^{3\times 2}$.

שאלה 5

תהי $T:\mathbb{R}_1[x]\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ טרנספורמציה המוגדרת ע"י $T(a+bx)=\begin{pmatrix}a&2a\\b&2b\end{pmatrix}$

א) יהי $B=\{b_1=1,b_2=1+x\}$ בסיס של $\mathbb{R}_1[x]$ ו-

$$C=\left\{c_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},c_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},c_3=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},c_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס של $\mathbb{R}^{2\times 2}$. מצאו את $[T]_C^B$.

ב) יהי $B' = \{b'_1 = 1, b'_2 = 1 - 2x\}$ בסיס של $\mathbb{R}_1[x]$ ו-

$$C' = \left\{ c'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, c'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, c'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, c'_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס של $\mathbb{R}^{2\times 2}$. מצאו את $[T]^{B'}_{C'}$.

ג) מצאו את $[T(u)]_C$ כאשר $[u]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

ד) מצאו את $[T(u)]_{C'}$ כאשר $[u]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

שאלה 6 תהי $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ טרנספורמציה המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ a - 3b \end{pmatrix}$. יהי $B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

א) מצאו את $[T]^B_B$.

ב) יהי $B' = \left\{ b'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס של $\mathbb{R}^2$. מצאו את $[T]^{B'}_{B'}$.

ג) חשבו את המטריצה המעבר מבסיס B לבסיס B'. חשבו את $[T]^{B'}_{B'}$ מ $[T]^B_B$ ע"י המטריצה המעבר ובדקו שהתשובה מסכימה עם נתשובה לסעיף הקודם.

ד) נתון $[u]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$. חשבו את $[u]_{B'}$ ע"י המטריצה המעבר.

שאלה 7 נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} 2a + 3b - c \\ 3a + 5b + 2c \\ ka - 2b - 3c \end{pmatrix}$

א) רשמו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T

ב) עבור אילו ערכי הפרמטר k ההעתקה T היא איזומורפיזם?

ג) לכל ערך של הפרמטר k מצאו את המימד ובסיס של הגרעין.

ד) לכל ערך של הפרמטר k מצאו את המימד ובסיס של $\operatorname{Im} T$.

שאלה 8 נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a + 2b + 5c \\ 2b + 2c \\ -a - 3c \end{pmatrix}$ לכל $a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$.

א) רשמו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

ב) מצאו את הבסיס ואת המימד של $\mathrm{Im}(T)$ ו $\mathrm{Ker}(T)$.

ג) האם T חד חד ערכית? האם T על?

ד) יהיו $B=\{b_1=1+x+x^2\ ,b_2=-x\ ,b_3=5-x^2\}$ בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$, ו-

$$C=\left\{c_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\ ,c_2=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}\ ,c_3=\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס של $\mathbb{R}^3$. מצאו את המטריצה המייצגת של הטרנספורמציה T לפי הבסיסים B ו- C.

ה) בעזרת הטריצה המייצגת שמצאתם, מצאו את $[T(u)]_C$ כאשר $[u]_B=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

שאלה 9

תהי $T:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}_2[x]$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(2a+b+d)+(3a-b+c)x+(b+2c-d)x^2$$

א) מצאו את הממ"ס של T.

ב) מצאו את המימד ובסיס של $\mathrm{Im}\ T$.

ג) מצאו את המימד ובסיס של $\mathrm{Ker}\ T$.

שאלה 10

נתונה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}^{2\times 3}$ המוגדרת ע"י:

$$T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=\begin{pmatrix}a+b+2c+d & a+2b+3c+d & 2a+4b\\ b+c & -a+3c-d & 5c+4d\end{pmatrix}$$

לכל $a+bx+cx^2+dx^3\in\mathbb{R}_3[x]$.

א) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

ב) מצאו אצ הבסיס והמימד של $\mathrm{Im}(T)$.

ג) מצאו את הבסיס והמימד של $\mathrm{Ker}(T)$.

ד) מצאו את המטריצה המייצגת של ההעתקה ביחס לבסיס

$$B=\left\{b_1=x,b_2=1-x,b_3=x+x^2,b_4=x-x^2+x^3\right\}$$

של $\mathbb{R}_3[x]$ וביחס לבסיס

$$C=\left\{c_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},c_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},c_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},c_4=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},c_5=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},c_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right\}$$

של $\mathbb{R}^{3\times 2}$.

שאלה 11 תהי $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ מטריצה מסדר $m \times n$. הוכיחו ש- $\text{Im } T = \text{col } A$ כך ש- . $\text{rank } T = \text{rank } A$

שאלה 12 תהי $T : U \to V$ העתקה לינארית. הוכיחו כי T חח"ע אם ורק אם $\ker T = \{\bar{0}\}$.

שאלה 13 תהי $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ העתקה לינארית ותהי $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ המטריצה המייצגת של T, כלומר

$$T(u) = Au$$

לכל $u \in \mathbb{R}^n$. הוכיחו כי

א) T על אם ורק אם $\text{rank } A = m$.

ב) T חח"ע אם ורק אם $\text{rank } A = n$.

שאלה 14 הוכיחו את הטענות הבאות או הפריכו אותן ע"י דוגמא נגדית:

א) נתונה העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. אם $m > n$ אז $\text{Ker}(T) = \{\bar{0}\}$.

ב) נתונה העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. אם $m < n$ אז $\text{Ker}(T) \neq \{\bar{0}\}$.

ג) נתונה העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. יהי B בסיס של $\mathbb{R}^n$, ויהי C בסיס של $\mathbb{R}^m$. אזי T חח"ע אם ורק אם המרחב האפס של $[T]_C^B$ הוא $\{\bar{0}\}$, כאשר $[T]_C^B$ המטריצה המייצגת ביחס לבסיסים B ו C.

תשובות

<u>שאלה 1</u>

א) הנוסחה של הטרנספורמציה היא

$$T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix}2a+3b-c\\3a+5b+2c\\a-2b-3c\end{pmatrix} \qquad \text{(\#1)}$$

בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$:

$$e=\left\{e_1=1,e_2=x,e_3=x^2\right\}$$

בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$:

$$E=\left\{E_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

לפי ההגדרה של הטרנספורמציה בנוסחה (#1):

$$T(e_1)=T(1)=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$T(e_2)=T(x)=\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}$$

$$T(e_3)=T(x^2)=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$$

הוקטורים כבר מבוטים ביחס לבסיס הסטנדרטי E של $\mathbb{R}^3$. נציב להגדרה של המטריצה המיצגת הסטנדרטית של T ונקבל

$$A=\begin{pmatrix}| & | & |\\T(e_1)_E & T(e_2)_E & T(e_3)_E\\| & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&-1\\3&5&2\\1&-2&-3\end{pmatrix}$$

■

ב)

$$
\begin{aligned}
T(b_1) = T(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} &= -c_1 + 2c_2 + c_3 &&= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_C \\
T(b_2) = T(1+x) = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} &= -3c_1 + 9c_2 - c_3 &&= \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}_C \\
T(b_3) = T(1+x+x^2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} &= -6c_1 + 14c_2 - 4c_3 &&= \begin{pmatrix} -6 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}_C
\end{aligned}
$$

לכן

$$
[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ T(b_1)_C & T(b_2)_C & T(b_3)_C \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 2 & 9 & 14 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}
$$

■

ג)

$.1 - x + 3x^2 = 1 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}_e$

$$
\begin{aligned}
A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}_E \\
&= -4E_1 + 4E_2 - 6E_3 \\
&= -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

■

ד) $1 - x + 3x^2 = 2 \cdot b_1 - 4 \cdot b_2 + 3 \cdot b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}_B$.

$$\begin{aligned} [T]_C^B \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}_B &= \begin{pmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 2 & 9 & 14 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}_C \\ &= -8C_1 + 10C_2 - 6C_3 \\ &= -8 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

■

שאלה 2

א) הטרנספורמציה מ $\mathbb{R}_2[x]$ ל $\mathbb{R}^3$ מוגדרת ע"י:

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a + 2b + 5c \\ 2b + 2c \\ -a - 3c \end{pmatrix} \qquad (\#1)$$

בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$:

$$e = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2\}$$

בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$:

$$E = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

לפי ההגדרה של הטרנספורמציה בנוסחה (#1):

$$T(e_1)=T(1)=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}_E \quad , \quad T(e_2)=T(x)=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}_E \quad , \quad T(e_3)=T(x^2)=\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix}_E \quad .$$

הוקטורים כבר ביחס לבסיס הסטנדרטי E של $\mathbb{R}^3$. נציב להגדרה של המטריצה המיצגת הסטנדרטית של T ונקבל

$$A=\begin{pmatrix}| & | & |\\ T(e_1)_E & T(e_2)_E & T(e_3)_E\\ | & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\0 & 2 & 2\\-1 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

■

ב)

$$11-x^2=11e_1+0e_2-e_3=\begin{pmatrix}11\\0\\-1\end{pmatrix}_e \quad .$$

$$A\cdot\begin{pmatrix}11\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\0 & 2 & 2\\-1 & 0 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}11\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-2\\-8\end{pmatrix}_E=6E_1-2E_2-8E_3=\begin{pmatrix}6\\-2\\-8\end{pmatrix} \quad .$$

■

ג)

$$T(b_1)=T(1+x+x^2)=\begin{pmatrix}8\\4\\-4\end{pmatrix}=8c_1-c_2+\frac{4}{3}c_3$$

$$T(b_2)=T(-x)=\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}=-2c_1+0\cdot c_2+0\cdot c_3$$

$$T(b_3)=T(3-x^2)=\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}=0\cdot c_1-\frac{1}{2}\cdot c_2+\frac{2}{3}\cdot c_3$$

ז"א

$$[T(b_1)]_C = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}_C \quad , \quad [T(b_2)]_C = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C \quad , \quad [T(b_3)]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}_C \quad .$$

לכן

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

■

ד)

$$11 - x^2 = b_1 + b_2 + 2b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B \quad .$$

כלומר $[u]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B$. השתמשו במטריצה המייצגת שמצאתם למציאת את $[T(u)]_C$ כאשר $[u]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} [T(u)]_C &= [T]_C^B \cdot [u]_B \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}_C \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}_C = 6c_1 - 2c_2 + \frac{8}{3}c_3 = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{8}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

אותה תשובה של סעיף ב'.

■

שאלה 3

א) הטרנספורמציה מ $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ל $\mathbb{R}_2[x]$ מוגדרת ע"י:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a+b+d)+(3a-b+c)x+(b+2c-d)x^2\ . \qquad \text{(\#1)}$$

בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$e=\left\{e_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$:

$$E=\left\{E_1=1\ , E_2=x\ , E_3=x^2\ .\right\}$$

לפי ההגדרה של הטרנספורמציה בנוסחה (#1):

$$\begin{aligned} T(e_1) =&T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2+3x \\ &= 2E_1+3E_2+0\cdot E_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}_E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(e_2) =&T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1-x+x^2 \\ &= E_1-E_2+E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(e_3) =&T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0+x+2x^2 \\ &= 0\cdot E_1+E_2+2E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(e_4) =&T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1-x^2 \\ &= E_1+0\cdot E_2-E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_E \end{aligned}$$

נציב להגדרה של המטריצה המיצגת הסטנדרטית של T ונקבל

$$A=\begin{pmatrix} | & | & | \\ T(e_1)_E & T(e_2)_E & T(e_3)_E \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

■

■

ב)

$$T(b_1) = 1 - x^2 = -c_2 + c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_C$$

$$T(b_2) = x + 2x^2 = c_1 + 2c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_C$$

$$T(b_3) = 1 - x + x^2 = -c_1 + c_2 + c_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C$$

$$T(b_4) = 2 + 3x = 3c_1 + 2c_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_C$$

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

■

ג)

$$[T(u)]_C = [T]_C^B \cdot [u]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}_C$$

■

ד)

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_B = 4E_1 + 3E_2 + 2E_3 + E_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_E$$

$$A\cdot[u]_E=\begin{pmatrix}2&1&0&1\\3&-1&1&0\\0&1&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\11\\6\end{pmatrix}$$

הוקטור המתקבל ביחס לבסיס סטנדרטי e של $P_2(\mathbb{R})$.
התשובה של הסעיף הקודם ביחס לבסיס סטנדרטי e של $P_2(\mathbb{R})$ הוא

$$\begin{pmatrix}11\\6\\12\end{pmatrix}_C=11c_1+6c_2+12c_3=11x+6x^2+12=12e_1+11e_2+6e_3=\begin{pmatrix}12\\11\\6\end{pmatrix}_e\ .$$

שאלה 4

א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T היא:

$$A=\begin{pmatrix}\vdots&\vdots&\vdots&\\ [T(e_1)]_E&[T(e_2)]_E&[T(e_3)]_E&[T(e_4)]_E\\ \vdots&\vdots&\vdots&\end{pmatrix}$$

כאשר $\{e_1=1,\ e_2=x,\ e_3=x^2,\ e_4=x^3\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_3[x]$ ו E הבסיס הסטנדרטית של $\mathbb{R}^{2\times3}(\mathbb{R})$.

$$[T(e_1)]_E=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\ ,\quad [T(e_2)]_E=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\quad [T(e_3)]_E=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\\3\\5\end{pmatrix}\ ,\quad [T(e_4)]_E=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\-1\\4\end{pmatrix}\ .$$

לכן

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&2&3&1\\2&4&0&0\\0&1&1&0\\-1&0&3&-1\\0&0&5&4\end{pmatrix}$$

ב) נרשום הבסיס $\{b_1=x,b_2=1-x,b_3=x+x^2,b_4=x-x^2+x^3\}$ ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_3[x]$, $\{e_1=1,\ e_2=x,\ e_3=x^2,\ e_4=x^3\}$: כך ש

$$b_1=e_2\ ,\quad b_2=e_1-e_2\ ,\quad b_3=e_2+e_3\ ,\quad b_4=e_2-e_3+e_4\ .$$

לכן

$$T(b_1) = T(e_2) = \begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$T(b_2) = T(e_1) - T(e_2) = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\\-1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$T(b_3) = T(e_2) + T(e_3) = \begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\4\\2\\3\\5\end{pmatrix}$$

$$T(b_4) = T(e_2) - T(e_3) + T(e_4) = \begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\\3\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\\0\\-4\\-1\end{pmatrix} .$$

נרשום הבסיס

$$C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, c_4 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}, c_5 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, c_6 = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} \right\}$$

במונחי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{2\times 3}(\mathbb{R})$:

$$E = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \right\}$$

:

$$E_1 = c_5 \ , \quad E_2 = c_1 \ , \quad E_3 = c_2 \ , \quad E_4 = c_6 \ , \quad E_5 = c_3 \ , \quad E_6 = c_4 - c_3 \ .$$

לכן

$$T(b_1) = E_1 + 2E_2 + 4E_3 + E_4 = c_5 + 2c_1 + 4c_2 + c_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C ,$$

$$T(b_2) = -E_2 - 2E_3 - E_4 - E_5 = -c_1 - 2c_2 - c_6 - c_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_C ,$$

$$T(b_3) = 3E_1 + 5E_2 + 4E_3 + 2E_4 + 3E_5 + 5E_6 = 3c_5 + 5c_1 + 4c_2 + 2c_6 + 3c_3 + 5(c_4 - c_3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_C ,$$

$$T(b_4) = 4E_3 - 4E_5 - E_6 = 4c_2 - 4c_3 - (c_4 - c_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C .$$

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [T(b_1)]_C & [T(b_2)]_C & [T(b_3)]_C & [T(b_4)]_C \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

■

<u>שאלה 5</u>

$$\begin{aligned} T(b_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} && = c_1 + c_3 \\ T(b_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} && = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \end{aligned}$$

$$[T(b_1)]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C , \qquad [T(b_2)]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C .$$

לכן

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

■

א)

$$\begin{aligned} T(b'_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} && = 2c'_3 - c'_4 \\ T(b'_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} && = -4c'_1 + 2c'_2 + 4c'_3 - c'_4 \end{aligned}$$

$$[T(b'_1)]_{C'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{C'} , \qquad [T(b'_2)]_{C'} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}_{C'} .$$

לכן

$$[T]_{C'}^{B'} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} .$$

■

ב)

$$[T(u)]_C = [T]_C^B \cdot [u]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

■

ג)

$$[T(u)]_{C'} = [T]^{B'}_{C'} \cdot [u]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

■

שאלה 6

א)

$$\begin{aligned} T(b_1) &= T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} &&= 0 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 &&= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_B \\ T(b_2) &= T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} &&= 3 \cdot b_1 - 1 \cdot b_2 &&= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_B \end{aligned}$$

אז

$$[T]^B_B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

■

ב)

$$\begin{aligned} T(b_1') &= T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} &&= -2 \cdot b_1' + 2 \cdot b_2' &&= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}_{B'} \\ T(b_2') &= T\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} &&= 2 \cdot b_1' + 1 \cdot b_2' &&= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{B'} \end{aligned}$$

אז

$$[T]^{B'}_{B'} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

נסמן $[T]_B \equiv [T]^B_B$ ו $[T]_{B'} \equiv [T]^{B'}_{B'}$.

■

ג)

נחשב את המטריצה המעבר מבסיס B לבסיס B':

$$(B'|B)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&1\\1&0&1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&1\\0&-2&0&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&1\\0&1&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-1\\0&1&0&1\end{array}\right)$$

לכן

$$P_{B\to B'}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$$

ההופכית של M היא

$$P^{-1}_{B\to B'}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\ .$$

■

ד)

$$P_{B\to B'}\cdot[T]_B\cdot P^{-1}_{B\to B'}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2\\2&1\end{pmatrix}=[T]_{B'}\ .$$

■

ה)

$$[u]_B=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_B=2b_1+b_2=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

הרכיבים של אותו וקטור לפי הבסיס B' נמצא ע"י:

$$[u]_{B'}=P_{B\to B'}[u]_B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{B'}$$

נבדוק ש- $[u]_B=[u]_{B'}$ ביחס לבסיס הסטנדרטי:

$$[u]_B=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_B=2b_1+b_2=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

ו

$$[u]_{B'}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_B=b'_1+b'_2=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\ .$$

שאלה 7

א) הטרנספורמציה מ $\mathbb{R}_2[x]$ ל $\mathbb{R}^3$ מוגדרת ע"י:

$$T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix}2a+3b-c\\3a+5b+2c\\ka-2b-3c\end{pmatrix} \qquad \text{(\#1)}$$

בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$:

$$e=\left\{e_1=1,e_2=x,e_3=x^2\right\}$$

בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$:

$$E=\left\{E_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

לפי ההגדרה של הטרנספורמציה בנוסחה **(#1)**:

$$T(e_1)=T(1)=\begin{pmatrix}2\\3\\k\end{pmatrix}$$
$$T(e_2)=T(x)=\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$$
$$T(e_3)=T(x^2)=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$$

הוקטורים כבר מבוטים ביחס לבסיס הסטנדרטי E של $\mathbb{R}^3$. נציב להגדרה של המטריצה המיצגת הסטנדרטית של T (ראו הגרה **??**) ונקבל

$$A=\begin{pmatrix}| & | & |\\T(e_1)_E & T(e_2)_E & T(e_3)_E\\| & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&-1\\3&5&2\\k&2&-3\end{pmatrix}$$

■

ב)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ k & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to 2R_3 - kR_1]{R_2 \to 2R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -3k-4 & k-6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to (3k+4)R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 22k+22 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

לפי הגדרה **??** T איזומורפיזם אם היא על וחח"ע. לפי משפטים **??** ו **??** T תהיה על וחח"ע אם יש איבר מוביל בכל שורה ובכל עמודה של המטריצה המוגדרת המתקבלת מ A. ז"א T איזומורפיזם לכל $k \neq -1$.

■

ג) $\underline{k \neq -1}$:

$$\dim(\ker T) = \#\text{העמודות הלא מובילות במדורגת} = 0$$

בסיס לא קיים.

$\underline{k = -1}$:

$\ker T \cong \text{Nul}A$. נמצא בסיס ומימד של $\text{Nul}A$ עבור $k=-1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -22 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

הפתרון הכללי הוא $z \in \mathbb{R}$, $y = -7z$, $x = 11z$ כלומר

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11z \\ -7z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן בסיס של $\text{Nul}A$ הוא

$$\left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נקבל בסיס של $\text{Ker }T$ ע"י לרשום הוקטורים בבסיס של $\text{Nul }A$ ביחס לבסיס הסטנדרטי לעיל של התחום של T: הוא

$$\left\{\begin{pmatrix}11\\-7\\1\end{pmatrix}_e\right\}=\{11e_1-7e_2+e_3\}=\left\{11-7x+x^2\right\}$$

$$\dim\left(\ker T\right)=\text{ מספר הוקטורים בבסיס }=1$$

■

ד) $\underline{k\neq-1}$:

$$\dim\left(\text{Im }T\right)=\text{\# עמודות מובילות במדורגת של}A=3$$

$\text{Im }T\cong\text{col }A$. עבור $k\neq-1$ במטריצה המדורגת של A, עמודה 1, עמודה 2, ועמודה 3 מובילות. לכן בסיס של $\text{col }A$ מורכב מעמודות 1, 2 ו 3 של A:

$$B_{\text{col}A}=\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\k\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}\right\}$$

נקבל בסיס של $\text{Im }T$ מהוקטורים ב $B_{\text{col}A}$ ביחס לבסיס הסטנדרטי של הטווח של T - $\mathbb{R}^3$. לכן

$$B_{\text{Im}T}=\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\k\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}\right\}$$

$\underline{k=-1}$:

$$\dim\left(\text{Im }T\right)=\text{\# עמודות מובילות במדורגת של}A=2$$

$\text{Im }T\cong\text{col }A$. עבור $k\neq-1$ במטריצה המדורגת של A, עמודה 1, ועמודה 2 מובילות. לכן בסיס של $\text{col }A$ מורכב מעמודות 1 ו 2 של A:

$$B_{\text{col}A}=\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

לכן

$$B_{\text{Im}T}=\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

שאלה 8

א) הטרנספורמציה מ $\mathbb{R}_2[x]$ ל $\mathbb{R}^3$ מוגדרת ע"י:

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+2b+5c \\ 2b+2c \\ -a-3c \end{pmatrix} \tag{\#1}$$

בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$:

$$e = \left\{ e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2 \right\}$$

בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$:

$$E = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

לפי ההגדרה של הטרנספורמציה בנוסחה (#1):

$$T(e_1) = T(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = T(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(e_3) = T(x^2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

הוקטורים כבר מבוטים ביחס לבסיס הסטנדרטי E של $\mathbb{R}^3$. נציב להגדרה של המטריצה המיצגת הסטנדרטית של T (ראו הגרה **??**) ונקבל

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ T(e_1)_E & T(e_2)_E & T(e_3)_E \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

■

ב)

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 2 & 2\\ -1 & 0 & -3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\dim(\text{Im } T) =$ # העמודות המובילות במדורגת של $A = 2$

$\text{Im } T \cong \text{col}A$. עמודות 1 ו 2 של המדורגת המתקבלת מA מובילות, לכן עמודות 1 ו 2 של A מהווים בסיס של $\text{col } A$:

$$B_{\text{col } A} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} \right\}$$

נקבל בסיס של $\text{Im } T$ מהוקטורים של הבסיס של $\text{col } A$ ביחס לבסיס הסטנדרטי של נטווח של T - $\mathbb{R}^3$. לכן

$$B_{\text{Im } T} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} \right\} .$$

$\text{Nul}A \cong \ker T$. נמצא בסיס ומימד של $\text{Nul}A$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 5 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3 & 0\end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 0\end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

הפתרון הכללי הוא $z \in \mathbb{R}$, $y = -z$, $x = -3z$ כלומר

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3z\\-z\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$$

לכן בסיס של $\text{Nul}A$ הוא

$$B_{\text{Nul}A} = \left\{ \begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

נקבל בסיס של T Ker ע"י הוקטורים ב $B_{\text{Nul}A}$ ביחס לבסיס הסטנדרטי של התחום של T, כלומר ביחס לבסיס סטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$:

$$\begin{aligned} B_{\ker T}\left\{\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}_e\right\} &= \{-3e_1-e_2+e_3\} \\ &= \left\{-3-x+x^2\right\} \end{aligned}$$

$$\dim\left(\ker T\right) = \text{מספר הוקטורים בבסיס} = 1$$

■

ג) T לא חח"ע: לא כל העמודות מובילות.
T לא על: יש שורת אפסים.

■

$$\begin{aligned} T(b_1) = T(1+x+x^2) &= \begin{pmatrix}8\\4\\-4\end{pmatrix} \\ &= 8c_1 - c_2 + \frac{4}{3}c_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(b_2) = T(-x) &= \begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix} \\ &= -2c_1 + 0\cdot c_2 + 0\cdot c_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(b_3) = T(3-x^2) &= \begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix} \\ &= 0\cdot c_1 - \frac{1}{2}\cdot c_2 + \frac{2}{3}\cdot c_3 \end{aligned}$$

ז"א

$$[T(b_1)]_C = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}_C$$

$$[T(b_2)]_C = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C$$

$$[T(b_3)]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}_C \ .$$

לכן

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

■

ה) השתמשו במטריצה המייצגת שמצאתם למציאת את $[T(u)]_C$ כאשר $[u]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} [T(u)]_C &= [T]_C^B \cdot [u]_B \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

שאלה 9

א) הטרנספורמציה מ $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ל $\mathbb{R}_2[x]$ מוגדרת ע"י:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a+b+d) + (3a-b+c)x + (b+2c-d)x^2 \ . \qquad \text{(\#1)}$$

בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$e=\left\{e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$:

$$E=\left\{E_1=1\ ,E_2=x\ ,E_3=x^2\ .\right\}$$

לפי ההגדרה של הטרנספורמציה בנוסחה (**#1**):

$$\begin{aligned}T(e_1)=&T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=2+3x\\&=2E_1+3E_2+0\cdot E_3=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}_E\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T(e_2)=&T\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=1-x+x^2\\&=E_1-E_2+E_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}_E\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T(e_3)=&T\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=0+x+2x^2\\&=0\cdot E_1+E_2+2E_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}_E\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T(e_4)=&T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=1-x^2\\&=E_1+0\cdot E_2-E_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}_E\end{aligned}$$

נציב להגדרה של המטריצה המיצגת הסטנדרטית של T (ראו הגרה **??**) ונקבל

$$A=\begin{pmatrix}|&|&|\\T(e_1)_E&T(e_2)_E&T(e_3)_E\\|&|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0&1\\3&-1&1&0\\0&1&2&-1\end{pmatrix}$$

■

ב) $\text{Im}\ T \cong \text{Col}\ A$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to 3R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 5R_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{4}R_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

במטריצה המדורגת המתקבלת מ A, עמודות 1, 2 ו 3 מובילות, לכן עמודות 1, 2 ו 3 של A מהוות בסיס של $\text{col}A$:

$$B_{\text{col}A} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

הבסיס של $\text{Im}\ T$ מהוקטורים של $B_{\text{col}A}$ לפי הבסיס של הטווח שך T, לפי הבסיס של של E:

$$\begin{aligned} B_{\text{Im}T} &= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}_E, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_E, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_E \right\} \\ &= \{2E_1 + 3E_2 + E_3, E_1 - E_2 + E_3, 0 \cdot E_1 + E_2 + 2 \cdot E_3\} \\ &= \left\{2 + 3x + x^2, 1 - x + x^2, x + 2x^2\right\} . \end{aligned}$$

ג) $\text{Ker}\ T \cong \text{Nul}\ A$. מסעיף הקודם המדורגת של A היא

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי למשוואה ההומוגנית $A \cdot X = 0$ הוא

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{w}{3} \\ \frac{-w}{3} \\ \frac{2w}{3} \\ w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} .$$

ז"א בסיס של $\text{Nul}A$ הוא

$$B_{\text{Nul}A} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} .$$

נקבל בססי של $\mathrm{Ker}T$ ע"י לרשום הוקטורים של $B_{\mathrm{Nul}A}$ ביחס לבסיס e של המרחב תחום של T, כלומר ביחס לבסיס של $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\begin{aligned}
B_{\mathrm{Ker}\ T} &= \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_e \right\} \\
&= \{-e_1 - e_2 + 2e_3 + 3 \cdot e_4\} \\
&= \left\{ -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\} .
\end{aligned}$$

שאלה 10

א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T היא:

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \\ [T(e_1)]_E & [T(e_2)]_E & [T(e_3)]_E & [T(e_4)]_E \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

כאשר $\{e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2,\ e_4 = x^3\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_3[x]$ ו E הבסיס הסטנדרטית של $\mathbb{R}^{2\times 3}(\mathbb{R})$.

$$[T(e_1)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad [T(e_2)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad [T(e_3)]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} , \quad [T(e_4)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

לכן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

ב) $\mathrm{Im}(T) \sim \mathrm{col}(A)$

נדרג את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_5\to R_5-R_2]{\substack{R_3\to R_3-2R_2 \\ R_4\to R_4-R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to -\frac{1}{6}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_5\to R_5-5R_3]{R_4\to R_4-4R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כל ה4 עמודות מובילות לכן $\dim(\text{col}(A)) = 4$. בסיס של $\text{Im}(T)$:

$$B\left(\text{Im}(T)\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

ג) כיוון ש

$$\dim\left(\text{col}(A)\right) + \dim\left(\text{Nul}(A)\right) = 4$$

אז

$$\dim\left(\text{Nul}(A)\right) = 0$$

ולכן

$$\text{Ker}(T) = \{\bar{0}\} \ .$$

ד) נרשום הבסיס $\{b_1 = x, b_2 = 1-x, b_3 = x+x^2, b_4 = x-x^2+x^3\}$ ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_3[x]$, $\{e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2,\ e_4 = x^3\}$: כך ש

$$b_1 = e_2 \ , \quad b_2 = e_1 - e_2 \ , \quad b_3 = e_2 + e_3 \ , \quad b_4 = e_2 - e_3 + e_4 \ .$$

לכן

$$T\left(b_1\right) = T\left(e_2\right) = \begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$T\left(b_2\right) = T\left(e_1\right) - T\left(e_2\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\\-1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$T\left(b_3\right) = T\left(e_2\right) + T\left(e_3\right) = \begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\4\\2\\3\\5\end{pmatrix}$$

$$T\left(b_4\right) = T\left(e_2\right) - T\left(e_3\right) + T\left(e_4\right) = \begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\\3\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\\0\\-4\\-1\end{pmatrix} .$$

נרשום הבסיס

$$C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, c_4 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}, c_5 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, c_6 = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} \right\}$$

במונחי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{2\times 3}(\mathbb{R})$:

$$E = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \right\}$$

:

$$E_1 = c_5 \ , \quad E_2 = c_1 \ , \quad E_3 = c_2 \ , \quad E_4 = c_6 \ , \quad E_5 = c_3 \ , \quad E_6 = c_4 - c_3 \ .$$

לכן

$$T(b_1) = E_1 + 2E_2 + 4E_3 + E_4 = c_5 + 2c_1 + 4c_2 + c_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C ,$$

$$T(b_2) = -E_2 - 2E_3 - E_4 - E_5 = -c_1 - 2c_2 - c_6 - c_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_C ,$$

$$T(b_3) = 3E_1 + 5E_2 + 4E_3 + 2E_4 + 3E_5 + 5E_6 = 3c_5 + 5c_1 + 4c_2 + 2c_6 + 3c_3 + 5(c_4 - c_3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_C ,$$

$$T(b_4) = 4E_3 - 4E_5 - E_6 = 4c_2 - 4c_3 - (c_4 - c_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C .$$

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [T(b_1)]_C & [T(b_2)]_C & [T(b_3)]_C & [T(b_4)]_C \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 11

נניח ש

$$A = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}$$

כאשר c_1 עמודה ה- 1 של A וכו'. אז

$$\mathrm{Im}\ A = \{A\mathrm{x} | \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n\} = \{x_1 c_1 + \ldots + x_n c_n | x_i \in \mathbb{R}\}$$

לפי הגדרה **??**. לכן T Im הוא המרחב העמודות של A:

$$\text{Im } T = \text{col } A \ .$$

<u>שאלה 12</u> $\Rightarrow$

נניח ש T חח"ע. יהי $\text{v} \in \ker T$. אז $T(\text{v}) = \bar{0}$.
T העתקה לינארית אז $T(\bar{0}) = \bar{0}$, לכן

$$T(\text{v}) = T(\bar{0}) \ .$$

ז"א $\text{v} = \bar{0}$ בגלל ש T חח"ע.

$\Leftarrow$

נניח ש $\ker T = \{\bar{0}\}$. נניח ש $T(u_1) = T(u_2)$ כאשר $u_1, u_2 \in U$. אז

$$T(u_1 - u_2) = T(u_1) - T(u_2) = \bar{0} \ ,$$

לכן $u_1 - u_2 \in \ker T$. ז"א $u_1 - u_2 = \bar{0}$, ז"א $u_1 = u_2$. לכן הוכחנו ש T חח"ע.

<u>שאלה 13</u>

א) $\text{Im } T \in \text{col } A$. לכן T על אם ורק אם

(*)
$$\text{col} A = \mathbb{R}^m \ .$$

$$\text{rank } A = \dim\left(\text{col } A\right)$$

לכן (*) מתקיים אם ורק אם $\text{rank } A = m$.

ב) $\ker T = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = \bar{0}\}$. לכן ע"י לפי **??**, T חח"ע אם ורק אם $Ax = 0 \Leftarrow x = \bar{0}$. ז"א, לפי משפט **??**, $\text{rank } A = n$.

<u>שאלה 14</u>

א) <u>דוגמה נגדית:</u>

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Ker}(T)$ הוא $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

ב) תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה לינארית. אם $n>m$ אז $\ker(T)\neq\{\bar{0}\}$.

<u>הוכחה:</u>

המטריצה המייצגת הסטנדרטית $A\in M_{m\times n}$ מסדר $m\times n$ עבור ו $m<n$. כלומר, כמות העמודות יותר מכמות השורות. לכן

$$\dim\left(\text{col}(A)\right)<n\ .$$

כיוון ש

$$\dim\left(\text{col}(A)\right)+\dim\left(\text{Nul}(A)\right)=n$$

אז

$$\dim\left(\text{Nul}(A)\right)\geq 1\ .$$

לכן

$$\dim\left(\text{Ker}(T)\right)\geq 1\ ,$$

ז"א

$$\text{Ker}(T)\neq\{\bar{0}\}\ .$$

<u>הוכחה:</u>

<u>נניח כי T חח"ע.</u>

יהי v וקטור השייך ל $\text{Ker}(T)$. אז $T(\text{v})=\bar{0}$, אז

$$T(\text{v})=\bar{0}=T(\bar{0})\ .$$

לכן $\text{v}=0$ בגלל ש T חח"ע. לכן $\text{Ker}(T)=\{\bar{0}\}$.

<u>נניח כי $\text{Ker}(T)=\{\bar{0}\}$.</u>

יהי $T\left(\text{v}_1\right)=T\left(\text{v}_2\right)$ עבור $\text{v}_1,\text{v}_2\in\mathbb{R}^n$. אז

$$T(\text{v}_1-\text{v}_2)=T(\text{v}_1)-T(\text{v}_2)=\bar{0}$$

לכן

$$\text{v}_1-\text{v}_2\in\text{Ker}(T)=\{\bar{0}\}\ .$$

ז"א

$$\text{v}_1-\text{v}_2=\bar{0}\qquad\Rightarrow\qquad\text{v}_1=\text{v}_2$$

ולכן T חח"ע.