

תרגילים 1: תורת המספרים

שאלה 1 מצאו את הפירוק מנה-שארית של השלמים הבאים:

(א) $a = 7503, b = 81$

(ב) $a = -7503, b = 81$

(ג) $a = 81, b = 7503$

(ד) $a = -81, b = 7503$

שאלה 2 יהיו $a, b, n > 0$ שלמים. הוכיחו כי $a \bmod n = b \bmod n$ אם ורק אם $a \equiv b \pmod{n}$.

שאלה 3 מצאו שלמים s, t, d עבורם $12327s + 409t = d$.

שאלה 4 הוכיחו כי 7563 ו-526 מספרים זרים.

שאלה 5 יהיו a, b מספרים שלמים.

הוכיחו שאם קיימים שלמים s, t כך ש- $sa + tb = 1$ אז a ו- b זרים.

שאלה 6 יהיו a, b, n מספרים שלמים. הוכיחו את הטענה הבאה:

אם השלושה תנאים הבאים מתקיימים:

(1) a ו- b זרים,

(2) $a \mid n$,

(3) $b \mid n$,

אז $ab \mid n$.

שאלה 7 הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) $\gcd(ma, mb) = m \gcd(a, b)$

(ב) אם $m > 0$ ואם $m \mid a$ ו- $m \mid b$ אז $\gcd\left(\frac{a}{m}, \frac{b}{m}\right) = \frac{\gcd(a, b)}{m}$.

(ג) המספרים $\frac{a}{\gcd(a, b)}$ ו- $\frac{b}{\gcd(a, b)}$ מספרים זרים.

(ד) אם $c \mid ab$ ו- c זר ביחס ל- b אז $c \mid a$.

(ה) אם a, c מספרים זרים ואם b, c מספרים זרים אז $c \mid ab$ מספרים זרים.

$$\gcd(a, b) = \gcd(a + cb, b) \quad (1)$$

שאלה 8 יהיו a, m מספרים זרים. הוכיחו כי $ab \equiv ac \pmod{m}$ אם ורק אם $b \equiv c \pmod{m}$.

שאלה 9 יהיו a, m מספרים (לא בהכרח זרים). הוכיחו כי $ab \equiv ac \pmod{m}$ אם ורק אם $b \equiv c \pmod{\frac{m}{\gcd(a, m)}}$.

שאלה 10

(א) חשבו את $\gcd(285, 89)$.

(ב) מצאו שלמים s, t, d עבורם $285s + 89t = d$.

שאלה 11 הוכיחו: אם $a \mid bc$ ו- a, b זרים אז $a \mid c$.

שאלה 12

(א) הוכיחו: אם a, b זרים אז קיים c עבורו $ac \equiv 1 \pmod{b}$.

(ב) הוכיחו: אם a, b לא זרים אז לא קיים c עבורו $ac \equiv 1 \pmod{b}$.

שאלה 13

(א) הוכיחו: אם $a \equiv b \pmod{m}$ אז $a + c \equiv b + c \pmod{m}$.

(ב) הוכיחו: אם $a \equiv b \pmod{m}$ ו- $c \equiv d \pmod{m}$ אז $ac \equiv bd \pmod{m}$.

(ג) הוכיחו: אם $a \equiv b \pmod{m}$ אז $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

שאלה 14 חשבו את האיבר ההופכי של 7 ב- \mathbb{Z}_{20} .

שאלה 15

(א) חשבו את $\gcd(285, 89)$.

(ב) מצאו שלמים s, t, d עבורם $285s + 89t = d$.

שאלה 16 הוכיחו: אם $a \mid bc$ ו- a, b זרים אז $a \mid c$.

שאלה 17

(א) הוכיחו: אם a, b זרים אז קיים c עבורו $ac \equiv 1 \pmod{b}$.

(ב) הוכיחו: אם a, b לא זרים אז לא קיים c עבורו $ac \equiv 1 \pmod{b}$.

שאלה 18

(א) הוכיחו: אם $a \equiv b \pmod{m}$ אז $a + c \equiv b + c \pmod{m}$.

(ב) הוכיחו: אם $a \equiv b \pmod{m}$ ו- $c \equiv d \pmod{m}$ אז $ac \equiv bd \pmod{m}$.

(ג) הוכיחו: אם $a \equiv b \pmod{m}$ אז $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

שאלה 19 יהי $m \geq 2$ שלם. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

(א) m מספר ריבועי אם ורק אם כל אחד מהגורמים הראשוניים שלו מופיע עם חזקה זוגית בפירוק לראשוניים שלו.

(ב) אם \sqrt{m} מספר רצונלי אזי m מספר ריבועי.

(ג) אם m הוא לא מספר ריבועי אזי \sqrt{m} לא רציונלי.

שאלה 20 הוכיחו או הפריכו:

(א) $54 \equiv 3 \pmod{17}$

(ב) $56 \equiv 3 \pmod{2}$

(ג) $578 \equiv 9 \pmod{1}$

(ד) $-23 \equiv 4 \pmod{9}$

(ה) $1001 \equiv 1 \pmod{7}$

(ו) $2025 \equiv 5 \pmod{10}$

(ז) $85 \equiv -3 \pmod{11}$

(ח) $2^8 \equiv 1 \pmod{5}$

(ט) $45 \equiv 5 \pmod{8}$

(י) $72 \equiv -1 \pmod{9}$

שאלה 21 חשבו:

(א) $12^5 + 2^5 \pmod{11}$

(ב) $7^4 + 3^5 \pmod{5}$

(ג) $9^6 - 4^7 \pmod{7}$

(ד) $5^{2025} \pmod{13}$

(ה) $2^{100} + 2^{50} \pmod{3}$

(ו) $10^{2025} \pmod{9}$

(ז) $14^{12} \pmod{13}$

(ח) $8^{17} - 3^{17} \pmod{5}$

(ט) $6^{20} + 1 \pmod{7}$

(י) $11^{30} \pmod{12}$

שאלה 22

(א) אם $x \equiv 3 \pmod{7}$ ו- $y \equiv 5 \pmod{7}$, חשבו $4x - 3y \pmod{7}$

(ב) אם $x \equiv 2 \pmod{9}$ ו- $y \equiv 7 \pmod{9}$, חשבו $xy^2 \pmod{9}$

(ג) אם $a \equiv 11 \pmod{15}$ ו- $b \equiv -4 \pmod{15}$, חשבו $(2a + 5b) \pmod{15}$

(ד) אם $p \equiv 4 \pmod{6}$ ו- $q \equiv -1 \pmod{6}$, חשבו $p^2q \pmod{6}$

(ה) אם $r \equiv 17 \pmod{20}$ ו- $s \equiv 13 \pmod{20}$, חשבו $(r - s)(r + s) \pmod{20}$

שאלה 23

(א) הוכיחו: אם $a \equiv c \pmod{n}$ ו- $b \equiv d \pmod{n}$ אז לכל $u, v \in \mathbb{Z}$ מתקיים:

$$ua + vb \equiv uc + vd \pmod{n}.$$

(ב) הוכיחו באינדוקציה: אם $a \equiv c \pmod{n}$ אז לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$a^k \equiv c^k \pmod{n}.$$

(ג) הוכיחו: אם $a \equiv c \pmod{n}$ אז לכל פולינום $P(x)$ עם מקדמים שלמים מתקיים:

$$P(a) \equiv P(c) \pmod{n}.$$

- (ד) תנו דוגמה לכך שמ- $ac \equiv bc \pmod{n}$ לא נובע $a \equiv b \pmod{n}$.
- (ה) הוכיחו: אם $\gcd(c, n) = 1$ לכל n ו- $ac \equiv bc \pmod{n}$ אז $a \equiv b \pmod{n}$.
- (ו) תנו דוגמה עם $\gcd(c, n) \neq 1$ שבה $ac \equiv bc \pmod{n}$ אך $a \not\equiv b \pmod{n}$.

שאלה 24

- (א) אם $x \equiv 5 \pmod{12}$ ו- $y \equiv 8 \pmod{12}$, חשבו:
- (1) $x + y \pmod{12}$
 - (2) $x - y \pmod{12}$
 - (3) $xy \pmod{12}$
 - (4) $x^3 + 2y \pmod{12}$
- (ב) אם $a \equiv 2 \pmod{11}$, $b \equiv -3 \pmod{11}$, $c \equiv 5 \pmod{11}$, חשבו:
- $$ab + bc + ca, \quad a^5 + b^5 + c^5 \pmod{11}.$$
- (ג) הוכיחו או הפריכו את הטענה:
- $$a - b \equiv c - d \pmod{m}.$$
- (ד) הוכיחו או הפריכו את הטענה:
- $$a^2 + b^2 \equiv c^2 + d^2 \pmod{m}.$$
- (ה) הוכיחו: אם $b \equiv d \equiv 0 \pmod{m}$ אז $ab \equiv cd \equiv 0 \pmod{m}$.

פתרונות

שאלה 1

מצב	סימן a	סימן b	מנה q	שארית r
1	+	+	$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$	$a \bmod b$
2	+	-	$-\left\lfloor \frac{a}{ b } \right\rfloor$	$a \bmod b $
3	-	+	$-\left\lfloor \frac{ a }{b} \right\rfloor - 1$	$b - a \bmod b$
4	-	-	$\left\lfloor \frac{ a }{ b } \right\rfloor + 1$	$ b - a \bmod b $

(א) נחשב שלמים q, r עבורם $a = qb + r$. השלם $a > 0$ ו- $b > 0$ לכן:

$$q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7503}{81} \right\rfloor = 92$$

$$r = a \bmod b = a - b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = 7503 - (81)(92) = 75$$

לכן

$$7503 = (92)(81) + 51 .$$

(ב) השלם $a < 0$ ו- $b > 0$ לכן:

$$q = -\left\lfloor \frac{|a|}{b} \right\rfloor - 1 = -\left\lfloor \frac{7503}{81} \right\rfloor - 1 = -93$$

$$r = b - |a| \bmod b = b - \left(|a| - b \left\lfloor \frac{|a|}{b} \right\rfloor \right) = 81 - (7503 - (81)(92)) = 30 .$$

לכן

$$-7503 = (-93)(81) + 30 .$$

(ג) השלם $a > 0$ ו- $b > 0$ לכן:

$$q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{81}{7503} \right\rfloor = 0 .$$

$$r = a \bmod b = \left(a - b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \right) = 81 - (7503) \left\lfloor \frac{81}{7503} \right\rfloor = 81 .$$

לכן

$$81 = (0)(7503) + 81 .$$

(ד) השלם $a < 0$ ו- $b > 0$ לכן:

$$q = - \left\lfloor \frac{|a|}{b} \right\rfloor - 1 = - \left\lfloor \frac{81}{7503} \right\rfloor - 1 = -1$$

$$r = b - |a| \bmod b = b - \left(|a| - b \left\lfloor \frac{|a|}{b} \right\rfloor \right) = 7503 - (81 - (7503)(0)) = 7422 .$$

לכן

$$-81 = (-1)(7503) + 7422 .$$

שאלה 2 נראה את שני הכיוונים:

\Rightarrow נניח כי

$$a \bmod n = b \bmod n = r .$$

לפי משפט החלוקה של אוקלידס קיימים שלמים q_1, q_2 כך ש:

$$a = q_1 n + r, \quad b = q_2 n + r .$$

לכן:

$$a - b = (q_1 - q_2)n .$$

כלומר $(a - b) \mid n$, ולכן $a \equiv b \pmod{n}$.

\Leftarrow נניח כי

$$a \equiv b \pmod{n},$$

כלומר קיים שלם k כך ש:

$$a = b + kn .$$

נחלק את b ב- n :

$$b = qn + r, \quad 0 \leq r < n .$$

אז:

$$a = b + kn = (q + k)n + r .$$

זהו פירוק על פי משפט החלוקה של אוקלידס, ולכן השארית של a בחלוקה ב- n היא r . מכאן:

$$a \bmod n = b \bmod n .$$

שאלה 3

קיימים שלמים s, t, d עבורם $12327s + 2409t = d$ כאשר $d = \gcd(12327, 2409)$. נשתמש באלגוריתם המוכלל של אוקלידס. נסמן $a = 12327, b = 2409$.

$$r_0 = a = 12327, \quad r_1 = b = 2409, \quad s_0 = 1, \quad s_1 = 0, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 1 .$$

$q_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor$ $= \left\lfloor \frac{12327}{2409} \right\rfloor$ $= 5$	$r_2 = r_0 - q_1 r_1$ $= 12327 - (5)(2409)$ $= 282$	$s_2 = s_0 - q_1 s_1$ $= 1 - (5)(0)$ $= 1$	$t_2 = t_0 - q_1 t_1$ $= 1 - (5)(1)$ $= -5$
$q_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor$ $= \left\lfloor \frac{2409}{282} \right\rfloor$ $= 8$	$r_3 = r_1 - q_2 r_2$ $= 2409 - (8)(282)$ $= 153$	$s_3 = s_1 - q_2 s_2$ $= 0 - (8)(1)$ $= -8$	$t_3 = t_1 - q_2 t_2$ $= 1 - (8)(-5)$ $= 41$
$q_3 = \left\lfloor \frac{r_2}{r_3} \right\rfloor$ $= \left\lfloor \frac{282}{153} \right\rfloor$ $= 1$	$r_4 = r_2 - q_3 r_3$ $= 282 - (1)(153)$ $= 129$	$s_4 = s_2 - q_3 s_3$ $= 1 - (1)(-8)$ $= 9$	$t_4 = t_2 - q_3 t_3$ $= -5 - (1)(41)$ $= -46$
$q_4 = \left\lfloor \frac{r_3}{r_4} \right\rfloor$ $= \left\lfloor \frac{153}{129} \right\rfloor$ $= 1$	$r_5 = r_3 - q_4 r_4$ $= 153 - (1)(129)$ $= 24$	$s_5 = s_3 - q_4 s_4$ $= -8 - (1)(9)$ $= -17$	$t_5 = t_3 - q_4 t_4$ $= 41 - (1)(-46)$ $= 87$
$q_5 = \left\lfloor \frac{r_4}{r_5} \right\rfloor$ $= \left\lfloor \frac{129}{24} \right\rfloor$ $= 5$	$r_6 = r_4 - q_5 r_5$ $= 129 - (5)(24)$ $= 9$	$s_6 = s_4 - q_5 s_5$ $= 9 - (5)(-17)$ $= 94$	$t_6 = t_4 - q_5 t_5$ $= -46 - (5)(87)$ $= -481$
$q_6 = \left\lfloor \frac{r_5}{r_6} \right\rfloor$ $= \left\lfloor \frac{24}{9} \right\rfloor$ $= 2$	$r_7 = r_5 - q_6 r_6$ $= 24 - (2)(9)$ $= 6$	$s_7 = s_5 - q_6 s_6$ $= -17 - (2)(94)$ $= -205$	$t_7 = t_5 - q_6 t_6$ $= 87 - (2)(-481)$ $= 1049$
$q_7 = \left\lfloor \frac{r_6}{r_7} \right\rfloor$ $= \left\lfloor \frac{9}{6} \right\rfloor$ $= 1$	$r_8 = r_6 - q_7 r_7$ $= 9 - (1)(6)$ $= 3$	$s_8 = s_6 - q_7 s_7$ $= 94 - (1)(-205)$ $= 299$	$t_8 = t_6 - q_7 t_7$ $= -481 - (1)(1049)$ $= -1530$
$q_8 = \left\lfloor \frac{r_7}{r_8} \right\rfloor$ $= \left\lfloor \frac{6}{3} \right\rfloor$ $= 2$	$r_9 = r_7 - q_8 r_8$ $= 6 - (2)(3)$ $= 0$		

$q_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor$ $= \left\lfloor \frac{7563}{526} \right\rfloor$ $= 14$	$r_2 = r_0 - q_1 r_1$ $= 7563 - (14)(526)$ $= 199$	$s_2 = s_0 - q_1 s_1$ $= 1 - (14)(0)$ $= 1$	$t_2 = t_0 - q_1 t_1$ $= 0 - (14)(1)$ $= -14$
$q_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor$ $= \left\lfloor \frac{526}{199} \right\rfloor$ $= 2$	$r_3 = r_1 - q_2 r_2$ $= 526 - (2)(199)$ $= 128$	$s_3 = s_1 - q_2 s_2$ $= 0 - (2)(1)$ $= -2$	$t_3 = t_1 - q_2 t_2$ $= 1 - (2)(-14)$ $= 29$
$q_3 = \left\lfloor \frac{r_2}{r_3} \right\rfloor$ $= \left\lfloor \frac{199}{128} \right\rfloor$ $= 1$	$r_4 = r_2 - q_3 r_3$ $= 199 - (1)(128)$ $= 71$	$s_4 = s_2 - q_3 s_3$ $= 1 - (1)(-2)$ $= 3$	$t_4 = t_2 - q_3 t_3$ $= -14 - (1)(29)$ $= -43$
$q_4 = \left\lfloor \frac{r_3}{r_4} \right\rfloor$ $= \left\lfloor \frac{128}{71} \right\rfloor$ $= 1$	$r_5 = r_3 - q_4 r_4$ $= 128 - (1)(71)$ $= 57$	$s_5 = s_3 - q_4 s_4$ $= -2 - (1)(3)$ $= -5$	$t_5 = t_3 - q_4 t_4$ $= 29 - (1)(-43)$ $= 72$
$q_5 = \left\lfloor \frac{r_4}{r_5} \right\rfloor$ $= \left\lfloor \frac{71}{57} \right\rfloor$ $= 1$	$r_6 = r_4 - q_5 r_5$ $= 71 - (1)(57)$ $= 14$	$s_6 = s_4 - q_5 s_5$ $= 3 - (1)(-5)$ $= 8$	$t_6 = t_4 - q_5 t_5$ $= -43 - (1)(72)$ $= -115$
$q_6 = \left\lfloor \frac{r_5}{r_6} \right\rfloor$ $= \left\lfloor \frac{57}{14} \right\rfloor$ $= 4$	$r_7 = r_5 - q_6 r_6$ $= 57 - (4)(14)$ $= 1$	$s_7 = s_5 - q_6 s_6$ $= -5 - (4)(8)$ $= -37$	$t_7 = t_5 - q_6 t_6$ $= 72 - (4)(-115)$ $= 532$
$q_7 = \left\lfloor \frac{r_6}{r_7} \right\rfloor$ $= \left\lfloor \frac{14}{1} \right\rfloor$ $= 14$	$r_8 = r_6 - q_7 r_7$ $= 14 - (14)(1)$ $= 0$		

מכאן $\gcd(526, 7563) = 1$.

שאלה 5

יהי d ה- \gcd של a ו- b . אם $sa + tb = 1$ אז בהכרח d מחלק 1. לכן $d = 1$ לכן $\gcd(a, b) = 1$.

שאלה 6

$$a \mid n, \quad b \mid n$$

לכן קיימים שלמים k ו- l כך ש-

$$n = ak, \quad n = bl.$$

$$n = ak = bl$$

מכאן $b \mid ak$.

נתון כי $\gcd(a, b) = 1$, לכן $b \mid k$. לכן $k = bq$.

$$n = ak = abq$$

שאלה 7

(א) יהי $d = \gcd(a, b)$. אז קיימים שלמים s, t עבורם

$$sa + tb = d.$$

מכאן

$$msa + mtb = md \Rightarrow s(ma) + t(mb) = md.$$

$$\gcd(ma, mb) = md = m \gcd(a, b).$$

(ב) יהי $d = \gcd(a, b)$.

\exists שלמים s, t כך ש-

$$sa + tb = d. \quad (*)$$

נחלק (*) ב- m ונקבל

$$s \frac{a}{m} + t \frac{b}{m} = \frac{d}{m}. \quad (**)$$

נשים לב $a \mid m$ ו- $b \mid m$. לכן $\frac{a}{m}$ שלם ו- $\frac{b}{m}$ שלם.

לכן $\frac{d}{m}$ בהכרח שלם ולפי משפט בזו $\gcd\left(\frac{a}{m}, \frac{b}{m}\right) = \frac{d}{m}$. לכן

$$\gcd\left(\frac{a}{m}, \frac{b}{m}\right) = \frac{\gcd(a, b)}{m}.$$

(ג) יהי $d = \gcd(a, b)$.

\exists שלמים s, t עבורם

$$sa + tb = d.$$

נחלק ב- d ונקבל

$$s \frac{a}{d} + t \frac{b}{d} = 1.$$

לפי משפט בזו, השלם בצד ימין הוא \gcd של $\frac{a}{d}$ ו- $\frac{b}{d}$. לכן

$$\gcd\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1 \Rightarrow \gcd\left(\frac{a}{\gcd(a, b)}, \frac{b}{\gcd(a, b)}\right) = 1$$

לכן $\frac{a}{\gcd(a, b)}$ ו- $\frac{b}{\gcd(a, b)}$ זרים.

(ד) a, b שלמים לכן קיימים שלמים s, t, d עבורם

$$sa + tb = d$$

כאשר $d = \gcd(a, b)$.

מכאן

$$s \left(\frac{a}{d} \right) + t \left(\frac{b}{d} \right) = 1.$$

נשים לב ש- $d = \gcd(a, b)$ לכן בהכרח $\frac{a}{d}$ ו- $\frac{b}{d}$ שלמים. לכן קיבלנו שלמים s, t עבורם

$$s \left(\frac{a}{\gcd(a, b)} \right) + t \left(\frac{b}{\gcd(a, b)} \right) = 1.$$

לכן השלמים $\frac{a}{\gcd(a, b)}$ ו- $\frac{b}{\gcd(a, b)}$ זרים.

(ה) אם a, c מספרים זרים ואם b, c מספרים זרים אז c ו- ab מספרים זרים.

a ו- c זרים אז קיימים s ו- t שלמים עבורם

$$sa + tc = 1.$$

b ו- c זרים אז קיימים \bar{s} ו- \bar{t} שלמים עבורם

$$\bar{s}b + \bar{t}c = 1.$$

לכן

$$\begin{aligned} (sa + tc)(\bar{s}b + \bar{t}c) &= 1 \\ \Rightarrow s\bar{s}(ab) + (t\bar{s}b + t\bar{t}c + s\bar{t}a)c &= 1 \end{aligned}$$

ז"א קיימים שלמים x, y עבורם $x(ab) + yc = 1$ לכן ab ו- c זרים.

(ו) אם a, b שלמים אז קיימים שלמים s ו- t עבורם $sa + tb = d$ כאשר $d = \gcd(a, b)$. מכאן

$$\begin{aligned} sa + tb &= d \\ s(a + cb) + tb &= d + scb \\ s(a + cb) + tb - scb &= d \\ s(a + cb) + (t - sc)b &= d \end{aligned}$$

לכן קיימים שלמים $x = s$ ו- $y = t - cb$ עבורם

$$x(a + cb) + yb = d$$

ולכן $\gcd(a + cb, b) = d = \gcd(a, b)$.

שאלה 8 נניח כי $ab \equiv ac \pmod{m}$.

$$ab \equiv ac \pmod{m} \Rightarrow ab = ac + qm \Rightarrow ab - ac = qm \Rightarrow a(b - c) = qm.$$

מכאן $qm \mid a$.

a, m זרים לכן $a \nmid m$ לכן $a \mid q$ ז"א $\exists k$ שלם עבורו $q = ak$. לפיכך

$$a(b - c) = qm \Rightarrow a(b - c) = akm \Rightarrow b - c = km \Rightarrow b = c + km \Rightarrow b \equiv c \pmod{m}.$$

נניח כי $b \equiv c \pmod{m}$ אז

$$b = qm + c \Rightarrow ab = aqm + ac \Rightarrow ab \equiv ac \pmod{m}.$$

שאלה 9 נניח כי $ab \equiv ac \pmod{m}$ אז

$$ab = ac + qm \Rightarrow ab - ac = qm \Rightarrow m \mid a(b - c) \Rightarrow \frac{m}{\gcd(a, m)} \mid \frac{a}{\gcd(a, m)}(b - c).$$

מכיוון ש- $\frac{a}{\gcd(a, m)}$ ו- $\frac{m}{\gcd(a, m)}$ זרים, אז

$$\frac{m}{\gcd(a, m)} \mid (b - c).$$

לכן

$$b \equiv c \pmod{\left(\frac{m}{\gcd(a, m)}\right)}.$$

שאלה 10

$$a = 285, b = 89$$

$$\begin{aligned} r_0 &= a = 285, & r_1 &= b = 89, \\ s_0 &= 1, & s_1 &= 0, \\ t_0 &= 0, & t_1 &= 1. \end{aligned}$$

$q_1 = 3$	$t_2 = 0 - 3 \cdot 1 = -3$	$s_2 = 1 - 3 \cdot 0 = 1$	$r_2 = 285 - 3 \cdot 89 = 18$	שלב $k = 1$:
$q_2 = 4$	$t_3 = 1 - 4 \cdot (-3) = 13$	$s_3 = 0 - 4 \cdot 1 = -4$	$r_3 = 89 - 4 \cdot 18 = 17$	שלב $k = 2$:
$q_3 = 1$	$t_4 = -3 - 1 \cdot (13) = -16$	$s_4 = 1 - 1 \cdot (-4) = 5$	$r_4 = 18 - 1 \cdot 17 = 1$	שלב $k = 3$:
$q_4 = 17$	$t_5 = 13 - 17 \cdot (-16) = 285$	$s_5 = -4 - 17 \cdot 5 = -89$	$r_5 = 17 - 17 \cdot 1 = 0$	שלב $k = 4$:

$$\gcd(a, b) = r_4 = 1, \quad s = s_4 = 5, \quad t = t_4 = -16.$$

$$ta + sb = 5(285) - 16(89) = 1.$$



שאלה 11 $a \mid bc \exists$ שלם q עבורו

$$bc = qa \quad (\#1)$$

$$\gcd(a, b) = 1 \text{ לכן } \exists x, y \text{ שלמים עבורם } xa + yb = 1.$$

מכאן

$$b = \frac{1 - xa}{y} \quad (\#2)$$

על די הצבה של (#2) ב- (#1) נקבל

$$\left(\frac{1 - xa}{y} \right) c = qa$$

$$(1 - xa)c = qay$$

$$c - xac = qay$$

$$c = qay + xac$$

$$c = a(xc + qy) \quad .$$

לכן $a \mid c$

שאלה 12

(א) לפי משפט בזו, מכיוון ש- a, b זרים אז קיימים שלמים s, t עבורם

$$sa + tb = 1 \quad .$$

נקח את $\text{mod } b$ של הצד שמאל והצד ימין ונקבל

$$(sa + tb) \text{ mod } b = 1 \text{ mod } b \Rightarrow sa \text{ mod } b = 1 \text{ mod } b \Rightarrow sa \equiv 1 \text{ mod } b \quad .$$

(ב) נוכיח את הטענה דרך השלילה. נניח $\exists c$ שלם עבורו $ac \equiv 1 \text{ mod } b$.

$$\text{ז"א } \exists q \text{ שלם עבורו } ac = qb + 1.$$

מכאן

$$ac - qb = 1 \Rightarrow ac + (-q)b = 1$$

עכשיו a, b אינם זרים אז קיים מחלק משותף $d \neq 1$ כך ש- a ו- b חלקים ב- d .

$$\text{ז"א } d \mid (ac + (-q)b) \text{ לכן } d \mid 1.$$

סתירה!

שאלה 13

$$(א) \quad a \equiv b \pmod{m} \text{ אז } \exists q \text{ שלם עבורו } a = qm + b$$

מכאן

$$a + c = qm + b + c \Rightarrow a + c \equiv b + c \pmod{m}.$$

$$(ב) \quad a \equiv b \pmod{m} \text{ אז } \exists q \text{ שלם עבורו } a = qm + b$$

$$c \equiv d \pmod{m} \text{ אז } \exists q' \text{ שלם עבורו } c = q'm + d$$

מכאן

$$ac = (mq + b)(q'm + d) = qq'm^2 + bq'm + dqm + bd = (qq'm + bq' + dq)m + bd.$$

$$\text{לכן } \exists \bar{q} = qq'm + bq' + dq \text{ כך ש-}$$

$$ac = \bar{q}m + bd$$

$$\text{לפיכך } ac \equiv bd \pmod{m}$$

(ג) אינדוקציה על n .

שאלה 14

$$1 \cdot 7 = 7 \equiv 7 \pmod{20},$$

$$2 \cdot 7 = 14 \equiv 14 \pmod{20},$$

$$3 \cdot 7 = 21 \equiv 1 \pmod{20}.$$

$$\text{לכן } 7^{-1} \equiv 3 \pmod{20}.$$

שאלה 15

$$a = 285, b = 89$$

$$r_0 = a = 285, \quad r_1 = b = 89,$$

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 0,$$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 1.$$

$q_1 = 3$	$t_2 = 0 - 3 \cdot 1 = -3$	$s_2 = 1 - 3 \cdot 0 = 1$	$r_2 = 285 - 3 \cdot 89 = 18$	שלב $k = 1$:
$q_2 = 4$	$t_3 = 1 - 4 \cdot (-3) = 13$	$s_3 = 0 - 4 \cdot 1 = -4$	$r_3 = 89 - 4 \cdot 18 = 17$	שלב $k = 2$:
$q_3 = 1$	$t_4 = -3 - 1 \cdot (13) = -16$	$s_4 = 1 - 1 \cdot (-4) = 5$	$r_4 = 18 - 1 \cdot 17 = 1$	שלב $k = 3$:
$q_4 = 17$	$t_5 = 13 - 17 \cdot (-16) = 285$	$s_5 = -4 - 17 \cdot 5 = -89$	$r_5 = 17 - 17 \cdot 1 = 0$	שלב $k = 4$:

$$\gcd(a, b) = r_4 = 1, \quad s = s_4 = 5, \quad t = t_4 = -16.$$

$$ta + sb = 5(289) - 16(85) = 1.$$



שאלה 16 $a \mid bc$ לכן \exists שלם q עבורו

$$bc = qa \quad (\#1)$$

$$\gcd(a, b) = 1 \text{ לכן } \exists x, y \text{ שלמים עבורם } xa + yb = 1$$

מכאן

$$b = \frac{1 - xa}{y} \quad (\#2)$$

על די הצבה של (#2) ב- (#1) נקבל

$$\left(\frac{1 - xa}{y} \right) c = qa$$

$$(1 - xa)c = qay$$

$$c - xac = qay$$

$$c = qay + xac$$

$$c = a(xc + qy) \quad .$$

לכן $a \mid c$

שאלה 17

(א) לפי משפט בזו, מכיוון ש- a, b זרים אז קיימים שלמים s, t עבורם

$$sa + tb = 1 \quad .$$

נקח את $\text{mod } b$ של הצד שמאל והצד ימין ונקבל

$$(sa + tb) \text{ mod } b = 1 \text{ mod } b \Rightarrow sa \text{ mod } b = 1 \text{ mod } b \Rightarrow sa \equiv 1 \text{ mod } b \quad .$$

(ב) נוכיח את הטענה דרך השלילה. נניח $\exists c$ שלם עבורו $ac \equiv 1 \text{ mod } b$.

$$\text{ז"א } \exists q \text{ שלם עבורו } ac = qb + 1$$

מכאן

$$ac - qb = 1 \Rightarrow ac + (-q)b = 1$$

עכשיו a, b אינם זרים אז קיים מחלק משותף $d \neq 1$ כך ש- $a \mid d$ ו- $b \mid d$.

$$\text{ז"א } d \mid (ac + (-q)b) \text{ לכן } d \mid 1$$

סתירה!

שאלה 18

(א) $a \equiv b \pmod{m}$ אז $\exists q$ שלם עבורו $a = qm + b$.

מכאן

$$a + c = qm + b + c \Rightarrow a + c \equiv b + c \pmod{m}.$$

(ב) $a \equiv b \pmod{m}$ אז $\exists q$ שלם עבורו $a = qm + b$.

$c \equiv d \pmod{m}$ אז $\exists q'$ שלם עבורו $c = q'm + d$.

מכאן

$$ac = (qm + b)(q'm + d) = qq'm^2 + bq'm + dqm + bd = (qq'm + bq' + dq)m + bd.$$

לכן $\exists \bar{q} = qq'm + bq' + dq$ כך ש-

$$ac = \bar{q}m + bd$$

לפיכך $ac \equiv bd \pmod{m}$.

(ג) אינדוקציה על n .

שאלה 19

(א) נניח כי m מספר ריבועי. אזי קיים שלם n עבורו $m = n^2$. נניח כי הפירוק לראשוניים של n הוא

$$n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}.$$

אזי

$$m = n^2 = (p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k})^2 = p_1^{2e_1} \dots p_k^{2e_k}.$$

נניח כי בפירוק לראשוניים של m כל מספר ראשוני מופיע עם חזקה זוגית. אזי

$$m = p_1^{f_1} \dots p_k^{f_k}$$

כאשר לכל חזקה f_i קיים שלם e_i כך ש: $f_i = 2e_i$. לכן

$$m = p_1^{2e_1} \dots p_k^{2e_k} = (p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k})^2 = n^2$$

כאשר n הוא השלם $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$.

(ב)

שאלה 20

(א) אמת

(ב) שקר

- (ג) אמת
(ד) אמת
(ה) שקר
(ו) אמת
(ז) אמת
(ח) אמת
(ט) אמת
(י) שקר.

שאלה 21

- (א) 0
(ב) 5
(ג) 4
(ד) 5
(ה) 2
(ו) 1
(ז) 1
(ח) 0
(ט) 2
(י) 1

שאלה 22

- (א) 4
(ב) 8
(ג) 1
(ד) 22

14 (ה)

שאלה 23

(א) $a \equiv c \pmod{n}$ אז קיים q עבורו $a = qn + c$. נכפיל ב- u ונקבל

$$ua = uqn + uc \Rightarrow ua = Qn + uc$$

כאשר $Q = uq$. הוכחנו שקיים Q עבורו $ua = Qn + uc$ ולכן $ua \equiv uc \pmod{n}$.

בנוסף זה נתון לנו ש- $b \equiv d \pmod{n}$, לכן באותו דרך אפשר להוכיח ש- $vb \equiv vd \pmod{n}$. לכן לפי התכונת חיבוריות של יחס מודולרית אנחנו נקבל כי

$$ua + vb \equiv uc + vd \pmod{n}.$$

(ב)

(ג) $n = 4, c = 2, a = 3, b = 1$. $ac = 6 \equiv 2 \pmod{4}$ ו- $bc = 2 \equiv 2 \pmod{4}$, אך $3 \not\equiv 1 \pmod{4}$.

שאלה 24

$$x + y \pmod{12} \equiv 13 \pmod{12} \equiv 1 \pmod{12} \quad (1) \quad (א)$$

$$x - y \pmod{12} \equiv -3 \pmod{12} \equiv 15 \pmod{12} \quad (2)$$

$$xy \pmod{12} \equiv 40 \pmod{12} \equiv 4 \pmod{12} \quad (3)$$

$$x^2 \equiv 1 \pmod{12} \text{ ו- } x \equiv 5 \pmod{12} \text{ ולכן} \quad (4)$$

$$x^3 \equiv (1)(5) \pmod{12} \equiv 5 \pmod{12}.$$

$$y \pmod{12} = 8 \text{ לפיכך}$$

$$x^3y \pmod{12} = 40 \pmod{12} \equiv 4 \pmod{12}.$$