

עבודה עצמית 7 נגזרות חלקיות וגבולות

שאלה 1

(א) הסבירו: מהו קו גובה של פונקציה $z = f(x, y)$? ציירו את קווי הגובה של הפונקציות:

$$z = 2x + y \quad (1)$$

$$z = \frac{x}{y} \quad (2)$$

$$z = x^2 + y^2 - 2x \quad (3)$$

$$z = \ln \left(\sqrt{\frac{y}{x}} \right) \quad (4)$$

$$z = \sqrt{\frac{x}{y}} \quad (5)$$

(ב) הסבירו: מהו משטח רמה של פונקציה $u = f(x, y, z)$. מהם משטחי הרמה של הפונקציות:

$$u = x + y + 3z \quad (1)$$

$$u = x^2 + y^2 + z^2 \quad (2)$$

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 2y + 3 \quad (3)$$

$$u = x^2 - y^2 - z^2 \quad (4)$$

שאלה 2

חשבו את הגבול של פונקציה או הוכח שהוא לא קיים:

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} \quad (א)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{x - y}{x + y} \quad (ב)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0, x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x - y} \quad (ג)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^3 + y} \quad (ד)$$

שאלה 3

מצאו את כל הנגזרות החלקיות של הפונקציות הבאות:

$$z = x^2 + 2y^2 - 3xy - 4x + 2y + 5 \quad (א)$$

$$z = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} \quad (ב)$$

$$z = e^{xy(x^2+y^2)} \quad (ג)$$

$$u = 2y\sqrt{x} + 3y^2\sqrt[3]{z^2} \quad (ד)$$

$$u = e^{x/y} + e^{-z/y} \quad (ה)$$

$$u = e^{xyz} \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right) \quad (ו)$$

שאלה 4 א. מצאו את הדיפרנציאל השלם של הפונקציה הבאה:

$$z = \ln(x^2 + y^2) \quad (1) \quad (א)$$

$$z = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{x}\right)\right) \quad (2)$$

$$u = e^{xyz} \quad (3)$$

(ב) הראו כי

$$z = f(x)g(y) \text{ מקיימת את המשוואה} \quad (1)$$

$$z \cdot z''_{xy} = z'_x \cdot z'_y$$

$$z = g(x) + yg'(x) \text{ מקיימת את המשוואה} \quad (2)$$

$$z'_x = z'_y + y \cdot z''_{xy}$$

$$z = ye^{x^2-y^2} \text{ מקיימת את המשוואה} \quad (3)$$

$$\frac{1}{x} \cdot z'_x + \frac{1}{y} \cdot z'_y = \frac{z}{y^2}$$

שאלה 5

(א) רשמו את משוואות המישור המשיק והנורמל למשטח

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y \text{ בנקודה } M(1, 1, 1) \quad (1)$$

$$z = 1 + x^2 + y^2 \text{ בנקודה } M(1, 1, 3) \quad (2)$$

$$z = \sin x \cdot \cos y \text{ בנקודה } M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right) \quad (3)$$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21 \text{ המקבילים למישור } x + 4y + 6z = 1 \quad (ב)$$

פתרונות

שאלה 1

$$(א) \quad y = c - \frac{2x}{x} \quad (1)$$

$$(2) \quad y = \frac{c}{x}$$

$$(3) \quad (x-1)^2 + y^2 = c+1$$

$$(4) \quad y = \frac{cx}{x}$$

$$(5) \quad y = \frac{x}{c^2}$$

$$(ב) \quad (1) \quad x + y + 3z = c$$

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 = c$$

$$(3) \quad x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = c-1$$

$$(4) \quad x^2 = y^2 + z^2 + c \quad \text{חרוט אליפטי.}$$

שאלה 2 חשבו את הגבול של פונקציה או הוכח שהוא לא קיים:

$$(א) \quad 4$$

$$(ב) \quad \text{לא קיים.}$$

$$(ג) \quad 0$$

$$(ד) \quad \text{לא קיים.}$$

שאלה 3 מצאו את כל הנגזרות החלקיות של הפונקציות הבאות:

$$(א) \quad z'_x = 2x - 3y - 4$$

$$z'_y = 4y - 3x + 2$$

$$(ב) \quad z'_x = \frac{2x}{y^2} - \frac{1}{y}$$

$$z'_y = \frac{-2x^2}{y^3} + \frac{x}{y^2}$$

$$(ג) \quad z'_x = (3x^2y + y^3) e^{xy(x^2+y^2)}$$

$$z'_y = (x^3 + 3xy^2) e^{xy(x^2+y^2)}$$

$$(ד) \quad u'_x = \frac{y}{2\sqrt{x}}$$

$$u'_x = 2\sqrt{x} + 6yz^{2/3}$$

$$u'_z = \frac{2y^2}{\sqrt[3]{z}}$$

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{1}{y} e^{x/y} & (ה) \\ u'_y &= \frac{-x}{y^2} e^{x/y} - \frac{z}{y^2} e^{z/y} \\ u'_z &= \frac{1}{y} e^{z/y} \end{aligned}$$

$$u'_x = yz e^{xyz} \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2} e^{xyz} \cdot \cos\left(\frac{y}{x}\right) \quad (ו)$$

שאלה 4

$$dz = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right) dy \quad (1) \quad (א)$$

$$dz = \left(\frac{-2y}{x^2 \sin\left(\frac{2y}{x}\right)}\right) dx + \left(\frac{2}{x \sin\left(\frac{2y}{x}\right)}\right) dy \quad (2)$$

$$du = e^{xyz} (yz dx + xz dy + xy dz) \quad (3)$$

שאלה 5

$$\begin{aligned} (1) \quad (א) \quad & x - 2y + z = 0 \text{ משוואת המישור המשיקי:} \\ & \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1} \text{ משוואת הנורמל:} \\ (2) \quad & 2x + 2y - z - 1 = 0 \text{ משוואת המישור המשיקי:} \\ & \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1} \text{ משוואת הנורמל:} \\ (3) \quad & 2x - z - 2 = 0 \text{ משוואת המישור המשיקי:} \\ & \frac{x-1}{2} = \frac{z}{-1}, y = 0 \text{ משוואת הנורמל:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ב) \quad & x - y + 2z + 1 = 0 \text{ משוואת המישור המשיקי:} \\ & \frac{x-\pi/4}{1/2} = \frac{y-\pi/4}{-1/2} = \frac{z-1/2}{-1} \text{ משוואת הנורמל:} \end{aligned}$$