

עבודה עצמית 8

שאלה 1 לכל אחת מהקבוצות הבאות קבע האם היא ת"ל או בת"ל:

(א) $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 11)\}$

(ב) $\{(2, 1, -1), (1, -2, 1), (7, -4, 1)\}$

(ג) $\{(2, 1, -1), (1, -2, 1)\}$

לכל אחת מהקבוצות התלויות לינארית שמצאות, רשמו צרוף לינארי לא טריוויאלי של איברי הקבוצה הנותן את וקטור האפס.

שאלה 2

תן דוגמא לשתי קבוצות S, T המוכלות ב- \mathbb{R}^4 כך ש- $S \subseteq T$ ומתקיים:

(א) T בת"ל ו- S בת"ל.

(ב) T ת"ל ו- S בת"ל.

(ג) T ת"ל ו- S בת"ל.

שאלה 3

תהינה $X \subseteq Y$ קבוצות של וקטורים ב- \mathbb{R}^n . הוכח או הפרך:

(א) אם X בת"ל אז Y בת"ל.

(ב) אם Y בת"ל אז X בת"ל.

(ג) אם $0 \in X$ אז X ת"ל.

(ד) אם מספר הוקטורים ב- X קטן מ- n אז X בת"ל.

שאלה 4

נתונה הקבוצה

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} \right\}$$

(א) מצאו לאילו ערכי a הקבוצה היא בת"ל.

(ב) מצאו לאילו ערכי a הקבוצה פורשת את \mathbb{R}^3 .

(ג) לכל אחד מערכי a עבורם הקבוצה אינה בת"ל, בטאו את אחד הוקטורים כצ"ל של שני האחרים.

(ד) נתונה הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ a+4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ a-5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ a^2 + \sqrt{5} \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8a \\ 9a-4 \end{pmatrix} \right\}$$

מצאו לאילו ערכי a הקבוצה היא בת"ל.

שאלה 5 תהי $\{v_1, v_2, v_3\}$ קבוצה בת"ל ב- \mathbb{R}^n . הוכח:

(א) הקבוצה $\{v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3, 2v_1 + 3v_2\}$ היא בת"ל.

(ב) הקבוצה $\{v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3, 2v_1 + 3v_2 + 3v_3\}$ היא ת"ל.

שאלה 6 תהי $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ קבוצת בת"ל ב- \mathbb{R}^n . קבע לאילו ערכים של k מתקיים:

הקבוצה

$$T = \{v_1 + v_3 + kv_4, v_1 + v_2 + 2v_3 + v_4, 2v_1 + 2v_3 - v_4, kv_1 - v_2 + kv_3 - 2v_4\}$$

בת"ל. לכל אחד מערכי k עבורו הקבוצה T היא ת"ל, רשמו את אחד הוקטורים ב- T כצרוף לינארי של שאר הוקטורים ב- T .

שאלה 7 לכל אחת מהקבוצות הבאות קבע האם היא תלויה לינארית. אם כן, רשום צ"ל לא טריויאלי של איברי הקבוצה הנותן את וקטור האפס.

(א)

$$\{2t^3 + t^2 + t + 1, 3t^3 + 3t + 2, t^3 + 2t^2 - 2t + 1\}$$

(ב)

$$\{3t^3 + 8t^2 - 8t + 7, t^3 + 4t^2 - 2t + 3, t^3 + 6t^2 - t + 4\}$$

(ג)

$$\{t^3 + 3t^2 + 6t + 3, -3t^3 + 2t - 1, t^3 + t^2 - t\}$$

(ד)

$$\{2t^3 + t^2 + t + 1, 3t^3 + 2, t, 0\}$$

שאלה 8 לכל אחת מהקבוצות הבאות קבע האם היא תלויה לינארית. אם כן, רשום צ"ל לא טריויאלי של איברי הקבוצה הנותן את וקטור האפס.

(א)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

(ג)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

שאלה 9 לאילו ערכי k הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & k \end{pmatrix} \right\}$ היא ת"ל?

שאלה 10 נסמן $g(t) = e^t + 5e^{2t-1} - 3e^{3t-1}$

$$T = \{f_1 = e^{t+1}, f_2(t) = e^{2t-1}, f_3(t) = e^{3t}\}.$$

האחרים $g(t) \in \text{span}(T)$? אם כן, הציגו אותו כצ"ל של איברי T . הסבחרו מדוע $T \cup \{g(t)\}$ ת"ל?

שאלה 11 יהי V מרחב ווקטורי, $T : V \rightarrow V$ טרנספורמציה ליניארית. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענה הבאה :

לכל וקטורים v_1, \dots, v_n כך ש $T(v_1), \dots, T(v_n)$ בת"ל, גם v_1, \dots, v_n בהכרח בת"ל.

שאלה 12 נתונות הקבוצות הבאות במרחב הווקטורי של כל הפונקציות מ- \mathbb{R} ל- \mathbb{R} . הראו שכל אחת מהקבוצות היא בת"ל.

(א)

$$\{f_1 = \sin t, f_2(t) = \cos t, f_3(t) = t\}.$$

(ב)

$$\{f_1 = 1, f_2(t) = t + 1, f_3(t) = e^{t+1}\}.$$

(ג)

$$\{f_1 = e^{t+1}, f_2(t) = e^{2t+1}, f_3(t) = e^{3t+1}\}.$$

שאלה 13 נסמן ב $F(\mathbb{R})$ את המרחב הווקטורי של כל הפונקציות מ- \mathbb{R} ל \mathbb{R} .

(א)

תן דוגמה של שלושה ווקטורים תלויים ליניארית ב $F(\mathbb{R})$.

(ב)

תהינה $f_1(x), \dots, f_n(x)$ פונקציות גזירות. הוכח או הפרך:

(1) אם הקבוצה $\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ ת"ל אז גם הקבוצה $\{f'_1(x), \dots, f'_n(x)\}$ ת"ל.

(2) אם הקבוצה $\{f'_1(x), \dots, f'_n(x)\}$ ת"ל אז גם הקבוצה $\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ ת"ל.

שאלה 14 יהי V מרחב וקטורי, $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subseteq V$, $B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subseteq V$, $A \cap B = \emptyset$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם קבוצת וקטורים $A \cup B$ היא בלתי תלויה לינארית, אז $\text{span}(A) \cap \text{span}(B) = \{\bar{0}\}$.

(ב) אם $\text{span}(A) \cap \text{span}(B) = \{\bar{0}\}$ אז קבוצת וקטורים $A \cup B$ היא בלתי תלויה לינארית.

שאלה 15

(א) תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times 2}$ כאשר F שדה. נתון שקיימים $v_1, v_2 \in \mathbb{F}^2$ כך ש $Av_1 = Av_2 = 0$ וכן v_1, v_2 בת"ל. הוכיחו ש- $A = 0$.

(ב) תהי A מטריצה ריבועית מעל שדה \mathbb{F} המקיימת את המשוואה

$$A^2 + 5A + I = 0.$$

הוכיחו ש- A הפיכה ומצאו את A^{-1} .

שאלה 16

תהי

$$S = \{v_1 = 1 + 2x + 3x^2, \quad v_2 = 2 + 5x + 2x^2 + 11x^3, \quad v_3 = 1 + 4x - 5x^2 + 10x^3\}$$

קבוצת וקטורים במרחב וקטורי $\mathbb{R}[x]$.

(א) האם S תלויה לינארית? אם כן, מצאו צירוף לינארי לא טריוויאלי של וקטורי S הנותן את וקטור האפס.

(ב) האם וקטור $u = -x + 4x^2 - 3x^3$ שייך לפרישה הלינארית של v_1, v_2, v_3 ? אם כן, בטאו אותו כצירוף לינארי של וקטורי S . אם לא, נמקו מדוע.

פתרונות

שאלה 1

(א)

שיטה 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}, \quad \text{Det}(A) = -6,$$

$\text{Det}(A) \neq 0$ לכן הוקטורים בת"ל.

שיטה 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות לכן הוקטורים בת"ל.

(ב) שיטה 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Det}(A) = 0$$

לכן הוקטורים ת"ל.

שיטה 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

יש שתי עמודות מובילות לכן הוקטורים ת"ל. $k_2 = -3, k_2 = -3k_3, k_1 = -2k_3$.

$$-2(1, 2, -1) - 3(1, -2, 1) + (7, -4, 1) = \bar{0}.$$

(ג) שיטה 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Det}(A^t A) = 35,$$

$\text{Det}(A^t A) \neq 0$ לכן הקבוצה בת"ל.

שיטה 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

שתי עמודות מובילות, לכן הוקטורים בת"ל.

שאלה 2

(א)

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(ב)

$$T = \{\bar{0}\}, \quad S = \{\bar{0}\}$$

(ג)

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

שאלה 3

(א) נתון: $X, Y \in \mathbb{R}^n, X \subseteq Y$.

טענה: X בת"ל $\Leftarrow Y$ בת"ל.

דוגמה נגדית:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2, \text{ בת"ל}, \quad Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2, \text{ ת"ל}.$$

(ב) נתון: $X \subseteq Y, Y$ בת"ל.

צריך להוכיח: X בת"ל.

הוכחה:

נניח מדרך השלילה, $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ ת"ל. לכן קיימים סקלרים k_1, \dots, k_n שלא כולם אפסים כך ש- $k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = \bar{0}$. $v_1, \dots, v_n \in Y \Leftarrow X \subseteq Y$. מכאן נובע ש Y ת"ל. סתירה.

נתון: $\bar{0} \in X, X \subseteq Y$ (ג)

צ"ל: X ת"ל

הוכחה:

לכל $v_1, \dots, v_n \in X$ מתקיים

$$0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n + 1 \cdot \bar{0} = \bar{0}.$$

לכן X ת"ל.

□

טענה: מספר הוקטורים ב- X קטן מ- $n \Leftarrow X$ בת"ל. (ד)

דוגמה נגדית:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^2 \text{ ת"ל.}$$

שאלה 4

(א) הקבוצה בת"ל אם כל העמודות מובילות במטריצה מדורגת:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

עבור $a \neq 1$ יש שלוש עמודות מובילות, לכן u_3, u_2, u_1 בת"ל.

(ב)

(ג) $a = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$k_2 \in \mathbb{R}, k_3 = 0, k_1 = -k_2 \\ k_1 = -1 \Leftarrow k_2 = 1$$

$$-u_1 + 2u_2 + 0 \cdot u_3 = \bar{0}$$

□

(ד) אי אפשר שהקבוצה של 4 וקטורים השייכים ל \mathbb{R}^3 תהיה בת"ל: יש בקבוצה יותר וקטורים מן המימד של המרחב: $\text{Dim}(\mathbb{R}^3) = 3$.

שאלה 5

(א) שיטה 1:

הקבוצה $S = \{v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3, 2v_1 + 3v_2\}$ בת"ל אם למטריצה $A = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 + v_3 & v_2 + v_3 & 2v_1 + 3v_2 \end{pmatrix}$ יש דטרמיננטה שונה מ-0.

$$A = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 + v_3 & v_2 + v_3 & 2v_1 + 3v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ואז

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -3 \cdot \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.$$

$\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \neq 0$ בגלל שהקבוצה $\{v_1, v_2, v_3\}$ בת"ל. לכן $\det(A) \neq 0$ והקבוצה S בת"ל.

שיטה 2:

$$\begin{aligned} k_1(v_1 + v_2 + v_3) + k_2(v_2 + v_3) + k_3(2v_1 + 3v_2) &= \bar{0} \\ (k_1 + 2k_3)v_1 + (k_1 + k_2 + 3k_3)v_2 + (k_1 + k_2)v_3 &= \bar{0} \end{aligned}$$

v_1, v_2, v_3 בת"ל לכן

$$\left. \begin{aligned} k_1 + 2k_3 &= 0 \\ k_1 + k_2 + 3k_3 &= 0 \\ k_1 + k_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

למערכת פתרון יחיד: $k_3 = 0, k_2 = 0, k_1 = 0$ לכן הוקטורים בת"ל.

(ב) שיטה 1:

הקבוצה $S = \{v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3, 2v_1 + 3v_2 + 3v_3\}$ בת"ל אם למטריצה $A = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 + v_3 & v_2 + v_3 & 2v_1 + 3v_2 + 3v_3 \end{pmatrix}$ יש דטרמיננטה שונה מ-0.

$$A = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 + v_3 & v_2 + v_3 & 2v_1 + 3v_2 + 3v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ואז

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \det(v_1 \ v_2 \ v_3) = 0 \cdot \det(v_1 \ v_2 \ v_3) = 0.$$

לכן הקבוצה S ת"ל.

שיטה 2:

$$k_1(v_1 + v_2 + v_3) + k_2(v_2 + v_3) + k_3(2v_1 + 3v_2 + 3v_3) = \bar{0}$$

$$(k_1 + 2k_3)v_1 + (k_1 + k_2 + 3k_3)v_2 + (k_1 + k_2 + 3k_3)v_3 = \bar{0}$$

v_1, v_2, v_3 בת"ל לכן

$$\left. \begin{array}{l} k_1 + 2k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 + 3k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 + 3k_3 = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$k_3 \in \mathbb{R}, k_2 = -k_3, k_1 = -2k_3$
למערכת יש פתרון לא טריוויאלי, לכן הוקטורים ת"ל.

שאלה 6

שיטה 1

הקבוצה T בת"ל אס"ס

$$x(v_1 + v_3 + kv_4) + y(v_1 + v_2 + 2v_3 + v_4) + z(v_1 + 2v_3 - v_4) + w(kv_1 - v_2 + kv_3 - 2v_4) = 0$$

מתקיימת רק אם $(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$:

$$(x + y + z + kw)v_1 + (y + w)v_2 + (x + 2y + 2z + k)v_3 + (kx + y - z - 2w)v_4 = 0$$

תהי $A = (v_1 + v_3 + kv_4 \ v_1 + v_2 + 2v_3 + v_4 \ 2v_1 + 2v_3 - v_4 \ kv_1 - v_2 + kv_3 - 2v_4)$ ניתן לכתוב A בצורה

$$A = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & k \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & k \\ k & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$T \text{ בת"ל אס"ס } \neq 0 \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & k \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & k \\ k & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & k \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & k \\ k & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & k \\ k & 1 & -1 & -2k \end{vmatrix} \\ &= (-1 - 2k) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & k \end{vmatrix} \\ &= (-1 - 2k) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1 - 2k) \cdot (-1) \\ &= 1 + 2k. \end{aligned}$$

ולכן הקבוצה בת"ל אס $k \neq -\frac{1}{2}$.

שיטה 2

$$x(v_1 + v_3 + kv_4) + y(v_1 + v_2 + 2v_3 + v_4) + z(v_1 + 2v_3 - v_4) + w(kv_1 - v_2 + kv_3 - 2v_4) = 0$$

$$(x + y + z + kw)v_1 + (y + w)v_2 + (x + 2y + 2z + k)v_3 + (kx + y - z - 2w)v_4 = 0 = \bar{0}$$

v_1, v_2, v_3, v_4 בת"ל לכן

$$\left. \begin{aligned} x + y + z + kw &= 0 \\ y + w &= 0 \\ x + 2y + 2z + kw &= 0 \\ kx + y - z - 2w &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & k \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & k \\ k & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות אס $k = -\frac{1}{2}$.

שאלה 7

(א)

$$u_1 = 2t^3 + t^2 + t + 1, \quad u_2 = 3t^3 + 3t + 2, \quad u_3 = t^3 + 2t^2 - 2t + 1$$

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \bar{0}$$

$$k_1(2t^3 + t^2 + t + 1) + k_2(3t^3 + 3t + 2) + k_3(t^3 + 2t^2 - 2t + 1) = \bar{0}$$

$$\left. \begin{aligned} 2k_1 + 3k_2 + k_3 &= 0 \\ k_1 + 2k_3 &= 0 \\ k_1 + 3k_2 - 2k_3 &= 0 \\ k_1 + 2k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_1 - 2R_2 \\ R_3 \rightarrow R_1 - 2R_3 \\ R_4 \rightarrow R_1 - 2R_4}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 עמודות מובילות, לכן u_3, u_2, u_1 בת"ל.

(ב)

$$u_1 = 3t^3 + 8t^2 - 8t + 7, \quad u_2 = t^3 + 4t^2 - 2t + 3, \quad u_3 = t^3 + 6t^2 - t + 4$$

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \bar{0}$$

$$k_1(3t^3 + 8t^2 - 8t + 7) + k_2(t^3 + 4t^2 - 2t + 3) + k_3(t^3 + 6t^2 - t + 4) = \bar{0}$$

$$\left. \begin{aligned} 3k_1 + k_2 + k_3 &= 0 \\ 8k_1 + 4k_2 + 6k_3 &= 0 \\ -8k_1 - 2k_2 - 1k_3 &= 0 \\ 7k_1 + 3k_2 + 4k_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 6 \\ -8 & -2 & -1 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow -8R_1 + 3R_2 \\ R_3 \rightarrow 8R_1 + 3R_3 \\ R_4 \rightarrow -7R_1 + 3R_4}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow -\frac{1}{6}R_1 \\ R_2 \rightarrow \frac{1}{2}R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k_1 = \frac{1}{2}k_2, \quad k_2 = -\frac{5}{2}k_3, \quad k_3 \in \mathbb{R}$$

u_3, u_2, u_1 ת"ל.

נציב $k_2 = -5, k_1 = 1 \Leftarrow k_3 = 2$.

$$u_1 - 5u_2 + 2u_3 = \bar{0}.$$

(ג)

$$u_1 = t^3 + 3t^2 + 6t + 3, \quad u_2 = -3t^3 + 2t - 1, \quad u_3 = t^3 + t^2 - t$$

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \bar{0}$$

$$k_1(t^3 + 3t^2 + 6t + 3) + k_2(-3t^3 + 2t - 1) + k_3(t^3 + t^2 - t) = \bar{0}$$

$$\left. \begin{aligned} k_1 + k_3 &= 0 \\ 3k_1 + k_3 &= 0 \\ 6k_1 + 2k_2 - k_3 &= 0 \\ 3k_1 - k_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow -3R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 6R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 20 & -7 \\ 0 & 8 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow 9R_3 - 20R_2 \\ R_4 \rightarrow 9R_4 - 8R_2}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן u_3, u_2, u_1 בת"ל.

(ד)

$$0 \cdot (2t^3 + t^2 + t + 1) + 0 \cdot (3t^3 + 2) + 0 \cdot t + 1 \cdot 0 = \bar{0}$$

לכן הוקטורים ת"ל.

שאלה 8

(א)

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

נרשום u_3, u_2, u_1 כוקטורים ב \mathbb{R}^4 ע"י איזומורפיזם:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

נדרג את המטריצה המורכבת מהוקטורים:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 10 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות לכן u_3, u_2, u_1 בת"ל.

(ב)

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן הוקטורים ת"ל.

ג

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad u_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\dim M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = 4$ לכן כל 5 וקטורים במרחב הזה הם ת"ל.
נמצא צירוף לינארי הלא טריוויאלי ששווה לוקטור האפס:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{25}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

$$k_1 = \frac{25}{4}k_5, \quad k_2 = -\frac{11}{4}, \quad k_3 = 2k_5, \quad k_4 = -\frac{7}{4}k_5, \quad k_5 \in \mathbb{R}.$$

$$25 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 11 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 9

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & k-4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{k \neq 4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & k-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow 4R_4 + (k-4)R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עבור $k \neq 4$ קיבלנו 3 עמודות מובילות ולכן הוקטורים בת"ל.

$$\underline{k = 4}$$

נקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות לכן הוקטורים בת"ל.
מסקנה: לא קיים k עבורו הוקטורין ת"ל.

שאלה 11

הטענה נכונה. הסבר:

נתון: $T : V \rightarrow V$ העתקה ליניארית. $T(v_1), \dots, T(v_n)$ בת"ל.

צריך להוכיח: v_1, \dots, v_n בת"ל.

הוכחה: נוכיח דרך השלילה. נניח כי v_1, \dots, v_n ת"ל. אז קיימים סקלרים k_1, \dots, k_n שכולם אפסים כך ש

$$k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = \bar{0}.$$

לכן

$$T(k_1 v_1 + \dots + k_n v_n) = T(\bar{0}) = \bar{0}$$

\Leftrightarrow

$$k_1 \cdot T(v_1) + \dots + k_n \cdot T(v_n) = \bar{0}$$

ז"א $T(v_1), \dots, T(v_n)$ בת"ל.

בסתירה לכך ש- $T(v_1), \dots, T(v_n)$ בת"ל.

$$g(t) = e^t + 5e^{2t-1} - 3e^{3t-1} \quad \textbf{שאלה 11}$$

$$T = \{f_1 = e^{t+1}, f_2(t) = e^{2t-1}, f_3(t) = e^{3t}.$$

$$g(t) = e \cdot e^t + 5 \cdot e^{2t-1} - \frac{3}{e} \cdot e^{3t} = e \cdot f_1(t) + 5 \cdot f_2(t) - \frac{3}{e} \cdot f_3(t).$$

לכן $g(t) = \text{span}(f_1, f_2, f_3)$. $T \cup \{g(t)\}$ ת"ל כי $g(t) - e \cdot f_1(t) + 5 \cdot f_2(t) - \frac{3}{e} \cdot f_3(t) = \bar{0}$.

שאלה 12

(א)

$$\{f_1 = \sin t, f_2(t) = \cos t, f_3(t) = t\}.$$

$$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) + k_3 f_3(t) = \bar{0}.$$

$$k_1 \sin t + k_2 \cos t + k_3 t = \bar{0}.$$

$$k_2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

$$\text{נציב } t = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + \frac{\pi}{2} k_3 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases} \text{ לכן הוקטורים בת"ל.}$$

(ב)

$$\{f_1 = 1, f_2(t) = t + 1, f_3(t) = e^{t+1}\}.$$

הקבוצה בת"ל עם הוורונסקיאן שונה מאפס לכל t :

$$W(t) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t+1 & e^{t+1} \\ 0 & 1 & e^{t+1} \\ 0 & 0 & e^{t+1} \end{vmatrix} = e^{t+1} \neq 0 \quad \forall t$$

ז"א $W(t) \neq 0$ לכל t ולכן הקבוצה בת"ל.

(ג)

$$\{f_1 = e^{t+1}, f_2(t) = e^{2t+1}, f_3(t) = e^{3t+1}\}.$$

הקבוצה בת"ל עם הוורונסקיאן שונה מאפס לכל t :

$$W(t) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{t+1} & e^{2t+1} & e^{3t+1} \\ e^{t+1} & 2e^{2t+1} & 3e^{3t+1} \\ e^{t+1} & 4e^{2t+1} & 9e^{3t+1} \end{vmatrix} = e^{6t+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2e^{6t+3} \neq 0 \quad \forall t$$

ז"א $W(t) \neq 0$ לכל t ולכן הקבוצה בת"ל.

שאלה 13

(א) $\{f_1(x) = x, f_2(x) = 2x\}$ ת"ל כי $2f_1 - f_2 = \bar{0}$.

(ב) (1)

נתון: f_1, \dots, f_n גזירות, f_1, \dots, f_n ת"ל.

צ"ל: f_1', \dots, f_n' ת"ל.

הוכחה: f_1, \dots, f_n ת"ל, לכן קיימים k_1, \dots, k_n שלא כלם אפסים כך ש

$$k_1 f_1 + \dots + k_n f_n = \bar{0}$$

$$(k_1 f_1 + \dots + k_n f_n)' = k_1 f_1' + \dots + k_n f_n' = \bar{0}$$

לכן f_1', \dots, f_n' ת"ל.

(2)

דוגמה נגדית: $f_1(x) = \frac{x^2}{2}, f_2(x) = x^2 + 1$

$$f_1'(x) = x, \quad f_2'(x) = 2x$$

f_1', f_2' ת"ל, כי $2f_1' - f_2' = \bar{0}$.
נוכיח כי f_1, f_2 בת"ל:

$$k_1 \frac{x^2}{2} + k_2(x^2 + 1) = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{k_1}{2} + k_2 \right) = 0$$

לכל $x \in \mathbb{R}$. $k_1 x^2 = 0 \Leftrightarrow k_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $k_1 = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ לכל $k_1 x^2 = 0$

שאלה 14

(א) אם קבוצת וקטורים $A \cup B$ היא בת"ל, אז $\text{span}(A) \cap \text{span}(B) = \{\bar{0}\}$.

הוכחה:

נתון: $A \subseteq V, B \subseteq V, A \cap B = \emptyset, A \cup B$ בת"ל.

צריך להוכיח: $\text{span}(A) \cap \text{span}(B) = \{\bar{0}\}$

הוכחה:

נוכיח דרך השלילה. נניח $A \cup B$ בת"ל וקיים $x \in \text{span}(A) \cap \text{span}(B)$ כך ש $x \neq \bar{0}$. אז

$$x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m$$

כך ש

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n - \beta_1 v_1 - \dots - \beta_m v_m = \bar{0}.$$

כיוון ש $A \cup B$ בת"ל, אז $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_m = 0$. אז $x = \bar{0}$. סתירה.

(ב) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\text{span}(A) \cap \text{span}(B) = \{\bar{0}\} \text{ ו } A \cap B = \emptyset$$

$$A \cup B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$A \cup B$ קבוצת תלויה לינארית.

שאלה 15

(א) תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times 2}$ כאשר F שדה. נתון שקיימים $v_1, v_2 \in \mathbb{F}^2$ כך ש $Av_1 = Av_2 = 0$ וכן v_1, v_2 בת"ל. הוכיחו ש- $A = 0$.

נתון: v_1, v_2 בת"ל, $Av_1 = \bar{0}, Av_2 = \bar{0}$.

צריך להוכיח: $A = 0$

הוכחה:

$Av_1 = \bar{0}$ ו- $Av_2 = \bar{0}$ יהיו $k_1, k_2 \in F$ סקלרים כך ש- $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$. אז

$$k_1 \cdot Av_1 + k_2 \cdot Av_2 = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad A \cdot (k_1 v_1 + k_2 v_2) = \bar{0}.$$

ז"א $A = 0$ או $k_1 v_1 + k_2 v_2 = 0$.

אם $k_1 v_1 + k_2 v_2 = 0$ אז קיים צירוף לינארי של v_1, v_2 השווה לאפס עם מקדמים שלא כולם אפסים. ואז v_1, v_2 ת"ל.

וזאת בסתירה לכך ש- v_1, v_2 בת"ל.

לכן $A = 0$.

(ב) נתון: $A^2 + 5A + I = 0$
לכן

$$A^2 + 5A = -I \quad \Rightarrow \quad A(A + 5I) = -I \quad \Rightarrow \quad |A| \cdot |A + 5I| = (-1)^n.$$

נניח כי A לא הפיכה $\Leftrightarrow |A| = 0$ ואז נקבל כי $0 = (-1)^n$. סתירה.

לכן A הפיכה.

$$-A(A + 5I) = I \Rightarrow A^{-1} = -(A + 5I).$$

שאלה 16 נסמן

$$p_1 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3, \quad p_2 = 2 + 5x + 2x^2 + 11x^3, \quad p_3 = 1 + 4x - 5x^2 + 10x^3.$$

(א)

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3) + \alpha_2 (2 + 5x + 2x^2 + 11x^3) + \alpha_3 (1 + 4x - 5x^2 + 10x^3) = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)1 + (2\alpha_2 + 5\alpha_2 + 4\alpha_3)x + (3\alpha_2 + 2\alpha_2 - 5\alpha_3)x^2 + (4\alpha_2 + 11\alpha_2 + 10\alpha_3)x^3 = 0$$

נקבל את המערכת

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$2\alpha_2 + 5\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0$$

$$3\alpha_2 + 2\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0$$

$$4\alpha_2 + 11\alpha_2 + 10\alpha_3 = 0.$$

נרשום את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 4R_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 + 4R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 3R_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

פתרון: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (3, -2, 1)\alpha_3, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. למערכת קיים פתרון לא טריוויאלי לכן הווקטורים ת"ל. נציב את הפתרון בצירוף הליניארי

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0 \xrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (3, -2, 1)\alpha_3} 3p_1 - 2p_2 + p_3 = 0.$$

ונקבל

(ב) במילים אחרות עלנו לבדוק האם $p_4 \in \text{span}\{p_1, p_2, p_3\}$. מסעיף הקודם מצאנו כי p_1, p_2 בת"ל אבל p_1, p_2, p_3 ת"ל, כלומר רק הווקטורים p_1, p_2 מהווים בסיס של התת מרחב (אשר מימדו שווה 2). לפי זה יספיק לבדוק האם $p_4 \in \text{span}\{p_1, p_2\}$ כלומר האם $\exists \beta_1, \beta_2$ המקיימים

$$\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 = p_4$$

$$\Rightarrow \beta_1 (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3) + \beta_2 (2 + 5x + 2x^2 + 11x^3) = -x + 4x^2 - 3x^3$$

$$\Rightarrow (\beta_1 + 2\beta_2)1 + (2\beta_1 + 5\beta_2)x + (3\beta_1 + 2\beta_2)x^2 + (4\beta_1 + 11\beta_2)x^3 = -x + 4x^2 - 3x^3$$

מכאן נקבל את המערכת הבאה:

$$\begin{aligned}\beta_1 + 2\beta_2 &= 0 \\ 2\beta_1 + 5\beta_2 &= -1 \\ 3\beta_1 + 2\beta_2 &= 4 \\ 4\beta_1 + 11\beta_2 &= -3.\end{aligned}$$

אם למערכת יש פתרון אז p_4 הוא צירוף לינארי של p_1, p_2 אחרת לא!

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 11 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 4R_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 + 4R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 3R_2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

למערכת יש פתרון לכן $p_4 \in \text{span}\{S\}$.