שיעור 8
משפטים יסודיים על פונקציות גזירות וכלל לופיטל

משפטים יסודיים על פונקציות גזירות

8.1 משפט. (משפט פרמה)
אם $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה בקטע פתוח (a,b). אם c נקודת קיצון (מקסימום או מינימום) פנימית של פונקציה $f(x)$ אז
$$f'(c)=0\ .$$

8.2 משפט. (רול)
אם $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה בקטע פתוח (a,b), כך ש- $f(a)=f(b)$, אז קיימת לפחות נקודה אחד $c\in(a,b)$ כך ש-
$$f'(c)=0\ .$$

הוכחה.
$f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$. לכן לפי משפט וויארטראס (עין משפט **??** לעיל) היא מקבלת בקטע הזה את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר. נסמן אותם ב- M ו- m בהתאמה. ישנן 2 אפשרויות.

<u>מצב 1.</u> <u>$m=M$</u>

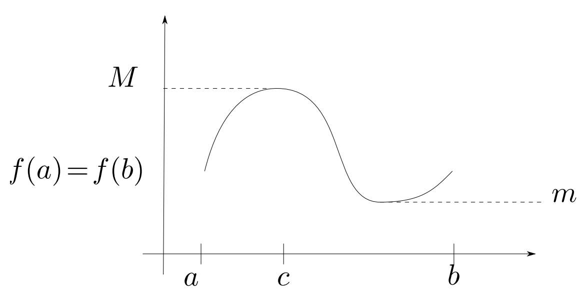
אם $M=m$ אז $f(x)$ פונקציה קבועה, ולכן $f'(x)=0$ לכל $a<x<b$.

<u>מצב 2.</u> <u>$m<M$</u>

מכיוון ש- $f(a)=f(b)$, אז f מתקבל לפחות אחד הערכים מ- m ו- M בנקודה c בפנים הקטע הפתוח (a,b).

<u>f מקבלת הערך M בפנים הקטע (a,b)</u>

כלומר קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $f(c)=M$. ז"א לכל $x\in(a,b)$, $f(x)\leq f(c)$.
נוכיח כי $f'(c)=0$:



$$f'_-(c)=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\geq 0$$
בגלל ש- $f(c+\Delta x)-f(c)\leq 0$ ו- $\Delta x<0$.

$$f'_+(c)=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\leq 0$$

בגלל ש- $f(c+\Delta x)-f(c)\leq 0$ ו- $\Delta x>0$. $f(x)$ גזירה בנקודה c, אז בהכרח $f'(c)=f'_-(c)=f'_+(c)$.
לכן $f'(c)=0$.

<u>f מקבלת הערך m בפנים הקטע (a,b)</u>

קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $f(c)=m$. ז"א לכל $x\in(a,b)$, $f(x)\geq f(c)$.
נוכיח כי $f'(c)=0$:

$$f'_-(c)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\leq 0$$

בגלל ש- $f(c+\Delta x)-f(c)\geq 0$ ו- $\Delta x<0$.

$$f'_+(c)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\geq 0$$

בגלל ש- $f(c+\Delta x)-f(c)\geq 0$ ו- $\Delta x>0$. $f(x)$ גזירה בנקודה c, אז בהכרח $f'(c)=f'_-(c)=f'_+(c)$.
לכן $f'(c)=0$.

■

משמעות של משפט רול

בגרף של פונקציה קיימת נקודה c שבה המשיק מקביל לציר ה- x.

8.3 משפט. (משפט ערך הממוצע המוכלל של קושי)
אם $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות רציפות בקטע סגור $[a,b]$ וגזירות בקטע פתוח (a,b), ו- $g'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$,
אז קיימת לפחות נקודה אחת $c\in(a,b)$ כך ש-

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\ .$$

או שקול

$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(c)=\big(g(b)-g(a)\big)f'(c)\ .$$

8.4 מסקנה. (משפט ערך הממוצע של לגרנז')
לכל פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b), קיימת לפחות נקודה אחת $c\in(a,b)$ כך ש-

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)\ .$$

הוכחה.
נגדיר $g(x)=x$ ונשתמש במשפט קושי 8.3:

קיים c כך ש- $a<c<b$ ו

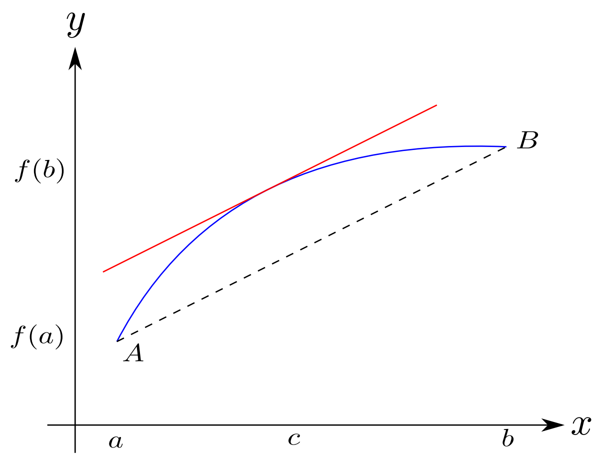
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\ .$$

שים לב $g(b)=b$, $g(a)=a$, $g'(c)=1$ לכן

$$\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}=f'(c)\ .$$

■

8.5 הערה. (המשמעות של משפט לגרנז)



הביטוי $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ הוא השיפוע של הקו AB. המשיק בנקודה c מקביל לקו AB.

8.6 מסקנה. ()
אם $f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$ אז $f(x)$ פונקציה קבועה בקטע (a,b).

הוכחה.
יהיו
$$a<x_1<x_2<b\ .$$
לפי משפט לגרנז' 8.4 קיים $c\in(x_1,x_2)$ כך ש-
$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_2-x_1)\ .$$
לפי הנתון, $f'(c)=0$ לכן $f(x_1)=f(x_2)$ לכל $x_1,x_2\in(a,b)$. ז"א $f(x)$ פונקציה קבועה. ∎

8.7 מסקנה. ()
אם $f'(x)=g'(x)$ לכל $x\in(a,b)$ אז קיים c כך ש- $f(x)=g(x)+c$.

הוכחה.
תהי
$$h(x)=f(x)-g(x).$$
מכאן
$$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$$
לכל $x\in(a,b)$. לכן לפי מסקנה 8.6 $h(x)$ פונקציה קבועה, ז"א קיים c כך ש $h(x)=c$ לכל $x\in(a,b)$.
כלומר
$$f(x)=g(x)+c$$
לכל $x\in(a,b)$. ∎

דוגמאות

דוגמא.
הוכח כי $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ לכל $x \in (-1,1)$.

פיתרון.
תהי
$$f(x) = \arcsin x + \arccos x \ .$$
אז
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$
לכל $x \in (-1,1)$. לפי מסקנה 8.7, $f(x) = c$ לכל $-1 < x < 1$.

נמצא את c:

נציב $x = 0$ ונקבל
$$f(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$
לכן $c = \frac{\pi}{2}$. ■

דוגמא.
הוכח שלכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

פיתרון.
נציב $f(x) = \sin x$.

שים לב $f(x)$ רציפה בקטע $[y,x]$ וגזירה בקטע (y,x). לכן קיים $c \in (y,x)$ כך ש
$$f(x) - f(y) = f'(c) \cdot (x - y) \ ,$$
כלומר
$$\sin x - \sin y = \cos c \cdot (x - y) \qquad \Rightarrow \qquad |\sin x - \sin y| = |\cos c| \cdot |x - y| \ .$$
אבל $|\cos c| \leq 1$ אז
$$|\sin x - \sin y| = |\cos c| \cdot |x - y| \leq |x - y| \ .$$
■

דוגמא.
הוכח כי לכל $0 < x < y$, $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים
$$\frac{x-y}{x} < \ln\left(\frac{x}{y}\right) < \frac{x-y}{y} \ .$$

פיתרון.
נגדיר $f(x)=\ln x$. שים לב $f(x)$ רציפה בקטע $[x,y]$ וגזירה בקטע (x,y). לכן לפי משפט לגרנז' 8.4, קיים $c\in(x,y)$ כך ש
$$f(y)-f(x)=f'(c)\cdot(y-x)\ .$$
ז"א
$$\ln y-\ln x=\frac{1}{c}\cdot(y-x)\qquad\Rightarrow\qquad \ln x-\ln y=\frac{1}{c}\cdot(x-y)\qquad\Rightarrow\qquad \ln\frac{x}{y}=\frac{x-y}{c}\ . \tag{\#}$$
שים לב $0<c<y \Leftarrow \frac{1}{c}<\frac{1}{y}$, לכן
$$\frac{y-x}{y}<\frac{y-x}{c}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{x-y}{y}>\frac{x-y}{c}\ .$$
לכן לפי (#) נקבל
$$\ln\frac{x}{y}<\frac{x-y}{y}\ .$$
שים לב $0<x<c \Leftarrow \frac{1}{x}<\frac{1}{c}$, לכן
$$\frac{y-x}{c}<\frac{y-x}{x}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{x-y}{c}>\frac{x-y}{x}\ .$$
לכן לפ (#)
$$\ln\frac{x}{y}>\frac{x-y}{x}\ .$$
■

דוגמא.
יהיו $f(x)$, $g(x)$ פונקציות גזירות בקטע (a,b). תהי $c\in(a,b)$ נקודה שבה
$$f(c)=g(c) \tag{\#1}$$
ו-
$$f'(x)>g'(x)\qquad \forall x\in(a,b)\ ,\ x<c\ . \tag{\#2}$$
הוכח כי
$$g(x)>f(x)\qquad \forall x\in(a,b)\ ,\ x<c\ . \tag{\#3}$$

פיתרון.
יהי $h(x):=f(x)-g(x)$. לפי (#2), $h'(x)>0$ לכל $x\in(a,b)\ ,\quad x<c$. אז לפי משפט לגרנז' 8.4, $h(x)$ עולה מונוטונית. לכן
$$h(n)>h(m)\qquad\Leftrightarrow\qquad n>m\qquad\forall m,n<c\ . \tag{\#4}$$
אבל $h(c)=0$, לכן
$$h(x)<0\quad\forall x<c\ . \tag{\#5}$$
ומכאן
$$f(x)-g(x)<0\quad\Rightarrow\quad g(x)>f(x)\quad\forall x<c\ . \tag{\#6}$$
■

דוגמא.
יהיו $f(x)$, $g(x)$ פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b) כך ש-

(1*) $$f(a)=g(a)$$

אם

(2*) $$f'(x)<g'(x) \qquad \forall x\in(a,b)\ ,$$

הוכח כי

(3*) $$f(x)<g(x) \qquad \forall x\in(a,b]\ .$$

פיתרון.
יהי $h(x):=f(x)-g(x)$. לפי (1*),

(4*) $$h(a)=0\ .$$

לפי (2*),

(5*) $$h'(x)<0 \qquad \forall x\in(a,b).$$

לכל $x\in(a,b)\ ,\quad x<c$. אז לפי משפט לגרנז' 8.4, $h(x)$ יורדת מונוטונית. לכן

(6*) $$h(n)<h(m) \qquad \Leftrightarrow \qquad n>m \qquad \forall m,n<(a,b)\ .$$

אבל לפי (4*) $h(a)=0$, לכן

(7*) $$h(x)<0 \quad \forall a<x\leq b\ .$$

ומכאן

(8*) $$f(x)-g(x)<0 \quad \Rightarrow \quad g(x)>f(x) \quad \forall x\in(a,b]\ .$$

■

דוגמא.
הוכח כי למשוואה

$$x^3-7x^2+25x+8=0$$

יש פתרון יחיד.

פיתרון.
נגדיר

$$f(x)=x^3-7x^2+25x+8\ .$$

שים לב

$$f(0)=8\ , \qquad f(-1)=-25\ ,$$

אז לפי משפט ערך ביניים **??**, קיימת לפחות נקודה אחת שבה הפונקציה מקבלת הערך 0. נניח שקיימת יותר מנקודה אחת, a, b, שבהן

$$f(a) = f(b) = 0 \ .$$

$f(x)$ פולינום ולכן היא רציפה וגזירה בכל x. לכן לפי משפט רול **8.2**, קיים נקודה $c \in (a,b)$ כל ש-

$$f'(c) = 0. \qquad \textbf{(\#)}$$

שים לב,

$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 25$$

לכן אם **(#)** מתקיים,

$$3c^2 - 14c + 25 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{7 \pm \sqrt{26}i}{3}$$

סתירה. לכן אין יותר מפתרון אחד. ■

דוגמא.
הוכח שלכל ערכים ממשיים a ו- b מתקיים

$$|\arctan(2b) - \arctan(2a)| \leq 2\,|b-a|$$

פיתרון.
פונקציה $f(x) = \arctan(x)$ היא אלמנטרית ומוגדרת לכל x ממשי. לכן היא רציפה וגזירה לכל x ממשי ולכן מקיימת את תנאיי משפט לגרנז' **8.4** עבור גל קטע $[a,b]$. לכן קיים ערך c מקטע זו כך ש-

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c) \ .$$

מכאן

$$\frac{|f(b) - f(a)|}{|b-a|} = |f'(c)| \qquad \textbf{(**)}$$

שים לב,

$$f'(x) = \frac{2}{1+4x^2}$$

ולכן לפי **(**)**,

$$\frac{|\arctan(2b) - \arctan(2a)|}{|b-a|} = \frac{2}{1+4c^2} \leq 2$$

מש"ל. ■

כלל לופיטל

8.8 משפט. (כלל לופיטל)
יהיו $f(x)$, $g(x)$ פונקציות רציפות וגזירות בסביבה של נקודה a. אם התנאים הבאים מתקיימים:

.1

$$\lim_{x\to a} f(a) = 0 \ , \qquad \lim_{x\to a} g(a) = 0$$

או

$$\lim_{x\to a} f(a) = \pm\infty \ , \qquad \lim_{x\to a} g(a) = \pm\infty$$

2. $g'(x)\neq 0$ בסביבה של a,
3. הגבול $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים וסופי,

אז
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ .$$

דוגמאות

דוגמא.
קבע את הערך של הגבול
$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\cdot\ln x}$$

פיתרון.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\cdot\ln x}&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\cdot\ln x)'}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1+\ln x)}\\&=\frac{1}{(1+\ln 1)}=\frac{1}{(1+0)}=1\end{aligned}$$

■

דוגמא.
קבע את הערך של הגבול
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}$$

פיתרון.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 6x)'}{(2x^2)'}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{4x}\ .\end{aligned}$$

<u>דרך 1</u>
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{4x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(6\sin 6x)'}{(4x)'}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{36\cdot\cos 6x}{4}\\&=\frac{36\cdot\cos 0}{4}\\&=\frac{36}{4}\ .\end{aligned}$$

<u>דרך 2</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{4x} &= \lim_{x\to 0}\frac{6}{4}\cdot\frac{6\sin 6x}{6x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{36}{4}\cdot\frac{\sin 6x}{6x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{36}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}\\ &=\frac{36}{4}\ .\end{aligned}$$

■

דוגמא.
קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan 3x}{\tan 5x}$$

פיתרון.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan 3x}{\tan 5x} &= \lim_{x\to\pi/2}\frac{(\tan 3x)'}{(\tan 5x)'}\\
&= \lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}}\\
&=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x}\\
&=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{2}(1+\cos 10x)}{\frac{1}{2}(1+\cos 6x)}\\
&=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{(1+\cos 10x)}{(1+\cos 6x)}\\
&=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{(1+\cos 10x)'}{(1+\cos 6x)'}\\
&=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{-10\cdot\sin 10x}{-6\cdot\sin 6x}\\
&=\frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin 10x}{\sin 6x}\\
&=\frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{(\sin 10x)'}{(\sin 6x)'}\\
&=\frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{10\cdot\cos 10x}{6\cdot\cos 6x}\\
&=\frac{25}{9}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos 10x}{\cos 6x}\\
&=\frac{25}{9}\cdot\frac{\cos(5\pi)}{\cos(3\pi)}\\
&=\frac{25}{9}\cdot\frac{-1}{-1}\\
&=\frac{25}{9}\ .
\end{aligned}$$

■

דוגמא.
קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x\to 2}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)(2-x)\right]$$

פיתרון.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)(2-x)\right] &= \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\cot\left(\frac{\pi}{4}x\right)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{-1}{\frac{\pi}{4}\cdot\frac{-1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)}}\\ &=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}}\\ &=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}}\\ &=\frac{4}{\pi}\ .\end{aligned}$$

■

דוגמא.
קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

פיתרון.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\cdot\ln x}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\cdot\ln x)'}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1-1/x}{\ln x+(x-1)/x}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(1-1/x)'}{(\ln x+(x-1)/x)'}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-1/x^2}{1/x+1/x^2}\\ &=\frac{1}{2}\ .\end{aligned}$$

■

דוגמא.
קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2}$$
