חישוביות וסיבוכיות

מועד א'

פתרון לדוגמא

ד"ר ירמיהו מילר ,   .

סמסטר ב, תשפ"ה'

מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הינן פתרונות לדוגמא. ניתן לפתור חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

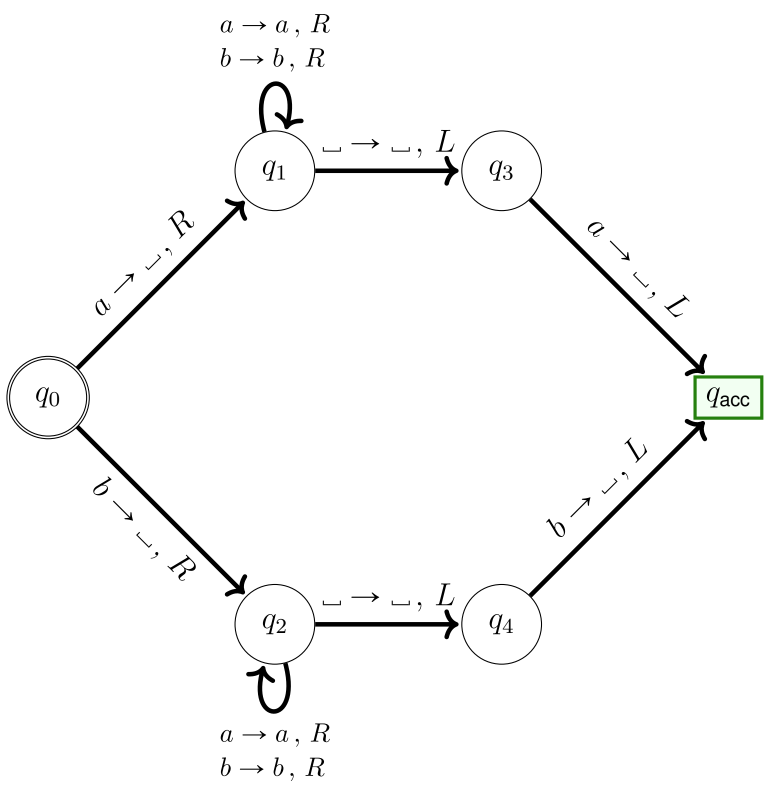
המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | **קמפוס אשדוד** ז'בוטינסקי 84, 77245 | **www.sce.ac.il** | **חייג:** *

פתרונות

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

כל המעברים שאינם מופיעים בתרשים עוברים ל- q_{rej}.



סעיף ב' (10 נקודות)

1^{i+2j}

שאלה 2: סגירות של שפות כריעות (20 נקודות)

L. השפה L^* מוגדרת:

$$L^* = \left\{ w = w_1 w_2 \cdots w_k \,\middle|\, \forall\ 1 \leqslant i \leqslant k\ ,\ w_i \in L \right\}$$

פתרונות

תהי M מכונת טיורנג שמכריעה את L.
נבנה מכונת טיורינג M^* אי-דטרמיניסטית המכריעה את L^*.

תאור הבנייה

$M^* =$ על קלט w:

1. אם $w = \varepsilon$ אז M^* מקבלת.
2. אחרת M^* בוחרת באופן אי דטרמיניסטי חלוקה של w ל- $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$ כאשר $k \in \mathbb{N}^+$.
3. לכל $1 \leqslant i \leqslant k$:
   - M^* מריצה את M על w_i.
     - אם M דחתה אז M^* דוחה.
     - אחרת אם M קיבלה חוזרים לשלב 3).
4. אם M קיבלה את כל המחרוזות $\{w_i\}$ אזי M^* מקבלת.

M^* - ניתנת לחישוב - מספר הפירוקים האפשריים ל- w הוא סופי ולכן הניחוש הוא סופי, לפיכך כתיבה על הסרט והרצת M ניתן לחישוב.

הוכחת נכונות: $L^* = L\left(M^*\right)$

כיוון $\Leftarrow$

נניח כי $w \in L\left(M^*\right)$

$\Leftarrow$ קיימת חלוקה $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_k$ $(k \in \mathbb{N}^+)$ כך שעבור כל w_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ M קיבלה.

$\Leftarrow$ כל $w_i \in L(M)$. בפרט, $L(M) = L$.

$\Leftarrow$ $w_i \in L$

$\Leftarrow$ $w = w_1 w_2 \ldots w_k \in L^*$

$\Leftarrow$ $L\left(M^*\right) \subseteq L^*$.

כיוון $\Rightarrow$

נניח כי $w \in L^*$

$\Leftarrow$ קיימת חלוקה $w = w_1 w_2 \cdots w_k$ $(k \in \mathbb{N}^+)$ כך שכל $w_i \in L$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$

$\Leftarrow$ M^* תנחש את הפירוק הזה עבור w

$\Leftarrow$ המכונה M תקבל כל w_i כזה

$\Leftarrow$ M^* תקבל את w

$\Leftarrow$ $w \in L(M^*)$

$\Leftarrow$ $L^* \subseteq L(M^*)$.

לכן, מאחר ומצאנו ש- $L(M^*) \subseteq L^*$ ו- $L^* \subseteq L(M^*)$ אזי $L(M^*) = L^*$.

שאלה 3: אי כריעות (20 נקודות)

סעיף א' (12 נקודות)

קיימת פונקצית רדוקציה מ- $\bar{L}_{\text{acc}}$ ל- $\hat{L}$.

<u>פונקצית הרדוקציה:</u>

$$f(x) = \begin{cases} \langle M_{\varnothing}, M', M^* \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\varnothing}, M_{\text{even}}, M^* \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- $M_{\varnothing}$ היא מ"ט שדוחה כל קלט,
- M^* היא מ"ט שמקבלת כל קלט,
- M_{even} היא מ"ט שמקבלת רק מילים $x \in \Sigma^*$ עבורן $|x| \mod 2 = 0$
- M' המ"ט הבאה:

$M' =$ על כל קלט y:

1) אם $|y|$ אי-זוגי $\Leftarrow$ מקבלת.

2) אחרת מריצה M על w ועונה כמוה.

<u>אבחנה:</u>

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \{y \ : \ |y| \mod 2 = 0\} & w \notin L(M) \end{cases}$$

<u>הוכחת הנכונות:</u>

אם $x \in \bar{L}_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

<u>מקרה 1:</u>

$x \neq \langle M, w \rangle$

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M_{\varnothing}, M_{\text{even}}, M^* \rangle$ ו- $L(M_{\varnothing}) \subset L(M_{\text{even}}) \subset L(M^*)$

$\Leftarrow$ $f(x) \in \hat{L}$.

<u>מקרה 2:</u>

$x = \langle M, w \rangle$ ו- $w \notin L(M)$

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M' \rangle$ ולפי האבחנה $L(M') = \{y : |y| \mod 2 = 0\}$

$\Leftarrow$ $L(M_{\varnothing}) \subset L(M') \subset L(M^*)$

$\Leftarrow$ $f(x) \in \hat{L}$.

אם $x \notin \bar{L}_{\text{acc}}$

$\Leftarrow$ $x = \langle M, w \rangle$ ו- $w \in L(M)$

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M_{\varnothing}, M', M^* \rangle$ ולפי האבחנה $L(M') = \Sigma^*$

$\Leftarrow$ $L(M') \not\subset L(M^*)$

$\Leftarrow$ $f(x) \notin \hat{L}$.

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $\bar{L}_{\text{acc}} \leqslant \hat{L}$.

מכיוון ש- $\bar{L}_{\text{acc}} \notin R$ ממשפט הרדוקציה מתקיים $\hat{L} \notin R$.

סעיף ב' (8 נקודות)

<u>שיטה 1</u>

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$L_1 = L_{\text{acc}}\ , \qquad L_2 = L_{\text{halt}}\ , \qquad L_3 = L_{\Sigma^*}\ .$$

תזכורת: $L_{\Sigma^*} = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^*\}$.
הוכחנו כי $L_{\text{acc}} \leqslant L_{\text{halt}}$ וגם $L_{\text{acc}} \leqslant L_{\Sigma^*}$.
לכן לפי הבחירה של השפות L_1, L_2, L_3, מתקיים $L_1 \leqslant L_2$ וגם $L_1 \leqslant L_3$.
אבל מכיוון ש- $L_{\text{halt}} \cap L_{\Sigma^*} = \varnothing$, ז"א $L_2 \cap L_3 = \varnothing$, אזי לא קיימת רדוקציה $L_{\text{acc}} \leqslant (L_{\text{halt}} \cap L_{\Sigma^*})$.

<u>שיטה 2</u>

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$L_1 = L_{\text{halt}}\ , \qquad L_2 = L_{\text{acc}}\ , \qquad L_3 = \overline{L_{\text{acc}}}\ .$$

מתקיים $L_{\text{halt}} \leqslant L_{\text{acc}}$ לכן $L_1 \leqslant L_2$.

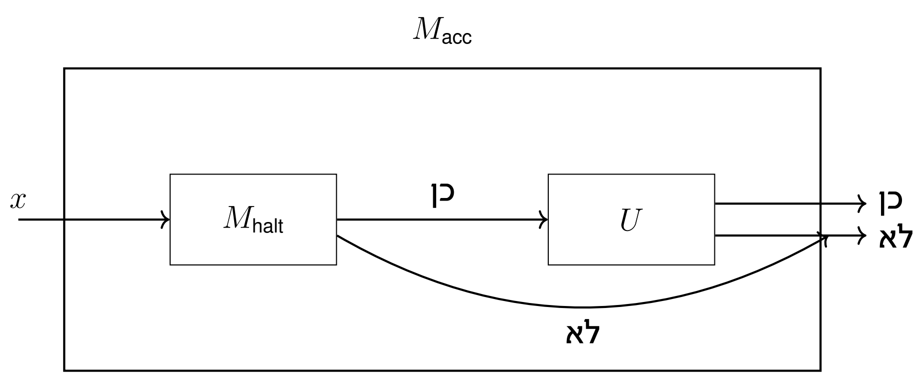
בנוסף $L_{\text{halt}} \leqslant \overline{L_{\text{acc}}}$ לכן $L_1 \leqslant L_3$.

מצד שני: $L_2 \cap L_3 = \varnothing$ ולכן $L_1 \nleqslant L_3$ (אחרת $L_{\text{halt}} \leqslant \varnothing$ ומכיוון ש- $\varnothing \in R$ אזי $L_{\text{halt}} \in R$ בסתירה לכך ש- $L_{\text{halt}} \notin R$.)

שאלה 4: NP - שלמות (20 נקודות)

סעיף א' (5 נקודות)

הטענה נכונה.
אם $L_{\text{halt}} \in P$ אזי קיימת מכונת טיורנג M_{halt} המכריעה את L_{halt} בזמן פולינומיאלי.
נבנה מכונת טיורינג M_{acc} המכריעה את L_{acc} בזמן פולינומיאלי באופן הבא:



$M_{\text{acc}} =$ על קלט x:

1) מריצה M_{halt} על x.

- אם M_{halt} דוחה $\Leftarrow$ דוחה.
- אחרת מריצה המ"ט האוניברסלית, U על x ועונה כמוה.

נשים לב ש- M_{acc} תמיד תעצור על כל קלט.

<u>נכונות</u>

אם $x \in L_{\text{acc}}$

$\Leftarrow x = \langle M, w\rangle$ וגם $w \in L(M)$

$x \in L_{\text{halt}} \Leftarrow$

$x \in L\left(M_{\text{halt}}\right) \Leftarrow$

$U \Leftarrow$ תקבל את w

$M_{\text{acc}} \Leftarrow$ תקבל את x

$.x \in L\left(M_{\text{acc}}\right) \Leftarrow$

אם $x \notin L_{\text{acc}}$ אז שני מקרים:

- $x \neq \langle M, w\rangle \Leftarrow M_{\text{halt}}$ דוחה את $x \Leftarrow x \notin L\left(M_{\text{acc}}\right)$.
- $x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \notin L(M) \Leftarrow x \in L_{\text{halt}} \Leftarrow U$ תדחה את $x \Leftarrow M_{\text{acc}}$ תדחה את $x \Leftarrow x \notin L\left(M_{\text{acc}}\right)$.

הוכחנו שאם קיימת M_{halt} שמכריעה את L_{halt} אז קיימת M_{acc} שמכריעה את L_{acc}.

בנוסף, אם $L_{\text{halt}} \in P$ אז קיימת מכונת טיורנג פולינומיאלית M_{halt}. לכן המכונט טיורינג M_{acc} היא גם פולינומיאלית, ולכן $L_{\text{acc}} \in P$.

סעיף ב' (5 נקודות)

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: A בעייה NP קשה עבורה $A \notin NP$ ו- B היא שפה NP שלמה.
נניח בשלילה כי $A \leqslant_P B$. ממשפט הרדוקציה, מכיוון ש- $B \in NP$ (כי B היא NP שלמה) מתקיים ש- $A \in NP$ וזו סתירה לבחירה של A.

סעיף ג' (5 נקודות)

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $L = L_{\text{acc}}$.
נניח בשלילה כי $\bar{L} \leqslant L$. אזי
$\overline{L_{\text{acc}}} \leqslant L_{\text{acc}}$. ממשפט הרדוקציה, מכיוון ש- $\overline{L_{\text{acc}}} \notin RE$ אז $L_{\text{acc}} \notin RE$, בסתירה לכך ש- $L_{\text{acc}} \in RE$.

סעיף ד' (5 נקודות)

תהי f פונקצית הרדוקציה $A \leqslant_P B$ שמקיימת $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$ לכל $w \in \Sigma^*$.

תהי g פונקצית הרדוקציה $B \leqslant_P C$ שמקיימת $w \in B \Leftrightarrow f(w) \in C$ לכל $w \in \Sigma^*$.

נוכיח שקיימת רדוקציה $A \leqslant_P C$.

<u>פונקצית הרדוקציה h</u>

לכל $w \in \Sigma^*$ נגדיר $h(w) = g\left(f(w)\right)$.

<u>נכונות הרדוקציה</u>

שלב 1. נוכיח כי $w \in A \Leftrightarrow h(w) \in C$.

- אם $w \in A \Rightarrow f(w) \in B \Rightarrow h(w) = g\left(f(w)\right) \in C$.
- אם $w \notin A \Rightarrow f(w) \notin B \Rightarrow h(w) = g\left(f(w)\right) \notin C$.

שלב 2. נוכיח כי h חשיבה בזמן פולינומיאלי:

נסמן ב- p_f את הפולינום של f.

נסמן ב- p_g את הפולינום של g.

אזי לכל $w \in \Sigma^*$, זמן החישוב של $h(w)$ חסום על ידי :

$$p_f(|w|) + p_g\left(|f(w)|\right) \leqslant p_f(|w|) + p_g\left(p_f\left(|w|\right)\right) = p_f\left(|w|\right) + \left(p_f \circ p_f\right)\left(|w|\right)$$

כאשר $p_f \circ p_f$ הוא הרכבה של שני פולינומים. לכן ניתן לחשב את $h(w)$ בזמן פולינומיאלי בגודל $|w|$.

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

סעיף א' (8 נקודות)

נבנה מכונת טיורינג אי דטרמיניסטית M המכריעה את $HAMCYCLE$ בזמן פולינומיאלי.

$M =$ על קלט $w = \langle G \rangle$:

1. בוחרת באופן אי-דטרמיניסטי סדרה של n קודקודים $u_1, u_2, \ldots, u_n$ מתוך V כאשר $n = |V|$.
2. בודקת האם הקודקודים שונים זה מזה.
   - אם לא $\Leftarrow$ דוחה.
3. בודקת האם כל שני קודקודים עוקבים בסדרה מחוברים בצלע ב- G ואם u_n מחובר בצלע ל- u_1.
   - אם כן $\Leftarrow$ מקבלת.
   - אם לא $\Leftarrow$ דוחה.

<u>זמן הריצה</u>

כל אחד מהצעדים ניתן לממש בזמן פולינומיאלי ולכן זמן הריצה של M הוא פולינומיאלי (אי-דטרמיניסטי).

<u>נכונות</u>

אם $w \in HAMCYCLE$

$\Leftarrow$ $w = \langle G \rangle$ ו- G מכיל מעגל המילטוני C

$\Leftarrow$ קיימת ריצה של M בה היא תבחר את המעגל C ותבדוק שהוא מקיים את כל התנאים ותעצור ותקבל.

אם $w \notin HAMCYCLE$

$\Leftarrow$ $w = \langle G \rangle$ ו- G לא מכיל מעגל המילטוני C

$\Leftarrow$ בכל קיצה של M, כל סדרה של n קודקודים שהיא תבחר היא לא תקיים לפחות אחד התנאים

$\Leftarrow$ בכל ריצה של M על w, M תעצור ותדחה.

פתרונות

סעיף ב' (12 נקודות)

<u>פונקצית הרדוקציה</u>

בהינתן $\langle G,s,t\rangle$ הקרט של $HAMPATH$, נבנה גרף $\langle G'\rangle$ הקלט של $HAMCYCLE$ בזמן פולינומיאלי ונוכיח כי:

$$\langle G,s,t\rangle \in HAMPATH \quad \Leftrightarrow \quad \langle G'\rangle \in HAMPATH\ .$$

נבנה את G' באופן הבא:

נוסיף קודקוד חדש x ל- G ושתי צלעות מכוונות חדשות (x,s) ו- (t,x) ונקבל גרף חדש G'.

<u>נכונות הרדוקציה</u>

1. ניתן לחשב את f בזמן קבוע.
2. נוכיח כי $\langle G'\rangle \in HAMPATH \quad \Leftrightarrow \quad \langle G,s,t\rangle \in HAMPATH$.

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

נניח כי $\langle G,s,t\rangle \in HAMPATH$.

$\Leftarrow$ G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t.

$\Leftarrow$ אותו מסלול קיים ב- G'.

$\Leftarrow$ מסלול זה יחד עם הצלעות שהוספנו (x,s) ו- (t,x) מהווה מעגל המילטוני שעובר דרך כל קודקודי הגרף G'.

$\Leftarrow$ G' מכיל מעגל המילטוני.

$\Leftarrow$ $\langle G'\rangle \in HAMCYCLE$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

נניח כי $\langle G'\rangle \in HAMCYCLE$

$\Leftarrow$ G' מכיל מעגל המילטוני C שעובר דרך כל הקודקודים של G'.

$\Leftarrow$ לפי הבנייה, C בהכרח מכיל את הצלעות החדשות (x,s) ו- (t,x).

$\Leftarrow$ הורדת x ושתי הצלעות (x,s) ו- (t,x) מ- C מאשירה מסלול המילטוני מ- s ל- t שעובר דרך כל קודקוד ב- G בדיוק פעם אחת.

$\Leftarrow$ G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t.

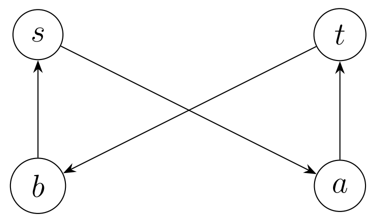
$\Leftarrow$ $\langle G,s,t\rangle \in HAMPATH$.

פתרונות

<ins>הערה:</ins>

להוסיף צלע (t,s) ל- G לא מספיק.

לדוגמה:



הגרף לא מכיל מסלול המילטוני אבל כן מכיל מעגל המילטוני. ואם נוסיף רק צלע (t,s), המעגל עדיין קיים ב- G'.