שיעור 9
מימד ובסיס

בסיס של מרחב וקטורי

9.1 הגדרה: (בסיס)
קבוצת וקטורים $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n \in V$ נקראת בסיס של V אם היא מקיימת:

1) $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ בלתי תלוים לינארית.

2) $\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)=V$.

דוגמא.

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\ ,\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\ ,\quad \ldots,e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\ .$$

בסיס של $\mathbb{F}^n$ (בסיס הסטנדרטי).

הוכחה.

1) צ"ל $e_1,\ldots,e_n$ בת"ל.

$$k_1e_1+k_2e_2+\ldots+k_ne_n=\bar{0}$$

$$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\ldots+k_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad k_1=0,k_2=0,\quad k_n=0\ .$$

לכן $e_1,\ldots,e_n$ בת"ל.

2) צ"ל כי $\mathrm{sp}(e_1,\ldots,e_n)=\mathbb{F}^n$.

נקח וקטור שרירותי $\mathbb{F}^n \ni \mathrm{v}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$. צ"ל $\mathrm{v}=\mathrm{sp}(e_1,\ldots,e_n)$.

$$k_1e_1+\ldots k_ne_n=\mathrm{v}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad k_1 = x_1, k_2 = x_2, \quad \ldots, \quad k_n = x_n \ .$$

■

דוגמא.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \ldots, \quad E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad .$$

בסיס של $M_{2\times 3}(\mathbb{F})$ (הבסיס הסטנדרטי).

הוכחה.

1) נוכיח כי $E_1,\ldots,E_6$ בת"ל.

$$k_1E_1 + k_2E_2 + \ldots + k_6E_6 = \bar{0}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots + k_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad k_1 = 0, k_2 = 0, \quad k_6 = 0 \ .$$

לכן $E_1,\ldots,E_6$ בת"ל.

2) נוכיח כי $\text{sp}(E_1,\ldots,E_6) = M_{2\times 3}(\mathbb{F})$.

לכל וקטור $M_{2\times 3}(\mathbb{F}) \ni \text{v} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$,

$$\text{v} = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 + eE_5 + fE_6 \ .$$

ז"א

$\text{v} \in \text{sp}(E_1,\ldots,E_6)$.

■

דוגמא.

וקטורים

$$e_1 = 1 \ , \quad e_2 = x \ , \quad \ldots \ , \quad e_n = x^n$$

מהווים בסיס (הבסיס הסטנדרטי) של המרחב $\mathbb{F}_n[x]$.

הוכחה.

1) צ"ל $1,x,\ldots,x^n$ בת"ל.

$$k_1\cdot 1+k_2x+\ldots+k_nx^n=\bar{0}=0\cdot 1+0\cdot x+\ldots+0\cdot x^n$$

לכל x כאשר

$$k_1=0,k_2=0,\quad \ldots,\quad k_n=0\ .$$

לכן $1,x,\ldots,x^n$ בת"ל.

2) נוכיח כי $\text{sp}(1,x,\ldots,x^n)=\mathbb{F}_n[x]$.

לכל $p(x)=a_1+a_2x+\ldots+a_nx^n\in\mathbb{F}_n[x]$ מתקיים

$$p(x)=a_1e_1+a_2e_2+\ldots+a_ne_n$$

ז"א $p(x)=\text{sp}(e_1,\ldots,e_n)$.

■

דוגמא.
בדקו כי הוקטורים

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}\ ,\qquad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\ .$$

מהווה בסיס של $\mathbb{R}^3$.

פיתרון.

1) צ"ל u_1,u_2,u_3 בת"ל.

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=\bar{0}$$

זאת מערכת משוואות הומוגניות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&2&0\\0&1&1&0\\5&1&4&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3+5R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&2&0\\0&1&1&0\\0&6&14&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-6R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&2&0\\0&1&1&0\\0&0&8&0\end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון יחיד: $k_1=0,k_2=0,k_3=0$
לכן u_1,u_2,u_3 בת"ל.

2) צ"ל $\text{sp}(u_1,u_2,u_3)=\mathbb{R}^3$.

נקח $\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\text{v}$. צ"ל $\text{v}=\text{sp}(u_1,u_2,u_3)$.

<u>דרך 1</u>:

$$xu_1 + yu_2 + zu_3 = \mathrm{v}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 5 & 1 & 4 & c \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 6 & 14 & 5a+c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5a+c-6b \end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון, לכן $\mathrm{v} \in \mathrm{sp}(u_1, u_2, u_3)$.

<u>דרך 2:</u>

למערכת $A \cdot X = 0$ יש פתרון יחיד, לכן מטריצה A הפיכה. מכאן נובע שלכל $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^3$, למערכת $A \cdot X = \mathrm{v}$ יש פתרון יחיד, ז"א $\mathrm{v} \in \mathrm{sp}(u_1, u_2, u_3)$.

■

9.2 משפט. ()
אם במרחב וקטורי V יש בסיס סופי, אז לכל בסיס של V יש את אותו מספר הוקטורים.

9.3 הגדרה: ()
נניח ש V מרחב וקטורי. למספר הוקטורים בבסיס של V קוראים המימד של V.
המימד של מרחב וקטורי יסומן

$$\dim(V)\ .$$

דוגמא.

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{F}^n) &= n \\ \dim(\mathbb{F}^n[x]) &= n+1 \\ \dim(M_{m\times n}(\mathbb{F})) &= m \cdot n\ . \end{aligned}$$

9.4 משפט. (מימד ובסיס של קבוצת וקטורים)
נניח כי V מרחב וקטורי, $\dim(V) = n$. אז

1) כל $n+1$ וקטורים של V הם תלוים לינארית.
2) כל קבוצה של n וקטורים בלתי תלויה לינארית, היא בסיב של V.
3) כל קבוצה של וקטורים שהיא בלתי תלויה לינארית , ניתן להשלים לבסיס של V.

דוגמא.
הוכיחו שהוקטורים

$$u_1 = 1 + x + x^2\ , \qquad u_2 = 2x + 3x^2\ , \qquad u_3 = -3x - 4x^2$$

מהווים בסיס של מרחב $\mathbb{R}_2[x]$.

פיתרון.
נוכיח כי u_1, u_2, u_3 בת"ל.

$$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = \bar{0}$$
$$k_1(1+x+x^2) + k_2(2x+3x^2) + k_3 - 3x - 4x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$
$$k_1(k_1 + 2k_2 - 3k_3)x + (k_1 + 3k_2 - 4k_3)x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$
$$\left.\begin{aligned} k_1 &= 0 \\ k_1 + 2k_2 - 3k_3 &= 0 \\ k_1 + 3k_2 - 4k_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad k_1 = 0\ , k_2 = 0, k_3 = 0$$

לכן u_1, u_2, u_3 בת"ל.
$\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$, לכן שלושה וקטורים בת"ל מהווים בסיס של $\dim(\mathbb{R}_2[x])$. ■

מציאת בסיס ומימד של תת מרחב

9.1 דוגמא.
מצאו בסיס ומימד של $\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$ כאשר

(1
$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}.$$

(2
$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}.$$

פיתרון.

(1 נבדוק אם $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ בת"ל:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\2 & 0 & 2\\1 & 1 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 2 & 2\\0 & 2 & 3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 2 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ בת"ל.
לכן $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ בסיס של $\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$.
$\dim(\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)) = 3$.

(2 נבדוק אם $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ בת"ל:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\2 & 0 & 2\\1 & 1 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 2 & 2\\0 & 2 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 2 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ ת"ל, אבל $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ בת"ל.
לכן $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ בסיס של $\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$.
$\dim(\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)) = 2$.

$\blacksquare$

דוגמא.
מצאו בסיס ואת המימד של תת מרחב הנפרש ע"י הוקטורים

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1&-5\\-4&2\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&5\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}2&-4\\-5&7\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_4=\begin{pmatrix}1&-7\\-5&1\end{pmatrix}\ .$$

בטאו את וקטור $u=\begin{pmatrix}4&-14\\-13&11\end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של הבסיס שמצאתם.

פיתרון.

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+k_3\mathrm{v}_3+k_4\mathrm{v}_4=\bar{0}$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix}1&1&2&1\\-5&1&-4&-7\\-4&-1&-5&-5\\2&5&7&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to R_4-2R_1]{\substack{R_2\to R_2+5R_1\\R_3\to R_3+4R_1}}\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&6&6&-2\\0&3&3&-1\\0&3&3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&3&3&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

הוקטורים v_1, v_2 המתאימים לעמודות המובילות הם בת"ל. לכן v_1, v_2 מהווים בסיס של $\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3,\mathrm{v}_4)$. $\dim(\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3,\mathrm{v}_4))=2$.

$$u=x\mathrm{v}_1+y\mathrm{v}_2\ .$$

$$\begin{pmatrix}1&1&4\\-5&1&14\\-4&-1&-13\\2&5&11\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to R_4-2R_1]{\substack{R_2\to R_2+5R_1\\R_3\to R_3+4R_1}}\begin{pmatrix}1&1&4\\0&6&6\\0&3&3\\0&3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&4\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow k_1=3, k_2=1$

$$u=3\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\ .$$

$\blacksquare$

דוגמא.
מצאו בסיס ומימד של $\mathrm{Nul}(A)$ כאשר

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\-2&-4&1&-2\\-1&-2&0&1\end{pmatrix}\ .$$

פיתרון.
$\mathrm{Nul}(A)$ -מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $A\cdot X=0$. נפתור את המערכת:

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\-2&-4&1&-2\\-1&-2&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&0&-1&4\\0&0&-1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&0&-1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&0&-1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון כללי: $\begin{cases} x_1 &= -2x_2 + x_4 \\ x_3 &= 4x_4 \end{cases} \Leftarrow x_2, x_4 \in \mathbb{R}$. נרשום את הפתרון בצורת וקטור השייך ל $\text{Nul}(A)$:

$$\begin{pmatrix} -2x_2 + x_4 \\ x_2 \\ 4x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{sp}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

הוקטורים $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ מהווים בסיס של $\text{Nul}(A)$.

$\dim(\text{Nul}(A)) = 2$ ■

דוגמא.
במרחב $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ נתונים וקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{v} = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ -5 & a \end{pmatrix}$$

א) עבור אילו ערכי a וקטור v שייך לפרישה לינארית של u_1, u_2, u_3?

ב) עבור כל ערך של a שמצאתם בסעיף א', בטאו את וקטור v כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 בשתי דרכים שונות.

ג) לכל ערך של a מצאו את המימד ובסיס של $\text{sp}(u_1, u_2, u_3, \text{v})$.

ד) האם קיימים ערכי a עבורם
$$\text{sp}(u_1, u_2, u_3, \text{v}) = M_{2\times 2}(\mathbb{R}) .$$

פיתרון.

א)
$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \text{v}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & a \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 3R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 0 & -2 & 2 & -3a-5 \\ 0 & 2 & -2 & -a-7 \\ 0 & 0 & 0 & -2a-6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 0 & -2 & 2 & -3a-5 \\ 0 & 0 & 0 & -4a-12 \\ 0 & 0 & 0 & -2a-6 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} -4a - 12 &= 0 \\ -2a - 6 &= 0 \end{cases} \Leftarrow$ עבור $a = -3$ למערכת יש פתרון, לכן $\text{v} \in \text{sp}(u_1, u_2, u_3)$.

ב) $\underline{a = -3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$k_1 = 1 - 2k_3 , \qquad k_2 = -2 + k_3 , \qquad k_3 \in \mathbb{R} .$$

נציב $k_3=1 \Leftarrow$

$$k_1=-1\ ,\qquad k_2=-1\ ,\qquad k_3=1$$

ונקבל

$$-u_1-u_2+u_3=\mathrm{v}\ .$$

נציב $k_3=0 \Leftarrow$

$$k_1=1\ ,\qquad k_2=-2\ ,\qquad k_3=0$$

ונקבל

$$u_1-2u_2+0\cdot u_3=\mathrm{v}\ .$$

ג) עבור $a=-3$:

$$\dim\left(\mathrm{sp}(u_1,u_2,u_3,\mathrm{v})\right)=2$$

מספר העמודות המובילות
בסיס: u_1,u_2.
עבור $a\neq -3$:

$$\dim\left(\mathrm{sp}(u_1,u_2,u_3,\mathrm{v})\right)=3$$

בסיס: u_1,u_2,v.

ד) הוקטורים u_1,u_2,u_3,v ת"ל לכל ערכי a, לכן לא קיימים ערכי a עבורם $\mathrm{sp}(u_1,u_2,u_3,\mathrm{v})=M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

■

דוגמא.
מצאו את המימד ובסיס של תת המרחב הנפרש ע"י הוקטורים

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}\ ,\qquad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\end{pmatrix}\ ,\qquad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\2\end{pmatrix}\ .$$

דוגמא.
נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$. לכל ערך של a מצאו את המימד ובסיס של $\mathrm{Nul}(A)$.

פיתרון.

$$\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-aR_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&1&a\\0&a-1&1-a\\0&1-a&1-a^2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\begin{pmatrix}1&1&a\\0&a-1&1-a\\0&0&-a^2-a+2\end{pmatrix}$$

$$a=1,-2 \Leftarrow -a^2-a+2=0$$

עבור $a=1$: מקבלים

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(\mathrm{Nul}(A))=2$ - מספר העמודות הלא מובילות

$$x=-y-z\ , \qquad y\in\mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\mathrm{Nul}(A)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

עבור $a=-2$: מקבלים

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(\mathrm{Nul}(A))=1$ - מספר העמודות הלא מובילות

$$x=z\ ,y=z\ , \qquad y\in\mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\mathrm{Nul}(A)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

■

דוגמא.
במרחב $\mathbb{R}_2[x]$ נתונים וקטורים

$$p_1(x)=2-x+x^2\ , \quad p_2(x)=2x-3x^2+x^3\ , \quad p_3(x)=1-x^2\ , \quad p_4(x)=3x-6x^2+x^3\ .$$

א) בדקו אם הוקטורים $p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x)$ תלוים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם ששווה לוקטור האפס.

ב) מצאו בסיס ואת המימד של תת מרחב הנפרש ע"י הוקטורים $p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x)$.

ג) בטאו כל וקטור מתוך $p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x)$ כצירוף לינרי של הבסיס המצאתם בסעיף ב'.

פיתרון.

א)

$$k_1p_1(t)+k_2p_2(t)+k_3p_3(t)+k_4p_4(t)=\bar{0}$$

$$\begin{pmatrix} 2&0&1&0\\ -1&2&0&3\\ 1&-3&-1&-6\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2&0&1&0\\ 0&4&1&6\\ 0&6&3&12\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 0&2&1&4\\ 0&4&1&6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&2\\ 0&0&1&2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&2\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2&0&0&-2\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&2\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

לא כל העמודות מובילות, לכן $p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x)$ ת"ל.

$$k_1=k_4\ ,\quad k_2=-k_4\ ,\quad k_3=-2k_4\ ,\qquad k_4\in\mathbb{R}\ .$$

נציב $k_4=1$ $\Leftarrow$

$$k_1=1\ ,\quad k_2=-1\ ,\quad k_3=-2\ .$$

$$p_1-p_2-2p_3+p_4=\bar{0}$$

ב) $\dim(\mathrm{sp}(p_1,p_2,p_3,p_4))=3$ - מספר העמודות המובילות.

בסיס:

p_1,p_2,p_3.

ג)

$$\begin{aligned} p_1(x)=&1\cdot p_1(x)+0\cdot p_2(x)+0\cdot p_3(x)\\ p_2(x)=&0\cdot p_1(x)+1\cdot p_2(x)+0\cdot p_3(x)\\ p_3(x)=&0\cdot p_1(x)+0\cdot p_2(x)+1\cdot p_3(x)\\ p_4(x)=&-p_1(x)+p_2(x)+2\cdot p_3(x)\ . \end{aligned}$$

■

דוגמא.

מצאו את המימד ובסיס של מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z\ &=0\\ 2x+4y+5z\ &=0\\ 3x+6y+9z\ &=0\\ 4x+8y+12z\ &=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1&2&3\\ 2&4&5\\ 3&6&9\\ 4&8&12 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4-4R_1]{\substack{R_2\to R_2-2R_1\\ R_3\to R_3-3R_1}} \begin{pmatrix} 1&2&3\\ 0&0&-1\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&2&0\\ 0&0&1\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}$$
