תרגילים 0: מערכות ליניאריות

שאלה 1

פתרו את המערכות הבאות מעל $\mathbb{R}$:

א)
$$\begin{cases} x+y-2z=7 \\ 2x-y+z=0 \\ x+y-z=6 \end{cases}$$

ב)
$$\begin{cases} y+2z-w=-7 \\ x+3y+w=6 \\ 2x-z=3 \\ 2y+z+w=4 \end{cases}$$

ג)
$$\begin{cases} x+2y-3z+2w=2 \\ 2x+5y-8z+6w=5 \\ 2x+2y-2z=2 \end{cases}$$

ד)
$$\begin{cases} 16x-12y+20z=0 \\ 12x-9y+15z=2 \\ 20x-15y+25z=5 \end{cases}$$

ה)
$$\begin{cases} x+2w+s=19 \\ -2y-6z+2w=2 \\ 2y+6z-2w+2s=0 \\ 3y+9z+2w+2s=19 \end{cases}$$

שאלה 2

$$\begin{aligned} x+y-2z&=7 \\ 2x-y+z&=0 \\ x+y-z&=6 \end{aligned}$$

שאלה 3

$$\begin{aligned} y+z&=3 \\ 3x+5y+9z&=-2 \\ x+2y+3z&=3 \end{aligned}$$

שאלה 4

$$\begin{aligned} 2x+2y+2z&=0 \\ -2x+5y+2z&=1 \\ 8x+y+4z&=-1 \end{aligned}$$

שאלה 5

$$\begin{aligned} y + 5z &= -4 \\ x + 4y + z &= -2 \\ 2x + 7y + z &= -1 \end{aligned}$$

שאלה 6

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 2x + 3y + 8z &= 4 \\ 3x + 2y + 17z &= 1 \end{aligned}$$

שאלה 7

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 8 \\ 2x + 4y - 6z &= -5 \\ x + 2y - 3z &= -1 \end{aligned}$$

שאלה 8

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 3x + y - 2z &= 1 \\ 4x + 3y - z &= 3 \\ 2x + 4y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

שאלה 9

$$\begin{aligned} 3x + y + z + w &= 0 \\ 5x - y + z - w &= 0 \end{aligned}$$

שאלה 10

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 0 \\ x + 2y &= 0 \\ -x + z &= 0 \end{aligned}$$

שאלה 11

$$\begin{aligned} 2x - y - 3z &= 0 \\ -x + 2y - 3z &= 0 \\ x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

שאלה 12

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ 2x - z &= 0 \\ x - y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

שאלה 13

נתונה המערכת הליניארית הבאה מעל $\mathbb{R}$:
$$\left.\begin{aligned} x-3z &= -3\\ 2x+ky-z &= -2\\ x+2y+kz &= 1 \end{aligned}\right\}$$

א) מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין פתרון.

ב) מצאו את הערכים של k עבורם למערכת יש פתרון יחיד.

ג) מצאו את הערכים של k עבורם יש אינסוף פתרונות. לכל אחד מערכי k שמצאתם , רשמו את הפתרון הכללי.

שאלה 14

נתונה המערכת הליניארית הבאה מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lllllll} (k+1)x & + & (k^2+2k-2)y & + & (2k^2+7k+7)z & = & k^3+k^2+k-2\\ kx & + & (k^2+k-2)y & + & (k^2+2k+3)z & = & k^3-5\\ x & + & ky & + & (k+1)z & = & k^2\\ (k-1)x & + & (k^2-2)y & + & (k^2+k+2)z & = & k^3-k^2-5 \end{array}$$

א) מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין פתרון.

ב) מצאו את הערכים של k עבורם למערכת יש פתרון יחיד.

ג) מצאו את הערכים של k עבורם יהיו אינסוף פתרונות. לכל אחד מערכי k שמצאתם , רשמו את הפתרון הכללי.

שאלה 15

נתונה המערכת הליניארית הבאה מעל $\mathbb{R}$:
$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= a\\ bx+y+z &= b\\ x+y+az &= b \end{aligned}\right\}$$

א) מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b עבורם למערכת אין פתרון.

ב) מצאו את הערכים של הפרמטרים a ו- b עבורם למערכת יש פתרון יחיד.

ג) מצאו את הערכים של הפרמטרים a ו- b עבורם יש אינסוף פתרונות. לכל אחד מערכי a ו- b שמצאתם , רשמו את הפתרון הכללי.

שאלה 16

נתונה המערכת הליניארית הבאה:
$$\left.\begin{aligned} x+2y+z &= -1\\ 2x+4y+(k+1)z+w &= 0\\ 2x+4y+2kz+(k^2-1)w &= k-1 \end{aligned}\right\}$$

א) מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין אף פתרון

ב) מצאו את הערכים של k עבורם למערכת ישנו פתרון יחיד

ג) מצאו את הערכים של k עבורם ישנן אינסוף פתרונות.

שאלה 17

נתונה המערכת הליניארית הבאה:
$$\begin{cases} x+(k-4)y &= 3 \\ 2x+(k^2-4k)y &= 2-k \\ -3x+6y+kz &= 1 \end{cases}$$

א) מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין אף פתרון

ב) מצאו את הערכים של k עבורם למערכת יש פתרון יחיד

ג) מצאו את הערכים של k עבורם יהיו אינסוף פתרונות.

שאלה 18

נתונה המערכת הלינארית הבאה מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} ax+y+2z &= 0 \\ ax+(a-2)y+5z &= -5 \\ 2ax+(a-1)y+(a^2-6a+15)z &= a-9 \end{aligned}$$

א) מצאו את ערכי הפרמטר a עבורם למערכת אין פתרון.

ב) מצאו את הערכים של a עבורם למערכת יש פתרון יחיד.

ג) מצאו את הערכים של a עבורם למערכת יש אינסוף פתרונות. עבור ערך a הגדול מבין אלו שמצאות, רשמו את הפתרון הכללי.

שאלה 19

נתונה מערכת משוואות לינאריות:

$$\begin{cases} x+ay+2z &= 6-a^2 \\ ax+2y+z &= 2 \\ (1-a)x+(a-2)y+z &= 0 \\ (1-2a)x+(a-4)y &= 8-5a \end{cases}$$

א) מצאו את ערכי הפרמטר a עבורם למערכת יש לפחות פתרון אחד.

ב) עבור כל אחד מערכי a שמצאתם בסעיף א', מצאו את פתרון המערכת (יחיד או כללי).

שאלה 20

שי מוכר אננסים בשוק. הוא קובע את המחיר לפי גודל האננס. אננס קטן עולה 10 ₪, אננס בינוני עולה 15 ₪, ואננס גדול עולה 40 ₪. בדרך כלל שי מוכר אותה כמות של אננסים קטנים לכמות של אננסים בינוניים ואננסים גדולים ביחד. בנוסף, בדרך כלל הוא מוכר פי שתיים יותר אננסים בינוניים מאננסים גדולים. העלות לבסטה ליום אחד הוא 300 ₪. כמה אננסים של כל גודל שי צריך למכור ביום אחד, כדי לכסות את המחיר של הבסטה בדיוק.

שאלה 21 נתונה המערכת הלינארית הבאה:

$$\begin{aligned} x+(a-1)y-z &= 4 \\ (a+1)x+(2a-2)y+(a-4)z &= a+10 \\ (a+2)x+(3a-3)y+(2a-7)z &= a+17 \end{aligned}$$

עבור אילו ערכי הפרמטר a למערכת:

א) פתרון יחיד

ב) אין פתרון

ג) אינסוף פתרונות? במקרה של אינסוף פתרונות רשמו את הפתרון הכללי.

שאלה 22 נתונה המערכת הלינארית הבאה:

$$\begin{aligned} x-3z &= 0 \\ x+y+kz &= 0 \\ 2x+ky+(2k^2+6k-16)z &= -2k^3+10k^2+82k-90 \end{aligned}$$

עבור אילו ערכי הפרמטר k למערכת:

א) פתרון יחיד

ב) אין פתרון

ג) אינסוף פתרונות?
במקרה של אינסוף פתרונות רשום את הפתרון הכללי.

שאלה 23 נתונה המערכת הלינארית הבאה מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x+y &= -3 \\ x+ky &= -3 \\ x+y+2kz &= 1 \end{aligned}$$

א) מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין פתרון.

ב) מצאו את הערכים של k עבורם למערכת יש פתרון יחיד.

ג) מצאו את הערכים של k עבורם למערכת יש אינסוף פתרונות. לכל אחד מערכי k שמצאות, רשמו את הפתרון הכללי.

שאלה 24 נתונה המערכת

$$\begin{aligned} x+3y+z &= 3 \\ (k-1)x+(k+1)y-z &= 4k-2 \\ kx+3ky-3z &= 4k+3 \end{aligned}$$

מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין פתרון, יש פתרון יחיד, יש אינסוף פתרונות. במקרה של אינסוף פתרונות רשמו את הפתרון הכללי.

פתרונות

שאלה 1

א) תשובה סופית: $x=2, y=3, z=-1$.

פתרון: מטריצה המורחבת: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right)$. נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & -3 & 5 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to \frac{-1}{3}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2+\frac{5}{3}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2+2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

לפיכך $(x,y,z)=(2,3,-1)$.

ב) תשובה סופית: $x=1\ ,\ y=0\ ,\ z=-1\ ,\ w=5$.

פתרון:

מטריצה המורחבת: $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 & -7 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$. נדרג:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 & -7 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -7 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 2 \cdot R_2]{R_3 \to R_3 + 6R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 11 & -8 & -51 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \to \frac{-1}{3} \cdot R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 11 & -8 & -51 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to 11 \cdot R_4 - R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 11 & -8 & -51 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -15 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4 \to \frac{-1}{3} \cdot R_4]{R_3 \to \frac{1}{11} \cdot R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-8}{11} & \frac{-51}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 + R_4 \\ R_3 \to R_3 + \frac{8}{11} \cdot R_4}]{R_1 \to R_1 - R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2 \cdot R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3 \cdot R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

לפיכך $(x, y, z, w) = (1, 0, -1, 5)$.

ג) <u>תשובה סופית:</u> $(x, y, z, w) = (-z + 2w, 2z - 2w + 1, z, w)$.

<u>פתרון:</u>

מטריצה המורחבת: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right)$. נדרג:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

המערכת המתאימה של המטריצה המדורגת המתקבלת הינה:

$$\left.\begin{aligned} x+z-2w &= 0 \\ y-2z+2w &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x &= -z+2w \\ y &= 1+2z-2w \end{aligned}\right\} .$$

לפיכך הפתרון הינו $(x,y,z,w)=(z+2w,1+2z-2w,z,w),\ \ z,w\in\mathbb{R}$. כלומר יש שני משתנים חופשיים בפתרון: z ו- w.

ד) <u>תשובה סופית:</u> אין פתרון.

<u>פתרון:</u> מטריצה המורחבת: $\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & -12 & 20 & 0 \\ 12 & -9 & 15 & 2 \\ 20 & -15 & 25 & 5 \end{array}\right)$. נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & -12 & 20 & 0 \\ 12 & -9 & 15 & 2 \\ 20 & -15 & 25 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to\frac{1}{16}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ 12 & -9 & 15 & 2 \\ 20 & -15 & 25 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2\to R_3-20\cdot R_1]{R_2\to R_2-12\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה ולפיכך לא קיים פתרון.

ה)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 19 \\ 0 & -2 & -6 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 2 & 19 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to-\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 2 & 19 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4'\to R_4-3R_2]{R_3\to R_3-2R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 22 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to\frac{1}{5}R_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{22}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4\to\frac{1}{2}R_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{22}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-\frac{2}{5}R_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-2R_3-R_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

נשים לב שיש משתנה חופשי אחד במטריצה המורחבת המדורגת. המערכת המתאימה למצטריצה המורחבת המדורגת הינה

$$\left.\begin{aligned} x &= 10 \\ y+3z &= -3 \\ w &= 4 \\ s &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x &= 10 \\ y &= -3-3z \\ w &= 4 \\ s &= 1 \end{aligned}\right\}$$

לפיכך הפתרון הינו

$$(x,y,z,w,s) = (10,-3-3z,z,4,1)\ , \quad z\in\mathbb{R}\ .$$

שאלה 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & -3 & 5 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{3}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2+\frac{5}{3}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2+2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$(x,y,z) = (2,3,-1)\ .$$

שאלה 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 9 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to (-1)\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2-3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right)$$

$$(x,y,z) = (5,11,-8)\ .$$

שאלה 4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 8R_1]{R_2 \to R_2 + 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{7}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & -7 & -4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 7R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{rl} x + \frac{3}{7}z & = -\frac{1}{7} \\ y + \frac{4}{7} & = \frac{1}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rl} x & = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}z \\ y & = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rl} x & = \frac{-1-3z}{7} \\ y & = \frac{1-4z}{7}, z \end{array}\right\}$$

$$(x,y,z) = \left(\frac{-1-3z}{7}, \frac{1-4z}{7}, z\right) \quad , \qquad z \in \mathbb{R} \ .$$

שאלה 5

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 2 & 7 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{4}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 5\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 4\cdot R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{37}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$(x,y,z) = \left(\frac{37}{4}, \frac{-11}{4}, \frac{-1}{4}\right) \ .$$

שאלה 6

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 17 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 8 & -8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to (-1) \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 8 & -8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 4R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} x + 7z &= -1 \\ y - 2z &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x &= -1 - 7z \\ y &= 2 + 2z \end{aligned}\right\}$$

$$(x, y, z) = (-1 - 7z, 2 + 2z, z) \ , \qquad z \in \mathbb{R} \ .$$

שאלה 7

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & -6 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & -6 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה לפיכך למערכת אין פתרון.

שאלה 8

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - 4 \cdot R_1 \\ R_4 \to R_4 - 2 \cdot R_1}]{R_2 \to R_2 - 3 \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{5} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 5 \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2 \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} x - z &= 0 \\ y + z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x &= z \\ y &= 1 - z \end{aligned}\right\}$$

$$(x, y, z) = (z, 1 - z, z) \ , \qquad z \in \mathbb{R} \ .$$

שאלה 9

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to 2\cdot R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-5\cdot R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -16 & -4 & -16 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{16}\cdot R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-3\cdot R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} x+\tfrac{1}{4}z &= 0 \\ y+\tfrac{1}{4}z+w &= 0 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{4}z \\ y &= -\tfrac{1}{4}z-w \end{aligned}\right\}$$

$$(x,y,z) = \left(-\frac{z}{4}\ ,\ -\frac{z}{4}-w\ ,\ z\ ,\ w\right)\ , \qquad z,w\in\mathbb{R}\ .$$

שאלה 10

$$(x,y,z)=(0,0,0)\ .$$

שאלה 11

$$(x,y,z)=(0,0,0)\ .$$

שאלה 12

$$(x,y,z)=(0,0,0)\ .$$

שאלה 13

נרשום את המטריצה המורחבת של המערכת: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & k & -1 & -2 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{array}\right)$. נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & k & -1 & -2 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & k & 5 & 4 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \\ 0 & k & 5 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to 2R_3 - kR_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \\ 0 & 0 & -k^2-3k+10 & 8-4k \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \\ 0 & 0 & -(k+5)(k-2) & -4(k-2) \end{array}\right)$$

כאשר $k=-5$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 28 \end{array}\right)$ בה יש שורת סתירה ולכן לא קיים פתרון.

עבור $k=2$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. יש משתנה חופשי במערכת המתאימה המתקבלת ולכן למערכת יהיו אינסוף פתרונות. בפרט הפתרון הכללי הינו

$$(x,y,z) = \left(-3+3z, 2-\frac{5}{2}z, z\right) \ , \quad z \in \mathbb{R} \ .$$

כאשר $k \neq 5, 2$ אין שורת סתירה ואין משתנה חופשי ולכן יש למערכת פתרון יחיד.

שאלה 14

נרשום את המטריצה המורחבת של המערכת:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} (k+1) & (k^2+2k-2) & (2k^2+7k+7) & k^3+k^2+k-2 \\ k & (k^2+k-2) & (k^2+2k+3) & k^3-5 \\ 1 & k & (k+1) & k^2 \\ (k-1) & (k^2-2) & (k^2+k+2) & k^3-k^2-5 \end{array}\right).$$

נדרג:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} (k+1) & (k^2+2k-2) & (2k^2+7k+7) & k^3+k^2+k-2 \\ k & (k^2+k-2) & (k^2+2k+3) & k^3-5 \\ 1 & k & (k+1) & k^2 \\ (k-1) & (k^2-2) & (k^2+k+2) & k^3-k^2-5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & (k^2+5k+4) & k^2+k+3 \\ k & (k^2+k-2) & (k^2+2k+3) & k^3-5 \\ 1 & k & (k+1) & k^2 \\ (k-1) & (k^2-2) & (k^2+k+2) & k^3-k^2-5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - kR_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & (k^2+5k+4) & k^2+k+3 \\ 0 & (k-2) & (k+3) & -5 \\ 1 & k & (k+1) & k^2 \\ (k-1) & (k^2-2) & (k^2+k+2) & k^3-k^2-5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 - (k-1)R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & (k^2+5k+4) & k^2+k+3 \\ 0 & (k-2) & (k+3) & -5 \\ 1 & k & (k+1) & k^2 \\ 0 & (k-2) & (k+3) & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -R_3 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & (k^2+5k+4) & k^2+k+3 \\ 0 & (k-2) & (k+3) & -5 \\ 0 & 0 & (k^2+4k+3) & k+3 \\ 0 & (k-2) & (k+3) & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & (k^2+5k+4) & k^2+k+3 \\ 0 & (k-2) & (k+3) & -5 \\ 0 & 0 & (k^2+4k+3) & k+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & k+1 & k^2 \\ 0 & (k-2) & (k+3) & -5 \\ 0 & 0 & (k^2+4k+3) & k+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & k+1 & k^2 \\ 0 & (k-2) & (k+3) & -5 \\ 0 & 0 & (k+3)(k+1) & k+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

עבור $k=-1$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. יש בה שורת סתירה ולכן אין למערכת אף פתרון.

עבור $k=2$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש בה שורת סתירה ולכן אין למערכת אף פתרון.

עבור $k = -3$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 9 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש בהמטריצה המורחבת המדורגת משתנה חופי ולכן יהיו אינסוף פתרונות. בפרט

$$(x, y, z) = (12 + 2z, 1, z) \ , \quad z \in \mathbb{R} \ .$$

עבור $k \neq -1, 2, -3$ אין שורת סתירה במטריצה המורחבת המדורגת ואין משתנים חופשיים לכן למערכת יהיה פתרון יחיד.

<u>שאלה 15</u>

המטריצה המורחבת של המערכת הינה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ b & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b \end{array}\right) \ .$$

נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ b & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - bR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1-b & 1-b & b(1-a) \\ 0 & 0 & a-1 & b-a \end{array}\right)$$

כאשר $a = 1, b \neq 1$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-b & 1-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right)$. יש בה שורת סתירה ולכן לא קיים פתרון.

עבור $a \neq 1, b = 1$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & (1-a) \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{array}\right)$. יש בה שורת סתירה ולכן לא קיים פתרון.

כאשר $a = 1, b = 1$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. יש בה משתנים חופשיים ולכן למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

בפרט

$$(x, y, z) = (x, y, 1 - x - y) \ , \quad x, y \in \mathbb{R} \ .$$

כאשר $a \neq 1, b \neq 1$ המטריצה המורחבת המדורגת מצורה $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-b & 1-b & b(1-a) \\ 0 & 0 & a-1 & b-1 \end{array}\right)$. עבור הערכים האלה אין שורת סתירה ואין משתנים חופשיים ולכן קיים פתרון יחיד. בפרט:

$$(x,y,z) = \left(\frac{b-a}{b-1}, -\frac{-a^2b + a(b+1) + (b-2)b}{(a-1)(b-1)}, \frac{b-a}{a-1}\right)$$

שאלה 16 נדרג את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & k+1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2k & k^2-1 & k-1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2k-2 & k^2-1 & k+1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-3 & k-3 \end{array}\right)$$

עבור $k = 1$ המטריצה המדורגת הינה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה לפיכך למערכת אין פתרון.

עבור $k = \pm\sqrt{3}$ נקבל: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{3}-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm\sqrt{3}-3 \end{array}\right)$. קיבלנו שורת סתירה אז למערכת אין פתרון.

כאשר $k \neq 1, \pm\sqrt{3}$ אין שורת סתירה אבל עדיין יהיה משתנה חופשי, ולכן יהיו אינסוף פתרונות. באותה סיבה יש 4 משתנים ורק 3 משוואות, אז לא ייתכן שיהיה פתרון יחיד.

סיכום:

א) עבור $k = 1$ או $k = \pm\sqrt{3}$ אין למערכת אף פתרון.

ב) פתרון יחיד- ודאי אין כי יש 3 משוואות בארבע משתנים.

ג) עבור $k \neq 1$ וגם $k \neq \pm\sqrt{3}$ יהיו למערכת אינסוף פתרונות.

שאלה 17 נדרג את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 2 & k^2-4k & 0 & 2-k \\ -3 & 6 & k & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3+3R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 0 & k^2-6k+8 & 0 & -k-4 \\ 0 & 3k-6 & k & 10 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 0 & (k-4)(k-2) & 0 & -k-4 \\ 0 & 3(k-2) & k & 10 \end{array}\right)$$

כאשר $k=2$ המטריצה המדורגת הינה: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right)$. קיבלנו שורת סתירה אז לא קיים פתרון. עבור $k=4$ המטריצה המדורגת הינה: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 6 & 4 & 10 \end{array}\right)$. קיבלנו שורת סתירה אז למערכת אין פתרון.

עבור $k=0$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 0 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to 8R_3+6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 56 \end{array}\right) .$$

קיבלנו שורת סתירה אז למערכת אין פתרון. עבור $k\neq 0,2,4$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 0 & (k-4)(k-2) & 0 & -k-4 \\ 0 & 3(k-2) & k & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to(k-4)R_3]{R_2\to 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 0 & 3(k-4)(k-2) & 0 & -3k-12 \\ 0 & 3(k-4)(k-2) & k(k-4) & 10(k-4) \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 0 & 3(k-4)(k-2) & 0 & -3k-12 \\ 0 & 0 & k(k-4) & 13k-28 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to 3(k-2)R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3(k-2) & 0 & 0 & 12k+6 \\ 0 & 3(k-4)(k-2) & 0 & -3k-12 \\ 0 & 0 & k(k-4) & 13k-28 \end{array}\right)$$

אין שורת סתירה וגם אין משתנה חופשי במטריצה המורחבת המדורגת ולכן קיים פתרון יחיד.

סיכום:

א) עבור $k=0,2,4$ אין למערכת אף פתרון.

ב) עבור $k\neq 0,2,4$ יש למערכת פתרון יחיד.

ג) אין ערכי k עבורם יהיו למערכת אינסוף פתרונות.

שאלה 18 נדרג את המטריצה המורחבת של המערבת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 0 \\ a & a-2 & 5 & -5 \\ 2a & a-1 & a^2-6a+15 & a-9 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-2\cdot R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & 3 & -5 \\ 0 & a-3 & a^2-6a+11 & a-9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & a^2-6a+8 & a-4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & (a-4)(a-2) & a-4 \end{array}\right)$$

כאשר $a=4$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. יש משתנים חופשיים ולפיכך למערת יהיו אינסוף פתרונות. בפרט הפתרון הכללי הוא $(x,y,z)=\left(\frac{5+z}{4},-5-3z,z\right)$

כאשר $a=2$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$. קיבלנו שורת סתירה ולכן לא קיים פתרון.

כאשר $a=3$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to 3\cdot R_3+\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right) .$$

קיבלנו שורת סתירה ולכן למערכת אין פתרון.

כאשר $a=0$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2+3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to 9\cdot R_3-8R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה ולפיכך למערכת אין אף פתרון.

לסיכום,

א) עבור $a=0,2,3$ אין פתרון.

ב) עבור $a\neq 0,2,3,4$ יש פתרון יחיד.

ג) עבור $a=4$ יהיו אינסוף פתרונות. בפרט: $(x,y,z)=\left(\frac{z+5}{4},-5-3z,z\right)$

שאלה 19

נרשום את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 6-a^2 \\ a & 2 & 1 & 2 \\ 1-a & a-2 & 1 & 0 \\ 1-2a & a-4 & 0 & 8-5a \end{array}\right) \xrightarrow[R_4\to R_4+(2a-1)R_1]{\substack{R_2\to R_1-aR_1 \\ R_3\to R_3+(a-1)R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 6-a^2 \\ 0 & 2-a^2 & 1-2a & a^3-6a+2 \\ 0 & a^2-2 & 2a-1 & -a^3+a^2+6a-6 \\ 0 & 2a^2-4 & 4a-2 & -2a^3+a^2+7a+2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4\to R_4+2R_2]{R_3\to R_2+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 6-a^2 \\ 0 & 2-a^2 & 1-2a & a^3-6a+2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-4 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-5a+6 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 6-a^2 \\ 0 & 2-a^2 & 1-2a & a^3-6a+2 \\ 0 & 0 & 0 & (a+2)(a-2) \\ 0 & 0 & 0 & (a-2)(a-3) \end{array}\right)$$

לכל $a\neq 2,-2,3$ תהיה שורת סתירה ממטריצה המורחבת המדורגת. לכל שאר הערכים לא תהיה שורת סתירה.
לכן עבור $a\neq 2,-2,3$ לא קיים פתרון.

עבור $a=3$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ יש שורת סתירה לפיכך לא קיים פתרון.

עבור $a=-2$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right)$ יש שורת סתירה לפיכך לא קיים פתרון.

עבור $a=2$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to \frac{-1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

אין שורת סתירה אך יש משתנים חופשיים לכן יהיו אינסוף פתרונות. בפרט:

$$(x,y,z)=\left(z,-\frac{3}{2}z+1,z\right)\ ,\qquad z\in\mathbb{R}\ .$$

לסיכום:

א) עבור $a=2$ למערכת יש לפחות פתרון אחד.

ב) עבור $a=2$:

$$(x,y,z)=\left(z,-\frac{3}{2}z+1,z\right)\ ,\qquad z\in\mathbb{R}\ .$$

שאלה 20 נניח ש- x מסמן את המספר של אננסים הקטנים שנמכרו, y מסמן את המספר של אננסים הבינוניים שנמכרו, ו- z מסמן את המספר של האננסים הגדולים שנמכרו. לכן הרווח מאננסים קטנים הינו $10x$, הרווח מאננסים בינוניים הינו $15y$, והרווח מאננסים קטנים הינו $40x$. הרווח חייב להיות שווה ל- 300. לכן נדרוש כי

$$10x + 15y + 40z = 300 \ .$$

המספר של אננסים קטנים שנמכרו שווה לסכום של אננסים בינוניים ואננסים גדולים שנמכרו, ז"א

$$x = y + z \ .$$

שי מוכר פי שתיים יותר אננסים בינוניים מאננסים גדולים, לכן

$$y = 2z \ .$$

קיבלנו את המערכת משוואות הבאה:

$$\begin{aligned} 10x + 15y + 40z &= 300 \ , \\ x - y - z &= 0 \ , \\ y - 2z &= 0 \ . \end{aligned}$$

נפתור את המערכת הזאת. המטריצה המורחבת שת המערכת הינה $\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 15 & 40 & 300 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$. נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 15 & 40 & 300 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{10} R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 4 & 30 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 4 & 30 \\ 0 & \frac{-5}{2} & -5 & -30 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{-2}{5} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 4 & 30 \\ 0 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 4 & 30 \\ 0 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -\frac{1}{4} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 4 & 30 \\ 0 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 4 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - \frac{3}{2} R_2 - 4R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

התשובה הינה

$$(x.y, z) = (9, 6, 3) \ .$$

זאת אומרת אם שי ימכור 9 אננסים קטנים, 6 אננסים בינוניים ו- 3 אננסים גדולים, הרווח שלו יהיה מספיק כדי לכסות את העלות של הבסטה ליום אחד.

שאלה 21

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ a+1 & 2a-2 & a-4 & a+10 \\ a+2 & 3a-3 & 2a-7 & a+17 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-(a+2)R_1]{R_2\to R_2-(a+1)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ 0 & -a^2+2a-1 & 2a-3 & -3a+6 \\ 0 & -a^2+2a-1 & 3a-5 & -3a+9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ 0 & -a^2+2a-1 & 2a-3 & -3a+6 \\ 0 & 0 & a-2 & 3 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ 0 & -(a-1)^2 & 2a-3 & -3(a-2) \\ 0 & 0 & a-2 & 3 \end{array}\right)$$

אם $a=2$ נקבל שורת סתירה: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$. לכן ,למערכת קיים פתרון רק אם $a-2\neq 0$.

אם $a=1$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש משתנה חופשי אבל אין שורת סתירה ולפיכך יהיו אינסוף פתרונות. הפתרון הכללי הוא

$$(x,y,z)=(1,y,-3)\ , \qquad y\in\mathbb{R}\ .$$

אם $a\neq 1,2$ אין שורת סתירה ואין משתנה חופשי. לכו קיים פתרון יחיד. סיכום:

א) $a=2$ אין אף פתרון.

ב) $a\neq 1,2$ יש פתרון יחיד.

ג) עבור $a=1$ למערכת יהיו ∞ פתרונות.

שאלה 22

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 2 & k & 2k^2+6k-16 & -2k^3+10k^2+82k-90 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & k+3 & 0 \\ 0 & k & 2k^2+6k-10 & -2k^3+10k^2+82k-90 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-kR_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & k+3 & 0 \\ 0 & 0 & k^2+3k-10 & -2k^3+10k^2+82k-90 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & k+3 & 0 \\ 0 & 0 & (k+5)(k-2) & -2k^3+10k^2+82k-90 \end{array}\right)$$

עבור $k=2$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 98 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה ולכן אין פתרון.

עבור $k=-5$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש משתנה חופשי אבל אין שורת סתירה ולכן יהיו אינסוף פתרונות. הפתרון הכללי:

$$(x,y,z)=(3z,2z,z)\ ,\qquad z\in\mathbb{R}\ .$$

עבור $k=-3$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -192 \end{array}\right)$$

אין משתנה חופשי ואין שורת סתירה ולכן למערכת יש פתרון יחיד.

עבור $k\neq -3,2,-5$, כלומר לכל שאר ערכים של k, אין משתנה חופשי ואין שרות סתירה לכן יהיה למערכת פתרון יחיד.

לסיכום:

א) $k=2$ אין אף פתרון.

ב) $k=-5$ יש ∞ פתרונות.

ג) עבור $k \neq 2, -5$ למערכת יש פתרון יחיד.

שאלה 23

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & k & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2k & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k & 4 \end{array}\right)$$

א) אם $k = 0$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$.
קיבלנו שורה סתירה ואז אין פתרון.

אם $k = 1$ אז נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש משתנה חופשי ואין שורת סתירה לכן למערכת יהיו אינסוף פתרונות:

$$(x, y, z) = (-3 - y, y, 2) \ , \qquad y \in \mathbb{R} \ .$$

ג) אם $k \neq 0, 1$ אין משתנה חופדשי ואז יהיה פתרון יחיד.

ד) אם $k = 1$ יהיו אינסוף פתרונות מצורה

$$(x, y, z) = (-3 - y, y, 2), \qquad y \in \mathbb{R} \ .$$

שאלה 24

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ k-1 & k+1 & -1 & 4k-2 \\ k & 3k & -3 & 4k+3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - kR_1]{R_2 \to R_2 - (k-1)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -2(k-2) & -k & k+1 \\ 0 & 0 & -k-3 & k+3 \end{array}\right)$$

$\underline{k = -3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש משתנה חופשי ואין שורת סתירה לכן יהיו ∞ פתרונות.

$$\left.\begin{aligned} x + 3y + z &= 3 \\ 10y + 3z &= -2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x &= -3y - z + 3 \\ 10y &= -3z - 2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x &= -3y - z + 3 \\ y &= \tfrac{-3}{10} z - \tfrac{2}{10} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{9}{10}z + \tfrac{6}{10} - z + 3 \\ y &= \tfrac{-3}{10}z - \tfrac{2}{10} \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned} x &= \tfrac{-1}{10}z + \tfrac{18}{5} \\ y &= \tfrac{-3}{10}z - \tfrac{2}{10} \end{aligned}\right\} .$$

$\underline{k=2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to 2R_3 - 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

שורת סתירה: אין פתרון.

$\underline{k=0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to 3R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 9 & 0 & 12 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to 4R_1 - 9R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 0 & 0 & 39 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

פתרון יחיד:

$$(x,y,z) = \left(\frac{13}{4}, \frac{1}{4}, -1\right)$$

$\underline{k=-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to 2R_1 - R_2 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$(x,y,z) = \left(4, \frac{1}{6}, -1\right)$$