

אלגברה 2

מועד מיוחד

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר,

תשפ"ד סמסטר ב'

השאלון מכיל 12 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

הנחיות

- יש לפתור את כל השאלות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבירו היטב את מהלך הפתרון. תשובה ללא הסבר (גם נכונה) לא תתקבל.
- אסור לחלוטין לקבל עזרה מסטודנט אחר או מאף אחד. עליכם להעלות את הפתרונות שלכם דרך אתר המודל של הקורס אלגברה 2 למדמ"ח, או במייל, לא יאוחר משעה 23 : 59 – 12 – 24 – 3.
- פתרונות שהוגשו אחרי המועד הזה לא יתקבלו.
- מותר להשתמש בחומר של הקורס, התרגילים של הקורס והספרים של הקורס בלבד, אבל אסור להשתמש בשום מקורות אחרים.
- אחרי הגשת פתרונות אתם תקבלו הזמנה למבחן קצר בעל פה על הפתרונות שלכם.
- ייתכן שלא תעבור את המבחן או יורידו נקודות במקרה שאתם לא יכולים להסביר הפתרונות שלכם היטב.

שאלה 1 (25 נקודות)

תהי $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

(א) האם A לכסינה? אם כן מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

(ב) הוכיחו כי $A^{-1} = \frac{13}{12}I + \frac{1}{8}A - \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{24}A^3$.

(ג) הוכיחו כי $A^{-2} = \frac{13}{288}A^3 + \frac{187}{144}I - \frac{11}{96}A - \frac{11}{48}A^2$.

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ויהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ערכים עצמיים שונים של A , כלומר $\lambda_i \neq \lambda_j$ לכל $i \neq j$ כאשר $1 \leq i, j \leq k$. יהי u_i הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ_i . הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענה הבאה: הקבוצת וקטורים עצמיים $\{u_1, \dots, u_k\}$ בלתי תלויה לינארית.

שאלה 3 (25 נקודות)

יהיו $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ וקטורים של \mathbb{C}^2 . הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענה הבאה. הנוסחה הבאה

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 \bar{x}_2 - y_1 \bar{y}_2 + 2x_1 \bar{y}_2 + 2x_2 \bar{y}_1.$$

מהווה מכפלה פנימית.

שאלה 4 (25 נקודות)

תהי $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ מטריצה נורמלית בעלת ערכים עצמיים $\lambda = 2$ ו- $\lambda = 3 + i$. שהמרחב העצמי של $\lambda = 3 + i$ הוא

$$V_{3+i} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

מצאו את המטריצה A .