שיעור 1
מכונות טיורינג

1.1 הגדרה של מכונת טיורינג

הגדרה 1.1 מכונת טיורינג (הגדרה היוריסטית)

הקלט והסרט

- מכונת טיורינג (מ"ט) קורא קלט.
- הקלט עצמו נמצא על סרט אינסופי מחולק למשבצות.
- כל תו של הקלט כתוב במשבצת אחת של הסרט.
- במכונת טיורינג אנחנו מניחים שהסרט אינסופי לשני הכיוונים.
  - משמאל לתחילת הקלט יש רצף אינסופי של תווי רווח "␣".
  - מימין לסוף הקלט יש רצף אינסופי של תווי רווח "␣".

$\cdots$	␣	␣	a	b	b	b	a	a	␣	␣	␣	$\cdots$

הראש

- במצב ההתחלתי הראש בקצה השמאלי של הקלט.

$\cdots$	␣	␣	a	b	b	b	a	a	␣	␣	␣	$\cdots$
			$\uparrow$									

- הראש יכול לזוז ימינה על הסרט וגם שמאלה על הסרט.
- הראש קורא את התוכן של המשבצת שבה הוא נמצא.
- הראש יכול לכתוב על משבצת, אבל רק על המשבצת שבה הראש נמצא.

תאור העבודה של המכונה

- בתחילת הריצה, הקלט כתוב התחלת הסרט כאשר מימינו נמצא רצף אינסופי של תווי ␣ -ים.
- הראש מצביע על התא הראשון בסרט והמכונה נמצאת במצב התחלתי q_0.

q_0	$\cdots$	␣	␣	a	b	b	b	a	a	␣	␣	␣	$\cdots$
				$\uparrow$									

- בכל צעד חישוב, בהתאם למצב הנוכחי ולאות שמתחת לראש (התו הנקרא), המכונה מחליטה:
  - לאיזה מצב לעבור
  - מה לכתוב מתחת לראש (התו הנכתב)
  - לאן להזיז את הראש (תא אחד ימינה, או תא אחד שמאלה, או להישאר במקום).
- למכונה ישנם שני מצבים מיוחדים:
  - q_{acc}: אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל- q_{acc} היא עוברת ומקבלת.
  - q_{rej}: אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל- q_{rej} היא עוברת ודוחה.
- אם המכונה לא מגיעה ל- q_{acc} או q_{rej} היא תמשיך לרוץ לנצח.

הגדרה 1.2 מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעיה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר:

Q	קבוצת מצבים סופית ולא ריקה	
Σ	אלפבית הקלט	$\llcorner\!\lrcorner \notin \Sigma$
Γ	אלפבית הסרט	$\Sigma \subseteq \Gamma\,,\ \llcorner\!\lrcorner \in \Gamma$
δ	פונקצית המעברים	$\delta : (Q\backslash\{q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}\} \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$
q_0	מצב התחלתי	
q_{acc}	מצב מקבל יחיד	
q_{rej}	מצב דוחה יחיד	

דוגמה 1.1

נבנה מכונת טיורינג אשר מקבלת מילה אם היא בשפה

$$L = \left\{ w \in \{a, b\}^* \middle| \#a_w = \#b_w \right\} \ .$$

ז"א השפת כל המילים עם מספר שווה אותיות a ו b.

הרעיון של האלגוריתם של המכונה היא כדלקמן:

- נסרוק את הקלט משמאל לימין, נחפש את האות a הראשונה, נסמן אותה איכשהו כ"נקראת".
- אחר כך נחפש b תואם.
  - אם מצאנו b תואם נסמן אותו כ"נקרא", נחזור לתחילת הקלט ונתחיל סיבוב חדש.
  - אם לא מצאנו b תואם אז המכונה תדחה.
- אם נגיע לסיבוב שבו אינן נשארות אף אותיות לא a:
  - אם יש b לא מסומן אז המכונה תדחה.
  - אחרת אם לא נשאר אף b לא מסומן אז המכונה תקבל.

כעת נתאר את הפאודו-קוד של המכונה, כדלקמן.

פסאודו-קוד

1) סורקים את הקלט משמאול לימין.
- אם לא מצאנו a וגם לא מצאנו b $\Leftarrow$ מקבלת.
- אם האות הראשונה שהראש מצא היא a, כותבים עליו ✓, חוזרים לתחילת הקלט ועוברים לשלב 2).
- אם האות הראשונה שהראש מצא היא b, כותבים עליו ✓, חוזרים לתחילת הקלט ועוברים לשלב 3).

2) סורקים את הקלט משמאול לימין.
- אם לא מצאנו b $\Leftarrow$ דוחה.
- אם מצאנו b כותבים עליו ✓, חוזרים לתחילת הקלט וחוזרים לשלב 1).

3) סורקים את הקלט משמאול לימין.
- אם לא מצאנו a $\Leftarrow$ דוחה.
- אם מצאנו a כותבים עליו ✓, חוזרים לתחילת הקלט וחוזרים לשלב 1).

כעת נתן הגדרה פורמלית של המכונת טיורינג שמבצעת את האלגוריתם הזה.

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר Q הקבוצת המצבנים הבאה:

$$Q = \{q_0, q_a, q_b, q_{\text{back}}, q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}\} \ .$$

המשמעותם של כל המצבים נרשמים בטבלה למטה:

q_0	המצב ההתחלתי. אליו נחזור אחרי כל סבב התאמה של זוג אותיות.
q_a	מצב שבו ראינו a ומחפשים b תואם.
q_b	מצב שבו ראינו b ומחפשים a תואם.
q_{back}	מצב שנשתמש בו כדי לחזור לקצה השמאלי של הקלט ולהתחיל את הסריקה הבאה (סבב ההתאמה הבא).
q_{acc}	מצב מקבל.
q_{rej}	מצב דוחה.

האלפבית של הקלט, Σ, והלפבית של הסרט, Γ, הינן:

$$\Sigma = \{\texttt{a}, \texttt{b}\} \ , \qquad \Gamma = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \llcorner\!\lrcorner, \checkmark\} \ .$$

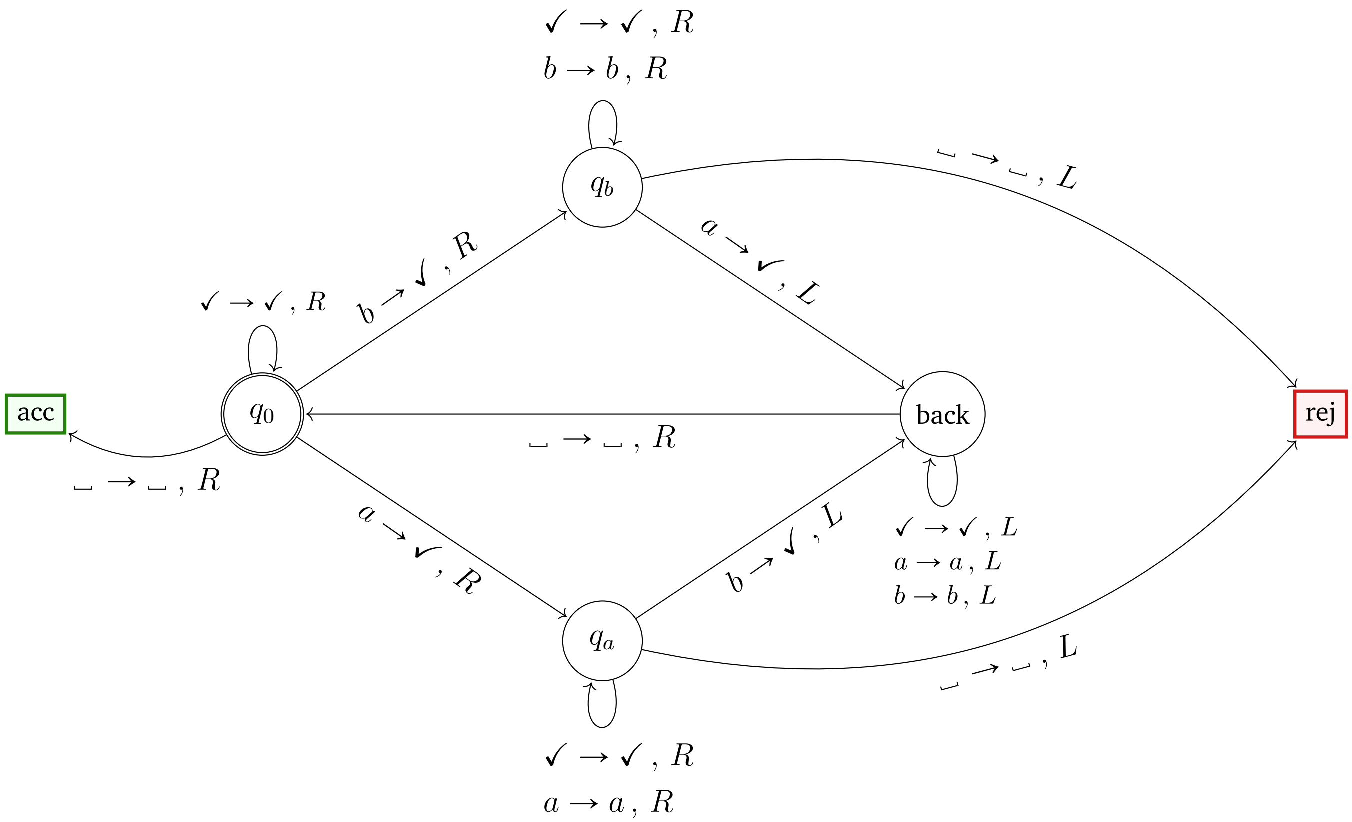
הפונקצית המעברים $\delta : Q \times \Sigma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ היא מוגדרת כדלקמן.

$$\begin{aligned}
\delta\left(q_0, \texttt{a}\right) &= \left(q_a, \checkmark, R\right) \ , \\
\delta\left(q_0, \texttt{b}\right) &= \left(q_b, \checkmark, R\right) \ , \\
\delta\left(q_0, \llcorner\!\lrcorner\right) &= \left(q_{\text{acc}}, \llcorner\!\lrcorner, R\right) \ , \\
\delta\left(q_a, \checkmark\right) &= \left(q_a, \checkmark, R\right) \ , \\
\delta\left(q_a, \texttt{a}\right) &= \left(q_a, \texttt{a}, R\right) \ , \\
\delta\left(q_a, \texttt{b}\right) &= \left(\text{back}, \checkmark, L\right) \ , \\
\delta\left(q_b, \checkmark\right) &= \left(q_b, \checkmark, R\right) \ , \\
\delta\left(q_b, \texttt{b}\right) &= \left(q_a, \texttt{b}, R\right) \ , \\
\delta\left(q_b, \texttt{a}\right) &= \left(\text{back}, \checkmark, L\right) \ .
\end{aligned}$$

לעתים קל יותר לרשום את פונקציית המעבירים δ כטבלה:

$Q \backslash \Gamma$	a	b	$\llcorner\!\lrcorner$	$\checkmark$
q_0	$(q_a, \checkmark, R)$	$(q_b, \checkmark, R)$	$(q_{\text{acc}}, \llcorner\!\lrcorner, R)$	$(q_0, \checkmark, R)$
q_a	$(q_a, \texttt{a}, R)$	$(\text{back}, \checkmark, L)$	$(q_{\text{rej}}, \llcorner\!\lrcorner, L)$	$(q_a, \checkmark, R)$
q_b	$(\text{back}, \checkmark, L)$	$(q_b, \texttt{b}, R)$	$(q_{\text{rej}}, \llcorner\!\lrcorner, L)$	$(q_b, \checkmark, R)$
back	$(\text{back}, \texttt{a}, L)$	$(\text{back}, \texttt{b}, L)$	$(q_0, \llcorner\!\lrcorner, R)$	$(\text{back}, \checkmark, L)$

<u>תרשים מצבים</u>



- בכל צעד המכונה מבצעת שתי פעולות:
  1. כותבת אות במיקום הראש
  2. זזה צעד אחד שמאלה או צעד אחד ימינה.
- בכל צעד המכונה יכולה לעבור למצב אחר או להישאר באותו מצב.

דוגמה 1.2

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה abbbaa.

פתרון:

␣	q_0	a	b	b	b	a	a	␣
␣	$\checkmark$	q_a	b	b	b	a	a	␣
␣	back	$\checkmark$	$\checkmark$	b	b	a	a	␣
back	␣	$\checkmark$	$\checkmark$	b	b	a	a	␣
␣	q_0	$\checkmark$	$\checkmark$	b	b	a	a	␣
␣	$\checkmark$	q_0	$\checkmark$	b	b	a	a	␣
␣	$\checkmark$	$\checkmark$	q_0	b	b	a	a	␣
␣	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_b	b	a	a	␣
␣	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	b	q_b	a	a	␣
␣	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	back	b	$\checkmark$	a	␣
␣	$\checkmark$	$\checkmark$	back	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	␣
␣	$\checkmark$	back	$\checkmark$	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	␣

$\sqcup$	back	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
back	$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	q_0	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	q_0	$\checkmark$	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_0	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_0	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_b	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	back	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	back	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	back	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	back	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	back	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$
back	$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	q_0	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	q_0	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_0	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_0	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_0	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_0	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_0	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$	acc

דוגמה 1.3

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה aab.

פתרון:

$\sqcup$	q_0	a	a	b	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	q_a	a	b	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	a	q_a	b	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	back	a	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	back	$\checkmark$	a	$\checkmark$	$\sqcup$
back	$\sqcup$	$\checkmark$	a	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	q_0	$\checkmark$	a	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	q_0	a	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_a	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	rej	$\checkmark$	$\sqcup$

הגדרה 1.3 קונפיגורציה

תהי $M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג. **קונפיגורציה** של M הינה מחרוזת

$$uq\sigma v$$

כאשר משמעות:

$$u, \mathrm{v} \in \Gamma^* \ , \qquad \sigma \in \Gamma \ , \qquad q \in Q \ .$$

q מצב המכונה,
σ הסימון במיקום הראש
u תוכן הסרט משמאל לראש,
v תוכן הסרט מימין לראש.

דוגמה 1.4 (המשך של דוגמה 1.3)

u	q	σ	v
␣	q_0	a	a b ␣
␣ ✓	q_a	a	b ␣
␣ ✓ a	q_a	b	␣
␣ ✓	back	a	✓ ␣
␣	back	✓	a ✓ ␣
␣	back	␣	✓ a ✓ ␣
␣	q_0	✓	a ✓ ␣
␣ ✓	q_0	a	✓ ␣
␣ ✓ ✓	q_a	✓	␣
␣ ✓ ✓ ✓	q_a	␣	␣
␣ ✓ ✓	rej	✓	␣

דוגמה 1.5

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת כל מילה בשפה

$$L = \{a^n \,|\, n = 2^k \ , \ k \in \mathbb{N}\}$$

ז"א מילים בעלי מספר אותיות a אשר חזקה של 2.

פתרון:

ראשית נשים לב למשפט הבא:

משפט 1.1

מספר שלם n שווה לחזקה אי-שלילית של 2, כלומר $(k \geqslant 0) \quad n = 2^k$ אם ורק אם קיים שלם m עבורו חילוק של n ב- 2 בדיוק m פעמים נותן 1.

הוכחה:

<u>כיוון ⇐</u>

אם $n = 2^k$ ו- $k \geqslant 0$ אז $\frac{n}{2^k} = 1$.

<u>כיוון ⇒</u>

אם קיים $m \geqslant 0$ עבורו $\frac{n}{2^m} = 1$ אז $n = 2^m$ ולכן n שווה לחזקה אי-שלילית של 2. ■

לאור המשפט הזה נבנה אלגוריתם אשר מחלק את מספר האותיות במילה ב- 2 בצורה איטרטיבית. אם אחרי סבב מסויים נקבל מספר אי-זוגי גדול מ- 1 אז מספר האותיות a במילה לא יכול להיות חזקה של 2. אם אחרי כל הסבבים לא קיבלנו מספר אי-זוגי גדול מ-1 אז מובטח לנו שיש מספר אותיות a אשר חזקה של 2.

• נתון הקלט

␣	␣	a	a	a	a	a	a	a	a	␣	␣
		↑									

נעבור על סרט הקלט. משמאל לימין.

- מבצעים מחקיה לסירוגין של האות a כלומר אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר וכן הלאה.

␣	␣	✓	a	✓	a	✓	a	✓	a	␣	␣
									↑		

אם אחרי סבב הראשון

- יש ✓ בתו האחרון ⇐ קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ⇐ אין חזקה של 2 אותיות a במילה.
- יש a בתו האחרון ⇐ קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ונמשיך לסבב הבא.

- הראש חוזר לתו הראשון של הקלט

␣	␣	✓	a	✓	a	✓	a	✓	a	␣	␣
		↑									

- בסבב הבא חוזרים על התהליך של מחיקה לסירוגין של האות a (אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר)

␣	␣	✓	✓	✓	a	✓	✓	✓	a	␣	␣
									↑		

אם אחרי סבב השני

- יש ✓ בתו האחרון ⇐ קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ⇐ אין חזקה של 2 אותיות a במילה.
- יש a בתו האחרון ⇐ קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ונמשיך לסבב הבא.

- הראש חוזר לתו הראשון של הקלט

␣	␣	✓	✓	✓	a	✓	✓	✓	a	␣	␣
		↑									

- בסבב הבא חוזרים על התהליך של מחיקה לסירוגין של האות a (אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר)

␣	␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	a	␣	␣
									↑		

אם אחרי סבב השלישי

- יש ✓ בתו האחרון ⇐ קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ⇐ אין חזקה של 2 אותיות a במילה.
- יש a בתו האחרון ⇐ קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ונמשיך לסבב הבא.

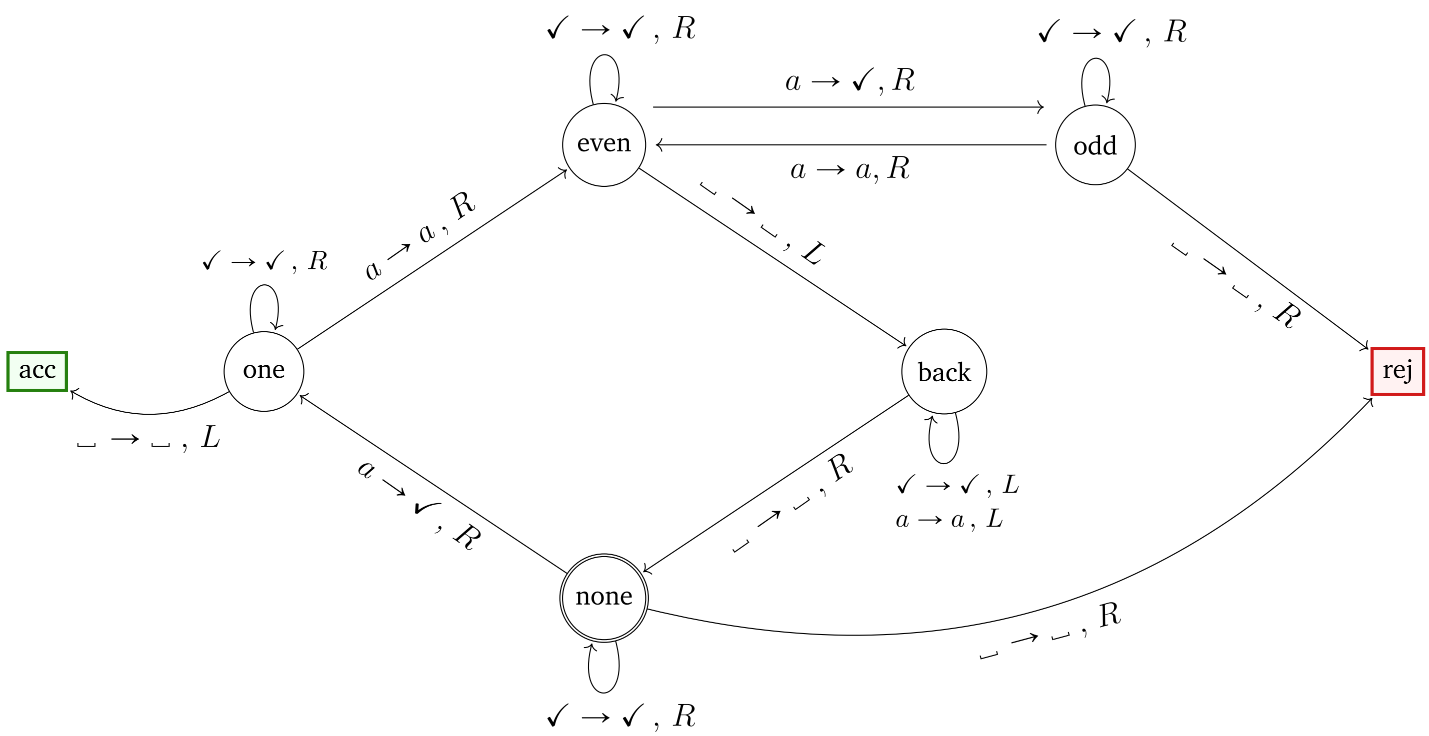
- הראש חוזר לתו הראשון של הקלט.

בסבב האחרון נשאר רק אות a אחת.

לכן לפי המשפט למעלה מובטח לנו כי המילה מורכבת ממספר אותיות a אשר חזקה של 2.

␣	␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	a	␣	␣
		↑									

המכונת טיורינג אשר מקבלת מילים בשפה שעובדת לפי האלגוריתם המתואר למעלה מתואר בתרשים למטה.



המצבים:

מצב none: מצב התחלתי. עדיין לא קראנו a בסבב סריקה זה.
מצב one: קראנו a בודד.
מצב even: קראנו מספר זוגי של a .
מצב odd: קראנו מספר אי-זוגי של a .
מצב back: חזרה שלמאלה.

דוגמה 1.6

בדקו אם המילה

aaaa

מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.5.

פתרון:

␣	none	a	a	a	a	␣
␣	✓	one	a	a	a	␣
␣	✓	a	even	a	a	␣
␣	✓	a	✓	odd	a	␣
␣	✓	a	✓	a	even	␣
␣	✓	a	✓	back	a	␣
␣	✓	a	back	✓	a	␣
␣	✓	back	a	✓	a	␣
␣	back	✓	a	✓	a	␣
back	␣	✓	a	✓	a	␣

␣	none	✓	a	✓	a	␣
␣	✓	none	a	✓	a	␣
␣	✓	✓	one	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	one	a	␣
␣	✓	✓	✓	a	even	␣
␣	✓	✓	✓	back	a	␣
␣	✓	✓	back	✓	a	␣
␣	✓	back	✓	✓	a	␣
␣	back	✓	✓	✓	a	␣
back	␣	✓	✓	✓	a	␣
␣	none	✓	✓	✓	a	␣
␣	✓	none	✓	✓	a	␣
␣	✓	✓	none	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	none	a	␣
␣	✓	✓	✓	✓	one	␣
␣	✓	✓	✓	acc	✓	␣

u	q	σ	v
␣	none	a	a a a ␣
␣ ✓	one	a	a a ␣
␣ ✓ a	even	a	a ␣
␣ ✓ a ✓	odd	a	␣
␣ ✓ a ✓ a	even	␣	␣
␣ ✓ a ✓	back	a	␣
␣ ✓ a	back	✓	a ␣
␣ ✓	back	a	✓ a ␣
␣	back	✓	a ✓ a ␣
␣	back	␣	✓ a ✓ a ␣
␣	none	✓	a ✓ a ␣
␣✓	none	a	✓ a ␣
␣✓✓	one	✓	a ␣
␣✓✓✓	one	a	␣
␣✓✓✓ a	even	␣	␣
␣✓✓✓	back	a	␣
␣✓✓	back	✓ a	␣
␣✓	back	✓	✓ a ␣
␣	back	✓	✓✓ a ␣
␣	back	␣	✓✓✓ a ␣
␣	none	✓	✓✓ a ␣
␣✓	none	✓	✓ a ␣
␣✓✓	none	✓	a ␣
␣✓✓✓	none	a	␣
␣✓✓✓✓	one	␣	␣
␣✓✓✓	acc	✓	␣

דוגמה 1.7

בדקו אם המילה

aaa

מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.5.

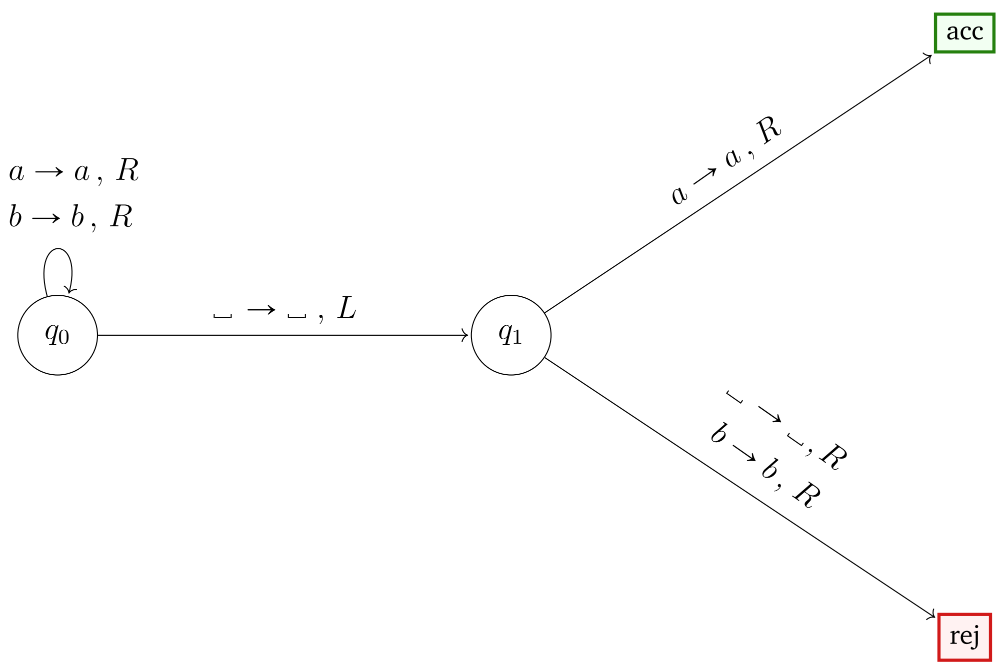
פתרון:

␣	none	a	a	a	␣
␣	✓	one	a	a	␣
␣	✓	a	even	a	␣
␣	✓	a	✓	odd	␣
␣	✓	a	✓	␣	rej

u	q	σ	v
␣	none	a	aa ␣
␣ ✓	one	a	a ␣
␣ ✓ a	even	a	␣
␣ ✓ a ✓	odd	␣	␣
␣ ✓ a ✓ ␣	rej	␣	␣

דוגמה 1.8

מהי שפת המכונה:



פתרון:

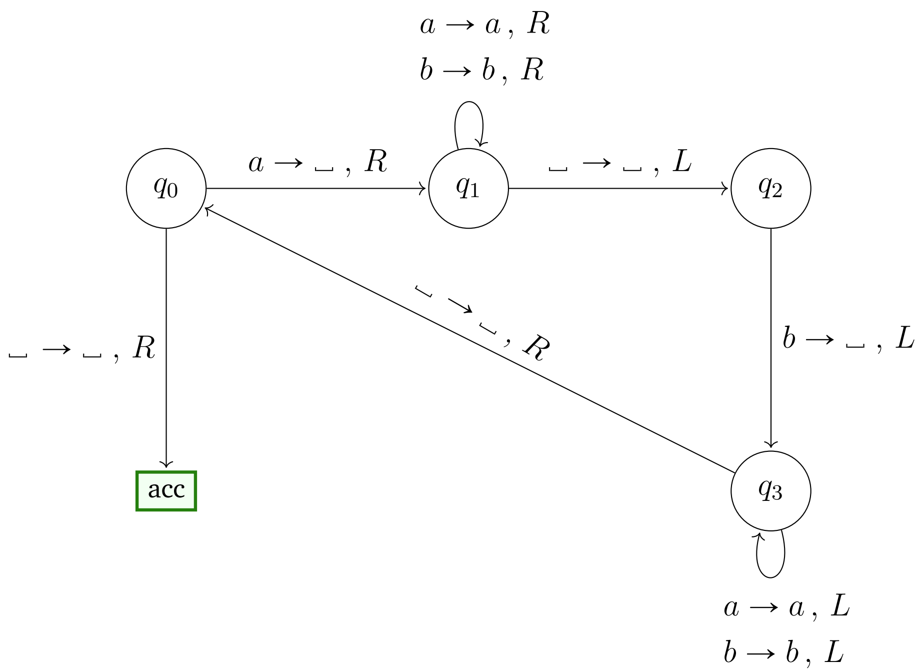
תיאור מילולי:

- במצב התחלתי q_0:
  - אם אנחנו רואים a, עוברים למשבצת הבאה לימין הראש.
  - אם אנחנו רואים b, עוברים למשבצת הבהאה לשמאל הראש.
- ממשיכים כך עד שנגיע לתו רווח, כלומר לסוף המילה, ואז עוברים למשבצת לשמאל הראש, כלומר לתו האחרון של המילה.
  - אם אנחנו רואים a, המילה מתקבלת. (ז"א התו האחרון הינו a.)
  - אם אנחנו רואים b, המילה נדחית. (ז"א התו האחרון הינו b.)
  - אם אנחנו רואים תו-רווח המילה נדחית. (ז"א המילה הינה ריקה.)

תשובה סופית: המכונה מקבלת שפת המילים המסתיימות באות a.

דוגמה 1.9

מהי שפת המכונה:



פתרון:

תיאור מילולי:

- במצב התחלתי q_0:
  - אם אנחנו רואים b, המילה נדחית.
  - אם אנחנו רואים $\sqcup$, המילה מתקבלת.
  - אם אנחנו רואים a, כותבים עליה $\sqcup$ ועוברים למשבצת הבאה לימין הראש, והמ"ט עוברת למצס q_1.
- במצב q_1 אנחנו ראינו a וכתבנו עליה $\sqcup$.
  - אם אנחנו רואים במשבצת הבאה a או b, ממשיכים למשבצת הבאה לימין והמ"ט נשארת במצב q_1.
  - אם אנחנו רואים תו רווח (כלומר הגענו לסוף המילה) הראש זז למשבצת השמאלי, כלומר לאות האחרונה של המילה והמ"ט עוברת למצב q_2.
- במצב q_2 ראינו a בתו הראשון, כתבנו עליה $\sqcup$ והראש קורא התו האחרון.
  - אם אנחנו רואים a המילה נדחית.
  - אם אנחנו רואים $\sqcup$, המילה נדחית.
  - אם אנחנו רואים b כותבים עליה $\sqcup$ והמ"ט עוברת למצב q_3.
- במצב q_3 קראנו a בתו הראשון ומחקנו אותה, קראנו b ומחקנו אותה.
- הראש זז משבצת אחת שמאלה עד שיגיע לתו הרשאון ומ"ט חוזרת למצב התחלת q_0.

- המ"ט באופן איטרטיבי, עוברת על הקלט ובכל מעבר:
  - אם יש a בתחילת המילה מורידה אותה ומחליפה אותה עם ␣, אחרת המילה נדחית,
  - אם יש b בסופה של המילה מורידה אותה ומחליפה אותה עם ␣, אחרת המילה נדחית.
- אם לאחר מספר מעברים כאלו הסרט ריק, המ"ט מקבלת, וזה יתקיים לכל מילה ורק למילים בשפה

$$\left\{a^n b^n \middle| n \geqslant 0\right\} \ .$$

תשובה סופית: המכונה מקבלת שפת המילים

$$\left\{a^n b^n \middle| n \geqslant 0\right\} \ .$$

דוגמה 1.10

פתרון:

μ	q	σ	ν
␣ ␣	q_0	a	aaabbbb␣ ␣
␣ ␣ ␣	q_1	a	aabbbb␣ ␣
␣ ␣ ␣ a	q_1	a	abbbb␣ ␣
␣ ␣ ␣ aa	q_1	a	bbbb␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaa	q_1	b	bbb␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaab	q_1	b	bb␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaabb	q_1	b	b␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaabbb	q_1	b	␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaabbbb	q_1	␣	␣
␣ ␣ ␣ aaabbb	q_2	b	␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaabb	q_3	b	␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaab	q_3	b	b␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaa	q_3	b	bb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ aa	q_3	a	bbb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ a	q_3	a	abbb␣␣␣
␣␣␣	q_3	a	aabbb␣␣␣
␣␣	q_3	␣	aaabbb␣␣␣
␣ ␣ ␣	q_0	a	aabbb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣	q_1	a	abbb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ a	q_1	a	bbb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aa	q_1	b	bb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aab	q_1	b	b␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aabb	q_1	b	␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aabbb	q_1	␣	␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aabb	q_2	b	␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aab	q_3	b	␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aa	q_3	b	b␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ a	q_3	a	bb␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣	q_3	a	abb␣ ␣ ␣ ␣

␣ ␣ ␣	q_3	␣	aabb␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣	q_0	a	abb␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_1	a	bb␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ a	q_1	b	b␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ab	q_1	b	␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ abb	q_1	␣	␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ab	q_2	b	␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ a	q_3	b	␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_3	a	b␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣	q_3	␣	ab␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_0	a	b␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_1	b	␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣ b	q_1	␣	␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_2	b	␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_3	␣	␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_0	␣	␣ ␣ ␣ ␣ ␣

הגדרה 1.4 גרירה בצעד אחד

תהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{\text{acc}},q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M. נסמן

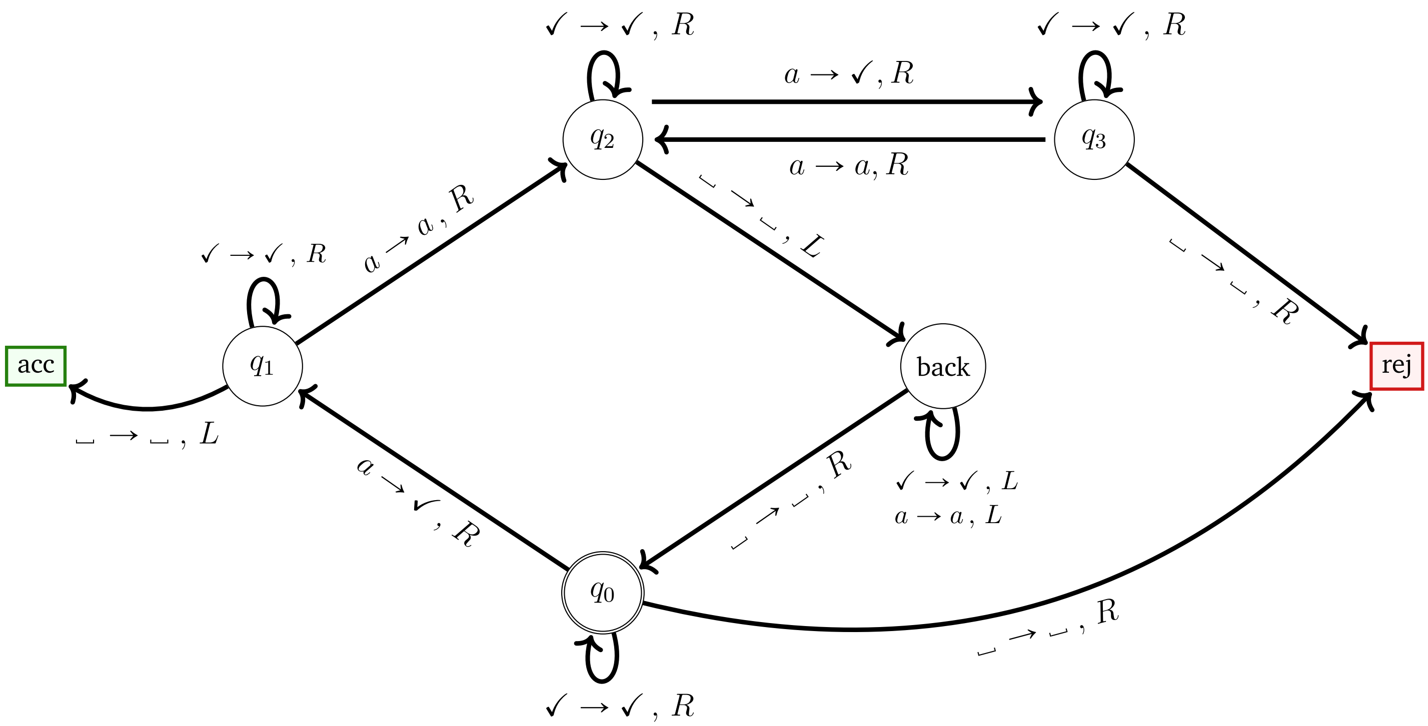
$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם כשנמצאים ב- c_1 עוברים ל- c_2 בצעד בודד.

דוגמה 1.11 (המשך של דוגמה 1.5)

במכונת טיורינג שמתואר בתרשים דמטה (אשר שווה למ"ט בדוגמה 1.5 רק עם סימנים שונים למצבים מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \ \vdash_M \ \checkmark\checkmark q_1 \checkmark a$$



הגדרה 1.5 גרירה בכללי

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M.
נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

אם ניתן לעבור מ- c_1 ל- c_2 ב- 0 או יותר צעדים.

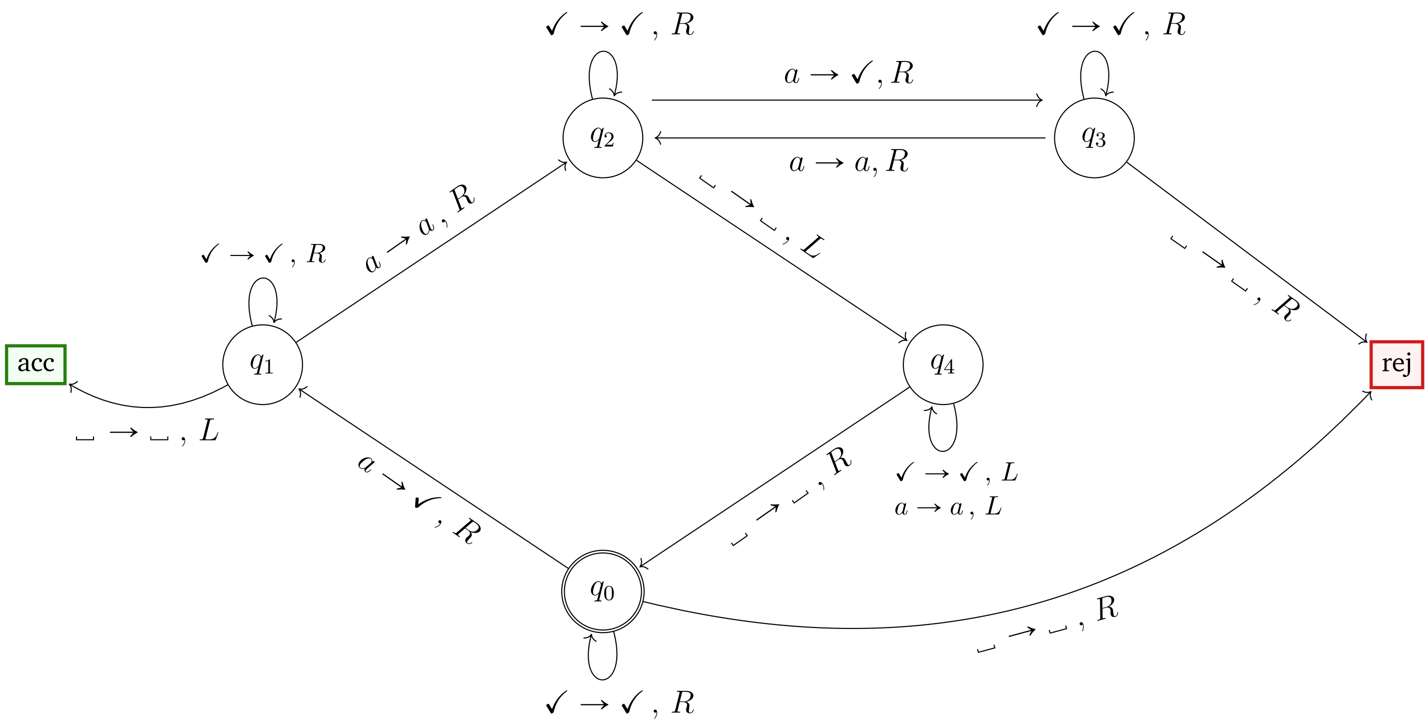
דוגמה 1.12 (המשך של דוגמה 1.5)

במכונת טיורינג שמתואר בתרשים דמטה (אשר שווה למ"ט בדוגמה 1.5 רק עם סימנים שונים למצבים)
מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \ \vdash_M^* \ \checkmark\checkmark\checkmark q_4 a$$

כי

$$\begin{aligned} \checkmark q_0 a \checkmark a \ &\vdash_M \checkmark\checkmark q_1 \checkmark a \\ &\vdash_M \checkmark\checkmark\checkmark q_1 a \\ &\vdash_M \checkmark\checkmark\checkmark a q_2 \ \sqcup \\ &\vdash_M \checkmark\checkmark\checkmark q_4 a \ . \end{aligned}$$



הגדרה 1.6 קבלה ודחייה של מחרוזת

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}\,,\,q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $w \in \Sigma^*$ מחרוזת. אומרים כי:

- M **מקבלת** את w אם

$$q_0 w \quad \vdash^*_M \quad u\ q_{\text{acc}}\,\sigma\,\text{v}$$

כאשר $\sigma \in \Gamma$, $u, \text{v} \in \Gamma^*$ כלשהם.

- M **דוחה** את w אם

$$q_0 w \quad \vdash^*_M \quad u\ q_{\text{rej}}\ \sigma\ \text{v}$$

כאשר $\sigma \in \Gamma$, $u, \text{v} \in \Gamma^*$ כלשהם.

הגדרה 1.7 הכרעה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}\,, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מכריעה** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים:

- $w \in L \Leftarrow M$ מקבלת את w.
- $w \notin L \Leftarrow M$ דוחה את w.

הגדרה 1.8 קבלה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}\,,\,q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מקבלת** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים:

- אם $w \in L$ אז M מקבלת את w.
- אם $w \notin L$ אז M לא מקבלת את w.

במקרה כזה כאשר M מקבלת את השפה L, נכתוב ש-

$$L(M) = L \ .$$

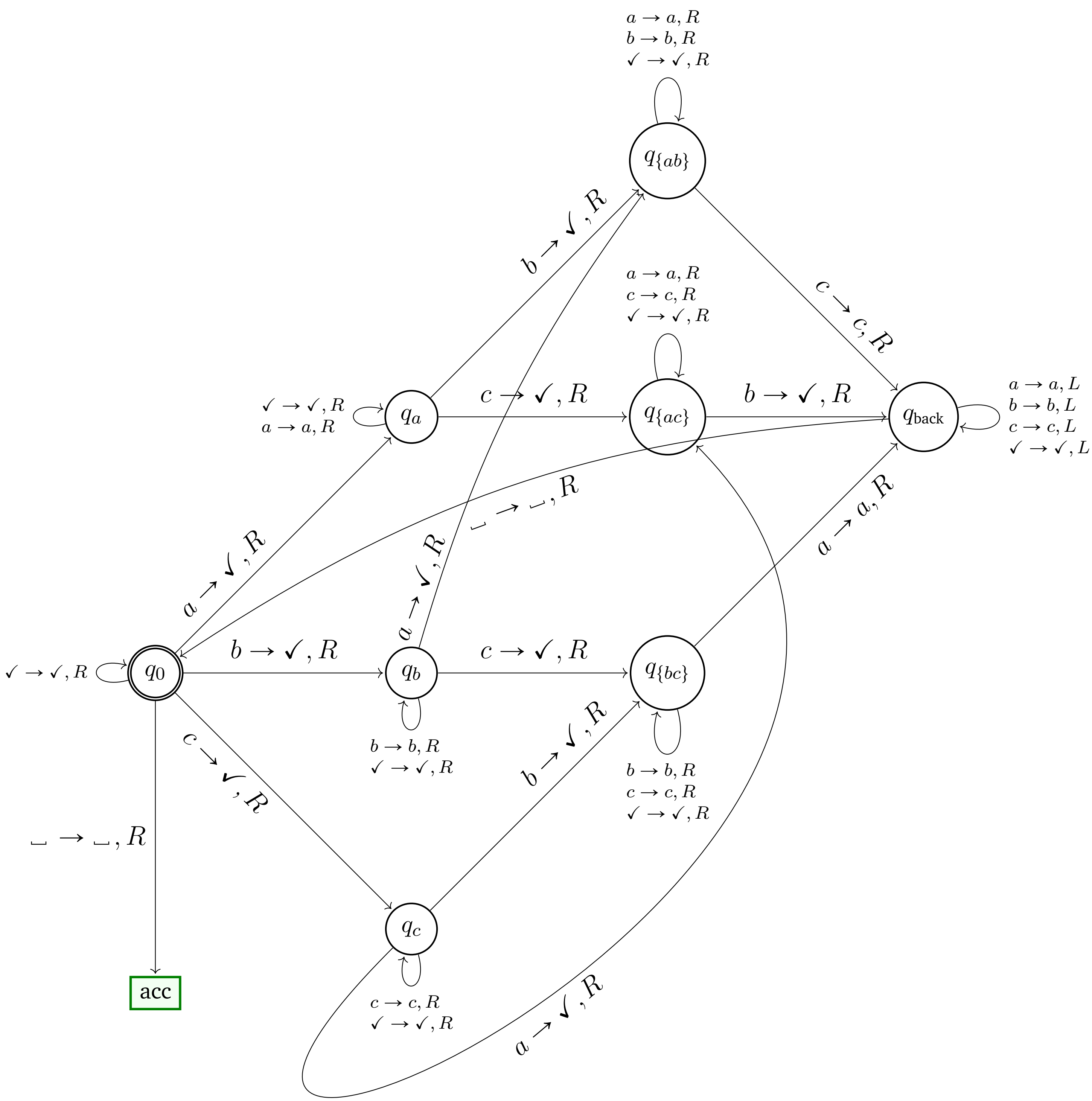
1.2 טבלת המעברים

דוגמה 1.13

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$L = \left\{ w = \{a,b,c\}^* \middle| \#a_w = \#b_w = \#c_w \right\}$$

פתרון:


$a \to a, R$
$b \to b, R$
$\checkmark \to \checkmark, R$
$q_{\{ab\}}$
$b \to \checkmark, R$
$c \to c, R$
$a \to a, R$
$c \to c, R$
$\checkmark \to \checkmark, R$
$\checkmark \to \checkmark, R$
$a \to a, R$
q_a
$c \to \checkmark, R$
$q_{\{ac\}}$
$b \to \checkmark, R$
q_{back}
$a \to a, L$
$b \to b, L$
$c \to c, L$
$\checkmark \to \checkmark, L$
$\sqcup \to \sqcup, R$
$a \to \checkmark, R$
$a \to \checkmark, R$
$a \to a, R$
$\checkmark \to \checkmark, R$
q_0
$b \to \checkmark, R$
q_b
$c \to \checkmark, R$
$q_{\{bc\}}$
$b \to b, R$
$\checkmark \to \checkmark, R$
$c \to \checkmark, R$
$b \to \checkmark, R$
$b \to b, R$
$c \to c, R$
$\checkmark \to \checkmark, R$
$\sqcup \to \sqcup, R$
q_c
acc
$c \to c, R$
$\checkmark \to \checkmark, R$
$a \to \checkmark, R$

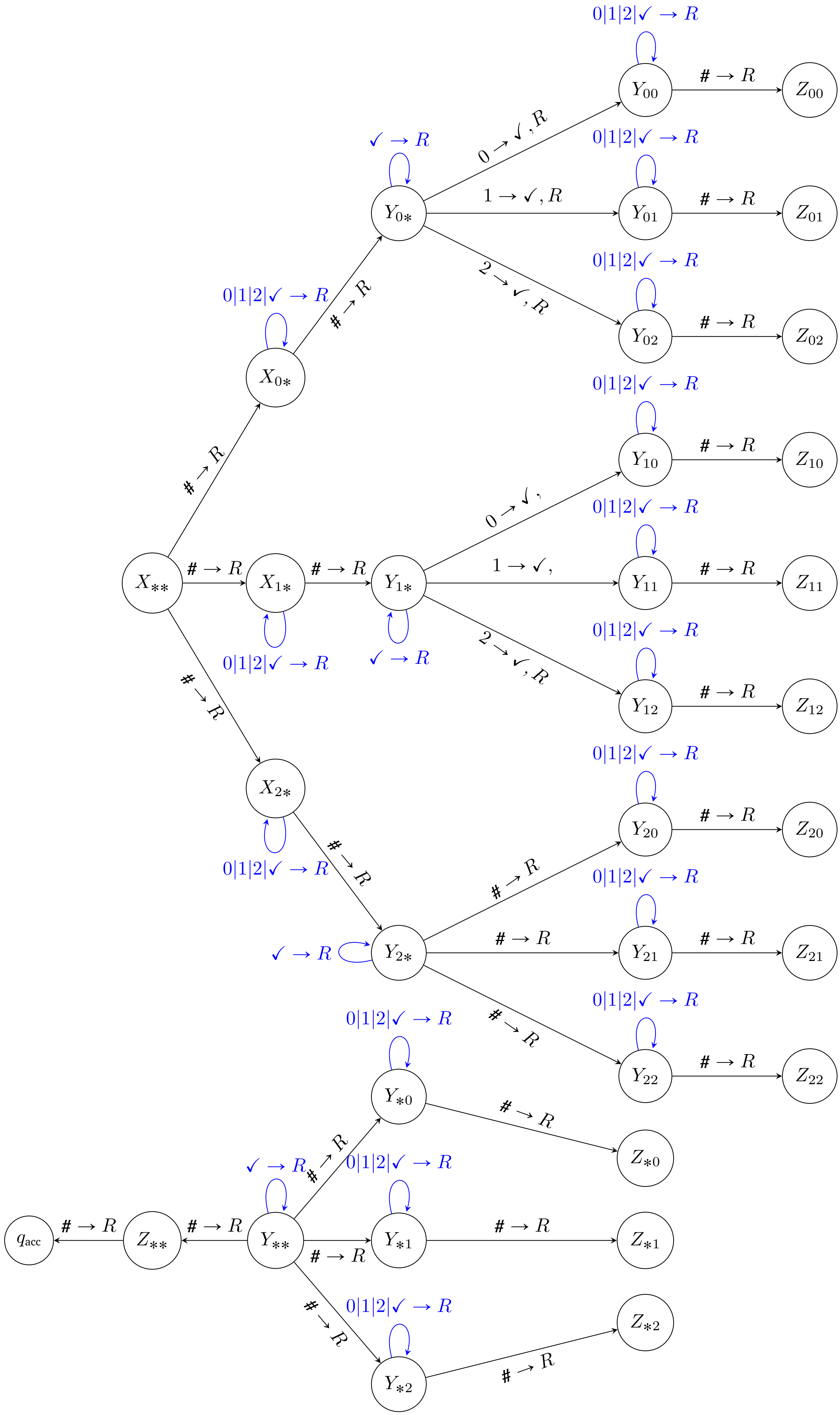
תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון בסרט	מצב
$\sigma \notin S$	R	✓	$q.\left(S \cup \{\sigma\}\right)$	σ	$q.S$
$\sigma \in S$	R		$q.S$	σ	$q.S$
	L		back	$a, b, c, \checkmark$	$q/\{a,b,c\}$
	R		acc	$\sqcup$	$q.\varnothing$
	L		back	$a, b, c, \checkmark$	back
	R		$q.\varnothing$	$\sqcup$	back

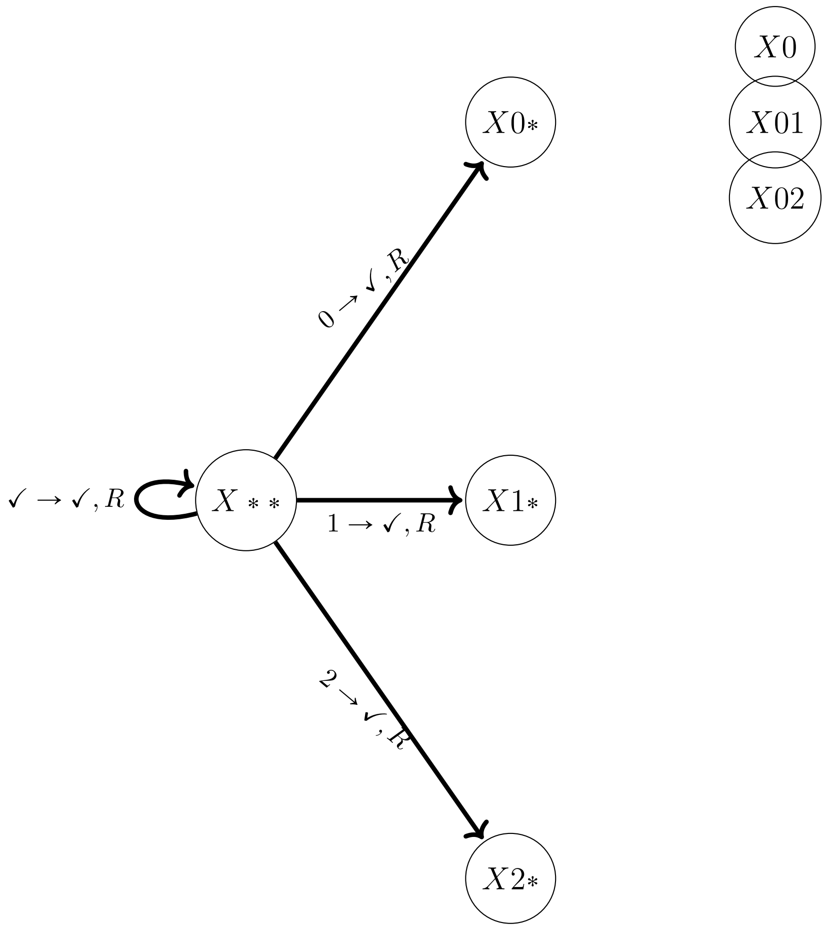
דוגמה 1.14

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$\left\{x_1 \ldots x_k \# y_1 \ldots y_k \# z_1 \ldots z_k \,\middle|\, x_i, y_i, z_i \in \{0, \ldots, 3\}\ ,\ \forall i, x_i \geqslant z_i \geqslant y_i\right\}$$

פתרון:


$0|1|2|\checkmark \to R$
Y_{00}
$\# \to R$
Z_{00}
$0 \to \checkmark, R$
$\checkmark \to R$
Y_{0*}
$1 \to \checkmark, R$
Y_{01}
Z_{01}
$2 \to \checkmark, R$
Y_{02}
Z_{02}
X_{0*}
$\# \to R$
Y_{10}
Z_{10}
$0 \to \checkmark,$
X_{**}
X_{1*}
Y_{1*}
$1 \to \checkmark,$
Y_{11}
Z_{11}
$2 \to \checkmark, R$
Y_{12}
Z_{12}
X_{2*}
Y_{20}
Z_{20}
Y_{2*}
Y_{21}
Z_{21}
Y_{22}
Z_{22}
Y_{*0}
Z_{*0}
q_{acc}
Z_{**}
Y_{**}
Y_{*1}
Z_{*1}
Y_{*2}
Z_{*2}



מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
$X**$	σ	$X\sigma*$	$\checkmark$	R	
$X**$	$\checkmark$	$X**$	$\checkmark$	R	
$X\sigma*$	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	$X\sigma*$		R	
$X\tau*$	#	$Y\tau*$		R	
$Y\tau*$	σ	$Y\tau\sigma$		R	
$Y\tau*$	$\checkmark$	$Y\tau*$		R	
$Y\tau\sigma$	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	$Y\tau\sigma$		R	
$Y\tau_1\tau_2$	#	$Z\tau_1\tau_2$		R	
$Z\tau_1\tau_2$	$\checkmark$	$Z\tau_1\tau_2$		R	
$Z\tau_1\tau_2$	σ	back	$\checkmark$	L	
$Z**$	$\sqcup$	acc		R	
back	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	back		L	
back	$\sqcup$	$X**$		R	

1.3 חישוב פונקציות

הגדרה 1.9 מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה f

תהי $f:\Sigma_1^*\to\Sigma_2^*$ ותהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{\text{acc}},q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג.
אומרים כי M מחשבת את f אם:

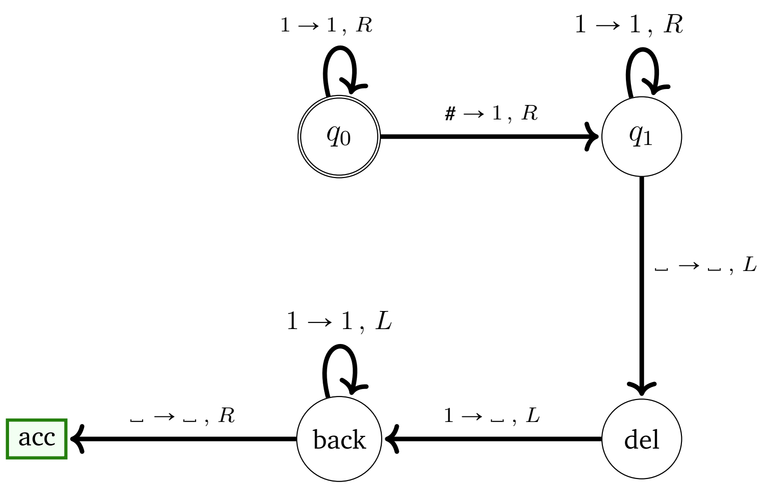
- $\Sigma=\Sigma_1$ ו- $\Sigma_2\subset\Gamma$.

- לכל $w \in \Sigma_1^*$ מתקיים $q_0 w \vdash q_{\text{acc}} f(w)$.

דוגמה 1.15 חיבור אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט
$$1^i \# 1^j$$
ומחזירה את פלט
$$1^{i+j}\ .$$

פתרון:

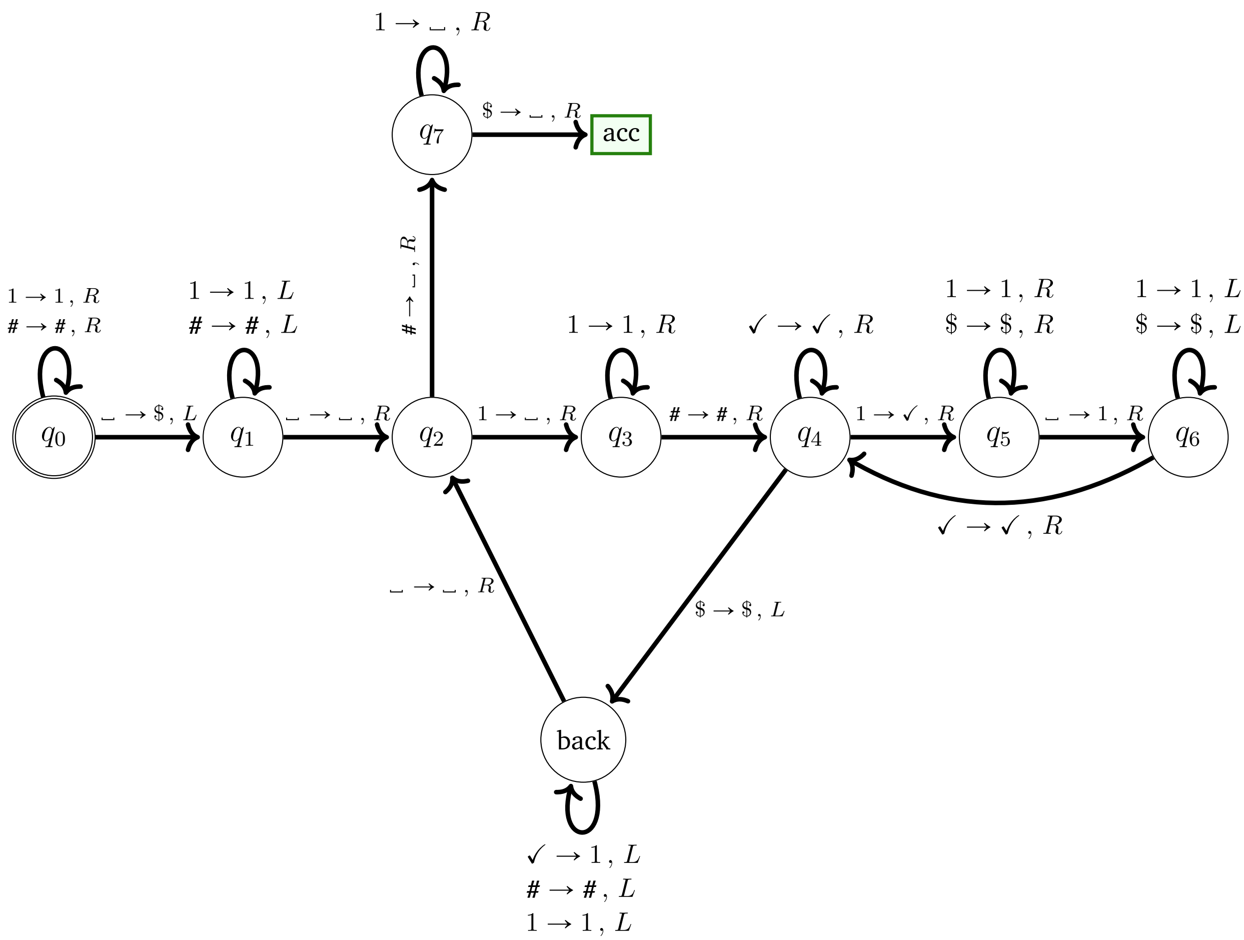


דוגמה 1.16 כפל אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט
$$1^i \# 1^j$$
ומחזירה את פלט
$$1^{i\cdot j}\ .$$

פתרון:

- לדוגמה, נניח שהקלט הוא 2 כפול 2.
  הקלט הוא 11#11.
- נרצה להבדיל בין הקלט לבין הפלט.
  לכן בתחילת הריצה, נתקדם ימינה עד סוף הקלט ונוסיף שם את התו $.
  לאחר מכן נחזור לתחילת הקלט.
- על כל אות 1 במילה השמאלית נעתיק את המילה הימינית לאחר סימן ה- $.
- לאחר מכן נשאיר רק את התווים שלאחר סימן ה $. כלומר, נמחק את כל מה שאינו פלט.



μ	q	σ	ν
⎵	q_0	1	1#11⎵
⎵11#11	q_1	⎵	⎵
⎵11#11	q_1	$	⎵
⎵	q_1	⎵	11#11$
⎵	q_2	1	1#11$
⎵ ⎵	q_3	1	#11$
⎵ ⎵1#	q_4	1	1$
⎵ ⎵1#✓	q_5	1	$
⎵ ⎵1#✓1$	q_5	⎵	⎵
⎵ ⎵1#✓1$1	q_6	⎵	⎵
⎵ ⎵1#	q_6	✓	1$1 ⎵
⎵ ⎵1#✓	q_4	1	$1 ⎵
⎵ ⎵1#✓✓	q_5	$	1 ⎵
⎵ ⎵1#✓✓$1	q_5	⎵	⎵
⎵ ⎵1#✓✓$11	q_6	⎵	⎵
⎵ ⎵1#✓	q_6	✓	$11⎵
⎵ ⎵1#✓✓	q_4	$	11⎵
⎵ ⎵1#✓	back	✓	$11⎵
⎵	back	⎵	1#11$11⎵
⎵ ⎵	q_2	1	#11$11⎵
⎵ ⎵ ⎵	q_3	#	11$11⎵
⎵ ⎵ ⎵#	q_4	1	1$11⎵

␣ ␣ ␣#✓	q_5	1	\$11␣
␣ ␣ ␣#✓1\$11	q_5	␣	␣
␣ ␣ ␣#✓1\$111	q_6	␣	␣
␣ ␣ ␣#	q_6	✓	1\$111␣
␣ ␣ ␣#✓	q_4	1	\$111␣
␣ ␣ ␣#✓✓	q_5	\$	111␣
␣ ␣ ␣#✓✓\$111	q_5	␣	␣
␣ ␣ ␣#✓✓\$1111	q_6	␣	␣
␣ ␣ ␣#✓	q_4	✓	\$1111
␣ ␣ ␣#✓✓	q_4	\$	1111
␣ ␣ ␣#✓	back	✓\$	1111
␣ ␣	back	␣	#11\$1111
␣ ␣ ␣	q_2	#	11\$1111
␣ ␣ ␣ ␣	q_7	1	1\$1111
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_7	\$	1111
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣	acc	1	111