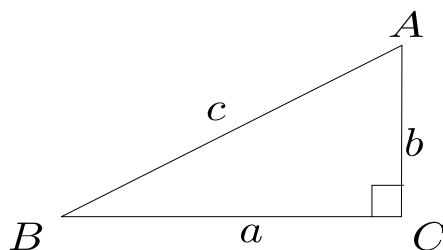


## תרגילים: פונקציות טריגונומטריות

### נוסחאות

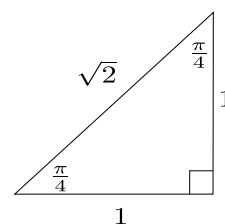


$$\sin(\angle A) = \frac{a}{c}, \quad \cos(\angle A) = \frac{b}{c}, \quad \tan(\angle A) = \frac{a}{b}.$$

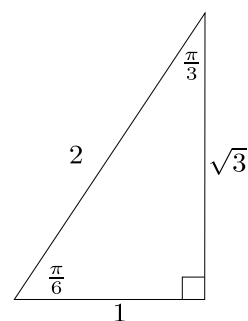
משפט פיתגורס:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Leftrightarrow \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

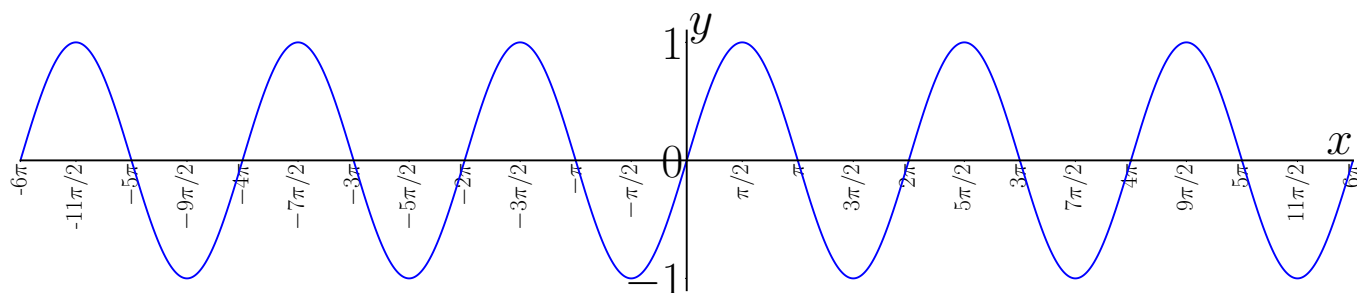
$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 1 = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \sqrt{3} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} \\ \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \end{aligned}$$



$$\underline{y = \sin x}$$



ערכים עיקריים:

$$\sin(0) = 0, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \sin(\pi) = 0, \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1, \quad \sin(2\pi) = 0.$$

פונקציה אי-זוגית:

$$\sin(-x) = -\sin(x).$$

פונקציה מחזורית עם מחזור  $T = 2\pi$ :

$$\sin(x + 2\pi n) = \sin(x), \quad n \in \mathbb{Z}$$

ערכים מחזוריים:

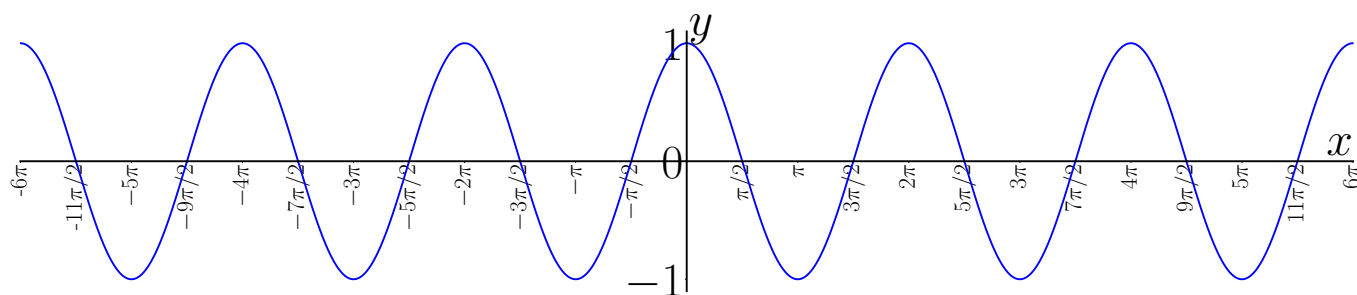
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1, \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1, \quad \sin(n\pi) = 0, \quad \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

ערכים שיקופיים:

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \sin(x - \pi) = -\sin x, \quad \sin(x + \pi) = -\sin(x).$$

$$\sin^n(x + \pi) = \begin{cases} -\sin x & n \text{ אי זוגי} \\ \sin x & n \text{ זוגי} \end{cases}$$

$$\underline{y = \cos x}$$



ערכים עיקריים:

$$\cos(0) = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \cos(\pi) = -1, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \quad \cos(2\pi) = 1.$$

פונקציה זוגית:

$$\cos(-x) = \cos(x).$$

פונקציה מחזורית עם מחזור  $T = 2\pi$ :

$$\cos(x + 2\pi n) = \cos(x) , \quad n \in \mathbb{Z}$$

ערכים מחזוריים:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0 , \quad \cos(2\pi n) = 1 , \quad \cos(\pi + 2\pi n) = -1 , \quad \cos(n\pi) = (-1)^n , \quad n \in \mathbb{Z} .$$

ערכים שיקופיים:

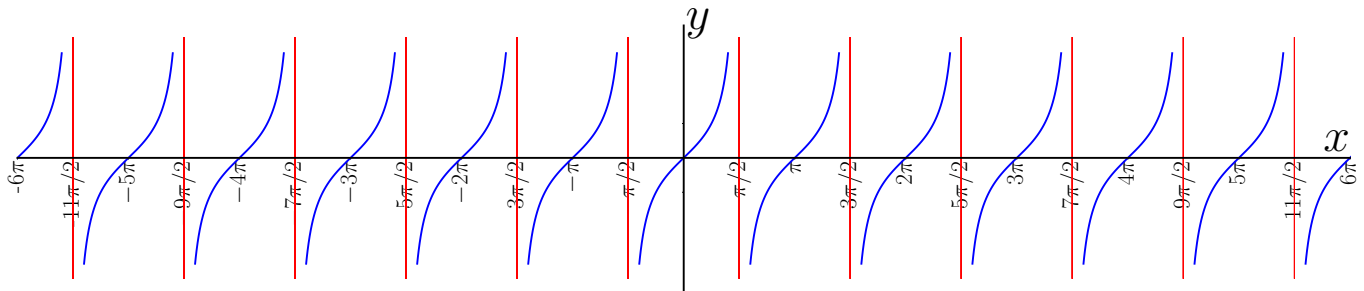
$$\cos(\pi - x) = -\cos x , \quad \cos(x - \pi) = -\cos x , \quad \cos(x + \pi) = -\cos(x) .$$

$$y = \tan x$$

תחום הגדרה:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

$$\cos^n(x + \pi) = \begin{cases} -\cos x & n \text{ אי זוגי} \\ \cos x & n \text{ זוגי} \end{cases}$$



ערכים עיקריים:

$$\tan(0) = 0 , \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 , \quad \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 , \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \infty , \quad \tan\left(-\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow -\infty .$$

פונקציה אי-זוגית:

$$\tan(-x) = -\tan(x) .$$

פונקציה מחזורית עם מחזור  $T = \pi$ :

$$\tan(x + \pi n) = \tan(x) , \quad n \in \mathbb{Z}$$

ערכים מחזוריים:

$$\tan\left(\frac{|n|\pi}{2}\right) \rightarrow \infty , \quad \tan\left(-\frac{|n|\pi}{2}\right) \rightarrow -\infty , \quad \tan(n\pi) = 0 , \quad n \in \mathbb{Z} .$$

ערכים שיקופיים:

$$\tan(\pi - x) = -\tan x , \quad \tan(x - \pi) = -\tan x , \quad \tan(x + \pi) = \tan(x) .$$

### דוגמה

נקח למשל  $f(x) := \sin(5x)$ . כדי למצוא את המחזור שלה, נשים לב כי המחזור של  $\sin$  עם ארגומנט כלשהו היא  $2\pi$ , כלומר

$$f(x) = \sin(5x) = \sin(5x + 2\pi) = \sin\left(5\left(x + \frac{2\pi}{5}\right)\right) = f(x + 2\pi/5)$$

לכן קיבלנו כי  $f(x) = f(x + 2\pi/5)$  ולפי המחזור של הפונקציה הוא  $T = 2\pi/5$ .

### דוגמה

תהי  $f(x) := \sin^4(x)$ . נשים לב כי המחזור של  $\sin^4(x + \pi) = \sin^4(x)$ , לכן  $f(x) = f(x + \pi)$  ולפי המחזור של הפונקציה הוא  $T = \pi$ .

## שאלות

**שאלה 1** מצאות ללא מחשבון, את הערכים של הפונקציות הטריגונומטריות הבאות.

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right)$            | 2) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right)$            | 3) $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$            |
| 4) $\tan\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)$            | 5) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$                 | 6) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \pi\right)$            |
| 7) $\cos(6\pi)$                                      | 8) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$  | 9) $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$            |
| 10) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$                | 11) $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$           | 12) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$                |
| 13) $\tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$           | 14) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)$           |  |
| 15) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$                | 16) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ | 17) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ |
| 18) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$                | 19) $\sin(12\pi)$                                    | 20) $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$           |
| 21) $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$           | 22) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$ | 23) $\tan\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)$           |
| 24) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$                | 25) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right)$           | 26) $\tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$           |
| 27) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$ | 28) $\cos(16\pi)$                                    | 29) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$                |
| 30) $\tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$           | 31) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ | 32) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ |
| 33) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$ |  |  |

**שאלה 2** מצאות ללא מחשבון, את הערכים של הפונקציות הטריגונומטריות הבאות.

- |  |  |   |
|--|--|---|
| <b>1)</b> $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$  | $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$            | <b>2)</b> $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$   |
| <b>3)</b> $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$  | <b>4)</b> $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$  | <b>5)</b> $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$   |
| <b>6)</b> $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$  | <b>7)</b> $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$  | <b>8)</b> $\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right)$ ‘ |
| <b>9)</b> $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$  | <b>10)</b> $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ | <b>11)</b> $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$  |
| <b>12)</b> $\sin\left(\frac{4\pi}{6}\right)$ | <b>13)</b> $\sin(-3\pi)$                     |   |

**שאלה 3** מצאו את המחזור של הפונקציות הבאות:

- |  |   |  |
|--|---|--|
| <b>1)</b> $\cos(11x)$                              | <b>2)</b> $\sin(3x)$                                | <b>3)</b> $\sin^2(x)$                                |
| <b>4)</b> $\cos^4(x)$                              | <b>5)</b> $\sin^3(x)$                               | <b>6)</b> $\cos^5(x)$                                |
| <b>7)</b> $\sin^6(x) - \cos^6(x)$                  | <b>8)</b> $\sin^3(x)$                               | <b>9)</b> $\cos^5(x)$                                |
| <b>10)</b> $\sin\left(\frac{x}{3}\right)$          | <b>11)</b> $\cos\left(\frac{x}{5}\right)$           | <b>12)</b> $\sin(4x) \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ ‘ |
| <b>13)</b> $\sin^5(x) - \cos^5(x)$                 | <b>14)</b> $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos(10x)$ | <b>15)</b> $\sin^6(x) + \cos^6(x)$                   |
| <b>16)</b> $\sin^8(x) - \cos^8(x)$                 | <b>17)</b> $\cos^4(x) - \sin^4(x)$                  | <b>18)</b> $\sin(5x) \cos(x)$                        |
| <b>19)</b> $\sin(5x) \cos\left(\frac{x}{5}\right)$ |   |  |

## פתרונות

### שאלה 1

- 1)  $-\frac{1}{2}$     2)  $-\frac{1}{2}$     3)  $\frac{1}{2}$     4)  $\sqrt{3}$   
5)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$     6)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$     7) 1  
8)  $\frac{1}{2}$     9)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$     10)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$   
11)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$     12)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$     13)  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$   
14)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$     15)  $-1$     16)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
17)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$     18)  $\frac{1}{2}$     19) 0  
20)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$     21)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$     22)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$   
23)  $\sqrt{3}$     24)  $-\frac{1}{2}$     25)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$   
26)  $-1$     27)  $\frac{1}{2}$     28) 1  
29)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$     30)  $-\sqrt{3}$     31)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$   
32)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$     33)  $\frac{1}{2}$

### שאלה 2

- 1)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$     2)  $-\frac{1}{2}$     3)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$   
4)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$     5)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$     6)  $-\frac{1}{2}$   
7)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$     8)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$     9) 0  
10)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$     11) 1    12) 0  
13)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$     14) 0

### שאלה 3

- |                             |                            |                     |
|-----------------------------|----------------------------|---------------------|
| <b>1)</b> $\frac{2\pi}{11}$ | <b>2)</b> $\frac{2\pi}{3}$ | <b>3)</b> $\pi$     |
| <b>4)</b> $\pi$             | <b>5)</b> $2\pi$           | <b>6)</b> $2\pi$    |
| <b>7)</b> $\pi$             | <b>8)</b> $2\pi$           | <b>9)</b> $2\pi$    |
| <b>10)</b> $6\pi$           | <b>11)</b> $10\pi$         | <b>12)</b> $6\pi$ ‘ |
| <b>13)</b> $2\pi$           | <b>14)</b> $4\pi$          | <b>15)</b> $\pi$    |
| <b>16)</b> $\pi$            | <b>17)</b> $\pi$           | <b>18)</b> $2\pi$   |
| <b>19)</b> $10\pi$          |                            |                     |