4 חזרה ותרגילים, הפירמדיה של פסקל ותורת הבינומיאלי 6-7

4.1 סיכום נוסחאות בקומבינטוריקה

4.1 חוק. (מדגם סדור ללא החזרה) מספר הדרכים לסדר n איברים שונים בשורה הוא

$$n! = n(n-1)\dots(2)(1)\ . \tag{4.1}$$

מספר הדרכים לדגום k איברים מתוך n איברים שונים עם חשיבות לסדר וללא החזרה הוא

$$n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \equiv {}_nP_k\ . \tag{4.2}$$

4.2 חוק. (מדגם לא סדור ללא החזרה) מספר הדרכים לדגום k איברים מתוך n איברים שונים בלי חשיבות לסדר וללא החזרה הוא

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \equiv \binom{n}{k}. \tag{4.3}$$

4.3 חוק. (מדגם סדור ללא החזרה של של הפרדה) המספר הדרכים לסדר קבוצה בת n דברים, בו יש n_1 דברים שכולם של סוג אחד, n_2 דברים שכולם של סוג אחר, ...
הוא

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots} \equiv \binom{n}{n_1, n_2, \dots} \tag{4.4}$$

במילים אחרות, המספר הדרכים לסדר קבוצה של n איברים, להפרדה המורכב מתת קבוצות של n_1 איברים, n_2 איברים, ...
הוא

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots} \equiv \binom{n}{n_1, n_2, \dots} \tag{4.4}$$

4.4 הגדרה. (מקדם הבינומיאלי) המקדם הבינומיאלי הוא

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}, \tag{4.5}$$

או לעיתים

$${}_nC_k := \frac{n!}{(n-k)!k!}\ . \tag{4.6}$$

4.5 חוק. (מדגם סדור עם החזרה) מספר הדרכים לדגום k איברים מתוך n איברים שונים עם חשיבות לסדר ועם החזרה הוא n^k .

$$\begin{array}{cccc} \#1 & \#2 & \dots & \#k \\ \square & \square & \dots & \square \\ \uparrow & \uparrow & \dots & \uparrow \\ n & n & \dots & n \end{array} \quad \rightarrow \overbrace{n \times n \times \dots \times n}^{k \text{ איברים}} = n^k.$$

4.6 חוק. (מדגם לא סדור עם החזרה) המספר הדרכים לדגום k תווים מתוך n תווים שונים ללא חשיבות לסדר ועם החזרה הוא

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} \tag{4.7}$$

4.2 תרגילים

דוגמא. 3 כדורים של 3 צבעים שונים נתונים ל3 תלמידים בכיתה בת 25 תלמידים. אם כל תלמיד מקבל כדור אחד, כמה אפשרויות ישנן לחלק את הכדורים?

פיתרון. בשל העובדה הכדורים באים ב3 צבעים שונים, אז ניתן להבחים בין הכדורים. על כן הבעיה זו בעיה של מדגם סדור ללא החזרה, ובמיוחד עם חשבות לסדר. אז התשובה היא ניתן על ידי הנוסחא (4.2):

$$ {}_{25}P_3 = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = 25.24.23 \ . $$

■

דוגמא. 3 כדורים של אותו צבע נתונים ל3 תלמידים בכיתה בת 25 תלמידים. אם כל תלמיד מקבל כדור אחד, כמה אפשרויות ישנן לחלק את הכדורים?

פיתרון. עכשיו לא ניתן להבחים בין הכדורים. על כן הבעיה זו בעיה של מדגם סדור ללא החזרה, ללא חשבות לסדר. אז התשובה היא ניתן על ידי הנוסחא (4.3):

$$ {}_{25}C_3 = \frac{25!}{(25-3)!3!} = \frac{25!}{22!3!} = \frac{25.24.23}{6} = 25.4.23 = 2300 \ . $$

■

דוגמא. מרכיבים באקראי מילה בת 4 תווים מן האותיות א' עד ו'. חשבו את ההסתברויות של המאורעות הבאים.

1. מאורע A: א' מופיע פעם אחת לפחות,
2. מאורע B: א' מופיע בדיוק פעם אחת,
3. מאורע C: אין אות שחוזרת בסיסמא.

פיתרון. לכל תו יש 6 אפשרויות ולכן

$$ |\Omega| = 6^4. $$

1. $\bar{A} =$ אות א' לא נבחרה כלל. זאת אומרת כל אפשרויות מורכבת אך ורק מן התווים ב' - ו'.

$$ \Rightarrow \qquad P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{5^4}{6^4}. $$

2. $B_i =$ מאורע ש א' מופיע במקום i ($i = 1, \ldots, 4$).

$$ \Rightarrow \qquad B = \bigcup_{i=1}^{4} B_i, $$

והאיחוד הוא על פני מאורעות זרים. על כן

$$ \begin{aligned} P(B) =& P\left(\bigcup_{i=1}^{4} B_i\right) = \sum_{i=1}^{4} P(B_i). \\ P(B_i) =& \frac{5^3}{6^4}. \end{aligned} $$

$$ \therefore \qquad P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(B_i) = \frac{4(5^3)}{6^4}. $$

3.
- לתו הראשון יש 6 אפשרויות,
- לתו שני יש 5 אפשרויות,
- לתו שלישי יש 4 אפשרויות,
- לתו רביעי יש 3 אפשרויות,

$$\therefore \qquad P = \frac{6.5.4.3}{6^4} = \frac{6!}{6^4(6-4)!}\ .$$

■

דוגמא. כמה אפשרויות יש לסדר 6 מטבעות של ₪1 , 7 מטבעות של ₪5, 8 מטבעות של ₪10 ?

פיתרון. זו היא בעיה של כמה אפשרויות ישנן לסדר 21 דברים בו יש תת קבוצות של 8 דברים של אותו סוג, 7 דברים של אותו הסוג, ... על כן התשובה ניתנת על ידי הנוסחא (4.4):

$$\frac{21!}{6!7!8!} = 349,188,840.$$

■

דוגמא. כמה דרכים יש לשים 7 אנשים ב 2 חדרים בת 2 מיטות וחדר אחד בת 3 מיטות?

פיתרון. הביעה זו היא בעיה למצוא את המספר הדרכים לסדר קבוצה של 7 אנשים להפרדה המורכב מתת קבוצות של 2, 2 ו 3, והתשובה ניתנת על ידי הנוסחא (4.4):

$$\frac{7!}{2!2!3!} = \frac{7.6.5.4}{2.2} = 210\ .$$

■

דוגמא. בכיתה n סטודנטים. מהי ההסתברות שיש לפחות זוג אחד של סטודנטים עם אותו תאריך יום הולדת (מבלי להתייחס לשנת הלידה)?

פיתרון. גודל מרחב המדגם שלנו הוא 365^n משום שלכל סטודנט יש 365 ימים אפשריים ליום הולדת וישנם n סטודנטים. נסמן ב A המאורע בו לפחות זוג אחד של סטודנטים נולד באותו היום, ונבחן את המאורע המשלים $\bar{A}$. המאורע בו לכל הסטודנטים ימי הולדת שונים. זו דוגמה של מדגם **סדור** וללא החזרה, ולפי זה עם העזרה של **??** נמצא ש מספר האפשרויות במאורע $\bar{A}$ הוא

$$|\bar{A}| = {}_{365}C_n = \frac{365!}{(365-n)!}\ .$$

מכאן נקבל ש

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|} = 1 - \frac{365!}{(365-n)!365^n}\ .$$

התוצאה המפתיעה היא שעבור $n=23$ ההסתברות גדולה מ 50% (0.507 בקירוב) ועבור $n=60$ סטודנטים ההסתברות היא 0.994.

■

4.3 המשולש של פסקל

$n=0$	1										
$n=1$	1	1									
$n=2$	1	2	1								
$n=3$	1	3	3	1							
$n=4$	1	4	6	4	1						
$n=5$	1	5	10	10	5	1					
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1				
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1			
$n=8$	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
$n=9$	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
$n=10$	1	10	25	120	210	252	210	120	25	10	1

$$
\begin{array}{llllllll}
n=0 & \binom{0}{0} \\
n=1 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
n=2 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
n=3 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
n=4 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
n=5 & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
n=6 & \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6}
\end{array}
$$

על ידי המשולש של פסקל, קל לראות שמתקיים

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad . \tag{4.8}$$

4.4 תורת הבינומיאלי

נניח שאנחנו רוצים לפתוח את הסוגריים של דו-איבר,

$$(p+q)^2 = (p+q)(p+q) \ .$$

הפעולה הזו היא קלה ומקבלים

$$(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 \tag{4.9}$$

אבל לעשות אותה הפעולה, כדי לפתוח את הסוגריים של $(p+q)^n$ כאשר $n = 3, 4, \ldots$ היא כבר לא פשוטה. מבטאים את $(p+q)^n$ כפי

$$(p+q)^n = \overbrace{(p+q)(p+q)(p+q)\ldots(p+q)}^{n \text{ איברים}} \ . \tag{4.10}$$

כאשר פותחים את הסוגריים אחד אחד אנחנו מקבלים סכום של איברים כמו

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} p^k q^{n-k} \ . \tag{4.11}$$

המקדם $a_{n,k}$ הוא שווה להמספר הדרכים לבחור k איברים של p מתוך n , אשר הוא דווקא המקדם הבינומיאלי

$$a_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \ .$$

או להפך, המקדם $a_{n,k}$ הוא שווה להמספר הדרכים לבחור $n-k$ איברים של q מתוך n, וזה דווקא המקדם הבינומיאלי

$$a_{n,k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \ .$$

לכן,

4.7 תורת. (תורת הבינומיאלי)

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \ . \tag{4.12}$$

4.5 *העשרה: מדגם סדור של קבוצות בו תת קבוצו ת של איברים זההים

נניח שיש n תווים בקבוצה Ω, אשר בתוך זה יש את

- תת קבוצה A בת a תווים זההים,
- תת קבוצה B בת b תווים זהים,
- תת קבוצה C בת c תווים זה הים.

$$\Omega = \{\overbrace{\circ, \ldots, \circ}^{a},\ \overbrace{\square, \ldots, \square}^{b},\ \overbrace{\triangle, \ldots, \triangle}^{c}\}$$

בטח מתקיים

$$a + b + c = n.$$

מסמנים את המספר הדרכים לסדר את האיברים ב Ω ב

$$_nP_{(a,b,c)}\ .$$

כדי להגיע לנוסחא ל $_nP_{(a,b,c)}$ בפירוש, מחליפים את כל ה a תווים הזההים בתוך A בתווים שונים, זאת אומרת מחליפים את כל תוו של $\circ$ בתוו שונה. כך המספר הסדרים שונים הוא פי $a!$ פעמים יותר גדול מקודם. לאחר מכן מחליפים את כל ה b תווים הזההים בתוך B בתווים שונים. זאת אומרת מחליפים את כל תוו של $\square$ בתוו שונה. כך המספר הסדרים שונים הוא פי $b!$ פעמים יותר גדול מקודם. לאחר מכן מחליפים את כל ה c תווים הזההים בתוך C בתווים שונים. זאת אומרת מחליפים את כל תוו של $\triangle$ בתוו שונה. כך המספר הסדרים שונים הוא פי $c!$ פעמים יותר גדול מקודם. בסוף מקבלים סדר של n תווים שונים, אשר יש לו $_nP_n = n!$ צירופים שונים. לכן

$$\begin{aligned} a!b!c!\,_nP_{(a,b,c)} &= \ _nP_n &= n! \\ \Rightarrow \quad _nP_{(a,b,c)} &= \frac{_nP_n}{a!b!c!} &= \frac{n!}{a!b!c!}\ . \end{aligned}$$

4.8 חוק. (צירופים עבור קבוצה בת תת קבוצות של תווים זההים)
עיין חוק 4.3 לעייל כדי לראות אותו החוק במילים שונות. המספר הדרכים לסדר n איברים שונים מתוך קבוצה של n איברים, אשר המורכב מ

- תת קבוצה A בת a איברים זההים,
- תת קבוצה B בת b איברים זההים,
- תת קבוצה C בת c איברים זההים,

$\vdots$

הוא

$$\frac{n!}{a!b!c!\ldots} \equiv \binom{n}{a, b, c, \ldots}\ . \tag{4.13}$$

4.9 חוק. (מדגם מתוך קבוצה בת תת קבוצות של תווים זההים עם החזרה)
נתון קבוצה Ω בו יש

- תת קבוצה A בת a איברים זההים,
- תת קבוצה B בת b איברים זההים,
- תת קבוצה C בת c איברים זההים,

$\vdots$.

המספר הדרכים לדגום u איברים מתוך A, v איברים מתוך B, w איברים מתוך C, עם החזרה עם חשיבות לסדר הוא הוא

$$\frac{n!}{u!v!w!\ldots} a^u b^v c^w \cdots \equiv \binom{n}{u, v, w, \ldots} a^u b^v c^w \ldots\ . \tag{4.14}$$