

שיעור 9

מימד ובסיס

9.1 בסיס של מרחב ווקטורי

הגדרה 9.1 בסיס

קבוצת ווקטורים $v_1, \dots, v_n \in V$ נקראת בסיס של V אם היא מקיימת:

(1) v_1, \dots, v_n בלתי תלויים לינארית.

(2) $\text{span}(v_1, \dots, v_n) = V$.

דוגמה 9.1

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

בסיס של \mathbb{F}^n (בסיס הסטנדרטי).

הוכחה:

(1) צ"ל e_1, \dots, e_n בת"ל.

$$k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_n e_n = \bar{0}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + k_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

\Downarrow

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 0.$$

לכן e_1, \dots, e_n בת"ל.

(2) צ"ל כי $\text{span}(e_1, \dots, e_n) = \mathbb{F}^n$.

$$v = \text{span}(e_1, \dots, e_n) \text{ צ"ל } v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \text{ נקח ווקטור שרירותי}$$

$$k_1 e_1 + \dots k_n e_n = v$$

\Downarrow

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow k_1 = x_1, k_2 = x_2, \dots, k_n = x_n.$$

דוגמה 9.2

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad .$$

בסיס של $\mathbb{F}^{2 \times 3}$ (הבסיס הסטנדרטי).

הוכחה:

(1) נוכיח כי E_1, \dots, E_6 בת"ל.

$$k_1 E_1 + k_2 E_2 + \dots + k_6 E_6 = \bar{0}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + k_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\Downarrow

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 0, \quad k_6 = 0.$$

לכן E_1, \dots, E_6 בת"ל.

(2) נוכיח כי $\text{span}(E_1, \dots, E_6) = \mathbb{F}^{2 \times 3}$.

$$v = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2 \times 3} \text{ לכל ווקטור}$$

$$v = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 + eE_5 + fE_6.$$

ז"א

$$v \in \text{span}(E_1, \dots, E_6)$$

דוגמה 9.3

ווקטורים

$$e_1 = 1, \quad e_2 = x, \quad \dots, \quad e_n = x^n$$

מהווים בסיס (הבסיס הסטנדרטי) של המרחב $\mathbb{F}_n[x]$.

הוכחה:

(1) צ"ל $1, x, \dots, x^n$ בת"ל.

$$k_1 \cdot 1 + k_2 x + \dots + k_n x^n = \bar{0} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \dots + 0 \cdot x^n$$

לכל x כאשר

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \quad \dots, \quad k_n = 0.$$

לכן $1, x, \dots, x^n$ בת"ל.

(2) נוכיח כי $\text{span}(1, x, \dots, x^n) = \mathbb{F}_n[x]$

לכל $p(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^n \in \mathbb{F}_n[x]$ מתקיים

$$p(x) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$$

$$p(x) = \text{span}(e_1, \dots, e_n).$$

■

דוגמה 9.4

בדקו כי הווקטורים

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

מהווה בסיס של \mathbb{R}^3 .

פתרון:

(1) צ"ל u_1, u_2, u_3 בת"ל.

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \bar{0}$$

זאת מערכת משוואות הומוגניות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 14 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array} \right)$$

למערכת יש פתרון יחיד: $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$

לכן u_1, u_2, u_3 בת"ל.

$$(2) \text{צ"ל } \mathbb{R}^3 = \text{span}(u_1, u_2, u_3).$$

$$\text{נקח } v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ צ"ל } v = \text{span}(u_1, u_2, u_3).$$

דרך 1:

$$\begin{aligned} xu_1 + yu_2 + zu_3 &= v \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 5 & 1 & 4 & c \end{array} \right) &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 6 & 14 & 5a + c \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5a + c - 6b \end{array} \right) \end{aligned}$$

למערכת יש פתרון, לכן $v \in \text{span}(u_1, u_2, u_3)$.

דרך 2:

למערכת $A \cdot X = 0$ יש פתרון יחיד, לכן מטריצה A הפיכה. מכאן נובע שלכל $v \in \mathbb{R}^3$, למערכת $A \cdot X = v$ יש פתרון יחיד, ז"א $v \in \text{span}(u_1, u_2, u_3)$.

משפט 9.1

אם במרחב ווקטורי V יש בסיס סופי, אז לכל בסיס של V יש את אותו מספר הווקטורים.

הגדרה 9.2

נניח ש V מרחב ווקטורי. למספר הווקטורים בבסיס של V קוראים המימד של V .
המימד של מרחב ווקטורי יסומן

$$\dim(V).$$

דוגמה 9.5

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{F}^n) &= n \\ \dim(\mathbb{F}^n[x]) &= n + 1 \\ \dim(\mathbb{F}^{m \times n}) &= m \cdot n. \end{aligned}$$

משפט 9.2 מימד ובסיס של קבוצת ווקטורים

נניח כי V מרחב ווקטורי, $\dim(V) = n$. אז

(1) כל $n + 1$ ווקטורים של V הם תלויים לינארית.

(2) כל קבוצה של n ווקטורים בלתי תלויה לינארית, היא בסיס של V .

(3) כל קבוצה של ווקטורים שהיא בלתי תלויה לינארית, ניתן להשלים לבסיס של V .

דוגמה 9.6

הוכיחו שהווקטורים

$$u_1 = 1 + x + x^2, \quad u_2 = 2x + 3x^2, \quad u_3 = -3x - 4x^2$$

מהווים בסיס של מרחב $\mathbb{R}_2[x]$.

פתרון:

נוכיח כי u_1, u_2, u_3 בת"ל.

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \bar{0}$$

$$k_1(1 + x + x^2) + k_2(2x + 3x^2) + k_3(-3x - 4x^2) = 0 + 0x + 0x^2$$

$$k_1(k_1 + 2k_2 - 3k_3)x + (k_1 + 3k_2 - 4k_3)x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

$$\left. \begin{array}{l} k_1 = 0 \\ k_1 + 2k_2 - 3k_3 = 0 \\ k_1 + 3k_2 - 4k_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$$

לכן u_1, u_2, u_3 בת"ל.

$\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$, לכן שלושה ווקטורים בת"ל מהווים בסיס של $\dim(\mathbb{R}_2[x])$.

9.2 מציאת בסיס ומימד של תת מרחב

הגדרה 9.3 עמודה מובילה ושורה מובילה

נניח כי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ותהי B המטריצה המדורגת המתקבלת מ- A .

(1) אומרים כי עמודה ה- i של A **עמודה מובילה** אם בעמודה ה- i של B יש איבר מוביל.

(2) אומרים כי שורה ה- i של A **שורה מובילה** אם בשורה ה- i של B יש איבר מוביל.

משפט 9.3 עמודות מובילות מהוות בסיס של תת-מרחב

נניח כי $S = \{u_1, \dots, u_k\} \in \mathbb{F}^n$ קבוצת ווקטורים של מרחב ווקטורי \mathbb{F}^n .

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & \cdots & | \\ u_1 & u_2 & & u_k \\ | & | & & | \end{array} \right) \text{ נגדיר}$$

(1) כל העמודות של A עמודות מובילות אם ורק אם הקבוצת ווקטורים S בת"ל.

(2) העמודות המובילות של A מהווים בסיס של S .

(3) מספר עמודות מובילות ב- A שווה למימד של S .

הוכחה: (להעשרה בלבד)

נרשום

$$x_1 u_1 + \cdots + x_k u_k = \bar{0} \quad (*)$$

כאשר $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{F}$ סקלרים. ונגדיר $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^k$. נניח ש- B המטריצה המדורגת המתקבלת מ- A .

(1) נניח כי S בת"ל.

$$\Leftarrow \text{אז } x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$$

$$\Leftarrow \text{למערכת } AX = 0 \text{ יש פתרון יחיד: } X = 0$$

$$\Leftarrow \text{יש איבר מוביל בכל עמודה של } B$$

$$\Leftarrow \text{כל העמודות של } A \text{ מובילות.}$$

נניח שכל העמודות של A מובילות.

$$\Leftarrow \text{יש איבר מוביל בכל עמודה של } B$$

$$\Leftarrow \text{הפתרון היחיד הינו } X = 0$$

$$\Leftarrow \text{עבור הסקלרים ב- } (*) \text{ נקבל } x_1 = \cdots = x_k = 0 \Leftarrow S \text{ בת"ל.}$$

(2) קבוצת העמודות המובילות של A תהיה בסיס של S אם (א) היא בת"ל ו (ב) היא פורשת S .

(א) תהי A' המטריצה המתקבלת מהעמודות המובילות של A . לפי (1) כל העמודות של A' בת"ל.

(ב) נניח שמתוך ה- k ווקטורים של S יש p ווקטורים בת"ל: $\{u_1, \dots, u_p\}$.

לכן, אפשר לרשום כל ווקטור של S כצירוף ליניארי של הווקטורים $\{u_1, \dots, u_p\}$.

לכן S נפרש ע"י הווקטורים $\{u_1, \dots, u_p\}$.

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & | & | \\ u_1 & \cdots & u_p & u_{p+1} \cdots u_k \\ | & & | & | \end{array} \right) \text{ נרשום}$$

הווקטורים u_1, \dots, u_p בת"ל לכן ה- p עמודות הראשונות של A מובילות.

(אין יותר מ- p עמודות מובילות כי אז יהיו יותר מ- p ווקטורים בת"ל ונגיע לסתירה).

לפיכך העמודות המובילות פורשות S .

(3) לפי (2) העמודות המובילות של A מהווה בסיס של S .

מימד שווה למספר ווקטורים בבסיס.

לפיכך המימד שווה למספר עמודות המובילות ב- A .

דוגמה 9.7

מצאו בסיס ומימד של הקבוצה $S = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ כאשר

(1)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

פתרון:

(1)

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

כל העמודות מובילות, לכן $\{v_1, v_2, v_3\}$ בסיס של S .

$$\dim(S) = 3$$

(2)

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

עמודות 1 ו-2 מובילות. לכן הווקטורים v_1, v_2 מהווים בסיס של S .

$$\dim(S) = 2$$

דוגמה 9.8

מצאו בסיס ואת המימד של תת מרחב הנפרש ע"י הווקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

בטאו את ווקטור $u = \begin{pmatrix} 4 & -14 \\ -13 & 11 \end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של הבסיס שמצאתם.

פתרון:

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + k_4 v_4 = \bar{0}$$

\Downarrow

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & -4 & -7 \\ -4 & -1 & -5 & -5 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_4 \rightarrow R_4 - 2R_1]{R_2 \rightarrow R_2 + 5R_1, R_3 \rightarrow R_3 + 4R_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

עמודות 1 ו-2 מובילות, לפיכך הווקטורים v_1, v_2 מהווים בסיס של S .
 $\dim(S) = 2$.
 נרשום u כצירוף ליניארי של הבסיס המתקבל:

$$u = xv_1 + yv_2 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 14 \\ -4 & -1 & -13 \\ 2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + 5R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 4R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow k_1 = 3, k_2 = 1$$

$$u = 3v_1 + v_2 .$$

9.9 דוגמה

במרחב $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ נתונים ווקטורים

$$p_1(x) = 2 - x + x^2, \quad p_2(x) = 2x - 3x^2 + x^3, \quad p_3(x) = 1 - x^2, \quad p_4(x) = 3x - 6x^2 + x^3 .$$

(א) בדקו אם הווקטורים $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ תלויים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם ששווה לווקטור האפס.

(ב) מצאו בסיס ואת המימד של תת מרחב הנפרש ע"י הווקטורים $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$.

(ג) בטאו כל ווקטור מתוך $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ כצירוף ליניארי של הבסיס המצאתם בסעיף ב'.

פתרון:

(א) נרשום את הווקטורים לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$, $E = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3\}$:

$$p_1(x) = 2e_1 - e_2 + e_3 + 0e_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_E,$$

$$p_2(x) = 0e_1 + 2e_2 - 3e_3 + e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}_E,$$

$$p_3(x) = 1e_1 + 0e_2 - e_3 + 0e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_E,$$

$$p_4(x) = 0e_1 + 3e_2 - 6e_3 + e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}_E.$$

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לא כל העמודות מובילות, לכן $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ ת"ל.

נרשום את הצירוף הליניארי

$$k_1 p_1 + k_2 p_2 + k_3 p_3 + k_4 p_4 = \bar{0}.$$

לפי המדורגת שמצאנו הפתרון הינו

$$k_1 = k_4, \quad k_2 = -k_4, \quad k_3 = -2k_4, \quad k_4 \in \mathbb{R}.$$

נציב $k_4 = 1 \Leftarrow$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = -2.$$

$$p_1 - p_2 - 2p_3 + p_4 = \bar{0}$$

(ב)

$\dim(\text{span}\{p_1, p_2, p_3, p_4\}) = 3$ = מספר העמודות המובילות =

העמודות 1, 2 ו-3 מובילות לפיכך הווקטורים p_1, p_2, p_3 מהווים בסיס.

(ג)

$$p_1 = 1 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3$$

$$p_2 = 0 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3$$

$$p_3 = 0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3$$

$$p_4 = -p_1 + p_2 + 2 \cdot p_3.$$

משפט 9.4

יהי $U \subset V$ תת מרחב של המרחב ווקטורי V . נניח כי $\dim(U) = m$ ותהי $B = \{u_1, \dots, u_m\}$ קבוצה של m ווקטורים.

B בת"ל אם ורק אם B פורשת את U .

הוכחה:

נניח כי B בת"ל ו- B לא פורשת את U . אז ניתן להשלים B לבסיס של U , בסתירה לכך ש- $\dim(U) = m$.

נניח כי B פורשת את U אבל B לא בת"ל. אז ניתן להקטין את B לבסיס של פחות מ- m ווקטורים בסתירה לכך ש- $\dim(U) = m$.

