

## עבודה עצמית 7

**שאלה 1** נסמן  $S = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (11, 16, 21)\}$ .

(א) האם  $S$  פורשת את  $\mathbb{R}^3$ ?

(ב) האם  $(6, 9, 12) \in \text{sp}(S)$ ? אם כן, הצג אותו כצרוף לינארי של הוקטורים ב- $S$ . האם יש יותר מדרך אחת להציגו כצרוף לינארי של הוקטורים ב- $S$ ?

**שאלה 2** תן דוגמא לשתי קבוצות  $S, T$  כך ש- $S \subseteq T$  ומתקיים:

(א)  $T$  פורשת את  $\mathbb{R}^4$  ו- $S$  לא פורשת את  $\mathbb{R}^4$ .

(ב)  $T$  לא פורשת את  $\mathbb{R}^4$  ו- $S$  לא פורשת את  $\mathbb{R}^4$ .

(ג)  $T$  פורשת את  $\mathbb{R}^4$  ו- $S$  פורשת את  $\mathbb{R}^4$ .

**שאלה 3** תהיינה  $X \subseteq Y$  קבוצות של וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$ . הוכח או הפרך:

(א) אם  $Y$  פורשת את  $\mathbb{R}^n$  אז  $X$  פורשת את  $\mathbb{R}^n$ .

(ב) אם  $0 \in X$  אז  $X$  פורשת את  $\mathbb{R}^n$ .

(ג) אם  $0 \in X$  אז  $X$  לא פורשת את  $\mathbb{R}^n$ .

(ד) אם  $X$  פורשת את  $\mathbb{R}^n$  אז  $Y$  פורשת את  $\mathbb{R}^n$ .

(ה) אם מספר הוקטורים ב- $X$  גדול מ- $n$  אז  $X$  פורשת את  $\mathbb{R}^n$ .

(ו) אם קיים  $v \in Y$  כך ש- $v \notin X$  אז  $\text{sp}(Y) \neq \text{sp}(X)$ .

**שאלה 4** נתונים הוקטורים  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ ,  $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix}$

(א) מצא לאילו ערכי  $a$  מתקיים  $u_3 \in \text{sp}\{u_1, u_2\}$ . עבור ערך  $a$  הקטן שמצאת, הצג את  $u_3$  כצרוף לינארי של  $u_1, u_2$ .

(ב) מצא לאילו ערכי  $a$  הקבוצה  $\{u_1, u_2, u_3\}$  פורשת את  $\mathbb{R}^3$ .

**שאלה 5** תהי  $A \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ . הוכח או הפרך:

(א) אם למערכת  $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$  קיים פתרון אז למערכת  $AX = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  קיים פתרון.

(ב) אם למערכת  $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$  קיים פתרון יחיד אז למערכת  $AX = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  קיים פתרון יחיד.

(ג) אם  $n = 3$  ולמערכת  $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$  קיים פתרון יחיד אז למערכת  $AX = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  קיים פתרון יחיד.

(ד) אם למערכת  $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  קיים פתרון אז למערכת  $AX = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  קיים פתרון.

(ה) יהיו  $c, d \in \mathbb{R}^n$ . אם למערכת  $AX = c$  קיים פתרון ולמערכת  $AX = d$  קיים פתרון, אז למערכת  $AX = c + d$  קיים פתרון.

**שאלה 6** נסמן  $p_1(x) = x + 1$ ,  $p_2(x) = -x + 3$ ,  $p_3(x) = 3x + 11$ . האם  $g(x) \in \text{sp}\{p_1(x), p_2(x)\}$ ? אם כן, הצגו אותו כצ"ל שלהם.

**שאלה 7** נסמן  $p_1(x) = x^2 + 2x + 1$ ,  $p_2(x) = x^2 - x + 1$ ,  $p_3(x) = x^2 + x - 1$ ,  $p_4(x) = x^2 + 6$ . הצגו את  $g(x)$  כצ"ל של  $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ . האם יש יותר מדרך אחת?

**שאלה 8** נסמן  $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ . האם  $u \in \text{sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$ ? אם כן, הצגו את  $u$  כצ"ל של הוקטורים הנ"ל.

**שאלה 9** לאילו ערכי  $m$  מתקיים  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ ?

**שאלה 10** לכל  $a \in \mathbb{C}$  קבעו האם  $V(a) = \mathbb{C}^3$  כאשר

$$V(a) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

**שאלה 11** יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $\mathbb{R}$ . נניח כי  $v_1, v_2, v_3 \in V$  וקטורים בלתי תלויים לינארית. קבעו האם הוקטורים הבאים הם בלתי תלויים לינארית:

$$w_1 = v_1 + v_2 + v_3, \quad w_2 = v_1 - v_2 + 3v_3, \quad w_3 = v_1 + 2v_2.$$

## פתרונות

### שאלה 1

(א) נבדוק אם  $S$  בת"ל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 2 & 5 & 16 \\ 3 & 6 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

יש עמודה לא מובילה, לכן הוקטורים ת"ל.

$$\dim(\text{sp}(S)) = 2 < \dim(\mathbb{R}^3)$$

לכן  $S$  לא פורשת את  $\mathbb{R}^3$ .

(ב) נסמן  $v_1 = (1, 2, 3)$ ,  $v_2 = (4, 5, 6)$ ,  $v_3 = (11, 16, 21)$ ,  $u = (6, 9, 12)$ . נבדוק אם

$$u = k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 11 & 6 \\ 2 & 5 & 16 & 9 \\ 3 & 6 & 21 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 11 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -12 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 11 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{3}R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 11 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 4R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$k_3 \in \mathbb{R}$ ,  $k_2 = 1 - 2k_3$ ,  $k_1 = 2 - 3k_3$  יש  $\infty$  פתרונות למערכת, לכן יש  $\infty$  דרכים להציג את  $u$  כצירוף לינארי של  $v_1, v_2, v_3$ . נציב  $k_3 = 1 \Leftrightarrow k_2 = -1 \Leftrightarrow k_1 = -1$

$$-v_1 - v_2 + v_3 = u$$

### שאלה 2

(א)  $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ,  $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ,  $S \subseteq T$ ,  $T$  לא פורשת את  $\mathbb{R}^4$ ,  $T$  פורשת את  $\mathbb{R}^4$  כי  $T$  הוא הבסיס הסטנדרטי של  $\mathbb{R}^4$ .

(ב)  $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ,  $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ,  $S \subseteq T$ ,  $T$  לא פורשות את  $\mathbb{R}^4$ .

(ג)  $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ,  $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

### שאלה 3

(א)  $X \subseteq Y$  ו-  $Y$  פורשת את  $X$   $\Leftrightarrow X$  פורשת את  $Y$ .

דוגמה נגדית:

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$X, Y \in \mathbb{R}^2$ .  $Y$  פורשת את  $X$ ,  $X$  לא פורשת את  $Y$ .

(ב)  $0 \in X \Leftrightarrow X$  פורשת את  $\mathbb{R}^n$ .

דוגמה נגדית:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$X$  לא פורשת את  $\mathbb{R}^2$ .

(ג)  $0 \in X \Leftrightarrow X$  לא פורשת את  $\mathbb{R}^n$ .

דוגמה נגדית:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$X$  פורשת את  $\mathbb{R}^2$ .

(ד)  $X$  פורשת את  $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow Y$  פורשת את  $\mathbb{R}^n$ .

נתון:  $sp(X) = \mathbb{R}^n, X \subseteq Y$ .

צ"ל:  $sp(Y) = \mathbb{R}^n$ .

הוכחה:

נקח  $v \in \mathbb{R}^n$ . אז  $v \in sp(X)$ . לכן קיימים  $u_1, \dots, u_m \in X$  כך ש

$$v = k_1 u_1 + \dots + k_m u_m.$$

$X \subseteq Y$ , לכן  $u_1, \dots, u_m \in Y$ ,  $v \in sp(Y)$ .

(ה) מספר הוקטורים ב-  $X$  גדול מ-  $n \Leftrightarrow X$  פורשת את  $\mathbb{R}^n$ .

דוגמה נגדית:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$X$  אינה פורשת את  $\mathbb{R}^2$ .

(ו) קיים  $v \in Y$  כך ש-  $v \notin X \Leftrightarrow sp(Y) \neq sp(X)$ .

דוגמה נגדית:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$sp(Y) = sp(X) = \mathbb{R}^2.$$

$$\Leftrightarrow u_3 \in \text{sp}(u_1, u_2) \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{שאלה 4}}$$

$$u_3 = k_1 u_1 + k_2 u_2$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & a+1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a-2 \\ 0 & a-1 & a-1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a-3) \end{array} \right)$$

יש פתרון אם  $a = 1, 3$ .

לכן  $u_3 \in \text{sp}(u_1, u_2)$  עבור  $a = 1$  ו  $a = 3$ .

$$\underline{a = 1}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow k_1 = 3, k_2 = -1$$

$$u_3 = 3u_1 - u_2.$$

$$\underline{a = 3}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$k_2 = -k_3, k_1 = k_3$$

עבור  $a \neq 1, 3$  הוקטורים  $u_1, u_2, u_3$  בת"ל,  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 \Leftrightarrow u_1, u_2, u_3$  בסיס של  $\mathbb{R}^3$ .

לכן  $\mathbb{R}^3 = \text{sp}(u_1, u_2, u_3)$ .

שאלה 5  $A \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ , נסמן את העמודות  $u_1, \dots, u_n$ . אז  $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^3$ .

$$\text{א) טענה: למערכת } AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ יש פתרון, ז"א וקטור } v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \in \text{sp}(u_1, \dots, u_n)$$

$$\text{דוגמה נגדית: } u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v \in \text{sp}(u_1, u_2) \text{ וקטור } v' = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \notin \text{sp}(u_1, u_2)$$

$$\text{ב) דוגמה נגדית: } u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = u_1 + u_2 \text{ כי } v \in \text{sp}(u_1, u_2) \quad u_2, u_1 \text{ בת"ל, לכן}$$

למערכת  $AX = v$  יש פתרון יחיד.

$$\text{נבדוק אם למערכת } AX = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ יש פתרון:}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{array} \right)$$

אין פתרון למערכת.

ג)  $n = 3$ . למערכת  $AX = v$  יש פתרון יחיד, לכן הוקטורים  $u_1, u_2, u_3$  בת"ל. לכן,  $u_1, u_2, u_3$  מהווים בסיס של  $\mathbb{R}^3 \Leftarrow$  למערכת  $AX = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  יש פתרון יחיד.

ד) דוגמה נגדית:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

למערכת  $AX = 0$  יש פתרון, למערכת  $AX = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  אין פתרון.

ה) נסמם ב  $v_1$  פתרון של המערכת  $AX = c$ , וב  $v_2$  פתרון של המערכת  $AX = d$ . ז"א

$$Av_1 = c, \quad Av_2 = d.$$

לכן

$$A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = c + d.$$

שאלה 6  $p_1(x) = x + 1, p_2(x) = -x + 3, g(x) = 3x + 11$

$$g(x) = k_1 p_1(x) + k_2 p_2(x)$$

$$k_1(x + 1) + k_2(-x + 3) = 3x + 11$$

$$(k_1 + 3k_2) + (k_1 - k_2)x = 3x + 11$$

$$\left. \begin{array}{l} k_1 + 3k_2 = 11 \\ k_1 - k_2 = 3 \end{array} \right\}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 11 \\ 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 11 \\ 0 & -4 & -8 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$k_1 = 5, \quad k_2 = 2.$$

$$5p_1(x) + 2p_2(x) = g(x).$$

שאלה 7  $p_1(x) = x^2 + 2x + 1, p_2(x) = x^2 - x + 1, p_3(x) = x^2 + x - 1, g(x) = x^2 + 6$

$$k_1 p_1(x) + k_2 p_2(x) + k_3 p_3(x) = g(x)$$

$$k_1(x^2 + 2x + 1) + k_2(x^2 - x + 1) + k_3(x^2 + x - 1) = x^2 + 6$$

$$(k_1 + k_2 + k_3)x^2 + (2k_1 - k_2 + k_3)x + (k_1 + k_2 - k_3) = x^2 + 6$$

$$\left. \begin{array}{l} k_1 + k_2 + k_3 = 1 \\ 2k_1 - k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 - k_3 = 6 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_2 \rightarrow 2R_2 - R_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow 2R_1 + R_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & -6 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array} \right) \\
 & \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array} \right) \\
 & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

פתרון יחיד:

$$\begin{aligned}
 (k_1, k_2, k_3) &= \left( 2, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2} \right) \\
 g(x) &= 2p_1(x) + \frac{3}{2}p_2(x) - \frac{5}{2}p_3(x)
 \end{aligned}$$

## שאלה 8

$$\begin{aligned}
 u &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{נסמן} \\
 u &= \text{sp}(u_1, u_2, u_3), \quad u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = u$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow -R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 2R_3}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

אין פתרון למערכת, לכן  $u \notin \text{sp}(u_1, u_2, u_3)$

## שאלה 9

$$u \in \text{sp}(v_1, v_2, v_3)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{sp} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 2 \\ 1 & m & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - mR_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 2 \\ 0 & m-1 & 1-m & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-m^2 & 1 & -1-2m \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_2 + R_4} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 2 \\ 0 & m-1 & 1-m & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m^2-m+2 & -2m-4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 2 \\ 0 & m-1 & 1-m & -3 \\ 0 & 0 & -m^2-m+2 & -2m-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

עבור  $m = 1$  למערכת אין פתרון, לכן  $u \notin \text{sp}(v_1, v_2, v_3)$ .

עבור  $m \neq 1$  למערכת יש פתרון, לכן  $u \in \text{sp}(v_1, v_2, v_3)$ .

**שאלה 10** נשים לב שכדי ש  $V(a) = \mathbb{C}^3$  צריך להתקיים ש  $\dim V(a) = 3$ . לכן יספיק לבדוק עבור אילו ערכי  $a \in \mathbb{C}$  הווקטורים  $v_1, v_2, v_3$  בת"ל.

$$\left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & a \\ a & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - aR_1}} \left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-3 \\ 0 & 1-a & 1-a \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 + 4R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 3R_1}} \left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-3 \\ 0 & 0 & 1-a-(1-a)(a-3) \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-3 \\ 0 & 0 & (1-a)(4-a) \end{array} \right)$$

מכאן אם  $a \neq 1, 4$  למערכת פתרון יחיד ובפרט  $V(a) = \mathbb{C}^3$ .

עבור  $a = 1, 4$ ,  $\dim V(a) < 3$  ובפרט  $V(a) \neq \mathbb{C}^3$ .

**שאלה 11** עלינו לבדוק האם  $\exists$  צירוף לינארי לא טריוויאלי של  $w_1, w_2, w_3$  אשר נותן את  $\bar{0}$  (ווקטור האפס).

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 \\ &= \alpha_1 (v_1 + v_2 + v_3) + \alpha_2 (v_1 - v_2 + 3v_3) + \alpha_3 (v_1 + v_2 + v_3) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)v_1 + (\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3)v_2 + (\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0\alpha_3)v_3 \end{aligned}$$



יש לנו כאן צירוף לינארי של  $v_1, v_2, v_3$  שנותן את 0 מאחר והם בת"ל נקבל את המערכת הבאה:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0$$

אם למערכת פתרון יחיד אז  $w_1, w_2, w_3$  בת"ל אחרת  $w_1, w_2, w_3$  ת"ל.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

למערכת יש  $\infty$  פתרונות  $\Leftrightarrow w_1, w_2, w_3$  ת"ל.  
נשים לב

$$\frac{3}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2 = w_3 .$$