

חישוביות וסיבוכיות

מועד ג'

ד"ר ירמיהו מילר,

סמסטר ב, תשפ"ה

מספר העמוד הנוכחי ומספר העמודים הכולל בשאלון מופיעים בתחתית כל עמוד. בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות

שאלוני בחינה

- ☒ לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ☐ לשאלון הבחינה יש לצרף כריכה בלבד.
- ☐ יש להחזיר את השאלון ביחד עם המחברת/כריכה.

שימוש במחשבוני

- ☐ ניתן להשתמש במחשבון.
- ☒ לא ניתן להשתמש במחשבון.

חומר עזר

- ☒ לא ניתן להשתמש בחומר עזר כלל.
- ☐ ניתן להשתמש בחומר עזר/דף נוסחאות, כמפורט:
- ☐ הבחינה עם חומר פתוח ☑ מותר להשתמש בכל חומר עזר מודפס או כתוב.

עמוד 1 מתוך 5

הנחיות רגילות

נא קראו בעיון את ההנחיות הבאות בטרם תתחילו לפתור את הבחינה. מומלץ לקרוא בקצרה את כלל השאלות לפני שמתחילים לפתור את הבחינה. ניתן לענות על השאלות בכל סדר שתרצו.

1. המבחן כולל 5 שאלות. יש לענות על כולן.
2. שאלות הבחינה שוות משקל - כל שאלה 20 נקודות.
3. כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תדלגו על שלבים.
4. המבחן כולל נספחים, לשימושכם. הסתייעו בהם במידת הצורך.
5. הקפידו על כתב יד ברור וקריא.
6. הקפידו לרשום בגדול ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
7. כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבלתם. רק הן נבדקות!
8. ניתן לקחת את השאלון כאשר הבחינה מסתיימת.

בהצלחה!

הנחיות פרטניות למילואימניקים

נא קראו בעיון את ההנחיות הבאות בטרם תתחילו לפתור את הבחינה. מומלץ לקרוא בקצרה את כלל השאלות לפני שמתחילים לפתור את הבחינה. ניתן לענות על השאלות בכל סדר שתרצו.

1. המבחן כולל 5 שאלות. יש לענות על 4 מתוך ה-5 שאלות.
2. שאלות הבחינה שוות משקל - כל שאלה 25 נקודות.
3. מילואימניק יכתוב בדפים שנסרקים - "משויך למתווה המילואים".
4. כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תדלגו על שלבים.
5. המבחן כולל נספחים, לשימושכם. הסתייעו בהם במידת הצורך.
6. הקפידו על כתב יד ברור וקריא.
7. הקפידו לרשום בגדול ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
8. כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבלתם. רק הן נבדקות!
9. ניתן לקחת את השאלון כאשר הבחינה מסתיימת.

בהצלחה!

עמוד 2 מתוך 5

הבחינה

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

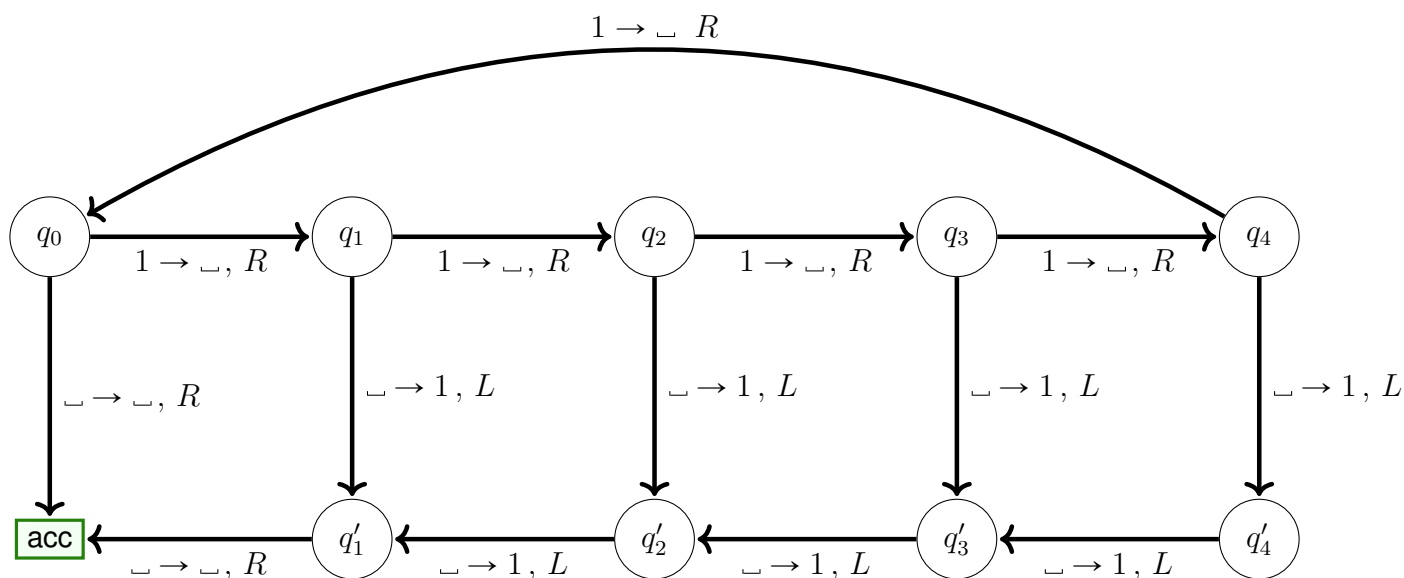
נתונה השפה הבאה:

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#a_w \neq \#b_w\}$$

תארו מכונת טיורינג עם סרט יחיד שמכריעה את השפה בעזרת תרשים מצבים בלבד ולא בדרכים אחרות.

סעיף ב' (10 נקודות)

בתרשים הבא, נתונה מכונת טיורינג M . המכונה מקבלת כקלט מספר בבסיס אונרי. בהינתן קלט 1^i , כאשר $i \in \mathbb{N}$, מהי הפונקציה f שהמכונה מחשבת? כל המעברים שאינם מצויינים בתרשים עוברים למצב דחיה.



שאלה 2: סגירות של שפות כריעות (20 נקודות)

תהי L שפה. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה את כל הטענות הבאות:

עמוד 3 מתוך 5

סעיף א' (10 נקודות)
אם $L \in R$ אזי גם $\bar{L} \in R$, כשאר \bar{L} היא השפה המשלימה של L .

סעיף ב' (10 נקודות)
אם $L \in R$ אזי גם $L^* \in R$, כשאר L^* היא הוכב-קליני של L .

שאלה 3: אי כריעות (20 נקודות)

סעיף א' (12 נקודות)

נתונה השפה הבאה:

$$\hat{L} = \{ \langle M \rangle \mid |L(M)| \text{ סופי} \}$$

הוכיחו כי $\hat{L} \notin RE$.

סעיף ב' (8 נקודות)

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענה הבאה:
תהי L שפה. אם $L \in RE$ וגם $\bar{L} \notin RE$ אזי $L \in RE \setminus R$.

שאלה 4: NP - שלמות (20 נקודות)

לכל אחת מהטענות הבאות, הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

סעיף א' (5 נקודות)

אם $L_{acc} \notin NP$ אזי $L_{halt} \notin NP$.

סעיף ב' (5 נקודות)

קיים אלגוריתם המקבל כקלט נוסחה ϕ מצורת $3-CNF$ מעל המשתנים x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ומכריע בזמן פולינומיאלי האם ϕ ספיקה.

סעיף ג' (5 נקודות)

לכל שתי בעיות NP -שלמות A ו- B , מתקיים $A \leq_P B$.

סעיף ד' (5 נקודות)

תהי L שפה. אם $L \leq \bar{L}$ אזי $L \in R$ או $L \notin RE$.

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

בהינתן גרף $G = (V, E)$ לא מכוון. אומרים כי הגרף G הוא k -צביע אם ניתן לצבוע את הקודקודים שלו ב- k צבעים (או פחות) כך ששני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע. נגדיר את השפות הבאות:

$$kCOLOR = \{ \langle G \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון } k\text{-צביע} \}$$
$$(k+1)COLOR = \{ \langle G \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון } (k+1)\text{-צביע} \}$$

הוכיחו:

$$kCOLOR \leq_P (k+1)COLOR.$$

חישוביות וסיבוכיות

דף נוסחאות למבחן

סמסטר ב, תשפ"ה'

תוכן העניינים

פתרונות

חישוביות וסיבוכיות

מועד ג'

פתרון לדוגמא

ד"ר ירמיהו מילר , .

סמסטר ב, תשפ"ה'

מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הינן פתרונות לדוגמא. ניתן לפתור חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

עמוד 1 מתוך 6

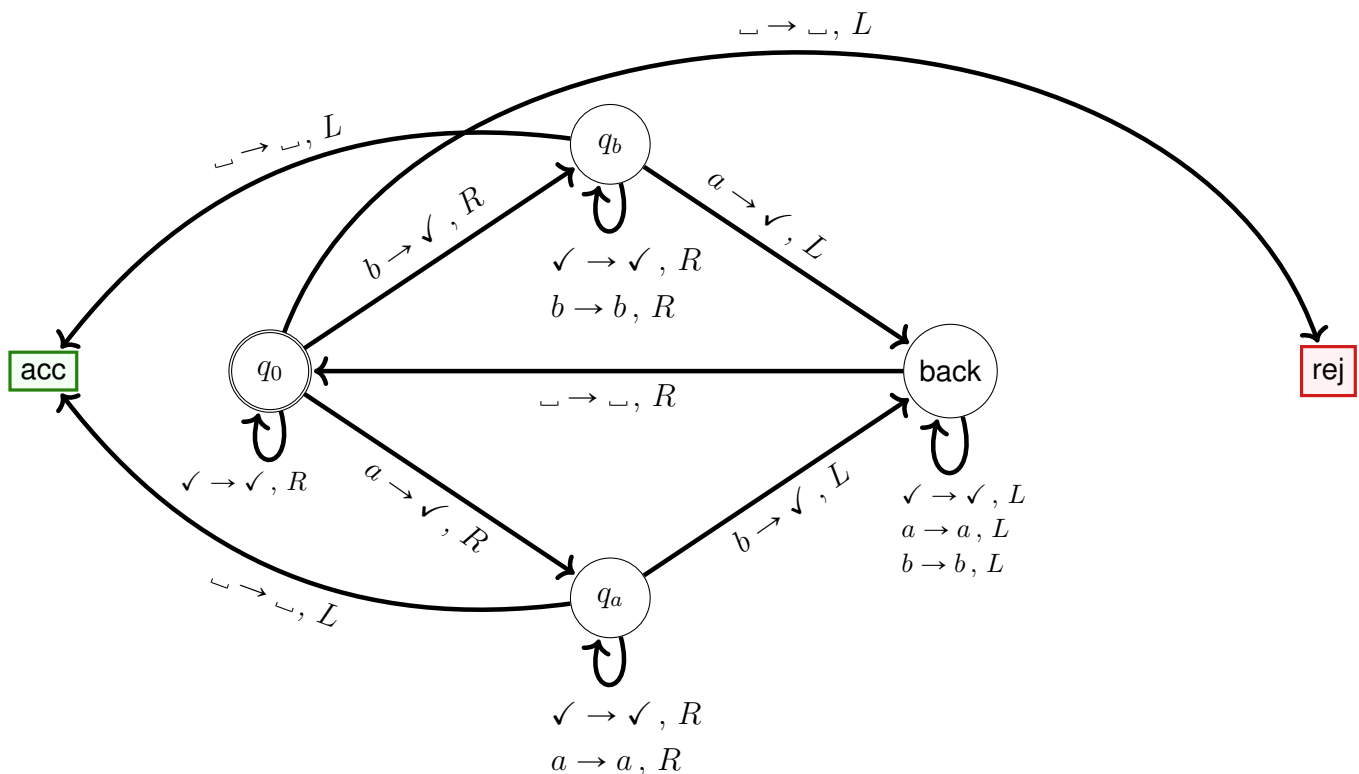
המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245,84 | www.sce.ac.il | חייג: ☎ 052-7777777

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

כל המעברים שאינם מופיעים בתרשים עוברים ל- q_{rej} .



סעיף ב' (10 נקודות)

$$f(x) = x \mod 5.$$

שאלה 2: סגירות של שפות כריעות (20 נקודות)

פתרונות

סעיף א' (10 נקודות)

נוכיח כי

$$L \in R \Rightarrow \bar{L} \in R,$$

כאשר

$$\bar{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}.$$

תהי M מ"ט המכריעה את L .
נבנה מ"ט \bar{M} המכריעה את \bar{L} .

$$\bar{M} = \text{על קלט } w$$

(1) \bar{M} מריצה את M על w .

- אם M מקבלת \bar{M} דוחה.
- אם M דוחה \bar{M} מקבלת.

סעיף ב' (10 נקודות)

נוכיח כי לכל שפה L :

$$L \in R \Rightarrow L^* \in R$$

כאשר

$$L^* = \{w = w_1 w_2 \cdots w_k \mid \forall 1 \leq i \leq k, w_i \in L\} \cup \{\varepsilon\}.$$

תהי M מ"ט המכריעה את L .
נבנה מ"ט M^* א"ד המכריעה את L^* .

תאור הבנייה

$$M^* = \text{על קלט } w$$

(1) אם $w = \varepsilon$ אז M^* מקבלת.

(2) אחרת M^* בוחרת באופן א"ד חלוקה של w ל- $w = w_1 \cdots w_k$.

(3) לכל $1 \leq i \leq k$:

$$M^* \text{ מריצה את } M \text{ על } w_i.$$

- אם M דוחה את w_i אז M^* דוחה.
- אחרת חוזרים לשלב (3).

(4) אם M קיבלה את כל המחזורות $\{w_i\}$ אזי M^* מקבלת.

שאלה 3: אי כריעות (20 נקודות)

סעיף א' (12 נקודות)

נוכיח $\hat{L} \notin RE$ ע"י רדוקציה מ- $\overline{L_{acc}}$, כלומר נראה רדוקציה $\hat{L} \leq \overline{L_{acc}}$.

פונקצית הרדוקציה

$$f(x) = \begin{cases} \langle M_w \rangle & : x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & : x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר $\langle M_\emptyset \rangle$ מ"ט הדוחה כל קלט, ו- M_w היא מ"ט שעל כל קלט y , M_w מתעלמת מ- y ומריצה את M על w ועונה כמוה.

אבחנה

$$L(M_w) = \begin{cases} \Sigma^* & : w \in L(M) \\ \emptyset & : w \notin L(M) \end{cases}$$

נכונות הבנייה

נוכיח כי לכל $x \in \Sigma^*$ מתקיים $x \in \overline{L_{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in \hat{L}$.

אם $x \in \overline{L_{acc}} \Leftarrow$ שני מקרים:

1. $f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$ ו- $L(M_\emptyset)$ סופי $\Leftarrow f(x) \in \hat{L}$.

2. $x = \langle M, w \rangle$ ו- $x \notin L(M) \Leftarrow f(x) = \langle M_w \rangle \Leftarrow w \notin L(M)$ ולפי האבחנה $L(M_w) = \emptyset$ סופית $\Leftarrow f(x) \in \hat{L}$.

אם $x \notin \overline{L_{acc}} \Leftarrow f(x) \notin \hat{L}$ ו- $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow x \in L(M)$ ו- $f(x) = \langle M_w \rangle \Leftarrow w \in L(M)$ ולפי האבחנה $L(M_w) = \Sigma^*$ אינסופית $\Leftarrow f(x) \notin \hat{L}$.

הראינו רדוקציה $\hat{L} \leq \overline{L_{acc}}$ ומכיון ש- $\overline{L_{acc}} \notin RE$, ממשפט הרדוקציה, מתקיים $\hat{L} \notin RE$.

סעיף ב' (8 נקודות)

הטענה נכונה.

נניח כי $L \in RE$ וגם $\bar{L} \notin RE$ ונניח בשלילה כי $L \in R$. אזי מכיון ש- R סגורה תחת משלים, מתקיים $\bar{L} \in R$ בסתירה לכך ש- $\bar{L} \notin RE$.

שאלה 4: NP - שלמות (20 נקודות)

פתרונות

סעיף א' (5 נקודות)

הטענה נכונה. קיימת רדוקציה פולינומיאלית $L_{\text{acc}} \leq_P L_{\text{Halt}}$ ולכן ממשפט הרדוקציה, אם $L_{\text{acc}} \notin NP$, מתקיים $L_{\text{Halt}} \notin NP$.

סעיף ב' (5 נקודות)

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

הטענה נכונה. מכיון ש- ϕ היא מעל המשתנים x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , מספר ההשמות האפשריות הוא $2^5 = 32$ השמות. אפשר לעבור על השמות אלו ולבדוק האם אחת מהן מספקת את ϕ ולהחזיר תשובה בהתאם. כמובן זמן הריצה הוא לכל היותר $O(|\phi|)$, וזה פולינומיאלי בגודל הקלט.

סעיף ג' (5 נקודות)

הטענה נכונה. מכיון ש- B היא NP שלמה, לכל בעייה $A' \in NP$, מתקיים $A' \leq_P B$. מכיון ש- A היא NP שלמה, מתקיים ש- $A \in NP$. לכן קיימת רדוקציה $A \leq_P B$.

סעיף ד' (5 נקודות)

הטענה נכונה.

הטענה היא:

אם $L \leq \bar{L}$ אז $L \in R \vee L \notin RE$.

נניח בשלילה כי:

אם $L \leq \bar{L}$ אז $L \notin R \wedge L \in RE$.

זאת אומרת $\bar{L} \in R$.

$\bar{L} \in R$ ו- $L \leq \bar{L} \Leftarrow$

לכן, לפי ממשפט הרדוקציה, $L \in R$.

זאת סותרת ההנחה ש- $L \in RE \setminus R$.

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

עמוד 5 מתוך 6

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245, 84 | חייג: 08-9888888 | www.sce.ac.il

פתרונות

פונקצית הרדוקציה:

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, הקלט של $kCOLOR$, ניצור גרף לא מכוון חדש $G' = (V', E')$, הקלט של $(k+1)COLOR$.

בהינתן $G = (V, E)$ נבנה הגרף החדש $G' = (V', E')$ כאשר:

- $V' = V \cup \{u^*\}$, כלומר הוספנו קודקוד אחד חדש u^* .
- $E' = E \cup \{(u, u^*) \mid u \in V\}$. כלומר כל קודקוד בקבוצת הקודקודים V מחובר ל- u^* בצלע.

נכונות הרדוקציה:

נסמן צבע של קודקוד $u \in V$ ע"י $c(u)$, ונסמן k צבעים שונים של הקודקודים של G ב- $\{1, 2, \dots, k\}$. כלומר $c(u) \in \{1, 2, \dots, k\}$.

באופן דומה, נסמן צבע של קודקוד $u' \in V'$ ע"י $c(u')$, ונסמן $k+1$ צבעים שונים של הקודקודים של G' ב- $\{1, 2, \dots, k, k+1\}$. כלומר $c(u') \in \{1, 2, \dots, k, k+1\}$.

נוכיח ש:

$$\langle G \rangle \in kCOLOR \Leftrightarrow \langle G' \rangle \in (k+1)COLOR.$$

כיוון \Leftarrow

נניח כי $\langle G \rangle \in kCOLOR$.

\Leftarrow אם $c(u) \in \{1, 2, \dots, k\}$ לכל $u \in V$, ואם $(u_1, u_2) \in E$ אז $c(u_1) \neq c(u_2)$. כלומר, ניתן לצבוע כל קודקוד ב- k צבעים שונים כך שני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע.

\Leftarrow אם $c(u^*) = k+1$ אז לכל $u \in V$ מתקיים $c(u) \neq c(u^*) = k+1$. הצבע של u^* שונה מהצבעים של כל הקודקודים של V .

\Leftarrow לכל $u'_1, u'_2 \in V'$ מתקיים שאם $(u'_1, u'_2) \in E'$ אז $c(u'_1) \neq c(u'_2)$.

\Leftarrow ניתן לצבוע את הקודקודים של G' ב- $k+1$ צבעים שך ששני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע.

$$\langle G' \rangle \in (k+1)COLOR \Leftarrow$$

כיוון \Rightarrow

נניח כי $\langle G' \rangle \in (k+1)COLOR$.

\Leftarrow אם $c(u') \in \{1, 2, \dots, k+1\}$ לכל $u' \in V'$, ואם $(u'_1, u'_2) \in E'$ אז $c(u'_1) \neq c(u'_2)$.

כלומר, ניתן לצבוע כל קודקוד ב- $k+1$ צבעים שונים כך שני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע.

פתרונות

\Leftarrow מכיוון ש- $V' = V \cup \{u^*\}$ ו- u^* מחובר לכל קודקוד $u \in V$, אם $c(u^*) = k + 1$ אז בהכרח לכל $u \in V$ מתקיים $c(u) = 1, 2, \dots, k$.

(אחרת קיים קודקוד $u \in V$ הצבוע בצבע $k + 1$ וקיים וצלע בין u^* הצבוע בצבע $k + 1$ לבין הקודקוד $u \in V$ הצבוע בצבע $k + 1$ בסתירה לכך ש- G' הוא $k + 1$ -צביע.)

\Leftarrow מכיוון ש- G' הוא $k + 1$ -צביע אז בהכרח אין צלע ב- $E = \{(u_1, u_2) \mid u_1, u_2 \in V\}$ המחבר בין קודקודים בעלי אותו צבע.

$\Leftarrow G = (V, E)$ הוא גרף k -צביע.

$\Leftarrow \langle G \rangle \in kCOLOR$