

שיעור 4 דטרמיננטות וכלל קרמר

הגדרה של דטרמיננטה של מטריצה ריבועית

נדון רק במטריצה ריבועית.

4.1 הגדרה: (דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר 1×1 ו- 2×2)
הדטרמיננטה של מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$, תסומן $\det A$ או $|A|$, היא מספר ממשי. באופן דומה, הדטרמיננטה של מטריצה $A \in M_n(\mathbb{C})$, היא מספר מורכב. נתחיל בדטרמיננטה של מטריצות מסדר 1×1 ו- 2×2 :

$$n = 1: A = (a), \quad |A| = a,$$

$$n = 2: A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad |A| = (-1)^{1+1}a_{11}|(a_{22})| + (-1)^{1+2}a_{12}|(a_{21})| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

דוגמא. (דטרמיננטה)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad |A| = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot |(4)| + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot |(3)| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

■

4.1 הגדרה: (דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר 3×3)

$$n = 3: A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A| = (-1)^{1+1}a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{21}a_{32}.$$

דוגמא. (דטרמיננטה)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

$$|A| = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$= 1 \cdot (4 \cdot 7 - 5 \cdot 0) - 2(0 \cdot 7 - 5 \cdot 6) + 3 \cdot (0 \cdot 0 - 4 \cdot 6)$$

$$= 28 + 60 - 72,$$

$$= 16.$$

■

4.2 הגדרה: (המינור של מטריצה)

עבור מטריצה ריבועית A , המינור ה- (i, j) של A הוא הדטרמיננטה של המטריצה הריבועית המתקבלת מ- A ע"י מחיקת שורה i ועמודה j . את המינור ה- (i, j) נסמן ב- M_{ij} .

דוגמא.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ מצאו את } M_{32}, M_{23}, M_{12}, M_{11} \text{ עבור}$$

פיתרון.

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 28, \\ M_{12} &= \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -30, \\ M_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -12, \\ M_{32} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5. \end{aligned}$$

■

4.3 הגדרה: (דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר $n \times n$)

$$\text{תהי } A \in M_n(\mathbb{R}) \text{, } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ הדטרמיננטה של } A \text{, תסומן } |A| \text{, היא}$$

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} M_{1n} \\ &= a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} M_{1n}. \end{aligned}$$

דוגמא.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ מצאו את הדטרמיננטה של המטריצה. נסמן}$$

פיתרון.

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (4 \cdot 0 - (-1) \cdot (-2)) - 5 \cdot (2 \cdot 0 - (-1) \cdot 0) + 0 \cdot (2 \cdot (-2) - 4 \cdot 0) \\ &= -2. \end{aligned}$$

נשתעשע....

$$\begin{aligned} |A| &\stackrel{\text{שורה שנייה}}{=} (-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -2 \cdot (5 \cdot 0 - 0 \cdot (-2)) - 4 \cdot (1 \cdot 0 - 0 \cdot 0) + 1 \cdot (1 \cdot (-2) - 5 \cdot 0) \\ &= -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A| &\stackrel{\text{עמודה שלישית}}{=} (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 0 \cdot (2 \cdot (-2) - 4 \cdot 0) + 1 \cdot (1 \cdot (-2) - 5 \cdot 0) + 0 \cdot (1 \cdot 4 - 5 \cdot 2) \\ &= -2. \end{aligned}$$

■

הערה:

סימני האיברים הם כך:

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

דוגמא.

חשבו

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 19 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

פיתרון.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 19 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 19 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

**4.4 משפט. (דטרמיננטה של מטריצה משולשית)**

אם $A \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה משולשית אז $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$, כלומר מכפלת איברי האלכסון הראשי.

דוגמא.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad |A| = -2.$$

$$:A \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} B_1$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |B_1| = 2.$$

$$:A \xrightarrow{R_1 \rightarrow 7R_1} B_2$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad |B_2| = -14.$$

$$:A \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} B_3$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad |B_3| = -2.$$

4.5 משפט:

תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$. ניתן לחשב את $|A|$ גם לפי עמודה ראשונה, כלומר

$$|A| = (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{2+1}a_{21}M_{21} + \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}.$$

למעשה, ניתן לחשב את $|A|$ לפי שורה כלשהי או לפי עמודה כלשהי.

דוגמא.

חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

פיתרון.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 6 \cdot (-2) = -12. \end{aligned}$$

■

4.6 משפט:

אם $A \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה ריבועית ו- B מטריצה המתקבלת מ- A ע"י הפעולה האלמנטרית:

(1) החלפת 2 שורות, אז

$$|B| = -|A|.$$

(2) הכפלת שורה בסקלר $\alpha \neq 0$, אז

$$|B| = \alpha |A|.$$

(3) הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת, אז

$$|B| = |A|.$$

דוגמא.

חשבו את

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$$

פיתרון.

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}_B = 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}_A$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}_B = 4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_A$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 12 \cdot (1 - 4) = -36.$$

■

דוגמא.

חשבו את

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 12 & 15 & 18 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} = ?$$

פיתרון.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 12 & 15 & 18 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 15 & 18 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1} 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 7R_1} 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2} 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 24 \cdot (-3) = -72 .$$

■

דוגמא.

חשבו את

$$\begin{vmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 28 & 35 & 42 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix}$$

פיתרון.

$$\begin{vmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 28 & 35 & 42 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 28 & 35 & 42 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix} = 7 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix} = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 7^3 \cdot (-3) .$$

■

4.7 משפט:

$$|\alpha A| = \alpha^n \cdot |A|$$

כאשר A מסדר $n \times n$.

הערה:

כל מטריצה ריבועית A (מסדר $n \times n$) ניתן להעביר למטריצה מדורגת B ע"י ביצוע מספר סופי של פעולות שורה אלמנטריות מסוג החלפת 2 שורות והוספת שורה אחת לשורה אחרת (בלי פעולת הכפלת שורה בסקלר $\alpha \neq 0$). לכן

$$|A| = (-1)^k |B|$$

כאשר k הור מספר החלפות השורות שביצענו. כמו כן מאחר ו- B משולשית עליונה,

$$|B| = b_{11} \cdot b_{22} \cdot \dots \cdot b_{nn} .$$

4.8 משפט:

תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$. מתקיים:

$$|A| \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{הפיכה } A.$$

דוגמא. היעזרו במשפט 4.8 לעיל וקבעו האם המטריצה הבאה הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

פיתרון.

$$\left| \begin{array}{cccc} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{array} \right| \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1} \left| \begin{array}{cccc} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{array} \right|$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left| \begin{array}{cccc} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{array} \right|$$

$$= 0 .$$



דוגמא.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} , \quad |A| = 2 ,$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} , \quad |A^t| = -2 .$$

4.9 משפט:

תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$. מתקיים:

$$|A^t| = |A| .$$

דוגמא.

נסמן $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. מצאו את המטריצה AB ואת הדטרמיננטות הבאות: $|A|$, $|B|$, $|AB|$.

פיתרון.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 20 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}, \\ |A| &= 12 - 3 = 9, \\ |B| &= 8 - 3 = 5, \\ |AB| &= 25 \cdot 13 - 20 \cdot 14 = 45. \end{aligned}$$

■

4.10 משפט. (משפט המכפלה)

תהינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ מתקיים:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

דוגמא.

נתונה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $|A| = -2$ מהי A^{2020} ?

פיתרון.

$$|A^{2020}| = \underbrace{|A \cdot A \cdot \dots \cdot A|}_{2020 \text{ פעמים}} = \underbrace{|A| \cdot |A| \cdot \dots \cdot |A|}_{2020 \text{ פעמים}} = |A|^{2020}$$

ולכן $|A^{2020}| = (-2)^{2020}$. ■

4.11 משפט:

תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $k \in \mathbb{N}$. מתקיים:

$$|A^k| = |A|^k.$$

4.12 משפט:

תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה, אז

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

הוכחה.

מתקיים $A^{-1} \cdot A = I$ ולכן $|A \cdot A^{-1}| = |I|$. לפי משפט המכפלה, $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$. נחלק ב- $|A| \neq 0$ ונקבל

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

■

דוגמא.

נתונה $A \in M_3(\mathbb{R})$ המקיימת $A^3 = 2A^{-1}B$, כאשר $B = \begin{pmatrix} -2 & 3e & \pi \\ 0 & 1 & 23 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. מצאו את $|A|$.

פיתרון.

דרך א:

לפי הנתון $A^3 = 2A^{-1}B$, ולכן $|A^3| = |2A^{-1}B|$. לפי משפט המכפלה, $|A|^3 = |2A^{-1}| \cdot |B|$. מאחר ו-
 $A \in M_3(\mathbb{R})$, נקבל $|A|^3 = 2^3 \cdot |A^{-1}| \cdot |B|$. מכאן,

$$|A|^3 = 2^3 \cdot \frac{1}{|A|} \cdot |B|,$$

ולכן

$$|A|^4 = 8 \cdot |B| = 8 \cdot 2 = 16,$$

ונקבל $|A| = \pm 2$.

דרך ב:

$$\begin{aligned} A \cdot (2A^{-1}B) &= A \cdot A^3 \Rightarrow A^4 = (A \cdot 2A^{-1})B \Rightarrow A^4 = (2 \cdot AA^{-1})B \Rightarrow A^4 = (2 \cdot I)B \\ A^4 &= 2B \Rightarrow |A^4| = |2B| \Rightarrow |A|^4 = 2^3 \cdot |B| \Rightarrow |A|^4 = 8 \cdot 2 = 16. \end{aligned}$$

■

דוגמא.

תהייה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. הוכח או הפרך:

$$|A + B| = |A| + |B|.$$

פיתרון. הטענה איננה נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$|A| = 0, \quad |B| = 0,$$

$$|A + B| = |I| = 1,$$

$$|A + B| \neq |A| + |B|.$$

■

דוגמא.

תהייה $A, B \in M_5(\mathbb{R})$ הפיכות, כך שמתקיים $A + 3B^t = 0$. חשבו את $|A^{-1}B^2(B^t)^{-1}|$.

פיתרון. נשים לב שלא נכון לכתוב

$$A + 3B^t = 0 \Rightarrow |A + 3B^t| = |0| \Rightarrow |A| + |3B^t| = 0.$$

נחשב

$$|A^{-1}B^2(B^t)^{-1}| = |A^{-1}| \cdot |B^2| \cdot |(B^t)^{-1}| = \frac{1}{|A|} \cdot |B|^2 \cdot \frac{1}{|B^t|} = \frac{1}{|A|} \cdot |B|^2 \cdot \frac{1}{|B|} = \frac{|B|}{|A|}.$$

לפי הנתון $A + 3B^t = 0$ ולכן

$$A = -3B^t \Rightarrow |A| = |-3B^t| \Rightarrow |A| = (-3)^5 |B^t| \Rightarrow |A| = -243|B| \Rightarrow \frac{|B|}{|A|} = -\frac{1}{243}.$$

■

דוגמא.

תהייה $X, Y \in M_3(\mathbb{R})$ המקיימות

$$XY = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(א) האם X הפיכה?

(ב) עבור $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ מצאו את Y .

פיתרון. (א) נסמן $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. לפי הנתון $XY = A$. נשים לב ש- $|A| = -6$ ולפי משפט המכפלה,

$$|A| = |XY| = |X| \cdot |Y|.$$

בפרט, $|X| \neq 0$, ולכן X הפיכה.

(ב) לפי הנתון $XY = A$. הוכחנו ש- X הפיכה, נכפול את שני האגפים משמאל בהופכית של X . נקבל $Y = X^{-1}A$. לאחר חישוב, נקבל ש-

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

לכן

$$Y = X^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ \frac{2}{3} & -2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

■