עבודה עצמית 10 אינטגרלים כפולים

שאלה 1 באינטגרל $\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy$

שרטטו את התחום, החליפו את סדר האינטגרציה וחשבו את האינטגרל כאשר:

א) $f(x,y)=x$ ותחום D חסום ע"י הקווים $y=x$, $y=2x$, $x=4$, $x=6$.

ב) $f(x,y)=x$ תחום D חסום ע"י הקווים $y=x$, $x=0$, $x^2+y^2=1$, $x\geq 0$.

ג) $f(x,y)=y$ תחום D חסום ע"י הקווים $y=x$, $y=4-x$, $x=0$.

ד) $f(x,y)=1$ תחום D חסום ע"י הקווים $y=-\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x}$, $x=4$.

ה) $f(x,y)=x+y$ תחום D הוא המשולש בעל קדקודים $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$.

ו) $f(x,y)=x-y$ תחום D הוא המשולש בעל קדקודים $O(0,0)$, $A(2,1)$, $B(-2,1)$.

ז) $f(x,y)=x^2$ תחום D הוא טרפז בעל קדקודים $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,2)$, $C(0,1)$.

שאלה 2 החלף את סדר האינטגרציה באינטגרלים הבאים:

א) $\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)\,dy$

ב) $\int_{-6}^2 dx\int_{x^2/4-1}^{2-x} f(x,y)\,dy$

ג) $\int_0^1 dx\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy$

ד) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy$

ה) $\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$

ו) $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy$

שאלה 3 חשבו את האינטגרלים הבאים:

א) $\int_0^1 dx\int_0^1 (x+y)dy$

ב) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} xy^2\,dy$

ג) $\int_0^2 dx \int_0^x 3\,dy$

ד) $\iint\limits_D x\sqrt{y}\,dx\,dy$ כאשר התחום D הוא הריבוע $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

ה) $\iint\limits_D y\,dx\,dy$ כאשר התחום D חסום ע"י הקווים $y^2 = x$, $y = x - 2$.

ו) $\iint\limits_D (x - y)\,dx\,dy$ כאשר התחום D חסום ע"י הקווים $x + y = 2$, $y = x$, $y = 0$.

שאלה 4 ציירו את תחום האינטגרציה וחשב את האינטגרל על ידי מעבר לקואורדינטות קוטביות:

א) $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$

ב) $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \left(x^2+y^2\right)^2\,dx\,dy$

ג) $\iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$ כאשר התחום D הוא רבע העיגול $x^2 + y^2 \le 1$ הנמצא ברביע הראשון.

ד) $\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

ה) $\iint\limits_{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

שאלה 5 חשב את נפח הגוף החסום על ידי המשטחים הנתונים. צייר את הגוף במערכת הצירים xyz:

א) $y = 0$, $x = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

ב) $y = 0$, $x = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$, $z = x + y$.

ג) $y = 0$, $x = 0$, $z = 0$, $y = 2$, $x = 2$, $z = x^2 + y^2$.

ד) $z = 0$, $y = 1$, $y = x^2$, $z = x^2 + y^2$.

ה) $z = x^2 + y^2$,$x^2 + y^2 = 1$,$z = 0$.

שאלה 6 מצא את המסה של הגוף המישורי בעל צפיפות נתונה $\rho(x, y)$ וחסום על ידי הקווים הנתונים.

א) $\rho(x, y) = 1$,$x^2 + y^2 = 9$,$x^2 + y^2 = 1$.

ב) $\rho(x, y) = x$,$x \geq 0$,$x^2 + y^2 = 4$,$x^2 + y^2 = 1$.

ג) $\rho(x, y) = x^2 + y^2$,$x = \sqrt{3}y$,$y = \sqrt{3}x$,$x^2 + y^2 = 9$,$x^2 + y^2 = 1$.

שאלה 7

סרטטו את תחום האינטגרציה, החליפו את סדר האינטגרציה וחשבו:

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt{-x}}^{1} \cos\left(\pi y^3\right) dy + \int_{0}^{1} dx \int_{\sqrt{x}}^{1} \cos\left(\pi y^3\right) dy$$

שאלה 8 חשבו את נפח הגוף החסום על ידי המשטחים

$$x = 0,\ y = 0\ y + x = 2,\ z = 0\ z = 8 - 2x^2$$

וסרטטו אותו במערכת הצירים xyz.

שאלה 9 **שינוי סדר של אינטגרלים** חשב את האינטגרל

$$I = \int_{2}^{18} dx\ \int_{\sqrt{x-2}}^{4} dy\ e^{-5(x-2)/y}$$

שאלה 10

ציירו את תחום האינטגרציה וחשבו

$$\iint\limits_{D} xy^2\, dx\, dy$$

כאשר התחום D חסום ע"י הקווים $y = x$,$y = x^2$.

שאלה 11 חשבו את המסה של חלק העיגול $x^2 + y^2 \leq 9$ הנמצא בתוך הרביע הראשון בתנאי שצפיפות החומר שממנו עשוי העיגול משתנה על פי החוק $\rho = x^2$.

פתרונות

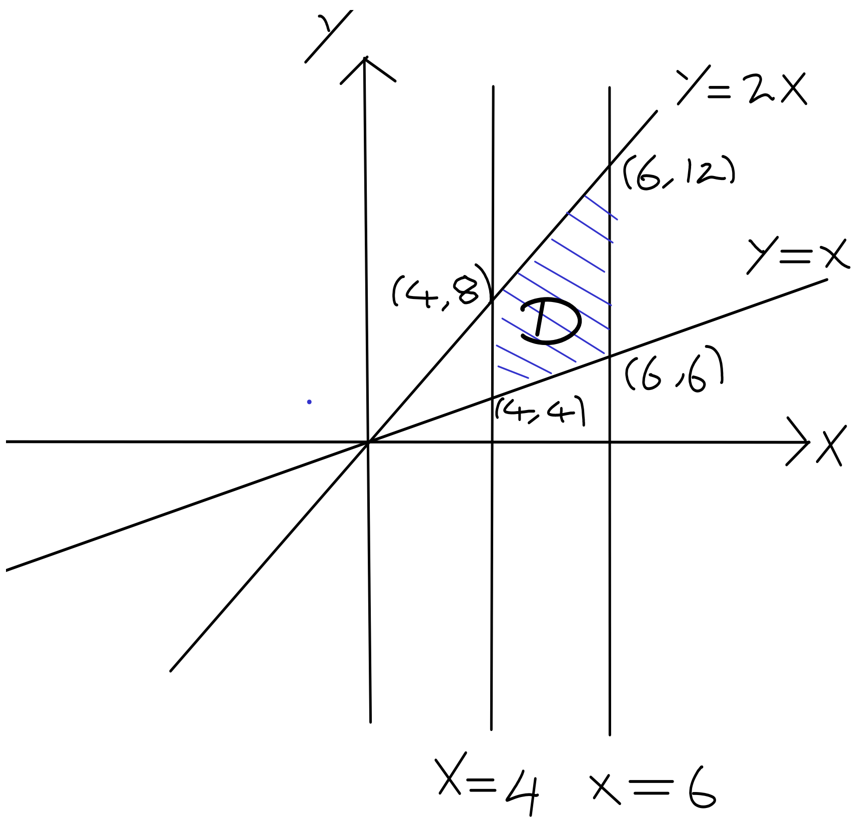
שאלה 1

א)

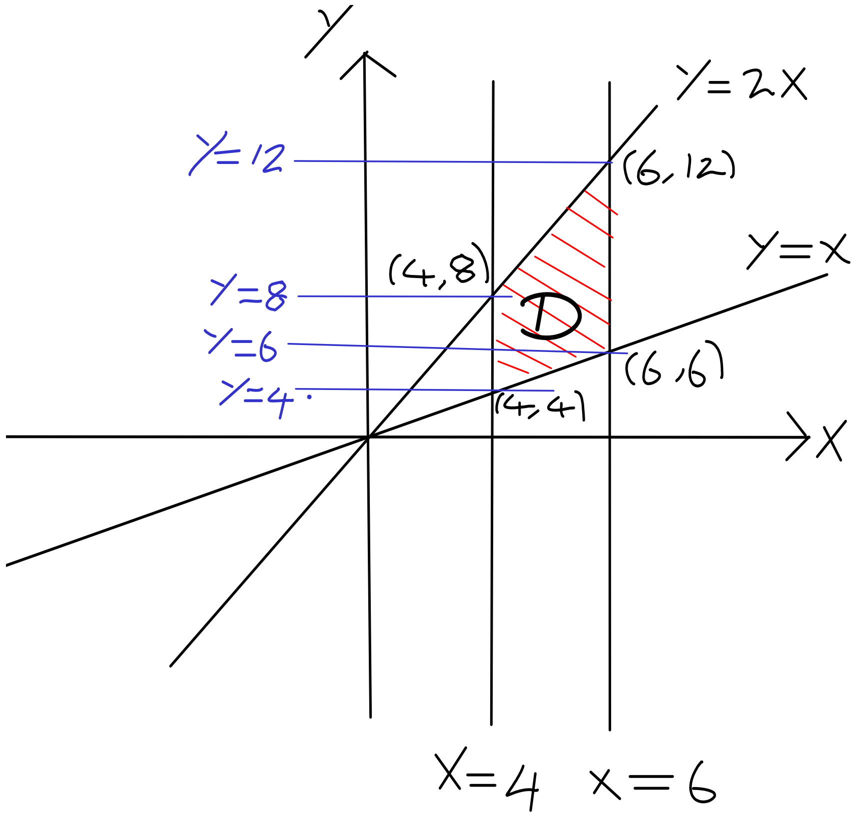
שלב 1.

$$D = \{4 \le x \le 6, x \le y \le 2x\}$$

שלב 2.



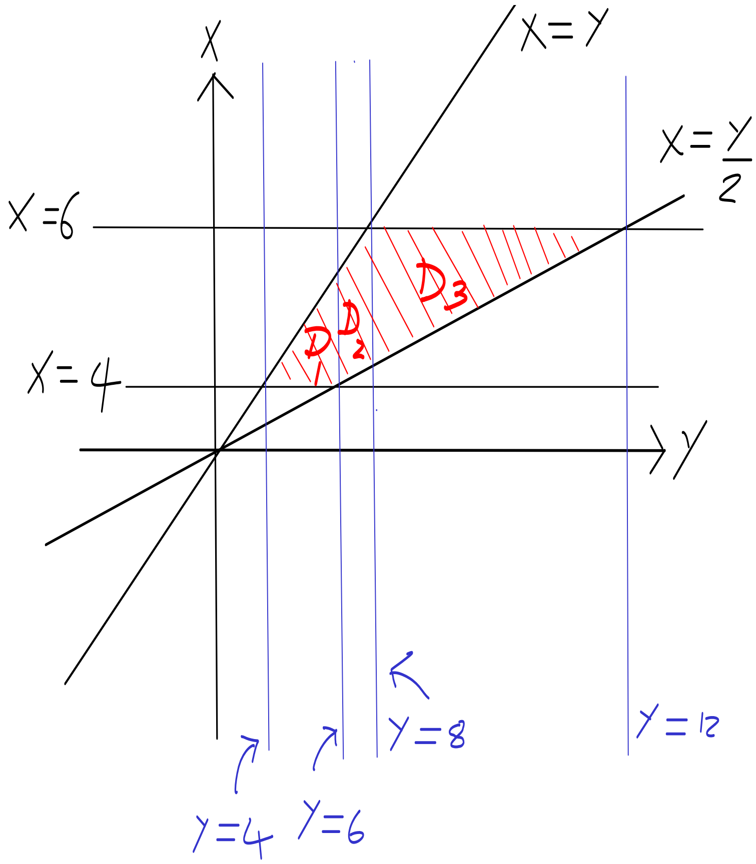
שלב 3.



<u>שלב 4.</u>

$$y = x \quad \rightarrow \quad x = y \ , \qquad y = 2x \quad \rightarrow \quad x = \frac{y}{2} \ .$$

<u>שלב 5.</u>



<u>שלב 6.</u> $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$.

$$D_1 = \{4 \leq y \leq 6, 4 \leq x \leq y\}\ , \qquad D_2 = \{6 \leq y \leq 8, \frac{y}{2} \leq x \leq y\}\ , \qquad D_3 = \{8 \leq y \leq 12, \frac{y}{2} \leq x \leq 6\}\ .$$

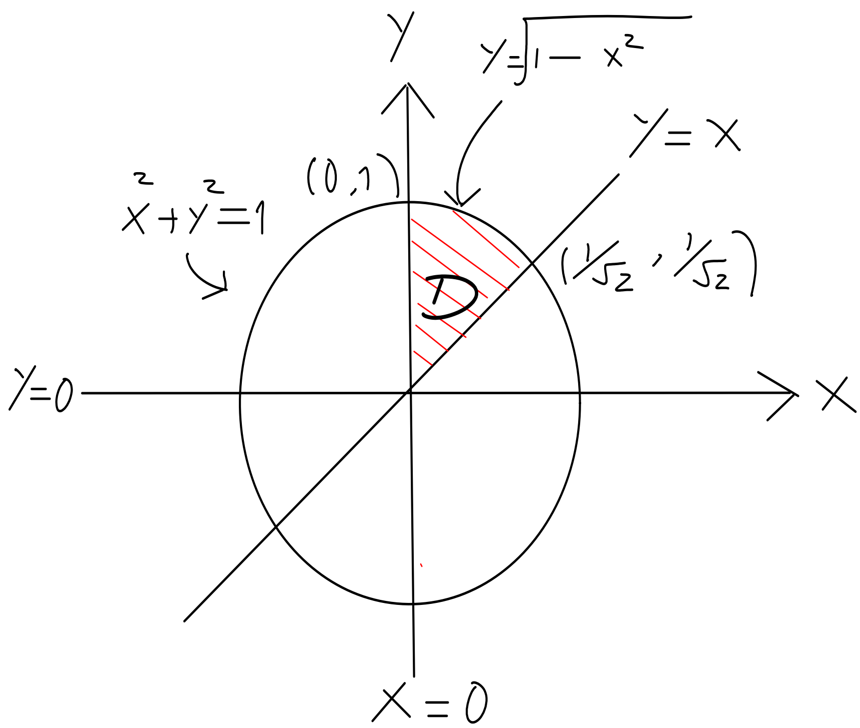
<u>שלב 7.</u>

$$\iint_{D_1} dx\, dy\, x + \iint_{D_2} dx\, dy\, x + \iint_{D_3} dx\, dy\, x = \int_4^6 dy \int_4^y dx\, x + \int_6^8 dy \int_{y/2}^y dx\, x + \int_8^{12} dy \int_{y/2}^6 dx\, x\ .$$

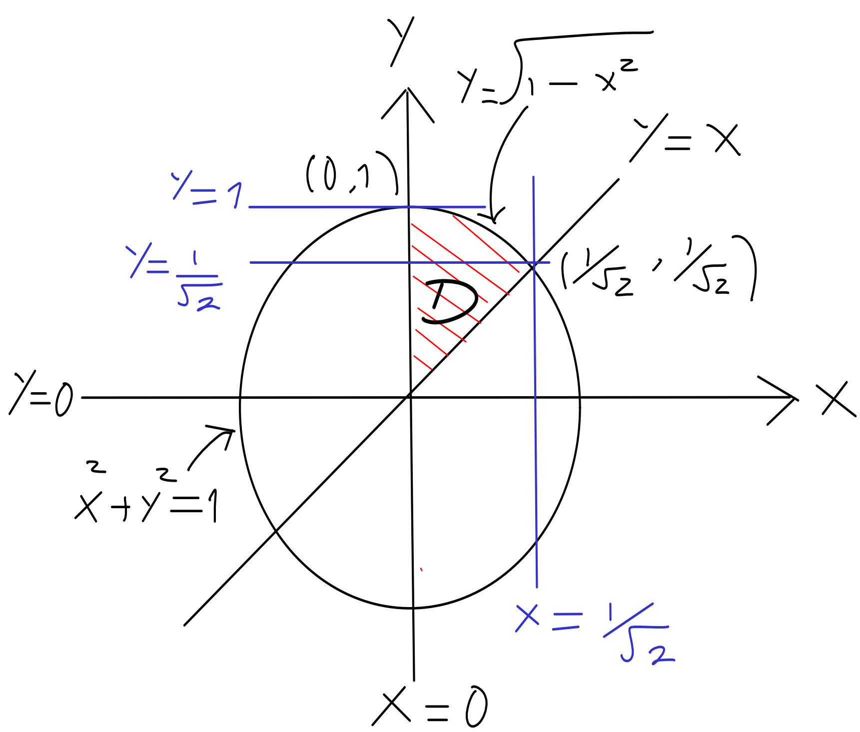
ב) <u>שלב 1.</u>

$$D = \{0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

<u>שלב 2.</u>



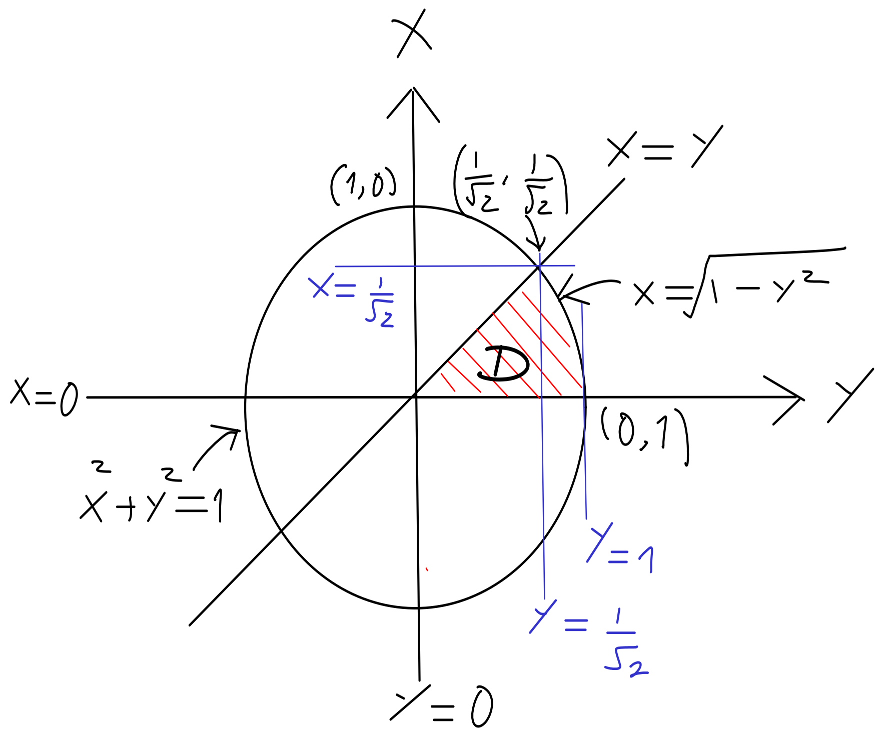
שלב 3.



שלב 4.

$$y=x \quad \rightarrow \quad x=y\ , \qquad y=\sqrt{1-x^2} \quad \rightarrow \quad x=\sqrt{1-y^2}\ .$$

שלב 5.



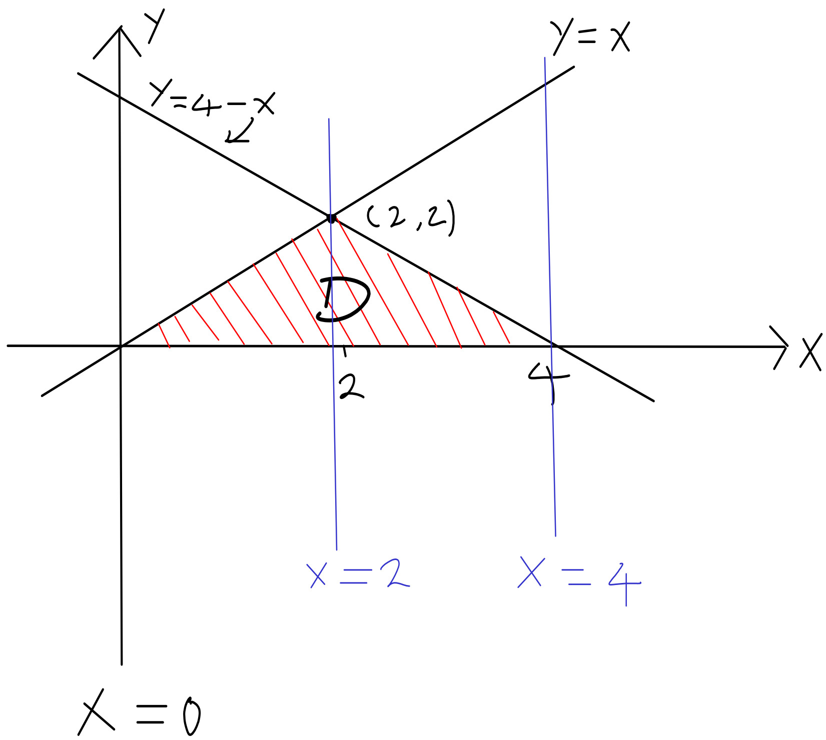
שלב 6. $D = D_1 \cup D_2$.

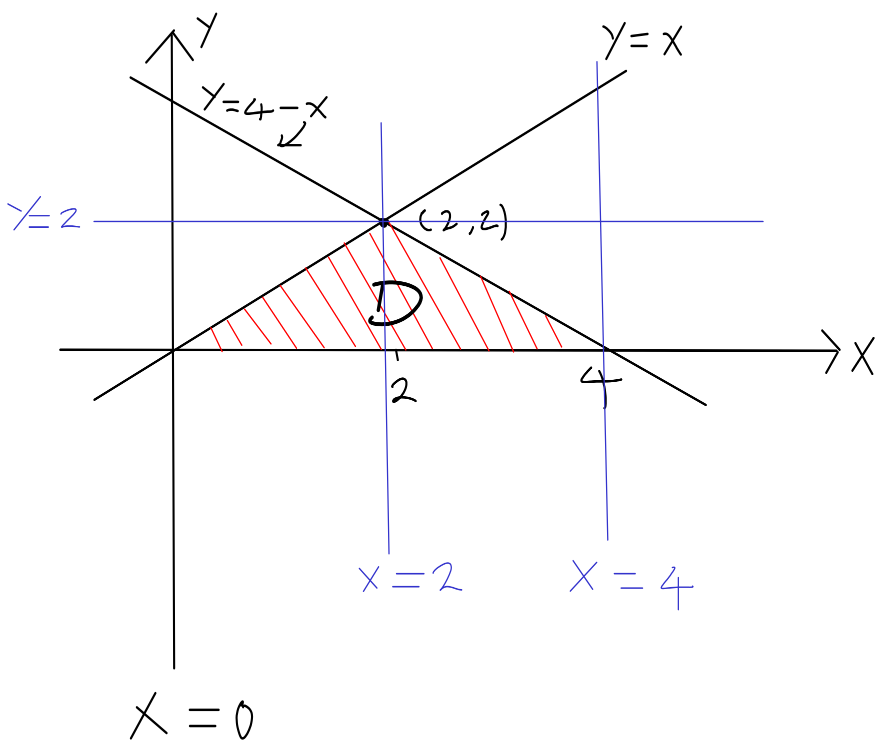
$$D_1 = \{0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \le x \le y\} \ , \qquad D_2 = \{\frac{1}{\sqrt{2}} \le y \le 1, 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}\} \ .$$

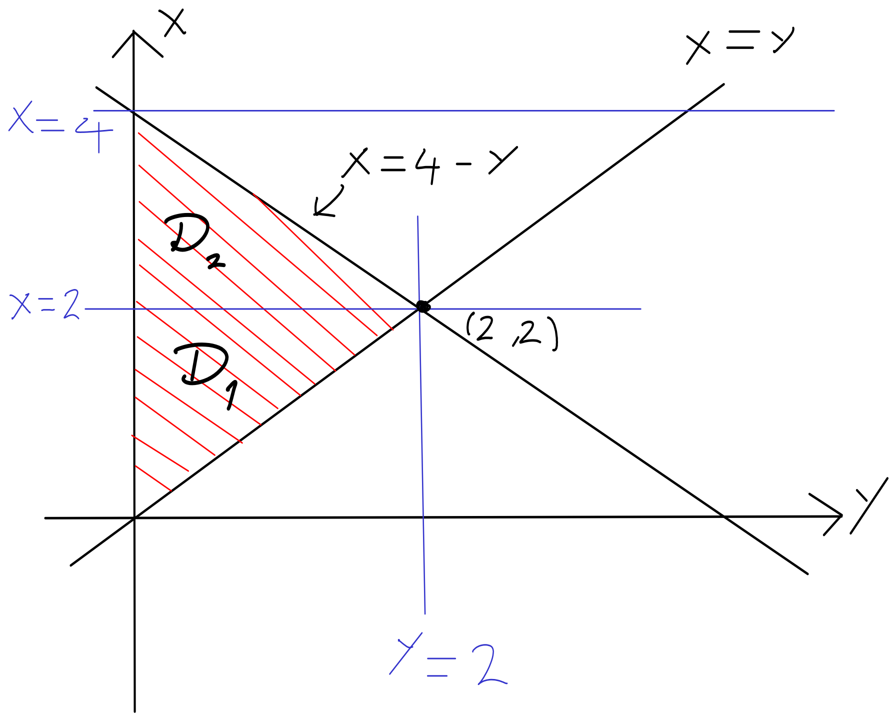
שלב 7.

$$\iint_{D_1} dx\,dy\,x + \iint_{D_2} dx\,dy\,x = \int_0^{1/\sqrt{2}} dy \int_0^y dx\,x + \int_{1/\sqrt{2}}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx\,x \ .$$

ג)


y
y=x
y=4-x
(2,2)
D
x
2
4
x=2
x=4
x=0


y
y=x
y=4-x
y=2
(2,2)
D
x
2
4
x=2
x=4
x=0



$$D = D_1 \cup D_2 \ .$$

$$D_1 = \{0 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 2\} \ , \qquad D_2 = \{0 \leq y \leq 2, 2 \leq x \leq 4 - y\} \ .$$

$$\iint\limits_{D_1} y + \iint\limits_{D_2} y = \int_0^2 dy \int_y^2 dx \, y + \int_0^2 dy \int_2^{4-y} dx \, y$$

ד) $\frac{32}{3}$

ה) $\frac{1}{2}$

ו) $\frac{-2}{3}$

ז) $\frac{1}{4}$.

שאלה 2

א)

$$\int_0^2 dx \int_x^{2x} dy \, f(x,y) = \int_0^2 dy \int_{y/2}^{y} dx f(x,y) + \int_2^4 dy \int_{y/2}^{2} dx f(x,y)$$

ב)

$$\int_{-6}^{2} dx \int_{x^2/4-1}^{2-x} dy\, f(x,y) = \int_{-1}^{0} dy \int_{-2\sqrt{y}+1}^{2\sqrt{y}+1} dx f(x,y) + \int_{0}^{8} dy \int_{-2\sqrt{y}+1}^{2-y} dx f(x,y)$$

ג)

$$\int_{0}^{2} dx \int_{x^3}^{x^2} dy\, f(x,y) = \int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} dx f(x,y)$$

ד)

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} dy\, f(x,y) = \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx f(x,y) + \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} dx f(x,y)$$

ה)

$$\int_{1}^{2} dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} dy\, f(x,y) = \int_{0}^{1} dy \int_{2-y}^{\sqrt{1-y^2}+1} dx f(x,y)$$

ו)

$$\int_{1}^{1} dx \int_{0}^{\ln x} dy\, f(x,y) = \int_{0}^{1} dy \int_{e^y}^{e} dx f(x,y)$$

שאלה 3

א) 1

ב) $\frac{1}{40}$

ג) 6

ד) $\frac{1}{3}$

ה) $\frac{9}{4}$

ו) $\frac{2}{3}$

שאלה 4

א) $\pi(e-1)$

ב) $\frac{64\pi}{3}$

ג) $\frac{2\sqrt{2}-1}{6}\cdot\pi$

ד) $\frac{2|a|^3\pi}{3}$

ה) -3π

<u>שאלה 5</u>

א) $\frac{1}{6}$

ב) $\frac{1}{3}$

ג) $\frac{32}{3}$

ד) $\frac{88}{105}$

ה) $\frac{\pi}{2}$

<u>שאלה 6</u>

א) 8π

ב) $\frac{14}{3}$

ג) $\frac{10\pi}{3}$

<u>שאלה 7</u>

נרשום

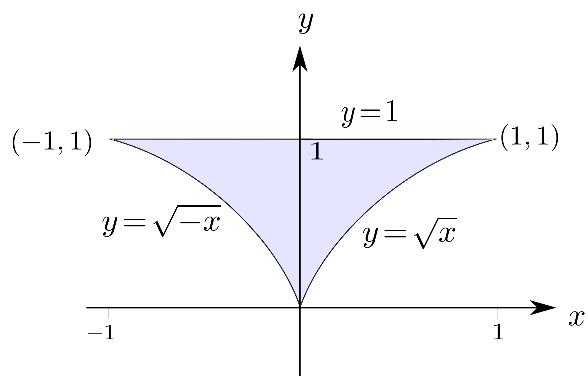
$$I=\int_{-1}^{0}dx\int_{\sqrt{-x}}^{1}\cos\left(\pi y^3\right)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{\sqrt{x}}^{1}\cos\left(\pi y^3\right)dy=\iint_D\cos\left(\pi y^3\right)dxdy$$

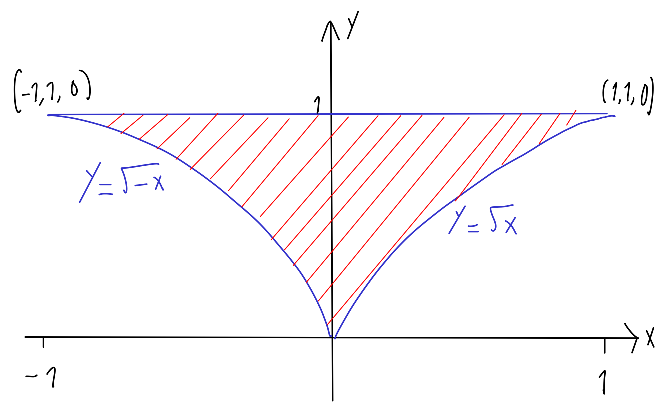
כאשר התחום D נתון על ידי

$$D=\left\{(x,y)\mid\ \begin{array}{c}-1\le x\le 0\\ \sqrt{-x}\le y\le 1\end{array}\right\}\cup\left\{(x,y)\mid\ \begin{array}{c}0\le x\le 1\\ \sqrt{x}\le y\le 1\end{array}\right\}=\left\{(x,y)\mid\ \begin{array}{c}0\le y\le 1\\ -y^2\le x\le y^2\end{array}\right\}$$

ולכן,

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D \cos\left(\pi y^3\right) dxdy \\
&= \int_0^1 dy \int_{-y^2}^{y^2} \cos\left(\pi y^3\right) dx \\
&= \int_0^1 2y^2 \cos\left(\pi y^3\right) dy \\
&= \left(\frac{2}{3\pi} \sin\left(\pi y^3\right)\right|_{y=0}^{1} = 0
\end{aligned}
$$



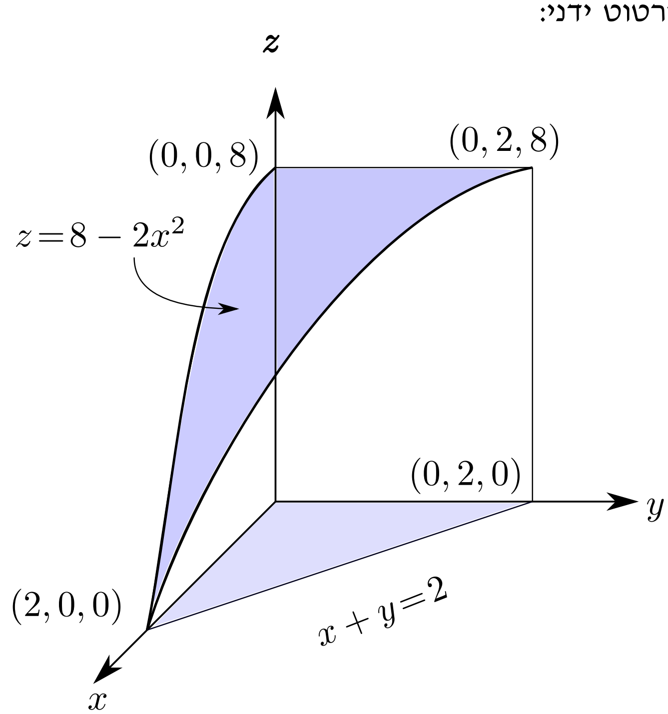


שאלה 8

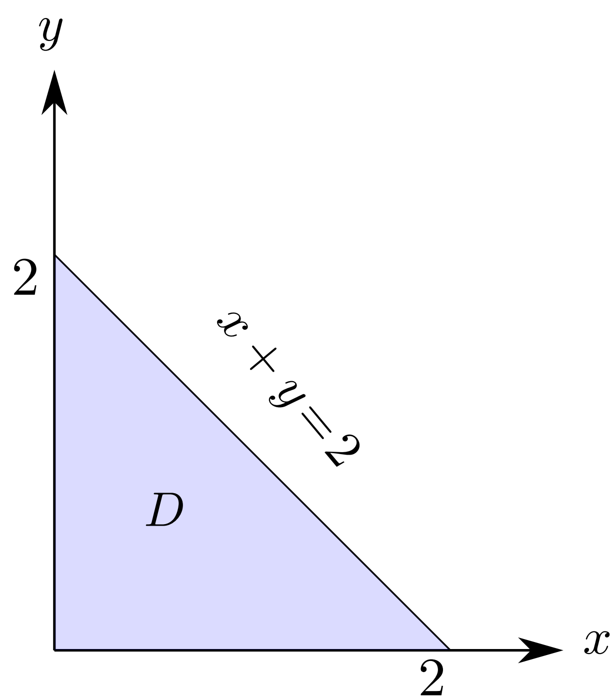
הגוף בשאלה הוא הנפח החסום מתחת לגרף הפונקציה $z = 8 - 2x^2$ מעלה המשולש במישור שקודקודיו הם $(2,0)\,,(0,2)\,,(0,0)$. לכן, הנפח נתון על ידי

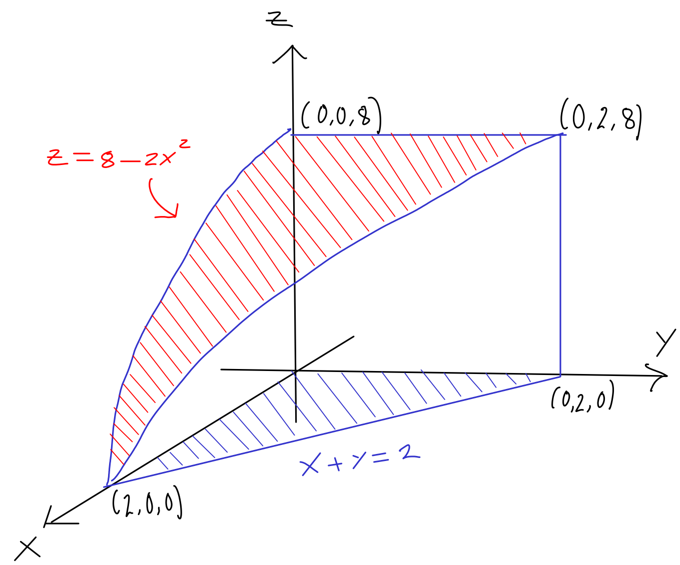
$$\begin{aligned} V &= \iint_D \left(8 - 2x^2\right) dxdy \\ &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \left(8 - 2x^2\right) dy \\ &= \int_0^2 \left(8 - 2x^2\right)(2 - x)\, dx \\ &= \int_0^2 \left(16 - 8x - 4x^2 + 2x^3\right) dx \\ &= \left(16x - 4x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4\right|_{x=0}^{2} = \frac{40}{3} \end{aligned}$$

סרטוט ידני:



סרטוט ממוחשב:

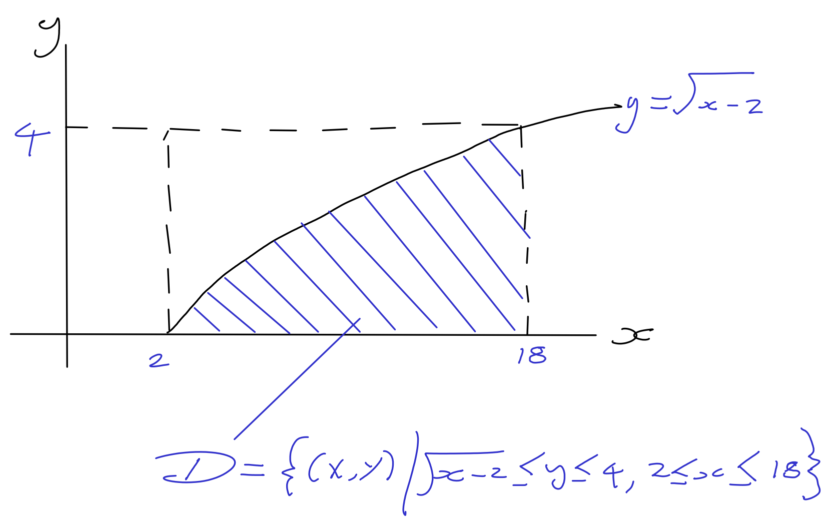




שאלה 9 התחום של האינטגרל הוא

$$D = \left\{(x,y) \mid 2 \leq x \leq 18 \;, \sqrt{x-2} \leq y \leq 4\right\}$$

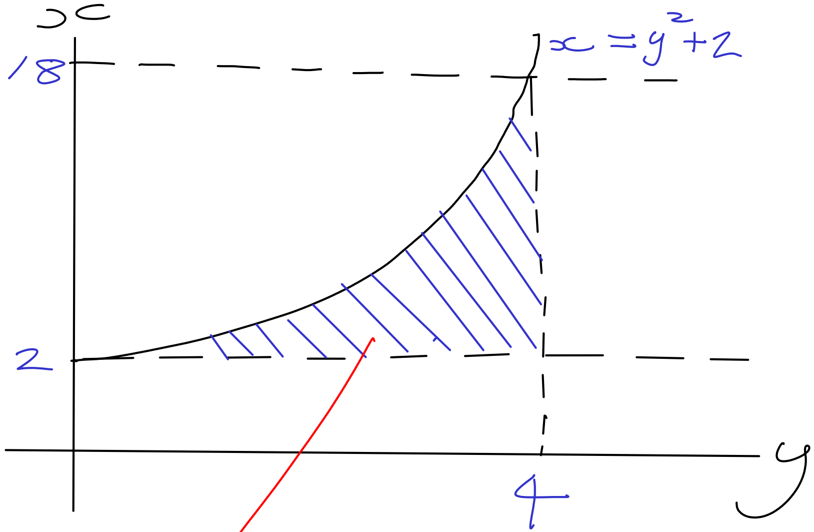
כמתואר בתרשים.



ניתן לשנות את הסדר של האינטגרלים של x ו- y כך שהתחום הוא

$$D = \left\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 4 \;,\; 2 \leq x \leq y^2+2\right\}$$

כמתואר בתרשים



$$D=\{(x,y) \mid 0\le y\le 4,\ 2\le x\le y^2+2\}$$

$$I=\int_0^4 dy\ \int_2^{y^2+2} dx\ e^{-5(x-2)/y}$$

$$=\int_0^4 dy\ \left[-\frac{y}{5}\cdot e^{-5(x-2)/y}\right]_2^{y^2+2}$$

$$=-\frac{1}{5}\int_0^4 dy\ \left[y\cdot e^{-5(x-2)/y}\right]_2^{y^2+2}$$

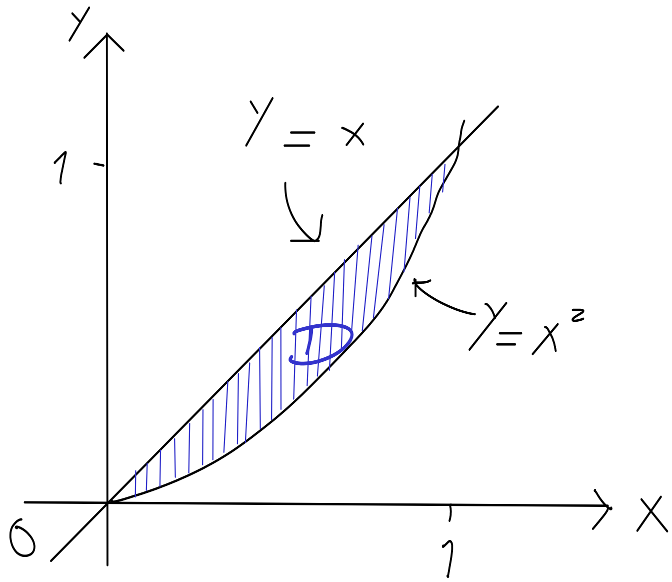
$$=-\frac{1}{5}\int_0^4 dy\ \left(y\cdot e^{-5(y^2+2-2)/y}-y\cdot e^{-5(0)/y}\right)$$

$$=-\frac{1}{5}\int_0^4 dy\ \left(ye^{-5y}-y\right)$$

$$=-\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{5}ye^{-5y}+\frac{1}{25}e^{-5y}-\frac{y^2}{2}\right]_0^4$$

$$=-\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}e^{-20}+\frac{1}{25}e^{-20}-\frac{4^2}{2}+\frac{1}{25}\right)$$

שאלה 10



0.025

שאלה 11

$.M = \frac{81\pi}{16} \approx 42.41$