

שיעור 3

טרוי פונקציות וטרוי חזקות

3.1 טור חזקות

הגדרה 3.1 טור חזקות

טור חזקות הנם טורים מהצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

כלומר הסכום החלקי הוא פולינום:

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_N x^N.$$

משפט 3.1 רדיוס התכנסות

לכל טור חזקות קיים מספר חיובי R , כלומר $0 \leq R \leq \infty$ כך שהטור מתכנס לכל x בתחום $|x| < R$ ומתבדר לכל x בתחום $|x| > R$.
בפרט:

אם $R = 0$ אז הטור מתכנס רק ב- $x = 0$.

אם $R = \infty$ אז הטור מתבדר לכל x .

המספר הזה R נקרא **רדיוס ההתכנסות** של הטור.

דוגמה 3.1 טור חזקות

מצאו את רדיוס התכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

פתרון:

שים לב הטור הוא טור הנדסי (ראו הגדרה 2.2) בו איבר הראשון הוא $a_1 = x^0 = 1$ ומנת הסדרה היא $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{x^n} = x$. לפי משפט 2.3 (או לפי משפט 2.2) הטור שווה ל-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

הסכום מתכנס אם $|x| < 1$, לכן רדיוס ההתכנסות

$$R = 1.$$

דוגמה 3.2 טור חזקות

מצאו את רדיוס התכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n .$$

פתרון:

בשונה לדוגמה הקודמת, הטור אינו טור הנדסית, בגלל שהיחס $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ אינו קבוע $(n \cdot x)$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^{n+1} x^{n+1}}{(n x)^n} = n \cdot x$. לכל x ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |n^n x^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |n x|^n = \begin{cases} \infty & x \neq 0 , \\ 0 & x = 0 . \end{cases} .$$

לכן רדיוס ההתכנסות הוא

$$R = 0$$

כי הטור מתכנס רק במקרה ש- $x = 0$.

דוגמה 3.3 טור חזקות

מצאו את רדיוס התכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n} .$$

פתרון:

נבדוק התכנסות של הטור ע"י מבחן קושי: (עין משפט 2.8 לעיל)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x^n}{n^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x}{n} \right|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n} \right| = 0 ,$$

ולכן לפי מבחן קושי (ומשפט 2.9 #1) הטור מתכנס לכל x , לפיו הרדיוס ההתכנסות הוא ∞ :

$$R = \infty .$$

משפט 3.2 נוסחת דלמבר לרדיוס התכנסות

רדיוס התכנסות של טור חזקות ניתן ע"י הנוסחה

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

אם הגבול קיים.

משפט 3.3 נוסחת קושי לרדיוס התכנסות

רדיוס התכנסות של טור חזקות ניתן ע"י הנוסחה

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_n} \right)^{1/n}$$

אם הגבול קיים.

דוגמה 3.4

מצאו את תחום התכנסות של הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$$

פתרון:

נחשב את הרדיוס התכנסות בעזרת נוסחת קושי:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n \cdot \ln n|} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot \ln x)^{1/x}$$

נגדיר $y = (x \ln x)^{1/x}$ אז

$$\ln y = \ln \left[(x \ln x)^{1/x} \right] = \frac{1}{x} \ln (x \ln x)$$

- ו

$$y = e^{\ln y} = e^{\frac{1}{x} \ln (x \ln x)} .$$

מכאן

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln (x \ln x)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln (x \ln x)}{x} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \\ &\stackrel{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x \ln x} (\ln x + 1)}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + 1}{x \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln x} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

לכן

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = e^0 = 1 .$$

ולכן

$$\frac{1}{R} = 1 , \quad \Rightarrow \quad R = 1 .$$

נבדוק התכנסות ב- $x = 1$:
לפי מבחן האינטגרל $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ מתכנס אם ורק אם $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ מתכנס.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t} dt = [\ln t]_{\ln 2}^{\infty} = \infty$$

לכן הטור מתבדר ב $x = 1$.

נבדוק התכנסות ב- $x = -1$:

ב- $x = -1$ נקבל טור מחליף סימן מצורה

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n , \quad a_n = \frac{1}{n \ln n} .$$

נבדוק התכנסות ע"י מבחן לייבניץ: $a_n \downarrow$ מונוטונית. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ו- $a_n > 0$ לכל n לכן הטור $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln n}$ מתכנס בתנאי (כיוון ש $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ מתבדר). תשובה סופית: תחום התכנסות הוא $[-1, 1)$.

דוגמה 3.5

מצאו את תחום התכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^2}{n^5 5^n} x^n$$

פתרון:

נחשב את הרדיוס התכנסות בעזרת נוסחת דלמבר. $a_n = \frac{(n+2)^2}{n^5 5^n}$.

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{(n+2)^2}{n^5 5^n} \right)}{\left(\frac{(n+3)^2}{(n+1)^5 5^{n+1}} \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^2 \left(\frac{n+1}{n} \right)^5 \frac{5^{n+1}}{5^n} \\ &= 5 \end{aligned}$$

נבדוק התכנסות בקצוות הקטע: ב $x = 5$ נקבל טור חיובי מצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^2}{n^5} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad a_n = \frac{(n+2)^2}{n^5}.$$

נשתמש במשפט ההשוואה הגבולי (משפט 2.6):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+2)^2}{n^5}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n} \right)^2 = 1$$

לכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^2}{n^5}$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנסים ומתבדרים ביחד. לכן, כיוון ש $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס, (ראו 2.8 דוגמה למעלה) אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^2}{n^5}$ מתכנס. לכן הטור חזקות מתכנס ב- $x = 5$.

נבדוק התכנסות בקצוות הקטע: ב $x = -5$.

ב $x = -5$ נקבל טור מחליף סימן מצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+2)^2}{n^5} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad a_n = \frac{(n+2)^2}{n^5}.$$

a_n חיובי, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, לכן לפי מבחן לייבניץ הטור מתכנס בהחלט. לכן הטור חזקות מתכנס ב- $x = -5$. בסה"כ התחום התכנסות של הטור הוא $[-5, 5]$.

דוגמה 3.6

מצאו את תחום התכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n(2n^2+3)}$$

פתרון:

נציב $z = x - 2$ ונרשום את הטור בצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{10^n(2n^2+3)}.$$

נחשב את הרדיוס התכנסות בעזרת נוסחת קושי:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10^n(2n^2+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 10 \cdot \sqrt[n]{(2n^2+3)} = 10 \cdot 1 = 10.$$

נבדוק התכנסות ב- $x - 2 = 10$:

ב $x - 2 = 10$, נקלל הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n^2+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{1}{(2n^2+3)}.$$

לפי מבחן דלמבר הטור המתקבל מתכנס. מאותה מידה, ב $x - 2 = -10$, נקלל הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n^2+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad a_n = \frac{1}{(2n^2+3)}.$$

לפי מבחן לייבניץ הטור המתקבל מתכנס בהחלט. לכן תחום התכנסות של הטור חזקות הוא $x - 2 \in [-10, 10]$ כלומר $x \in [-8, 12]$.

דוגמה 3.7 טור חזקות

מצאו את רדיוס התכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

פתרון:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_n = \frac{1}{n}.$$

נבדוק רדיוס התכנסות ע"י נוסחת דלמבר:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$$

נבדוק התכנסות בקצוות.

ב $x = 1$ נקבל טור חיובי מצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

הטור הזה מתבדר (ראו דוגמה 2.9).

ב $x = -1$ נקבל טור חיובי מצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

הטור הזה מתכנס בתנאי (ראו דוגמה 2.24). לכן תחום התכנסות של הטור הוא

$$x \in [-1, 1).$$

דוגמה 3.8

מצאו את רדיוס התכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n$$

פתרון:

$a_n = (2)^n$. לפי מבחן קושי (ראו משפט 2.8):

$$\frac{1}{R} = \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{(2)^n} = 2$$

לכן $R = \frac{1}{2}$. נבדוק התכנסות בקצוות. ב $x = \frac{1}{2}$ נקבל טור מצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1)^n$$

אשר מתבדר. ב $x = -\frac{1}{2}$ נקבל טור מצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

שלא מתכנס. לכן הטור מתכנס בתחום

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

3.2 טורי פונקציות

הגדרה 3.2 טור פונקציות

תהיה סדרת פונקציות. הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

נקרא **טור פונקציות** או **טור פונקציונלי**.

אוסף הערכים של x שעבורם הטור מתכנס נקרא **תחום התכנסות של הטור**.
הפונקציה

$$S(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} (f_1(x) + \dots + f_N(x))$$

נקרא **סכום הטור** והיא מוגדרת רק עבור ערכי x מתחום ההתכנסות של הטור.

3.9 דוגמה

הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

מתכנס אם ורק אם $-1 < x < 1$. לכן תחום התכנסות של הטור הוא $(-1, 1)$. נקבל

$$S_N(x) = 1 + x + \dots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}$$

$$S(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

השארית הוא

$$R(x) = S(x) - S_N(x) = x^{N+1} + x^{N+2} + \dots = \frac{x^{N+1}}{1 - x}.$$

3.10 דוגמה

הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^n} + \dots$$

מתכנס אם ורק אם $-1 < \left| \frac{1}{x} \right| < 1$, כלומר $|x| > 1$. לכן תחום התכנסות של הטור הוא $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. ומקבלים

$$S(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x}{x - 1}.$$

3.11 דוגמה

תחום התכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

הוא, לפי מבחן האינטגרל, $(1, \infty)$ זוהי דוגמה של דיריכלה והטור שווה לפונקציה הנקראת פונקציית זיטה של רימאן. היא אינה פונקציה אלמנטרית ואין לה נוסחה סגורה.

3.3 פעולות עם טורי חזקות - גזירה ואינטגרציה

משפט 3.4 אינטגרציה וגזירה איבר איבר

יהיה $0 < R \leq \infty$ רדיוס התכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. אזי לכל $|x| < R$ מתקיים

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \end{aligned}$$

(2)

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n + C$$

הטור המתקבל לאחר גזירה או אינטגרציה הם בעלי אותו רדיוס התכנסות R .

דוגמה 3.12

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{מתכנס ב-} (-1, 1).$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

מתכנס ב- $(-1, 1)$. (התחום לא השתנה).

דוגמה 3.13

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \text{מתכנס ב-} (-1, 1).$$

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

מתכנס ב- $[-1, 1]$. (התחום השתנה).

3.4 טור טיילור ומקלורן

הגדרה 3.3 טור טיילור

בהינתן פונקציה $f(x)$, גזירה אינסוף פעמים בסביבה של $x = a$, נגדיר **טור טיילור** שלה סביב $x = a$

$$T_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots$$

זהו טור חזקות לפי חזקות של $(x-a)$.
טור טיילור הוא טור שסכומים החלקיים הם פולינומי טיילור.

הגדרה 3.4 טור מקלורן

במקרה $a = 0$ נקבל את **טור מקלורן** של $f(x)$:

$$T_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(a) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

דוגמה 3.14 טורי מקלורן של פונקציות אלמנטריות

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \quad -1 < x < 1,$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots \quad -1 < x < 1,$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots \quad -1 < x < 1,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad -\infty < x < \infty,$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \dots \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad -\infty < x < \infty,$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad -1 < x < 1,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \dots \quad -1 < x \leq 1,$$

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

משפט 3.5 התכנסות של טור טיילור

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה אינסוף פעמים בסביבת הנקודה a . אם קיים $M > 0$ כך שלכל $n \geq 0$ ולכל $x \in (a - \delta, a + \delta)$ מתקיים

$$|f^{(n)}(a)| \leq M$$

אז בקטע $(a - \delta, a + \delta)$ הטרור טיילור של $f(x)$ מתכנס ומתקיים

משפט 3.6 קיום טור טיילור של פונקציה

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n, \quad |x - a| < \delta.$$