היחידה למתמטיקה

תשפ"ג

חדו"א 2

מועד א' טור א'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר, ד"ר אבנר סגל

תשפ"ג סמסטר ב'

השאלון מכיל עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לענות על שאלות 1-4.

==

שאלה 1 **(25 נקודות)** הסדרה a_n נתונה על ידי נוסחת הנסיגה הבאה

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \ , \qquad a_1 = 2 \ .$$

א) (10 נק') הוכיחו כי לכל n מתקיים $a_n \geq 1$.
רמז: לכל $x, y \geq 0$ מתקיים כי $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

ב) (10 נק') הוכיחו כי הסדרה a_n מונוטונית יורדת.

ג) (5 נק') הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת וחשבו את גבולה.

שאלה 2 **(25 נקודות)**

א) (10 נק') הוכיחו או הפריכו באמצעות דוגמא נגדית את הטענה הבאה:
אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים מתכנסים, אז
$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n)$ טור מתכנס.

ב) (15 נק') מצאו את תחום ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 2^{2n}}$$

וקבעו באילו נקודות בתחום ההתכנסות הוא מתכנס בהחלט.

שאלה 3 **(25 נקודות)**

א) (7 נק') חשבו את שטח המשולש ABC ואת נפח הפירמידה $ABCD$ כאשר

$$A(1,2,3) \ , \ B(4,-1,2) \ , \ C(0,1,1) \ , \ D(-1,1,2) \ .$$

ב) (18 נק') רשמו את משוואת המישור העובר דרך הנקודה $P(1,2,1)$ ומאונך לשני המישורים

$$x+y-z=5 \ , \qquad x+2y-z=3 \ .$$

שאלה 4 **(25 נקודות)** מצאו את ההיטל של הנקודה $P(1,2,1)$ על המישור $x-3y+z=3$, ובנוסף חשבו את המרחק בין הנקודהלמישור ואת השיקוף של P ביחס למישור.

פתרונות

שאלה 1 (25 נקודות)

א) (10 נק') נוכיח את הטענה באינדוקציה.
בסיס: עבור $n=1$ מתקיים

$$a_1 = 2 \geq 1 \ .$$

בסיס: נניח כי $a_n \geq 1$. אם כן, מתקיים (לפי אי-השיוויון ברמז) כי

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \frac{1}{a_n}} = 1$$

ב) (10 נק') מכיוון ש- $a_n \geq 1$ לכל n, מתקיים כי

$$\frac{1}{a_n} \leq 1 \leq a_n \quad \Rightarrow \quad a_n + \frac{1}{a_n} \leq 2a_n \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \leq a_n$$

כנדרש.

ג) (5 נק') מהסעיפים הקודמים, a_n סדרה מונוטונית יורדת ומתקיים כי $1 \leq a_n \leq 2$, לכל n. כלומר, הסדרה חסומהומונוטונית ולכן מתכנסת. נסמן

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

ומכאן שמתקיים

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right)$$

כלומר,

$$2L^2 = L^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad L^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad L = \pm 1 \ .$$

מכיוון שהסדרה a_n היא סדרה חיובית, הגבול שלה הוא בהכרח אי-שלילי. מכאן $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

שאלה 2 (25 נקודות)

א) (10 נק') הטענה אינה נכונה, כדוגמא נגדית, נתבונן בטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ .$$

כלומר, נבחר $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. הטור הזה מתכנס על פי מבחן לייבניץ (ולכן מתכנס) שכן הסדרה $\frac{1}{\sqrt{n}}$ היאסדרה חיובית יורדת כך ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. אך מצד שני, הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ .$$

הואהטור ההרמוני שהוא, כידוע, טור מתבדר.

ב) (15 נק') תחילה, נציב $z = x - 2$ ונקבל את טור החזקות

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2 2^{2n}}$$

ונחשבאת רדיוס ההתכנסות של טור זה באמצעות נוסחת קושי

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2 2^{2n}} = 4\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2} = 4\ .$$

עלכן, הטור מתכנס (בהחלט) בקטע $-4 < z < 4$. כעת, נבדוק את התכנסות הטור בקצוות הקטע.
אם נציב $z = 4$ בטור נקבל את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^2 2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

וזהוטור חיובי מתכנס.
מצדשני, לאחר הצבה של $z = -4$ נקבל את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n^2 2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

שהוא טור מתכנס בהחלט (על פי המקרה הקודם).
לסיכום,הטור המקורי מתכנס בהחלט בקטע $-4 \le x - 2 \le 4$, שהוא הקטע $-2 \le x \le 6$, ומתבדר מחוצה לו.

שאלה 3 (25 נקודות)

א) (7 נק') שטח המשולש נתון על ידי

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(3,-3,1)\times(-1,-1,-2)\right| = \frac{1}{2}\left|(5,7,-6)\right| = \frac{\sqrt{110}}{2}$$

ונפחהפירמידה נתון על ידי

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{AB}\times\vec{AC}\right)\cdot\vec{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|(5,7,-6)\cdot(-2,-1,-1)\right| = \frac{11}{6}\ .$$

ב) (18 נק') בכדי שהמישור יהיה מאונך לשני המישורים הנתונים, הנורמל שלו צריך להיות מאונך לוקטורים $(1,1,-1)$ ו- $(1,2,-1)$ (הנורמלים של המישורים הנתונים בשאלה). על כן, ניתן לבחור את הנורמל של המישור להיות

$$\vec{n} = (1,1,-1) \times (1,2,-1) = (1,0,1) \ .$$

עלכן, משוואת המישור נתונה על ידי

$$1 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y-2) + 1 \cdot (z-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + z - 2 = 0 \ .$$

שאלה 4 **(25 נקודות)** ההיטל של P על המישור זו נקודת החיתוך בין המישור לבין אנך לו העובר דרך P. וקטור הכיוון של אנך זה הוא הנורמל למישור $\vec{n} = (1,-3,1)$ ולכן האנך דרך P נתון על ידי ההצגה הפרמטרית

$$M(t) = (1+t, 2-3t, 1+t) \ .$$

ונקודתהחיתוך שלו עם המישור נתונה על ידי

$$1 + t - 3(2-3t) + (1+t) = 0 \quad \Rightarrow \quad 11t = 4 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{4}{11} \quad \Rightarrow \quad M\left(t = \frac{4}{11}\right) = \left(\frac{15}{11}, \frac{10}{11}, \frac{15}{11}\right) \ .$$

המרחק של P מהמישור נתון על ידי $|\vec{PQ}|$ או על ידי הנוסחא

$$d = \frac{|1-6+1-3|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{11}} \ .$$

אתהשיקוף ניתן למצוא על ידי הצבה של $2t = \frac{8}{11}$ בהצגה הפרמטרית של הישר

$$M\left(\frac{8}{11}\right) = P_*\left(\frac{19}{11}, \frac{-2}{11}, \frac{19}{11}\right) \ .$$