שיעור 12
העתקות ליניאריות

12.1 תחום, מול-תחום, גרעין ותמונה

הגדרה 12.1 התחום והטווח של פונקציה

תהיינה A ו- B קבוצות. **פונקציה** f מ- A ל- B היא כלל המתאים לכל איבר $a \in A$ איבר יחיד $f(a) \in B$.
נסמן
$$f : A \to B \ .$$
הקבוצה A נקראת התחום של f, הקבוצה B נקראת הטווח של f.

הגדרה 12.2 פונקציה

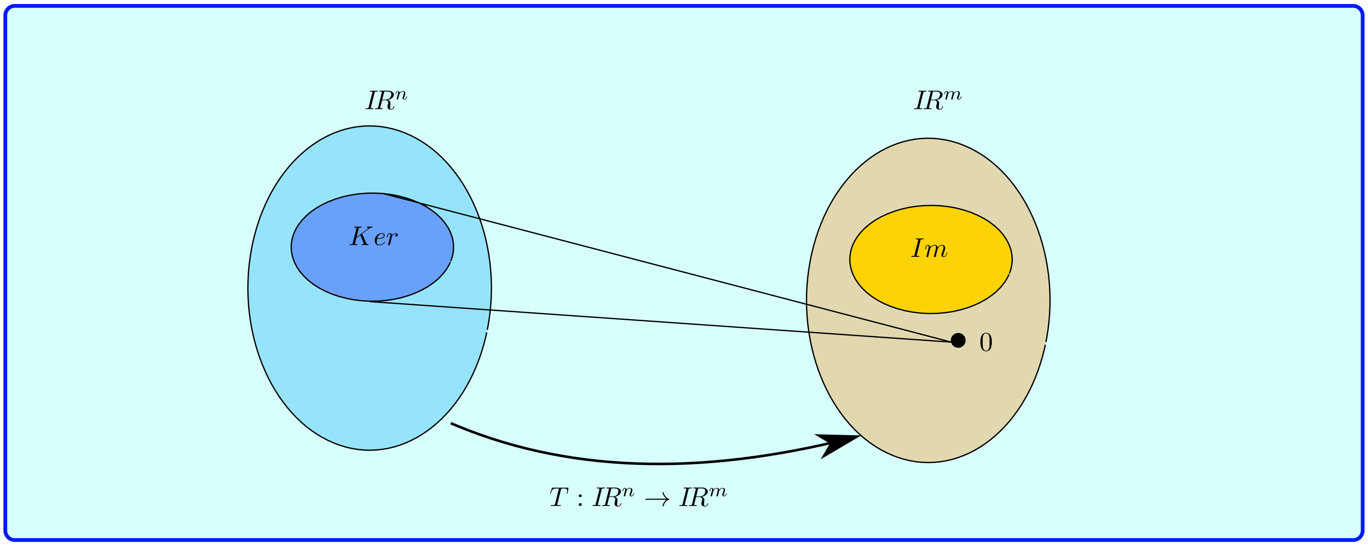
פונקציה $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ מ- $\mathbb{R}^n$ ל- $\mathbb{R}^m$ היא כלל המתאים לכל ווקטור $X \in \mathbb{R}^n$ ווקטור יחיד $T(X) \in \mathbb{R}^m$.

לווקטור $T(X)$ קוראים התמונה של X תחת T.

X יקרא המקור של $T(X)$.

הגדרה 12.3 גרעין ותמונה של פונקציה

תהי
$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ .$$
התמונה של T, מסומנת $\mathrm{Im}(T)$ ומוגדרת
$$\mathrm{Im}(T) = \{T(X) | X \in \mathbb{R}^n\}$$
הגרעין של T מסומן $\mathrm{Ker}(T)$ ומוגדר
$$\mathrm{Ker}(T) = \{X \in \mathbb{R}^n | T(X) = 0\}$$



דוגמה 12.1

נסמן

$$A=\begin{pmatrix}1&-3\\3&5\\-1&7\end{pmatrix}\ ,\qquad u=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\ ,\qquad b=\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}\ ,\qquad c=\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}\ .$$

נגדיר $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ ע"י

$$T(X)=A\cdot X\qquad \forall X\in\mathbb{R}^2\ .$$

(א) מצאו נוסחה ל- T. כלומר, לכל $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ מצאו $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$.

(ב) מצאו את $T(u)$.

(ג) מצאו $X\in\mathbb{R}^2$ כך ש- $T(X)=b$. במילים אחרות, מצאו ווקטור מקור ל- b. האם יש יותר מאחד?

(ד) האם $c\in\text{Im}(T)$? במילים אחרות, האם קיים $X\in\mathbb{R}^2$ כך ש- $T(X)=c$?

(ה) מצאו $T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

(ו) האם $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\in\text{Ker}(T)$?

(ז) האם $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in\text{Ker}(T)$?

(ח) מצאו $\text{Ker}(T)$.

פתרון:

(א) יהי $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}$$

(ב) לפי הנוסחה שמצאנו בסעיף הקודם

$$T(u) = T\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3(-1) \\ 3\cdot 2 + 5(-1) \\ -2 + 7\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

כמובן אפשר גם לכפול את A ב- u:

$$T(u) = A \cdot u = T\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

(ג) דרוש $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ כך ש- $b = T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. נראה זאת בשתי דרכים:

דרך ראשונה:

נדרוש

$$\begin{pmatrix} x_2 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 =& 3 \\ 3x_1 + 5x_2 =& 2 \\ -x_1 + 7x_2 =& -5 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_2]{R_2 \to \frac{1}{14}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 3R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ולכן נמצא כי $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ כך ש-

$$T\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

דרך שניה:

נדרוש

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b$$

נדרג את המטריצה המורחבת הבאה:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{array}\right)$$

(ד) סעיף זה דומה לסעיף הקודם, אבל בסעיף זה אנו לא מתבקשים למצוא מקור ל- c אלא לענות האם יש מקור. במילים אחרות, האם יש פתרון למשוואה

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=c.$$

נקבל

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-3&3\\3&5&2\\-1&7&5\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3+R_1]{R_2\to R_2-3R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&-3&3\\0&14&-7\\0&4&8\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to\frac{1}{2}R_3]{R_2\to\frac{1}{14}R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&-3&3\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&1&2\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-R_2]{R_1\to R_1+3R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&\frac{3}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{5}{2}\end{array}\right)$$

למערכת אין פתרון, ולכן אין מקור לווקטור c.

(ה) נשים לב ש- $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, ולכן $T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ לא מוגדר.

(ו) כמו קודם, $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, ולכן $\mathrm{Ker}(T)\subseteq\mathbb{R}^2$. בפרט

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\notin\mathrm{Ker}(T)\ .$$

(ז) קל לראות שהתשובה חיובית, שכן

$$T\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-3\cdot 0\\3\cdot 0+5\cdot 0\\-0+7\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\ ,$$

ולכן

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}(T)\ .$$

(ח) למציאות $\mathrm{Ker}(T)$, עלינו למצוא את כל המקורות ב- $\mathbb{R}^2$ של ווקטור האפס ב- $\mathbb{R}^3$, כלומר לפתור את המשוואה

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

ניתן להשתמש בחישובים לעיל:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-3&0\\3&5&0\\-1&7&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3+R_1]{R_2\to R_2-3R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&-3&0\\0&14&0\\0&4&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to\frac{1}{2}R_3]{R_2\to\frac{1}{14}R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&-3&0\\0&1&0\\0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-R_2]{R_1\to R_1+3R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

ולמערכת יש רק את הפתרון הטריוויאלי. כלומר, המקור של ווקטור האפס ב- $\mathbb{R}^3$ הוא רק ווקטור האפס ב- $\mathbb{R}^2$. במילים אחרות,

$$\mathrm{Ker}(T)=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

12.2 הגדרה של העתקה לינארית

הגדרה 12.4 העתקה ליניארית

פונקציה $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ נקראת **העתקה ליניארית** אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

(1)

$$T(u+w)=T(u)+T(w)$$

לכל $u,w\in\mathbb{R}^n$ (T שומרת על סכום).

(2)

$$T(\alpha\cdot u)=\alpha\cdot T(u)$$

לכל $u\in\mathbb{R}^n$ ולכל $\alpha\in\mathbb{R}$ (T שומרת על כפל בסקלר).

דוגמה 12.2

האם הפונקציה $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}1&-3\\3&5\\-1&7\end{pmatrix}$$

העתקה ליניארית?

פתרון:

נבדוק את שני התנאיים ההרכחים:

(1) יהיו $X,Y\in\mathbb{R}^2$ כך ש-

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\ ,\quad Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

$$T(X+Y)=A\cdot(X+Y)=\begin{pmatrix}1(x_1+y_1)-3(x_2+y_2)\\3(x_1+y_1)+5(x_2+y_2)\\-(x_1+y_1)+7(x_2+y_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-3x_2\\3x_1+5x_2\\-x_1+7x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1-3y_2\\3y_1+5y_2\\-y_1+7y_2\end{pmatrix}=A\cdot X+A\cdot Y$$

(2) יהי $X\in\mathbb{R}^2$ ו $\alpha\in\mathbb{R}$ כך ש-

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$T(\alpha\cdot X)=\begin{pmatrix}1(\alpha x_1)-3(\alpha x_2)\\3(\alpha x_1)+5(\alpha x_2)\\-(\alpha x_1)+7(\alpha x_2)\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x_1-3x_2\\3x_1+5x_2\\-x_1+7x_2\end{pmatrix}=\alpha A\cdot X$$

משפט 12.1

(עיין משפט 3.4). נניח ש- $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ ו- $u,w\in\mathbb{R}^n$, ו- $\alpha\in\mathbb{R}$. מתקיים:

(1)

$$A\cdot(u+w)=A\cdot u+A\cdot w$$

(2)

$$A\cdot(\alpha\cdot u)=\alpha\cdot(A\cdot u)$$

משפט 12.2

תהי $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. ההעתקה $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ המוגדרת ע"י

$$T(x) = A\cdot x$$

לכל $x\in\mathbb{R}^n$ היא העתקה ליניארית.

הוכחה:

יהי $u,w\in\mathbb{R}^n$ ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$. לפי משפט 12.1 מתקיים

(1)

$$T(u+v) = A\cdot(u+w) = A\cdot u + A\cdot w = T(u)+T(w)$$

(2)

$$T(\alpha\cdot u) = A\cdot(\alpha\cdot u) = \alpha\cdot(A\cdot u)\alpha\cdot T(u)$$

■

משפט 12.3 " 2 תכונות חשובות של העתקה ליניארית "

תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית. מתקיים:

(1)

$$T(0)=0$$

(2)

$$T(\alpha v+\beta u) = \alpha T(v)+\beta T(u)$$

לכל $u,v\in\mathbb{R}^n$ ולכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(3) מכאן נובע כי עבור T העתקה ליניארית, מתקיים

$$T(\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1)+\cdots+\alpha_n T(v_n)\ .$$

בקצרה, תכונה יסודית של העתקה ליניארית:

$$T \text{ העתקה ליניארית} \quad\Leftarrow\quad T(0)=0$$

דוגמה 12.3

נגדיר $T:\mathbb{R}^7\to\mathbb{R}^7$ ע"י

$$T(w)=5w \qquad \forall w\in\mathbb{R}^7\ .$$

האם T העתקה ליניארית?

פתרון:

כן. הוכחה:

יהי $u,w\in\mathbb{R}^7$ ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$. מתקיים:

(1) $T(u+w) = 5\cdot(u+w) = 5\cdot u+5\cdot w = T(u)+T(w)$

(2) $T(\alpha \cdot u) = 5 \cdot (\alpha \cdot u) = \alpha \cdot (5 \cdot u) = \alpha \cdot T(u)$

דוגמה 12.4

נגדיר $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ע"י

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ .$$

האם T העתקה ליניארית?

פתרון:

לא. כל העתקה ליניארית S מקיימת $S(0) = 0$. בדוגמה הזו

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן T איננה העתקה ליניארית.

דוגמה 12.5

נגדיר $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ע"י

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y \\ 0 \\ 5x+2y \end{pmatrix} \qquad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ .$$

האם T העתקה ליניארית?

פתרון:

כן. הוכחה:

יהיו $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

נבדוק האם שני התנאים של הגדרה 12.4 מתקיימים:

(1)

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1+x_2)-3(y_1+y_2) \\ 0 \\ 5(x_1+x_2)+2(y_1+y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1+2x_2-3y_1-3y_2 \\ 0 \\ 5x_1+5x_2+2y_1+2y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1-3y_1 \\ 0 \\ 5x_1+2y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2-3y_2 \\ 0 \\ 5x_2+2y_2 \end{pmatrix}$$

$$= T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

לכן $T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ מתקיים.

(2)

$$T\left(\alpha\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix}\alpha x_1\\\alpha y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2(\alpha x_1)-3(\alpha y_1)\\0\\5(\alpha x_1)+2(\alpha y_1)\end{pmatrix}$$
$$=\alpha\cdot\begin{pmatrix}2x_1-3y_1\\0\\5x_1+2y_1\end{pmatrix}$$
$$=\alpha\cdot T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$$

לכן $T\left(\alpha\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\right)=\alpha\cdot T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ מתקיים.

דוגמה 12.6

נגדיר $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2\\9x+5y\\x+7y\end{pmatrix}\qquad\forall\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 .$$

האם T העתקה ליניארית?

פתרון:

לא. ניקח למשל

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\9\\1\end{pmatrix}$$

אמת כי

$$T\left(2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\18\\2\end{pmatrix}$$

אבל

$$2\cdot T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\9\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\18\\2\end{pmatrix}$$

כך ש-

$$T\left(2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\neq 2\cdot T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

ולכן בגלל שמצאנו דוגמה המקיימת

$$T(\alpha\cdot u)\neq\alpha\cdot T(u)$$

אז התכונה ההכרחית $T(\alpha\cdot u)=\alpha\cdot T(u)$ איננה מתקיימת בכללי.

דוגמה 12.7

תהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$ העתקה ליניארית המקיימת

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\ ,\qquad T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}\ .$$

(א) מצאו את $T\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$.

(ב) מצאו את $T\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$.

(ג) מצאו את $T\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

(ד) מצאו נוסחה ל T. כלומר, לכל $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ מצאו $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

פתרון:

(א)

$$T\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=T\left(3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=3\cdot T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\9\\12\end{pmatrix}$$

(ב)

$$T\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}=T\left(5\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=5\cdot T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=5\cdot\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\30\\35\\40\end{pmatrix}$$

(ג)

$$T\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=T\left(\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\9\\12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}25\\30\\35\\40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28\\36\\44\\52\end{pmatrix}$$

(ד)

$$\begin{aligned}T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=&T\left(\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}=T\left(x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+T\left(y\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\\=&x\cdot T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\cdot T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\2x\\3x\\4x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5y\\6y\\7y\\8y\end{pmatrix}\\=&\begin{pmatrix}x+5y\\2x+6y\\3x+7y\\4x+8y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

במילים אחרות:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\left(T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&5\\2&6\\3&7\\4&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

12.3 מטריצה המייצגת הסטנדרטית

משפט 12.4 מטריצה המייצגת הסטנדרטית

תהי $T:\mathbb{R}^n\to R^m$ העתקה ליניארית. אז קיימת מטריצה אחת ויחידה $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ כך ש-

$$T(X)=A\cdot X$$

לכל $X\in\mathbb{R}^n$. מתקיים

$$A=\begin{pmatrix}| & | & & |\\ T(e_1)_E & T(e_2)_E & \cdots & T(e_n)_E\\ | & | & & |\end{pmatrix}$$

כאשר $e_1,e_2,\cdots,e_n$ הווקטורים של הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$ ו- E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^m$.

A נקראת **המטריצה המייצגת הסטנדרטית (ממ"ס)** של ההעתקה ליניארית T.

משפט 12.5 תנאי מספיק של העתקה ליניארית

(i) נתונה $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. אם $T(X)=A\cdot X$ לכל $X\in\mathbb{R}^n$ אז

$$T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$$

הינו העתקה ליניארית.

(ii) אם $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית אז קיימת $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ כך ש-

$$T(X)=A\cdot X$$

לכל $X\in\mathbb{R}^n$.

דוגמה 12.8

נתונה פונקציה $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-3y\\0\\5x+2y\end{pmatrix}\qquad\forall\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

המהווה העתקה ליניארית. מצאו ממ"ס שלה.

פתרון:
ווקטורי היחידה של $\mathbb{R}^2$ הינם

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} .$$

לכן, הממ"ס של T היא:

$$A = \left(T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2 & -3\\0 & 0\\5 & 2\end{pmatrix}$$

12.4 פונקציה על ופונקציה חח"ע

הגדרה 12.5 פונקציה על ופונקציה חח"ע

נתונה פונקציה $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$.

(i) T **על** $\mathbb{R}^m$ אם לכל $b\in\mathbb{R}^m$ קיים (לפחות אחד) $X\in\mathbb{R}^n$ כך ש-

$$T(X)=b .$$

(ii) T **חד-חד ערכית (חח"ע)** אם לכל $b\in\mathbb{R}^m$ קיים לכל היותר אחד $X\in\mathbb{R}^n$ כך ש-

$$T(X)=b .$$

דוגמה 12.9

תהי $T_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ מוגדרת ע"י

$$T_1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x-2y+z\\x+|y|-z\end{pmatrix} \qquad \forall \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

תהי

$$T_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$$

מוגדרת ע"י

$$T_2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y+z\\x+y\\z\end{pmatrix} \qquad \forall \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

תהי

$$T_3:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$$

מוגדרת ע"י

$$T_3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\x^2\end{pmatrix} \qquad \forall \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

(א) הוכיחו או הפריכו:

T_1 העתקה ליניארית.

(ב) הוכיחו או הפריכו:

T_2 העתקה ליניארית.

(ג) הוכיחו או הפריכו:

T_3 העתקה ליניארית.

לכל אחת מההעתקות הליניאריות שמצאת,

(ד) מצא מטריצה מייצגת סטנדרטית.

(ה) האם ההעתקה על?

(ו) האם ההעתקה חח"ע?

פתרון:

(א) T_1 איננה העתקה ליניארית. ניקח למשל

$$T_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 0-2\cdot 1+0\\0+|1|-0\end{pmatrix}\quad=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

$$T_1\left(-1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=T_1\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 0-2\cdot(-1)+0\\0+|-1|-0\end{pmatrix}\quad=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

אבל

$$-1\cdot T_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=-1\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\quad=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

ולכן

$$T_1\left(-1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\neq-1\cdot T_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

(ב)

$$T_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$$

מוגדרת ע"י

$$T_2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+z\\x+y\\z\end{pmatrix}\qquad\forall\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

נתבונן במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} T_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} & T_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} & T_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

נשים לב שלכל $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ מתקיים:

$$A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y+z\\x+y\\z\end{pmatrix} = T_2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

כלומר, לכל $X \in \mathbb{R}^3$ מתקיים

$$T_2(X) = AX$$

ולכן, לפי משפט 12.5 (i), T_2 העתקה ליניארית.

שימו לב ש- A הינה הממ"ס של T.

(ג) T_3 איננה העתקה ליניארית בדומה לדוגמה של T_1. ניקח למשל

$$T_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$T_3\left(2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = T_3\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$$

אבל

$$2\cdot T_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

ולכן

$$T_3\left(2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) \neq 2\cdot T_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

(ד) עיין סעיף **(ב)**

(ה) נזכיר שההעתקה היא על אם לכל $b \in \mathbb{R}^3$ קיים (לפחות אחד) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ כך ש-

$$T_2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = b\ ,$$

כלומר, אם"ם לכל $b \in \mathbb{R}^3$ למערכת

$$A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = b$$

יש פתרון.

נדרג את המטריצה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - b_1 \end{array}\right)$$

על סמך הדרוג, קיים $b \in \mathbb{R}^3$ כך שלמערכת $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$ אין פתרון (כי תיתכן שורת סתירה) , ולכן ההעתקה איננה על.

(ו) נזכיר שההעתקה היא חח"ע אם לכל $b \in \mathbb{R}^3$ קיים לכל היותר $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ אחד כך ש-

$$T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b \ ,$$

כלומר, אס"ם לכל $b \in \mathbb{R}^3$ למערכת

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$$

יש לכל היותר פתרון אחד.

על סמך הדרוג, קיים $b \in \mathbb{R}^3$ (למשל, ווקטור האפס) כך שלמערכת

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$$

יש אינסוף פתרונות (כי יש משתנה חופשי), ולכן ההעתקה איננה חח"ע.

משפט 12.6

תהי $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית ותהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T. התנאים הבאים שקולים:

(א) T על ($\mathbb{R}^m$).

(ב) במדורגת המתקבלת מ- A קיים איבר מוביל בכל **שורה.**

(ג) עמודות A פורשות את $\mathbb{R}^m$.

משפט 12.7

תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית ותהי $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T. התנאים הבאים שקולים:

(א) T חח"ע.

(ב) במדורגת המתקבלת מ- A קיים איבר מוביל בכל **עמודה**

(ג) עמודות A בת"ל.

12.5 הצגת העתקה לינארית בבסיסים שונים

משפט 12.8

יהי V מרחב ווקטורי עם בסיס סדור

$$B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}\ ,$$

יהי W מרחב ווקטורי עם בסיס סדור

$$C=\{c_1,c_2,\ldots,c_m\}$$

ותהי

$$T:V\to W$$

העתקה לינארית. אזי, לכל $X\in V$ מתקיים

$$[T(X)]_C=[T]_C^B\cdot[X]_B$$

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(b_1)\ ]_C & [T(b_2)\ ]_C & \ldots & [T(b_n)\ ]_C \\ | & | & & | \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{m\times n}\ .$$

$[T]_C^B$ נקראת המטריצה המייצגת של ההעתקה T ביחס לבסיסים B ו- C.

דוגמה 12.10

נתון

$$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$$

העתקה ליניארית המוגדרת ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-4y\\4x+5y\\6y\end{pmatrix}$$

לכל $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, ונתון

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

בסיס של $\mathbb{R}^2$.

(א) מהי המטריצה המייצגת הסטנדרטית ?

(ב) מהי המטריצה המייצגת ביחס לבסיס B?

(ג) נתון הווקטור X בעל קואורדינטות $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ביחס לבסיס הסטנדרטית E של $\mathbb{R}^2$. מהו הווקטור X_B ביחס לבסיס B?

(ד) הוכיחו כי

$$[T]_{\bar{E}}^{E} \, [X]_E = [T]_{\bar{E}}^{B} \, [X]_B$$

כאשר $\bar{E}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.

פתרון:

נתון ווקטור

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$$

ביחס לבסיס הסטנדרטית $E = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ של $\mathbb{R}^2$. אז ההעתקה לינארית T מחזירה ווקטור

$$(3x - 4y) \cdot e_1 + (4x + 5y) \cdot e_2 + 6y \cdot e_3$$

ביחס לבסיס הסטנדרטית $\bar{E} = \left\{ \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ של $\mathbb{R}^3$.

(א) ניתן לכתוב את ההעתקה לינאירת באמצעות המטריצה המייצגת הסטנדרטית בצורה

$$[T(X)]_{\bar{E}} = [T]_{\bar{E}}^{E} \cdot [X]_E$$

כאשר

$$[T]_{\bar{E}}^{E} = \begin{pmatrix} | & | \\ T(e_1) & T(e_2) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

המטריצה המייצגת הסטנדרטית.

(ב) המטריצה המייצגת ביחס לבסיס B ניתנת ע"י

$$[T]_{\bar{E}}^{B} = \begin{pmatrix} | & | \\ T(b_1) & T(b_2) \\ | & | \end{pmatrix} \ .$$

שים לב,

$$b_1=e_1+e_2\ ,\quad b_2=e_1-e_2\ ,\qquad \Leftrightarrow \qquad e_1=\frac{1}{2}\cdot b_1+\frac{1}{2}\cdot b_2\ ,\quad e_2=\frac{1}{2}\cdot b_1-\frac{1}{2}\cdot b_2\ ,$$

כך ש-

$$T(b_1)=T(e_1)+T(e_2)=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\9\\6\end{pmatrix}$$

$$T(b_2)=T(e_1)-T(e_2)=\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-1\\-6\end{pmatrix}$$

ולכן

$$[T]_{\bar{E}}^{B}=\begin{pmatrix}|&|\\T(b_1)&T(b_2)\\|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&7\\9&-1\\6&-6\end{pmatrix}\ .$$

(ג)

$$[X]_E=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}_E=2\cdot e_1+4\cdot e_2=2\left(\frac{1}{2}\cdot b_1+\frac{1}{2}\cdot b_2\right)+4\left(\frac{1}{2}\cdot b_1-\frac{1}{2}\cdot b_2\right)=3\cdot b_1-1\cdot b_2=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}_B$$

(ד)

$$[T]_{\bar{E}}^{E}\cdot[X]_E=\begin{pmatrix}3&-4\\4&5\\0&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}_E=\begin{pmatrix}-10\\28\\24\end{pmatrix}_{\bar{E}}$$

ו-

$$[T]_{\bar{E}}^{B}\cdot[X]_B=\begin{pmatrix}-1&7\\9&-1\\6&-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix}-10\\28\\24\end{pmatrix}_{\bar{E}}$$

דוגמה 12.11

נתון

$$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$$

העתקה ליניארית המוגדרת ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x+y\\2x-y\\3y\end{pmatrix}$$

לכל $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, ונתון

$$C=\left\{c_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\ c_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\ c_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\ .$$

בסיס של $\mathbb{R}^3$.

(א) מהי המטריצה המייצגת הסטנדרטית ?

(ב) מהי המטריצה המייצגת ביחס לבסיס C?

(ג) נתון הווקטור $X_E = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}_E$ ביחס לבסיס הסטנדרטית E, הוכיחו כי הווקטור המתקבל מההעתקה לינארית

$$[T]^E_C X_E$$

הוא שקול לווקטור המתקבל מההעתקה לינארית

$$[T]^E_{\bar{E}} X_E$$

פתרון:

(א) נתון בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$, קרי $E = \left\{e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, והבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$, קרי $\bar{E} = \left\{\bar{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \bar{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, אז

$$[T(e_1)\ ]_{\bar{E}} = \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}_{\bar{E}} = 4\cdot\bar{e}_1 + 2\cdot\bar{e}_2 + 0\cdot\bar{e}_3$$

$$[T(e_2)\ ]_{\bar{E}} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}_{\bar{E}} = 1\cdot\bar{e}_1 - 1\cdot\bar{e}_2 + 3\cdot\bar{e}_3$$

כך ש-

$$[T]^E_{\bar{E}} = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(e_1)\ ]_{\bar{E}} & [T(e_2)\ ]_{\bar{E}} \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 1\\2 & -1\\0 & 3\end{pmatrix}$$

(ב) שים לב

$$\begin{aligned} c_1 &= \bar{e}_1 \\ c_2 &= \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \\ c_3 &= \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \bar{e}_1 &= c_1 \\ \bar{e}_2 &= c_2 - c_1 \\ \bar{e}_3 &= c_3 - c_2 \end{aligned}$$

כך ש-

$$[T(e_1)]_C = 4\cdot c_1 + 2\cdot(c_2 - c_1) = 2\cdot c_1 + 2\cdot c_2 + 0\cdot c_3 = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}_C$$

$$[T(e_2)]_C = 1\cdot c_1 - 1\cdot(c_2 - c_1) + 3\cdot(c_3 - c_2) = 2\cdot c_1 + 0\cdot c_2 + 1\cdot c_2 = \begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix}_C$$

ולכן

$$[T]_C^E = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(e_1)\ ]_C & [T(e_2)\ ]_C \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(ג)

$$[\ T\,(X)\ ]_{\bar{E}} = [T]_{\bar{E}}^E \cdot [X]_E = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}_{\bar{E}}$$

$$[\ T\,(X)\ ]_C = [T]_C^E \cdot [X]_E = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}_C$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}_C = 6\cdot c_1 - 6\cdot c_2 + 6\cdot c_3 = 6\cdot \bar{e}_1 - 6\,(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + 6\cdot(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3) = 6\cdot\bar{e}_1 + 0\cdot\bar{e}_2 + 6\cdot\bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}_{\bar{E}} .$$

דוגמה 12.12

נתונה העתקה לינארית

$$T : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$$

המוגדרת ע"י

$$T(a + bx + cx^2) = a + 2b + 3c + (2a + 4b + 5c)x + (3a + 6b + 9c)x^2 + (4a + 8b + 12c)x^3$$

(א) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית A של T.

(ב) מצאו את המימד ובסיס של $\text{Im}\ T$.

(ג) מצאו את המימד ובסיס של $\ker T$.

(ד) מצאו את המטריצה המייצגת של ההעתק ביחס לבסיסים הסדורים

$$B = \{b_1 = 1 + x\ ,\ b_2 = x^2\ ,\ b_3 = x\}$$

של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ וביחס לבסיס

$$C = \{c_1 = x^3\ ,\ c_2 = x^2\ ,\ c_3 = x\ ,\ c_4 = 1\}$$

של $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

(ה) מצאו את

$$\left[T\left(1 + x + x^2 + x\right)\ \right]_C$$

פתרון:

(א) נסמן

$$E = \left\{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2\right\}$$

הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ ו-

$$\bar{E} = \left\{\bar{e}_1 = 1, \bar{e}_2 = x, \bar{e}_3 = x^2, \bar{e}_4 = x^3\right\}$$

הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$. המטריצה המייצגת הסטנדרטית היא

$$A=\begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(e_1)\ ]_{\bar{E}} & [T(e_2)\ ]_{\bar{E}} & [T(e_3)\ ]_{\bar{E}} \\ | & | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(1)\ ]_{\bar{E}} & [T(x)\ ]_{\bar{E}} & [T(x^2)\ ]_{\bar{E}} \\ | & | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&6&9\\4&8&12\end{pmatrix}$$

(ב) מתקיים:

$$\text{Im } T=\text{Col}A\ .$$

נדרג את המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&6&9\\4&8&12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

נקבל ש-

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix}3\\5\\9\\12\end{pmatrix}\right\}$$

מהווה בסיס של $\text{Col } A$, ולכן $\dim\left(\text{Col } A\right)=2$.

מכאן בסיס של $\text{Im } T$ הוא

$$\left\{1+2x+3x^2+4x^3\ ,\ 3+5x+9x^2+12x^3\right\}$$

ולכן $\dim\left(\text{Im } T\right)=2$

(ג) מתקיים

$$\text{Ker } T\approx\text{Nul } A\ .$$

$$\text{Nul } A=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&6&9\\4&8&12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

על סמך החישוב לעיל נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\2&4&5&0\\3&6&9&0\\4&8&12&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

כך ש-

$$\text{Nul } A=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\qquad b\in\mathbb{R}\ .$$

לכן בסיס של $\text{Nul }A$ הוא

$$B_{\text{Nul }A} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_E \right\}$$

ו-

$$\text{Dim}\left(\text{Nul }A\right) = 1 \ .$$

מכאן נקבל

$$B_{\text{Ker }T} = \{-2 + x\}$$

ו-

$$\text{Dim}\left(\text{Ker }T\right) = 1 \ .$$

(ד) נחשב את התמונות של ווקטורי הבסיס,

$$T(1+x) = 3+6x+9x^2+12x^3 \ , \qquad T(x^2) = 3+5x+9x^2+12x^3 \ , \qquad T(x) = 2+4x+6x^2+8x^3 \ .$$

נזכיר ש-

$$C = \left\{ c_1 = x^3 \ , \ c_2 = x^2 \ , \ c_3 = x \ , \ c_4 = 1 \right\}$$

ולכן המטריצה המבוקשת היא

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(b_1)\ ]_C & [T(b_2)\ ]_C & [T(b_3)\ ]_C \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 8 \\ 9 & 9 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(ה)

$$[T\left(1+x+x^2+x\right)\ ]_C = [T]_C^B \cdot [T\left(1+x+x^2+x\right)\ ]_B = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 8 \\ 9 & 9 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 24 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}$$

12.6 קשר בין מרחב העמודות ומרחב האפס להעתקות ליניאריות

משפט 12.9 קשר בין מרחב העמודות ומרחב האפס להעתקות ליניאריות

עבור מרחבים ווקטורים V ו- U והעתקה ליניארית

$$T : U \to V$$

כך ש-

$$\text{Im }T = \left\{ T(u) \in V \middle| u \in U \right\}$$

ו-

$$\text{Ker }T = \left\{ u \in U \middle| T(u) = 0 \right\} \ .$$

נשים לב שאם
$$T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$$
אז T מוגדרת ע"י כפל במטריצה, כלומר
$$T(X)=A\cdot X$$
עבור מטריצה מסדר $m\times n$. במקרה זה,
$$\text{Im }T=\text{Col }A$$
ו-
$$\text{Ker }T=\text{Nul }A$$

12.7 הגדרה של איזומורפיזם

משפט 12.10

יהי V מ"ו ויהי
$$B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$$
בסיס סדור של V. ההעתקה
$$T:V\to\mathbb{R}^n$$
הנתונה ע"י
$$T(X)=[X]_B\qquad\forall\ X\in V$$
היא העתקה לינארית חח"ע ועל.

הגדרה 12.6 איזומורפיזם בין מרחבים ווקטורים

יהיו U, V מ"ו מעל $\mathbb{R}$. אם קיימת העתקה לינארית חח"ע ועל
$$T:U\to V\ ,$$
נאמר ש- T איזומורפיזם. בנוסף, נאמר שהמרחבים U ו- V איזומורפיים ונסמן $V\approx U$.

12.8 האיזומורפיזמים הטבעיים

(1) נתון העתקה לינארית
$$T:\mathbb{R}_{\leq 3}[x]\to\mathbb{R}^4$$
ובסיס
$$E=\{1,x,x^2,x^3\}$$

של $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ כך ש- T מוגדרת ע"י

$$T(a+bx+cx^2+dx^3) = \left[a+bx+cx^2+dx^3\right]_E = \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d \end{pmatrix}_E \ .$$

אז

$$\mathbb{R}_{\leq 3}[x] \approx \mathbb{R}^4$$

ע"י האיזומורפיזם הטבעי

$$a+bx+cx^2+dx^3 \to \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d \end{pmatrix} \ .$$

(2) נתון העתקה לינארית

$$T:\mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^6$$

ובסיס

$$\bar{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

של $\mathbb{R}^{2\times 3}$ כך ש- T מוגדרת ע"י

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f \end{pmatrix}\right) = \left[\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f \end{pmatrix}\right]_{\bar{E}} = \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\\ e\\ f \end{pmatrix}_{\bar{E}} \ .$$

אז

$$\mathbb{R}^{2\times 3} \approx \mathbb{R}^6$$

ע"י האיזומורפיזם הטבעי

$$\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\\ e\\ f \end{pmatrix}_{\bar{E}} \ .$$

משפט 12.11 ע

ל מנת להכריע שאלות במ"ו מסוים (מעל $\mathbb{R}$) ניתן לעבור ל- $\mathbb{R}^n$ המתאים (ע"י ההעתקה לעיל ובחירת הבסיס הסטנדרטי).

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\phi"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & T(X) \arrow[d, mapsto] \\
{[X]_B} \arrow[r, mapsto] & {[T(X)]_C}
\end{tikzcd}$$

$$[T(X)]_C = [T]_C^B \cdot [X]_B$$

דוגמה 12.13

נתונה טרנספורמציה לינארית

$$T : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$$

המוגדרת ע"י

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+2b+3c & 2a+4b+5c \\ 3a+6b+9c & 4a+8b+12c \end{pmatrix}$$

(א) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

(ב) מצאו את המימד ובסיס של $\mathrm{Im}\, T$.

(ג) מצאו את המימד ובסיס של $\mathrm{Ker}\, T$.

(ד) מצאו את המטריצה המייצגת של ההעתקה ביחס לבסיס הסדור

$$B = \{b_1 = 1+x\ , b_2 = x^2\ ,\ b_3 = x\}$$

של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ וביחס לבסיס

$$C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ c_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ c_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

פתרון:

(א)

$$[T]_{\bar{E}}^{E}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}_E=\begin{pmatrix}a+2b+3c\\2a+4b+5c\\3a+6b+9c\\4a+8b+12c\end{pmatrix}_{\bar{E}}$$

$$[T]_{\bar{E}}^{E}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&6&9\\4&8&12\end{pmatrix}=:A$$

(ב)

$$\text{Im }T=\text{Col }A$$

.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&6&9\\4&8&12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

כך שבסיס של $\text{Col }A$ הינו

$$B_{\text{Col }A}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\5\\9\\12\end{pmatrix}\right\}$$

ומימדו 2. מכאן בסיס של $\text{Im }T$ הוא

$$B_{\text{Im }T}=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&5\\9&12\end{pmatrix}\right\}$$

(ג)

$$\text{Ker }T\approx\text{Nul }A\ .$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\2&4&5&0\\3&6&9&0\\4&8&12&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

ולכן

$$\text{Nul }A=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\Big|b\in\mathbb{R}\right\}$$

ומימדו 1. מכאן

$$B_{\text{Ker }T}=\{-2+x\}$$

(ד)

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix}|&|&|\\{}[T(b_1)\ ]_C&[T(b_2)\ ]_C&[T(b_3)\ ]_C\\|&|&|\end{pmatrix}$$

לפי ההגדרה של T:

$$T(b_1)=\begin{pmatrix}3&6\\9&12\end{pmatrix}=12c_1+9c_2+6c_3+3c_4=\begin{pmatrix}12\\9\\6\\3\end{pmatrix}_C$$

$$T(b_2)=\begin{pmatrix}3&5\\9&12\end{pmatrix}=12c_1+9c_2+5c_3+3c_4=\begin{pmatrix}12\\9\\5\\3\end{pmatrix}_C$$

$$T(b_3)=\begin{pmatrix}2&4\\6&8\end{pmatrix}=8c_1+6c_2+4c_3+2c_4=\begin{pmatrix}8\\6\\4\\2\end{pmatrix}_C$$

כך ש-

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix}12&12&8\\9&9&6\\6&5&4\\3&3&2\end{pmatrix}\ .$$

דוגמה 12.14

$$T:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^3$$

המוגדרת ע"י

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b+3c\\2b+3c+4d\\5a+3c+4d\end{pmatrix}$$

(א) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

(ב) מצאו את המימד ובסיס של $\mathrm{Im}\,T$.

(ג) מצאו את המימד ובסיס של $\mathrm{Ker}\,T$.

פתרון:

(א) שימו לב, ביחס לבסיס הסטנדרטית

$$E=\left\{e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\ e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\ ,\ e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\ ,\ e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

של $\mathbb{R}^{2\times 2}$ וביחס לבסיס

$$\bar{E}=\left\{\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\ \bar{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\ \bar{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

של $\mathbb{R}^3$, אז

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=ae_1+be_2+ce_3+de_4=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}_E$$

$$[T]_{\bar{E}}^{E}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}_E=\begin{pmatrix}a+2b+3c\\2b+3c+4d\\5a+3c+4d\end{pmatrix}_{\bar{E}}$$

$$[T]_{\bar{E}}^{E}=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&2&3&4\\5&0&3&4\end{pmatrix}=A\ .$$

(ב) $\text{Im}\ T=\text{Col}\ A$.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&2&3&4\\5&0&3&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&\frac{3}{2}&2\\0&-10&-12&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&\frac{3}{2}&2\\0&0&3&24\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&\frac{3}{2}&2\\0&0&1&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&\frac{3}{2}&2\\0&0&1&8\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&0&-10\\0&0&1&8\end{pmatrix}$$

ולכן העמודות

$$B_{\text{Col}A}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\right\}$$

מהווה בסיס של $\text{Im}\ T$ ומימדו 3.

(ג) $\text{Ker}\ T=\text{Nul}\ A$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&0&0\\0&2&3&4&0\\5&0&3&4&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&0&0\\0&1&0&-10&0\\0&0&1&8&0\end{array}\right)$$

ולכן

$$\text{Nul}\ A=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=d\begin{pmatrix}4\\10\\-8\\1\end{pmatrix}\ \middle|\ d\in\mathbb{R}\right\}$$

כך ש-

$$B_{\text{Nul}\ A}=\left\{\begin{pmatrix}4\\10\\-8\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ומימדו 1.

מכאן

$$B_{\text{Ker}\ T}=\left\{\begin{pmatrix}4&10\\-8&1\end{pmatrix}\right\}$$