

שעור 10

מרחב האפס, מרחב העמודות ומרחב השורות

10.1 דרגת המטריצה

10.1 הגדרה

נתונה מטריצה

 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ מעל שדה \mathbb{F} :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

למטריצה מקושרים 3 תת מרחבים:

(1) מרחב האפס של A שמסומן $\text{Nul}(A)$ ומוגדר

$$\text{Nul}(A) = \{X \in \mathbb{F}^n \mid A \cdot X = \vec{0}\}.$$

(2) מרחב העמודות של A שמסומן $\text{Col}(A)$ ומוגדר

$$\text{Col}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}.$$

 $\text{Col}(A)$ הוא התת מרחב הנפרש ע"י עמודות המטריצה.(3) מרחב השורות של A שמסומן $\text{Row}(A)$ ומוגדר

$$\text{Row}(A) = \text{span} \{ (a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n}), \cdots, (a_{m1} \ a_{m2} \ \cdots \ a_{mn}) \}.$$

 $\text{Row}(A)$ הוא התת מרחב הנפרש ע"י שורות המטריצה.

10.1 דוגמה

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 4 & -11 & 23 & 18 & 11 \end{pmatrix}$. מצאו את בסיס ואת המימד של $\text{Col}(A)$ ו- $\text{Row}(A)$.

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 4 & -11 & 23 & 18 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow 2R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 6 & 7 \\ 0 & -3 & 7 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עמודות 1 ו-2 של המדורגת מובילות, לפיכך עמודות 1 ו-2 של A מהווים בסיס של $\text{col}(A)$:

$$\text{col}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$$

שורות 1 ו-2 של המדורגת מובילות, לפיכך שורות 1 ו-2 של A מהווים בסיס של $\text{row}(A)$:

$$\text{row}(A) = \text{span} \{ (1 \ -2 \ 4 \ 3 \ 1), (-2 \ 1 \ -1 \ 0 \ 5) \}$$

$\dim(\text{Col}(A)) = 2$, מספר העמודות המובילות.

$\dim(\text{Row}(A)) = 2$, מספר השורות שלא אפסים.

משפט 10.1 בסיס ומימד של $\text{col}(A)$

תהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

(1) העמודות המובילות של A מהווים בסיס של $\text{Col } A$.

(2) השורות המובילות של A מהווים בסיס של $\text{Row } A$.

(3) $\dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A))$

הוכחה:

(1) משפט 9.3.

(2) תרגיל בית.

(3) $\dim(\text{Col}(A))$ הוא מספר העמודות המובילות במטריצה המדורגת של A .

ז"א $\dim(\text{Col}(A))$ הוא מספר האיברים המובילים במטריצה המדורגת של A .

$\dim(\text{Row}(A))$ הוא מספר השורות שלא אפסים במטריצה המדורגת של A .

ז"א $\dim(\text{Row}(A))$ הוא מספר האיברים המובילים במטריצה המדורגת של A .

הגדרה 10.2 דרגה

למספר $\dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A))$ קוראים דרגת המטריצה. סימון: $\text{rank}(A)$. ז"א

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A)) .$$

משפט 10.2 מימד של $\text{Nul}(A)$

תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ונניח כי $\text{rank}(A) = r$. אז

$$\dim(\text{Nul}(A)) = n - r = (\text{מספר עמודות הלא מובילות}) .$$

הוכחה: (להעשרה בלבד!)

נניח כי $\{u_1, \dots, u_k\}$ בסיס של $\text{Nul}(A)$.

נשלים אותו לבסיס של \mathbb{R}^n : $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$.

הקבוצה $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ פורשת את \mathbb{R}^n לפיכך הקבוצה $\{Au_1, \dots, Au_k, Au_{k+1}, \dots, Au_n\}$ פורשת את $\text{col}(A)$.

אבל $Au_1 = 0, \dots, Au_k = 0 \Leftrightarrow \{u_1, \dots, u_k\} \in \text{Nul}(A)$

לפיכך $\{Au_{k+1}, \dots, Au_n\}$ פורשת את $\text{col}(A)$.

כעת נוכיח כי $\{Au_{k+1}, \dots, Au_n\}$ בת"ל: נרשום

$$s_{k+1}Au_{k+1} + \dots + s_nAu_n = \bar{0}$$

כאשר $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ ווקטור האפס ו- s_{k+1}, \dots, s_n סקלרים. מכאן

$$A(s_{k+1}u_{k+1} + \dots + s_nu_n) = \bar{0}$$

ז"א $s_{k+1}u_{k+1} + \dots + s_nu_n \in \text{Nul}(A)$. לפיכך ניתן לרשום אותו כצירוף לינארי של הבסיס $\{u_1, \dots, u_k\}$:

$$s_{k+1}u_{k+1} + \dots + s_nu_n = t_1u_1 + \dots + t_ku_k$$

t_1, \dots, t_k סקלרים. נעביר אגפים ונקבל:

$$-t_1u_1 - \dots - t_ku_k + s_{k+1}u_{k+1} + \dots + s_nu_n = \bar{0} .$$

הקבוצה $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ בסיס לכן היא בת"ל לכן $t_1 = \dots = t_k = s_{k+1} = \dots = s_n = 0$.

לפיכך הקבוצה $\{Au_{k+1}, \dots, Au_n\}$ בת"ל.

מצאנו כי $\{Au_{k+1}, \dots, Au_n\}$ בת"ל ופורשת $\text{col}(A)$ לכן היא בסיס של $\text{col}(A)$.
נניח כי $\dim(\text{col}(A)) = r$.

$$\Rightarrow n - k = r \Rightarrow k = n - r .$$

לפיכך

$$\dim(\text{Nul}(A)) = n - r = (\text{מספר עמודות הלא מובילות}) - (\text{מספר עמודות מובילות}) .$$

משפט 10.3 בסיס של $\text{Nul}(A)$

תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$. נניח שהפתרון הכללי למערכת $AX = 0$ הוא

$$X_0 = y_1 u_1 + \cdots + y_k u_k$$

כאשר y_1, \dots, y_k המשתנים החופשיים של המערכת ו- $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{F}^n$.

אז הקבוצת ווקטורים $B = \{u_1, \dots, u_k\}$ בסיס של $\text{Nul}(A)$.

הוכחה: להעשרה בלבד!

נניח כי $\text{rank}(A) = r$. אז יש $n - r$ משתנים חופשיים, לכן יש $k = n - r$ ווקטורים בקבוצה B .

$\dim(\text{Nul}(A)) = n - r$ והקבוצת ווקטורים $B = \{u_1, \dots, u_{n-r}\}$ פורשת את $\text{Nul}(A)$.

לכן לפי משפט 9.4 הקבוצה B בת"ל לכן B מהווה בסיס של $\text{Nul}(A)$.

דוגמה 10.2

במרחב $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ נתונים ווקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ -5 & a \end{pmatrix}$$

(א) עבור אילו ערכי a ווקטור v שייך לפרישה לינארית של u_1, u_2, u_3 ?

(ב) עבור כל ערך של a שמצאתם בסעיף א', בטאו את ווקטור v כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 בשתי דרכים שונות.

(ג) לכל ערך של a מצאו את המימד ובסיס של $\text{span}\{u_1, u_2, u_3, v\}$.

(ד) האם קיימים ערכי a עבורם $\text{span}\{u_1, u_2, u_3, v\} = \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

פתרון:

(א) נרשום v כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 :

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = v$$

נחשב את המקדמים:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & a \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 3R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 0 & -2 & 2 & -3a-5 \\ 0 & 2 & -2 & -a-7 \\ 0 & 0 & 0 & -2a-6 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 0 & -2 & 2 & -3a-5 \\ 0 & 0 & 0 & -4a-12 \\ 0 & 0 & 0 & -2a-6 \end{array} \right)$$

אם $a = -3$ לה יהיו שורת סתירה וקיים פתרון ואז $v \in \text{span}\{u_1, u_2, u_3\}$.

(ב) $a = -3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$k_1 = 1 - 2k_3, \quad k_2 = -2 + k_3, \quad k_3 \in \mathbb{R}.$$

נציב $k_3 = 1 \Leftarrow$

$$k_1 = -1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 1$$

ונקבל

$$-u_1 - u_2 + u_3 = v.$$

נציב $k_3 = 0 \Leftarrow$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 0$$

ונקבל

$$u_1 - 2u_2 + 0 \cdot u_3 = v.$$

(ג) עבור $a = -3$:

מסעיף (ב), עמודה 1 ועמודה 2 של $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & v \\ | & | & | & | \end{array} \right)$ מובילות, לכן הווקטורים u_1, u_2 מהווים בסיס.

עבור $a \neq -3$:

מסעיף (ב), עמודה 1 עמודה 2 ועמודה 4 של $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & v \\ | & | & | & | \end{array} \right)$ מובילות, לכן הווקטורים u_1, u_2, v מהווים בסיס.

(ד) הווקטורים u_1, u_2, u_3, v ת"ל לכל ערכי a , לכן לא קיימים ערכי a עבורם $\text{span}\{u_1, u_2, u_3, v\} = \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

10.3 דוגמה

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. לכל ערך של a מצאו את המימד ובסיס של $\text{Nul}(A)$.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - aR_1}} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & -a^2 - a + 2 \end{array} \right)$$

$$a = 1, -2 \Leftarrow -a^2 - a + 2 = 0$$

עבור $a = 1$ מקבלים

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\dim(\text{Nul}(A)) = 2 = \text{מספר העמודות הלא מובילות}.$$

הפתרון הכללי הינו

$$x = -y - z, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Nul}(A)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

עבור $a = -2$ מקבלים

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim(\text{Nul}(A)) = 1 = \text{מספר העמודות הלא מובילות}$$

הפתרון הכללי הינו

$$x = z, y = z, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Nul}(A)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

משפט 10.4 משפט הדרגה

לכל מרטיצה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ מסדר $m \times n$:

$$\text{rank}(A) + \dim(\text{Nul}(A)) = n.$$

הוכחה:

$\text{rank}(A)$ שווה למספר העמודות המובילות.

$\dim(\text{Nul}(A))$ שווה למספר העמודות הלא מובילות.

לכן $\text{rank}(A) + \dim(\text{Nul}(A))$ שווה למספר העמודות של A .

דוגמה 10.4

עבור מרטיצה $A \in \mathbb{R}^{5 \times 7}$ ידוע כי $\dim(\text{Nul}(A)) = 2$. מצאו את דרגת A .

פתרון:

$$\dim(\text{Nul}(A)) = 2 \text{ לכן } \text{rank}(A) = 5.$$

דוגמה 10.5

האם למטריצה $A \in \mathbb{R}^{6 \times 9}$ יכול להיות $\dim(\text{Nul}(A)) = 2$? מצאו את דרגת A .

פתרון:

נניח שקיימת מטריצה $A \in \mathbb{R}^{6 \times 9}$ שעבורה $\dim(\text{Nul}(A)) = 2$.

אז $\text{rank}(A) = 9 - 2 = 7$.

אבל $\text{rank}(A)$ שווה למספר השורות שלא אפסים במטריצה המדורגת. במטריצה A יש 6 שורות.

לכן $\text{rank}(A) \leq 6$.

קיבלנו סתירה. לכן לא קיימת מטריצה A המקיימת את תנאי התרגיל.

למה 10.1 סיכום של המימדים של מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ מטריצה בעלת m שורות ו- n עמודות. נסמן $r = \text{rank}(A)$. אז

$$\begin{aligned} \dim(\text{col}(A)) = r &= (\text{מספר עמודות מובילות}) \\ \dim(\text{row}(A)) = r &= (\text{מספר שורות מובילות}) \\ \dim(\text{Nul}(A)) = n - r &= (\text{מספר עמודות הלא מובילות}) \end{aligned}$$

משפט 10.5 תנאים שקולים של מטריצה הפיכה

עבור מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ התנאים הבאים שקולים זה לזה.

(1) $\text{rank}(A) = n$

(2) A הפיכה.

(3) למרעכת $A \cdot X = 0$ יש פתרון יחיד.

(4) $|A| \neq 0$.

(5) כל השורות של A בת"ל.

(6) כל העמודות של A בת"ל.

הוכחה:

תרגיל בית.



10.2 ווקטור קואורדינטות לפי בסיס

משפט 10.6 קואורדינטות של ווקטור לפי בסיס מסוים יחיד

נניח כי $u_1, \dots, u_n \in V$ בסיס של המרחב ווקטורי V מעל שדה \mathbb{F} . אז כל ווקטור $a \in V$ ניתן לרשום כצירוף ליניארי יחיד של $u_1, \dots, u_n \in V$.

הוכחה:

$u_1, \dots, u_n \in V$ בסיס של V , לכן $\text{span}\{u_1, \dots, u_n\} = V$.

מכאן נובע שלכל $a \in V$,

$$a \in \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$$

ז"א קיימים סקלרים k_1, \dots, k_n כך ש-

$$a = k_1 u_1 + \dots + k_n u_n.$$

נוכיח שהצירוף הליניארי הוא יחיד בדרך השלילה:

נניח שקיים צירוף ליניארי אחר:

$$a = t_1 u_1 + \dots + t_n u_n.$$

כך ש- $k_i \neq t_i$.

לכן

$$(k_1 - t_1)u_1 + \dots + (k_i - t_i)u_i + \dots + (k_n - t_n)u_n = \bar{0}$$

ו- $t_i - k_i \neq 0$. ז"א ווקטורים $\{u_1, \dots, u_n\}$ תלויים ליניארית. סתירה.

■

הגדרה 10.3 ווקטור הקואורדינטות

אם $B = \{u_1, \dots, u_n\} \in V$ בסיס של מרחב ווקטורי V מעל שדה \mathbb{F} ו- $a \in V$ אז

$$a = k_1 u_1 + \dots + k_n u_n.$$

לוקטור

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

קוראים ווקטור הקואורדינטות של ווקטור a לפי בסיס $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ סימון:

$$[a]_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

10.6 דוגמה

$$E = \{e_1, e_2, e_3\} \text{ הבסיס הסטנדרטי של } \mathbb{R}^3. u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$u = 2e_1 - e_2 + 10e_3.$$

לכן

$$[u]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

10.7 דוגמה

$$E = \{1, x, x^2\} \text{ הבסיס הסטנדרטי של } \mathbb{R}_2[x]. p(x) = 1 + 8x - 5x^2$$

$$p(x) = 1 \cdot 1 + 8 \cdot x - 5 \cdot x^2 = 1e_1 + 8e_2 - 5e_3.$$

לכן

$$[p]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

10.8 דוגמה

הראו כי קבוצת הווקטורים

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ מהווה בסיס של } \mathbb{R}^3 \text{ ומצאו את } [u]_B \text{ עבוטר הווקטור}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_2 - 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות לכן b_1, b_2, b_3 בסיס של \mathbb{R}^3 . נמצא את הקואורדינטות של וקטור u לפי בסיס B .

$$u = xb_1 + yb_2 + zb_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 2 \\ -2 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 3 & 6 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 3 & 6 & | & 3 \\ 0 & 0 & 3 & | & -27 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2 \\ R_3 \rightarrow \frac{1}{3}R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 10 \\ 0 & 1 & 0 & | & 19 \\ 0 & 0 & 1 & | & -9 \end{pmatrix}$$

$$\cdot [u]_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ -9 \end{pmatrix}$$

דוגמה 10.9 (מרחב האפס ובסיסו)

מצאו את בסיס ומימד של מרחב האפס של המטריצה

$$.A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

פתרון:

כדי למצוא את המרחב האפס יש למצוא את הפתרונות של המערכת

$$AX = \bar{0}$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + 3R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{5} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

המערכת המתאימה היא

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & & & - & x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \end{array}$$

ולכן הפתרון הוא

$$x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5, \quad x_3 = -2x_4 + 2x_5, \quad x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

ובצורה וקטורית

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

נרשום את הפתרון בצורה צ"ל של וקטורים ב \mathbb{R}^5 :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_4 \\ 0 \\ -2x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3x_5 \\ 0 \\ 2x_5 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + x_4 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} + x_5 \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3}$$

כאשר $x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$. לכן

$$\text{Nul}(A) = \text{span} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\dim(\text{Nul}(A)) = 3.$$

משפט 10.7

נניח ש- $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ותהי A^t המשוחלפת של A . אז

$$\text{Row } A = \text{Col } A^t, \quad \text{Col } A = \text{Row } A^t.$$

הוכחה: תרגיל בית.

משפט 10.8

נניח ש- $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$. אם ניתן להגיע מ- A ל- B ע"י ביצוע מספר סופי של פעולות שורה אלמנטריות אז

$$\text{row } A = \text{row } B.$$

הוכחה: תרגיל בית.

משפט 10.9

נניח ש- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ונניח ש- B המטריצה המדורגת המתקבלת מ- A . אז

$$\text{Row } A = \text{Row } B, \quad \text{Nul } A = \text{Nul } B.$$

הוכחה: תרגיל בית.

דוגמה 10.10

עבור המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

מצאו בסיס ל-

Row A (א)

Nul A (ב)

Col A (ג)

פתרון:

(א)

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow -R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - \frac{5}{13}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2 - 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ולכן הוקטורים הלא כולה אפסים

$$v_1 = (1 \ 0 \ 2 \ 0 \ 1) , \quad v_2 = (0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 1) , \quad v_3 = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1) .$$

מהווה בסיס של Row A .

(ב) בכדי למצוא בסיס של Nul A נפתור את המערכת ההומוגנית $AX = 0$. ע"י המטריצה המדורגת הנמצאת לעיל מקבלים את המערכת המתאימה

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_5 &= 0 \\ x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= -2x_3 - x_5 \\ x_2 &= x_3 - x_5 \\ x_4 &= -x_5 \end{aligned}$$

כך ש-

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s - t \\ s - t \\ s \\ -t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

הינה בסיס של Nul A .

(ג) שיטה 1

לפי משפט 10.7 ניתן למצוא בסיס של $\text{Col } A$ ע"ל למצוא בסיס של $\text{Row } A^t$:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & -7 \\ 5 & -8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

המדורגת של A^t היא

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$B_{\text{Row } A^t} = \{(1 \ -2 \ 0 \ 3), (0 \ 1 \ 3 \ 0), (0 \ 0 \ -5 \ -13)\}$$

ואז לפי משפט 10.7:

$$B_{\text{Col } A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ -13 \end{pmatrix} \right\}$$

שיטה 2

לפי 10.1 העמודות של A המתאימות לעמודות של המדורגת U עם איבר מוביל, מהוות בסיס. מכיוון שיש איבר מוביל בעמודה ה-1 עמודה ה-2 ועמודה ה-4 בהמדורגת U , אז עמודה ה-1 עמודה ה-2 ועמודה ה-4 של A מהווה בסיס:

$$B_{\text{Col } A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$$