

שיעור 12

רדוקציות פולינומיאליות

12.1 $CLIQUE$ היא NP - שלמה

משפט 12.1 $CLIQUE \in NPC$

הבעיית $CLIQUE$ היא (ראו הגדרה 10.5):

$$CLIQUE = \{ \langle G, k \rangle \mid k \text{ מכיל קליקה בגודל } k \}.$$

$CLIQUE$ היא NP - שלמה

הוכחה:

(1) הוכחנו כי $CLIQUE \in NP$ במשפט 10.2.

(2) נוכיח כי $CLIQUE$ היא NP קשה ע"י רדוקציה $3SAT \leq_P CLIQUE$.

פונקציית הרדוקציה

בהינתן נוסחת $3CNF$ ϕ מעל n משתנים x_1, x_2, \dots, x_n המכיל m פסוקיות, ניצור זוג $\langle G, k \rangle$ ונוכיח כי

$$\langle \phi \rangle \in 3SAT \iff \langle G, k \rangle \in CLIQUE.$$

נבנה את הגרף G באופן הבא:

הקדקודים של G :

לכל פסוקית C_i ב- ϕ המכילה 3 ליטרלים ניצור שלשה t_i המכילה 3 קודקודים המתאימים לליטרלים של C_i :

$$x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \longrightarrow \begin{array}{ccc} \textcircled{x_1} & \textcircled{\bar{x}_3} & \textcircled{x_4} \end{array}$$

הצלעות של G :

נבחר בין כל שני קודקודים פרט לזוגות הבאים:

- זוג קודקודים המתאימים למשתנה ומשלמים שלו.
- זוג קודקודים שנמצאים באותה שלושה.

לדוגמה:

$$\phi = \underbrace{\left(\overset{T}{x_1} \vee \overset{T}{\bar{x}_2} \vee x_3 \right)}_{C_1} \wedge \underbrace{\left(\bar{x}_1 \vee \overset{T}{\bar{x}_2} \vee x_3 \right)}_{C_2} \wedge \underbrace{\left(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \overset{T}{\bar{x}_3} \right)}_{C_3}$$



נקבע $k = m$.

נכונות הרדוקציה

(1) ניתן לבנות את G בזמן פולינומיאלי בגודל ϕ .

(2) נוכיח כי

$$\langle \phi \rangle \in 3SAT \iff \langle G, k \rangle \in CLIQUE.$$

כיוון \Leftarrow

- נניח כי ϕ ספיקה ונסתכל על השמה המספקת את ϕ .
- בכל פסוקית C_i ב- ϕ יש לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך T .
- נבחר מכל שלשה t_i בקודקוד אחד המתאים לליטרל שקיבל ערך T ב- C_i ונוסיף אותו לקליקה.
- מספר הקודקודים שבחרנו שווה k וכל שניים מהם מחוברים בצלע כי לא בחרנו שני קודקודים מאותה שלשה ולא בחרנו שני קודקודים המתאימים למשתנה ומשלים שלו.
- ולכן G מכיל קליקה בגודל k .

כיוון \Rightarrow

- נניח כי G מכיל קליקה בגודל k ונסתכל על קליקה כזו.
- לפי הבנייה הקליקה מכילה בדיוק קודקוד אחד מכל שלשה t_i . ניתן השמה למשתנים של ϕ כך שהליטרל שמתאים לקודקוד שנמצא בקליקה יקבל ערך T .
- השמה זו אפשרית מכיוון שהקליקה לא מכילה שני קודקודים המתאימים למשתנה ומשלים שלו.

- בנוסף השם ϕ מספקת את ϕ מכיוון שהקליקה מכילה קודקוד מכל שלשה t_i ולכן הליטרל המתאים לקודקוד בשלשה t_i קיבל ערך T ולכן הוא מספק את הפסוקית C_i .
- לכן ϕ ספיקה.



12.2 בעיית הקבוצה הבלתי תלויה

הגדרה 12.1 קבוצה בלתי תלויה

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, קבוצה בלתי תלויה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $S \subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u, v \in S$ מתקיים $(u, v) \notin E$.



קבוצה בלתי תלויה בגודל $k = 3$:



קבוצה בלתי תלויה בגודל $k = 3$:

הגדרה 12.2 בעיית IS

קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר k .
פלט: האם קיימת קבוצה בלתי תלויה ב- G בגודל k ?

$$IS = \{ \langle G, k \rangle \mid k \text{ קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \}$$

משפט 12.2 $IS \in NPC$

הבעיה IS היא NP - שלמה.

הוכחה:

(1) נוכיח כי $IS \in NP$

נבנה אלגוריתם אימות V עבור IS .
 $= V$ על קלט $(\langle G, k \rangle, y)$:

- בודק האם y היא קבוצה של k קודקודים מ- G השונים זה מזה.
 - אם לא \Rightarrow דוחה.
- בודק האם כל שני קודקודים מ- y לא מחוברים בצלע ב- G .
 - אם כן \Rightarrow מקבל.

○ אם לא \Rightarrow דוחה.

(2) נוכיח כי $CLIQUE \leq_P IS$

פונקציית הרדוקציה:

בהינתן זוג $\langle G, k \rangle$ הקלט של $CLIQUE$, ניצור זוג $\langle G', k' \rangle$, הקלט של IS , ונוכיח כי:

$$\langle G, k \rangle \in CLIQUE \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in IS.$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

(1) נניח שהגרף הוא $G = (V, E)$.

אז הגרף G' הוא הגרף המשלים של $G = (V, E)$.

ז"א $G' = \bar{G} = (V, \bar{E})$ כאשר

$$\bar{E} = \{(u_1, u_2) \mid (u_1, u_2) \notin E\}.$$

(2) $k' = k$.

לדוגמה, בהינתן הגרף $G = (V, E)$ שמכיל קליקה בגודל $k = 3$, הפונקציית הרדוקציה R מחזירה את הגרף $\bar{G} = (V, \bar{E})$ ואת המספר $k' = k = 3$, כמתואר בתרשים למטה:



נכונות הרדוקציה

(1) ניתן לבנות G' בזמן פולינומיאלי בגודל G .

(2) נוכיח כי $\langle G, k \rangle \in CLIQUE \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in IS$.

כיוון \Leftarrow

בהינתן גרף $G = (V, E)$ ושלם k .

נניח כי $\langle G, k \rangle \in CLIQUE$.

\Leftarrow G מכיל קליקה S בגודל k .

\Leftarrow אם $u_1, u_2 \in S$ (אם u_1, u_2 שני קודקודים בקליקה S) אזי $(u_1, u_2) \in E$.

כלומר, כל שני קודקודים ב- S מחוברים בצלע של G .

\Leftarrow אם $u_1, u_2 \in S$ אזי $(u_1, u_2) \notin \bar{E}$.

כלומר, כל שני קודקודים ב- S לא מחוברים בצלע של המשלים של הגרף \bar{G} , דהיינו G' .

\Leftarrow אותה הקבוצה S היא קבוצה בלתי תלוייה ב- G' בגודל $k' = k$.

$\Leftarrow G' = \bar{G}(V, \bar{E})$ מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל k' .

$\Leftarrow \langle G', k \rangle \in IS$

\Rightarrow כיוון

בהינתן גרף G' ושלים k' .

נניח כי $\langle G', k' \rangle \in IS$.

$\Leftarrow G'$ מכיל קבוצה בלתי תלוייה S בגודל k' .

\Leftarrow אם $u_1, u_2 \in S$ אזי $(u_1, u_2) \notin \bar{E}$.

כלומר, כל שני קדקודים ב- S לא מחוברים בצלע של G' .

\Leftarrow אם $u_1, u_2 \in S$ אזי $(u_1, u_2) \in E$.

כלומר, כל שני קדקודים ב- S מחוברים בצלע של $G(V, E)$.

\Leftarrow אותה הקבוצה S היא קליקה ב- G בגודל $k = k'$.

$\Leftarrow G$ מכיל קליקה בגודל k .

$\Leftarrow \langle G, k \rangle \in CLIQUE$

■

12.3 בעיית הכיסוי בקודקודים

הגדרה 12.3 כיסוי בקודקודים

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, כיסוי בקודקודים ב- G הוא תת-קבוצה של קודקודים $C \subseteq V$ כך שלכל צלע $u, v \in S$ מתקיים $u \in C$ או $v \in C$.



כיסוי בקדקודים בגודל $k = 2$:



כיסוי בקדקודים בגודל $k = 5$:



כיסוי בקדקודים בגודל $k = 5$:

12.4 הבעיה VC

הגדרה 12.4 בעיית VC

קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר k .
פלט: האם קיים כיסוי בקודקודים ב- G בגודל k ?

$$VC = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל כיסוי בקודקודים בגודל } k \}$$

משפט 12.3 $VC \in NPC$

הבעיה VC היא NP - שלמה.

הוכחה:

נוכיח כי $VC \in NP$

נבנה אלגוריתם אימות V עבור VC .
 $V = \text{על קלט } \langle G, k \rangle, y$:

• בודק האם כל צלע ב- G מכילה לפחות קצה אחד ב- y .

◦ אם כן \Rightarrow מקבל.

◦ אם לא \Rightarrow דוחה.

נוכיח כי VC היא NP -קשה ע"י רדוקציה $IS \leq_P VC$

פונקציית הרדוקציה:

בהינתן זוג $\langle G, k \rangle$ הקלט של IS , ניצור זוג $\langle G', k' \rangle$ הקלט של VC ונוכיח כי

$$\langle G, k \rangle \in IS \iff \langle G', k' \rangle \in VC.$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

(1) נניח שהגרף הוא $G = (V, E)$.

אז הגרף G' הוא אותו גרף $G = (V, E)$.

(2) $k' = |V| - k$.

נכונות הרדוקציה

(1) ניתן לבנות G' בזמן פולינומיאלי בגודל G .

(2) נוכיח כי $\langle G, k \rangle \in IS \iff \langle G', k' \rangle \in VC$.

כיוון \Leftarrow

בהינתן גרף $G = (V, E)$ ושלם k .

נניח כי $\langle G, k \rangle \in IS$

G מכיל קבוצה בלתי תלוייה S בגודל k . \Leftarrow
 אם $u_1 \in S$ וגם $u_2 \in S$ אז $(u_1, u_2) \notin E$. \Leftarrow
 כלומר, כל שני קדקודים ב- S **לא מחוברים** בצלע ב- G .
 השלילה הלוגית של הגרירה הזאת היא:
 אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \notin S$ או $u_2 \notin S$.
 \Leftarrow אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \in V \setminus S$ או $u_2 \in V \setminus S$.
 \Leftarrow $V \setminus S$ היא כיסוי קדקודים ב- G בגודל $k' = |V| - k$.
 \Leftarrow הגרף $G' = G$ מכיל כיסוי קדקודים בגודל k' .
 $\Leftarrow \langle G', k' \rangle \in VC$

\Rightarrow כיוון

בהינתן גרף G' ושלם k' .
 נניח כי $\langle G', k' \rangle \in VC$.
 \Leftarrow G' מכיל כיסוי בקדקודים C בגודל k' .
 \Leftarrow אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \in C$ או $u_2 \in C$.
 \Leftarrow השלילה הלוגית של הגרירה הזאת היא:
 אם $u_1 \notin C$ וגם $u_2 \notin C$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.
 \Leftarrow אם $u_1 \in V \setminus C$ וגם $u_2 \in V \setminus C$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.
 \Leftarrow כל שני קדקודים ב- $V \setminus C$ לא מחוברים בצלע ב- G' .
 \Leftarrow $V \setminus C$ הוא קבוצת בלתי תלוייה ב- G' בגודל $k = |V| - k'$.
 \Leftarrow הגרף $G = G'$ מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל k .



PARTITION 12.5

הגדרה 12.5 בעיית PARTITION

קלט: קבוצת מספרים שלמים $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
 פלט: האם קיימת תת-קבוצה $Y \subseteq S$ כך ש- $\sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in S \setminus Y} y$?

$$PARTITION = \left\{ S \mid \sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in S \setminus Y} y \text{ ש- } Y \subseteq S \text{ קבוצת שלמים, וקיימת תת-קבוצה } Y \subseteq S \right\}$$

12.6 רדוקציות פולינומיאליות

משפט 12.4 רדוקציות פולינומיאליות

$$\begin{aligned}
 SAT &\leq_P 3SAT \\
 3SAT &\leq_P CLIQUE \\
 CLIQUE &\leq_P IS \\
 IS &\leq_P VC \\
 SubSetSum &\leq_P PARTITION \\
 HAMPATH &\leq_P HAMCYCLE
 \end{aligned}$$

12.7 שפות NP שלמותמשפט 12.5 שפות NP - שלמות

SAT	-NP שלמה.	(משפט קוק לויין)
$3SAT$	-NP שלמה.	
$HAMPATH$	-NP שלמה.	
$CLIQUE$	-NP שלמה.	
IS	-NP שלמה.	
VC	-NP שלמה.	