

שיעור 13

סיבוכיות מקום ושלמות ב PSPACE

13.1 הגדרה של סיבוכיות מקום

הגדרה 13.1 סיבוכיות מקום של מבנה טיורינג

הסיבוכיות מקום של מ"ט M על קלט w היא פונקציה $(|w|) f$ השווה למספר התאי סרט לכל היותר של המוכנה M שבהם נעשה שימוש בחישוב של M על w .

הגדרה 13.2 המחלוקת $SPACE(f(n))$

מחלקת $(f(n))$ היא אוסף כל השפות L עבורן קיימת מבנה טיורינג דטרמיניסטי M שמכריעה אותה כך ש: על כל קלט w באורך $|w| = n$, המוכנה M משתמשת לכל היותר $O(f(n))$ תאים סרט. $SPACE(f(n)) = \{L \mid L \text{ שמכריעה } L \text{ ומשתמשת לכל היותר ב- } O(f(n)) \text{ תאים סרט.}\}$

דוגמה 13.1

נראה כי ניתן לפתר את הבעיה SAT ע"י אלגוריתם שהוא רץ במקום ליניארי. כלומר:

$$SAT \in SPACE(n).$$

תהי ϕ נוסחה בוליאנית כלשהי. נסמן $|\phi| = n$ ונסמן ב- m את מספר המשתנים ב- ϕ . נגדיר מבנה M שפועלת כך:

$$\text{על כל קלט } \langle\phi\rangle = M$$

1 M רושמת את המחרוזת $\langle\phi\rangle$ על סרט הקלט.

2 לכל השמה a_1, a_2, \dots, a_m (כאשר $a_i \in \{0, 1\}$) הוא הערך הנוכחי של x_i :

a M רושמת את מהירות של ההשמה $a_1 a_2 \dots a_m$ על סרט העבודה.

b M מחשבת את הערך של ϕ עבור ההשמה הנוכחית a_1, \dots, a_m ע"י סריקה של הקלט $\langle\phi\rangle$ שרשום על סרט הקלט.

ג אם מתקיים $\phi(a_1, \dots, a_m) = 1$ אז M מקבלת.

3 אם עבור כל ההשומות התקבל $0 = \phi(a_1, \dots, a_m)$ אז M דוחה.

מכאן אנחנו רואים כי המוכנה M_1 רצתה במקום ליניארי. בפרט:

- M שומרת על סרט העבודה את ההשמה $a_1 \dots a_m$ וזה נדרש $O(m)$ תאימים.

- המספר המשתנים, m הוא n לכל היותר.

- לכן M רצה במקום $O(n)$.

לפיכך:

$$SAT \in SPACE(n) .$$

הגדלה 13.3 המחלוקת $NSPACE(f(n))$

מחלקה $NSPACE(f(n))$ היא אוסף כל השפות L עבורן קיימת מכונה טירונג אי-דטרמיניסטיבית N שמכריעה אותה כך ש: על כל קלט w באורך $|w| = n$ המכונה N משתמשת לכל היותר $O(f(n))$ תאי סרט מתוך כל המסלולי חישוב של N .

$$NSPACE(f(n)) = \{L \mid \text{קיימים } L \text{ שפה } L \text{ ומשתמשת לכל היותר ב- } O(f(n)) \text{ תאי סרט.}\}$$

דוגמה 13.2

תהי השפה הבאה:

$$ALL_{NFA} = \{\langle A \rangle \mid L(A) = \Sigma^* \text{ עבורו } NFA \text{ הוא } A\} .$$

הוכיחו כי $ALL_{NFA} \in NSPACE(n)$.**פתרון:**

הפתרון מהתבסס על זה שזה פשוט יותר לבנות אלגוריתם המכريع את השפה המשילמה:

$$\overline{ALL_{NFA}} = \{\langle A \rangle \mid w \in \Sigma^* \text{ עבורו } A \text{ דוחה } w\} .$$

נשתמש במשפט מרכזי כדי לבנות אלגוריתם שמכريع את $\overline{ALL_{NFA}}$:

משפט 13.1

אם $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ הוא NFA וקיים מילה w שנדחה ע"י M אז האורך המילה $|w| \leq 2^q$ כאשר $q = |Q|$

לפנינו שונთאר את האלגוריתם עצמו, נגדיר סימון שנשתמש בו בבניית האלגוריתם. נניח ש- $P(Q)$ היא מכונית NFA כלשהי. תהי $P(Q)$ הקבוצה החזקה של Q . עבר כל הfonקציית המעברים היא מהצורה

$$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow P(Q) .$$

בהתנחת מילה $w = a_1 a_2 \dots a_n$ אשר Σ הוא התו ה- i של המילה, $n \leq i \leq 1$. נגדיר את הסדרה הבאה:

$$S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$$

כך אשר

$$S_0 \triangleq \{q_0\}, \quad S_{i+1} \triangleq \delta(S_i, a_i),$$

כך אשר $S_i \in P(Q)$ לכל $0 \leq i \leq n$.

בנייה האלגוריתם

בנייה אלגוריתם לא-דטרמיניסטי, N המכريع את $\overline{ALL_{NFA}}$ באופן הבא:על כל קלט $x = N$:

1) בודקת אם $\langle M \rangle$, כאשר $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ היא מכונת NFA.

• אם לא $\Leftarrow N$.

2) יי' $|q|$ מספר המ מצבים של M . נגדיר $S_0 = \{q_0\}$.

3) N מבצעת את הלולאה הבאה:

$$\text{לכל } 0 \leq i \leq 2^q - 1$$

a) בוחרת באופן אידטרמיניסטי תו קלט Σ $a_i \in$.

b) מחשבת

$$S_{i+1} = \delta(S_i, a_i).$$

4) אם $N \Leftarrow S_{i+1} \cap F \neq \emptyset$ תדחה.

בפועל N בודקת את התנאי הזה ע"י לסמן את כל המ מצבים שב- S_{i+1} . אם אחד מה מצבים המסומנים הוא מצב קבלה אז N תדחה.

4) אם בסיום הלולאה לא הייתה מצב-קבלה באף אחת מן הקבוצות S_i אז N מקבל.

אם $x \in \overline{\text{ALL}_{NFA}}$

כasher A היא מכונת NFA. וקיימת מילה $w \in \Sigma^*$ כך ש- A תדחה.

\Leftarrow קיימת מילה w' באורך לפחות 2^q ש- A תדחה.

\Leftarrow קיימת ריצה של N שבה N בוחרת את התווים של w' בלולאה.

\Leftarrow במהלך הריצה של A על w' , אין מצב קבלה באף אחת מן הקבוצות S_i .

\Leftarrow N לא דחתה עד סוף הלולאה.

\Leftarrow בסופה N מקבל.

אם $x \notin \overline{\text{ALL}_{NFA}}$ אז שני מקרים:

מקרה 1) $N \Leftarrow x \neq \langle A \rangle$ תדחה בשלב 1.

מקרה 2) $L(A) = \Sigma^*$ ו- $x = \langle A \rangle$

\Leftarrow לכל מילה $w \in \Sigma^*$, קיים שלב שבו A נמצא במצב קבלה.

\Leftarrow בכל ריצה של N , קיימת איטרציה i עבורה $\emptyset \neq \cap S_i \cap F \neq \emptyset$.

\Leftarrow באיטרציה זו N תדחה.

\Leftarrow בכל ריצה N תדחה.

\Leftarrow N דוחה את x .

סיבוכיות מקומ

• נסמן ב- $| \langle M \rangle | = n$ את אורך הקלט, וב- $|Q| = q$ את מספר המ מצבים של ה- NFA.

• כל מצב וכל מעבר של M מופיעים בקיים, מתקיים $O(n) = q$.

• במהלך כל ריצה, N שומרת רק את המידע הבא:

- * הקבוצה הנווחית $Q \subseteq S_i$ של מצבים אפשריים.
- לפועל N שומרת S_i בוקטור ביטים באורך q לכל היוטר.
- * מונה של האיטרציות הלולאה עד 2^q , המאושר ביצוג בינארי ודורש $O(q)$ ביטים.
- *תו קלט אחד הנבחר באופן א-דטרמיניסטי בכל איטרציה, ומשתני עזר לחישוב S_{i+1} , הדורשים מקום קבוע או בינארי ב- q .

לפייכם סיבוכיות המקום הכלולת של N היא

$$O(q) = O(n) .$$

לפייכם האלגוריתם N פועל במקום בינארי.

שימוש לב: N ביןארי במקום אף על פי שזמן הריצה שלו עלול להיות אקספוננציאלי.

13.2 משפט סבץ'

משפט 13.2 משפט סבץ'

לכל פונקציה $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$, אם $n \geq f(n)$

$$NSPACE(f(n)) \subseteq SPACE(f^2(n)) .$$

רעיון הוכחה:

הוכחה:

13.3 המחלקה PSPACE

הגדרה 13.4 סיבוכיות מקום של בעיה/שפה

בහינתן קלט w באורך $|w| = n$. אומרים כי ניתן להכריע השפה L בזמן $f(n)$ אם קיימת מ"ט M המכריע את L כך שלכל $w \in \Sigma^*$ חסום על w זמן ע"י $(|w|)^f$.

הגדרה 13.5 PSPACE

PSPACE היא מחלקת כל הבעיה שניית לפתרון על ידי מכונת טיריניג דטרמיניסטית תוך שימוש בסיבוכיות מקום פולינומית.

הגדרה 13.6 NPSPACE

NPSPACE היא מחלקת כל הבעיה שניית לפתרון על ידי מכונת טיריניג א-דטרמיניסטית תוך שימוש בסיבוכיות מקום פולינומית.