אלגברה לינארית סמסטר סתו 2022-23
שאלות חזרה

שאלות

שאלה 1

פתרו את המערכת הבאה

$$\begin{aligned} iz_1 + (1-i)z_2 &= 2i \ , \\ (1+2i)z_1 - 2z_2 &= 1 \ . \end{aligned}$$

שאלה 2

פתרו את המערכת הבאה

$$\begin{aligned} 3iz_1 + (6-6i)z_2 &= 6i \ , \\ (1+i)z_1 - 2z_2 &= 1 \ . \end{aligned}$$

שאלה 3

פתרו את המערכת הבאה

$$\begin{aligned} 4z_1 + 4z_2 &= 4i \ , \\ (5+10i)z_1 - 5z_2 &= 5 \ . \end{aligned}$$

שאלה 4 נתונה המערכת הלינארית הבאה מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} ax + y + 2z &= 0 \\ ax + (a-2)y + 5z &= -5 \\ 2ax + (a-1)y + (a^2-6a+15)z &= a-9 \end{aligned}$$

א. מצאו את ערכי הפרמטר a עבורם למערכת אין פתרון.

ב. מצאו את הערכים של a עבורם למערכת יש פתרון יחיד.

ג. מצאו את הערכים של a עבורם למערכת יש אינסוף פתרונות. עבור ערך a הגדול מבין אלו שמצאות, רשמו את הפתרון הכללי.

שאלה 5 (מבחן תשפ"ב סמסטר ב מועד ב)

נתונה מערכת משוואות לינאריות:

$$\begin{cases} x+ay+2z &= 6-a^2 \\ ax+2y+z &= 2 \\ (1-a)x+(a-2)y+z &= 0 \\ (1-2a)x+(a-4)y &= 8-5a \end{cases}$$

א) מצאו את ערכי הפרמטר a עבורם למערכת יש לפחות פתרון אחד.

ב) עבור כל אחד מערכי a שמצאתם בסעיף א', מצאו את פתרון המערכת (יחיד או כללי).

שאלה 6 (מבחן תשע"ט סמסטר א מועד א)

נתונה המערכת הלינארית הבאה:

$$\begin{aligned} x+2y+z &= -1 \\ 2x+4y+(k+1)z+w &= 0 \\ 2x+4y+2kz+(k^2-1)w &= k-1 \end{aligned}$$

א) מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין אף פתרון.

ב) מצאו את ערכים של k עבורם למערכת ישנו פתרון יחיד

ג) מצאו את הערכים של k עבורם למערכת ישנם ∞ פתרונות.

שאלה 7 (מבחן תשע"ט סמסטר 1 מועד ב)

נתונה המערכת הלינארית הבאה:

$$\begin{aligned} x+(k-4)y &= 3 \\ 2x+(k^2-4k)y &= 2-k \\ -3x+6y+kz &= 1 \end{aligned}$$

א) מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין אף פתרון.

ב) מצאו את ערכים של k עבורם למערכת ישנו פתרון יחיד.

ג) מצאו את הערכים של k עבורם למערכת ישנם ∞ פתרונות.

שאלה 8 (מבחן תשע"ט סמסטר ב מועד א)

נתונה המערכת הלינארית הבאה:

$$\begin{aligned} x+(a-1)y-z &= 4 \\ (a+1)x+(2a-2)y+(a-4)z &= a+10 \\ (a+2)x+(3a-3)y+(2a-7)z &= a+17 \end{aligned}$$

עבור אילו ערכי הפרמטר a למערכת:

א) פתרון יחיד

ב) אין פתרון

ג) אינסוף פתרונות?

במקרה של אינסוף פתרונות רשום את הפתרון הכללי.

שאלה 9 (מבחן תשפ"א סמסטר ב מועד א)

נתונה המערכת הלינארית הבאה:

$$\begin{aligned} x-3z &= 0 \\ x+y+kz &= 0 \\ 2x+ky+(2k^2+6k-16)z &= -2k^3+10k^2+82k-90 \end{aligned}$$

עבור אילו ערכי הפרמטר k למערכת:

א) פתרון יחיד

ב) אין פתרון

ג) אינסוף פתרונות?

במקרה של אינסוף פתרונות רשום את הפתרון הכללי.

שאלה 10 (מבחן תשפ"א סמסטר ב מועד ב)

נתונה המערכת הלינארית הבאה:

$$\begin{aligned} x+(k-6)y &= k-5 \\ 2x+(k-6)y &= k-4 \\ 3x+(k-6)y+(k-2)z &= -k^2+4k-5 \\ -2x+(k-6)y+(k-2)z &= 2k-10\ , \end{aligned}$$

עבור אילו ערכי הפרמטר k למערכת:

א) פתרון יחיד

ב) אין פתרון

ג) אינסוף פתרונות?

במקרה של אינסוף פתרונות רשום את הפתרון הכללי.

שאלה 11 נתונה המערכת הבאה:

$$\begin{aligned} x+\bar{3}y+z &= \bar{1} \\ \bar{3}x+y+\bar{2}z &= \bar{2} \\ \bar{2}x+\bar{2}y+\bar{3}z &= \bar{4} \end{aligned}$$

פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$. רשמו את כל הפתרונות בצורה מפורשת. כמה פתרונות יש למערכת?

שאלה 12 בהינתן מערכת לינארית בעלת 2 משוואות ו-3 משתנים מעל $\mathbb{Z}_3$, רשמו את כל האפשרויות למספר הפתרונות של המשוואה.

שאלה 13 (מבחן תשפ"א סמסטר ב מועד א)

תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{R})$. הוכיחו או הרפיכו:

א) אם $AB=B$ ו- $B\neq 0$ אז A היא מטריצה היחידה.

ב) $|A-B|=|A|-|B|$

שאלה 14 (מבחן תשע"ט סמסטר 1 מועד ב)

נאמר שמטריצה $A\in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית אם $A^t=A$. הוכח או הפרך: אם $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ סימטריות אז AB סימטרית.

שאלה 15 (מבחן תשפ סמסטר א מועד ב)

תהיינה A, B מטריצות מסדר $n\times n$. הוכיחו או הפריכו:

א) $|A+B|=|B+A|$

ב) אם $AB=AC$ אז $|B|=|C|$.

ג) אם קיים $\mathrm{v}\neq 0\in\mathbb{R}^n$ כך ש- $(AB)\mathrm{v}=0$ אז $|A|=0$ או $|B|=0$.

שאלה 16 תהיינה $A,B,C\in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A\neq 0$. הוכח או הפרך:

א. אם $AB=AC$ אז $B=C$.

ב. אם $AB=0$ אז $A=0$ או $B=0$.

שאלה 17 פתרו את המערכות הבאות מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x+y-2z &= 0\\ 2x-y+z &= 0\\ x+y-z &= 6 \end{aligned}$$

שאלה 18 נתונה המערכת הלינארית הבאה מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x-3z &= -3\\ 2x+ky-z &= -2\\ x+2y+kz &= 1 \end{aligned}$$

א מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין פתרון.

ב מצאו את הערכים של k עבורם למערכת יש פתרון יחיד.

ג מצאו את הערכים של k עבורם למערכת יש אינסוף פתרונות. לכל אחד מערכי k שמצאות, רשמו את הפתרון הכללי.

שאלה 19 פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_7$. כמה פתרונות יש למערכת?

$$\begin{aligned} x+\bar{2}y+z &= \bar{2}\\ \bar{3}x+y+\bar{4}z &= \bar{3}\\ \bar{2}x+\bar{4}y+\bar{4}z &= \bar{3} \end{aligned}$$

שאלה 20 פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$. כמה פתרונות יש למערכת?

$$\begin{aligned} x+\bar{3}y+z &= \bar{1}\\ \bar{3}x+y+\bar{2}z &= \bar{2}\\ \bar{2}x+\bar{2}y+\bar{3}z &= \bar{4} \end{aligned}$$

שאלה 21 (מבחן תשפ"ב סמסטר ב מועד ב)

פתרו את מערכת המשוואות הבאה מעל שדה $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} \bar{3}x+\bar{2}y+z &= \bar{4}\\ \bar{4}x+\bar{2}y+z &= \bar{1}\\ x+y+\bar{3}z &= \bar{1} \end{cases}$$

רשמו את כל הפתרונות שלה.

שאלה 22 נסמן $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\4&2&-5\\0&1&3\end{pmatrix}$. מצאו את $A^2-4A+2I$.

שאלה 23 תהיינה $A,B,C\in M_n$. הוכח או הפרך:

אם $AB=AC$ אז $B=C$.

שאלה 24 חשבו את המטריצה ההפוכה של $A=\begin{pmatrix}-5&8&0\\-5&9&1\\-4&7&2\end{pmatrix}$ בעזרת זה פתרו את המערכת

$$\begin{aligned}-5x+8y&=1\\-5x+9y+z&=2\\-4x+7y+2z&=3\end{aligned}$$

שאלה 25 **(מבחן תשע"ט סמסטר ב מועד ב)**

פתרו את המערכת הבאה בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{cases}2x+y+z&=3\\x+2y+z&=0\\x+y+2z&=0\end{cases}$$

שאלה 26 פתרו את המערכת הבאה בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{aligned}-5x-4y+5z-2t&=-2\\4x-y-5z-2t&=-9\\4x-y-4z-t&=-10\\2x-y-3z-2t&=-5\end{aligned}$$

שאלה 27 פתרו את המערכות הבאות מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}2x+y-4z&=0\\4x+5y+z&=0\\2x+3y-z&=6\end{aligned}$$

שאלה 28 נתונה המערכת הלינארית הבאה מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x+y &= -3 \\ x+ky &= -3 \\ x+y+2kz &= 1 \end{aligned}$$

א מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין פתרון.

ב מצאו את הערכים של k עבורם למערכת יש פתרון יחיד.

ג מצאו את הערכים של k עבורם למערכת יש אינסוף פתרונות. לכל אחד מערכי k שמצאות, רשמו את הפתרון הכללי.

שאלה 29 נסמן $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. מצאו את $A^2-3A+2I$.

שאלה 30 תהיינה $A,B\in M_n$. הוכח או הפרך:

אם $AB=0$ ו- $A\neq 0$, אז B איננה הפיכה.

שאלה 31 תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{R})$. הוכח או הפרך: $(AB)^2=A^2B^2$.

שאלה 32 חשבו את המטריצה ההפוכה של $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ בעזרת זה פתרו את המערכת

$$\begin{aligned} 3x+2y+z &= 0 \\ 4x+2y+z &= 2 \\ 4x+6y+2z &= 3 \end{aligned}$$

שאלה 33 פתרו את המערכת הבא בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{aligned} -5x-4y+5z-2t &= -2 \\ 4x-y-5z-2t &= -9 \\ 4x-y-4z-t &= -10 \\ 2x-y-3z-2t &= -5 \end{aligned}$$

שאלה 34 בהינתן מערכת לינארית בעלת 3 משוואות ו-4 משתנים מעל $\mathbb{Z}_5$, רשום את כל האפשרויות למספר הפתרונות של המשוואה.

שאלה 35 תהיינה $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A \neq 0$.

הוכח או הפרך:
אם $AB = AC$ אז $B = C$.

שאלה 36 תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A \neq 0,\ B \neq 0$. הוכח או הפרך:

$$AB = BA$$

שאלה 37 תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A \neq 0,\ B \neq 0$. הוכח או הפרך:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

שאלה 38 תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A \neq 0,\ B \neq 0$. הוכח או הפרך:

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

שאלה 39 תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A \neq 0$. הוכח או הפרך:
אם $AB = 0$ אז $A = 0$ או $B = 0$.

שאלה 40 תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A \neq 0,\ B \neq 0$. הוכח או הפרך:

$$(AB)^t = A^t B^t$$

שאלה 41 תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A \neq 0,\ B \neq 0$. הוכח או הפרך:

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

פתרונות

שאלה 1

$$x = \frac{2+i}{3}\ , \qquad y = \frac{-3+5i}{6}$$

■

שאלה 2

$$x = \frac{3+i}{5}\ , \qquad y = \frac{-3+4i}{10}$$

■

שאלה 3

$$x = \frac{1}{2}\ , \qquad y = \frac{-1}{2} + i$$

■

שאלה 4

נדרג את המטריצה המורחבת של המערבת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 0 \\ a & a-2 & 5 & -5 \\ 2a & a-1 & a^2-6a+15 & a-9 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-2\cdot R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & 3 & -5 \\ 0 & a-3 & a^2-6a+11 & a-9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & a^2-6a+8 & a-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & (a-4)(a-2) & a-4 \end{pmatrix}$$

לכן, למערכת יש פתרון יחיד אם"ם $a \neq 0, 2, 3, 4$.

כאשר $a = 4$ נקבל $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולמערכת יש אינסוף פתרונות (שורה כולה אפס).

הפתרון הכללי הוא $(x, y, z) = ((5+z)/4, -5-3z, z)$

כאשר $a = 2$ נקבל $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ולמערכת אין פתרון (שורה סתירה).

כאשר $a = 3$ נקבל $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\cdot R_3\to R_3+\cdot R_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ ולמערכת אין פתרון (שורה סתירה).

כאשר $a=0$ נקבל

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2+3R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to \frac{9}{8}\cdot R_3-R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

כך שלמערכת אין פתרון (שורה כולה אפס).

לסיכום,

א. אין פתרון כאשר $a=0,2,3$.

ב. יש פתרון יחיד כאשר $a\neq 0,2,3,4$.

ג. אינסוף פתרונות כאשר $a=4$ מצורה $(x,y,z)=\left(\frac{z+5}{4},-5-3z,z\right)$

■

שאלה 5

א)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 6-a^2 \\ a & 2 & 1 & 2 \\ 1-a & a-2 & 1 & 0 \\ 1-2a & a-4 & 0 & 8-5a \end{array}\right) \xrightarrow[R_4\to R_4+(2a-1)R_1]{\substack{R_2\to R_1-aR_1 \\ R_3\to R_3+(a-1)R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 6-a^2 \\ 0 & 2-a^2 & 1-2a & a^3-6a+2 \\ 0 & a^2-2 & 2a-1 & -a^3+a^2+6a-6 \\ 0 & 2a^2-4 & 4a-2 & -2a^3+a^2+7a+2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4\to R_4+2R_2]{R_3\to R_2+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 6-a^2 \\ 0 & 2-a^2 & 1-2a & a^3-6a+2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-4 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-5a+6 \end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון כאשר $\left\{\begin{array}{rl} a^2-4 & =0 \\ a^2-5a+6 & =0 \end{array}\right. \Leftarrow a=2$.

מסקנה: עבור $a=2$ למערכת ∞ פרתונות.

עבור $a=2$ אין פתרון.

ב)

$\underline{a=2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2\to -\frac{1}{2}R_2]{R_1\to R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון כללי:

$$x=z\ , \qquad y=-\frac{3}{2}z+1\ , \qquad z\in\mathbb{R}\ .$$

■

שאלה 6

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & k+1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2k & k^2-1 & k-1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_1-2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2k-2 & k^2-1 & k+1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3\to R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-3 & k-3 \end{array}\right)$$

פתרון יחיד – ודאי לא יתכן כי יש 3 משוואות בארבעה משתנים.
אם $k^2-3\neq 0$ וגם $k-1\neq 0$ (כלומר עבור $k\neq\pm\sqrt{3},1$) אז למערכת יש ∞ פתרונות.
עבור $k=1$ נקבל

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

ולמערכת אין פתרון.

עבור $k=\pm\sqrt{3}$ נקבל

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{3}-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm\sqrt{3}-3 \end{array}\right)$$

ולמערכת אין פתרון.

■

שאלה 7

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 2 & k^2-4k & 0 & 2-k \\ -3 & 6 & k & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3+3R_1]{R_2\to R_1-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 0 & k^2-6k+8 & 0 & -4-k \\ 0 & 3k-6 & k & 10 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 0 & (k-4)(k-2) & 0 & -4-k \\ 0 & 3(k-2) & k & 10 \end{array}\right)$$

■

$\underline{k=2,4}$

שורה סתירה, ולכן אין פתרון.

$\underline{k \neq 2,4}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 0 & (k-4)(k-2) & 0 & (-4-k) \\ 0 & 3(k-2) & k & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to(k-4)R_3]{R_2\to 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 0 & 3(k-4)(k-2) & 0 & 3(-4-k) \\ 0 & 3(k-2)(k-4) & k(k-4) & 10(k-4) \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 0 & 3(k-4)(k-2) & 0 & 3(-4-k) \\ 0 & 0 & k(k-4) & 13k-28 \end{array}\right)$$

$\underline{k=0}$ $\Leftarrow$ שורה סתירה ולכן אין פתרון.

סיכום:

א) $k=0,2,4$ אין אף פתרון.

ב) $k\neq 0,2,4$ יש פתרון יחיד.

ג) אין ערכים של k עבורם למערכת ישנם ∞ פתרונות.

■

<u>שאלה 8</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ a+1 & 2a-2 & a-4 & a+10 \\ a+2 & 3a-3 & 2a-7 & a+17 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-(a+2)R_1]{R_2\to R_2-(a+1)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ 0 & -a^2+2a-1 & 2a-3 & -3a+6 \\ 0 & -a^2+2a-1 & 3a-5 & -3a+9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ 0 & -a^2+2a-1 & 2a-3 & -3a+6 \\ 0 & 0 & a-2 & 3 \end{array}\right)$$

לכן,למערכת יש פתרון יחיד אס"ם $a-2\neq 0$ וגם $(-a^2+2a-1)\neq 0$ כלומר $a\neq 1,2$.

עבור $a=1$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

לכן למערכת אינסוף פתרונות. מתקבל

$$(x,y,z)=(1,y,-3)\ , \qquad y\in\mathbb{R}\ .$$

עבור $a=2$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

וקיבלנו שורת סתירה לכן אין פתרון. סיכום:

א) $a=2$ אין אף פתרון.

ב) $a\neq 1,2$ יש פתרון יחיד.

ג) עבור $a=1$ למערכת ישנם ∞ פתרונות.

■

שאלה 9

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 2 & k & 2k^2+6k-16 & -2k^3+10k^2+82k-90 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & k+3 & 0 \\ 0 & k & 2k^2+6k-10 & -2k^3+10k^2+82k-90 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-kR_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & k+3 & 0 \\ 0 & 0 & k^2+3k-10 & -2k^3+10k^2+82k-90 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & k+3 & 0 \\ 0 & 0 & (k+5)(k-2) & -2k^3+10k^2+82k-90 \end{array}\right)$$

לכן, למערכת יש פתרון יחיד אם"ם $k\neq -5,2$.

עבור $k=2$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 98 \end{array}\right)$$

ולכן אין פתרון.

עבור $k=-5$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ולכן יש אינסוף פתרונות. הפתרון הכללי:

$$(x,y,z)=(3z,2x,z)\ ,\qquad z\in\mathbb{R}\ .$$

סיכום:

א) $k=2$ אין אף פתרון.

ב) $k=-5$ יש ∞ פתרונות.

ג) עבור $k\neq 2,-5$ למערכת יש פתרון יחיד.

■

שאלה 10

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-6 & 0 & k-5\\ 2 & k-6 & 0 & k-4\\ 3 & k-6 & k-2 & -k^2+4k-5\\ -2 & k-6 & k-2 & 2k-10 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4\to R_4+2R_1]{\substack{R_2\to R_2-2R_1\\ R_3\to R_3-3R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-6 & 0 & k-5\\ 0 & -(k-6) & 0 & -k+6\\ 0 & -2(k-6) & k-2 & -k^2+k+10\\ 0 & 3k-18 & k-2 & 4k-20 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3+3R_1]{R_3\to R_3-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-6 & 0 & k-5\\ 0 & -(k-6) & 0 & -k+6\\ 0 & 0 & k-2 & -k^2+3k-2\\ 0 & 0 & k-2 & k-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-6 & 0 & k-5\\ 0 & -(k-6) & 0 & -k+6\\ 0 & 0 & k-2 & k-2\\ 0 & 0 & k-2 & -k^2+3k-2 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-6 & 0 & k-5\\ 0 & -(k-6) & 0 & -k+6\\ 0 & 0 & k-2 & k-2\\ 0 & 0 & 0 & -k^2+2k \end{array}\right)$$

לכן אם $-k^2+2k=k(2-k)\neq 0$, כלומר $k\neq 0,2$ אז למערכת אין פתרון.

עבור $k=0$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 0 & -5\\ 0 & 6 & 0 & 6\\ 0 & 0 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ולמערכת יש פתרון יחיד: $(x,y,z)=(1,1,1)$.

עבור $k=2$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ולכן יש אינסוף פתרונות. הפתרון הכללי:

$$(x,y,z)=(1,1,z)\ , \qquad z\in\mathbb{R}\ .$$

סיכום:

א) $k=2$ ∞ אף פתרונות.

ב) $k=0$ פתרון יחיד: $(x,y,z)=(1,1,1)$

ג) עבור $k\neq 0,2$ למערכת אין אף פתרון.

■

שאלה 11

$$\begin{aligned} x+\bar{3}y+z=&\bar{1} \\ \bar{3}x+y+\bar{2}z=&\bar{2} \\ \bar{2}x+\bar{2}y+\bar{3}z=&\bar{4} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - \bar{2}R_1]{R_2 \to R_2 - \bar{3}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{2} & -\bar{1} & -\bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{4} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \bar{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \bar{3} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - \bar{3} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$(x, y, z) = (\bar{0}, \bar{2}, \bar{0})$$

פתרון יחיד.

■

שאלה 12

- אם יש שורה סתירה אז למערכת 0 פתרונות. אחרת, יתכנו המקרי הבאים:
- משתנה חופשי אחד ואז למערכת יש 3 פתרונות.
- 2 משתנים חופשיים ואז למערכת יש 3^2 פתרונות.

■

שאלה 13

א) הטענה איננה נכונה. דוגמא נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

מתקיים $AB = B$, $B \neq 0$ אבל A איננה מטריצת היחידה.

ב) הטענה איננה נכונה. דוגמא נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

מתקיים

$$|A - B| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = -1$$

ו

$$|A| - |B| = 0 - 0 = 0 \neq |A - B| \ .$$

■

שאלה 14

דומגה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

קל לראות ש A, B סימטריות: $A^t = A$, $B^t = B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

AB אינה סימטרית כי $AB \neq \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (AB)^t$.

■

שאלה 15

א) טענה נכונה. הסבר:

$A + B = B + A$ לכן $|B + A| = |A + B|$.

ב) דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

$$A \cdot B = A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad |B| = 1 \ , \ |C| = 0 \ .$$

ג) טענה נכונה. הסבר:

אם קיים $\bar{0} \neq \mathrm{v} \in \mathbb{R}^n$ כך ש $(AB)\mathrm{v} = 0$, אז למערכת משוואת הומוגנית $(A \cdot B) \cdot X = 0$ יש אינסוף פתרונות, לכן $|A \cdot B| = 0$, ז"א
$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = 0 \ .$$
מכאן $|B| = 0$ או $|A| = 0$.

■

שאלה 16

תהיינה $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A \neq 0$.

א. <u>אם $AB = AC$ אז $B = C$.</u>

לא נכונה. דוגמה נגדית:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$
$AB = AC$ אבל $B \neq C$.

ב. <u>אם $AB = 0$ אז $A = 0$ או $B = 0$.</u>

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
$$A \cdot B = 0 \ , \qquad A \neq 0 \ , B \neq 0 \ .$$

■

שאלה 17

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \\ x + y - z &= 6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2+\frac{5}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+\frac{1}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$(x,y,z)=(2,10,6)$$

■

שאלה 18

$$\begin{aligned} x-3z &= -3 \\ 2x+ky-z &= -2 \\ x+2y+kz &= 1 \end{aligned}$$

א מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין פתרון.

ב מצאו את הערכים של k עבורם למערכת יש פתרון יחיד.

ג מצאו את הערכים של k עבורם למערכת יש אינסוף פתרונות. לכל אחד מערכי k שמצאות, רשמו את הפתרון הכללי.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & k & -1 & -2 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & k & 5 & 4 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & k & 5 & 4 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \\ 0 & k & 5 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{k+3}{2} & 2 \\ 0 & k & 5 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-kR_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{k+3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 5-\frac{1}{2}k(k+3) & 4-2k \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{k+3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(k+5)(k-2) & -2(k-2) \end{array}\right)$$

א אם $k=-5$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} \end{array}\right)$ עם שורה סתירה ואז אין פתרון.

ב אם $k=2$

אז נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{k+3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ שורה כולה אפס ואז יש אינסוף פתרונות.

ג אם $k\neq -5,2$ ואז יש פתרון יחיד:

$$(x,y,z) = (-3+3z, 2-2.5z, z)\ , \qquad z\in\mathbb{R}.$$

■

<u>שאלה 19</u>

$$\begin{aligned} x+\bar{2}y+z &= \bar{2} \\ \bar{3}x+y+\bar{4}z &= \bar{3} \\ \bar{2}x+\bar{4}y+\bar{4}z &= \bar{3} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{2}\\ \bar{3}&\bar{1}&\bar{4}&\bar{3}\\ \bar{2}&\bar{4}&\bar{4}&\bar{3}\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-3R1}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{2}\\ \bar{0}&-\bar{5}&\bar{1}&-\bar{3}\\ \bar{2}&\bar{4}&\bar{4}&\bar{3}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{4}\\ \bar{2}&\bar{4}&\bar{4}&\bar{3}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R1}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{4}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{2}&-\bar{1}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{4}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{2}&\bar{6}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to\bar{4}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{8}&\bar{4}&\bar{1}6\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{2}&\bar{6}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{4}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{2}&\bar{6}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-\bar{2}\cdot R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{4}&\bar{2}\\ \bar{0}&-\bar{2}&-\bar{6}&\bar{2}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{4}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{5}&\bar{1}&\bar{2}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+\bar{2}\cdot\cdot R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{4}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{9}&\bar{6}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{4}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{2}&\bar{6}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to\bar{4}\cdot R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{4}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{8}&\bar{2}4\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{4}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{3}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\bar{2}\cdot R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{0}&-\bar{7}&-\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{4}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{3}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}&\bar{5}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{4}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{3}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-\bar{4}\cdot R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}&\bar{5}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&-\bar{1}0\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{3}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}&\bar{5}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&\bar{4}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{3}\end{array}\right)$$

$$(x,y,z)=(\bar{5},\bar{4},\bar{3})$$

פתרון יחיד.

■

שאלה 20 פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$. כמה פתרונות יש למערכת?

$$\begin{aligned}x+\bar{3}y+z&=\bar{1}\\ \bar{3}x+y+\bar{2}z&=\bar{2}\\ \bar{2}x+\bar{2}y+\bar{3}z&=\bar{4}\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + \bar{3}R_1]{R_2 \to R_2 + \bar{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{7} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \overline{11} & \bar{6} & \bar{7} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + \bar{2}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{9} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \bar{4}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \overline{16} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \bar{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{6} & \bar{0} & \overline{12} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + \bar{2}\cdot R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

תשובה סופית:

$$(x, y, z) = (\bar{0}, \bar{2}, \bar{0})$$

פתרון יחיד.

■

<u>שאלה 21</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_1 + \bar{2}R_3]{R_2 \to \bar{2}R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + \bar{3}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

פתרון:

$$\left.\begin{aligned} \bar{3}x &= \bar{1} \\ y + \bar{3}z &= \bar{4} \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \left.\begin{aligned} \bar{3}x &= \bar{1} \\ y &= \bar{4} + (-\bar{3})z = \bar{4} + \bar{2}z \end{aligned}\right\} \qquad z \in \mathbb{Z}_5 \ .$$

יש 5 פתרונות למערכת:

$$\begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{4} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{3} \\ \bar{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{2} \\ \bar{4} \end{pmatrix} .$$

■

שאלה 22 נכתוב A בצורה $A = (a_1\ a_2\ a_3)$ כאשר

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

כך ש-

$$A \cdot a_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2a_1 + 4a_2 + 0a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0a_1 + 2a_2 + a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot a_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = a_1 - 5a_2 + 3a_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -21 \\ 4 \end{pmatrix}$$

סך הכל

$$A^2 = A \cdot A = (A \cdot a_1\ A \cdot a_2\ A \cdot a_3) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 16 & -1 & -21 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 4A + 2I = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 16 & -1 & -21 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

■

שאלה 23

אם $AB = AC$ אז $B = C$:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = A \cdot C = 0\ , \qquad B \neq C\ .$$

■

שאלה 24

$$A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-11&16&-8\\-6&10&-5\\-1&-3&5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot b=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-11&16&-8\\-6&10&-5\\-1&-3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-3\\-1\\8\end{pmatrix}\ .$$

■

שאלה 25

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=6-1-1=4$$

$$|A_1|=\begin{vmatrix}3&1&1\\0&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=9$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix}2&3&1\\1&0&1\\1&0&2\end{vmatrix}=-3\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=-3$$

$$|A_3|=\begin{vmatrix}2&1&3\\1&2&0\\1&1&0\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=-3$$

$$x=\frac{9}{4}\ ,\qquad y=\frac{-3}{4}\ ,\qquad z=\frac{-3}{4}\ .$$

■

שאלה 26

$$\begin{aligned}-5x-4y+5z-2t&=-2\\4x-y-5z-2t&=-9\\4x-y-4z-t&=-10\\2x-y-3z-2t&=-5\end{aligned}$$

$$A=\begin{pmatrix}-5&-4&5&-2\\4&-1&-5&-2\\4&-1&-4&-1\\2&-1&-3&-2\end{pmatrix}\ ,\qquad b=\begin{pmatrix}-2\\-9\\-10\\-5\end{pmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}-5&-4&5&-2\\4&-1&-5&-2\\4&-1&-4&-1\\2&-1&-3&-2\end{vmatrix}=-4$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 5 & -2 \\ -9 & -1 & -5 & -2 \\ -10 & -1 & -4 & -1 \\ -5 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & -2 & 5 & -2 \\ 4 & -9 & -5 & -2 \\ 4 & -10 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -16$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & -4 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -9 & -2 \\ 4 & -1 & -10 & -1 \\ 2 & -1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & -5 & -9 \\ 4 & -1 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 8$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1 \ , \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 4 \ , \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1 \ , \qquad t = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -2 \ .$$

■

שאלה 27

$$\begin{aligned} 2x + y - 4z =& 0 \\ 4x + 5y + z =& 0 \\ 2x + 3y - z =& 6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-4R_1, R_3\to R_3-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to-\frac{1}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$(x,y,z)=(-7,6,-2)$$

■

שאלה 28 נתונה המערכת הלינארית הבאה מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x+y &= -3 \\ x+ky &= -3 \\ x+y+2kz &= 1 \end{aligned}$$

א מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין פתרון.

ב מצאו את הערכים של k עבורם למערכת יש פתרון יחיד.

ג מצאו את הערכים של k עבורם למערכת יש אינסוף פתרונות. לכל אחד מערכי k שמצאות, רשמו את הפתרון הכללי.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & k & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2k & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1, R_3\to R_3-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{1}{k-1}\cdot R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k & 4 \end{pmatrix}$$

א אם $k=0$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$ עם שורה סתירה ואז אין פתרון.

ב אם $k=1$

אז נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$ שורה כולה אפס ואז יש אינסוף פתרונות.

ג אם $k\neq 0,1$ ואז יש פתרון יחיד.

ד אם $k=1$ יש אינסוף פתרונות מצורה

$$k=1, \qquad (x,y,z)=(-3-s,s,\frac{1}{2}), \qquad s\in\mathbb{R}\ .$$

■

שאלה 29 נסמן $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. מצאו את $A^2-3A+2I$. נכתוב A בצורה $A=(a_1\ a_2\ a_3)$ כאשר

$$a_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad a_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כך ש-

$$A\cdot a_1=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad =3\cdot a_1+0\cdot a_2+0\cdot a_3=\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot a_2=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad =0\cdot a_1+2\cdot a_2+2\cdot a_3=\begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot a_3=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad =2\cdot a_1+5\cdot a_2+a_3=\begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix}$$

סך הכל

$$A^2 = A\cdot A = (A\cdot a_1 \ A\cdot a_2 \ A\cdot a_3) = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 \\ 0 & 14 & 15 \\ 0 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 \\ 0 & 14 & 15 \\ 0 & 6 & 11 \end{pmatrix} - 3\cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 2\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

■

שאלה 30 אם $AB=0$ ו- $A\neq 0$ אז B איננה הפיכה.

טענה נכונה. הסבר:

נניח בדרך השליליה ש $A\cdot B=0$ ו- $A\neq 0$ ו- B הפיכה. אז קיימת B^{-1}. לכן

$$A\cdot B\cdot B^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad A=0\ .$$

סתירה!

■

שאלה 31 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\ , \qquad (AB)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\ ,$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad A^2B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\ .$$

■

שאלה 32 חשבו את המטריצה ההפוכה של $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ בעזרת זה פתרו את המערכת

$$\begin{aligned} 3x+2y+z &= 1 \\ 4x+2y+z &= 2 \\ 4x+6y+2z &= 3 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 8 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\cdot b = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & \frac{1}{2}\\ 8 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ \frac{3}{2}\\ -5 \end{pmatrix} \ .$$

■

שאלה 33 פתרו את המערכת הבא בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{aligned} -5x-4y+5z-2t &= -2\\ 4x-y-5z-2t &= -9\\ 4x-y-4z-t &= -10\\ 2x-y-3z-2t &= -5 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 5 & -2\\ 4 & -1 & -5 & -2\\ 4 & -1 & -4 & -1\\ 2 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \ , \qquad b = \begin{pmatrix} -2\\ -9\\ -10\\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 5 & -2\\ 4 & -1 & -5 & -2\\ 4 & -1 & -4 & -1\\ 2 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 5 & -2\\ -9 & -1 & -5 & -2\\ -10 & -1 & -4 & -1\\ -5 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & -2 & 5 & -2\\ 4 & -9 & -5 & -2\\ 4 & -10 & -4 & -1\\ 2 & -5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -16$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & -4 & -2 & -2\\ 4 & -1 & -9 & -2\\ 4 & -1 & -10 & -1\\ 2 & -1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 5 & -2\\ 4 & -1 & -5 & -9\\ 4 & -1 & -4 & -10\\ 2 & -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 8$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1 \ , \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 4 \ , \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1 \ , \qquad t = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -2 \ .$$

■

שאלה 34

- אם יש שורה סתירה אז למערכת 0 פתרונות. אחרת, למערכת יש פתרונות. יתכנו המקרי הבאים:

- משתנה חופשי אחד ואז למערכת יש 5 פתרונות.
- 2 משתנים חופשיים ואז למערכת יש 5^2 פתרונות.
- 3 משתנים חופשיים ואז למערכת יש 5^3 פתרונות.
- 4 משתנים חופשיים ואז למערכת יש 5^4 פתרונות.

■

שאלה 35

אם $AB = AC$ אז $B = C$:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = A \cdot C = 0 \ , \qquad B \neq C \ .$$

■

שאלה 36 לא נכונה. הטענה לא בהכרח מתקיים. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq AB \ .$$

■

שאלה 37 הטענה לא נכונה.

$$\begin{aligned}(A+B)^2 =& (A+B)(A+B)\\ =& A\cdot A + B\cdot A + A\cdot B + B\cdot B\\ =& A^2 + BA + AB + B^2\end{aligned}$$

שים לב ש $AB = BA$ לא בהכרח מתקיים ולכן

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

באופן כללי.

■

שאלה 38 הטענה לא נכונה.

$$\begin{aligned}(A+B)(A-B) =& A\cdot A + B\cdot A - A\cdot B - B\cdot B\\ =& A^2 + BA - AB - B^2\end{aligned}$$

שים לב ש $AB = BA$ לא בהכרח מתקיים ולכן

$$(A+B)(A-B) \neq A^2 + AB - BA - B^2$$

באופן כללי.
■

שאלה 39 לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad a > 0, b > 0 \ .$$

■

שאלה 40 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \qquad (AB) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad (AB)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \qquad A^t B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq (AB)^t$$

■

שאלה 41 הטענה נכונה. הסבר:

$$\left((A+B)^t\right)_{ij} = \left(A^t + B^t\right)_{ij} = \left(A^t\right)_{ij} + \left(B^t\right)_{ij} = A_{ji} + B_{ji} = (A+B)_{ji} = \left((A+B)^t\right)_{ij}$$

שים לב ששתי מטריצות שוות אם"ם הרכיבים שווים. כיוון שהרכיבים שווים, אז

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

■
