

תרגילים: סיבוכיות

שאלה 1 נתונות שתי בעיות A ו- B מעל אותו אלפיביט Σ , שני אלגוריתמי אימות V_1 ו- V_2 עבור A ו- B (בהתאמה) הרצים בזמן פולינומיאלי.

(א) בנו אלגוריתם אימות V עבור הבעיה $A \cup B$. תארו במילים את האלגוריתם והוכיחו את נכונה הבניה.

(ב) הוכיחו כי אלגוריתם שבניתם בסעיף א' רץ בזמן פולינומיאלי.

שאלה 2 בעיית $PARTITION$ מוגדרת באופן הבא:

בהינתן קבוצת מספרים $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, האם קיימת חלוקה של A לשתי קבוצות A_1 ו- A_2 כך ש-

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad \bullet$$

$$A_1 \cup A_2 = A \quad \bullet$$

$$\sum_{a_i \in A_1} a_i = \sum_{a_i \in A_2} a_i = \frac{1}{2} \sum_{a_i \in A} a_i \quad \bullet$$

בנו מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית המכריעה את $PARTITION$ בזמן פולינומיאלי.

תשובות

שאלה 1(א) הרעיון: V מקבל בקלט זוג (w, y) ורוצה לבדוק האם y הוא עדות לזה ש- $w \in A \cup B$.

לצורך זה V מריץ את V_1 על הזוג (w, y) .
 אם V_1 קיבל אזי V מקבל.
 אחרת, V מריץ את V_2 על הזוג (w, y) ועונה כמוה.

האלגוריתם $V = \text{על קלט } (w, y):$ **(1)** מריץ את V_1 על (w, y) .

- אם V_1 מקבל $\Leftarrow V$ מקבל.
- אם V_1 דוחה $\Leftarrow V$ מריץ את V_2 על (w, y) ועונה כמוה.

נכונותאם $w \in A \cup B$ $w \in A$ או $w \in B \Leftarrow$ \Leftarrow קיימת עדות y כך ש- V_1 מקבל את הזוג (w, y) או V_2 מקבל את הזוג (w, y) . \Leftarrow קיימת עדות y כך ש- V מקבל את הזוג (w, y) .אם $w \notin A \cup B$ $w \notin A$ וגם $w \notin B \Leftarrow$ \Leftarrow לכל עדות y , V_1 דוחה את הזוג (w, y) וגם V_2 דוחה את הזוג (w, y) . \Leftarrow לכל עדות y , V דוחה את הזוג (w, y) .(ב) נסמן p_1 הפולינום של V_1 .נסמן p_2 הפולינום של V_2 .אזי זמן הריצה של V חסום על ידי $O(p_1(|w|) + p_2(|w|))$ ולכן V פולינומיאלי בגודל $|w|$.שאלה 2 נבנה מ"ט א"ד M המכרעיה את $PARTITION$ בזמן פולינומיאלי. $M = \langle A \rangle$ על קלט A :**(1)** בוחרת באופן א"ד תת-קבוצות A_1 של A .**(2)** בודקת האם סכום האיברים של A_1 שווה חצי מסכום האיברים של A .

- אם כן \Leftarrow מקבלת.
- אם לא \Leftarrow דוחה.

נכונות הבנייהאם $\langle A \rangle \in PARTITION$

$$\Leftarrow \text{קיימת חלוקה של } A \text{ ל- } A_1 \text{ ו- } A_2 \text{ כך ש- } \sum_{a_i \in A_1} a_i = \sum_{a_i \in A_2} a_i = \frac{1}{2} \sum_{a_i \in A} a_i$$

 \Leftarrow קיימת ריצה של M בה תבחר את A_1 ותבדוק שהסכום שלה שווה חצי הסכום של A
 \Leftarrow קיימת ריצה של M בה תקבל את $\langle A \rangle$.
אם $\langle A \rangle \notin PARTITION$

$$\Leftarrow \text{לא קיימת חלוקה של } A \text{ ל- } A_1 \text{ ו- } A_2 \text{ כך ש- } \sum_{a_i \in A_1} a_i = \sum_{a_i \in A_2} a_i = \frac{1}{2} \sum_{a_i \in A} a_i$$

 \Leftarrow בכל ריצה של M על A היא תבחר תת-קבוצה A_1 ותבדוק ותדחה

 \Leftarrow בכל ריצה של M על $\langle A \rangle$, M תדחה את $\langle A \rangle$.
זמן הריצה של M פולינומיאלי בגודל הקלט $\langle A \rangle$.