

## תרגילים: רדוקציות

**שאלה 1** נתונה השפה הבאה:

$$L_{\geq 3} = \{ \langle M \rangle \mid |L(M)| \geq 3 \}$$

$L_{\geq 3}$  מכילה קידודים של מכונות טיורינג שמקבלות לפחות 3 מילים שונות. הוכיחו כי  $L_{\geq 3} \notin R$  ע"י רדוקציה מ- $L_{acc}$ .

**שאלה 2** נתונה השפה הבאה:

$$L = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2) \}.$$

הוכיחו כי  $L \notin RE$  ע"י רדוקציה מ- $\bar{L}_{acc}$ .

**שאלה 3** תהי  $L$  השפה

$$L_{1a} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ מקבלת בדיוק מילה אחת המתחילה ב-} a \}$$

**(א)** מצאו פונקציה רדוקציה מ- $\bar{L}_{acc}$  ל- $L_{1a}$ .

**(ב)** הוכיחו כי  $L_{1a} \notin RE$ .

**(ג)** הוכיחו כי  $L_{1a} \notin R$ .

**שאלה 4** תהי  $L$  השפה

$$L_{\geq 1a} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ מקבלת לפחות מילה אחת המתחילה ב-} a \}$$

**(א)** מצאו פונקציה רדוקציה מ- $L_{acc}$  ל- $L_{1a}$ .

**(ב)** הוכיחו כי  $L_{1a} \notin R$ .

**שאלה 5** תהי  $L$  השפה

$$L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} = \{ \langle M_1, M_2, M_3 \rangle \mid L(M_1) \subset L(M_2) \subset L(M_3) \}$$

**(א)** מצאו פונקציה רדוקציה מ- $\bar{L}_{acc}$  ל- $L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3}$ .

**(ב)** הוכיחו כי  $L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} \notin R$ .

**(ג)** הוכיחו כי  $L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} \notin RE$ .

**שאלה 6** תהי  $L_\varepsilon$  השפה הבאה:

$$L_\varepsilon = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ עוצרת על מילת הריקה } \varepsilon \}$$

(א) האם  $L_\varepsilon$  כריעה?

(ב) האם  $L_\varepsilon$  קבילה?

**שאלה 7** נתונה השפה הבאה:

$$L = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \varepsilon \} .$$

הוכיחו כי  $L \notin R$  ע"י רדוקציה מ- $L_{acc}$ .

## תשובות

שאלה 1פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M_\emptyset$  היא מ"ט הדוחה כל קלט ו-  $M'$  היא מ"ט שעל כל קלט  $y$ , מתעלמת מ-  $y$  ומריצה את  $M$  על  $w$  ועונה כמוה.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

נכונות הרדוקציה:

נוכיח כי

$$x \in L_{\text{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L_{\geq 3}.$$

אם  $x \in L_{\text{acc}} \Leftrightarrow x = \langle M, w \rangle$  ו-  $w \in L(M) \Leftrightarrow f(x) = \langle M' \rangle \Leftrightarrow f(x) \in L_{\geq 3}$  ולכן  $L(M') = \Sigma^*$  ולפי האבחנה  $|L(M')| = \infty$ .

אם  $x \notin L_{\text{acc}}$  שני מקרים:

מקרה 1:  $x \neq \langle M, w \rangle \Leftrightarrow f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \Leftrightarrow |L(M_\emptyset)| = 0 \Leftrightarrow f(x) \notin L_{\geq 3}$

מקרה 2:  $x \neq \langle M, w \rangle$  ו-  $w \notin L(M) \Leftrightarrow f(x) = \langle M' \rangle \Leftrightarrow L(M') = \emptyset$  ולפי האבחנה  $|L(M')| = 0 \Leftrightarrow f(x) \notin L_{\geq 3}$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $L_{\text{acc}} \leq L_{\geq 3}$  ולכן ממשפט הרדוקציה, מכיוון ש-  $L_{\text{acc}} \notin R$ , מתקיים  $L_{\geq 3} \notin R$ .

שאלה 2פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M^*, M, w \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

•  $M^*$  היא מ"ט שמקבלת כל קלט

•  $M_\emptyset$  היא מ"ט שדוחה כל קלט.

נכונת הרדוקציה:

ראשית,  $f$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם  $x = \langle M, w \rangle$ . אם לא, תחזיר קידוד קבוע  $\langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle$  ואם כן, תחזיר קידוד  $\langle M^*, M, w \rangle$ .

נוכיח כי

$$x \in \bar{L}_{\text{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L.$$

אם  $x \in \bar{L}_{acc}$   $\Leftarrow$  שני מקרים:

מקרה 1:  $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow f(x) = \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle$  ו-  $\varepsilon \in L(M^*)$  ו-  $\varepsilon \notin L(M_\emptyset) \Leftarrow f(x) \in \bar{L}$

מקרה 2:  $x = \langle M, w \rangle$  ו-  $w \notin L(M) \Leftarrow f(x) = \langle M^*, M, w \rangle$  ו-  $w \in L(M^*)$  ו-  $w \notin L(M) \Leftarrow f(x) \in L$

אם  $x \notin \bar{L}_{acc} \Leftarrow x = \langle M, w \rangle$  ו-  $w \in L(M) \Leftarrow f(x) = \langle M^*, M, w \rangle$  ו-  $w \in L(M^*)$  ו-  $w \notin L(M) \Leftarrow f(x) \notin L$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $\bar{L}_{acc} \leq L$ , ומכיוון ש-  $\bar{L}_{acc} \notin RE$  ממשפט הרדוקציה מתקיים  $L \notin RE$ .

### שאלה 3

(א) פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \{ "ab" \} & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M'$  המ"ט הבאה:

$M' =$  על כל קלט  $y$ :

(1) אם  $y = "ab"$   $\Leftarrow$  מקבלת.

(2) אחרת מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוה.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \{ab\} & w \notin L(M) \end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

אם  $x \in \bar{L}_{acc}$   $\Leftarrow$  שני מקרים:

מקרה 1:  $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow f(x) = \{ "ab" \} \Leftarrow f(x) \in L_{1a}$

מקרה 2:  $x = \langle M, w \rangle$  ו-  $w \notin L(M) \Leftarrow L(M') = \{ "ab" \}$  לפי האבחנה  $\Leftarrow f(x) \in L_{1a}$

אם  $x \notin \bar{L}_{acc} \Leftarrow x = \langle M, w \rangle$  ו-  $w \in L(M) \Leftarrow f(x) = \langle M' \rangle$  ולפי האבחנה  $\Leftarrow f(x) \notin L_{1a}$   
 $\Leftarrow L(M') = \Sigma^*$  מכילה יותר ממילה אחת המתחילה ב-  $a \Leftarrow \langle M' \rangle \notin L_{1a}$   
 $\Leftarrow f(x) \notin L_{1a}$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $\bar{L}_{acc} \leq L_{1a}$ .

(ב) מכיוון ש-  $\bar{L}_{acc} \notin RE$  ממשפט הרדוקציה מתקיים  $L_{1a} \notin RE$

(ג) מכיוון ש-  $\bar{L}_{acc} \notin R$  ממשפט הרדוקציה מתקיים  $L_{1a} \notin R$

שאלה 4

(א) פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M_\emptyset$  היא מ"ט שדוחה כל קלט ו-  $M'$  המ"ט הבאה: $M' =$  על כל קלט  $y$ :(1) אם  $y \neq "ab"$  דוחה.(2) אחרת מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוה.אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \{ "ab" \} & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

$$\text{אם } x \in L_{\text{acc}} \Leftrightarrow x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } w \in L(M) \Leftrightarrow f(x) = \langle M' \rangle \text{ ולפי האבחנה } L(M') = \{ "ab" \} \\ f(x) \in L_{\geq 1a} \Leftrightarrow \langle M' \rangle \in L_{\geq 1a}$$

אם  $x \notin L_{\text{acc}}$  שני מקרים:

$$\text{מקרה 1: } x \neq \langle M, w \rangle \Leftrightarrow f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \text{ ו- } L(M_\emptyset) = \emptyset \Leftrightarrow L(M_\emptyset) \notin L_{\geq 1a} \Leftrightarrow f(x) \notin L_{\geq 1a}$$

$$\text{מקרה 2: } x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } w \notin L(M) \Leftrightarrow L(M') = \emptyset \text{ לפי האבחנה } L(M_\emptyset) \notin L_{1a} \\ f(x) \notin L_{1a} \Leftrightarrow$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $L_{\text{acc}} \leq L_{\geq 1a}$ .(ב) מכיוון ש-  $L_{\text{acc}} \notin R$  ממשפט הרדוקציה מתקיים  $L_{\geq 1a} \notin R$ .שאלה 5

(א) פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M_\emptyset, M', M^* \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset, M_{\text{even}}, M^* \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

•  $M_\emptyset$  היא מ"ט שדוחה כל קלט,•  $M^*$  היא מ"ט שמקבלת כל קלט,•  $M_{\text{even}}$  היא מ"ט שמקבלת רק מילים  $x \in \Sigma^*$  עבורן  $|x| \bmod 2 = 0$ •  $M'$  המ"ט הבאה:

$M' =$  על כל קלט  $y$ :

(1) אם  $|y|$  אי-זוגי  $\Leftarrow$  מקבלת.

(2) אחרת מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוה.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \{y : |y| \bmod 2 = 0\} & w \notin L(M) \end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

אם  $x \in \bar{L}_{acc}$   $\Leftarrow$  שני מקרים:

מקרה 1:

$$\begin{aligned} x &\neq \langle M, w \rangle \\ L(M_\emptyset) \subset L(M_{\text{even}}) \subset L(M^*) \text{ ו- } f(x) = \langle M_\emptyset, M_{\text{even}}, M^* \rangle &\Leftarrow \\ f(x) \in L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} &\Leftarrow \end{aligned}$$

מקרה 2:

$$\begin{aligned} x &= \langle M, w \rangle \text{ ו- } w \notin L(M) \\ L(M') = \{y : |y| \bmod 2 = 0\} \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M' \rangle &\Leftarrow \\ L(M_\emptyset) \subset L(M') \subset L(M^*) &\Leftarrow \\ f(x) \in L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} &\Leftarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &\notin \bar{L}_{acc} \text{ אם} \\ w &\in L(M) \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle &\Leftarrow \\ L(M') = \Sigma^* \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M_\emptyset, M', M^* \rangle &\Leftarrow \\ L(M') \not\subset L(M^*) &\Leftarrow \\ f(x) &\notin L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} &\Leftarrow \\ \bar{L}_{acc} &\leq L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} \text{ לסיכום, הוכחנו רדוקציה} \end{aligned}$$

(ב) מכיוון ש-  $\bar{L}_{acc} \notin R$  ממשפט הרדוקציה מתקיים  $L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} \notin R$

(ג) מכיוון ש-  $\bar{L}_{acc} \notin RE$  ממשפט הרדוקציה מתקיים  $L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} \notin RE$

**שאלה 6** נבנה רדוקציה מ-  $L_\varepsilon$  ל-  $L_{acc}$ :

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{loop} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M_{loop}$  מ"ט שלא עוצרת על אף קלט ו-  $M'$  המ"ט הבאה:

$$M' = \text{על כל קלט } y:$$

(1) מריצה  $M$  על  $\varepsilon$ .

(2) אם  $M$  מקבלת  $\Leftarrow M'$  מקבלת.

(3) אם  $M$  דוחה  $\Leftarrow M'$  מקבלת.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & M \text{ עוצרת על } \varepsilon \\ \emptyset & M \text{ לא עוצרת על } \varepsilon \end{cases}$$

הוכת הנכונות:

$$\langle M' \rangle \in L_{acc} \iff L(M') = \Sigma^* \iff \begin{matrix} M \text{ עוצרת על } \varepsilon \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle \\ f(x) \in L_{acc} \end{matrix} \iff x \in L_\varepsilon$$

$$x \notin L_\varepsilon \iff \text{שני מקרים:}$$

$$\text{מקרה 1: } f(x) \notin L_{acc} \iff f(x) = \langle M_{loop} \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle$$

$$\text{מקרה 2: } \langle M' \rangle \notin L_{acc} \iff L(M') = \emptyset \iff \begin{matrix} M \text{ לא עוצרת על } \varepsilon \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle \\ \langle M' \rangle \notin L_{acc} \end{matrix} \iff \text{לא קיים מילה אשר } M' \text{ מקבלת}$$

**שאלה 7** פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M_\emptyset$  מכונת טיורינג שדוחה כל קלט.

$$M' = \text{על קלט } y:$$