

עבודה עצמית 7 נגזרות חלקיות וגבולות

## שאלה 1

(א) הסבירו: מהו קו גובה של פונקציה  $z = f(x, y)$ ? ציירו את קווי הגובה של הפונקציות:

$$z = 2x + \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$z = \frac{y}{x} \quad (2)$$

$$z = x^2 + y^2 - 2x \quad (3)$$

$$z = \ln \left( \sqrt{\frac{y}{x}} \right) \quad (4)$$

$$z = \sqrt{\frac{x}{y}} \quad (5)$$

(ב) הסבירו: מהו משטח רמה של פונקציה  $u = f(x, y, z)$ . מהם משטחי הרמה של הפונקציות:

$$u = x + y + 3z \quad (1)$$

$$u = x^2 + y^2 + z^2 \quad (2)$$

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 2y + 3 \quad (3)$$

$$u = x^2 - y^2 - z^2 \quad (4)$$

## שאלה 2 חשבו את הגבול של פונקציה או הוכח שהוא לא קיים:

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} \quad (א)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{x - y}{x + y} \quad (ב)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0, x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x - y} \quad (ג)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^3 + y} \quad (ד)$$

## שאלה 3 מצאו את כל הנגזרות החלקיות של הפונקציות הבאות:

$$z = x^2 + 2y^2 - 3xy - 4x + 2y + 5 \quad (א)$$

$$z = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} \quad (ב)$$

$$z = e^{xy(x^2+y^2)} \quad (ג)$$

$$u = 2y\sqrt{x} + 3y^2\sqrt[3]{z^2} \quad (ד)$$

$$u = e^{x/y} + e^{-z/y} \quad (\text{ה})$$

$$u = e^{xyz} \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{ו})$$

**שאלה 4** א. מצאו את הדיפרנציאל השלם של הפונקציה הבאה:

$$z = \ln(x^2 + y^2) \quad (1) \quad (\text{א})$$

$$z = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{x}\right)\right) \quad (2)$$

$$u = e^{xyz} \quad (3)$$

(ב) הראו כי

$$(1) \quad \text{הפונקציה } z = f(x)g(y) \text{ מקיימת את המשוואה}$$

$$z \cdot z''_{xy} = z'_x \cdot z'_y$$

$$(2) \quad \text{הפונקציה } z = g(x) + yg'(x) \text{ מקיימת את המשוואה}$$

$$z'_x = z'_y + y \cdot z''_{xy}$$

$$(3) \quad \text{הפונקציה } z = ye^{x^2-y^2} \text{ מקיימת את המשוואה}$$

$$\frac{1}{x} \cdot z'_x + \frac{1}{y} \cdot z'_y = \frac{z}{y^2}$$

**שאלה 5**

(א) רשמו את משוואות המישור המשיק והנורמל למשטח

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y \quad \text{בנקודה } M(1, 1, 1) \quad (1)$$

$$z = 1 + x^2 + y^2 \quad \text{בנקודה } M(1, 1, 3) \quad (2)$$

$$z = \sin x \cdot \cos y \quad \text{בנקודה } M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right) \quad (3)$$

$$(ב) \quad \text{רשמו את משוואות המישורים המקבילים למשטח } x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21 \text{ המקבילים למישור } x + 4y + 6z = 1$$

## פתרונות

שאלה 1

(א) (1)  $y = c - \frac{2x}{x}$

(2)  $y = \frac{c}{x}$

(3)  $(x-1)^2 + y^2 = c+1$

(4)  $y = \frac{cx}{x}$

(5)  $y = \frac{x}{c^2}$

(ב) (1)  $x + y + 3z = c$

(2)  $x^2 + y^2 + z^2 = c$

(3)  $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = c-1$

(4)  $x^2 = y^2 + z^2 + c$  חרוט אליפטי.

שאלה 2 חשבו את הגבול של פונקציה או הוכח שהוא לא קיים:

(א) 4

(ב) לא קיים.

(ג) 0

(ד) לא קיים.

שאלה 3 מצאו את כל הנגזרות החלקיות של הפונקציות הבאות:

(א)  $z'_x = 2x - 3y - 4$

$z'_y = 4y - 3x + 2$

(ב)  $z'_x = \frac{2x}{y^2} - \frac{1}{y}$

$z'_y = \frac{-2x^2}{y^3} + \frac{x}{y^2}$

(ג)  $z'_x = (3x^2y + y^3) e^{xy(x^2+y^2)}$

$z'_y = (x^3 + 3xy^2) e^{xy(x^2+y^2)}$

(ד)  $u'_x = \frac{y}{2\sqrt{x}}$

$u'_x = 2\sqrt{x} + 6yz^{2/3}$

$u'_z = \frac{2y^2}{\sqrt[3]{z}}$

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{1}{y} e^{x/y} & (ה) \\ u'_y &= \frac{-x}{y^2} e^{x/y} - \frac{z}{y^2} e^{z/y} \\ u'_z &= \frac{1}{y} e^{z/y} \end{aligned}$$

$$u'_x = yz e^{xyz} \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2} e^{xyz} \cdot \cos\left(\frac{y}{x}\right) \quad (ו)$$

**שאלה 4**

$$dz = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right) dy \quad (1) \quad (א)$$

$$dz = \left(\frac{-2y}{x^2 \sin\left(\frac{2y}{x}\right)}\right) dx + \left(\frac{2}{x \sin\left(\frac{2y}{x}\right)}\right) dy \quad (2)$$

$$du = e^{xyz} (yz dx + xz dy + xy dz) \quad (3)$$

**שאלה 5**

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0: \text{משוואת המישור המשיקי:} & (1) \quad (א) \\ \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}: & \text{משוואת הנורמל:} \\ 2x + 2y - z - 1 &= 0: \text{משוואת המישור המשיקי:} & (2) \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}: & \text{משוואת הנורמל:} \\ 2x - z - 2 &= 0: \text{משוואת המישור המשיקי:} & (3) \\ \frac{x-1}{2} = \frac{z}{-1}, y &= 0: \text{משוואת הנורמל:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y + 2z + 1 &= 0: \text{משוואת המישור המשיקי:} & (ב) \\ \frac{x-\pi/4}{1/2} = \frac{y-\pi/4}{-1/2} = \frac{z-1/2}{-1}: & \text{משוואת הנורמל:} \end{aligned}$$