

## שיעור 7

### אי-כריעות

### 7.1 השפות לא כריעות $L_d, L_{\text{halt}}, L_{\text{acc}}$

**הגדרה 7.1**  $L_{\text{acc}}$

$$L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} \in RE \setminus R$$

**הגדרה 7.2**  $L_{\text{halt}}$

$$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ עוצרת על } M\} \in RE \setminus R$$

**הגדרה 7.3**  $L_d$

$$L_d = \{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M)\} \notin RE$$

**משפט 7.1**  $L_{\text{acc}} \in RE$

$$L_{\text{acc}} \in RE .$$

הוכחה: מכיוון ש-  $L(U) = L_{\text{acc}}$ , כאשר  $U$  המכונת טיריניג האוניברסלית אשר מקבלת את  $L_{\text{acc}}$ , לכן  $L_{\text{acc}} \in RE$ .

**משפט 7.2**  $L_{\text{halt}} \in RE$

$$L_{\text{halt}} \in RE .$$

הוכחה: נבנה מ"ט  $U'$  שהוא למעשה  $U$  פרט למקום שבו  $U$  עצמה ודחתה,  $U'$  תעוצר ותחזור ותקבל.

נווכיח כי  $U'$  מקבלת את  $L_{\text{halt}}$ :

אם  $x \in L_{\text{halt}}$

$w$  עוצרת על  $M$  ו-  $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$

$x$  עוצרת ומקבלת את  $U' \Leftarrow$

אם  $x \notin L_{\text{halt}}$  ⇐ שני מקרים:

•  $U'$  דוחה את  $x$ .

•  $M$  לא עוצרת על  $U'$  לא עוצרת על  $w$ .

### משפט 7.3 $L_d \notin RE$

$$L_d \notin RE .$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי  $L_d \in RE$ .

• אם  $M_d$  מקבלת את  $L_d$  ⇐

$$. L(M_d) = L_d \Leftarrow$$

נבדוק ריצה של  $M_d$  על  $\langle M_d \rangle$ .

• אם  $L(M_d) \neq L_d$  ⇐  $\langle M_d \rangle \notin L_d$  ⇐  $\langle M_d \rangle \in L(M_d)$ .

• אם  $L(M_d) \neq L_d$  ⇐  $\langle M_d \rangle \in L_d$  ⇐  $\langle M_d \rangle \notin L(M_d)$ .

בשני המקרים קיבלנו סתיירה לכך ש-  $L_d \notin RE$  ולכן  $L(M_d) = L_d$ .

### משפט 7.4 $L_{\text{acc}} \text{ לא כריעה}$

$$L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} \notin R .$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי  $L_{\text{acc}} \in R$  ותהי  $M_{\text{acc}}$  המכריעה את  $L_{\text{acc}}$ .

נשתמש ב-  $M_{\text{acc}}$  כדי לבנות מ"ט  $M_d$  המכריעה את  $L_d$  (בסתירה לכך ש-  $L_d \notin RE$  כפי שהוכחנו במשפט 7.3).

$$L_d = \{\langle M, w \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M)\} .$$



התאור של  $M_d$

: $x$  על קלט  $= M_d$

1) בודקת האם  $x = \langle M \rangle$ . אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

2) מחשבת את  $\langle x \rangle = \langle\langle M \rangle\rangle$

3) מרייצה את  $\langle M, \langle M \rangle \rangle$  על הזוג  $M_{acc}$

- אם  $M_{acc}$  מקבלת  $M_d \Leftarrow$  דוחה.

- אם  $M_{acc}$  דוחה  $\Leftarrow$  מקבלת.

כעת נוכיח כי  $M_d$  מכירעה את  $L_d$ :

אם  $x \in L_d$

$\langle M \rangle \notin L(M) \rightarrow x = \langle M \rangle \Leftarrow$

$\langle M, \langle M \rangle \rangle$  דוחה את הזוג  $M_{acc} \Leftarrow$

$x$  מקבלת את  $M_d \Leftarrow$

אם  $x \notin L_d$  שני מקרים:

$x$  דוחה את  $M_d \Leftarrow x \neq \langle M \rangle$  :1)

מקרה (2):  $\langle M \rangle \in L(M) \rightarrow x = \langle M \rangle$

$\langle M, \langle M \rangle \rangle$  מקבלת את זוג  $M_{acc} \Leftarrow$

$x$  דוחה את  $M_d \Leftarrow$

**משפט 7.5 לא כרעה**  $L_{\text{halt}}$ 

$$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ עצרת על } M \} \notin R .$$

**הוכחה:**

נניח בsvilleה כי  $L_{\text{halt}} \in R$  ותהי  $M_{\text{halt}}$  מ"ט המכריעה את  $L_{\text{halt}}$ .  
נשתמש בו כדי לבנות מ"ט המכריעה את  $L_{\text{acc}}$  (בסתירה לכך שגם  $L_{\text{acc}} \notin R$  כפי שהוכחנו במשפט 7.4).

התאור של  $M_{\text{acc}}$ על קלט  $x = M_{\text{acc}}$ 1) מרים את  $M_{\text{halt}}$  על  $x$ .• אם  $M_{\text{acc}}$  דוחה  $M_{\text{halt}}$ .• אם  $M_{\text{acc}}$  מקבלת  $M_{\text{halt}}$  מרים את  $U$  על  $x$  ועונה כמוה.אבחןנוכיח כי  $M_{\text{acc}}$  מכריעה את  $L_{\text{acc}}$ אם  $x \in L_{\text{acc}}$ 

$$\langle w \rangle \in L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$$

מקבלת את  $x$  וגם  $U$  מקבלת את  $x$   $M_{\text{halt}} \Leftarrow$ מקבלת את  $M_{\text{acc}}$   $\Leftarrow$  $.x$  מקבלת את  $M_{\text{acc}}$   $\Leftarrow$

אם  $x \notin L_{\text{acc}}$  ⇔ שני מקרים:

מקרה (1)  $\langle M, w \rangle$ :

דוחה את  $M_{\text{halt}} \Leftarrow$   
דוחה את  $M_{\text{acc}} \Leftarrow$

מקרה (2)  $\langle w \rangle \notin L(M)$  ו-  $x = \langle M, w \rangle$ :

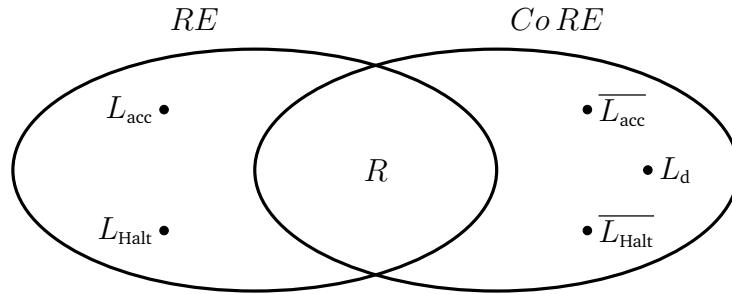
מקרה (א):  $M$  לא עוצרת על  $w$  דוחה את  $x$ .

מקרה (ב):  $M$  דוחה את  $w$  מקבלת את  $x$  אבל  $M_{\text{halt}} \Leftarrow$  דוחה את  $x$ .

הראנו כי  $M_{\text{acc}}$  מכיריעת  $L_{\text{acc}}$  בסתייה לכך ש-  $L_{\text{acc}} \notin R$ .  
 $L_{\text{halt}} \notin R$ .

## משפט 7.6

$$\begin{aligned} L_{\text{acc}} \in RE \setminus R &\Rightarrow \bar{L}_{\text{acc}} \notin RE , \\ L_{\text{halt}} \in RE \setminus R &\Rightarrow \bar{L}_{\text{halt}} \notin RE , \\ L_d \notin RE \setminus R . \end{aligned}$$



## 7.2 השפה $L_E$ לא כריעה

### הגדרה 7.4 השפה $L_E$

$$L_E = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\} .$$

### משפט 7.7 $L_E \notin R$

$$L_E \notin R .$$

כלומר  $L_E$  לא כריעה.

הוכחה:

נניח בשילילה כי  $L_E$  כריעה. אז נבנה מ"ט  $M_{\text{acc}}$  המכיריעת  $L_{\text{acc}}$  באופן הבא.

בנייה של  $M_w$

ראשית נגדיר את המ"ט  $M_w$ :

על כל קלט  $x = M_w$ :

(1) אם  $x \neq w$  ⇐ דוחה.

(2) אם  $x = w$  אז מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוות.

### אבחנה

אם  $x = w$  מקבלת את  $w$  אז  $L(M_w) = \Sigma^*$ .

אם  $x \neq w$  או אם  $M$  דוחה את  $w$  אז  $L(M_w) = \emptyset$ .

### בנייה של $M_{\text{acc}}$

נניח כי קיימת מ"ט  $M_E$  המכrica את  $L_E$ . אז נבנה מ"ט  $M_{\text{acc}}$  המכrica את  $L_{\text{acc}}$ :

על כל קלט  $x = M_{\text{acc}}$ :

(1) אם  $x \neq \langle M, w \rangle$  ⇐ דוחה.

(2) אם  $x = \langle M, w \rangle$ , בעזרת התאור  $\langle M, w \rangle$ , בונה מ"ט  $M_w$ :

(3) מריצה  $M_E$  על  $M_w$ :

(4) • אם  $M_E$  מקבלת ⇐ דוחה.

• אם  $M_E$  דוחה ⇐ מקבלת.

### נכונות

$\langle M_w \rangle$  דוחה  $M_E$  ⇐  $L(M_w) = \Sigma^* \neq \emptyset$  ⇐  $w \in L(M)$  ו-  $x = \langle M, w \rangle$  ⇐  $x \in L_{\text{acc}}$  מקבלת.  $M_{\text{acc}}$  ⇐

אם  $x \notin L_{\text{acc}}$  ⇐ שני מקרים:

מקרה 1:  $M_{\text{acc}}$  מקבלת  $M_E$  ⇐  $L(M_w) = \emptyset$  ⇐  $x \neq \langle M, w \rangle$

מקרה 2:  $M_{\text{acc}}$  ⇐  $\langle M_w \rangle$   $M_E$  ⇐  $L(M_w) = \emptyset$  ⇐  $w \notin L(M)$  ו-  $x = \langle M, w \rangle$

### לסיכום:

אם  $L_E$  כרעה אז אפשר לבנות מ"ט  $M_{\text{acc}}$  המכrica את  $L_{\text{acc}}$  בסתירה לכך ש-  $L_E \notin R$ .

**משפט 7.8**  $L_E \notin RE$

$L_E \notin RE$

הוכחה:  
הרעיון

בנייה מכונת טיריניג אי-דטרמיניסטיבית  $N$  מקבלת את

$$\bar{L}_E = \{\langle M \rangle \mid L(M) \neq \emptyset\} .$$

: $x$  על קלט  $= N$

**1** אם  $x \neq \langle M \rangle$  דוחה.

**2** אם  $x \in N$  בוחרת מילה  $\Sigma^*$   $w$  באופן אי-דטרמיניסטיבי.

**3** מרים  $M$  על  $w$ .

- אם  $M$  מקבלת  $\Rightarrow N$  מקבלת.

- אם  $M$  דוחה  $\Rightarrow N$  דוחה.

#### הוכחת הנכונות

אם  $x \in \bar{L}_E$

$L(M) \neq \emptyset \wedge x = \langle M \rangle \Leftarrow$

$w \in L(M) \wedge \Sigma^* w \text{ כך ש } \Leftarrow$

$\exists \text{ ניחוש } \Sigma^* w \text{ כך ש } M \text{ מקבלת את } w \Leftarrow$

$x = \langle M \rangle \Leftarrow \text{קיים חישוב של } N \text{ מקבל את}$

$.x \in L(N) \Leftarrow$

לכן קיימת מ"ט א"ד  $N$  מקבלת את השפה  $\bar{L}_E$  שכן  $\bar{L}_E \in RE$

כעת נוכיח כי  $\bar{L}_E \notin RE$

$.L_E \in R$ , 6.1 הוכחנו לעלה ש-  $\bar{L}_E \in RE$ . לכן  $\bar{L}_E \in RE$  הוכחה כי  $L_E \in RE$ .  
או בסתרה לכך ש-  $L_E \notin R$ .  
 $L_E \notin RE$  לכן ■

## 7.3 השפה $L_{EQ}$ לא כריעה

הגדרה 7.5

$$L_{EQ} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\}$$

משפט 7.9  $L_{EQ} \notin R$

$L_{EQ} \notin R$

השפה  $L_{EQ}$  לא כריעה.

נניח בשלילה כי  $L_{EQ}$  כריעה. תהי  $M_{EQ}$  מ"ט המכריעה את  $L_E$  באופן הבא.

### בנייה של $M_E$

על כל קלט  $x = M_E$

• אם  $x \neq \langle M \rangle$  דוחה. **(1)**

• אם  $x$ , מריצה  $M_\emptyset$  על  $M_{EQ}$  כאשר  $\langle M, M_\emptyset \rangle$  המ"ט שדוחה כל קלט. **(2)**

• אם  $M_{EQ}$  מקבלת  $M_E$  מתקבלת. **(3)**

• אם  $M_{EQ}$  דוחה דוחה. **(4)**

### נכונות

אם  $x \in L_E$

$L(M) = \emptyset \wedge x = \langle M \rangle \Leftarrow$

$L(M) = L(M_\emptyset) \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle \in L_{EQ} \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle$  מקבלת  $M_{EQ} \Leftarrow$

$M_E$  מקבל. **(5)**

אם  $x \notin L_E$  שני מקרים:

• מקרה 1:  $M_E \Leftarrow x \neq \langle M \rangle$

• מקרה 2:  $L(M) \neq \emptyset \wedge x = \langle M \rangle \Leftarrow$

$L(M) \neq L(M_\emptyset) \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle \notin L_{EQ} \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle$  דוחה  $M_{EQ} \Leftarrow$

$M_E$  דוחה. **(6)**

### לסיכום:

אם  $L_E \notin R$  כריעה אז אפשר לבנות מ"ט  $M_E$  בסתיירה למשפט 7.7 האומר ש-  
 $L_{EQ} \notin R$ . לכן  $L_{EQ} \notin RE$ .

**משפט 7.10**  $L_{EQ} \notin RE$

$L_{EQ} \notin RE$

לא קבילה.

### הוכחה:

נניח בשלילה כי  $L_{EQ}$  קבילה. תהי  $M_{EQ}$  מ"ט המכבלת את  $L_E$  באופן הבא.

בנייה של  $M_E$ 

$x$  על כל קלט  $= M_E$

1 אם  $x \neq \langle M \rangle$  דוחה.

2 אם  $x$ , מריצה  $M_\emptyset$  על  $M_{EQ}$  כאשר  $\langle M, M_\emptyset \rangle$  המ"ט שדוחה כל קלט.

• אם  $M_{EQ}$  מקבלת  $\Leftarrow$  מקבלת.

נכונות

אם  $x \in L_E$

$L(M) = \emptyset \wedge x = \langle M \rangle \Leftarrow$

$L(M) = L(M_\emptyset) \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle \in L_{EQ} \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle$  מקבלת  $M_{EQ} \Leftarrow$

. $M_E$  מקבל.

**לסיכום:**

אם  $L_E \notin RE$  קבילה אז אפשר לבנות מ"ט  $M_E$  מקבלת את  $L_E$  בסתייה למשפט 7.8 האומר ש-  
■  $L_{EQ} \notin RE$  לכן

**משפט 7.11**  $\bar{L}_{EQ} \notin RE$

$\bar{L}_{EQ} \notin RE$ .

**הוכחה:**

נניח בsvilleה כי  $\bar{L}$  קבילה. תהי  $M_{\bar{acc}}$  מ"ט מקבלת את  $\bar{L}_{EQ}$ . אז נבנה מ"ט  $M_{EQ}$  מקבלת את  $\bar{L}$ .  
באופן הבא.

בנייה של  $M_1$ 

ראשית נגדיר מ"ט  $M_1$  באופן הבא:

$x$  על כל קלט  $= M_1$

1) מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוות.

בנייה של  $M_{\bar{acc}}$ 

$x$  על כל קלט  $= M_{\bar{acc}}$

1 אם  $x \neq \langle M, w \rangle$  מקבלת.

(2) אם  $x = \langle M, w \rangle$  אז  $M_1$  בונה  $.M$ .

(3) מריצה  $\langle M_1, M^* \rangle$  על  $M_{\overline{EQ}}$  כאשר  $M^*$  המ"ט שמקבלת כל קלט.

(4) • אם  $M_{\overline{EQ}}$  מקבלת  $\Leftarrow$  מקבלת.

### נכונות

אם  $x \in L_{\overline{\text{acc}}}$

לא מקבלת  $M \Leftarrow$

$L(M_1) = \emptyset \Leftarrow$

$\langle M_1, M^* \rangle \in L_{\overline{EQ}} \Leftarrow$

$\langle M_1, M^* \rangle$  מקבלת  $M_{\overline{EQ}} \Leftarrow$

$M_{\overline{\text{acc}}} \Leftarrow$  מקבל.

### סיכום:

אם  $L_{\overline{\text{acc}}} \notin RE$  קבילה או אפשר לבנות מ"ט  $M_{\overline{\text{acc}}}$  בסתירה למשפט 7.6 האומר ש-  
לכן  $L_{\overline{EQ}} \notin RE$ .

## 7.4 סיכום: כרייעות וקבילות של שפות

| קבילה | כרייעה |                              |
|-------|--------|------------------------------|
| ✓     | ✗      | $L_{\text{acc}}$             |
| ✗     | ✗      | $\overline{L}_{\text{acc}}$  |
| ✗     | ✗      | $L_d$                        |
| ✓     | ✗      | $L_{\text{Halt}}$            |
| ✗     | ✗      | $\overline{L}_{\text{Halt}}$ |
| ✗     | ✗      | $L_E$                        |
| ✓     | ✗      | $\overline{L}_E$             |
| ✗     | ✗      | $L_{\text{EQ}}$              |
| ✗     | ✗      | $\overline{L}_{\text{EQ}}$   |
| ✗     | ✗      | $L_{\text{REG}}$             |
| ✗     | ✗      | $L_{\text{NOTREG}}$          |