מחלקה למדעי המחשב

10/02/25 י"ב בשבט תשפ"ה
09 : 00 – 12 : 00

אלגברה ליניארית 1 למדמ"ח

מועד א'

מרצים: ד'ר זהבה צבי, ד'ר מרינה ברשדסקי, ד'ר ירמיהו מילר.

תשפ"ה סמסטר א'

השאלון מכיל 11 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

<u>הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה</u>

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

<u>חומר עזר</u>

- דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

<u>אחר / הערות</u> יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.
- יש לציין את השאלות שעניתם עליהן בתחילת המחברת.

==

שאלה 1 (25 נקודות)

תהי $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&1&5\\-1&-2&-5\end{pmatrix}$. נגדיר

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a+b\\-b\\a-b\end{pmatrix}\middle|a,b\in\mathbb{R}\right\}\ ,\qquad U=\left\{\mathrm{v}\in\mathbb{R}^3\middle|A\mathrm{v}=-\mathrm{v}\right\}\ .$$

א) (7 נק') הוכיחו כי U,W תתי מרחבים של $\mathbb{R}^3$.

ב) (7 נק') מצאו בסיס ומימד של U,W.

ג) (7 נק') מצאו בסיסים ומימדים ל- $U+W$ ול- $U\cap W$.

ד) (4 נק') תהי $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ויהי $b\in\mathbb{R}^n$. הוכיחו או הפריכו:
אם M הפיכה אז למערכת $Mx=b$ יש יותר מפתרון אחד.

שאלה 2 (25 נקודות)

יהי $a\in\mathbb{R}$ פרמטר. נתבונן במטריצה

$$A=\begin{pmatrix}-a&a+2&2a\\2a+1&-a-2&-a^2-3a+6\\a&-a-2&a^2-2a-4\end{pmatrix}$$

א) (8 נק') מצאו את כל ערכי הפרמטר a שעבורם המטריצה אינה הפיכה.

ב) (7 נק') עבור $a=-1$ מצאו בסיס ומימד של $\mathrm{col}(A)$ ול- $\mathrm{Nul}(A)$.

ג) (7 נק') עבור $a=-1$ מצאו בסיס ומימד של $\mathrm{col}(A)\cap\mathrm{Nul}(A)$.

ד) (3 נק') אין קשר בין סעיף זה לבין הסעיפים הקודמים.
תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענה הבאה:
אם $AB=B$ ו- $B\neq 0$ אז A מטריצה היחידה.

שאלה 3 (25 נקודות)

א) (7 נקודות) במרחב $\mathbb{R}_3[x]$ נתונים וקטורים

$$u_1=1+2x+x^2+3x^3\ ,\quad u_2=2-x+x^2+2x^3\ ,\quad u_3=-1+8x+x^2+5x^3\ ,\quad w=a+x+bx^2+5x^3\ .$$

עבור אילו ערכי a,b הוקטור w שייך לתת המרחב הנפרש על ידי הוקטורים u_1,u_2,u_3?

ב) (7 נקודות) עבור הערכים של a,b שמצאתם בסעיף א', בטאו את וקטור w כצירוף לינארי של u_1,u_2,u_3 בשתי דרכים שונות.

ג) (7 נקודות) האם הוקטורים u_1,u_2,u_3,w פורשים את המרחב $\mathbb{R}_3[x]$? נמקו את תשובתכם.

ד) (4 נקודות)
תהי $\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_k\}$ קבוצת וקטורים של מרחב וקטורי V ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית $(T\neq 0)$.
הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענה הבאה:
אם הקבוצה $\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_k\}$ תלויה לינארית אז $\{T(\mathrm{v}_1),\ldots,T(\mathrm{v}_k)\}$ תלויה לינארית.

שאלה 4 **(25 נקודות)** הערה :אין קשר בין הסעיפים.

א) (7 נק') הוכיחו או הפריכו: לכל $A\in\mathbb{R}^{3\times 5}$ קיים $b\in\mathbb{R}^3$ כך שלמשוואה $AX=b$ אין פתרון.

ב) (7 נק') הוכיחו או הפריכו: לכל $A\in\mathbb{R}^{5\times 3}$ קיים $b\in\mathbb{R}^5$ כך שלמשוואה $AX=b$ אין פתרון.

ג) (7 נק') יהי $\mathbb{F}$ שדה. תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך שלכל מטריצה $0\neq B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים $AB\neq 0$. הוכיחו: A הפיכה.

ד) (4 נק') יהי $\mathbb{F}$ שדה יהיו U,V מרחבים וקטורים מעל $\mathbb{F}$, תהי $T:U\to V$ העתקה לינארית, ויהיו $u_1,u_2,\ldots,u_k$. נניח ש- T היא "על" והקבוצה $\{u_1,u_2,\ldots,u_k\}$ פורשת את U.
הוכיחו: הקבוצה $\{T(u_1),T(u_2),\ldots,T(u_k)\}$ פורשת שת V.

שאלה 5 **(25 נקודות)**

נתונה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ המוגדרת ע"י:

$$T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=\begin{pmatrix} a+3b+4c-3d & b+3c-2d \\ 0 & 3a+7b+6c-5d \end{pmatrix}$$

לכל $a+bx+cx^2+dx^3\in\mathbb{R}_3[x]$.

א) (5 נק') מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

ב) (5 נק') האם T על? האם T חד-חד-ערכית?

ג) (5 נק') מצאו בסיס ואת המימד של $\mathrm{Im}T$. תנו דוגמה לאיבר בתמונה של T.

ד) (5 נק') מצאו בסיס ואת המימד של $\mathrm{Ker}T$. תנו דוגמה לאיבר בגרעין של T.

ה) (5 נק') מצאו את כל הוקטורים $a+bx+cx^2+dx^3\in\mathbb{R}_3[x]$ כך ש-

$$T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

פתרונות

שאלה 1

א)

ב)

ג)

ד) נניח בשלילה כי יש שני פתרונות $x_1 \neq x_2$. אז

$$Mx_1 = b \qquad Mx_2 = b$$

ז"א

$$Mx_1 - Mx_2 = b - b = 0 \ .$$

מכאו

$$M\left(x_1 - x_2\right) = 0 \ .$$

M הפכיה לכן קיימת M^{-1} כך ש-

$$M^{-1}M\left(x_1 - x_2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad I(x_1 - x_2) = 0x_1 - x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

בסתירה לכך ש- $x_1 \neq x_2$ לכן קיים רק פתרון יחיד.

שאלה 2

א)

ב)

ג)

ד) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

הרי $AB = B$ ו- $A \neq I$.

שאלה 3

א)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 2 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 3 & 2 & 5 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-R_1 \\ R_4-3R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & -5 & 10 & 1-2a \\ 0 & -1 & 2 & b-a \\ 0 & -4 & 8 & 5-3a \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & -1 & 2 & b-a \\ 0 & -5 & 10 & 1-2a \\ 0 & -4 & 8 & 5-3a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & -2 & a-b \\ 0 & -5 & 10 & 1-2a \\ 0 & -4 & 8 & 5-3a \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_3 \to R_3+5R_2 \\ R_4 \to R_4+4R_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & -2 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 1-5b+3a \\ 0 & 0 & 0 & 5+a-4b \end{array}\right)$$

לכל $1-5b+3a=0$, $5+a-4b=0$ יש פתרון
w צירוף ליניארי של u_1, u_2, u_3.

ז"א לכל $a=3$, $b=2$ יש פתרון ואז w צירוף ליניארי של u_1, u_2, u_3.
נציב $a=3$, $b=2$:

ב)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & -2 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 1-5b+3a \\ 0 & 0 & 0 & 5+a-4b \end{array}\right) \xrightarrow{a=3, b=2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

הפתרון למערכת זו היא

$$\begin{pmatrix} 1-3t \\ 1+2t \\ t \end{pmatrix} \quad , \qquad t \in \mathbb{R}$$

לכן

$$(1-3t)u_1 + (1+2t)u_2 + tu_3 = w$$

לכל $t \in \mathbb{R}$. למשל אם נציב $t=0$:

$$u_1 + u_2 = w$$

למשל אם נציב $t=1$:

$$-2u_1 + 3u_2 + u_3 = w$$

ג) $\dim\{u_1, u_2, u_3, w\} = 2$ ו- $\dim \mathbb{R}_3[x] = 4$ לכן לא אפשרי שוקטורים $\{u_1, u_2, u_3, w\}$ פורשים $\mathbb{R}_3[x]$.

ד) טענה נכונה.
אם $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_k$ תלויים לינארית אז קיימים סקלרים לא כולם אפסים עבורם

$$\alpha_1 \mathrm{v}_1 + \ldots + \alpha_k \mathrm{v}_k = 0$$

לכן

$$T\left(\alpha_1 \mathrm{v}_1 + \ldots + \alpha_k \mathrm{v}_k\right) = T(0) \ .$$

T העתקה לינארית לכן $T(0)=0$ ולפי התכונת הליניאריות של העתקה לינארית נקבל

$$\alpha_1 T\left(\mathrm{v}_1\right) + \ldots + \alpha_k T\left(\mathrm{v}_k\right) = 0 \ .$$

מכיוון שמובטח שלא כל המקדמים אפסים אז נקבל כי $T(\mathrm{v}_1), \ldots, T(\mathrm{v}_k)$ תלויים ליניארית.

שאלה 4

א) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ לכל $b \in \mathbb{R}^3$ למשוואה $Ax=b$ יש פתרון.

ב) טענה נכונה.
אם $A \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ אז ל-A יש 5 שורות ו- 3 עמודות.
לכן במדורגת יש לכל היותר 3 עמודות מובילות ולכן 2 שורות האחרונות הן שורות אפסים.
לכן קיים וקטור $b \in \mathbb{R}^5$ שאיננו צירוף ליניארי של העמודות של A, כי ייתכן שורת סתירה.

ג) נניח בשלילה כי A לא הפיכה.
אז קיים וקטור $\mathrm{v} \neq 0 \in \mathbb{F}^n$ עבורו $A\mathrm{v}=0$.
לכן קיים ווקטור $B = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathrm{v} & \mathrm{v} & \cdots & \mathrm{v} \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}$ כך ש- $AB=0$ ו- $B \neq 0$. בסתירה לכך שלכל $B \neq 0$ מתקיים $AB \neq 0$.

ד) יהי $\mathrm{v} \in V$.
T "על" ולכן קיים $u \in U$ כך ש- $T(u)=\mathrm{v}$.
$\{u_1, \ldots, u_k\}$ פורשת את U ולכן קיימים סקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ עבורם

$$u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k \ .$$

מכיוון ש- T העתקה ליניארית אז

$$\mathrm{v} = T(u) = T\left(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k\right) = \alpha_1 T(u_1) + \ldots + \alpha_k T(u_k)$$

ז"א הקבוצה $\{T(u_1), \ldots, T(u_k)\}$ פורשת את V.

שאלה 5

א)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

ב) נדרג את A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 6 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לא כל השורות מובילות לכן T לא "על".
לא כל העמודות מובילות לכן T לא "חד-חד-ערכית".

ג)

$$\text{col}(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Im}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$\dim\ \text{Im}(T) = 2$.

ד)

$$\text{Nul}(A) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

$$\text{Ker}(T) = \text{span}\left\{ 5 - 3x + x^2, -3 + 2x + x^3 \right\} .$$

$\dim\ \ker(T) = 2$.

ה) יש לפתור את המערכת

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to 3R_4 + R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש שורת סתירה במדורגת ולכן למערכת הזאת לא קיים פתרון.