המחלקה למדעי המחשב

30/06/23 תשפ"ג
08 : 30 – 11 : 30

אלגברה ליניארית 2 למדמ"ח

מועד א'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר, ד"ר שי סרוסי.

תשפ"ג סמסטר ב'

השאלון מכיל 12 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (8 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.

==

שאלה 1 (25 נקודות)

א) (20 נקודות) נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$$

מצאו צורת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $J = P^{-1}AP$.

ב) (5 נקודות) הוכיחו כי אם v הוא ווקטור עצמי של העתקה T ו- $\bar{T}$ במרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ ם ערכים עצמיים μ ו- λ אז $\bar{\mu} = \lambda$.

שאלה 2 (25 נקודות) תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $(n \geq 3)$ מטריצה ריבועית המקיימת $A^3 = 4A$.

א) (5 נקודות) רשמו את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של A.

ב) (5 נקודות) רשמו את כל האפשרויות עבור $|A|$.

ג) (5 נקודות) הוכיחו או הפריכו: A ניתנת ללכסון.

ד) (5 נקודות) הוכיחו או הפריכו: A הפיכה.

ה) (5 נקודות) נניח בנוסף כי A נורמלית. האם A בהכרח תצמודה לעצמה?

שאלה 3 (25 נקודות) נתבונן במרחב $\mathbb{R}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, $U = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

א) (10 נקודות) מצאו בסיס אורתוגונלי ל- U.

ב) (10 נקודות) מצאו בסיס אורתוגונלי ל- $U^{\perp}$.

ג) (5 נקודות) מצאו את כל הווקטורים $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^4$ שך שמתקיים $P_U(\mathrm{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

שאלה 4

א) (15 נקודות) יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי, ויהיו $T : V \to V$, $S : V \to V$ אופרטורים לינאריים. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

1) (5 נקודות) אם T אופרטור לכסין כך ש- $T^{100} = 0$ אז $T = 0$.

2) (5 נקודות) אם T, S הם צמודים לעצמם אזי גם $(T + S)$ צמוד לעצמו.

3) (5 נקודות) יהי $\{0\} \neq U \subset V$ תת מרחב כך שלכל $\mathrm{v} \in V, u \in U$ מתקיים $\|T(\mathrm{v}) - \mathrm{v}\| \leq \|\mathrm{v} - u\|$ אז 1 הוא ערך עצמי של T.

ב) (10 נקודות) הוכיחו או הפריכו:

1) (5 נקודות) יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו U, W תתי מרחבים שלו. אזי $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

שאלה 5 (25 נקודות)

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

א) (8 נקודות) האם A לכסינה מעל $\mathbb{R}$? אם כן, מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D = P^{-1}AP$. אחרת, הסבירו מדוע A איננה לכסינה.

ב) (12 נקודות) האם A לכסינה מעל $\mathbb{C}$? אם כן, מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D = P^{-1}AP$. אחרת, הסבירו מדוע A איננה לכסינה.

ג) (5 נקודות) האם A לכסינה אוניטרית מעל $\mathbb{C}$? נמקו את תשובתכם.

פתרונות

שאלה 1 (25 נקודות)

א) (20 נקודות)

$$A=\begin{pmatrix}0&3&3\\-1&8&6\\2&-14&-10\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}p_A(x)=|xI-A|=&\begin{vmatrix}x&-3&-3\\1&x-8&-6\\-2&14&x+10\end{vmatrix}\\=&x\left(x^2+2x+4\right)+3(x-2)-3(2x-2)\\=&x\left(x^2+2x+4\right)-3x\\=&x\left(x^2+2x+1\right)\\=&x(x+1)^2\ .\end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=0$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=-1$ מריבוי אלגברי 2.

נמצא את הפולינום המינימלי:

$$A(A+I)=\begin{pmatrix}0&3&3\\-1&8&6\\2&-14&-10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&3\\-1&9&6\\2&-14&-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-15&-9\\3&-15&-9\\-4&20&12\end{pmatrix}\neq 0$$

לכן

$$m_A(x)=x(x+1)^2\ .$$

$$J=\begin{pmatrix}J_1(0)&\\&J_2(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{0}&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda=0$:</u>

$$(A-0I)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&3&3&0\\-1&8&6&0\\2&-14&-10&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&8&6&0\\0&3&3&0\\2&-14&-10&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to\frac{1}{2}R_3]{R_2\to\frac{1}{3}\cdot R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&8&6&0\\0&1&1&0\\2&-14&-10&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&8&6&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1\to -R_1]{R_3\to R_3-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-8&-6&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1+8R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

פתרון: $z\in\mathbb{R}$, z $\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$$V_0=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נסמן $u_1=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

<u>מרחב עצמי של $\lambda=-1$:</u>

$$(A+I)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&3&0\\-1&9&6&0\\2&-14&-9&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2+R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&3&0\\0&12&9&0\\0&-20&-15&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{3}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&3&0\\0&4&3&0\\0&-20&-15&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3+5R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&3&0\\0&4&3&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{4}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&3&0\\0&1&\frac{3}{4}&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1-3R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{3}{4}&0\\0&1&\frac{3}{4}&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

פתרון: $z\in\mathbb{R}$, z $\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\-\frac{3}{4}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$$V_{-1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}-3\\-3\\4\end{pmatrix}\right\}$$

נסמן $u_2 = \begin{pmatrix}-3\\-3\\4\end{pmatrix}$.

כעת נמצא וקטור עצמי מוכלל של הערך עצמי $\lambda = -1$:

נסמן $u_3 = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ונפתור את המערכת

$$(A+I)u_3 = u_2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\-1 & 9 & 6\\2 & -14 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\4\end{pmatrix}$$

$$(A+I) = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 3 & -3\\-1 & 9 & 6 & -3\\2 & -14 & -9 & 4\end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 3 & -3\\0 & 12 & 9 & -6\\0 & -20 & -15 & 10\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 3 & -3\\0 & 4 & 3 & -2\\0 & -20 & -15 & 10\end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 3 & -3\\0 & 4 & 3 & -2\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to \frac{1}{4}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 3 & -3\\0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2}\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2}\\0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2}\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

פתרון: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\-\frac{3}{4}\\1\end{pmatrix} z\,,\ z\in\mathbb{R}$. נציב $z=0$:

$$u_3 = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} .$$

$$P = \begin{pmatrix}u_1 & u_2 & u_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -3 & -\frac{3}{2}\\-1 & -3 & -\frac{1}{2}\\1 & 4 & 0\end{pmatrix} , \qquad J = \begin{pmatrix}J_1(0) & \\ & J_2(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boxed{0} & 0 & 0\\0 & -1 & 1\\0 & 0 & -1\end{pmatrix} .$$

ב) **(5 נקודות)**
נניח כי $T(\mathrm{v})=\lambda \mathrm{v}$, $\bar{T}(\mathrm{v})=\mu \mathrm{v}$.

$$\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle = \langle \lambda \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle$$ (λ ערך עצמי של T)
$$=\lambda\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle$$ (ליניארות של המכפלה פנימית)

מצד שני,

$$\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle = \langle \mathrm{v},\bar{T}(\mathrm{v})\rangle$$ (הגדרה של הצמודה)
$$=\langle \mathrm{v},\mu \mathrm{v}\rangle$$ (μ ערך עצמי של $\bar{T}$)
$$=\bar{\mu}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle$$ (ליניארות של המכפלה פנימית)

לכן

$$\lambda\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=\bar{\mu}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \quad\Rightarrow\quad (\lambda-\bar{\mu})\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda-\bar{\mu})\left\|\mathrm{v},\mathrm{v}\right\|^2=0$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v}\neq 0 \Leftarrow \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\neq 0 \Leftarrow (\lambda-\bar{\mu})=0 \Leftarrow \lambda=\bar{\mu}$.

<u>שאלה 2</u> (25 נקודות)

$A^3=4A$, $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. נסמן $f(x)=x^3-4x=x(x-2)(x+2)$. המטריצה A מאפסת את הפולינום $f(x)$.

א) **(5 נקודות)** הפולינום המינימלי מחלק את $f(x)$. לכן האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$x\ ,\quad x-2\ ,\quad x+3\ ,\quad x(x-2)\ ,\quad x(x+2)\ ,\quad (x-2)(x+2)\ ,\quad x(x-2)(x+2)\ .$$

ב) **(5 נקודות)** הערכים הכצמיים של A שייכים לקבוצה $\{0,2,-2\}$. A מטריצה מסדר $n\times n$, לכן האפשרויות ל- $|A|$ הן

$$0\ ,\quad 2^n\ ,\quad -2^n\ .$$

ג) **(5 נקודות)** הפולינום המינימלי מתפרק לגורמים לינאריים, לכן A ניתנת ללכסון.

ד) **(5 נקודות)** ל- A יתכן ערך עצמי 0, לכן A לא בהכרח הפיכה.

ה) **(5 נקודות)** A נורמלית וכל הערכים העצמיים ממשיים, לכן היא צמודה לעצמה.

<u>שאלה 3</u> (25 נקודות)

א) **(10 נקודות)** נסמן

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

$U = \text{span}\left\{\text{v}_1, {}_2, \text{v}_3\right\}$. נבנה בסיס אורתוגונלי של U.

$$u_1 = \text{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} .$$

$$u_2 = \text{v}_2 - \frac{\langle \text{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{-3}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} .$$

$$u_3 = \text{v}_3 - \frac{\langle \text{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{\langle \text{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 = \begin{pmatrix}3\\0\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{3}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{-2}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix} .$$

ב) (10 נקודות) $U^{\perp} = \left\{\text{v}\middle|\text{v} \perp u_1, \text{v} \perp u_2, \text{v} \perp u_3\right\}$.

$$\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = x + z + w = 0 .$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = -x + z = 0 .$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix} \right\rangle = x + z - 2w = 0 .$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\-1&0&1&0\\1&0&1&-2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&0&2&1\\0&0&0&-3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$x = 0$, $z = 0$, $y \in \mathbb{R}$, $w = 0$

בסיס אורתוגונלי של $U^{\perp}$:

$$u_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

ג) (5 נקודות) $V=U\oplus U^{\perp}$. לכן לכל $\mathrm{v}\in V$ קיימים סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in\mathbb{R}$ כך ש-

$$\mathrm{v}=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3+\alpha_4u_4$$

$$P_U(\mathrm{v})=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3\ .$$

לכן

$$P_U(\mathrm{v})=u_1\qquad\Leftrightarrow\qquad\alpha_1=1,\alpha_2=\alpha_3=0$$

כלומר

$$\mathrm{v}=u_1+\alpha u_4=\begin{pmatrix}1\\ \alpha\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\ ,\qquad \alpha\in\mathbb{R}\ .$$

שאלה 4

א) (15 נקודות)
$T:V\to V$, $S:V\to V$.

1) (5 נקודות) $T^{100}=0$ לכן הפולינום המינימלי $m(x)$ מחלק את הפולינום x^{100}. נתון כי T לכסינה, לכן $m(x)=x$.
T מאפס את הפולינום המינימלי, לכן $T=0$.

2) (5 נקודות) נניח כי T,S הם צמודים לעצמם. אז

$$\overline{T+S}=\bar{T}+\bar{S}=T+S$$

ז"א $T+S$ צמוד לעצמו.

3) (5 נקודות) נקח $u\in U$. אז

$$\langle T(u)-u,T(u)-u\rangle=\|T(u)-u\|\leq\|u-u\|=0$$

לפיכך

$$\|T(u)-u\|=0\quad\Rightarrow\quad T(u)=u\ .$$

לכן 1 הוא ערך עצמי של T.

ב) (10 נקודות) הוכיחו או הפריכו:

1) (5 נקודות) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$V\in\mathbb{R}^2\ ,\qquad U=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}\ ,\qquad W=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

אז

$$U^{\perp}=W\quad\Rightarrow\quad(U\cap W)^{\perp}=\mathbb{R}^2$$

<u>שאלה 5</u> **(25 נקודות)**

א) (8 נקודות)

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 5 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 5 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left[(\lambda-2)^2+5\right) = (\lambda-3)\left(\lambda^2-4\lambda+9\right)$$

יש שורש ממשי אחד של הפולינום האופייני: $\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 1.
נחשב את המרחב עצמי של $\lambda = 3$:

$$(A-3I|\bar{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

לכן המרחב העצמי הוא

$$V_3 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \qquad \dim V_3 = 1 \ .$$

יש ערך עצמי ממשי אחד מירבוי גיאומטרי 1, לכן A לא לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

ב) (12 נקודות) לפולינום האופייני ישנם 3 שורשים מעל $\mathbb{C}$:

$$p_A(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-2-\sqrt{5}i)(\lambda-2+\sqrt{5}i)$$

השורשים של הפולינום האופייני הם
$\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 1,
$\lambda = 2+\sqrt{5}i$ מריבוי אלגברי 1,
$\lambda = 2-\sqrt{5}i$ מריבוי אלגברי 1.
יש 3 ערכים עצמים שונים לכן A לכסינה מעל $\mathbb{C}$.

<u>מרחב עצמי השייך ל - $\lambda = 3$</u>

$$V_3 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \qquad \text{dim}V_3 = 1 \ .$$

<u>מרחב עצמי השייך ל - $\lambda = 2+\sqrt{5}i$</u>

$$V_{2+\sqrt{5}i} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5}i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \qquad \text{dim}V_{2+\sqrt{5}i} = 1 \ .$$

<u>מרחב עצמי השייך ל - $\lambda = 2-\sqrt{5}i$</u>

$$V_{2-\sqrt{5}i} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{5}i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \ , \qquad \dim V_{2-\sqrt{5}i} = 1 \ .$$

A לכסינה מעל $\mathbb{C}$:

$$\dim V_3 + \dim V_{2+\sqrt{5}i} + \dim V_{2-\sqrt{5}i} = 3 = \dim \mathbb{C}^3 \ .$$

$$A = PDP^{-1} \ , \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2-i\sqrt{5} \end{pmatrix} \ , \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{5} & -i\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

ג) (5 נקודות) A לכסינה אוניטרית אם ורק אם היא נורמלית.

$$A\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 29 & -8 \\ 0 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & -8 & 29 \end{pmatrix}$$

$A\bar{A} \neq \bar{A}A$ לכן A לא נורמלית לכן A לא לכסינה אוניטרית.