

# שיעור 13

## אינטגרציה של פונקציות טריגונומטריות ואי רציאונליות

### 13.1 הצבה אוניברסלית

בהינתן אינטגרל מצורה

$$\int f(\sin x, \cos x) dx$$

כאשר  $f$  פונקציה רציונלית, לדוגמה

$$\int \frac{2 \sin x + 3 \cos x + 2}{4 \cos^2 x + 3} dx$$

קיימת הצבה אוניברסלית:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

⇐

$$t' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(1 + t^2).$$

ניתן לבטא הפונקציות הטריגונומטריות באמצעות  $t$  כפי רשום בטבלה:

$\sin x$	$\frac{2t}{1+t^2}$
$\cos x$	$\frac{1-t^2}{1+t^2}$
$\tan x$	$\frac{2t}{1-t^2}$
$t'$	$\frac{1}{2}(1+t^2)$

$$\sin x = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)} = 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{(1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right))}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

### דוגמה 13.1

חשבו את:  $\int \frac{1}{\sin x} dx$

**פתרון:**

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$t' = \frac{1+t^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \right) \cdot \frac{2}{1+t^2} \cdot t' dx &= \int \frac{2}{(1+t^2) \cdot \frac{2t}{1+t^2}} dt \\ &= \int \frac{1}{t} dt \\ &= \ln |t| + C = \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| \end{aligned}$$

■

### דוגמה 13.2

חשבו את:  $\int \frac{1}{3 + \sin x + \cos x} dx$

**פתרון:**

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$t' = \frac{1+t^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{3 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{(1+t^2)} \cdot t' dx &= \int \frac{1}{3 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{(1+t^2)} dt \\
 &= \int \frac{2}{3 + 3t^2 + 2t + 1 - t^2} dt \\
 &= \int \frac{2}{4 + 2t^2 + 2t} dt \\
 &= \int \frac{1}{2 + t^2 + t} dt \\
 &= \int \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} dt \\
 &= \int \frac{1}{z^2 + \frac{7}{4}} dz \\
 &= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \left( \frac{2z}{\sqrt{7}} \right) + C \\
 &= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \left( \frac{2 \left(t + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{7}} \right) + C \\
 &= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \left( \frac{2 \left(\tan \left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{7}} \right) + C \\
 &= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \left( \frac{2 \tan \left(\frac{x}{2}\right) + 1}{\sqrt{7}} \right) + C .
 \end{aligned}$$

■

### דוגמה 13.3

חשבו את:  $\int \frac{1}{4 \sin x - 3 \cos x - 5} dx$

**פתרון:**

$$t = \tan \left( \frac{x}{2} \right)$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$t' = \frac{1+t^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{4 \sin x - 3 \cos x - 5} dx &= \int \left( \frac{1}{4 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} - 5} \right) \cdot \frac{2}{1+t^2} t' dx \\
&= \int \left( \frac{2}{8t - 3(1-t^2) - 5(1+t^2)} \right) dt \\
&= \int \left( \frac{2}{8t - 3 + 3t^2 - 5 - 5t^2} \right) dt \\
&= \int \left( \frac{2}{8t - 8 - 2t^2} \right) dt \\
&= \int \left( \frac{-1}{t^2 - 4t + 4} \right) dt \\
&= \int \left( \frac{-1}{(t-2)^2} \right) dt \\
&= \frac{1}{t-2} + C \\
&= \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 2} + C
\end{aligned}$$

■

## 13.2 אינטגרציה של $\int \sin^m x \cos^n x dx$

(1) אם  $m \in \mathbb{N}$  מספר זוגי, מגדירים  $t = \sin x$

(2) אם  $n \in \mathbb{N}$  מספר זוגי, מגדירים  $t = \cos x$

(3) • אם  $n, m \geq 0 \in \mathbb{N}$  זוגיים,

• האינטגרל מצורה  $\int \sin^m x dx$

• האינטגרל מצורה  $\int \cos^m x dx$

משתמשים בזהויות טריגונומטריות:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

## 13.4 דוגמה

חשבו את:  $\int \cos^3 x dx$

פתרון:

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x dx$$

$$t' = \cos x \quad t = \sin x$$

$$\begin{aligned} \int (1 - t^2) t' dx &= \int (1 - t^2) dt \\ &= t - \frac{t^3}{3} + C \\ &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C \end{aligned}$$

### 13.5 דוגמה

חשבו את:  $\int \cos^2 x \sin^3 x dx$

**פתרון:**

$$\begin{aligned} t &= \cos x \\ t' &= -\sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (1 - t^2) t^3 dx &= - \int (1 - t^2) t^2 \cdot t' dx \\ &= - \int (1 - t^2) t^2 dt \\ &= - \int (t^2 - t^4) dt \\ &= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C \\ &= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C . \end{aligned}$$

### 13.6 דוגמה

חשבו את:  $\int \sin^2 x dx$

**פתרון:**

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C \end{aligned}$$

### 13.7 דוגמה

חשבו את:  $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

פתרון:

$$\begin{aligned}
 \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \int (\sin x \cos x)^2 \, dx \\
 &= \int \left( \frac{\sin 2x}{2} \right)^2 \, dx \\
 &= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \, dx \\
 &= \frac{1}{4} \int \left( \frac{1 - \cos 4x}{2} \right) \, dx \\
 &= \frac{1}{8} \left( x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C
 \end{aligned}$$

■

### 13.3 אינטגרציה של פונקציות אי-רציונליות (חיסול שורשים)

בהינתן אינטגרל מצורה

$$\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \, , \quad \int f(x, \sqrt{a^2 + x^2}) \, , \quad \int f(x, \sqrt{x^2 - a^2})$$

כאשר  $f$  פונקציה רציונלית, קיימת הצבה אוניברסלית:

מקרה (1)  $\sqrt{a^2 - x^2}$

$$x = a \cdot \sin t$$

מקרה (2)  $\sqrt{a^2 + x^2}$

$$x = a \cdot \tan t$$

מקרה (3)  $\sqrt{x^2 - a^2}$

$$x = \frac{a}{\sin t}$$

### 13.8 דוגמה

חשבו את:  $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2} \, dx$

פתרון:

$$x = 2 \sin t$$

$$x'_t = 2 \cos t$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx &= \int \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t} dx \\ &= \int \frac{2\sqrt{1-\sin^2 t}}{4\sin^2 t} dx \\ &= \int \frac{2\cos t}{4\sin^2 t} dx \\ &= \int \frac{2\cos t}{4\sin^2 t} \cdot \left( \frac{2\cos t}{x'_t} \right) dx \\ &= \int \frac{4\cos^2 t}{4\sin^2 t} dt \\ &= \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt \\ &= \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} dt \\ &= \int \left( \frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt \\ &= (\cot t - t) + C \\ &= \cot \left( \arcsin \left( \frac{x}{2} \right) \right) - \arcsin \left( \frac{x}{2} \right) + C . \end{aligned}$$

### דוגמה 13.9

חשבו את:  $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3} dx$

**פתרון:**

$$x = \frac{1}{\sin t}$$

$$x'_t = \frac{\cos t}{\sin^2 t}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3} dx &= \int \frac{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1}}{\frac{1}{\sin^3 t}} dx \\
 &= \int \frac{\sqrt{1 - \sin^2 t} \sin^3 t}{\sin t} dx \\
 &= \int \cos t \sin^2 t dx \\
 &= \int \cos t \sin^2 t \cdot \left( \frac{\cos t}{\sin^2 t} \right) \frac{1}{x'_t} dx \\
 &= \int \cos^2 t dt \\
 &= \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt \\
 &= \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C \\
 &= \frac{\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}{2} + \frac{\sin\left(2 \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{2} + C .
 \end{aligned}$$

### דוגמה 13.10

חשבו את:  $\int x \sqrt{x^2 + 9} dx$

**פתרון:**

$$x = 3 \tan t , \quad x'_t = \frac{3}{\cos^2 t}$$

$$\int 3 \tan t \cdot \sqrt{9 \tan^2 t + 9} dx = \int 3 \tan t \cdot 3 \sqrt{\tan^2 t + 1} dx$$



$$\tan^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t} \quad \text{זהות:}$$

$$\begin{aligned} 9 \int \tan t \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} dx &= 9 \int \tan t \cdot \frac{1}{\cos t} dx \\ &= 9 \int \tan t \cdot \frac{1}{\cos t} \cdot x'_t \cdot \frac{1}{x'_t} dx = 9 \int \tan t \cdot \frac{1}{\cos t} \cdot x'_t dt \\ &= 9 \int \tan t \cdot \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{3}{\cos^2 t} dt \\ &= 27 \int \tan t \cdot \frac{1}{\cos^3 t} dt \\ &= 27 \int \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{1}{\cos^3 t} dt \\ &= 27 \int \frac{\sin t}{\cos^4 t} dt \end{aligned}$$

$$z = \cos t \quad z'_t = -\sin t$$

$$\begin{aligned} 27 \int \frac{\sin t}{\cos^4 t} dt &= 27 \int \frac{z'}{z^4} dt \\ &= 27 \int \frac{1}{z^4} dz \\ &= 27 \cdot \frac{-1}{3z^3} + C \\ &= \frac{81}{3 \cos^3 t} + C \\ &= \frac{81}{3 \cos^3 \left( \arctan \left( \frac{x}{3} \right) \right)} + C \end{aligned}$$

■