שיעור 10
מרחב האפס, מרחב העמודות ומרחב השורות

10.1 דרגת המטריצה

הגדרה 10.1

נתונה מטריצה
$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מעל שדה $\mathbb{F}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

למטריצה מקושרים 3 תת מרחבים:

(1) מרחב האפס של A שמסומן $\text{Nul}(A)$ ומוגדר

$$\text{Nul}(A) = \left\{ X \in \mathbb{F}^n \middle| A \cdot X = \bar{0} \right\} .$$

(2) מרחב העמודות של A שמסומן $\text{Col}(A)$ ומוגדר

$$\text{Col}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\} .$$

$\text{Col}(A)$ הוא התת מרחב הנפרש ע"י עמודות המטריצה.

(3) מרחב השורות של A שמסומן $\text{Row}(A)$ ומוגדר

$$\text{Row}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \right\} .$$

$\text{Row}(A)$ הוא התת מרחב הנפרש ע"י שורות המטריצה.

דוגמה 10.1

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 4 & -11 & 23 & 18 & 11 \end{pmatrix}$. מצאו את בסיס ואת המימד של $\text{Col}(A)$ ו- $\text{Row}(A)$.

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 4 & -11 & 23 & 18 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to 2R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 6 & 7 \\ 0 & -3 & 7 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עמודות 1 ו- 2 של המדורגת מובילות, לפיכך עמודות 1 ו- 2 של A מהווים בסיס של $\text{col}(A)$:

$$\text{col}(A) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$$

שורות 1 ו- 2 של המדורגת מובילות, לפיכך שורות 1 ו- 2 של A מהווים בסיס של $\text{row}(A)$:

$$\text{row}(A) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(\text{Col}(A)) = 2$, מספר העמודות המובילות.

$\dim(\text{Row}(A)) = 2$, מספר השורות שלא אפסים.

משפט 10.1 בסיס ומימד של $\text{col}(A)$

תהי $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

1) העמודות המובילות של A מהווים בסיס של $\text{Col}\, A$.

2) השורות המובילות של A מהווים בסיס של $\text{Row}\, A$.

3) $\dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A))$

הוכחה:

1) משפט 9.3.

2) תרגיל בית.

3) $\dim(\text{Col}(A))$ הוא מספר העמודות המובילות במטריצה המדורגת של A.

ז"א $\dim(\text{Col}(A))$ הוא מספר האיברים המובילים במטריצה המדורגת של A.

$\dim(\text{Row}(A))$ הוא מספר השורות שלא אפסים במטריצה המדורגת של A.

ז"א $\dim(\text{Row}(A))$ הוא מספר האיברים המובילים במטריצה המדורגת של A.

■

הגדרה 10.2 דרגה

למספר $\dim\left(\mathrm{Col}(A)\right)=\dim\left(\mathrm{Row}(A)\right)$ קוראים דרגת המטריצה. סימון: $\mathrm{rank}(A)$. ז"א

$$\mathrm{rank}(A)=\dim\left(\mathrm{Col}(A)\right)=\dim\left(\mathrm{Row}(A)\right)\ .$$

משפט 10.2 מימד של $\mathrm{Nul}(A)$

תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ונניח כי $\mathrm{rank}(A)=r$. אז

$$\dim\left(\mathrm{Nul}(A)\right)=n-r=(\text{מספר עמודות הלא מובילות})\ .$$

הוכחה: (להעשרה בלבד!)

נניח כי $\{u_1,\cdots,u_k\}$ בסיס של $\mathrm{Nul}(A)$.

נשלים אותו לבסיס של $\mathbb{R}^n$: $\{u_1,\cdots,u_k,u_{k+1},\cdots u_n\}$.

הקבוצה $\{u_1,\cdots,u_k,u_{k+1},\cdots u_n\}$ פורשת את $\mathbb{R}^n$ לפיכך הקבוצה $\{Au_1,\cdots,Au_k,Au_{k+1},\cdots Au_n\}$ פורשת את $\mathrm{col}(A)$.

אבל $\{u_1,\cdots,u_k\}\in\mathrm{Nul}(A)$ $\Leftarrow$ $Au_1=0,\cdots,Au_k=0$.

לפיכך $\{Au_{k+1},\cdots Au_n\}$ פורשת את $\mathrm{col}(A)$.

כעת נוכיח כי $\{Au_{k+1},\cdots Au_n\}$ בת"ל: נרשום

$$s_{k+1}Au_{k+1}+\cdots+s_nAu_n=\bar{0}$$

כאשר $\bar{0}\in\mathbb{R}^n$ ווקטור האפס ו- $s_{k+1},\ldots,s_n$ סקלרים. מכאן

$$A\left(s_{k+1}u_{k+1}+\cdots+s_nu_n\right)=\bar{0}$$

ז"א $s_{k+1}u_{k+1}+\cdots+s_nu_n\in\mathrm{Nul}(A)$. לפיכך ניתן לרשום אותו כצירוף ליניארי של הבסיס $\{u_1,\cdots,u_k\}$:

$$s_{k+1}u_{k+1}+\cdots+s_nu_n=t_1u_1+\cdots+t_ku_k$$

$t_1,\ldots,t_k$ סקלרים. נעביר אגפים ונקבל:

$$-t_1u_1-\cdots-t_ku_k+s_{k+1}u_{k+1}+\cdots+s_nu_n=\bar{0}\ .$$

הקבוצה $\{u_1,\cdots,u_k,u_{k+1},\cdots u_n\}$ בסיס לכן היא בת"ל לכן $t_1=\cdots=t_k=s_{k+1}=\cdots=s_n=0$.

לפיכך הקבוצה $\{Au_{k+1},\cdots,Au_n\}$ בת"ל.

מצאנו כי $\{Au_{k+1},\cdots,Au_n\}$ בת"ל ופורשת $\mathrm{col}(A)$ לכן היא בסיס של $\mathrm{col}(A)$.
נניח כי $\dim\left(\mathrm{col}(A)\right)=r$.

$$\Rightarrow\quad n-k=r\quad\Rightarrow\quad k=n-r\ .$$

לפיכך

$$\mathrm{Dim}\left(\mathrm{Nul}(A)\right)=n-r=(\text{מספר עמודות})-(\text{מספר עמודות מובילות})=(\text{מספר עמודות הלא מובילות})\ .$$

■

משפט 10.3 בסיס של $\text{Nul}(A)$

תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. נניח שהפתרון הכללי למערכת $AX=0$ הוא

$$X_0 = y_1u_1 + \cdots + y_ku_k$$

כאשר $y_1,\cdots,y_k$ המשתנים החופשיים של המערכת ו- $u_1,\cdots,u_k \in \mathbb{F}^n$.

אז הקבוצת ווקטורים $B=\{u_1,\cdots,u_k\}$ בסיס של $\text{Nul}(A)$.

הוכחה: ***להעשרה בלבד!***

נניח כי $\text{rank}(A)=r$. אז יש $n-r$ משתנים חופשיים, לכן יש $k=n-r$ ווקטורים בקבוצה B.

$\dim\left(\text{Nul}(A)\right)=n-r$ והקבוצת ווקטורים $B=\{u_1,\cdots,u_{n-r}\}$ פורשת את $\text{Nul}(A)$.

לכן לפי משפט 9.4 הקבוצה B בת"ל לכן B מהווה בסיס של $\text{Nul}(A)$. ■

דוגמה 10.2

במרחב $\mathbb{R}^{2\times 2}$ נתונים ווקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix}1&3\\1&3\end{pmatrix}\ ,\qquad u_2=\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}\ ,\qquad u_3=\begin{pmatrix}1&5\\-1&3\end{pmatrix}\ ,\qquad \text{v}=\begin{pmatrix}a+2&1\\-5&a\end{pmatrix}$$

א) עבור אילו ערכי a ווקטור v שייך לפרישה ליניארית של u_1,u_2,u_3?

ב) עבור כל ערך של a שמצאתם בסעיף א', בטאו את ווקטור v כצירוף ליניארי של u_1,u_2,u_3 בשתי דרכים שונות.

ג) לכל ערך של a מצאו את המימד ובסיס של $\text{span}\{u_1,u_2,u_3,\text{v}\}$.

ד) האם קיימים ערכי a עבורם
$$\text{span}\{u_1,u_2,u_3,\text{v}\}=\mathbb{R}^{2\times 2}\ .$$

פתרון:

א) נרשום v כצירוף ליניארי של u_1,u_2,u_3:

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=\text{v}$$

נחשב את המקדמים:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a+2\\3&1&5&1\\3&1&5&1\\3&3&3&a\end{array}\right)\xrightarrow[R_4\to R_4-3R_1]{\substack{R_2\to R_2-3R_1\\R_3\to R_3-R_1}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a+2\\0&-2&2&-3a-5\\0&2&-2&-a-7\\0&0&0&-2a-6\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a+2\\0&-2&2&-3a-5\\0&0&0&-4a-12\\0&0&0&-2a-6\end{array}\right)$$

אם $a=-3$ לה יהיו שורת סתירה וקיים פתרון ואז $\text{v}\in\text{span}\{u_1,u_2,u_3\}$.

ב) $a=-3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$k_1=1-2k_3\ ,\qquad k_2=-2+k_3\ ,\qquad k_3\in\mathbb{R}\ .$$

נציב $k_3=1 \Leftarrow$

$$k_1=-1\ ,\qquad k_2=-1\ ,\qquad k_3=1$$

ונקבל

$$-u_1-u_2+u_3=\mathrm{v}\ .$$

נציב $k_3=0 \Leftarrow$

$$k_1=1\ ,\qquad k_2=-2\ ,\qquad k_3=0$$

ונקבל

$$u_1-2u_2+0\cdot u_3=\mathrm{v}\ .$$

ג) עבור $a=-3$:

מסעיף (ב), עמודה 1 ועמודה 2 של $A=\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & \mathrm{v} \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$ מובילות, לכן הווקטורים u_1,u_2 מהווים בסיס.

עבור $a\neq -3$:

מסעיף (ב), עמודה 1 עמודה 2 ועמודה 4 של $A=\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & \mathrm{v} \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$ מובילות, לכן הווקטורים u_1,u_2,v מהווים בסיס.

ד) הווקטורים u_1,u_2,u_3,v ת"ל לכל ערכי a, לכן לא קיימים ערכי a עבורם $\mathrm{span}\{u_1,u_2,u_3,\mathrm{v}\}=\mathbb{R}^{2\times 2}$.

דוגמה 10.3

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. לכל ערך של a מצאו את המימד ובסיס של $\mathrm{Nul}(A)$.

פתרון:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-aR_1]{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 \end{pmatrix}$$

$$a=1,-2 \Leftarrow -a^2-a+2=0$$

עבור $a=1$: מקבלים

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim(\text{Nul}(A)) = \text{מספר העמודות הלא מובילות} = 2 \ .$$

הפתרון הכללי הינו

$$x = -y - z \ , \qquad y \in \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Nul}(A)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>עבור $a = -2$</u>: מקבלים

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim(\text{Nul}(A)) = \text{מספר העמודות הלא מובילות} = 1 \ .$$

הפתרון הכללי הינו

$$x = z \ , y = z \ , \qquad y \in \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Nul}(A)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

משפט 10.4 משפט הדרגה

לכל מרטיצה $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מסדר $m \times n$:

$$\text{rank}(A) + \dim\left(\text{Nul}(A)\right) = n \ .$$

הוכחה:

$\text{rank}(A)$ שווה למספר העמודות המובילות.

$\dim\left(\text{Nul}(A)\right)$ שווה למספר העמודות הלא המובילות.

לכן $\text{rank}(A) + \dim\left(\text{Nul}(A)\right)$ שווה למספר העמודות של A.

■

דוגמה 10.4

עבור מטריצה $A \in \mathbb{R}^{5\times 7}$ ידוע כי $\dim(\text{Nul}(A)) = 2$. מצאו את דרגת A.

פתרון:
$\dim(\mathrm{Nul}(A))=2$ לכן $\mathrm{rank}(A)=5$.

דוגמה 10.5

האם למטריצה $A\in\mathbb{R}^{6\times 9}$ יכול להיות $\dim(\mathrm{Nul}(A))=2$? מצאו את דרגת A.

פתרון:

נניח שקיימת מטריצה $A\in\mathbb{R}^{6\times 9}$ שעבורה $\dim(\mathrm{Nul}(A))=2$.

אז $\mathrm{rank}(A)=9-2=7$.

אבל $\mathrm{rank}(A)$ שווה למספר השורות שלא אפסים במטריצה המדורגת. במטריצה A יש 6 שורות.

לכן $\mathrm{rank}(A)\leq 6$.

קיבלנו סתירה. לכן לא קיימת מטריצה A המקיימת הת תנאי התרגיל.

למה 10.1 סיכום של המימדים של מטריצה

תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה בעלת m שורות ו- n עמודות. נסמן $r=\mathrm{rank}(A)$. אז

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{col}(A)) &= r && = (\text{מספר עמודות מובילות})\\ \dim(\mathrm{row}(A)) &= r && = (\text{מספר שורות מובילות})\\ \dim(\mathrm{Nul}(A)) &= n-r && = (\text{מספר עמודות הלא מובילות})\end{aligned}$$

משפט 10.5 תנאים שקולים של מטריצה הפיכה

עבור מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ התנאים הבאים שקולים זה לזה.

1) $\mathrm{rank}(A)=n$.
2) A הפיכה.
3) למערכת $A\cdot X=0$ יש פתרון יחיד.
4) $|A|\neq 0$.
5) כל השורות של A בת"ל.
6) כל העמודות של A בת"ל.

הוכחה:

תרגיל בית. ■

10.2 ווקטור קואורדינטות לפי בסיס

משפט 10.6 קואורדינטות של ווקטור לפי בסיס מסוים יחיד

נניח כי $u_1,\cdots,u_n\in V$ בסיס של המרחב ווקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$. אז כל ווקטור $a\in V$ ניתן לרשום כצירוף ליניארי יחיד של $u_1,\cdots,u_n\in V$.

הוכחה:

$u_1,\cdots,u_n\in V$ בסיס של V, לכן $\text{span}\{u_1,\cdots,u_n\}=V$.

מכאן נובע שלכל $a\in V$,

$$a\in\text{span}\{u_1,\cdots,u_n\}$$

ז"א קיימים סקלרים $k_1,\cdots,k_n$ כך ש-

$$a=k_1u_1+\cdots+k_nu_n\ .$$

נוכיח שהצירוף הלינארי הוא יחיד בדרך השלילה:
נניח שקיים צירוף ליניארי אחר:

$$a=t_1u_1+\cdots+t_nu_n\ .$$

כך ש- $k_i\neq t_i$.

לכן

$$(k_1-t_1)u_1+\cdots+(k_i-t_i)u_i\cdots+(k_n-t_n)u_n=\bar{0}$$

ו- $t_i-k_i\neq 0$. ז"א ווקטורים $\{u_1,\cdots,u_n\}$ תלוים ליניארית. סתירה.

■

הגדרה 10.3 ווקטור הקואורדינטות

אם $B=\{u_1,\cdots,u_n\}\in V$ בסיס של מרחב ווקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$ ו- $a\in V$ אז

$$a=k_1u_1+\cdots+k_nu_n\ .$$

לווקטור

$$\begin{pmatrix}k_1\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}$$

קוראים **ווקטור הקואורדינטות** של ווקטור a לפי בסיס $B=\{u_1,\cdots,u_n\}$.
סימון:

$$[a]_B=\begin{pmatrix}k_1\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}\ .$$

דוגמה 10.6

$E=\{e_1,e_2,e_3\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$. $u=\begin{pmatrix}2\\-1\\10\end{pmatrix}$.

$$u=2e_1-e_2+10e_3\ .$$

לכן

$$[u]_E=\begin{pmatrix}2\\-1\\10\end{pmatrix}$$

דוגמה 10.7

$E=\{1,x,x^2\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$. $p(x)=1+8x-5x^2$.

$$p(x)=1\cdot 1+8\cdot x-5\cdot x^2=1e_1+8e_2-5e_3\ .$$

לכן

$$[p]_E=\begin{pmatrix}1\\8\\-5\end{pmatrix}$$

דוגמה 10.8

הראו כי קבוצת הווקטורים

$$B=\left\{b_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

מהווה בסיס של $\mathbb{R}^3$ ומצאו את $[u]_B$ עבוטר הווקטור $u=\begin{pmatrix}2\\-1\\10\end{pmatrix}$.

פתרון:

$$\begin{pmatrix}1&1&3\\-2&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+2R_1}\begin{pmatrix}1&1&3\\0&3&6\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_2-2R_3}\begin{pmatrix}1&1&3\\0&3&6\\0&0&3\end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות לכן b_1,b_2,b_3 בסיס של $\mathbb{R}^3$. נמצא את הקואורדינטות של ווקור u לפי בסיס B.

$$u=xb_1+yb_2+zb_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2+2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_2-2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -27 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to\frac{1}{3}R_3]{R_2\to\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right)$$

$[u]_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ -9 \end{pmatrix}$.

דוגמה 10.9 (מרחב האפס ובסיסו)

מצאו את בסיס ומימד של מרחב האפס של המטריצה $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.

פתרון:

כדי למצוא את המרחב האפס יש למצוא את הפתרונות של המערכת

$$AX = \bar{0}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2+3R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to\frac{1}{5}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

המערכת המתאימה היא

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & & & - & x_4 & + & 3x_5 & = 0 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & - & 2x_5 & = 0 \end{array}$$

ולכן הפתרון הוא

$$x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5 \ , \qquad x_3 = -2x_4 + 2x_5 \ , \qquad x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

ובצורה וקטורית

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \ , \qquad x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

נרשום את הפתרון בצורה צ"ל של וקטורים ב $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_4 \\ 0 \\ -2x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3x_5 \\ 0 \\ 2x_5 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathrm{v}_1} + x_4 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathrm{v}_2} + x_5 \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{v}_3}$$

כאשר $x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$. לכן

$$\text{Nul}(A) = \text{span}\left\{ \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

$\text{Dim}\left(\text{Nul}(A)\right) = 3$.

משפט 10.7

נניח ש- $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ותהי A^t המשוחלפת של A. אז

$$\text{Row } A = \text{Col } A^t \ , \qquad \text{Col } A = \text{Row } A^t \ .$$

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 10.8

נניח ש- $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. אם ניתן להגיע מ- A ל- B ע"י ביצוע מספר סופי של פעולות שורה אלמנטריות אז

$$\text{row } A = \text{row } B \ .$$

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 10.9

נניח ש- $A \in R^{m\times n}$ ונניח ש- B המטריצה המדורגת המתקבלת מ- A. אז

$$\text{Row } A = \text{Row } B \ , \qquad \text{Nul } A = \text{Nul } B \ .$$

הוכחה: תרגיל בית. ■

דוגמה 10.10

עבור המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&2&5\\-2&-5&1&-1&-8\\0&-3&3&4&1\\3&6&0&-7&2\end{pmatrix}$$

מצאו בסיס ל-

(א) $\text{Row}\,A$

(ב) $\text{Nul}\,A$

(ג) $\text{Col}\,A$.

פתרון:

(א)

$$\xrightarrow[R_4\to R_4-3R_1]{R_2\to R_2+2R_1}\begin{pmatrix}1&2&0&2&5\\0&-1&1&3&2\\0&-3&3&4&1\\0&0&0&-13&-13\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-3R_2]{R_2\to -R_2}\begin{pmatrix}1&2&0&2&5\\0&1&-1&-3&-2\\0&0&0&-5&-5\\0&0&0&-13&-13\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_4-\frac{5}{13}R_3}\begin{pmatrix}1&2&0&2&5\\0&1&-1&-3&-2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+3R_3}\begin{pmatrix}1&2&0&2&5\\0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_2-2R_2-2R_3}\begin{pmatrix}1&0&2&0&1\\0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן הוקטורים הלא כולה אפסים

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1&0&2&0&1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}0&1&-1&0&1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1\end{pmatrix}\ .$$

מהווה בסיס של $\text{Row}\,A$.

(ב) בכדי למצוא בסיס של $\text{Nul}\,A$ נפתור את המערכת ההומגנית $AX=0$. ע"י המטריצה המדורגת הנמצאת לעיל מקבלים את המערכת המתאימה

$$\begin{array}{ccccccl}x_1&&+&2x_3&&+&x_5&=0\\&x_2&-&x_3&&+&x_5&=0\\&&&&x_4&+&x_5&=0\end{array}\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{lcl}x_1&=&-2x_3-x_5\\x_2&=&x_3-x_5\\x_4&=&-x_5\end{array}$$

כך ש-

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2s-t\\s-t\\s\\-t\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

הקבוצה

$$\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

הינה בסיס של $\mathrm{Nul}\,A$.

(ג) שיטה 1

לפי משפט 10.7 ניתן למצוא בסיס של $\mathrm{Col}\,A$ ע"ל למצוא בסיס של $\mathrm{Row}\,A^t$:

$$A^t=\begin{pmatrix}1&-2&0&3\\2&-5&-3&6\\0&1&3&0\\2&-1&4&-7\\5&-8&1&2\end{pmatrix}$$

המדורגת של A^t היא

$$\tilde{U}=\begin{pmatrix}1&-2&0&3\\0&1&3&0\\0&0&-5&-13\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן

$$B_{\mathrm{Row}\,A^t}=\left\{\begin{pmatrix}1&-2&0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&3&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&-5&-13\end{pmatrix}\right\}$$

ואז לפי משפט 10.7:

$$B_{\mathrm{Col}\,A}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-5\\-13\end{pmatrix}\right\}$$

שיטה 2

לפי 10.1 העמודות של A המתאימות לעמודות של המדורגת U עם איבר מוביל, מהוות בסיס. מכיוון שיש איבר מוביל בעמודה ה-1 עמודה ה- 2 ועמודה ה- 4 בהמדורגת U, אז עמודה ה-1 עמודה ה- 2 ועמודה ה- 4 של A מהווה בסיס:

$$B_{\mathrm{Col}\,A}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\-7\end{pmatrix},\right\}$$