שיעור 12
אינטגרלים מסויימים

12.1 אינטגריה של שברים אלגבריים (פונקציות רציניליות)

הגדרה 12.1 פונקציה רציונלית

פונקציה רציונלית (שבר אלגברי) זאת פונקציה מהצורה

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} ,$$

כאשר $P(x)$, $Q(x)$ פולינומים.

דוגמה 12.1 פונקציה רציונלית

$f(x) = \dfrac{x^4-5x+9}{x-2}$ פונקציה רציונלית: $P(x) = x^4-5x+9$ $Q(x) = x-2$.

הגדרה 12.2 פונקציה רציונלית אמיתי

שבר אלגברי

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

נקרא אמיתי אם

$$\deg(P) < \deg(Q) .$$

אם שבר אלגברי לא אמיתי, יש לעשות חילוק פולינומים.

דוגמה 12.2 חילוק פולינומים

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{x^4-5x+9}{x-2} .$$

פתרון:

שלב ראשון בחישוב אינטגרל של שבר אלגברי לא אמיתי, להגיע לשבר אלגברי אמיתי ע"י חילוק פולינומים. ע"י חילוק ארוך:

$$\frac{x^4-5x+9}{x-2} = x^3+2x^2+4x+3+\frac{15}{x-2}$$

לכן

$$\int \frac{x^4-5x+9}{x-2} = \int \left(x^3+2x^2+4x+3+\frac{15}{x-2} \right) = \frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+2x^2+3x+15\ln|x-2|+C \ .$$

■

יש 4 סוגים של שברים אלגבריים פשוטים:

סוג 1

$$\frac{A}{x-a}$$

סוג 2

$$\frac{A}{(x-a)^n} \ , \qquad n\in\mathbb{N} \ , \quad n\geq 2 \ .$$

סוג 3

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q} \ ,$$

כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.

סוג 4

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} \ , n\in\mathbb{N} \ , \quad n\geq 2$$

כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.

דוגמה 12.3 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-3x+1}$

פתרון:

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+1} = \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$
$$A(x-2)+B(x-1)=2x+1$$

$$x=2 \quad \Rightarrow \quad B=5$$
$$x=1 \quad \Rightarrow \quad A=-3$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+1}\,dx = \int \left(\frac{-3}{x-1}+\frac{5}{x-2} \right) dx = -3\ln|x-1|+5\ln|x-2|+C \ .$$

■

דוגמה 12.4 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2}$

פתרון:

$$\frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{x-3}\ .$$
$$A(x-3)^2+B(x-2)+C(x-3)(x-2)=x^2+4$$

$$\begin{aligned} x=3 \quad &\Rightarrow \quad B=13\\ x=2 \quad &\Rightarrow \quad A=8\\ x=0 \quad &\Rightarrow \quad 9A-2B+6C=4 \to C=-7 \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2}\,dx=\int\left(\frac{8}{x-2}+\frac{13}{(x-3)^2}-\frac{7}{x-3}\right)dx=8\ln|x-2|-\frac{13}{x-3}-7\ln|x-3|+C\ .$$

■

דוגמה 12.5 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}$

פתרון:

$$\frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\ .$$
$$A(x^2+1)^2+Bx(x^2+1)+(Cx+D)x^2=x^3+1$$

$$\begin{aligned} x^3: \quad & B+C=1\\ x^2: \quad & A+D=0\\ x: \quad & B=0\\ x^0: \quad & A=1 \end{aligned}$$

לכן

$$D=-1\ , \qquad C=1\ .$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}dx=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|x^2+1|-\arctan(x)+C\ .$$

■

דוגמה 12.6 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $\displaystyle I=\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}$

פתרון:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5}\ .$$
$$A(x^2-2x+5)+(Bx+C)(x-1)=2x^2-3x-3$$

$$\begin{aligned} x^2 :& \quad A+B=2 \\ x :& \quad -2A+C-B=-3 \\ x^0 :& \quad 5A-C=-3 \end{aligned}$$

לכן

$$A=-1\ , \qquad B=3\ , \qquad C=-2\ .$$

$$I=\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx = \int\left(-\frac{1}{x-1}+\frac{3x-2}{x^2-2x+5}\right)dx = -\ln|x-1|+\int\left(\frac{3x-2}{(x-1)^2+4}\right)dx\ .$$

נגדיר $u=x-1$:

$$\begin{aligned} I =& \ln|x-1|+\int\frac{3(u+1)-2}{u^2+4}du \\ =& \ln|x-1|+\int\frac{3(u+1)-2}{u^2+4}du \\ =& \ln|x-1|+3\int\frac{u}{u^2+4}du-\int\frac{1}{u^2+4}du \\ =& \ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|u^2+4|-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u}{2}\right) \\ =& \ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|(x-1)^2+4|-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) \end{aligned}$$

■

למה 12.1 שלבים באינטגרציה של שברים אלגבריים

שלב 1. לחלק במכנה (חילוק פולינומי) במידה ש $\deg(P)\geq\deg(Q)$.

שלב 2. להציב שבר אלגברי אמיתי כסכום של שברים פשוטים.

שלב 3. לבצע אינטגרציה של כל שבר פשוט.

דוגמה 12.7 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $I=\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$

פתרון:

ע"י חילוק ארוך:

$$\frac{x^5+2x+4x+4}{x^4+x^3+2x^2}=x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+4\left(\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}\right)$$

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

$$A(x^2+2x+2)+Bx(x^2+2x+2x)+(Cx+D)x^2=x^3+x^2+x+1$$

$$\begin{aligned}
x^3 :&\quad B+C=1\\
x^2 :&\quad 2A+2B+D=1\\
x :&\quad 2A+2B=1\\
x^0 :&\quad 2A=1
\end{aligned}$$

לכן

$$A=\frac{1}{2}\ ,\qquad B=0\ ,\qquad C=1\ ,\qquad D=\frac{1}{2}\ .$$

$$I=\int\left(x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}\right)dx\int\left(x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{(x+1)^2+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+4\int\frac{x+\frac{1}{2}}{(x+1)^2+1}dx\ .$$

נגדיר $u=x+1$:

$$\begin{aligned}
I=&\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+4\int\frac{u-\frac{1}{2}}{u^2+1}du\\
=&\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln|u^2+1|-2\arctan(u)+C\\
=&\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln|(x+1)^2+1|-2\arctan(x+1)+C
\end{aligned}$$

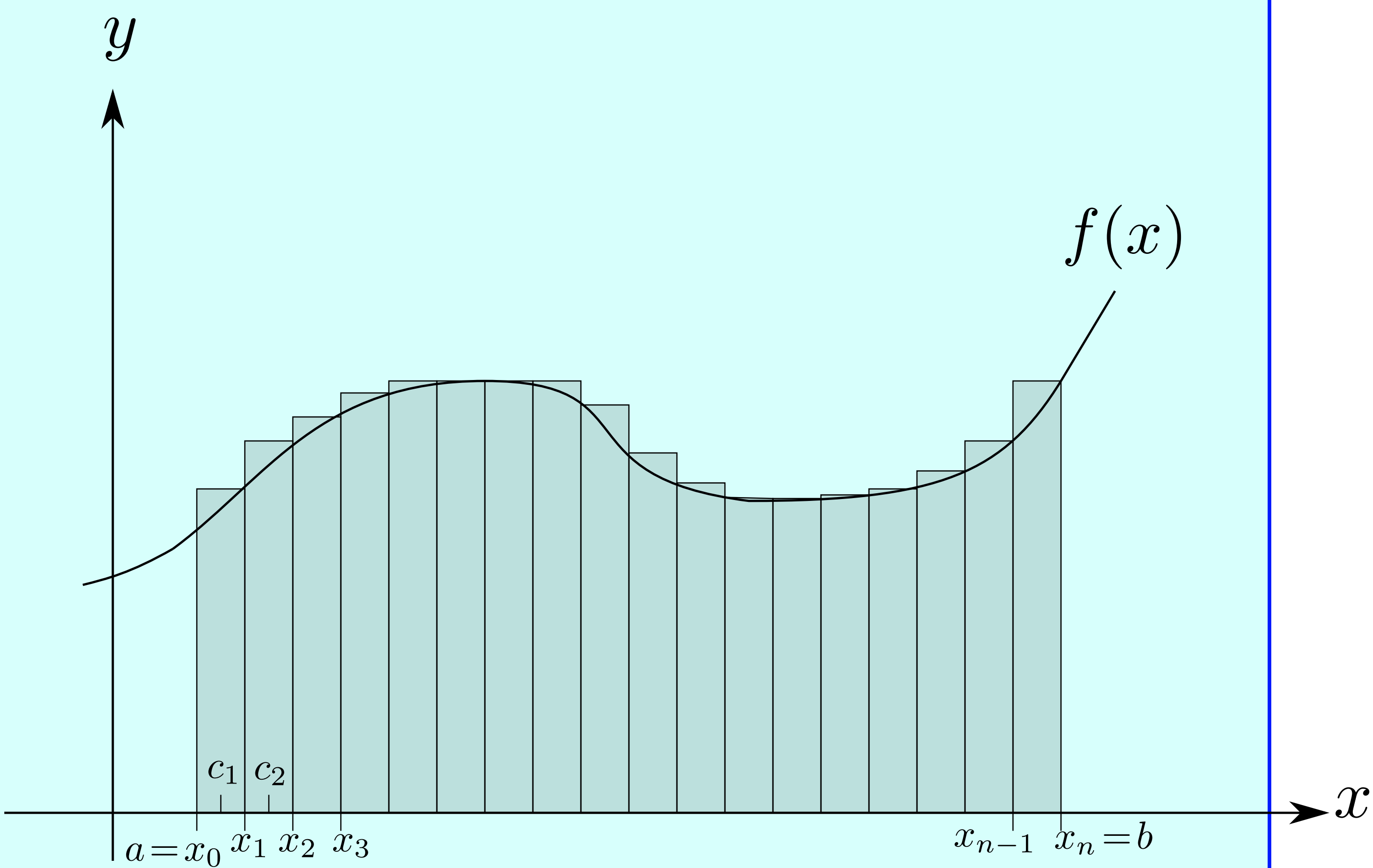
■

12.2 אינטגרל מסוים

הגדרה 12.3 אינטגרל מסוים

נניח שפונקציה $y=f(x)$ מוגדרת בקטע $[a,b]$. נחלק את הקטע $[a,b]$ לקטעים קטנים על ידי נקודות

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\ .$$



מכל קטע $[x_i,x_{i+1}]$ נבחר נקודה c_i באופן שרירותי. נבנה סכום אינטגרלי:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot(x_i-x_{i-1}) \ .$$

נסמן $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. נפעיל את הגבול כאשר $\max(\Delta x_i)\to 0$. נקבל

$$\lim_{\max(\Delta x_i)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \ .$$

האגף הימין הוא האינטגרל המסויים של $f(x)$ בקטע $[a,b]$.

משפט 12.1 קיום אינטגרל מסוים

אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ אז האינטגרל מסויים $\int_a^b f(x)\,dx$ קיים.

משפט 12.2 משמעות הגיאומטרית של אינטגרל מסוים

אם $f(x)\geq 0$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)\,dx$ שווה לשטח הטרפז העקום החסום ע"י הקווים $y=0$, $y=f(x)$ מלמעלה ו- $x=a$, $x=b$ בצדדים.

משפט 12.3 נוסחת ניוטון לייבניץ

אם $\int f(x)dx=F(x)+C$ אז $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

דוגמה 12.8

$$\int_0^3 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3=\frac{3^3}{3}-0=9\ .$$

דוגמה 12.9

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left[\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-2}^2=\frac{1}{2}\left[\arctan(1)-\arctan(-1)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\pi}{4}\ .$$

דוגמה 12.10

$$\int_e^{e^2}\frac{1}{x\cdot\ln x}\,dx=\left[\ln|\ln x|\right]_e^{e^2}=\left[\ln|\ln e^2-\ln e|\right]=\left[\ln|2-1|\right]=0\ .$$

משפט 12.4 תכונות של אינטגרל מסויים

1. $\int_a^b c\cdot f(x)\,dx=c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$.
2. $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$.
3. $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$.
4. $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$ עבור $a<c<b$.
5. $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x=f(x)$.

.1

.2

.3

.4

.5

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

כאשר $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$. לכן

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = (F(x) - F(a))'_x = F'(x) = f(x) \ .$$

■

דוגמה 12.11

עבור אילו ערכי x לגרף הפונקציה

$$f(x) = \int_0^x e^{-(t+2)^2}$$

יש נקודת פיתול?

פתרון:

$$f'(x) = e^{-(x+2)^2} \ .$$

$$f''(x) = -2(x+2)e^{-(x+2)^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -2 \ .$$

■

דוגמה 12.12 החלפת משתנים באינטגרל מסויים

חשבו את $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

פתרון:
נגדיר

$$u = \ln x \ , \qquad u' = \frac{1}{x} \ , \qquad u(e^2) = 2 \ , \qquad u(1) = 0 \ .$$

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \int_0^2 u^2\,u'dx = \int_0^2 u^2\,du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} \ .$$

■

דוגמה 12.13 החלפת משתנים באינטגרל מסויים

חשבו את $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

פתרון:
נגדיר

$$u=\sqrt{x}\ ,\qquad u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2u}\ ,\qquad u(4)=2\ ,\qquad u(0)=0\ .$$

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx &= \int_0^2 \frac{1}{1+u}\cdot 2u\cdot\frac{1}{2u}\,dx\\ &=\int_0^2 \frac{1}{1+u}\cdot 2u\cdot u'\,dx\\ &=\int_0^2 \frac{2u}{1+u}\,du\\ &=\int_0^2\left(2-\frac{2}{1+u}\right)\,du\\ &=\left[2u-2\ln|1+u|\right]_0^2\\ &=4-2\cdot\ln 3\ .\end{aligned}$$

■

דוגמה 12.14 החלפת משתנים באינטגרל מסויים

חשבו את $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$

פתרון:
נגדיר

$$u=\sqrt{e^x-1}\ ,\qquad u'=\frac{1}{2\sqrt{e^x-1}}\cdot e^x=\frac{u^2+1}{2u}\ ,\qquad u(\ln 2)=1\ ,\qquad u(0)=0\ .$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx &= \int_0^{\ln 2} u\cdot\frac{u^2+1}{2u}\cdot\frac{2u}{u^2+1}\,dx\\ &=\int_0^{\ln 2} u\cdot\frac{2u}{u^2+1}\cdot u'\,dx\\ &=\int_0^1 u\cdot\frac{2u}{u^2+1}\,du\\ &=\int_0^1 \frac{2u^2}{u^2+1}\,du\\ &=\int_0^1\left(2-\frac{2}{u^2+1}\right)\,du\\ &=\left[2u-2\arctan(u)\right]_0^1\\ &=2-2\ \pi\end{aligned}$$

■

דוגמה 12.15 החלפת משתנים באינטגרל מסויים

חשבו את $\displaystyle\int_{-1}^{2}\sqrt{2-x}\,dx$

פתרון:

נגדיר

$$u=\sqrt{2-x}\ ,\qquad u'=\frac{1}{2\sqrt{2-x}}\cdot(-1)=\frac{-1}{2u}\ ,\qquad u(2)=0\ ,\qquad u(-1)=\sqrt{3}\ .$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}\sqrt{2-x}\,dx&=\int_{-1}^{2}u\cdot(-2u)\cdot\frac{-1}{2u}\,dx\\&=\int_{-1}^{2}u\cdot(-2u)\cdot u'\,dx\\&=\int_{\sqrt{3}}^{0}(-2u^2)du\\&=\int_{0}^{\sqrt{3}}2u^2du\\&=\left[\frac{2}{3}u^3\right]_0^{\sqrt{3}}\\&=\frac{2}{3}3^{3/2}\ .\end{aligned}$$

■

למה 12.2 אינטגרציה בחלקים באינטגרל מסויים

$$\int_a^b u\,d\mathrm{v}=[u\mathrm{v}]_a^b-\int_a^b \mathrm{v}du$$

$$\int_a^b u\,\mathrm{v}'\,dx=[u\mathrm{v}]_a^b-\int_a^b \mathrm{v}u'\,dx$$

דוגמה 12.16 אינטגרציה בחלקים באינטגרל מסויים

חשבו את $\displaystyle\int_{1}^{e}x\cdot\ln x\,dx$

פתרון:

נגדיר

$$u=\ln x\ ,\qquad \mathrm{v}'=x\ ,\qquad u'=\frac{1}{x}\ ,\qquad \mathrm{v}=\frac{x^2}{2}\ .$$

$$\begin{aligned}
\int_1^e x\cdot\ln x\,dx &= \left[\ln x\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx\\
&= \left[\ln x\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx\\
&= \left[\ln x\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e\\
&= \left[\ln e\cdot\frac{e^2}{2} - \ln 1\cdot\frac{1}{2}\right] - \left[\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right]\ ,\\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}\\
&= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}\ .
\end{aligned}$$

■

דוגמה 12.17 אינטגרציה בחלקים באינטגרל מסויים

חשבו את $\int_0^\pi x\cdot\sin x\,dx$

פתרון:

נגדיר

$$u=x\ ,\qquad \mathrm{v}'=\sin x\ ,\qquad u'=1\ ,\qquad \mathrm{v}=-\cos x.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x\cdot\sin x\,dx &= [-x\cdot\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi(-\cos x)\,dx\\
&= [-x\cdot\cos x]_0^\pi + [\sin x]_0^\pi\\
&= [-\pi\cdot\cos\pi + 0\cdot\cos 0] + \sin\pi - \sin 0\\
&= \pi\ .
\end{aligned}$$

■

דוגמה 12.18

חשבו את $\int_{-3}^3 e^{-x^2}\sin x\,dx$

פתרון:

$$\int_{-3}^3 e^{-x^2}\sin x\,dx = 0$$

בגלל ש- $e^{-x^2}\sin x$ פונקציה אי-זוגית והתחום סימטרי ביחס לראשית הצירים. ■

דוגמה 12.19

עבור אילו ערכי a מתקיים $I=\int_0^2 \min(x,a)\,dx = 1$?

פתרון:
:$\underline{a \leq 0}$

$$I = \int_0^2 a\,dx = [ax]_0^2 = 2a \neq 1 \ .$$

:$\underline{a \geq 2}$

$$I = \int_0^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2 \neq 1 \ .$$

:$\underline{1 < a < 2}$

$$I = \int_0^a x\,dx + \int_a^2 a\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a + [ax]_a^2 == \frac{a^2}{2} + 2a - a^2 = -\frac{a^2}{2} + 2a = 1 \ .$$

$$a^2 - 4a + 2 = 0$$

$$a = 2 \pm \sqrt{2}$$

לכן התשובה היא $a = 2 - \sqrt{2}$. ■

דוגמה 12.20

חשבו את $I = \int_0^{2\pi} \cos(\max(x,\pi))\,dx$

פתרון:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos(\max(x,\pi))\,dx &= \int_0^{\pi} \cos(\pi)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \cos(x)\,dx \\ &= [-x]_0^{\pi} + [\sin x]_{\pi}^{2\pi} \\ &= -\pi \ .\end{aligned}$$

■

דוגמה 12.21

חשבו את $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2 + 3\sin x}\,dx$

פתרון:
נגדיר

$$u = 2 + 3\sin x \ , \qquad u' = 3\cos x.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2+3\sin x}\,dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{u'}{3}}{u}\,dx \\
&= \int_2^5 frac13 \cdot \frac{1}{u}\,du \\
&= \left[\frac{1}{3}\ln u\right]_2^5 \\
&= \frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}\ .
\end{aligned}$$

■

דוגמה 12.22

חשבו את $I=\int_0^5 |2x-4|\,dx$

פתרון:

$$\begin{aligned}
\int_0^5 |2x-4|\,dx &= \int_2^5 (2x-4) + \int_0^2 \big(-(2x-4)\big)\,dx \\
&= \int_2^5 (2x-4) + \int_0^2 (4-2x)\,dx \\
&= \left[x^2-4x\right]_2^5 + \left[4x-x^2\right]_0^2 \\
&= [25-20-4+8]+[8-4] \\
&= 13\ .
\end{aligned}$$

■

דוגמה 12.23

מצא את ערכו של t ($t>0$) עבורו האינטגרל $I=\int_0^t \left(2-te^{-0.5x}\right)dx$ היא מקסימאלי. חשבו את הערך המקסימאלי.

פתרון:

$$F(t)=\int_0^t \left(2-te^{-0.5x}\right)dx=\left[2x+2te^{-0.5x}\right]_0^t=2t+2te^{-0.5t}-2t=2te^{-0.5t}\ .$$

$$F'(t)=2e^{-0.5t}\left(1-\frac{t}{2}\right)\ =0 \qquad\Rightarrow\qquad t=2\ .$$

עבור $t=2$ ל $F(t)$ יש ערך מקסימלי.

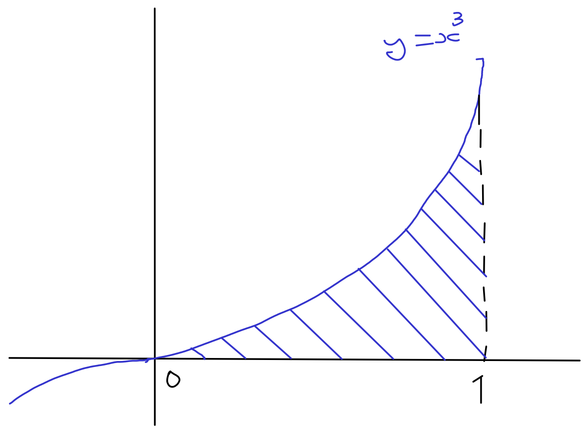
$$F(2)=2\cdot 2\cdot e^{-0.5\cdot 2}=\frac{4}{e}\ .$$

■

דוגמה 12.24 חישוב שטח

מצאו את השטח החסום ע"י גרף הפונקציה $y = x^3$ והישרים $x = 1$, $y = 0$.

פתרון:



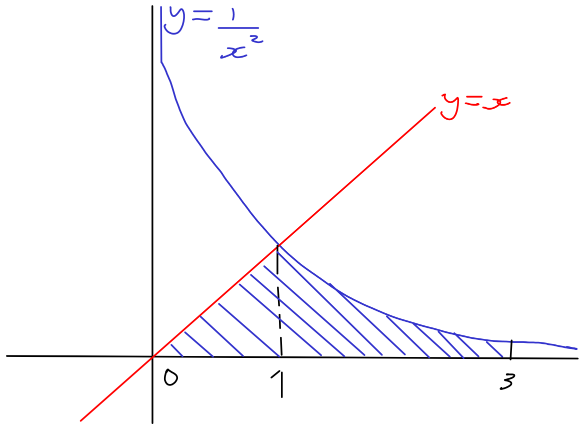
$$S = \int_0^1 x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} \; .$$

■

דוגמה 12.25 חישוב שטח

מצאו את השטח החסום ע"י $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x$, $x = 3$, $y = 0$.

פתרון:



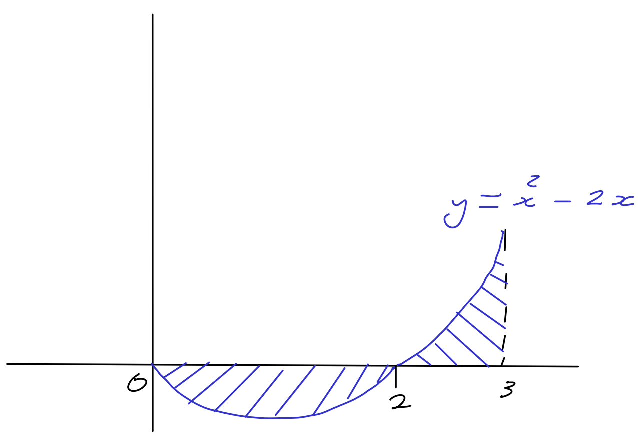
$$S=\int_0^1 x\,dx+\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\left[\frac{1}{x}\right]_1^3=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1=\frac{7}{6}\ .$$

■

דוגמה 12.26 חישוב שטח

מצאו את השטח החסום ע"י $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=3$, $x=0$.

פתרון:



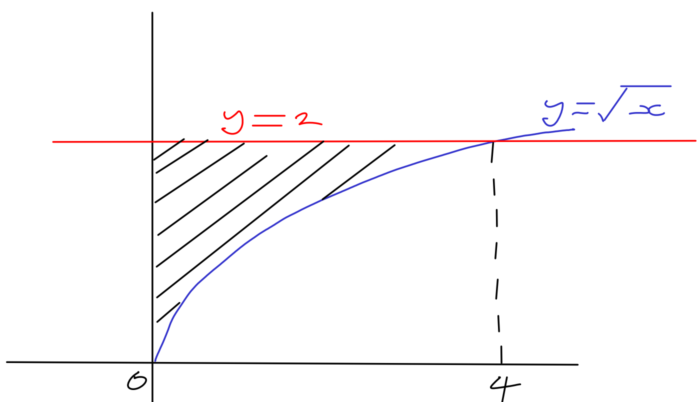
$$
\begin{aligned}
S &= -\int_0^2 \left(x^2-2x\right)\,dx + \int_2^3 \left(x^2-2x\right)\,dx\\
&= -\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3\\
&= -\left[\frac{2^3}{3}-2^2\right] + \left[\frac{3^3}{3}-3^2-\frac{2^3}{3}+2^2\right]\\
&= -\frac{8}{3}+4+9-9-\frac{8}{3}+4\\
&= \frac{8}{3}\ .
\end{aligned}
$$

■

דוגמה 12.27 חישוב שטח

מצאו את השטח החסום ע"י $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $y=2$.

פתרון:



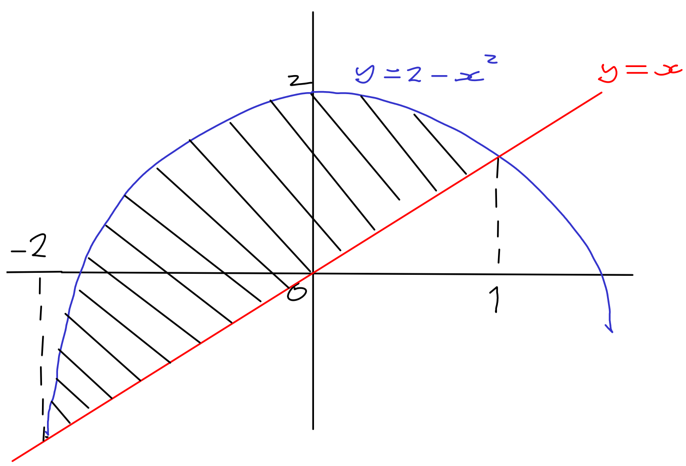
$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^4 2\,dx - \int_0^4 \sqrt{x}\,dx\\
&= [2x]_0^4 - \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4\\
&= 8-\frac{2}{3}\cdot 4^{3/2}\\
&= \frac{8}{3}\ .
\end{aligned}
$$

■

דוגמה 12.28 חישוב שטח

מצאו את השטח החסום ע"י $y=x$, $y=2-x^2$.

פתרון:



$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{1} (2-x^2-x)\,dx \\ &= \left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} \\ &= \left[2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right]-\left[-4+\frac{8}{3}-\frac{4}{2}\right] \\ &= \frac{9}{2}\ . \end{aligned}$$

■

דוגמה 12.29 חישוב שטח

מצאו את השטח החסום ע"י $y=x^2-2x+2$, המשיק לפרבולה הזאת בנקודה $(3,5)$ וציר ה- y.

פתרון:

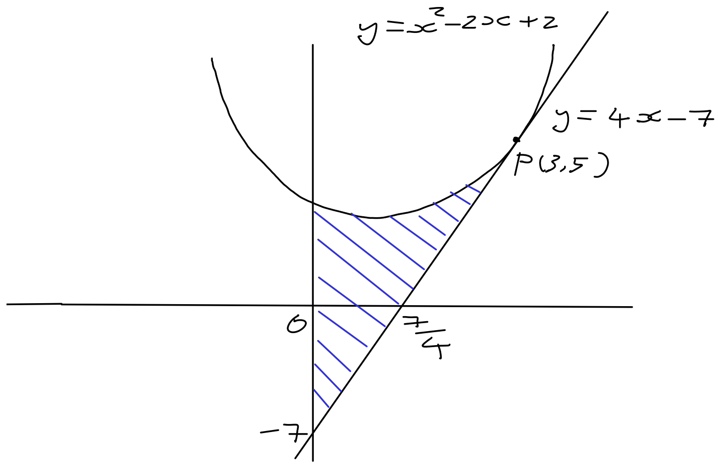
נמצא את משוואת המשיק:

$$y'=2x-2$$

$$y'(3)=4$$

משוואת המשיק:

$$y-5=4(x-3) \qquad \Rightarrow \qquad y=4x-7\ .$$



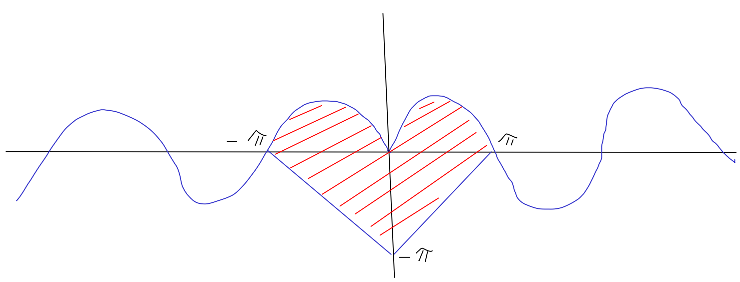
$$S=\int_0^3 \left(\left(x^2-2x+2\right)-(4x-7)\right)\,dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right]_0^3-\left[2x^2-7x\right]_0^3\,dx$$
$$=\left[\frac{3^3}{3}-3^2+6\right]-[18-21]$$
$$=9\ .$$

■

דוגמה 12.30 חישוב שטח

מצאו את השטח החסום ע"י $y=\sin|x|$, $y=|x|-\pi$.

פתרון:



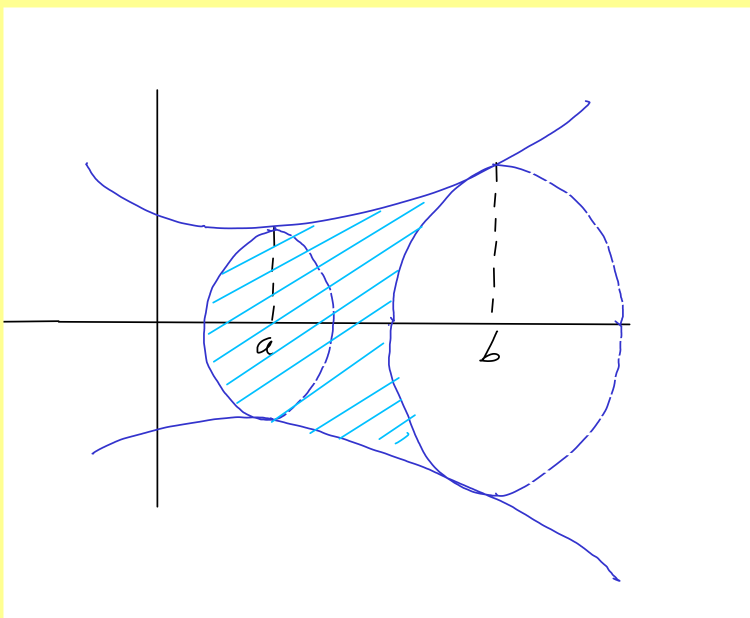
$$\begin{aligned} S =&2 \int_0^{\pi} (\sin x - (x-\pi))\ dx \\ =&2 \left[-\cos x - \frac{x^2}{2} + \pi x \right]_0^{\pi} \\ =&2 \left[1 - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 \right] 0 - 2\left[-1 \right] \\ =&4 + \pi^2\ . \end{aligned}$$

■

משפט 12.5 חישוב נפח גוף סיבוב סביב ציר ה- x

בהינתן גרף של פונקציה $y = f(x)$ בקטע $[a, b]$. הנפח של גוף סיבוב סביב ציר ה- x הוא

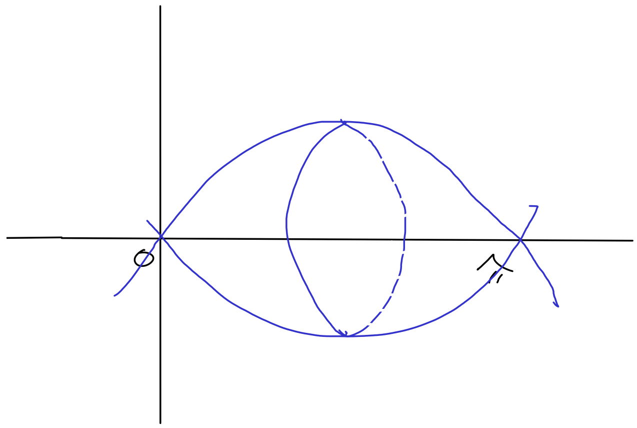
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx\ .$$



דוגמה 12.31 חישוב נפח

מצאו את נפח גוף הסיבוב סביב ציר ה- x של התחום המישורי החסום ע"י $y = \sin x$ בתחום $0 \le x \le \pi$.

פתרון:



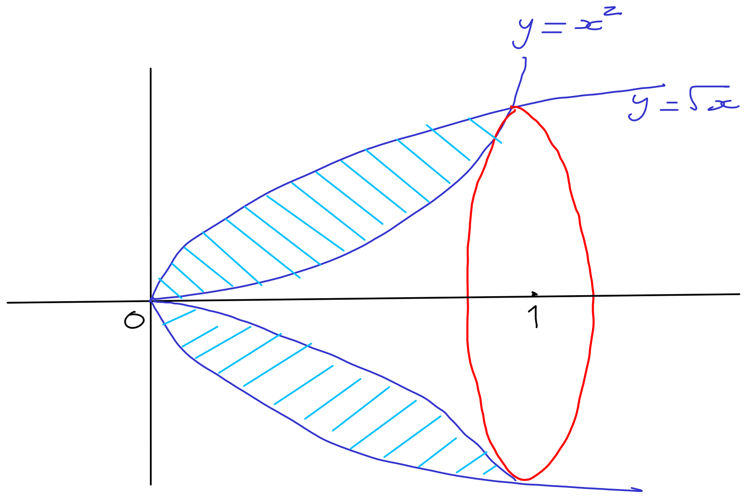
$$\begin{aligned} V =& \pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx \\ =& \pi \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx \\ =& \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^\pi \\ =& \frac{\pi^2}{2} \ . \end{aligned}$$

■

דוגמה 12.32 חישוב נפח

מצאו את נפח גוף הסיבוב סביב ציר ה- x של התחום החסום ע"י $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

פתרון:



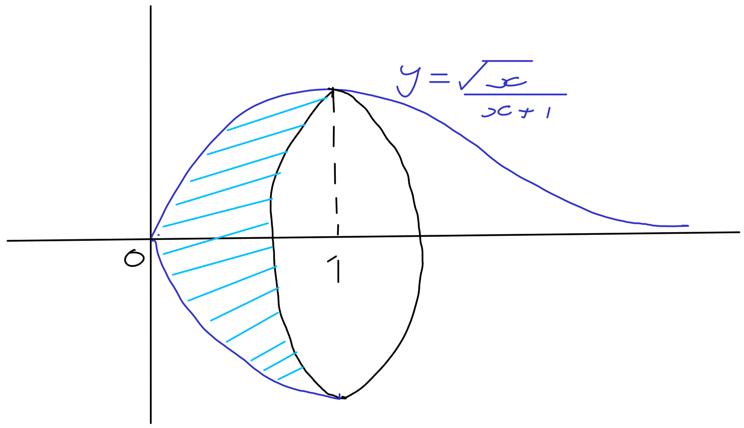
$$\begin{aligned} V =&\pi\int_0^1(\sqrt{x})^2\,dx-\pi\int_0^1 x^4\,dx\\ =&\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1\\ =&\pi\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right]\\ =&\frac{3\pi}{10}\ . \end{aligned}$$

■

דוגמה 12.33 חישוב נפח

חשבו את נפח גוף הסיבוב סביב ציר ה- x של התחום החסום ע"י $y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ בתחום $0\le x\le 1$.

פתרון:



$$V = \pi \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2}\, dx \ .$$

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A+B(x+1)}{(x+1)^2} \ .$$

$$\begin{array}{ll} x: & B=1 \\ x^0: & A+B=0 \ \Rightarrow \ A=-1. \end{array}$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \pi \left[\frac{1}{x+1} + \ln|x+1| \right]_0^1 = \pi \left[\frac{1}{2} + \ln|2| - 1 \right] = \pi \left(\ln|2| - \frac{1}{2} \right) \ .$$

■