המחלקה למדעי המחשב

$29/11/23 12:00 - 26/11/23 12:00$ תשפ"ג

אלגברה 2

מועד ב'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר, ד'ר שי סרוסי.

תשפ"ג סמסטר ק'

השאלון מכיל 12 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

אחר / הערות

- יש לפתור את כל השאלות.
- המשקל של כל שאלה מפורט להלן:
  - שאלה 1: 30 נקודות.
  - שאלה 2: 20 נקודות.
  - שאלה 3: 20 נקודות.
  - שאלה 4: 30 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבירו היטב את מהלך הפתרון. תשובה ללא הסבר (גם נכונה) לא תתקבל.
- אסור לחלוטין לקבל עזרה מסטודנט אחר או מאף אחד.
- עליכם להעלות את הפתרונות שלכם דרך אתר המודל של הקורס אלגברה 2 למדמ"ח לא יאוחר משעה $12:00$ ביום ד' $23-11-29$. פתרונות שהוגשו אחרי המועד הזה לא יתקבלו.
- מותר להשתמש בחומר של הקורס, התרגילים של הקורס והספרים של הקורס בלבד, אבל אסור להשתמש בשום מקורות אחרים.
- אחרי הגשת פתרונות אתם תקבלו הזמנה למבחן קצר בעל פה על הפתרונות שלכם. ייתכן שלא תעבור את המבחן או יורידו נקודות במקרה שאתם לא יכולים להסביר הפתרונות שלכם היטב.
- **סטודנט יהיה זכאי להגיש ערעור / בקשות שונות לגבי הבוחן במשך 5 ימים בלבד מיום קבלת הציון.**

שאלה 1 תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ המטיקצה . $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

א) האם A לכסינה? אם כן מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

ב) הוכיחו כי

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(-I + 3A + A^2 - A^3\right) \ .$$

ג) הוכיחו כי

$$A^{-2} = \frac{7}{4}I - \frac{1}{4}A - \frac{3}{4}A^2 + \frac{1}{4}A^3 \ .$$

שאלה 2 תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית כך שהפולינויום המינימלי הוא

$$m_A(x) = \left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)\left(x^2+3\right) \ .$$

נתון הפולינום

$$f(x) = x^6 + 6x^4 + 11x^2 + 7x - 2 \ .$$

א) האם המטריצה $f(A)$ הפיכה?

ב) הוכיחו כי A לא אוניטרית.

ג) הוכיחו כי A לא צמודה לעצמה.

ד) עכשיו נניח כי $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$.

1) מצאו את כל הערכים העצמיים של A.

2) הוכיחו כי A לכסינה.

שאלה 3 קבעו אם המטריצות הבאות דומות:

א) $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

ב) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

ג) $B=\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix}-1&6\\-2&6\end{pmatrix}$.

ד) $B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix}-1&6\\-2&6\end{pmatrix}$.

שאלה 4 תהי $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ עם ערכים עצמיים 4 ו- -2. הוכיחו כי לכל n טבעי, קיימים סקלרים b_n, c_n כך ש- $A^n=b_nA+c_nI$ כאשר $b_{n+1}=2b_n+c_n$ $c_{n+1}=8b_n$.

פתרונות

שאלה 1

א) הפולינום האופייני הוא

$$
\begin{aligned}
p_A(x) =& |xI - A| = \begin{vmatrix} x & -1 & -2 & -\sqrt{5} \\ -1 & x & -1 & -1 \\ 0 & 0 & x-1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} \\
=& \begin{vmatrix} x & -1 & -\sqrt{5} \\ -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x & -1 & -2 \\ -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \\
=& 2\begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} - x(x-1)\begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} \\
=& 2(x^2-1) - x(x-1)(x^2-1) \\
=& (-x^2+x+2)(x^2-1) \\
=& -(x-2)(x+1)(x^2-1) \\
=& -(x-2)(x+1)^2(x-1)
\end{aligned}
$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = -1$ מריבוי אלגברי 2.

$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 1.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = -1$</u>

$$(A+I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & -1 & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_2]{R_3 \to R_3 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & -1 & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to 2R_4 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & -1 & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & -1 & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2-\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -1 & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - (2-\sqrt{5})R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{-1} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1$</u>

$$(A-I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{5}+1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to 3R_4 + 2R_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{5}+1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5}-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{5}+1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -\frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{5}+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - \sqrt{5}R_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{5}+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 2$</u>

$$(A-2I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to 2R_2+R_1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & -3 & 4 & \sqrt{5}+2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_4-R_3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & -3 & 4 & \sqrt{5}+2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to -2R_2-(2+\sqrt{5})R_3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 6 & \sqrt{5}-6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to 2R_1+\sqrt{5}R_3} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 6 & \sqrt{5}-6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to(\sqrt{5}-6)R_1-(4-\sqrt{5})R_2} \begin{pmatrix} 24-4\sqrt{5} & 8\sqrt{5}-36 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & \sqrt{5}-6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{4}R_1} \begin{pmatrix} 6-\sqrt{5} & 2\sqrt{5}-9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & \sqrt{5}-6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$(\tfrac{9-2\sqrt{5}}{6-\sqrt{5}}y, y, \tfrac{6-\sqrt{5}}{6}z, -2w, w) = (\tfrac{-9+2\sqrt{5}}{3}w, \tfrac{-6+\sqrt{5}}{3}w, -2w, w) = (\tfrac{-9+2\sqrt{5}}{3}, \tfrac{-6+\sqrt{5}}{3}, -2, 1)w,\ \ w\in\mathbb{R}$$

$$V_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -9+2\sqrt{5} \\ -6+\sqrt{5} \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\dim V_{-1} + \dim V_1 + \dim V_2 = 3 < \dim\mathbb{R}^4$$

לכן A לא לכסינה.

ב) הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x)=(x-2)(x-1)(x+1)^2=x^4-x^3-3x^2+x+2 \ .$$

לפי משפט קיילי-המילטון:

$$p_A(A)=0 \quad \Rightarrow \quad A^4-A^3-3A^2+A+2I=0$$

נעביר אגפים ונקבל

$$I=\frac{1}{2}\left(-A+3A^2+A^3-A^4\right)==\frac{1}{2}A\left(-I+3A+A^2-A^3\right)=A\left(-\frac{1}{2}I+\frac{3}{2}A+\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{2}A^3\right)$$

מכאן

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}I+\frac{3}{2}A+\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{2}A^3$$

ג) נכפיל את הביטוי בסעיף ב' ב- A^{-1}:

$$\begin{aligned}A^{-2}=&-\frac{1}{2}A^{-1}+\frac{3}{2}I+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}A^2\\=&-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}I+\frac{3}{2}A+\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{2}A^3\right)+\frac{3}{2}I+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}A^2\\=&\frac{1}{4}I-\frac{3}{4}A-\frac{1}{4}A^2+\frac{1}{4}A^3+\frac{3}{2}I+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}A^2\\=&\frac{7}{4}I-\frac{1}{4}A-\frac{3}{4}A^2+\frac{1}{4}A^3\end{aligned}$$

<u>שאלה 2</u>

א)

$$m_A(x)=\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)\left(x^2+3\right)=x^6+6x^4+11x^2+6$$

לכן

$$f(x)=x^6+6x^4+11x^2+7x-2=m_A(x)+7x-8 \ .$$

נציב A:

$$f(A)=m_A(A)+7A-8I=7A-8I \ .$$

$$|f(A)|=|7A-8I|=\left|7\left(A-\frac{8}{7}I\right)\right|=7^n\left|A-\frac{8}{7}I\right|$$

$\frac{8}{7}$ לא שורש של הפולינום המינימלי $\Leftarrow$ $\frac{8}{7}$ לא ערך עצמי של A $\Leftarrow$ $\left|A-\frac{8}{7}I\right|\neq 0$ $\Leftarrow$ $|f(A)|\neq 0$ $\Leftarrow$ $f(A)$ הפיכה.

ב)

$$m_A(x)=\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)\left(x^2+3\right)=(x+i)(x-i)\left(x+\sqrt{2}i\right)\left(x-\sqrt{2}i\right)\left(x+\sqrt{3}i\right)\left(x-\sqrt{3}i\right).$$

השורשים הם

$$i,\ -i,\ \sqrt{2}i,\ -\sqrt{2}i,\ \sqrt{3}i,\ -\sqrt{3}i\ .$$

לכן הערכים עצמיים הם $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$, $\lambda_3=\sqrt{2}i$, $\lambda_4=-\sqrt{2}i$, $\lambda_5=\sqrt{3}i$, $\lambda_6=-\sqrt{3}i$.
אם מטריצה אוניטרית אז הערך מוחלט של כל ערל עצמי שווה 1.
קיימים ערכים עצמיים של A שעבורם הערך מוחלט לא שווה ל- 1 לכן A לא אוניטרית.

ג) אם A צמודה לעצמה אז כל הערכים עצמיים יהיו ממשיים. לא כל הערכים עצמיים של A ממשיים אז A לא צמודה לעצמה.

ד) **1)** כל ערך עצמי של A שורש של הפולינום המינימלי. ל- $m_A(x)$ יש 6 שורשים:

$$i,\ -i,\ \sqrt{2}i,\ -\sqrt{2}i,\ \sqrt{3}i,\ -\sqrt{3}i\ .$$

לכן הערכים עצמיים הם $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$, $\lambda_3=\sqrt{2}i$, $\lambda_4=-\sqrt{2}i$, $\lambda_5=\sqrt{3}i$, $\lambda_6=-\sqrt{3}i$.

2) $A\in\mathbb{C}^{6\times 6}$ ול- A יש 6 ערכים עצמיים. בפרט הריבוי אלגברי של כל ערך עצמי הוא 1 וכל הערכים עצמיים שונים זה מזה, אז A לכסינה.

שאלה 3

א) אם A ו- B דומות אז הדטרמיננטות שוות. אז נבדוק את הדטרמיננטות:

$$|A|=3\ ,\qquad |B|=6\ ,$$

כלומר $|A|\neq|B|$ לכן A ו- B לא דומות.

ב) $|A|=-5=|B|$ אז הדטרמיננטות לא עוזרות לבדוק אם A ו-B דומות.

נזכיר כי אם A ו- B דומות אז העקבות שוות.

$$\text{tr}(A)=3\ ,\qquad \text{tr}(B)=4\ ,$$

כלומר $\text{tr}(A)\neq\text{tr}(B)$ ולכן A ו- B לא דומות.

ג)

$$|A|=6=|B|\ .$$

$$\text{tr}(A)=5=\text{tr}(B)\ .$$

נבדוק את הפולינום האופייני של A:

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x+1 & -6 \\ 2 & x-6 \end{vmatrix} = (x+1)(x-6) + 12 = x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)\ .$$

הערכים עצמיים של A הם 2 ו- 3 והם שונים, לכן קיימת P הפיכה כך ש-

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = PBP^{-1}$$

לכן A ו- B דומות.

ד)

$$|A| = 6 = |B|\ .$$

$$\text{tr}(A) = 5 = \text{tr}(B)\ .$$

הפולינומים האופייניים של A ושל B זהים:

$$p_A(x) = (x-3)(x-2) = p_B(x)\ .$$

לכן הערכים עצמיים של A ו- B הם 2 ו- 3. לכן קיימים מטריצות הפיכות P ו- S כך ש-

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\ , \qquad S^{-1}BS = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\ .$$

לפיכך

$$P^{-1}AP = S^{-1}BS \qquad \Rightarrow \qquad PS^{-1}BSP^{-1} = A\ .$$

נגדיר $U = PS^{-1}$ ונשים לב כי $U^{-1} = SP^{-1}$, כך שונקבל

$$UBU^{-1} = A\ .$$

לכן A ו- B דומות.

שאלה 4 הפולינום האופייני הוא $p_A(x) = (x-4)(x+2) = x^2 - 2x - 8$. לפי משפט קיילי המילטון, $p_A(A) = 0$, לפיכך

(*)
$$A^2 - 2A - 8I = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A^2 = 2A + 8I$$

נוכיח את הטענה באינדוקציה.

<u>שלב הבסיס:</u>

אנחנו קיבלנו במשוואה (*) ש:

$$A^2 = b_1 A + c_1 I$$

כאשר $b_2 = 2, c_2 = 8$.

נכפיל את משוואה (*) ב- A:

$$A^3 = 2A^2 + 8A \overset{(*)}{=} 2\left(2A + 8I\right) + 8A = 12A + 16I = b_3 A + c_3 I$$

כאשר $b_3 = 12 = 2b_2 + c_2, c_3 = 16 = 8b_2$.

<u>שלב המעבר:</u>

נניח כי קיימים סקלרים b_n, c_n לכל n טבעי עבורם $A^n = b_n + c_n I$ (ההנחת האינדוקציה).
אזי

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \left(b_n A + c_n I\right) A = b_n A^2 + c_n \overset{(*)}{=} b_n \left(2A + 8I\right) + c_n A = \left(2b_n + c_n\right) A + 8 b_n I \ .$$

ז"א קיימים סקלרים b_{n+1}, c_{n+1} עבורם $A^{n+1} = b_{n+1} A + c_{n+1} I$ כאשר

$$b_{n+1} = 2b_n + c_n \ , \qquad c_{n+1} = 8b_n \ .$$