חדוא 1
סמסטר א' תשפ"ד
תרגילים: גבולות ונוסחאות אוילר

חשבו את הגבולות הבאים:

שאלה 1 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}$$

שאלה 2 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$

שאלה 3 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)$$

שאלה 4 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)$$

שאלה 5 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)$$

שאלה 6 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x-\sin 2x}{\sin x+\sin 3x}\right)$$

שאלה 7 $$\lim_{x\to 0}\frac{3x+7x^2}{\sin 2x}$$

שאלה 8 $$\lim_{x\to \infty}\frac{\sin x}{x}$$

שאלה 9 $$\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$$

שאלה 10 $$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{5/x}$$

שאלה 11 $$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$$

שאלה 12 $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$

שאלה 13 $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

שאלה 14 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 1}{2x^2 + 5x}\right)^x$

שאלה 15 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 5x}\right)^x$

שאלה 16 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x + 3}{x + 2}\right)^{\frac{x^2 - 4}{x}}$

שאלה 17 $\lim\limits_{x \to 6} (x - 5)^{\frac{x}{x - 6}}$

שאלה 18 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{3^x + 5^x}{2^x + 5^x}\right)$

שאלה 19 $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + e^{-x})^{3e^x}$

שאלה 20 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}\right)^{3x - 1}$

שאלה 21 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2}\right)^{x^2}$

שאלה 22 $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)^{1/x^2}$

שאלה 23 $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \sqrt{x})^{\cot\sqrt{x}}$

שאלה 24 $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}$

שאלה 25 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{5x}{x + 7}\right)^{\sqrt{4x^2 + 2x}}$

שאלה 26 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{4x + 5}}\right)^{3x^2 + 2x + 1}$

שאלה 27 $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\cot(3x)}$

שאלה 28 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(2x)-1}{3x\sin x}\right)$

שאלה 29 $\lim_{x\to 1}(6-5x)^{\frac{1}{\ln|2-x|}}$

פתרונות

שאלה 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\ .$$

שאלה 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

שאלה 3

נרשום $x=\sin t \qquad \Leftrightarrow \qquad t=\arcsin x$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\sin t}\right)=1$$

שאלה 4

נרשום $x=\tan t \qquad \Leftrightarrow \qquad t=\arctan x$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\tan t}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\sin t}\cdot\cos t\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\sin t}\right)\cdot\left(\lim_{t\to 0}\cos t\right)=1$$

שאלה 5

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)=\frac{2}{3}\ .$$

שאלה 6

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x-\sin 2x}{\sin x+\sin 3x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin 4x}{x}-\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 3x}{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4\cdot\frac{\sin 4x}{4x}-2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin x}{x}+3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}\right)$$

$$=\frac{4-2}{1+3}$$

$$=\frac{1}{2}\ .$$

שאלה 7

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x+7x^2}{\sin 2x}\right) &=3\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin 2x}\right)+7\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin 2x}\right)\\ &=3\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{2\sin 2x}\right)+7\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot 2x}{2\sin 2x}\right)\\ &=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)+7\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)\\ &=\frac{3}{2}\cdot 1+7\cdot 0\cdot 1\\ &=\frac{3}{2}\ .\end{aligned}$$

שאלה 8

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\left(\lim_{x\to\infty}\sin x\right)\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)=\left(\lim_{x\to\infty}\sin x\right)\cdot 0=0\ ,$$

בגלל ש- $\sin x$ פונקציה חסומה.

שאלה 9

שיטה 1

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=1^\infty$$

לא מוגדר.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{x}\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2=e^2$$

שיטה 2: החלפת משתנים

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=1^\infty$$

לא מוגדר.

$$1+\frac{2}{x}=1+\frac{1}{\alpha}\quad\Rightarrow\quad\frac{2}{x}=\frac{1}{\alpha}\quad\Rightarrow\quad\alpha=\frac{x}{2}\ .$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha\cdot\frac{x}{\alpha}}=\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha\cdot 2}=\left[\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^2=e^2$$

שאלה 10

שיטה 1

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{5/x}=1^{\infty}$$

לא מוגדר.

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{5/x}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2x\cdot\frac{5}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 10}=\left[\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{10}=e^{10}$$

שיטה 2: החלפת משתנים

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{5/x}=1^{\infty}$$

לא מוגדר.

$$1+2x=1+\alpha\quad\Rightarrow\quad\alpha=2x\ .$$

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{5/x}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{5\alpha}{x}}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}\cdot 10}=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{10}=e^{10}$$

שאלה 11

שיטה 1

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}=1^{\infty}$$

לא מוגדר.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{1+x}-1\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-1-x}{1+x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{-1}{1+x}\right)\right)^{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{-1}{1+x}\right)\right)^{-(1+x)\cdot\left(\frac{-1}{1+x}\right)\cdot x}$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{-1}{1+x}\right)\right)^{-(1+x)}\right]^{\left(\frac{-1}{1+x}\right)\cdot x}$$

$$=[e]^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x}{1+x}\right)}$$

$$=e^{-1}=\frac{1}{e}\ .$$

שיטה 2: החלפת משתנים

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}=[1^{\infty}]$$

לא מוגדר

$$\frac{x}{1+x}=\frac{1+x-1}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}\ .$$

נגדיר משתנה חדש: $t=-\frac{1}{1+x}$ ונשים לב שכאשר $x\to\infty$ אז $t\to 0$. לפי זה $x=-\frac{1}{t}-1$ לפיכך ניתן לרשום את הגבול בצורה

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{t}-1} &=\\ &=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}(1+t)^{-1}\\ &=\left[\lim_{t\to 0}(1+t)^{t}\right]^{-1}\cdot\lim_{t\to 0}(1+t)^{-1}\\ &=e^{-1}\cdot(1+0)^{-1}\\ &=\frac{1}{e}\ .\end{aligned}$$

<u>שאלה 12</u>

שיטה 1

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=1^{\infty}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} &=\lim_{x\to 0}(1+\cos 2x-1)^{\frac{1}{x^2}}\\ &=\lim_{x\to 0}(1+\cos 2x-1)^{\frac{1}{\cos 2x-1}\cdot(\cos 2x-1)\cdot\frac{1}{x^2}}\\ &=\lim_{x\to 0}\left[(1+\cos 2x-1)^{\frac{1}{\cos 2x-1}}\right]^{\frac{\cos 2x-1}{x^2}}\\ &=\left[\lim_{x\to 0}(1+\cos 2x-1)^{\frac{1}{\cos 2x-1}}\right]^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}}\\ &=[e]^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}}\end{aligned}$$

נשתמש בזהות $\cos(2x)=1-2\sin^2 x$:

$$\begin{aligned}e^{\lim_{x\to 0}\frac{1-2\sin^2 x-1}{x^2}} &=e^{\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{x^2}}\\ &=e^{-2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}\\ &=e^{-2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2}\\ &=e^{-2\cdot 1}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}\ .\end{aligned}$$

שיטה 2: החלפת משתנים

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=1^{\infty}$$

לא מוגדר.

$$1+\alpha=\cos(2x) \quad \Rightarrow \quad \alpha=\cos(2x)-1\ .$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x^2}}$$

$$=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{x^2}}$$

$$=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos(2x)-1}{x^2}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos 2x-1}{x^2}\right)}\ .$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x-(\cos^2 x+\sin^2 x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{x^2}$$

$$=-2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$=-2\ .$$

לכן

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-2}\ .$$

שאלה 13

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1^{-\infty}$$

לא מוגדר.
נגדיר $t=\dfrac{1}{x}$ ונשים לב כי כאשר $x\to-\infty$ אז $t\to 0$. לכן ניתן לרשום את הגבול בצורה

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e\ .$$

שאלה 14

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-1}{2x^2+5x}\right)^x=\left[\frac{1}{2}\right]^{\infty}=0$$

שאלה 15

שיטה 1

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-1}{x^2+5x}\right)^x = 1^\infty$$

לא מוגדר.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-1}{x^2+5x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+3x-1}{x^2+5x}-1\right)^x$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-x^2-5x+x^2+3x-1}{x^2+5x}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2x-1}{x^2+5x}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2x-1}{x^2+5x}\right)^{\left(\frac{x^2+5x}{-2x-1}\right)\cdot\left(\frac{-2x-1}{x^2+5x}\right)\cdot x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2x-1}{x^2+5x}\right)^{\frac{x^2+5x}{-2x-1}}\right]^{\left(\frac{-2x-1}{x^2+5x}\right)\cdot x}$$

$$= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2x-1}{x^2+5x}\right)^{\frac{x^2+5x}{-2x-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^2-x}{x^2+5x}}$$

$$= [e]^{-2} = \frac{1}{e^2}\ .$$

שיטה 2: החלפת משתנים

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-1}{x^2+5x}\right)^x = 1^\infty$$

לא מוגדר.

$$\frac{x^2+3x-1}{x^2+5x} = \frac{x^2+5x-2x-1}{x^2+5x} = 1-\frac{2x+1}{x^2+5x}$$

נגדיר $t=\frac{-2x-1}{x^2+5x}$. נשים לב כי כאשר $x\to\infty$ אז $t\to 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-1}{x^2+5x}\right)^x &= \lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{t\cdot x}{t}}\right]\\
&= \left[\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{t\cdot x}\\
&= \left[\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^2-x}{x^2+5x}}\\
&=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^2-x}{x^2+5x}}\\
&=e^{-2}\\
&=\frac{1}{e^2}\ .\end{aligned}$$

שאלה 16

שיטה 1

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{\frac{x^2-4}{x}}=1^{\infty}$$

לא מוגדר.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{\frac{x^2-4}{x}} &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3}{x+2}-1\right)^{\frac{x^2-4}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3-x-2}{x+2}\right)^{\frac{x^2-4}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{\frac{x^2-4}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{(x+2)\cdot\frac{1}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x}} \\
&= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]^{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x(x+2)}} \\
&= [e]^{\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)(x-2)}{x(x+2)}} \\
&= [e]^{\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x}} \\
&= e^1 = e\ .
\end{aligned}
$$

שיטה 2: החלפת משתנים

$$
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{\frac{x^2-4}{x}} = 1^{\infty}
$$

לא מוגדר.

$$
\frac{x+3}{x+2} = 1+\frac{1}{x+2}\ .
$$

נגדיר $t=\dfrac{1}{x+2}$. נשים לב כי כאשר $x\to\infty$ אז $t\to 0$. הביטוי בחזקה $\dfrac{x^2-4}{x}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x}=\dfrac{\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-4\right)}{\left(\frac{1}{t}-2\right)}=\dfrac{\frac{1}{t}\left(1-4t\right)}{(1-2t)}$. לפיכך נקבל

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{\frac{x^2-4}{x}} = \lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{1-4t}{1-2t}\right)}$$

$$= \lim_{t\to0}\left[(1+t)^{1/t}\right]^{\left(\frac{1-4t}{1-2t}\right)}$$

$$= \left[\lim_{t\to0}(1+t)^{1/t}\right]^{\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{1-4t}{1-2t}\right)}$$

$$= [e]^1$$

$$= e\ .$$

שאלה 17 נגדיר $t=x-6$.

$$\lim_{x\to6}(x-5)^{\frac{x}{x-6}} = \lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{t+6}{t}} = 1^{\infty}$$

לא מוגדר.

$$\lim_{x\to6}(x-5)^{\frac{x}{x-6}} = \lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{t+6}{t}} = \left[\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\lim\limits_{t\to0}(t+6)} = e^6\ .$$

שאלה 18

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3^x+5^x}{2^x+5^x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{3^x+5^x}{5^x}}{\frac{2^x+5^x}{5^x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{3^x}{5^x}+1}{\frac{2^x}{5^x}+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1}{\left(\frac{2}{5}\right)^x+1}\right) = \frac{0+1}{0+1} = 1\ .$$

שאלה 19

שיטה 1

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+e^{-x}\right)^{3e^x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)^{e^x\cdot\frac{1}{e^x}\cdot3e^x} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{e^x}\right)^{e^x}\right]^{\frac{3e^x}{e^x}} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)^{e^x}\right]^3 = e^3$$

שיטה 2: החלפת משתנים

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+e^{-x}\right)^{3e^x} = 1^{\infty}$$

לא מוגדר.

נגדיר $t=e^{-x}$. כאשר $x\to\infty$ אז $t\to0$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+e^{-x}\right)^{3e^x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha\cdot\frac{3e^x}{\alpha}} = \lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{3}{t}} = e^3$$

שאלה 20

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}\right)^{3x-1}=1^{\infty}$$

לא מוגדר.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}\right)^{3x-1} &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}-1\right)^{3x-1}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+x+1-x^2-2x-1}{x^2+2x+1}\right)^{3x-1}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-x}{x^2+2x+1}\right)^{3x-1}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-x}{x^2+2x+1}\right)^{\left(\frac{-x}{x^2+2x+1}\right)\cdot\left(\frac{x^2+2x+1}{-x}\right)\cdot(3x-1)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-x}{x^2+2x+1}\right)^{\left(\frac{x^2+2x+1}{-x}\right)\cdot\left(\frac{-x}{x^2+2x+1}\right)\cdot(3x-1)}\\
&= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-x}{x^2+2x+1}\right)^{\left(\frac{x^2+2x+1}{-x}\right)}\right]^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x}{x^2+2x+1}\right)\cdot(3x-1)}\\
&= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-x}{x^2+2x+1}\right)^{\left(\frac{x^2+2x+1}{-x}\right)}\right]^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-3x^2+x}{x^2+2x+1}\right)}\\
&= [e]^{-3}=\frac{1}{e^3}\ .
\end{aligned}$$

שאלה 21

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=1^{\infty}$$

לא מוגדר.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+1}{x^2-2}-1\right)^{x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+1-x^2+2}{x^2-2}\right)^{x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{\left(\frac{x^2-2}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{x^2-2}\right)\cdot x^2}$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2-2}{3}}\right]^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2-2}\right)\cdot x^2}$$

$$=[e]^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2}{x^2-2}\right)}$$

$$=e^3\ .$$

שאלה 22

$$\lim_{x\to0}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^{1/x^2}=1^\infty$$

לא מוגדר.

$$\lim_{x\to0}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^{1/x^2}=\lim_{x\to0}\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1\right)^{1/x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1\right)^{\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1}\right)\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1\right)^{\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1}}\right]^{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1}{x^2}}$$

$$=[e]^{\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2=-\frac{1}{2}$$

לפיכך התשובה הסופית הינה

$$e^{-1/2}=\frac{1}{e^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\ .$$

שאלה 23

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\cot\sqrt{x}}=1^{\infty}$$

לא מוגדר.

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\cot\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\tan\sqrt{x}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right]^{\frac{\sqrt{x}}{\tan\sqrt{x}}}$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right]^{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\tan\sqrt{x}}}$$

$$=[e]^{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\tan\sqrt{x}}}$$

$$=e^{1}=e\ .$$

שאלה 24

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\tan^2 x}}=1^{\infty}$$

לא מוגדר.

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\tan^2 x}}=\lim_{x\to 0}\left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\sin^2 x\cdot\frac{1}{\tan^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}\right]^{\frac{\sin^2 x}{\tan^2 x}}$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}\left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}\right]^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\tan^2 x}}$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\tan x}\right)^2}$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}(\cos x)^2}$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\cos^2 x}e^{\cos^2(0)}=e^{1}=e\ .$$

שאלה 25

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+7}\right)^{\sqrt{4x^2+2x}}=1^{\infty}$$

לא מוגדר.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+7}\right)^{\sqrt{4x^2+2x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{x+7}-1\right)^{\sqrt{4x^2+2x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-x-7}{x+7}\right)^{\sqrt{4x^2+2x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{x+7}\right)^{\sqrt{4x^2+2x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{x+7}\right)^{\frac{x+7}{-7}\cdot\frac{-7}{x+7}\cdot\sqrt{4x^2+2x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-7}{x+7}\right)^{\frac{x+7}{-7}}\right]^{\frac{-7}{x+7}\cdot\sqrt{4x^2+2x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-7}{x+7}\right)^{\frac{x+7}{-7}}\right]^{\frac{-7\sqrt{4x^2+2x}}{x+7}}$$

$$= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{x+7}\right)^{\frac{x+7}{-7}}\right]^{\lim_{x\to\infty}\frac{-7\sqrt{4x^2+2x}}{x+7}}$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-7\sqrt{4x^2+2x}}{x+7}}$$

$$= e^{-7\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x^2+2x}{(x+7)^2}}}$$

$$= e^{-7\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x}{x^2+14x+49}}}$$

$$= e^{-7\sqrt{4}}$$

$$= e^{-7\cdot 2}$$

$$= e^{-14} = \frac{1}{e^{14}}\ .$$

<u>שאלה 26</u> שיטתה 2: החלפת משתנים

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{4x+5}}\right)^{-3x^2-2x-1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{4x+5}}\right)^{-3x^2-2x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{4x+5}}\right)^{\sqrt{4x+5}\cdot\frac{-3x^2-2x-1}{\sqrt{4x+5}}}$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{4x+5}}\right)^{\sqrt{4x+5}}\right]^{\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2-2x-1}{\sqrt{4x+5}}}$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{(-3x^2-2x-1)\sqrt{4x+5}}{4x+5}}$$

$$=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=0\ .$$

שאלה 27

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\cot(3x)} = \lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2x\cdot\cot(3x)}$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{\lim_{x\to 0}2x\cdot\cot(3x)}$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\tan(3x)}}$$

$$=[e]^{\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\frac{3x}{\tan(3x)}}$$

$$=e^{\frac{2}{3}}$$

שאלה 28

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(2x)-1}{3x\sin x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-2\sin^2 x-1}{3x\sin x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-2\sin^2 x}{3x\sin x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-2\sin x}{3x}\right)\\ &= -\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\\ &= -\frac{2}{3}\cdot 1 = -\frac{2}{3}\ .\end{aligned}$$

שאלה 29

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}(6-5x)^{\frac{1}{\ln|2-x|}} &= \lim_{x\to 1}(1+5-5x)^{\frac{1}{\ln|2-x|}} \\
&= \lim_{x\to 1}(1+5(1-x))^{\frac{1}{\ln|2-x|}} \\
&= \lim_{t\to 0}(1+5t)^{\frac{1}{\ln|1+t|}} \\
&= \lim_{t\to 0}(1+5t)^{\frac{1}{t}\cdot\frac{t}{\ln|1+t|}} \\
&= \left[\lim_{t\to 0}(1+5t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln|1+t|}} \\
&= e^{\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln|1+t|}} \\
&\overset{\text{לופיטל}}{=} e^{\lim_{t\to 0}\frac{1}{\left(\frac{1}{1+t}\right)}} \\
&= e^{1} \\
&= e\ .
\end{aligned}
$$