שיעור 12
אינטגרלים מסויימים

12.1 אינטגריה של שברים אלגבריים (פונקציות רצינליות)

הגדרה 12.1 פונקציה רציונלית

פונקציה רציונלית (שבר אלגברי) זאת פונקציה מהצורה

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} ,$$

כאשר $P(x)$, $Q(x)$ פולינומים.

דוגמה 12.1 פונקציה רציונלית

$f(x) = \dfrac{x^4 - 5x + 9}{x - 2}$ פונקציה רציונלית: $P(x) = x^4 - 5x + 9$ $Q(x) = x - 2$.

הגדרה 12.2 פונקציה רציונלית אמיתי

שבר אלגברי

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

נקרא אמיתי אם

$$\deg(P) < \deg(Q) .$$

אם שבר אלגברי לא אמיתי, יש לעשות חילוק פולינומים.

דוגמה 12.2 חילוק פולינומים

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} .$$

פתרון:

שלב ראשון בחישוב אינטגרל של שבר אלגברי לא אמיתי, להגיע לשבר אלגברי אמיתי ע"י חילוק פולינומים. ע"י חילוק ארוך:

$$\frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \frac{15}{x - 2}$$

לכן

$$\int \frac{x^4-5x+9}{x-2} = \int \left(x^3+2x^2+4x+3+\frac{15}{x-2}\right) = \frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+2x^2+3x+15\ln|x-2|+C\ .$$

■

יש 4 סוגים של שברים אלגבריים פשוטים:

סוג 1

$$\frac{A}{x-a}$$

סוג 2

$$\frac{A}{(x-a)^n}\ , \qquad n\in\mathbb{N}\ , \quad n\geq 2\ .$$

סוג 3

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\ ,$$

כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.

סוג 4

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\ , n\in\mathbb{N}\ , \quad n\geq 2$$

כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.

דוגמה 12.3 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $\int \frac{2x+1}{x^2-3x+1}$

פתרון:

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+1} = \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$
$$A(x-2)+B(x-1)=2x+1$$

$$x=2 \quad\Rightarrow\quad B=5$$
$$x=1 \quad\Rightarrow\quad A=-3$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+1}\,dx = \int \left(\frac{-3}{x-1}+\frac{5}{x-2}\right)dx = -3\ln|x-1|+5\ln|x-2|+C\ .$$

■

דוגמה 12.4 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2}$

פתרון:

$$\frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{x-3}\ .$$
$$A(x-3)^2+B(x-2)+C(x-3)(x-2)=x^2+4$$

$$\begin{array}{lcl} x=3 & \Rightarrow & B=13 \\ x=2 & \Rightarrow & A=8 \\ x=0 & \Rightarrow & 9A-2B+6C=4 \rightarrow C=-7 \end{array}$$

$$\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2}\,dx=\int\left(\frac{8}{x-2}+\frac{13}{(x-3)^2}-\frac{7}{x-3}\right)dx=8\ln|x-2|-\frac{13}{x-3}-7\ln|x-3|+C\ .$$
■

דוגמה 12.5 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $\int \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}$

פתרון:

$$\frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\ .$$
$$A(x^2+1)^2+Bx(x^2+1)+(Cx+D)x^2=x^3+1$$

$$\begin{array}{ll} x^3: & B+C=1 \\ x^2: & A+D=0 \\ x: & B=0 \\ x^0: & A=1 \end{array}$$

לכן

$$D=-1\ ,\qquad C=1\ .$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}dx=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|x^2+1|-\arctan(x)+C\ .$$
■

דוגמה 12.6 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $I=\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}$

פתרון:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5}\ .$$
$$A(x^2-2x+5)+(Bx+C)(x-1)=2x^2-3x-3$$

$$\begin{array}{ll} x^2: & A+B=2 \\ x: & -2A+C-B=-3 \\ x^0: & 5A-C=-3 \end{array}$$

לכן

$$A=-1\ ,\qquad B=3\ ,\qquad C=-2\ .$$

$$I=\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx=\int\left(-\frac{1}{x-1}+\frac{3x-2}{x^2-2x+5}\right)dx=-\ln|x-1|+\int\left(\frac{3x-2}{(x-1)^2+4}\right)dx\ .$$

נגדיר $u=x-1$:

$$\begin{aligned} I&=\ln|x-1|+\int\frac{3(u+1)-2}{u^2+4}du\\ &=\ln|x-1|+\int\frac{3(u+1)-2}{u^2+4}du\\ &=\ln|x-1|+3\int\frac{u}{u^2+4}du-\int\frac{1}{u^2+4}du\\ &=\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|u^2+4|-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u}{2}\right)\\ &=\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|(x-1)^2+4|-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) \end{aligned}$$

■

למה 12.1 שלבים באינטגרציה של שברים אלגבריים

שלב 1. לחלק במכנה (חילוק פולינומי) במידה ש $\deg(P)\geq\deg(Q)$.

שלב 2. להציב שבר אלגברי אמיתי כסכום של שברים פשוטים.

שלב 3. לבצע אינטגרציה של כל שבר פשוט.

דוגמה 12.7 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $I=\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$

פתרון:

ע"י חילוק ארוך:

$$\frac{x^5+2x+4x+4}{x^4+x^3+2x^2}=x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+4\left(\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}\right)$$

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

$$A(x^2+2x+2)+Bx(x^2+2x+2x)+(Cx+D)x^2=x^3+x^2+x+1$$

$$\begin{aligned} x^3: &\quad B+C=1 \\ x^2: &\quad 2A+2B+D=1 \\ x: &\quad 2A+2B=1 \\ x^0: &\quad 2A=1 \end{aligned}$$

לכן

$$A=\frac{1}{2}\ , \qquad B=0\ , \qquad C=1\ , \qquad D=\frac{1}{2}\ .$$

$$I=\int\left(x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}\right)dx\int\left(x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{(x+1)^2+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+4\int\frac{x+\frac{1}{2}}{(x+1)^2+1}dx\ .$$

נגדיר $u=x+1$:

$$\begin{aligned} I=&\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+4\int\frac{u-\frac{1}{2}}{u^2+1}du \\ =&\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln|u^2+1|-2\arctan(u)+C \\ =&\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln|(x+1)^2+1|-2\arctan(x+1)+C \end{aligned}$$

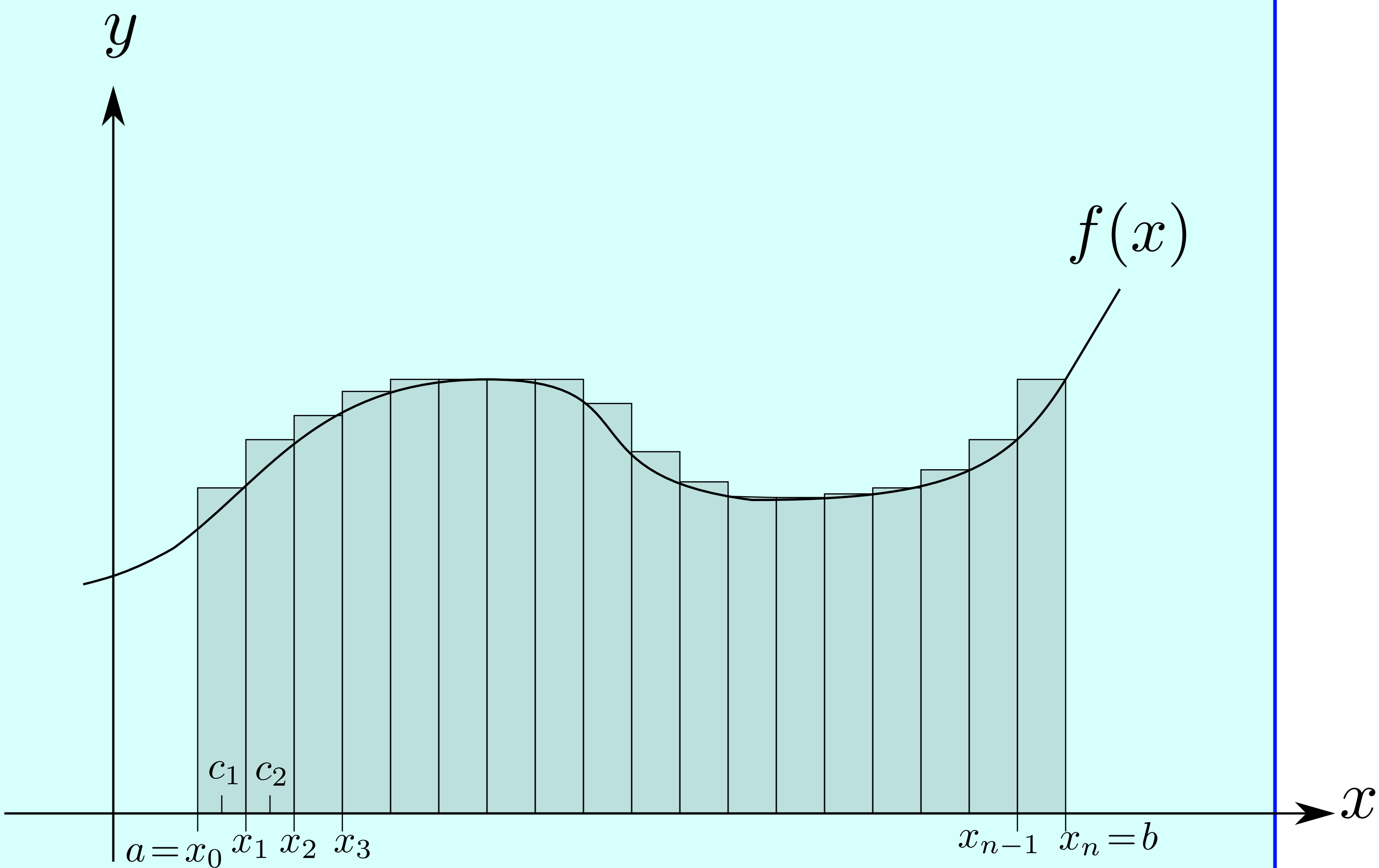
■

12.2 אינטגרל מסוים

הגדרה 12.3 אינטגרל מסוים

נניח שפונקציה $y=f(x)$ מוגדרת בקטע $[a,b]$. נחלק את הקטע $[a,b]$ לקטעים קטנים על ידי נקודות

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\ .$$



מכל קטע $[x_i, x_{i+1}]$ נבחר נקודה c_i באופן שרירותי. נבנה סכום אינטגרלי:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) \ .$$

נסמן $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. נפעיל את הגבול כאשר $\max(\Delta x_i)\to 0$. נקבל

$$\lim_{\max(\Delta x_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \ .$$

האגף הימין הוא האינטגרל המסויים של $f(x)$ בקטע $[a,b]$.

משפט 12.1 קיום אינטגרל מסוים

אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ אז האינטגרל מסויים $\int_a^b f(x)\,dx$ קיים.

משפט 12.2 משמעות הגיאומטרית של אינטגרל מסוים

אם $f(x)\geq 0$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)\,dx$ שווה לשטח הטרפז העקום החסום ע"י הקווים $y=0$, $y=f(x)$, מלמעלה ו- $x=a$, $x=b$ בצדדים.

משפט 12.3 נוסחת ניוטון לייבניץ

אם $\int f(x)dx = F(x)+C$ אז $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

דוגמה 12.8

$$\int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{3^3}{3}-0 = 9\ .$$

דוגמה 12.9

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-2}^2 = \frac{1}{2}\left[\arctan(1)-\arctan(-1)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{4}\ .$$

דוגמה 12.10

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x\cdot\ln x}\,dx = \left[\ln|\ln x|\right]_e^{e^2} = \left[\ln\left|\ln e^2-\ln e\right|\right] = \left[\ln|2-1|\right] = 0\ .$$

משפט 12.4 תכונות של אינטגרל מסויים

1. $\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$.
2. $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$.
3. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.
4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ עבור $a<c<b$.
5. $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x)$.

הוכחה:

.1

.2

.3

.4

.5

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

כאשר $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$. לכן

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = (F(x) - F(a))'_x = F'(x) = f(x)\ .$$

■

דוגמה 12.11

עבור אילו ערכי x לגרף הפונקציה

$$f(x) = \int_0^x e^{-(t+2)^2}$$

יש נקודת פיתול?

פתרון:

$$f'(x) = e^{-(x+2)^2}\ .$$

$$f''(x) = -2(x+2)e^{-(x+2)^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -2\ .$$

■

דוגמה 12.12 החלפת משתנים באינטגרל מסויים

חשבו את $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x}\, dx$

פתרון:

נגדיר

$$u = \ln x\ , \qquad u' = \frac{1}{x}\ , \qquad u(e^2) = 2\ , \qquad u(1) = 0\ .$$

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x}\, dx = \int_0^2 u^2\, u' dx = \int_0^2 u^2\, du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}\ .$$

■

דוגמה 12.13 החלפת משתנים באינטגרל מסויים

חשבו את $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

פתרון:
נגדיר

$$u=\sqrt{x}\ , \qquad u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2u}\ , \qquad u(4)=2\ , \qquad u(0)=0\ .$$

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx &= \int_0^2 \frac{1}{1+u}\cdot 2u\cdot\frac{1}{2u}\,dx\\ &= \int_0^2 \frac{1}{1+u}\cdot 2u\cdot u'\,dx\\ &= \int_0^2 \frac{2u}{1+u}\,du\\ &= \int_0^2 \left(2-\frac{2}{1+u}\right)\,du\\ &= \left[2u-2\ln|1+u|\right]_0^2\\ &= 4-2\cdot\ln 3\ .\end{aligned}$$

■

דוגמה 12.14 החלפת משתנים באינטגרל מסויים

חשבו את $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$

פתרון:
נגדיר

$$u=\sqrt{e^x-1}\ , \qquad u'=\frac{1}{2\sqrt{e^x-1}}\cdot e^x=\frac{u^2+1}{2u}\ , \qquad u(\ln 2)=1\ , \qquad u(0)=0\ .$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx &= \int_0^{\ln 2} u\cdot\frac{u^2+1}{2u}\cdot\frac{2u}{u^2+1}\,dx\\ &= \int_0^{\ln 2} u\cdot\frac{2u}{u^2+1}\cdot u'\,dx\\ &= \int_0^1 u\cdot\frac{2u}{u^2+1}\,du\\ &= \int_0^1 \frac{2u^2}{u^2+1}\,du\\ &= \int_0^1 \left(2-\frac{2}{u^2+1}\right)\,du\\ &= \left[2u-2\arctan(u)\right]_0^1\\ &= 2-2\cdot\frac{\pi}{4}\ .\end{aligned}$$

■

דוגמה 12.15 החלפת משתנים באינטגרל מסויים

חשבו את $\int_{-1}^{2} \sqrt{2-x}\, dx$

פתרון:
נגדיר

$$u=\sqrt{2-x}\ , \qquad u'=\frac{1}{2\sqrt{2-x}}\cdot(-1)=\frac{-1}{2u}\ , \qquad u(2)=0\ , \qquad u(-1)=\sqrt{3}\ .$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} \sqrt{2-x}\, dx &= \int_{-1}^{2} u\cdot(-2u)\cdot\frac{-1}{2u}\, dx\\ &= \int_{-1}^{2} u\cdot(-2u)\cdot u'\, dx\\ &= \int_{\sqrt{3}}^{0} (-2u^2) du\\ &= \int_{0}^{\sqrt{3}} 2u^2 du\\ &= \left[\frac{2}{3}u^3\right]_0^{\sqrt{3}}\\ &= \frac{2}{3}3^{3/2}\ .\end{aligned}$$

■

למה 12.2 אינטגרציה בחלקים באינטגרל מסויים

$$\int_a^b u\, d\mathrm{v} = [u\mathrm{v}]_a^b - \int_a^b \mathrm{v} du$$
$$\int_a^b u\, \mathrm{v}'\, dx = [u\mathrm{v}]_a^b - \int_a^b \mathrm{v}u'\, dx$$

דוגמה 12.16 אינטגרציה בחלקים באינטגרל מסויים

חשבו את $\int_{1}^{e} x\cdot \ln x\, dx$

פתרון:
נגדיר

$$u=\ln x\ , \qquad \mathrm{v}'=x\ , \qquad u'=\frac{1}{x}\ , \qquad \mathrm{v}=\frac{x^2}{2}\ .$$

$$
\begin{aligned}
\int_1^e x\cdot\ln x\,dx &= \left[\ln x\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\
&= \left[\ln x\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx \\
&= \left[\ln x\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e \\
&= \left[\ln e\cdot\frac{e^2}{2} - \ln 1\cdot\frac{1}{2}\right] - \left[\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right] \ , \\
&=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4} \\
&=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4} \ .
\end{aligned}
$$

■

דוגמה 12.17 אינטגרציה בחלקים באינטגרל מסויים

חשבו את $\int_0^\pi x\cdot\sin x\,dx$

פתרון:
נגדיר

$$u=x\ ,\qquad \mathrm{v}'=\sin x\ ,\qquad u'=1\ ,\qquad \mathrm{v}=-\cos x .$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi x\cdot\sin x\,dx &= [-x\cdot\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi(-\cos x)\,dx \\
&= [-x\cdot\cos x]_0^\pi + [\sin x]_0^\pi \\
&= [-\pi\cdot\cos\pi + 0\cdot\cos 0] + \sin\pi - \sin 0 \\
&=\pi \ .
\end{aligned}
$$

■

דוגמה 12.18

חשבו את $\int_{-3}^3 e^{-x^2}\sin x\,dx$

פתרון:

$$\int_{-3}^3 e^{-x^2}\sin x\,dx = 0$$

בגלל ש- $e^{-x^2}\sin x$ פונקציה אי-זוגית והתחום סימטרי ביחס לראשית הצירים. ■

דוגמה 12.19

עבור אילו ערכי a מתקיים $I=\int_0^2 \min(x,a)\,dx = 1$?

פתרון:
:$\underline{a \leq 0}$

$$I = \int_0^2 a\,dx = [ax]_0^2 = 2a \neq 1 \ .$$

:$\underline{a \geq 2}$

$$I = \int_0^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2 \neq 1 \ .$$

:$\underline{1 < a < 2}$

$$I = \int_0^a x\,dx + \int_a^2 a\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a + [ax]_a^2 == \frac{a^2}{2} + 2a - a^2 = -\frac{a^2}{2} + 2a = 1 \ .$$

$$a^2 - 4a + 2 = 0$$

$$a = 2 \pm \sqrt{2}$$

לכן התשובה היא $a = 2 - \sqrt{2}$. ■

דוגמה 12.20

חשבו את $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(\max(x,\pi))\,dx$

פתרון:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos(\max(x,\pi))\,dx &= \int_0^{\pi} \cos(\pi)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \cos(x)\,dx \\ &= [-x]_0^{\pi} + [\sin x]_{\pi}^{2\pi} \\ &= -\pi \ .\end{aligned}$$

■

דוגמה 12.21

חשבו את $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2 + 3\sin x}\,dx$

פתרון:
נגדיר

$$u = 2 + 3\sin x \ , \qquad u' = 3\cos x.$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2+3\sin x}\,dx =& \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{u'}{3}}{u}\,dx \\
=& \int_2^5 frac13 \cdot \frac{1}{u}\,du \\
=& \left[\frac{1}{3}\ln u\right]_2^5 \\
=& \frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}\ .
\end{aligned}
$$

■

דוגמה 12.22

חשבו את $I=\int_0^5 |2x-4|\,dx$

פתרון:

$$
\begin{aligned}
\int_0^5 |2x-4|\,dx =& \int_2^5 (2x-4) + \int_0^2 \big(-(2x-4)\big)\,dx \\
=& \int_2^5 (2x-4) + \int_0^2 (4-2x)\,dx \\
=& \left[x^2-4x\right]_2^5 + \left[4x-x^2\right]_0^2 \\
=& [25-20-4+8]+[8-4] \\
=& 13\ .
\end{aligned}
$$

■

דוגמה 12.23

מצא את ערכו של t ($t>0$) עבורו האינטגרל $I=\int_0^t (2-te^{-0.5x})\,dx$ היא מקסימאלי. חשבו את הערך המקסימאלי.

פתרון:

$$
F(t)=\int_0^t (2-te^{-0.5x})\,dx = \left[2x+2te^{-0.5x}\right]_0^t = 2t+2te^{-0.5t}-2t = 2te^{-0.5t}\ .
$$

$$
F'(t)=2e^{-0.5t}\left(1-\frac{t}{2}\right)\ =0 \qquad \Rightarrow \qquad t=2\ .
$$

עבור $t=2$ ל $F(t)$ יש ערך מקסימלי.

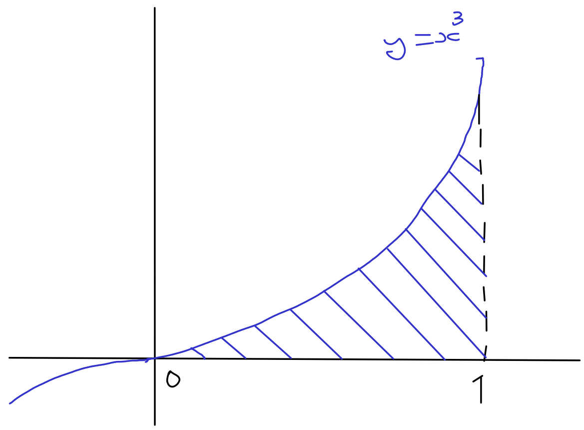
$$
F(2)=2\cdot 2\cdot e^{-0.5\cdot 2}=\frac{4}{e}\ .
$$

■

דוגמה 12.24 חישוב שטח

מצאו את השטח החסום ע"י גרף הפונקציה $y=x^3$ והישרים $x=1$, $y=0$.

פתרון:



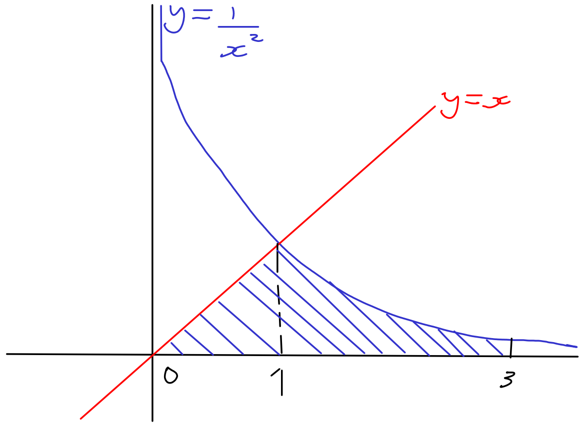
$$S=\int_0^1 x^3\,dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}\ .$$

■

דוגמה 12.25 חישוב שטח

מצאו את השטח החסום ע"י $y=\dfrac{1}{x^2}$, $y=x$, $x=3$, $y=0$.

פתרון:



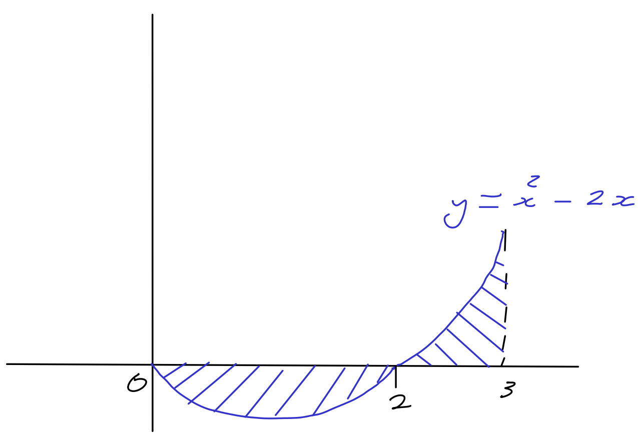
$$S=\int_0^1 x\,dx+\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\left[\frac{1}{x}\right]_1^3=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1=\frac{7}{6}\ .$$

■

דוגמה 12.26 חישוב שטח

מצאו את השטח החסום ע"י $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=3$, $x=0$.

פתרון:



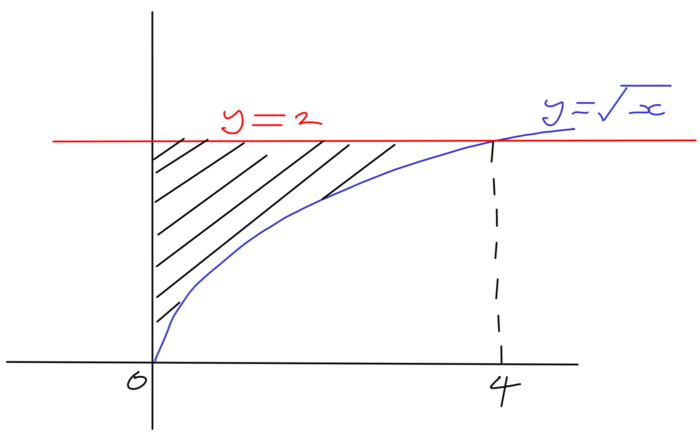
$$
\begin{aligned}
S =& -\int_0^2 \left(x^2-2x\right)\,dx + \int_2^3 \left(x^2-2x\right)\,dx \\
=& -\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3 \\
=& -\left[\frac{2^3}{3}-2^2\right] + \left[\frac{3^3}{3}-3^2-\frac{2^3}{3}+2^2\right] \\
=& -\frac{8}{3}+4+9-9-\frac{8}{3}+4 \\
=& \frac{8}{3}\ .
\end{aligned}
$$

■

דוגמה 12.27 חישוב שטח

מצאו את השטח החסום ע"י $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $y=2$.

פתרון:



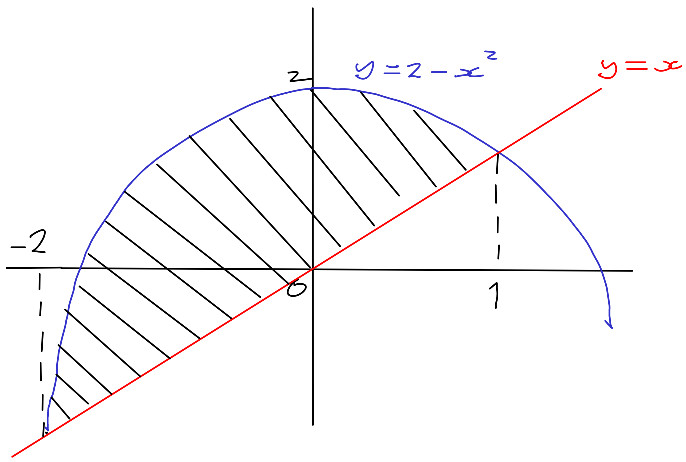
$$
\begin{aligned}
S =& \int_0^4 2\,dx - \int_0^4 \sqrt{x}\,dx \\
=& [2x]_0^4 - \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 \\
=& 8-\frac{2}{3}\cdot 4^{3/2} \\
=& \frac{8}{3}\ .
\end{aligned}
$$

■

דוגמה 12.28 חישוב שטח

מצאו את השטח החסום ע"י $y = x$, $y = 2 - x^2$.

פתרון:



$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\, dx \\ &= \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} \\ &= \left[2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right] - \left[-4 + \frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right] \\ &= \frac{9}{2} \ . \end{aligned}$$

■

דוגמה 12.29 חישוב שטח

מצאו את השטח החסום ע"י $y = x^2 - 2x + 2$, המשיק לפרבולה הזאת בנקודה $(3, 5)$ וציר ה- y.

פתרון:

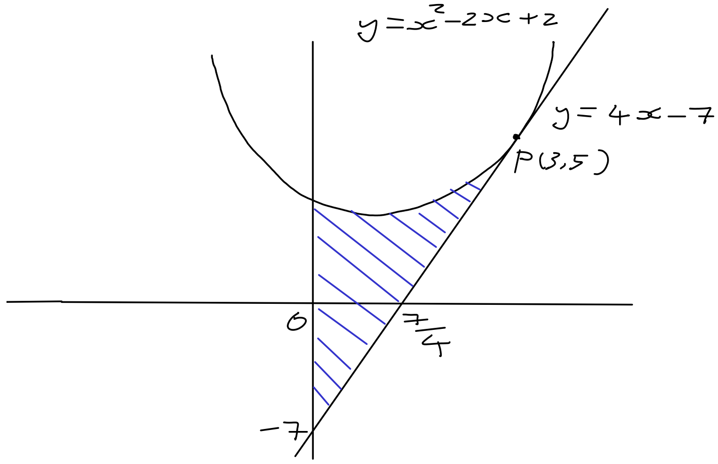
נמצא את משוואת המשיק:

$$y' = 2x - 2$$

$$y'(3) = 4$$

משוואת המשיק:

$$y - 5 = 4(x - 3) \qquad \Rightarrow \qquad y = 4x - 7 \ .$$



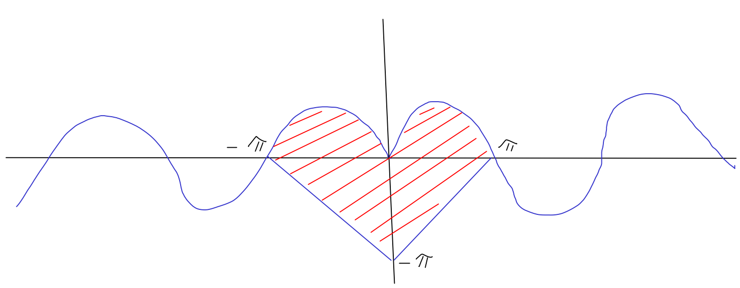
$$S = \int_0^3 \left((x^2 - 2x + 2) - (4x - 7) \right) \, dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right]_0^3 - \left[2x^2 - 7x \right]_0^3 \, dx$$
$$= \left[\frac{3^3}{3} - 3^2 + 6 \right] - [18 - 21]$$
$$= 9 \ .$$

■

דוגמה 12.30 חישוב שטח

מצאו את השטח החסום ע"י $y = \sin|x|$, $y = |x| - \pi$.

פתרון:



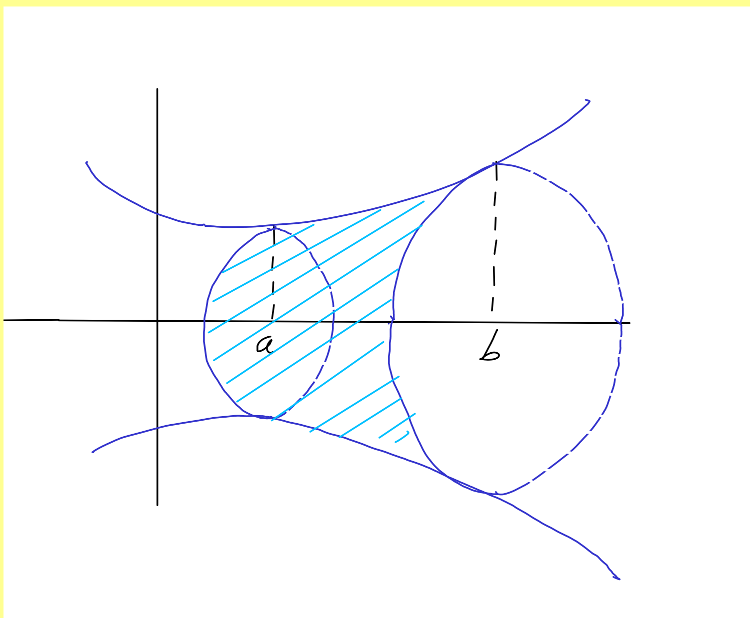
$$
\begin{aligned}
S =&2\int_0^{\pi} \left(\sin x-(x-\pi)\right)\,dx\\
=&2\left[-\cos x-\frac{x^2}{2}+\pi x\right]_0^{\pi}\\
=&2\left[1-\frac{\pi^2}{2}+\pi^2\right]0-2\left[-1\right]\\
=&4+\pi^2\ .
\end{aligned}
$$

■

משפט 12.5 חישוב נפח גוף סיבוב סביב ציר ה- x

בהינתן גרף של פונקציה $y=f(x)$ בקטע $[a,b]$. הנפח של גוף סיבוב סביב ציר ה- x הוא

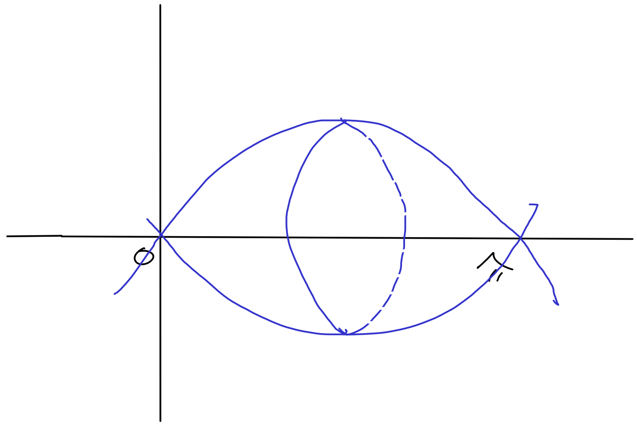
$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx\ .$$



דוגמה 12.31 חישוב נפח

מצאו את נפח גוף הסיבוב סביב ציר ה- x של התחום המישורי החסום ע"י $y=\sin x$ בתחום $0\leq x\leq\pi$.

פתרון:



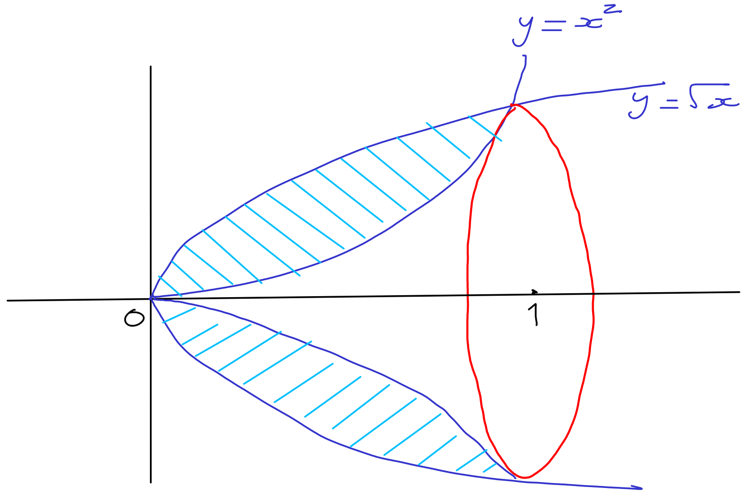
$$
\begin{aligned}
V =&\pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx \\
=&\pi \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx \\
=&\pi \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^\pi \\
=&\frac{\pi^2}{2} \ .
\end{aligned}
$$

■

דוגמה 12.32 חישוב נפח

מצאו את נפח גוף הסיבוב סביב ציר ה- x של התחום החסום ע"י $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

פתרון:



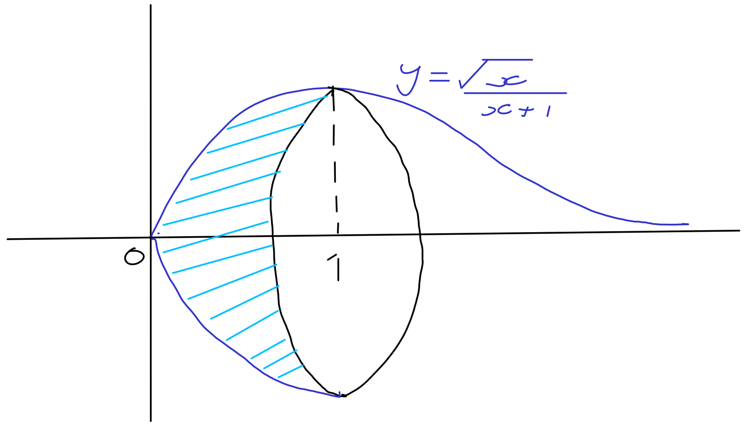
$$
\begin{aligned}
V =&\pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2\, dx - \pi \int_0^1 x^4\, dx \\
=&\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 \\
=&\pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right] \\
=&\frac{3\pi}{10}\ .
\end{aligned}
$$

■

דוגמה 12.33 חישוב נפח

חשבו את נפח גוף הסיבוב סביב ציר ה- x של התחום החסום ע"י $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ בתחום $0\leq x\leq 1$.

פתרון:



$$V = \pi \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2}\, dx \ .$$

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A + B(x+1)}{(x+1)^2} \ .$$

$$\begin{aligned} x:& \quad B = 1 \\ x^0:& \quad A + B = 0 \ \Rightarrow \ A = -1. \end{aligned}$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \pi \left[\frac{1}{x+1} + \ln|x+1| \right]_0^1 = \pi \left[\frac{1}{2} + \ln|2| - 1 \right] = \pi \left(\ln|2| - \frac{1}{2} \right) \ .$$

■