שיעור 3
כפל מטריצות וייצוג מערכת באמצעות AX=b

מושג של מטריצה

דוגמא.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 23 & 45 & 2 \\ 12 & 34 & 67 & 87 & 55 \\ 22 & 33 & 66 & 89 & 19 \end{pmatrix}$$

הרכיב במקום ה- $(3,4)$ הוא 89. נסמן

$$(A)_{34} = 89$$

הרכיב במקום ה- $(1,5)$ הוא 2. נסמן

$$(A)_{15} = 2$$

הרכיב במקום ה- $(2,3)$ הוא 67. נסמן

$$(A)_{23} = 67$$

■

3.1 הגדרה: (רכיב של מטריצה) תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. את הרכיב במקום ה- (i,j) (כלומר האיבר ה- i ועמודה j) נסמן כ- A_{ij}.

סוגים שונים של מטריצות

3.2 הגדרה: (מטריצה ריבועית) מטריצה ריבועית היא מטריצה שמספר שורותיה = מספר עמודותיה. נסמן

$$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \qquad \text{או} A \in M_n(\mathbb{R})$$

הגדרה: (מטריצה אלכסונית) מטריצה ריבועית שכל רכיביה שאינם על האלכסון הראשי הם אפס, תקרא מטריצה אלכסונית.

הגדרה: (מטריצה האפס) מטריצה שכל רכיביה הם אפס, תקרא מטריצת האפס.

חיבור מטריצות וכפל מטריצה בסקלר

דוגמא. (חיבור מטריצות)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 11 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+8 & 5+9 \\ 3+11 & 4+5 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 14 \\ 14 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

■

חיבור שתי מטריצות אשר מספר שורות ומספר עמודותי שונים אי חוקי, לדוגמה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

דוגמא. (כפל מטריצה בסקלר)

$$7 \odot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cdot 1 & 7\cdot 2 \\ 7\cdot 3 & 7\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \end{pmatrix}$$

■

3.3 הגדרה: (שוויון מטריצות) יהיו $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. נאמר ש $A = B$ אם לכל $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ מתקיים

$$A_{ij} = B_{ij}\ .$$

3.4 הגדרה: (חיבור מטריצות) יהיו $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. הסכום

$$A \oplus B$$

יוגדר כך ש-

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$$

כאשר $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, כלומר חיבור הרכיבים המתאימים.

3.5 הגדרה: (כפל מטריצה בסקלר) יהיו $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ו- $\alpha \in \mathbb{R}$. כפל מטריצה A בסקלר α יסומן ב

$$\alpha \odot A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

ויוגדר כך ש-

$$(\alpha \odot A)_{ij} = \alpha \cdot A_{ij}$$

כאשר $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, כלומר הכפלה של כל אחד מאיברי המטריצה ב- α.

3.6 הגדרה: (מטריצה הנגדי) בהינתן מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ המטריצה הנגדי תסומן ב- $-A$ ותוגדר

$$-A \equiv (-1) \odot A\ ,$$

כלומר הכפלת של המטריצה A בהסקלר -1.

3.7 הגדרה: (חיסור מטריצות) בהינתן מטריצה $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ החיסור המסומן ב- $A - B$ יוגדר

$$A - B \equiv A \oplus (-B)\ ,$$

כלומר החיבור (לפי הגדרה 3.4) של המטריצה A והמטריצה הנגדי $-B$ (לפי הגדרה 3.6).

3.8 משפט: יהיו $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ו- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. אזי:

1. חוק החילוף של חיבור מטריצות: $A + B = B + A$.
2. חוק הקיבוץ של חיבור מטריצות: $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + 0 = A$.
4. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
5. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
6. $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$.

הוכחה מיידית מההגדרות.

מטריצה משוחלפת

3.9 הגדרה: (מטריצה משוחלפת) בהינתן מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ בגודל $m \times n$, המשוחלפת של A, תסומן A^t, היא מטריצה בגודל $n \times m$ כך שלכל $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, מתקיים

$$A^t_{ji} = A_{ij}$$

דוגמא. (מטריצה משוחלפת) נתונה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ מצאו את המשוחלפת שלה, כלומר A^t.

פיתרון.

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

■

3.10 הגדרה: (מטריצה משוחלפת) עבור $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, מגדירים את A^t, המטריצה המשוחלפת של A, להיות מטריצה בגודל $n \times m$ כך שהעמודה ה- i של A^t היא השורה של A. "החלפת שורות ועמודות".

3.11 משפט: תהיינה A, B מטריצה כך שהסכומים והמכפלות מוגדרים ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. מתקיים:

1.
$$\left(A^t\right)^t = A$$

2.
$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

3.
$$(\alpha A)^t = \alpha A^t$$

4.
$$(AB)^t = B^t A^t$$

שימו לב, הסדר השתנה.

כפל מטריצה בוקטור

דוגמא. (כפל מטריצה בוקטור)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 \\ 7 \cdot 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \cdot 2 \\ 8 \cdot 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \cdot 3 \\ 9 \cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 3 \\ 7 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 50 \\ 122 \end{pmatrix}$$

3.1 הגדרה: (מכפלה של מטריצה בוקטור)

יהיו $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ו- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. נגדיר

$$Ax = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots x_na_n \ .$$

שימו לב שמתקבל וקטור השייך ל- $\mathbb{R}^m$. שימו לב שניתן לכפול רק כאשר כמות העמודות של המטריצה שווה לכמות הרכיבים של הוקטור.

דוגמא. (מכפלה של מטריצה בוקטור) יהיו $\nu_1\ ,\ \nu_2\ ,\ \nu_3 \in \mathbb{R}^8$. הציגו את $5\nu_1 - 4\nu_2 + 8\nu_3$ בצורה של "מטריצה כפול וקטור".

פיתרון.

$$\begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = 5\nu_1 - 4\nu_2 + 8\nu_3 \ .$$

שימו לב $\begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \in M_{8\times 3}(\mathbb{R})$ ■

דוגמא. בהינתן המערכת לינארית

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 =& 12\ , \\ 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 =& 11 \end{aligned}$$

ניתן לייצג אותה בצורה

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$$

ובצורה של משוואה מטריציאלית:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix} \ ,$$

או

$$AX = b$$

כאשר $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ו- $b = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$.

כפל מטריצות

דוגמא. (כפל מטריצות)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 3}}_{A} \odot \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \underbrace{21}_{b_1} & \underbrace{22}_{b_2} & \underbrace{23}_{b_3} & \underbrace{24}_{b_4} \end{pmatrix}_{3\times 4} = \begin{pmatrix} A\cdot b_1 & A\cdot b_2 & A\cdot b_3 & A\cdot b_4 \end{pmatrix}$$

כאשר

$$A\cdot b_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}11\\5\\21\end{pmatrix}_{3\times1}=\begin{pmatrix}1\cdot11+2\cdot5+3\cdot21\\0\cdot11+7\cdot5+8\cdot21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}84\\203\end{pmatrix}$$

$$A\cdot b_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}12\\6\\22\end{pmatrix}_{3\times1}=\begin{pmatrix}1\cdot12+2\cdot6+3\cdot22\\0\cdot12+7\cdot6+8\cdot22\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}90\\218\end{pmatrix}$$

$$A\cdot b_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}13\\7\\23\end{pmatrix}_{3\times1}=\begin{pmatrix}1\cdot13+2\cdot7+3\cdot23\\0\cdot13+7\cdot7+8\cdot23\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}96\\233\end{pmatrix}$$

$$A\cdot b_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}14\\8\\24\end{pmatrix}_{3\times1}=\begin{pmatrix}1\cdot14+2\cdot8+3\cdot24\\0\cdot14+7\cdot8+8\cdot24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}102\\248\end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}11&12&13&14\\5&6&7&8\\21&22&23&24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}84&90&96&102\\203&218&233&248\end{pmatrix}$$

3.2 הגדרה: (כפל מטריצות) תהיינה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B\in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ כך ש- $B=\begin{pmatrix}b_1&b_2&\dots&b_k\end{pmatrix}$ (שימו לב שמספר העמודות של A שווה למספר השורות של B) אזי

$$A\odot B=\begin{pmatrix}A\cdot b_1&A\cdot b_2&\dots&A\cdot b_k\end{pmatrix}.$$

על מנת לחשב את הרכיב במקום ה- (i,j) ב- $A\odot B$ למעשה כופלים שורה i של A בעמודה j של B.
שימו לב שכל עמודה של $A\odot B$ היא צרוף לינארי של עמודות A.

דוגמא. כפל מטריצות

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0&1\cdot2+0\cdot7&1\cdot3+0\cdot8\\0\cdot1+1\cdot0&0\cdot2+1\cdot7&0\cdot3+1\cdot8\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}$$

■

דוגמא. כפל מטריצות

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+3\cdot0&1\cdot0+2\cdot1+3\cdot0&1\cdot0+2\cdot0+3\cdot1\\0\cdot1+7\cdot0+8\cdot0&0\cdot0+7\cdot1+8\cdot0&0\cdot0+7\cdot0+8\cdot1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}$$

■

3.3 משפט: תהיינה A,B,C מטריצות כך שהסכומים והמכפלות מוגדרים ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$. אזי

1. $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$
2. $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
3. $(B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A$
4. $\alpha(A\cdot B)=(\alpha\cdot A)\cdot B=A\cdot(\alpha\cdot B)$
5. אם $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ו- I_n מטריצת היחידה בגודל $n\times n$ ו- I_m מטריצת היחידה בגודל $m\times m$ אז

$$I_mA=A=AI_n\ .$$

דוגמא. (כפל מטריצה אינה קומוטטיבית)

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&5\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&11\\11&27\end{pmatrix}$$

אבל

$$\begin{pmatrix}1&5\\2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&22\\11&16\end{pmatrix}$$

בגלל שאם $AB=BA$ אז לא בהכרח מתקיים. התכונה הזו נגזרת מן החוק הקובע כי **מכפלה של מטריצות אינה קומוטטיבית** ■

3.4 משפט. (מכפלה של מטריצות אינה קומוטטיבית)

בהינתן מכפלה של שתי מטריצות, סדר כתיבת המטריצות משפיע על התוצאה סופית, כלומר

$$AB\neq BA\quad\Leftrightarrow\quad AB-BA\neq 0\ .$$

כך מכפלה של מטריצות אינה קומוטטיבית.

דוגמא.

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\quad ,$$

בגלל שאם $AB=0$ אז לא בהכרח מתקיים כי $A=0$ או $B=0$. ■

דוגמא.

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\quad ,$$

ו-

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

בגלל שאם $AB=BC$ ו- $A\neq 0$ אז לא בהכרח מתקיים כי $B=C$. ■

הדוגמאות אלו דוגמאות של החוקים הבאים:

3.5 משפט: עבור מטריצות A,B,C, לא בהכרח מתקיימים היחסים הבאים:

(א) $AB=BA$

(ב) אם $AB=0$ אז $A=0$ או $B=0$.

(ג) אם $AB=AC$ ו- $A\neq 0$ אז $B=C$.

3.6 הגדרה: (העלאה מטריצה בחזקה)

תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $k\in\mathbb{N}$. נגדיר

$$A^k=\overbrace{A\cdot A\cdot\cdots\cdot A}^{k\ \text{פעמים}}$$

אם $A\neq 0$, ונגדיר

$$A^0=I_n\ .$$

מטריצות הפיכות

דוגמא. בהינתן המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ מהי המטריצה שתסומן ב- A^{-1} כך ש

$$A\cdot A^{-1}=I_{2\times 2}$$

או כך ש-

$$A^{-1}\cdot A=I_{2\times 2}$$

פיתרון. המטריצה A^{-1} נקראת ההופכית של A. התשובה היא

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

■

3.7 הגדרה: (מטריצה הפיכה)
מטריצה $A\in M_n(\mathbb{R})$ תקרא הפיכה אם קיימת $B\in M_n(\mathbb{R})$ כך ש

$$AB=BA=I$$

כאשר I המטריצת יחידה ב- $M_n(\mathbb{R})$. המטריצה B תקרא ההופכית של A.

3.8 משפט. (ההופכית של מטריצה יחידה)
אם קיימת הופכית ל- A אז היא יחידה. נסמן אותה ב- A^{-1}.

הוכחה.

נניח ש- B,C הופכיות של A. מתקיים:

$$C=CI=C(AB)=(CA)B=IB=B\ .$$

■

משפט. (ייחידיות של פתרון למערכת לינארית)
אם $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אז לכל $b\in\mathbb{R}^n$ למשוואה $AX=b$ יש פיתרון יחיד והוא $A^{-1}b$.

הוכחה.
יהי $b\in\mathbb{R}^n$. קל לראות ש- $A^{-1}b$ הוא פתרון של המשוואה, שכן

$$A(A^{-1}b)=(AA^{-1})b=Ib=b\ .$$

נוכיח יחידות:
יהי $u\in\mathbb{R}^n$ פתרון, אזי

$$Au=b.$$

נכפול את שני האגפים משמאל ב- A^{-1} ונקבל

$$\begin{aligned} A^{-1}(Au)&=A^{-1}b\ ,\\ \Rightarrow\qquad (A^{-1}A)u&=A^{-1}b\ ,\\ \Rightarrow\qquad Iu&=A^{-1}b\ ,\\ \Rightarrow\qquad u&=A^{-1}b\ ,\end{aligned}$$

■

דוגמא. פתרו את המערכת

$$\begin{aligned} x_1+2x_2 &=1 \ , \\ 3x_1+4x_2 &=2 \ . \end{aligned}$$

פיתרון. ניתן לייצג את המערכת בצורה

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b}$$

נזכיר ש- $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. נכפול את שני אגפי המשוואה ב- A^{-1} משמאל. נקבל

$$X=A^{-1}b=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} \ .$$

קל לבדוק שאכן $\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ מהווה פתרון של המשוואה. אכן,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

■

3.9 משפט:

יהיו $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ו- $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ וקטור משתנים, ו- $b=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}\in \mathbb{R}^m$.

למשוואה המטריציאלית $AX=b$ יש אותה קבוצת פתרונות כמו למשוואה הוקטורית

$$x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n=b$$

ואותה קבוצת פתרונות כמו למערכת הלינארית שהמטריצה המורחבת שלה היא

$$(A|b) \ .$$

3.10 משפט:

תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{R})$.

(א) אם A הפיכה אז A^{-1} הפיכה ומתקיים $(A^{-1})^{-1}=A$.

(ב) אם A ו- B הפיכות אז AB הפיכה ומתקיים $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

(ג) אם A הפיכה אז A^t הפיכה ומתקיים $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

הוכחה.

(א)

$$AA^{-1}=I, \qquad A^{-1}A=I \ .$$

(ב)

$$(AB)^{-1}B^{-1}A^{-1}=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I \ .$$

■

כיצד למצוא ההופכית

דוגמא. (הופכית של מטריצה)
בהינתן $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ מהי ההופכית?

פיתרון.
ניתן לכתוב ההופכית בצורה $A^{-1}=\begin{pmatrix}Y&Z\end{pmatrix}$ כאשר Y ו- Z הם וקטורים מעל $\mathbb{R}_2$, כלומר

$$Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\ ,\qquad Z=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\ ,$$

כך ש

$$A\begin{pmatrix}Y&Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ .$$

$$\Rightarrow\qquad\begin{pmatrix}AY&AZ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

נפתור

$$AY=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&1\\3&4&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&1\\0&-2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&-2\\0&-2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{2}R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&-2\\0&1&\frac{3}{2}\end{array}\right)$$

נפתור

$$AZ=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&0\\3&4&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&0\\0&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{2}R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

אפשר לפתור יחד:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\3&4&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&-2&-3&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&1\\0&-2&-3&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{2}R_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&1\\0&1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

■

3.11 משפט:
תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$.

$$A \text{ שקולות שורות ל } I \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ הפיכה} \ .$$

במקרה זה כל סדרה של פעולות שורה אלמנטריות המעבירות את A ל- I תעביר את I ל- A^{-1}.

טכנית, על מנת למצוא הופכית של A, מתבוננים במטריצה $(A|I)$ ומדרגים את A לקבלת I. מבצעים את אותן פעולות בו זמנית על I עד לקבלת $(I|A^{-1})$.

דוגמא. (מבחן תש"פ 1,1)
תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם A הפיכה וגם B הפיכה אז $A+B$ איננה הפיכה.

(ב) אם A הפיכה וגם B הפיכה אז $A+B$ הפיכה.

פיתרון.

(א) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A=I$, $B=I$ שתיהן הפיכות אבל $A+B=2I$ הפיכה.

(ב) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A=I$, $B=-I$ שתיהן הפיכות אבל $A+B=0$ איננה הפיכה.

■