שיעור 13
סיבוכיות מקום ושלמות ב PSPACE

13.1 הגדרה של סיבוכיות מקום

הגדרה 13.1 סיבוכיות מקום של מכונת טיורינג

הסיבוכיות מקום של מ"ט M על קלט w היא פונקציה $f(|w|)$ השווה למספר התאי סרט לכל היותר של המכונה M שבהם נעשה שימוש בחישוב של M על w.

הגדרה 13.2 המחלקה $SPACE(f(n))$

מחלקת $SPACE(f(n))$ היא אוסף כל השפות L עבורן קיימת מכונת טיורינג דטרמיניסטית M שמכריעה אותה כך ש:
על כל קלט w באורך $n=|w|$, המכונה M משתמשת לכל היותר $O(f(n))$ תאי סרט.

$$SPACE(f(n)) = \{L \mid \text{ מ"ט } M \text{ שמכריעה } L \text{ ומשתמשת לכל היותר ב- } O(f(n)) \text{ תאי סרט} \exists \} .$$

דוגמה 13.1

נראה כי ניתן לפתור את הבעיה SAT ע"י אלגוריתם שהוא רץ במקום ליניארי. כלומר:

$$SAT \in SPACE(n) .$$

תהי ϕ נוסחה בוליאנית כלשהי. נסמן $n=|\phi|$ ונסמן ב- m את מספר המשתנים ב- ϕ. נגדיר מכונה M שפועלת כך:

$M =$ על כל קלט $\langle\phi\rangle$:

1) M רושמת את המחרוזת $\langle\phi\rangle$ על סרט הקלט.

2) לכל השמה $a_1,a_2,\ldots,a_m$ (כאשר $a_i\in\{0,1\}$ הוא הערך הנוכחי של x_i):

א) M רושמת את מחרוזת של ההשמה $a_1a_2\cdots a_m$ על סרט העבודה.

ב) M מחשבת את הערך של ϕ עבור ההשמה הנוכחית $a_1,\ldots a_m$ ע"י סריקה של הקלט $\langle\phi\rangle$ שרשום על סרט הקלט.

ג) אם מתקבל $\phi(a_1,\ldots,a_m)=1$ אז M מקבלת.

3) אם עבור כל ההשמות התקבל $\phi(a_1,\ldots,a_m)=0$ אז M דוחה.

מכאן אנחנו רואים כי המכונה M_1 רצה במקום ליניארי. בפרט:

- M שומרת על סרט העבודה את ההשמה $a_1\ldots a_m$ וזה נדרש $O(m)$ תאים.
- המספר המשתנים, m הוא n לכל היותר.

- לכן M רצה במקום $O(n)$.

לפיכך:

$$SAT \in SPACE\left(n\right) \ .$$

הגדרה 13.3 המחלקה $NSPACE\left(f(n)\right)$

מחלקת $NSPACE\left(f(n)\right)$ היא אוסף כל השפות L עבורן קיימת מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית N שמכריעה אותה כך ש:
על כל קלט w באורך $n=|w|$ המכונה N משתמשת לכל היותר $O\left(f(n)\right)$ תאי סרט מתוך כל המסלולי חישוב של N.

$$NSPACE\left(f(n)\right)=\left\{L \ \middle|\ \exists \text{ מ"ט א"ד } N \text{ שמכריעה } L \text{ ומשתמשת לכל היותר ב- } O\left(f(n)\right) \text{ תאי סרט.}\right\} .$$

דוגמה 13.2

תהי ALL_{NFA} השפה הבאה:

$$ALL_{NFA}=\left\{\langle A\rangle \ \middle|\ A \text{ הוא } NFA \text{ עבורו } L(A)=\Sigma^*\right\} .$$

הוכיחו כי $ALL_{NFA}\in NSPACE\left(n\right)$.

פתרון:

הפתרון מתבוסס על זה שזה פשוט יותר לבנות אלגוריתם המכריע את השפה המשלימה:

$$\overline{ALL_{NFA}}=\left\{\langle A\rangle \ \middle|\ \text{קיימת } w\in\Sigma^* \text{ עבורה } A \text{ דוחה } w\right\} .$$

נשתמש במשפט מרכזי כדי לבנות אלגוריתם שמכריע את $\overline{ALL_{NFA}}$:

משפט 13.1

אם $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ הוא NFA וקיים מילה w שנדחת ע"י M אז האורך המילה $|w|\leqslant 2^q$ כאשר $q=|Q|$ הוא המספר המצבים של M, וקיימים אינסוף מלים שנדחות ע"י M.

לפני שנתאר את האלגוריתם עצמו, נגדיר סימון שנשתמש בו בבניית האלגוריתם. נניח ש- $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ היא מכונת NFA כלשהי. תהי $P(Q)$ הקבוצת החזקה של Q. עבור כל NFA הפונקצית המעברים היא מהצורה

$$\delta: Q\times\Sigma\to P(Q) \ .$$

בהינתן מילה $w=a_1a_2\cdots a_n$ כאשר $a_i\in\Sigma$ הוא התו ה- i של המילה, $1\leqslant i\leqslant n$. נגדיר את הסדרה הבאה:

$$S_0 \ , \ S_1 \ , \ S_2 \ , \quad \ldots \quad , \ S_n$$

כאשר

$$S_0\triangleq\{q_0\} \ , \quad S_{i+1}\triangleq\delta\left(S_i,a_i\right) \ ,$$

כאשר $S_i\in P(Q)$ לכל $0\leqslant i\leqslant n$.

<u>**בניית האלגוריתם**</u>

נבנה אלגוריתם לא-דטרמיניסטי, N המכריע את $\overline{ALL_{NFA}}$ באופן הבא:

$N=$ "על כל קלט x:

1) בודקת אם $x = \langle M \rangle$, כאשר $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ היא מכונת NFA.

- אם לא $\Leftarrow$ N תדחה.

2) יהי $q = |Q|$ מספר המצבים של M. נגדיר $S_0 = \{q_0\}$.

3) N מבצעת את הלולאה הבאה:

לכל $0 \leqslant i \leqslant 2^q - 1$:

א) בוחרת באופן אי־דטרמיניסטי תו קלט $a_i \in \Sigma$.

ב) מחשבת

$$S_{i+1} = \delta\left(S_i, a_i\right).$$

ג) אם $S_{i+1} \cap F \neq \varnothing$ $\Leftarrow$ N תדחה.

בפועל N בודקת את התנאי הזה ע"י לסמן את כל המצבים שב- S_{i+1}. אם אחד מהמצבים המסומנים הוא מצב קבלה אז N תדחה.

4) אם בסיום הלולאה לא היה מצב-קבלה באף אחת מן הקבוצות S_i אז N תקבל. "

אם $x \in \overline{ALL_{NFA}}$:

$\Leftarrow$ $x = \langle A \rangle$, כאשר A היא מכונת NFA. וקיימת מילה $w \in \Sigma^*$ כך ש־ A תדוחה.

$\Leftarrow$ קיימת מילה w' באורך לכל היותר 2^q ש־A תדחה.

$\Leftarrow$ קיימת ריצה של N שבה N בוחרת את התווים של w' בלולאה.

$\Leftarrow$ במהלך הריצה של A על w', אין מצב קבלה באף אחת מן הקבוצות S_i.

$\Leftarrow$ N לא דחתה עד סוף הלולאה.

$\Leftarrow$ בסופה N תקבל.

אם $x \notin \overline{ALL_{NFA}}$ אז שני מקרים:

מקרה 1) $x \neq \langle A \rangle$ $\Leftarrow$ N תדחה בשלב 1.

מקרה 2) $x = \langle A \rangle$ ו־ $L(A) = \Sigma^*$.

$\Leftarrow$ לכל מילה $w \in \Sigma^*$, קיים שלב שבו A נמצא במצב קבלה.

$\Leftarrow$ בכל ריצה של N, קיימת איטרציה i עבורה $S_i \cap F \neq \varnothing$.

$\Leftarrow$ באיטרציה זו N תדחה.

$\Leftarrow$ בכל ריצה N תדחה.

$\Leftarrow$ N דוחה את x.

סיבוכיות מקום

- נסמן ב־ $n = |\langle M \rangle|$ את אורך הקלט, וב־ $q = |Q|$ את מספר המצבים של ה־ NFA.
- כל מצב וכל מעבר של M מופיעים בקידוד, מתקיים $q = O(n)$.
- במהלך כל ריצה, N שומרת רק את המידע הבא:

* הקבוצה הנוכחית $S_i \subseteq Q$ של מצבים אפשריים.
  לפועל N שומרת S_i בוקטור ביטים באורך q לכל היותר.
* מונה של האיטרציות הלולאה עד 2^q, המאוחסן בייצוג בינארי ודורש $O(q)$ ביטים.
* תו קלט אחד הנבחר באפן אי-דטרמיניסטי בכל איטרציה, ומשתני עזר לחישוב S_{i+1}, הדורשים מקום קבוע או לינארי ב־q.

לפיכך סיבוכיות המקום הכוללת של N היא

$$O(q) = O(n) \ .$$

לפיכך האלגוריתם N פועל במקום לינארי.

שימו לב: N לינארי במקום אף על פי שזמן הריצה שלו עלול להיות אקספוננציאלי.

13.2 משפט סביץ'

הגדרה 13.4 $CANYIELD$

בהינתן מכונת טיורנג אי-דטרמיניסטית N, שתי קונפיגורציות c_1, c_2 של N, ומספר טבעי חיובי t, המכונה $CANYIELD$ היא מכונת טיורינג דטרמיניסטית הבודקת אם ניתן לעבור מ- c_1 ל- c_2 על ידי לכל היותר t צעדי חישוב של N.

התאור פסאוקוד של $CANYIELD$ הוא כדלקמן:

$CANYIELD =$ על קלט $\langle N, w, c_1, c_2, t\rangle$:

1) בודקת אם N היא מכונת טיורינג, w היא מילה, c_1, c_2 קונפיגורציות ו- t מספר טבעי חיובי.

- אם לא אז היא תדחה.

2) אם $t = 1$:

- אם $c_1 = c_2$ אז תקבל.
- אחרת אם $c_1 \vdash c_2$ (אם אפשר לעבור מ- c_1 ל- c_2 בצעד אחד) תקבל.
- אחרת תדחה.

3) אם $t > 1$ אז לכל קונפיגורציה c_k של הרצה של N על w אשר משתמשת במקום $f(n)$:

4) מריצה $CANYIELD\left(N, w, c_1, c_k, \frac{t}{2}\right)$.

5) מריצה $CANYIELD\left(N, w, c_k, c_2, \frac{t}{2}\right)$.

6) אם שתי ההרצות בשלבי 4) ו- 5) הסתיימו בקבלה $\Leftarrow$ המכונה תקבל.

7) אחרת אם לא התקבלה תשובת קבלה $\Leftarrow$ המכונה תדחה.

משפט 13.2 משפט סביץ'

לכל פונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, אם $f(n) \geqslant n$ אז

$$NSPACE\left(f(n)\right) \subseteq SPACE\left(f^2(n)\right) \ .$$

הוכחה:

- תהי N מ"ט אי-דטרמיניסטית שמכריעה את השפה A במקום $O\left(f(n)\right)$, כאשר n אורך הקלט של N.
- נבנה מכונת טיורינג דטרמיניסטית, M שמכריעה את A במקום $O\left(f^2(n)\right)$.
- כלומר, בהינתן $N \in NSPACE\left(f(n)\right)$ המכריעה שפה A, נבנה $M \in SPACE\left(f^2(n)\right)$ המכריעה A.
- כלומר, אנחנו נראה שלכל $N \in NSPACE\left(f(n)\right)$ קיימת $M \in SPACE\left(f^2(n)\right)$.
- באופן הזה אנחנו נוכיח כי

$$NSPACE\left(f(n)\right) \subseteq SPACE\left(f^2(n)\right) \ .$$

- (ראו את ההגדרה של קונפיגורציה בהגדרה 1.3)

■

13.3 המחלקה PSPACE

הגדרה 13.5 סיבוכיות מקום של בעיה/שפה

בהינתן קלט w באורך $|w| = n$. אומרים כי ניתן להכריעה שפה L בזמן $f(n)$ אם קיימת מ"ט M המכריעה את L כך שלכל $w \in \Sigma^*$, הסיבוכיות מקום של M על w חסום ע"י $f\left(|w|\right)$.

הגדרה 13.6 PSPACE

PSPACE היא מחלקת כל הבעיות שניתן לפתור על ידי מכונת טיורינג דטרמיניסטית תוך שימוש בסיבוכיות מקום פולינומית.

הגדרה 13.7 NPSPACE

NPSPACE היא מחלקת כל הבעיות שניתן לפתור על ידי מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית תוך שימוש בסיבוכיות מקום פולינומית.

13.4 שלמות ב- PSPACE

13.5 המחלקה L

13.6 המחלקה NL

13.7 שלמות ב- NL

13.8 שיוויון NL ו- coNL