דף סיכום אופרטור הצמוד

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$.

בסיס אורתונורמלי, מסומן $\{b_1,\ldots,b_n\}$, מקיים את התנאי

$$\langle b_i,b_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\ ,\qquad 1\leq i,j\leq n\ . \tag{1}$$

כל וקטור $u\in V$ ניתן לרשום בצורה

$$u=\sum_{i=1}^{n}\langle u,b_i\rangle\, b_i \tag{2}$$

סימון חלופי:

$$[u]_B=\begin{pmatrix}\langle u,b_1\rangle\\ \langle u,b_2\rangle\\ \vdots\\ \langle u,b_i\rangle\\ \vdots\\ \langle u,b_n\rangle\end{pmatrix}_B \tag{3}$$

יהי $T:V\to V$ אופרטור. המצרטיצה המייצגת על פי בסיס B היא

$$[T]_B=\begin{pmatrix}\langle T(b_1),b_1\rangle & \langle T(b_2),b_1\rangle & \cdots & \langle T(b_i),b_1\rangle & \cdots & \langle T(b_n),b_1\rangle\\ \langle T(b_1),b_2\rangle & \langle T(b_2),b_2\rangle & \cdots & \langle T(b_i),b_2\rangle & \cdots & \langle T(b_n),b_2\rangle\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \langle T(b_1),b_i\rangle & \langle T(b_2),b_i\rangle & \cdots & \langle T(b_i),b_i\rangle & \cdots & \langle T(b_n),b_i\rangle\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \langle T(b_1),b_n\rangle & \langle T(b_2),b_n\rangle & \cdots & \langle T(b_i),b_n\rangle & \cdots & \langle T(b_n),b_n\rangle\end{pmatrix}\ . \tag{4}$$

כלומר האיבר ה- ij של המטריצה המייצגת של T על פי הבסיס B היא

$$[T]_{ij}=\langle T(b_j),b_i\rangle\ . \tag{5}$$

ההגדרה של אופרטור הצמוד:

אם $T:V\to V$ אופרטור, ו- $u,w\in V$ שני וקטורים כלשהם של V, אזי האופרטור הצמוד של T מוגדר כך ש-

$$\langle T(u),w\rangle=\langle u,\bar{T}(w)\rangle\ . \tag{6}$$

משפט:

$$\langle \bar{T}(u),w\rangle=\langle u,T(w)\rangle \tag{7}$$

נוסחה ל- $T(u)$ ו- $\bar{T}(u)$ במונחי בסיס אורתונורמלי $\{b_1, \cdots, b_n\}$:

(*3)
$$T(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(u), b_i \rangle \, b_i$$

(*4)
$$\bar{T}(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u, T(b_i) \rangle \, b_i$$

משפט:

(8)
$$\bar{\bar{T}} = T$$

משפט: המטריצה המייצגת של אופרטור צמוד $\bar{T}$ נתונה ע"י

(*6)
$$[\bar{T}] = \overline{[T]}$$