עבודה עצמית 9

שאלה 1 תן דוגמא לשתי קבוצות S, T כך ש $S \subseteq T$ ומתקיים:

א) T פורשת את $\mathbb{R}^4$ ו S לא פורשת את $\mathbb{R}^4$.

ב) T לא פורשת את $\mathbb{R}^4$ ו S לא פורשת את $\mathbb{R}^4$.

ג) T פורשת את $\mathbb{R}^4$ ו S פורשת את $\mathbb{R}^4$.

שאלה 2 תהיינה $X \subseteq Y$ קבוצות של וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$. הוכח או הפרך:

א) אם Y פורשת את $\mathbb{R}^n$ אז X פורשת את $\mathbb{R}^n$.

ב) אם $0 \in X$ אז X פורשת את $\mathbb{R}^n$.

ג) אם $0 \in X$ אז X לא פורשת את $\mathbb{R}^n$.

ד) אם X פורשת את $\mathbb{R}^n$ אז Y פורשת את $\mathbb{R}^n$.

ה) אם מספר הוקטורים ב- X גדול מ- n אז X פורשת את $\mathbb{R}^n$.

ו) אם קיים $\mathrm{v} \in Y$ כך ש $\mathrm{v} \notin X$ אז $\mathrm{sp}(Y) \neq \mathrm{sp}(X)$.

שאלה 3 נתונים הוקטורים

$$u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} \quad , \quad u_3 \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix}$$

א) מצא לאילו ערכי a מתקיים $u_3 \in \mathrm{sp}(u_1, u_2)$.

ב) עבור ערך a
הקטן שמצאת, הצג את u_3 כצירוף לינארי של u_1, u_2.

ג) מצא לאילו ערכי a הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ פורשת את $\mathbb{R}^3$.

שאלה 4 קבעו עבור כל אחת מהקבוצות הבאות אם היא מהווה בסיס של $\mathbb{R}^3$:

א) $\{(1,0,-1),(1,2,1),(0,4,2)\}$

ב) $\{(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$

ג) $\{(1,1,0),(0,1,0),(1,2,0)\}$

ד) $\{(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1),(3,5,2)\}$

ה) $\{(1,1,0),(0,1,0)\}$

שאלה 5 עבור המטריצות הבאות מצאו בסיס ומימד של $\mathrm{col}(A)$ ובסיס ומימד של $\mathrm{Nul}(A)$.

א)
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

ב)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

ג)
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

שאלה 6 עבור $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}\in\mathbb{R}^5$ נסמן $W=\mathrm{sp}\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$. הסבר מדוע W הינה תת מרחב של $\mathbb{R}^5$ ומצאו בסיס ומימד של W במקרים הבאים:

א) $u_1=(1,1,1,2,3)$, $u_2=(1,2,-1,-2,1)$, $u_3=(3,5,-1,-2,5)$, $u_4=(1,2,1,-1,4)$.

ב) $u_1=(1,-2,1,3,-1)$, $u_2=(-2,4,-2,-6,2)$, $u_3=(1,-3,1,2,1)$, $u_4=(3,-7,3,8,-1)$.

שאלה 7 מצאו בסיס ומימד של מרחב הפתרונות של המערכות ההומוגניות הבאות:

א)
$$\left.\begin{aligned} x+z+t &= 0 \\ y-s+t &= 0 \\ x+y+z+s-t &= 0 \\ 2y+z+s+3t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ב)
$$\left.\begin{aligned} x+2y+z+t &= 0 \\ y+3z+s+t &= 0 \\ x+2y-s &= 0 \end{aligned}\right\}$$

שאלה 8 במרחב הווקטורי $\mathbb{R}_{\le 3}[x]$ (מרחב הפולינומים מסדר 3 לכל היותר) נתונים הווקטורים

$$p_1(t)=2-t+t^2,\qquad p_2(t)=2t-3t^2+t^3,\qquad p_3(t)=1-t^2,\qquad p_4(t)=3t-6t^2+t^3$$

א) בדקו אם הווקטורים $p_1(t)$, $p_2(t)$,$p_3(t)$, $p_4(t)$ ת"ל. אם כן מצאו צריוף לינארי הלא טריוויאלי שלהם שווה לווקטור האפס.

ב) מצאו בסיס ואת המימד של תת המרחב הנפרש על ידי הווקטורים $p_1(t)$, $p_2(t)$,$p_3(t)$, $p_4(t)$.

ג) בטא כל ווקטור מתוך $p_1(t)$, $p_2(t)$,$p_3(t)$, $p_4(t)$ כצירוף ליניארי של הבסיס שמצאת בסעיף ב'.

ד) מצא את וקטור הקואורדינאטות של $p_4(t)$ ביחס לבסיס שמצאתם.

שאלה 9 במרחב הווקטורי $\mathbb{R}^{2\times 2}$ נתונים הוקטורים

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

נגדיר $W = \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$.

א) תן דוגמא לוקטור כלשהו הנמצא ב W ושונה מוקטור האפס ומהוקטורים $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$.

ב) האם W הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$? האם $W = \mathbb{R}^{2\times 2}$?

ג) בדקו האם הקבוצה $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$ ת"ל? אם כן, מצא צירוף ליניארי לא טריוויאלי של איברי הקבוצה השוה לווקטור האפס.

ד) מצא בסיס ואת המימד של W.

ה) תן דוגמא למרחב וקטורי V כך ש $W \neq V$ ו V איזומורפי ל W.

ו) מצא לאילו ערכי הפרמטר k הקבוצה $\{2\mathrm{v}_1 + 3\mathrm{v}_2, 4\mathrm{v}_1 + k\mathrm{v}_2\}$ היא בלתי תלויה ליניארית.

שאלה 10 לכל אחת מהקבוצות הבאות, קבעו האם היא מהווה בסיס של $\mathbb{R}_3[t]$:

א) $\{2t^3 + t^2 + t + 1, 3t^3 + 3t + 2, t^3 + t^2 - t, 4t^3 + 2t^2 - 2t + 1\}$

ב) $\{1, t - 1, t^3 - t^2 + t - 1, t^2 - t + 1\}$

שאלה 11 לאילו ערכים של הפרמטרים a, b, c הקבוצה

$$\{t^2 + t + 1, ct^2 + bt + a, c^2t^2 + b^2t + a^2\}$$

מהווה בסיס של $P_2(t)$?

שאלה 12 לכל אחת מהקבוצות הבאות, קבעו האם היא מהווה בסיס של $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

א) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$

ב) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

שאלה 13 לאילו ערכי הפרמטר m הקבוצות הבאות מהוות בסיס של $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

א) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 6\\ 5 & m-1\end{pmatrix}\right\}$

ב) $\left\{\begin{pmatrix}1 & m\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}m & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ m & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & m\end{pmatrix}\right\}$

שאלה 14

במרחב $\mathbb{R}^{2\times 2}$ נתונים וקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\ ,\quad u_2 = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\ ,\quad \begin{pmatrix}-1 & 8\\ 4 & 5\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v} = \begin{pmatrix}2a & 2\\ b & 3\end{pmatrix}\ .$$

א) עבור אילו ערכי a, b וקטור v שייך לתת המרחב הנפרש על ידי הווקטורים u_1, u_2, u_3?

ב) עבור הערכים של a, b שמצאת בסעיף א', בטאו את ווקטור v כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 בשתי דרכים שונות (רשמו שני צירופים שונים).

ג) האם קיימים ערכי a, b עבורם וקטורים $u_1, u_2, u_3, \mathrm{v}$ פורשים את המרחב $\mathbb{R}^{2\times 2}$? נמקו את תשובתכם.

ד) האם הווקטורים u_1, u_2, u_3 תלויים לינארית ? אם תשובתכם היא "כן", מצאו צירוף לינארי לא טריוויאלי של u_1, u_2, u_3 השווה לווקטור האפס.

שאלה 15

נתון מרחב וקטורי $\mathbb{C}^2$ מעל שדה $\mathbb{R}$. הוכיחו כי קבוצת וקטורים $S = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}\right\}$ מהווה בסיס של המרחב הנתון ומצאו את $\begin{pmatrix}2-7i\\1+4i\end{pmatrix}_S$ (כלומר וקטור הקורדינטות של וקטור $\begin{pmatrix}2-7i\\1+4i\end{pmatrix}$ לפי בסיס S).

שאלה 16

נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ k & k^2 & 1\\ 2k^2 & 4k^2-2 & 2\end{pmatrix}$.

א) לכל ערך של k מצאו את דרגת מטריצה A ובסיס של $\mathrm{col}(A)$

ב) עבור אילו ערכי k למערכת $A\cdot X = b$ יש פתרון לכל וקטור b?

שאלה 17

לכל אחד מן המרחבים הבאים מצאו בסיס ומימד

א)

$$W_1 = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \left\{\begin{array}{ll} x+y+z & =0\\ z-y+z & =0\end{array}\right\}\right\}$$

ב)

$$W_2 = \left\{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \middle| p(0) = p(1) = 0\right\}$$

כאן $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ מסמל את אוסף הפולינומים עם מקדמים ממשיים במשתנה x עד מעלה 3 כולל.

ג)

$$W_3 = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2}(\mathbb{Z}_3)\}\big|A = A^t\}$$

שאלה 18 תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ כך שמרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $A\text{x} = 0$ שווה ל -

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}\right\}$$

מצאו את הדרגה של A.

שאלה 19 נניח ש $A \in \mathbb{R}^{5\times 3}, B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. נגדיר $C = AB$. תחת ההנחה ש - $B \neq 0$, ו- $\dim\left(\text{Nul } C\right) = 4$ האם ייתכן שלמערכת המשוואות ההומוגנית $A \cdot \text{x} = \bar{0}$ יש פתרון יחיד. נמקו תשובתכם.

פתרונות

<u>שאלה 1</u>

א) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

ב) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

ג) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

<u>שאלה 2</u>

א) דוגמה נגדית:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

X לא פורשת את $\mathbb{R}^2$, Y פורשת את $\mathbb{R}^2$.

ב) דוגמה נגדית: $X = \{\bar{0}\}$ לא פורשת את $\mathbb{R}^2$.

ג) דוגמה נגדית: $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ פורשת את $\mathbb{R}^2$.

ד) <u>נתון:</u> $X \subseteq Y$

<u>צ"ל:</u> Y פורשת את $\mathbb{R}^n$.

<u>הוכחה</u>

$\mathrm{sp}(X) = \mathbb{R}^n$, לכן לכל $u \in \mathbb{R}^n$ קיימים $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n \in X$ כך ש

$$u = k_1 \mathrm{v}_1 + \ldots + k_n \mathrm{v}_n \ .$$

$X \subseteq Y$ לכן $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n \in Y \Leftarrow u \in \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$. ז"א $\mathrm{sp}(Y) = \mathbb{R}^n$.

ה) דוגמה נגדית: $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ לא פורשת את $\mathbb{R}^2$.

ו) דוגמה נגדית: $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\text{sp}(X) = \text{sp}(Y)$.

שאלה 3

$$u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} \quad , \quad u_3 \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix}$$

א)

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 = u_3$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & a+1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & (a-1)(3-a) \end{array}\right)$$

עבור $a = 1$ ו $a = 3$ למערכת יש פתרון, לכן $u_3 \in \text{sp}(u_1, u_2)$.

<u>$a = 1$</u>

$k_1 = 3$, $k_2 = -1$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$3u_1 - u_2 = u_3$$

ב) עבור $a \neq 1, 3$ הוקטורים u_1, u_2, u_3 בת"ל.
$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, לכן u_1, u_2, u_3 בסיס של $\mathbb{R}^3$.

שאלה 4

א)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן הוקטורים בת"ל. $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, לכן הוקטורים מהווים בסיס של $\mathbb{R}^3$.

ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן הוקטורים בת"ל. $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, לכן הוקטורים מהווים בסיס של $\mathbb{R}^3$.

ג)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הווקטורים ת"ל כי יש עמודה לא מובילה, לכן הם לא מהווים בסיס של $\mathbb{R}^3$.

ד) וקטורים לא יכולים להיות בסיס של $\mathbb{R}^3$, כי $\dim(\mathbb{R}^3)=3$.

ה) שני וקטורים לא מהווים בסיס של $\mathbb{R}^3$, כי $\dim(\mathbb{R}^3)=3$.

שאלה 5

א)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(\text{col}(A))=2$ - מספר העמודות המובילות.
בסיס של $\text{col}(A)$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

$\dim(\text{Nul}(A))=4$ - מספר העמודות הלא מובילות.
נמצא בסיס של $\text{Nul}(A)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{13}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{13}{2}x_4 - \tfrac{1}{2}x_5 \\ x_3 &= 5x_4 - x_5 \end{aligned}\right\} , \qquad x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_2 - \frac{13}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \\ x_2 \\ 5x_4 - x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} \frac{-13}{2} \\ 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Nul}(A)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{-13}{2} \\ 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & 13 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(\mathrm{col}(A))=3$. בסיס של $\mathrm{col}(A)$:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\5\\7\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3\\-1\\1\\7\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\4\\7\\1\end{pmatrix}.$$

$\dim(\mathrm{Nul}(A))=1$.

$$\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\0&1&\frac{13}{7}&-\frac{6}{7}\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&-\frac{4}{7}&0\\0&1&\frac{13}{7}&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$x_1=\frac{4}{7}$, $x_2=-\frac{13}{7}x_3$, $x_4=0$, $x_3\in\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix}\frac{4}{7}x_3\\-\frac{13}{7}x_3\\0\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\-\frac{13}{7}\\0\\1\end{pmatrix}$$

בסיס של $\mathrm{Nul}(A)$:

$$\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\-\frac{13}{7}\\0\\1\end{pmatrix}$$

ג)

$$\begin{pmatrix}1&-2&1&-1&1\\2&1&-1&2&-3\\3&-2&-1&1&-2\\2&-5&1&-2&2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&-2&1&-1&1\\0&-1&-1&0&0\\0&0&-8&4&-5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\dim(\mathrm{col}(A))=3$. בסיס של $\mathrm{col}(A)$:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\\-5\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

$\dim(\mathrm{Nul}(A))=2$.

$$\begin{pmatrix}1&-2&1&-1&1\\0&1&1&0&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{5}{8}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{7}{8}\\0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{5}{8}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{5}{8}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = & -\frac{1}{2}x_4 + \frac{7}{8}x_5 \\ x_2 = & -\frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{8}x_5 \\ x_3 = & \frac{1}{2}x_4 - \frac{5}{8}x_5 \end{array}\right\} \ , \qquad x_4, x_5 \in \mathbb{R} \ .$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_4 + \frac{7}{8}x_5 \\ \frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{8}x_5 \\ \frac{1}{2}x_4 - \frac{5}{8}x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{5}{8} \\ -\frac{5}{8} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Nul}(A)$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{5}{8} \\ -\frac{5}{8} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 6

$\{u_1, u_2, u_3, u_4\} \in \mathbb{R}^5$, $W = \text{sp}\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

א)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(W) = 3$, מספר העמודות המובילות. בסיס של W: u_1, u_2, u_4.

ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -3 & -7 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(W) = 2$, מספר העמודות המובילות. בסיס של W: u_1, u_3.

שאלה 7

א)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

.$\dim(\text{Nul}(A)) = 1$

$$x = \frac{9}{2}t\ , \quad y = \frac{1}{2}t\ , \quad s = \frac{3}{2}t\ , \quad t \in \mathbb{R}\ .$$

בסיס:

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{11}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

.$\dim(\text{Nul}(A)) = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = -3s - 4t\ , \quad y = 2s + 2t\ , \quad z = -s - t\ , \quad s, t \in \mathbb{R}\ .$$

$$\begin{pmatrix} -3s - 4t \\ 2s + 2t \\ -s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 8

א)

$$k_1 p_1(t) + k_2 p_2(t) + k_3 p_3(t) + k_4 p_4(t) = \bar{0}$$

$$k_1(2 - t + t^2) + k_2(2t - 3t^2 + t^3) + k_3(1 - t^2) + k_4(3t - 6t^2 + t^) = \bar{0}$$

$$(2k_1 + k_3) + (-k_1 + 2k_2 + 3k_4)t + (k_1 - 3k_2 - k_3 - 6k_4)t^2 + (k_2 + k_4)t^3 = \bar{0}$$

$$\left.\begin{aligned} 2k_1+k_3 &=0 \\ -k_1+2k_2+3k_4 &=0 \\ k_1-3k_2-k_3-6k_4 &=0 \\ k_2+k_4 &=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k_1=k_4 \ , \quad k_2=-k_4 \ , \quad k_3=-2k_4 \ , \quad k_4\in\mathbb{R}$$

למערכת יש אינסוף פתרונות, לכן הוקטורים ת"ל.
נציב $k_4=1 \Leftarrow k_1=1$, $k_2=-1$, $k_3=-2$.

$$p_1(t)-p_2(t)-2p_3(t)+p_4(t)=\bar{0}$$

ב)

$$\dim\left(\mathrm{sp}(p_1(t),p_2(t),p_3(t),p_4(t))\right)=3$$

בסיס: $p_1(t),p_2(t),p_3(t)$.

ג)

$$\begin{aligned} p_1(t) =& 1\cdot p_1(t)+0\cdot p_2(t)+0\cdot p_3(t) \ , \\ p_2(t) =& 0\cdot p_1(t)+1\cdot p_2(t)+0\cdot p_3(t) \ , \\ p_3(t) =& 0\cdot p_2(t)+0\cdot p_2(t)+1\cdot p_3(t) \ , \\ p_4(t) =& -1\cdot p_1(t)+1\cdot p_2(t)+2\cdot p_3(t) \ . \end{aligned}$$

ד)

$$[p_4(t)]_{\{p_1,p_2,p_3\}}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

שאלה 9

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

$W=\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3)$.

א)

$$\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\in W \ .$$

ב) $W=\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3)$ ופרישה תמיד תת מרחב.
$W\neq\mathbb{R}^{2\times2}$ כי $\dim(\mathbb{R}^{2\times2})=4$ ו $\dim(W)=3$.

ג)

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2=+k_3\mathrm{v}_3=\bar{0}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ בת"ל.

ד) $\dim(W) = 3$. בסיס של W: $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$

ה)

$$\{2\mathrm{v}_1 + 3\mathrm{v}_2, 4\mathrm{v}_1 + k\mathrm{v}_2\}$$
$$x(2\mathrm{v}_1 + 3\mathrm{v}_2) + y(4\mathrm{v}_1 + k\mathrm{v}_2) = \bar{0}$$
$$(2x + 4y)\mathrm{v}_1 + (3x + ky)\mathrm{v}_2 = \bar{0}$$

$\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ בת"ל, לכן

$$\left.\begin{aligned} 2x + 4y &= 0 \\ 3x + ky &= 0 \end{aligned}\right\}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2k - 12 \end{pmatrix}$$

למערכת יש פתרון יחיד עבור $k \neq 6$.
לכן עבור $k \neq 6$ הוקטורים $\{2\mathrm{v}_1 + 3\mathrm{v}_2, 4\mathrm{v}_1 + k\mathrm{v}_2\}$ בת"ל.

שאלה 10

א) נבדוק אם הוקטורים בת"ל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 2R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 + R_2]{R_3 \to R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן הוקטורין בת"ל. מדובר ב 4 וקטורים. $\dim(\mathbb{R}_{\leq 3}[x]) = 4$, לכן הם מהווים בסיס של $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

ב) בקבוצה יש 3 וקטורים, $\dim(\mathbb{R}_{\leq 3}[x]) = 4$, לכן 3 הוקטורים לא מהווים בסיס של $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

שאלה 11 $t^2 + t + 1$, $ct^2 + bt + a$, $c^2t^2 + b^2t + a^2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b - a & b^2 - a^2 \\ 0 & c - a & c^2 - a^2 \end{pmatrix}$$

עבור $a = b$ מקבלים שורת אפסים. הווקטורים ת"ל.
עבור $a = c$ מקבלים שורת אפסים. הווקטורים ת"ל.
נניח $a \neq b$, $a \neq c$ $\Leftarrow$ $c - a \neq 0$, $b - a \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b - a & b^2 - a^2 \\ 0 & c - a & c^2 - a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \to \frac{1}{b-a} R_2 \\ R_3 \to \frac{1}{c-a} R_3}} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a + b \\ 0 & 1 & c + a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a + b \\ 0 & 0 & c - b \end{pmatrix}$$

הוקטורים בת"ל עבור $a \neq c$, $a \neq b$, $b \neq c$. $\dim(\mathbb{R}_{\leq 2}[x]) = 3$, לכן במקרים האלה הוקטורים מהווים בסיס של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

שאלה 12

א) שלושה וקטורים לא ימהווים בסיס של $\mathbb{R}^{2\times 2}$, כי $\dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$.

ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to 3R_3 - 7R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 17 & -16 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to 17R_4 - 3R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 17 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 65 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן הוקטורים בת"ל. $\dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$ לכן 4 וקטורים בת"ל מהווים בסיס של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

שאלה 13

א)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & m-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 + R_1}]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & m+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_2 + 3R_4]{R_3 \to R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 3m+6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 + 7R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3m-1 \end{pmatrix}$$

עבור $m \neq \frac{1}{3}$ הוקטורים בת"ל.
$\dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4 \Leftarrow$ הוקטורים מהווים בסיס של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4\to R_4-R_1]{\substack{R_2\to R_2-mR_1 \\ R_3\to R_3-R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_4+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & 1-m & -m^2-m+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_3+R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & 0 & -m^2-2m+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & 0 & -(m+3)(m-1) \end{pmatrix}$$

עבור $m \neq -3, 1$ הוקטורים בת"ל.

$\dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4 \Leftarrow$ הוקטורים מהווים בסיס של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

שאלה 14

במרחב $\mathbb{R}^{2\times 2}$ נתונים וקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\ , \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\ , \quad \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\ , \quad \mathrm{v} = \begin{pmatrix} 2a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}\ .$$

א) עבור אילו ערכי a, b ווקטור v שייך לתת המרחב הנפרש על ידי הווקטורים u_1, u_2, u_3?

$$xu_1 + yu_2 + zu_3 = \mathrm{v}$$

$$\left.\begin{aligned} x+2y-z &= 2a \\ 2x-y+8z &= 2 \\ 2x+y+4z &= b \\ 3x+2y+5z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2a \\ 2 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & b \\ 3 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4\to R_4-3R_1]{\substack{R_2\to R_2-2R_1 \\ R_3\to R_3-2R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2a \\ 0 & -5 & 10 & 2-4a \\ 0 & -3 & 6 & b-4a \\ 0 & -4 & 8 & 3-6a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3\to 5R_3-3R_2 \\ R_4\to 5R_4-4R_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2a \\ 0 & -5 & 10 & 2-4a \\ 0 & 0 & 0 & -8a+5b-6 \\ 0 & 0 & 0 & 7-14a \end{array}\right)$$

יש פתרון אם $a=\frac{1}{2}$ ו $b=2$.

ב) עבור $a=\frac{1}{2}$, $b=2$ המדורגת של המטריצה המורחבת של המערכת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{5}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x+3z &= 1 \\ y-2z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned} x &= 1-3z \\ y &= 2z \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{z=1}$

$x=1$, $y=1$, $z=0$:

$$-2u_1+2u_2+u_3=\mathrm{v}$$

$\underline{z=2}$

$x=-2$, $y=3$, $z=1$:

$$-5u_1+4u_2+2u_3=\mathrm{v}$$

ג) הקבוצה u_1,u_2,u_3,v פורשת $\mathbb{R}^{2\times 2}$ אם המימד של הקבוצה שווה 4. המטריצה המדורגת המתקבלת בסעיף הקודם היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2a \\ 0 & -5 & 10 & 2-4a \\ 0 & 0 & 0 & -8a+5b-6 \\ 0 & 0 & 0 & 7-14a \end{array}\right)$$

אין ערכים של a ו b שעבורם המימד של הקוצה שווה 4 לכן הקבוצה u_1,u_2,u_3,v אינה פורשת את $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

ד)

$$xu_1 + yu_2 + zu_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 3R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \to 5R_4 - 4R_2]{R_3 \to 5R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{5}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $y = 2z$, $x = -2y + z$. עבור $z = 1$ נקבל $x = -3$, $y = 2$, $z = 1$ ונקבל את הצירוף לינארי

$$-3u_1 + 2u_2 + u_3 = 0 \ .$$

שאלה 15

נוכיח כי הקבוצה

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$$

בת"ל:

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{rl} x + iy & = 0 \\ z + iw & = 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{rl} x & = -iy \\ z & = -iw \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad x = 0, y = 0, z = 0, w = 0 \ .$$

לכן $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$ בת"ל.

$$\begin{pmatrix} 2 - 7i \\ 1 + 4i \end{pmatrix}_S = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}_S$$

שאלה 16

א)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ k & k^2 & 1 \\ 2k^2 & 4k^2-2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - k^2 R_1]{R_2 \to 2R_2 - kR_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2(k-1)k & 2-2k \\ 0 & 2\left(k^2-1\right) & 2-2k^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to kR_3 - (k+1)R_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2(k-1)k & 2-2k \\ 0 & 0 & -2(k-1)^2(k+1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2(k-1)k & 2(1-k) \\ 0 & 0 & -2(k-1)^2(k+1) \end{pmatrix}$$

$\underline{k=1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עמודה 1 מובילה.

$$B\left(\text{col}(A)\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim\left(\text{col}(A)\right) = 1$.

$\underline{k=-1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עמודה 1 ועמודה 2 מובילות.

$$B\left(\text{col}(A)\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim\left(\text{col}(A)\right) = 2$.

$\underline{k=0}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עמודה 1 ועמודה 3 מובילות.

$$B\left(\operatorname{col}(A)\right)=\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim\left(\operatorname{col}(A)\right)=2$.

$\underline{k\neq 1,-1,0}$

$$\begin{pmatrix}2&2&2\\0&2(k-1)k&2(1-k)\\0&0&-2(k-1)^2(k+1)\end{pmatrix}$$

עמודות 1, 2 ו 3 מובילות.

$$B\operatorname{col}(A)=\left\{\begin{pmatrix}2\\k\\2k^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\k^2\\4k^2-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim\left(\operatorname{col}(A)\right)=3$.

ב) עבור אילו ערכי k למערכת $A\cdot X=b$ יש פתרון לכל וקטור b?
לפי המדורגת של A, עבור $k=1,-1,0$ נקבל שורת סתירה במדורגת של המטריצה המורחבת $(A|b)$ לכל b. לכן יש פתרון לכל וקטור b אם $k\neq 1,-1,0$.

שאלה 17

א) משים לב ש W_1 הוא מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית הבאה:

$$\begin{aligned}x+y+z&=0\\z-y+z&=0\end{aligned}\ .$$

נעבור לכתוב המטריצה המורחבת ונקבל:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

הפתרון הוא: $(x,y,z)=(-1,0,1)z,\ \ z\in\mathbb{R}$. מכאן

$$W_1=\left\{z\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\middle|z\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\ .$$

$\Leftarrow$ בסיס אפשרי ל- W_1 הינו

$$B_{W_1}=\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\ ,$$

ו- $\dim W_1=1$.

ב) נסמן $p(x)\in\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ כך:
$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\ .$$
$p(x)\in W_2 \Leftrightarrow p(0)=0$ וגם $p(1)=0$.
$$p(0)=a_0=0\ .$$
$$p(1)=a_0+a_1+a_2+a_3=0\ .$$
מכאן נקבל מערכת משוואות של מקדמי הפולינום. נעבור למטריצה המורחבת של המערכת:
$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}$$
הפתרון הוא $(a_0,a_1,a_2,a_3)=(0,-a_2-a_3,a_2,a_3)=a_2(0,-1,1,0)+a_3(0,-1,0,1)$ $a_2,a_3\in\mathbb{R}$.

נסמן $\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $s,t\in\mathbb{R}$. לכן
$$p(x)=t\cdot x+s\cdot x^2+(-s-t)\cdot x^3=s\left(x^2-x^3\right)+t\left(x-x^3\right)\ .$$
ז"א
$$p(x)\in\text{span}\left\{x^2-x^3,x-x^3\right\}\ .$$
נשים לב כי הווקטורים $x^2-x^3,x-x^3$ הם בת"ל. לפיכך בסיס אפשרי ל- W_2 הינו
$$B_{W_2}=\left\{x^2-x^3,x-x^3\right\}$$
ו- $\text{dim}W_2=2$.

ג) בסיס של $\mathbb{F}^{2\times 2}$ הינו
$$\left\{e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$
כך שכל מצטריצה $A\in\mathbb{F}^{2\times 2}$ מצורה $A=\begin{pmatrix}k_1&k_2\\k_3&k_4\end{pmatrix}$ ניתן להירשם כצירוף לינארי של המטריצות של הבסיס:
$$A=k_1e_1+k_2e_2+k_3e_3+k_4e_4\ ,$$
כאשר $k_1,\ldots,k_4\in\mathbb{F}$ סקלרים.

עכשיו נניח כי המרחב מורכב ממטריצות סימטריות: $A=A^t$. ז"א איברים $k_2=k_3$ כך ש $A=\begin{pmatrix}k_1&k_2\\k_2&k_4\end{pmatrix}$.
כתוצאה הצירוף לינארי לעיל הופך ל-
$$A=k_1e_1+k_2(e_2+e_3)+k_4e_4=k_1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\ .$$
ז"א בסיס אפשרי של W_3 הינו
$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$
לפיכך $\text{dim}W_3=3$.

<u>שאלה 18</u> נתון כי

$$\text{Nul}(A) = \text{span}\left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

□ נמצא את $\text{Nul}(A)$, dim. נגדיר מטריצה B שעמודותיה הם w_1, w_2, w_3. מכאן $\text{col}(B) = \text{Nul}(A)$ ומימד $\text{Nul}(A)$ שווה ל- $\text{rank}(B)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2} R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $\text{rank}(B) = 2$ לכן $\dim \text{Nul}(A) = 2$.
כעת לפי המשפט מספר עמודות של $A = \text{rank}(A) + \dim \text{Nul}(A)$, כלומר

$$\text{rank}(A) + \dim \text{Nul}(A) = 3$$

אז נקבל כי

$$\text{rank}(A) + 2 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad \text{rank}(A) = 1 \ .$$

<u>שאלה 19</u>

$$\text{rank}(C) = 4 - \dim\ \text{Null}(C) = 4 - 4 = 0 \ .$$

מאחר ו- $\text{rank}(C) = 0$ נסיק ש- $C = 0$.

נסמן ב- b_1, b_2, b_3, b_4 את העמודות של המטריצה B. נקבל ש-

$$C = A \cdot \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ A \cdot b_1 & A \cdot b_2 & A \cdot b_3 & A \cdot b_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \ .$$

מאחר ו- $C = 0$ אז

$$A \cdot b_1 = A \cdot b_2 = A \cdot b_3 = A \cdot b_4 = 0$$

$B \neq 0$ לכן ישנה לפחות עמודה אחת מתוך b_1, b_2, b_3, b_4 שונה מאפס. לפיכך קיבלנו שלמערכת $A \cdot \text{x} = \bar{0}$ יש פתרון <u>לא</u> טריוויאלי ובפרט לכל מערכת הומוגנית $A \cdot \text{x} = \bar{0}$ יש אינסוף פתרונות.