

המחלקה למדעי המחשב

26/11/24 08 : 00 – 03/12/24 23 : 59 תשפ"ד

אלגברה 2

מועד מיוחד

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר,

תשפ"ד סמסטר ב'

השאלון מכיל 12 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

הנחיות

- יש לפתור את כל השאלות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבירו היטב את מהלך הפתרון. תשובה ללא הסבר (גם נכונה) לא תתקבל.
- אסור לחלוטין לקבל עזרה מסטודנט אחר או מאף אחד. עליכם להעלות את הפתרונות שלכם דרך אתר המודל של הקורס אלגברה 2 למדמ"ח, או במייל, לא יאוחר משעה 23 : 59 – 12 – 24 – 3.
- פתרונות שהוגשו אחרי המועד הזה לא יתקבלו.
- מותר להשתמש בחומר של הקורס, התרגילים של הקורס והספרים של הקורס בלבד, אבל אסור להשתמש בשום מקורות אחרים.
- אחרי הגשת פתרונות אתם תקבלו הזמנה למבחן קצר בעל פה על הפתרונות שלכם.
- ייתכן שלא תעבור את המבחן או יורידו נקודות במקרה שאתם לא יכולים להסביר הפתרונות שלכם היטב.

שאלה 1 (25 נקודות)

תהי $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(א) מצאו P הפיכה ו- J צורת ז'ורדן כך ש- $A = PJP^{-1}$.

תהיינה $B, C \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצות דומות. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

(ב) אם u וקטור עצמי של B אז u גם וקטור עצמי של C .

(ג) הפולינום המינימלי של B שווה לפולינום המינימלי של C .

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ותהי S הקבוצה

$$S = \{I, A, A^2, \dots, A^{n^2-1}\}.$$

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענה הבאה:

הקבוצה S מהווה בסיס של המרחב ווקטורי של מטריצות מסדר $n \times n$.

שאלה 3 (25 נקודות)

(א) תהי S הקבוצת ווקטורים

$$S = \{1+x, 1-x, 1+x+x^2\}.$$

של המרחב מכפלה פנימית $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ שעליו מוגדר המכפלה פנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$$

לכל $f, g \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

מצאו בסיס אורתונורמלי של S .

יהיו a, b וקטורים של מרחב מכפלה פנימית V . הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

(ב) אם a, b אורתוגונליים אז $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$.

(ג) אם $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$ אז a, b אורתוגונליים.

שאלה 4 (25 נקודות)

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

(א) אם A נורמלית ואם קיים k טבעי כך ש- $A^k = 0$ אז $A = 0$.

(ב) אם קיים k טבעי כך ש- $A^k = 0$ אז כל ערך עצמי של A שווה ל- 0.