

עבודה 0: חזרה של אלגברה 1 - העתקות לינאריות.

שאלה 1 נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} 2a + 3b - c \\ 3a + 5b + 2c \\ a - 2b - 3c \end{pmatrix}$$

(א) רשמו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T

(ב) רשמו את המטריצה המייצגת ביחס לבסיס $B = \{b_1 = 1, b_2 = 1 + x, b_3 = 1 + x + x^2\}$ של $\mathbb{R}_2[x]$

והבסיס $C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ של \mathbb{R}^3 .

(ג) חשבו את $T(1 - x + 3x^2)$ ע"י המטריצה המייצגת הסטנדרטית.

(ד) חשבו את $T(1 - x + 3x^2)$ ע"י המטריצה המייצגת $[T]_C^B$ ובדקו שהתשובה מסכימה עם התשובה של הסעיף הקודם.

שאלה 2 נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a + 2b + 5c \\ 2b + 2c \\ -a - 3c \end{pmatrix}$$

לכל $a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$.

(א) רשמו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T .

(ב) מצאו את $T(11 - x^2)$ דרך המטריצה המייצגת הסטנדרטית.

(ג) יהיו $B = \{b_1 = 1 + x + x^2, b_2 = -x, b_3 = 5 - x^2\}$ בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$ ו- C

$$C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס של \mathbb{R}^3 . מצאו את המטריצה המייצגת של טרנספורמציה T לפי הבסיסים B ו- C .

(ד) בעזרת המטריצה המייצגת שמצאתם, מצאו את $[T(u)]_C$. בדקו שהתשובה מסכימה עם התשובה לסעיף ב'.

שאלה 3 תהי $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a + b + d) + (3a - b + c)x + (b + 2c - d)x^2$$

(א) מצאו את הממ"ס של T .

(ב) מצאו את $[T]_C^B$ כאשר

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ו

$$C = \{c_1 = x, c_2 = x^2, c_3 = 1\}$$

בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$.

(ג) חשבו את $[T(u)]_C$ כאשר

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_B$$

(ד) רשמו אר הוקטור u ביחס לבסיס E של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ וחשבו את $A \cdot [u]_E$. בדקו שהתשובה מסכימה עם התשובה של לסעיף הקודם.

שאלה 4

נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 3}$ המוגדרת ע"י:

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} a + b + 2c + d & a + 2b + 3c + d & 2a + 4b \\ b + c & -a + 3c - d & 5c + 4d \end{pmatrix}$$

לכל $a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x]$.

(א) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T .

(ב) מצאו את המטריצה המייצגת של ההעתקה ביחס לבסיס

$$B = \{b_1 = x, b_2 = 1 - x, b_3 = x + x^2, b_4 = x - x^2 + x^3\}$$

של $\mathbb{R}_3[x]$ וביחס לבסיס

$$C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, c_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, c_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

של $\mathbb{R}^{3 \times 2}$.

שאלה 5 תהי $T : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ טרנספורמציה המוגדרת ע"י

$$T(a + bx) = \begin{pmatrix} a & 2a \\ b & 2b \end{pmatrix}$$

(א) יהי $B = \{b_1 = 1, b_2 = 1 + x\}$ בסיס של $\mathbb{R}_1[x]$ ו-

$$C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, c_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. מצאו את $[T]_C^B$.

(ב) יהי $B' = \{b'_1 = 1, b'_2 = 1 - 2x\}$ בסיס של $\mathbb{R}_1[x]$ ו-

$$C' = \left\{ c'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, c'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, c'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, c'_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. מצאו את $[T]_{C'}^{B'}$.

(ג) מצאו את $[T(u)]_C$ כאשר $[u]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(ד) מצאו את $[T(u)]_{C'}$ כאשר $[u]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

שאלה 6 תהי $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ טרנספורמציה המוגדרת ע"י $T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ a - 3b \end{pmatrix}$ יהי $B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

(א) מצאו את $[T]_B^B$.

(ב) יהי $B' = \left\{ b'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס של \mathbb{R}^2 . מצאו את $[T]_{B'}^{B'}$.

(ג) חשבו את המטריצה המעבר מבסיס B לבסיס B' . חשבו את $[T]_{B'}^{B'}$ מ $[T]_B^B$ ע"י המטריצה המעבר ובדקו שהתשובה מסכימה עם נתשובה לסעיף הקודם.

(ד) נתון $[u]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. חשבו את $[u]_{B'}$ ע"י המטריצה המעבר.

שאלה 7 נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} 2a + 3b - c \\ 3a + 5b + 2c \\ ka - 2b - 3c \end{pmatrix}$

(א) רשמו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T

(ב) עבור אילו ערכי הפרמטר k ההעתקה T היא איזומורפיזם?

(ג) לכל ערך של הפרמטר k מצאו את המימד ובסיס של הגרעין.

(ד) לכל ערך של הפרמטר k מצאו את המימד ובסיס של $\text{Im } T$.

שאלה 8 נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a + 2b + 5c \\ 2b + 2c \\ -a - 3c \end{pmatrix}$ לכל

$$a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$$

(א) רשמו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T .

(ב) מצאו את הבסיס ואת המימד של $\text{Im}(T)$ ו $\text{Ker}(T)$.

(ג) האם T חד חד ערכית? האם T על?

(ד) יהיו $B = \{b_1 = 1 + x + x^2, b_2 = -x, b_3 = 5 - x^2\}$ בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$ ו-

$$C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס של \mathbb{R}^3 . מצאו את המטריצה המייצגת של הטרנספורמציה T לפי הבסיסים B ו- C .

(ה) בעזרת הטרביצה המייצגת שמצאתם, מצאו את $[T(u)]_C$ כאשר $[u]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

שאלה 9 תהי $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a + b + d) + (3a - b + c)x + (b + 2c - d)x^2$$

(א) מצאו את הממ"ס של T .

(ב) מצאו את המימד ובסיס של $\text{Im } T$.

(ג) מצאו את המימד ובסיס של $\text{Ker } T$.

שאלה 10 נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 3}$ המוגדרת ע"י:

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} a + b + 2c + d & a + 2b + 3c + d & 2a + 4b \\ b + c & -a + 3c - d & 5c + 4d \end{pmatrix}$$

לכל $a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x]$.

(א) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T .

(ב) מצאו את הבסיס והמימד של $\text{Im}(T)$.

(ג) מצאו את הבסיס והמימד של $\text{Ker}(T)$.

(ד) מצאו את המטריצה המייצגת של ההעתקה ביחס לבסיס

$$B = \{b_1 = x, b_2 = 1 - x, b_3 = x + x^2, b_4 = x - x^2 + x^3\}$$

של $\mathbb{R}_3[x]$ וביחס לבסיס

$$C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, c_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, c_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

של $\mathbb{R}^{3 \times 2}$.

שאלה 11 תהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ מטריצה מסדר $m \times n$. הוכיחו ש- $\text{Im } T = \text{col } A$ כך ש- $\text{rank } T = \text{rank } A$.

שאלה 12 תהי $T : U \rightarrow V$ העתקה ליניארית. הוכיחו כי T חח"ע אם ורק אם $\ker T = \{\bar{0}\}$.

שאלה 13 תהי $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית ותהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ המטריצה המייצגת של T , כלומר

$$T(u) = Au$$

לכל $u \in \mathbb{R}^n$. הוכיחו כי

(א) T על אם ורק אם $\text{rank } A = m$.

(ב) T חח"ע אם ורק אם $\text{rank } A = n$.

שאלה 14 הוכיחו את הטענות הבאות או הפריכו אותן ע"י דוגמא נגדית:

(א) נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. אם $m > n$ אז $\ker(T) = \{\bar{0}\}$.

(ב) נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. אם $m < n$ אז $\ker(T) \neq \{\bar{0}\}$.

(ג) נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. יהי B בסיס של \mathbb{R}^n , ויהי C בסיס של \mathbb{R}^m . אזי T חח"ע אם ורק אם המרחב האפס של $[T]_C^B$ הוא $\{\bar{0}\}$, כאשר $[T]_C^B$ המטריצה המייצגת ביחס לבסיסים B ו C .

תשובות

שאלה 1

(א) הנוסחה של הטרנספורמציה היא

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} 2a + 3b - c \\ 3a + 5b + 2c \\ a - 2b - 3c \end{pmatrix} \quad (\#1)$$

בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$:

$$e = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2\}$$

בסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^3 :

$$E = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

לפי ההגדרה של הטרנספורמציה בנוסחה (#1):

$$T(e_1) = T(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = T(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$T(e_3) = T(x^2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

הוקטורים כבר מבוטאים ביחס לבסיס הסטנדרטי E של \mathbb{R}^3 . נציב להגדרה של המטריצה המיצגת הסטנדרטית של T ונקבל

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ T(e_1)_E & T(e_2)_E & T(e_3)_E \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

■

(ב)

$$\begin{aligned} T(b_1) = T(1) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -c_1 + 2c_2 + c_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_C \\ T(b_2) = T(1+x) &= \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = -3c_1 + 9c_2 - c_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}_C \\ T(b_3) = T(1+x+x^2) &= \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} = -6c_1 + 14c_2 - 4c_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}_C \end{aligned}$$

לכן

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ T(b_1)_C & T(b_2)_C & T(b_3)_C \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 2 & 9 & 14 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

■

$$1 - x + 3x^2 = 1 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}_e \quad \text{ג}$$

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}_E \\ &= -4E_1 + 4E_2 - 6E_3 \\ &= -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

$$1 - x + 3x^2 = 2 \cdot b_1 - 4 \cdot b_2 + 3 \cdot b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}_B \quad (\text{ד})$$

$$\begin{aligned} [T]_C^B \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}_B &= \begin{pmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 2 & 9 & 14 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}_C \\ &= -8C_1 + 10C_2 - 6C_3 \\ &= -8 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

■

שאלה 2

(א) הטרנספורמציה מ $\mathbb{R}_2[x]$ ל \mathbb{R}^3 מוגדרת ע"י:

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a + 2b + 5c \\ 2b + 2c \\ -a - 3c \end{pmatrix} \quad (\#1)$$

בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$:

$$e = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2\}$$

בסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^3 :

$$E = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

לפי ההגדרה של הטרנספורמציה בנוסחה (#1):

$$T(e_1) = T(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_E, \quad T(e_2) = T(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_E, \quad T(e_3) = T(x^2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}_E.$$

הוקטורים כבר ביחס לבסיס הסטנדרטי E של \mathbb{R}^3 . נציב להגדרה של המטריצה המיצגת הסטנדרטית של T ונקבל

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ T(e_1)_E & T(e_2)_E & T(e_3)_E \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

■

(ב)

$$11 - x^2 = 11e_1 + 0e_2 - e_3 = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_e.$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}_E = 6E_1 - 2E_2 - 8E_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

■

(ג)

$$T(b_1) = T(1 + x + x^2) = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 8c_1 - c_2 + \frac{4}{3}c_3$$

$$T(b_2) = T(-x) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3$$

$$T(b_3) = T(3 - x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \cdot c_1 - \frac{1}{2} \cdot c_2 + \frac{2}{3} \cdot c_3$$

ז"א

$$[T(b_1)]_C = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}_C, \quad [T(b_2)]_C = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C, \quad [T(b_3)]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}_C.$$

לכן

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

■

(ד)

$$11 - x^2 = b_1 + b_2 + 2b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B.$$

כלומר $[u]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B$. השתמשו במטריצה המייצגת שמצאתם למציאת את $[T(u)]_C$ כאשר $[u]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B$.

$$\begin{aligned} [T(u)]_C &= [T]_C^B \cdot [u]_B \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}_C \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}_C = 6c_1 - 2c_2 + \frac{8}{3}c_3 = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{8}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

אותה תשובה של סעיף ב'.

■

שאלה 3

(א) הטרנספורמציה מ $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ל $\mathbb{R}_2[x]$ מוגדרת ע"י:

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a + b + d) + (3a - b + c)x + (b + 2c - d)x^2. \quad (\#1)$$

בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$e = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$:

$$E = \{ E_1 = 1, E_2 = x, E_3 = x^2 \}$$

לפי ההגדרה של הטרנספורמציה בנוסחה (#1):

$$\begin{aligned} T(e_1) &= T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 + 3x \\ &= 2E_1 + 3E_2 + 0 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}_E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(e_2) &= T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 - x + x^2 \\ &= E_1 - E_2 + E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(e_3) &= T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 + x + 2x^2 \\ &= 0 \cdot E_1 + E_2 + 2E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(e_4) &= T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - x^2 \\ &= E_1 + 0 \cdot E_2 - E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_E \end{aligned}$$

נציב להגדרה של המטריצה המיצגת הסטנדרטית של T ונקבל

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ T(e_1)_E & T(e_2)_E & T(e_3)_E \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

■

■

(ב)

$$T(b_1) = 1 - x^2 = -c_2 + c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_C$$

$$T(b_2) = x + 2x^2 = c_1 + 2c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_C$$

$$T(b_3) = 1 - x + x^2 = -c_1 + c_2 + c_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C$$

$$T(b_4) = 2 + 3x = 3c_1 + 2c_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_C$$

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

■

(ג)

$$[T(u)]_C = [T]_C^B \cdot [u]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}_C$$

■

(ד)

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_B = 4E_1 + 3E_2 + 2E_3 + E_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_E$$

$$A \cdot [u]_E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

הוקטור המתקבל ביחס לבסיס סטנדרטי e של $P_2(\mathbb{R})$
התשובה של הסעיף הקודם ביחס לבסיס סטנדרטי e של $P_2(\mathbb{R})$ הוא

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}_C = 11c_1 + 6c_2 + 12c_3 = 11x + 6x^2 + 12 = 12e_1 + 11e_2 + 6e_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}_e.$$

שאלה 4

(א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T היא:

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \\ [T(e_1)]_E & [T(e_2)]_E & [T(e_3)]_E & [T(e_4)]_E \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

כאשר $\{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_3[x]$ ו E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{2 \times 3}(\mathbb{R})$.

$$[T(e_1)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [T(e_2)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [T(e_3)]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad [T(e_4)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

לכן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

(ב) נרשום הבסיס $\{b_1 = x, b_2 = 1 - x, b_3 = x + x^2, b_4 = x - x^2 + x^3\}$ ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_3[x]$,
כך ש $\{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3\}$

$$b_1 = e_2, \quad b_2 = e_1 - e_2, \quad b_3 = e_2 + e_3, \quad b_4 = e_2 - e_3 + e_4.$$

לכן

$$T(b_1) = T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(b_2) = T(e_1) - T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(b_3) = T(e_2) + T(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$T(b_4) = T(e_2) - T(e_3) + T(e_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

נרשום הבסיס

$$C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, c_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, c_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

במונחי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{2 \times 3}(\mathbb{R})$:

$$E = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

:

$$E_1 = c_5, \quad E_2 = c_1, \quad E_3 = c_2, \quad E_4 = c_6, \quad E_5 = c_3, \quad E_6 = c_4 - c_3.$$

לכן

$$T(b_1) = E_1 + 2E_2 + 4E_3 + E_4 = c_5 + 2c_1 + 4c_2 + c_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C ,$$

$$T(b_2) = -E_2 - 2E_3 - E_4 - E_5 = -c_1 - 2c_2 - c_6 - c_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_C ,$$

$$T(b_3) = 3E_1 + 5E_2 + 4E_3 + 2E_4 + 3E_5 + 5E_6 = 3c_5 + 5c_1 + 4c_2 + 2c_6 + 3c_3 + 5(c_4 - c_3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_C ,$$

$$T(b_4) = 4E_3 - 4E_5 - E_6 = 4c_2 - 4c_3 - (c_4 - c_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C .$$

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [T(b_1)]_C & [T(b_2)]_C & [T(b_3)]_C & [T(b_4)]_C \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

■

$$T(b_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = c_1 + c_3$$

$$T(b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$$

$$[T(b_1)]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C, \quad [T(b_2)]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C.$$

לכן

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

(א)

$$T(b'_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2c'_3 - c'_4$$

$$T(b'_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = -4c'_1 + 2c'_2 + 4c'_3 - c'_4$$

$$[T(b'_1)]_{C'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{C'}, \quad [T(b'_2)]_{C'} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}_{C'}.$$

לכן

$$[T]_{C'}^{B'} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

■

(ב)

$$[T(u)]_C = [T]_C^B \cdot [u]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

■

ג)

$$[T(u)]_{C'} = [T]_{C'}^{B'} \cdot [u]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

■

שאלה 6

א)

$$\begin{aligned} T(b_1) &= T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_B \\ T(b_2) &= T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot b_1 - 1 \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_B \end{aligned}$$

אז

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

■

ב)

$$\begin{aligned} T(b'_1) &= T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot b'_1 + 2 \cdot b'_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}_{B'} \\ T(b'_2) &= T \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot b'_1 + 1 \cdot b'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{B'} \end{aligned}$$

אז

$$[T]_{B'}^{B'} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

נסמן $[T]_{B'} \equiv [T]_{B'}^{B'}$ ו $[T]_B \equiv [T]_B^B$.

■

(ג)

נחשב את המטריצה המעבר מבסיס B לבסיס B' :

$$(B'|B) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

לכן

$$P_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ההופכית של M היא

$$P_{B \rightarrow B'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

(ד)

$$P_{B \rightarrow B'} \cdot [T]_B \cdot P_{B \rightarrow B'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = [T]_{B'}.$$

■

(ה)

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B = 2b_1 + b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הרכיבים של אותו וקטור לפי הבסיס B' נמצא ע"י:

$$[u]_{B'} = P_{B \rightarrow B'} [u]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B'}$$

נבדוק ש- $[u]_B = [u]_{B'}$ ביחס לבסיס הסטנדרטי:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B = 2b_1 + b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ו

$$[u]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B'} = b'_1 + b'_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(א) הטרנספורמציה מ $\mathbb{R}_2[x]$ ל \mathbb{R}^3 מוגדרת ע"י:

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} 2a + 3b - c \\ 3a + 5b + 2c \\ ka - 2b - 3c \end{pmatrix} \quad (\#1)$$

בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$:

$$e = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2\}$$

בסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^3 :

$$E = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

לפי ההגדרה של הטרנספורמציה בנוסחה (#1):

$$T(e_1) = T(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ k \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = T(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T(e_3) = T(x^2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

הוקטורים כבר מבוטאים ביחס לבסיס הסטנדרטי E של \mathbb{R}^3 . נציב להגדרה של המטריצה המיצגת הסטנדרטית של T (ראו הגרה ??) ונקבל

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ T(e_1)_E & T(e_2)_E & T(e_3)_E \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ k & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

■

(ב)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ k & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow 2R_2 - 3R_1 \\ R_3 \rightarrow 2R_3 - kR_1}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -3k - 4 & k - 6 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{R_3 \rightarrow (3k+4)R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 22k + 22 \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & k + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לפי הגדרה T איזומורפיזם אם היא על וחח"ע. לפי משפטים ?? ו ?? T תהיה על וחח"ע אם יש איבר מוביל בכל שורה ובכל עמודה של המטריצה המוגדרת המתקבלת מ A . ז"א T איזומורפיזם לכל $k \neq -1$.

■

$k \neq -1$

(ג)

$$\begin{aligned} \dim(\ker T) &= \# \text{ העמודות הלא מובילות במדורגת} \\ &= 0 \end{aligned}$$

בסיס לא קיים.

$k = -1$

$\ker T \cong \text{Nul} A$. נמצא בסיס ומימד של $\text{Nul} A$ עבור $k = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -22 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

הפתרון הכללי הוא $x = 11z, y = -7z, z \in \mathbb{R}$ כלומר

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11z \\ -7z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן בסיס של $\text{Nul} A$ הוא

$$\left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נקבל בסיס של $\ker T$ ע"י לרשום הוקטורים בבסיס של $\operatorname{Nul} A$ ביחס לבסיס הסטנדרטי לעיל של התחום של T : הוא

$$\left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}_e \right\} = \{11e_1 - 7e_2 + e_3\} = \{11 - 7x + x^2\}$$

$$\dim(\ker T) = \text{מספר הוקטורים בבסיס} = 1$$

■

(ד) $k \neq -1$

$$\dim(\operatorname{Im} T) = A \text{ של } \# = 3 \text{ עמודות מובילות במדורגת}$$

$\operatorname{Im} T \cong \operatorname{col} A$. עבור $k \neq -1$ במטריצה המדורגת של A , עמודה 1, עמודה 2, ועמודה 3 מובילות. לכן בסיס של $\operatorname{col} A$ מורכב מעמודות 1, 2 ו 3 של A :

$$B_{\operatorname{col} A} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

נקבל בסיס של $\operatorname{Im} T$ מהוקטורים ב $B_{\operatorname{col} A}$ ביחס לבסיס הסטנדרטי של הטווח של T - \mathbb{R}^3 . לכן

$$B_{\operatorname{Im} T} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

$k = -1$:

$$\dim(\operatorname{Im} T) = A \text{ של } \# = 2 \text{ עמודות מובילות במדורגת}$$

$\operatorname{Im} T \cong \operatorname{col} A$. עבור $k \neq -1$ במטריצה המדורגת של A , עמודה 1, ועמודה 2 מובילות. לכן בסיס של $\operatorname{col} A$ מורכב מעמודות 1 ו 2 של A :

$$B_{\operatorname{col} A} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

לכן

$$B_{\operatorname{Im} T} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

שאלה 8

(א) הטרנספורמציה מ $\mathbb{R}_2[x]$ ל \mathbb{R}^3 מוגדרת ע"י:

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a + 2b + 5c \\ 2b + 2c \\ -a - 3c \end{pmatrix} \quad (\#1)$$

בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$:

$$e = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2\}$$

בסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^3 :

$$E = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

לפי ההגדרה של הטרנספורמציה בנוסחה (#1):

$$T(e_1) = T(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = T(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(e_3) = T(x^2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

הוקטורים כבר מבוטאים ביחס לבסיס הסטנדרטי E של \mathbb{R}^3 . נציב להגדרה של המטריצה המיצגת הסטנדרטית של T (ראו הגרה ??) ונקבל

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ T(e_1)_E & T(e_2)_E & T(e_3)_E \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

■

(ב)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\dim(\operatorname{Im} T) = \# \text{ העמודות המובילות במדורגת של } A = 2$$

$\operatorname{col} A \cong \operatorname{Im} T$. עמודות 1 ו 2 של המדורגת המתקבלת מ A מובילות, לכן עמודות 1 ו 2 של A מהווים בסיס של $\operatorname{col} A$:

$$B_{\operatorname{col} A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

נקבל בסיס של $\operatorname{Im} T$ מהוקטורים של הבסיס של $\operatorname{col} A$ ביחס לבסיס הסטנדרטי של נטוח של T - \mathbb{R}^3 .
לכן

$$B_{\operatorname{Im} T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\operatorname{ker} T \cong \operatorname{Nul} A. \text{ נמצא בסיס ומימד של } \operatorname{Nul} A:$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

הפתרון הכללי הוא $x = -3z, y = -z, z \in \mathbb{R}$ כלומר

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן בסיס של $\operatorname{Nul} A$ הוא

$$B_{\operatorname{Nul} A} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נקבל בסיס של $\ker T$ ע"י הוקטורים ב $B_{\text{Null } A}$ ביחס לבסיס הסטנדרטי של התחום של T , כלומר ביחס לבסיס סטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$:

$$B_{\ker T} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_e \right\} = \{-3e_1 - e_2 + e_3\} \\ = \{-3 - x + x^2\}$$

$$\dim(\ker T) = \text{מספר הוקטורים בבסיס} = 1$$

■

ג) T לא חח"ע: לא כל העמודות מובילות.
 T לא על: יש שורת אפסים.

■

$$T(b_1) = T(1 + x + x^2) = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \\ = 8c_1 - c_2 + \frac{4}{3}c_3$$

$$T(b_2) = T(-x) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = -2c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3$$

$$T(b_3) = T(3 - x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ = 0 \cdot c_1 - \frac{1}{2} \cdot c_2 + \frac{2}{3} \cdot c_3$$

ז"א

$$\begin{aligned} [T(b_1)]_C &= \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}_C \\ [T(b_2)]_C &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C \\ [T(b_3)]_C &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}_C. \end{aligned}$$

לכן

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

■

(ה) השתמשו במטריצה המייצגת שמצאתם למציאת את $[T(u)]_C$ כאשר $[u]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} [T(u)]_C &= [T]_C^B \cdot [u]_B \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

שאלה 9

(א) הטרינספורמציה מ $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ל $\mathbb{R}_2[x]$ מוגדרת ע"י:

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a + b + d) + (3a - b + c)x + (b + 2c - d)x^2. \quad (\#1)$$

בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$e = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$:

$$E = \{ E_1 = 1, E_2 = x, E_3 = x^2 \}$$

לפי ההגדרה של הטרינספורמציה בנוסחה (#1):

$$\begin{aligned} T(e_1) &= T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 + 3x \\ &= 2E_1 + 3E_2 + 0 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}_E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(e_2) &= T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 - x + x^2 \\ &= E_1 - E_2 + E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(e_3) &= T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 + x + 2x^2 \\ &= 0 \cdot E_1 + E_2 + 2E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(e_4) &= T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - x^2 \\ &= E_1 + 0 \cdot E_2 - E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_E \end{aligned}$$

נציב להגדרה של המטריצה המיצגת הסטנדרטית של T (ראו הגרה ??) ונקבל

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ T(e_1)_E & T(e_2)_E & T(e_3)_E \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

■

(ב) $\text{Im } T \cong \text{Col } A$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{R_2 \rightarrow 3R_1 - 2R_2} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 5R_2} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & 8 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{R_3 \rightarrow \frac{1}{4}R_3} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

במטריצה המדורגת המתקבלת מ A , עמודות 1, 2 ו 3 מובילות, לכן עמודות 1, 2 ו 3 של A מהוות בסיס של $\text{col } A$:

$$B_{\text{col } A} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

הבסיס של $\text{Im } T$ מהוקטורים של $B_{\text{col } A}$ לפי הבסיס של הטווח שך T , לפי הבסיס של E :

$$\begin{aligned} B_{\text{Im } T} &= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}_E, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_E, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_E \right\} \\ &= \{2E_1 + 3E_2 + E_3, E_1 - E_2 + E_3, 0 \cdot E_1 + E_2 + 2 \cdot E_3\} \\ &= \{2 + 3x + x^2, 1 - x + x^2, x + 2x^2\}. \end{aligned}$$

(ג) $\text{Ker } T \cong \text{Nul } A$. מסעיף הקודם המדורגת של A היא

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי למשוואה ההומוגנית $A \cdot X = 0$ הוא

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{w}{3} \\ -\frac{w}{3} \\ \frac{2w}{3} \\ w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ז"א בסיס של $\text{Nul } A$ הוא

$$B_{\text{Nul } A} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

נקבל בססי של $\text{Ker } T$ ע"י לרשום הוקטורים של $B_{\text{Null } A}$ ביחס לבסיס e של המרחב תחום של T , כלומר ביחס לבסיס של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$\begin{aligned} B_{\text{Ker } T} &= \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_e \right\} \\ &= \{-e_1 - e_2 + 2e_3 + 3 \cdot e_4\} \\ &= \left\{ -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

שאלה 10

(א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T היא:

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \\ [T(e_1)]_E & [T(e_2)]_E & [T(e_3)]_E & [T(e_4)]_E \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

כאשר $\{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_3[x]$ ו E הבסיס הסטנדרטית של $\mathbb{R}^{2 \times 3}(\mathbb{R})$.

$$[T(e_1)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [T(e_2)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [T(e_3)]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad [T(e_4)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

לכן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

(ב) $\text{Im}(T) \sim \text{col}(A)$

נדרג את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T :

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_2 \\ R_5 \rightarrow R_5 - R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\
 & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow -\frac{1}{6}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{\begin{matrix} R_4 \rightarrow R_4 - 4R_3 \\ R_5 \rightarrow R_5 - 5R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

כל ה-4 עמודות מובילות לכן $\dim(\text{col}(A)) = 4$. בסיס של $\text{Im}(T)$:

$$B(\text{Im}(T)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

ג)

כיוון ש

$$\dim(\text{col}(A)) + \dim(\text{Nul}(A)) = 4$$

אז

$$\dim(\text{Nul}(A)) = 0$$

ולכן

$$\text{Ker}(T) = \{\vec{0}\}.$$

ד)

נרשום הבסיס $\{b_1 = x, b_2 = 1 - x, b_3 = x + x^2, b_4 = x - x^2 + x^3\}$ ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_3[x]$,
 $\{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3\}$ כך ש

$$b_1 = e_2, \quad b_2 = e_1 - e_2, \quad b_3 = e_2 + e_3, \quad b_4 = e_2 - e_3 + e_4.$$

לכן

$$T(b_1) = T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(b_2) = T(e_1) - T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(b_3) = T(e_2) + T(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$T(b_4) = T(e_2) - T(e_3) + T(e_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

נרשום הבסיס

$$C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, c_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, c_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

במונחי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{2 \times 3}(\mathbb{R})$:

$$E = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

:

$$E_1 = c_5, \quad E_2 = c_1, \quad E_3 = c_2, \quad E_4 = c_6, \quad E_5 = c_3, \quad E_6 = c_4 - c_3.$$

לכן

$$T(b_1) = E_1 + 2E_2 + 4E_3 + E_4 = c_5 + 2c_1 + 4c_2 + c_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C,$$

$$T(b_2) = -E_2 - 2E_3 - E_4 - E_5 = -c_1 - 2c_2 - c_6 - c_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_C,$$

$$T(b_3) = 3E_1 + 5E_2 + 4E_3 + 2E_4 + 3E_5 + 5E_6 = 3c_5 + 5c_1 + 4c_2 + 2c_6 + 3c_3 + 5(c_4 - c_3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_C,$$

$$T(b_4) = 4E_3 - 4E_5 - E_6 = 4c_2 - 4c_3 - (c_4 - c_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C.$$

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [T(b_1)]_C & [T(b_2)]_C & [T(b_3)]_C & [T(b_4)]_C \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 11 נניח ש

$$A = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}$$

כאשר c_1 עמודה ה-1 של A וכו'. אז

$$\text{Im } A = \{Ax | x \in \mathbb{R}^n\} = \{x_1c_1 + \dots + x_nc_n | x_i \in \mathbb{R}\}$$

לפי הגדרה ?? : $\text{Im } T$ הוא המרחב העמודות של A :

$$\text{Im } T = \text{col } A .$$

שאלה 12 \Rightarrow

נניח ש T חח"ע. יהי $v \in \ker T$ אז $T(v) = \bar{0}$.
 T העתקה ליניארית אז $T(\bar{0}) = \bar{0}$, לכן

$$T(v) = T(\bar{0}) .$$

ז"א $v = \bar{0}$ בגלל ש T חח"ע.

\Leftarrow

נניח ש $\ker T = \{\bar{0}\}$. נניח ש $T(u_1) = T(u_2)$ כאשר $u_1, u_2 \in U$. אז

$$T(u_1 - u_2) = T(u_1) - T(u_2) = \bar{0} ,$$

לכן $u_1 - u_2 \in \ker T$. ז"א $u_1 - u_2 = \bar{0}$, ז"א $u_1 = u_2$. לכן הוכחנו ש T חח"ע.

שאלה 13

(א) $\text{Im } T \in \text{col } A$. לכן T על אם ורק אם

$$\text{col } A = \mathbb{R}^m . \quad (*)$$

$$\text{rank } A = \dim(\text{col } A)$$

לכן $(*)$ מתקיים אם ורק אם $\text{rank } A = m$.

(ב) $\ker T = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = \bar{0}\}$. לכן ע"י לפי ?? , T חח"ע אם ורק אם $Ax = \bar{0} \Leftrightarrow x = \bar{0}$. ז"א, לפי משפט ?? , $\text{rank } A = n$.

שאלה 14

(א) דוגמה נגדית:

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\ker(T)$ הוא $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(ב) תהי $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית. אם $n > m$ אז $\ker(T) \neq \{\bar{0}\}$.

הוכחה:

המטריצה המייצגת הסטנדרטית $A \in M_{m \times n}$ מסדר $m \times n$ עבור $m < n$. כלומר, כמות העמודות יותר מכמות השורות. לכן

$$\dim(\operatorname{col}(A)) < n.$$

כיוון ש

$$\dim(\operatorname{col}(A)) + \dim(\operatorname{Nul}(A)) = n$$

אז

$$\dim(\operatorname{Nul}(A)) \geq 1.$$

לכן

$$\dim(\operatorname{Ker}(T)) \geq 1,$$

ז"א

$$\operatorname{Ker}(T) \neq \{\bar{0}\}.$$

הוכחה:

נניח כי T חח"ע.

יהי v וקטור השייך ל $\operatorname{Ker}(T)$. אז $T(v) = \bar{0}$.

$$T(v) = \bar{0} = T(\bar{0}).$$

לכן $v = 0$ בגלל ש T חח"ע. לכן $\operatorname{Ker}(T) = \{\bar{0}\}$.

נניח כי $\operatorname{Ker}(T) = \{\bar{0}\}$.

יהי $T(v_1) = T(v_2)$ עבור $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$. אז

$$T(v_1 - v_2) = T(v_1) - T(v_2) = \bar{0}$$

לכן

$$v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker}(T) = \{\bar{0}\}.$$

ז"א

$$v_1 - v_2 = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2$$

ולכן T חח"ע.