1 דוגמא. אלון הוא סוחר ממולח בשוק ההון. הוא משקיע סכום של $\$1000$ במכשיר פיננסי אשר בכל שנה מכפיל את הכסף בסיכוי $\frac{2}{3}$ או מפסיד חצי מההשקעה בסיכוי $\frac{1}{3}$. השנים הן בלתי תלויות. נגדיר את X להיות שווי ההשקעה של אלון לאחר שנתיים. התומך של X כעת הוא

$$\mathrm{supp}(X) = \{250, 1000, 4000\} \ ,$$

על כן, ההתפלגות של X היא

$$P_X(1000) = \frac{4}{9}, \quad P_X(4000) = \frac{4}{9}, \quad P_X(250) = \frac{1}{9}$$

ו - 0 אחרת.

2 דוגמא. התוחלת של הטלת קוביה היא

$$E[X] = \sum_{k=1}^{6} k\frac{1}{6} = \frac{7}{2} \ .$$

3 דוגמא. בוחרים קוד באורך 10 תווים, כאשר כל תו נבחר באקראי מתוך הספרות 9 – 0 ללא קשר לתווים האחרים שנבחרו. נסמן ב- X מ"מ הסופרים את מספר הרצפים 11 בקוד. חשבו את $E[X]$.

פיתרון. נגדיר מ"מ $X_i, \ i = 1, \ldots, 9$ כאשר X_i מקבל את הערך 1 אם ורק אם במקום ה- i מתחיל רצף של 11. לכן

$$X = \sum_{i=1}^{9} X_i \ .$$

$$\begin{aligned} E[X] =& E\left[\sum_{i=1}^{9} X_i\right] \\ =& \sum_{i=1}^{9} E\left[X_i\right] \\ =& \sum_{i=1}^{9} \left[1.P(X_i = 1) + 0.P(X_i = 0)\right] \\ =& \sum_{i=1}^{9} P(X_i = 1) \\ =& \sum_{i=1}^{9} \frac{1}{10}.\frac{1}{10} \\ =& \frac{9}{100} \ . \end{aligned}$$

■

4 דוגמא. ניקח משתנה מקרי X בעל התפלגות

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{3} & k = -1, \\ \frac{1}{6} & k = 0, \\ \frac{1}{2} & k = 1. \end{cases}$$

פיתרון. נשתמש בהגדרת התוחלת ונקבל

$$E[X] =(-1).\frac{1}{3}+0.\frac{1}{6}+1.\frac{1}{2} \qquad =\frac{1}{6},$$
$$E[X^4] =(-1)^4.\frac{1}{3}+0^4.\frac{1}{6}+1^4.\frac{1}{2} \quad =\frac{5}{6}.$$

■

5 דוגמא. נניח ש X הוא המספר של רכבים אשר עוברים דרך השתיפת רכב בין השעות $16:00$ ו- $17:00$. ל- X יש את ההתפלגות

x	4	5	6	7	8	9
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

הפונקציה $g(X)=2X-1$ מציג את הרווח ב $\$$ עבור X. מצאו את תוחלת הרווח בין השעות $16:00$ ו- $17:00$.

פיתרון.

$$\begin{aligned} E[g(X)] &=E[2X-1] \\ &=\sum_{x=4}^{9}(2x-1)P_X(x) \\ &=7.\frac{1}{12}+9.\frac{1}{12}+11.\frac{1}{4}+13.\frac{1}{4}+15.\frac{1}{6}+17.\frac{1}{6} \\ &=\$12.67\ . \end{aligned}$$

■

6 דוגמא. בר היא בנקאית השקעות מתוחכמת המציעה ללקוחותיה את ההגרלה הבאה: בסיכוי $\frac{2}{5}$ תקבלו רווח של 10. בסיכוי $\frac{1}{5}$ לא תרוויחו ולא תפסידו דבר, ובסיכוי $\frac{3}{5}$ תפסידו 5. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של X המייצג את הרווח מהשקעה אצל בר.

פיתרון. תוחלת הרווח היא חיובית שכן

$$\mu_X =10.\frac{2}{5}+0.\frac{1}{5}-5.\frac{2}{5} \qquad =2,$$

$$\mu_{X^2} =100.\frac{2}{5}+0^2.\frac{1}{5}+25.\frac{2}{5} \quad =50,$$

$$V(X) =\mu_{X^2}-\mu_X^2 \qquad =50-4=46,$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_X =\sqrt{46}\ .$$

■

7 דוגמא. הסיכוי אשר חולה מחלים ממחלת דם חריג הוא 0.4. אם 15 אנשים נדבקים עם המחלה זו, מהי ההסתברות אשר

1. לפחות 10 יחלימו
2. בין 3 עד 8 יחלימו

פיתרון. נגדיר X להיות מספר החולים אשר יחלימו.

.1

$$\begin{aligned}P(X \geq 10) =& 1 - P(X < 10)\\ =& 1 - \sum_{k=0}^{9} f_{X\sim\text{Bin}(15,0.4)}(k)\\ =& 1 - \sum_{k=0}^{9} \binom{15}{k} 0.4^k (1-0.4)^{15-k}\\ =& 1 - 0.9662 = 0.0338\ .\end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned}P(3 \leq X \leq 8) =& 1 - P(X < 10)\\ =& \sum_{k=3}^{8} f_{X\sim\text{Bin}(15,0.4)}(k)\\ =& \sum_{k=0}^{8} f_{X\sim\text{Bin}(15,0.4)}(k) - \sum_{k=0}^{2} f_{X\sim\text{Bin}(15,0.4)}(k)\\ =& \left(\sum_{k=0}^{8} - \sum_{k=0}^{2}\right) \binom{15}{k} 0.4^k (1-0.4)^{15-k}\\ =& 0.9050 - 0.0271 = 0.8779\ .\end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned}P(X = 5) =& f_{X\sim\text{Bin}(15,0.4)}(k=5)\\ =& \binom{15}{5} 0.4^5 (1-0.4)^{10}\\ =& 0.1859\ .\end{aligned}$$

■

8 **דוגמא.** מחשב משתמש במילים באורך 8 ביטים. כאשר משדרים ביטים בקו התקשורת יש סיכוי של $.1$) לשגיאה בביט בודד שמשודר. בכדי לשפר את איכות הקו, משודר כל ביט 3 פעמים ברצף והפענוח של כל שלשת ביטים מתבצע על ידי החלטת הרוב. למשל: אם רוצים לשדר 0 ,משדרים בקו "000" והמקלט מפענח את התשדורת כ-0 אם השלשה שהגיעה אליו מורכבת מלפחות שני אפסים.

1. חשבו את ההסתברות שמילת מחשב תפוענח נכון.
2. מצאו את התפלגות מספר המילים שפוענחו באופן שגוי בקובץ המכיל 1000 מילים.

פתרון: נשים לב שכמות הטעויות בשליחה של ביט בודד מתפלגת $X \sim \text{Bin}(3, 0.1)$ ולכן ההסתברות שתהיה שגיאה בפענוח ביט בודד היא

$$P(X \geq 2) = \binom{3}{2} 0.1^2 0.9 + \binom{3}{1} 0.1^3 = 0.028$$

1. כמות השגיאות במילה באורך 8 ביטים מתפלגת

$$Y \sim \text{Bin}(8, 0.028)$$

ולכן המילה תפוענח נכון בהסתברות

$$P(Y = 0) = \binom{8}{0} p^0 (1-p)^8 = (1-0.028)^8 = 0.796\ .$$

2. לאור הסעיף הקודם, ההסתברות לשגיאה בפענוח מילה בודדת היא

$$1 - 0.796 = 0.203\ ,$$

לכן מספר המילים שפוענחו באופן שגוי בקובץ המכיל 1000 מילים מתפלג $\text{Bin}(1000, 0.203)$.

9 דוגמא. בכד 9 כדורים לבנים ו- 1 שחור. מושכים באקראי בזה אחר זה כדור מהכד. נסמן ב- X את מספר המשיכות עד לקבלת שחור וב- Y את מספר המשיכות עד לקבלת 3 שחורים.

מצאו את התפלגות X כאשר המשיכה היא עם החזרה.

פיתרון. X מקבל ערכים $\mathbb{N}/\{0\}$. בכל הוצאה ישנה הסתברות של $\frac{9}{10}$ לכדור לבן (כישלון) והסתברות של $p = \frac{1}{10}$ לכדור לבן (הצלחה). כלומר, קיבלנו מ"מ גאומטרי

$$X \sim G\left(\frac{1}{10}\right)\ .$$

■

10 דוגמא. חלקיקים נפלטים מחומר רדיואקטיבי בתהליך פואסון עם קצב של 0.5 חלקיקים לשנייה. חשבו את ההסתברויות הבאות:

1. ייפלט לפחות חלקיק אחד בשנייה נתונה.
2. ייפלטו יותר מ-3 חלקיקים ב-5 שניות.

פיתרון. התהליך בשאלה הוא תהליך פואסון בעל פרמטר $\lambda = 0.5$ לכן

1.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-0.5}\frac{0.5^0}{0!} = 0.393\ .$$

2. כעת בשאלה הוא תהליך פואסון שונה בעל פרמטר $\lambda = 5 \times 0.5 = 2.5$:

$$\begin{aligned}
P(X_5 > 3) =& 1 - P(X_5 = 0) - P(X_5 = 1) - P(X_5 = 2) - P(X_5 = 3) \\
=& 1 - e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^0}{0!} - e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^1}{1!} - e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^2}{2!} - e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^3}{3!} \\
=& 1 - e^{-2.5}\frac{(2.5)^0}{0!} - e^{-2.5}\frac{(2.5)^1}{1!} - e^{-2.5}\frac{(2.5)^2}{2!} - e^{-2.5}\frac{(2.5)^3}{3!} \\
=& 0.242
\end{aligned}$$

■

11 דוגמא. (פונקצית התפלגות) מטילים 2 קוביות. נסמן ב- X את סכום התוצאות שהתקבלו. מצאו את ההתפלגות של X.

פיתרון. נתחיל מהתומך. התוצאות האפשרויות בסכום של 2 קוביות הן המספרים הטבעיים מ- 2 עד 12. בכדי לחשב את ההסתברות לכל ערך נשתמש במרחב מדגם סימטרי: גודל מרחב המדגם הוא $6^2 = 36$, ככמות האפשרויות לבחור תוצאה לקוביה הראשונה מתוך 6 ותוצאה לקוביה השניה מתוך 6. נחשב את ההסתברות

של כל תוצאה בנפרד:

$$
\begin{aligned}
P(X=2) &= \frac{|\{(1,1)\}|}{6^2} &&= \frac{1}{36},\\
P(X=3) &= \frac{|\{(2,1),(1,2)\}|}{6^2} &&= \frac{2}{36},\\
P(X=4) &= \frac{|\{(1,3),(2,2),(3,1)\}|}{6^2} &&= \frac{3}{36},\\
&\vdots\\
P(X=7) &= \frac{|\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}|}{6^2} &&= \frac{6}{36},\\
P(X=8) &= \frac{|\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}|}{6^2} &&= \frac{5}{36},\\
P(X=9) &= \frac{|\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}|}{6^2} &&= \frac{4}{36},\\
&\vdots\\
P(X=12) &= \frac{|\{(6,6)\}|}{6^2} &&= \frac{1}{36},
\end{aligned}
$$

ובאופן דומה ממשיכים לחשב את האפשרויות לכל הערכים האפשריים בתומך. באופן כללי קל לראות שהנוסחא, כאשר p זו הסכום של ה 2 הקוביות, היא (עיין משוואה (**??**) לעייל)

$$
P(X=p) = \frac{1}{36} \times \begin{cases} (p-1) & p<8 \\ (p-1)-2(p-7) & 8 \le p < 14 \end{cases}
$$

■

12 דוגמא. (פונקצית התפלגות מצטברת) אלון הוא סוחר ממולח בשוק ההון. הוא משקיע סכום של $\$1000$ במכשיר פיננסי אשר בכל שנה מכפיל את הכסף בסיכוי $\frac{2}{3}$ או מפסיד חצי מההשקעה בסיכוי $\frac{1}{3}$. השנים הן בלתי תלויות. נגדיר את X להיות שווי ההשקעה של אלון לאחר שנתיים. מצאו את פונקצית ההתפלגות המצטברת של X וציירו אותה.

פיתרון. כפי שציינו בדוגמה 1, התומך של X כעת הוא

$$
\mathrm{supp}(X) = \{250, 1000, 4000\}\ .
$$

על כן, פונקצית ההתפלגות המצטברת של X היא

$$
F_X(k) = P(X \le k) = \begin{cases} 0 & k < 250, \\ \frac{1}{9} & 250 \le k < 1000, \\ \frac{5}{9} & 1000 \le k < 4000, \\ 1 & 4000 \le k. \end{cases}
$$

■

13 דוגמא. (תוחלת) בן הוא סוחר מתוחכם ולכן הוא מציע לאלון להפקיד אצלו 100 שקלים בתחילת השנה. בסיכוי של $\frac{2}{5}$ הסכום יוכפל, ובסיכוי $\frac{2}{5}$ הסכום יצטמצם בחצי בסוף השנה. מה תהיה תוחלת הכסף של אלון לאחר קבלת ההצעה? נסמן ב- X את שווי כסף של אלון בסוף השנה.

$$E[X] = 200.\frac{2}{5} + 50.\frac{3}{5} = 110.$$

זאת אומרת שהצעתו של בן מגלמת תוחלת רווח של 10%!

14 דוגמא. (ליניאריות של תוחלת) בחנות ירקות קטנה ישנם 3 תפוחים ו-4 אגסים. אלון קונה 2 פירות באקראי. בן המוכר מרוויח על כל תפוח 2 ש"ח ועל כל אגס 4 ש"ח. מצאו את תוחלת הרווח של בן.

פיתרון. נגדיר מ"מ Q עבור הרווח של בן, ומשתנה מקרי X כמספר התפוחים שאלון קנה. על כן,

$$Q = 2X + 4(2 - X) = 8 - 2X$$

$$P(X = 1) = \frac{4}{7}, \qquad P(X = 2) = \frac{3}{7}.\frac{2}{6} = \frac{1}{7}, \qquad P(X = 0) = \frac{4}{7}.\frac{3}{6} = \frac{2}{7}\ .$$

מכאן נובע ש

$$E[X] = 0.\frac{2}{7} + 1.\frac{4}{7} + 2.\frac{1}{7} = \frac{6}{7}\ .$$

נשתמש בתכונת הליניאריות לחישוב התוחלת של

$$E[Q] = 8 - 2E[X] = 8 - \frac{12}{7} = \frac{44}{7}\ .$$

■