שינוי סדר של אינטגרלים באינטגרלים כפולים

1 השיטה

נתון האינטגרל

$$\int_{a}^{b} dx \, \int_{f_{1}(x)}^{f_{2}(x)} dy \, g(x, y)$$

שלב 1: לרשום את התחום D עם הגבולות של x קבועים והגבולות של y פונקציות:

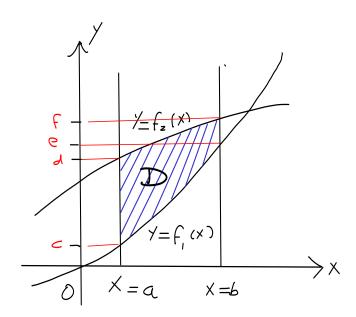
$$D = \{ a \le x \le b , f_1(x) \le y \le f_2(x) \}$$

D שלב 2: לשרטט את התחום

 $\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{X}^{A} f_{z}(x) dx$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{X}^{A} f_{z}(x) dx$

y -וx ירי אירי שלב 3: לסמן נקודות חיתוך של

-



y שלב 4: להפוך את השפות מפונקציות של

$$y = f_1(x) \rightarrow x = f_1^{-1}(y) , \quad y = f_2(x) \rightarrow x = f_2^{-1}(y) .$$

שלב 5: לשרטט את התחום על צירים הנהפכים

X = b X = f(y) X = f(y) X = f(y) X = f(y) Y = f(y) Y = f(y) Y = f(y)

שלב 6: לרשום את התחום לפי השרטוט עם צירים הנהפכים

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$$

$$D_1 = \left\{ c \le y \le d , \ a \le x \le f_1^{-1}(y) \right\} ,$$

$$D_2 = \left\{ d \le y \le e , \ f_2^{-1}(y) \le x \le f_1^{-1}(y) \right\} ,$$

$$D_3 = \left\{ e \le y \le f , \ f_2^{-1}(y) \le x \le b \right\} .$$

שלב 7: לרשום את האינטגרל לפי התחום המתקבל בשלב 6

$$\iint_{D} dx \, dy \, g(x,y) = \iint_{D_{1}} dx \, dy \, g(x,y) + \iint_{D_{2}} dx \, dy \, g(x,y) + \iint_{D_{3}} dx \, dy \, g(x,y)$$

$$= \int_{c}^{d} dy \int_{a}^{f_{1}^{-1}(y)} dx \, g(x,y) + \int_{d}^{e} dy \int_{f_{2}^{-1}(y)}^{f_{1}^{-1}(y)} dx \, g(x,y) + \int_{e}^{f} dy \int_{f_{2}^{-1}(y)}^{b} dx \, g(x,y)$$

2 דוגמה (תשס"ז סמסטר ב' מועד א')

ציירו את תחום האינטגרציה, שנו את הסדר וחשבו

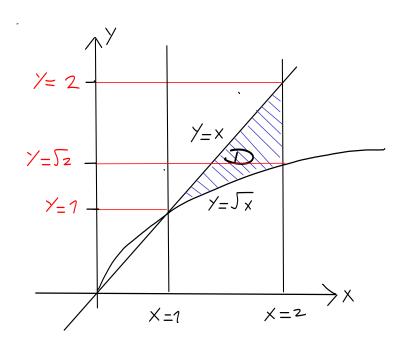
$$I = \int_{1}^{2} dx \int_{\sqrt{x}}^{x} (2x + y) dy$$

שלב 1: לרשום את התחום D עם הגבולות של x קבועים והגבולות של y פונקציות:

$$D = \left\{ 1 \le x \le 2 , \sqrt{x} \le y \le x \right\}$$

D שלב 2: לשרטט את התחום

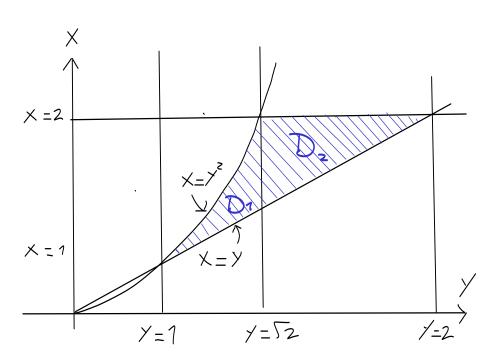
y -ו x ירי אירי פודות חיתוך של השפות על צירי אור שלב 3:



y שלב 4: להפוך את השפות מפונקציות של

$$y = \sqrt{x} \quad \to \quad x = y^2 \; , \qquad y = x \quad \to \quad x = y \; .$$

שלב 5: לשרטט את התחום על צירים הנהפכים



שלב 6: לרשום את התחום לפי השרטוט עם צירים הנהפכים

$$D = D_1 \cup D_2$$

$$D_1 = \left\{ 1 \le y \le \sqrt{2} , \ y \le x \le y^2 \right\} ,$$

$$D_2 = \left\{ \sqrt{2} \le y \le 2 , \ y \le x \le 2 \right\} .$$

שלב 7: לרשום את האינטגרל לפי התחום המתקבל בשלב 6

$$I = \iint_{D_1} dx \, dy \, g(x, y) + \iint_{D_2} dx \, dy \, g(x, y)$$
$$= \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{y}^{y^2} dx \, (2x + y) + \int_{\sqrt{2}}^{2} dy \int_{y^2}^{2} dx \, (2x + y)$$