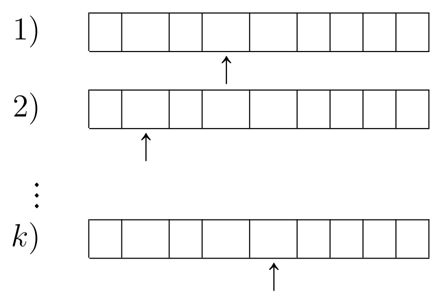
שיעור 3
מכונות טיורינג מרובת סרטים

3.1 מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה היוריסטית

מכונת טיורינג מרובת סרטים (מטמ"ס) היא הכללה של מ"ט עם סרט יחיד. ההבדל הוא שלמטמ"ס ישנו מספר סופי של סרטים, נניח $k > 1$ סרטים.



- לכל סרט יש ראש שלו.
- בתחילת העבודה הקלט w כתוב בתחילת הסרט הראשון וכל שאר הסרטים ריקים. הראשים בכל סרט מצביעים על התא הראשון בסרט, והמכונה נמצאת במצב התחלתי q_0.
- בכל צעד חישוב, לפי המצב הנוכחי ול- k התווים שמתחת ל- k הראשים, המכונה מחליטה לאיזה מצב לעבור, מה לכתוב מתחת לכל אחד מ-k הראשים ולאן להזיז את הראש בכל אחד מ-k סרטים.
- הראשים של הסרטים יכולים לזוז באופן בלתי-תלוי בהתאם לפונקצית המעברים של המטמ"ס.

3.2 מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה פורמלית

הגדרה 3.1 מכונט טיורינג מרובת סרטים

מכונת טיורינג מרובת סרטים היא שביעייה:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר Q, Σ, Γ, q_0, q_{acc},q_{rej} מוגדרים כמו מ"ט עם סרט יחיד (ראו הגדרה 1.2).
ההבדל היחיד בין מ"ט עם סרט יחיד לבין מטב"ס הוא הפונקצית המעברים. עבור מטמ"ס הפונקצית המעברים היא מצורה הבאה:

$$\delta_k : (Q \backslash \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$$

דוגמה 3.1

(מצב q)

סרט 1	␣	0	1	1	␣	␣
			↑			
סרט 2	␣	1	1	0	1	␣
		↑				
סרט 3	␣	0	1	0	0	␣
				↑		

$\longrightarrow$

(מצב p)

␣	0	0	1	␣	␣
			↑		
␣	1	1	0	1	␣
		↑			
␣	0	1	1	0	␣
		↑			

$$\delta_k\left(q,\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\left(p,\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\\L\end{pmatrix}\right)\ .$$

3.3 קונפיגורציה של מטמ"ס

הכללה של קונפיגורציה של מ"ט עם סרט יחיד:

$$\begin{pmatrix}u_1q\ \mathrm{v}_1\\u_2q\ \mathrm{v}_2\\\vdots\\u_kq\ \mathrm{v}_k\end{pmatrix}$$

דוגמה 3.2

בנו מטמ"ס שמכריעה את השפה:

$$L_{w^R}=\left\{w=\{a,b\}^*\ \middle|\ w=w^R\ .\right\}$$

כלומר שפת הפלינדרומים.

פתרון:

נבנה מ"ט עם שני סרטים:

<u>תאור המכונה:</u>

נסמן M_2 המ"ט עם 2 סרטים שמכריעה את השפה L_{w^R}.

$M_2 =$ על הקלט w:

(1) מעתיקה את w לסרט 2.

סרט 1	␣	a	b	a	a	a	b	a	␣
		↑	↑	↑					
		a	b	a	a	a	b	a	
סרט 2	␣	~~␣~~	~~␣~~	~~␣~~	~~␣~~	~~␣~~	~~␣~~	~~␣~~	␣
		↑	↑	↑					

(2) מזיזה את הראש בסרט 1 לתו הראשון ב- w ואת הראש בסרט 2 לתו האחרון ב- w.

(3) משווה בין התווים שמתחת לראשים:

- אם התו שמתחת לראש בסרט 1 הוא $\sqcup$ $\Leftarrow$ acc.
- אם התווים שמתחת לראשים שונים $\Leftarrow$ rej.
- אחרת מזיזה את הראש בסרט 1 ימינה ואת הראש בסרט 2 שמאלה, וחוזרת לשלב (3).

הפונקצית המעברים של M_2 היא:

$$\delta\left(q_0, \begin{pmatrix} a \\ \sqcup \end{pmatrix}\right) = \left(q_0, \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}\right) \ ,$$
$$\delta\left(q_0, \begin{pmatrix} b \\ \sqcup \end{pmatrix}\right) = \left(q_0, \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}\right) \ ,$$
$$\delta\left(q_0, \begin{pmatrix} \sqcup \\ \sqcup \end{pmatrix}\right) = \left(q_{\text{back}}, \begin{pmatrix} \sqcup \\ \sqcup \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ L \end{pmatrix}\right) \ .$$

נשים לב כי הסיבוכיות זמן של המכונה עם שני סרטים, M_2 היא $O(|w|)$, כאשר w האורך של המילה.

כעת נבנה מ"ט עם סרט יחיד שמכריעה את השפה L_{W^R}.

<u>תאור המכונה:</u>

נסמן M_1 המכונה עם סרט יחיד שמכריעה את השפה L_{w^R}.

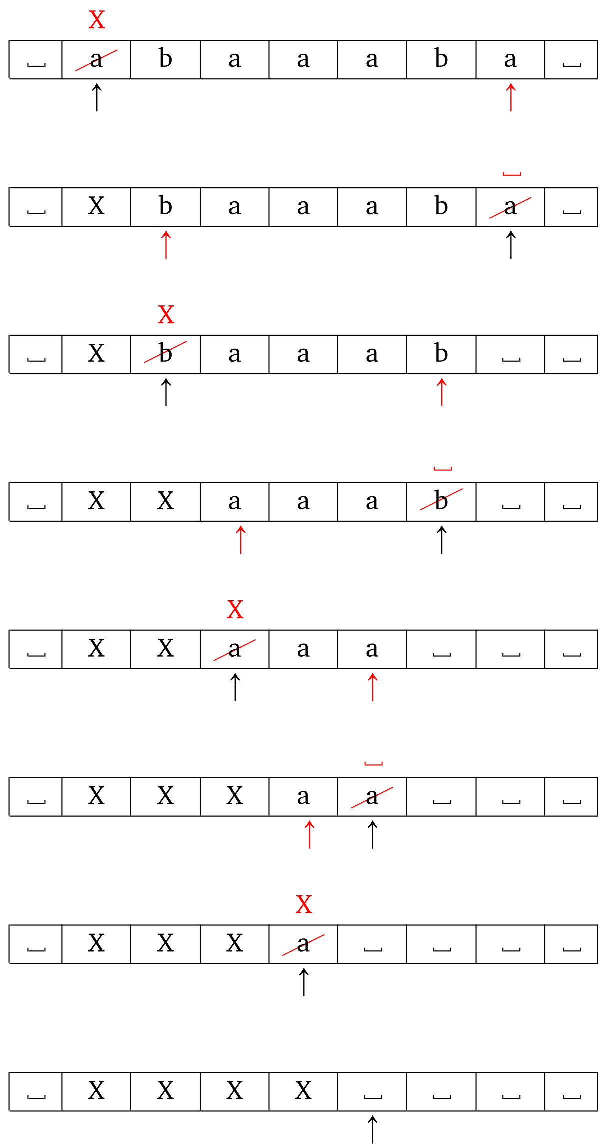
$M_1 =$ על הקלט w:

(1) אם התו שמתחת לראש הוא $\sqcup$ אז $M_1 \leftarrow$ acc.

(2) זוכרת את התו שמתחת לראש ומוחקת אותו ע"י X.

(3) מזיזה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאול ל- $\sqcup$.

- אם התו שמתחת לראש הוא X $\Leftarrow$ acc.
- אם התו שונה מהתו שזכרנו $\Leftarrow$ rej.
- מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י $\sqcup$, מזיזה את הראש שמאולה עד התו הראשון מימין ל- X וחוזרת לשלב (1).



3.4 שקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

מ"ט עם סרט יחיד היא מקרה פרטי של מטמ"ס.

משפט 3.1 שקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

לכל מטמ"ס M קיימת מ"ט עם סרט יחיד M' השקולה ל- M.

כלומר, לכל קלט $w\in\Sigma^*$:

- אם M מקבלת את w $\Leftarrow$ M' מקבלת את w.
- אם M דוחה את w $\Leftarrow$ M' דוחה את w.
- אם M לא עוצרת על w $\Leftarrow$ M' עוצרת על w.

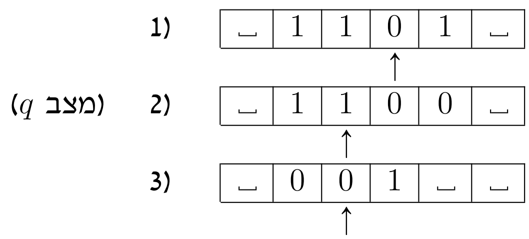
הוכחה:

בהינתן מטמ"ס $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta_k,q_0,q_{\text{acc}},q_{\text{rej}})$ עם k סרטים, נבנה מ"ט עם סרט יחיד $M'=(Q',\Sigma,\Gamma',\delta',q_0',q_{\text{acc}}',q_{\text{rej}}')$ השקולה ל- M באופן הבא:

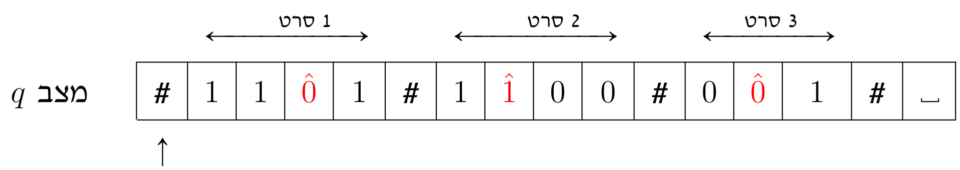
<u>רעיון הבנייה:</u>

בהינתן קלט $w \in \Sigma^*$, M' תבצע "סימולציה" של ריצה M על w.

<u>ב- M</u>



<u>ב- M'</u>



- M' תשמור את התוכן של k הסרטים של M על הסרט, רק שהתוכן של סרט i יופיע בין $\#_i$ ל- $\#_{i+1}$.
- M' תשמור את המיקום של הראשים של M ע"י הכפלת הא"ב Γ.

  כלומר, לכל אות $\alpha \in \Gamma$, M' תשמור שתי אותיות α ו- $\hat{\alpha}$ ב- Γ', כך ש- $\hat{\alpha}$ תסמן את התו שמתחת לראש בכל סרט.
- בכל צעד חישוב, M' סורקת את הסרט שלה משמאל לימין כדי ללמוד מהם התווים שמתחת לראשים (התווים שמסומנים ב- $\hat{\alpha}$).
- M' משתמשת בפונקצית המעברים δ_k של M כדי לחשב את המעבר הבא.
- M' סורקת את הסרט שלה משמאל לימין כדי לעדכן את הסרטים ואת המיקום הראשים בהם.

<u>תאור הבנייה של M':</u>

1) <u>שלב האיתחול</u>

בהינתן קלט $w = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n$, M' מאתחלת את הקונפיגורציה ההתחלתית של M על הסרט שלה.

<u>ב- M</u>

	1)	␣	σ_1	σ_2	$\cdots$	σ_n	␣
			↑				
(מצב q_0)	2)	␣	␣	␣	$\cdots$	␣	␣
			↑				
	3)	␣	␣	␣	$\cdots$	␣	␣
			↑				

ב- M'

מצב q_0'	σ_1	σ_2	$\cdots$	σ_n	␣	$\cdots$

$$\Downarrow$$

מצב q_0	#	$\hat{\sigma}_1$	σ_2	$\cdots$	σ_n	#	$\hat{␣}$	#	$\hat{␣}$	#	$\cdots$	#	␣	␣
	↑													

2) תאור צעד חישוב של M

ב- M

	1)	␣	1	1	0	1	␣
					↑		
(מצב q)	2)	␣	1	1	0	0	␣
				↑			
	3)	␣	0	0	1	␣	␣
				↑			

$$\delta_k\left(q,\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\left(p,\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}L\\R\\L\end{pmatrix}\right)$$

	1)	␣	1	1	1	1	␣
				↑			
(מצב p)	2)	␣	1	0	0	0	␣
					↑		
	3)	␣	0	0	1	␣	␣
			↑				

ב- M'

מצב q

#	1	1	$\hat{0}$	1	#	1	$\hat{1}$	0	0	#	0	$\hat{0}$	1	#	␣
$\uparrow$															

$$\Downarrow$$

מצב p

#	1	$\hat{1}$	1	1	#	1	0	$\hat{0}$	0	#	$\hat{0}$	0	1	#	␣
$\uparrow$															

- <u>איסוף מידע</u>
- M' סורקת את הסרט שלה משמאל לימין ומזהה את התווים שמסומנים ב- $\hat{\alpha}$.
  מידע זה ניתן לשמור במצבים. לדוגמה:

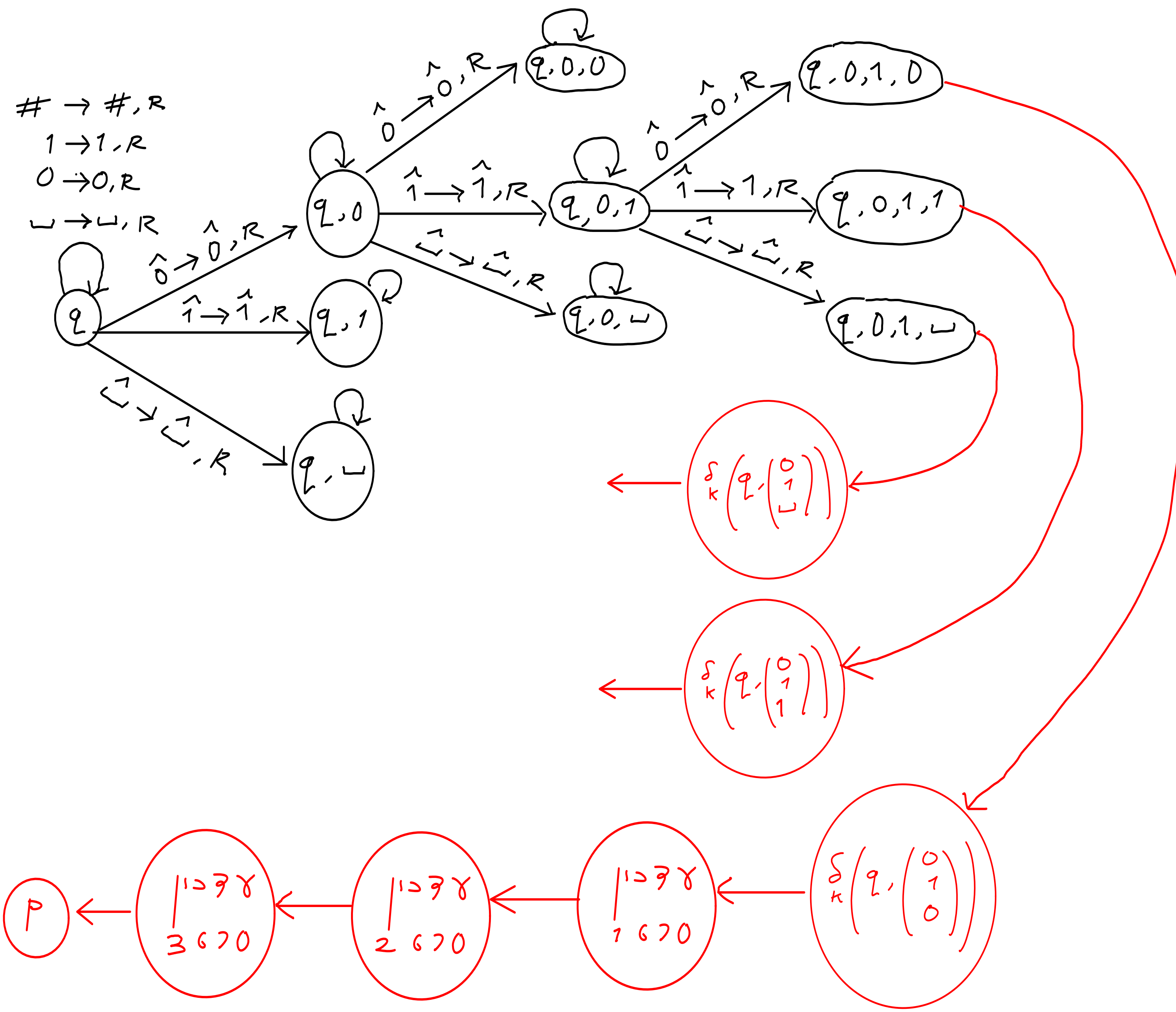
$$q \ , \ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

זה אפשרי מכיוון שמספר המצבים הנדרש הוא סופי:

$$|Q| \times |\Gamma|^k \ .$$

מצב q

#	1	1	$\hat{0}$	1	#	1	$\hat{1}$	0	0	#	0	$\hat{0}$	1	#	␣
$\uparrow$															



מצב p

#	1	$\hat{1}$	1	1	#	1	0	$\hat{0}$	0	#	$\hat{0}$	0	1	#	␣

$\uparrow$

- <u>עדכון הסרטים</u>

M' סורקת את הסרט שלה פעם נוספת כדי לפעול על פי פונקצית המעברים, כלומר, לעדכן את התאים שמתחת לראשים ולעדכן את מיקום הראשים.

■