המחלקה למדעי המחשב

25/07/24 י"ט בתמוז תשפ"ד
15 : 10 – 16 : 40

אלגברה לינארית 2 למדמ"ח

בוחן אמצע סמסטר

מרצה: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר

תשפ"ד סמסטר ב'

השאלון מכיל 4 עמודים (כולל עמוד זה).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (2 עמודים בפורמט $A4$) מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לענות על שאלות 1-4.

==

שאלה 1 (25 נקודות)

א) (15 נק') נתונים הווקטורים $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ במרחב מכפלה פנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^3$: $\mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

מצאו בסיס אורתוגונלי של הפרישה של $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$.

ב) (10 נק') הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית: אם ל- A יש ערך עצמי $\lambda = 0$ אז A לא הפיכה.

שאלה 2 (25 נקודות)

נתונה מטריצה $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

א) (10 נקודות) האם A לכסינה? נמקו את תשובתכם.

ב) (15 נקודות) אם כן, מצאו P הפיכה ו D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

שאלה 3 (25 נקודות)

תהי A מטריצה ממשית ריבועית. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

א) (8 נקודות) אם A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ אז A הפיכה.

ב) (8 נקודות) אם A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ אז A לא הפיכה.

ג) (9 נקודות) אם A הפיכה אז A לא לכסינה.

שאלה 4 (25 נקודות)

תהיינה A ו- B מטריצות דומות.

א) (10 נקודות) הוכיחו כי $|A| = |B|$.

ב) (15 נקודות) הוכיחו כי $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$, כלומר הפולינום אופייני של A שווה לפולינום אופייני של B.

פתרונות

שאלה 1 (25 נקודות)

א)

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \ .$$

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \ .$$

$$\|u_1\|^2 = \langle u_1, u_1\rangle = 1^2 + 2^2 + 1^2 = 6 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle = 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 1\cdot 2 = 3 \ .$$

$$u_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} - \frac{3}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} \ .$$

ב) <u>שיטה 1</u>

$\lambda = 0$ ערך עצמי של A

$\Rightarrow \quad p_A(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad |A - 0\cdot I| = 0 \quad \Rightarrow \quad |A| = 0 \Leftrightarrow$ A לא הפיכה

<u>שיטה 2</u>

$|A|$ שווה למכפלה של הערכים עצמיים שלה: $A = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k$. ז"א אם קיים ערך עצמי $\lambda_i = 0$ של A אז $|A| = \lambda_1\lambda_2\ldots 0\ldots\lambda_k = 0 \Leftrightarrow$ A לא הפיכה.

שאלה 2 (25 נקודות)

א) המטריצה משולשית $\Leftarrow$ הערכים עצמיים הם האיבריסון על האלכסון: $\lambda = -1, \lambda = 2, \lambda = 1$.
כל הערכים עצמיים שונים, כלומר הריבוי אלגברי של כל ערך עצמי הוא 1 לכן A לכסינה.

ב) מרחב עצמי של $\lambda=-1$:

$V_{-1}=\text{Nul}(A+I)$:

$$(A{+}I|0)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&-2&0\\0&3&2&0\\0&0&2&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-3R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&-2&0\\0&0&8&0\\0&0&2&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{8}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&-2&0\\0&0&1&0\\0&0&2&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&-2&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

פתרון: $x\in\mathbb{R}$,x $\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. לפיכך

$$V_{-1}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\ .$$

נסמן ווקטור עצמי של $\lambda=-1$ ב- $u_{-1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

מרחב עצמי של $\lambda=2$:

$V_{-1}=\text{Nul}(A+I)$:

$$(A{-}2I|0)=\left(\begin{array}{ccc|c}-3&1&-2&0\\0&0&2&0\\0&0&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2+2R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}-3&1&-2&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}-3&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-2&0\end{array}\right)$$

פתרון: $x\in\mathbb{R}$,x $\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\3x\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. לפיכך

$$V_2=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\right\}\ .$$

נסמן ווקטור עצמי של $\lambda=2$ ב- $u_2=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$.

מרחב עצמי של $\lambda=1$:

$V_1=\text{Nul}(A-I)$:

$$(A-I|0)=\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&-2&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}-2&0&-4&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

פתרון: $z,\ z\in\mathbb{R}$ $\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2z\\-2z\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. לפיכך

$$V_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}\right\} .$$

נסמן ווקטור עצמי של $\lambda=1$ ב- $u_1=\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$.

$$A = PDP^{-1}\ , \qquad D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ , \qquad P=\begin{pmatrix}|&|&|\\u_{-1}&u_2&u_1\\|&|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&3&-2\\0&0&1\end{pmatrix} .$$

שאלה 3

א) דוגמה נגדית: $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$. A לכסינה (כי היא מטריצה אלכסונית) אבל A לא הפיכה (כי יש בה שורה של אפסים).

ב) דוגמה נגדית: $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$. A לכסינה (כי היא מטריצה אלכסונית) ו-A הפיכה (בגלל ש- $|A|=1\neq0$).

ג) דוגמה נגדית: $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ הפיכה ($|A|=1\neq0$) ו- A לכסינה.

שאלה 4 (25 נקודות)

א) $\exists P$ הפיכה כך ש- $B=PAP^{-1}$. P הפיכה לכן $|P|\neq0$ לכן

$$|B|=|PAP^{-1}|=|P||A||P^{-1}|=|P||A|\frac{1}{|P|}=|A| .$$

ב)

$$p_A(\lambda)=|\lambda I-A|=|PIP^{-1}-PBP^{-1}|=|P\left(\lambda I-B\right)P^{-1}|=|P||\lambda I-B||P^{-1}|=|P||\lambda I-B|\frac{1}{|P|}=|\lambda I-B|=p_B(\lambda) .$$