שיעור 4
רציפות בקטע והגדרת הנגזרת

גבולות מיוחדים

4.1 משפט. (גבולות מיוחדים)

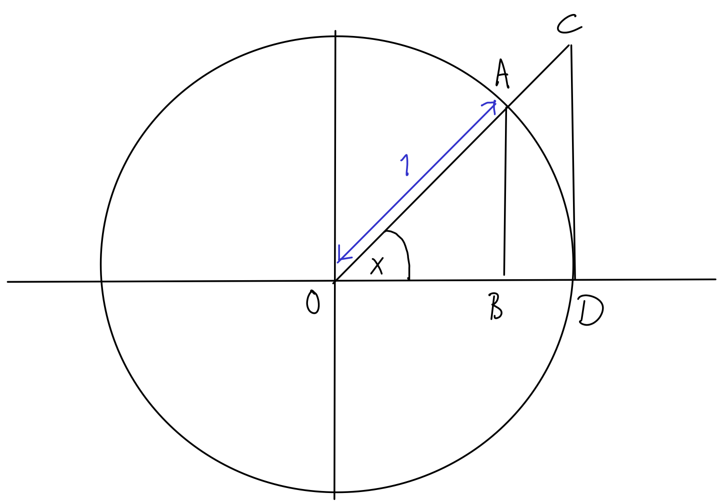
א) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

ב) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$

ג) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

הוכחה.

$\underline{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$



$$S_{\Delta OAB} < S_{\Delta OAD} < S_{\Delta OCD}$$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{OB \cdot OA}{2} = \frac{\sin x \cdot \cos x}{2} \ ,$$

$$S_{\Delta OAD} = \frac{AD \cdot OA}{2} = \frac{1 \cdot 1 \cdot x}{2} = \frac{x}{2} \ ,$$

$$S_{\Delta OCD} = \frac{CD \cdot OA}{2} = \frac{1 \cdot \tan x}{2} = \frac{\tan x}{2} \ ,$$

$$\frac{\sin x \cdot \cos x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$$

שימו לב $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. נחלק את האי-שוויון ב- $\sin x$:

$$\frac{\cos x}{2} < \frac{x}{2\sin x} < \frac{1}{2\cos x}$$

נכפיל את האי-שוויון ב- 2:

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

נקח אצ הגבול $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \cos x < \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} < \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \qquad \Rightarrow \qquad 1 < \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} < 1$$

לכן לפי כלל הסנדוויץ'

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \ .$$

■

דוגמאות

דוגמאות.

1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2} \ .$$

□

2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

□

3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$$

נרשום $x = \sin t \qquad \Leftrightarrow \qquad t = \arcsin x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = 1$$

□

4.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}$$

נרשום $x = \tan t \qquad \Leftrightarrow \qquad t = \arctan x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\tan t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} \cdot \cos t = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} \cdot \lim_{t\to 0} \cos t = 1$$

□

.5

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\ .$$

$\square$

.6

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x-\sin 2x}{\sin x+\sin 3x}\right)&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin 4x}{x}-\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 3x}{x}}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4\cdot\frac{\sin 4x}{4x}-2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin x}{x}+3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}\right)\\&=\frac{4-2}{1+3}\\&=\frac{1}{2}\ .\end{aligned}$$

$\square$

.7

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x+7x^2}{\sin 2x}\right)&=3\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin 2x}\right)+7\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin 2x}\right)\\&=3\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{2\sin 2x}\right)+7\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot 2x}{2\sin 2x}\right)\\&=\frac{3}{2}\ .\end{aligned}$$

$\square$

.8

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0\ .$$

$\square$

.9

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=[1^\infty]$$ לא מוגדר

$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}\\&=e^2\ .\end{aligned}$$

$\square$

.10

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{5/x}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{5/x} = [1^{\infty}]$$ לא מוגדר

$$= \lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 10}$$

$$= e^{10}\ .$$

$\square$

.11

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x} = [1^{\infty}]$$ לא מוגדר

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)-1}{1+x}\right)^{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\left(\frac{-1}{1+x}\right)\right)^{-(x+1)}\right]^{\frac{x}{-(x+1)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}[e]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{-(x+1)}}$$

$$= e^{-1}\ .$$

$\square$

.12

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = [1^{\infty}]$$ לא מוגדר

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+(\cos 2x-1)\right)^{\frac{1}{\cos 2x-1}\cdot\frac{\cos 2x-1}{x^2}}$$

$$= \left[\lim_{x\to 0}\left(1+(\cos 2x-1)\right)^{\frac{1}{\cos 2x-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}}$$

$$= [e]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}}\ .$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2-\sin^2 x-(\cos^2 x+\sin^2 x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{x^2}$$

$$=-2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$=-2\ .$$

לכן

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-2}\ .$$

□

13.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=[1^{-\infty}]$$ לא מוגדר

נגדיר $t=-x$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\left(\frac{-1}{t}\right)\right)^{-t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{(t-1)+1}{t-1}\right)^{t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{(t-1)\cdot\frac{t}{t-1}}$$

$$=e\ .$$

□

14.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-1}{2x^2+5x}\right)^x=\left[\frac{1}{2}\right]^\infty=0$$

□

.15

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-1}{x^2+5x}\right)^x =[1^\infty]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2x-1}{x^2+5x}\right)^{\frac{x^2+5x}{-2x-1}\cdot\frac{(-2x-1)}{x^2+5x}\cdot x}$$

$$=e^{-2}$$

□

רציפות בנקודה

4.2 הגדרה: (רציפות בנקודה)
פונקציה $f(x)$ המוגדרת בנקודה a ובסביבה מסוימת של a נקרא רציפה בנקודה a אם קיים הגבול $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ והוא שווה לערך $f(a)$ של הפונקציה בנקודה $x=a$.

4.3 הגדרה: (אי-רציפות בנקודה)
תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה a אבל לא בהכרח בנקודה a עצמה.

א) אם קיימים הגבולות החד-צדדים הסופיים ו-

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)\neq f(a)$$

או ש $f(a)$ לא מוגדר, אומרים כי a היא נקודת אי-רציפות סליקה של $f(x)$.

ב) אם קיימים הגבולות החד-צדדים הסופיים $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, ו- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ אבל

$$\lim_{x\to a^-} f(x)\neq\lim_{x\to a^+} f(x)$$

אומרים כי a היא נקודת אי-רציפות מסוג ראשון $f(x)$.

ג) אם לפחות אחד מן הגבולות החד-צדדים לא קיים, אומרים כי a היא נקודת אי-רציפות מסוג שני $f(x)$.

4.4 הגדרה: (אי-רציפות בקטע)
אומרים כי פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $I=[a,b]$ אם היא רציפה בכל נקודה x בפנים הקטע, ז"א בכל $x\in(a,b)$.

דוגמא.
נתונה פונקציה

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x} & x\leq 1\\ ax^2 & -1<x\leq 1\\ \sqrt{x+b} & x>1\end{cases}$$

עבור אילו ערכי a,b $f(x)$ רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$?

פיתרון.
<u>רציפות בנקודה $x=-1$</u>

$$\lim_{x\to -1^-} f = 2^{-(-1)} = 2 \ , \qquad \lim_{x\to -1^+} f = a(-1)^2 = a \ .$$

לכן f רציפה ב- $x=-1$ אם $a=2$.

<u>רציפות בנקודה $x=1$</u>

$$\lim_{x\to 1^-} f = a1^2 = a(=2) \ , \qquad \lim_{x\to 1^+} f = \sqrt{1+b} \ .$$

לכן f רציפה ב- $x=1$ אם

$$\sqrt{1+b} = 2 \quad \Rightarrow \quad b=3 \ .$$

■

דוגמא.
לאילו ערכי פרמטר a הפונקציה $f(x)=\dfrac{x}{a+\sin x}$ תהיה רציפה לכל x ממשי?

פיתרון.
$f(x)$ רציפה לכל x ממשי כאשר $a+\sin x\neq 0$ לכל $x\in\mathbb{R}$. שים לב $-1\leq \sin x\leq 1$ לכן $a+\sin x\neq 0$ עבור $a>1$ ו- $a<-1$. ■

דוגמא.
נתונה פונקציה

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin^2\left(\sqrt{a^2+1}\cdot x\right)}{2x^2} & x<0 \\ b & x=0 \\ x+5 & x>0 \end{cases}$$

א. עבור אילו ערכי a,b $f(x)$ רציפה ב- $x=0$?

ב. עבור אילו ערכי a,b $f(x)$ הנקודה $x=0$ נקודת אי-רציפות ממין ראשון?

ג. עבור אילו ערכי a,b $f(x)$ הנקודה $x=0$ נקודת אי-רציפות סליקה?

פיתרון.

א.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2\left(\sqrt{a^2+1}\cdot x\right)}{2x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{a^2+1}{2}\frac{\sin^2\left(\sqrt{a^2+1}\cdot x\right)}{\left(\sqrt{a^2+1}\cdot x\right)^2} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{a^2+1}{2} \ ,\end{aligned}$$

ו-

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+5) \\ = 5\ ,$$

ו- $f(0)=b$. כדי ש- f תהיה רציפה נדרש כי $\lim_{x\to 0^-} f = \lim_{x\to 0^+} f = f(0)$ וזה מתקיים אם $\frac{a^2+1}{2} = 5 = b$ או שקול

$$b=5\ , \qquad a=\pm 3\ .$$

ב. הגבול $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 5$ קיים לכל $b\in\mathbb{R}$ והגבול $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{a^2+1}{2}$ קיים לכל $b\in\mathbb{R}$. לכן $x=0$ תהיה נקודת אי-רציפות ממין ראשון אם

$$\frac{a^2+1}{2} \neq 5 \qquad \Rightarrow \qquad a\neq \pm 3$$

לכל $b\in\mathbb{R}$.

ג. הגבולות $\lim_{x\to 0^\pm} f$ זהים אם $a=\pm 3$ ו-

$$\lim_{x\to 0^\pm} f \neq f(0) = b$$

אם $b\neq 5$.

■

רציפות פונקציה בקטע

4.1 הגדרה: (רציפות בקטע פתוח)
פונקציה $f(x)$ נקראת רציפה בקטע פתוח (a,b) אם f רציפה בכל נקודה $c\in(a,b)$ בקטע. ז"א

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$$

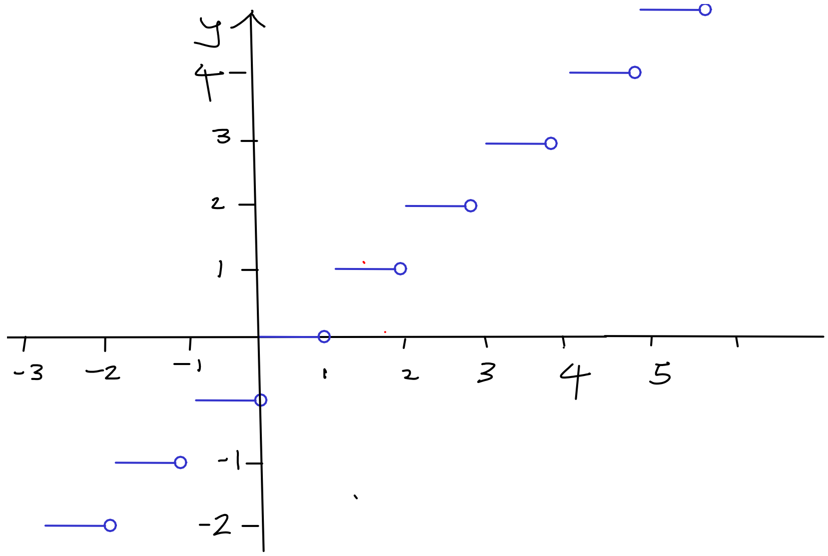
לכל $a<c<b$.

4.2 הגדרה: (רציפות בקטע סגור)
פונקציה $f(x)$ נקראת רציפה בקטע סגור $[a,b]$ אם f רציפה בכל נקודה פנימית הקטע וגם

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)\ , \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)\ .$$

דוגמא.
$f(x)=\lfloor x\rfloor$, פונקצית הרצפה של x (ז"א אומרת המספר השלם הקרוב ביותר ל- x ופחות מ- x). קבע אם $f(x)$ רציפה בקטע $[1,2]$.

פיתרון.



בקטע הפתוח $(1,2)$ $f(x)=1$ - רציפה.

$$\lim_{x\to 1^+}[x]=1\ ,\quad f(1)=1$$

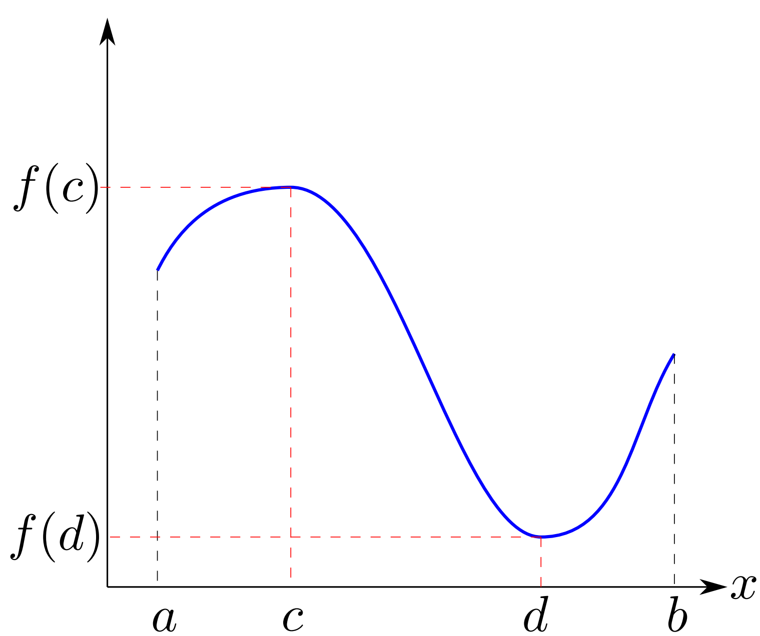
$$\lim_{x\to 2^-}[x]=1\ ,\quad f(2)=2$$

לכן f לא רציפה משמאל בנקודה $x=2$, $f(x)$ רציפה מימין בנקודה $x=1$. אז $f(x)$ לא רציפה בקטע סגור $[1,2]$, אבל f רציפה בקטע $[1,2)$. ■

משפטים היסודיים של רציפות פונקציה בקטע סגור

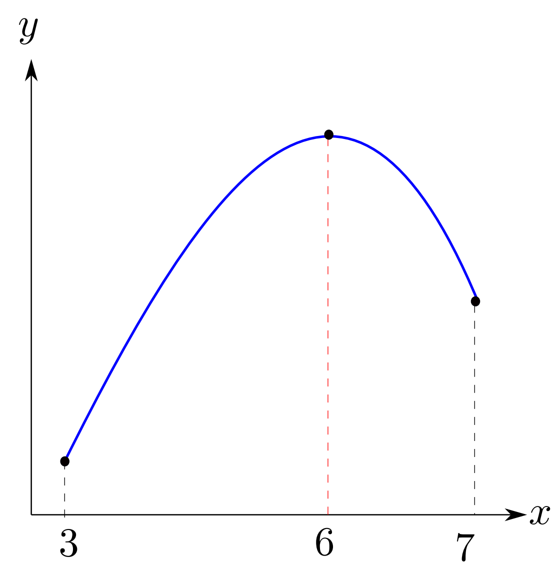
4.3 תורת. (משפט ויירשטראס - ערך גדול ביותר וקטן ביותר של פונקציה)
תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$. אז $f(x)$ מקבלת בקטע זו את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר עבור קטע זו. ז"א קיים מספרים c ו- d בקטע $[a,b]$ כך ש

$$f(d)\le f(x)\le f(c)\qquad \forall x\in[a,b]\ .$$



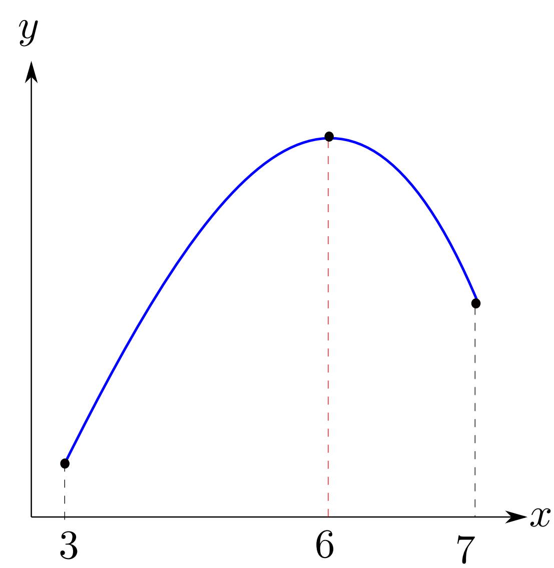
דוגמאות.

1 $f(x) = -(x-2)(x-10)$ רציפה קטע $[3,7]$.



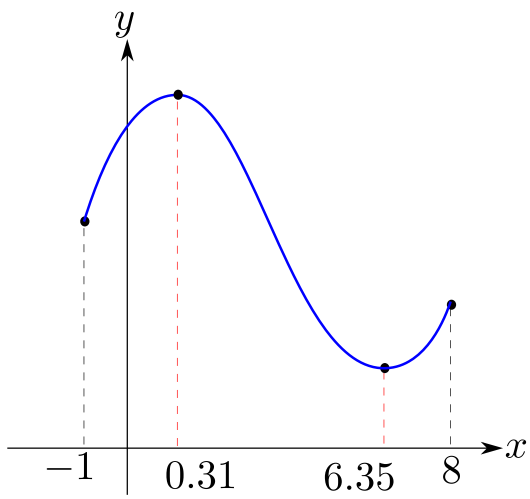
מינימום	$f(3)$
מקסימום	$f(6)$

2 $f(x) = x^2 - 10x + 30$ רציפה קטע $[2,7]$.



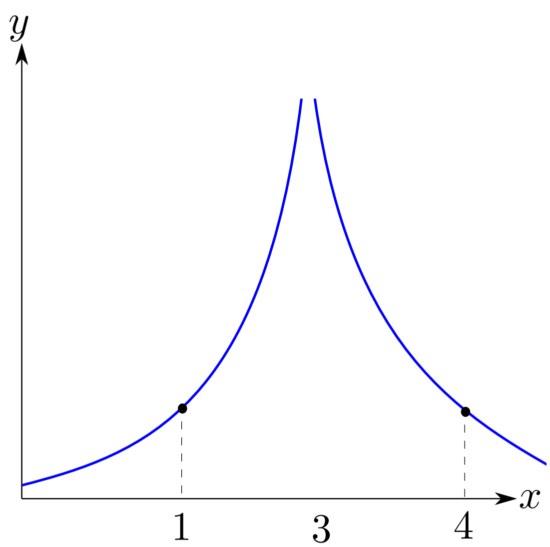
מינימום	$f(5)$
מקסימום	$f(2)$

3 $f(x) = x^3 - 10x^2 + 6x + 150$ רציפה קטע $[2,7]$.



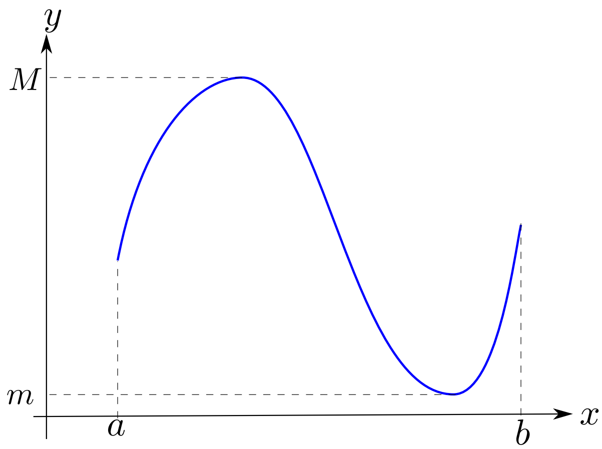
מינימום	$f(0.31)$
מקסימום	$f(6.35)$

4 $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ בקטע $I=[1,4]$. f לא רציפה בקטע I ולכן לא מקבלת ערך מינימום.



4.4 תורת. (משפט חסימות של פוקציה של ויירשטראס)
פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$, חסומה שם. ז"א קיימים מספרים m ו- M כך ש

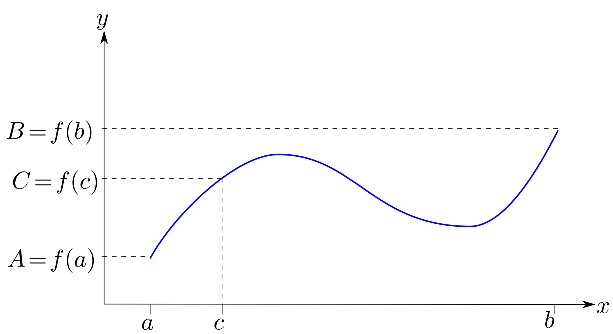
$$m\le f(x)\le M \qquad \forall x\in[a,b]\ .$$



4.5 משפט. (משפט ערך הביניים)
תהי פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ המקבלת בקצוות הקטע ערכים שונים, ז"א

$$f(a)=A\ ,\qquad f(b)=B\ ,\qquad A\neq B\ .$$

אז f מקבלת בקטע זו את כל הערכים בין A ו- B.

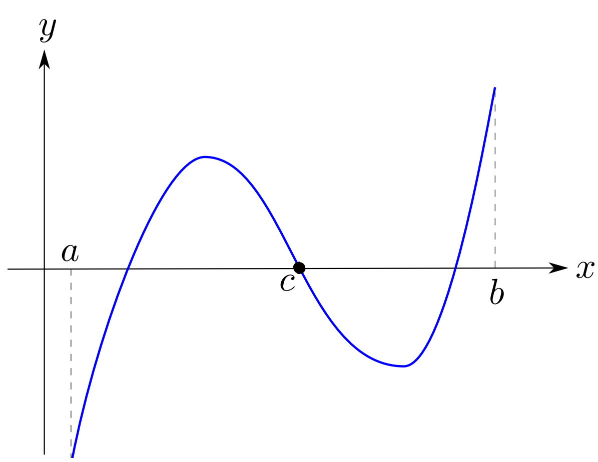


4.6 משפט. (משפט בולזנו)
תהי פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ ובקצוות הקטע f מקבלת ערכים מסימנים שונים, כלומר

$$f(a)\cdot f(b)<0\ .$$

אז קיימת לפחות נקודה אחד c, כך ש $a<c<b$ ו-

$$f(c)=0\ .$$



דוגמא.
הוכח כי למשוואה
$$e^{2x+1}+x^2-5=0$$
יש שורש ממשי אחת ומצא אותו עם דיוק של שתי ספרות.

פיתרון.
נגדיר פונקציה
$$f(x)=e^{2x+1}+x^2-5 \ .$$
שים לב
$$f(0)=-5+e<0 \ , \qquad f(1)=-4+e^3>0 \ .$$
מכיוון ש- $f(x)$ פונקציה אלמנטרית ומוגדרת בקטע $[0,1]$, אז f רציפה בקטע זו. $f(0)<0$ ו- $f(1)>0$ לכן לפי משפט בולזנו (משפט 4.6) קיים c בתחום $0<c<1$ כך ש- $f(c)=0$.

בנוסף f חח"ע בקטע $I=[0,1]$ ולכן f עולה ממש או יורדת ממש (ומכיין ש $f(0)<f(1)$ אז f עולה ממש). לכן הנקודה שבה $f(c)=0$, יחידה.

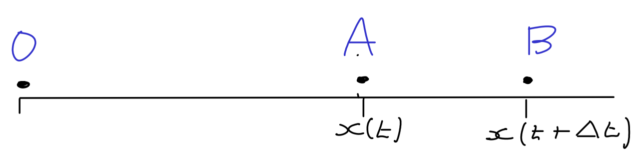
$f(0)$	$-2.281<0$
$f(0.1)$	$-1.669<0$
$f(0.2)$	$-0.904<0$
$f(0.3)$	$0.043>0$

לכן $0.2<c<0.3 \Leftarrow c\approx 0.2$.

$f(0.29)$	$-0.06<0$
$f(0.3)$	$0.043>0$

$0.29<c<0.3 \Leftarrow c\approx 0.29$. ■

משמעות הפיזית של נגזרת



נניח שגוף הנמצא בנקודה $x(t)$ בזמן התחלתי t, נע לנקודה $x(t+\Delta t)$ ומסתיים שם בזמן סופי $t+\Delta t$. המהירות הממוצעת היא
$$\bar{\mathrm{v}}=\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \ .$$
מכאן המהירות הרגעית בנקודה A היא
$$\mathrm{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{\mathrm{v}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=x'(t) \ .$$
ז"א המשמעות הפיזית של הנגזרת היא מהירות.

4.7 הגדרה: (הנגזרת)
הנגזרת של פונקציה $f(x)$ בנקודה x תסומן $f'(x)$ ותוגדר

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \ .$$

דוגמאות.

1. $\underline{f(x) = c}$

$$c' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = 0 \ .$$

2. $\underline{f(x) = x}$

$$x' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = 1 \ .$$

3. $\underline{f(x) = x^2}$

$$\begin{aligned} (x^2)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2\Delta x \cdot x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x \cdot x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (2 \cdot x + \Delta x) \\ &= 2x \ . \end{aligned}$$

4. $\underline{f(x) = x^n}$

$$\begin{aligned} (x^n)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^{n-k}\Delta x^k + \cdots + \Delta x^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^{n-k}\Delta x^k + \cdots + \Delta x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^{n-k}\Delta x^{k-1} + \cdots + \Delta x^{n-1} \right) \\ &= nx^{n-1} \ . \end{aligned}$$

5. $\underline{f(x) = \ln x}$

$$
\begin{aligned}
(\ln x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left[\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x}\right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x}}\right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \ln\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] \\
&= \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] \\
&= \frac{1}{x} \cdot \ln\left(\lim_{\Delta x \to 0} \left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]\right) \\
&= \frac{1}{x} \cdot \ln(e) \\
&= \frac{1}{x} \ .
\end{aligned}
$$

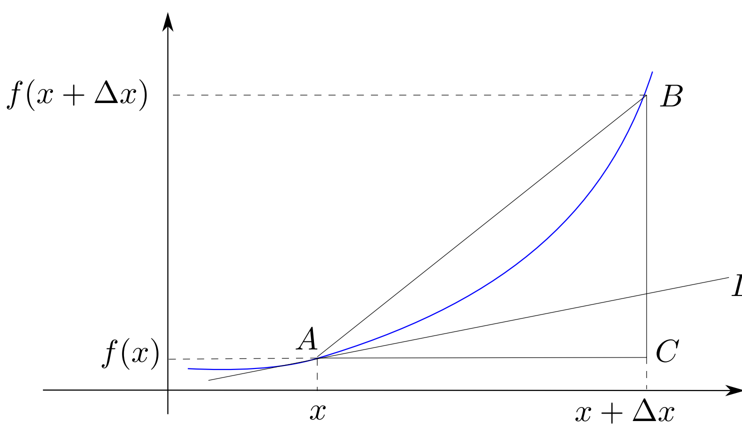
.6 <u>$f(x) = \frac{1}{x}$</u>

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x}\right)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{x \cdot (x+\Delta x) \cdot \Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x \cdot (x+\Delta x)} \\
&= \frac{-1}{x^2} \ .
\end{aligned}
$$

.7 <u>$\sqrt{x}$</u>

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{x}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\\
&=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ .
\end{aligned}
$$

משמעות הגאומטרית של נגזרת



השיפוע של הגרף בנגודה A מוגדרת להיות השיפוע של המשיק לגרף בנקודה A - ז"א השיפוע של הישר AD. יהי A הנקודה $(x,f(x))$ ו- B הנקודה $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$. אז המיתר AB מתלכד עם המשיק AD בגבול כאשר B מתקרב לנקודה A, וזה מתרחש כאשר $\Delta x\to 0$. לכן ניתן לחשב השיפוע של המשיק ע"י השיפוע של הישר AB בגבול ש- $\Delta x\to 0$. נקבל

$$\text{שיפוע של המשיק} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{BC}{AC} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

אבל אגף הימין הוא דווקא הנגזרת של $f(x)$ בנקודה A, לכן מצאנו כי השיפוע של גרף הפונקציה $f(x)$ בנוקה-x שווה להנגזרת בנקודה זו.

ממשוואת משיק ונורמל

4.8 כלל: (משיק ונורמל של גרף)
משוואת הישר המשיק לקו $y=f(x)$ בנוקדה x_0 היא

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

משוואת הישר הנורמל לקו $y=f(x)$ בנוקדה x_0 היא

$$y-y_0=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

דוגמא.
$f(x)=x^2$. מצא את משוואת המשיק ומשוואת הנורמל בנקודה $x=2$.

פיתרון.
משוואת המשיק:

$$y-2^2=2\cdot 2(x-2) \qquad \Rightarrow \qquad y-4=4(x-2)\ .$$

ומשוואת הנורמל:

$$y-2^2=\frac{-1}{2\cdot 2}(x-2) \qquad \Rightarrow \qquad y-4=-\frac{1}{4}(x-2)\ .$$

■

גזירות

4.9 משפט. (קשר בין גזירות ורציפות)
פונקציה $f(x)$ שהיא גזירה בנקודה x_0 רציפה בנקודה זו.

שים לב, $f(x)$ רציפה בנקודה x_0 לא בהכרח גזירה ב- x_0.

דוגמאות.

.1

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}\ .$$

נבדוק אם $f(x)$ רציפה בנקודה $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^+}|x|=\lim_{x\to 0^+}x=0\ , \qquad \lim_{x\to 0^-}|x|=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0\ .$$

לכן $f(x)$ רציפה בנקודה $x=0$.

נבדוק אם $f(x)$ גזירה בנקודה $x=0$:

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1\ ,$$
$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1\ .$$

לכן מכיוון ש- $f'_-(0)\neq f'_+(0)$ אז f אינה גזירה ב- $x=0$. ז"א לא קיים משיק בנקודה $x=0$.

.2

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}\ .$$

נבדוק אם $f(x)$ רציפה בנקודה $x=0$. שים לב $\sin(\frac{1}{x})$ חסומה ולפיו

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0\ .$$

שים לב $f(0)=0$ ולכן $f(x)$ רציפה ב- $x=0$.

נבדוק אם $f(x)$ גזירה בנקודה $x=0$:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(0+\Delta x)\sin\left(\frac{1}{0+\Delta x}\right)-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)}{\Delta x}\ .$$

הגבול לא קיים ולכן $f(x)$ אינה גזירה ב- $x=0$.

כללי הנגזרת

4.10 משפט. (כללים יסודיים של נגזרות)

1. סכום של פונקציות

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)\ .$$

2. מכפלת פונקציה בסקלר

$$(\alpha f(x))'=\alpha f'(x)\ .$$

3. כלל הכפל

$$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\ .$$

4. כלל המנה

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}\ .$$

5. כלל השרשרת

$$[f\left(g(x)\right)]'=f\left(g\right)'_g\cdot g(x)'_x\ .$$

דוגמאות

.1

$$\left[\ln\left(x^4-2x^2+6\right)\right]'=\frac{1}{x^4-2x^2+6}\cdot(4x^3-4x)$$

.2

$$\left[7^{x^2-4x}\right]'=7^{x^2-4x}\cdot\ln 7\cdot(2x-4)\ .$$

דוגמא.
מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ בנקודה $A(\pi/2,2)$.

פיתרון.

$$f'(x) = 8\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{2}\ .$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -8\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} = -8\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = -2\ .$$

משוואת המשיק:

$$y-2 = -2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

משוואת הנורמל:

$$y-2 = \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

■

זווית בין קווים עקומים

דוגמא.
מצא את הזווית בין הקווים $y=\frac{x}{2}$ ו- $y=\frac{1}{1+x}$ בנקודת החיתוך שלהם שבה $x>0$. צייר את הסקיצה המתאימה.

פיתרון.
<u>נקודת חיתוך:</u>

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{x+1} \qquad \Rightarrow \qquad x(x+1)=2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2+x-2=0 \qquad \Rightarrow \qquad x=1\ .$$

נקודת חיתוך: $(1,0.5)$

<u>שיפוע של y_1:</u>

$$y_1=\frac{x}{2}\ , \qquad y_1'=\frac{1}{2}\ , \qquad y_1'(1)=\frac{1}{2}=m_1\ .$$

<u>שיפוע של y_2:</u>

$$y_2=\frac{1}{x+1}\ , \qquad y_2'=\frac{-1}{(x+1)^2}\ , \qquad y_1'(1)=\frac{-1}{4}=m_2\ .$$

<u>חישוב הזווית בין y_1 ו- y_2:</u>