

עבודה עצמית 10 אינטגרלים כפולים

**שאלה 1** באינטגרל  $\iint_D f(x, y) dx dy$

שרטטו את התחום, החליפו את סדר האינטגרציה וחשבו את האינטגרל כאשר:

- (א)  $f(x, y) = x$  ותחום  $D$  חסום ע"י הקווים  $y = x$ ,  $y = 2x$ ,  $x = 4$ ,  $x = 6$ .
- (ב)  $f(x, y) = x$  תחום  $D$  חסום ע"י הקווים  $y = x$ ,  $x = 0$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x \geq 0$ .
- (ג)  $f(x, y) = y$  תחום  $D$  חסום ע"י הקווים  $y = x$ ,  $y = 4 - x$ ,  $x = 0$ .
- (ד)  $f(x, y) = 1$  תחום  $D$  חסום ע"י הקווים  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = -\sqrt{x}$ ,  $x = 4$ .
- (ה)  $f(x, y) = x + y$  תחום  $D$  הוא המשולש בעל קדקודים  $B(1, 1)$ ,  $A(1, 0)$ ,  $O(0, 0)$ .
- (ו)  $f(x, y) = x - y$  תחום  $D$  הוא המשולש בעל קדקודים  $B(-2, 1)$ ,  $A(2, 1)$ ,  $O(0, 0)$ .
- (ז)  $f(x, y) = x^2$  תחום  $D$  הוא טרפז בעל קדקודים  $C(0, 1)$ ,  $B(1, 2)$ ,  $A(1, 0)$ ,  $O(0, 0)$ .

**שאלה 2** החלף את סדר האינטגרציה באינטגרלים הבאים:

- (א)  $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$
- (ב)  $\int_{-6}^2 dx \int_{x^2/4-1}^{2-x} f(x, y) dy$
- (ג)  $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy$
- (ד)  $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy$
- (ה)  $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$
- (ו)  $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$

**שאלה 3** חשבו את האינטגרלים הבאים:

(א)  $\int_0^1 dx \int_0^1 (x + y) dy$

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy^2 dy \quad (\text{ב})$$

$$\int_0^2 dx \int_0^x 3 dy \quad (\text{ג})$$

$$\int_D x\sqrt{y} dx dy \quad (\text{ד}) \quad \text{כאשר התחום } D \text{ הוא הריבוע } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

$$\int_D y dx dy \quad (\text{ה}) \quad \text{כאשר התחום } D \text{ חסום ע"י הקווים } y^2 = x, y = x - 2.$$

$$\int_D (x - y) dx dy \quad (\text{ו}) \quad \text{כאשר התחום } D \text{ חסום ע"י הקווים } y = 0, y = x, x + y = 2.$$

**שאלה 4** ציירו את תחום האינטגרציה וחשב את האינטגרל על ידי מעבר לקואורדינטות קוטביות:

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} e^{x^2+y^2} dx dy \quad (\text{א})$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 4} (x^2 + y^2)^2 dx dy \quad (\text{ב})$$

$$\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy \quad (\text{ג}) \quad \text{כאשר התחום } D \text{ הוא רבע העיגול } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ הנמצא ברביע הראשון.}$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{x^2+y^2} dx dy \quad (\text{ד})$$

$$\iint_{\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2} \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy \quad (\text{ה})$$

**שאלה 5** חשב את נפח הגוף החסום על ידי המשטחים הנתונים. צייר את הגוף במערכת הצירים  $xyz$ :

$$x + y + z = 1, z = 0, x = 0, y = 0 \quad (\text{א})$$

$$z = x + y, x + y = 1, z = 0, x = 0, y = 0 \quad (\text{ב})$$

$$z = x^2 + y^2, x = 2, y = 2, z = 0, x = 0, y = 0 \quad (\text{ג})$$

$$z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0 \quad (\text{ד})$$

$$(ה) \quad z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 1, z = 0$$

**שאלה 6** מצא את המסה של הגוף המישורי בעל צפיפות נתונה  $\rho(x, y)$  וחסום על ידי הקווים הנתונים.

$$(א) \quad \rho(x, y) = 1, x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 1$$

$$(ב) \quad \rho(x, y) = x, x \geq 0, x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 1$$

$$(ג) \quad \rho(x, y) = x^2 + y^2, x = \sqrt{3}y, y = \sqrt{3}x, x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 1$$

## שאלה 7

סרטטו את תחום האינטגרציה, החליפו את סדר האינטגרציה וחשבו:

$$\int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt{-x}}^1 \cos(\pi y^3) dy + \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 \cos(\pi y^3) dy$$

**שאלה 8** חשבו את נפח הגוף החסום על ידי המשטחים

$$x = 0, y = 0, y + x = 2, z = 0, z = 8 - 2x^2$$

וסרטטו אותו במערכת הצירים  $xyz$ .

**שאלה 9** שינוי סדר של אינטגרלים חשב את האינטגרל

$$I = \int_2^{18} dx \int_{\sqrt{x-2}}^4 dy e^{-5(x-2)/y}$$

## שאלה 10

ציירו את תחום האינטגרציה וחשבו

$$\iint_D xy^2 dx dy$$

כאשר התחום  $D$  חסום ע"י הקווים  $y = x^2, y = x$ .

**שאלה 11** חשבו את המסה של חלק העיגול  $x^2 + y^2 \leq 9$  הנמצא בתוך הרביע הראשון בתנאי שצפיפות החומר

שממנו עשוי העיגול משתנה על פי החוק  $\rho = x^2$ .

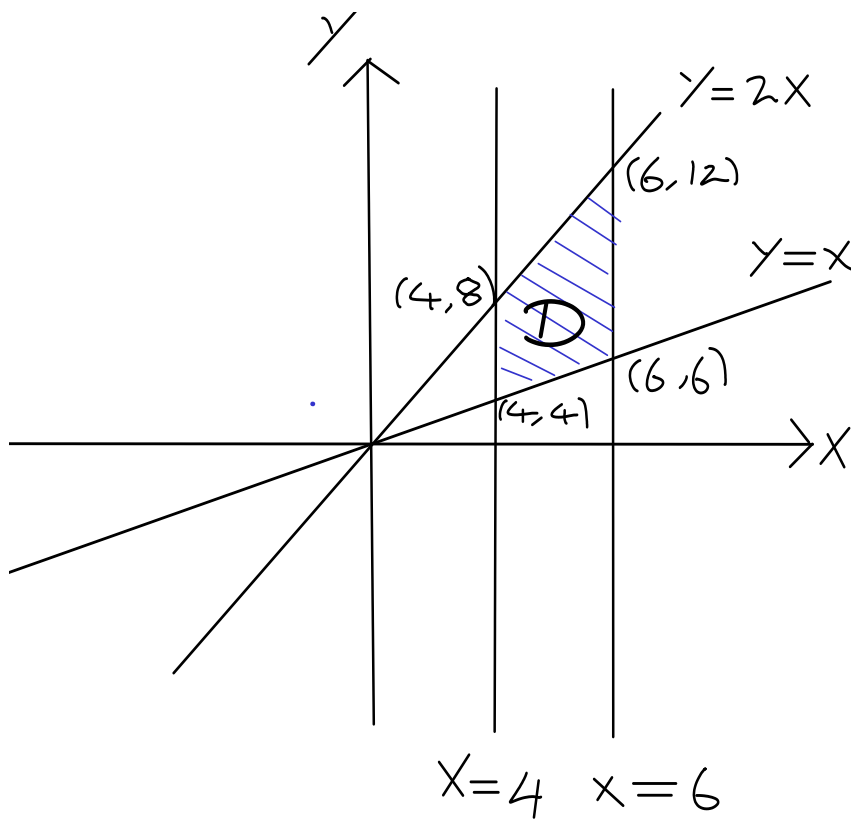
## פתרונות

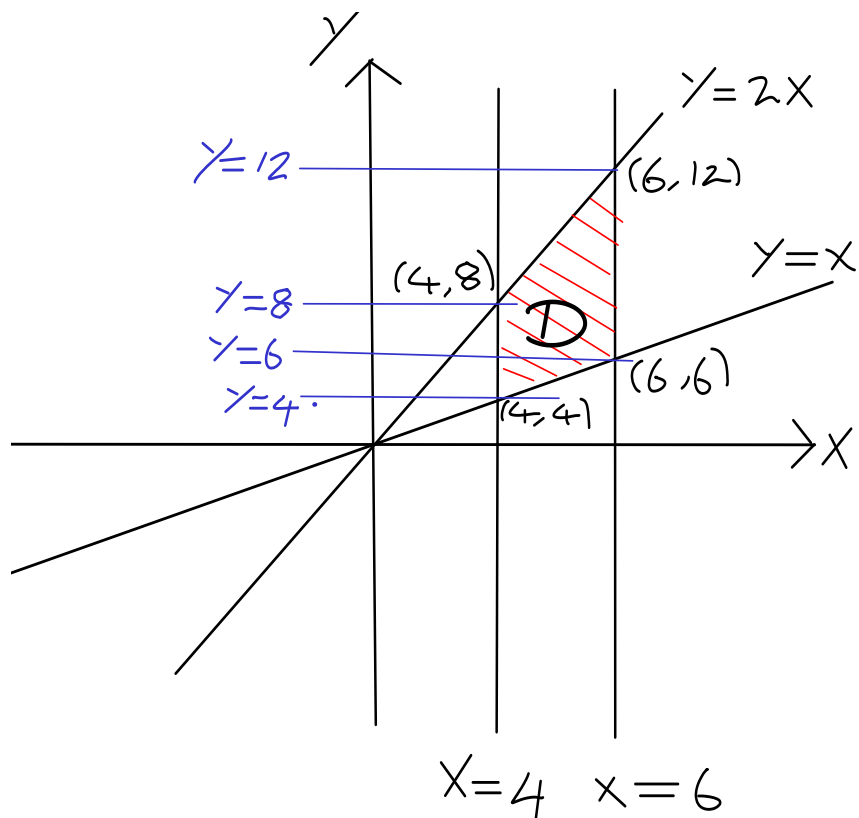
## שאלה 1

(א)

שלב 1.

$$D = \{4 \leq x \leq 6, x \leq y \leq 2x\}$$

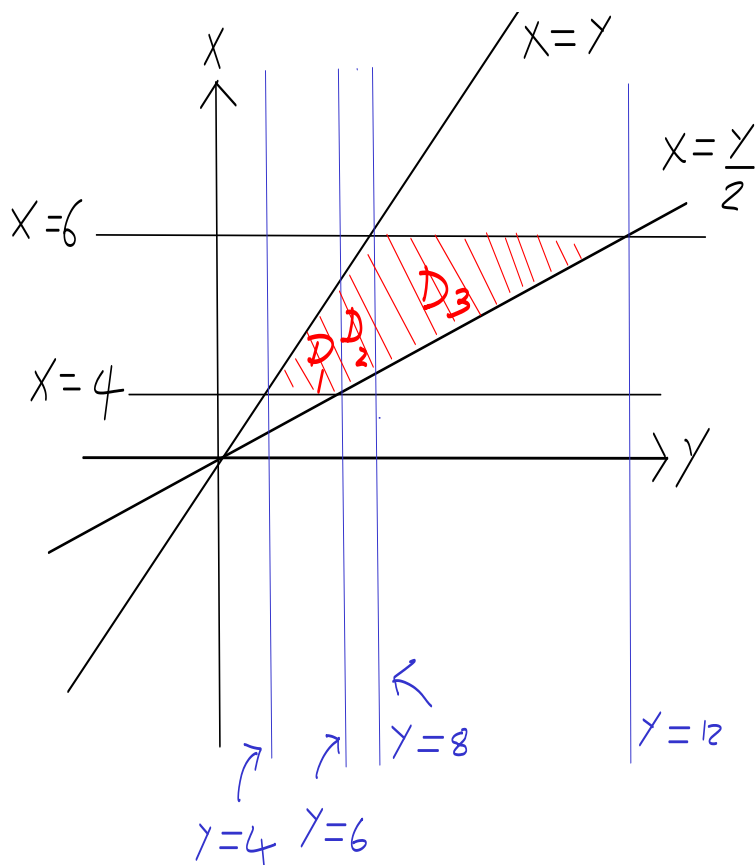
שלב 2.שלב 3.



שלב 4.

$$y = x \rightarrow x = y, \quad y = 2x \rightarrow x = \frac{y}{2}.$$

שלב 5.



שלב 6.  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ .

$$D_1 = \{4 \leq y \leq 6, 4 \leq x \leq y\}, \quad D_2 = \{6 \leq y \leq 8, \frac{y}{2} \leq x \leq y\}, \quad D_3 = \{8 \leq y \leq 12, \frac{y}{2} \leq x \leq 6\}.$$

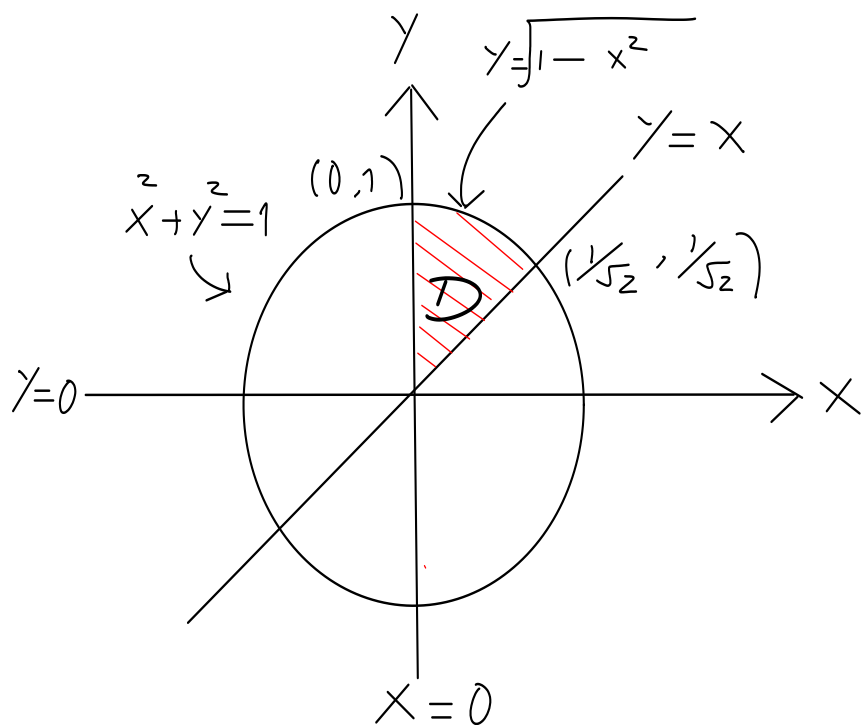
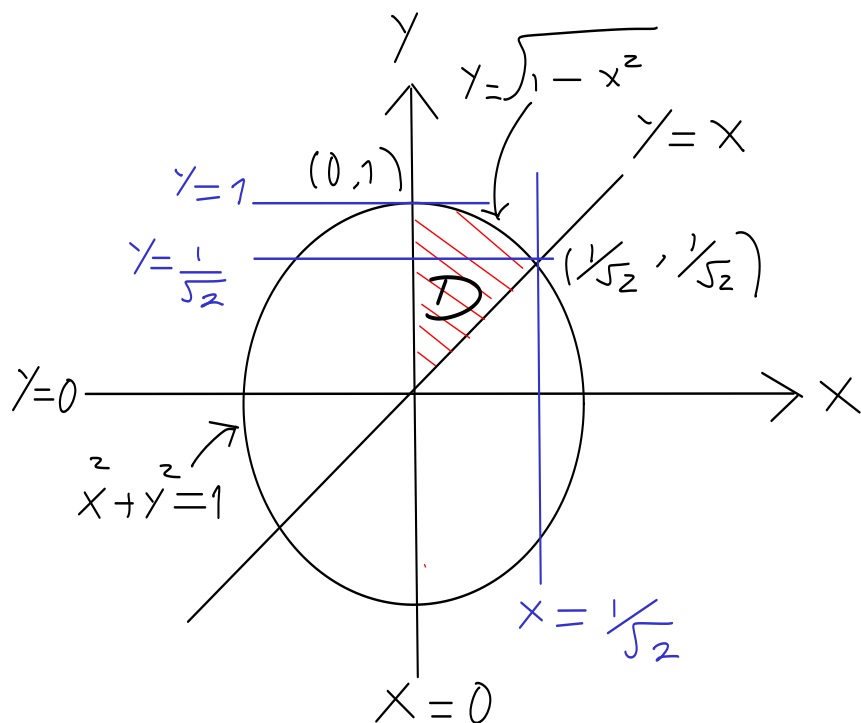
שלב 7.

$$\iint_{D_1} dx dy x + \iint_{D_2} dx dy x + \iint_{D_3} dx dy x = \int_4^6 dy \int_4^y dx x + \int_6^8 dy \int_{y/2}^y dx x + \int_8^{12} dy \int_{y/2}^6 dx x.$$

שלב 1. (ב)

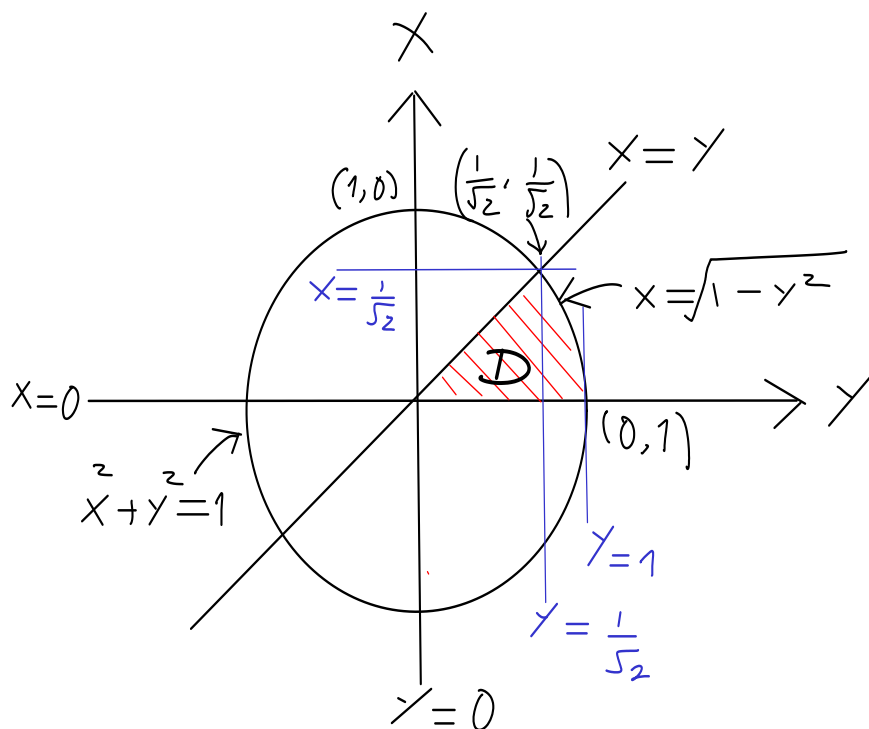
$$D = \{0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

שלב 2.

שלב 3.שלב 4.

$$y = x \rightarrow x = y, \quad y = \sqrt{1 - x^2} \rightarrow x = \sqrt{1 - y^2}.$$

שלב 5.



שלב 6.  $D = D_1 \cup D_2$ .

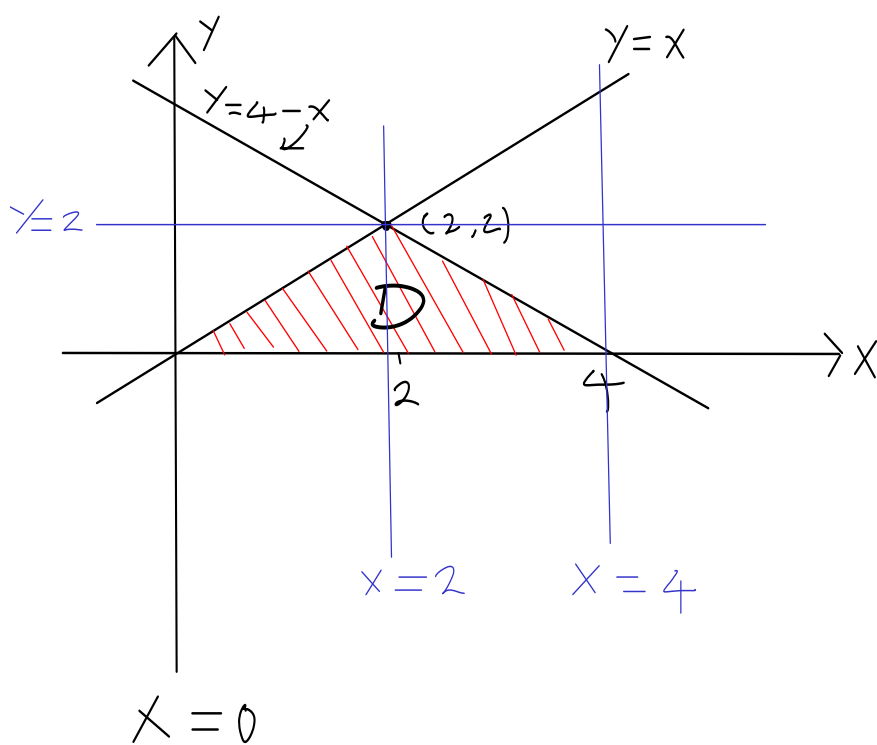
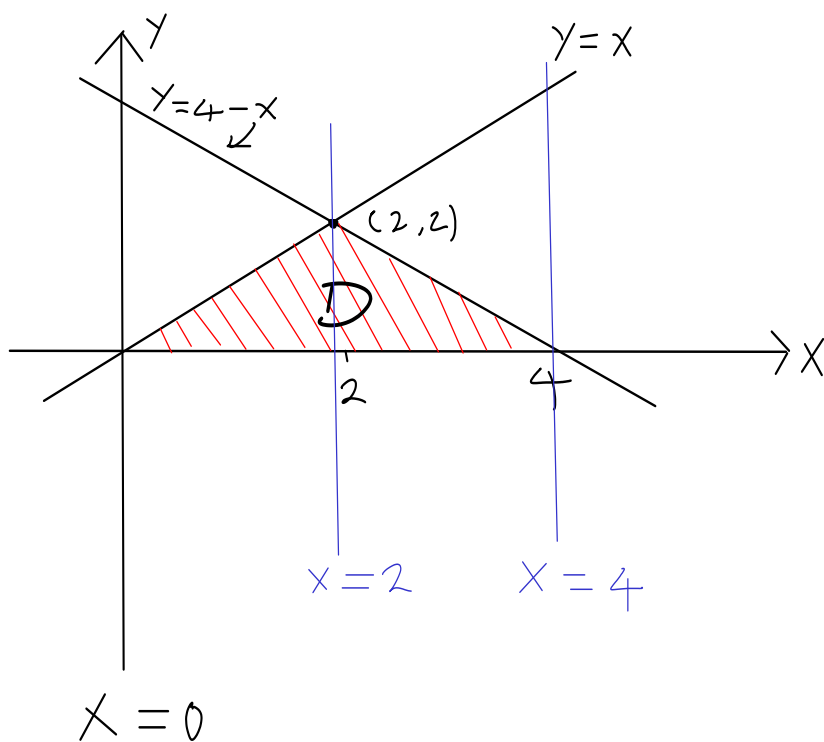
$$D_1 = \{0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \leq x \leq y\}, \quad D_2 = \{\frac{1}{\sqrt{2}} \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}.$$

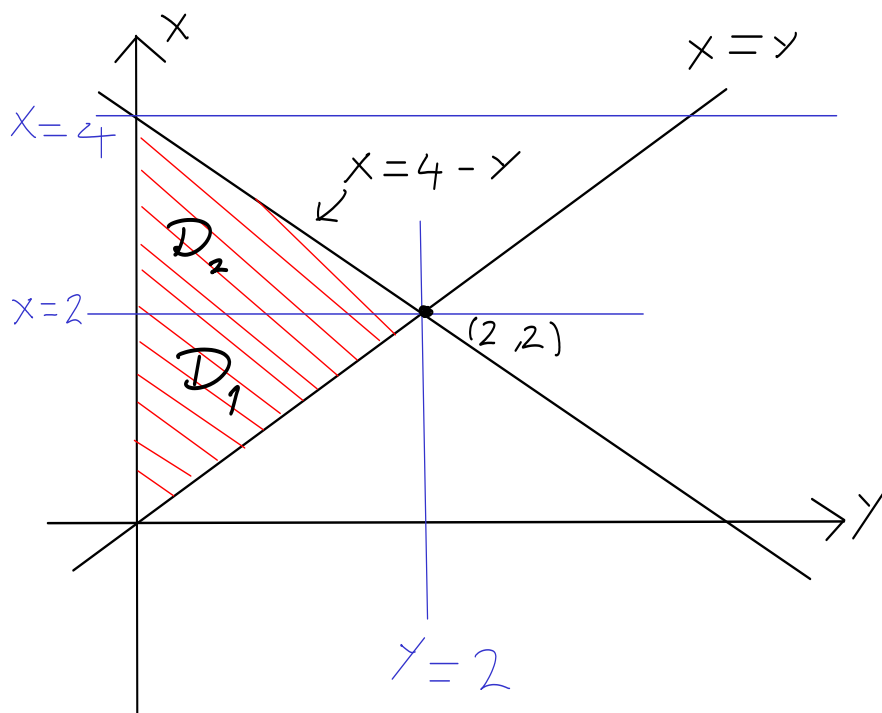
שלב 7.

$$\iint_{D_1} dx dy x + \iint_{D_2} dx dy x = \int_0^{1/\sqrt{2}} dy \int_0^y dx x + \int_{1/\sqrt{2}}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx x.$$

ג







$$D = D_1 \cup D_2 .$$

$$D_1 = \{0 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 2\} , \quad D_2 = \{0 \leq y \leq 2, 2 \leq x \leq 4-y\} .$$

$$\iint_{D_1} y + \iint_{D_2} y = \int_0^2 dy \int_y^2 dx y + \int_0^2 dy \int_2^{4-y} dx y$$

$$\frac{32}{3} \quad (\text{ד})$$

$$\frac{1}{2} \quad (\text{ה})$$

$$-\frac{2}{3} \quad (\text{ו})$$

$$\frac{1}{4} \quad (\text{ז})$$

## שאלה 2

(א)

$$\int_0^2 dx \int_x^{2x} dy f(x, y) = \int_0^2 dy \int_{y/2}^y dx f(x, y) + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 dx f(x, y)$$

(ב)

$$\int_{-6}^2 dx \int_{x^2/4-1}^{2-x} dy f(x, y) = \int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{y}+1}^{2\sqrt{y}+1} dx f(x, y) + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y}+1}^{2-y} dx f(x, y)$$

(ג)

$$\int_0^2 dx \int_{x^3}^{x^2} dy f(x, y) = \int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt[3]{y}} dx f(x, y)$$

(ד)

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} dy f(x, y) = \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx f(x, y) + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} dx f(x, y)$$

(ה)

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} dy f(x, y) = \int_0^1 dy \int_{2-y}^{\sqrt{1-y^2}+1} dx f(x, y)$$

(ו)

$$\int_1^1 dx \int_0^{\ln x} dy f(x, y) = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e dx f(x, y)$$

### שאלה 3

1 (א)

$\frac{1}{40}$  (ב)

6 (ג)

$\frac{1}{3}$  (ד)

$\frac{9}{4}$  (ה)

$\frac{2}{3}$  (ו)

### שאלה 4

$\pi(e-1)$  (א)

$\frac{64\pi}{3}$  (ב)

$$\frac{2\sqrt{2}-1}{6} \cdot \pi \quad (\text{ג})$$

$$\frac{2|a|^3\pi}{3} \quad (\text{ד})$$

$$-3\pi \quad (\text{ה})$$

### שאלה 5

$$\frac{1}{6} \quad (\text{א})$$

$$\frac{1}{3} \quad (\text{ב})$$

$$\frac{32}{3} \quad (\text{ג})$$

$$\frac{88}{105} \quad (\text{ד})$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (\text{ה})$$

### שאלה 6

$$8\pi \quad (\text{א})$$

$$\frac{14}{3} \quad (\text{ב})$$

$$\frac{10\pi}{3} \quad (\text{ג})$$

### שאלה 7

נרשום

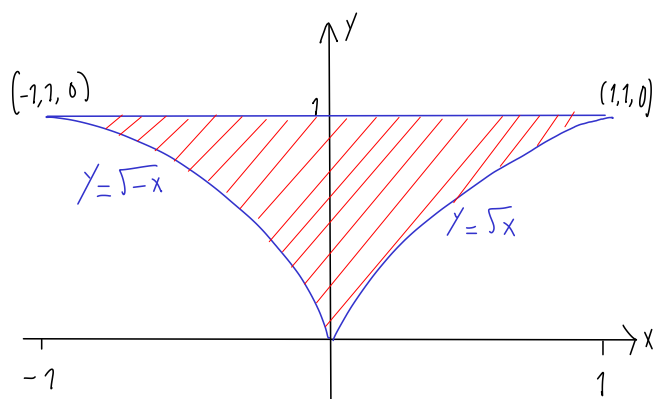
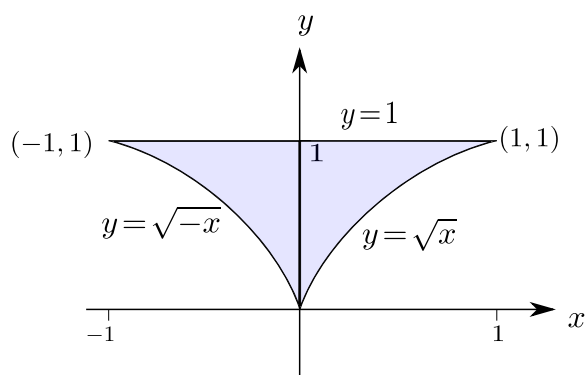
$$I = \int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt{-x}}^1 \cos(\pi y^3) dy + \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 \cos(\pi y^3) dy = \iint_D \cos(\pi y^3) dx dy$$

כאשר התחום  $D$  נתון על ידי

$$D = \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{-x} \leq y \leq 1 \end{array} \right\} \cup \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} \leq y \leq 1 \end{array} \right\} = \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 \\ -y^2 \leq x \leq y^2 \end{array} \right\}$$

ולכן,

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D \cos(\pi y^3) \, dx dy \\
 &= \int_0^1 dy \int_{-y^2}^{y^2} \cos(\pi y^3) \, dx \\
 &= \int_0^1 2y^2 \cos(\pi y^3) \, dy \\
 &= \left( \frac{2}{3\pi} \sin(\pi y^3) \right) \Big|_{y=0}^1 = 0
 \end{aligned}$$

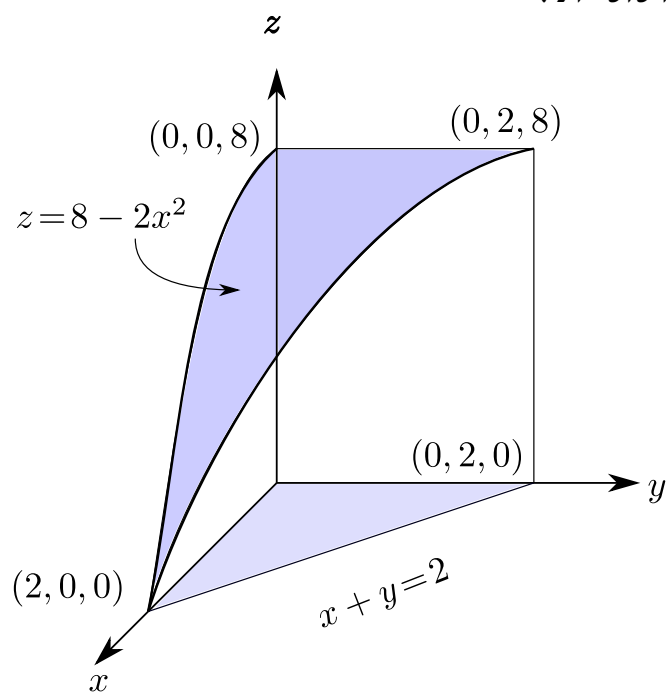


## שאלה 8

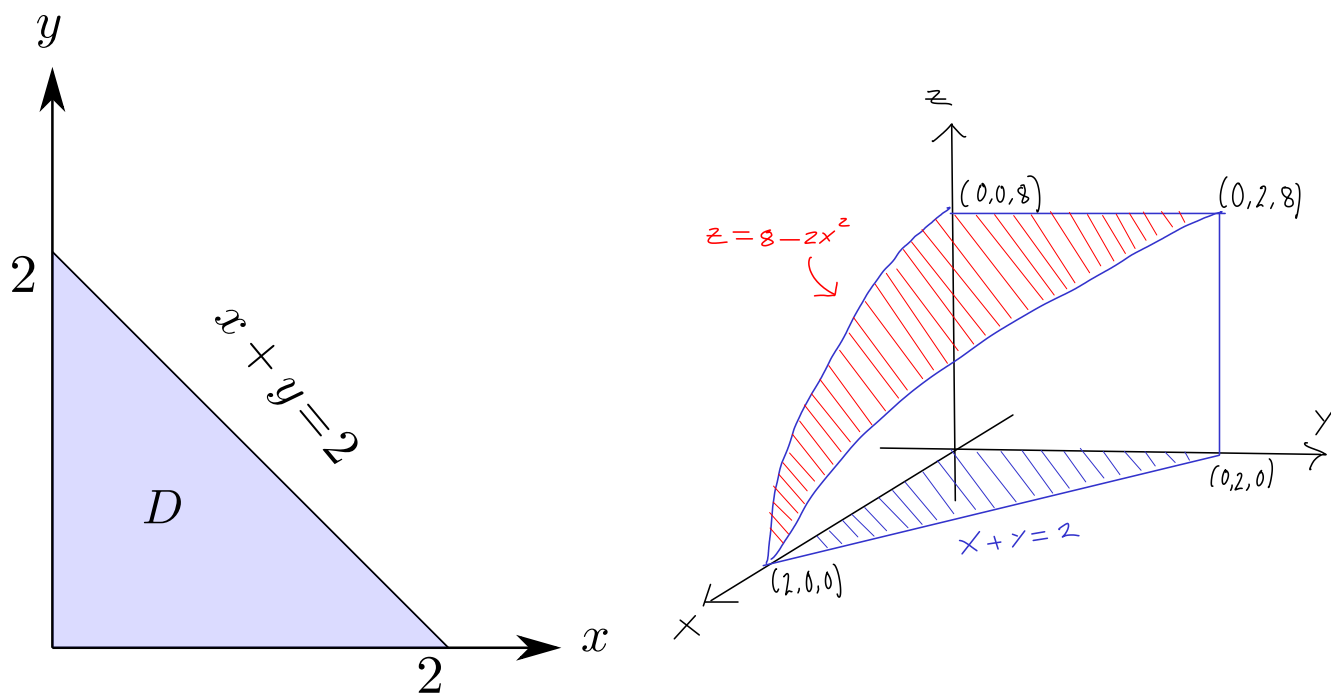
הגוף בשאלה הוא הנפח החסום מתחת לגרף הפונקציה  $z = 8 - 2x^2$  מעלה המשולש במישור שקודקודיו הם  $(0, 0)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(2, 0)$ . לכן, הנפח נתון על ידי

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (8 - 2x^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (8 - 2x^2) \, dy \\ &= \int_0^2 (8 - 2x^2) (2 - x) \, dx \\ &= \int_0^2 (16 - 8x - 4x^2 + 2x^3) \, dx \\ &= \left( 16x - 4x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 \right) \Big|_{x=0}^2 = \frac{40}{3} \end{aligned}$$

סרטוט ידני:



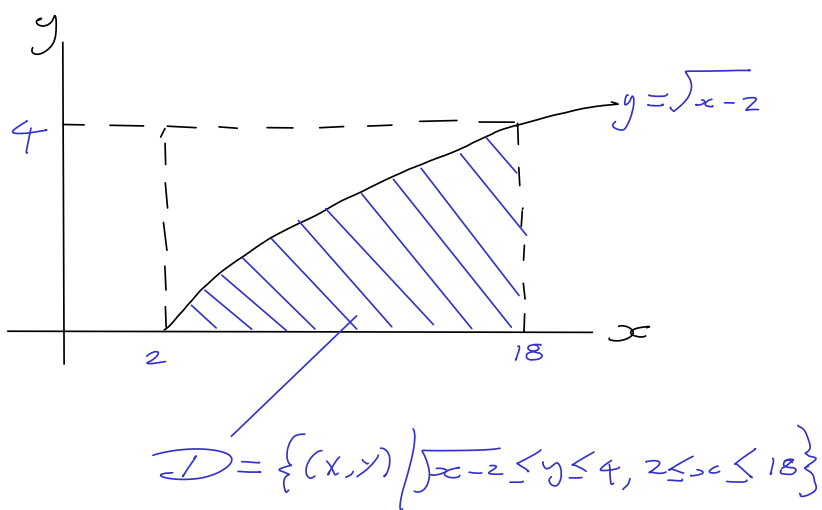
סרטוט ממוחשב:



**שאלה 9** התחום של האינטגרל הוא

$$D = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 18, \sqrt{x-2} \leq y \leq 4\}$$

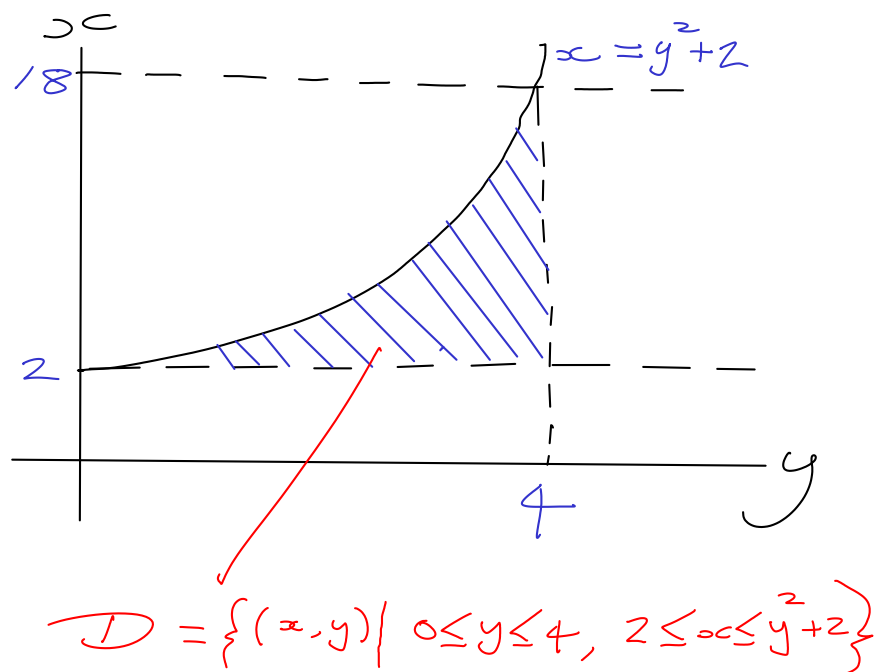
כמתואר בתרשים.



ניתן לשנות את הסדר של האינטגרלים של  $x$  ו- $y$  כך שהתחום הוא

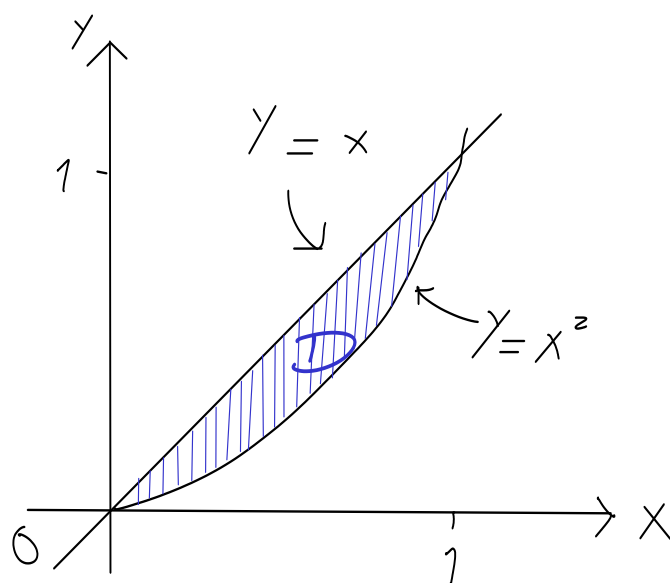
$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4, 2 \leq x \leq y^2 + 2\}$$

כמתואר בתרשים



$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^4 dy \int_2^{y^2+2} dx e^{-5(x-2)/y} \\
 &= \int_0^4 dy \left[ -\frac{y}{5} \cdot e^{-5(x-2)/y} \right]_2^{y^2+2} \\
 &= -\frac{1}{5} \int_0^4 dy \left[ y \cdot e^{-5(x-2)/y} \right]_2^{y^2+2} \\
 &= -\frac{1}{5} \int_0^4 dy \left( y \cdot e^{-5(y^2+2-2)/y} - y \cdot e^{-5(0)/y} \right) \\
 &= -\frac{1}{5} \int_0^4 dy (ye^{-5y} - y) \\
 &= -\frac{1}{5} \left[ -\frac{1}{5} ye^{-5y} + \frac{1}{25} e^{-5y} - \frac{y^2}{2} \right]_0^4 \\
 &= -\frac{1}{5} \left( -\frac{4}{5} e^{-20} + \frac{1}{25} e^{-20} - \frac{4^2}{2} + \frac{1}{25} \right)
 \end{aligned}$$





0.025

**שאלה 11**

$$.M = \frac{81\pi}{16} \approx 42.41$$