שעור 5
משפטים של אסטרטגיות, ערך מקסמין ומשחק סכום אפס

5.1 הגדרות: שיווי משקל נאש ותושבה טובה ביותר של שחקן

הגדרה 5.1 שיווי משקל נאש במשחקים עם שני שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים 1 ו- 2. נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, ו- S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2.

קבוצת אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ נקראת **שיווי משקל נאש (שמ"ן)** אם התנאים הבאים מתקיימים:

$$u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*) \qquad \text{לכל } s_1 \in S_1$$

$$u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_2(s_1^*, s_2) \qquad \text{לכל } s_2 \in S_2$$

הגדרה 5.2 שיווי משקל נאש במשחקים עם שלוש שחקנים

נתון משחק עם שלוש שחקנים 1, 2 ו- 3. נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2 ו- S_3 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 3.

קבוצת אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, s_2^*, s_3^*)$ נקראת **שיווי משקל נאש** אם התנאים הבאים מתקיימים:

$$u_1(s_1^*, s_2^*, s_3^*) \geq u_1(s_1, s_2^*, s_3^*) \qquad \text{לכל } s_1 \in S_1$$

$$u_2(s_1^*, s_2^*, s_3^*) \geq u_2(s_1^*, s_2, s_3^*) \qquad \text{לכל } s_2 \in S_2$$

$$u_3(s_1^*, s_2^*, s_3^*) \geq u_3(s_1^*, s_2^*, s_3) \qquad \text{לכל } s_3 \in S_3$$

הגדרה 5.3 תשובה הטובה ביותר במשחקים עם שני שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים 1 ו- 2.
נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, ו- S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2.

- אסטרטגיה $t_1 \in S_1$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 1 לווקטור אסטרטגיות (t_1, s_2) אם

$$u_1(t_1, s_2) = \max_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_2) \ .$$

- אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 2 לווקטור אסטרטגיות (s_1, t_2) אם

$$u_2 (s_1, t_2) = \max_{s_2 \in S_2} u_2 (s_1, s_2) \ .$$

הגדרה 5.4 תשובה הטובה ביותר במשחקים עם שלוש שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים $1, 2$ ו- 3.
נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2,
ו- S_3 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 3,

- אסטרטגיה $t_1 \in S_1$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 1 לווקטור אסטרטגיות (t_1, s_2, s_3) אם

$$u_1 (t_1, s_2, s_3) = \max_{s_1 \in S_1} u_1 (s_1, s_2, s_3) \ .$$

- אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 2 לווקטור אסטרטגיות (s_1, t_2, s_3) אם

$$u_2 (s_1, t_2, s_3) = \max_{s_2 \in S_2} u_2 (s_1, s_2, s_3) \ .$$

- אסטרטגיה $t_3 \in S_3$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 3 לווקטור אסטרטגיות (s_1, s_2, t_3) אם

$$u_3 (s_1, s_2, t_3) = \max_{s_3 \in S_3} u_3 (s_1, s_2, s_3) \ .$$

5.2 הקשר בין שיווי משקל נאש ואסטרטגיה שולטת חזק

משפט 5.1

נתון משחק של 2 שחקנים בצורה אסטרטגית $G = ((S_1, S_2), (u_1, u_2))$.

אם הווקטור אסטרטגיות (s_1^*, s_2^*) הוא שיווי משקל נאש היחיד של המשחק, אז הוא פתרון באסטרטגיות השולטות חזק.

הוכחה:
המשפט הזה אומר שאם הווקטור אסטרטגיות (s_1^*, s_2^*) הוא שיווי משקל נאש היחיד, אז הוא ישרוד תהליך סילוק חוזר של אסטרטגיות הנשלטות חזק.

נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי (s_1^*, s_2^*) שיווי משקל נאש, אבל הוא לא פתרון באסטרטגיות שולטות חזק.
נניח כי s_1^* האסטרטגיה הראשונה לרדת בתהליך סילוק חוזר.
אם כן אז קיימת אסטרטגיה $t_1 \in S_1$ אשר שולטת חזק ב- s_1^*, כלומר

$$u_1 (s_1^*, s_2) < u_1 (t_1, s_2) \ . \qquad \text{(\#1)}$$

לכל אסטרטגיה s_2 אשר עדיין לא ירדה.

בפרט, s_2^* עדיין נשאר אפילו אחרי ש s_1^* נמקחה. לכן , לפי (#1),

$$u_1\left(s_1^*, s_2^*\right) < u_1\left(t_1, s_2^*\right) \quad . \tag{\#2}$$

בסתירה לכך ש $s^* = \left(s_1^*, s_2^*\right)$ הוא תשובה טובה ביותר לכל שחקן. ■

משפט 5.2

נתון משחק של 2 שחקנים בצורה אסטרטגית $G = \left(\left(S_1, S_2\right), \left(u_1, u_2\right)\right)$.

אם $\left(s_1^*, s_2^*\right)$ פתרון באסטרטגיות השולטות חזק אז הוא השיווי משקל נאש היחיד של המשחק.

הוכחה: נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי $\left(s_1^*, s_2^*\right)$ הוא הווקטור אסטרטגיות היחיד להישאר אחרי סילוק חוזר אבל הוא לא שיווי משקל נאש. אז $\exists$ אסטרטגיה $s_1 \in S_1$ עבורה

$$u_1\left(s_1^*, s_2^*\right) < u_1\left(s_1, s_2^*\right) \quad . \tag{\#3}$$

האסטרטגיה s_1 נמחק בהליך שיחוק חוזק, לכן בהכרח קיימת אסטרטגיה אחרת $s_1' \in S_1$ עבורה

$$u_1\left(s_1, s_2\right) < u_1\left(s_1', s_2\right) \quad . \tag{\#4}$$

לכל האסטרטגיות s_2 מתוך האסטרטגיות הנשארות בתהליך סילוק חוזר.
בפרט, האסטרטגיה s_2^* עדיין נשארת, לכן לפי (#4),

$$u_1\left(s_1, s_2^*\right) < u_1\left(s_1', s_2^*\right) \quad . \tag{\#5}$$

אם $s_1' = s_1^*$ אז (#5) סותר את (#3).

אחרת, קיימת s_1'' אשר שולטת חזק ב- s_1', בגלל ש s_1' לא שורדת תהליך סילוק חוזר.
לכן במקום (#4) ו- (#5) נקבל

$$u_1\left(s_1', s_2\right) < u_1\left(s_1'', s_2\right) \quad . \tag{\#4'}$$

$$u_1\left(s_1', s_2^*\right) < u_1\left(s_1'', s_2^*\right) \quad . \tag{\#5'}$$

אם $s_1'' = s_1^*$ אז (#5') סותר את (#3). אחרת התהליך הזה ממשיך עד שנגיע לסתירה ל- (#3).

■

5.3 אסטרטגיות נשלטות חלש

הגדרה 5.5 אסטרטגיה נשלטת חלש במשחק 2 שחקנים

הגדרה 5.6 אסטרטגיה נשלטת חלש במשחק 2 שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים 1 ו- 2. נניח כי
S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1,

ו- S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2.

- אסטרטגיה $\sigma_1 \in S_1$ של שחקן 1 נשלטת חלש על ידי אסטרטגיה $t_1 \in S_1$ של שחקן 1 אם

$$u_1\left(\sigma_1, s_2\right) \leq u_1\left(t_1, s_2\right)$$

לכל $s_2 \in S_2$.

- אסטרטגיה $\sigma_2 \in S_2$ של שחקן 2 נשלטת חלש ע"י אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ של שחקן 2 אם

$$u_2\left(s_1, \sigma_2\right) \leq u_2\left(s_1, t_2\right)$$

לכל $s_1 \in S_1$.

הגדרה 5.7 אסטרטגיה נשלטת חלש במשחק 3 שחקנים

נתון משחק עם שלוש שחקנים 1, 2 ו- 3. נניח כי
S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1,
S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2
ו- S_3 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 3.

- אסטרטגיה $\sigma_1 \in S_1$ של שחקן 1 נשלטת חלש על ידי אסטרטגיה $t_1 \in S_1$ של שחקן 1 אם

$$u_1\left(\sigma_1, s_2, s_3\right) \leq u_1\left(t_1, s_2, s_3\right)$$

לכל $s_2 \in S_2$ ולכל $s_3 \in S_3$.

- אסטרטגיה $\sigma_2 \in S_2$ של שחקן 2 נשלטת חלש על ידי אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ של שחקן 2 אם

$$u_2\left(s_1, \sigma_2, s_3\right) \leq u_2\left(s_1, t_2, s_3\right)$$

לכל $s_1 \in S_1$ ולכל $s_3 \in S_3$.

- אסטרטגיה $\sigma_3 \in S_3$ של שחקן 3 נשלטת חלש ע"י אסטרטגיה $t_3 \in S_3$ של שחקן 3 אם

$$u_3\left(s_1, s_2, \sigma_3\right) \leq u_3\left(s_1, s_2, t_3\right)$$

לכל $s_1 \in S_1$ ולכל $s_2 \in S_2$.

דוגמה 5.1 ()

נתון משחק בצורה אסטרטגית הבאה:

$I \backslash II$	L	R
T	$1,2$	$2,3$
B	$2,2$	$2,0$

$I \backslash II$	L	R
T	~~$1,2$~~	~~$2,3$~~
B	$2,2$	$2,0$

$\xrightarrow{T \preceq B}$

$I \backslash II$	L	R
B	$2,2$	~~$2,0$~~

$\xrightarrow{R \prec L}$

$I \backslash II$	L
B	$2,2$

דוגמה 5.2 (השפעת סדר הסילוק של אסטרטגיות נשלטות חלש)

I \ II	L	C	R
T	$1,2$	$2,3$	$0,3$
M	$2,2$	$2,1$	$3,2$
B	$2,1$	$0,0$	$1,0$

פתרון:

I \ II	L	C	R
T	$1,2$	$2,3$	$0,3$
M	$2,2$	$2,1$	$3,2$
B	$2,1$	$0,0$	$1,0$

$\xrightarrow{T\preceq M}$

I \ II	L	C	R
M	$2,2$	$2,1$	$3,2$
B	$2,1$	$0,0$	$1,0$

$\xrightarrow{R\preceq L}$

I \ II	L	C
M	$2,2$	$2,1$
B	$2,1$	$0,0$

$\xrightarrow{L\preceq R}$

I \ II	L	C
M	$2,2$	$2,1$
B	$2,1$	$0,0$

$\xrightarrow{B\preceq M}$

I \ II	L	C
M	$2,2$	$2,1$

$\xrightarrow{C\prec L}$

I \ II	L	C
M	$2,2$	$2,1$

תוצאת התהליך: ML.
תשלום: $(2,2)$.

I \ II	L	C	R
T	$1,2$	$2,3$	$0,3$
M	$2,2$	$2,1$	$3,2$
B	$2,1$	$0,0$	$1,0$

$\xrightarrow{B\preceq M}$

I \ II	L	C	R
T	$1,2$	$2,3$	$0,3$
M	$2,2$	$2,1$	$3,2$

$\xrightarrow[C\preceq R]{L\preceq R}$

I \ II	R
T	$0,3$
M	$3,2$

$\xrightarrow{T\prec M}$

I \ II	R
M	$3,2$

תוצאת התהליך: MR.
תשלום: $(3,2)$.

$\blacksquare$

5.4 ביטחון: מושג המקסמין

I \ II	L	R
T	$2,1$	$2,-20$
M	$3,0$	$-10,1$
B	$-100,2$	$3,3$

השיווי משקל היחיד במשחק זה הוא (B,R) עם תשלום. אך בחירות השחקנים של אסטרטגיות אלה מסוכנות!

שחקן 1 עשוי להסס מאוד לבחור B, מחשש שמא שחקן 2 יבחר L (אם משום שאינו רציונלי אם בטעות).
כיוון שהתשלום של (B,L) קטסטרופי עבור שחקן 1, ייתכן שהוא ישחק אסטרטגיה T המבטיחה לו תשלום 2 ללא סיכון להפסיד 100.

אם כן שחקן 2 חושב שיש סיכוי ששחקן 1 יבחר אסטרטגיה T הוא יחשוש מלבחור את אסטרטגיה ש"מ R ולהסתכן בתשלום -20.
לאור זה ייתכן ששחקן 2 ישחק אסטרטגיה L.

למעשה, אסטרטגיה T של שחקן 1 מבטיחה התשלום הטובה ביותר שניתן לקבל מבלי "לסמוך" על הרציונליות של שחקן 2, ובהנחות הפסימיות ביותר על ההתנהגותו של שחקן 2.

באופן כללי, בהינתן במשחק שני שחקנים. נניח כי שחקן 1 משחק אסטרטגיה $s_1 \in S_1$. התשלום הנמוך ביותר שהוא עלול לקבל הוא

$$\min_{t_2 \in S_2} u_1(s_1, t_2) \ .$$

שחקן 1 יכול לבחור באסטרטגיה s_1 הממקסמת ערך זה. כלומר, בלי לסמוך על הרציונליות של שאר השחקנים הוא יכול להבטיח לעצמו

$$\underline{\mathrm{v}}_1 = \max_{s_1 \in S_1} \min_{t_2 \in S_2} u_1(s_1, t_2) \ .$$

הגודל $\underline{\mathrm{v}}_1$ נקרא **ערך המקסמין** של שחקן 1 או **רמת הביטחון** של שחקן 1.
אסטרטגיה s_1 המבטיחה ערך זה נקראת **אסטרטגיה מקסמין**.

דוגמה 5.3 ()

I \ II	L	R
T	$2,1$	$2,-20$
M	$3,0$	$-10,1$
B	$-100,2$	$3,3$

פתרון:

I \ II	L	R	$\min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$
T	$2,1$	$2,-20$	2
M	$3,0$	$-10,1$	-10
B	$-100,2$	$3,3$	-100

$$\underline{\mathrm{v}}_1 = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) = 2 \ .$$

I \ II	L	R
T	$2,1$	$2,-20$
M	$3,0$	$-10,1$
B	$-100,2$	$3,3$
$\min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2)$	0	-20

$$\underline{\mathrm{v}}_2 = \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2) = 0 \ .$$

ערך המקסמין של שחקן 1 הוא 2, ואסטרטגית המקסמין המבטיחה תשלום זה היא T.

ערך המקסמין של שחקן 2 הוא 0, ואסטרטגית המקסמין המבטיחה תשלום זה היא L.

נהוג לרשום את התשלומים המינימלים בטבלה אחת:

$I \backslash II$	L	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$
T	$2,1$	$2,-20$	2
M	$3,0$	$-10,1$	-10
B	$-100,2$	$3,3$	-100
$\min\limits_{s_1\in S_1} u_2(s_1,s_2)$	0	-20	$0,2$

בתרשים זה, מימין בכל שורה מופיע התשלום הנמוך ביותר לשחקן I אם הוא בוחר באסטרטגיה המתאימה לשורה זה. ומתחת לכל עמודה מויע התשלום הנמוך ביותר לשחקן II, אם הוא בוחר באסטרטגיה המתאימה דעמודה זו. בפינה הימינית תחתונה של התרשים, באדום מופיעים המקסמין של השחקנים.

שימו לב: אם שני השחקנים יבחור את אסטרטגית המקסמין, נקבל את הווקטור אסטרטגיות (T,L) עם תשלום $(2,1)$. עבור שחקן 2 התשלום 1 אינו ערך המקסמין אלא גבוה ממנו.

■

דוגמה 5.4 ()

נתון משחק עם שני שחקנים בצורה אסטרטגית כמתואר בטבלה.

$I \backslash II$	L	R
T	$3,1$	$0,4$
B	$2,3$	$1,1$

א) מצאו אסטרטגיה מקסמין של שחקן 1 והרמת הביטחון שלו.

ב) מצאו אסטרטגיה מקסמין של שחקן 2 והרמת הביטחון שלו.

ג) מה יהיה התשלום לשני השחקנים אם שניהם יבחור באסטרטגיות המקסמים שלהם.

פתרון:

א)

$I \backslash II$	L	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$
T	$3,1$	$0,4$	0
B	$2,3$	$1,1$	1

$$\underline{\mathrm{v}}_1 = \max_{s_1\in S_1} \min_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2) = 1 \ .$$

ערך המקסמין של שחקן 1 הוא 1 ואסטרטגית המקסמין שלו היא B.

ב)

$I \backslash II$	L	R
T	$3,1$	$0,4$
B	$2,3$	$1,1$
$\min\limits_{s_1\in S_1} u_2(s_1,s_2)$	1	1

$$\underline{\mathrm{v}}_2 = \max_{s_2\in S_2}\min_{s_1\in S_1} u_1(s_1,s_2) = 1 \ .$$

ערך המקסמין של שחקן 2 הוא 1. גם L וגם R הן אסטרטגיות מקסמין.

ג)

$I \backslash II$	L	R	$\min_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$
T	$3,1$	$0,4$	0
B	$2,3$	$1,1$	1
$\min_{s_1\in S_1} u_2(s_1,s_2)$	1	1	$1,1$

לכן כאשר שני השחקנים בוחרים באסטרטגיות מקסמין, התשלום עשוי להיות $(2,3)$ עבור (B,L) או $(1,1)$ עבור (B,R), בהתאם לאסטרטגית המקסמין שיבחר שחקן 2.

■

5.5 קשר בין אסטרטגית שולטת ואסטרטגית מקסמין

משפט 5.3

במשחק שני שחקנים, אם אסטרטגיה σ_1 של שחקן 1 שולטת בכל האסטרטגיות האחרות שלו, אז

א) σ_1 היא אסטרטגית מקסמין שלו.

ב) σ_1 היא תשובה טובה ביותר לכל ווקטור אסטרטגיות של שאר השחקנים.

הוכחה:

א) נניח כי σ_1 היא אסטרטגית שולטת של שחקן 1.

תהי $t_2\in S_2$ אסטרטגיה של שחקן 2 כך ש-

$$u_1(\sigma_1,t_2) = \min_{s_2\in S_2} u_1(\sigma_1,s_2)$$

מכאן

$$\min_{s_2\in S_2} u_1(\sigma_1,s_2) = u_1(\sigma_1,t_2) \geq u_1(s_1,t_2) \geq \min_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$$

כלומר

$$\min_{s_2\in S_2} u_1(\sigma_1,s_2) \geq \min_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2) \ .$$

לפיכך

$$\min_{s_2\in S_2} u_1(\sigma_1,s_2) = \max_{s_1\in S_1}\min_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2) \ .$$

אבל $\underline{\mathrm{v}}_1 = \max_{s_1\in S_1}\min_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$. לכן σ_1 היא אסטרטגית מקסמין של שחקן 1.

ב) לכל $s_2\in S_2$ מתקיים

$$u_1(s_1,s_2) \leq u_1(\sigma_1,s_2) \ ,$$

ז"א σ_1 שולטת חלש בכל האסטרטגיות האחרות s_1 של שחקן 1. לכן σ_1 תשובה טובה ביותר של שחרן 1 לכל אסטרטגיה של השחקן 2.

■

משפט 5.4

במשחק שני שחקנים, אם לשחקן 1 יש אסטרטגיה s_1^* השולטת חלש על שאר האסטרטגיות שלו, ולשחקן 2 יש אסטרטגיה s_2^* השולטת חלש על כל שאר האסטרטגיות שלו, אז

א) הווקטור אסטרטגיות (s_1^*, s_2^*) שיווי משקל,

ב) s_1^* היא אסטרטגית מקסמין לשחקן 1 ו- s_2^* היא אסטרטגית מקסמין לשחקן 2.

הוכחה:

א) נניח כי (s_1^*, s_2^*) ווקטור אסטרטגיות עבורו s_1^* שולטת חלש על כל שאר האסטרטגיות של שחקן 1 ו- s_2^* שולטת חלש על כל שאר האסטרטגיות של שחקן 2.

אם כן אז לפי משפט 5.3 (חלק 2) למעלה, s_1^* תשובה טובה ביותר של שחקן 1 ו- s_2^* תשובה טובה ביותר של שחקן 2, כלומר

$$u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*)$$

לכל $s_1 \in S_1$ ו-

$$u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_2(s_1^*, s_2)$$

לכל $s_2 \in S_2$. לפיכך הווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ הוא נקודת שיווי משקל.

ב) לפי משפט 5.3 (חלק 1), s_1^* היא אסטרטגית מקסמין של שחקן 1 ו- s_2^* היא אסטרטגית מקסמין של שחקן 2. לפיכך הווקטור $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ הוא ווקטור אסטרטגיות מקסמין.

■

5.6 משחקי שני שחקנים סכום אפס

הגדרה 5.8 משחק שני שחקנים סכום אפס

משחק שני משחקים נקרא **משחק סכום אפס** אם לכל זוג אסטרטגיות (s_1, s_2) מתקיים

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0 \ .$$

במילים אחרות, משחק שני שחקנים סכום אפס הוא מערכת סגורה מבחינת התשלומים: כל ששחקן אחד מרוויח השחקן השני מפסיד.
ברור אן כן שבמשחק כזה האינטרטסטים של שני השחקנים מנוגדים לחלוטים.

דוגמה 5.5 (משחק שני שחקנים סכום אפס)

נתון המשחק שני שחקנים סכום אפס הבא.

$I \backslash II$	L	C	R
T	$3, -3$	$-5, 5$	$-2, 2$
M	$1, -1$	$4, -4$	$1, -1$
B	$6, -6$	$-3, 3$	$-5, 5$

א) מצאו א הש"מ.

ב) מצאו את האסטרטגיה מקסמין של השחקנים.

פתרון:

א)

$I \backslash II$	L	C	R
T	$3,-3$	$-5,5$	$-2,2$
M	$1,-1$	$4,-4$	$1,-1$
B	$6,-6$	$-3,3$	$-5,5$

שיווי משקל: $s^* = (M,R)$.

ב)

$I \backslash II$	L	C	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$
T	$3,-3$	$-5,5$	$-2,2$	-5
M	$1,-1$	$4,-4$	$1,-1$	1
B	$6,-6$	$-3,3$	$-5,5$	-5
$\min\limits_{s_1\in S_1} u_2(s_1,s_2)$	-6	-4	-1	$1,-1$

ואסטרטגיות מקסמין: $\sigma = (M,R)$.

■

הגדרה 5.9 פונקצית תשלום של משחק שני שחקנים סכום אפס

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס. **פונקצית תשלום של המשחק** מוגדרת להיות התשלום לשחקן I:

$$u(s_1,s_2) \equiv u_1(s_1,s_2)\ .$$

לכל ווקטור אסטרטגיות $s=(s_1,s_2)$.

במונחי u, התשלום לשחקן 1 והתשלום לשחקן 2 הינם

$$u_1(s_1,s_2) = u(s_1,s_2)\ , \qquad u_2(s_1,s_2) = -u(s_1,s_2)$$

לכל ווקטור אסטרטגיות $s=(s_1,s_2)$.

דוגמה 5.6 (המשך של דוגמה 5.5)

התשרים למטה מראה את פונקצית התשלום של המשחק שני שחקנים סכום אפס של דוגמה 5.5.

$I \backslash II$	L	C	R
T	3	-5	-2
M	1	4	1
B	6	-3	-5

כלל 5.1 הנחת הרציונליות במשחק שני שחקנים סכום אפס

במשחק שני שחקנים סכום אפס בעל פונקצית תלשום u.

שחקן 1 (שהוא בדרך כלל שחקן השורה) מנסה להגדיל את $u(s)$, ככל שאפשר, שכן זה התשלום שלו.

שחקן 2 (שהוא בדרך כלל שחקן העמודה) מנסה להקטין את $u(s)$, שכן זה התשלום שהוא משלם.

דוגמה 5.7 ( )

המשחק הבא שנתון בצורה אסטרטגית למטה הוא משחק שני שחקנים סכום אפס.

$I \backslash II$	L	R
T	$3,-3$	$-2,2$
B	$-1,1$	$5,-5$

נחשב את האסטרטגיות מקסמין של השחקנים.

$I \backslash II$	L	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u_1$
T	$3,-3$	$-2,2$	-2
B	$-1,1$	$5,-5$	-1
$\min\limits_{s_1\in S_1} u_2$	-3	-5	$-1,-3$

$$\underline{\mathrm{v}}_1 = \max_{s_1\in S_1} \min_{s_2\in S_2} u_1 = -1 \ ,$$

$$\underline{\mathrm{v}}_2 = \max_{s_2\in S_2} \min_{s_1\in S_1} u_2 = -3 \ ,$$

האסטרטגיה המקסמין של שחקן 1 היא B והאסטרטגיה המקסמין של שחקן 2 היא L. כלומר הווקטור אסטרטגיות מקסמין הוא (B,L).

נרשום את הצורה אסטרטגית במונחי הפונקצית תשלום של המשחק:

$I \backslash II$	H	T
H	1	-1
T	-1	1

נשאל שאלה כללית: מה הוא הערך המקסמין של השחקנים במשחק שני שחקנים סכום אפס? ערך המקסמין של שחקן 1 נתון על ידי

$$\underline{\mathrm{v}}_1 = \max_{s_1\in S_1} \min_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2) = \max_{s_1\in S_1} \min_{s_2\in S_2} u(s_1,s_2) \ .$$

זוהי רמת הביטחון של שחקן 1 במשחק: הערך שאותו הוא יכול להבטיח לעצמו.

הערך המקסמין של שחקן 2 הוא

$$\underline{\mathrm{v}}_2 = \max_{s_2\in S_2} \min_{s_1\in S_1} u_2(s_1,s_2) = \max_{s_2\in S_2} \min_{s_1\in S_1} \left[-u(s_1,s_2)\right] = \max_{s_2\in S_2} \left[-\max_{s_1\in S_1} u(s_1,s_2)\right] = -\min_{s_2\in S_2} \max_{s_1\in S_1} u(s_1,s_2) \ .$$

נסמן

$$\underline{\mathrm{v}} := \max_{s_1\in S_1} \min_{s_2\in S_2} u(s_1,s_2) \ , \qquad \bar{\mathrm{v}} := \min_{s_2\in S_2} \max_{s_1\in S_1} u(s_1,s_2)$$

הגודל $\underline{v}$ נקרא **ערך המקסמין**,
הגודל $\bar{v}$ נקרא **ערך המינמקס**.

שחקן 1 יכול להבטיח שיקבל לפחות $\underline{v}$.
שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר $\bar{v}$.

אסטרטגיה של שחקן 1 המבטיחה את $\underline{v}$ נקראת **אסטרטגיה מקסמין**.
אסטרטגיה של שחקן 2 המבטיחה את $\bar{v}$ נקראת **אסטרטגיה מינמקס**.

דוגמה 5.8 ()

משחק שני משחקים סכום אפס שמתואר בטבלה הבאה. מצאו את ערך המקסמין, ערך המינמקס, אסטרטגיה מקסמין ואסטרטגיה מינמקס של המשחק.

$I \backslash II$	L	R
T	-2	5
B	3	0

פתרון:

$I \backslash II$	L	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u(s_1,s_2)$
T	-2	5	-2
B	3	0	0
$\max\limits_{s_1\in S_1} u(s_1,s_2)$	3	5	$0,3$

ערך מקסמין: . $\underline{v}=\max\limits_{s_1\in S_1}\min\limits_{s_2\in S_2} u(s_1,s_2)=0$
ערך מינמקס: . $\bar{v}=\min\limits_{s_2\in S_2}\max\limits_{s_1\in S_1} u(s_1,s_2)=3$
אסטרטגיה מקסמין: B.
אסטרטגיה מינמקס: L.

משמעות:
שחקן 1 אינו יכול להבטיח יותר מ- 0 ואסטרטגיה המקסמין היא B.

שחקן 2 אינו יכול להבטיח (שישלם) פחות מ- 3 ואסטרטגיה המינמקס היא L. ■

הגדרה 5.10 ערך המשחק ואסטרטגיות אופטימליות

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס.
אם מתקיים $\underline{v}=\bar{v}$ אז אומרים כי הגודל

$$v=\underline{v}=\bar{v}$$

הוא **הערך של המשחק**.

אסטרטגיות המקסמין והמינמקס של השחקנים נקראות **אסטרטגיות אופטימליות**.

דוגמה 5.9 ()

$I \backslash II$	L	C	R
T	3	-5	-2
M	1	4	1
B	6	-3	-5

פתרון:

$I \backslash II$	L	C	R	$\min\limits_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2)$
T	3	-5	-2	-5
M	1	4	1	1
B	6	-3	-5	-5
$\max\limits_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2)$	6	4	1	$1, 1$

ערך המשחק: $1 = \text{v}$.

אסטרטגיות האופטימליות: $s_1 = M, s_2 = R$.

שחקן 1 יכול להבטיח שיקבל לפחות 1 באמצעות האסטרטגיה האופימלית M.

שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר 1 באמצעות האסטרטגיה האופימלית R.

נשים לב $s = (M, R)$ גם שיווי משקל נאש של המשחק. ■

5.7 * הוכחת המשפט: ש"מ יחיד הוא פתרון באסטרטגיות שולטות חזק במשחק n שחקנים

משפט 5.5

נתון משחק של n שחקנים בצורה אסטרטגית $G = ((S_1, \ldots, S_n), (u_1, \ldots, u_n))$.

אם הווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ הוא שיווי משקל נאש, אז s^* פתרון באסטרטגיות השולטות חזק.

הוכחה:
משפט זו אומר שאם הווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ הוא שיווי משקל נאש, אז s^* ישרוד תהליך סילוק חוזר של אסטרטגיות הנשלטות חזק.

נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ שיווי משקל נאש אבל הוא לא פתרון באסטרטגיות שולטות חזק.

אם כן אז תהי s_i^* האסטרטגיה הראשונה שנמחקה בתהליך סילוק חוזר.
ז"א קיימת אסטרטגיה $t_i \in S_i$ אשר שולטת חזק ב- s_i^*, כלומר

$$u_i\left(s_1,\ldots,s_i^*,\ldots,s_n\right) < u_i\left(s_1,\ldots,t_i,\ldots,s_n\right) \quad . \tag{\#1}$$

לכל $s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n$ אשר עדיין נשארות בתהליך.

s_i^* בפרט, האסטרטגיות $s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*$ עדיין נשארים בתהליך אחרי שנמחקה אסטרטגיה s_i^*. לכן, לפי (#1),

$$u_i\left(s_1^*,\ldots,s_i^*,\ldots,s_n^*\right) < u_i\left(s_1^*,\ldots,t_i,\ldots,s_n^*\right) \quad . \tag{\#2}$$

בסתירה לכך ש $s^*=\left(s_1^*,\ldots,s_n^*\right)$ הוא תשובה טובה ביותר לכל שחקן. ■

משפט 5.6

נתון משחק של n שחקנים בצורה אסטרטגית $G=\left(\left(S_1,\ldots,S_n\right),\left(u_1,\ldots,u_n\right)\right)$.

אם ווקטור אסטרטגיות $s^*=\left(s_1^*,\ldots,s_n^*\right)$ הוא פתרון באסטרטגיות השולטות חזק אז s^* הוא השיווי משקל היחיד של המשחק.

הוכחה: נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי $\left(s_1^*,\ldots,s_n^*\right)$ הוא הווקטור אסטרטגיות היחיד שנשארת אחרי סילוק חוזר, אבל הוא לא שיווי משקל.
אם כן אז בהכרח קיימת אשטרטגיה s_i של שחקן i עבורה

$$u_i\left(s_1^*,\ldots,s_i^*,\ldots,s_n^*\right) < u_i\left(s_1^*,\ldots,s_i,\ldots,s_n^*\right) \quad . \tag{\#3}$$

האסטרטגיה s_i נמחקה במהלך התהליך סילוק חוזר. לכן בהכרח קיימת אסטרטגיה s_i' אשר שולטת חזק ב- s_i, כלומר

$$u_i\left(s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_n\right) < u_i\left(s_1,\ldots,s_i',\ldots,s_n\right) \quad . \tag{\#4}$$

לכל אסטרטגיות $s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots s_n$ אשר נשארות בתהליך סילוק חוזר.

בפרט, האסטרטגיות $\left(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*\right)$ נשארות בתהליך אפילו אחרי שהורדנו s_i^*. לכן, לפי (#4),

$$u_i\left(s_1^*,\ldots,s_i,\ldots,s_n^*\right) < u_i\left(s_1^*,\ldots,s_i',\ldots,s_n^*\right) \quad . \tag{\#5}$$

אם $s_i'=s_i^*$ אז (#5) סותר את (#3).

אם לא אז קיימת עוד אסטרטגיה s_i'' אשר שולטת חזק ב- s_i'.
לכן במקום (#4) ו- (#5) נקבל

$$u_i\left(s_1,\ldots,s_i',\ldots,s_n\right) < u_i\left(s_1,\ldots,s_i'',\ldots,s_n\right) \quad . \tag{\#4'}$$

$$u_i\left(s_1^*,\ldots,s_i',\ldots,s_n^*\right) < u_i\left(s_1^*,\ldots,s_i'',\ldots,s_n^*\right) \quad . \tag{\#5'}$$

אם $s_i''=s_i^*$ אז (#5') סותר את (#3). אם לא אז התהליך ממשיך עד שנגיע לסתירה ל- (#3).
■

5.8 *הוכחת המשפט: במשחק n שחקנים אסטרטגיה השולטת על שאר אסטרטגיות של שחקן היא אסטרטגית מקסמין

משפט 5.7

במשחק n שחקנים, אם אסטרטגיה σ_i של שחקן i השולטת על כל שאר האסטרטגיות שלו, אז

א) σ_i היא אסטרטגית מקסמין שלו.

ב) σ_i היא תשובה טובה ביותר לכל וקטור אסטרטגיות של שאר השחקנים.

הוכחה:

א) נניח כי σ_i היא אסטרטגית השולטת על כל שאר האסטרטגיות של שחקן i.

יהי $t_{-i} \in S_{-i}$ וקטור אסטרטגיות כך ש-

$$u_i(\sigma_i, t_{-i}) = \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(\sigma_i, s_{-i})$$

מכאן

$$\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(\sigma_i, s_{-i}) = u_i(\sigma_i, t_{-i}) \geq u_i(s_i, t_{-i}) \geq \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i})$$

כלומר

$$\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(\sigma_i, s_{-i}) \geq \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}) \ .$$

לפיכך

$$\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(\sigma_i, s_{-i}) = \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}) \ .$$

אבל $\underline{v}_i = \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i})$. לכן σ_i היא אסטרטגית מקסמין של שחקן i.

ב) לכל $s_{-i} \in S_{-i}$ מתקיים

$$u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(\sigma_i, s_{-i}) \ ,$$

ז"א σ_i שולטת חלש על כל שאר האסטרטגיות s_i של שחקן i. לכן σ_i תשובה טובה ביותר של שחרן i לכל וקטור אסטרטגיות של שאר השחקנים.

■

משפט 5.8

במשחק n שחקנים, אם לכל שחקן יש אסטרטגיה s_i^* ששולטת חלש כל האסטרטגיות האחרות שלו, אז

א) הווקטור אסטרטגיות $(s_1^*, \cdots, s_n^*)$ שיווי משקל,

ב) s_i^* היא אסטרטגית מקסמין לכל שחקן i.

הוכחה:

א) נניח כי $(s_1^*,\cdots,s_n^*)$ ווקטור אסטרטגיות עבורו s_i^* שולטת חלש בכל האסטרטגיות האחרות של שחקן i. אז לפי משפט 5.7 (חלק 2) למעלה, s_i^* תשובה טובה ביותר של שחקן i, כלומר

$$u_i(s_1^*,\ldots,s_i^*,\ldots,s_n^*) \geq u_i(s_1^*,\ldots,s_i,\ldots,s_n^*)$$

לכל $s_i \in S_i$. לפיכך הווקטור אסטרטגיות $s^*=(s_1^*,\cdots,s_n^*)$ הוא נקודת שיווי משקל.

ב) לפי משפט 5.7 (חלק 1), s_i^* היא אסטרטגית מקסמין של שחקן i. לפיכך הווקטור $s^*=(s_1^*,\cdots,s_n^*)$ הוא ווקטור אסטרטגיות מקסמין.

■