15 $TZ_1 7-8$

סיכום של ההתפלגות נורמית וההתפלגות הנורמלית הסטנדרדית

15.1 הגדרה. (מ"מ רציף נורמאלי) משתנה מקרי X מתפלג נורמאלי מוגדר להיות כך שצפיפותו נתון ע"י הנוסחאה

$$n(x,\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

כאשר μ הוא התוחלת ו- σ הסטיית התקן. מסמנים מ"מ נורמאלי ב $X\sim N(\mu,\sigma)$.

15.2 הגדרה. (מ"מ רציף נורמאלי סטנדרדי) משתנה מקרי Z מתפלג נורמאלי סטנדרדי מוגדר להיות מ"מ נורמאלי בעל תוחלת $\mu=0$ ו- סטיית התקן $\sigma=1$, כלומר המ"מ נורמאלי עם צפיפות נתון ע"י

$$n(z,\mu=0,\sigma=0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}\ .$$

15.3 הגדרה. (התפלגות המצטברת של מ"מ נורמאלי סטנדרדי) התפלגות המצטברת של מ"מ נורמאלי סטנדרדי Z מוגדרת להיות

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}dt\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}=\frac{1}{2}\left[1+\text{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right]\ ,$$

כאשר

$$\text{erf}\,(z):=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z dt\ e^{-t^2}\ ,$$

(כלומר $\text{erf}\left(z/\sqrt{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{z/\sqrt{2}}dt\ e^{-t^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z dt\ e^{-t^2}$) והתכונה ש

$$\text{erf}(-z)=-\text{erf}(z)$$

נובע למסקנה

$$\Phi(-z)=1-\Phi(z)\ .$$

15.4 הגדרה. (הסתברות של מ"מ נורמאלי) ההסתברות שמ"מ נורמאלי X בעל תוחלת μ וסטיית התקן σ מקבל ערך פחות או שווה ל x_1 נתון ע"י

$$P(X\le x_1)=\Phi(z_1)$$

כאשר

$$z_1=\frac{x_1-\mu}{\sigma}\ .$$

ההסתברות שמ"מ נורמאלי X בעל תוחלת μ וסטיית התקן σ מקבל ערים בין x_1 ו- x_2 נתון ע"י

$$P(x_1\le X\le x_2)=\Phi(z_2)-\Phi(z_1)$$

כאשר

$$z_1=\frac{x_1-\mu}{\sigma}\ ,\qquad z_2=\frac{x_2-\mu}{\sigma}\ .$$

15.5 חוק. (קירוב נורמלי להתפלגות בינומית) יהי $X\sim\text{Bin}\,(n,p)$. אז עבור $n\ge 30$,

$$X\sim N\left(np,nq\right)\ .$$

תיקון רציפות:

$$P(a\le X\le b)$$

כמשתנה בדיד שווה ל

$$P(a-0.5<X<b+0.5)$$

כמשתנה רציף.

משפט הגבול המרכזי

15.6 חוק. (משפט הגבול המרכזי) יהי X משתנה מקרי בעל תוחלת μ וסטיית התקן σ, ויהי

$$x_1, \dots, x_n$$

מדגם מקרי מתוך X. אזי,כאשר $n \geq 30$ או לכל n במקרה ש X מתפלג נורמלית, מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(n\mu, n\sigma^2\right),$$

או במילים אחרות, כאשר $\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ הוא התוחלת של המדגם,

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) .$$

15.7 מסקנה. (משפט הגבול המרכזי) יהי $\bar{X}$ התוחלת של מדגם מקרי של אורך n מתוך אוכלוסיה בעל תוחלת μ ושונות σ^2. אזי,כאשר $n \geq 30$, ההתפלגות של המשתנה

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

היא ההתפלגות הנורמלית הסטנדרדית $n(z, 0, 1)$, קרי

$$Z \sim N(0,1) .$$

רווחי סמך לתוחלת של מדגם מקרי: שונות ידועה

נניח שיש אוכלוסיה בעל תוחלת μ אינה ידועה ושונות σ^2 ידועה. עבור מדגם X כלשהו מתוך האוכלוסיה זו, לפי המשפט הגבול המרכזי, ההתפלגות של $\bar{X}$ מתפלג בקירוב נורמלי עם תוחלת $\mu_{\bar{X}} = \mu$ וסטיית התקן $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
השאלה היא:

> נתון $\bar{X}$, מהו הטווח
>
> $$a \leq \mu \leq b$$
>
> כך כי יש הסתברות $(1-\alpha)$ ל μ כן להיות נמצא בטווח זו, קרי
>
> $$P(a \leq \mu \leq b) = 1 - \alpha$$
>
> והסתברות α ל μ לא להיות נמצא בטווח זו, כלומר
>
> $$P(\mu \notin [a,b]) = \alpha .$$

לדוגמה, מהו הטווח של μ כך שיש הסתברות של 0.95 (או 95%) להיות נמצא בו? הנה $1 - \alpha = 0.95$ אזי $\alpha = 0.05$. אנו מתבקשים למצוא a ו- b כך ש $P(a \leq \mu \leq b) = 0.95$. נגלה להלן [עיין משוואה (2*)] שהערכים הנדרשים הם

$$a = \bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad b = \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

כאשר $\bar{X}$ הוא התוחלת המחושב של המדגם מקרי X, σ הסטיית התקן הידוע של האוכלוסיה כולה שממנה המדגם נלקח, n האורך של המדגם ו- $z_{1-\alpha/2}$ הוא הערך של המשתנה נורמלי סטנדרדי z המתאים ל $\bar{X}$ [עיין נוסחאה (1*)

להלן], מוגדר כך שהשטח התחום בטווח $[-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}]$ של הגרף [עיין אייור להלן] שווה ל $(1-\alpha)$ והשטח בצד ימין של $z_{1-\alpha/2}$ שווה ל $\alpha/2$.

הטווח $[a,b] = [\ \bar{X} - z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\ ,\ \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\ ]$ נקרא **רווח סמך** וההסתברות $1-\alpha$ נקרא **רמת מובהקות** .

כדי למצוא את הטווח בשאלה, אנחנו זוכרים כי השטח התחום בגרף של משתנה מקרי כלשהו הוא שווה דווקא להסתברות כי המ"מ נמצא בטווח זו. ז"א השטח התחום של הגרף של $\bar{X}$ בטווח $[a,b]$ הוא שווה ל $P(a \le \bar{X} \le b)$. אבל בשל העובדה ש $\bar{X}$ הוא מתפלג נורמלי (לפי המשפט הגבול המרכזי) אזי ניתן להגדיר משתנה מקרי נורמלי סטנדרדי המתאים, והשטח זו יהיה שווה לשטח התחום של הגרף של Z בטווח המתאים.

נגדיר המשתנה Z להיות

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\ . \qquad (*1)$$

יהי

$$z_{1-\alpha/2}$$

הערך של Z אשר עבורו השטח התחום בטווח $[-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}]$ של הגרף [עיין אייור] שווה ל $(1-\alpha)$ והשטח בצד ימין שלו הוא $\alpha/2$ כמתואר באייור להלן.

כמו כן הטווח הנדרש של μ כדי לתת רמת מובהקות $1-\alpha$ (הסתברות $(1-\alpha)$ ל- μ לפול בטווח זו) נמצא ע"י למצוא הטווח המתאים של Z כך שהשטח התחום שווה ל- $(1-\alpha)$. כמו כן לפי הגרף נמצא ש

$$P(-z_{1-\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha\ ,$$

על כן

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha\ .$$

מכפילים אגף הימין ואגף השמאול ב $\sigma/\sqrt{n}$ ולוקחים $\bar{X}$ מכל אגף ואגף ומקבלים כי

$$P\left(\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha\ .$$

במילים, לוקחים מדגם מקרי של אורך n מתוך אוכלוסיה בעל שונות σ^2 ידועה. רווח סמך של $100(1-\alpha)\%$ לתוחלת μ נתון ע"י

$$\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (*2)$$

כאשר $z_{1-\alpha/2}$ הוא הערך של Z אשר עבורו יש שטח של $\alpha/2$ בצד הימין שלו.
פורמלית:

15.8 חוק. (רווח סמך מדגם מקרי σ^2 ידועה)

אם $\bar{x}$ הוא התוחלת של מדגם מקרי של אורך n מתוך אוכלוסיה בעל שונות σ^2 ידועה, רווח סמך של $100(1-\alpha)\%$ להתוחלת μ נתון ע"י

$$\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

כאשר $z_{1-\alpha/2}$ הוא הערך של z אשר עבורו יש שטח של $\alpha/2$ בצד הימין שלו.

15.9 דוגמא. (רווח סמך מדגם מקרי σ^2 ידועה)

הריכוז הממוצע של חמצן ממדגם של מדידות הנלקחות מ 36 מקומות שונים בנהר הוא 2.6 [gr/mm]. מהו הרווח סמך של הרמות המבהוקות של 95% ו 99% להתוחלת של הריכוז חמצן בהנהר בשאלה. יש להניח שהסטיית התקן של האוכלוסיה הוא 0.3 [gr/mm].

פיתרון.
הממוצע של המדגם מקרי הוא
$$\bar{x} = 2.6 \ ,$$
ו-
$$1-\alpha = 0.95 \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha = 0.05 \ .$$
הערך של z אשר עבורו השטח בצד הימין שלו הוא $\alpha/2 = 0.025$, הוא
$$z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96 \ .$$
מהטבלה. לכן הרווח סמך של 95%, לפי נוסחאה (2*), הוא
$$2.6 - (1.96)\left(\frac{0.3}{\sqrt{36}}\right) < \mu < 2.6 + (1.96)\left(\frac{0.3}{\sqrt{36}}\right) \ .$$
ניתן לצמצם זה ל
$$2.50 < \mu < 2.70 \ .$$
למצוא הרווח סמך של רמת מובהקות של 99%, שים לב ש
$$1-\alpha = 0.99 \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha = 0.01, \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha/2 = 0.005 \ , \qquad \Leftrightarrow \qquad 1-\alpha/2 = 0.995 \ .$$
יש לחפש את הערך של z כך שבצד הימין שלו יש שטח של $\alpha/2 = 0.005$ מהטבלה הערך הנדרש הוא $z_{1-\alpha/2} = z_{0.995} = 2.575$ ולכן הרווח סמך של רמת מובהקות של 99% הוא
$$2.6 - (2.575)\left(\frac{0.3}{\sqrt{36}}\right) < \mu < 2.6 + (2.575)\left(\frac{0.3}{\sqrt{36}}\right) \ ,$$
או
$$2.47 < \mu < 2.73 \ .$$
שימו לב יש צורך לרווח יותר ארוך כדי להשיג ערך של μ יותר מדוייק. ■

הרווח סמך נותן הדייוק של האומדן של μ. אם μ נמצא במרכז של הרווח, אז $\bar{x}$ מעריך את μ ללא שגיאה. רוב הזמן אבל, $\bar{x}$ לא יהיה שווה בדיוק ל μ, כך שיהיה שגיאה בין האומדן לבין הערך המדויק של μ. הגודל של השגיאה זו הוא שווה להערך מוחלט של ההפרש בין μ לבין $\bar{x}$, וניתן להיות $100(1-\alpha)\%$ בטוח כי ההפרש זו לא יעבור $z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$. אפשר לראות את זה עם העזרה של האייור להלן.

15.10 מסקנה. (סמך באומדן של μ)
אם לוקחים $\bar{x}$ להיות אומדן של μ, אז יש רמת מובהקות של $100(1-\alpha)\%$ שהשגיאה לא יעבור $z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$.

בדוגמה לעייל יש רמת מובהקות של 95% שההפרש בין התוחלת של המדגם $\bar{x} = 2.6$ ו μ לא יעבור $(1.96)(0.3)/\sqrt{36} = 0.13$. לעתים יש צורך לדעת את האורך הנדרש של המדגם כדי לוודע שהשגיאה באומדן של μ לא יעבור ערך נתון e. על ידי המסקנה 15.10 לעייל, יש צורך לבחור n כך ש
$$z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} = e \ .$$
פותרים את המשוואה זו כדי לקבל נוסחאה ל n:

15.11 מסקנה. (סמך באומדן של μ)
אם לוקחים $\bar{x}$ להיות אומדן של μ, אז יש רמת מובהקות של $100(1-\alpha)\%$ שהשגיאה לא יעבור e כאשר האורך של המדגם הוא
$$n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\sigma}{e}\right)^2 \ .$$

15.12 דוגמא. מהו האורך הנדרש של המדגם להשיג רמת מובהקות של 95% שיש לאומדן של μ בדוגמה 15.9 שגיאה פחות מ 0.05?

פיתרון. הסטיית התקן הוא $\sigma = 0.3$. לכן לפי מסקנה 15.11:
$$n = \left(\frac{(1.96)(0.3)}{(0.05)}\right)^2 = 138.3 \ .$$
לכן אפשר להיות 95% בטוח שמדגם מקרי של אורך של $n = 139$ יתן אומדן $\bar{x}$ של μ עם שגיאה פחות מ 0.05. ■

רווחי סמך לתוחלת של מדגם מקרי מתוך התפלות נורמלית: שונות אינה ידועה

לעתים יש צורך לאמוד התוחלת של אוכלוסיה נתונה כאשר השונות אינה ידועה. נתון מדגם מקרי X מתוך התפלגות נורמלית, יש להמשתנה מקרי
$$T = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$$
כאשר למשתנה T יש התפלגות t בעל $n-1$ דרגות החופש, כאשר s הוא הסטיית התקן של המדגם. במקרה זה כאשר σ אינו ידוע, ניתן להשתמש ב T כדי למצוא רווחי סמך של μ. השלבים הם אותם השלבים עבור σ ידוע לעייל, אלא במקום σ מציבים s ובמקום ההתפלגות הנורמלית הסטנדרדית יש את ההתפלגות t:
$$P(-t_{1-\alpha/2} < T < t_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha \ ,$$
כאשר $t_{1-\alpha/2}$ הוא הערך של t בעל $n-1$ דרגות החופש, אשר בצד הימין שלו יש שטח של $\alpha/2$. מציבים בT ומקבלים
$$P\left(-t_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha \ ,$$
מכפילים אגף הימין ואגף השמאול ב $S/\sqrt{n}$ ולוקחים $\bar{X}$ מכל אגף ואגף ומקבלים כי
$$P\left(\bar{X} - t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \ .$$
במילים, עבור מדגם מקרי נתון של אורך n, מחשבים את התוחלת $\bar{x}$ וסטיית התקן s. אז מקבלים כי הרווח סמך של רמת מובהקות $100(1-\alpha)\%$ להתוחלת μ של האוכלוסיה נתון ע"י
$$\bar{x} - t_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \ .$$

פורמלית:

15.13 חוק. (רווח סמך מדגם מקרי: σ^2 אינה ידועה)
כאשר $\bar{x}$ ו- s הם התוחלת וסטיית התקן של מדגם מקרי הנלקח מתוך אוכלוסיה כלשהי, במבצ שהתוחלת μ וסטיית התקן σ של האוכלוסיה כולה אינם ידועים, הרווח סמך של רמת מובהקות $100(1-\alpha)\%$ להתוחלת μ נתון ע"י
$$\bar{x} - t_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$
כאשר $t_{\alpha/2}$ הוא הערך של t אשר עבורו יש שטח של $\alpha/2$ בצד הימין שלו.

15.14 דוגמא. (רווח סמך מדגם מקרי σ^2 אינה ידועה)
התוכן של שבע מכולות הדומות של חומצה הם
9.8, 10.2, 10.4, 9.8, 10.0 10.2 ו- 9.6 ליטרים. חפשו רווח סמך של 95% להתוחלת של כל המכולות. יש להניח שהכמות בכל מכולה מתפלגת נורמלית.

פיתרון.
התוחלת וסטיית התקן של המדגם הם $\bar{x} = 10.0$ ו- $s = 0.283$. בדוגמה זו

$$1-\alpha = 0.95, \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 0.05, \qquad \Rightarrow \quad 1-\alpha/2 = 0.975 \ .$$

על ידי הטבלה, $t_{0.975} = 2.447$ עבור $n-1=6$ דרגות החופש. לכן הרווח סמך של 95% להתוחלת μ הוא

$$10.0 - (2.447)\left(\frac{0.283}{\sqrt{7}}\right) < \mu < 10.0 + (2.447)\left(\frac{0.283}{\sqrt{7}}\right)$$

או

$$9.74 < \mu < 10.26 \ .$$

■

בדיקות השערות על התוחלת

15.15 חוק. (מבצ 1: רווח סמך ובדיקת השערות לתוחלת) באחד המקרים
א' σ ידוע ו $n \geq 30$,
ב' σ ידוע ו $n \gtreqless 30$, ו- $\bar{X}$ מתפלג נורמאלית,
רווח סמך ברמת $(1-\alpha)100\%$ נתון ע"י

$$\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ .$$

15.16 חוק. (מבצ 1: בדיקת השערוצ ברמת מובהקות α)

$$\begin{cases} H_0: & \mu \leq \mu_0, \\ H_1: & \mu > \mu_0, \end{cases} \quad \bar{X} \geq \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ H_0 \text{ נדחית} \ , \quad \bar{X} < \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ H_0 \text{ מתקבלת} \ .$$

$$\begin{cases} H_0: & \mu \geq \mu_0, \\ H_1: & \mu < \mu_0, \end{cases} \quad \bar{X} \leq \mu_0 - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ H_0 \text{ נדחית} \ , \quad \bar{X} > \mu_0 - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ H_0 \text{ מתקבלת} \ .$$

$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0, \\ \\ H_1: & \mu \neq \mu_0, \end{cases} \quad X \leq \mu_0 - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ או } X \geq \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad \Rightarrow \ H_0 \text{ נדחית} \ ,$$

$$\mu_0 - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \Rightarrow \ H_0 \text{ מתקבלת} \ .$$

15.17 חוק. (מבצ 2: רווח סמך ובדיקת השערות לתוחלת)
במקרה ש σ לא ידוע ו $n \geq 30$, ו- $\bar{X}$ מתפלג נורמאלית, רווח סמך ברמת $(1-\alpha)100\%$

$$\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \ .$$

15.18 חוק. (מבצ 2: בדיקת השערוצ ברמת מובהקות α)

$$\begin{cases} H_0: & \mu \le \mu_0, \\ H_1: & \mu > \mu_0, \end{cases} \quad \bar{X} \ge \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; H_0 \text{ נדחית}, \quad \bar{X} < \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; H_0 \text{ מתקבלת}.$$

$$\begin{cases} H_0: & \mu \ge \mu_0, \\ H_1: & \mu < \mu_0, \end{cases} \quad \bar{X} \le \mu_0 - z_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; H_0 \text{ נדחית}, \quad \bar{X} > \mu_0 - z_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; H_0 \text{ מתקבלת}.$$

$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0, \\ H_1: & \mu \ne \mu_0, \end{cases} \quad X \le \mu_0 - z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \text{ או } X \ge \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \quad \Rightarrow\; H_0 \text{ נדחית},$$

$$\mu_0 - z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad \Rightarrow\; H_0 \text{ מתקבלת}.$$

15.19 חוק. (מבצ 3: רווח סמך ובדיקת השערות לתוחלת)

ב מקרה ש σ לא ידוע ו $n < 30$, ו- $\bar{X}$ מתפלג נורמאלית, רווח סמך ברמת $(1-\alpha)100\%$

$$\bar{X} - t^{n-1}_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t^{n-1}_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

15.20 חוק. (מבצ 3: בדיקת השערוצ ברמת מובהקות α)

$$\begin{cases} H_0: & \mu \le \mu_0, \\ H_1: & \mu > \mu_0, \end{cases} \quad \bar{X} \ge \mu_0 + {t^{n-1}}_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; H_0 \text{ נדחית}, \quad \bar{X} < \mu_0 + {t^{n-1}}_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; H_0 \text{ מתקבלת}.$$

$$\begin{cases} H_0: & \mu \ge \mu_0, \\ H_1: & \mu < \mu_0, \end{cases} \quad \bar{X} \le \mu_0 - {t^{n-1}}_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; H_0 \text{ נדחית}, \quad \bar{X} > \mu_0 - {t^{n-1}}_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; H_0 \text{ מתקבלת}.$$

$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0, \\ H_1: & \mu \ne \mu_0, \end{cases} \quad X \le \mu_0 - {t^{n-1}}_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \text{ או } X \ge \mu_0 + {t^{n-1}}_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \quad \Rightarrow\; H_0 \text{ נדחית},$$

$$\mu_0 - {t^{n-1}}_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu_0 + {t^{n-1}}_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad \Rightarrow\; H_0 \text{ מתקבלת}.$$

15.21 דוגמא.

מדגם מקרי של 100 מיתות הרשומות בארצ"ה במהלך השנה שעברה מראה אורך חיים הממוצע של 71.8 שנים. מניחים שהסטיית התקן של האוכלוסיה כולה הוא 8.9 שנים. האם זאת אומרת שהתוחלת של ה חיים היום היא יותר מ 70 שנים? יש להשתמש בסמך של $\alpha = 0.05$.

פיתרון.

1. $H_0: \quad \mu = 70$ שנים.
2. $H_1: \quad \mu > 70$ שנים.
3. $\alpha = 0.05$.

4. האיזור הקבלה הוא $z > z_{1-\alpha}$ כאשר $1 - \alpha = 1 - 0.05 = 0.95$, לכן $z > z_{0.95} = 1.645$, כאשר $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.
5. חישובים: $\bar{x} = 71.8$ שנים, $\sigma = 8.9$ שנים, ולכן

$$z = \frac{71.8 - 70}{8.9/\sqrt{100}} = 2.02 \ .$$

6. תוצאה: השערה H_0 נדחית ומסיקים כי האורך החיים הממוצע היום הוא יותר גדול מ 70 שנים.

■

טבלות של ערכים של התפלגויות

$\Phi(z)$	z
0.5000000	0.0000000
0.5500000	0.1256613
0.6000000	0.2533471
0.6500000	0.3853205
0.7000000	0.5244005
0.7500000	0.6744898
0.8000000	0.8416212
0.8500000	1.0364334
0.9000000	1.2815516
0.9100000	1.3407550
0.9200000	1.4050716
0.9300000	1.4757910
0.9400000	1.5547736
0.9500000	1.6448536
0.9600000	1.7506861
0.9700000	1.8807936
0.9800000	2.0537489
0.9900000	2.3263479
0.9950000	2.5758293
0.9990000	3.0902323
0.9995000	3.2905267
0.9999000	3.7190165
0.9999500	3.8905919
0.9999900	4.2648908
0.9999950	4.4171734
0.9999990	4.7534243
0.9999995	4.8916385
0.9999999	5.1993376

n	$t_{0.995}$	$t_{0.990}$	$t_{0.975}$	$t_{0.950}$	$t_{0.900}$	$t_{0.800}$	$t_{0.750}$	$t_{0.700}$	$t_{0.600}$	$t_{0.550}$
1.000	63.657	31.821	12.706	6.314	3.078	1.376	1.000	0.727	0.325	0.158
2.000	9.925	6.965	4.303	2.920	1.886	1.061	0.816	0.617	0.289	0.142
3.000	5.841	4.541	3.182	2.353	1.638	0.978	0.765	0.584	0.277	0.137
4.000	4.604	3.747	2.776	2.132	1.533	0.941	0.741	0.569	0.271	0.134
5.000	4.032	3.365	2.571	2.015	1.476	0.920	0.727	0.559	0.267	0.132
6.000	3.707	3.143	2.447	1.943	1.440	0.906	0.718	0.553	0.265	0.131
7.000	3.499	2.998	2.365	1.895	1.415	0.896	0.711	0.549	0.263	0.130
8.000	3.355	2.896	2.306	1.860	1.397	0.889	0.706	0.546	0.262	0.130
9.000	3.250	2.821	2.262	1.833	1.383	0.883	0.703	0.543	0.261	0.129
10.000	3.169	2.764	2.228	1.812	1.372	0.879	0.700	0.542	0.260	0.129
11.000	3.106	2.718	2.201	1.796	1.363	0.876	0.697	0.540	0.260	0.129
12.000	3.055	2.681	2.179	1.782	1.356	0.873	0.695	0.539	0.259	0.128
13.000	3.012	2.650	2.160	1.771	1.350	0.870	0.694	0.538	0.259	0.128
14.000	2.977	2.624	2.145	1.761	1.345	0.868	0.692	0.537	0.258	0.128
15.000	2.947	2.602	2.131	1.753	1.341	0.866	0.691	0.536	0.258	0.128
16.000	2.921	2.583	2.120	1.746	1.337	0.865	0.690	0.535	0.258	0.128
17.000	2.898	2.567	2.110	1.740	1.333	0.863	0.689	0.534	0.257	0.128
18.000	2.878	2.552	2.101	1.734	1.330	0.862	0.688	0.534	0.257	0.127
19.000	2.861	2.539	2.093	1.729	1.328	0.861	0.688	0.533	0.257	0.127
20.000	2.845	2.528	2.086	1.725	1.325	0.860	0.687	0.533	0.257	0.127
21.000	2.831	2.518	2.080	1.721	1.323	0.859	0.686	0.532	0.257	0.127
22.000	2.819	2.508	2.074	1.717	1.321	0.858	0.686	0.532	0.256	0.127
23.000	2.807	2.500	2.069	1.714	1.319	0.858	0.685	0.532	0.256	0.127
24.000	2.797	2.492	2.064	1.711	1.318	0.857	0.685	0.531	0.256	0.127
25.000	2.787	2.485	2.060	1.708	1.316	0.856	0.684	0.531	0.256	0.127
26.000	2.779	2.479	2.056	1.706	1.315	0.856	0.684	0.531	0.256	0.127
27.000	2.771	2.473	2.052	1.703	1.314	0.855	0.684	0.531	0.256	0.127
28.000	2.763	2.467	2.048	1.701	1.313	0.855	0.683	0.530	0.256	0.127
29.000	2.756	2.462	2.045	1.699	1.311	0.854	0.683	0.530	0.256	0.127
30.000	2.750	2.457	2.042	1.697	1.310	0.854	0.683	0.530	0.256	0.127
40.000	2.704	2.423	2.021	1.684	1.303	0.851	0.681	0.529	0.255	0.126
60.000	2.660	2.390	2.000	1.671	1.296	0.848	0.679	0.527	0.254	0.126
120.000	2.617	2.358	1.980	1.658	1.289	0.845	0.677	0.526	0.254	0.126