שיעור 11
אינטגרלים לא מסויימים

11.1 סכום רימן

הגדרה 11.1 הפרדה

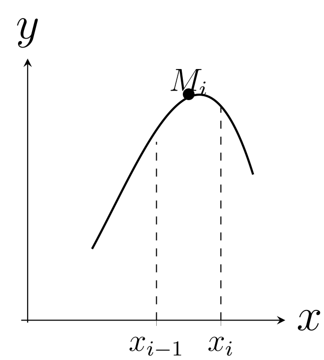
הפרדה של הקטע $[a,b]$ הינה קבוצת נקודות

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{m-1} \leq x_n = b \ .$$

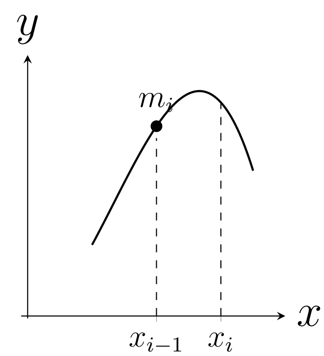
נגדיר $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

הגדרה 11.2

נניח כי $f(x)$ פונקציה חסומה הקטע $[a,b]$. לכל הפרדה P של $[a,b]$. נגדיר $M_i = \max\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

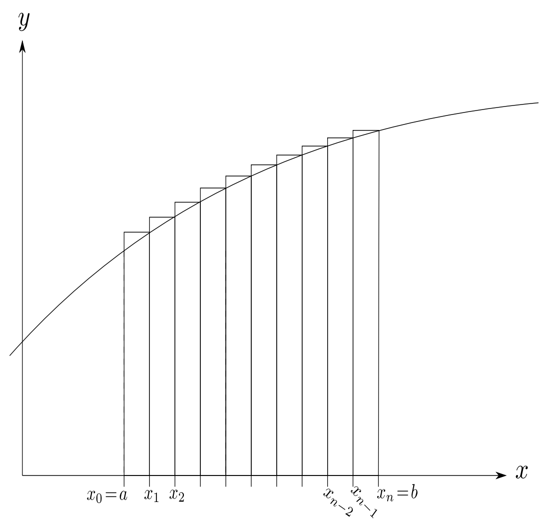


ונגדיר $m_i = \min\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

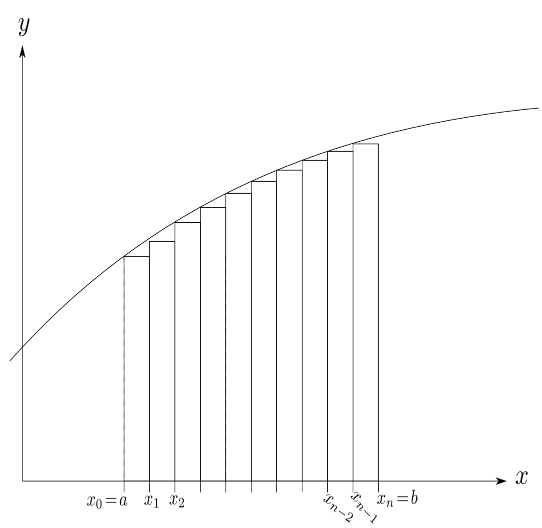


הגדרה 11.3

נניח כי f פונקציה שרציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). נניח כי P הפרדה מסוימת של הקטע $[a,b]$.
נגדיר $U(P,f)=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$. המשמעות הגאומטרי מתואר בגרף להלן.



נגדיר $L(P,f)=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$. המשמעות הגאומטרי מתואר בגרף להלן.



הגדרה 11.4 סכום רימן העליון וסכון רימן התחתון

נניח כי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע $(a.b)$. ה **סכום רימן העליון** מוגדר

$$\int_a^{\bar{b}} f\,dx = \inf_P U(P,f)\ ,$$

וה **סכום רימן התחתון** מוגדר

$$\int_{\bar{a}}^{b} f\,dx = \sup_P L(P,f) \ ,$$

הגדרה 11.5 פונקציה אינטגרבילית

נניח כי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע $(a.b)$. אומרים כי f **אינטגרבילית** בקטע $[a,b]$ אם

$$\int_{a}^{\bar{b}} f\,dx = \int_{\bar{a}}^{b} f\,dx \ .$$

הגדרה 11.1

נניח כי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע $(a.b)$. **פונקציה הקדומה** F של f מוגדרת לפי

$$f(x) = F'(x) \ .$$

משפט 11.1 המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי I

נניח כי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$. הפונקציה $g(x)$ שמוגדרת

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \ , \qquad a \le x \le b \ .$$

רציפה בקטע $[a,b]$, גזירה בקטע (a,b), ו-

$$g'(x) = f(x) \ .$$

ז"א $g(x)$ הפונקציה הקדומה של $f(x)$.

הוכחה: נניח ש- $x \in [a,b]$, $\epsilon > 0$, ונבחור $h > 0$ כך ש- $x+h < b$ ו- $0 < h < \delta$. אז

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\int_h^{x+h} f(t)dt \ .$$

f רציפה בנקודה x לכן קיים $\delta > 0$ כך ש-

$$|t-x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(t)-f(x)| < \epsilon \ .$$

בפרט, אם $t \in [x,x+h]$ אז $x \le t \le x+h$ ולכן $0 \le t-x \le h < \delta$, ז"א $|t-x| < \delta$.
לכן נקבל $|f(t)-f(x)| < \epsilon$.

מכאן נובע כי

נפעיל אינטגרל על זה מעל הקטע $[x,x+h]$:

$$\begin{array}{rcccl}
f(x)-\epsilon &<& f(t) &<& f(x)+\epsilon\\
\int_x^{x+h} dt\,(f(x)-\epsilon) &<& \int_x^{x+h} dt\,f(t) &<& \int_x^{x+h} dx\,(f(x)+\epsilon)\\
(f(x)-\epsilon)\int_x^{x+h} dt &<& \int_x^{x+h} dt\,f(t) &<& (f(x)+\epsilon)\int_x^{x+h} dt\\
(f(x)-\epsilon)(x+h-x) &<& \int_x^{x+h} dt\,f(t) &<& (f(x)+\epsilon)(x+h-x)\\
f(x)-\epsilon &<& \frac{1}{h}\int_x^{x+h} dt\,f(t) &<& f(x)+\epsilon\\
f(x)-\epsilon &<& \frac{g(x+h)-g(x)}{h} &<& f(x)+\epsilon\\
-\epsilon &<& \frac{g(x+h)-g(x)}{h}-f(x) &<& \epsilon
\end{array}$$

לפיכך

$$\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h}-f(x)\right|<\epsilon\ .$$

לכן הוכחנו כי

$$\lim_{h\to0^+}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f(x)\ .$$

באופן דומה ניתן להוכיח כי

$$\lim_{h\to0^-}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f(x)\ .$$

לכן

$$\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f(x)\ .$$

לפי ההגדרה של נגזרת, מכאן נובע כי

$$g'(x)=f(x)\ .$$

■

משפט 11.2 המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי II

נניח כי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$. אז

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt\ =F(b)-F(a)$$

כאשר $F(x)$ פונקציה הקדומה של $f(x)$.

הוכחה: נניח כי F פונקציה הקדומה של f. נגדיר

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt\ .$$

לפי משפט 11.1, g רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b) ו- $g'(x)=f(x)$ לכל $x\in(a,b)$. כעת נגדיר

$$h(x):=g(x)-F(x)\ .$$

g רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). לפיכך הפוקנציה $g-h$.
רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). בפרט, אם $x\in(a,b)$ אז

$$h'(x)=g'(x)-F'(x)\ .$$

לפי המשפט 11.1, $g'(x)=f(x)$ ו- $F'(x)=f(x)$ לפי ההגדרה של פונקציה הקדומה. לכן $h'(x)=f(x)-f(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$. לכן, מכיוון ש- h רציפה בנקודות a ו- b, אז h פונקציה קבועה ולכן $h(a)=h(b)$.

$$\begin{aligned}
h(b)=&h(a)\\
g(b)-F(b)=&g(a)-F(a)\\
g(b)=&g(a)+F(b)-F(a)\\
\int_a^b f(t)dt=&\int_a^a f(t)dt+F(b)-F(a)\\
\int_a^b f(t)dt=&0+F(b)-F(a)\\
\int_a^b f(t)dt=&F(b)-F(a)
\end{aligned}$$

■

11.2 אינטגרלים לא מסויימים

הגדרה 11.2 פונקציה קדומה

אם $f(x)=F'(x)$ אז אומרים כי $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$.

דוגמה 11.1

$$(x^2)'=2x\ ,$$

לכן $F(x)=x^2$ פונקציה קדומה של $f(x)=2x$

משפט 11.3 פונקציה קדומה

אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$, אז $F(x)+C$ (לכל $C\in\mathbb{R}$ קבוע) היא גם פונקציה קדומה של $f(x)$.

ז"א אם פונקציה קדומה של $f(x)$ קיימת, בהכרח ישנם אינסוף פונקציות קדומות של $f(x)$.

דוגמה 11.2

$$(x^2+C)'=2x\ ,$$

לכן לפונקציה $f(x)=2x$ יש אינסוף פונקציות קדומות מהצורה $F(x)=x^2+C$.

הגדרה 11.3 האינטגרל הלא מסויים

האוסף של כל הפונקציות הקדומות של $f(x)$, נקרא האינטגרל הלא מסויים של $f(x)$, מסומן $\int f(x)dx$. ז"א

$$\int f(x)dx=F(x)+C \qquad \Leftrightarrow \qquad (F(x)+C)'=f(x)\ .$$

dx נקרא הדיפרנציאל של x.

11.3 דוגמאות

דוגמה 11.3

$$\int 2x\,dx=x^2+C$$

דוגמה 11.4

$$\int \cos x\,dx=\sin x+C$$

דוגמה 11.5

$$\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C$$

דוגמה 11.6

$$\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C$$

11.4 לינאריות של אינטגרל לא מסויים

הגדרה 11.4 לינאריות של אינטגרל לא מסויים

נתונות פונקציות $f(x)$, $g(x)$ וסקלר a.

(i) $\int a\cdot f(x)\,dx = a\cdot \int f(x)\,dx$.

(ii) $\int [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

הוכחה:

(i) אם $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$, ז"א $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, אז $F'(x)=f(x)$. לפיו ולפי משפט **??** (מספר 2),

$$a\cdot f(x) = a\cdot F'(x) = (aF(x))' \ .$$

נפעיל אינטגרל לא מסויים על שני הצדדים ונקבל

$$\int a\cdot f(x)\,dx = a\cdot F(x)+C \ .$$

■

11.5 טבלת האינטגרלים חלקית

$$
\begin{aligned}
\int x^a \, dx =& \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \ , \qquad (a \neq -1) \\
\int \frac{1}{x} \, dx =& \ln|x| + C \ , \\
\int a^x \, dx =& \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \\
\int e^x \, dx =& e^x + C \ , \\
\int \sin x \, dx =& -\cos x + C \ , \\
\int \cos x \, dx =& \sin x + C \ , \\
\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx =& \tan x + C \ , \\
\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx =& -\cot x + C \ , \\
\int \frac{1}{1+x^2} \, dx =& \arctan x + C \ , \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =& \arcsin x + C \ ,
\end{aligned}
$$

11.6 תרגילים

דוגמה 11.7

$$
\begin{aligned}
\int \left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^2 dx = \int \left(1+2x^{2/3}+x^{4/3}\right) dx \\
=& x + 2\frac{x^{2/3}}{5/3} + \frac{x^{4/3}}{7/3} + C \\
=& x + \frac{6x^{2/3}}{5} + \frac{3x^{4/3}}{7} + C
\end{aligned}
$$

דוגמה 11.8

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} \, dx = \int x^{-2/5} dx \\
=& \frac{5}{3} x^{1-2/5} + C \\
=& \frac{5}{3} x^{3/5} + C
\end{aligned}
$$

דוגמה 11.9

$$\int \frac{x+1}{x}\,dx = \int \left(1+\frac{1}{x}\right)\,dx$$
$$= x + \ln|x| + C$$

11.7 החלפת משתנה / אינטגרציה ע"י הצבה

משפט 11.4 אינטגרציה ע"י הצבה

נתון אינטגרל מצורה

$$\int f\left(t(x)\right)\cdot u'(x)\,dx$$

כאשר $f\left(u(x)\right)$ פונקציה של הפונקציה $u(x)$ ו- $u'(x)$ הנגזרת של $u(x)$. אז

$$\int f\left(u(x)\right)\cdot u'(x)\,dx = \int f(u)\,du\ .$$

דוגמה 11.10

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \sin(2x)dx$$

פתרון:

$$u=2x\ ,\qquad u'(x)=2\ ,\qquad \frac{1}{2}u'(x)=1\ .$$
$$\int \sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int \sin u\cdot u'\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}\cos u + C$$
$$= -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$$

■

דוגמה 11.11

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int e^{ax}dx$$

פתרון:

$$u = ax \ , \qquad u'(x) = a \ , \frac{1}{a}u'(x) = 1 \ .$$

$$\begin{aligned}
\int e^{ax} dx = & \int e^{u(x)} \cdot \frac{1}{a} \cdot u'(x)\, dx \\
= & \frac{1}{a} \int e^{u}\, du \\
= & \frac{1}{a} e^{u} + C \\
= & \frac{1}{a} e^{ax} + C
\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.12

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{1}{x^2+8}\, dx$$

פתרון:

$$u(x) = \frac{x}{\sqrt{8}} \ , \qquad u'(x) = \frac{1}{\sqrt{8}} \ , \qquad \Rightarrow \qquad 1 = \sqrt{8}\, u'(x).$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+8}\, dx = & \int \frac{1}{8u^2+8} \sqrt{8} u'(x) \ , dx \\
= & \sqrt{8} \int \frac{1}{8u^2+8}\, du \\
= & \frac{\sqrt{8}}{8} \int \frac{1}{u^2+1}\, du \\
= & \frac{1}{\sqrt{8}} \arctan(u) + C \\
= & \frac{1}{\sqrt{8}} \arctan\left(\frac{x}{8}\right) + C
\end{aligned}$$

באופן כללי,

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \ .$$

■

דוגמה 11.13

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{1}{5x+2}\, dx$$

פתרון:

$$u(x) = 5x + 2 \ , \qquad u'(x) = 5 \ , \qquad \frac{1}{5}u'(x) = 1$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{5x+2}\,dx =& \int \frac{1}{u(x)}\cdot\frac{u'(x)}{5}\,dx\\ =&\frac{1}{5}\int \frac{1}{u(x)}\,du\\ =&\frac{1}{5}\ln|u|+C\\ =&\frac{1}{5}\ln|5x+2|+C\end{aligned}$$

באופן כללי,

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+C\ .$$

■

דוגמה 11.14

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int (3x-1)^{24}\ dx$$

פתרון:

$$u(x)=3x-1\ ,\qquad u'=3\ ,\qquad \frac{1}{3}u'(x)=1$$

$$\begin{aligned}\int (3x-1)^{24}\ dx =& \int u^{24}\cdot\frac{u'(x)}{3}\,dx\\ =&\frac{1}{3}\int u^{24}\,du\\ =&\frac{1}{3}\cdot\frac{u^{25}}{25}+C\\ =&\frac{1}{75}\,(3x-1)^{25}+C\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.15

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \tan x\,dx$$

פתרון:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$u=\cos x\ ,\qquad u'=-\sin x\ .$$

$$\begin{aligned}\int \tan x\,dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx\\ &= -\int \frac{1}{u}\,u'(x)dx\\ &= -\int \frac{1}{u}\,du\\ &= -\ln|u|+C\\ &= -\ln|\cos x|+C\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.16

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \cot x\,dx$$

פתרון:

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$u(x)=\sin x\ ,\qquad u'(x)=\cos x\ .$$

$$\begin{aligned}\int \cot x\,dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx\\ &= \int \frac{1}{u}\,u'(x)dx\\ &= \int \frac{1}{u}\,du\\ &= \ln|u|+C\\ &= \ln|\sin x|+C\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.17

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int x(x+2)^{69}\,dx$$

פתרון:

$$u=(x+2)\ ,\qquad u'(x)=1\ ,\qquad x=u-2$$

$$\begin{aligned}\int x(x+2)^{69}\,dx &= \int (u-2)u^{69}\,u'(x)\,dx\\ &= \int (u-2)u^{69}\,du\\ &= \int \left(u^{70}-2u^{69}\right)\,du\\ &= \frac{u^{71}}{71}-\frac{2u^{70}}{70}+C\\ &= \frac{(x+2)^{71}}{71}-\frac{(x+2)^{70}}{35}+C\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.18

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{1}{\cot^5 x\cdot \sin^2 x}\,dx$$

פתרון:

$$u=\cot x\ , \qquad u'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cot^5 x\cdot\sin^2 x}\,dx &= -\int \frac{1}{u^5}u'(x)\,dx\\ &= -\int \frac{1}{u^5}\,du\\ &= -\int u^{-5}\,du\\ &= -\frac{u^{-4}}{-4}+C\\ &= \frac{1}{4\cot^4 x}+C\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.19

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{\cos x}{3+\sin x}\,dx$$

פתרון:

$$u=\sin x\ , \qquad u'(x)=\cos x\ .$$

$$\int \frac{\cos x}{3+\sin x}\,dx = \int \frac{1}{u+3}\,u'(x)\,dx$$
$$= \int \frac{1}{u+3}\,du$$
$$= \ln|u+3| + C$$
$$= \ln|\sin x+3| + C$$

■

דוגמה 11.20

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$$

פתרון:

$$u = e^x\ , \qquad u'(x) = e^x\ , \qquad u'(x)e^{-x} = \frac{1}{u}\cdot u'(x)\ .$$
$$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = \int \frac{1}{u(u+1)}\,u'(x)\,dx$$
$$= \int \frac{1}{u(u+1)}\,du$$
$$= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)\,du$$
$$= \ln|u| - \ln|u+1| + C$$
$$= \ln(e^x) - \ln(e^x+1) + C$$
$$= x - \ln(e^x+1) + C$$

■

11.8 אינטגרציה בחלקים

משפט 11.5 אינטגרציה בחלקים

יהיו $u(x)$ $\mathrm{v}(x)$ פונקציות של משתנה x.

$$\int u\mathrm{v}'\,dx = u\mathrm{v} - \int u'\mathrm{v}\,dx$$

הוכחה:

לפי כלל הכפל של נגזרות (עיין משפט **??** מספר 3)

$$(u\mathrm{v})' = u'\mathrm{v} + u\mathrm{v}' \qquad \Rightarrow \qquad u\mathrm{v}' = (u\mathrm{v})' - u'\mathrm{v}$$

נפעיל אינטגרל על שני הצדדים:

לפי משפט ?? ניתן לכתוב אגף השמאל של (*) כ

$$\int uv'(x)\,dx = \int u\,d\mathrm{v} \tag{\#1}$$

האיבר הראשון באגף הימין של (*) הוא

$$\int (u\mathrm{v})'dx = u\mathrm{v} + C \tag{\#2}$$

לפי משפט ?? האיבר השני באגף הימין של (*) הוא

$$\int u'\mathrm{v}\,dx = \int \mathrm{v}\,du \tag{\#3}$$

נציב (#1), (#2), ו- (#3) לתוך (*) ונקבל

$$\int u\,d\mathrm{v} = u\mathrm{v} - \int \mathrm{v}\,du$$

ז"א

$$\int u\mathrm{v}'\,dx = \int (u\mathrm{v})'\,dx - \int u'\mathrm{v}\,dx$$

■

דוגמה 11.21

חשב את האינטגרל

$$\int x \cdot e^x\,dx$$

פתרון:

$u = x \quad \mathrm{v}' = e^x \quad u'(x) = 1 \quad v = e^x$

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx =& xe^x - \int e^x\,dx\\ =& xe^x - e^x + C\end{aligned}$$

■

למה 11.1 מקרים נפוצים של שימוש באינטגרציה בחלקים

1) במקרה

א $\int p(x)\cdot e^{kx}\,dx$,

ב $\int p(x)\cdot \sin(kx)\,dx$,

ג $\int p(x)\cdot \cos(kx)\,dx$

כאשר $p(x)$ פולינום, מגדירים $u = p(x)$.

2) במקרה

א $\int p(x)\cdot \arcsin(kx)\,dx$,

ב $\int p(x)\cdot \arccos(kx)\,dx$,

ג $\int p(x)\cdot \arctan(kx)\,dx$,

ד $\int p(x)\cdot \ln|kx|\,dx$,

ה $\int p(x)\cdot \text{arccot}(kx)\,dx$,

כאשר $p(x)$ פולינום, מגדירים $\mathrm{v}'=p(x)$.

3) במקרה

א $\int e^{ax}\cdot \sin(bx)\,dx$,

ב $\int e^{ax}\cdot \cos(bx)\,dx$,

מגדירים $u=e^{ax}$.

11.9 דוגמאות

דוגמה 11.22

חשב את האינטגרל

$$\int (2x+1)e^{3x}\,dx$$

פתרון:

$$u=2x+1\ ,\qquad \mathrm{v}'=e^{3x}\qquad u'=2\qquad \mathrm{v}=\frac{1}{3}\cdot e^{3x}$$

$$\begin{aligned}\int (2x+1)e^{3x}\,dx =&\frac{1}{3}(2x+1)e^{3x}-\frac{2}{3}\int e^{3x}\,dx\\ =&\frac{1}{3}(2x+1)e^{3x}-\frac{2}{9}e^{3x}+C\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.23

חשב את האינטגרל

$$\int \ln(x)\,dx$$

פתרון:

$$u = \ln(x) \ , \qquad \mathrm{v}' = dx \ , \qquad u' = \frac{1}{x} \ , \qquad \mathrm{v} = x$$
$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + C$$

■

דוגמה 11.24

חשב את האינטגרל

$$\int \arctan(x) \, dx$$

פתרון:

$$u = \arctan(x) \ , \qquad \mathrm{v}' = 1 \ , \qquad u' = \frac{1}{1+x^2} \ , \qquad \mathrm{v} = x$$
$$\int \arctan x \, dx = x \cdot \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx$$
$$u = x^2 + 1 \ , \qquad u' = 2x$$
$$\begin{aligned} \int \arctan x \, dx =& x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} \, du \\ =& x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \ln |u| + C \\ =& x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \ln |x^2+1| + C \end{aligned}$$

■

דוגמה 11.25

חשב את האינטגרל

$$I = \int x^2 \sin(2x) \, dx$$

פתרון:

$$u = x^2 \ , \qquad \mathrm{v}' = \sin(2x) \ , \qquad u' = 2x \ , \qquad \mathrm{v} = -\frac{1}{2} \cos(2x)$$
$$\begin{aligned} I =& -\frac{1}{2} x^2 \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2} \int 2x \cdot \cos(2x) \, dx \\ =& -\frac{1}{2} x^2 \cdot \cos(2x) + \int x \cdot \cos(2x) \, dx \end{aligned}$$
$$u = x \ , \qquad \mathrm{v}' = \cos(2x) \ , \qquad u' = 1 \ , \qquad \mathrm{v} = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

$$\begin{aligned}I &= -\frac{1}{2}x^2\cdot\cos(2x)+\frac{1}{2}x\cdot\sin(2x)-\frac{1}{2}\int\sin(2x)\,dx\\ &= -\frac{1}{2}x^2\cdot\cos(2x)+\frac{1}{2}x\cdot\sin(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)+C\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.26

חשב את האינטגרל

$$I=\int e^x\sin x\,dx$$

פתרון:

$$u=e^x\ ,\qquad \mathrm{v}'=\sin(x)\ ,\qquad u'=e^x\ ,\qquad \mathrm{v}=-\cos(x)$$

$$I=-\,e^x\cos x+\int e^x\cdot\cos(x)\,dx$$

$$u=e^x\ ,\qquad \mathrm{v}'=\cos(x)\ ,\qquad u'=e^x\ ,\qquad \mathrm{v}=\sin(x)$$

$$\begin{aligned}I &= -\,e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cdot\sin(x)\,dx\\ &= -\,e^x\cos x+e^x\sin x-I\end{aligned}$$

לכן

$$2I=-e^x\cos x+e^x\sin x$$

ז"א

$$I=\frac{1}{2}\left(-e^x\cos x+e^x\sin x\right)+C$$

■

דוגמה 11.27

חשב את האינטגרל

$$I=\int\frac{x}{\cos^2 x}\,dx$$

פתרון:

$$u=x\ ,\qquad \mathrm{v}'=\frac{1}{\cos^2(x)}\ ,\qquad u'=1\ ,\qquad \mathrm{v}=\tan(x)$$

$$I=x\tan x-\int\tan(x)\,dx$$

■

דוגמה 11.28

חשב את האינטגרל

$$I=\int \ln\left(x^2+4\right)\,dx$$

פתרון:

$$u=\ln\left(x^2+4\right)\ ,\qquad \mathrm{v}'=1\ ,\qquad u'=\frac{2x}{x^2+4}\ ,\qquad \mathrm{v}=x\ .$$

$$\begin{aligned} I =& x\ln\left(x^2+4\right)-2\int \frac{x^2}{x^2+4}\,dx \\ =& x\ln\left(x^2+4\right)-2\int \frac{(x^2+4)-4}{x^2+4}\,dx \\ =& x\ln\left(x^2+4\right)-2\int \left(1-\frac{4}{x^2+4}\right)\,dx \\ =& x\ln\left(x^2+4\right)-2\left(x-4\cdot\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C \\ =& x\ln\left(x^2+4\right)-2x+4\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C\ . \end{aligned}$$

■