שיעור 9
גרדיאנט נגדרת כיוונית מישור משיק למשטח

9.1 מישור משיק למשטח והגרדיאנט

משפט 9.1 מישור משיק למשטח

תהי $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה בשלושה משתנים. נגדיר משטח $f(x,y,z)=c$ כאשר $c\in\mathbb{R}$ מספר קבוע. תהי $P(x_0,y_0,z_0)$ נקודה על המשטח.

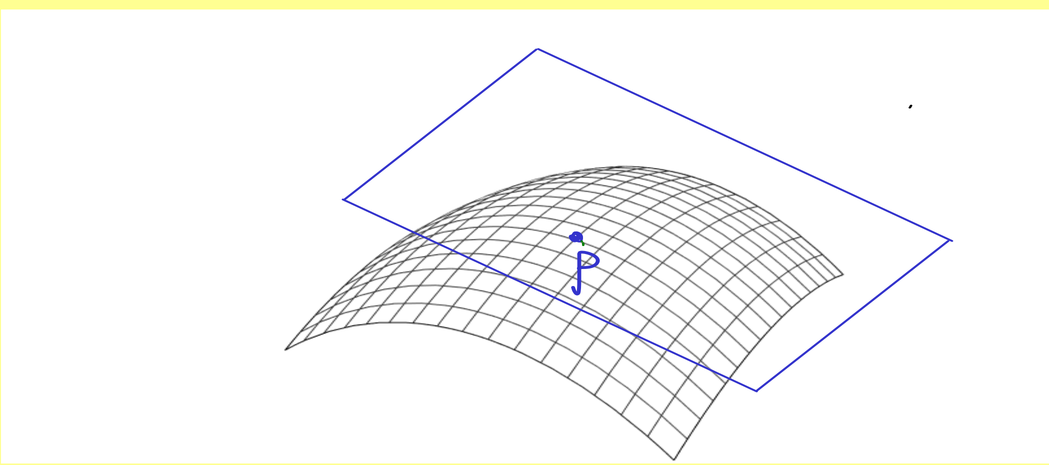
(1 קיים מישור העובר דרך הנקודה P כך שהמשיק לכל קו שנמצא על משטח ועובר דרך הנודה P, נמצא במישור זו.

(2 הוקטור הנורמל של המישור המשיק למשטח $f(x,y,z)=c$ בנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ הינו

$$\boldsymbol{n}=\left(f'_x(P),f'_y(P),f'_z(P)\right) \ .$$

(3 המשוואה של המישור המשיק למשטח בנקודה P הינה

$$f'_x(P)(x-x_0)+f'_y(P)(x-x_0)+f'_z(P)(x-x_0)=0 \ .$$



המישור הזה נקרא **המישור המשיק למשטח בנוקדה** P.

הוכחה: נסתכל אל קו על המשטח העובר דרך הנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$. נרשום את משוואת הקו בצורה פרמטרית:

$$x=x(t),\qquad y=y(t),\qquad z=z(t) \ .$$

משוואת המשטח הינה

$$f(x,y,z)=c \ ,\qquad c\in\mathbb{R} \ .$$

בפרט, הקו נמצא על המשטח ולכן משוואת המשטח מתקיים בכל נקודה על הקו. נציב את משוואת הקו במשוואת המשטח ונקבל

$$f\Big(x(t),y(t),z(t)\Big)=c \ .$$

נקח נגזרת של משוואת המשטח לפי הפרמטר t בנקודה P:

$$f'_t(x_0,y_0,z_0)=0 \ .$$

לפי כלל השרשרת:

$$f'_x(P)x'_t(t_0)+f'_y(P)y'_t(t_0)+f'_z(P)z'_t(t_0)=0 \ ,$$

כאשר t_0 הערך של הפרמטר בנקודה P. נרשום את זה בצורה הבאה:

$$\Big(f'_x(P),f'_y(P),f'_z(P)\Big)\cdot\Big(x'_t(t_0),y'_t(t_0),z'_t(t_0)\Big)=0 \ .$$

שימו לב, הוקטור $\Big(x'_t(t_0),y'_t(t_0),z'_t(t_0)\Big)$ הוא וקטור כיוון של הישר המשיק לקו $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$ בנקודה P. כיוון שהמכפלה סקלרית שווה אפס, אז המשיק לקו, ניצב לוקטור $\Big(f'_x(P),f'_y(P),f'_z(P)\Big)$. בגלל ש המשיק לקו נמצא בהמישור, אז הוקטור הנורמל למישור הינו

$$\boldsymbol{n}=\Big(f'_x(P),f'_y(P),f'_z(P)\Big) \ .$$

■

דוגמה 9.1

חשבו את המישור המשיק למשטח $z=3x^2+y^3$ בנקודה $P(3,-2,19)$.

פתרון:

נשרום את משוואת המשטח בצורה

$$f(x,y,z)=3x^2+y^3-z=0 \ .$$

$$f'_x=6x,\qquad f'_y=3y^2,\qquad f'_z=-1 \ .$$

משואת המישור היא

$$18(x-3)+12(y+2)-(z-19)=0 \ ,$$

או

$$18x+12y-z-11=0 \ .$$

דוגמה 9.2

מצאו את הזווית ביו המישור המשיק למשטח $2x^2+xyz+z^2=4$ העובר דרך הנקודה $P(1,1,1)$ ובין ציר ה- x.

פתרון:

נשרום את משוואת המשטח בצורה

$$f(x,y,z)=2x^2+xyz+z^2=4 \ .$$

$$f'_x = 4x + yz, \qquad f'_y = xz, \qquad f'_z = xy + 2z \ .$$
$$f'_x(1,1,1) = 5, \qquad f'_y(1,1,1) = 1, \qquad f'_z(1,1,1) = 3 \ .$$

משואת המישור היא

$$5(x-1) + (y-1) + 3(z-1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 5x + y + 3z - 9 = 0 \ .$$

הנורמל למשיור המשיק למשטח בנקודה $P(1,1,1)$ הוא

$$n = \left(f'_x(1,1,1), f'_y(1,1,1), f'_z(1,1,1)\right) = (5,1,3) \ .$$

הזוית α בין n לציר ה- x נתונה ע"י

$$\cos\alpha = \frac{n\cdot i}{|n||i|} = \frac{(5,1,3)\cdot(1,0,0)}{|(5,1,3)||(1,0,0)|} = \frac{5}{\sqrt{35}} = \sqrt{\frac{5}{7}} \ .$$

דוגמה 9.3

המישור π_1 משיק למשטח $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2y+4z+1 = 0$ בנקודה $M(\sqrt{3},1,-1)$. מצאו את משוואת המישור π_2 אשר משיק לאותו המשטח ומקביל ל- π_1 (שימו לב: מישורים מקבילים לא מתלכדים). חשבו את הזווית בין המישורים הללא לציר ה- y.

פתרון:

שיטה 1

הנורמל למישור המשיק:

$$\nabla f = (2x, 2y-2, 2z+4) \ .$$

בנקודה M:

$$n_1 = (2\sqrt{3}, 0, 2) \ .$$

לא קיימים עוד ערכים שבהם $\nabla(P_0) = n$ אבל ניתן לחפש נקודה שבה $n_1 \parallel n_2$.

$$\left.\begin{aligned} 2x &= 2\sqrt{3}\cdot t \\ 2y-2 &= 0\cdot t \\ 2z+4 &= 2\cdot t \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \left.\begin{aligned} x &= \sqrt{3}\cdot t \\ y &= 1 \\ z &= t-2 \end{aligned}\right\}$$

נציב זה במשוואת המשטח:

$$x^2+y^2+z^2-2y+4z+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3t^2+1+(t-2)^2-2+4(t-2)+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4t^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad t = \pm 1 \ .$$

לכן

$(x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{3}, 1, -1)$

או

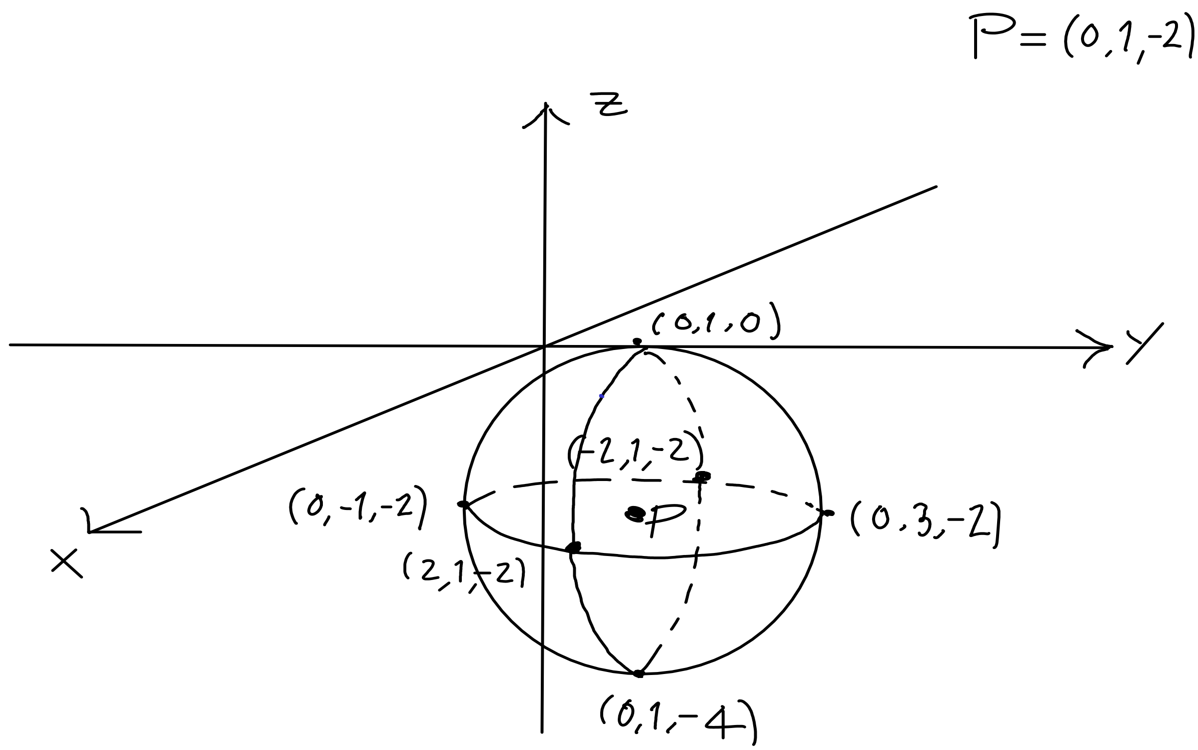
$(x_0, y_0, z_0) = (-\sqrt{3}, 1, -3)$. מכיוון ש $n_1 \perp j$ וגם $n_2 \perp j$ אז הזווית בין המישורים לציר ה- y הוא 0 (המישורים מקבילים לציר ה- y).

שיטה 2

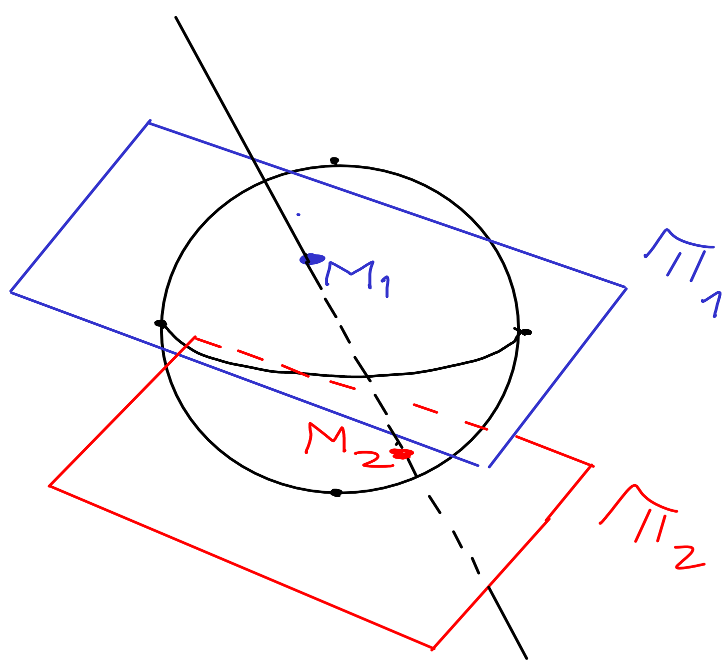
משוואת המשטח היא

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4 \ .$$

המשטח היא ספירה:



לכן הישר הנורמל לספירה בנקודה M_1 עובר דרך הנקודה M_2



שבה המישור המשיק המבוקש.

$$n_1 = (2\sqrt{3}, 0, 2)$$
$$M(t) = (\sqrt{3} + 2\sqrt{3}t, 1, -1 + 2t)$$

נבדוק נקודת חיתוך של הישר עם הספירה:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3}+2\sqrt{3}t)^2+(1-1)^2+(-1+2t+2)^2 &=4\\
3(1+2t)^2+(1+2t)^2 &=4\\
3(1+4t+4t^2)+(1+4t+4t^2) &=4\\
4(1+4t+4t^2) &=4\\
1+4t+4t^2 &=1\\
4t+4t^2 &=0\\
4t(1+t) &=0
\end{aligned}$$

לכן $t=0$ או -1.

$t=0$ נותן את M_1.

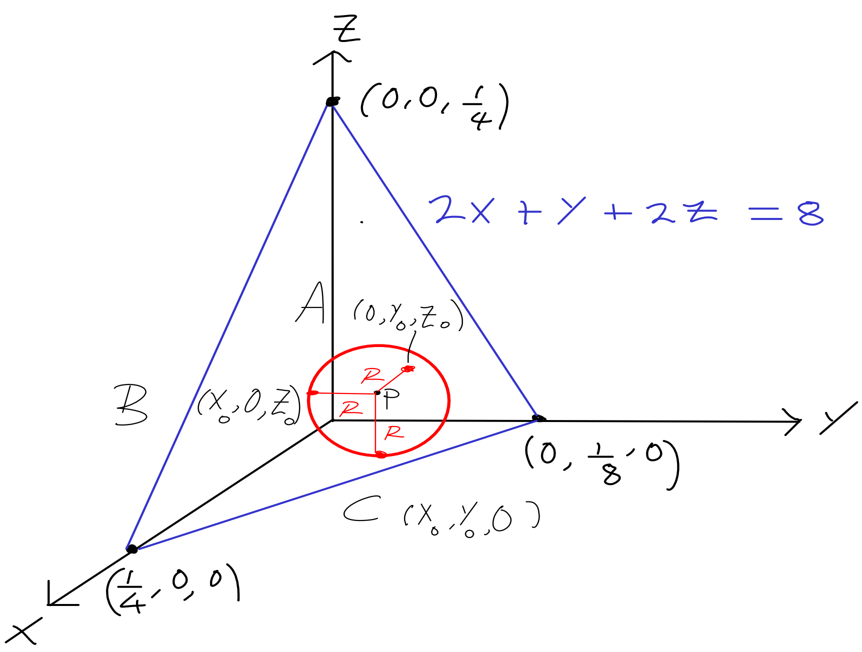
$t=-1$ נותן את M_2.

דוגמה 9.4

מצאו את משוואת הספירה החסומה ע"י המישורים

$$x=0\ ,\quad y=0\ ,\quad z=0\ ,\quad 2x+y+2z=8\ .$$

פתרון:



המרחק ממרכז הספירה $P(x_0,y_0,z_0)$ מכל אחד מבין המישורים שווה, בגלל שהמרחק הוא הרדיוס. בהשקה

למישורים $\left.\begin{aligned} x&=0\\ y&=0\\ z&=0\end{aligned}\right\}$ נקבל

$$R=|x_0|=|y_0|=|z_0|$$

לכן $R = x_0 = y_0 = z_0 > 0$. מההשקה למישור הנוסף:

$$\begin{aligned}
\frac{|2x_0 + y_0 + 2z_0 - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} &= R \\
\frac{|2R + R + 2R - 8|}{\sqrt{9}} &= R \\
\frac{|5R - 8|}{3} &= R \\
|5R - 8| &= 3R \\
5R - 8 &= \pm 3R \\
5R \pm 3R &= 8 \\
R &= 4 \quad \text{או} \quad 1 \ .
\end{aligned}$$

$R = 4$ לא אפשרי כי אז מרכז ההספירה היה מחוץ לפירמידה. לכן $R = 1$ ומשוואת המשטח של הספירה הינה

$$(x-1)^1 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \ .$$

דוגמה 9.5

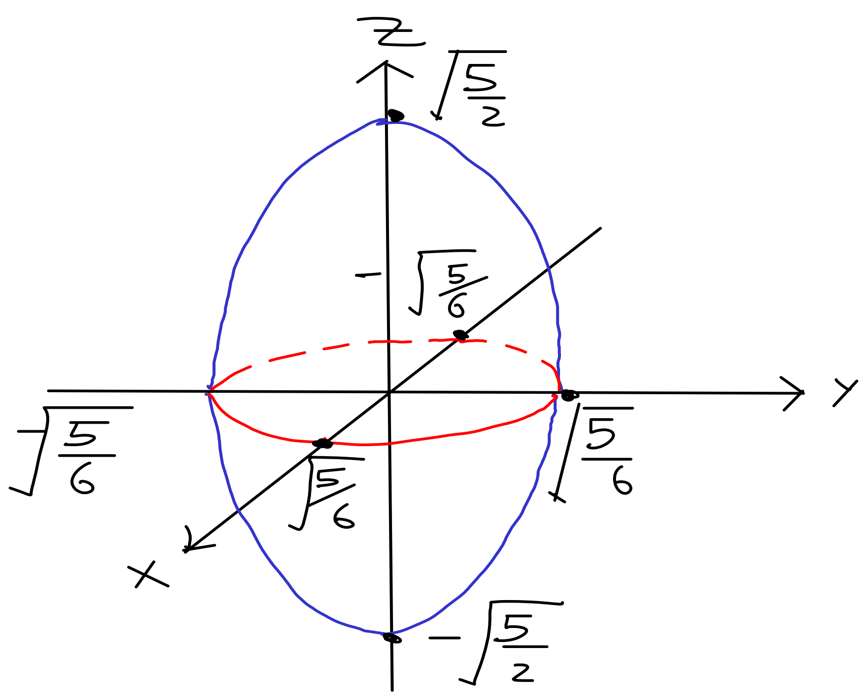
מצאו את המרחק בין המשטח

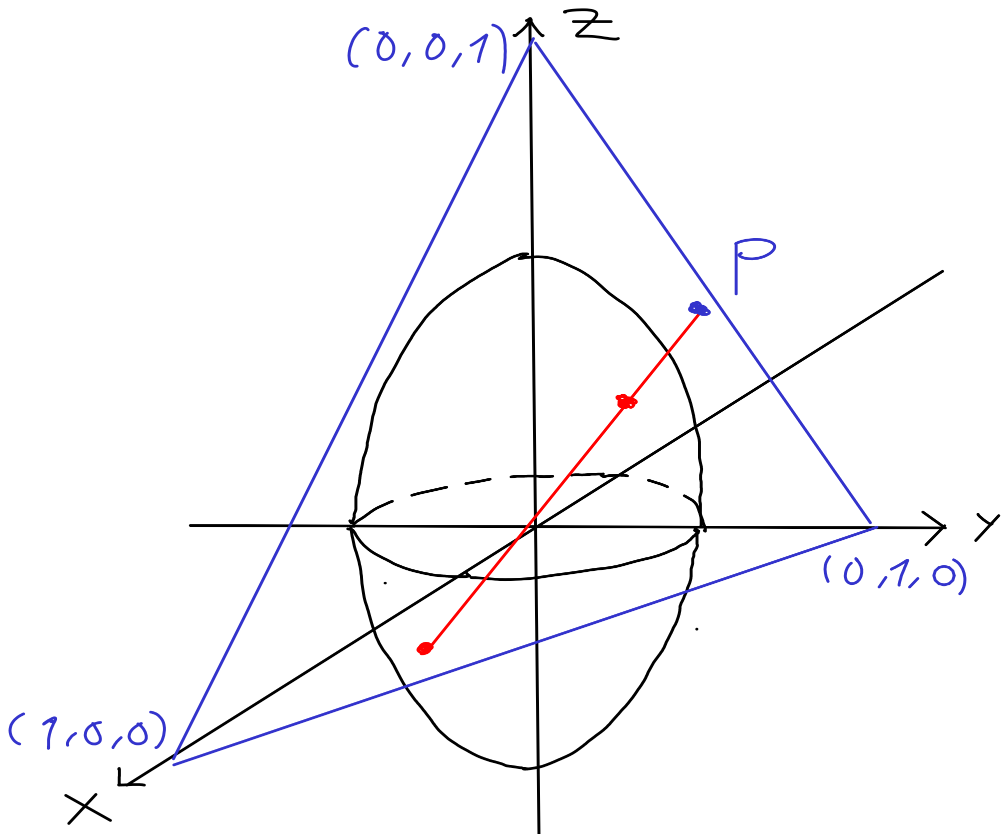
$$6x^2 + 6y^2 + 2z^2 = 5 \ .$$

לבין המישור

$$x + y + z = 9 \ .$$

פתרון:





צריך נקודה שבה המישור המשיק לאליפסה מקביל למישור $x+y+z=9$.

$$f(x,y,z)=6x^2+6y^2+2z^2-5=0 \ .$$

$$n=(f'_x,f'_y,f'_z)=(12x,12y,4z)\stackrel{!}{=}(1,1,1)\cdot t \ ,$$

לכן

$$(x,y,z)=\left(\frac{t}{12},\frac{t}{12},\frac{t}{4}\right)$$

$$6\left(\frac{t}{12}\right)^2+6\left(\frac{t}{12}\right)^2+2\cdot\left(\frac{t}{4}\right)^2-5=0 \qquad \Rightarrow \qquad t=\pm\sqrt{24} \ .$$

לכן $t=\sqrt{24}$. לכן הנקודה הקרובה ביותר היא $(\sqrt{24},\sqrt{24},\sqrt{24})$.

$$d=\frac{|\sqrt{24}+\sqrt{24}+\sqrt{24}-9|}{\sqrt{3}}$$

9.2 הגראדיאנט ונגזרת מכוונת

הגדרה 9.1 הגרדיאנט

תהי $f(x,y,z)$ פונקציה בשלושה משתנים. הגרדיאנט של f בנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ מוגדר להיות הוקטור

$$\nabla f(P)=\Big(f'_x(P),f'_y(P),f'_z(P)\Big) \ .$$

הגדרה 9.2 הנגזרת המכוונת

הנגזרת המכוונת של $f(x,y,z)$ בנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ בכיוון של הוקטור $\bar{a}\in\mathbb{R}^3$ מוגדרת להיות

$$\frac{df}{d\bar{a}} = \frac{1}{|a|}\lim_{t\to 0}\frac{f\left(P_0+t\bar{a}\right)-f\left(P_0\right)}{t} \ .$$

זוהי הנגזרת של f בנקודה P_0 בכיוון של $\bar{a}$.

משפט 9.2 נוסחה לנגזרת מכוונת

$$\frac{df}{d\bar{a}} = \frac{\nabla f\cdot\bar{a}}{|\bar{a}|} \ .$$

הוכחה:

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{f\left(P_0+t\bar{a}\right)-f\left(P_0\right)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0+ta_x,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0+ta_x,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)}{t} \\
&\quad + \lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0+ta_x,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)}{t} \\
&\quad + \lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0+ta_z\right)}{t} \\
&\quad + \lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0+ta_x,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)}{t} \\
&\quad + \lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0+ta_z\right)}{t} \\
&\quad + \lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} a_x\cdot\frac{f\left(x_0+ta_x,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)}{ta_x} \\
&\quad + \lim_{t\to 0} a_y\cdot\frac{f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0+ta_z\right)}{ta_y} \\
&\quad + \lim_{t\to 0} a_z\cdot\frac{f\left(x_0,y_0,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{ta_z} \\
&= \lim_{t\to 0} a_x\cdot\frac{f\left(x_0+ta_x,y_0,z_0\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{ta_x} \\
&\quad + \lim_{t\to 0} a_y\cdot\frac{f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{ta_y} \\
&= \lim_{h\to 0} a_x\cdot\frac{f\left(x_0+h,y_0,z_0\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{h} \\
&\quad + \lim_{h\to 0} a_y\cdot\frac{f\left(x_0,y_0+h,z_0\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{h} \\
&\quad + \lim_{h\to 0} a_z\cdot\frac{f\left(x_0,y_0,z_0+h\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{h} \\
&= a_x\cdot f'_x(P)+a_y\cdot f'_y(P)+a_z\cdot f'_z(P) \\
&= \bar{a}\cdot\nabla f(P)
\end{aligned}
$$

לכן

$$
\frac{df}{d\bar{a}}=\frac{1}{|\bar{a}|}\lim_{t\to 0}\frac{f\left(P_0+t\bar{a}\right)-f\left(P_0\right)}{t}=\frac{\bar{a}\cdot\nabla f(P)}{|\bar{a}|}\ .
$$

■

דוגמה 9.6

חשבו את הגרדיאנט של הפונקציה $f(x,y,z)=x^2y^3-z$ בנקודה $P(2,-1,0)$ ואת הנגזרת המכוונת שלה בכיוון $\bar{a}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

פתרון:

$f'_x=2xy^3$, $f'_y=3x^2y^2$, $f'_z=-1$.

$$\nabla f(P)=\big(f'_x(P),f'_y(P),f'_z(P)\big)=(-4,12,-1)$$

$$\frac{df(P)}{d\bar{a}}=\frac{\nabla f(P)\cdot\bar{a}}{|\bar{a}|}=\frac{(-4,12,-1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)}{1}=\frac{-4}{\sqrt{2}}+\frac{12}{\sqrt{2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}\ .$$

דוגמה 9.7

על המעגל $x^2+y^2=9$ מצאו את הנקודה $P(x_0,y_0)$ כך ש הנגזרת $\frac{dz}{\overrightarrow{OP}}$ של $z=-4y+x^2+4x+4$ מקסימלי.

פתרון:

קצב עלייה של המשטח בנקודה $(0,0)$, הנקודה שממנה יוצא הוקטור $\overrightarrow{OP}$, הוא $\nabla z(O)$. הנקודה בשאלה היא נקודה הנמצאת על המעגל $x^2+y^2=9$.

$$\nabla z=z'_x\hat{\boldsymbol{i}}+z'_y\hat{\boldsymbol{j}}=(2x+4)\hat{\boldsymbol{i}}-4\hat{\boldsymbol{j}}$$

ולכן בנקודה O,

$$\nabla z(O)=4\hat{\boldsymbol{i}}-4\hat{\boldsymbol{j}}\ .$$

לכן הכיוון שבו $\frac{dz}{\overrightarrow{OP}}$ יהיה מקסימלי הוא $(4,-4)$. הישר בעל וקטור כיוון $(4,-4)$ הוא

$$x=4t\ ,y=-4t\quad\Rightarrow\quad\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=0\quad\Rightarrow\quad y=-x\ .$$

נקודת חיתוך של הישר הזה והמעגל $x^2+y^2=9$ הוא

$$P=\left(\frac{3}{\sqrt{2}},-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

דוגמה 9.8

על המעגל $x^2+y^2=1$ מצאו את הנקודה $P(x_0,y_0)$ כך ש הנגזרת $\frac{dz}{\overrightarrow{OP}}$ של $z=xy-4y+x^2+2x+4$ בנקודה $O(0,0)$ ובכיוון של $\vec{O}P$ תהיה מקסימלית וחשבו את קוסינוס הזווית α בין $\vec{O}P$ לישר $y=x$.

פתרון:

הנגזרת מכוונת, אשר מוגדרת להיות

$$\frac{dz}{d\overrightarrow{OP}}=\nabla z\cdot\overrightarrow{OP}\ ,$$

תהיה מקסימלית כאשר הזווית בין הוקטור $\overrightarrow{OP}$ ובין הגרדיאנט ∇z שווה אפס, כלומר כאשר $\overrightarrow{OP}$ ו- ∇z מקבילים.
הגרדיאנט של z בנקודה $(0,0)$ הינו

$$\nabla z\Big|_{x=0,y=0} = (y+2x+2, x-4)\Big|_{x=0,y=0} = (2,-4)$$

הזנב של וקטור $\overrightarrow{OP}$ נמצא בראשית הצירים $(0,0)$ והראש בנקודה $P(x_0,y_0)$ על המעגל מרדיוס 1. לכן יש לו את הקואורדינטות

$$\overrightarrow{OP} = (x_0-0, y_0-0) = (x_0,y_0) \ .$$

אבל $\overrightarrow{OP}$ גם מקביל ל- ∇z, לכן נחפש וקטור בעל כיוון $(2,-4)$ ואורך 1. נכתוב

$$\overrightarrow{OP} = (2t,-4t)$$

כך ש $|\overrightarrow{OP}|=1$:

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{(2t)^2+(-4t)^2} = \sqrt{4t^2+16t^2} = \sqrt{20t^2} = 2\sqrt{5}t = 1$$

(שים לב האורך חייב להיות חיובי), לכן $t=\frac{1}{2\sqrt{5}}$. נציב ונקבל

$$\overrightarrow{OP} = (2t,-4t) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

סך הכל הנקודה הינה

$$P(x_0,y_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

הזווית בין הישר $\overrightarrow{OP}$ ו- $y=x$ היא הזווית בין הוקטור $\overrightarrow{OP}$, כלומר $(2,-4)$, ובין יקטור הכיוון של הישר $y=x$, כלומר $(1,1)$:

$$\cos\alpha = \frac{(2,-4)\cdot(1,1)}{|(2,-4)|\ |(1,1)|} = \frac{(2,-4)\cdot(1,1)}{|(2,-4)|\ |(1,1)|} = \frac{-2}{\sqrt{2^2+(-4)^2}\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{-2}{\sqrt{20}\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{10}}$$

ולכן

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right) = 108.4349488^\circ \ .$$

משפט 9.3 כיוון של קצב שינוי מקסימלי של פונקציה

תהי $f(x,y,z)$ פונקציה.
∇f מצביע בכיוון שבו הקצב שינוי של f מקסימלי.
$-\nabla f$ מצביע בכיוון שבו הקצב שינוי של f מינימלי.

הוכחה:

$$\frac{df}{d\bar{a}} = \frac{\nabla f\cdot\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{|\nabla f|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos\theta}{|\bar{a}|} = |\nabla f|\cdot\cos\theta \ .$$

$-1\leq\cos\theta\leq 1$. לכן הביטוי יהיה מקסימלי כאשר $\cos\theta=1$⇐$\theta=0$. כלומר $\frac{df}{d\bar{a}}$ יהיה מקסימלי אם $\bar{a}$ מצביע באותו הכיוון כמו ∇f.

■

דוגמה 9.9

מצאו את הכיוון של שינוי הגדול ביותר של הפונקציה $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$ בנקודה $P_0(1,1,1)$.

פתרון:

$$\nabla f=(2x,2y,-1)\ .$$
$$\nabla f(P)=(2,2,-1)\ .$$

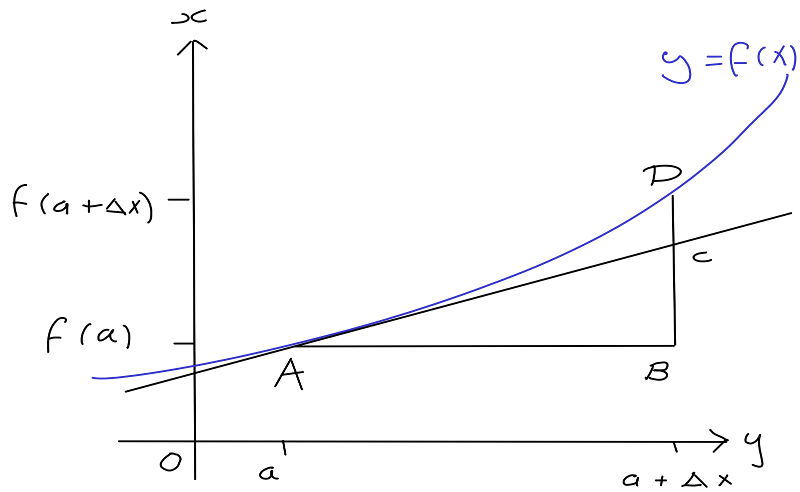
9.3 תזכורת - המשוג של הדיפרנציאל מחדוא 1

הגדרה 9.3 הדיפרנציאל של פונקציה של משתנה אחד

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע I. נניח ש- $a\in I$ וגם $a+\Delta x\in I$.
נגדיר את הנקודות

$$A=(a,f(a)),\qquad B=(a+\Delta x,f(a)),\qquad D(a+\Delta x,f(a+\Delta x))\ .$$

(ראו תרשים).
תהי C הנקודה שבה BD נחתך ע"י המשיק ל- $f(x)$ בנקודה a.



יהי

$$\Delta f = BD = f(a+\Delta x) - f(a)$$

השינוי בערך של f. AC הוא המשיק ל- f ב- a, אז

$$\frac{BC}{AB} = f'(a) \qquad \Rightarrow \qquad BC = AB \cdot f'(a) = f'(a)\Delta x\ .$$

נסמן $CD = \epsilon$. בגבול כאשר $\Delta x \to 0$, D יתלכד עם C, ו- $\epsilon \to 0$. כיוון ש- $BD = BC + CD$ אז

$$\Delta f = f'(a)\Delta x + \epsilon\ .$$

ע"י לקחת את הגבול כאשר $\Delta x \to 0$, אז הגבול $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f$ נקבל את הגבול בנקודה a. הדיפרנציאל של f בנקודה a מוגדר להיות הגבול הזה, כלומר

$$df := \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} f'(a)\Delta x\ .$$

למה 9.1 הדיפרנציאל dx

נניח ש- $f(x)$ הפונקציה $f(x)=x$. אז בכל נקודה $x=a$, $f'(a)=1$. לכן, לפי ההגדרה של הדיפרנציאל, הדיפרנציאל ב- a הינו

$$dx=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\ .$$

למה 9.2 קשר בין הדיפרנציאל והנגזרת

לפי הגדרה 9.3 ולמה 9.1, הדיפרנציאל של פונקציה f בנקודה a ניתן ע"י

$$df=f'(a)dx\ .$$

9.4 הדיפרנציאל

הגדרה 9.4 הדיפרנציאל של פונקציה של שלושה משתנים

נתונה פונקציה $f=f(x,y,z)$. הדיפרנציאל מסדר ראשון שני, שלישי, וכלל מסדר n יוגדרו

$$df=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)f(x,y,z)$$

$$d^2f=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2f(x,y,z)$$

$$d^3f=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^3f(x,y,z)$$

$$\vdots$$

$$d^nf=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^nf(x,y,z)$$

9.5 אקסטרמום מקומי במשטח

משפט 9.4 תנאי הכרחי לקיום נקודת קיצון

תהי $f(x,y)$ פונקציה של שני משתנים. אם ל- f יש נקודת קיצון מקומי בנקודה P_0 אז $\nabla f\left(P_0\right)=0$.

הגדרה 9.5 נקודה קריטית

נקודה P שבה

$$f'_x\left(P\right)=0\ ,\qquad \text{ו}\qquad f'_y\left(P\right)=0$$

או $f'_x\left(P\right)$, $f'_y\left(P\right)$ לא קיים, נקראת נקודה קריטית.

משפט 9.5 תנאי מספיק לקיום נקודת קיצון

נתון פונקציה $z=f(x,y)$ של שני משתנים. נגדיר

$$\Delta=f''_{xx}f''_{yy}-(f''_{xy})^2$$

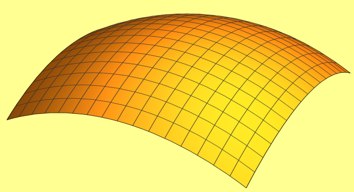
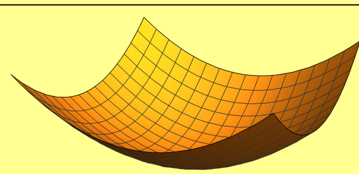
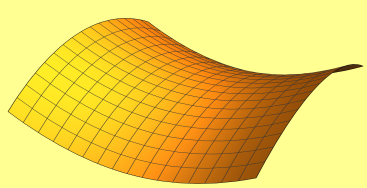
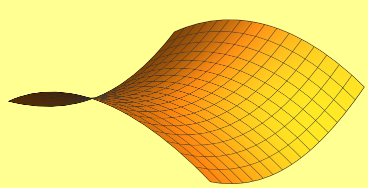
אם בנקודה $P(x_0,y_0)$ שבה $f'_x(P)=0$ וגם $f'_y(P)=0$,

1) $\Delta>0$ ו- $f_{xx}(P)>0$ אז P מינימום מקומי.

2) $\Delta>0$ ו- $f_{xx}(P)<0$ אז P מקסימום מקומי.

3) $\Delta<0$ אז P נקודת אוכף.

4) $\Delta=0$ אז הקריטריון לא נותן תשובה והנקודה P יכול להיות מינימום, מקסימום או אוכף, ויש לחרוק את $f(x,y)$ סביב לנקודה P בדרכים נוספות.

מקסימום		$f'_y(P)=0$ $\quad f'_x(P)=0$ $f''_{xx}(P)<0$ $\quad \Delta>0$
מינימום		$f'_y(P)=0$ $\quad f'_x(P)=0$ $f''_{xx}(P)>0$ $\quad \Delta>0$
אוכף		$f'_y(P)=0$ $\quad f'_x(P)=0$ $\Delta<0$
אוכף		$f'_y(P)=0$ $\quad f'_x(P)=0$ $\Delta<0$

דוגמה 9.10

מצאו אקסטרמום מקומי של הפונקציה $z=xy^2-2x^2y-4xy$.

פתרון:

$$z'_x=y^2-4xy-4y\ ,\qquad z'_y=2xy-2x^2-4x\ .$$

$$\left.\begin{array}{ll} z'_x &=0\\ z'_y &=0\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{ll} y^2-4xy-4y &=0\\ 2xy-2x^2-4x &=0\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{ll} y(y-4x-4) &=0\\ x(2y-2x-4) &=0\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{ll} y(y-4x-4) &=0\\ x(2y-2x-4) &=0\end{array}\right\}$$

יש 4 פתרונות:

(1 $y-4x-4=0$ ו- $x=0$

$\Leftarrow (x,y)=(0,4)$.

(2 $y-4x-4=0$ ו- $2y-2x-4=0$

$\Leftarrow (x,y)=(-\frac{2}{3},\frac{4}{3})$.

(3 $y=0$ ו- $x=0$

$\Leftarrow (x,y)=(0,0)$.

(4 $y=0$ ו- $2y-2x-4=0$

$\Leftarrow (x,y)=(-2,0)$.

$$z''_{xx}=-4y\ ,\qquad z''_{xy}=2y-4x-4\ ,\qquad z''_{yy}=2x\ .$$

	$(0,0)$	$(0,4)$	$(-2,0)$	$(-\frac{2}{3},\frac{4}{3})$
$z''_{xx}(P)$	0	-16	0	$-\frac{16}{3}$
$z''_{xy}(P)$	-4	4	4	$\frac{4}{3}$
$z''_{yy}(P)$	0	0	-4	$-\frac{4}{3}$
Δ	-16	-16	-16	$\frac{48}{9}$
	אוכף	אוכף	אוכף	מקסימום

9.6 נקודות קיצון בתנאי וכופלי לגרנז'

משפט 9.6 שיטת כופלי לגרנז'

האקסרמום של הפונקציה $f(x,y)$ כאשר x ו- y קשורים אחד בשני ע"י האילוץ

$$\phi(x,y)=0$$

הנתון במישור xy, ניתן ע"י השיטה הבאה:

(1) מרכיבים את פונקצית לגרנז':

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\phi(x,y)$$

(2) גוזרים את $L(x,y,\lambda)$ לפי שלושת המשתנים x,y,λ:

$$L'_x = f'_x + \lambda\phi'_x \ , \qquad L'_y = f'_y + \lambda\phi'_y \ , \qquad L'_\lambda = \phi(x,y) \ .$$

(3) מוצאים את הנקודות הקריטיות של $L(x,y,\lambda)$ ע"י לפתור את המערכת

$$\begin{cases} L'_x &= 0 \\ L'_y &= 0 \\ L'_\lambda &= 0 \ . \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} f'_x(x,y) + \lambda\phi'_x(x,y) &= 0 \\ f'_y(x,y) + \lambda\phi'_y(x,y) &= 0 \\ \phi(x,y) &= 0 \end{cases}$$

דוגמה 9.11

מצא את הערך הגדול ביותר של הפונקציה

$$z = 5 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}$$

בתנאי

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

פתרון:

יהי $z(x,y)$ הפונקציה

$$z(x,y) = 5 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}$$

ו- $\phi(x,y)$ האילוץ

$$\phi(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0 \ .$$

נרכיב את פונקצית לגרנז':

$$L(x,y,\lambda) = z(x,y) + \lambda\phi(x,y) = 5 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + \lambda\left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1\right)$$

גוזרמים את $L(x,y,\lambda)$ לפי x, y ו- λ:

$$L'_x = -\frac{1}{3} + 2\lambda x \ , \qquad L'_y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\lambda y \ , \qquad L'_z = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 \ .$$

פותרים את המערכת:

$$\begin{cases} L'_x &= 0 \\ L'_y &= 0 \\ L'_\lambda &= 0 \ . \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -\frac{1}{3} + 2\lambda x &= 0 \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\lambda y &= 0 \\ x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 &= 0 \ . \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x &= \frac{1}{6\lambda} \\ y &= \frac{1}{2\lambda} \\ \lambda &= \frac{\pm\sqrt{13}}{12} \ . \end{cases}$$

בכך מקבלים את שתי הנקודות הקריטיות הבאות:

$$P_1\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}}\right) \ , \qquad P_2\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{6}{\sqrt{13}}\right)$$

שים לב כי

$$z(P_1) = 5 - \frac{\sqrt{13}}{6} \ , \qquad z(P_2) = 5 + \frac{\sqrt{13}}{6}$$

הערך הגדול ביותר הוא בנקודה P_2 והערך המקסימלי של $z=5-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}$ בתנאי $x^2+\frac{y^2}{4}-1=0$ הוא

$$z(P_2)=5+\frac{\sqrt{13}}{6}\ .$$

דוגמה 9.12

מצאו את הערך הגדול והקטן ביותר של $z=x+2y+7$ על האליפסה $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

פתרון:

האילוץ הוא $\phi(x,y)=4x^2+9y^2-36=0$. נגדיר $f(x,y)=x+2y+7$.

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\phi(x,y)\ .$$

$$\begin{aligned} L'_x &= f'_x-\lambda\phi'_x &&= 1-8\lambda x &&= 0 \\ L'_y &= f'_y-\lambda\phi'_y &&= 2-18\lambda y &&= 0 \\ L'_\lambda &= -\phi &&= -4x^2-9y^2+36 &&= 0\ . \end{aligned}$$

הפתרון הוא

$$\left.\begin{aligned} 8\lambda x &= 1 \\ 18\lambda y &= 2 \\ 4x^2+9y^2-36 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{8\lambda} \\ y &= \frac{1}{9\lambda} \\ 4x^2+9y^2 &= 36 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y &= \frac{8}{9}x \\ 4x^2+9y^2 &= 36 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 8x &= 9y \\ 4x^2+9\left(\frac{8}{9}\cdot x\right)^2 &= 36 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(4+\frac{64}{9}\right)x^2=36 \Rightarrow \frac{100}{9}x^2=36$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{36\cdot 9}{100} \Rightarrow x=\pm\frac{9}{5} \Rightarrow y=\frac{8}{9}x=\pm\frac{8}{5}$$

משפט 9.7

האקסרמום של הפונקציה $f(x,y,z)$ כאשר x,y, z קשורים אחד בשני ע"י האילוץ

$$\phi(x,y,z)=0$$

הנתון במרחב xyz, ניתן ע"י השיטה הבאה:

(1) מרכיבים את פונקצית לגרנז':

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\phi(x,y,z)$$

(2) גוזרים את $L(x,y,z,\lambda)$ לפי שלושת המשתנים x,y,λ:

$$L'_x=f'_x+\lambda\phi'_x\ ,\qquad L'_y=f'_y+\lambda\phi'_y\ ,\qquad L'_z=f'_z+\lambda\phi'_z\ ,\qquad L'_\lambda=\phi(x,y,z)\ .$$

(3) מוצאים את הנקודות הקריטיות של $L(x,y,z,\lambda)$ ע"י לפתור את המערכת

$$\begin{cases} L'_x &= 0\\ L'_y &= 0\\ L'_z &= 0\\ L'_\lambda &= 0\ . \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} f'_x(x,y,z)+\lambda\phi'_x(x,y,z) &= 0\\ f'_y(x,y,z)+\lambda\phi'_y(x,y,z) &= 0\\ f'_z(x,y,z)+\lambda\phi'_z(x,y,z) &= 0\\ \phi(x,y,z) &= 0 \end{cases}$$

דוגמה 9.13

מצאו את הערך הקטן ביותר של הפונקציה $f(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2$ בתנאי $x-y+z-1=0$.

פתרון:

האילוץ הוא $\phi(x,y,z)=x-y+z-1=0$. נגדיר

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda\phi(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2-\lambda\left(x-y+z-1\right)\ .$$

$$\begin{aligned} L'_x &= f'_x-\lambda\phi'_x && = 2x-\lambda && = 0\\ L'_y &= f'_y-\lambda\phi'_y && = 2y+\lambda && = 0\\ L'_z &= f'_z-\lambda\phi'_z && = 4z-\lambda && = 0\\ L'_\lambda &= -\phi && = -x+y-z+1 && = 0\ . \end{aligned}$$

הפתרון הוא

$$\left.\begin{aligned} 2x-\lambda &= 0\\ 2y+\lambda &= 0\\ 4z-\lambda &= 0\\ -x+y-z &= -1 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2&0&0&-1&0\\ 0&2&0&1&0\\ 0&0&4&-1&0\\ -1&1&-1&0&-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4\to 2R_4+R_1}\left(\begin{array}{cccc|c} 2&0&0&-1&0\\ 0&2&0&1&0\\ 0&0&4&-1&0\\ 0&2&-2&-1&-2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4\to R_4-R_2}\left(\begin{array}{cccc|c} 2&0&0&-1&0\\ 0&2&0&1&0\\ 0&0&4&-1&0\\ 0&0&-2&-2&-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4\to 2R_4+R_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 2&0&0&-1&0\\ 0&2&0&1&0\\ 0&0&4&-1&0\\ 0&0&0&-5&-4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4\to 2R_4+R_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 2&0&0&-1&0\\ 0&2&0&1&0\\ 0&0&4&-1&0\\ 0&0&0&1&\frac{4}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1\to R_1+R_4]{\substack{R_3\to R_3+R_4\\ R_2\to R_2-R_4}}\left(\begin{array}{cccc|c} 2&0&0&0&\frac{4}{5}\\ 0&2&0&0&-\frac{4}{5}\\ 0&0&4&0&\frac{4}{5}\\ 0&0&0&1&\frac{4}{5} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&\frac{2}{5}\\ 0&1&0&0&-\frac{2}{5}\\ 0&0&1&0&\frac{1}{5}\\ 0&0&0&1&\frac{4}{5} \end{array}\right)$$

פתרון: $x=\dfrac{2}{5}$, $y=\dfrac{-2}{5}$, $z=\dfrac{1}{5}$, $\lambda=\dfrac{4}{5}$.

9.7 הערך המקסימלי והמינימלי של פונקציה בתחום סגור

משפט 9.8

פונקציה רציפה בתחום חסום וסגור מקבלת בן ערך מקסימלי וערך מינימלי.
ערכים אלה יכולים להתקבל בפנים על התחום או על השפה, אם הם מתקבלים פנימית אז זו תהיהי נרודת קריטית.

דוגמה 9.14

נתונה הפונקציה $f(x,y)=e^{2x^2+y^2+4x+5}$

א) מצאו את הנקודות קיצום מקומיות של פונקציה זו.

ב) מצאו את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר של הפונקציה בתחום $x^2+y^2\leq 25$.

פתרון:

סעיף א מכיוון ש e^t עולה ממש, מספיק לחקור את הפונקציה $z=2x^2+y^2+4x+5$.

$$z'_x=4x+4=0 \quad\Rightarrow\quad x=-1\ , \qquad z'_y=2y=0 \quad\Rightarrow\quad y=0\ .$$

מצאנו נקודת קריטית ב- $(-1,0)$.

$$\left.\begin{array}{ll} z''_{xx} & =4>0 \\ z''_{xy} & =0 \\ z''_{yy} & =2 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \Delta=z''_{xx}\cdot z''_{yy}-\left(z''_{xy}\right)^2=8>0$$

לכן הנקודה $(-1,0)$ היא נקודת מינימום מקומי.

סעיף ב הנקודה $(-1,0)$ היא נקודה פנימים למעדל. נבדוק נקודות קיצון בתנאי על המעגל.

שיטה 1

$$\phi(x,y)=x^2+y^2-25$$

$$L(x,y,\lambda)=2x^2+y^2+4x+5-\lambda\left(x^2+y^2-25\right)$$

$$\left.\begin{array}{lll} L'_x & =4x+4-2\lambda x & \stackrel{!}{=}0 \\ L'_y & =2y-2\lambda y & \stackrel{!}{=}0 \\ L'_\lambda & =x^2+y^2-25 & \stackrel{!}{=}0 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{array}{rl} \dfrac{4x+4}{2x} & =\lambda \\ \lambda & =1 \\ x^2+y^2 & =25 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{array}{rl} x & =-2 \\ (-2)^2+y^2 & =25 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad y^2=21$$

פתרון $(x,y)=(-2,\sqrt{21})$ או $(x,y)=(-2,-\sqrt{21})$.

$$z=(-2,\sqrt{21})=26\ , \qquad z=(-2,-\sqrt{21})=26\ .$$

$$z(5,0)=75\ ,\qquad z=(-5,0)=35\ .$$

שיטה 2

אם $x^2+y^2=25$ אז

$$g(x)=z=x^2+4x+30\ ,\qquad -5\le x\le 5\ .$$

$$g'(x)=2x+4\stackrel{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad x=-2\quad\Rightarrow\quad y=\pm\sqrt{21}\ .$$

מכאן מציבים. אבל לא לשכוח את קצוות הקטע $-5\le x\le 5$.

הערך הגדול ביותר של z הוא 75 בנקודה $(5,0)$.

הערך הגדול ביותר של z הוא 3 בנקודה $(-1,0)$.

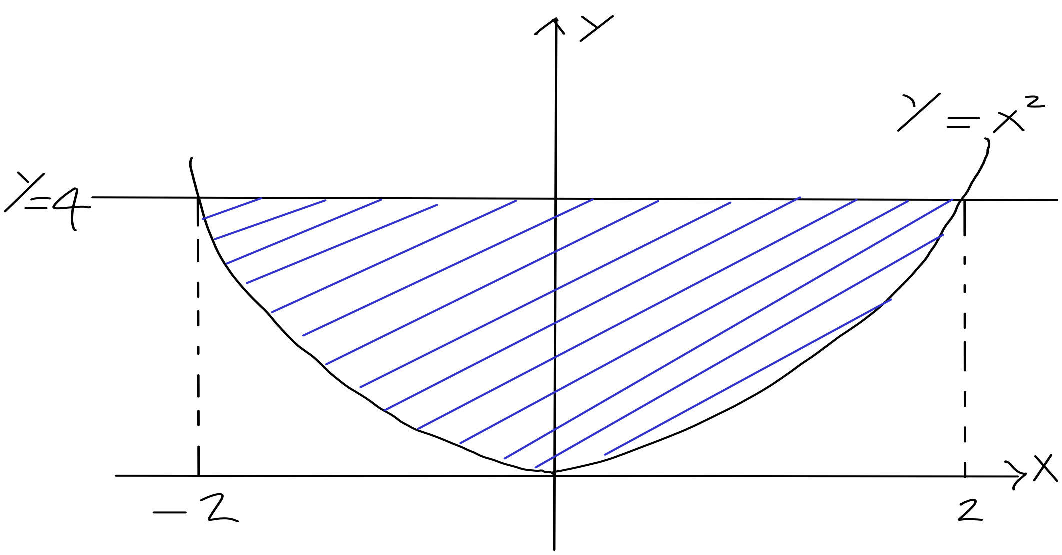
תשובה סופית:

$$\max f=f(5,0)=e^{75}\ ,\qquad \min f=f(-1,0)=e^{3}\ .$$

דוגמה 9.15

מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה $f(x,y)=x^2+xy-y-4x$ בתחום החסום ע"י הישר $y=4$ והפרבולה $y=x^2$.

פתרון:



$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2x+y-4 \stackrel{!}{=} 0\\ f'_y &= x-1 \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned} y&=2\\ x&=1\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} f''_{xx}&=2\\ f''_{xy}&=1\\ f''_{yy}&=0\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad \Delta=f''_{xx}\cdot f''_{yy}-\left(f''_{xy}\right)^2=-1\ .$$

לכן הנקודה $(1,2)$ היא נקודת אוכף.

נבדוק קיצון לאורך $\left\{\begin{array}{c} y=4 \\ -2\leq x\leq 2\end{array}\right. \Leftarrow$

$$f(x,4)=x^2+4x-4-4x=x^2-4$$

ערך מקסימלי: 0

ערך מינימלי: -4.

נבדוק קיצון לאורך $\left\{\begin{array}{c} y=x^2 \\ -2\leq x\leq 2\end{array}\right. \Leftarrow$

$$g(x)=f(x,x^2)=\cancel{x^2}+x^3-\cancel{x^2}-4x=x^3-4x$$

$$g'(x)=3x^2-4\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$g\left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=\left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^3-4\left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\left(\frac{4}{3}-4\right)=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\left(-\frac{8}{3}\right)=-\frac{16}{\sqrt{27}}\ .$$

$$\max_D f(x,y)=f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{4}{3}\right)=\frac{16}{\sqrt{27}}$$
$$\min_D f(x,y)=f\left(0,4\right)=-4$$

9.8 מרחק בין משטח למישור

דוגמה 9.16

מצאו את שתי הנקודות הכי קרובות על המשטח

$$f(x,y,z)=\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{16}+\frac{(z+2)^2}{9}=1$$

והמישור

$$\phi(x,y,z)=36x+9y+4z-3600=0$$

והמרחק ביניהן.

פתרון:
שים לב, בנקודות האלה הנורמל למשטח מקביל עם הנורמל למישור:

$$\nabla f=t\nabla\phi$$

כך ש

$$\left(\frac{2(x-3)}{4},\frac{2(y-1)}{16},\frac{2(z+2)}{9}\right)=t\left(36,9,4\right)$$

המשוואה הפרמטרית מתאימה להישר המאונך להמישור ולמשטח.

$$\frac{2x-6}{4}=36t\ ,\quad \frac{2y-2}{16}=9t\ ,\quad \frac{2z+4}{9}=4t\ .$$

או שקול

$$x=72t+3\ ,\quad y=72t+1\ ,\quad z=18t-2\ .$$

נציב למשוואת המשטח $f(x,y,z)=0$ ונקבל

$$t=\pm\frac{1}{6\sqrt{46}}$$

ולכן נקבל שתי נקודות על המשטח:

$$(x_1,y_1,z_1)=(1.2307,-0.769303,-2.44233)\ ,\qquad (X_1,Y_1,Z_1)=(4.7693,2.7693,-1.55767)$$

עכשיו נציב את $z=18t-2$, $y=72t+1$, $x=72t+3$ למשוואת המישור לקבל

$$36(72t+3)+9(72t+1)+4(18t-2)-3600=0\quad\Leftrightarrow\quad t=1.05405$$

ולכן הנקודה על המישור הינה

$$(x_2,y_2,z_2)=(78.8913,76.8913,16.9728)$$

המרחק בין הנקודות (x_1,y_1,z_1) ו- (x_2,y_2,z_2) הוא

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=111.532$$

המרחק בין הנקודות (X_1,Y_1,Z_1) ו- (x_2,y_2,z_2) הוא

$$d=\sqrt{(x_2-X_1)^2+(y_2-Y_1)^2+(z_2-Z_1)^2}=106.45$$

לכן הנקודה (X_1,Y_1,Z_1) על המשטח קרובה ביותר לנקודה (x_2,y_2,z_2) על המישור.

דוגמה 9.17 מרחק בין משטח למישור: סוג 2

על המשטח

$$f(x,y,z)=3x^2+4y^2-z=0$$

מצאו את הנקודה $P_0(x_0,y_0,z_0)$ הקרובה ביותר למישור

$$\phi(x,y,z)=2x+3y-z-5=0$$

וחשבו את המרחק d ביניהם.

פתרון:
הנקודות הקרובות ביותר על המשטח והמישור נמצאות על הקו המאונך למישור ולמשטח. לכן מספיק למצוא שתי נקודות על המישור והמשטח בהן הנורמלים מקבילים. הנורמל למשטח הינו

$$\nabla f=(4x,6y,-1)$$

והנורמל למישור הינו

$$\nabla\phi=(2,3,-1)$$

שים לב, שונה מהדוגמה הקודמת לא ניתן למצוא את משוואת הישר ע"י להשוואות את הנורמלים ע"י פרמטר $\nabla f = t\nabla\phi$ כי הקואורדינט הz של ∇f לא תלוי ב- z.

במקום מחפשם את הנקודה P_0 על השמטח בעל הנורמל ∇f מקביל ל $\nabla\phi$:

$$(4x, 6y, -1) = (2, 3, -1) \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \frac{1}{2}, y_1 = \frac{1}{2}$$

נמצא את z_0 בנקודה P_0 ע"י להציב את x_0, y_0 במשוואת המשטח:

$$z_0 = 2x_0^2 + 3y_0^2 \qquad \to \qquad z_0 = \frac{5}{4} = 1.25 \ .$$

לכן

$$P_0 = (0.5, 0.5, 1.25)$$

משוואת הישר המקביל לוקטור הנורמל של המישור $(2, 3, -1)$ העובר דרך נקודה P_0 על המשטח היא

$$x - x_1 = 2t \ , \quad y - y_1 = 3t \ , \quad z - z_1 = -t \ , \qquad \Leftrightarrow \qquad (x, y, z) = (0.5 + 2t, 0.5 + 3t, 1.25 - t)$$

כדי למצוא את הנקודה בה הישר חותך את המישור נציב משוואת המישור לתוך משוואת המישור $2x-3y-z-5=0$:

$$2\,(0.5 + 2t) + 3\,(0.5 + 3t) - (1.25 - t) - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 10t + 1.25 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -0.125 \ .$$

ואז נציב את $t = -0.125$ לתוך משוואת הישר כדי לקבל את הקואורדינטות של הנקודה $P_1(x_1, y_1, z_1)$ בה הישר חותך את המישור:

$$x_1 = 0.5 + 2(-0.125) = 0.25, \quad y_1 = 0.5 + 3(-0.125) = 0.125 \ , \quad z_1 = 1.25 - (-0.125) = 1.375$$

לכן $P_1 = (0.25, .125, 1.375)$ המרחק d ניתן ע"י הנוסחה הרגילה:

$$\begin{aligned} d =& \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \\ =& \sqrt{(0.25 - 0.5)^2 + (0.125 - 0.5)^2 + (1.375 - 1.25)^2} \\ =& 0.467707 \end{aligned}$$

9.9 מרחק בין נקודה למשטח

דוגמה 9.18

נתון הנקודה $P_0(10, 10, 10)$ מצאו את הנקודה על המשטח

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$$

הקרובה ביותר לנקודה P.

פתרון:

ניתן לפתור בעיה של מרחק בין נקודה למשטח ע"י כופלי לגרנז'. המרחק בריבוע בין נקודה $P_1(x_1, y_1, z_1)$ הנמצא על השמטח והנקודה P_0 הוא

$$d^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2$$

יש לעשות את d^2 מינימום בתנאי ש P_1 נמצא עד המשטח. נבנה את פונקצית לגרנז':

$$L = d^2(x_1, y_1, z_1) + \lambda f(x_1, y_1, z_1)$$

$$\begin{aligned}
L'_{x_1} &= 2(x_1 - x_0) + 2\lambda x_1 &= 0\\
L'_{y_1} &= 2(y_1 - x_0) + 2\lambda y_1 &= 0\\
L'_{z_1} &= 2(z_1 - z_0) + 2\lambda z_1 &= 0\\
L'_{\lambda} &= f(x_1, y_1, z_1) &= 0
\end{aligned}$$

כך ש

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{x_0}{\lambda + 1}\\
y_1 &= \frac{y_0}{\lambda + 1}\\
z_1 &= \frac{z_0}{\lambda + 1}\\
\left(\frac{x_0}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{z_0}{1+\lambda}\right)^2 &= 1
\end{aligned}$$

ולכן

$$(1+\lambda)^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 300 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{300} - 1$$

והנקודה P_1 הינה

$$P_1 = \left(\frac{10}{\sqrt{300}}, \frac{10}{\sqrt{300}}, \frac{10}{\sqrt{300}}\right) \qquad \text{או} \qquad \left(\frac{-10}{\sqrt{300}}, \frac{-10}{\sqrt{300}}, \frac{-10}{\sqrt{300}}\right)$$

אחת משתי הנקודות אלה עושה את המרחק d מקסימום והשני עושה את d מינימום. יש לבדוק לפי הערך של d איזה מהן מתאים מרחק המינימום.