## תרגילים 1: שדות

לוח החיבור של איברים ב- $\mathbb{Z}_3$:

| $+$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ |

$-\bar{0}=\bar{0}$
$-\bar{1}=\bar{2}$
$-\bar{2}=\bar{1}$

לוח הכפל של איברים ב- $\mathbb{Z}_3$:

| $\cdot$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ |

$\bar{1}^{-1}=\bar{1}$
$\bar{2}^{-1}=\bar{2}$

לוח החיבור של איברים ב- $\mathbb{Z}_5$:

| $+$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ |

$-\bar{0}=\bar{0}$
$-\bar{1}=\bar{4}$
$-\bar{2}=\bar{3}$
$-\bar{3}=\bar{2}$
$-\bar{4}=\bar{1}$

לוח הכפל של איברים ב- $\mathbb{Z}_5$:

| $\cdot$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{3}$ | $\bar{1}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{3}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ |

$\bar{1}^{-1}=\bar{1}$
$\bar{2}^{-1}=\bar{3}$
$\bar{3}^{-1}=\bar{2}$
$\bar{4}^{-1}=\bar{4}$

לוח החיבור של איברים ב- $\mathbb{Z}_7$:

| $+$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{5}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{6}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ |

$-\bar{0}=\bar{0}$
$-\bar{1}=\bar{6}$
$-\bar{2}=\bar{5}$
$-\bar{3}=\bar{4}$
$-\bar{4}=\bar{3}$
$-\bar{5}=\bar{2}$
$-\bar{6}=\bar{1}$

לוח הכפל של איברים ב- $\mathbb{Z}_7$:

| $\cdot$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{6}$ | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ | $\bar{5}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{3}$ | $\bar{6}$ | $\bar{2}$ | $\bar{5}$ | $\bar{1}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{1}$ | $\bar{5}$ | $\bar{2}$ | $\bar{6}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{5}$ | $\bar{0}$ | $\bar{5}$ | $\bar{3}$ | $\bar{1}$ | $\bar{6}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{6}$ | $\bar{5}$ | $\bar{4}$ | $\bar{3}$ | $\bar{6}$ | $\bar{1}$ |

$\bar{1}^{-1}=\bar{1}$
$\bar{2}^{-1}=\bar{4}$
$\bar{3}^{-1}=\bar{5}$
$\bar{4}^{-1}=\bar{2}$
$\bar{5}^{-1}=\bar{3}$
$\bar{6}^{-1}=\bar{6}$

**שאלה 1** רשמו את האיברים הבאים ב- $\mathbb{Z}_3$:

**א)** $\overline{12}$

**ב)** $\overline{23}$

**ג)** $\overline{57}$

**ד)** $\overline{46}$

**ה)** $\overline{19}$

**ו)** $\overline{-7}$

**ז)** $\bar{2}+\bar{1}$

**ח)** $\bar{2}+\bar{2}$

**ט)** $\bar{1}+\bar{1}$

**י)** $\bar{2}\cdot\bar{2}$

**יא)** $\bar{2}\cdot\bar{0}$

**יב)** $\bar{2}\cdot\bar{1}$

**שאלה 2** רשמו את האיברים הבאים ב- $\mathbb{Z}_5$:

**א)** $\overline{11}$

**ב)** $\overline{24}$

**ג)** $\overline{56}$

**ד)** $\overline{98}$

**ה)** $\overline{22}$

**ו)** $\overline{-8}$

**ז)** $\bar{2}+\bar{2}$

**ח)** $\bar{2}+\bar{3}$

**ט)** $\bar{1}+\bar{4}$

**י)** $\bar{2}\cdot\bar{4}$

**יא)** $\bar{3}\cdot\bar{2}$

**יב)** $\bar{4}\cdot\bar{3}$

**שאלה 3** רשמו את האיברים הבאים ב- $\mathbb{Z}_7$:

**א)** $\overline{13}$

**ב)** $\overline{33}$

**ג)** $\overline{74}$

**ד)** $\overline{16}$

**ה)** $\overline{12}$

**ו)** $\overline{-9}$

**ז)** $\bar{2}+\bar{6}$

**ח)** $\bar{3}+\bar{5}$

**ט)** $\bar{6}+\bar{3}$

**י)** $\bar{2}\cdot\bar{6}$

**יא)** $\bar{3}\cdot\bar{5}$

**יב)** $\bar{4}\cdot\bar{6}$

## שאלה 4

**א)** רשמו את טבלאות הכפל וחיבור של $\mathbb{Z}_7$.

**ב)** רשמו את האיברים ההופכיים של $2,3,4,5,6$ ב- $\mathbb{Z}_7$ וב- $\mathbb{Z}_{11}$.

## שאלה 5

**א)** מצאו הפתרונות של המשוואות (1) $3x=2$ (2) $-3x=2$

**1)** בשדה $\mathbb{Z}_5$

**2)** בשדה $\mathbb{Z}_7$

**3)** בשדה $\mathbb{Z}_{11}$

**ב)** יהי $\mathbb{F}$ שדה. הוכיחו כי לכל $a,b\in\mathbb{F}$ כך ש $a\neq 0$ למשוואה $ax=b$ ישנו פתרון יחיד.

## שאלה 6 יהי $\mathbb{F}$ שדה. הוכיחו את הטענות הבאות:

**א)** לכל מספר טבעי $k$, ולכל $a_1,\ldots,a_k,b\in\mathbb{F}$ מתקיים

$$(a_1+\ldots+a_k)\,b=a_1b+\ldots a_kb\in\mathbb{F}\ .$$

רמז: אינדוקציה על $k$.

**ב)** לכל $a\in\mathbb{F}$ פרט ל- $0$ יש $b\in\mathbb{F}$ <u>יחיד</u> כך ש- $ab=1$.

**ג)** יהי $a\in\mathbb{F}$. אם $a+a=a$ אז $a=0$.

**ד)** יהיו $a,b\in\mathbb{F}$. אם $ab=0$ אז $a=0$ או $b=0$.

**ה)** לכל $a,b\in\mathbb{F}$ מתקיים $-(ab)=(-a)b$.

## שאלה 7 הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות ע"י דוגמה נגדית:

**א)** קבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$ עם פעולות החיבור והכפל הרגילות שדה.

**ב)** קבוצת המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$ עם פעולות $a+b=\dfrac{a-b}{3}$ ו- $a\cdot b=3ab$ שדה.

**ג)** הקבוצה $\left\{a+b\sqrt{2}|a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ ביחס לפעולות החיבור והכפל הרגילות, כלומר,

$$\begin{aligned}(a+b\sqrt{2})\oplus(c+d\sqrt{2}) =& (a+c)+(b+d)\sqrt{2}\\ (a+b\sqrt{2})\cdot(c+d\sqrt{2}) =& (ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\end{aligned}$$

שדה.

**ד)** הקבוצה $\left\{a+b\sqrt{2}|a,b\in\mathbb{Q}\right\}$ ביחס לפעולות החיבור והכפל הרגילות, שדה.

## שאלה 8

**א)** רשמו את טבלאות הכפל וחיבור של $\mathbb{Z}_7$.

**ב)** רשמו את האיברים ההופכיים של $2,3,4,5,6$ ב- $\mathbb{Z}_7$ וב- $\mathbb{Z}_{11}$.

**ג)** הגדירו על הקבוצה $\{0,1,a,b\}$ פעולות כפל וחיבור (ע"י כתיבת טבלאות הכפל והחיבור) כך שזה יהיה שדה.

הדרכה: קבעו ש- $a+1=b$.

## שאלה 9 פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{Z}_3$:

$$\begin{aligned}x+\bar{2}y&=\bar{2}\\ \bar{2}x-y&=\bar{1}\end{aligned}$$

## שאלה 10 פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{Z}_3$:

$$\begin{aligned}\bar{2}x+\bar{2}y&=\bar{2}\\ x+y&=\bar{1}\end{aligned}$$

## שאלה 11 פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned}\bar{4}x+\bar{2}y&=\bar{3}\\ \bar{3}x-y&=\bar{2}\end{aligned}$$

## שאלה 12 פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned}\bar{3}x+y&=\bar{2}\\ \bar{3}x+\bar{4}y&=\bar{3}\end{aligned}$$

## שאלה 13 פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned}\bar{2}x+\bar{3}y&=\bar{0}\\ x-\bar{3}y&=\bar{4}\end{aligned}$$

**שאלה 14** פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{aligned} \bar{5}x + \bar{2}y &= \bar{3} \\ \bar{4}x - \bar{3}y &= \bar{4} \end{aligned}$$

**שאלה 15** פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$. כמה פתרונות יש למערכת?

$$\begin{aligned} x + \bar{3}y + z =& \bar{1} \\ \bar{3}x + y + \bar{4}z =& \bar{2} \\ \bar{2}x + \bar{4}y + \bar{4}z =& \bar{3} \end{aligned}$$

**שאלה 16** נתונה המערכת הבאה:

$$\begin{aligned} x + \bar{3}y + z =& \bar{1} \\ \bar{3}x + y + \bar{2}z =& \bar{2} \\ \bar{2}x + \bar{2}y + \bar{3}z =& \bar{4} \end{aligned}$$

פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$. רשמו את כל הפתרונות בצורה מפורשת. כמה פתרונות יש למערכת?

**שאלה 17** פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_7$. כמה פתרונות יש למערכת?

$$\begin{aligned} x + \bar{2}y + z =& \bar{2} \\ \bar{3}x + y + \bar{4}z =& \bar{3} \\ \bar{2}x + \bar{4}y + \bar{4}z =& \bar{3} \end{aligned}$$

**שאלה 18** פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$. כמה פתרונות יש למערכת?

$$\begin{aligned} x + \bar{3}y + z =& \bar{1} \\ \bar{3}x + y + \bar{2}z =& \bar{2} \\ \bar{2}x + \bar{2}y + \bar{3}z =& \bar{4} \end{aligned}$$

**שאלה 19** פתרו את מערכת המשוואות הבאה מעל שדה $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y + z & = \bar{4} \\ \bar{4}x + \bar{2}y + z & = \bar{1} \\ x + y + \bar{3}z & = \bar{1} \end{cases}$$

רשמו את כל הפתרונות שלה.

**שאלה 20** פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_7$.

$$\begin{aligned} \bar{2}x + \bar{3}y + \bar{3}z &= \bar{5} \\ \bar{3}x + \bar{4}y + z &= \bar{1} \\ x + y + \bar{6}z &= \bar{2} \end{aligned}$$

**שאלה 21** פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$.

$$\begin{aligned} x+\bar{2}y+z&=\bar{2}\\ \bar{3}x+y+\bar{4}z&=\bar{3}\\ \bar{2}x+\bar{4}y+\bar{4}z&=\bar{3} \end{aligned}$$

**שאלה 22** הוכיחו שלמערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_p$, יש פתרון יחיד עם $p \geq 7$ מספר ראשוני.

$$\begin{aligned} x+\bar{2}y+z&=\bar{2}\\ \bar{3}x+y+\bar{4}z&=\bar{3}\\ \bar{2}x+\bar{4}y+\bar{4}z&=\bar{3} \end{aligned}$$

**שאלה 23**

פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} (1+i)z_1+(1-i)z_2 =&1+i\\ (1-i)z_1+(1+i)z_2 =&1+3i \end{aligned}$$

**שאלה 24**

פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} 2z_1-(2+i)z_2 =&-i\\ (4-2i)z_1-5z_2 =&-1-2i \end{aligned}$$

**שאלה 25**

פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} (1-i)z_1-3z_2 =&-i\\ 2z_1-(3+3i)z_2 =&3-i \end{aligned}$$

**שאלה 26**

פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} iz_1+(1-i)z_2 &= 2i\ ,\\ (1+2i)z_1-2z_2 &= 1\ . \end{aligned}$$

**שאלה 27**

פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} 3iz_1+(6-6i)z_2 &= 6i\ ,\\ (1+i)z_1-2z_2 &= 1\ . \end{aligned}$$

**שאלה 28**

פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} 4z_1+4z_2 &= 4i\ ,\\ (5+10i)z_1-5z_2 &= 5\ . \end{aligned}$$

# פתרונות

## שאלה 1

**א)**

$$\overline{12} = \overline{\text{rem}(12,3)} = \bar{0}$$

**ב)**

$$\overline{23} = \overline{\text{rem}(23,3)} = \bar{2}$$

**ג)**

$$\overline{57} = \overline{\text{rem}(57,3)} = \bar{0}$$

**ד)**

$$\overline{46} = \overline{\text{rem}(46,3)} = \bar{1}$$

**ה)**

$$\overline{19} = \overline{\text{rem}(19,3)} = \bar{1}$$

**ו)**

$$\bar{2} + \bar{7} = \bar{9} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad -\bar{7} = \bar{2} \ .$$

**ז)**

$$\bar{2} + \bar{1} = \bar{3} = \bar{0}$$

**ח)**

$$\bar{2} + \bar{2} = \bar{4} = \bar{1}$$

**ט)**

$$\bar{1} + \bar{1} = \bar{2}$$

**י)**

$$\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{4} = \bar{1}$$

**יא)**

$$\bar{2} \cdot \bar{0} = \bar{0}$$

**יב)**

$$\bar{2} \cdot \bar{1} = \bar{2}$$

## שאלה 2

**א)**

$$\overline{11} = \overline{\text{rem}(11,5)} = \bar{1}$$

**ב)**

$$\overline{24} = \overline{\text{rem}(24,5)} = \bar{4}$$

**ג)**

$$\overline{56} = \overline{\text{rem}(56,5)} = \bar{1}$$

**ד)**

$$\overline{98} = \overline{\text{rem}(98,5)} = \bar{3}$$

**ה)**

$$\overline{22} = \overline{\text{rem}(22,5)} = \bar{2}$$

**ו)**

$$\bar{8} + \bar{2} = \overline{10} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad -\bar{8} = \bar{2} \ .$$

**ז)**

$$\bar{2} + \bar{2} = \bar{4} \ .$$

**ח)**

$$\bar{2} + \bar{3} = \bar{5} = \bar{0}$$

**ט)**

$$\bar{1} + \bar{4} = \bar{5} = \bar{0}$$

**י)**

$$\bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{8} = \bar{3}$$

**יא)**

$$\bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{6} = \bar{1}$$

**יב)**

$$\bar{4}\cdot\bar{3}=\overline{12}=\bar{2}\ .$$

## שאלה 3

**א)**

$$\overline{13}=\overline{\mathrm{rem}(13,7)}=\bar{6}$$

**ב)**

$$\overline{33}=\overline{\mathrm{rem}(33,7)}=\bar{5}$$

**ג)**

$$\overline{74}=\overline{\mathrm{rem}(74,7)}=\bar{4}$$

**ד)**

$$\overline{16}=\overline{\mathrm{rem}(16,7)}=\bar{2}$$

**ה)**

$$\overline{12}=\overline{\mathrm{rem}(12,7)}=\bar{5}$$

**ו)**

$$\bar{9}+\bar{5}=\overline{14}=\bar{0}\quad\Rightarrow\quad-\bar{9}=\bar{5}\ .$$

**ז)**

$$\bar{2}+\bar{6}=\bar{8}=\bar{1}\ .$$

**ח)**

$$\bar{3}+\bar{5}=\bar{8}=\bar{1}$$

**ט)**

$$\bar{6}+\bar{3}=\bar{9}=\bar{2}$$

**י)**

$$\bar{2}\cdot\bar{6}=\overline{12}=\bar{5}$$

**יא)**

$$\bar{3}\cdot\bar{5}=\overline{15}=\bar{1}$$

**יב)**

$$\bar{4}\cdot\bar{6}=\overline{24}=\bar{3}\ .$$

## שאלה 4

**א)**

| $+$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{5}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{6}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ |

| $\cdot$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{6}$ | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ | $\bar{5}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{3}$ | $\bar{6}$ | $\bar{2}$ | $\bar{5}$ | $\bar{1}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{1}$ | $\bar{5}$ | $\bar{2}$ | $\bar{6}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{5}$ | $\bar{0}$ | $\bar{5}$ | $\bar{3}$ | $\bar{1}$ | $\bar{6}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{6}$ | $\bar{5}$ | $\bar{4}$ | $\bar{3}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ |

**ב)** $\underline{\mathbb{Z}_7}$

$$-\bar{1}=\bar{6}\ ,\qquad -\bar{2}=\bar{5}\ ,\qquad -\bar{3}=\bar{4}\ ,\qquad -\bar{4}=\bar{3}\ ,\qquad -\bar{5}=\bar{2}\ ,\qquad -\bar{6}=\bar{1}\ .$$

$\underline{\mathbb{Z}_{11}}$

$$-\bar{1}=\overline{10}\ ,\quad -\bar{2}=\bar{9}\ ,\quad -\bar{3}=\bar{8}\ ,\quad -\bar{4}=\bar{7}\ ,\quad -\bar{5}=\bar{6}\ ,\quad -\bar{6}=\bar{5}\ ,\quad -\bar{7}=\bar{4}\ ,\quad -\bar{8}=\bar{3}\ ,\quad -\bar{9}=\bar{2}\ ,$$

$$-\overline{10} = \bar{1} \ .$$

## שאלה 5

**א) 1)**

$$-\bar{3}x = \bar{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{2}x = \bar{2} \quad \Rightarrow \quad x = \bar{1} \ .$$

**2)**

$$-\bar{3}x = \bar{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{4}x = \bar{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{2} \cdot \bar{4}x = \bar{2} \cdot \bar{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{8}x = \bar{4} \quad \Rightarrow \quad x = \bar{4} \ .$$

**3)**

$$-\bar{3}x = \bar{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{8}x = \bar{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{7} \cdot \bar{8}x = \bar{7} \cdot \bar{2} \quad \Rightarrow \quad \overline{56}x = \overline{14} \quad \Rightarrow \quad x = \bar{4} \ .$$

**ב) קיום**

$\mathbb{F}$ שדה לכן קיים $a^{-1} \in \mathbb{F}$ כך ש- $a \cdot a^{-1} = 1$. לכן

$$a^{-1} \cdot a \cdot x = a^{-1} \cdot b \quad \Rightarrow \quad x = a^{-} \cdot b \ .$$

$a^{-1}, b \in \mathbb{F}$ לכן גם $a^{-1} \cdot b \in \mathbb{F}$ לכן קיים פתרון בשדה $\mathbb{F}$.

**יחידות**

נניח שקיים יותר מפתרון אחד, כלומר קיימים $x_1, x_2 \in \mathbb{F}$ כך ש- $ax_1 = b$ ו- $ax_2 = b$. $\mathbb{F}$ שדה לכן קיים איבר הנגדי $-ax_2$ ואיבר הנגדי $-b$. לכן

$$ax_1 + (-ax_2) = b + (-b) = 0 \quad \Rightarrow \quad ax_1 - ax_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot (x_1 - x_2) = 0 \ .$$

$a \neq 0$ לכן $x_1 - x_2 = 0$ לכן $-x_2$ הוא האיבר הנגדי של $x_1$: $-x_2 = -x_1$. לכן $x_1 = x_2$ בסתירה לכך שקיים יותר מפתרון אחד.

## שאלה 6

**א)** <u>שלב הבסיס:</u>

$\mathbb{F}$ לכן אם $a_1, b \in \mathbb{F}$ אז $a_1 \cdot b \in \mathbb{F}$.

<u>שלב האינדוקציה:</u>

הנחת האינדוקציה. נניח כי $a_1, \ldots, a_k, b \in \mathbb{F}$ ומתקיים $(a_1 + \ldots + a_k)\, b = a_1 b + \ldots a_k b \in \mathbb{F}$. נסמן $c = a_1 b + \ldots a_k b$. נניח כי $a_{k+1} \in \mathbb{F}$. גם $b, c \in \mathbb{F}$ לכן $a_{k+1} b \in \mathbb{F}$ (שדה סגורה ביחס לכפל) ו- $c + a_{k+1} b \in \mathbb{F}$ (שדה סגורה ביחס לחיבור). לכן

$$c + a_{k+1} b = a_1 b + \ldots a_k b + a_{k+1} b \in \mathbb{F} \ .$$

**ב)** $\mathbb{F}$ שדה לכן לכל $a\in\mathbb{F}$ קיים איבר ההופכי $b$ כך ש- $ab=1$.

נניח כי קיים יותר מאיבר הופכי אחד לכל $a\in\mathbb{F}$. כלומר נניח כי קיים $b_1,b_2\in\mathbb{F}$, $b_1\neq b_2$ כך ש- $ab_1=1$ ו- $ab_2=1$. $ab_2\in\mathbb{F}$ לכן קיים איבר ההגדי $-ab_2=-1$. לפיכך

$$ab_1+(-ab_2)=1+(-1)=0 \quad\Rightarrow\quad ab_1+(-ab_2)=0 \quad\Rightarrow\quad ab_1+(-ab_2)+ab_2=0+ab_2 \quad\Rightarrow\quad ab_1=ab_2$$

$a\in\mathbb{F}$ לכן קיים איבר ההופכי $a^{-1}$ כך ש- $a^{-1}a=1$. נכפיל ב- $a^{-1}$ ונקבל

$$b_1=b_2$$

בסתירה לכך ש- $b_1\neq b_2$.

**ג)** $a\in\mathbb{F}$ לכן קיים איבר הנגדי $-a$ כך ש- $a+(-a)=0$.

$$a+a=a \quad\Rightarrow\quad a+a+(-a)=a+(-a) \quad\Rightarrow\quad a+0=0 \quad\Rightarrow\quad a=0\ .$$

**ד)** נניח ש- $a,b\in\mathbb{F}$ ו- $ab=0$. נניח ש- $a\neq 0$. אז קיים איבר הופכי $a^{-1}\in\mathbb{F}$ כך ש- $a\cdot a^{-1}=1$. לכן

$$ab=0 \qquad\Rightarrow\qquad a^{-1}ab=a^{-1}\cdot 0 \qquad\Rightarrow\qquad 1\cdot b=0 \qquad\Rightarrow\qquad b=0\ .$$

נניח ש- $b\neq 0$. אז קיים איבר הופכי $b^{-1}\in\mathbb{F}$ כך ש- $b\cdot b^{-1}=1$. לכן

$$ab=0 \qquad\Rightarrow\qquad b^{-1}ab=a^{-1}\cdot 0 \qquad\Rightarrow\qquad ab^{-1}b=a^{-1}\cdot 0 \qquad\Rightarrow\qquad a\cdot 1=0 \qquad\Rightarrow\qquad a=0\ .$$

נניח ש- $a\neq 0, b\neq 0$. אז קיים איבר ההופכי $a^{-1}\in\mathbb{F}$ ואיבר ההופכי $b^{-1}\in\mathbb{F}$ כך ש- $a^{-1}a=1$ ו- $b^{-1}b=1$.

$$ab=0 \quad\Rightarrow\quad a^{-1}ab=a^{-1}0 \quad\Rightarrow\quad b=0$$

בסתירה לכך ש- $b\neq 0$.

**ה)** $a,b\in\mathbb{F}$. לכן קיים $-a\in\mathbb{F}$ כך ש- $a+(-a)=0$. לפי חוק הפילוג

$$(-a)b+ab=((-a)+a)b=0\cdot b=0$$

לכן $(-a)b$ האיבר הנגדי של האיבר $ab$.

## שאלה 7

**א)** <u>לא שדה</u>

דוגמה נגדית: $a=2\in\mathbb{Z}$ אבל לא קיים $a^{-1}\in\mathbb{Z}$ כך ש- $aa^{-1}=1$.

**ב)** <u>לא שדה</u>

חוק החילוף לא מתקיים: $a\oplus b=\dfrac{a-b}{3}$, $b\oplus a=\dfrac{b-a}{3}$. לכן $a\oplus b\neq b\oplus a$.
קשירות וכל האקסיומות נכונות, משום שכל התוצאות שיתקבלו שייכות למספרים הרציונליים.

**ג)** <u>לא שדה</u>

נשים לב שלאיבר $3$, למשל, אין הופכי ב - $\mathbb{F}$. אכן, נניח שקיים $a+b\sqrt{2}$ כך ש-

$$3\odot(a+b\sqrt{2})=1\ .$$

מכאן $a=\frac{1}{3},b=0$. בסתירה לכך ש - $a\in\mathbb{Z}$.

**ד)** <u>שדה</u>

נסמן $\mathbb{F}=\{a+b\sqrt{2}|a,b\in\mathbb{Q}\}$ ביחס לפעולות החיבור והכפל הרגילות.

יהיו $x,y,z\in\mathbb{F}$. אכן

$$x=a+b\sqrt{2}\ ,\qquad y=c+d\sqrt{2}\ ,\qquad z=e+f\sqrt{2}\ ,\qquad a,b,c,d,e,f\in\mathbb{Q}\ .$$

**1)** $\mathbb{F}$ סגורה תחת חיבור:

$$x+y=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}\ .$$

$a+c\in\mathbb{Q}$, $b+d\in\mathbb{Q}$ לכן $x+y\in\mathbb{F}$.

**2)** סגורה תחת כפל:

$$x\cdot y=(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=ac+ad\sqrt{2}+bc\sqrt{2}+2bd\ .$$

$ac+2bd\in\mathbb{Q}$, $ad+bc\in\mathbb{Q}$, לכן $x\cdot y\in\mathbb{F}$.

**3)** חוק החילוף I:

$$x+y=y+x$$

**4)** חוק החילוף II:

$$x\cdot y=y\cdot x$$

**5)** חוק הקיבוץ I:

$$(x+y)+z=x+(y+z)\ .$$

**6)** חוק הקיבוץ II:

$$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$$

**7)** חוק הפילוג:

$$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z\ .$$

**8)** קיום איבר ניוטרלי:

קיים איבר $\bar{0}\in\mathbb{F}$ כך ש- $x+\bar{0}=x$:

$$\bar{0}=0+0\cdot\sqrt{2}\ .$$

**9)** קיום איבר יחיד (האיבר ניוטרל לגבי כפל):

קיים איבר $\bar{1}\in\mathbb{F}$ כך ש- $x\cdot\bar{1}=x$:

$$\bar{1}=1+0\cdot\sqrt{2}\ .$$

**10)** קיום איבר נגדי:

לכל $x\in\mathbb{F}$ קיים איבר נגדי $(-x)\in\mathbb{F}$ כך ש- $x+(-x)=\bar{0}$:

$$-x=-a-b\sqrt{2}\ .$$

**11)** קיום איבר הופכי:

לכל $x\in\mathbb{F}$ כך ש $x\neq\bar{0}$ קיים איבר $x^{-1}\in\mathbb{F}$ המקיים $x\cdot x^{-1}=1$:

$$x^{-1}=\frac{1}{a+b\sqrt{2}}=\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}=\frac{a}{a^2-2b^2}-\frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\ .$$

$\frac{a}{a^2-2b^2}\in\mathbb{Q}$, $\frac{-b}{a^2-2b^2}\in\mathbb{Q}$ לכן $x^{-1}\in\mathbb{Q}$.

## <u>שאלה 8</u>

**א)**

| $+$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{5}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{6}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ |

| $\cdot$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{6}$ | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ | $\bar{5}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{3}$ | $\bar{6}$ | $\bar{2}$ | $\bar{5}$ | $\bar{1}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{1}$ | $\bar{5}$ | $\bar{2}$ | $\bar{6}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{5}$ | $\bar{0}$ | $\bar{5}$ | $\bar{3}$ | $\bar{1}$ | $\bar{6}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{6}$ | $\bar{5}$ | $\bar{4}$ | $\bar{3}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ |

**ב)** <u>$\mathbb{Z}_7$</u>

$$-\bar{2}=\bar{5}\ ,\qquad -\bar{3}=\bar{4}\ ,\qquad -\bar{4}=\bar{3}\ ,\qquad -\bar{5}=\bar{2}\ ,\qquad -\bar{6}=\bar{1}\ .$$

<u>$\mathbb{Z}_{11}$</u>

$$-\bar{2}=\bar{9}\ ,\qquad -\bar{3}=\bar{8}\ ,\qquad -\bar{4}=\bar{7}\ ,\qquad -\bar{5}=\bar{6}\ ,\qquad -\bar{6}=\bar{5}\ .$$

## <u>שאלה 9</u>

$$\left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & -\bar{1} & \bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x, y) = (\bar{2}, \bar{0}) \ .$$

## שאלה 10

$$\left(\begin{array}{cc|c} \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - \bar{2} \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

יש משתנה חופשי ואין שורת סתירה לכן יהיו 3 פתרונות:

$$x + y = \bar{1} \quad \Rightarrow \quad x = \bar{1} - \bar{1} \cdot y = \bar{1} + \bar{2} \cdot y \ .$$

לפיכך הפתרון הכללי הינו

$$(x, y) = (\bar{1} + \bar{2}y, y) \ .$$

יש 3 פתרונות:

$y = \bar{0}$: $(x, y) = (\bar{1}, \bar{0})$.

$y = \bar{1}$: $(x, y) = (\bar{3}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1})$.

$y = \bar{2}$: $(x, y) = (\bar{5}, \bar{2}) = (\bar{2}, \bar{2})$.

## שאלה 11

$$\left(\begin{array}{cc|c} \bar{4} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{3} & -\bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{4} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \bar{4} R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \overline{16} & \bar{8} & \overline{12} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - \bar{3} \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{0} & -\bar{5} & -\bar{4} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{array}\right)$$

קיבלנו שרות סתירה לכן למערכת אין פתרון.

## שאלה 12

$$\left(\begin{array}{cc|c} \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to\bar{2}\cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{6} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-\bar{3}\cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & -\bar{2} & -\bar{9} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to\bar{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{6} & \bar{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\bar{2}\cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x,y)=(\bar{0},\bar{2}) \ .$$

## שאלה 13

$$\left(\begin{array}{cc|c} \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{1} & -\bar{3} & \bar{4} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-\bar{2}\cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & -\bar{1} & -\bar{8} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to\bar{4}\cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \overline{16} & \bar{8} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\bar{2}\cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & -\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x,y)=(\bar{3},\bar{3}) \ .$$

## שאלה 14

$$\left(\begin{array}{cc|c} \bar{5} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{4} & -\bar{3} & \bar{4} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{5} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{4} & \bar{2} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to\bar{3}\cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \overline{15} & \bar{6} & \bar{9} \\ \bar{4} & \bar{4} & \bar{4} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{4} & \bar{4} & \bar{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-\bar{4}\cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{0} & -\overline{20} & -\bar{4} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-\bar{6}\cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & -\overline{14} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x,y)=(\bar{0},\bar{3}) \ .$$

## שאלה 15

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{8} & \bar{1} & -\bar{1} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & -\bar{2} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & -\bar{3} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-\bar{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{1} & -\bar{5} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to \bar{4}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\bar{3}\cdot R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

תשובה סופית:

$$(x,y,z)=(\bar{0},\bar{2},\bar{0})\ .$$

## שאלה 16

$$\begin{aligned} x+\bar{3}y+z &= \bar{1} \\ \bar{3}x+y+\bar{2}z &= \bar{2} \\ \bar{2}x+\bar{2}y+\bar{3}z &= \bar{4} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-\bar{2}R_1]{R_2\to R_2-\bar{3}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{8} & -\bar{1} & -\bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{4} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-\bar{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to\bar{3}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\bar{3}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$(x,y,z) = (\bar{0},\bar{2},\bar{0})$$

פתרון יחיד.

## **שאלה 17**

$$\begin{aligned} x+\bar{2}y+z &= \bar{2} \\ \bar{3}x+y+\bar{4}z &= \bar{3} \\ \bar{2}x+\bar{4}y+\bar{4}z &= \bar{3} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3 \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & -\bar{5} & \bar{1} & -\bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2 \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & -\bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{6} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \bar{4} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{8} & \bar{4} & \overline{16} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{6} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{6} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \bar{4} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{8} & \overline{24} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - \bar{4} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & -\overline{10} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - \bar{2} \cdot R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{9} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right)$$

$$(x, y, z) = (\bar{5}, \bar{4}, \bar{3})$$

פתרון יחיד.

**<u>שאלה 18</u>** פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$. כמה פתרונות יש למערכת?

$$\begin{aligned} x + \bar{3}y + z &= \bar{1} \\ \bar{3}x + y + \bar{2}z &= \bar{2} \\ \bar{2}x + \bar{2}y + \bar{3}z &= \bar{4} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3+\bar{3}R_1]{R_2\to R_2+\bar{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{7} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \overline{11} & \bar{6} & \bar{7} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to \bar{3}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{6} & \overline{12} & \overline{12} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to \bar{4}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \overline{16} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-\bar{2}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\bar{3}R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

תשובה סופית:

$$(x,y,z)=(\bar{0},\bar{2},\bar{0})$$

פתרון יחיד.

## <u>שאלה 19</u>

### שיטה 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - \bar{3}\cdot R_1]{R_2 \to R_2 - \bar{4}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{2} & -\overline{11} & -\bar{3} \\ \bar{0} & -\bar{1} & -\bar{8} & \bar{1} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \bar{2}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{6} & \bar{8} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \bar{4}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\overline{10} & -\overline{15} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

פתרון:

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{2} \\ y + \bar{3}z &= \bar{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \bar{2} \\ y &= \bar{4} + (-\bar{3})z = \bar{4} + \bar{2}z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \bar{2} \\ y &= \bar{4} + \bar{2}z \end{aligned}\right\} \quad z \in \mathbb{Z}_5 \ .$$

יש 5 פתרונות למערכת:

$$\begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{4} \\ \bar{0} \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{3} \\ \bar{2} \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{3} \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{2} \\ \bar{4} \end{pmatrix} .$$

**שיטה 2**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_1 + \bar{2}R_3]{R_2 \to \bar{2}R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + \bar{3}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

פתרון:

$$\left.\begin{aligned} \bar{3}x &= \bar{1} \\ y + \bar{3}z &= \bar{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \bar{2}\cdot\bar{3}x &= \bar{2}\cdot\bar{1} \\ y &= \bar{4} + (-\bar{3})z = \bar{4} + \bar{2}z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \bar{2} \\ y &= \bar{4} + \bar{2}z \end{aligned}\right\} \quad z \in \mathbb{Z}_5 \ .$$

יש 5 פתרונות למערכת:

$$\begin{pmatrix}\bar{2}\\\bar{4}\\\bar{0}\end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix}\bar{2}\\\bar{1}\\\bar{1}\end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix}\bar{2}\\\bar{3}\\\bar{2}\end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix}\bar{2}\\\bar{0}\\\bar{3}\end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix}\bar{2}\\\bar{2}\\\bar{4}\end{pmatrix} .$$

## <u>שאלה 20</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{2}&\bar{3}&\bar{3}&\bar{5}\\\bar{3}&\bar{4}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{6}&\bar{2}\end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{6}&\bar{2}\\\bar{3}&\bar{4}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{2}&\bar{3}&\bar{3}&\bar{5}\end{array}\right) \xrightarrow[R_2\to R_2-\bar{2}\cdot R_1]{R_2\to R_2-\bar{3}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{6}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{1}&-\overline{17}&-\bar{5}\\\bar{0}&\bar{1}&-\bar{9}&\bar{1}\end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{6}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{4}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{5}&\bar{1}\end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{6}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{4}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&-\bar{1}\end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{6}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{4}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{6}\end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-\bar{4}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{6}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&-\overline{22}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{6}\end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{6}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&\bar{6}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{6}\end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2-\bar{6}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}&-\overline{40}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&\bar{6}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{6}\end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&\bar{6}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{6}\end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x,y,z)=(\bar{2},\bar{6},\bar{6}) .$$

## <u>שאלה 21</u>

### <u>שיטה 1</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{2}\\\bar{3}&\bar{1}&\bar{4}&\bar{3}\\\bar{2}&\bar{4}&\bar{4}&\bar{3}\end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-\bar{2}\cdot R_1]{R_2\to R_2-\bar{3}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{2}\\\bar{0}&-\bar{5}&\bar{1}&-\bar{3}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{2}&-\bar{1}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{2}&\bar{4}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-\bar{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x,y,z)=(-\bar{2}y,y,\bar{2})=(\bar{3}y,y,\bar{2}) , \qquad y\in\mathbb{Z}_5 .$$

למערכת יש 5 פתרונות:

$$(\bar{0},\bar{0},\bar{2}) \ , \quad (\bar{3},\bar{1},\bar{2}) \ , \quad (\bar{1},\bar{2},\bar{2}) \ , \quad (\bar{4},\bar{3},\bar{2}) \ , \quad (\bar{2},\bar{4},\bar{2}) \ .$$

**שיטה 2**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to\bar{3}R_1+R_3]{R_2\to\bar{2}\cdot R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{5} & \bar{5} & \bar{6} & \bar{7} \\ \bar{5} & \overline{10} & \bar{7} & \bar{9} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to\bar{3}\cdot R_2+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x,y,z)=(-\bar{2}y,y,\bar{2})=(\bar{3}y,y,\bar{2}) \ , \qquad y\in\mathbb{Z}_5 \ .$$

למערכת יש 5 פתרונות:

$$(\bar{0},\bar{0},\bar{2}) \ , \quad (\bar{3},\bar{1},\bar{2}) \ , \quad (\bar{1},\bar{2},\bar{2}) \ , \quad (\bar{4},\bar{3},\bar{2}) \ , \quad (\bar{2},\bar{4},\bar{2}) \ .$$

## שאלה 23

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+i & 1-i & 1+i \\ 1-i & 1+i & 1+3i \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to(1-i)R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2i & 2 \\ 1-i & 1+i & 1+3i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 1 \\ 1-i & 1+i & 1+3i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-(1-i)R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 1 \\ 0 & 2+2i & 4i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to(2-2i)R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 1 \\ 0 & 8 & 8+8i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to\frac{1}{8}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 1 \\ 0 & 1 & 1+i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+iR_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1+i \end{array}\right)$$

פתרון: $(z_1,z_2)=(i,1+i)$.

## שאלה 24

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2-i & -i \\ 4-2i & -5 & -1-2i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-(2-i)R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2-i & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $z_2\in\mathbb{C}$ , $(z_1,z_2)=\left(-\frac{i}{2}+\left(1+\frac{i}{2}\right)\cdot z_2, z_2\right)$. למערכת יש אינסוף פתרונות.

## שאלה 25

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-i & -3 & -i \\ 2 & -3-3i & 3-i \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to(1+i)R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3-3i & 1-i \\ 2 & -3-3i & 3-i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3-3i & 1-i \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה לכן למערכת אין פתרון.

## שאלה 26

$$\left(\begin{array}{cc|c} i & 1-i & 2i \\ 1+2i & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to(-i)R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i-1 & 2 \\ 1+2i & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-(1+2i)R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i-1 & 2 \\ 0 & -3+3i & -1-4i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to(-3-3i)\cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i-1 & 2 \\ 0 & 18 & -9+15i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{18}\cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i-1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2}+\frac{5}{6}i \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+(1+i)\cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3}+\frac{i}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}-\frac{5}{6}i \end{array}\right)$$

$$x=\frac{2+i}{3}\ , \qquad y=\frac{-3+5i}{6}$$

## שאלה 27

$$x=\frac{3+i}{5}\ , \qquad y=\frac{-3+4i}{10}$$

## שאלה 28

$$x=\frac{1}{2}\ , \qquad y=\frac{-1}{2}+i$$