

שער 1

משחקים בצורה רחבה

1.1 הגדרת צורה הרחבה של משחק

התיאור הבא טבעי של משחק הוא הצורה הרחבה.

הגדרה 1.1 משחק בצורה רחבה

הצורה הרחבה של משחק ניתנת על ידי הקבוצה

$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_1, V_2, V_3, \dots\}, O, u) ,$$

כאשר

(1) N הוא קבוצה סופית של השחקנים.

(2) V קבוצת הקדקודים של עץ המשחק.
קדקוד מייצג החלטה של שחקן.

(3) E קבוצת הקשתות או הצלעות של עץ המשחק.

כל צלע הולך בין שני קדקודים. צלע מייצג אסטרטגייה של שחקן, אשר נקבעת על ידי החלטתו
משמעותה בקדקוד שמן הצלע יוצאה.

(4) x_0 הוא הקדקוד של המצב ההתחלתי של המשחק.

(5) V_1 הוא הקבוצה של קדקודים שהן שחקן 1 מקבל החלטה, V_2 הקבוצה קדקודים בהן שחקן 2
מקבל החלטה, וכן הלאה.

בכללי, V_i הקבוצה קדקודים בהם שחקן i מקבל החלטה ונקראת הקבוצה ידיעת של שחקן i .

(6) O הוא קבוצת התוצאות האפשריות.

התוצאות מצוינות בנקודות סיום (עלים) של עץ המשחק.

(7) u פונקציית התשלומים המתאימה לכל וקטור אסטרטגיות של המשחק תשלום לכל שחקן.

דוגמה 1.1 (משחק התאמת המטבחות)

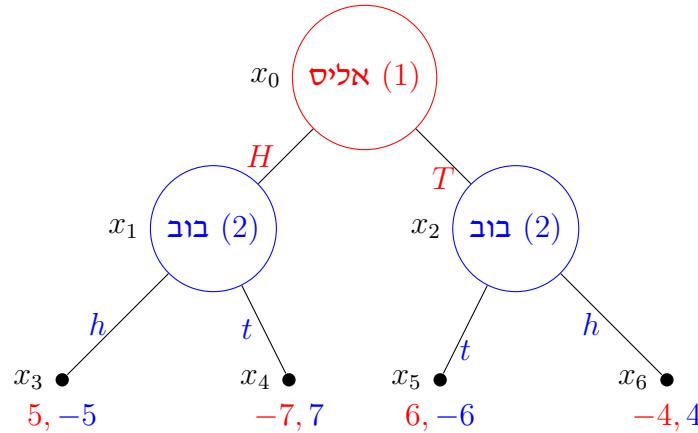
אליס בוחרת אחד הצדדים של מטבח, H (עץ) או T (פל). היא רושמת בחירותה על פתק, חותמת עליו
ומעבירה אותו לשופט. אחר כך בוב בוחר H או T , רושם בחירותו על פתק, חותם עליו ומעביר אותו
לשופט.

- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר h אז בוב משלם לאليس $\$5$.
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר t אז אליס משלם לבוב $\$7$.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר h אז בוב משלם לאليس $\$6$.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר t אז אליס משלם לבוב $\$4$.

רשמו את המשחק בצורה רחבה.

פתרון:

תהיא אליס שחקן 1 ובוב שחקן 2.



$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_1, V_2\}, O, u) .$$

$N = \{\text{בוב, אליס}\} = \{1, 2\}$.

שחקנים:

$V = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

קדוקדים:

$E = \{x_0x_1, x_0x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_5, x_2x_6\}$.

קשותות:

x_0 .

מצב המשחק ההתחלתי:

קדוקדים:

$V_1 = \{x_0(H, T)\}$.

קבוצות ידיעה של שחקן 1:

$V_2 = \{x_1(h, t), x_2(h, t)\}$.

קבוצות ידיעה של שחקן 2:

$O = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

תוצאות אפשריות:

פונקציית התשלומים:

$$u_1(H, h) = 5, \quad u_2(H, h) = -5,$$

$$u_1(H, t) = -7, \quad u_2(H, t) = 7,$$

$$u_1(T, h) = -4, \quad u_2(T, h) = 4,$$

$$u_1(T, t) = 6, \quad u_2(T, t) = -6.$$



הגדלה 1.2 קבוצת אסטרטגיות של שחקן

נתון משחק N -שחקנים.

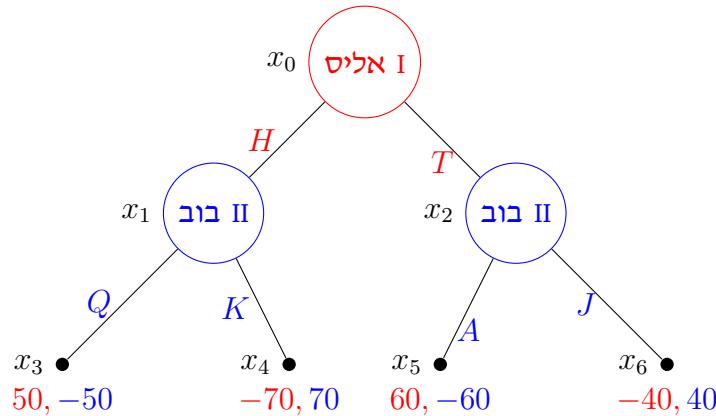
נסמן ב- S_i את הקבוצה של כל האסטרטגיות האפשריות של שחקן i במשחק.

דוגמה 1.2 (מطبع וקלפים)

נתבונן על המשחק הבא:

שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עז) או T (פלוי).
אחר כך, אם אליס בוחרת H אז שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).
אחרת אם אליס בוחרת T בוב בוחר קלף נסיך (J) או קלף אס (A).

- אם אליס בוחרת H ובוב בחר Q אז בוב משלם לאליס ₪50.
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר K אז אליס משלם לבוב ₪70.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר J אז בוב משלם לאליס ₪60.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר A אז אליס משלם לבוב ₪40.



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H, T .
אומרים כי לשחקן I יש **קבוצה ידיעה אחת** שנסמך

$$V_I = \{x_0(H, T)\}$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I = (H, T).$$

לשחקן II יש שני קדקודים x_1, x_2 בהם הוא מקבל החלטה.
אומרים גם כי לשחקן II יש 2 קבוצות ידיעה, x_1, x_2 אשר מייצגות שתי אפשרויות שונות המנובעות מההחלטה הקודמת של שחקן I בקדקוד x_0 .
הקבוצות ידיעה של שחקן II הינה:

$$V_{II} = \{x_1(Q, K), x_2(J, A)\}$$

מכיוון שלשחקן II יש שתי קבוצות ידיעה x_1, x_2 ובכל אחד יש שתי פעולות אפשריות, אז יש לבוב $2 \times 2 = 4$ אסטרטגיות:

$$S_{II} = (Q/J, Q/A, K/J, K/A)$$

מطبع וקלפיים

הגדרה 1.3 וקטור אסטרטגיות של משחק

נתון משחק n -שחקנים.
נניח כי שחקן 1 משחק לפי אסטרטגיה s_1 , שחקן 2 משחק לפי אסטרטגיה s_2, \dots ומשחק n משחק לפי אסטרטגיה s_n .
אז הווקטור אסטרטגיות של המשחק הינו

$$s = (s_1, s_2, \dots, s_n).$$

הגדלה 1.4 פונקציית תשלום

נתון משחק n -שחקנים. פונקציית תשלום $u : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ היא פונקציה אשר מיפוית לכל וקטור אסטרטגיות של השחקן, תשלום לכל שחקן.

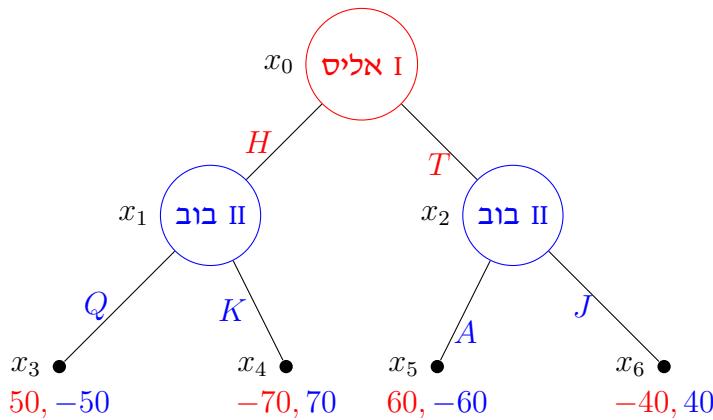
נניח כי שחקן 1 משחק לפי אסטרטגיה s_1 , שחקן 2 משחק לפי אסטרטגיה s_2, \dots ומשחקן n משחק לפי אסטרטגיה s_n . זו הוקטור האסטרטגיות של המשחק הינו $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$.

פונקציית התשלום של המשחק מקבלת את הוקטור אסטרטגיות ומחזירה תשלום לכל שחקן:

$$u(s_1, s_2, \dots, s_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

כאשר u_1 התשלום לשחקן 1, u_2 התשלום לשחקן 2, ..., u_n התשלום לשחקן n .

דוגמה 1.3 (המשך של דוגמה 1.2)



- נניח כי אליס משחקת לפי האסטרטגיה $s_I = H$ ובובי משחק לפי האסטרטגיה $s_{II} = Q/A$. הוקטור אסטרטגיות של המשחק הוא

$$s = (s_I, s_{II}) = (H, Q/A).$$

- אם אליס משחקת לפי האסטרטגיה $s_I = H$ ובובי משחק לפי האסטרטגיה $s_{II} = J$. הוקטור אסטרטגיות של המשחק הוא

$$s = (s_I, s_{II}) = (H, Q/J).$$

- וכן להלן.

בסה"כ למשחק זה יש 8 וקטורי אסטרטגיות:

$$\begin{aligned}
 (s_I, s_{II}) &= (H, Q/A), \\
 (s_I, s_{II}) &= (H, Q/J), \\
 (s_I, s_{II}) &= (H, K/A), \\
 (s_I, s_{II}) &= (H, K/J), \\
 (s_I, s_{II}) &= (T, Q/A), \\
 (s_I, s_{II}) &= (T, Q/J), \\
 (s_I, s_{II}) &= (T, K/A), \\
 (s_I, s_{II}) &= (T, K/J).
 \end{aligned}$$

הfonקציית תשלום של המשחק הינו

$$\begin{aligned} u(H, Q/A) &= (50, -50), \\ u(H, Q/J) &= (50, -50), \\ u(H, K/A) &= (-70, 70), \\ u(H, K/J) &= (-70, 70), \\ u(T, Q/A) &= (60, -60), \\ u(T, Q/J) &= (-40, 40), \\ u(T, K/A) &= (60, -60), \\ u(T, K/J) &= (-40, 40). \end{aligned}$$

1.2 משחקים עם ידיעה שלמה והצורה אסטרטגית

הגדרה 1.5 משחק עם ידיעה שלמה

בכל שלב של המשחק, כל שחקן יודע את כל החלטות של שאר השחקנים לפני אותו שלב, וכך הוא יודע לבדוק אילו פעולות נעשו על ידי כל שאר השחקנים. כתוצאה, כל שחקן, כשמגיע תורו יודע לבדוק באיזה קודקוד בעץ המשחק הוא נמצא.

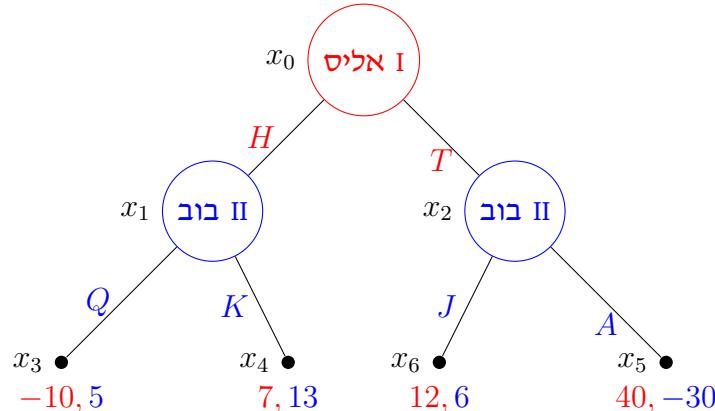
דוגמה 1.4 (משחק מטבע וקלף עם ידיעה שלמה)

נתבונן על המשחק הבא:

שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עז) או T (פל). אחר כך, אם אליס בוחרת H אז שחקן II (bob) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K). אחרת אם אליס בוחרת T בוב בוחר קלף נסיך (J) או קלף אס (A).

- אם אליס בוחרת H ובוב מקבל $\text{₪}5$ ואם מפסידה $\text{₪}10$.
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר K אז אליס מקבלת $\text{₪}7$ ובוב מקבל $\text{₪}13$.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר J אז בוב מקבל $\text{₪}6$ ואם מקבלת $\text{₪}12$.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר A אז אליס מקבלת $\text{₪}40$ ובוב מפסיד $\text{₪}30$.

ניתן לרשום את עץ המשחק **בצורה רחבה אסטרטגית**:



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H, T .
 ז"א לשחקן I יש קבוצה ידיעה אחת:
 $x_0(H, T)$.

לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I = (H, T).$$

לשחקן II יש שני קדקודים x_1, x_2 בהם הוא מקבל החלטה.
 אז לשחקן II יש 2 קבוצות ידיעה,

$$V_{II} = \{x_1(Q, K), x_2(J, A)\}.$$

אשר מייצגות שתי אפשרויות שונות המנובעות מההחלטה הקודמת של שחקן I בקדקוד x_0 .
 מכיוון שלשחקן II יש שתי קבוצות ידיעה x_1, x_2 ובכל אחד יש שתי פעולות אפשריות, אז יש לבוב $2 \times 2 = 4$ אסטרטגיות:

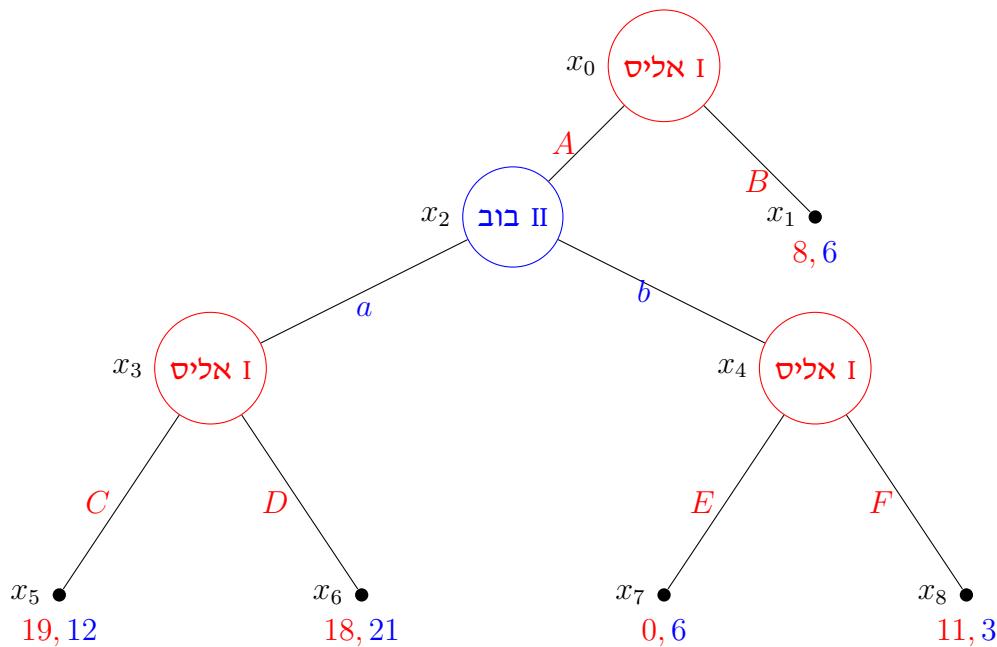
$$S_{II} = (Q/J, Q/A, K/J, K/A)$$

(נהוג לרשום את האסטרטגיות מלמעלה עד למטה ומשמאלו לימונ).
 ניתן לרשום את המשחק **בצורה אסטרטגית**:

I	II	Q/J	Q/A	K/J	K/A
H		-10, 5	-10, 5	7, 13	7, 13
T		12, 6	40, -30	12, 6	40, -30

דוגמה 1.5 ()

נתון המשחק הבא בצורה רחבה. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרונות:

במשחק זה, אליס (שחקן I) פותח עם המהלך הראשון, ולאחר מכן בוב מבצע המהלך השני, ואז אליס מבצע מהלך שלישי.

המשחק הוא משחק עם ידיעה שלמה.

לאليس יש שלוש קבוצות ידיעה:

$$x_0 (A, B), \quad x_3 (C, D), \quad x_4 (E, F).$$

בכל אחד של הקדוקדים האלה לאليس יש 2 פעולות אפשריות لكن יהיה לה $2 \times 2 = 8$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_I = (A/C/E, A/C/F, A/D/E, A/D/F, B/C/E, B/C/F, B/D/E, B/D/F).$$

לבוב יש קבוצות ידיעה אחת:

$$x_2 (a, b).$$

בקבוצה ידיעה הזאת של בוב יש 2 פעולות אפשריות لكن יהיה לו 2 קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a, b).$$

מכאן הצורך אסטרטגי בלבד של המשחק הינה:

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>A/C/E</i>	19, 12	0, 6	
<i>A/C/F</i>	19, 12	11, 3	
<i>A/D/E</i>	18, 21	0, 6	
<i>A/D/F</i>	18, 21	11, 3	
<i>B/C/E</i>	8, 6	8, 6	
<i>B/C/F</i>	8, 6	8, 6	
<i>B/D/E</i>	8, 6	8, 6	
<i>B/D/F</i>	8, 6	8, 6	



1.3 משחקים עם ידיעה לא שלמה

הגדרה 1.6 משחק עם ידיעה לא שלמה

משחק עם ידיעה לא שלמה הוא משחק בו לפחות שחקן לא יודע את ההחלטה של שחקן אחר בקדוקוד הקודם שמננו יצא צלע לקדוקוד החלטה שלו. כתוצאה, השחקן אשר לו יודע את ההחלטה של שחקן אחר, לא יודע באיזה קדוקוד הוא נמצא בעז המשחק.

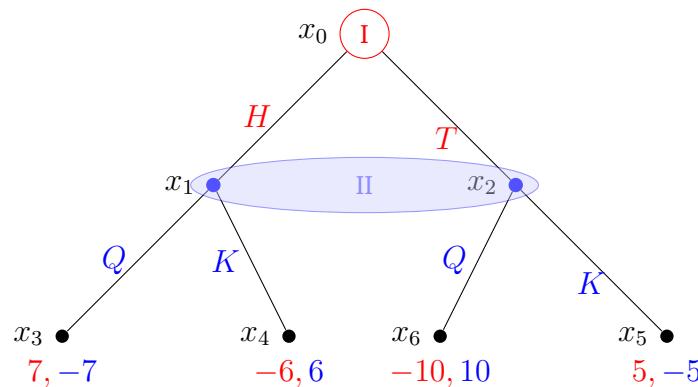
דוגמה 1.6 (משחק מטבע וקלף עם ידיעה לא שלמה)

בשונה לדוגמה הקודמת נتبונן על המשחק הבא שבו שחקן II לא יודע את ההחלטה של שחקן I עד סוף המשחק.

שחקן I (אליס) בוחרת אחד הצדדים של מטבע, H (עז) או T (פל). לאחר מכן, בלי ידיעה של הבחירה של אליס, שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).

- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר Q אז בוב משלם לאלייס $\text{₪}7$.
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר K אז אליס משלם לבוב $\text{₪}6$.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר Q אז אליס משלם לבוב $\text{₪}10$.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר K אז בוב משלם לאלייס $\text{₪}5$.

נרשום את המשחק **בצורה רחבה**:



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H, T .
כלומר לאלייס יש **קבוצת ידיעה אחת**:

$$V_I = \{ x_0(H, T) \} .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I = (H, T) .$$

בניגוד לדוגמה הקודמת, לבוב (שחקן II) יש רק קבוצת ידיעה אחת שמכילה שני קדוקדים.
ז"א לבוב לא ידוע איזה אופציה אליס בחרה, H או T . אז לבוב לא ידוע על איזה קדקוד הוא נמצא, x_1 או x_2 .
בגלל שהוא לא ידוע מה ההחלטה של אליס, הוא בוחר בין רק שתי אפשרויות, בלי ידיעה של ההחלטה של אליס.

לכן אנחנו מסתכלים אל הקדוקדים x_1, x_2 **בקבוצת ידיעה אחת** שמננה יוצאות רק שתי הפעולות:

$$V_{II} = \{ x_1x_2(Q, K) \} .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של בוב הינה

$$S_{II} = (Q, K)$$

נשים לב כי מכל אחד של הקדוקדים x_1 ו- x_2 יוצאות אותן קבוצת הפעולות. אחרת היה ידוע מה ההחלטה של אליס.

כעת נרשום את הצורה האסטרטגית של המשחק:

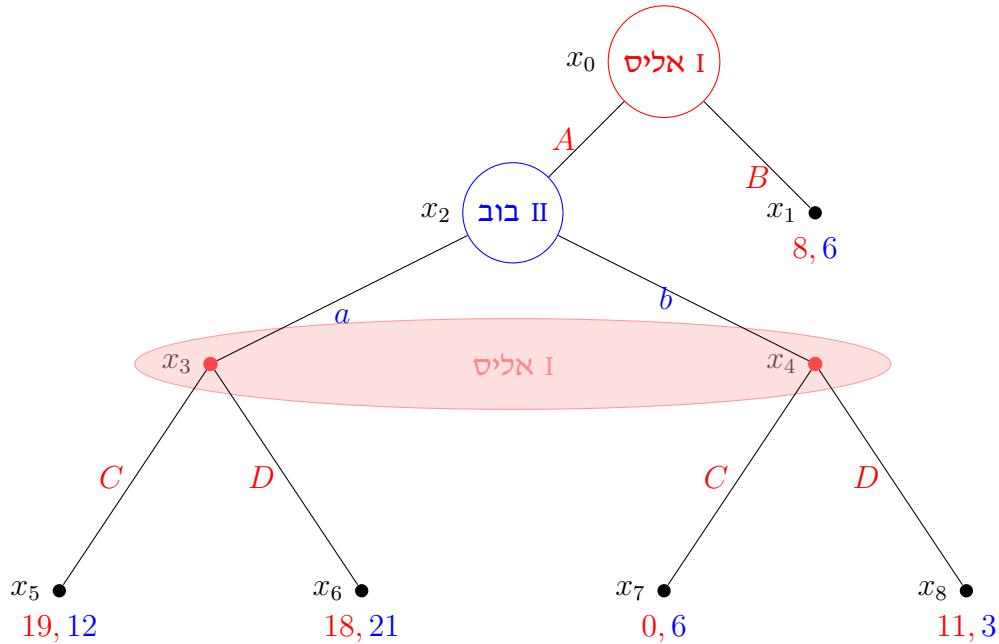
I	II	Q	K
H	$7, -7$	$-6, 6$	
T	$-10, 10$	$5, -5$	

כלל 1.1 פעולות שיוצאות מקבוצת ידיעה ללא ידיעה שלמה

לשחקן יש אותה קבוצה של פעולות אפשריות בכל קדקוד שמסוגל אותה קבוצת ידיעה.

דוגמה 1.7 (משחק עם ידיעה לא שלמה)

נתון המשחק הבא בצורה רחבה. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרונות:

שיםו לב, דומה לדוגמה הקודמת, הקדקודים x_3 ו- x_4 באותה קבוצת ידיעה של אליס בגלל שהיא לא יודעת מה החלטה של בוב בקדקוד x_2 , כלומר אליס לא יודעת אם בוב בחר a או b . לכן הפעולות היוצאות מקדקוד x_3 הן אותן פעולות שיוצאות מקדקוד x_4 , בכלל שאם היו הפעולות אפשריות ב- x_3 ו- x_4 , אז אליס הייתה יודעת איזה פעולה בוב בחר, a או b . כלומר אם לאليس היה שום מידע בין הפעולות E ו- F אז היא הייתה יודעת שהיא נמצאת בקדקוד x_4 בעז המשחק ובוב בחר b . ולהפך, אם הייתה לה בחירה בין הפעולות C ו- D במקום הבחירה בין הפעולות E ו- F אז היא הייתה יודעת שהיא נמצאת ב- x_3 ושבוב בחר a .

לאليس יש שתי קבוצות ידיעה:

$$x_0 \ (A, B) , \quad x_3 x_4 \ (C, D) .$$

בכל אחד של הקדקודים האלה לאليس יש 2 פעולות אפשריות ולכן $2 \times 2 = 4$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_I = (A/C , \ A/D , \ B/C , \ B/D) .$$

לבוב יש קבוצות ידיעה אחת:

$$x_2 : \ (a, b) .$$

בקבוצת ידיעה הזאת של בוב יש 2 פעולות אפשריות ולכן לו 2 קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a , \ b) .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד המשחק הינה:

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>A/C</i>	19, 12	0, 6	
<i>A/D</i>	18, 21	11, 3	
<i>B/C</i>	8, 6	8, 6	
<i>B/D</i>	8, 6	8, 6	

■

1.4 משחק עם מהלכי גורל

במשחקים שבהם עסקנו עד כה, המעבר במצב נעשה על ידי אחד השחקנים. מודל זה מתאים למשחקים כגון שחמט וدمקה, אך לא למשחקי קלפים או קובייה (כמו פוקר או שש-בש), שבהם מעבר במצב יכול להיעשות על ידי תהליך מקרי: במקרים מסוימים אוחזנו טרופים את הקלפים שבΧψήση, ובשש-בש אנו מטילים קובייה. ניתן לחשב גם על סיטואציות שבהן המעבר במצב תלוי בגורמים מקרים אחרים, כגון ירידת גשם, רעידת אדמה או נפילת הבורסה. מעבר מסווג זה נקרא **מהלך גורל**. ההרחבה של המודל שלנו תעשה על ידי כך שחקן מהקדוקדים בעץ המשחק (V, E, x_0) יסמןו כמהלכי גורל. הצלעות היוצאות מקדוקוד המתאים למהלך גורל מתאימות לתוצאות האפשרויות של הגרלה וליד כל צלע צו נרשמת הסתברות לקבלת התוצאה המתאימה.

הגדרה 1.7 משחק בצורה רחבה עם מהלכי גורל

משחק בצורה רחבה עם מהלכי גורל ניתן ע"י הווקטור

$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_0, V_1, V_2, V_3, \dots\}, O, u, (p_x)_{x \in V_0}),$$

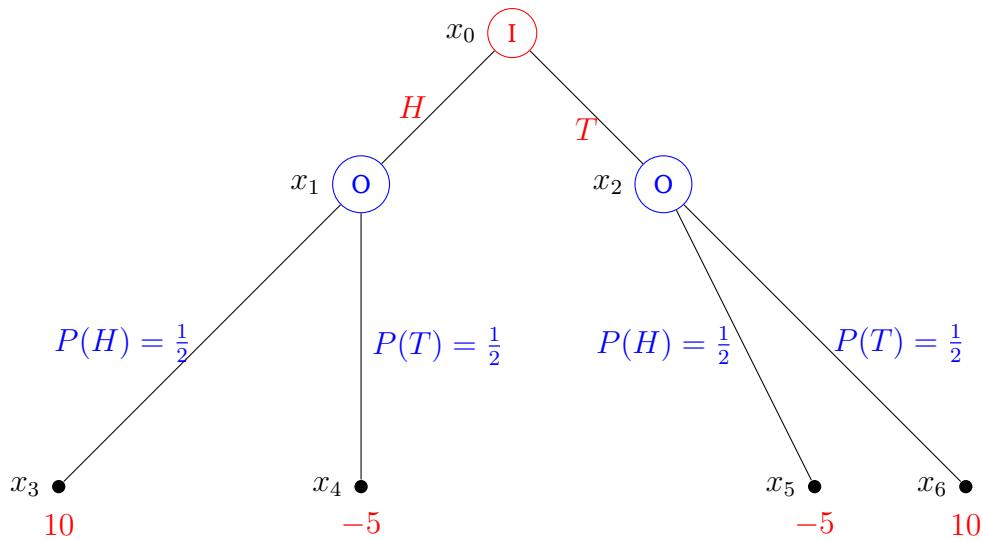
כאשר המשמעות של כל האיברים אותו דבר להגדרה של משחק בצורה רחבה כפי שנטנו בהגדרה 1.1. הבדל היחיד הוא הקבוצה קדוקודים V_0 , אשר מסמן את הקבוצה של הקדוקודים בהם יש הגרלה על ידי שחקן הגורל.

לכל קדוקוד $V_0 \in x$, אנחנו משייכים הסתברות לכל צלע שיוצאה ממנו.

דוגמה 1.8 (משחק עם מהלך גורל)

שחקן בוחר H ("עץ") או T ("פלוי"). אחרי שהשחקן בוחר, הוא מטיל מטבע. אם המטבע מראה את בחירתו, הוא מנצח ומקבל 10 ₪. אם לא הוא מפסיד 5 ₪. שרטטו את המשחק בצורה רחבה.

פתרונות:



$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_1, V_2\}, O, u)$$

$N = \{I\} = \{1, 2\}$.

שחקנים:

$V = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

קדושים:

$E = \{x_0x_1, x_0x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_5, x_2x_6\}$.

קשותות:

x_0 .

מצב המשחק ההתחלתי:

קדושים:

$V_1 = \{x_0(H, T)\}$.

קבוצות ידיעה של שחקן 1:

$V_0 = \{x_1(P(H) = \frac{1}{2}, P(T) = \frac{1}{2}), x_2(P(H) = \frac{1}{2}, P(T) = \frac{1}{2})\}$.

קבוצות ידיעה של שחקן 2:

$O = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

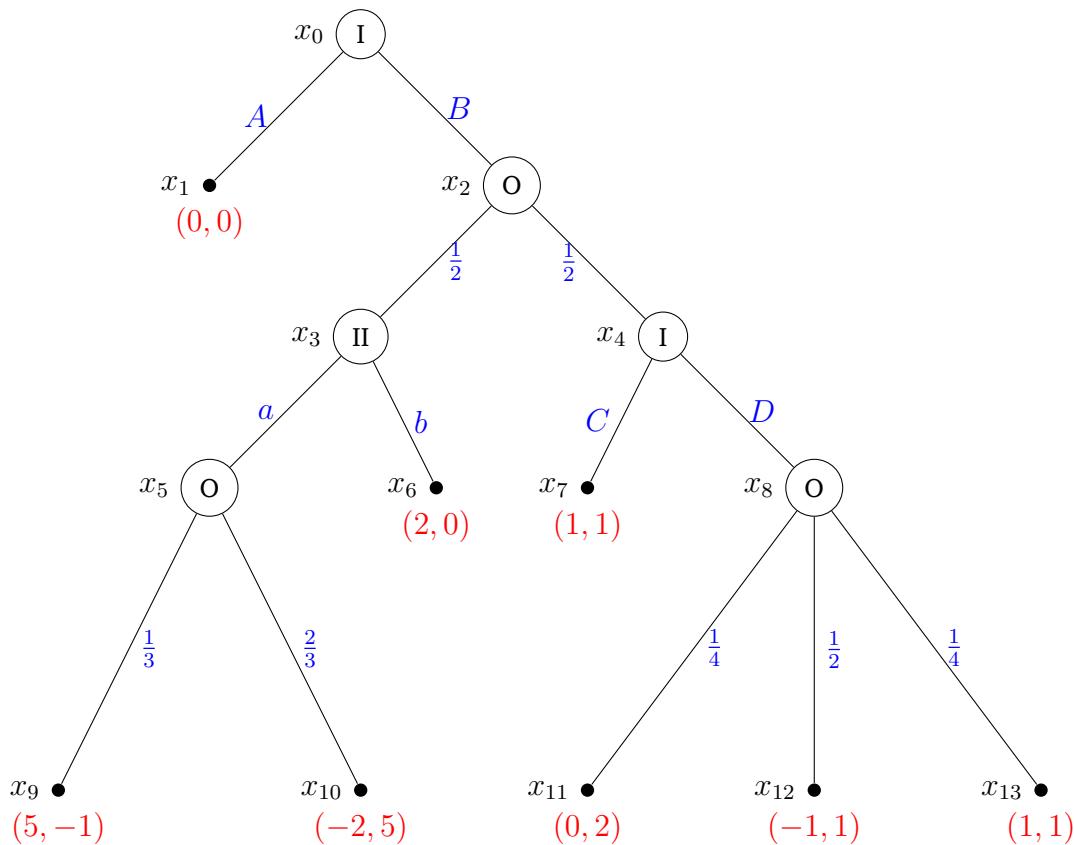
פתרונות אפשריות:

פונקציית התשלומים:

$$u(H) = \frac{1}{2} \cdot (10) + \frac{1}{2}(-5) = \frac{5}{2},$$

$$u(T) = \frac{1}{2} \cdot (-5) + \frac{1}{2} \cdot (10) = \frac{5}{2}.$$



דוגמה 1.9 (סטרטגיות במשחק עם מהלכי גורל)

קבוצות ידיעה של שחקן I:

$$x_0(A, B), \quad x_4(C, D).$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I = (A/C, A/D, B/C, B/D).$$

קבוצות ידיעה של שחקן II:

$$x_3(a, b).$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן II:

$$S_{II} = (a, b).$$

פונקציית התשלום:

$$u(A/C, a) = (0, 0),$$

$$u(A/D, a) = (0, 0),$$

$$u(B/C, a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(5, -1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(-2, 5) + \frac{1}{2}(1, 1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{6} \right),$$

$$u(B/D, a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(5, -1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(-2, 5) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(0, 2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(-1, 1) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}(1, 1) = \left(-\frac{1}{48}, \frac{33}{16} \right),$$

$$u(A/C, b) = (0, 0),$$

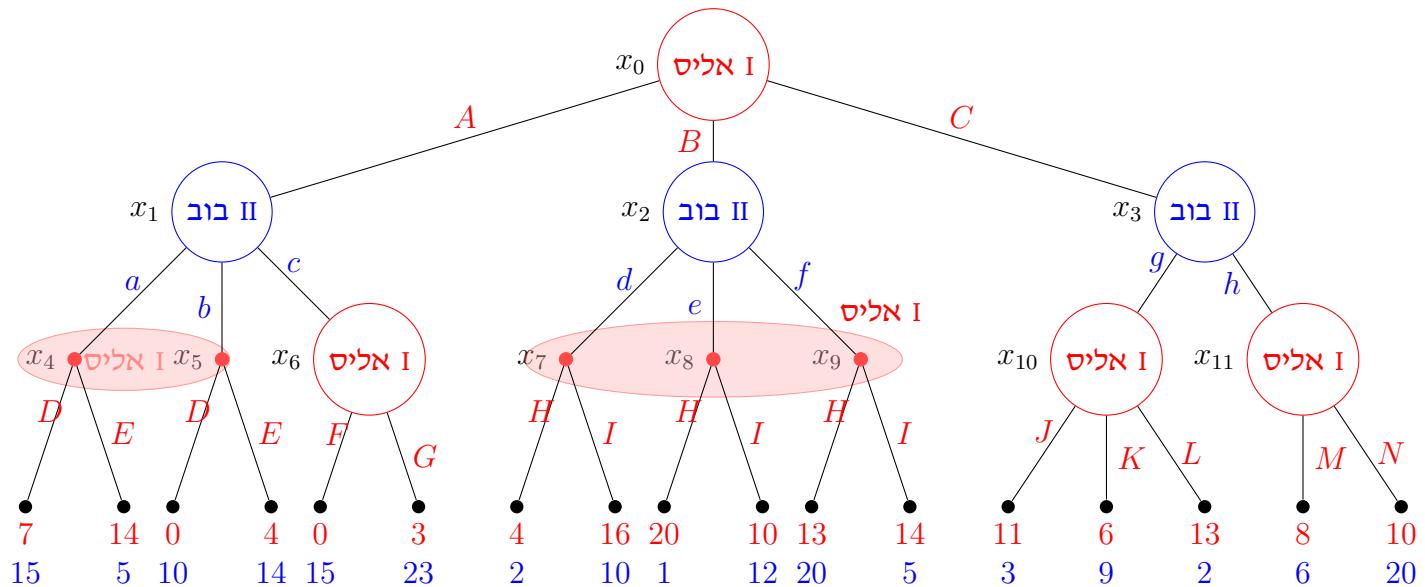
$$u(A/D, b) = (0, 0),$$

$$u(B/C, b) = \frac{1}{2}(2, 0) + \frac{1}{2}(1, 1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

$$u(B/D, b) = \frac{1}{2}(2, 0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(0, 2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(-1, 1) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}(1, 1) = \left(-\frac{11}{16}, \frac{9}{16} \right),$$

דוגמה 1.10 (משחק)

נתון המשחק הבא בצורה רחבה אסטרטגית. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרונות:

המשחק הוא משחק עם ידיעה לא שלמה.

לאليس יש 5 קבוצות ידיעה:

$$x_0 : (A, B, C), \quad x_4x_5 : (D, E), \quad x_6 : (F, G), \quad x_7x_8x_9 : (H, I), \quad x_{10} : (J, K, L), \quad x_{11} : (M, N).$$

לכן יהיו לאليس $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 144$ קבוצות אסטרטגיות.

$$S_I = (A/D/E/F/G/H/J/M, A/D/E/F/G/H/J/N, \dots, C/E/G/I/L/N).$$

לבוב יש 3 קבוצות ידיעה:

$$x_1 : (a, b, c), \quad x_2 : (d, e, f), \quad x_3 : (g, h).$$

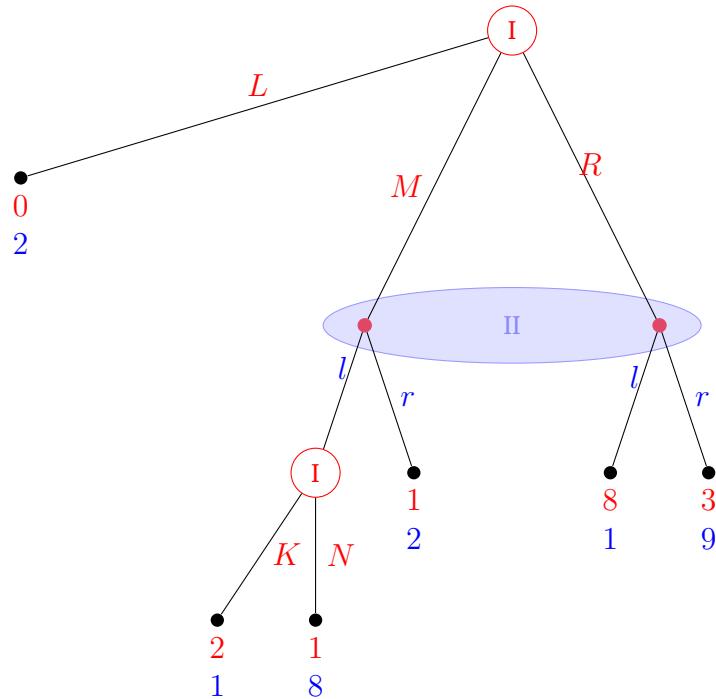
לכן לבוב יהיו: $3 \times 3 \times 2 = 18$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a/d/g, a/d/h, \dots, c/f/h).$$

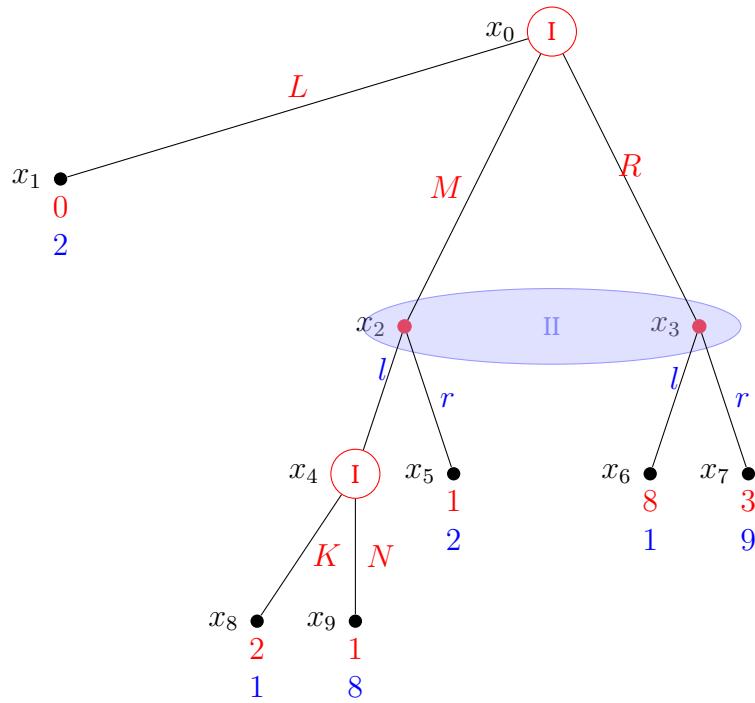
מכאן הצורה אסטרטגית בלבד

דוגמה 1.11 (משחק)

רשמו את המשחק הבא בצורה אסטרטגית.



פתרונות:



קבוצת אסטרטגיות של שחקן 1:

$$S_1 = (L/K, M/K, R/K, L/N, M/N, R/N) .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן 2:

$$S_2 = (l, r) .$$

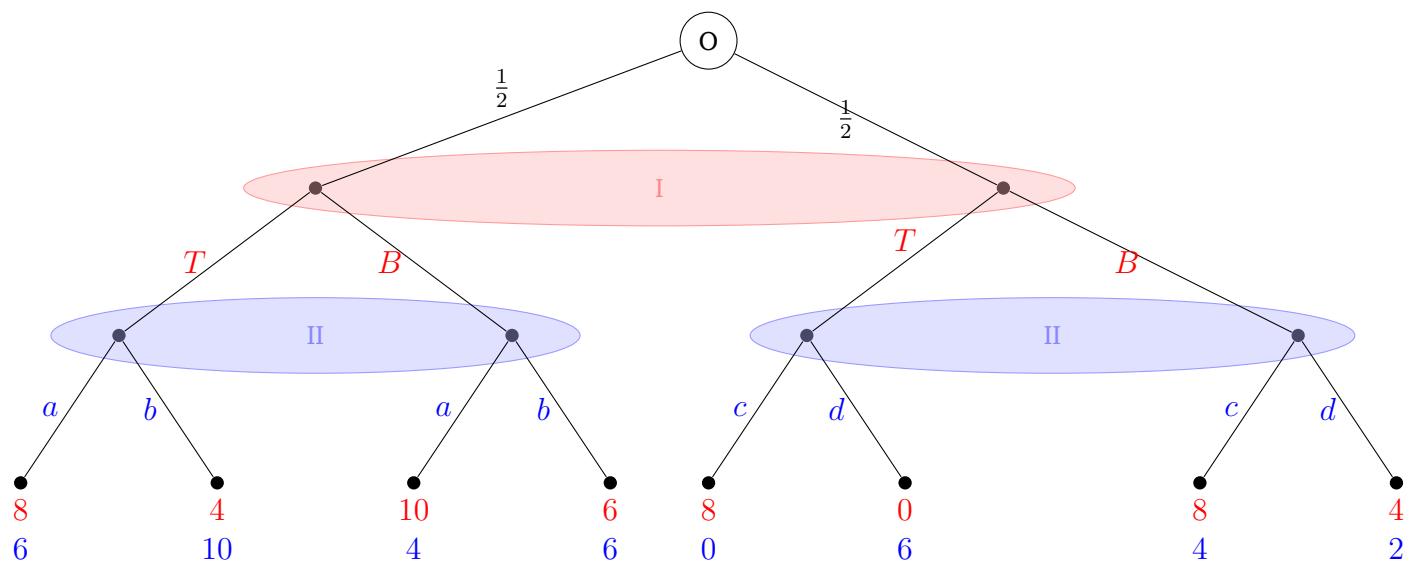
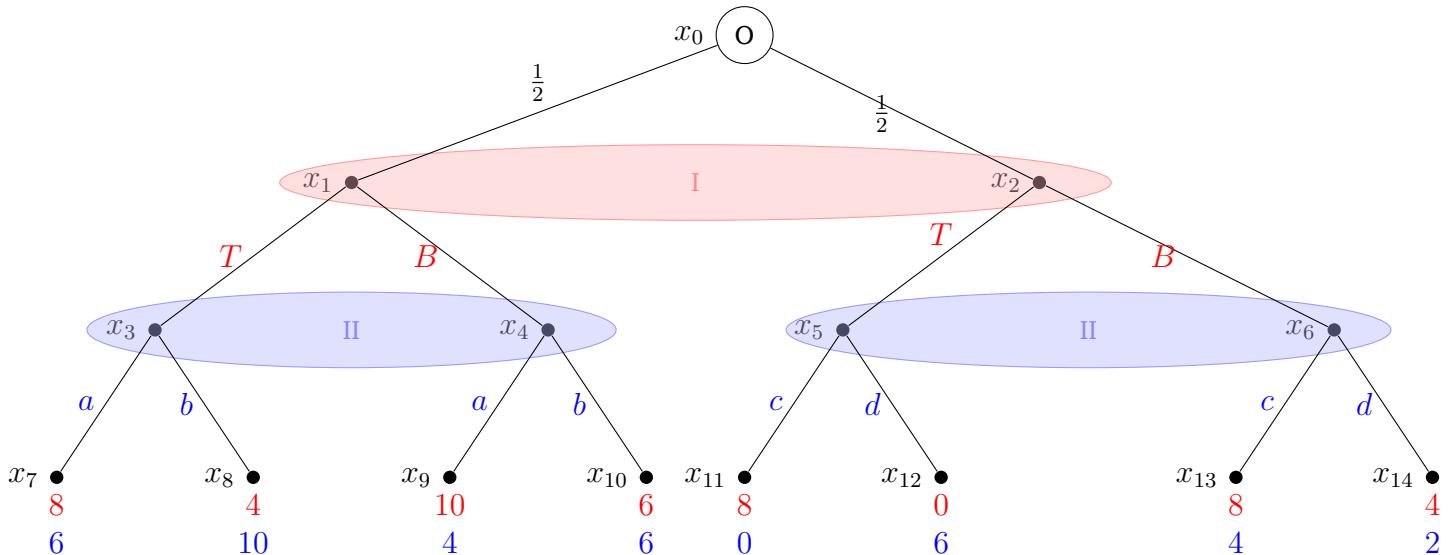
מכאן הצורה אסטרטגית של המשחק היא:

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>l</i>	<i>r</i>
<i>L/K</i>	0, 2	0, 2	
<i>M/K</i>	2, 1	1, 2	
<i>R/K</i>	8, 1	3, 9	
<i>L/N</i>	0, 2	0, 2	
<i>M/N</i>	1, 8	1, 2	
<i>R/N</i>	8, 1	3, 9	

■

דוגמה 1.12 (משחק עם ידיעה לא שלמה עם מהלך גורל)

רשמו את המשחק הבא בצורה אסטרטגית.

**פתרונות:**

קבוצות ידיעה של שחקן I :

$$x_1x_2 : (T, B) .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן I :

$$S_I = (T, B) .$$

קבוצות ידיעה של שחקן II :

$$x_3x_4 : (a, b) , \quad x_5x_6 : (c, d) .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן II :

$$S_{II} = (a/c , a/d , b/c , b/d) .$$

$I \backslash II$	a/c	a/d	b/c	b/d
I	$\frac{1}{2}(8, 6) + \frac{1}{2}(8, 0)$	$\frac{1}{2}(8, 6) + \frac{1}{2}(0, 6)$	$\frac{1}{2}(4, 10) + \frac{1}{2}(8, 0)$	$\frac{1}{2}(4, 10) + \frac{1}{2}(0, 6)$
T	$\frac{1}{2}(10, 4) + \frac{1}{2}(8, 4)$	$\frac{1}{2}(10, 4) + \frac{1}{2}(4, 2)$	$\frac{1}{2}(6, 6) + \frac{1}{2}(8, 4)$	$\frac{1}{2}(6, 6) + \frac{1}{2}(4, 2)$
B				

$I \backslash II$	a/c	a/d	b/c	b/d
I	(4, 3)	(4, 6)	(6, 5)	(2, 8)
T	(9, 6)	(7, 3)	(7, 5)	(5, 4)
B				

