חישוביות וסיבוכיות

מועד ג'

פתרון לדוגמא

ד"ר ירמיהו מילר , .

סמסטר ב, תשפ"ה'

מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הינן פתרונות לדוגמא. ניתן לפתור חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

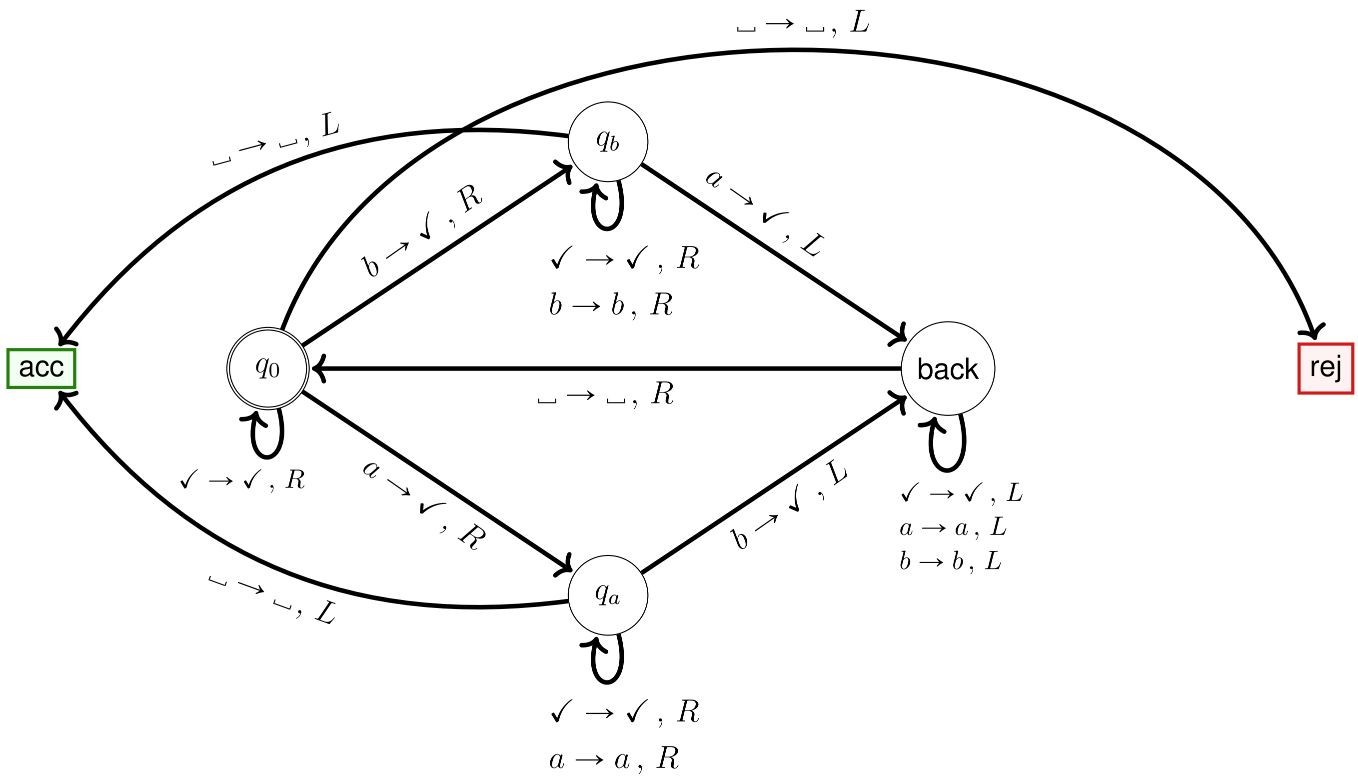
המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *3610

פתרונות

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

כל המעברים שאינם מופיעים בתרשים עוברים ל- q_{rej}.



סעיף ב' (10 נקודות)

$$f(x) = x \mod 5\,.$$

שאלה 2: סגירות של שפות כריעות (20 נקודות)

פתרונות

סעיף א' (10 נקודות)

נוכיח כי

$$L \in R \quad \Rightarrow \quad \bar{L} \in R \,,$$

כאשר

$$\bar{L} = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; w \notin L \right\} \ .$$

תהי M מ"ט המכריעה את L.
נבנה מ"ט $\bar{M}$ המכריעה את $\bar{L}$.

$\bar{M} =$ על קלט w:

(1) $\bar{M}$ מריצה את M על w.

- אם M מקבלת $\Leftarrow$ $\bar{M}$ דוחה.
- אם M דוחה $\Leftarrow$ $\bar{M}$ מקבלת.

סעיף ב' (10 נקודות)

נוכיח כי לכל שפה L:

$$L \in R \quad \Rightarrow \quad L^* \in R$$

כאשר

$$L^* = \left\{ w = w_1 w_2 \cdots w_k \;\middle|\; \forall 1 \leqslant i \leqslant k \ , \ w_i \in L \right\} \cup \{\varepsilon\} \ .$$

תהי M מ"ט המכריעה את L.
נבנה מ"ט M^* א"ד המכריעה את L^*.

<u>תאור הבנייה</u>

$M^* =$ על קלט w:

1) אם $w = \varepsilon$ אז M^* מקבלת.

2) אחרת M^* בוחרת באופן א"ד חלוקה של w ל- $w = w_1 \cdots w_k$.

3) לכל $1 \leqslant i \leqslant k$:

M^* מריצה את M על w_i.

- אם M דוחה את w_i $\Leftarrow$ M^* דוחה.
- אחרת חוזרים לשלב 3).

4) אם M קיבלה את כל המחרוזות $\{w_i\}$ אזי M^* מקבלת.

שאלה 3: אי כריעות (20 נקודות)

סעיף א' (12 נקודות)

נוכיח $\hat{L} \notin RE$ ע"י רדוקציה מ- $\overline{L_{\text{acc}}}$, כלומר נראה רדוקציה $\overline{L_{\text{acc}}} \leqslant \hat{L}$.

<u>פונקצית הרדוקציה</u>

$$f(x) = \begin{cases} \langle M_w \rangle & : x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\varnothing \rangle & : x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר $\langle M_\varnothing \rangle$ מ"ט הדוחה כל קלט, ו- M_w היא מ"ט שעל כל קלט y, M_w מתעלמת מ- y ומריצה את M על w ועונה כמוה.

<u>אבחנה</u>

$$L\left(M_w\right) = \begin{cases} \Sigma^* & : w \in L(M) \\ \varnothing & : w \notin L(M) \end{cases}$$

<u>נכונות הבנייה</u>

נוכיח כי לכל $x \in \Sigma^*$ מתקיים $f(x) \in \hat{L} \Leftrightarrow x \in \overline{L_{\text{acc}}}$.

אם $x \in \overline{L_{\text{acc}}} \Leftarrow$ שני מקרים:

1. $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow f(x) = \langle M_\varnothing \rangle$ ו- $L\left(M_\varnothing\right)$ סופי $\Leftarrow f(x) \in \hat{L}$.
2. $x = \langle M, w \rangle$ ו- $w \notin L(M) \Leftarrow f(x) = \langle M_w \rangle$ ולפי האבחנה $L\left(M_w\right) = \varnothing$ סופית $\Leftarrow f(x) \in \hat{L}$.

אם $x \notin \overline{L_{\text{acc}}} \Leftarrow x = \langle M, w \rangle$ ו- $w \in L(M) \Leftarrow f(x) = \langle M_w \rangle$ ולפי האבחנה $L\left(M_w\right) = \Sigma^*$ אינסופית $\Leftarrow f(x) \notin \hat{L}$.

הראינו רדוקציה $\overline{L_{\text{acc}}} \leqslant \hat{L}$ ומכיון ש- $\overline{L_{\text{acc}}} \notin RE$, ממשפט הרדוקציה, מתקיים $\hat{L} \notin RE$.

סעיף ב' (8 נקודות)

הטענה נכונה.

נניח כי $L \in RE$ וגם $\bar{L} \notin RE$ ונניח בשלילה כי $L \in R$.
אזי מכיוון ש- R סגורה תחת משלים, מתקיים $\bar{L} \in R$ בסתירה לכך ש- $\bar{L} \notin RE$.

שאלה 4: NP - שלמות (20 נקודות)

פתרונות

סעיף א' (5 נקודות)

הטענה נכונה. קיימת רדוקציה פולינומיאלית $L_{\text{acc}} \leqslant_P L_{\text{Halt}}$ ולכן ממשפט הרדוקציה, אם $L_{\text{acc}} \notin NP$, מתקיים $L_{\text{halt}} \notin NP$.

סעיף ב' (5 נקודות)

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

הטענה נכונה. מכיוון ש- ϕ היא מעל המשתנים x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, מספר ההשמות האפשריות הוא $2^5 = 32$ השמות.
אפשר לעבור על השמות אלו ולבדוק האם אחת מהן מספקת את ϕ ולהחזיר תשובה בהתאם.
כמובן זמן הריצה הוא לכל היותר $32 \cdot |\phi| = O(|\phi|)$, וזה פולינומיאלי בגודל הקלט.

סעיף ג' (5 נקודות)

הטענה נכונה. מכיוון ש- B היא NP שלמה, לכל בעייה $A' \in NP$, מתקיים $A' \leqslant_P B$.
מכיוון ש- A היא NP שלמה, מתקיים ש- $A \in NP$.
לכן קיימת רדוקציה $A \leqslant_P B$.

סעיף ד' (5 נקודות)

הטענה נכונה.

הטענה היא:

אם $L \leqslant \bar{L}$ אז $L \in R \vee L \notin RE$.

נניח בשלילה כי:

אם $L \leqslant \bar{L}$ אז $L \notin R \wedge L \in RE$.

זאת אומרת $\bar{L} \in R$.

$\Leftarrow L \leqslant \bar{L}$ ו- $\bar{L} \in R$.

לכן, לפי משפט הרדוקציה, $L \in R$.

זאת סותרת ההנחה ש- $L \in RE \backslash R$.

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

פתרונות

פונקצית הרדוקציה:

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$, **הקלט של** $kCOLOR$, **ניצור גרף לא מכוון חדש** $G'=(V',E')$, **הקלט של** $(k+1)COLOR$.

בהינתן $G=(V,E)$ **נבנה הגרף החדש** $G'=(V',E')$ **כאשר:**

- $V'=V\cup\{u^*\}$, **כלומר הוספנו קודקוד אחד חדש** u^*.
- $E'=E\cup\{(u,u^*)\mid u\in V\}$. **כלומר כל קודקוד בקבוצת הקודקודים** V **מחובר ל-** u^* **בצלע.**

נכונות הרדוקציה:

נסמן צבע של קודקוד $u\in V$ **ע"י** $c(u)$, **ונסמן** k **צבעים שונים של הקודקודים של** G **ב-** $\{1,2,\ldots,k\}$.
כלומר $c(u)\in\{1,2,\ldots,k\}$.

באופן דומה, נסמן צבע של קודקוד $u'\in V'$ **ע"י** $c(u')$, **ונסמן** $k+1$ **צבעים שונים של הקודקודים של** G' **ב-** $\{1,2,\ldots,k,k+1\}$.
כלומר $c(u')\in\{1,2,\ldots,k,k+1\}$.

נוכיח ש:

$$\langle G\rangle\in kCOLOR\quad\Leftrightarrow\quad\langle G'\rangle\in(k+1)COLOR\,.$$

כיוון $\Leftarrow$

נניח כי $\langle G\rangle\in kCOLOR$.

$\Leftarrow$ **אם** $c(u)\in\{1,2,\ldots,k\}$ **לכל** $u\in V$, **ואם** $(u_1,u_2)\in E$ **אז** $c(u_1)\neq c(u_2)$.
כלומר, ניתן לצבוע כל קודקוד ב-k **צבעים שונים כך שני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע.**

$\Leftarrow$ **אם** $c(u^*)=k+1$ **אז לכל** $u\in V$ **מתקיים** $c(u)\neq c(u^*)=k+1$.
הצבע של u^* **שונה מהצבעים של כל הקודקודים של** V.

$\Leftarrow$ **לכל** $u_1',u_2'\in V'$ **מתקיים שאם** $(u_1',u_2')\in E'$ **אז** $c(u_1')\neq c(u_2')$.

$\Leftarrow$ **ניתן לצבוע את הקודקודים של** G' **ב-** $k+1$ **צבעים שך ששני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע.**

$\Leftarrow$ $\langle G'\rangle\in(k+1)COLOR$.

כיוון $\Rightarrow$

נניח כי $\langle G'\rangle\in(k+1)COLOR$.

$\Leftarrow$ **אם** $c(u')\in\{1,2,\ldots,k+1\}$ **לכל** $u'\in V'$, **ואם** $(u_1',u_2')\in E'$ **אז** $c(u_1')\neq c(u_2')$.
כלומר, ניתן לצבוע כל קודקוד ב-$k+1$ **צבעים שונים כך שני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע.**

פתרונות

$\Leftarrow$ מכיוון ש- $V' = V \cup \{u^*\}$ ו- u^* מחובר לכל קודקוד $u \in V$, אם $c\,(u^*) = k+1$ אז בהכרח לכל $u \in V$ מתקיים $c(u) = 1, 2, \ldots, k$.

(אחרת קיים קודקוד $u \in V$ הצבוה בצבע $k+1$ וקיים וצלע בין u^* הצבוע בצבע $k+1$ לבין הקודקוד $u \in V$ הצבוע בצבע $k+1$ בסתירה לכך ש- G' הוא $k+1$-צביע.)

$\Leftarrow$ מכיוון ש- G' הוא $k+1$- צביע אז בהכרח אין צלע ב- $E = \left\{(u_1, u_2) \;\middle|\; u_1, u_2 \in V\right\}$ המחבר בין קודקודים בעלי אותו צבע.

$\Leftarrow$ $G = (V, E)$ הוא גרף k- צביע.

$\Leftarrow$ $\langle G \rangle \in kCOLOR$.