

עבודה עצמית 6 מישורים וישירים במרחב

שאלה 1 מצאו מהי קבוצת הנקודות במרחב הנקבעת על ידי המשוואה הנתונה:

(א) $xy - 3y = 0$

(ב) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 0$

(ג) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z + 1)^2 = 0$

(ד) $|y| - |x| = -1$

(ה) $\max(|x + 1|, |y + 1|, |z - 1|) = 1$

(ו) $x^2 + y^2 + z^2 = 2x - 4z$

(ז) $2x^2 + 3y^2 = 12$

(ח) $y^2 + z^2 = 9$

(ט) $x^2 + z^2 = 2x$

(י) $z = x^2 + y^2$

(יא) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

(יב) $z = x^2 + 1$

שאלה 2 שרטטו במערכת צירים מרחבית את הגוף החסום על ידי המשטחים הבאים:

(א) $z = 4, y = 2, x = 1, xyz = 0$

(ב) $z = 4, z = 0, y = 0, x = 0, x + y = 4$

(ג) $z = 1, z = -1, |x| + |y| = 2$

(ד) $z^2 - z = 0, x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 4$

(ה) $z = 4 - y^2, z = 0, (x^2 - 3x)(y^2 - y) = 0$

(ו) $z = 4 - y, z = 0, 16x^2 + 9y^2 = 144$

שאלה 3

(א) מצא את נקודות החיתוך של המישור $6x + 3y + 2z = 6$ עם צירי המערכת וצייר את חלק המישור הזה הראשון הנמצא

(ב) רשמו את משוואת הספירה שמרכזת בנקודה $C(1, -3, 0)$ אשר משיקה את המישור $z + 4 = 0$.

(ג) על ציר ה- y מצאו את הנקודה קרובה ביותר לשמטח $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 8z = 0$.

(ד) מצאו את משוואת המיקום הגאומטרי של נקודות במרחב הנמצאות במרחקים שווים מראשית הצירים ומהמישור $y - 3 = 0$.

שאלה 4 מצאו את משוואת המישור שעובר דרך הנקודה $P(2, 1, -1)$ במקביל לישרים

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x - y + 2z &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} x - 2z &= 4 \\ y + 2 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

שאלה 5 מצאו את סינוס הזווית בין הישר $\frac{x-1}{-6} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-2}$ לבין המישור העובר דרך הישר

$$(x, y, z) = (2, 5, 1) + t(4, -1, 1)$$

ומאונך למישור $x + 2y + 3z - 1 = 0$.

שאלה 6 מצאו את משוואות המישורים שכל נקודותיהם נמצאות במרחק שווה לשני המישורים

$$\text{מישור 1: } 3x + 5y + 5z + 4 = 0, \quad \text{מישור 2: } 5x - 5y + 3z + 2 = 0.$$

שאלה 7 נתונות הנקודות $A(-1, 2, 4)$ ו- $B(2, 1, 1)$. מצאו את הנקודה על מישור xz שסכום מרחקה מהנקודות A ו- B הוא מינימאלי.

שאלה 8 מצאו את משוואת המישור המכיל את הישרים

$$\left. \begin{aligned} x + y - 1 &= 0 \\ y + 2z + 4 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} 2x + y - 2 &= 0 \\ x + z + 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

וקבעו עבור איזה ערך של הפרמטר a תהיה הנקודה $P(2, -2, a)$ שייכת למישור זה.

שאלה 9 מצאו את משוואת המישור העובר דרך הנקודה $P(2, 4, 3)$ ומקביל לישרים:

$$M_1(t): \left. \begin{aligned} 5x + 3y + 2 &= 0 \\ 5y + 3z + 4 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad M_2(t): \left. \begin{aligned} 3x + 2y + z &= 0 \\ 2x + 3z + 5 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

שאלה 10 מצאו את משוואת המישור העובר דרך הנקודה $P(3, 8, 5)$ ומאונך למישורים:

$$\pi_1: 2x + 3y - z = 2, \quad \pi_2: 3x + y - 4z = 1.$$

שאלה 11 מצאו את משוואת המישור העובר דרך הישר

$$\begin{cases} x + 5y + 8z = 10 \\ 2x - y - 3z = -1 \end{cases}$$

ונציב למישור $z = 0$.

שאלה 12 נתונות הנקודות: $P(1, 1, 1)$, $B(0, 1, 2)$, $C(3, 0, 1)$, $D(1, -1, 2)$.

(א) מצאו את המרחק מהנקודה P למישור BCD .

(ב) מצאו את ההיטל והשיוקף של P על המישור BCD .

(ג) מצאו את הזווית בין המישור

$$\pi_1 : 2x + y - 2z - 4 = 0$$

לבין המישור BCD .

(ד) קבעו אם PB ו- CD מצטלבים ומצאו את הנקודות הקרובות ביותר עליהם.

שאלה 13 נתונות שלוש הנקודות $A(1, 3, 0)$, $B(2, 5, 7)$, $C(-4, 10, 6)$.

(א) מצאו את המשוואות של הישרים AC , BC , AB .

(ב) מצאו את שטח המשולש ABC .

(ג) נתונה נקודה רביעית $D(12, 13, 14)$ מצאו את נפח הפירמידה המשולשית $ABCD$.

שאלה 14

(א) הוכיחו שווקטור $(4, 6, 8) \times (2, -2, 4)$ הוא קוליניאר ל

$$2x + 3y + 4z = 6, \quad x - y + 2z = 2.$$

(ב) רשמו את משוואה הפרמטרית של הישר שנתון כחיתוך של שני המישורים

$$3x - 6y + 3z = 0, \quad 4x - 2z = 4$$

וחשבו את הזווית בין ישר זה ובין המישור $x = 2$.

שאלה 15 נתונות שלוש הנקודות הבאות

$$A_1(2, 2, 2), B_1(5, 5, 5), C_1(-1, 1, 1)$$

ואת שלוש הנקודות הבאות

$$A_2(-1, -1, -2), B_2(1, 4, 7), C_2(-3, 8, 9)$$

(א) מצאו את משוואת המישור (P_1) העובר דרך הנקודות A_1, B_1, C_1 ואת משוואת המישור (P_2) העובר דרך הנקודות A_2, B_2, C_2 .

(ב) קבעו אם המישורים P_1, P_2 מקבילים או נחתכים, והסבירו מדוע. במידה שהמישורים נחתכים מצאו את משוואת הישר בה המישורים נחתכים אחד עם השני.

שאלה 16 נתונים שני המישורים

$$\pi_1: -4x + 2y + 8z - 10 = 0$$

$$\pi_2: x + ky - 2z + 3 = 0$$

כאשר $k \in \mathbb{R}$ הוא פרמטר ממשי. מצאו את ערך הפרמטר k שעבורו המישורים מקבילים. עבור ערך זה של k מצאו את מרחק בין המישורים.

שאלה 17 מצאו את הערכים של הפרמטרים a ו- b עבורם המישור $x - 2ay + z + 2 = 0$ מקביל לישר

$$\frac{x+b}{-7a} = \frac{y-b}{a-1} = \frac{z-4}{a-2}$$

כך שהמרחק בין הישר והמישור הוא $\sqrt{6}$.

שאלה 18

(א) הוכיחו כי הישר $\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ נמצא על המישור $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

(ב) מצאו את משוואת המישור שעובר דרך הנקודות $A(1, 2, -1)$, $B(2, 4, -5)$, $C(6, 8, 0)$, ומצאו את ההיטל והשיקוף של הנקודה $P(1, 0, -1)$ ביחס למישור הזה.

שאלה 19 (20 נקודות)

מצאו את משוואת המישור המכיל את הישרים

$$\left. \begin{aligned} x + 3y - 1 &= 0 \\ 5y + 2z + 4 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} 2x + y - 2 &= 0 \\ x + z + 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

וקבעו עבור איזה ערך של הפרמטר k תהיה הנקודה $P(1, k, -2)$ שייכת למישור זה.

שאלה 20 (20 נקודות)

נתונות הנקודות $P(1, 1, 1)$, $D(1, -1, 2)$, $C(3, 0, 1)$, $B(0, 1, 2)$. קבעו אם הישר שעובר דרך הנקודות P, B , והישר שעובר דרך הנקודות C, D מצטלבים. אם כן, מצאו את הנקודות הקרובות ביותר.

פתרונות

שאלה 1

(א)

$$xy - 3y = 0 \Rightarrow y(x - 3) = 0$$

ז"א $y = 0$ או $x = 3$. קיבלנו שני מישורים.

(ב)

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 0 \Rightarrow y = 3 \text{ וגם } x + 1 = 0$$

$$\text{ז"א } t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \text{ קיבלנו משוואת ישר.}$$

(ג)

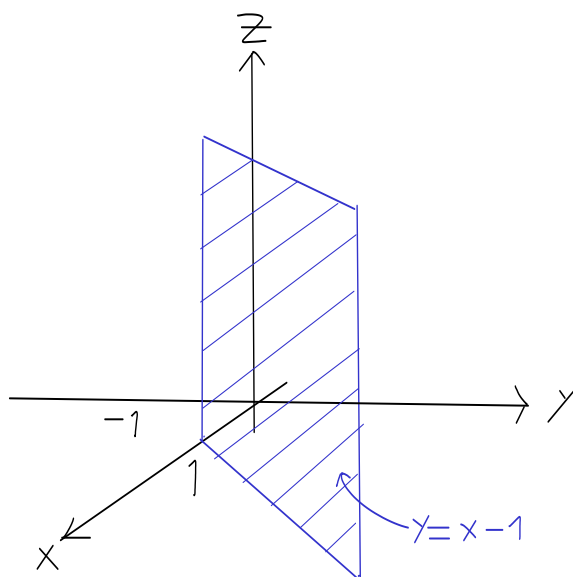
$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z + 1)^2 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \text{ וגם } y + 3 = 0 \text{ וגם } z + 1 = 0.$$

$$\text{לכן } \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = -1 \end{cases} \text{ נקודה } (1, -3, -1).$$

$$|y| - |x| = -1 \quad (\text{ד})$$

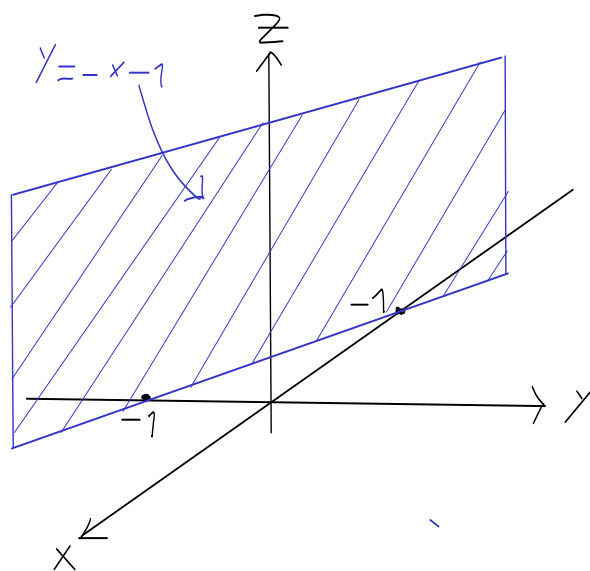
אם $x \geq 0, y \geq 0$ נקבל

$$y - x = -1 \Rightarrow y = x - 1.$$



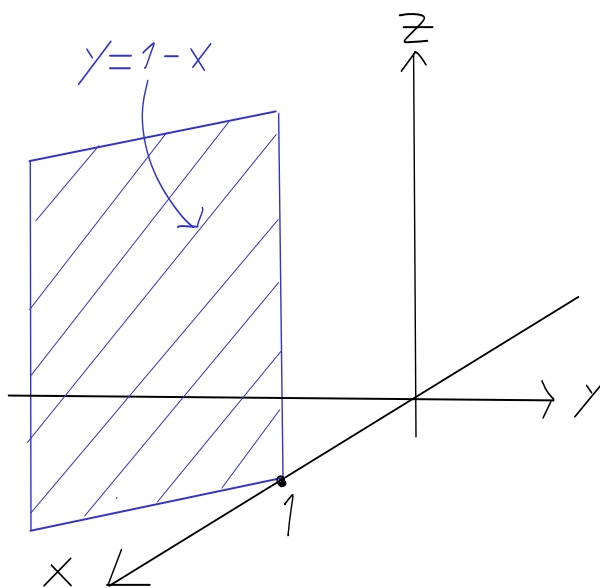
אם $x \leq 0, y \geq 0$ נקבל

$$y + x = -1 \Rightarrow y = -x - 1.$$



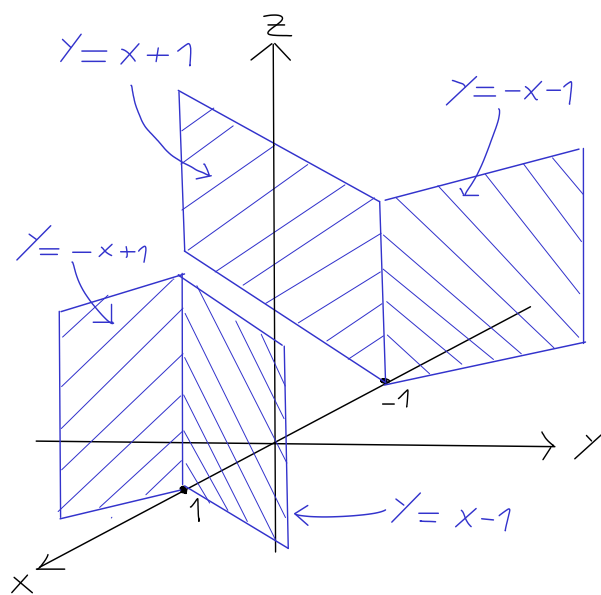
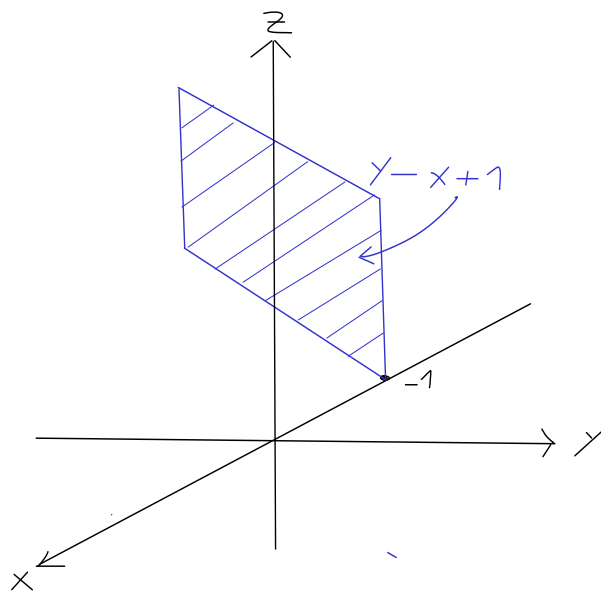
אם $x \geq 0, y < 0$ נקבל

$$-y - x = -1 \Rightarrow y = -x + 1.$$



אם $x < 0, y < 0$ נקבל

$$-y + x = -1 \Rightarrow y = x + 1.$$



$$\max(|x + 1|, |y + 1|, |z - 1|) = 1 \quad (\text{ה})$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x - 4z \quad (\text{ו})$$

$$2x^2 + 3y^2 = 12 \quad (\text{ז})$$

$$y^2 + z^2 = 9 \quad (\text{ח})$$

$$x^2 + z^2 = 2x \quad (\text{ט})$$

$$z = x^2 + y^2 \quad (\text{י})$$

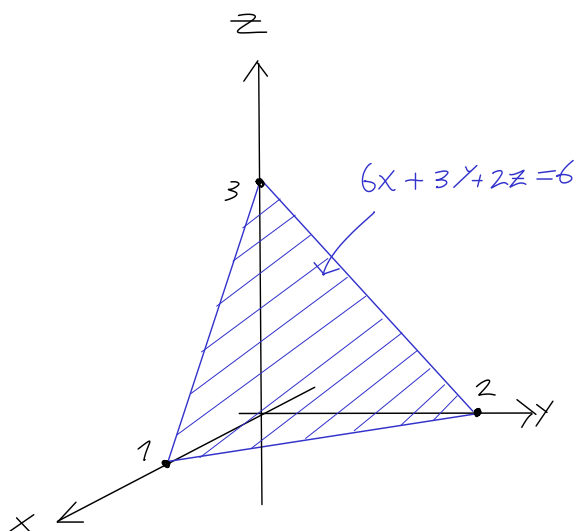
$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{יא})$$

(ב) $z = x^2 + 1$

שאלה 2

שאלה 3

(א)



(ב) $z + 4 = 0$, $C(1, -3, 0)$ רדיוס הספירה שווה למרחק מנקודה C למישור $z + 4 = 0$:

$$d = \frac{|0 + 4|}{\sqrt{1}} = 4.$$

לכן משוואת הספירה:

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 16.$$

(ג)

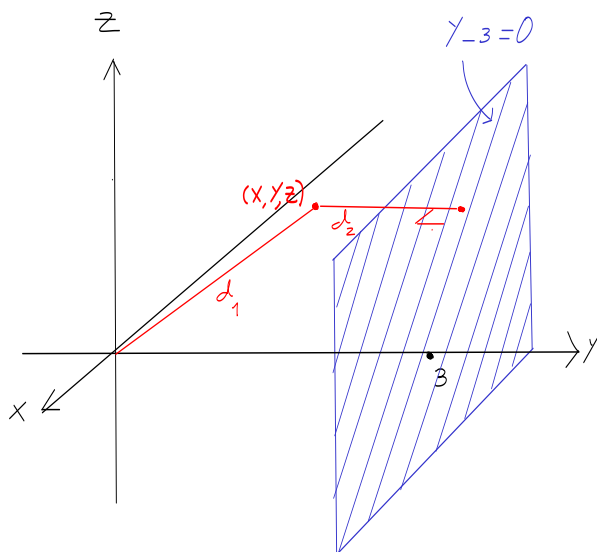
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 8z = 30.$$

נשלים את הריבוע ונקבל

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 1.$$

קיבלנו משוואה של ספירה שמרכזת היא בנקודה $(2, 3, 4)$. הנקודה על הספירה הקרובה ביותר לציר ה- y היא $(0, 2, 0)$.

(ד)



המרחק מנקודה (x, y, z) לראשית הצירים:

$$d_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

המרחק מנקודה (x, y, z) למישור $y - 3 = 0$:

$$d_2 = |y - 3| .$$

$$d_2 = 3 - y \text{ לכן } y < 3 .$$

$$\begin{aligned} d_1 &= d_2 \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= 3 - y \\ x^2 + y^2 + z^2 &= (3 - y)^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 9 - 6y + y^2 \\ x^2 + z^2 + 6y - 9 &= 0 . \end{aligned}$$

שאלה 4 משוואה של ישר 1 בצורה פרמטרית:

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x - y + 2z &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & -8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & -8 \end{array} \right)$$

$$x = -6t + 4 , \quad y = \frac{8 + 2t}{3} , \quad z = t ,$$

או

$$(x, y, z) = t \left(-6, \frac{2}{3}, 1 \right) + \left(4, \frac{8}{3}, 0 \right) .$$

וקטור הכיוון: $(-18, 2, 3)$.

משוואה של ישר 2 בצורה פרמטרית:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2z = 4 \\ y + = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$$x = 2t + 4, \quad y = 2, \quad z = t,$$

או

$$(x, y, z) = t(2, 0, 1) + (4, 2, 0).$$

וקטור הכיוון: $(2, 0, 1)$.

לכן וקטור הנורמל של המישור הוא

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -18 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2, 24, -4) = 2 \cdot (1, 12, -2).$$

לכן משוואת המישור היא

$$x + 12y - 2z + D = 0.$$

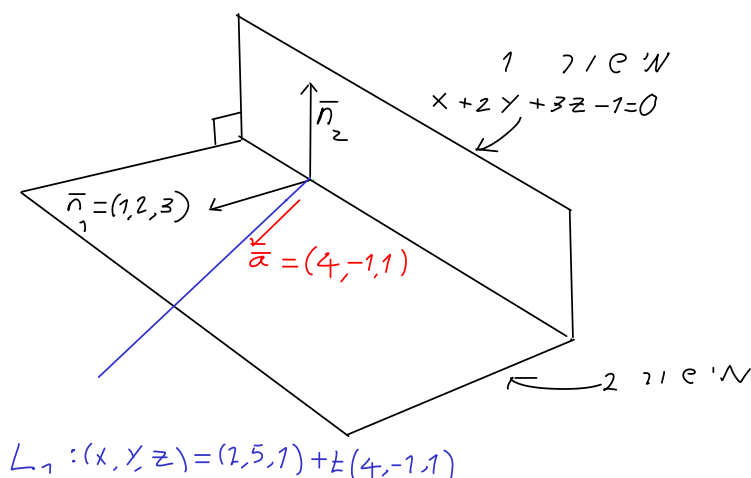
המישור עובר דרך הנקודה $P(2, 1, -1)$. נציב את הקואורדינטות של P :

$$2 + 12 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + D = 0 \quad \Rightarrow \quad 16 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -16.$$

לכן משוואת הישר הינה

$$x + 12y - 2z - 16 = 0.$$

שאלה 5

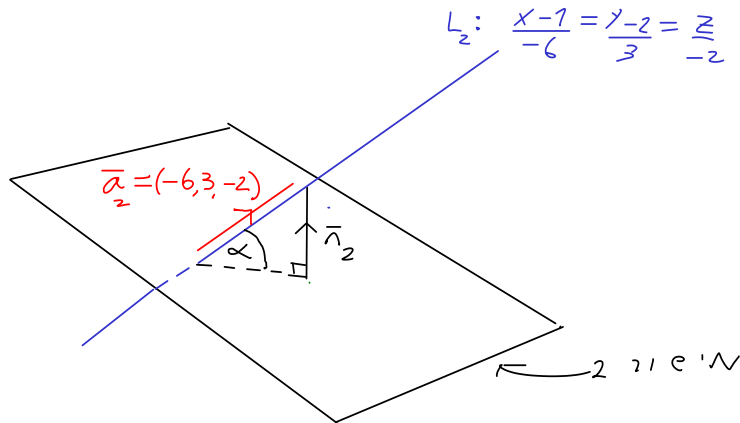


נסמן את המישור $x + 2y + 3z - 1 = 0$ במישור 1. הנורמל שלו הינו $\bar{n}_1 = (1, 2, 3)$.

נקרא את המישור שמאונך למישור 1 ושיכולל את הישר $(x, y, z) = (2, 5, 1) + t(4, -1, 1)$, מישור 2.

הוקטור הכיוון של הישר הוא $\vec{a} = (4, -1, 1)$. נשים לב שהוקטורים \vec{a} ו- \vec{n}_1 נמצאים במישור 2 (ראו שרטוט). לכן הנורמל \vec{n}_1 של מישור 1 הוא המכפלה וקטורית של \vec{a} ו- \vec{n}_1 :

$$\vec{n}_2 = \vec{a} \times \vec{n}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (5, 11, -9) .$$



$$\sin \alpha = \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{a}_2| |\vec{n}_2|} = \frac{(-6, 3, -2) \cdot (5, 11, -9)}{|(5, 11, -9)| \cdot |(-6, 3, -2)|} = \frac{21}{\sqrt{227} \sqrt{49}} = 0.199 .$$

$$\alpha = \arcsin(0.199) = 11.49^\circ .$$

שאלה 6 המרחקים בין נקודה $P(x, y, z)$ כלשהי ממישור 1 ומישור 2 הם

$$d_1 = \frac{|3x + 5y + 5z + 4|}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 5^2}} , \quad d_2 = \frac{|5x - 5y + 3z + 2|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + 3^2}}$$

נדרש $d_1 = d_2$:

$$\frac{|3x + 5y + 5z + 4|}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 5^2}} = \frac{|5x - 5y + 3z + 2|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + 3^2}}$$

$$\frac{|3x + 5y + 5z + 4|}{\sqrt{59}} = \frac{|5x - 5y + 3z + 2|}{\sqrt{59}}$$

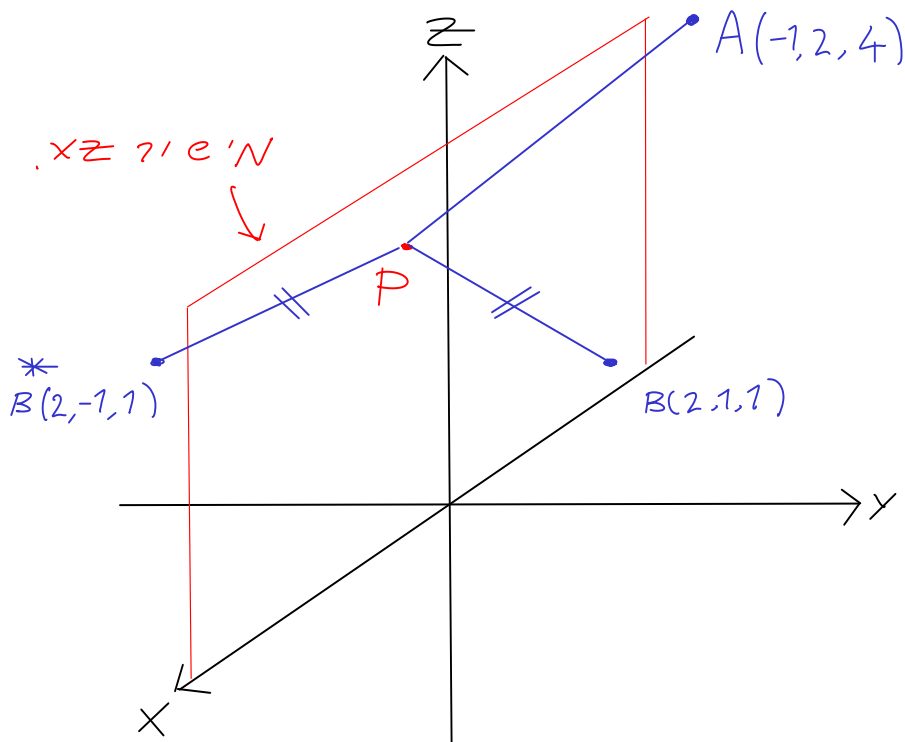
$$|3x + 5y + 5z + 4| = |5x - 5y + 3z + 2|$$

$$3x + 5y + 5z + 4 = \pm (5x - 5y + 3z + 2)$$

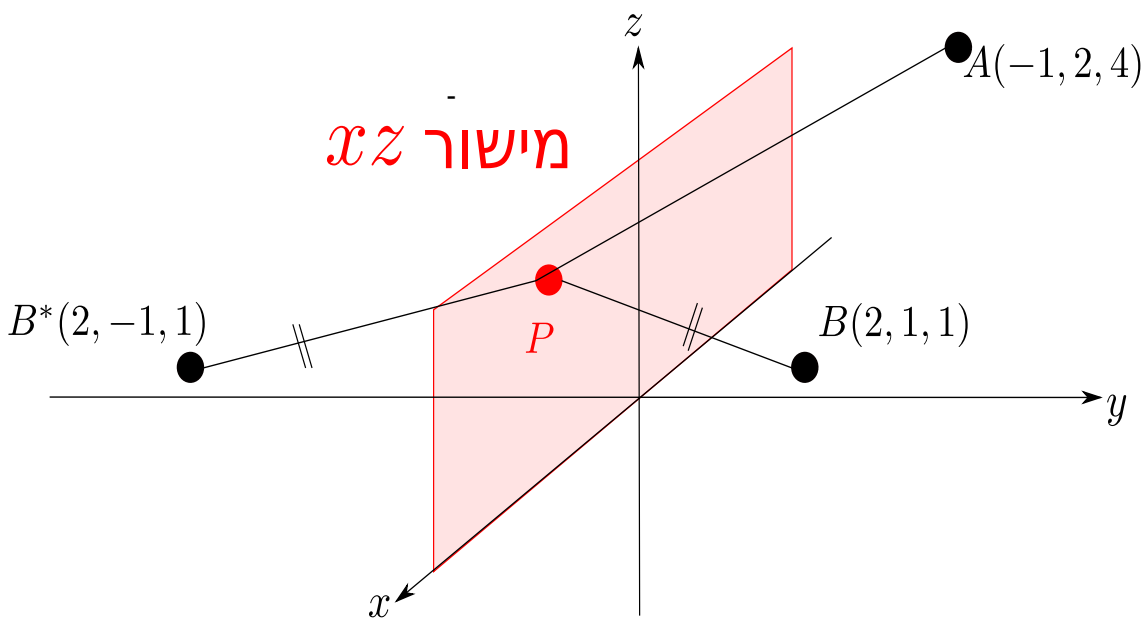
$$3x + 5y + 5z + 4 = 5x - 5y + 3z + 2 \quad \text{או} \quad 3x + 5y + 5z + 4 = -(5x - 5y + 3z + 2)$$

$$-2x + 10y + 2z + 2 = 0 \quad \text{או} \quad 8x + 8z + 6 = 0 .$$

שאלה 7



מישור xz נתון על ידי המשוואה $y = 0$. נשים לב ששתי הנקודות A ו- B אינן על המישור ושתיהן נמצאות "מימין" למישור, (כן ערך ה- y של שתיהן חיובי). נשים לב גם שאם $B^*(2, -1, 1)$ היא השיקוף של B במישור xz , אז לכל נקודה $P(x, y, z)$ על המישור מתקיים שהמרחק $d(P, B) = d(P, B^*)$. כלומר, ניתן לנסח את הבעיה מחדש כך: מצאו את הנקודה על מישור xz שסכום מרחקיה מהנקודות A ו- B^* הוא מינימאלי.



מצד שני, אם P היא נקודת החיתוך של הקטע AB^* עם מישור xz אז

$$d(P, A) + d(P, B^*) = d(A, B^*) ,$$

לכלנקודה אחרת על המישור, Q , מתקבל משולש AB^*Q במרחב ומאי-שיוויון המשולש מתקיים

$$d(A, B^*) \leq d(Q, A) + d(Q, B^*) .$$

כלומר, הנקודה המבוקשת P היא נקודת החיתוך בין הקטע AB^* לבין מישור xz . אם נרשום הצגה פרמטרית של הישר נקבל

$$M(t) = (A + t \cdot \overrightarrow{AB^*}) = (-1, 2, 4) + t(3, -3, -3) = (-1 + 3t, 2 - 3t, 4 - 3t) ,$$

ומהצבה בשוואת המישור נקבל

$$2 - 3t = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3} .$$

ולכן נקודת החיתוך היא $P = (1, 0, 2)$. מתקיים

$$\begin{aligned} d(P, A) + d(P, B^*) &= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-2)^2} + \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \\ &= 2\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3} \\ &= \sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-3)^2} \\ &= d(A, B^*) \end{aligned}$$

כנדרש.

שאלה 8 נזכור כי וקטור הכיוון של ישר הנתון כחיתוך של שני מישורים, צריך להיות ניצב לנורמלים שלהם, על כן נחשב את וקטורי הכיוון של הישרים הללו

$$\bar{a} = (1, 1, 0) \times (0, 1, 2) = (2, -2, 1) .$$

$$\bar{b} = (2, 1, 0) \times (1, 0, 1) = (1, -2, -1) .$$

הישרים אינם מקבילים או מתלכדים אך בשאלה נאמר כי ישנו מישור המכיל את שני הישרים, כלומר הם אינם מצטלבים. נוודא זאת על ידי כך שנבדוק כי המרחק ביניהם הוא 0 (כלומר, הם נחתכים). נבחר נקודה על כל אחד מהישרים (על ידי הצבה של $y = 0$ במערכת אחת ו- $x = 0$ במערכת השניה) $Q(1, 0, -2)$ ו- $R(0, 2, -1)$ ונחשב את המכפלה הוקטורית בין כיווני הישרים:

$$\bar{a} \times \bar{b} = (2, -2, 1) \times (1, -2, -1) = (4, 3, -2) .$$

המרחק בין הישרים נתון על ידי

$$d = \frac{|\overrightarrow{QR} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})|}{|\bar{a} \times \bar{b}|} = \frac{|(-1, 2, 1) \cdot (4, 3, -2)|}{|(4, 3, -2)|} = 0 .$$

נעיר כי החישוב למעלה לא היה לשווא מכיוון שברוב התוצאות שלו נשתמש בהמשך. תחילה, הנורמל למישור המכיל את שני הישרים נתון על ידי המכפלה הוקטורית בין וקטורי הכיוון $\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b} = (4, 3, -2)$ ומשוואת המישור מתקבלת על ידי (לאחר הצבה של הנקודה Q)

$$4(x - 1) + 3(y - 0) - 2(z + 2) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 2z - 8 = 0 .$$

בכדי לבדוק עבור איזה פרמטר a הנקודה $P(2, -2, a)$ תהיה מוכלת במישור, נציב את הנקודה במשוואת המישור

$$8 - 6 - 2a - 8 = 0 \Rightarrow a = 4.$$

שאלה 9 $-235(x - 2) - 186(y - 4) - 27(z - 3) = 0$

שאלה 10 $-11x + 5y - 7z + 28 = 0$

שאלה 11 $-220(x - 0) - 132(y - 2) - 88(z - 1) = 0$

שאלה 12

(א) משוואת המישור BCD :

$$2x + y + 5z - 11 = 0.$$

מרחק של P מהמישור BCD :

$$d = \frac{3}{\sqrt{30}}.$$

(ב) היטל: $\cdot \left(\frac{19}{15}, \frac{17}{15}, \frac{25}{15} \right)$
שיקוף: $\cdot \left(\frac{23}{15}, \frac{19}{15}, \frac{35}{15} \right)$

(ג) $\cos \alpha = \frac{5}{3\sqrt{30}}$

(ד) מצטלבים. $P(2, 1, 0), Q\left(\frac{5}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{5}{3}\right)$

שאלה 13

(א) הוקטורים הכיוון הינם:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 2, 7), \quad \overrightarrow{BC} = (-6, 5, -1), \quad \overrightarrow{AC} = (-5, 7, 6).$$

והמשוואות של הישרים הינם:

$$\ell_{AB}: (x, y, z) = (1, 3, 0) + t(1, 2, 7),$$

$$\ell_{BC}: (x, y, z) = (2, 5, 7) + t(-6, 5, -1),$$

$$\ell_{AC}: (x, y, z) = (-4, 10, 6) + t(-5, 7, 6)$$

(ב)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |AB \times AC| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 7 \\ -5 & 7 & 6 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-37\mathbf{i} - 41\mathbf{j} + 17\mathbf{k}| = 28.892$$

(ג)

$$\overrightarrow{AD} = (11, 10, 14)$$

$$V_{ABC} = \frac{1}{6} ||AD \cdot AB \times AC|| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 11 & 10 & 14 \\ 1 & 2 & 7 \\ -5 & 7 & 6 \end{vmatrix} \right| = \frac{579}{6} = 96.5$$

שאלה 14

(א)

$$\vec{b} = (2, -2, 4), \vec{a} = (4, 6, 8) \text{ נסמן}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (4, 6, 8) \times (2, -2, 4) = (40, 0, -20) =: \vec{c}$$

הנורמל למישור $2x + 3y + 4z = 6$ הינו

$$\vec{n}_1(2, 3, 4)$$

-1

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{c} = 0$$

הנורמל למישור $x - y + 2z = 2$ הינו

$$\vec{n}_2(1, -1, 2)$$

-1

$$\vec{n}_2 \cdot \vec{c} = 0$$

(ב)

נמצאו את משוואת הישר דרך הפתרון למערכת

$$\begin{aligned} 3x - 6y + 3z &= 0 \\ 4x - 2z &= 4 \end{aligned}$$

נקבל אינסוף פתרונות מצורה פרמטרית:

$$(x, y, z) = \left(1 + \frac{1}{2} \cdot t, \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot t, t\right) = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right) + t \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right) \sim \left(1, \frac{1}{2}, 0\right) + t(2, 3, 4)$$

זהו המשוואת הישר בו המישורים נחתכים.

הנורמל למישור $x = 2$ הינו $\vec{n} = (1, 0, 0)$ קוסינוס הזווית בין הנורמל ובין ישר שווה לסינוס הזווית בין הישר והמישור:

$$\sin \alpha = \frac{(1, 0, 0) \cdot (2, 3, 4)}{|(1, 0, 0)| |(2, 3, 4)|} = \frac{2}{\sqrt{29}} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right) = 21.8014^\circ$$

שאלה 15

(א)

$$\overrightarrow{A_1B_1} = (3, 3, 3), \quad \overrightarrow{A_1C_1} = (-3, -1, -1)$$

הנורמל של P_1 ניתן ע"י

$$\overrightarrow{A_1B_1} \times \overrightarrow{A_1C_1} = (3, 3, 3) \times (-3, -1, -1) = (0, -6, 6)$$

ובהתאם משוואת המישור P_1 הינה

$$-6y + 6z + D_1 = 0$$

נקבע D_1 ע"י להציב את הקואורדינטות של הנקודה A_1 שבה בתוך המשוואה:

$$-6 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + D_1 = 0 \Rightarrow D_1 = 0$$

ולכן נקבל את המשוואה

$$-6y + 6z = 0.$$

הנורמל של P_2 ניתן ע"י

$$\overrightarrow{A_2B_2} \times \overrightarrow{A_2C_2} = (2, 5, 9) \times (-2, 9, 11) = (-26, -40, 28) \sim (-13, -20, 14)$$

ובהתאם משוואת המישור P_2 הינה

$$-13x - 20y + 14z + D_2 = 0$$

נקבע D_2 ע"י להציב את הקואורדינטות של הנקודה A_2 בתוך משוואת הישר:

$$-13 \cdot (-1) - 20 \cdot (-1) + 14 \cdot (-2) + D_2 = 0 \Rightarrow D_2 = -5$$

ולכן נקבל את המשוואה

$$-13x - 20y + 14z - 5 = 0.$$

(ב) מכיוון שהנורמלים של השני מישורים $\vec{n}_1 = (0, -6, 6)$ ו- $\vec{n}_2 = (-13, -20, 14)$ אינם פרופורציונליים, אז הנורמלים אינם מקבילים, ולכן המישורים לא מקבילים אלא הם נחתכים. נמצאו את משוואת הישר שבה הם נחתכים:

$$\begin{cases} -6y + 6z = 0 \\ -13x - 20y + 14z = 5 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = \left(-\frac{5}{13} - \frac{6}{13} \cdot t, t, t \right) = \left(-\frac{5}{13}, 0, 0 \right) + t \left(-\frac{6}{13}, 1, 1 \right)$$

שאלה 16

הוקטורים הנורמלים

$$n_1 = (-4, 2, 8)$$

$$n_2 = (1, k, -2)$$

מקבילים זה לזה עבור $k = -\frac{1}{2}$. אז $n_1 = -4n_2$

המרחק בין שני המישורים π_1 ו- π_2 שווה למרחק בין נקודה P על π_1 לבין π_2 .

נקבע) באופן שרירותי את הנקודה $P(-2, 1, 0)$ על מישור π_1 . בכדי לחשב את המרחק P לבין המישור π_2 נשתמש בנוסחא $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ הנותנת המרחק בין נקודה (x_0, y_0, z_0) למישור $Ax + By + Cz + D = 0$. על ידי הצבה בנוסחא נקבל את המרחק

$$d = \frac{|1 \cdot (-2) - \frac{1}{2} \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 3|}{\sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{21}}.$$

שאלה 17 משוואת המישור הנתון היא

$$x - 2ay + z + 2 = 0$$

ולכן הווקטור $\bar{n} = (1, -2a, 1)$ נורמלי למישור זה. משוואת הישר הנתון היא

$$\frac{x+b}{-7a} = \frac{y-b}{a-1} = \frac{z-4}{a-2}$$

מכאן הישר עובר דרך נקודה $C(-b, b, 4)$ והווקטור $(-7a, a-1, a-2)$ הוא וקטור כיוון שלו. כדי שהמישור והישר יהיו מקבילים, נדרוש שווקטור הכיוון של הישר יהיה מאונך לווקטור הנורמל של המישור. כלומר, נדרוש

$$\begin{aligned} 0 &= (-7a, a-1, a-2) \cdot (1, -2a, 1) \\ &= (-7a)(1) + (a-1)(-2a) + (a-2)(1) \\ &= -7a - 2a^2 + 2a + a - 2 \\ &= -2a^2 - 4a - 2 \\ &= -2(a+1)^2 \end{aligned}$$

ולכן $a = -1$. כלומר, משוואת המישור היא

$$x + 2y + z + 2 = 0$$

המרחק בין ישר למישור הוא המרחק בין נקודה כלשהי על הישר למישור. לכן, כדי למצוא את הערך של b , נחשב את המרחק בין הנקודה $(-b, b, 4)$ (שהיא נמצאת על הישר) לבין המישור בעזרת נוסחת מרחק בין נקודה למישור ונדרוש שהמרחק הזה יהיה שווה ל $\sqrt{6}$:

$$\sqrt{6} = D = \frac{|(1)(-b) + (2)(b) + (1)(4) + (2)|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (1)^2}} = \frac{|b+6|}{\sqrt{6}}$$

ולכן

$$|b+6| = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 6$$

כלומר, $b = 0$ או $b = -12$.

שאלה 18

(א)

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad 5x - 3y + 2z - 5 &= 0 \\ \pi_2 : \quad 2x - y - z - 1 &= 0 \end{aligned}$$

הנומרל של π_1 הוא $n_1 = (5, -3, 2)$. הנומרל של π_2 הוא $n_2 = (2, -1, -1)$. הוקטור הכיוון של הקו החיתוך הוא מאונך לשני הנומרלים של המישורים:

$$\bar{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (5, 9, 1)$$

נחפש נקודה אחת על הישר. נציב $z = 0$ ב- π_1 ו- π_2 :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \end{array} \right)$$

לכן הנקודה $(-2, -5, 0)$ היא על הישר. המשוואת הישר היא

$$M(t) = (-2, -5, 0) + t(5, 9, 1).$$

נוכיח כי כל נקודה על הישר מקיימת את משוואת המישור של π_3 : $4x - 3y + 7z - 7 = 0$

$$4(-2 + 5t) - 3(-5 + 9t) + 7(t) - 7 = -8 + 20t + 15 - 27t + 7t - 7 = 0$$

(ב) $\overline{AC}, \overline{AB}$ הם שני וקטורים במישור. הנומל ניתן ע"י

$$n = \overline{AB} \times \overline{AC} = (1, 2, -4) \times (5, 6, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -4 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (26, -21, -4).$$

משוואת המישור עם נורמל $n = (A, B, C)$ שעובר דרך נקודה (x_0, y_0, z_0) :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

נציב $n = (A, B, C) = (26, -21, -4)$ ונקודה $(x_0, y_0, z_0) = A = (1, 2, -1)$ ונקבל

$$26x - 21y - 4z + 12 = 0.$$

נחשב את ההיטל. הישר שעובר דרך הנקודה P וניצב למישור, כלומר וקטור הכיוון של הישר הוא הנומל המישור:

$$M(t) = P + t \cdot n = (10, 11, 20) + t(26, -21, -4), \quad \Rightarrow \quad x = 10 + 26t, \quad y = 11 - 21t, \quad z = 20 - 4t.$$

נציב משוואת הישר במשוואת המישור:

$$26(10 + 26t) - 21(11 - 21t) + 4(20 - 4t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{1}{103}.$$

היטל:

$$P' = M\left(t_0 = \frac{1}{103}\right) = \left(\frac{1056}{103}, \frac{1112}{103}, \frac{2056}{103}\right).$$

שיקוף:

$$P^* = P + 2t_0 n = (10, 11, 20) + \frac{2}{103}(26, -21, -4) = \left(\frac{1082}{103}, \frac{1091}{103}, \frac{2052}{103}\right)$$

תשובה סופית - משוואת המישור:

$$26x - 21y - 4z + 12 = 0 .$$

היטל:

$$P' = \left(\frac{41}{1133}, \frac{882}{1133}, -\frac{965}{1133} \right) .$$

שיקוף:

$$P^* = \left(-\frac{1051}{1133}, \frac{1764}{1133}, -\frac{797}{1133} \right) .$$

שאלה 19

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : x + 3y - 1 = 0 \\ \pi_2 : 5y + 2z + 4 = 0 \end{array} \right\} , \quad \left. \begin{array}{l} \pi_3 : 2x + y - 2 = 0 \\ \pi_4 : x + z + 1 = 0 \end{array} \right\}$$

הנורמלים של מישורים אלו:

$$n_1 = (1, 3, 0) , \quad n_2 = (0, 5, 2) , \quad n_3 = (2, 1, 0) , \quad n_4 = (1, 0, 1) .$$

נזכור כי וקטור הכיוון של ישר הנתון כחיתוך של שני מישורים, צריך להיות ניצב לנורמלים שלהם, על כן נחשב את וקטורי הכיוון של הישרים הללו. וקטור כיוון של הישר הראשון:

$$a = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = (6, -2, 5) .$$

וקטור כיוון של הישר השני:

$$b = n_3 \times n_4 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, -1) .$$

הישרים אינם מקבילים או מתלכדים אך בשאלה נאמר כי ישנו מישור המכיל את שני הישרים, כלומר הם אינם מצטלבים. נודא זאת על ידי כך שנבדוק כי המרחק ביניהם הוא 0 (כלומר, הם נחתכים). נבחר נקודה על כל אחד מהישרים (על ידי הצבה של $y = 0$ במערכת אחת ו- $x = 0$ במערכת השנייה) $Q(1, 0, -2)$ ו- $R(0, 2, -1)$ ונחשב את המכפלה הוקטורית בין כיווני הישרים אשר נותן את הנורמל שמכיל את שני הישרים:

$$n = a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (12, 11, -10) .$$

המרחק בין הישרים נתון על ידי

$$d = \frac{|\vec{QR} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{|(-1, 2, 1) \cdot (12, 11, -10)|}{|(12, 11, -10)|} = \frac{(-1) \cdot 12 + 2 \cdot 11 + 1 \cdot (-10)}{\sqrt{12^2 + 11^2 + (-10)^2}} = 0$$

נעיר כי החישוב למעלה לא היה לשווא מכיוון שברוב התוצאות שלו נשתמש בהמשך. תחילה, הנורמל למישור המכיל את שני הישרים נתון על ידי המכפלה הוקטורית בין וקטורי הכיוון

$$n = a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (12, 11, -10) .$$

ומשוואת המישור מתקבלת על ידי (לאחר הצבה של הנקודה Q)

$$12(x - 1) + 11(y - 0) - 10(z + 2) = 0 \Rightarrow 12x + 11y - 10z - 32 = 0 .$$

בכדי לבדוק עבור איזה פרמטר k הנקודה $P(1, k, -2)$ תהיה מוכלת במישור, נציב את הנקודה במשוואת המישור

$$12 + 11k + 20 - 32 = 0 \Rightarrow k = 0 .$$

תשובה סופית - משוואת המישור:

$$12x + 11y - 10z - 32 = 0 .$$

הנקודה $P(1, k, -2)$ תהיה מוכלת במישור אם $k = 0$.

שאלה 20 הישרים מצטלבים.

נקודות הקרובות ביותר הן $(3, 0, 1)$ על CD ו- $(2, 1, 0)$ על PB .