עבודה עצמית 2 שדות

שאלה 1 פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$. כמה פתרונות יש למערכת?

$$\begin{aligned} x+\bar{3}y+z &=\bar{1} \\ \bar{3}x+y+\bar{4}z &=\bar{2} \\ \bar{2}x+\bar{4}y+\bar{4}z &=\bar{3} \end{aligned}$$

שאלה 2 נתונה המערכת הבאה:

$$\begin{aligned} x+\bar{3}y+z &=\bar{1} \\ \bar{3}x+y+\bar{2}z &=\bar{2} \\ \bar{2}x+\bar{2}y+\bar{3}z &=\bar{4} \end{aligned}$$

פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$. רשמו את כל הפתרונות בצורה מפורשת. כמה פתרונות יש למערכת?

שאלה 3 פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_7$. כמה פתרונות יש למערכת?

$$\begin{aligned} x+\bar{2}y+z &=\bar{2} \\ \bar{3}x+y+\bar{4}z &=\bar{3} \\ \bar{2}x+\bar{4}y+\bar{4}z &=\bar{3} \end{aligned}$$

שאלה 4 פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$. כמה פתרונות יש למערכת?

$$\begin{aligned} x+\bar{3}y+z &=\bar{1} \\ \bar{3}x+y+\bar{2}z &=\bar{2} \\ \bar{2}x+\bar{2}y+\bar{3}z &=\bar{4} \end{aligned}$$

שאלה 5 פתרו את מערכת המשוואות הבאה מעל שדה $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} \bar{3}x+\bar{2}y+z &= \bar{4} \\ \bar{4}x+\bar{2}y+z &= \bar{1} \\ x+y+\bar{3}z &= \bar{1} \end{cases}$$

רשמו את כל הפתרונות שלה.

שאלה 6 פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_7$.

$$\begin{aligned} \bar{2}x+\bar{3}y+\bar{3}z &= \bar{5} \\ \bar{3}x+\bar{4}y+z &= \bar{1} \\ x+y+\bar{6}z &= \bar{2} \end{aligned}$$

שאלה 7 פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$.

$$\begin{aligned} x+\bar{2}y+z&=\bar{2}\\ \bar{3}x+y+\bar{4}z&=\bar{3}\\ \bar{2}x+\bar{4}y+\bar{4}z&=\bar{3}\end{aligned}$$

שאלה 8 הוכיחו שלמערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_p$, יש פתרון יחיד עם $p\geq 7$ מספר ראשוני.

$$\begin{aligned} x+\bar{2}y+z&=\bar{2}\\ \bar{3}x+y+\bar{4}z&=\bar{3}\\ \bar{2}x+\bar{4}y+\bar{4}z&=\bar{3}\end{aligned}$$

שאלה 9

פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}(1+i)z_1+(1-i)z_2=&1+i\\ (1-i)z_1+(1+i)z_2=&1+3i\end{aligned}$$

שאלה 10

פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}2z_1-(2+i)z_2=&-i\\ (4-2i)z_1-5z_2=&-1-2i\end{aligned}$$

שאלה 11

פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}(1-i)z_1-3z_2=&-i\\ 2z_1-(3+3i)z_2=&3-i\end{aligned}$$

שאלה 12

פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}iz_1+(1-i)z_2 &= 2i\ ,\\ (1+2i)z_1-2z_2 &= 1\ .\end{aligned}$$

שאלה 13

פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}3iz_1+(6-6i)z_2 &= 6i\ ,\\ (1+i)z_1-2z_2 &= 1\ .\end{aligned}$$

שאלה 14

פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} 4z_1 + 4z_2 &= 4i \ , \\ (5+10i)z_1 - 5z_2 &= 5 \ . \end{aligned}$$

שאלה 15

א) רשמו את טבלאות הכפל וחיבור של $\mathbb{Z}_7$.

ב) רשמו את האיברים ההופכיים של $2,3,4,5,6$ ב- $\mathbb{Z}_7$ וב- $\mathbb{Z}_{11}$.

שאלה 16

א) מצאו הפתרונות של המשוואות (1) $3x = 2$ (2) $-3x = 2$

1) בשדה $\mathbb{Z}_5$

2) בשדה $\mathbb{Z}_7$

3) בשדה $\mathbb{Z}_{11}$

ב) יהי $\mathbb{F}$ שדה. הוכיחו כי לכל $a,b \in \mathbb{F}$ כך ש $a \neq 0$ למשוואה $ax = b$ ישנו פתרון יחיד.

שאלה 17 יהי $\mathbb{F}$ שדה. הוכיחו את הטענות הבאות:

א) לכל מספר טבעי k, ולכל $a_1, \ldots, a_k, b \in \mathbb{F}$ מתקיים

$$(a_1 + \ldots + a_k)\, b = a_1 b + \ldots a_k b \in \mathbb{F} \ .$$

רמז: אינדוקציה על k.

ב) לכל $a \in \mathbb{F}$ פרט ל- 0 יש $b \in \mathbb{F}$ <u>יחיד</u> כך ש- $ab = 1$.

ג) יהי $a \in \mathbb{F}$. אם $a + a = a$ אז $a = 0$.

ד) יהיו $a,b \in \mathbb{F}$. אם $ab = 0$ אז $a = 0$ או $b = 0$.

ה) לכל $a,b \in \mathbb{F}$ מתקיים $-(ab) = (-a)b$.

שאלה 18 הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות ע"י דוגמה נגדית:

א) קבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$ עם פעולות החיבור והכפל הרגילות שדה.

ב) קבוצת המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$ עם פעולות $a + b = \dfrac{a-b}{3}$ ו- $a \cdot b = 3ab$ שדה.

ג) הקבוצה $\left\{a + b\sqrt{2} | a,b \in \mathbb{Z}\right\}$ ביחס לפעולות החיבור והכפל הרגילות, כלומר,

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{2}) \oplus (c + d\sqrt{2}) =& (a+c) + (b+d)\sqrt{2} \\ (a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) =& (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \end{aligned}$$

שדה.

ד) הקבוצה $\left\{a+b\sqrt{2}|a,b\in\mathbb{Q}\right\}$ ביחס לפעולות החיבור והכפל הרגילות, שדה.

שאלה 19

א) רשמו את טבלאות הכפל וחיבור של $\mathbb{Z}_7$.

ב) רשמו את האיברים ההופכיים של $2,3,4,5,6$ ב- $\mathbb{Z}_7$ וב- $\mathbb{Z}_{11}$.

ג) הגדירו על הקבוצה $\{0,1,a,b\}$ פעולות כפל וחיבור (ע"י כתיבת טבלאות הכפל והחיבור) כך שזה יהיה שדה.

הדרכה: קבעו ש- $a+1=b$.

פתרונות

שאלה 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{3}&\bar{1}&\bar{1}\\ \bar{3}&\bar{1}&\bar{4}&\bar{2}\\ \bar{2}&\bar{4}&\bar{4}&\bar{3}\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{3}&\bar{1}&\bar{1}\\ \bar{0}&-\bar{8}&\bar{1}&-\bar{1}\\ \bar{2}&\bar{4}&\bar{4}&\bar{3}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{3}&\bar{1}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{4}\\ \bar{2}&\bar{4}&\bar{4}&\bar{3}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{3}&\bar{1}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{4}\\ \bar{0}&-\bar{2}&\bar{2}&\bar{1}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{3}&\bar{1}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{4}\\ \bar{0}&\bar{3}&\bar{2}&\bar{1}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_3-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{3}&\bar{1}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{1}&-\bar{3}\\ \bar{0}&\bar{3}&\bar{2}&\bar{1}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{3}&\bar{1}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{3}&\bar{2}&\bar{1}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-\bar{3}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{3}&\bar{1}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{0}&-\bar{1}&-\bar{5}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{3}&\bar{1}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{4}&\bar{0}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to\bar{4}\cdot R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{3}&\bar{1}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{3}&\bar{1}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\bar{3}\cdot R_2-R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}&-\bar{5}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{array}\right)$$

תשובה סופית:

$$(x,y,z)=(\bar{0},\bar{2},\bar{0})\ .$$

שאלה 2

$$\begin{aligned} x+\bar{3}y+z&=\bar{1}\\ \bar{3}x+y+\bar{2}z&=\bar{2}\\ \bar{2}x+\bar{2}y+\bar{3}z&=\bar{4}\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - \bar{2}R_1]{R_2 \to R_2 - \bar{3}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{8} & -\bar{1} & -\bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{4} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \bar{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \bar{3} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - \bar{3} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$(x, y, z) = (\bar{0}, \bar{2}, \bar{0})$$

פתרון יחיד.

<u>שאלה 3</u>

$$\begin{aligned} x + \bar{2}y + z &= \bar{2} \\ \bar{3}x + y + \bar{4}z &= \bar{3} \\ \bar{2}x + \bar{4}y + \bar{4}z &= \bar{3} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & -\bar{5} & \bar{1} & -\bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & -\bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{6} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \bar{4}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{8} & \bar{4} & \overline{16} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{6} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{6} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \bar{4}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{8} & \overline{24} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - \bar{4}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & -\overline{10} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - \bar{2}\cdot R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{9} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right)$$

$$(x, y, z) = (\bar{5}, \bar{4}, \bar{3})$$

פתרון יחיד.

<u>שאלה 4</u> פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$. כמה פתרונות יש למערכת?

$$\begin{aligned} x + \bar{3}y + z =& \bar{1} \\ \bar{3}x + y + \bar{2}z =& \bar{2} \\ \bar{2}x + \bar{2}y + \bar{3}z =& \bar{4} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3+\bar{3}R_1]{R_2\to R_2+\bar{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{7} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \overline{11} & \bar{6} & \bar{7} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to\bar{3}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{6} & \overline{12} & \overline{12} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to\bar{4}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \overline{16} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-\bar{2}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\bar{3}R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

תשובה סופית:

$$(x,y,z)=(\bar{0},\bar{2},\bar{0})$$

פתרון יחיד.

<u>שאלה 5</u>

שיטה 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-\bar{3}\cdot R_1]{R_2\to R_2-\bar{4}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{2} & -\overline{11} & -\bar{3} \\ \bar{0} & -\bar{1} & -\bar{8} & \bar{1} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to \bar{2}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{6} & \bar{8} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-\bar{4}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\overline{10} & -\overline{15} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

פתרון:

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{2} \\ y+\bar{3}z &= \bar{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \bar{2} \\ y &= \bar{4}+(-\bar{3})z = \bar{4}+\bar{2}z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \bar{2} \\ y &= \bar{4}+\bar{2}z \end{aligned}\right\} z\in\mathbb{Z}_5 \ .$$

יש 5 פתרונות למערכת:

$$\begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{4} \\ \bar{0} \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{3} \\ \bar{2} \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{3} \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{2} \\ \bar{4} \end{pmatrix} .$$

שיטה 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_1+\bar{2}R_3]{R_2\to \bar{2}R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_2+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+\bar{3}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

פתרון:

$$\left.\begin{aligned} \bar{3}x &= \bar{1} \\ y+\bar{3}z &= \bar{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \bar{2}\cdot\bar{3}x &= \bar{2}\cdot\bar{1} \\ y &= \bar{4}+(-\bar{3})z = \bar{4}+\bar{2}z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \bar{2} \\ y &= \bar{4}+\bar{2}z \end{aligned}\right\} z\in\mathbb{Z}_5 \ .$$

יש 5 פתרונות למערכת:

$$\begin{pmatrix}\bar{2}\\ \bar{4}\\ \bar{0}\end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix}\bar{2}\\ \bar{1}\\ \bar{1}\end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix}\bar{2}\\ \bar{3}\\ \bar{2}\end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix}\bar{2}\\ \bar{0}\\ \bar{3}\end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix}\bar{2}\\ \bar{2}\\ \bar{4}\end{pmatrix} .$$

שאלה 6

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{5}\\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{6} & \bar{2}\\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{1}\\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{5} \end{array}\right) \xrightarrow[R_2\to R_2-\bar{2}\cdot R_1]{R_2\to R_2-\bar{3}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{6} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{1} & -\overline{17} & -\bar{5}\\ \bar{0} & \bar{1} & -\bar{9} & \bar{1} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{6} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{5} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{6} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & -\bar{1} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{6} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{6} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-\bar{4}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{6} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & -\overline{22}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{6} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{6} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{6}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{6} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2-\bar{6}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\overline{40}\\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{6}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{6} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{6}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{6} \end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x,y,z)=(\bar{2},\bar{6},\bar{6}) \ .$$

שאלה 7

שיטה 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2}\\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{3}\\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-\bar{2}\cdot R_1]{R_2\to R_2-\bar{3}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2}\\ \bar{0} & -\bar{5} & \bar{1} & -\bar{3}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & -\bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-\bar{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x,y,z)=(-\bar{2}y,y,\bar{2})=(\bar{3}y,y,\bar{2}) \ , \qquad y\in\mathbb{Z}_5 \ .$$

למערכת יש 5 פתרונות:

$$(\bar{0},\bar{0},\bar{2})\ ,\quad (\bar{3},\bar{1},\bar{2})\ ,\quad (\bar{1},\bar{2},\bar{2})\ ,\quad (\bar{4},\bar{3},\bar{2})\ ,\quad (\bar{2},\bar{4},\bar{2})\ .$$

שיטה 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to\bar{3}R_1+R_3]{R_2\to\bar{2}\cdot R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{5} & \bar{5} & \bar{6} & \bar{7} \\ \bar{5} & \overline{10} & \bar{7} & \bar{9} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to\bar{3}\cdot R_2+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x,y,z)=(-\bar{2}y,y,\bar{2})=(\bar{3}y,y,\bar{2})\ ,\qquad y\in\mathbb{Z}_5\ .$$

למערכת יש 5 פתרונות:

$$(\bar{0},\bar{0},\bar{2})\ ,\quad (\bar{3},\bar{1},\bar{2})\ ,\quad (\bar{1},\bar{2},\bar{2})\ ,\quad (\bar{4},\bar{3},\bar{2})\ ,\quad (\bar{2},\bar{4},\bar{2})\ .$$

שאלה 9

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+i & 1-i & 1+i \\ 1-i & 1+i & 1+3i \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to(1-i)R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2i & 2 \\ 1-i & 1+i & 1+3i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 1 \\ 1-i & 1+i & 1+3i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-(1-i)R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 1 \\ 0 & 2+2i & 4i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to(2-2i)R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 1 \\ 0 & 8 & 8+8i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to\frac{1}{8}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 1 \\ 0 & 1 & 1+i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+iR_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1+i \end{array}\right)$$

פתרון: $(z_1,z_2)=(i,1+i)$.

שאלה 10

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2-i & -i \\ 4-2i & -5 & -1-2i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-(2-i)R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2-i & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $(z_1,z_2)=\left(-\frac{i}{2}+\left(1+\frac{i}{2}\right)\cdot z_2,z_2\right)\ ,z_2\in\mathbb{C}$. למערכת יש אינסוף פתרונות.

שאלה 11

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-i & -3 & -i \\ 2 & -3-3i & 3-i \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to(1+i)R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3-3i & 1-i \\ 2 & -3-3i & 3-i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3-3i & 1-i \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה לכן למערכת אין פתרון.

שאלה 12

$$\left(\begin{array}{cc|c} i & 1-i & 2i \\ 1+2i & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to(-i)R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i-1 & 2 \\ 1+2i & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-(1+2i)R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i-1 & 2 \\ 0 & -3+3i & -1-4i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to(-3-3i)\cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i-1 & 2 \\ 0 & 18 & -9+15i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{18}\cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i-1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2}+\frac{5}{6}i \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+(1+i)\cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3}+\frac{i}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}-\frac{5}{6}i \end{array}\right)$$

$$x=\frac{2+i}{3}\ , \qquad y=\frac{-3+5i}{6}$$

שאלה 13

$$x=\frac{3+i}{5}\ , \qquad y=\frac{-3+4i}{10}$$

שאלה 14

$$x=\frac{1}{2}\ , \qquad y=\frac{-1}{2}+i$$

שאלה 15

א)

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

ב) $\underline{\mathbb{Z}_7}$

$$-\bar{1}=\bar{6}\ ,\qquad -\bar{2}=\bar{5}\ ,\qquad -\bar{3}=\bar{4}\ ,\qquad -\bar{4}=\bar{3}\ ,\qquad -\bar{5}=\bar{2}\ ,\qquad -\bar{6}=\bar{1}\ .$$

$\underline{\mathbb{Z}_{11}}$

$$-\bar{1}=\overline{10}\ ,\quad -\bar{2}=\bar{9}\ ,\quad -\bar{3}=\bar{8}\ ,\quad -\bar{4}=\bar{7}\ ,\quad -\bar{5}=\bar{6}\ ,\quad -\bar{6}=\bar{5}\ ,\quad -\bar{7}=\bar{4}\ ,\quad -\bar{8}=\bar{3}\ ,\quad -\bar{9}=\bar{2}\ ,\quad -\overline{10}=\bar{1}\ .$$

<u>שאלה 16</u>

א) **1)**

$$-\bar{3}x=\bar{2}\quad\Rightarrow\quad \bar{2}x=\bar{2}\quad\Rightarrow\quad x=\bar{1}\ .$$

2)

$$-\bar{3}x=\bar{2}\quad\Rightarrow\quad \bar{4}x=\bar{2}\quad\Rightarrow\quad \bar{2}\cdot\bar{4}x=\bar{2}\cdot\bar{2}\quad\Rightarrow\quad \bar{8}x=\bar{4}\quad\Rightarrow\quad x=\bar{4}\ .$$

3)

$$-\bar{3}x=\bar{2}\quad\Rightarrow\quad \bar{8}x=\bar{2}\quad\Rightarrow\quad \bar{7}\cdot\bar{8}x=\bar{7}\cdot\bar{2}\quad\Rightarrow\quad \overline{56}x=\overline{14}\quad\Rightarrow\quad x=\bar{4}\ .$$

ב) **קיום**

$\mathbb{F}$ שדה לכן קיים $a^{-1}\in\mathbb{F}$ כך ש- $a\cdot a^{-1}=1$. לכן

$$a^{-1}\cdot a\cdot x=a^{-1}\cdot b\quad\Rightarrow\quad x=a^{-}\cdot b\ .$$

$a^{-1}, b \in \mathbb{F}$ לכן גם $a^{-1} \cdot b \in \mathbb{F}$ לכן קיים פתרון בשדה $\mathbb{F}$.

יחידות

נניח שקיים יותר מפתרון אחד, כלומר קיימים $x_1, x_2 \in \mathbb{F}$ כך ש- $ax_1 = b$ ו- $ax_2 = b$. $\mathbb{F}$ שדה לכן קיים איבר הנגדי $-ax_2$ ואיבר הנגדי $-b$. לכן

$$ax_1 + (-ax_2) = b + (-b) = 0 \quad \Rightarrow \quad ax_1 - ax_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot (x_1 - x_2) = 0 \ .$$

$a \neq 0$ לכן $x_1 - x_2 = 0$ לכן $-x_2$ הוא האיבר הנגדי של x_1: $-x_2 = -x_1$. לכן $x_1 = x_2$ בסתירה לכך שקיים יותר מפתרון אחד.

שאלה 17

א) <u>שלב הבסיס:</u>

$\mathbb{F}$ לכן אם $a_1, b \in \mathbb{F}$ אז $a_1 \cdot b \in \mathbb{F}$.

<u>שלב האינדוקציה:</u>

הנחת האינדוקציה. נניח כי $a_1, \ldots, a_k, b \in \mathbb{F}$ ומתקיים $(a_1 + \ldots + a_k)\, b = a_1 b + \ldots a_k b \in \mathbb{F}$. נסמן $c = a_1 b + \ldots a_k b$. נניח כי $a_{k+1} \in \mathbb{F}$. גם $b, c \in \mathbb{F}$ לכן $a_{k+1} b \in \mathbb{F}$ (שדה סגורה ביחס לכפל) ו- $c + a_{k+1} b \in \mathbb{F}$ (שדה סגורה ביחס לחיבור). לכן

$$c + a_{k+1} b = a_1 b + \ldots a_k b + a_{k+1} b \in \mathbb{F} \ .$$

ב) $\mathbb{F}$ שדה לכן לכל $a \in \mathbb{F}$ קיים איבר ההופכי b כך ש- $ab = 1$.

נניח כי קיים יותר מאיבר הופכי אחד לכל $a \in \mathbb{F}$. כלומר נניח כי קיים $b_1, b_2 \in \mathbb{F}$, $b_1 \neq b_2$ כך ש- $ab_1 = 1$ ו- $ab_2 = 1$. $ab_2 \in \mathbb{F}$ לכן קיים איבר ההגדי $-ab_2 = -1$. לפיכך

$$ab_1 + (-ab_2) = 1 + (-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad ab_1 + (-ab_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad ab_1 + (-ab_2) + ab_2 = 0 + ab_2 \quad \Rightarrow \quad ab_1 = ab_2$$

$a \in \mathbb{F}$ לכן קיים איבר ההופכי a^{-1} כך ש- $a^{-1} a = 1$. נכפיל ב- a^{-1} ונקבל

$$b_1 = b_2$$

בסתירה לכך ש- $b_1 \neq b_2$.

ג) $a \in \mathbb{F}$ לכן קיים איבר הנגדי $-a$ כך ש- $a + (-a) = 0$.

$$a + a = a \quad \Rightarrow \quad a + a + (-a) = a + (-a) \quad \Rightarrow \quad a + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \ .$$

ד) נניח ש- $a, b \in \mathbb{F}$ ו- $ab = 0$. נניח ש- $a \neq 0$. אז קיים איבר הופכי $a^{-1} \in \mathbb{F}$ כך ש- $a \cdot a^{-1} = 1$. לכן

$$ab = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a^{-1} ab = a^{-1} \cdot 0 \qquad \Rightarrow \qquad 1 \cdot b = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b = 0 \ .$$

נניח ש- $b \neq 0$. אז קיים איבר הופכי $b^{-1} \in \mathbb{F}$ כך ש- $b \cdot b^{-1} = 1$. לכן

$$ab = 0 \quad \Rightarrow \quad b^{-1}ab = a^{-1}\cdot 0 \quad \Rightarrow \quad ab^{-1}b = a^{-1}\cdot 0 \quad \Rightarrow \quad a\cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 .$$

נניח ש- $a \neq 0, b \neq 0$. אז קיים איבר ההופכי $a^{-1} \in \mathbb{F}$ ואיבר ההופכי $b^{-1} \in \mathbb{F}$ כך ש- $a^{-1}a = 1$ ו- $b^{-1}b = 1$.

$$ab = 0 \quad \Rightarrow \quad a^{-1}ab = a^{-1}0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

בסתירה לכך ש- $b \neq 0$.

ה) $a, b \in \mathbb{F}$. לכן קיים $-a \in \mathbb{F}$ כך ש- $a + (-a) = 0$. לפי חוק הפילוג

$$(-a)b + ab = ((-a) + a)b = 0 \cdot b = 0$$

לכן $(-a)b$ האיבר הנגדי של האיבר ab.

שאלה 18

א) <u>לא שדה</u>

דוגמה נגדית: $a = 2 \in \mathbb{Z}$ אבל לא קיים $a^{-1} \in \mathbb{Z}$ כך ש- $aa^{-1} = 1$.

ב) <u>לא שדה</u>

חוק החילוף לא מתקיים: $a \oplus b = \dfrac{a-b}{3}$, $b \oplus a = \dfrac{b-a}{3}$. לכן $a \oplus b \neq b \oplus a$.
קשירות וכל האקסיומות נכונות, משום שכל התוצאות שיתקבלו שייכות למספרים הרציונליים.

ג) <u>לא שדה</u>

נשים לב שלאיבר 3, למשל, אין הופכי ב - $\mathbb{F}$. אכן, נניח שקיים $a + b\sqrt{2}$ כך ש-

$$3 \odot (a + b\sqrt{2}) = 1 .$$

מכאן $a = \dfrac{1}{3}, b = 0$. בסתירה לכך ש - $a \in \mathbb{Z}$.

ד) <u>שדה</u>

נסמן $\mathbb{F} = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ ביחס לפעולות החיבור והכפל הרגילות.

יהיו $x, y, z \in \mathbb{F}$. אכן

$$x = a + b\sqrt{2} , \qquad y = c + d\sqrt{2} , \qquad z = e + f\sqrt{2} , \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q} .$$

1) $\mathbb{F}$ סגורה תחת חיבור:

$$x + y = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} .$$

$a + c \in \mathbb{Q}$, $b + d \in \mathbb{Q}$ לכן $x + y \in \mathbb{F}$.

2) סגורה תחת כפל:

$$x \cdot y = (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = ac + ad\sqrt{2} + bc\sqrt{2} + 2bd \ .$$

$ac + 2bd \in \mathbb{Q}$, $ad + bc \in \mathbb{Q}$, לכן $x \cdot y \in \mathbb{F}$.

3) חוק החילוף I:

$$x + y = y + x$$

4) חוק החילוף II:

$$x \cdot y = y \cdot x$$

5) חוק הקיבוץ I:

$$(x + y) + z = x + (y + z) \ .$$

6) חוק הקיבוץ II:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

7) חוק הפילוג:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \ .$$

8) קיום איבר ניוטרלי:

קיים איבר $\bar{0} \in \mathbb{F}$ כך ש- $x + \bar{0} = x$:

$$\bar{0} = 0 + 0 \cdot \sqrt{2} \ .$$

9) קיום איבר יחיד (האיבר ניוטרל לגבי כפל):

קיים איבר $\bar{1} \in \mathbb{F}$ כך ש- $x \cdot \bar{1} = x$:

$$\bar{1} = 1 + 0 \cdot \sqrt{2} \ .$$

10) קיום איבר נגדי:

לכל $x \in \mathbb{F}$ קיים איבר נגדי $(-x) \in \mathbb{F}$ כך ש- $x + (-x) = \bar{0}$:

$$-x = -a - b\sqrt{2} \ .$$

11) קיום איבר הופכי:

לכל $x \in \mathbb{F}$ כך ש $x \neq \bar{0}$ קיים איבר $x^{-1} \in \mathbb{F}$ המקיים $x \cdot x^{-1} = 1$:

$$x^{-1} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2} \ .$$

$\frac{a}{a^2-2b^2} \in \mathbb{Q}$, $\frac{-b}{a^2-2b^2} \in \mathbb{Q}$ לכן $x^{-1} \in \mathbb{Q}$.

שאלה 19

א)

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

ב) $\underline{\mathbb{Z}_7}$

$$-\bar{2}=\bar{5}\ ,\qquad -\bar{3}=\bar{4}\ ,\qquad -\bar{4}=\bar{3}\ ,\qquad -\bar{5}=\bar{2}\ ,\qquad -\bar{6}=\bar{1}\ .$$

$\underline{\mathbb{Z}_{11}}$

$$-\bar{2}=\bar{9}\ ,\qquad -\bar{3}=\bar{8}\ ,\qquad -\bar{4}=\bar{7}\ ,\qquad -\bar{5}=\bar{6}\ ,\qquad -\bar{6}=\bar{5}\ .$$