מחלקה למדעי המחשב

23/05/24 ט"ו באייר תשפ"ד
09 : 00 – 12 : 00

אלגברה ליניארית 1 למדמ"ח

מועד ב'

מרצים: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר, ד"ר מרינה ברשדסקי.

תשפ"ד סמסטר א'

השאלון מכיל 11 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.
- יש לציין את השאלות שעניתם עליהן בתחילת המחברת.

==

שאלה 1 **(25 נקודות)**

א) (12 נקודות) נתונה המערכת הליניארית הבאה:

$$\begin{aligned} x+(k+2)y+3z&=4\\ (k+1)x+(k+2)y+(k-4)z&=k+10\\ (k+2)x+(2k+4)y+(2k+3)z&=k+6 \end{aligned}$$

עבור אילו ערכי הפרמטר k למערכת

- פתרון יחיד,
- אין פתרון,
- אינסוף פתרונות.

במקרה של אינסוף פתרונות רשמו את הפתרון הכללי.

ב) (4 נקודות) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&k+2&3\\k+1&k+2&k-4\\k+2&2k+4&2k+3\end{pmatrix}$. לאילו ערכי הפרמטר k המטריצה A הפיכה?

ג) (4 נקודות) לאילו ערכי הפרמטר k מתקיים $\dim\left(\text{Nul}(A)\right)>0$.

תהיינה $B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו:

ד) (3 נקודות) אם $BC=C$ ו- $C\neq 0$ אז $B=I$.

ה) (2 נקודות) אם $BC=5I$ אז B הפיכה ו- C הפיכה.

שאלה 2 **(25 נקודות)**

א) (9 נקודות) פתרו את מערכת המשוואות הבאה מעל שדה $\mathbb{Z}_5$ $\begin{cases}\bar{3}x+\bar{2}y+z&=\bar{4}\\ \bar{4}x+\bar{3}y-\bar{2}z&=\bar{1}\\ x+\bar{2}y+\bar{2}z&=\bar{1}\end{cases}$.

רשמו את כל הפתרונות שלה.

ב) (8 נקודות) נתונות הקבוצות הבאות:

$$W_1=\left\{A\in\mathbb{R}^{2\times2}\middle|A=\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}\quad a,b,c\in\mathbb{R}\right\}\ ,\qquad W_2=\left\{A\in\mathbb{R}^{2\times2}\middle||A|=1\right\}$$

לכל אחת מהקבוצות W_1,W_2 בדקו אם היא תת מרחב ווקטורי של $\mathbb{R}^{2\times2}$. נמקו את תשובתכם.

ג) (8 נקודות) מצאו בסיס ומימד של כל אחד מתתי המרחבים שמצאתם בסעיף ב'.

שאלה 3 **(25 נקודות)**

א) (8 נקודות) נתונה הקבוצה של ווקטורים של $\mathbb{R}_3[x]$:

$$B=\left\{b_1=100+2x+4x^2+6x^3\ ,\quad b_2=70x+2x^2+x^3\ ,\quad b_3=96x^2+2x^3\ ,\quad b_4=4x^3\right\}$$

הוכיחו ש- B מהווה בסיס של $\mathbb{R}_3[x]$.

ב) (8 נקודות) נתון הווקטור $w\in\mathbb{R}_3[x]$:

$$w=100+2x+x^2+10x^3\ .$$

מצאו את ווקטור הקואורדינטות של w ביחס לבסיס B, כלומר מצאו את $[w]_B$.

ג) (5 נקודות) נניח כי $A\in\mathbb{R}^{3\times 10}$ כך ש- $\dim\left(\mathrm{Nul}(A)\right)=7$. הוכיחו כי העמודות של A פורשות את $\mathbb{R}^3$.

ד) (4 נקודות) נניח כי $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ויהיו u_1,u_2,u_3 ווקטורים של $\mathbb{R}^n$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית: אם $\{Bu_1,Bu_2,Bu_3\}$ ת"ל אז $\{u_1,u_2,u_3\}$ ת"ל.

שאלה 4 **(25 נקודות)**

א) (6 נקודות) במרחב וקטורי $\mathbb{R}^4$ נתונים הוקטורים

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\2\end{pmatrix}\ ,\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\0\end{pmatrix}\ ,\mathrm{u}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\mathrm{u}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\ .$$

נסמן $V=\mathrm{span}\left(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\right)$, $U=\mathrm{span}\left(\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2\right)$

מצאו בסיס ומימד של V, U.

ב) (6 נקודות) מצאו בסיס ומימד של $V+U$.

ג) (6 נקודות) מצאו בסיס ומימד של $V\cap U$.

תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו:

ד) (4 נקודות) אם A הפיכה ו- $B\neq 0$ אז AB הפיכה.

ה) (3 נקודות) אם A הפיכה ו- $B\neq 0$ לא הפיכה אז $A+B$ לא הפיכה.

שאלה 5 (25 נקודות)

תהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ העתקה לינארית שמוגדרת

$$T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b & b+2c\\ 3b+5c & a-2c\end{pmatrix}$$

א) (5 נקודות) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

ב) (4 נקודות) האם T "על" ?

ג) (4 נקודות) האם T חד-חד-ערכית?

ד) (7 נקודות) נתון הבסיס

$$B=\left\{b_1=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\ b_2=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix},\ b_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

של $\mathbb{R}^3$ והבסיס

$$C=\left\{c_1=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\ c_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ c_3=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ c_4=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$$

של $\mathbb{R}^{2\times 2}$. מצאו את המטריצה המייצגת $[T]_C^B$ לפי הבסיס B והבסיס C.

ה) (5 נקודות) נתון הווקטור $u=5b_1+3b_2+6b_3$. מצאו את $[T(u)]_C$.

פתרונות

שאלה 1

א)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+2 & 3 & 4 \\ k+1 & k+2 & k-4 & k+10 \\ k+2 & 2k+4 & 2k+3 & k+6 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-(k+2)R_1]{R_2\to R_2-(k+1)R_1} \begin{pmatrix} 1 & k+2 & 3 & 4 \\ 0 & -k(k+2) & -2k-7 & 6-3k \\ 0 & -k(k+2) & -k-3 & -3k-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+2 & 3 & 4 \\ 0 & -k(k+2) & -2k-7 & 6-3k \\ 0 & 0 & k+4 & -8 \end{array}\right)$$

אם $k=0$ נקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to 7R_3+4R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה ולכן לא קיים פתרון.

אם $k=-2$ נקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to 3R_3+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

אין שורת סתירה ויש משתנה חופשי לכן יש אינסוף פתרונות. פתרון הכללי:

$$(x,y,z)=(16,y,-4)\ , \quad y\in\mathbb{R}\ .$$

אם $k=-4$ נקבל: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & 1 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$. קיבלנו שורת סתירה ולכן לא קיים פתרון.

עבור $k\neq 0,-2,-4$ קיים פתרון יחיד.

ב)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & k+2 & 3 \\ k+1 & k+2 & k-4 \\ k+2 & 2k+4 & 2k+3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & k+2 & 3 \\ 0 & -k(k+2) & -2k-7 \\ 0 & 0 & k+4 \end{pmatrix}$$

עבור $k\neq 0,-2,-4$ כל העמודות מובילות ולכן A הפיכה.

ג)

$$\dim\left(\text{Nul}(A)\right) = \text{"מספר עמודות הלא מובילות במדורגת"}$$

אם $k=0$ המדורגת המתקבלת הינה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן $\dim\left(\text{Nul}(A)\right)=1$.

אם $k=-2$ המדורגת המתקבלת הינה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן $\dim\left(\text{Nul}(A)\right)=1$.

אם $k=-4$ המדורגת המתקבלת הינה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן $\dim\left(\text{Nul}(A)\right)=1$.

לסיכום $\dim\left(\text{Nul}(A)\right)=1>0$ עבור $k=0,-2,-4$ אחרת $\dim\left(\text{Nul}(A)\right)=0$.

ד) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $B,C\in\mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הרי

$$BC=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=C \qquad B\neq I\ .$$

ה) טענה נכונה. הוכחה:

$$BC=5I \quad\Rightarrow\quad |BC|=|5I|=5^n \quad\Rightarrow\quad |B||C|=5^n\ .$$

נניח כי C לא הפיכה. אז $|C|=0$ ולכן נקבל $|B|\cdot 0=5^n \Leftarrow 5^n=0$. בסתירה לכך כי $5^n>0$.

שאלה 2

א) **(9 נקודות)**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{3} & -\bar{2} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to\bar{2}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-\bar{4}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to\bar{3}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-\bar{3}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה ולכן למערכת אין פתרון.

ב) (8 נקודות) נבדוק אם $W_1=\left\{A\in\mathbb{R}^{2\times 2}\middle|A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\quad a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ תת מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

1) $W_1 \ni \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

2) יהיו $W_1 \ni A=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & -a_1\end{pmatrix}$, $W_1 \ni B=\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & -a_2\end{pmatrix}$. אז

$$A+B=\begin{pmatrix}a_1+a_2 & b_1+b_2\\ c_1+c_2 & -a_1-a_2\end{pmatrix}\in W_1 \ .$$

3) יהיו $W_1 \ni A=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & -a_1\end{pmatrix}$ ו- $k\in\mathbb{R}$ סקלר. אז

$$kA=k\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & -a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_1 & kb_1\\ kc_1 & -ka_1\end{pmatrix}\in W_1 \ .$$

לפיכך W_1 תת מרחב.

נבדוק אם $W_2=\left\{A\in\mathbb{R}^{2\times 2}\middle||A|=I\right\}$ תת מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

ווקטור האפס של $\mathbb{R}^{2\times 2}$ לא ב- W_2 לכן W_2 אינו תת-מרחב של W_2.

ג) (8 נקודות) נמצא בסיס של W_1:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \ .$$

בסיס של W_1:

$$B_{W_1}=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\} \ .$$

$\dim(W_1)=3$.

שאלה 3

א) נרשום u_1,u_2,u_3,u_4 כווקטורים ע"י האיזומורפיזם הטבעי:

$$u_1=\begin{pmatrix}100\\ 2\\ 4\\ 6\end{pmatrix}\ ,\quad u_2=\begin{pmatrix}0\\ 70\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\ ,\quad u_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 96\\ 2\end{pmatrix}\ ,\quad u_4=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 4\end{pmatrix}\ .$$

נרשום את המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 70 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 96 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

A משולשית ולכן הדטרמיננטה שווה למכפלה של איברים על האלכסון.
$|A| \neq 0 \Leftarrow$ העמודות בת"ל $\Leftarrow \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ בת"ל.

ב)

$$w = 100 + 2x + x^2 + 10x^3 = \left(100 + 2x + x^2 + 6x^3\right) + 4x^3 = b_1 + b_4 = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 + 1 \cdot b_4$$

לכן

$$[w]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B \ .$$

ג) $A \in \mathbb{R}^{3\times 10}$. נזכיר משפט הדרגה:

$$r(A) + \dim\left(\text{Nul}(A)\right) = 10 \ .$$

לפיכך לפי משפט הדרגה:

$$r(A) + 7 = 10 \qquad \Rightarrow \qquad r(A) = 3 \ .$$

לכן במדורגת המתקבלת מ- A יש 3 עמודות מובילות. לכן במדורגת יש איבר מוביל בכל שורה ועמודות A פורשות את $\mathbb{R}^3$.

ד) טענה נכונה. הוכחה:
נתון $\{Bu_1, Bu_2, Bu_3\}$ ת"ל לכן קיימים סקלרים k_1, k_2, k_3 שלא כולם אפסים כך ש-

$$k_1 B u_1 + k_2 B u_2 + k B u_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B\left(k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3\right) = 0 \ .$$

$|B| \neq 0$ לכן B הפיכה לכן

$$B^{-1} B\left(k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = 0 \ .$$

דהיינו צירוף ליניארי של u_1, u_2, u_3 אם מקדמים לא כולם אפסים השווה לווקטור האפס. לכן $\{u_1, u_2, u_3\}$ ת"ל.

<u>שאלה 4</u>

א) בסיס של V:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של V:

$$B(V) = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\}$$

$\dim(V) = 2$.
בסיס של U:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של U:

$$B(U) = \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2\}$$

$\dim(U) = 2$.

ב) לפי משפט המימדים:

$$\dim(V+U) = \dim(V) + \dim(U) - \dim(V \cap U)$$

כיוון ש $\dim(V) = 2$, $\dim(U) = 2$ ו $\dim(V+U) = 4$, אז

$$\dim(V \cap U) = 0 \ .$$

לכן $V \cap U$ מורכב מוקטור האפס:

$$V \cap U = \{\bar{0}\} \ .$$

ג) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A = I, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. הרי A הפיכה ו- $B \neq 0$ אבל

$$AB = I \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

לא הפיכה.

ד) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A = I, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. הרי A הפיכה ו- $B \neq 0$ אבל

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |A+B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \ .$$

כלומר $|A+B| \neq 0$ ולכן $A+B$ הפיכה.

ה) הטענה נכונה. הוכחה:

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ לכן ל- A יש n עמודות. נרשום

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

כאשר $u_i \in \mathbb{R}^n$.
A הפיכה $\Leftarrow$ העמודות של A בת"ל $\Leftarrow$ $\dim\left(\{u_1, \cdots, u_n\}\right) = n$ $\Leftarrow$ עמודת A מהווה בסיס של $\mathbb{R}^n$.

שאלה 5

א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית של ההעתקה הינה

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(e_1)]_E & [T(e_2)]_E & [T(e_3)]_E \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ב) נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 + 2R+2]{R_3 \to R_3 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לא כל השורות מובילות לכן ההעתקה אינה "על " $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

ג) כל העמודות מובילות $\Leftarrow$ ההעתקה חד-חד-ערכית.

ד)

$$T(b_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; T(b_2) = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \; T(b_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 13 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= e_3+e_4 \\ c_2 &= e_3 \\ c_3 &= e_2 \\ c_4 &= e_1+e_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} e_1 &= c_4-c_3 \\ e_2 &= c_3 \\ e_3 &= c_2 \\ e_4 &= c_1-c_2 \end{aligned}\right\}$$

$$T(b_1) = 2e_1+2e_4 = 2(c_4-c_3)+2(c_1-c_2) = 2c_1-2c_2-2c_3+2c_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}_C$$

$$T(b_2) = 8e_1+3e_2+9e_3+2e_4 = 8(c_4-c_3)+3c_3+9c_2+2(c_1-c_2) = 2c_1+7c_2-5c_3+8c_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}_C$$

$$T(b_3) = 3e_1+5e_2+13e_3-3e_4 = 3(c_4-c_3)+5c_3+13c_2-3(c_1-c_2) = -3c_1+16c_2+2c_3+3c_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 16 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_C$$

לפיכך

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(b_1)]_C & [T(b_2)]_C & [T(b_3)]_C \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -2 & 7 & 16 \\ -2 & -5 & 2 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

ה) $[u]_B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$[T(u)]_C = [T]_C^B[u]_B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -2 & 7 & 16 \\ -2 & -5 & 2 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 107 \\ -13 \\ 52 \end{pmatrix}_C$$