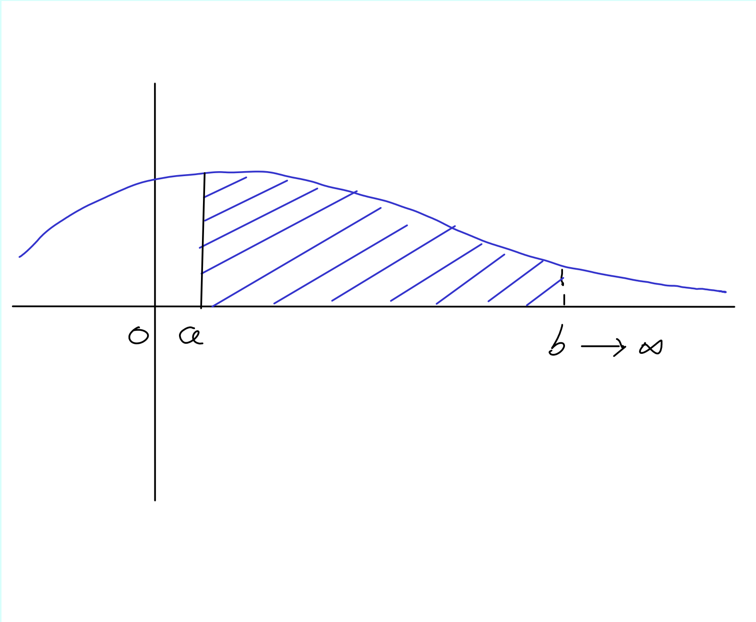
שיעור 15
אינטגרל לא אמיתי והערכת סכומים בעזרת אינטגרל מסוים

15.1 אינטגרל לא אמיתי

הגדרה 15.1 אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

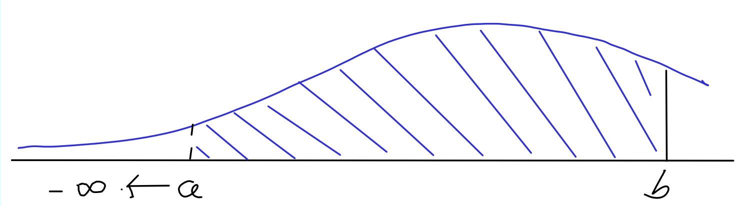
1. נניח שפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע (a,∞). אז

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$



2. נניח שפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $(-\infty,b)$. אז

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$



.3

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

לכל $-\infty < c < \infty$.

אם התשובה של האינטגרל הלא אמיתי היא מספר סופי אז אומרים שהאינטגרל מתכנס, אחרת אומרים שהאינטגרל מתבדר.

דוגמה:
אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון חשבו את $I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$.

פתרון:

$$I = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln|b| - \ln|1| = \infty\ .$$

האינטגרל מתבדר. ■

דוגמה:
אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון חשבו את $I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$.

פתרון:

$$I = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-1}{b} + 1\right] = 1\ .$$

האינטגרל מתכנס. ■

דוגמה:
אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון חשבו את $I = \int_{-\infty}^{0} \cos x\,dx$.

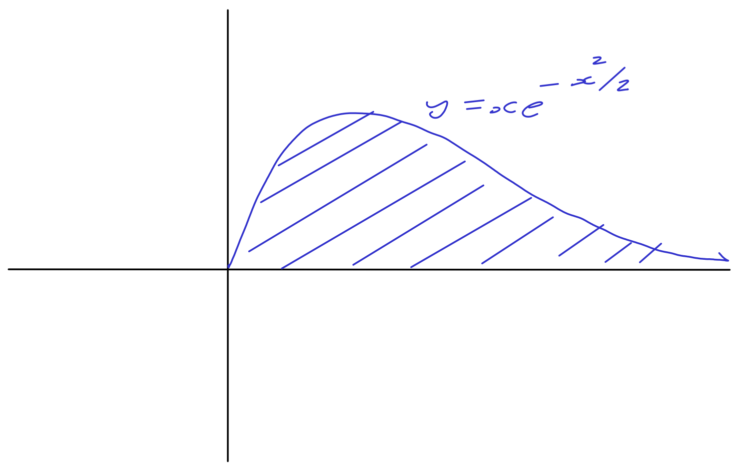
פתרון:

$$I = \lim_{a\to -\infty} \int_a^0 \cos x\, dx = \lim_{a\to -\infty} [\sin 0 - \sin a] = \lim_{a\to -\infty} \sin(a)$$

לא קיים. האינטגרל לא מתכנס. ■

דוגמה:
אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון חשבו את השטח החסום ע"י $f(x) = xe^{-x^2/2}$, $y = 0$ $x \geq 0$.

פתרון:



$$S = \lim_{b\to\infty} \int_0^b xe^{-x/2} \ .$$

נגדיר

$$u = \frac{x^2}{2} \ , \qquad u' = x \ .$$

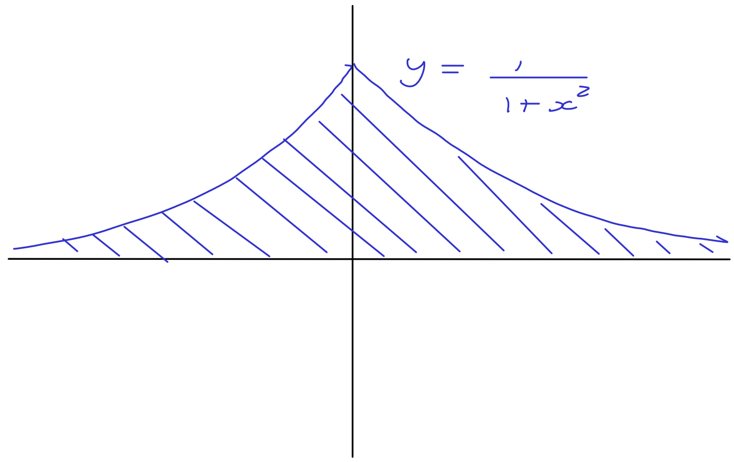
כך

$$\begin{aligned} S &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b u' e^{-u}\, dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-u}\, du \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-b} + 1\right] \\ &= 1 \ . \end{aligned}$$

האינטגרל מתבדר. ■

דוגמה:
אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון חשבו את השטח החסום ע"י $y = \dfrac{1}{x^2+1}$, $y = 0$ $x \geq 0$.

פתרון:



$$\begin{aligned}
S &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx \\
&= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\, dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{x^2+1}\, dx + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{x^2+1}\, dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} \left[\arctan 0 - \arctan a\right] + \lim_{b\to\infty} \left[\arctan b - \arctan 0\right] \\
&=0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 \\
&=\pi \ .
\end{aligned}$$

■

משפט 15.1 מבחן השוואה הראשון

נניח שפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפות בקטע $[a,\infty)$ ולכל x השייך לקטע מתקיים

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \ .$$

אז

1. אם $\int_a^{\infty} g(x)\, dx$ מתכנס אז גם $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ מתכנס.
2. אם $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ מתבדר אז גם $\int_a^{\infty} g(x)\, dx$ מתבדר.

דוגמה:

מבחן השוואה הראשון האם מתכנס האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(1+3^x)}\, dx$

פתרון:

נגדיר $f(x) = \dfrac{1}{x^2(1+3^x)}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. לכל $x \geq 1$ מתקיים $f(x) \leq g(x)$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1$$

מתכנס, לכן גם

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2(1+3^x)}dx$$

מתכנס. ∎

משפט 15.2 מבחן השוואה השני

נניח שפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפות בקטע $[a,\infty)$, $f(x)>0$, $g(x)>0$, וגם

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = k$$

כאשר $0<k<\infty$. אז $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ ו- $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתכנסים או מתבדרים בו זמנים.

דוגמה:

מבחן השוואה השני האם האינטגרל $\displaystyle\int_1^\infty \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)\,dx$ מתכנס?

פתרון:

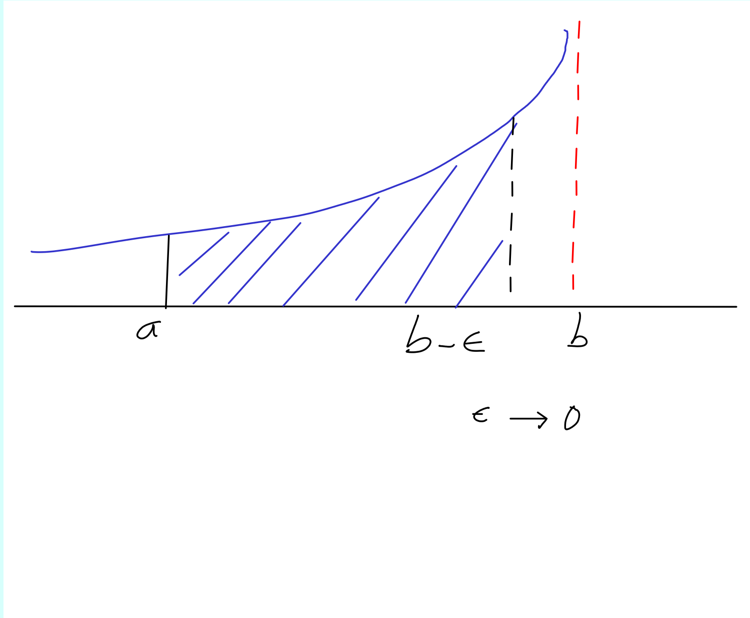
נגדיר $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. אז

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = \ln e = 1 < \infty$$

$\displaystyle\int_1^\infty g(x)\,dx$ מתכנס, אז גם $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ מתכנס. ∎

הגדרה 15.2 אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

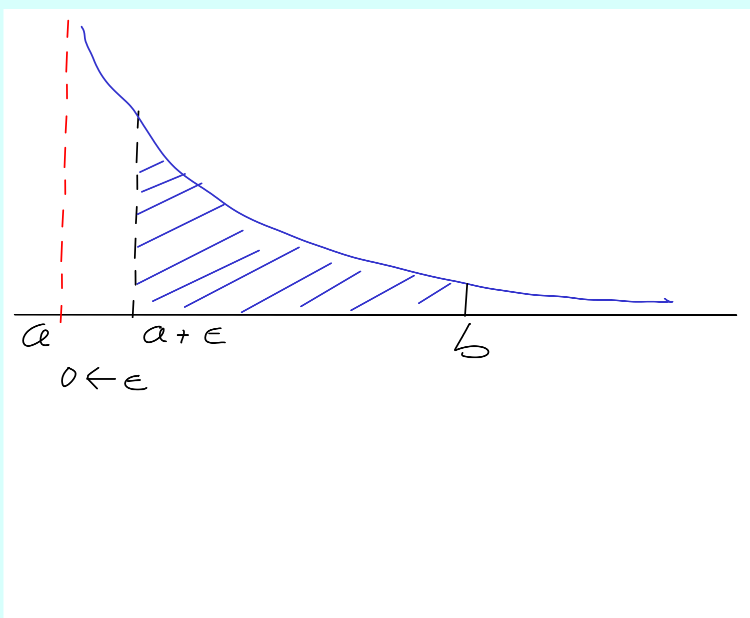
מצב 1. פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ ו- $\displaystyle\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$



אז

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx \ .$$

מצב 2. פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ ו- $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$



אז

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx \ .$$

אם התשובה של האינטגרל הלא אמיתי היא מספר סופי אז אומרים שהאינטגרל מתכנס, אחרת אומרים שהאינטגרל מתבדר.

דוגמה:

אינטגרל לא אמיתי מסוג שני חשבו את האינטגרל $I=\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$

פתרון:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{1}{\epsilon}-1\right] \\
&= \infty
\end{aligned}$$

■

דוגמה:

אינטגרל לא אמיתי מסוג שני חשבו את האינטגרל $I=\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

פתרון:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{3-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^{3-\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\arcsin\left(\frac{3-\epsilon}{3}\right)-\arcsin 0\right] \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\arcsin\left(\frac{3-\epsilon}{3}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

■

15.2 הערכת סכומים בעזרת אינטגרל מסוים

משפט 15.3 אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

תהי $f(x)$ פונקציה חיובית, יורדת מונוטונית ורציפה בחצי הישר $x\geq 1$. אזי מתקיים

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx < \sum_{k=1}^n f(k) < \int_1^{n+1} f(x)\,dx + f(1)\ .$$

תהי $f(x)$ פונקציה חיובית, עולה מונוטונית ורציפה בחצי הישר $x\geq 0$. אזי מתקיים

$$\int_0^{n} f(x)\,dx < \sum_{k=1}^n f(k) < \int_0^{n} f(x)\,dx + f(n)\ .$$

דוגמה:
הערכת סכומים הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}<2\ .$$

פתרון:
נגדיר

$$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

פונקציה יורדת.

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)<\int_1^{n+1}f(x)\,dx+f(1)=\left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^n+f(1)=-\frac{2}{\sqrt{n}}+2+1=-\frac{2}{\sqrt{n}}+3<3\ .$$

לכן

$$1+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)<3\qquad\Rightarrow\qquad f(2)+f(3)+\ldots+f(n)<2\qquad\Rightarrow\qquad\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}<2\ .$$

■

דוגמה:
הערכת סכומים הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים

$$\frac{n^3}{3}<1^2+2^2+\ldots+n^2<\frac{n^3}{3}+n^2\ .$$

פתרון:
נגדיר

$$f(x)=x^2$$

פונקציה עולה.

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)<\int_0^n f(x)\,dx+f(n)\ .$$

לכן

$$1^2+2^2+\ldots+n^2<\int_0^n x^2dx+n^2=\frac{n^3}{3}+n^2\ . \tag{1*}$$

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)>\int_0^n f(x)\,dx\ .$$

לכן

$$1^2+2^2+3^2\ldots+n^2>\frac{n^3}{3}\ . \tag{2*}$$

■