עבודה עצמית 1
סדרות

שאלה 1 רשום את חמשת האיברים הראשונים של כל אחת מהסדרות הבאות:

א) $a_n = 2^{n-1} - n^2 + 1$

ב) $a_{n+1} = 2a_n + 3(-1)^n$

ג) $a_n = (-1)^n + 1$

ד) $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

שאלה 2 רשום את האיבר הכללי של כל אחת מהסדרות הבאות:

א) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \ldots$

ב) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$

ג) $2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, \ldots$

ד) $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$

שאלה 3 בדקו אם הסדרות הבאות חסומות :

א) $a_n = \frac{n^2+1}{n^3+10n+1}$

ב) $a_n = \frac{n^2+1}{n+2}$

ג) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$

ד) $a_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right)$

ה) $a_n = \sin(n)$

שאלה 4 בדקו את המונוטוניות של הסדרות הבאות:

א) $a_n = \frac{2^n}{n}$

ב) $a_n = n^2 + n - 5$

ג) $a_n = \frac{n}{2n^2 + 1}$

ד) $a_n = \sin(n)$.

ה) $a_n = \sqrt{n} + \frac{1}{n}$.

שאלה 5 בדקו אם הסדרות הבאות חסומות :

א) $a_n = \frac{2n^2 + 3}{n^3 + 8n + 2}$

ב) $a_n = \frac{3n^2 + 2}{n + 4}$

ג) $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n}$

ד) $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

ה) $a_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

ו) $a_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right)$

שאלה 6 בדקו את המונוטוניות של הסדרות הבאות:

א) $a_n = \frac{3^n}{n}$

ב) $a_n = n^2 + n - 7$

ג) $a_n = \frac{3n}{4n^2 + 5}$

ד) $a_n = \cos(n)$

ה) $a_n = \sqrt{n} + \frac{1}{n}$

שאלה 7 הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{n+5}{4n^2+n}$ יורדת מונוטונית.

שאלה 8 הסדרה a_n נתונה על ידי נוסחת הנסיגה הבאה:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \ , \qquad a_1 = 3 \ .$$

א) הוכיחו כי לכל n מתקיים $a_n \geq 1$.

ב) הוכיחו כי הסדרה a_n מונוטונית יורדת.
רמז: לכל $x, y \geq 0$ מתקיים כי $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

ג) הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת וחשבו את גבולה.

שאלה 9 סדרה נתונה על ידי נוסחאת נסיגה (רקורסיה)

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \sqrt{6 + a_n} \\ a_1 &= 1 \end{cases}$$

א) הוכיחו כי לכל $n \geq 1$ מתקיים $1 \leq a_n < 3$.

ב) הוכיחו כי a_n עולה מונוטונית.

ג) הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

שאלה 10 סדרה נתונה על ידי נוסחאת נסיגה (רקורסיה)

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \sqrt{3a_n} \\ a_1 &= 1 \end{cases}$$

א) הוכיחו כי הסדרה מונוטונית עולה.

ב) הוכיחו כי הסדרה חסומה.

ג) הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

שאלה 11 הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{(n+1)^4}{n^5}$ יורדת מונוטונית.

שאלה 12 נניח כי a_n מתבדרת ו- b_n מתבדרת. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית: $a_n b_n$ מתבדרת.

שאלה 13 נניח כי a_n סדרה מתכנסת ו- b_n סדרה מתבדרת. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית: $a_n b_n$ מתבדרת.

שאלה 14 הוכיחו כי הסדרה $a_n = \dfrac{(n+2)^3}{n^6}$ יורדת מונוטונית.

שאלה 15 סדרה נתונה על ידי נוסחאת נסיגה (רקורסיה)

$$\begin{cases} a_{n+1} &= -\sqrt{24-2a_n} \\ a_1 &= 11 \end{cases}$$

א) הוכיחו כי לכל $n \geq 2$ מתקיים $-6 < a_n < 0$.

ב) הוכיחו כי a_n יורדת מונוטונית.

ג) הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

שאלה 16 נניח כי a_n מתבדרת ו- b_n מתבדרת. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית: a_nb_n מתכנסת.

שאלה 17 נניח כי a_n סדרה מתכנסת ו- b_n סדרה מתבדרת. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית: a_nb_n מתכנסת.

פתרונות

שאלה 1

א) $a_n = 2^{n-1} - n^2 + 1$

$$a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_3 = -4,\ a_4 = -7,\ a_5 = -8\ .$$

ב) $a_{n+1} = 2a_n + 3(-1)^n$

$$a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_3 = 1,\ a_4 = -1,\ a_5 = 1\ .$$

ג) $a_n = (-1)^n + 1$

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 0,\ a_4 = 1,\ a_5 = 0\ .$$

ד) $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

$$a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = -1,\ a_4 = 0,\ a_5 = 1\ .$$

שאלה 2

א) $a_n = \frac{1}{n^2}$

ב) $a_n = \frac{1}{2n-1}$

ג) $a_n = \frac{n+1}{n}$

ד) $a_n = n \cdot (-1)^n$

שאלה 3

א) לכל $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{n^2+1}{n^3+10n+1} = \frac{n^2}{n^3+10n+1} + \frac{1}{n^3+10n+1} < \frac{n^2}{n^3} + 1 = \frac{1}{n} + 1 < 2$$

ו

$$a_n = \frac{n^2+1}{n^3+10n+1} > 0\ ,$$

לכן הסדרה חסומה:

$$0 < a_n < 2\ .$$

ב) עבור $n \geq 2$,
$$a_n = \frac{n^2+1}{n+2} \geq \frac{n^2+1}{2n} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2}\ .$$
הסדרה $\{\frac{n}{2}\}$ לא חסומה, לכן גם $\{a_n\}$ לא חסומה.

ג)
$$a_n = \sqrt{n^2+1} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} < 1$$
ו $a_n > 0$ לכן $0 < a_n < 1$ חסומה.

ד) $a_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right)$

$0 < \frac{1}{n} < 1$. בקטע $[0,1]$ $\tan$ עולה מונוטונית, לכן
$$0 < \frac{1}{n} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \tan(0) < \tan\left(\frac{1}{n}\right) < \tan(1)$$
לכן a_n חסומה.

ה) $a_n = \sin(n)$

$\sin$ פונקתיה חסונה:
$$-1 < \sin(n) < 1$$
לכן $\{a_n\}$ חסומה.

<u>שאלה 4</u>

א) לכל $n \geq 2$,
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} < 1$$
$a_n > 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ לכן $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 \Leftarrow a_n < a_{n+1}$ ז"א הסדרה עולה מונוטונית.

ב)
$$a_{n+1} = (n+1)^2 + n + 1 - 5 > n^2 + n - 5 = a_n$$
ז"א $a_{n+1} > a_n$ לכן הסדרה עולה מונוטונית.

$a_n = \frac{n}{2n^2+1}$ נגדיר $f(x) = \frac{x}{2x^2+1}$.
$$f'(x) = \frac{2x^2+1-4x^2}{(2x^2+1)^2} = \frac{1-2x^2}{(2x^2+1)^2} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad x = \pm\sqrt{1}\sqrt{2} = \pm 0.7\ .$$

x	$x < -1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$	$x > 1/\sqrt{2}$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

עבור $0.7 \approx \frac{1}{\sqrt{2}} < x$ הפונקציה יורדת מונוטונית. לכן הסדרה $\{a_n\}$ יורדת מונוטונית.

ד) נבדוק מונוטוניות בקטע $[k\pi, (k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{N}$.

אורך הקטע הוא $(k+1)\pi - k\pi = \pi > 3$.

לכן קיים מספר טבעי n כך ש $k\pi < n < \pi(k+1)$. נניח שעבור $k\pi < n < \pi(k+1)$, $a_n = \sin(n) > 0$.

אז קיים $(k+1)\pi < m < (k+2)\pi$, כך ש $a_m < 0$,

וקיים t כך ש $(k+2)\pi < t < (k+3)\pi$, כך ש $a_t > 0$.

ז"א $n < m < t$ ו $a_m < a_t$, $a_n > a_m$.

לכן הסדרה לא מונוטונית.

ה) נגדיר $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^{3/2} - 2}{2x^2} > 0$$

לכל $x > 2\sqrt{2}$. לכן $f(x)$ עולה מונוטונית בתחום $(2\sqrt{2}, \infty)$. ז"א הסדרה $\{a_n\}$ עולה מונוטונית החל מ $n = 2$.

שאלה 5

א) לכל $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{2n^2+3}{n^3+8n+2} = \frac{2n^2}{n^3+8n+2} + \frac{3}{n^3+8n+2} < \frac{2n^2}{n^3} + \frac{3}{2} = \frac{2}{n} + \frac{3}{2} < \frac{7}{2}$$

$$a_n = \frac{2n^2+3}{n^3+8n+2} > 0$$

לכן הסדרה חסומה:

$$0 < a_n < \frac{7}{2} \ .$$

ב) עבור $n \geq 4$,

$$a_n = \frac{3n^2+2}{n+4} \geq \frac{3n^2+2}{2n} = \frac{3n}{2} + \frac{1}{n} > \frac{3n}{2} \ .$$

הסדרה $\{\frac{3n}{2}\}$ לא חסומה, לכן גם $\{a_n\}$ לא חסומה.

ג)

$$a_n=\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}=\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}=\frac{n^2+1-n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}$$

לכל $n\geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n \geq& \frac{n^2+1-n}{\sqrt{2n^2}+\sqrt{n}} && =\frac{n^2+1-n}{\sqrt{2}n+\sqrt{n}} \\ \geq& \frac{n^2+1-n}{\sqrt{2}n+n} && =\frac{n^2+1-n}{(\sqrt{2}+1)n} && =\frac{n^2+1}{(\sqrt{2}+1)n}-\frac{1}{\sqrt{2}+1} \\ \geq& \frac{n^2}{(\sqrt{2}+1)n}-\frac{1}{\sqrt{2}+1} && =\frac{n}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1} \end{aligned}$$

לכן a_n לא חסומה מלעיל. לכל $M\in\mathbb{R}$ קיים n כך ש $a_n>M$. לכן a_n לא חסומה.

ד) $a_n=\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

sin פונקתיה חסונה:

$$-1<\sin\left(\frac{1}{n}\right)<1$$

לכן $\{a_n\}$ חסומה.

ה) $a_n=\cos\left(\frac{1}{n}\right)$

sin פונקתיה חסונה:

$$-1<\cos\left(\frac{1}{n}\right)<1$$

לכן $\{a_n\}$ חסומה.

ו) $a_n=\tan\left(\frac{1}{n}\right)$

$0<\frac{1}{n}<1$. בקטע $[0,1]$ tan עולה מונוטונית, לכן

$$0<\frac{1}{n}<1 \qquad \Rightarrow \qquad \tan(0)<\tan\left(\frac{1}{n}\right)<\tan(1)$$

לכן a_n חסומה.

שאלה 6

א) $a_n=\frac{3^n}{n}$ לכל $n\geq 1$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3^{n+1}}{3^n}\cdot\frac{n}{n+1}=3\cdot\frac{n}{n+1}>3\cdot\frac{n}{2n}=3\cdot\frac{1}{2}>1\ .$$

$a_n > 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$,

לכן $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Leftarrow a_{n+1} > a_n$. לכן $\{a_n\}$ עולה מונוטונית.

ב) $a_n = n^2 + n - 7$

לכל $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = (n+1)^2 + n + 1 - 7 > n^2 + n - 7 = a_n$$

ז"א $a_{n+1} > a_n$. לכן $\{a_n\}$ עולה מונוטונית.

ג) $a_n = \frac{3n}{4n^2+5}$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(\frac{3n}{4n^2+5}\right)}{\left(\frac{3(n+1)}{4(n+1)^2+5}\right)} = \frac{12n^3 + 24n^2 + 12 + 15n}{12n^3 + 12n^2 + 15n + 15}$$

$$\begin{aligned} & \frac{a_{n+1}}{a_n} \lesseqgtr 1 \\ \Rightarrow \quad & \frac{12n^3 + 12n^2 + 15n + 15}{12n^3 + 24n^2 + 27n} \lesseqgtr 1 \\ \Rightarrow \quad & 12n^3 + 12n^2 + 15 + 15n \lesseqgtr 12n^3 + 24n^2 + 27n \\ \Rightarrow \quad & 15 \lesseqgtr 12n^2 + 12n \end{aligned}$$

הרי $15 < 12n^2 + 12n$ לכל $n \geq 1$ לכן $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ לכן הסדרה יורדת מונוטונית.

ד) $a_n = \cos(n)$ לא מונוטונית:

$a_{n+1} < a_n$ לכל $n \in \{1, 2, 3\}$,

$a_{n+1} > a_n$ לכל $n \in \{4, 5, 6\}$,

$a_{n+1} < a_n$ לכל $n \in \{7, 8, 9\}$,

$a_{n+1} > a_n$ לכל $n \in \{10, 11, 12\}$,

וכן הלה.

באופן כללי,

$$\begin{cases} a_{n+1} < a_n & (-1)^{\lceil \frac{n}{3} \rceil} = -1 \\ a_{n+1} > a_n & (-1)^{\lceil \frac{n}{3} \rceil} = 1 \end{cases}$$

או שקול

$$\begin{cases} a_{n+1} < a_n & \lceil \frac{n}{3} \rceil \text{ אי זוגי} \\ a_{n+1} > a_n & \lceil \frac{n}{3} \rceil \text{ זוגי} \end{cases}$$

ה) $a_n = \sqrt{n} + \dfrac{1}{n}$ נגדיר $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^{3/2} - 2}{2x^2} > 0$$

לכל $x > 2\sqrt{2}$. לכן $f(x)$ עולה מונוטונית בתחום $(2\sqrt{2}, \infty)$. ז"א הסדרה $\{a_n\}$ עולה מונוטונית החל מ $n = 2$.

שאלה 7

$$a_n = \frac{n+5}{4n^2+n} = \frac{n+5}{n(4n+1)} = \frac{1+\frac{5}{n}}{4n+1}$$

$$a_{n+1} = \frac{1+\frac{5}{n+1}}{4(n+1)+1} < \frac{1+\frac{5}{n}}{4(n+1)+1} < \frac{1+\frac{5}{n}}{4n+1} = a_n$$

כלומר $a_{n+1} < a_n$ לכן הסדרה יורדת מונוטונית.

שאלה 8

א) נוכיח את הטענה באינדוקציה.

בסיס:

עבור $n = 1$ מתקיים

$$a_1 = 3 \geq 1 \ .$$

מעבר:

נניח כי $a_n \geq 1$. אם כן, מתקיים (לפי אי-השיוויון ברמז) כי

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = 1 \ .$$

ב) מכיוון ש- $a_n \geq 1$ לכל n, מתקיים כי

$$\frac{1}{a_n} \leq 1 \leq a_n \qquad \Rightarrow \qquad a_n + \frac{1}{a_n} \leq 2a_n \qquad \Rightarrow \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \leq a_n$$

כנדרש.

ג) מהסעיפים הקודמים, a_n סדרה מונוטונית יורדת ומתקיים כי $1 \leq a_n \leq 3$ לכל n. כלומר, הסדרה חסומה ומונוטונית ולכן מתכנסת. נסמן

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \ .$$

ומכאן שמתקיים

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right)$$

כלומר,

$$2L^2 = L^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad L^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad L = \pm 1 \ .$$

מכיוון שהסדרה a_n היא סדרה חיובית, הגבול שלה הוא בהכרח אי-שלילי. מכאן

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \ .$$

שאלה 9

א) נוכיח כי לכל $n \geq 1$ מתקיים $1 \leq a_n$ בעזרת אינדוקציה.
<u>מקרה בסיס:</u> עבור $n = 1$ $a_1 = 1$. <u>מעבר:</u> נניח כי $1 \leq a_n$. אם כן:

$$a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} < \sqrt{7} > 1$$

ז"א $a_{n+1} > 1$, כנדרש.

נוכיח כי לכל $n \geq 1$ מתקיים $a_n < 3$ בעזרת אינדוקציה.
<u>מקרה בסיס:</u>

$$a_1 = 1 < 3 \ .$$

<u>מעבר:</u> נניח כי $a_n < 3$. אם כן:

$$a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} < \sqrt{9} = 3 \ ,$$

ז"א $a_{n+1} < 3$, כנדרש.

ב) נוכיח כי a_n עולה מונוטונית בעזרת אינדוקציה.
<u>מקרה הבסיס:</u>

$$a_2 = \sqrt{6+a_1} = \sqrt{7} > a_1 \ .$$

<u>מעבר:</u>
נניח כי $a_{n+1} \geq a_n$. אם כן, מכיוון שאיברי הסדרה חיוביים, אז

$$a_{n+2} = \sqrt{6+a_{n+1}} > \sqrt{6+a_n} = a_{n+1}$$

ז"א $a_{n+2} > a_{n+1}$, כנדרש.

ג) מכיוון שהוכחנו שהסדרה יורדת וחסומה, היא גם מתכנסת. נסמן

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \ .$$

מכיוון שמשוואת הרקורסיה $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$ מתקיימת לכל n, מתקיים גם

$$L = \sqrt{6+L} \quad \Rightarrow \quad L^2 = 6 + L \quad \Rightarrow \quad L^2 - L - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (L-3)(L+2) = 0 \ .$$

אבל מכיוון שהחל מ- a_1 כל איברי הסדרה חיוביים, בהכרח

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = 3 \ .$$

שאלה 10

א) נוכיח כי a_n עולה דרך אינדוקציה.

<u>שלב הבסיס</u>

$a_2 = \sqrt{3} > a_1$.

<u>שלב המעבר</u>

נניח כי $a_{n+1} > a_n$ (ההנחת האינדוקציה).

$$\Rightarrow \quad a_{n+2} = \sqrt{3a_{n+1}} > \sqrt{3a_n} = a_{n+1}$$

ז"א $a_{n+2} > a_{n+1}$.
לכן על פי אינדוקציה $a_{n+1} > a_n$ לכל n.

ב) נוכיח כי a_n חסומה מלמטה.

a_n עולה (ממש) מונוטונית לכן $a_n > a_1 = 1$ לכל n.

נוכיח כי $a_n \leq 3$ באינדוקציה.

<u>שלב הבסיס:</u>

$a_1 = 1 < 3$.

<u>שלב המעבר:</u>

נניח כי $a_n < 3$ (ההנחת האינדוקציה). נראה כי $a_{n+1} < 3$:

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n} < \sqrt{9} = 3$$

ז"א $a_{n+1} < 3$.
לכן על פי אינדוקציה $a_n < 3$ לכל n.

ג) הוכחנו כי $1 \leq a_n \leq 3$ לכל n לכן a_n חסומה.
הוכחנו גם כי a_n מונוטונית לכן a_n מתכנסת.

נסמן $L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$,

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3a_n} \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{3L} \quad \Rightarrow \quad L^2 = 3L \quad \Rightarrow \quad L(L-3) = 0 \ .$$

מכאן $L = 0$ או $L = 3$. ברור כי $L = 0$ לא אפשרי כי הסדרה חסומה בין 1 לבין 3 לכן $L = 3$.

<u>שאלה 11</u>

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^4 < \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 = a_n$$

כלומר $a_{n+1} < a_n$ לכן a_n יורדת מונוטונית.

שאלה 12

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $a_n = (-1)^n$ מתבדרת, $b_n = (-1)^n$ מתבדרת אבל $a_n \cdot b_n = (-1)^{2n} = 1$ מתכנסת.

שאלה 13

לא נכונה. דוגמה נגדית: $b_n = n$, $a_n = \frac{1}{n^2}$.

שאלה 14

$$a_n = \frac{(n+2)^3}{n^6} = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n+2)^3}{n^3} = \frac{1}{n^3} \cdot \left(\frac{n+2}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^3} \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)^3 \ .$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^3} \cdot \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^3 < \frac{1}{n^3} \cdot \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^3 < \frac{1}{n^3} \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)^3 = a_n \ .$$

לפיכך $a_{n+1} < a_n$ לכל n לכן הסדרה יורדת מונוטונית.

שאלה 15

א) נוכיח כי לכל $n \geq 1$ מתקיים $-6 < a_n$ בעזרת אינדוקציה.

מקרה בסיס:

$$a_2 = -\sqrt{24 - 2a_1} = -\sqrt{24 - 22} = -\sqrt{2} > -6 \ .$$

מעבר: נניח כי $a_n < -6$. אם כן:

$$a_{n+1} = -\sqrt{24 - 2a_n} > -\sqrt{24 - 2(-6)} = -\sqrt{36} = -6$$

ז"א $a_{n+1} > -6$, כנדרש.

נוכיח כי לכל $n \geq 2$ מתקיים $a_n < 0$ בעזרת אינדוקציה.

מקרה בסיס:

$$a_2 = -\sqrt{24 - 2a_1} = -\sqrt{24 - 22} = -\sqrt{2} < 0 \ .$$

מעבר: נניח כי $a_n < 0$. אם כן:

$$a_{n+1} = -\sqrt{24 - 2a_n} < -\sqrt{24} =< 0 \ .$$

ז"א $a_{n+1} < 0$. כנדרש.

ב) נוכיח כי a_n יורדת מונוטונית בעזרת אינדוקציה.

מקרה הבסיס:

$$a_2 = -\sqrt{24 - 2a_1} = -\sqrt{24 - 22} = -\sqrt{2} < a_1 \ .$$

מעבר:

כיוון שאיברי הסדרה שליליים עבור $n \geq 2$:

$$a_{n+2} = -\sqrt{24 - 2a_{n+1}} \qquad \Rightarrow \qquad a_{n+2}^2 = 24 - 2a_{n+1} > 24 - 2a_n = a_{n+1}^2$$

ז"א $a_{n+2}^2 > a_{n+1}^2$. לפיכך $|a_{n+2}| > |a_{n+1}|$. כיוון שאיברי הסדרה שליליים עבור $n \geq 2$, אז

$$a_{n+2} < a_{n+1} \ .$$

ג) מכיוון שהוכחנו שהסדרה יורדת וחסומה, היא גם מתכנסת. נסמן

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \ .$$

מכיוון שמשוואת הרקורסיה $a_{n+1} = -\sqrt{24 - 2a_n}$ מתקיימת לכל n, מתקיים גם

$$L = -\sqrt{24 - 2L} \quad \Rightarrow \quad L^2 = 24 - 2L \quad \Rightarrow \quad L^2 + 2L - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad (L+6)(L-4) = 0 \ .$$

אבל מכיוון שהחל מ- a_2 כל איברי הסדרה שליליים, בהכרח

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = -6 \ .$$

שאלה 16

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $a_n = n$ מתבדרת, $b_n = n$ מתבדרת אבל $a_n \cdot b_n = n^2$ מתכנסת.

שאלה 17

לא נכונה. דוגמה נגדית: $b_n = n^2$, $a_n = \dfrac{1}{n}$.