

שאלה 1 יהי $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ קבוצת ווקטורים של \mathbb{R}^n . אף ווקטור בקבוצה S לא שווה לוקטור האפס. בנוסף הווקטורים ב- S הם אורתוגונלים.

(א) הוכיחו ש- S קבוצה בלתי תלויה לינארית.

(ב) הוכיחו כי אם $k = n$ אז הקבוצה S היא בסיס של \mathbb{R}^n .

שאלה 2 תהי $A \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ המטריצה שמוגדרת

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a & 1 & a & 1 \\ a & 1 & a & 1 & a & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a & 1 & a & 1 \\ a & 1 & a & 1 & a & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a & 1 & a & 1 \\ a & 1 & a & 1 & a & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

כאשר $a \in \mathbb{R}$ סקלר ממשי. עבור אילו ערכים של הפרמטר a המטריצה A לכסינה? נמקו את תשובתכם.

שאלה 3 תהי $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ המטריצה שמוגדרת

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

כאשר $a, b \in \mathbb{R}$ סקלרים ממשיים. בנוסף $b \neq 0$. הוכיחו כי אין למטריצה A ערכים עצמיים ממשיים.

שאלה 4 תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ המקיימת את התנאי $A^2 = A$. מצאו את כל הערכים העצמיים האפשריים של A .

שאלה 5 הוכיחו את הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

(א) עבור כל פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ הנוסחה

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)s(x) dx$$

כאשר $s(x)$ פונקציה זוגית היא מכפלה פנימית. הוכיחו את הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

(ב) עבור כל פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ הנוסחה

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)t(x) dx$$

כאשר $t(x)$ פונקציה אי-זוגית היא מכפלה פנימית.

שאלה 6 תהיינה A_1, A_2 מטריצות מסדר $n \times n$, של המרחב ווקטורי $\mathbb{C}^{n \times n}$.

בנוסף המטריצות A_1 ו- A_2 צמודות לעצמן.

הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:
אם

$$A_1^2 + A_2^2 = 0$$

(כאשר 0 באגף הימין מסמן את המטריצה האפס של $\mathbb{C}^{n \times n}$) אז $A_1 = 0$ ו- $A_2 = 0$.

שאלה 7 תהינה $A, B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$.

הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

אם $(AB)^2 = 0$ אז $(BA)^2 = 0$, כאשר 0 מטריצה האפס של $\mathbb{C}^{2 \times 2}$.

רמז: נוסחת קיילי-המילטון $M^2 - \text{tr}(M)M + \det(M)I = 0$ לכל $M \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$.

שאלה 8 תהינה $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. הוכיחו את הטענה הבאה:

אם A לכסינה ו- B דומה ל- A אז B לכסינה.

שאלה 9 בעזרת אי-שוויון קושי-שוורץ הוכיחו כי $(a \cos \theta + b \sin \theta)^2 \leq a^2 + b^2$ לכל $a, b, \theta \in \mathbb{R}$.

שאלה 10 יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו $u, w \in V$ וקטורים המקיימים

$$\|u - w\| = 12, \quad \|u + w\| = 8, \quad \|u\| = 6.$$

מצאו את $\|w\|$.