אלגברה לינארית סמסטר סתו 2022-23
עבודה עצמית 9

שאלה 1 לכל אחת מהפונקציות הבאות $T:\mathbb{R}^3\to V$ קבעו אם היא העתקה לינארית:

1) $V=\mathbb{R}^4$, T מוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\0\\0\\2x+z\end{pmatrix}$

2) $V=\mathbb{R}$, T מוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x-y-z$

3) $V=\mathbb{R}^2$, T מוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\z+1\end{pmatrix}$

4) $V=\mathbb{R}^2$, T מוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\xz\end{pmatrix}$

5) $V=\mathbb{R}^3$, T מוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+z\\x+y\\z\end{pmatrix}$

6) $V=\mathbb{R}^2$, T מוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x^2\end{pmatrix}$

7) $V=\mathbb{R}^3$, T מוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\|x|\\x+y\end{pmatrix}$

שאלה 2 לכל אחת מההעתקות הלינאריות שמצאתם בשאלה 1,

א) מצא מטריצה מייצגת סטנדרטית.

ב) האם ההעתקה חח"ע?

ג) האם ההעתקה על?

ד) מצא את הגרעין של ההעתקה.

ה) מצא את התמונה של ההעתקה.

ו) מצאו את $W = \{x \in \mathbb{R}^3 | T(x) = T(e_1)\}$ כאשר $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

שאלה 3 נתונה פונקציה $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+2x \\ 4x+3y-2z \\ kx+3y+(k-3)z \end{pmatrix}$$

א) הוכיחו כי T העתקה לינארית.

ב) מצא את ערכי k עבורם T חח"ע.

ג) מצא את ערכי k עבורם T על.

ד) עבור ערכי k שמצאתם בסעיף ב', מצאו את $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

שאלה 4 נתונה העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י:

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad T(e_3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

כאשר e_1, e_2, e_3 הינם וקטורי היחידה ב- $\mathbb{R}^3$.

א) מצא את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

ב) האם T חח"ע?

ג) האם T על?

שאלה 5 נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ המקיימת:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

שאלה 6 תהי $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית ותהי $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$ קבוצה ת"ל ב- $\mathbb{R}^n$. נסמן $S = \{T(\mathrm{v}_1), T(\mathrm{v}_2), T(\mathrm{v}_3)\}$. הוכיחו או הפריכו: אם ב- S יש 3 וקטורים אז S ת"ל.

שאלה 7 נתונה העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ המקיימת:

$$T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\ ,\qquad T\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\ .$$

מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T ואת הנוסחא של T.

שאלה 8 תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ טרנספורמציה לינארית ותהי $S=\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_k\}$ קבוצה בלתי תלויה ליניארית של וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$. הוכיחו או הפריכו:

א) אם T על אז $\{T(\mathrm{v}_1),\ldots,T(\mathrm{v}_k)\}$ בת"ל.

ב) אם T חח"ע אז $\{T(\mathrm{v}_1),\ldots,T(\mathrm{v}_k)\}$ בת"ל.

שאלה 9 נתונה העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^5$ המוגדרת ע"י:

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+2x_2+3x_3\\4x_1+6x_3\\7x_1+8x_2+9x_3\\x_1+3x_2+5x_3\\0\end{pmatrix}\ .$$

א) מצא את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

ב) האם T היא על $\mathbb{R}^5$? האם T חח"ע?

ג) האם קיים $x\in\mathbb{R}^3$ כך ש- $T(x)=\begin{pmatrix}1\\4\\7\\1\\0\end{pmatrix}$? רמז: ניתן לענות על שאלה זו מבלי לבצע חישובים. האם קיים יותר ממקור אחד לוקטור $\begin{pmatrix}1\\4\\7\\1\\0\end{pmatrix}$?

ד) האם קיים $x\in\mathbb{R}^3$ כך ש- $T(x)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$?

שאלה 10 נתונה העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המקיימת:

$$T(e_1)+T(e_3)=T(e_2)\ ,\qquad T(e_1)+T(e_2)+T(e_3)\ .$$

הוכיחו ש- $e_1 \in \mathrm{Ker}(T)$.

שאלה 11 נתונה טרנספורמציה לינארית $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ המוגדרת על ידי:

$$T(a+bt+ct^2) = \begin{pmatrix} a+2b+3c & 2a+4b+5c \\ 3a+6b+9c & 4a+8b+12c \end{pmatrix} \ .$$

א) מצא את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

ב) מצא את כל הפולינומים $a+bt+ct^2 \in P_2(\mathbb{R})$ כך ש-

$$T(a+bt+ct^2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ .$$

ג) מצא את המימד ובסיס של $\mathrm{Im}(T)$.

ד) מצא את המימד ובסיס של $\mathrm{Ker}(T)$.

ה) האם T חד חד ערכית? האם T על?

ו) מצא את המטריצה המייצגת של ההעתקה ביחס לבסיסים הסדורים

$$B = \{b_1 = 1+t, b_2 = t^2, b_3 = t\}$$

של $P_2(\mathbb{R})$ ו

$$C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, c_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \right\}$$

של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ בהתאמה.

ז) מצאו את

$$[T(2+2t+t^2+3t)]_C$$

שאלה 12 נתונה טרנספורמציה ליניארית $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b+3c \\ 2b+3c+4d \\ 5a+3c+4d \end{pmatrix} \ .$$

א) מצא את המטריצה הסטנדרטית A של הטרנספורמציה.

ב) מצא בסיס ואת המימד של $\mathrm{Im}(T)$ ו $\mathrm{Ker}(T)$.

ג) מצא בסיס ואת המימד של $\mathrm{Row}(A)$.

ד) האם T חד חד ערכית ? האם T על?

ה) האם

$$\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T)\ ?$$

שאלה 13

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות הוכיחו שהיא טרנספורמציה לינארית ובדקו האם הטרנספורמציה היא חד-חד ערכית? האם היא טרנספורמציה "על"?

א) $T : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ המוגדרת ע"י $T(M) = A \cdot M$, כאשר $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$

ב) $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ המוגדרת ע"י

$$T(p) = p'$$

$\forall P \in \mathbb{R}_3[x]$.

שאלה 14

נתונה טרנספורמציה ליניארית $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ המוגדרת באמצעות המטריצה הסטנדרטית A:

$$A = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 0\\-1 & -1 & 0 & 3\\0 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\ .$$

א) מצאו את $T\left(p(t)\right)$ כאשר

$$p(t) = 3p_1(t) - p_2(t)\ , \qquad p_1(t) = t - 2t^3\ , \qquad p_2(t) = 1 - t^2\ ,$$

ב) מצא בסיס ואת הממד של $\mathrm{Ker}(T)$.

ג) האם T היא טרנספורמציה חד-חד ערכית? האם T היא טרנספורמציה על?

שאלה 15

נגדיר $V = \mathrm{sp}\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$ ופונקציה $D : V \to V$ ע"י $D(f) = f'$.

א) בדקו אם D טרנספורמציה ליניארית.

ב) רשמו את המטריצה סטנדרטית A של הטרנספורמציה ביחס לבסיס $B = \{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$.

ג) חשבו $D(3e^x - 5e^{2x} + e^{3x})$.

ד) האם D היא טרנספורמציה חד-חד- ערכית? האם D היא טרנספורמציה על?

ה) מצאו בסיס ואת הממד של $\mathrm{Ker}(D)$ ו $\mathrm{Im}(D)$.

שאלה 16 נתונה העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת:

$$T(e_1)+T(e_3)=T(e_2)\ , \qquad T(e_1)+T(e_2)+T(e_3)\ .$$

א) הוכיחו ש- $e_1 \in \text{Ker}(T)$.

ב) $\dim\left(\text{Ker}(T)\right)$.

שאלה 17 נתונה העתקה לינארית $T:M_{2\times 2}() \to \mathbb{R}_2[x]$ המקיימת:

$$T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=1+3x^2\ ,T\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=3+x+7x^2\ ,T\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=4+3x+6x^2\ ,T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=-3-2x-5x^2\ .$$

א) רשמו את הנוסחא ל T. כלומר $T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\ldots$.

ב) מצא את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

ג) מצא את כל המטריצות $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ כך ש- $T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=1+2x-x^2$.

ד) מצא את המימד ובסיס של $\text{Im}(T)$.

ה) מצא את המימד ובסיס של $\text{Ker}(T)$.

ו) האם T חד-חד ערכית? האם T על?

ז) מצא את המטריצה המייצגת של ההעתקה ביחס לבסיסים הסדורים

$$B=\left\{b_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},b_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$$

של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ו

$$E=\{1,x,x^2\}$$

של $\mathbb{R}_2[x]$ בהתאמה.

פתרונות

<u>שאלה 1</u>

(1 $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\0\\0\\2x+z\end{pmatrix}$:

T העתקה לינארית.

■

(2 $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x-y-z$:

T העתקה לינארית.

■

(3 $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\z+1\end{pmatrix}$:

דוגמה נגדית:

$$u=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad T(u)=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\ ,\qquad T(2u)\neq 2\cdot T(u)\ .$$

■

(4 $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\xz\end{pmatrix}$:

דוגמה נגדית:

$$u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\ ,\qquad T(u)=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\ ,\qquad T(2u)\neq 2\cdot T(u)\ .$$

■

(5 $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+z\\x+y\\z\end{pmatrix}$:

T העתקה לינארית.

■

6) $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x^2\end{pmatrix}$:

דוגמה נגדית:

$$u=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad T(u)=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}\ ,\qquad T(3u)\neq 3\cdot T(u)\ .$$

■

7) $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\|x|\\x+y\end{pmatrix}$:

דוגמה נגדית:

$$u=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad T(u)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad T(-2\cdot u)\neq -2\cdot T(u)\ .$$

■

שאלה 2 הטרנספורמציות הלינאריות הן **1)**, **2)** ו **5)**.

1)

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\0\\0\\2x+z\end{pmatrix}$$

א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\\2&0&1\end{pmatrix}$$

■

ב) נמצא את המדורגת של המטריצה המייצגת הסטנדרטית A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

T לא חח"ע כי לא כל העמודות מובילות.

■

ג) T לא על כי יש שורות אפסים.

■

ד)

$$x = -\frac{1}{2}z \ , \qquad y = \frac{1}{2}z \ , \qquad z \in \mathbb{R} \ .$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\}$$

$\dim\left(\mathrm{Ker}(T)\right) = 1$ בסיס של $\mathrm{Ker}(T)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

■

ה)

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim\left(\mathrm{Im}(T)\right) = 2$ בסיס של $\mathrm{Im}(T)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

■

ו)

$$T(e_1)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$W=\left\{u\in\mathbb{R}^3 | T(u)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}\right\}=\left\{u\in\mathbb{R}^3 | A\cdot u=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\2&0&1&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{1}{2}&1\\0&1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$x=1-\frac{1}{2}z\ ,\qquad y=\frac{1}{2}z\ ,\qquad z\in\mathbb{R}$$

$$W=\left\{\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}z\\\frac{1}{2}z\\z\end{pmatrix}\middle| z\in\mathbb{R}\right\}$$

■

2) $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x-y-z$

א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\end{pmatrix}$$

■

ב) T לא חח"ע כי לא כל העמודות מובילות.

■

ג) T על $\mathbb{R}$ כי אין שורות אפסים.

■

ד)

$$x = y + z \ , \qquad y,z \in \mathbb{R} \ .$$

$$\begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker}(T) = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| y,z \in \mathbb{R} \right\}$$

$\dim\left(\text{Ker}(T)\right) = 2$. בסיס של $\text{Ker}(T)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

■

ה)

$$\text{Im}(T) = \text{sp}(1) \ .$$

$\dim\left(\text{Im}(T)\right) = 1$.

בסיס של $\text{Im}(T)$ הוא 1

■

ו)

$$T(e_1) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad W = \{u \in \mathbb{R}^3 | T(u) = 1\} = \{u \in \mathbb{R}^3 | A \cdot u = 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x - y - z = 1 \right\}$$

■

■

5) $$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y \\ z \end{pmatrix}$$

א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■

ב) נמצא את המדורגת של המטריצה המייצגת הסטנדרטית A:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

T לא חח"ע כי לא כל העמודות מובילות.

■

ג) T לא על $\mathbb{R}^3$ כי יש שורת אפסים.

■

ד) $x=-y$, $z=0$, $y\in\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix}-y\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$\dim\left(\text{Ker}(T)\right)=1$.

$\dim\left(\text{Ker}(T)\right)=1$ בסיס של $\text{Ker}(T)$:

$$\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

■

ה)

$$\text{Im}(T)=\text{sp}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim\left(\text{Im}(T)\right)=2$

בסיס של $\text{Im}(T)$:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

■

ו)

$$T(e_1)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$W=\left\{u\middle|A\cdot u=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x = 1 - y$ $y, z \in \mathbb{R}$.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1-y \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| y, z, \in \mathbb{R} \right\}$$

■

■

שאלה 3

א)

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+2z \\ 4x+3y-2z \\ kx+3y+(k-3)z \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad , \qquad u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad .$$

$$\begin{aligned} T(u_1+u_2) =& T\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2+2(z_1+z_2) \\ 4(x_1+x_2)x+3(y_1+y_2)-2(z_1+z_2) \\ k(x_1+x_2)+3(y_1+y_2)+(k-3)(z_1+z_2) \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} x_1+y_1+2z_1 \\ 4x_1+3y_1-2z_1 \\ kx_1+3y_1+(k-3)z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2+y_2+2z_2 \\ 4x_2+3y_2-2z_2 \\ kx_2+3y_2+(k-3)z_2 \end{pmatrix} \\ =& T(u_1+T(u_2) \end{aligned}$$

לכל $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ וסקלר m:

$$\begin{aligned} T(mu) =& T\begin{pmatrix} mx \\ my \\ mz \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} mx+my+2(mz) \\ 4(mx)x+3(my)-2(mz) \\ k(mx)+3(my)+(k-3)(mz) \end{pmatrix} \\ =& m\begin{pmatrix} x+y+2z \\ 4x+3y-2z \\ kx+3y+(k-3)z \end{pmatrix} \\ =& mT(u) \end{aligned}$$

לכן T לינארית.

ב) המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\4&3&-2\\k&3&k-3\end{pmatrix}$$

נמצא את המדורגת של המטריצה המייצגת הסטנדרטית A:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\4&3&-2\\k&3&k-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&10\\0&0&9k-33\end{pmatrix}$$

T חח"ע עבור $k\neq\frac{11}{3}$.

ג) T על עבור $k\neq\frac{11}{3}$.

ד) $k=\frac{11}{3}$.

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\4\\\frac{53}{3}\end{pmatrix}$$

■

שאלה 4 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$

$$T(e_1)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\ ,\qquad T(e_2)=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\ ,\qquad T(e_3)=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\ ,$$

א) המטריצה המייצגת הסטנדרטעת:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix}$$

■

ב) נמצא את המדורגת של המטריצה המייצגת הסטנדרטית A:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&5\\0&-2&-4\end{pmatrix}$$

T לא חח"ע כי יש עמודה לא מובילה.

■

ג) T על $\mathbb{R}^2$ כי אין שורת אפסים.

■

שאלה 5 $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\ ,\qquad T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\ ,\qquad T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}\ .$$

$$e_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad T(e_2)=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

$$e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad T(e_3)=\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$$

לכן המטריצה המייצגת הסטנדרטית הינה

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&5\end{pmatrix}$$

■

שאלה 6

נתון:

$T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית,
$\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3\}\in\mathbb{R}^n$ ת"ל.

צריך להוכיח:

$S=\{T(\mathrm{v}_1),T(\mathrm{v}_2),T(\mathrm{v}_3)\}$ ת"ל .

הוכחה:

$\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3\}$ ת"ל, לכן קיימים סקלרים k_1,k_2,k_3 שלא כולם אפסים כך ש

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+k_3\mathrm{v}_3=\bar{0}\ .$$

אז

$$T\left(k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+k_3\mathrm{v}_3\right)=T(\bar{0})$$
$$k_1T\left(\mathrm{v}_1\right)+k_2T\left(\mathrm{v}_2\right)+k_3T\left(\mathrm{v}_3\right)=\bar{0}$$

קיבלנו צירוף לינארי לא טריוויאלי. ז"א $T\left(\mathrm{v}_1\right)$,$T\left(\mathrm{v}_2\right)$,$T\left(\mathrm{v}_3\right)$ ת"ל.

■

שאלה 7 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$

$$T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\ ,\qquad T\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\ .$$

הוקטורים $\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ו $\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ בת"ל, $\dim(\mathbb{R}^2)=2$, לכן v_1, v_2 מהווה בסיס של $\mathbb{R}^2$.
אז

$$e_1=x_1\mathrm{v}_1+y_1\mathrm{v}_2\ ,$$
$$e_2=x_2\mathrm{v}_1+y_2\mathrm{v}_2\ ,$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}3&1&1\\4&2&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to3R_2-4R_1}\left(\begin{array}{cc|c}3&1&1\\0&2&-4\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to\frac12R_2}\left(\begin{array}{cc|c}3&1&1\\0&1&-2\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\left(\begin{array}{cc|c}3&0&3\\0&1&-2\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to\frac13R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&-2\end{array}\right)$$

לכן $x_1=1$, $y_1=-2$.

$$e_1=\mathrm{v}_1-2\mathrm{v}_2\ .$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}3&1&0\\4&2&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to3R_2-4R_1}\left(\begin{array}{cc|c}3&1&0\\0&2&3\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to\frac12R_2}\left(\begin{array}{cc|c}3&1&0\\0&1&\frac32\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\left(\begin{array}{cc|c}3&0&-\frac32\\0&1&\frac32\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to\frac13R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&-\frac12\\0&1&\frac32\end{array}\right)$$

לכן $x_2=-\frac12$, $y_2=\frac32$.

$$e_2=-\frac12\mathrm{v}_1+\frac32\mathrm{v}_2\ .$$

לכן

$$T(e_1)=T(\mathrm{v}_1)-2T(\mathrm{v}_2)=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-8\\-9\end{pmatrix}$$

$$T(e_2)=-\frac12T(\mathrm{v}_1)+\frac32T(\mathrm{v}_2)=-\frac12\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\frac32\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac52\\7\\\frac{15}{2}\end{pmatrix}$$

לכן המטריצה המייצגת הסטנדרטית היא

$$A=\begin{pmatrix}-7&\frac52\\-8&7\\-9&\frac{15}{2}\end{pmatrix}$$

■

שאלה 8 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ טרנספורמציה לינארית
$S=\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_k\}$ בת"ל.

א) <u>דוגמה נגדית:</u>

$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T(u)=\bar{0}$ לכל $u\in\mathbb{R}^2$.

$S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל.

$$T(\mathrm{v}_1)+T(\mathrm{v}_2)=\bar{0}$$

$\Leftarrow$ $T(\mathrm{v}_1)$, $T(\mathrm{v}_2)$ ת"ל.

$\blacksquare$

ב) <u>נתון:</u>

T חח"ע.

$$x_1T(\mathrm{v}_1)+\ldots+x_kT(\mathrm{v}_k)=\bar{0}$$

$\Leftarrow$

$$T\left(x_1\mathrm{v}_1+\ldots+x_k\mathrm{v}_k\right)=\bar{0}$$

$\Leftarrow$

$$x_1\mathrm{v}_1+\ldots+x_k\mathrm{v}_k\in\mathrm{Ker}(T)\ .$$

T חח"ע לכן $\mathrm{Ker}(T)=\{\bar{0}\}$. מכאן נובע:

$$x_1\mathrm{v}_1+\ldots+x_k\mathrm{v}_k=\bar{0}\ .$$

$\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_k$ בת"ל $\Leftarrow$ $x_1=0,\ldots,x_k=0$. ז"א $T(\mathrm{v}_1),\ldots,T(\mathrm{v}_k)$ בת"ל.

$\blacksquare$

<u>שאלה 9</u> $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^5$

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+2x_2+3x_3\\4x_1+6x_3\\7x_1+8x_2+9x_3\\x_1+3x_2+5x_3\\0\end{pmatrix}\ .$$

א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\1&3&5\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

ב) נמצא את המדורגת שת המטריצה המייצגת הסטנדרטית A:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\1&3&5\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

T לא על $\mathbb{R}^5$ כי יש שורות אפסים. T לא חח"ע כי לא כל העמודות מובילות.

■

ג)

$$T(u)=A\cdot u=\begin{pmatrix}1\\4\\7\\1\\0\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}1\\4\\7\\1\\0\end{pmatrix}$ זאת העמודה הראשונה של A, לכן $T(e_1)=\begin{pmatrix}1\\4\\7\\1\\0\end{pmatrix}$.

T לא חח"ע, לכן לוקטור $\begin{pmatrix}1\\4\\7\\1\\0\end{pmatrix}$ יש אינסוף מקורות.

■

ד)

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\4&5&6&1\\7&8&9&1\\1&3&5&1\\0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&1&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-3\end{array}\right)$$

אין פתרון, לכן לוקטור $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ אין מקור.

■

<u>שאלה 10</u>

<u>נתון:</u>

$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית,

$$T(e_1)+T(e_3)=T(e_2)\ ,\qquad T(e_1)+T(e_2)+T(e_3)\ .$$

<u>צריך להוכיח:</u> $e_1\in\text{Ker}(T)$

<u>הוכחה:</u>

$$T(e_1)=T(e_2)-T(e_3)=T(e_2)-(T(e_1)+T(e_2))=-T(e_1)$$

לכן

$$2T(e_1)=\bar{0}\qquad\Rightarrow\qquad T(e_1)=\bar{0}\qquad\Rightarrow\qquad e_1\in\text{Ker}(T)\ .$$

■

<u>שאלה 11</u> $T:\mathbb{P}_2(\mathbb{R})\to M_{2\times2}(\mathbb{R})$

$$T(a+bt+ct^2)=\begin{pmatrix} a+2b+3c & 2a+4b+5c\\ 3a+6b+9c & 4a+8b+12c\end{pmatrix}\ .$$

א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית היא

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&6&9\\4&8&12\end{pmatrix}$$

■

ב)

$$A\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\2&4&5&2\\3&6&9&3\\4&8&12&4\end{array}\right)\xrightarrow[R_4\to R_4-4R_1]{\substack{R_2\to R_2-2R_1\\ R_3\to R_3-3R_1}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$a=1-2b\ ,\quad c=0$$

$$\begin{pmatrix}1-2b\\b\\0\end{pmatrix}\qquad b\in\mathbb{R}\ .$$

■

ג) $\dim\left(\mathrm{Im}(T)\right)=2$ - מספר העמודות מובילות.
בסיס של $\mathrm{Im}(T)$:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&5\\9&12\end{pmatrix}\right\}$$

■

ד) $\dim\left(\mathrm{Ker}(T)\right)=1$ - מספר העמודות הלא מובילות.

$$x=-2y\ ,\qquad z=0\ ,\qquad y\in\mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix}-2y\\y\\0\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

בסיס של $\mathrm{Ker}(T)$:

$$\{-2+t\}$$

■

ה) T לא חח"ע כי יש עמודה הלא מובילה. T לא על כי יש שורת אפסים.
■

ו)

$$B=\{b_1=1+t,b_2=t^2,b_3=t\}$$

ו

$$C=\left\{c_1=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},c_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},c_3=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},c_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}.\right\}$$

$$T(b_1)=\begin{pmatrix}3&6\\9&12\end{pmatrix}=12c_1+9c_2+6c_3+3c_4\ ,$$

$$T(b_2)=\begin{pmatrix}3&5\\9&12\end{pmatrix}=12c_1+9c_2+5c_3+3c_4\ ,$$

$$T(b_3)=\begin{pmatrix}2&4\\6&8\end{pmatrix}=8c_1+6c_2+4c_3+2c_4\ ,$$

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix}12&12&8\\9&9&6\\6&5&4\\3&3&2\end{pmatrix}$$

■

ז)

$$2+2t+t^2+3t=2\cdot(1+t)+t^2+3t=2b_1+b_2+3b_3$$

$$[2+2t+t^2+3t]_B=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$\left[T\left(2+2t+t^2+3t\right)\right]_C=[T]_C^B\left[2+2t+t^2+3t\right]_B=\begin{pmatrix}12&12&8\\9&9&6\\6&5&4\\3&3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}60\\45\\29\\15\end{pmatrix}$$

שאלה 12 $T:M_{2\times2}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^3$

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b+3c\\2b+3c+4d\\5a+3c+4d\end{pmatrix}\ .$$

א) מטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&2&3&4\\5&0&3&4\end{pmatrix}$$

■

ב)

$$\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&2&3&4\\5&0&3&4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-5R_1}\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&2&3&4\\0&-10&-12&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-4\\0&1&0&-10\\0&0&1&8\end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Im}(T)$:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim\left(\text{Im}(T)\right)=3$.

פתרון למערכת הומוגנית:

$$x_1=4x_4\ ,\qquad x_2=10x_4\ ,\qquad x_3=-8x_4\ .$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=x_4\begin{pmatrix}4\\10\\-8\\1\end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Ker}(T)$:

$$\left\{\begin{pmatrix}4&10\\-8&1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim\left(\text{Ker}(T)\right)=1$.

■

ג) $\dim\left(\text{Row}(A)\right)=3$ - מספר השורות השונות מ 0.

בסיס של $\text{Row}(A)$:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&-10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&8\end{pmatrix},\right\}$$

■

ד) T לא חח"ע כי לא כל העמודות מובילות. T על $\mathbb{R}^3$ כי אין שורות אפסים.

■

ה)

$$\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T)$$

כי T טרנספורמציה על $\mathbb{R}^3$.

■

שאלה 13 $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

א)

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$$
$$T(M) = A \cdot M$$

לכל $M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

1) לכל $M_1, M_2 \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$T(M_1 + M_2) = A \cdot (M_1 + M_2) = A \cdot M_1 + A \cdot M_2 = T(M_1) + T(M_2) \ .$$

2) לכל $M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ולכל סקלר k,

$$T(kM) = A \cdot (kM) = kA \cdot M = kT(M) \ .$$

לכן T לינארית.

$$T(E_1) = T\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix}$$

$$T(E_2) = T\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$$

$$T(E_3) = T\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$$

$$T(E_4) = T\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$$

מטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\-1 & 0 & 1 & 0\\0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

T חח"ע ועל.

■

ב) $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$

$$T(p) = p'$$

$\forall P \in \mathbb{R}_3[x]$.

1) לכל $p_1, p_2 \in R_3[x]$,

$$T(p_1 + p_2) = (p_1 + p_2)' = p_1' + p_2' = T(p_1) + T(p_2)\ .$$

2) לכל $p \in R_3[x]$ ולכל סקלר k,

$$T(kp) = (kp)' = kp' = kT(p)\ .$$

לכן T לינארית.

$$T(1) = 0\ , \qquad T(t) = 1\ , \qquad T(t^2) = 2t\ , \qquad T(t^3) = 3t^2\ .$$

מטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

T לא חח"ע כי לא כל העמודות מובילות.
T על $R_3[x]$ כי אין שורות אפסים.

■

שאלה 14

א)

$$p(t) = 3p_1(t) - p_2(t)\ , \qquad p_1(t) = t - 2t^3\ , \qquad p_2(t) = 1 - t^2\ ,$$
$$T(p(t)) = 3T(p_1(t)) - T(p_2(t))$$

$$T\left(p_1(t)\right)_E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad T\left(p_1(t)\right) = -7t - t^2$$

$$T\left(p_2(t)\right)_E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad T\left(p_2(t)\right) = 1 - t + 2t^2$$

$$T\left(p(t)\right)=3(-7-t^2)-(1-t+2t^2)=1-20t-5t^2 \ .$$

■

ב)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-8}{3} \end{pmatrix}$$

$$x_1=-\frac{4}{3}x_4 \ , \qquad x_2=\frac{13}{3}x_4 \ , \qquad x_3=\frac{8}{3}x_4 \ , \qquad x_4\in\mathbb{R} \ .$$

בסיס של $\text{Ker}(T)$:

$$-\frac{4}{3}+\frac{13}{3}t+\frac{8}{3}t^2+t^3$$

■

ג) T לא חח"ע כי יש עמודה לא מובילה.
T על $\mathbb{R}_2[x]$
כי אין שורת אפסים.
■

<u>שאלה 15</u>

$$V=\text{sp}\{e^x,e^{2x},e^{3x}\}$$

$D:V\to V$

$$D(f)=f' \ .$$

א) **1)** לכל $f_1,f_2\in V$,

$$D(f_1+f_2)=(f_1+f_2)'=f_1'+f_2'=D(f_1)+D(f_2) \ .$$

2) לכל $f\in V$ ולכל סקלר k,

$$D(kf)=(kf)'=kf'=kD(f) \ .$$

לכן T לינארית.

■

ב)

$$D\left(e^x\right)=e^x=1\cdot e^x+0\cdot e^{2x}+0\cdot e^{3x}$$
$$D\left(e^{2x}\right)=2e^{2x}=0\cdot e^x+2\cdot e^{2x}+0\cdot e^{3x}$$
$$D\left(e^{3x}\right)=3e^{3x}=0\cdot e^x+0\cdot e^{2x}+3\cdot e^{3x}$$

$$D_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

■

ג)

$$\left[3e^x - 5e^{2x} + e^{3x}\right]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D_B \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$D\left(3e^x - 5e^{2x} + e^{3x}\right) = 3e^x - 10e^{2x} + 3e^{3x} \ .$$

■

ד) D חח"ע ועל כי כל העמודות מובילות ואין שורות אפסים.

■

ה) בסיס של $\text{Im}(T)$:

$$\left\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\right\} \ .$$

$\dim\left(\text{Im}(T)\right) = 3$.

$\dim\left(\text{Nul}(T)\right) = 0$, אין בסיס.

■

שאלה 16 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T(e_1) + T(e_3) = T(e_2) \ , \qquad T(e_1) + T(e_2) + T(e_3) \ .$$

א)

$$T(e_1) + T(e_3) = T(e_2) \ , \quad T(e_1) + T(e_2) + T(e_3) \ , \qquad \Rightarrow \qquad 2T(e_1) + T(e_3) + T(e_2) = T(e_2) + T(e_3)$$

$\Leftarrow$

$$T(e_1) = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad e_1 \in \text{Ker}(T) \ .$$

■

ב)

$$T(e_3)-T(e_2)=T(e_2)-T(e_3) \quad\Rightarrow\quad T(e_3-e_2)=-T(e_3-e_2) \quad\Rightarrow\quad 2T(e_3-e_2)=\bar{0} \quad\Rightarrow\quad e_3-e_2\in \mathrm{Ker}(T)$$

$$e_3-e_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\ , \qquad e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

בת"ל.

■

שאלה 17 $T:M_{2\times 2}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}_2[x]$ המקיימת:

$$T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=1+3x^2\ ,T\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=3+x+7x^2\ ,T\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=4+3x+6x^2\ ,T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=-3-2x-5x^2\ .$$

המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4&-3\\0&1&3&-2\\3&7&6&-5\end{pmatrix}$$

א)

$$A\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&4&-3\\0&1&3&-2\\3&7&6&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+3b+4c-3d\\b+3c-2d\\3a+7b+6c-5d\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(a+3b+4c-3d)+(b+3c-2d)\,x+(3a+7b+6c-5d)\,x^2$$

ב)

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4&-3\\0&1&3&-2\\3&7&6&-5\end{pmatrix}$$

ג)

$$A\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&4&-3&5\\0&1&3&-2&2\\3&7&6&-5&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-5&3&-5\\0&1&3&-2&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}a&=5c-3d-5\\b&=-3c+3d+2\end{cases}\ ,\qquad c,d\in\mathbb{R}\ .$$

ד) $\dim\left(\mathrm{Im}(T)\right)=2$. בסיס של $\mathrm{Im}(T)$:

$$\{1+3x^2, 3+x+7x^2\}\ .$$

ה) $\dim\left(\mathrm{Ker}(T)\right)=2$.

$$\left\{\begin{array}{ll} a &= 5c-3d \\ b &= -3c+3d \end{array}\right. \ , \qquad c,d\in\mathbb{R}\ .$$

$$c\begin{pmatrix}5\\-3\\1\\0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}-3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$$

בסיס של $\mathrm{Ker}(T)$:

$$\left\{\begin{pmatrix}5&-3\\1&0\end{pmatrix}\ ,\begin{pmatrix}-3&2\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

ו) T לא חח"ע כי יש עמודה לא מובילה.

ז) T לא על כי יש שורת אפסים.

ח)

$$B=\left\{b_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},b_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$E=\{1,x,x^2\}$$

$$T(b_1)=1+3x^2\ ,\qquad T(b_2)=4+x+10x^2\ ,\qquad T(b_3)=8+4x+16x^2\ ,\qquad T(b_4)=5+2x+11x^2\ .$$

$$[T]_B^E=\begin{pmatrix}1&4&8&5\\0&1&4&2\\3&10&10&11\end{pmatrix}\ .$$

■