אלגברה לינארית 2
נוסחאות הגדרות משפטים

תוכן העניינים

נוסחאות

מכפלה של מטריצה עם ווקטור

תהי $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ מטריצה מסדר $m \times n$: $A = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}$ כאשר $a_1, a_2 \dots, a_n$ העמודות של A. יהי $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ וקטור כלשהו: $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. המכפלה $A\mathrm{x}$ היא הוקטור של $\mathbb{R}^m$ הניתן ע"י

$$A\mathrm{x} = x_1 a_1 + \dots + a_n x_n \ .$$

מרחבים ווקטוריים

מרחב ווקטורי V - קבוצה לא ריקה המקיימת את התנאים הבאים: לכל ווקטורים $u, \mathrm{v}, w \in V$ ולכל $k, t \in \mathbb{R}$

1) קיים ווקטור יחיד $u + \mathrm{v} \in V$ קיים ווקטור יחיד $k \cdot u \in V$
2) $u + \mathrm{v} = \mathrm{v} + u$
3) $(u + \mathrm{v}) + w = u + (\mathrm{v} + w)$
4) קיים ווקטור $\bar{0} \in V$ כך ש- $u + \bar{0} = u$.
5) לכל ווקטור u קיים ווקטור $-u$ כך ש- $u + (-u) = \bar{0}$
6) $k(u + \mathrm{v}) = ku + k\mathrm{v}$
7) $(k + t)u = ku + tu$
8) $k(tu) = (kt)u$
9) $1 \cdot u = u$

$\mathbb{R}^n$ מרחב כל הסדרות באורך n של מספרים ממשיים.

$P(\mathbb{R})$ מרחב כל הפולינומים עם מקדמים ממשיים

$P_n(\mathbb{R})$ מרחב הפולינומים מסדר n לכל היותר עם מקדמים ממשיים

$\mathbb{R}^{m\times n}$ מרחב כל המטריצות מסד $m \times n$ עם מקדמים ממשיים

U תת מרחב של V אם ורק אם U תת קבוצה לא ריקה של V שהיא מרחב ווקטורי ביחס לאותן הפעולות.
U תת מרחב של V אם ורק אם

1) $\bar{0} \in U$

2) לכל $u, \mathrm{v} \in U$ מתקיים $u + \mathrm{v} \in U$

3) לכל $u \in U$ ולכל סקלר k מתקיים $ku \in U$.

הווקטורים $u_1, u_2, \ldots, u_n$ תלויים ליניארית אם ורק אם קיימים סקלרים $k_1, k_2, \ldots, k_n$ שלא כולם אפסים כך ש:

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_n u_n = 0$$

$\text{span}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ - קבוצת כל הצירופים הליניאריים של הווקטורים $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ בסיס של V אם ורק אם $u_1, u_2, \ldots, u_n$ בלתי תלוים ליניארית ו- $\text{span}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = V$.

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{row } A) = \dim(\text{col } A)$$

$\text{row } A$ מרחב הנפרש על ידי השורות של מטריצה A.
$\text{col } A$ מרחב הנפרש על ידי העמודות של מטריצה A.
עבור מטריצה A מסדר $m \times n$,

$$\text{Nul } A = \left\{ u \middle| u \in \mathbb{R}^n, A \cdot u = \bar{0} \right\}$$

$$\dim(\text{Nul } A) + \text{rank}(A) = n \ .$$

טרנספורמציה $T : U \to V$ חד חד ערכית אם ורק אם לכל $u_1 \neq u_2$ השייכים ל U, מתקיים $T(u_1) \neq T(u_2)$.
טרנספורמציה $T : U \to V$ היא טרנספורמציה על V אם ורק אם $\text{Im}(T) = V$.

וקטור קואורדינטות:

אם $b_1, b_2, \ldots, b_n$ בסיס של מרחב וקטורי V, אז לכל וקטור $\mathrm{v} \in V$ קיימת הצגה יחידה

$$\mathrm{v} = k_1 b_1 + k_2 b_2 + \ldots + k_n b_n \ .$$

$$[\mathrm{v}]_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

וקטור קואורדינטות v לפי בסיס $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.

אם $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ בסיס ישן של מרחב וקטורי V, $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ בסיס חדש של V, אז לכל וקטור $u \in V$ מתקיים

$$[u]_C = P_{B \to C} \cdot [u]_B$$

כאשר $P_{B \to C}$ מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס C.

מציאת מטריצת המעבר:

$$(C|B) \to \ldots \to (I|P_{B \to C}) \ .$$

טרנספורמציות:

עבור טרנספורמציה $T: U \to V$,

$$\text{Ker}(T) = \{u | u \in U, T(u) = \bar{0}\}$$

$$\text{Im}(T) = \{\text{v} | \text{v} \in V, \exists u \in U \text{ st } T(u) = \text{v}\}$$

טרנספורמציה $T: U \to V$ חד חד ערכית אם ורק אם לכל $u_1 \neq u_2$ השייכים ל U, מתקיים $T(u_1) \neq T(u_2)$.
טרנספורמציה $T: U \to V$ היא טרנספורמציה על V אם ורק אם $\text{Im}(T) = V$.

המטריצה המייצגת של טרנספורמציה

תהי $T: U \to V$ העתקה לינארית ממרחב וקטורי U למרחב וקטורי V.

נניח ש $\dim U = m$ ו $\dim V = n$.

ויהיו $e = \{e_1, \ldots, e_m\}$ בסיס הסטנדרטי של U ו $E = \{E_1, \ldots, E_n\}$ בסיס סטנדרטי של V.

המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T מוגדרת להיות

$$A = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ T(e_1)_E & T(e_2)_E & \cdots & T(e_m)_E \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}$$

כאשר $T(e_1)_E$ הוא הוקטור $T(e_1)$ המבוטא ביחס לבסיס E.
יהי V מרחב וקטורי עם בסיס סדור $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, יהי W מרחב וקטורי עם בסיס סדור $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$, ותהי $T: V \to W$ העתקה לינארית. אזי לכל $\text{v} \in V$ מתקיים

$$[T(\text{v})]_C = [T]_C^B \cdot [\text{v}]_B$$

כאשר

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(b_1)]_C & [T(b_2)]_C & \ldots & [T(b_n)]_C \\ | & | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$[T]_C^B$ נקראת המטריצה המייצגת של ההעתקה T ביחס לבסיסים B ו- C.

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים, לכסון מטריצה

עבור אופרטור ליניארי $T: U \to U$, ווקטור $\text{v} \neq \bar{0}$ הוא ווקטור עצמי של T אם קיים סקלר λ כך ש: $T(u) = \lambda u$.
λ הוא הערך העצמי המתאים לווקטור עצמי v.
מציאתערכים עצמיים של אופרטור ליניארי בעל מטריצה סטנדרטית A:

$$|A - \lambda I| = 0 \ .$$

מציאתווקטורים עצמיים: וקטור עצמי v הוא פתרון לא טריוויאלי למערכת הומוגנית

$$(A - \lambda I) \cdot \text{v} = \bar{0} \ .$$

מטריצה A לכסינה אם קיים בסיס של מרחב U המורכב מווקטורים עצמיים.
מטריצה A לכסינה אם קיים בסיס של מרחב U המורכב מווקטורים עצמיים.

אם A לכסינה, אז קיימת מטריצה אלכסונית D (ערכים עצמיים באלכסון) ומטריצה הפיכה P (ווקטורים עצמיים בעמודות) כך ש:

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P \qquad \Leftrightarrow \qquad A = P \cdot D \cdot P^{-1} \ .$$

חישוב חזקה :

אם A מטריצה לכסינה, אז

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1} \ .$$

בסיסים סטנדרטים

וקטורים	
$\mathbb{R}^2$	$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^3$	$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^4$	$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^n$	$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
מטריצות	
$\mathbb{R}^{2\times 2}$	$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^{2\times 3}$	$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^{3\times 2}$	$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $e_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\mathbb{R}^{3\times 3}$
$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \dots \qquad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\mathbb{R}^{4\times 3}$
$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$ $e_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \dots \quad e_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$ $\vdots$ $e_{(m-1)\cdot n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad e_{m\cdot n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$	$\mathbb{R}^{m\times n}$

פולינומים

$e_1 = 1,\ e_2 = x$	$P_1(\mathbb{R})$

$e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2$	$P_2(\mathbb{R})$
$e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2,\ e_4 = x^3$	$P_3(\mathbb{R})$
$e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2,\ e_4 = x^3\ , \ldots, e_{n+1} = x^n$	$P_n(\mathbb{R})$

הגדרות

אלגברה 1

1 הגדרה: (איזומורפיזם בין מרחבים וקטורים)
יהיו U, V מ"ו מעל $\mathbb{R}$. אם קיימת ה"ל חח"ע ועל

$$T : U \to V\ ,$$

נאמר ש- T איזומורפיזם. בנוסף, נאמר שהמרחבים U ו- V איזומורפיים ונסמן $U \cong V$.

---

2 הגדרה: (גרעין ותמונה)
T (שמסומן $\ker T$) והתמונה של T (שמסומן $\mathrm{Im}\ T$) מוגדרים כך:

$$\ker T = \{\mathrm{v} \in V | T(\mathrm{v}) = \bar{0}\}$$

$$\mathrm{Im}\ T = \{T(\mathrm{v}) | \mathrm{v} \in V\}$$

---

3 הגדרה: (הגדרת דרגה של מטריצה)

תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. הדרגה של A, תסומן $r(A)$ או $\mathrm{rank}(A)$ היא

$$r(A) = \dim(\mathrm{col}\ A)\ .$$

(דרגת מטריצה שווה למימד מרחב העמודות שלה). בשפה פשוטה מאד...

---

4 הגדרה: (משפט דרגה של מטריצה)

תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$.

$$\dim(\mathrm{col}\ A) = \dim(\mathrm{row}\ A) = r(A)$$

וכן

$$r(A) + \dim(\mathrm{Nul}\ A) = n$$

העתקות לינאריות

5 הגדרה: (טרנספורמציה לינארית)
לכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מסדר $m \times n$ מעל שדה $\mathbb{F}$ מוגדרת טרנספורמציה לינארית

$$T_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$$

ע"י

$$T_A(\mathrm{v}) = A \cdot \mathrm{v}$$

לכל $\mathrm{v} \in \mathbb{F}^n$.

---

6 הגדרה: (מטריצה המייצגת)
תהי $T : V \to W$ טרנספורמציה לינארית.

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ בסיס של V, $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ בסיס של W. קיימת מטריצה $[T]_C^B$ (המטריצה המייצגת של T לפי בסיסים B ו C) כך שלכל $\mathrm{v} \in V$,

$$[T(\mathrm{v})]_C = [T]_C^B \cdot [\mathrm{v}]_B$$

כאשר

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ [T(b_1)]_C & [T(b_2)]_C & \dots & [T(b_n)]_C \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}$$

---

7 הגדרה: (מטריצות דומות)
שתי מטריצות A ו B נקראות דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $B = P^{-1}AP$.

ערכים עצמיים

8 הגדרה: (ערך עצמי ווקטור עצמי של מטריצה)
תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$. וקטור $X \in F^n$ שלא שווה לוקטור האפס ($X \neq \bar{0}$) יקרא וקטור עצמי של A אם קיים סקלר λ כך ש-

$$A\lambda = \lambda X \ .$$

הסקלר λ נקרא ערך עצמי של A השייך לוקטור עצמי X.

---

9 הגדרה: (הגדרת דמיון בין מטריצות)
תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. נאמר ש- A ו- B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש-

$$B = P^{-1}AP \ .$$

---

10 הגדרה: (לכסינות של מרטיצות)
תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. A תקרא לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית. כלומר אם קיימת מטריצה הפיכה $P\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ומטריצה אלכסונית $D\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש-

$$D=P^{-1}AP\ .$$

---

11 הגדרה: (אופרטור לינארי)
יהי V מרחב וקטורי. טרנספורציה לינארי $T:V\to V$ נקראת אופרטור לינארי.

---

12 הגדרה: (אופרטור לכסין)
אופרטור לינארי $T:V\to V$ נקראת לכסין אם קיים בסיס של V כך ש $[T]_B$ אלכסונית.

ז"א קיים בסיס $B=\{b_1,\ldots,b_n\}$ של V כך ש

$$T(b_1)=\lambda_1b_1\ ,\qquad T(\mathrm{v}_2)=\lambda_2b_2,\ldots,T(b_n)=\lambda_nb_n\ .$$

אז

$$[T]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\ldots&0\\0&\lambda_2&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&\ldots&\lambda_n\end{pmatrix}$$

(לא כל ה- λ בהכרח שונים זה מזה)

---

13 הגדרה: (ערך עצמי)
תהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי ו λ סקלר. λ נקרא ערך עצמי של T אם קיים וקטור $\mathrm{v}\neq 0$ כך ש

$$T(\mathrm{v})=\lambda\mathrm{v}\ .$$

v נקרא וקטור עצמי ששיך לערך עצמי λ.

---

14 הגדרה: (פולינום האופייני של טרנספורמציה)
תהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי. נניח ש A המטריצה המייצגת של T לפי בסיס B. אז הפולינום

$$P(\lambda)=|\lambda I-A|$$

נקרא הפולינום האופייני של T.

---

15 הגדרה: (ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי)
נניח $T:V\to V$ העתקה לינארית ו λ ערך עצמי.

1) הריבוי האלגברי של λ הוא הריבוי של λ בפולינום האופייני.
2) הריבוי הגאומרטי של λ הוא $\dim(V_\lambda)$ כלומר מספר הוקטורים העצמיים הבת"ל השייכים ל- λ.

משפט קיילי המילטון ופולינום מינימלי

16 הגדרה: (הצבה של מטריצה ריבועית בפולינם)
תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$. יהי

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_k x^k$$

פוליניום כאשר $\alpha_i \in \mathbb{F}$ סקלרים. הצבה של A בפולינים P מוגדרת להיות

$$p(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_k A^k$$

כאשר I_n המטריצה היחידה של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

---

17 הגדרה: הצבה של העתקה לינארית בפולינום

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, נניח ש $T : V \to V$ אופרטור לינארי ו $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots \alpha_k x^k$ פולינום.
נגדיר אופרטור לינארי $P(T) : V \to V$ ע"י

$$P(T) = \alpha_0 I_V + \alpha_1 T + \ldots \alpha_k T^k \ .$$

כאשר I_V האופרטור הזהות ($I_V(u) = u$ לכל $u \in V$).

$P(T)$ נקראת ההצבה של P ב- T.

---

18 הגדרה: (איפוס פולינום ע"י מטריצה)
תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ויהי $P(x) \in \mathbb{F}[x]$. אומרים כי A מאפסת את $P(x)$ אם

$$P(A) = 0_{n\times n}$$

כאשר $0_{n\times n}$ מטריצה האפס של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

---

19 הגדרה: (איפוס פולינום על ידי העתקה לינארית)
מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. תהי $T : V \to V$ ויהי $P(x) \in \mathbb{F}[x]$. אומרים כי T מאפסת את $P(x)$ או ש- $P(x)$ מתאפס ע"י T אם $P(T) = 0$ כאשר 0 מסמן את העתקת אפס.

---

20 הגדרה: (פולינום המינימלי)
תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. הפולינום המינימלי הוא פולינום מתוקן מצורה

$$m(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{k-1} x^{k-1} + x^k \ , \qquad \textbf{(\#)}$$

כאשר $k \geq 1$ כך ש:

1) $m(A) = 0$

2) k היא הסדר הנמוכה ביותר מבין הפולינומים מצורה **(#)** שמתאפסים ע"י A.

נסמן את הפולינום המינימלי של A ב- $m_A(x)$.

שילוש מטריצה

21 הגדרה: (מטריצה ניתנת לשילוש)

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. אומרים ש A ניתנת לשילוש מעל $\mathbb{F}$ אם A דומה למטריצה משולשית עליונה, כלומר קיימת מטריצה P הפיכה כך ש

$$T = P^{-1}AP$$

מטריצה משולשית. P נקראת מטריצה משלשת.

---

22 הגדרה: (העתקה לינארית ניתנת לשילוש)

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי. T נקרא ניתן לשילוש אם קיים בסיס B של V שעבורו המטריצה המייצגת $[T]_B$ היא מטריצה משולשית עליונה. הבסיס נקרא בסיס משלש עבור B.

---

23 הגדרה: (תת מרחב שמור)

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $T : V \to V$ העתרה לינארית. תת מרחב W של V נקרא תת מרחב T שמור אם $T(W) \subseteq W$.

צורת ז'ורדן

24 הגדרה: (מטריצת ז 'ורדן נילפוטנטית יסודית מסדר n)

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $E = (e_1, \ldots, e_n)$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. המטריצה $J_n(0) \in \mathbb{F}^{n\times n}$ שהעמודה הראשונה שלה היא וקטור אפסים ושלכל $2 \le i \le n$ העמודה ה- i שלה היא e_{i-1}, נקראת מטריצת ז'ורדן נילפוטנטית יסודית מסדר n. כלומר:

$$J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

---

25 הגדרה: (בלוק ז'ורדן)

$J_k(\lambda)$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא מטריצה מסדר $k \times k$ מצורה

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}$$

---

26 הגדרה: (צרות ז'ורדן)

צורת ז'ורדן היא מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ שעל האלכסון הראשי שלה יש בלוקים ז'ורדן ו- 0 בכל מקום אחר.

$$A = \text{diag}\Big(J_{k_1}(\lambda_1), J_{k_2}(\lambda_2), \ldots, J_{k_l}(\lambda_l)\Big) = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & J_{k_l}(\lambda_l) \end{pmatrix}$$

מכפלות פנימיות

27 הגדרה: (מכפלה פנימית מעל)

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. מכפלה פנימית על V היא פונקציה $V\times V\to\mathbb{R}$ המתאימה לכל זוג וקטורים (u,v) סקלר ממשי המסומן ב- $\langle u,\mathrm{v}\rangle$ כך שמתקיימות התכונות הבאות:

1) <u>סימטריות:</u>

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle = \langle \mathrm{v},u\rangle$$

לכל $u,\mathrm{v}\in V$.

2) <u>לינאריות ברכיב הראשון:</u>

א)

$$\langle u+\mathrm{v},w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle \mathrm{v},w\rangle$$

ב) לכל $u,\mathrm{v}\in V$ ולכל סקלר $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\langle \lambda u,\mathrm{v}\rangle = \lambda\langle u,\mathrm{v}\rangle$$

3) <u>חיוביות:</u>

לכל $\mathrm{v}\in V$,

$$\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \geq 0$$

וגם $\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle = 0$ אם ורק אם $\mathrm{v}=0$.

---

28 הגדרה: (מרחב אווקלידי)

מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{R}$ יחד עם מכפלה פנימית מסויימת נקרא מרחב אוקלידי.

---

29 הגדרה: (העקבה של מטריצה ריבועית)

לכל מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ העקבה של A זה סכום איברי האלכסון של A. העקבה מסומנת

$$\text{tr}\ (A)\ .$$

---

30 הגדרה: (מכפלה פנימית מעל או)

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ או $\mathbb{F}=\mathbb{C}$.

מכפלה פנימית על V היא פונקציה $V\times V\to\mathbb{R}$ המתאימה לכל זוג וקטורים (u,v) סקלר ב- $\mathbb{F}$ המסומן ב- (u,v) כך שמתקיים התנאים הבאים:

1) <u>הרמיטיות</u> :

לכל $u, \mathrm{v} \in V$, סימטריות:

$$(u, \mathrm{v}) = \overline{(\mathrm{v}, u)} \ .$$

2) <u>לינאריות ברכיב הראשון:</u>

א) לכל $u, \mathrm{v}, w \in V$

$$(u + \mathrm{v}, w) = (u, w) + (\mathrm{v}, w)$$

ב) לכל $u, \mathrm{v} \in V$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{F}$,

$$(\lambda u, \mathrm{v}) = \lambda(u, \mathrm{v})$$

3) <u>חיוביות:</u>

לכל $\mathrm{v} \in V$, (v, v) הוא מספר ממשי אי-שללי. $(\mathrm{v}, \mathrm{v}) = 0$ אם ורק אם $\mathrm{v} = 0$.

---

31 הגדרה:

(מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$)

המרחב וקטורי V מעל $\mathbb{F}$ יחד עם מכפלה פנימית מסויימת נקרא מרחב מכפלה פנימית.

אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ מרחב מכפלה פנימית נקרא מרחב אוניטרי.

---

32 הגדרה: (הנורמה)

יהי V מרחב מכפלה פנימית. הנורמה $\|\mathrm{v}\|$ של וקטור $\mathrm{v} \in V$ היא מספר ממשי אי-שללי הניתנת ע"י

$$\|\mathrm{v}\| = \sqrt{(\mathrm{v}, \mathrm{v})}$$

במרחבין $\mathbb{R}^2$ ו- $\mathbb{R}^3$ הנורמה היא בעצם האורך של וקטור.

---

33 הגדרה: (המרחק)

יהיו u ו- v שני וקטורים במרחב מכפלה פנימית. המרחק בין u ו- v הוא מספר ממשי אי-שלילי המוגדר ע"י

$$d(u, \mathrm{v}) = \|u - \mathrm{v}\|$$

---

34 הגדרה: (וקטורים אורתוגונליים)

וקטורים u, v במרחב מכפלה פנימית נקראים אורתוגונליים זה לזה (או מאונכים זה לזה) אם

$$(u, \mathrm{v}) = 0 \ .$$

סימון:

$$u \perp \mathrm{v} \ .$$

1) אם $(u,\mathrm{v})=0$ אז

$$(\mathrm{v},u)=\overline{(u,\mathrm{v})}=\bar{0}=0\ ,$$

כלומר יחס האורתוגונליות הוא סימטרי.

2) וקטור האפס אורתוגונל לכל וקטור v.

3) במרחב $\mathbb{R}^n$ עם המכפלה פנימית הסטנדרטית, מושג האורתוגונליות מתלכד עם מושג האורתוגונליות המוגדר על סמך המכפלה סלקרית.

---

35 הגדרה: (וקטור האורתוגונלי לתת-מרחב)

יהי U תת-מרחב של מרחב מכפלה פנימית V. יהי $\mathrm{v}\in V$. אומרים כי v אורתוגונלי ל- U אם v אורתוגונלי לכל וקטור $u\in U$. סימון:

$$\mathrm{v}\perp U\ .$$

נגדיר כעת אנך מוקטור v לתת-מרחב U. צריך למצוא וקטור $u_0\in U$ המקיים $(\mathrm{v}-u_0)\perp U$.

---

36 הגדרה: (ההיטל האורתוגונלית)

הוקטור u_0 ממשפט 79 נקרא **ההיטל האורתוגונלית** של v על U. המרחק בין v ל U הוא $d(\mathrm{v},u_0)$, המרחק בין v להיטל של v על U.

---

37 הגדרה: ()

יהי U תת-מרחב של מרחב מכפלה פנימית V.

א) יהי $\mathrm{v}\in V$ ונניח ש- U נוצר סופית. אז $\mathrm{v}\perp U$ אם ורק אם v אורתוגונלי לאיברי קבוצה פורשת כלשהי של U.

ב) אוסף כל הוקטורים האורתוגונליים ל U הוא תת-מרחב של V.

---

38 הגדרה: (המשלים האורתוגונלי)

יהי U תת-מרחב של מרחב מכפלה פנימית V. לתת מרחב

$$U^{\perp}=\{\mathrm{v}\in V\big|\mathrm{v}\perp U\}$$

קוראים המשלים האורתוגונלי של U.

בסיסים אורתוגונליים

39 הגדרה: (קבוצת וקטורים אורתוגונלית ואורתונורמלית)

קבוצת וקטורים בממ"פ נקראת אורתוגונלית אם כל שני וקטורים שלה אורתוגונליים.

קבוצה אורתוגונלית נקראת אורתונורמלית אם כל הוקטורים שלה הם וקטורי יחידה.

---

40 הגדרה: (בסיס אורתונורמלי)

- בסיס של V המורכב מוקטורים אורתוגונליים נקרא **בסיס אורתוגונלי.**

- בסיס אורתוגונלי שמורכב מוקטורי היחידה נקרא **בסיס אורתונורמלי.**

---

41 הגדרה: (אופרטור הטלה האורתוגונלי)

נניח V מרחב מכפלה פנימית ממיד סופי, U תת מרחב של V כך ש

$$B = \{u_1, \ldots, u_k\}$$

בסיס אורתוגונלי של U. נגדיר אופרטור

$$P_U : V \to V$$

באמצעות

$$P_U(\mathrm{v}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\mathrm{v}, u_i)}{\|u_i\|^2} u_i \ .$$

האופרטור P_U נקרא **אופרטור ההטלה האורתוגונלי על** U .

העתקות צמודות

42 הגדרה: (העתקה הצמודה)

תהי העתקה לינארית

$$T : V \to V$$

במרחב מכפלה פנמית V הנוצר סופית.
קיימת העתקה לינארית $\bar{T} : V \to V$ כך ש-

$$\langle T(u), \mathrm{v} \rangle = \langle u, \bar{T}(\mathrm{v}) \rangle \ .$$

$\bar{T}$ נקראת העתקה הצמודה של T.

43 הגדרה: (העתקה צמודה לעצמה)

העתקה לינארית

$$T : V \to V$$

במרחב מכפלה פנמית נקראת העתקה צמודה לעצמה אם

$$\bar{T} = T \ ,$$

כלומר לכל u, v,

$$\langle T(u), \mathrm{v} \rangle = \langle u, T(\mathrm{v}) \rangle \ .$$

- העתקה צמודה לעצמה במרחב אוקלידי $(\mathbb{F} = \mathbb{R})$ נקראת גם העתקה סימטרית.
- במרחב אוניטרי, $(\mathbb{F} = \mathbb{C})$ היא נקראת גם העתקה הרמיטית.

---

44 הגדרה: (מטריצה צמודה לעצמה)

מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ $(\mathbb{F} = \mathbb{R}$ או $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) נקראת מטריצה צמודה לעצמה אם

$$A = \bar{A} \ .$$

- כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ מטריצה כזו נקראת סימטרית.
- כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ מטריצה כזו נקראת הרמיטית.

45 הגדרה: (העתקה אנטי-סימטרית)

תהי העתקה לינארית

$$T:V\to V$$

במרחב אוקלידי V. במצב

$$\bar{T}=-T$$

אז T נקראת **אנטי-סימטרית**.

46 הגדרה: (עתקה אנטי-הרמיטית)

תהי העתקה לינארית

$$T:V\to V$$

במרחב אוניטרי V. במצב

$$\bar{T}=-T$$

אז T נקראת **אנטי-הרמיטית**.

---

47 הגדרה: (העתקה אוניטרית)

$T:V\to V$ במרחב מכפלה פנימית V נוצר סופית, נקראת העתקה אוניטרית אם

$$T\cdot\bar{T}=\bar{T}\cdot T=I$$

כאשר I העתקה הזהות.

העתקה אוניטרית במרחב אוקלידי (כלומר כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$) נקראת גם העתקה אורתוגונלית.

1) התנאי $\bar{T}\cdot T=T\cdot\bar{T}=I$ פירושו ש- T הפיכה ו- $T^{-1}=\bar{T}$.

2) אם V מרחב נוצר סופית ו- S,T העתקות לינאריות מ- V ל- S אז השוויון $S\cdot T=I$ גורר את השוויון $T\cdot S=I$. ז"א כדי לוודא ש- T אוניטרית מספיק לבדוק רק אחד השוויונות $T\cdot\bar{T}=I$ או $\bar{T}\cdot T=I$.

48 הגדרה: ()

תהי A מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$. ל-A קוראים מטריצה אוניטרית אם

$$A\cdot\bar{A}=\bar{A}\cdot A=I$$

(תנאי שקול $A^{-1}=\bar{A}$.)

אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ למטריצה אוניטרית קוראים מטריצה אורתוגונלית, ז"א כאשר

$$A\cdot A^t=A^t\cdot A=I\ ,$$

או, באופן שקול:

$$A^{-1}=A^t\ .$$

העתקות נורמליות

49 הגדרה: (העתקה לכסינה אוניטרית)

(1) תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. A נקראת לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה אוניטרית Q כך ש-

$$D = Q^{-1}AQ$$

כאשר D מטריצה אלכסונית.

(2) תהי העתקה לינארית $T : V \to V$, כאשר V מרחב מכפלה פנימית n- ממדי מעל שדה $\mathbb{F}$. T נקראת העתקה לכסינה אוניטרית אם המטריצה המייצגת $[T]_B$ לפי בסיס B כלשהו לכסינה אוניטרית.

במקרה של $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ למטריצה (העתקה) לכסינה אוניטרית קוראים גם לכסינה אורתוגונלית.

---

50 הגדרה: (העתקה נורמלית)

1) העתקה $T : V \to V$ במרחב מכפלה פנימית נקראת העתקה נורמלית אם

$$T \cdot \bar{T} = \bar{T} \cdot T \ .$$

2) מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת מטריצה נורמלית אם

$$A \cdot \bar{A} = \bar{A} \cdot A \ .$$

משפט הפירוק הספקטרלי

משפטים

אלגברה 1

1 משפט:
תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. אם A הפיכה אז למערכת

$$A\mathrm{x} = b, \qquad b \neq 0 \ ,$$

קיים פתרון אחד והוא יחיד.

---

2 משפט:
תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. אם A הפיכה אז $\dim\left(\text{Nul}\ A\right) = 0$.

---

3 משפט:
תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. אם למערכת

$$A\mathrm{x} = b \ , \qquad b \neq \bar{0}$$

קיים רק פתרון אחד והוא יחיד אז $\dim\left(\text{Nul}(A)\right) = 0$.

---

4 משפט:

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. אם למערכת

$$A\mathrm{x}=b\ ,\qquad b\neq\bar{0}\ .$$

יש יותר מפתרון אחד אז A לא הפיכה.

---

5 משפט:

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. אם למערכת

$$A\mathrm{x}=b\ ,\qquad b\neq 0\ ,$$

יש פתרון אחד והוא יחיד, אז A הפיכה.

---

6 משפט. (מטריצה בעלת ערך עצמי אפס אינה הפיכה)

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם $\lambda=0$ ערך עצמי של A אז A לא הפיכה.

---

7 משפט. (משפט המטריצה ההפיכה)

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. התנאים הבאים שקולים:

1. A הפיכה.
2. A שקולת שורות ל- I (ניתן לקבל את המטריצה היחידה I_n ע"י פעולות אלמנטריות.)
3. אם U מטריצה מדורגת שהתקבלה מ- A ע"י ביצוע מספר סופי של פעולות שורה אלמנטריות אז ל - U יש n איברים מובילים.
4. למשוואה $A\mathrm{x}=0$ יש רק את הפתרון הטריוויאלי: $\mathrm{x}=\bar{0}$.
5. עמודות A בת"ל.
6. ההעתקה לינארית $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ הנתונה ע"י $T(X)=AX$ היא חח"ע.
7. במדורגת המתקבלת מ-A יש איבר מוביל בכל עמודה.
8. למשוואה $AX=b$ קיים לפחות פתרון אחד לכל $b\in\mathbb{R}^n$.
9. עמודות A פורשות את $\mathbb{R}^n$.
10. במדורגת המתקבלת מ-A יש איבר מוביל בכל שורה.
11. ההעתקה לינארית $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ הנתונה ע"י $T(X)=AX$ היא על.
12. קיימת $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש- $AB=I$ (כלומר A הפיכה מימין).
13. קיימת $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש- $CA=I$ (כלומר A הפיכה משמאל).
14. A^t הפיכה.

---

8 משפט. (עמודות מטריצה בת"ל אם"ם למשוואה הומוגנית יש רק הפתרון היחיד)

תהי $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ מטריצה מסדר $m\times n$. נניח ש $A=\begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}$ כאשר $c_1,c_2,\ldots,c_n$ העמודות של A.

1. הקבוצה $\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$ בלי תלויה לינארית אם ורק אם

$$A\mathrm{x}=\bar{0}\qquad\Rightarrow\qquad \mathrm{x}=\bar{0}$$

כאשר $\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n$.

.2 $\mathrm{sp}\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} = \mathbb{R}^m$ אם ורק אם למערכת $A\mathrm{x} = b$ יש פתרון לכל $b \in \mathbb{R}^m$.

---

9 משפט. (מימד ובסיס של קבוצת וקטורים)

נניח כי V מרחב וקטורי, $\dim(V) = n$. אז

(1 כל $n+1$ וקטורים של V הם תלוים לינארית.

(2 כל קבוצה של n וקטורים בלתי תלויה לינארית, היא בסיב של V.

(3 כל קבוצה של וקטורים שהיא בלתי תלויה לינארית , ניתן להשלים לבסיס של V.

---

10 משפט. (שפט היסודי של אלגברה ליניארית)
יהי U תת מרחב של $\mathbb{R}^n$. נניח ש U נפרש ע"י m וקטורים, ו U מכיל k וקטורים בלי תלויים לינאריים. אז $k \leq m$.

---

11 משפט. (בניית בסיס של תת מרחב)
יהי $U \neq \{\bar{0}\}$ תת מרחב של $\mathbb{R}^n$.

1) ל U קיים בסיס ו $\dim U \leq n$.

2) תהי $S \in U$ קבוצת בת"ל של וקטורים השייכים ל U. ניתן להוסיף לU וקטורים של הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$, כדי לקבל בסיס של $\mathbb{R}^n$.

3) תהי S קבוצת וקטורים שפורשת את U. ניתן להוריד וקטורים מקבוצת S כדי לקבל בסיס של U.

---

12 משפט. (קבוצת קטורים בת"ל אם"ם היא פורשת)
יהי U תת מרחב של $\mathbb{R}^n$. נניח ש $\dim\ U = m$, ו $B = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_m\}$ קבוצה של m וקטורים ששייכים ל-U. אז B בלי תלויה לינארית אם ורק אם B פורשת את U.

---

13 משפט. (משפט המימדים של תת מרחבים)
$U \subseteq W$ תתי מרחבים של $\mathbb{R}^n$. אז

.1 $\dim U \leq \dim W$.

.2 אם $\dim U = \dim W$ אז $U = W$.

---

14 משפט. (העתקה לינארית חח"ע)
תהי $T : U \to V$ העתרקה לינארית. נניח ש $\dim(U) = n$ ו $\dim(V) = m$, ותהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T. התנאים הבאים שקולים:

(א) T חח"ע.

(ב) במדורגת המתקבלת מ- A קיים איבר מוביל בכל **עמודה**

(ג) עמודות A בת"ל.

---

15 משפט. (העתקה לינארית על)
תהי $T : U \to V$ העתרקה לינארית. נניח ש $\dim(U) = n$ ו $\dim(V) = m$, ותהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T. התנאים הבאים שקולים:

(א) T על.
(ב) במדורגת המתקבלת מ- A קיים איבר מוביל בכל **שורה**
(ג) עמודות A פורשות את $\mathbb{R}^m$.

16 משפט. (משפט המימדים)

תהי $T : V \to W$ העתקה לינארית.

$$\dim V = \dim(\ker T) + \dim(\text{Im } T)$$

---

17 משפט:
תהי $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ מטריצה מסדר $m \times n$

.

$$\text{Im } T = \text{col } A$$
$$\text{rank } T = \text{rank } A \ .$$

---

18 משפט:
תהי $T : U \to V$ העתקה לינארית. T חח"ע אם ורק אם $\ker T = \{\bar{0}\}$.

---

19 משפט:
תהי $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ העתקה לינארית ותהי $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ המטריצה המייצגת של T. ז"א

$$T(x) = Ax$$

לכל $x \in \mathbb{R}^n$.
1) T על אם ורק אם $\text{rank } A = m$.
2) T חח"ע אם ורק אם $\text{rank } A = n$.

העתקות לינאריות

20 משפט. (מטריצה המייצגת ביחס לבסיסים שונים)
תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית ויהיו B ו B' שני בסיסים של V. אם $P_{B\to B'}$ המטריצה המעבר מבסיס B לבסיס B', אז

$$[T]_{B'} = P_{B\to B'} \cdot [T]_B \cdot P^{-1}_{B\to B'} \ .$$

---

21 מסקנה:
מטריצות מייצגות של אותה טרנספורציה לינארית לפי בסיסים שוניסת הן מטריצות דומות.

---

22 משפט:

אם T ו S טרנספורמציות לינאריות ממרחב U למרחב V אז:

1. $(T+S):U\to V$ טרנספורמציה לינארית,
2. לכל סקלר $\alpha\in\mathbb{F}$, $\alpha T:U\to V$ טרנספורמציה לינארית.

---

23 משפט. (קבוצת העתקות לינאריות)

נסמן ב $\mathrm{Hom}(U,V)$ קבוצת כל ההעתקות לינאריות מ- U ל- V.

---

24 משפט:

לכל מרחבים וקטוריים U, V מעל שדה $\mathbb{F}$, $\mathrm{Hom}(U,V)$ הוא מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ביחס לפעולות חיבור טרנספורמתיות וכפל של טרנספורמציות בסקלר.

---

25 משפט. (טרנספורמציה לינארית מורכבת גם טרנספורמציה לינארית)

אם $T:U\to V$, $S:V\to W$, טרנספורמציות לינאריות, אז

$$S\cdot T:U\to W$$

היא טרנספורמציה לינארית.

---

26 משפט:

נניח ש $S,T\in\mathrm{Hom}(U,V)$. ז"א $T:U\to V$, $S:U\to V$ העתקות לינאריות. יהיו

$$B=\{\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_n\}$$

בסיס של U ו

$$C=\{\bar{c}_1,\ldots,\bar{c}_m\}$$

בסיס של V.

1. $[T+S]_C^B=[T]_C^B+[S]_C^B$
2. לכל סקלר k: $[kT]_C^B=k[T]_C^B$

---

27 משפט:

נניח $T:U\to V$, $S:V\to W$ טרנספורמציות לינאריות. יהיו

$$B=\{\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_n\}$$

בסיס של U,

$$C=\{\bar{c}_1,\ldots,\bar{c}_m\}$$

בסיס של V, ו

$$D=\{\bar{d}_1,\ldots,\bar{d}_n\}$$

בסיס של W. אז

$$[S\cdot T]_D^B=[S]_D^C\cdot[T]_C^B$$

ערכים עצמיים

28 משפט:
תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

$$(\lambda \text{ הינו ערך עצמי של } A) \qquad \Leftrightarrow \qquad (\text{למשוואה } (A-\lambda I)X=0 \text{ יש פתרון לא טריוויאלי})$$

קבוצת הפתרונות של המשוואה $(A-\lambda I)X=0$ היא $\mathrm{Nul}\ (A-\lambda I)$, קבוצה זו נסמן ב- V_λ ונקרא המרחב העצמי של A השייך לערך העצמי λ.

---

29 משפט. (ערכים העצמיים של מטריצה משולשית)
הערכים העצמיים של מטריצה משולשית עליונה (או משולשית תחתונה) הם האיברים הנמצאים על האלכסון הראשי.

---

30 משפט. (וקטורים עצמיים השייך לערכים עצמיים שונים בת"ל)
תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית.

תהי

$$B = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$$

קבוצה של k וקטורים עצמיים של A השייכים לערכים עצמיים

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$$

בהתאמה. אם הערכים עצמיים **שונים** זה מזה, כלומר $\lambda_i \neq \lambda_j$ לכל $i \neq j$, $i,j=1,\dots,k$ אזי הוקטורים עצמיים $X_1, X_2, \dots, X_k$ בת"ל.

---

31 משפט. (פולינום האופייני של מטריצות דומות)
אם A ו- B מטריצות דומות אז יש להן אותו פולינום אופייני ולכן אותם ערכים עצמיים.

---

32 משפט. (לכסינות של מרטיצות)
תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. נניח ש ל A יש n וקטורים עצמיים בת"ל: $X_1, \dots, X_n$ השייכים לערכים עצמיים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ בהתאמה. אז A לכסינה ו

$$D = P^{-1}AP \qquad \Leftrightarrow \qquad A = PDP^{-1}$$

כאשר

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

מטריצה אלכסונית ו

$$P = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}$$

מטריצה הפיכה .

---

33 משפט. (קריטירון של מטריצה להיות לכסינה)
תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם ל- A יש n ערכים עצמיים **שונים** אז A לכסינה.

---

34 משפט. (סכום המימדים של מרחבים העצמיים)
תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(A לכסינה) $\Leftrightarrow$ (סכום המימדים של המרחבים העצמיים השונים שווה ל- n.)

---

35 משפט. (חזקה של מטריצה הדומה למטריצה אלכסונית)
אם $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה, אז

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

כאשר

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

המטירצה האלכסונית של הערך עצמי של A ו

$$P = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}$$

המטריצה ההפיכה של הוקטור עצמי של A.

---

36 תורת. (קיילי-המילטון)
תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

אם ל-A יש פולינום אופייני

$$f_A(x) = 0$$

אז

$$f_A(A) = 0 \ .$$

כלומר מטריצה A מקיימת את הפולינום האופייני של עצמה.

---

37 טענה:
טרנספורמציה לינארית $T : V \to V$ לכסינה אם ורק אם קיים בסיס של V המורכב מוקטורים עצמיים.

---

38 משפט:
וקטורים עצמיים של ערכים עצמיים λ שונים בת"ל.

---

39 משפט:
נניח ש A מטריצה לכסינה מסדר $n \times n$, $\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_n$ וקטורים עצמיים בת"ל, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ערכים עצמיים מתאימים. נסמן $P = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \dots & \mathrm{v}_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}$. אז

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

---

40 משפט:
תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית ו λ_0 ערך עצמי. אם k הריבוי האלגברי ו- m הריבוי הגיאומטרי של λ_0, אז

$$k \geq m \ .$$

במילים: הריבוי האלגברי גדול או שווה לריבוי הגאומטרי.

---

41 משפט:
נניח $T : V \to V$ העתקה לינארית. T לכסינה אא"ם הפולינום האופייני שלה מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים והריבוי האלגברי של כל ערך עצמי שווה לריבוי הגאומטרי שלו.

---

42 מסקנה:
אם כל הערכים העצמיים שונים אז T לכסינה.

---

43 משפט. (קיום ווקטור עצמי של אופרטור לינארית)
יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T : V \to V$ העתקה לינארית. קיים לפחות וקטור עצמי אחד של T.

---

44 משפט:
אם A לכסינה אז קיימת מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D = P^{-1}AP$, אז

$$A^n = PD^nP^{-1} \ .$$

---

45 משפט:
אם v וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי λ, כלומר $A \cdot \mathrm{v} = \lambda \mathrm{v}$ אז

$$A^n \mathrm{v} = \lambda^n \mathrm{v} \ .$$

משפט קיילי המילטון ופולינום מינימלי

46 משפט:

תהי $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית ויהי $Q(x)\in\mathbb{F}[x]$. אז

$$Q(A)=\begin{pmatrix}Q(\lambda_1) & 0 & \dots & 0\\ 0 & Q(\lambda_2) & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & Q(\lambda_n)\end{pmatrix}$$

---

47 משפט:

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ויהיו $P(x)\in\mathbb{F}[x]$. נניח ש $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה הפיכה. מתקיים:

$$B^{-1}P(A)B=P(B^{-1}AB)\ .$$

---

48 משפט:

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ותהי $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה הפיכה כך ש

$$B^{-1}AB=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}\ .$$

נניח ש $Q(x)\in\mathbb{F}[x]$. מתקיים:

$$Q(A)=B\begin{pmatrix}Q(\lambda_1) & 0 & \dots & 0\\ 0 & Q(\lambda_2) & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & Q(\lambda_n)\end{pmatrix}B^{-1}$$

---

49 משפט:

תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ סקלר. נניח ש $P(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינום. הוכיחו ש

$$P(A)=\lambda I_n$$

אם ורק אם

$$P(B)=\lambda I_n$$

---

50 משפט:

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T:V\to V$. נניח ש $P\in\mathbb{F}[x]$.

אם $\mathrm{v} \in V$ וקטור עצמי של T השייך לערך עצמי λ אז v וקטור עצמי של $P(T)$ השייך לערך עצמי $P(\lambda)$.
במילים פשוטות, אם

$$T(\mathrm{v}) = \lambda \cdot \mathrm{v}$$

אז

$$P(T)(\mathrm{v}) = P(\lambda)\mathrm{v} \ .$$

---

51 משפט. (מטריצות דומות מאפסות אותו פולינום)

אם A ו B מטריצות דומות. אז פולינום f מתאפס ע"י A אם ורק אם הוא מתאפס ע"י B.
כלומר אם קיים מטריצה C הפיכה כך ש $A = C^{-1}BC$, מתקיים:

$$A = C^{-1}BC \qquad \Leftrightarrow \qquad f(A) = 0 = f(B) \ .$$

---

52 משפט. ()
תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

א $A^m \in \mathrm{sp}\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{m-1}\}$ אם ורק אם קיים פולינום $P(x) \in \mathbb{F}[x]$ מסדר m כך ש $P(A) = 0$.

ב הקבוצה $\{I_n, A, A^2, \ldots, A^m\}$ ת"ל אם ורק אם קיים פולינום שונה מאפס $P(x) \in \mathbb{F}[x]$ מסדר m לכל היותר כך ש $P(A) = 0$.

---

53 משפט. (משפט קיילי-המילטון עבור מטריצות)
תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. נניח ש $p_A(x)$ פולינום האופייני שלה. אז

$$p_A(A) = 0_{n\times n}$$

כאשר $0_{n\times n}$ מטריצה האפס מסדר $n \times n$. במילים פשוטות, A מאפסת את הפולינום האופייני שלה.

---

54 משפט. (יחידות הפולינום המינימלי)
הפולינום המינימלי הוא יחיד.

---

55 משפט. (משפט חילוק של פולינומים - אלגוריתם של איוקליד)

יהיו $f(x), g(x)$ פוליניומים כך ש- $\deg g \leq \deg f$. אז קיימים פולינמים $r(x), q(x)$ יחידים כך ש

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

כאשר

$$\deg\ r(x) < \deg\ g(x), \qquad \deg\ g(x) \leq \deg\ f(x) \ .$$

---

56 משפט. (פולינום שמתאפס ע"י מטריצה מתחלק ע"י הפולינום המינימלי)

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית ויהי $f(x)$ פולינום. אם $f(A)=0$ אז

$$m_A(x) \mid f(x) \ .$$

---

57 מסקנה. (פולינום המינימלי מחלק את הפולינום האופייני)
תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. אם $p_A(x)$ הפולינום האופייני ו $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A, אז

$$m_A(x) \mid p_A(x) \ .$$

---

58 משפט. ($p_a(x)$ מחלק כל פולינום המתאפס ע"י a בחזקת הסדר של a.)

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. יהי $p_A(x)$ הפולינום האופייני של A. אם A מאפסת את הפולינום $f(x)$, כלומר אם $f(A)=0$, אז

$$p_A(x) \mid f^n(x) \ .$$

---

59 משפט. (הפולינום האופייני מחלק כל פולינום המתאפס ע"י a.)

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. יהי $p_A(x)$ הפולינום האופייני של A. אם $(x-\lambda_0)$ גורם אי פריק של $p_A(x)$ ו- $f(x)$ פולינום המתאפס ע"י A, כלומר אם $f(A)=0$, אז

$$(x-\lambda_0) \mid f(x) \ .$$

---

60 משפט. (לפולינום אופייני ופולינום מינימלי יש אותן שורשים)

ל- $m_A(x)$ ול- $p_A(x)$ יש בדיוק אותם הגורמים האי פריקים. כלומר

$$m_A(\lambda)=0 \quad \Leftrightarrow \quad p_A(\lambda)=0 \ .$$

---

61 משפט. (a לכסינה אא"ם לפולינום מינימלי יש גורמים אי-פריקים לינאריים)
תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית ויהי $m_A(x)$ הפולינום המינימלי שלה. A לכסינה אם ורק אם הגורמים האי-פריקים של $m_A(x)$ לינאריים, כלומר

$$m_A(x)=(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_i)\ldots(x-\lambda_k) \ .$$

---

62 משפט. (למטריצות דומות יש אותו פולינום מינימלי)

תהיינה $A,B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות. ל-A ו- B יש אותו פולינום מינימלי.

שילוש מטריצה

63 משפט. (שילוש מטריצה)

תהי A מטריצה משולשית מעל שדה $\mathbb{F}$. כלומר

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \ldots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

אז

1)

$$p_A(x) = (x - a_{11})(x - a_{22}) \ldots (x - a_{nn}) \ ,$$

בפרט הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$.

2) איברי האלכסון של מטריצה משולשית עליונה הם הערכים עצמיים. המספר הפעמים שכל ערך עצמי מופיע באלכסון הוא הריבוי האלגברי של הערך עצמי.

---

64 משפט. (קריטריון לשילוש)

אם מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ניתנת לשילוש מעל $\mathbb{F}$, אז הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$.

---

65 משפט. (אם t ניתנת ל לשילוש אז p_t מתפרק לגורמים לינאריים)

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $T : V \to V$ העתקה לינארית. אם T ניתנת לשילוש אז הפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$.

---

66 משפט. (גרעין ותמונה של העתקה שמורים)

לכל $T : V \to V$ לינארית,

א) תת מרחב $\ker T$ הוא תת מרחב T - שמור.

ב) תת מרחב $\mathrm{Im}\ T$ T - שמור.

---

67 משפט. (העתקה ניתנת לשילוש אא"ם קיימת סדרת תת מרחבים t שמורים)

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהי V מרחב וקטורי n -ממדי מעל שדה $\mathbb{F}$, $T : V \to V$ טרנספורמציה לינארית. T ניתנת לשילוש אם ורק אם קיימת סדרה של תת מרחבים $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$ כך שלכל $1 \leq i \leq n$, V_i הוא תת מרחב T שמור וגם $\dim(V_i) = i$.

---

68 משפט. (קיום שילוש)

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהיה $T \in \text{Hom}(V)$. T ניתנת לשילוש אם ורק אם הפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים מעל שדה $\mathbb{F}$.

---

69 מסקנה. (קיום שילוש)

לכל מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{C}$ ולכל $T \in \text{Hom}(V)$, T ניתנת לשילוש.

צורת ז'ורדן

70 משפט. (בלוק ז'ורדן לא לכסין)

$J_k(\lambda)$ לא לכסין.

---

71 משפט. (משפט ז'ורדן)

יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי מעל שדה $\mathbb{F}$. נניח שהפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים

$$p(x) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(x - \lambda_2)^{n_2} \dots (x - \lambda_l)^{n_l}$$

כאשר $\lambda_i \neq \lambda_j$ עבור $i \neq j$ לכל $1 \leq i \leq l$. נניח שפולינום המינימלי הוא

$$m(x) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_l)^{m_l}$$

כאשר $1 \leq m_i \leq n_i$ לכל i. אז יש ל- T יצוג ע"י מטריצה מצורת ז'ורדן מצורה

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 & \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \beta_l \end{pmatrix}$$

כאשר β_i מתאים לערך עצמי λ_i,

$$\beta_i = \text{diag}\Big(J_{a_1}(\lambda_i), J_{a_2}(\lambda_i), \dots, J_{a_s}(\lambda_i)\Big) = \begin{pmatrix} J_{a_1}(\lambda_i) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{a_2}(\lambda_i) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & J_{a_s}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

כאשר

1) $a_1 = m_i$

2) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_s$

3) $a_1 + a_2 + \dots + a_s = n_i$

4) s הוא הריבוי הגאומרטי של λ_i

לכן, שתי מטריצות דומות אם ורק אם יש להן אותה צורת ז'ורדן עד כדי סדר הבלוקים.

---

72 משפט. (צורת ז'ורדן של מטריצה 3×3)

עבור מטריצות 3×3 צורות פולינום אופייני הן:

$$p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ ,\qquad p(x)=(x-a)^2(x-b)\ ,\qquad p(x)=(x-a)^3\ .$$

<u>מקרה 1:</u>

$$p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ ,\qquad m(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ .$$

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$$

מטריצה אלכסונית. הצ'ורת ז'ורדן היא

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_1(a) & 0 & 0\\ 0 & J_1(b) & 0\\ 0 & 0 & J_1(c)\end{pmatrix}$$

<u>מקרה 2:</u>

$$p(x)=(x-a)^2(x-b)$$

$\Leftarrow$ ישנן שתי אפשרויות לפולינום המינימלי:

$$m(x)=(x-a)(x-b)\qquad\vee\qquad m(x)=(x-a)^2(x-b)$$

<u>$m(x)=(x-a)(x-b)$</u>

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$\begin{pmatrix} J_1(a) & 0 & 0\\ 0 & J_1(a) & 0\\ 0 & 0 & J_1(b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$$

<u>$m(x)=(x-a)^2(x-b)$</u>

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$\begin{pmatrix} J_2(a) & 0\\ 0 & J_1(b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 1 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$$

<u>מקרה 3:</u>

$$p(x)=(x-a)^3$$

אז ישנן 3 אפשרויות ל- $m(x)$:

$$(x-a)\ ,\qquad (x-a)^2\ ,\qquad (x-a)^3\ .$$

<u>$m(x)=(x-a)$</u>

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$\begin{pmatrix} J_1(a) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(a) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$\underline{m(x) = (x-a)^2}$

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$\begin{pmatrix} J_2(a) & 0 \\ 0 & J_1(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$\underline{m(x) = (x-a)^3}$

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$\begin{pmatrix} J_3(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

ז"א לכל פולינום מינימלי כאן יש צורת ז'ורדן אחת. לכן כל שתי מטריצות מסדר 3×3 עם אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי הן דומות אחת לשניה.

מכפלות פנימיות

73 משפט. (לינאריות ברכיב השני)

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ו $\langle , \rangle$ מכפלה פנימית. אז

1) לכל $u, \mathrm{v}, w \in V$,

$$\langle u, \mathrm{v} + w \rangle = \langle u, \mathrm{v} \rangle + \langle u, w \rangle$$

2) לכל $u, \mathrm{v} \in V$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle u, \lambda \mathrm{v} \rangle = \lambda \langle u, \mathrm{v} \rangle \ .$$

---

74 משפט. (לינאריות של העקבה)

לכל $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$:

1) $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

2) $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}(A)$ לכל $\lambda \in \mathbb{F}$.

3) $\mathrm{tr}(A^t) = \mathrm{tr}(A)$.

---

75 משפט. ()

יהי V מרחב מכפלה פנימית. אזי

א) לכל $u,\mathrm{v},w\in V$,
$$(u,\mathrm{v}+w)=(u,\mathrm{v})+(u,w)\ .$$
ב) לכל $u,\mathrm{v}\in V$ ולכל סקלר λ:
$$(u,\mathrm{v})=\bar{\lambda}(u,\mathrm{v})\ .$$

---

76 משפט. ()

לכל שני וקטורים u,v במרחב מכפלה פנימית מתקיים:

1)
$$\|u\pm\mathrm{v}\|^2=\|u\|^2\pm 2\mathrm{Re}(u,\mathrm{v})+\|v\|^2$$

2)
$$\|u+\mathrm{v}\|^2+\|u-\mathrm{v}\|^2=2\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)$$

---

77 משפט. (תכונות של המרחק)

נראה כי מושג המרחק החדש מקיים תכונת בסיסית של המרחק המוכר במישור.

1)
$$d(u,\mathrm{v})=d(\mathrm{v},u)$$

הוכחה:

$$d(u,\mathrm{v})=\|u-\mathrm{v}\|=\|(-1)(\mathrm{v}-u)\|=1\cdot\|\mathrm{v}-u\|=d(\mathrm{v},u)$$

2) $d(u,\mathrm{v})\geq 0$. $d(u,\mathrm{v})=0$ אם ורק אם $u=\mathrm{v}$.

3)
$$d(u,\mathrm{v})\leq d(u,w)+d(w,\mathrm{v})$$

זאת תכונה הנקראת אי-שוויון המשולש.

אי-שוויון המשולש מסתמכת על אי-שוויון קושי-שוורץ.

---

78 משפט. (אי-שוויון קושי-שוורץ)
לכל וקטורים u ו- v במרחב מכפלה פנימית מתקיים
$$|(u,\mathrm{v})|\leq\|u\|\cdot\|\mathrm{v}\|\ .$$

---

79 משפט. (מציאת וקטור אורתוגונלי לתת-מרחב) יהי V מרחב מכפלה פנימית, יהי U תת-מרחב נוצר סופית של V. יהי $\mathrm{v}\in V$ וקטור שאינו שייך ל-U. אז

1) קיים וקטור $u_0\in U$ כך ש $(\mathrm{v}-u_0)\perp U$

2) וקטור u_0 כזה הוא יחיד.

3) אם $u_1\in U$, $u_1\neq u_0$, אז
$$\|\mathrm{v}-u_1\|>\|\mathrm{v}-u_0\|\ ,$$
כלומר
$$d(\mathrm{v},u_1)>d(\mathrm{v},u_0)\ .$$

בסיסים אורתוגונליים

80 משפט. (קבוצת אורתוגונלית בת"ל)

קבוצת אורתוגונלית במרחב מכפלה פנימית שלא מכילה את וקטור האפס היא בלתי תלויה לינארית.

---

81 משפט. (קבוצת אורתוגונלית בת"ל)

יהי V מרחב מכפלה פנימית. נניח ש $\dim(V) = n$. אז כל קבוצה אורתוגונלית של n וקטורים מהווה בסיס של V.

---

82 משפט. (משפט ההיטל האורתוגונלי 1)

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית, $U \subseteq V$ תת מרחב נוצר סופית של V,

$$B = \{u_1, \ldots, u_k\}$$

בסיס אורתונורמלי של U. אז לכל וקטור $\mathrm{v} \in V$ הוקטור

$$u_0 = \sum_{i=1}^{k} (\mathrm{v}, u_i) u_i$$

הוא ההיטל האורתוגונלי של v על U.

---

83 משפט. (משפט ההיטל האורתוגונלי 2)

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית, $U \subseteq V$ תת מרחב נוצר סופית של V.

$$(\mathrm{v} - u_0) \perp U$$

כאשר

$$u_0 = \sum_{i=1}^{k} (\mathrm{v}, u_i) u_i$$

ההיטל האורתוגונלי של v על U.

---

84 משפט. (תכונות של אופרטור הטלה האורתוגונלי)

אופרטור ההטלה האורתוגונלי P_U מקיים את התכונות הבאות:

1) P_U העתקה לינארית.

2) לכל $u \in U$ מתקיים $P_U(u) = u$,

ולכל $w \in U^{\perp}$ מתקיים $P_U(w) = 0$.

3) $\mathrm{Im}(P_U) = U$ וגם $\mathrm{Ker}(P_U) = U^{\perp}$.

4) $V = U \oplus U^{\perp}$

5) $P_U \circ P_U = P_U$

6) לכל $\mathrm{v} \in V$ מתקיים כי
$$\mathrm{v} - P_U(\mathrm{v}) \in U^{\perp}$$

---

85 משפט. (משפט הפיכות האורתוגונלי)

יהי V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית ויהי U תת מרחב של V. אז

א) $V = U \oplus U^{\perp}$

ב) $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$

---

86 משפט. (קיום בסיס אורתוגונלי)

לכל מרחב מכפלה פנימית V ממימד סופי קיים בסיס אורתוגונלי.

---

87 משפט. (קיום בסיס אורתוגונלי)

לכל מרחב מכפלה פנימית V ממימד סופי קיים בסיס אורתוגונלי.

העתקות צמודות

88 משפט. (נוסחת העתקה הצמודה)

תהי העתקה לינארית
$$T : V \to V$$
במרחב מכפלה פנמית V הנוצר סופית. יהי $\{b_1, \ldots, b_n\}$ בבסיס אורתונורמלי של V. אז ההעתקה הצמודה של T ניתנת ע"י הנוסחה
$$\bar{T}(\mathrm{v}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{(T(b_i), \mathrm{v})} b_i \ .$$

---

89 משפט. (העתקה צמודה לעצמה אס"ם המטריצה המייצגת צמודה לעצמה)

העתקה $T : V \to V$ במרחב מכפלה פנימית היא צמודה לעצמה אם ורק אם המטריצה המייצגת של T בבסיס אורתונורמלי כלשהו של V היא צמודה לעצמה.

---

90 משפט. ()

א) סכום של העתקות צמודות לעצמן הוא גם העתקה צמודה לעצמה.

ב) אם $T \neq 0$ העתקה צמודה לעצמה אז αT העתקה צמודה לעצמה אם ורק אם α הוא סקלר ממשי.

ג) אם T_1 ו- T_2 העתקות צמודות לעצמן אז $T_1 \cdot T_2$ צמודה לעצמה אם ורק אם ההעתקות T_1 ו- T_2 מתחלפות (ז"א $T_1 T_2 = T_2 T_1$)

ד) אם T העתקה צמודה לעצמה, אז גם T^2 צמודה לעצמה.

---

91 משפט. ()
יהי V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית. תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית. $\bar{T} \cdot T$ ו- $T \cdot \bar{T}$ העתקה צמודה לעצמה.

---

92 משפט. ()

תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית כלשהי.
T היא סכום של שתי העתקות, שאחת מהן צמודה לעצמה והשני אנטי-סימטרית או אנטי-הרמיטית.

---

93 משפט. ()

1) תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית כלשהי המקיימת

$$\langle T(u), \mathrm{v} \rangle = 0$$

לכל $u, \mathrm{v} \in V$. אז $T = 0$.

2) אם $T : V \to V$ העתקה צמודה לעצמה המקיימת

$$\langle T(u), u \rangle = 0$$

לכל $u \in V$. אז $T = 0$.

---

94 משפט. ()

עבור העתקה לינארית $T : V \to V$ במרחב מכפלה פנימית נוצר סופית, התנאים הבאים שקולים:

(1) T העתקה אוניטרית.

(2) לכל u, v

$$\langle T(u), T(\mathrm{v}) \rangle = \langle u, \mathrm{v} \rangle \ .$$

(3) לכל $u \in V$,

$$\|T(u)\| = \|u\|$$

---

95 משפט. ()

עבור העתקה לינארית T התנאי שלכל $u \in V$,

$$\|T(u)\| = \|u\|$$

שקול לתנאי שלכל $u, \mathrm{v} \in V$

$$\|T(u) - T(\mathrm{v})\| = \|u - \mathrm{v}\| \ .$$

---

96 משפט. ()

יהי V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית, ותהי $T: V \to V$ העתקה לינארית.

א) אם T העתקה אוניטרית, ואם $B = \{\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V, אז גם $\{T(\mathrm{v}_1), \ldots, T(\mathrm{v}_n)\}$ בסיס אורתונורמלי.

ב) אם קיים בסיס אורתונורמלי של V שהעתקה T מעתיקה לבסיס אורתונורמלי, אז T אוניטרית.

---

97 משפט. ()

1) אם A מטריצה אוניטרית מסדר n מעל שדה $\mathbb{F}$, אז גם שורותיה וגם עמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{F}^n$.

2) אם שורות (או עמודות) של מטריצה ריבועית מסדר n מעל $\mathbb{F}$ מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ ביחס מכפלה הפנימית הסטנדרטית אז המטריצה אוניטרית.

---

98 משפט. ()

עבור העתקה לינארית $T: V \to V$ (כאשר V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית) התנאים הבאים שקולים זה לזה:

א) T אוניטרית, ז"א
$$\bar{T} \cdot T = T \cdot \bar{T} = 1$$

ב) לכל $u, \mathrm{v} \in V$:
$$\langle T(u), T(\mathrm{v}) \rangle = \langle u, \mathrm{v} \rangle \ .$$

ג) לכל $u \in V$:
$$\|T(u)\| = \|u\|.$$

ד) לכל $u, \mathrm{v} \in V$:
$$\|T(u) - T(\mathrm{v})\| = \|u - \mathrm{v}\| \ .$$

ה) T מעבירה בסיס אורתונורמלי כלשהו של V לבסיס אורתונורמלי .

ו) המטריצה המייצגת של T לפי בסיס אורתונורמלי מסוים של V היא אוניטרית.

העתקות נורמליות

99 משפט. (ערכים עצמיים של העתקה צמודה לעצמה ממשיים)

כל הערכים עצמיים של העתקה (מטריצה) צמודה לעצמה הם ממשיים.

---

100 משפט. (ערכים עצמיים של העתקה אנטי-הרמיטית מדומים)

אם T העתקה אנטי-סימטרית אז כל הערכים העצמיים של T הם מספרים מדומים.

---

101 משפט. (פולינום אופייני של העתקה צמודה לעצמה מתפרק לגורמים לינארים ממשיים)

תהי T העתקה (מטריצה) צמודה לעצמה.

1) הפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים.

2) השורשים של הפולינום האופייני של T ממשיים.

---

102 משפט. (ערך מוחלט של שורשי פולינום אופייני של העתקה אוניטרית שווה 1)

(1) כל השורשים של הפולינום האופייני של העתקה (מטריצה) אוניטרית שווים בערכם המוחלט ל- 1.

(2) כל הערכים העצמיים של העתקה (מטריצה) אוניטרית שווים בערכים המוחלט ל- 1.

---

103 משפט. (העתקה לכסינה אוניטרית אם"ם קיים בסיס אורתנורמלי בי היא מיוצגת ע"י מטריצה אלכסונית)

תהי העתקה לינארית $T : V \to V$, כאשר V מרחב מכפלה פנימית n- ממדי מעל $\mathbb{F}$.

T לכסינה אוניטרית אם ורק אם קיים בסיס אורתונורמלי $\widehat{B} = \{\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ של V, שבו המטריציה המייצגת $[T]_{\widehat{B}}$ אלכסונית.

---

104 משפט. (a לכסינה אוניטרית אם"ם $\exists$ בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של a)
מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אוניטרית אם"ם קיים במרחב $\mathbb{F}^n$ בסיס אורתונורמלי (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{F}^n$), שכל איבריו הם וקטורים עצמיים של A.

וקטורי הבסיס הזה, רשומים כעמודות, יוצרים מטריצה מלכסנת אוניטרית את A.

---

105 משפט. (אם העתקה לכסינה אוניטרית אז היא נורמלית)

תהי $T : V \to V$ במרחב מכפלה פנימית V לכסינה אוניטרית. אז T העתקה נורמלית, כלומר

$$T \cdot \bar{T} = \bar{T} \cdot T \ .$$

---

106 משפט:
תהי A מטריצה נורמלית ו- Q מטריצה אוניטרית. $\bar{Q} \cdot A \cdot Q$ היא מטריצה נורמלית.

---

107 משפט:
תהי T העתקה נורמלית ב- V. אז $T - \lambda I$ היא העתקה נורמלית לכל סקלר λ.

---

108 משפט. (העתקה לכסינה אורתוגונלית היא נורמלית וסימטרית)

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ותהי $T : V \to V$ העתקה לכסינה אורתוגונלית מעל שדה $\mathbb{R}$.

1) T העתקה נורמלית.

2) T העתקה סימטרית.

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה לכסינה אורתוגונלית מעל שדה $\mathbb{R}$.

3) A העתקה נורמלית.

4) A העתקה סימטרית.

---

109 משפט. (משפט שור)

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ויהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ערכים עצמיים של A (לא בהכרח שונים זה מזה).

$\exists$ מטריצה U אוניטרית כך ש-

$$A = UB\bar{U}$$

כאשר

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ובפרט B משולשית עליונה.

במילים פשוטות, כל מטריצה ריבועית A דומה אוניטרית למטריצה משולשית עליונה שבו איברי האלכסון הראשי הם הערכים עצמיים של A.

---

110 משפט. (נורמליות נשמרת תחת שוויון אוניטרי)

תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית במרחב מכפלה פנימית נוצר-סופית V מעל שדה $\mathbb{F}$.

תהי Q העתקה אוניטרית.

T נורמלית גם ורק אם $QT\bar{Q}$ נורמלית.

---

111 משפט. (מטריצה נורמלית ומשולשית היא אלכסונית)

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה נורמלית.

אם A מטריצה משולשית אז A בהכרח מטריצה אלכסונית.

---

112 משפט. (משפט לכסון אוניטרי)

1) תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית במרחב מכפלה פנימית אוניטרי. T לכסינה אוניטרית אם"ם היא נורמלית.

2) תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית במרחב מכפלה פנימית אוקלידי. T לכסינה אורתוגונלית אם"ם היא סימטרית.

3) תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית (ממשית או מרוכבת). A לכסינה אוניטרית אם"ם היא נורמלית.

4) תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית ממשית. A לכסינה אורתוגונלית אם"ם היא סימטרית.

---

113 משפט. (וקטור עצמי וערך עצמי של העתקה וצמודתה)

אם v וקטור עצמי של העתקה נורמלית T, השייך לערך עצמי λ.
אז $\bar{\lambda}$ הוא ערך עצמי של T ו- v הוא גם וקטור עצמי של $\bar{T}$ השייך ל- $\bar{\lambda}$.

---

114 משפט. (וקטורים עצמיים של העתקה נורמלית של ערכים עצמיים שונים אורתוגונליים)

תהי T העתקה נורמלית במרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{F}$. וקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים שונים, אורתוגונליים זה מזה.

---

115 משפט. (אם שורשי פולינויום אופייני ממשיים אז ההעתרה צמודה לעצמה)

תהי T העתקה נורמלית במרחב מכפלה פנימית V נוצר סופית.

אם כל שורשי הפולינום האופייני של T ממשיים, אז T העתקה צמודה לעצמה.

---

116 משפט. (אם ערך מוחלט של שורשי פולינום אופייני שווה 1 אז ההעתקה אוניטרית) תהי T העתקה נורמלית במרחב מכפלה פנימית V נוצר סופית.

אם כל שורשי הפולינום האופייני של T שווים בערכם ל- 1, אז T העתקה אוניטרית.

---

117 משפט:
תהי H העתקה הקמיטית ו- U העתקה אוניטרית במרחב מכפלה פנימית. אם H ו- U מתחלפות אז $T = H \cdot U$ נורמלית.

משפט הפירוק הספקטרלי

118 משפט. (סכום ישר של מרחבים עצמיים של העתקה נורמלית)

תהי T העתקה נורמלית במרחב מכפלה אוניטרי V ויהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ כל הערכים העצמיים השונים של T. אם $V_1, \ldots, V_k$ הם התת-מרחבים העצמיים השייכים ל- $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ בהתאמה, אזי

1) $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$

2) $V_i \perp V_j$ לכל $i \neq j$.

---

119 משפט. (משפט הפירוק הספקטרלי)

תהי T העתקה נורמלית במרחב אוניטרי V נוצר סופית יהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ כל הערכים העצמיים השונים של T ויהיו $V_1, \ldots, V_k$ המרחבים העצמיים המתאימים. לכל $1 \leq i \leq k$ נסמן ב- P_i את ההעתקה ההטלה האורתוגונלית על V_i. אזי

1) $T = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k$

2) $I = P_1 + \ldots + P_k$

3) לכל $i \neq j$, $P_i \cdot P_j = 0$

4) לכל i, $P_i^2 = P_i$

5) לכל i, $\bar{P}_i = P_i$.