עבודה 3: ערכים עצמיים, מרחבים עצמיים, לכסון.

שאלה 1

נתונה טרנספורמציה ליניארית $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י

$$T(a+bt+ct^2)=\begin{pmatrix}2a+5b\\ a+6b\\ \pi a+\pi^2 b+3c\end{pmatrix}$$

לכל $a+bt+ct^2\in P_2(\mathbb{R})$.

א) מצאו את המטריצה הסטנדרטית A של הטרנספורמציה.

ב) מצאו את הערכים העצמיים והמרחבים העצמיים של A.

ג) הוכיחו שמטריצה A לכסינה.

ד) מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D=P^{-1}AP$.

ה) מצאו את $\mathrm{Det}(7\cdot A^{1000})$

שאלה 2

תהי $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ כך ש: $A=\begin{pmatrix}0&3&1\\-1&4&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

א) מצאו את הפולינום האופייני של מטריצה A.

ב) מצאו את הערכים העצמיים והמרחבים העצמיים של A.

ג) האם המטריצה לכסינה? אם כן, מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P שך ש: $D=P^{-1}\cdot A\cdot P$.
אם לא, הסבירו זאת.

שאלה 3

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}5&-3&2\\6&-4&4\\4&-4&5\end{pmatrix}$

א) מצאו ערכים עצמיים ומרחבים עצמיים של A.

ב) אם A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D=P^{-1}AP$.
אחרת, הסבירו מדוע A איננה הפיכה.

ג) מצאו את $A^{2014}\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$.

ד) מצאו את A^{201}.

שאלה 4 נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

א) מצאו ערכים עצמיים ומרחבים עצמיים של A.

ב) אם A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D = P^{-1}AP$. אחרת, הסבירו מדוע A איננה לכסינה.

שאלה 5 נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

א) מצאו ערכים עצמיים ומרחבים עצמיים של A.

ב) אם A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D = P^{-1}AP$. אחרת, הסבירו מדוע A איננה לכסינה.

ג) מצאו את $A^{2014}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

שאלה 6 תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ המקיימת $A^2 = A$. הוכיחו ש הינו 0 ערך עצמי של A או ש 1 הינו ערך עצמי של A.

שאלה 7 תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו: אם A הפיכה אז A לכסינה.

שאלה 8 תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו: אם A לכסינה אז A הפיכה.

שאלה 9 נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

א) מצאו ערכים עצמיים ומרחבים עצמיים של A.

ב) אם A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D = P^{-1}AP$. אחרת, הסבירו מדוע A איננה לכסינה.

שאלה 10 נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

א) האם A לכסינה מעל הממשיים? אם כן, מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D = P^{-1}AP$. אחרת, הסבירו מדוע A איננה לכסינה.

ב) האם A לכסינה מעל המרוכבים? אם כן, מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D = P^{-1}AP$. אחרת, הסבירו מדוע A איננה לכסינה.

שאלה 11 תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו: λ הינו ערך עצמי של A אם"ם λ הינו ערך עצמי של A^t.

שאלה 12 מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ נקראת סקלרית אם קיים $\alpha \in \mathbb{R}$ ש כך $A = \alpha I$. תהי A מטריצה שאיננה סקלרית ויהי $f(x) = x^2 - 5x + 6$ פולינום. נתון ש- $f(A) = 0$. הוכיחו ש - 2 ו- 3 הם ערך עצמי של A. (הערה: $f(A) = A^2 - 5A + 6I$).

שאלה 13 נתון כי וקטור v הוא וקטור עצמי של מטריצה B המתאים לערך עצמי 2. הוכיח ו כי v הוא וקטור עצמי של המטריצה $C = 3B + 2I$ ומצאו את הערך העצמי המתאים לו.

שאלה 14 הוכיחו או הפריכו: קבוצת כל המטריצות הריבועיות מסדר 3×3 בעלות ערך עצמי 0 מהוות תת מרחב של המרחב הווקטורי $\mathbb{R}^{3\times3}$.

שאלה 15 יהיו a, b, c, d כך ש- $a + b = c + d$. הוכיחו שהערכים העצמיים של המטריצה $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ הם $a - c$ ו $a + b$.

שאלה 16 תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ בעלת ערך עצמי $\alpha \in \mathbb{R}$. יהי u וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי α. הוכיחו ש- u הינו ו"ע של A^k ומצאו את הערך העצמי השייך ל- u.

שאלה 17 תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

אם A לא הפיכה אז A לא לכסינה.

שאלה 18 תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה בעלת ערך עצמי $\alpha \in \mathbb{R}$. וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי α. הוכיחו ש- u הינו וקטור עצמי של
A^{-1} ומצאו את הערך העצמי השייך ל- u.

שאלה 19 תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ויהיו u_1, u_2 וקטור עצמי של A השייכים לערך עצמי שונים λ_1, λ_2. הוכיחו ש u_1, u_2 בת"ל.

שאלה 20 תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

אם A לא הפיכה אז A לא לכסינה.

שאלה 21 תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

אם ל- A יש ערך עצמי $\lambda = 0$ אז A לא הפיכה.

תשובות

שאלה 1

א)

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0\\ 1 & 6 & 0\\ \pi & \pi^2 & 3\end{pmatrix}$$

ב) פולינום אופייני:

$$p_A(x)=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -5 & 0\\ -1 & \lambda-6 & 0\\ -\pi & -\pi^2 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)\left((\lambda-2)(\lambda-6)-5\right)=(\lambda-3)\left(\lambda^2-8\lambda+12-5\right)=(\lambda-3)\left(\lambda^2-8\lambda+7\right)$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=1$ מריבוי אלגברי 1,

$\lambda=3$ מריבוי אלגברי 1,

$\lambda=7$ מריבוי אלגברי 1.

מרחב עצמי השייך ל - $\lambda=1$

$$V_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}\frac{10}{\pi(\pi-5)}\\ \frac{-2}{\pi(\pi-5)}\\ 1\end{pmatrix}\right\}\ ,\qquad \text{dim}V_1=1\ .$$

מרחב עצמי השייך ל - $\lambda=3$

$$V_3=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\ ,\qquad \text{dim}V_3=1\ .$$

מרחב עצמי השייך ל - $\lambda=7$

$$V_7=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}\frac{4}{\pi+\pi^2}\\ \frac{4}{\pi+\pi^2}\\ 1\end{pmatrix}\right\}\ ,\qquad \text{dim}V_7=1\ .$$

ג) $\dim\,V_7+\dim\,V_3+\dim\,V_1=3=\text{dim}\mathbb{R}^3$ לכן A לכסינה.

ד) $A=PDP^{-1}$ כאשר

$$D=\begin{pmatrix}7&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad P=\begin{pmatrix}\frac{4}{\pi+\pi^2} & 0 & \frac{10}{(\pi-5)\pi}\\ \frac{4}{\pi+\pi^2} & 0 & -\frac{2}{(\pi-5)\pi}\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\ .$$

ה)

$$|7A^{1000}| = 7^3|A^{1000}| = 7^3|PD^{1000}P^{-1}| = 7^3|D^{1000}| = 7^3 \cdot 7^{1000} \cdot 3^{1000} \cdot 1^{1000} = 343 \cdot (21)^{1000}$$

<u>שאלה 2</u>

א)

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| = &\begin{vmatrix} \lambda & -3 & -1 \\ 1 & \lambda - 4 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}\\ =&(1-\lambda)\begin{vmatrix} \lambda & -3 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}\\ =&(\lambda-1)\left(\lambda(\lambda-4)+3\right)\\ =&(\lambda-1)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)\\ =&(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-1)\\ =&(\lambda-1)^2(\lambda-3)\end{aligned}$$

הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-3) \ .$$

ב) ערכים עצמיים:

$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 2

$\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 1.

נחשב את המרחב עצמי V_1 השייך לערך עצמי 1:

$$(A-I) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $(x,y,z) = (3y+z, y, z) = y(3,1,0) + z(1,0,1)$ פתרון

$$V_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(V_1) = 2$, ז"א הריבוי גאומטרי 2.

נחשב את המרחב עצמי V_3 השייך לערך עצמי 3:

$$(A-3I) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $(x,y,z) = (y,y,0) = y(1,1,0)$ פתרון

$$V_3 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(V_3) = 1$, ז"א הריבוי גאומטרי 1.

ג) עבור כל אחד של הערכים עצמיים הריבוי גאומטרי שווה לריבוי אלגברי לכן A לכסינה.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} , \qquad P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

<u>שאלה 3</u>

א)

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-5 & 3 & -2 \\ -6 & \lambda+4 & -4 \\ -4 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

ערכים עצמיים:
$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1,
$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 1,
$\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 1.

<u>מרחב עצמי השייך ל - $\lambda = 1$</u>

$$V_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} , \qquad \dim V_1 = 1 .$$

<u>מרחב עצמי השייך ל - $\lambda = 2$</u>

$$V_2 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} , \qquad \dim V_2 = 1 .$$

<u>מרחב עצמי השייך ל - $\lambda = 1$</u>

$$V_3 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} , \qquad \dim V_3 = 1 .$$

ב) כל הערכים עצמיים שונים לכן A לכסינה.

$$A = P^{-1}DP , \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

ג)

$$A^{2014} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = A^{2014} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2A^{2014} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי $\lambda=1$. לכל וקטור עצמי v השייך לערך עצמי λ, $A^k\mathrm{v}=\lambda^k\mathrm{v}$, לכן

$$2A^{2014}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2\cdot(1)^{2014}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$$

שאלה 4

א) המטריצה משולית לכן הערכים עצמיים הם האיברים על האלכסון הראשי. פולינום אופייני:

$$p_A(\lambda)=(\lambda-1)^3$$

$\lambda=1$ הוא הערך עצמי היחיד מיריבוי אלגברי 3. המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=1$ הוא

$$V_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\ .$$

ב) $\dim\,V_1=1<\dim\,\mathbb{R}^3$. לכן A לא לכסינה.

■

שאלה 5

א)

$$p_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda&4&0\\-1&\lambda+4&0\\-1&2&\lambda-1\end{vmatrix}=-\lambda^3-3\lambda^2+4=-(\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

ערכים עצמיים:
$\lambda=1$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda=-2$ מריבוי אלגברי 2.

<u>מרחב עצמי השייך ל - $\lambda=-2$</u>

$$V_{-2}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\ ,\qquad \dim V_{-2}=1\ .$$

<u>מרחב עצמי השייך ל - $\lambda=1$</u>

$$V_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}R\right\}\ ,\qquad \dim V_1=1\ .$$

ב) A לא לכסינה:

$$\dim V_1 + \dim V_{-2} = 2 < \dim \mathbb{R}^3 \ .$$

ג) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ וקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda = -2$, אז

$$A^{2014} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2)^{2014} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

שאלה 6 נניח ש u וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי λ.

$$A^2 u = Au \qquad \Rightarrow \qquad \lambda^2 u = \lambda u \qquad \Rightarrow \qquad (\lambda^2 - \lambda) u = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda(\lambda - 1) u = 0$$

$u \neq \bar{0}$ כי u וקטור עצמי לכן $\lambda(\lambda - 1) = 0$, לכן $\lambda = 0$ או $\lambda = 1$.

■

שאלה 7 טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2$$

הערך עצמי היחיד הוא $\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 2.

המרחב עצמי הוא $V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\dim V_1 = 1 < \dim \mathbb{R}^2$$

לכן A לא לכסינה. אבל A הפיכה כי $|A| = 1 \neq 0$.

■

<u>שאלה 8</u> טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. הערכים עצמיים של A הם $\lambda = 0$, $\lambda = 1$.

$$V_0 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \ , \qquad V_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim V_0 + \dim V_1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ לכן A לכסינה:

$$A = PDP^{-1} \ , \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אבל A לא הפיכה כי $|A| = 0$.

■

<u>שאלה 9</u>

א)

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\ &= [(\lambda-1)(\lambda-4)+2]^2 \\ &= \left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right)^2 \\ &= (\lambda-2)^2 (\lambda-3)^2 \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 2.

$\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 2.

<u>מרחב עצמי השייך ל - $\lambda = 2$</u>

$$V_2 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \ , \qquad \dim V_2 = 2 \ .$$

<u>מרחב עצמי השייך ל - $\lambda = 3$</u>

$$V_3 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \ , \qquad \dim V_3 = 2 \ .$$

ב) A לכסינה:

$$\dim V_2 + \dim V_3 = 4 = \dim \mathbb{R}^4 \ .$$

$$A = PDP^{-1} \ , \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ , \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

שאלה 10

א)

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 5 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-3) \begin{vmatrix} \lambda-2 & 5 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left[(\lambda-2)^2+5\right) = (\lambda-3)\left(\lambda^2-4\lambda+9\right)$$

יש שורש ממשי אחד של הפולינום האופייני: $\lambda=3$ מריבוי אלגברי 1.
נחשב את המרחב עצמי של $\lambda=3$:

$$(A-3I|\bar{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

לכן המרחב העצמי הוא

$$V_3 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \ , \qquad \dim\ V_3 = 1 \ .$$

יש ערך עצמי ממשי אחד מירבוי גיאומטרי 1, לכן A לא לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

ב) לפולינום האופייני ישנם 3 שורשים מעל $\mathbb{C}$:

$$p_A(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-2-\sqrt{5}i)(\lambda-2+\sqrt{5}i)$$

השורשים של הפולינום האופייני הם
$\lambda=3$ מריבוי אלגברי 1,
$\lambda=2+\sqrt{5}i$ מריבוי אלגברי 1,
$\lambda=2-\sqrt{5}i$ מריבוי אלגברי 1.
יש 3 ערכים עצמים שונים לכן A לכסינה מעל $\mathbb{C}$.

<u>מרחב עצמי השייך ל - $\lambda=3$</u>

$$V_3 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \ , \qquad \dim V_3 = 1 \ .$$

<u>מרחב עצמי השייך ל - $\lambda=2+\sqrt{5}i$</u>

$$V_{2+\sqrt{5}i}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{5}i\\ 1\end{pmatrix}\right\}\ ,\qquad \text{dim}V_{2+\sqrt{5}i}=1\ .$$

<u>מרחב עצמי השייך ל - $\lambda=2-\sqrt{5}i$</u>

$$V_{2-\sqrt{5}i}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\ -\sqrt{5}i\\ 1\end{pmatrix}\right\}\ ,\qquad \text{dim}V_{2-\sqrt{5}i}=1\ .$$

A לכסינה מעל $\mathbb{C}$:

$$\text{dim}V_3+\text{dim}V_{2+\sqrt{5}i}+\text{dim}V_{2-\sqrt{5}i}=3=\text{dim}\mathbb{C}^3\ .$$

$$A=PDP^{-1}\ ,\qquad D=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2+i\sqrt{5}&0\\0&0&2-i\sqrt{5}\end{pmatrix}\ ,\qquad P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&i\sqrt{5}&-i\sqrt{5}\\0&1&1\end{pmatrix}\ .$$

<u>שאלה 11</u> הטענה נכונה. הוכחה:

נניח ש- λ ערך עצמי של A. אז $|\lambda I-A|=0$.

$$|\lambda I-A|=|\,(\lambda I-A)^t\,|=|\lambda I^t-A^t|=|\lambda I-A^t|$$

לכן

$$|\lambda I-A|=0\qquad\Rightarrow\qquad |\lambda I-A^t|\ .$$

כלומר אם λ ערך עצמי של A אז λ ערך עצמי של A^t.

■

<u>שאלה 12</u>

$$f(x)=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

$$f(A)=0\qquad\Rightarrow\qquad (A-2I)(A-3I)=0$$

יהי u וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי λ.

$$0=f(A)u=f(\lambda)u=(\lambda-2)(\lambda-3)u$$

$u\neq 0$ בגלל הוא וקטור עצמי לכן $\lambda=2$ או $\lambda=3$.

■

<u>שאלה 13</u>

אז $B \cdot u = 2u$

$$Cu = (3B + 2I)u = 3Bu + 2u = 3 \cdot 2u + 2u = 8u$$

כלומר $Cu = 8u$.

■

<u>שאלה 14</u> טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: נסמן ב- V את הקבוצה של כל המטריצות 3×3 בעלות ערך עצמי 0. יהיו $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ערכים עצמיים של A: $\lambda = 1, 0$.

ערכים עצמיים של B: $\lambda = 1, 0$.

לכן $A, B \in V$. נבדוק אם $A + B \in V$:

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. יש ל $A + B$ ערך עצמי אחד: $\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 3, אבל $\lambda = 0$ אינו ערך עצמי של $A + B$, לכן $A + B \notin V$ לכן V אינו תת מרחב.

■

<u>שאלה 15</u> הפולינום האופייני של A:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix}$$

$$p_A(a + b) = \begin{vmatrix} b & -b \\ -c & -d + a + b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & -b \\ -c & c \end{vmatrix}$$

השורה השניה שווה ל $\dfrac{-c}{b}$ כפול השורה הראשונה, לכן הדטרמיננטה שווה אפס, ולכן $p_A(a + b) = 0$.

$$p_A(a - c) = \begin{vmatrix} -c & -b \\ -c & -d + a - c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c & -b \\ -c & -b \end{vmatrix}$$

השורה השניה שווה לשורה ראשונה, לכן הדטרמיננטה שווה אפס, ולכן $p_A(a - c) = 0$.

■

<u>שאלה 16</u> נוכיח ע"י אינדוקציה ש

$$A^k u = \alpha^k u \ .$$

<u>שלב הבסיס:</u>

עבור $k=1$ הטענה נכונה.

<u>שלב האינדוקציה:</u>

נניח ש-

$$A^N u = \alpha^N u \ , \qquad (*)$$

(ההנחת אינדוקציה). נוכיח ש- $A^{N+1}u = \alpha^{N+1}u$.

$$A^{N+1}u = A \cdot A^N u = A \cdot \alpha^N u = \alpha^N A \cdot u = \alpha^N \cdot \alpha u = \alpha^{N+1} u \ .$$

■

<u>שאלה 17</u> טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A לא הפיכה.

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 1) \ .$$

הערכים עצמיים הם $\lambda = 0$ מריבוי אלגברי 1 ו- $\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1. לכן A לכסינה.

<u>שאלה 18</u>

$$Au = \alpha u$$

A הפיכה לכן A^{-1} קיימת. לכן

$$A^{-1}Au = A^{-1}(\alpha u) \quad \Rightarrow \quad u = \alpha A^{-1} u \ .$$

כיוון ש- A הפיכה אז 0 לא יכול להיות ערך עצמי של A, ז"א $\alpha \neq 0$. לכן אפשר לחלק ב- α ונקבל:

$$A^{-1}u = \frac{1}{\alpha} u \ .$$

לכן $\dfrac{1}{\alpha}$ ערך עצמי של A^{-1} ששייך לוקטור עצמי u.
■

<u>שאלה 19</u> $Au_1 = \lambda u_1$ ו $Au_2 = \lambda u_2$ נתון. נרשום

(1*)
$$k_1 u_1 + k_2 u_2 = \bar{0} \ .$$

נכפיל משני האגפים ב- A:

(2*)
$$A(k_1 u_1 + k_2 u_2) = A \cdot \bar{0} \quad \Rightarrow \quad k_1 \lambda_1 u_1 + k_2 \lambda_2 u_2 = \bar{0}$$

נכפיל (1*) ב- λ_1:

(3*)
$$k_1 \lambda_1 u_1 + k_2 \lambda_1 u_2 = \bar{0}$$

נקח את החיסור של הביטויים (3*) ו- (2*), כלומר (3*)-(2*):

(3*)
$$k_2(\lambda_2 - \lambda_1) u_2 = \bar{0}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ בגלל זה נתון ש- הערכים עצמיים שונים, ו- $u_2 \neq \bar{0}$ כי הוא וקטור עצמי, לכן $k_2 = 0$. נציב $k_2 = 0$ ב (1*) ונקבל $k_1 = 0$. לכן (1*) מתקיים רק אם המקדמים מתאפסים, לכן u_1, u_2 בת"ל.
■

<u>שאלה 20</u>

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A לא הפיכה.

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 1) \ .$$

הערכים עצמיים הם:

$\lambda = 0$ מריבוי אלגברי 1

$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.

לכן A לכסינה.

<u>שאלה 21</u>

טענה נכונה. אם ל-A יש ערך עצמי $\lambda = 0$ ז"א ש-0 שורש של הפולינום האופייני, כלומר $p_A(0) = 0$. $p_A(0) = |A|$, לכן $|A| = 0$ לכן A לא הפיכה.