שיעור 8
גבולות ונגזרות חלקיות

8.1 תחום של פונקציה בכמה משתנים

הגדרה 8.1 פונקציה בשני משתנים ופונקציה בשלושה משתנים

פונקציה בשני משתנים זו פונקציה $f:D\to\mathbb{R}$ כאשר $D\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום ב- $\mathbb{R}^2$.

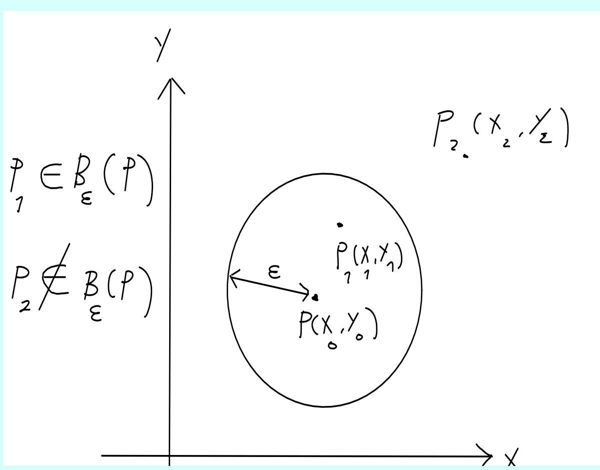
פונקציה בשלושה משתנים זו פונקציה $f:D\to\mathbb{R}$ כאשר $D\subseteq\mathbb{R}^3$ תחום ב- $\mathbb{R}^3$.

הגדרה 8.2 כדור פתוח סביב נקודה

נתונה נקודה $P=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ונתון $\varepsilon>0$, **כדור פתוח סביב הנקודה** P או **סביבה של נקודה** P מוגדר להיות הקבוצה של כל הנקודות $P'=(x',y')\in\mathbb{R}^2$ כך שהמרחק בין P ו- P' קטן מ- ε:

$$B_\varepsilon(P)=\left\{P'\middle|d(P,P')<\varepsilon\right\}\ ,\qquad \varepsilon>0$$

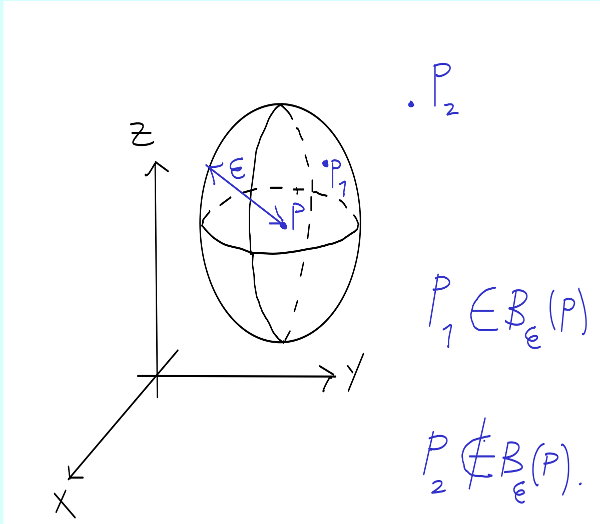
כאשר $d(P,P')$ פונקציה המרחק: $d(P,P')=\left|(x-x')^2+(y-y')^2\right|^{1/2}$.



מאותה מידה, נתונה נקודה $P=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ונתון $\varepsilon>0$, כדור פתוח סביב הנקודה P מוגדר להיות הקבוצה של כל הנקודות $P'=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ כך שהמרחק בין P ו- P' קטן מ- ε:

$$B_\varepsilon(P)=\left\{P'\middle|d(P,P')<\varepsilon\right\}\ ,\qquad \varepsilon>0$$

כאשר $d(P,P')$ פונקציה המרחק: $d(P,P')=\left|(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right|^{1/2}$.

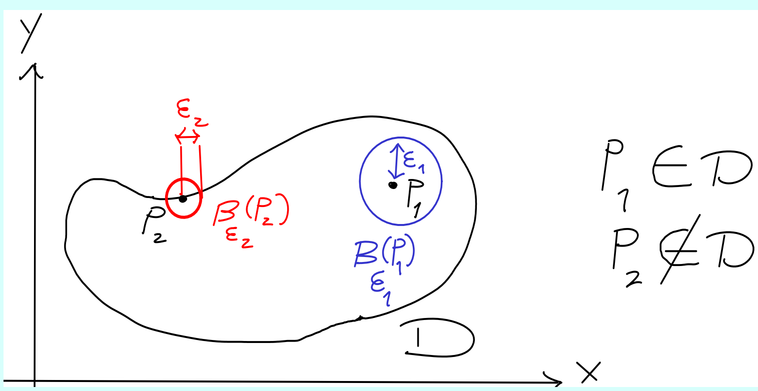


הגדרה 8.3 תחום פתוח

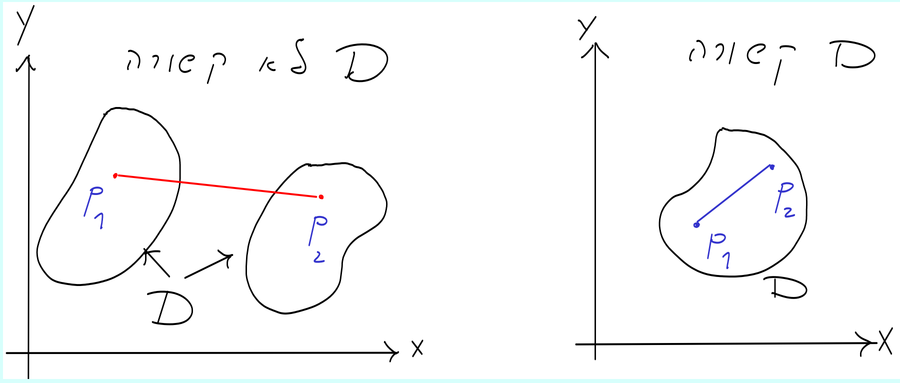
קבוצה פתוחה D הוא קבוצה, כך שלכל נקודה ב- D, יש סביבה כך שכל הנקודות של סביבה זו מוכלות ב- D.

בפרט, לכל נקודה P_1 בפנים של D קיימת סביבה של P_1 (כלומר כדור סביב הנקודה P_1) כך שכל נקודה בסביבה של P_1 מוכלת ב- D. לעומת זאת, נקודה P_2 כלשהי על הפשה של D לא בקבוצה פתוחה D עצמה, בגלל שלא קיימת אף סביבה של P_2 כך שכל נקודה בסביבתה היא ב- D.

לכן קבוצה פתוחה D כוללת את כל הנקודות בפנים של D אבל לא כוללת את הנקודות על השפה של D.



קבוצה קשירה היא קבוצה כך שכל שתי נקודות ב- D ניתן לחבר ע"י קו שמוכל ב- D.



תחום פתוח הוא קבוצה פתוחה וקשירה.

תחום סגור הוא האיחוד של תחום פתוח והנקודות על השפה.

דוגמה 8.1

$x^2+y^2<1$ תחום פתוח.

$x^2+y^2\leq 1$ תחום סגור.

$\begin{cases} 0<x<1 \\ 0<y<1 \end{cases}$ תחום פתוח.

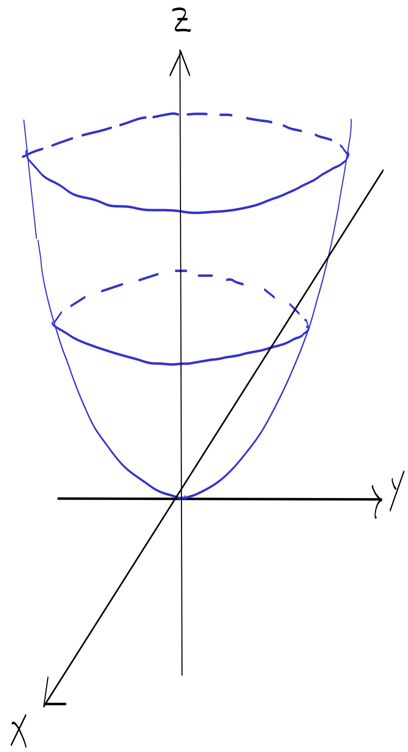
$\begin{cases} 0\leq x\leq 1 \\ 0\leq y\leq 1 \end{cases}$ תחום סגור.

דוגמה 8.2

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x,y,z)=\ln(z-x^2-y^2)$ ושרטטו אותו.

פתרון:

$$D=\{(x,y,z)|z-x^2-y^2>0\}=\{(x,y,z)|z>x^2+y^2\}\ .$$



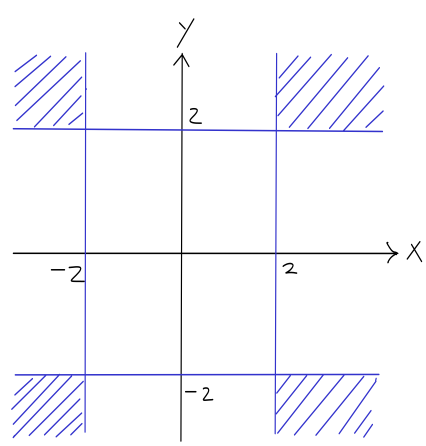
תחום ההגדרה של הפונקציה הוא התחום שמעל הפרבולואיד המעגלי $z = x^2 + y^2$.

דוגמה 8.3

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{y^2 - 4}$. ושרטטו אותו.

פתרון:

$$D = \{(x, y) | x^2 > 4 \ , \ y^2 > 4\} = \{(x, y) \, | \{x < -2 \cup x > 2\} \cap \{y < -2 \cup y > 2\}\} \ .$$



תחום ההגדרה של הפונקציה הוא התחום שמעל הפרבולואיד המעגלי $z = x^2 + y^2$.

8.2 גבול של פונקציה בכמה משתנים

הגדרה 8.4 גבול של פונקציה בכמה משתנים

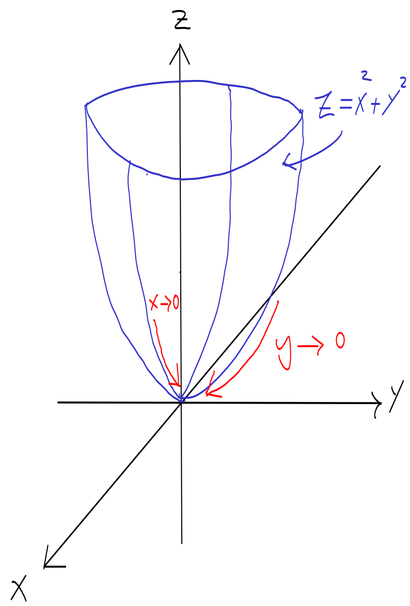
יהיו $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה ו- D תחום פתוח. תהי $P_0 = (x_0, y_0) \in D$. נסמן ב- $P(x, y)$ נקודה כללית ב- D. אומרים כי הגבול של $f(P)$ ב- P_0 הוא L אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $|P - P_0| > \delta$ מתקיים

$$|f(P) - L| < \varepsilon \ .$$

דוגמה 8.4

חשבו את הגבול

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2 + y^2\right)$$



פתרון:

אחת הדרכים הפשוטות לחשב גבול של פונקציה מרבת משתנים $f(P)$ היא אם ניתן לרשום אותה כפונקציה של אורך של וקטור $\overline{OP}$ בלבד, או של $\overline{MP}$ עבור נקודה קבועה $M \in \mathbb{R}^n$.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = |(x, y)|^2 \ .$$

לכן, אם נרשום $t = |(x, y)|^2$ נקבל $f(x, y) = t^2 \equiv g(t)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{t\to 0} g(t) = 0 \ .$$

משפט 8.1 יחידות של גבול

אם הגבול $\lim\limits_{P\to P_0}$ קיים אז הוא יחיד.

ז"א אם הגבול קיים, אז לא משנה לאורך איזה מסלול נחשב את הגבול, תמיד נקבל אותו ערך של הגבול. הגבול לא תלוי על הבחירת המסלול. בפרט אם הגבול קיים, הוא יתקבל לאורך כל קו ישר.

דוגמה 8.5

הראו כי הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^2y^2}{x^4+3y^4}\right)$ לא קיים.

פתרון:
נעשה זאת ע"י בדיקת הגבול לאורך ישרים. נציב $y=0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^4}\right)=0\ .$$

נציב $x=0$:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{3y^4}\right)=0\ .$$

זה ששני הגבולות האלו שוות לא אומר שהגבול קיים, אבל במידה שהוא קיים הוא יהיה 0.
נציב $y=\alpha x$ $(\alpha>0)$:

$$\lim_{x\to 0} f(x,\alpha x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2\cdot(\alpha x)^2}{x^4+3(\alpha x)^4}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\alpha^2}{1+3\alpha^4}\right)=\frac{\alpha^2}{1+3\alpha^4}\neq 0$$

עבור $\alpha>0$. לכן, הגבול לא קיים.

דוגמה 8.6

הראו כי הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^2-xy}{x^2+2y^2}$ לא קיים.

פתרון:
נציב $y=\alpha x$ $(\alpha>0)$:

$$\lim_{x\to 0} f(x,\alpha x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3+(\alpha x)^2-x(\alpha x)}{x^2+2(\alpha x)^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3+(\alpha^2-\alpha)x^2}{(1+2\alpha^2)x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+\alpha^2-\alpha}{1+2\alpha^2}\right)$$
$$=\frac{\alpha^2-\alpha}{1+2\alpha^2}\ .$$

הגבול תלוי בשיפוע α ולכן הגבול לא קיים.

דוגמה 8.7

חשבו את $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^3y}{x^6+y^2}\right)$

פתרון:
נציב את $y=\alpha x$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3\cdot\alpha x}{x^6+(\alpha x)^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\alpha x^2}{x^4+\alpha^2}\right)=0$$

נציב $x=0$:

$$\lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y^2}\right)=0$$

האם זה אומר שהגבול קיים ושווה ל- 0? לאו דווקא. נציב $y=x^3$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3\cdot x^3}{x^6+x^6}\right)=\frac{1}{2}\ .$$

לכן הגבול לא קיים.

8.3 כלל הסנדוויץ'

הגדרה 8.5 כלל הסנדוויץ'

אם

$$h(p)\leq f(p)\leq g(p)$$

לכל p בסביבת p_0 ו-

$$\lim_{p\to p_0} g(p)=\lim_{p\to p_0} h(p)=L$$

אז

$$\lim_{p\to p_0} f(p)=L$$

דוגמה 8.8

חשבו את $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)}\left(y\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right)$.

פתרון:

$\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$ חסומה:

$$-1\leq\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\leq 1$$

לכן

$$-y\leq y\cdot\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\leq y\ .$$

כיוון ש- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} y\to 0$ וגם $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)}(-y)\to 0$ אז לפי כלל הסנדוויץ':

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\left(y\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right)=0\ .$$

דוגמה 8.9

הראו כי $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}\right)=0$

פתרון:

$$0\leq\frac{x^3}{x^2+y^2+z^2}\leq\frac{x^3}{x^2}=x\ .$$

כיוון ש

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (0) = 0$$

ו-

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (x) = 0$$

אז לפי כלל הסנדוויץ':

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(\frac{x^3}{x^2+y^2+z^2}\right) = 0 \ .$$

מאותה מידה גם $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(\frac{y^3}{x^2+y^2+z^2}\right) = 0$ ו- $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(\frac{z^3}{x^2+y^2+z^2}\right) = 0$.

לכן

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to0\\y\to0\\z\to0}} \left(\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}\right) &= \lim_{\substack{x\to0\\y\to0\\z\to0}} \left(\frac{x^3}{x^2+y^2+z^2}\right) + \lim_{\substack{x\to0\\y\to0\\z\to0}} \left(\frac{y^3}{x^2+y^2+z^2}\right) + \lim_{\substack{x\to0\\y\to0\\z\to0}} \left(\frac{z^3}{x^2+y^2+z^2}\right)\\ &=0+0+0=0 \ .\end{aligned}$$

8.4 מעבר למשתנה

דוגמה 8.10

חשבו את הגבול $\lim_{\substack{x\to0\\y\to\pi/2}} (1-\cos(x+y))^{\tan(x+y)}$

פתרון:

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to\pi/2}} (1-\cos(x+y))^{\tan(x+y)}$$

נציב $t=x+y$ ונקבל

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{t\to\pi/2\\y\to\pi/2}} (1-\cos t)^{\tan(t)} &= \lim_{t\to\pi/2} (1-\cos t)^{\frac{\sin t}{\cos t}}\\ &= \lim_{t\to\pi/2} \left[(1-\cos t)^{\frac{1}{\cos t}}\right]^{\sin t}\\ &= \left[e^{-1}\right]^{\lim_{t\to\pi/2}(\sin t)}\\ &= \left[e^{-1}\right]^{1}\\ &=e^{-1} = \frac{1}{e} \ .\end{aligned}$$

דוגמה 8.11

חשבו את הגבול $\lim_{\substack{x\to0\\y\to1\\z\to2}} \left(\frac{\sin\left[x\left(y^2+z^2\right)\right]}{xy^2}\right)$

פתרון:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1\\ z\to 2}}\left(\frac{\sin\left[x\left(y^2+z^2\right)\right]}{xy^2}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1\\ z\to 2}}\left(\frac{\sin\left[x\left(y^2+z^2\right)\right]}{x\left(y^2+z^2\right)}\cdot\frac{\cancel{x}\left(y^2+z^2\right)}{\cancel{x}y^2}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1\\ z\to 2}}\left(\frac{\sin\left[x\left(y^2+z^2\right)\right]}{x\left(y^2+z^2\right)}\cdot\frac{\left(y^2+z^2\right)}{y^2}\right)$$

נגדיר $t=x(y^2+z^2)$ ונקבל

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1\\ z\to 2}}\left(\frac{y^2+z^2}{y^2}\right)=1\cdot 5=5\ .$$

8.5 גבול חוזר

דוגמה 8.12

קבעו אם הגבול $\lim\limits_{x,y\to 0}\left(x^2+y^2\right)^{x^2\cdot y^2}$ קיים ואם כן, חשבו אותו.

פתרון:

נציב $y=ax$:

$$f(x,ax)=\left(x^2+a^2x^2\right)^{a^2\cdot x^4}=\left(1+a^2\right)^{a^2\cdot x^4}\cdot\left(x^2\right)^{a^2\cdot x^4}$$

לכן נקבל

$$\lim_{x\to 0}\left(\left[\left(1+a^2\right)^{a^2}\right]^{x^4}\cdot e^{a^2\cdot x^4\ln x^2}\right)=1\cdot 1=1$$

נציב $x=0$:

$$f(0,y)=\left(y^2\right)^0=1$$

לכן נקבל

$$\lim_{y\to 0}(1)=1\ .$$

לכן נראה שהגבול קיים ואם כן הוא שווה ל- 1.

נראה שזה כן המצב.

תחילה נשים לב כי $(x-y)^2\geq 0$ לכל x,y ולכן $x^2+y^2-2xy\geq 0$ לכל x,y, לכן $2xy\leq x^2+y^2$ לכל x,y.
מכאן נובע ש-

$$(2xy)^{x^2y^2}\leq\left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}\leq\left(x^2+y^2\right)^{(x^2+y^2)^2/4}$$

$$\lim_{x,y\to 0}(2xy)^{x^2y^2}=\lim_{t\to 0}(2t)^{t^2}=\lim_{t\to 0}\left(e^{t^2\ln(2t)}\right)=1$$

$$\lim_{x,y\to 0}\left(x^2+y^2\right)^{(x^2+y^2)^2/4}=\lim_{t\to 0}(t)^{t^2/4}=\lim_{t\to 0}e^{t^2\ln(t)/4}=1\ .$$

לכן, לפי כלל הסנדוויץ',

$$\lim_{x,y\to 0}\left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}=1\ .$$

8.6 פונקציות רציפות

הגדרה 8.6 רציפות

אומרים ש- $f : D \to \mathbb{R}$ רציפה ב- $p_0 \in D$ אם $\lim\limits_{p \to p_0} f(p) = f(p_0)$.

אומרים ש- f רציפה ב- D אם היא רציפה ב- p_0 לכל $p_0 \in D$.

דוגמה 8.13

כל פונקציה אלמנטרית רציפה.

דוגמה 8.14

הפונקציה

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ & \\ 0 & x=y=z=0 \end{cases} .$$

רציפה בכל נקודה $p_0 \in \mathbb{R}^3$. (ראו דוגמה 8.3).

8.7 נגזרות חלקיות

הגדרה 8.7 הנגזרת החלקית

נתונה פונקציה $f : D \to \mathbb{R}$ כאשר D תחום פתוח ו- $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$. הנגזרת החלקית של f בנקודה p_0 לפי המשתנה x מוגדרת להיות הגבול

$$f'_x(p_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+t, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} .$$

המשמעות היא ש"מקפיאים" את כל המשתנים פרט ל- x, וגוזרים לפי x כאשר חושבים על $y, z, \ldots$ כקבועים (פרמטרים).

כדומה מגדירים $f'_y(p_0)$, $f'_z(p_0)$.

דוגמה 8.15

נתונה הפונקציה $f(x,y) = xy + x^2 + y^2$ חשבו את f'_x ו- f'_y.

דוגמה 8.16

הפונקציה

$$f'_x = y + 2x + 0 = y + 2x .$$

$$f'_y = x + 0 + 2y = x + 2y \ .$$

דוגמה 8.17

נתונה הפונקציה $f(x,y) = \ln\left(1 - x^2 + y^2\right)$ חשבו את f'_x ו- f'_y.

דוגמה 8.18

הפונקציה

$$f'_x = \frac{1}{1-x^2-y^2} \cdot \left(1 - x^2 + y^2\right)'_x = \frac{-2x}{1-x^2-y^2} \ .$$

$$f'_y = \frac{1}{1-x^2-y^2} \cdot \left(1 - x^2 + y^2\right)'_y = \frac{2y}{1-x^2-y^2} \ .$$

דוגמה 8.19

הוכיחו כי הפונקציה $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ מקיימת את המשוואה

$$y \cdot z'_x = x \cdot z'_y \ .$$

דוגמה 8.20

הפונקציה

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= \frac{2x}{x^2+y^2} \\ z'_y &= \frac{2y}{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad y \cdot z'_x = x \cdot z'_y \ .$$

דוגמה 8.21

נתונה הפונקציה

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ & \\ 0 & x = y = z = 0 \end{cases} \ .$$

חשבו את $f'_x(0,0,0)$, $f'_y(0,0,0)$ ו- $f'_z(0,0,0)$.

פתרון:

$$f'_y(0,0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0,0) - f(0,0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3+0}{t^2+0} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t-0}{t} = \lim_{t\to 0} 1 = 1 \ .$$

בדומה $f'_y(0,0,0) = 1$ ו- $f'_z(0,0,0) = 1$.

משפט 8.2 כלל השרשרת 1

נסתכל על פונקציה בשני משתנים $f : D \to \mathbb{R}$ כאשר $D \subseteq \mathbb{R}^2$. נתון הקטע $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ ושתי פונקציות $x(t) : I \to \mathbb{R}$ ו- $y(t) : I \to \mathbb{R}$, כך ש- $(x(t), y(t)) \in D$ לכל $t \in I$. נגדיר

$$g(t) \equiv f\left(x(t), y(t)\right) \ .$$

אזי
$$g'(t) = f'_x \cdot x'_t + f'_y \cdot y'_t \ .$$

דוגמה 8.22

נתונה הפונקציה
$$f(x,y) = x^2 + y^2 \ , \qquad x(t) = \cos t \ , \quad y(t) = \sin t \ .$$

חשבון את f'_t.

פתרון:

$$f'_t = f'_x \cdot x'_t + f'_t \cdot y'_t = 2x \cdot (-\sin t) + 2y \cdot \cos t = -2\cos t \sin t + 2\sin t \cos t = 0 \ .$$

משפט 8.3 כלל השרשרת 2

נתונה פונקציה $f(x,y)$ כאשר $x = x(u,\mathrm{v})$ בפני עצמה פונקציה של השני משתנים u,v וגם $y = y(u,\mathrm{v})$ בפני עצמה פונקציה של השני משתנים u,v. נגדיר
$$g(u,\mathrm{v}) = f\left(x(u,\mathrm{v}), y(u,\mathrm{v})\right) \ .$$

אז
$$\begin{aligned} g'_u &= f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u \ , \\ g'_{\mathrm{v}} &= f'_x \cdot x'_{\mathrm{v}} + f'_y \cdot y'_{\mathrm{v}} \ . \end{aligned}$$

דוגמה 8.23

נתונה הפונקציה
$$f(x,y) = x^2 + y^2 \ , \qquad x = r \cdot \cos\theta \ , \quad y = r \cdot \sin\theta \ .$$

חשבון את f'_r ו- f'_θ.

פתרון:

$$f'_r = f'_x \cdot x'_r + f'_y \cdot y'_r = 2x \cdot \cos\theta + 2y \cdot \sin\theta = 2r\cos^2\theta + 2r\sin^2\theta = 2r \ ,$$

$$f'_\theta = f'_x \cdot x'_\theta + f'_y \cdot y'_\theta = 2x \cdot (-r\sin\theta) + 2y \cdot r\cos\theta = -2r^2\sin\theta\cos\theta + 2r\sin\theta\cos\theta = 0 \ .$$