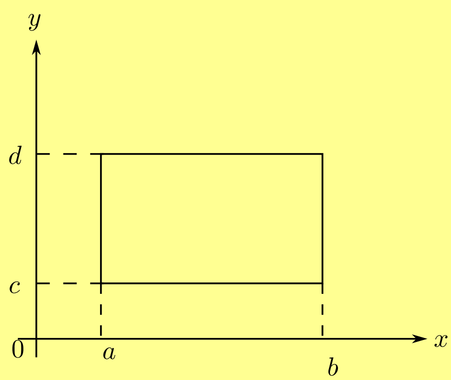
שיעור 10
אינטגרלים כפולים

משפט 10.1 אינטגרל כפול בתחום מלבני

במקרה של התחום המלבני

$$D = \{(x,y) | a \le x \le b \ , c \le y \le d\}$$

הסדר של האינטגרלים מעל x ו-y לא משנה את הערך של האינטגרל הכפול, כלומר



$$\iint\limits_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) = \int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x,y) \ . \qquad (*1)$$

דוגמה 10.1

חשבו את האינטגרל של הפונקציה $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + 6xy$ בתחום

$$D = \{(x,y) | -3 \le x \le 3,\ 2 \le y \le 8\}$$

פתרון:

נבדוק שהסדר של האינטגרלים אינו משנה את הערך של האינטגרל:

נבצע האינטגרל מעל x ואחר כך האינטגרל מעל y:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D dx\, dy\, f(x,y) &= \int_2^8 dy \int_{-3}^{3} dx\, (3x^2 + 2y^2 + 6xy) \\
&= \int_2^8 dy\, \left[x^3 + 2xy^2 + 3x^2 y\right]_{x=-3}^{x=3} \\
&= \int_2^8 dy\, \left(54 + 12y^2\right) \\
&= \int_2^8 dy\, \left[54y + 4y^3\right]_{y=2}^{y=8} \\
&= (432 - 108 + 2048 - 32) \\
&= 2340 \ .
\end{aligned}$$

נבצע האינטגרל מעל y ואחר כך האינטגרל מעל x:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) &= \int_{-3}^{3} dx\,\int_2^8 dy\,(3x^2+2y^2+6xy)\\ &= \int_{-3}^{3} dx\,\left[3x^2y+\frac{2}{3}y^3+3xy^2\right]_{y=2}^{y=8}\\ &= \int_{-3}^{3} dx\,\left(18x^2+180x+336\right)\\ &= \left[6x^3+90x^2+336x\right]_{x=-3}^{x=3}\\ &=2340\ .\end{aligned}$$

דוגמה 10.2

חשבו את האינטגרל $\iint\limits_D \left(x^2-y\right)dx\,dy$ על המלבן

$$D=\{(x,y)|0\leq x\leq 3,\ 0\leq y\leq 4\}$$

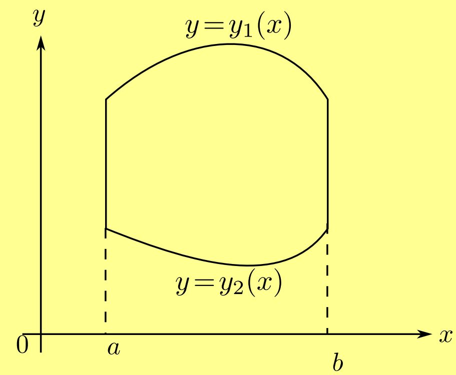
פתרון:
נבצע האינטגרל של y ואז האינטגרל של x:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) &= \int_0^3 dx\,\int_0^4 dy\,\left(x^2-y\right)\\ &= \int_0^3 dx\,\left[x^2y-\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{4}\\ &= \int_0^3 dx\,\left(4x^2-8\right)\\ &= \left[\frac{4x^3}{3}-8x\right]_{x=0}^{3}\\ &=(36-24)\\ &=12\ .\end{aligned}$$

נבצע האינטגרל של x ואז האינטגרל של y:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) &= \int_0^4 dy\,\int_0^3 dx\,\left(x^2-y\right)\\ &= \int_0^4 dy\,\left[\frac{x^3}{3}-xy\right]_{x=0}^{3}\\ &= \int_0^4 dy\,[9-3y]_{x=0}^{3}\\ &= \left[9y-\frac{3y^2}{2}\right]_{y=0}^{4}\\ &=(36-24)\\ &=12\ .\end{aligned}$$

משפט 10.2 אינטגרל כפול של פונקציה בתחום בין שני קווים



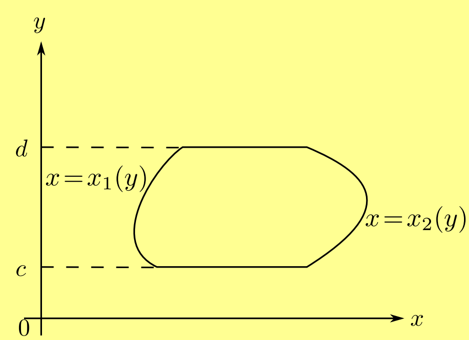
נתון אינטגרל כפול של פונקציה $f(x,y)$ מצורה

$$\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\,f(x,y)$$

בתחום

$$D = \{(x,y)|a \leq x \leq b\ , y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}\ ,$$

אי-אפשר להחליף את סדר האינטגרלים. במקרה זה מבצעים את האינטגרל של y בין הקווים $y_1(x)$ ו- $y_2(x)$, ואחר כך מבצעים את האינטגרל של x.



נתון אינטגרל כפול של פונקציה $f(x,y)$ מצורה

$$\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx\,f(x,y)$$

בתחום

$$D = \{(x,y)|x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\ , c \leq y \leq d\ , \}\ ,$$

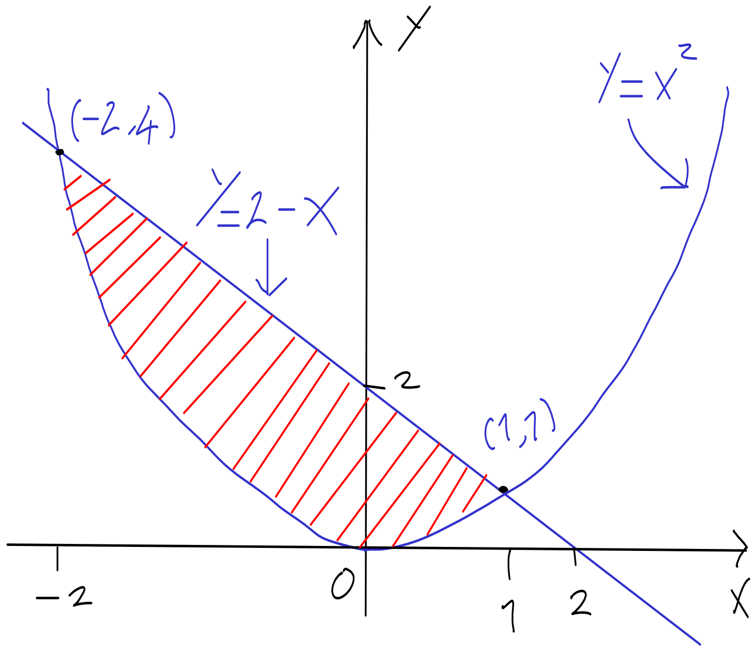
אי-אפשר להחליף את סדר האינטגרלים. מבצעים את האינטגרל של x בין הקווים $x_1(y)$ ו- $x_2(y)$, ואחר כך מבצעים את האינטגרל של y.

דוגמה 10.3

חשבו את $\iint\limits_D y\,dx\,dy$ כאשר D הוא התחום החסום על ידי הקווים $y = 2 - x$, $y = x^2$.

פתרון:

<u>שיטה 1</u>



$$\iint_D y\,dx\,dy = \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} y\,dy$$

$$= \int_{-2}^{1} dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{2-x}$$

$$= \int_{-2}^{1} dx \left(\frac{(2-x)^2}{2} - \frac{x^4}{2}\right)$$

$$= \left[\frac{-(2-x)^3}{6} - \frac{x^5}{10}\right]_{x=-2}^{1}$$

$$= \left[\frac{-1}{6} - \frac{1}{10}\right] - \left[-\frac{4^3}{6} - \frac{(-2)^5}{10}\right]$$

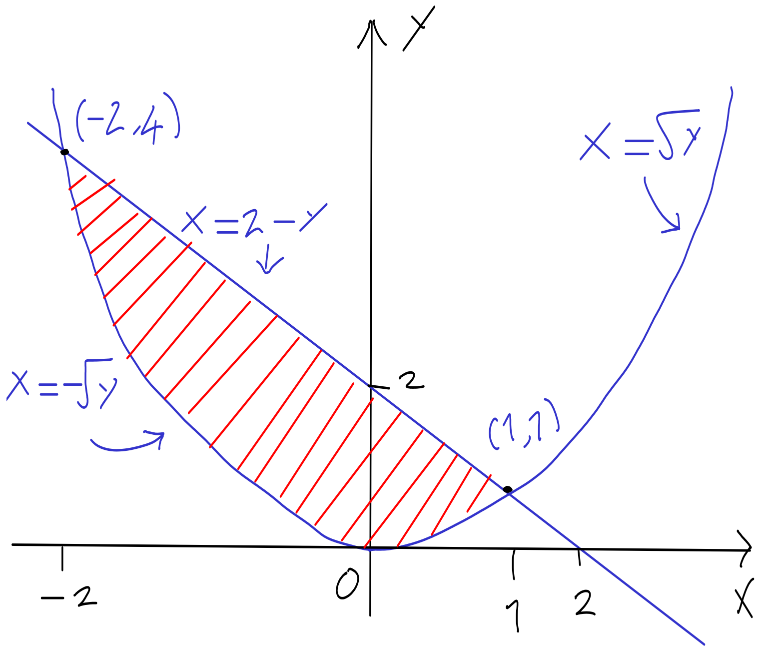
$$= \frac{-1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{64}{6} - \frac{32}{10}$$

$$= \frac{63}{6} - \frac{33}{10}$$

$$= \frac{432}{60}$$

$$= \frac{72}{10} = 7.2$$

<u>שיטה 2</u>

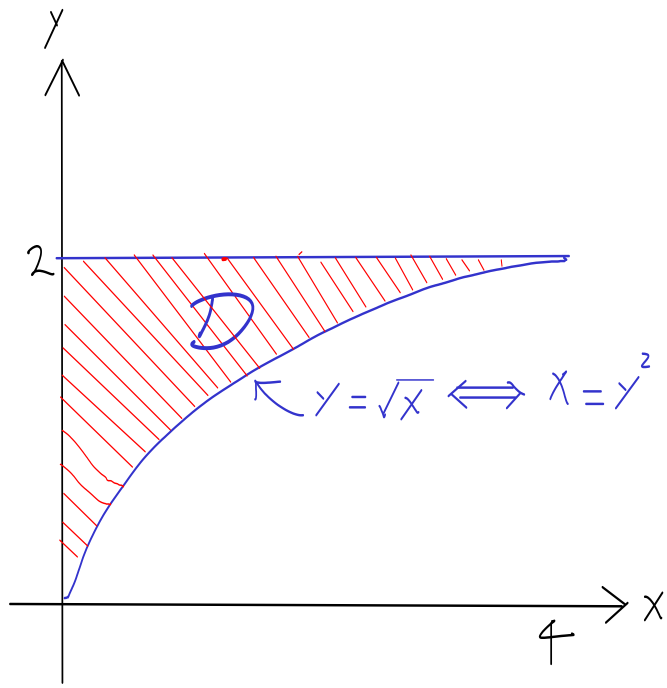


$$\begin{aligned}
\iint_D y\,dx\,dy &= \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} y\,dx + \int_1^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} y\,dx \\
&= \int_0^1 dy\,[yx]_{x=-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} + \int_1^4 dy\,[yx]_{x=-\sqrt{y}}^{2-y} \\
&= \int_0^1 dy\,2y\sqrt{y} \;+ \int_1^4 dy\,(y(2-y)+y\sqrt{y}) \\
&= \int_0^1 dy\,2y^{3/2} \;+ \int_1^4 dy\,\left(2y-y^2+y^{3/2}\right) \\
&= \left[5y^{5/2}\right]_0^1 + \left[y^2-\frac{y^3}{3}+\frac{2}{5}y^{5/2}\right]_1^4 \\
&=5+\left(16-\frac{64}{3}+\frac{64}{5}\right)-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right) \\
&=5+64\cdot\frac{7}{15}-\frac{16}{15} \\
&=5-\frac{7}{60}-\frac{64}{60} \\
&=5-\frac{71}{60} \\
&=\frac{300-71}{60} \\
&=\frac{229}{60}
\end{aligned}$$

דוגמה 10.4

חשבו את $\displaystyle\int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 dy\, e^{x/y}$

פתרון:
לא ניתן להחליף את האינטגרל הפנימי בעזרת פונקציה אלמנטריות.



$$\begin{aligned}\int_0^4 dx\,\int_{\sqrt{x}}^2 dx\, e^{x/y} &= \int_0^2 dy\,\int_0^{y^2} dx\, e^{x/y}\\ &= \int_0^2 dy\,\left[ye^{x/y}\right]_{x=0}^{y^2}\\ &= \int_0^2 dy\,\left(ye^y - y\right)\\ &= \left[ye^y - e^y - \frac{y^2}{2}\right]_0^2\\ &= 2e^2 - e^2 - 2 - (-1)\\ &= e^2 - 1\end{aligned}$$

דוגמה 10.5

1) חשבו את האינטגרל dy $I = \int_{\pi/2}^{\pi} dx\,\int_0^{x^2} dy\,\frac{1}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)$

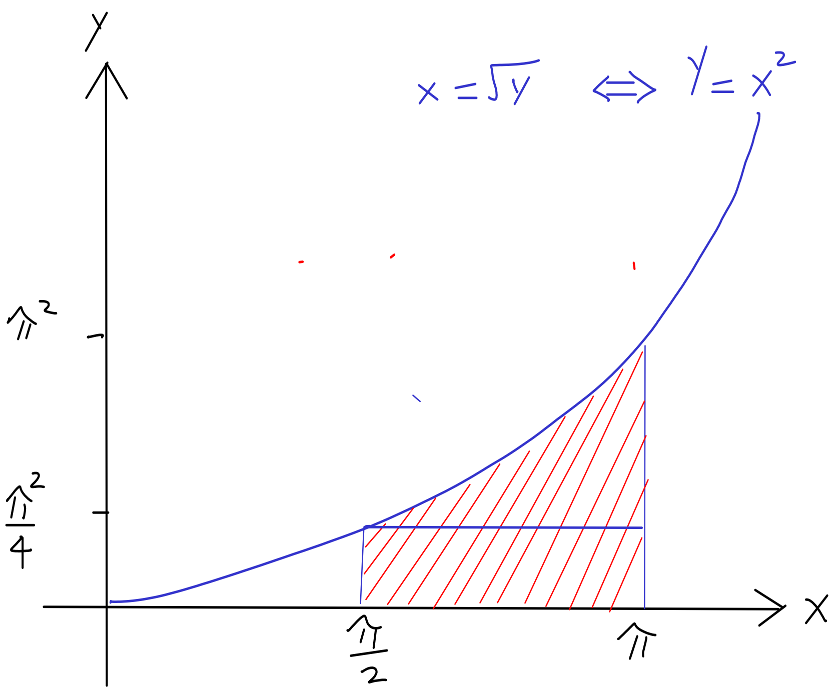
2) שרטטו את תחום האינטגרציה ושנו את סדר האינטגרציה

פתרון:

1)

$$\begin{aligned}
I =& \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_0^{x^2} dy \, \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \\
=& \int_{\pi/2}^{\pi} dx \, \left[\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]_0^{x^2} \\
=& \int_{\pi/2}^{\pi} dx \, (\sin x - \sin(0)) \\
=& \int_{\pi/2}^{\pi} dx \sin x \\
=& [-\cos x]_{\pi/2}^{\pi} \\
=& -\cos\pi + \cos\tfrac{\pi}{2} \\
=& 1 \ .
\end{aligned}$$

2)



$$I = \int_0^{\pi^2/4} dy \int_{\pi/2}^{\pi} dx \, \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \int_{\pi^2/4}^{\pi} dy \int_{\sqrt{y}}^{\pi} dx \, \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

דוגמה 10.6 שינוי סדר של אינטגרלים

חשב את האינטגרל

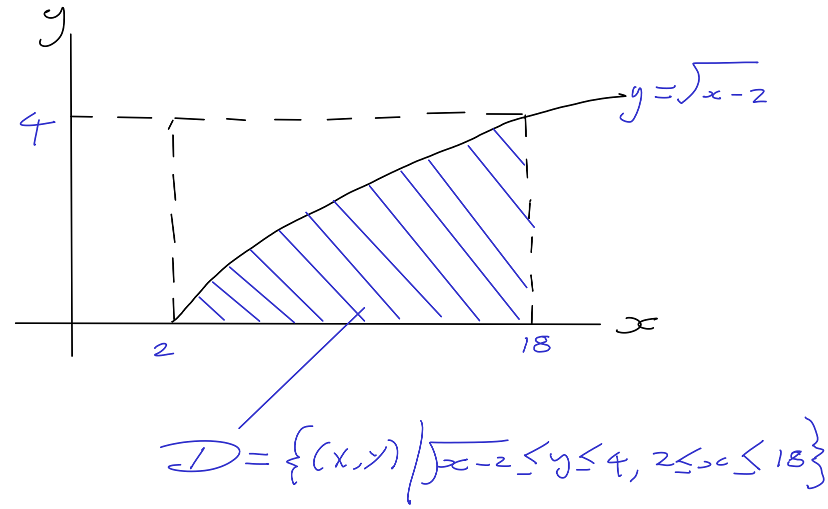
$$I = \int_2^{18} dx \int_{\sqrt{x-2}}^{4} dy \; e^{-5(x-2)/y}$$

פתרון:

התחום של האינטגרל הוא

$$D = \left\{(x,y) \mid 2 \le x \le 18\ ,\sqrt{x-2} \le y \le 4\right\}$$

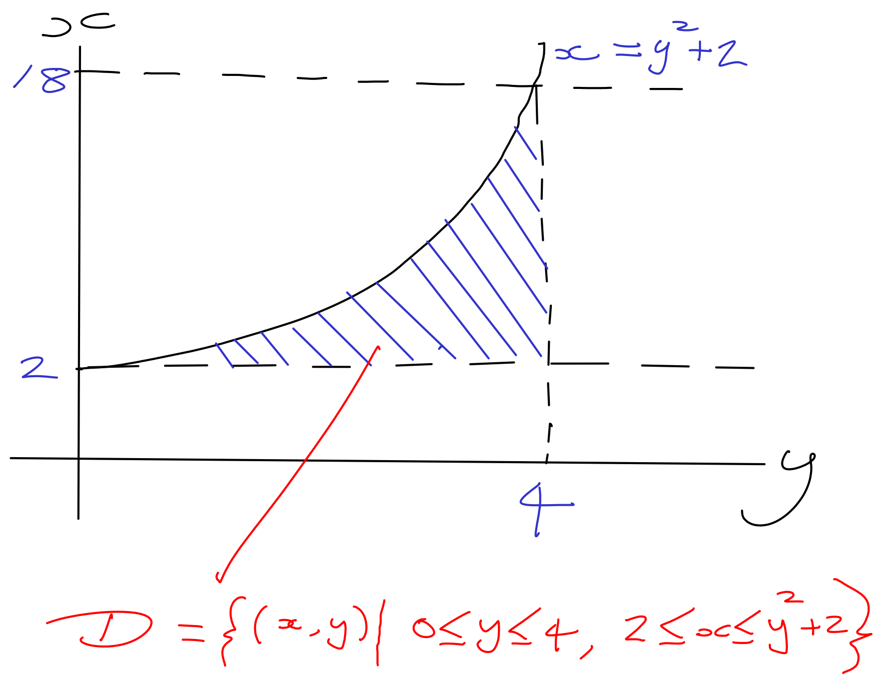
כמתואר בתרשים.



ניתן לשנות את הסדר של האינטגרלים של x ו- y כך שהתחום הוא

$$D = \left\{(x,y) \mid 0 \le y \le 4\ ,\ 2 \le x \le y^2+2\right\}$$

כמתואר בתרשים



$$\begin{aligned}
I &= \int_0^4 dy \ \int_2^{y^2+2} dx \ e^{-5(x-2)/y} \\
&= \int_0^4 dy \ \left[-\frac{y}{5} \cdot e^{-5(x-2)/y} \right]_2^{y^2+2} \\
&= -\frac{1}{5} \int_0^4 dy \ \left[y \cdot e^{-5(x-2)/y} \right]_2^{y^2+2} \\
&= -\frac{1}{5} \int_0^4 dy \ \left(y \cdot e^{-5(y^2+2-2)/y} - y \cdot e^{-5(0)/y} \right) \\
&= -\frac{1}{5} \int_0^4 dy \ \left(y e^{-5y} - y \right) \\
&= -\frac{1}{5} \left[-\frac{1}{5} y e^{-5y} + \frac{1}{25} e^{-5y} - \frac{y^2}{2} \right]_0^4 \\
&= -\frac{1}{5} \left(-\frac{4}{5} e^{-20} + \frac{1}{25} e^{-20} - \frac{4^2}{2} + \frac{1}{25} \right)
\end{aligned}$$

10.1 תכונות חשובות של האינטגרל הכפול

משפט 10.3 תכונות האינטגרל הכפול

בהינתן אינטגרל כפולה מצורה

$$\iint\limits_D dx\, dy\, f(x,y)$$

בתחום D במישור xy.

(1) אם הפונקציה $f(x,y)=1$ האינטגרל שווה לשטח התחום $S(D)$:

$$\iint\limits_D dx\, dy = S(D) \ .$$

(2) נתון קבוע $c \in \mathbb{R}$, אז מתקיים

$$\iint\limits_D dx\, dy\, c \cdot f(x,y) = c \cdot \iint\limits_D dx\, dy\, f(x,y) \ .$$

(3) הפעולה של אינטגרציה כפולה שומרת סכום:

$$\iint\limits_D dx\, dy\, \big(f_1(x,y) + f_2(x,y) \big) = \iint\limits_D dx\, dy\, f_1(x,y) + \iint\limits_D dx\, dy\, f_2(x,y)$$

(4) נתון שני תחומים D_1 ו- D_2. אם $D = D_1 \cup D_2$ ו- $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ אזי

$$\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) = \int\int_{D_1} dx\,dy\,f(x,y) + \int\int_{D_2} dx\,dy\,f(x,y)$$

(5) אם $f(x,y) \geq 0$ בכל התחום D אז

$$\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) \geq 0\ .$$

(6) אם $m \leq f(x,y) \leq M$ בתחום D אז

$$m \cdot S(D) \leq \iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) \leq M \cdot S(D)\ .$$

(7)

$$\left|\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y)\right| \leq \iint\limits_D dx\,dy\,|f(x,y)|\ .$$

10.2 שטח של תחום ע"י אינטגרל כפול

משפט 10.4 שטח התחום

במקרה שבתוך האינטגרל הכפול בנוסחא (1*) הפונקציה $f(x,y) = 1$, אז האינטגרל הכפול שווה לשטח של התחום D:

$$\iint\limits_D dx\,dy\,(1) = S(D)\ .$$

כאשר $S(D)$ מסמן את שטח התחום D.

דוגמה 10.7

חשבו את שטח המלבן המוגדר ע"י התחום

$$D = \{(x,y)|2 \leq x \leq 5\,, 3 \leq y \leq 6\ \}$$

באמצעות אינטגרציה כפולה.

פתרון:

$$
\begin{aligned}
S(D) =& \int_2^5 dx \int_3^6 dy \\
=& \int_2^5 dx \, [y]_3^6 \\
=& \int_2^5 dx \, (6-3) \\
=& \int_2^5 dx \, 3 \\
=& 3 \int_2^5 dx \\
=& 3[x]_2^5 \\
=& 3(5-2) \qquad = 9 \ .
\end{aligned}
$$

דוגמה 10.8

חשבו את הערך של האינטגרל של הפונקציה $z(x,y) = 3x^2 + 4y^2$ בין הקווים $y_1 = x + 4$ $y_2 = -x + 2$ בקטע $1 \leq x \leq 2$.

פתרון:

$$
\begin{aligned}
\iint_D dx\, dy\, z(x,y) =& \int_1^2 dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \, \left(3x^2 + 4y^2\right) \\
=& \int_1^2 dx \left[3x^2 y + \frac{4}{3} y^3\right]_{y_1}^{y_2} \\
=& \int_1^2 dx \left(3x^2 y_2 + \frac{4}{3} y_2^3 - 3x^2 y_1 - \frac{4}{3} y_1^3\right) \\
=& \int_1^2 dx \left(3x^2 (x+4) + \frac{4}{3}(x+4)^3 - 3x^2 (2-x) - \frac{4}{3}(2-x)^3\right) \\
=& \int_1^2 dx \left(3x^3 + 12x^2 + \frac{4}{3}(x+4)^3 - 6x^2 + 3x^3 - \frac{4}{3}(2-x)^3\right) \\
=& \int_1^2 dx \left(6x^3 + 6x^2 + \frac{4}{3}(x+4)^3 - \frac{4}{3}(2-x)^3\right) \\
=& \left[\frac{3}{2} x^4 + 2x^3 + \frac{1}{3}(x+4)^4 + \frac{1}{3}(2-x)^4\right]_1^2 \\
=& \left(24 + 16 + 432 - \frac{3}{2} - 2 - \frac{625}{3} - \frac{1}{3}\right) \\
=& \left(470 - \frac{3}{2} - \frac{626}{3}\right) \\
=& \frac{1559}{6}
\end{aligned}
$$

דוגמה 10.9

מהו השטח של האליפסה הנתון ע"י

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

בשטח התחום

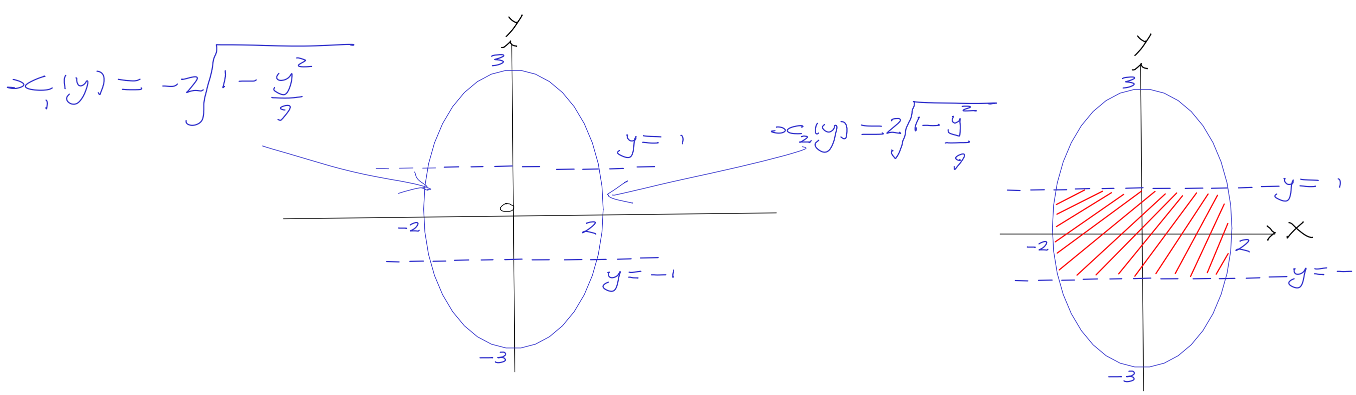
$$-1\leq y\leq 1\ .$$

פתרון:

הקו של האליפסה מוצג בתרשים והתחום D מוצג בתרשים בצבע אדום. שים לב:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \qquad \Rightarrow \qquad x=\pm 2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}$$

במונחים של x.



הקו של האליפסה בצד שמאל ניתן ע"י

$$x_1(y)=-2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}$$

והקו של האליפסה בצד ימין ניתן ע"י

$$x_2(y)=+2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}$$

השטח ניתן באמצעות האינטגרל הכפול

$$\begin{aligned}
A&=\iint\limits_D dx\,dy\\
&=\int_{-1}^{1}dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}dx\\
&=\int_{-1}^{1}dy\ [x]_{x_1(y)}^{x_2(y)}\\
&=\int_{-1}^{1}dy\left(2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}-(-2)\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}\right)\\
&=\int_{-1}^{1}dy\,4\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}
\end{aligned}$$

בכדי לחשב את האינטגרל של y ניתן להשתמש בהטבלה של אינטגרלים הסטנדרטים להלן:

$$\begin{aligned} A =&4\left[\frac{1}{2}\left(y\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}+3\sin^{-1}\left(\frac{y}{3}\right)\right)\right]_{-1}^{1} \\ =&2\left(\sqrt{\frac{8}{9}}+3\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)-(-1)\sqrt{\frac{8}{9}}-3\sin^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)\right) \quad = 7.84928\ . \end{aligned}$$

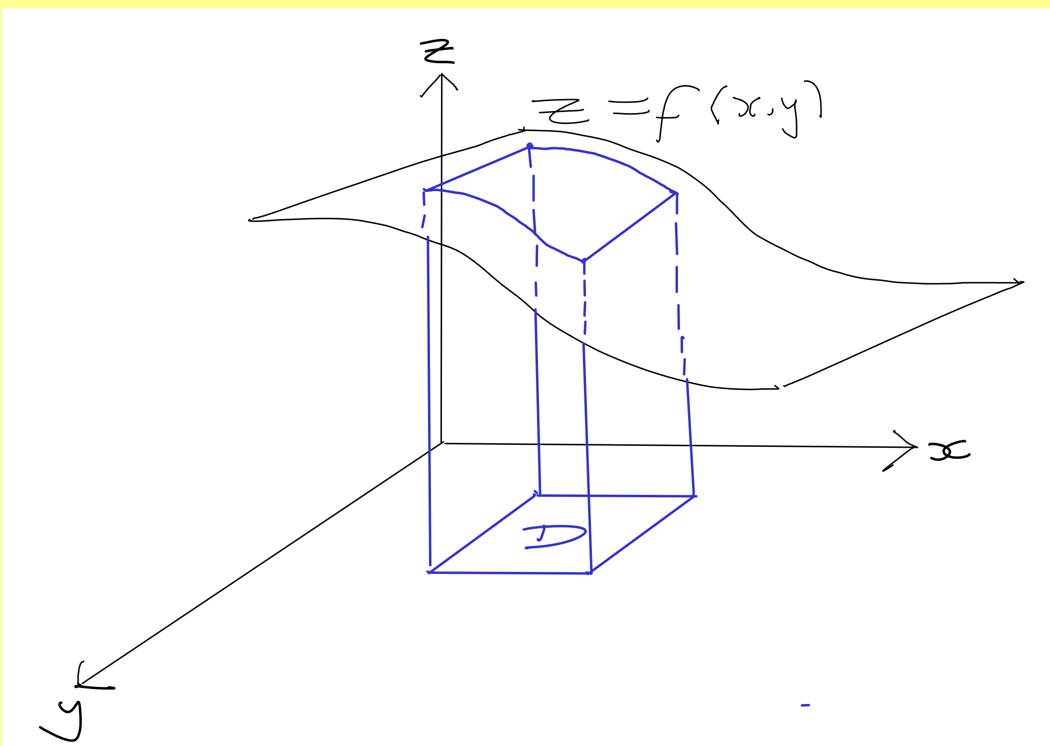
10.3 נפח מתחת משטח בתחום ע"י אינטגרל כפול

משפט 10.5 נפח תחת משטח בתחום D

נתון פונקציה $f(x,y)$ האי-שלילית ותחום D במישור xy (כלומר $f(x,y)\geq 0$ בכל נקודה בתחום D).
הנפח מתחת המשטח $z=f(x,y)$ בתוך התחום D ניתן ע"י האינטגרל הכפול

$$V=\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y)\ .$$

הנפח מדובר מוצג בתרשים להלן בכחול.



דוגמה 10.10 נפח פירמידה

מהו הנפח מתחת המישור הניתן ע"י המשוואה

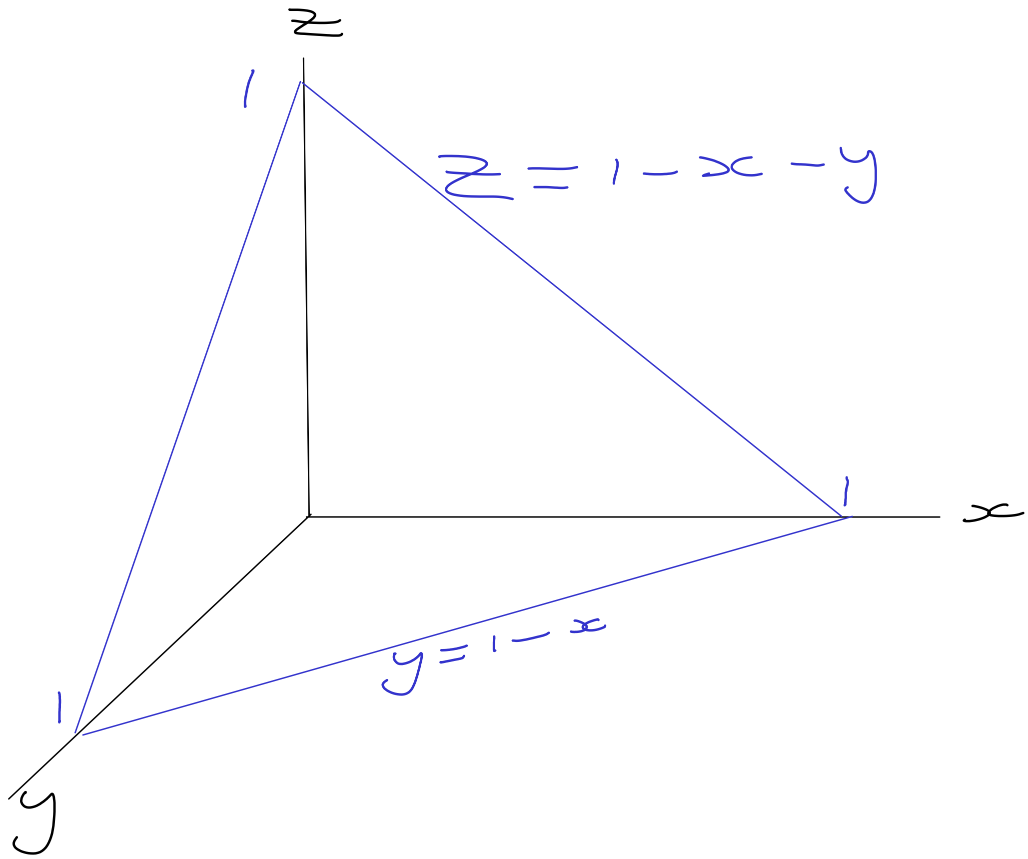
$$z=f(x,y):=1-x-y$$

בתחום

$$D=\{(x,y)|0\leq x\leq 1\ ,0\leq y\leq 1-x\ \}$$

פתרון:

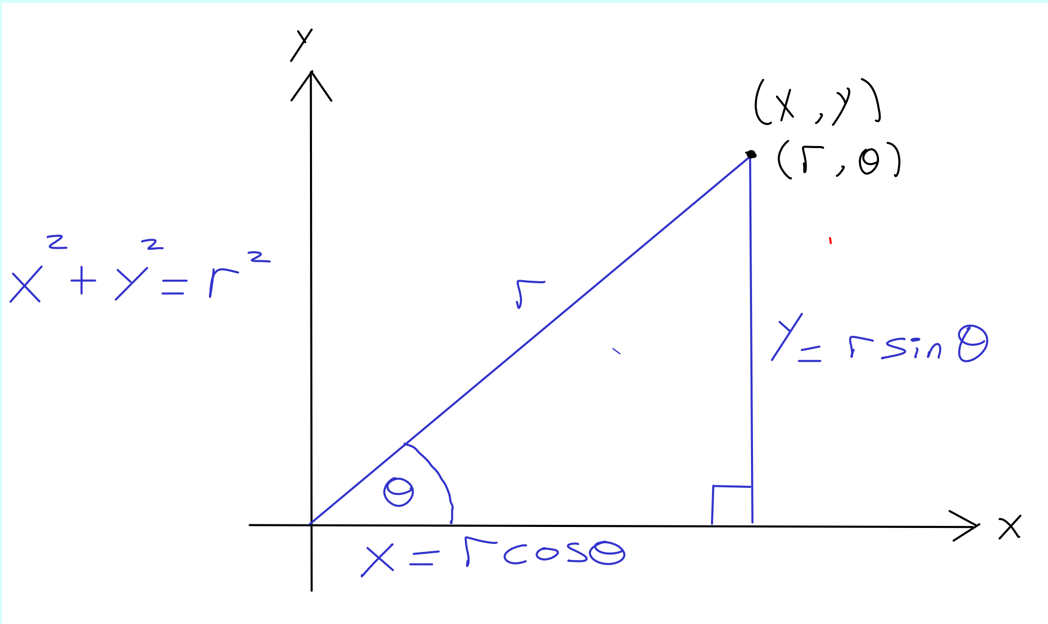
שים לב, הנפח מדובר הינו נפח של פירמדיה משולשית, כמתואר בתרשים להלן.



$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{y=1-x} dy\,(1-x-y) \\ &= \int_0^1 dx \left[y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} \\ &= \int_0^1 dx \left((1-x) - x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2\right) \\ &= \int_0^1 dx \left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2}\right) \\ &= \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6}\ . \end{aligned}$$

10.4 קואורדינטות קוטביות

הגדרה 10.1 קואורדינטות קוטביות



מקואורדינטות קרטיזיות לקואורדינטות קוטביות:

$$x = r\cos\theta\ , \qquad y = r\sin\theta\ .$$

מקואורדינטות קוטביות לקואורדינטות קרטיזיות:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\ , \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\ .$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta\ .$$

דוגמה 10.11

חשבו את האינטגרל

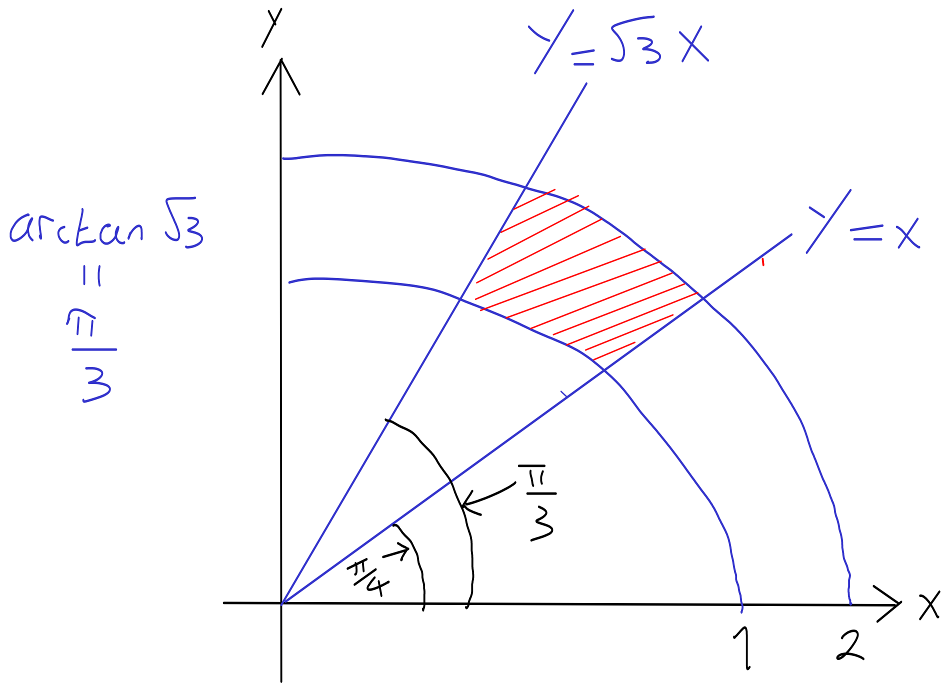
$$\iint\limits_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right)dx\,dy$$

כאשר

$$D = \{(x,y)|1 \le x^2+y^2 \le 4, x \le y \le \sqrt{3}\cdot y\}$$

פתרון:

$$D = \{(r,\theta)|\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{3}, 1 \le r \le 2\ .\}$$



$$\iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\,dx\,dy = \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_1^2 \arctan\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right) r\,dr$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_1^2 \arctan\left(\tan\theta\right) r\,dr$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta\,\theta \int_1^2 r\,dr$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta\,\theta \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta\,\theta \left[\frac{3}{2}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\int_{\pi/4}^{\pi/3} \theta\,d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/3}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi^2}{16}\right]$$

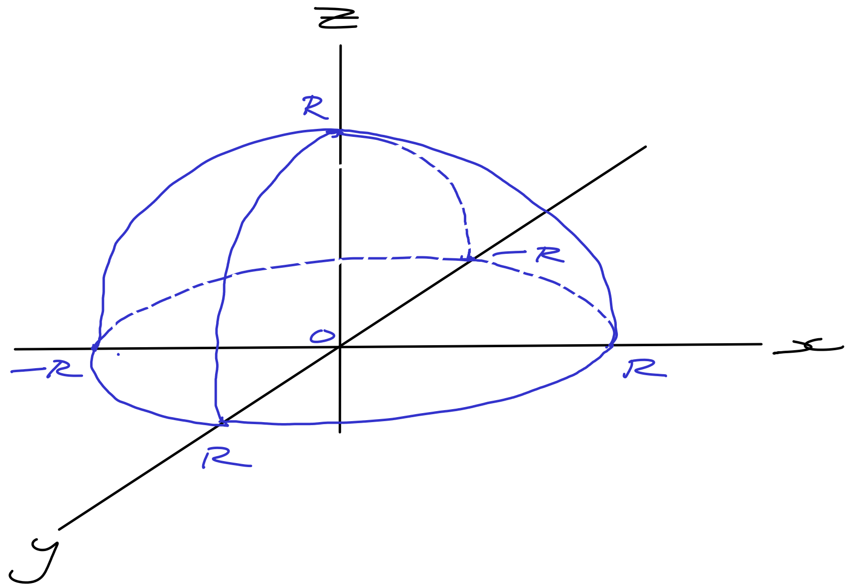
$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{7\pi^2}{144}$$

$$= \frac{7\pi^2}{192}$$

דוגמה 10.12 נפח של ספירה

מהו הנפח של ספירה מרדיוס R?

פתרון:



$$f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$V = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta\, r\sqrt{R^2 - r^2}$$

יהי $w = r^2$ משתנה חדש. שים לב:

$$w' = 2r$$

כך ש-

$$V = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta\, \frac{w'}{2}\sqrt{R^2 - w}$$

לפי שיטת אינטגרציה ע"י הצבה ניתן לחשב את האינטגרל של r באמצעות אינטגרל של w:

$$\begin{aligned} V =& \frac{1}{2}\int_{w=0}^{w=R^2} dw \int_0^\pi d\theta\, \sqrt{R^2 - w} \\ =& \frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta\, \left[-\frac{2}{3}\cdot \left(R^2 - w\right)^{3/2}\right]_{w=0}^{w=R^2} \\ =& \frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta\, \frac{2R^3}{3} \\ =& \frac{R^3}{3}\int_0^\pi d\theta \\ =& \frac{\pi R^3}{3}\ . \end{aligned}$$

10.5 החלפת משתנים - קואורדינטות עקומות

משפט 10.6 החלפת משתנים באינטגרל כפול והיעקוביאן

נניח שקואורדינטות u,v מוגדרות באמצעי קואורדינטות קרטיזיות x,y ע"י הביטוים

$$x = x(u,\text{v}) \ , \qquad x = x(u,\text{v}) \ .$$

נתון אינטגרל כפול $\iint_D f(x,y)dx\,dy$. ניתן לעבור לאינטגרל של הקואורדינטות u,v דרך היחס

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f\left(x(u,\text{v}),y(u,\text{v})\right)|J|\,du\,d\text{v},$$

כאשר

$$J = \det\begin{pmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_\text{v} & y'_\text{v} \end{pmatrix} \ .$$

J נקרא היעקוביאן.

דוגמה 10.13

קואורדינטות קוטביות:

$$J = \det\begin{pmatrix} x'_r & y'_r \\ x'_\theta & y'_\theta \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r \ .$$

דוגמה 10.14

קואורדינטות פרבוליות:

$$x = u\cdot\text{v} \ , \qquad y = \frac{1}{2}\left(u^2 - \text{v}^2\right)$$

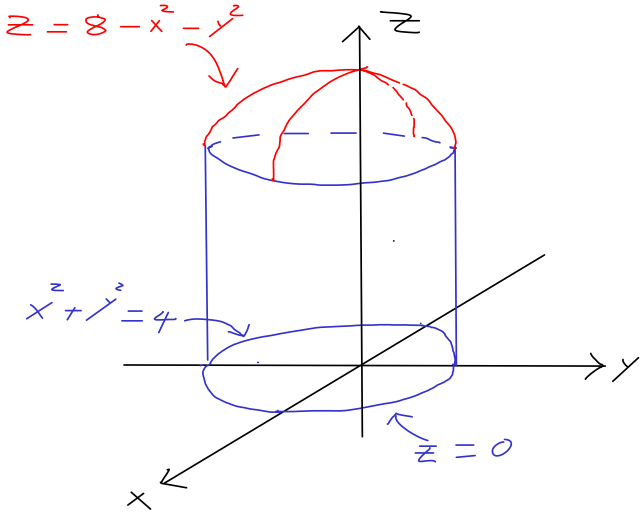
$$J = \det\begin{pmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_\text{v} & y'_\text{v} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \text{v} & u \\ u & -\text{v} \end{pmatrix} = -\text{v}^2 - u^2 \ .$$

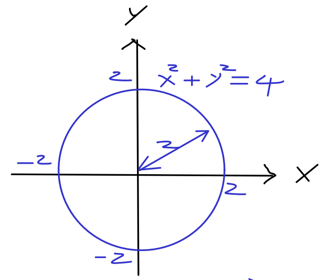
דוגמה 10.15

חשבו בעזרת אינטגרל כפול את נפח הגוף החסום ע"י המשטחים:

$$x^2 + y^2 = 4 \ , \qquad z = 0 \ , \qquad z = 8 - x^2 - y^2 \ .$$

פתרון:





$D = \{(x,y) | x^2+y^2 \le 4\}$
$= \{(r,\theta) | 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$

$$V = \iint_D (8 - x^2 - y^2) dx\, dy \ , \qquad D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 4\} = \{(r,\theta)|0 \le r \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

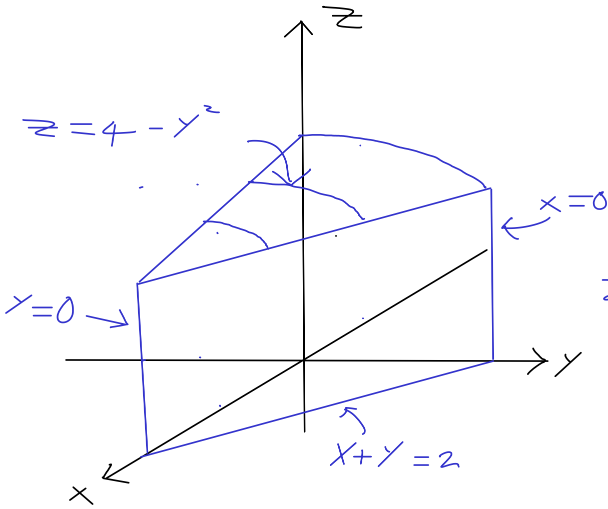
$$\begin{aligned} V =& \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta\, r(8-r^2) \\ =& \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta\, (8r - r^3) \\ =& \int_0^{2\pi} d\theta \left[4r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 \\ =& \int_0^{2\pi} d\theta \ (16-4) \\ =& 12 \cdot [\theta]_0^{2\pi} = 24\pi \ . \end{aligned}$$

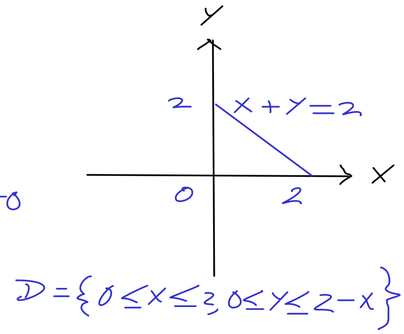
דוגמה 10.16

חשבו בעזרת אינטגרל כפול את נפח הגוף החסום ע"י המשטחים:

$$z = -y^2 + 4 \ , \qquad z = 0 \ , \qquad x + y = 2 \ , \qquad y = 0 \ , \qquad x = 0 \ .$$

פתרון:





$$V=\iint\limits_{D}(4-y^2)dx\,dy\ ,\qquad D=\{(x,y)|0\le x\le 2\ ,0\le y\le 2-x\}$$

$$\begin{aligned}
V=&\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(4-y^2)dy\\
=&\int_0^2 dx\left[4y-\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{2-x}\\
=&\int_0^2 dx\left(4(2-x)-\frac{(2-x)^3}{3}\right)\\
=&\left[-2(2-x)^2+\frac{(2-x)^4}{12}\right]_{x=0}^{2}\\
=&8-\frac{16}{12}\\
=&8-\frac{4}{3}\\
=&\frac{20}{3}\ .
\end{aligned}$$

10.6 מרכז מסה

משפט 10.7 מרכז מסה

נתון תחום D ופונקציה $\rho(x,y)\ge 0$ לכל $x,y\in D$. המסה של התחום D עם צפיפות $\rho(x,y)$ מוגדרת

$$M=\iint\limits_{D}\rho(x,y)dx\,dy\ .$$

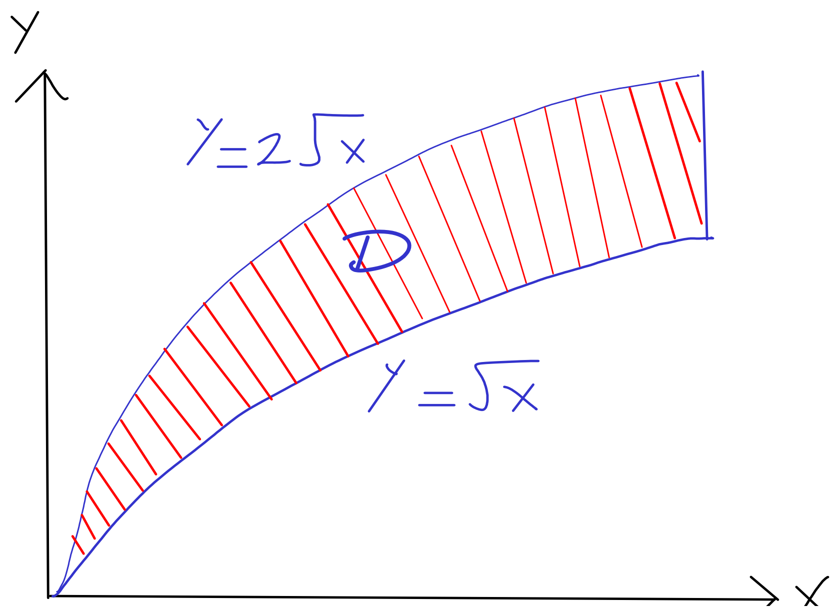
המרכז מסה של D היא נקודה $(x_c, y_c) \in D$ שניתנת ע"י

$$x_c = \frac{\iint_D x\,\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy} \ , \qquad y_c = \frac{\iint_D y\,\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy} \ .$$

דוגמה 10.17

מצאו את המסה של הגוף מישורי המוגדר ע"י הקווים $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 4$ כאשר הצפיפות החומר היא $\rho(x,y) = 4 - x$.

פתרון:



$$\begin{aligned}
M &= \iint_D (4-x)dx\,dy \\
&= \int_0^4 dx\ \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4-x)dy \\
&= \int_0^4 dx\,(4-x)\left[y\right]_{y=\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \\
&= \int_0^4 (4-x)\sqrt{x}\,dx \\
&= \int_0^4 (4x^{1/2}-x^{3/2})\,dx \\
&= \left[4\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{2}{5}\cdot x^{5/2}\right]_0^4 \\
&=\frac{64}{3}-\frac{64}{5} \\
&=\frac{320-192}{15} \\
&=\frac{128}{15}\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_D\ x\cdot\rho(x,y)dx\,dy &= \iint_D (4x-x^2)dx\,dy \\
&= \int_0^4 dx\ \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4x-x^2)dy \\
&= \int_0^4 dx\,(4x-x^2)\left[y\right]_{y=\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \\
&= \int_0^4 (4x-x^2)\sqrt{x}\,dx \\
&= \int_0^4 (4x^{3/2}-x^{5/2})\,dx \\
&= \left[4\cdot\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{2}{7}\cdot x^{7/2}\right]_0^4 \\
&=\frac{256}{5}-\frac{256}{7} \\
&=\frac{512}{35}\ .
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D y\cdot\rho(x,y)dx\,dy &= \iint\limits_D (4-x)y\,dx\,dy \\
&= \int_0^4 dx\ \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4-x)y\,dy \\
&= \int_0^4 dx\,(4-x)\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \\
&= \int_0^4 dx\,(4-x)\left(2x-\frac{x}{2}\right) \\
&= \int_0^4 dx\,(4-x)\cdot\frac{3}{2}x \\
&= \frac{3}{2}\int_0^4 dx\,(4x-x^2) \\
&= \frac{3}{2}\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^4 \\
&= \frac{3}{2}\left(32-\frac{64}{3}\right) \\
&= \frac{3}{2}\cdot\frac{64}{6} \\
&= 16\ .
\end{aligned}
$$

$$
x_c = \frac{\iint\limits_D x\cdot\rho(x,y)dx}{M} = \frac{\frac{512}{35}}{\frac{128}{15}} = \frac{3}{7}\cdot\frac{512}{128} = \frac{3}{7}\cdot 4 = \frac{12}{7}\ .
$$

$$
y_c = \frac{\iint\limits_D y\cdot\rho(x,y)dx}{M} = \frac{16}{\frac{128}{15}} = 15\cdot\frac{16}{128} = 15\cdot\frac{1}{8} = \frac{15}{8}
$$