עבודה 9: העתקות במרחב מכפלה פנימית

שאלה 1 מצאו את ההעתקה הצמודה להעתקה $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$,

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

שאלה 2 מצאו את ההעתקה הצמודה להעתקה $T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$,

$$T\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2iz_1-5z_3\\iz_1+(1-i)z_2\\(1-i)z_1+iz_2+(i+2)z_3\end{pmatrix}$$

שאלה 3 יהי $B=\{\mathrm{v}_1=e_1,\mathrm{v}_2=e_1+e_2\}$ בסיס של מרחב $\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, כאשר $E=\{e_1,e_2\}$ הוא הבסיס הסטנדרטי. נתונה המטריצה המייצגת של העתקה T בבסיס B:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}\ .$$

מצאו את המטריצה המייצגת של ההעתקה הצמודה בבסיס B.

שאלה 4 יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב וקטורי V עם מכפלה פנימית. הוכיחו כי אם U תת מרחב של V אשר T-שמור, אז $U^\perp$ הוא תת מרחב $\bar{T}$- שמור.

שאלה 5 יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V. הוכיחו:

א) $\mathrm{Ker}\bar{T}=\left(\mathrm{Im}T\right)^\perp$

ב) $\mathrm{Im}\bar{T}=\left(\mathrm{Ker}T\right)^\perp$

שאלה 6 יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V. הוכיחו כי

א) T העתקה על אם"ם $\bar{T}$ היא חד חד ערכית

ב) T העתקה חד חד ערכית אם"ם $\bar{T}$ היא על.

שאלה 7 נתון אופרטור T במרחב מכפלה פנימית V. הוכיחו כי אם u וקטור עצמי של העתקות T ו- $\bar{T}$, עם ערכים עצמיים λ ו- μ בהתאמה, אז $\bar{\mu}=\lambda$.

שאלה 8 הראו כי העתקה $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ המוגדרת על ידי

$$T\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2z_1+2iz_2\\2z_1+(4+2i)z_2\end{pmatrix}$$

נורמלית.

שאלה 9 הוכיחו כי אם T אופרטור נורמלי ו $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ אז גם האופרטור $\alpha T+\beta\bar{T}$ הוא נורמלי.

שאלה 10 עבור אילו ערכי $a,b\in\mathbb{C}$ המטריצה $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2a & a \\ i & 1 & a \end{pmatrix}$ היא הרמיטית ?

שאלה 11 יהי $T:V\to V$ העתקה צמודה לעצמה, $S:V\to V$ אופרטור אוניטרי. הוכיחו כי ST נורמלית אס"ם S ו- T^2 מתחלפים, כלומר $S\cdot T^2=T^2\cdot S$.

שאלה 12 יהי $T:V\to V$ העתקה לינארית במרחב מכפלה פנימית. הוכיחו שקיום כל שניים מתוך שלושת התנאים הבאים גורר את התנאי השלישי:

א) T אוניטרית.

ב) T צמודה לעצמה.

ג) $T^2=I$.

שאלה 13 הוכיחו כי אם $T:V\to V$ העתקה צמודה לעצמה כך ש $T^2=T$ אז T היא ההטלה האורטוגונלית על תת המרחב $U=\mathrm{Im}T$.

שאלה 14 הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

אם T צמוד לעצמו ו- S צמוד לעצמו, אזי גם $T\cdot S$ צמוד לעצמו.

שאלה 15 הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

אם A נורמלית ו- Q אוניטרית, אז המטריצה $\bar{Q}\cdot A\cdot Q$ היא נורמלית.

שאלה 16 יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית: אם T צמוד לעצמו אז כל הערך עצמי של T ממשי.

שאלה 17 יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית: אם T העתקה אנטי-הרמיטית אז כל ערך עצמי של T מספר מדומה.

שאלה 18 יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית: אם T אוניטרי אז הערך מוחלט של כל ערך עצמי של T שווה 1.

שאלה 19 יהי $T:V\to V$ אופרטו במרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א) אם T צמוד לעצמו אז T נורמלית.

ב) אם T נורמלית אז T צמוד לעצמו.

ג) אם T אוניטרי אז T נורמלית.

ד) אם T נורמלית אז T אוניטרי.

תשובות

שאלה 1

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^2$: $E=\{e_1,e_2\}$. לכל $\mathrm{v}\in\mathbb{R}^2$,

$$\bar{T}(\mathrm{v})=\overline{\langle T(e_1),\mathrm{v}\rangle}e_1+\overline{\langle T(e_2),\mathrm{v}\rangle}e_2$$

$$T(e_1)=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad T(e_2)=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}\ ,$$

לכל $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,

$$\langle T(e_1),\mathrm{v}\rangle=2x+y\ ,\qquad \langle T(e_2),\mathrm{v}\rangle=-x-3y\ ,$$

לכן

$$\bar{T}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y\\-x-3y\end{pmatrix}\ .$$

■

שאלה 2

$T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$,

$$T\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2iz_1-5z_3\\iz_1+(1-i)z_2\\(1-i)z_1+iz_2+(i+2)z_3\end{pmatrix}$$

יהי $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ הבסיס הסטנדרטי. אז

$$[T]_E=\begin{pmatrix}2i&0&-5\\i&1-i&0\\1-i&i&i+2\end{pmatrix}$$

לכן

$$[\bar{T}]_E=\begin{pmatrix}-2i&-i&1+i\\0&1+i&-i\\-5&0&2-i\end{pmatrix}$$

■

שאלה 3

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \{b_1 = e_1 \ , b_2 = e_1 + e_2\}$$

נמצא את המטריצה המייצגת של T לפי בסיס אורתונורמלי $E = \{e_1, e_2\}$

$$T(e_1) = T(b_1) = b_1 + b_2 = 2e_1 + e_2 \ ,$$

$$T(e_2) = T(b_2 - b_1) = T(b_2) - T(b_1) = (2b_1 - b_2) - (b_1 + b_2) = (2e_1 - e_1 - e_2) - (2e_1 + e_2) = -e_1 - 2e_2 \ .$$

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \ , \qquad [\bar{T}]_E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \ .$$

נמצא את $[\bar{T}]_B$:

$$\bar{T}(b_1) = \bar{T}(e_1) = 2e_1 - e_2 = 2b_1 - b_2 + b_1 = b_1 - b_2 \ ,$$

$$\bar{T}(b_2) = \bar{T}(e_1 + e_2) = \bar{T}(e_1) + \bar{T}(e_2) = 2e_1 - e_2 + e_1 - 2e_2 = 3e_1 - 3e_2 = 3b_1 - 3(b_2 - b_1) = 6b_1 - 3b_2 \ .$$

לכן

$$[\bar{T}]_B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \ .$$

■

שאלה 4

נתון:

$T(u) \in U$ לכל $u \in U$.

צריך להוכיח:

$\bar{T}(\mathrm{v}) \in U^\perp$ לכל $\mathrm{v} \in U^\perp$.

הוכחה:

נניח ש- $u \in U$ ו- $\mathrm{v} \in U^\perp$.
$T(u) \in U$ (נתון).
בגלל ש $\mathrm{v} \in U^\perp$ אז

$$\langle T(u), \mathrm{v} \rangle = 0 \ .$$

ז"א לכל $u \in U$,

$$\langle T(u), \mathrm{v} \rangle = \langle u, \bar{T}(\mathrm{v}) \rangle = 0 \ .$$

לכן $\bar{T}(u) \in U^\perp$.
■

שאלה 5

א) נוכיח כי אם T אוניטרי ו- $u \in \text{Ker}(\bar{T})$ אז $u \in (\text{Im}T)^{\perp}$.

נניח ש- $u \in \ker(\bar{T})$. אז $\bar{T}(u) = \bar{0}$.
נקח $\text{v} \in \text{Im}T$. $\Leftarrow$ קיים $w \in V$ כך ש $\text{v} = T(w)$.
לכן

$$\langle \text{v}, u \rangle = \langle T(w), u \rangle = \langle \text{v}, \bar{T}(u) \rangle = \langle \text{v}, 0 \rangle = 0 \ .$$

ז"א $\text{v} \perp u$ לכל $\text{v} \in \text{Im}T$ $\Leftarrow$ $u \in (\text{Im}\, T)^{\perp}$.

נוכיח כי אם T אוניטרי ו- $u \in (\text{Im}T)^{\perp}$ אז $u \in \text{Ker}(\bar{T})$.

נניח $u \in (\text{Im}T)^{\perp}$. $\Leftarrow$ לכל $\text{v} \in V$, $\langle T(\text{v}), u \rangle = 0$.
מכאן

$$\langle T(\text{v}), u \rangle = \langle \text{v}, \bar{T}(u) \rangle = 0$$

לכל $\text{v} \in V$.
לכן $\bar{T}(u) = 0$ $\Leftarrow$ $u \in \text{Ker}\, \bar{T}$.

ב) נוכיח כי אם $\text{v} \in \text{Im}\bar{T}$ אז $\text{v} \in (\text{Ker}T)^{\perp}$.

נניח ש $\text{v} \in \text{Im}\bar{T}$. $\Leftarrow$ קיים $u \in V$ כך ש $\text{v} = \bar{T}(u)$.
נקח $w \in \text{Ker}T$. $\Leftarrow$ $T(w) = 0$. אז

$$\langle w, \text{v} \rangle = \langle w, \bar{T}(u) \rangle = \langle T(w), u \rangle = \langle 0, u \rangle = 0$$

ז"א $\langle w, \text{v} \rangle = 0$ לכל $w \in \text{Ker}T$. לכן $\text{v} \in (\text{Ker}T)^{\perp}$.

נוכיח כי אם $\text{v} \in (\text{Ker}T)^{\perp}$ אז $\text{v} \in \text{Im}\bar{T}$.
נניח כי $\text{v} \in (\text{Ker}T)^{\perp}$.
■

שאלה 6

א) T על V $\Leftrightarrow$ $\text{Im}(T) = V$ $\Leftrightarrow$ $\left(\text{Ker}\, \bar{T}\right)^{\perp} = V$. $\text{Ker}\, \bar{T} = \{\bar{0}\}$. $\Leftrightarrow$ $\bar{T}$ חח"ע.

ב) T חח"ע $\Leftrightarrow$ $\text{Ker}(T) = \{\bar{0}\}$ $\Leftrightarrow$ $\left(\text{Im}\bar{T}\right)^{\perp} = \{\bar{0}\}$ $\Leftrightarrow$ $\left(\text{Im}\bar{T}\right) = V$ $\Leftrightarrow$ $\bar{T}$ על V.
■

שאלה 7

$$\langle T(u), u \rangle = \langle \lambda u, u \rangle \quad \text{(וקטור עצמי } u \text{)}$$
$$= \lambda \langle u, u \rangle \quad \text{(לינאריות של מכפלה פנימית) .}$$

$$\begin{aligned}\langle T(u), u\rangle &= \langle u, \bar{T}(u)\rangle && (\text{הגדרה של העתקה צמודה } u) \\ &= \langle u, \mu u\rangle && (\bar{T} \text{ ווקטור עצמי של } u) \\ &= \bar{\mu}\langle u, u\rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית}) .\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\langle u, u\rangle - \bar{\mu}\langle u, u\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - \bar{\mu})\langle u, u\rangle = 0 \ .$$

u ווקטור עצמי לכן $u \neq \bar{0}$ לכן $\langle u, u\rangle \neq 0$ לכן $(\lambda - \bar{\mu}) = 0$ לכן $\lambda = \bar{\mu}$.

■

שאלה 8

$$T\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z_1 + 2iz_2 \\ 2z_1 + (4+2i)z_2 \end{pmatrix}$$

נורמלית. $E = \{e_1, e_2\}$ בסיס אורתונורמלי, לכן

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ 2 & 4+2i \end{pmatrix} \ , \qquad [\bar{T}]_E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2i & 4-2i \end{pmatrix}$$

אז

$$[T]_E \cdot [\bar{T}]_E = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ 2 & 4+2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2i & 4-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8+8i \\ 8-8i & 24 \end{pmatrix}$$

$$[\bar{T}]_E \cdot [T]_E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2i & 4-2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ 2 & 4+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8+8i \\ 8-8i & 24 \end{pmatrix}$$

לכן

$$[T]_E \cdot [\bar{T}]_E = [\bar{T}]_E \cdot [T]_E \ .$$

■

שאלה 9

$$\begin{aligned}\left(\alpha T + \beta\bar{T}\right) \cdot \overline{\left(\alpha T + \beta\bar{T}\right)} &= \alpha\bar{\alpha}T\bar{T} + \alpha\bar{\beta}TT + \beta\bar{\alpha}\bar{T}\bar{T} + \beta\bar{\beta}\bar{T}T \\ &= |\alpha|^2 T\bar{T} + \alpha\bar{\beta}TT + \beta\bar{\alpha}\bar{T}\bar{T} + |\beta|^2\bar{T}T \\ &= |\alpha|^2\bar{T}T + \alpha\bar{\beta}TT + \beta\bar{\alpha}\bar{T}\bar{T} + |\beta|^2 T\bar{T}\end{aligned}$$

כאשר בשוויון האחרון השתמשנו בעובדה כי T נורמלי, כלומר $T\bar{T} = \bar{T}T$. מצד שני

$$\begin{aligned}\overline{\left(\alpha T + \beta\bar{T}\right)} \cdot \left(\alpha T + \beta\bar{T}\right) &= \bar{\alpha}\alpha\bar{T}T + \bar{\alpha}\ \beta\bar{T}\bar{T} + \bar{\beta}\alpha TT + \bar{\beta}\ \beta T\bar{T} \\ &= |\alpha|^2\bar{T}T + \bar{\alpha}\beta\bar{T}\bar{T} + \bar{\beta}\alpha TT + |\beta|^2 T\bar{T}\end{aligned}$$

לכן

$$\left(\alpha T + \beta\bar{T}\right) \cdot \overline{\left(\alpha T + \beta\bar{T}\right)} = \overline{\left(\alpha T + \beta\bar{T}\right)} \cdot \left(\alpha T + \beta\bar{T}\right)$$

■

שאלה 10

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2a & a \\ i & 1 & a \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 & -i \\ 0 & \bar{a} & 1 \\ \bar{b} & \bar{a} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

A הרמיטית אס"ם $A = \bar{A}$ לכן $a = \bar{a} = 1$ $b = -i$.

■

שאלה 11 נניח כי $ST^2 = T^2S$.

$$\begin{aligned} (ST)(\overline{ST}) &= ST\bar{T}\bar{S} \\ &= ST^2\bar{S} && \text{(צמודה לעצמה } T\text{)} \\ &= T^2S\bar{S} && \text{(} S \text{ ו- } T^2 \text{ מתחלפים)} \\ &= T^2 && \text{(אונירטי } S\text{)} \end{aligned}$$

מצד שני,

$$\begin{aligned} (\overline{ST})(ST) &= \bar{T}\bar{S}ST \\ &= \bar{T}T && \text{(אונירטי } S\text{)} \\ &= T^2S\bar{S} && \text{(צמודה לעצמה } T \text{)} \\ &= T^2 && \text{(אונירטי } S\text{)} \end{aligned}$$

ז"א $(\overline{ST})(ST) = (ST)(\overline{ST})$ ולכן ST נורמלי.

נניח כי ST נורמלי. ז"א $(\overline{ST})(ST) = (ST)(\overline{ST})$.

$$\begin{aligned} (ST)(\overline{ST}) &= ST\bar{T}\bar{S} \\ &= ST^2\bar{S} && \text{(צמודה לעצמה } T\text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\overline{ST})(ST) &= \bar{T}\bar{S}ST \\ &= \bar{T}T && \text{(אונירטי } S\text{)} \\ &= T^2 && \text{(צמודה לעצמה } T \text{)} \end{aligned}$$

לכן

$$ST^2\bar{S} = T^2 \quad \Rightarrow \quad ST^2\bar{S}S = T^2S \quad \Rightarrow \quad ST^2I = T^2S\ ,$$

כי S אוניטרי, לכן $ST^2 = T^2S$.

■

שאלה 12

א) וב) $\Leftarrow$ ג)

$T : V \to V$ צמודה לעצמה, ז"א $T = \bar{T}$.
T אוניטרי, אז $T\bar{T} = I \Leftarrow T^2 = I$.

ב) וג) $\Leftarrow$ א)

$T:V\to V$ צמודה לעצמה, ז"א $T=\bar{T}$.
$T^2=I \Leftarrow T\bar{T}=I$.

ג) וא) $\Leftarrow$ ב)

$T:V\to V$ אוניטרי, ז"א $T\bar{T}=I \Leftarrow T^{-1}=\bar{T}$. .
$T^2=I \Leftarrow T=T^{-1}=\bar{T}$.
■

שאלה 13
■

שאלה 14
טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:
$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ אופרטור שמוגדר

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ .$$

$S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ אופרטור שמוגדר

$$S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ .$$

$\overline{[T]}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=[T]$ לכן T צמודה לעצמה.
$\overline{[S]}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=[S]$ אז S צמודה לעצמה.

$$T\cdot S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ .$$

$[T\cdot S]=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $\overline{[T\cdot S]}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $\overline{[T\cdot S]}\neq[T\cdot S]$ לכן $T\cdot S$ לא צמודה לעצמה.

שאלה 15
טענה נכונה. הוכחה:

נניח ש- Q אוניטרית ו A נורמלית.

$$\begin{aligned}\overline{(\bar{Q}\cdot A\cdot Q)}\cdot(\bar{Q}\cdot A\cdot Q)=&\bar{Q}\bar{A}Q\bar{Q}\cdot A\cdot Q\\ =&\bar{Q}\bar{A}\cdot I\cdot A\cdot Q &&(\text{אוניטרית } Q)\\ =&\bar{Q}\cdot\bar{A}A\cdot Q\\ =&\bar{Q}\cdot A\bar{A}\cdot Q &&(\text{נורמלית } A)\end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned}(\bar{Q}A\cdot Q)\cdot\overline{(\bar{Q}\cdot A\cdot Q)}=&\bar{Q}\cdot A\cdot Q\bar{Q}\cdot\bar{A}Q\\ =&\bar{Q}A\cdot I\cdot\bar{A}Q &&(\text{אוניטרית } Q)\\ =&\bar{Q}A\bar{A}Q\ .\end{aligned}$$

לכן
$$\overline{(\bar{Q}\cdot A\cdot Q)}\cdot(\bar{Q}\cdot A\cdot Q)=(\bar{Q}\cdot A\cdot Q)\cdot\overline{(\bar{Q}\cdot A\cdot Q)}$$
לכן $\bar{Q}\cdot A\cdot Q$ נורמלית.

<u>שאלה 16</u> טענה נכונה. הוכחה:

נניח $T:V\to V$ העתקה צמודה לעצמה, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v})=\lambda\mathrm{v}$. אז
$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &=\langle\lambda\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle &&(\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &=\lambda\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle &&(\text{לינאריות של מכפלה פנימית})\end{aligned}\ .$$
מצד שני
$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &=\langle\mathrm{v},\bar{T}(\mathrm{v})\rangle &&(\text{הגדרה של העתקה צמודה})\\ &=\langle\mathrm{v},T(\mathrm{v})\rangle &&(T \text{ צמודה לעצמה})\\ &=\langle\mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle &&(\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &=\bar{\lambda}\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle &&(\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית})\end{aligned}$$
נשווה ביניהם:
$$\lambda\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=\bar{\lambda}\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\quad\Rightarrow\quad(\lambda-\bar{\lambda})\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=0\ .$$
v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v}\neq 0 \Leftarrow \langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\neq 0 \Leftarrow (\lambda-\bar{\lambda})=0 \Leftarrow \lambda=\bar{\lambda}$.

<u>שאלה 17</u> טענה נכונה. הוכחה:

נניח $T:V\to V$ העתקה צמודה לעצמה, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v})=\lambda\mathrm{v}$. אז
$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &=\langle\lambda\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle &&(\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &=\lambda\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle &&(\text{לינאריות של מכפלה פנימית})\end{aligned}\ .$$
מצד שני
$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &=\langle\mathrm{v},\bar{T}(\mathrm{v})\rangle &&(\text{הגדרה של העתקה צמודה})\\ &=\langle\mathrm{v},-T(\mathrm{v})\rangle &&(T \text{ אנטי-הרמיטית})\\ &=-\langle\mathrm{v},T(\mathrm{v})\rangle\\ &=-\langle\mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle &&(\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &=-\bar{\lambda}\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle &&(\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית})\end{aligned}$$
נשווה ביניהם:
$$\lambda\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=-\bar{\lambda}\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\quad\Rightarrow\quad(\lambda+\bar{\lambda})\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=0\ .$$
v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v}\neq 0 \Leftarrow \langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\neq 0 \Leftarrow (\lambda+\bar{\lambda})=0 \Leftarrow \lambda=-\bar{\lambda}$.

<u>שאלה 18</u> טענה נכונה. הוכחה:

נניח $T : V \to V$ העתקה אוניטרית, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v}) = \lambda \mathrm{v}$.
אז

$$\begin{aligned} \langle T(\mathrm{v}), T(\mathrm{v})\rangle &= \langle \lambda \mathrm{v}, \lambda \mathrm{v}\rangle && (\text{v וקטור עצמי של } T) \\ &=\lambda \langle \mathrm{v}, \lambda \mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית}) \\ &=\lambda\bar{\lambda} \langle \mathrm{v}, \lambda \mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית}) \end{aligned}$$

.

מצד שני

$$\begin{aligned} \langle T(\mathrm{v}), T(\mathrm{v})\rangle &= \langle \mathrm{v}, \bar{T}T(\mathrm{v})\rangle && (\text{הגדרה של העתקה צמודה}) \\ &= \langle \mathrm{v}, I(\mathrm{v})\rangle && (T \text{ אוניטרית}) \\ &= \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle \end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\bar{\lambda} \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle = \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle \quad \Rightarrow \quad (\lambda \cdot \bar{\lambda} - 1) \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle = 0 \ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v} \neq 0 \Leftarrow \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle \neq 0 \Leftarrow (\lambda \cdot \bar{\lambda} - 1) = 0 \Leftarrow \lambda\bar{\lambda} = 1 \Leftarrow |\lambda|^2 = 1$.

<u>שאלה 19</u>

א) טענה נכונה. הוכחה:

אם T צמודה לעצמה אז $\bar{T} = T$, לכן

$$T \cdot \bar{T} = T^2 = \bar{T} \cdot T \ .$$

ב) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ , \qquad A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \ .$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = -A$$

$$A\bar{A} = \bar{A}A = I \ .$$

ז"א A נורמלית אבל לא צמוד לעצמה. לכן T נורמלי אבל לא צמוד לעצמו.

ג) טענה נכונה. הוכחה:

אם T אוניטרי אז

$$T\bar{T} = I \quad \Rightarrow \quad \bar{T} = T^{-1} \quad \Rightarrow \quad \bar{T}T = I$$

ז"א $T\bar{T} = \bar{T}T$ לכן T צמוד לעצמו.

ד) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ , \qquad A = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} \ .$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} = -A$$

$$A\bar{A} = \bar{A}A = 4I \ .$$

ז"א A נורמלית אבל לא צמוד לעצמה. לכן T נורמלי אבל לא צמוד לעצמו.