חדו"א 1
סמסטר א' תשפד
עבודת בית 10

שאלה 1 בדקו אם האינטגרלים הבאים מתכנסים או מתבדרים.

א) $$\int_4^\infty \frac{2x+3}{x^2+17x+8}\,dx$$

ב) $$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^3+2x^2+4}\,dx$$

שאלה 2 חשבו את $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+4x+5}dx$.

שאלה 3 בדקו התכנסות של האינטגרל $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\cdot\ln x}\,dx$.

שאלה 4 הוכיחו כי האינטגרל $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ מתכנס וערכו קטן מ- 1.

שאלה 5

א) הגדר אינטגרל מסוים $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ באמצעות סכום אינטגרלי.

ב) מהי המשמעות הגיאומטרית של $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$?

ג) חשבו בעזרת המשמעות הגיאומטרית:

1) $$\int_{-2}^2 \sqrt[3]{x+\sin x}\,dx$$

2) $$\int_0^4 |x-1|\,dx$$

3) $$\int_1^4 \max(3,x+1)\,dx$$

שאלה 6

א) מהי נוסחת ניוטון-לייבניץ לחישוב של אינטגרל מסוים?

ב) חשבו בעזרת נוסחת ניוטון-לייבניץ:

1) $\int_0^{\pi} (2x + \sin 2x)\, dx$

2) $\int_2^5 \frac{1}{2x-3}\, dx$

3) $\int_1^2 \frac{x+2}{3-x}\, dx$

4) $\int_1^e \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\, dx$

5) $\int_0^2 x\sqrt{9-\frac{9}{4}x^2}\, dx$

6) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx$

7) $\int_1^3 \frac{1}{x^2+6x+10}\, dx$

8) $\int_{-1}^0 xe^{-x}\, dx$

9) $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx$

שאלה 7

א) צייר את הצורה המישורית החסומה על-ידי הקווים הנתונים וחשבו את שטח הצורה:

1) $y = x^2$, $x + y - 2 = 0$.

2) $y = \frac{16}{x^2}$, $y = 17 - x^2$, $x \geq 0$.

3) $y = \frac{x}{x-3}$, $y = x$, $x = -2$.

4) $y = x^3$, $xy = 4$, $y = 8$.

5) $y = \sin|x|$, $y = |x| - \pi$.

ב) צייר את הצורה המישורית החסומה על-ידי הקווים הנתונים וחשבו את נפח גוף הסיבוב של הצורה סביב ציר ה- x:

1) $xy = 6$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

2) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$.

3) $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$.

4) $y = \cos x$, $y = 2\cos x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$.

שאלה 8

א) כיצד מגדירים את האינטגרלים הלא אמיתיים:

1) $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

ב) חשבו את האינטגרל הלא אמיתי (בתחום לא חסום) או הוכח שאינטגרל מתבדר:

1) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-4x}\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$

3) $\displaystyle\int_{13}^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^{\infty} 2x\sin(x^2)\,dx$

5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+6x+12}\,dx$

6) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$

שאלה 9 הוכח בעזרת אינטגרציה את אי-השוויונים הבאים:

א)

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}\ .$$

ב)

$$\frac{n^3}{3}<1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2<\frac{n^3}{3}+n^2\ .$$

ג)

$$\frac{n^5}{5}<1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4<\frac{n^5}{5}+n^4\ .$$

תשובות

שאלה 1

א) לכל $x\in[4,\infty)$ מתקיים

$$\frac{2x+3}{x^2+17x+8}>\frac{1}{x}\ .$$

הרי $\displaystyle\int_4^{\infty}\frac{1}{x}\,dx$ מתבדר לכן האינטגרל $\displaystyle\int_4^{\infty}\frac{2x+3}{x^2+17x+8}\,dx$ לפי מבחן ההשוואה.

ב) $\sin^2 x \le 1$ לכל x. לכן, לכל $x \ge 0$,

$$\frac{\sin^2 x}{x^3+2x^2+4} \le \frac{1}{x^3+2x^2+4} \le \frac{1}{x^3} \ .$$

לפיכך, מכיוון ש- $\int_0^\infty \frac{1}{x^3}dx$ מתכנס אז גם $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^3+2x^2+4}dx$ מתכנס.

שאלה 2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+5}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+2)^2+1}dx = [\arctan(x+2)]_{-\infty}^{\infty} = \arctan(\infty) - \arctan(-\infty) = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi \ .$$

שאלה 3

נפתור ע"י המצב משתנים. נגדיר $t = \ln x$. אז $t' = \frac{1}{x}$.

$$\int_2^\infty dx\, \frac{1}{x \cdot \ln x} = \int_2^\infty dx\, \frac{t'}{t} = \int_{\ln 2}^\infty dt\, \frac{1}{t} = [\ln(t)]_{\ln 2}^\infty = \ln(\infty) - \ln(\ln 2) = \infty$$

מתבדר.

שאלה 4

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx < \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 1$$

שאלה 5

א)

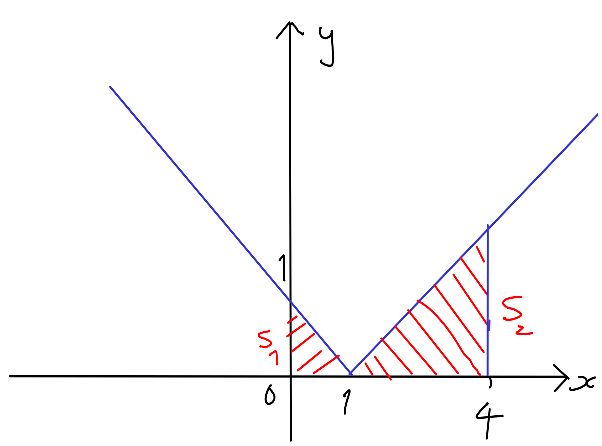
ב)

ג) חשבון בעזרת המשמעות הגיאומטרית:

1) $\int_{-2}^{2} \sqrt[3]{x+\sin x}\, dx = 0$ כי $\sqrt[3]{x+\sin x}$ אי זוגית בקטע סימטרי ביחס לראשית הצירים.

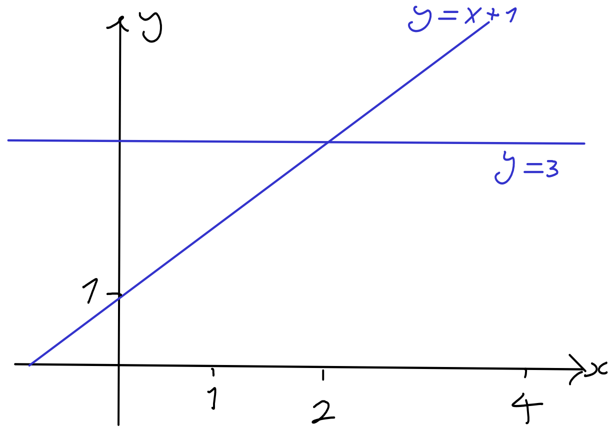
2)

$$\int_0^4 |x-1|\, dx = \int_0^1 (1-x)\, dx + \int_1^4 (x-1)\, dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^4 = 5 \ .$$



3)

$$\int_1^4 \max(3, x+1)\,dx = \int_1^2 3\,dx + \int_2^4 (x+1)\,dx = [3x]_1^2 + \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_2^4 = 11$$



שאלה 6

א) אם $F(x)$ הפונקציה הקדומה של $f(x)$ אז

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\ .$$

ב) חשבו בעזרת נוסחת ניוטון-לייבניץ:

■

1)

$$\int_0^\pi (2x + \sin 2x)\,dx = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^\pi = \pi^2$$

■

2)

$$\int_2^5 \frac{1}{2x-3} = \frac{1}{2}\big[\ln|2x-3|\big]_2^5 = \frac{1}{2}(\ln 7 - \ln 1) = \frac{\ln 7}{2}\,dx$$

■

3)

$$\int_1^2 \frac{x+2}{3-x}\,dx = \int_1^2 \left(-1 + \frac{5}{3-x}\right) = \big[-x - 5\ln|3-x|\big]_1^2\,dx = 5\ln 2 - 1$$

■

(4

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx &= \int_1^e \frac{x}{x\sqrt{x}}\,dx + \int_1^e \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx\\ &= \int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^e \frac{1}{x}\,dx\\ &= \int_1^e x^{-1/2}\,dx + \int_1^e \frac{1}{x}\,dx\\ &= \Big[2\sqrt{x} + \ln|x|\Big]_1^e\\ &= 2\sqrt{e} + \ln e - 2 - \ln 1\\ &= 2\sqrt{e} - 1\end{aligned}$$

■

(5

$$\int_0^2 x\sqrt{9-\frac{9}{4}x^2}\,dx$$

$$t = 9 - \frac{9}{4}x^2$$

$$t' = -\frac{9}{2}x$$

$$x = -\frac{2}{9}t'$$

$$-\frac{2}{9}\int_9^0 \sqrt{t}\,dx = -\frac{2}{9}\cdot\left[2\cdot\frac{t^{3/2}}{3}\right]_9^0 = 4$$

■

(6

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$t = 1 + x^2$$
$$t' = 2x$$

יש גם להחליף את הגבולות של האינטגרל עם הערכים המתאימים של המשתנה t לפי ההגדרה $t = 1 + x^2$:

$x = 0$	$t = 1 + 0^2 = 1$
$x = 1$	$t = 1 + 1^2 = 2$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t'}{t}\,dx = \frac{1}{2}\int_{t=1}^{t=2} \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\big[\ln|t|\big]_1^2 = \frac{1}{2}\ln 2$$

■

(7

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2+6x+10}\,dx = \int_1^3 \frac{1}{(x+3)^2+1}\,dx$$

$$t = x + 3$$

$t' = 1$

יש גם להחליף את הגבולות של האינטגרל עם הערכים המתאימים של המשתנה t לפי ההגדרה $t = x + 3$:

$x = 1$	$t = 1 + 3 = 4$
$x = 3$	$t = 3 + 3 = 6$

$$\int_4^6 \frac{1}{t^2+1}\, dt = \left[\arctan t\right]_4^6 = \arctan 6 - \arctan 4$$

■

(8

$$\int_{-1}^0 x e^{-x}\, dx$$

$$u = x \ , \qquad \mathrm{v}' = e^{-x} \ , \qquad u' = 1 \ , \qquad \mathrm{v} = -e^{-x} \ .$$

$$\int_{-1}^0 x e^{-x} = \left[-x e^{-x}\right]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 e^{-x}\, dx = \left[-x e^{-x}\right]_{-1}^0 - \left[e^{-x}\right]_{-1}^0 = -e - 1 + e = -1$$

■

(9

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx$$

$$u = x^2 \ , \qquad \mathrm{v}' = \sin x \ , \qquad u' = 2x \ , \qquad \mathrm{v} = -\cos x \ .$$

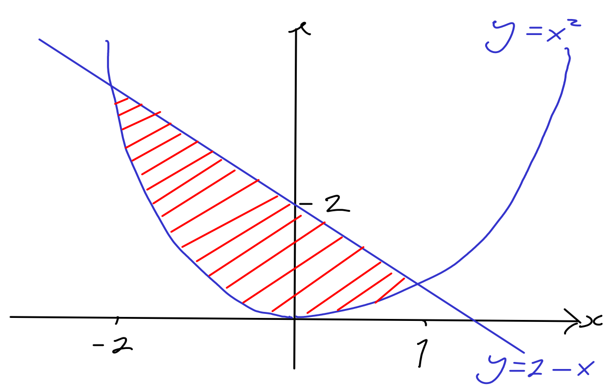
$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx = \left[-x^2 \cos x\right]_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} x \cos x\, dx = 2\int_0^{\pi/2} x \cos x\, dx$$

$$u = x \ , \qquad \mathrm{v}' = \cos x \ , \qquad u' = 1 \ , \qquad \mathrm{v} = \sin x \ .$$

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx = 2\left[x \sin x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2} + 2\left[\cos x\right]_0^{\pi/2} = \pi - 2 \ .$$

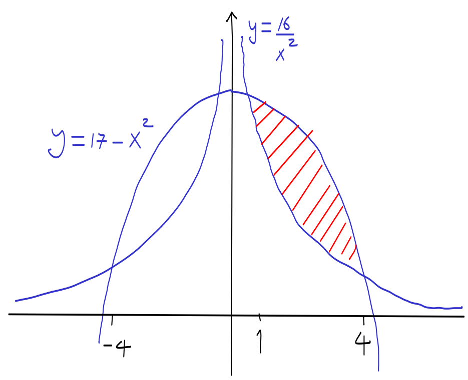
שאלה 7

א) **(1** $y = x^2$, $x + y - 2 = 0$.



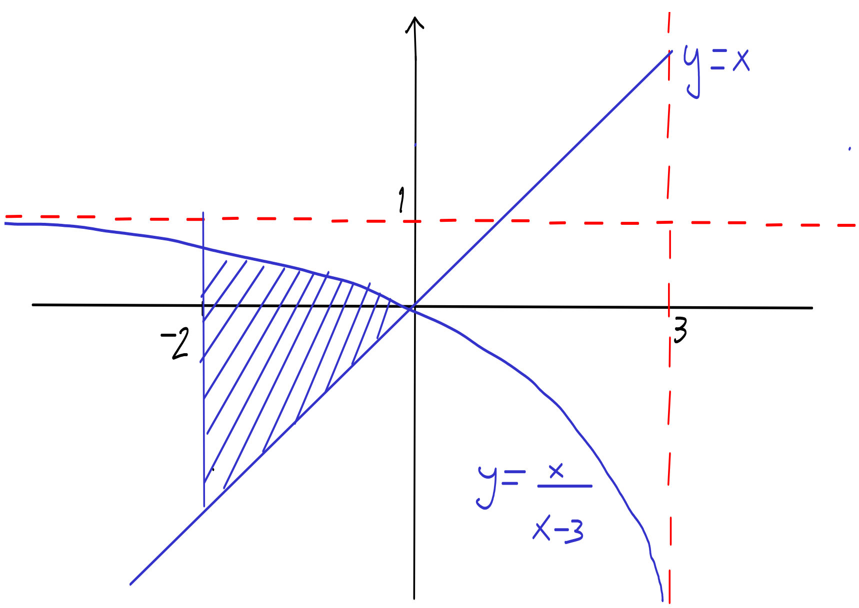
$$S = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2) = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$$

(2 $y = \frac{16}{x^2}$, $y = 17 - x^2$, $x \geq 0$.



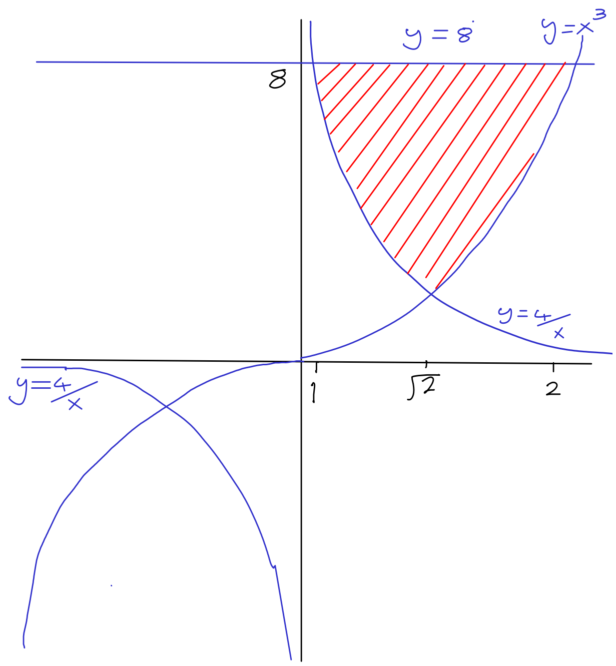
$$S = \int_{1}^{4} \left(17 - x^2 - \frac{16}{x^2}\right) == \left[17x - \frac{x^3}{3} + \frac{16}{x}\right]_{1}^{4} = 18$$

(3 $y = \frac{x}{x-3}$, $y = x$, $x = -2$.



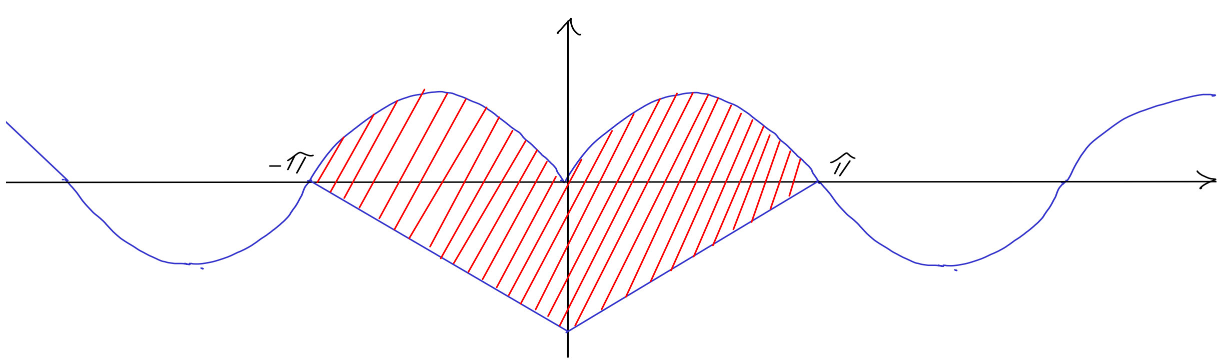
$$S=\int_{-2}^{0}\left(\frac{x}{x-3}-x\right)dx=\int_{-2}^{0}\left(1+\frac{3}{x-3}-x\right)=\left[x+3\ln|x-3|-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0}=3\ln\left(\frac{3}{5}\right)+4$$

4) $y=x^3$, $xy=4$, $y=8$.



$$S=\int_{1/2}^{\sqrt{2}}\left(8-\frac{4}{x}\right)dx+\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(8-x^3\right)=\left[8x-4\ln|x|\right]_{1/2}^{\sqrt{2}}+\left[8x-\frac{x^4}{4}\right]_{\sqrt{2}}^{2}=9-6\ln 2\ .$$

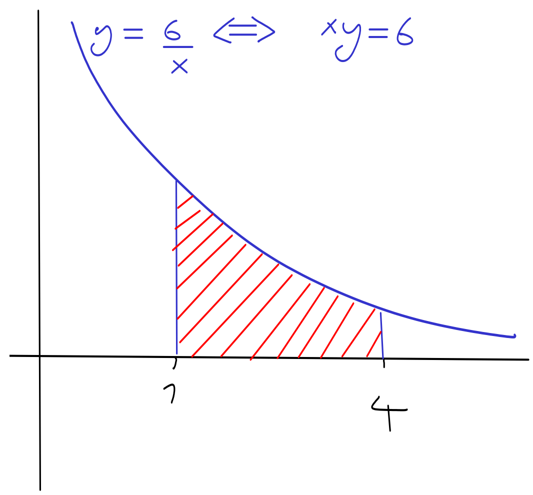
5) $y=\sin|x|$, $y=|x|-\pi$.



$$S = 2\int_0^{\pi} (\sin x - (x-\pi)) = 2\left[-\cos x - \frac{x^2}{2} + \pi x\right]_0^{\pi} = \pi^2 + 4$$

■

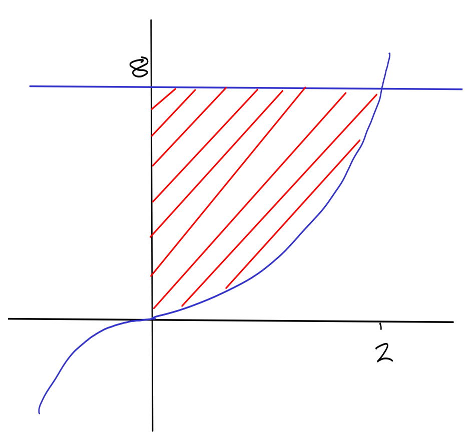
ב) **1)** $xy = 6$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$



$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{6}{x}\right)^2 dx = 36\pi \left[-\frac{1}{x}\right]_1^4 = 27\pi$$

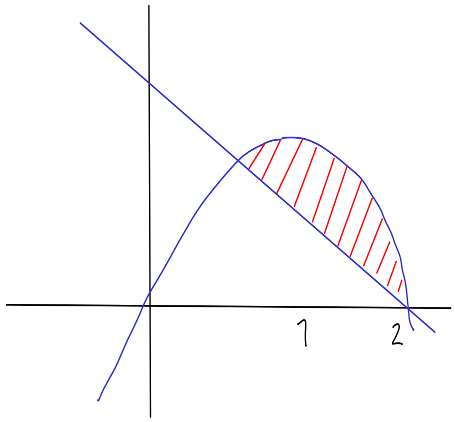
■

2) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$.



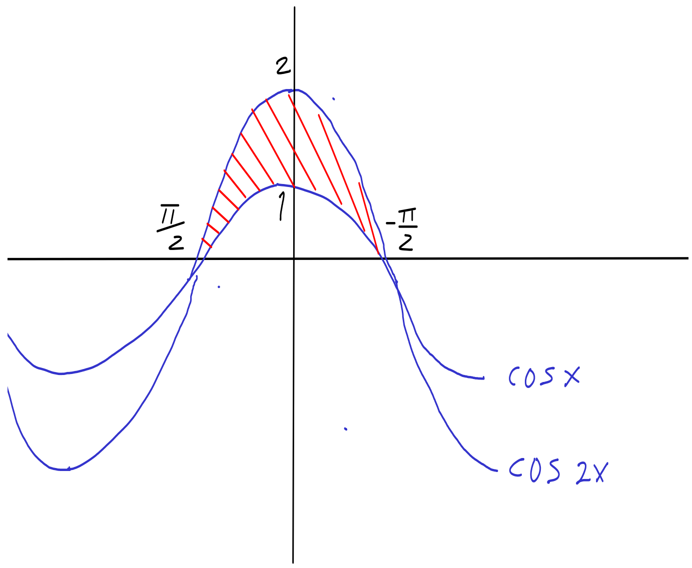
$$V=\pi\int_0^2\left(8^2-(x^3)^2\right)\,dx=\pi\left[64x-\frac{x^7}{7}\right]_0^2=\frac{768}{7}\pi$$

3) $y=2x-x^2$, $y=-x+2$.



$$\begin{aligned}V=&\pi\int_1^2\left((2x-x)^2-(2-x)^2\right)dx\\=&\pi\int_1^2\left(4x^2-4x^3+x^4-4+4x-x^2\right)dx\\=&\pi\int_1^2\left(x^4-4x^3+3x^2+4x-4\right)dx\\=&\pi\left[\frac{x^5}{5}-x^4+x^3+2x^2-4x\right]\\=&\frac{\pi}{5}\end{aligned}$$

4) $y=\cos x$, $y=2\cos x$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$.



$$\begin{aligned}
V =&\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left((2\cos x)^2 - \cos^2 x\right) dx \\
=&3\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \, dx \\
=&3\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)\, dx \\
=&\frac{3}{2}\pi \left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
=&\frac{3\pi^2}{2}
\end{aligned}$$

שאלה 8

א)

ב) **1)**

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-4x}\, dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-4x} dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{4}\left[e^{-4x}\right]_0^b\right) \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{4}e^{-4x} + \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

2)

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b xe^{-x^2} dx$$

$$t = x^2 \ , \qquad t' = 2x$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t}\,t'\,dx =& \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t}\,dt \\
=& \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^b \\
=& \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[-e^{-b}+1\right] \\
=& \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(3

$$\begin{aligned}
\int_{13}^{\infty}\frac{1}{x\ln x}\,dx =& \lim_{b\to\infty}\int_{13}^{b}\frac{1}{x\ln x}\,dx \\
=& \lim_{b\to\infty}\left[\ln|\ln x|\right]_{13}^{b} \\
=& \lim_{b\to\infty}\left[\ln|\ln b| - \ln|\ln 13|\right] \\
=& \infty
\end{aligned}$$

האינטגרל מתבדר.

(4

$$\int_0^{\infty} 2x\sin(x^2)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b 2x\sin(x^2)\,dx$$

$$t = x^2 \ , \qquad t' = 2x$$

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty}\int_0^b \sin(t)\,t'\ dx =& \lim_{b\to\infty}\int_0^{b^2}\sin(t)\,dt \\
=& \lim_{b\to\infty}\left[-\sin t\right]_0^{b^2}
\end{aligned}$$

הגבול לא קיים.

(5

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+6x+12}\,dx =& \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x+3)^2+3}\,dx \\
=& \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{(x+3)^2+3}\,dx + \int_{0}^{\infty}\frac{1}{(x+3)^2+3}\,dx \\
=& \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{1}{(x+3)^2+3}\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{(x+3)^2+3}\,dx
\end{aligned}$$

$$t = x+3 \ , \qquad t' = 1$$

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to-\infty}\int_{a+3}^{3}\frac{1}{t^2+3}\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{3}^{b+3}\frac{1}{t^2+3}\,dx =& \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_{a+3}^{3} + \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_{3}^{b+3} \\
=& \frac{\pi}{\sqrt{3}} \ .
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+6x+12}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \ .$$

6)

$$\int_1^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$$

$$t=\sqrt{x}\ , \qquad t'=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2t}$$

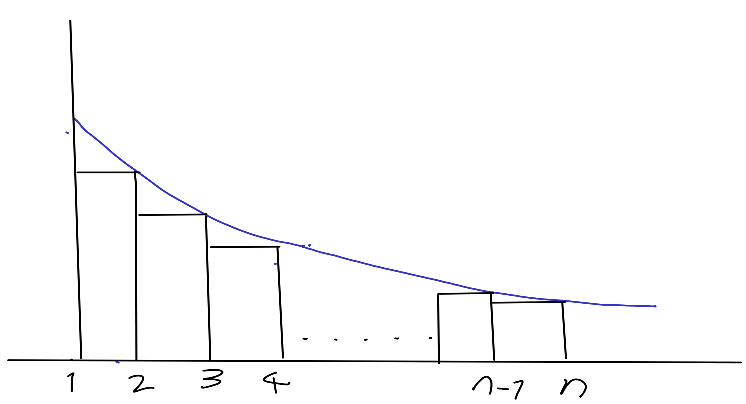
$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{(1+t^2)t}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{(1+t^2)t}\ \cdot\frac{1}{t'}\cdot t'\,dx\\ &= \lim_{b\to\infty}\int_1^{\sqrt{b}} \frac{1}{(1+t^2)t}\ \cdot\frac{1}{t'}\,dt\\ &= \lim_{b\to\infty}\int_1^{\sqrt{b}} \frac{1}{(1+t^2)t}\ \cdot(2t)\,dt\\ &= \lim_{b\to\infty}\int_1^{\sqrt{b}} \frac{1}{1+t^2}dt\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\arctan(t)\right]_1^{\sqrt{b}}\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\arctan\sqrt{b}-\arctan 1\right]\\ &=\frac{\pi}{2}\ .\end{aligned}$$

שאלה 9

א) צ"ל :

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}\ .$$

נגדיר $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ פונקציה יורדת.



$$f(2)+\ldots+f(n)<\int_1^n f(x)\,dx$$

לכן

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^n=1-\frac{1}{n}$$

נוסיף 1 לשני הצדדים:

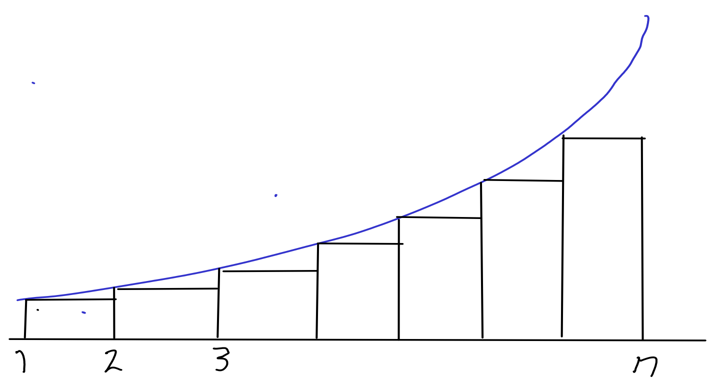
$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$$

■

ב) צ"ל :

$$\frac{n^3}{3}<1^2+2^2+\ldots+n^2<\frac{n^3}{3}+n^2\ .$$

נגדיר $f(x)=x^2$ פונקציה עולה.

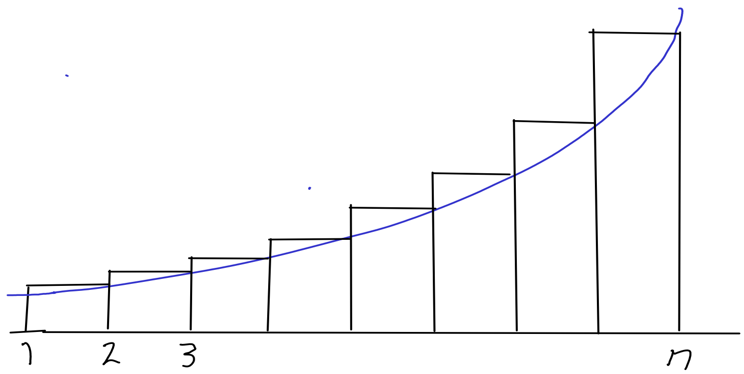


$$f(1)+\ldots+f(n-1)<\int_1^n x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^n=\frac{n^3}{3}-\frac{1}{3}$$

נוסיף n^2:

$$1^2+\ldots+(n-1)^2+n^2<n^2+\frac{n^3}{3}-\frac{1}{3}<n^2+\frac{n^3}{3}$$

נוכיח את האי -שוויון השני:



$$f(2)+\ldots+f(n) > \int_1^n x^2 dx = \frac{n^3}{3}-\frac{1}{3} \ .$$

נוסיף 1:

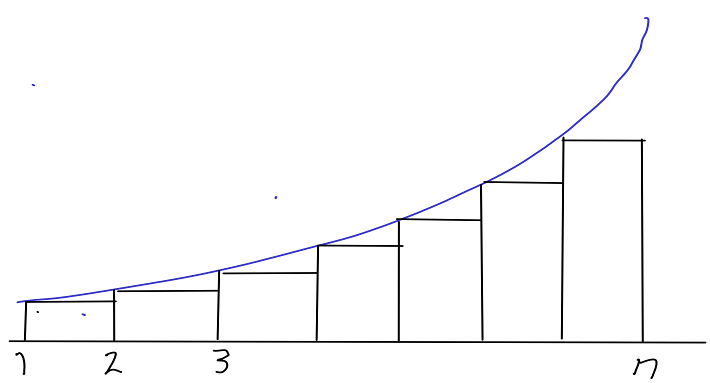
$$1^2+2^2+\ldots+n^2 > \frac{n^3}{3}-\frac{1}{3}+1 > \frac{n^3}{3} \ .$$

■

ג) צ"ל :

$$\frac{n^5}{5} < 1^4+\ldots+n^4 < \frac{n^5}{5}+n^4 \ .$$

נגדיר: $f(x)=x^4$ פונקציה עולה.

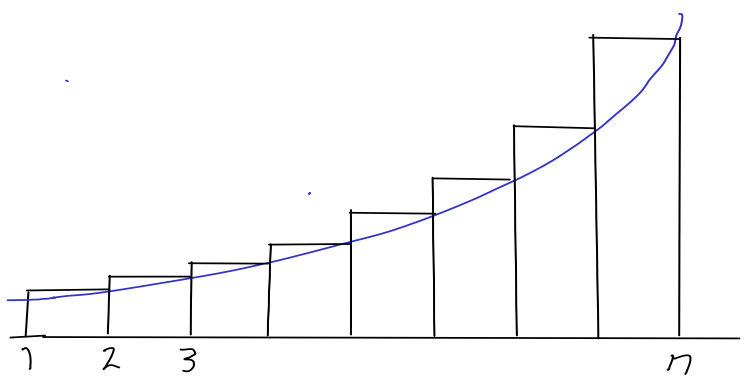


$$f(1)+\ldots+f(n-1) < \int_1^n x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^n = \frac{n^5}{5}-\frac{1}{5}\ .$$

נוסיף n^4:

$$1^4+\ldots+(n-1)64+n^4 < \frac{n^5}{5}-\frac{1}{5}+n^4 < \frac{n^5}{5}+n^4\ .$$

נוכיח את האי -שוויון השני:



$$f(2)+\ldots+f(n) < \int_1^n x^2dx = \frac{n^5}{5}-\frac{1}{5}\ .$$

נוסיף 1:

$$1^4+2^4+\ldots+n^4 < \frac{n^5}{5}-\frac{1}{5}+1 < \frac{n^5}{5}\ .$$