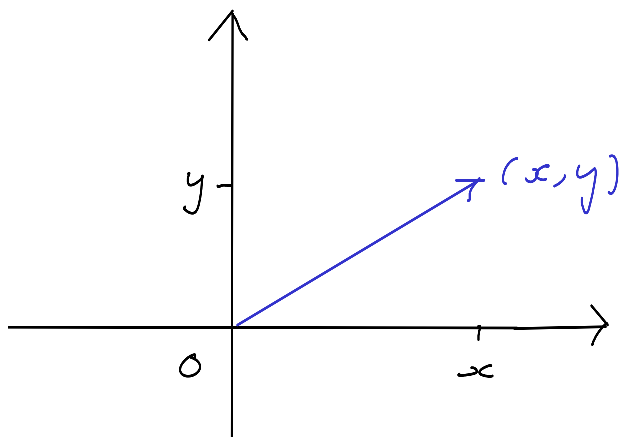
שיעור 5
מרחבים ווקטורי

5.1 מרחבים ווקטורים

באלגברה ווקטור במישור תמיד מתחיל בנקודה $(0,0)$. לכן כל ווקטור במישור נקבע ע"י הנקודה הסופית שלו (x,y).



לקבוצת כל הווקטורים במישור מסמנים $\mathbb{R}^2$.

<u>פעולות ב- $\mathbb{R}^2$</u>

1) חיבור ווקטורים:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

2) כפל של ווקטור בסקלר:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

באופן דומה ניתן להגדיר פעולות בין ווקטורים ב- $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) | x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

1) חיבור ווקטורים:

$$(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$$

2) כפל של ווקטור בסקלר:

$$\alpha \cdot (x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

באופן כללי נגדיר מרחב ווקטורי $\mathbb{R}^n$:

הגדרה 5.1 מרחב ווקטורי $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ מוגדר להיות הקבוצה של כל הסטים מ n מספרים ממשיים:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\} \ .$$

הפעולות הבאות מוגדרות בין ווקטורים ב- $\mathbb{R}^n$:

1) חיבור ווקטורים:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

2) כפל של ווקטור בסקלר:

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

בדוגמאות האלה הסקלרים שייכים לשדה $\mathbb{R}$.

באופן דומה הסקלרים יכולים להשתייך לשדה אחר, למשל $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$.

ניתן הגדרה כללית של מרחב ווקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$:

הגדרה 5.2 מרחב ווקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$

קבוצה לא ריקה V נקראת מרחב ווקטורי (מ"ו) מעל שדה $\mathbb{F}$ אם מתקיימים התנאים הבאים (האיברים של V נקראים ווקטורים ואיברי $\mathbb{F}$ נקראים סקלרים). לכל ווקטורים $u, \mathrm{v}, w \in V$ וסקלרים $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$:

(1) $u + \mathrm{v} \in V$

(2) קיים ווקטור $\alpha u \in V$

(3) $u + v = v + u$ (חוק החילוף).

(4) $(u + \mathrm{v}) + w = u + (\mathrm{v} + w)$ (חוק הקיבוץ).

(5) קיים ווקטור $\bar{0} \in V$ (הנקרא ווקטור האפס) כך שלכל $u \in V$, מתקיים $u = \bar{0} + u = u + \bar{0}$.

(6) לכל $u \in V$ קיים $-u \in V$ כך ש- $u + (-u) = \bar{0}$.

(7) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

(8) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$.

(9) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha \mathrm{v}$.

(10) $1 \cdot u = u$ (כאשר $1 \in \mathbb{F}$).

5.2 דוגמאות מרכזיות של מרחבים ווקטורים

דוגמה 5.1 $\mathbb{F}^n$

מרחב הווקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$.

דוגמה 5.2 $\mathbb{R}^{m\times n}$

קבוצת כל המטריצות מסדר $m\times n$ עם איברים ממשיים היא מרחב וקטורי.

לכל שתי מטריצות מסדר $m\times n$ מוגדרת פעולת חיבור וכל מטריצה ניתן להכפיל בסקלר השייך ל $\mathbb{R}$.

קל לבדוק שכל האקסיומות של מרחב ווקטורי מתקיימות. לכן זה מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{R}$.

דוגמה 5.3 $\mathbb{C}^{m\times n}$

באופן דומה קבוצת כל המטריצות מסדר $m\times n$ עם איברים מרוכבים היא מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{C}$.

דוגמה 5.4 $\mathbb{F}^{m\times n}$

באופן כללי קבוצת כל המטריצות מסדר $m\times n$ עם איברים משדה $\mathbb{F}$ היא מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{F}$.

דוגמה 5.5

$\mathbb{F}[x]$ קבוצת כל הפולינומים עם מקדמים השייכים לשדה $\mathbb{F}$, שמסומנת ב- $\mathbb{F}[x]$ היא מרחב וקטורי.

מוגדרות פעולות חיבור פולינומים וכפל של פולינומים בסקלר השייך ל- $\mathbb{F}$.

כל האקסיומות של מרחב ווקטורי מתקיימות.

דוגמה 5.6 $F(\mathbb{R})$

קבוצת הפונקציות הממשיות שמסומנת ב-

$$F(\mathbb{R})=\{f:f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}\}$$

היא מרחב וקטורי.

מוגדרות פעולות חיבור פונקציות וכפל פונקציה בסקלר מתוך $\mathbb{R}$.

נגדיר חיבור וכפל בסקלר כפי שהוגדרו בחדו"א. לכל $f,g\in F(\mathbb{R})$ ולכל $\alpha\in\mathbb{R}$ נגדיר

$$\begin{aligned}(f+g)(x)=&f(x)+g(x)\ ,\quad \forall x\in\mathbb{R}\ ,\\ (\alpha\cdot f)(x)=&\alpha\cdot f(x)\ ,\qquad \forall x\in\mathbb{R}\ ,\end{aligned}$$

ווקטור האפס הוא הפונקציה $f(x)=0$.

קבוצה זו עם הפעולות הללו היא מרחב ווקטורי.

דוגמה 5.7

נתונים הפולינומים של $P_1,P_2\in\mathbb{R}[x]$:

$$P_1=7+5x+3x^3+4x^7\in\mathbb{R}[x]\ ,\qquad P_2=6+4x+8x^2+3x^7+9x^{13}\in\mathbb{R}[x]\ ,$$

ונתון הסקלר $\alpha=3$, חשבו את P_1+P_2 ו- $\alpha\cdot P_1$.

פתרון:
אז

$$\begin{aligned}P_1{+}P_2 =& \left(7+5x+3x^3+4x^7\right)+\left(6+4x+8x^2+3x^7+9x^{13}\right)\\ =&(7+6)+(5+4)x+(0+8)x^2+(3+0)x^3+(4+3)x^7+(0+9)x^{13} \qquad \in \mathbb{R}[x]\ ,\end{aligned}$$

נתון הסקלר $\alpha=3$:

$$\begin{aligned}\alpha\cdot P_1 =& 13+9x+8x^2+3x^3+7x^6+9x^{13}\\ =&3\cdot\left(7+5x+3x^3+4x^7\right)\\ =&(3\cdot7)+(3\cdot5)x+(3\cdot3)x^3+(3\cdot4)x^7\\ =&21+15x+9x^3+12x^7 \qquad \in \mathbb{R}[x]\ .\end{aligned}$$

■

דוגמה 5.8

נתונות הפונקציות $f,g\in F(\mathbb{R})$:

$$f(x)=\sin x\ ,\qquad g(x)=2x+19\ ,$$

חשבו את $(7\cdot f)(x)$ ו- $(f+g)(x)$.

פתרון:
שתיהן פונקציות השייכות ל- $F(\mathbb{R})$.

$$(f+g)(x)=\sin x+2x+19\ .$$

מתקיים:

$$(7{\cdot}f)(x)=7\cdot\sin x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

דוגמה 5.9 מ

יהו ווקטור האפס של $F(\mathbb{R})$?

פתרון:
פונקצית האפס: פונקציית האפס,

$$O(x)=0\ ,\quad \forall x\in\mathbb{R}\ .$$

שימו לב שאכן לכל $f\in V$ מתקיים $f{+}O=f$ כי

$$(f{+}O)(x)=f(x)+O(x)=f(x)+0=f(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}\ .$$

הנגדי של f זו הפונקציה $-f$ שפעולתה

$$((-1){\cdot}f)(x)=(-1)\cdot f(x)=-f(x)\ ,\qquad \forall x\in\mathbb{R}\ .$$

■