שיעור 5
רציפות בנקודה

הגדרה 5.1 רציפות בנקודה

נניח ש- $f(x)$ פונקציה המוגדרת בנקודה a ובסביבה של a. הפונקציה $f(x)$ נקראת רציפה בנקודה a אם

.1

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) \ ,$$

(כלומר הגבול הדו-צדדי $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ קיים)

.2

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \ .$$

מכיוון ש $\lim\limits_{x\to a} x = a$, מקבלים $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = f\left(\lim\limits_{x\to a} x\right)$, ז"א סימן של lim נכנס לתוך הפונקציה.

דוגמה 5.1

דוגמא 1) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = e^1 = e$

דוגמא 2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \ln\left[(1+x)^{1/x}\right] = \ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right] = \ln e = 1$.

משפט 5.1 תכונות של פונקציה רציפה

1) אם פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפות בנקודה a, אז הפונקציות $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ רציפות בנקודה a. הפונקציה $\dfrac{f}{g}$ רציפה בנקודה a בתנאי $g(a)\neq 0$.

2) נניח ש $y=f(u)$, $u=g(x)$, $g(a)=b$, פונקציה g רציפה בנקודה a ופונקציה f רציפה בנקודה b, אז הפונקציה $y=f(g(x))$ רציפה בנקודה a.

3) כל פונקציה אלמנטרית רציפה בכל נקודה פנימית של תחום הגדרתה.

הגדרה 5.2 אי-רציפות בנקודה

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה a אבל לא בהכרח בנקודה a עצמה.

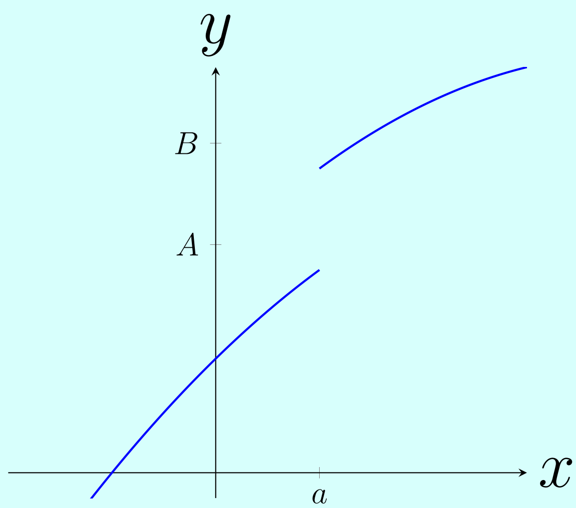
א) אם קיימים הגבולות החד-צדדים הסופיים ו-

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \neq f(a)$$

או ש $f(a)$ לא מוגדר, אומרים כי a היא נקודת אי-רציפות סליקה של $f(x)$.

ב) נקודה a היא נקודת אי-רציפות ממין ראשון של $f(x)$ אם קיימים הגבולות החד-צדדים הסופיים $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = A$, ו- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = B$ אבל $A\neq B$, כלומר

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x) \ .$$



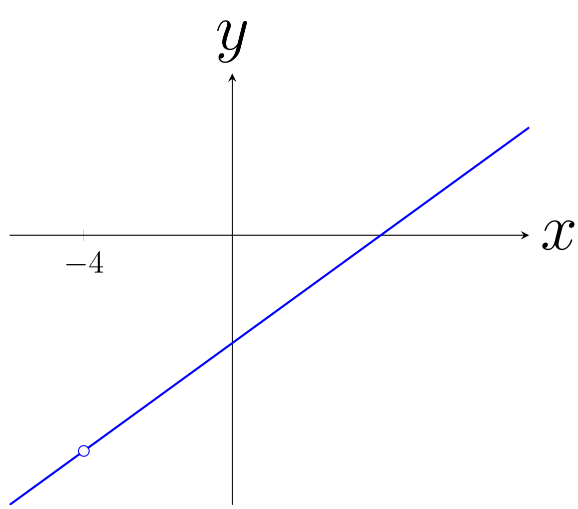
ג) נקודה a נקראת אי רציפות ממין שני של פונקציה $f(x)$ אם לפחות אחד הגבולות החד צדדיים $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ או $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ שווה ל- ∞ או $-\infty$ או לא קיים.

דוגמה 5.2

$f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+4}$ לא מוגדרת בנקודה $x=-4$.

$$\lim_{x\to -4}\frac{x^2-16}{x+4}=\lim_{x\to -4}\frac{(x+4)(x-4)}{x+4}=\lim_{x\to -4}(x-4)=-8$$

הגבול של $f(x)$ קיים בנקודה $x=-4$. לכן $x=-4$ נקודת אי-רציפות סליקה.

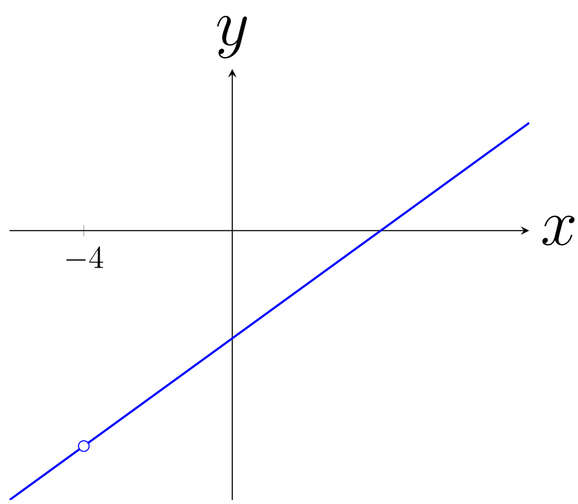


דוגמה 5.3

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\ ,\\ 2 & x=0\ .\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ ,$$

אבל $f(0)=2$. ז"א $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$ לכן הנקודה $x=0$ נקודת אי-רציפות סליקה.



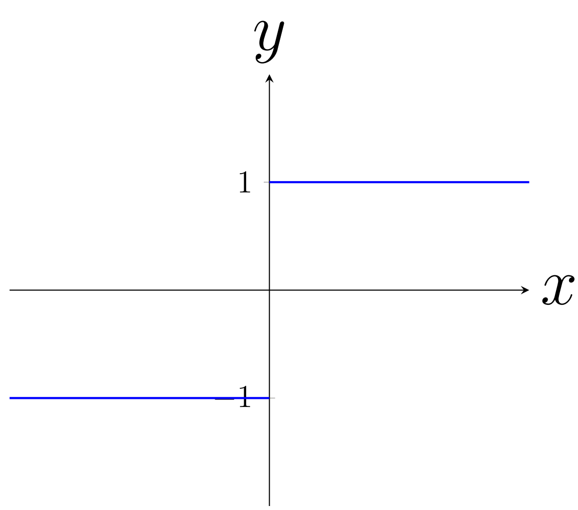
דוגמה 5.4

$$f(x)=\frac{x}{|x|}$$

$x=0$ נקודת אי-רציפות.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1\ ,\qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-x}=-1$$

לכן $x=0$ נקודת אי-רציפות ממין ראשון.



דוגמה 5.5

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & -1<x<2\ ,\\ 2-x & 2\leq x\leq 4\ .\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x-1)=1\ ,\qquad \lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(2-x)=0\ .$$

לכן $x=2$ נקודת אי-רציפות ממין ראשון.

דוגמה 5.6

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \arctan\left(\frac{2}{x-1}\right) = -\frac{\pi}{2}\ , \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \arctan\left(\frac{2}{x-1}\right) = \frac{\pi}{2}\ .$$

$x = 1$ נקודת אי רציפות ממין ראשון.

דוגמה 5.7

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$$

לכן $x = 2$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

דוגמה 5.8

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

לא קיים. לכן $x = 0$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

דוגמה 5.9

מצאו את נקודות אי הרציפות של הפונרציה הבאה וברר את סוגן:

$$f(x) = \frac{x}{x+3} + 2^{-1/x^2}$$

פתרון:
נקודות אי רציפות: $x = 0, -3$.

$\underline{x = -3}$

$$\lim_{x\to -3^+} \left(\frac{x}{x+3} + 2^{-1/x^2}\right) = \infty$$

$x = -3$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

$\underline{x = 0}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x+3}+2^{-1/x^2}\right)=0+0=0$$

$x=0$ נקודת אי-רציפות סליקה. ■

דוגמה 5.10

מצאו את נקודות אי הרציפות של הפונרציה הבאה וברר את סוגן:

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}+\frac{\tan x}{x}$$

פתרון:

נקודות אי רציפות: $x=-1,3,0$, $\frac{\pi}{2}+n\pi$.

$\underline{x=-1}$

$$\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}+\frac{\tan x}{x}\right)=-\infty$$

$x=-1$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

$\underline{x=3}$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}+\frac{\tan x}{x}\right)=\frac{3}{2}+\frac{\tan 3}{3}=0$$

$x=3$ נקודת אי-רציפות סליקה.

$\underline{x=0}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}+\frac{\tan x}{x}\right)=3+1=4$$

$x=0$ נקודת אי-רציפות סליקה.

$\underline{x=\frac{\pi}{2}+n\pi}$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^-}\left(\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}+\frac{\tan x}{x}\right)=\infty\ .$$

$x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

■

דוגמה 5.11

נתונה פונקציה

$$f(x)=\begin{cases} 2^{-x} & x\leq 1 \\ ax^2 & -1<x\leq 1 \\ \sqrt{x+b} & x>1 \end{cases}$$

עבור אילו ערכי a,b $f(x)$ רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$?

פתרון:

<u>אי-רציפות בנקודה $x=-1$</u>

$$\lim_{x\to -1^-} f=2^{-(-1)}=2\ ,\qquad \lim_{x\to -1^+} f=a(-1)^2=a\ .$$

לכן f רציפה ב- $x=-1$ אם $a=2$.

<u>אי-רציפות בנקודה $x=1$</u>

$$\lim_{x\to 1^-} f=a1^2=a(=2)\ ,\qquad \lim_{x\to 1^+} f=\sqrt{1+b}\ .$$

לכן f רציפה ב- $x=1$ אם

$$\sqrt{1+b}=2\quad\Rightarrow\quad b=3\ .$$

■

דוגמה 5.12

לאילו ערכי פרמטר a הפונקציה $f(x)=\dfrac{x}{a+\sin x}$ תהיה רציפה לכל x ממשי?

פתרון:

$f(x)$ רציפה לכל x ממשי כאשר $a+\sin x\neq 0$ לכל $x\in\mathbb{R}$. שים לב $-1\leq\sin x\leq 1$ לכן $a+\sin x\neq 0$ עבור $a>1$ ו- $a<-1$.
■

דוגמה 5.13

נתונה פונקציה

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin^2\left(\sqrt{a^2+1}\cdot x\right)}{2x^2} & x<0 \\ b & x=0 \\ x+5 & x>0 \end{cases}$$

א. עבור אילו ערכי a,b $f(x)$ רציפה ב- $x=0$?

ב. עבור אילו ערכי a,b $f(x)$ הנקודה $x=0$ נקודת אי-רציפות ממין ראשון?

ג. עבור אילו ערכי a,b $f(x)$ הנקודה $x=0$ נקודת אי-רציפות סליקה?

פתרון:

א.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2\left(\sqrt{a^2+1}\cdot x\right)}{2x^2}\\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{a^2+1}{2}\frac{\sin^2\left(\sqrt{a^2+1}\cdot x\right)}{\left(\sqrt{a^2+1}\cdot x\right)^2}\\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{a^2+1}{2}\ ,\end{aligned}$$

ו-

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} (x+5)\\ &= 5\ ,\end{aligned}$$

ו- $f(0)=b$. כדי ש- f תהיה רציפה נדרש כי $\lim\limits_{x\to 0^-} f = \lim\limits_{x\to 0^+} f = f(0)$ וזה מתקיים אם $\frac{a^2+1}{2} = 5 = b$ או שקול

$$b=5\ ,\qquad a=\pm 3\ .$$

ב. הגבול $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 5$ קיים לכל $b\in\mathbb{R}$ והגבול $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \frac{a^2+1}{2}$ קיים לכל $b\in\mathbb{R}$. לכן $x=0$ תהיה נקודת אי-רציפות ממין ראשון אם

$$\frac{a^2+1}{2}\neq 5 \qquad \Rightarrow \qquad a\neq \pm 3$$

לכל $b\in\mathbb{R}$.

ג. הגבולות $\lim\limits_{x\to 0^\pm} f$ זהים אם $a=\pm 3$ ו-

$$\lim_{x\to 0^\pm} f \neq f(0) = b$$

אם $b\neq 5$.

■