שיעור 11
אינטגרלים מסויימים

אינטגריה של שברים אלגבריים (פונקציות רצינליות)

11.1 הגדרה: (פונקציה רציונלית)

פונקציה רציונלית (שבר אלגברי) זאת פונקציה מהצורה

$$y=\frac{P(x)}{Q(x)}\ ,$$

כאשר $P(x)$, $Q(x)$ פולינומים.

דוגמא. (פונקציה רציונלית)

$f(x)=\dfrac{x^4-5x+9}{x-2}$ פונקציה רציונלית: $P(x)=x^4-5x+9$ $Q(x)=x-2$.

11.2 הגדרה: (פונקציה רציונלית אמיתי)

שבר אלגברי

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

נקרא אמיתי אם

$$\deg(P)<\deg(Q)\ .$$

אם שבר אלגברי לא אמיתי, יש לעשות חילוק פולינומים.

דוגמא. (חילוק פולינומים)

חשבו את האינטגרל

$$\int\frac{x^4-5x+9}{x-2}\ .$$

פיתרון.
שלב ראשון בחישוב אינטגרל של שבר אלגברי לא אמיתי, להגיע לשבר אלגברי אמיתי ע"י חילוק פולינומים.
ע"י חילוק ארוך:

$$\frac{x^4-5x+9}{x-2}=x^3+2x^2+4x+3+\frac{15}{x-2}$$

לכן

$$\int\frac{x^4-5x+9}{x-2}=\int\left(x^3+2x^2+4x+3+\frac{15}{x-2}\right)=\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+2x^2+3x+15\ln|x-2|+C\ .$$

■

יש 4 סוגים של שברים אלגבריים פשוטים:

סוג 1

$$\frac{A}{x-a}$$

סוג 2

$$\frac{A}{(x-a)^n}\ , \qquad n\in\mathbb{N}\ , \quad n\geq 2\ .$$

סוג 3

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\ ,$$

כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.

סוג 4

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\ , n\in\mathbb{N}\ , \quad n\geq 2$$

כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

חשבו את $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-3x+1}$

פיתרון.

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+1}=\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$
$$A(x-2)+B(x-1)=2x+1$$

$$x=2 \quad\Rightarrow\quad B=5$$
$$x=1 \quad\Rightarrow\quad A=-3$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+1}\,dx=\int\left(\frac{-3}{x-1}+\frac{5}{x-2}\right)dx=-3\ln|x-1|+5\ln|x-2|+C\ .$$

■

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

חשבו את $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2}$

פיתרון.

$$\frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{x-3}\ .$$
$$A(x-3)^2+B(x-2)+C(x-3)(x-2)=x^2+4$$

$$
\begin{array}{lll}
x=3 & \Rightarrow & B=13 \\
x=2 & \Rightarrow & A=8 \\
x=0 & \Rightarrow & 9A-2B+6C=4 \rightarrow C=-7
\end{array}
$$

$$
\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2}\,dx = \int \left(\frac{8}{x-2} + \frac{13}{(x-3)^2} - \frac{7}{x-3} \right) dx = 8\ln|x-2| - \frac{13}{x-3} - 7\ln|x-3| + C \ .
$$

■

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

חשבו את $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}$

פיתרון.

$$
\frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \ .
$$

$$
A(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1) + (Cx+D)x^2 = x^3+1
$$

$$
\begin{array}{ll}
x^3: & B+C=1 \\
x^2: & A+D=0 \\
x: & B=0 \\
x^0: & A=1
\end{array}
$$

לכן

$$
D=-1 \ , \qquad C=1 \ .
$$

$$
\int \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \arctan(x) + C \ .
$$

■

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

חשבו את $\displaystyle I = \int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}$

פיתרון.

$$
\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5} \ .
$$

$$
A(x^2-2x+5) + (Bx+C)(x-1) = 2x^2-3x-3
$$

$$
\begin{aligned}
x^2 :&\quad A+B=2\\
x :&\quad -2A+C-B=-3\\
x^0 :&\quad 5A-C=-3
\end{aligned}
$$

לכן

$$A=-1\ ,\qquad B=3\ ,\qquad C=-2\ .$$

$$I=\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx=\int\left(-\frac{1}{x-1}+\frac{3x-2}{x^2-2x+5}\right)dx=-\ln|x-1|+\int\left(\frac{3x-2}{(x-1)^2+4}\right)dx\ .$$

נגדיר $u=x-1$:

$$
\begin{aligned}
I&=\ln|x-1|+\int\frac{3(u+1)-2}{u^2+4}du\\
&=\ln|x-1|+\int\frac{3(u+1)-2}{u^2+4}du\\
&=\ln|x-1|+3\int\frac{u}{u^2+4}du-\int\frac{1}{u^2+4}du\\
&=\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|u^2+4|-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u}{2}\right)\\
&=\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|(x-1)^2+4|-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

■

11.1 כלל: (שלבים באינטגרציה של שברים אלגבריים)

<u>שלב 1.</u> לחלק במכנה (חילוק פולינומי) במידה ש $\deg(P)\geq\deg(Q)$.

<u>שלב 2.</u> להציב שבר אלגברי אמיתי כסכום של שברים פשוטים.

<u>שלב 3.</u> לבצע אינטגרציה של כל שבר פשוט.

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

חשבו את $I=\displaystyle\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$

פיתרון.

ע"י חילוק ארוך:

$$\frac{x^5+2x+4x+4}{x^4+x^3+2x^2}=x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+4\left(\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}\right)$$

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

$$A(x^2+2x+2)+Bx(x^2+2x+2x)+(Cx+D)x^2=x^3+x^2+x+1$$

$$\begin{aligned}
x^3 : &\quad B + C = 1 \\
x^2 : &\quad 2A + 2B + D = 1 \\
x : &\quad 2A + 2B = 1 \\
x^0 : &\quad 2A = 1
\end{aligned}$$

לכן

$$A = \frac{1}{2} \ , \qquad B = 0 \ , \qquad C = 1 \ , \qquad D = \frac{1}{2} \ .$$

$$I = \int \left(x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x+2}{x^2+2x+2} \right) dx \int \left(x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x+2}{(x+1)^2+1} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 4 \int \frac{x + \frac{1}{2}}{(x+1)^2+1} dx \ .$$

נגדיר $u = x + 1$:

$$\begin{aligned}
I =& \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 4 \int \frac{u - \frac{1}{2}}{u^2+1} du \\
=& \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2 \ln |u^2 + 1| - 2 \arctan(u) + C \\
=& \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2 \ln |(x+1)^2 + 1| - 2 \arctan(x+1) + C
\end{aligned}$$

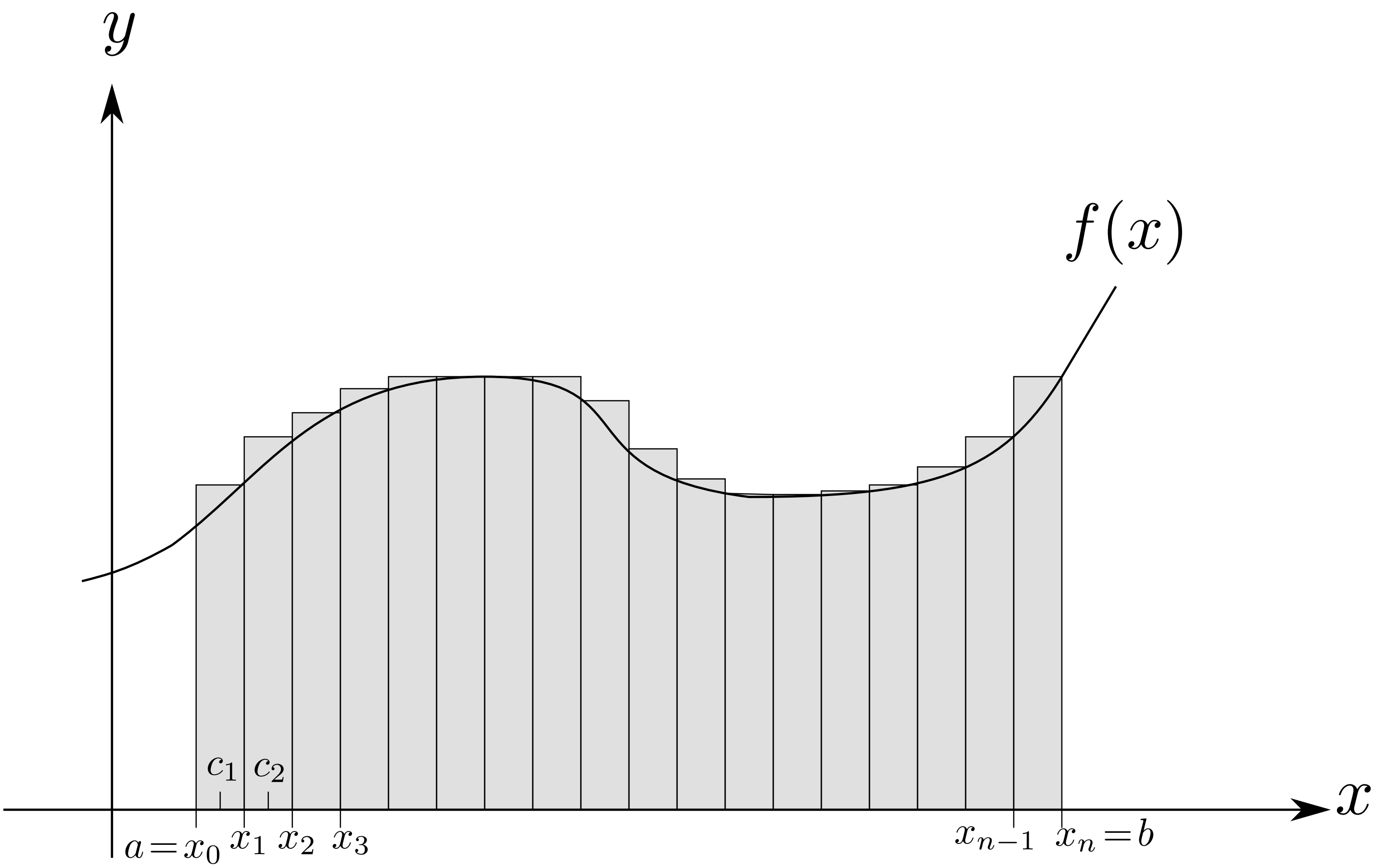
■

אינטגרל מסוים

11.2 הגדרה: (אינטגרל מסוים)

נניח שפונקציה $y = f(x)$ מוגדרת בקטע $[a, b]$. נחלק את הקטע $[a, b]$ לקטעים קטנים על ידי נקודות

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \ .$$



מכל קטע $[x_i, x_{i+1}]$ נבחר נקודה c_i באופן שרירותי. נבנה סכום אינטגרלי:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \ .$$

נסמן $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. נפעיל את הגבול כאשר $\max(\Delta x_i) \to 0$. נקבל

$$\lim_{\max(\Delta x_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx \ .$$

האגף הימין הוא האינטגרל המסויים של $f(x)$ בקטע $[a, b]$.

11.3 משפט. (קיום אינטגרל מסוים)

אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$ אז האינטגרל מסויים $\int_a^b f(x)\,dx$ קיים.

11.4 משפט. (משמעות הגיאומטרית של אינטגרל מסוים)

אם $f(x) \geq 0$ פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$, אז $\int_a^b f(x)\,dx$ שווה לשטח הטרפז העקום החסום ע"י הקווים $y = 0$, $y = f(x)$, מלמעלה ו- $x = a$, $x = b$ בצדדים.

11.5 משפט. (נוסחת ניוטון לייבניץ)

אם $\int f(x)dx = F(x) + C$ אז $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

דוגמאות.

1. $\int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - 0 = 9$.
2. $\int_{-2}^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-2}^2 = \frac{1}{2}\left[\arctan(1) - \arctan(-1)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{4}$.
3. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\cdot\ln x}\,dx = \left[\ln|\ln x|\right]_e^{e^2} = \left[\ln|\ln e^2 - \ln e|\right] = \left[\ln|2-1|\right] = 0$.

11.6 משפט. (תכונות של אינטגרל מסויים)

1. $\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$.
2. $\int_a^b \left[f(x)\pm g(x)\right]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$.
3. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.
4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ עבור $a<c<b$.
5. $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x)$.

הוכחה.

1.
2.
3.
4.
5.

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

כאשר $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$. לכן

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = (F(x)-F(a))'_x = F'(x) = f(x)\ .$$

■

דוגמא.

עבור אילו ערכי x לגרף הפונקציה

$$f(x)=\int_0^x e^{-(t+2)^2}$$

יש נקודת פיתול?

פיתרון.

$$f'(x)=e^{-(x+2)^2}\ .$$
$$f''(x)=-2(x+2)e^{-(x+2)^2}=0 \qquad \Rightarrow \qquad x=-2\ .$$

■

11.7 דוגמא. (החלפת משתנים באינטגרל מסויים)

חשבו את $\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

פיתרון.
נגדיר

$$u=\ln x\ , \qquad u'=\frac{1}{x}\ , \qquad u(e^2)=2\ , \qquad u(1)=0\ .$$
$$\int_1^{e^2}\frac{\ln^2 x}{x}\,dx=\int_0^2 u^2\,u'dx=\int_0^2 u^2\,du=\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}\ .$$

■

11.8 דוגמא. (החלפת משתנים באינטגרל מסויים)

חשבו את $\displaystyle\int_0^4\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

פיתרון.
נגדיר

$$u=\sqrt{x}\ , \qquad u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2u}\ , \qquad u(4)=2\ , \qquad u(0)=0\ .$$
$$\begin{aligned}\int_0^4\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx&=\int_0^2\frac{1}{1+u}\cdot 2u\cdot\frac{1}{2u}\,dx\\&=\int_0^2\frac{1}{1+u}\cdot 2u\cdot u'\,dx\\&=\int_0^2\frac{2u}{1+u}\,du\\&=\int_0^2\left(2-\frac{2}{1+u}\right)\,du\\&=\left[2u-2\ln|1+u|\right]_0^2\\&=4-2\cdot\ln 3\ .\end{aligned}$$

■

11.9 דוגמא. (החלפת משתנים באינטגרל מסויים)

חשבו את $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$

פיתרון.
נגדיר

$$u=\sqrt{e^x-1}\ , \qquad u'=\frac{1}{2\sqrt{e^x-1}}\cdot e^x=\frac{u^2+1}{2u}\ , \qquad u(\ln 2)=1\ , \qquad u(0)=0\ .$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx &= \int_0^{\ln 2} u\cdot\frac{u^2+1}{2u}\cdot\frac{2u}{u^2+1}\,dx\\ &= \int_0^{\ln 2} u\cdot\frac{2u}{u^2+1}\cdot u'\,dx\\ &= \int_0^1 u\cdot\frac{2u}{u^2+1}\,du\\ &= \int_0^1 \frac{2u^2}{u^2+1}\,du\\ &= \int_0^1\left(2-\frac{2}{u^2+1}\right)\,du\\ &= \left[2u-2\arctan(u)\right]_0^1\\ &=2-2\cdot\frac{\pi}{4}\ .\end{aligned}$$

■

11.10 דוגמא. (החלפת משתנים באינטגרל מסויים)

חשבו את $\int_{-1}^{2}\sqrt{2-x}\,dx$

פיתרון.
נגדיר

$$u=\sqrt{2-x}\ , \qquad u'=\frac{1}{2\sqrt{2-x}}\cdot(-1)=\frac{-1}{2u}\ , \qquad u(2)=0\ , \qquad u(-1)=\sqrt{3}\ .$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}\sqrt{2-x}\,dx &= \int_{-1}^{2} u\cdot(-2u)\cdot\frac{-1}{2u}\,dx\\ &= \int_{-1}^{2} u\cdot(-2u)\cdot u'\,dx\\ &= \int_{\sqrt{3}}^{0}(-2u^2)du\\ &= \int_{0}^{\sqrt{3}} 2u^2du\\ &= \left[\frac{2}{3}u^3\right]_0^{\sqrt{3}}\\ &=\frac{2}{3}3^{3/2}\ .\end{aligned}$$

■

11.11 כלל: (אינטגרציה בחלקים באינטגרל מסויים)

$$\int_a^b u\,d\mathrm{v} = [u\mathrm{v}]_a^b - \int_a^b \mathrm{v}du$$

$$\int_a^b u\,\mathrm{v}'\,dx = [u\mathrm{v}]_a^b - \int_a^b \mathrm{v}u'\,dx$$

11.12 דוגמא. (אינטגרציה בחלקים באינטגרל מסויים)

חשבו את $\int_1^e x\cdot\ln x\,dx$

פיתרון.
נגדיר

$$u=\ln x\ ,\qquad \mathrm{v}'=x\ ,\qquad u'=\frac{1}{x}\ ,\qquad \mathrm{v}=\frac{x^2}{2}\ .$$

$$\begin{aligned}\int_1^e x\cdot\ln x\,dx &= \left[\ln x\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= \left[\ln x\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e\frac{x}{2}\,dx\\ &= \left[\ln x\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e\\ &= \left[\ln e\cdot\frac{e^2}{2}-\ln 1\cdot\frac{1}{2}\right] - \left[\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right]\ ,\\ &=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}\\ &=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}\ .\end{aligned}$$

■

11.13 דוגמא. (אינטגרציה בחלקים באינטגרל מסויים)

חשבו את $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cdot \sin x\,dx$

פיתרון.
נגדיר

$$u=x\ ,\qquad \mathrm{v}'=\sin x\ ,\qquad u'=1\ ,\qquad \mathrm{v}=-\cos x.$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\cdot\sin x\,dx &= [-x\cdot\cos x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-\cos x)\,dx\\ &=[-x\cdot\cos x]_0^{\pi}+[\sin x]_0^{\pi}\\ &=[-\pi\cdot\cos\pi+0\cdot\cos 0]+\sin\pi-\sin 0\\ &=\pi\ .\end{aligned}$$

■

11.14 דוגמא.

חשבו את $\displaystyle\int_{-3}^{3} e^{-x^2}\sin x\,dx$

פיתרון.

$$\int_{-3}^{3} e^{-x^2}\sin x\,dx=0$$

בגלל ש- $e^{-x^2}\sin x$ פונקציה אי-זוגית והתחום סימטרי ביחס לראשית הצירים. ■

11.15 דוגמא.

עבור אילו ערכי a מתקיים $I=\displaystyle\int_0^2 \min(x,a)\,dx=1$?

פיתרון.

$\underline{a\leq 0}$:

$$I=\int_0^2 a\,dx=[ax]_0^2=2a\neq 1\ .$$

$\underline{a\geq 2}$:

$$I=\int_0^2 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=2\neq 1\ .$$

$\underline{1<a<2}$:

$$I=\int_0^a x\,dx+\int_a^2 a\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a+[ax]_a^2==\frac{a^2}{2}+2a-a^2=-\frac{a^2}{2}+2a=1\ .$$

$$a^2-4a+2=0$$

$$a=2\pm\sqrt{2}$$

לכן התשובה היא $a=2-\sqrt{2}$. ■

11.16 דוגמא.

חשבו את $I=\int_0^{2\pi}\cos(\max(x,\pi))\,dx$

פיתרון.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos(\max(x,\pi))\,dx &= \int_0^{\pi}\cos(\pi)\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}\cos(x)\,dx\\ &=[-x]_0^{\pi}+[\sin x]_{\pi}^{2\pi}\\ &=-\ \pi\ .\end{aligned}$$

■

11.17 דוגמא.

חשבו את $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{2+3\sin x}\,dx$

פיתרון.

נגדיר

$$u=2+3\sin x\ ,\qquad u'=3\cos x.$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{2+3\sin x}\,dx &= \int_0^{\pi/2}\frac{\frac{u'}{3}}{u}\,dx\\ &=\int_2^5 frac13\cdot\frac{1}{u}\,du\\ &=\left[\frac{1}{3}\ln u\right]_2^5\\ &=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}\ .\end{aligned}$$

■

11.18 דוגמא.

חשבו את $I = \int_0^5 |2x-4|\,dx$

פיתרון.

$$\begin{aligned}\int_0^5 |2x-4|\,dx =& \int_2^5 (2x-4) + \int_0^2 \big(-(2x-4)\big)\,dx\\ =& \int_2^5 (2x-4) + \int_0^2 (4-2x)\,dx\\ =& \big[x^2-4x\big]_2^5 + \big[4x-x^2\big]_0^2\\ =& [25-20-4+8]+[8-4]\\ =& 13\ .\end{aligned}$$

■

11.19 דוגמא.

מצא את ערכו של t ‏($t>0$) עבורו האינטגרל $I = \int_0^t \left(2-te^{-0.5x}\right)dx$ היא מקסימאלי. חשבו את הערך המקסימאלי.

פיתרון.

$$F(t) = \int_0^t \left(2-te^{-0.5x}\right)dx = \Big[2x+2te^{-0.5x}\Big]_0^t = 2t+2te^{-0.5t}-2t = 2te^{-0.5t}\ .$$

$$F'(t) = 2e^{-0.5t}\left(1-\frac{t}{2}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t=2\ .$$

עבור $t=2$ ל $F(t)$ יש ערך מקסימלי.

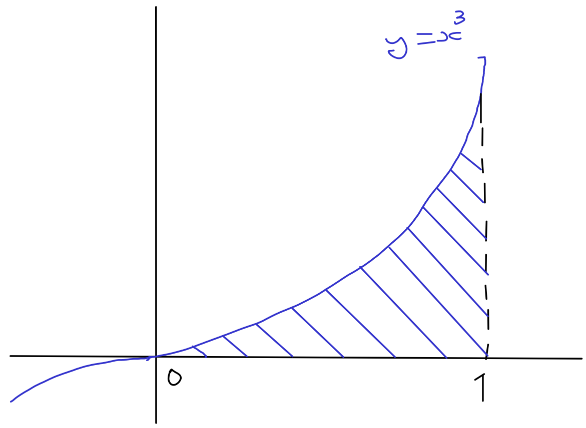
$$F(2) = 2\cdot 2\cdot e^{-0.5\cdot 2} = \frac{4}{e}\ .$$

■

11.20 דוגמא. (חישוב שטח)

מצאו את השטח החסום ע"י גרף הפונקציה $y=x^3$ והישרים $x=1$, $y=0$.

פיתרון.



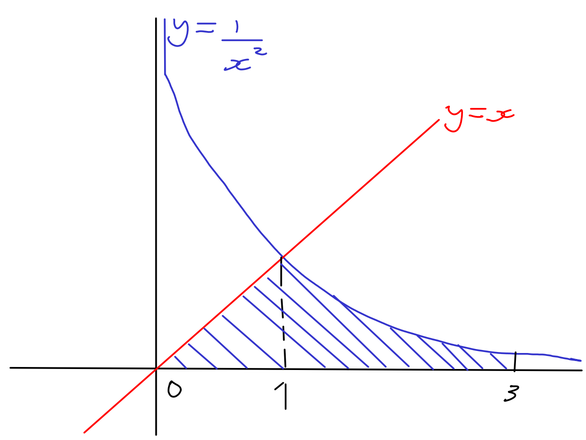
$$S=\int_0^1 x^3\,dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}\ .$$

■

11.21 דוגמא. (חישוב שטח)

מצאו את השטח החסום ע"י $y=\frac{1}{x^2}$, $y=x$, $x=3$, $y=0$.

פיתרון.



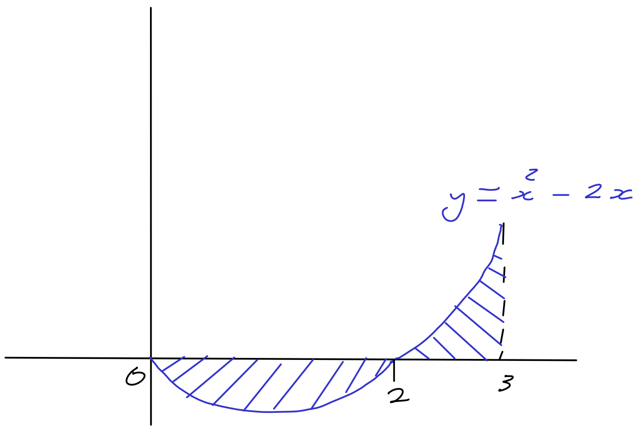
$$S=\int_0^1 x\,dx+\int_1^3\frac{1}{x^2}\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\left[\frac{1}{x}\right]_1^3=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1=\frac{7}{6}\ .$$

■

11.22 דוגמא. (חישוב שטח)

מצאו את השטח החסום ע"י $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=3$, $x=0$.

פיתרון.



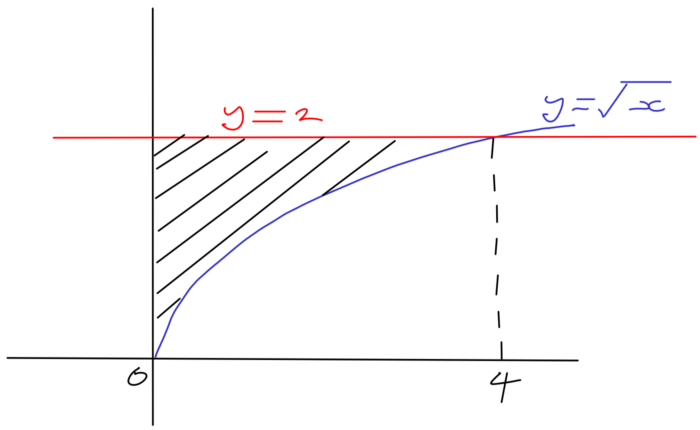
$$\begin{aligned}
S&=-\int_0^2\left(x^2-2x\right)\,dx+\int_2^3\left(x^2-2x\right)\,dx\\
&=-\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3\\
&=-\left[\frac{2^3}{3}-2^2\right]+\left[\frac{3^3}{3}-3^2-\frac{2^3}{3}+2^2\right]\\
&=-\frac{8}{3}+4+9-9-\frac{8}{3}+4\\
&=\frac{8}{3}\ .
\end{aligned}$$

■

11.23 דוגמא. (חישוב שטח)

מצאו את השטח החסום ע"י $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $y=2$.

פיתרון.



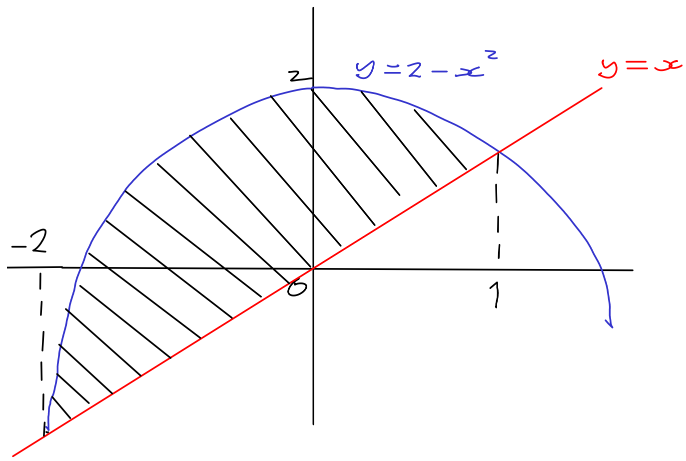
$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^4 2\,dx - \int_0^4 \sqrt{x}\,dx \\
&= [2x]_0^4 - \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 \\
&=8 - \frac{2}{3}\cdot 4^{3/2} \\
&=\frac{8}{3}\ .
\end{aligned}
$$

■

11.24 דוגמא. (חישוב שטח)

מצאו את השטח החסום ע"י $y = x$, $y = 2 - x^2$.

פיתרון.



$$S=\int_{-2}^{1}(2-x^2-x)\,dx$$
$$=\left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1}$$
$$=\left[2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right]-\left[-4+\frac{8}{3}-\frac{4}{2}\right]$$
$$=\frac{9}{2}\ .$$

■

11.25 דוגמא. (חישוב שטח)

מצאו את השטח החסום ע"י $y=x^2-2x+2$, המשיק לפרבולה הזאת בנקודה $(3,5)$ וציר ה- y.

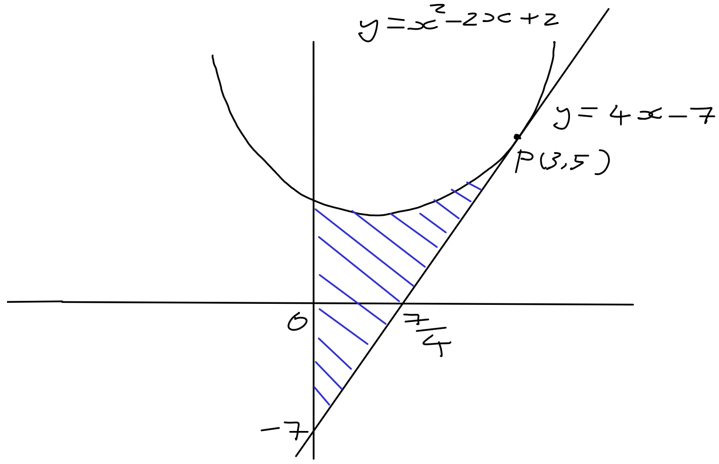
פיתרון.

נמצא את משוואת המשיק:

$$y'=2x-2$$
$$y'(3)=4$$

משוואת המשיק:

$$y-5=4(x-3)\qquad\Rightarrow\qquad y=4x-7\ .$$



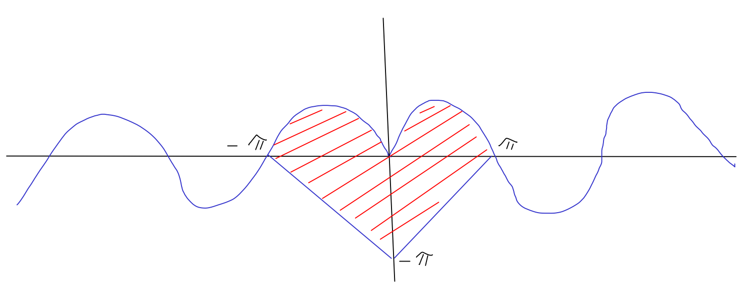
$$S=\int_0^3 \big((x^2-2x+2)-(4x-7)\big)\ dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right]_0^3-\left[2x^2-7x\right]_0^3\ dx$$
$$=\left[\frac{3^3}{3}-3^2+6\right]-[18-21]$$
$$=9\ .$$

■

11.26 דוגמא. (חישוב שטח)

מצאו את השטח החסום ע"י $y=\sin|x|$, $y=|x|-\pi$.

פיתרון.



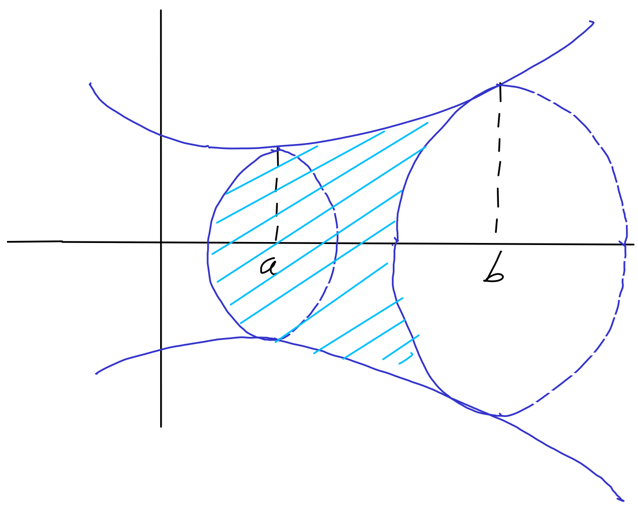
$$\begin{aligned}S =&2\int_0^{\pi} \left(\sin x - (x-\pi)\right)\, dx\\ =&2\left[-\cos x - \frac{x^2}{2} + \pi x\right]_0^{\pi}\\ =&2\left[1-\frac{\pi^2}{2}+\pi^2\right]0 - 2\left[-1\right]\\ =&4+\pi^2\ .\end{aligned}$$

■

11.27 משפט. (חישוב נפח גוף סיבוב סביב ציר ה- x)

בהינתן גרף של פונקציה $y=f(x)$ בקטע $[a,b]$. הנפח של גוף סיבוב סביב ציר ה- x הוא

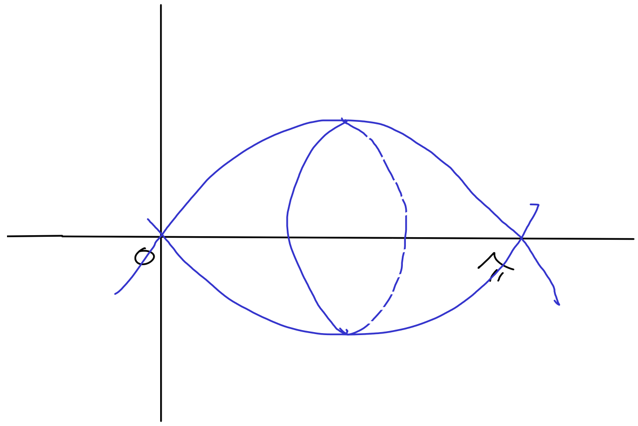
$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx\ .$$



11.28 דוגמא. (חישוב נפח)

מצאו את נפח גוף הסיבוב סביב ציר ה- x של התחום המישורי החסום ע"י $y=\sin x$ בתחום $0\leq x\leq \pi$.

פיתרון.



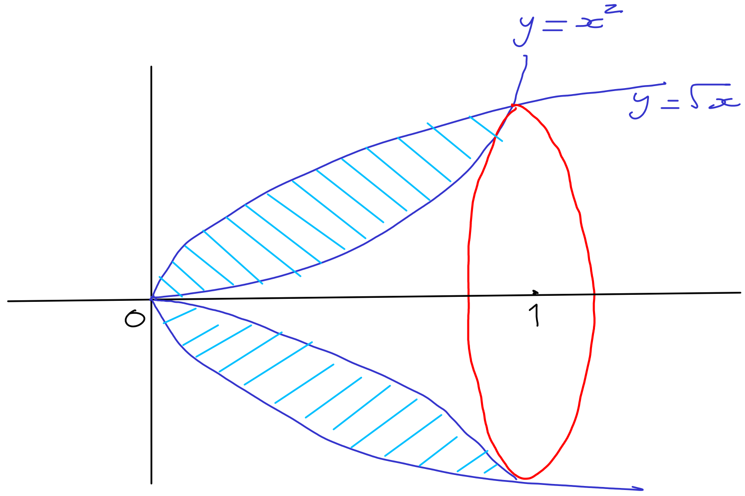
$$\begin{aligned} V =& \pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx \\ =& \pi \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx \\ =& \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^\pi \\ =& \frac{\pi^2}{2} \ . \end{aligned}$$

■

11.29 דוגמא. (חישוב נפח)

מצאו את נפח גוף הסיבוב סביב ציר ה- x של התחום החסום ע"י $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

פיתרון.



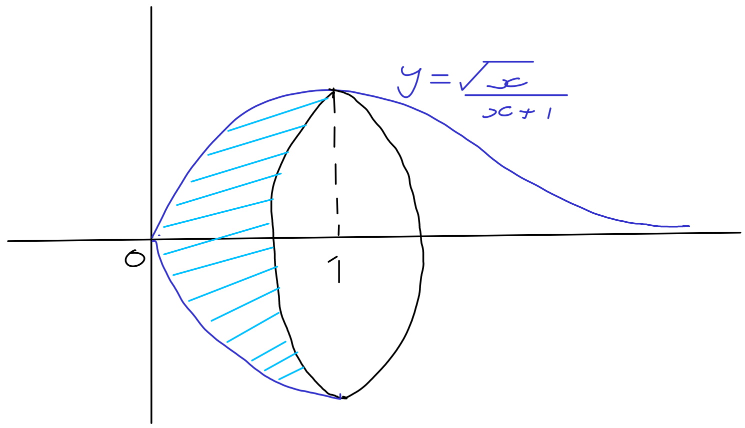
$$
\begin{aligned}
V =&\pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2\,dx - \pi \int_0^1 x^4\,dx \\
=&\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 \\
=&\pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right] \\
=&\frac{3\pi}{10}\ .
\end{aligned}
$$

■

11.30 דוגמא. (חישוב נפח)

חשבו את נפח גוף הסיבוב סביב ציר ה- x של התחום החסום ע"י $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ בתחום $0\leq x\leq 1$.

פיתרון.



$$V = \pi \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2}\, dx \ .$$

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A+B(x+1)}{(x+1)^2} \ .$$

$$\begin{array}{ll} x: & B=1 \\ x^0: & A+B=0 \ \Rightarrow \ A=-1. \end{array}$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \pi \left[\frac{1}{x+1} + \ln|x+1| \right]_0^1 = \pi \left[\frac{1}{2} + \ln|2| - 1 \right] = \pi \left(\ln|2| - \frac{1}{2} \right) \ .$$

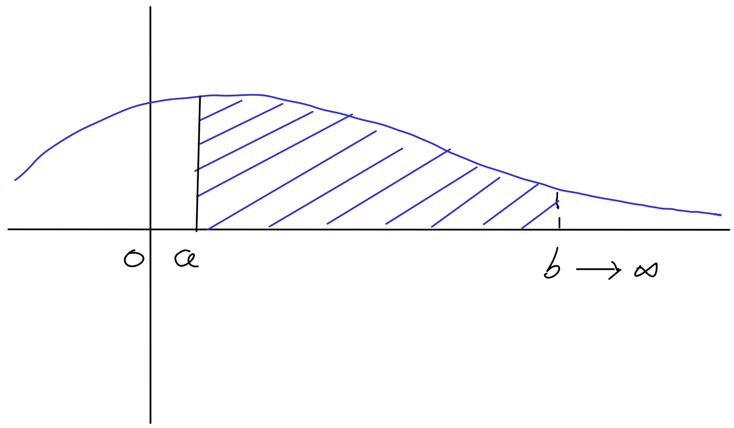
■

אינטגרל לא אמיתי

11.31 הגדרה: (אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון)

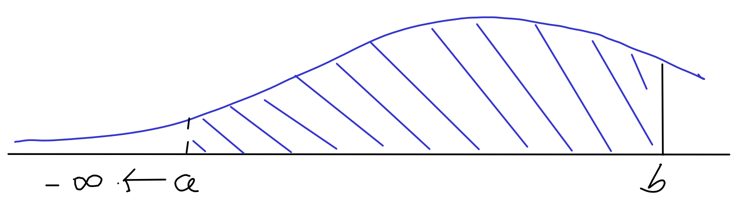
1. נניח שפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע (a,∞). אז

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x) dx$$



2. נניח שפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $(-\infty, b)$. אז

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x) dx$$



3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\, dx$$

לכל $-\infty < c < \infty$.

אם התשובה של האינטגרל הלא אמיתי היא מספר סופי אז אומרים שהאינטגרל מתכנס, אחרת אומרים שהאינטגרל מתבדר.

דוגמא. (אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון)

חשבו את $I = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$.

פיתרון.

$$I=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx=\lim_{b\to\infty}\ln|b|-\ln|1|=\infty\ .$$

האינטגרל מתבדר. ■

דוגמא. (אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון)

חשבו את $I=\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$.

פיתרון.

$$I=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{-1}{b}+1\right]=1\ .$$

האינטגרל מתכנס. ■

דוגמא. (אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון)

חשבו את $I=\int_{-\infty}^0 \cos x\,dx$.

פיתרון.

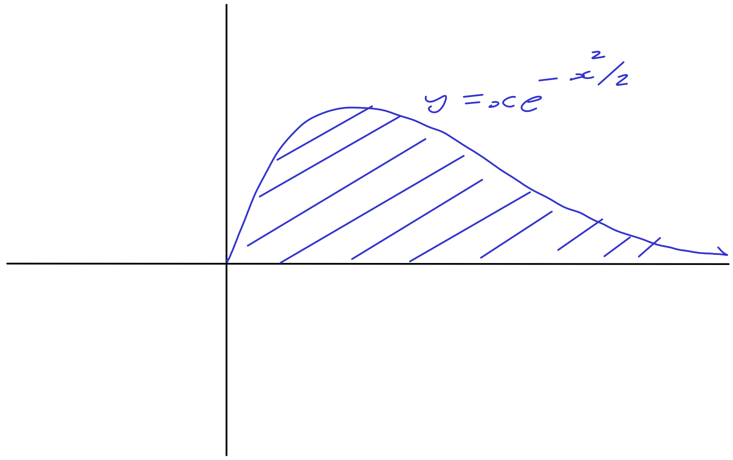
$$I=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \cos x\,dx=\lim_{a\to-\infty}[\sin 0-\sin a]=\lim_{a\to-\infty}\sin(a)$$

לא קיים. האינטגרל לא מתכנס. ■

דוגמא. (אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון)

חשבו את השטח החסום ע"י $f(x)=xe^{-x^2/2}$, $y=0$ $x\geq 0$.

פיתרון.



$$S = \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x/2} \ .$$

נגדיר

$$u = \frac{x^2}{2} \ , \qquad u' = x \ .$$

כך

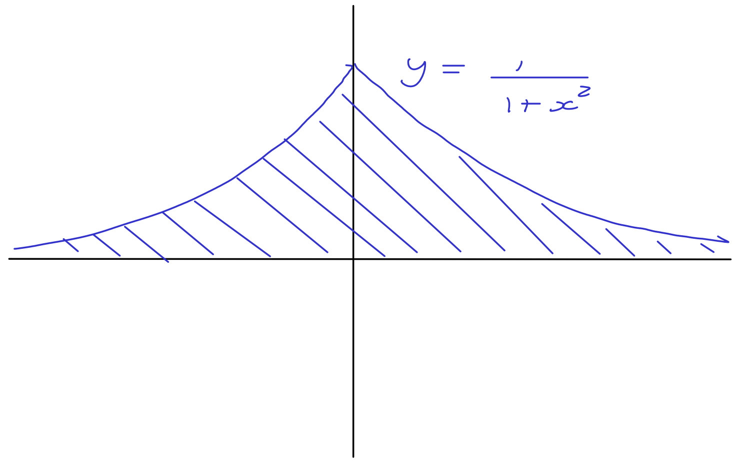
$$\begin{aligned} S &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b u' e^{-u}\, dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-u}\, du \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-b}+1\right] \\ &=1 \ . \end{aligned}$$

האינטגרל מתבדר. ■

דוגמא. (אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון)

חשבו את השטח החסום ע"י $y=\frac{1}{x^2+1}$, $y=0$ $x\geq 0$.

פיתרון.



$$\begin{aligned}
S &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^1+1}\, dx \\
&= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^1+1}\, dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^1+1}\, dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{x^1+1}\, dx + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{x^1+1}\, dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} \left[\arctan 0 - \arctan a\right] + \lim_{b\to\infty} \left[\arctan b - \arctan 0\right] \\
&=0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 \\
&=\pi \ .
\end{aligned}$$

■

11.32 משפט. (מבחן השוואה הראשון)

נניח שפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפות בקטע $[a,\infty)$ ולכל x השייך לקטע מתקיים

$$0 \le f(x) \le g(x) \ .$$

אז

1. אם $\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתכנס אז גם $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס.
2. אם $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתבדר אז גם $\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתבדר.

דוגמא. (מבחן השוואה הראשון)

האם מתכנס האינטגרל $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2(1+3^x)}\,dx$

פיתרון.

נגדיר $f(x) = \dfrac{1}{x^2(1+3^x)}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. לכל $x \ge 1$ מתקיים $f(x) \le g(x)$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1$$

מתכנס, לכן גם

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2(1+3^x)}dx$$

מתכנס. ■

11.33 משפט. (מבחן השוואה השני)

נניח שפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפות בקטע. $[a,\infty)$, $f(x)>0$, $g(x)>0$, וגם

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = k$$

כאשר $0<k<\infty$. אז $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ו- $\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתכנסים או מתבדרים בו זמנים.

דוגמא. (מבחן השוואה השני)

האם האינטגרל $\int_1^\infty \ln\left(\dfrac{x^1+1}{x^2}\right)\,dx$ מתכנס?

פיתרון.

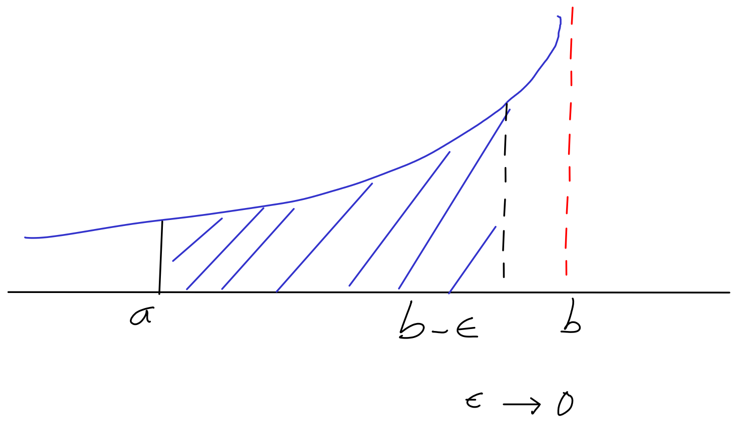
נגדיר $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^1+1}{x^2}\right)$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. אז

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x^1+1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = \ln e = 1 < \infty$$

$\int_1^\infty g(x)\,dx$ מתכנס, אז גם $\int_1^\infty f(x)\,dx$ מתכנס. ■

11.34 הגדרה: (אינטגרל לא אמיתי מסוג שני)

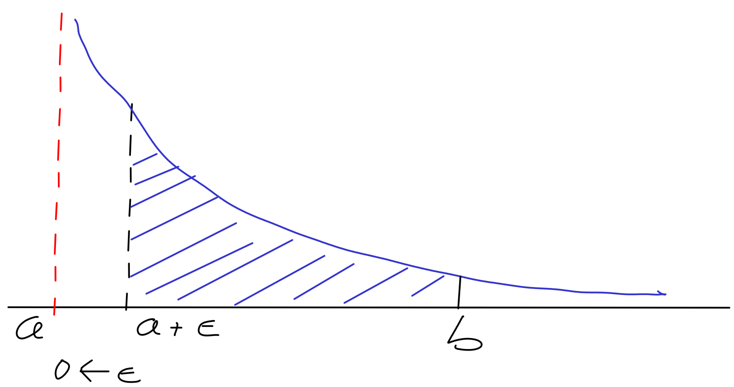
מצב 1. פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ ו- $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$



אז

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx \ .$$

מצב 2. פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ ו- $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$



אז

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx \ .$$

אם התשובה של האינטגרל הלא אמיתי היא מספר סופי אז אומרים שהאינטגרל מתכנס, אחרת אומרים שהאינטגרל מתבדר.

דוגמא. **(אינטגרל לא אמיתי מסוג שני)**

חשבון את האינטגרל $I=\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$

פיתרון.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{1}\frac{1}{x^2}\,dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{1}{\epsilon}-1\right] \\ &=\infty \end{aligned}$$

■

דוגמא. (אינטגרל לא אמיתי מסוג שני)

חשבו את האינטגרל $I=\int_0^3\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

פיתרון.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{3-\epsilon}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^{3-\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\arcsin\left(\frac{3-\epsilon}{3}\right)-\arcsin 0\right] \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\arcsin\left(\frac{3-\epsilon}{3}\right) \\ &=\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

■

דוגמא. (הערכת סכומים)

הוכח שלכל n טבעי מתקיים

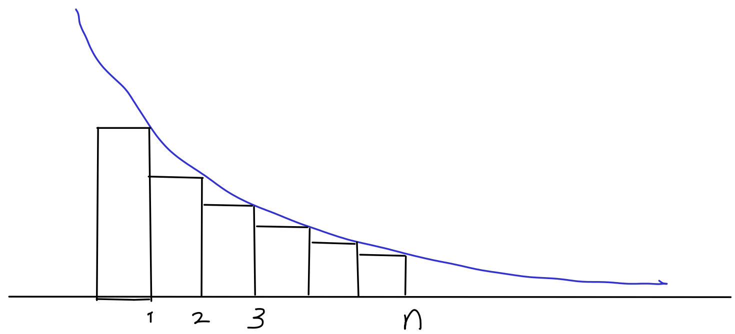
$$\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}<2\ .$$

פיתרון.

נגדיר

$$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

פונקציה יורדת.



$$f(2)+f(3)+\ldots+f(n) < \int_1^n f(x)\,dx = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^n = -\frac{2}{\sqrt{n}}+2 < 2\ .$$

■

דוגמא. (הערכת סכומים)

הוכח שלכל n טבעי מתקיים

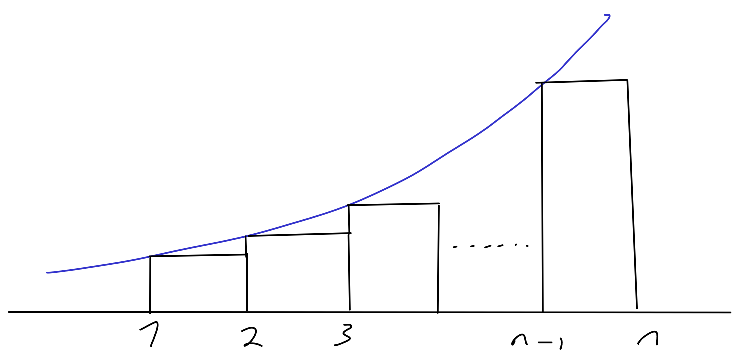
$$\frac{n^3}{3} < 1^2+2^2+\ldots+n^2 < \frac{n^3}{3}+n^2\ .$$

פיתרון.

נגדיר

$$f(x)=x^2$$

פונקציה עולה.



$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1) < \int_1^n f(x)\,dx\ .$$

לכן

$$1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2 < \int_1^n x^2 dx = \frac{n^3}{3}-\frac{1}{3}$$

נוסיף n^2 לשני הצדדים:

$$1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+n^2 < \frac{n^3}{3}-\frac{1}{3}+n^2 < \frac{n^3}{3}+n^2 \qquad (1*)$$