

שיעור 11

אינטגרלים קוויים

11.1 אינטגרל הקווי מסוג ראשון

משפט 11.1 אינטגרל קווי מסוג ראשון 1

אם עקום מישורי L מוגדר כגרף של הפונקציה $\{y = \gamma(x), |a \leq x \leq b\}$ אז האינטגרל הקווי של פונקציה $f(x, y)$ דרך הקו של γ מוגדר להיות

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, \gamma(x)) \sqrt{1 + \gamma'(x)^2} dx$$

משפט 11.2 אינטגרל קווי מסוג ראשון 2

אם עקום מישורי L מוגדר באופן פרמטרי

$$\{x = x(t), y = y(t), | \alpha \leq t \leq \beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה $f(x, y)$ דרך הקו של L מוגדר להיות

$$\int_L f(x, y) dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

משפט 11.3 אינטגרל קווי מסוג ראשון 3

אם L הוא עקום במרחב תלת-ממדי המוגדר באופן

$$\{x = x(t), y = y(t), z = z(t) | \alpha \leq t \leq \beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה $f(x, y, z)$ דרך הקו של L מוגדר להיות

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

11.1 דוגמה

מצאו את המסה של הקשת $\begin{cases} y = x^2 \\ 1 \leq x \leq 10 \end{cases}$ בעלת צפיפות מסה קווי $\rho = \frac{y}{x}$.

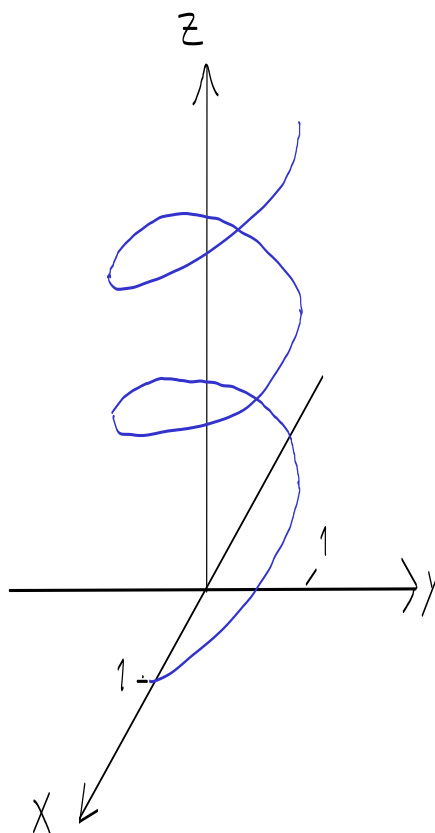
פתרון:

$$\begin{aligned}
 M &= \int_L \rho(x, y) dl \\
 &= \int_1^{10} \frac{x^2}{x} \cdot \sqrt{1 + (2x)^2} dx \\
 &= \int_1^{10} x \cdot \sqrt{1 + 4x^2} dx \\
 &= \int_1^{10} \frac{t'}{8} \cdot \sqrt{t} dx \\
 &= \frac{1}{8} \int_{t=5}^{t=401} \sqrt{t} dt \\
 &= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot [t^{3/2}]_{t=5}^{t=401} \\
 &= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot [401^{3/2} - 5^{3/2}] \\
 &= 668.24
 \end{aligned}$$

11.2 דוגמה

$$\rho = \frac{y}{x} \quad \text{בעלת צפיפות מסה קווי} \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{חשבו את אורך הקשת של קו הבורג (helix)}$$

פתרון:



$$\begin{aligned}
 L &= \int_L dl \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt \\
 &= 2\sqrt{2}\pi
 \end{aligned}$$

משפט 11.4 אורך הקשת

האינטגרל הקווי

$$\int_L dl$$

נותן את אורך הקשת L .

משפט 11.5 מסה של הקשת

האינטגרל הקווי

$$\int_L f(x, y, z) dl$$

נותן את המסה של הקשת L בעלת צפיפות לינארית $f(x, y, z)$.

11.3 דוגמה

חשב את אורך הקשת של קו הבורג:

$$\{x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

פתרון:

לפי כלל 11.3

$$\int_L dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\pi\sqrt{2}.$$

11.2 אינטגרל הקווי מסוג שני

כדי לחשב את האינטגרל של שדה וקטורי מצורה

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$$

דרך המסלול L משתמשים ב **האינטגרל הקווי מסוג שני**.

לדוגמא, העבודת השדה הוקטורי $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$ בהעברת חלקיק מהנקודה A לנקודה B לאורך המסלול L ניתן ע"י

$$W = \int_L [P(x, y)dx + Q(x, y)dy].$$

דרך החישוב של אינטגרל קווי מסוג שני תלויה באופן הגדרת המסלול L של האינטגרציה.

משפט 11.6 אינטגרל קווי מסוג שני 1

אם המסלול מישורי L מוגדר כגרף של הפונקציה $\{y = \gamma(x), |a \leq x \leq b\}$ אז האינטגרל הקווי של פונקציה $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$ דרך הקו של γ מוגדר להיות

$$\int_L [P(x, y)dx + Q(x, y)dy] = \int_a^b dx P(x, \gamma(x)) + \int_a^b dx \gamma'(x) Q(x, \gamma(x))$$

משפט 11.7 אינטגרל קווי מסוג שני 2

אם המסלול מישורי L מוגדר באופן פרמטרי

$$\{x = x(t), y = y(t), |\alpha \leq t \leq \beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$ דרך הקו של L מוגדר להיות

$$\int_L [P(x, y)dx + Q(x, y)dy] = \int_\alpha^\beta dt x'(t) P(x(t), y(t)) + \int_\alpha^\beta dt y'(t) Q(x(t), y(t))$$

משפט 11.8 אינטגרל קווי מסוג שני 3

אם L הוא המסלול במרחב תלת-ממדי המוגדר באופן

$$\{x = x(t), y = y(t), z = z(t) \mid \alpha \leq t \leq \beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה $F(x, y, z) = P(x, y, z)\hat{i} + Q(x, y, z)\hat{j} + R(x, y, z)\hat{k}$ דרך הקו של L מוגדר להיות

$$\begin{aligned} & \int_L [P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz] \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} dt x'(t) P(x(t), y(t), z(t)) + \int_{\alpha}^{\beta} dt y'(t) Q(x(t), y(t), z(t)) + \int_{\alpha}^{\beta} dt z'(t) R(x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

דוגמה 11.4 אינטגרל קווי מסוג שני

חשבו את

$$\int_L [(x + 2y)dx + (y - x)dy]$$

לאורך הפרבולה $y = x^2$ מ- $A(1, 1)$ ל- $B(3, 9)$.

פתרון:

לפי כלל 11.6,

$$\begin{aligned} \int_L [(x + 2y)dx + (y - x)dy] &= \int_1^3 dx (x + 2x^2) + \int_1^3 dx \cdot 2x \cdot (x^2 - x) \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} \right]_1^3 + \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} \right]_1^3 \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} \right]_1^3 \\ &= 44 \end{aligned}$$

אם $L : \{x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b\}$ מתחילה ונגמרת באותה הנקודה $(x(a) = x(b), y(a) = y(b))$ נאמר שהיא מסילה סגורה ונסמן \oint_L במקום \int_L כדי לסמן אינטגרל מסילתי לאורך L .

דוגמה 11.5 אינטגרל קווי מסוג שני

חשבו את

$$\int_L [y dx + x dy]$$

לאורך הקשת

$$\{x = -\sin t, y = \cos t\}$$

מ- $t = 0$ עד ל- $t = 2\pi$.

פתרון:

לפי כלל 11.7,

$$\begin{aligned}\int_L [y dx + x dy] &= \int_0^{2\pi} dt \cos t \cdot \cos t + \int_0^{2\pi} dt (-\sin t) \cdot (-\sin t) \\ &= \int_0^{2\pi} dt (\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= \int_0^{2\pi} dt 1 \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

11.3 תכונות של אינטגרלים קוויים

משפט 11.9 תכונה חשובה של אינטגרל קווי

(1) בהינתן מסילה L_{AB} מ- A ל- B נסמן ב- L_{BA} את המסילה ההולכת בכיוון ההפוך מ- B ל- A . אז

$$\int_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{L_{BA}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

(2) בהינתן מסילות L_{AB} מ- A ל- B ו- L_{BC} מ- B ל- C נסמן ב- L_{AC} את המסילה המשורשרת המתקבלת, אז

$$\int_{L_{AC}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{L_{BC}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

(3) עבור מסלול מרחבי L הנתון ע"י $\begin{cases} x = x(t), y = y(t), z = z(t) \\ a \leq t \leq b \end{cases}$ ופונקציה וקטורית

$$\bar{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

$$\begin{aligned}&\int P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \\ &= \int_a^b P(x(t), y(t), z(t)) x'(t)dt + \int_a^b Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t)dt + \int_a^b R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)dt.\end{aligned}$$

11.4 נוסחת גרין

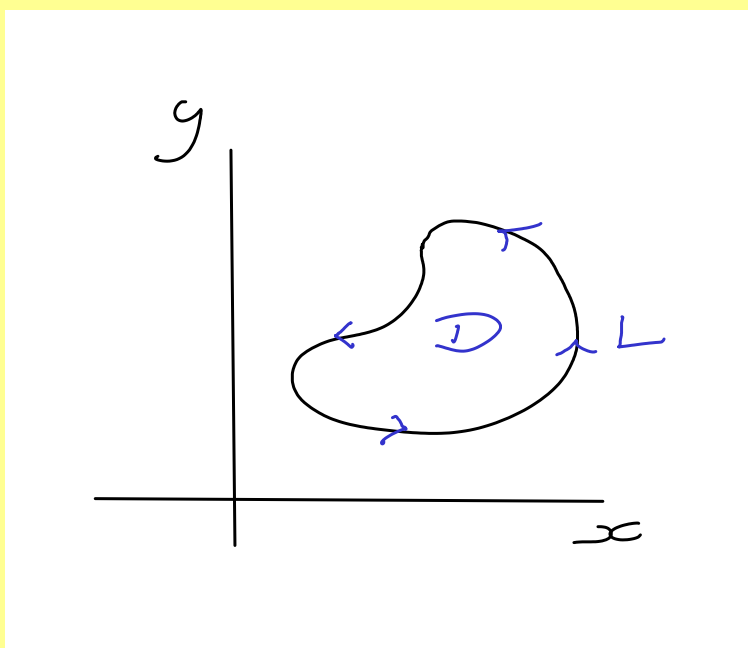
משפט 11.10 נוסחת גרין

אם L מסלול מישורי סגור ו- P, Q גזירות, אז

$$\oint_L [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \iint_D dx dy (Q'_x - P'_y) .$$

כאשר D התחום החסום על ידי L ונמצא משמאל ל- L . בפרט, שטח התחום $S(D)$ נתון ע"י

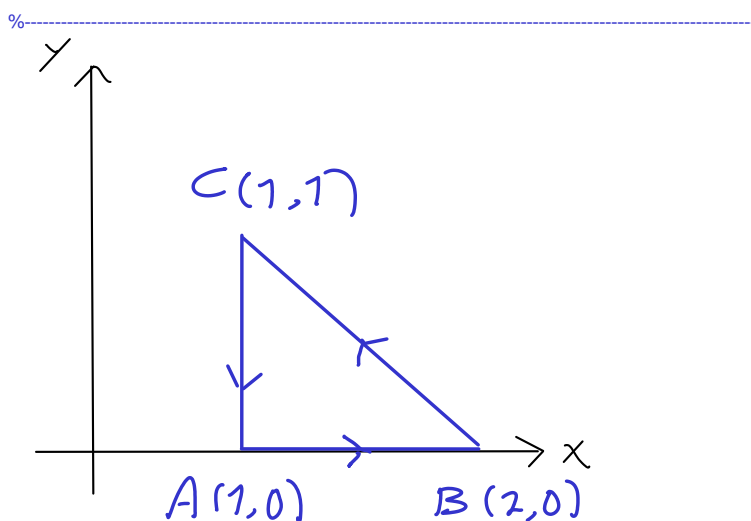
$$S(D) = \oint_L x dy = - \oint_L y dx = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx .$$



דוגמה 11.6

חשבו את $I = \oint_L \frac{2}{x+y} dx + \frac{1}{x+y} dy$ לאורך המשולש שקדקודיו $A(1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, 1)$.

פתרון:

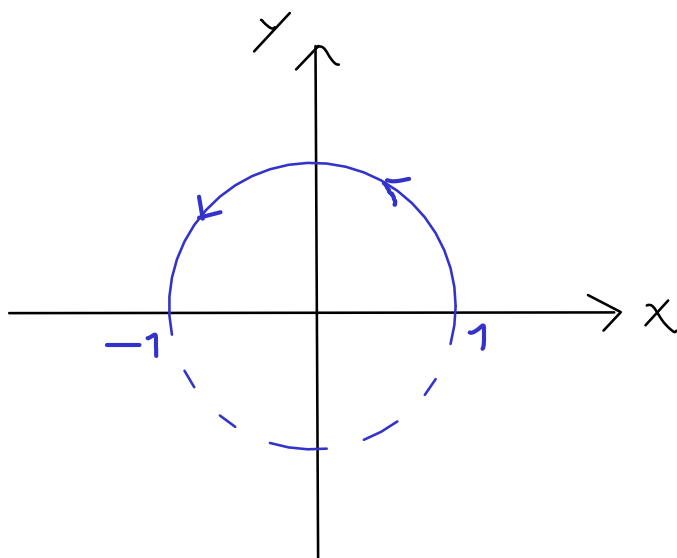


$$\begin{aligned}
 I &= \oint_L \frac{2}{x+y} dx + \frac{1}{x+y} dy \\
 &= \iint_D \left(\frac{-1}{(x+y)^2} + \frac{2}{(x+y)^2} \right) dx dy \\
 &= \int_1^2 dx \int_0^{2-x} dy \frac{1}{(x+y)^2} dx dy \\
 &= \int_1^2 dx \left[\frac{-1}{x+y} \right]_0^{2-x} \\
 &= \int_1^2 dx \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{x} \right) \\
 &= \left[\frac{-x}{2} + \ln x \right]_1^2 \\
 &= \ln 2 - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

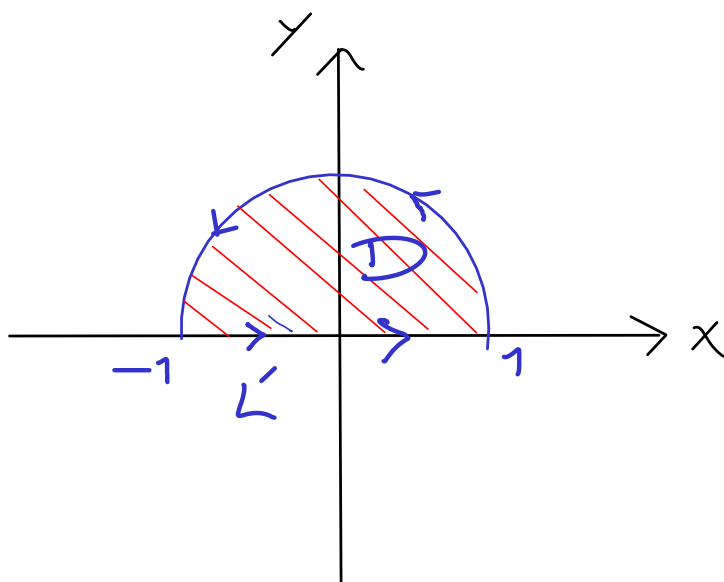
דוגמה 11.7

חשבו את $I = \int_L (x^4 + e^x - y) dx + (x^2 + y^5 + y^2 e^y) dy$ לאורך המסלול $x^2 + (\sqrt{y})^4$ מימין לשמאל.

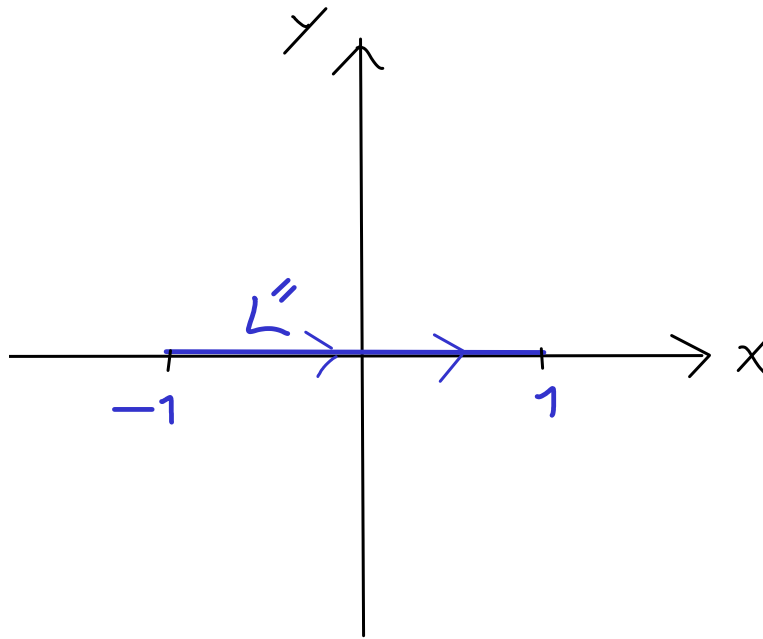
פתרון:



נסגור את המסלול כך: $\begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + (\sqrt{y})^4$



כלומר נשרשר עם המסלול



$$\oint_{L'} = \int_L + \int_{L''}$$

$$\oint_{L'} P dx - Q dy = \iint_D (2x + 1) dx dy$$

$$= \int_0^1 r dr \int_0^\pi (2r \cos \theta + 1) d\theta$$

$$= \int_0^1 r [2r \sin \theta + \theta]_{\theta=0}^\pi dr$$

$$= \int_0^1 \pi \cdot r dr$$

$$= \left[\frac{\pi r^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{L''} P dx + Q dy = \int_{-1}^1 P(x, 0) dx + \int_{-1}^1 Q(x, 0) \cdot 0 dx$$

$$= \int_{-1}^1 (x^4 + e^x) dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} + e^x \right]_{-1}^1$$

$$= \left[\frac{2}{5} + e + \frac{1}{e} \right]$$

$$I = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{2}{5} + e - \frac{1}{e} \right)$$

משפט 11.11 אי-תלות של אינטגרל קווי במסלול האינטגרציה

אם

$$Q'_x = P'_y$$

מתקיים, אז

(א)

$$\oint_L [P(x,y) dx + Q(x,y)] dy = 0$$

עבור כל מסלול סגור L

(ב) קיימת פונקציה $U(x,y)$ שעבורה הדיפרנציאל שלה הינה

$$dU(x,y) = P(x,y) dx + Q(x,y) dy ,$$

כך שהאינטגרל הקווי של $P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j}$ דרך מסלול שרירותי L מנקודה A לנקודה B ניתן ע"י

$$\int_{AB} [P dx + Q dy] = \int_{AB} dU = U(B) - U(A) ,$$

כלומר האינטגרל הקווי $\int_{AB} [P dx + Q dy]$ אינו תלוי במסלול האינטגרציה העובר מ- A ל- B .

11.5 דוגמאות

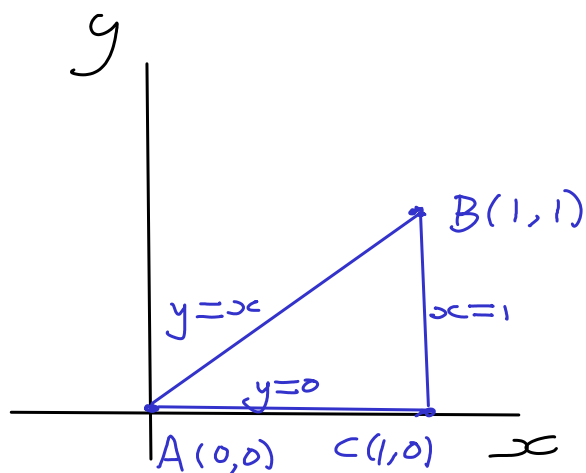
דוגמה 11.8

חשב את האינטגרל הבא כאשר המסלול L הוא המצולע בעל קדקודים נתונים:

$$\int_L (x + y) dl$$

$$C(1,0), B(1,1), A(0,0)$$

פתרון:



$$\begin{aligned}
 \int_L dl (x+y) &= \left[\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} \right] (x+y) dl \\
 &= \int_0^1 dx \sqrt{1+(x')^2} (x+x) + \int_1^0 dy (1+y) + \int_1^0 dx (x+0) \\
 &= \sqrt{2} [x^2]_0^1 + \left[y + \frac{y^2}{2} \right]_1^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^0 \\
 &= \sqrt{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \sqrt{2} - 2.
 \end{aligned}$$

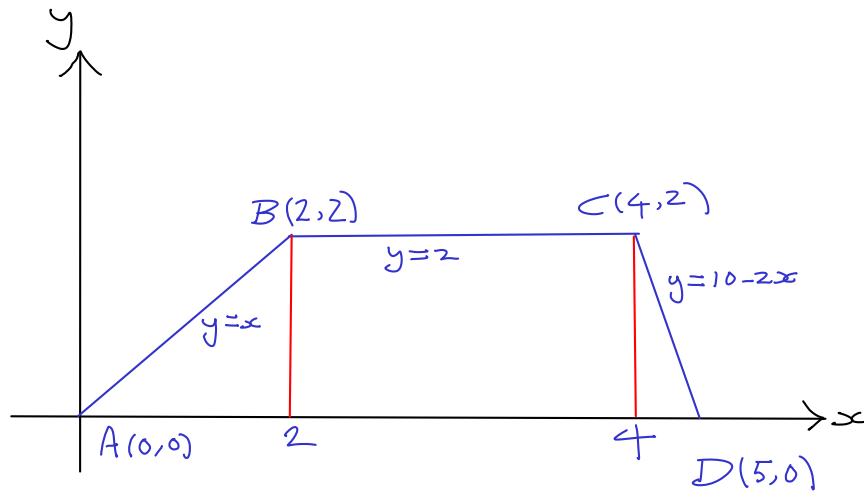
דוגמה 11.9 נוסחת גרין

חשבו את האינטגרל הבא כאשר המסלול L הוא המצולע בעל קדקודים נתונים:

$$\oint_L (xy \, dx + (x-y) \, dy)$$

$$D(5,0), C(4,2), B(2,2), A(0,0)$$

פתרון:



המסלול סגור ולכן ניתן להשתמש בנוסחת גרין (כלל 11.10):

$$I = \oint_L (Pdx + Qdy) = \iint_D dx dy (Q'_x - P'_y)$$

$$P(x, y) = xy, \quad Q(x, y) = x - y, \quad Q'_x = 1, \quad P'_y = x,$$

כאן

ולכן

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 dx \int_0^x dy (1 - x) + \int_2^4 dx \int_0^2 dy (1 - x) + \int_4^5 dx \int_0^{-2x+10} dy (1 - x) \\ &= \int_0^2 dx x (1 - x) + \int_2^4 dx 2 (1 - x) + \int_4^5 dx (1 - x) (-2x + 10) \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 + [2x - x^2]_2^4 + \left[10x - \frac{11x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} \right]_4^5 \\ &= 4 - \frac{8}{3} + (8 - 16 - 4 + 4) + \left(-\frac{10}{3} \right) \\ &= 2 - \frac{8}{3} + (8 - 16 - 4 + 4) + \left(-\frac{10}{3} \right) \\ &= -12. \end{aligned}$$

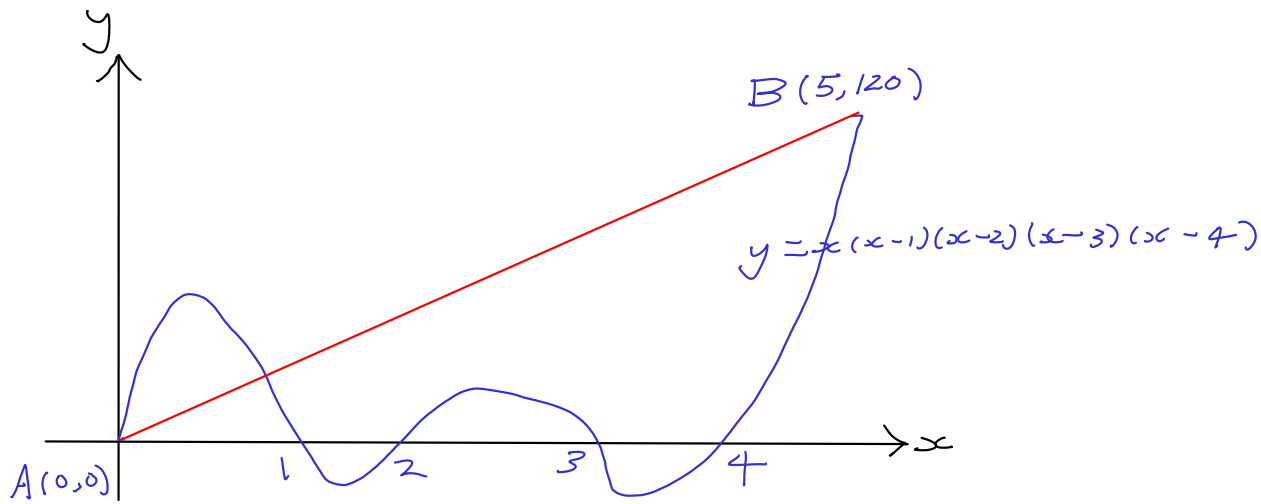
דוגמה 11.10 אי-תלות של אינטגרל קווי במסלול

חשבו את האינטגרל

$$\int_L ((2x - y)dx + (3y - x)dy)$$

עבור המסלול L הקטע של העקום $y = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ בין הנקודות $A(0,0)$, $B(5,120)$.

פתרון:



האינטגרל הוא

$$\int_L (P(x, y)dx + Q(x, y)dy)$$

כאשר

$$P(x, y) = 2x - y, \quad Q(x, y) = 3y - x.$$

שים לב:

$$P'_y = Q'_x = -1$$

ולפיו מותר להשתמש בכלל 11.11, האורמ כי קיימת פונקציה $U(x, y)$ כך ש-

$$dU(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

והאינטגרל אינו תלוי בהמסלול אלא רק על הנקודה התחלתית $A(0, 0)$ והנקודה הסופית $B(5, 120)$. הפונקציה $U(x, y)$ הינה

$$U(x, y) = \int dx P(x, y) = \int dx (2x - y) = x^2 - xy + p(y)$$

כאשר $p(y)$ פונקציה התלוי רק על המשתנה y ו-

$$U(x, y) = \int dy Q(x, y) = \int dy (3y - x) = \frac{3y^2}{2} - xy + q(x)$$

כאשר $q(x)$ פונקציה התלוי רק על המשתנה x . נשווה אותן ונקבל

$$U(x, y) = x^2 + \frac{3y^2}{2} - xy.$$

לכן לפי כלל 11.11,

$$\int_L (P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = \int_{AB} dU(x, y) = U(B) - U(A) = 5^2 + \frac{3 \cdot 120^2}{2} - 5 \cdot 120 = 21025.$$

דוגמה 11.11 נוסחת גרין

חשבו את האינטגרל

$$\oint_L ((x+y) dx + (x-y) dy)$$

לפי המסלול L הניתן ע"י

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

פתרון:

המסלול סגור ולכן ניתן להשתמש בנוסחת גרין (כלל 11.10) האומר כי

$$I = \oint_L (P dx + Q dy) = \iint_D dx dy (Q'_x - P'_y)$$

כאן

$$P(x,y) = x+y , \quad Q(x,y) = x-y , \quad \Rightarrow \quad Q'_x = 1 , \quad P'_y = 1 .$$

ולכן

$$I = \iint_D dx dy (1-1) = 0.$$

דוגמה 11.12 אינטגרל הקווי מסוג שני

חשבו את האינטגרל

$$\oint_L (xy dx + (x-y) dy)$$

לפי המסלול L הניתן ע"י

$$x = a \cdot \cos t , \quad y = b \cdot \sin t$$

בכיוון נגד השעון.

פתרון:

מתקבלים המסלול הסגור ע"י הטווח

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

כך שלפי כלל 11.7,

$$\begin{aligned}
I &= \oint_L (xy \, dx + (x - y) \, dy) \\
&= \int_0^{2\pi} dt \, (x(t)y(t) \, \dot{x} + (x(t) - y(t))\dot{y}) \\
&= \int_0^{2\pi} dt \, (-a^2b \cos t \cdot \sin^2 t + (a \cdot \cos t - b \cdot \sin t)b \cdot \cos t) \\
&= \int_0^{2\pi} dt \, (-a^2b \cos t \cdot \sin^2 t + ab \cdot \cos^2 t - b^2 \cdot \sin t \cdot \cos t) \\
&= \int_0^{2\pi} dt \, \left(-a^2b \cos t \cdot \sin^2 t + ab \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) - b^2 \cdot \sin t \cdot \cos t \right) \\
&= \left[-a^2b \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{abt}{2} - \frac{ab}{4} \sin 2t - \frac{b^2}{2} \cdot \sin^2 t \right]_0^{2\pi} \\
&= \pi ab \, .
\end{aligned}$$