

תרגילים 2: מקסמין ודואפול

שאלה 1 מצאו את כל ווקטורי האסטרטגיות הרציונליים במשחק הבא:

$I \backslash II$	L	R
H	2, 3	1, 5
T	0, 0	4, 1

שאלה 2 הוכיחו כי לא קיים פתרון באסטרטגיות השולטות חזק יחיד במשחק הבא:

$I \backslash II$	A	B
c	4, 8	5, 10
d	6, 20	3, 7

שאלה 3 כיצד תמליצו לשחקנים לשחק במשחק הבא, אם השחקנים לא בהכרח רציונליים?

$I \backslash II$	A	B	C	D
α	2, 13	4, 8	6, 5	8, 2
β	6, 4	2, 3	3, 8	8, 4
γ	0, 9	7, 7	2, 7	14, 8
δ	4, 0	0, 4	4, 6	6, 0

שאלה 4 במשחק הבא שהוא משחק שני שחקנים סכום אפס, ודאו כי הווקטור אסטרטגיות המקסמין של המשחק הוא גם שיווי המשקל של המשחק.

$I \backslash II$	A	B	C
α	30, -30	-50, 50	-20, 20
β	10, -10	40, -40	10, -10
γ	60, -60	-30, 30	-50, 50

שאלה 5 מצאו את כל ווקטורי האסטרטגיות הרציונליים במשחקים הבאים:

(א)

$I \backslash II$	L	R
T	9, 5	5, 3
B	8, 6	8, 4

(ב)

$I \backslash II$	a	b	c	d
T	6, 2	5, 3	7, 6	2, 8
B	8, 5	6, 9	4, 6	4, 7

(ג)

$I \backslash II$	a	b	c	d
T	-1, -20	-7, -7	-1, 2	-5, 8
M	27, 20	13, -2	21, 2	13, -1
B	-5, 20	-3, 5	7, -1	3, -4

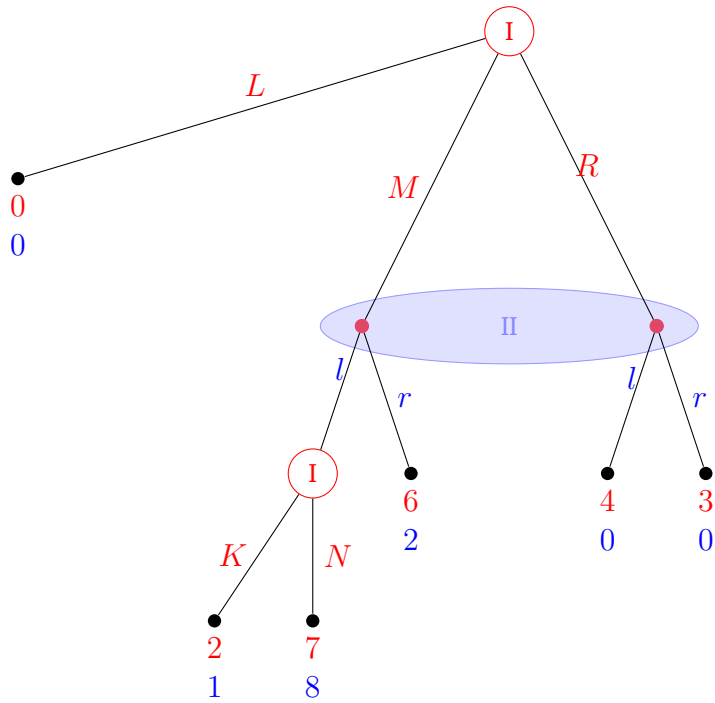
(ד)

$I \backslash II$	a	b	c	d
α	3, 7	0, 13	4, 5	5, 3
β	5, 3	4, 8	4, 3	3, 7
γ	4, 5	3, 7	4, 5	5, 3
δ	4, -1	2, 5	1, 2	3, 2

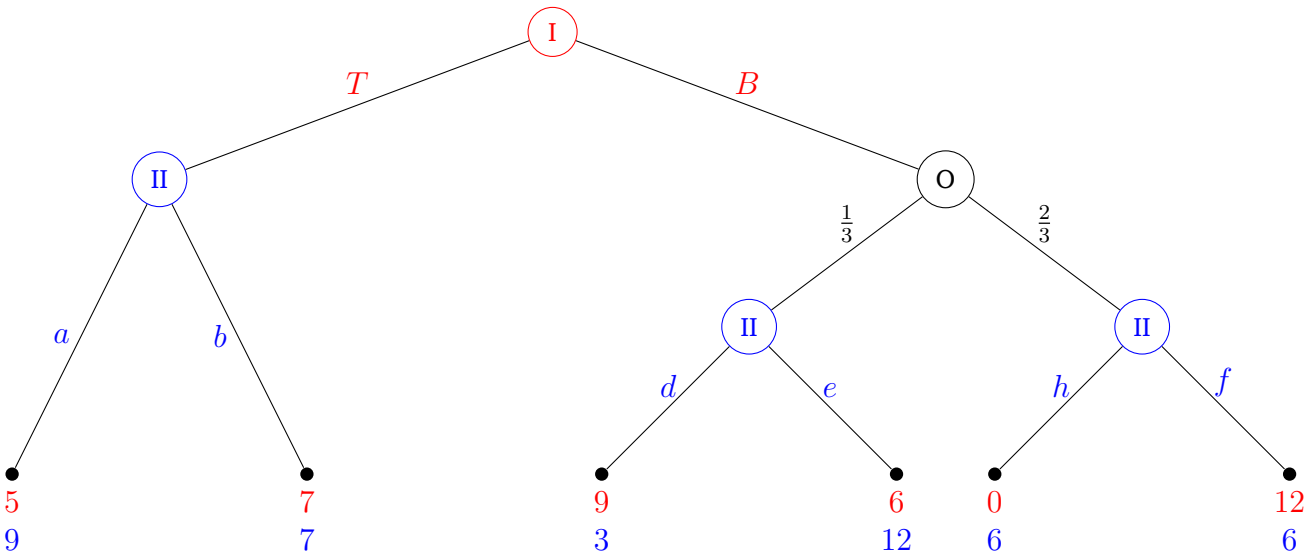
שאלה 6

מצאו את שיווי המשקל במשחק הבאים:

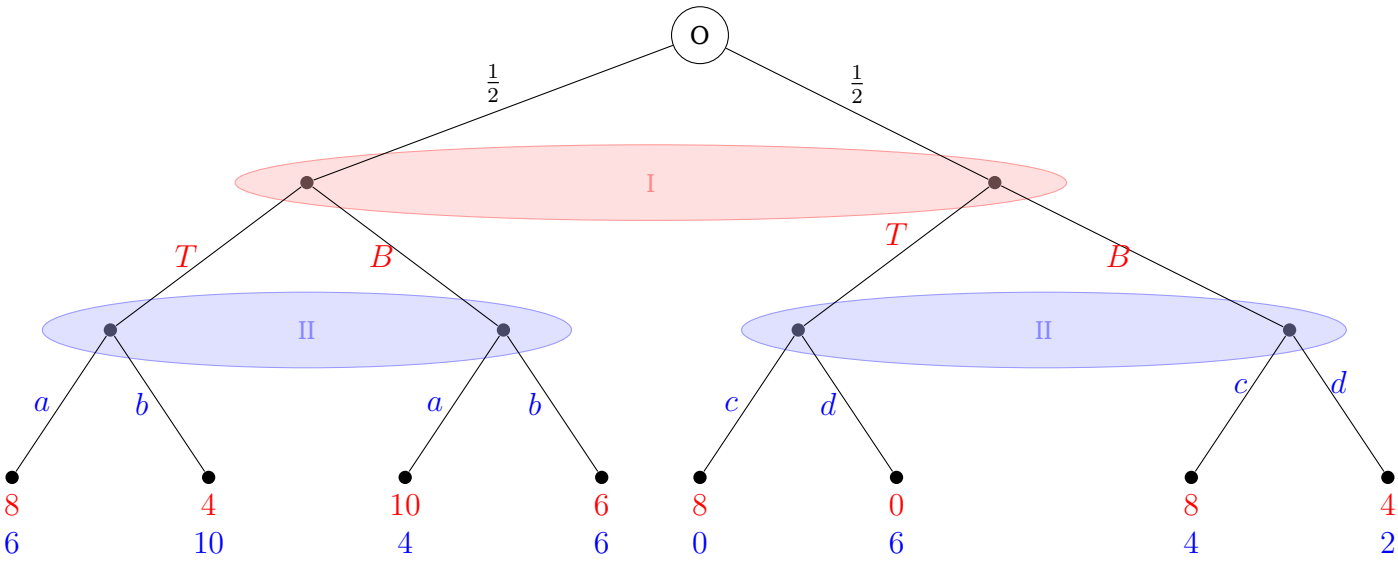
(א)



(ב)



(ג)



שאלה 7 לכל אחד מהמשחקים הבאים, מצאו לשחקן I אסטרטגיה מקסימין ולשחקן II אסטרטגיה מינמקס.

(א)

$I \backslash II$	a	b	c	d
	α	β	γ	
α	8	4	8	4
β	2	5	3	8
γ	6	1	4	5

(ב)

$I \backslash II$	a	b	c	d
	α	β	γ	δ
α	6	4	2	1
β	5	3	3	0
γ	1	0	5	4
δ	2	-3	2	3

(ג)

$I \backslash II$	a	b	c	d
α	3	6	5	5
β	5	5	5	5
γ	5	3	5	6
δ	6	5	5	3

שאלה 8 יהי $G((1, \dots, N), (s_1, \dots, s_i), (u_1, \dots, u_N))$ משחק N שחקנים.

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:.

אם s^* שיווי משקל של המשחק אז לכל שחקן $i \in N$ האסטרטגיה s_i^* לא נשלטת על ידי אף אסטרטגיה אחרת.

שאלה 9 הערך של משחק שני שחקנים סכום אפס הנתון על ידי מטריצה A הוא 0. האם בהכרח הערך של

משחק שני השחקנים סכום אפס הנתון על ידי המטריצה $-A$ הוא 0? אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

שאלה 10 תהייה A ו- B שתי קבוצות סופיות, ותהי $u : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה כלשהי. הוכיחו כי

$$\max_{a \in A} \min_{b \in B} u(a, b) \leq \min_{b \in B} \max_{a \in A} u(a, b).$$

שאלה 11 האם הערך בכל אחד מהמשחקים הבאים קיים? אם כן, מה הוא ומה הן כל האסטרטגיות

האופטימליות לכל אחד מהשחקנים. כרגיל, שחקן I הוא שחקן השורה ושחקן II הוא שחקן העמודה.

(א)

$I \backslash II$	a	b	c
A	1	2	3
B	4	3	0

(ב)

$I \backslash II$	a	b
A	2	2
B	1	3

(ג)

תורת המשחקים

תשפ"ו סמסטר ב"

$I \backslash II$	a	b
A	3	0
B	2	2
C	0	3

(ד)

$I \backslash II$	a	b	c	d
A	$\frac{7}{2}$	3	4	12
B	7	5	6	13
C	4	2	3	0

שאלה 12 למשחק הבא, מצאו לשחקן I אסטרטגיה מקסמין ולשחקן II אסטרטגיה מינמקס. האם יש למשחק ערך?

$I \backslash II$	a	b	c	d
α	16	8	16	8
β	4	10	6	16
γ	12	2	8	10

שאלה 13 למשחק הבא, מצאו לשחקן I אסטרטגיה מקסמין ולשחקן II אסטרטגיה מינמקס. האם יש למשחק ערך?

$I \backslash II$	a	b	c	d
α	18	12	6	3
β	15	9	9	0
γ	3	0	15	12
δ	6	-9	6	9

שאלה 14 למשחק הבא, מצאו לשחקן I אסטרטגיה מקסמין ולשחקן II אסטרטגיה מינמקס. האם יש למשחק ערך?

$I \backslash II$	a	b	c	d
α	15	30	25	25
β	25	25	25	25
γ	25	15	25	30
δ	30	25	25	15

שאלה 15 תהיינה A ו- B שתי מטריצות עם תשלומים חיוביים (בעלות ממדים סופיים).

$I \backslash II$	A	0
I	0	B

הוכיחו כי למשחק לא קיים ערך.

שאלה 16 נתון משחק קורנוט עם n שחקנים. יהי q_i כמות המוצר הנוצר על ידי שחקן i , ויהי $Q = q_1 + \dots + q_n$ כמות הכוללת בשוק. יהי

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & Q < a \\ 0 & Q \geq a \end{cases}.$$

נניח כי העלות לשחקן i לייצר כמות q_i היא $C_i(q_i) = cq_i$ כאשר $c < a$.

(א) מצאו את שיווי המשקל של המשחק.

(ב) מה קורה אם $n \rightarrow \infty$?

שאלה 17 נתון משחק דואפול עם פונקציית המחיר

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & Q < a \\ 0 & Q \geq a \end{cases}.$$

נניח ש פונקציות העלות של השחקנים לא סימטריות:

$$C_1(q_1) = c_1 q_1, \quad C_2(q_2) = c_2 q_2.$$

(א) חשבו את שיווי המשקל נאש אם $0 < c_i < \frac{a}{2}$ לכל שחקן.

(ב) כיצד התשובה משתנה אם $c_1 < c_2 < a$ ו- $2c_2 > a + c_1$?

פתרונות

שאלה 1 לפי ההנחות של שחקנים רציונליים, שחקן רציונלי לא ישחק אסטרטגיה שנשלטת. אם קיים שיווי משקל יחיד הוא פתרון באסטרטגיות השולקות חזק. אז נחפש שיווי המשקל של המשחק.

$I \backslash II$	L	R
H	2, 3	1, 5
T	0, 0	4, 1

שיווי משקל: $s^* = (T, R)$.

קיים שיווי משקל יחיד $s^* \Leftarrow$ הוא פתרון באסטרטגיות שולטות חזק. שחקנים רציונליים משחקים רק אסטרטגיות ששולטות חזק לכן s^* הוא ווקטור האסטרטגיות הרציונלי היחיד של המשחק.

שאלה 2 קיים פתרון באסטרטגיות השולטות חזק אם ורק אם קיים שיווי משקל יחיד. נבדוק את השיווי משקל של המשחק.

$I \backslash II$	A	B
c	4, 8	5, 10
d	6, 20	3, 7

שיווי משקל: $s^* = (d, A)$ ו- $s^* = (c, B)$. יש שני שיווי משקל.

ז"א לא קיים שיווי משקל יחיד \Leftarrow לא קיים פתרון באסטרטגיות השולטות חזק יחיד.

שאלה 3 אם השחקנים לא רציונליים אז מומלץ גם לשחקן 1 וגם לשחקן 2 לשחק לפי האסטרטגיה המקסימין שלהם.

$I \backslash II$	A	B	C	D	$\min_{s_2 \in S_2} u_1$
α	2, 13	4, 8	6, 5	8, 2	2
β	6, 4	2, 3	3, 8	8, 4	2
γ	0, 9	7, 7	2, 7	14, 8	0
δ	4, 0	0, 4	4, 6	6, 0	0
$\min_{s_1 \in S_1} u_2$	0	3	5	0	$\underline{v}_1 = 2$ $\underline{v}_2 = 5$

התשלום המקסימין של שחקן 1 הוא

$$\underline{v}_1 = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1 = 2.$$

לכן האסטרטגיה המקסימין של שחקן 1 היא α או β .

התשלום המקסימין של שחקן 2 הוא

$$\underline{v}_2 = \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} u_2 = 5.$$

לכן האסטרטגיה המקסימין של שחקן 1 היא C .

לכן מומלץ לשחקו 1 לשחק לפי אסטרטגיה α או β ומומלץ לשחקן 2 לשחק לפי אסטרטגיה C .

שאלה 4 נחשב את שיווי המשקל של המשחק לפי שיטת התשובות הטובות ביותר:

$I \backslash II$	A	B	C
α	30, -30	-50, 50	-20, 20
β	10, -10	40, -40	10, -10
γ	60, -60	-30, 30	-50, 50

שיווי המשקל הוא

$$s^* = (\beta, C).$$

$I \backslash II$	A	B	C	$\min_{s_2 \in S_2} u_1$
α	30, -30	-50, 50	-20, 20	-50
β	10, -10	40, -40	10, -10	10
γ	60, -60	-30, 30	-50, 50	-60
$\min_{s_1 \in S_1} u_2$	-60	-40	-10	$\underline{v}_1 = 10$ $\underline{v}_2 = -10$

ווקטור האסטרטגיות המקסימין של המשחק הוא (β, C) .

שאלה 5

(א)

$I \backslash II$	L	R
T	9, 5	5, 3
B	8, 6	8, 4

 $\xrightarrow{R \prec L}$

$I \backslash II$	L
T	9, 5
B	8, 6

 $\xrightarrow{B \prec T}$

$I \backslash II$	L
T	9, 5

פתרון באסטרטגיות שולטות חזק: TL .

(ב)

$I \backslash II$	a	b	c	d
T	6, 2	5, 3	7, 6	2, 8
B	8, 5	6, 9	4, 6	4, 7

 $\xrightarrow{\begin{smallmatrix} c \prec d \\ a \prec d \end{smallmatrix}}$

$I \backslash II$	b	d
T	5, 3	2, 8
B	6, 9	4, 7

 $\xrightarrow{T \prec B}$

$I \backslash II$	b	d
B	6, 9	4, 7

 $\xrightarrow{d \prec b}$

$I \backslash II$	b
B	6, 9

פתרון באסטרטגיות שולטות חזק: Bb .

(ג)

$I \backslash II$	a	b	c	d
T	-1, 20	-7, -7	-1, 2	-5, 8
M	27, 20	13, -2	21, 2	13, -1
B	-5, 20	-3, 5	7, -1	3, -4

 $\xrightarrow{\begin{smallmatrix} b \prec a \\ c \prec a \\ d \prec a \end{smallmatrix}}$

$I \backslash II$	a
T	-1, 20
M	27, 20
B	-5, 20

 $\xrightarrow{\begin{smallmatrix} T \prec M \\ B \prec M \end{smallmatrix}}$

$I \backslash II$	a
M	27, 20

פתרון באסטרטגיות שולטות חזק: Ma .

(ד)

$I \backslash II$	a	b	c	d
α	3, 7	0, 13	4, 5	5, 3
β	5, 3	4, 8	4, 3	3, 7
γ	4, 5	3, 7	4, 5	5, 3
δ	4, -1	2, 5	1, 2	3, 2

 $\xrightarrow{\begin{smallmatrix} c \prec b \\ d \prec b \\ a \prec b \end{smallmatrix}}$

$I \backslash II$	b
α	0, 13
β	4, 8
γ	3, 7
δ	2, 5

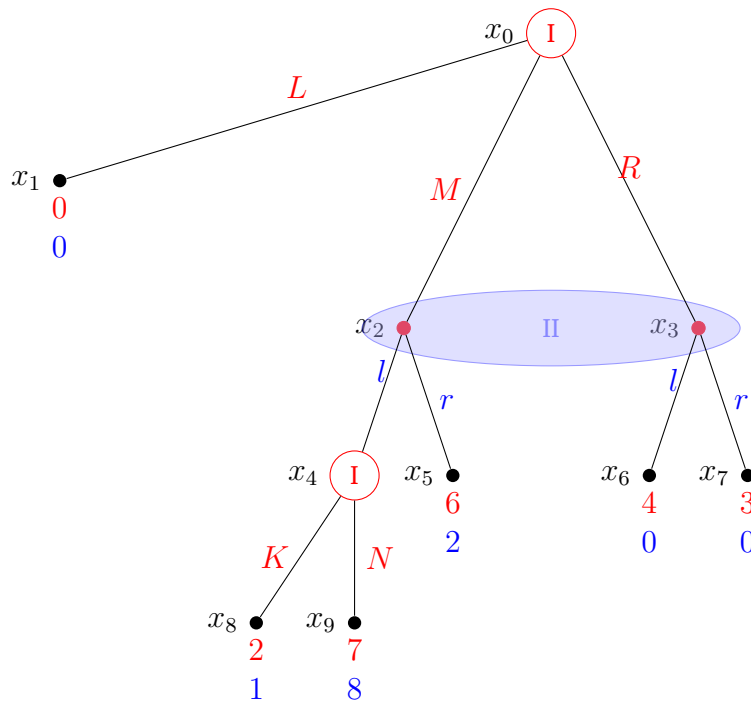
 $\xrightarrow{\alpha \preceq \gamma}$

$I \backslash II$	b
β	4, 8

פתרון באסטרטגיות שולטות חלש: βb .

שאלה 6

(א)



קבוצות ידיעה של שחקן I :

$$x_0 : (L, M, R) , \quad x_4 : (K, N) .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן I :

$$S_I = (L/K, M/K, R/K, L/N, M/N, R/N) .$$

קבוצות ידיעה של שחקן II :

$$x_2 x_3 : (l, r) .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן II :

$$S_{II} = (l, r) .$$

צורה אסטרטגית של המשחק:

$I \backslash II$	II	
	l	r
L/K	0, 0	0, 0
M/K	2, 1	6, 2
R/K	4, 0	3, 0
L/N	0, 0	0, 0
M/N	7, 8	6, 2
R/N	4, 0	3, 0

נחשב את התשובות הטובות ביותר של שחקן I לכל אסטרטגיה של שחקן II :

$I \backslash II$	l	r
L/K	0,0	0,0
M/K	2,1	6,2
R/K	4,0	3,0
L/N	0,0	0,0
M/N	7,8	6,2
R/N	4,0	3,0

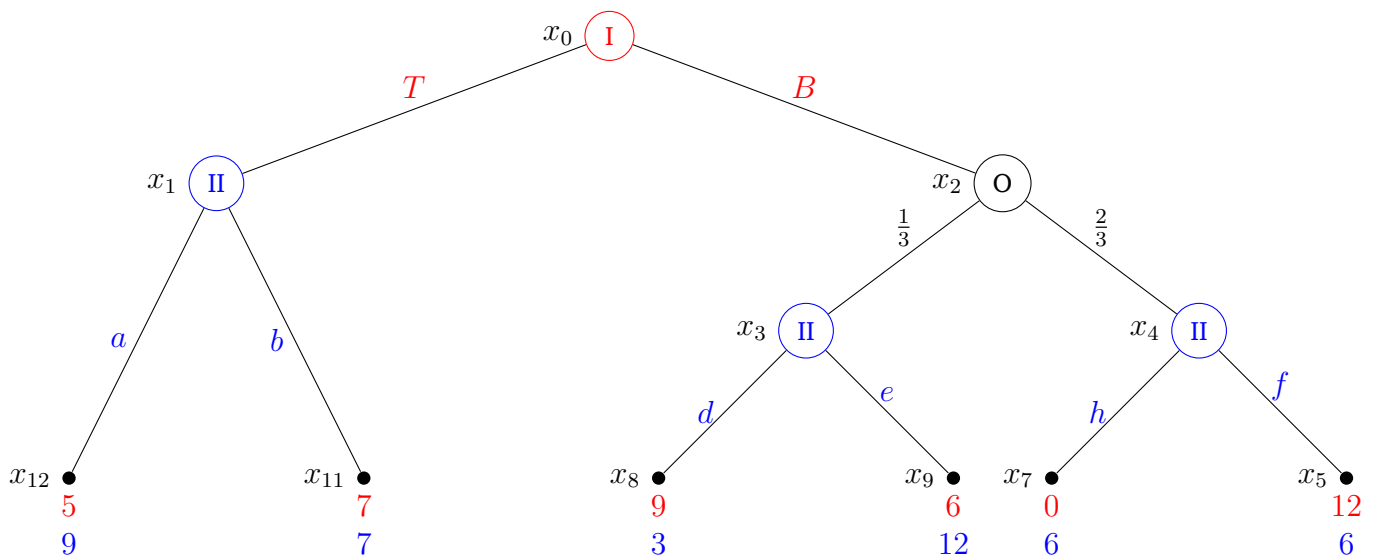
נחשב את התשובות הטובות ביותר של שחקן II לכל אסטרטגיה של שחקן I :

$I \backslash II$	l	r
L/K	0,0	0,0
M/K	2,1	6,2
R/K	4,0	3,0
L/N	0,0	0,0
M/N	7,8	6,2
R/N	4,0	3,0

לכן שיווי המשקל נאש של המשחק הם

$$s^* = (M/N, l), \quad s^* = (M/K, r).$$

(ב)



קבוצות ידיעה של שחקן I :

$$x_0 : (T, B) .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן I :

$$S_I = (T, B) .$$

קבוצות ידיעה של שחקן II :

$$x_1 : (a, b) , \quad x_3 : (d, e) , \quad x_4 : (h, f) .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן II :

$$S_{II} = (a/d/h , a/d/f , a/e/h , a/e/f , b/d/h , b/d/f , b/e/h , b/e/f) .$$

$I \backslash II$	$a/d/h$	$a/d/f$	$a/e/h$	$a/e/f$
T	5, 9	5, 9	5, 9	5, 9
B	$\frac{1}{3}(9, 3) + \frac{2}{3}(0, 6)$	$\frac{1}{3}(9, 3) + \frac{2}{3}(12, 6)$	$\frac{1}{3}(6, 12) + \frac{2}{3}(0, 6)$	$\frac{1}{3}(6, 12) + \frac{2}{3}(12, 6)$

$I \backslash II$	$b/d/h$	$b/d/f$	$b/e/h$	$b/e/f$
T	7, 7	7, 7	7, 7	7, 7
B	$\frac{1}{3}(9, 3) + \frac{2}{3}(0, 6)$	$\frac{1}{3}(9, 3) + \frac{2}{3}(12, 6)$	$\frac{1}{3}(6, 12) + \frac{2}{3}(0, 6)$	$\frac{1}{3}(6, 12) + \frac{2}{3}(12, 6)$

$I \backslash II$	$a/d/h$	$a/d/f$	$a/e/h$	$a/e/f$	$b/d/h$	$b/d/f$	$b/e/h$	$b/e/f$
T	5, 9	5, 9	5, 9	5, 9	7, 7	7, 7	7, 7	7, 7
B	3, 5	11, 5	2, 8	10, 8	3, 5	11, 5	2, 8	10, 8

נחשב את התשובות הטובות ביותר של שחקן I לכל אסטרטגיה של שחקן II :

$I \backslash II$	$a/d/h$	$a/d/f$	$a/e/h$	$a/e/f$	$b/d/h$	$b/d/f$	$b/e/h$	$b/e/f$
T	5, 9	5, 9	5, 9	5, 9	7, 7	7, 7	7, 7	7, 7
B	3, 5	11, 5	2, 8	10, 8	3, 5	11, 5	2, 8	10, 8

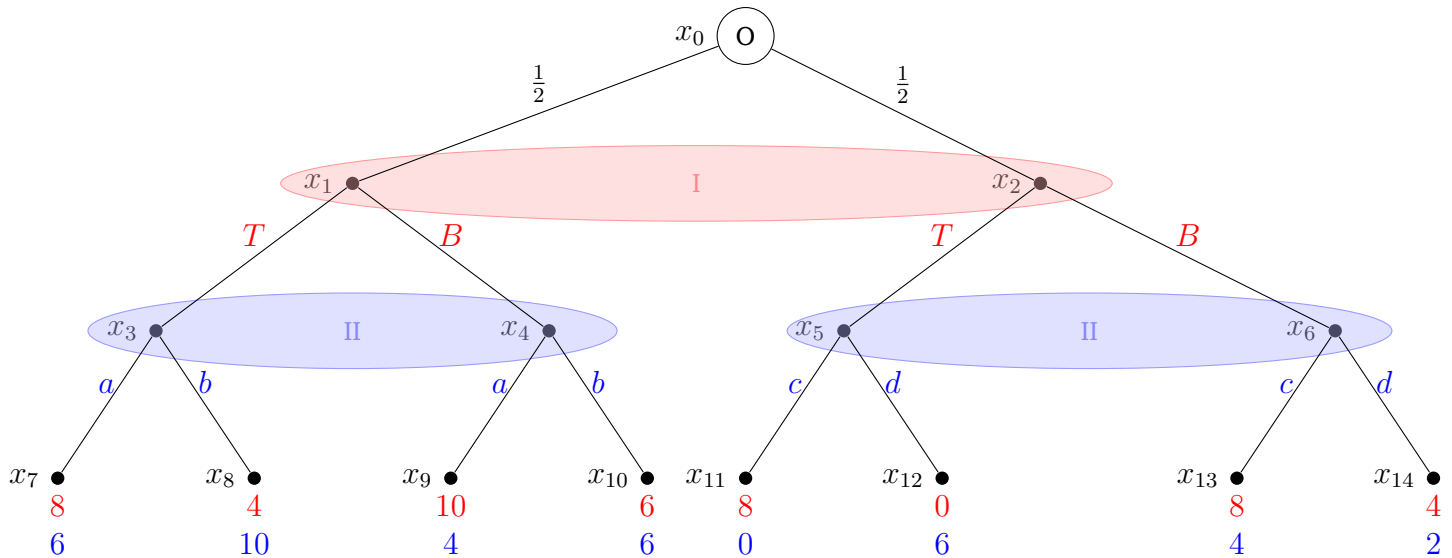
נחשב את התשובות הטובות ביותר של שחקן II לכל אסטרטגיה של שחקן I :

$I \backslash II$	$a/d/h$	$a/d/f$	$a/e/h$	$a/e/f$	$b/d/h$	$b/d/f$	$b/e/h$	$b/e/f$
T	5, 9	5, 9	5, 9	5, 9	7, 7	7, 7	7, 7	7, 7
B	3, 5	11, 5	2, 8	10, 8	3, 5	11, 5	2, 8	10, 8

לכן שיווי המשקל נאש של המשחק הם:

$$s^* = (T, a/d/h) , \quad s^* = (T, a/e/h) , \quad s^* = (B, a/e/f) , \quad s^* = (B, b/e/f) .$$

(ג)



קבוצות ידיעה של שחקן I :

$$x_1 x_2 : (T, B) .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן I :

$$S_I = (T, B) .$$

קבוצות ידיעה של שחקן II :

$$x_3 x_4 : (a, b) , \quad x_5 x_6 : (c, d) .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן II :

$$S_{II} = (a/c , a/d , b/c , b/d) .$$

$I \backslash II$	a/c	a/d	b/c	b/d
T	$\frac{1}{2}(8, 6) + \frac{1}{2}(8, 0)$	$\frac{1}{2}(8, 6) + \frac{1}{2}(0, 6)$	$\frac{1}{2}(4, 10) + \frac{1}{2}(8, 0)$	$\frac{1}{2}(4, 10) + \frac{1}{2}(0, 6)$
B	$\frac{1}{2}(10, 4) + \frac{1}{2}(8, 4)$	$\frac{1}{2}(10, 4) + \frac{1}{2}(4, 2)$	$\frac{1}{2}(6, 6) + \frac{1}{2}(8, 4)$	$\frac{1}{2}(6, 6) + \frac{1}{2}(4, 2)$

$I \backslash II$	a/c	a/d	b/c	b/d
T	(4, 3)	(4, 6)	(6, 5)	(2, 8)
B	(9, 6)	(7, 3)	(7, 5)	(5, 4)

נחשב את התשובות הטובות ביותר של שחקן I לכל אסטרטגיה של שחקן II :

$I \backslash II$	a/c	a/d	b/c	b/d
T	(4, 3)	(4, 6)	(6, 5)	(2, 8)
B	(9, 6)	(9, 3)	(9, 5)	(5, 4)

נחשב את התשובות הטובות ביותר של שחקן II לכל אסטרטגיה של שחקן I :

$I \backslash II$	a/c	a/d	b/c	b/d
T	(4, 3)	(4, 6)	(6, 5)	(2, 8)
B	(9, 6)	(9, 3)	(9, 5)	(5, 4)

לכן שיווי המשקל נאש היחיד של המשחק הוא

$$s^* = (B, a/c) .$$

שאלה 7

(א)

$I \backslash II$	a	b	c	d	$\min_{s_2 \in S_2} u$
α	8	4	8	4	4
β	2	5	3	8	2
γ	6	1	4	5	1
$\max_{s_1 \in S_1} u$	6	1	4	5	$\underline{v} = 4$ $\bar{v} = 1$

אסטרטגיה מקסימין: α . אסטרטגיה מינימקס: b .

(ב)

$I \backslash II$	a	b	c	d	$\min_{s_2 \in S_2} u$
α	6	4	2	1	1
β	5	3	3	0	0
γ	1	0	5	4	0
δ	2	-3	2	3	-3
$\max_{s_1 \in S_1} u$	6	4	5	4	$\underline{v} = 1$ $\bar{v} = 4$

אסטרטגיה מקסמין: α . אסטרטגיה מינמקס: b או d .

(ג)

$I \backslash II$	a	b	c	d	$\min_{s_2 \in S_2} u$
α	6	4	2	1	1
β	5	3	3	0	0
γ	1	0	5	4	0
δ	2	-3	2	3	-3
$\max_{s_1 \in S_1} u$	6	4	5	1	$\underline{v} = 1$ $\bar{v} = 1$

אסטרטגיה מקסמין: α . אסטרטגיה מינמקס: d .

(ד)

$I \backslash II$	a	b	c	d	$\min_{s_2 \in S_2} u$
α	3	6	5	5	3
β	5	5	5	5	5
γ	5	3	5	6	3
δ	6	5	5	3	3
$\max_{s_1 \in S_1} u$	6	6	5	6	$\underline{v} = 5$ $\bar{v} = 5$

שאלה 8 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$I \backslash II$	a	b	c
A	0, 1	0, 1	1, 1
B	0, 2	2, 0	1, 0
C	2, 0	1, 1	1, 0

נסמן את התשובות הטובות ביותר של כל השחקנים:

$I \backslash II$	a	b	c
A	0, <u>1</u>	0, <u>1</u>	<u>1</u> , <u>1</u>
B	0, <u>2</u>	<u>2</u> , 0	<u>1</u> , 0
C	<u>2</u> , 0	1, <u>1</u>	<u>1</u> , 0

הווקטור אסטרטגיות (A, c) הוא שיווי המשקל היחיד של המשחק.

אך A נשלטת חזק על ידי C , ו- c נשלטת חזק על ידי a .

שאלה 9 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

תהי A מטריצה 2×2 של המשחק שני שחקנים סכום אפס הבא:

$I \backslash II$	L	R	$\min u$
T	0	1	0
B	0	2	0
$\max u$	0	2	

המשחק של המטריצה $-A$ הינו

$I \backslash II$	L	R	$\min u$
T	0	-1	-1
B	0	-2	-2
$\max u$	0	-1	

הערך של המשחק של המטריצה A הוא 0 בעוד הערך של המשחק של $-A$ הוא -1.

שאלה 10 נשים לב כי לפי ההגדרה של הערך המינימלי של קבוצה מתקיים

$$\min_{b' \in B} u(a, b') \leq u(a, b) \quad \forall b \in B, \forall a \in A.$$

ולפי ההגדרה של הערך המקסימלי של פונקציה מתקיים

$$u(a, b) \leq \max_{a' \in A} u(a', b) \quad \forall b \in B, \forall a \in A.$$

מכאן

$$\min_{b' \in B} u(a, b') \leq u(a, b) \leq \max_{a' \in A} u(a', b).$$

ולכן

$$\min_{b' \in B} u(a, b') \leq \max_{a' \in A} u(a', b) \quad (*)$$

נשים לב כי הצד ימין לא תלוי על a . ז"א משוואה $(*)$ מתקיימת לכל a . בפרט, ניתן לקחת את ה- a אשר ממקסם את הצד ימין והרי נקבל

$$\max_{a' \in A} \min_{b' \in B} u(a', b') \leq \max_{a' \in A} u(a', b) \quad (\#)$$

כעת נשים לב כי הצד שמאל לא תלוי על b . ז"א משוואה (#) מתקיימת לכל b . בפרט, ניתן לקחת את ה- b אשר ממזער את הצד ימין והרי נקבל

$$\max_{a' \in A} \min_{b' \in B} u(a', b') \leq \min_{b' \in B} \max_{a' \in A} u(a', b')$$

מש"ל.

שאלה 11

(א)

$I \backslash II$	a	b	c	$\min u$
A	1	2	3	1
B	4	3	0	0
$\max u$	4	3	3	

$1 = \underline{v} \neq \bar{v} = 3$ לכן למשחק אין ערך.

(ב)

$I \backslash II$	a	b	$\min u$
A	2	2	2
B	1	3	1
$\max u$	2	3	

$\underline{v} = 2 = \bar{v}$ לכן הערך של המשחק הוא $v = 2$. האסטרטגיה האופטימלית לשחקן I היא A . האסטרטגיה האופטימלית לשחקן II היא a .

(ג)

$I \backslash II$	a	b	$\min u$
A	3	0	0
B	2	2	2
C	0	3	0
$\max u$	3	3	

$2 = \underline{v} \neq \bar{v} = 3$ לכן למשחק אין ערך.

(ד)

$I \backslash II$	a	b	c	d	$\min u$
A	$\frac{7}{2}$	3	4	12	3
B	7	5	6	13	5
C	4	2	3	0	0
$\max u$	7	5	6	13	

$\underline{v} = 5 = \bar{v}$ לכן הערך של המשחק הוא 5. האסטרטגיה האופטימלית של שחקן I היא B . האסטרטגיה האופטימלית של שחקן II היא b .

שאלה 12

(א)

$I \backslash II$	a	b	c	d	$\min_{s_2 \in S_2} u$
α	16	8	16	8	8
β	4	10	6	16	4
γ	12	2	8	10	2
$\max_{s_1 \in S_1} u$	16	10	16	16	$\underline{v} = 8$ $\bar{v} = 10$

$$\underline{v} = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u = 8, \quad \bar{v} = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u = 10.$$

אסטרטגיה מקסימין של שחקן I היא α .
אסטרטגיה מינימקס של שחקן II היא b .

$8 = \underline{v} \neq \bar{v} = 10$ לכן למשחק אין ערך.

שאלה 13

$I \backslash II$	a	b	c	d	$\min_{s_2 \in S_2} u$
α	18	12	6	3	3
β	15	9	9	0	0
γ	3	0	15	12	0
δ	6	-9	6	9	-9
$\max_{s_1 \in S_1} u$	18	12	15	12	$\underline{v} = 3$ $\bar{v} = 12$

$$\underline{v} = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u = 3, \quad \bar{v} = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u = 12.$$

אסטרטגיה מקסמין של שחקן I היא α .
אסטרטגיה מינמקס של שחקן II היא b או d .

$3 = \underline{v} \neq \bar{v} = 12$ לכן למשחק אין ערך.

שאלה 14

$I \backslash II$	a	b	c	d	$\min_{s_2 \in S_2} u$
α	15	30	25	25	15
β	25	25	25	25	25
γ	25	15	25	30	15
δ	30	25	25	15	15
$\max_{s_1 \in S_1} u$	30	30	25	30	$\underline{v} = 25$ $\bar{v} = 25$

$$\underline{v} = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u = 25, \quad \bar{v} = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u = 25.$$

אסטרטגיה מקסמין של שחקן I היא β .
אסטרטגיה מינמקס של שחקן II היא c . בהכרח

$\underline{v} = 25 = \bar{v}$ לכן למשחק יש ערך 25.

שאלה 15 תהינה A ו- B מטריצות בעלות תשלומים חיוביים. אזי עבור

$$T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

מתקיים $T_{ij} \geq 0$.

בכל עמודה יש לפחות אפס אחד, לכן

$$\underline{v} = \max_i \min_j T_{ij} = \max_i 0 = 0.$$

מצד שני מכיון ש- A ו- B מטריצות חיוביות, אזי קיים לפחות איבר חיובי אחד בכל שורה. לפיכך

$$\bar{v} = \min_j \max_i T_{ij} > 0.$$

לכן $\bar{v} > 0 = \underline{v}$ אז $\bar{v} \neq \underline{v}$ ולכן למשחק אין ערך.

שאלה 16 הרווח לשחקן i נתון עלי ידי פונקצית התשלום

$$\begin{aligned} u_i(q_1, \dots, q_i, \dots, q_n) &= P(Q)q_i - C_i = (P(Q) - c) q_i \\ &= (a - Q - c) q_i \\ &= (a - q_1 - q_2 - \dots - q_i - \dots - q_n - c) q_i \end{aligned}$$

הווקטור אסטרטגיות $(q_1^*, \dots, q_i^*, \dots, q_n^*)$ יהיה שיווי המשקל אם s_i^* תשובה טובה ביותר לשחקן i לכל $1 \leq i \leq n$. כלומר אם

$$u_i(q_1^*, \dots, q_i^*, \dots, q_n^*) = \max_{0 \leq q_i \leq \infty} u_i(q_1^*, \dots, q_i, \dots, q_n^*) .$$

התשלום u_i מקבל ערך מקסימלי בנקודה שבה $(u_i)'_{q_i} = 0$.

$$\begin{aligned} (u_i)'_{q_i} &= (a - q_1 - \dots - q_i - \dots - q_n - c) - q_i \\ &= a - q_1 - \dots - 2q_i - \dots - q_n - c \\ &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a - c = q_1 + \dots + 2q_i^* + \dots + q_n$$

לכל $q \leq i \leq n$. מכיוון שאנחנו נקבל אותה משוואה לכל i , אז בהכרח הערכים של ה- q_i זהים ושווים ל-

$$q_1^* = q_2^* = \dots = q_i^* = \dots = q_n^* .$$

נציב זה במשוואה הקודם ואז נקבל

$$(n+1)q_i^* = a - c \quad \Rightarrow \quad q_i^* = \frac{a - c}{n+1} .$$

שאלה 17 פונקצית המחיר היא

$$P(Q) = a - Q ,$$

כאשר $Q = q_1 + q_2$. הרווח לשחקן 1 הוא

$$u_1 = (P - c_1)q_1 = (a - Q - c_1)q_1 = (a - q_1 - q_2 - c_1)q_1 ,$$

והרווח לשחקן 2 הוא

$$u_2 = (P - c_2)q_2 = (a - Q - c_2)q_2 = (a - q_1 - q_2 - c_2)q_2 .$$

בנקודת שיווי משקל:

$$(u_1)'_{q_1} = (a - c_1 - q_1 - q_2) - q_1 = a - c_1 - 2q_1 - q_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_1^* = \frac{a - c_1 - q_2}{2} .$$

בנקודת שיווי משקל:

$$(u_2)'_{q_1} = (a - c_2 - q_1 - q_2) - q_2 = a - c_2 - 2q_1 - q_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_2^* = \frac{a - c_2 - q_1}{2} .$$

נציב התנאי השני בתנאי הראשון:

$$q_1^* = \frac{a - c_1 - q_2}{2} = q_1^* = \frac{a - c_1 - \left(\frac{a - c_2 - q_1}{2}\right)}{2} = \frac{a}{4} - \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4} + \frac{q_1^*}{4} \Rightarrow \frac{3q_1^*}{4} = \frac{a}{4} - \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4} = \frac{a - 2c_1 + c_2}{4}$$

$$\Rightarrow q_1^* = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3}.$$

נציב זה בביטוי ל- q_2^* ונקבל

$$q_2^* = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3}.$$

$$2c_2 > a + c_1 \Rightarrow a - 2c_2 + c_1 < 0 \Rightarrow \frac{a - 2c_2 + c_1}{3} < 0.$$

לכן בהכרח $q_2 = 0$ בגלל כמות לא יכולה להיות שלילית.