

שיעור 5

תכונות סגירות של R ו- RE

5.1 הגדרה של השפות R ו- RE

הגדרה 5.1 R

אוסף השפות הכריעות מסומן R ומוגדר

$$R = \{L \subseteq \Sigma^* : L \text{ מכריעה את } L\}.$$

הגדרה 5.2 RE

אוסף השפות הקבילות מסומן R ומוגדר

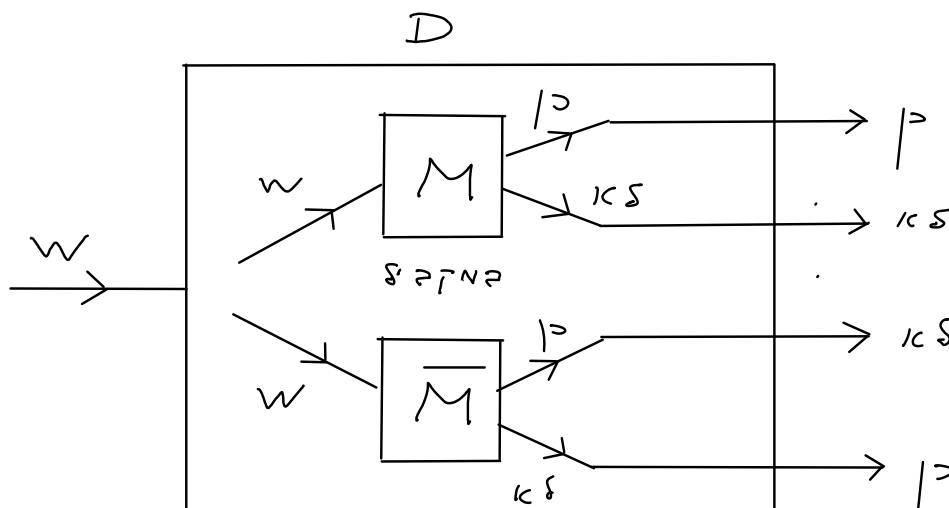
$$RE = \{L \subseteq \Sigma^* : L \text{ מקבלת את } L\}.$$

למה 5.1

אם $L \in RE$ וגם $\bar{L} \in RE$ אזי $L \in R$.

הוכחה: תהי M מ"ט המקבלת את L ותהי \bar{M} מ"ט המקבלת את \bar{L} .

נבנה מ"ט D המכריעה את L .



$D =$ על קלט w :

(1) D מעתיקה את w לסרט נוסף.

(2) מריצה במקביל את M על w ואת \bar{M} על העותק של w .

• אם M מקבלת $D \Leftarrow$ מקבלת.

• אם \bar{M} מקבלת $D \Leftarrow$ דוחה.

• אם M דוחה $D \Leftarrow$ דוחה.

• אם \bar{M} דוחה $D \Leftarrow$ מקבלת.

נוכיח כי D מכריעה את L .

אם $w \in L$

$w \in L(M) \Leftarrow$

$\Leftarrow (M \text{ מקבלת את } w) \text{ או } (\bar{M} \text{ דוחה את } w)$

$\Leftarrow D \text{ עוצרת ומקבלת את } w$.

אם $w \notin L$

$w \in \bar{L} \Leftarrow$

$\Leftarrow w \in L(\bar{M})$

$\Leftarrow (\bar{M} \text{ מקבלת את } w) \text{ או } (M \text{ דוחה את } w)$

$\Leftarrow D \text{ עוצרת ודוחה את } w$.



משפט 5.1 סגירות של השפות הכריעות

השפות הכריעות R סגורות תחת:

(1) איחוד

(2) חיתוך

(3) משלים

(4) שרשור

(5) סגור קליין

משפט 5.2 סגירות של השפות הקבילות

השפות הכריעות R סגורות תחת:

(1) איחוד

(2) חיתוך

(3) שרשור

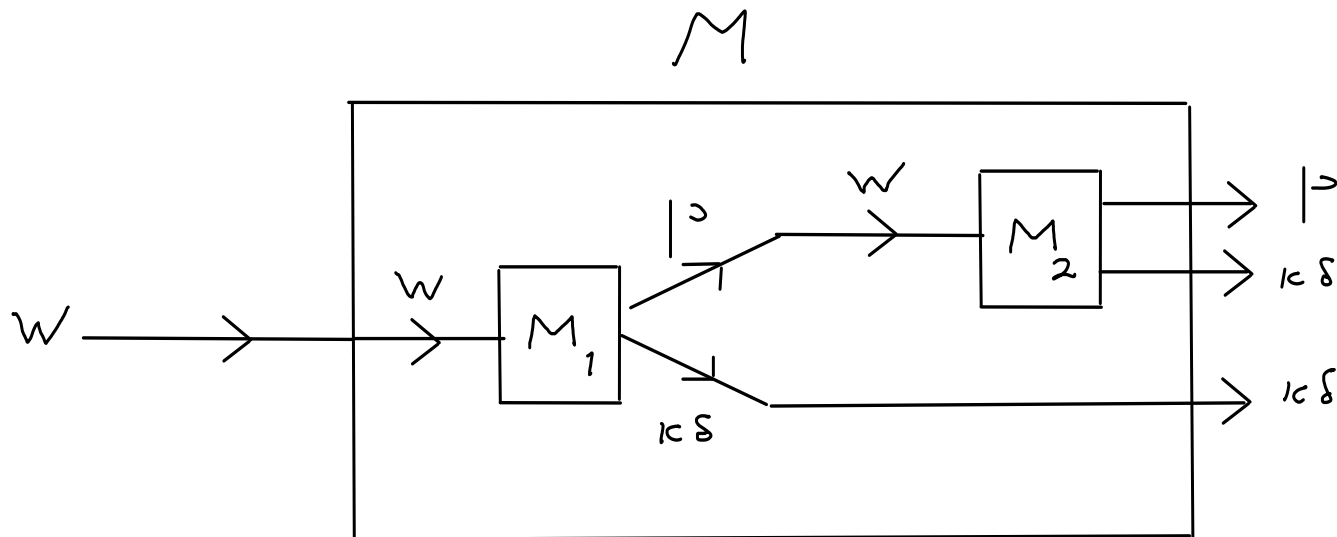
(4) סגור קליין

(1) חיתוך:

(א) סגורה תחת חיתוך

נוכיח כי לכל שתי שפות $L_1, L_2 \in R$ מתקיים $L_1 \cap L_2 \in R$.

תהי M_1 ו- M_2 מ"ט המכריעות את L_1 ו- L_2 בהתאמה. נבנה מ"ט M המכריעה את $L_1 \cap L_2$.



תאור הבנייה

$M = \text{"על קלט } w$:

(1) M מעתיקה את w לסרט נוסף.

(2) M מריצה את M_1 על w .

• אם M_1 דוחה $M \Leftarrow$ דוחה.

• אחרת M מריצה את M_2 על העותק של w ועונה כמוה.

נכונות:

נוכיח כי M מכריעה את $L_1 \cap L_2$.

אם $w \in L_1 \cap L_2$

$w \in L_1$ וגם $w \in L_2 \Leftarrow$

M_1 מקבלת את w וגם M_2 מקבלת את $w \Leftarrow$

M מקבלת את $w \Leftarrow$

אם $w \notin L_1 \cap L_2$

$w \notin L_1$ או $w \notin L_2 \Leftarrow$

M_1 דוחה את w או M_2 דוחה את $w \Leftarrow$

M דוחה את $w \Leftarrow$

RE סגורה תחת חיתוך (ב)

נוכיח כי לכל שתי שפות $L_1, L_2 \in RE$ מתקיים $L_1 \cap L_2 \in RE$.

תהיינה M_1 ו- M_2 שתי מכונות טיורינג המקבלות את L_1 ו- L_2 בהתאמה.
נבנה מ"ט M המקבלת את $L_1 \cap L_2$ באותו אופן כמו (א).

(2) איחוד:

R סגורה תחת איחוד (א)

נוכיח כי לדל שתי שפות $L_1, L_2 \in R$ מתקיים $L_1 \cup L_2 \in R$.

תהיינה M_1 מ"ט המכריעה את L_1 ו- M_2 מ"ט המכריעה את L_2 .
נבנה מ"ט M המכריעה את $L_1 \cup L_2$.

תאור הבנייה

$$M = \text{"על קלט } w$$

(1) M מעתיקה את w לסרט נוסף.

(2) M מריצה את M_1 על w .

• אם M_1 מקבלת $\Leftarrow M$ מקבלת.

• אחרת, M מריצה את M_2 על העותק של w ועונה כמוה.

RE סגורה תחת איחוד (ב)

נוכיח כי לכל שתי שפות $L_1, L_2 \in RE$ מתקיים $L_1 \cup L_2 \in RE$.

תהיינה M_1 מ"ט המקבלת את L_1 ו- M_2 מ"ט המקבלת את L_2 .
נבנה מ"ט א"ד M המקבלת את $L_1 \cup L_2$.

תאור הבנייה

$$M = \text{"על קלט } w$$

(1) M בוחרת באופן א"ד $i \in \{1, 2\}$.

(2) M מריצה את M_i על w ועונה כמוה.

(3) שרשור:

R סגורה תחת שרשור (א)

נוכיח כי לכל שתי שפות $L_1, L_2 \in R$ מתקיים $L_1 \cdot L_2 \in R$ כאשר

$$L_1 \cdot L_2 = \{w = w_1w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}.$$

תהיינה M_1 מ"ט המכריעה את L_1 ו- M_2 מ"ט המכריעה את L_2 .
נבנה מ"ט א"ד M המכריעה את $L_1 \cdot L_2$.

תאור הבנייה

$$M = \text{על קלט } w$$

(1) M בוחרת באופן א"ד חלוקה של w ל- $w = w_1 w_2$.

(2) M מריצה את M_1 על w_1 .

• אם M_1 דוחה $\Leftarrow M$ דוחה.

• אחרת, M מריצה את M_2 על w_2 ועונה כמוה.

(ב) RE סגורה תחת שרשור

RE סגורה תחת שרשור באותו אופן כמו ב- (א)

(4) * קליני

(א) R סגורה תחת * קליני

נוכיח כי לכל שפה L :

$$L \in R \Rightarrow L^* R$$

כאשר

$$L^* = \{w = w_1 w_2 \cdots w_k \mid \forall 1 \leq i \leq k, w_i \in L\}.$$

תהי M מ"ט המכריעה את L .

נבנה מ"ט M^* א"ד המכריעה את L^* .

תאור הבנייה

$M^* =$ על קלט w :

(1) אם $w = \varepsilon$ אז M^* מקבלת.

(2) אחרת M^* בוחרת באופן א"ד חלוקה של w ל- $w = w_1 \cdots w_k$.

(3) לכל $1 \leq i \leq k$:

M^* מריצה את M על w_i .

• אם M דוחה את w_i אז M^* דוחה.

• אחרת חוזרים לשלב (3).

(4) אם M קיבלה את כל המחרוזות $\{w_i\}$ אזי M^* מקבלת.

(ב) RE סגורה תחת * קליני

(5) משלים

(א) R סגורה תחת המשלים

נוכיח כי

$$L \in R \Rightarrow \bar{L} \in R,$$

כאשר

$$\bar{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}.$$

תהי M מ"ט המכריעה את L .

נבנה מ"ט \bar{M} המכריעה את \bar{L} .

$\bar{M} =$ על קלט w :

(1) \bar{M} מריצה את M על w .

• אם M מקבלת $\bar{M} \Leftarrow$ דוחה.

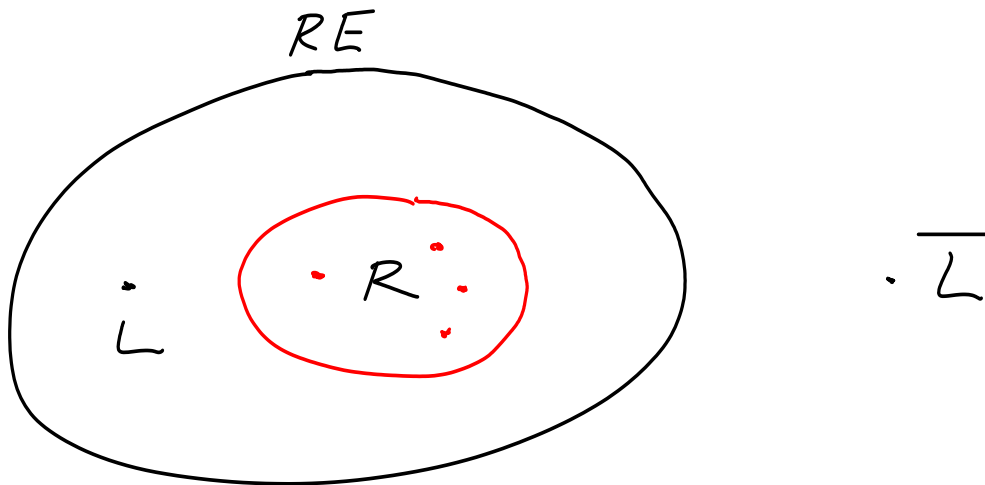
• אם M דוחה $\bar{M} \Leftarrow$ מקבלת.

(ב) RE אינה סגורה תחת המשלים

■

משפט 5.3 RE אינה סגורה תחת המשלים

$$L \in RE \setminus R \Rightarrow \bar{L} \notin RE.$$



הוכחה:

נניח כי $L \in RE \setminus R$ ונניח בשלילה כי $\bar{L} \in RE$.

אזי לפי טענת עזר (למה 5.1), $L \in R$ וזו סתירה.

■