

שיעור 1

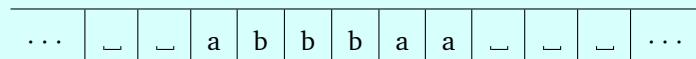
מכונות טיורינג

1.1 הגדרה של מכונת טיורינג

הגדרה 1.1 מכונת טיורינג (הגדרה היריסטיבית)

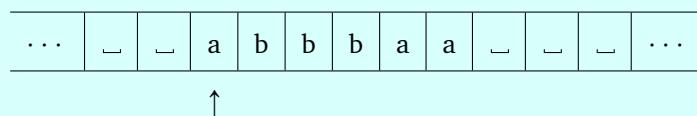
הקלט והסרט

- מכונת טיורינג (מ"ט) קורא קלט.
- הקלט עצמו נמצא על סרט אינסופי מוחלך למשבצות.
- כל TWO של הקלט כתוב במשבצת אחת של הסרט.
- במכונת טיורינג אנחנו מניחים שהסרט אינסופי לשני הצדדים.
- * משמאל לתחילת הקלט יש רצף אינסופי של TWO רווח " ".
- * מימין לסוף הקלט יש רצף אינסופי של TWO רווח " ".



הראש

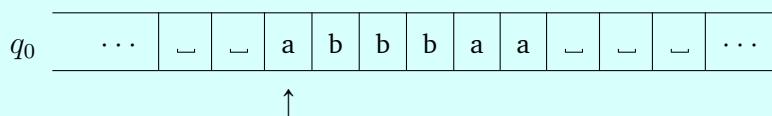
- במצב ההתחלתי הראש בקצה השמאלי של הקלט.



- הראש יכול לאוז ימינה על הסרט וגם שמאלה על הסרט.
- הראש קורא את התוכן של המשבצת שבה הוא נמצא.
- הראש יכול לכתוב על משבצת, אבל רק על המשבצת שבה הראש נמצא.

תאור העבודה של המכונה

- בתחלת הריצה, הקלט כתוב בתחלת הסרט כאשר מימינו נמצא רצף אינסופי של TWO -ים.
- הראש מצביע על התא הראשוני בסרט והמכונה נמצאת במצב התחלתי q_0 .



- בכל צעד חישוב, בהתאם במצב הנוכחי ולאות שמתוחת לראש (התו הנקרא), המכונה מחליטה:
 - * לאיזה מצב לעבור
 - * מה לכתוב מתחת לראש (התו הנכתב)
 - * לאן להזיז את הראש (תא אחד ימינה, או תא אחד שמאלה, או להישאר במקום).
- המכונה ישם שני מצבים מיוחדים:
 - * q_{acc} : אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל- q_{acc} היא עוברת ומקבלת.
 - * q_{rej} : אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל- q_{rej} היא עוברת ודוחה.
- אם המכונה לא מגיעה ל- q_{acc} או q_{rej} היא תמשיך לרוץנצח.

הגדרה 1.2 מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר:

Q	קבוצת מצבים סופית ולא ריקה
Σ	אלפבית הקלט
Γ	אלפבית הסרט
δ	פונקציית המעברים
q_0	מצב התחלתי
q_{acc}	מצב מקבל יחיד
q_{rej}	מצב דוחה יחיד

דוגמה 1.1

נבנה מכונת טיורינג אשר מקבלת מילה אם היא בשפה

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#a_w = \#b_w\}.$$

ז"א השפט כל המילים עם מספר שווה אותיות a ו b . הפאודו-קוד של המכונה, כדלקמן.**פאודו-קוד**

1) סורקים את הקלט משמאול לימין.

- אם לא מצאנו a וגם לא מצאנו $b \Leftarrow$ מקבלת.
- אם האות הראשונה שהראשאש מצא היא a , כתובים עליו ✓, וועברים לשלב 2).
- אם האות הראשונה שהראשאש מצא היא b , כתובים עליו ✓, וועברים לשלב 3).

2) ממשיכים לוזז ימינה עד שנמצא a תואם.

- אם לא מצאנו $a \Leftarrow$ דוחה.
- אם מצאנו a כתובים עליו ✓, חוזרים לתחילת הקלט וחוזרים לשלב 1).

3) ממשיכים לוזז ימינה עד שנמצא a תואם.

- אם לא מצאנו $a \Leftarrow$ דוחה.
- אם מצאנו a כתובים עליו ✓, חוזרים לIntialized הקלט וחוזרים לשלב 1).

כעת נתן הגדרה פורמלית של המכונת טיורינג שמבצעת את האלגוריתם זהה.

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר Q הקבוצת המצביעים הבאה:

$$Q = \{q_0, q_a, q_b, q_{\text{back}}, q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}\}.$$

המשמעותם של כל המצביעים נרשומים בטבלה למטה:

q_0	ה מצב ההתחלתי. אליו נוחזר אחרי כל סבר התאמה של זוג אותיות.
q_a	מצב שבו ראיינו a ומחפשים a תואם.
q_b	מצב שבו ראיינו b ומחפשים a תואם.
q_{back}	מצב שנשתמש בו כדי לחזור לказה השמאלי של הקלט ולהתחל את הסריקה הבא (סבר התאמה הבא).
q_{acc}	מצב מקבל.
q_{rej}	מצב דוחה.

האלפבית של הקלט, Σ , והלפבית של הסרט, Γ , הינם:

$$\Sigma = \{a, b\} , \quad \Gamma = \{a, b, _, \checkmark\} .$$

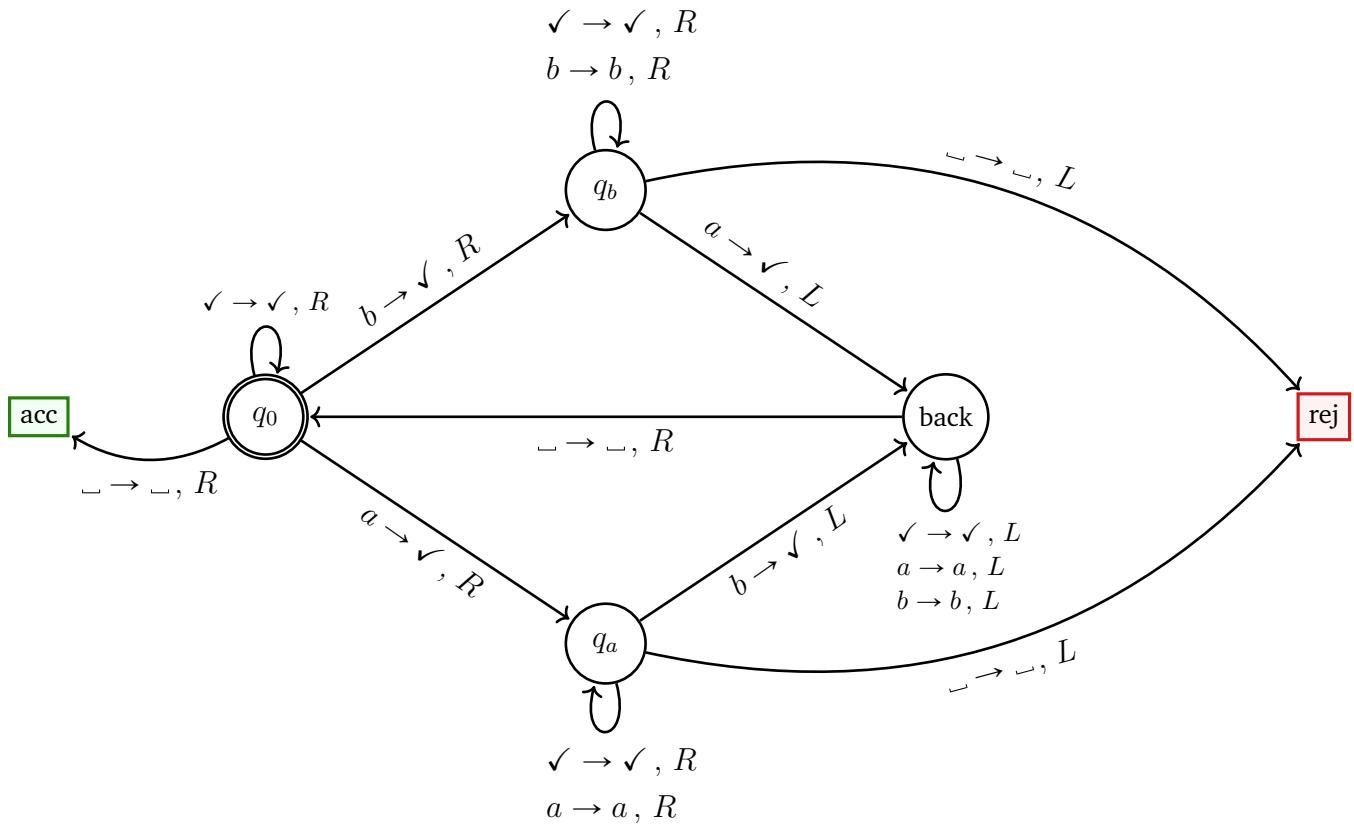
הfonקציית המעברים מוגדרת כדלקמן.

$$\begin{aligned}\delta(q_0, a) &= (q_a, \checkmark, R) , \\ \delta(q_0, b) &= (q_b, \checkmark, R) , \\ \delta(q_0, _) &= (q_{\text{acc}}, _, R) , \\ \delta(q_a, \checkmark) &= (q_a, \checkmark, R) , \\ \delta(q_a, a) &= (q_a, a, R) , \\ \delta(q_a, b) &= (q_{\text{back}}, \checkmark, L) , \\ \delta(q_b, \checkmark) &= (q_b, \checkmark, R) , \\ \delta(q_b, b) &= (q_a, b, R) , \\ \delta(q_b, a) &= (q_{\text{back}}, \checkmark, L) .\end{aligned}$$

לעתים קל יותר לרשום את פונקציית המעברים δ כטבלה:

$Q \setminus \Gamma$	a	b	$_$	\checkmark
q_0	(q_a, \checkmark, R)	(q_b, \checkmark, R)	$(q_{\text{acc}}, _, R)$	(q_0, \checkmark, R)
q_a	(q_a, a, R)	$(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$	$(q_{\text{rej}}, _, L)$	(q_a, \checkmark, R)
q_b	$(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$	(q_b, b, R)	$(q_{\text{rej}}, _, L)$	(q_b, \checkmark, R)
q_{back}	(q_{back}, a, L)	(q_{back}, b, L)	$(q_0, _, R)$	$(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$

תרשים מצבאים

**דוגמה 1.2**

בדקו אם המוכנת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה `aab`.

פתרונות:

—	q_0	a	a	b	—
—	✓	q_a	a	b	—
—	✓	a	q_a	b	—
—	✓	q_{back}	a	✓	—
—	q_{back}	✓	a	✓	—
q_{back}	—	✓	a	✓	—
—	q_0	✓	a	✓	—
—	✓	q_0	a	✓	—
—	✓	✓	q_a	✓	—
—	✓	✓	✓	q_a	—
—	✓	✓	✓	rej	✓

דוגמה 1.3

בדקו אם המוכנת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה `abbbbaaa`.

פתרונות:

	q_0	a	b	b	b	a	a	
	✓	q_a	b	b	b	a	a	
	q_{back}	✓	✓	b	b	a	a	
q_{back}	—	✓	✓	b	b	a	a	
	q_0	✓	✓	b	b	a	a	
	✓	q_0	✓	b	b	a	a	
	✓	✓	q_0	b	b	a	a	
	✓	✓	✓	q_b	b	a	a	
	✓	✓	✓	b	q_b	a	a	
	✓	✓	✓	q_{back}	b	✓	a	
	✓	✓	q_{back}	✓	b	✓	a	
	q_{back}	✓	✓	✓	b	✓	a	
q_{back}	—	✓	✓	✓	b	✓	a	
	q_0	✓	✓	✓	b	✓	a	
	✓	q_0	✓	✓	b	✓	a	
	✓	✓	q_0	✓	b	✓	a	
	✓	✓	✓	q_0	b	✓	a	
	✓	✓	✓	✓	q_b	✓	a	
	✓	✓	✓	✓	q_b	a		
	✓	✓	✓	q_{back}	✓	✓	✓	
	✓	✓	q_{back}	✓	✓	✓	✓	
	✓	q_{back}	✓	✓	✓	✓	✓	
q_{back}	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
	q_0	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
	✓	q_0	✓	✓	✓	✓	✓	
	✓	✓	q_0	✓	✓	✓	✓	
	✓	✓	✓	q_0	✓	✓	✓	
	✓	✓	✓	✓	q_0	✓	✓	
	✓	✓	✓	✓	q_0	✓	✓	
	✓	✓	✓	✓	✓	✓	q_0	
	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	q_0

— ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ — q_{acc}

הגדרה 1.3 קונפיגורציה

תהי $M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג. **קונפיגורציה** של M הינה מחרוזת

uqv

כאשר משמעות:

$$u, v \in \Gamma^*, \quad \sigma \in \Gamma, \quad q \in Q.$$

q	מצב המכוна,
σ	הסימן במיקום הראש
u	תוכן הסרט משמאל לראש,
v	תוכן הסרט מימין לראש.

דוגמה 1.4 (המשך של דוגמה 1.2)

u	q	σ	v
—	q_0	a	a b —
—✓	q_a	a	b —
—✓ a	q_a	b	—
—✓	q_{back}	a	✓ —
—	q_{back}	✓	a ✓ —
—	q_{back}	—	✓ a ✓ —
—	q_0	✓	a ✓ —
—✓	q_0	a	✓ —
—✓ ✓	q_a	✓	—
—✓ ✓ ✓	q_a	—	—
—✓ ✓	q_{rej}	✓	—

דוגמה 1.5

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת כל מילה בשפה

$$L = \{a^n \mid n = 2^k, k \in \mathbb{N}\}$$

ז"א מילים בעלי מספר אותיות a אשר חזקה של 2.

פתרונות:

ראשית נשים לב למשפט הבא:

משפט 1.1

מספר שלם n שווה לחזקה אי-שלילית של 2, כלומר ($k \geq 0$) אם ורק אם קיים שלם m עבورو חילוק של n ב- 2 בדיקת m פעמיים נותנת 1.

כיוון

$$\text{אם } \frac{n}{2^k} = 1 \text{ או } n = 2^k \ (k \geq 0)$$

כיוון

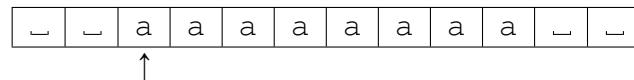
■ אם קיימ $m \geq 0$ עבורו $1 = 2^m$ או $n = 2^m$ ולכן n שווה לחזקה אי-שלילית של 2.

לאור המשפט הזה נבנה אלגוריתם אשר מחלק את מספר האותיות במילה ב- 2 שוב ושוב בצורה איטרטיבית.

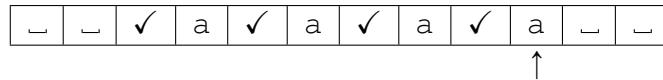
- אם אחרי סיבוב מסוים קיבל מספר אי-זוגי שונה מ- 1, אז אין מצב שמספר האותיות a הוא חזקה של 2.
- בצד שני אם אחרי סיבוב כלשהו קיבל בדיק a אחת הנשארת, "א" אחרי מספר מסוים של חילוקים של המספר אותיות a קיבלנו 1, אז מובטח לנו שהמספר של אותיות a הוא שווה לחזקה של 2.

כעת נסביר כיצד המכונה טיריניג מבצעת את השיטה הזאת בפועל כלהלן.

1) במצב ההתחלתי יש מחרוזת של רצף אותיות a כתובה על הסרט והראש נמצא מתחת האות הראשונה.



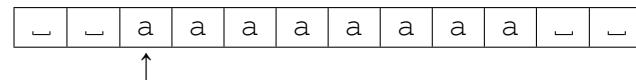
2) עוברים על הקלט משמאלי לימין ומבצעים מחיקה לシリוגין של האות a . כמובן, אותן אחת נמחק ואות אחרת נשאיר וכן הלאה, עד שמנגנים לכמה הימין של המילה.



3) אחרי שהראש הגיע לסוף המילה:

- אם מצאנו אותן a אחת בדיק \Leftarrow המכונה תקבל.
- אם כתוב ✓ בתו האחרון \Leftarrow המכונה תדחה.
- אחרת, אם כתוב a בתו האחרון הרושן חוזר לתחילת המחרוזת וחזריים לשלב 2.

כדוגמה של מילה המתקיים על ידי האלגוריתם, למטה רשומות האיטרציות של האלגוריתם הזה על המילה 8 אותיות a). במצב ההתחלתי הסרט נראה כדלקמן.



איטרציה 1) לבסוף האיטרציה $1 = i$ הסרט נראה כך:

התו האחרון a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

איטרציה 2) בסוף האיטרציה $2 = i$ הסרט נראה כך:

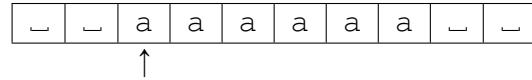
התו הראשון הוא a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

איטרציה 3) לאחר האיטרציה $3 = i$ הסרט נראה כך:

התו האחרון הוא a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

איטרציה 4) באיטרציה $4 = i$ יש אותן a אחת בדיק \Leftarrow המכונה מקבלת.

כדוגמה של מילה הלא המתקבלת על ידי האלגוריתם, למטה רשומות האיטרציות של האלגוריתם זהה על המילה $w = aaaaaa$ (6 אותיות a).
במצב ההתחלתי הסרט נראה כדלקמן.



איטרציה 1) לבסוף האיטרציה $i = 1$ הסרט נראה כך:
הטו האחרון a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

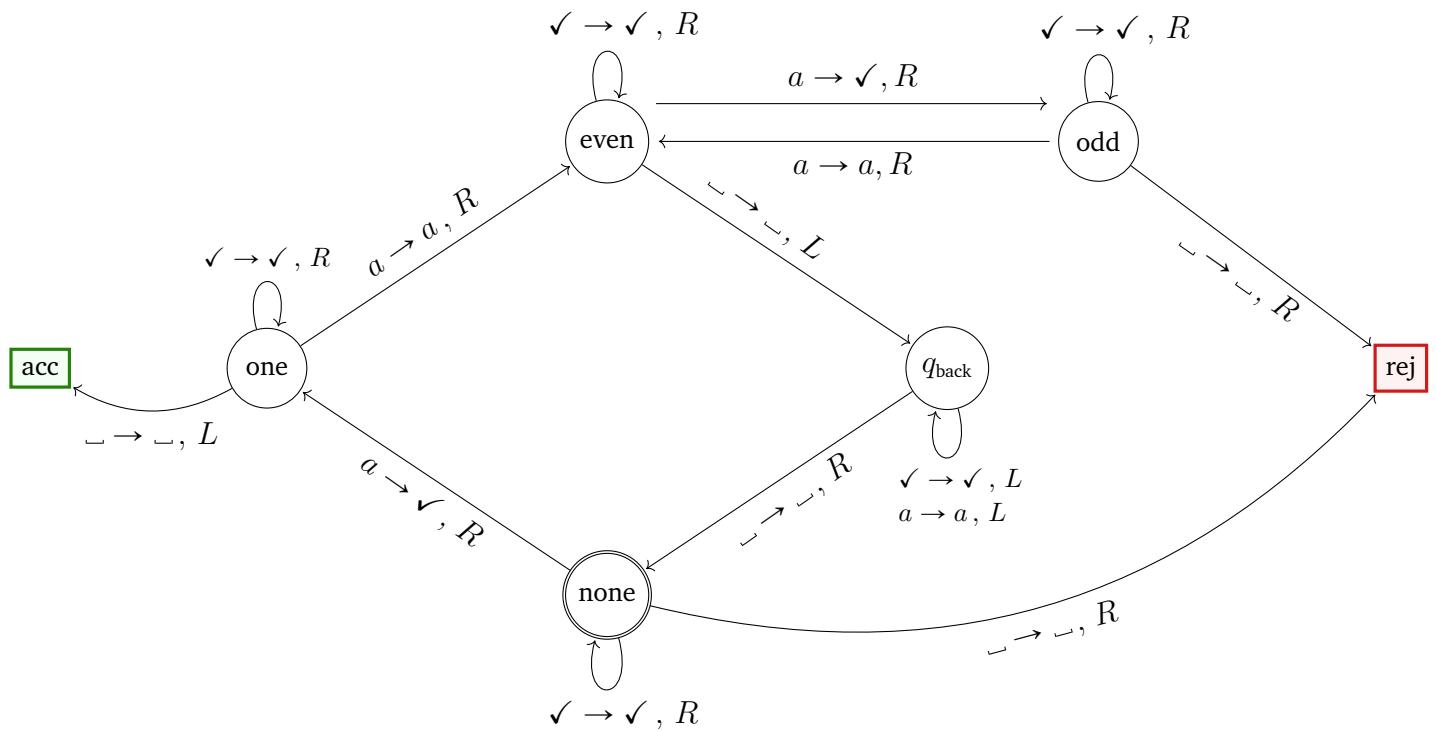
איטרציה 2) לבסוף האיטרציה $i = 2$ הסרט נראה כך:
הטו הראשון הוא \checkmark אז דוחה.

כעת נתן הגדרה פורמלית של המכונת טירונג שמקבלת השפה הזאת:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej}) ,$$

כאשר $Q = \{q_0, \text{one}, \text{even}, \text{odd}, q_{acc}, q_{rej}\}$, $\Gamma = \{a, _, \checkmark\}$, והקובוצת המצבים היא $\Sigma = \{a, _, \checkmark\}$ כאשר המשמעותם הם מפורטים למטה:

- מצב none: מצב התחלתי. עדין לא קראנו a כתוצאה זה.
- מצב one: קראנו a בודד.
- הfonקציית המעברים מתוארת על ידי התרשים
- מצב even: קראנו מספר זוגי של a .
- מצב odd: קראנו מספר אי-זוגי של a .
- מצב q_{back} : חזרה של מלאה.
- מצבים למטה.



דוגמה 1.6

בדקו אם המילה `aaaa` מתקבלת על ידי המכונת טיריניג בדוגמה 1.5.

פתרון:

„	none	a	a	a	a	„
„	✓	one	a	a	a	„
„	✓	a	even	a	a	„
„	✓	a	✓	odd	a	„
„	✓	a	✓	a	even	„
„	✓	a	✓	back	a	„
„	✓	a	back	✓	a	„
„	✓	back	a	✓	a	„
back	„	✓	a	✓	a	„
„	none	✓	a	✓	a	„
„	✓	none	a	✓	a	„
„	✓	✓	one	✓	a	„
„	✓	✓	✓	one	a	„
„	✓	✓	✓	a	even	„
„	✓	✓	✓	back	a	„
„	✓	✓	back	✓	a	„
„	✓	back	✓	✓	a	„
back	„	✓	✓	✓	a	„
„	none	✓	✓	✓	a	„
„	✓	none	✓	✓	a	„
„	✓	✓	none	✓	a	„
„	✓	✓	✓	none	a	„
„	✓	✓	✓	✓	one	„
„	✓	✓	✓	acc	✓	„

<i>u</i>	<i>q</i>	σ	v
„	none	a	aaa „
„ ✓	one	a	aa „
„ ✓ a	even	a	a „
„ ✓ a ✓	odd	a	„
„ ✓ a ✓ a	even	„	„
„ ✓ a ✓	back	a	„
„ ✓ a	back	✓	a „
„ ✓	back	a	✓ a „
„	back	✓	a ✓ a „
„	back	„	✓ a ✓ a „
„	none	✓	a ✓ a „
„ ✓	none	a	✓ a „
„ ✓ ✓	one	✓	a „
„ ✓ ✓ ✓	one	a	„

✓✓✓ a	even	—	—
✓✓✓	back	a	—
✓✓	back	✓ a	—
✓	back	✓	✓ a —
—	back	✓	✓✓ a —
—	back	—	✓✓✓ a —
—	none	✓	✓✓ a —
✓	none	✓	✓ a —
✓✓	none	✓	a —
✓✓✓	none	a	—
✓✓✓✓	one	—	—
✓✓✓	acc	✓	—

דוגמה 1.7

בדקו אם המילה aaa מתקבלת על ידי המוכנת טיריניג בדוגמה 1.5.

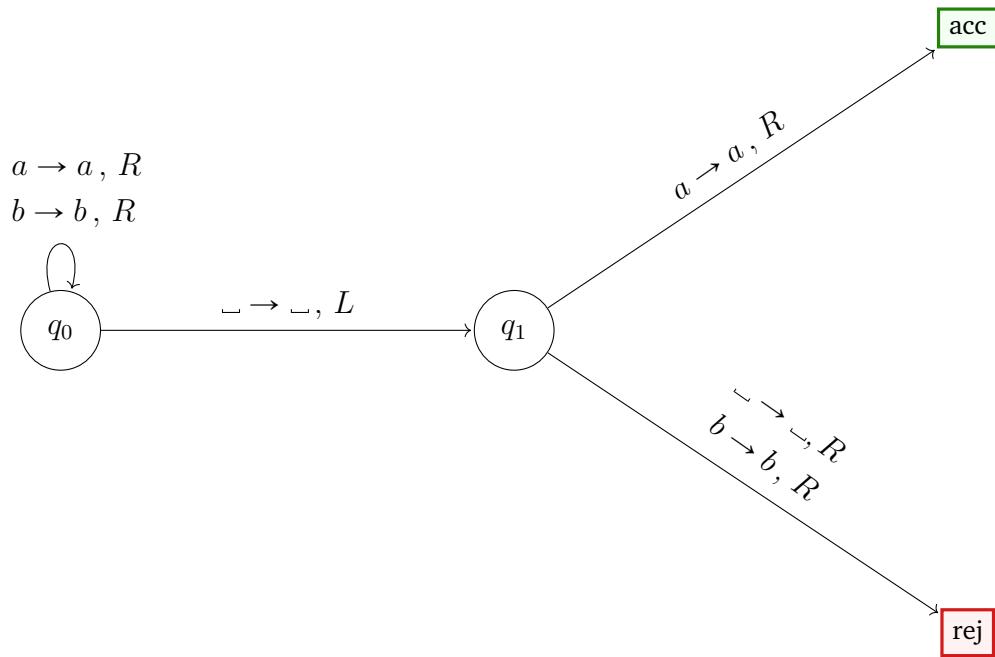
פתרונות:

—	none	a	a	a	—
—	✓	one	a	a	—
—	✓	a	even	a	—
—	✓	a	✓	odd	—
—	✓	a	✓	—	rej

<i>u</i>	<i>q</i>	σ	v
—	none	a	aa —
— ✓	one	a	a —
— ✓ a	even	a	—
— ✓ a ✓	odd	—	—
— ✓ a ✓ —	rej	—	—

דוגמה 1.8

מהי השפה של המוכנה למטה:

**פתרונות:**

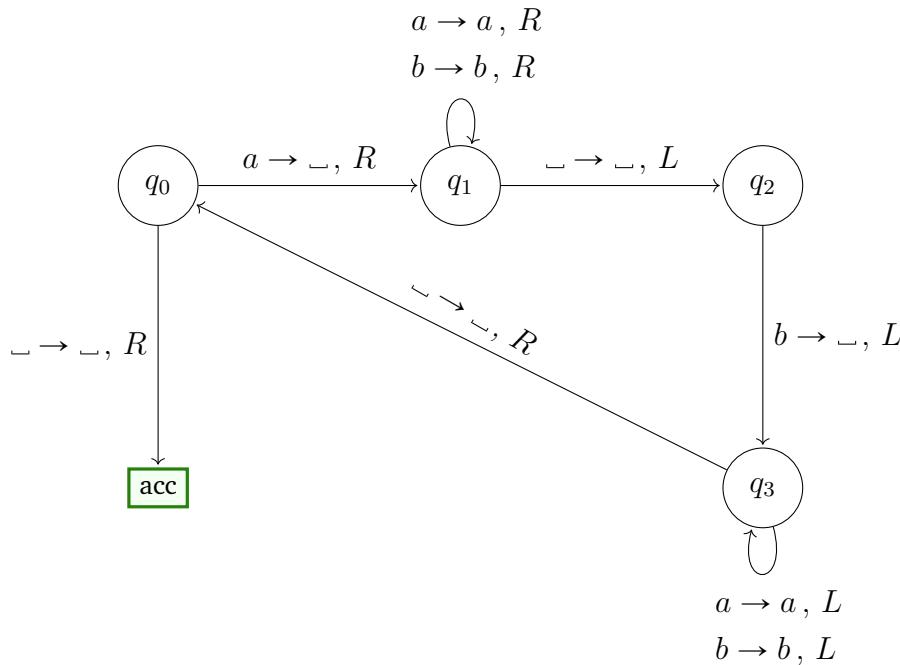
- 1) סורקים את הקלט משמאל לימין.
- אם הtau הנקרא a או b עוברים לtau ימינה הבא וחוזרים לשלב 1).
 - אם הtau הנקרא $_$ הגיעו לסוף הקלט, ועוברים לשלב 2).

2) עוברים שמאלה לtau הארון של המילה.

- אם הtau הנקרא $a \Leftarrow$ מקבל.
- אחרת דוחה.

לכן המכונה מקבלת שפת המילים המסתויימות באות a .**דוגמה 1.9**

מהי השפה של המכונה למטה:

**פתרונות:****1)** במצב ההתחלתי:

- אם הトー הנקרא $_$ \Leftarrow מקבל.
- אם הトー הנקרא a מורידים אותו על ידי $_$ וועברים לשלב 2).
- אחרת \Leftarrow דוחה.

2) עוברים ימינה עד שמנגנים לסוף המילה.

- אם הトー האחרון הוא b , מורידים אותו על ידי $_$, חוזרים לתחילת המילה וחוזרים לשלב 1).
- אחרת דוחה.

בכל איטרציה המכונה מורידהトー a בתחילת המילה וחזרת ומורידהトー b תואם בסוף המילה. בכל איטרציה אם המכונה לא מוצאת b תואם בסוף המילה היא דוחה המילה. אחרת אם המכונה לא דחתה המילה וכל האותיות נמחקוות אז המילה מתקבלת. לכן המכונה מקבלת שפת המילים

$$\{a^n b^n | n \geq 0\} .$$

הגדרה 1.4 גירה בצעד אחד

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ מכונת טיריניג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונגיגורציות של M . נסמן

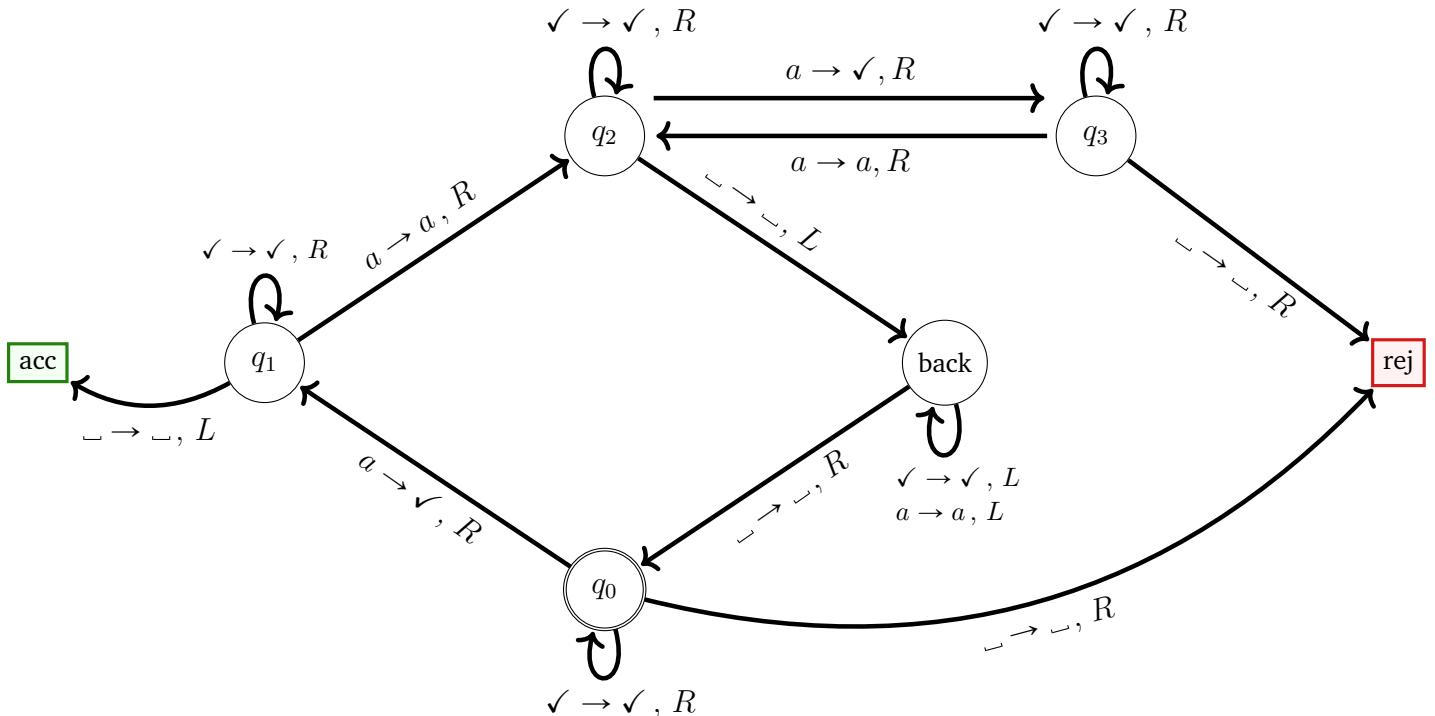
$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם כשנמצאים ב- c_1 עוברים ל- c_2 בצעד בודד.

דוגמה 1.10 (המשך של דוגמה 1.5)

עבור המكونת טיורינג שמתוארת בתרשים למטה מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$

**הגדרה 1.5 גירירה בכללי**

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מكونת טיורינג, ותהינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M . נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

אם ניתן לעבור מ- c_1 ל- c_2 ב- 0 או יותר צעדים.

דוגמה 1.11 (המשך של דוגמה 1.5)

עבור המكونת טיורинг שמתוארת בתרשים למטה מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M^* \checkmark \checkmark \checkmark q_4 a$$

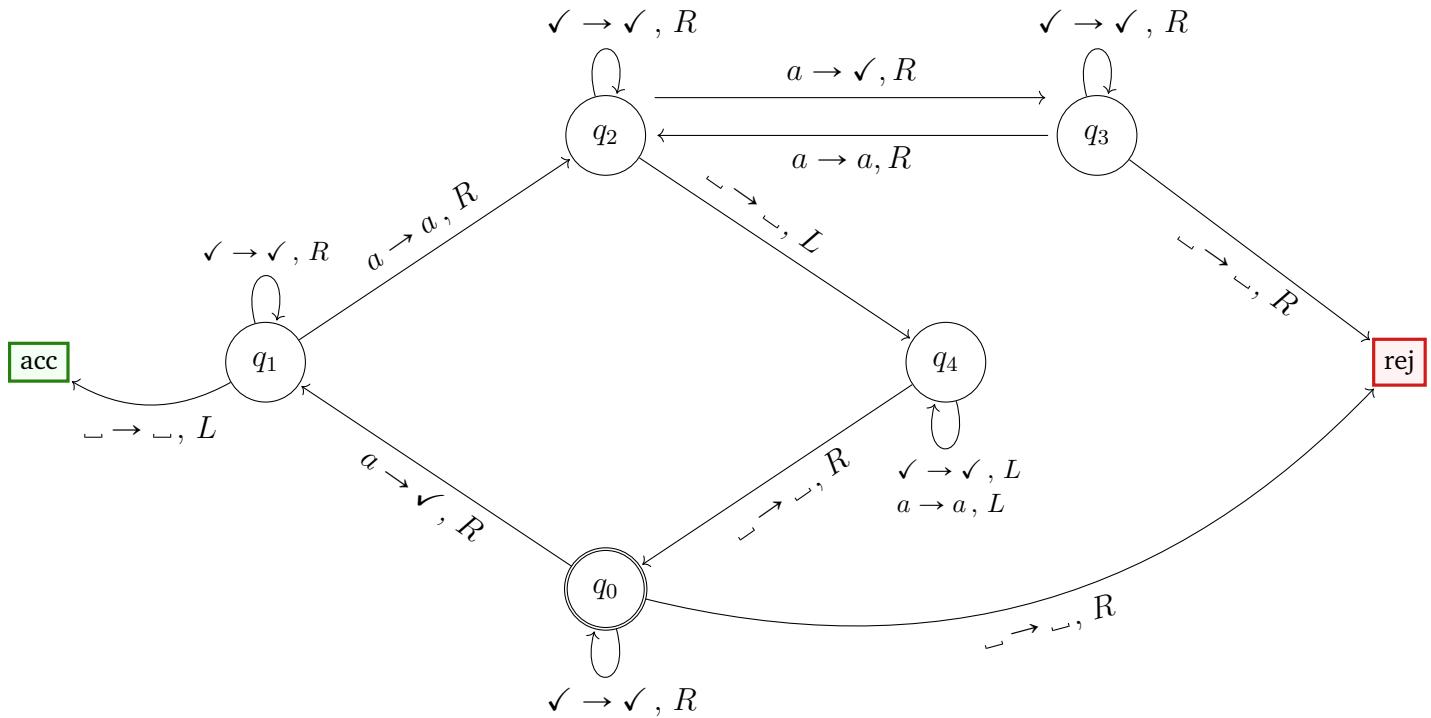
בגלל ש:

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark q_1 a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark a q_2 __$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark \checkmark q_4 a .$$



הגדרה 1.6 קבלת ודוחיה של מחרוזות

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $w \in \Sigma^*$ מחרוזת. אומרים כי:

- **מקבלת את w אם**

$$q_0 w \vdash_M^* u q_{\text{acc}} \sigma v$$

כאשר $\Gamma^* v, \sigma \in \Gamma$ כלשהם.

- **דוחה את w אם**

$$q_0 w \vdash_M^* u q_{\text{rej}} \sigma v$$

כאשר $\Gamma^* v, \sigma \in \Gamma$ כלשהם.

הגדרה 1.7 הכרעה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מכריעה** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים:

- M מקבלת את w .

- M דוחה את w .

הגדרה 1.8 קבלת של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מקבלת** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים:

- אם $w \in L$ מקבלת את w .

- אם $w \notin L$ לא מקבלת את w .

במקרה זה כאשר M מקבלת את השפה L , נכתב ש-

$$L(M) = L .$$

1.2 טבלת המעברים

דוגמה 1.12

בנו מכונה טיורינג שמכריעת את השפה

$$L = \{w = \{a, b, c\}^* \mid \#a_w = \#b_w = \#c_w\}$$

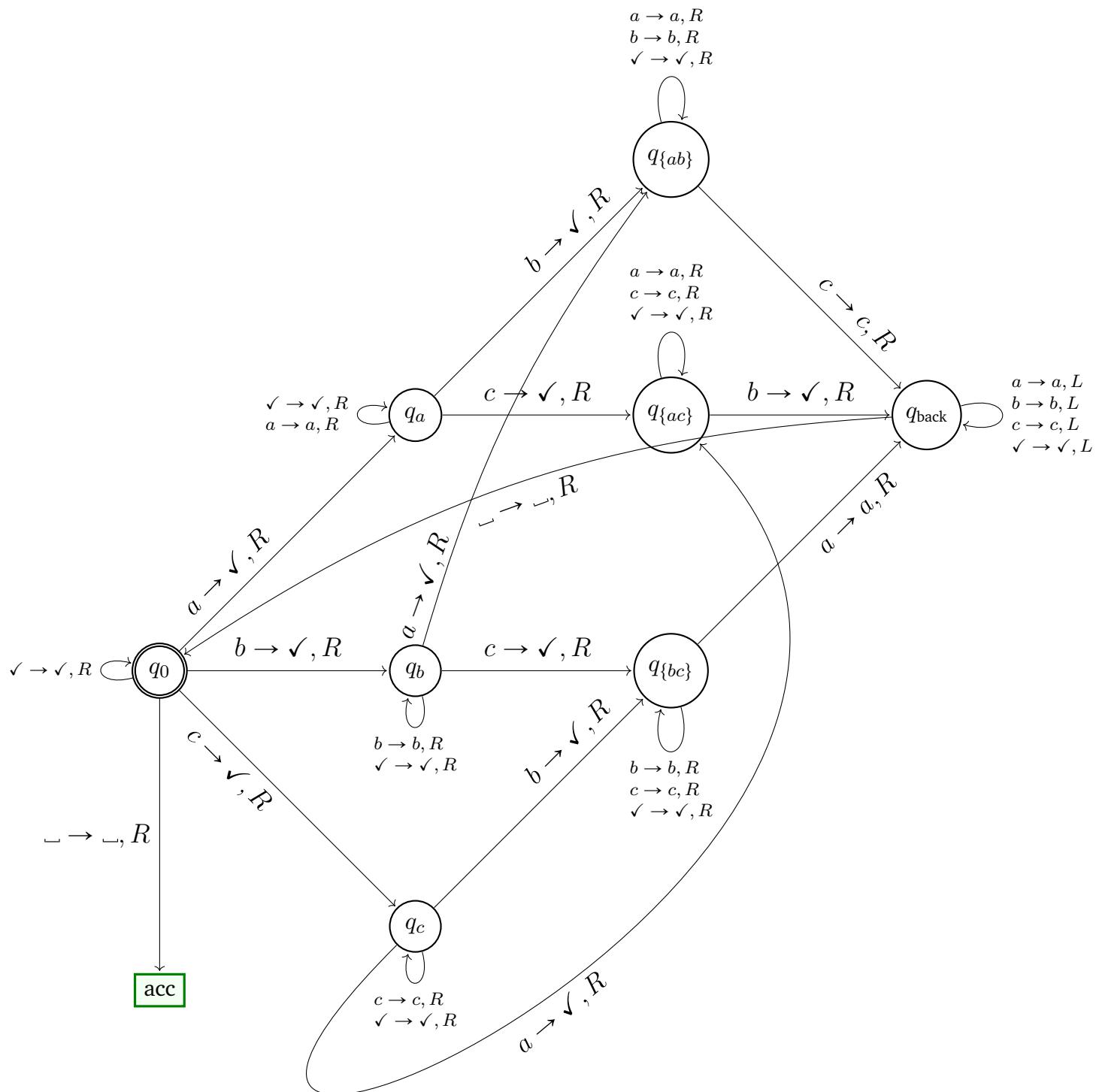
פתרון:

נתאר את המכונה על ידי הטבלת המעברים של המכונה. הסימן S מסמן כל זוג אותיות שונות מהקבוצה $\{a, b, c\}$ ללא חשיבות לסדר. ככלומר:

$$S = \{a, b\} , \quad S = \{b, c\} , \quad S = \{a, c\} .$$

מצב	מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזואה	תנאי
q_0	σ	$q.\sigma$		✓	R	$\sigma \in \{a, b, c\}$
$q.\sigma$	σ	$q.\sigma$		∅	R	$\sigma \in \{a, b, c\}$
$q.\sigma$	τ	$q.\{\sigma\tau\}$		✓	R	$\sigma, \tau \in \{a, b, c\} \wedge \sigma \neq \tau$
$q.S$	σ	$q.S$		σ	R	$\sigma \in S$
qS	σ	q_{back}		✓	L	$\sigma \notin S$
q_{back}	a, b, c, \checkmark	q_{back}		∅	L	
q_0	—	q_{acc}		∅	R	
q_{back}	a, b, c, \checkmark	q_{back}		∅	L	
q_{back}	—	q_0		∅	R	

כעת נתאר את המכונה על ידי תרשيم המצביעים של המכונה:



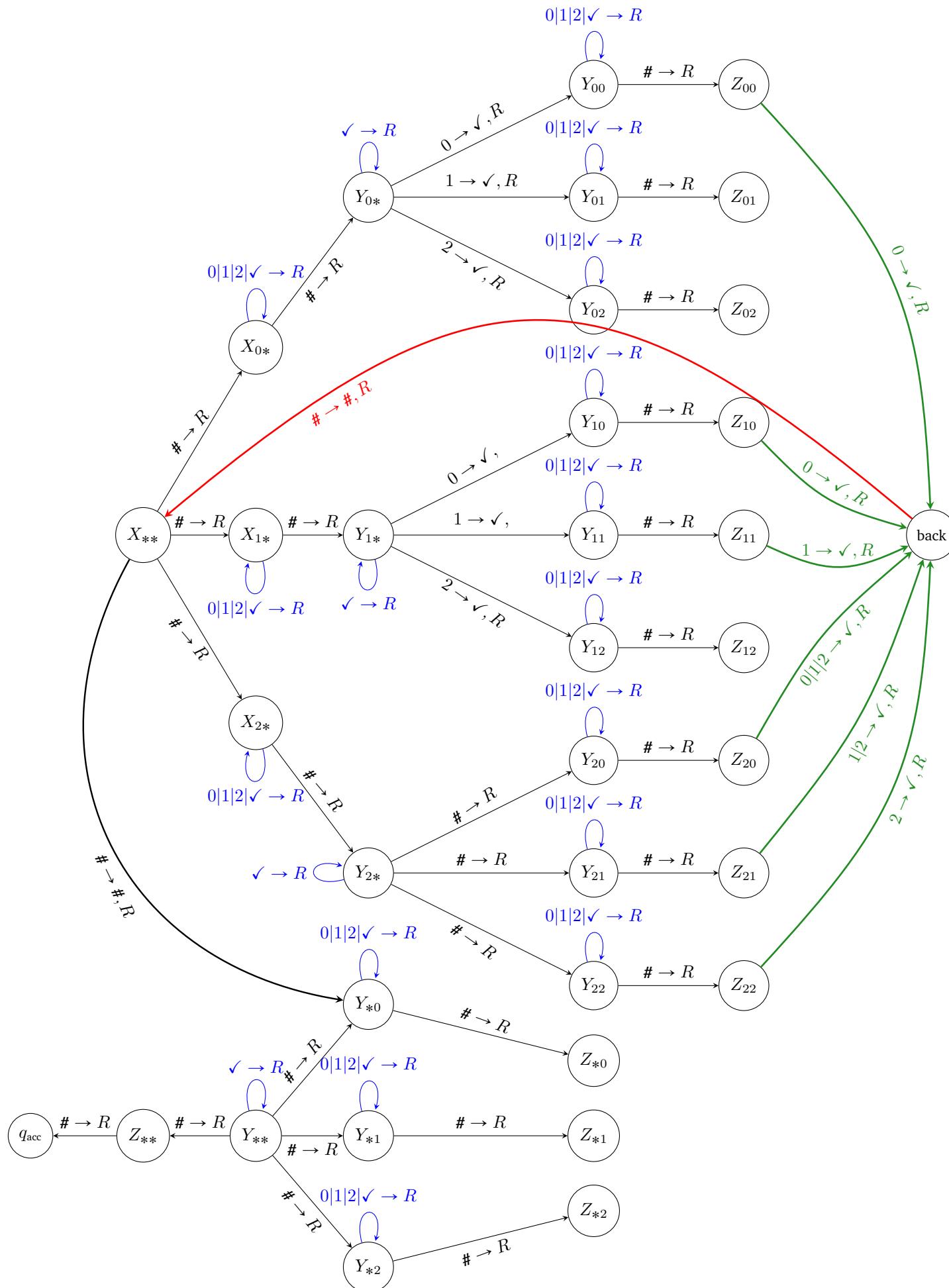
דוגמה 1.13

בנו מכונת טיורינג שמקreira את השפה

$$\{x_1 \dots x_k \# y_1 \dots y_k \# z_1 \dots z_k \mid x_i, y_i, z_i \in \{0, 1, 2\}, \forall i, x_i \geq z_i \geq y_i\}$$

פתרונות:

מצב	מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזואה	תנאי
$X * *$	σ	$X\sigma*$	✓	R		
$X * *$	✓	$X * *$	✓	R		
$X\sigma*$	0, 1, 2, ✓	$X\sigma*$	∅	R		
$X\tau*$	#	$Y\tau*$	∅	R		
$Y\tau*$	σ	$Y\tau\sigma$	∅	R		
$Y\tau*$	✓	$Y\tau*$	∅	R		
$Y\tau\sigma$	0, 1, 2, ✓	$Y\tau\sigma$	∅	R		
$Y\tau_1\tau_2$	#	$Z\tau_1\tau_2$	∅	R		
$Z\tau_1\tau_2$	✓	$Z\tau_1\tau_2$	∅	R		
$Z\tau_1\tau_2$	σ	q_{back}	✓	L		
$Z * *$	—	q_{acc}	∅	R	$\tau_1 \geq \sigma \geq \tau_2$	
q_{back}	0, 1, 2, ✓	q_{back}	∅	L		
q_{back}	—	$X * *$	∅	R		



1.3 חישוב פונקציות

הגדרה 1.9 מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה f

תהי $\Sigma_2^* \rightarrow \Sigma_1^*$ ותהי $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ מכונת טיורינג $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ המכונה טיורינג אם:
אומרים כי M מחשבת את f אם:

- $\Sigma_2 \subset \Gamma$ ו- $\Sigma = \Sigma_1$.
- לכל $q_0 w \vdash q_{\text{acc}}, f(w) \in \Sigma_1^*$ מתקיים.

דוגמה 1.14 חיבור אונרי

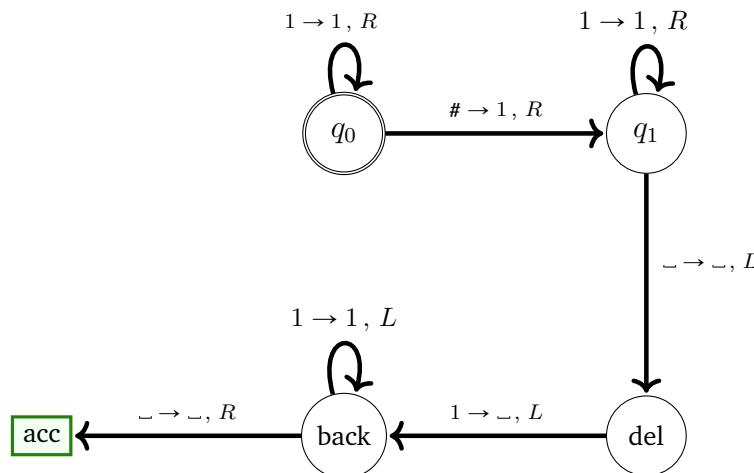
בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i \# 1^j$$

ומחזירה את פלט

$$1^{i+j}.$$

פתרונות:



דוגמה 1.15 כפל אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i \# 1^j$$

ומחזירה את פלט

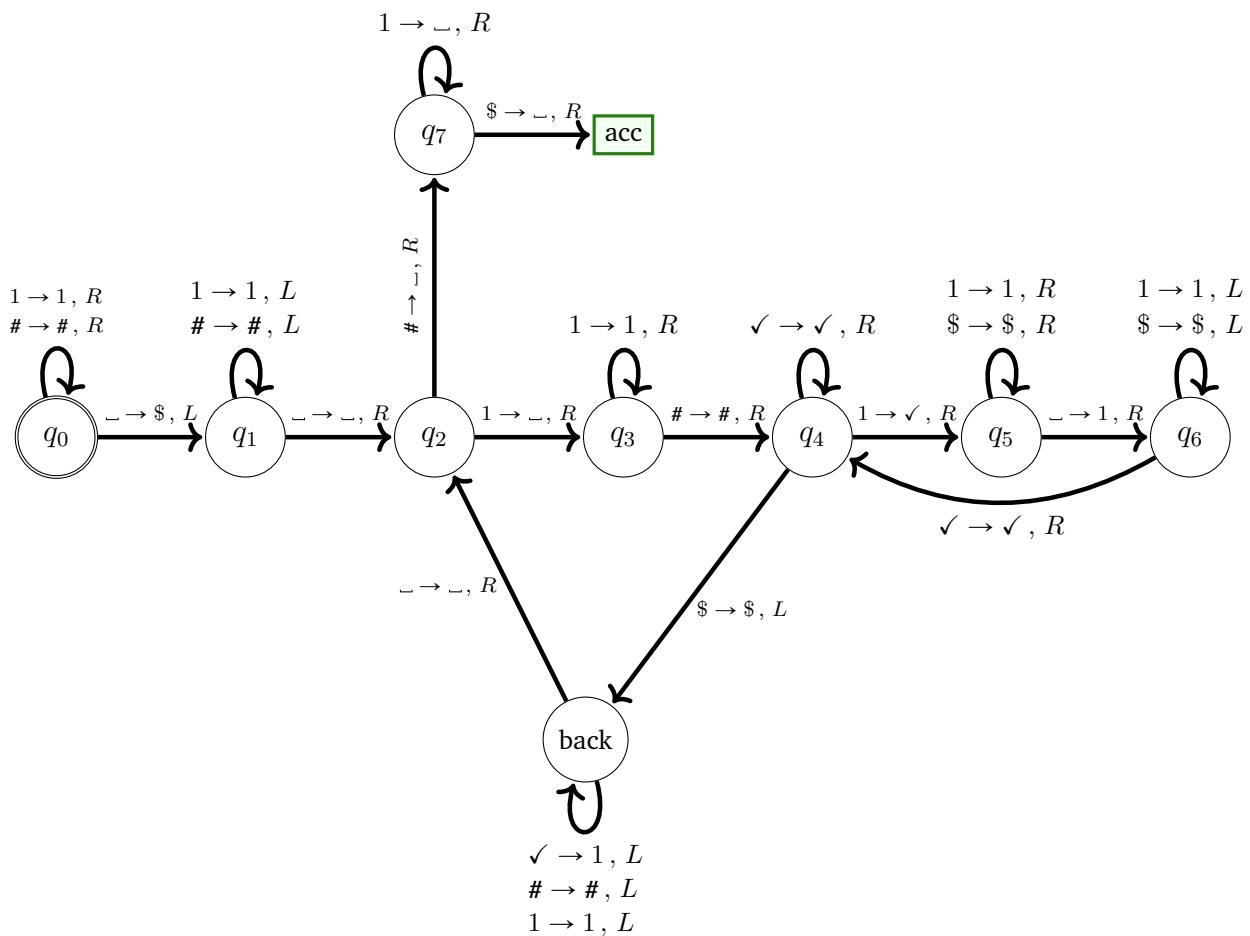
$$1^{i \cdot j}.$$

פתרונות:

- לדוגמה, נניח שהקלט הוא 2 כפול 2.

הקלט הוא 11#11.

- נרצה להבדיל בין הקלט לבין הפלט.
 - לכן בתחילת הריצאה, נתקדם ימינה עד סוף הקלט ונוסיף שם את התו \$. לאחר מכן נחזור לתחילת הקלט.
 - על כל אות 1 במילה השמאלית נעתיק את המילה הימנית לאחר סימן -. \$.
 - לאחר מכן נשאיר רק את התווים שלאחר סימן -. \$. כמובן, נמחק את כל מה שאינו פלט.



μ	q	σ	ν
\lfloor	q_0	1	$1\#11\lfloor$
$\lfloor 11\#11$	q_1	\lfloor	\lfloor
$\lfloor 11\#11$	q_1	$\$$	\lfloor
\lfloor	q_1	\lfloor	$11\#11\$$
\lfloor	q_2	1	$1\#11\$$
$\lfloor \lfloor$	q_3	1	$\#11\$$
$\lfloor \lfloor 1\#$	q_4	1	$1\$$
$\lfloor \lfloor 1\#\checkmark$	q_5	1	$\$$
$\lfloor \lfloor 1\#\checkmark 1\$$	q_5	\lfloor	\lfloor
$\lfloor \lfloor 1\#\checkmark 1\1	q_6	\lfloor	\lfloor
$\lfloor \lfloor 1\#$	q_6	\checkmark	$1\$1 \lfloor$
$\lfloor \lfloor 1\#\checkmark$	q_4	1	$\$1 \lfloor$
$\lfloor \lfloor 1\#\checkmark \checkmark$	q_5	$\$$	$1 \lfloor$
$\lfloor \lfloor 1\#\checkmark \checkmark \1	q_5	\lfloor	\lfloor
$\lfloor \lfloor 1\#\checkmark \checkmark \11	q_6	\lfloor	\lfloor

<u> </u>	<u> </u> 1#✓	q_6	✓	\$11 <u> </u>
<u> </u>	<u> </u> 1#✓✓	q_4	\$	11 <u> </u>
<u> </u>	<u> </u> 1#✓	back	✓	\$11 <u> </u>
<u> </u>	<u> </u>	back	—	1#11\$11 <u> </u>
<u> </u>	<u> </u>	q_2	1	#11\$11 <u> </u>
<u> </u>	<u> </u>	q_3	#	11\$11 <u> </u>
<u> </u>	<u> </u>	q_4	1	1\$11 <u> </u>
<u> </u>	<u> </u>	q_5	1	\$11 <u> </u>
<u> </u>	<u> </u> #✓1\$11	q_5	—	—
<u> </u>	<u> </u> #✓1\$111	q_6	—	—
<u> </u>	<u> </u>	q_6	✓	1\$111 <u> </u>
<u> </u>	<u> </u>	q_4	1	\$111 <u> </u>
<u> </u>	<u> </u>	q_5	\$	111 <u> </u>
<u> </u>	<u> </u> #✓✓\$111	q_5	—	—
<u> </u>	<u> </u> #✓✓\$1111	q_6	—	—
<u> </u>	<u> </u>	q_4	✓	\$1111
<u> </u>	<u> </u>	q_4	\$	1111
<u> </u>	<u> </u>	back	✓\$	1111
<u> </u>	<u> </u>	back	—	#11\$1111
<u> </u>	<u> </u>	q_2	#	11\$1111
<u> </u>	<u> </u>	q_7	1	1\$1111
<u> </u>	<u> </u>	q_7	\$	1111
<u> </u>	<u> </u>	acc	1	111