1 מבוא להסתברות ולוגיקה 27-6

1.1 הגדרת המושג הסתברות

מה המשמעות של המשפט "שמואל קרוב לוודא ינצח את המשחק כדור-רגל " או " יש לי סיכוי של 50-50 לקבל מספר זוגי כאשר אני זורק קוביה" או " יש סיכוי קטן שאני אנצח בלוטו" או " רוב התלמידים בכיתה יעבור את המבחן". בכל אחד של המצבים האלה אנחנו מבטאים במילים את **ההסתברות** אשר תוצאה מסויימת יתרחש. בקורס הזה אנחנו נותנים שיטות של נוסחאות כדי לחשב את ההסתברות של מקרה מדובר כמספר.

תורת הסתברות נותן מספר לסבירות של תוצאה של ניסוי. לדוגמה, ההסתברות לזרוק מספר 2 בהטלת קוביה הוגנת. יש 6 אפשרויות, ואין שום סיבה להניח שלאחד מהתוצאות יש סיכוי יותר ופחות מהשני. לכן ההסתברות לזרוק 2 היא $\frac{1}{6}$ יש דרך אחר להסתכל על זה, אם נבצע אותו ניסוי הרבה פעמים, נגלה ש ב אחד מתוך שש פעמים נקבל 2.

הקבוצה של כל התוצאות של הניסוי היא

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\,. \tag{1.1}$$

(1.1) הוא דוגמה של דבר אשר נקרא מרחב מדגם. אם על המטבע נמצאים הסימונים המוכרים של T ו- H (H מציין את התוצאה "עץ" בעוד T מתייחס לתוצאה "פלי") אזי מרחב המדגם יהיה

$$\Omega = \{H, T\}\,. \tag{1.2}$$

מרחב המדגם זו גם מורכב מתוצאות אשר יש להם סבירויות שוות, אזי לכל תוצאה ב Ω יש סבירות של $\frac{1}{2}$. או אחרי לבצע אותו ניסוי הרבה פעמים, חצי של הזמן נקבל H וחצי של התוצאות יהיו T.

1.1 הגדרה. (מרחב מדגם)

מרחב מדגם זו קבוצה, המסומנת לרוב באות היוונית Ω (אומגה), המכילה את כל התוצאות האפשריות של הניסוי.

בקורס הזה נתעניין במרחבי מדגם המורכבים ממספר תוצאות סופי. הדוגמאות לעיל הם של מרחב מדגם אשר בו תוצאות של סבירויות שוות, אבל באופן כללי לתוצאות יש סבירויות אי-שוות. יש מספר תכונות אשר מאפיינות את המושג של סבירות של תוצאה של ניסוי:

- לכל תוצאה במרחב מדגם נותנים מספר בין 0 ל 1 אשר מאפיין את הסבירות שלו.
- ככל שהסיכוי של תוצאה יותר גדול אז הסבירותו שלו יותר קרוב ל 1.
- ככל שהסיכוי של תוצאה יותר קטן אז הסבירותו שלו יותר קרוב ל 0.
- לתוצאה אי-אפשרית, יש הסתברות של 0.
- לתוצאה שיהתרחש בוודאות, יש הסתברות של 1.
- הסכום של הסבירויות של כל התוצאות בשום מרחב מדגם שווה ל 1 (נרמול הסתברות).

1.2 הגדרה. (מאורע)

מאורע הוא תת קבוצה של מרחב מדגם.

1.3 דוגמא. (מאורע) נתון המרחב המדגם $\Omega = \{HH, TH, HT, TT\}$ של תוצאות של זריקת מטבע פעמיים ברצף, המאורע של לקבל H לפחות פעם אחת הוא $A = \{HH, TH, HT\}$. דרך פורמלי לבטא זה הוא

$$A \subset \Omega.$$

1.2 תורת הקבוצות לוגיקה

ניקח את האיבר 2 ואת המאורע $A = \{1, 2, 3\}$. נבחין כי האיבר 2 הוא איבר במאורע A. על כן "2" **הוא שייך למאורע** A. נסמן זאת ב

$$2 \in A.$$

שונה לזה "4" אינו נמצא ב-A, ולכן **אינו שייך ל-**A:

$$4 \notin A.$$

1.4 הגדרה. (ההכלה) מאורע A מוכל במאורע אם כל האיברים של A שייכים גם ל-B.

במילים פשוטות, אם כל האיברים של A נמצאים ב-B אז המאורע A מוכל במאורע B:

$$A \subseteq B.$$

דוגמא. אם הניסוי הוא הטלת קוביה ומאורע $A = \{6\}$ מציין את התוצאה 6 בעוד מאורע $B = \{4, 5, 6\}$ מציין שהתוצאה גדולה או שווה ל 4, אז ברגע ש A מתרחש גם B מתרחש, ו

$$A \subseteq B.$$

נשים לב כי $A = B$ זה מקרי פרטי של הכלה, כי כל איברי A נמצאים ב-B ולהפך:

$$A \subseteq B \quad \text{ו} \quad B \subseteq A \quad \Leftrightarrow A = B.$$

ברגע שיחס ההכלה הנ"ל $B \subseteq A$ מתקיים נאמר כי מאורע A הוא תת קבוצה של B.

1.5 הגדרה. (המשלים המאורע)

המשלים של המאורע A ביחס ל Ω הוא התת קבוצה של כל האיברים שנמצאים ב A אך אינם נמצאים ב A.

דוגמא. אם R הוא המאורע שקלף אדום נלקח מחבילת רגילה של 52 קלפים, ואם Ω הוא המרחב המדגם המורכב מהחבילה של כל הקלפים. לכן המשלים המאורע R' הוא המאורע כי הקלף הנלקח מהחבילה אינו אדום, אלא קלף שחור.

דוגמא. נתון המרחב המדגם

$$\Omega = \{\text{Dropbox}, \text{Facebook}, \text{Google}, \text{LinkedIn}, \text{WhatsApp}, \text{YouTube}\}$$

והתת קבוצה

$$A = \{\text{Dropbox}, \text{Google}, \text{LinkedIn}, \text{YouTube}\}.$$

הקבוצה המשלימה של A היא

$$A' = \{\text{Facebook}, \text{WhatsApp}\}.$$

1.6 הגדרה. (החיתוך בין מאורעות)

החיתוך $A \cap B$ של צמד המאורעות זו קבוצה שמכילה את כל האיברים שנמצאים הן ב- A והן ב- B.

דוגמא. החיתוך בין המאורעות

$$A = \{ן, ו, ל, ק, ש, א\} \quad \text{ו} \quad B = \{ם, י, ל, ש, ו, ר, י\}$$

הוא

$$A \cap B = \{ו, ל, ש\}.$$

דוגמא. החיתוך בין המאורעות

$$A = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\} \quad \text{ו} \quad B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

הוא

$$A \cap B = \{2\}\,.$$

בעוד מרחב המדגם הוא המאורע אשר מכיל את כל התוצאות האפשריות בניסוי, עולה השאלה כיצד נראה מאורע קיצוני אחר אשר לא מכיל אף תוצאה? עבור מצבים כאלה אנו מגדירים את **הקבוצה הריקה** או לחילופין **המאורע הריק** והיא מסומנת ב- ϕ:

1.7 הגדרה. (הקבוצה הריקה או המאורע הריק)

הקבוצה הריקה זו הקבוצה

$$\phi = \{\ \}\,.$$

המאורע הריק הוא מקרה של הקבוצה הריקה, אשר הוא מאורע שאין בו תוצאות אפשריות.

1.8 הגדרה. (מאורעות זרים)

מאורעות A ו-B נקראים זרים זה לזה אם אין להם איברים משותפים, ולכן

$$A \cap B = \phi.$$

דוגמא. אם O הוא הקבוצה המורכב מן המספרים האי זוגיים מ1 עד 10 וE הקבוצה המורכב מהמספרים הזוגיים מ0 עד 10, כלומר

$$E = \{2, 4, 6, 8, 10\} \qquad O = \{1, 3, 5, 7, 9\}\,,$$

לכן קל לראות שהמאורעות האלה הם מאורעות זרים זה לזה בגלל

$$E \cap O = \phi.$$

1.9 הגדרה. (האיחוד)

האיחוד של שתי המאורעות A ו-B המסומן ב $A \cup B$ זו המאורע הכולל את כל האיברים אשר שייכים או ל A או לB או גם לA וגם לB.

דוגמא. אם

$$A = \{a, b, c\} \quad \text{ו} \quad \{b, c, d, e\}$$

אזי

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}\,.$$

דוגמא. אם

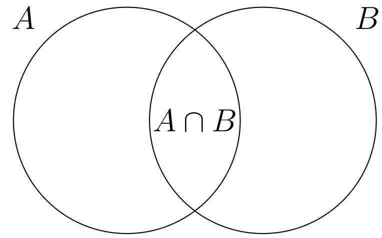
$$M = \{x \mid 3 < x < 9\} \quad \text{ו} \quad N = \{y \mid 5 < y < 12\}$$

אזי

$$M \cup N = \{z \mid 3 < z < 12\}\,.$$

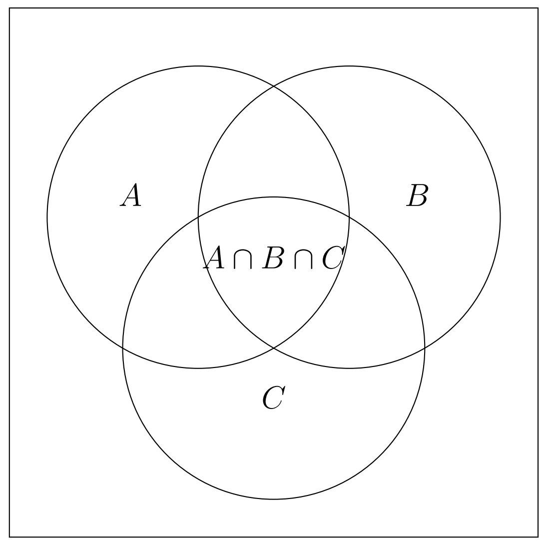
1.10 חוק. (חוק הקיבוץ) חוק הקיבוץ קובע כי סדר כתיבת המאורעות באיחוד או בחיתוך אינו משפיע על התוצאה סופית:

$$A \cap B = B \cap A,$$
$$A \cup B = B \cup A.$$



1.11 חוק. (חוק החילוף) חוק החילוף קובע כי לכל שלושה מאורעות A, B, C מתקיים

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$



1.12 חוק. (חוק הפילוג) חוק הפילוג קובע כי לכל שלושה מאורעות A, B, C מתקיים

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

1.13 הגדרה. (הפרש בין מאורעות) ההפרש בין מאורעות הוא הפעולה אשר לוקחת צמד מאורעות A ו-B ולוקחת את כל איברי A ומורידים מהם את האיברים המשותפים ל A ו-B:

$$A/B.$$

במידה ואין איברים משותפים,

$$A/B = A.$$

דוגמא. אם $A = \{1, 2\}$ ו $B = \{1, 3, 6\}$,

$$A/B = \{2\}$$

1.14 מסקנה. (ההפרש בין מאורע ומדגם מרחב)

$$\bar{A} = S/A.$$

דוגמא. בן מטיל קוביה הוגנת.

1. רשמו את מרחב המדגם
2. רשמו את המאורעות הבאים:
   (א) A התוצאות קטנה מ 4 ,
   (ב) B התוצאות גדולה או שווה ל 3,

(ג) C התוצאות זוגית,
(ד) D התוצאות אי זוגית,

3. האם $A \in 4$? האם $B \in 3$?
4. רשמו מפורשות את המאורעות הבאים:
   (א) $A \cap B$,
   (ב) $A \cup B$,
   (ג) $C \cap B$,
   (ד) $(A \cap B) \cup C$.

פיתרון. 1. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2. (א) $A = \{1, 2, 3\}$.
   (ב) $B = \{3, 4, 5, 6\}$.
   (ג) $C = \{2, 4, 6\}$.
   (ד) $D = \{1, 3, 5\}$.
3. $A \notin 4$ לא .
   $B \in 3$ כן.
4. (א) $A \cap B = \{3\}$,
   (ב) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
   (ג) $C \cap B = \{3, 4, 6\}$,
   (ד) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cap C) = \{1, 2, 3\} \cap \{4, 6\} = \phi$.

■

דוגמא. ניקח את קבוצות הסטודנטים הנמצאים בכיתה ונגדיר את המאורעות הבאים:

- הסטודנטים שאוהבים חתולים $= C$,
- הסטודנטים שאוהבים כלבים $= D$,
- הסטודנטים שאוהבים דגים $= F$.

רשמו את המאורעות הבאים:

1. A_1 - הסטדנטים שאוהבים לפחות חיה אחת.
2. A_2 - הסטדנטים שלא אוהבים אף חיה.
3. A_3 - הסטדנטים שאוהבים רק חתולים.
4. A_4 - הסטדנטים שאוהבים את כל החיות.
5. A_5 - הסטדנטים שאוהבים בעל חיים אחד בלבד.
6. A_6 - הסטדנטים שאוהבים לפחות 2 בעלי חיים.

פיתרון. 1. $A_1 = C \cup D \cup F$.

2. $A_2 = \bar{A}_1 = \bar{C} \cap \bar{D} \cap \bar{F}$.
3. $A_3 = C \cap \bar{D} \cap \bar{F} = (C/D)/F$.
4. $A_4 = C \cap D \cap F$.
5. $A_5 = (C \cap \bar{D} \cap \bar{F}) \cup (\bar{C} \cap D \cap \bar{F}) \cup (\bar{C} \cap \bar{D} \cap F)$.
6. $A_6 = (C \cap D) \cup (D \cap F) \cup (C \cap F)$.

■

1.3 חישובים של הסתברות

כדי לחשב את ההסתברות של מאורע A, לוקחים את הסכום של כל דגימה בA. הסכום הזו נקרא ההסתברות של A והוא מסומן ב $P(A)$:

1.15 הגדרה. (הסתברות של מאורע)

ההסתברות של מאורע A זו הסכום של המשקלות של כל האיברים ב A. לכן

$$0 \le P(A) \le 1, \qquad P(\phi) = 0, \qquad P(\Omega) = 1.$$

עוד, אם $A_1, A_2, A_3, \ldots$ הוא סידרה של מאורעות זרים, אזי

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots \,.$$

1.16 דוגמא. מהו הסיכוי שבהטלת כפולה של מטבע הוגן נקבל לפחות H אחת?

פיתרון. המרחב המדגם לניסוי הזה הוא

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}\,.$$

נניח שהמטבע הוגן. לכן לכל אחת מהתוצאות האלה יש סיכוי שווה. נסמן את ההסתברות של כל תוצאה ב ω. אזי

$$4\omega = 1 \qquad \Rightarrow \omega = \frac{1}{4}.$$

נסמן את המאורע שנקבל לפחות H אחת ב- A.

$$A = \{HH, HT, TH\}\,,$$
$$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

■

דוגמא. קוביה משוקלת באופן כך שיש סיכוי לזרוק מספר זוגי פי שתיים מהסיכוי לזרוק מספר אי זוגי. נסמן ב- E את המאורע לזרוק מספר פחות מ 4. מהי $P(E)$?

פיתרון. המרחב המדגם הוא

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\,.$$

נותנים הסתברות של w לכל מספר אי-זוגי והסתברות $2w$ לכל מספר זוגי. הסכום של ההסתברויות שווה ל 1. לכן

$$3(2w) + 3w = 6w + 3w = 9w = 1. \qquad \Rightarrow \qquad w = \frac{1}{9}.$$

למאורע E יש את האיברים

$$E = \{1, 2, 3\}\,.$$

אזי

$$P(E) = w + 2w + w = 4w = \frac{4}{9}.$$

■

דוגמא. אם A זו המאורע לזרוק מספר זוגי ו B המאורע לזרוק מספר אשר מתחלק ב-3. חפשו $P(A \cap B)$ ו $P(A \cup B)$.

פיתרון.

$$A = \{2,4,6\}\,, \qquad B = \{3,6\}\,.$$

$$A \cup B = \{2,3,4,6\}\,.$$

$$A \cap B = \{6\}\,.$$

לכל מספר זוגי יש הסתברות של $w = \frac{2}{9}$ ולכל מספר אי-זוגי יש הסתברות של $w = \frac{1}{9}$. אזי

$$P(A \cup B) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{9}.$$

■

1.17 חוק. (הסתברויות שוות) אם יש לניסוי N תוצאות ויש לכל תוצאה סיכויים שווים, ויש למאורע- A n תוצאות. אזי ההסתברות של A הוא

$$P(A) = \frac{n}{N}.$$

דוגמא. רשמו את המרחב מדגם והמאורעות המצויינים בהמשך במונחי תורת הקבוצות:

1. הוצאה של כדור מתוך כד בו יש 2 כדורים לבנים, וכדור שחור. A- הוצא כדור שחור.
2. הוצאה של כדור מתוך כד בו יש 2 כדורים לבנים הממוספרים ב $1,2$ וכדור שחור. A- הוצא כדור לבן.
3. הוצאה עם החזרה של 2 כדורים מתוך כד בו יש 2 כדורים לבנים, ו-1 שחור. A- הכדור השני שהוצא איננו לבן.
4. הוצאה ללא החזרה של כדור מתוך כד בו יש 2 כדורים לבנים, ו-1 שחור. A- הכדור השני שהוצא הוא לבן.

פיתרון.

1. מרחב המדגם בהוצאה של כדור מתוך כד בו יש 2 כדורים לבנים, וכדור שחור.

$$\Omega = \{w, b\}\,.$$

המאורע נתון על ידי

$$A = \{b\}\,.$$

2. מרחב המדגם בהוצאה של כדור מתוך כד בו יש 2 כדורים לבנים הממוספרים ב $1,2$ וכדור שחור הוא

$$\Omega = \{w_1, w_2, b\}$$
$$A = \{w_1, w_2\}\,.$$

3.

$$\Omega = \{(w,w),(w,b),(b,w),(b,b)\}$$
$$A = \{(w,b),(b,b)\}\,.$$

4.

$$\Omega = \{(w,w),(w,b),(b,w)\}$$
$$A = \{(w,w),(b,w)\}\,.$$

■

תכונות בסיסיות של ההסתברות

(קולמוגורוב, תחילת המאה ה-20).

1. **האקסיומה אי-שלילית** קובעת כי הסתברות איננה שלילית:

$$P(A) \geq 0. \tag{1.3}$$

2. **האקסיומה הנרמול** קובעת כי

$$P(\Omega) = 1 \tag{1.4}$$

כאשר Ω המרחב המדגם במלואו.

3. **תכונה החיבורית**

$$\sum_{\omega \in A} P(\omega) = P(A). \tag{1.5}$$

במילים פשוטות, ההסתברות של מאורע נתונה על ידי סכום ההסתברויות של האפשריות הנמצאות באותו המאורע.

1.18 מסקנה. (לקבוצה הריקה יש הסתברות 0) מתכונת החיבורית (1.5) אנחנו מסיקים כי ההסתברות של הקבוצה הריקה היא אפס:

$$P(\phi) = 0. \tag{1.6}$$

1.19 דוגמא. () נתון מרחב המדגם

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$$

ונתון ההסתברויות

$$P(i) = ci^2 \qquad \forall\ i \in S,$$

כאשר c הוא קבוע כלשהו. מצאו את ערכו של c וחשבו את ההסתברויות של תוצאות הניסוי תתחלק ב- 3.

פיתרון. נוכל למצוא את הקבוע c מתנאי הנרמול. בפרט אנחנו יודעים שסכום ההסתברויות חייב להיות 1. לכן

$$1 = \sum_{i=1}^{10} P(i) = \sum_{i=1}^{10} c\ i^2 = \frac{c(10)(21)(11)}{6} = 385c.$$

מכאן נובע ש

$$c = \frac{1}{385}.$$

המאורע המבקש בשאלה (תוצאות הניסוי מתחלקת ב- 3) הוא

$$A = \{3, 6, 9\}$$

מחיבוריות נקבל

$$P(A) = P(3) + P(6) + P(9) = \frac{3^2 + 6^2 + 9^2}{385} = \frac{126}{385}.$$

■

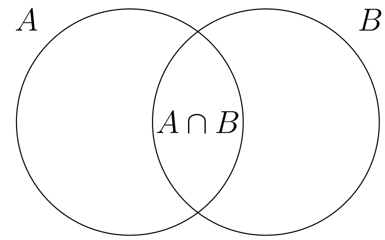
1.4 חוקי הסתברות בסיסיים

נתפנה להוכיח מספר תכונות בסיסיות של הסתברות.

1.20 חוק. (נוסחת ההכלה וההפרדה) נוסחת ההכלה וההפרדה, או לעיתים נקרא **חוק החיבורית**. הנוסחה קובעת כי לכל צמד מאורעות A-B מתקיים

$$P\left(A\cup B\right)=P(A)+P(B)-P\left(A\cap B\right). \tag{1.7}$$

הוכחה. הדרך הכי הקלה להמחיש את נוסחת ההכלה וההפרדה היא בעזרת הדיאגרמת ואן. הסתכלו אל הדיאגרמת ואן להלן:



$P\left(A\cup B\right)=$ סכום של הסתברויות של נקודות דגימה ב $A\cup B$.

$P(A)+P(B)=$ סכום של ההסתברויות ב-A פלוס סכום של ההסתברויות ב-B.

לכן, הוספנו את ההסתברויות ב $A\cap B$ פעמיים, ולכן יש צורך להפחית $P(A\cap B)$ מהסכום כדי להגיע אל משוואה (1.7). ■

דוגמא. בניסוי הטלת קוביה הוגנת נגדיר המאורעות

$$A=\{1,2,3\} \qquad B=\{2,3,4\}.$$

אזי

$$P\left(A\cap B\right)=P\left(\{2,3\}\right)=\frac{2}{6},$$

$$P\left(A\right)=\frac{3}{6}, \qquad P\left(B\right)=\frac{3}{6}.$$

$$P\left(A\cup B\right)=P\left(\{1,2,3,4\}\right)=\frac{4}{6},$$

$$P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)=\frac{3}{6}+\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{4}{6}.$$

מסקנה. () אם A ו- B זרים אז

$$P\left(A\cap B\right)=P\left(\phi\right)=0.$$

לכן, נוסחת ההכלה וההפרדה היא הרחבה ישירה של תכונה החיבורית:

$$P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right).$$

מסקנה. () אם

$$A_1,A_2,\ldots,A_n$$

זרים, אז

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=P(A_1)+\ldots+P(A_n).$$

או

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$