

שיעור 6

צופן RSA

6.1 אלגוריתם RSA

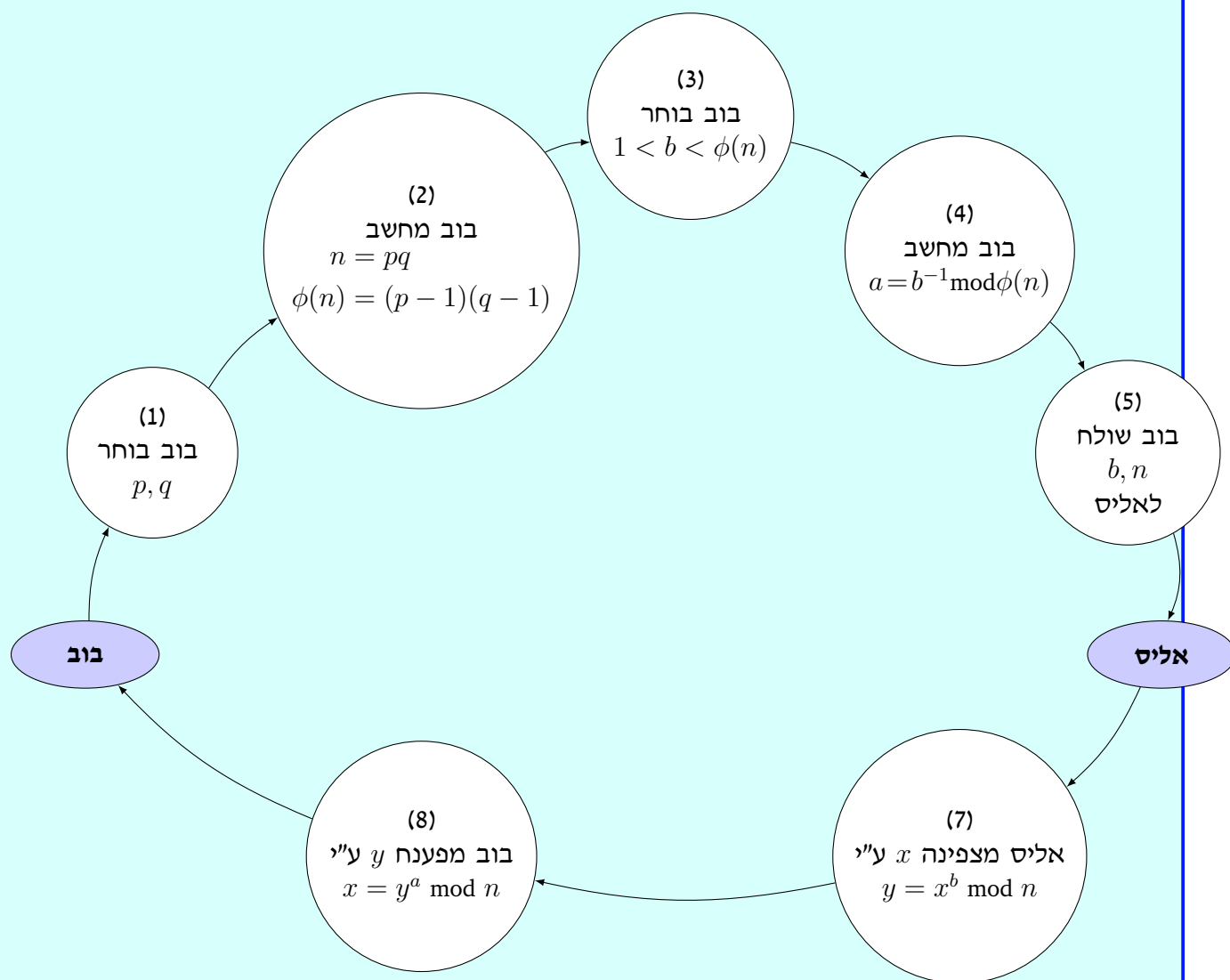
צופן RSA הומצא בשנה 1977 על ידי Ron Rivest, Adi Shamir and Len Adleman.

הגדרה 6.1 צופן RSA

- יהיו p, q מספרים ראשוניים שונים ($p \neq q$).
- יהי $n = pq$.
- יהי b שלם כך ש: $1 < b < \phi(n)$ כאשר $\phi(n)$ הפונקציה אويلר של n .
- נגדיר $a \equiv b^{-1} \pmod{\phi(n)}$.
- אזי
 - * המפתח הציבורי של צופן RSA הוא הקבוצה (b, n) ,
 - * המפתח הסודי של צופן RSA הוא הקבוצה (a, p, q) .
- יהי $x \in \mathbb{Z}^+$ שלם אי-שלילי.
 - * הכלל מצפין מוגדר
 - $$e_k(x) = x^b \pmod{n},$$
 - * והכלל מפענח מוגדר
 - $$d_k(x) = y^a \pmod{n}.$$

עכשיו שנתנו הגדרה מתמטית של הצופן RSA אנחנו נסביר את הסדר של הפעולות של הבניית המפתח, ההצפנה והפענוח באלגוריתם הבא.

הגדרה 6.2 אלגוריתם RSA



נניח שאליס (A) שולחת הודעה לבוב (B).

שלב הבניית המפתח

[1] יוצר שני מספרים ראשוניים גדולים שונים, p ו- q בסדר גודל של 100 ספרות.

[2] מחשב B $n = pq$ ו- $\phi(n) = (p-1)(q-1)$.

[3] בוחר מספר שלם b באקראי כך שהשני תנאים הבאים מתקיימים:

- $1 < b < \phi(n)$
- $\gcd(b, \phi(n)) = 1$

[4] מחשב a לפי $a = b^{-1} \bmod \phi(n)$ בעזרת האלגוריתם של אוקלידס (ראו כלל 1.12).

[5] שולח את המפתח ציבורי (b, n) לאליס, אך בוב לא מגלה את המפתח הסודי (a, p, q) לאליס.

בניית מפתח עשוי פעם אחת.

שלב הצפנה

[6] אליס (A) מקבלת את המפתח הציבורי (b, n) מבוב, ומצפינה את הטקסט הגלוי x עם המפתח הציבורי באמצעות הכלל מצפין

$$y = x^b \bmod n .$$

[7] A שולחת את טקסט מוצפן ל- B .

שלב הפענוח

[8] בוב מפענח את הטקסט מוצפן עם המפתח הסודי באמצעות הכלל מפענח $x = y^a \bmod n$.

דוגמה 6.1

בוב בוחר בפרמטרים הבאים כדי לבנות מפתח של צופן RSA:
 $(b = 47, p = 127, q = 191)$

(א) חשבו את המפתח הציבורי והמפתח הסודי.

(ב) אליס קוראת את המפתח הציבורי ומשתמשת בו כדי להצפין את המספר 2468. מהו הטקסט מוצפן שהיא שולחת לבוב?

(ג) כעת בוב מפענח את הטקסט מוצפן שהוא קיבל מאליס בעזרת המפתח הסודי שלו. בדקו כי הפענוח של הטקסט מוצפן מסעיף ב' הוא זהה לטקסט הגלוי המקורי שאליס שלחה אליו.

פתרון:

סעיף א) המפתח הציבורי הוא (b, n) . הפרמטר b כבר נתון בשאלה אז נשאר רק לחשב את n :

$$n = pq = 191 \times 127 = 24257 .$$

לכן המפתח הציבורי הוא

$$(b, n) = (47, 24257) .$$

כעת נחשב את המפתח הסודי (a, p, q) . הראשוניים p, q נתונים בשאלה אז נשאר רק לחשב את a לפי הנוסחה $a = b^{-1} \pmod{\phi(n)}$, כאשר $\phi(n)$ הוא הפונקציה אוילר:

$$\phi(n) = \phi(pq) = (p-1)(q-1) = 190 \times 126 = 23940 .$$

$$a = 47^{-1} \bmod 23940$$

שיטה 1

נחשב את $47^{-1} \bmod 23940$ בעזרת האלגוריתם לאיבר ההופכי:

Algorithm 3 האלגוריתם לאיבר ההופכי

```

1: Input: Integers  $A, B$  .
2:  $r_0 \leftarrow A$ 
3:  $r_1 \leftarrow B$ 
4:  $t_0 \leftarrow 0$ 
5:  $t_1 \leftarrow 1$ 
6:  $n \leftarrow 1$ 
7: while  $r_n \neq 0$  do
8:    $q_n \leftarrow \left\lfloor \frac{r_{n-1}}{r_n} \right\rfloor$ 
9:    $r_{n+1} \leftarrow r_{n-1} - q_n r_n$ 
10:   $t_{n+1} \leftarrow t_{n-1} - q_n t_n$ 
11:   $n \leftarrow n + 1$ 
12: end while
13:  $n \leftarrow n - 1$ 
14: if  $r_n \neq 1$  then
15:    $B$  has no inverse modulo  $A$ 
16: else
17:   return:  $t_n$ 
18: end if

```

$\triangleright t_n = B^{-1} \pmod{A}$

נשים $A = 23940, B = 47$. נאתחל את המשתנים של האלגוריתם:

$$\begin{aligned} r_0 = A = 23940, & \quad r_1 = B = 47, \\ t_0 = 0, & \quad t_1 = 1. \end{aligned}$$

אזי האיטרציות של האלגוריתם הם כמפורט למטה:

$q_1 = 509$	$r_2 = 23940 - 509 \cdot 47 = 17$	$t_2 = 0 - 509 \cdot 1 = -509$	שלב $n = 1$:
$q_2 = 2$	$r_3 = 47 - 2 \cdot 17 = 13$	$t_3 = 1 - 2 \cdot (-509) = 1019$	שלב $n = 2$:
$q_3 = 1$	$r_4 = 17 - 1 \cdot 13 = 4$	$t_4 = -509 - 1 \cdot (1019) = -1528$	שלב $n = 3$:
$q_4 = 3$	$r_5 = 13 - 3 \cdot 4 = 1$	$t_5 = 1019 - 3 \cdot (-1528) = 5603$	שלב $n = 4$:
$q_5 = 4$	$r_6 = 4 - 4 \cdot 1 = 0$	$t_6 = -1528 - 4 \cdot (5603) = -23940$	שלב $n = 5$:

לפיכך $47^{-1} \equiv 5603 \pmod{23940}$. לכן התשובה הסופית בשביל a היא:

$$a = 5603.$$

שיטה 2

$$23940 = 509(47) + 17$$

$$47 = 2(17) + 13$$

$$17 = 13 + 4$$

$$13 = 3(4) + 1$$

$$4 = 4(1) + 0.$$

$$\begin{aligned}
 1 &= 13 - 3(4) \\
 &= 13 - 3(17 - 13) \\
 &= 4(13) - 3(17) \\
 &= 4(47 - 2(17)) - 3(17) \\
 &= 4(47) - 11(17) \\
 &= 4(47) - 11(23940 - 509(47)) \\
 &= 5603(47) - 11(23940)
 \end{aligned}$$

לכן התשובה הסופית בשביל a היא:

$$a = 5603.$$

סעיף ב) אליס שולחת את ההודעה $2468^{47} \bmod 24257$. כדי לחשב זה נשתמש בשיטת ריבועים:

$$47 = 32 + 8 + 4 + 2 + 1.$$

$$\begin{aligned}
 (2468)^2 &= 2517 \bmod 24257 \\
 (2468)^4 &= (2517)^2 = 4212 \bmod 24257 \\
 (2468)^8 &= (4212)^2 = 9077 \bmod 24257 \\
 (2468)^{16} &= (9077)^2 = 15157 \bmod 24257 \\
 (2468)^{32} &= (15157)^2 = 20859 \bmod 24257
 \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}
 2468^{47} &= (2468)^{32} \times (2468)^8 \times (2468)^4 \times (2468)^2 \times 2468 \bmod 24257 \\
 &= 20859 \times 9077 \times 4212 \times 2517 \times 2468 \bmod 24257 \\
 &= 10642 \bmod 24257.
 \end{aligned}$$

לכן הטקסט מוצפן הוא $y = 10642$.

סעיף ג) $y = 10642$

$$y \bmod p = 10642 \bmod 127 = 101, \quad a \bmod (p-1) = 5603 \bmod 126 = 59.$$

לכן

$$\begin{aligned}
 x_1 &= (y \bmod p)^{a \bmod (p-1)} \bmod p = 101^{59} \bmod 127 = 55 \\
 & \quad (ניתן לחשב זה לפי $101^{32} \times 101^{16} \times 101^8 \times 101^2 \times 101$)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (101)^2 &\equiv 41 \bmod 127 \\
 (101)^4 &\equiv (41)^2 \bmod 127 \equiv 30 \bmod 127 \\
 (101)^8 &\equiv (30)^2 \bmod 127 \equiv 11 \bmod 127 \\
 (101)^{16} &\equiv (11)^2 \bmod 127 \equiv 121 \bmod 127 \\
 (101)^{32} &\equiv (121)^2 \bmod 127 \equiv 36 \bmod 127
 \end{aligned}$$

לכן

$$101^{59} \bmod 127 = (101)(41)(11)(121)(36) \bmod 127 = 55.$$

$$y \bmod q = 10642 \bmod 191 = 137, \quad a \bmod (p-1) = 5603 \bmod 190 = 93.$$

לכן

$$x_2 = (y \bmod q)^{a \bmod (q-1)} \bmod q = 137^{93} \bmod 191 = 176$$

(ניתן לחשב זה לפי $137^4 \times 137^8 \times 137^{16} \times 137^{64}$.)

$$\begin{aligned}(137)^2 &\equiv 51 \pmod{191} \\ (137)^4 &\equiv (51)^2 \pmod{191} \equiv 118 \pmod{191} \\ (137)^8 &\equiv (118)^2 \pmod{191} \equiv 172 \pmod{191} \\ (137)^{16} &\equiv (172)^2 \pmod{191} \equiv 170 \pmod{191} \\ (137)^{32} &\equiv (170)^2 \pmod{191} \equiv 59 \pmod{191} \\ (137)^{64} &\equiv (59)^2 \pmod{191} \equiv 43 \pmod{191}\end{aligned}$$

לכן

$$137^{93} \pmod{191} = (137)(118)(172)(170)(43) \pmod{191} = 176.$$

בנוסף

$$y \pmod{q} = 9625 \pmod{127} = 100, \quad a \pmod{(q-1)} = 5603 \pmod{126} = 59.$$

לכן

$$x_2 = (y \pmod{q})^a \pmod{(q-1)} \pmod{q} = 100^{59} \pmod{127} = 87$$

לכן עלינו לפתור את המערכת

$$\begin{aligned}x &= x_1 \pmod{p} = 55 \pmod{127} \\ x &= x_2 \pmod{q} = 176 \pmod{191}\end{aligned}$$

בעזרת המשפט השאריות הסיני. נסמן $a_1 = 55, m_1 = 127, a_2 = 176, m_2 = 191$.

$$M = m_1 m_2 = (191)(127) = 24257, \quad M_1 = \frac{M}{m_1} = 191, \quad M_2 = \frac{M}{m_2} = 127.$$

כעת נחשב $y_1 = M_1^{-1} \pmod{m_1} = 191^{-1} \pmod{127}$ ו- $y_2 = M_2^{-1} \pmod{m_2} = 127^{-1} \pmod{191}$.

שיטה 1

$$a = 191, b = 127$$

$$\begin{aligned}r_0 &= a = 191, & r_1 &= b = 127, \\ s_0 &= 1, & s_1 &= 0, \\ t_0 &= 0, & t_1 &= 1.\end{aligned}$$

$q_1 = 1$	$t_2 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$	$s_2 = 1 - 1 \cdot 0 = 1$	$r_2 = 191 - 1 \cdot 127 = 64$	שלב $k = 1$:
$q_2 = 1$	$t_3 = 1 - 1 \cdot (-1) = 2$	$s_3 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$	$r_3 = 127 - 1 \cdot 64 = 63$	שלב $k = 2$:
$q_3 = 1$	$t_4 = -1 - 1 \cdot (2) = -3$	$s_4 = 1 - 1 \cdot (-1) = 2$	$r_4 = 64 - 1 \cdot 63 = 1$	שלב $k = 3$:
$q_4 = 63$	$t_5 = 2 - 63 \cdot (-3) = 191$	$s_5 = -1 - 63 \cdot (2) = -127$	$r_5 = 63 - 63 \cdot 1 = 0$	שלב $k = 4$:

$$\gcd(a, b) = r_4 = 1, \quad s = s_4 = 2, \quad t = t_4 = -3.$$

$$sa + tb = 2(191) - 3(127) = 1.$$

לכן

$$191^{-1} \equiv 2 \pmod{127}$$

$$127^{-1} \equiv (-3) \pmod{191} \equiv 188 \pmod{191}.$$

שיטה 2

נחשב $y_1 = 191^{-1} \pmod{127}$ ו- $y_2 = 127^{-1} \pmod{191}$ בעזרת האלגוריתם של אוקליד:

$$191 = 127 \cdot 1 + 64$$

$$127 = 64 \cdot 1 + 63$$

$$64 = 63 \cdot 1 + 1$$

$$63 = 1 \cdot 63 + 0.$$

$$\gcd(191, 127) = 1 \text{ לכן }.$$

$$1 = 64 - 63 \cdot 1$$

$$= 64 - (127 - 64 \cdot 1)$$

$$= 64 \cdot 2 - 127 \cdot 1$$

$$= (191 - 127 \cdot 1) \cdot 2 - 127$$

$$= 191 \cdot 2 + 127 \cdot (-3).$$

לכן

$$y_1 = M_1^{-1} \pmod{m_1} = 127^{-1} \pmod{191} \equiv 188 \pmod{191}$$

$$y_2 = M_2^{-1} \pmod{m_2} = 191^{-1} \pmod{127} \equiv 2 \pmod{127}.$$

נחשב

$$y_1 = M_1^{-1} \pmod{m_1} = 127^{-1} \pmod{191} = 188, \quad y_2 = M_2^{-1} \pmod{m_2} = 191^{-1} \pmod{127} = 2.$$

לכן

$$y = a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2$$

$$= 55(191)(2) + 176(127)(188) \pmod{24257}$$

$$= 4223186 \pmod{24257}$$

$$= 2468.$$



6.2 משפט השאריות הסיני

משפט 6.1 משפט השאריות הסיני

יהיו m_1, m_2, \dots, m_r שלמים אשר זרים בזוגות ויהיו a_1, a_2, \dots, a_r שלמים. למערכת של יחסים שקילות

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1},$$

$$x \equiv a_2 \pmod{m_2},$$

$$\vdots$$

$$x \equiv a_r \pmod{m_r},$$

קיים פתרון יחיד מודולו $M = m_1 m_2 \cdots m_r$ שניתן על ידי

$$x \equiv \sum_{i=1}^r a_i M_i y_i \pmod{M}$$

כאשר $M_i = \frac{M}{m_i}$ ו- $y_i = M_i^{-1} \pmod{m_i}$ לכל $1 \leq i \leq r$.

דוגמה 6.2

היעזרו במשפט השאריות הסיני כדי לפתור את המערכת

$$x \equiv 22 \pmod{101},$$

$$x \equiv 104 \pmod{113}.$$

פתרון:

$$a_1 = 22, \quad a_2 = 104, \quad m_1 = 101, \quad m_2 = 113.$$

$$M = m_1 m_2 = 11413, \quad M_1 = \frac{M}{m_1} = 113, \quad M_2 = \frac{M}{m_2} = 101.$$

$$y_1 = M_1^{-1} \pmod{m_1} = 113^{-1} \pmod{101}, \quad y_2 = M_2^{-1} \pmod{m_2} = 101^{-1} \pmod{113}.$$

כדי לחשב את האיבריים ההופכיים נשתמש בהאלגוריתם המוכלל של אוקליד.

$$a = 113, b = 101 \text{ נסמן}$$

$$r_0 = a = 113, \quad r_1 = b = 101,$$

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 0,$$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 1.$$

$q_1 = 1$	$t_2 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$	$s_2 = 1 - 1 \cdot 0 = 1$	$r_2 = 113 - 1 \cdot 101 = 12$	שלב $k = 1$:
$q_2 = 4$	$t_3 = 1 - 8 \cdot (-1) = 9$	$s_3 = 0 - 8 \cdot 1 = -8$	$r_3 = 101 - 8 \cdot 12 = 5$	שלב $k = 2$:
$q_3 = 2$	$t_4 = -1 - 2 \cdot (9) = -19$	$s_4 = 1 - 2 \cdot (-8) = 17$	$r_4 = 12 - 2 \cdot 5 = 2$	שלב $k = 3$:
$q_4 = 2$	$t_5 = 9 - 2 \cdot (-19) = 47$	$s_5 = -8 - 2 \cdot 17 = -42$	$r_5 = 5 - 2 \cdot 2 = 1$	שלב $k = 4$:
$q_5 = 2$	$t_6 = -19 - 2 \cdot (47) = -113$	$s_6 = 17 - 2 \cdot (-42) = 101$	$r_6 = 2 - 2 \cdot 1 = 0$	שלב $k = 5$:

$$\gcd(a, b) = r_5 = 1, \quad s = s_5 = -42, \quad t = t_5 = 47.$$

$$ta + sb = -42(113) + 47(101) = 1.$$

מכאן

$$101^{-1} \equiv 47 \pmod{113}$$

ו-

$$113^{-1} \equiv -42 \pmod{101} = 59 \pmod{101}$$

לכן

$$y_1 = M_1^{-1} \pmod{m_1} = 113^{-1} \pmod{101} = 59$$

ו-

$$y_2 = M_2^{-1} \pmod{m_2} = 101^{-1} \pmod{113} = 47$$

$$\begin{aligned} x &= a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 \pmod{M} \\ &= 22 \cdot 113 \cdot 59 + 104 \cdot 111 \cdot 47 \pmod{11413} \\ &= 640362 \pmod{11413} \\ &= 1234. \end{aligned}$$

■

6.3 משפטים של מספרים ראשוניים

משפט 6.2 קיימים אינסוף מספרים ראשוניים

קיימים אינסוף מספרים ראשוניים.

הוכחה: נוכיח הטענה דרך השלילה.

נניח כי $\{p_1, \dots, p_n\}$ הוא הקבוצה של כל הראשוניים שקיימים וקבוצה זו נוצרת סופי.נגדיר השלם $M = (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n) + 1$.לפי משפט הפירוק לראשוניים (ראו משפט 1.4 למעלה או משפט 6.3 למטה) M הוא מספר ראשוני או שווה למכפלה של ראשוניים. M לא מספר ראשוני בגלל ש- $M > p_i$ לכל $1 \leq i \leq n$.גם לא קיים מספק ראשוני p_i אשר מחלק את M . הרי

$$M \% p_i = 1 \Rightarrow p_i \nmid M.$$

■

הגענו לסתירה של המשפט הפירוק לראשוניים, לכן קיימים אינסוף מספרים ראשוניים.

משפט 6.3 משפט הפירוק לראשוניים

(ראו משפט 1.4) לכל מספר שלם n קיימים שלמים e_i וראשוניים p_i כך ש-

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$$

הוכחה: אינדוקציה.

משפט 6.4

אם a, b שלמים זרים (כלומר $\gcd(a, b) = 1$) אז

$$\phi(m \cdot n) = \phi(m) \cdot \phi(n).$$

הוכחה: (להעשרה בלבד)

משפט 6.5

אם p מספר ראשוני אז

$$\phi(p^n) = p^n - p^{n-1}.$$

הוכחה: נתבונן על $\gcd(p^n, m)$ כאשר m שלם ו- p ראשוני.

האפשרויות היחידות של המחלק המשותף הגדול ביותר $\gcd(p^n, m)$ הן $1, p, p^2, \dots, p^n$. בסה"כ יש p^n אפשרויות.

$\gcd(p^n, m) > 1$ רק אם $m \in \{p, 2p, 3p, \dots, p^{n-1}p\}$, כלומר רק אם m שווה לכפולה של p .

מכאן קיימים $p^n - p^{n-1}$ שלמים עבורם $\gcd(p^n, m) = 1$.

משפט 6.6 נוסחה לפונקצית אוילר

(ראו משפט ??) לכל מספר שלם n בעל פירוק לראשוניים

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$$

פונקציית אוילר ניתנת על ידי

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^k (p_i^{e_i} - p_i^{e_i-1}) = (p_1^{e_1} - p_1^{e_1-1}) (p_2^{e_2} - p_2^{e_2-1}) \dots (p_k^{e_k} - p_k^{e_k-1})$$

הוכחה: משפט 6.4 ו- 6.5.

דוגמה 6.3

חשבו את $\phi(24)$

פתרון:

$$24 = 2^3 3^1.$$

לכן

$$\phi(24) = (2^3 - 2^2)(3^1 - 3^0) = (8 - 4)(3 - 1) = 8.$$

משפט 6.7

אם p מספר ראשוני אז

$$\phi(p) = p - 1 .$$

הוכחה: משפט 6.4 ו- 6.5.

משפט 6.8

אם p ו- q מספרים ראשוניים שונים אז

$$\phi(p \cdot q) = (p - 1)(q - 1) .$$

הוכחה: תרגיל בית.

משפט 6.9 המשפט הקטן של פרמה

אם p מספר ראשוני ו- $a \in \mathbb{Z}_p$. אז התנאים הבאים מתקיימים:

$$a^p \equiv a \pmod{p} .1$$

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} .2$$

$$a^{-1} \equiv a^{p-2} \pmod{p} .3$$

הוכחה:

טענה 1. נוכיח באינדוקציה.

בסיס:

עבור $a = 0$ הטענה $0^p \equiv 0 \pmod{p}$ מתקיימת.

מעבר:

נניח כי הטענה מתקיימת עבור a .

$$(a + 1)^p = a^p + pa^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2}a^{p-2} + \dots + pa + 1 \equiv a^p + 1 \pmod{p}$$

ההנחת האינדוקציה אומרת ש- $a^p \equiv a \pmod{p}$ לכן

$$(a + 1)^p \pmod{p} \equiv a^p + 1 \pmod{p} \equiv (a + 1) \pmod{p}$$

כנדרש.

טענה 2. $\gcd(a, p) = 1$ לפיכך קיים איבר הופכי $a^{-1} \in \mathbb{Z}_p$. נכפיל ב- a^{-1} אשר הוכחנו בסעיף הקודם:

$$a^{-1}a^p \equiv a^{-1} \cdot a \pmod{p} \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} .$$

טענה 3.

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Leftrightarrow 1 \equiv a^{p-1} \pmod{p} \Rightarrow a^{-1} \equiv a^{p-2} \pmod{p} .$$

משפט 6.10 משפט אוילר

אם a, n שלמים ו- $\gcd(a, n) = 1$ אז

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

משפט 6.11

אם a, n שלמים ו- $\gcd(a, n) = 1$ אז

$$a^{-1} \equiv a^{\phi(n)-1} \pmod{n}.$$

דוגמה 6.4

חשבו את האיבר ההופכי ל- 5 ב- \mathbb{Z}_{11} .

פתרון:

לפי משפט פרמט 6.9:

$$5^{-1} = 5^{11-2} \pmod{11} = 5^9 \pmod{11}.$$

לפי הנוסחת לשארית ?? :

$$5^9 \% 11 = 5^9 - 11 \left\lfloor \frac{5^9}{11} \right\rfloor = 9$$

לכן $5^{-1} \in \mathbb{Z}_{11} = 9$.

■

6.4 הוכחה שצופן RSA ניתן לפענוח

משפט 6.12 קריפטו-מערכת RSA ניתן לפענוח

יהי $n = pq$ מספרים ראשוניים שונים, $a, b \in \mathbb{Z}$ שלמים חיוביים כך ש- $ab = 1 \pmod{\phi(n)}$. אם $x \in \mathbb{Z}_n$ אז

$$(x^b)^a = x \pmod{n}.$$

הוכחה: נתון כי $ab = 1 \pmod{\phi(n)}$.

לפי משפט 6.8, $\phi(n) = \phi(pq) = (p-1)(q-1)$, אז

$$ab = 1 \pmod{\phi(n)} = 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$$

לכן קיים $t \in \mathbb{Z}$ כך ש-

$$ab - 1 = t(p-1)(q-1).$$

לכל $z \neq 0 \in \mathbb{Z}$ לפי משפט 6.9, $z^{p-1} = 1 \pmod{p}$. בפרט

$$x^{ab-1} = x^{t(p-1)(q-1)} = (x^{t(q-1)})^{p-1} = y^{p-1}$$

כאשר $y = x^{t(q-1)}$. מכאן $x^{ab-1} = 1 \pmod{p}$.

משיקולות של סיימטריה באותה מידה $x^{ab-1} = 1 \pmod{q}$.

לכן $x^{ab-1} - 1 = 0 \pmod{p}$ ו- $x^{ab-1} - 1 = 0 \pmod{q}$.

מכיוון ש- p ו- q זרים אז

$$x^{ab-1} - 1 = 0 \pmod{pq}.$$

לפיכך

$$x^{ab-1} = 1 \pmod{pq}.$$

נכפיל ב- x ונקבל

$$(x^a)^b = x \pmod{pq}.$$

ז"א הוכחנו כי לכל טקסט גלוי x , אם נצפין אותו ואז אחר כך נפענח את הטקסט מוצפן המתקבל מאלגוריתם RSA, נקבל אותו טקסט גלוי המקורי בחזרה. ■

6.5 צופן RSA המוכלל

משפט 6.13

יהיו p, q מספרים ראשוניים ויהי $n = pq$. יהי

$$\lambda(n) = \frac{(p-1)(q-1)}{\gcd(p-1, q-1)}.$$

נגדיר צופן חדש אשר זהה ל-RSA אלא $\phi(n)$ הוחלף עם $\lambda(n)$ כך ש- $ab \equiv 1 \pmod{\lambda(n)}$. אזי הקריפטו-מערכת ניתן לפענח.

הוכחה:

שלב 1 רושמים את הצופן:

$$\left. \begin{aligned} e_k(x) &= x^b \pmod{n} \\ d_k(y) &= y^a \pmod{n} \end{aligned} \right\} \quad n = pq, \quad ab \equiv 1 \pmod{\lambda(n)}.$$

שלב 2 נתון כי $d = \gcd(p-1, q-1)$. ז"א שקיים p' שלם כך ש-

$$p-1 = p'd \Leftrightarrow \frac{p-1}{d} = p' \Leftrightarrow d = \frac{p-1}{p'}. \quad (\#1)$$

באותה מידה קיים q' שלם כך ש-

$$q-1 = q'd \Leftrightarrow \frac{q-1}{d} = q' \Leftrightarrow d = \frac{q-1}{q'}. \quad (\#2)$$

שלב 3

$$\lambda(n) = \frac{(p-1)(q-1)}{\gcd(p-1, q-1)} = \frac{(p-1)(q-1)}{d}.$$

$$\lambda(n) \stackrel{(\#1)}{=} \frac{(p-1)(q-1)}{\left(\frac{p-1}{p'}\right)} = p'(q-1). \Leftrightarrow d = \frac{p-1}{p'}. \quad (1*)$$

$$\lambda(n) \stackrel{(\#2)}{=} \frac{(p-1)(q-1)}{\left(\frac{q-1}{q'}\right)} = q'(p-1). \Leftrightarrow d = \frac{p-1}{p'}. \quad (2*)$$

שלב 4 $ab \equiv 1 \pmod{\lambda(n)}$ (נתון) לכן קיים t שלם כך ש-

$$ab = 1 + t\lambda(n) \stackrel{(2*)}{\equiv} 1 + t(p-1)q'.$$

לכן

$$ab - 1 = t(p-1)q'.$$

מכאן

$$x^{ab-1} x^{tq'(p-1)} = y^{p-1} \stackrel{\text{פרמה}}{\equiv} 1 \pmod{p}$$

כאשר $y = x^{tq'}$ והשוויון השני מתקיים בגלל ש- p מספר ראשוני. לפיכך

$$x^{ab-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

שלב 5 $ab \equiv 1 \pmod{\lambda(n)}$ (נתון) לכן קיים t שלם כך ש-

$$ab = 1 + t\lambda(n) \stackrel{(1*)}{\equiv} 1 + t(q-1)p'.$$

לכן

$$ab - 1 = t(q-1)p'.$$

מכאן

$$x^{ab-1} x^{tp'(q-1)} = z^{q-1} \stackrel{\text{פרמה}}{\equiv} 1 \pmod{q}$$

כאשר $z = x^{tp'}$ והשוויון השני מתקיים בגלל ש- q מספר ראשוני. לפיכך

$$x^{ab-1} \equiv 1 \pmod{q}.$$

שלב 6 מכיוון ש- p, q ראשוניים אז

$$\left. \begin{array}{l} x^{ab-1} \equiv 1 \pmod{q} \\ x^{ab-1} \equiv 1 \pmod{q} \end{array} \right\} \Rightarrow x^{ab-1} \equiv 1 \pmod{pq}$$

לפיכך

$$x^{ab-1} \equiv 1 \pmod{n} \Rightarrow (x^b)^a \equiv x \pmod{n}$$

כנדרש.

