חישוביות וסיבוכיות תשפ"ה סמסטר א'
שיעור 7
אי-כריעות

תוכן העניינים

7.1 השפה ATM

הגדרה 7.1: השפה ATM

נגדיר A_{TM} להיות אוסף כל הקידודים של כל מכונת טיורינג M וכל קלט w כך ש- M מקבלת את w. כלומר

$$A_{TM} = \left\{ \langle M, w \rangle \;\middle|\; \text{מכונת טיורינג שמקבלת את } w \ \ M \right\}$$

7.2 השפה E

הגדרה 7.2: השפה E

השפה E מכילה את כל התוכניות שהשפה שלהם ריקה. כלומר, תוכניות שלא מקבלות אף קלט.

$$E = \{P \mid L(P) = \emptyset\}$$

נסוח חלופי של ההגדרה הזו היא, במונחי מכונת טיורינג,

$$E_{TM} = \{\langle M\rangle \mid L(M) = \emptyset \text{ בתנאי שעומדת טיורינג מכונת } M\}$$

משפט 7.1: E_{TM} לא כריעה

השפה E_{TM} לא כריעה.

רעיון ההוכחה: ההוכחה היא דרך השלילה.

הרעיון הוא להניח ש- E_{TM} כיעה. אם כך אז אפשרי להרכיב מכונץ טיורינג אשר מכריעה את השפה A_{TM}, בסתירה לכך ש- A_{TM} לא כריעה.

בפרט, תהי R המ"ט שמכריעה את E_{TM}.
אנחנו נרכיב מ"ט S מ-R אשר מכריעה את A_{TM}.

רעיון אחד הוא בשביל S כך. על הקלט $\langle M,w\rangle$, המ"ט S מריצה את המ"ט R על w.
אם $R \leftarrow$ acc אז $L(M)$ ריקה ולכן M לא מקבלת w.
אם $R \leftarrow$ rej אז $L(M)$ לא ריקה $\Leftarrow M$ מקבלת קלט כלשהו אבל לא בהכרך w.
כלומר אנחנו יודעים שקיים קלט אשר M מקבלת אך איננו יודעים אם M מקבלת את הקלט w ספציבי.

לכן אנחנו נצטרך מ"ט חדשה, M_1 מ- M אשר דוחה כל קלט מלבד מ- w.
ואז נריץ R על $\langle M_1,w\rangle$ בכדי לבדוק אם $L(M_1) = \emptyset$.
אבל על הקלט w M_1 עובדת בדיוק כמו M.
לכן $L(M_1) \neq \emptyset$ אם ורק אם M_1 מקבלת w.
לכן, אם R מקבלת $\langle M_1,w\rangle$ אז $L(M_1) = \emptyset$ אז M לא מקבלת w.

הוכחה: ראשית נגדיר את המכונת טיורינג החדשה M_1.

$M_1 =$ על הקלט x:

1) אם $x \neq w$ אז $M_1 \leftarrow$ rej
2) אם $x = w$ מריצים M על w:
   - אם M מקבלת w אז $M_1 \leftarrow$ acc.

ל- M_1 יש תיאור של המ"ט M ושל המחרוזת w. היא מבצעת הבדיקה $x == w$ על ידי לסרוק את הקלט משמאל לימין והשוות את המחרוזת x עם המחרוזת w תו תו.

כעת נגדיר את המכונה S שמכריעה את A_{TM}. נניח שקיימת מ"ט R שמכריעה את E_{TM}.

$S =$ על הקלט $\langle M,w\rangle$:

1) על סמך התיאור $\langle M,w\rangle$ של הקידוד של M והמחרוזת w, בונים המ"ט M_1.

2) מריצים R על M_1.

3)
- אם R מקבלת אז S ← acc.
- אם R מקבלת אז S ← rej.

קיבלנו את התוצאה שאם קיימת R שמכריעה את E_{TM} אז קיימת S שמכריעה את A_{TM}, בסתירה לכך שקיימת מכונת טיורינג שמכריעה את A_{TM}.

■

7.3 שפות רגולריות

הגדרה 7.3: השפה REG_{TM}

השפה REG_{TM} מוגדרת להיות קידוד של אוסף כל המכונות טיורינג M עבורן $L(M)$ שפה רגולרית.

$$REG_{TM} = \left\{\langle M\rangle \;\middle|\; \text{שפה רגולרית } L(M) \text{ מ"ט ו- } M\right\}$$

משפט 7.2: REG_{TM} לא כריעה

השפה REG_{TM} לא כריעה.

רעיון ההוכחה: נוכיח דרך השלילה שאם REG_{TM} כריעה אז גם A_{TM} כריעה.
המטרה היא שאם קיימת מ"ט R שמכריעה את REG_{TM} אז בהכרח $\exists$ מ"ט S שצכריעה את A_{TM}.

על הקלט $\langle M,w\rangle$, המ"ט בונה מ"ט חדשה M_2 אשר מקבלת שפה רגולרית אם"ם M מקבלת w.

בפרט, לשם פשטות נניח כי $\Sigma = \{a,b\}$.
נגדיר M_2 להיות המ"ט שעומד בתנאי:

- אם M לא מקבלת w אז M_2 מקבלת את השפה אי-רגולרית $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
- אם M מקבלת w אז M_2 מקבלת את השפה $\bar{L}_1$, כלומר כל מחרוזת אחרת מעל Σ אשר לא ב- L_1.

הוכחה: תהי R המ"ט שמכריעה את REG_{TM}.

נבנה המ"ט S שמכריעה את A_{TM}.

$S =$ על הקלט $\langle M,w\rangle$ כאשר M מ"ט ו- w כל מחרוזת:

1) מרכיבים מ"ט M_2 שתוגדר:

$M_2 =$ על הקלט x:

1) אם $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ $x \in$ אז M_2 ← acc.

2) אם $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ $x \notin$ מריצים M על w. אם M מקבלת w אז M_2 ← acc.

2) מריצים R על $\langle M_2\rangle$.

3) • אם R מקבלת אז $S \leftarrow$ acc.
• אם R דוחה אז $S \leftarrow$ rej.

■

7.4 השפה EQ

הגדרה 7.4: השפה EQ_{TM}

EQ_{TM} מוגדרת להיות אוסף הזוגות של מכונות טיורינג שמקבלות בדיוק אותן המילים:

$$EQ_{TM} = \left\{ \langle M_1, M_2 \rangle \;\middle|\; L(M_1) = L(M_2) \text{ מכונות טיורינג } M_1, M_2 \right\}$$

משפט 7.3: E_{QM} לא כריעה

E_{QM} לא כריעה.

הוכחה:
נניח בשלילה כי EQ_{TM} כריעה $\Leftarrow \exists$ מ"ט R שמכריעה EQ_{TM}.
נגדיר S המ"ט שמכריעה את E_{TM} ונבנה R כך:

$S=$" על הקלט $\langle M \rangle$ כאשר M מ"ט כלשהי:

1) מריצים R על הקלט $\langle M, M_1 \rangle$ כאשר M_1 המ"ט שדוחה כל קלט.

2) • אם R מקבלת אז $S \leftarrow$ acc.
• אם R דוחה אז $S \leftarrow$ rej. "

ז"א אם R מכריעה את EQ_{TM} אז S מכריעה את E_{TM}. זה בסתירה לכך ש- E_{TM} לא כריעה. ■

7.5 הגדרה של רדוקציה

הרעיון של רדוקציה הוא לפתור בעיה אחת באמצעות פתרון של בעיה אחרת.

דוגמה 7.1

נניח שאנחנו צריכים לבדוק אם משקל של מכתב ישראלי אינו עולה על 50 גרם אבל אין לנו משקל.
נניח שיש לנו מכונה משוכללת אנגלית ובמכונה ניתן לשים מעטפה ממוענת עם בול.
המכונה מצפצפת אם שווי הבול מספיק למשלוח המעטפה.
האם אפשר להשתמש במכונה האנגלית כדי לפתור את בעיית בדיקת המשקל הלא חורג של מכתב ישראלי?
כן!

- נכין מעטפה בריטית גדולה.
- נשים בתוכה משקולת של 50 גרם בדיוק.
- נכתוב עליה כתובת בתוך אנגליה. ונדביק עליה בול בשווי £1.29.
- נכניס את המכתב הישראלי לתוך המעטפה הגדולה שהכנו

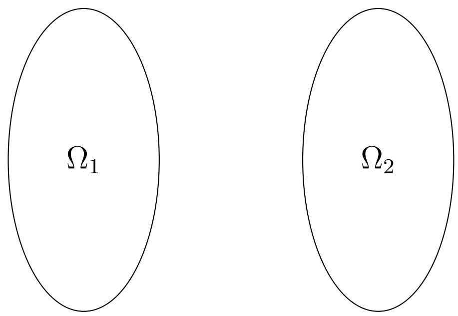
- ואז נשים את המעטפה הגדולה בתצוך המכשיר הבריטי.
- אם המכשיר מצפצף אז המכתב הישראלי שוקל לכל היותר 50 גרם.

7.5.1 הגדרה היוריסטית של הרדוקציה

נתונים שני מרחבים Ω_1 ו- Ω_2:

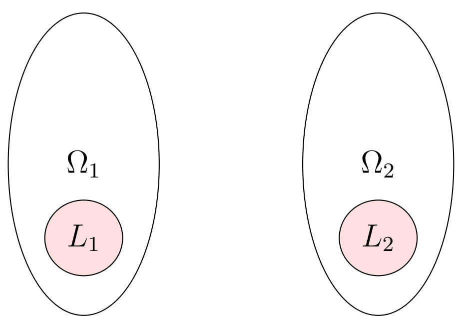
- Ω_1 הוא המרחב של הבעיות שאנחנו רוצים לפתור.
- Ω_2 הוא המרחב של הבעיות עבורן יש לנו שיטת פתרון.

בדוגמה של המכתבים, Ω_1 הוא מרחב המכתבים הישראליים ו- Ω_2 מרחב המכתבים הבריטיים הממוענים יחד עם בול אנגלי.



תהיינה L_1 תת-קבוצה של Ω_1 ו- L_2 תת-קבוצה של Ω_2.

תתי הקבוצות L_1, L_2 הן מקרי ה- כן.



בדוגמה של המכתבים:

- L_1 הם המכתבים שמשקלם עד 50 גרם.
- L_2 הם המכתבים המוביילים והממוענים בתוך אנגליה שעומדים בתנאי המחירים של הדואר הבריטי.

קיימת פונקציה $R : \Omega_1 \to \Omega_2$ שמתאימה לכל איבר של Ω_1 איבר ב- Ω_2, שמקיימת את התכונה הבאה:

$$x \in L_1 \Leftrightarrow R(x) \in L_2 \ .$$

מנובע מזה ש- $x \in L_1$ אם ורק אם $R(x) \in L_2$,
כלומר המקור ב- L_1 אם ורק אם התמונה ב- L_2.

7.5.2 הגדרה פורמלית של הרדוקציה

הגדרה 7.5: הרדוקציה

רדוקציית התאמה (many to one reduction) מקבוצה $L_1 \subseteq \Omega_1$ לקבוצה $L_2 \subseteq \Omega_2$ הינה **פונקציה שניתנת לחישוב**

$$R : \Omega_1 \to \Omega_2$$

כך שלכל $x \in \Omega_1$

$$x \in L_1 \quad \Leftrightarrow \quad R(x) \in L_2 \ .$$

נסמן רדוקציה מ- L_1 ל- L_2:

$$L_1 \leq_m L_2 \ .$$

רדוקציה היא פשוט פונקציה ששומרת על השייכות לקבוצות ה"כן" ולקבוצות ה"לא".

היא מתאימה לכל איבר בקבוצה הכן L_1 איבר בקבוצת הכן L_2.

היא מתאימה לכל איבר בקבוצה הלא L_1 משלים איבר בקבוצת הלא L_2 משלים.

7.5.3 הבעיה הכללית של רדוקציה

- איך נוכל להשתמש ברדוקציה לפתור בעיות?
- נניח שאנו יודעים להבחין איזה נקודות נמצאות ב L_2 ואיזה לא.
- כלומר, ב Ω_2 יש לנו יכולת להבחין בין איברי קבוצת הכן לאיברי קבוצת הלא .
- -ונניח שב Ω_1 אנו לא יודעים להבחין איזה נקודות נמצאות ב L_1 ואיזה לא.
- כלומר , Ω_1 אין לנו יכולת להבחין בין איברי קבוצת הכן לאיברי קבוצת הלא.

נניח שנותנים לנו נקודות ב- Ω_1.
כיצד אפשר להבחין האם ומי מהנקודות הן בקבוצה L_1?
כן!

- נפעיל את הרדוקציה.
- אם התמונה ב- L_2 אז המקור ב- L_1.
- אם התמונה לא ב L_2 אז המקור לא ב- L_1.

7.6 תכונות של רדוקציה

משפט 7.4: משפט הרדוקצה משפה כריעה לשפה כריעה

תהיינה L_1, L_2 שפות. אם:

- L_2 כריעה,
- וקיימת רדוקצית התאמה מ- L_1 ל- L_2.

אז L_1 כריעה.
במילים פשוטות, אם $L_1 \leq_m L_2$ ו- L_2 כריעה אז L_1 כריעה.

הוכחה: L_2 כריעה לכן קיימת תוכנית DL_2 שמכריעה את השפה L_2.

בנוסף קיימת רדוקציה R משפה L_1 לשפה L_2, ז"א לכל $x \in L_1$ מתקיים

$$x \in L_1 \quad \Leftrightarrow \quad R(x) \in L_2 \ .$$

נבנה תוכנית DL_1 שמכריעה את השפה L_1.

על הקלט $x \in L_1$:

1) נחשב $y = R(x)$.
2) נחשב $DL_2(y)$.
3) R רדוקציה מ- L_1 ל- L_2 לכן:
   - אם $y \in L_2$ אז $R(x) \in L_2$ אז $x \in L_1$.
   - אם $y \notin L_2$ אז $R(x) \notin L_2$ אז $x \notin L_1$.

ונחזיר את השתובה המתקבלת. ■

ההוכחה חלופית: L_2 כריעה $\Leftarrow \exists$ מ"ט M שמכריעה את L_2.

$L_2 \leq_m L_1$ אז $\exists$ רדוקציה R מ- L_1 ל- L_2.

לפי הגדרה 7.5 של רדוקציה R פונקציה חישובית לכן אפשר לבנות מ"ט שמחשבת אותה.

נבנה מ"ט שמכריעה את L_1.

$N =$ " על הקלט $x \in L_1$:

1) מחשבים $R(x)$.
2) מריצים M על $R(x)$ ומחזירים את הפלט של M.

R רדוקציה. ז"א $R(x) \in L_2$ אם"ם $x \in L_1$.

לכן,

- אם $N \leftarrow$ acc אז $R(x) \in L_2$ אז $x \in L_1$.
- אם $N \leftarrow$ rej אז $R(x) \notin L_2$ אז $x \notin L_1$.

משפט 7.5:

אם $L_2 \leq_m L_1$ ו- L_2 קבילה אז L_1 קבילה.

הוכחה: L_2 קבילה $\Leftarrow \exists$ מ"ט M שמקבלת את L_2.

$L_2 \leq_m L_1$ אז $\exists$ רדוקציה R מ- L_1 ל- L_2.

לפי הגדרה 7.5 של רדוקציה R פונקציה חישובית לכן אפשר לבנות מ"ט שמחשבת אותה.

נבנה מ"ט שמקבלת את L_1.

$N =$ " על הקלט $x \in L_1$:

1) מחשבים $R(x)$.

2) מריצים M על $R(x)$.

3) ומחזירים את הפלט של M.

R רדוקציה. ז"א $R(x) \in L_2$ אם"ם $x \in L_1$.

לכן,

- אם $N \to$ acc אז $R(x) \in L_2$ אז $x \in L_1$.
- אם N לא מקבלת את $R(x)$ אז $R(x) \notin L_2$ אז $x \notin L_1$.

■

מסקנה 7.1:

אם $L_2 \leq_m L_1$ ו- L_1 לא כריעה אז L_2 לא כריעה.

הוכחה:
נניח בשלילה כי L_1 לא כריעה ו- L_2 כריעה.
לפי משפט 7.4 אם L_2 כריעה אז בהכרח L_1 כריעה.
זה בסתירה לכך ש- L_1 לא כריעה. ■

מסקנה 7.2:

אם $L_2 \leq_m L_1$ ו- L_1 לא קבילה אז L_2 לא קבילה.

הוכחה:
נניח בשלילה כי L_1 לא קבילה ו- L_2 קבילה.
לפי משפט 7.5 אם L_2 קבילה אז בהכרח L_1 קבילה.
זה בסתירה לכך ש- L_1 לא קבילה. ■

משפט 7.6: תכונות של רדוקציות

A	$\leq_m$	B
כריעה	$\Leftarrow$	כריעה
לא כריעה	$\Rightarrow$	לא כריעה

A	$\leq_m$	B
קבילה	$\Leftarrow$	קבילה
לא קבילה	$\Rightarrow$	לא קבילה

7.7 רדוקציית התאמה חישובית משפה כריעה ל- A_{TM}

משפט 7.7: לכל שפה קיימת רדוקציה ל- A_{TM}

מכל שפה כריעה A קיימת רדוקציה חישובית ל- A_{TM}.

כלומר

$$A \leq_m A_{TM} \ .$$

הוכחה:
תהי A שפה כריעה.
ז"א $\exists$ תוכנה D_A שמכריעה את A.
נבנה פונקציית רדוקציה R מ- A ל- A_{TM}.

- פונקציית הרדוקציה תקבל מילה w ואז תריץ את D_A על w.
- אם D_A קיבלה אז ז"א ש $w \in A$.
- ולכן בשביל שהרדוקציה תתקיים, נרצה להחזיר מילה כלשהו שב- A_{TM}.
- בבנייה שלנו נחזיר זוג של:
  * תוכנה Q שמקבלת כל מילה
  * ואת המילה "a".

  הזוג הזה כמובן שייך ל- A_{TM} כי התוכנה מקבלת כל מילה ובפרט את "a".
- אם D_A תדחה את קלט הרדוקציה שלנו, w אז w אינה ב- w
- לכן אנחנו נרצה להחזיר פלט שאינו ב A_{TM}.
- נחזיר זוג של:
  * תוכנה שדוחה כל מילה
  * ואת המילה "a".

  ברור שהזוג לא שייך ל- A_{TM}.

```
R(w):
{
    if D_A(w)==1
        return( "Q(x){return(1);}" , "a" )
    else
        return( "Q(x){return(0);}" , "a" )
}
```

- הרדוקציה חישובית כיוון שבהכרח קיימת תוכנה D_A.
- D_A מכריעה את A לכן היא תמיד עוצרת
- לכן הרדוקציה R תמיד מחזירה קלט
- הבנייה של הרדוקציה מקיימת

$$R(x) \in A_{TM} \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in A \ .$$

■