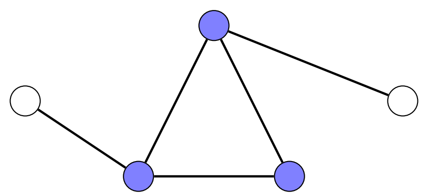
תרגילים : סיבוכיות

קליקה:

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ קליקה ב- G היא תת קבוצה של קדקודים $C\subseteq V$ כך שלכל שני קדקודים $u_1,u_2\in C$ מתקיים $(u_1,u_2)\in E$.

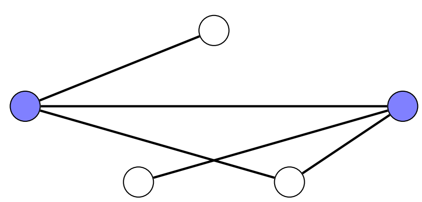
דוגמה: קליקה בגודל $k=3$



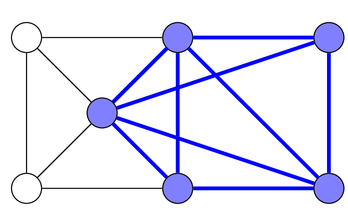
כיסוי בקדקודים:

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ כיסוי בקדקודים ב- G הוא תת קבוצה של קדקודים $C\subseteq V$ כך שלכל צלע $(u_1,u_2)\in E$ מתקיים $u_1\in C$ או $u_2\in C$.

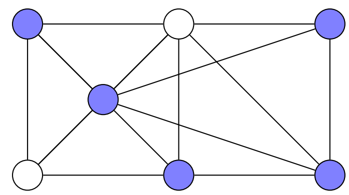
דוגמה: כיסוי בקדקודים בגודל $k=2$



דוגמה: קליקה בגודל $k=5$



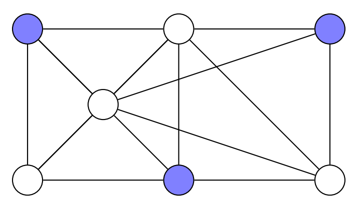
דוגמה: כיסוי בקדקודים בגודל $k=5$



<u>קבוצה בלתי תלוייה:</u>

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ קבוצה בלתי תלויה ב- G היא תת קבוצה של קדקודים $S\subseteq V$ כך שלכל שני קדקודים $(u_1,u_2)\in S$ מתקיים $(u_1,u_2)\notin E$.

<u>דוגמה: קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k=3$</u>



שאלה 1

<u>בעיית קליקה (Clique) :</u>

קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר טבעי k.

פלט: האם G מכיל קליקה בגודל k?

$$Clique = \{\langle G,k\rangle \ \big|\ \text{מכיל קליקה בגודל } k \ G\} \ .$$

<u>בעיית כיסוי בקדקודים (Vertex-Cover) :</u>

קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר טבעי k.

פלט: האם G מכיל כיסוי בקדקודים k?

$$VC = \{\langle G,k\rangle \ \big|\ \text{מכיל כיסוי בקדקודים בגודל } k \ G\} \ .$$

הוכיחו כי קיימת רדוקציה זמן-פולינומיאלית מבעיית Clique לבעיית Vertex-Cover. כלומר

$$\text{Clique} \le_p \text{VertexCover} \ .$$

שאלה 2

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$. קבוצת קדקודים $U \subseteq V$ תקרא **קבוצת בלתי תלויה** אם לכל זוג קדקודים u_1,u_2 ב- U מתקיים ש-

$$(u_1,u_2)\notin E \ .$$

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$. קבוצת קדקודים $U \subseteq V$ תקרא **קליקה** אם לכל זוג קדקודים u_1,u_2 ב- U מתקיים ש-

$$(u_1,u_2)\in E \ .$$

נתבונן בשפות הפורמליות הבאות:

$$IS=\left\{\langle G,k\rangle \ \middle|\ G \text{ is an undirected graph, } k \text{ is an integer, } G \text{ includes an } \textbf{independent set} \text{ of size at least } k\ \right\}$$

$$CLQ=\left\{\langle G,k\rangle \ \middle|\ G \text{ is an undirected graph, } k \text{ is an integer, } G \text{ includes an } \textbf{clique} \text{ of size at least } k\ \right\}$$

הוכיחו כי

$$IS \le_P CLQ \ .$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה IS לשפה CLQ.
יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 3

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$. קבוצת קדקודים $U \subseteq V$ תקרא **קבוצת בלתי תלויה** אם לכל זוג קדקודים u_1,u_2 ב- U מתקיים ש-

$$(u_1,u_2)\notin E \ .$$

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$. קבוצת קדקודים $U \subseteq V$ תקרא **כיסוי קדקודים** ב- G אם לכל צלע $(u_1,u_2)\in E$, מתקיים ש-

$$u_1\in U \quad \vee \quad u_2\in U \ .$$

נתבונן בשפות הפורמליות הבאות:

$$IS=\left\{\langle G,k\rangle \ \middle|\ G \text{ is an undirected graph, } k \text{ is an integer, } G \text{ includes an } \textbf{independent set} \text{ of size at least } k\ \right\}$$

$$VC=\left\{\langle G,k\rangle \ \middle|\ G \text{ is an undirected graph, } k \text{ is an integer, } G \text{ includes a } \textbf{vertex cover} \text{ of size at least } k\ \right\}$$

הוכיחו כי

$$IS \le_P VC \ .$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה IS לשפה VC.
יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

תשובות

<u>שאלה 1</u> בהינתן זוג $\langle G,k\rangle$ הקלט עבור Clique, ניצור זוג $\langle G',k'\rangle$ הקלט של VC ע"י פונקצית הרדוקציה f:

$$f\left(\langle G,k\rangle\right)=\langle G',k'\rangle$$

ונוכיח כי

$$\langle G,k\rangle\in\text{Clique}\quad\Rightarrow\quad\langle G',k'\rangle\in\text{VertexCover}$$
$$\langle G,k\rangle\in\text{Clique}\quad\Leftarrow\quad\langle G',k'\rangle\in\text{VertexCover}$$

<u>הגדרת הרדוקציה</u>

- נגדיר את $G'=(V',E')$ להיות הגרף המשלים של $G=(V,E)$,
- כלומר $V'=V$ ו- $E'=\left\{(u_1,u_2)\;\middle|\;(u_1,u_2)\notin E\right\}$.
- נגדיר $k'=|V|-k$.

<u>נכונות הרדוקציה</u>

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

נניח כי $\langle G,k\rangle\in\text{Clique}$.

$\Leftarrow$ G מכיל קליקה C בגודל k.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- C מחוברים בצלע ב- G.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- C לא מחוברים בצלע ב- G'.

$\Leftarrow$ $V\backslash C$ היא כיסוי בקדקודים ב- G' בגודל $k'=|V|-k$.

$\Leftarrow$ G' מכיל כיסוי בקדקודים בגודל k'.

$\Leftarrow$ $\langle G',k'\rangle\in\text{VertexCover}$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

נניח כי $\langle G',k'\rangle\in\text{VertexCover}$.

$\Leftarrow$ G' מכיל כיסוי בקדקודים S בגודל k'.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ש $V'\backslash S$ לא מחוברים בצלע ב- G'.

$\Leftarrow$ לפי ההגדרת הרדוקציה $V'=V$.
לכן כל שני קדקודים ש $V\backslash S$ לא מחוברים בצלע ב- G'.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ש $V\backslash S$ מחוברים בצלע ב- G.

$\Leftarrow$ $V\backslash S$ היא קליקה ב- G בגודל $k=|V|-k'$.

$\Leftarrow$ G מכיל קליקה בגודל k.

<u>שאלה 2</u> עלינו להוכיח כי $\exists$ רידוקיציית זמן-פולינומיאלית מ- IS ל- CLQ:

$$IS \leq_P CLQ \ .$$

ראשית נגדיר את הבעיות CLQ ו- IS.

<u>הגדרת הבעיית CLQ:</u>

קלט:	גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר שלם חיובי k.
פלט:	האם G מכיל קליקה בגודל לפחות k.

$$CLQ = \left\{ \langle G,k \rangle \ \middle| \ \text{מכיל קליקה בגודל } k \text{ לפחות } G \right\} \ .$$

<u>הגדרת הבעיית IS:</u>

קלט:	גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר שלם חיובי k.
פלט:	האם G מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל לפחות k.

$$IS = \left\{ \langle G,k \rangle \ \middle| \ \text{מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל } k \text{ לפחות } G \right\} \ .$$

<u>פונקצית הרדוקציה:</u>

אנחנו נגדיר פונקצית הרדוקציה R שבהינתן זוג $\langle G,k \rangle \in IS$ R מחזירה $\langle G',k' \rangle \in CLQ$, כלומר

$$R\left(\langle G,k \rangle\right) = \langle G',k' \rangle \ . \qquad (*1)$$

כך ש:

$$\langle G,k \rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G',k' \rangle \in CLQ \ . \qquad (*2)$$

הפונקציית הרדוקציה במשוואה (*1) מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

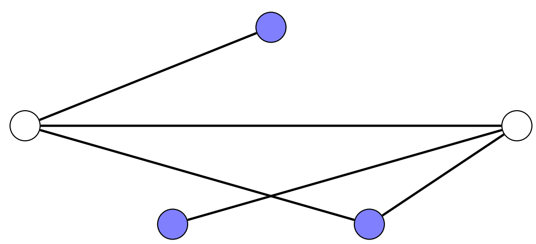
1) נניח שהגרף הוא $G=(V,E)$.
אז הגרף G' הוא הגרף המשלים של $G=(V,E)$.
ז"א $G'=\bar{G}=\left(V,\bar{E}\right)$ כאשר

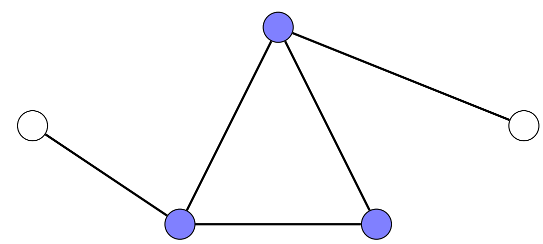
$$\bar{E} = \left\{ (u_1,u_2) \ \middle| \ (u_1,u_2) \notin E \right\} \ .$$

2) $k'=k$.

לדוגמה, בהינתן הגרף $G=(V,E)$ שמכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k=3$, הפונקציית הרדוקציה R מחזירה את הגרף $\bar{G}=(V,\bar{E})$ ואת המספר $k'=k=3$, כמתואר בתרשים למטה:

$G = (V, E)$ $\qquad$ $\bar{G} = \left(V, \bar{E}\right)$





נכונות הרדוקציה

כעת נוכיח שתנאי (*2) מתקיים.

כיוון $\Leftarrow$

בהינתן גרף $G = (V, E)$ ושלם k.

נניח כי $\langle G, k\rangle \in IS$.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל k לפחות.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה U בגודל k.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- U לא מחוברים בצלע של G.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- U מחוברים בצלע של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ הקבוצה U היא קליקה בגודל k של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ הקבוצה U היא קליקה בגודל $k' = k$ של $G' = \bar{G}$.

$\Leftarrow$ $\langle G', k'\rangle \in CLQ$.

כיוון $\Rightarrow$

בהינתן גרף G' ושלם k'.

נניח כי $\langle G', k'\rangle \in CLQ$.

$\Leftarrow$ G' מכיל קליקה בגודל k' לפחות.

$\Leftarrow$ G' מכיל קליקה U' בגודל k'.

על פי ההגדרה של הפונקציית הרדוקיה R: $G' = \bar{G}$.

$\Leftarrow$ $\bar{G}$ מכיל קליקה U' בגודל k'.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- U' מחוברים בצלע של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- U' לא מחוברים בצלע של המשלים של הגרף $\bar{G}$, דהיינו G.

$\Leftarrow$ הקבוצה U' היא קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k'=k$ של G.

$\Leftarrow$ $\langle G,k\rangle \in IS$.

שאלה 3 עלינו להוכיח כי $\exists$ רידוקיציית זמן-פולינומיאלית מ- IS ל- VC:

$$IS \leq_P VC \ .$$

ראשית נגדיר את הבעיות VC ו- IS.

הגדרת הבעיית VC:

קלט:	גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר שלם חיובי k.
פלט:	האם קיים כיסוי קדקודים ב- G בגודל לפחות k.

$$VC = \left\{\langle G,k\rangle \ \middle|\ \text{מכיל כיסוי קדקודים בגודל } k \text{ לפחות } G\right\} \ .$$

הגדרת הבעיית IS:

קלט:	גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר שלם חיובי k.
פלט:	האם G מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל לפחות k.

$$IS = \left\{\langle G,k\rangle \ \middle|\ \text{מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל } k \text{ לפחות } G\right\} \ .$$

פונקצית הרדוקציה:

אנחנו נגדיר פונקצית הרדוקציה R שבהינתן זוג $\langle G,k\rangle \in IS$, R מחזירה $\langle G',k'\rangle \in VC$, כלומר

$$R\left(\langle G,k\rangle\right) = \langle G',k'\rangle \ . \qquad (*1)$$

כך ש:

$$\langle G,k\rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in VC \ . \qquad (*2)$$

הפונקציית הרדוקציה במשוואה (1*) מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

1) נניח שהגרף הוא $G=(V,E)$.
אז הגרף G' הוא אותו גרף $G=(V,E)$.

2) $k'=|V|-k$.

נכונות הרדוקציה

כעת נוכיח שתנאי (2*) מתקיים.

כיוון $\Leftarrow$

בהינתן גרף $G=(V,E)$ ושלם k.

נניח כי $\langle G,k\rangle \in IS$.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה U בגודל k לפחות.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה U בגודל k.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- U לא מחוברים בצלע ב- G.

$\Leftarrow$ $V\backslash U$ היא כיסוי קדקודים ב- G בגודל $k'=|V|-k$.

$\Leftarrow$ הגרף $G'=\bar{G}$ מכיל כיסוי קדקודים בגודל k.

$\Leftarrow$ $\langle G',k'\rangle \in VC$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

בהינתן גרף G' ושלם k'.

נניח כי $\langle G',k'\rangle \in VC$.

$\Leftarrow$ G' מכיל כיסוי קדקודים בגודל k' לפחות.

$\Leftarrow$ G' מכיל כיסוי קדקודים U' בגודל k'.

$\Leftarrow$ G מכיל כיסוי קדקודים U' בגודל k'.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- $V\backslash U'$ היא קבוצת בלתי תלוייה ב- G' בגודל $k=|V|-k'$.

$\Leftarrow$ הגרף $G=G'$ מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל k.