

# שיעור 9

## מימד ובסיס

### 9.1 בסיס של מרחב ווקטורי

#### הגדרה 9.1 בסיס

קבוצת ווקטורים  $v_1, \dots, v_n \in V$  נקראת בסיס של  $V$  אם היא מקיימת:

(1)  $v_1, \dots, v_n$  בלתי תלויים לינארית.

(2)  $\text{span}(v_1, \dots, v_n) = V$ .

#### 9.1 דוגמה

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

בסיס של  $\mathbb{F}^n$  (בסיס הסטנדרטי).

הוכחה:

(1) צ"ל  $e_1, \dots, e_n$  בת"ל.

$$k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_n e_n = \bar{0}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + k_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 0.$$

לכן  $e_1, \dots, e_n$  בת"ל.

(2) צ"ל כי  $\text{span}(e_1, \dots, e_n) = \mathbb{F}^n$ .

$$v = \text{span}(e_1, \dots, e_n) \text{ צ"ל } v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \text{ נקח ווקטור שרירותי}$$

$$k_1 e_1 + \dots k_n e_n = v$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow k_1 = x_1, k_2 = x_2, \dots, k_n = x_n.$$

## דוגמה 9.2

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad .$$

בסיס של  $\mathbb{F}^{2 \times 3}$  (הבסיס הסטנדרטי).

הוכחה:

(1) נוכיח כי  $E_1, \dots, E_6$  בת"ל.

$$k_1 E_1 + k_2 E_2 + \dots + k_6 E_6 = \bar{0}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + k_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 0, \quad k_6 = 0.$$

לכן  $E_1, \dots, E_6$  בת"ל.

(2) נוכיח כי  $\text{span}(E_1, \dots, E_6) = \mathbb{F}^{2 \times 3}$ .

$$v = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2 \times 3} \text{ לכל ווקטור}$$

$$v = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 + eE_5 + fE_6.$$

ז"א

$$v \in \text{span}(E_1, \dots, E_6)$$

## דוגמה 9.3

ווקטורים

$$e_1 = 1, \quad e_2 = x, \quad \dots, \quad e_n = x^n$$

מהווים בסיס (הבסיס הסטנדרטי) של המרחב  $\mathbb{F}_n[x]$ .

הוכחה:

(1) צ"ל  $1, x, \dots, x^n$  בת"ל.

$$k_1 \cdot 1 + k_2 x + \dots + k_n x^n = \bar{0} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \dots + 0 \cdot x^n$$

לכל  $x$  כאשר

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \quad \dots, \quad k_n = 0.$$

לכן  $1, x, \dots, x^n$  בת"ל.(2) נוכיח כי  $\text{span}(1, x, \dots, x^n) = \mathbb{F}_n[x]$ .לכל  $p(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^n \in \mathbb{F}_n[x]$  מתקיים

$$p(x) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$$

ז"א  $p(x) \in \text{span}(e_1, \dots, e_n)$ .

## דוגמה 9.4

בדקו כי הווקטורים

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

מהווה בסיס של  $\mathbb{R}^3$ .

פתרון:

(1) צ"ל  $u_1, u_2, u_3$  בת"ל.

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \bar{0}$$

זאת מערכת משוואות הומוגניות:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 5R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 14 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 6R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array} \right)$$

למערכת יש פתרון יחיד:  $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$ לכן  $u_1, u_2, u_3$  בת"ל.

$$(2) \text{צ"ל } \mathbb{R}^3 = \text{span}(u_1, u_2, u_3).$$

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ צ"ל } v = \text{span}(u_1, u_2, u_3).$$

דרך 1:

$$\begin{aligned} & xu_1 + yu_2 + zu_3 = v \\ & \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 5 & 1 & 4 & c \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 5R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 6 & 14 & 5a + c \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 6R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5a + c - 6b \end{array} \right) \end{aligned}$$

למערכת יש פתרון, לכן  $v \in \text{span}(u_1, u_2, u_3)$ .

דרך 2:

למערכת  $A \cdot X = 0$  יש פתרון יחיד, לכן מטריצה  $A$  הפיכה. מכאן נובע שלכל  $v \in \mathbb{R}^3$ , למערכת  $A \cdot X = v$  יש פתרון יחיד, ז"א  $v \in \text{span}(u_1, u_2, u_3)$ .

## משפט 9.1

אם במרחב ווקטורי  $V$  יש בסיס סופי, אז לכל בסיס של  $V$  יש את אותו מספר הווקטורים.

## הגדרה 9.2

נניח ש  $V$  מרחב ווקטורי. למספר הווקטורים בבסיס של  $V$  קוראים המימד של  $V$ .  
המימד של מרחב ווקטורי יסומן

$$\dim(V).$$

## דוגמה 9.5

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{F}^n) &= n \\ \dim(\mathbb{F}^n[x]) &= n + 1 \\ \dim(\mathbb{F}^{m \times n}) &= m \cdot n. \end{aligned}$$

## משפט 9.2 מימד ובסיס של קבוצת ווקטורים

נניח כי  $V$  מרחב ווקטורי,  $\dim(V) = n$ . אז

(1) כל  $n + 1$  ווקטורים של  $V$  הם תלויים לינארית.

(2) כל קבוצה של  $n$  ווקטורים בלתי תלויה לינארית, היא בסיס של  $V$ .

(3) כל קבוצה של ווקטורים שהיא בלתי תלויה לינארית, ניתן להשלים לבסיס של  $V$ .

## 9.6 דוגמה

הוכיחו שהווקטורים

$$u_1 = 1 + x + x^2, \quad u_2 = 2x + 3x^2, \quad u_3 = -3x - 4x^2$$

מהווים בסיס של מרחב  $\mathbb{R}_2[x]$ .

### פתרון:

נוכיח כי  $u_1, u_2, u_3$  בת"ל.

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \bar{0}$$

$$k_1(1 + x + x^2) + k_2(2x + 3x^2) + k_3(-3x - 4x^2) = 0 + 0x + 0x^2$$

$$k_1(k_1 + 2k_2 - 3k_3)x + (k_1 + 3k_2 - 4k_3)x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

$$\left. \begin{array}{l} k_1 = 0 \\ k_1 + 2k_2 - 3k_3 = 0 \\ k_1 + 3k_2 - 4k_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$$

לכן  $u_1, u_2, u_3$  בת"ל.

$\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$ , לכן שלושה ווקטורים בת"ל מהווים בסיס של  $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$ .

## 9.2 מציאת בסיס ומימד של תת מרחב

### הגדרה 9.3 עמודה מובילה ושורה מובילה

נניח כי  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  ותהי  $B$  המטריצה המדורגת המתקבלת מ- $A$ .

(1) אומרים כי עמודה ה- $i$  של  $A$  **עמודה מובילה** אם בעמודה ה- $i$  של  $B$  יש איבר מוביל.

(2) אומרים כי שורה ה- $i$  של  $A$  **שורה מובילה** אם בשורה ה- $i$  של  $B$  יש איבר מוביל.

### משפט 9.3 עמודות מובילות מהוות בסיס של תת-מרחב

נניח כי  $S = \{u_1, \dots, u_k\} \in \mathbb{F}^n$  קבוצת ווקטורים של מרחב ווקטורי  $\mathbb{F}^n$ .

$$A = \left( \begin{array}{c|c|c|c} | & | & \cdots & | \\ u_1 & u_2 & & u_k \\ | & | & & | \end{array} \right) \text{ נגדיר}$$

(1) כל העמודות של  $A$  עמודות מובילות אם ורק אם הקבוצת ווקטורים  $S$  בת"ל.

(2) העמודות המובילות של  $A$  מהווים בסיס של  $S$ .

(3) מספר עמודות מובילות ב- $A$  שווה למימד של  $S$ .

הוכחה: (להעשרה בלבד)

נרשום

$$x_1 u_1 + \cdots + x_k u_k = \bar{0} \quad (*)$$

כאשר  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{F}$  סקלרים. ונגדיר  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^k$ . נניח ש- $B$  המטריצה המדורגת המתקבלת מ- $A$ .

(1) נניח כי  $S$  בת"ל.

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{למערכת } AX = 0 \text{ יש פתרון יחיד: } X = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{יש איבר מוביל בכל עמודה של } B$$

$$\Leftrightarrow \text{כל העמודות של } A \text{ מובילות.}$$

נניח שכל העמודות של  $A$  מובילות.

$$\Leftrightarrow \text{יש איבר מוביל בכל עמודה של } B$$

$$\Leftrightarrow \text{הפתרון היחיד הינו } X = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{עבור הסקלרים ב- } (*1) \text{ נקבל } x_1 = \dots = x_k = 0 \Leftrightarrow S \text{ בת"ל.}$$

(2) קבוצת העמודות המובילות של  $A$  תהיה בסיס של  $S$  אם (א) היא בת"ל ו (ב) היא פורשת  $S$ .

(א) תהי  $A'$  המטריצה המתקבלת מהעמודות המובילות של  $A$ . לפי (1) כל העמודות של  $A'$  בת"ל.

(ב) נניח שמתוך ה- $k$  ווקטורים של  $S$  יש  $p$  ווקטורים בת"ל:  $\{u_1, \dots, u_p\}$ .

לכן, אפשר לרשום כל ווקטור של  $S$  כצירוף ליניארי של הווקטורים  $\{u_1, \dots, u_p\}$ .

לכן  $S$  נפרש ע"י הווקטורים  $\{u_1, \dots, u_p\}$ .

$$A = \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ u_1 & \dots & u_p & u_{p+1} & \dots & u_k \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix} \text{ נרשום}$$

הווקטורים  $u_1, \dots, u_p$  בת"ל לכן ה- $p$  עמודות הראשונות של  $A$  מובילות.

(אין יותר מ- $p$  עמודות מובילות כי אז יהיו יותר מ- $p$  ווקטורים בת"ל ונגיע לסתירה).

לפיכך העמודות המובילות פורשות  $S$ .

(3) לפי (2) העמודות המובילות של  $A$  מהווה בסיס של  $S$ .

מימד שווה למספר ווקטורים בבסיס.

לפיכך המימד שווה למספר עמודות המובילות ב- $A$ .

## דוגמה 9.7

מצאו בסיס ומימד של הקבוצה  $S = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$  כאשר

(1)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

## פתרון:

(1)

$$A = \left( \begin{array}{c|c|c} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left( \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

כל העמודות מובילות, לכן  $\{v_1, v_2, v_3\}$  בסיס של  $S$ .  
 $\dim(S) = 3$

(2)

$$A = \left( \begin{array}{c|c|c} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left( \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

עמודות 1 ו-2 מובילות. לכן הווקטורים  $v_1, v_2$  מהווים בסיס של  $S$ .  
 $\dim(S) = 2$

## 9.8 דוגמה

מצאו בסיס ואת המימד של תת מרחב הנפרש ע"י הווקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

בטאו את ווקטור  $u = \begin{pmatrix} 4 & -14 \\ -13 & 11 \end{pmatrix}$  כצירוף לינארי של הבסיס שמצאתם.

## פתרון:

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + k_4 v_4 = \bar{0}$$

↓

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & -4 & -7 \\ -4 & -1 & -5 & -5 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_4 \rightarrow R_4 - 2R_1]{R_2 \rightarrow R_2 + 5R_1, R_3 \rightarrow R_3 + 4R_1} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

עמודות 1 ו-2 מובילות, לפיכך הווקטורים  $v_2, v_1$  מהווים בסיס של  $S$ .  
 $\dim(S) = 2$

נרשום  $u$  כצירוף לינארי של הבסיס המתקבל:

$$u = x v_1 + y v_2.$$

$$\left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 14 \\ -4 & -1 & -13 \\ 2 & 5 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow[R_4 \rightarrow R_4 - 2R_1]{R_2 \rightarrow R_2 + 5R_1, R_3 \rightarrow R_3 + 4R_1} \left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow k_1 = 3, k_2 = 1$$

$$u = 3v_1 + v_2.$$

## 9.9 דוגמה

במרחב  $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$  נתונים ווקטורים

$$p_1(x) = 2 - x + x^2, \quad p_2(x) = 2x - 3x^2 + x^3, \quad p_3(x) = 1 - x^2, \quad p_4(x) = 3x - 6x^2 + x^3.$$

**א** בדקו אם הווקטורים  $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$  תלויים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם ששווה לווקטור האפס.

**ב** מצאו בסיס ואת המימד של תת מרחב הנפרש ע"י הווקטורים  $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ .

**ג** בטאו כל ווקטור מתוך  $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$  כצירוף ליני של הבסיס המצאתם בסעיף ב'.

### פתרון:

**א** נרשום את הווקטורים לפי הבסיס הסטנדרטי של  $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ ,  $E = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3\}$ :

$$p_1(x) = 2e_1 - e_2 + e_3 + 0e_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_E,$$

$$p_2(x) = 0e_1 + 2e_2 - 3e_3 + e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}_E,$$

$$p_3(x) = 1e_1 + 0e_2 - e_3 + 0e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_E,$$

$$p_4(x) = 0e_1 + 3e_2 - 6e_3 + e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}_E.$$

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



לא כל העמודות מובילות, לכן  $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$  ת"ל.

נרשום את הצירוף הליניארי

$$k_1 p_1 + k_2 p_2 + k_3 p_3 + k_4 p_4 = \bar{0}.$$

לפי המדורגת שמצאנו הפתרון הינו

$$k_1 = k_4, \quad k_2 = -k_4, \quad k_3 = -2k_4, \quad k_4 \in \mathbb{R}.$$

נציב  $k_4 = 1 \Leftrightarrow$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = -2.$$

$$p_1 - p_2 - 2p_3 + p_4 = \bar{0}$$

(ב)

$\dim(\text{span}\{p_1, p_2, p_3, p_4\}) = 3$  = מספר העמודות המובילות = 3.

העמודות 1, 2 ו-3 מובילות לפיכך הווקטורים  $p_1, p_2, p_3$  מהווים בסיס.

(ג)

$$p_1 = 1 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3$$

$$p_2 = 0 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3$$

$$p_3 = 0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3$$

$$p_4 = -p_1 + p_2 + 2 \cdot p_3.$$

## משפט 9.4

יהי  $U \subset V$  תת מרחב של המרחב ווקטורי  $V$ . נניח כי  $\dim(U) = m$  ותהי  $B = \{u_1, \dots, u_m\}$  קבוצה של  $m$  ווקטורים.

$B$  בת"ל אם ורק אם  $B$  פורשת את  $U$ .

**הוכחה:**

נניח כי  $B$  בת"ל ו- $B$  לא פורשת את  $U$ .

אז ניתן להשלים  $B$  לבסיס של  $U$ , בסתירה לכך ש- $\dim(U) = m$ .

נניח כי  $B$  פורשת את  $U$  אבל  $B$  לא בת"ל.

אז ניתן להקטין את  $B$  לבסיס של פחות מ- $m$  ווקטורים בסתירה לכך ש- $\dim(U) = m$ .

