

## תרגילים : סיבוכיות

**שאלה 1** הבעיית קליקה מוגדרת באופן הבא:

קלט: גרף לא מכוון  $G = (V, E)$  ומספר טבעי  $k$ .  
 פלט: האם  $G$  מכיל קליקה בגודל  $k$ ?

$$CLIQUE = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ מכיל קליקה בגודל } k \}.$$

הבעיית כיסוי בקדקודים מוגדרת:

קלט: גרף לא מכוון  $G = (V, E)$  ומספר טבעי  $k$ .  
 פלט: האם  $G$  מכיל כיסוי בקדקודים  $k$ ?

$$VC = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ מכיל כיסוי בקדקודים בגודל } k \}.$$

הוכיחו כי קיימת רדוקציה זמן-פולינומיאלית מבעיית  $CLIQUE$  לבעיית  $VC$ : כלומר

$$CLIQUE \leq_p VC.$$

**שאלה 2**

בהינתן גרף לא מכוון  $G = (V, E)$ .  
 תת-קבוצת קודקודים  $S \subseteq V$  היא **קבוצת בלתי תלויה** אם התנאי הבא מתקיים:  
 אם  $u_1, u_2 \in S$  אז  $(u_1, u_2) \notin E$ .

תת-קבוצת קודקודים  $C \subseteq V$  תקרא **קליקה** אם התנאי הבא מתקיים:  
 אם  $u_1, u_2 \in C$  אז  $(u_1, u_2) \in E$ .

הבעיית  $IS$  מוגדרת:

$$IS = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ לפחות} \}$$

הבעיית  $CLIQUE$  מוגדרת:

$$CLIQUE = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל } k \text{ לפחות} \}$$

הוכיחו כי

$$IS \leq_p CLIQUE.$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה  $IS$  לשפה  $CLIQUE$ .  
 יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

**שאלה 3**

בהינתן גרף לא מכוון  $G = (V, E)$ .  
 תת-קבוצת קדקודים  $S \subseteq V$  היא **קבוצת בלתי תלויה** אם התנאי הבא מתקיים:  
 אם  $u_1, u_2 \in S$  אז  $(u_1, u_2) \notin E$ .

תת-קבוצת קודקודים  $U \subseteq V$  היא **כיסוי קודקודים** אם התנאי הבא מתקיים:  
אם  $(u_1, u_2) \in E$  אז  $u_1 \in U$  או  $u_2 \in U$ .  
השפה  $IS$  מוגדרת:

$$IS = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ לפחות} \}$$

השפה  $VC$  מוגדרת:

$$VC = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל כיסוי קודקודים בגודל } k \text{ לכל היותר} \}$$

הוכיחו כי

$$IS \leq_P VC.$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה  $IS$  לשפה  $VC$ .  
יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכו' היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

#### שאלה 4

בעיית  $PARTITION$  מוגדרת באופן הבא:

קלט: קבוצת מספורים  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$   
פלט: האם קיימת חלוקה של  $S$  לשתי קבוצות  $S_1, S_2$  כך ש-

$$S_1 \cap S_2 = \emptyset \bullet$$

$$S_1 \cup S_2 = S \bullet$$

$$\bullet \sum_{x_i \in S_1} x_i = \sum_{x_i \in S_2} x_i = \frac{1}{2} \sum_{x_i \in S} x_i$$

$$PARTITION = \left\{ \langle S \rangle \mid \sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in S \setminus Y} y \text{ ש-} Y \subseteq S \text{ קבוצת תת-קבוצה של } S \right\}$$

בעיית  $SubSetSum$  מוגדרת באופן הבא:

קלט: קבוצת מספורים  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ומספר  $t$ .  
פלט: האם קיימת תת-קבוצה של  $S$  שסכום איבריה  $t$ ?

$$SubSetSum = \left\{ \langle S, t \rangle \mid t = \sum_{y \in Y} y \text{ ש-} Y \subseteq S \text{ קבוצת תת-קבוצה של } S \right\}$$

הוכיחו כי  $SubSetSum \leq_P PARTITION$ .

## תשובות

**שאלה 1** בהינתן זוג  $\langle G, k \rangle$  הקלט עבור  $CLIQUE$ , ניצור זוג  $\langle G', k' \rangle$ , הקלט של  $VC$  ע"י פונקצית הרדוקציה

$$\begin{aligned}\langle G, k \rangle \in CLIQUE &\Rightarrow \langle G', k' \rangle \in VC \\ \langle G, k \rangle \in CLIQUE &\Leftarrow \langle G', k' \rangle \in VC\end{aligned}$$

הגדרת הרדוקציה

• נגדיר את  $G'$  להיות הגרף המשלים  $\bar{G}(V, \bar{E})$ :

$$\bar{E} = \{(u_1, u_2) \mid (u_1, u_2) \notin E\}.$$

• נגדיר  $k' = |V| - k$ .

נכונות הרדוקציה

כיוון  $\Leftarrow$

נניח כי  $\langle G, k \rangle \in CLIQUE$ .

$\Leftarrow$  מכיל קליקה  $C$  בגודל  $k$ .

$\Leftarrow$  לכל  $(u_1, u_2) \in \bar{E}$  של  $\bar{G}$ , מתקיים  $(u_1, u_2) \notin E$  ולכן  $u_1 \notin C$  או  $u_2 \notin C$ .

$\Leftarrow$  לכל שני קודקודים  $u_1, u_2$  ב- $\bar{G}$ ,  $u_1 \in V \setminus C$  או  $u_2 \in V \setminus C$ .

$\Leftarrow$  הקובצת קודקודים  $V \setminus C$  היא כיסוי בקודקודים של  $\bar{G}$  בגודל  $k' = |V| - k$ .

$\Leftarrow \langle G', k' \rangle \in VC$ .

כיוון  $\Rightarrow$

נניח כי  $\langle G', k' \rangle \in VC$ .

$\Leftarrow$  מכיל כיסוי בקודקודים  $S$  בגודל  $k' = |V| - k$ .

$\Leftarrow$  לכל שני קודקודים  $u_1, u_2$  של  $G'$ , אם  $(u_1, u_2) \in \bar{E}$  אז  $u_1 \in S$  או  $u_2 \in S$ .

השלילה הלוגית של גרירה זו היא: אם  $u_1 \notin S$  וגם  $u_2 \notin S$  אז  $(u_1, u_2) \notin \bar{E}$ .

$\Leftarrow$  אם  $u_1 \in V \setminus S$  וגם  $u_2 \in V \setminus S$  אז  $(u_1, u_2) \in \bar{E}$ .

$\Leftarrow$  הקבוצת קודקודים  $V \setminus S$  היא קליקה ב- $G$  בגודל  $k' = |V| - k$ .

$\Leftarrow$  מכיל קליקה בגודל  $k$ .

שאלה 2פונקציית הרדוקציה:

אנחנו נגדיר פונקציית הרדוקציה  $f$  שבהינתן זוג  $\langle G, k \rangle \in IS$  (הקלט של  $IS$ ), תיצור  $\langle G', k' \rangle \in CLIQUE$  (הקלט של  $CLIQUE$ ), כלומר

$$f(\langle G, k \rangle) = \langle G', k' \rangle. \quad (*1)$$

כך שהתנאי הבא מתקיים:

$$\langle G, k \rangle \in IS \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in CLIQUE. \quad (*2)$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת לפי התנאים הבאים:

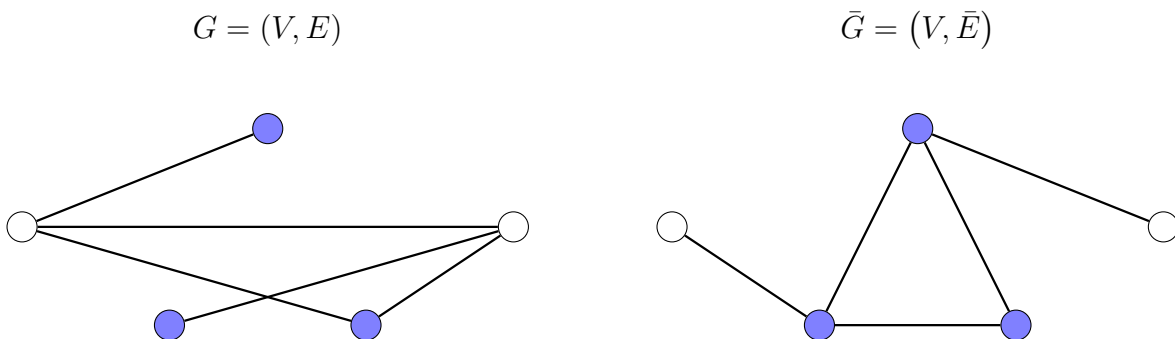
**(1)** בהינתן גרף  $G = (V, E)$ .

אז  $G'$  הוא הגרף המשלים  $\bar{G} = (V, \bar{E})$ , כאשר

$$\bar{E} = \{(u_1, u_2) \mid (u_1, u_2) \notin E\}.$$

**(2)**  $k' = k$ .

כדוגמה: בהינתן הגרף  $G = (V, E)$  שמכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל  $k = 3$ . הפונקציית הרדוקציה יוצרת את הגרף  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  ואת המספר  $k' = k = 3$ , כמתואר בתרשים למטה:

נכונות הרדוקציה

כעת נוכיח שמתקיים:  $\langle G, k \rangle \in IS \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in CLIQUE$

כיוון  $\Leftarrow$ 

בהינתן גרף  $G = (V, E)$  ושלם  $k$ .

נניח כי  $\langle G, k \rangle \in IS$ .

$\Leftarrow$  מכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל  $k$  לפחות.

$\Leftarrow$  מכיל קבוצה בלתי תלויה  $S$  בגודל  $k$ .

$\Leftarrow$  אם  $u_1, u_2 \in S$  אז  $(u_1, u_2) \notin E$ .

כלומר, כל שני קדקודים ב- $S$  לא מחוברים בצלע של  $G$ .

$\Leftarrow$  אם  $u_1, u_2 \in S$  אז  $(u_1, u_2) \in \bar{E}$ .  
 כלומר, כל שני קדקודים ב-  $S$  מחוברים בצלע של  $\bar{G}$ .  
 $\Leftarrow$  הקבוצה  $S$  היא קליקה בגודל  $k$  של  $\bar{G}$ .  
 $\Leftarrow$  הקבוצה  $S$  היא קליקה בגודל  $k' = k$  של  $G' = \bar{G}$ .  
 $\Leftarrow \langle G', k' \rangle \in CLIQUE$

$\Rightarrow$  כיוון

בהינתן גרף  $G'$  ושלם  $k'$ .  
 נניח כי  $\langle G', k' \rangle \in CLIQUE$ .  
 $\Leftarrow \langle \bar{G}, k \rangle \in CLIQUE$  (כי על פי ההגדרה של הפונקציה הרדוקציה,  $G' = \bar{G}$  ו-  $k' = k$ ).  
 $\Leftarrow \bar{G}$  מכיל קליקה בגודל  $k$  לפחות.  
 $\Leftarrow \bar{G}$  מכיל קליקה  $C$  בגודל  $k$ .  
 $\Leftarrow$  אם  $u_1 \in C$  וגם  $u_2 \in C$  אז  $(u_1, u_2) \in \bar{E}$ .  
 כלומר, כל שני קדקודים ב-  $C$  מחוברים בצלע של  $\bar{G}$ .  
 $\Leftarrow$  אם  $u_1 \in C$  וגם  $u_2 \in C$  אז  $(u_1, u_2) \notin E$ .  
 כלומר, כל שני קדקודים ב-  $C$  לא מחוברים בצלע של הגרף  $G$ .  
 $\Leftarrow$  הקבוצה  $C$  היא קבוצה בלתי תלוייה בגודל  $k$  של  $G$ .  
 $\Leftarrow \langle G, k \rangle \in IS$

### שאלה 3

פונקציה הרדוקציה:

נגדיר פונקציה הרדוקציה  $f$  שבהינתן זוג  $\langle G, k \rangle \in IS$ , (הקלט של  $IS$ ), יוצרת  $\langle G', k' \rangle \in VC$ , (הקלט של  $VC$ ), אשר מקיימת את התנאי:

$$\langle G, k \rangle \in IS \iff \langle G', k' \rangle \in VC. \quad (*)$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

**(1)** בהינתן הגרף  $G = (V, E)$ , אז הגרף  $G'$  הוא אותו גרף  $G = (V, E)$ .

**(2)**  $k' = |V| - k$

נכונות הרדוקציה

כעת נוכיח שמתקיים:  $\langle G, k \rangle \in IS \iff \langle G', k' \rangle \in VC$

$\Leftarrow$  כיוון

בהינתן גרף  $G = (V, E)$  ושלם  $k$ .  
 נניח כי  $\langle G, k \rangle \in IS$ .  
 $\Leftarrow$   $G$  מכיל קבוצה בלתי תלוייה  $S$  בגודל  $k$  לפחות:  $|S| \geq k$ .  
 $\Leftarrow$  אם  $u_1, u_2 \in S$  אז  $(u_1, u_2) \notin E$ .  
 כלומר, כל שני קדקודים ב- $S$  לא מחוברים בצלע ב- $G$ .  
 $\Leftarrow$  השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:  
 אם  $(u_1, u_2) \in E$  אז  $u_1 \notin S$  או  $u_2 \notin S$ .  
 $\Leftarrow$  אם  $(u_1, u_2) \in E$  אז  $u_1 \in V \setminus S$  או  $u_2 \in V \setminus S$ .  
 $\Leftarrow$  התת-קבוצה  $V \setminus S$  היא כיסוי קודקודים של  $G$ .  
 $|S| \geq k$  ו- $|V \setminus S| = |V| - |S|$  לכן  $|V \setminus S| \leq |V| - k$ .  
 $\Leftarrow$   $G' = G$  מכיל כיסוי קודקודים  $U$  בגודל  $|V| - k \leq k'$  לכל היותר.  
 $\Leftarrow \langle G', k' \rangle \in VC$   
 $\Rightarrow$  כיוון

בהינתן גרף  $G'$  ושלם  $k'$ .  
 נניח כי  $\langle G', k' \rangle \in VC$ .  
 $\Leftarrow$   $G' = (V, E)$  מכיל כיסוי קודקודים  $U$  בגודל  $k' \leq |U|$  לכל היותר.  
 $\Leftarrow$  אם  $(u_1, u_2) \in E$  אז  $u_1 \in U$  או  $u_2 \in U$ .  
 $\Leftarrow$  השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:  
 אם  $u_1 \notin U$  וגם  $u_2 \notin U$  אז  $(u_1, u_2) \notin E$ .  
 $\Leftarrow$  השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:  
 אם  $u_1 \in V \setminus U$  וגם  $u_2 \in V \setminus U$  אז  $(u_1, u_2) \notin E$ .  
 $\Leftarrow$  התת-קבוצה  $S = V \setminus U$  היא קבוצה בלתי תלוייה.  
 $|S| = |V| - |U|$  ו- $|U| \leq k'$  אז  $|S| \geq |V| - k' = k$ .  
 $\Leftarrow$   $G' = G$  מכיל קבוצה בלתי תלוייה  $S$  בגודל  $|V| - k' = k$  לפחות.  
 $\Leftarrow \langle G, k \rangle \in IS$

## שאלה 4

פונקצית הרדוקציה:

בהינתן  $\langle S, t \rangle$ , קלט של  $SubSetSum$ , ניצור  $\langle S' \rangle$ , קלט של  $PARTITION$ , באופן הבא: Partition.

$$(1) \text{ יהי } s = \sum_{x \in S} x$$

(2) נגדיר את הקבוצה החדשה  $S'$  על ידי הוספת האיבר  $s - 2t$  לקבוצה  $S$ :

$$S' = S \cup \{s - 2t\}.$$

נוכיח כי  $\langle S' \rangle \in PARTITION \Leftrightarrow \langle S, t \rangle \in SubSetSum$ .

$\Leftarrow$  כיוון

נניח ש-  $\langle S, t \rangle \in SubSetSum$ .

$\Leftarrow$  קיימת תת-קבוצה  $Y \subseteq S$  כך ש-  $t = \sum_{y \in Y} y$ .

לכן:

$$\begin{aligned} \sum_{y \in (Y \cup \{s-2t\})} y &= |Y| + s - 2t \\ &= t + s - 2t \\ &= s - t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{y \in S' \setminus (Y \cup \{s-2t\})} y &= |S'| - (|Y| + s - 2t) \\ &= |S'| - |Y| - s + 2t \\ &= |S| + s - 2t - |Y| - s + 2t \\ &= |S| - |Y| \\ &= s - t. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$  התת-קבוצה  $Y \cup \{s - 2t\}$  והתת-קבוצה  $S' \setminus (Y \cup \{s - 2t\})$  מהוות חלקה של הקבוצה  $S'$ .

$\Leftarrow \langle S' \rangle \in PARTITION$

$\Rightarrow$  כיוון

נניח ש-  $\langle S' \rangle \in PARTITION$ .

$\Leftarrow$  קיימות תת-קבוצות  $S'_1, S'_2 \subseteq S'$  כך שמתקיים

$$S'_1 \cup S'_2 = S' \quad (1*)$$

ו-

$$\sum_{x \in S'_1} x = \sum_{x \in S'_2} x. \quad (2*)$$

הקבוצה  $S$  קשור לקבוצה  $S'$  על ידי היחס  $S' = S \cup \{s - 2t\}$ .

לכן

$$S'_1 \cup S'_2 = S \cup \{s - 2t\} \quad (3*)$$

ללא הגבלת כלליות אנחנו נגדיר את התת-קבוצה  $S_1 \subseteq S$  של הקבוצה  $S$  להיות

$$S_1 = S'_1 \cup \{s - 2t\},$$

ואנחנו נגדיר את התת-קבוצה  $S_2 \subseteq S$  של הקבוצה  $S$  להיות

$$S_2 = S'_2 .$$

נובע ממשוואה (3\*) ש:

$$S_1 \cup S_2 = S'_1 \cup S'_2 + \{s - 2t\} = S \cup \{s - 2t\} \Rightarrow S_1 \cup S_2 = S . \quad (4*)$$

$\Leftarrow$  ניתן לרשום משוואה (2\*) בצורה הבאה:

$$\sum_{x \in (S_1 \cup \{s-2t\})} x = \sum_{x \in S_2} x . \quad (5*)$$

ניתן לפצל את הסכום בצד השמאל של המשוואה (5\*), באופן הבא:

$$\sum_{x \in S_1} x + s - 2t = \sum_{x \in S_2} x . \quad (6*)$$

נוסיף את הסכום  $\sum_{x \in S_1} x$  לשני האגפים של משוואה של (6\*) ונקבל

$$\sum_{x \in S_1} x + \sum_{x \in S_1} x + s - 2t = \sum_{x \in S_2} x + \sum_{x \in S_1} x . \quad (7*)$$

הסכום בצד הימין של משוואה (7\*) הוא הסכום  $\sum_{x \in (S_1 \cup S_2)} x$ .

בנוסף, לפי המשוואה (4\*),  $S_1 \cup S_2 = S$ , לכן  $\sum_{x \in (S_1 \cup S_2)} x = \sum_{x \in S} x$ .

לכן הסכום בצד הימין של משוואה (7\*) הוא  $\sum_{x \in S} x$ , שהוא הסכום של כל האיברים של  $S$ .

אנחנו מסמנים את הסכום הזה כ-  $\sum_{x \in S} x = s$ . לכן ניתן לרשום את משוואה (7\*) בצורה הבאה:

$$\sum_{x \in S_1} x + \sum_{x \in S_1} x + s - 2t = s . \quad (8*)$$

אפשר לבטל  $s$  בצד שמאל ובצד ימין ולהעביר את ה-  $2t$  לצד ימין ולקבל את המשוואה:

$$\sum_{x \in S_1} x + \sum_{x \in S_1} x = 2t , \quad (9*)$$

זאת אומרת

$$2 \sum_{x \in S_1} x = 2t \Rightarrow \sum_{x \in S_1} x = t . \quad (10*)$$

$\Leftarrow$  קיימת תת קבוצה  $S_1 \subseteq S$  של  $S$  שמקיימת את התנאי  $\sum_{x \in S_1} x = t$ .

$\Leftarrow \langle S, t \rangle \in SubSetSum$