

שיעור 7

צירוף לינארי ופרישה לינארית

הגדרה של צירוף לינארי

7.1 הגדרה: (צירוף לינארי)

נניח כי V מרחב וקטורי מעל שדה, \mathbb{F} . יהיו $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ ו- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. הוקטור

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

נקרא **צירוף לינארי (צ"ל)** של הוקטורים v_1, v_2, \dots, v_n עם מקדמים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

7.2 דוגמא.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$2v_1 - 5v_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ -19 \\ 8 \end{pmatrix}$$

וקטור $\begin{pmatrix} -8 \\ -19 \\ 8 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של v_2, v_1 .

7.3 דוגמא.

האם וקטור $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של

הוקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

? אם כן, רשמו את הצירוף הלינארי.

פיתרון.

$$v = xu_1 + yu_2 + zu_3 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ x - y + z &= 4 \\ x + 2z &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow 3 \cdot R_3 + 2 \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow -\frac{1}{3} \cdot R_2 \\ R_3 \rightarrow \frac{1}{4} \cdot R_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + \frac{1}{3} R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad , z = 1, y = -1, x = 2 \\
 & \qquad \qquad \qquad v = 2u_1 - u_2 + u_3 .
 \end{aligned}$$

■

7.4 דוגמא.

האם וקטור $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של הוקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

? אם כן, רשמו את הצירוף הלינארי.

פיתרון.

$$v = xu_1 + yu_2 + zu_3 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{aligned}
 x + 2y + z &= 1 \\
 -5x - 4y - 3z &= -2 \\
 7x - y + 2z &= 5
 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -5 & -4 & -3 & -2 \\ 7 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + 5R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 7R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -5 & -2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{6} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & -15 & -5 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 15R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{2} \end{array} \right)$$

■ אין פתרון ולכן v הוא לא צ"ל של u_3, u_2, u_1 .

7.5 דוגמא.

בדקו אם וקטור $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של הוקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

? אם כן, רשמו את הצירוף הלינארי.

פיתרון.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 3R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - \frac{7}{4}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

למערכת ∞ פתרונות, לכן v הוא צ"ל של u_3, u_2, u_1 .

הפתרון הכללי:

$$(x, y, z) = (2 - z, 1 - z, z), \quad (z \in \mathbb{R}).$$

נציב $z = 1$, ונקבל

$$v = u_1 + 0 \cdot u_2 + u_3.$$

■

7.6 דוגמא.

בטאו את הפולינום $p(x) = -3 + 4x + x^2$ כצירוף לינארי של

$$p_1(x) = 5 - 2x + x^2, \quad p_2(x) = -3x + 2x^2, \quad p_3(x) = 3 + x.$$

פיתרון.

$$-3 + 4x + x^2 = \alpha_1(5 - 2x + x^2) + \alpha_2(-3x + 2x^2) + \alpha_3(3 + x)$$

השוויון אמור להתקיים לכל $x \in \mathbb{R}$. לכן

$$\begin{cases} 5\alpha_1 + 3\alpha_3 = -3, \\ -2\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 4, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & -3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 5R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -10 & 3 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 10R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 52 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow \frac{1}{13}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

$$\alpha_3 = 4, \alpha_2 = 2, \alpha_1 = -3$$

$$p(x) = -3p_1(x) + 2p_2(x) + 4p_3(x).$$

■

7.7 דוגמא.

רשמו מטריצה $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של מטריצות

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

פיתרון.

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C = D$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 + 2\alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 - \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 3, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = -1.$$

ז"א

$$3A - 2B - C = D.$$

■

7.8 דוגמא.

האם פונקציה $y = \sin(2x)$ צירוף לינארי של $\sin x$ ו- $\cos x$?

פיתרון.

נניח שקיימים α_2, α_1 כך ש

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = \sin(2x).$$

השוויון אמור להתקיים לכל $x \in \mathbb{R}$.

נציב $x = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 = 0$.

$$\sin(2x) = \alpha_1 \sin x.$$

נציב $x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$$\alpha_1 = \sin \pi = 0$$

קיבלנו $\sin 2x = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$. סתירה.

לכן לא קיימים α_2, α_1 כך ש

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = \sin(2x).$$

■

פרישה לינארי

7.9 הגדרה: (פרישה לינארי)

נניח כי V מרחב וקטורי מעל שדה, \mathbb{F} . יהיו $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. הקבוצה

$$\{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}\}$$

נקראת פרישה לינארית של v_1, v_2, \dots, v_n .

הפרישה של וקטורים מסומן ב $\text{sp}(v_1, \dots, v_n)$.

ז"א פרישה לינארית זה אוסף כל הצירופים הלינאריים של v_1, v_2, \dots, v_n .

7.10 משפט: פרישה היא ת"מ

לכל מרחב וקטורי V מעל שדה \mathbb{F} ולכל $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$

$$\text{sp}(v_1, \dots, v_n)$$

הוא תת מרחב של V .

הוכחה.

(1) צ"ל $\bar{0} \in \text{sp}(v_1, \dots, v_n)$ כי

$$\bar{0} = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n$$

$$\bar{0} \in \text{sp}(v_1, \dots, v_n) \Leftarrow$$

(2) נניח $u_1, u_2 \in \text{sp}(v_1, \dots, v_n)$ צ"ל כי $u_1 + u_2 \in \text{sp}(v_1, \dots, v_n)$

לפי הנתון:

$$u_1 = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n, \quad u_2 = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n.$$

אז

$$u_1 + u_2 = (k_1 + t_1)v_1 + \dots + (k_n + t_n)v_n,$$

$$u_1 + u_2 \in \text{sp}(v_1, \dots, v_n) \text{ ז"א}$$

(3) נניח $u \in \text{sp}(v_1, \dots, v_n)$, $t \in \mathbb{F}$ צ"ל $tu \in \text{sp}(v_1, \dots, v_n)$

$$u = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n \Rightarrow tu = (tk_1)v_1 + \dots + (tk_n)v_n \in \text{sp}(v_1, \dots, v_n).$$

מש"ל. ■

7.11 דוגמא.

בדקו אם וקטור $v = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ במרחב וקטורי $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ שייך לפרישה ליניארית של $u_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 11 \end{pmatrix}$.

פיתרון.

$v \in \text{sp}(u_1, u_2, u_3)$ אם ורק אם קיימים סקלרים k_1, k_2, k_3 כך ש

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = v.$$

לכן

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

מקבלים מערכת משוואות:

$$\begin{cases} 2k_1 - 3k_2 + k_3 = -1 \\ k_1 + 2k_2 + 4k_3 = 3 \\ 4k_1 + 8k_3 = 4 \\ -k_1 + k_2 - k_3 = 0 \\ 3k_1 + 5k_2 + 11k_3 = 8 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 8 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_1 \\ R_5 \rightarrow R_5 - 3R_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

פתרון כללי:

$$k_1 = 1 - 2k_3, \quad k_2 = 1 - k_3, \quad k_3 \in \mathbb{R}.$$

נציב $k_1 = -1, k_2 = 0 \Leftrightarrow k_3 = 1$. נקבל

$$v = -u_1 + 0 \cdot u_2 + u_3.$$

לכן

$$v \in \text{sp}(u_1, u_2, u_3).$$

■

יש שתי דרכים להגדיר ת"מ:

(1) ע"י פרישה לינארית

(2) ע"י מערכת הומוגנית.

ניתן לעבור מדרך אחת לשניה.

7.12 דוגמא.

נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

הציגו את $\text{Nul}(A)$ בצורת פרישה לינארית.

פיתרון.

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן למערכת ההומוגנית $AX = 0$ יש ∞ פתרונות. הפתרון הכללי:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_3 &= -2x_4 + 2x_5 \end{aligned} \right\} x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

ז"א

$$u = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \text{Nul}(A)$$

הצורת הכללית של וקטור ב $\text{Nul}(A)$:

$$u = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

קיבלנו צ"ל של וקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

לכן $u \in \text{sp}(v_1, v_2, v_3)$ ז"א $\text{Nul}(A) = \text{sp}(v_1, v_2, v_3)$. ■

7.13 דוגמא.

נתונה מטריצה

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 18 \\ 21 \end{pmatrix}$$

הציגו את $\text{sp}(u_1, u_2, u_3)$ באוסף של פתרונות של מערכת ההומוגנית.

פיתרון.

וקטור $v \in \text{sp}(u_1, u_2, u_3)$ אם ורק אם קיימים סקלרים k_1, k_2, k_3 כך ש

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = v.$$