

עבודה 2:

מכפלה פנימית, אורתוגונליות, תהליך גרם שמידט

שאלה 1 הוכיחו או הפריכו: הפונקציות הבאות מגדירות מכפלה פנימית על \mathbb{R}^2 :

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 \quad \text{א)}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3y_1y_2 \quad \text{ב)}$$

שאלה 2 בדקו האם הפונקציות הבאות מגדירות מכפלה פנימית על $R_{\leq 2}[x]$.

$$\langle f(x), g(x) \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) \quad \text{א)}$$

$$\langle f(x), g(x) \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2) \quad \text{ב)}$$

שאלה 3 יהי

$$B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

בסיס אורתונורמלי של \mathbb{R}^3 .

נתונים הוקטורים הבאים $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B$ ו- $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$, כאשר הקואורדינטות של הוקטורים הם לפי הבסיס האורתונורמלי B . חשבו את $\langle u, w \rangle$ כאשר המכפלה הפנימית היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית של \mathbb{R}^3 .

שאלה 4 יהי

$$W = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

מצאו את W^\perp כאשר

א) המרחב הוא המרחב המכפלה הפנימית ביחס להמכפלה הפנימית הסטנדרטית של \mathbb{R}^3 .

ב) המרחב הוא המרחב המכפלה הפנימית ביחס המכפלה הפנימית שמצאתם בשאלה 3.

שאלה 5 נתבונן ב- \mathbb{R}^4 עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. ונניח כי

$$U = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(א) מצאו בסיס אורתוגונלי ל W .

(ב) מצאו את ההיחטל האורתוגונלי של $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (בתת המרחב W).

שאלה 6 יהי $V = \mathbb{R}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. ונתבונן בתת המרחב

$$U = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

(א) מצאו בסיס אורתוגונלי ל- U .

(ב) מצאו בסיס אורתוגונלי ל- U^\perp .

שאלה 7 יהי V מרחב מכפלה פנימית ממשי. וידוע כי $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ הינו בסיס של V כך שהמכפלה הפנימית בין כל שני אברי בסיס נתונה באמצעות הטבלה הבאה:

\langle, \rangle	α_1	α_2	α_3	α_4
α_1	2	-1	0	0
α_2	-1	2	-1	-1
α_3	0	-1	2	0
α_4	0	-1	0	2

נסמן ב- $W = \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

(א) מצאו בסיס אורתוגונלי ל W .

(ב) מצאו את W^\perp .

שאלה 8 יהי $V = R_{\leq 2}[x]$ מרחב מכפלה פנימית עם המכפלה הפנימית הבאה:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

ונתבונן בתת המרחב הבא: $W = \text{span}\{1, x\}$.

(א) מצאו בסיס אורתוגונלי ל W .

(ב) השלימו את הבסיס האורתוגונלי שמצאתם בסעיף א לבסיס אורתוגונלי למרחב V .

ג) נסמן ב- $P_W : V \rightarrow V$ את אופרטור ההטלה האורתוגונלית על W . נניח ש- B הוא הבסיס הסדור שמצאתם בסעיף ב של V כך שאברי הבסיס B_W הם האברים הראשונים. מצאו את $[P_W]_B^B$.

שאלה 9 יהי V מרחב מכפלה פנימית. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א) יהיו $u, v \in V$ כך שמתקיים

$$\|v + u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2.$$

אז $v \perp u$.

ב) יהיו $u, v \in V$ כך שמתקיים $v \perp u$. אז

$$\|v + u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2.$$

ג) יהיו $U, W \subset V$ אז מתקיים

$$(U \cap W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp.$$

ד) יהיו $U, W \subset V$ אז מתקיים

$$(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp.$$

ה) יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי המקיים $\langle T(v), v \rangle = 0$ לכל $v \in V$ אז $T = 0$.

ו) יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי המקיים $\langle T(v), w \rangle = 0$ לכל $v, w \in V$ אז $T = 0$.

שאלה 10

א) מצאו $a, b \in \mathbb{R}$ עבורם $\int_0^1 ((x^2 - 2x + 1) - (ax + b))^2 dx$ מינימלי.

ב) מצאו $a, b \in \mathbb{R}$ עבורם

$$(1 - a)^2 + (1 - 2b)^2 + (1 - (a + b))^2 + (1 - (a + 2b))^2$$

יהיה מינימלי.

ג) מצאו $a, b \in \mathbb{R}$ עבורם $(1 - (a + b))^2 + (1 - 3b)^2 + (1 - (a + 2b))^2 + (1 - (-a + b))^2$ מינימלי.

שאלה 11 נניח כי V מרחב מכפלה פנימית מעל \mathbb{C} . הוכיחו שאם $T : V \rightarrow V$ העתקה צמודה לעצמה אז כל

ערך עצמי של T ממשי.

שאלה 12 נניח כי V מרחב מכפלה פנימית מעל \mathbb{C} . הוכיחו שאם $T : V \rightarrow V$ העתקה אנטי הרמיטית אז כל

ערך עצמי של T מדומה.

שאלה 13 נניח כי V מרחב מכפלה פנימית מעל \mathbb{C} . הוכיחו שאם $T : V \rightarrow V$ העתקה אוניטרית אז הערך מוחלט של כל ערך עצמי של T שווה ל-1.

שאלה 14 נניח כי V מרחב מכפלה פנימית מעל \mathbb{C} ותהי $T : V \rightarrow V$ העתקה. הוכיחו כי אם u ווקטור עצמי של העתקות T ו- \bar{T} עם ערכים עצמיים λ ו- μ אז $\bar{\mu} = \lambda$.

שאלה 15

נתון מרחב ווקטורי $\mathbb{R}_3[x]$ עם מכפלה פנימית אינטגרלית בקטע $[-1, 1]$:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) \, dx.$$

(א) מצאו בסיס אורתוגונלי למרחב $V = \text{span} \{1 - 3x, x, 5x^3 + 8\}$.

(ב) מצאו את ההיטל האורתוגונלי של כל אחד מהווקטורים:

$$w_1 = 38 - 16x + 24x^3, \quad w_2 = 3x^2 + 5x^3,$$

תשובות

שאלה 1

(א) כן, זוהי מכפלה פנימית הסטנדרטית של \mathbb{R}^2 .

(ב) לא נכון. דוגמה נגדית:

$$\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) \cdot 1 + 2 \cdot (-3) \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 9 - 6 - 6 + 3 = 0$$

$\langle u, u \rangle = 0$ רק אם $u = \bar{0}$, ו- $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \bar{0}$. לכן היא לא מכפלה פנימית.

שאלה 2

(א) הפונקציה $\langle f(x), g(x) \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1)$ אינה מכפלה פנימית. דוגמה נגדית:

$$f(x) = x(x-1), \quad g(x) = x(x-1),$$

$$\langle f(x), g(x) \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0,$$

$\langle f(x), f(x) \rangle = 0$ רק אם $f(x) = 0$ לכל x (פונקציה האפס) ו- $x(x-1) \neq 0$ לכל x . לכן היא לא מכפלה פנימית.

(ב) $\langle f(x), g(x) \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2)$ מכפלה פנימית. הוכחה:

לכל $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, ולכל סקלר $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים התנאים הבאים:

(1)

$$\begin{aligned} \langle f(x) + h(x), g(x) \rangle &= \sum_{i=0}^2 (f(i) + h(i)) \cdot g(i) \\ &= \sum_{i=0}^2 f(i) \cdot g(i) + \sum_{i=0}^2 h(i) \cdot g(i) \\ &= \langle f(x), g(x) \rangle + \langle h(x), g(x) \rangle. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \langle \alpha \cdot f(x), g(x) \rangle &= \sum_{i=0}^2 (\alpha \cdot f(i)) \cdot g(i) \\ &= \alpha \cdot \sum_{i=0}^2 f(i) \cdot g(i) \\ &= \alpha \cdot \langle f(x), g(x) \rangle. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\langle f(x), g(x) \rangle &= \sum_{i=0}^2 f(i) \cdot g(i) \\ &= \sum_{i=0}^2 g(i) \cdot f(i) \\ &= \langle g(x), f(x) \rangle\end{aligned}$$

(4)

$$\langle f(x), f(x) \rangle = \sum_{i=0}^2 f(i) \cdot f(i) = \sum_{i=0}^2 (f(i))^2 \geq 0$$

לכל x . לכן $\langle f(x), f(x) \rangle \geq 0$ לכל x .

$$\langle f(x), f(x) \rangle = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^2 (f(i))^2 = 0$$

$f(x) = 0$ עבור $x = 0, 1, 2$. ז"א ל- $f(x)$ יש שלושה שורשים. $f(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ פולינום ממעלה 2 ולכן ל- $f(x)$ יש 2 שורשים לכל היותר. לכן $f(x) = 0$.

שאלה 3 ראשית נרשום את הוקטורים u, w כצירוף ליניארי של הוקטורים של הבסיס:

$$u = 3b_1 + b_2 + b_3, \quad w = -b_1 + 2b_2 + b_3.$$

הבסיס הוא אורתונורמלי. ז"א

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

מכאן

$$\langle u, w \rangle = \langle 3b_1 + b_2 + b_3, -b_1 + 2b_2 + b_3 \rangle = -3\langle b_1, b_1 \rangle + 2\langle b_2, b_2 \rangle + \langle b_3, b_3 \rangle = -3 + 2 + 1 = 0.$$

שאלה 4

(א)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W^\perp &\Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \text{ו-} \quad \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ W^\perp &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} -x + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{array} \right\}\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

פתרון: $(x, y, z) = (0, -z, z) = z(0, -1, 1)$ לכן

$$W^\perp = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(ב)

שאלה 5 נסמן

(א)

$$U = \text{span} \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$v_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|v_1\|^2 = 3.$$

$$\begin{aligned} v_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\|v_2\|^2 = 6. \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{נבחר}$$

$$\begin{aligned} v_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

בסיס אורתוגונלי למרחב U :

$$B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(ב) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U$ ולכן ההיטל שלו זה הוא עצמו:

$$P_U \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

שאלה 6 נסמן

$$U = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

נמצא תחילה בסיס למרחב:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 3 & 9 \\ 1 & -3 & -3 & -9 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נבצע גרם שמידט על הבסיס שמצאנו:

(א) נסמן

$$U = \text{span} \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$v_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|v_1\|^2 = 7.$$

$$\begin{aligned} v_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

נבחר
 $\|v_2\|^2 = 19$

$$\begin{aligned} v_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{19} \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\|v_3\|^2 = 2$. בסיס אורתוגונלי למרחב U :

$$B_U = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(ב)

$$U = \text{span} \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

תזכורת:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in U^\perp \iff \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, u_i \right\rangle = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq 3.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 2 & | & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & | & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & | & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{9} & | & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$(x, y, z, w) = \left(1, \frac{-10}{9}, \frac{2}{9}, 1\right) w$$

לכן

$$U^\perp = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

לכן בסיס אורתוגונלי של U^\perp הוא

$$B_{U^\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

שאלה 7

\langle, \rangle	α_1	α_2	α_3	α_4
α_1	2	-1	0	0
α_2	-1	2	-1	-1
α_3	0	-1	2	0
α_4	0	-1	0	2

$$W = \text{span} \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$$

(א) נפעיל גרם שמידט על $\{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$

$$v_1 = \alpha_1 .$$

$$\|v_1\|^2 = 2$$

$$\begin{aligned} v_2 &= \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle}{2} \alpha_1 = \alpha_2 - \frac{2}{2} \alpha_1 \\ &= \alpha_2 - \alpha_1 \end{aligned}$$

נבחר

$$\|v_2\|^2 = \langle \alpha_2 - \alpha_1, \alpha_2 - \alpha_1 \rangle = \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle - \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle - \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle - \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 2 - (-1) - (-1) + 2 = 6.$$

$$\begin{aligned} v_3 &= \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle \alpha_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, \alpha_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle \alpha_3, \alpha_2 - \alpha_1 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = \alpha_3 - \frac{0}{2} \alpha_1 - \frac{(-1-0)}{6} (\alpha_2 - \alpha_1) \\ &= \alpha_3 + \frac{1}{6} (\alpha_2 - \alpha_1) \\ &= \alpha_3 + \frac{1}{6} \alpha_2 - \frac{1}{6} \alpha_1. \end{aligned}$$

לכן בסיס אורתוגונלי של W :

$$B_W = \left\{ \alpha_1, \alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 + \frac{1}{6} \alpha_2 - \frac{1}{6} \alpha_1 \right\}$$

(ב)

$$v = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 + k_4 \alpha_4 \in W^\perp$$

לכן

$$\langle v, \alpha_1 \rangle = \langle v, \alpha_2 \rangle = \langle v, \alpha_3 \rangle = 0.$$

$$\langle v, \alpha_1 \rangle = k_1 \cdot \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle + k_2 \cdot \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle + k_3 \cdot \langle \alpha_3, \alpha_1 \rangle + k_4 \cdot \langle \alpha_4, \alpha_1 \rangle = 2k_1 - k_2$$

$$\langle v, \alpha_2 \rangle = k_1 \cdot \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle + k_2 \cdot \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle + k_3 \cdot \langle \alpha_3, \alpha_2 \rangle + k_4 \cdot \langle \alpha_4, \alpha_2 \rangle = -k_1 + 2k_2 - k_3 - k_4$$

$$\langle v, \alpha_3 \rangle = k_1 \cdot \langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle + k_2 \cdot \langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle + k_3 \cdot \langle \alpha_3, \alpha_3 \rangle + k_4 \cdot \langle \alpha_4, \alpha_3 \rangle = 0 \cdot k_1 - k_2 + 2k_3 + 0 \cdot k_4.$$

לכן, נבנה אז המערכת ההומוגנית:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(k_1, k_2, k_3, k_4) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1\right) k_4$ לכן

$$W^\perp = \text{span} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1}{2} \cdot \alpha_3 + \alpha_4 \right\} = \text{span} \{ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 \}$$

שאלה 8

$V = R_{\leq 2}[x]$ מרחב מכפלה פנימית:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx .$$

נסמן

$$W = \text{span} \{u_1 = 1, u_2 = x\} .$$

(א) נמצא בסיס אורתוגונלי ל W .

$$v_1 = u_1 = 1 .$$

$$\|v_1\|^2 = 1$$

$$\begin{aligned} v_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \\ &= x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{1} \cdot 1 \\ &= x - \langle x, 1 \rangle . \end{aligned}$$

$$\langle x, 1 \rangle = \int_0^1 dx \, 1 \cdot x = \int_0^1 dx \, x = \int_0^1 dx \, x = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

לכן

$$v_2 = x - \frac{1}{2} .$$

לכן נקבל הבסיס האורתונורמלי

$$B = \left\{ v_1 = 1, v_2 = \left(x - \frac{1}{2} \right) \right\}$$

$$\|v_1\|^2 = 1$$

$$\|v_2\|^2 = \langle v_2, v_2 \rangle = \int_0^1 dx \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} .$$

לכן נקבל הבסיס האורתונורמלי

$$\hat{B} = \left\{ 1, \sqrt{12} \left(x - \frac{1}{2} \right) \right\}$$

(ב) נמצא בסיס אורתוגונלי של W^\perp . נסמן $p(x) = a + bx + cx^2$.

$$p(x) \in W^\perp \Leftrightarrow \langle p(x), 1 \rangle = 0, \quad \langle p(x), x \rangle = 0 .$$

$$\langle a + bx + cx^2, 1 \rangle = \int_0^1 dx \, (a + bx + cx^2) = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$$

$$\langle a + bx + cx^2, x \rangle = \int_0^1 dx \, x \cdot (a + bx + cx^2) = \int_0^1 dx \, (ax + bx^2 + cx^3) = \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4}$$

$$\left. \begin{aligned} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} &= 0 \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 6a + 3b + 2c &= 0 \\ 6a + 4b + 3c &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

פתרון: $(a, b, c) = \left(\frac{1}{6}, -1, 1\right) c = \frac{1}{6} (1, -6, 6) c$ לכן

$$B_{W^\perp} = \{1 - 6x + 6x^2\}$$

ג) לכל $w \in W$:

$$P_W(w) = w .$$

לכל $w^\perp \in W^\perp$:

$$P_W(w^\perp) = 0 .$$

לכן

$$[P_W]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

שאלה 9

א) יהיו $u, v \in V$

$$\|v + u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2 \Rightarrow v \perp u .$$

לא נכון. דוגמה נגדית:

$V = \mathbb{C}^2$ עם המ"פ הסטנדרטית.

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad v = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \Rightarrow \quad u + v = \begin{pmatrix} 1 + i \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$\|u\|^2 = \|v\|^2 = 1 , \quad \|u + v\|^2 = 2 .$$

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2 \quad \text{אך } u \not\perp v .$$

ב) $u, v \in V$ אז

$$v \perp u \Rightarrow \|v + u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2 .$$

טענה נכונה: זה בדיוק משפט פיתגורס.

$$U, W \subset V \quad \text{ג}$$

$$(U \cap W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp .$$

לא נכון. דוגמה נגדית:

$V = \mathbb{R}^3$ עם מ"פ סטנדרטית.

$$U = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$U^\perp = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad W^\perp = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$U^\perp \cap W^\perp = \{0\}$$

$$(U \cap W)^\perp = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}^\perp = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(U \cap W)^\perp \neq U^\perp \cap W^\perp$$

$$U, W \subset V \quad \text{ד}$$

$$(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp .$$

טענייה נכונה.

$$\underline{(U + W)^\perp \subseteq U^\perp \cap W^\perp} \text{ נוכיח}$$

נניח ש- $v^\perp \in (W + U)^\perp$. אז לכל $v \in W + U$, מתקיים $\langle v, v^\perp \rangle = 0$.
נשים לב:

$$W \subseteq U + W, \quad U \subseteq U + W .$$

לכן לכל $w \in W$, מתקיים $\langle w, v^\perp \rangle = 0$, לכן

$$v^\perp \in W^\perp ,$$

ולכל $u \in U$, מתקיים $\langle u, v^\perp \rangle = 0$, לכן

$$v^\perp \in U^\perp .$$

$$\text{לכן } v^\perp \in U^\perp \cap W^\perp$$

$$\underline{(U + W)^\perp \subseteq U^\perp \cap W^\perp} \text{ נוכיח}$$

נניח ש- $v^\perp \in U^\perp \cap W^\perp$. אז $v^\perp \in U^\perp$ וגם $v^\perp \in W^\perp$. לכן לכל $u \in U$,

$$\langle v^\perp, u \rangle = 0$$

ולכל $w \in W$,

$$\langle v^\perp, w \rangle = 0 .$$

לכן לכל $u \in U$ ו- $w \in W$,

$$\langle v^\perp, u + w \rangle = 0$$

לכן לכל $v \in U + W$,

$$\langle v^\perp, v \rangle = 0,$$

לכן $v^\perp \in (U + W)^\perp$.

(ה) יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי המקיים $\langle T(v), v \rangle = 0$ לכל $v \in V$ אז $T = 0$.

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

תהי $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקה הסיבוב של 90° ותהי $\langle \cdot, \cdot \rangle$ המ"פ הסטנדרטית של \mathbb{R}^2 .

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}.$$

לכל $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, מתקיים

$$\left\langle T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

אבל $T \neq 0$.

(ו) יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי המקיים $\langle T(v), w \rangle = 0$ לכל $v, w \in V$ אז $T = 0$.

הטענה נכונה. הוכחה:

יהי $u \in \text{Im } T$. נוכיח כי $u = \bar{0}$:

נניח ש- $u \in \text{Im } T$.

אז קיים $v \in V$ כך ש- $T(v) = u$.

נתון, לכן $\langle T(v), u \rangle = 0$.

$$0 = \langle T(v), u \rangle = \langle u, u \rangle = \|u\|^2 \Rightarrow u = \bar{0}$$

לפי התכונה של מ"פ.

שאלה 10

(א)

$$\int_0^1 ((x^2 - 2x + 1) - (ax + b))^2 dx = \|x^2 - 2x + 1 - (ax + b)\|^2$$

לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית האינטגרלית בקטע $[0, 1]$.
נחפש את הווקטור הקרוב ביותר של $x^2 - 2x + 1$ בתת המרחב

$$W = \text{span} \{1, x\}.$$

נחפש בסיס אורתוגונלי ל W :

$$u_1 = \int_0^1 1 \, dx = 1 ,$$

$$\|u_1\|^2 = 1$$

$$u_2 = x - \frac{\langle x, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = x - \int_0^1 x \, dx = x - \frac{1}{2} .$$

$$\|u_2\|^2 = \int_0^1 dx \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} .$$

מצאנו בסיס אורתוגונלי ל- W :

$$B_W = \left\{ 1, -\frac{1}{2} + x \right\} .$$

$$\begin{aligned} P_W(x^2 - 2x + 1) &= \langle x^2 - 2x + 1, 1 \rangle + 12 \left\langle x^2 - 2x + 1, x - \frac{1}{2} \right\rangle \left(-\frac{1}{2} + x\right) \\ &= \int_0^1 1 \cdot (x^2 - 2x + 1)x + 12 \left[\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x^2 - 2x + 1) \right] \left(-\frac{1}{2} + x\right) \\ &= \frac{1}{3} + 12 \cdot \left(\frac{-1}{12}\right) \left(-\frac{1}{2} + x\right) \\ &= \frac{1}{3} + (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2} + x\right) \\ &= \frac{5}{6} - x . \end{aligned}$$

$$a = -1, b = \frac{5}{6} \quad \text{לכן}$$

(ב)

$$(1-a)^2 + (1-2b)^2 + (1-(a+b))^2 + (1-(a+2b))^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 2b \\ a+b \\ a+2b \end{pmatrix} \right\|^2$$

לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית על \mathbb{R}^4 . נחפש את הווקטור הקרוב ביותר של $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ בתת המרחב

$$W = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} .$$

נחפש בסיס אורתוגונלי ל W :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\|u_1\|^2 = 3.$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

מצאנו בסיס אורתוגונלי ל- W :

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$P_W \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{לכן, } \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \\ a+2b \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ ז"ל}$$

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{1}{3}.$$

ג)

$$(1 - (a + b))^2 + (1 - 3b)^2 + (1 - (a + 2b))^2 + (1 - (-a + b))^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a + b \\ 3b \\ a + 2b \\ -1 + b \end{pmatrix} \right\|^2$$

לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית על \mathbb{R}^4 . נחפש את הווקטור הקרוב ביותר של $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ בתת המרחב

$$W = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

נחפש בסיס אורתוגונלי ל W :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\|u_1\|^2 = 3.$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

מצאנו בסיס אורתוגונלי ל- W :

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

$$P_W \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle}{123} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{19}{123} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

לכן

$$a = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{9 \cdot 19}{123} \cdot \frac{19}{123} \right), \quad b = \frac{1}{3} \cdot \frac{9 \cdot 19}{123}.$$

שאלה 11 נניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לווקטור עצמי u . אז $T(u) = \lambda u$.

$$\begin{aligned} \langle T(u), u \rangle &= \langle \lambda u, u \rangle \quad (u \text{ ווקטור עצמי של } T) \\ &= \lambda \langle u, u \rangle \quad (\text{לינאריות של מכפלה פנימית}). \end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(u), u \rangle &= \langle u, \bar{T}(u) \rangle && \text{(הגדרה של העתקה צמודה)} \\ &= \langle u, T(u) \rangle && (T \text{ צמודה לעצמה}) \\ &= \langle u, \lambda u \rangle && (u \text{ ווקטור עצמי של } T) \\ &= \bar{\lambda} \langle u, u \rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית})\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\begin{aligned}\lambda \langle u, u \rangle &= \bar{\lambda} \langle u, u \rangle \Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda}) \langle u, u \rangle = 0 . \\ \lambda = \bar{\lambda} &\Leftarrow (\lambda - \bar{\lambda}) = 0 \Leftarrow \langle u, u \rangle \neq 0 \Leftarrow u \neq 0 \Leftarrow u \text{ ווקטור עצמי}\end{aligned}$$

שאלה 12 נניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי u . אז $T(u) = \lambda u$.

$$\begin{aligned}\langle T(u), u \rangle &= \langle \lambda u, u \rangle && (u \text{ ווקטור עצמי של } T) \\ &= \lambda \langle u, u \rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית})\end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(u), u \rangle &= \langle u, \bar{T}(u) \rangle && \text{(הגדרה של העתקה צמודה)} \\ &= \langle u, -T(u) \rangle && (T \text{ אנטי-הרמיטית}) \\ &= -\langle u, T(u) \rangle \\ &= -\langle u, \lambda u \rangle && (u \text{ ווקטור עצמי של } T) \\ &= -\bar{\lambda} \langle u, u \rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית})\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\begin{aligned}\lambda \langle u, u \rangle &= -\bar{\lambda} \langle u, u \rangle \Rightarrow (\lambda + \bar{\lambda}) \langle u, u \rangle = 0 . \\ \lambda = -\bar{\lambda} &\Leftarrow (\lambda + \bar{\lambda}) = 0 \Leftarrow \langle u, u \rangle \neq 0 \Leftarrow u \neq 0 \Leftarrow u \text{ ווקטור עצמי}\end{aligned}$$

שאלה 13

נניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי u . אז $T(u) = \lambda u$.

$$\begin{aligned}\langle T(u), T(u) \rangle &= \langle \lambda u, \lambda u \rangle && (u \text{ ווקטור עצמי של } T) \\ &= \lambda \langle u, \lambda u \rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית}) \\ &= \lambda \bar{\lambda} \langle u, u \rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית})\end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(u), T(u) \rangle &= \langle u, \bar{T}T(u) \rangle && \text{(הגדרה של העתקה צמודה)} \\ &= \langle u, I(u) \rangle && (T \text{ אוניטרית}) \\ &= \langle u, u \rangle\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\begin{aligned}\lambda \bar{\lambda} \langle u, u \rangle &= \langle u, u \rangle \Rightarrow (\lambda \cdot \bar{\lambda} - 1) \langle u, u \rangle = 0 . \\ |\lambda|^2 = 1 &\Leftarrow \lambda \bar{\lambda} = 1 \Leftarrow (\lambda \cdot \bar{\lambda} - 1) = 0 \Leftarrow \langle u, u \rangle \neq 0 \Leftarrow u \neq 0 \Leftarrow u \text{ ווקטור עצמי}\end{aligned}$$

שאלה 14 נניח כי

$$T(u) = \lambda u, \quad \bar{T}(u) = \mu u.$$

אז

$$\begin{aligned} \langle T(u), u \rangle &= \langle \lambda u, u \rangle \quad (T \text{ ווקטור עצמי של } T) \\ &= \lambda \langle u, u \rangle \quad (\text{לפי הליניאריות של מכפלה פנימית}). \end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned} \langle T(u), u \rangle &= \langle u, \bar{T}(u) \rangle \quad (\text{הגדרה של העתקה הצמודה}) \\ &= \langle u, \mu u \rangle \quad (\bar{T} \text{ ווקטור עצמי של } \bar{T}) \\ &= \bar{\mu} \langle u, u \rangle \quad (\text{לפי הליניאריות החלקית של מכפלה פנימית}). \end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\begin{aligned} \lambda \langle u, u \rangle = \bar{\mu} \langle u, u \rangle &\Rightarrow \lambda \langle u, u \rangle - \bar{\mu} \langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow (\lambda - \bar{\mu}) \langle u, u \rangle = 0 \\ \bar{\mu} = \lambda &\Leftarrow \lambda - \bar{\mu} = 0 \Leftarrow \langle u, u \rangle \neq 0 \Leftarrow u \neq \bar{0} \Leftarrow u \text{ ווקטור עצמי} \end{aligned}$$

שאלה 15

א) נסמן

$$v_1 = 1 - 3x, \quad v_2 = x, \quad v_3 = 5x^3 + 8.$$

$$u_1 = v_1 = 1 - 3x.$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\|u_1\|^2 = \int_{-1}^1 dx (1 - 3x)^2 = \left[\frac{(1 - 3x)^3}{-9} \right]_{-1}^1 = \frac{(-2)^3 - 4^3}{-9} = \frac{-72}{-9} = 8.$$

$$\langle v_2, u_1 \rangle = \int_{-1}^1 dx x(1 - 3x) = \int_{-1}^1 dx (x - 3x^2) = \left[\frac{x^2}{2} - x^3 \right]_{-1}^1 = -2.$$

לכן

$$u_2 = \frac{x + 1}{4}.$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

$$\langle v_3, u_1 \rangle = \int_{-1}^1 dx (5x^3 + 8)(1 - 3x) = \int_{-1}^1 dx (5x^3 - 15x^4 + 8 - 24x) = \left[\frac{5x^4}{4} - 3x^5 + 8x - 12x^2 \right]_{-1}^1 = 10.$$

$$\langle v_3, u_2 \rangle = \int_{-1}^1 dx \frac{1}{4}(x+1)(5x^3 + 8) = \int_{-1}^1 dx \left(\frac{5x^4}{4} + \frac{5x^3}{4} + 2x + 2 \right) = \left[\frac{x^5}{4} + \frac{5x^4}{16} + x^2 + 2x \right]_{-1}^1 = \frac{9}{2}.$$

$$\|u_2\|^2 = \int_{-1}^1 dx \left(\frac{x+1}{4} \right)^2 = \frac{1}{16} \int_{-1}^1 dx (x+1)^2 = \frac{1}{16} \left[\frac{(x+1)^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{6} .$$

לכן

$$\begin{aligned} u_3 &= 5x^3 + 8 - \frac{10}{8}(1-3x) - \frac{\left(\frac{9}{2}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)} \cdot \left(\frac{x+1}{4} \right) \\ &= 5x^3 + 8 - \frac{5}{4} + \frac{15x}{4} - \frac{27}{4} \cdot (x+1) \\ &= 5x^3 + 8 - \frac{32}{4} - \frac{12x}{4} \\ &= 5x^3 + 8 - 8 - 3x \\ &= 5x^3 - 3x . \end{aligned}$$

בסיס אורתונורמלי:

$$U = \left\{ u_1 = 1 - 3x, \quad u_2 = \frac{x+1}{4}, \quad u_3 = 5x^3 - 3x \right\} .$$

(ב) לכן $w_1 \in U$

$$P_U(w_1) = w_1 .$$

$$P_U(w_2) = \frac{\langle w_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle w_2, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 + \frac{\langle w_2, u_3 \rangle}{\|u_3\|^2} u_3$$

$$\langle w_2, u_1 \rangle = \int_{-1}^1 dx (5x^3 + 3x^2)(1-3x) = \int_{-1}^1 dx (-15x^4 - 4x^3 + 3x^2) = [-3x^5 - x^4 + x^3]_{-1}^1 = -4 .$$

$$\langle w_2, u_2 \rangle = \int_{-1}^1 dx \frac{1}{4}(x+1)(5x^3 + 3x^2) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dx (5x^4 + 8x^3 + 3x^2) = \frac{1}{4} [x^5 + 2x^4 + x^3]_{-1}^1 = 1 .$$

$$\begin{aligned} \langle w_2, u_3 \rangle &= \int_{-1}^1 dx (5x^3 - 3x)(5x^3 + 3x^2) \\ &= \int_{-1}^1 dx (25x^6 + 15x^5 - 15x^4 - 9x^3) \\ &= \left[\frac{25x^7}{7} + \frac{15x^6}{6} - \frac{15x^5}{5} - \frac{9x^4}{4} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{25}{7} + \frac{5}{2} - 3 - \frac{9}{4} - \left(\frac{25 \cdot (-1)}{7} + \frac{5}{2} - 3 \cdot (-1) - \frac{9}{4} \right) \\ &= \frac{25}{7} + \frac{25}{7} - 3 - 3 \\ &= \frac{50}{7} - 6 \\ &= \frac{50 - 42}{7} \\ &= \frac{8}{7} . \end{aligned}$$

$$\|u_3\|^2 = \int_{-1}^1 dx (5x^3 - 3x)^2 = \int_{-1}^1 dx (25x^6 - 30x^4 + 9x^2) = \left[\frac{25x^7}{7} - 6x^5 + 3x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{8}{7}.$$

$$\begin{aligned} P_U(w_2) &= \frac{-4}{8}(1 - 3x) + \frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)} \left(\frac{x+1}{4} \right) + \frac{\left(\frac{8}{7}\right)}{\left(\frac{8}{7}\right)} (5x^3 - 3x) \\ &= \frac{-1}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{6}{4}(x+1) + 5x^3 - 3x \\ &= \frac{-1}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{3}{2} + 5x^3 - 3x \\ &= 1 + 3x + 5x^3 - 3x \\ &= 1 + 5x^3. \end{aligned}$$