שיעור 4
דטרמיננטות וכלל קרמר

הגדרה של דטרמיננטה של מטריצה ריבועית

נדון רק במטריצה ריבועית.

4.1 הגדרה: (דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר 1×1 ו- 2×2)
הדטרמיננטה של מטריצה $A\in M_n(\mathbb{R})$, תסומן $\det A$ או $|A|$, היא מספר ממשי. באופן דומה, הדטרמיננטה של מטריצה $A\in M_n(\mathbb{C})$, היא מספר מורכב. נתחיל בדטרמיננטה של מטריצות מסדר 1×1 ו- 2×2:

$$n=1:\quad A=(a),\qquad\qquad |A|=a\ ,$$

$$n=2:\quad A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\ ,\quad |A|=(-1)^{1+1}a_{11}|(a_{22})|+(-1)^{1+2}a_{12}|(a_{21})|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\ .$$

דוגמא. (דטרמיננטה)

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\ ,\quad |A|=(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot|(4)|+(-1)^{1+2}\cdot 2\cdot|(3)|=1\cdot 4-2\cdot 3=-2\ .$$

■

4.1 הגדרה: (דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר 3×3)

$$n=3:A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

$$|A|=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\ .$$

דוגמא. (דטרמיננטה)

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\6&0&7\end{pmatrix}\ ,$$

$$\begin{aligned}|A|=&(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}4&5\\0&7\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}0&5\\6&7\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot 3\cdot\begin{vmatrix}0&4\\6&0\end{vmatrix}\ .\\ =&1\cdot(4\cdot 7-5\cdot 0)-2(0\cdot 7-5\cdot 6)+3\cdot(0\cdot 0-4\cdot 6)\\ =&28+60-72\ ,\\ =&16\ .\end{aligned}$$

■

4.2 הגדרה: (המינור של מטריצה)
עבור מטריצה ריבועית A, המינור ה- (i,j) של A הוא הדטרמיננטה של המטריצה הריבועית המתקבלת מ- A ע"י מחיקת שורה i ועמודה j. את המינור ה- (i,j) נסמן ב- M_{ij}.

דוגמא.

עבור $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\6&0&7\end{pmatrix}$ מצאו את M_{11}, M_{12}, M_{23}, M_{32}.

פיתרון.

$$M_{11}=\begin{vmatrix}4&5\\0&7\end{vmatrix}=28\ ,$$
$$M_{12}=\begin{vmatrix}0&5\\6&7\end{vmatrix}=-30\ ,$$
$$M_{23}=\begin{vmatrix}1&2\\6&0\end{vmatrix}=-12\ ,$$
$$M_{32}=\begin{vmatrix}1&3\\0&5\end{vmatrix}=5\ .$$

■

4.3 הגדרה: (דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר $n\times n$)

תהי $A\in M_n(\mathbb{R})=\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}$. הדטרמיננטה של A, תסומן $|A|$, היא

$$\begin{aligned}|A|=&(-1)^{1+1}a_{11}M_{11}+(-1)^{1+2}a_{12}M_{12}+\dots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}\\=&a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\dots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}\ .\end{aligned}$$

דוגמא.

נסמן $A=\begin{pmatrix}1&5&0\\2&4&-1\\0&-2&0\end{pmatrix}$, מצאו את הדטרמיננטה של המטריצה.

פיתרון.

$$\begin{aligned}|A|=&(-1)^{1+1}\cdot1\cdot\begin{vmatrix}4&-1\\-2&0\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot5\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\0&0\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot0\cdot\begin{vmatrix}2&4\\0&-2\end{vmatrix}\\=&1\cdot(4\cdot0-(-1)\cdot(-2))-5\cdot(2\cdot0-(-1)\cdot0)+0\cdot(2\cdot(-2)-4\cdot0)\\=&-2\ .\end{aligned}$$

נשתעשע....

$$\begin{aligned}|A|\overset{\text{שורה שנייה}}{=}&(-1)^{2+1}\cdot2\cdot\begin{vmatrix}5&0\\-2&0\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\cdot4\cdot\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}1&5\\0&-2\end{vmatrix}\\=&-2\cdot(5\cdot0-0\cdot(-2))-4\cdot(1\cdot0-0\cdot0)+1\cdot(1\cdot(-2)-5\cdot0)\\=&-2\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|A|\overset{\text{עמודה שלישית}}{=}&(-1)^{1+3}\cdot0\cdot\begin{vmatrix}2&4\\0&-2\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}1&5\\0&-2\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\cdot0\cdot\begin{vmatrix}1&5\\2&4\end{vmatrix}\\=&0\cdot(2\cdot(-2)-4\cdot0)+1\cdot(1\cdot(-2)-5\cdot0)+0\cdot(1\cdot4-5\cdot2)\\=&-2\ .\end{aligned}$$

■

הערה:

סימני האיברים הם כך:

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

דוגמא.
חשבו

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 19 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \ .$$

פיתרון.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 19 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 19 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \ .$$

■

4.4 משפט. (דטרמיננטה של מטריצה משולשית)
אם $A \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה משולשית אז $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$, כלומר מכפלת איברי האלכסון הראשי.

דוגמא.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ , \qquad |A| = -2 \ .$$

$A \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} B_1$:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ , \qquad |B_1| = 2 \ .$$

$A \xrightarrow{R_1 \to 7R_1} B_2$:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ , \qquad |B_2| = -14 \ .$$

$A \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} B_3$:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \ , \qquad |B_3| = -2 \ .$$

4.5 משפט:
תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$. ניתן לחשב את $|A|$ גם לפי עמודה ראשונה, כלומר

$$|A| = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{2+1} a_{21} M_{21} + \dots + (-1)^{n+1} a_{n1} M_{n1} \ .$$

למעשה, ניתן לחשב את $|A|$ לפי שורה כלשהי או לפי עמודה כלשהי.

דוגמא.
חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix}3&-7&8&9&-6\\0&2&-5&7&3\\0&0&1&5&0\\0&0&2&4&-1\\0&0&0&-2&0\end{pmatrix}$$

פיתרון.

$$\begin{vmatrix}3&-7&8&9&-6\\0&2&-5&7&3\\0&0&1&5&0\\0&0&2&4&-1\\0&0&0&-2&0\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot 3\cdot\begin{vmatrix}2&-5&7&3\\0&1&5&0\\0&2&4&-1\\0&0&-2&0\end{vmatrix}$$
$$=3\cdot(-1)^{1+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1&5&0\\2&4&-1\\0&-2&0\end{vmatrix}$$
$$=6\cdot(-2)=-12\ .$$

■

4.6 משפט:
אם $A\in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה ריבועית ו- B מטריצה המתקבלת מ- A ע"י הפעולה האלמנטרית:

(1) החלפת 2 שורות, אז
$$|B|=-|A|.$$

(2) הכפלת שורה בסקלר $\alpha\neq 0$, אז
$$|B|=\alpha|A|.$$

(3) הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת, אז
$$|B|=|A|\ .$$

דוגמא.
חשבו את

$$\begin{vmatrix}3&6\\8&4\end{vmatrix}$$

פיתרון.

$$\underbrace{\begin{vmatrix}3&6\\8&4\end{vmatrix}}_{B}=3\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&2\\8&4\end{vmatrix}}_{A}$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix}1&2\\8&4\end{vmatrix}}_{B}=4\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}}_{A}$$

$$\begin{vmatrix}3&6\\8&4\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}1&2\\8&4\end{vmatrix}=3\cdot 4\cdot\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=12\cdot(1-4)=-36\ .$$

■

דוגמא.
חשבו את
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 12 & 15 & 18 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} = ?$$

פיתרון.
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 12 & 15 & 18 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 15 & 18 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1} 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 7R_1} 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 24 \cdot (-3) = -72 \ .$$

■

דוגמא.
חשבו את $\begin{vmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 28 & 35 & 42 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix}$

פיתרון.
$$\begin{vmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 28 & 35 & 42 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 28 & 35 & 42 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix} = 7 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix} = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 7^3 \cdot (-3) \ .$$

■

4.7 משפט:
$$|\alpha A| = \alpha^n \cdot |A|$$

כאשר A מסדר $n \times n$.

הערה:

כל מטריצה ריבועית A (מסדר $n\times n$) ניתן להעביר למטריצה מדורגת B ע"י ביצוע מספר סופי של פעולות שורה אלמנטריות מסוג החלפת 2 שורות והוספת שורה אחת לשורה אחרת (בלי פעולת הכפלת שורה בסקלר $\alpha\neq 0$). לכן

$$|A|=(-1)^k|B|$$

כאשר k הור מספר החלפות השורות שביצענו. כמו כן מאחר ו- B משולשית עליונה,

$$|B|=b_{11}\cdot b_{22}\cdot\cdots\cdot b_{nn}\ .$$

4.8 משפט:
תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$. מתקיים:

$$|A|\neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad A \text{ הפיכה.}$$

דוגמא. היעזרו במשפט 4.8 לעיל וקבעו האם המטריצה הבאה הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5\\ 0 & 5 & -3 & -6\\ -6 & 7 & -7 & 4\\ -5 & -8 & 0 & 9\end{pmatrix}$$

פיתרון.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -5\\ 0 & 5 & -3 & -6\\ -6 & 7 & -7 & 4\\ -5 & -8 & 0 & 9\end{vmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3+2R_1} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -5\\ 0 & 5 & -3 & -6\\ 0 & 5 & -3 & -6\\ -5 & -8 & 0 & 9\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -5\\ 0 & 5 & -3 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -5 & -8 & 0 & 9\end{vmatrix}$$

$$=0\ .$$

■

דוגמא.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\ ,\quad |A|=2\ ,$$

$$A^t=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\ ,\quad |A^t|=-2\ .$$

4.9 משפט:
תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$. מתקיים:

$$|A^t|=|A|\ .$$

דוגמא.
נסמן $A=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. מצאו את המטריצה AB ואת הדטרמיננות הבאות: $|A|$, $|B|$, $|AB|$.

פיתרון.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix}6 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix}25 & 20\\ 14 & 13\end{pmatrix} \ , \\ |A| &= 12-3 &&= 9 \ , \\ |B| &= 8-3 &&= 5 \ , \\ |AB| &= 25\cdot 13 - 20\cdot 14 &&= 45 \ . \end{aligned}$$

■

4.10 משפט. (משפט המכפלה)
תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{R})$. מתקיים:

$$|A\cdot B| = |A|\cdot|B| \ .$$

דוגמא.
נתונה $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ ו- $|A|=-2$ מהי A^{2020}?

פיתרון.

$$|A^{2020}| = \underbrace{|A\cdot A\cdot\cdots\cdot A|}_{\text{פעמים } 2020} = \underbrace{|A|\cdot|A|\cdot\cdots\cdot|A|}_{\text{פעמים } 2020} = |A|^{2020}$$

ולכן $|A^{2020}|=(-2)^{2020}$. ■

4.11 משפט:
תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $k\in\mathbb{N}$. מתקיים:

$$|A^k| = |A|^k \ .$$

4.12 משפט:
תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה, אז

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \ .$$

הוכחה.
מתקיים $A^{-1}\cdot A=I$ ולכן $|A\cdot A^{-1}|=|I|$. לפי משפט המכפלה, $|A|\cdot|A^{-1}|=1$. נחלק ב- $|A|\neq 0$ ונקבל

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \ .$$

■

דוגמא.
נתונה $A\in M_3(\mathbb{R})$ המקיימת $A^3=2A^{-1}B$, כאשר $B=\begin{pmatrix}-2 & 3e & \pi\\ 0 & 1 & 23\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$. מצאו את $|A|$.

פיתרון.
דרך א:
לפי הנתון $A^3=2A^{-1}B$, ולכן $|A^3|=|2A^{-1}B|$. לפי משפט המכפלה, $|A|^3=|2A^{-1}|\cdot|B|$. מאחר ו- $A\in M_3(\mathbb{R})$, נקבל $|A|^3=2^3\cdot|A^{-1}|\cdot|B|$. מכאן,

$$|A|^3=2^3\cdot\frac{1}{|A|}\cdot|B|\ ,$$

ולכן

$$|A|^4=8\cdot|B|=8\cdot 2=16\ ,$$

ונקבל $|A|=\pm 2$.

דרך ב:

$$A\cdot(2A^{-1}B)=A\cdot A^3 \quad\Rightarrow\quad A^4=(A\cdot 2A^{-2})B \quad\Rightarrow\quad A^4=(2\cdot AA^{-2})B \quad\Rightarrow\quad A^4=(2\cdot I)B$$
$$A^4=2B \quad\Rightarrow\quad |A^4|=|2B| \quad\Rightarrow\quad |A|^4=2^3\cdot|B| \quad\Rightarrow\quad |A|^4=8\cdot 2=16\ .$$

■

דוגמא.
תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{R})$. הוכח או הפרך:

$$|A+B|=|A|+|B|\ .$$

פיתרון. הטענה איננה נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ ,\quad B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ ,$$

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ ,$$

$$|A|=0\ ,\qquad |B|=0\ ,$$

$$|A+B|=|I|=1\ ,$$

$$|A+B|\neq|A|+|B|\ .$$

■

דוגמא.
תהיינה $A,B\in M_5(\mathbb{R})$ הפיכות, כך שמתקיים $A+3B^t=0$. חשבו את $|A^{-1}B^2(B^t)^{-1}|$.

פיתרון. נשים לב שלא נכון לכתוב

$$A+3B^t=0 \quad \Rightarrow \quad |A+3B^t|=|0| \quad \Rightarrow \quad |A|+|3B^t|=0 \ .$$

נחשב

$$|A^{-1}B^2(B^t)^{-1}|=|A^{-1}|\cdot|B^2|\cdot|(B^t)^{-1}|=\frac{1}{|A|}\cdot|B|^2\cdot\frac{1}{|B^t|}=\frac{1}{|A|}\cdot|B|^2\cdot\frac{1}{|B|}=\frac{|B|}{|A|} \ .$$

לפי הנתון $A+3B^t=0$ ולכן

$$A=-3B^t \quad \Rightarrow \quad |A|=|-3B^t| \quad \Rightarrow \quad |A|=(-3)^5|B^t| \quad \Rightarrow \quad |A|=-243|B| \quad \Rightarrow \quad \frac{|B|}{|A|}=-\frac{1}{243} \ .$$

■

דוגמא.
תהיינה $X,Y\in M_3(\mathbb{R})$ המקיימות

$$XY=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

(א) האם X הפיכה?

(ב) עבור $X=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&-1&0\\4&0&-6\end{pmatrix}$ מצאו את Y.

פיתרון. **(א)** נסמן $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$. לפי הנתון $XY=A$. נשים לב ש- $|A|=-6$ ולפי משפט המכפלה, $|A|=|XY|=|X|\cdot|Y|$. בפרט, $|X|\neq 0$, ולכן X הפיכה.

(ב) לפי הנתון $XY=A$. הוכחנו ש- X הפיכה, נכפול את שני האגפים משמאל בהופכית של X. נקבל $Y=X^{-1}A$. לאחר חישוב, נקבל ש-

$$X^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-2&0\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

לכן

$$Y=X^{-1}A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-2&0\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&0\\1&-6&0\\\frac{2}{3}&-2&\frac{1}{3}\end{pmatrix} \ .$$

■
