תרגילים : סיבוכיות

שאלה 1 הבעיית קליקה מוגדרת באופן הבא:

קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר טבעי k.
פלט: האם G מכיל קליקה בגודל k?

$$CLIQUE = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ מכיל קליקה בגודל } k\} .$$

הבעיית כיסוי בקדקודים מוגדרת:

קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר טבעי k.
פלט: האם G מכיל כיסוי בקדקודים k?

$$VC = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ מכיל כיסוי בקדקודים בגודל } k\} .$$

הוכיחו כי קיימת רדוקציה זמן-פולינומיאלית מבעיית $CLIQUE$ לבעיית VC: כלומר

$$CLIQUE \leq_p VC .$$

שאלה 2

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$.
תת-קבוצת קודקודים $S \subseteq V$ היא **קבוצת בלתי תלויה** אם התנאי הבא מתקיים:
אם $u_1, u_2 \in S$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

תת-קבוצת קודקודים $C \subseteq V$ תקרא **קליקה** אם התנאי הבא מתקיים:
אם $u_1, u_2 \in C$ אז $(u_1, u_2) \in E$.

הבעיית IS מוגדרת:

$$IS = \left\{\langle G, k\rangle \;\middle|\; G \text{ גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ לפחות} \right\}$$

הבעיית $CLIQUE$ מוגדרת:

$$CLIQUE = \left\{\langle G, k\rangle \;\middle|\; G \text{ גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל } k \text{ לפחות} \right\}$$

הוכיחו כי

$$IS \leq_P CLIQUE .$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה IS לשפה $CLIQUE$.
יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 3

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$.
תת-קבוצת קדקודים $S \subseteq V$ היא **קבוצת בלתי תלויה** אם התנאי הבא מתקיים:
אם $u_1, u_2 \in S$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

תת-קבוצת קודקודים $U \subseteq V$ היא **כיסוי קודקודים** אם התנאי הבא מתקיים:
אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \in U$ או $u_2 \in U$.
השפה IS מוגדרת:

$$IS = \left\{ \langle G, k \rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ לפחות } G \right\}$$

השפה VC מוגדרת:

$$VC = \left\{ \langle G, k \rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל כיסוי קודקודים בגודל } k \text{ לכל היותר } G \right\}$$

הוכיחו כי

$$IS \leq_P VC \ .$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה IS לשפה VC.
יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 4 בעיית סכום התת קבוצה (subsetSum): בהינתן קבוצת מספרים שלמים $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ומספר שלם t, האם קיימת תת קבוצה $Y \subseteq S$ שסכום איבריה הוא בדיוק t.
בעיית סכום התת קבוצה כשפה פורמלית:

$$\text{SubsetSum} = \left\{ \langle S, t \rangle \;\middle|\; \text{קבוצת שלמים, } t \text{ שלם וקיימת תת-קבוצה } Y \subseteq S \text{ כך ש- } t = \sum_{y \in Y} Y \quad S \right\}$$

בעיית החלוקה (Partition): בהינתן קבוצת מספרים שלמים $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ האם קיימת תת-קבוצה $Y \subseteq S$ כך ש- $\sum\limits_{y \in Y} y = \sum\limits_{y \in S \setminus Y} y$.
בעיית החלוקה כשפה פורמלית:

$$\text{partition} = \left\{ S \;\middle|\; \text{קבוצת שלמים, וקיימת תת-קבוצה } Y \subseteq S \text{ כך ש- } \sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in S \setminus Y} y \quad S \right\}$$

הוכיחו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה SubsetSum לשפה partition. כלומר:

$$\text{SubsetSum} \leq_P \text{Partition} \ .$$

בשאלה זו עליכם:

א) להגדיר במפורש את הרדוקציה.

ב) להראות שהרדוקציה היא רדוקציית התאמה.

ג) להראות שהרדוקציה פולינומיאלית.

תשובות

שאלה 1 בהינתן זוג $\langle G,k\rangle$ הקלט עבור $CLIQUE$, ניצור זוג $\langle G',k'\rangle$, הקלט של VC ע"י פונקצית הרדוקציה

$$\begin{aligned}\langle G,k\rangle \in CLIQUE \quad &\Rightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in VC\\ \langle G,k\rangle \in CLIQUE \quad &\Leftarrow \quad \langle G',k'\rangle \in VC\end{aligned}$$

<u>הגדרת הרדוקציה</u>

- נגדיר את G' להיות הגרף המשלים $\bar{G}(V,\bar{E})$:

$$\bar{E}=\big\{(u_1,u_2)\ \big|\ (u_1,u_2)\notin E\big\}\ .$$

- נגדיר $k'=|V|-k$.

<u>נכונות הרדוקציה</u>

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

נניח כי $\langle G,k\rangle \in CLIQUE$.

$\Leftarrow$ G מכיל קליקה C בגודל k.

$\Leftarrow$ לכל $(u_1,u_2)\in\bar{E}$ של $\bar{G}$, מתקיים $(u_1,u_2)\notin E$ ולכן $u_1\notin C$ או $u_2\notin C$.

$\Leftarrow$ לכל שני קודקודים u_1,u_2 ב- $\bar{G}$, $u_1\in V\backslash C$ או $u_2\in V\backslash C$.

$\Leftarrow$ הקובצת קודקודים $V\backslash C$ היא כיסוי בקודקודים של $\bar{G}$ בגודל $k'=|V|-k$.

$\Leftarrow$ $\langle G',k'\rangle \in VC$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

נניח כי $\langle G',k'\rangle \in VC$.

$\Leftarrow$ G' מכיל כיסוי בקדקודים S בגודל $k'=|V|-k$.

$\Leftarrow$ לכל שני קודקודים u_1,u_2 של G', אם $(u_1,u_2)\in\bar{E}$ אז $u_1\in S$ או $u_2\in S$.
השלילה הלוגית של גרירה זו היא: אם $u_1\notin S$ וגם $u_2\notin S$ אז $(u_1,u_2)\notin\bar{E}$.

$\Leftarrow$ אם $u_1\in V\backslash S$ וגם $u_2\in V\backslash S$ אז $(u_1,u_2)\in\bar{E}$.

$\Leftarrow$ הקבוצת קודקודים $V\backslash S$ היא קליקה ב- G בגודל $k=|V|-k'$.

$\Leftarrow$ G מכיל קליקה בגודל k.

שאלה 2

פונקציית הרדוקציה:

אנחנו נגדיר פונקציית הרדוקציה f שבהינתן זוג $\langle G,k\rangle \in IS$ (הקלט של IS), תיצור $\langle G',k'\rangle \in CLIQUE$, (הקלט של $CLIQUE$), כלומר

(*1)
$$f\left(\langle G,k\rangle\right)=\langle G',k'\rangle \ .$$

כך שהתנאי הבא מתקיים:

(*2)
$$\langle G,k\rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in CLIQUE \ .$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת לפי התנאים הבאים:

1) בהינתן גרף $G=(V,E)$.

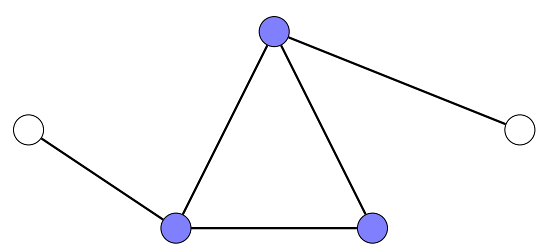
אז G' הוא הגרף המשלים $\bar{G}=(V,\bar{E})$, כאשר

$$\bar{E}=\left\{(u_1,u_2) \;\middle|\; (u_1,u_2)\notin E\right\} \ .$$

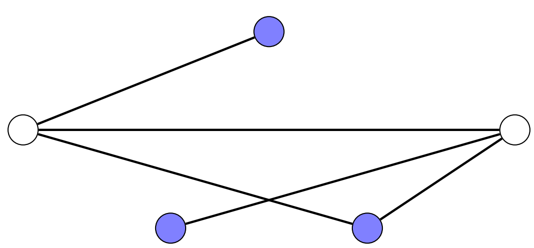
2) $k'=k$.

כדוגמה: בהינתן הגרף $G=(V,E)$ שמכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k=3$. הפונקציית הרדוקציה יוצרת את הגרף $\bar{G}=(V,\bar{E})$ ואת המספר $k'=k=3$, כמתואר בתרשים למטה:

$\bar{G}=\left(V,\bar{E}\right)$



$G=(V,E)$



נכונות הרדוקציה

כעת נוכיח שמתקיים: $\langle G',k'\rangle \in CLIQUE \quad \Leftrightarrow \quad \langle G,k\rangle \in IS$.

כיוון $\Leftarrow$

בהינתן גרף $G=(V,E)$ ושלם k.

נניח כי $\langle G,k\rangle \in IS$.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל k לפחות.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה S בגודל k.

$\Leftarrow$ אם $u_1,u_2\in S$ אז $(u_1,u_2)\notin E$.

כלומר, כל שני קדקודים ב- S לא מחוברים בצלע של G.

$\Leftarrow$ אם $u_1, u_2 \in S$ אז $(u_1, u_2) \in \bar{E}$.
כלומר, כל שני קדקודים ב- S מחוברים בצלע של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ הקבוצה S היא קליקה בגודל k של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ הקבוצה S היא קליקה בגודל $k' = k$ של $G' = \bar{G}$.

$\Leftarrow$ $\langle G', k' \rangle \in CLIQUE$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

בהינתן גרף G' ושלם k'.
נניח כי $\langle G', k' \rangle \in CLIQUE$.

$\Leftarrow$ $\langle \bar{G}, k \rangle \in CLIQUE$ (כי על פי ההגדרה של הפונקצית הרדוקציה, $G' = \bar{G}$ ו- $k' = k$).

$\Leftarrow$ $\bar{G}$ מכיל קליקה בגודל k לפחות.

$\Leftarrow$ $\bar{G}$ מכיל קליקה C בגודל k.

$\Leftarrow$ אם $u_1 \in C$ וגם $u_2 \in C$ אז $(u_1, u_2) \in \bar{E}$.
כלומר, כל שני קדקודים ב- C מחוברים בצלע של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ אם $u_1 \in C$ וגם $u_2 \in C$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.
כלומר, כל שני קדקודים ב- C לא מחוברים בצלע של הגרף G.

$\Leftarrow$ הקבוצה C היא קבוצה בלתי תלוייה בגודל k של G.

$\Leftarrow$ $\langle G, k \rangle \in IS$.

שאלה 3

עלינו להוכיח כי $\exists$ רידוקיציית זמן-פולינומיאלית מ- IS ל- VC:

$$IS \leq_P VC \ .$$

ראשית נגדיר את הבעיות VC ו- IS.

<u>הגדרת הבעייה VC:</u>

קלט:	גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר שלם חיובי k.
פלט:	האם קיים כיסוי קדקודים ב- G בגודל לפחות k.

$$VC = \left\{ \langle G, k \rangle \ \middle|\ G \text{ מכיל כיסוי קדקודים בגודל } k \text{ לפחות} \right\} .$$

<u>הגדרת הבעייה IS:</u>

קלט:	גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר שלם חיובי k.
פלט:	האם G מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל לפחות k.

$$IS = \left\{ \langle G,k\rangle \ \middle|\ \text{מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל } k \text{ לפחות } G \right\} \ .$$

פונקצית הרדוקציה:

אנחנו נגדיר פונקצית הרדוקציה R שבהינתן זוג $\langle G,k\rangle \in IS$, R מחזירה $\langle G',k'\rangle \in VC$, כלומר

$$R\left(\langle G,k\rangle\right) = \langle G',k'\rangle \ . \qquad (*1)$$

כך ש:

$$\langle G,k\rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in VC \ . \qquad (*2)$$

הפונקציית הרדוקציה במשוואה (*1) מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

1) נניח שהגרף הוא $G=(V,E)$.
אז הגרף G' הוא אותו גרף $G=(V,E)$.

2) $k'=|V|-k$.

נכונות הרדוקציה

כעת נוכיח שתנאי (*2) מתקיים.

כיוון $\Leftarrow$

בהינתן גרף $G=(V,E)$ ושלם k.
נניח כי $\langle G,k\rangle \in IS$.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה U בגודל k לפחות.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה U בגודל k.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- U לא מחוברים בצלע ב- G.

$\Leftarrow$ $V\backslash U$ היא כיסוי קדקודים ב- G בגודל $k'=|V|-k$.

$\Leftarrow$ הגרף $G'=\bar{G}$ מכיל כיסוי קדקודים בגודל k.

$\Leftarrow$ $\langle G',k'\rangle \in VC$.

כיוון $\Rightarrow$

בהינתן גרף G' ושלם k'.
נניח כי $\langle G',k'\rangle \in VC$.

$\Leftarrow$ G' מכיל כיסוי קדקודים בגודל k' לפחות.

$\Leftarrow$ G' מכיל כיסוי קדקודים U' בגודל k'.

$\Leftarrow$ G מכיל כיסוי קדקודים U' בגודל k'.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- $V\backslash U'$ היא קבוצת בלתי תלוייה ב- G' בגודל $k = |V| - k'$.

$\Leftarrow$ הגרף $G = G'$ מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל k.

שאלה 4

א) נבנה פונקצית הרדוקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ שמוגדרת

$$f\left(\langle S, t\rangle\right) = \langle S'\rangle$$

כאשר $\langle S, t\rangle$ קלט של SubsetSum ו- $\langle S'\rangle$ קלט של Partition.

1) יהי $s = \sum\limits_{x\in S} x$.

2) נגדיר את הקבוצה החדשה S' על ידי הוספת האיבר $s - 2t$ לקבוצה S:

$$S' = S \cup \{s - 2t\} \ .$$

ב) <u>כיוון $\Leftarrow$</u>

נניח ש- $\langle S, t\rangle \in$ SubsetSum.

$\Leftarrow$ קיימת תת-קבוצה $Y \subseteq S$ כך ש- $t = \sum\limits_{y\in Y} y$.

לכן:

$$\begin{aligned}\sum_{y\in(Y\cup\{s-2t\})} y &= |Y| + s - 2t\\ &= t + s - 2t\\ &= s - t \ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{y\in S'\backslash(Y\cup\{s-2t\})} y &= |S'| - (|Y| + s - 2t)\\ &= |S'| - |Y| - s + 2t\\ &= |S| + s - 2t - |Y| - s + 2t\\ &= |S| - |Y|\\ &= s - t \ .\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ התת-קבוצה $Y \cup \{s - 2t\}$ והתת-קבוצה $S'\backslash\big(Y \cup \{s - 2t\}\big)$ מהוות חלקוה של הקבוצה S'.

$\Leftarrow$ $\langle S'\rangle \in$ Partition.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

נניח ש- $\langle S'\rangle \in$ Partition.

⇐ קיימות תת-קבוצות $S'_1, S'_2 \subseteq S'$ כך שמתקיים

$$S'_1 \cup S'_2 = S' \qquad (1*)$$

ו-

$$\sum_{x \in S'_1} x = \sum_{x \in S'_2} x \ . \qquad (2*)$$

הקבוצה S קשור לקבוצה S' על ידי היחס $S' = S \cup \{s - 2t\}$.
לכן

$$S'_1 \cup S'_2 = S \cup \{s - 2t\} \qquad (3*)$$

ללא הגבלת כלליות אנחנו נגדיר את התת-קבוצה $S_1 \subseteq S$ של הקבוצה S להיות

$$S_1 = S'_1 \cup \{s - 2t\} \ ,$$

ואנחנו נגדיר את התת-קבוצה $S_2 \subseteq S$ של הקבוצה S להיות

$$S_2 = S'_2 \ .$$

מכאן מנובע מהמשוואה (3*) ש:

$$S_1 \cup S_2 = S'_1 \cup S'_2 + \{s - 2t\} = S \cup \{s - 2t\} \qquad \Rightarrow \qquad S_1 \cup S_2 = S \ . \qquad (4*)$$

⇐ ניתן לרשום משוואה (2*) בצורה הבאה:

$$\sum_{x \in (S_1 \cup \{s-2t\})} x = \sum_{x \in S_2} x \ . \qquad (5*)$$

ניתן לחלק את הסכום בצד השמאול של המשווה (5*) ולרשום אותה בצורה הבאה:

$$\sum_{x \in S_1} x + s - 2t = \sum_{x \in S_2} x \ . \qquad (6*)$$

נוסיף את הסכום $\sum\limits_{x \in S_1} x$ לשני האגפים של משוואה של (6*) ונקבל

$$\sum_{x \in S_1} x + \sum_{x \in S_1} x + s - 2t = \sum_{x \in S_2} x + \sum_{x \in S_1} x \ . \qquad (7*)$$

הסכום בצד הימין של משוואה (7*) הוא הסכום $\sum\limits_{x \in (S_1 \cup S_2)} x$.
לפי המשוואה (4*), $S_1 \cup S_2 = S$ לכן $\sum\limits_{x \in S} x = \sum\limits_{x \in (S_1 \cup S_2)} x$.
לכן הסכום בצד הימין של משוואה (7*) הוא הסכום של כל האיברים אשר בקבוצה S.
אנחנו מסמנים את הסכום הזה כ- $\sum\limits_{x \in S} x = s$. לכן ניתן לרשום את משוואה (7*) בצורה הבאה:

$$\sum_{x \in S_1} x + \sum_{x \in S_1} x + s - 2t = s \ . \qquad (8*)$$

אפשר לבטל s בצד שמאול ובצד ימין ולהעביר את ה- $2t$ לצד ימין ולקבל את המשוואה:

$$\sum_{x\in S_1} x + \sum_{x\in S_1} x = 2t \ , \tag{9*}$$

זאת אומרת

$$2\sum_{x\in S_1} x = 2t \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{x\in S_1} x = t \ . \tag{10*}$$

$\Leftarrow$ קיימת תת קבוצה $S_1 \subseteq S$ של S שמקיימת את התנאי $\sum\limits_{x\in S_1} x = t$.

$\Leftarrow$ $\langle S,t\rangle \in \text{SubsetSum}$.

ג) הפונקצית הרדוקציה f, על קלט $\langle S,t\rangle$ מחזירה את הפלט $\langle S'\rangle$ כאשר $S' = S\cup\{s-2t\}$.

לכן הפונקציה מחשבת את הסכום s של כל האיברים שבקבוצה S ואז מחשבת את החיסור $s-2t$.

נסמן $n=|S|$ האורך של הקבוצה S.

אפשר לתאר את f בפסאודו-קוד באופן הבא:

שלב 1. הפונקציה f מאתחלת משתנה $s=0$.

שלב 2. הפונקציה נכנסת ללואה מעל כל האיברים שבקבוצה S ומחברת האיבר הנוכחי לערך של s כל איטרציה.

שלב 3. בסוף הפונקציה מחשבת את החיסור $s-2t$.

שלב 4. הפונקציה מחזירה את הקבוצה החדשה $S' = S\cup\{s-2t\}$.

- שלב 1 דורש צעד אחד. לכן הסיבוכיות של שלב 1 הוא $O(1)$.
- שלב 2 דורש n צעדים. לכן הסיבוכיות של שלב 2 הוא $O(n)$.
- שלב 3 דורש צעד אחד. לכן הסיבוכיות של שלב 3 הוא $O(1)$.
- שלב 4 דורש צעד אחד. לכן הסיבוכיות של שלב 4 הוא $O(1)$.

בסך הכל הסיבוכיות של הפונקציה f היא

$$O(1)+O(n)+O(1)+O(1) = O(n) \ .$$