

שיעור 6

תכונות סגירות של R ו- RE

6.1 הגדרה של השפות R ו- RE

הגדרה 6.1

אוסף השפות הכריעות מסומן R ומוגדר

$$R = \{L \subseteq \Sigma^* : L \text{ קיימת מ"ט המכreira את } L\}.$$

הגדרה 6.2

אוסף השפות הקבילות מסומן RE ומוגדר

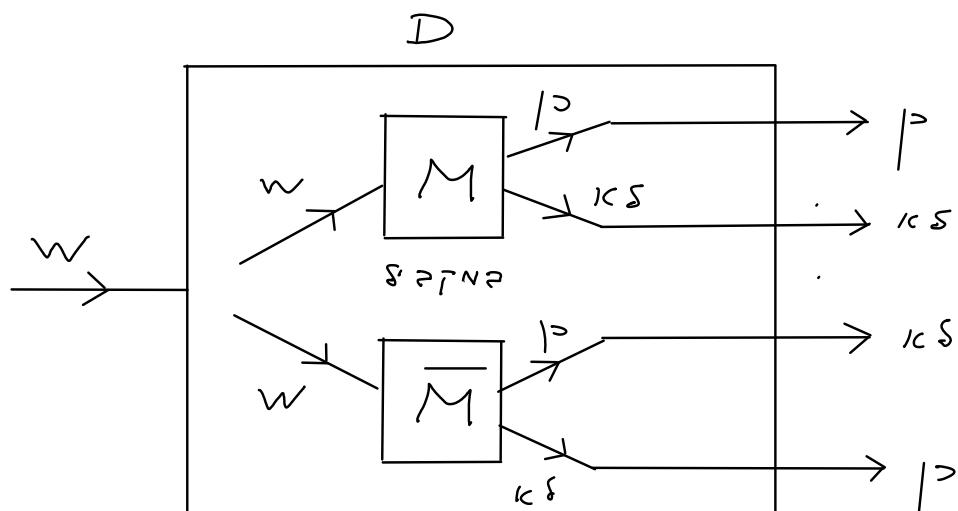
$$RE = \{L \subseteq \Sigma^* : L \text{ מקבלת את } L\}.$$

лемה 6.1

אם $L \in R$ אז $\bar{L} \in RE$ וגם $L \in RE$

הוכחה: תהי M מ"ט מקבלת את L ותהי \bar{M} מ"ט מקבלת את \bar{L} .

נבנה מ"ט D המכreira את L .



על קלט $w = D$:

1) D מעתקה את w לסדרת נוספת.

2) מריצה במקביל את M על w ואת \bar{M} על העותק של w .

- אם M מקבלת D מקבלת.
- אם \bar{M} מקבלת D דוחה.
- אם M דוחה D מקבלת.
- אם \bar{M} דוחה D מקבלת.

נוכיח כי D מכירעה את L .

אם $w \in L$

$w \in L(M) \Leftarrow$

(w מקבלת את M) או (w דוחה את M) \Leftarrow

עוצרת ומתקבלת את w .

אם $w \notin L$

$w \in \bar{L} \Leftarrow$

$w \in L(\bar{M}) \Leftarrow$

(w מקבלת את \bar{M}) או (w דוחה את \bar{M}) \Leftarrow

עוצרת ודוחה את w .

משפט 6.1 סגירות של השפות הכריעות

סגורה תחת:

- 1) איחוד
- 2) חיתוך
- 3) משלימים
- 4) שרשור
- 5) סגור קלין

משפט 6.2 סגירות של השפות הקבילות

סגורה תחת:

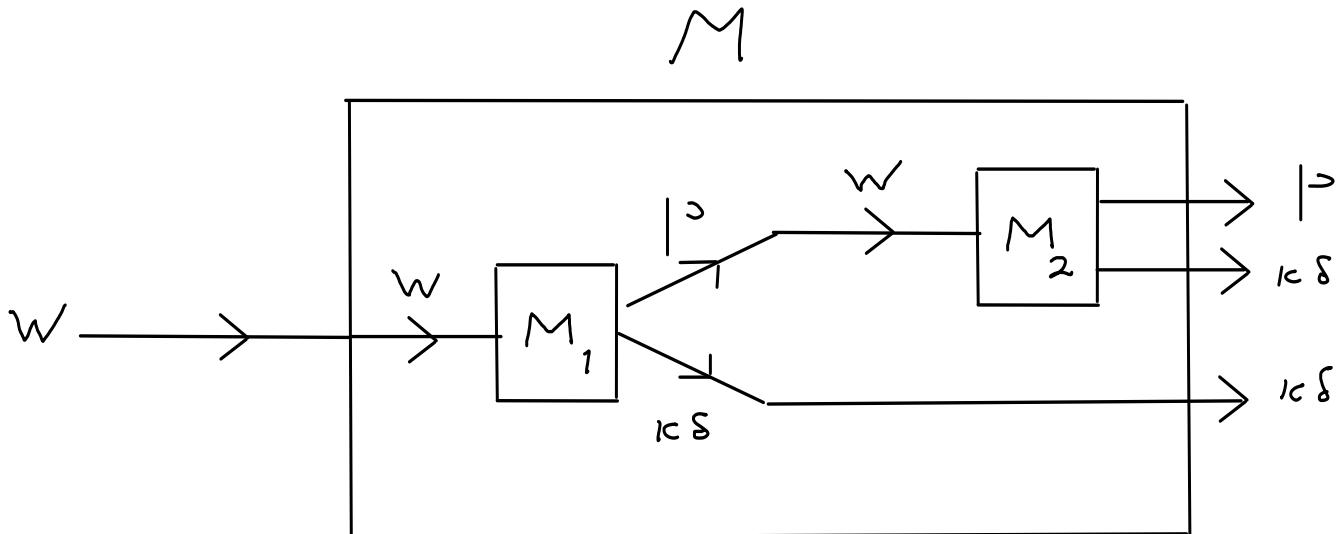
- 1) איחוד
- 2) חיתוך
- 3) שרשור
- 4) סגור קלין

1) חיתוך:

(א) סגורה תחת חיתוך R

נוכיח כי לכל שתי שפות $L_1 \cap L_2 \in R$ מתקיים $L_1, L_2 \in R$ המכריעה את $L_1 \cap L_2$.

תהי M_1 ו- M_2 מ"ט המכרייעות את L_1 ו- L_2 בהתאם. נבנה מ"ט M המכריעה את $L_1 \cap L_2$.

תאור הבנייה

על קלט $w = M$:

1) מעתיקת את w לסדרת נוספת.

2) מרכיב את M_1 על w .

- אם M_1 דוחה $M \Leftarrow$ דוחה.

- אחרת M מרכיב את M_2 על העותק של w ועונה כמוות.

נכונות:

נוכיח כי M מכריעה את $L_1 \cap L_2$.

אם $w \in L_1 \cap L_2$

$w \in L_2$ וגם $w \in L_1 \Leftarrow$

w מקבלת את w וגם M_1 מקבלת את w \Leftarrow

M מקבלת את w \Leftarrow

אם $w \notin L_1 \cap L_2$

$w \notin L_2$ או $w \notin L_1 \Leftarrow$

w דוחה את w או M_2 דוחה את w \Leftarrow

M דוחה את w \Leftarrow

(ב) סגורה תחת חיתוך

nocih ci lcl shi shfot RE matk'ym $L_1, L_2 \in RE$

tahiyeh M₁ -> M₂ shti m'konot tyorign m'kbelot at L₁ -> L₂ b'hetama.
n'bna m'yt M m'kbelat at L₁ ∩ L₂ ba'otzo open cmo (א).

(2) איחוד:

(א) סגורה תחת איחוד

nocih ci ld'l shi shfot R matk'ym $L_1, L_2 \in R$

tahiyeh M₁ m'yt m'kri'ah at L₁ -> M₂ m'yt m'kri'ah at L₂
n'bna m'yt M m'kri'ah at L₁ ∪ L₂

תאור הבנייה

על קלט w: $= M$

(1) מעתיקה את w לסדרת נסף.

(2) M מרים את M₁ על w.

- אם M₁ מקבלת M \Leftarrow M'kbelat.
- אחרת, M מרים את M₂ על העותק של w ועונה כמוות.

(ב) סגורה תחת איחוד

nocih ci lcl shi shfot RE matk'ym $L_1, L_2 \in RE$

tahiyeh M₁ m'yt m'kbelat at L₁ -> M₂ m'yt m'kbelat at L₂.
n'bna m'yt A'D M m'kbelat at L₁ ∪ L₂

תאור הבנייה

על קלט w: $= M$

(1) M בוחרת באופן A'D $i \in \{1, 2\}$

(2) M מרים את M_i על w ועונה כמוות.

(3) שרשור:

(א) Sgura Tahat Shorshor

nocih ci lcl shi shfot R matk'ym $L_1, L_2 \in R$ L₁ · L₂ căs'r

$$L_1 \cdot L_2 = \{w = w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\} .$$

tahiyeh M₁ m'yt m'kri'ah at L₁ -> M₂ m'yt m'kri'ah at L₂

n'bna m'yt A'D M m'kri'ah at L₁ · L₂

תאור הבנייה

על קלט w: $= M$

- 1) M בוחרת באופן א"ד חלוקה של w ל-
 $w = w_1 w_2$.
2) מרים את M_1 על w_1 .
• אם D דוחה $M \Leftarrow D$
• אחרת, M מרים את M_2 על w_2 ועונה כמוות.

(ב) סגורה תחת שרשור RE
 RE סגורה תחת שרשור באותו אופן כמו ב- (א)

4) * **קליני**

א) R סגורה תחת * קליני

נוכיח כי לכל שפה L :

$$L \in R \Rightarrow L^* \in R$$

כasher

$$L^* = \{w = w_1 w_2 \cdots w_k \mid \forall 1 \leq i \leq k, w_i \in L\} .$$

תהי M מ"ט המכיריה את L .

نبנה מ"ט M^* א"ד המכיריה את L^* .

תאור הבנייה

על קלט $w = M^*$:

1) אם $w = \varepsilon$ אז M^* מקבלת.

2) אחרת M^* בוחרת באופן א"ד חלוקה של w ל-
 $w = w_1 \cdots w_k$.

3) לכל $1 \leq i \leq k$

מרים את M על w_i .

• אם M דוחה את w_i $M^* \Leftarrow w_i$ דוחה.

• אחרת חוזרים לשלב 3).

4) אם M קיבלה את כל המחרוזות $\{w_i\}$ אז M^* מקבלת.

ב) RE סגורה תחת *

5) **משלים**

א) R סגורה תחת המשלים

נוכיח כי

$$L \in R \Rightarrow \bar{L} \in R ,$$

כasher

$$\bar{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\} .$$

תהי M מ"ט המכיריה את L .

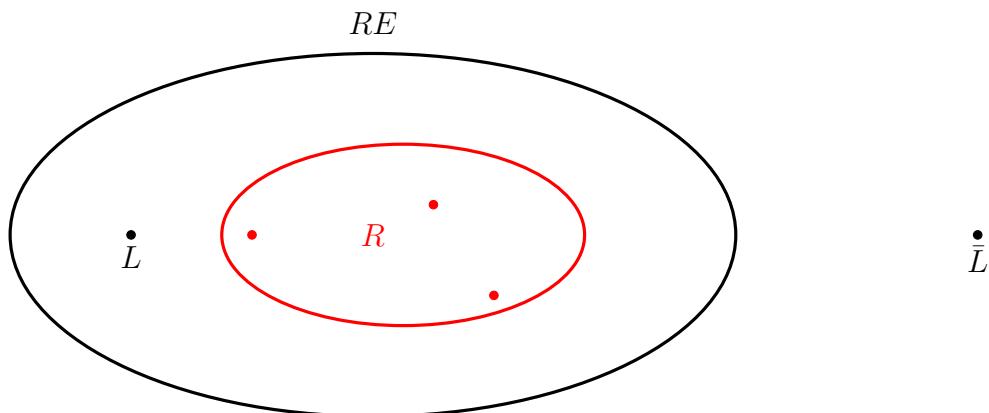
نبנה מ"ט \bar{M} המכיריה את \bar{L} .

על קלט $w = \bar{M}$:

- (1) מרייצה את M על w .
- אם M מקבלת דוחה.
 - אם דוחה M מקבלת.

ב) אין סגורה תחת המשיים**משפט 6.3 אין סגורה תחת המשיים**

$$L \in RE \setminus R \Rightarrow \bar{L} \notin RE .$$

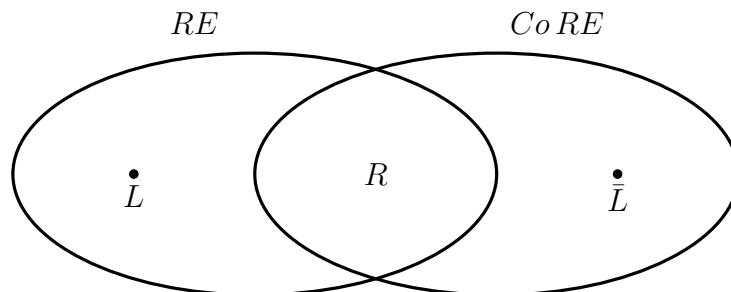


הוכחה:
נניח כי $L \in RE \setminus R$ ונניח בשליליה כי $\bar{L} \in RE$.

אזי לפי טענת עזר (лемה 6.1), $L \in R$ ואו סתיירה.

הגדרה 6.3

$$Co\ RE = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \bar{L} \in RE\} .$$



אבחנה

לפי למה 6.1:

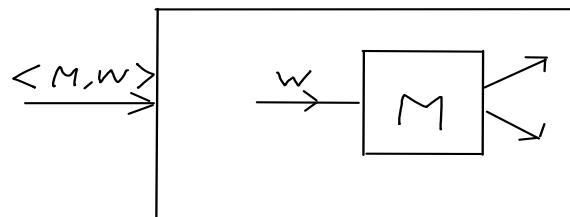
$$RE \cap Co\ RE = R .$$

6.2 קידוד של מ"ט דטרמיניסטי

הגדרה 6.4 קידוד של מ"ט

בاهינתן קבוצה O של עצמים מופשטים (למשל מכונת טיורינג, תוכנית מחשב, גרפ'). הקידוד של O , מסומן $\langle O \rangle$, הוא מיפוי של O אל מהירות מעל אלףית סופי שיש בו לפחות שני סימנים. במידה ויש רב עצמים O_1, \dots, O_k נסמן את הקידוד שלהם $\langle O_1, O_2, \dots, O_k \rangle$.

מ"ט אוניברסלית U



מ"ט אוניברסלית U מקבלת כקלט זוג, קידוד של מילה $\langle w \rangle$ וקידוד של מ"ט $\langle M \rangle$, וביצעת סימולציה של ריצה של M על w ועונה בהתאם.

תאור הפעולה של U

U על קלט x :

(1) בודקת אם x הוא קידוד של מ"ט $\langle M \rangle$ וקידוד של מילה $\langle w \rangle$.

- אם לא \Leftarrow דוחה.

(2) מבצעת סימולציה של M על w :

1	6	7	0	$\langle M \rangle$	-	$\langle w \rangle$...
---	---	---	---	---------------------	---	---------------------	-----

2	6	7	0	$\langle q_0 \rangle$	-	$\langle w \rangle$...
---	---	---	---	-----------------------	---	---------------------	-----

- רושמת את הקוניגורציה ההתחלתית w_{q_0} על סרט 2.
- מחשבת את הקוניגורציה הבאה בעזרת טבלת המעברים.
- בסוף כל מעבר בין שתי קוניגורציות, U בודקת אם המצב הנוכחי הוא q_{acc} .

* אם כן U עוצרת ומתקבלת.

- * לאחרת U בודקת האם המצב הוא q_{rej} .
- * אם כן U עוצרת ודוחה.
- * אחרת U ממשיכה לكونפיגורציה הבאה.

מהי השפה של U ?

לכל x :

. x דוחה את $U \iff x \neq \langle M, w \rangle$ (1)

: $x = \langle M, w \rangle$ (2)

- אם M מקבלת w מקבלת את x .
- אם M דוחה את w דוחה את x .
- אם M לא עוצרת על w לא עוצרת על x .

$$L(U) = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} .$$

הגדרה 6.5 L_{acc}

$$L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} \in \text{RE} \setminus \text{R}$$

הגדרה 6.6 L_{halt}

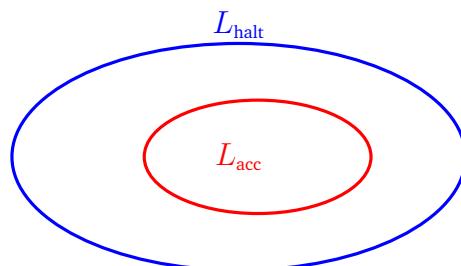
$$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ עוצרת על } M\} \in \text{RE} \setminus \text{R}$$

הגדרה 6.7 L_{d}

$$L_{\text{d}} = \{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M)\} \notin \text{RE}$$

אבחנה:

$$L_{\text{acc}} \subseteq L_{\text{halt}} .$$



משפט 6.4

$$L_{\text{acc}} \in RE .$$

הוכחה: מכיוון ש- $L_{\text{acc}} \in RE$ מקבלת את U , $L(U) = L_{\text{acc}}$

משפט 6.5

$$L_{\text{halt}} \in RE .$$

הוכחה: נבנה מ"ט U' שהוא למעשה U פרט למקום שבו U עצמה ומחטה, U' תעצור ותקבל.

נווכיח כי U' מקבלת את L_{halt} :

אם $x \in L_{\text{halt}}$

ו- M עוצרת על w $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$

x עוצרת ומתקבלת את $U' \Leftarrow$

אם $x \notin L_{\text{halt}}$ שני מקרים:

. x דוחה את $U' \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$ •

. M לא עוצרת על $U' \Leftarrow w$ לא עוצרת על $x = \langle M, w \rangle$ •

