

תרגילים: מערכות משוואות מעל \mathbb{Z}_p לוח הכפל של איברים ב- \mathbb{Z}_3 :

\cdot	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$\bar{1}^{-1} = \bar{1}$

$\bar{2}^{-1} = \bar{2}$

לוח החיבור של איברים ב- \mathbb{Z}_3 :

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

$-\bar{0} = \bar{0}$

$-\bar{1} = \bar{2}$

$-\bar{2} = \bar{1}$

לוח הכפל של איברים ב- \mathbb{Z}_5 :

\cdot	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$\bar{1}^{-1} = \bar{1}$

$\bar{2}^{-1} = \bar{3}$

$\bar{3}^{-1} = \bar{2}$

$\bar{4}^{-1} = \bar{4}$

לוח החיבור של איברים ב- \mathbb{Z}_5 :

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

$-\bar{0} = \bar{0}$

$-\bar{1} = \bar{4}$

$-\bar{2} = \bar{3}$

$-\bar{3} = \bar{2}$

$-\bar{4} = \bar{1}$

לוח הכפל של איברים ב- \mathbb{Z}_7 :

\cdot	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$

$\bar{1}^{-1} = \bar{1}$

$\bar{2}^{-1} = \bar{4}$

$\bar{3}^{-1} = \bar{5}$

$\bar{4}^{-1} = \bar{2}$

$\bar{5}^{-1} = \bar{3}$

$\bar{6}^{-1} = \bar{6}$

לוח החיבור של איברים ב- \mathbb{Z}_7 :

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$

$-\bar{0} = \bar{0}$

$-\bar{1} = \bar{6}$

$-\bar{2} = \bar{5}$

$-\bar{3} = \bar{4}$

$-\bar{4} = \bar{3}$

$-\bar{5} = \bar{2}$

$-\bar{6} = \bar{1}$

שאלה 1 רשמו את האיברים הבאים ב- \mathbb{Z}_3 :

(א) $\overline{12}$

(ב) $\overline{23}$

(ג) $\overline{57}$

(ד) $\overline{46}$

(ה) $\overline{19}$

(ו) $\overline{-7}$

(ז) $\bar{2} + \bar{1}$

(ח) $\bar{2} + \bar{2}$

(ט) $\bar{1} + \bar{1}$

(י) $\bar{2} \cdot \bar{2}$

(יא) $\bar{2} \cdot \bar{0}$

(יב) $\bar{2} \cdot \bar{1}$

שאלה 2 רשמו את האיברים הבאים ב- \mathbb{Z}_5 :

(א) $\overline{11}$

(ב) $\overline{24}$

(ג) $\overline{56}$

(ד) $\overline{98}$

(ה) $\overline{22}$

(ו) $\overline{-8}$

(ז) $\bar{2} + \bar{2}$

(ח) $\bar{2} + \bar{3}$

(ט) $\bar{1} + \bar{4}$

(י) $\bar{2} \cdot \bar{4}$

(יא) $\bar{3} \cdot \bar{2}$

(יב) $\bar{4} \cdot \bar{3}$

שאלה 3 רשמו את האיברים הבאים ב- \mathbb{Z}_7 :

(א) $\overline{13}$

(ב) $\overline{33}$

(ג) $\overline{74}$

(ד) $\overline{16}$

(ה) $\overline{12}$

(ו) $\overline{-9}$

(ז) $\bar{2} + \bar{6}$

(ח) $\bar{3} + \bar{5}$

(ט) $\bar{6} + \bar{3}$

(י) $\bar{2} \cdot \bar{6}$

(יא) $\bar{3} \cdot \bar{5}$

(יב) $\bar{4} \cdot \bar{6}$

שאלה 4 פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל \mathbb{Z}_3 :

$$x + \bar{2}y = \bar{2}$$

$$\bar{2}x - y = \bar{1}$$

שאלה 5 פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל \mathbb{Z}_3 :

$$\bar{2}x + \bar{2}y = \bar{2}$$

$$x + y = \bar{1}$$

שאלה 6 פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל \mathbb{Z}_5 :

$$\bar{4}x + \bar{2}y = \bar{3}$$

$$\bar{3}x - y = \bar{2}$$

שאלה 7 פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל \mathbb{Z}_5 :

$$\bar{3}x + y = \bar{2}$$

$$\bar{3}x + \bar{4}y = \bar{3}$$

שאלה 8 פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל \mathbb{Z}_5 :

$$\bar{2}x + \bar{3}y = \bar{0}$$

$$x - \bar{3}y = \bar{4}$$

שאלה 9 פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל \mathbb{Z}_7 :

$$\bar{5}x + \bar{2}y = \bar{3}$$

$$\bar{4}x - \bar{3}y = \bar{4}$$

פתרונות

שאלה 1

(א)

$$\overline{12} = \overline{\text{rem}(12, 3)} = \bar{0}$$

(ב)

$$\overline{23} = \overline{\text{rem}(23, 3)} = \bar{2}$$

(ג)

$$\overline{57} = \overline{\text{rem}(57, 3)} = \bar{0}$$

(ד)

$$\overline{46} = \overline{\text{rem}(46, 3)} = \bar{1}$$

(ה)

$$\overline{19} = \overline{\text{rem}(19, 3)} = \bar{1}$$

(ו)

$$\bar{2} + \bar{7} = \bar{9} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad -\bar{7} = \bar{2} .$$

(ז)

$$\bar{2} + \bar{1} = \bar{3} = \bar{0}$$

(ח)

$$\bar{2} + \bar{2} = \bar{4} = \bar{1}$$

(ט)

$$\bar{1} + \bar{1} = \bar{2}$$

(י)

$$\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{4} = \bar{1}$$

(יא)

$$\bar{2} \cdot \bar{0} = \bar{0}$$

(יב)

$$\bar{2} \cdot \bar{1} = \bar{2}$$

שאלה 2

(א)

$$\overline{11} = \overline{\text{rem}(11, 5)} = \bar{1}$$

(ב)

$$\overline{24} = \overline{\text{rem}(24, 5)} = \bar{4}$$

(ג)

$$\overline{56} = \overline{\text{rem}(56, 5)} = \bar{1}$$

(ד)

$$\overline{98} = \overline{\text{rem}(98, 5)} = \bar{3}$$

(ה)

$$\overline{22} = \overline{\text{rem}(22, 5)} = \bar{2}$$

(ו)

$$\bar{8} + \bar{2} = \overline{10} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad -\bar{8} = \bar{2} .$$

(ז)

$$\bar{2} + \bar{2} = \bar{4} .$$

(ח)

$$\bar{2} + \bar{3} = \bar{5} = \bar{0}$$

(ט)

$$\bar{1} + \bar{4} = \bar{5} = \bar{0}$$

(י)

$$\bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{8} = \bar{3}$$

(יא)

$$\bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{6} = \bar{1}$$

(יב)

$$\bar{4} \cdot \bar{3} = \overline{12} = \bar{2}.$$

שאלה 3

(א)

$$\overline{13} = \overline{\text{rem}(13, 7)} = \bar{6}$$

(ב)

$$\overline{33} = \overline{\text{rem}(33, 7)} = \bar{5}$$

(ג)

$$\overline{74} = \overline{\text{rem}(74, 7)} = \bar{4}$$

(ד)

$$\overline{16} = \overline{\text{rem}(16, 7)} = \bar{2}$$

(ה)

$$\overline{12} = \overline{\text{rem}(12, 7)} = \bar{5}$$

(ו)

$$\bar{9} + \bar{5} = \overline{14} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad -\bar{9} = \bar{5}.$$

(ז)

$$\bar{2} + \bar{6} = \bar{8} = \bar{1}.$$

(ח)

$$\bar{3} + \bar{5} = \bar{8} = \bar{1}$$

(ט)

$$\bar{6} + \bar{3} = \bar{9} = \bar{2}$$

(י)

$$\bar{2} \cdot \bar{6} = \overline{12} = \bar{5}$$

(יא)

$$\bar{3} \cdot \bar{5} = \overline{15} = \bar{1}$$

(ב)

$$\bar{4} \cdot \bar{6} = \overline{24} = \bar{3} .$$

שאלה 4

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & -\bar{1} & \bar{1} \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{3} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \right) \\ \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \right) \end{aligned}$$

פתרון:

$$(x, y) = (\bar{2}, \bar{0}) .$$

שאלה 5

$$\left(\begin{array}{cc|c} \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{2} \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right)$$

יש משתנה חופשי ואין שורת סתירה לכן יהיו 3 פתרונות:

$$x + y = \bar{1} \quad \Rightarrow \quad x = \bar{1} - \bar{1} \cdot y = \bar{1} + \bar{2} \cdot y .$$

לפיכך הפתרון הכללי הינו

$$(x, y) = (\bar{1} + \bar{2}y, y) .$$

יש 3 פתרונות:

$$.(x, y) = (\bar{1}, \bar{0}) \quad :y = \bar{0}$$

$$.(x, y) = (\bar{3}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1}) \quad :y = \bar{1}$$

$$.(x, y) = (\bar{5}, \bar{2}) = (\bar{2}, \bar{2}) \quad :y = \bar{2}$$

שאלה 6

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{4} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{3} & -\bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{cc|c} \bar{4} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow \bar{4}R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \overline{16} & \bar{8} & \overline{12} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} \end{array} \right) \\ \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{3} \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{0} & -\bar{5} & -\bar{4} \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{array} \right) \end{aligned}$$

קיבלנו שורות סתירה לכן למערכת אין פתרון.

שאלה 7

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{cc|c} \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{3} \end{array} \right) & \xrightarrow{R_1 \rightarrow \bar{2} \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{6} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{3} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{3} \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{3} \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & -\bar{2} & -\bar{9} \end{array} \right) & = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{1} \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{R_2 \rightarrow \bar{2} R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{6} & \bar{2} \end{array} \right) & = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - \bar{2} \cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

פתרון:

$$(x, y) = (\bar{0}, \bar{2}) .$$

שאלה 8

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{cc|c} \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{1} & -\bar{3} & \bar{4} \end{array} \right) & = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{2} \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & -\bar{1} & -\bar{8} \end{array} \right) & = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{R_2 \rightarrow \bar{4} \cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{16} & \bar{8} \end{array} \right) & = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - \bar{2} \cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & -\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array} \right) & = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

פתרון:

$$(x, y) = (\bar{3}, \bar{3}) .$$

שאלה 9

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{cc|c} \bar{5} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{4} & -\bar{3} & \bar{4} \end{array} \right) & = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{5} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{4} & \bar{4} & \bar{4} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow \bar{3} \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{15} & \bar{6} & \bar{9} \\ \bar{4} & \bar{4} & \bar{4} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{4} & \bar{4} & \bar{4} \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{4} \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{0} & -\bar{20} & -\bar{4} \end{array} \right) & = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - \bar{6} \cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & -\bar{14} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

פתרון:

$$(x, y) = (\bar{0}, \bar{3}) .$$