# שיעור 12
# רדוקציות פולינומיאליות

## 12.1 $CLIQUE$ היא $NP$- שלמה

**משפט 12.1** $CLIQUE \in NPC$

הבעיית $CLIQUE$ היא (ראו הגדרה 10.8):

$$CLIQUE = \{\langle G,k\rangle \mid G \text{ מכיל קליקה בגודל } k\} .$$

$CLIQUE$ היא $NP$- שלמה

**הוכחה:**

**1)** הוכחנו כי $CLIQUE \in NP$ במשפט 10.3.

**2)** נוכיח כי $CLIQUE$ היא $NP$ קשה ע"י רדוקציה $3SAT \leqslant_P CLIQUE$.

פונקצית הרדוקציה

בהינתן נוסחת $3CNF$ $\phi$ מעל $n$ משתנים $x_1,x_2,\ldots,x_n$ המכיל $m$ פסוקיות, ניצור זוג $\langle G,k\rangle$ ונוכיח כי

$$\langle\phi\rangle \in 3SAT \quad \Leftrightarrow \quad \langle G,k\rangle \in CLIQUE .$$

נבנה את הגרף $G$ באופן הבא:

הקדקודים של $G$:

לכל פסוקית $C_i$ ב- $\phi$ המכילה 3 ליטרלים ניצור שלשה $t_i$ המכילה 3 קודקודים המתאימים ללחטרלים של $C_i$:

$$x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \quad \longrightarrow \quad x_1 \qquad \bar{x}_3 \qquad x_4$$

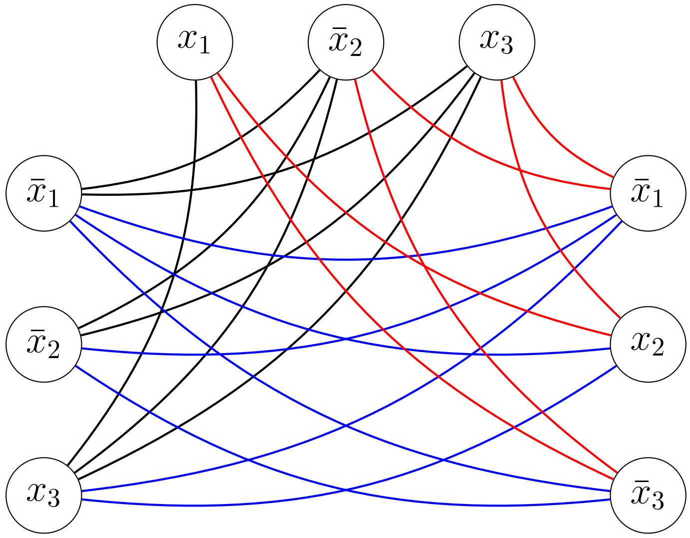
הצלעות של $G$:

נבחר בין כל שני קודקודים פרט לזוגות הבאים:

- זוג קודקודים המתאימים למשתנה ומשלים שלו.
- זוג קודקודים שנמצאים באותה שלושה.

לדוגמה:

$$\phi = \underset{C_1}{\left(\overset{T}{x_1} \vee \overset{T}{\bar{x}_2} \vee x_3\right)} \wedge \underset{C_2}{\left(\bar{x}_1 \vee \overset{T}{\bar{x}_2} \vee x_3\right)} \wedge \underset{C_3}{\left(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \overset{T}{\bar{x}_3}\right)}$$




נקבע $k = m$.

נכונות הרדוקציה

**1)** ניתן לבנות את $G$ בזמן פולינומיאלי בגודל $\phi$.

**2)** נוכיח כי

$$\langle \phi \rangle \in 3SAT \quad \Leftrightarrow \quad \langle G, k \rangle \in CLIQUE\ .$$

כיוון $\Leftarrow$

- נניח כי $\phi$ ספיקה ונסתכל על השמה המספקת את $\phi$.
- בכל פסוקית $C_i$ ב- $\phi$ יש לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך $T$.
- נבחר מכל שלשה $t_i$ בקודקוד אחד המתאים לליטרל שקיבל ערך $T$ ב- $C_i$ ונוסיף אותו לקליקה.
- מספר הקודקודים שבחרנו שווה $k$ וכל שניים מהם מחוברים בצלע כי לא בחרנו שני קודקודים מאותה שלשה ולא בחרנו שני קודקודים המתאימים למשתנה ומשלים שלו.
- ולכן $G$ מכיל קליקה בגודל $k$.

כיוון $\Rightarrow$

- נניח כי $G$ מכיל קליקה בגודל $k$ ונסתכל על קליקה כזו.
- לפי הבנייה הקליקה מכילה בדיוק קודקוד אחד מכל שלשה $t_i$. ניתן השמה למשתנים של $\phi$ כך שהליטרל שמתאים לקודקוד שנמצא בקליקה יקבל ערך $T$.
- השמה זו אפשרית מכיוון שהקליקה לא מכילה שני קודקודים המתאימים למשתנה ומשלים שלו.

- בנוסף השמ זו מספקת את $\phi$ מכיוון שהקליקה מכילה קודקוד מכל שלשה $t_i$ ולכן הליטרל המתאים לקודקוד בשלשה $t_i$ קיבל ערך $T$ ולכן הוא מספק את הפסוקית $C_i$.
- לכן $\phi$ ספיקה.

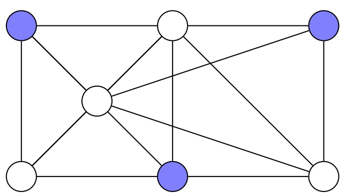
■

## 12.2 בעיית הקבוצה הבלתי תלויה

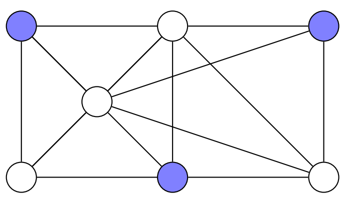
**הגדרה 12.1 קבוצה בלתי תלויה**

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, קבוצה בלתי תלויה ב- $G$ היא תת-קבוצה של קודקודים $S \subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u, \mathrm{v} \in S$ מתקיים $(u, \mathrm{v}) \notin E$.

קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k = 3$:



קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k = 3$:



**הגדרה 12.2 בעיית $IS$**

קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר $k$.
פלט: האם קיימת קבוצה בלתי תלויה ב- $G$ בגודל $k$?

$$IS = \left\{ \langle G, k \rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ } G \right\}$$

**משפט 12.2 $IS \in NPC$**

הבעייה $IS$ היא $NP$ - שלמה.

**הוכחה:**

**(1) נוכיח כי $IS \in NP$**

נבנה אלגוריתם אימות $V$ עבור $IS$.
$V =$ על קלט $(\langle G, k \rangle, y)$:

- בודק האם $y$ היא קבוצה של $k$ קודקודים מ- $G$ השונים זה מזה.
  - אם לא $\Rightarrow$ דוחה.
- בודק האם כל שני קודקודים מ- $y$ לא מחוברים בצלע ב- $G$.
  - אם כן $\Rightarrow$ מקבל.

- אם לא $\Rightarrow$ דוחה.

## (2) נוכיח כי $CLIQUE \leqslant_P IS$

פונקצית הרדוקציה:

בהינתן זוג $\langle G, k\rangle$ הקלט של $CLIQUE$, ניצור זוג $\langle G', k'\rangle$, הקלט של $IS$, ונוכיח כי:

$$\langle G, k\rangle \in CLIQUE \quad \Leftrightarrow \quad \langle G', k'\rangle \in IS \ .$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

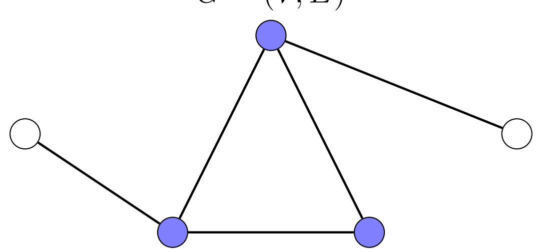
**1)** נניח שהגרף הוא $G = (V, E)$.
אז הגרף $G'$ הוא הגרף המשלים של $G = (V, E)$.
ז"א $G' = \bar{G} = \left(V, \bar{E}\right)$ כאשר

$$\bar{E} = \left\{(u_1, u_2) \ \middle| \ (u_1, u_2) \notin E\right\} \ .$$

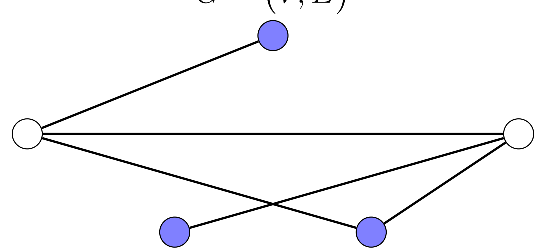
**2)** $k' = k$.

לדוגמה, בהינתן הגרף $G = (V, E)$ שמכיל קליקה בגודל $k = 3$, הפונקציית הרדוקציה $R$ מחזירה את הגרף $\bar{G} = (V, \bar{E})$ ואת המספר $k' = k = 3$, כמתואר בתרשים למטה:

$G = (V, E)$



$\bar{G} = \left(V, \bar{E}\right)$



נכונות הרדוקציה

**1)** ניתן לבנות $G'$ בזמן פולינומיאלי בגודל $G$.

**2)** נוכיח כי $\langle G', k'\rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G, k\rangle \in CLIQUE$.

כיוון $\Leftarrow$

בהינתן גרף $G = (V, E)$ ושלם $k$.
נניח כי $\langle G, k\rangle \in CLIQUE$.

$\Leftarrow$ $G$ מכיל קליקה $S$ בגודל $k$.

$\Leftarrow$ אם $u_1, u_2 \in S$ (אם $u_1, u_2$ שני קודקודים בקליקה $S$) אזי $(u_1, u_2) \in E$.
כלומר, כל שני קדקודים ב- $S$ מחוברים בצלע של $G$.

$\Leftarrow$ אם $u_1, u_2 \in S$ אזי $(u_1, u_2) \notin \bar{E}$.
כלומר, כל שני קדקודים ב- $S$ לא מחוברים בצלע של המשלים של הגרף $\bar{G}$, דהיינו $G'$.

⇐ אותה הקבוצה $S$ היא קבוצה בלתי תלוייה ב- $G'$ בגודל $k'=k$.

⇐ $G'=\bar{G}(V,\bar{E})$ מכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל $k'$.

⇐ $\langle G',k\rangle \in IS$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

בהינתן גרף $G'$ ושלם $k'$.
נניח כי $\langle G',k'\rangle \in IS$.

⇐ $G'$ מכיל קבוצה בלתי תלוייה $S$ בגודל $k'$.

⇐ אם $u_1,u_2\in S$ אזי $(u_1,u_2)\notin \bar{E}$.
כלומר, כל שני קדקודים ב- $S$ לא מחוברים בצלע של $G'$.

⇐ אם $u_1,u_2\in S$ אזי $(u_1,u_2)\in E$.
כלומר, כל שני קדקודים ב- $S$ מחוברים בצלע של $G(V,E)$.

⇐ אותה הקבוצה $S$ היא קליקה ב- $G$ בגודל $k=k'$.

⇐ $G$ מכיל קליקה בגודל $k$.

⇐ $\langle G,k\rangle \in CLIQUE$.

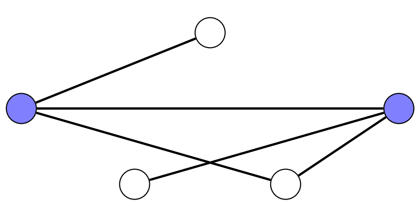
■

## 12.3 בעיית הכיסוי בקודקודים

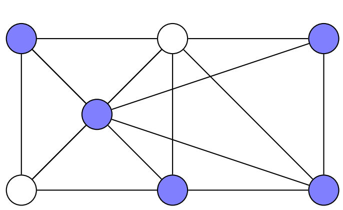
**הגדרה 12.3 כיסוי בקודקודים**

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$, כיסוי בקודקודים ב- $G$ הוא תת-קבוצה של קודקודים $C\subseteq V$ כך שלכל צלע $u,\text{v}\in S$ מתקיים $u\in C$ או $\text{v}\in C$.

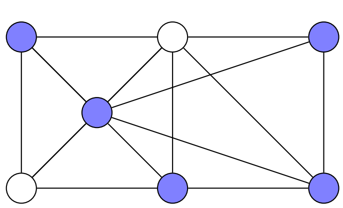
כיסוי בקדקודים בגודל $k=2$:



כיסוי בקדקודים בגודל $k=5$:



כיסוי בקדקודים בגודל $k=5$:



## 12.4 הבעייה $VC$

**הגדרה 12.4 בעיית $VC$**

קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר $k$.
פלט: האם קיים כיסוי בקודקודים ב- $G$ בגודל $k$?

$$VC = \{\langle G,k\rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל כיסוי בקודקודים בגודל } k\}$$

**משפט 12.3 $VC\in NPC$**

הבעייה $VC$ היא $NP$ - שלמה.

**הוכחה:**

**נוכיח כי $VC\in NP$**

נבנה אלגוריתם אימות $V$ עבור $VC$.
$V=$ על קלט $(\langle G,k\rangle, y)$:

- בודק האם כל צלע ב- $G$ מכילה לפחות קצה אחד ב- $y$.
  - אם כן $\Rightarrow$ מקבל.
  - אם לא $\Rightarrow$ דוחה.

**נוכיח כי $VC$ היא $NP$-קשה ע"י רדוקציה $IS\leqslant_P VC$**

פונקצית הרדוקציה:

בהינתן זוג $\langle G,k\rangle$ הקלט של $IS$, ניצור זוג $\langle G',k'\rangle$ הקלט של $VC$ ונוכיח כי

$$\langle G,k\rangle\in IS \quad\Leftrightarrow\quad \langle G',k'\rangle\in VC\ .$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

1) נניח שהגרף הוא $G=(V,E)$.
אז הגרף $G'$ הוא אותו גרף $G=(V,E)$.

2) $k'=|V|-k$.

נכונות הרדוקציה

1) ניתן לבנות $G'$ בזמן פולינומיאלי בגודל $G$.

2) נוכיח כי $\langle G,k\rangle\in IS \quad\Leftrightarrow\quad \langle G',k'\rangle\in VC$ .

כיוון $\Leftarrow$

בהינתן גרף $G=(V,E)$ ושלם $k$.
נניח כי $\langle G,k\rangle\in IS$.

$\Leftarrow$ $G$ מכיל קבוצה בלתי תלוייה $S$ בגודל $k$.

$\Leftarrow$ אם $u_1 \in S$ וגם $u_2 \in S$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.
כלומר, כל שני קדקודים ב- $S$ לא מחוברים בצלע ב- $G$.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת היא:
אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \notin S$ או $u_2 \notin S$.

$\Leftarrow$ אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \in V \backslash S$ או $u_2 \in V \backslash S$.

$\Leftarrow$ $V \backslash S$ היא כיסוי קדקודים ב- $G$ בגודל $k' = |V| - k$.

$\Leftarrow$ הגרף $G' = G$ מכיל כיסוי קדקודים בגודל $k'$.

$\Leftarrow$ $\langle G', k' \rangle \in VC$.

כיוון $\Rightarrow$

בהינתן גרף $G'$ ושלם $k'$.
נניח כי $\langle G', k' \rangle \in VC$.

$\Leftarrow$ $G'$ מכיל כיסוי בקדקודים $C$ בגודל $k'$.

$\Leftarrow$ אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \in C$ או $u_2 \in C$.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת היא:
אם $u_1 \notin C$ וגם $u_2 \notin C$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

$\Leftarrow$ אם $u_1 \in V \backslash C$ וגם $u_2 \in V \backslash C$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- $V \backslash C$ לא מחוברים בצלע ב- $G'$.

$\Leftarrow$ $V \backslash C$ החא קבוצת בלתי תלוייה ב- $G'$ בגודל $k = |V| - k'$.

$\Leftarrow$ הגרף $G = G'$ מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k$.

■

## 12.5 $PARTITION$

**הגדרה 12.5 בעיית $PARTITION$**

קלט: קבוצת מספרים שלמים $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
פלט: האם קיימת תת-קבוצה $S \subseteq Y$ כך ש- $\sum\limits_{y \in S \backslash Y} y = \sum\limits_{y \in Y} y$?

$$PARTITION = \left\{ S \;\middle|\; S \text{ קבוצת שלמים, וקיימת תת-קבוצה } Y \subseteq S \text{ כך ש- } \sum_{y \in S\backslash Y} y = \sum_{y \in Y} y \right\}$$

## 12.6 רדוקציות פולינומיאליות

**משפט 12.4 רדוקציות פולינומיאליות**

$$\begin{aligned} SAT &\leqslant_P 3SAT \\ 3SAT &\leqslant_P CLIQUE \\ CLIQUE &\leqslant_P IS \\ IS &\leqslant_P VC \\ SubSetSum &\leqslant_P PARTITION \\ HAMPATH &\leqslant_P HAMCYCLE \end{aligned}$$

## 12.7 שפות $NP$ שלמות

**משפט 12.5 שפות NP- שלמות**

$SAT$ NP- שלמה. (משפט קוק לוין)

$3SAT$ NP- שלמה.

$HAMPATH$ NP- שלמה.

$CLIQUE$ NP- שלמה.

$IS$ NP- שלמה.

$VC$ NP- שלמה.