

# שיעור 11

## NP שלמות

### 11.1 המחלקות $NPC$ ו- $NPH$

#### הגדרה 11.1 NP-hard

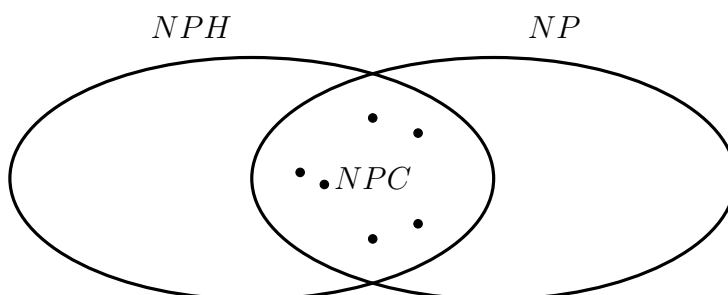
בעייה  $B$  נקראת  $NP$  קשה אם לכל בעייה  $A \in NP$  קיימת רדוקציה  $A \leq_p B$ .

#### הגדרה 11.2 NP-complete

בעייה  $B$  נקראת  $NP$  שלמה אם

$$B \in NP \quad (1)$$

(2) לכל בעייה  $A \in NP$  קיימת רדוקציה  $A \leq_p B$ .



#### משפט 11.1

אם  $B \in NP$  שלמה וגם  $B \in P$  אזי  $P = NP$ .

הוכחה:

• הוכחנו כבר ש-  $P \subseteq NP$ .

• נוכיח כי  $NP \subseteq P$ .

לכל בעייה  $A \in NP$  קיימת רדוקציה  $A \leq_p B$  ומכיון ש-  $B \in P$ , ממשפט הרדוקציה מתקיים  $A \in P$ .

■

#### מסקנה 11.1

אם  $A \leq_p B$  אזי  $\bar{A} \leq_p \bar{B}$ .

#### משפט 11.2

אם  $A \leq_p B$  וגם  $B \leq_p C$  אזי  $A \leq_p C$ .

הוכחה:

## משפט 11.3

תהי  $B$  בעייה  $NP$ -שלמה. אזי לכל בעייה  $C \in NP$ , אם  $B \leq_p C$  אזי גם  $C$  היא  $NP$  שלמה.

**הוכחה:** מכיוון ש- $B$  היא  $NP$ -שלמה, לכל בעייה  $A \in NP$  קיימת רדוקציה  $A \leq_p B$ . מכיוון ש- $B \leq_p C$  מהטרנזיטיביות מתקיים  $A \leq_p C$  לכל בעייה  $A \in NP$ . ולכן  $C$  היא  $NP$ -שלמה.

## 11.2 בעיית הספיקות

## הגדרה 11.3

נוסחת  $CNF$   $\phi$  היא נוסחה בוליאנית מעל  $n$  משתנים  $x_1, x_2, \dots, x_n$  המכילה  $m$  פסוקיות  $C_1, C_2, \dots, C_m$ , כאשר כל פסוקית מכילה אוסף של ליטרלים  $(x_i \mid \bar{x}_i)$  המחוברים ע"י  $OR$  ( $\vee$ ) בוליאני והפסוקיות מחוברים ע"י  $AND$  ( $\wedge$ ) בוליאני.

לדוגמה

$$\phi = \left( x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4 \vee \bar{x}_7 \right) \wedge \left( x_3 \vee x_5 \vee \bar{x}_8 \right) \wedge \dots$$

הגדרה 11.4 נוסחת  $CNF$  ספיקה

נוסחת  $CNF$   $\phi$  היא ספיקה אפ קימת השמה למשתנים  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ע"י  $T \setminus F$  כך ש- $\phi$  מקבלת ערך  $T$ , כלומר בכל פסוקית ישנו לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך  $T$ .

## 11.3 בעיית SAT

## הגדרה 11.5 בעיית SAT

קלט: נוסחת  $CNF$   $\phi$ .  
פלט: האם  $\phi$  ספיקה?

$$SAT = \{ \langle \phi \rangle \mid \text{נוסחת } CNF \text{ ספיקה} \}$$

משפט 11.4  $SAT \in NP$ 

$$SAT \in NP.$$

**הוכחה:** נבנה אלגוריתם אימות  $V$  עבור  $SAT$ .

$$V = \langle \langle \phi \rangle, y \rangle \text{ על קלט}$$

(1) בודק האם  $y$  היא השמה למשתנים  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

• אם לא  $3CNF \Leftarrow$  דוחה.

(2) בודק האם השמה זו מספקת את  $\phi$ .

• אם כן  $\Leftarrow$  מקבל.

• אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

■

## 11.4 משפט קוק לוין

### משפט 11.5 (1973) משפט קוק לוין

הבעיית  $SAT$  היא  $NP$  - שלמה.

רעיון ההוכחה:

לכל  $A \in NP$ ,  $A \leq_p SAT$ .  
לכל  $w \in \Sigma^*$ :

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in SAT,$$

כאן  $f(w) = \langle \phi_w \rangle$ .

### 11.2 מסקנה

$$P = NP \Leftrightarrow SAT \in P.$$

## 11.5 גרסאות של $kSAT$

ישנן לכל היותר  $k$  ליטרלים בכל פסוקית:

•  $1SAT \in P$ .

$$\phi = x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge \dots$$

•  $2SAT \in P$ .

$$\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge \dots$$

•  $3SAT$  היא  $NP$  - שלמה.

## 11.6 $3SAT$ בעיית

### הגדרה 11.6 בעיית $3SAT$

קלט: נוסחת  $3CNF$ ,  $\phi$ .  
פלט: האם  $\phi$  ספיקה?

$$3SAT = \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ נוסחת } 3CNF \text{ ספיקה} \}$$

משפט 11.6  $3SAT$  היא  $NP$  שלמה. $3SAT$  היא  $NP$  שלמה.

הוכחה:

יש לקיים את השני תנאים הבאים:

$$3SAT \in NP \quad (1)$$

ניתן לבנות אלגוריתם אימות עבור  $3SAT \in NP$  דומה לאלגוריתם האימות עבור  $SAT$  שבנינו בהוכחה של המשפט קוק-לויין 11.5 למעלה.

(2)  $3SAT$  היא  $NP$  קשה ע"י רדוקציה

$$SAT \leq_p 3SAT.$$

ואז בגלל ש- $SAT$  היא  $NP$  שלמה (לפי משפט קוק-לויין 11.5) ומכיוון ש- $3SAT \in NP$  אז לפי משפט האסימפטוטית 11.2 גם  $3SAT$  היא  $NP$ -שלמה.

קיום פונקציה הרדוקציה  $SAT \leq_p 3SAT$ 

כעת נבנה את פונקציה הרדוקציה מ- $SAT$  ל- $3SAT$ .

ראשית נציין כי כל נוסחה בוליאנית  $\phi$  ניתנת לרשום בצורה  $CNF$  בזמן פולינומיאלי.

בהינתן נוסחת  $CNF$ ,  $\phi$  (הקלט של  $SAT$ ) נבנה בזמן פולינומיאלי נוסחת  $3CNF$ ,  $\phi'$  (הקלט של  $3SAT$ ) ואז נוכיח שמתקיים

$$\langle \phi' \rangle \in 3SAT \Leftrightarrow \langle \phi \rangle \in SAT.$$

לכל פסוקית  $C$  ב- $\phi$  המכילה יותר מ-3 ליטרלים, ניצור אוסף  $C'$  ב- $\phi'$  של פסוקיות כך שכל פסוקית ב- $C'$  תכיל 3 ליטרלים. למשל בהינתן הפסוקית  $C$  הבאה של  $\phi$ :

$$C = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5$$

ניצור את הפסוקית  $C'$  הבאה ב- $\phi'$ :

$$C' = (x_1 \vee x_2 \vee y_1) \wedge (\bar{y}_1 \vee x_3 \vee y_2) \wedge (\bar{y}_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5).$$

באופן כללי, לכל פסוקית  $C = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k$  המכיל  $k > 3$  ליטרלים, ניצור אוסף  $C'$  של פסוקיות שבו כל פסוקית מכילה 3 ליטרלים, ע"י הוספת  $k-3$  משתנים  $y_1, y_2, \dots, y_{k-3}$ :

$$C' = (a_1 \vee a_2 \vee y_1) \wedge (\bar{y}_1 \vee a_3 \vee y_2) \wedge \dots \wedge (\bar{y}_{i-2} \vee a_i \vee y_{i-1}) \wedge \dots \wedge (\bar{y}_{k-3} \vee a_{k-1} \vee a_k).$$

בפרט, עבור כל פסוקית  $C = (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k)$  נניח  $a_i = 1$  הוא הליטרל הראשון ששווה ל-1. אז

• נשים  $y_j = 1$  לכל  $1 \leq j \leq i-2$ ,

• ונשים  $y_j = 0$  לכל  $i-1 \leq j \leq k-3$ .

סיימנו להגדיר את הפונקציה הרדוקציה.

כעת נוכיח כי הפונקציה הזאת מקיימת את התנאי ההכרחי

$$\langle \phi' \rangle \in 3SAT \Leftrightarrow \langle \phi \rangle \in SAT.$$

כיוון  $\Leftarrow$ :

נניח כי  $\langle \phi \rangle \in SAT$  ותהי  $X$  השמה המספקת את  $\phi$ .

נוכיח שקיימת השמה  $X'$  מתאימה המספקת את  $\phi'$ .

- בכל פסוקית  $C$  של  $\phi$ , עבור הליטרלים  $a_1, a_2, \dots, a_k$  ניתן אותם ערכים כמו ב-  $X$ .
- מכיוון ש-  $X$  מספקת את  $\phi$ , בכל פסוקית  $C = (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k)$  יש לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך 1. נניח  $a_i = 1$ . אז על פי ההגדרה של פונקצית הרדוקציה:

$$\begin{aligned} & * \text{ נשים } y_j = 1 \text{ לכל } 1 \leq j \leq i - 2, \\ & * \text{ ונשים } y_j = 0 \text{ לכל } i - 1 \leq j \leq k - 3. \end{aligned}$$

באופן הזה אנחנו ניצור אוסף  $C'$  של פסוקיות עם המבנה הבא:

$$\begin{aligned} & \left( a_1 \vee a_2 \vee \overset{1}{y_1} \right) \wedge \left( \overset{0}{\bar{y}_1} \vee a_2 \vee \overset{1}{y_2} \right) \wedge \dots \wedge \left( \overset{0}{\bar{y}_{i-3}} \vee a_{i-1} \vee \overset{1}{y_{i-2}} \right) \wedge \left( \overset{0}{\bar{y}_{i-2}} \vee \overset{1}{a_i} \vee \overset{0}{y_{i-1}} \right) \wedge \left( \overset{1}{\bar{y}_{i-1}} \vee a_{i+1} \vee \overset{0}{y_i} \right) \\ & \wedge \dots \wedge \left( \overset{1}{\bar{y}_{k-3}} \vee a_{k-1} \vee a_k \right) \end{aligned}$$

ולכן השמה זו מספקת את  $C'$  ולכן  $\langle \phi' \rangle \in 3SAT$ .

כיוון  $\Rightarrow$ :

נניח כי  $\langle \phi' \rangle \in 3SAT$  ותהי  $X'$  השמה המספקת את  $\phi'$ .  
נוכיח שקיימת השמה  $X$  המספקת את  $\phi$ .

נסתכל על פסוקית  $C = (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k)$ .  
נניח בשלילה שלא קיימת השמה  $X$  המספקת את  $C$ . אז בהכרח

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$$

לפי זה, באוסף פסוקיות  $C'$  שנקבל על פי ההגדרה של פונקצית הרדוקציה,  $y_j = 1$  לכל  $1 \leq j \leq k - 3$ .  
כלומר מתקיים  $y_1 = y_2 = \dots = y_{k-3} = 0$ . לכן

$$C' = \left( \overset{0}{a_1} \vee \overset{0}{a_2} \vee \overset{1}{y_1} \right) \wedge \left( \overset{0}{\bar{y}_1} \vee \overset{0}{a_3} \vee \overset{1}{y_2} \right) \wedge \dots \wedge \left( \overset{0}{\bar{y}_{i-2}} \vee \overset{0}{a_i} \vee \overset{1}{y_{i-1}} \right) \wedge \dots \wedge \left( \overset{0}{\bar{y}_{k-3}} \vee \overset{0}{a_{k-1}} \vee \overset{0}{a_k} \right)$$

הפסוקית האחרונה  $\left( \overset{0}{\bar{y}_{k-3}} \vee \overset{0}{a_{k-1}} \vee \overset{0}{a_k} \right)$  אינה מסופקת.  
לכן  $C'$  אינה מסופקת, בסתירה לכך ש-  $X'$  מספקת את  $C'$ .

ולכן  $\langle \phi \rangle \in SAT$ .

הוכחנו שקיימת הרדוקציה  $SAT \leq 3SAT$ .

כעת נוכיח כי הרדוקציה הזו היא זמן פולינומיאלית.

סיבוכיות

החישוב של הפונקציה מתבצע בזמן פולינומיאלי. ספציפי, אם האורך של הנוסחה  $\phi$  הוא  $n = |\phi|$  אז הרדוקציה היא  $O(n)$ .



## 11.7 הוכחת משפט קוק לוין\*

## משפט 11.7 משפט קוק לוי

הבעיית SAT היא NP - שלמה.

הוכחה:

חשיפה מלאה: ההוכחה הבאה מתבססת על ההוכחה שנתונה בהספר של Sipser.

על פי הגדרה 11.2 יש להוכיח ששני התנאים הבאים מתקיימים:

תנאי 1:  $SAT \in NP$ .תנאי 2:  $A \leq_p SAT$  לכל  $A \in NP$ .ראשית נוכיח כי  $SAT \in NP$ :

כדי להוכיח כי SAT שייכת ל-NP, נוכיח כי אישור המורכב מהשמה מספקת עבור נוסחת קלט  $\phi$  ניתן לאימות בזמן פולינומיאלי.

נניח כי  $|\phi| = n$ . כלומר ב- $\phi$  מופיעים  $n$  ליטרלים. ז"א השמה כלשהי דורשת  $n$  משתני בוליאניים לכל היותר.

- אלגוריתם האימות מחליף כל משתנה בנוסחה בערך המתאים לו על פי ההשמה. השלב הזה הוא  $O(n)$ .

- אחר כך האלגוריתם מחשב את ערכו של הביטוי:

\* נניח כי הנוסחה  $\phi$  מכילה  $k$  דורות של סוגריים בתוך סוגריים.

\* החישוב מתחיל עם החישובים של הביטויים בתוך הסוגריים הכי בפנים.

\* יש  $n$  סוגריים הכי-בפנים לכל היותר, וכל אחד של הסוגריים האלה מכיל  $n$  ליטרלים לכל היותר. לכן החישוב הזה הוא  $O(n^2)$ .

\* יש  $k$  דורות של סוגריים לכן החישוב כולו הוא  $O(kn^2)$ .

- בסה"כ הסיבוכיות זמן הריצה היא

$$O(n) + O(kn^2) = O(n^2)$$

לפיכך אישור של השמה כלשהי מתבצע בזמן פולינומיאלי.

- אם ערכו של הביטוי הוא 1 הנוסחה ספיקה.

הוכחנו כי  $SAT \in NP$ . עכשיו נוכיח כי  $A \leq_p SAT$ .

תהי  $N$  מ"ט אי-דטרמיניסטית זמן-פולינומיאלית שמכריעה שפה  $A$  כלשהי בזמן  $O(n^k)$  עבור  $k$  טבעי. התרשים למטה מראה טבלה של קונפיגורציות של  $N$ . ברשימה הבאה רשומות ההגדרות של הטבלה:

- כל שורה מראה את תוכן הסרט בשלב מסוים של מסלול אחד של  $N$ .
- בשורה הראשונה יש את הקונפיגורציה ההתחלתית.
- אנחנו מניחים כי האורך של המילה, כלומר אורך הקלט הוא  $n$ .
- הסימנים  $w_1, \dots, w_n$  מסמנים את התווים של הקלט.

- בתא הראשון בכל שורה יש  $\#$ , ואחר כך רשומה הקונפיגורציה של  $N$ .  
בסוף הקונפיגורציה בכל שורה יש  $\#$ .
- אחרי ה-  $\#$  בקצה הימין של המילה, בכל תא יש תו רווח עד הסוף של השורה.  
התווי רווח לפני המשבצת הראשונה של הקונפיגורציה לא מופיעים בטבלה.
- האורך של כל שורה הוא בדיוק  $n^k$  תאים.
- בטבלה יש בדיוק  $n^k$  שורות לסיבה הבאה:
  - המכונת טיורינג מבצעת  $n^k$  צעדים לכל היותר.
  - בכל צעד המ"ט עוברת לקונפיגורציה חדשה.
  - בכל שורה רשומה קונפיגורציה.
  - בסה"כ יש  $n^k$  שורות עבור ה-  $n^k$  קונפיגורציות שונות האפשריות.

|   |       |       |       |   |       |             |         |             |   |  |  |  |  |  |  |
|---|-------|-------|-------|---|-------|-------------|---------|-------------|---|--|--|--|--|--|--|
| # | $q_0$ | $w_1$ | $w_2$ | $\dots$   | $w_n$ | $\sqsubset$ | $\dots$ | $\sqsubset$ | # |  |  |  |  |  |  |
| # | $q_0$ |       |       |   |       |             |         |             | # |  |  |  |  |  |  |
| # | $q_0$ |       |       |   |       |             |         |             | # |  |  |  |  |  |  |
|   |       |       |       | <table><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table> |       |             |         |             |   |  |  |  |  |  |  |
|   |       |       |       |   |       |             |         |             |   |  |  |  |  |  |  |
|   |       |       |       |   |       |             |         |             |   |  |  |  |  |  |  |
| # |       |       |       |   |       |             |         |             | # |  |  |  |  |  |  |

אנחנו אומרים כי טבלה כלשהי היא **טבלה המקבלת** אם באחת השורות יש קונפיגורציה אשר  $N$  מקבלת אותה.

בעזרת הטבלה נתאר את הרדוקציה זמן-פולינומיאלית  $f$  משפה  $A$  כלשהי ל- $SAT$ .

הפונקציה הרדוקציה  $f$  מקבלת קלט  $w$  ומחזירה נוסחה  $\phi = f(w)$ , אשר לפי ההגדרה של פונקצית הרדוקציה, עומדת בתנאי הבא:

$$w \in A \quad \Leftrightarrow \quad f(w) \in SAT \text{ .}$$

יהיו  $Q$  קבוצת המצבים ו-  $\Gamma$  האלפיבית של הסרט של  $N$ . נגדיר:

$$C = Q \cup \Gamma \cup \{\#\} \text{ .}$$

נסמן ב-  $s$  איבר כלשהו של  $C$ .

עבור כל תא  $(i, j)$  של הטבלת הקונפיגורציות נגדיר משתנה בוליאני  $x_{i,j,s}$  לכל  $1 \leq i, j \leq n^k$ .  
המשתנה  $x_{i,j,s}$  מוגדר על פי התנאי

$$x_{ijs} = 1$$

אם בתא ה-  $ij$  של הטבלה יש  $s \in C$ . למשל, אם בתא ה-  $(2, 5)$  של הטבלה מופיע התו  $a$  אז

$$x_{2,5,a} = 1$$

בעוד

$$x_{2,5,b} = 0 .$$

במובן הזה, התכנים של כל התאים של הטבלה מסומנים על ידי המשתנים של  $\phi$ .

עכשיו נבנה נוסחה  $\phi$  על סמך התנאי שהשמה מספקת של  $\phi$  תהיה מתאימה לטבלה המקבלת של  $N$ .  
נגדיר:

$$\phi = \phi_{\text{cell}} \wedge \phi_{\text{start}} \wedge \phi_{\text{move}} \wedge \phi_{\text{acc}} . \quad (11.1)$$

נסביר את כל הנוסחאות  $\phi_{\text{cell}}$ ,  $\phi_{\text{start}}$ ,  $\phi_{\text{move}}$  ו-  $\phi_{\text{acc}}$  אחד אחד למטה.

### • הנוסחה $\phi_{\text{cell}}$

כפי שמצויין לעיל, אם המשתנה  $x_{i,j}$  "דולק", כלומר אם  $x_{i,j,s} = 1$ , זאת אומרת שיש סימן  $s$  בתא ה-  $ij$  של הטבלה. אנחנו רוצים להבטיח שהשמה כלשהי בנוסחה אשר מתאימה לקונפיגורציה של הטבלה, מדליקה בדיוק משתנה אחד לכל תא של הטבלה. למטרה זו נגדיר  $\phi_{\text{cell}}$  כך:

$$\phi_{\text{cell}} = \bigwedge_{1 \leq i, j \leq n^k} \left[ \left( \bigvee_{s \in C} x_{i,j,s} \right) \wedge \left( \bigwedge_{\substack{s, t \in C \\ s \neq t}} (\bar{x}_{i,j,s} \vee \bar{x}_{i,j,t}) \right) \right] \quad (11.2)$$

\* האיבר הראשון בסוגריים מרובעים,  $\bigvee_{s \in C} x_{i,j,s}$  מבטיח שלכל תא של הטבלה, לפחות משתנה אחד דולק.

\* האיבר השני  $\bigwedge_{\substack{s, t \in C \\ s \neq t}} (\bar{x}_{i,j,s} \vee \bar{x}_{i,j,t})$  מבטיח שעבור כל תא של הטבלה, משתנה אחד לכל היותר דולק.

לפיכך כל השמה מספקת עומדת בתנאי שיהיה בדיוק סימן אחד,  $s$ , בכל תא של הטבלה.

### • הנוסחה $\phi_{\text{start}}$

נוסחה  $\phi_{\text{start}}$  מבטיחה ששורה הראשונה של הטבלה היא הקונפיגורציה ההתחלתית של  $N$  על הקלט  $w$ :

$$\begin{aligned} \phi_{\text{start}} = & x_{1,1,\#} \wedge x_{1,2,q_0} \wedge x_{1,3,w_1} \wedge x_{1,4,w_2} \\ & \wedge \dots \wedge \\ & x_{1,n+2,w_n} \wedge x_{1,n+3,\sqcup} \wedge \dots \wedge x_{1,n^k-1,\sqcup} \wedge x_{1,n^k,\#} \end{aligned} \quad (11.3)$$

### • הנוסחה $\phi_{\text{acc}}$

הנוסחה  $\phi_{\text{acc}}$  מבטיחה שקיימת טבלה קונפיגורציה אשר המ"ט  $N$  מקבלת אותה.

בפרט  $\phi_{\text{acc}}$  מבטיחה שהסימן  $q_{\text{acc}}$  מופיע בתא אחד של הטבלה דרך התנאי שלפחות אחד המשתנים  $x_{i,j,q_{\text{acc}}}$  דולק:

$$\phi_{\text{acc}} = \bigvee_{1 \leq i, j \leq n^k} x_{i,j,q_{\text{acc}}} \quad (11.4)$$



• הנוסחה  $\phi_{\text{move}}$

הנוסחה  $\phi_{\text{move}}$  מבטיחה שכל שורה של הטבלה היא "שורה חוקית".

כלומר בכל שורה, הקונפיגורציה היא כך שאפשר להגיע אליה על ידי תזוזה חוקית של  $N$  מהקונפיגורציה הקודמת שמופיעה בשורה אחת למעלה.

תזוזה חוקית בין כל שתי קונפיגורציות נקבעת על ידי הפונקציה המעברים של המ"ט  $N$ .

בשפה פורמלית, אם  $c_i$  הקונפיגורציה של שורה  $i$ , ו-  $c_{i+1}$  הקונפיגורציה של השורה  $i + 1$  אחת למטה, אז  $\phi_{\text{move}}$  מבטיחה כי לכל  $1 \leq i \leq n^k - 1$  מתקיים

$$c_i \vdash_N c_{i+1}.$$

במונחי הטבלה, אפשר להגדיר תזוזה חוקית בין כל שתי שורות על ידי תת-טבלה מסדר  $2 \times 3$  שמכילה 3 תאים מתאימים של שתי שורות שכנות.

מכאן ואילך אנחנו נקרא לתת-טבלה כזאת "חלון".

למטה יש דוגמאות של חלונות חוקיים:

|                |                |   |
|----------------|----------------|---|
| a              | q <sub>1</sub> | b |
| q <sub>2</sub> | a              | c |

|   |                |                |
|---|----------------|----------------|
| a | q <sub>1</sub> | b              |
| a | a              | q <sub>2</sub> |

|   |   |                |
|---|---|----------------|
| a | a | q <sub>1</sub> |
| a | a | b              |

|   |   |   |
|---|---|---|
| # | b | a |
| # | b | a |

|   |   |                |
|---|---|----------------|
| a | b | a              |
| a | b | q <sub>2</sub> |

|   |   |   |
|---|---|---|
| b | b | b |
| c | b | b |

החלונות האלה למטה הם דוגמאות לחלונות לא חוקיים:

|   |   |   |
|---|---|---|
| a | b | a |
| a | a | a |

|                |                |   |
|----------------|----------------|---|
| a              | q <sub>1</sub> | b |
| q <sub>1</sub> | a              | a |

|                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|
| b              | q <sub>1</sub> | b              |
| q <sub>2</sub> | b              | q <sub>2</sub> |

הנוסחה  $\phi_{\text{move}}$  קובעת שכל חלון של הטבלה חוקי. בפרט, כל חלון מכיל 6 תאים. לכן  $\phi_{\text{move}}$  קובעת שהתכנים של ה-6 תאים של כל חלון מהווה חלון חוקי. ז"א

$$\phi_{\text{move}} = \bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq n^k \\ 1 \leq j \leq n^k}} (\text{חלון ה- } i, j \text{ חוקי}) \quad (11.5)$$

אנחנו מציבים בטקסט "חלון ה-  $i, j$  חוקי" את הנוסחה הבאה, כאשר  $a_1, \dots, a_6$  מסמנים את התכנים של ה-6 תאים של כל חלון:

$$\bigvee_{\substack{\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} \\ \text{חלון חוקי}}} (x_{i,j-1,a_1} \wedge x_{i,j,a_2} \wedge x_{i,j+1,a_3} \wedge x_{i+1,j-1,a_4} \wedge x_{i+1,j,a_5} \wedge x_{i+1,j+1,a_6}) \quad (11.6)$$

עד כה הוכחנו שקיים רדוקציה מכל שפה  $A \in NP$  ל-  $SAT$ . כעת נוכיח כי הרדוקציה זו חישובית בזמן-פולינומיאלי.

הטבלה של  $N$  היא מסדר  $n^k \times n^k$  ולכן היא מכילה  $n^{2k}$  תאים.

נחשב את הסיבוכיות של כל הנוסחאות  $\phi_{\text{move}}, \phi_{\text{acc}}, \phi_{\text{start}}, \phi_{\text{cell}}$ .

• הנוסחה  $\phi_{\text{cell}}$

הנוסחה (11.2) של  $\phi_{\text{cell}}$  מכילה  $n^{2k}$  נוסחאות עם 3 ליטרלים. לכן

$$\phi_{\text{cell}} = O(n^{2k}) .$$

• הנוסחה  $\phi_{\text{start}}$

הנוסחה (11.3) של  $\phi_{\text{start}}$  מכילה בדיוק  $n^k$  ליטרלים. לכן

$$\phi_{\text{start}} = O(n^k) .$$

• הנוסחה  $\phi_{\text{acc}}$

הנוסחה (11.4) של  $\phi_{\text{acc}}$  מכילה בדיוק  $n^k$  ליטרלים. לכן

$$\phi_{\text{acc}} = O(n^k) .$$

• הנוסחה  $\phi_{\text{move}}$

הנוסחה (11.5,11.6) של  $\phi_{\text{move}}$  מכילה  $n^{2k}$  נוסחאות עם 6 ליטרלים. לכן

$$\phi_{\text{move}} = O(n^{2k}) .$$

לכן בסה"כ

$$\phi = O(n^{2k}) + O(n^k) + O(n^k) + O(n^{2k}) = O(n^{2k}) .$$

לפיכך קיימת רדוקציה חישובית בזמן פולינומיאלי מכל שפה  $A \in NP$  ל-  $SAT$ .

