

שעור 6

צורת ז'ורדן

הגדרה 6.1 מטריצת ז'ורדן נילפוטנטית יסודית מסדר n

יהי $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{F}^n .
 המטריצה $J_n(0) \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מוגדרת

$$J_n(0) = \begin{pmatrix} | & | & | & \dots & | \\ \bar{0} & e_1 & e_2 & \dots & e_{n-1} \\ | & | & | & \dots & | \end{pmatrix}$$

שהעמודה הראשונה שלה היא וקטור האפס ושכל $2 \leq i \leq n$ העמודה ה- i שלה היא e_{i-1} , נקראת מטריצת ז'ורדן נילפוטנטית יסודית מסדר n . כלומר:

$$J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

הגדרה 6.2 בלוק ז'ורדן

בלוק ז'ורדן $J_k(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $k \in \mathbb{N}$, הוא מטריצה מסדר $k \times k$ מצורה

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

דוגמה 6.1

$$J_4(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6.2 דוגמה

מצאו את הפולינום האופייני של $J_4(2)$.

פתרון:

$J_4(2)$ משולשית עליונה, לכן הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים, והערכים עצמיים נמצאים על האלכסון הראשי. לכן נקבל

$$P_{J_4(2)} = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 2) = (\lambda - 2)^4.$$

יש ערך עצמי יחיד $\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 4. נמצא את הריבוי הגאומטרי:

$$(A - 2I_{4 \times 4}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אנחנו רואים מייד כי $\dim V_2 = 3$. ז"א הריבוי גאומטרי פחות מהריבוי אלגברי, ולכן המטריצה לא לכסינה.

משפט 6.1 בלוק ז'ורדן לא לכסין

$J_k(\lambda)$ לא לכסין.

הוכחה:

$$J_k(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$J_k(\lambda_1)$ משולשית עליונה. לכן הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים, והערכים עצמיים נמצאים על האלכסון הראשי (משפט 3.19).

$$p_{J_k(\lambda_1)}(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_1)}_{k \text{ פעמים}} = (\lambda - \lambda_1)^k$$

יש ערך עצמי יחיד: $\lambda = \lambda_1$ מריבוי אלגברי k . נחשב את המרחב עצמי V_{λ_1} :

$$(A - \lambda_1 I_{k \times k}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל כי $\dim V_{\lambda_1} = k - 1$. ז"א הריבוי גאומטרי פחות מהריבוי אלגברי, ולכן המטריצה לא לכסינה. ■

הגדרה 6.3 צורת ז'ורדן

צורת ז'ורדן היא מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ שעל האלכסון הראשי שלה יש בלוקים ז'ורדן ו-0 בכל מקום אחר.

$$A = \text{diag}\left(J_{k_1}(\lambda_1), J_{k_2}(\lambda_2), \dots, J_{k_l}(\lambda_l)\right) = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_l}(\lambda_l) \end{pmatrix}$$

דוגמה 6.3

$$\text{diag}\left(J_2(1), J_3(0)\right) = \begin{pmatrix} J_2(1) & 0 \\ 0 & J_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\text{diag}\left(J_3(5), J_2(7), J_4(9)\right) = \begin{pmatrix} J_3(5) & 0 & 0 \\ 0 & J_2(7) & 0 \\ 0 & 0 & J_4(9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

(1) צורת ז'ורדן היא משולשית.

(2) מטריצה אלכסונית היא בצורת ז'ורדן.

(3) צורת ז'ורדן היא הצורה הקרובה ביותר למטריצה אלכסונית.

תהי A מטריצה ריבועית מסדר 2×2 עם ערך עצמי אחד, λ מריבוי אלגברי 2. יהי V_λ המרחב עצמי. אז ישנן שתי אפשרויות:

$$(1) \dim(V_\lambda) = 2 \text{ (הריבוי גאומטרי 2).}$$

$$(2) \dim(V_\lambda) = 1 \text{ (הריבוי גאומטרי 1).}$$

מקרה (1): $\dim(V_\lambda) = 2$.

A לכסינה כי לכל ערך עצמי הריבוי אלגברי שווה לריבוי גאומטרי. יהיו שני וקטורים עצמיים u_1, u_2 השייכים לערך עצמי λ . כלומר $A \cdot u_1 = \lambda u_1$ ו- $A \cdot u_2 = \lambda u_2$. לכן

$$A \cdot \begin{pmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ A \cdot u_1 & A \cdot u_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ \lambda u_1 & \lambda u_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{נסמן } P = \begin{pmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{pmatrix} \text{ ו- } D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ אז}$$

$$A \cdot P = PD \quad \Rightarrow \quad A = PDP^{-1}$$

A דומה למטריצה אלכסונית ולכן A לכסינה.

מקרה (2): $\dim(V_\lambda) = 1$

A לא לכסינה כי עבור הערך עצמי λ הריבוי אלגברי לא שווה לריבוי גאומטרי. אז A לא לכסינה אבל היא כן דומה למטריצה בלוק ז'ורדן $J_2(\lambda)$.

יש וקטור עצמי אחד, u_1 השייך לערך עצמי λ . כלומר

$$A \cdot u_1 = \lambda u_1 \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I) \cdot u_1 = 0.$$

נגדיר וקטור u_2 כך ש-

$$(A - \lambda I) \cdot u_2 = u_1 \quad \Rightarrow \quad A \cdot u_2 = \lambda u_2 + u_1.$$

מכאן

$$(A - \lambda I)^2 u_2 = (A - \lambda I) \cdot u_1 = 0.$$

לכן נקבל

$$A \cdot \begin{pmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ A \cdot u_1 & A \cdot u_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ \lambda u_1 & \lambda u_2 + u_1 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

נשים לב שהמטריצה בסוף היא $J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. נסמן $P = \begin{pmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{pmatrix}$ אז קיבלנו

$$A \cdot P = P \cdot J_2(\lambda) \quad \Rightarrow \quad A = P J_2(\lambda) P^{-1}.$$

הקבוצת וקטורים $\{u_1, u_2\}$ נקראת **בסיס ז'ורדן של A** .

דוגמה 6.4

תהי $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. מצאו צורת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $A = PJP^{-1}$.

פתרון:

הפולינום האופייני הוא:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 = 0$$

לכן יש ערך עצמי אחד, $\lambda = 2$, מירבוי אלגברי 2. נמצא את המרחב עצמי:

$$(A - 2I) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

הפתרון הוא $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ לכן

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

נסמן ב- $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוקטור עצמי של ערך עצמי $\lambda = 2$. $\dim(V_\lambda) = 1 < 2$ לכן A לא לכסינה. נסמו הוקטור עצמי $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(A - \lambda I) \cdot u_2 = u_1 .$$

נסמן $u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$(A - 2I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

לכן $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ נבחר $x = 1$ ונקבל $x \in \mathbb{R}, u_2 = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A = PJP^{-1} .$$

6.5 דוגמה

תהי $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ מצאו צורת זיורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $A = PJP^{-1}$.

פתרון:

הפולינום האופייני הוא:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^3 = 0$$

לכן יש ערך עצמי אחד, $\lambda = 4$, מירבוי אלגברי 3. נמצא את המרחב עצמי:

$$(A - 4I) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

הפתרון הוא $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ לכן

$$V_4 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

$\dim(V_\lambda) = 2 < 3$. לכן A לא לכסינה. נסמן הוקטורים בבסיס של V_4 ב- $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. נרשום וקטור עצמי w_1 של $\lambda = 4$ כצירוף לינארי של הבסיס הזה:

$$w_1 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2.$$

נגדיר w_2 לפי:

$$(A - 4I) \cdot w_2 = w_1 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2.$$

נסמן $w_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ונרשום את המשוואה בצורה

$$(A - 4I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נרכיב את המטריצה המורחבת של המשוואה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

יש פתרון כאשר $\alpha_1 = 0$. נבחר $\alpha_2 = 1$ ונקבל את הפתרון $w_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$. המשתנים x, y יכולים לקבל

כל ערך. נציב $x = 1, y = 1$ ונקבל $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

נבנה בסיס ז'ורדן מהוקטורים עצמיים $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ והוקטור המוכלל $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = PJP^{-1}.$$

שימו לב שבדוגמה הזאת J צורת ז'ורדן מצורה

$$J = \text{diag}(J_1(\lambda), J_2(\lambda)) = \text{diag}(J_1(4), J_2(4)).$$

6.6 דוגמה

תהי $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. מצאו צורת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $A = PJP^{-1}$.

פתרון:

הפולינום האופייני הוא:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 4 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^3 = 0$$

לכן יש ערך עצמי אחד, $\lambda = 4$, מירבוי אלגברי 3. נמצא את המרחב עצמי:

$$(A - 4I) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{הפתרון הוא } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ לכן}$$

$$V_4 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\dim(V_\lambda) = 1 < 3. \text{ לכן } A \text{ לא לכסינה. נסמן הוקטור בבסיס של } V_4 \text{ ב-} u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(A - 4I) \cdot u_2 = u_1.$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ נסמן}$$

$$(A - 4I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, u_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ הפתרון הוא}$$

$$(A - 4I) \cdot u_3 = u_2.$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ נסמן}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\beta \in \mathbb{R}, u_3 = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha - 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ הפתרון הוא נציב } \alpha = 1, \beta = 1 \text{ ונקבל הבסיס ג'ורדן:}$$

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = PJP^{-1}.$$

שימו לב שבדוגמה הזאת J צורת ז'ורדן מצורה

$$J = J_3(\lambda) = J_3(4).$$

משפט 6.2 משפט ז'ורדן

יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי מעל שדה \mathbb{F} . נניח שהפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים

$$p(x) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (x - \lambda_2)^{n_2} \dots (x - \lambda_l)^{n_l}$$

כאשר $\lambda_i \neq \lambda_j$ עבור $i \neq j$ לכל $1 \leq i \leq l$. נניח שפולינום המינימלי הוא

$$m(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_l)^{m_l}$$

כאשר $1 \leq m_i \leq n_i$ לכל i . אז יש ל- T יצוג ע"י מטריצה מצורת ז'ורדן מצורה

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \beta_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \beta_l \end{pmatrix}$$

כאשר β_i מתאים לערך עצמי λ_i ,

$$\beta_i = \text{diag} \left(J_{a_1}(\lambda_i), J_{a_2}(\lambda_i), \dots, J_{a_s}(\lambda_i) \right) = \begin{pmatrix} J_{a_1}(\lambda_i) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{a_2}(\lambda_i) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & J_{a_s}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

כאשר

$$a_1 = m_i \quad (1)$$

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_s \quad (2)$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_s = n_i \quad (3)$$

$$\lambda_i \text{ הוא הריבוי הגאומטרי של } \lambda_i \quad (4)$$

לכן, שתי מטריצות דומות אם ורק אם יש להן אותה צורת ז'ורדן עד כדי סדר הבלוקים.

דוגמה 6.7

נתון פולינום אופייני $p(x) = (x-2)^4(x-3)^3$ ופולינום מינימלי $m(x) = (x-2)^2(x-3)^2$ אז צורת ז'ורדן

היא

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

נמצא β_1 עבור $\lambda = 2$:

יש שתי אפשרויות עבור β_1 .

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} J_2(2) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(2) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(2) \end{pmatrix} \quad \text{או} \quad \beta_1 = \begin{pmatrix} J_2(2) & 0 \\ 0 & J_2(2) \end{pmatrix}$$

נחשב β_2 עבור $\lambda = 3$:

$$\beta_2 = \begin{pmatrix} J_2(3) & 0 \\ 0 & J_1(3) \end{pmatrix}$$

בכדי לקבוע β_1 יש למצוא את הירבוי הגאומטרי של $\lambda = 2$.

מספר הבלוקים ב- β_1 שווה לריבוי הגאומטרי של $\lambda = 2$.

6.8 דוגמה

נתון הפולינום האופייני $p(x) = (x-2)^3(x-5)^2$ מצאו את הצורות ז'ורדן האפשריות.

פתרון:

האפשרויות של הפולינום המינימלי הן

$$(x-2)(x-5), \quad (x-2)(x-5)^2, \quad (x-2)^2(x-5), \quad (x-2)^2(x-5)^2, \quad (x-2)^3(x-5), \quad (x-2)^3(x-5)^2.$$

לכן האפשרויות לצורת ז'ורדן הן:

$$\underline{m(x) = (x-2)(x-5)}$$

$$\begin{pmatrix} J_1(2) & & & & \\ & J_1(2) & & & \\ & & J_1(2) & & \\ & & & J_1(5) & \\ & & & & J_1(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{m(x) = (x-2)^2(x-5)}$$

$$\begin{pmatrix} J_2(2) & & & & \\ & J_1(2) & & & \\ & & J_1(5) & & \\ & & & J_1(5) & \\ & & & & J_1(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{m(x) = (x-2)^3(x-5)}$$

$$\begin{pmatrix} J_3(2) & & \\ & J_1(5) & \\ & & J_1(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\underline{m(x) = (x-2)(x-5)^2}$$

$$\begin{pmatrix} J_1(2) & & & \\ & J_1(2) & & \\ & & J_1(2) & \\ & & & J_2(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{matrix}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\underline{m(x) = (x-2)^2(x-5)^2}$$

$$\begin{pmatrix} J_2(2) & & \\ & J_1(2) & \\ & & J_2(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{matrix}} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\underline{m(x) = (x-2)^3(x-5)^2}$$

$$\begin{pmatrix} J_3(2) & \\ & J_2(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

6.9 דוגמה

למטריצות A ו- B יש אותו פולינום מינימלי ופולינום אופייני:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_A(x) = x^4, \quad m_A(x) = x^2.$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_B(x) = x^4, \quad m_B(x) = x^2.$$

מטריצות A ו- B לא דומות אבל

• למטריצות A ו- B יש אותם ערכים עצמיים,

• $|A| = |B|$ אבל

• $\text{rank}(A) \neq \text{rank}(B)$.

בדוגמה היו שתי מטריצות לא דומות עם אותם $p(x)$ ו- $m(x)$, $|A| = |B|$, אותם ערכים עצמיים וגם אותה דרגה.

משפט 6.3 צורת ז'ורדן של מטריצה 3×3

עבור מטריצות 3×3 צורות פולינום אופייני הן:

$$p(x) = (x-a)(x-b)(x-c), \quad p(x) = (x-a)^2(x-b), \quad p(x) = (x-a)^3.$$

מקרה 1:

$$p(x) = (x-a)(x-b)(x-c), \quad m(x) = (x-a)(x-b)(x-c).$$

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

מטריצה אלכסונית. הצ'ורת ז'ורדן היא

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(a) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(b) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(c) \end{pmatrix}$$

מקרה 2:

$$p(x) = (x-a)^2(x-b)$$

\Leftarrow ישנן שתי אפשרויות לפולינום המינימלי:

$$m(x) = (x-a)(x-b) \quad \vee \quad m(x) = (x-a)^2(x-b)$$

$$\underline{m(x) = (x-a)(x-b)}$$

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$\begin{pmatrix} J_1(a) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(a) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\underline{m(x) = (x-a)^2(x-b)}$$

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$\begin{pmatrix} J_2(a) & 0 \\ 0 & J_1(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

מקרה 3:

$$p(x) = (x - a)^3$$

אז ישנן 3 אפשרויות ל- $m(x)$:

$$(x - a), \quad (x - a)^2, \quad (x - a)^3.$$

$$\underline{m(x) = (x - a)}$$

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$\begin{pmatrix} J_1(a) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(a) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\underline{m(x) = (x - a)^2}$$

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$\begin{pmatrix} J_2(a) & 0 \\ 0 & J_1(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\underline{m(x) = (x - a)^3}$$

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$(J_3(a)) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

ז"א לכל פולינום מינימלי כאן יש צורת ז'ורדן אחת. לכן כל שתי מטריצות מסדר 3×3 עם אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי הן דומות אחת לשניה.

דוגמה 6.10

מצאו את צורת ז'ורדן ובסיס מז'ורדן אל מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{aligned}
 p_A(x) &= |xI - A| \\
 &= \begin{vmatrix} x-1 & 3 & -4 \\ -4 & x+7 & -8 \\ -6 & 7 & x+7 \end{vmatrix} \\
 &= (x-1) \begin{vmatrix} x+7 & -8 \\ 7 & x+7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -4 & -8 \\ -6 & x+7 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -4 & x+7 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} \\
 &= (x-1) ((x+7)^2 + 56) - 3(-28 - 4x + 48) - 4(-28 - 6(7+x)) \\
 &= -(x+1)^2(x-3)
 \end{aligned}$$

האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$m(x) = (x+1)(x-3) \quad \text{או} \quad m(x) = (x+1)^2(x-3).$$

נבדוק איזה מהם מתאפס ע"י A :

$$(A+I)(A-3) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix} \neq 0$$

לכן $m(x) = (x+1)^2(x-3)$ הצורת ז'ורדן היא

$$\begin{pmatrix} J_2(-1) & 0 \\ 0 & J_1(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

נמצא את הבסיס המז'רדן: $\lambda = -1$ ערך עצמי. נמצא וקטור עצמי השייך ל $\lambda = -1$:

$$\begin{aligned}
 (A+I) &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

פתרון: $z \in \mathbb{R} \ (x, y, z) = (z, 2z, z)$

$$V_{-1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נסמן את הבסיס של V_{-1} ב- $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(A+I)u_2 = u_1$$

נסמן $u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$(A+I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & | & 1 \\ 4 & -6 & 8 & | & 2 \\ 6 & -7 & 8 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & | & 1 \\ 6 & -7 & 8 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & | & 1 \\ 0 & 2 & -4 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & | & -2 \\ 0 & 1 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $z \in \mathbb{R} \ (x, y, z) = (-1 + z, -1 + 2z, z)$ נציב $z = 1$:

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נחפש הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 3$:

$$(A - 3I) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 0 & -16 & 16 \\ 0 & -16 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$z \in \mathbb{R} \ (x, y, z) = (\frac{1}{2}z, z, z)$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

לכן המרוצה P של הבסיס ג'ורדן היא

$$J = \begin{pmatrix} J_2(-1) & 0 \\ 0 & J_1(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}} & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

והצורת ג'ורדן היא

$$A = PJP^{-1}$$

6.11 דוגמה

מצאו את צורת ג'ורדן אל מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

מעל \mathbb{C} ומטריצה P כך ש $P^{-1}AP = J$.

פתרון:

$$\begin{aligned}
 p_A(x) &= |x - IA| \\
 &= \begin{vmatrix} x+4 & -2 & -10 \\ 4 & x-3 & -7 \\ 3 & -1 & x-7 \end{vmatrix} \\
 &= (x+4) \begin{vmatrix} x-3 & -7 \\ -1 & x-7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 3 & x-7 \end{vmatrix} - 10 \begin{vmatrix} 4 & x-3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= (x+4)(x^2 - 10x + 21 - 7) + 2(4x - 28 + 21) - 10(-4 - 3x + 9) \\
 &= (x+4)(x^2 - 10x + 14) + 2(4x - 7) - 10(-3x + 5) \\
 &= x^3 - 10x^2 + 14x + 4x^2 - 40x + 56 + 8x - 14 + 30x - 50 \\
 &= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \\
 &= (x-2)^3.
 \end{aligned}$$

האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$m(x) = (x-2) \quad \text{או} \quad m(x) = (x-2)^2 \quad \text{או} \quad m(x) = (x-2)^3.$$

נבדוק איזה מהם מתאפס ע"י A :

$$(A - 2I) \neq 0, \quad (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \neq 0$$

לכן $m(x) = (x-2)^3$ הצורת ז'ורדן היא

$$J = (J_3(2)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

נמצא את הבסיס המז'ורדן: $\lambda = 2$ ערך עצמי. נמצא את המרחב עצמי ששייך ל $\lambda = 2$:

$$\begin{aligned}
 (A - 2I) &= \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

פתרון: $(x, y, z) = (2z, z, z)$ $z \in \mathbb{R}$. לכן המרחב עצמי הוא $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. נסמן את הוקטור בבסיס של V_2

ב-

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$:u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ נסמן}$$

$$(A - 2I) \cdot u_2 = u_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 & | & 2 \\ -4 & 1 & 7 & | & 1 \\ -3 & 1 & 5 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 & | & 1 \\ -4 & 1 & 7 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x, y, z) = (2z, z + 1, z)$, $z \in \mathbb{R}$ נסמן

$$u_2 = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 1 + \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ נסמן}$$

$$(A - 2I)u_3 = u_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 & | & 2 \\ -4 & 1 & 7 & | & 2 \\ -3 & 1 & 5 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 1 + \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 & | & 2\alpha \\ -4 & 1 & 7 & | & 1 + \alpha \\ -3 & 1 & 5 & | & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot R_1} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 & | & \alpha \\ -4 & 1 & 7 & | & 1 + \alpha \\ -3 & 1 & 5 & | & \alpha \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow 3R_2 - 4 \cdot R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1}} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 & | & \alpha \\ 0 & -1 & 1 & | & 3 - \alpha \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_2} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 & | & 3 \\ 0 & -1 & 1 & | & 3 - \alpha \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{R_1 \rightarrow -\frac{1}{3} \cdot R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & -1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 3 - \alpha \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

קיים פתרון לכל α . נבחר $\alpha = 1$ ונקבל את הפתרון $(x, y, z) = (-1 + 2z, -2 + z, z)$ $z \in \mathbb{R}$. נציב $z = 1$ ונקבל

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן המטריצה של הבסיס ז'ורדן היא

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

והצורת ז'ורדן היא

$$J = J_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

דוגמה 6.12

תהי $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. מצאו צורת זיורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $A = PJP^{-1}$.

פתרון:

הפולינום האופייני הוא:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^3(\lambda - 2)^2 = 0$$

הערכים עצמיים הם:

2. $\lambda = 2$ מירבוי אלגברי 2.

3. $\lambda = 4$ מירבוי אלגברי 3.

נמצא את המרחב עצמי V_2 :

$$(A - 2I) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

הפתרון הוא $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ לכן $s \in \mathbb{R}$.

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\dim(V_2) = 1 < 2$. לכן A לא לכסינה. נסמו הוקטור עצמי $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$(A - 2I) \cdot u_2 = u_1.$$

$$.u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} \text{ נסמן}$$

$$(A - 2I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$.u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ לכן } \alpha \in \mathbb{R}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ נציב } \alpha = 0 \text{ ונקל}$$

נמצא את המרחב עצמי V_4 :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{הפתרון הוא } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ לכן}$$

$$V_4 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

$$.u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ לכן } \dim(V_4) = 1 < 3 \text{ לא לכסינה. נסמו הוקטור עצמי}$$

$$(A - 4I) \cdot u_4 = u_3 .$$

$$.u_4 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} \text{נסמן}$$

$$(A - 4I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$.\beta \in \mathbb{R}, u_4 = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{לכן}$$

$$(A - 4I) \cdot u_5 = u_4 .$$

$$.u_5 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} \text{נסמן}$$

$$(A - 4I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

לכל β קיים פתרון. נציב $\beta = 0$ ונקבל

$$.u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{נציב } \gamma = 0 \text{ ונקבל } \gamma \in \mathbb{R}, u_5 = \begin{pmatrix} \gamma \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} | & | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ | & | & | & | & | \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) ,$$

$$J = \left(\begin{array}{cc} J_2(2) & 0 \\ 0 & J_3(4) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|ccc} \boxed{2} & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{4} & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{4} \end{array} \right) .$$
$$A = PJP^{-1} .$$