שעור 2
משחקים בצורה אסטרטגית, שליטה ושיווי משקל נאש

2.1 הגדרה של משחק בצורה אסטרטגית

הגדרה 2.1 משחק בצורה אסטרטגית

הצורה אסטרטגית או **צורה נורמלית** של משחק n- שחקנים היא קבוצה

$$G = (N \ , \ (S_1, S_2, \ldots, S_n) \ , \ (u_1, u_2, \ldots, u_n))$$

שבה

(1 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ היא קבוצת שחקנים סופית.

(2 S_i היא קבוצת האסטרטגיות של שחקן i $(1 \leq i \leq n)$

(3 u_i היא פונקציית התשלום של שחקן i:

$$u_i : S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \to \mathbb{R}$$

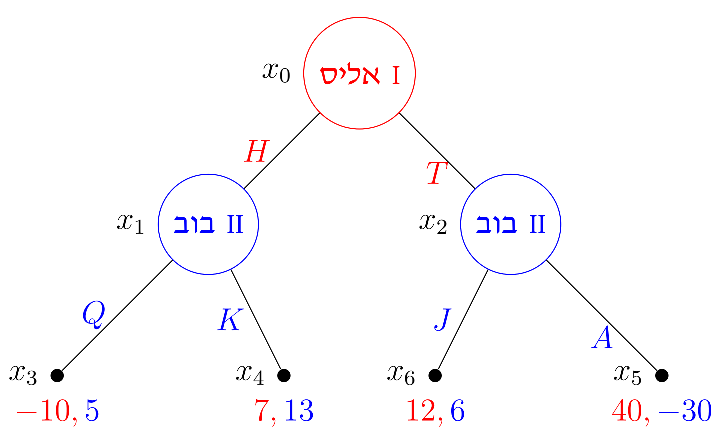
אשר מקבלת וקטור אסטרטגיות של המשחק $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ (כאשר $s_i \in S_i$ אסטרטגיה של שחקן i) ומחזירה מספר ממשי שווה לתשלום של שחקן i.

דוגמה 2.1 (משחק של מטבע וקלף משחק)

רשמו את הצורה אסטרטגית של הדוגמה הבאה שנתונה בצורה רחבה (ראו דוגמה 1.4).

פתרון:

ניתן לרשום את עץ המשחק **בצורה רחבה אסטרטגית**:



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H, T.

ז"א לשחקן I יש **קבוצה ידיעה אחת**:

$$x_0(H,T)\ .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I=(H,T)\ .$$

לשקחן II יש שני קדקודים x_1,x_2 בהם הוא מקבל החלטה.
אז לשחקן II יש 2 קבוצות ידיעה,

$$V_{II}=\{x_1(Q,K)\ ,\ x_2(J,A)\ \}\ .$$

אשר מייצגות שתי אפשריות שונות המנובעות מההחלטה הקודמת של שחקן I בקדקוד x_0.
מכיוון שלשחקן II יש שתי קבוצותצ ידיעה x_1,x_2 ובכל אחד יש שתי פעולות אפשריות, אז יש לבוב4 $2\times 2=4$ אסטרטגיות:

$$S_{II}=(Q/J\ ,\ Q/A\ ,\ K/J\ ,\ K/A)$$

(נהוג לרשום את האסטרטגיות מלמעלה עד למטה ומשמאל לימון.)
ניתן לרשום את המשחק **בצורה אסטרטגית**:

$I \backslash II$	Q/J	Q/A	K/J	K/A
H	$-10,5$	$-10,5$	$7,13$	$7,13$
T	$12,6$	$40,-30$	$12,6$	$40,-30$

מכאן

$$G=(N,(S_I,S_{II}),(u_I,u_{II}))$$

כאשר הקבוצת שחקנים היא

$$N=\{\text{בוב},\text{אליס}\}=\{I,II\}\ ,$$

האסטרטגיות של המשחק הן $S=(S_I,S_{II})$, כאשר הקבוצת אסטרטגיות של שחקן I היא

$$S_I=(H,T)$$

והקבוצת אסטרטגיות של שחקן II היא

$$S_{II}=(Q/J,Q/A,K/J,K/A)\ ,$$

והפונקציות תשלומים הן

$$\begin{aligned}
u_I(H,Q/J)&=-10\ ,\\
u_I(H,Q/A)&=-10\ ,\\
u_I(H,K/J)&=7\ ,\\
u_I(H,K/A)&=7\ ,\\
u_I(T,Q/J)&=12\ ,\\
u_I(T,Q/A)&=40\ ,\\
u_I(T,K/J)&=12\ ,\\
u_I(T,K/A)&=40\ ,
\end{aligned}$$

ו-

$$\begin{aligned} u_{II}(H,Q/J) =&5 \ , \\ u_{II}(H,Q/A) =&5 \ , \\ u_{II}(H,K/J) =&13 \ , \\ u_{II}(H,K/A) =&13 \ , \\ u_{II}(T,Q/J) =&6 \ , \\ u_{II}(T,Q/A) =&-30 \ , \\ u_{II}(T,K/J) =&6 \ , \\ u_{II}(T,K/A) =&-30 \ . \end{aligned}$$

■

2.2 סימונים

הגדרה 2.2

תהי $N=\{1,\ldots,n\}$ קבוצת סופית, ולכל $i\in N$ תהי A_i קבוצה כלשהי.
נסמן ב- A_i

$$A=\bigtimes_{i\in N} A_i = A_1\times A_2\times \ldots \times A_n$$

את המכפלה הקרטיזית של כל הקבוצות A_i.
לכל $i\in N$ נגדיר

$$A_{-i}=\bigtimes_{\substack{j\in N\\ j\neq i}} A_j = A_1\times A_2\times A_{i-1}\times A_{i+1}\ldots\times A_n$$

את המכפלה הקרטיזית של כל הקבוצות A_j למעט הקבוצה A_i.
איבר ב- A_{-i} מסומן ב-

$$x_{-i}=(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,x_n) \ .$$

זהו הווקטור ה- $(n-1)$ ממדי הנוצר מ- $(a_1,\ldots,a_n)\in A$ על ידי השמטת הקואורדינטה i.

2.3 מושג השליטה

הגדרה 2.3 אסטרטגיה נשלטת חזק במשחק n שחקנים

אסטרטגיה s_i של שחקן i נקראת **נשלטת חזק** אם קיימת אסטרטגיה t_i של שחקן i כך שלכל וקטור אסטרטגיות s_{-i} של שאר השחקנים מתקיים

$$u_i(s_i,s_{-i})<u_i(t_i,s_{-i}) \ .$$

במילים אחרות, s_i נשלטת חזק ע"י t_i אם מתקיים

$$u_i(s_1,\ldots,s_{i-1},s_i,s_{i+1},\ldots,s_n)<u_i(s_1,\ldots,s_{i-1},t_i,s_{i+1},\ldots,s_n)$$

לכל וקטור אסטרטגיות $(s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n)$ של שאר השחקנים.
במקרה כזה נאמר ש- s_i **נשלטת חזק** על ידי t_i, או ש- t_i **שולטת חזק** על s_i.

למה 2.1 אסטרטגיה נשלטת חזק במשחק 2 שחקנים

לפי הגדרה 2.3, במשחק 2 שחקנים, אסטרטגיה s_1 של שחקן 1 נשלטת חזק ע"י אסטרטגיה t_1 של שחקן 1 אם

$$u_1(s_1,s_2) < u(t_1,s_2)$$

לכל אסטרטגיה s_2 של שחקן 2.

באותה מידה אסטרטגיה s_2 של שחקן 2 נשלטת חזק ע"י אסטרטגיה t_2 של שחקן 2 אם

$$u_1(s_1,s_2) < u(s_1,t_2)$$

לכל אסטרטגיה s_1 של שחקן 1.

דוגמה 2.2 (אסטרטגיות נשלטות חזק)

נתון המשחק הבא בצורה אסטקטגית.

א) מצאו אסטרטגיה הנשלטת חזק של שחקן I.

ב) מצאו אסטרטגיה הנשלטת חזק של שחקן II.

$I \backslash II$	L	M	R
T	$1,0$	$1,2$	$4,1$
B	$0,3$	$0,1$	$2,0$

פתרון:

א)

$$0 = u_I(B,L) < u_I(T,L) = 1 \ ,$$

$$0 = u_I(B,M) < u_I(T,M) = 1 \ ,$$

$$2 = u_I(B,R) < u_I(T,R) = 4 \ .$$

לכן אסטרטגיה B נשלטת חזק על ידי T. סימון

$$B \prec T \ .$$

ב)

$$1 = u_{II}(T,R) < u_{II}(T,M) = 2 \ ,$$

$$0 = u_{II}(B,R) < u_{II}(B,M) = 1 \ .$$

לכן אסטרטגיה R נשלטת חזק על ידי M:

$$R \prec M \ .$$

■

2.4 הנחות של רציונליות בתורת המשחקים

משפט 2.1 הנחות של רציונליות בתורת המשחקים

1) שחקן רציונלי לא ישתמש באסטרטגיה נשלטת חזק.

2) כל השחקנים במשחק רציונליים.

3) העובדה שכל השחקנים רציונליים היא ידיעה משותפת בין כל השחקנים.

2.5 סילוק חוזר

תחת הנחות של משפט 3.1, ניתן לסלק אסטרטגיוה נשלטת חזק, ולהגיע לפתרון של המשחק.

דוגמה 2.3 (סילוק חוזר)

נתון המשחק הבא, מצאו את הפתרון באסטרטגיות שולטות חזק, והתשלום הסופי של המשחק.

$I \backslash II$	L	M	R
T	$1,0$	$1,2$	$0,1$
B	$0,3$	$0,1$	$2,0$

פתרון:

$$\begin{array}{c|c|c|c} I \backslash II & L & M & \cancel{R} \\ \hline T & 1,0 & 1,2 & \cancel{0,1} \\ B & 0,3 & 0,1 & \cancel{2,0} \end{array} \xrightarrow{R\prec M} \begin{array}{c|c|c} I \backslash II & L & M \\ \hline T & 1,0 & 1,2 \\ \cancel{B} & \cancel{0,3} & \cancel{0,1} \end{array} \xrightarrow{B\prec T} \begin{array}{c|c|c} I \backslash II & L & M \\ \hline T & \cancel{1,0} & 1,2 \end{array} \xrightarrow{L\prec M} \begin{array}{c|c} I \backslash II & M \\ \hline T & 1,2 \end{array}$$

לכן לפי הכללים של שחקנים רציונליים, שחקן I ישתמש באסטרטגיה T, שחקן II ישתמש באסטרטגיה M והתשלום הסופי יהיה:

$$u_I(T,M)=1\ , \qquad u_{II}(T,M)=2\ .$$

■

דוגמה 2.4 (דילמה האסיר)

משחק פשוט מאוד, ויחד עם זאת מהרבה בחינות, הוא המשחק הידוע בשם "דילמה האסיר". המשחק מופיע בספרות בצורת הסיפור הבא.

שני עבריינים אליס (שחקן 1) ובוב (שחקן 2) ביצעו פשע חמור ונעצרו. בהעדר כל הוכחות אחרות, הדרך היחידה שבה יכולה המשטרה להשיג הרשעה על עבירה זו היא שאחד העצורים (או שניהם) מודה. בביצוע

המעשה. בחקירתם העמידה המשטרה כל אחד מהעצורים בפני ההחלטה הבאה:

- אם אליס מלשינה ובוב שותק אליס יוצאת חופשי ובוב מקבל 10 שנים מאסר.
- אם בוב מלשין ואליס שותקת, בוב יוצא חופשי ואליס מקבלת 10 שנים מאסר.
- אם שניהם שותקים, יש בידי המשטרה ראיות להרשעתם בעבירות פחותות (למשל, העלמת מס) שמוביל למאסר של שנה אחת לכל אחד.
- אם שניהם מלשינים המשטרה מבקשת להתחשב בשיתוף הפעולה שלהם ולגזור את עונשם ל־6 שנות מאסר לכל אחד.

רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית ומצאו את הפתרון באסטרטגיות שולטות חזק.

פתרון:

נסמן:

$C_1 =$ האסטרטגיה שאליס "מלשינה".

$D_1 =$ האסטרטגיה שאליס "שותקת".

$C_2 =$ האסטרטגיה שבוב "מלשין".

$D_2 =$ האסטרטגיה שבוב "שותק".

המשחק בצורה אסטרטגית הינו:

1 אליס \ 2 בוב	C_2	D_2
C_1	$-6,-6$	$0,-10$
D_1	$-10,0$	$-1,-1$

1 \ 2	C_2	D_2
C_1	$-6,-6$	$0,-10$
D_1	$-10,-10$	$-1,-1$

$\xrightarrow{D_2 \prec C_2}$

1 \ 2	C_2
C_I	$-6,-6$
D_I	$\cancel{-10,-10}$

$\xrightarrow{D_I \prec C_1}$

1 \ 2	C_2
C_1	$-6,-6$

לכן לפי הכללים של שחקנים רציונליים, שחקן I ישתמש באסטרטגיה C_1, שחקן 2 ישתמש באסטרטגיה C_{II} והתשלום הסופי יהיה:

$$u_1(C_1,C_2)=-6\ ,\qquad u_2(C_1,C_2)=-6\ .$$

■

2.6 שיווי משקל נאש

הגדרה 2.4 תשובה טובה ביותר במשחק n שחקנים

נתון משחק n שחקנים. יהי s_{-i} וקטור אסטרטגיות של השחקנים ללא i. אסטרטגיה s_i של שחקן i נקראת **תשובה טובה ביותר** ל- s_{-i} אם מתקיים

$$u_i\left(s_i,s_{-i}\right)=\max_{t_i\in S_i} u_i\left(t_i,s_{-i}\right)\ .$$

במילים אחרות, האסטרטגיה s_i של שחקן i היא תשובה טובה ביותר בתגובה לאסטרטגיות $(s_1,s_2,\ldots,s_{i-1},s_{i+2},\ldots,s_n)$ של שאר השחקנים אם אסטרטגיה s_i נותנת לשחקן i התשלום המקסימלי מתוך כל האסטרטגיות האחרות $t_i\in S_i$ של שחקן i:

$$u_i\left(s_1,s_2,\ldots s_{i-1},s_i,s_{i+1},\ldots,s_n\right)=\max_{t_i\in S_i} u_i\left(s_1,s_2,\ldots s_{i-1},t_i,s_{i+1},\ldots,s_n\right)\ .$$

הוא

למה 2.2 תשובה טובה ביותר במשחק 2 שחקנים

לפי הגדרה 2.4, במשחק 2 שחקנים, אסטרטגיה s_1 של שחקן 1 היא התשובה הטובה ביותר בתגובה לאסטרטגיה s_2 של שחקן 2 אם מתקיים

$$u_1(s_1,s_2)=\max_{t_1\in S_1} u_1(t_1,s_2)\ ,$$

או במילים אחרות

$$u_1(s_1,s_2)\geq u_1(t_1,s_2)\quad \forall t_1\in S_1\ .$$

באותה מידה, אסטרטגיה s_2 של שחקן 2 היא התשובה הטובה ביותר בתגובה לאסטרטגיה s_1 של שחקן 1 אם מתקיים

$$u_2(s_1,s_2)=\max_{t_2\in S_2} u_1(s_1,t_2)\ ,$$

או במילים אחרות

$$u_2(s_1,s_2)\geq u_2(s_1,t_2)\quad \forall t_2\in S_2\ .$$

הגדרה 2.5 שיווי משקל נאש

נתון משחק n שחקנים. וקטור אסטרטגיות $s^*=(s_1^*,\ldots,s_n^*)$ נקרא **שיווי משקל נאש** אם לכל שחקן $i\in N$ ולכל אסטרטגיה $s_i\in S_i$ של שחקן i, מתקיים

$$u_i\left(s^*\right)\geq u_i\left(s_i,s_{-i}^*\right)\ .$$

ז"א, אם כל השחקנים משחקים לפי הוקטור אסטרטגיות של השיווי משקל $s^*=(s_1^*,\ldots,s_n^*)$. אם שחקן i בוחר בכל אסטרטגיה אחרת s_i, התשלום שלו(שלה) תמיד יהיה פחות מהתשלום שהוא מקבל ע"י הוקטור אסטרטגיות של השיווי משקל s^*:

$$u_i\left(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_i^*,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*\right)\geq u_i\left(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*\right)$$

לכל אסטרטגיה s_i של שחקן i.

וקטור התשלום $u\left(s^*\right)$ נקרא **תשלום שיווי משקל**.

למה 2.3 שיווי משקל נאש במשחק 2 שחקנים

לפי הגדרה 2.5, עבור משחק 2 שחקנים, ווקטור אסטרטגיות $s^*=(s_1^*,s_2^*)$ הוא שיווי משקל אם מתקיימים:

$$\begin{aligned} u_1\left(s_1^*,s_2^*\right)&\geq u_1\left(s_1,s_2^*\right) &&\forall s_1\in S_1\ ,\\ u_2\left(s_1^*,s_2^*\right)&\geq u_1\left(s_1^*,s_2\right) &&\forall s_2\in S_2\ .\end{aligned}$$

משפט 2.2 שיווי משקל הוא תשובה טובה ביותר לכל שחקן

נתון משחק n שחקנים. וקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ הוא **שיווי משקל** אם לכל שחקן i האסטרטגיה s_i^* היא תשובה טובה ביותר ל- $s_{-i}^* = \left(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*\right)$.

הוכחה: תרגיל בית. ■

דוגמה 2.5 (שיווי משקל נאש במשחק 2 שחקנים)

נתון המשחק בצורה אסטרטגית הבא:

1 \ 2	x	y	z
a	$2,1$	$0,0$	$1,2$
b	$0,3$	$2,2$	$3,1$
c	$1,1$	$3,2$	$2,2$

פתרון:

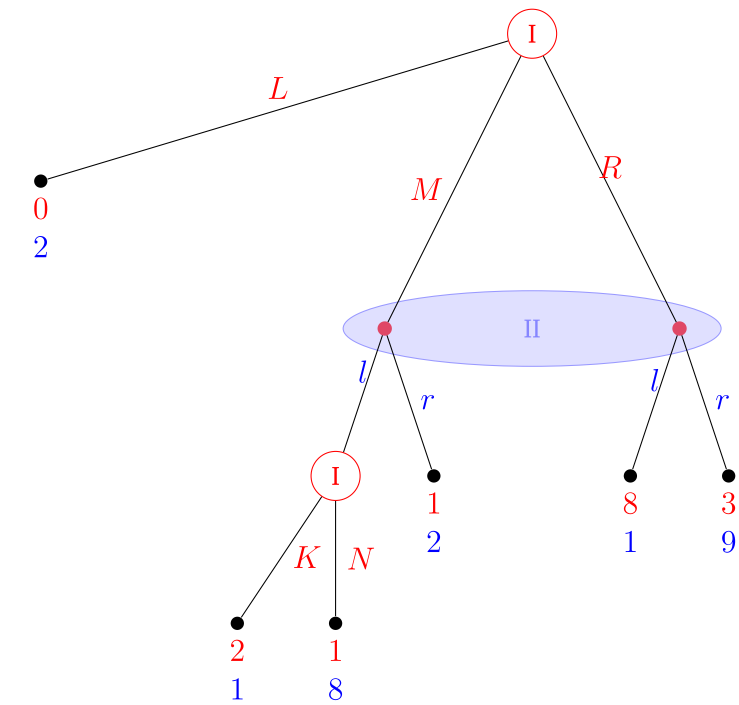
1 \ 2	x	y	z
a	$2,1$	$0,0$	$1,2$
b	$0,3$	$2,2$	$3,1$
c	$1,1$	$3,2$	$2,2$

לכן ווקטור אסטרטגיות של שיווי משקל נאש הינו

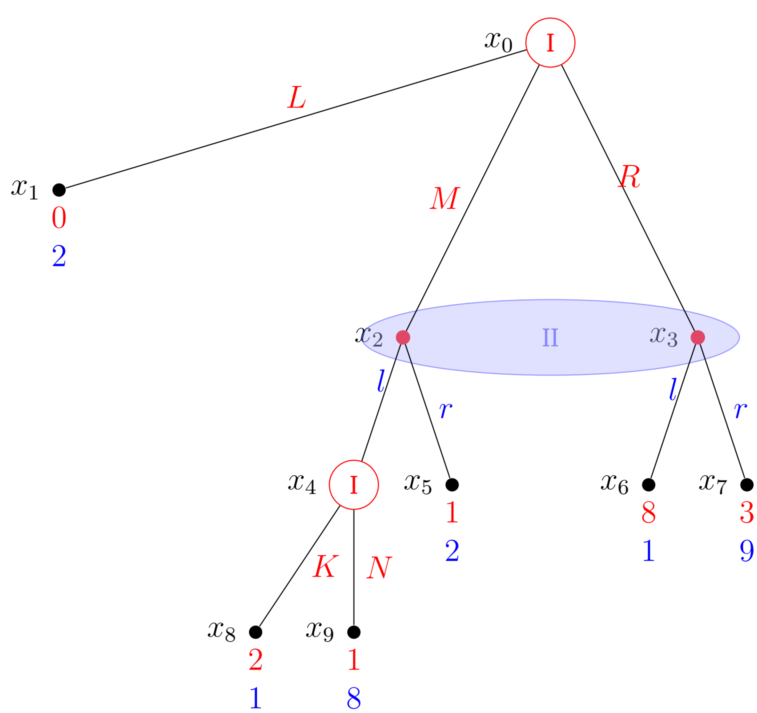
$$(s_1^*, s_2^*) = (c, y) \ .$$

■

דוגמה 2.6 (שיווי משקל משחק 2 שחקנים)



פתרון:



קבוצת אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I = (L/K\ ,\ M/K\ ,\ R/K\ ,\ L/N\ ,\ M/N\ ,\ R/N\ )\ .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן II:

$$S_{II} = (l, r)\ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית של המשחק היא:

$I \backslash II$	l	r
L/K	$0,2$	$0,2$
M/K	$2,1$	$1,2$
R/K	$8,1$	$3,9$
L/N	$0,2$	$0,2$
M/N	$1,8$	$1,2$
R/N	$8,1$	$3,9$

נשתמש בשיטת תשובה טובה ביותר כדי למצוא את השיווי משקל של המשחק:

$I \backslash II$	l	r
L/K	$0,2$	$0,2$
M/K	$2,1$	$1,2$
R/K	$8,1$	$3,9$
L/N	$0,2$	$0,2$
M/N	$1,8$	$1,2$
R/N	$8,1$	$3,9$

לכן הווקטור אסטרטגיות

$$(s_1^*, s_2^*) = (R/N, r)$$

שיווי משקל וגם הווקטור אסטרטגיות

$$(s_1^*, s_2^*) = (R/K, r)$$

שיווי משקל.

■

2.7 משפט השקילות שין אסטרטגיה השולטת חזק יחידה ושיווי משקל

משפט 2.3

אם הווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ שיווי משקל נאש, אז s^* הוא פתרון באסטרטגיות השולטות חזק.

הוכחה:
משפט זו אומר שאם הווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ הוא שיווי משקל נאש, אז s^* תישאר לאחר תהליך סילוק חוזר של אסטרטגיות הנשלטות חזק.

נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ שיווי משקל נאש אבל הוא לא פתרון באסטרטגיות שולטות חזק.
אם כן אז תהי s_i^* האסטרטגיה הראשונה שיורדת בתהליך סילוק חוזר.

ז"א קיימת אסטרטגיה $t_i \in S_i$ אשר שולטת חזק ב- s_i^*, כלומר

(#1)
$$u_i\left(s_1,\ldots,s_i^*,\ldots,s_n\right) < u_i\left(s_1,\ldots,t_i,\ldots,s_n\right) \quad .$$

לכל $s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n$ אשר עדיין נשארות בתהליך.

בפרט, מכיוון שהאסטרטגיות $s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*$ עדיין נשארות בתהליך אחרי מחיקת אסטרטגיה s_i^*, אז לפי (#1) מתקיים

(#2)
$$u_i\left(s_1^*,\ldots,s_i^*,\ldots,s_n^*\right) < u_i\left(s_1^*,\ldots,t_i,\ldots,s_n^*\right) \quad .$$

בסתירה לכך ש $s^*=\left(s_1^*,\ldots,s_n^*\right)$ הוא שיווי משקל. ■

משפט 2.4

אם ווקטור אסטרטגיות $s^*=\left(s_1^*,\ldots,s_n^*\right)$ הוא פתרון באסטרטגיות שולטות חזק אז s^* הוא השיווי משקל היחיד של המשחק.

הוכחה: נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי $\left(s_1^*,\ldots,s_n^*\right)$ הוא הווקטור אסטרטגיות היחיד שנשאר אחרי סילוק חוזר, אבל הוא לא שיווי משקל.
אם כן אז בהכרח קיימת אסטרטגיה s_i של שחקן i עבורה

(*1)
$$u_i\left(s_1^*,\ldots,s_i^*,\ldots,s_n^*\right) < u_i\left(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*\right) \quad .$$

האסטרטגיה s_i נמחקה במהלך התהליך סילוק חוזר.
לכן בהכרח קיימת אסטרטגיה s_i' אשר שולטת חזק ב- s_i, כלומר

(*2)
$$u_i\left(s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_n\right) < u_i\left(s_1,\ldots,s_i',\ldots,s_n\right) \quad .$$

לכל אסטרטגיות $s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots s_n$ אשר נשארות בתהליך סילוק חוזר.

בפרט, האסטרטגיות $\left(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*\right)$ נשארות בתהליך אפילו אחרי שהורדנו s_i^*.
לכן, לפי (#4),

(*3)
$$u_i\left(s_1^*,\ldots,s_i,\ldots,s_n^*\right) < u_i\left(s_1^*,\ldots,s_i',\ldots,s_n^*\right) \quad .$$

אם $s_i'=s_i^*$ אז (#5) סותר את (#3).

אם לא אז קיימת אסטרטגיה אחרת s_i'' אשר שולטת חזק ב- s_i'.
לכן במקום (#4) ו- (#5) נקבל

(*2')
$$u_i\left(s_1,\ldots,s_i',\ldots,s_n\right) < u_i\left(s_1,\ldots,s_i'',\ldots,s_n\right) \quad .$$

(*3')
$$u_i\left(s_1^*,\ldots,s_i',\ldots,s_n^*\right) < u_i\left(s_1^*,\ldots,s_i'',\ldots,s_n^*\right) \quad .$$

אם $s_i''=s_i^*$ אז (#5') סותר את (#3). אם לא אז התהליך ממשיך עד שנגיע לסתירה ל- (#3).
■