

שיעור 7

משפטים יסודיים על פונקציות גזירות וכלל לופיטל

משפטים יסודיים על פונקציות גזירות

7.1 משפט. (משפט פרמה)

אם $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a, b]$ וגזירה בקטע פתוח (a, b) . אם c נקודת קיצון (מקסימום או מינימום) פנימית של פונקציה $f(x)$ אז

$$f'(c) = 0.$$

7.2 משפט. (רול)

אם $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a, b]$ וגזירה בקטע פתוח (a, b) , כך ש- $f(a) = f(b)$, אז קיימת לפחות נקודה אחת $c \in (a, b)$ כך ש-

$$f'(c) = 0.$$

הוכחה.

$f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a, b]$. לכן לפי משפט וויארטראס (עין משפט ?? לעיל) היא מקבלת בקטע הזה את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר. נסמן אותם ב- M ו- m בהתאמה. ישנן 2 אפשרויות.

מצב 1. $m = M$

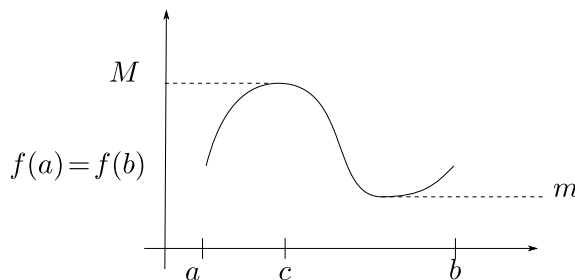
אם $m = M$ אז $f(x)$ פונקציה קבועה, ולכן $f'(x) = 0$ לכל $a < x < b$.

מצב 2. $m < M$

מכיוון ש- $f(a) = f(b)$, אז f מתקבל לפחות אחד הערכים מ- m ו- M בנקודה c בפנים הקטע הפתוח (a, b) .

f מקבלת הערך M בפנים הקטע (a, b)

כלומר קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש- $f(c) = M$. ז"א לכל $x \in (a, b)$, $f(x) \leq f(c)$. נוכיח כי $f'(c) = 0$:



$$f'_-(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$$

בגלל ש- $\Delta x < 0$ ו- $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$

$$f'_+(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$$

בגלל ש- $f(c+\Delta x) - f(c) \leq 0$ ו- $\Delta x > 0$, אז בהכרח $f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c)$.
לכן $f'(c) = 0$.

f מקבלת הערך m בפנים הקטע (a, b)

קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש- $f(c) = m$. ז"א לכל $x \in (a, b)$, $f(x) \geq f(c)$.
נוכיח כי $f'(c) = 0$:

$$f'_-(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$$

בגלל ש- $f(c+\Delta x) - f(c) \geq 0$ ו- $\Delta x < 0$.

$$f'_+(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$$

בגלל ש- $f(c+\Delta x) - f(c) \geq 0$ ו- $\Delta x > 0$, אז בהכרח $f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c)$.
לכן $f'(c) = 0$.

■

משמעות של משפט רול

בגרף של פונקציה קיימת נקודה c שבה המשיק מקביל לציר ה- x .

7.3 משפט. (משפט ערך הממוצע המוכלל של קושי)

אם $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות רציפות בקטע סגור $[a, b]$ וגזירות בקטע פתוח (a, b) , ו- $g'(x) \neq 0$ לכל $x \in (a, b)$, אז קיימת נקודה אחת $c \in (a, b)$ כך ש-

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

או שקול

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

7.4 מסקנה. (משפט ערך הממוצע של לגרנז')

לכל פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) , קיימת נקודה אחת $c \in (a, b)$ כך ש-

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

הוכחה.

נגדיר $g(x) = x$ ונשתמש במשפט קושי 7.3:

קיים c כך ש- $a < c < b$ ו

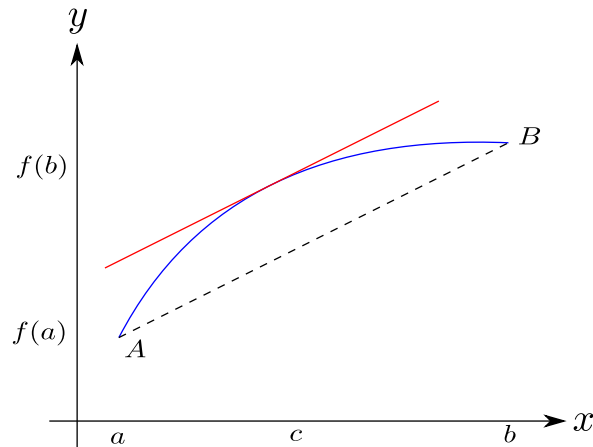
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

שים לב $g(a) = a$, $g(b) = b$, $g'(c) = 1$ לכן

$$\frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} = f'(c).$$

■

7.5 הערה. (המשמעות של משפט לגרנז)



הביטוי $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ הוא השיפוע של הקו AB . המשיק בנקודה c מקביל לקו AB .

7.6 מסקנה. (i)

אם $f'(x) = 0$ לכל $x \in (a, b)$ אז $f(x)$ פונקציה קבועה בקטע (a, b) .

הוכחה.

יהיו

$$a < x_1 < x_2 < b.$$

לפי משפט לגרנז 7.4 קיים $c \in (x_1, x_2)$ כך ש-

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1).$$

לפי הנתון, $f'(c) = 0$ לכן $f(x_1) = f(x_2)$ לכל $x_1, x_2 \in (a, b)$. ז"א $f(x)$ פונקציה קבועה. ■

7.7 מסקנה. (i)

אם $f'(x) = g'(x)$ לכל $x \in (a, b)$ אז קיים c כך ש- $f(x) = g(x) + c$.

הוכחה.

תהי

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

מכאן

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

לכל $x \in (a, b)$. לכן לפי מסקנה 7.6 $h(x)$ פונקציה קבועה, ז"א קיים c כך ש $h(x) = c$ לכל $x \in (a, b)$ כלומר

$$f(x) = g(x) + c$$

לכל $x \in (a, b)$. ■

דוגמאות

דוגמא.

הוכח כי $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ לכל $x \in (-1, 1)$.

פיתרון.

תהי

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x .$$

אז

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

לכל $x \in (-1, 1)$ לפי מסקנה 7.7, $f(x) = c$ לכל $-1 < x < 1$.

נמצא את c :נציב $x = 0$ ונקבל

$$f(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

לכן $c = \frac{\pi}{2}$. ■

דוגמא.

הוכח שלכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

פיתרון.

נציב $f(x) = \sin x$.

שים לב $f(x)$ רציפה בקטע $[y, x]$ וגזירה בקטע (y, x) . לכן קיים $c \in (y, x)$ כך ש

$$f(x) - f(y) = f'(c) \cdot (x - y) ,$$

כלומר

$$\sin x - \sin y = \cos c \cdot (x - y) \quad \Rightarrow \quad |\sin x - \sin y| = |\cos c| \cdot |x - y| .$$

אבל $|\cos c| \leq 1$ אז

$$|\sin x - \sin y| = |\cos c| \cdot |x - y| \leq |x - y| .$$

■

דוגמא.

הוכח כי לכל $x, y \in \mathbb{R}$, $0 < x < y$ מתקיים

$$\frac{x-y}{x} < \ln\left(\frac{x}{y}\right) < \frac{x-y}{y} .$$

פיתרון.

נגדיר $f(x) = \ln x$. שים לב $f(x)$ רציפה בקטע $[x, y]$ וגזירה בקטע (x, y) . לכן לפי משפט לגרנז' 7.4, קיים $c \in (x, y)$ כך ש

$$f(y) - f(x) = f'(c) \cdot (y - x).$$

ז"א

$$\ln y - \ln x = \frac{1}{c} \cdot (y - x) \quad \Rightarrow \quad \ln x - \ln y = \frac{1}{c} \cdot (x - y) \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{x}{y} = \frac{x - y}{c}. \quad (\#)$$

שים לב $0 < c < y \Leftrightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{c}$, לכן

$$\frac{y - x}{y} < \frac{y - x}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{x - y}{y} > \frac{x - y}{c}.$$

לכן לפי (#) נקבל

$$\ln \frac{x}{y} < \frac{x - y}{y}.$$

שים לב $0 < x < c \Leftrightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$, לכן

$$\frac{y - x}{c} < \frac{y - x}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{x - y}{c} > \frac{x - y}{x}.$$

לכן לפי (#)

$$\ln \frac{x}{y} > \frac{x - y}{x}.$$

■

דוגמא.

יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות גזירות בקטע (a, b) . תהי $c \in (a, b)$ נקודה שבה

$$f(c) = g(c) \quad (\#1)$$

ו-

$$f'(x) > g'(x) \quad \forall x \in (a, b), x < c. \quad (\#2)$$

הוכח כי

$$g(x) > f(x) \quad \forall x \in (a, b), x < c. \quad (\#3)$$

פיתרון.

יהי $h(x) := f(x) - g(x)$. לפי (#2), $h'(x) > 0$ לכל $x \in (a, b)$, אז לפי משפט לגרנז' 7.4, עולה מונוטונית. לכן

$$h(n) > h(m) \quad \Leftrightarrow \quad n > m \quad \forall m, n < c. \quad (\#4)$$

אבל $h(c) = 0$, לכן

$$h(x) < 0 \quad \forall x < c. \quad (\#5)$$

ומכאן

$$f(x) - g(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) > f(x) \quad \forall x < c. \quad (\#6)$$

■

דוגמא.

יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות רציפות בקטע $[a, b]$ וגזירות בקטע (a, b) כך ש-

$$f(a) = g(a) \quad (1*)$$

אם

$$f'(x) < g'(x) \quad \forall x \in (a, b), \quad (2*)$$

הוכח כי

$$f(x) < g(x) \quad \forall x \in (a, b]. \quad (3*)$$

פיתרון.

יהי $h(x) := f(x) - g(x)$. לפי (1*),

$$h(a) = 0. \quad (4*)$$

לפי (2*),

$$h'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b). \quad (5*)$$

לכל $x \in (a, b)$, $x < c$. אז לפי משפט לגרנז' 7.4, $h(x)$ יורדת מונוטונית. לכן

$$h(n) < h(m) \quad \Leftrightarrow \quad n > m \quad \forall m, n \in (a, b). \quad (6*)$$

אבל לפי (4*) $h(a) = 0$, לכן

$$h(x) < 0 \quad \forall a < x \leq b. \quad (7*)$$

ומכאן

$$f(x) - g(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) > f(x) \quad \forall x \in (a, b]. \quad (8*)$$

■

דוגמא.

הוכח כי למשוואה

$$x^3 - 7x^2 + 25x + 8 = 0$$

יש פתרון יחיד.

פיתרון.

נגדיר

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 25x + 8.$$

שים לב

$$f(0) = 8, \quad f(-1) = -25,$$

אז לפי משפט ערך ביניים ??, קיימת לפחות נקודה אחת שבה הפונקציה מקבלת הערך 0. נניח שקיימת יותר מנקודה אחת, a, b , שבהן

$$f(a) = f(b) = 0.$$

$f(x)$ פולינום ולכן היא רציפה וגזירה בכל x . לכן לפי משפט רול 7.2, קיים נקודה $c \in (a, b)$ כל ש-

$$f'(c) = 0. \quad (\#)$$

שים לב,

$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 25$$

לכן אם $(\#)$ מתקיים,

$$3c^2 - 14c + 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{7 \pm \sqrt{26}i}{3}$$

סתירה. לכן אין יותר מפתרון אחד. ■

דוגמא.

הוכח שלכל ערכים ממשיים a ו- b מתקיים

$$|\arctan(2b) - \arctan(2a)| \leq 2|b - a|$$

פיתרון.

פונקציה $f(x) = \arctan(x)$ היא אלמנטרית ומוגדרת לכל x ממשי. לכן היא רציפה וגזירה לכל x ממשי ולכן מקיימת את תנאי משפט לגרנ' 7.4 עבור גל קטע $[a, b]$. לכן קיים ערך c מקטע זה כך ש-

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

מכאן

$$\frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} = |f'(c)| \quad (**)$$

שים לב,

$$f'(x) = \frac{2}{1 + 4x^2}$$

ולכן לפי $(**)$,

$$\frac{|\arctan(2b) - \arctan(2a)|}{|b - a|} = \frac{2}{1 + 4c^2} \leq 2$$

מש"ל. ■

כלל לופיטל

7.8 משפט. (כלל לופיטל)

יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות רציפות וגזירות בסביבה של נקודה a . אם התנאים הבאים מתקיימים:

1.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

או

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$

2. $g'(x) \neq 0$ בסביבה של a ,

3. הגבול $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים וסופי,

אז

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

דוגמאות

דוגמא.

קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \cdot \ln x}$$

פיתרון.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \cdot \ln x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{(x \cdot \ln x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1 + \ln x)} \\ &= \frac{1}{(1 + \ln 1)} = \frac{1}{(1 + 0)} = 1 \end{aligned}$$

■

דוגמא.

קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{2x^2}$$

פיתרון.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{2x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 6x)'}{(2x^2)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin 6x}{4x}. \end{aligned}$$

דרך 1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin 6x}{4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(6 \sin 6x)'}{(4x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{36 \cdot \cos 6x}{4} \\ &= \frac{36 \cdot \cos 0}{4} \\ &= \frac{36}{4}. \end{aligned}$$

דרך 2

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin 6x}{4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{4} \cdot \frac{6 \sin 6x}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{36}{4} \cdot \frac{\sin 6x}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{36}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} \\ &= \frac{36}{4} \cdot 1.\end{aligned}$$

■

דוגמא.

קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan 3x}{\tan 5x}$$

פיתרון.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan 3x}{\tan 5x} &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(\tan 3x)'}{(\tan 5x)'} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}} \\
 &= \frac{3}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x} \\
 &= \frac{3}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{1}{2}(1 + \cos 10x)}{\frac{1}{2}(1 + \cos 6x)} \\
 &= \frac{3}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(1 + \cos 10x)}{(1 + \cos 6x)} \\
 &= \frac{3}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(1 + \cos 10x)'}{(1 + \cos 6x)'} \\
 &= \frac{3}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-10 \cdot \sin 10x}{-6 \cdot \sin 6x} \\
 &= \frac{5}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin 10x}{\sin 6x} \\
 &= \frac{5}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(\sin 10x)'}{(\sin 6x)'} \\
 &= \frac{5}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{10 \cdot \cos 10x}{6 \cdot \cos 6x} \\
 &= \frac{25}{9} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos 10x}{\cos 6x} \\
 &= \frac{25}{9} \cdot \frac{\cos(5\pi)}{\cos(3\pi)} \\
 &= \frac{25}{9} \cdot \frac{-1}{-1} \\
 &= \frac{25}{9} .
 \end{aligned}$$

■

דוגמא.

קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} x \right) (2 - x) \right]$$

פיתרון.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} x \right) (2 - x) \right] &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{\cot \left(\frac{\pi}{4} x \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{\frac{\pi}{4} \cdot \frac{-1}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} x \right)}} \\ &= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \right)}} \\ &= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \right)}} \\ &= \frac{4}{\pi} .\end{aligned}$$

דוגמא.

קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

פיתרון.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1) \cdot \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1) \cdot \ln x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-1/x}{\ln x + (x-1)/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-1/x)'}{(\ln x + (x-1)/x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1/x^2}{1/x + 1/x^2} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

דוגמא.

קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{1/x^2}$$