המחלקה למדעי המחשב

$29/11/23 12:00 - 26/11/23 12:00$ תשפ"ג

אלגברה 2

מועד ב'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר, ד'ר שי סרוסי.

תשפ"ג סמסטר ק'

השאלון מכיל 12 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

אחר / הערות

- יש לפתור את כל השאלות.
- המשקל של כל שאלה מפורט להלן:
  - * שאלה 1: 30 נקודות.
  - * שאלה 2: 20 נקודות.
  - * שאלה 3: 20 נקודות.
  - * שאלה 4: 30 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבירו היטב את מהלך הפתרון. תשובה ללא הסבר (גם נכונה) לא תתקבל.
- אסור לחלוטין לקבל עזרה מסטודנט אחר או מאף אחד.
- עליכם להעלות את הפתרונות שלכם דרך אתר המודל של הקורס אלגברה 2 למדמ"ח לא יאוחר משעה $12:00$ ביום ד' $23-11-29$. פתרונות שהוגשו אחרי המועד הזה לא יתקבלו.
- מותר להשתמש בחומר של הקורס, התרגילים של הקורס והספרים של הקורס בלבד, אבל אסור להשתמש בשום מקורות אחרים.
- אחרי הגשת פתרונות אתם תקבלו הזמנה למבחן קצר בעל פה על הפתרונות שלכם. ייתכן שלא תעבור את המבחן או יורידו נקודות במקרה שאתם לא יכולים להסביר הפתרונות שלכם היטב.
- **סטודנט יהיה זכאי להגיש ערעור / בקשות שונות לגבי הבוחן במשך 5 ימים בלבד מיום קבלת הציון.**

==

שאלה 1 תהי $A\in\mathbb{R}^{4\times 4}$ המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\10&-2&0&0\\1&-5&3&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$.

א) האם A לכסינה? אם כן מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A=PDP^{-1}$.

ב) הוכיחו כי A לא הפיכה.

ג) הוכיחו כי

$$A=\frac{1}{3}A^2+\frac{1}{4}A^3-\frac{1}{12}A^4\ .$$

שאלה 2 תהי $A\in\mathbb{C}^{4\times 4}$ מטריצה נורמלית. נניח כי הערכים עצמיים של A הם

$$\lambda_1=3\ ,\qquad \lambda_2=5+5i\ ,\qquad \lambda_3=-5+5i\ ,$$

והמרחבים עצמיים הם

$$V_3=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\ ,\quad V_{5+5i}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\ .$$

שימו לב כי המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda_3=-5+5i$ לא נתון בכוונה. יהי $a\in\mathbb{C}^4$ הווקטור $a=\begin{pmatrix}1\\9\\7\\10\end{pmatrix}$.

א) מצאו את $A\cdot a$.

ב) מצאו את $A^4\cdot a$.

ג) מצאו את המטריצה A.

שאלה 3 תהי $A\in\mathbb{F}^{3\times 3}$. בכל המקרים הבאים, קבעו אם A הפיכה. אם לא, הסבירו מדוע. אם כן, מצאו ביטוי של A^{-1} כצירוף ליניארי של חזקות של המטריצה A.

א) הערכים עצמיים של A הם $\lambda=i$, $\lambda=-i$ ו- $\lambda=0$.

ב) $\lambda=i$, $\lambda=-i$ ו- $\lambda=-1$.

שאלה 4

א) תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. נניח כי $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ערכים עצמיים של A וכולם שונים זה מזה. יהי u_1 וקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ_1, u_2 וקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ_2, ו- u_3 וקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ_3. הוכיחו כי u_1, u_2, u_3 בת"ל.

ב) עכשיו נניח כי A אוניטרית. הוכיחו כי u_1, u_2, u_3 אורתוגונלית.

ג) אם A אוניטרית, האם ייתכן ש- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ יהיו כולם ממשיים? נמקו את תשובתכם.

פתרונות

שאלה 1

א) נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned}
p_A(x) =& |xI - A| \\
=& \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & -1 \\ -10 & x+2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & x-3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \\
=& (x-1) \begin{vmatrix} x+2 & 0 & 0 \\ 5 & x-3 & -1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -10 & x+2 & 0 \\ -1 & 5 & x-3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
=& (x-1)(x+2) \begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x+2 & 0 \\ 5 & x-3 \end{vmatrix} \\
=& (x-1)(x+2)(x-3)(x-1) - (x+2)(x-3) \\
=& (x+2)(x-3)\left[(x-1)^2 - 1\right] \\
=& (x+2)(x-3)x(x-2)
\end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = -2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 0$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 1.

כל הערכים עצמיים שונים לכן A לכסינה.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = -2$</u>

$$(A+2I) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[3R_4-R_1]{\substack{3R_2-10R_1 \\ 3R_3-R_1}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -15 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\leftarrow R_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{10R_4+8R_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to -\frac{1}{10}\cdot R_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-2\cdot R_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to -\frac{1}{15}\cdot R_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z,w) = (-\frac{1}{3}w, z, z, 0) = (0,z,z,0) = (0,1,1,0)z, \quad z\in\mathbb{R}$

$$V_{-2} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 0$</u>

$$(A-0\cdot I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-R_1]{\substack{R_2-10R_1 \\ R_3-R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to 2R_3-5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 6 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to\frac{1}{6}\cdot R_3]{R_2\to -\frac{1}{2}\cdot R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{25}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z,w)=(-w,-5w,-\frac{25}{3}w,w)=(-1,-5,-\frac{25}{3},1)w,\ \ w\in\mathbb{R}$

$$V_0=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}3\\15\\25\\-3\end{pmatrix}\right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=2$</u>

$$(A-2I)\quad=\quad\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\10&-4&0&0\\1&-5&1&1\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[]{\substack{R_2+10R_1\\R_3+R_1\\R_4+R_1}}\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\0&-4&0&10\\0&-5&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to4R_3-5R_2}\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\0&-4&0&10\\0&0&4&-42\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[]{\substack{R_2\to-\frac{1}{4}\cdot R_2\\R_3\to\frac{-1}{4}\cdot R_3}}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-\frac{5}{2}\\0&0&1&-\frac{21}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z,w)=(w,\frac{5}{2}w,\frac{21}{2}w,w)=(1,\frac{5}{2},\frac{21}{2},1)w,\ \ w\in\mathbb{R}$

$$V_2=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\5\\21\\2\end{pmatrix}\right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=2$</u>

$$(A-3I)\quad=\quad\begin{pmatrix}-2&0&0&1\\10&-5&0&0\\1&-5&0&1\\1&0&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[]{\substack{2R_2+10R_1\\2R_3+R_1\\2R_4+R_1}}\begin{pmatrix}-2&0&0&1\\0&-10&0&10\\0&-10&0&3\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\begin{pmatrix}-2&0&0&1\\0&-10&0&10\\0&0&0&-7\\0&0&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[]{\substack{R_1\to-\frac{1}{2}\cdot R_1\\R_2\to-\frac{1}{10}\cdot R_2\\R_4\to7R_4-3R_3}}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-1\\0&0&0&-7\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\quad\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z,w)=(\frac{1}{2}w,w,z,0)=(0,0,1,0)z,\ \ z\in\mathbb{R}$

$$V_3=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$D=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\ ,\qquad P=\begin{pmatrix}|&|&|&|\\u_{-2}&u_0&u_2&u_3\\|&|&|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-3&2&0\\1&-15&5&0\\1&-25&21&1\\0&3&2&0\end{pmatrix}\ .$$

ב) למטריצה A יש ערך עצמי 0 לפיכך A לא הפיכה.

ג) הפולינום האופייני של A הוא

$$p_A(x)=(x-3)(x-2)x(x+2)=x^4-3x^3-4x^2+12x\ .$$

לפי משפט קיילי המילטון $p_A(A)=0$ לכן

$$A^4-3A^3-4A^2+12A=0\quad\Rightarrow\quad A=\frac{1}{12}\left(-A^4+3A^3+4A^2\right)=-\frac{1}{12}A^4+\frac{1}{4}A^3+\frac{1}{3}A^2\ .$$

שאלה 2

א) משפט הפירוק הספקטרלי:

$$A\cdot a=3P_{V_3}(a)+(5+5i)P_{V_{5+5i}}(a)+(-5+5i)P_{V_{-5+5i}}(a)\ .$$

$$P_{V_{-5+5i}}(a)=a-P_{V_3}(a)-P_{V_{-5+5i}}(a)$$

לכן

$$P_{V_3}(a)=\frac{\langle a,u_3\rangle}{\|u_3\|^2}u_3+\frac{\langle a,u_3'\rangle}{\|u_3'\|^2}u_3'=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\9\\7\\10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\9\\7\\10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\9\\7\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_{5+5i}}(a)=\frac{\langle a,u_{5+5i}\rangle}{\|u_{5+5i}\|^2}u_{5+5i}=\frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\9\\7\\10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}11\\0\\0\\11\end{pmatrix}.$$

$$P_{V_{-5+5i}}(a)=a-P_{V_3}(a)-P_{V_{5+5i}}(a)=\begin{pmatrix}1\\9\\7\\10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\9\\7\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}11\\0\\0\\11\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-9\\0\\0\\9\end{pmatrix}.$$

$$A\cdot a=3\begin{pmatrix}0\\9\\7\\0\end{pmatrix}+(5+5i)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}11\\0\\0\\11\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(-5+5i)\begin{pmatrix}-9\\0\\0\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50+5i\\27\\21\\5+50i\end{pmatrix}$$

ב)

$$A^4\cdot a=3^4\begin{pmatrix}0\\9\\7\\0\end{pmatrix}+(5+5i)^4\frac{1}{2}\begin{pmatrix}11\\0\\0\\11\end{pmatrix}+(-5+5i)^4\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-9\\0\\0\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2500\\729\\567\\-25000\end{pmatrix}$$

ג) $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

$$A\cdot e_1=3P_{V_3}(e_1)+(5+5i)P_{V_{5+5i}}(e_1)+(-5+5i)P_{V_{-5+5i}}(e_1)$$

$$P_{V_3}(e_1)=\frac{\langle e_1,u_3\rangle}{\|u_3\|^2}u_3+\frac{\langle e_1,u_3'\rangle}{\|u_3'\|^2}u_3'=\frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$P_{V_{5+5i}}(e_1) = \frac{\langle e_1, u_{5+5i}\rangle}{\|u_{5+5i}\|^2}u_{5+5i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\0\\0\\1/2\end{pmatrix} .$$

$$P_{V_{-5+5i}}(e_1) = e_1 - P_{V_3}(e_1) - P_{V_{5+5i}}(e_1) = \begin{pmatrix}1/2\\0\\0\\-1/2\end{pmatrix} .$$

$$A \cdot e_1 = (5+5i)\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\\1/2\end{pmatrix} + (-5+5i)\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\\-1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5i\\0\\0\\5\end{pmatrix}$$

$$A \cdot e_2 = 3P_{V_3}(e_2) + (5+5i)P_{V_{5+5i}}(e_2) + (-5+5i)P_{V_{-5+5i}}(e_2)$$

$$P_{V_3}(e_2) = \frac{\langle e_2, u_3\rangle}{\|u_3\|^2}u_3 + \frac{\langle e_2, u_3'\rangle}{\|u_3'\|^2}u_3' = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} .$$

$$P_{V_{5+5i}}(e_2) = \frac{\langle e_2, u_{5+5i}\rangle}{\|u_{5+5i}\|^2}u_{5+5i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} .$$

$$P_{V_{-5+5i}}(e_2) = e_2 - P_{V_3}(e_2) - P_{V_{5+5i}}(e_2) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} .$$

$$A \cdot e_2 = 3\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$A \cdot e_3 = 3P_{V_3}(e_3) + (5+5i)P_{V_{5+5i}}(e_3) + (-5+5i)P_{V_{-5+5i}}(e_3)$$

$$P_{V_3}(e_3) = \frac{\langle e_3, u_3\rangle}{\|u_3\|^2}u_3 + \frac{\langle e_3, u_3'\rangle}{\|u_3'\|^2}u_3' = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} .$$

$$P_{V_{5+5i}}(e_1) = \frac{\langle e_1, u_{5+5i}\rangle}{\|u_{5+5i}\|^2}u_{5+5i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} .$$

$$P_{V_{-5+5i}}(e_3) = e_3 - P_{V_3}(e_3) - P_{V_{5+5i}}(e_3) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} .$$

$$A \cdot e_3 = 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$A \cdot e_4 = 3P_{V_3}(e_4) + (5+5i)P_{V_{5+5i}}(e_4) + (-5+5i)P_{V_{-5+5i}}(e_4)$$

$$P_{V_3}(e_4)=\frac{\langle e_4,u_3\rangle}{\|u_3\|^2}u_3+\frac{\langle e_4,u_3'\rangle}{\|u_3'\|^2}u_3'=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_{5+5i}}(e_4)=\frac{\langle e_4,u_{5+5i}\rangle}{\|u_{5+5i}\|^2}u_{5+5i}=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\\1/2\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_{-5+5i}}(e_4)=e_1-P_{V_3}(e_4)-P_{V_{5+5i}}(e_4)=\begin{pmatrix}-1/2\\0\\0\\1/2\end{pmatrix}\ .$$

$$A\cdot e_4=(5+5i)\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\\1/2\end{pmatrix}+(-5+5i)\begin{pmatrix}-1/2\\0\\0\\1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\0\\5i\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}| & | & | & |\\ Ae_1 & Ae_2 & Ae_3 & Ae_4\\ | & | & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5i & 0 & 0 & 5\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 5 & 0 & 0 & 5i\end{pmatrix}$$

שאלה 3

א) A לא הפיכה. הסבר:

$$|A|=i\cdot(-i)\cdot 0=0$$

לכן A לא הפיכה.

ב) A הפיכה. הסבר:

$$|A| = i\cdot(-i)\cdot(-1) = 1 \ .$$

פולינום אופייני:

$$p_A(x) = (x+i)(x-i)(x+1) = x^3+x^2+x+1 \ .$$

לפי משפט קיילי-המילטון:

$$p_A(A)=0 \qquad \Rightarrow \qquad A^3+A^2+A+I=0 \qquad \Rightarrow \qquad I=-\left(A^3+A^2+A\right) = A\cdot\left(-A^2-A-I\right) \ .$$

לפיכך

$$A^{-1} = -A^2-A-I \ .$$

שאלה 4

א) נוכיח כי u_1,u_2 בת"ל. נרשום

(*1)
$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0$$

כאשר α_1,α_2 סקלרים. נכפיל ב- A:

(*2)
$$A\alpha_1 u_1 + A\alpha_2 u_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1\lambda_1 u_1 + \alpha_2\lambda_2 u_2 = 0 \ .$$

נכפיל (*1) ב- λ_1:

(*3)
$$\lambda_1\alpha_1 u_1 + \lambda_1\alpha_2 u_2 = 0$$

נקח את החיסור (*3)-(*2):

$$\lambda_1\alpha_2 u_2 - \lambda_2\alpha_2 u_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1-\lambda_2)\alpha_2 u_2 = 0 \ .$$

u_2 ווקטור עצמי $\Leftarrow$ $u_2\neq 0$.
$\lambda_1\neq\lambda_2$ (נתון) $\Leftarrow$ $\lambda_1-\lambda_2\neq 0$, לכן

$$\alpha_2 = 0 \ .$$

נציב זה ב- (*1) ונקבל

$$\alpha_1 u_1 = 0 \ .$$

u_1 ווקטור עצמי $\Leftarrow$ $u_1\neq 0$ לפיכך

$$\alpha_1 = 0 \ .$$

לכן (*1) מתקיים רק אם $\alpha_1=\alpha_2=0$ לפיכך u_1,u_2 בת"ל.

נוכיח כי u_1, u_2, u_3 בת"ל. נרשום

$$\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 = 0 \qquad (\#1)$$

כאשר $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ סקלרים. נכפיל ב- A:

$$A\beta_1 u_1 + A\beta_2 u_2 + A\beta_3 u_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1\beta_1 u_1 + \lambda_2\beta_2 u_2 + \lambda_3\beta_3 u_3 = 0 \ . \qquad (\#2)$$

נכפיל (#1) ב- λ_3:

$$\lambda_3\beta_1 u_1 + \lambda_3\beta_2 u_2 + \lambda_3\beta_3 u_3 = 0 \qquad (\#3)$$

נקח את החיסור (#3)-(#2):

$$(\lambda_3 - \lambda_1)\beta_1 u_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)\beta_2 u_2 = 0 \ .$$

u_1 ו- u_2 בת"ל אז זה מתקיים רק אם

$$(\lambda_3 - \lambda_1)\beta_1 = 0 \ , \qquad (\lambda_3 - \lambda_2)\beta_2 = 0 \ .$$

u_1, u_2 ווקטורים עצמיים לכן $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$.
$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \Leftarrow \lambda_3 - \lambda_1 \neq 0$ ו- $\lambda_3 - \lambda_2 \neq 0$.
לכן $\beta_1 = 0$ ו- $\beta_2 = 0$.
נציב זה ב- (#1):

$$\beta_3 u_3 = 0 \ .$$

u_3 ווקטור עצמי $u_3 \neq 0 \Leftarrow$ לכן

$$\beta_3 = 0 \ .$$

מצאנו כי (#3) מתקיים רק אם $\beta_1, \beta_2, \beta_3 = 0$ לכן u_1, u_2, u_3 בת"ל.

ב) ווקטורים עצמיים של המטריצה אוניטרית מהווים בסיס אורתוגונלי.
לפי זה, אם A אוניטרית אז הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ מהווה בסיס אורתוגונלי.

ג) לא.
אם A אוניטרית אז הערך מוחלט של על ערך עצמי יהיה 1.
יש לנו 3 ערכים עצמיים שונים, אז כדי שהערך מוחלט של כל אחד ייה שווה ל- 1. אז בהכרך לפחות אחד יהיה מספר מרוכב.