שיעור 1
מכונות טיורינג

1.1 הגדרה היוריסטית של מכונת טיורינג

הגדרה 1.1 מכונת טיורינג (הגדרה היוריסטית)

הקלט והסרט

מכונת טיורינג (מ"ט) קורא קלט.
הקלט נמצא על סרט אינסופי.
התווים של הקלט נמצאים במשבצות של הסרט.
במכונת טיורינג אנחנו מניחים שהסרט אינסופי לשני הכיוונים.
משמאל לתחילת הקלט לא כתוב כלום, ומימין לסוף הקלט לא כתוב כלום.
אנחנו מניחים שיש תו הרווח $\sqcup$ שנמצא בכל משבצות שאינן משבצות קלט, משמאל לקלט ומימין לקלט.

$\cdots$	$\sqcup$	$\sqcup$	a	b	b	b	a	a	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\cdots$

הראש

במצב ההתחלתי הראש בקצה השמאלי של הקלט.

$\cdots$	$\sqcup$	$\sqcup$	a	b	b	b	a	a	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\cdots$
			$\uparrow$									

הראש יכול לזוז ימינה על הסרט וגם שמאלה על הסרט.
הראש יכול לקרוא את התוכן שנמצא במשבצת הסרט שבה הוא נמצא.
הראש יכול לכתוב על המשבצת הסרט שבה הוא נמצא. הכתיבה נעשית תמיד במיקום הראש.

המצבים

בהתחלה הראש בקצה השמאלי של הקלט והמ"ט במצב התחלתי q_0.
הראש קורא את התו במשבצת הראשונה וכותב עליה לפי הפונקציית המעברים (שנגדיר בהגדרה 1.2). כעת המ"ט במצב חדש q_1.
הראש קורא את התו במשבצת השניה וכותב עליה לפי הפונקציית המעברים ואז המ"ט במצב חדש q_2.
התהליך ממשיך עד שהראש מגיע לקצה הימיני של הקלט, ואז הוא ממשיך לקרוא ולכתוב על כל משבצת בכיוון שמאלה, עד שהוא מגיע לקצה השמאלי.
במ"ט ניתן לטייל על הקלט שוב ושוב לשני הכיוונים.
התהליך מסתיים כאשר המ"ט מגיע למצב מקבל q_{acc} או מצב דוחה q_{rej}.

דוגמה 1.1

נבנה מכונת טיורינג אשר מקבלת מילה אם היא בשפה

$$L = \left\{ w \in \{a,b\}^* \middle| \#a_w = \#b_w \right\} \ .$$

ז"א השפה המורכבת מכל המילים עם מספר שווה אותיות a ו b.

<u>תיאור מילולי</u>

- נסרוק את הקלט משמאל לימין ולכל a נחשף b תואם.
- נניח שראינו במשבצת הראשונה a, נסמן עליה ✓.
- עכשיו נסרוק את יתרת הקלט ונחפש אות b מתאימה ל a שכבר ראינו.
  - אם לא מצאנו ,המילה לא בשפה.
  - אם מצאנו ,נסמן את ה- b התואם ב- ✓.
- נחזור לתחילת הקלט ונעשה סריקה נוספת משמאל לימין.
- במשבצת הראשונה יש ✓ מסיבוב הראשון. הראש פשוט כותב עליה ✓, כלומר משבצת ראשונה נשארת ללא שינוי.
- הראש זז שמאלה למשבצת הבאה. נניח שמצאנו b. נסמן במשבצת ✓.
- נסרוק את יתרת הקלט ונחפש אות a מתאימה ל b שכבר ראינו.
  - אם לא מצאנו ,המילה לא בשפה.
  - אם מצאנו ,נסמן את ה- a התואם ב- ✓.
  - בכל משבצת שיש ✓ כותבים עליה ✓ וממשיכים למשבצת הבאה הימני.
- נחזור לתחילת הקלט ונעשה סריקה נוספת משמאל לימין.
- חוזרים על התהליך שוב ושוב.
  - אם היה מעבר שבו לא מצאנו אות תואמת, המילה לא בשפה.
  - אם כולן היו תואמות ועשינו מעבר שבו הגכנו מקצה לקצה, מרווח לרווח, בלי לראות שום אות, אז המילה בשפה.

כעת נתאר את המ"ט באמצעות המצבי המכונה והפונקציית המעברים.

<u>מצבי המכונה</u>

המצב ההתחלתי. אליו נחזור אחרי כל סבב התאמה של זוג אותיות.	q_0
מצב שבו ראינו a ומחפשים b תואם.	q_a
מצב שבו ראינו b ומחפשים a תואם.	q_b
מצב שנשתמש בו כדי לחזור לקצה השמאלי של הקלט ולהתחיל את הסריקה הבאה (סבב ההתאמה הבא).	back
מצב מקבל.	acc
מצב דוחה.	rej

- כאשר המכונה מגיעה למצב acc היא עוצרת.

  עצירה במצב acc משמעותה קבלה.

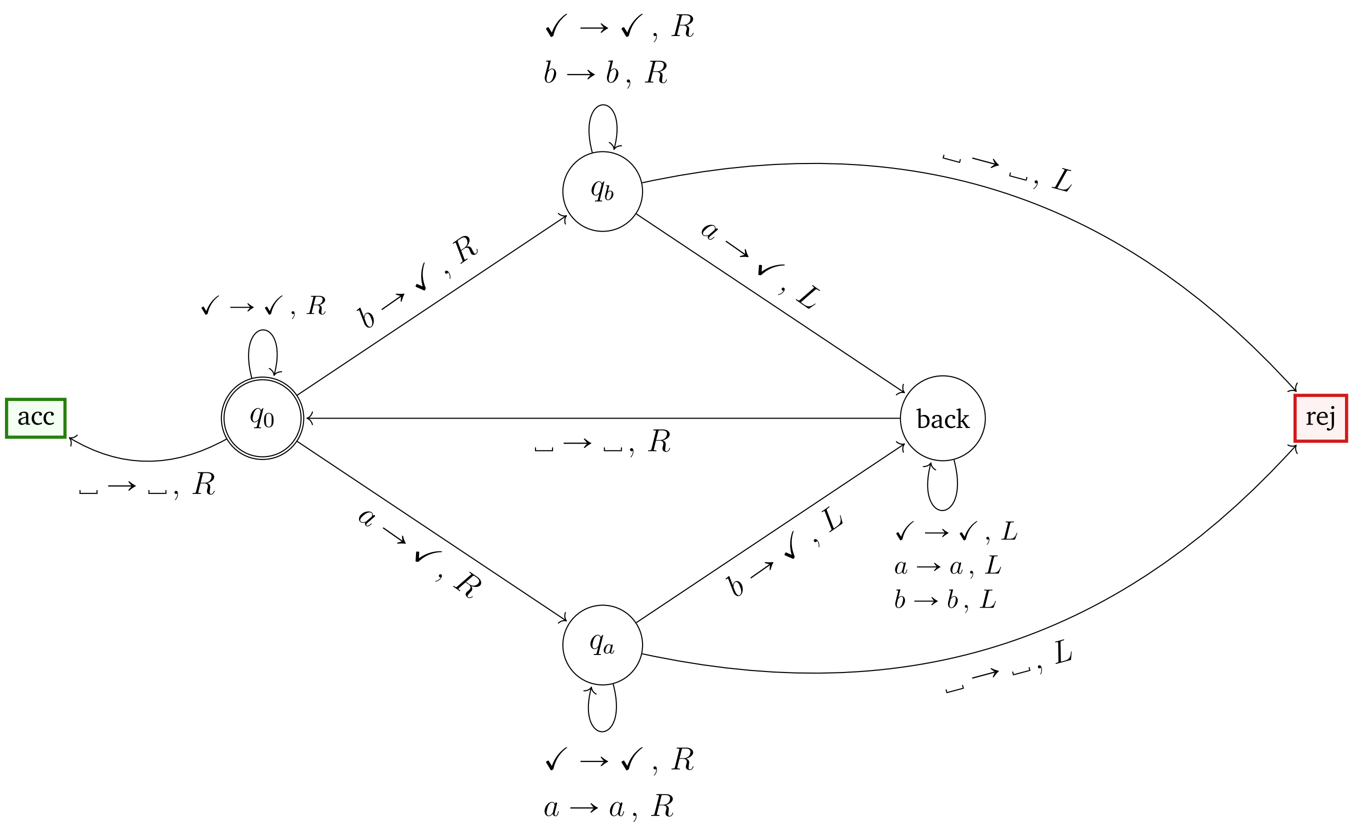
- כאשר המכונה מגיעה למצב rej היא עוצרת.

  עצירה במצב rej משמעותה דחייה.

- רק בשני מצבים אלו המכונה מפסיקה.

  בכל מצב אחר המכונה בהכרח ממשיכה.

<u>תרשים מצבים</u>



- בכל צעד המכונה מבצעת שתי פעולות:

  1. כותבת אות במיקום הראש
  2. זזה צעד אחד שמאלה או צעד אחד ימינה.

- בכל צעד המכונה יכולה לעבור למצב אחר או להישאר באותו מצב.

דוגמה 1.2

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה abbbaa.

פתרון:

␣	q_0	a	b	b	b	a	a	␣
␣	✓	q_a	b	b	b	a	a	␣
␣	back	✓	✓	b	b	a	a	␣
back	␣	✓	✓	b	b	a	a	␣
␣	q_0	✓	✓	b	b	a	a	␣

␣	✓	q_0	✓	b	b	a	a	␣
␣	✓	✓	q_0	b	b	a	a	␣
␣	✓	✓	✓	q_b	b	a	a	␣
␣	✓	✓	✓	b	q_b	a	a	␣
␣	✓	✓	✓	back	b	✓	a	␣
␣	✓	✓	back	✓	b	✓	a	␣
␣	✓	back	✓	✓	b	✓	a	␣
␣	back	✓	✓	✓	b	✓	a	␣
back	␣	✓	✓	✓	b	✓	a	␣
␣	q_0	✓	✓	✓	b	✓	a	␣
␣	✓	q_0	✓	✓	b	✓	a	␣
␣	✓	✓	q_0	✓	b	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	q_0	b	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	✓	q_b	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	✓	✓	q_b	a	␣
␣	✓	✓	✓	✓	back	✓	✓	␣
␣	✓	✓	✓	back	✓	✓	✓	␣
␣	✓	✓	back	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	back	✓	✓	✓	✓	✓	␣
␣	back	✓	✓	✓	✓	✓	✓	␣
back	␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	␣
␣	q_0	✓	✓	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	q_0	✓	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	✓	q_0	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	✓	✓	q_0	✓	✓	✓	␣
␣	✓	✓	✓	✓	q_0	✓	✓	␣
␣	✓	✓	✓	✓	✓	q_0	✓	␣
␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	q_0	␣
␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	␣	acc

דוגמה 1.3

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה aab.

פתרון:

␣	q_0	a	a	b	␣
␣	✓	q_a	a	b	␣
␣	✓	a	q_a	b	␣
␣	✓	back	a	✓	␣
␣	back	✓	a	✓	␣
back	␣	✓	a	✓	␣
␣	q_0	✓	a	✓	␣
␣	✓	q_0	a	✓	␣
␣	✓	✓	q_a	✓	␣
␣	✓	✓	✓	q_a	␣
␣	✓	✓	rej	✓	␣

1.2 הגדרה פורמלית של מכונת טיורינג

הגדרה 1.2 מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעיה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר:

Q	קבוצת מצבים סופית ולא ריקה	
Σ	א"ב הקלט	$\sqcup \notin \Sigma$
Γ	א"ב הסרט	$\Sigma \subseteq \Gamma\,,\ \sqcup \in \Gamma$ ref
δ	פונקציית המעברים	$\delta : (Q \backslash \{q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}\} \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$
q_0	מצב התחלתי	
q_{acc}	מצב מקבל יחיד	
q_{rej}	מצב דוחה יחיד	

דוגמה 1.4 (המשך דוגמה 1.1)

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

$$Q = \{q_0, q_a, q_b, \text{back}, q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}\}\ .$$

$$\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}\ , \qquad \Gamma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \sqcup, \checkmark\}$$

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, \mathtt{a}) &= (q_a, \checkmark, R)\ ,\\
\delta(q_0, \mathtt{b}) &= (q_b, \checkmark, R)\ ,\\
\delta(q_0, \sqcup) &= (q_{\text{acc}}, \sqcup, R)\ ,\\
\delta(q_a, \checkmark) &= (q_a, \checkmark, R)\ ,\\
\delta(q_a, \mathtt{a}) &= (q_a, \mathtt{a}, R)\ ,\\
\delta(q_a, \mathtt{b}) &= (\text{back}, \checkmark, L)\ ,\\
\delta(q_b, \checkmark) &= (q_b, \checkmark, R)\ ,\\
\delta(q_b, \mathtt{b}) &= (q_a, \mathtt{b}, R)\ ,\\
\delta(q_b, \mathtt{a}) &= (\text{back}, \checkmark, L)\ ,
\end{aligned}$$

קל יותר לרשום את פונקציית המעבירים δ כטבלה:

Q \ Γ	$\mathtt{a}$	$\mathtt{b}$	$\sqcup$	$\checkmark$
q_0	$(q_a, \checkmark, R)$	$(q_b, \checkmark, R)$	$(q_{\text{acc}}, \sqcup, R)$	$(q_0, \checkmark, R)$
q_a	$(q_a, \mathtt{a}, R)$	$(\text{back}, \checkmark, L)$	$(q_{\text{rej}}, \sqcup, L)$	$(q_a, \checkmark, R)$
q_b	$(\text{back}, \checkmark, L)$	$(q_b, \mathtt{b}, R)$	$(q_{\text{rej}}, \sqcup, L)$	$(q_b, \checkmark, R)$
back	$(\text{back}, \mathtt{a}, L)$	$(\text{back}, \mathtt{b}, L)$	$(q_0, \sqcup, R)$	$(\text{back}, \checkmark, L)$

הגדרה 1.3 קונפיגורציה

תהי $M=(Q,q_0,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{\text{acc}},q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג. **קונפיגורציה** של M הינה מחרוזת

$$uq\sigma \mathrm{v}$$

כאשר משמעות:

$$u,\mathrm{v}\in\Gamma^* \ , \qquad \sigma\in\Gamma \ , \qquad q\in Q \ .$$

- q מצב המכונה,
- σ הסימון במיקום הראש
- u תוכן הסרט משמאל לראש,
- v תוכן הסרט מימין לראש.

דוגמה 1.5 (המשך של דוגמה 1.3)

u	q	σ	v
␣	q_0	a	a b ␣
␣✓	q_a	a	b ␣
␣ ✓ a	q_a	b	␣
␣ ✓	back	a	✓ ␣
␣	back	✓	a ✓ ␣
␣	back	␣	✓ a ✓ ␣
␣	q_0	✓	a ✓ ␣
␣ ✓	q_0	a	✓ ␣
␣ ✓ ✓	q_a	✓	␣
␣ ✓ ✓ ✓	q_a	␣	␣
␣ ✓ ✓	rej	✓	␣

דוגמה 1.6

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת כל מילה בשפה

$$L = \{a^n \,|\, n = 2^k \;,\; k \in \mathbb{N}\}$$

ז"א מילים בעלי מספר אותיות a אשר חזקה של 2.

פתרון:

ראשית נשים לב למשפט הבא:

משפט 1.1

מספר שלם n שווה לחזקה אי-שלילית של 2, כלומר $(k \geqslant 0) \quad n = 2^k$ אם ורק אם קיים שלם m עבורו חילוק של n ב- 2 בדיוק m פעמים נותן 1.

הוכחה:

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

אם $n = 2^k$ ו- $k \geqslant 0$ אז $\frac{n}{2^k} = 1$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

אם קיים $m \geqslant 0$ עבורו $\frac{n}{2^m} = 1$ אז $n = 2^m$ ולכן n שווה לחזקה אי-שלילית של 2. ■

לאור המשפט הזה נבנה אלגוריתם אשר מחלק את מספר האותיות במילה ב- 2 בצורה איטרטיבית. אם אחרי סבב מסויים נקבל מספר אי-זוגי גדול מ- 1 אז מספר האותיות a במילה לא יכול להיות חזקה של 2. אם אחרי כל הסבבים לא קיבלנו מספר אי-זוגי גדול מ-1 אז מובטח לנו שיש מספר אותיות a אשר חזקה של 2.

- נתון הקלט

␣	␣	a	a	a	a	a	a	a	a	␣	␣
		$\uparrow$									

נעבור על סרט הקלט. משמאל לימין.

- מבצעים מחקיה לסירוגין של האות a כלומר אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר וכן הלאה.

␣	␣	$\checkmark$	a	$\checkmark$	a	$\checkmark$	a	$\checkmark$	a	␣	␣
									↑		

אם אחרי סבב הראשון

* יש $\checkmark$ בתו האחרון $\Leftarrow$ קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 $\Leftarrow$ אין חזקה של 2 אותיות a במילה.
* יש a בתו האחרון $\Leftarrow$ קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ונמשיך לסבב הבא.

- הראש חוזר לתו הראשון של הקלט

␣	␣	$\checkmark$	a	$\checkmark$	a	$\checkmark$	a	$\checkmark$	a	␣	␣
		↑									

- בסבב הבא חוזרים על התהליך של מחיקה לסירוגין של האות a (אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר)

␣	␣	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	a	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	a	␣	␣
									↑		

אם אחרי סבב השני

* יש $\checkmark$ בתו האחרון $\Leftarrow$ קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 $\Leftarrow$ אין חזקה של 2 אותיות a במילה.
* יש a בתו האחרון $\Leftarrow$ קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ונמשיך לסבב הבא.

- הראש חוזר לתו הראשון של הקלט

␣	␣	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	a	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	a	␣	␣
		↑									

- בסבב הבא חוזרים על התהליך של מחיקה לסירוגין של האות a (אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר)

␣	␣	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	a	␣	␣
									↑		

אם אחרי סבב השלישי

* יש $\checkmark$ בתו האחרון $\Leftarrow$ קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 $\Leftarrow$ אין חזקה של 2 אותיות a במילה.
* יש a בתו האחרון $\Leftarrow$ קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ונמשיך לסבב הבא.

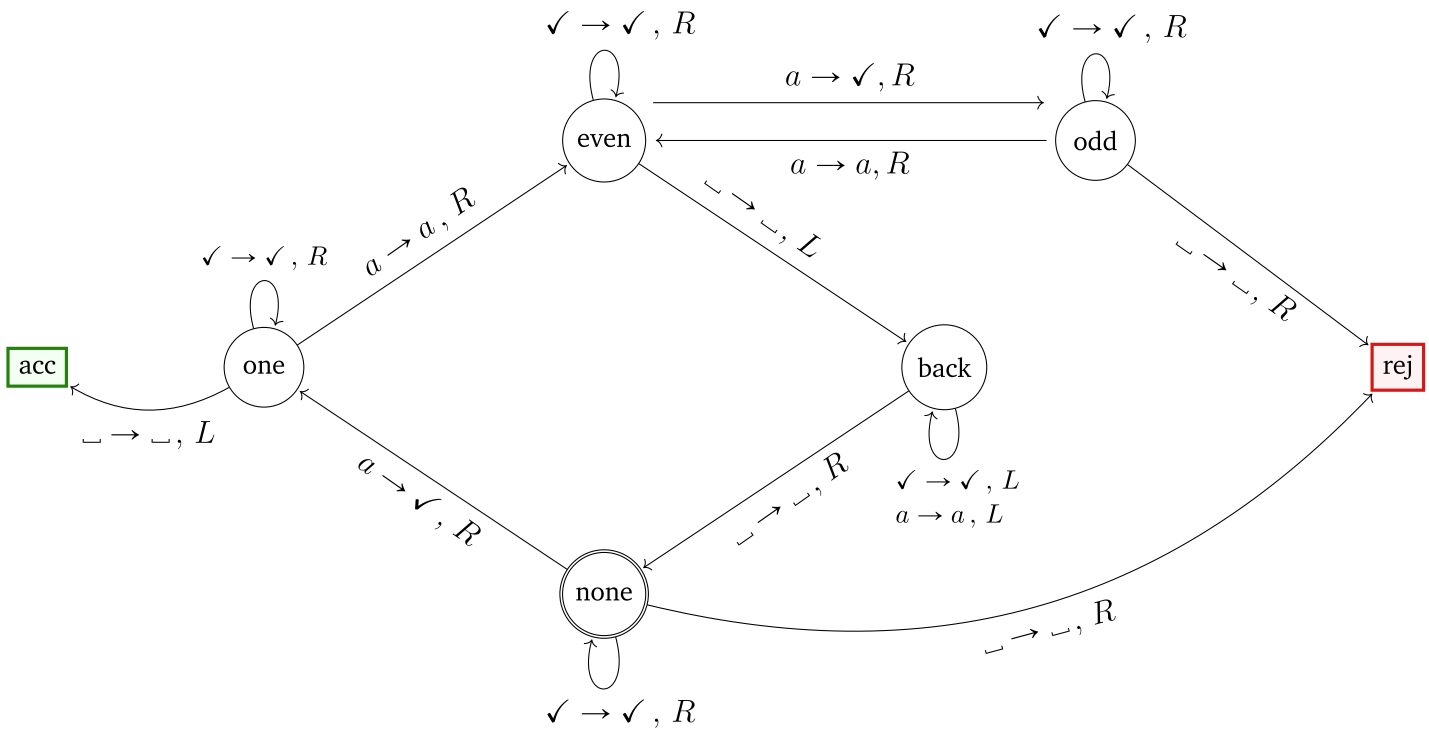
- הראש חוזר לתו הראשון של הקלט.

בסבב האחרון נשאר רק אות a אחת.

לכן לפי המשפט למעלה מובטח לנו כי המילה מורכבת ממספר אותיות a אשר חזקה של 2.

␣	␣	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	a	␣	␣
		↑									

המכונת טיורינכ אשר מקבלת מילים בשפה שעובדת לפי האלגוריתם המתואר למעלה מתואר בתרשים למטה.



המצבים:

מצב none: מצב התחלתי. עדיין לא קראנו a בסבב סריקה זה.
מצב one: קראנו a בודד.
מצב even: קראנו מספר זוגי של a .
מצב odd: קראנו מספר אי-זוגי של a .
מצב back: חזרה שלמאלה.

דוגמה 1.7

בדקו אם המילה

aaaa

מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.6.

פתרון:

␣	none	a	a	a	a	␣
␣	✓	one	a	a	a	␣
␣	✓	a	even	a	a	␣
␣	✓	a	✓	odd	a	␣
␣	✓	a	✓	a	even	␣
␣	✓	a	✓	back	a	␣
␣	✓	a	back	✓	a	␣
␣	✓	back	a	✓	a	␣
␣	back	✓	a	✓	a	␣
back	␣	✓	a	✓	a	␣

␣	none	✓	a	✓	a	␣
␣	✓	none	a	✓	a	␣
␣	✓	✓	one	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	one	a	␣
␣	✓	✓	✓	a	even	␣
␣	✓	✓	✓	back	a	␣
␣	✓	✓	back	✓	a	␣
␣	✓	back	✓	✓	a	␣
␣	back	✓	✓	✓	a	␣
back	␣	✓	✓	✓	a	␣
␣	none	✓	✓	✓	a	␣
␣	✓	none	✓	✓	a	␣
␣	✓	✓	none	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	none	a	␣
␣	✓	✓	✓	✓	one	␣
␣	✓	✓	✓	acc	✓	␣

u	q	σ	v
␣	none	a	a a a ␣
␣ ✓	one	a	a a ␣
␣ ✓ a	even	a	a ␣
␣ ✓ a ✓	odd	a	␣
␣ ✓ a ✓ a	even	␣	␣
␣ ✓ a ✓	back	a	␣
␣ ✓ a	back	✓	a ␣
␣ ✓	back	a	✓ a ␣
␣	back	✓	a ✓ a ␣
␣	back	␣	✓ a ✓ a ␣
␣	none	✓	a ✓ a ␣
␣✓	none	a	✓ a ␣
␣✓✓	one	✓	a ␣
␣✓✓✓	one	a	␣
␣✓✓✓ a	even	␣	␣
␣✓✓✓	back	a	␣
␣✓✓	back	✓ a	␣
␣✓	back	✓	✓ a ␣
␣	back	✓	✓✓ a ␣
␣	back	␣	✓✓✓ a ␣
␣	none	✓	✓✓ a ␣
␣✓	none	✓	✓ a ␣
␣✓✓	none	✓	a ␣
␣✓✓✓	none	a	␣
␣✓✓✓✓	one	␣	␣
␣✓✓✓	acc	✓	␣

דוגמה 1.8

בדקו אם המילה

aaa

מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.6.

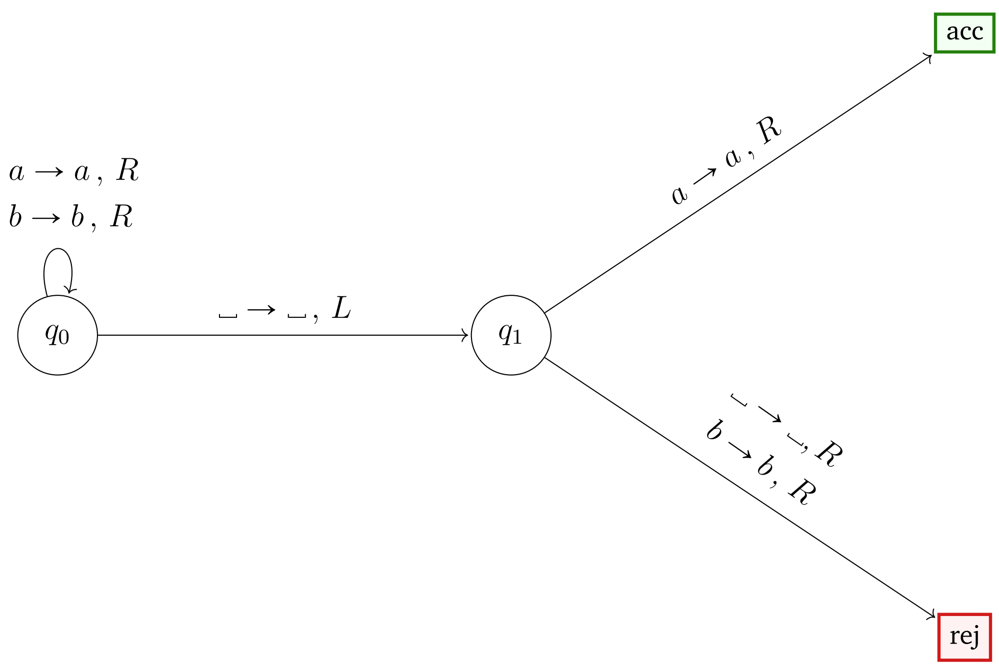
פתרון:

␣	none	a	a	a	␣
␣	✓	one	a	a	␣
␣	✓	a	even	a	␣
␣	✓	a	✓	odd	␣
␣	✓	a	✓	␣	rej

u	q	σ	v
␣	none	a	aa ␣
␣ ✓	one	a	a ␣
␣ ✓ a	even	a	␣
␣ ✓ a ✓	odd	␣	␣
␣ ✓ a ✓ ␣	rej	␣	␣

דוגמה 1.9

מהי שפת המכונה:



פתרון:

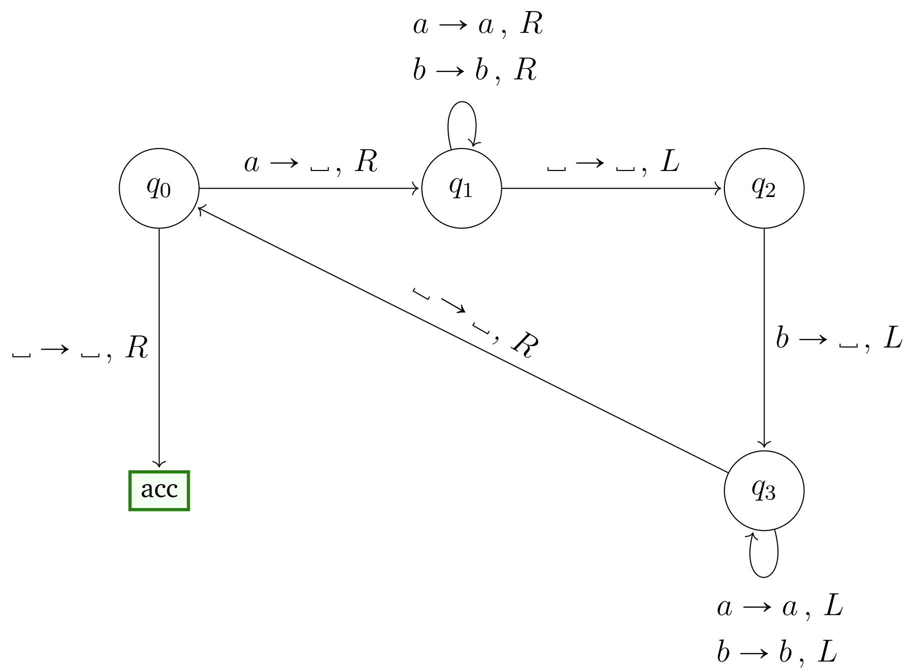
תיאור מילולי:

- במצב התחלתי q_0:
  - אם אנחנו רואים a, עוברים למשבצת הבאה לימין הראש.
  - אם אנחנו רואים b, עוברים למשבצת הבהאה לשמאל הראש.
- ממשיכים כך עד שנגיע לתו רווח, כלומר לסוף המילה, ואז עוברים למשבצת לשמאל הראש, כלומר לתו האחרון של המילה.
  - אם אנחנו רואים a, המילה מתקבלת. (ז"א התו האחרון הינו a.)
  - אם אנחנו רואים b, המילה נדחית. (ז"א התו האחרון הינו b.)
  - אם אנחנו רואים תו-רווח המילה נדחית. (ז"א המילה הינה ריקה.)

תשובה סופית: המכונה מקבלת שפת המילים המסתיימות באות a.

דוגמה 1.10

מהי שפת המכונה:



פתרון:

תיאור מילולי:

- במצב התחלתי q_0:
  - ∗ אם אנחנו רואים b, המילה נדחית.
  - ∗ אם אנחנו רואים ␣, המילה מתקבלת.
  - ∗ אם אנחנו רואים a, כותבים עליה ␣ ועוברים למשבצת הבאה לימין הראש, והמ"ט עוברת למצס q_1.
- במצב q_1 אנחנו ראינו a וכתבנו עליה ␣ .
  - ∗ אם אנחנו רואים במשבצת הבאה a או b, ממשיכים למשבצת הבאה לימין והמ"ט נשארת במצב q_1.
  - ∗ אם אנחנו רואים תו רווח (כלומר הגענו לסוף המילה) הראש זז למשבצת השמאלי, כלומר לאות האחרונה של המילה והמ"ט עוברת למצב q_2.
- במצב q_2 ראינו a בתו הראשון, כתבנו עליה ␣ והראש קורא התו האחרון.
  - ∗ אם אנחנו רואים a המילה נדחית.
  - ∗ אם אנחנו רואים ␣, המילה נדחית.
  - ∗ אם אנחנו רואים b כותבים עליה ␣ והמ"ט עוברת למצב q_3.
- במצב q_3 קראנו a בתו הראשון ומחקנו אותה, קראנו b ומחקנו אותה.
- הראש זז משבצת אחת שמאלה עד שיגיע לתו הרשאון ומ"ט חוזרת למצב התחלת q_0.

- המ"ט באופן איטרטיבי, עוברת על הקלט ובכל מעבר:
  - אם יש a בתחילת המילה מורידה אותה ומחליפה אותה עם ␣, אחרת המילה נדחית,
  - אם יש b בסופה של המילה מורידה אותה ומחליפה אותה עם ␣, אחרת המילה נדחית.
- אם לאחר מספר מעברים כאלו הסרט ריק, המ"ט מקבלת, וזה יתקיים לכל מילה ורק למילים בשפה

$$\left\{a^n b^n \middle| n \geqslant 0\right\} \ .$$

תשובה סופית: המכונה מקבלת שפת המילים

$$\left\{a^n b^n \middle| n \geqslant 0\right\} \ .$$

דוגמה 1.11

פתרון:

μ	q	σ	ν
␣ ␣	q_0	a	aaabbbb␣ ␣
␣ ␣ ␣	q_1	a	aabbbb␣ ␣
␣ ␣ ␣ a	q_1	a	abbbb␣ ␣
␣ ␣ ␣ aa	q_1	a	bbbb␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaa	q_1	b	bbb␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaab	q_1	b	bb␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaabb	q_1	b	b␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaabbb	q_1	b	␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaabbbb	q_1	␣	␣
␣ ␣ ␣ aaabbb	q_2	b	␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaabb	q_3	b	␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaab	q_3	b	b␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaa	q_3	b	bb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ aa	q_3	a	bbb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ a	q_3	a	abbb␣␣␣
␣␣␣	q_3	a	aabbb␣␣␣
␣␣	q_3	␣	aaabbb␣␣␣
␣ ␣ ␣	q_0	a	aabbb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣	q_1	a	abbb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ a	q_1	a	bbb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aa	q_1	b	bb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aab	q_1	b	b␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aabb	q_1	b	␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aabbb	q_1	␣	␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aabb	q_2	b	␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aab	q_3	b	␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aa	q_3	b	b␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ a	q_3	a	bb␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣	q_3	a	abb␣ ␣ ␣ ␣

␣ ␣ ␣	q_3	␣	aabb␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣	q_0	a	abb␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_1	a	bb␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ a	q_1	b	b␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ab	q_1	b	␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ abb	q_1	␣	␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ab	q_2	b	␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ a	q_3	b	␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_3	a	b␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣	q_3	␣	ab␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_0	a	b␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_1	b	␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣ b	q_1	␣	␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_2	b	␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_3	␣	␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_0	␣	␣ ␣ ␣ ␣ ␣

הגדרה 1.4 גרירה בצעד אחד

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M. נסמן

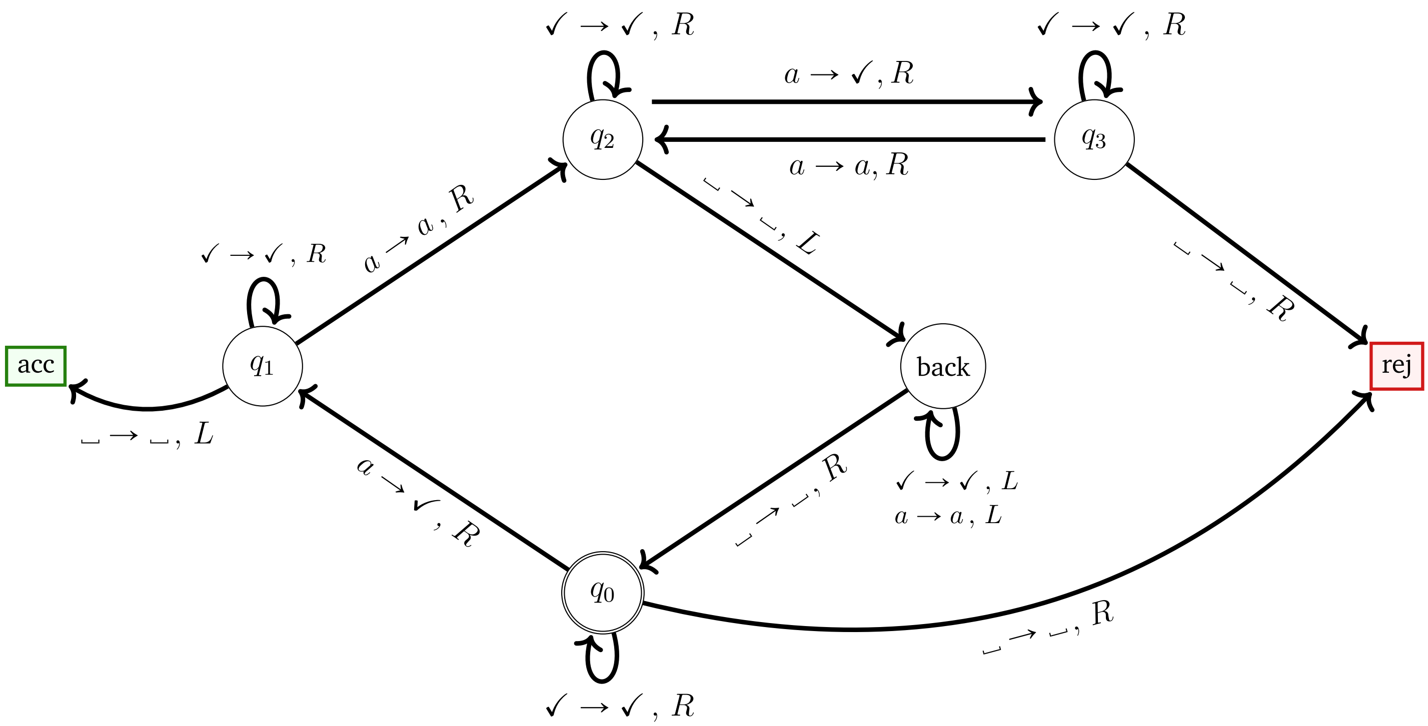
$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם כשנמצאים ב- c_1 עוברים ל- c_2 בצעד בודד.

דוגמה 1.12 (המשך של דוגמה 1.6)

במכונת טיורינג שמתואר בתרשים דמטה (אשר שווה למ"ט בדוגמה 1.6 רק עם סימנים שונים למצבים מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \ \vdash_M \ \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$



הגדרה 1.5 גרירה בכללי

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M.
נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

אם ניתן לעבור מ- c_1 ל- c_2 ב- 0 או יותר צעדים.

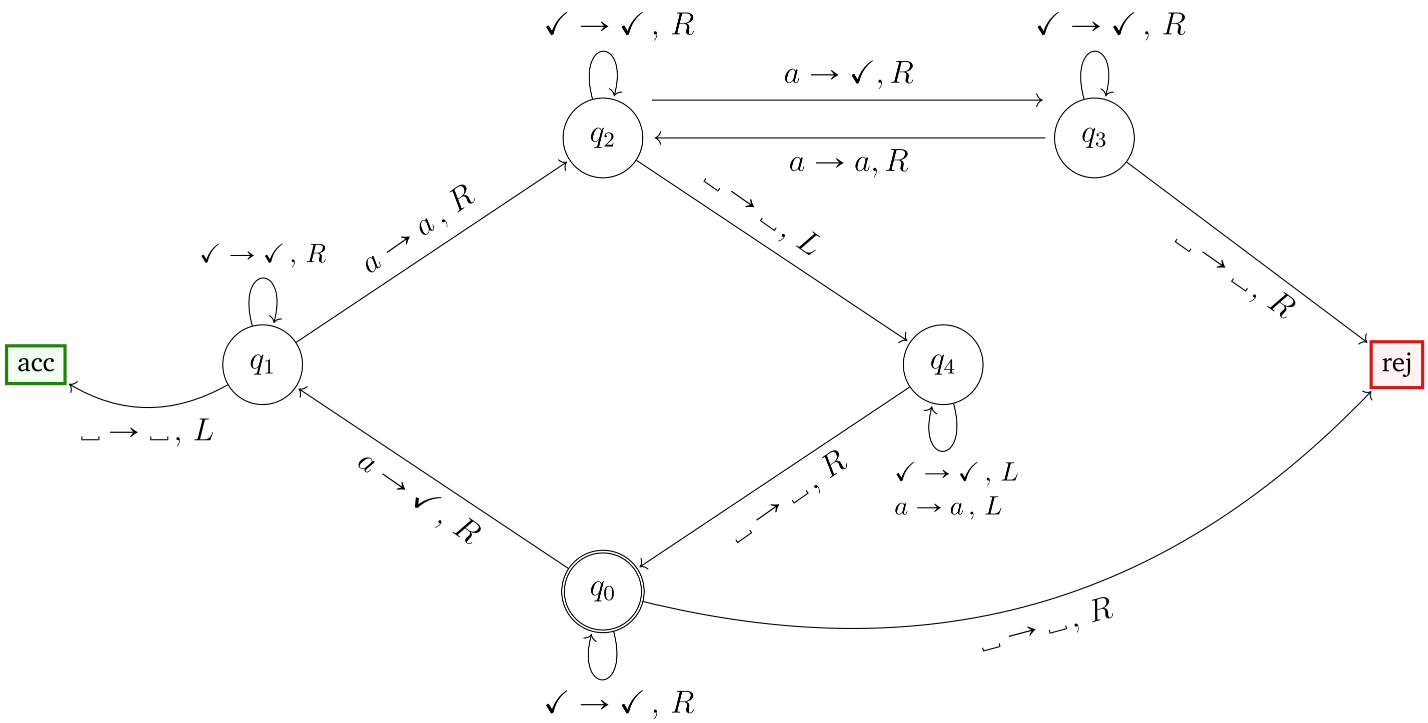
דוגמה 1.13 (המשך של דוגמה 1.6)

במכונת טיורינג שמתואר בתרשים דמטה (אשר שווה למ"ט בדוגמה 1.6 רק עם סימונים שונים למצבים)
מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \ \vdash_M^* \ \checkmark \checkmark \checkmark q_4 a$$

כי

$$\begin{aligned} \checkmark q_0 a \checkmark a \ &\vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a \\ &\vdash_M \checkmark \checkmark \checkmark q_1 a \\ &\vdash_M \checkmark \checkmark \checkmark a q_2 \ \sqcup \\ &\vdash_M \checkmark \checkmark \checkmark q_4 a \ . \end{aligned}$$



הגדרה 1.6 קבלה ודחייה של מחרוזת

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}\,, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $w \in \Sigma^*$ מחרוזת. אומרים כי:

- M **מקבלת** את w אם
$$q_0 w \quad \vdash_M^* \quad u\ q_{\text{acc}}\,\sigma\,\mathrm{v}$$
כאשר $\sigma \in \Gamma$, $u, \mathrm{v} \in \Gamma^*$ כלשהם.

- M **דוחה** את w אם
$$q_0 w \quad \vdash_M^* \quad u\ q_{\text{rej}}\ \sigma\ \mathrm{v}$$
כאשר $\sigma \in \Gamma$, $u, \mathrm{v} \in \Gamma^*$ כלשהם.

הגדרה 1.7 הכרעה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}\,, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מכריעה** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים:

- $w \in L \Leftarrow M$ מקבלת את w.
- $w \notin L \Leftarrow M$ דוחה את w.

הגדרה 1.8 קבלה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}\,, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מקבלת** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים:

- אם $w \in L$ אז M מקבלת את w.
- אם $w \notin L$ אז M לא מקבלת את w.

במקרה כזה כאשר M מקבלת את השפה L, נכתוב ש-

$$L(M) = L \ .$$

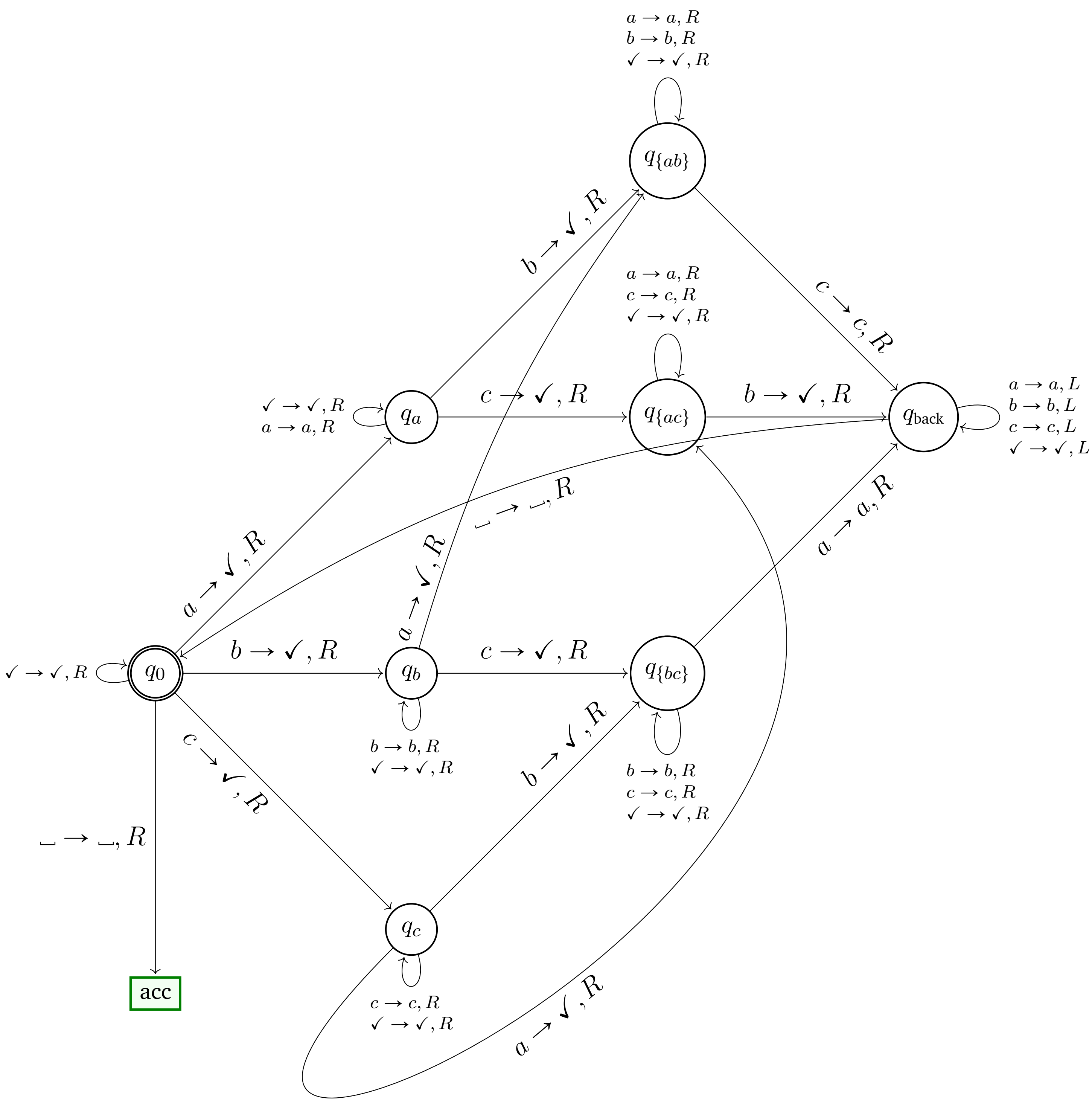
1.3 טבלת המעברים

דוגמה 1.14

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$L = \left\{ w = \{a,b,c\}^* \middle| \#a_w = \#b_w = \#c_w \right\}$$

פתרון:



$a \to a, R$
$b \to b, R$
$\checkmark \to \checkmark, R$
$q_{\{ab\}}$
$b \to \checkmark, R$
$a \to a, R$
$c \to c, R$
$\checkmark \to \checkmark, R$
$c \to c, R$
$\checkmark \to \checkmark, R$
$a \to a, R$
q_a
$c \to \checkmark, R$
$q_{\{ac\}}$
$b \to \checkmark, R$
q_{back}
$a \to a, L$
$b \to b, L$
$c \to c, L$
$\checkmark \to \checkmark, L$
$\sqcup \to \sqcup, R$
$a \to \checkmark, R$
$a \to \checkmark, R$
$a \to a, R$
$\checkmark \to \checkmark, R$
q_0
$b \to \checkmark, R$
q_b
$c \to \checkmark, R$
$q_{\{bc\}}$
$b \to b, R$
$\checkmark \to \checkmark, R$
$c \to \checkmark, R$
$b \to \checkmark, R$
$b \to b, R$
$c \to c, R$
$\checkmark \to \checkmark, R$
$\sqcup \to \sqcup, R$
q_c
acc
$c \to c, R$
$\checkmark \to \checkmark, R$
$a \to \checkmark, R$

מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
$q.S$	σ	$q.\left(S \cup \{\sigma\}\right)$	$\checkmark$	R	$\sigma \notin S$
$q.S$	σ	$q.S$		R	$\sigma \in S$
$q/\{a,b,c\}$	$a,b,c,\checkmark$	back		L	
$q.\varnothing$	␣	acc		R	
back	$a,b,c,\checkmark$	back		L	
back	␣	$q.\varnothing$		R	

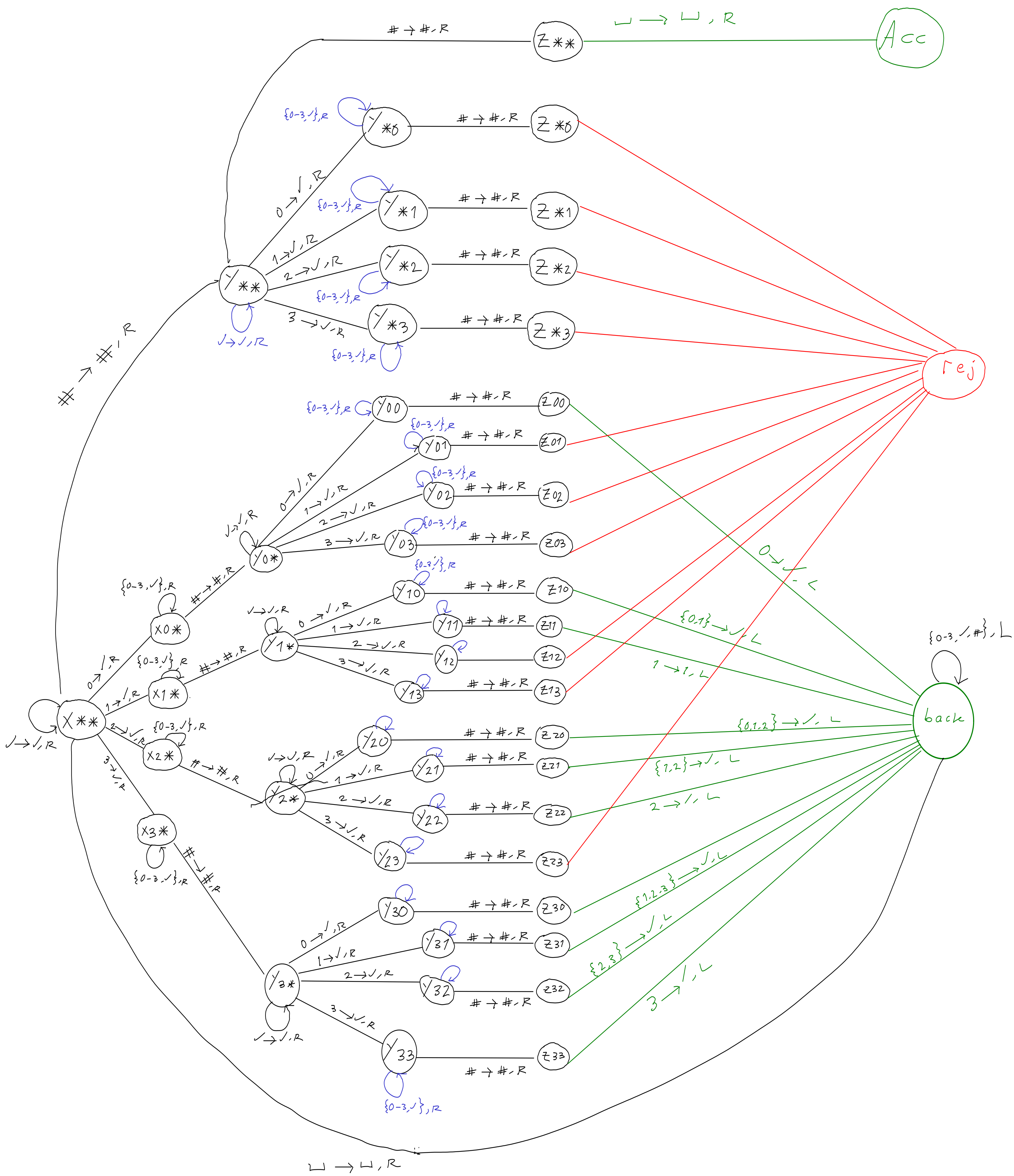
דוגמה 1.15

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$\left\{x_1 \ldots x_k \# y_1 \ldots y_k \# z_1 \ldots z_k \;\middle|\; x_i, y_i, z_i \in \{0, \ldots, 3\}\ ,\ \forall i, x_i \geqslant z_i \geqslant y_i\right\}$$

פתרון:

$$L=\{x_1x_2\#y_1y_2\#z_1z_2 \mid x_i,y_i,z_i\in\{0,1,2,3\}\ \forall i\ x_i\ge z_i\ge y_i\}$$



מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
$X**$	σ	$X\sigma*$	$\checkmark$	R	
$X**$	$\checkmark$	$X**$	$\checkmark$	R	
$X\sigma*$	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	$X\sigma*$		R	
$X\tau*$	#	$Y\tau*$		R	
$Y\tau*$	σ	$Y\tau\sigma$		R	
$Y\tau*$	$\checkmark$	$Y\tau*$		R	
$Y\tau\sigma$	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	$Y\tau\sigma$		R	
$Y\tau_1\tau_2$	#	$Z\tau_1\tau_2$		R	
$Z\tau_1\tau_2$	$\checkmark$	$Z\tau_1\tau_2$		R	
$Z\tau_1\tau_2$	σ	back	$\checkmark$	L	
$Z**$	$\sqcup$	acc		R	
back	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	back		L	
back	$\sqcup$	$X**$		R	

1.4 חישוב פונקציות

הגדרה 1.9 מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה f

תהי $f:\Sigma_1^*\to\Sigma_2^*$ ותהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{\text{acc}},q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג.
אומרים כי M מחשבת את f אם:

- $\Sigma_1=\Sigma$ ו- $\Sigma_2\subset\Gamma$.
- לכל $w\in\Sigma_1^*$ מתקיים $q_0w\vdash q_{\text{acc}}f(w)$.

דוגמה 1.16 חיבור אונרי

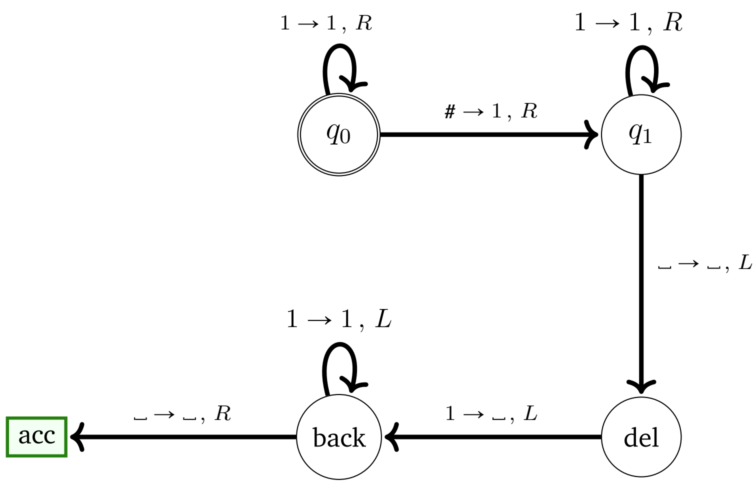
בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i\#1^j$$

ומחזירה את פלט

$$1^{i+j}\ .$$

פתרון:



דוגמה 1.17 כפל אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

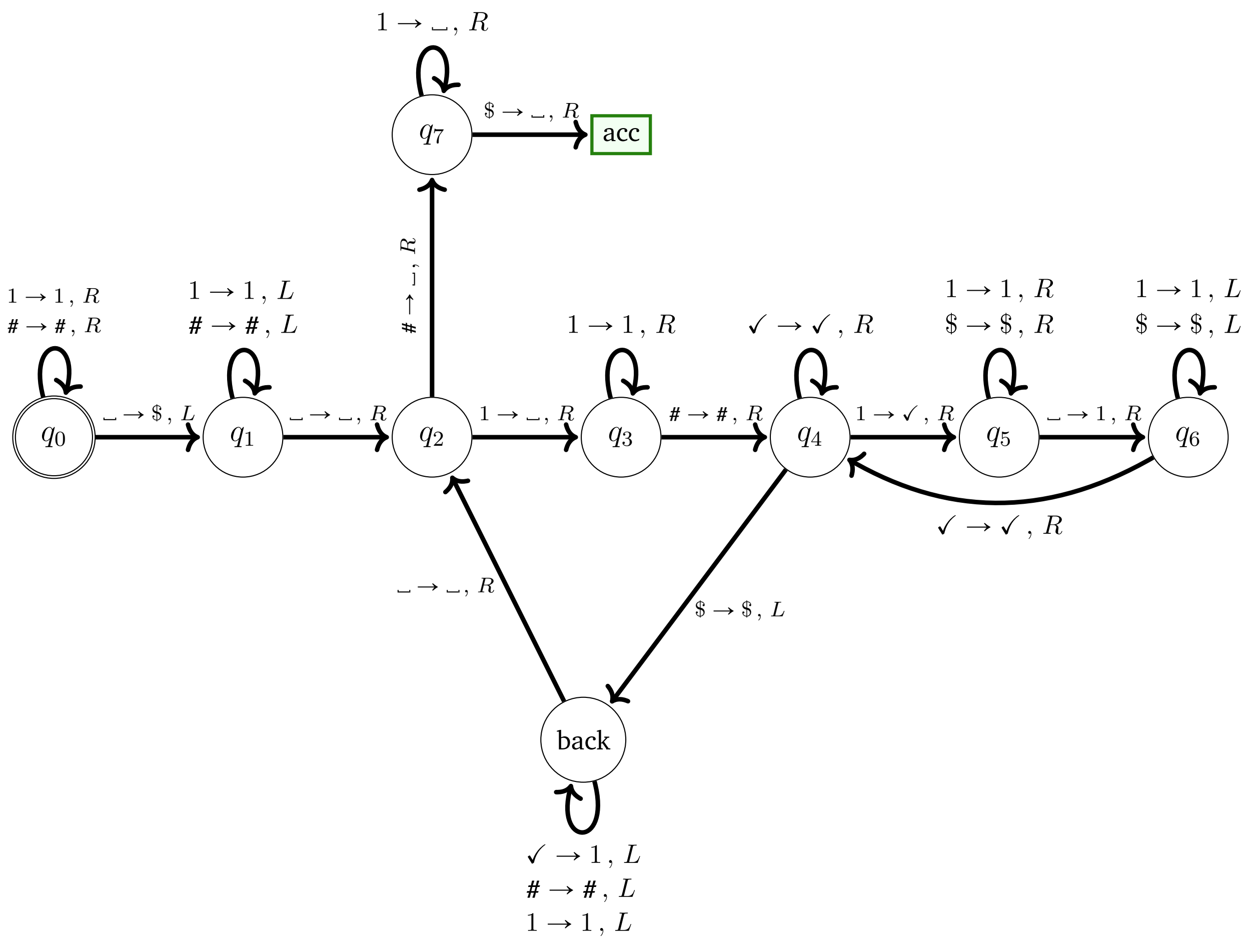
$$1^i\#1^j$$

ומחזירה את פלט

$$1^{i\cdot j}\ .$$

פתרון:

- לדוגמה, נניח שהקלט הוא 2 כפול 2.
  הקלט הוא 11#11.
- נרצה להבדיל בין הקלט לבין הפלט.
  לכן בתחילת הריצה, נתקדם ימינה עד סוף הקלט ונוסיף שם את התו $.
  לאחר מכן נחזור לתחילת הקלט.
- על כל אות 1 במילה השמאלית נעתיק את המילה הימינית לאחר סימן ה- $.
- לאחר מכן נשאיר רק את התווים שלאחר סימן ה $. כלומר, נמחק את כל מה שאינו פלט.



μ	q	σ	ν
␣	q_0	1	1#11␣
␣11#11	q_1	␣	␣
␣11#11	q_1	$	␣
␣	q_1	␣	11#11$
␣	q_2	1	1#11$
␣ ␣	q_3	1	#11$
␣ ␣1#	q_4	1	1$
␣ ␣1#✓	q_5	1	$
␣ ␣1#✓1$	q_5	␣	␣
␣ ␣1#✓1$1	q_6	␣	␣
␣ ␣1#	q_6	✓	1$1 ␣
␣ ␣1#✓	q_4	1	$1 ␣
␣ ␣1#✓✓	q_5	$	1 ␣
␣ ␣1#✓✓$1	q_5	␣	␣
␣ ␣1#✓✓$11	q_6	␣	␣
␣ ␣1#✓	q_6	✓	$11␣
␣ ␣1#✓✓	q_4	$	11␣
␣ ␣1#✓	back	✓	$11␣
␣	back	␣	1#11$11␣
␣ ␣	q_2	1	#11$11␣
␣ ␣ ␣	q_3	#	11$11␣
␣ ␣ ␣#	q_4	1	1$11␣

␣␣␣#✓	q_5	1	$\$$11␣
␣␣␣#✓1$\$$11	q_5	␣	␣
␣␣␣#✓1$\$$111	q_6	␣	␣
␣␣␣#	q_6	✓	1$\$$111␣
␣␣␣#✓	q_4	1	$\$$111␣
␣␣␣#✓✓	q_5	$\$$	111␣
␣␣␣#✓✓$\$$111	q_5	␣	␣
␣␣␣#✓✓$\$$1111	q_6	␣	␣
␣␣␣#✓	q_4	✓	$\$$1111
␣␣␣#✓✓	q_4	$\$$	1111
␣␣␣#✓	back	✓$\$$	1111
␣␣	back	␣	#11$\$$1111
␣␣␣	q_2	#	11$\$$1111
␣␣␣␣	q_7	1	1$\$$1111
␣␣␣␣␣␣	q_7	$\$$	1111
␣␣␣␣␣␣␣	acc	1	111