שעור 11
משפט הפירוק הפרימרי

11.1 הגדרה של חיתוך וסכום של תתי מרחבים

משפט 11.1 חיתוך של תת מרחב

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, V_1, V_2 תתי מרחבים של V. אז $V_1\cap V_2$ היא תת מרחב של V.

הוכחה:

1) V_1, V_2 תת מרחבים $\Leftarrow$ $\bar{0}\in V_1$ וגם $\bar{0}\in V_2$ $\Leftarrow$ $\bar{0}\in V_1\cap V_2$.

2) נניח $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\in V_1\cap V_2$.
אז $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\in V_1$ וגם $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\in V_2$.
V_1 תת מרחב $\Leftarrow$ $\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\in V_1$.
V_2 תת מרחב $\Leftarrow$ $\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\in V_2$.
ז"א $\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\in V_1\cap V_2$.

3) נניח $\mathrm{v}\in V_1\cap V_2$ ו $k\in\mathbb{F}$ סקלר.
אז $\mathrm{v}\in V_1$ ו $\mathrm{v}\in V_2$.
V_1 תת מרחב לכן $k\cdot\mathrm{v}\in V_1$.
V_2 תת מרחב לכן $k\cdot\mathrm{v}\in V_2$.
ז"א $k\cdot\mathrm{v}\in V_1\cap V_2$.

■

דוגמה 11.1

עבור V_1,V_2 תתי מרחבים של מרחב ווקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$, האם $V_1\cup V_2$ בהכרח תת מרחב של V?

פתרון:

<u>דוגמה נגדית:</u>
$V=\mathbb{R}^2$.

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\middle|x\in\mathbb{R}\right\}\ ,\qquad V_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}\middle|x\in\mathbb{R}\right\}\ .$$

אז $\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in V_1$, $\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in V_2$, אבל $\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\notin V_1\cup V_2$.

משפט 11.2 תת מרחב הקטן ביותר

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, V_1, V_2 תתי מרחבים של V. אז הקבוצה

$$W = \{\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 | \mathrm{v}_1 \in V_1, \mathrm{v}_2 \in V_2\}$$

היא תת מרחב הקטן ביותר שמכיל את V_1 ו V_2.
ז"א לכל תת מרחב W' שמכיל את V_1 ו V_2, מתקיים $W \subseteq W'$.

הוכחה:

1) נוכיח ש W תת מרחב של V.

א) $V_1 \ni \bar{0}$ וגם $\bar{0} \in V_2$. לכן

$$\bar{0} = \bar{0} + \bar{0} \in W \ .$$

ב) נניח $w_1 = u_1 + u_2 \in W$, $w_2 = \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \in W$.
אז $u_1, \mathrm{v}_1 \in V_1$ וגם $u_2, \mathrm{v}_2 \in V_2$.
V_1, V_2 תתי מרחבים.
לכן $u_1 + \mathrm{v}_1 \in V_1$, וגם $u_2 + \mathrm{v}_2 \in V_2$.
מכאן

$$w_1 + w_2 = (u_1 + u_2) + (\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2) = (u_1 + \mathrm{v}_1) + (u_2 + \mathrm{v}_2) \in W \ .$$

ג) נניח $w = u_1 + u_2 \in W$ ו $k \in \mathbb{F}$. אז $u_1 \in V_1$ ו $u_2 \in V_2$. V_1, V_2 תתי מרחבים, לכן $ku_1 \in V_1$, $ku_2 \in V_2$. מכאן

$$kw = k(u_1 + u_2) = ku_1 + ku_2 \in W$$

2) נוכיח כי W התת מרחב הקטן ביותר

ברור כי W מכיל את V_1 ו V_2 כי
לכל $u \in V_1$, $u = u + \bar{0} \in W$
וגם לכל $u \in V_2$, $u = \bar{0} + u \in W$.
נוכיח ש W הוא תת מרחב הקטן ביותר שמכיל את V_1 ו V_2.
נניח ש W' איזשהו תת מרחב שמכיל את V_1 ו V_2.
נוכיח כי $W \subseteq W'$.
נקח וקטור $w \in W$. אז $w = u_1 + u_2$, כאשר $u_1 \in V_1$, $u_2 \in V_2$.
$W' \ni V_1 \Leftarrow u_1 \in W'$.
$W' \ni V_2 \Leftarrow u_2 \in W'$.
W' תת מרחב, לכן $w = u_1 + u_2 \in W'$.
מש"ל.

■

למה 11.1

למרחב W של משפט 11.2 (המשפט הקודם) נקרא הסכום של V_1 ו V_2 ומסומן ב $V_1 + V_2$.

משפט 11.3 סכום של תת מרחב שווה לפרישה של האיחוד

$$V_1 + V_2 = \text{span}\left(V_1 \cup V_2\right) \ .$$

הוכחה: נוכיח כי $V_1 + V_2 \subseteq \text{span}\left(V_1 \cup V_2\right)$:

$V_1, V_2 \subseteq \text{span}\left(V_1 \cup V_2\right)$

לכן, לפי משפט 11.2,

$$V_1 + V_2 \subseteq \text{span}\left(V_1 \cup V_2\right) \ .$$

נוכיח כי $\text{span}\left(V_1 \cup V_2\right) \subseteq V_1 + V_2$:

נניח $w \in \text{span}\left(V_1 \cup V_2\right)$. אז קיימים $u_1, \ldots, u_k \in V_1$ ו $\text{v}_1, \ldots, \text{v}_n \in V_2$ וסקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$ כך ש

$$w = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k + \beta_1 \text{v}_1 + \cdots + \beta_n \text{v}_n \ .$$

אז $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k \in V_1$ וגם $\beta_1 \text{v}_1 + \cdots + \beta_n \text{v}_n \in V_2$.

לכן $w \in V_1 + V_2$.

הוכחנו כי $V_1 + V_2 \subseteq \text{span}\left(V_1 \cup V_2\right)$ וגם $\text{span}\left(V_1 \cup V_2\right) \subseteq V_1 + V_2$ $\Leftarrow$

$$V_1 + V_2 = \text{span}\left(V_1 \cup V_2\right) \ .$$

■

דוגמה 11.2

נקח את המרחב ווקטורי $V = \mathbb{R}^3$. נקח את התתי מרחבים $\mathbb{R}^3$: $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$, ו $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{R} \right\}$, קווים ישרים ב $\mathbb{R}^3$. אז הסכום שלהם הינו

$$V_1 + V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\} \ ,$$

ומהווה את המישור $z = 0$ ב $\mathbb{R}^3$.

11.2 משפט המימדים של סכום וחיתוך

משפט 11.4 משפט המימדים

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, V_1, V_2 תתי מרחבים של V. אז

$$\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1\cap V_2)$$

הוכחה: נסמן $\dim(V_1)=k$, $\dim(V_2)=n$, $\dim(V_1\cap V_2)=m$.
$V_1\cap V_2\subseteq V_1$ לכן $m\leq k$.
$V_1\cap V_2\subseteq V_2$ לכן $m\leq n$.
נבחר בסיס $u_1,\ldots,u_m$ של $V_1\cap V_2$.
נשלים אותו לבסיס של V_1 ונקבל
$u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m}$.
נשלים אותו גם לבסיס של V_2:
$u_1,\ldots,u_m,b_1,\ldots,b_{n-m}$.

נוכיח כי $V_1+V_2=\text{span}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}.\right)$:

נניח $w=\text{v}_1+\text{v}_2\in V_1+V_2$. אז

$$\text{v}_1=\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_mu_m+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}\in V_1\ ,$$
$$\text{v}_2=\alpha'_1u_1+\ldots+\alpha'_mu_m+\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}\in V_2\ .$$

אז

$$\begin{aligned}\text{v}_1+\text{v}_2=&\left(\alpha_1+\alpha'_1\right)u_1+\ldots+\left(\alpha_m+\alpha'_m\right)u_m\\&+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}\\&+\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}\end{aligned}$$

ז"א

$$\text{v}_1+\text{v}_2\in\text{span}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\right)$$

נוכיח את ההכלה ההפוכה, כלומר $\text{span}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\right)\in V_1+V_2$:

נניח

$$w\in\text{span}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\right)$$

אז קיימים סקלרים $\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots,\beta_{k-m},\gamma_1,\ldots,\gamma_{n-m}$ כך ש

$$w=\alpha_1u_1+\ldots\alpha_mu_m+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}+\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}$$

נסמן

$$\begin{aligned}\text{v}_1=&\alpha_1u_1+\ldots\alpha_mu_m+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}\\\text{v}_2=&\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}\end{aligned}$$

אז

$$\text{v}_1\in V_1,\qquad\text{v}_2\in V_2,\qquad w=\text{v}_1+\text{v}_2$$

כלומר $w\in V_1+V_2$.

נשאר להוכיח שוקטורים $\{u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\}$ בת"ל:

נניח:

$$\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k-m} a_{k-m} + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{n-m} b_{n-m} = \bar{0} \ . \tag{*1}$$

אז

$$\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k-m} a_{k-m} = -\gamma_1 b_1 - \ldots - \gamma_{n-m} b_{n-m} := \mathrm{v}. \tag{*2}$$

הוקטור באגף השמאל שייך ל V_1.
הוקטור באגף הימין שייך ל V_2.
לכן, לפי (*2) $\mathrm{v} \in V_1 \cap V_2$. $u_1, \ldots, u_m$ בסיס של $V_1 \cap V_2$ (נתון) . לכן קיימים סקלרים $\delta_1, \ldots, \delta_m$ כך ש

$$\mathrm{v} = \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m \ .$$

לכן

$$\begin{aligned} \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{n-m} b_{n-m} =& \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m - (-\gamma_1 b_1 - \ldots - \gamma_{n-m} b_{n-m}) \\ =& \mathrm{v} - \mathrm{v} \\ =& \bar{0} \ , \end{aligned}$$

ז"א

$$\delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{n-m} b_{n-m} = \bar{0} \ . \tag{*3}$$

$u_1, \ldots u_m, b_1, \ldots, b_{n-m}$ בסיס של V_2 (נתון) . לכן הם בת"ל. לכן (*3) מתקיים רק אם

$$\delta_1 = \ldots = \delta_m = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{n-m} = 0 \ . \tag{*4}$$

מכאן מקבלים מ (*1) כי

$$\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k-m} a_{k-m} = \bar{0} \ . \tag{*5}$$

$u_1, \ldots u_m, a_1, \ldots, a_{k-m}$ בסיס של V_1 (נתון) , לכן הם בת"ל.
לכן (*5) מתקיים רק אם

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \beta_1 = \ldots = \beta_{k-m} = 0. \tag{*6}$$

לכן, בגלל שהמקדמים ב (*1) כולם שווים ל 0, כפי שהוכחנו ב (*4) ו (*6), אז הוקטורים
$u_1, \ldots u_m, a_1, \ldots, a_{k-m}, b_1, \ldots . b_{n-m}$ בת"ל. כלומר הם מהווים בסיס של $V_1 + V_2$.
מכאן

$$\dim(V_1 + V_2) = m + (k-m) + (n-m) = k + n - m = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

מש"ל. ■

מסקנה 11.1

נניח $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ תתי מרחבים ממימד 2, אז $\dim(V_1 \cap V_2) > 0$.

הוכחה: V_1, V_2 תתי מרחבים של $\mathbb{R}^3$, לכן $\dim(V_1 + V_2) \leq 3$. לפי משפט 11.4,

$$4 = \dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) \leq 3 + \dim(V_1 \cap V_2)$$

■

11.3 סכום ישר

הגדרה 11.1 סכום ישר

יהיו U_1 ו U_2 שני תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$.
תת מרחב W של מרחב וקטורי V נקרא סכום ישר של U_1 ו U_2 אם ורק אם מתקיימים:

א) $W = U_1 + U_2$

ב) לכל וקטור של W יש הצגה יחידה כסכום של וקטורים ב U_1 וב U_2.

סימון:

$$W = U_1 \oplus U_2$$

הסכום הישר של U_1, U_2.

משפט 11.5

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, U ו W תת מרחבים של V. אז $V = U \oplus W$ אם ורק אם

א) $V = U + W$

ב) $U \cap W = \{\bar{0}\}$.

הוכחה:

1) נניח כי $V = U \oplus W$. אז לפי הגדרה 11.1, סכום ישר $V = U + W$. נשאר להוכיח כי $U \cap W = \{\bar{0}\}$.
נניח $\mathrm{v} \in U \cap W$, אז $\mathrm{v} \in U$ וגם $\mathrm{v} \in W$. לכן אפשר לרשום

$$\mathrm{v} = \underset{\in U}{\mathrm{v}} + \underset{\in W}{\bar{0}}$$

וגם

$$\mathrm{v} = \underset{\in U}{\bar{0}} + \underset{\in W}{\mathrm{v}}$$

מכיוון שהסכום הוא ישר, יש רק דרך יחידה לרשום את v כסכום של וקטורים של U ו W. לכן $\mathrm{v} = \bar{0}$.

2) נניח כי $V = U + W$ וגם $U \cap W = \{\bar{0}\}$.
נוכיח כי $V = U \oplus W$.

לפי הגדרת סכום ישר 11.1, נשאר להוכיח כי כל וקטור $\mathrm{v} \in V$ ניתן להציג בדרך יחידה כסכום של וקטורים של U ו W.
נקח $\mathrm{v} \in V$. נניח כי $\mathrm{v} = u_1 + \mathrm{w}_1$ וגם $\mathrm{v} = u_2 + \mathrm{w}_2$ כאשר $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$.
אז

$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \qquad \Rightarrow \qquad u_1 - u_2 = w_2 - w_1$$

(כאשר $u_1 - u_2 \in U$ ו $w_2 - w_1 \in W$. לכן

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{\bar{0}\} \ .$$

מכאן, $u_1 - u_2 = \bar{0}$ וגם $w_2 - w_1 = \bar{0}$.
לכן $u_1 = u_2$ וגם $w_1 = w_2$.