

עבודה עצמית 5 מישורים

שאלה 1

- (א) מצאו את משוואת המישור העובר דרך ראשית הצירים והנקודות $P(4, -2, 1), Q(2, 4, -3)$.
- (ב) מצאו את משוואת המישור העובר דרך נקודת החיתוך של המישורים $2x - y + 3z - 3 = 0, 2x + 2y + z - 7 = 0$ והנקודות $P(0, 3, 0), Q(1, 1, 1)$.
- (ג) מצאו את משוואת המישור העובר דרך הישר $\left. \begin{aligned} x + 5y + 9z - 13 &= 0 \\ 3x - y - 5z + 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$ והנקודה $M(0, 2, 1)$.
- (ד) מצאו את משוואת המישור העובר דרך הישר $\left. \begin{aligned} 3x + y - 7z &= 2 \\ 2x - y - 12z &= 3 \end{aligned} \right\}$ ומאונך למישור $x + 2y + 5z = 1$.
- (ה) תמצאו את משווא המישור ואת משוואת הספירה (כדור) שמרכזו בראשית הצירים, המשיקים זה לזה בנקודה $P(2, 2, 1)$.

נתון לשאלות 2-4 נתון: $A(2, 2, 2), B(0, 2, 4), C(4, 0, 2), D(2, -2, 2)$.

שאלה 2

- (א) מצאו את המרחק מהנקודה A למישור BCD .
- (ב) מצאו את ההיטל ואת השיקוף של נקודה A על המישור BCD .
- (ג) מצאו את הזווית בין המישור $2x + y - 2z - 4 = 0$ לבין צירי המערכת.
- (ד) קבעו האם הישרים AB ו- CD מצטלבים ומצאו את הנקודות הקרובות ביותר עליהם.

שאלה 3

- (א) מצאו את הזווית בין שני הישרים הבאים: $\left. \begin{aligned} x &= t - 2 \\ y &= 2 - 2t \\ z &= 2t \end{aligned} \right\} \text{ ו- } \left. \begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned} \right\}$
- (ב) מצאו את ההיטל של נקודה B על הישר CD .

שאלה 4

- (א) הוכיחו שווקטור $\vec{n} = (4, 6, 8) \times (-1, 1, -2)$ קולינארי (מקביל) לישר $\left. \begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 6 \\ x - y + 2z &= 2 \end{aligned} \right\}$
- (ב) רשמו את המשוואה הפרמטרית של הישר הנתון כחיתוך של שני המישורים $\left. \begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ 2x - z &= 2 \end{aligned} \right\}$ וחשבו את הזווית בין ישר זה לבין המישור $x = 2$.

ג) רשמו את משוואת ההיטל של הישר AD על המישור ABC .

שאלה 5 על המישור yz מצאו את הנקודה P כך שסכום המרחקים ממנה לנקודות $A(2, 4, 6), B(6, 2, 2)$ יהיה מינימלי.

שאלה 6 מצאו את המישור שעובר דרך הנקודות $P(1, 2, -1), Q(2, 4, 3), R(7, 0, 5)$.

שאלה 7 מצאו את משוואת המישור שמכיל את שני הוקטורים $\vec{a} = (1, 2, 0), \vec{b} = (3, 0, 4)$ ועובר דרך הנקודה $P(1, 0, 5)$.

שאלה 8 מצאו את משוואת המישור שמאונך לשני המישורים

$$\pi_1: 2x - y + 4z + 1 = 0, \quad \pi_2: 3x + 7y - z + 2 = 0.$$

ועובר דרך הנקודה $P(1, 2, 0)$.

שאלה 9 שרטטו את המישור המוגבל ע"י המישורים

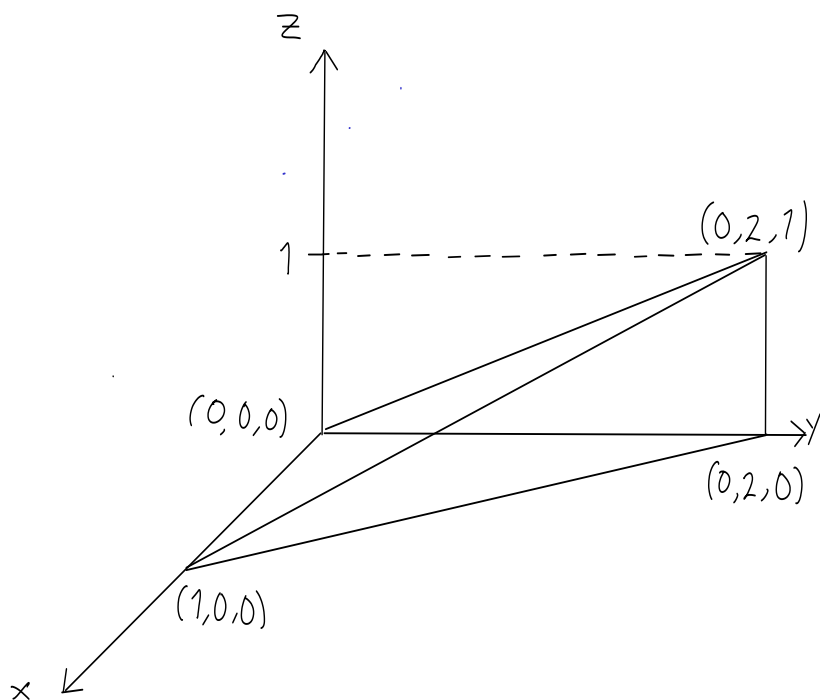
$$x = 0, \quad z = 0, \quad y - 2z = 0, \quad y = 2 - 2x.$$

שאלה 10 שרטטו את הגוף במרחב xyz המוגבל ע"י המישורים

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y = 2, \quad z = y + 1.$$

שאלה 11 ציירו את הגוף המוגבל על ידי המישורים $z = 0, y = 0, x = 1, y = x, z = x - y + 3$.

שאלה 12 מהן משוואות המישורים המגבילים את הגוף הבא:



שאלה 13 בהינתן הנקודות

$$A(1, 0, 1), \quad B(1, 2, -1), \quad C(0, 1, -1), \quad A(k^2, k-2, k).$$

מצאו את הערך k עבורו הנקודה D תהיה הקרובה ביותר למישור ABC וחשבו את נפח הפירמידה $ABCD$.

שאלה 14 חשבו את נפח הפירמידה המושלשת אשר חשומה ע"י המישורים:

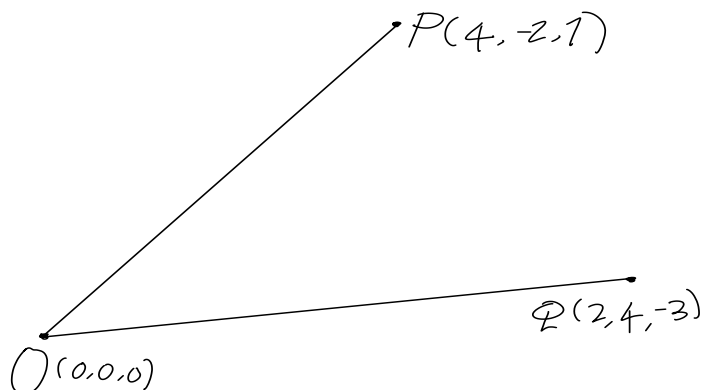
$$x + y = 2, \quad x - y = 4, \quad 2y + z = 4, \quad z = 0.$$

שאלה 15 נתונות שתי הנקודות $A(1, 1, 4), B(2, 4, 2)$. מצאו את הנקודה M על המישור xy כך שהיקף המשולש ABM יהיה מינימלי.

פתרונות

שאלה 1

(א)



$$\overline{OQ} = (2, 4, -3), \overline{OP} = (4, -2, 1)$$

$$\overline{OP} \times \overline{OQ} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (2, 14, 20)$$

לכן $(2, 14, 20) = 2 \cdot (1, 7, 10)$ וקטור הנורמל של המישור, ולכן גם $(1, 7, 10)$ וקטור הנורמל של המישור. משוואת המישור היא

$$x + 7y + 10z + D = 0.$$

נמצאו את המספר D ע"י להציב נקודה שנמצאת במישור במשוואת המישור. נתון כי המישור עובר דרך הנקודה $(0, 0, 0)$ לכן נציב $(0, 0, 0)$ ונקבל

$$0 + 7 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0.$$

לכן משוואת המישור היא

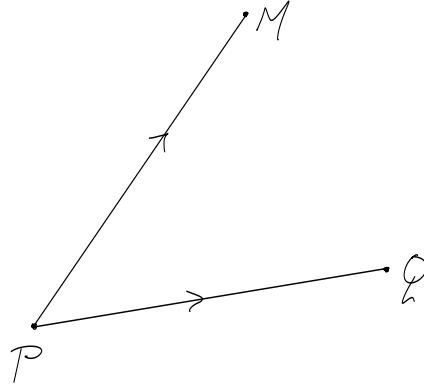
$$x + 7y + 10z = 0.$$

(ב) נמצא את נקודת החיתוך של המישורים:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & 5 & -2 & 12 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow 3R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow R_1 - R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 + 4R_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

נקודות חיתוך: $(x, y, z) = (1, 2, 1)$. נמצא את משוואת המישור העובר דרך נקודות $M(1, 2, 1)$, $Q(1, 1, 1)$, $P(0, 3, 0)$.



$$\overrightarrow{PQ} = (1, -2, 1), \overrightarrow{PM} = (1, -1, 1)$$

$$\overrightarrow{PM} \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, -1)$$

לכן הנורמל למישור הוא $\vec{n} = (1, 0, -1)$ ומשוואת המישור היא

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Rightarrow (x-1)+0(y-2)+(-1)(z-1)=0 \Rightarrow x-z=0.$$

$$\left. \begin{aligned} x+5y+9z-13 &= 0 \\ 3x-y-5z+1 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ נבחר שתי נקודות על הישר} \quad (ג)$$

$$\left. \begin{aligned} x+5y &= 13 \\ 3x-y &= -1 \end{aligned} \right\} \Leftarrow z=0 \text{ נציב } P\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0\right) \text{ קיבלנו נקודה } y = \frac{5}{2}, x = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} x+5y &= 4 \\ 3x-y &= 4 \end{aligned} \right\} \Leftarrow z=1 \text{ נציב } P\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \text{ קיבלנו נקודה } y = \frac{1}{2}, x = \frac{3}{2}$$

נמצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודות P, Q, M . $\overrightarrow{PQ} = (1, -2, 1)$, $\overrightarrow{PM} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PM} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} \cdot (1, 1, 1)$$

לכן $\vec{n} = (1, 1, 1)$ הוא וקטור הנורמל למישור. נבחר את הנקודה $M(0, 2, 1)$. משוואת המישור היא

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Rightarrow 1 \cdot (x-0) + 1 \cdot (y-2) + 1 \cdot (z-1) = 0 \Rightarrow x+y+z-3=0.$$

$$\left. \begin{aligned} 3x+y-7z &= 2 \\ 2x-y-12z &= 3 \end{aligned} \right\} \text{ המישור עובר דרך הישר} \quad (ד)$$

ומאונך למישור $x+2y+5z=1$. נמצא את וקטור הכיוון של הישר:

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -7 \\ 2 & -1 & -12 \end{vmatrix} = (-15, 22, -5).$$

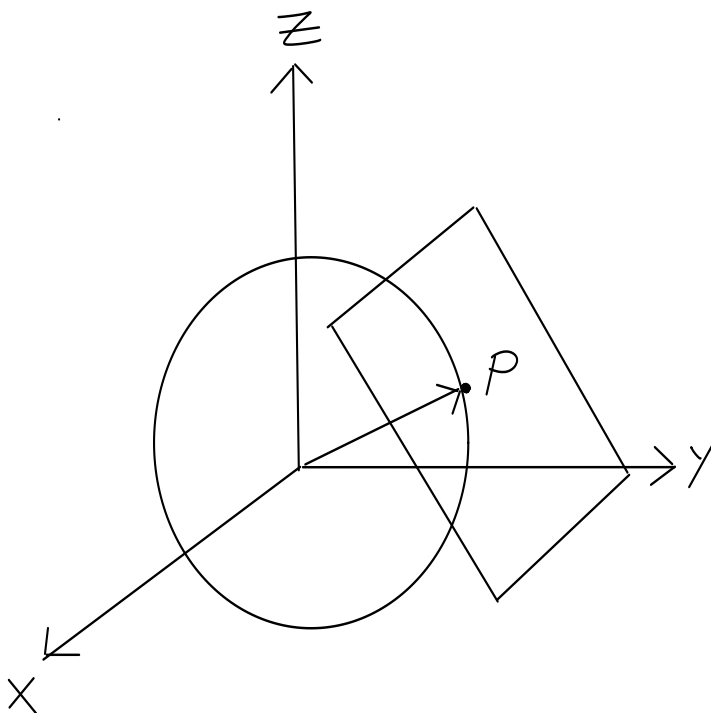
המישור המבוקש מאונך למישור $x + 2y + 5z = 1$, לכן הוקטור $\vec{b} = (1, 2, 5)$ מקביל למישור המבוקש. נמצא את וקטור הנורמל:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -15 & 22 & -5 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (120, 90, 60) = 30 \cdot (4, 3, 2)$$

לכן וקטור הנורמל של המישור הוא $\vec{n} = (4, 3, 2)$. נמצא נקודה על המישור. נציב $z = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ קיבלנו את הנקודה $P(1, -1, 0)$. משוואת המישור:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0 \Rightarrow 4 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y + 1) + 2 \cdot (z - 0) = 0 \Rightarrow 4x + 3y + 2z - 1 = 0.$$

(ה)



מרכזו של הכדור הוא הנקודה $(0, 0, 0)$. נסמן את הראשית הצירים ב- $O(0, 0, 0)$. הוקטור הנורמל של המישור הוא $\vec{OP} = (2, 2, 1)$. משוואת המישור היא

$$2(x - 2) + 2(y - 2) + z - 1 = 0 \Rightarrow 2x + 2y + z - 9 = 0.$$

הרדיוס של הספירה הוא

$$R = |\vec{OP}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3.$$

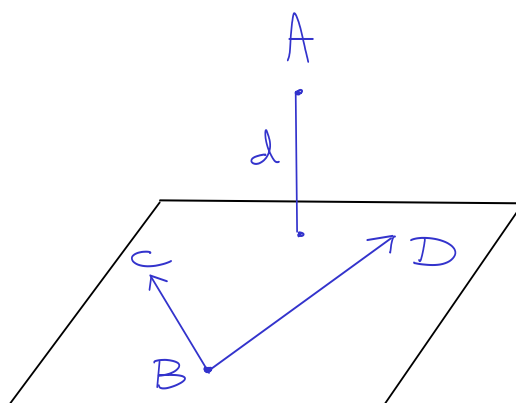
לכן משוואת הספירה היא:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

שאלה 2

(א)

$$A(2, 2, 2), \quad B(0, 2, 4), \quad C(4, 0, 2), \quad D(2, -2, 2).$$



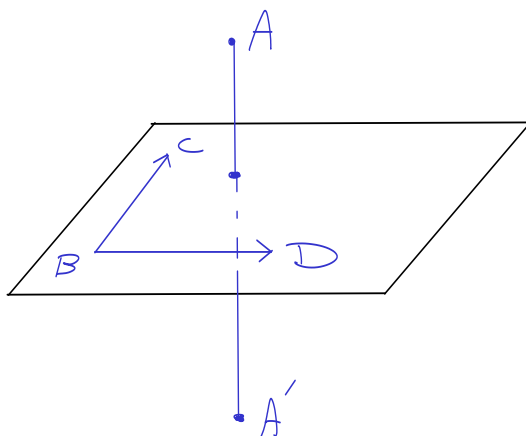
$$\overrightarrow{BC} = (4, -2, -2), \quad \overrightarrow{BD} = (2, -4, -2)$$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 4i + 4j - 12k.$$

לכן הוקטור הנורמל של המישור הוא

$$\bar{n} = (1, -1, 3).$$

(ב)



$$\overline{BC} = (4, -2, -2), \quad \overline{BD} = (2, -4, -2)$$

$$\overline{BC} \times \overline{BD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 4i + 4j - 12k.$$

לכן הוקטור הנורמל של המישור הוא

$$\bar{n} = (1, -1, 3).$$

לכן משוואת המישור היא

$$x - (y - 2) + 3(z - 4) \Rightarrow x - y + 3z = 10.$$

נעביר את הישר העובר דרך נקודה A ומאונך למישור:

$$x = 2 + t, \quad y = 2 - t, \quad z = 2 + 3t.$$

נמצא את נקודת החיתוך של הישר עם המישור:

$$(2 + t) - (2 - t) + 3(2 + 3t) = 10 \Rightarrow 11t = 4 \Rightarrow t = \frac{4}{11}.$$

לכן הנקודת חיתוך היא

$$P = \left(2 + \frac{4}{11}, 2 - \frac{4}{11}, 2 + \frac{12}{11} \right) = \left(\frac{26}{11}, \frac{18}{11}, \frac{34}{11} \right).$$

הנקודה P היא ההיטל של A על המישור. נמצא את נקודת השיקוף:

$$A' = (x, y, z) \Rightarrow \overline{AA'} = (x - 2, y - 2, z - 2)$$

$$\overline{AP} = \left(\frac{4}{11}, -\frac{4}{11}, \frac{12}{11} \right)$$

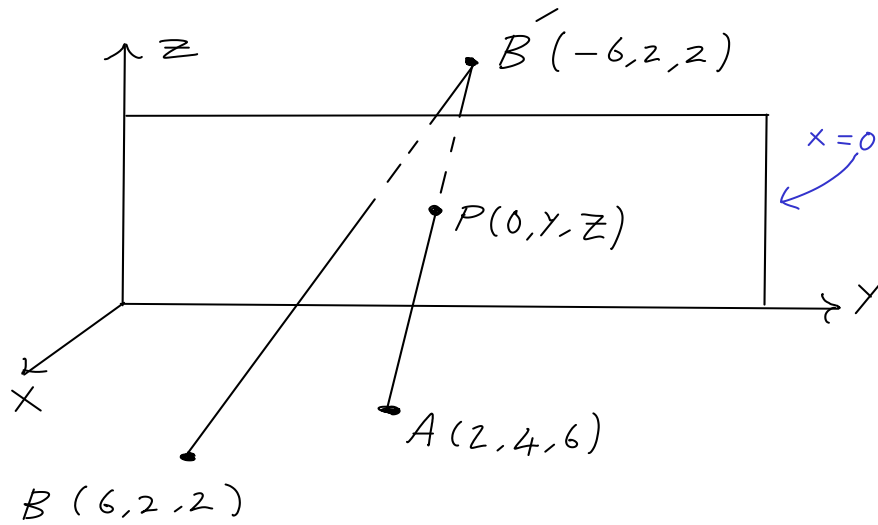
$$\overline{AA'} = 2\overline{AP} \Rightarrow (x - 2, y - 2, z - 2) = \left(\frac{8}{11}, -\frac{8}{11}, \frac{24}{11} \right)$$

לכן

$$x = \frac{8}{11} + 2 = \frac{30}{11}, \quad y = 2 - \frac{8}{11} = \frac{14}{11}, \quad z = 2 + \frac{24}{11} = \frac{46}{11}.$$

לכן

$$A' = \left(\frac{30}{11}, \frac{14}{11}, \frac{46}{11} \right).$$



שאלה 6 נבנה שני וקטורים במישור:

$$\overrightarrow{PQ} = (1, 2, 4), \quad \overrightarrow{PR} = (6, -2, 6) = 2 \cdot (3, -1, 3).$$

נחשב את וקטור הנורמל של המישור:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 10i + 9j - 7k = (10, 9, -7)$$

לכן $n = (10, 9, -7)$. נבחר נקודה אחת שנמצאת במישור: $P_0 = P = (1, 2, -1)$. משוואת המישור עם נורמל $n = (A, B, C)$ שעובר דרך הנקודה $P_0(x_0, y_0, z_0)$ היא

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

נציב $n = (A, B, C) = (10, 9, -7)$ ו- $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, -1)$ ונקבל

$$10(x - 1) + 9(y - 2) - 7(z + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 10x + 9y - 7z - 35 = 0.$$

שאלה 7 הנורמל של המישור הוא מאונך לשני הוקטורים \vec{a} ו- \vec{b} . לכן

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8i - 4j - 6k = (8, -4, -6) = 2(4, -2, -3).$$

לכן $\vec{n} = (4, -2, -3)$. משוואת המישור עם נורמל $n = (A, B, C)$ היא

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

נציב $n = (A, B, C) = (4, -2, -3)$ ונקבל

$$4x - 2y - 3z + D = 0$$

נמצא D ע"י להציב נקודה על המישור. נציב את הנקודה $P(1, 0, 5)$ ונקבל $D = 11$. לכן משוואת המישור היא

$$4x - 2y - 3z + 11 = 0.$$

שאלה 8 נסמן את המישור בשאלה ב- π והוקטור הנורמל שלו ב- n .

וקטור הנורמל של המישור π_1 :

$$n_1 = (2, -1, 4).$$

וקטור הנורמל של המישור π_2 :

$$n_2 = (3, 7, -1).$$

הוקטור הנורמל של המישור בשאלה ניתן ע"י

$$n = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -27i + 14j + 17k = (-27, 13, 17).$$

משוואת המישור עם נורמל $n = (A, B, C)$ היא

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

נציב $n = (A, B, C) = (-27, 13, 17)$ ונקבל

$$-27x + 13y - 17z + D = 0$$

נמצא D ע"י להציב נקודה על המישור. נציב את הנקודה $P(1, 2, 0)$ ונקבל $D = -1$. לכן משוואת המישור היא

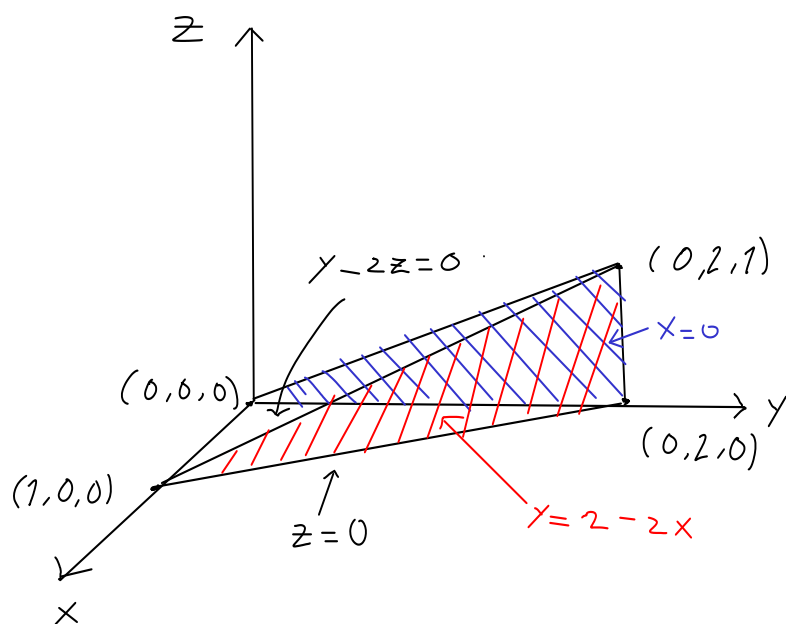
$$-27x + 13y - 17z - 1 = 0.$$

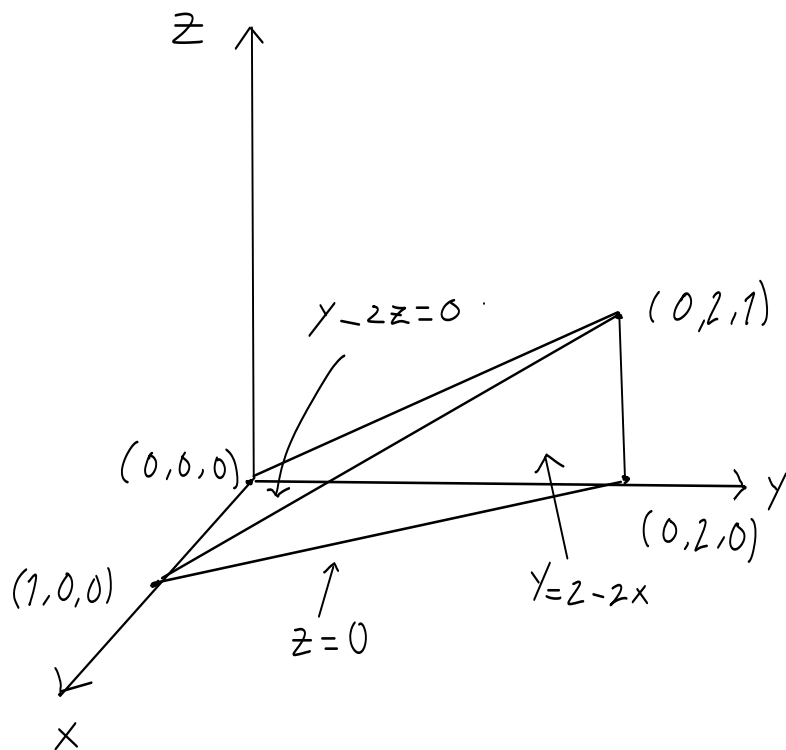
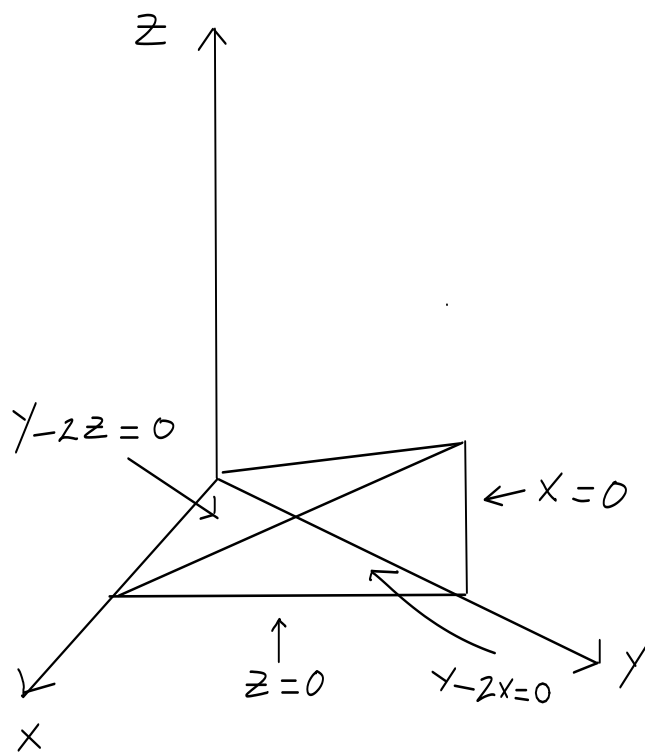
ה

שאלה 9 חיתוך בין שלושה מישורים יצא נקודה. אלו הן הקודקודים של הגוף:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0, 0) \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 2, 0)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - 2z = 0 \\ y = 2 - 2x \end{cases} \Rightarrow (0, 2, 1) \quad \begin{cases} z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ y = 2 - 2x \end{cases} \Rightarrow (1, 0, 0)$$





שאלה 10

- המישור $x + y = 2$ מקביל לציר ה- z .
- המישור $z = y + 1$ מקביל לציר ה- x .
- המישור $x = 0$ הוא המישור yz .
- המישור $y = 0$ הוא המישור xz .
- המישור $z = 0$ הוא המישור xy .

נחפש את החיתוך של המישור $x + y = 2$ עם המישור $x = 0$:

$$x = 0 \rightarrow y = 2 \quad (0, 2, z) .$$

נחפש את החיתוך של המישור $x + y = 2$ עם המישור $y = 0$:

$$y = 0 \rightarrow x = 2 \quad (2, 0, z) .$$

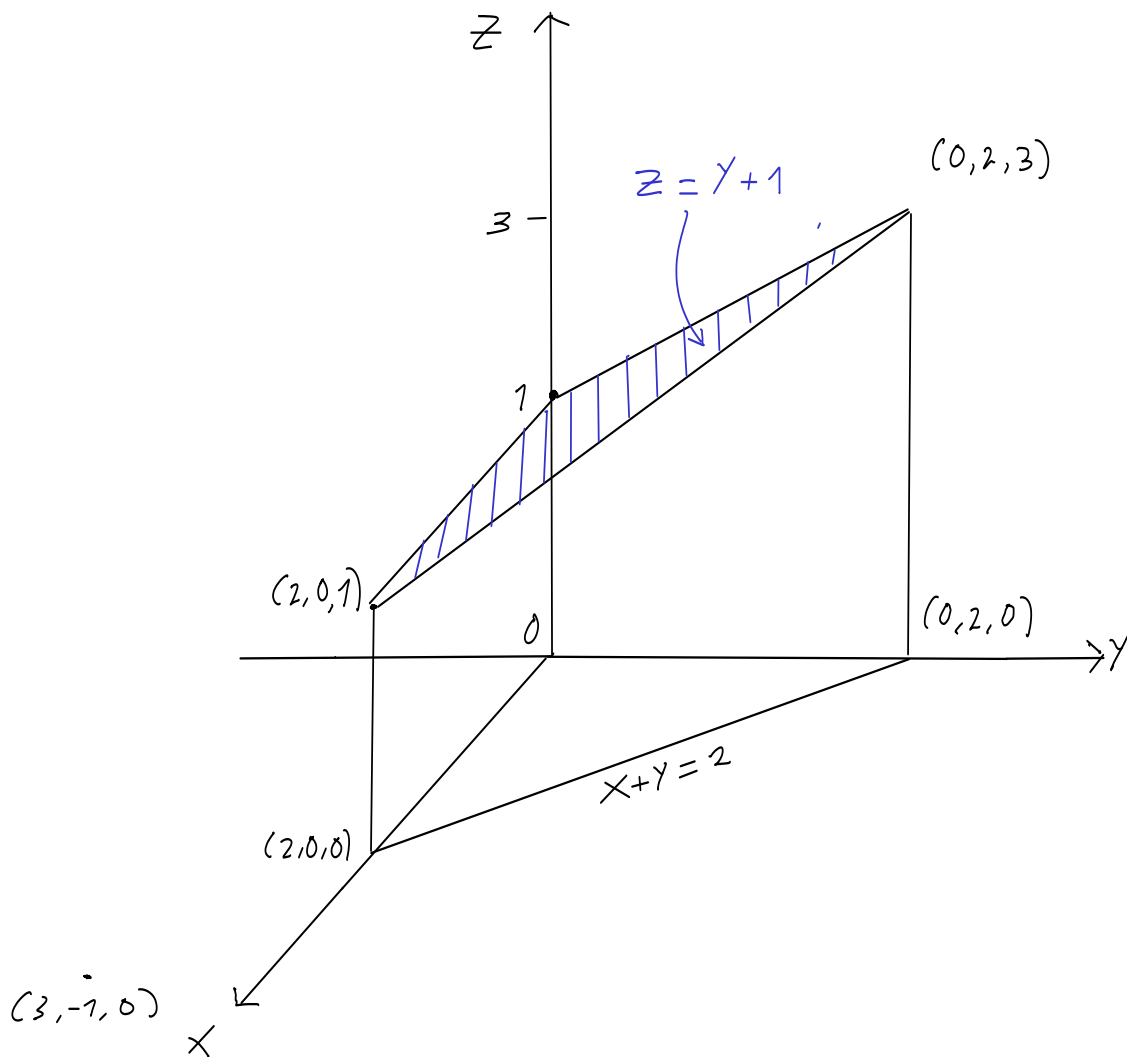
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ z = y + 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow (0, 2, 3)$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ z = y + 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow (2, 0, 1)$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ z = y + 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow (3, 0, -1)$$

$$\begin{cases} z = y + 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \end{cases} \Rightarrow (x, 0, 1)$$

$$\begin{cases} z = y + 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \end{cases} \Rightarrow (x, -1, 0)$$

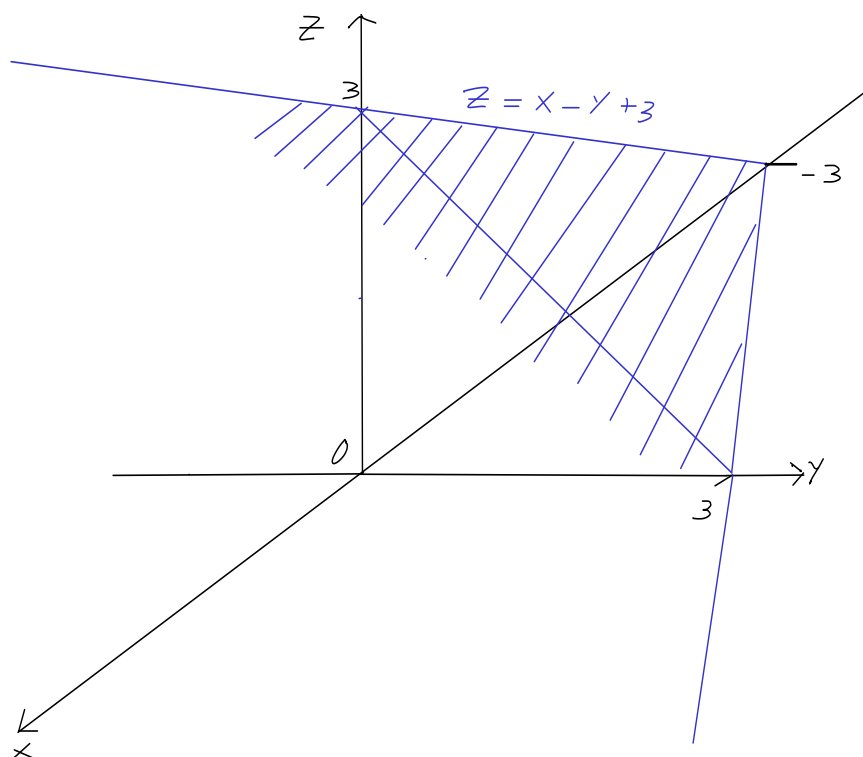


שאלה 11

- המישור $z = 0$ הוא המישור xy .
- המישור $y = 0$ הוא המישור xz .
- המישור $x = 1$ מקביל למישור yz .
- המישור $y = x$ הוא המישור $x - y = 0$, מקביל לציר ה- z .

•

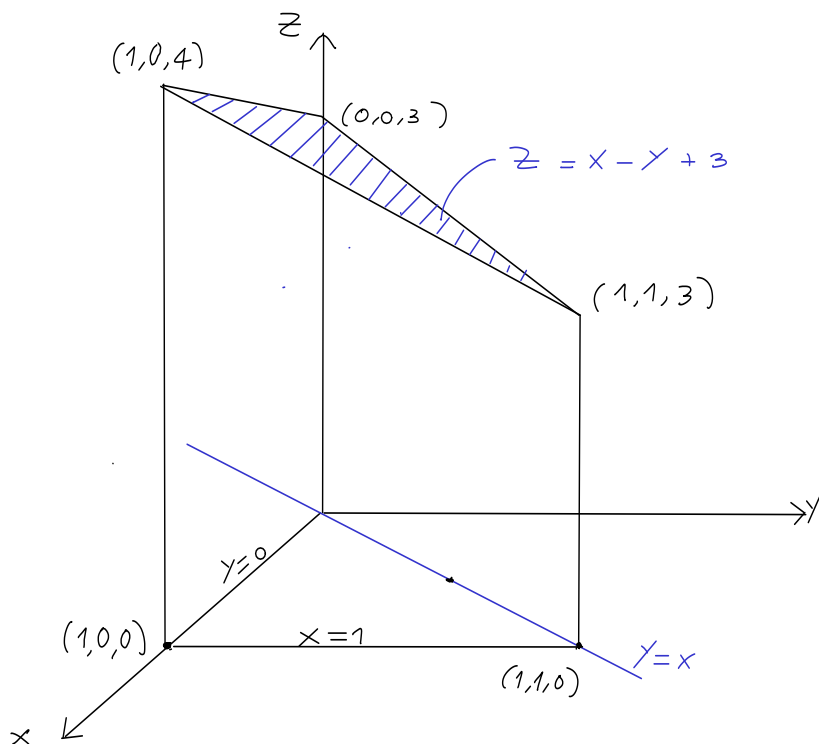
$$z = x - y + 3 \Rightarrow x - y - z = -3 \Rightarrow \frac{x}{-3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3}.$$



$$\begin{cases} z = x - y + 3 \\ y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 4$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = x \\ z = x - y + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = x \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$



שאלה 12 יש לצורה הזאת ארבע פאות:

• מישור xy :

$$z = 0.$$

• מישור yz :

$$x = 0.$$

• המישור שמכיל את $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 1)$, $(0, 0, 0)$:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

נציב את הנקודה $(0, 0, 0)$ ונקבל $D = 0$.

נציב את הנקודה $(1, 0, 0)$ ונקבל $A + D = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

נציב את הנקודה $(0, 2, 1)$ ונקבל $2B + C = 0 \Leftrightarrow C = -2B$. נבחר $B = 1$, $C = -2$. לכן משוואת המישור היא

$$y - 2z = 0$$

• המישור שמכיל את $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 1)$, $(0, 2, 0)$:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} (0, 2, 1) \Rightarrow 2B + C + D = 0 \\ (0, 2, 0) \Rightarrow 2B + D = 0 \\ (1, 0, 0) \Rightarrow A + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} D = -A \\ A = 2B \\ C = -2B - D = -A + A = 0 \end{array} \right\}$$

נבחר $D = -2 \Leftarrow A = 2 \Leftarrow B = 1$. לכן משוואת המישור היא

$$2x + y - 2 = 0$$

שאלה 13 נחשב תחילה את משוואת המישור ABC

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = (0, 2, -2) \times (-1, 1, -2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2, 2, 2).$$

ולכן ניתן לבחור את הוקטור $\vec{n} = (1, -1, -1)$ להיות הוקטור הנורמל למישור ABC . מכאן את משוואת המישור ניתן לרשום בצורה

$$1 \cdot (x - 1) - 1 \cdot (y - 0) - 1 \cdot (z - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - y - z = 0.$$

לכן, את המרחק של הנקודה D מהמישור ניתן לחשב ע"י

$$d = \frac{|k^2 - (k - 2) - k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{|k^2 - 2k + 2|}{\sqrt{3}} = \frac{(k - 1)^2 + 1}{\sqrt{3}} > 0.$$

המרחק המינימאלי מתקבל עבור $k = 1$ בנקודה $D(1, -1, 1)$. נפח הפירמידה עבור ערך זה של D הוא

$$V = \frac{1}{6} |(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD}| = \frac{1}{6} |(-2, 2, 2) \cdot (0, -1, 0)| = \frac{1}{3}.$$

שאלה 14 כדי להשתמש בנוסחת הנפח של הפירמידה משולשת ABC , $V = \frac{1}{6} |\overline{AD} \cdot (\overline{AB} \times \overline{AC})|$ יש לחשב

את הקדקודים של הפירמידה כנקודות החיתוך של המישורים הנתונים:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ x - y = 4 \\ 2y + z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow A = (3, -1, 6).$$

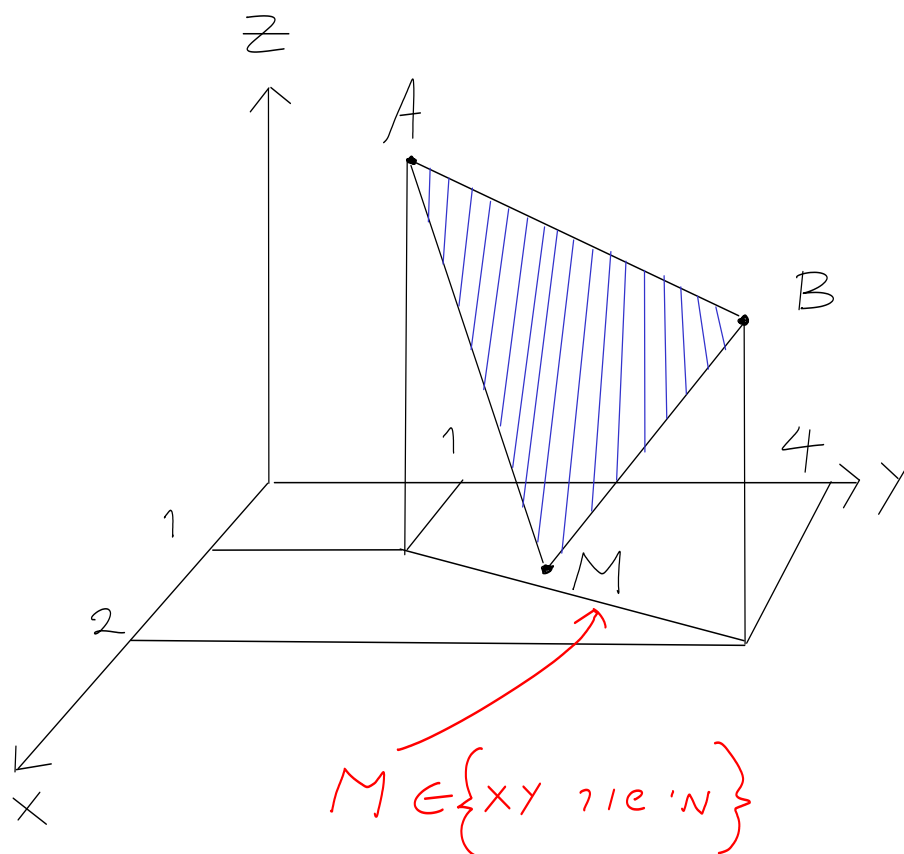
$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ x - y = 4 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow B = (3, -1, 0).$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ z = 0 \\ 2y + z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow C = (0, 2, 0).$$

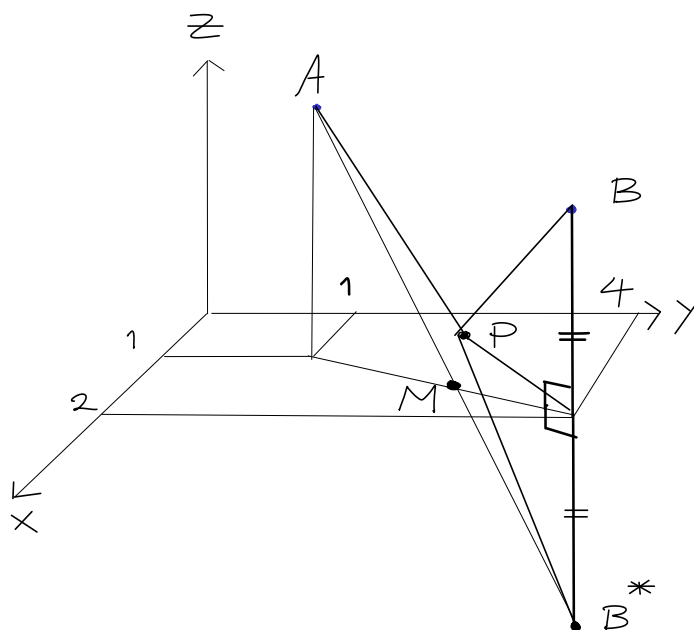
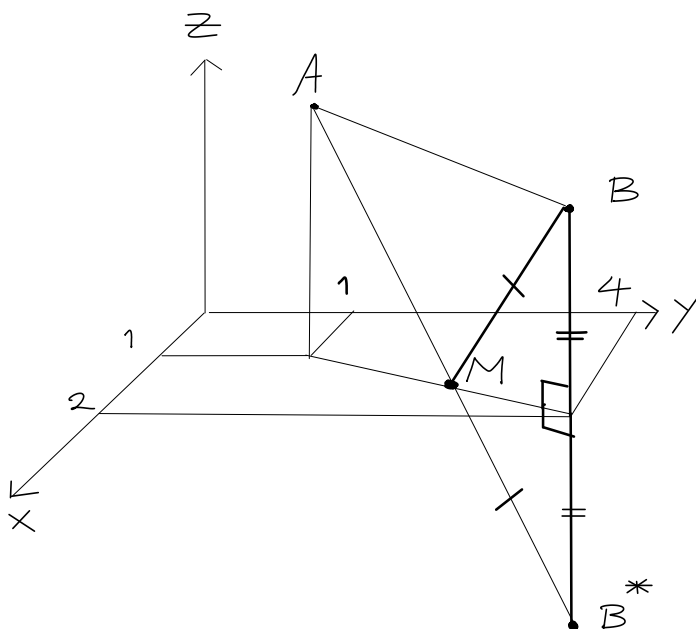
$$\left. \begin{array}{l} z = 0 \\ x - y = 4 \\ 2y + z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow D = (6, 2, 0).$$

כעת נשתמש בנוסחה:

$$V = \frac{1}{6} |\overline{AD} \cdot (\overline{AB} \times \overline{AC})| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -6 \\ -3 & 3 & -6 \\ 3 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 18.$$

שאלה 15

היקף המשולש ABM יהיה מינימלי אם סכום המרחקים מהנקודה M לנקודות A ו- B יהיה מינימלי. כדי למצוא נקודה M כזו שסכום $MA + MB$ יהיה מינימלי נשקף את הנקודה B לעומת המישור האופקי $z = 0$ ונחבר את השיקוף B^* של נקודה B עם נקודה A על ידי קו ישר. נקודת חיתוך של הישר הזה עם מישור $z = 0$ תהיה נקודה מבוקש שמספקת את מינימום של הסכום $MA + MB$, במתואר בתשרים:



(סכום של שני צלעות במשולש גדול מצלע שלישי שלו).

$$.B^* = (2, 4, -2), A = (1, 1, 4)$$

$$\overline{AB^*} = (1, 3, -6)$$

משוואת הישר עם וקטור כיוון $\overrightarrow{AB^*}$:

$$(x, y, z) = (1 + t, 1 + 3t, 4 - 6t) .$$

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 - 6t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad M\left(\frac{5}{3}, 3, 0\right)$$