שעור 9
מימד ובסיס

9.1 בסיס של מרחב ווקטורי

הגדרה 9.1 בסיס

קבוצת ווקטורים $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n \in V$ נקראת בסיס של V אם היא מקיימת:

1) $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ בלתי תלוים לינארית.

2) $\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)=V$.

דוגמה 9.1

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\ ,\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\ ,\quad \ldots, e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix}\ .$$

בסיס של $\mathbb{F}^n$ (בסיס הסטנדרטי).

הוכחה:

1) צ"ל $e_1,\ldots,e_n$ בת"ל.

$$k_1e_1+k_2e_2+\ldots+k_ne_n=\bar{0}$$
$$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}+\ldots+k_n\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\ \vdots\\k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad k_1=0,k_2=0,\quad k_n=0\ .$$

לכן $e_1,\ldots,e_n$ בת"ל.

2) צ"ל כי $\mathrm{span}(e_1,\ldots,e_n)=\mathbb{F}^n$.

נקח ווקטור שרירותי $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$. צ"ל $\mathrm{v} = \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_n)$.

$$k_1e_1 + \ldots k_ne_n = \mathrm{v}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad k_1 = x_1, k_2 = x_2, \quad \ldots, \quad k_n = x_n \ .$$

■

דוגמה 9.2

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \ldots, \quad E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad .$$

בסיס של $\mathbb{F}^{2\times 3}$ (הבסיס הסטנדרטי).

הוכחה:

1) נוכיח כי $E_1, \ldots, E_6$ בת"ל.

$$k_1E_1 + k_2E_2 + \ldots + k_6E_6 = \bar{0}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots + k_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad k_1 = 0, k_2 = 0, \quad k_6 = 0 \ .$$

לכן $E_1, \ldots, E_6$ בת"ל.

2) נוכיח כי $\operatorname{span}(E_1, \ldots, E_6) = \mathbb{F}^{2\times 3}$.

לכל ווקטור $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 3}$,

$$\mathrm{v} = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 + eE_5 + fE_6 \ .$$

ז"א

$\mathrm{v} \in \operatorname{span}(E_1, \ldots, E_6)$.

■

דוגמה 9.3

וקטורים

$$e_1 = 1\ ,\quad e_2 = x\ ,\quad \ldots\ ,\quad e_n = x^n$$

מהווים בסיס (הבסיס הסטנדרטי) של המרחב $\mathbb{F}_n[x]$.

הוכחה:

1) צ"ל $1, x, \ldots, x^n$ בת"ל.

$$k_1 \cdot 1 + k_2 x + \ldots + k_n x^n = \bar{0} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \ldots + 0 \cdot x^n$$

לכל x כאשר

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \quad \ldots, \quad k_n = 0\ .$$

לכן $1, x, \ldots, x^n$ בת"ל.

2) נוכיח כי $\text{span}(1, x, \ldots, x^n) = \mathbb{F}_n[x]$.

לכל $p(x) = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{F}_n[x]$ מתקיים

$$p(x) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n$$

ז"א $p(x) = \text{span}(e_1, \ldots, e_n)$.

■

דוגמה 9.4

בדקו כי הווקטורים

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\ ,\qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\ .$$

מהווה בסיס של $\mathbb{R}^3$.

פתרון:

1) צ"ל u_1, u_2, u_3 בת"ל.

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \bar{0}$$

זאת מערכת משוואות הומוגניות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 14 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון יחיד: $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$

לכן u_1, u_2, u_3 בת"ל.

2) צ"ל $\text{span}(u_1, u_2, u_3) = \mathbb{R}^3$.

נקח $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $= \text{v}$. צ"ל $\text{v} = \text{span}(u_1, u_2, u_3)$.

<u>דרך 1:</u>

$$xu_1 + yu_2 + zu_3 = \text{v}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 5 & 1 & 4 & c \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 6 & 14 & 5a + c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5a + c - 6b \end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון, לכן $\text{v} \in \text{span}(u_1, u_2, u_3)$.

<u>דרך 2:</u>

למערכת $A \cdot X = 0$ יש פתרון יחיד, לכן מטריצה A הפיכה. מכאן נובע שלכל $\text{v} \in \mathbb{R}^3$, למערכת $A \cdot X = \text{v}$ יש פתרון יחיד, ז"א $\text{v} \in \text{span}(u_1, u_2, u_3)$.

משפט 9.1

אם במרחב ווקטורי V יש בסיס סופי, אז לכל בסיס של V יש את אותו מספר הווקטורים.

הגדרה 9.2

נניח ש V מרחב ווקטורי. למספר הווקטורים בבסיס של V קוראים המימד של V.
המימד של מרחב ווקטורי יסומן

$$\dim(V) \ .$$

דוגמה 9.5

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{F}^n) &= n \\ \dim(\mathbb{F}^n[x]) &= n + 1 \\ \dim(\mathbb{F}^{m \times n}) &= m \cdot n \ . \end{aligned}$$

משפט 9.2 מימד ובסיס של קבוצת ווקטורים

נניח כי V מרחב ווקטורי, $\dim(V) = n$. אז

1) כל $n + 1$ ווקטורים של V הם תלוים ליניארית.

2) כל קבוצה של n ווקטורים בלתי תלויה ליניארית, היא בסיס של V.

3) כל קבוצה של ווקטורים שהיא בלתי תלויה ליניארית , ניתן להשלים לבסיס של V.

דוגמה 9.6

הוכיחו שהווקטורים

$$u_1 = 1 + x + x^2 \ , \qquad u_2 = 2x + 3x^2 \ , \qquad u_3 = -3x - 4x^2$$

מהווים בסיס של מרחב $\mathbb{R}_2[x]$.

פתרון:

נוכיח כי u_1, u_2, u_3 בת"ל.

$$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = \bar{0}$$

$$k_1(1 + x + x^2) + k_2(2x + 3x^2) + k_3 - 3x - 4x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

$$k_1(k_1 + 2k_2 - 3k_3)x + (k_1 + 3k_2 - 4k_3)x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

$$\left.\begin{array}{rl} k_1 &= 0 \\ k_1 + 2k_2 - 3k_3 &= 0 \\ k_1 + 3k_2 - 4k_3 &= 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad k_1 = 0 \ , k_2 = 0, k_3 = 0$$

לכן u_1, u_2, u_3 בת"ל.

$\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$, לכן שלושה ווקטורים בת"ל מהווים בסיס של $\dim(\mathbb{R}_2[x])$.

9.2 מציאת בסיס ומימד של תת מרחב

הגדרה 9.3 עמודה מובילה ושורה מובילה

נניח כי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ותהי B המטריצה המדורגת המתקבלת מ- A.

(1 אומרים כי עמודה ה- i של A **עמודה מובילה** אם בעמודה ה- i של B יש איבר מוביל.

(2 אומרים כי שורהה ה- i של A **שורה מובילה** אם בשורה ה- i של B יש איבר מוביל.

משפט 9.3 עמודות מובילות מהוות בסיס של תת-מרחב

נניח כי $S = \{u_1, \ldots , u_k\} \in \mathbb{F}^n$ קבוצת ווקטורים של מרחב ווקטורי $\mathbb{F}^n$.

נגדיר $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_k \\ | & | & & | \end{pmatrix}$.

(1 כל העמודות של A עמודות מובילות אם ורק אם הקבוצת ווקטורים S בת"ל.

(2 העמודות המובילות של A מהווים בסיס של S.

(3 מספר עמודות מובילות ב- A שווה למימד של S.

הוכחה: (להעשרה בלבד)

נרשום

$$x_1u_1 + \cdots + x_ku_k = \bar{0} \tag{*1}$$

כאשר $x_1,\cdots,x_k\in\mathbb{F}$ סקלרים. ונגדיר $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_k\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^k$. נניח ש- B המטריצה המדורגת המתקבלת מ- A.

1) נניח כי S בת"ל.

$\Leftarrow$ אז $x_1=x_2=\cdots=x_k=0$.

$\Leftarrow$ למערכת $AX=0$ יש פתרון יחיד: $X=0$.

$\Leftarrow$ יש איבר מוביל בכל עמודה של B.

$\Leftarrow$ כל העמודות של A מובילות.

נניח שכל העמודות של A מובילות.

$\Leftarrow$ יש איבר מוביל בכל עמודה של B.

$\Leftarrow$ הפתרון היחיד הינו $X=0$.

$\Leftarrow$ עבור הסקלרים ב- (1*) נקבל $x_1=\cdots=x_k=0$ $\Leftarrow$ S בת"ל.

2) קבוצת העמודות המובילות של A תהיה בסיס של S אם **(א)** היא בת"ל ו **(ב)** היא פורשת S.

א) תהי A' המטריצה המתקבלת מהעמודות המובילות של A. לפי (1) כל העמודות של A' בת"ל.

ב) נניח שמתוך ה k וקטורים של S יש p וקטורים בת"ל: $\{u_1,\ldots,u_p\}$.
לכן, אפשר לרשום כל וקטור של S כצירוף ליניארי של הווקטרים $\{u_1,\ldots,u_p\}$.
לכן S נפרש ע"י הווקטורים $\{u_1,\ldots,u_p\}$.
נרשום $A=\begin{pmatrix}| & & | & | & & |\\ u_1 & \cdots & u_p & u_{p+1} & \cdots & u_k\\ | & & | & | & & |\end{pmatrix}$.
הווקטורים $u_1,\cdots,u_p$ בת"ל לכן ה- p עמודות הראשונות של A מובילות.
(אין יותר מ-p עמודות מובילות כי אז יהיו יותר מ- p ווקטורין בת"ל ונגיע לסתירה).
לפיכך העמודות המובילות פורשות S.

3) לפי (2) העמודות המובילות של A מהווה בסיס של S.

מימד שווה למספר ווקטורים בבסיס.

לפיכך המימד שווה למספר עמודות המובילות ב- A.

■

דוגמה 9.7

מצאו בסיס ומימד של הקבוצה $S=\text{span}\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3\}$ כאשר

(1

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\ .$$

(2

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\ .$$

פתרון:

1)

$$A=\begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן $\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3\}$ בסיס של S.

$\dim(S)=3$.

2)

$$A=\begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עמודות 1 ו- 2 מובילות. לכן הווקטורים $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2$ מהווים בסיס של S.

$\dim(S)=2$.

דוגמה 9.8

מצאו בסיס ואת המימד של תת מרחב הנפרש ע"י הווקטורים

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_4=\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

בטאו את ווקטור $u=\begin{pmatrix} 4 & -14 \\ -13 & 11 \end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של הבסיס שמצאתם.

פתרון:

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+k_3\mathrm{v}_3+k_4\mathrm{v}_4=\bar{0}$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & -4 & -7 \\ -4 & -1 & -5 & -5 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{R_3\to R_3+4R_1 \\ R_4\to R_4-2R_1}]{R_2\to R_2+5R_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עמודות 1 ו- 2 מובילות, לפיכך הווקטורים v_1, v_2 מהווים בסיס של S.

$\dim(S)=2$.

נרשום u כצירוף ליניארי של הבסיס המתקבל:

$$u=x\mathrm{v}_1+y\mathrm{v}_2\ .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 14 \\ -4 & -1 & -13 \\ 2 & 5 & 11 \end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{R_3\to R_3+4R_1 \\ R_4\to R_4-2R_1}]{R_2\to R_2+5R_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$k_1=3,k_2=1 \Leftarrow$

$$u=3\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\ .$$

דוגמה 9.9

במרחב $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ נתונים וקטורים

$$p_1(x) = 2 - x + x^2 \ , \quad p_2(x) = 2x - 3x^2 + x^3 \ , \quad p_3(x) = 1 - x^2 \ , \quad p_4(x) = 3x - 6x^2 + x^3 \ .$$

א) בדקו אם הווקטורים $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ תלוים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם ששווה לווקטור האפס.

ב) מצאו בסיס ואת המימד של תת מרחב הנפרש ע"י הווקטורים $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$.

ג) בטאו כל ווקטור מתוך $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ כצירוף לינרי של הבסיס המצאתם בסעיף ב'.

פתרון:

א) נרשום את הווקטורים לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$, $E = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3\}$:

$$p_1(x) = 2e_1 - e_2 + e_3 + 0e_4 \quad = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_E \ ,$$

$$p_2(x) = 0e_1 + 2e_2 - 3e_3 + e_4 \quad = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}_E \ ,$$

$$p_3(x) = 1e_1 + 0e_2 - e_3 + 0e_4 \quad = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_E \ ,$$

$$p_4(x) = 0e_1 + 3e_2 - 6e_3 + e_4 \quad = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}_E \ .$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לא כל העמודות מובילות, לכן $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ ת"ל.

נרשום את הצירוף הליניארי

$$k_1 p_1 + k_2 p_2 + k_3 p_3 + k_4 p_4 = \bar{0} \ .$$

לפי המדורגת שמצאנו הפתרון הינו

$$k_1 = k_4 \ , \quad k_2 = -k_4 \ , \quad k_3 = -2k_4 \ , \qquad k_4 \in \mathbb{R} \ .$$

נציב $k_4 = 1$ $\Leftarrow$

$$k_1 = 1 \ , \quad k_2 = -1 \ , \quad k_3 = -2 \ .$$

$$p_1 - p_2 - 2p_3 + p_4 = \bar{0}$$

ב)

$$\dim(\text{span}\{p_1, p_2, p_3, p_4\} = \text{מספר העמודות המובילות} = 3 \ .$$

העמודות 1, 2 ו- 3 מובילות לפיכך הווקטורים p_1, p_2, p_3 מהווים בסיס.

ג)

$$\begin{aligned} p_1 =& 1 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3 \\ p_2 =& 0 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3 \\ p_3 =& 0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 \\ p_4 =& -p_1 + p_2 + 2 \cdot p_3 \ . \end{aligned}$$

משפט 9.4

יהי $U \subset V$ תת מרחב של המרחב ווקטורי V. נניח כי $\dim(U) = m$ ותהי $B = \{u_1, \cdots, u_m\}$ קבוצה של m ווקטורים.

B בת"ל אם ורק אם B פורשת את U.

הוכחה:

נניח כי B בת"ל ו- B לא פורשת את U.
אז ניתן להשלים B לבסיס של U, בסתירה לכך ש- $\dim(U) = m$.

נניח כי B פורשת את U אבל B לא בת"ל.
אז ניתן להקטין את B לבסיס של פחות מ-m ווקטורים בסתירה לכך ש- $\dim(U) = m$.

■