אלגברה לינארית סמסטר סתו 2022-23
עבודה עצמית 8

שאלה 1 תן דוגמא לשתי קבוצות S, T כך ש $S \subseteq T$ ומתקיים:

א) T פורשת את $\mathbb{R}^4$ ו S לא פורשת את $\mathbb{R}^4$.

ב) T לא פורשת את $\mathbb{R}^4$ ו S לא פורשת את $\mathbb{R}^4$.

ג) T פורשת את $\mathbb{R}^4$ ו S פורשת את $\mathbb{R}^4$.

שאלה 2 תהיינה $X \subseteq Y$ קבוצות של וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$. הוכח או הפרך:

א) אם Y פורשת את $\mathbb{R}^n$ אז X פורשת את $\mathbb{R}^n$.

ב) אם $X \in 0$ אז X פורשת את $\mathbb{R}^n$.

ג) אם $X \in 0$ אז X לא פורשת את $\mathbb{R}^n$.

ד) אם X פורשת את $\mathbb{R}^n$ אז Y פורשת את $\mathbb{R}^n$.

ה) אם מספר הוקטורים ב- X גדול מ- n אז X פורשת את $\mathbb{R}^n$.

ו) אם קיים $\mathrm{v} \in Y$ כך ש $\mathrm{v} \notin X$ אז $\mathrm{sp}(Y) \neq \mathrm{sp}(X)$.

שאלה 3 נתונים הוקטורים

$$u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} \quad , \quad u_3 \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix}$$

א) מצא לאילו ערכי a מתקיים $u_3 \in \mathrm{sp}(u_1, u_2)$.

ב) עבור ערך a
הקטן שמצאת, הצג את u_3 כצירוף לינארי של u_1, u_2.

ג) מצא לאילו ערכי a הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ פורשת את $\mathbb{R}^3$.

שאלה 4 קבעו עבור כל אחת מהקבוצות הבאות אם היא מהווה בסיס של $\mathbb{R}^3$:

א) $\{(1,0,-1),(1,2,1),(0,4,2)\}$

ב) $\{(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$

ג) $\{(1,1,0),(0,1,0),(1,2,0)\}$

ד) $\{(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1),(3,5,2)\}$

ה) $\{(1,1,0),(0,1,0)\}$

שאלה 5 עבור המטריצות הבאות מצאו בסיס ומימד של $\mathrm{col}(A)$ ובסיס ומימד של $\mathrm{Nul}(A)$.

א)
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

ב)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

ג)
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

שאלה 6 עבור $\{u_1,u_2,u_3,u_4\} \in \mathbb{R}^5$ נסמן $W = \mathrm{sp}\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$. הסבר מדוע W הינה תת מרחב של $\mathbb{R}^5$ ומצאו בסיס ומימד של W במקרים הבאים:

א) $u_1 = (1,1,1,2,3)$, $u_2 = (1,2,-1,-2,1)$, $u_3 = (3,5,-1,-2,5)$, $u_4 = (1,2,1,-1,4)$.

ב) $u_1 = (1,-2,1,3,-1)$, $u_2 = (-2,4,-2,-6,2)$, $u_3 = (1,-3,1,2,1)$, $u_4 = (3,-7,3,8,-1)$.

שאלה 7 מצאו בסיס ומימד של מרחב הפתרונות של המערכות ההומוגניות הבאות:

א)
$$\left.\begin{aligned} x+z+t &= 0 \\ y-s+t &= 0 \\ x+y+z+s-t &= 0 \\ 2y+z+s+3t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ב)
$$\left.\begin{aligned} x+2y+z+t &= 0 \\ y+3z+s+t &= 0 \\ x+2y-s &= 0 \end{aligned}\right\}$$

שאלה 8 במרחב הווקטורי $P_3(\mathbb{R})$ (מרחב הפולינומים מסדר 3 לכל היותר) נתונים הווקטורים

$$p_1(t) = 2 - t + t^2, \qquad p_2(t) = 2t - 3t^2 + t^3, \qquad p_3(t) = 1 - t^2, \qquad p_4(t) = 3t - 6t^2 + t^3$$

א) בדקו אם הווקטורים $p_1(t)$, $p_2(t)$,$p_3(t)$, $p_4(t)$ ת"ל. אם כן מצאו צריוף ליניארי הלא טריוויאלי שלהם שווה לווקטור האפס.

ב) מצאו בסיס ואת המימד של תת המרחב הנפרש על ידי הווקטורים $p_1(t)$, $p_2(t)$,$p_3(t)$, $p_4(t)$.

ג) בטא כל ווקטור מתוך $p_1(t)$, $p_2(t)$,$p_3(t)$, $p_4(t)$ כצירוף ליניארי של הבסיס שמצאת בסעיף ב'.

ד) מצא את וקטור הקואורדינאטות של $p_4(t)$ ביחס לבסיס שמצאתם.

שאלה 9 במרחב הווקטורי $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ נתונים הוקטורים

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

נגדיר $W = \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$.

א) תן דוגמא לוקטור כלשהו הנמצא ב W ושונה מוקטור האפס ומהוקטורים $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$.

ב) האם W הוא תת מרחב של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$? האם $W = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$?

ג) בדקו האם הקבוצה $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$ ת"ל? אם כן, מצא צירוף ליניארי לא טריוויאלי של איברי הקבוצה השוה לווקטור האפס.

ד) מצא בסיס ואת המימד של W.

ה) תן דוגמא למרחב וקטורי V כך ש $W \neq V$ ו V איזומורפי ל W.

ו) מצא לאילו ערכי הפרמטר k הקבוצה $\{2\mathrm{v}_1 + 3\mathrm{v}_2, 4\mathrm{v}_1 + k\mathrm{v}_2\}$ היא בלתי תלויה ליניארית.

שאלה 10 לכל אחת מהקבוצות הבאות, קבעו האם היא מהווה בסיס של $\mathbb{R}_3[t]$:

א) $\{2t^3 + t^2 + t + 1, 3t^3 + 3t + 2, t^3 + t^2 - t, 4t^3 + 2t^2 - 2t + 1\}$

ב) $\{1, t - 1, t^3 - t^2 + t - 1, t^2 - t + 1\}$

שאלה 11 לאילו ערכים של הפרמטרים a, b,c הקבוצה

$$\{t^2 + t + 1, ct^2 + bt + a, c^2t^2 + b^2t + a^2\}$$

מהווה בסיס של $P_2(t)$?

שאלה 12 לכל אחת מהקבוצות הבאות, קבעו האם היא מהווה בסיס של $M_2(\mathbb{R})$:

א) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 3\end{pmatrix}\right\}$

ב) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}\right\}$

שאלה 13 לאילו ערכי הפרמטר m הקבוצות הבאות מהוות בסיס של $M_2(\mathbb{R})$:

א) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 6\\ 5 & m-1\end{pmatrix}\right\}$

ב) $\left\{\begin{pmatrix}1 & m\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}m & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ m & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & m\end{pmatrix}\right\}$

פתרונות

שאלה 1

א) $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $T=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

ב) $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $T=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

ג) $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $T=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ ■

שאלה 2

א) דוגמה נגדית:

$$X=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\},\qquad Y=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

X לא פורשת את $\mathbb{R}^2$, Y פורשת את $\mathbb{R}^2$.

ב) דוגמה נגדית: $X=\{\bar{0}\}$ לא פורשת את $\mathbb{R}^2$.

ג) דוגמה נגדית: $X=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$ פורשת את $\mathbb{R}^2$.

ד) <u>נתון:</u> $X\subseteq Y$

<u>צ"ל:</u> Y פורשת את $\mathbb{R}^n$.

<u>הוכחה</u>

$\mathrm{sp}(X)=\mathbb{R}^n$, לכן לכל $u\in\mathbb{R}^n$ קיימים $\mathrm{v}_1,\dots,\mathrm{v}_n\in X$ כך ש

$u=k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_n\mathrm{v}_n$.

$X\subseteq Y$ לכן $\mathrm{v}_1,\dots,\mathrm{v}_n\in Y \Leftarrow u\in\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1,\dots,\mathrm{v}_n)$. ז"א $\mathrm{sp}(Y)=\mathbb{R}^n$.

ה) דוגמה נגדית: $X=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right\}$ לא פורשת את $\mathbb{R}^2$.

ו) דוגמה נגדית: $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\text{sp}(X) = \text{sp}(Y)$.

$\blacksquare$

שאלה 3

$$u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} \quad , \quad u_3 \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix}$$

א)

$$k_1u_1 + k_2u_2 = u_3$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & a+1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & (a-1)(3-a) \end{array} \right)$$

עבור $a = 1$ ו $a = 3$ למערכת יש פתרון, לכן $u_3 \in \text{sp}(u_1, u_2)$.

$\underline{a = 1}$

$k_1 = 3$, $k_2 = -1$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$3u_1 - u_2 = u_3$$

ב) עבור $a \neq 1, 3$ הוקטורים u_1, u_2, u_3 בת"ל.
$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, לכן u_1, u_2, u_3 בסיס של $\mathbb{R}^3$.

$\blacksquare$

שאלה 4

א)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן הוקטורים בת"ל. $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, לכן הוקטורים מהווים בסיס של $\mathbb{R}^3$.

ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן הוקטורים בת"ל. $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, לכן הוקטורים מהווים בסיס של $\mathbb{R}^3$.

ג)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הוקטורים ת"ל כי יש עמודה לא מובילה, לכן הם לא מהווים בסיס של $\mathbb{R}^3$.

ד) וקטורים לא יכולים להיות בסיס של $\mathbb{R}^3$, כי $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

ה) שני וקטורים לא מהווים בסיס של $\mathbb{R}^3$, כי $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
■

שאלה 5

א)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(\mathrm{col}(A)) = 2$ - מספר העמודות המובילות.
בסיס של $\mathrm{col}(A)$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

$\dim(\mathrm{Nul}(A)) = 4$ - מספר העמודות הלא מובילות.
נמצא בסיס של $\mathrm{Nul}(A)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{13}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{13}{2}x_4 - \tfrac{1}{2}x_5 \\ x_3 &= 5x_4 - x_5 \end{aligned}\right\} , \qquad x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_2 - \frac{13}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \\ x_2 \\ 5x_4 - x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} \frac{-13}{2} \\ 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\mathrm{Nul}(A)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{-13}{2} \\ 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & 13 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(\text{col}(A)) = 3$. בסיס של $\text{col}(A)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\dim(\text{Nul}(A)) = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{13}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{13}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = \frac{4}{7}$, $x_2 = -\frac{13}{7}x_3$, $x_4 = 0$, $x_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{7}x_3 \\ -\frac{13}{7}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ -\frac{13}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Nul}(A)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ -\frac{13}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ג)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(\text{col}(A)) = 3$. בסיס של $\text{col}(A)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\dim(\text{Nul}(A)) = 2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = & -\frac{1}{2}x_4+\frac{7}{8}x_5 \\ x_2 = & -\frac{1}{2}x_4+\frac{5}{8}x_5 \\ x_3 = & \frac{1}{2}x_4-\frac{5}{8}x_5 \end{array}\right\} \ , \qquad x_4,x_5\in\mathbb{R}\ .$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_4+\frac{7}{8}x_5 \\ \frac{1}{2}x_4+\frac{5}{8}x_5 \\ \frac{1}{2}x_4-\frac{5}{8}x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_4\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5\begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{5}{8} \\ -\frac{5}{8} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Nul}(A)$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{5}{8} \\ -\frac{5}{8} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

■

<u>שאלה 6</u>

$\{u_1,u_2,u_3,u_4\}\in\mathbb{R}^5$, $W=\text{sp}\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$.

א)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(W)=3$, מספר העמודות המובילות. בסיס של W: u_1,u_2,u_4.

ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -3 & -7 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(W)=2$, מספר העמודות המובילות. בסיס של W: u_1,u_3.

■

<u>שאלה 7</u>

א)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$\dim(\text{Nul}(A)) = 1$.

$$x = \frac{9}{2}t\ , \quad y = \frac{1}{2}t\ , \quad s = \frac{3}{2}t\ , \quad t \in \mathbb{R}\ .$$

בסיס:

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{11}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\dim(\text{Nul}(A)) = 2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = -3s - 4t\ , \quad y = 2s + 2t\ , \quad z = -s - t\ , \quad s, t \in \mathbb{R}\ .$$

$$\begin{pmatrix} -3s - 4t \\ 2s + 2t \\ -s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

■

שאלה 8

א)

$$k_1p_1(t)+k_2p_2(t)+k_3p_3(t)+k_4p_4(t)=\bar{0}$$

$$k_1(2-t+t^2)+k_2(2t-3t^2+t^3)+k_3(1-t^2)+k_4(3t-6t^2+t^))=\bar{0}$$

$$(2k_1+k_3)+(-k_1+2k_2+3k_4)t+(k_1-3k_2-k_3-6k_4)t^2+(k_2+k_4)t^3=\bar{0}$$

$$\left.\begin{aligned} 2k_1+k_3 &=0\\ -k_1+2k_2+3k_4 &=0\\ k_1-3k_2-k_3-6k_4 &=0\\ k_2+k_4 &=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 3\\ 1 & -3 & -1 & -6\\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k_1=k_4\ ,\quad k_2=-k_4\ ,\quad k_3=-2k_4\ ,\quad k_4\in\mathbb{R}$$

למערכת יש אינסוף פתרונות, לכן הוקטורים ת"ל.
נציב $k_4=1 \Leftarrow k_1=1$, $k_2=-1$, $k_3=-2$.

$$p_1(t)-p_2(t)-2p_3(t)+p_4(t)=\bar{0}$$

ב)

$$\dim\left(\mathrm{sp}(p_1(t),p_2(t),p_3(t),p_4(t))\right)=3$$

בסיס: $p_1(t),p_2(t),p_3(t)$.

ג)

$$\begin{aligned} p_1(t) =&1\cdot p_1(t)+0\cdot p_2(t)+0\cdot p_3(t)\ ,\\ p_2(t) =&0\cdot p_1(t)+1\cdot p_2(t)+0\cdot p_3(t)\ ,\\ p_3(t) =&0\cdot p_2(t)+0\cdot p_2(t)+1\cdot p_3(t)\ ,\\ p_4(t) =&-1\cdot p_1(t)+1\cdot p_2(t)+2\cdot p_3(t)\ . \end{aligned}$$

ד)

$$[p_4(t)]_{\{p_1,p_2,p_3\}}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

■

שאלה 9

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}2&3\\0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}\ ,\qquad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}3&-1\\2&1\end{pmatrix}\ ,$$

$W=\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3)$.

א)

$$\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in W \ .$$

■

ב) $W = \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$ ופרישה תמיד תת מרחב.
$W \neq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ כי $\dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) = 4$ ו $\dim(W) = 3$.
■

ג)

$$k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2 = +k_3\mathrm{v}_3 = \bar{0}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ בת"ל.
■

ד) $\dim(W) = 3$. בסיס של W: $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$
■

ה)

$$\{2\mathrm{v}_1 + 3\mathrm{v}_2, 4\mathrm{v}_1 + k\mathrm{v}_2\}$$
$$x(2\mathrm{v}_1 + 3\mathrm{v}_2) + y(4\mathrm{v}_1 + k\mathrm{v}_2) = \bar{0}$$
$$(2x + 4y)\mathrm{v}_1 + (3x + ky)\mathrm{v}_2 = \bar{0}$$

$\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ בת"ל, לכן

$$\left.\begin{aligned} 2x + 4y &= 0 \\ 3x + ky &= 0 \end{aligned}\right\}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2k - 12 \end{pmatrix}$$

למערכת יש פתרון יחיד עבור $k \neq 6$.
לכן עבור $k \neq 6$ הוקטורים $\{2\mathrm{v}_1 + 3\mathrm{v}_2, 4\mathrm{v}_1 + k\mathrm{v}_2\}$ בת"ל.
■

שאלה 10

א) נבדוק אם הוקטורים בת"ל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 2R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 + R_2]{R_3 \to R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן הוקטורין בת"ל. מדובר ב 4 וקטורים. $\dim(P_3(\mathbb{R}))=4$, לכן הם מהווים בסיס של $P_3(\mathbb{R})$.

ב) בקבוצה יש 3 וקטורים, $\dim(P_3(\mathbb{R}))=4$, לכן 3 הוקטורים לא מהווים בסיס של $P_3(\mathbb{R})$.

■

שאלה 11

t^2+t+1, ct^2+bt+a, $c^2t^2+b^2t+a^2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{pmatrix}$$

עבור $a=b$ מקבלים שורת אפסים. הווקטורים ת"ל.
עבור $a=c$ מקבלים שורת אפסים. הווקטורים ת"ל.
נניח $a\neq b$, $a\neq c$ $\Leftarrow$ $c-a\neq 0$, $b-a\neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to\frac{1}{c-a}R_3]{R_2\to\frac{1}{b-a}R_2} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & c+a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & c-b \end{pmatrix}$$

הוקטורים בת"ל עבור $a\neq c$, $a\neq b$, $b\neq c$. $\dim(P_2(\mathbb{R}))=3$, לכן במקרים האלה הוקטורים מהווים בסיס של $P_2(\mathbb{R})$.

■

שאלה 12

א) שלושה וקטורים לא ימהווים בסיס של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, כי $\dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R}))=4$.

ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to 3R_3-7R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 17 & -16 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to 17R_4-3R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 17 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 65 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן הוקטורים בת"ל. $\dim(M_{2\times2}(\mathbb{R}))=4$ לכן 4 וקטורים בת"ל מהווים בסיס של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

$\blacksquare$

שאלה 13

א)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & m-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4+R_1]{\substack{R_2\to R_2-2R_1 \\ R_3\to R_3-2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & m+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_2+3R_4]{R_3\to R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 3m+6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_4+7R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3m-1 \end{pmatrix}$$

עבור $m\neq\frac{1}{3}$ הוקטורים בת"ל.

$\dim(M_{2\times2}(\mathbb{R}))=4 \Leftarrow$ הוקטורים מהווים בסיס של $M_{2\times2}$.

ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - mR_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & 1-m & -m^2-m+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_3 + R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & 0 & -m^2-2m+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & 0 & -(m+3)(m-1) \end{pmatrix}$$

עבור $m \neq -3, 1$ הוקטורים בת"ל.

$\dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) = 4 \Leftarrow$ הוקטורים מהווים בסיס של $M_{2\times 2}$.

$\blacksquare$