

## שיעור 13

### חיתוך וסכום תת מרחב

### 13.1 הגדרה של חיתוך וסכום של תתי מרחבים

#### משפט 13.1 חיתוך של תת מרחב

נניח ש  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $\mathbb{F}$ ,  $V_1, V_2$  תתי מרחבים של  $V$ . אז  $V_1 \cap V_2$  היא תת מרחב של  $V$ .

הוכחה:

$$(1) \quad V_1, V_2 \text{ תת מרחבים} \Leftrightarrow \bar{0} \in V_1 \text{ וגם } \bar{0} \in V_2 \Leftrightarrow \bar{0} \in V_1 \cap V_2$$

$$(2) \quad \text{נניח } v_1, v_2 \in V_1 \cap V_2$$

$$\text{אז } v_1, v_2 \in V_1 \text{ וגם } v_1, v_2 \in V_2$$

$$V_1 \text{ תת מרחב} \Leftrightarrow v_1 + v_2 \in V_1$$

$$V_2 \text{ תת מרחב} \Leftrightarrow v_1 + v_2 \in V_2$$

$$\text{ז"א } v_1 + v_2 \in V_1 \cap V_2$$

$$(3) \quad \text{נניח } v \in V_1 \cap V_2 \text{ ו } k \in \mathbb{F} \text{ סקלר.}$$

$$\text{אז } v \in V_1 \text{ ו } v \in V_2$$

$$V_1 \text{ תת מרחב לכן } k \cdot v \in V_1$$

$$V_2 \text{ תת מרחב לכן } k \cdot v \in V_2$$

$$\text{ז"א } k \cdot v \in V_1 \cap V_2$$

#### דוגמה 13.1

עבור  $V_1, V_2$  תתי מרחבים של מרחב וקטורי  $V$  מעל שדה  $\mathbb{F}$ , האם  $V_1 \cup V_2$  בהכרח תת מרחב של  $V$ ?

פתרון:

דוגמה נגדית:  
 $V = \mathbb{R}^2$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$v_1 + v_2 \notin V_1 \cup V_2. \text{ אבל } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_2, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1 \text{ אז}$$

### משפט 13.2 תת מרחב הקטן ביותר

נניח ש  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $\mathbb{F}$ ,  $V_1, V_2$  תתי מרחבים של  $V$ . אז הקבוצה

$$W = \{v_1 + v_2 | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

היא תת מרחב הקטן ביותר שמכיל את  $V_1$  ו  $V_2$ .  
ז"א לכל תת מרחב  $W'$  שמכיל את  $V_1$  ו  $V_2$ , מתקיים  $W \subseteq W'$ .

הוכחה:

(1) נוכיח ש  $W$  תת מרחב של  $V$ .

א)  $\bar{0} \in V_1$  וגם  $\bar{0} \in V_2$ . לכן

$$\bar{0} = \bar{0} + \bar{0} \in W.$$

ב) נניח  $w_1 = u_1 + v_1 \in W$ ,  $w_2 = u_2 + v_2 \in W$

אז  $u_1, v_1 \in V_1$  וגם  $u_2, v_2 \in V_2$ .

$V_1, V_2$  תתי מרחבים.

לכן  $u_1 + v_1 \in V_1$  וגם  $u_2 + v_2 \in V_2$ .

מכאן

$$w_1 + w_2 = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \in W.$$

ג) נניח  $w = u_1 + u_2 \in W$  ו  $k \in \mathbb{F}$ . אז  $u_1 \in V_1$  ו  $u_2 \in V_2$ .  $V_1, V_2$  תתי מרחבים, לכן  $ku_1 \in V_1$ ,

$ku_2 \in V_2$ . מכאן

$$kw = k(u_1 + u_2) = ku_1 + ku_2 \in W$$

(2) נוכיח כי  $W$  התת מרחב הקטן ביותר

ברור כי  $W$  מכיל את  $V_1$  ו  $V_2$  כי

$$u = u + \bar{0} \in W, u \in V_1$$

$$\text{וגם לכל } u \in V_2, u = \bar{0} + u \in W.$$

נוכיח ש  $W$  הוא תת מרחב הקטן ביותר שמכיל את  $V_1$  ו  $V_2$ .

נניח ש  $W'$  איזשהו תת מרחב שמכיל את  $V_1$  ו  $V_2$ .

נוכיח כי  $W \subseteq W'$ .

נקח וקטור  $w \in W$ . אז  $w = u_1 + u_2$ , כאשר  $u_1 \in V_1, u_2 \in V_2$ .

$$u_1 \in W' \Leftarrow V_1 \subseteq W'$$

$$u_2 \in W' \Leftarrow V_2 \subseteq W'$$

$W'$  תת מרחב, לכן  $w = u_1 + u_2 \in W'$ .

מש"ל.

### למה 13.1

למרחב  $W$  של משפט 13.2 (המשפט הקודם) נקרא הסכום של  $V_1$  ו  $V_2$  ומסומן ב  $V_1 + V_2$ .

### משפט 13.3 סכום של תת מרחב שווה לפרישה של האיחוד

$$V_1 + V_2 = \text{span}(V_1 \cup V_2) .$$

הוכחה: נוכיח כי  $V_1 + V_2 \subseteq \text{span}(V_1 \cup V_2)$ :

$$V_1, V_2 \subseteq \text{span}(V_1 \cup V_2)$$

לכן, לפי משפט 13.2,

$$V_1 + V_2 \subseteq \text{span}(V_1 \cup V_2) .$$

נוכיח כי  $\text{span}(V_1 \cup V_2) \subseteq V_1 + V_2$ :

נניח  $w \in \text{span}(V_1 \cup V_2)$ . אז קיימים  $u_1, \dots, u_k \in V_1$  ו  $v_1, \dots, v_n \in V_2$  וסקלרים  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ ,  $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{F}$  כך ש

$$w = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n .$$

אז  $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k \in V_1$  וגם  $\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \in V_2$ .  
לכן  $w \in V_1 + V_2$ .

הוכחנו כי  $V_1 + V_2 \subseteq \text{span}(V_1 \cup V_2)$  וגם  $\text{span}(V_1 \cup V_2) \subseteq V_1 + V_2$

$$V_1 + V_2 = \text{span}(V_1 \cup V_2) .$$

### דוגמה 13.2

נקח את המרחב ווקטורי  $V = \mathbb{R}^3$ . נקח את התתי מרחבים  $\mathbb{R}^3$ :  $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ ,  $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$

קווים ישרים ב  $\mathbb{R}^3$ . אז הסכום שלהם הינו

$$V_1 + V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} ,$$

ומהווה את המישור  $z = 0$  ב  $\mathbb{R}^3$ .

## 13.2 משפט המימדים של סכום וחיתוך

## משפט 13.4 משפט המימדים

נניח ש  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $\mathbb{F}$ ,  $V_1, V_2$  תתי מרחבים של  $V$ . אז

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

**הוכחה:** נסמן  $\dim(V_1) = k$ ,  $\dim(V_2) = n$ ,  $\dim(V_1 \cap V_2) = m$ .

$$V_1 \cap V_2 \subseteq V_1 \text{ לכן } m \leq k$$

$$V_1 \cap V_2 \subseteq V_2 \text{ לכן } m \leq n$$

נבחר בסיס  $u_1, \dots, u_m$  של  $V_1 \cap V_2$ .

נשלים אותו לבסיס של  $V_1$  ונקבל

$$u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}$$

נשלים אותו גם לבסיס של  $V_2$ :

$$u_1, \dots, u_m, b_1, \dots, b_{n-m}$$

נוכיח כי  $V_1 + V_2 = \text{span}(u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m})$ .

נניח  $w = v_1 + v_2 \in V_1 + V_2$ . אז

$$v_1 = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} \in V_1,$$

$$v_2 = \alpha'_1 u_1 + \dots + \alpha'_m u_m + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m} \in V_2.$$

אז

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= (\alpha_1 + \alpha'_1) u_1 + \dots + (\alpha_m + \alpha'_m) u_m \\ &\quad + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} \\ &\quad + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m} \end{aligned}$$

ז"א

$$v_1 + v_2 \in \text{span}(u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m})$$

נוכיח את ההכלה ההפוכה, כלומר  $\text{span}(u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m}) \subseteq V_1 + V_2$ .

נניח

$$w \in \text{span}(u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m})$$

אז קיימים סקלרים  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_{k-m}, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-m}$  כך ש

$$w = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m}$$

נסמן

$$v_1 = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m}$$

$$v_2 = \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m}$$

אז

$$v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2, \quad w = v_1 + v_2$$

כלומר  $w \in V_1 + V_2$ .

נשאר להוכיח שוקטורים  $\{u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m}\}$  בת"ל:

נניח:

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m} = \bar{0} . \quad (*)1$$

אז

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} = -\gamma_1 b_1 - \dots - \gamma_{n-m} b_{n-m} := v. \quad (*)2$$

הוקטור באגף השמאל שייך ל  $V_1$ .

הוקטור באגף הימין שייך ל  $V_2$ .

לכן, לפי  $(*)2$   $v \in V_1 \cap V_2$ .  $u_1, \dots, u_m$  בסיס של  $V_1 \cap V_2$  (נתון). לכן קיימים סקלרים  $\delta_1, \dots, \delta_m$  כך ש

$$v = \delta_1 u_1 + \dots + \delta_m u_m .$$

לכן

$$\begin{aligned} \delta_1 u_1 + \dots + \delta_m u_m + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m} &= \delta_1 u_1 + \dots + \delta_m u_m - (-\gamma_1 b_1 - \dots - \gamma_{n-m} b_{n-m}) \\ &= v - v \\ &= \bar{0} , \end{aligned}$$

ז"א

$$\delta_1 u_1 + \dots + \delta_m u_m + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m} = \bar{0} . \quad (*)3$$

$u_1, \dots, u_m, b_1, \dots, b_{n-m}$  בסיס של  $V_2$  (נתון). לכן הם בת"ל. לכן  $(*)3$  מתקיים רק אם

$$\delta_1 = \dots = \delta_m = \gamma_1 = \dots = \gamma_{n-m} = 0 . \quad (*)4$$

מכאן מקבלים מ  $(*)1$  כי

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} = \bar{0} . \quad (*)5$$

$u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}$  בסיס של  $V_1$  (נתון), לכן הם בת"ל. לכן  $(*)5$  מתקיים רק אם

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \beta_1 = \dots = \beta_{k-m} = 0. \quad (*)6$$

לכן, בגלל שהמקדמים ב  $(*)1$  כולם שווים ל 0, כפי שהוכחנו ב  $(*)4$  ו  $(*)6$ , אז הוקטורים  $u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m}$  בת"ל. כלומר הם מהווים בסיס של  $V_1 + V_2$ . מכאן

$$\dim(V_1 + V_2) = m + (k - m) + (n - m) = k + n - m = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

מש"ל.

### מסקנה 13.1

נניח  $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$  תתי מרחבים ממימד 2, אז  $\dim(V_1 \cap V_2) > 0$ .

הוכחה:  $V_1, V_2$  תתי מרחבים של  $\mathbb{R}^3$ , לכן  $\dim(V_1 + V_2) \leq 3$ . לפי משפט ??,

$$4 = \dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) \leq 3 + \dim(V_1 \cap V_2)$$

## 13.3 כיצד למצוא בסיס ומימד של סכום וחיתוך תת מרחב

נניח כי  $U, V$  תתי מרחבים של  $\mathbb{R}^n$ . ונניח ש

$$\{u_1, \dots, u_k\}$$

בסיס של  $U$  ו

$$\{v_1, \dots, v_l\}$$

בסיס של  $V$ . כדי למצוא בסיס של  $U + V$ , נרשום מטריצה  $Q$  מסדר  $n \times (k + l)$  המורכב מהבסיסים של  $U$  ו  $V$ :

$$Q = \left( \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} | & | & & | & | & | & & | \\ \hline u_1 & u_2 & \dots & u_k & v_1 & v_2 & \dots & v_l \\ \hline | & | & & | & | & | & & | \end{array} \right)$$

אז המרחב העמודות של  $U + V$  שווה למרחב העמודות של  $Q$ :

$$\text{col}(Q) = \text{col}(U + V)$$

ובסיס של  $\text{col}(Q)$  שווה גם לבסיס של  $U + V$ :

$$B(Q) = B(U + V) .$$

בסיס של  $U \cap V$  ניתן למצוא ע"י המרחב האפס של  $Q$ ,  $\text{Nul}(Q)$ . נניח כי הוקטור  $x$  במרחב האפס של  $Q$ , כלומר  $x \in \text{Nul}(Q) \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$ . נניח כי הרכיבים של  $x$  הם

$$x = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ b_1 \\ \vdots \\ b_l \end{pmatrix} .$$

כיוון שוקטור  $x$  ב  $\text{Nul}(Q)$  אז

$$Q \cdot x = \left( \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} | & | & & | & | & | & & | \\ \hline u_1 & u_2 & \dots & u_k & v_1 & v_2 & \dots & v_l \\ \hline | & | & & | & | & | & & | \end{array} \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ b_1 \\ \vdots \\ b_l \end{pmatrix} = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_l v_l = \bar{0} . \quad (1*)$$

עכשיו נעביר את כל האיברים של הבסיס  $v_1, \dots, v_l$  לאגף הימין ונקבל

$$a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = -b_1 v_1 - \dots - b_l v_l . \quad (*2)$$

שימו לב הצירוף לינארי באגף השמאל הוא וקטור של  $U$  והצירוף לינארי באגף הימין הוא וקטור של  $V$ . נקרא הוקטור הזה  $y$ :

$$y := a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = -b_1 v_1 - \dots - b_l v_l . \quad (*3)$$

כך קיבלנו וקטור  $y$  השייך גם ל  $U$  וגם ל  $V$ , או במילים אחרות

$$y \in U \cap V .$$

### דוגמה 13.3

נתונים וקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

נסמן

$$V_1 = \text{span}(u_1, u_2) , \quad V_2 = \text{span}(u_3, u_4) .$$

מצאו בסיס ומימד של  $V_1, V_2$  ו  $V_1 \cap V_2$ .

### פתרון:

בסיס של  $V_1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של  $V_1$ :

$$B(V_1) = \{u_1, u_2\}$$

$$\dim(V_1) = 2$$

בסיס של  $V_2$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של  $V_2$ :

$$B(V_2) = \{u_3, u_4\}$$

$$\dim(V_2) = 2$$

$$Q = (u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_2 + R_3 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_3 + R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

העמודות 1, 2, 3 מובילות לכן בסיס של  $V_1 + V_2$  הוא

$$B(V_1 + V_2) = \{u_1, u_2, u_3\}$$

ו  $\dim(V_1 + V_2) = 3$ .  
לפי משפט המימדים:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

כיוון ש  $\dim(V_1) = 2$ ,  $\dim(V_2) = 2$ ,  $\dim(V_1 + V_2) = 3$ , אז

$$\dim(V_1 \cap V_2) = 1.$$

כדי למצוא בסיס של  $V_1 \cap V_2$  נמצא את  $\text{Nul } Q$ . מסעיף הקודם המדורגת של  $Q$  היא:

$$Q \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית  $Qx = 0$  הוא

$$\left. \begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ -y - 2z + w &= 0 \\ -z + w &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= -y - z - w \\ y &= -2z + w \\ z &= w \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= -w \\ y &= -w \\ z &= w \end{aligned} \right\}$$

כלומר

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} w$$

לכן בסיס של  $\text{Nul } Q$  הוא מורכב וקטור אחד:

$$B(\text{Nul}(Q)) = \left\{ x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

הוקטור  $x$  מקיים את משוואת ההומוגנית של  $Q$ , לכן

$$Q \cdot x = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad (u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{0}$$

לכן נקבל

$$-1 \cdot u_1 - 1 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 + 1 \cdot u_4 = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad u_1 + u_2 = u_3 + u_4.$$

נגדיר את שני האגפים להיות הוקטור  $y$ :

$$y := u_1 + u_2 = u_3 + u_4$$

נציב את הוקטורים ונמצא כי

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



לכן בסיס של  $V \cap U$  הוא

$$B(V \cap U) = \{y\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

### דוגמה 13.4

נניח כי  $U \in \mathbb{R}^5$  תת מרחב עם בסיס

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

ונניח כי  $W \in \mathbb{R}^5$  תת מרחב עם בסיס

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

מצאו המימד והבסיס של  $U \cap W$ .

### פתרון:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ -2 & -3 & 0 & -1 & -6 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 9 & 1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מכאן נקבל בסיס של  $\text{Nul}(Q)$

$$B_{\text{Nul}(Q)} = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$Qb_1 = 0 \Rightarrow -5u_1 + 3u_2 + w_1 = 0,$$

$$Qb_2 = 0 \Rightarrow -2u_1 + u_3 + w_2 = 0.$$

מכאן נקבל בסיס של  $U \cap W$ :

$$B_{U \cap W} = \{x_1, x_2\}$$

כאשר

$$x_1 = 5u_1 - 3u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} = w_1, \quad x_2 = 2u_1 - u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = w_2.$$