חישוביות וסיבוכיות

מועד א'

ד"ר יוחאי טוויטו, ד"ר ירמיהו מילר, .

סמסטר א, תשפ"ה'

מספר העמוד הנוכחי ומספר העמודים הכולל בשאלון מופיעים בתחתית כל עמוד. בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות

שאלוני בחינה

☑ לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.

☐ לשאלון הבחינה יש לצרף כריכה בלבד.

☐ יש להחזיר את השאלון ביחד עם המחברת/כריכה.

שימוש במחשבונים

☐ ניתן להשתמש במחשבון.

☑ לא ניתן להשתמש במחשבון.

חומר עזר

☑ לא ניתן להשתמש בחומר עזר כלל.

☐ ניתן להשתמש בחומר עזר/דף נוסחאות, כמפורט:

☐ הבחינה עם חומר פתוח מותר להשתמש בכל חומר עזר מודפס או כתוב.

הנחיות

נא קראו בעיון את ההנחיות הבאות בטרם תתחילו לפתור את הבחינה. מומלץ לקרוא בקצרה את כלל השאלות לפני שמתחילים לפתור את הבחינה. ניתן לענות על השאלות בכל סדר שתרצו.

1. המבחן כולל 5 שאלות. יש לענות על כולן.
2. שאלות הבחינה שוות משקל - כל שאלה 20 נקודות.
3. כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תדלגו על שלבים.
4. המבחן כולל נספחים, לשימושכם. הסתייעו בהם במידת הצורך.
5. הקפידו על כתב יד ברור וקריא.
6. הקפידו לרשום בגדול ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
7. כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבלתם. רק הן נבדקות !
8. ניתן לקחת את השאלון כאשר הבחינה מסתיימת.

בהצלחה!

הבחינה

שאלה 1: מכונת טיורינג 20 נקודות

סעיף א' 10 נקודות

נתון אלפבית הקלט $\Sigma = \{a, b, c\}$ ונתונה השפה הבאה:

$$L = \left\{a^i b^j c^{i \cdot j} \,\middle|\, i, j \in \mathbb{N}^+\right\}$$

תארו מכונת טיורינג סטנדרטית (כלומר,במודל הבסיסי) שמכריעה את השפה .

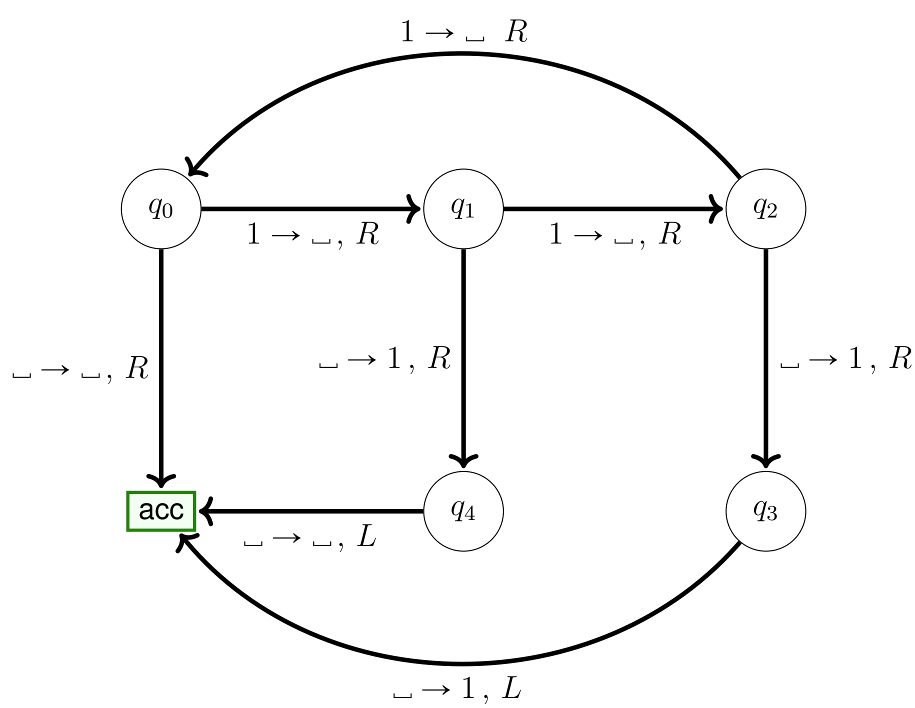
בסעיף זה עליכם לתאר את המכונה בצורה גרפית בעזרת תרשים /דיאגרמת מצבים בלבד ,ולא בדרכים אחרות. כלומר, לא בעזרת טבלת מעברים ,לא בעזרת פסאודו -קוד,וכיוצא באלו.

תזכורת: $\mathbb{N}^+$ היא קבוצת הטבעיים החיוביים (כלומר, ללא המספר אפס).

סעיף ב' 5 נקודות

נתון אלפבית הקלט $\Sigma = \{1\}$. בתרשים הבא, נתונה מכונת טיורינג M. המכונה מקבלת כקלט מספר בבסיס אונרי.

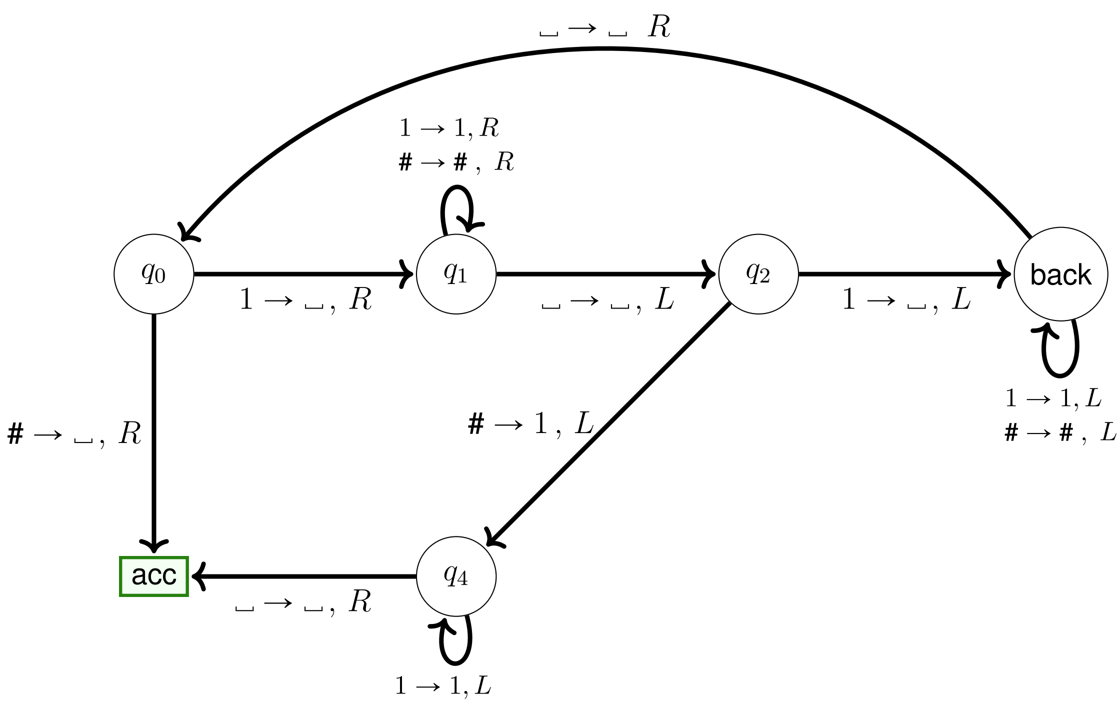
מהי הפפונקציה f שהמכונה מחשבת? כיתבו את הפונקציה בצורה פורמלית, ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של הפונקציה.



סעיף ג' 5 נקודות

בתרשים הבא, נתונה מכונת טיורינג M. המכונה מקבלת כקלט שני מספרים בבסיס אונרי, מופרדים ע"י האות #.

בהינתן קלט מהצורה $1^i\#1^j$, כאשר $i,j \in \mathbb{N}$, מהי הפונקציה f שהמכונה מחשבת? כיתבו את הפונקציה בצורה פורמלית, ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של הפונקציה .



שאלה 2: וריאציות על מכונת טיורינג 20 נקודות

נגדיר מודל מכונת טיורינג חדש שנקרא לו OR. במודל זה, הראש יכול לבצע בכל מעבר רק פעולה אחת:

1. או לזוז על הסרט (ימינה או שמאלה).
2. או לכתוב במיקום הנוכחי בסרט, ללא תנועה ימינה או שמאלה.

כלומר פונקציית המעברים במודל זה מוגדרת כך:

$$\delta : (Q \times \Gamma) \to (Q \times (\Gamma \cup \{L, R\}))\ ,$$

כאשר המשמעות של פעולת האיחוד היא שבמעבר נתון, אפשר או לכתוב או לזוז שמאלה/ימינה, אך לא גם וגם. מלבד ההבדל בפונקציית המעברים, מודל OR זהה למודל הבסיסי של מכונת טיורינג.

נגדיר מודל מכונת טיורינג חדש שנקרא לו TS. במודל זה ,בכל מעבר, מלבד האפשרות לזוז שמאלה או ימינה, הראש יכול גם להישאר במקום (באותה המשבצת בסרט). כלומר פונקציית המעברים במודל זה מוגדרת כך:

$$\delta : (Q \times \Gamma) \to (Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}) \ ,$$

כאשר המשמעות של S היא הישארות במקום (stay). מלבד ההבדל בפונקציית המעברים, מודל TS זהה למודל הבסיסי של מכונת טיורינג.

הוכיחו כי המודל OR והמודל TS שקולים חישובית.

שאלה 3: התזה של צ'רץ' טיורינג 20 נקודות

סעיף א' 10 נקודות

נתון הדקדוק הבא. מהי השפה שהדקדוק יוצר? כלומר, מהי $L(G)$? כיתבו את השפה בצורה פורמלית, ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של השפה.

$$\begin{aligned}
G &= (V, \Sigma, R, S) \\
V &= \{S, B\} \\
\Sigma &= \{a, b, c\} \\
R &= \{ \\
&\qquad S \to aBSc \\
&\qquad S \to \varepsilon \\
&\qquad Ba \to aB \\
&\qquad Bc \to bc \\
&\qquad Bb \to bb \\
&\}
\end{aligned}$$

סעיף ב' 10 נקודות

נתון הדקדוק הבא. מהי השפה שהדקדוק יוצר? כלומר, מהי $L(G)$? כיתבו את השפה בצורה פורמלית,

ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של השפה.

$$
\begin{aligned}
G &= (V, \Sigma, R, S) \\
V &= \{S, B\} \\
\Sigma &= \{a, b, c\} \\
R &= \{
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\to ABCS \\
S &\to \varepsilon \\
AB &\to BA \\
BC &\to CB \\
AC &\to CA \\
BA &\to AB \\
CA &\to AC \\
CB &\to BC \\
A &\to a \\
B &\to b \\
C &\to c \qquad \}
\end{aligned}
$$

שאלה 4: אי-כריעות 20 נקודות

הוכיחו שהשפה הבאה אינה כריעה. כתבו הוכח המלא המפורטת .אל תדלגו על שלבים. בשאלה זו ניתן להניח כי M_1, M_2 הן מכונות טיורינג.

$$L_{M_1 \cup M_2} = \left\{ \langle M_1, M_2, w \rangle \;\middle|\; w \in L(M_1) \cup L(M_2) \right\}$$

שאלה 5: סיבוכיות זמן 20 נקודות

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$. קבוצת קדקודים $U \subseteq V$ תקרא **קבוצת בלתי תלויה** אם לכל זוג קדקודים u_1, u_2 ב- U מתקיים ש- $(u_1, u_2) \notin E$.

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$. קבוצת קדקודים $U \subseteq V$ תקרא **כיסוי קדקודים** ב- G אם לכל צלע $(u_1, u_2) \in E$, מתקיים ש- $u_2 \in U \quad \vee \quad u_1 \in U$. נתבונן בשפות הפורמליות הבאות:

$$IS = \{\langle G, k \rangle \mid \text{גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ לפחות. } G\}$$

$$VC = \{\langle G, k \rangle \mid \text{גרף לא מכוון המכיל כיסוי קודקודים בגודל } k \text{ לכל היותר. } G\}$$

הוכיחו כי

$$IS \leqslant_P VC \,.$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה IS לשפה VC.
יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

תוכן העניינים

1 מכונות טיורינג

הגדרה 1: מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעיה $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$.

Q	קבוצת מצבים סופיות	
Σ	א"ב קלט סופי	$\_ \notin \Sigma$
Γ	א"ב סרט סופי	$\Sigma \subseteq \Gamma\, ,\ \_ \in \Gamma$
δ	פונקציית המעברים	$\delta : (Q \backslash \{\text{rej}, \text{acc}\} \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$
q_0	מצב התחלתי	
acc	מצב מקבל	
rej	מצב דוחה	

הגדרה 2: קונפיגורציה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$ מכונת טיורינג.

קונפיגורציה של M הינה מחרוזת

$$uq\sigma\mathsf{v}\ , \quad u, \mathsf{v} \in \Gamma^*,\ \sigma \in \Gamma,\ q \in Q\ .$$

משמעות:

q מצב המכונה,

σ הסימון במיקום הראש

u תוכן הסרט משמאל לראש,

v תוכן הסרט מימין לראש.

הגדרה 3: גרירה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M.

נסמן

$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם כשנמצאים ב- c_1 עוברים ל- c_2 בצעד בודד.

נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

אם ניתן לעבור מ- c_1 ל- c_2 ב- 0 או יותר צעדים.

הגדרה 4: קבלה ודחייה של מחרוזת

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}\ , \ \text{rej})$ מכונת טיורינג, ו- $w \in \Sigma^*$ מחרוזת.

נאמר כי:

- M **מקבלת** את w אם $q_0 w \vdash_M^* u \text{ acc } \sigma \text{ v}$
- M **דוחה** את w אם $q_0 w \vdash_M^* u \text{ rej } \sigma \text{ v}$

כאשר $\sigma \in \Gamma$, $\text{v}, u \in \Gamma^*$ כלשהם.

הגדרה 5: הכרעה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה.
נאמר כי M **מכריעה** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים
- $L \ni w \Leftarrow$ M מקבלת את w.
- $L \notni w \Leftarrow$ M דוחה את w.

הגדרה 6: קבלה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה.
נאמר כי M **מקבלת** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים
- אם $w \in L$ אז M מקבלת את w.
- אם $w \notin L$ אז M לא מקבלת את w.

במקרה כזה נכתוב ש- $L(M) = L$.

הגדרה 7: חישוב פונקציות

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$ מכונת טיורינג ותהי $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$.
נאמר כי M **מחשבת** את f אם:
- $\Sigma = \Sigma_1$, $\Sigma_2 \subset \Gamma$,
- לכל $w \in \Sigma_1^*$ מתקיים $q_0 w \vdash_M^* \text{acc} f(w)$.

2 וריאציות של מכונות טיורינג

הגדרה 8: מודל חישוב

מודל חישובי = אוסף של מכונות שעבורם מוגדרים המושגים של הכרעה וקבלה של שפות.

הגדרה 9: מודלים שקולים חישובית

יהיו A, B מודלים חישוביים. נאמר כי A ו- B שקולים אם לכל שפה L:
- קיימת מכונה במודל A שמכריעה את L אם"ם קיימת מכונה כזו במודל B.
- קיימת מכונה במודל A שמקבלת את L אם"ם קיימת מכונה כזו במודל B.

הגדרה 10: מכונות שקולות חישובית
שתי מכונות הן שקולות חישובית אם הן מקבלות ודוחות בדיוק את אותן המילים.

משפט 1: מכונת טיורינג עם סרט ימינה בלבד
מודל מ"ט טם סרט אינסופי לכיוון אחד בלבד (מודל O) שקול למודל אינסופי בשני הכיוונים (מודל T).
כלומר, לכל שפה L:

- יש מ"ט ממודל O שמקבלת את L אס"ם יש מ"ט במודל T שמקבלת את L.
- יש מ"ט ממודל O שמכריעה את L אס"ם יש מ"ט במודל T שמכריעה את L.

משפט 2: מכונת טיורינג מרובת סרטים
במכונת טיורינג מרובת סרטים:

- יתכנו מספר סטרים.

  מספר הסרטים סופי וקבוע מראש בזמן בניית המ"ט, ואינו תלוי בקלט או במהלך החישוב.
- לכל סרט יש ראש נפרד.
- הפעילות (תנועה וכתיבה) בכל סרט נעשית בנפרד.

  בפרט, הראשים יכולים לזוז בכיוונים שונים בסרטים שונים.
- ישנו בקר מרכזי יחיד, שקובע את הפעילות בכל אחד מהסרטים, על סמך המידע שמתקבל מכל הסרטים.

  לכן, תוכן סרט אחד יכול להשפיע על הפעילות בשאר הסרטים.
- בתחילת החישוב, הקלט נמצא בסרט הראשון ושאר הסרטים ריקים.

משפט 3:
לכל k, המודל של מ"ט עם k סטרים שקול חישובי למודל של מ"ט עם סרט אחד.

משפט 4:
קבלה ודחייה של מחרוזות:
עבור מ"ט לא דטרמיניסטית N ומחרוזת w:

- N **מקבלת** את w אם קיים חישוב של N על w שמגיע למצב מקבל.
- N **דוחה** את w אם כל החישובים של N על w עוצרים במצב דוחה.

הכרעה וקבלה של שפות:
עבור מ"ט לא דטרמיניסטית N ושפה L:

- N **מכריעה** את L אם N מקבלת אץ כל המילים ב- L ודוחה את כל המילים שאינן ב- L.
- N **מקבלת** את L אם N מקבלת אץ כל המילים ב- L ולא מקבלת את כל המילים שאינן ב- L.

משפט 5:
לכל מ"ט לא דטרמיניסטית קיימת מ"ט דטרמיניסטית שקולה.

3 התזה של צ'רץ'-טיורינג

שמות נרדפים לשפות כריעות ושפות קבילות

שפות כריעות	Decideable languages	שפות קבילות	Acceptable languages
שפות רקורסיביות	Recursive languages	שפות ניתנות לזיהוי	recognizable languages
		שפות כריעות למחצה	Semi-deidable languages
			Partially-deidable languages
		שפות הניתנות למנייה רקורסיביות	Recursively enumerable languages

משפט 6: סגירות שפות כריעות
השפות הכריעות סגורות תחת:
- איחוד
- חיתוך
- משלים
- שרשור
- סגור קלין

משפט 7: סגירות שפות קבילות
- איחוד
- חיתוך
- שרשור
- סגור קלין

משפט 8: היחס בין הכרעה לקבלה
אם שפה הינה כריעה אז היא קבילה.
אם שפה והמשלים שלה קבילות אז היא כריעה.

הגדרה 11: שפת סימפל
<u>משתנים</u>
- טבעיים: `i,j,k,...`

  מקבלים כערך מספר טבעי.
- מערכים: `A[],B[],C[],...` בכל תא ערך מתוך א"ב Γ אין סופיים.
- אתחול: הקלט נמצא בתאים הראשונים של `A[]`.

  כל שאר המשתנים מאותחלים ל- 0.

<u>פעולות</u>
- השמה בקבוע:

  `i=3, B[i]="#"`
- השמה בין משתנים:

  `i=k, A[k]=B[i]`
- פעולות חשבון:

  `x = y + z , x = y − z , x = y.z`

<u>תנאים</u>

- B[i]==A[j]

(מערכים).

- x >= y

(משתנים טבעיים).

כל משתנה מופיע רק פעם אחת בכל פעולה או תנאי.

<u>זרימה</u>

- סדרה פקודות ממוספרות.
- goto: מותנה ולא מותנה.
- stop עצירה עם ערך חזרה.

```
1 one = 1
2 zero = 0
3 B[zero] = "0"
4 i=0
5 j=i
6 if A[i] == B[zero] goto 9
7 i=j + one
8 goto 3
9 C[one] = A[j]
10 if C[one] ==  A[zero] goto 12
11 stop(0)
12 stop(1)
```

הגדרה 12: קבלה ודחייה של מחרוזת בשפה SIMPLE

עבור קלט

w ותוכנית

P בשפת SIMPLE. נאמר כי

- P **מקבלת** את w אם הריצה של P על w עוצרת עם ערך חזרה 1.
- P **דוחה** את w אם הריצה של P על w עוצרת עם ערך חזרה 0.

הגדרה 13: הכרעה וקבלה של שפות

עבור שפה L ותוכנית P בשפת SIMPLE. נאמר כי

- P **מכריעה** את L אם היא מקבלת את המילים שב- L ודוחה את אלה שלא ב- L.
- P **מקבלת** את L אם היא מקבלת את כל ורק המילים ב- L.

משפט 9:

המודלים של מכונת טיורינג ותוכניות SIMPLE שקולים.

משפט 10: מ"ט ותוכניות מחשב
מ"ט חזקה לפחות כמו תוכנית משחב.
כל תוכנית מחשב ניתנת למימוש במ"ט.
לכן, כל שפה שהינה כריעה ע"י מחשב היא כם כריעה ע"י מ"ט.
וכמו כן, שפה שהינה קבילה ע"י מחשב היא גם קבילה ע"י מ"ט.

הגדרה 14: דקדוקים כלליים
בדקדוק כללי, בצד שמאל של כלל יצירה יכולה להופיעה מחרוזת (לא ריקה) כלשהי.
פורמלית, כלל יצירה בדקדוק כללי הוא מהצורה

$$\gamma \to u$$

כאשר $\gamma \in (V \cup \Sigma)^+$, $u \in (V \cup \Sigma)^*$.

משפט 11:
תהי L שפה. L קבילה אס"ם קיים דקדוק כללי G כך ש- $L(G) = L$.

משפחת שפות	דקדוק	מודל חישובי
קבילות	כללי	מכונת טיורינג
חסרות הקשר	חסר הקשר	אוטומט מחסנית
רגולריות	רגולרי	אוטומט סופי

משפט 12:
כל שפה חסרת הקשר הינה כריעה.

משפט 13: התזה של צ'רץ' טיורינג
התזה של צ'רץ' טיורינג מודל מ"ט מגלם את המושג האבסטרקרטי של "אלגוריתם".
כלומר, כל אלגוריתם שניתן לתיאור כתהליך מכניסטי שבו:
- התהליך מתבצע כסדרה של צעדים.
- כל צעד מצריך כמות סופית של "עבודה".

ניתן גם לתיאור כמ"ט.
בפרט, אין מודל מכניסטי / אוטומטי יותר ממ"ט.

4 אי-כריעות

הגדרה 15: השפה ATM

$$ATM = \{(P,w) \mid P(w) = 1\} \ .$$

השפה ATM כוללת את כל הזוגות של מחרוזות P, w כך ש:

- P היא קוד (תקין) של תוכנית.
- w מחרוזת.
- מתקיים שאם מריצים את התוכנית P על הקלט w אז התוכנית עוצרת עם ערך חזרה 1.

הגדרה חלופית:

$$A_{TM} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ מכונת טיורינג שמקבלת את } w\}$$

השפה A_{TM} כוללת את כל הזוגות של מחרוזות $\langle M, w\rangle$ של כל מכונת טיורינג M וכל קלט w כך ש- M מקבלת את w.

סיכום 1: התוכנה U

התוכנה U היא תוכנה שמקבלת כקלט זוג מחרוזות P, w ופועלת כך:

- U מחזירה את ערך החזרה שהתקבל מהריצה של P על w.
- מריצה את התוכנה P על קלט w (במקרה שבו P אינה תוכנית מחשב תקינה אז U מחזירה ערך 0).

נשים לב שאם P לא עוצרת על w אז גם U לא עוצרת על הזוג P, w.
התוכנה U פועלת באופן דומה לאופן שבה מערכת ההפעלה מפעילה תוכנות אחרות.

התוכנה U נקראת גם "תוכנה אוניברסלית" (או, בעולם מכונות טיורינג: "מכונת טיורינג אוניברסלית") כיוון שהיא תוכנה אחת שמדמה כל תוכנה אחרת.

U היא תוכנית שמקבלת את ATM. כלומר:

$$L(U) = ATM \ .$$

מסקנה: ATM קבילה.

שיטת ההוכחה:

אם שפה הינה קבילה אבל לא כריעה, אז המשלים שלה בהכרח אינה קבילה.
לכן, בשביל להוכיח ששפה אינה קבילה, די להוכיח שהשפה לא כריעה, והמשלים שלה כן קבילה.

הגדרה 16: השפה HALT

$$HALT = \{(P,w) \mid P(w) \downarrow\} \ .$$

השפה HALT כוללת את כל הזוגות של מחרוזות P, w כך ש:

- P היא קוד (תקין) של תוכנית.
- w מחרוזת.
- מתקיים שאם מריצים את התוכנית P על הקלט w אז התוכנית עוצרת (הסימון $\downarrow$ מסמן עצירה).)

בעיית העצירה קבילה אבל לא כריעה.
כיוון שכך, המשלים שלה לא כריעה ולא קבילה.

הגדרה חלופית:

$$HALT_{TM} = \left\{ \langle M, w \rangle \;\middle|\; M \text{ מכונת טיורינג שעוצרת על } w \right\}$$

השפה $HALT_{TM}$ כוללת את כל הזוגות של מחרוזות $\langle M, w \rangle$ של כל מכונת טיורינג M וכל קלט w כך ש- M עוצרת על w.

הגדרה 17: השפה E

$$E = \left\{ P \;\middle|\; L(P) = \varnothing \right\}$$

השפה E כוללת את כל המחרוזות P כך ש-
- P היא קוד (תקין) של תוכנית.
- השפה של P ריקה.

כלומר, לכל קלט w, הריצה של P על w לא מחזירה 1.

הגדרה חלופית:

$$E_{TM} = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; M \text{ מכונת טיורינג שעומדת בתנאי } L(M) = \varnothing \right\}$$

השפה E_{TM} כוללת את כל מחרוזות $\langle M \rangle$ של כל מכונת טיורינג M כך ש- M לא מקבלת אף מילה.
במילים אחרות, השפה של M ריקה: $L(M) = \varnothing$.

הגדרה 18: השפה EQ

$$EQ = \left\{ (P_1, P_2) \;\middle|\; L(P_1) = L(P_2) \right\} \; .$$

השפה EQ כוללת את כל זוגות המחרוזות P_1, P_2 כך ש:
- P_1, P_2 הינן קודים (תרינים) של תוכניות.
- השפות של P_1, P_2 זהות.

כלומר, P_1, P_2 מקבלות בדיוק את אותן המילים.

הגדרה חלופית:

$$EQ_{TM} = \left\{ \langle M_1, M_2 \rangle \;\middle|\; M_1, M_2 \text{ מכונות טיורינג } L(M_1) = L(M_2) \right\}$$

השפה EQ_{TM} כוללת את כל זוגות של מכונות טיורינג $\langle M_1, M_2 \rangle$ שמקבלות בדיוק אותן המילים.
במילים אחרות, השפות של M_1 ו- M_2 זהות: $L(M_1) = L(M_2)$.

	כריעה	קבילה
ATM	$\times$	$\checkmark$
$\overline{ATM}$	$\times$	$\times$
$HALT$	$\times$	$\checkmark$
$\overline{HALT}$	$\times$	$\times$
E	$\times$	$\times$
$\overline{E}$	$\times$	$\checkmark$
EQ	$\times$	$\times$
$\overline{EQ}$	$\times$	$\times$

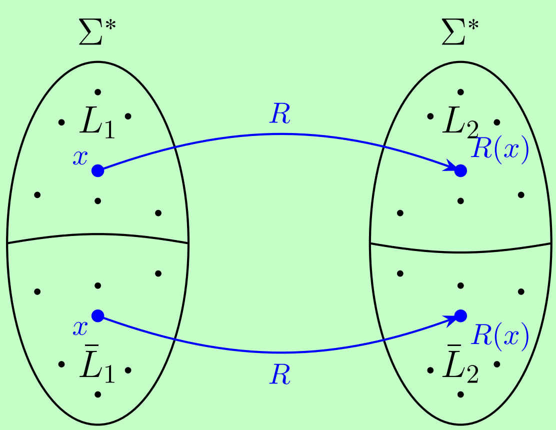
הגדרה 19: הרדוקציה

רדוקציית התאמה (many to one reduction) מקבוצה $L_1 \subseteq \Omega_1$ לקבוצה $L_2 \subseteq \Omega_2$ הינה **פונקציה**

$$R : \Omega_1 \to \Omega_2$$

כך שלכל $x \in \Omega_1$ מתקיים:

$$x \in L_1 \quad \Leftrightarrow \quad R(x) \in L_2 \ .$$



סימון: $L_2 \leqslant_m L_1$ רייממת רדוקציה התאמה ניתנת לחישוב מ- L_1 ל- L_2.

משפט 14: משפט הרדוקציה

טענה:
אם:
- L_2 כריעה
- $L_1 \leqslant L_2$

אז L_1 כריעה.

מסקנה:
אם:
- L_1 לא כריעה
- $L_1 \leqslant L_2$

אז L_2 לא כריעה.

מתכון להוכחה ששפה L_2 לא כריעה:
1. בחר שפה L_1 לא כריעה.
2. מצא רדוקציית התאמה ניתנת לחישוב מ- L_1 ל- L_2.

טענה:
אם:
- L_2 קבילה
- $L_1 \leqslant L_2$

אז L_1 קבילה.

מסקנה:
אם:
- L_1 לא קבילה
- $L_1 \leqslant L_2$

אז L_2 לא קבילה.

מתכון להוכחה ששפה L_2 לא קבילה:
1. בחר שפה L_1 לא קבילה.
2. מצא רדוקציית התאמה ניתנת לחישוב מ- L_1 ל- L_2.

משפט 15: תכונות של רדוקציות

B	$\leqslant_m$	A
כריעה	$\Leftarrow$	כריעה
לא כריעה	$\Rightarrow$	לא כריעה

B	$\leqslant_m$	A
קבילה	$\Leftarrow$	קבילה
לא קבילה	$\Rightarrow$	לא קבילה

משפט 16: לכל שפה קיימת רדוקציה ל- A_{TM}

מכל שפה כריעה A קיימת רדוקציה חישובית ל- A_{TM}.

כלומר
$$A \leqslant_m A_{TM} \ .$$

משפט 17: רדוקציה משפות כריעות
מכל שפה כריעה קיימת רדוקציה חשיבה לכל שפה אחרת שאינה $\varnothing$ או Σ^*.

הגדרה 20:

$$NOTREG = \{P \mid \text{לא רגולרית } L(P)\} \ .$$

השפה NOT-REG כוללת את כל המחרוזות P כך ש:
- P הינה קוד (תקין) של תוכנית.
- השפה של P לא רגולרית.

הגדרה חלופית:

$$NOTREG_{TM} = \{\langle M\rangle \mid \text{לא רגולרית } L(M)\} \ .$$

השפה $NOTREG_{TM}$ כוללת את כל המחרוזות $\langle M\rangle$ של מ"ט M כך שהפשה של M לא רגולרית.

משפט 18: השפה $NOT-REG$ אינה קבילה.
השפה $NOT-REG$ אינה קבילה.

5 סיבוכיות זמן

הגדרה 21: זמן הריצה
זמן הריצה של מכונת טיורינג M על קלט w הוא מספר צעדי החישוב ש- M מבצעת על w.

הגדרה 22: סיבוכיות זמן ריצה
תהי M מ"ט דטרמיניסטית אשר עוצרת על כל קלט. **הזמן הריצה** או **הסיבוכיות זמן** של M היא פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, כאשר $f(n)$ המספר צעדי חישוב המקסימלי ש- M מבצעת על קלט w של אורך n.

אם $f(n)$ זמן הריצה של M, אומרים כי M רץ בזמן $f(n)$ וש- M היא $f(n)$ זמן מכונת טיורינג

הגדרה 23: מחלקה של סיבוכיות זמן
המחלקת הסיבוכיות זמן מסומנת $\text{TIME}\,(t(n))$ ומוגדרת להיות אוסף של כל השפות אשר ניתנות להכרעה על ידי מכונת טיורינג בזמן $O\,(t(n))$.

משפט 19:
הגדרת זמן הריצה שנתנו היא תלויה במודל של מכונת הטיורינג שאיתו אנחנו עובדים.

משפט 20:
תהי $t:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ פונקציה $t(n)$.
אם מתקיים
$$t(n)\geqslant n$$
אז לכל מכונת טיורינג $O(t(n))$ רב-סרטי קיימת מ"ט $O(t^2(n))$ עם סרט אחד.

הגדרה 24: זמן הריצה של מ"ט לא דטרמיניסטית
תהי N מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית.
הזמן הריצה של N מוגדרת להיות הפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כאשר $f(n)$ הוא המספר הצעדים המקסימלי אשר N מתוך כל הענפים של החישוב שלה על קלט של אורך n.

משפט 21:
תהי $t(n)$ פונקציה המקיימת $t(n)\geqslant n$. כל מ"ט $O(t(n))$ לא דטרמיניסטית N סרט אחד, שקולה למכונת טיורינג $2^{O(t(n))}$ דטרמיניסטית סרט אחד.

הגדרה 25: מכונת טיורינג פולינומית
מכונת טיורינג M תיקרא **פולינומית** או **יעילה** אם קיים $c\in\mathbb{N}$ כך ש- M פועלת בסיבוכיות זמן ריצה $O(n^c)$.

הגדרה 26: המחלקה P
המחלקה P היא אוסף השפות שקיימת מכונת טיורינג פולינומיאלית M המכריעה אותן. כלומר:
$$P=\bigcup_k \mathsf{TIME}\left(n^k\right) \ .$$

הגדרה 27: אלגוריתם אימות
אלגוריתם אימות של שפה A הוא אלגוריתם V כך ש-:
$$A=\left\{w \;\middle|\; V \text{ מקבל } \langle w,c\rangle \text{ על פי } c\right\}$$
במילים, **אלגוריתם אימות** הוא אלגוריתם V אשר מאמת כי הקלט w שייך לשפה A על פי התנאי c, שנקרא **אישור** (certification).

אנחנו מגדירים את זמן הריצה של V על פי האורך של w. לכן **אלגוריתם אימות זמן-פולינומיאלי** רץ בזמן פולינומיאלי $O\left(n^k\right)$ כאשר n האורך של w.

הגדרה 28: מחלקת הסיבוכיות NP
- המחלקה NP היא מחלקת השפות שניתן לאמתן באמצעות אלגוריתם זמן-פולינומיאלי.

הגדרה חלופית למחלקה NP הינה:
- המחלקה NP היא מחלקת השפות שניתן להכרעה באמצעות מ"ט אי-דטרמיניסטית זמן-פולינומיאלית.

למטה במשפט 22.

משפט 22: $A \in NP$ אם"ם A ניתנת לאימות ע"י N_{TM}
שפה A כלשהי שייכת למחלקה NP אם ורק אם A ניתנת להכרעה על ידי מכונות טיורינג אי-דטרמיניסטית זמן-פולינומיאלית.

הגדרה 29: פונקיצה הניתנת לחישוב זמן-פולינומיאלי
פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ניתנת לחישוב זמן-פולינומיאלי אם קיימת מ"ט זמן-פולינומיאלית M, עבורה על הקלט w, M עוצרת עם $f(w)$ על הסרט שלה.

הגדרה 30: פונקציה שניתנת לרדוקציה זמן-פולינומיאלית
השפה A ניתנת לרדוקציה זמן-פולינומיאלית לשפה B, שנסמן $A \leqslant_P B$, אם קיימת פונקציה שנתנת לחישוב זמן-פולינומיאלית $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ כך שלכל

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B \ .$$

הפונקציה f נקראת **הרדוקציה זמן-פולינומיאלית** של A ל- B.

משפט 23: אם $A \leqslant_P B$ ו- $B \in P$ אז $A \in P$
אם $A \leqslant_P B$ ו- $B \in P$ אז $A \in P$.

משפט 24: 3-SAT ניתנת לרדוקציה זמן-פולינומיאלית ל- CLIQUE
בהביית 3-SAT ניתנת לרדוקציה זמן-פולינומיאלית לבעיית CLIQUE:

$$3SAT \leqslant_p CLIQUE \ .$$

מסקנה 1: $3SAT \in P \quad \Rightarrow \quad CLIQUE \in P$
לפי משפט 23 ומשפט 24:

אם $CLIQUE \in P$ אז $3SAT \in P$.

הגדרה 31: NP-שלמות
שפה B היא **NP- שלמה** או **שלמה ב- NP** (NP-complete) אם היא מקיימת את השני התנאים הבאים:
1) $B \in NP$ וגם
2) $A \leqslant_p B$ עבור כל $A \in NP$.

במילים פשוטות: כל A ב- NP ניתנת לרדוקציה זמן-פולינומיאלית ל- B.

הגדרה 32: NP קשה
אם שפה B מקיימת את תכונה 2) אולם לא בהכרח את תכונה 1) בהגדרה 31
אז אומרים כי B **NP- קשה** או **קשה ב- NP** (NP-hard).

משפט 25:
אם B NP- שלמה ו- $B \in P$ אז $P = NP$.

משפט 26: אסוציאטיביות של NP שלמות
אם השני תנאים הבאים מתקיימים:

1) B היא שפה NP- שלמה.
2) קיימת $C \in NP$ עבורה $B \leqslant_p C$.

אז C שפה NP- שלמה.

משפט 27: משפט קוק לוין
הבעיית SAT היא NP - שלמה.

משפט 28: 3-SAT היא NP שלמה.
3-SAT היא NP שלמה.

6 נוסחאות נוספות

הגדרה 33: הבעיית הספיקות SAT

$$SAT = \{\langle\phi\rangle \mid \phi \text{ היא נוסחה בוליאנית ספיקה}\}$$

במילים, בעיית SAT שואלת את השאלה: בהינתן נוסחה שמכילה רק קשרים $\wedge$, $\vee$ ו- $\neg$ ("גם", "או" ו"לא"), האם קיימת השמה של ערכי אמת למשתנים כך שהנוסחה ϕ תקבל ערך אמת?
אם קיימת השמה כזו אז נאמר כי הנוסחה ϕ ספיקה.

הגדרה 34: הבעיית 3-SAT

$$3SAT = \{\langle\phi\rangle \mid \phi \text{ היא נוסחת בוליאנית בצורה 3CNF ספיקה.}\}$$

במילים, $3SAT$ היא הבעיית SAT שמוגדר בהגדרה 33 במקרה הנוסחה שהנוסחה היא בצורה 3CNF.
דוגמה של נוסחה בצורה 3CNF היא:

$$(x_1 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$$

הגדרה 35: הביית PATH
בהינתן גרף מכוון $G = (V, E)$.
הבעיית PATH שואלת את השאלה הבאה: בהינתן גרף מכוון $G = (V, E)$, וקדקודים s ו- t.
האם הגרף G מסלול בין קדקוד s לבין קדקוד t.

$$PATH = \{\langle G, s, t\rangle \mid G \text{ גרף מכוון שמכיל מסלול מכוון מ- } s \text{ ל- } t\} \ .$$

הגדרה 36: מסלול המילטוני

נתון גרף מכוון $G = (V, E)$.

מסלול המילטוני מקדקוד s לקדקוד t הוא מסלול אשר עובר דרך כל קדקוד בדיוק פעם אחת.

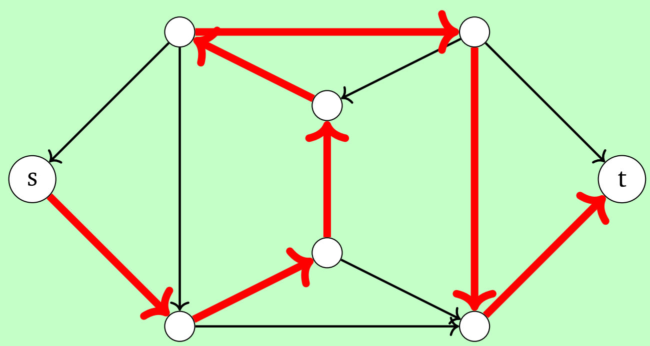
הגדרה 37: הבעיית מסלול המילטוני HAMPATH

בהינתן גרף מכוון $G = (V, E)$ וקדקודים s ו- t.

הבעיית המסלול ההמילטוני שואלת את השאלה: האם קיים מסלול המילטוני מקדקוד s לקדקוד t?

$$HAMPATH = \left\{ \langle G, s, t \rangle \;\middle|\; \text{.} t \text{ -ל } s \text{ גרף מכוון המכיל מסלול המילטוני מ- } G \right\}$$

התרשים למטה מראה דוגמה של מסלול המילטוני בגרף מכוון.



הגדרה 38:

בהינתן שלמים x, y.

הבעייה RELPRIME שואלת את השאלה: האם x, y זרים.

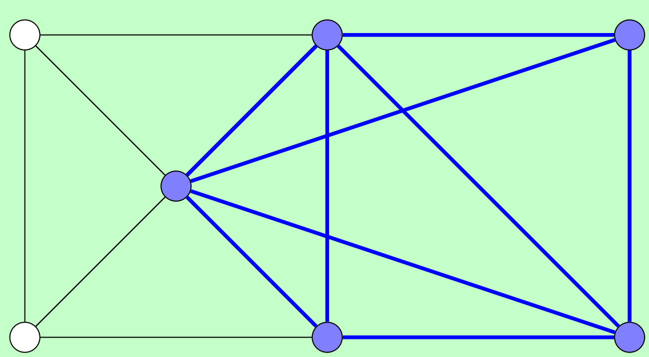
$$RELPRIME = \left\{ \{x, y\} \in \mathbb{N} \;\middle|\; \text{gcd}(x, y) = 1 \right\}$$

הגדרה 39: קליקה

נתון גרף לא מכוון.

- קליקה בגרף לא מכוון הוא תת-גרף שבו כל זוג קדקודים קשורים על ידי קשת.
- k- קליקה היא קליקה שבו יש בדיוק k קדקודים.

התרשים למטה מראה דוגמה של 5- קליקה.



הגדרה 40: בעיית הקליקה

נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$. בעיית הליקה שואלת את השאלה:
האם הגרף G מכיל קליקה בגודל k.
בשפה פרומלית:

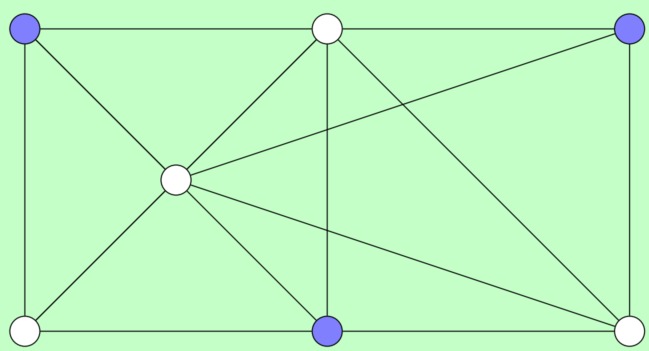
$$CLQ = \left\{ \langle G, k\rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון שמכיל קליקה בגודל } k \text{ לפחות. } G \right\}$$

הגדרה 41: קבוצה בלתי תלויה

נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$.
קבוצה בלתי תלויה ב- G היא תת-קבוצה של קדקודים $S\subseteq V$ כך שלכל שני קדקודים $u_1,u_2\in S$ מתקיים ש-

$$(u_1,u_2)\notin E \ .$$

התרשים למטה מראה דוגמה של גרף לא מכוון G שמכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל 3.



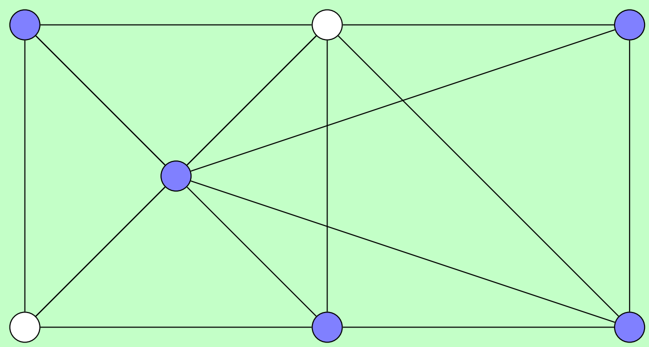
הגדרה 42: בעיית בקבוצה הבלתי תלוייה Independent Set (IS)

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר טבעי k.
הבעייה IS שואלת את השאלה: האם קיימת קבוצה בלתי תלוייה ב- G בגודל k לפחות.
בשפה פורמלית:

$$IS = \left\{ \langle G, k\rangle \;\middle|\; \text{מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל } k \text{ לפחות. } G \right\}$$

הגדרה 43: כיסוי קדקודים

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$.
כיסוי קדקודים ב- G הוא תת-קבוצה של קדקודים $C\subseteq V$ כך שלכל צלע $(u_1,u_2)\in E$ מתקיים:
$u_1\in C$ או $u_2\in C$.
הגרף למטה מכיל כיסוי קדקודים בגודל 5.



הגדרה 44: הבעיית כיסוי קדקודים (VC) Vertex Cover

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר טבעי k.
הבעיית כיסוי קדקודים שואלת את השאלה הבאה:
האם קיים כיסוי בקדקודים ב- G בגודל k?
בשפה פורמלית:

$$VC = \left\{ \langle G, k\rangle \;\middle|\; \text{מכיל כיסוי בקדקודים בגודל } k \text{ } G \right\} \ .$$

משפט 29: שפות NP- שלמות

SAT	NP- שלמה.	(משפט קוק לוין)
3SAT	NP- שלמה.	
HAMPATH	NP- שלמה.	
CLIQUE	NP- שלמה.	
INDEPENDENT-SET	NP- שלמה.	
VERTEX-COVER	NP- שלמה.	

חישוביות וסיבוכיות

מועד א'

פתרון לדוגמא

ד"ר יוחאי טוויטו, , ד"ר ירמיהו מילר, .

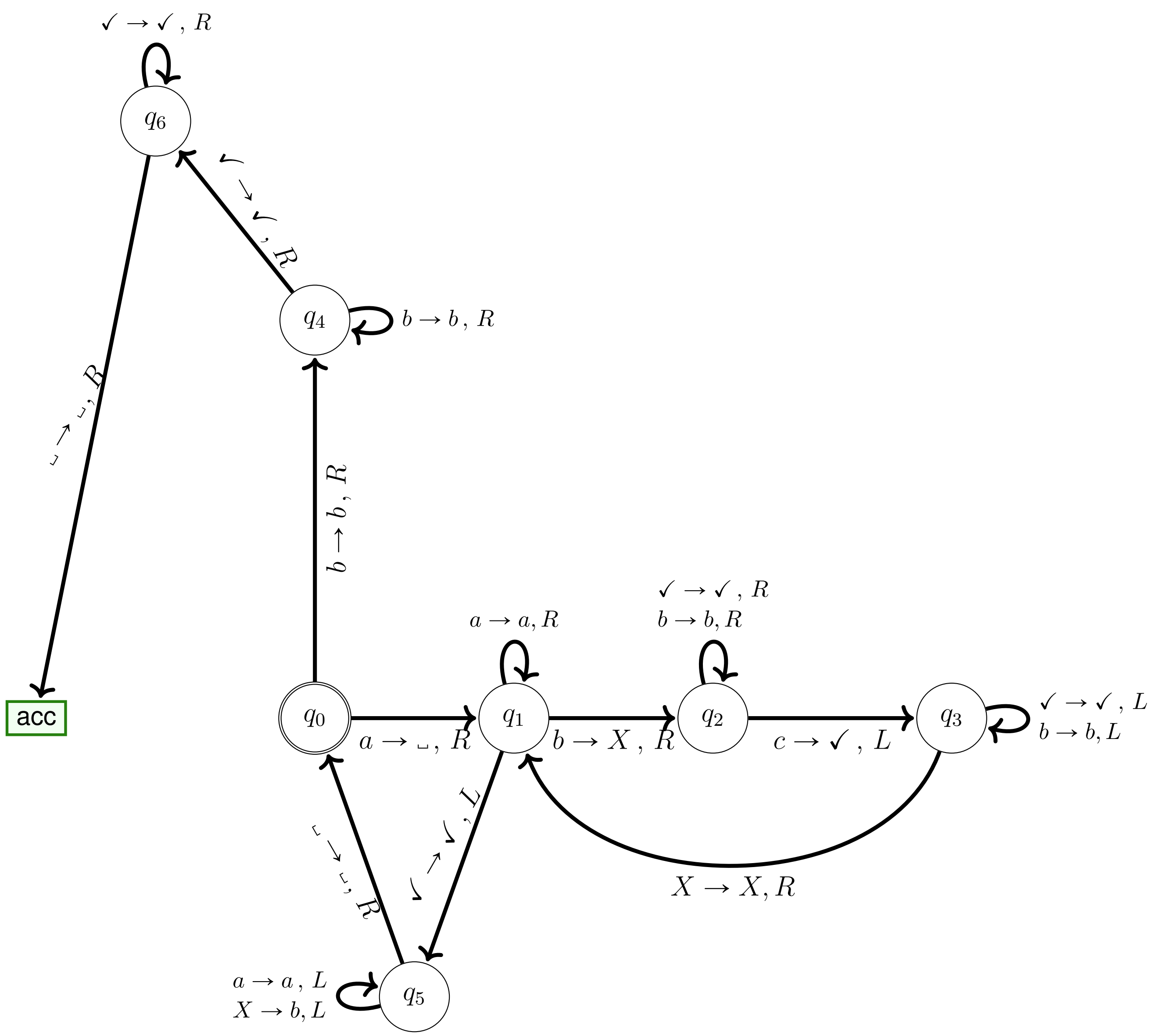
סמסטר א, תשפ"ה'

מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הינן פתרונות לדוגמא. ניתן לפתור חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

פתרונות

שאלה 1: מכונת טיורינג 20 נקודות

סעיף א'



פתרונות

סעיף ב' הפונקציה שאותה המכונה מחשבת היא הפונקציה:

$$f(x) = x \mod 3 \ .$$

כלומר, המכונה מחשבת את שארית החלוקה ב- 3 של המספר האונרי הנתון כקלט.

סעיף ג' הפונקציה שאותה המכונה מחשבת היא הפונקציה:

$$f\left(1^i\#1^j\right) = 1^{|i-j|} \ .$$

כלומר, המכונה מחשבת את הערך המוחלט של ההפרש בין שני מספרים $1^i, 1^j$, הנתונים בקלט.
הסבר:

$$q_0\ 1\#1 \ \vdash \ q_1\#1 \ \vdash_* \ \#1q_1 \ \vdash \ \#q_21 \ \vdash_* \ q_{\text{back}} \sqcup \# \ \vdash \ q_0\# \ \vdash \ \text{acc} \ .$$

לכן $f(1\#1) = 0$.

$$q_0\ 11\#1 \ \vdash \ q_1\ 1\#1 \ \vdash_* \ 1\#1q_1 \ \vdash \ 1\#q_21 \ \vdash_* \ q_{\text{back}} \sqcup 1\# \ \vdash \ q_0\ 1\#$$
$$\vdash \ q1\ \# \ \vdash \ \#q_1 \sqcup \ \vdash \ q_2\ \# \sqcup \ \vdash \ q_4 \sqcup 1 \ \vdash \ \sqcup \text{acc}\ 1$$

לכן $f(11\#1) = 1$.

נסתכל על קלט כללי $1^i\#1^j$ כאשר $i \geqslant j$:

$$\begin{aligned}
q_0\ 1^i\#1^j \ &\vdash_* \ 1^{i-1}\#q_11^j \ \vdash_* \ 1^{i-1}\#1^jq_1 \sqcup \ \vdash \ 1^{i-1}\#1^{j-1}q_21 \ \vdash \ 1^{i-1}\#1^{j-2}q_{\text{back}}\ 1 \sqcup \\
&\vdash_* \ q_{\text{back}} \sqcup 1^{i-1}\#1^{j-1} \ \vdash \ q_0\ 1^{i-1}\#1^{j-1} \\
&\ \vdots \\
&\vdash_* \ q_0\ 1^{i-j}\#\sqcup \ \vdash_* \ 1^{i-j-1}\#q_1\sqcup \ \vdash \ 1^{i-j-1}q_2\# \ \vdash \ 1^{i-j-2}q_4\ 11 \ \vdash_* \ q_4 \sqcup 1^{i-j} \\
&\vdash \ \text{acc}\ 1^{i-j}
\end{aligned}$$

לכן

$$f(1^i\#1^j) = 1^{i-j}\ , \qquad i \geqslant j\ . \tag{*1}$$

נסתכל על קלט כללי $1^i\#1^j$ כאשר $i < j$:

$$
\begin{aligned}
q_0\ 1^i\#1^j \ &\vdash_* \ 1^{i-1}\#q_1 1^j \ \vdash_* \ 1^{i-1}\#1^j q_1 \ \sqcup \ \vdash \ 1^{i-1}\#1^{j-1}q_2 1 \ \vdash \ 1^{i-1}\#1^{j-2}q_{\text{back}}\ 1 \ \sqcup \\
&\vdash_* \ q_{\text{back}} \sqcup 1^{i-1}\#1^{j-1} \ \vdash \ q_0\ 1^{i-1}\#1^{j-1} \\
&\ \vdots \\
&\vdash_* \ q_0\ \#1^{j-i} \sqcup \ \vdash \ \text{acc}\ 1^{j-i} \sqcup
\end{aligned}
$$

לכן

$$f(1^i\#1^j) = 1^{j-i}\ , \qquad i<j\ . \qquad (*2)$$

המשוואות (*1) ו- (*2) אומרות ש:

$$f(1^i\#1^j) = 1^{|i-j|}\ . \qquad (*3)$$

שאלה 2: וריאציות על מכונת טיורינג 20 נקודות

<u>כיוון ראשון: לכל מכונה ממודל OR קיימת מכונה שקולה ממודל TS</u>

תהי $M_{OR} = \left(Q^{OR}, \Sigma^{OR}, \Gamma^{OR}, \delta^{OR}, q_0^{OR}, q_{\text{acc}}^{OR}, q_{\text{rej}}^{OR}\right)$ מכונה ממודל OR.
נבנה מכונה שקולה $M_{TS} = \left(Q^{TS}, \Sigma^{TS}, \Gamma^{TS}, \delta^{TS}, q_0^{TS}, q_{\text{acc}}^{TS}, q_{\text{rej}}^{TS}\right)$ ממודל TS.
כל הרכיבים של המכונה M_{TS} יהיו זהים לרכיבים של המכונה M_{OR} מלבד פונקציית המעברים.
נגדיר את פונקציית המעברים δ^{TS}.

מעברי תנועה

נניח ש δ^{OR} מכילה את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q,\sigma) = (p, \text{move})$$

כאשר:

$$p,q\in Q^{OR}\ , \qquad \sigma\in\Gamma^{OR}\ , \qquad \text{move}\in\{L,R\}\ .$$

אז ב- δ^{TS} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{TS}(q,\sigma) = (p,\sigma,\text{move})$$

מעברי כתיבה

נניח ש δ^{OR} מכילה את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q,\sigma) = (p,\tau)$$

כאשר:

$$p,q\in Q^{OR}\ ,\qquad \sigma,\tau\in\Gamma^{OR}\ .$$

אז ב- δ^{TS} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{TS}(q,\sigma)=(p,\tau,S)$$

<u>כיוון שני: לכל מכונה ממודל TS קיימת מכונה שקולה ממודל OR</u>

תהי $M_{TS}=\left(Q^{TS},\Sigma^{TS},\Gamma^{TS},\delta^{TS},q_0^{TS},q_{\text{acc}}^{TS},q_{\text{rej}}^{TS}\right)$ מכונה ממודל TS.

נבנה מכונה שקולה $M_{OR}=\left(Q^{OR},\Sigma^{OR},\Gamma^{OR},\delta^{OR},q_0^{OR},q_{\text{acc}}^{OR},q_{\text{rej}}^{OR}\right)$ ממודל OR.

במעברים בהן המכונה M_{TS} כותבת אות וגם זזה ימינה או שמאלה ,לא יתכן מעבר שקול יחיד במכונה ממודל OR. לכן נמיר חלק מהמעברים במכונה M_{TS} לשני מעברים עוקבים במכונה M_{OR}. במעבר הראשון נכתוב אות ובמעבר השני נבצע את התזוזה.

לשם כך, נצטרך מצבי ביניים חדשים, שיחברו בין המעברים . לכל מצב q נגדיר שני מצבי ביניים ייחודיים q^L ו- q^R. כלומר:

$$Q^{OR}=Q^{TS}\cup\left\{q^L\mid q\in Q^{TS}\right\}\cup\left\{q^R\mid q\in Q^{TS}\right\}\ .$$

נגדיר כעת את δ^{OR} תוך שימוש במצבי ביניים.

מצבי הביניים תמיד יבצעו תזוזה שמאלה או ימינה בלבד, לכל אות שבסרט. פורמלית:

$$\begin{aligned}&\forall q\in Q^{TS}\ ,\ \sigma\in\Gamma^{TS}:\quad \delta^{OR}\left(q^R,\sigma\right)=(q,R)\ ,\\ &\forall q\in Q^{TS}\ ,\ \sigma\in\Gamma^{TS}:\quad \delta^{OR}\left(q^L,\sigma\right)=(q,L)\ .\end{aligned}$$

עבור מעברים בהן מתבצעת כתיבה ותנועה, נגדיר את δ^{OR} תוך שימוש במצבי ביניים.

בהינתן מעבר עם תנועה ימינה:

$$\delta^{TS}(q,\sigma)=(p,\tau,R)\ .$$

כאשר:

$$q,p\in Q^{TS}\ ,\qquad \sigma,\tau\in\Gamma^{TS}$$

אז ב- δ^{OR} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q,\sigma)=\left(p^R,\tau\right)\ .$$

באופן דומה, בהינתן מעבר עם תנועה שמאלה:

$$\delta^{TS}(q,\sigma)=(p,\tau,L)\ .$$

כאשר:

$$q,p\in Q^{TS}\ ,\qquad \sigma,\tau\in\Gamma^{TS}$$

אז ב- δ^{OR} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q,\sigma)=\left(p^L,\tau\right)\ .$$

במעברים בהם המכונה M_{TS} אינה מבצעת תנועה (נשארת במקום) לא נשתמש במצבי הביניים. כלומר, בהינתן מעבר בו המכונה נשארת במקום:

$$\delta^{TS}(q,\sigma) = (p,\tau,S)$$

כאשר:

$$q,p \in Q^{TS} \ , \qquad \sigma,\tau \in \Gamma^{TS}$$

אז ב δ^{OR} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q,\sigma) = (p,\tau) \ .$$

שאלה 3: התזה של צ'רץ' טיורינג 20 נקודות

סעיף א' השפה שהדקדוק G יוצר היא:

$$L(G) = \left\{a^n b^n c^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$$

סעיף ב'

$$L(G) = \left\{w \in \Sigma^* \;\middle|\; \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\right\}$$

כלומר, שפת כל המילים בהן מספר שווה של אותיות a, אותיות b, ואותיות c.

שאלה 4: אי-כריעות 20 נקודות

נתון: השפה $L_{M_1 \cup M_2}$ מוגדרת:

$$L_{M_1 \cup M_2} = \left\{\langle M_1, M_2, w\rangle \;\middle|\; w \in L(M_1) \cup L(M_2)\right\}$$

ז"א $L_{M_1 \cup M_2}$ השפה שכוללת כל המחרוזות $\langle M_1, M_2, w\rangle$ כאשר w שייך לאחת השפות $L(M_1)$ או $L(M_2)$ לפחות.

צריך להוכיח: קיימת רדוקציה התאמה בין השפה A_{TM} לשפה $L_{M_1 \cup M_2}$, כלומר

$$A_{TM} \leqslant L_{M_1 \cup M_2} \ .$$

הגדרת הרדוקציה:

בהינתן $\langle M, w\rangle$ קלט של A_{TM} ניצור $\langle M_1, M_2, w\rangle$ קלט של $L_{M_1 \cup M_2}$ כך שמתקיים התנאי הבא:

$$\begin{aligned}
\langle M, w\rangle \in A_{TM} \quad &\Rightarrow \quad \langle M_1, M_2, w\rangle \in L_{M_1 \cup M_2} \ , \\
\langle M, w\rangle \notin A_{TM} \quad &\Rightarrow \quad \langle M_1, M_2, w\rangle \notin L_{M_1 \cup M_2} \ .
\end{aligned}$$

נגדיר את פונקציית הרוקציה באופן הבא:

$M_1 =$ "על כל קלט x $\leftarrow$ rej."

$M_2 =$ "על כל קלט x:

- מריצה M על w ועונה כמוה.

נכונות הרדוקציה:

כיוון $\Leftarrow$

אם $\langle M,w\rangle \in A_{TM}$

$\Leftarrow$ $w \in L(M)$

$\Leftarrow$ $w \in L(M_2)$.

$\Leftarrow$ $w \in L(M_2) \cup \varnothing$

$\Leftarrow$ $w \in L(M_2) \cup L(M_1)$

$\Leftarrow$ $\langle M_1, M_2, w\rangle \in L_{M_1 \cup M_2}$.

כיוון $\Rightarrow$

אם $\langle M,w\rangle \notin A_{TM}$

$\Leftarrow$ $w \notin L(M)$.

$\Leftarrow$ $w \notin L(M_2)$.

$\Leftarrow$ $w \notin L(M_2)$ וגם $w \notin L(M_1)$ (כי השפה של M_1 היא $\varnothing$).

$\Leftarrow$ $\langle M_1, M_2, w\rangle \notin L_{M_1 \cup M_2}$.

שאלה 5: סיבוכיות זמן 20 נקודות

פונקצית הרדוקציה:

נגדיר פונקצית הרדוקציה f שבהינתן זוג $\langle G,k\rangle \in IS$, (הקלט של IS), יוצרת $\langle G',k'\rangle \in VC$, (הקלט של VC), אשר מקיימת את התנאי:

$$\langle G,k\rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in VC \ . \qquad (*2)$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

פתרונות

1) בהינתן הגרף $G=(V,E)$, אז הגרף G' הוא אותו גרף $G=(V,E)$.

2) $k'=|V|-k$.

<u>נכונות הרדוקציה</u>

כעת נוכיח שמתקיים: $\langle G',k'\rangle \in VC \quad \Leftrightarrow \quad \langle G,k\rangle \in IS$.

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

בהינתן גרף $G=(V,E)$ ושלם k.

נניח כי $\langle G,k\rangle \in IS$.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה S בגודל k לפחות: $|S|\geqslant k$.

$\Leftarrow$ אם $u_1,u_2\in S$ אז $(u_1,u_2)\notin E$.

כלומר, כל שני קדקודים ב- S לא מחוברים בצלע ב- G.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם $(u_1,u_2)\in E$ אז $u_1\notin S$ או $u_2\notin S$.

$\Leftarrow$ אם $(u_1,u_2)\in E$ אז $u_1\in V\backslash S$ או $u_2\in V\backslash S$.

$\Leftarrow$ התת-קבוצה $V\backslash S$ היא כיסוי קודקודים של G.

$|S|\geqslant k$ ו- $|V\backslash S|=|V|-S$ לכן $|V\backslash S|\leqslant |V|-k$.

$\Leftarrow$ $G'=G$ מכיל כיסוי קודקודים U בגודל $|V|-k \leqslant= k'$ לכל היותר.

$\Leftarrow$ $\langle G',k'\rangle \in VC$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

בהינתן גרף G' ושלם k'.

נניח כי $\langle G',k'\rangle \in VC$.

$\Leftarrow$ $G'=(V,E)$ מכיל כיסוי קדקודים U בגודל k' לכל היותר: $|U|\leqslant k'$.

$\Leftarrow$ אם $(u_1,u_2)\in E$ אז $u_1\in U$ או $u_2\in U$.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם $u_1\notin U$ וגם $u_2\notin U$ אז $(u_1,u_2)\notin E$.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם $u_1\in V\backslash U$ וגם $u_2\in V\backslash U$ אז $(u_1,u_2)\notin E$.

פתרונות

$\Leftarrow$ התת-קבוצה $S=V\backslash U$ היא קבוצה בלתי תלויה.

$|S|=|V|-|U|$ ו- $|U|\leqslant k'$ אז $|S|\geqslant|V|-k'$.

$\Leftarrow$ $G=G'$ מכיל קבוצה בלתי תלויה S בגודל $k=|V|-k'$ לפחות.

$\Leftarrow$ $\langle G,k\rangle\in IS$.