שיעור 13
חיתוך וסכום תת מרחב

13.1 הגדרה של חיתוך וסכום של תתי מרחבים

משפט 13.1 חיתוך של תת מרחב

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, V_1, V_2 תתי מרחבים של V. אז $V_1 \cap V_2$ היא תת מרחב של V.

הוכחה:

1) V_1, V_2 תת מרחבים $\Leftarrow$ $\bar{0} \in V_1$ וגם $\bar{0} \in V_2$ $\Leftarrow$ $\bar{0} \in V_1 \cap V_2$.

2) נניח $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in V_1 \cap V_2$.
אז $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in V_1$ וגם $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in V_2$.
V_1 תת מרחב $\Leftarrow$ $\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \in V_1$.
V_2 תת מרחב $\Leftarrow$ $\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \in V_2$.
ז"א $\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \in V_1 \cap V_2$.

3) נניח $\mathrm{v} \in V_1 \cap V_2$ ו $k \in \mathbb{F}$ סקלר.
אז $\mathrm{v} \in V_1$ ו $\mathrm{v} \in V_2$.
V_1 תת מרחב לכן $k \cdot \mathrm{v} \in V_1$.
V_2 תת מרחב לכן $k \cdot \mathrm{v} \in V_2$.
ז"א $k \cdot \mathrm{v} \in V_1 \cap V_2$.

■

דוגמה 13.1

עבור V_1,V_2 תתי מרחבים של מרחב ווקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$, האם $V_1 \cup V_2$ בהכרח תת מרחב של V?

פתרון:

דוגמה נגדית:

$V = \mathbb{R}^2$.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} , \qquad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} .$$

אז $V_1 \ni \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 \ni \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, אבל . $\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \notin V_1 \cup V_2$

משפט 13.2 תת מרחב הקטן ביותר

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, V_1, V_2 תתי מרחבים של V. אז הקבוצה

$$W = \{\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 | \mathrm{v}_1 \in V_1, \mathrm{v}_2 \in V_2\}$$

היא תת מרחב הקטן ביותר שמכיל את V_1 ו V_2.
ז"א לכל תת מרחב W' שמכיל את V_1 ו V_2, מתקיים $W \subseteq W'$.

הוכחה:

1) נוכיח ש W תת מרחב של V.

א) $V_1 \ni \bar{0}$ וגם $\bar{0} \in V_2$. לכן

$$\bar{0} = \bar{0} + \bar{0} \in W \ .$$

ב) נניח $w_1 = u_1 + u_2 \in W$, $w_2 = \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \in W$.
אז $u_1, \mathrm{v}_1 \in V_1$ וגם $u_2, \mathrm{v}_2 \in V_2$.
V_1, V_2 תתי מרחבים.
לכן $u_1 + \mathrm{v}_1 \in V_1$, וגם $u_2 + \mathrm{v}_2 \in V_2$.
מכאן

$$w_1 + w_2 = (u_1 + u_2) + (\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2) = (u_1 + \mathrm{v}_1) + (u_2 + \mathrm{v}_2) \in W \ .$$

ג) נניח $w = u_1 + u_2 \in W$ ו $k \in \mathbb{F}$. אז $u_1 \in V_1$ ו $u_2 \in V_2$. V_1, V_2 תתי מרחבים, לכן $ku_1 \in V_1$, $ku_2 \in V_2$. מכאן

$$kw = k(u_1 + u_2) = ku_1 + ku_2 \in W$$

2) נוכיח כי W התת מרחב הקטן ביותר

ברור כי W מכיל את V_1 ו V_2 כי
לכל $u \in V_1$, $u = u + \bar{0} \in W$
וגם לכל $u \in V_2$, $u = \bar{0} + u \in W$.
נוכיח ש W הוא תת מרחב הקטן ביותר שמכיל את V_1 ו V_2.
נניח ש W' איזשהו תת מרחב שמכיל את V_1 ו V_2.
נוכיח כי $W \subseteq W'$.
נקח וקטור $w \in W$. אז $w = u_1 + u_2$, כאשר $u_1 \in V_1$, $u_2 \in V_2$.
$V_1 \in W' \Leftarrow u_1 \in W'$.
$V_2 \in W' \Leftarrow u_2 \in W'$.
W' תת מרחב, לכן $w = u_1 + u_2 \in W'$.
מש"ל.

■

למה 13.1

למרחב W של משפט 13.2 (המשפט הקודם) נקרא הסכום של V_1 ו V_2 ומסומן ב V_1+V_2.

משפט 13.3 סכום של תת מרחב שווה לפרישה של האיחוד

$$V_1+V_2=\text{span}\left(V_1\cup V_2\right) \ .$$

הוכחה: נוכיח כי $V_1+V_2\subseteq \text{span}\left(V_1\cup V_2\right)$:

$V_1,V_2\subseteq \text{span}\left(V_1\cup V_2\right)$
לכן, לפי משפט 13.2,

$$V_1+V_2\subseteq \text{span}\left(V_1\cup V_2\right) \ .$$

נוכיח כי $\text{span}\left(V_1\cup V_2\right)\subseteq V_1+V_2$:

נניח $w\in \text{span}\left(V_1\cup V_2\right)$. אז קיימים $u_1,\ldots,u_k\in V_1$ ו $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\in V_2$ וסקלרים $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{F}$, $\beta_1,\ldots,\beta_n\in\mathbb{F}$ כך ש

$$w=\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_ku_k+\beta_1\mathrm{v}_1+\cdots+\beta_n\mathrm{v}_n \ .$$

אז $\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_ku_k\in V_1$ וגם $\beta_1\mathrm{v}_1+\cdots+\beta_n\mathrm{v}_n\in V_2$.
לכן $w\in V_1+V_2$.

הוכחנו כי $\text{span}\left(V_1\cup V_2\right)\subseteq V_1+V_2$ וגם $V_1+V_2\subseteq \text{span}\left(V_1\cup V_2\right)$ $\Leftarrow$

$$V_1+V_2=\text{span}\left(V_1\cup V_2\right) \ .$$

■

דוגמה 13.2

נקח את המרחב ווקטורי $V=\mathbb{R}^3$. נקח את התתי מרחבים $\mathbb{R}^3$: $V_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}$, ו $V_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}\middle| y\in\mathbb{R}\right\}$, קווים ישרים ב $\mathbb{R}^3$. אז הסכום שלהם הינו

$$V_1+V_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\middle| x,y\in\mathbb{R}\right\} \ ,$$

ומהווה את המישור $z=0$ ב $\mathbb{R}^3$.

13.2 משפט המימדים של סכום וחיתוך

משפט 13.4 משפט המימדים

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, V_1, V_2 תתי מרחבים של V. אז

$$\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1\cap V_2)$$

הוכחה: נסמן $\dim(V_1)=k$, $\dim(V_2)=n$, $\dim(V_1\cap V_2)=m$.

$V_1\cap V_2\subseteq V_1$ לכן $m\leq k$.

$V_1\cap V_2\subseteq V_2$ לכן $m\leq n$.

נבחר בסיס $u_1,\ldots,u_m$ של $V_1\cap V_2$.

נשלים אותו לבסיס של V_1 ונקבל

$u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m}$.

נשלים אותו גם לבסיס של V_2:

$u_1,\ldots,u_m,b_1,\ldots,b_{n-m}$.

נוכיח כי $V_1+V_2=\text{span}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}.\right)$:

נניח $w=\text{v}_1+\text{v}_2\in V_1+V_2$. אז

$$\text{v}_1=\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_mu_m+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}\in V_1\ ,$$
$$\text{v}_2=\alpha_1'u_1+\ldots+\alpha_m'u_m+\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}\in V_2\ .$$

אז

$$\begin{aligned}\text{v}_1+\text{v}_2=&\left(\alpha_1+\alpha_1'\right)u_1+\ldots+\left(\alpha_m+\alpha_m'\right)u_m\\&+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}\\&+\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}\end{aligned}$$

ז"א

$$\text{v}_1+\text{v}_2\in\text{span}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\right)$$

נוכיח את ההכלה ההפוכה, כלומר $\text{span}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\right)\in V_1+V_2$:

נניח

$$w\in\text{span}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\right)$$

אז קיימים סקלרים $\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots,\beta_{k-m},\gamma_1,\ldots,\gamma_{n-m}$ כך ש

$$w=\alpha_1u_1+\ldots\alpha_mu_m+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}+\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}$$

נסמן

$$\begin{aligned}\text{v}_1=&\alpha_1u_1+\ldots\alpha_mu_m+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}\\\text{v}_2=&\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}\end{aligned}$$

אז

$$\text{v}_1\in V_1,\qquad \text{v}_2\in V_2,\qquad w=\text{v}_1+\text{v}_2$$

כלומר $w\in V_1+V_2$.

נשאר להוכיח שוקטורים $\{u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\}$ בת"ל:

נניח:

$$\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k-m} a_{k-m} + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{n-m} b_{n-m} = \bar{0} \ . \qquad (*1)$$

אז

$$\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k-m} a_{k-m} = -\gamma_1 b_1 - \ldots - \gamma_{n-m} b_{n-m} := \mathrm{v}. \qquad (*2)$$

הוקטור באגף השמאל שייך ל V_1.
הוקטור באגף הימין שייך ל V_2.
לכן, לפי (*2) $\mathrm{v} \in V_1 \cap V_2$. $u_1, \ldots, u_m$ בסיס של $V_1 \cap V_2$ (נתון) . לכן קיימים סקלרים $\delta_1, \ldots, \delta_m$ כך ש

$$\mathrm{v} = \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m \ .$$

לכן

$$\begin{aligned} \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{n-m} b_{n-m} =& \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m - (-\gamma_1 b_1 - \ldots - \gamma_{n-m} b_{n-m}) \\ =& \mathrm{v} - \mathrm{v} \\ =& \bar{0} \ , \end{aligned}$$

ז"א

$$\delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{n-m} b_{n-m} = \bar{0} \ . \qquad (*3)$$

$u_1, \ldots u_m, b_1, \ldots, b_{n-m}$ בסיס של V_2 (נתון) . לכן הם בת"ל. לכן (*3) מתקיים רק אם

$$\delta_1 = \ldots = \delta_m = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{n-m} = 0 \ . \qquad (*4)$$

מכאן מקבלים מ (*1) כי

$$\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k-m} a_{k-m} = \bar{0} \ . \qquad (*5)$$

$u_1, \ldots u_m, a_1, \ldots, a_{k-m}$ בסיס של V_1 (נתון) , לכן הם בת"ל.
לכן (*5) מתקיים רק אם

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \beta_1 = \ldots = \beta_{k-m} = 0. \qquad (*6)$$

לכן, בגלל שהמקדמים ב (*1) כולם שווים ל 0, כפי שהוכחנו ב (*4) ו (*6), אז הוקטורים
$u_1, \ldots u_m, a_1, \ldots, a_{k-m}, b_1, \ldots . b_{n-m}$ בת"ל. כלומר הם מהווים בסיס של $V_1 + V_2$.
מכאן

$$\dim(V_1 + V_2) = m + (k - m) + (n - m) = k + n - m = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

מש"ל. ■

מסקנה 13.1

נניח $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ תתי מרחבים ממימד 2, אז $\dim(V_1 \cap V_2) > 0$.

הוכחה: V_1, V_2 תתי מרחבים של $\mathbb{R}^3$, לכן $\dim(V_1 + V_2) \leq 3$. לפי משפט **??**,

$$4 = \dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) \leq 3 + \dim(V_1 \cap V_2)$$

■

13.3 כיצד למצוא בסיס ומימד של סכום וחיתוך תת מרחב

נניח כי U, V תתי מרחבים של $\mathbb{R}^n$. ונניח ש

$$\{\mathrm{u}_1,\ldots,\mathrm{u}_k\}$$

בסיס של U ו

$$\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_l\}$$

בסיס של V. כדי למצוא בסיס של $V+W$, נרשום מטריצה Q מסדר $n\times(k+l)$ המורכב מהבסיסים של U ו V:

$$Q=\begin{pmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ \mathrm{u}_1 & \mathrm{u}_2 & \ldots & \mathrm{u}_k & \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \ldots & \mathrm{v}_l \\ | & | & & | & | & | & & | \end{pmatrix}$$

אז המרחב העמודות של $U+V$ שווה למרחב העמודות של Q:

$$\mathrm{col}(Q)=\mathrm{col}(U+V)$$

ובסיס של $\mathrm{col}(Q)$ שווה גם לבסיס של $U+V$:

$$B(Q)=B(U+V)\ .$$

בסיס של $U\cap V$ ניתן למצוא ע"י המרחב האפס של Q, $\mathrm{Nul}(Q)$. נניח כי הוקטור x במרחב האפס של Q, כלומר $\mathrm{x}\in\mathrm{Nul}(Q)\subseteq\mathbb{R}^{k+1}$. נניח כי הרכיבים של x הם

$$\mathrm{x}=\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_k\\ b_1\\ \vdots\\ b_l\end{pmatrix}\ .$$

כיוון שוקטור x ב $\mathrm{Nul}(Q)$ אז

$$Q\cdot\mathrm{x}=\begin{pmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ \mathrm{u}_1 & \mathrm{u}_2 & \ldots & \mathrm{u}_k & \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \ldots & \mathrm{v}_l \\ | & | & & | & | & | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_k\\ b_1\\ \vdots\\ b_l\end{pmatrix}=a_1\mathrm{u}_1+\ldots+a_k\mathrm{u}_k+b_1\mathrm{v}_1+\ldots+b_l\mathrm{v}_l=\bar{0}\ . \qquad \textbf{(1*)}$$

עכשיו נעביר את כל האיברים של הבסיס $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_l$ לאגף הימין ונקבל

$$a_1\mathrm{u}_1+\ldots+a_k\mathrm{u}_k=-b_1\mathrm{v}_1-\ldots-b_l\mathrm{v}_l\ . \qquad \textbf{(*2)}$$

שימו לב הצירוף לינארי באגף השמאל הוא וקטור של U והצירוף לינארי באגף הימין הוא וקטור של V. נקרא הוקטור הזה y:

$$\mathrm{y} := a_1\mathrm{u}_1 + \ldots + a_k\mathrm{u}_k = -b_1\mathrm{v}_1 - \ldots - b_l\mathrm{v}_l \ . \qquad (*3)$$

כך קיבלנו וקטור y השייך גם ל U וגם ל V, או במילים אחרות

$$\mathrm{y} \in U \cap V \ .$$

דוגמה 13.3

נתונים וקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \qquad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

נסמן

$$V_1 = \mathrm{span}(u_1, u_2) \ , \qquad V_2 = \mathrm{span}(u_3, u_4) \ .$$

מצאו בסיס ומימד של V_1,V_2 ו $V_1 \cap V_2$.

פתרון:

בסיס של V_1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של V_1:

$$B(V_1) = \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2\}$$

$\dim(V_1) = 2$.

בסיס של V_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של V_2:

$$B(V_2) = \{\mathrm{u}_3, \mathrm{u}_4\}$$

$\dim(V_2) = 2$.

$$Q = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3, \mathrm{u}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_2]{R_3 \to R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_3 + R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

העמודות 1, 2, 3 מובילות לכן בסיס של V_1+V_2 הוא

$$B(V_1+V_2)=\{\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2,\mathrm{u}_3\}$$

ו $\dim(V_1+V_2)=3$.
לפי משפט המימדים:

$$\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1\cap V_2)$$

כיוון ש $\dim(V_1)=2$, $\dim(V_2)=2$, ו $\dim(V_1+V_2)=3$, אז

$$\dim(V_1\cap V_2)=1\ .$$

כדי למצוא בסיס של $V_1\cap V_2$ נמצא את $\mathrm{Nul}Q$. מסעיף הקודם המדורגת של Q היא:

$$Q\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית $Q\mathrm{x}=0$ הוא

$$\left.\begin{aligned}x+y+z+w&=0\\-y-2z+w&=0\\-z+w&=0\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\left.\begin{aligned}x&=-y-z-w\\y&=-2z+w\\z&=w\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\left.\begin{aligned}x&=-w\\y&=-w\\z&=w\end{aligned}\right\}$$

כלומר

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}w$$

לכן בסיס של $\mathrm{Nul}Q$ הוא מורכב וקטור אחד:

$$B\left(\mathrm{Nul}(Q)\right)=\left\{\mathrm{x}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\ .$$

הוקטור x מקיים את משוואת ההומוגנית של Q, לכן

$$Q\cdot\mathrm{x}=\bar{0}\qquad\Rightarrow\qquad(\mathrm{u}_1\ \mathrm{u}_2\ \mathrm{u}_3\ \mathrm{u}_4)\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\bar{0}$$

לכן נקבל

$$-1\cdot\mathrm{u}_1-1\cdot\mathrm{u}_2+1\cdot\mathrm{u}_3+1\cdot\mathrm{u}_4=\bar{0}\qquad\Rightarrow\qquad\mathrm{u}_1+\mathrm{u}_2=\mathrm{u}_3+\mathrm{u}_4\ .$$

נגדיר את שני האגפים להיות הוקטור y:

$$\mathrm{y}:=\mathrm{u}_1+\mathrm{u}_2=\mathrm{u}_3+\mathrm{u}_4$$

נציב את הוקטורים ונמצא כי

$$\mathrm{y}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\end{pmatrix}\ .$$

לכן בסיס של $V\cap U$ הוא

$$B(V\cap U)=\{\mathrm{y}\}=\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

דוגמה 13.4

נניח כי $U\in\mathbb{R}^5$ תת מרחב עם בסיס

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\\2\\3\end{pmatrix}\ ,\quad u_2=\begin{pmatrix}1\\4\\-3\\4\\2\end{pmatrix}\ ,\quad u_3=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\2\\3\end{pmatrix}\ ,$$

ונניח כי $W\in\mathbb{R}^5$ תת מרחב עם בסיס

$$w_1=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\\-2\\9\end{pmatrix}\ ,\quad w_2=\begin{pmatrix}1\\5\\-6\\6\\1\end{pmatrix}\ ,\quad w_3=\begin{pmatrix}2\\4\\4\\2\\8\end{pmatrix}\ .$$

מצאו המימד והבסיס של $U\cap W$.

פתרון:

$$Q=\begin{pmatrix}1&1&1&2&1&2\\3&4&3&3&5&4\\-2&-3&0&-1&-6&4\\2&4&2&-2&6&2\\3&2&3&9&1&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&5&0&0\\0&1&0&-3&2&0\\0&0&1&0&-1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

מכאן נקבל בסיס של $\mathrm{Nul}(Q)$

$$B_{\mathrm{Nul}(Q)}=\left\{b_1=\begin{pmatrix}-5\\3\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{aligned}Qb_1=&0\quad\Rightarrow\quad -5u_1+3u_2+w_1=0\ ,\\ Qb_2=&0\quad\Rightarrow\quad -2u_1+u_3+w_2=0\ .\end{aligned}$$

מכאן נקבל בסיס של $U\cap W$:

$$B_{U\cap W}=\{x_1,x_2\}$$

כאשר

$$x_1 = 5u_1 - 3u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} = w_1 \ , \qquad x_2 = 2u_1 - u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = w_2 \ .$$