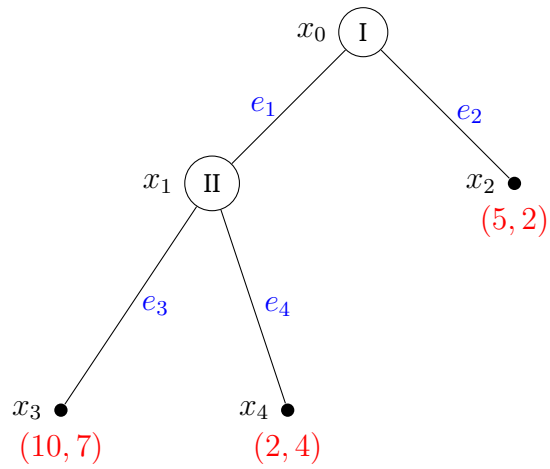


עבודה עצמית 2

שאלה 1

נתון המשחק בעל עץ המשחק

נניח כי לשחקן I יש אסטרטגיות T ו- B שמוגדרות

$$T(x_0) = e_2, B(x_0) = e_1$$

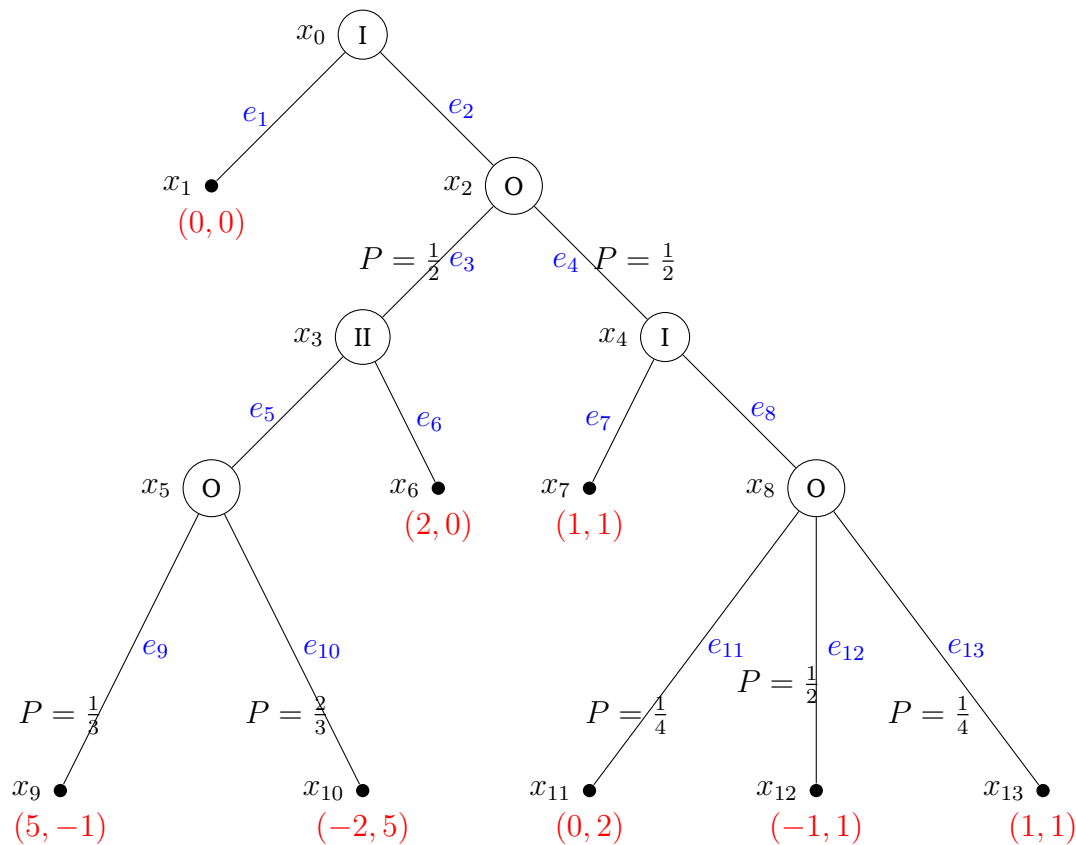
ונניח כי ולשחקן II יש אסטרטגיות t ו- b שמוגדרות

$$t(x_1) = e_3, b(x_1) = e_4.$$

רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית.

שאלה 2

נתון המשחק הבא בצורה רחבה:



ונתונים האסטרטגיות הבאות:

$$\begin{aligned} s_{I,0}(x_0) &= e_1, \\ s_{I,1}(x_0) &= e_2, & s_{I,1}(x_4) &= e_7 \\ s_{I,2}(x_0) &= e_2, & s_{I,2}(x_4) &= e_8 \\ s_{II,1}(x_3) &= e_5, \\ s_{II,2}(x_3) &= e_6. \end{aligned}$$

רשמו אותו בצורה אסטרטגית.

שאלה 3 משה ואהרון משתתפים במשחק טלויזיה, שבו על כל אחד מהם להגיש בכתב בתוך מעטפה סגורה אחת משתי הבקשות הבאות והבקשות של שניהם תתבצענה:

• תן לי 1,000 ₪.

• תן לו 4,000 ₪.

(א) רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית.

(ב) כיצד השחקנים ינהגו במשחק ומדוע? ו

שאלה 4 האם במשחקים הבאים סילוק חוזר של אסטרטגיות נשלטות חזק מסתיים בווקטור אסטרטגיות יחיד? אם כן, מה הוא ווקטור זה?

(א)

שחקן II

		L	R
שחקן I	H	4, 2	0, 1
	T	3, 3	1, 1

(ב)

שחקן II

		L	R
שחקן I	H	2, 3	1, 4
	T	0, 2	0, 4

(ג)

שחקן II

		a	b	c
שחקן I	α	1, 0	3, 0	2, 1
	β	3, 1	0, 1	1, 2
	γ	2, 1	1, 6	0, 2

שאלה 5 מצאו את כל ווקטורי האסטרטגיות הרציונליים במשחקים הבאים.

(א)

II \ I	L	R
T	9, 5	5, 3
B	8, 6	8, 4

(ב)

II \ I	a	b	c	d
T	6, 2	6, 3	7, 6	2, 8
B	8, 5	6, 9	4, 6	4, 7

(ג)

II \ I	a	b	c	d
T	-1, 20	-7, -7	-1, 2	-5, 8
M	27, 20	13, -1	21, 2	13, -1
B	-5, 20	-3, 5	7, -1	3, -4

(ד)

$\begin{array}{c c} II \\ I \end{array}$	a	b	c	d
α	3, 7	0, 13	4, 5	5, 3
β	5, 3	4, 5	4, 5	3, 7
γ	4, 5	3, 7	4, 5	5, 3
δ	4, 5	4, 5	4, 5	4, 5

שאלה 6 במשחקים הבאים, מצאו את השיווי משקל נאש של המשחק.

(א)

$\begin{array}{c c} II \\ I \end{array}$	L	R
H	4, 8	5, 10
T	3, 7	6, 20

(ב)

$\begin{array}{c c} II \\ I \end{array}$	L	R
H	2, 3	1, 5
T	0, 0	4, 1

(ג)

$\begin{array}{c c} II \\ I \end{array}$	a	b	c	d
α	2, 13	4, 8	6, 5	8, 2
β	6, 4	2, 3	3, 8	8, 4
γ	0, 9	7, 7	2, 7	14, 10
δ	4, 0	0, 4	4, 6	6, 0

(ד)

$\begin{array}{c c} II \\ I \end{array}$	a	b	c	d
α	-5, 5	-4, 4	-5, 1	0, 4
β	-4, 1	-3, 3	-2, 2	1, 1
γ	0, 0	1, -1	-4, 4	-3, 3
δ	-1, 6	2, -2	7, 11	5, 2

פתרונות

שאלה 1

$I \backslash II$	t	t
T	5, 2	5, 2
B	10, 7	2, 4

שאלה 2

$$\underline{s_{I,0}}$$

תתקבל מסלול המשחק

$$w = x_0 \ e_1 \ x_1 \ .$$

התשלומים לכל שחקן יהיו

$$u_I(s_{I,0}) = 0 \ , \quad u_{II}(s_{I,0}) = 0 \ .$$

בהסתברות $P = 1$.

$$\underline{s_{I,1}, s_{II,1}}$$

$$w = \begin{cases} x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_3 \ x_3 \ e_5 \ x_5 \ e_9 \ x_9 & P = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} & u = (5, -1) \\ x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_3 \ x_3 \ e_5 \ x_5 \ e_{10} \ x_{10} & P = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} & u = (-2, 5) \\ x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_4 \ x_4 \ e_7 \ x_7 & P = \frac{1}{2} & u = (1, 1) \end{cases} \ .$$

תוחלת התשלום:

$$E = \frac{1}{6}(5, -1) + \frac{1}{3}(-2, 5) + \frac{1}{2}(1, 1) = \left(\frac{2}{3}, 2\right) \ .$$

$$\underline{s_{I,2}, s_{II,1}}$$

$$w = \begin{cases} x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_3 \ x_3 \ e_5 \ x_5 \ e_9 \ x_9 & P = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} & u = (5, -1) \\ x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_3 \ x_3 \ e_5 \ x_5 \ e_{10} \ x_{10} & P = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} & u = (-2, 5) \\ x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_4 \ x_4 \ e_8 \ x_8 \ e_{11} \ x_{11} & P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} & u = (0, 2) \\ x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_4 \ x_4 \ e_8 \ x_8 \ e_{12} \ x_{12} & P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} & u = (-1, 1) \\ x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_4 \ x_4 \ e_8 \ x_8 \ e_{13} \ x_{13} & P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} & u = (1, 1) \end{cases} \ .$$

תוחלת התשלום:

$$E = \frac{1}{6}(5, -1) + \frac{1}{3}(-2, 5) + \frac{1}{8}(0, 2) + \frac{1}{4}(-1, 1) + \frac{1}{8}(1, 1) = \left(\frac{1}{24}, \frac{17}{8}\right).$$

$$\underline{s_{I,1}, s_{II,2}}$$

$$w = \begin{cases} x_0 & e_2 & x_2 & e_3 & x_3 & e_6 & x_6 & P = \frac{1}{2} & u = (2, 0) \\ x_0 & e_2 & x_2 & e_4 & x_4 & e_7 & x_7 & P = \frac{1}{2} & u = (1, 1) \end{cases}.$$

תוחלת התשלום:

$$E = \frac{1}{2}(2, 0) + \frac{1}{2}(1, 1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$\underline{s_{I,2}, s_{II,2}}$$

$$w = \begin{cases} x_0 & e_2 & x_2 & e_3 & x_3 & e_6 & x_6 & P = \frac{1}{2} & u = (2, 0) \\ x_0 & e_2 & x_2 & e_4 & x_4 & e_8 & x_8 & e_{11} & x_{11} & P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} & u = (0, 2) \\ x_0 & e_2 & x_2 & e_4 & x_4 & e_8 & x_8 & e_{12} & x_{12} & P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} & u = (-1, 1) \\ x_0 & e_2 & x_2 & e_4 & x_4 & e_8 & x_8 & e_{13} & x_{13} & P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} & u = (1, 1) \end{cases}.$$

תוחלת התשלום:

$$E = \frac{1}{2}(2, 0) + \frac{1}{8}(0, 2) + \frac{1}{4}(-1, 1) + \frac{1}{8}(1, 1) = \left(\frac{7}{8}, \frac{5}{8}\right).$$

$I \backslash II$	$s_{II,1}$	$s_{II,2}$
$s_{I,0}$	0, 0	0, 0
$s_{I,1}$	$\frac{2}{3}, 2$	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$
$s_{I,2}$	$\frac{1}{24}, \frac{17}{8}$	$\frac{7}{8}, \frac{5}{8}$

המשחק בצורה אסטרטגית המתקבל מתואר בטבלה למטה.

שאלה 3

(א) נקרא משה שחקן I ונקרא אהרון שחקן II . המשחק בצורה אסטרטגית הינה:

		שחקן II	
		A	B
שחקן I	A	(1000, 1000)	(5000, 0)
	B	(0, 5000)	(4000, 4000)

(ב)

$$1000 = u_I(A, A) > u_I(B, A) = 0,$$

$$5000 = u_I(A, B) > u_I(B, B) = 4000$$

לכן האסטרטגיה $s_I = A$ שולטת חזק.

$$1000 = u_{II}(A, A) > u_{II}(A, B) = 0,$$

$$5000 = u_{II}(B, A) > u_{II}(B, B) = 4000$$

לכן האסטרטגיה $s_{II} = A$ שולטת חזק.

על פי ההנחות של שני השחקנים רציונלים, אז שניהם ישחקו לפי אסטרטגיה A.

שאלה 4

(א)

		II		L	R
I	H	4, 2	0, 1		
	T	3, 3	1, 1		

 $\xrightarrow{R < L}$

		II		L
I	H	4, 2		
	T	3, 3		

 $\xrightarrow{T < H}$

		II		L
I	H	4, 2		

תשלום סופי: (4, 2).

פתרון באסטרטגיות שולטות חזק: HL.

(ב)

		II		L	R
I	H	2, 3	1, 4		
	T	0, 2	0, 4		

 $\xrightarrow{T < H}$

		II		L	R
I	H	2, 3	1, 4		

 $\xrightarrow{L < R}$

		II		R
I	H	1, 4		

תשלום סופי: (1, 4).

פתרון באסטרטגיות שולטות חזק: HR.

(ג)

I \ II		a			b			c		
α		1, 0			3, 0			2, 1		
β		3, 1			0, 1			1, 2		
γ		2, 1			1, 6			0, 2		

 $\xrightarrow{a < c}$

I \ II		b			c		
α		3, 0			2, 1		
β		0, 1			1, 2		
γ		1, 6			0, 2		

 $\xrightarrow{\beta < \alpha, \gamma < \alpha}$

I \ II		b			c		
α		3, 0			2, 1		

 $\xrightarrow{b < c}$

I \ II		c		
α		2, 1		

תשלום סופי: (2, 1).

פתרון באסטרטגיות שולטות חזק: αc .

שאלה 5

(א)

$\begin{array}{c c} & II \\ \hline I & \end{array}$	L	R
T	9, 5	5, 3
B	8, 6	8, 4

 $\xrightarrow{R \prec L}$

$\begin{array}{c c} & II \\ \hline I & \end{array}$	L
T	9, 5
B	8, 6

 $\xrightarrow{B \prec T}$

$\begin{array}{c c} & II \\ \hline I & \end{array}$	L
T	9, 5

פתרון באסטרטגיות שולטות חזק: TL .

(ב)

$\begin{array}{c c} & II \\ \hline I & \end{array}$	a	b	c	d
T	-1, 20	-7, -7	-1, 2	-5, 8
M	27, 20	13, -1	21, 2	13, -1
B	-5, 20	-3, 5	7, -1	3, -4

 $\xrightarrow{\begin{array}{l} b \prec a \\ c \prec a \\ d \prec a \end{array}}$

$\begin{array}{c c} & II \\ \hline I & \end{array}$	a
T	-1, 20
M	27, 20
B	-5, 20

 $\xrightarrow{\begin{array}{l} T \prec M \\ B \prec M \end{array}}$

$\begin{array}{c c} & II \\ \hline I & \end{array}$	a
M	27, 20

פתרון באסטרטגיות שולטות חזק: Ma .

(ג)

$\begin{array}{c c} II & \\ \hline I & \end{array}$	a	b	c	d
α	3, 7	0, 13	4, 5	5, 3
β	5, 3	4, 5	4, 5	3, 7
γ	4, 5	3, 7	4, 5	5, 3
δ	4, 5	4, 5	4, 5	4, 5

$\xrightarrow{c \preceq b}$

$\begin{array}{c c} II & \\ \hline I & \end{array}$	a	b	d
α	3, 7	0, 13	5, 3
β	5, 3	4, 5	3, 7
γ	4, 5	3, 7	5, 3
δ	4, 5	4, 5	4, 5

$\xrightarrow{\alpha \preceq \gamma}$

$\begin{array}{c c} II & \\ \hline I & \end{array}$	a	b	d
β	5, 3	4, 5	3, 7
γ	4, 5	3, 7	5, 3
δ	4, 5	4, 5	4, 5

$\xrightarrow{a \preceq b}$

$\begin{array}{c c} II & \\ \hline I & \end{array}$	b	d
β	4, 5	3, 7
γ	3, 7	5, 3
δ	4, 5	4, 5

$\xrightarrow{\beta \preceq \delta}$

$\begin{array}{c c} II & \\ \hline I & \end{array}$	b	d
γ	3, 7	5, 3
δ	4, 5	4, 5

$\xrightarrow{b \preceq d}$

$\begin{array}{c c} II & \\ \hline I & \end{array}$	d
γ	5, 3
δ	4, 5

$\xrightarrow{\delta \preceq \gamma}$

$\begin{array}{c c} II & \\ \hline I & \end{array}$	d
γ	5, 3

פתרון באסטרטגיות שולטות חלש: γd .

שאלה 6

(א)

$\begin{array}{c c} II & \\ \hline I & \end{array}$	L	R
H	4, 8	5, 10
T	3, 7	6, 20

שיווי משקל נאש:

$$(s_I^*, s_{II}^*) = (T, R) .$$

הסבר:

$$4 = u_I(T, R) > u_I(H, R) = 1 ,$$

$$1 = u_{II}(T, R) > u_{II}(T, L) = 0 .$$

(ב)

$I \backslash II$	L	R
H	2, 3	1, 5
T	0, 0	4, 1

שיווי משקל נאש:

$$(s_I^*, s_{II}^*) = (T, R) .$$

הסבר:

$$6 = u_I(T, R) > u_I(H, R) = 5 ,$$

$$20 = u_{II}(T, R) > u_{II}(T, L) = 7 .$$

ג

$I \backslash II$	a	b	c	d
α	2, 13	4, 8	6, 5	8, 2
β	6, 4	2, 3	3, 8	8, 4
γ	0, 9	7, 7	2, 7	14, 10
δ	4, 0	0, 4	4, 6	6, 0

שיווי משקל נאש:

$$(s_I^*, s_{II}^*) = (\gamma, d) .$$

הסבר:

$$14 = u_I(\gamma, d) > u_I(\alpha, d) = 8 , \quad 14 = u_I(\gamma, d) > u_I(\beta, d) = 8 , \quad 14 = u_I(\gamma, d) > u_I(\delta, d) = 6 ,$$

$$10 = u_{II}(\gamma, d) > u_{II}(\gamma, a) = 9 , \quad 10 = u_{II}(\gamma, d) > u_{II}(\gamma, b) = 7 , \quad 10 = u_{II}(\gamma, d) > u_{II}(\gamma, c) = 7 .$$

ד

$I \backslash II$	a	b	c	d
α	-5, 5	-4, 4	-5, 1	0, 4
β	-4, 1	-3, 3	-2, 2	1, 1
γ	0, 0	1, -1	-4, 4	-3, 3
δ	-1, 6	2, -2	7, 11	5, 2

שיווי משקל נאש:

$$(s_I^*, s_{II}^*) = (\delta, c) .$$

הסבר:

$$7 = u_I(\delta, c) > u_I(\alpha, c) = -5 , \quad 7 = u_I(\delta, c) > u_I(\beta, c) = -2 , \quad 7 = u_I(\delta, c) > u_I(\gamma, c) = -4 ,$$

$$11 = u_{II}(\delta, c) > u_{II}(\delta, a) = 6 , \quad 11 = u_{II}(\delta, c) > u_{II}(\delta, b) = -2 , \quad 11 = u_{II}(\delta, c) > u_{II}(\delta, d) = 2 .$$