10 משתנה מקרי רציף, צפיפות והתפלגות המצטברת 1-8

10.1 משתנים מקריים רציפים אחידים

לסיכום, בשיעורים קודמים למדנו את התכונות של משתנה מקרי **בדיד**, קרי משתנה אשר שיש לו ערכים בדידים. למשל התוצאות של הטלת קוביה מרכיבות משתנה מקרי בדיד

$$X = (1,2,3,4,5,6)\ . \qquad (*1)$$

למדנו גם כי הפונקציית הסתברות $f_X(k)$ של משתנה מקרי בדיד מתאימה הסתברות לכל ערך של משתנה מקרי בדיד X, לפי

$$f_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{6} & k \in X \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \qquad (*2)$$

בשונה לזה, משתנה מקרי רציף הוא משתנה בעל ערכים רציפים בין שתי גבולות. למשל, גמל שותה מים על בסיס שבועי. בפעם שבוע הגמל בוא לשתות לתקופת זמן בין 30 דקות עד 90 דקות. התקופת זמן X מהווה משתנה מקרי רציף. X הוא משתנה מקרי רציף **אחיד**. הגמל שותה לתקופת זמן בין 30 עד 90 דקות. על כן הערכים של X הם רציפים בין 30 עד 60:

$$X = \begin{cases} x & 30 \le x \le 90 \\ 0 & \text{אחרת.} \end{cases} \qquad (*3)$$

הפונקציית צפיפות של מ"מ רציף היא האנלוגית לפונקציית הסתברות של מ"מ בדיד. האורך של X הוא $90-30=60$ דקות ולכן הפונקציית צפיפות נותנת את המספר דקות שהגמל שותה כחלק של האורך של 60 דקות של X ומוגדרת להיות

$$f_X(x) = \frac{1}{90-30} = \frac{1}{60}\ . \qquad (*4)$$

כמו כן,

$$f_X(30) = 0, \qquad f_X(40) = \frac{1}{9}, \qquad f_X(60) = \frac{1}{2}, \qquad f_X(90) = 1.$$

ניתן לחשב את ההסתברות אשר הגמל שותה בין a דקות עד b דקות על ידי

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(x)dx\ . \qquad (*5)$$

לדוגמה, ההסתברות שהגמל שותה בין 30 עד 50 דקות היא

$$P(30 \le X \le 50) = \int_{30}^{50} f_X(x)dx = \int_{30}^{50} \frac{1}{60}dx = \left[\frac{x}{60}\right]_{30}^{50} = \frac{50-30}{60} = \frac{1}{3}\ . \qquad (*6)$$

באופן כללי נתון מ"מ רציף אחיד X בעל ערכים רציפים על הקטע $[A,B]$, כלומר

$$X = \begin{cases} x & A \le x \le B \\ 0 & \text{אחרת.} \end{cases} \qquad (*7)$$

מסמנים X ב

$$X \sim U(A,B)\ .$$

10.1 הגדרה. (פונקציית צפיפות של מ"מ רציף אחיד) באופן כללי, ניקח קטע סופי $[A,B]$ ונגדיר ש- X מתפ]לג אחיד בקטע זה, $X \sim U(A,B)$ אם ורק אם

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B-A} & A \le x \le B, \\ 0 & \text{אחרת.} \end{cases}$$

במילים, **משתנה מקרי אחיד רציף הוא משתנה בעלת צפיפות קבועה** על קטע כלשהו $[A,B]$, וביתר הנקודות הצפיפות שווה לאפס.

כעת חוזרים לשאלה אשר הוביל למשוואה (6*): מהי ההסתברות אשר הגמל ישתה לתקופת עד 50 דקות? או באופן כללי, מהי ההסתברות אשר הגמל ישתה לתקופת עד k דקות כאשר $30 \le k \le 90$? בדיוק כמו (6*) התשובה ניתנת ע"י האינטגרל

$$P(A \le k \le A) = \int_A^k f_X(x) = \frac{k-A}{B-A} \tag{*8}$$

המשוואה זו היא בעצם **הפונקציית ההתפלגות המצטברת** $F_X(k)$. פורמאלית:

10.2 הגדרה. (פונקציית ההתפלגות המצטברת של מ"מ רציף אחיד) פונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי X מתפלג אחיד על הקטע $[A,B]$ היא ליניארית (קו ישר), ניתנת על ידי

$$F_X(k) = \begin{cases} 0, & k < A, \\ \dfrac{k-A}{B-A}, & 0 \le k \le B, \\ 1, & k > B. \end{cases}$$

עבור משתנה בדיד

$$F_X(b) - F_X(a) = P(a < X < b) = \sum_{k>a}^{b} P_X(k),$$

בעוד עבור משתנה רציף מתקבל השוויון הבא:

$$F_X(b) - F_X(a) = P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\,dx\ .$$

זאת אומרת, בשני המיקרים ניתן לסכום על פונקצית ההתפלגות הצפיפות בכדי לקבל את פונקתיית ההתפלגות המצטברת. במקרה הבדיד מדובר בסכום ובמקרה הרציף מדובר באינגרל.

10.3 מסקנה. (תוחלת של מ"מ רציף אחיד) התוחלת של משתנה מקרי מתפלג אחיד על הקטע $[A,B]$ היא

$$E[X] = \frac{B+A}{2}\ .$$

הוכחה.

$$E[X] = \int_A^B x f_X(x) dx = \int_A^B x\left(\frac{1}{B-A}\right)dx = \frac{1}{B-A}\int_A^B x = \frac{1}{B-A}\left[\frac{x^2}{2}\right]_A^B = \frac{1}{B-A}\left(\frac{B^2-A^2}{2}\right)$$
$$= \frac{A+B}{2}\ .$$

■

10.4 מסקנה. **(שונות של מ"מ רציף אחיד)** השונות של משתנה מקרי מתפלג אחיד על הקטע $[A,B]$ היא

$$V[X]=\frac{(B-A)^2}{12}\ .$$

הוכחה.

$$V[X]=E[X^2]-E[X]^2$$

קודם כל נחשב את $E[X^2]$:

$$E[X^2]=\int_A^B x^2 f_X(x)dx=\int_A^B x^2\left(\frac{1}{B-A}\right)dx=\frac{1}{B-A}\int_A^B x^2dx=\frac{1}{B-A}\left[\frac{x^3}{3}\right]_A^B=\frac{1}{B-A}\left(\frac{B^3-A^3}{3}\right).$$

ומ מסקנה 10.3, $E[X]^2=\left(\frac{A+B}{2}\right)^2$. לכן

$$\begin{aligned}V[X]=&E[X^2]-E[X]^2=\frac{1}{B-A}\left(\frac{B^3-A^3}{3}\right)-\frac{(A+B)^2}{4}\\=&\frac{1}{12(B-A)}\left[4(B^3-A^3)-3(B-A)(A+B)^2\right]\\=&\frac{1}{12(B-A)}\left[4B^3-4A^3-3BA^2-6AB^2-3B^3+3A^3+6A^2B+3B^2A\right]\\=&\frac{1}{12(B-A)}\left[B^3-A^3+3BA^2-3AB^2\right]\\=&\frac{(B-A)^3}{12(B-A)}\\=&\frac{(B-A)^2}{12}.\end{aligned}$$

■

10.5 דוגמא. אוטובוס מגיע לתחנה כל 30 דקות. בר מגיעה לתחנה באקראי, מבלי לתכנן מראש ומבלי לבדוק את לוחות הזמנים של האוטובוס. נסמן ב-T את זמן ההמתנה המדוייק לאוטובוס, בדקות. רשמו את פונקצית ההתפלגות המצטברת ואת פונקצית הצפיפות של T. חשבו את ההסתברויות

$$P(20\le T\le 40)$$

ו-

$$P(T>23)\ .$$

ענו שוב על השאלה עבור אוטובוס המגיע כל 40 דקות.

פיתרון. במקרה הנוכחי, זמן ההמתנה הוא אחיד משום שמועד ההגעה של בר הוא אחיד בזמן לכן,

$$F_T(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{t}{30}, & 0\le t\le 30,\\ 1, & t\ge 30,\end{cases}$$

$$f_T(t)=F_T'(t)=\begin{cases}\frac{1}{30}, & 0\le t\le 30,\\ 0, & \text{אחרת},\end{cases}$$

$$P(20\le T\le 40)=F_T(40)-F_T(20)=1-\frac{20}{30}=\frac{1}{3},$$

$$P(T>23)=1-P(T\le 23)=1-F_T(23)=1-\frac{23}{30}=\frac{7}{30}.$$

עבור אוטובוס המגיע כל 40 דקות נקבל

$$F_T(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{t}{40}, & 0\le t\le 40,\\ 1, & t\ge 40,\end{cases}$$

$$f_T(t)=F_T'(t)=\begin{cases}\frac{1}{40}, & 0\le t\le 40,\\ 0, & \text{אחרת},\end{cases},$$

$$P(20\le T\le 40)=F_T(40)-F_T(20)=1-\frac{20}{40}=\frac{1}{2},$$

$$P(T>23)=1-P(T\le 23)=1-F_T(23)=1-\frac{23}{40}=\frac{17}{40}.$$

■

10.6 דוגמא. מכונה במפעל ברגים אמורה לייצר ברגים בקוטר 3 מ"מ. בפועל, קוטר הברגים אינו מדויק והצפיפות שלו נתונה על ידי איור להלן אשר מראה את צפיפות קוטר הברגים.

רשמו במדויק את פונקצית הצפיפות. מה ההסתברות שקוטר בורג יעלה על 3 מ"מ? על 4 מ"מ?

פיתרון. יש צורך למצוא את פונקצית הצפיפות בצורה מדוייקת. נשתמש תחילה בתנאי הנרמול. אנחנו יודעים כי השטח שבין הגרף לציר x שווה ל-1 כי כלל השטח מייצג את כל ההסתברות,

$$\int_1^5 f_X(x)\,dx=P(1\le X\le 5)=1.$$

נשתמש בנוסחה לשטח משולש (שטח משולש שווה למכפלת הבסיס בחצי הגובה) ונקבל שגובה המשולש h מקיים

$$\frac{4h}{2}=1 \qquad\Rightarrow\qquad h=0.5\ .$$

עם כן, יש לנו את הנקודות

$$(1,0),\quad (5,0),\quad (3,0.5)\ .$$

ונוכל למצוא את משוואות הקווים בהתאם. לכן הצפיפות נתונה על ידי

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{1}{4}, & 1\le x\le 3,\\ -\frac{1}{4}(x-5), & 3\le x\le 5,\\ 0, & x>5.\end{cases},$$

בעזרת הצפיפות נוכל לחשב ישירות את ההסתברויות המבוקשות.

$$P(X>3)=\int_3^5\left(-\frac{1}{4}(x-5)\right)dx \quad =-\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}-5x\right]_3^5=\frac{1}{2},$$
$$P(X>4)=\int_4^5\left(-\frac{1}{4}(x-5)\right)dx \quad =-\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}-5x\right]_4^5=\frac{1}{8}.$$

■

10.2 משתנה מקרי רציף מעריכי

קודם למדנו מזה התפלגות פואסון. הגדרנו משתנה פואסוני X **כמשתנה מקרי בדיד אשר סופר את מספר האירועים** k **שהתרחשו ביחידת זמן** , או ביחידת שטח וכדומה. כאשר λ הוא הקצב הממוצע ליחידת זמן, אזי הפונקציית ההסתברות $f_X(k)$ היא מוגדרת להיות ההסתברות $P(X=k)$ אשר k אירועים התרחשו ביחידת זמן (k שיחות התקבלו למוקד שרות בשעה כלשהי כאשר λ הוא המספר שיחות לשעה הממוצע, או k חלקיקים נפלטו בשנייה כלשהי כשטר λ הוא המספר החלקיקים הממוצע הנפלטים לשעה) וניתנת ע"י

$$f_X(k)\equiv P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\ \ k=0,1,2,\dots\ \ ,$$

יחד עם התוחלת והשונות

$$E[X]=V[X]=\lambda.$$

במקום לחשוב על מספר השיחות הנכנסות בשעה (אשר הוא משתנה מקרי בדיד), נחשוב על **הזמן בין כל שיחה לשיחה, אשר הוא משתנה מקרי רציף.** לדוגמא, אם בממוצע נכנסות 5 שיחות בשעה, אזי הזמן הממוצע בין השיחות הוא $\frac{60}{5}=12$ דקות. הזמן הוא רציף ולכן הזמן בין השיחות השונות הוא משתנה מקרי רציף, הנקרא **משתנה מקרי מעריכי** . משתנה מקרי מעריכי מודד את הזמן (או המרחק) בין אירועים שונים המתרחשים לפי תהליך פואסון (התפלגות פואסונית). מסמנים משתנה מקרי מעריכי ב

$$X\sim\exp(-\lambda).$$

בדוגמה זו

$$\lambda=\frac{1}{12}\ \text{שיחות לדקה}$$

10.7 הגדרה. (פונקציית צפיפות של משתנה מקרי רציף מעריכי) משתנה מקרי מעריכי X מסומן ב

$$X\sim\exp(\lambda)$$

כאשר λ הוא הפרמטר של התפלגות פואסון המתאימה, זאת אומרת קצב האירועים הממוצה ליחידת זמן (או שטח). הצפיפות של X היא

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0.\end{cases}$$

10.8 דוגמא. לדוגמה, נגיד שמוקד שרות פתוח בין השעות $18:00$ עד $22:00$, כלומר לאורך זמן של 240 דקות. ההסתברות ששיחה התקבלה בין $18:05$ עד $18:10$, כלומר תוך 5 דקות כלשהן, כאשר $\lambda=\frac{1}{12}$, היא

$$P(18:05\text{–}18:10)=P(X=5)=\int_0^5 f_X(x)dx=\int_0^5\lambda e^{-\lambda x}dx=\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^5=1-e^{-5\lambda}=1-e^{-5/12}=0.34.$$

ההסתברות ששיחה אחת תגיע תוך 15 דקות היא

$$P(X=15)=\int_0^{15} f_X(x)dx=\int_0^{15}\lambda e^{-\lambda x}dx=\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{15}=1-e^{-15\lambda}=1-e^{-15/12}=0.71.$$

10.9 מסקנה. (פונקציית התפלגות המצטברת של מ"מ רציף מעריכי) פונקציית התפלגות המצטברת של משתנה נקרי רציף מעריכי X הוא

$$F_X(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1 - e^{-\lambda k} & k \geq 0 \end{cases}$$

הוכחה.

$$F_X(k) = \int_0^k f_X(x)\,dx = \int_0^k \lambda e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\lambda k}\ .$$

■

10.10 דוגמא. ההסתברות אשר השיחה הראשונה תגיע בין הדקה השנייה לבין הדקה הרביעית היא

$$P(2 \leq X \leq 4) = F_X(4) - F_X(2) = 1 - e^{-4/12} - (1 - e^{-2/12}) = 0.13\ .$$

10.11 דוגמא. בהנחה שבחמש הדקות הראשונות לא התקבל שיחה, ההסתברות שנמתין לפחות עוד דקה עד לשיחה הראשונה ניתנת ע"י

$$P(X > 5{+}1|X > 5) = \frac{P(X > 6 \cap X > 5)}{P(X > 5)} = \frac{P(X > 6)}{P(X > 5)} = \frac{1 - F_X(6)}{1 - F_X(5)} = \frac{e^{-6/12}}{e^{-5/12}} = e^{-1/12} = P(X > 1).$$

10.12 דוגמא. מספר טיפות הגשם הנופלות ביחידת שטח נתונה מתפלגות על פי התפלגות פואסון. ניקח מטר אחד ונניח כי בממוצע נפלו לאורכו 10 טיפות:

$$\lambda = 10 \ \text{טיפות למטר}\ .$$

המרחק X (במטרים) בין טיפות מתפלג פואסונית

$$X \sim \exp(\lambda = 10).$$

ההסתברות שטיפה אחד תיפול לתוך 10 ס"מ ($0.1\ [\mathrm{m}]$) כלשהו היא

$$P(X \leq 2) = F_X(20) = 1 - e^{-0.1\lambda} = 1 - e^{-1} = 0.63\ .$$

10.13 מסקנה. (תוחלת של מ"מ רציף מעריכי) התוחלת של משתנה מקרי רציף מעריכי היא

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}\ .$$

הוכחה.

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^\infty x f_X(x)\,dx \\ &= \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} \\ &= \left[\frac{x\lambda e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx \\ &= 0 - \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}\ . \end{aligned}$$

■

10.14 מסקנה. (שונות של מ"מ רציף מעריכי) השונות של משתנה מקרי רציף מעריכי הו א

$$V[X] = \frac{1}{\lambda^2}\ .$$