

# שיעור 1

## מכונות טיורינג

## 1.1 הגדרה של מכונת טיורינג

## הגדרה 1.1 מבנות טיריניג (הגדרה היוריסטית)

הקלט והסרט

- מוכנות טיריניג (מ"ט) קורא קלט.
  - הקלט עצמו נמצא על סרט אינסופי מחולק למשבצות.
  - כל תו של הקלט כתוב במשבצת אחת של הסרט.
  - במכונות טיריניג אנחנו מניחים שהסרט אינסופי לשני הצדדים.

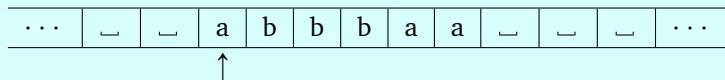
\* משמאלי לתחילת הקלט יש רצף אינסופי של תווים רווח " ".

\* מימין לסוף הקלט יש רצף אינסופי של תווים רווח " ".



הראש

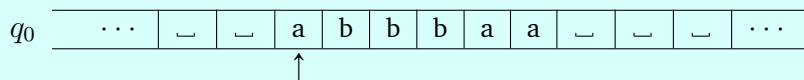
- במצב ההתחלתי הראש בקצת השמאלי של הקלט.



- הראש יכול לזרז ימינה על הסרט וגם שמאלה על הסרט.
  - הראש קורא את התוכן של המשבצת שבה הוא נמצא.
  - הראש יכול לכתוב על משבצת, אבל רק על המשבצת שבה הראש נמצא.

## תאור העבודה של המכונה

- בהרבה החלטות השרות נמצאו רצף אינסופי של תווים ים.
  - בראש מכתב על התא הריאון בשרות והמכונה נמצאת במצב התחלתי  $q_0$ .



- בכל צעד חישוב, בהתקас למספר הנוכחי ולאות שמתוחת לראש (הטו הנקרה), המכונה מחליטה:
    - \* לאיזה מצב לעבור מה כתוב מתחת לראש (הטו הנכתב)
    - \* لأن להזיז את הראש (תא אחד ימינה, או תא אחד שמאלה, או להישאר במקום).
  - למכוונה ישנים שני מצבים מיוחדים:
    - \*  $q_{acc}$ : אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל-  $q_{acc}$  היא עוברת ומקבלת.
    - \*  $q_{rej}$ : אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל-  $q_{rej}$  היא עוברת ודוחה.
  - אם המכונה לא מגיעה ל-  $q_{rej}$  או  $q_{acc}$  היא תמשיך לרוץ לנצח.

**הגדרה 1.2 מכונת טיורינג**

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כasher:

$Q$	קובוצת מצבים סופית ולא ריקה
$\Sigma$	אלפבית הקלט
$\Gamma$	אלפבית הסרט
$\delta$	פונקציה המעבירים
$q_0$	מצב התחלתי
$q_{\text{acc}}$	מצב מקבל יחיד
$q_{\text{rej}}$	מצב דוחה יחיד

**דוגמה 1.1**

בנייה מכונת טיורינג אשר מקבלת מילה אם היא בשפה

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#a_w = \#b_w\}.$$

ז"א השפט כל המילים עם מספר שווה אותיות  $a$  ו  $b$ . הפאודו-קוד של המכונה, כדלקמן.**פאודו-קוד**

1) סורקים את הקלט משמאול לימין.

- אם לא מצאנו  $a$  וגם לא מצאנו  $b \Leftarrow$  מקבלת.
- אם האות הראשונה שהראש הוא מצא  $a$ , כתובים עליו ✓, וועברים לשלב (2).
- אם האות הראשונה שהראש הוא מצא  $b$ , כתובים עליו ✓, וועברים לשלב (3).

2) ממשיכים לוז ימינה עד שנמצא  $b$  תואם.

- אם לא מצאנו  $b \Leftarrow$  דוחה.
- אם מצאנו  $b$  כתובים עליו ✓, חוזרים לתחלת הקלט וחוזרים לשלב (1).

3) ממשיכים לוז ימינה עד שנמצא  $a$  תואם.

- אם לא מצאנו  $a \Leftarrow$  דוחה.
- אם מצאנו  $a$  כתובים עליו ✓, חוזרים לתחלת הקלט וחוזרים לשלב (1).

כעת נתן הגדרה פורמלית של המכונה טיורינג שמבצעת את האלגוריתם הזה.

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כasher  $Q$  הקבוצה המכנים הבהא:

$$Q = \{q_0, q_a, q_b, q_{\text{back}}, q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}\}.$$

המשמעותם של כל המצבים נרשמים בטבלה למטה:

$q_0$	המצב ההתחלתי. אליו נחזיר אחרי כל סבב התאמת של זוג אותיות.
$q_a$	מצב שבו ראיינו $a$ ומחפשים $b$ תואם.
$q_b$	מצב שבו ראיינו $b$ ומחפשים $a$ תואם.
$q_{\text{back}}$	מצב ששנשתמש בו כדי לחזור לказה השמאלי של הקלט ולהתחל את הסריקה הבא (סבב ההתאמת הבא).
$q_{\text{acc}}$	מצב מקבל.
$q_{\text{rej}}$	מצב דוחה.

האלפבית של הקלט,  $\Sigma$ , והלפבית של השרת,  $\Gamma$ , הינם:

$$\Sigma = \{a, b\}, \quad \Gamma = \{a, b, \_, \checkmark\}.$$

הפונקציית המעברים  $\delta$  היא מוגדרת כדלקמן.

$$\begin{aligned}\delta(q_0, a) &= (q_a, \checkmark, R), \\ \delta(q_0, b) &= (q_b, \checkmark, R), \\ \delta(q_0, \_) &= (q_{\text{acc}}, \_, R), \\ \delta(q_a, \checkmark) &= (q_a, \checkmark, R), \\ \delta(q_a, a) &= (q_a, a, R), \\ \delta(q_a, b) &= (q_{\text{back}}, \checkmark, L), \\ \delta(q_b, \checkmark) &= (q_b, \checkmark, R), \\ \delta(q_b, b) &= (q_a, b, R), \\ \delta(q_b, a) &= (q_{\text{back}}, \checkmark, L).\end{aligned}$$

לעתים קל יותר לרשום את פונקציית המעברים  $\delta$  בטבלה:

$\Gamma \setminus Q$	$a$	$b$	$\_$	$\checkmark$
$q_0$	$(q_a, \checkmark, R)$	$(q_b, \checkmark, R)$	$(q_{\text{acc}}, \_, R)$	$(q_0, \checkmark, R)$
$q_a$	$(q_a, a, R)$	$(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$	$(q_{\text{rej}}, \_, L)$	$(q_a, \checkmark, R)$
$q_b$	$(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$	$(q_a, b, R)$	$(q_{\text{rej}}, \_, L)$	$(q_b, \checkmark, R)$
$q_{\text{back}}$	$(q_{\text{back}}, a, L)$	$(q_{\text{back}}, b, L)$	$(q_0, \_, R)$	$(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$

### תרשים מצבוי



**דוגמה 1.2**

בדקו אם המכוון טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה `aab`.

**פתרון:**

-	$q_0$	a	a	b	-
-	✓	$q_a$	a	b	-
-	✓	a	$q_a$	b	-
-	✓		$q_{back}$	a	✓
-	$q_{back}$	✓	a	✓	-
$q_{back}$	-	✓	a	✓	-
-	$q_0$	✓	a	✓	-
-	✓	$q_0$	a	✓	-
-	✓	✓	$q_a$	✓	-
-	✓	✓	✓	$q_a$	-
-	✓	✓	$rej$	✓	-

**דוגמה 1.3**

בדקו אם המכוון טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה `.abbbbaaa`.

**פתרון:**

-	$q_0$	a	b	b	b	a	a	-
-	✓	$q_a$	b	b	b	a	a	-
-	$q_{back}$	✓	✓	b	b	a	a	-
$q_{back}$	-	✓	✓	b	b	a	a	-
-	$q_0$	✓	✓	b	b	a	a	-
-	✓	$q_0$	✓	b	b	a	a	-
-	✓	✓	$q_0$	b	b	a	a	-
-	✓	✓	✓	$q_b$	b	a	a	-
-	✓	✓	✓	b	$q_b$	a	a	-
-	✓	✓	✓	✓	$q_{back}$	b	✓	a
-	✓	✓	✓	$q_{back}$	✓	b	✓	a
-	✓	$q_{back}$	✓	✓	b	✓	a	-
$q_{back}$	-	✓	✓	✓	b	✓	a	-
-	$q_0$	✓	✓	✓	b	✓	a	-
-	✓	$q_0$	✓	✓	b	✓	a	-
-	✓	✓	$q_0$	✓	b	✓	a	-
-	✓	✓	✓	$q_0$	b	✓	a	-
-	✓	✓	✓	✓	$q_b$	✓	a	-
-	✓	✓	✓	✓	✓	$q_b$	a	-
-	✓	✓	✓	✓	$q_{back}$	✓	✓	-
-	✓	✓	✓	$q_{back}$	✓	✓	✓	-

—	✓	✓	$q_{\text{back}}$	✓	✓	✓	✓	—
—	✓	$q_{\text{back}}$	✓	✓	✓	✓	✓	—
—	$q_{\text{back}}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	—
$q_{\text{back}}$	—	✓	✓	✓	✓	✓	✓	—
—	$q_0$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	—
—	✓	$q_0$	✓	✓	✓	✓	✓	—
—	✓	✓	$q_0$	✓	✓	✓	✓	—
—	✓	✓	✓	$q_0$	✓	✓	✓	—
—	✓	✓	✓	✓	$q_0$	✓	✓	—
—	✓	✓	✓	✓	✓	$q_0$	✓	—
—	✓	✓	✓	✓	✓	✓	$q_{\text{acc}}$	—

**הגדרה 1.3 קונפיגורציה**

תהי  $M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$  מכונת טיריניג. **קונפיגורציה** של  $M$  הינה מחרוזת

$uq\sigma v$

כאשר משמעות:

$$u, v \in \Gamma^*, \quad \sigma \in \Gamma, \quad q \in Q.$$

מצב המכוונה,	$q$
הסימן במקומות הראש	$\sigma$
תוכן הסרט משמאלי לראש,	$u$
תוכן הסרט מימין לראש.	$v$

**דוגמה 1.4 (המשך של דוגמה 1.2)**

$u$	$q$	$\sigma$	$v$
—	$q_0$	a	a b —
— ✓	$q_a$	a	b —
— ✓ a	$q_a$	b	—
— ✓	$q_{\text{back}}$	a	✓ —
—	$q_{\text{back}}$	✓	a ✓ —
—	$q_{\text{back}}$	—	✓ a ✓ —
—	$q_0$	✓	a ✓ —
— ✓	$q_0$	a	✓ —
— ✓ ✓	$q_a$	✓	—
— ✓ ✓ ✓	$q_a$	—	—
— ✓ ✓ ✓	$q_{\text{rej}}$	✓	—

**דוגמה 1.5**

בנו מכונת טיריניג אשר מקבלת כל מילה בשפה

$$L = \{a^n \mid n = 2^k, k \in \mathbb{N}\}$$

ז"א מילים בעלי מספר אותיות  $n$  אשר חזקה של 2.

## **פתרונות:**

**ראשית נשים לב למשפט הבא:**

## 1.1 משפט

מספר שלם  $n$  שווה לחזקה אי-שלילית של 2, כלומר ( $k \geq 0$ ) אם ורק אם קיימים שלם  $m$  ובראשו חילוק של  $n - 2^m$  נקבע נותן.

**הוכחה:**  
↳ כיוון

$\cdot \frac{n}{2^k} = 1$   $\Leftrightarrow n = 2^k$  ( $k \geq 0$ )

**כיוון**  $\Rightarrow$

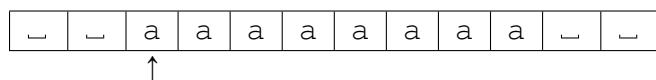
אם קיימים  $m \geq 0$  עבורו  $n = 2^m$  אז  $\frac{n}{2^m} = n$  ולכן  $n$  שווה לחזקה אי-שלילית של 2.

לאורו המשפט הזה נבנה אלגוריתם אשר מחלק את מספר האותיות במילה ב- 2 שוב ושוב באורה איטרטיבית.

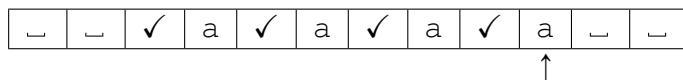
- אם אחרי סיבוב מסוים נקלט מספר אי-זוגי שונה מ-1, אז אין מצב שמספר האותיות  $a$  הוא חזקה של 2.
  - בצד שני אם אחרי סיבוב כלשהו נקלט בדיקות  $a$  אחת הנשארת,  $z^a$  אחרי מספר מסוים של חילוקים של המספר אותיות  $a$  קיבלנו 1, אז מובטח לנו שהמספר של אותיות  $a$  הוא שווה לחזקה של 2.

כעת נסביר כיצד המכונית טירינג מבצעת את השיטה הזאת בפועל כלהלן.

<sup>1)</sup> במאכג התחלתי יש מחרוזת של רצף אותיות *a* כתובות על הסרט והראש נמצא מתחת האות הראשוונה.



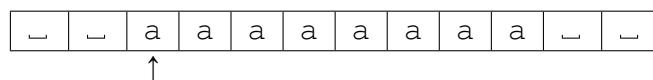
**2)** עוברים על הקלט משמאלי לימיון ומבצעים מחייקה לשירוגין של האות a. כלומר, אותן אחת נמחק ואאות אותן נשאיר וכן הלאה, עד שmaguius לקצתה הימין של המילה.



**3) אחרי שהראש הגיע לסוף המילה:**

- אם מצאנו את a אחות בדיק  $\Leftarrow$  המכונה מקבל.
  - אם כתוב ✓ בתו האחרון  $\Leftarrow$  המכונה תדחה.
  - אחרת, אם כתוב a בתו האחרון הרש charozot וחוורים לשלב 2).

כדוגמה של מילה המתקבלת על ידי האלגוריתם, למטה רשומות האיטרציות של האלגוריתם זהה על המילה  $w = aaaaaaaaa$ . במצב התחלתי הסרט נראה כדלקמן.



התו האחרון  $a$  אז ממשיכים לאיטרציה הבא.



**איטרציה 2)** בסוף האיטרציה  $i = 2$  הסדרת נראית כך:

התו הראשון הוא  $a$  אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

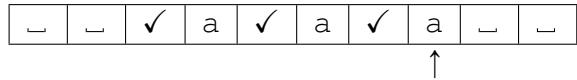
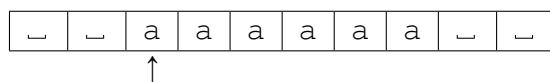


**איטרציה 3)** לאחר האיטרציה  $i = 3$  הסדרת נראית כך:

התו האחרון הוא  $a$  אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

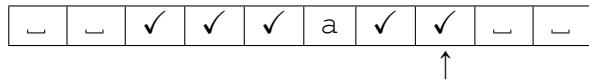
**איטרציה 4)** באיטרציה  $i = 4$  יש אות  $a$  אחת בדיק אז המכונה מקבלת.

כדוגמה של מילה הלא המתבלת על ידי האלגוריתם, למטה רשומות האיטרציות של האלגוריתם זהה על המילה  $w = aaaaaa$  (6 אותיות  $a$ ). במצב ההתחלתי הסרט נראה כדלקמן.



**איטרציה 1)** לבסוף האיטרציה  $i = 1$  הסדרת נראית כך:

התו האחרון  $a$  אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.



**איטרציה 2)** בסוף האיטרציה  $i = 2$  הסדרת נראית כך:

התו הראשון הוא  $\checkmark$  אז דוחה.

כעת נתן הגדרה פורמלית של המכונת טיורנג שמקבלת השפה הזאת:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej}) ,$$

כאשר  $Q = \{q_0, \text{one}, \text{even}, \text{odd}, q_{acc}, q_{rej}\}$ ,  $\Gamma = \{a, \_, \checkmark\}$ ,  $\Sigma = \{a\}$  כאשר המשמעותם הם מפורטים למטה:

מצב `none`: מצב ההתחלתי. עדין לא קראנו  $a$  כתוצאה זה.

מצב `one`: קראנו  $a$  בודד.

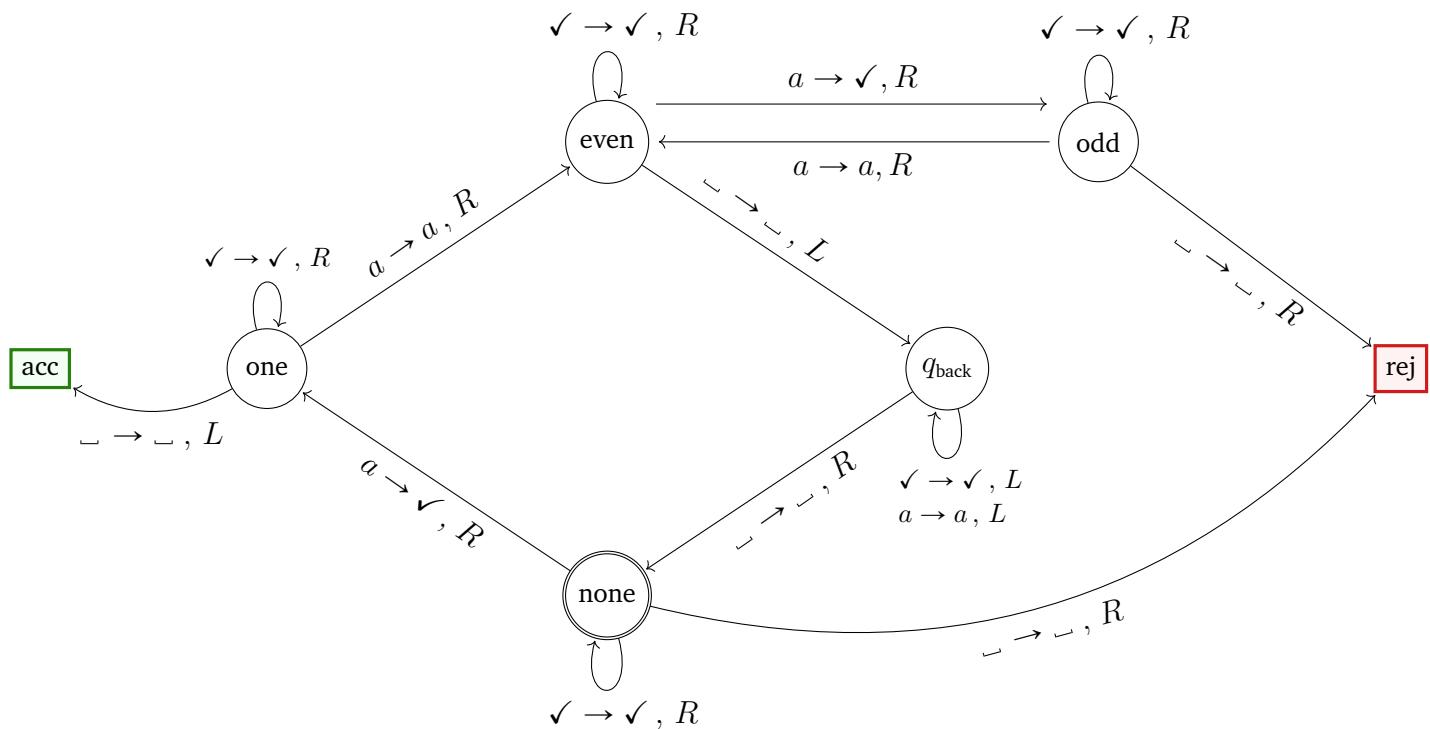
הfonקציית המעברים מתוארת על ידי התרשים

מצב `even`: קראנו מספר זוגי של  $a$ .

מצב `odd`: קראנו מספר אי-זוגי של  $a$ .

מצב  $q_{back}$ : חזרה שלמה.

מצבים למטה.

**דוגמה 1.6**

בדקו אם המילה  $aaaa$  מתקבלת על ידי המכונת טירינג בדוגמה 1.5.

**פתרונות:**

[	none	a	a	a	a	]
[	✓	one	a	a	a	]
[	✓	a	even	a	a	]
[	✓	a	✓	odd	a	]
[	✓	a	✓	a	even	]
[	✓	a	✓	back	a	]
[	✓	a	back	✓	a	]
[	✓	back	✓	a	✓	]
[	back	✓	a	✓	a	]
[	none	✓	a	✓	a	]
[	✓	none	a	✓	a	]
[	✓	✓	one	✓	a	]
[	✓	✓	✓	one	a	]
[	✓	✓	✓	a	even	]
[	✓	✓	✓	back	a	]
[	✓	✓	back	✓	a	]
[	back	✓	✓	✓	a	]
[	none	✓	✓	✓	a	]
[	✓	none	✓	✓	a	]
[	✓	✓	none	✓	a	]

✓	✓	✓	none	a	—
✓	✓	✓	✓	one	—
✓	✓	✓	acc	✓	—

<i>u</i>	<i>q</i>	$\sigma$	v
—	none	a	aaa —
— ✓	one	a	aa —
— ✓ a	even	a	a —
— ✓ a ✓	odd	a	—
— ✓ a ✓ a	even	—	—
— ✓ a ✓	back	a	—
— ✓ a	back	✓	a —
— ✓	back	a	✓ a —
—	back	✓	a ✓ a —
—	back	—	✓ a ✓ a —
—	none	✓	a ✓ a —
— ✓	none	a	✓ a —
— ✓ ✓	one	✓	a —
— ✓ ✓ ✓	one	a	—
— ✓ ✓ ✓ a	even	—	—
— ✓ ✓ ✓	back	a	—
— ✓ ✓	back	✓ a	—
— ✓	back	✓	✓ a —
—	back	✓	✓✓ a —
—	back	—	✓✓✓ a —
—	none	✓	✓✓ a —
— ✓	none	✓	✓ a —
— ✓ ✓	none	✓	a —
— ✓ ✓ ✓	none	a	—
— ✓ ✓ ✓ ✓	one	—	—
— ✓ ✓ ✓	acc	✓	—

**דוגמה 1.7**

בדקו אם המילה aaa מתקבלת על ידי המכונת טיריניג בדוגמה 1.5.

**פתרונות:**

none	a	a	a	—
✓	one	a	a	—
✓	a	even	a	—
✓	a	✓	odd	—
✓	a	✓	—	rej

<i>u</i>	<i>q</i>	$\sigma$	v
—	none	a	aa —

$\sqcup \checkmark$	one	a	a $\sqcup$
$\sqcup \checkmark a$	even	a	$\sqcup$
$\sqcup \checkmark a \checkmark$	odd	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup \checkmark a \checkmark \sqcup$	rej	$\sqcup$	$\sqcup$

**דוגמה 1.8**

מהי השפה של המוכנה למטה:

**פתרון:**

1) סורקים את הקלט משמאלו לימין.

- אם הtau הנקרא  $a$  או  $b$  עוברים לתו ימינה הבא וחוזרים לשלב 1).
- אם הtau הנקרא  $\sqcup$  הגיעו לסוף הקלט, ועוברים לשלב 2).

2) עוברים שמאלה לתו הארון של המילה.

- אם הtau הנקרא  $a \leftarrow$  מקבל.
- אחרת דוחה.

לכן המוכנה מקבלת שפת המילים המסתויימות באות  $a$ .**דוגמה 1.9**

מהי השפה של המוכנה למטה:



**פתרונות:**

**1)** במצב ההתחלתי:

- אם התו הנקרא  $\_$   $\Leftarrow$  מקבל.
- אם התו הנקרא  $a$  מורידים אותו על ידי  $\_$  וועברים לשלב 2).
- אחרת  $\Leftarrow$  דוחה.

**2)** עוברים ימינה עד שמנגנים לסוף המילה.

- אם התו האחרון הוא  $b$ , מורידים אותו על ידי  $\_$ , חוזרים לתחילת המילה וחוזרים לשלב 1).
- אחרת דוחה.

בכל איטרציה המכונה מורידה תו  $a$  בתחילת המילה וחזרת ומורידה תו  $b$  תואם בסוף המילה. בכל איטרציה אם המכונה לא מוצאת  $b$  תואם בסוף המילה היא דוחה המילה. אחרת אם המכונה לא דוחה המילה וכל האותיות נמחקוות אז המילה מתתקבלת. לכן המכונה מקבלת שפת המילים

$$\{a^n b^n | n \geq 0\} .$$

#### הגדרה 1.4 גירה בצעד אחד

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$  מכונת טיריניג, ותהיינה  $c_1$  ו-  $c_2$  קונפיגורציות של  $M$ . נסמן

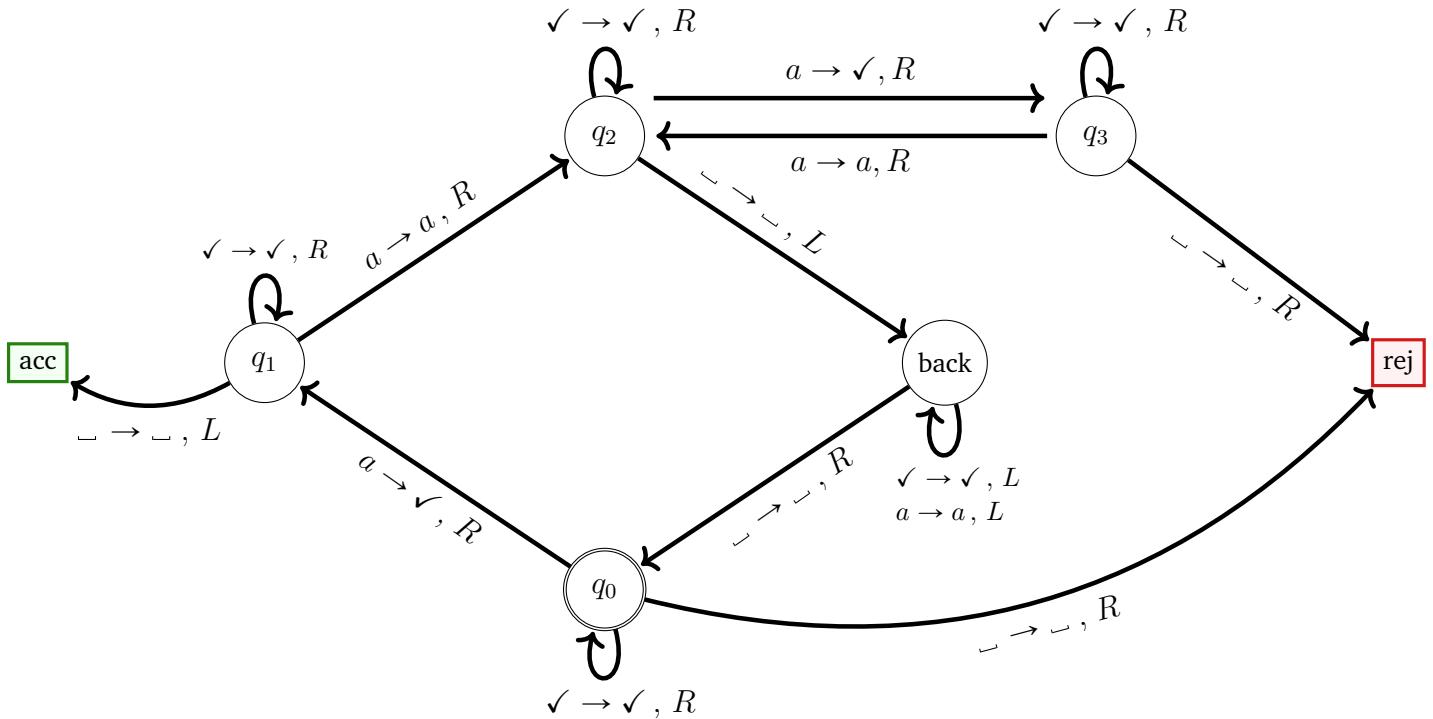
$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים,  $c_1$  גורר את  $c_2$ ) אם כשנמצאים ב-  $c_1$  עוברים ל-  $c_2$  בצעד בודד.

**דוגמה 1.10 (המשך של דוגמה 1.5)**

עבור המكونת טיורינג שמתוארת בתרשים למטה מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$

**הגדרה 1.5 גירירה בכללי**

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$  מكونת טיורינג, ותהינה  $c_1$  ו-  $c_2$  קונפיגורציות של  $M$   
נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

אם ניתן לעבור מ-  $c_1$  ל-  $c_2$  ב- 0 או יותר צעדים.

**דוגמה 1.11 (המשך של דוגמה 1.5)**

עבור המكونת טיורינג שמתוארת בתרשים למטה מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M^* \checkmark \checkmark \checkmark q_4 a$$

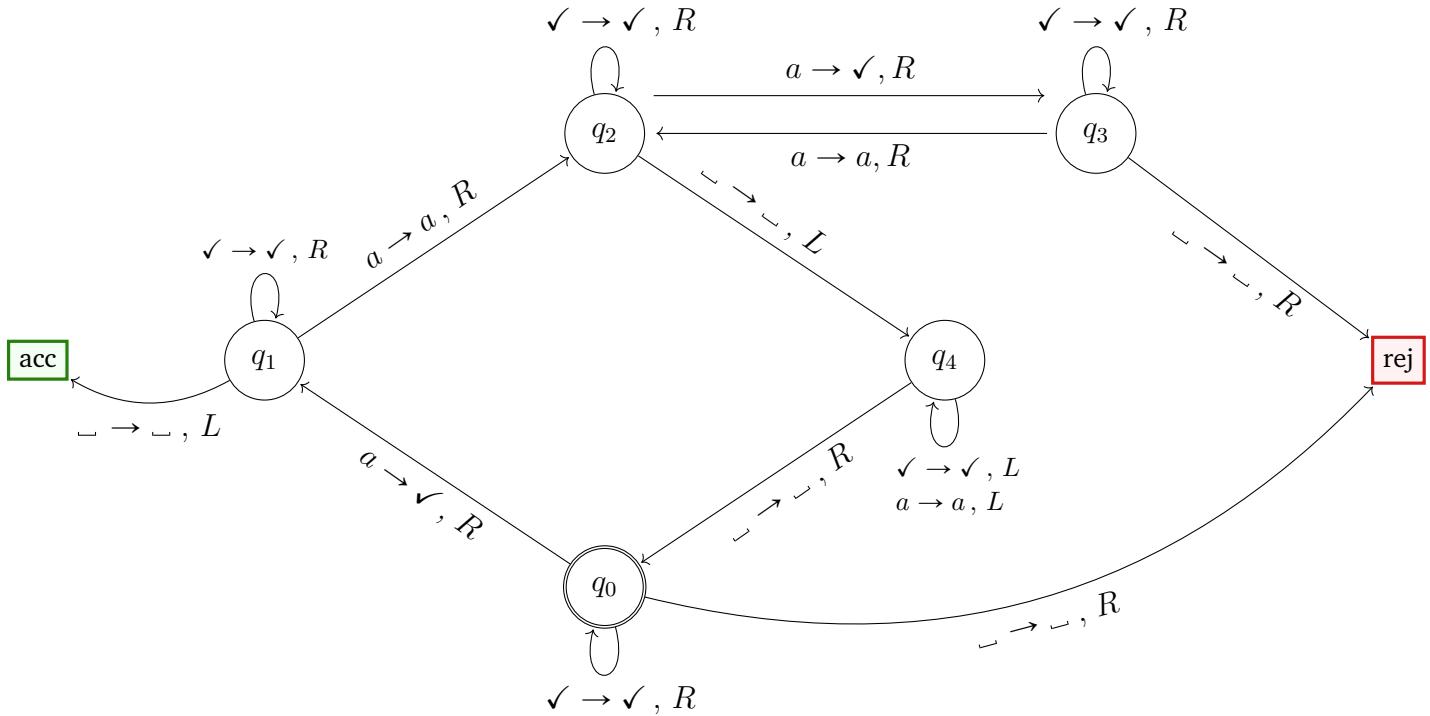
בגלל ש:

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark q_1 a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark a q_2 \_\_$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark q_4 a .$$



### הגדירה 1.6 קבלת ודוחיה של מחרוזות

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$  מכונת טיורינג, ו-  $w \in \Sigma^*$  מחרוזת. אומרים כי:

- **מקבלת את  $w$  אם**

$$q_0 w \vdash_M^* u q_{\text{acc}} \sigma v$$

כאשר  $\Gamma^* v, \sigma \in \Gamma$  כלשהם.

- **דוחה את  $w$  אם**

$$q_0 w \vdash_M^* u q_{\text{rej}} \sigma v$$

כאשר  $\Gamma^* v, \sigma \in \Gamma$  כלשהם.

### הגדירה 1.7 הכרעה של שפה

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, q_{\text{rej}})$  מכונת טיורינג, ו-  $L \subseteq \Sigma^*$  שפה. אומרים כי  $M$  **מכריעה** את  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$  מתקיים:

- $M$  מקבלת את  $w$ .

- $M$  דוחה את  $w$ .

### הגדירה 1.8 קבלת של שפה

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$  מכונת טיורינג, ו-  $L \subseteq \Sigma^*$  שפה. אומרים כי  $M$  **מקבלת** את  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$  מתקיים:

- אם  $w \in L$  מקבלת את  $w$ .

- אם  $w \notin L$  לא מקבלת את  $w$ .

במקרה זה כאשר  $M$  מקבלת את השפה  $L$ , נכתב ש-

$$L(M) = L .$$

## 1.2 טבלת המעברים

### דוגמה 1.12

בנו מכונה טיורינג שמכריעת את השפה

$$L = \{w = \{a, b, c\}^* \mid \#a_w = \#b_w = \#c_w\}$$

**פתרון:**

נתאר את המכונה על ידי הטבלת המעברים של המכונה. הסימן  $S$  מסמן כל זוג אותיות שונות מהקבוצה  $\{a, b, c\}$  ללא חשיבות לסדר. ככלומר:

$$S = \{a, b\} , \quad S = \{b, c\} , \quad S = \{a, c\} .$$

מצב	מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	позה	תנאי
$q_0$	$\sigma$	$q.\sigma$	✓	$R$	$\sigma \in \{a, b, c\}$	
$q.\sigma$	$\sigma$	$q.\sigma$	✗	$R$	$\sigma \in \{a, b, c\}$	
$q.\sigma$	$\tau$	$q.\{\sigma\tau\}$	✓	$R$	$\sigma, \tau \in \{a, b, c\} \wedge \sigma \neq \tau$	
$q.S$	$\sigma$	$q.S$	$\sigma$	$R$	$\sigma \in S$	
$q.S$	$\sigma$	$q_{\text{back}}$	✓	$L$	$\sigma \notin S$	
$q_{\text{back}}$	$a, b, c, \checkmark$	$q_{\text{back}}$	✗	$L$		
$q_0$	—	$q_{\text{acc}}$	✗	$R$		
$q_{\text{back}}$	$a, b, c, \checkmark$	$q_{\text{back}}$	✗	$L$		
$q_{\text{back}}$	—	$q_0$	✗	$R$		

כעת נתאר את המכונה על ידי תרשימים המצביעים של המכונה:



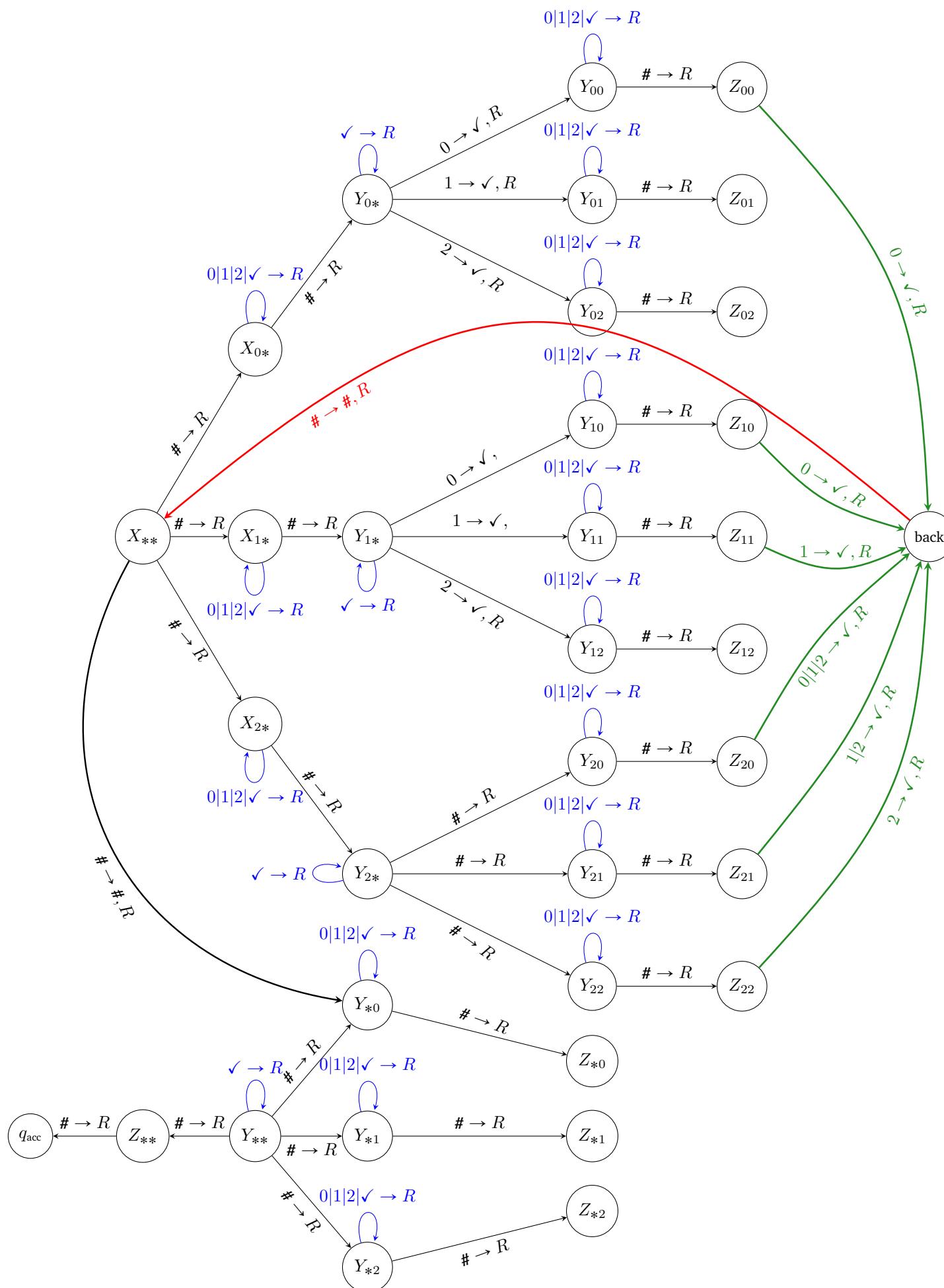
**דוגמה 1.13**

בנו מכונת טיורינג שמקreira את השפה

$$\{x_1 \dots x_k \# y_1 \dots y_k \# z_1 \dots z_k \mid x_i, y_i, z_i \in \{0, 1, 2\}, \forall i, x_i \geq y_i \geq z_i\}$$

**פתרונות:**

מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזואה	תנאי
$X * *$	$\sigma$	$X\sigma*$	✓	$R$	
$X * *$	✓	$X * *$	✓	$R$	
$X\sigma*$	0, 1, 2, ✓	$X\sigma*$	∅	$R$	
$X\tau*$	#	$Y\tau*$	∅	$R$	
$Y\tau*$	$\sigma$	$Y\tau\sigma$	∅	$R$	
$Y\tau*$	✓	$Y\tau*$	∅	$R$	
$Y\tau\sigma$	0, 1, 2, ✓	$Y\tau\sigma$	∅	$R$	
$Y\tau_1\tau_2$	#	$Z\tau_1\tau_2$	∅	$R$	
$Z\tau_1\tau_2$	✓	$Z\tau_1\tau_2$	∅	$R$	
$Z\tau_1\tau_2$	$\sigma$	$q_{\text{back}}$	✓	$L$	
$Z * *$	—	$q_{\text{acc}}$	∅	$R$	$\tau_1 \geq \sigma \geq \tau_2$
$q_{\text{back}}$	0, 1, 2, ✓	$q_{\text{back}}$	∅	$L$	
$q_{\text{back}}$	—	$X * *$	∅	$R$	



### 1.3 חישוב פונקציות

#### הגדרה 1.9 מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה $f$

תהי  $\Sigma_2^* \rightarrow \Sigma_1^*$  ותהי  $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$  מכונת טיורינג  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$  מוחשבת את  $f$  אם:

- $\Sigma_2 \subset \Gamma$  ו-  $\Sigma = \Sigma_1$ .
- לכל  $q_0 w \vdash q_{\text{acc}}, f(w) \in \Sigma_1^*$  מתקיים.

#### דוגמה 1.14 חיבור אונרי

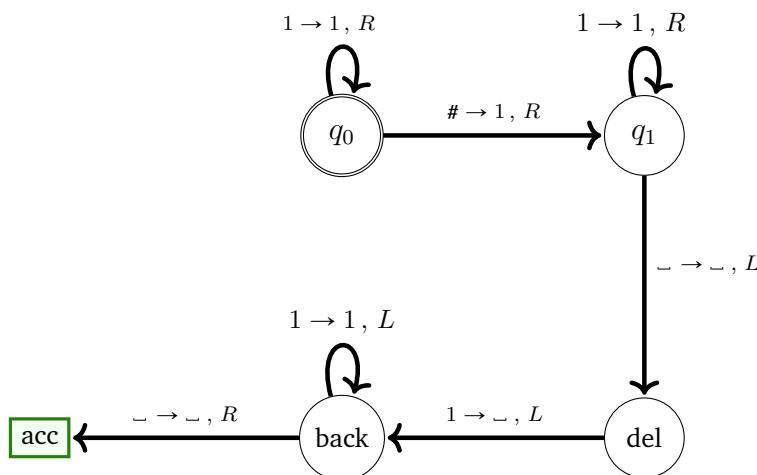
בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i \# 1^j$$

ומחזירה את פלט

$$1^{i+j}.$$

פתרונות:



#### דוגמה 1.15 כפל אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i \# 1^j$$

ומחזירה את פלט

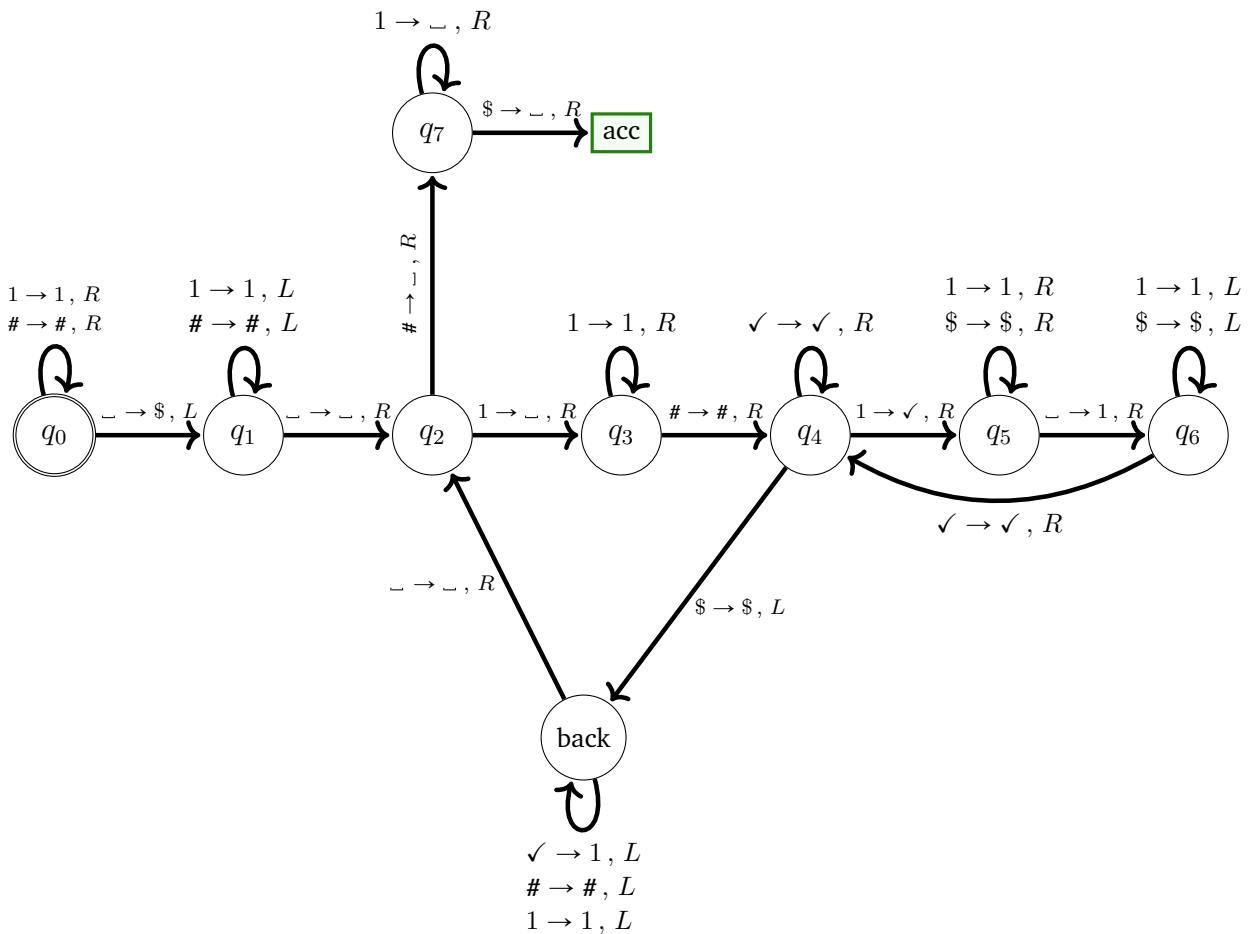
$$1^{i \cdot j}.$$

פתרונות:

- לדוגמה, נניח שהקלט הוא 2 כפול 2.

הקלט הוא 11#11.

- נרצה להבדיל בין הקלט לבין הפלט.  
לכן בתחילת הריצה, נתקדם ימינה עד סוף הקלט ונוסף שם את התו \$.  
לאחר מכן נחזור לתחילת הקלט.
- על כל אות 1 במילה השמאלית נעתק את המילה הימנית לאחר סימן ה- \$.
- לאחר מכן נשאיר רק את התווים שלאחר סימן ה \$. כמובן, נמחק את כל מה שאינו פלט.



$\mu$	$q$	$\sigma$	$\nu$
$\underline{\phantom{1}}$	$q_0$	1	$1\#11\underline{\phantom{1}}$
$\underline{\phantom{1}}1\#11$	$q_1$	$\underline{\phantom{1}}$	$\underline{\phantom{1}}$
$\underline{\phantom{1}}1\#11$	$q_1$	$\$$	$\underline{\phantom{1}}$
$\underline{\phantom{1}}$	$q_1$	$\underline{\phantom{1}}$	$11\#11\$$
$\underline{\phantom{1}}$	$q_2$	1	$1\#11\$$
$\underline{\phantom{1}}\underline{\phantom{1}}$	$q_3$	1	$\#11\$$
$\underline{\phantom{1}}\underline{\phantom{1}}1\#$	$q_4$	1	$1\$$
$\underline{\phantom{1}}\underline{\phantom{1}}1\#\checkmark$	$q_5$	1	$\$$
$\underline{\phantom{1}}\underline{\phantom{1}}1\#\checkmark 1\$$	$q_5$	$\underline{\phantom{1}}$	$\underline{\phantom{1}}$
$\underline{\phantom{1}}\underline{\phantom{1}}1\#\checkmark 1\$1$	$q_6$	$\underline{\phantom{1}}$	$\underline{\phantom{1}}$
$\underline{\phantom{1}}\underline{\phantom{1}}1\#$	$q_6$	$\checkmark$	$1\$1\underline{\phantom{1}}$
$\underline{\phantom{1}}\underline{\phantom{1}}1\#\checkmark$	$q_4$	1	$\$1\underline{\phantom{1}}$
$\underline{\phantom{1}}\underline{\phantom{1}}1\#\checkmark \checkmark$	$q_5$	$\$$	$1\underline{\phantom{1}}$
$\underline{\phantom{1}}\underline{\phantom{1}}1\#\checkmark \checkmark \$1$	$q_5$	$\underline{\phantom{1}}$	$\underline{\phantom{1}}$
$\underline{\phantom{1}}\underline{\phantom{1}}1\#\checkmark \checkmark \$11$	$q_6$	$\underline{\phantom{1}}$	$\underline{\phantom{1}}$

$\sqcup \sqcup 1\# \checkmark$	$q_6$	$\checkmark$	\$11	$\sqcup$
$\sqcup \sqcup 1\#\checkmark\checkmark$	$q_4$	\$	11	$\sqcup$
$\sqcup \sqcup 1\#\checkmark$	back	$\checkmark$	\$11	$\sqcup$
$\sqcup \sqcup$	back	$\sqcup$	1#11\$11	$\sqcup$
$\sqcup \sqcup$	$q_2$	1	#11\$11	$\sqcup$
$\sqcup \sqcup \sqcup$	$q_3$	#	11\$11	$\sqcup$
$\sqcup \sqcup \sqcup \#$	$q_4$	1	1\$11	$\sqcup$
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark$	$q_5$	1	\$11	$\sqcup$
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark 1\$11$	$q_5$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark 1\$111$	$q_6$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark$	$q_6$	$\checkmark$	1\\$111	$\sqcup$
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark$	$q_4$	1	\$111	$\sqcup$
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark \checkmark$	$q_5$	\$	111	$\sqcup$
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark \checkmark \$111$	$q_5$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark \checkmark \$1111$	$q_6$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark$	$q_4$	$\checkmark$	\$1111	$\sqcup$
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark \checkmark$	$q_4$	\$	1111	$\sqcup$
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark$	back	$\checkmark$	\$1111	$\sqcup$
$\sqcup \sqcup \sqcup$	back	$\sqcup$	#11\$1111	$\sqcup$
$\sqcup \sqcup \sqcup$	$q_2$	#	11\$1111	$\sqcup$
$\sqcup \sqcup \sqcup$	$q_7$	1	1\$1111	$\sqcup$
$\sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup$	$q_7$	\$	1111	$\sqcup$
$\sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup$	acc	1	111	$\sqcup$