

שיעור 1

סדרות של מספרים

1.1 הגדרה של סדרה של מספרים

סדרה של מספרים ממשיים היא רשימה מסודרת (ממוספרת) של מספרים ממשיים.

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

סימון:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{או} \quad (a_n)_{n=1}^{\infty}$$

הגדרה 1.1 סדרות של מספרים

סדרה של מספרים ממשיים היא פונקציה

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

נסמן

$$a_n := a(n).$$

1.1 דוגמה

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, \dots$$

$$a_n = 1 \quad \text{סדרה קבועה:}$$

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, \dots$$

$$a_n = n$$

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{הסדרה ההרמונית:}$$

$$a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, \dots$$

$$a_n = (-1)^n$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{5}, a_3 = -\frac{1}{10}, \dots$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$$

1.2 התכנסות של סדרות מספרים

L הוא הגבול של הסדרה a_n אם איברי a_n הולכים ומתקרבים ל L .

הגדרה 1.2 גבול של סדרה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. אומרים כי מספר L הוא הגבול של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $N > 0$ כך שלכל $n > N$

$$|a_n - L| < \epsilon.$$

מתקיים.

נסמן את הגבול של סדרה ב

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n .$$

ז"א a_n יהיו קרובים כרצוננו ל- L עבור n מספיק גדול.

שימו לב כי N תלוי ב- ϵ .

הגדרה 1.3 התכנסות של סדרה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. אם הגבול של (a_n) קיים (לפי הגדרה 1.2) אז אומרים כי הסדרה **מתכנסת**.

אם הגבול של (a_n) לא קיים אז אומרים כי הסדרה **מתבדרת**.

דוגמה 1.2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 .$$

הוכחה: הסדרה היא $a_n = \frac{1}{n}$ והגבול הוא $L = 0$.

נניח כי $\epsilon > 0$. נבחר N כך ש- $N > \frac{1}{\epsilon}$.

עבור $n > N$ מתקיים:

$$|a_n - L| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon .$$

מש"ל.

דוגמה 1.3

הוכיחו כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c .$$

כאן $a_n = c$ סדרה קבועה והגבול הוא $L = c$ קבוע כלשהו.

הוכחה: נניח כי $\epsilon > 0$. נבחר $N = 1$. אז לכל $n > N$ מתקיים:

$$|a_n - L| = |c - c| = 0 < \epsilon .$$

כנדרש.

דוגמה 1.4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 .$$

כאן, הסדרה היא $a_n = \frac{n}{n+1}$ והגבול הוא $L = 1$.

הוכחה: נניח כי $\epsilon > 0$. נבחר N כך ש-

$$N > \frac{1}{\epsilon} - 1.$$

ז"א

$$N > \frac{1}{\epsilon} - 1 \Rightarrow N + 1 > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{N + 1} < \epsilon.$$

לכל $n > N$ מתקיים:

$$|a_n - L| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n - (n+1)}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} < \epsilon.$$

כנדרש. ■

לא כל סדרה מתכנסת לגבול!

דוגמה 1.5

הסדרה $a_n = (-1)^n$ לא מתכנסת.

הוכחה: נוכיח דרך השלילה. נניח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ עבור L סופי.

ז"א לכל $\epsilon > 0$, קיים $N > 0$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \epsilon$.

נקבע $\epsilon = \frac{1}{2}$. מההנחה קיים $N > 0$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \frac{1}{2}$.

בפרט, $|a_{2N+1} - L| < \frac{1}{2}$ וגם $|a_{2N} - L| < \frac{1}{2}$.

ז"א $|1 - L| < \frac{1}{2}$ וגם $|-1 - L| < \frac{1}{2}$. לפיכך

$$|1 - L| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < 1 - L < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < -L < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < L < \frac{3}{2}$$

$$|-1 - L| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < -1 - L < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < -L < \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < L < -\frac{1}{2}.$$

סתירה. ■

דוגמה 1.6

הסדרה $a_n = (-1)^n \cdot n$ לא מתכנסת.

הוכחה: נוכיח דרך השלילה. נניח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ עבור L סופי.

ז"א לכל $\epsilon > 0$, קיים $N > 0$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \epsilon$.

נקבע $\epsilon = 1$. מההנחה קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < 1$.

בפרט, $|a_{2N+1} - L| < 1$ וגם $|a_{2N} - L| < 1$.

ז"א $|2N - L| < 1$ וגם $|-2N - 1 - L| < 1$. לפיכך

$$|2N - L| < 1 \Rightarrow -1 < 2N - L < 1 \Rightarrow -2N - 1 < -L < -2N + 1 \Rightarrow 2N - 1 < L < 2N + 1$$

ו

$$|-2N - 1 - L| < 1 \Rightarrow -1 < -2N - 1 - L < 1 \Rightarrow 2N < -L < 2N + 2 \Rightarrow -2N - 2 < L < -2N.$$

סתירה.

משפט 1.1 יחידות של גבול

אם לסדרה קיים גבול אז הוא יחיד.

הוכחה: נוכיח המשפט דרך השלילה.

נניח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_2$ עבור $L_1 \neq L_2$.

$$\text{נבחר } \epsilon = \frac{|L_2 - L_1|}{2}.$$

(a_n) מתכנסת ל- L_1 . לכן קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_1$, מתקיים $|a_n - L_1| < \epsilon$.

(a_n) מתכנסת ל- L_2 . לכן קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_2$, מתקיים $|a_n - L_2| < \epsilon$.

$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - a_n) + (a_n - L_2)| \leq |L_1 - a_n| + |a_n - L_2| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |L_2 - L_1|.$$

ז"א קיבלנו ש $|L_1 - L_2| < |L_2 - L_1|$. סתירה.

משפט 1.2 אריתמטיקה חשבון של גבולות

תהינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות כך ש $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ו $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$.

יהיה $c \in \mathbb{R}$ קבוע. התכונות הבאות מתקיימות:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = c \cdot A$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \pm B$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) = A \cdot B$$

4. אם $B \neq 0$ (ולכן $b_n \neq 0$ עבור n מספיק גדול) אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{B}.$$

הוכחה:

1. יהי $\epsilon > 0$ ו- $c \neq 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \text{ (נתון), אז קיים } N \in \mathbb{N} \text{ כך שלכל } n > N \text{ מתקיים } |a_n - A| < \frac{\epsilon}{|c|}$$

לכן

$$|ca_n - cA| = |c| \cdot |a_n - A| < |c| \cdot \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon.$$

■

2. יהי $\epsilon > 0$.

a_n מתכנסת ל A אז קיים $N_A \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_A$ מתקיים $|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$.

b_n מתכנסת ל B אז קיים $N_B \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_B$ מתקיים $|b_n - B| < \frac{\epsilon}{2}$.

יהי N הגדול מבין N_A ו N_B . אז לכל $n > N$,

$$|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2} \text{ ו } |b_n - B| < \frac{\epsilon}{2}$$

לכן לכל $n > N$

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) - (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

■

3. יהי $\epsilon > 0$.

a_n מתכנסת ל A אז קיים $N_A \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_A$ מתקיים $|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2|B|}$.

b_n מתכנסת ל B אז קיים $N_B \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_B$ מתקיים $|b_n - B| < \frac{\epsilon}{2A'}$ כאשר $|a_n| < A'$ לכל n (a_n מתכנסת ולכן חסומה לפי משפט 1.4 למטה).

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \\ &= |a_n (b_n - B) + B (a_n - A)| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - B| + |B| \cdot |a_n - A| \\ &< A' \cdot \frac{\epsilon}{2A'} + |B| \cdot \frac{\epsilon}{2|B|} = \epsilon \end{aligned}$$

■

4. בעזרת 3, מספיק להראות כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$.

יהי $\epsilon > 0$

b_n מתכנסת אז הסדרה חסומה (ראו משפט 1.4 למטה).

ז"א קיים $m \in \mathbb{R}$ כך ש $|b_n| > m$.

b_n מתכנסת, אז קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$|b_n - B| < m \cdot |B| \epsilon$$

ואז

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = \left| \frac{B - b_n}{b_n \cdot B} \right| < \frac{m \cdot |B| \cdot \epsilon}{|b_n| \cdot |B|} < \frac{m \cdot |B| \cdot \epsilon}{m \cdot |B|} = \epsilon .$$

■

דוגמה 1.7

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right)^2 = 0^2 = 0 .$$

דוגמה 1.8

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n + 9}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(7 + \frac{9}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 7 + 9 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 7 + 9 \cdot 0 = 7 .$$

דוגמה 1.9

תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתבדרת. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

$(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת.

פתרון:

טענה נכונה. הוכחה

נוכיח דרך השלילה. נניח ש $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- L (סופי). נתון ש (a_n) מתכנסת. לכן אם (a_n) מתכנסת ל- A , אז לפי תכונה 2 במשפט 1.2,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} ((a_n + b_n) - a_n) = L - A$$

כאשר $L - A$ קבוע סופי. ז"א קיבלנו ש (b_n) מתכנסת, בסתירה לכך ש- (b_n) מתבדרת.

דוגמה 1.10

תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתבדרת. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

$(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת.

פתרון:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$b_n = n \text{ ו- } a_n = \frac{1}{n}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ מתכנסת ו- (b_n) מתבדרת.

$$a_n \cdot b_n = 1$$

לפיכך

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 1 .$$

מתכנסת.

1.11 דוגמה

תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתבדרת. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

$(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

פתרון:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$b_n = n^2 \text{ ו- } a_n = \frac{1}{n}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{n}$ מתכנסת ו- $b_n = n^2$ מתבדרת.

$$a_n \cdot b_n = n$$

מתבדרת.

עוד דוגמה נגדית:

$$b_n = n^3, a_n = \frac{1}{n}$$

משפט 1.3 משפט הסנדוויץ'

תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}, (c_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות כך ש

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$$

ונניח כי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$a_n \leq b_n \leq c_n .$$

אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L .$$

הוכחה: יהי $\epsilon > 0$.

מההנחה קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$|a_n - L| < \epsilon, \quad |c_n - L| < \epsilon.$$

ז"א

$$-\epsilon < a_n - L < \epsilon, \quad -\epsilon < c_n - L < \epsilon.$$

לכן

$$-\epsilon < a_n - L \leq b_n - L \leq c_n - L < \epsilon \Rightarrow |b_n - L| < \epsilon.$$

1.12 דוגמה

חשבו את $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ בעזרת כלל הסנוויץ'.

פתרון:

לכל $n \geq 1$,

$$1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

מצד שמאל,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

מצד ימין,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

ז"א $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ולכן לפי כלל הסנדוויץ':

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

1.3 סדרות חסומות

1.4 הגדרה סדרות חסומות

1. אומרים כי סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלמעלה אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \leq M$.

M תקרא חסם עליון של הסדרה.

2. אומרים כי סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלמטה אם קיים $m \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \geq m$.

m תקרא חסם תחתון של הסדרה.

3. אומרים כי סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה אם היא חסומה מלמעלה וגם מלמטה. במילים אחרות, אם קיים $K > 0$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n| \leq K.$$

כל מספר K כזה נקרא חסם מוחלט של הסדרה.

דוגמה 1.13

לכל אחת מהסדרות הבאות, קבעו אם היא חסומה מלמעלה, חסומה מלמטה או חסומה.

$$1. \quad a_n = \frac{1}{n}$$

$$2. \quad a_n = n$$

$$3. \quad a_n = b \cdot q^n \text{ עבור } -1 < q < 1.$$

$$4. \quad a_n = (-1)^n n$$

$$5. \quad a_n = n^2 - n + 3$$

פתרון:

$$1. \quad a_n = \frac{1}{n} \text{ לכל } n:$$

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$$

לכן a_n חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה, ולכן חסומה. ■

$$2. \quad a_n = n \text{ לכל } n:$$

$$a_n = n \geq 0.$$

לכן a_n חסומה מלמטה.

אבל היא אינה חסומה מלמעלה. אכן לכל $M \in \mathbb{R}$ ניתן למצוא $n \in \mathbb{N}$ כך ש $a_n = n > M$.
בפרט, גם לא חסומה. ■

$$3. \quad -1 < q < 1, a_n = b \cdot q^n.$$

לכל n :

$$|a_n| = |bq^n| = |b| \cdot |q|^n \leq |b|$$

ולכן הסדרה חסומה (גם מלמעלה וגם מלמטה). ■

$$4. \quad a_n = (-1)^n n$$

לא חסומה מלמעלה:

הרי לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $a_n > M$.

לא חסומה מלמטה.

הרי לכל $m \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $a_n < m$.

לפיכך הסדרה לא חסומה. ■

$$a_n = n^2 - n + 3 \quad .5$$

$$n^2 \geq n \Rightarrow n^2 - n \geq 0 \Rightarrow n^2 - n + 3 \geq 3 \Rightarrow a_n \geq 3$$

ז"א הסדרה חסומה מלמטה.

$$a_n = n^2 - n + 3 = n^2 - 2n + 2 + n = (n-1)^2 + 2 + n$$

$$(n-1)^2 \geq 0 \Rightarrow (n-1)^2 + 3 \geq 3 \Rightarrow (n-1)^2 + 2 + n \geq 2 + n \Rightarrow a_n \geq 2 + n$$

ז"א $a_n > n$ לכל n .

לכן לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $a_n > M$. לכן הסדרה אינה חסומה מלמעלה.

לכן הסדרה גם לא חסומה. ■

1.4 סדרות מונוטוניות

הגדרה 1.5 סדרות מונוטוניות

1. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא מונוטונית עולה אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים

$$a_{n+1} \geq a_n .$$

2. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא מונוטונית עולה ממש אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים

$$a_{n+1} > a_n .$$

3. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא מונוטונית יורדת אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים

$$a_{n+1} \leq a_n .$$

4. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא מונוטונית יורדת ממש אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים

$$a_{n+1} < a_n .$$

5. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא מונוטונית אם היא מונוטונית עולה או יורדת.

6. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא מונוטונית ממש אם היא מונוטונית עולה ממש או יורדת ממש.

דוגמה 1.14

לכל אחת מהסדרות הבאות, קבעו אם היא מונוטונית.

$$a_n = \frac{1}{n} \quad .1$$

$$a_n = n \quad .2$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad .3$$

$$a_n = \frac{n^2}{2^n} \quad .4$$

פתרון:

$$1. \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n \quad \text{לכל } n.$$

■ ולכן הסדרה יורדת ממש.

$$2. \quad a_{n+1} = n+1 > n = a_n \quad \text{לכל } n.$$

■ לכן הסדרה עולה ממש.

$$3. \quad a_3 = -\frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{2}, a_1 = -1$$

$$.a_1 < a_2 > a_3$$

באופן כללי,

$$a_{2n+1} < 0, \quad a_{2n} > 0.$$

■ לכן הסדרה לא מונוטונית.

.4

$$a_n = \frac{n^2}{2^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}.$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2$$

לכל $n \geq 3$:

$$1 + \frac{1}{n} \leq \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \leq \frac{16}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \leq \frac{8}{9} < 1.$$

ז"א לכל $n \geq 3$ מתקיים

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \forall n \geq 3.$$

■ ז"א הסדרה יורדת ממש החל מ $n = 3$.

דוגמה 1.15

בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{n^2 + 1}{n + 2}$ חסומה מלמעלה או חסומה מלמטה, וקבעו אם הסדרה מונוטונית.

פתרון:

שיטה 1:

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{n + 2} = \frac{n(n + 2) - 2n + 1}{n + 2} = n + \frac{-2n + 1}{n + 2} = n + \frac{-2(n + 2) + 5}{n + 2} = n - 2 + \frac{5}{n + 2}$$

לפיכך $a_n \geq -2$ לכן a_n חסומה מלמטה.

בנוסף $a_n \geq n - 2$ אז a_n לא חסומה מלמעלה (לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $a_n > n - 2 > M$).

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{(n+1)^2+1}{n+3}\right)}{\left(\frac{n^2+1}{n+2}\right)} = \frac{((n+1)^2+1)(n+2)}{(n^2+1)(n+3)} = \frac{(n^2+2n+2)(n+2)}{(n^2+1)(n+3)} = \frac{n^3+4n^2+6n+4}{n^3+3n^2+n+3}$$

$$n^3 + 4n^2 + 6n + 4 > n^3 + 3n^2 + n + 3$$

לכל $n \geq 0$ לכן

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

לכל $n \geq 0$, ולכן הסדרה עולה ממש.

שיטה 2:

נגדיר פונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2}$, $x \neq -2$. אנו מעוניינים בערכים $a_n = f(n)$ ולכן נחקור את הפונקציה בקטע $[1, \infty)$.

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - 1 \cdot (x^2 + 1)}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x - 1}{(x+2)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}.$$

$$\text{ז"א } f'(x) = (x - (-2 + \sqrt{5}))(x - (-2 - \sqrt{5}))$$

x	$x < -2 - \sqrt{5}$	$-2 - \sqrt{5} < x < -2$	$-2 < x < -2 + \sqrt{5}$	$x > -2 + \sqrt{5}$
$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	\nearrow	\searrow	\searrow	\nearrow

כלומר $f(x)$ עולה ממש בקטע $[1, \infty)$ ולכן גם a_n עולה ממש.

בנוסף $f(x) \geq f(-2 + \sqrt{5})$ לכל $x \geq -2 + \sqrt{5}$. כלומר $f(x)$ חסומה מלמטה ולכן גם a_n חסומה מלמטה.

למה 1.1 גבול של סדרה שווה לגבול של הפונקציה

תהי $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L \text{ אז } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \text{ אם}$$

כאשר $n \in \mathbb{N}$, ו $a_n = f(n)$ סדרה.

הוכחה: נתון כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$. לכן לפי ההגדרה של גבול של פונקציה ב ∞ , לכל $\epsilon > 0$ קיים $m > 0$ כך שלכל $x > m$,

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

ז"א, עבור $N \in \mathbb{N}$, לכל $\epsilon > 0$ קיים $N > m > 0$ כך שלכל $n > N$,

$$|f(n) - L| < \epsilon.$$

לכן, לפי הגדרה 1.2, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

למה 1.2 מונוטוניות של סדרה והפוקנציה

תהי $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה.

אם $f(x)$ מונוטונית (עולה או יורדת) אז גם $a_n = f(n)$ מונוטונית (עולה או יורדת בהתאמה).

הוכחה: אם $f(x)$ עולה מונוטונית, אז לכל $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1).$$

עבור $n \in \mathbb{N}$ נציב $x_1 = n$, $x_2 = n + 1$. לכן

$$f(n + 1) \geq f(n).$$

אם $f(x)$ יורדת מונוטונית, אז לכל $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$x_2 < x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1).$$

עבור $n \in \mathbb{N}$ נציב $x_1 = n$, $x_2 = n + 1$. לכן

$$f(n + 1) \leq f(n).$$

דוגמה 1.16

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. הוכיחו או הפריכו: אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה אז היא מתכנסת.

פתרון:

לא נכון. דוגמה נגדית:

$$a_n = (-1)^n \text{ חסומה:}$$

$$|a_n| = 1$$

לכל n .

a_n לא מתכנסת (ראו דוגמה 1.5 לעיל).

משפט 1.4

כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

הוכחה: מסמן $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

נניח כי $\epsilon = 1$. קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \epsilon = 1$.

ז"א

$$-1 < a_n - L < 1 \Rightarrow L - 1 < a_n < L + 1 .$$

נסמן

$$M = \max \{a_1, a_2, \dots, a_N, L + 1\} , \quad m = \min \{a_1, a_2, \dots, a_N, L - 1\} ,$$

ואז לכל $n \leq N$

$$m \leq a_n \leq M .$$

לכן (a_n) חסומה.

דוגמה 1.17

נניח כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. הוכיחו או הפריכו:

אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה אז היא מתכנסת.

פתרון:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$a_n = (-1)^n$ חסומה ולא מתכנסת:

• $|a_n| = 1$ לכל n ולכן (a_n) חסומה.

• (a_n) לא מתכנסת (ראו דוגמה 1.5 למעלה).

1.5 התכנסות של סדרות חסומות ומונוטוניות

משפט 1.5 סדרה חסומה ומונוטונית מתכנסת

סדרה חסומה ומונוטונית היא מתכנסת.

הוכחה: נניח כי (a_n) עולה וחסומה.

ז"א $a_{n+1} > a_n$ לכל n , וקיים M כך ש $|a_n| < M$ לכל n .

נסמן ב L את החסם מלמעלה הקטן ביותר של הסדרה. נוכיח כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L . \quad (*)$$

יהי $\epsilon > 0$. כיוון ש L חסם עליון הקטן ביותר של (a_n) , אז קיים a_N כך ש $L - \epsilon < a_N \leq L$.

כיוון ש (a_n) עולה מונוטונית, אז לכל $n > N$, מתקיים

$$L - \epsilon < a_N \leq a_n \leq L .$$

$L < L + \epsilon$, לכן נקבל

$$L - \epsilon < a_N \leq a_n \leq L < L + \epsilon . \quad (*)2$$

לכן לכל $n > N$:

$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon . \quad (*)3$$

ז"א נתון $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$,

$$|a_n - L| < \epsilon .$$

ז"א $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = L$.

למה 1.3

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 .$$

הוכחה: \Rightarrow

נתון $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. ז"א לכל $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$,

$$|a_n - 0| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad ||a_n| - 0| < \epsilon .$$

\Leftarrow

נתון $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$. ז"א לכל $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$,

$$||a_n| - 0| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - 0| < \epsilon .$$

משפט 1.6

יהי $q \in \mathbb{R}$ כך ש $|q| < 1$. אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 .$$

הוכחה:

1. אם $q = 0$ אז $q^n = 0$, ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

2. אם $0 < q < 1$ אז לכל $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < q^{n+1} < q^n$$

ולכן (q^n) יורדת וחסומה. לכן לפי 1.5, הסדרה מתכנסת.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} q^n$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = q \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = q \cdot L$$

ז"א

$$(1 - q)L = 0 \Rightarrow L = 0.$$

3. אם $-1 < q < 0$ אז $0 < |q| < 1$. לכן לפי 2, $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0$ ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} |q^n| = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \text{ לפי למה 1.3.}$$

דוגמה 1.18

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

1.6 התכנסות במובן הרחב

הגדרה 1.6

תהיה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

• אומרים כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ (שואפת לאינסוף) אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$a_n > M.$$

• אומרים כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ (שואפת למינוס אינסוף) אם לכל $m \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$a_n > m.$$

דוגמה 1.19

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$$

פתרון:

לכל $M \in \mathbb{R} > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש $N > \frac{\ln M}{\ln 2}$. אז לכל $n > N$,

$$n > \frac{\ln M}{\ln 2} \Rightarrow n \ln 2 > \ln M \Rightarrow \ln 2^n > \ln M. \quad (\#)$$

\ln עולה מונוטונית. לכן מ $(\#)$, לכל $n > N$:

$$2^n > M.$$

ז"א אומרת, מצאנו שלכל $M > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$,

$$a_n = 2^n > M.$$

דוגמה 1.20

הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$.

פתרון:

לכל $M \in \mathbb{R} > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש $N > M$. אז לכל $n > N$,

$$n > M. \quad (*)$$

ז"א אומרת, מצאנו שלכל $M > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$,

$$a_n = n > M.$$

1.7 סדרות שימושיות

סדרה	עולה	יורדת	מונוטונית	חסומה	מתכנסת למספר סופי L	מתכנסת במובן הרחב
$a_n = 1$	✓	✓	✓	×	✓ ⇐	✓
$a_n = n$	✓	×	✓	×	×	✓
$a_n = \frac{1}{n}$	×	✓	✓	✓	✓ ⇐	✓
$a_n = (-1)^n$	×	×	×	✓	×	×
$a_n = \frac{(-1)^n}{n^1 + 1}$	×	×	×	✓	×	×
$a_n = 1 - \frac{1}{n}$	✓	×	✓	✓	✓ ⇐	✓

1.21 דוגמה

לפי משפט 1.6,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

1.22 דוגמה

הסדרה (2^n) לא מתכנסת.

1.8 דוגמאות

1.23 דוגמה

הוכיחו שהסדרה

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

מתכנסת.

פתרון:

נוכיח כי a_n ↓ מונוטונית:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \\ &< \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = 0 \end{aligned}$$

לכן $a_{n+1} - a_n < 0$, ז"א $a_{n+1} < a_n$ ולכן הסדרה ↓ מונוטונית.

נוכיח כי a_n חסומה:

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

ז"א $a_n > \frac{1}{2}$. הסדרה \downarrow מונוטונית, כלומר

$$a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$$

לכן

$$a_n < a_1.$$

לכן הסדרה חסומה.

סיכום: (a_n) מונוטונית יורדת וחסומה ולכן היא מתכנסת.

דוגמה 1.24

תהי (a_n) סדרה המוגדרת ע"י רקורסיה

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad a_1 = \sqrt{2}.$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

פתרון:

נוכיח כי $\uparrow (a_n)$ מונוטונית ע"י אינדוקציה:

עבור $n = 1$,

$$a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} = a_2$$

נניח $a_n < a_{n+1}$ (הנחת האינדוקציה) ונוכיח $a_{n+1} < a_{n+2}$:

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + a_{n+1}} = a_{n+2}.$$

קבלנו $a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow a_{n+1} < a_{n+2}$ לכן הסדרה עולה מונוטונית.

נוכיח כי (a_n) חסומה ע"י אינדוקציה:

נוכיח כי לכל n , $a_n < 2$.

עבור $n = 1$,

$$a_1 = \sqrt{2} < 2.$$

נניח כי $a_n < 2$ (הנחת האינדוקציה) ונוכיח $a_{n+1} < 2$:

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2.$$

קבלנו $a_n < 2 \Leftrightarrow a_{n+1} < 2$ לכן הסדרה חסומה מלמעלה. נוכיח כי היא חסומה מלמטה: הסדרה עולה מונוטונית, אז $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ לכן $a_1 = \sqrt{2} \leq a_n$. מצאנו הסדרה חסומה מלמעלה ומלמטה ולכן חסומה:

$$\sqrt{2} \leq a_n < 2.$$

לסיכום הסדרה עולה מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת. נחשב את גבולה: נסמן $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt{2 + L}.$$

ז"א

$$L = \sqrt{2+L} \Rightarrow L^2 = 2+L \Rightarrow L^2 - L - 2 = 0 \Rightarrow (L-2)(L+1) = 0$$

לכן $L = -1$ או $L = 2$. הסדרה חיובית לכן התשובה היא $L = 2$.

דוגמה 1.25

תהי (a_n) סדרה המוגדרת ע"י רקורסיה

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right), \quad a_1 = 2.$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחסבו את גבולה.

פתרון:

נוכיח כי (a_n) חסומה:

נשתמש בעובדה כי הממוצע החשבוני של שני מספרים חיוביים תמיד גדול או שווה לממוצע ההנדסי שלהם, כלומר

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \quad \text{לכל } a, b > 0.$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{3}{a_n}}{2} \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{3}{a_n}} = \sqrt{3}$$

ז"א $a_n \geq \sqrt{3}$, כלומר הסדרה חסומה מלמטה.

נוכיח כי $\{a_n\}$ יורדת מונוטונית:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right) < \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{2} (a_n + \sqrt{3}) < \frac{1}{2} (a_n + a_n) = a_n$$

לכן הסדרה מונוטונית יורדת.

נוכיח כי היא חסומה מלמעלה: (a_n) יורדת מונוטונית לכן $a_n \leq a_1 = 2$ לכן הסדרה חסומה מלמעלה.

לסיכום הסדרה יורדת מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת. נחשב את גבולה: נסמן $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \left(L + \frac{3}{L} \right) = \frac{L^2 + 3}{2L}.$$

ז"א

$$2L^2 = L^2 + 3 \Rightarrow L^2 = 3 \Rightarrow L = \pm\sqrt{3}.$$

הסדרה חיובית לכן $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{3}$.

דוגמה 1.26

נתונה הסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

הוכיחו כי הסדרה עולה מונוטונית, והוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

פתרון:

הסדרה עולה מונוטונית:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = a_{n+1}.$$

הסדרה אינה חסומה:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

קיבלנו שלכל n , מתקיים $a_n \geq \sqrt{n}$. לכן לכל מספר ממשי $M > 0$ קיים מספר טבעי N כך ש $\sqrt{n} > M$ ולכן $a_n > M$ ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

1.27 דוגמה

סדרה נתונה באופן רקורסיבי ע"י הכלל

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n},$$

יחד עם התנאי ההתחלה

$$a_1 = 1.$$

קבעו האם קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ואם כן, חשבו אותו.

פתרון:

נבדוק אם הסדרה מונוטונית וחסומה.

מונוטונית:

נוכיח כי (a_n) מונוטונית \uparrow ע"י אינדוקציה:

עבור $n = 1$:

$$a_2 = \sqrt{6 + a_1} = \sqrt{7} > a_1$$

נניח ש $a_{n+1} > a_n$ (הנחת אינדוקציה). אז

$$a_{n+2} = \sqrt{6 + a_{n+1}} > \sqrt{6 + a_n} = a_{n+1}.$$

קיבלנו ש $a_{n+2} > a_{n+1} \Leftarrow a_{n+1} > a_n$ לכן לפי אינדוקציה הסדרה עולה מונוטונית.

חסימות:

נוכיח כי (a_n) ע"י אינדוקציה:

נוכיח כי שלכל n , $a_n < 3$.

עבור $n = 1$, $a_1 = 1 < 3$.

נניח שלכל n , $a_n < 3$ (הנחת האינדוקציה) ונוכיח $a_{n+1} < 3$:

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} < \sqrt{6 + 3} = 3$$

קיבלנו שאם $a_n < 3$ אז $a_{n+1} < 3$. לכן לפי אינדוקציה

$$a_n < 3$$

לכל n .

הסדרה עולה מונוטונית לכן $a_n \geq a_1 = 1$ לכל n הסדרה חסומה:

$$1 \leq a_n < 3 .$$

לסיכום הסדרה חסומה ומונוטונית לכן היא מתכנסת.

נחשב את גבולה:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{6 + a_n} = \sqrt{6 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt{6 + L} .$$

$$L^2 = 6 + L \quad \Rightarrow \quad L^2 - L - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (L - 3)(L + 2) = 0$$

לכן $L = 3$ או $L = -2$ הסדרה חיובית לכן $L = 3$. מסקנה :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3 .$$