

## אלגברה לינארית 2 למדמ"ח

מועד א'

מרצים: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר .

תשפ"ה סמסטר ב'

השאלון מכיל 6 עמודים (כולל עמוד זה).

**בהצלחה!**

### הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

### חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס ( 3 עמודים בפורמט A4 ) מצורפים לשאלון.
- אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:
- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- יש לרשום בראש המחברת איזה שאלות לבדוק.

## שאלה 1 (25 נקודות)

(א) (16 נק')

נתונה מטריצה  $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  מצאו צורת ז'ורדן  $J$  ומטריצה הפיכה  $P$  כך ש-  $J = P^{-1}AP$ .

(ב) (3 נק')

תהי  $B \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  מטריצה עבורה הפולינום האופייני הוא  $p_B(x) = (x-1)^3(x-2)^3$  והפולינום המינימלי הוא  $m_B(x) = (x-1)^2(x-2)$ . מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של  $B$ .

(ג) (3 נק')

הוכיחו או הפריכו: קיימת מטריצה  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  הרמיטית המקיימת  $\text{tra}(A) = i$ .

(ד) (3 נק')

הוכיחו או הפריכו: אם  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  לכסינה וכל הערכים העצמיים שלה הם 1 או -1 אז  $A^2 = I$ .

## שאלה 2 (25 נקודות)

(א) (16 נק') נתונה העתקה ליניארית  $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  המוגדרת ע"י

$$T(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} A$$

לכל מטריצה  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

האם ההעתקה ניתנת ללכסון? במידה וכן, מצאו בסיס שבו המטריצה המייצגת של ההעתקה היא מטריצה אלכסונית. במידה ולא, נמקו מדוע.

יהי  $V$  מקחב מכפלה פנימית מעל  $\mathbb{R}$  ויהיו שלושה וקטורים שונים  $u_1, u_2, u_3 \in V$  בת"ל. ענו על הסעיפים ב' וג' הבאים:

(ב) (5 נק') יהי  $w \neq 0 \in V$  המקיים  $\langle u_k, w \rangle = 0$  לכל  $k = 1, 2, 3$ . הוכיחו כי הקבוצה  $\{u_1, u_2, u_3, w\}$  בת"ל.

(ג) (4 נק') נתון כי  $\langle u_1 - u_3, u_2 \rangle = \langle u_1 + u_2, u_1 \rangle$ . הוכיחו כי הקבוצה  $\{u_1, u_2, u_3\}$  אינה אורתוגונלית.

## שאלה 3 (25 נקודות)

(א) (16 נק') הוכיחו כי המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$  לכסינה אורתוגונלית ומצאו מטריצה אורתוגונלית  $P$  ומטריצה אלכסונית  $D$  כך ש-  $P^t A P = D$ . נמקו היטב את תשובתכם.

(ב) (9 נק') הוכיחו כי מטריצה  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  היא צמודה לעצמה ואוניטרית אם ורק אם  $B$  לכסינה אוניטרית ומקיימת  $B^2 = I$ .

## שאלה 4 (25 נקודות)

(א) (7 נקודות) תהי  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  מטריצה המקיימת  $A^3 = 4A$ . מצאו את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של  $A$ .

(ב) (6 נקודות) תהי  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  מטריצה המקיימת  $A^3 = 4A$ . מצאו את כל האפשרויות עבור  $|A|$ .

(ג) (6 נקודות) תהי  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  מטריצה הרמיטית ונניח כי  $A^k = I$  עבור  $k \geq 1$  כלשהו. הוכיחו כי  $A^2 = I$ .

(ד) (6 נקודות) תהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  סימטרית והיו  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ערכים עצמיים שונים של  $A$  וכן  $u_1, u_2$  וקטורים עצמיים המתאימים ל-  $\lambda_1, \lambda_2$ . הוכיחו כי  $u_1, u_2$  אורתוגונליים.

## שאלה 5 (25 נקודות) יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור במרחב וקטורי $V$ .

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הענות הבאות:

(א) (6 נק') אם  $T$  אוניטרי אז הערך מוחלט של כל ערך עצמי של  $T$  שווה ל- 1.

(ב) (6 נק') אם  $T$  נורמלי אז  $T$  צמוד לעצמו.

(ג) (6 נק') יהי  $\lambda$  ערך עצמי של  $T$ , אז המרחב העצמי  $V_\lambda$  הוא  $-T$  שמור.

(ד) (7 נק') אם  $T$  אנטי הרמיטי, אז כל ערך עצמי של  $T$  מדומה טהור.

**מרחב אוקלידי:** מרחב מכפלה פנימית מעל  $\mathbb{R}$ .

**מרחב אוניטרי:** מרחב מכפלה פנימית מעל  $\mathbb{C}$ .

**הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי  $V$  מעל  $\mathbb{R}$ :**  
לכל  $u, v, w \in V$  ולכל סקלר  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$(1) \quad \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \text{סימטריות:}$$

$$(2) \quad \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad \text{ליניאריות:}$$

$$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

$$(3) \quad \langle u, u \rangle \geq 0. \quad \text{חיוביות:}$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

**הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי  $V$  מעל  $\mathbb{C}$ :**  
לכל  $u, v, w \in V$  ולכל סקלר  $\lambda \in \mathbb{C}$ :

$$(1) \quad \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} \quad \text{הרמיטיות:}$$

$$(2) \quad \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad \text{ליניאריות:}$$

$$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

$$(3) \quad \langle u, u \rangle \geq 0 \quad \text{חיוביות:}$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

אי-שוויון קושי שוורץ:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

אי-שוויון המשולש:

היטל אורתוגונלי של וקטור  $v$  על תת מרחב בעל בסיס אורתוגונלי  $u_1, \dots, u_n$ :

$$P_U(v) = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 + \dots + \frac{\langle v, u_n \rangle}{\|u_n\|^2} u_n.$$

תהליך גרם שמידט לבניית בסיס אורתוגונלי:

$$u_1 = v_1,$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

$\vdots$

$$u_n = v_n - \frac{\langle v_n, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_n, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \dots - \frac{\langle v_n, u_{n-1} \rangle}{\|u_{n-1}\|^2} u_{n-1}.$$

$\lambda \in \mathbb{F}$  ערך עצמי ו-  $u \in \mathbb{F}^n$  ווקטור עצמי ( $u \neq 0$ ) של מטריצה  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  אם:  $Au = \lambda u$

$\lambda \in \mathbb{F}$  ערך עצמי ו-  $u \in V$  ווקטור עצמי ( $u \neq 0$ ) של אופרטור  $T : V \rightarrow V$  אם:  $T(u) = \lambda u$

פולינום אופייני של מטריצה ריבועית  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ :  $p_A(\lambda) = |\lambda I - A|$

מרחב עצמי של מטריצה ריבועית  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  ששייך לערך עצמי  $\lambda$  הוא כל וקטור  $u \in \mathbb{F}^n$  כאשר  $u \neq 0$  כך ש:  $Au = \lambda u$ .

מרחב עצמי של אופרטור  $T : V \rightarrow V$  ששייך לערך עצמי  $\lambda$  הוא כל וקטור  $u \in V$  כאשר  $u \neq 0$  כך ש:  $T(u) = \lambda u$ .

### בסיס אורתונורמלי:

יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית מעל  $\mathbb{C}$ . בסיס אורתונורמלי, מסומן  $\{b_1, \dots, b_n\}$ , מקיים את התנאי

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

כל וקטור  $u \in V$  ניתן לרשום בבסיס אורתונורמלי:

$$u = \sum_{i=1}^n \langle u, b_i \rangle b_i$$

סימון חלופי:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \langle u, b_1 \rangle \\ \langle u, b_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_i \rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_n \rangle \end{pmatrix}_B$$

יהי  $T : V \rightarrow V$  אופרטור. המצרטצה המייצגת על פי בסיס  $B$  היא

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \langle T(b_1), b_1 \rangle & \langle T(b_2), b_1 \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_1 \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_1 \rangle \\ \langle T(b_1), b_2 \rangle & \langle T(b_2), b_2 \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_2 \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_i \rangle & \langle T(b_2), b_i \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_i \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_i \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_n \rangle & \langle T(b_2), b_n \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_n \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_n \rangle \end{pmatrix}.$$

כלומר האיבר ה-  $ij$  של המטריצה המייצגת של  $T$  על פי הבסיס  $B$  היא  $[T]_{ij} = \langle T(b_j), b_i \rangle$ .

## ההגדרה של אופרטור הצמוד:

אם  $T : V \rightarrow V$  אופרטור, ו-  $u, w \in V$  שני וקטורים כלשהם של  $V$ , אזי האופרטור הצמוד של  $T$  מוגדר כך שמתקיים

$$\langle T(u), w \rangle = \langle u, T^*(w) \rangle. \quad (*)1$$

מההגדרה (\*)1 נובע:

$$\langle T^*(u), w \rangle = \langle u, T(w) \rangle \quad (*)2$$

נוסחה ל-  $T(u)$  ו-  $T^*(u)$  במונחי בסיס אורתונורמלי  $\{b_1, \dots, b_n\}$ :

$$T(u) = \sum_{i=1}^n \langle T(u), b_i \rangle b_i \quad (*)3$$

$$T^*(u) = \sum_{i=1}^n \langle u, T(b_i) \rangle b_i \quad (*)4$$

משפט:

$$T^{**} = T \quad (*)5$$

משפט: המטריצה המייצגת של אופרטור צמוד  $T^*$  נתונה ע"י

$$[T^*] = [T]^* \quad (*)6$$

תהי  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  מטריצה ריבועית.

$A = A^*$	$A$ הרמיטית:
$A^* = -A$	$A$ אנטי-הרמיטית:
$AA^* = I = A^*A$	$A$ אוניטרית:
$AA^t = I = A^tA$	$A$ אורתוגונלית:
$AA^* = A^*A$	$A$ נורמלית:

יהי  $T : V \rightarrow V$  אופרטור מעל מרחב וקטורי  $V$ . נסמן המטריצה המייצגת  $A = [T]$ .

$T = T^*$	$\Leftrightarrow$	$A = A^*$	$T$ צמוד לעצמו:
$T^* = -T$	$\Leftrightarrow$	$A^* = -A$	$T$ אנטי-הרמיטי:
$TT^* = I_V = T^*T$	$\Leftrightarrow$	$AA^* = I = A^*A$	$T$ אוניטרי:
$TT^* = T^*T$	$\Leftrightarrow$	$AA^* = A^*A$	$T$ נורמלי:

מטריצה  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה  $Q$  אוניטרית ומטריצה  $D$  אלכסונית כך ש:

$$A = QDQ^* \Leftrightarrow D = Q^*AQ.$$

מטריצה  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  לכסינה אורתוגונלית אם קיימת מטריצה  $P$  אורתוגונלית ומטריצה  $D$  אלכסונית כך ש:

$$A = PDP^t \Leftrightarrow D = P^tAP.$$

## פתרונות

שאלה 1שאלה 2

(א)

$$\begin{aligned}
T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & \Rightarrow [T(e_1)]_E &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} & \Rightarrow [T(e_2)]_E &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\
T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} & \Rightarrow [T(e_3)]_E &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} & \Rightarrow [T(e_4)]_E &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

לכן המטריצה המייצגת הסנדרטית היא

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

שאלה 3

(א) (16 נק')

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} = A$$

ז"א  $A \Leftarrow A^t = A$  סימטרית  $A \Leftarrow$  לכסינה אורתוגונלית.

$$\begin{aligned}
p_A(x) &= |xI - A| \\
&= \begin{vmatrix} x-11 & 8 & -4 \\ 8 & x+1 & 2 \\ -4 & 2 & x+4 \end{vmatrix} \\
&= (x-11) \begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ 2 & x+4 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -4 & x+4 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 8 & x+1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (x-11)(x^2+5x) - 8(8x+40) - 4(4x+20) \\
&= x(x-11)(x+5) - 64(x+5) - 16(x+5) \\
&= x(x-11)(x+5) - 80(x+5) \\
&= (x^2 - 11x - 80)(x+5) \\
&= (x-16)(x+5)(x+5) \\
&= (x-16)(x+5)^2
\end{aligned}$$

מרחב עצמי של  $\lambda = 16$

$$\begin{aligned}
\text{Nul}(A - 16I) &= \begin{pmatrix} -5 & -8 & 4 \\ -8 & -17 & -2 \\ 4 & -2 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow 5R_3 + 4R_1]{R_2 \rightarrow 5R_2 - 8R_1} \begin{pmatrix} -5 & -8 & 4 \\ 0 & -21 & -42 \\ 0 & -42 & -84 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} -5 & -8 & 4 \\ 0 & -21 & -42 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{-1}{21}R_2} \begin{pmatrix} -5 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 8R_2} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{-1}{5}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$V_{16} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \setminus \{0\}$$

מרחב עצמי של  $\lambda = -5$

$$\begin{aligned}
\text{Nul}(A + 5I) &= \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ -8 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow 4R_3 - R_1]{R_2 \rightarrow 2R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{4}R_1} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
V_{-5} &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \setminus \{0\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \setminus \{0\}
\end{aligned}$$



נסמן

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

נפעיל האלגוריתם של גרם שמידט כדי למצוא בסיס אורתוגונלי:

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{0}{21} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0}{21} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{17} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ 4 \end{pmatrix}$$

לכן מצאנו בסיס אורתוגונלי:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

בסיס אורתונורמלי:

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{357}} \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**(ב)** כיוון  $\Leftarrow$ נניח כי  $B$  צמודה לעצמה וגם  $B$  אוניטרית.

$$BB^* = I \text{ וגם } B = B^* \Leftarrow (1)$$

(2) מכיוון ש-  $B$  צמודה לעצמה  $B \Leftarrow$  נורמלית  $\Leftarrow$  ממשפט הלכסון אוניטרית  $B \Leftarrow$  לכסינה אוניטרית.

(3)

$$BB \stackrel{(1)}{=} B \text{ צמוד לעצמו } \stackrel{(1)}{=} BB^* \stackrel{(1)}{=} I$$

לכן  $B^2 = I$ , כנדרש.

כנדרש.

 $\Rightarrow$  כיווןנניח כי  $B^2 = I$  וגם  $B$  לכסינה אוניטרית.

$$(1) \quad B^2 = I \Leftarrow \text{וגם קיימת } Q \text{ אוניטרית ו- } D \text{ אלכסונית כך ש- } B = QDQ^*.$$

(2)

$$I = B^2 = QDQ^*QDQ^* = QD^2Q^* \Rightarrow D^2 = Q^*IQ = Q^*Q = I.$$

$$\text{לכן } D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ כשאר } \lambda_i = \pm 1$$

$$(3) \quad D = D^* \Leftarrow \text{ממשית ואלכסונית}$$

(4) לכן

$$B^* \stackrel{(1)}{=} (QDQ^*)^* = QD^*Q^* \stackrel{(3)}{=} QDQ^* = B$$

$$\text{לכן } B = B^* \text{ ולכן } B \text{ לעצמה, כנדרש.}$$

(5)

$$BB^* \stackrel{(1)}{=} QDQ^*(QDQ^*)^* = QDQ^*QD^*Q = QDD^*Q \stackrel{(3)}{=} QD^2Q^* \stackrel{(2)}{=} QQ^* = I$$

$$\text{לכן } B \text{ אוניטרית, כנדרש.}$$

שאלה 4שאלה 5

(א) נניח ש-  $T : V \rightarrow V$  אופרטור אוניטרי, ונניח ש-  $\lambda$  ערך עצמי של  $T$  השייך לוקטור עצמי  $v$ . ז"א  $T(v) = \lambda v$ .

$$\begin{aligned} \langle T(v), T(v) \rangle &= \langle \lambda v, \lambda v \rangle && (v \text{ וקטור עצמי של } T) \\ &= \lambda \langle v, \lambda v \rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית}) \\ &= \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית}) \end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned} \langle T(v), T(v) \rangle &= \langle v, T^*T(v) \rangle && (\text{הגדרה של אופרטור הצמוד}) \\ &= \langle v, I(v) \rangle && (T \text{ אוניטרי}) \\ &= \langle v, v \rangle \end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle = \langle v, v \rangle \Rightarrow (\lambda \cdot \bar{\lambda} - 1) \langle v, v \rangle = 0.$$

$$v \text{ וקטור עצמי } \Leftarrow v \neq 0 \Leftarrow \langle v, v \rangle \neq 0 \Leftarrow (\lambda \cdot \bar{\lambda} - 1) = 0 \Leftarrow \lambda \bar{\lambda} = 1 \Leftarrow |\lambda|^2 = 1.$$

(ב) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:  
האופרטור  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  המוגדר:

$$T(u) = Au, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לכל  $u \in \mathbb{R}^2$ .

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [T]^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T][T]^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [T]^*[T]$$

לכן  $T$  נורמלי אבל  $[T] \neq [T]^*$  לכן  $T$  לא צמוד לעצמו.

(ג) (6 נק') אם  $\lambda$  ערך עצמי של  $T$  אזי לכל וקטור עצמי  $u \in V_\lambda$  מתקיים

$$T(u) = \lambda u \in \text{span}\{u\} \subseteq V_\lambda$$

לכן לכל  $u \in V_\lambda$  מתקיים  $T(u) \in V_\lambda$ .

(ד) (7 נק')

### שיטה 1

נניח ש-  $T : V \rightarrow V$  אופרטור צמוד לעצמו, ונניח ש-  $\lambda$  ערך עצמי של  $T$  השייך לוקטור עצמי  $v$ . ז"א  $T(v) = \lambda v$  אז

$$\begin{aligned} \langle T(v), v \rangle &= \langle \lambda v, v \rangle \quad (v \text{ וקטור עצמי של } T) \\ &= \lambda \langle v, v \rangle \quad (\text{לינאריות של מכפלה פנימית}) \end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned} \langle T(v), v \rangle &= \langle v, T^*(v) \rangle \quad (\text{הגדרה של אופרטור הצמוד}) \\ &= \langle v, -T(v) \rangle \quad (T \text{ אנטי-הרמיטי}) \\ &= -\langle v, T(v) \rangle \\ &= -\langle v, \lambda v \rangle \quad (v \text{ וקטור עצמי של } T) \\ &= -\bar{\lambda} \langle v, v \rangle \quad (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית}) \end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda \langle v, v \rangle = -\bar{\lambda} \langle v, v \rangle \Rightarrow (\lambda + \bar{\lambda}) \langle v, v \rangle = 0.$$

$$v \text{ וקטור עצמי } \Leftrightarrow v \neq 0 \Leftrightarrow \langle v, v \rangle \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda + \bar{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\bar{\lambda}$$

### שיטה 2

כל אופרטור ניתן לרשום בצורה

$$T = T_1 + T_2$$

כאשר  $T_1$  אופרטור הרמיטי ו-  $T_2$  אופרטור אנטי-הרמיטי.

ז"א

$$T^* = T_1 - T_2$$