המחלקה למדעי המחשב

23/12/24 כ"ב בכסלו תשפ"ה
16 : 10 – 17 : 40

אלגברה לינארית 2 למדמ"ח

בוחן אמצע סמסטר

מרצה: ד"ר ירמיהו מילר.

תשפ"ה סמסטר א'

השאלון מכיל 5 עמודים (כולל עמוד זה).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (2 עמודים בפורמט $A4$) מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לענות על שאלות 1-4.

==

שאלה 1 **(25 נקודות)** נתונה מטריצה $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ שמוגדרת $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

א) **(15 נק')** האם A לכסינה? אם כן, מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

ב) **(5 נק')** נתונה מטריצה $B \in \mathbb{R}^{6\times6}$ שמוגדרת

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 20 & -10 & 0 & 100 \\ 0 & 3 & -1 & 7 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 32 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

הביעו את B^{-1} כצירוף ליניארי של חזקות של המטריצה B.

ג) **(5 נק')**
נתון הפולינום $p(x) = (x^2-16)(x^2-25)(x^2-36)(x+1)$.
הוכיחו או הפריכו את הטענה: $p(B) = 0$
כאשר $p(B)$ המטריצה המתקבלת על ידי ההצבה של B בפולינום $p(x)$.

שאלה 2 **(25 נקודות)**

יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו $u, w \in V$ וקטורים של המרחב מכפלה פנימית V.
נסמן את המכפלה פנימית של V ב- $\langle , \rangle$.
הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענות הבאות.

א) **(10 נק')** אם הווקטורים u, w אורתוגונליים ב-V אז u, w הם בלתי תלויים לינארית.

ב) **(10 נק')** אם הווקטורים u, w בלתי תלויים לינארית אז u, w אורתוגונליים ב- V.

ג) **(5 נק')** אם $\|u\| = \|w\| = 2$ ו- $\langle u, w\rangle = 1$ אז $\|u - 2w\| = 4$.

שאלה 3 **(25 נקודות)** תהי $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ מטריצה ויהיו $\lambda = 1$ ו- $\lambda = 2$ ערכים עצמיים של A.

א) **(5 נק')** הוכיחו כי A הפיכה.

ב) **(10 נק')** יהי $p(x) = x^2 - 5x + 8$ פולינום. הוכיחו כי המטריצה $p(A)$ הפיכה.

ג) **(10 נק')** בנוסף תהי $B \in \mathbb{R}^{2\times2}$ מטריצה בעלת הערכים עצמיים $\lambda = 1$ ו- $\lambda = 2$.
הוכיו כי A ו- B דומות.

שאלה 4 **(25 נקודות)**

א) **(8 נק')** יהיו $u=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$, $w=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ וקטורים של $\mathbb{R}^2$.
עבר אילו ערכי k הנוסחה

$$\langle u,w\rangle = x_1x_2 - 5x_1y_2 - 5x_2y_1 + ky_1y_2$$

מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$.

ב) **(8 נק')**
הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית כי הנוסחה הבאה מגדירה מכפלה פנימית במרחב $\mathbb{R}[x]$ של פולינומים עם מקדמים ממשיים:

$$\langle f,g\rangle = \int_{-4}^{1} f(x)g(x)(x+1)\,dx \qquad \forall f,g\in\mathbb{R}[x]\ .$$

ג) **(9 נק')**
הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית כי הנוסחה הבאה מגדירה מכפלה פנימית במרחב $\mathbb{C}^{2\times 2}$ של מטריצות מסדר 2×2 עם איברים מרוכבים:

$$\langle A,B\rangle = \det(AB) \qquad \forall A,B\in\mathbb{C}^{2\times 2}\ .$$

פתרונות

שאלה 1 (25 נקודות)

א)

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 0 & x & -2 \\ -1 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-2)x(x-1)$$

ערכים עצמיים:
$\lambda = 2$ ריבוי אלגברי 1.
$\lambda = 0$ ריבוי אלגברי 1.
$\lambda = 1$ ריבוי אלגברי 1.
כל הערכים עצמיים שונים לכן A לכסינה.

<u>מרחב עצמי של $\lambda = 2$</u>

$$(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $V_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

<u>מרחב עצמי של $\lambda = 0$</u>

$$(A - 0 \cdot I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $V_0 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

<u>מרחב עצמי של $\lambda=1$</u>

$$(A-I) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $V_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$$A=PDP^{-1}\ , \qquad D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ , \qquad P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

ב) B משולשית עליונה לכן הערכים עצמיים הם האיברים על האלכסון: $\lambda=-1,3,2,1,-2,-3$ לכן הפולינום האופייני הוא

$$\begin{aligned} p_B(x) =&(x+1)(x-3)(x-2)(x-1)(x+2)(x+3)\\ =&(x+1)(x-1)(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)\\ =&(x^2-1)(x^2-9)(x^2-4)\\ =&x^6-14x^4+49x^2-36\ . \end{aligned}$$

לפי משפט קיילי המילטון B מאפסת את הפולינום האופייני שלה לכן

$$p_B(B)=B^6-14B^4+49B^2-36I=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{36}\left(B^6-14B^4+49B^2\right)=I$$

לכן

$$\frac{1}{36}\left(B^5-14B^3+49B\right)B=I \quad\Rightarrow\quad B^{-1}=\frac{1}{36}\left(B^5-14B^3+49B\right)\ .$$

ג) הפולינום המינימלי הוא

$$m_B(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$$

ו-

$$p(x)=(x+4)(x-4)(x+5)(x-5)(x+6)(x-6)(x+1)\ .$$

$m_B(x)\nmid p(x)$. נניח כי $p(B)=0$. אז $m_B(x)\mid p(x)$. סתירה.

שאלה 2 (25 נקודות)

א) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $u,w\in\mathbb{R}^2$ ו- $u=0$ וקטור האפס של $\mathbb{R}^2$. אם $\langle u,w\rangle$ המכפלה פנימית הסטנדטרית אז $\langle u,w\rangle=\langle 0,w\rangle=0$ לכן u,w אורתוגונליים אבל u,w תלויים ליניארית.

ב) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $u=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},w=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ בלתי תלויים ליניארית אבל $\langle u,w\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle=1\neq 0$ ז"א u,w לא אורתוגונליים.

ג)

$$\begin{aligned}\|u-2w\|^2&=\|u\|^2+\|-2w\|^2+2\mathrm{Re}\,\langle u,(-2w)\rangle\\&=\|u\|^2+\|-2w\|^2-4\mathrm{Re}\,\langle u,w\rangle\\&=4+4-4\\&=4\end{aligned}$$

שאלה 3 (25 נקודות)

א) הדטרמיננטה שווה למכפלה של הערכים עצמיים.

$$|A|=(2)(1)=2\neq 0$$

לכן A הפיכה.

ב) הפולינום האופייני הוא $p_A(x)=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$.

$$\begin{aligned}p(x)=&x^2-5x+8\\=&x^2-3x+2-2x+6\\=&p_A(x)-2x+6\ .\end{aligned}$$

לפי משפט קיילי המילטון $p_A(A)=0$ לכן

$$p(A)=-2A+6I=2(3I-A)$$

3 לא ערך עצמי של A לכן $|3I-A|\neq 0$ לכן $|p(A)|\neq 0$ לכן $p(A)$ הפיכה.

ג) כל הערכים עצמיים של A שונים וכל הערכים עצמיים של B שונים.
בנוסף יש ל- A ו- B אותם ערכים עצמיים. לפיכך קיימת P הפיכה ו- P' הפיכה ו- D אלכסונית כך ש-

$$A=PDP^{-1}\ ,\qquad B=P'DP'^{-1}\ .$$

לכן

$$D=P^{-1}AP=P'^{-1}BP'\quad\Rightarrow\quad A=PP'^{-1}BP'P^{-1}\quad\Rightarrow\quad A=CBC^{-1}$$

כאשר $C = PP'^{-1}$.

P ו- P' הפיכות לכן C הפיכה.
לכן A ו- B דומות.

שאלה 4

א) תכונות סימטריות וליניאריות מתקיימות.
נבדוק חיוביות:

$$\langle u,u\rangle = x_1^2 - 10x_1y_1 + ky_1^2 = (x_1-5y_1)^2 + (k-25)y_1^2 \ .$$

לפיכך $\langle u,u\rangle \geq 0$ לכל u אם ורק אם $k > 25$.

עבור $k=25$: נשים לב שהמכפלה הפנימית של וקטור שונה מאפס מהצורה $\begin{pmatrix} 5a \\ a \end{pmatrix}$ עם עצמו היא 0 ולכן מוגדרת מכפלה פנימית עבור $k > 25$.

ב) לא מכפלה פנימית. דוגמה נגדית: $f(x) = g(x) = 1$.

$$\langle f,f\rangle = \int_{-4}^{1} (x+1)dx = \left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]_{-4}^{1} = \frac{4}{2} - \frac{9}{2} = \frac{-5}{2} < 0$$

ז"א תכונת חיוביות לא מתקיימת.

ג) לא מכפלה פנימית. דוגמה נגדית: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\langle A,A\rangle = \det(A^2) = \det(A)\det(A) = 0$$

אבל $A \neq 0$ אז תכונת חיוביות לא מתקיימת.