עבודה עצמית 9 גרדיאנט, אקסטרמומים, נגזרת כיוונית וכופלי לגרנז'

שאלה 1

א) הגדירו את המושג "גרדיאנט של פונקציה $f(x,y)$" בנקודה P.

ב) הגדירו את המושג "נגזרת כיוונית פונקציה $f(x,y)$" בנקודה P.

ג) הסבירו את הקשר בין שני המושגים הנ"ל

שאלה 2

עבור הנקודה $P(1,1)$ ועבור כל אחת משתי הפונקציות הבאות $f(x,y) = xy^2 - \dfrac{x^2}{y^3}$,

$$g(x,y) = \ln\left(\frac{x+\sqrt{y}-1}{2y\sqrt{x}}\right)$$

א) חשבו את הגרדיאנט של הפונקציה בנקודה P.

ב) חשבו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה P בכיוון מהנקודה הזאת לראשית הצירים

ג) חשבו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי האפשרי של הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה P.

ד) מצאו וקטור a כך ש- $\dfrac{df}{da}(P) = 0$.

ה) חשבו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה P בכיוונים:

1) ציר ה- x
2) ציר ה- y
3) כיוון שיוצר זווית $\dfrac{\pi}{3}$ עם ציר ה- x

ו) מצאו את הכיוון בו הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה P שווה ל- 5.

שאלה 3

עבור הנקודות $P(1,-1,2)$, $Q(2,0,4)$ ועבור הפונקציה $f(x,y,z) = xy + z^2$.

א) חשבו את הגרדיאנט של הפונקציה בנקודה P.

ב) מצאו את הערך המקסימלי של הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה P.

ג) חשבו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה P בכיוון הווקטור $\overline{PQ}$.

ד) מצאו את משוואת המישור המשיק למשטח הרמה $f(x,y,z) = 3$ בנקודה P.

ה) חשבו את המרחק מנקודה Q למישור המשיק שמצאות בסעיף ד'.

ו) מצאו את ההיטל של נקודה Q על המישור הנ"ל.

שאלה 4 מצאו נקודות אקסטרמום מקומיות וקבע את סוגיהן עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א) $f(x,y) = x^2 + xy - y^2$.

ב) $f(x,y) = x^2 - 3y^2 - 8x + 9y + 3xy$.

ג) $f(x,y) = 4 + x^3 - 3xy + y^3$.

ד) $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$.

ה) $f(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$.

ו) $f(x,y) = x^4 - 2x^2y - 6x^2 + 4y^2$.

שאלה 5 מצאו את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של כל אחת מהפונקציות הבאות בתחום הנתון:

א) $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ בתחום החסום על ידי הישרים $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

ב) $z = xy + x + y$ בריבוע החסום על ידי הישרים $x = 1$, $x = 2$, $y = 2$, $y = 3$.

ג) $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ במשולש החסום על ידי הישרים $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 1$.

ד) $z = e^{x^2+y^2-2y}$ בתחום החסום על ידי $y = x^2$, $y = 4$.

ה) $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$ במלבן בעל קדקודים $A(1,1)$, $B(1,4)$,$C(5,4)$, $D(5,1)$.

שאלה 6

מצאו את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של הפונקציה $z(x,y)$ עם האילוץ הנתון:

א) $z = xy$ בתנאי $2x + 3y - 5 = 0$.

ב) $z = xy$ בתנאי $x^2 + y^2 = 1$.

ג) $z = xy$ בתנאי $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$.

ד) $z = 4x^3 + y^2$ בתנאי $2x^2 + y^2 = 1$.

ה) $z = y - x - 1$ בתנאי $x^2 + y^2 = 2x - 2y$.

שאלה 7

א) על המשטח $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ מצאו את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $A(2,4,0)$.

ב) על המישור $2x+y+3z = 6$ מצאו את הנקודה הקרובה ביותר למשטח $x^2-2x+y^2-2y+z^2-6z+10 = 0$.

ג) על המשטח $x^2-2x+y^2-2y+z^2-6z+10=0$ מצאו את הנקודה הקרובה ביותר ואת הנקודה הרחוקה ביותר למישור $2x+\sqrt{3}y+3z=6$. חשבו את המרחקים.

ד) מצאו את המרחק המינימלי בין נקודות השייכות לשני המשטחים הבאים:

$$x^2+y^2=2x\ , \qquad x^2+y^2+z^2-4y+3=0\ .$$

ה) מצאו נקודה M על המשטח $x^2+2y^2-z^2=1$ ($z\geq 0$) הקרובה ביותר לנקודה $P(0,6,0)$ והרכב משוואה פרמטרית של הישר העובר דרך הנקודות M ו- P.

ו) מכל המשולשים ישרי זווית בעלי שטח S, מצאו משולש בעל היתר הקטן ביותר.

שאלה 8 חשבוו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימאלי של הפונקציה

$$z=8x+4y^2-8xy^2$$

בתחום

$$D=\left\{0\leq y\leq\sqrt{1-x^2}\right\}$$

שאלה 9 נתונה הפונקציה

$$f(x,y,z)=\cos(6z)\left(x^3+4y^2\right)$$

מצאו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה $f(x,y,z)$ בנקודה $P(-1,1,0)$ בכיוון ממנה לנקודה $M(1,3,5)$.

שאלה 10 מצאו את משוואת המישור המשיק למשטח הרמה של הפונקציה

$$f(x,y,z)=e^z\left(y^4+3x^2\right)$$

העובר דרך נקודה $P(1,3,4)$ בנקודה $P(1,3,4)$.

שאלה 11 מצאו את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר של הפונקציה $f(x,y)=4y^2-16y+4x^2-6x-6$ בתחום $x^2+y^2\leq 9$.

שאלה 12 מצאו את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר של הפונקציה $f(x,y)=-6y^2-y-6x^2+14x+2$ בתחום $x^2+y^2\leq 16$.

שאלה 13 על קו החיתוך בין המשטחים

$$z=0\ ,\quad x^2+y^2=4$$

מצאו את הנקודה הקרובה ביותר למישור

$$z=2x-4y+20\ .$$

שאלה 14 על המעגל $x^2+y^2=9$ מצאו את הנקודה $P(x_0,y_0)$ כך ש הנגזרת $\frac{dz}{\overrightarrow{OP}}$ של $z=-4y+x^2+4x+4$ מקסימלי.

שאלה 15 על המעגל $x^2+y^2=1$ מצאו את הנקודה $P(x_0,y_0)$ כך ש הנגזרת $\frac{dz}{\overrightarrow{OP}}$ של $z=xy-4y+x^2+2x+4$ בנקודה $O(0,0)$ ובכיוון של $\vec{O}P$ תהיה מקסימלית וחשבו את קוסינוס הזווית α בין $\vec{O}P$ לישר $y=x$.

שאלה 16

עבור אילו ערכים של a ו- b מישור המשיק למשטח $z=x^3-ax+2y^3-by+xy$ בנקודה $x=1,y=1$ יהיה מקביל למישור $z=5x+3y+11$?

א) מצאו את משוואת הספירה שמרכזה בנקודה $C(0,1,2)$ ומשיקה את הישר AB, כאשר $A(1,1,0)$, $B(0,2,4)$.

שאלה 17

מצאו את הנקודות הקרובות ביותר על המשטחים

$$x^2+y^2+z^2-2x-6y+1=0\ ,\qquad 2x+y+2z+10=0\ .$$

שאלה 18 נתונה הפונקציה

$$z=x^2-2xy^2-1\ .$$

א) מצאו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה $A(-1,2)$ בכיוון ממנה לנקודה $B(2,6)$.

ב) האם קיימת נקודה P במישור xy כך ש- $\frac{dz(A)}{d\overline{AP}}=13$? נמקו את תשובתכם.

שאלה 19 נתונה הפונקציה $f(x,y)=e^{x^2+y^2-2x+2}$.

א) מצאו אקסקטרמומים מקומיים של הפונקציה וקבעו את סוגם.

ב) בתחום $x^2+y^2\le 4$ מצאו את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר של הפונקציה הנתונה.

שאלה 20

מצאו את הזווית (במעלות) בין מישור המשיק למשטח $2x^2+xyz+z^2=4$ העובר דרך הנקודה $P(1,1,1)$ ובין ציר ה-x.

שאלה 21 נתונות הנקודות $A(0,-2,-1)$ ו- $B(2,0,2)$. מצאו על קו ישר AB את הנקודה הקרובה ביותר למשטח

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+5=0\ .$$

שאלה 22 מצאו את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של הפונקציה $z = xy$ על הקו (בתנאי) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

פתרונות

שאלה 1

א)

ב)

ג)

שאלה 2

א) $\nabla f(P) = (-1,5)$, $\nabla g(P) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$,

ב) $\frac{df(P)}{d\overline{OP}} = -2\sqrt{2}$, $\frac{dg(P)}{d\overline{OP}} = 0$

ג) ערך המקסימלי של $\nabla f(P)$ הוא $\sqrt{26}$.
ערך המינימלי של $\nabla f(P)$ הוא $-\sqrt{26}$.
ערך המקסימלי של $\nabla g(P)$ הוא $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
ערך המינימלי של $\nabla g(P)$ הוא $\frac{-1}{\sqrt{2}}$.

ד) $\bar{a} = (-5,1)$.

ה)
1) $\bar{e} = (1,0)$
$$\frac{df(P)}{d\bar{e}} = -1$$
$$\frac{dg(P)}{d\bar{e}} = \frac{1}{2}$$
2) $\bar{e} = (0,1)$
$$\frac{df(P)}{d\bar{e}} = 5$$
$$\frac{dg(P)}{d\bar{e}} = \frac{-1}{2}$$
3) $\bar{a} = (1,\sqrt{3})$ $\bar{e} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$$\frac{df(P)}{d\bar{a}} = \frac{5\sqrt{3}-1}{2}$$
$$\frac{dg(P)}{d\bar{a}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

שאלה 3

א) $\nabla f(P)=(-1,1,4)$

ב) הערך המקסימלי של $\nabla f(P)$ הוא $|\nabla f(P)|=\sqrt{18}$

ג) $\bar{e}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$
$\overline{PQ}=(1,1,2)$.

$$\frac{df(P)}{d\bar{e}}=\frac{8}{\sqrt{6}}\ .$$

ד) משוואת המישור המשיק:

$$x-y-4z+6=0\ .$$

ה) $d=\frac{8}{\sqrt{18}}$.

ו) משוואת הישר המאונך למישור $x-y-4z+6=0$ שעובר דרך נקודה $Q(2,0,4)$:

$$\left.\begin{aligned} x&=2+t\\ y&=-t\\ z&=4-4t\end{aligned}\right\}$$

ההיטל של Q על המישור: $\left(\frac{22}{9},\frac{-4}{9},\frac{20}{9}\right)$.

שאלה 4

א) $(0,0)$ נקודת אוכף. אין נקודת מקסימום או מינימום.

ב) $P(1,2)$ נקודת אוכף. אין נקודת מקסימום או מינימום.

ג) $P_1(0,0)$ נקודת אוכף.
$P_2(1,1)$ נקודת מינימום מקומי.

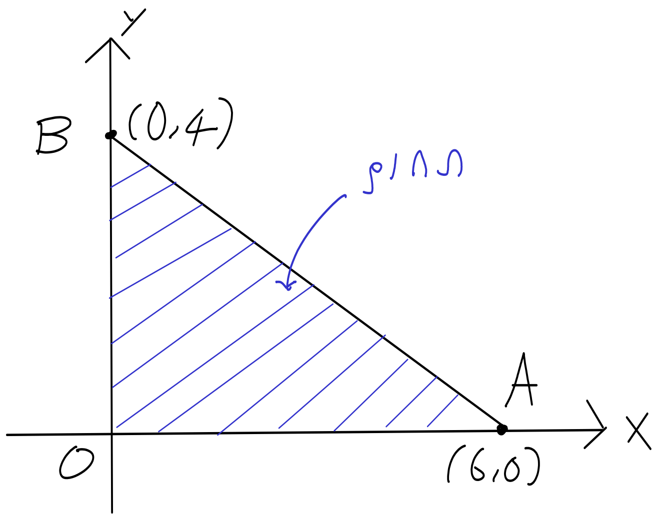
ד) $P_1(0,0)$ נקודת אוכף.
$P_2(1,1)$ נקודת מקסימום מקומי.
$P_3(-1,-1)$ נקודת מקסימום מקומי.

ה) $P_1(0,0)$ נקודת אוכף.
$P_2(1,1)$ נקודת מקסימום מקומי.
$P_3(1,-1)$ נקודת מקסימום מקומי.

ו) $P_1(0,0)$ נקודת אוכף.
$P_2(2,1)$ נקודת מינימום מקומי.
$P_3(-2,1)$ נקודת מינימום מקומי.

שאלה 5

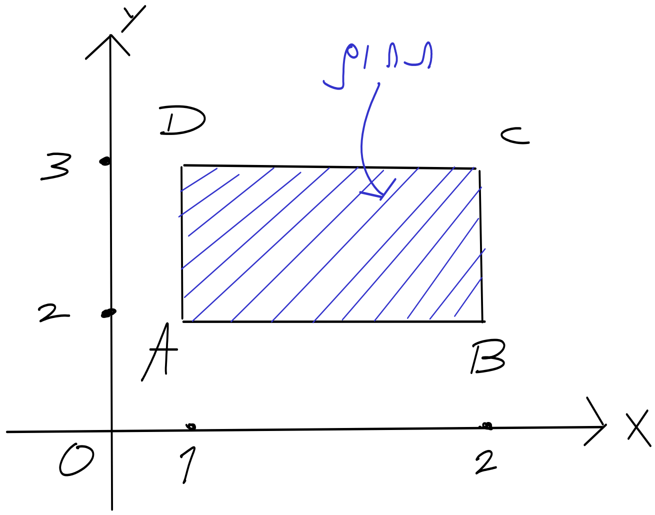
א)



נקודה	z
$P_1\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right)$	$-\frac{16}{3}$
$P_2\,(2,0)$	-4
$P_3\left(\frac{60}{19},\frac{36}{19}\right)$	$-\frac{36}{19}$
$O\,(0,0)$	0
$A(6,0)$	12
$B\,(0,4)$	16

הערך הגדול ביותר הוא 16 המתקבל בנקודה $B(0,4)$.
הערך הקטן ביותר הוא $-\frac{16}{3}$ המתקבל בנקודה $P_1\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right)$.

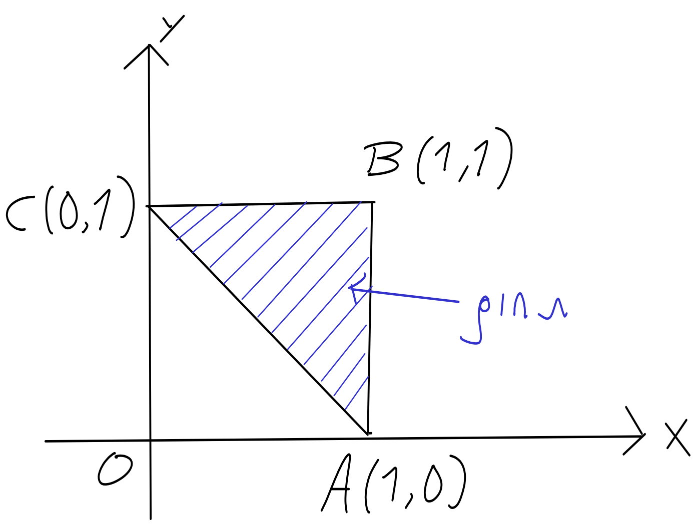
ב)



נקודה	z
$A\left(1,2\right)$	5
$B\left(2,2\right)$	8
$C\left(2,3\right)$	11
$D\left(1,3\right)$	7

הערך הגדול ביותר הוא 11 המתקבל בנקודה $C\left(2,3\right)$.
הערך הקטן ביותר הוא 5 המתקבל בנקודה $A\left(1,2\right)$.

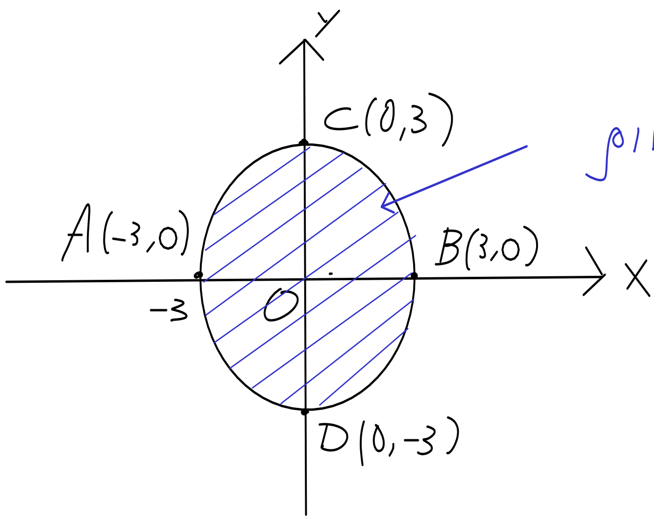
ג)



נקודה	z
$P_2\left(1,\frac{1}{6}\right)$	$\frac{23}{12}$
$P_3\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	1
$A\left(1,0\right)$	2
$B\left(1,1\right)$	4
$C(0,1)$	4

הערך הגדול ביותר הוא 4.
הערך הקטן ביותר הוא 1.

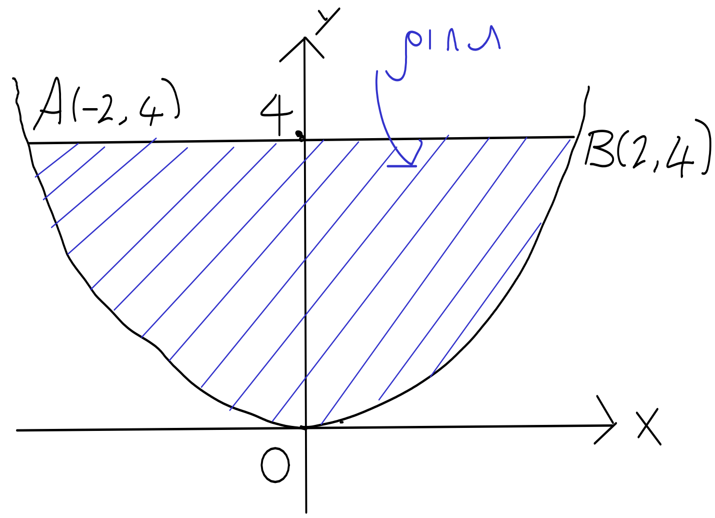
ד)



נקודה	z
$P_1\left(0,1\right)$	e^{-1}
$C\left(0,3\right)$	e^{3}
$A(-3,0)$	e^{9}
$B(3,0)$	e^{9}
$D(0,-3)$	e^{15}

הערך הגדול ביותר הוא e^{15} המתקבל בנקודה $D(0,-3)$.
הערך הקטן ביותר הוא e^{-1} המתקבל בנקודה $P_1\left(0,1\right)$.

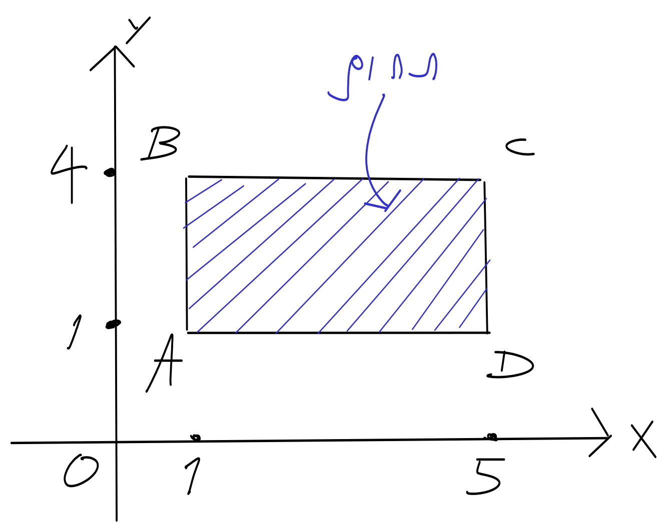
ה)



נקודה	z
$P_1\left(1,1\right)$	-3
$A\left(-2,4\right)$	24
$B\left(2,4\right)$	8

הערך הגדול ביותר הוא 24.
הערך הקטן ביותר הוא -3.

ו)



נקודה	z
$A\,(1,1)$	71
$B\,(1,4)$	59
$C\,(5,4)$	35
$D\,(5,1)$	35
$P_1(5,2)$	30
$P_2\left(\frac{5}{\sqrt{2}},4\right)$	$5+20\sqrt{2}$
$P_3\,(5,2)$	30

הערך הגדול ביותר הוא 71.
הערך הקטן ביותר הוא 30.

שאלה 6

א) ערך הגדול ביותר: $\frac{25}{24}$.

ב) ערך הקטן ביותר: $\frac{-1}{2}$.
ערך הגדול ביותר: $\frac{1}{2}$.

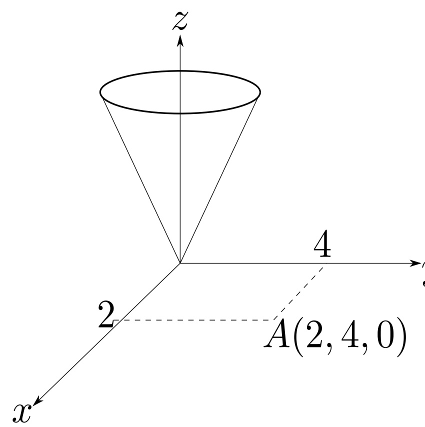
ג) ערך הקטן ביותר: -2.
ערך הגדול ביותר: 2.

ד) ערך הקטן ביותר: $-\sqrt{2}$ בנקודה $P_1\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$. .
ערך הגדול ביותר: $\sqrt{2}$. בנקודה $P_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

ה) ערך הקטן ביותר: -5 בנקודה $P_1\,(2,-2)$. .
ערך הגדול ביותר: -1. בנקודה $P_2\,(0,0)$.

שאלה 7

א)



$(1,2,\sqrt{5})$

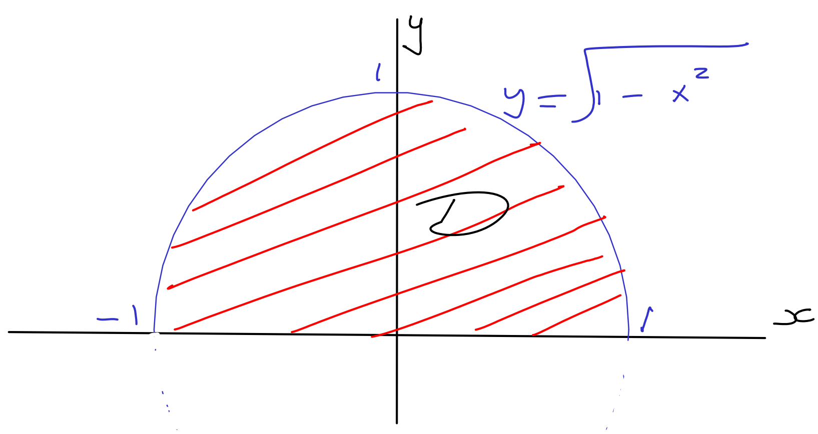
ב) $\left(\frac{1}{7},\frac{4}{7},\frac{12}{7}\right)$

ג)

$$d(P_1)=\frac{1+\sqrt{3}}{4}\ ,\qquad d(P_2)=\frac{\sqrt{3}}{4}\ .$$

P_1 הנקודה הקרובה ביותר, P_2 הנקודה הרחוקה ביותר.

שאלה 8



$$z'_x=0 \quad\Rightarrow\quad 8-8y^2=0 \qquad\Rightarrow\quad y=\pm1$$

$$z'_y=0 \quad\Rightarrow\quad 8y-16xy=0 \quad\Rightarrow\quad 8y(1-2x)=0 \quad\Rightarrow\quad y=0 \text{ או } x=0.5\ .$$

שים לב, עבור בעיות של מקסימום ומינימום של פונקציה $z(x,y)$ בתחום סגור, אין צורך להתעסק עם מטריצת ההסיאן, אלא בודקים את הערך של z בכל אחד של הנקודות הקריטיות המתקבלות אשר נמצאות בתוך התחום, ובנוסף בודקים את המקסימום והמינימום של הפונקציה על השפות של התחום.

נקודת קריטית מתרחשת רק כאשר $z'_x=0$ ו- $z'_y=0$ בו זמנית, וזה מתרחשת כאשר $x=0.5$ ו- $y=\pm1$. הערך $y=-1$ נמצאו מחוץ לתחום (y חיובי בתוך D). הנקודה $(0.5,1)$ גם אינה נמצאות בתוך התחום D.

$y=0$

כאשר $y=0$, הפונקציה $z(x,y)$ שווה

$$z(0,x)=8x\ .$$

הנגזרת החלקית לפי x אינה שווה אפס באף נקודה בתוך התחום, אז נקודות קריטיות לא קיימות על הקבוצת נקודות $y=0$ הנמצאות בתוך התחום.

בשתי נקודות קצה

$x=\pm1$ ו- $y=0$,
ולכן

$$z(1,0)=8\ ,\qquad z(-1,0)=-8\ .$$

נקודות קריטיות על השפה עליונה של התחום

בודקים את המקסימום והמינימום של הפונקציה על השפה העליונה, שבו $y=\sqrt{1-x^2}$. מציבים זה בתוך הפונקציה $z(x,y)$ ומקבלים

$$z\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)=8x+4(1-x^2)-8x(1-x^2)=8x+4-4x^2-8x+8x^3=4-4x^2+8x^3\ .$$

מקבלים ביטוי במונחים של x בלבד. נקח את הנגזרת ומשווא אותה לאפס:

$$z'_x=-8x+24x^2=-8x(1-3x)=0\ ,$$

כך ש $x=0$ או $x=\frac{1}{3}$. שים לב, לערכים האלה של x נתאימים ערכים של y על השפה $y=\sqrt{1-x^2}$:

$$x=0\ \Rightarrow\ y=1\ ,\qquad\qquad x=\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ y=\sqrt{\frac{8}{9}}\ .$$

לכן מוצאים את הנקודות

$$z(0,1)=4\ ,\qquad z\left(\frac{1}{3}\ ,\sqrt{\frac{8}{9}}\right)=3.85185\ .$$

בסך הכל מוצאים את נקודות קריטיות הבאות:

$P_1(1,0)$	$z_1=8$
$P_2(-1,0)$	$z_2=-8$
$P_3\,(0,1)$	$z_3=4$
$P_4\left(\frac{1}{3}\ ,\sqrt{\frac{8}{9}}\right)$	$z_4=3.85185$

עכשיו רואים כי הקסימום והמינימום של הפונקציה z בתחום סגור הנתון D הינם
$$z_{\text{max}}=8\ ,\qquad z_{\text{min}}=-8\ .$$

שאלה 9 הוקטור $\overline{PM}$ הינו
$$\overline{PM}=(1-(-1),3-1,5-0)=(2,2,5)$$
הגודל הינו
$$\left|\overline{PM}\right|=\sqrt{2^2+2^2+5^2}=\sqrt{33}\ .$$
הגרדיאנט של f הוא:
$$\nabla f=\left(f'_x,f'_y,f'_z\right)=\left(\cos(6z)\cdot 3x^2,\quad \cos(6z)\cdot 8y,\quad -6\cdot\sin(6z)\left(x^3+4y^2\right)\right)$$
לכן בנקודה P:
$$\nabla f(P)=\left(\cos(0)\cdot 3\cdot(-1)^2,\quad \cos(0)\cdot 8\cdot 1,\quad -6\cdot\sin(0)\left((-1)^3+4\cdot 1^2\right)\right)=(3,8,0)$$
הנגזרת הכיוונית של f בכיוון $\overline{PM}$ היא המכפלת סקלרית של $\nabla f(P)$ עם הוקטור $\overline{PM}$ לחלק גודלו של וקטור $|\overline{PM}|$:
$$\frac{\nabla f(P)\cdot\overline{PM}}{|\overline{PM}|}=\frac{(3,8,0)\cdot(2,2,5)}{\sqrt{2^2+2^2+5^2}}=\frac{6+16+0}{\sqrt{33}}=3.83\ .$$

שאלה 10 לפי הנוסחה המשוואה של מישור המשיק למשטח בנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ הינה
$$f'_x(P)(x-x_0)+f'_y(P)(y-y_0)+f'_z(P)(z-z_0)=0\ .$$
נחשבו את הנגזרות של f:
$$f'_x=e^z\cdot 6x\ ,\qquad f'_y=e^z\cdot 4y^3\ ,\qquad f'_z=e^z\left(y^4+3x^2\right)\ .$$
לכן אחרי להציב את הקואורדינטות של הנקודה $P(1,3,4)$ נקבל
$$f'_x(P)=6e^4=327.589\ ,\qquad f'_y(P)=108\cdot e^4=5896.6\ ,\qquad f'_z(P)=84\cdot e^4=4586.24\ .$$
לכן משוואת המישור המשיק למשטח בנקודה P הוא
$$327.589(x-1)+5896.6(y-3)+4586.24(z-4)=0\ .$$

שאלה 11

אקסטרמומים מקומיים

$$f'_x = -6 + 8x \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = \frac{3}{4}$$
$$f'_y = -16 + 8y \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad y_0 = 2$$

$$f''_{xx} = 8 \ , \quad f''_{yy} = 8 \ , \qquad f''_{xy} = 0 \ , \quad \Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 = 64 > 0$$

לכן $f''_{xx}(P_0) > 0$ ו- $\Delta(P_0) > 0$ לכן $P_0 = \left(\frac{3}{4}, 2\right)$ נקודת מינימום.

$$f(P_0) = f\left(\frac{3}{4}, 2\right) = -\frac{97}{4} \ .$$

ערך גדול וקטן ביותר על השפה

נבדוק ערכים גדול וקטן ביותר על השפה של חצי המעגל העליונה שבו $y = \sqrt{9 - x^2}$:

$$f_{\text{שפה מעגל עליונה}}(x) = f(x, y = \sqrt{9 - x^2}) = -16\sqrt{9 - x^2} - 6x + 30 \ .$$

$$f'_{\text{שפה מעגל עליונה}}(x) = \frac{16x}{\sqrt{9 - x^2}} - 6 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \qquad 6\sqrt{9 - x^2} = 16x \quad \Rightarrow \quad 36(9 - x^2) = 256x^2$$
$$\Rightarrow \qquad 324 = 292x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{18}{2\sqrt{73}} = \frac{9}{\sqrt{73}} \ .$$

(נשים לב כי x חייב להיות חיובי)

$$f_{\text{שפה מעגל עליונה}}\left(x = \frac{9}{\sqrt{73}}\right) = 30 - 6\sqrt{73} = -21.264 \ .$$

נבדוק ערכים גדול וקטן ביותר על השפה של חצי המעגל התחתונה שבו $y = \sqrt{9 - x^2}$:

$$f_{\text{שפה מעגל תחתונה}}(x) = f(x, y = \sqrt{9 - x^2}) = 16\sqrt{9 - x^2} - 6x + 30 \ .$$

$$f'_{\text{שפה מעגל תחתונה}}(x) = -\frac{16x}{\sqrt{9 - x^2}} - 6 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \qquad 6\sqrt{9 - x^2} = -16x \quad \Rightarrow \quad 36(9 - x^2) = 256x^2$$
$$\Rightarrow \qquad 324 = 292x^2 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{18}{2\sqrt{73}} = -\frac{9}{\sqrt{73}} \ .$$

(נשים לב כי x חייב להיות שלילי)

$$f_{\text{שפה מעגל תחתונה}}\left(x = -\frac{9}{\sqrt{73}}\right) = 30 + 6\sqrt{73} = 81.264 \ .$$

ערך גדול וקטן ביותר בפינות

$$f(3,0) = 12$$
$$f(-3,0) = 48$$
$$f(0,3) = -18$$
$$f(-3,0) = 78$$

בס"ה מכל אלה הערך הגול ביותר הוא 81.264 וערך הקטן ביותר הוא -21.264.

שאלה 12 $f(x,y) = -6y^2 - y - 6x^2 + 14x + 2$ בתחום $x^2 + y^2 \leq 16$.

אקסטרמומים מקומיים

$$f'_x = 14 - 10x \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = \frac{7}{6}$$
$$f'_y = -12y - 1 \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad y_0 = -\frac{1}{12}$$

$$f''_{xx} = -10\ , \quad f''_{yy} = -12\ , \qquad f''_{xy} = 0\ , \quad \Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 = 120 > 0$$

לכן $f''_{xx}(P_0) < 0$ ו- $\Delta(P_0) > 0$ לכן $P_0 = \left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{12}\right)$ נקודת מקסימום.

$$f(P_0) = f\left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{12}\right) = \frac{245}{24}\ .$$

ערך גדול וקטן ביותר על השפה

נבדוק ערכים גדול וקטן ביותר על השפה של חצי המעגל העליונה שבו $y = \sqrt{16 - x^2}$:

$$f_{\text{שפה מעגל עליונה}}(x) = f(x, y = \sqrt{16 - x^2}) = -\sqrt{16 - x^2} + 14x - 94\ .$$

$$f'_{\text{שפה מעגל עליונה}}(x) = \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} + 14 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = -14\sqrt{16 - x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 196(16 - x^2)$$

$$\Rightarrow \quad 197x^2 = 196 \cdot 16 \quad \Rightarrow \quad x = -\sqrt{\frac{196 \cdot 16}{197}} = -\frac{14 \cdot 4}{\sqrt{197}} = -\frac{56}{\sqrt{197}}\ .$$

(נשים לב כי x חייב להיות חיובי)

$$f_{\text{שפה מעגל עליונה}}\left(x = -\frac{56}{\sqrt{197}}\right) = -4\sqrt{197} - 94 = -150.143\ .$$

נבדוק ערכים גדול וקטן ביותר על השפה של חצי המעגל התחתונה שבו $y = -\sqrt{16 - x^2}$:

$$f_{\text{שפה מעגל תחתונה}}(x) = f(x, y = -\sqrt{16 - x^2}) = \sqrt{16 - x^2} + 14x - 94\ .$$

$$f'_{\text{שפה מעגל תחתונה}}(x) = 14 - \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 14\sqrt{16-x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 196(16-x^2)$$

$$\Rightarrow \quad 197x^2 = 196 \cdot 16 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{196 \cdot 16}{197}} = \frac{14 \cdot 4}{\sqrt{197}} = \frac{56}{\sqrt{197}} \ .$$

(נשים לב כי x חייב להיות שלילי)

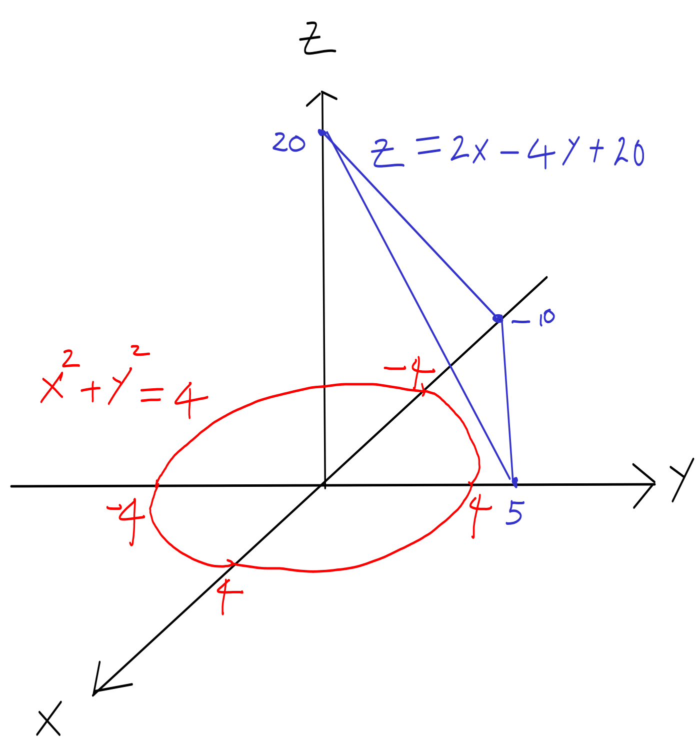
$$f_{\text{שפה מעגל תחתונה}}\left(x = \frac{56}{\sqrt{197}}\right) = 4\sqrt{197} - 94 = -37.8573 \ .$$

<u>ערך גדול וקטן ביותר בפינות</u>

$$f(4,0) = -38$$
$$f(-4,0) = -150$$
$$f(0,4) = -98$$
$$f(-4,0) = -90$$

בס"ה מכל אלה הערך הגול ביותר הוא $\frac{245}{24} = 10.2083$ וערך הקטן ביותר הוא -150.143.

<u>שאלה 13</u>



המרחק בין נקודה למישור נתון על-ידי

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2x-4y-z+20|}{\sqrt{2^2+4^2+1^2}}\ .$$

נציב $z=0$ (מכיוון שהמעגל במישור xy) ונשתמש בשיטה של כופלי לגרנז' בכדי למצוא מינימום של המרחק תחת האילוץ $x^2+y^2-4=0$ בכדי למצוא את הנקודה המבוקשת. למעשה, בכדי למצוא את הנקודה הקרובה ביותר, מספיק להשתמש בפונקצית המטרה $f(x,y)=2x-4y+20=0$. נגדירפונקצית לגרנז'

$$L(x,y,\lambda)=(2x-4y+20)-\lambda(x^2+y^2-4)$$

נרשמו את מערכת המשוואות $\nabla L=\bar{0}$:

$$\begin{aligned} 2 &= 2\lambda x\\ -4 &= 2\lambda y\\ x^2+y^2 &= 4 \end{aligned}$$

משתי המשוואות הראשונות נובע שבנקודה קריטית מתקיים $x,y,\lambda\neq 0$. בנוסף, מתקיים כי $x=\frac{1}{\lambda}$ ו- $y=-\frac{2}{\lambda}$. על ידי הצבה במשוואת המעגל, נקבל

$$\frac{1}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^2}=4\quad\Rightarrow\quad\lambda=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

כלומר, מתקבלות שתי נקודות "חשודות"

$$P\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}},0\right),\quad Q\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{4}{\sqrt{5}},0\right).$$

על ידי הצבה בפונקצית המרחק מוצאים שהנקודה **הקרובה ביותר** היא

$$P\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}},0\right)$$

בעוד **הרחוקה ביותר** ביותר היא

$$Q\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{4}{\sqrt{5}},0\right).$$

שאלה 14 לפי משפט **??** קצב עלייה של המשטח בנקודה $(0,0)$, הנקודה שממנה יוצא הוקטור $\overrightarrow{OP}$, הוא $\nabla z(O)$. הנקודה בשאלה היא נקודה הנמצאת על המעגל $x^2+y^2=9$.

$$\nabla z=z'_x\hat{\boldsymbol{i}}+z'_y\hat{\boldsymbol{j}}=(2x+4)\hat{\boldsymbol{i}}-4\hat{\boldsymbol{j}}$$

ולכן בנקודה O,

$$\nabla z(O)=4\hat{\boldsymbol{i}}-4\hat{\boldsymbol{j}}\ .$$

לכן הכיוון שבו $\frac{dz}{\overrightarrow{OP}}$ יהיה מקסימלי הוא $(4,-4)$. הישר בעל וקטור כיוון $(4,-4)$ הוא

$$x=4t\ ,y=-4t\quad\Rightarrow\quad\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=0\quad\Rightarrow\quad y=-x\ .$$

נקודת חיתוך של הישר הזה והמעגל $x^2+y^2=9$ הוא

$$P=\left(\frac{3}{\sqrt{2}},-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

שאלה 15 הנגזרת מכוונת, אשר מוגדרת להיות

$$\frac{dz}{d\overrightarrow{OP}} = \nabla z \cdot \overrightarrow{OP} \ ,$$

תהיה מקסימלית כאשר הזווית בין הוקטור $\overrightarrow{OP}$ ובין הוגרדיאנט ∇z שווה אפס, כלומר כאשר $\overrightarrow{OP}$ ו- ∇z מקבילים.
הגרדיאנט של z בנקודה $(0,0)$ הינו

$$\nabla z\big|_{x=0,y=0} = (y+2x+2, x-4)\big|_{x=0,y=0} = (2,-4)$$

הזנב של וקטור $\overrightarrow{OP}$ נמצא בראשית הצירים $(0,0)$ והראש בנקודה $P(x_0,y_0)$ על המעגל מרדיוס 1. לכן יש לו את הקואורדינטות

$$\overrightarrow{OP} = (x_0-0, y_0-0) = (x_0, y_0) \ .$$

אבל $\overrightarrow{OP}$ גם מקביל ל- ∇z, לכן נחפש וקטור בעל כיוון $(2,-4)$ ואורך 1. נכתוב

$$\overrightarrow{OP} = (2t, -4t)$$

כך ש $|\overrightarrow{OP}| = 1$:

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{(2t)^2+(-4t)^2} = \sqrt{4t^2+16t^2} = \sqrt{20t^2} = 2\sqrt{5}t = 1$$

(שים לב האורך חייב להיות חיובי), לכן $t=\frac{1}{2\sqrt{5}}$. נציב ונקבל

$$\overrightarrow{OP} = (2t,-4t) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

סך הכל הנקודה הינה

$$P(x_0,y_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

הזווית בין הישר $\overrightarrow{OP}$ ו- $y=x$ היא הזווית בין הוקטור $\overrightarrow{OP}$, כלומר $(2,-4)$, ובין יקטור הכיוון של הישר $y=x$, כלומר $(1,1)$:

$$\cos\alpha = \frac{(2,-4)\cdot(1,1)}{|(2,-4)|\ |(1,1)|} = \frac{(2,-4)\cdot(1,1)}{|(2,-4)|\ |(1,1)|} = \frac{-2}{\sqrt{2^2+(-4)^2}\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{-2}{\sqrt{20}\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{10}}$$

ולכן

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right) = 108.4349488^\circ \ .$$

שאלה 16 נרשום משוואת המשטח בצורה $f(x,y,z) = x^3 - ax + 2y^3 - by + xy - z = 0$.

$$\nabla f = (3x^2 - a + y, 6y^2 - b + x, -1) \ .$$

נורמל למישור בנקודה $x=1, y=1$:

$$\bar{n} = (4-a, 7-b, -1) \ .$$

הנרומל של המישור $z = 5x + 3y + 11$ הוא $n_1 = (5, 3, -1)$.

$$n \parallel n_1 \quad \Rightarrow \quad (4-a, 7-b, -1) = t(5, 3, -1) \quad \Rightarrow \quad t = 1 \ .$$

$$\left.\begin{array}{ll} 4-a & = 5 \\ 7-b & = 3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a = -1 \ , b = 4 \ .$$

תשובה סופית: $a = -1, b = 4$.

שאלה 17 נציג את משוואת המשטח השני בצורה שקולה

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$$

שזו משוואת הכדור שמרכזו בנקודה $C(1, 3, 0)$. הנקודות הנדרשות נמצאות על הישר העובר דרך נקודת C במאונך למישור $2x + y + 2z + 10 = 0$. משוואת הישר היא:

$$\left.\begin{array}{ll} x & = 1 + 2t \\ y & = 3 + t \\ z & = 0 + 2t \end{array}\right\} \ .$$

כדי למצוא את הנקודה על המישור נציב במשוואת המישור את הביטויים מהמשוואה :

$$2(1+2t) + 3 + 2(2t) + 10 = 0$$

ונמצא

$$t = -\frac{5}{3} \ .$$

נציב במשוואת הישר ונמצא :

$$x = -\frac{7}{3} \ , \qquad y = \frac{4}{3} \ , \qquad z = -\frac{10}{3} \ .$$

כדי למצוא את הנקודה על הכדור נציב במשוואת הכדור אתהביטויים ממשוואת הישר :

$$(2t)^2 + t^2 + (2t)^2 = 9 \qquad \Rightarrow \qquad t = -1 \ .$$

נציב במשוואת הישר ונקבל את התשובה :

$$x = -1 \ , \quad y = 2 \ , \quad z = -2 \ .$$

תשובה סופית - נקודה על המישור:

$$x = -\frac{7}{3} \ , \qquad y = \frac{4}{3} \ , \qquad z = -\frac{10}{3} \ .$$

נקודה על המשטח:

$$x = -1 \ , \quad y = 2 \ , \quad z = -2 \ .$$

שאלה 18

א) תשובה סופית: $\frac{dz(A)}{d\overline{AB}} = \frac{2}{5}$.

ב) תשובה סופית: לא.

שאלה 19

א) הנקודה $(1,0)$ מינימום מקומי.

ב) ערך הגדול ביותר: e^{10} בנקודה $(-2,0)$.
ערך הקטן ביותר: e בנקודה $(1,0)$.

שאלה 20

57.7°.

שאלה 21

הנקודה המבוקשת היא $\left(\frac{31}{17}, -\frac{2}{17}, \frac{32}{17}\right)$.

שאלה 22

ערך הקטן ביותר: -2.
ערך הגדול ביותר: 2.