היחידה למתמטיקה

28/09/23
08:10-11:10

חדו"א 2

מועד א'

מרצה: ד"ר סטיאנוב פבל, ד"ר ירמיהו מילר.

מרצה אחראי: ד'ר אבנר סגל

תשפ"ג סמסטר קיץ

השאלון מכיל 4 עמודים (כולל עמוד זה)

בהצלחה !

======================================

<u>הנחיות למדור בחינות</u>

<u>שאלוני בחינה</u>

לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת

<u>הנחיות כללי</u>

<u>שימוש במחשבונים</u>

ניתן להשתמש במחשבון

<u>חומר עזר</u>

ניתן להשתמש בחומר עזר/דף נוסחאות, כמפורט : <u>דף נוסחאות מצורף</u>

<u>אחר / הערות</u>

בשאלון 3 שאלות – כולן חובה

יש לכתוב בכתב יד ברור ומסודר ולפרט כל שלב בחישובים.

יש לרשום ליד כל תשובה את מספר השאלה, ובמידה ויש גם את מספר הסעיף.

תשובה ללא הסבר, אפילו נכונה, לא תתקבל.

סטודנט.ית ת.יהיה זכאי.ת להגיש ערעור על הבחינה במשך 5 ימים בלבד מיום קבלת הציון ובמערכת הערעורים הממוחשבת בלבד

שאלה 1 (40 נקודות)

נתונה הפונקציה

$$z(x,y) = 3x^2 + 4x + 8y^2 \ .$$

א) (20 נק') מצאו את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה.

ב) (20 נק') בתחום הסגור המוגבל ע"י הקו

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

מצאו את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר של הפונקציה.

שאלה 2 (30 נקודות)

א) (10 נק') נתונות הנקודות

$$A(4,0,1)\ , \quad B(0,2,1)\ , \quad C(1,1,0)\ , \quad P(1,-1,2)\ .$$

מצאו את משוואת המישור העובר דרך הנקודות ABC וחשבו את השיקוף של הנקודה P ביחס אליו.

ב) (15 נק') מצאו את משוואת המישור המשיק למשטח הרמה

$$f(x,y,z) = e^{3z}(y^4 + 2x^2)\ ,$$

העובר דרך הנקודה $P(1,1,2)$.

ג) (5 נק') מצאו את המצב ההדדי בין המישור שמצאתם בסעיף ב' לבין המישור

$$2x + 3y - 4z + 2 = 0\ .$$

שאלה 3 (30 נקודות)

א) (15 נקודות) מצאו את המרחק המינימלי בין המשטח

$$9x^2 - 54x + 4y^2 - 16y + 4z^2 + 8z + 65 = 0$$

למישור $y = 16$.

ב) (15 נקודות)

עבור הפונקציה

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 - 2z\ .$$

בדקו האם קיים וקטור $\bar{a}$ כך שבנקודה $P(1,3,1)$, הנגזרת הכיוונית, $\frac{df(p)}{d\bar{a}}$ שווה 10?

פתרונות

שאלה 1

א)

$$\left.\begin{aligned} f_x = & \quad 4+6x & \stackrel{!}{=} 0 \\ f_y = & \quad 16y & \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad (x,y) = \left(-\frac{2}{3}, 0\right) .$$

$$f''_{xx} = 6 \ , \quad f''_{yy} = 16 \ , \quad f''_{xy} = 0 \ .$$

$$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 = 96 > 0$$

$f''_{xx} > 0$ ו- $\Delta > 0$ לכן הנקודה $P_0\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ היא נקודת מינימום מקומי.

ב) על השפה $y = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ הפונקציה היא:

$$f_1(x) = f\left(x, \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right) = x^2 + 4x + 8 \ .$$

$$f_1{}'(x) = 4 + 2x \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \ .$$

על השפה $y = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$, כאשר $x = -2$, $y = 0$. נסמן את הנקודה $P_1(-2,0)$.

$$f(-2,0) = f_1(-2) = 4 \ .$$

על השפה $y = -\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ הפונקציה היא:

$$f_2(x) = f\left(x, -\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right) = x^2 + 4x + 8 \ .$$

$$f_2{}'(x) = 4 + 2x \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \ .$$

על השפה $y = -\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$, כאשר $x = -2$, $y = 0$. נסמן את הנקודה $P_2(-2,0)$.

$$f(-2,0) = f_2(-2) = 4 \ .$$

$f(x,y)$	נקודה
$\frac{-4}{3}$	$P_0\left(-\frac{2}{3},0\right)$
4	$P_1\left(-2,0\right)$
20	$P_2\left(2,0\right)$
8	$P_3\left(0,1\right)$
8	$P_4\left(0,-1\right)$

ערך הגדול ביותר: 20 בנקודה $(2,0)$.

ערך הקטן ביותר: $\frac{-4}{3}$ בנקודה $\left(-\frac{-2}{3},0\right)$.

שאלה 2

א)

$$\overline{AB}=(-4,2,0)\ ,\qquad \overline{AC}=(-3,1,-1)\ .$$

הווקטור הנורמל של המישור הוא:

$$\bar{n}=\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -4 & 2 & 0\\ -3 & 1 & -1\end{vmatrix}=(-2,-4,2)\ .$$

$$-2(x-4)-4y+2(z-1)=0\qquad\Rightarrow\qquad -2x-4y+2z+6=0\ .$$

משוואת הישר העובר דרך ההיטל של D ביחס למישור, והנקודה D:

$$x=1-2t\ ,\qquad y=-1-4t\ ,\qquad z=2+2t\ .$$

נציב משוואת הישר במשוואת המישור:

$$12+24t=0\qquad\Rightarrow\qquad t=-\frac{1}{2}\ .$$

נציב את הערך $t_0=-\frac{1}{2}$ במשוואת המישור ונקבל את הנקודה של ההיטל של D ביחס למישור ABC:

$$P'=M\left(t=-\frac{1}{2}\right)=(2,1,1)\ .$$

שיקוף:

$$P^{*}=M\left(2t_0\right)=M\left(-1\right)=(3,3,0)\ .$$

ב)

$$\nabla f=\left(4xe^{3z},4y^3e^{3z},3e^{3z}\left(2x^2+y^4\right)\right)=e^{3z}\left(4x,4y^3,3\left(2x^2+y^4\right)\right)$$

$$\nabla f(1,1,2)=e^6\left(4,4,9\right)\ .$$

לכן הווקטור הנורמל של המישור המשיק למשטח בנקודה $P(1,1,2)$ הוא $(4,4,9)$. המשוואה של המישור המשיק למשטח בנקודה P היא

$$4(x-1)+4(y-1)+9(z-2)=0\qquad\Rightarrow\qquad 4x+4y+9z-26=0\ .$$

ג) הווקטור הנורמל של המישור המשיק למשטח הוא $n_1=(4,4,9)$, והנורמל של המישור $2x+3y-4z+2=0$ הוא $n_2=(2,3,-4)$.

$$n_1\nparallel n_2\ ,$$

לכן המישורים לא מקבילים, ולכן הם מתלכדים.

שאלה 3

א) נרשום את המשטח בצורה קנונית:

$$\frac{1}{4}(x-3)^2+\frac{1}{9}(y-2)^2+\frac{1}{9}(z+1)^2=1$$

□ המשטח הוא אליפסויד, אשר מרכזו נמצא על הנקודה $(3,2,-1)$. הנקודה על המשטח הקרובה ביותר למישור $y=16$ נמצאת בקדקוד של האליפסויד שנמצא בנקודה $(3,5,-1)$.

ב) הערך המקסימלי של הנגזרת הכיוונית הוא $|\nabla f(P)|$. נחשב את $\nabla f(P)$:

$$\nabla f(p)=\left(3x^2,2y,-2\right)(P)=(3,6,-2)\ .$$

$$|\nabla f(P)|=|(3,6,-2)|=\sqrt{49}=7\ .$$

לכן הערך המקסימלי של $\frac{df(P)}{d\bar{a}}$ בנקודה P בכיוון $\bar{a}$ הוא 7. כלומר

$$\frac{df(P)}{d\bar{a}}\le 7\ .$$

לכן לא קיים ווקטור $\bar{a}$ כך ש- $\frac{df(P)}{d\bar{a}}=10$.