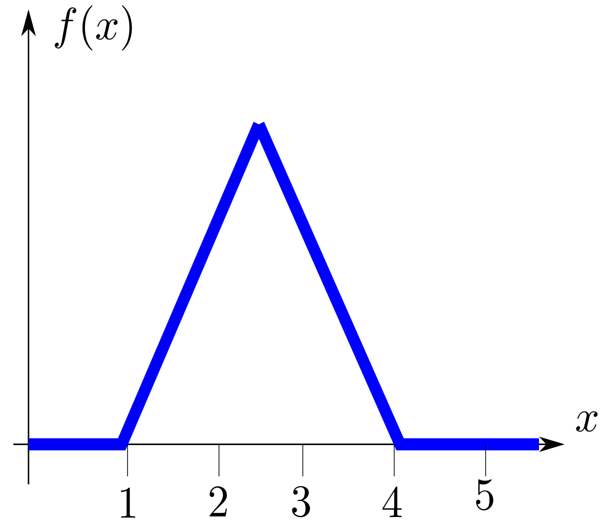
1 דוגמא. מכונה במפעל ברגים אמורה לייצר ברגים בקוטר 3 מ"מ. בפועל, קוטר הברגים אינו מדויק והצפיפות שלו נתונה על ידי איור להלן אשר מראה את צפיפות קוטר הברגים.



רשמו במדויק את פונקצית הצפיפות. מה ההסתברות שקוטר בורג יעלה על 3 מ"מ? על 4 מ"מ?

פיתרון. יש צורך למצוא את פונקצית הצפיפות בצורה מדוייקת. נשתמש תחילה בתנאי הנרמול. אנחנו יודעים כי השטח שבין הגרף לציר x שווה ל-1 כי כלל השטח מייצג את כל ההסתברות,

$$\int_1^5 f_X(x)\,dx = P(1 \le X \le 5) = 1.$$

נשתמש בנוסחה לשטח משולש (שטח משולש שווה למכפלת הבסיס בחצי הגובה) ונקבל שגובה המשולש h מקיים

$$\frac{4h}{2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad h = 0.5\ .$$

עם כן, יש לנו את הנקודות

$$(1,0), \quad (5,0), \quad (3,0.5)\ .$$

ונוכל למצוא את משוואות הקווים בהתאם. לכן הצפיפות נתונה על ידי

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 \le x \le 3, \\ -\frac{1}{4}(x-5), & 3 \le x \le 5, \\ 0, & x > 5. \end{cases},$$

בעזרת הצפיפות נוכל לחשב ישירות את ההסתברויות המבוקשות.

$$P(X > 3) = \int_3^5 \left(-\frac{1}{4}(x-5)\right) dx \quad = -\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_3^5 = \frac{1}{2},$$

$$P(X > 4) = \int_4^5 \left(-\frac{1}{4}(x-5)\right) dx \quad = -\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_4^5 = \frac{1}{8}.$$

2 דוגמא. מספר טיפות הגשם הנופלות ביחידת שטח נתונה מתפלגות על פי התפלגות פואסון. ניקח מטר אחד ונניח כי בממוצע נפלו לאורכו 10 טיפות:

$$\lambda = 10 \text{ טיפות למטר} .$$

המרחק X (במטרים) בין טיפות מתפלג פואסונית

$$X \sim \exp(\lambda = 10).$$

ההסתברות שטיפה אחד תיפול לתוך 10 ס"מ (0.1 [m]) כלשהו היא

$$P(X \leq 2) = F_X(20) = 1 - e^{-0.1\lambda} = 1 - e^{-1} = 0.63 .$$

3 דוגמא. משתנה מקרי רציף X בעל פונקצית צפיפות

$$f_X(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

חשבו את c, ומצאו את פונקצית ההתפלגות המצטברת F_X.

פיתרון. בכדי למצוא את הקבוע c נשתמש בתנאי הנרמול. ידוע כי

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f_X(x) = \int_0^2 dx\, cx = c\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2c,$$

לכן

$$c = \frac{1}{2}.$$

עבור $k < 0$, ההסתברות

$$P(X \leq k) = 0$$

כי המשתנה נע בין 0 ל- 2. עבור $k \geq 2$, ההסתברות

$$P(X \leq k) = 1$$

מאותה הסיבה בדיוק. כעת נותר למצוא את הערך עבור $k \in (0, 2)$.

$$\begin{aligned} F_X(k) &= \int_{-\infty}^{k} f_X(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\, dx + \int_0^k f_X(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_0^k \frac{x}{2}\, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^k = \frac{k^2}{4}. \end{aligned}$$

לסיכום, פונקצית ההתפלגות המצטברת היא

$$F_X(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ \frac{k^2}{4}, & 0 \leq k \leq 2, \\ 1, & k > 2. \end{cases}$$

4 דוגמא. נתונה פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f_X(x) = \begin{cases} -x & -1 \le x \le 0, \\ cx^2 & 0 < x \le 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

1. מצאו את ערכו של c.
2. חשבו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X.
3. חשבו את ההסתברויות:
   (א) $P(X \le -0.5)$
   (ב) $P(X < -0.5)$
   (ג) $P(X \le 0.5)$
   (ד) $P(-0.2 \le X \le 0.3)$

פיתרון. 1. מתכונת הנרמול נקבל

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f_X(x) = \int_{-1}^{0} (-x) dx + \int_{0}^{1} cx^2\, dx \\ &= \frac{1}{2} + c\left(\frac{1}{3} - 0\right) \end{aligned}$$

ולכן

$$c = 1.5\ .$$

2.

$$F_X(k) = \int_{-\infty}^{k} f_X(x)\, dx = \begin{cases} 0 & k < -1 \\ \frac{1}{2} - \frac{k^2}{2} & -1 \le k < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{k^3}{2} & 0 \le k \le 1 \\ 1 & k > 1. \end{cases}$$

3. נחשב את ההסתברויות באמצעות הצבה בפונקציית ההתפלגות המצטברת:
   (א) $P(X \le -0.5) = F_X(-0.5) = 0.375$
   (ב) $P(X < 0.5) = P(X \le -0.5) = 0.375$ שכן כזכור, נקודה אחת אינה משפיעה על תוצאת אינטגרל וההסתברות להיות שווה בדיוק ל- 0.5 היא אפס.
   (ג) $P(X \le 0.5) = F_X(0.5) = 0.5625$
   (ד) $P(-0.2 \le X \le 0.3) = F_X(0.3) - F_X(-0.2) = 0.0335$

■

דוגמא. אספקת הדלק למאגר של תחנת דלק מתבצעת אחת לשבוע. כמות הדלק (באלפי ליטרים) שתחנה זו מוכרת בשבוע היא משתנה מקרי המתפלג בהתאם לפונקציית הצפיפות:

$$f_X(x) = \begin{cases} c(1-x)^4 & x \in [0,1] \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

1. חשבו את c.

פיתרון. 1. מתכונת הנרמול נקבל

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\ dx = c\int_0^1 (1-x)^4\ dx = -\frac{c}{5}(1-x)^5\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{c}{5}\ ,$$

ולכן

$$c=5.$$

2. סמן את קיבולת המאגר ב M. אנו דורשים שההסתברות שצריכת הדלק תהיה גדולה מהקיבולת תהיה קטנה מ- 5%, כלומר

$$P(X>M)\le 5\%\ .$$

$$P(X>M)=\int_M^1 f_X(x)\,dx=\int_M^1 c(1-x)^4\,dx = -\frac{c}{5}(1-x)^5\Big|_M^1 = (1-M)^5\le 0.05\ ,$$

ולכן

$$M\ge 0.4507\ .$$

המספר שקיבלנו הוא בדיוק האחוזון ה- 95% מהשבועות צריכת הדלק נמוכה ממספר זה.

■

5 **דוגמא.** תרבית חיידקים מפוזרת באופן אחיד על פני צלחת שרדיוסה 10 ס"מ. יהא R המרחק של חיידק אקראי ממרכז הצלחת.

1. מה ההסתברות שהמרחק הוא בדיוק 3 ס"מ?
2. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של R.
3. מהי ההסתברות שהמרחק הוא 3 ס"מ לפחות אם ידוע שהוא 6 ס"מ לכל היותר?
4. מצאו את פונקציית הצפיפות של R.

פיתרון. 1. מאחר וזהו משתנה מקרי רציף, ההסתברות שיקבל בדיוק ערך מסוים היא אפס.

2. מאחר והחיידקים מפולגים באופן אחיד על הצלחת, הסיכוי שחיידק מסוים נמצא במרחק קטן מ-r היא היחס בין השטח של האזורים שנמצאים במרחק קטן מ-r ביחס לשטח הכולל. לכן

$$F_R(r)=\begin{cases}0, & r<0,\\ \frac{r^2}{10^2}, & 0\le r\le 10,\\ 1, & r>10.\end{cases}$$

3.

$$P(R>3|R>6)=\frac{P(3<R<6)}{P(R<6)}=\frac{F_R(6)-F_R(3)}{F_R(6)}=0.75\ .$$

4.

$$f_R(r)=\frac{dF_R}{dr}=\begin{cases}\frac{r}{50}, & 0\le r\le 10,\\ 0, & \text{אחרת}\ .\end{cases}$$

■

6 **דוגמא.** בתחנת כיבוי האש של אשדוד מתקבלת שיחה אחת בממוצע בכל 3 דקות.

1. מה הסיכוי שהשיחה הראשונה תגיע בין הדקה השנייה לדקה הרביעית?
2. מה הסיכוי שהשיחה הראשונה תגיע אחרי 5 דקות?
3. בהנחה שבחמש הדקות הראשונות לא התקבלה שיחה, מה הסיכוי שנמתין לפחות עוד דקה עד לשיחה

פיתרון. הזמן עד השיחה הראשונה מתפלג פואסונית $Y \sim \exp\left(\frac{1}{3}\right)$ כאשר הזמן נמדד בדקות.

.1

$$P(2 \le Y \le 4) = F_Y(4) - F_Y(2) = 1 - e^{-4/3} - (1 - e^{-2/3}) \approx 0.25.$$

.2

$$P(Y > 5) = 1 - P(Y \le 5) = 1 - F_Y(5) = 1 - (1 - e^{-5/3}) \approx 0.189.$$

.3

$$P(Y > 5+1|Y > 5) = \frac{P(Y > 6 \cap Y > 5)}{P(Y > 5)} = \frac{P(Y > 6)}{P(Y > 5)} = \frac{1 - F_Y(6)}{1 - F_Y(5)} = \frac{e^{-6/3}}{e^{-5/3}} = e^{-1/3} = P(Y > 1)\,.$$

בחישוב האחרון קיבלנו תכונה מוכרת: חוסר זיכרון. הסיכוי שנמתין 6 דקות לפחות עד לשיחה הראשונה, בהנחה שכבר המתנו 5 דקות ללא שיחה, היא בדיוק הסיכוי שנמתין דקה אחת נוספת - זו תכונת חוסר הזיכרון שראינו עבור משתנה מקרי גיאומטרי. נסכם בטענה הבאה. ■

7 דוגמא. בשוק שני יצרני נורות. מפעל 1 שולט על 60% מהשוק ומפעל 2 על היתר. אורך חיים ממוצע של נורה ממפעל 1 הוא חודשיים, בעוד מפעל 2 מייצר נורות עם אורך חיים ממוצע של ארבעה חודשים. עבור נורה שנקנית בשוק (

1. מה הסיכוי שהנורה לא תתקלקל בחודש הראשון?
2. בהנחה והנורה שקנינו דולקת כבר חודש ללא תקלה, מה הסיכוי שמדובר בנורה ממפעל 2?

פיתרון. נסמן את זמן החיים של הנורות:

$$X_1 \sim \exp\left(\frac{1}{2}\right), X_2 \sim \exp\left(\frac{1}{4}\right).$$

נסמן את אורך החיים של הנורה שנקנתה ב- Y.

.1

$$\begin{aligned}
P(Y > 1) =& P(Y > 1|Y = X_1)P(Y = X_1) + P(Y > 1|Y = X_2)P(Y = X_2) \\
=& P(Y > 1|Y = X_1)0.6 + P(Y > 1|Y = X_2)0.4 \\
=& (1 - F_{X_1}(1))0.6 + (1 - F_{X_2}(1))0.4 \\
=& e^{-\frac{1}{2}\cdot 1}.0.6 + e^{-\frac{1}{4}\cdot 1}.0.4 \\
\approx& 0.675
\end{aligned}$$

.2

$$P(Y = X_2|Y > 1) = \frac{P(Y > 1|Y = X_2}{P(Y > 1)} = \frac{e^{-\frac{1}{4}\cdot 1}.0.4}{0.675} \approx 0.462 > 0.4$$

ז"א שזמן החיים הארוך בפועל מגדיל את הסיכוי שמדובר בנורה ממפעל 2, שכן אורך החיים הממוצע של הנורות ממפעל2 הוא ארוך יותר מאלו של מפעל 1. ■