

תרגילים: רדוקציה

הגדרה. בהינתן פונקציה

$f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, אומרים כי מ"ט M מחשבת את f אם לכל $x \in \Sigma^*$ מתקיים:

(1) M מגיעה ל-acc בסוף החישוב על x .

(2) על סרט הפלט של M כתוב את $f(x)$.

הערה. מ"ט שמחשבת פונקציה עוצרת על כל קלט.

הגדרה. בהינתן שתי שפות L_1 ו- L_2 , אומרים כי L_1 ניתנת לרדוקציה ל- L_2 (נסמן $L_1 \leq L_2$) אם \exists פונקציה $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ המקיימת את התנאים הבאים:

(1) f חשיבה.

(2) לכל $x \in \Sigma^*$ מתקיים

$$x \in L_1 \iff f(x) \in L_2.$$

הגדרה.

$$R = \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ מכריעה את } L\}$$

הגדרה.

$$RE = \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ המקבלת את } L\}$$

משפט (משפט הרדוקציה). לכל שתי שפות L_1 ו- L_2 . אם $L_1 \leq L_2$ אז

(1) אם $L_2 \in R$ אז $L_1 \in R$.

(2) אם $L_2 \in RE$ אז $L_1 \in RE$.

(3) אם $L_1 \notin R$ אז $L_2 \notin R$.

(4) אם $L_1 \notin RE$ אז $L_2 \notin RE$.

לסיכום:

$$\begin{array}{ll} L_2 \in R & \Rightarrow L_1 \in R \\ L_2 \in RE & \Rightarrow L_1 \in RE \\ L_2 \notin R & \Leftarrow L_1 \notin R \\ L_2 \notin RE & \Leftarrow L_1 \notin RE \end{array}$$

שאלה 1 נתונה השפה

$$L = \{P \mid L(P) \neq \emptyset\}$$

או במילים אחרות

$$L = \{\langle M \rangle \mid L(M) \neq \emptyset\}$$

(א) תארו מכונת טיורינג דטרמיניסטית המקבלת את השפה L .

(ב) תארו מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית המקבלת את השפה L .

ג) הוכיחו שהשפה L לא כריעה (על ידי רדוקציה).

ד) הוכיחו שלא קיימת רדוקציה $L \leq \bar{L}$.

שאלה 2 הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

א) $A \leq_m B$

ב) $\bar{A} \leq_m B$

ג) $\bar{A} \leq_m \bar{B}$

ד) $A \leq_m \bar{B}$

שאלה 3 תהי L השפה

$$L = \{ \langle M, w \rangle \mid L(M) = L(D) \text{ ו- } D \text{ הוא DFA} \} .$$

הוכיחו כי \bar{L} לא כריעה.

שאלה 4 תהי L הפשה

$$L = \{ \langle M \rangle \mid w \in L(M) \Leftrightarrow |w| < 50 \}$$

כלומר M מקבלת רק מילים באורך פחות מ-50.
הוכיחו כי L לא קבילה.

שאלה 5 תהי A שפה. הוכיחו:

$$A \leq_m A .$$

שאלה 6 תהי A שפה.

הוכיחו או הפריכו:

$$A \leq_m \bar{A} .$$

שאלה 7 תהי

$$EQ_{TM} = \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2) \}$$

הוכיחו:

א) $A_{TM} \leq_m EQ_{TM}$

ב) $A_{TM} \leq_m \bar{EQ}_{TM}$

תשובות

שאלה 1

(א) הרעיון

בהינתן קלט $x = \langle M \rangle$ נרצה לבדוק האם \exists מילה ש- M מקבלת.

לשם כך נרצה לסמלץ את M על כל המילים האפשריות ב- Σ^* ואם נמצא מילה שמתקבלת ע"י M נדע ש- $L(M) \neq \emptyset$ ולכן $\langle M \rangle \in L$.

הבעיה

יתכן שנסמלץ את M על מילה ו- M לא תעצור עליה, למרות שקיימת מילה אחרת ש- M מקבלת. במקרה זה המכונה לא תעצור על $\langle M \rangle$ למרות ש- $\langle M \rangle \in L$.

הפתרון

נבנה מ"ט M_L :

- M_L תסמלץ את M על כל מילה אפשרית למשך מספר סופי של צעדים בכל פעם.
 - תחילה נריץ את M על כל המילים באורך 0 במשך 0 צעדים.
 - אח"כ נריץ את M על כל המילים באורך $1 \leq n$ במשך צעד אחד.
 - אח"כ נריץ את M על כל המילים באורך $2 \leq n$ במשך 2 צעד אחד.
 - ...וכן הלאה נריץ את M על כל המילים באורך $n \leq i$ במשך i צעדים.
 - בכל שלב, אם נמצאה מילה ש- M קיבלה, נפסיק את הריצה ונקבל את $\langle M \rangle$.
- לשם כך נשתמש במ"ט U_t כדי לסמלץ את ריצת הקלט M על מילה x לשמך t צעדים.

תזכורת:

$$L(U_t) = \{ \langle M, w, t \rangle \mid M \text{ מקבלת את } w \text{ תוך } t \text{ צעדים} \}$$

תיאור פעולת M_L על קלט x :

(1) M_L בודקת אם x מהצורה $x = \langle M \rangle$ (האם x קידוד חוקי של מ"ט).

אם לא $M_L \Leftarrow x$ דוחה את x .

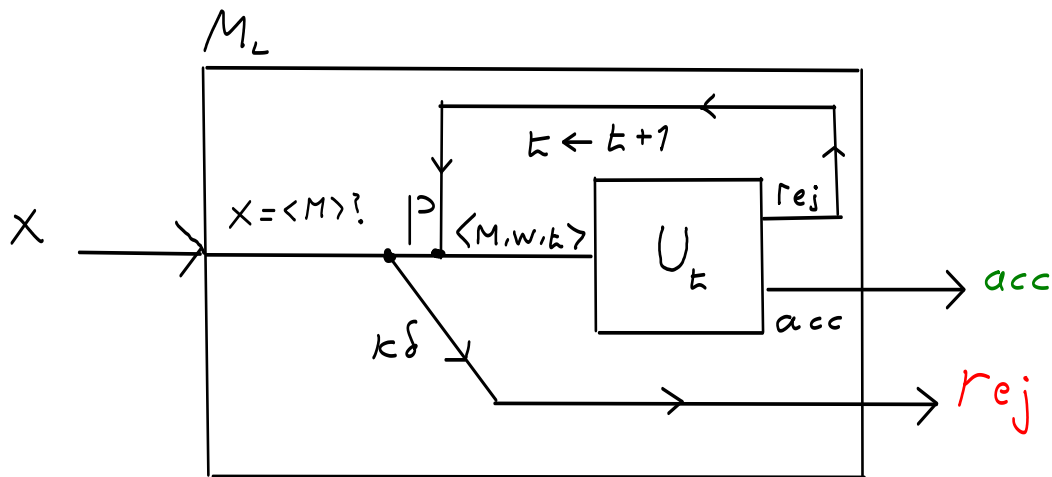
(2) $t \leftarrow 0$

(3) לכל מילה $w \in \Sigma^*$ כך ש- $|w| \leq t$ מריצה את U_t על הקלט $\langle M, w \rangle$.

אם U_t קיבלה $M_L \Leftarrow M_L$ מקבלת.

(4) $t \leftarrow t + 1$

(5) חוזרת לשלב (3).



הוכחת הנכונות המכונה M_L :

יש להוכיח כי אכן מתקיים $L = L(M_L)$ לשם כך נוכיח כי מתקיים

$$\begin{aligned} x \in L &\Rightarrow x \in L(M_L), \\ x \notin L &\Rightarrow x \notin L(M_L), \end{aligned} \quad (\text{ז"א } M_L \text{ דוחה את } x \text{ או לא עוצרת על } x).$$

$$\underline{x \in L \Rightarrow x \in L(M_L)}$$

$$\bullet \quad L(M) = \emptyset \text{ ו- } x = \langle M \rangle \Leftarrow x \in L$$

$$\bullet \quad w \in L(M) \Leftarrow \text{קיימת } w \in \Sigma^* \text{ כך ש-}$$

בפרט המילה w מתקבלת ע"י מספר סופי של צעדים.

$$\bullet \quad \text{יהי } k \text{ מספר הצעדים עד לקבלת } w \text{ ב- } M.$$

לפי פעולת M_L , אם תריץ $U_t(\langle M, w, t \rangle)$ עבור $t = \max(|w|, k)$

אזי M תקבל את w ו- U_t תקבל את $\langle M, w, t \rangle$ ולכן לבסוף גם M_L תקבל את w

(לפי שלב 3 של התיואר של M_L).

$$\bullet \quad M_L \text{ מקבלת את } x = \langle M \rangle$$

$$\bullet \quad x \in L(M_L) \Leftarrow$$

$$\underline{x \in L \Rightarrow x \in L(M_L)}$$

$$\Leftarrow x \notin L \text{ שני מקרים:}$$

מבצ 1) $x \neq \langle M \rangle$ גלומר x אינה קידוד חוקי של מ"ט.

$$M_L \text{ תדחה את } x \text{ (לפי שלב 1)} \Leftarrow x \notin L(M_L)$$

מבצ 2 $x = \langle M \rangle$ ו- $L(M) = \emptyset$.

- במקרה זה לא קיימת מילה w (בכל אורך שהוא) המתקבלת ע"י M .
ז"א לכל $w, w \in \Sigma^*$ לא מתקבלת בשום מספר סופי של צעדים ולכן $U_t(\langle M, x, t \rangle)$ לא מקבלת לאף t .
- \Leftarrow הלולאה בשלב 3 לא עוצרת על x .
- $\Leftarrow M_L$ לא עוצרת על x .
- $\Leftarrow M_L$ לא מקבלת את x . לכן $x \notin L(M_L)$.

(ב) הריעון

נבנה מ"ט אי-דטרמיניסטית N_L שבהינתן קלט $x = \langle M \rangle$ תנחש מילה $w \in \Sigma^*$ ותסמלץ את ריצתה של M על w .

אם M מקבלת את w אז N_L תקבל את x .

תיאור פעולת N_L על קלט x

(1) N_L בודקת אם x מהצורה $x = \langle M \rangle$ (האם x קידוד חוקי של מ"ט).

אם לא $\Leftarrow N_L$ דוחה את x .

(2) N_L מנחשת מילה $w \in \Sigma^*$.

(3) N_L מסמלצת את M על w .

(א) אם M עצרה וקיבלה את w אז N_L מקבלת.

(ב) אם M עצרה ודחתה אז N_L דוחה.

הוכחת נכונות המכונה N_L :

יש להוכיח כי אכן מתקיים $L = L(N_L)$.
לשם כך נוכיח כי מתקיים

$$\begin{aligned} x \in L &\Rightarrow x \in L(N_L), \\ x \notin L &\Rightarrow x \notin L(N_L), \end{aligned} \quad (\text{ז"א } N_L \text{ דוחה את } x \text{ או לא עוצרת על } x \text{ או נתקעת})$$

$$\underline{x \in L \Rightarrow x \in L(N_L)}$$

• $x \in L \Leftarrow x = \langle M \rangle$ ו- $L(M) \neq \emptyset$.

• \Leftarrow קיימת $w \in \Sigma^*$ כך ש- $w \in L(M)$.

• \Leftarrow קיים ניחוש $w \in \Sigma^*$ שך שבריצה M על w , M תקבל את w , ולכן N_L תקבל את $x = \langle M \rangle$ לפי שלב 3.

• \Leftarrow קיים חישוב של N_L המקבל את $x = \langle M \rangle$.

• $\Leftarrow x \in L(N_L)$.

$$\underline{x \notin L \Rightarrow x \notin L(N_L)}$$

$x \notin L \Leftarrow$ שני מקרים אפשריים.

מצב (1) $\langle M \rangle \neq x$, כלומר x אינה קידוד חוקי של מ"ט.
 $x \notin L(N_L) \Leftarrow$ (לפי שלב 1) דוחה את x

מצב (2) $x = \langle M \rangle$ ו- $L(M) = \emptyset$.

- במקרה זה לא קיימת w (בכל אורך שהוא) המתקבלת ע"י M .
- ז"א \nexists ניחוש של $w \in \Sigma^*$ המתקבלת ע"י M .
- \Leftarrow לכל $w \in \Sigma^*$, M לא מקבלת את w .
- * אם M דוחה את $w \Leftarrow N_L$ דוחה את x (לפי שלב 3).
- * אם M לא עוצרת על $w \Leftarrow$ הסימולציה לא מסתיימת ו- N_L לא עוצרת על x .
- לכן N_L לא מקבלת את $x \Leftarrow x \notin L(N_L)$.

שאלה 2

2) \Rightarrow 1) נניח ש- $A \leq_m B$

ז"א

3) \Rightarrow 2)

4) \Rightarrow 3)

1) \Rightarrow 4)

שאלה 3 נוכיח כי

$$A_{TM} \leq_m L.$$

נניח בשלילה \exists מ"ט M_L שמכריעה את L .
 נבנה מ"ט R שמכריעה את A_{TM} :

$R =$ " על הקלט $\langle M, w \rangle$:

- בונים קידוד של מ"ט חדשה $\langle M' \rangle$ כמפורט להלן.

$M' =$ " על הקלט x :

* אם $w \neq x \rightarrow \text{rej}$.

* אם $x = w$ מריצים M על w .

– אם M מקבלת אז M' מקבלת.

– אחרת M' דוחה.

- בונים קידוד של DFA חדשה $\langle D \rangle$ כך ש- $L(D) = L(w) = \{w\}$.

- מריצים M_L על $\langle M', D \rangle$ ומחזירים את הפלט של M_L .

אם $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$ אז M מקבלת את w .
 לכן M' מקבלת את w ודוחה כל מילה אחרת.
 לכן $L(M') = \{w\}$
 לכן $L(M') = L(D)$
 לכן M_L מקבלת $\langle M', D \rangle$.
 לכן R מקבלת את $\langle M, w \rangle$.

אם $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$ אז M לא מקבלת את w .
 לכן $L(M') = \emptyset$
 לכן $L(M') \neq L(D)$ מסיבה לכך ש- $L(D) = \{w\}$.
 לכן M_L דוחה את $\langle M', D \rangle$ ולכן R דוחה את x .

שאלה 4 רמז:

$$E_{TM} \leq_m L.$$

שאלה 6 הטענה לא נכונה.