

שיעור 13

סיבוכיות מקום ושלמות ב PSPACE

13.1 הגדרה של סיבוכיות מקום

הגדרה 13.1 סיבוכיות מקום של מכונת טיורינג

הסיבוכיות מקום של מ"ט M על קלט w היא פונקציה $f(|w|)$ השווה למספר התאי סרט לכל היותר של המכונה M שבהם נעשה שימוש בחישוב של M על w .

הגדרה 13.2 המחלקה $SPACE(f(n))$

מחלקת $SPACE(f(n))$ היא אוסף כל השפות L עבורן קיימת מכונת טיורינג דטרמיניסטית M שמכריעה אותה כך ש:

על כל קלט w באורך $n = |w|$, המכונה M משתמשת לכל היותר $O(f(n))$ תאי סרט.

. $\{ \exists \text{ מ"ט } M \text{ שמכריעה } L \text{ ומשתמשת לכל היותר ב- } O(f(n)) \text{ תאי סרט.} \mid L \in SPACE(f(n)) \}$

דוגמה 13.1

נראה כי ניתן לפתור את הבעיה SAT ע"י אלגוריתם שהוא רץ במקום ליניארי. כלומר:

$$SAT \in SPACE(n).$$

תהי ϕ נוסחה בוליאנית כלשהי. נסמן $n = |\phi|$ ונסמן ב- m את מספר המשתנים ב- ϕ . נגדיר מכונה M שפועלת כך:

$$M = \text{על כל קלט } \langle \phi \rangle$$

(1) M רושמת את המחרוזת $\langle \phi \rangle$ על סרט הקלט.

(2) לכל השמה a_1, a_2, \dots, a_m (כאשר $a_i \in \{0, 1\}$ הוא הערך הנוכחי של x_i):

(א) M רושמת את מחרוזת של ההשמה $a_1 a_2 \dots a_m$ על סרט העבודה.

(ב) M מחשבת את הערך של ϕ עבור ההשמה הנוכחית a_1, \dots, a_m ע"י סריקה של הקלט $\langle \phi \rangle$ שרשום על סרט הקלט.

(ג) אם מתקבל $\phi(a_1, \dots, a_m) = 1$ אז M מקבלת.

(3) אם עבור כל ההשמות התקבל $\phi(a_1, \dots, a_m) = 0$ אז M דוחה.

מכאן אנחנו רואים כי המכונה M_1 רצה במקום ליניארי. בפרט:

• M שומרת על סרט העבודה את ההשמה $a_1 \dots a_m$ וזה נדרש $O(m)$ תאים.

• המספר המשתנים, m הוא n לכל היותר.

• לכן M רצה במקום $O(n)$.

לפיכך:

$$SAT \in SPACE(n).$$

הגדרה 13.3 המחלקה $NSPACE(f(n))$

מחלקת $NSPACE(f(n))$ היא אוסף כל השפות L עבורן קיימת מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית N שמכריעה אותה כך ש:
על כל קלט w באורך $n = |w|$ המכונה N משתמשת לכל היותר $O(f(n))$ תאי סרט מתוך כל המסלולי חישוב של N .

$$NSPACE(f(n)) = \{L \mid \exists \text{ מכריעה } N \text{ ומשתמשת לכל היותר ב- } O(f(n)) \text{ תאי סרט.}\}$$

דוגמה 13.2

תהי ALL_{NFA} השפה הבאה:

$$ALL_{NFA} = \{\langle A \rangle \mid L(A) = \Sigma^* \text{ עבורו } NFA \text{ הוא } A\}.$$

הוכיחו כי $ALL_{NFA} \in NSPACE(n)$.

פתרון:

הפתרון מתבוסס על זה שזה פשוט יותר לבנות אלגוריתם המכריע את השפה המשלימה:

$$\overline{ALL_{NFA}} = \{\langle A \rangle \mid w \in \Sigma^* \text{ עבורה } A \text{ דוחה } w\}.$$

נשתמש במשפט מרכזי כדי לבנות אלגוריתם שמכריע את $\overline{ALL_{NFA}}$:

משפט 13.1

אם $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ הוא NFA וקיים מילה w שנדחה ע"י M אז האורך המילה $|w| \leq 2^q$ כאשר $q = |Q|$ הוא המספר המצבים של M , וקיימים אינסוף מלים שנדחות ע"י M .

לפני שנתאר את האלגוריתם עצמו, נגדיר סימון שנשתמש בו בבניית האלגוריתם. נניח ש- $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ היא מכונת NFA כלשהי. תהי $P(Q)$ הקבוצת החזקה של Q . עבור כל NFA הפונקציה המעברים היא מהצורה

$$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow P(Q).$$

בהינתן מילה $w = a_1 a_2 \dots a_n$ כאשר $a_i \in \Sigma$ הוא התו ה- i של המילה, $1 \leq i \leq n$. נגדיר את הסדרה הבאה:

$$S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$$

כאשר

$$S_0 \triangleq \{q_0\}, \quad S_{i+1} \triangleq \delta(S_i, a_i),$$

כאשר $S_i \in P(Q)$ לכל $0 \leq i \leq n$.

בניית האלגוריתם

נבנה אלגוריתם לא-דטרמיניסטי, N המכריע את $\overline{ALL_{NFA}}$ באופן הבא:

$N =$ "על כל קלט x :

(1) בודקת אם $x = \langle M \rangle$, כאשר $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ היא מכונת NFA .

• אם לא $N \Leftarrow$ תדחה.

(2) יהי $q = |Q|$ מספר המצבים של M . נגדיר $S_0 = \{q_0\}$.

(3) N מבצעת את הלולאה הבאה:

לכל $0 \leq i \leq 2^q - 1$

(א) בוחרת באופן אי-דטרמיניסטי תו קלט $a_i \in \Sigma$.

(ב) מחשבת

$$S_{i+1} = \delta(S_i, a_i).$$

(ג) אם $N \Leftarrow S_{i+1} \cap F \neq \emptyset$ תדחה.

בפועל N בודקת את התנאי הזה ע"י לסמן את כל המצבים שב- S_{i+1} . אם אחד מהמצבים המסומנים הוא מצב קבלה אז N תדחה.

(4) אם בסיום הלולאה לא היה מצב-קבלה באף אחת מן הקבוצות S_i אז N תקבל. "

אם $x \in \overline{ALL_{NFA}}$

$\Leftarrow \langle A \rangle = x$, כאשר A היא מכונת NFA . וקיימת מילה $w \in \Sigma^*$ כך ש- A תדחה.

\Leftarrow קיימת מילה w' באורך לכל היותר 2^q ש- A תדחה.

\Leftarrow קיימת ריצה של N שבה N בוחרת את התווים של w' בלולאה.

\Leftarrow במהלך הריצה של A על w' , אין מצב קבלה באף אחת מן הקבוצות S_i .

$\Leftarrow N$ לא דחתה עד סוף הלולאה.

\Leftarrow בסופה N תקבל.

אם $x \notin \overline{ALL_{NFA}}$ אז שני מקרים:

(מקרה 1) $N \Leftarrow x \neq \langle A \rangle$ תדחה בשלב 1.

(מקרה 2) $x = \langle A \rangle$ ו- $L(A) = \Sigma^*$

\Leftarrow לכל מילה $w \in \Sigma^*$, קיים שלב שבו A נמצא במצב קבלה.

\Leftarrow בכל ריצה של N , קיימת איטרציה i עבורה $S_i \cap F \neq \emptyset$.

\Leftarrow באיטרציה זו N תדחה.

\Leftarrow בכל ריצה N תדחה.

$\Leftarrow N$ דוחה את x .

סיבוכיות מקום

• נסמן ב- $n = |\langle M \rangle|$ את אורך הקלט, וב- $q = |Q|$ את מספר המצבים של ה- NFA .

• כל מצב וכל מעבר של M מופיעים בקידוד, מתקיים $q = O(n)$.

• במהלך כל ריצה, N שומרת רק את המידע הבא:

- * הקבוצה הנוכחית $S_i \subseteq Q$ של מצבים אפשריים. לפועל N שומרת S_i בוקטור ביטים באורך q לכל היותר.
- * מונה של האיטרציות הלולאה עד 2^q , המאוחסן בייצוג בינארי ודורש $O(q)$ ביטים.
- * תו קלט אחד הנבחר באופן אי-דטרמיניסטי בכל איטרציה, ומשתני עזר לחישוב S_{i+1} , הדורשים מקום קבוע או לינארי ב- q .

לפיכך סיבוכיות המקום הכוללת של N היא

$$O(q) = O(n) .$$

לפיכך האלגוריתם N פועל במקום לינארי.

שימו לב: N לינארי במקום אף על פי שזמן הריצה שלו עלול להיות אקספוננציאלי.

13.2 משפט סביץ'

משפט 13.2 משפט סביץ'

לכל פונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$, אם $f(n) \geq n$ אז

$$NSPACE(f(n)) \subseteq SPACE(f^2(n)) .$$

רעיון ההוכחה:

הוכחה:

13.3 המחלקה PSPACE

הגדרה 13.4 סיבוכיות מקום של בעיה/שפה

בהינתן קלט w באורך $n = |w|$. אומרים כי ניתן להכריעה שפה L בזמן $f(n)$ אם קיימת מ"ט M המכריעה את L כך שלכל $w \in \Sigma^*$, הסיבוכיות מקום של M על w חסום ע"י $f(|w|)$.

הגדרה 13.5 PSPACE

PSPACE היא מחלקת כל הבעיות שניתן לפתור על ידי מכונת טיורינג דטרמיניסטית תוך שימוש בסיבוכיות מקום פולינומית.

הגדרה 13.6 NPSPACE

NPSPACE היא מחלקת כל הבעיות שניתן לפתור על ידי מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית תוך שימוש בסיבוכיות מקום פולינומית.