

# שיעור 1

## סדרות של מספרים

### 1.1 הגדרה של סדרה של מספרים

סדרה של מספרים ממשיים היא רשימה מסודרת (ממוספרת) של מספרים ממשיים.

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

סימון:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{או} \quad (a_n)_{n=1}^{\infty}$$

#### הגדרה 1.1 סדרות של מספרים

סדרה של מספרים ממשיים היא פונקציה

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

נסמן

$$a_n := a(n).$$

#### 1.1 דוגמה

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, \dots$$

$$a_n = 1 \quad \text{סדרה קבועה:}$$

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, \dots$$

$$a_n = n$$

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{הסדרה ההרמונית:}$$

$$a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, \dots$$

$$a_n = (-1)^n$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{5}, a_3 = -\frac{1}{10}, \dots$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$$

### 1.2 התכנסות של סדרות מספרים

$L$  הוא הגבול של הסדרה  $a_n$  אם איברי  $a_n$  הולכים ומתקרבים ל  $L$ .

#### הגדרה 1.2 גבול של סדרה

תהי  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  סדרה. אומרים כי מספר  $L$  הוא הגבול של  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  אם לכל  $\epsilon > 0$  קיים  $N > 0$  כך שלכל  $n > N$

$$|a_n - L| < \epsilon.$$

מתקיים.

נסמן את הגבול של סדרה ב

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n .$$

ז"א  $a_n$  יהיו קרובים כרצוננו ל-  $L$  עבור  $n$  מספיק גדול.

שימו לב כי  $N$  תלוי ב-  $\epsilon$ .

### הגדרה 1.3 התכנסות של סדרה

תהי  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  סדרה. אם הגבול של  $(a_n)$  קיים (לפי הגדרה 1.2) אז אומרים כי הסדרה **מתכנסת**.

אם הגבול של  $(a_n)$  לא קיים אז אומרים כי הסדרה **מתבדרת**.

### דוגמה 1.2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 .$$

**הוכחה:** הסדרה היא  $a_n = \frac{1}{n}$  והגבול הוא  $L = 0$ .

נניח כי  $\epsilon > 0$ . נבחר  $N$  כך ש-  $N > \frac{1}{\epsilon}$ .

עבור  $n > N$  מתקיים:

$$|a_n - L| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon .$$

מש"ל.

### דוגמה 1.3

הוכיחו כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c .$$

כאן  $a_n = c$  סדרה קבועה והגבול הוא  $L = c$  קבוע כלשהו.

**הוכחה:** נניח כי  $\epsilon > 0$ . נבחר  $N = 1$ . אז לכל  $n > N$  מתקיים:

$$|a_n - L| = |c - c| = 0 < \epsilon .$$

כנדרש.

### דוגמה 1.4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 .$$

כאן, הסדרה היא  $a_n = \frac{n}{n+1}$  והגבול הוא  $L = 1$ .

**הוכחה:** נניח כי  $\epsilon > 0$ . נבחר  $N$  כך ש-

$$N > \frac{1}{\epsilon} - 1.$$

ז"א

$$N > \frac{1}{\epsilon} - 1 \Rightarrow N + 1 > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{N + 1} < \epsilon.$$

לכל  $n > N$  מתקיים:

$$|a_n - L| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n - (n+1)}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} < \epsilon.$$

כנדרש. ■

## לא כל סדרה מתכנסת לגבול!

### דוגמה 1.5

הסדרה  $a_n = (-1)^n$  לא מתכנסת.

**הוכחה:** נוכיח דרך השלילה. נניח כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  עבור  $L$  סופי.

ז"א לכל  $\epsilon > 0$ , קיים  $N > 0$  כך שלכל  $n > N$  מתקיים  $|a_n - L| < \epsilon$ .

נקבע  $\epsilon = \frac{1}{2}$ . מההנחה קיים  $N > 0$  כך שלכל  $n > N$  מתקיים  $|a_n - L| < \frac{1}{2}$ .

בפרט,  $|a_{2N+1} - L| < \frac{1}{2}$  וגם  $|a_{2N} - L| < \frac{1}{2}$ .

ז"א  $|1 - L| < \frac{1}{2}$  וגם  $|-1 - L| < \frac{1}{2}$ . לפיכך

$$|1 - L| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < 1 - L < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < -L < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < L < \frac{3}{2}$$

$$|-1 - L| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < -1 - L < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < -L < \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < L < -\frac{1}{2}.$$

סתירה. ■

### דוגמה 1.6

הסדרה  $a_n = (-1)^n \cdot n$  לא מתכנסת.

**הוכחה:** נוכיח דרך השלילה. נניח כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  עבור  $L$  סופי.

ז"א לכל  $\epsilon > 0$ , קיים  $N > 0$  כך שלכל  $n > N$  מתקיים  $|a_n - L| < \epsilon$ .

נקבע  $\epsilon = 1$ . מההנחה קיים  $N \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n > N$  מתקיים  $|a_n - L| < 1$ .

בפרט,  $|a_{2N+1} - L| < 1$  וגם  $|a_{2N} - L| < 1$ .

ז"א  $|2N - L| < 1$  וגם  $|-2N - 1 - L| < 1$ . לפיכך

$$|2N - L| < 1 \Rightarrow -1 < 2N - L < 1 \Rightarrow -2N - 1 < -L < -2N + 1 \Rightarrow 2N - 1 < L < 2N + 1$$

ו

$$|-2N - 1 - L| < 1 \Rightarrow -1 < -2N - 1 - L < 1 \Rightarrow 2N < -L < 2N + 2 \Rightarrow -2N - 2 < L < -2N.$$

סתירה.

## משפט 1.1 יחידות של גבול

אם לסדרה קיים גבול אז הוא יחיד.

**הוכחה:** נוכיח המשפט דרך השלילה.

נניח כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1$  ו-  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_2$  עבור  $L_1 \neq L_2$ .

$$\text{נבחר } \epsilon = \frac{|L_2 - L_1|}{2}.$$

$(a_n)$  מתכנסת ל-  $L_1$ . לכן קיים  $N_1 \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n > N_1$ , מתקיים  $|a_n - L_1| < \epsilon$ .

$(a_n)$  מתכנסת ל-  $L_2$ . לכן קיים  $N_2 \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n > N_2$ , מתקיים  $|a_n - L_2| < \epsilon$ .

$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - a_n) + (a_n - L_2)| \leq |L_1 - a_n| + |a_n - L_2| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |L_2 - L_1|.$$

ז"א קיבלנו ש  $|L_1 - L_2| < |L_2 - L_1|$ . סתירה.

## משפט 1.2 אריתמטיקה חשבון של גבולות

תהיינה  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  ו-  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  סדרות כך ש  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  ו  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ .

יהיה  $c \in \mathbb{R}$  קבוע. התכונות הבאות מתקיימות:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = c \cdot A$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \pm B$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) = A \cdot B$$

4. אם  $B \neq 0$  (ולכן  $b_n \neq 0$  עבור  $n$  מספיק גדול) אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{B}.$$

**הוכחה:**

1. יהי  $\epsilon > 0$  ו-  $c \neq 0$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \text{ (נתון), אז קיים } N \in \mathbb{N} \text{ כך שלכל } n > N \text{ מתקיים } |a_n - A| < \frac{\epsilon}{|c|}$$

לכן

$$|ca_n - cA| = |c| \cdot |a_n - A| < |c| \cdot \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon.$$

■

2. יהי  $\epsilon > 0$ .

$a_n$  מתכנסת ל  $A$  אז קיים  $N_A \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n > N_A$  מתקיים  $|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$ .

$b_n$  מתכנסת ל  $B$  אז קיים  $N_B \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n > N_B$  מתקיים  $|b_n - B| < \frac{\epsilon}{2}$ .

יהי  $N$  הגדול מבין  $N_A$  ו  $N_B$ . אז לכל  $n > N$ ,

$$|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2} \text{ ו } |b_n - B| < \frac{\epsilon}{2}$$

לכן לכל  $n > N$

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) - (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

■

3. יהי  $\epsilon > 0$ .

$a_n$  מתכנסת ל  $A$  אז קיים  $N_A \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n > N_A$  מתקיים  $|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2|B|}$ .

$b_n$  מתכנסת ל  $B$  אז קיים  $N_B \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n > N_B$  מתקיים  $|b_n - B| < \frac{\epsilon}{2A'}$  כאשר  $|a_n| < A'$  לכל  $n$  (מתכנסת ולכן חסומה לפי משפט 1.4 למטה).

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \\ &= |a_n (b_n - B) + B (a_n - A)| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - B| + |B| \cdot |a_n - A| \\ &< A' \cdot \frac{\epsilon}{2A'} + |B| \cdot \frac{\epsilon}{2|B|} = \epsilon \end{aligned}$$

■

4. בעזרת 3, מספיק להראות כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$ .

יהי  $\epsilon > 0$ .

$b_n$  מתכנסת אז הסדרה חסומה (ראו משפט 1.4 למטה).

ז"א קיים  $m \in \mathbb{R}$  כך ש  $|b_n| > m$ .

$b_n$  מתכנסת, אז קיים  $N$  כך שלכל  $n > N$  מתקיים

$$|b_n - B| < m \cdot |B| \epsilon$$

ואז

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = \left| \frac{B - b_n}{b_n \cdot B} \right| < \frac{m \cdot |B| \cdot \epsilon}{|b_n| \cdot |B|} < \frac{m \cdot |B| \cdot \epsilon}{m \cdot |B|} = \epsilon .$$

■

## דוגמה 1.7

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right)^2 = 0^2 = 0 .$$

## דוגמה 1.8

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n + 9}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 7 + \frac{9}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 7 + 9 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 7 + 9 \cdot 0 = 7 .$$

## דוגמה 1.9

תהיינה  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  סדרה מתכנסת ו-  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  סדרה מתבדרת. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

$(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$  מתבדרת.

### פתרון:

טענה נכונה. הוכחה

נוכיח דרך השלילה. נניח ש  $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת ל-  $L$  (סופי). נתון ש  $(a_n)$  מתכנסת. לכן אם  $(a_n)$  מתכנסת ל-  $A$ , אז לפי תכונה 2 במשפט 1.2,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} ((a_n + b_n) - a_n) = L - A$$

כאשר  $L - A$  קבוע סופי. ז"א קיבלנו ש  $(b_n)$  מתכנסת, בסתירה לכך ש-  $(b_n)$  מתבדרת.

## דוגמה 1.10

תהיינה  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  סדרה מתכנסת ו-  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  סדרה מתבדרת. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

$(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$  מתבדרת.

### פתרון:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$b_n = n \text{ ו- } a_n = \frac{1}{n}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  מתכנסת ו-  $(b_n)$  מתבדרת.

$$a_n \cdot b_n = 1$$

לפיכך

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 1 .$$

מתכנסת.

### 1.11 דוגמה

תהיינה  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  סדרה מתכנסת ו-  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  סדרה מתבדרת. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

$(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת.

### פתרון:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$b_n = n^2 \text{ ו- } a_n = \frac{1}{n}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{n}$  מתכנסת ו-  $b_n = n^2$  מתבדרת.

$$a_n \cdot b_n = n$$

מתבדרת.

עוד דוגמה נגדית:

$$b_n = n^3, a_n = \frac{1}{n}$$

### משפט 1.3 משפט הסנדוויץ'

תהיינה  $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}, (c_n)_{n=1}^{\infty}$  סדרות כך ש

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$$

ונניח כי קיים  $N \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n > N$  מתקיים

$$a_n \leq b_n \leq c_n .$$

אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L .$$

הוכחה: יהי  $\epsilon > 0$ .

מההנחה קיים  $N \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n > N$  מתקיים

$$|a_n - L| < \epsilon, \quad |c_n - L| < \epsilon.$$

ז"א

$$-\epsilon < a_n - L < \epsilon, \quad -\epsilon < c_n - L < \epsilon.$$

לכן

$$-\epsilon < a_n - L \leq b_n - L \leq c_n - L < \epsilon \Rightarrow |b_n - L| < \epsilon.$$

## 1.12 דוגמה

חשבו את  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$  בעזרת כלל הסנוויץ'.

פתרון:

לכל  $n \geq 1$ ,

$$1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

מצד שמאל,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

מצד ימין,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

ז"א  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$  ולכן לפי כלל הסנדוויץ':

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

## 1.3 סדרות חסומות

### הגדרה 1.4 סדרות חסומות

1. אומרים כי סדרה  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  חסומה מלמעלה אם קיים  $M \in \mathbb{R}$  כך שלכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים  $a_n \leq M$ .

$M$  תקרא חסם עליון של הסדרה.

2. אומרים כי סדרה  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  חסומה מלמטה אם קיים  $m \in \mathbb{R}$  כך שלכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים  $a_n \geq m$ .

$m$  תקרא חסם תחתון של הסדרה.

3. אומרים כי סדרה  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  חסומה אם היא חסומה מלמעלה וגם מלמטה. במילים אחרות, אם קיים  $K > 0$  כך שלכל  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|a_n| \leq K.$$

כל מספר  $K$  כזה נקרא חסם מוחלט של הסדרה.



### דוגמה 1.13

לכל אחת מהסדרות הבאות, קבעו אם היא חסומה מלמעלה, חסומה מלמטה או חסומה.

$$1. \quad a_n = \frac{1}{n}$$

$$2. \quad a_n = n$$

$$3. \quad a_n = b \cdot q^n \text{ עבור } -1 < q < 1.$$

$$4. \quad a_n = (-1)^n n$$

$$5. \quad a_n = n^2 - n + 3$$

### פתרון:

$$1. \quad a_n = \frac{1}{n} \text{ לכל } n:$$

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$$

לכן  $a_n$  חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה, ולכן חסומה. ■

$$2. \quad a_n = n \text{ לכל } n:$$

$$a_n = n \geq 0.$$

לכן  $a_n$  חסומה מלמטה.

אבל היא אינה חסומה מלמעלה. אכן לכל  $M \in \mathbb{R}$  ניתן למצוא  $n \in \mathbb{N}$  כך ש  $a_n = n > M$ .  
בפרט, גם לא חסומה. ■

$$3. \quad -1, q < 1, a_n = b \cdot q^n.$$

לכל  $n$ :

$$|a_n| = |bq^n| = |b| \cdot |q|^n \leq b$$

ולכן הסדרה חסומה (גם מלמעלה וגם מלמטה). ■

$$4. \quad a_n = (-1)^n n$$

לא חסומה מלמעלה:

הרי לכל  $M \in \mathbb{R}$  קיים  $n \in \mathbb{N}$  כך ש  $a_n > M$ .

לא חסומה מלמטה.

הרי לכל  $m \in \mathbb{R}$  קיים  $n \in \mathbb{N}$  כך ש  $a_n < m$ .

לפיכך הסדרה לא חסומה. ■

$$a_n = n^2 - n + 3 \quad .5$$

$$n^2 \geq n \Rightarrow n^2 - n \geq 0 \Rightarrow n^2 - n + 3 \geq 3 \Rightarrow a_n \geq 3$$

ז"א הסדרה חסומה מלמטה.

$$a_n = n^2 - n + 3 = n^2 - 2n + 2 + n = (n-1)^2 + 2 + n$$

$$(n-1)^2 \geq 0 \Rightarrow (n-1)^2 + 3 \geq 3 \Rightarrow (n-1)^2 + 2 + n \geq 2 + n \Rightarrow a_n \geq 2 + n$$

ז"א  $a_n > n$  לכל  $n$ .

לכן לכל  $M \in \mathbb{R}$  קיים  $n \in \mathbb{N}$  כך ש  $a_n > M$ . לכן הסדרה אינה חסומה מלמעלה.

לכן הסדרה גם לא חסומה. ■

## 1.4 סדרות מונוטוניות

### הגדרה 1.5 סדרות מונוטוניות

1. סדרה  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  היא מונוטונית עולה אם קיים  $N \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n \geq N$  מתקיים

$$a_{n+1} \geq a_n .$$

2. סדרה  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  היא מונוטונית עולה ממש אם קיים  $N \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n \geq N$  מתקיים

$$a_{n+1} > a_n .$$

3. סדרה  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  היא מונוטונית יורדת אם קיים  $N \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n \geq N$  מתקיים

$$a_{n+1} \leq a_n .$$

4. סדרה  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  היא מונוטונית יורדת ממש אם קיים  $N \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n \geq N$  מתקיים

$$a_{n+1} < a_n .$$

5. סדרה  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  היא מונוטונית אם היא מונוטונית עולה או יורדת.

6. סדרה  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  היא מונוטונית ממש אם היא מונוטונית עולה ממש או יורדת ממש.

### דוגמה 1.14

לכל אחת מהסדרות הבאות, קבעו אם היא מונוטונית.

$$a_n = \frac{1}{n} \quad .1$$

$$a_n = n \quad .2$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad .3$$

$$a_n = \frac{n^2}{2^n} \quad .4$$

**פתרון:**

$$1. \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n \quad \text{לכל } n.$$

ולכן הסדרה יורדת ממש. ■

$$2. \quad a_{n+1} = n+1 > n = a_n \quad \text{לכל } n.$$

לכן הסדרה עולה ממש. ■

$$3. \quad a_3 = -\frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{2}, a_1 = -1$$

$$a_1 < a_2 > a_3$$

באופן כללי,

$$a_{2n+1} < 0, \quad a_{2n} > 0.$$

לכן הסדרה לא מונוטונית. ■

.4

$$a_n = \frac{n^2}{2^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}.$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \left( \frac{n+1}{n} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^2$$

לכל  $n \geq 3$ :

$$1 + \frac{1}{n} \leq \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^2 \leq \frac{16}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^2 \leq \frac{8}{9} < 1.$$

ז"א לכל  $n \geq 3$  מתקיים

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \forall n \geq 3.$$

ז"א הסדרה יורדת ממש החל מ  $n = 3$ . ■

## דוגמה 1.15

בדקו האם הסדרה  $a_n = \frac{n^2 + 1}{n + 2}$  חסומה מלמעלה או חסומה מלמטה, וקבעו אם הסדרה מונוטונית.

**פתרון:**

שיטה 1:

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{n + 2} = \frac{n(n + 2) - 2n + 1}{n + 2} = n + \frac{-2n + 1}{n + 2} = n + \frac{-2(n + 2) + 5}{n + 2} = n - 2 + \frac{5}{n + 2}$$

לפיכך  $a_n \geq -2$  לכן  $a_n$  חסומה מלמטה.

בנוסף  $a_n \geq n - 2$  אז  $a_n$  לא חסומה מלמעלה (לכל  $M \in \mathbb{R}$  קיים  $n \in \mathbb{N}$  כך ש  $a_n > n - 2 > M$ ).

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{(n+1)^2+1}{n+3}\right)}{\left(\frac{n^2+1}{n+2}\right)} = \frac{((n+1)^2+1)(n+2)}{(n^2+1)(n+3)} = \frac{(n^2+2n+2)(n+2)}{(n^2+1)(n+3)} = \frac{n^3+4n^2+6n+4}{n^3+3n^2+n+3}$$

$$n^3 + 4n^2 + 6n + 4 > n^3 + 3n^2 + n + 3$$

לכל  $n \geq 0$  לכן

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

לכל  $n \geq 0$ , ולכן הסדרה עולה ממש.

## שיטה 2:

נגדיר פונקציה  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2}$ ,  $x \neq -2$ . אנו מעוניינים בערכים  $a_n = f(n)$  ולכן נחקור את הפונקציה בקטע  $[1, \infty)$ .

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - 1 \cdot (x^2 + 1)}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x - 1}{(x+2)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}.$$

$$\text{ז"א } f'(x) = (x - (-2 + \sqrt{5}))(x - (-2 - \sqrt{5}))$$

| $x$     | $x < -2 - \sqrt{5}$ | $-2 - \sqrt{5} < x < -2$ | $-2 < x < -2 + \sqrt{5}$ | $x > -2 + \sqrt{5}$ |
|---------|---------------------|--------------------------|--------------------------|---------------------|
| $f'(x)$ | +                   | -                        | -                        | +                   |
| $f(x)$  | $\nearrow$          | $\searrow$               | $\searrow$               | $\nearrow$          |

כלומר  $f(x)$  עולה ממש בקטע  $[1, \infty)$  ולכן גם  $a_n$  עולה ממש.

בנוסף  $f(x) \geq f(-2 + \sqrt{5})$  לכל  $x \geq -2 + \sqrt{5}$ . כלומר  $f(x)$  חסומה מלמטה ולכן גם  $a_n$  חסומה מלמטה.

## למה 1.1 גבול של סדרה שווה לגבול של הפונקציה

תהי  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L \text{ אז } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \text{ אם}$$

כאשר  $n \in \mathbb{N}$ , ו  $a_n = f(n)$  סדרה.

**הוכחה:** נתון כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ . לכן לפי ההגדרה של גבול של פונקציה ב  $\infty$ , לכל  $\epsilon > 0$  קיים  $m > 0$  כך שלכל  $x > m$ ,

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

ז"א, עבור  $N \in \mathbb{N}$ , לכל  $\epsilon > 0$  קיים  $N > m > 0$  כך שלכל  $n > N$ ,

$$|f(n) - L| < \epsilon.$$

לכן, לפי הגדרה 1.2,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ .

## למה 1.2 מונוטוניות של סדרה והפוקנציה

תהי  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה.

אם  $f(x)$  מונוטונית (עולה או יורדת) אז גם  $a_n = f(n)$  מונוטונית (עולה או יורדת בהתאמה).

**הוכחה:** אם  $f(x)$  עולה מונוטונית, אז לכל  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1).$$

עבור  $n \in \mathbb{N}$  נציב  $x_1 = n$ ,  $x_2 = n + 1$ . לכן

$$f(n + 1) \geq f(n).$$

אם  $f(x)$  יורדת מונוטונית, אז לכל  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$x_2 < x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1).$$

עבור  $n \in \mathbb{N}$  נציב  $x_1 = n$ ,  $x_2 = n + 1$ . לכן

$$f(n + 1) \leq f(n).$$

## דוגמה 1.16

תהי  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  סדרה. הוכיחו או הפריכו: אם  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  חסומה אז היא מתכנסת.

**פתרון:**

לא נכון. דוגמה נגדית:

$$a_n = (-1)^n \text{ חסומה:}$$

$$|a_n| = 1$$

לכל  $n$ .

$a_n$  לא מתכנסת (ראו דוגמה 1.5 לעיל).

## משפט 1.4

כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

**הוכחה:** מסמן  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .נניח כי  $\epsilon = 1$ . קיים  $N \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n > N$  מתקיים  $|a_n - L| < \epsilon$ .  
ז"א

$$-1 < a_n - L < 1 \Rightarrow L - 1 < a_n < L + 1 .$$

נסמן

$$M = \max \{a_1, a_2, \dots, a_N, L + 1\} , \quad m = \min \{a_1, a_2, \dots, a_N, L - 1\} ,$$

ואז לכל  $n \leq N$ 

$$m \leq a_n \leq M .$$

לכן  $(a_n)$  חסומה.

## דוגמה 1.17

נניח כי  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  סדרה. הוכיחו או הפריכו:אם  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  חסומה אז היא מתכנסת.**פתרון:**טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $a_n = (-1)^n$  חסומה ולא מתכנסת:•  $|a_n| = 1$  לכל  $n$  ולכן  $(a_n)$  חסומה.•  $(a_n)$  לא מתכנסת (ראו דוגמה 1.5 למעלה).

## 1.5 התכנסות של סדרות חסומות ומונוטוניות

## משפט 1.5 סדרה חסומה ומונוטונית מתכנסת

סדרה חסומה ומונוטונית היא מתכנסת.

**הוכחה:** נניח כי  $(a_n)$  עולה וחסומה.ז"א  $a_{n+1} > a_n$  לכל  $n$ , וקיים  $M$  כך ש  $|a_n| < M$  לכל  $n$ .נסמן ב  $L$  את החסם מלמעלה הקטן ביותר של הסדרה. נוכיח כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L . \quad (*)$$

יהי  $\epsilon > 0$ . כיוון ש  $L$  חסם עליון הקטן ביותר של  $(a_n)$ , אז קיים  $a_N$  כך ש  $L - \epsilon < a_N \leq L$ .

כיוון ש  $(a_n)$  עולה מונוטונית, אז לכל  $n > N$ , מתקיים

$$L - \epsilon < a_N \leq a_n \leq L .$$

$L < L + \epsilon$ , לכן נקבל

$$L - \epsilon < a_N \leq a_n \leq L < L + \epsilon . \quad (*)2$$

לכן לכל  $n > N$ :

$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon . \quad (*)3$$

ז"א נתון  $\epsilon > 0$  קיים  $N \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n > N$ ,

$$|a_n - L| < \epsilon .$$

ז"א  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = L$ .

### למה 1.3

תהי  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  סדרה. מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 .$$

**הוכחה:**  $\Rightarrow$

נתון  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . ז"א לכל  $\epsilon > 0$  קיים  $N \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n > N$ ,

$$|a_n - 0| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad ||a_n| - 0| < \epsilon .$$

$\Leftarrow$

נתון  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ . ז"א לכל  $\epsilon > 0$  קיים  $N \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n > N$ ,

$$||a_n| - 0| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - 0| < \epsilon .$$

### משפט 1.6

יהי  $q \in \mathbb{R}$  כך ש  $|q| < 1$ . אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 .$$

**הוכחה:**

1. אם  $q = 0$  אז  $q^n = 0$ , ולכן  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ .

2. אם  $0 < q < 1$  אז לכל  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 < q^{n+1} < q^n$$

ולכן  $(q^n)$  יורדת וחסומה. לכן לפי 1.5, הסדרה מתכנסת.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} q^n$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = q \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = q \cdot L$$

ז"א

$$(1 - q)L = 0 \quad \Rightarrow \quad L = 0.$$

3. אם  $-1 < q < 0$  אז  $0 < |q| < 1$ . לכן לפי 2,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0$  ולכן  $\lim_{n \rightarrow \infty} |q^n| = 0$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \text{ לפי למה 1.3.}$$

## דוגמה 1.18

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

# 1.6 התכנסות במובן הרחב

## הגדרה 1.6

תהיה  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  סדרה.

• אומרים כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  (שואפת לאינסוף) אם לכל  $M \in \mathbb{R}$  קיים  $N \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n > N$  מתקיים

$$a_n > M.$$

• אומרים כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  (שואפת למינוס אינסוף) אם לכל  $m \in \mathbb{R}$  קיים  $N \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n > N$  מתקיים

$$a_n > m.$$

## דוגמה 1.19

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$$

## פתרון:

לכל  $M \in \mathbb{R} > 0$  קיים  $N \in \mathbb{N}$  כך ש  $N > \frac{\ln M}{\ln 2}$ . אז לכל  $n > N$ ,

$$n > \frac{\ln M}{\ln 2} \quad \Rightarrow \quad n \ln 2 > \ln M \quad \Rightarrow \quad \ln 2^n > \ln M. \quad (\#)$$

$\ln$  עולה מונוטונית. לכן מ  $(\#)$ , לכל  $n > N$ :

$$2^n > M.$$

ז"א אומרת, מצאנו שלכל  $M > 0$  קיים  $N$  כך שלכל  $n > N$ ,

$$a_n = 2^n > M.$$



## דוגמה 1.20

הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ .

### פתרון:

לכל  $M \in \mathbb{R} > 0$  קיים  $N \in \mathbb{N}$  כך ש  $N > M$ . אז לכל  $n > N$ ,

$$n > M. \quad (*)$$

ז"א אומרת, מצאנו שלכל  $M > 0$  קיים  $N$  כך שלכל  $n > N$ ,

$$a_n = n > M.$$

## 1.7 סדרות שימושיות

| סדרה                           | עולה | יורדת | מונוטונית | חסומה | מתכנסת למספר סופי $L$ | מתכנסת במובן הרחב |
|--------------------------------|------|-------|-----------|-------|-----------------------|-------------------|
| $a_n = 1$                      | ✓    | ✓     | ✓         | ×     | ✓ ⇐                   | ✓                 |
| $a_n = n$                      | ✓    | ×     | ✓         | ×     | ×                     | ✓                 |
| $a_n = \frac{1}{n}$            | ×    | ✓     | ✓         | ✓     | ✓ ⇐                   | ✓                 |
| $a_n = (-1)^n$                 | ×    | ×     | ×         | ✓     | ×                     | ×                 |
| $a_n = \frac{(-1)^n}{n^1 + 1}$ | ×    | ×     | ×         | ✓     | ×                     | ×                 |
| $a_n = 1 - \frac{1}{n}$        | ✓    | ×     | ✓         | ✓     | ✓ ⇐                   | ✓                 |

### 1.21 דוגמה

לפי משפט 1.6,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

### 1.22 דוגמה

הסדרה  $(2^n)$  לא מתכנסת.

## 1.8 דוגמאות

### 1.23 דוגמה

הוכיחו שהסדרה

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

מתכנסת.

### פתרון:

נוכיח כי  $a_n$  ↓ מונוטונית:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right) - \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \\ &< \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = 0 \end{aligned}$$

לכן  $a_{n+1} - a_n < 0$ , ז"א  $a_{n+1} < a_n$  ולכן הסדרה ↓ מונוטונית.

נוכיח כי  $a_n$  חסומה:

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

ז"א  $a_n > \frac{1}{2}$ . הסדרה  $\downarrow$  מונוטונית, כלומר

$$a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$$

לכן

$$a_n < a_1.$$

לכן הסדרה חסומה.

סיכום:  $(a_n)$  מונוטונית יורדת וחסומה ולכן היא מתכנסת.

## דוגמה 1.24

תהי  $(a_n)$  סדרה המוגדרת ע"י רקורסיה

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad a_1 = \sqrt{2}.$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

### פתרון:

נוכיח כי  $\uparrow (a_n)$  מונוטונית ע"י אינדוקציה:

עבור  $n = 1$ ,

$$a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} = a_2$$

נניח  $a_n < a_{n+1}$  (הנחת האינדוקציה) ונוכיח  $a_{n+1} < a_{n+2}$ :

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + a_{n+1}} = a_{n+2}.$$

קבלנו  $a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow a_{n+1} < a_{n+2}$  לכן הסדרה עולה מונוטונית.

נוכיח כי  $(a_n)$  חסומה ע"י אינדוקציה:

נוכיח כי לכל  $n$ ,  $a_n < 2$ .

עבור  $n = 1$ ,

$$a_1 = \sqrt{2} < 2.$$

נניח כי  $a_n < 2$  (הנחת האינדוקציה) ונוכיח  $a_{n+1} < 2$ :

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2.$$

קבלנו  $a_n < 2 \Leftrightarrow a_{n+1} < 2$  לכן הסדרה חסומה מלמעלה. נוכיח כי היא חסומה מלמטה: הסדרה עולה מונוטונית, אז  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  לכן  $a_1 = \sqrt{2} \leq a_n$ . מצאנו הסדרה חסומה מלמעלה ומלמטה ולכן חסומה:

$$\sqrt{2} \leq a_n < 2.$$

לסיכום הסדרה עולה מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת. נחשב את גבולה: נסמן  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt{2 + L}.$$

ז"א

$$L = \sqrt{2+L} \Rightarrow L^2 = 2+L \Rightarrow L^2 - L - 2 = 0 \Rightarrow (L-2)(L+1) = 0$$

לכן  $L = -1$  או  $L = 2$ . הסדרה חיובית לכן התשובה היא  $L = 2$ .

## דוגמה 1.25

תהי  $(a_n)$  סדרה המוגדרת ע"י רקורסיה

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{3}{a_n} \right), \quad a_1 = 2.$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחסבו את גבולה.

## פתרון:

נוכיח כי  $(a_n)$  חסומה:

נשתמש בעובדה כי הממוצע החשבוני של שני מספרים חיוביים תמיד גדול או שווה לממוצע ההנדסי שלהם, כלומר

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \quad \text{לכל } a, b > 0.$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{3}{a_n}}{2} \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{3}{a_n}} = \sqrt{3}$$

ז"א  $a_n \geq \sqrt{3}$ , כלומר הסדרה חסומה מלמטה.

נוכיח כי  $\{a_n\}$  יורדת מונוטונית:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{3}{a_n} \right) < \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{3}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{2} (a_n + \sqrt{3}) < \frac{1}{2} (a_n + a_n) = a_n$$

לכן הסדרה מונוטונית יורדת.

נוכיח כי היא חסומה מלמעלה:  $(a_n)$  יורדת מונוטונית לכן  $a_n \leq a_1 = 2$  לכן הסדרה חסומה מלמעלה.

לסיכום הסדרה יורדת מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת. נחשב את גבולה: נסמן  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{3}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \left( L + \frac{3}{L} \right) = \frac{L^2 + 3}{2L}.$$

ז"א

$$2L^2 = L^2 + 3 \Rightarrow L^2 = 3 \Rightarrow L = \pm\sqrt{3}.$$

הסדרה חיובית לכן  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{3}$ .

## דוגמה 1.26

נתונה הסדרה  $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

הוכיחו כי הסדרה עולה מונוטונית, והוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

## פתרון:

הסדרה עולה מונוטונית:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = a_{n+1} .$$

הסדרה אינה חסומה:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} .$$

קיבלנו שלכל  $n$ , מתקיים  $a_n \geq \sqrt{n}$ . לכן לכל מספר ממשי  $M > 0$  קיים מספר טבעי  $N$  כך ש  $\sqrt{n} > M$  ולכן  $a_n > M$  ולכן  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

## 1.27 דוגמה

סדרה נתונה באופן רקורסיבי ע"י הכלל

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} ,$$

יחד עם התנאי ההתחלה

$$a_1 = 1 .$$

קבעו האם קיים הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ואם כן, חשבו אותו.

## פתרון:

נבדוק אם הסדרה מונוטונית וחסומה.

מונוטונית:

נוכיח כי  $(a_n)$  מונוטונית  $\uparrow$  ע"י אינדוקציה:

עבור  $n = 1$ :

$$a_2 = \sqrt{6 + a_1} = \sqrt{7} > a_1$$

נניח ש  $a_{n+1} > a_n$  (הנחת אינדוקציה). אז

$$a_{n+2} = \sqrt{6 + a_{n+1}} > \sqrt{6 + a_n} = a_{n+1} .$$

קיבלנו ש  $a_{n+2} > a_{n+1} \Leftarrow a_{n+1} > a_n$  לכן לפי אינדוקציה הסדרה עולה מונוטונית.

חסימות:

נוכיח כי  $(a_n)$  ע"י אינדוקציה:

נוכיח כי שלכל  $n$ ,  $a_n < 3$ .

עבור  $n = 1$ ,  $a_1 = 1 < 3$ .

נניח שלכל  $n$ ,  $a_n < 3$  (הנחת האינדוקציה) ונוכיח  $a_{n+1} < 3$ :

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} < \sqrt{6 + 3} = 3$$

קיבלנו שאם  $a_n < 3$  אז  $a_{n+1} < 3$ . לכן לפי אינדוקציה

$$a_n < 3$$

לכל  $n$ .

הסדרה עולה מונוטונית לכן  $a_n \geq a_1 = 1$  לכל  $n$  הסדרה חסומה:

$$1 \leq a_n < 3 .$$

לסיכום הסדרה חסומה ומונוטונית לכן היא מתכנסת.

נחשב את גבולה:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{6 + a_n} = \sqrt{6 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt{6 + L} .$$

$$L^2 = 6 + L \quad \Rightarrow \quad L^2 - L - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (L - 3)(L + 2) = 0$$

לכן  $L = 3$  או  $L = -2$  הסדרה חיובית לכן  $L = 3$ . מסקנה :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3 .$$