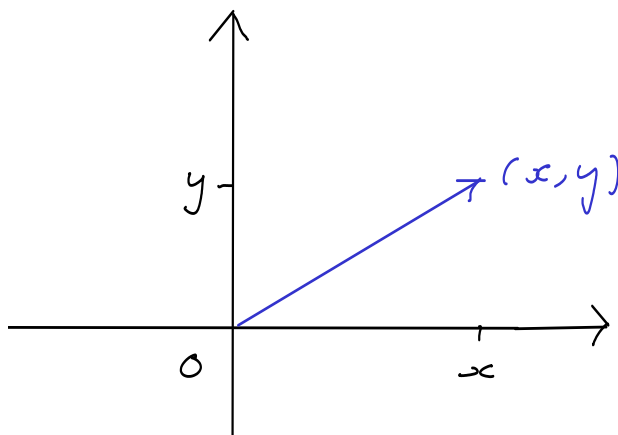


שיעור 5

מרחבים ווקטוריים

5.1 מרחבים ווקטוריים

באלגברה ווקטור במישור תמיד מתחיל בנקודה $(0, 0)$. לכן כל ווקטור במישור נקבע ע"י הנקודה הסופית שלו (x, y) .



לקבוצת כל הווקטורים במישור מסמנים \mathbb{R}^2 .

פעולות ב- \mathbb{R}^2

(1) חיבור ווקטורים:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

(2) כפל של ווקטור בסקלר:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

באופן דומה ניתן להגדיר פעולות בין ווקטורים ב- \mathbb{R}^3 :

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

(1) חיבור ווקטורים:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

(2) כפל של ווקטור בסקלר:

$$\alpha \cdot (x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

באופן כללי נגדיר מרחב ווקטורי \mathbb{R}^n :

הגדרה 5.1 מרחב ווקטורי \mathbb{R}^n

\mathbb{R}^n מוגדר להיות הקבוצה של כל הסטים מ n מספרים ממשיים:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

הפעולות הבאות מוגדרות בין ווקטורים ב- \mathbb{R}^n :

(1) חיבור ווקטורים:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

(2) כפל של ווקטור בסקלר:

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

בדוגמאות האלה הסקלרים שייכים לשדה \mathbb{R} .

באופן דומה הסקלרים יכולים להשתייך לשדה אחר, למשל $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$.

ניתן הגדרה כללית של מרחב ווקטורי מעל שדה \mathbb{F} :

הגדרה 5.2 מרחב ווקטורי מעל שדה \mathbb{F}

קבוצה לא ריקה V נקראת מרחב ווקטורי (מ"ו) מעל שדה \mathbb{F} אם מתקיימים התנאים הבאים (האיברים של V נקראים ווקטורים ואיברי \mathbb{F} נקראים סקלרים). לכל ווקטורים $u, v, w \in V$ וסקלרים $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$:

$$u + v \in V \quad (1)$$

$$\alpha u \in V \quad (2) \text{ קיים ווקטור } \alpha u \in V$$

$$u + v = v + u \quad (3) \text{ (חוק החילוף)}$$

$$(u + v) + w = u + (v + w) \quad (4) \text{ (חוק הקיבוץ)}$$

$$\bar{0} \in V \quad (5) \text{ קיים ווקטור } \bar{0} \in V \text{ (הנקרא ווקטור האפס) כך שלכל } u \in V, \text{ מתקיים } \bar{0} + u = u + \bar{0} = u$$

$$u \in V \quad (6) \text{ לכל } u \in V \text{ קיים } -u \in V \text{ כך ש- } u + (-u) = \bar{0}$$

$$(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u) \quad (7)$$

$$(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u \quad (8)$$

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v \quad (9)$$

$$1 \cdot u = u \quad (10) \text{ (כאשר } 1 \in \mathbb{F})$$

5.2 דוגמאות מרכזיות של מרחבים ווקטורים

דוגמה 5.1 \mathbb{F}^n

מרחב הווקטורים מעל שדה \mathbb{F} .

דוגמה 5.2 $\mathbb{R}^{m \times n}$

קבוצת כל המטריצות מסדר $m \times n$ עם איברים ממשיים היא מרחב ווקטורי.

לכל שתי מטריצות מסדר $m \times n$ מוגדרת פעולת חיבור וכל מטריצה ניתן להכפיל בסקלר השייך ל \mathbb{R} .

קל לבדוק שכל האקסיומות של מרחב ווקטורי מתקיימות. לכן זה מרחב ווקטורי מעל \mathbb{R} .

דוגמה 5.3 $\mathbb{C}^{m \times n}$

באופן דומה קבוצת כל המטריצות מסדר $m \times n$ עם איברים מרוכבים היא מרחב ווקטורי מעל השדה \mathbb{C} .

דוגמה 5.4 $\mathbb{F}^{m \times n}$

באופן כללי קבוצת כל המטריצות מסדר $m \times n$ עם איברים משדה \mathbb{F} היא מרחב ווקטורי מעל השדה \mathbb{F} .

דוגמה 5.5

$\mathbb{F}[x]$ קבוצת כל הפולינומים עם מקדמים השייכים לשדה \mathbb{F} , שמסומנת ב- $\mathbb{F}[x]$ היא מרחב ווקטורי.

מוגדרות פעולות חיבור פולינומים וכפל של פולינומים בסקלר השייך ל- \mathbb{F} .

כל האקסיומות של מרחב ווקטורי מתקיימות.

דוגמה 5.6 $F(\mathbb{R})$

קבוצת הפונקציות הממשיות שמסומנת ב-

$$F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}\}$$

היא מרחב ווקטורי.

מוגדרות פעולות חיבור פונקציות וכפל פונקציה בסקלר מתוך \mathbb{R} .

נגדיר חיבור וכפל בסקלר כפי שהוגדרו בחדו"א. לכל $f, g \in F(\mathbb{R})$ ולכל $\alpha \in \mathbb{R}$ נגדיר

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ (\alpha \cdot f)(x) &= \alpha \cdot f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

ווקטור האפס הוא הפונקציה $f(x) = 0$.

קבוצה זו עם הפעולות הללו היא מרחב ווקטורי.

דוגמה 5.7

נתונים הפולינומים של $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[x]$:

$$P_1 = 7 + 5x + 3x^3 + 4x^7 \in \mathbb{R}[x], \quad P_2 = 6 + 4x + 8x^2 + 3x^7 + 9x^{13} \in \mathbb{R}[x],$$

ונתון הסקלר $\alpha = 3$, חשבו את $P_1 + P_2$ ו- $\alpha \cdot P_1$.

פתרון:

אז

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= (7 + 5x + 3x^3 + 4x^7) + (6 + 4x + 8x^2 + 3x^7 + 9x^{13}) \\ &= (7 + 6) + (5 + 4)x + (0 + 8)x^2 + (3 + 0)x^3 + (4 + 3)x^7 + (0 + 9)x^{13} \in \mathbb{R}[x], \end{aligned}$$

נתון הסקלר $\alpha = 3$:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot P_1 &= 13 + 9x + 8x^2 + 3x^3 + 7x^6 + 9x^{13} \\ &= 3 \cdot (7 + 5x + 3x^3 + 4x^7) \\ &= (3 \cdot 7) + (3 \cdot 5)x + (3 \cdot 3)x^3 + (3 \cdot 4)x^7 \\ &= 21 + 15x + 9x^3 + 12x^7 \in \mathbb{R}[x]. \end{aligned}$$

■

דוגמה 5.8

נתונות הפונקציות $f, g \in F(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = 2x + 19,$$

חשבו את $(7 \cdot f)(x)$ ו- $(f + g)(x)$.

פתרון:

שתיהן פונקציות השייכות ל- $F(\mathbb{R})$.

$$(f + g)(x) = \sin x + 2x + 19.$$

מתקיים:

$$(7 \cdot f)(x) = 7 \cdot \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

דוגמה 5.9 מ

יהו ווקטור האפס של $F(\mathbb{R})$?

פתרון:

פונקצית האפס: פונקציית האפס,

$$O(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

שימו לב שאכן לכל $f \in V$ מתקיים $f + O = f$ כי

$$(f + O)(x) = f(x) + O(x) = f(x) + 0 = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$