המחלקה למדעי המחשב

תשפ"ג

אלגברה 2

מועד ג'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר,

תשפ"ג סמסטר ב'

השאלון מכיל 6 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (2 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.

==

שאלה 1 תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ המטריצה
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

א) מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

ב) הוכיחו כי A לא הפיכה.

ג) נתון הפולינום $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 3x + 3$. הוכיחו כי $f(A)$ הפיכה.

ד) יהי F מרחב מכפלה פנימית על השדה $\mathbb{R}$ של פונקציות המוגדרות על הקטע $[-\pi, \pi]$, עם מכפלה פנימית שמוגדרת
$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)g(x)$$
לכל $f, g \in F$. יהי $n \in \mathbb{Z}_+$ מספר טבעי. הוכיחו כי הקבוצת ווקטורים
$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}} \right\}$$
אורתונורמלית.

שאלה 2

א) תהי $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ מטריצות שמתחלפות, כלומר $AB = BA$. נניח כי הערכים עצמיים של A שונים זה מזה. הוכיחו כי קיים ווקטור $u \in \mathbb{R}^2$ אשר הוא ווקטור עצמי של A וגם ווקטור עצמי של B.

ב) נתונים $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, כך ש- $x, y, z, w > 0$ ו- $x + y + z + w \leq 4$. הוכיחו כי
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} \geq 4\ .$$

פתרונות

שאלה 1

א) פולינום האופייני:

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & x+2 & -10 & -2 \\ -1 & 0 & x+2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$=(x-2)\begin{vmatrix} x+2 & -10 & -2 \\ 0 & x+2 & 1 \\ 0 & -2 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$=(x-2)(x+2)\begin{vmatrix} x+2 & 1 \\ -2 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$=(x-2)(x+2)\left((x+2)(x-1)+2\right)$$

$$=(x-2)(x+2)\left(x^2+x\right)$$

$$=(x-2)(x+2)x(x+1)\ .$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=-2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=-1$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=0$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=2$ מריבוי אלגברי 1.

כל הערכים עצמיים שונים לכן המטריצה לכסינה.

<u>מרחב עצמי שייך לערך עצמי -2:</u>

$$(A+2I) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[4R_4+3R_1]{\substack{4R_2-5R_1 \\ 4R_3-R_1}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3\leftrightarrow R_4]{R_2\to\frac{1}{8}\cdot R_2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to 5R_3-8R_2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 52 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to 5R_3-8R_2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $y \in \mathbb{R}$ $\quad (x,y,z,w)=(0,y,0,0)=y(0,1,0,0),$. לפיכך:

$$V_{-2}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

כל הערכים עצמיים שונים לכן המטריצה לכסינה.

<u>מרחב עצמי שייך לערך עצמי -1:</u>

$$(A+I)=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\5&-1&10&2\\1&0&-1&-1\\-3&0&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{3R_3-R_1\\R_4+R_1}]{3R_2-5R_1}\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&-3&30&6\\0&0&-3&-3\\0&0&2&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4\to 3R_4+2R_3]{R_2\to\frac{-1}{3}\cdot R_2}\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&1&-10&-2\\0&0&-3&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to-\frac{1}{3}\cdot R_3}\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&1&-10&-2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2+2R_3}\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&1&-8&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-8&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $w \in \mathbb{R}$ $\quad (x,y,z,w)=(0,-8w,-w,w)=(0,-8,-1,1)w,$. לפיכך:

$$V_{-1}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\8\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

כל הערכים עצמיים שונים לכן המטריצה לכסינה.

<u>מרחב עצמי שייך לערך עצמי 0:</u>

$$(A+0\cdot I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{2R_3-R_1 \\ 2R_4+3R_1}]{2R_2-5R_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 20 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4\to R_4+R_3]{R_2\to \frac{-1}{4}\cdot R_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-\frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $w \in \mathbb{R}$, $(x,y,z,w) = (0, \frac{-3}{2}w, -\frac{1}{2}w, w) = (0,3,1,2)w$. לפיכך:

$$V_0 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} .$$

<u>מרחב עצמי שייך לערך עצמי 0:</u>

$$(A-2\cdot I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3\to R_4 \\ R_4\to R_1}]{R_1\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 5 & -4 & 10 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3+3R_1]{R_2\to R_2-5R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -4 & 30 & 7 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to 4R_2+7R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -16 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to 4R_1-R_3} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -16 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2+5R_3} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z,w)=(\frac{3}{2}z,\frac{-5}{4}w,-\frac{2}{5}w,w)=(-\frac{3}{5}w,\frac{-5}{4}w,-\frac{2}{5}w,w)=(12,25,8,-20)w,\quad w\in\mathbb{R}$.
לפיכך:

$$V_2=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}12\\25\\8\\-20\end{pmatrix}\right\}\ .$$

$$P=\begin{pmatrix}0&-12&0&0\\1&-25&-8&-3\\0&-8&-1&-1\\0&20&1&2\end{pmatrix}\ ,\qquad D=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ .$$

ב) למטריצה A יש ערך עצמי שווה ל- 0 לכן A לא הפיכה.

ג) נשים לב כי $p_A(x)=(x-2)x(x+1)(x+2)=x^4+x^3-4x^2-4x$.

$$f(x)=x^4+x^3-4x^2-3x+3=p_A(x)+x+3\ .$$

לכן

$$f(A)=p_A(A)+A+3I\ .$$

לפי משפט קיילי-המילטון $p_A(A)=0$ לכן

$$f(A)=3I+A\ .$$

נקח את הדטרמיננטה:

$$|f(A)|=|3I+A|=(-1)^4|-3I-A|=|-3I-A|=p_A(-3)\ .$$

-3 לא ערך עצמי של A לכן $p_A(-3)\neq 0$ לכן $|f(A)|\neq 0$ לכן $f(A)$ הפיכה.

ד)

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}\right\rangle&=\int_{-\pi}^{\pi}dx\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\,\sin(nx)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\cdot\frac{1}{n}\left[-\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\sqrt{2}n\pi}\left[-\cos(n\pi)+\cos(-n\pi)\right]\\&=0\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}\right\rangle&=\int_{-\pi}^{\pi}dx\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\,\cos(nx)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\cdot\frac{1}{n}\left[\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\sqrt{2}n\pi}\left[\sin(n\pi)-\sin(-n\pi)\right]\\&=0\ .\end{aligned}$$

לכל $n,m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\sin(mx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \frac{\sin(mx)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\ \sin(mx)\cos(nx) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\ \left[\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos((m+n)x)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)x)}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos((m+n)\pi)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)\pi)}{m-n} + \frac{\cos(-(m+n)\pi)}{m+n} + \frac{\cos(-(m-n)\pi)}{m-n} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos((m+n)\pi)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)\pi)}{m-n} + \frac{\cos((m+n)\pi)}{m+n} + \frac{\cos((m-n)\pi)}{m-n} \right] \\
&= 0\ .
\end{aligned}$$

לכל $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\ \sin(nx)\cos(nx) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\ \sin(2nx) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\cos(2nx)\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\cos(2n\pi) - \cos(-2n\pi)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\cos(2n\pi) - \cos(2n\pi)\right] \\
&= 0\ .
\end{aligned}$$

לכל $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$

$$\left\langle \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \sin^2(nx)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, (1 - \cos(2nx))$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left[x + \frac{\sin(2nx)}{2n} \right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{2\pi} [2\pi + \sin(2n\pi) - \sin(-2n\pi)]$$
$$= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi$$
$$= 1 \ .$$

לכל $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$

$$\left\langle \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \cos^2(nx)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, (1 + \cos(2nx))$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left[x + \frac{\sin(2nx)}{2n} \right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{2\pi} [2\pi + \sin(2n\pi) - \sin(-2n\pi)]$$
$$= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi$$
$$= 1 \ .$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx$$
$$= \frac{1}{2\pi} [\pi - (-\pi)]$$
$$= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi$$
$$= 1 \ .$$

שאלה 2

א) נניח כי u וקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ. אז

$$Au = \lambda u \ .$$

נכפיל מצד שמאל ב- B:

$$BAu = B\lambda u = \lambda Bu \ .$$

נציב $BA = AB$:

$$ABu = \lambda Bu \qquad \Rightarrow \qquad A(Bu) = \lambda(Bu) \ .$$

ז"א Bu וקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ.
כל הערכים עצמיים שונים לכן הריבוי גאומטרי של הערך עצמי λ הוא 1.
לכן בהכרח

$$Bu = \alpha u$$

כאשר $\alpha \in \mathbb{R}$ סקלר.
u וקטור עצמי אז $u \neq 0$. באותה מידה Bu וקטור עצמי אז $Bu \neq 0$. לכן $\alpha \neq 0$.
לכן קיבלנו כי $Bu = \alpha u$ לכן u וקטור עצמי של B.

ב) נגדיר וקטורים $a, b \in \mathbb{R}^4$:

$$a = \begin{pmatrix} \sqrt{x} \\ \sqrt{y} \\ \sqrt{z} \\ \sqrt{w} \end{pmatrix} , \qquad b = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}} \\ \frac{1}{\sqrt{y}} \\ \frac{1}{\sqrt{z}} \\ \frac{1}{\sqrt{w}} \end{pmatrix} .$$

תהי $\langle , \rangle$ המכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^4$. לפי אי-השוויון קושי-שוורץ:

$$|\langle a, b\rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\| \ .$$

$$\langle a, b\rangle = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{z} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} + \sqrt{w} \cdot \frac{1}{\sqrt{w}} = 4 \ .$$

$$\|a\| = \sqrt{x+y+z+w} \ , \qquad \|b\| = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}} \ .$$

נציב את הביטוים האלה באי-שוויון קושי-שוורץ ונקבל

$$4 \leq \sqrt{x+y+z+w} \cdot \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}} \leq \sqrt{4}\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}}$$

לכן

$$\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}} \geq \sqrt{4} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} \geq 4 \ .$$