שאלות $1-2$ חובה

שאלה 1 <u>**(22 נקודות)**</u>

נתונה הפונקציה

$$z = 2x^3 + 3y^2 + 6xy + 1 \ .$$

א) (10 נק') מצאו אקסטרמומים לוקליים של פונקציה זו ובררו את סוגן.

ב) (12 נק') בתחום החסום ע"י משולש עם קודקודים $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,-3)$, $D(0,-3)$ מצאו את הערך הגודל ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה הנתונה.

שאלה 2 <u>**(20 נקודות)**</u>

א) (10 נק') ציירו את תחום האינטגרציה, שנו את סדר האינטגרציה וחשבו:

$$\int_0^4 dx \int_{-x}^{x} y^2 \, dy \ .$$

ב) (10 נק') מצאו את תחום ההתכנסות של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3 \cdot x^n}{3^n n^4} \ .$$

תענו על 3 מתוך 4 השאלות $3-6$

שאלה 3 <u>**(16 נקודות)**</u> נתונה הפונקציה $z = \dfrac{x \cdot y^2}{x+4}$: ונקודה $M(-3,2)$.

א) (12 נק') מצאו משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה הזו בנקודה שבה $x=-3$, $y=2$.

ב) (4 נק') מצאו נקודה P על הישר $y=x$ כך ש- $\dfrac{dz(M)}{d\overline{MP}} = 0$ כאשר z ו- M נתוני השאלה 3.

שאלה 4 <u>**(16 נקודות)**</u>

א) (12 נק') רשמו באופן פרמטרי קו חיתוך של המישורים

$$x - y + z = 0 \ , \quad x + 2y + z = 2 \ .$$

ב) (4 נק')
בררו האם טור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2+n}$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, מתבדר ?

שאלה 5 <u>(16 נקודות)</u>

א) (12 נק') חשבו בעזרת אינטגרל כפול את נפח הגוף החסום ע"י המשטחים:

$$2x - y + z = 6 \ , \qquad x = 2 \ , \qquad x = 0 \ , \qquad y = 0 \ , \qquad y = 1 \ , \qquad z = 0 \ .$$

ב) (4 נק') ציירו את הגוף (המתואר בסעיף א) במערכת הצירים xyz.

שאלה 6 <u>(16 נקודות)</u>

א) (12 נק') מצאו את מרכז המסה של רבע העיגול $x^2 + y^2 \le 16$ הנמצא ברביע הראשון.

ב) (4 נק') מצאו נקודת חיתוך הישר AB [$A(2,1,0)$, $B(3,4,2)$] ומישור $2x + y - z = 2$.

פתור אחת מבין השאלות $7 - 8$

שאלה 7 <u>(10 נקודות)</u> מצאו את הנקודה P על המשטח $z = \sqrt{x}$ הקרובה ביותר לנקודה $A(1,2,0)$.

שאלה 8 <u>(10 נקודות)</u> מצאו משוואת המישור המכיל את ציר ה- x ומשיק למשטח $x^2+y^2+z^2 = 6x+4y-10$.

פתרונות

שאלה 1

א) (10 נק')

$$\left.\begin{aligned} z'_x = & \;\; 6x^2+6y & \stackrel{!}{=} 0 \\ z'_y = & \;\; 6x+6y & \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad x=0, y=0 \ , \quad \text{או} \quad x=1, y=-1 \ .$$

קיבלנו שתי נקודות קריטיות. $P_1\,(0,0)$, $P_2\,(1,-1)$.

$$z''_{xx} = 12x \ , \qquad z''_{yy} = 6 \ , \qquad z''_{xy} = 6 \ .$$

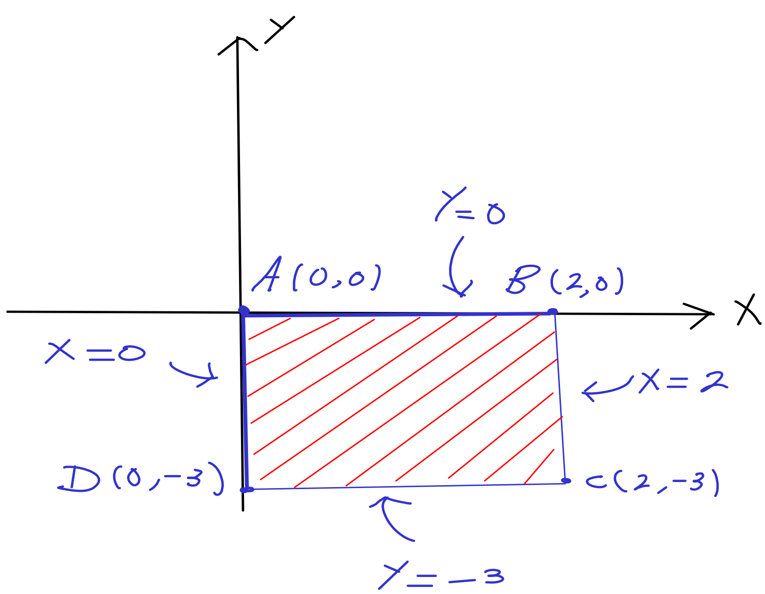
$$z''_{xx}(P_1) = 0 \ , \qquad z''_{yy}(P_1) = 6 \ , \qquad z''_{xy}(P_1) = 6 \ , \qquad \Delta(P_1) = -36 \ .$$

בפרט $\Delta(P_1) < 0$ לפיכך הנקודה $P_1(0,0)$ היא אוכף.

$$z''_{xx}(P_2) = 12 \ , \qquad z''_{yy}(P_2) = 6 \ , \qquad z''_{xy}(P_2) = 6 \ , \qquad \Delta(P_2) = 36 \ .$$

בפרט $\Delta(P_2) > 0$ ו- $z''_{xx}(P_2) > 0$ לפיכך הנקודה $P_2(1,-1)$ היא מינימום.

ב) (12 נק')



<u>על השפה BC $x=2$</u>

$$z_{BC}(y) = z(x=2,y) = 17 + 3y^2 + 12y \ .$$

$$z'_{BC}(y) = 6y + 12 \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = -2 \ .$$

בנקודה $P_3(2,-2)$
$z(P_3) = z_{BC}(y=-2) = 5$.

<u>על השפה AB $y=0$</u>

$$z_{AB}(x) = z(x, y=0) = 2x^3 + 1 \ .$$

$$z'_{AB}(x) = 6x \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0 \ .$$

$P_4\,(0,0)$.
$z(P_4) = z_{AB}(x=0) = 1$

<u>על השפה AD $x=0$</u>

$$z_{AD}(y) = z(x=0) = 3y^2 + 1 \ .$$

$$z'_{AD}(y) = 6y \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = 0 \ .$$

$P_1\,(0,0)$.

<u>על השפה CD $y=-3$</u>

$$z_{CD}(x) = z(y=-3) = 2x^3 - 18x + 1 \ .$$

$$z'_{CD}(x) = 6x^2 - 18 \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm\sqrt{3} \ .$$

נשים לב כי $x=-\sqrt{3}$ לא בתחום $ABCD$ לכן נזרוק אותו. כלומר הנקודה הרלוונטי היא $P_4(\sqrt{3},-3)$

$$z(P_4) = z_{CD}(x=\sqrt{3}) = 28 - 12\sqrt{3} \ .$$

P	$z(x,y)$
$P_1\,(0,0)$	1
$P_2\,(1,-1)$	0
$P_3\,(2,-2)$	5
$P_4\left(\sqrt{3},-3\right)$	$-12\sqrt{3}+1$
$B\,(2,0)$	17
$C\,(2,-3)$	8
$D\,(0,-3)$	28

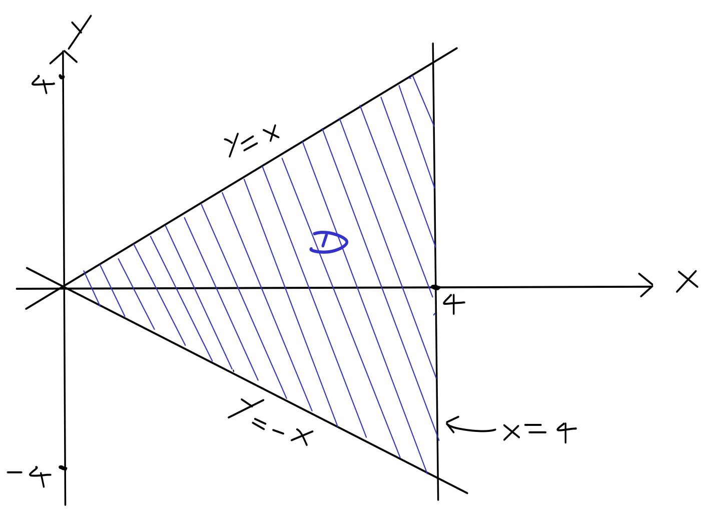
$z_{\text{max}}=28$ בנקודה $D(0,-3)$.

$z_{\text{min}}=0$ בנקודה $P_2\,(1,-1)$.

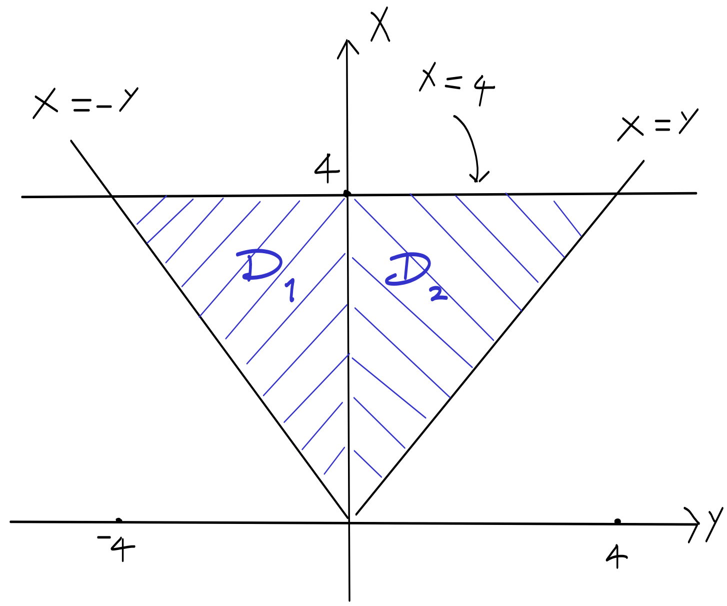
שאלה 2

א) (10 נק')

$$I=\int_0^4 dx\,\int_{-x}^{x} y^2\,dy\ .$$



$$D=\{0\le x\le 4\ ,-x\le y\le x\}\ .$$



$$D_1 = \{-4 \le y \le 0 \ , -y \le x \le 4\} \ , \qquad D_2 = \{0 \le y \le 4 \ , y \le x \le 4\} \ .$$

$$I = \iint\limits_{D_1} dx\, dy\, y^2 + \iint\limits_{D_2} dx\, dy\, y^2 = \int_{-4}^{0} dy \int_{-y}^{4} dx\, y^2 + \int_{0}^{4} dy \int_{y}^{4} dx\, y^2 \ .$$

שיטה 1

$$\int_0^4 dx \int_{-x}^{x} y^2 dy = \int_0^4 dx \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-x}^{x} = \int_0^4 dx \frac{2x^3}{3} = \left[\frac{x^4}{6}\right]_0^4 = \frac{256}{6} = \frac{128}{3} \ .$$

שיטה 2

$$\begin{aligned}
\int_{-4}^{0} dy \int_{-y}^{4} dx\, y^2 + \int_{0}^{4} dy \int_{y}^{4} dx\, y^2 &= \int_{-4}^{0} dy \ [x]_{-y}^{4} y^2 + \int_{0}^{4} dy \ [x]_{y}^{4} \ y^2 \\
&= \int_{-4}^{0} dy \ (4+y)\, y^2 + \int_{0}^{4} dy \ (4-y) \ y^2 \\
&= \left[\frac{4y^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right]_{-4}^{0} + \left[\frac{4y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_{0}^{4} \\
&= \left[\frac{256}{3} - \frac{256}{4}\right] + \left[\frac{256}{3} - \frac{256}{4}\right] \\
&= \frac{256}{6} = \frac{128}{3} \ .
\end{aligned}$$

ב) (10 נק')
נוסחת דלמבר לרדיוס ההתכנסות:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{(n+1)^3}{3^n n^4}\right)}{\left(\frac{(n+2)^3}{3^{n+1}(n+1)^4}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{3^n n^4}\frac{3^{n+1}(n+1)^4}{(n+2)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{(n+2)^3}\frac{(n+1)^4}{n^4}\frac{3^{n+1}}{3^n}=3\ .$$

ב- $x=3$ הטור המתקבל הוא $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $a_n=\dfrac{(n+1)^3}{n^4}$.

$$a_n=\frac{(n+1)^3}{n^4}>\frac{n^3}{n^4}=\frac{1}{n}\ .$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ מתבדר לפיכך גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר לפי מבחן השוואה. לכן הטור מתבדר ב- $x=3$.

ב- $x=-3$ הטור המתקבל הוא $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, $a_n=\dfrac{(n+1)^3}{n^4}$.

$$a_n=\frac{(n+1)^3}{n^4}=\frac{1}{n}\cdot\frac{(n+1)^3}{n^3}=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=\frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\ .$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^3<\frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=a_n\ .$$

כלומר $a_{n+1}<a_n$ לכן הטור יורדת מונוטונית.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^4}=0\ .$$

לכן, לפי מבחן לייבניץ, הטור מתכנס ב- $x=-3$.
בסה"כ התחום התכנסות הוא

$$[-3,3)\ .$$

שאלה 3

א) (12 נק')

$$\nabla z(M)=\left(z'_x,z'_y\right)(M)=\left(\frac{4y^2}{(x+4)^2},\frac{2xy}{x+4}\right)(M)=(16,-12)\ .$$

$$z'_x(M)(x-x_0)+z'_y(M)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

$$16(x+3)-12(y-2)-(z+12)=0\quad\Rightarrow\quad 16x-12y-z+60=0\ .$$

ב) (4 נק')

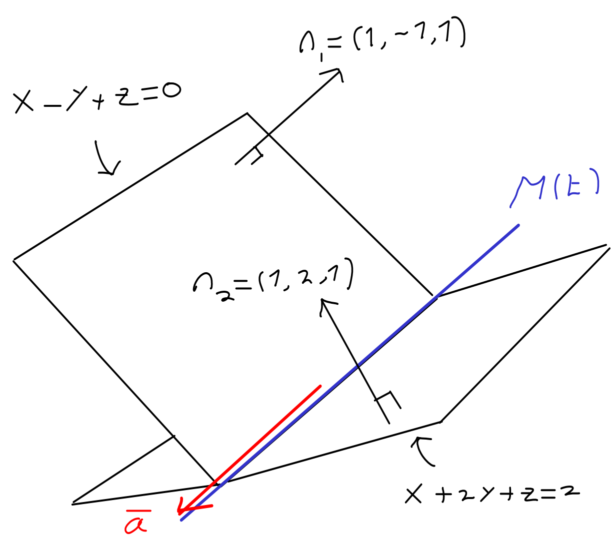
$$\frac{dz(M)}{d\overline{MP}} = \frac{\nabla z(M)\cdot \overline{MP}}{|\overline{MP}} = \frac{(16,-12)\cdot(-3-x,2-x)}{|\overline{MP}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad (16,-12)\cdot(-3-x,2-x)=0 \quad \Rightarrow \quad -48-16x-24+12x=-72-4x=0 \quad \Rightarrow \quad x=-18$$

לכן $P=(-18,-18)$.

שאלה 4

א) (16 נק')



$$n_1=(1,-1,1)\ , \qquad n_2=(1,2,1)\ .$$

$$n_1\times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} = -3i+0j+3k=(-3,0,3)$$

נציב $z=0$:

$$\left.\begin{aligned} x-y &= 0\\ x+2y &= 2\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x &= y\\ x+2x &= 2\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{2}{3}\ ,\ y=\frac{2}{3}\ .$$

$P\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},0\right)$ נקודה שנמצאת בשני המישורים $M(t)$.

$$M(t)=P+ta=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},0)+t(-1,0,1)$$

$$x=\frac{2}{3}+t,\quad y=\frac{2}{3},\quad z=t\ .$$

ב) (4 נק')

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ ,\quad a_n=\frac{\cos n}{n^2+n}\ .$$

נבדוק התכנסות של $|a_n|$:

$$|a_n|=\left|\frac{\cos n}{n^2+n}\right|<\frac{1}{n^2+n}<\frac{1}{n^2}\ .$$

הטור של $\frac{1}{n^2}$ מתכנס, לכן גם $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס, לכן $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2+n}$ מתכנס בהחלט.

שאלה 5

א) (16 נק')

הנפח נתון ע"י האינטגרל הכפול

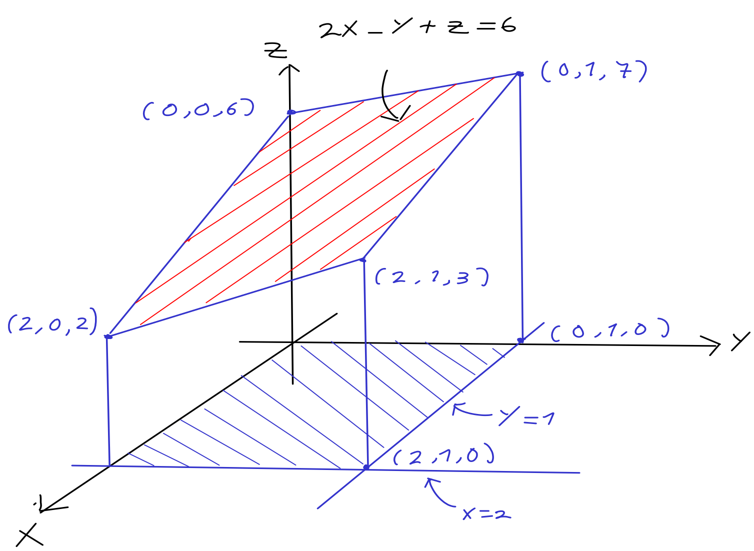
$$V=\iint_D dx\,dy\,(6-2x+y)$$

כאשר D התחום

$$D=\{0\le x\le 2\ ,0\le y\le 1\ .\}$$

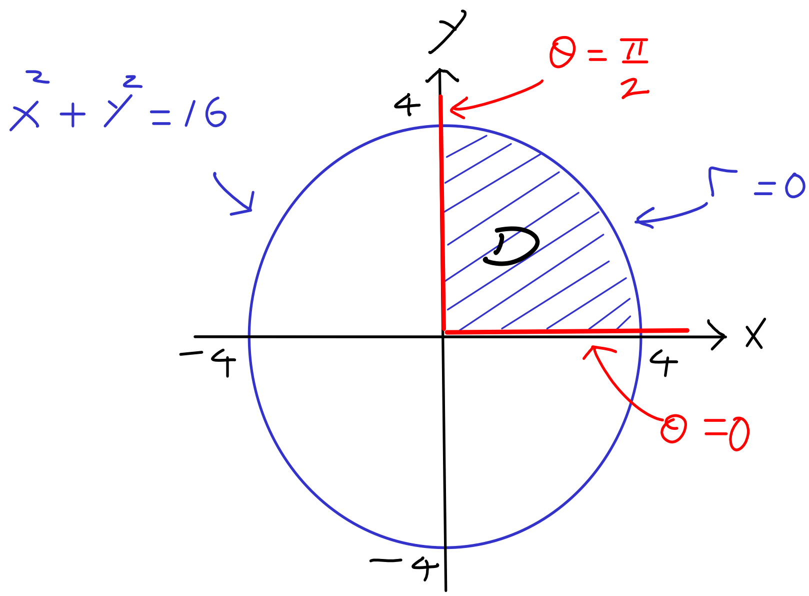
$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 dx \int_0^1 dy(6-2x+y) \\
&= \int_0^2 dx \left[\frac{1}{2}(6-2x+y)^2\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 dx \left[(7-2x)^2-(6-2x)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-6}(7-2x)^3-\frac{1}{-6}(6-2x)^3\right]_0^2 \\
&= \frac{-1}{12}\left[3^3-7^3-2^3+6^3\right] \\
&= \frac{-1}{12}\left[27-343-8+216\right] \\
&= \frac{-1}{12}\left[-108\right] \\
&= 9\ .
\end{aligned}
$$

ב) (4 נק')



שאלה 6

א) (16 נק')



$$D = \left\{ 0 \le r \le 4 \ , \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \right\}$$

נחשב את המסה לפי הנוסחה

$$M = \iint_D \rho(x,y) \, dx \, dy \ .$$

הצפיפות לא נתונה אז נקח $\rho = 1$.

$$M = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^4 dr \, r = \int_0^{\pi/2} d\theta \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^4 = \int_0^{\pi/2} d\theta \, [8 - 0] = 8 \int_0^{\pi/2} d\theta = 8 \, [\theta]_0^{\pi/2} = 4\pi \ .$$

נסמן את הנקודת מרכז מסה $P(x_0, y_0)$. המרכז מסה נותנת ע"י הנוסחאות

$$x_0 = \frac{1}{M} \iint_D \rho(x,y) \cdot x \, dx \, dy \ , \qquad y_0 = \frac{1}{M} \iint_D \rho(x,y) \cdot y \, dx \, dy \ .$$

$$
\begin{aligned}
x_0 =&\frac{1}{M}\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^4 dr\, r\cdot r\cos\theta \\
=&\frac{1}{M}\int_0^{\pi/2} d\theta \cos\theta \int_0^4 dr\, r^2 \\
=&\frac{1}{M}\left[\sin\theta\right]_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^4 \\
=&\frac{1}{M}\left[\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right]\cdot\left[\frac{64}{3}-0\right] \\
=&\frac{64}{3M} \\
=&\frac{16}{3\pi}\ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_0 =&\frac{1}{M}\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^4 dr\, r\cdot r\sin\theta \\
=&\frac{1}{M}\int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \int_0^4 dr\, r^2 \\
=&\frac{1}{M}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^4 \\
=&\frac{1}{M}\left[-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0\right]\cdot\left[\frac{64}{3}-0\right] \\
=&\frac{64}{3M} \\
=&\frac{16}{3\pi}\ .
\end{aligned}
$$

לכן המרכז מסה נימצאת בנקודה $\left(\frac{16}{3\pi},\frac{16}{3\pi}\right)$.

ב) (4 נק')

$$M(t)=A+t\overline{AB}=(2,1,0)+t(1,3,2)\ .$$
$$x=2+t\ ,\qquad y=1+3t\ ,\qquad z=2t\ .$$

נציב משוואת הישר במשוואת המישור:

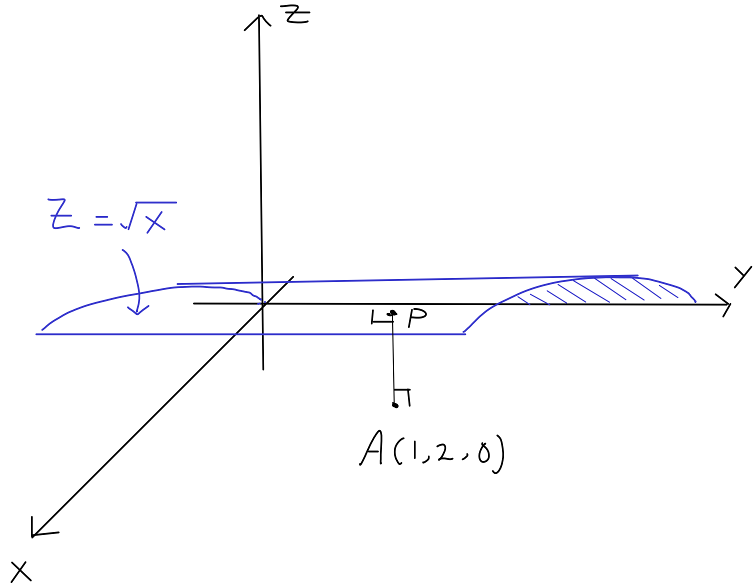
$$2(2+t)+1+3t-2t-2=0 \quad\Rightarrow\quad 3+3t=0 \quad\Rightarrow\quad t=-1\ .$$

לכן הנקודת חיתוך היא

$$P=M(t=-1)=(1,-2,-2)\ .$$

שאלה 7 (10 נק')

שיטה 1 : שיטה קלאסית



מכיוון שהמשטח גלילי ומאונך למישור xz אז הבעיה הופכת לבעיה המישור xz. על הפרבולה $z = \sqrt{x}$ מצאו את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $\bar{A}(2,0)$. נסמן את הנקודה P על המשטח הקרובה ביותר ל- A ב- $P = (x,z) = (x,\sqrt{x})$.

$$d^2 = |\overline{AP}|^2 = (x-1)^2 + (z-0)^2 = (x-1)^2 + (\sqrt{x}-0)^2 + (x-1)^2 + x = x^2 - x + 1 \ .$$

$$\left(d^2\right)'_x = 2x - 1 \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{2} \ .$$

לכן

$$P = \left(\frac{1}{2}, 2, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

שיטה 2 : כופלי לגרנז'

$$L = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 + \lambda(\sqrt{x} - z) = 0$$

$$
\begin{aligned}
L'_x =& 2(x-1) + \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} \ , \\
L'_y =& 2(y-2) \ , \\
L'_z =& 2z - \lambda \ , \\
L'_\lambda =& \sqrt{x} - z \ .
\end{aligned}
$$

$$L'_y \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2 \ .$$

$$L'_z \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\lambda}{2} \ .$$

$$L'_\lambda \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = z = \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2\sqrt{x} \ .$$

$$L'_x \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 2(x-1) + \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(x-1) + \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \ .$$

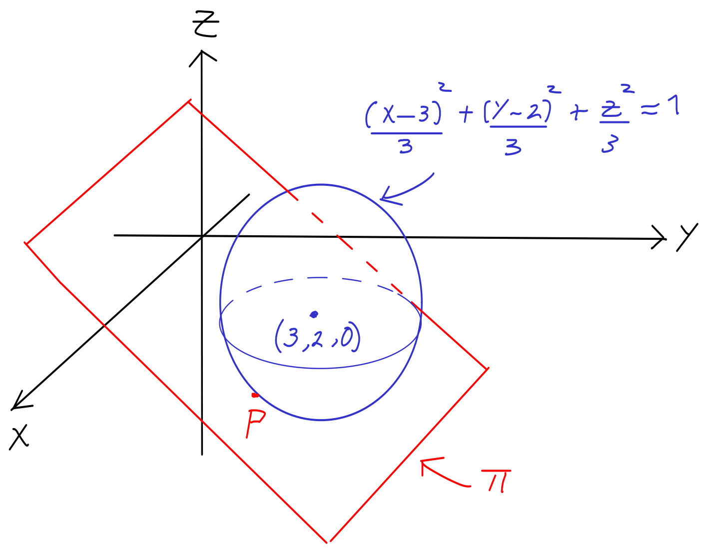
לפיכך $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = 2$, $z_0 = \sqrt{x_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. לכן

$$P = \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

<u>שאלה 8</u> (10 נק')

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 =& 6x + 4y - 10 \\
x^2 - 6x + y^2 - 4y + z^2 + 10 =& 0 \\
(x-3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 + z^2 + 10 =& 0 \\
(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 =& 3 \\
\frac{(x-3)^2}{3} + \frac{(y-2)^2}{3} + \frac{z^2}{3} =& 1 \ .
\end{aligned}
$$

המשטח הוא כדור מרדיוס $\sqrt{3}$ ומרכז בנקודה $P(3,2,0)$. עלינו למצוא את הנקודה P על המשטח שבה המישור המשיק למשטח מכיל את ציר ה-x כמתואר בתרשים.



נסמן $P(x_0,y_0,z_0)$ ונרשום את המשטח הכדורי בצורה $f(x,y,z) := \dfrac{(x-3)^2}{3}+\dfrac{(y-2)^2}{3}+\dfrac{z^2}{3}-1=0$.
הנוסחה למישור המשיק למשטח בנקודה היא

$$f'_x(P)(x-x_0)+f'_y(y-y_0)+f'_z(z-z_0)=0\ .$$

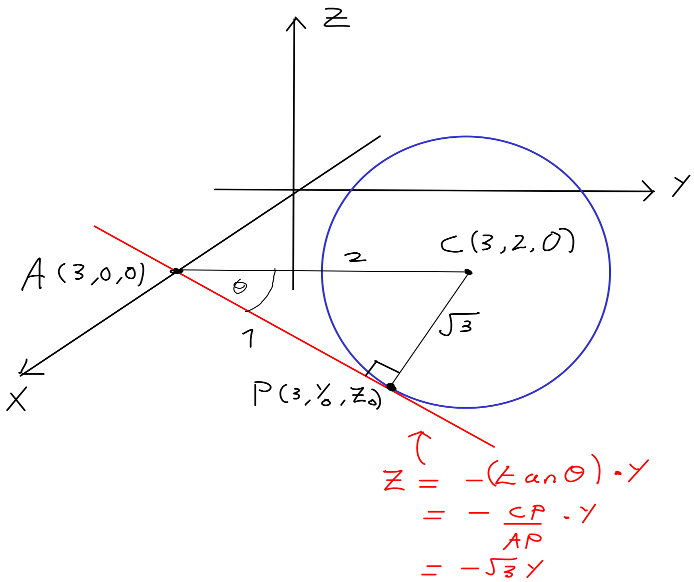
נשים לב שאם הציר ה-x מוכל במישור, אז לנורמל של המישור לא יהיה רכיב בכיוון ה-x בכלל. הנורמל של המישור המשיק בנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ הוא

$$n=\big(f'_x(P),f'_y(P),f'_z(P)\big)\ .$$

ז"א

$$f'_x(P)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{2(x_0-3)}{3}=0 \quad\Rightarrow\quad x_0=3\ .$$

לכן הנקודת השקה של המישור עם המשטח תהיה בנקודה $P(3,y_0,z_0)$. בנוסף המרכז הכדור נמצא בנקודה $C(3,2,0)$. לכן הבעיה נהפכת לבעיה במישור $x=3$. נסתכל על הנקודה $A(3,0,0)$ על המישור ועל ציר ה-x כמתואר בתרשים.



האורך CP שווה לרדיוס של הכדור לכן $CP=\sqrt{3}$. בנוסף $AC=2$. מכיוון ש- ACP משולש זווית ישרה אז ניתן לחשב AP לפי פיתגורס: $AP=1$. מכיוון ש- ACP משולש זווית ישרה אז לפי טריגונומטריה,

$$\tan\theta = \frac{CP}{AP} = \sqrt{3} \ .$$

המשוואת הישר AP היא

$$z = -\tan\theta \cdot y = -\sqrt{3}y \ .$$

לפיכך התשובה סופית למשוואת המישור היא

$$z = -\sqrt{3}y \ .$$