

עבודה עצמית 1

שאלה 1

פתרו את המערכות הבאות מעל \mathbb{R} :

$$\left. \begin{aligned} x + y - 2z &= 7 \\ 2x - y + z &= 0 \\ x + y - z &= 6 \end{aligned} \right\} \quad (\text{א})$$

$$\left. \begin{aligned} y + 2z - w &= -7 \\ x + 3y + w &= 6 \\ 2x - z &= 3 \\ 2y + z + w &= 4 \end{aligned} \right\} \quad (\text{ב})$$

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - 3z + 2w &= 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6w &= 5 \\ 2x + 2y - 2z &= 2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{ג})$$

$$\left. \begin{aligned} 16x - 12y + 20z &= 0 \\ 12x - 9y + 15z &= 2 \\ 20x - 15y + 25z &= 5 \end{aligned} \right\} \quad (\text{ד})$$

שאלה 2

$$\left. \begin{aligned} x - 3z &= -3 \\ 2x + ky - z &= -2 \\ x + 2y + kz &= 1 \end{aligned} \right\} \quad \text{נתונה המערכת הליניארית הבאה מעל } \mathbb{R}:$$

(א) מצא את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין פתרון.

(ב) מצא את הערכים של k עבורם למערכת יש פתרון יחיד.

(ג) מצא את הערכים של k עבורם יש אינסוף פתרונות. לכל אחד מערכי k שמצאת, רשום את הפתרון הכללי.

שאלה 3

נתונה המערכת הליניארית הבאה מעל \mathbb{R} :

$$\begin{array}{rclcl} (k+1)x & + & (k^2+2k-2)y & + & (2k^2+7k+7)z & = & k^3+k^2+k-2 \\ kx & + & (k^2+k-2)y & + & (k^2+2k+3)z & = & k^3-5 \\ x & + & ky & + & (k+1)z & = & k^2 \\ (k-1)x & + & (k^2-2)y & + & (k^2+k+2)z & = & k^3-k^2-5 \end{array}$$

(א) מצא את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין פתרון.

(ב) מצא את הערכים של k עבורם למערכת יש פתרון יחיד.

(ג) מצא את הערכים של k עבורם יש אינסוף פתרונות. לכל אחד מערכי k שמצאת, רשום את הפתרון הכללי.

שאלה 4

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= a \\ bx + y + z &= b \\ x + y + az &= b \end{aligned} \right\} \text{ נתונה המערכת הליניארית הבאה מעל } \mathbb{R}:$$

(א) מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b עבורם למערכת אין פתרון.

(ב) מצא את הערכים של הפרמטרים a ו- b עבורם למערכת יש פתרון יחיד.

(ג) מצא את הערכים של הפרמטרים a ו- b עבורם יש אינסוף פתרונות. לכל אחד מערכי a ו- b שמצאת, רשום את הפתרון הכללי.

שאלה 5 תשע"ט סמסטר א' מועד א'

$$\left. \begin{aligned} x + 2y + z &= -1 \\ 2x + 4y + (k+1)z + w &= 0 \\ 2x + 4y + 2kz + (k^2 - 1)w &= k - 1 \end{aligned} \right\} \text{ נתונה המערכת הליניארית הבאה:}$$

(א) מצא את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין אף פתרון

(ב) מצא את הערכים של k עבורם למערכת ישנו פתרון יחיד

(ג) מצא את הערכים של k עבורם ישנן אינסוף פתרונות.

שאלה 6 תשע"ט סמסטר א' מועד ב'

$$\left. \begin{aligned} x + (k-4)y &= 3 \\ 2x + (k^2 - 4k)y &= 2 - k \\ -3x + 6y + kz &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ נתונה המערכת הליניארית הבאה:}$$

(א) מצא את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין אף פתרון

(ב) מצא את הערכים של k עבורם למערכת ישנו פתרון יחיד

(ג) מצא את הערכים של k עבורם ישנן אינסוף פתרונות.

פתרונות

שאלה 1

(א) תשובה סופית: $x = 2, y = 3, z = -1$.

פתרון: מטריצה המורחבת: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{array} \right)$ מטריצה המדורגת:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{array} \right) & \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & -3 & 5 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{-1}{3} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow R_1 + 2R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 + \frac{5}{3} \cdot R_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

■

(ב) תשובה סופית: $x = 1, y = 0, z = -1, w = 5$.

פתרון:

מטריצה המורחבת: $A = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 & -7 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right)$ מטריצה המדורגת:

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1} \\
 \xrightarrow{R_4 \rightarrow \frac{-1}{3} \cdot R_4} \\
 \xrightarrow{\begin{array}{l} R_3 \rightarrow \frac{1}{11} \cdot R_3 \\ R_4 \rightarrow \frac{1}{3} \cdot R_4 \end{array}} \\
 \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2 \cdot R_3}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 & -7 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 11 & -8 & -51 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 6 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-8}{11} & \frac{-51}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)
 \end{array}
 \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 \leftrightarrow R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 6R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 2 \cdot R_2 \end{array}}
 \xrightarrow{R_4 \rightarrow 11 \cdot R_4 + R_3}
 \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 - R_4 \\ R_2 \rightarrow R_2 + R_4 \\ R_3 \rightarrow R_3 + \frac{8}{11} \cdot R_4 \end{array}}
 \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3 \cdot R_2}
 \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -7 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 11 & -8 & -51 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 18 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 11 & -8 & -51 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 15 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}$$

■

ג) תשובה סופית: $(x, y, z, w) = (-z + 2w, 2z - 2w + 1, z, w)$

פתרון:

מטריצה המורחבת: $A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{array} \right)$ מטריצה המדורגת:

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & -2 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{array}$$

■

ד) תשובה סופית:

אין פתרון.

פתרון: מטריצה המורחבת: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & -12 & 20 & 0 \\ 12 & -9 & 15 & 2 \\ 20 & -15 & 25 & 5 \end{array} \right)$ מטריצה המדורגת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & -12 & 20 & 0 \\ 12 & -9 & 15 & 2 \\ 20 & -15 & 25 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{4} \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 5 & 0 \\ 12 & -9 & 15 & 2 \\ 20 & -15 & 25 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 3 \cdot R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 5 \cdot R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

שורה סתירה!

■

שאלה 2

מטריצה המורחבת: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & k & -1 & -2 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{array} \right)$ מטריצה המדורגת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & k & -1 & -2 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & k & 5 & 4 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \\ 0 & k & 5 & 4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow 2R_3 - kR_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \\ 0 & 0 & -k^2 - 3k + 10 & 8 - 4k \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \\ 0 & 0 & -(k+5)(k-2) & -4(k-2) \end{array} \right)$$

$$U = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 28 \end{array} \right) :k = -5$$

$$U = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) :k = 2$$

$$(x, y, z) = \left(-3 + 3z, 2 - \frac{5}{2}z, z \right).$$

$k \neq 5, 2$: יש למערכת פתרון יחיד.

■

שאלה 3

$$.A = \left(\begin{array}{ccc|c} (k+1) & (k^2+2k-2) & (2k^2+7k+7) & k^3+k^2+k-2 \\ k & (k^2+k-2) & (k^2+2k+3) & k^3-5 \\ 1 & k & (k+1) & k^2 \\ (k-1) & (k^2-2) & (k^2+k+2) & k^3-k^2-5 \end{array} \right) \text{ מטריצה המורחבת:}$$

מטריצה המדורגת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (k+1) & (k^2+2k-2) & (2k^2+7k+7) & k^3+k^2+k-2 \\ k & (k^2+k-2) & (k^2+2k+3) & k^3-5 \\ 1 & k & (k+1) & k^2 \\ (k-1) & (k^2-2) & (k^2+k+2) & k^3-k^2-5 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & (k^2+5k+4) & k^2+k+3 \\ k & (k^2+k-2) & (k^2+2k+3) & k^3-5 \\ 1 & k & (k+1) & k^2 \\ (k-1) & (k^2-2) & (k^2+k+2) & k^3-k^2-5 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} R_2 - kR_1 \\ R_4 - (k-1)R_3 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & (k^2+5k+4) & k^2+k+3 \\ 0 & (k-2) & (k+3) & -5 \\ 1 & k & (k+1) & k^2 \\ 0 & (k-2) & (k+3) & -5 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow -R_3 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & (k^2+5k+4) & k^2+k+3 \\ 0 & (k-2) & (k+3) & -5 \\ 0 & 0 & (k^2+4k+3) & k+3 \\ 0 & (k-2) & (k+3) & -5 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & (k^2+5k+4) & k^2+k+3 \\ 0 & (k-2) & (k+3) & -5 \\ 0 & 0 & (k^2+4k+3) & k+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & k+1 & k^2 \\ 0 & (k-2) & (k+3) & -5 \\ 0 & 0 & (k^2+4k+3) & k+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & k+1 & k^2 \\ 0 & (k-2) & (k+3) & -5 \\ 0 & 0 & (k+3)(k+1) & k+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\underline{k = -1}$$

$$U = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ישנה שורה סתירה ולכן אין למערכת אף פתרון.}$$

$k = 2$

$$U = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ישנה שורה סתירה ולכן אין למערכת אף פתרון.

$k = -3$

$$U = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 9 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ישנה שורה כולה אפס ולכן יש למערכת אינסוף פתרונות:

$$(x, y, z) = (12 + 2z, 1, z)$$

$k \neq -1, 2, -3$

יש למערכת פתרון יחיד.



שאלה 4

מטריצה המורחבת:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ b & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b \end{array} \right) .$$

מטריצה המדורגת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ b & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - bR_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1-b & 1-b & b(1-a) \\ 0 & 0 & a-1 & b-a \end{array} \right)$$

$a = 1, b \neq 1$

$$U = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-b & 1-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array} \right) \quad \underline{a \neq 1, b = 1}$$

ישנה שורה סתירה ולכן אין למערכת אף פתרון.

$$U = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & (1-a) \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{array} \right) \quad \underline{a = 1, b = 1}$$

ישנה שורה סתירה ולכן אין למערכת אף פתרון.

$$U = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ישנה שורה כולה אפס ולכן למערכת יש אינסוף פתרונות:

$$(x, y, z) = (x, y, 1 - x - y) .$$

$$\underline{a \neq 1, b \neq 1}$$

$$U = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-b & 1-b & b(1-a) \\ 0 & 0 & a-1 & b-1 \end{array} \right)$$

יש למערכת פתרון יחיד:

$$(x, y, z) = \left(\frac{b-a}{b-1}, -\frac{-a^2b + a(b+1) + (b-2)b}{(a-1)(b-1)}, \frac{b-a}{a-1} \right)$$

■

שאלה 5 נדרג את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & k+1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2k & k^2-1 & k-1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2k-2 & k^2-1 & k+1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-3 & k-3 \end{array} \right)$$

$$\underline{k = 1}$$

המטריצה המדורגת היא:

$$U = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

קיבלנו שורה סתירה אז למערכת אין פתרון.

$$\underline{k = \pm\sqrt{3}}$$

המטריצה המדורגת היא: $U = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{3}-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} -1 \\ 2 \\ \pm\sqrt{3}-3 \end{array} \right)$ קיבלנו שורה סתירה אז למערכת אין פתרון.

סיכום:

(א) עבור $k = 1$ או $k = \pm\sqrt{3}$ אין למערכת אף פתרון.

(ב) פתרון יחיד- ודאי אין כי יש 3 משוואות בארבע משתנים.

(ג) עבור $k \neq 1$ וגם $k \neq \pm\sqrt{3}$ אז למערכת יש אינסוף פתרונות.



שאלה 6 נדרג את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 2 & k^2-4k & 0 & 2-k \\ -3 & 6 & k & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 3R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 0 & k^2-6k+8 & 0 & -k-4 \\ 0 & 3k-6 & k & 10 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 0 & (k-4)(k-2) & 0 & -k-4 \\ 0 & 3(k-2) & k & 10 \end{array} \right)$$

$$\underline{k = 2}$$

המטריצה המדורגת היא: $U = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{array} \right)$ קיבלנו שורה סתירה אז למערכת אין פתרון.

$$\underline{k = 4}$$

המטריצה המדורגת היא: $U = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 6 & k & 10 \end{array} \right)$ קיבלנו שורה סתירה אז למערכת אין פתרון.

$$\underline{k = 0}$$

המטריצה המדורגת היא:

$$U = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 0 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow 8R_3 + 6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 76 \end{array} \right).$$

קיבלנו שורה סתירה אז למערכת אין פתרון.
 $k \neq 0, 2, 4$

נמשיך לדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 0 & (k-4)(k-2) & 0 & -k-4 \\ 0 & 3(k-2) & k & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow 3R_2 \\ R_3 \rightarrow (k-4)R_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 0 & 3(k-4)(k-2) & 0 & -3k-12 \\ 0 & 3(k-4)(k-2) & k(k-4) & 10(k-4) \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 0 & 3(k-4)(k-2) & 0 & -3k-12 \\ 0 & 0 & k(k-4) & 13k-28 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow 3(k-2)R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3(k-2) & 0 & 0 & 12k+6 \\ 0 & 3(k-4)(k-2) & 0 & -3k-12 \\ 0 & 0 & k(k-4) & 13k-28 \end{array} \right)$$

שים לב יש איבר מוביל בכל שורה ובכל עמודה ולכן יש למערכת פתרון יחיד.

סיכום:

(א) עבור $k = 0, 2, 4$ אין למערכת אף פתרון.

(ב) עבור $k \neq 0, 2, 4$ יש למערכת פתרון יחיד.

(ג) אין ערכי k עבורם יש למערכת אינסוף פתרונות.

