

# שיעור 5

## מישורים במרחב תלת ממדי

### 5.1 הגדרה ומשוואת המישור במרחב

מישור הוא משטח דו-ממדי שטוח במרחב  $xyz$ .

#### הגדרה 5.1 משוואת המישור

המשוואה המתארת מישור בכללי במרחב  $xyz$  הינה

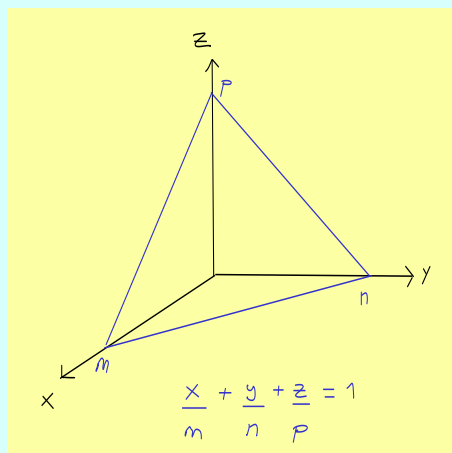
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

כאשר לפחות אחד המקדמים  $A, B, C$  אינו אפס.

ניתן לרשום משוואת המישור בצורה

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1.$$

בצורה הזאת המספרים  $m, n, p$  הם הנקודות חיתוך של המישור עם הצירי  $x, y, z$  בהתאמה כמתואר בשרטוט.



מישור מוגדר ע"י שלוש נקודות שבהן הוא עובר, בתנאי ששלושת הנקודות לא על אותו ישר (כלומר לא קולינאריות).

#### דוגמה 5.1

מצאו את משוואת המישור העובר דרך הנקודות  $R(0, 0, 6)$ ,  $Q(1, 1, 1)$ ,  $P(2, 0, 4)$ .

**פתרון:**

נציב את הנקודות במשוואת המישור  $Ax + By + Cz + D = 0$  :

$$\begin{cases} 2A + 4C + D = 0 \\ A + B + C + D = 0 \\ 6C + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = -6C \\ 2A + 4C - 6C = 0 \\ A + B + C - 6C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = -6C \\ A = C \\ A + B = 5C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D = -6C \\ A = C \\ B = 4C \end{cases}$$

$$Cx + 4Cy + Cz - 6C = 0 \Rightarrow x + 4y + z - 6 = 0 .$$

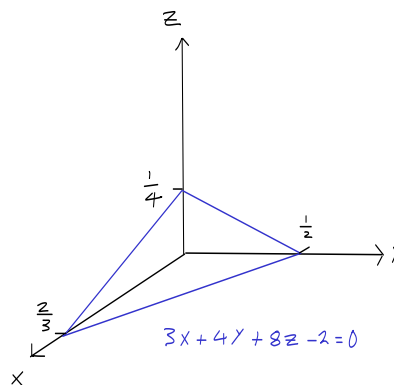
## 5.2 דוגמה

שרטטו את המישור  $3x + 4y + 8z - 2 = 0$ .

### פתרון:

נרשום את משוואת המישור בצורה קנונית.

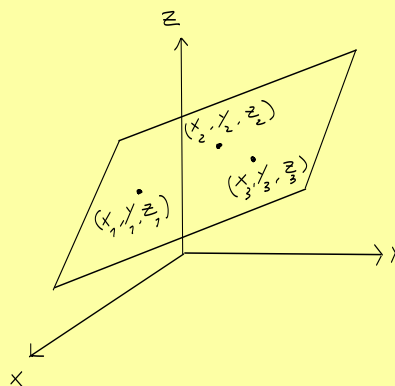
$$3x + 4y + 8z - 2 = 0 \Rightarrow 3x + 4y + 8z = 2 \Rightarrow \frac{3}{2}x + 2y + 4z = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{\frac{1}{2}} + \frac{z}{\frac{1}{4}} = 1$$



## משפט 5.1 משוואת המישור העובר דרך שלוש נקודות

משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנתונות  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$  ו-  $(x_3, y_3, z_3)$  ניתן לרשום בצורה:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$



### דוגמה 5.3

מצאו את משאוות המישור העובר דרך הנקודות  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, 2, 2)$ ,  $(2, 3, 4)$  ושרטטו אותו.

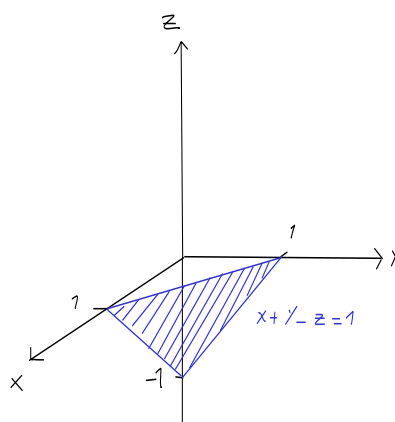
### פתרון:

$$(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 1), \quad (x_2, y_2, z_2) = (1, 2, 2), \quad (x_3, y_3, z_3) = (2, 3, 4).$$

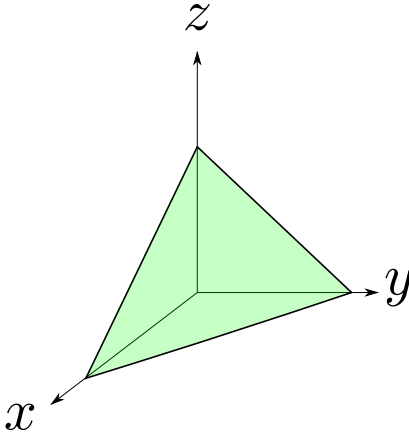
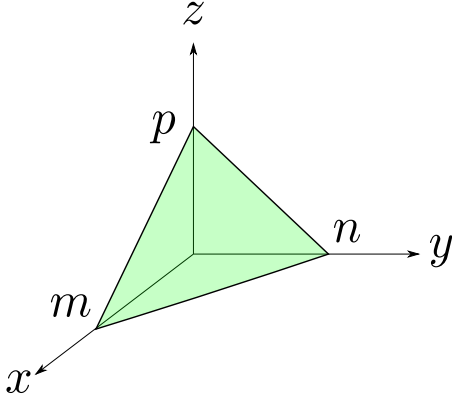
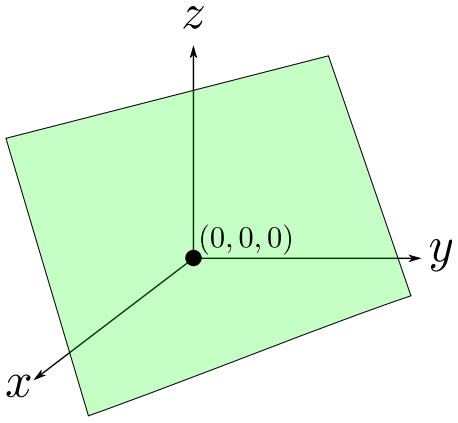
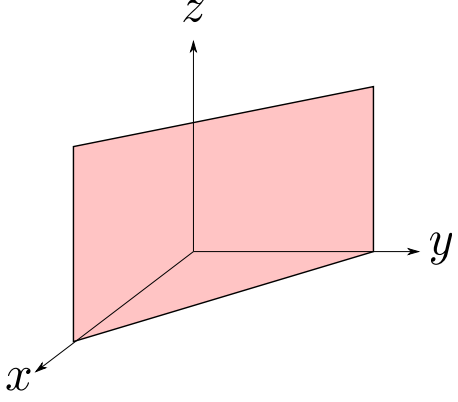
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

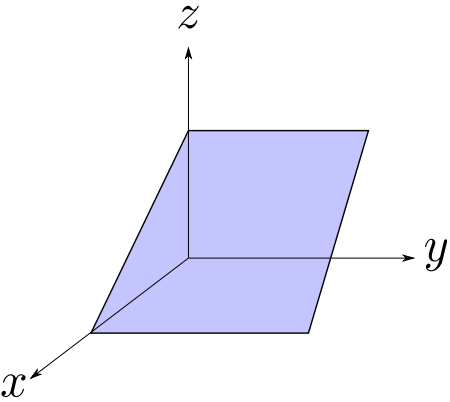
$$x + y - z - 1 = 0$$



## 5.2 מצבים מיוחדים של מישורים במערכת צירים $xyz$

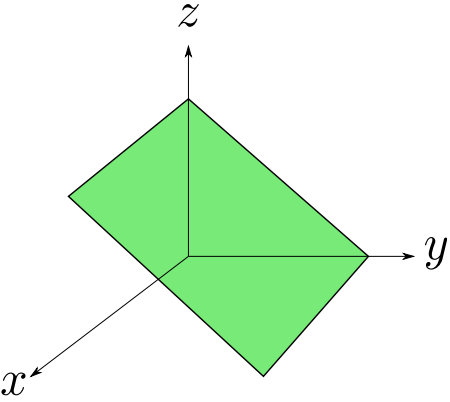
<p><math>A, B, C, D \neq 0</math> המישור לא עובר את הראשית הצירים.</p>		$Ax + By + Cz + D = 1$
<p><math>m, n, p \neq 0</math> המישור לא עובר את הראשית הצירים. אין הבדל איכותי בתרשים הזה והתרשים לעיל. השני ביטויים האלה מציגים אותו מישור.</p>		$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$
<p>המישור עובר דרך הראשית הצירים. המישור חותך את כל אחד של הצירים בנקודה <math>(0, 0, 0)</math>.</p>		$Ax + By + Cz = 0$
<p><math>A, B, D \neq 0</math> משתנה ה- <math>z</math> לא משתתף במשוואת המישור. המישור לא חותך את ציר ה-<math>z</math> ולא עובר דרך הראשית הצירים.</p>		$Ax + By + D = 0$

$Ax + Cz + D = 0$



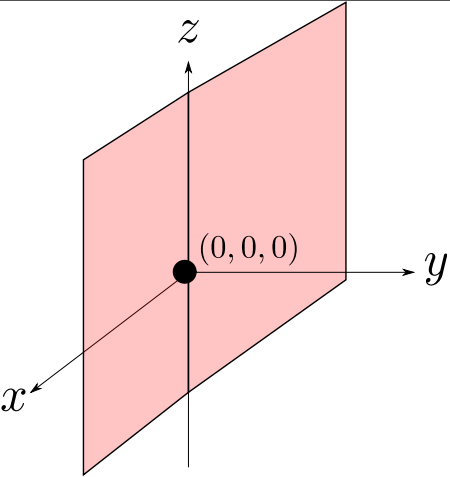
$A, C, D \neq 0$   
משתנה ה-  $y$  לא משתתף  
במשוואת המישור.  
המישור לא חותך את ציר ה- $y$   
ולא עובר דרך הראשית הצירים.

$By + Cz + D = 0$



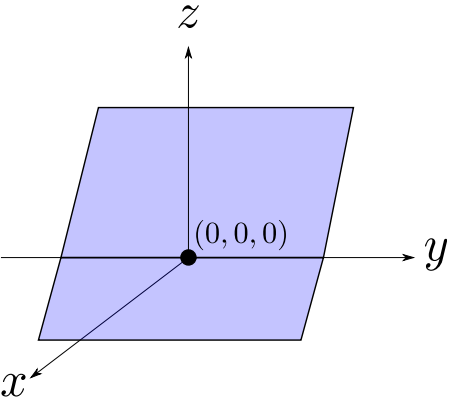
$B, C, D \neq 0$   
משתנה ה-  $x$  לא משתתף  
במשוואת המישור.  
המישור לא חותך את ציר ה- $x$   
ולא עובר דרך הראשית הצירים.

$Ax + By = 0$



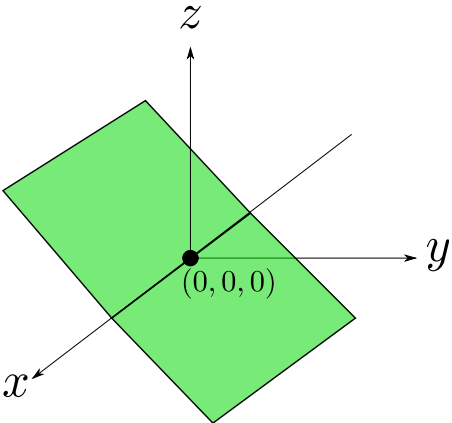
$A, B \neq 0$   
משתנה ה-  $z$  לא משתתף  
במשוואת המישור.  
המישור עובר דרך הראשית  
הצירים.  
המישור מכיל את ציר ה- $z$ .

$Ax + Cz = 0$



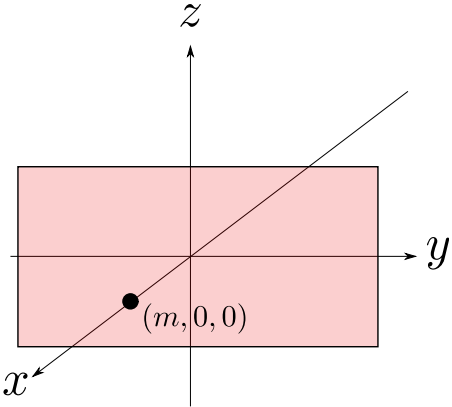
$A, C \neq 0$  משתנה ה-  $y$  לא משתתף  
במשוואת המישור.  
המישור עובר דרך הראשית  
הצירים.  
המישור מכיל את ציר ה- $y$ .

$By + Cz = 0$



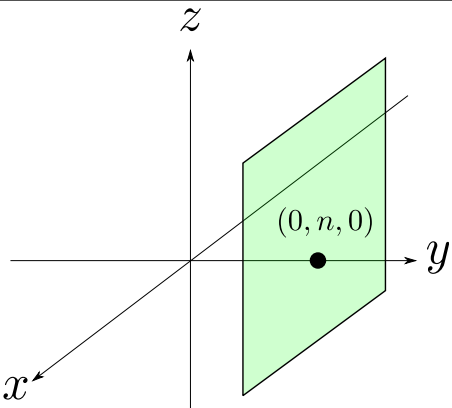
$B, C \neq 0$   
משתנה ה-  $x$  לא משתתף  
במשוואת המישור.  
המישור עובר דרך הראשית  
הצירים.  
המישור מכיל את ציר ה- $x$ .

$Ax + D = 0 \Leftrightarrow x = m$



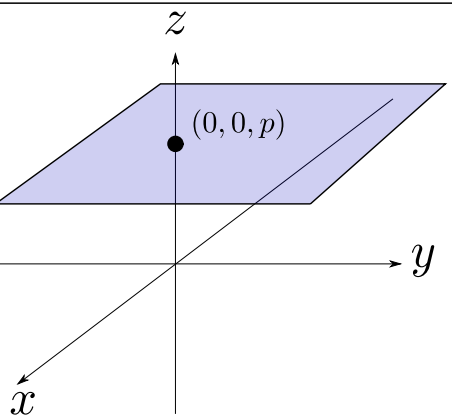
$A, D \neq 0$   
משתני  $y$  ו-  $z$  לא משתתפים  
במשוואת המישור.  
המישור חותך את ציר ה- $x$  ב-  
 $x = m$   
המישור מקביל למישור  $yz$ .

$By + D = 0 \Leftrightarrow y = n$



$B, D \neq 0$   
משתני  $x$  ו-  $z$  לא משתתפים  
במשוואת המישור.  
המישור חותך את ציר ה- $x$  ב-  
 $y = n$   
המישור מקביל למישור  $xz$ .

$Cz + D = 0 \Leftrightarrow z = p$



$C, D \neq 0$   
משתני  $x$  ו-  $y$  לא משתתפים  
במשוואת המישור.  
המישור חותך את ציר ה- $x$  ב-  
 $z = p$   
המישור מקביל למישור  $xy$ .

**משפט 5.2 שטח משולש במישור  $xy$** 

שטחו  $S$  של המשולש אשר קדקודיו הם בנקודות  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  הוא

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

**משפט 5.3 מרחק מנקודה למישור**

המרחק  $d$  מהנקודה  $P(x_0, y_0, z_0)$  למישור  $Ax + By + Cz + D = 0$  הוא

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

**משפט 5.4 נפח הפירמידה המשולשת במרחב  $xyz$** 

הנפח  $V$  של הפירמידה המשולשת אשר קדקודיה הם בנקודות  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$ ,  $(x_3, y_3, z_3)$ ,  $(x_4, y_4, z_4)$  הוא

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

**5.3 דוגמאות****5.4 דוגמה**

שרטטו את הגוף המוגבל ע"י המישורים

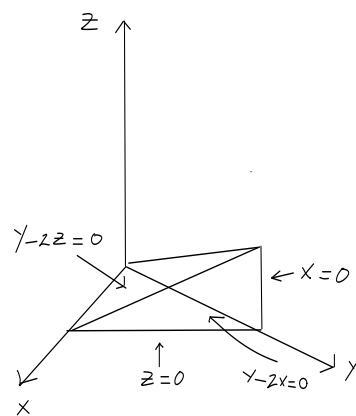
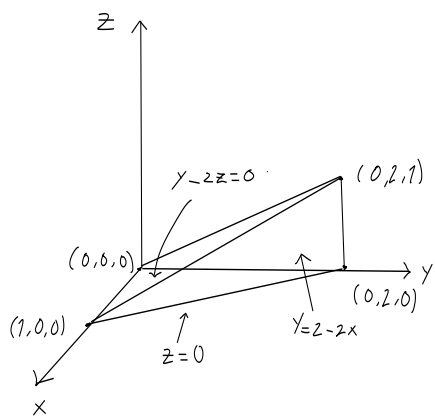
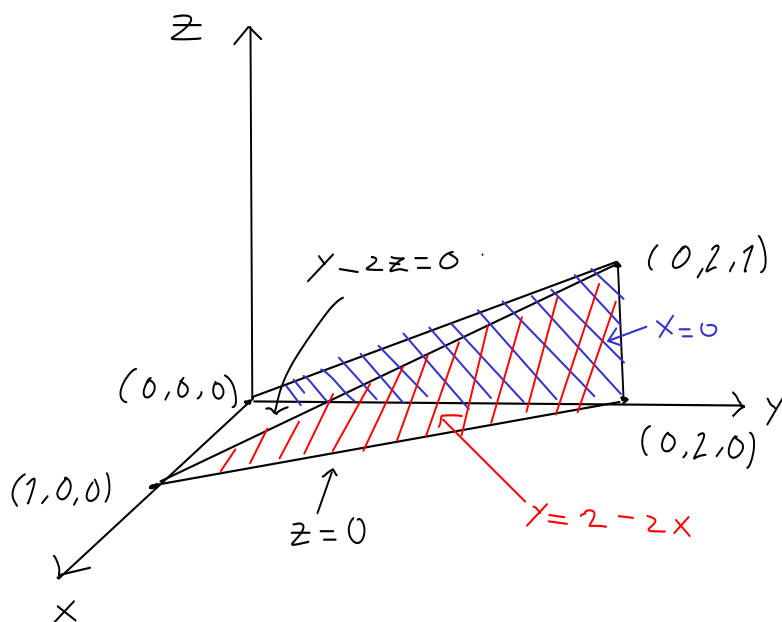
$$x = 0, \quad z = 0, \quad y - 2z = 0, \quad y = 2 - 2x.$$

**פתרון:**

חיתוך בין שלושה מישורים יצא נקודה. אלו הן הקודקודים של הגוף:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0, 0) \qquad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 2 - 2x \end{cases} \Rightarrow (0, 2, 0)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - 2z = 0 \\ y = 2 - 2x \end{cases} \Rightarrow (0, 2, 1) \qquad \begin{cases} z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ y = 2 - 2x \end{cases} \Rightarrow (1, 0, 0)$$



## 5.5 דוגמה

שרטטו את הגוף במרחב  $xyz$  המוגבל ע"י המישורים

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y = 2, \quad z = y + 1.$$



## פתרון:

• המישור  $x + y = 2$  מקביל לציר ה- $z$ .

• המישור  $z = y + 1$  מקביל לציר ה- $x$ .

• המישור  $x = 0$  הוא המישור  $yz$ .

• המישור  $y = 0$  הוא המישור  $xz$ .

• המישור  $z = 0$  הוא המישור  $xy$ .

נחפש את החיתוך של המישור  $x + y = 2$  עם המישור  $x = 0$ :

$$x = 0 \rightarrow y = 2 \quad (0, 2, z).$$

נחפש את החיתוך של המישור  $x + y = 2$  עם המישור  $y = 0$ :

$$y = 0 \rightarrow x = 2 \quad (2, 0, z).$$

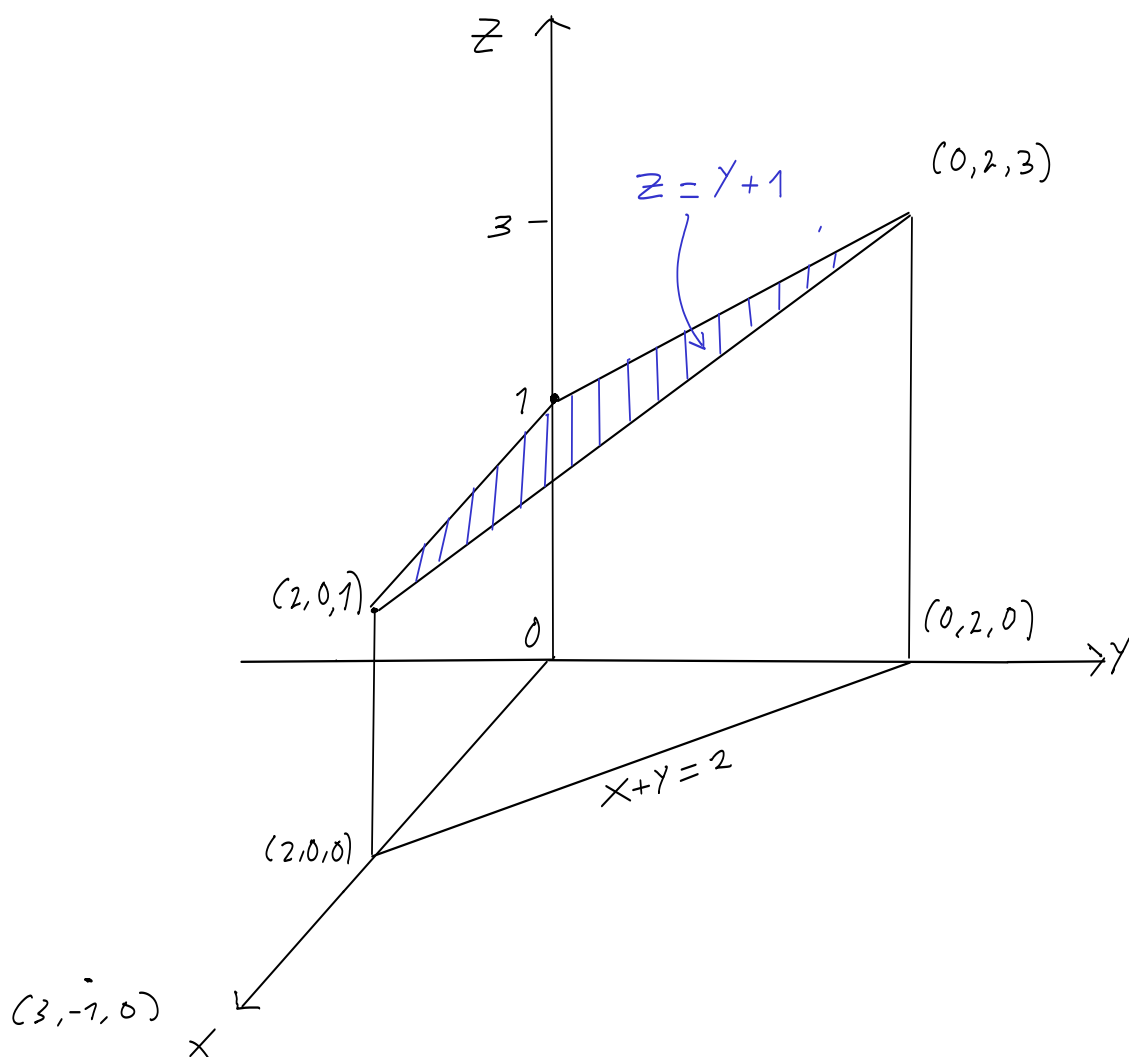
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ z = y + 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow (0, 2, 3)$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ z = y + 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow (2, 0, 1)$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ z = y + 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow (3, 0, -1)$$

$$\begin{cases} z = y + 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \end{cases} \Rightarrow (x, 0, 1)$$

$$\begin{cases} z = y + 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \end{cases} \Rightarrow (x, -1, 0)$$



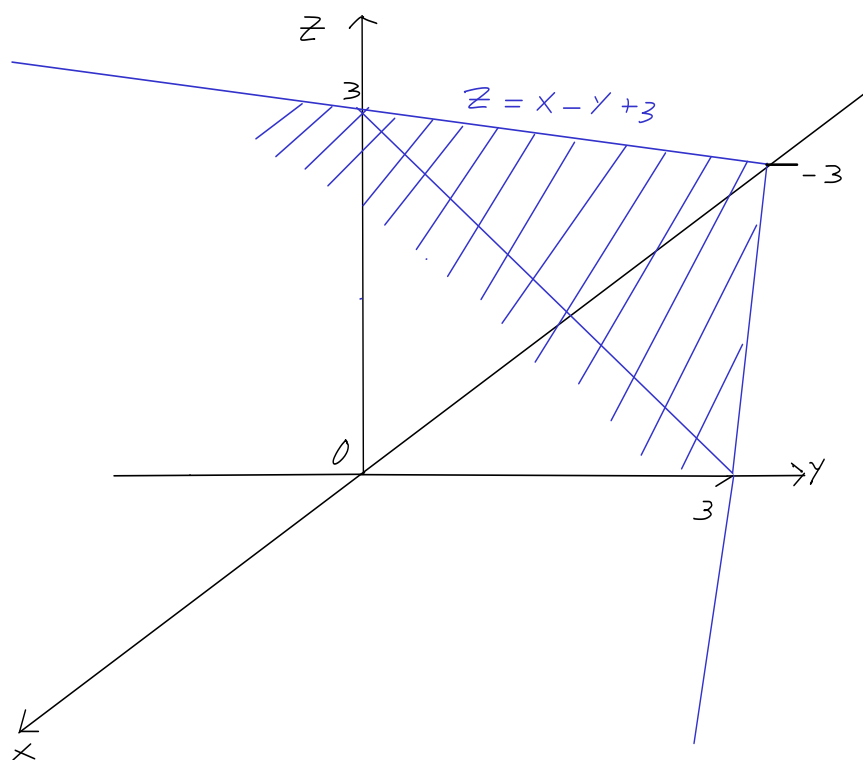
## דוגמה 5.6

ציירו את הגוף המוגבל על ידי המישורים  $z = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = x$ ,  $z = x - y + 3$ .

## פתרון:

- המישור  $z = 0$  הוא המישור  $xy$ .
- המישור  $y = 0$  הוא המישור  $xz$ .
- המישור  $x = 1$  מקביל למישור  $yz$ .
- המישור  $y = x$  הוא המישור  $x - y = 0$ , מקביל לציר ה- $z$ .
- 

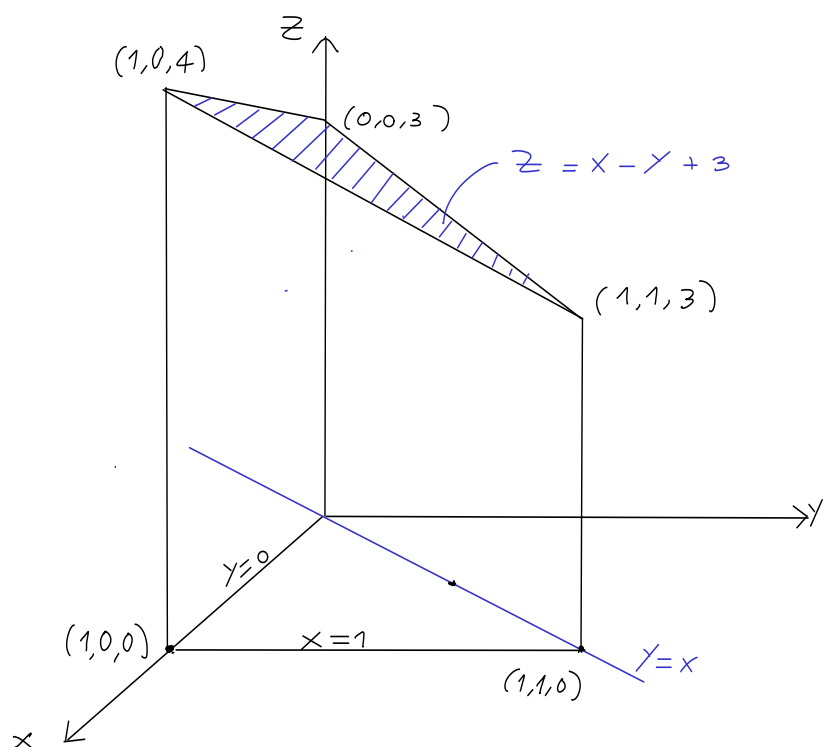
$$z = x - y + 3 \Rightarrow x - y - z = -3 \Rightarrow \frac{x}{-3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3}.$$



$$\begin{cases} z = x - y + 3 \\ y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 4$$

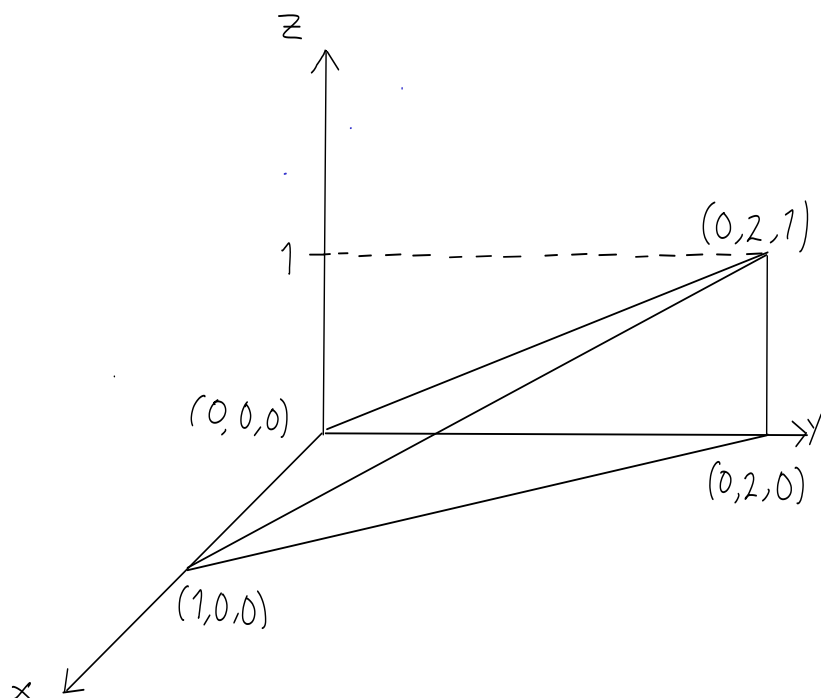
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = x \\ z = x - y + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = x \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$



## דוגמה 5.7

מהן משוואות המישורים המגבילים את הגוף הבא:



## פתרון:

יש לצורה הזאת ארבע פאות:

• מישור  $xy$ :

$$z = 0.$$

מישור  $yz$ :

$$x = 0.$$

• המישור שמכיל את  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 1)$ ,  $(0, 0, 0)$ :

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

נציב את הנקודה  $(0, 0, 0)$  ונקבל  $D = 0$ .

נציב את הנקודה  $(1, 0, 0)$  ונקבל  $A + D = 0 \Leftrightarrow A = 0$ .

נציב את הנקודה  $(0, 2, 1)$  ונקבל  $2B + C = 0 \Leftrightarrow C = -2B$ . נבחר  $B = 1$ ,  $C = -2$ . לכן משוואת המישור היא

$$y - 2z = 0$$

• המישור שמכיל את  $(0, 2, 0)$ ,  $(0, 2, 1)$ ,  $(1, 0, 0)$ :

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} (0, 2, 1) \Rightarrow 2B + C + D = 0 \\ (0, 2, 0) \Rightarrow 2B + D = 0 \\ (1, 0, 0) \Rightarrow A + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} D = -A \\ A = 2B \\ C = -2B - D = -A + A = 0 \end{array} \right\}$$

נבחר  $D = -2 \Leftrightarrow A = 2 \Leftrightarrow B = 1$ . לכן משוואת המישור היא

$$2x + y - 2 = 0$$

### משפט 5.5 משוואת המישור במרחב

משוואת המישור המאונך לוקטור  $n = (A, B, C)$  העובר דרך הנקודה  $M = (x_0, y_0, z_0)$  היא

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

אם נשווה למשוואה  $Ax + By + Cz + D = 0$  נקבל ש-  $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ .

$n$  נקרא הנורמל למישור.

**הוכחה:** עבור הנקודה  $P = (x, y, z)$  במישור מתקיים כי

$$n \cdot \overline{MP} = 0$$

בגלל ש  $n$  מאונך למישור ו-  $\overline{MP}$  מוכל מקביל למישור.

$$\Rightarrow A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0.$$



## 5.8 דוגמה

משוואת המישור המאונך לוקטור  $n = (1, 2, 0)$  העובר דרך הנקודה  $M = (-1, 2, 0)$  היא

$$1 \cdot (x + 1) + 2 \cdot (y - 2) + 3 \cdot (z - 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2y + 3z - 3 = 0.$$

## 5.9 דוגמה

מצאו את משוואת המישור העובר דרך הנקודות  $A = (1, 2, 3)$ ,  $B = (1, 1, 1)$ ,  $C = (-1, 2, 0)$ .

### פתרון:

הוקטור  $n = \overline{AB} \times \overline{AC}$  מאונך למישור.

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (3, 4, -2).$$

לכן המישור נתון ע"י המשוואה:

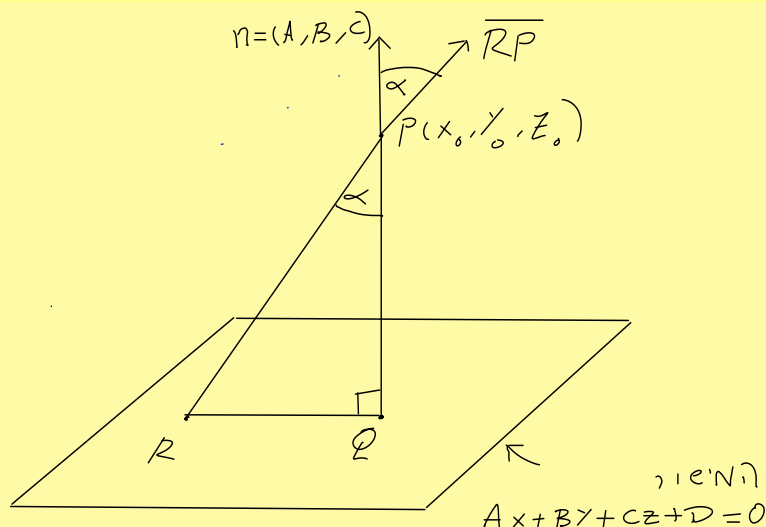
$$3(x - 1) + 4(y - 2) - 2(z - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x + 4y - 2z - 5 = 0.$$

## משפט 5.6 מרחק מנקודה למישור

המרחק  $d$  מהנקודה  $P(x_0, y_0, z_0)$  למישור  $Ax + By + Cz + D = 0$  הוא

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

הנקודה הקרובה ביותר במישור ל- $P$  היא הנקודה שדרכה עובר ניצב למישור שעובר דרך  $P$ .



**הוכחה:** נסמן ב- $Q$  את הנקודה על המישור שהיא הקרובה ביותר ל- $P$ . ממשפט פיתגורס,  $\overline{QP}$  מאונך למישור. נקח כל נקודה אחרת  $R$  במישור.  $PQR$  יוצרות משולש ישר זווית, כך ש- $PR$  היתר ו- $PQ$  קטע קצר מ- $PR$ .

עבור נקודה כלשהי  $R(x_1, y_1, z_1)$  על המישור, נסמן ב- $\alpha$  את הזווית בין  $\overline{RP}$  ל- $n$ .

$$\begin{aligned} |\overline{QP}| &= |\overline{RP}| \cos \alpha \\ &= \frac{|\overline{RP}| \cdot |n| \cdot \cos \alpha}{|n|} \\ &= \frac{\overline{RP} \cdot n}{|n|} \\ &= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

## 5.10 דוגמה

מצאו את המרחק בין  $(1, -1, 2)$  למישור  $2x + y - z + 3 = 0$  ומצאו את הנקודה במישור הקרובה ביותר ל- $(1, -1, 2)$ .

### פתרון:

המרחק הוא

$$d = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

הנורמל למישור הוא  $(2, 1, -1)$ . כדי למצוא את הנקודה הקרובה ביותר על המישור, נרכיב את משוואת הישר המקביל לוקטור  $n$  שעובר דרך הנקודה  $(1, -1, 2)$ :

$$(x + 2t, y + t, z - t) = (1, -1, 2) \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{aligned} x &= 1 - 2t \\ y &= -1 - t \\ z &= 2 + t \end{aligned} \right\}$$

הנקודה  $(x, y, z)$  נמצא במישור לכן נציב אותה למשוואת המישור:

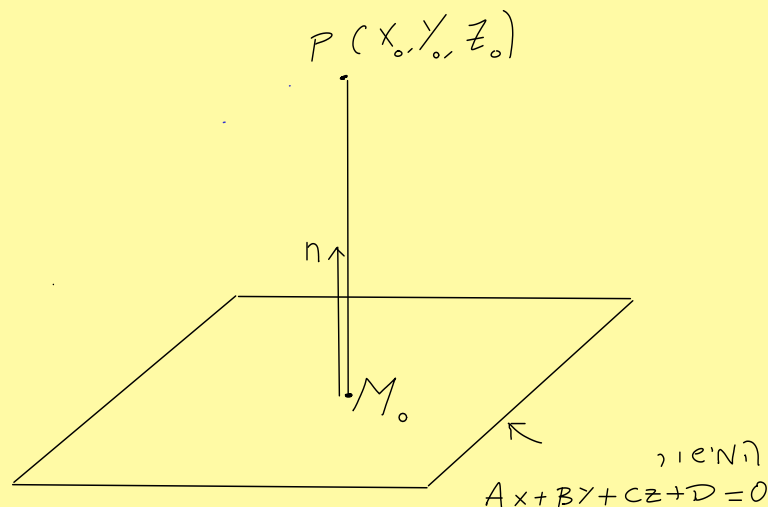
$$2x + y - z + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(1 - 2t) + (-1 - t) - (2 + t) + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - 6t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{3}.$$

לכן הנקודה היא

$$(x, y, z) = \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{3}, -1 - \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right).$$

## 5.2 הגדרה היטל של נקודה על מישור

ההיטל של נקודה  $P(x_0, y_0, z_0)$  על מישור  $Ax + By + Cz + D = 0$  היא הנקודה על המישור הקרובה ביותר ל- $P$ . כלומר, נקודה  $M_0$  כך ש- $\overline{M_0P}$  מקביל לנורמל  $n$  למישור.



### דוגמה 5.11

מצאו את ההיטל של הנקודה  $P(2, -3, 4)$  על המישור  $x + 2y + 2z = 13$ .

#### פתרון:

הנורמל למישור הוא

$$n = (1, 2, 2).$$

משוואת הישר הנרמל למישור העובר דרך הנקודה  $P$  היא

$$M(t) = (2, -3, 4) + t(1, 2, 2) = (2 + t, -3 + 2t, 4 + 2t).$$

נציב את  $M(t)$  במשוואת המישור:

$$1 \cdot (2 + t) + 2 \cdot (-3 + 2t) + 2 \cdot (4 + 2t) = 13 \Rightarrow 9t + 4 = 13 \Rightarrow 9t = 9 \Rightarrow t_0 = 1.$$

לכן הנקודה  $M_0$  היא

$$M(t_0 = 1) = (3, -1, 6).$$

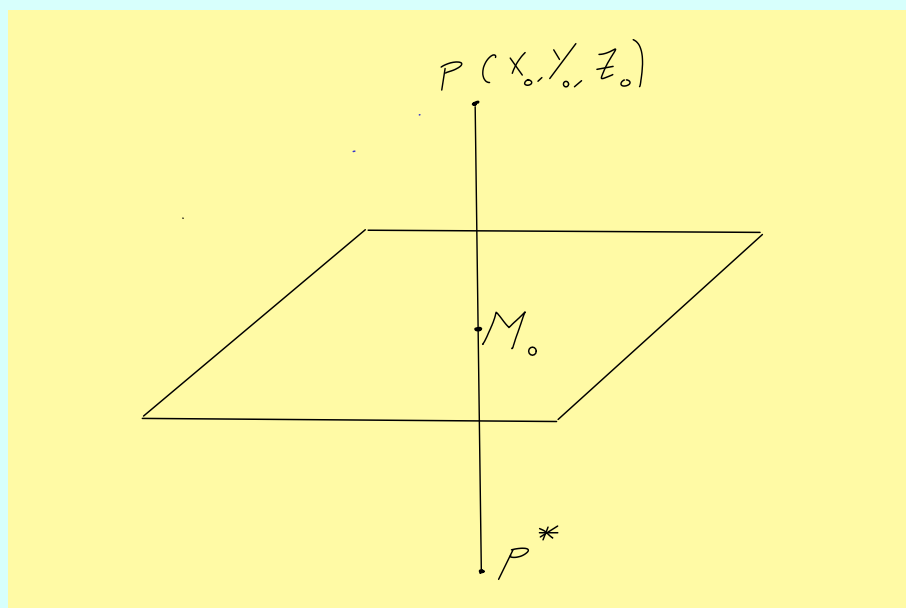
### הגדרה 5.3 השיקוף של נקודה ביחס מישור

השיקוף  $P^*$  של נקודה  $P(x_0, y_0, z_0)$  ביחס למישור מוגדר להיות

$$P^* = P - 2\overline{M_0P},$$

כאשר  $M_0$  ההיטל של  $P$  על המישור.





שיטה אחרת ויותר קלה:

אם נרשום את הישר העובר את הנקודה  $P$  וההיטל שלו במישור בצורה

$$M(t) = P + t \cdot \bar{n}$$

כשאר  $\bar{n}$  הנורמל של המישור. נניח ש-  $t_0$  הוא הערך של הפרמטר  $t$  בנקודת ההיטל,  $M_0$  של  $P$  ביחס למישור. אז השיקוף של  $P$  ביחס למישור זו ניתן ע"י

$$P^* = M(2t_0) = P + 2t_0 \bar{n} .$$

## דוגמה 5.12

מצאו את השיקוף של הנקודה  $P(2, -3, 4)$  ביחס למישור  $x + 2y + 2z = 13$ .

**פתרון:**

שיטה 1

מדוגמה הקודמת ההיטל הוא  $M_0 = (3, -1, 6)$ .

$$\overrightarrow{M_0 P} = (-1, -2, -2)$$

לכן

$$P^* = P - 2(-1, -2, -2) = (2, -3, 4) - (-2, -4, -4) = (4, 1, 8) .$$

שיטה 2

מהדוגמה הקודמת הערך של הפרמטר של הישר על הנקודה של ההיטל הוא  $t_0 = 1$ . לכן השיקוף נמצא בנקודה

$$P^* = M(2t_0) = M(2) = P + 2\bar{n} = (2, -3, 4) + 2(1, 2, 2) = (4, 1, 8) .$$

## 5.4 מצבים הדדיים בין שני מישורים

בהינתן שני מישורים  $\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$  ניתן להגדיר להם שלושה מצבים הדדיים: נחתכים, מתלכדים או מקבילים.

(1) המישורים נחתכים אם הוקטורים  $(A_1, B_1, C_1)$  ו-  $(A_2, B_2, C_2)$  לא מקבילים. במצב זה החיתוך בין המישורים הוא קו ישר.

לדוגמה, נתונים שני מישורים  $\left. \begin{aligned} 2x - 3y + z + 1 &= 0 \\ x - z + 3 &= 0 \end{aligned} \right\}$ . המישורים נחתכים בגלל ש-  
 $(1, 0, -1) \nparallel (2, -3, 1)$ .

(2) המישורים מקבילים אם אין להם נקודה משותפת. כלומר אין פתרון למערכת במצב זה. הוקטור  $(A_1, B_1, C_1)$  מקביל לוקטור  $(A_2, B_2, C_2)$  אבל  $\frac{D_1}{A_1} \neq \frac{D_2}{A_2}$  (ניתן להחליף ב-  $B$  או  $C$ ).

לדוגמה, נתונים המישורים  $\left. \begin{aligned} 2x - 3y + z + 1 &= 0 \\ 6x - 9y + 3z + 2 &= 0 \end{aligned} \right\}$ . אבל  $\frac{D_1}{A_1} \neq \frac{D_2}{A_2}$ . לכן  $(2, -3, 1) \parallel (6, -9, 3)$ . המישורים מקבילים.

(3) המישורים מתלכדים אם כל הנקודות שלהם משותפות במצב זה, הוקטורים  $(A_1, B_1, C_1)$  ו-  $(A_2, B_2, C_2)$  מקבילים. מספיק שיש רק נקודה אחת משותפת שכן מישור נקבע ע"י נקודה ווקטור ניצב.

לדוגמה, נתונים שני מישורים  $\left. \begin{aligned} 2x - 3y + z + 1 &= 0 \\ -4x + 6y - 2z - 2 &= 0 \end{aligned} \right\}$ . המישורים מתלכדים בגלל ש-  
 $(2, -3, 1) \parallel (-4, 6, -2)$  והנקודה  $(0, 0, -1)$  נקודה משותפת.

## 5.5 משפטים נוספים

### משפט 5.7 שטח משולש במישור $xy$

שטחו  $S$  של המשולש אשר קדקודיו הם בנקודות  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  הוא

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

### משפט 5.8 מרחק מנקודה למישור

המרחק  $d$  מהנקודה  $P(x_0, y_0, z_0)$  למישור  $Ax + By + Cz + D = 0$  הוא

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

משפט 5.9 נפח הפירמידה המשולשת במרחב  $xyz$ 

הנפח  $V$  של הפירמידה המשולשת אשר קדקודיה הם בנקודות  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$ ,  $(x_3, y_3, z_3)$ ,  $(x_4, y_4, z_4)$  הוא

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$