שיעור 9
מבוא לסיבוכיות זמן

9.1 הגדרה של סיבוכיות זמן

הגדרה 9.1 זמן הריצה של מכונת טיורינג

זמן הריצה של מ"ט M על קלט w היא פונקציה $f(|w|)$ השווה למספר הצעדים הנדרש בחישוב של M על w.

הערה 9.1

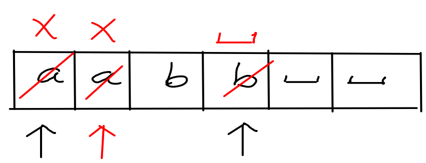
זמן הריצה של מ"ט M על קלט w, נמדד ביחס לגודל הקלט w, כלומר $f(|w|)$.

הגדרה 9.2 סיבוכיות זמן של בעיה/שפה

בהינתן קלט w באורך $n = |w|$. אומרים כי ניתן להכריעה שפה L בזמן $f(n)$ אם קיימת מ"ט M המכריעה את L כך שלכל $w \in \Sigma^*$, זמן הריצה של M על w חסום ע"י $f(|w|)$.

דוגמה 9.1

נבנה מ"ט M עם סרט יחיד שמכריעה את השפה $L = \left\{a^n b^n \;\middle|\; n \geqslant 0\right\}$.



<u>התאור של M:</u>

על קלט w:

(1) אם התו שמתחת לראש הוא $\sqcup$ $\Leftarrow$ מקבלת.

(2) אם התו שמתחת לראש הוא b $\Leftarrow$ דוחה.

(3) מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י X.

(4) מזיזה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאל ל- $\sqcup$.

- אם התו הוא a או X $\Leftarrow$ דוחה.
- מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י $\sqcup$, מזיזה את הראש שמאלה עד התו הראשון מימין ל- X וחוזרת ל- (1).

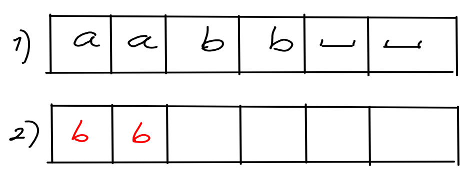
<u>זמן הריצה</u>

- M מבצעת $\frac{|w|}{2}$ איטרציות.
- בכל איטרציה M סורקת את הסרט פעמיים וזה עולה $O\left(|w|\right)$.
- לכן סה"כ זמן הריצה של M חסום ע"י

$$\frac{|w|}{2}\cdot O\left(|w|\right)=O\left(|w|^2\right)\ .$$

דוגמה 9.2

נבנה מ"ט מרובת סרטים M' שמכריעה את השפה $L=\left\{a^nb^n \mid n\geqslant 0\right\}$.



<u>התאור של M':</u>

על קלט w:

(1) מעתיקה את ה- b -ים לסרט 2 (ותוך כדי בודקת האם w מהצורה a^*b^*). $O\left(|w|\right)$.

(2) מזיזה את הראשים לתחילת הסרטים. $O\left(|w|\right)$.

(3) אם שני הראשען מצביעים על $\sqcup$ $\Leftarrow$ מקבלת.

(4) אם אחד הראשים מצביע על $\sqcup$ והשני לא $\Leftarrow$ לא.

(5) מזיזה את שהע הראשים ימינה וחוזרת לשלב (3). שלבים (3-5): $O\left(|w|\right)$.

<u>זמן הריצה</u>

זמן הריצה של M' הוא $O\left(|w|\right)$.

9.2 יחס בין הסיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס

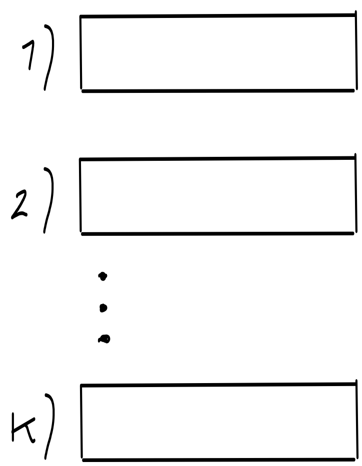
משפט 9.1

לכל מ"ט מרובת סרטים M הרצה בזמן $f(n)$ קיימת מ"ט סרט יחיד M' השקולה ל- M ורצה בזמן $O\left(f^2(n)\right)$.

הוכחה:

בהינתן מ"ט מרובת סרטים M, הרצה בזמן $f(n)$, נבנה מ"ט עם סרט יחיד M' באותו אופן כמו בהוכחת השקילות במשפט 3.1.

כלומר, M' שומרת את התוכן של k סרטים של M על הסרט היחיד שלה (עם הפרדה ע"י #), ובכל צעד חישוב, M' סורקת את הסרט שלה כדי לזהות שת האותיות שמתחת לראשים (שמסומנות ב- $\hat{\alpha}$) ואחרי זה, משתמשת בפונקצית המעברים של M, וסורקת את הסרט פעם נוספת כדי לעדכן את התוכן בכל אחד מהסרטים ואת מיקום הראש בכל אחד מהסרטים.



כמה לוקח ל- M' לסרוק את הסרט שלה? מכיוון שהסרט של M' מכיל את התוכן של k הסרטים של M, והגודל של כל אחד מהסרטים של M חסום ע"י $f(n)$, גודל הסרט של M' חסום ע"י

$$k \cdot f(n) = O\left(f(n)\right) \ .$$

העלות של הסריקה של M' לסרט שלה היא $O\left(f(n)\right)$ וזה עלות של צעד חישוב בריצה של M' על הקלט.

מכיוון ש- M רצה בזמן $f(n)$, זמן היצרה של M' חסום ע"י

$$f(n) \cdot O\left(f(n)\right) = O\left(f^2(n)\right) \ .$$

■

9.3 יחס בין הסיבוכיות של מ"ט דטרמיניסטית ומ"ט א"ד

הגדרה 9.3

בהינתן מ"ט א"ד M, זמן הריצה של M על קלט w, היא פונקציה $f(|w|)$ השווה למספר הצעדים בחישוב המקסימלי של M על w.

משפט 9.2

לכל מ"ט א"ד N הרצה בזמן $f(n)$, קיימת מ"ט דטרמיניסטית D השקולה ל- N ורצה בזמן $2^{)(f(n))}$.

הוכחה:
בהינתן מ"ט א"ד N הרצה בזמן $f(n)$ מ"ט דטרמיניסטית D באותו אופן כמו בהוכחת השקילות במשפט 4.1.

כלומר, בהינתן קלט w, D תסרו' את עץ החישוב של N ו- w לרוחב ותקבל כל אחד החישובים של N המסתיים ב- q_{acc}.

בהינתן קלט w באורך n:

- כל מסלול בעץ החישוב של N על w חסום ע"י $f(n)$.
- מספר החישובים ש- D מבצעת חסום ע"י מספר הקודקודים בעץ החישוב של N ו- w.
- מכיוון שמספר הבנים של כל קודקוד בעץ החישוב חסום ע"י

$$C = 3|Q| \cdot |\Gamma|$$

מספר הקודקודים בעץ החישוב חסום ע"י

$$C^0 + C^2 + \ldots C^{f(n)} \leqslant C^{f(n)+1} = C \cdot C^{f(n)} \ .$$

ולכן זמן הריצה של D חסום ע"י

$$f(n) \cdot C \cdot C^{f(n)} \leqslant C^{f(n)} \cdot C^{f(n)} = C^{2f(n)} = \left(C^2\right)^{f(n)} = 2^{C' \cdot f(n)} = 2^{O(f(n))} \ .$$

נתייחס כאן לשני החסמים הבאים:

■

1) חסם פולינומיאלי הוא חסם מהצורה n^c עבטר $c > 0$ כלשהו.

2) חסם אקספוננציאלי הוא חסם מהצורה 2^{n^c} עבור $c > 0$ כלשהו.

הגדרה 9.4 בעיית הכרעה

בעיית הכרעה מוגדרת באופן הבא:

"בהינתן קלט כלשהו, האם הקלט מקיים תנאי מסוים "

דוגמה 9.3

בהינתן מספר n, האם n ראשוני?

כל בעיית הכרעה ניתן לתאר כפשה שקולה:

$$L_{\text{prime}} = \left\{ \langle n \rangle \mid \text{ראשוני } n \right\} .$$

משפט 9.3

$$\text{בעיית הכרעה} \equiv \text{שפה} .$$

הגדרה 9.5 אלגוריתם זמן פולינומיאלי

אומרים כי אלגוריתם A מכריעה בעייה בזמן פולינומיאלי אם קיים קבוע $c > 0$ כך שזמן הריצה של A על כל קלט w חסום ע"י $O\left(|w|^c\right)$.

משפט 9.4 התזה של צירץ' (Church Thesis)

אם קיים אלגוריתם המכריע בעייה בזמן פולינומיאלי, אז קיימת מ"ט דטרמיניסטית המכריעה את השפה השקולה לבעייה זו בזמן פולינומיאלי.

$$\text{אלגוריתם מכריעה} \equiv \text{מכונת טיורינג} .$$

9.4 המחלקה P

הגדרה 9.6 המחלקה P

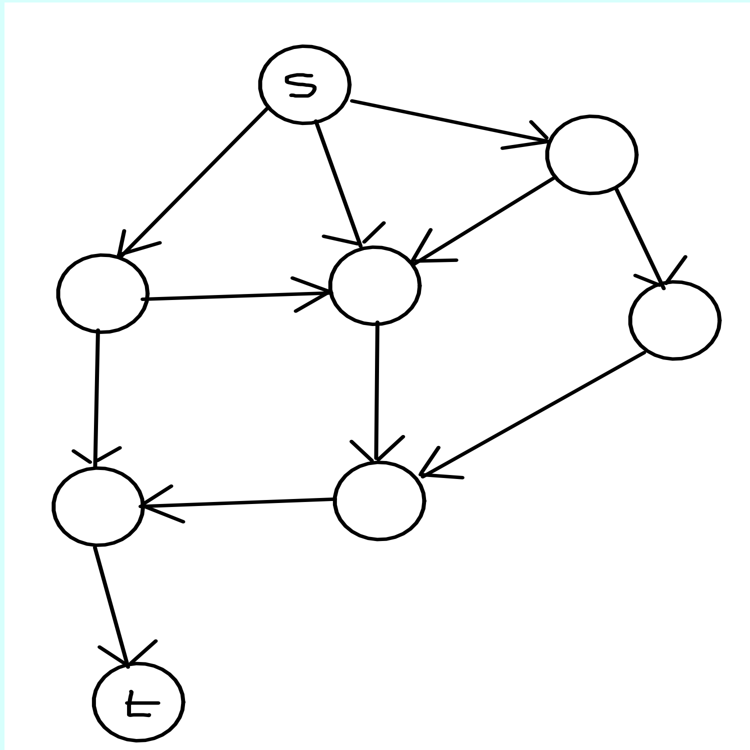
המחלקה P היא אוסף כל הבעיות (השפות) שקיים עבורן אלגוריתם (מכונת טיורינג דטרמיניסטית) המכריע אותן בזמן פולינומיאלי.

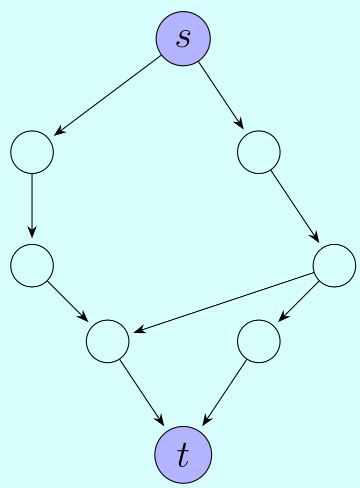
דוגמה 9.4

$$L = \left\{ a^n b^n \mid n \geqslant 0 \right\} \in P .$$

9.5 בעיית PATH

הגדרה 9.7 בעיית המסלול בגרף מכוון





<u>קלט:</u> גרף מכוון $G=(V,E)$ ושני קודקודים $s,t\in V$.

<u>פלט:</u> האם קיים מסלול ב- G מ- s ל- t?

$$PATH=\{\langle G,s,t\rangle \mid \text{קיים מסלול ב- } G \text{ מ- } s \text{ ל- } t\}$$

משפט 9.5

$$PATH\in P\ .$$

הוכחה: נבנה אלגוריתם A עבור הבעייה $PATH$.

$A=$ על קלט $\langle G,s,t\rangle$:

1) צובע את s.

2) מבצע $|V|-1$ פעמים:

- לכל צלע $(u,\mathrm{v})\in E$:
  - אם u צבוע $\Leftarrow$ צבע את v.

3)
- אם t צבוע $\Leftarrow$ החזיר "כן".
- אחרת $\Leftarrow$ החזיר "לא".

זמן ריצה של האלגוריתם הוא $O\left(|V|\cdot|E|\right)$ פולינומיאלי במספר הקודקודים $|V|$.

האם זה פולינומיאלי בגודל הקלט $|\langle G\rangle|$?

איך נקודד את G?

- נניח כי $|V|=n$ ו- $V=\{1,2,3,\quad\cdots\quad,n\}$.
- נניח כי הצלעות נתונות ע"י מטריצה M בגודל $n\times n$ כך ש-

$$M_{ij}=\begin{cases}1 & (i,j)\in E\\ 0 & (i,j)\notin E\end{cases}\ .$$

- נניך כי מספרים מקודדים בבסיס בינארי.
- אזי גודל הקידוד של G שווה $n^2+n\log_2 n$, כלומר

$$|\langle G\rangle|=\Omega\left(|V|^2\right)\qquad\Rightarrow\qquad |V|=O\left(|\langle G\rangle|\right)\ .$$

ולכן כל אלגוריתם הרץ בזמן פולינומיאלי במספר הקודקודים $|V|$ ירוץ בזמן פולינומיאלי בגודל הקידוד $|\langle G\rangle|$.

ולכן A רץ בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט. ■

9.6 בעיית $RELPRIME$

הגדרה 9.8 מספרים זרים (Relatively prime)

שני מספרים x,y זרים אם המחלק המשותף הגדול ביותר, מסומן $\gcd(x,y)$, שווה 1.

הגדרה 9.9 בעיית $RELPRIME$

קלט: שני מספרים x ו- y.

פלט: האם x ו- y זרים?

$$RELPRIME=\left\{\langle x,y\rangle\ \middle|\ \gcd(x,y)=1\right\}\ .$$

משפט 9.6

$$RELPRIME \in P \ .$$

הוכחה: נבנה אלגוריתם A המכריע את $RELPRIME$ בזמן פולינומיאלי.

האלגוריתם מבוסס על העובדה ש-

$$\gcd(x,y)=1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle x,y\rangle \in RELPRIME \ .$$

ולכן נשתמש באלגוריתם האוקלידי לחישוב gcd:

$$\gcd(x,y)=\begin{cases} x & y=0 \\ \gcd(y,x \mod y) & y\neq 0 \end{cases} \ .$$

הוכחה: נסמן $d=\gcd(x,y)$. אזי קיימים שלמים s,t כך ש- $sx+ty=d$. נסמן $r=x \mod y$. ז"א $x=qy+r$. לכן

$$s(qy+r)+ty=d \quad \Rightarrow \quad sr+(t+sq)y=d \quad \Rightarrow \quad \gcd(x,y)=d=\gcd(y,r) \ .$$

לדוגמה:

$$\gcd(18,32)=\gcd(32,18)=\gcd(18,14)=\gcd(14,4)=\gcd(4,2)=\gcd(2,0)=2 \ .$$

<u>האלגוריתם האוקלידי:</u>

על קלט x ו- y:

(1) כל עוד $y\neq 0$:

- $x \mod y \to x$
- $\text{swap}(x,y)$

(כלומר מחליפים בין x ו- y).

(2) מחזירים את x.

<u>האלגוריתם A המכריע $RELPRIME$:</u>

$A=$ על קלט $\langle x,y\rangle$:

(1) מריץ את האלגוריתם האוקלידי על x ו- y.

- אם האלגורים האוקלידי החזיר $1 \Leftarrow$ מקבל.
- אחרת $\Leftarrow$ דוחה.

נכונות האלגוריתם נובעת מנכונות האלגוריתם האוקלדי.

נוכיח כי A רץ בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט.

<u>טענת עזר:</u>

אם $x>y$ אזי $x \mod y < \frac{x}{2}$.

<u>הוכחה:</u>

יש שתי אפשרויות:

- אם $y \leqslant \frac{x}{2}$ אזי
$$x \mod y < y \leqslant \frac{x}{2} \ .$$
- נניח ש- $\frac{x}{2} < y < x$.
מכיוון ש- $x = qy + (x \mod y)$, וגם $x < 2y$ אז בהכרח $q < 2$ ולכן $x = y + (x \mod y)$
ולכן $x - y = x \mod y$.

לפיכך
$$x \mod y = x - y < \frac{x}{2} \ .$$

■

לפי טענת העזר, אחרי כל איטרציה x קטן בלפחות חצי.

מכיוון שבכל איטרציה מחליפים בין x ו- y, אחרי כל שתי איטרציות גם x וגם y קטנים בלפחות חצי.

ולכן לאחר $\log_2 x + \log_2 y$ איטרציות לפחות x או y שווים ל- 0.

ולכן מספר האיטרציות באלגוריתם האוקלידי חסום ע"י $\log_2 x + \log_2 y$, וזה בדיוק זמן הריצה של האלגוריתם A.

ולכן A רץ בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט.

ולכן
$$RELPRIME \in P \ .$$

■