1 דוגמא. (שליפת קלפים ברצף) שולפים שלוש קלפים אחד אחרי השני ללא החזרה מחבילת קלפים תקינה. מהי ההסתברות שקלף הראשון הוא red ace, קלף השני הוא 10 או jack , וקלף שלישי הוא יותר גדול מ 3 ופחות מ 7.

פיתרון. השאלה היא, מהי ההסתברות של המאורע $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ כאשר

- $A_1 =$ המאורע של הקלף הראשון הוא red ace,
- $A_2 =$ המאורע ש קלף השני הוא או 10 או jack,
- $A_3 =$ המאורע ש קלף שלישי הוא יותר גדול מ 3 ופחות מ 7.

$$P(A_1) = \frac{2}{52}, \quad P(A_2|A_1) = \frac{8}{51}, \quad P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{12}{50} \ ,$$

לכן לפי נוסחת ההסתברות ההשלמה,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{8}{5525} \ .$$

■

2 דוגמא. (כדים של כדורים בנות צבעים שונים) בכד יש 4 כדורים לבנים, ו-3 כדורים שחורים. בכד שני 3 כדורים לבנים ו 5 כדורים שחורים. כדור אחד הוצא מכד ראשון ומונח בכד שני ללא לבדוק את הצבע שלו. מהי ההסתברות אשר כדור אשר הוצא מהכד שני הוא שחור?

פיתרון. נגדיר את המאורעות הבאים:

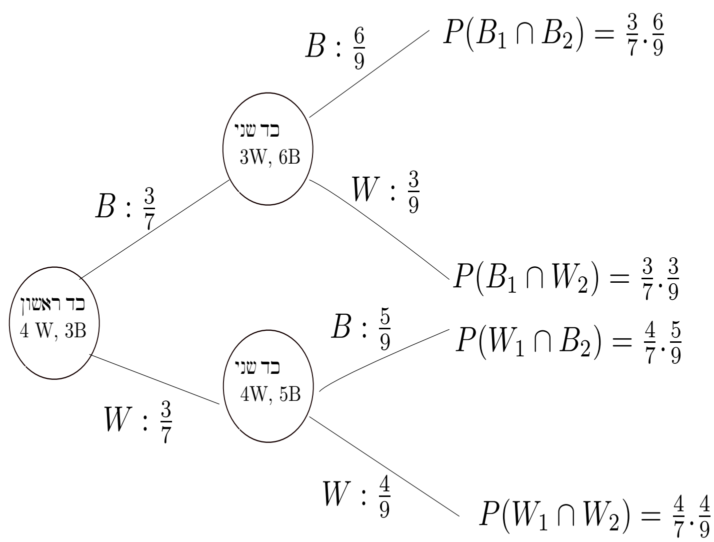
- $B_1 =$ כדור שחור הוצא מכד ראשון
- $B_2 =$ כדור שחור הוצא מכד שני
- $W_1 =$ כדור לבן הוצא מכד ראשון

השאלה היא מהי ההסתברות של האיחוד המאורעות $B_1 \cap B_2$ ו $W_1 \cap B_2$, כלומר

$$(B_1 \cap B_2) \cup (W_1 \cap B_2) \ ,$$

לקחת בחשבון שהם מאורעות זרים:

$$(B_1 \cap B_2) \cap (W_1 \cap B_2) = \phi \ .$$



איור 1: עץ הסתברות עבור דוגמה לעיל

$$\begin{aligned} P\left((B_1 \cap B_2) \cup (W_1 \cap B_2)\right) =& P(B_1 \cap B_2) + P(W_1 \cap B_2) \\ =& P(B_1)P(B_2|B_1) + P(W_1)P(B_2|W_1) \\ =& \frac{3}{7}\cdot\frac{6}{9} + \frac{4}{7}\cdot\frac{5}{9} \\ =& \frac{38}{63} \ . \end{aligned}$$

■

3 דוגמא. הרכב הסטודנטים בתואר ראשון הוא כדלקמן:

- 50% מהסטודנטים הם בשנה א' לתואר,
- 30% מהסטודנטים הם בשנה ב' לתואר,

בנוסף, מצבם המשפחתי של הסטודנטים הנ"ל הוא:

- 20% מהסטודנטים שנמצאים בשנה א' - נשואים,
- 30% מהסטודנטים שנמצאים בשנה ב' - נשואים,
- 40% מהסטודנטים שנמצאים בשנה ג' - נשואים.

ענו על השאלות הבאות.

1. בהנחה שפגשנו באקראי את אלון, סטודנט מתואר ראשון, מה הסיכוי שהוא נשוי?
2. מסתבר שאלון אכן נשוי, מה הסיכוי שהוא משנה ג'?
3. פגשנו סטודנט אחר, בן, גם כן מתואר ראשון ומסתבר שהוא איננו נשוי, מה הסיכוי שהוא משנה ג'?

פיתרון. בשאלה זו נשתמש בעיקר בנוסחת ההסתברות השלמה וחוק בייז.

1. נסמן ב- M את המאורע בו הסטודנט נשוי וב- I ו II ן III את המאורעות בהם הסטודנט הוא בשנה א',ב' ו-ג' לתואר בהתאמה.

$$P(M) =P(M|I)P(I) + P(M|II)P(II) + P(M|III)P(III)$$
$$= \frac{2}{10}.\frac{5}{10} + \frac{3}{10}.\frac{3}{10} + \frac{4}{10}.\frac{2}{10} = 0.27\ .$$

2. נשתמש בחוק בייז מסיבה פשוטה - נתוני השאלה מציגים הסתברויות להיות נשוי בהתאם לשנת הלימוד, אבל ההתנייה ההפוכה לא נתונה. לכן,

$$P(III|M) = \frac{P(M|III)P(III)}{P(M)} = \frac{0.4.0.2}{0.27} = \frac{0.08}{0.27} \approx 0.296\ .$$

3. נחשב באופן דומה לחישוב קודם, אלא שהפעם ההתנייה היא על מאורע שונה.

$$P(III|\bar{M}) = \frac{P(\bar{M}|III)P(III)}{P(\bar{M})} = \frac{0.6.0.2}{1-0.27} = \frac{0.12}{0.73} \approx 0.164\ .$$

■

4 **דוגמא.** בספרייה ישנם 10 ספרי הסתברות. 5 ספרים הכוללים פתרונות ו-5 ללא פתרונות. הספרנית איבדה ספר אחד מתוך ה-10 (כלשהו). אלון מגיע לקחת ספר, מקבל ספר מתוך התשעה הנותרים באקראי ומחזיר לאחר יומיים. לאחר שבועיים מגיע בן ולוקח גם כן ספר 1 מתוך ה-9 ומחזיר לאחר יומיים. נגדיר את המאורעות A- הספר של אלון כלל פתרונות, ו- B - הספר של בן כלל פתרונות. האם A ו-B תלויים?

פיתרון. לכאורה, אין סיבה שתהיה תלות. מצד אחד, אלון לקח ספר והחזיר לאחר יומיים. שבועיים לאחר מכן, אחרי שאלון החזיר כבר את הספר, מגיע בן ולוקח ספר כלשהו, לכן למה שתהיה תלות?! אבל במקרה זה אכן המאורעות תלויים. נראה זאת בעזרת חישוב ישיר. נגדיר C - הספר שאבד כלל פתרונות. משיקולי סימטריה, $P(A)=P(B)$ ולכן נחשב רק אחד מהם.

$$P(A) =P(A|C)P(C) + P(A|\bar{C})P(\bar{C})$$
$$=\frac{4}{9}.\frac{1}{2} + \frac{5}{9}.\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2},$$

על כן נקבל ש- $P(A).P(B)=\frac{1}{4}$. מצד שני,

$$P(A\cap B) =P(A\cap B|C)P(C) + P(A\cap B|\bar{C})P(\bar{C})$$
$$=\left(\frac{4}{9}\right)^2.\frac{1}{2} + \left(\frac{5}{9}\right)^2.\frac{1}{2}$$

לכן המאורעות תלויים. ההסבר הוא פשוט יחסית, ניקח את הסיטואציה למצב קיצון ונניח שבין אלון ובן היו מגיעים עוד 1000 איש ומבצעים את הניסוי, והיינו שמים לב שרק $\frac{4}{9}$ מתוכם קיבלו ספר עם פתרונות. במצב כזה היינו חושבים שככל הנראה אבד ספר עם פתרונות ■

5 דוגמא. **(הכד של פוליה)** בכד 5 כדורים שחורים ו־3 לבנים. בכל הוצאה של כדור מהכד, מחזירים אותו חזרה יחד עם 4 נוספים מאותו הצבע.

1. מה ההסתברות שהכדור הראשון שנוציא יהיה שחור?
2. מה ההסתברות שהכדור השני שנוציא יהיה שחור?
3. מה ההסתברות שהכדור ה־100 שנוציא יהיה שחור?

פיתרון. פתרון: נפתור את צמד הסעיפים הראשונים בעזרת חישובים קומבינטוריים ונוסחת ההסתברות השלמה.

1. הפתרון לסעיף הראשון הוא מיידי והתשובה היא $\frac{5}{8}$. (חלוקה של גודל המאורע במרחב המדגם).
2. נחשב בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה. נסמן ב B_i, W_i $i = 1, 2$ את המאורעות בהם הכדור ה־ i הוא שחור או לבן, בהתאמה.

$$P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|W_1)P(W_1)$$
$$= \frac{9}{12}.\frac{5}{8} + \frac{5}{12}.\frac{3}{8} = \frac{45+15}{96} = \frac{5}{8}$$

באופן מפתיע קיבלנו שההסתברות להוציא שחור בשלב הראשון ובשלב השני שוות.

3. לפני שנענה על הסעיף הנוכחי, ננסה למצוא הוכחה יותר פשוטה שלא תצריך התניות רבות. נתחיל במצב יחסית פשוט: מה היה קורה לו היו לנו רק 2 כדורים בכד בהתחלה - 1 שחור ו־1 לבן? אזי משיקולי סימטריה ההסתברות שהכדור ה־ 100 היה שחור היא (מאחר והכדור ה־ 100 הוא שחור או לבן, וישנה סימטריה מלאה בין השחורים ללבנים, אזי ההסתברות שנוציא כל אחד מהם בפעם ה־ 100 היא שווה). מה לגבי מצב בו ישנם 8 כדורים בכד ללא צבעים אשר ממוספרים מ־ 1 עד 8 (לאחר הוצאה מחזירים את הכדורים עם אותו המספר של הכדור שהוצא)? במצב זה, גם כן יש סימטריה בין שמונת הכדורים ולכן ההסתברות להוציא כדור עם ערך 1 . כעת נוכל להניח שיש מספרים על הכדורים בבעיה המקורית, הסיכוי שנוציא את כדורים 1 עד 5) אלו הכדורים הצבועים בשחור) הוא $\frac{5}{8}$ כסכום ההסתברויות להוציא כל מספר מ־ 1 עד 5 בנפרד. ולסיכום, ההסתברות שנוציא כדור שחור בפעם ה 100 היא $\frac{5}{8}$ וזה נכון עבור כל שלב שנבחר

■

6 דוגמא. לבן יש מטבע כחול ולאלון מטבע אדום. למטבע הכחול הסתברות p לנחות על 'עץ' (H) ולמטבע האדום הסתברות q. .אלון ובן משחקים את המשחק הבא: בכל תור, מטילים שניהם את המטבע שלהם באופן ב"ת באחר או בהטלות הקודמות. אם התקבל פעמיים H , אז הם מחליפים ביניהם את המטבעות. אחרת, כל אחד נשאר עם המטבע שהתחיל איתו את הסיבוב. התהליך חוזר על עצמו שוב ושוב. לכל $n \geq 1$ נגדיר את המאורע A_n כמאורע שבתום n סיבובים אלון מחזיק את המטבע האדום. חשבו את $P(A_2)$, ומצאו עבור אילו ערכי p ו q המאורעות A_2 ו A_3 ב"ת.

פיתרון. ננסה לחשוב מתי A_2 אפשרי. זהו המאורע בו אחרי 2 סיבובים אלון מחזיק את המטבע האדום איתו התחיל. דבר זה יכול להתרחש אם ורק אם לא הוחלפו מטבעות כלל, או לחילופין, התבצעו שתי החלפות. ההסתברות להחלפה של מטבע בסיבוב נתון היא pq לכן נקבל ש־

$$P(A_2) = (1-pq)^2 + (pq)^2 \ .$$

דרך אחת לבחון אי-תלות היא בעזרת ההגדרה

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3) \ .$$

מנגד, ישנה עוד דרך להראות אי־תלות וזאת על ידי השיוויון

מדוע זה אפשרי? ובכן, לפי הגדרה, נובע ש־

$$P(A_3|A_2) = \frac{P(A_3 \cap A_2)}{P(A_2)},$$

ואם בנוסף אנו יודעים ש

$$P(A_3|A_2) = P(A_3)$$

מתרחשים אזי נובע ש

$$\frac{P(A_3 \cap A_2)}{P(A_2)} = p(A_3),$$

כנדרש. נחשב מפורשות את $P(A_3|A_2)$ ואת $P(A_3)$. נסמן $s = pq$ ונקבל

$$P(A_3) = (1-s)^3 + 3(1-s)s^2 \ ,$$

לכן, נבדוק מתי מתקיים

$$1 - s = (1-s)^3 + 3(1-s)s^2 \ .$$

פתרון ראשון הוא $s = 1$. אחרת

$$\begin{aligned} 1 =& (1-s)^2 + 3s^2, \\ 0 =& -2s + 4s^2, \\ 0 =& s(2s-1) \ . \end{aligned}$$

לכן נקבל את הפתרונות $s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = \frac{1}{2}$. נתרגם זאת למונחי p ו q באופן הבא:

$$p = \frac{1}{2q} \Leftrightarrow s = \frac{1}{2} \ ,$$

ואלו המקרים בהם ישנה אי-תלות. התוצאה שקיבלנו היא די הגיונית ואפילו אינטואיטיבית. כאשר $pq = 0$ או $pq = 1$ אז מקבלים שהמאורעות A_2 ו A_3 מתרחשים בהסתברות 0 או 1 ולכן הם ב"ת בכל מאורע אחר. בנוסף, כאשר $pq = \frac{1}{2}$ אז בכל שלב יש סיכוי שווה להיות בכל מצב ללא תלות בעבר. למעשה, ישנה סימטריה בבעיה מבחינת מיקום המטבעות אצל אלון ובן ולכן מתקיימת אי-תלות. ■

7 דוגמא. על השולחן מונחים 2 כדים: בכד הראשון (כד א') שלושה כדורים לבנים וחמישה כדורים אדומים; בכד השני (כד ב') ישנם שישה כדורים לבנים ושלושה כדורים אדומים. אלון מטיל מטבע הוגן. אם תוצאת ההטלה היא "עץ", הוא יוציא מכד א' 2 כדורים עם החזרה. אחרת, הוא יוצא מכד ב' 2 כדורים עם החזרה. נסמן ב־A את המאורע שהכדור הראשון לבן, ב־B את המאורע שהכדור השני לבן וב־C את המאורע בו נבחר כד א'. האם המאורעות A, B תלויים? האם המאורעות A, B תלויים בהינתן C?

פיתרון. נתחיל בבניית מרחב המדגם. נסמן את הכדורים בכד א' במספרים $1, \ldots, 8$ כאשר שלושת הראשונים יהיו הכדורים הלבנים והיתר אדומים. באופן דומה נסמן את הכדורים בכד ב' במספרים $1, \ldots, 9$ כאשר ששת הראשונים לבנים והיתר אדומים. מרחב המדגם מורכב משלשות כאשר הקואורדינטה הראשונה היא זהות הכד שנבחר והקואורדינטות האחרונות הן ערכי הכדורים שהוצאו מהכד שנבחר. נשים לב שמרחב המדגם מכיל

$$|\Omega| = 8^2 + 9^2 = 145$$

אפשרויות שונות. בנוסף נשים לב שמערכת המדגם אינו מרחב מדגם שווה הסתברות. לדוגמא: ההסתברות להוציא צמד כדורים כלשהם מכד א' היא

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$$

בעוד ההסתברות להוציא צמד כדורים מכד ב' היא

75נחשב את ההסתברות של כל מאורע בנפרד.

$$P(A)=\frac{1}{2}.\frac{3.8}{64}+\frac{1}{2}+\frac{6.9}{81}=\frac{3}{16}+\frac{3}{9}=\frac{75}{144}$$

כאשר ביצענו התנניה על הכד שנבחר, הסתברות $\frac{1}{2}$ לכל כד, ולאחר מכן ספרנו את מספר האפשרויות בכל חלק ממרחב המדגם. באופן זהה לחישוב הקודם, נקבל ש־

$$P(B)=\frac{1}{2}.\frac{3.8}{64}+\frac{1}{2}.\frac{6.9}{81}=\frac{3}{16}+\frac{3}{9}=\frac{75}{144},$$

וכמובן

$$P(C)=\frac{1}{2}\ .$$

נחשב כעת ההסתברות למאורע $A\cap B$ $P(A\cap B)=$

$$\frac{1}{2}.\frac{3/3}{64}+\frac{1}{2}.\frac{6.6}{81}=\frac{9}{128}+\frac{2}{9}=\frac{337}{1152}\ .$$

נשים לב ש

$$P(A)P(B)\neq P(A\cap B)$$

ולכן המאורעות תלויים. נעבור לחישוב השני בשאלה. נחשב את ההסתברות של כל מאורע מותנה בנפרד את ההסתברות של חיתוך המאורעות תחת ההתנייה

$$P(A|C)=\frac{3.8}{64}=\frac{3}{8}=P(B|C)$$

תלויים

$$P(A\cap B|C)=\frac{3.3}{64}=\frac{9}{64}=P(A|C)P(B|C)$$

לכן המאורעות הללו בלתי־תלויים בהינתן ■

8 דוגמא. נקבע $1\leq k\leq n$ מספרים שלמים. בספארי נולדו לקרנף n גורים אחד אחרי השני כאשר כל גור יכל להיוולד לכל מין בהסתברות שווה ובאופן ב"ת במין הגורים האחרים. דוליטול מסתובב בגן החיות ופוגש גור שנבחר באקראי באופן אחיד מבין הגורים. נסמן ב־A את המאורע בו k הגורים הראשונים שנולדו הם ממין זכר. נ סמן ב־B את המאורע שנולדו לפחות k גורים ממין זכר. נסמן ב־C את המאורע בו דוליטול פוגש זכר. עבור $k=1,n=2$ חשבו את $P(C|B)$. עבור $n=12,k=4$ חשבו חשבו $P(A|C)$.

פיתרון. נסמן ב־ D_i את המאורע בו נולדו i גורים ממין זכר. נעזר בפירוק של מרחב המדגם על פי המאורעות

הללו.

$$\begin{aligned}
P(C|B) =&\frac{P(C\cap B)}{P(B)}\\
=&\frac{\sum_{i=0}^{2} P(C\cap B\cap D_i)}{P(B)}\\
=&\frac{P(C\cap B\cap D_1)+P(C\cap B\cap D_2)}{P(B)}\\
=&\frac{P(C\cap D_1)+P(C\cap D_2)}{1-P(B^c)}\\
=&\frac{P(C|D_1)P(D_1)+P(C|D_2)P(D_2)}{1-P(B^c)}\\
=&\frac{\frac{1}{2}.2.\left(\frac{1}{2}\right)^2+1.\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\\
=&\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}\\
=&\frac{2}{3}\ .
\end{aligned}$$

נשתמש בחוק בייס לפתרון המשך התרגיל. נסמן ב־E את המאורע בו דוליטול פוגש אחד מארבעת הגורים הראשונים שנולדו.

$$\begin{aligned}
P(A|C) =&\frac{P(C|A)P(A)}{P(C)}\\
=&\frac{\left[P(C|A\cap E)P(E|A)+P(C|A\cap \bar{E})P(\bar{E}|A)\right]\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\frac{1}{2}}\\
=&\frac{\left[1.\frac{4}{12}+\frac{1}{2}.\frac{8}{12}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\frac{1}{2}}\\
=&\frac{1}{12}\ .
\end{aligned}$$

■