

חישוביות וסיבוכיות

מועד א'

ד"ר יוחאי טוויטו, ד"ר ירמיהו מילר, סמסטר א, תשפ"ה.

מספר העמוד הנוכחי ומספר העמודים הכולל בשאלון מופיעים בתחתית כל עמוד. בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות

שאלוני בחינה

- ☒ לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ☐ לשאלון הבחינה יש לצרף כריכה בלבד.
- ☐ יש להחזיר את השאלון ביחד עם המחברת/כריכה.

שימוש במחשבוני

- ☐ ניתן להשתמש במחשבון.
- ☒ לא ניתן להשתמש במחשבון.

חומר עזר

- ☒ לא ניתן להשתמש בחומר עזר כלל.
- ☐ ניתן להשתמש בחומר עזר/דף נוסחאות, כמפורט:
- ☐ הבחינה עם חומר פתוח ☑ מותר להשתמש בכל חומר עזר מודפס או כתוב.

עמוד 1 מתוך 6

הנחיות

נא קראו בעיון את ההנחיות הבאות בטרם תתחילו לפתור את הבחינה. מומלץ לקרוא בקצרה את כלל השאלות לפני שמתחילים לפתור את הבחינה. ניתן לענות על השאלות בכל סדר שתרצו.

1. המבחן כולל 5 שאלות. יש לענות על כולן.
2. שאלות הבחינה שוות משקל - כל שאלה 20 נקודות.
3. כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תדלגו על שלבים.
4. המבחן כולל נספחים, לשימושכם. הסתייעו בהם במידת הצורך.
5. הקפידו על כתב יד ברור וקריא.
6. הקפידו לרשום בגדול ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
7. כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבלתם. רק הן נבדקות!
8. ניתן לקחת את השאלון כאשר הבחינה מסתיימת.

בהצלחה!

הבחינה

שאלה 1: מכונת טיורינג 20 נקודות

סעיף א' 10 נקודות

נתון אלפבית הקלט $\Sigma = \{a, b, c\}$ ונתונה השפה הבאה:

$$L = \{a^i b^j c^{i+j} \mid i, j \in \mathbb{N}^+\}$$

תארו מכונת טיורינג סטנדרטית (כלומר, במודל הבסיסי) שמכריעה את השפה.

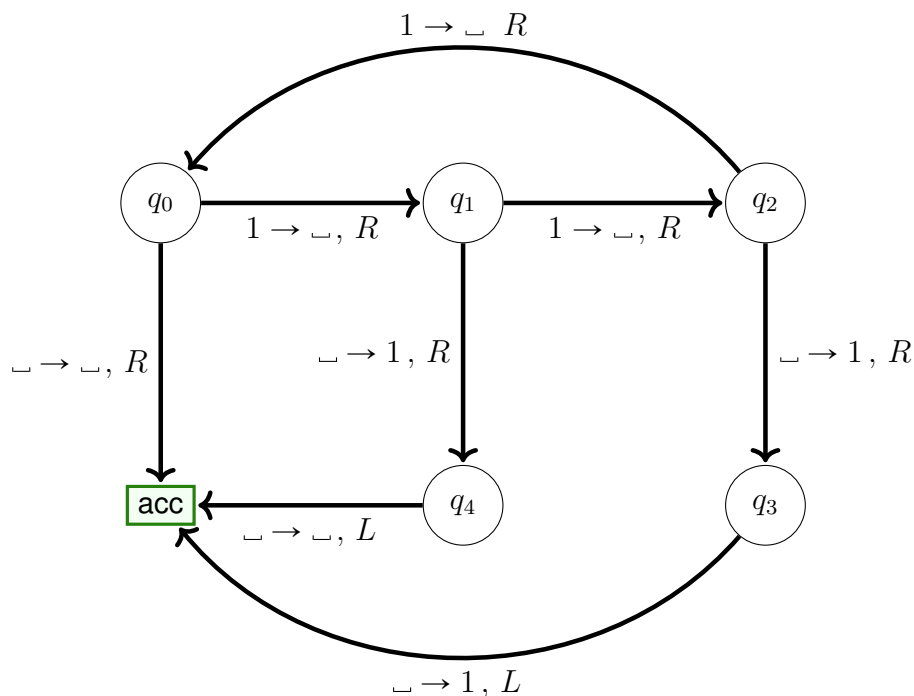
בסעיף זה עליכם לתאר את המכונה בצורה גרפית בעזרת תרשים /דיאגרמת מצבים בלבד, ולא בדרכים אחרות. כלומר, לא בעזרת טבלת מעברים, לא בעזרת פסאודו-קוד, וכיוצא באלו.

תזכורת: \mathbb{N}^+ היא קבוצת הטבעיים החיוביים (כלומר, ללא המספר אפס).

סעיף ב' 5 נקודות

נתון אלפבית הקלט $\Sigma = \{1\}$. בתרשים הבא, נתונה מכונת טיורינג M . המכונה מקבלת כקלט מספר בבסיס אונרי.

מהי הפונקציה f שהמכונה מחשבת? כיתבו את הפונקציה בצורה פורמלית, ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של הפונקציה.

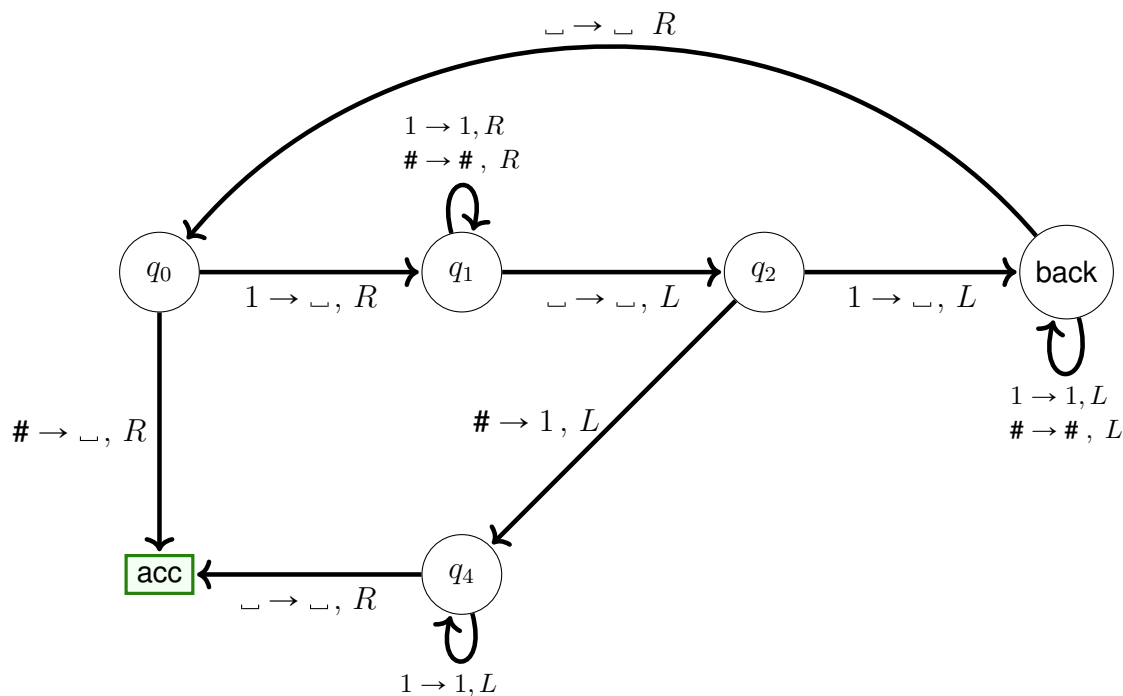


עמוד 3 מתוך 6

סעיף ג' 5 נקודות

בתרשים הבא, נתונה מכונת טיורינג M . המכונה מקבלת כקלט שני מספרים בבסיס אונרי, מופרדים ע"י האות #.

בהינתן קלט מהצורה $1^i \# 1^j$, כאשר $i, j \in \mathbb{N}$, מהי הפונקציה f שהמכונה מחשבת? כיתבו את הפונקציה בצורה פורמלית, ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של הפונקציה.



שאלה 2: וריאציות על מכונת טיורינג 20 נקודות

נגדיר מודל מכונת טיורינג חדש שנקרא לו OR . במודל זה, הראש יכול לבצע בכל מעבר רק פעולה אחת:

1. או לזוז על הסרט (ימינה או שמאלה).

2. או לכתוב במיקום הנוכחי בסרט, ללא תנועה ימינה או שמאלה.

כלומר פונקציית המעברים במודל זה מוגדרת כך:

$$\delta : (Q \times \Gamma) \rightarrow (Q \times (\Gamma \cup \{L, R\})),$$

כאשר המשמעות של פעולת האיחוד היא שבמעבר נתון, אפשר או לכתוב או לזוז שמאלה/ימינה, אך לא גם וגם. מלבד ההבדל בפונקציית המעברים, מודל OR זהה למודל הבסיסי של מכונת טיורינג.

נגדיר מודל מכונת טיורינג חדש שנקרא TS . במודל זה, בכל מעבר, מלבד האפשרות לזוז שמאלה או ימינה, הראש יכול גם להישאר במקום (באותה המשבצת בסרט). כלומר פונקציית המעברים במודל זה מוגדרת כך:

$$\delta : (Q \times \Gamma) \rightarrow (Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}) ,$$

כאשר המשמעות של S היא הישארות במקום (stay). מלבד ההבדל בפונקציית המעברים, מודל TS זהה למודל הבסיסי של מכונת טיורינג.

הוכיחו כי המודל OR והמודל TS שקולים חישובית.

שאלה 3: התזה של צ'רץ' טיורינג 20 נקודות

סעיף א' 10 נקודות

נתון הדקדוק הבא. מהי השפה שהדקדוק יוצר? כלומר, מהי $L(G)$? כיתבו את השפה בצורה פורמלית, ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של השפה.

$$G = (V, \Sigma, R, S)$$

$$V = \{S, B\}$$

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

$$R = \{$$

$$S \rightarrow aBSc$$

$$S \rightarrow \varepsilon$$

$$Ba \rightarrow aB$$

$$Bc \rightarrow bc$$

$$Bb \rightarrow bb$$

$$\}$$

סעיף ב' 10 נקודות

נתון הדקדוק הבא. מהי השפה שהדקדוק יוצר? כלומר, מהי $L(G)$? כיתבו את השפה בצורה פורמלית,

ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של השפה.

$$G = (V, \Sigma, R, S)$$

$$V = \{S, B\}$$

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

$$R = \{$$

$$S \rightarrow ABCS$$

$$S \rightarrow \varepsilon$$

$$AB \rightarrow BA$$

$$BC \rightarrow CB$$

$$AC \rightarrow CA$$

$$BA \rightarrow AB$$

$$CA \rightarrow AC$$

$$CB \rightarrow BC$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow b$$

$$C \rightarrow c$$

$\}$

שאלה 4: אי-כריעות 20 נקודות

הוכיחו שהשפה הבאה אינה כריעה. כתבו הוכח המלא הומפורטת. אל תדלגו על שלבים. בשאלה זו ניתן להניח כי M_1, M_2 הן מכונות טיורינג.

$$L_{M_1 \cup M_2} = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \cup L(M_2) \}$$

שאלה 5: סיבוכיות זמן 20 נקודות

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$. קבוצת קדקודים $U \subseteq V$ תקרא קבוצת בלתי תלויה אם לכל זוג קדקודים u_1, u_2 ב- U מתקיים ש- $(u_1, u_2) \notin E$.

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$. קבוצת קדקודים $U \subseteq V$ תקרא כיסוי קדקודים ב- G אם לכל צלע $(u_1, u_2) \in E$, מתקיים ש- $u_1 \in U \vee u_2 \in U$. נתבונן בשפות הפורמליות הבאות:

$$IS = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ לפחות.} \}$$

$$VC = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל כיסוי קדקודים בגודל } k \text{ לכל היותר.} \}$$

הוכיחו כי

$$IS \leq_P VC.$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה IS לשפה VC . יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.