היחידה למתמטיקה

תשפ"ב 11/05/2022
$10:10-11:40$

חדו"א 2

מועד א'

מרצים: ד'ר ירמיהו מילר, ד'ר אבנר סגל

תשפ"ב סמסטר ב'

השאלון מכיל עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לענות על שאלות 1-4.

==

שאלה 1 **(40 נקודות)**

א) (20 נק') מצאו את המרחק בין הישרים

$$\begin{cases} x-y &= 2\ , \\ x+z &= 0\ . \end{cases}$$

ו-

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}\ .$$

ב) (20 נק') נתונות הנקודות $A(2,1,4)$, $B(0,0,4)$, $C(1,-1,1)$. מצאו את הנקודה הקרובה ביותר בישר BC לנקודה A וחשבו את שטח המשולש ABC.

שאלה 2 **(40 נקודות)**

א) (20 נק') חשבו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימאלי של הפונקציה $z = x^2 - 2y - 2xy$ בתחום $D : \{-4 \le y \le -x^2\}$.

ב) (20 נק') נתונה הפונקציה $u(x,y,z) = e^x\sqrt{y^2 - z}$.

(1) (15 נק')

מצאו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה $u(x,y,z)$ בנקודה $P(0,-2,3)$ בכיוון ממנה לנקודה $M(3,-2,7)$.

(2) (5 נק')

מצאו את משוואת המישור המשיק למשטח הרמה $u(x,y,z) = 1$ של הפונקציה $u(x,y,z)$ העובר בנקודה $P(0,-2,3)$.

שאלה 3 **(30 נקודות)** סרטטו את המשטח

$$27x^2 - 162x + 36y^2 - 288y + 12z^2 - 24z + 723 = 0\ ,$$

מצאו את הנקודה על המשטח שהיא הקרובה ביותר למישור $x = 10$ וחשבו את המרחק (המינימאלי) ביניהם.

פתרונות

שאלה 1 (40 נקודות)

א) (20 נק') הנוסחה למרחק בין שני ישרים היא:

$$d=\frac{\vec{M_0N_0}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}$$

כשאר $\vec{a}$ הווקטור הכיוון של הישר הראשון, $\vec{b}$ הווקטור הכיוון של הישר השני, M_0 נקודה אחת על הישר הראשון ו- N_0 נקודה אחת על הישר השני.

עבור הראשון, הווקטור הכיוון הוא המכפלה הוקטורית של הנומרלים של השני מישורים:

$$\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(1,-1,0)\times(1,0,1)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-i-j+k=(-1,-1,1)$$

הוקטור הכיוון של הישר השני: $\vec{b}=(2,1,-1)$.

נקודה על הישר הראשון היא נקודה הנמצאת על השני מישורים. נבחר $M_0=(2,0,-2)$.

נקודה על הישר השני מופיעה במשוואת הישר הקנונית: $N_0=(-2,0,1)$.

מכאן $\vec{M_0N_0}=(-4,0,3)$ ו-

$$\vec{a}\times\vec{b}=(-1,-1,1)\times(2,1,-1)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=0\cdot i+j+k=(0,1,1)\ .$$

לכן

$$d=\frac{(-4,0,3)\cdot(0,1,1)}{|(0,1,1)|}=\frac{3}{\sqrt{2}}\ .$$

ב) (20 נק')
משוואת הישר BC:

$$M(t)=B+t\cdot\vec{BC}=(0,0,4)+t(1,-1,-3)\ .$$

תהי P הנקודה על הישר BC הקרובה ביותר לנקודה A. הקואורדינטות של הנקודה P הן

$P=(t,-t,4-3t)$. הוקטור הכיוון של הישר AP הוא $\vec{AP}=(t-2,-t-1,-3t)$. אם הנקודה P הקרובה ביותר לנקודה A אזי הווקטור $\vec{AP}$ מאונך לווקטור $\vec{BC}$. לכן

$$(t-2,-t-1,-3t)\cdot(1,-1,-3)=0 \quad \Rightarrow \quad t-2-t+1+9t=0 \quad \Rightarrow \quad t_0=\frac{1}{9}$$

ולכן הנקודה P היא

$$P\left(\frac{1}{9},-\frac{1}{9},\frac{11}{3}\right) \ .$$

שאלה 2 (40 נקודות)

א) (20 נק') תנאי הכרחי:

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= 2x-2y \overset{!}{=} 0 \\ z'_y &= -2-2x \overset{!}{=} 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad (x,y)=P(-1,-1) \ .$$

תנאי מספיק:
$z''_{xx}=2, z''_{yy}=0, z''_{xy}=-2$. לכן

$$\Delta(P)=z''_{xx}z''_{yy}-\left(z''_{xy}\right)^2=-4 \ .$$

$\Delta(P)<0$ לכן הנקודה $P(-1,-1)$ היא נקודת אוכף.

<u>על השפה $y=-x^2$</u>

$$z(x,y=-x^2)=3x^2+2x^3 \ .$$

מכאן

$$z'_x(x,y=-x^2)=6x+6x^2=6x(1+x)\overset{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \lor x=-1 \ .$$

ז"א קיבלנו שתי נקודות קיצון: $P_1(0,0), P_2(-1,-1)$.

<u>על השפה $y=-4$</u>

$$z(x,y=-4)=x^2+8+8x \ .$$

מכאן

$$z'_x(x,y=-4)=2x+8\overset{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad x=-4 \ .$$

ז"א קיבלנו הנוקודת קיצון: $P_3(-4,-4)$.

קדקוד $P_4(-2,-4)$

$$z(-2,-4) = -4$$

קדקוד $P_5(2,-4)$

$$z(2,-4) = 28$$

נקודה	ערך של הפונקציה z
$P(-1,-1)$	5
$P_1(0,0)$	0
$P_2(-1,-1)$	5
$P_3(-4,-4)$	-8
$P_4(-2,-4)$	-4
$P_5(2,-4)$	28

לפיכך:

$\underset{D}{\operatorname{argmax}}\, z(x,y) = P_5(2,-4)$, $\max_D z(x,y) = 28$.

$\underset{D}{\operatorname{argmax}}\, z(x,y) = P_3(-4,-4)$, $\min_D z(x,y) = -8$.

ב) (20 נק')

(1) (15 נק')

$\vec{PM} = (3,0,4)$.

$$\frac{du(P)}{d\vec{PM}} = \frac{\nabla u(P)\cdot \vec{PM}}{\left|\vec{PM}\right|}$$

ראשית נחשב את הגרדיאנט בנקודה P:

$$\nabla u = \left(e^x\sqrt{y^2-z}, \frac{e^x y}{\sqrt{y^2-z}}, \frac{-ze^x}{2\sqrt{y^2-z}}\right) \quad \Rightarrow \quad \nabla u(P) = (1,-2,-3)\ .$$

לכן

$$\frac{du(P)}{d\vec{PM}} = \frac{(1,-2,-3)\cdot(3,0,4)}{|(3,0,4)|} = \frac{-9}{5}\ .$$

(2) (5 נק')

המשוואת המישור המשיק למשטח בנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ היא $u'_x(P)(x-x_0)+u'_y(P)(y-y_0)+u'_z(P)(z-z_0)$. לכן

$$1\cdot(x-0) - 2\cdot(y+2) - 3\cdot(z-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 2y - 3z + 5 = 0\ .$$

<u>שאלה 3</u> **(30 נקודות)**

$$\begin{aligned}
&27x^2-162x+36y^2-288y+12z^2-24z+723 &=0\\
\Rightarrow\quad &27\left(x^2-\frac{162}{27}x\right)+36\left(y^2-\frac{288}{36}y\right)+12\left(z^2-\frac{24}{12}z\right)+723 &=0\\
\Rightarrow\quad &27\left(x^2-6x\right)+36\left(y^2-8y\right)+12\left(z^2-2z\right)+723 &=0\\
\Rightarrow\quad &27\left(x-3\right)^2-243+36\left(y-4\right)^2-576+12\left(z-1\right)^2-12+723 &=0\\
\Rightarrow\quad &27\left(x-3\right)^2+36\left(y-4\right)^2+12\left(z-1\right)^2-108 &=0\\
\Rightarrow\quad &27\left(x-3\right)^2+36\left(y-4\right)^2+12\left(z-1\right)^2 &=108\\
\Rightarrow\quad &\frac{27}{108}\left(x-3\right)^2+\frac{36}{108}\left(y-4\right)^2+\frac{12}{108}\left(z-1\right)^2 &=1\\
\Rightarrow\quad &\frac{\left(x-3\right)^2}{4}+\frac{\left(y-4\right)^2}{3}+\frac{\left(z-1\right)^2}{9} &=1
\end{aligned}$$

הקדקוד של האליפסויד הכי קרוב למישור $x=10$ הוא $(7,4,1)$ לכן המרחק המינימלי בין המשטח לבין המישור $x=10$ הוא $d=3$.