19 – 9 – 22
09 : 00 – 12 : 00

חדו"א 1

מועד א'

מרצה: ד'ר ירמיהו מילר

תשפ"ב סמסטר קיץ'

השאלון מכיל עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דף נוסחאות מצורף לשאלון (עמודים בפורמט $A4$).

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות בלבד מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** בלבד מתוך **שתיים**.

==

שאלות 1 ו-2 חובה!

שאלה 1 **(21 נקודות)**

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = \frac{(x+4)^2}{x-3}$ (תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וציירו את סקיצת הגרף של הפונקציה.

שאלה 2 **(24 נקודות)**

פתרו 2 מתוך 3 האינטגרלים הבאים:

1) $\int_2^3 \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^4 x + \frac{8\tan x}{5}\right)\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

3) $\int e^{2x}(20x+8)\,dx$

ענה על 3 מתוך 4 השאלות 3-6:

שאלה 3 **(15 נקודות)**

א) **(12 נק')** מצאו את משוואת המשיק ומשוואת הנורמל לקו $\begin{cases} x = \cos(3t) \\ y = \sin(2t) + 2t \end{cases}$ $t \in [0, \pi/2]$ בנקודה שבה $x = 0$.

ב) **(3 נק')** הוכיחו כי למשוואה $x^3 + e^x = 0$ קיים שורש ממשי יחיד.

שאלה 4 **(15 נקודות)**

א) **(12 נק')** חשבו את הגבולות הבאים:

1) **(6 נק')** $\lim_{x\to\infty} \frac{3^x+5^x}{2^x+5^x}$

2) **(6 נק')** $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+4}{x+3}\right)^{3x}$

ב) **(3 נק')** הגדירו אסימפטוטה אופקית של פונקציה $f(x)$.

שאלה 5 **(15 נקודות)**

א) **(12 נק')** חשבו את שטח התחום החסום על ידי הקווים $y = x^2 + 2$, $y = -3x^2 + x + 2$.

ב) **(3 נק')** הוכיחו שלכל x חיובי מתקיים $4\ln x - 1 < x^4$.

<u>שאלה 6</u> **<u>(15 נקודות)</u>**

א) **(12 נק')** רשמו את פולינום מקלורן מסדר 2 עבור הפונקציה $y^3 + 2xy - \cos x = 0$.

ב) **(3 נק')** חשבו לפי הגדרה את הנגזרת של $f(x) = x^2$.

ענה על 1 מתוך 2 השאלות 7-8:

<u>שאלה 7</u> **<u>(10 נקודות)</u>**

הוכיחו שלכל $a, b > 0$ ממשי מתקיים $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$.

<u>שאלה 8</u> **<u>(10 נקודות)</u>**

על העקומה $x^2 + y^2 = 9$ מצאו את כל הנקודות $P(x_0, y_0)$ שבהן המשיק לעקומה מקביל לקו $y = 2 - 3x$.

1 פתרונות

שאלה 1 (21 נקודות)

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = \frac{(x+4)^2}{x-3}$ (תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וציירו את סקיצת הגרף של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{(x+4)^2}{x-3}$$

שלב 1 תחום הגדרה: $x \neq 3$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(-4,0)$ ו- $(0,-\frac{16}{3})$.

x	$x<-4$	$-4<x<3$	$x>3$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x=3$

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: אין.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \ , \qquad n = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - m\cdot x\right) = 11 \ .$$

לכן הקו $y = x+11$ אסימפטוטה משופעת בתהליך כאשר $x\to\infty$.

ב- $x \to -\infty$ אותו הדבר.

שלב 6 תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = \frac{(x-10)(x+4)}{(x-3)^2}$$

נקודות קריטיות: $(-4,0)$ ו- $(10,28)$.

x	$x<-4$	$x=-4$	$-4<x<3$	$3<x<10$	$x=10$	$x>10$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	מקס	$\searrow$	$\searrow$	מינימום	$\nearrow$

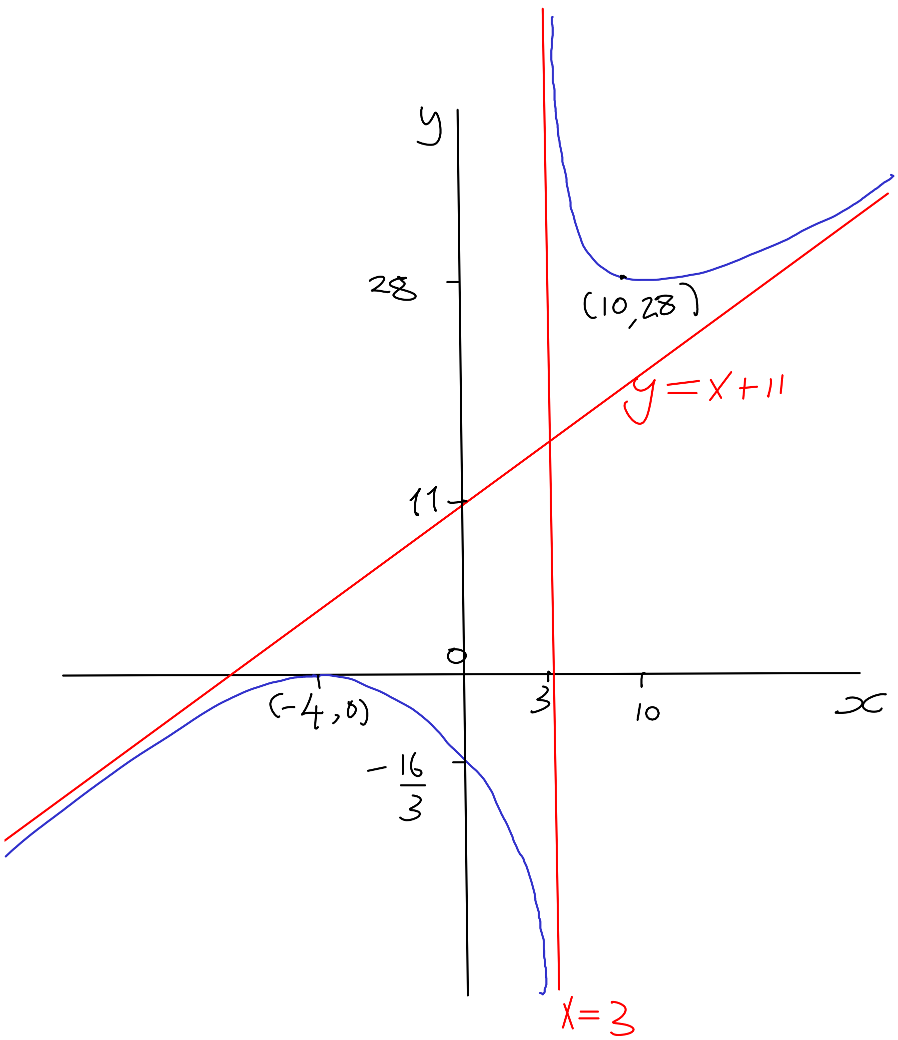
<u>שלב 7</u> תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{98}{(x-3)^3}$$

נקודות פיתול: אין.

x	$x<3$	$x>3$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	קמורה $\downarrow$	קמורה $\uparrow$

<u>שלב 8</u> שרטוט:



שאלה 2 (24 נקודות)

1) $I = \int_2^3 \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx$.

נגדיר

$$u := x^2 - x \ , \qquad \rightsquigarrow \qquad u' = 2x - 1 \ , \qquad \rightsquigarrow \qquad , u(3) = 6 \ , \quad u(2) = 2 \ .$$

$$I = \int_2^3 \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx = \int_2^3 \frac{u'}{u}\,dx = \int_2^6 \frac{1}{u}\,du = [\ln|u|]_2^6 = \ln 3 = 1.099 \ .$$

2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^4 x + \frac{8\tan x}{5}\right)\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$.

נגדיר

$$u := \tan x \ , \qquad \rightsquigarrow \qquad u' = \frac{1}{\cos^2 x} \ , \qquad \rightsquigarrow \qquad , \tan(0) = 0 \ , \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \ .$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^4 x + \frac{8\tan x}{5}\right)\frac{1}{\cos^2 x}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(u^4 + \frac{8u}{5}\right) u'\,dx = \int_0^1 \left(u^4 + \frac{8u}{5}\right) du \\ &= \left[\frac{u^5}{5} + \frac{8u^2}{10}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \\ &= 1 \ . \end{aligned}$$

3) $I = \int e^{2x}(20x+8)\,dx$.

נגדיר

$$u = 20x + 8 \ , \quad v' = e^{2x} \ , \qquad \rightsquigarrow \qquad u' = 20 \ , \quad v = \frac{e^{2x}}{2} \ ,$$

ע"י אינטגרציה בחלקים,

$$\begin{aligned} I = \int u' \cdot v\, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\, dx \\ =&(20x+8)\frac{1}{2}e^{2x} - \int 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x}\, dx \\ =&(10x+4)e^{2x} - 10\int e^{2x}\, dx \\ =&(10x+4)e^{2x} - 5 \cdot e^{2x} + C \\ =&(10x-1)e^{2x} + C\ . \end{aligned}$$

שאלה 3 (15 נקודות)

א) (12 נק') מצאו את משוואת המשיק ומשוואת הנורמל לקו $\begin{cases} x = \cos(3t) \\ y = \sin(2t) + 2t \end{cases}$ $t \in [0, \pi/2]$ בנקודה שבה $x = 0$.

$$x = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \cos(3t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad 3t = \frac{\pi}{2} \quad \rightsquigarrow \quad t = \frac{\pi}{6}\ .$$

על הנקודה שבה $t = \pi/6$,

$$y(t = \tfrac{\pi}{6}) = \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) + 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} = 1.91322\ .$$

נגזור את הפונקציה $y(x)$:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2\cos(2t) + 2}{-3\sin(3t)}\ .$$

בנקודה $t = \frac{\pi}{6}$:

$$y'_x(t = \tfrac{\pi}{6}) = \frac{2\cos(\pi/3) + 2}{-3\sin(\pi/2)} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} + 2}{-3} = -1\ .$$

משוואת המשיק בנקודה הינה (x_0, y_0) ניתנת ע"י הנוסחה $y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$. נציב $(x_0, y_0) = (0, 1.91)$ ונקבל

$$y = 1.91 - x\ .$$

משוואת הנורמל בנקודה הינה (x_0, y_0) ניתנת ע"י הנוסחה $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0)$. נציב $(x_0, y_0) = (0, 1.91)$ ונקבל

$$y = 1.91 + x\ .$$

ב) (3 נק') נגדיר

$$f(x) = x^3 + e^x\ .$$

$f(1) = 1 + e$ ו- $f(-1) = -1 - \frac{1}{e}$. לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה $-1 - 1/e < c < 1 + e$ שבה

$$f(c) = 0\ .$$

נוכיח כי הנקודה הזאת יחידה:

$$f'(x) = 3x^2 + e^x\ .$$

שים לב $e^x > 0$ לכל x ו- $3x^2 \geq 0$ לכל x. לכן

$$f'(x) > 0$$

לכל x. לפיו, $f(x)$ עולה ממש לכל x, ולכן השורש של $f(x)$ יחיד.

שאלה 4

1) (6 נק')

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{3^x+5^x}{2^x+5^x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{5}{5}\right)^x}{\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{5}{5}\right)^x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1}{\left(\frac{2}{5}\right)^x+1}\\ &=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x+1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^x+1}\\ &=\frac{0+1}{0+1}\\ &=1\ .\end{aligned}$$

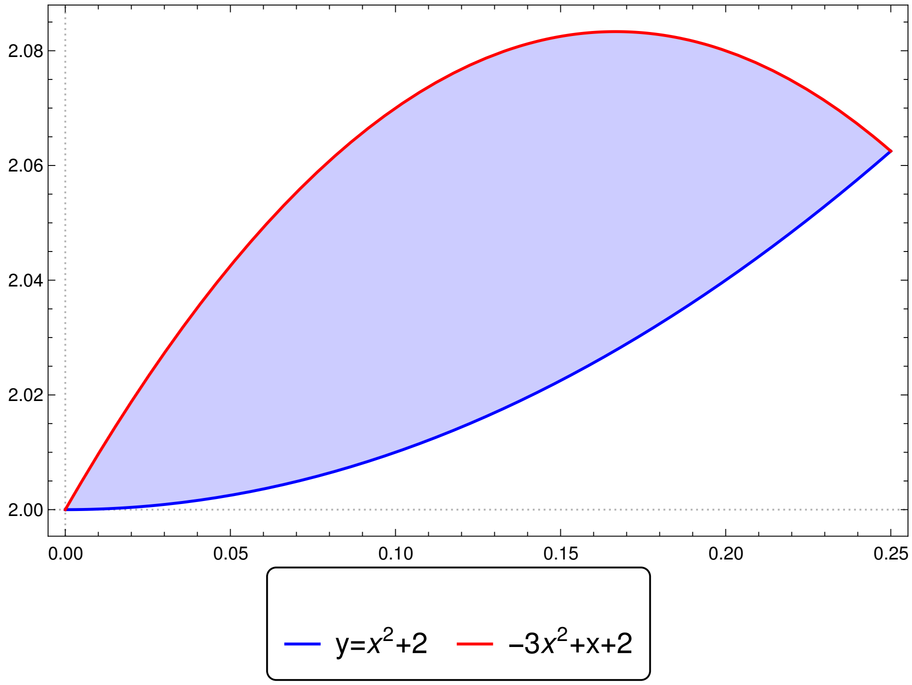
2) (6 נק')

$$\begin{aligned}L &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^{3x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+3}\right)^{3x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+3}\right)^{(x+3)\cdot 3x\cdot\frac{1}{x+3}}\end{aligned}$$

נגדיר $y = (x+3)$, נשים לב כי $y\to\infty$ כשאר בתהליך $x\to\infty$. אזי

$$L = \left(\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x+3}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x+3}} = e^3\ .$$

<u>שאלה 5</u> א) (12 נק')



הקווים של גרפי הפונקציות נחתכים בנקודות $x = 0$ ו- $x = 0.25$. לכן השטח בשאלה היא שטח התחום החסום בין הקווים $y = x^2 + 2$, $y = -3x^2 + x + 2$, $x = 0$ ו- $x = 0.25$.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{1/4} \left(-3x^2 + x + 2 - (x^2 + 2)\right) \\ &= \int_0^{1/4} \left(-4x^2 + x\right) \\ &= \left[\frac{-4x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^{1/4} \\ &= \frac{-4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{1}{96} = 0.0104167\ . \end{aligned}$$

ב) (3 נק') הוכיחו שלכל x חיובי מתקיים $4\ln x - 1 < x^4$:

נגדיר

$$f(x) = x^4 - 4\ln x + 1\ .$$

נוכיח כי $f(x) > 0$ לכל $x > 0$.

שים לבת תחום הגדרתה של f הוא $x>0$.

$$f'(x)=4x^3-\frac{4}{x}\ .$$

נחפש נקודות קריטיות. לכל x בתחום הגדרתה של f ($x>0$):

$$f'(x)=0 \qquad \Rightarrow \qquad 4x^3-\frac{4}{x}=0 \qquad \Rightarrow \qquad 4(x^4-1)=0\ ,$$

אזי הנקודה $x=1$ היא נקודת קריטית.

לכל $0<x<1$:

$$f'(x)<0\ .$$

לכל $x>1$:

$$f'(x)>0\ .$$

לכן הנקודה $x=1$ היא מינימום, ז"א $f(1)$ הוא ערך המינימאלי של הפונקציה. מכיוון ש- $f(1)=5$ וזה וזה חיובי, אז $f(x)>0$ לכל $x>0$.

מש"ל.

<u>שאלה 6</u> <u>(15 נקודות)</u>

א) (12 נק')

$$y^3+2xy-\cos x=0\ . \tag{*}$$

נציב $x=0$ בביטוי (*) ונקבל:

$$y(0)^3+2\cdot 0\cdot y(0)-\cos(0)=0 \qquad \Rightarrow \qquad y(0)^3-1=0 \qquad \Rightarrow \qquad y(0)=1\ . \tag{1*}$$

נגזור (*):

$$3y^2\cdot y'+2y+2xy'+\sin x=0\ . \tag{2*}$$

נציב $x=0$ ו- $y(0)=1$ בביטוי (2*) ונקבל:

$$3y(0)^2y'(0)+2y(0)+2\cdot 0\cdot y'(0)+\sin(0)=0 \qquad \Rightarrow \qquad y'(0)=-\frac{2}{3}\ . \tag{3*}$$

נגזור (2*):

$$6y\cdot(y')^2+3y^2y''+4y'+2xy''+\cos x=0\ . \tag{4*}$$

נציב $x=0$ ו- $y(0)=1$ ו- $y'(0)=-\frac{2}{3}$ בביטוי (4*) ונקבל:

$$6y(0)\cdot y'(0)^2+3y(0)^2y''(0)+4y'(0)+2\cdot 0\cdot y''(0)+1=0 \qquad \Rightarrow \qquad y''(0)=-\frac{1}{3}\ . \quad (5*)$$

נציב (1*), (3*) ו- (5*) בתוך הנוסחה של מקלורן מסדר 2

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2}x^2$$

ונקבל

$$y(x)=1-\frac{2x}{3}-\frac{x^2}{6}\ .$$

ב) (3 נק')

$$\begin{aligned}(x^2)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\cdot\Delta x+\Delta x^2-x^2}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\cdot\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)\\ &=2x+0\\ &=2x\ .\end{aligned}$$

<u>שאלה 7</u>

נגדיר $f(x)=\sin x$. f רציפה בכל x וגזירה לכל x. לכם לפי משפט לגרנז', לכל a,b $a<b$ קיימת $c\in[a,b]$ כך ש-

$$\frac{\sin b-\sin a}{b-a}=\sin'(c)=\cos c \qquad \Rightarrow \qquad \sin b-\sin a=(b-a)\cdot\cos c\ .$$

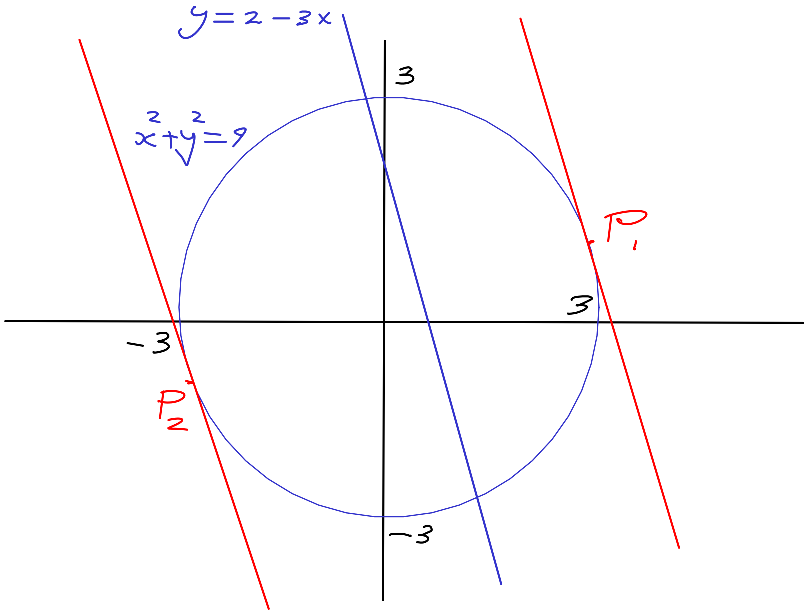
נקח את הערך מוחלט ונקבל $|\sin b-\sin a|=|(b-a)\cdot\cos c|=|b-a|\cdot|\cos c|$. או שקול

$$|\sin a-\sin b|=|a-b|\cdot|\cos c|\ .$$

$\cos c$ חסומה: $-1\le\cos c\le 1$ אז $0\le|\cos c|\le 1$. לכן

$$|\sin a-\sin b|\le|a-b|\ .$$

<u>שאלה 8</u>



נחפש קואורדינטות של הנקודות P_1 ו- P_2 שבהן המשיק של העקומה מקביל לישר $y=2-3x$. המשיק של הישר הוא -3.

נגזור את משוואת העקומה:

$$\begin{aligned}\left(x^2+y^2\right)'_x &= 0\\ 2x+2y\cdot y'_x &= 0\\ y'_x &= -\frac{x}{y}\ .\end{aligned}$$

על הנקודות שבהן המשיק מקביל לישר $y=2-3x$, $y'_x=-3$, ז"א:

$$y'_x=-3 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{x}{y}=-3 \qquad \Rightarrow \qquad y=\frac{x}{3}\ . \tag{1*}$$

נציב (1*) בתוך משוואת העקומה:

$$x^2+y^2=9\ , \qquad \Rightarrow \qquad x^2+\left(\frac{x}{3}\right)^2=9\ , \qquad \Rightarrow \qquad \frac{10x^2}{9}=9\ , \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{\pm 9}{\sqrt{10}}\ . \tag{2*}$$

לכן קיבלנו הקואורדינטות ה-x של הנקודות P_1 ו- P_2:

$$x_1=\frac{9}{\sqrt{10}}\ , \qquad x_2=\frac{-9}{\sqrt{10}}\ .$$

נציב (2*) בתוך (1*) כדי למצוא הקואורדינטות ה-y המתאימים, ונקבל

$$y_1 = \frac{3}{\sqrt{10}} \ , \qquad y_2 = \frac{-3}{\sqrt{10}} \ .$$

לכן הנקודות שבהן המשיק לעקומה מקביל לישר $y = 2 - 3x$ הן

$$P_1\left(\frac{9}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \ , \qquad P_2\left(-\frac{9}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \ .$$