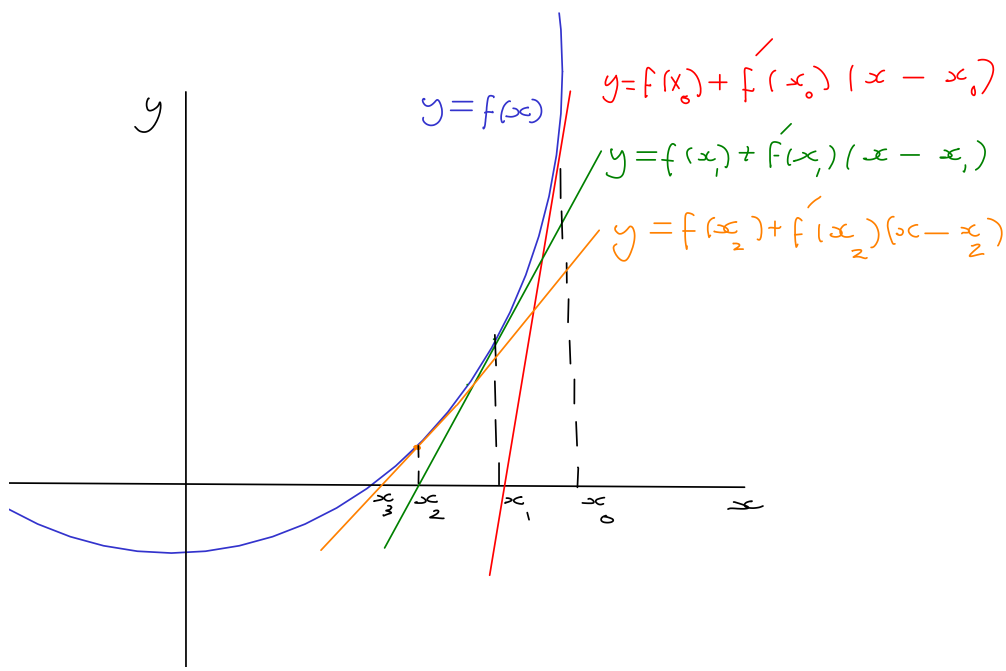
שיעור 7
נגזרת של פונקציה הפוכה סתומה ופרמטרית, נגזרת מסדר גבוה, שיטת ניוטון

7.1 שיטת המשיקים של ניוטון לפתרון המקורב של משוואות

שוטה זו מבוססת על קירוב הפונקציה $f(x)$ ע"י המשיק $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ בנקודה התחלתית x_0 ומציאת השורש x_1 של משיק זה".



<u>שלב 1</u> נבחור נקודה התחלתית x_0

<u>שלב 2</u> נחשב משוואת המשיק בנקודה x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

<u>שלב 3</u> נמצוא נקודת חיתוך של משיק זו עם ציר ה- x:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

<u>שלב 4</u> נחזור לשלבים 1-3 עם נקודת התחלתית x_1 במקום x_0:

<u>שלב' 1</u> נתחיל עם נקודת התחלתית x_1 הנמצא בשלב הקודם.

<u>שלב' 2</u> נחשב משוואת המשיק בנקודה x_1:

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

<u>שלב' 3</u> נמצוא נקודת חיתוך של משיק זו עם ציר ה- x:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

<u>שלב' 4</u> נחזור לשלבים 1-3 עם נקודת התחלתית x_2 במקום x_1:

וכן הלאה...

דוגמה 7.1

מצא את שורש אחד של פונקציה $f(x) = x^2 - x - 13$.

פתרון:
נתחיל עם נקודה התחלתית $x_0 = 10$:

$n = 0$	$x_0 = 10$	$f(x_0) = 85$
$n = 1$	$x_1 = 4.6$	$f(x_1) = 11.56$
$n = 2$	$x_2 = 3.19024$	$f(x_2) = 1.98741$
$n = 3$	$x_3 = 2.82087$	$f(x_3) = 0.136437$
$n = 4$	$x_4 = 2.79148$	$f(x_4) = 0.00086398$

■

7.2 נגזרת של פונקציה סתומה

דוגמה 7.2

מהו משוואת המשיק לקו של הפונקציה $x^2 + y^2 = 1$ ($y \geq 0$) בנקודה $x = 0.5$.

פתרון:
נגזור את שני הצדדים:

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{x}{y}$$

שים לב

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

, לכן עבור $y \geq 0$ נקבל

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \ .$$

מבאן בנקודה $x = 0.5$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ו- $y' = \frac{-1}{\sqrt{3}}$. לכן משוואת המשיק בנקודה $x = 0.5$ היא

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}(x - \tfrac{1}{2}) \ .$$

■

דוגמה 7.3

נתונה $e^x - x - y + xe^y = 0$ מצא את משוואת המשיק בנקודה $(0,1)$.

פתרון:

נגזור שני הצדדים:

$$e^x - 1 - y' + e^y + xy'e^y = 0 \ .$$

נציב את הנקודה $(0,1)$ ונקבל

$$1 - 1 - y'(0) + e = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y'(0) = e \ .$$

לכן משוואת המשיק היא

$$y = 1 + ex \ .$$

■

דוגמה 7.4

מצאו את משוואת המשיק והנורמל לקו

$$e^x y + \ln(xy+1) = 1$$

בנקודה שבה $x = 0$.

פתרון:

נציב $x = 0$ לתוך המשוואה:

$$e^0 y + \ln(1) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y = 1 \ .$$

נגזור את שני הצדדים של המשוואה:

$$e^x y + e^x y' + \frac{1}{xy+1} \cdot (y + xy') = 0$$

נציב את הנקודה $(0,1)$:

$$1 + y' + 1 \cdot (1 + 0 \cdot y') = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -2 \ .$$

לכן עבור משוואת המשיק נקבל

$$y = 1 - 2x$$

ועבור משוואת הנורמל נקבל

$$y = 1 + \frac{x}{2} \ .$$

■

דוגמה 7.5

פונקציה $y(x)$ מוגדרת בצורה סתומה ע"י המשוואה

$$xe^{2y} + y \ln x + \sin(2y) = 1 \ .$$

מצאו את הזווית שהמשיק בנקודה $A(1,0)$ יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x.

פתרון:
שים לב, הנגזרת של פונקציה $y(x)$ בנקודה A שווה ל $\tan$ של הזווית שהמשיק יוצר עם ציר ה- x. לכן מספיק למצוא את הנגזרת בנקודה זו.

$$e^{2y} + 2xy'e^{2y} + y'\ln x + \frac{y}{x} + 2\cos(2y)\cdot y' = 0\ .$$

נציב את הנקודה $A(1,0)$:

$$1+2y'(1)+y'(1)\ln(1)+\frac{0}{1}+2\cos(2\cdot 0)\cdot y'(1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 1+2y'(1)+2y'(1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y'(1) = -\frac{1}{4}\ .$$

לכן $\tan\alpha = -\frac{1}{4}$ ולפיו $\alpha = \arctan\left(-\frac{1}{4}\right) = -14.3^\circ$ ■

7.3 נגזרת של פונקציה הפוכה

משפט 7.1 נגזרת של פונקציה הפוכה

נניח ש $y = f^{-1}(x)$ אז $x = f(y)$. כלומר

$$y = f^{-1}(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = f(y)\ .$$

להיעזר בכלל השרשרת נגזור את שני הצדדים של $x = f(y(x))$

$$x' = f(y)'_y \cdot y(x)'_x \qquad \Rightarrow \qquad 1 = f(y)'_y \cdot y(x)'_x \qquad \Rightarrow \qquad y(x)'_x = \frac{1}{f(y)'_y}$$

שים לב $y(x) = f^{-1}(x)$ לפי ההגדרה לעיל אז נקבל היחס

$$f^{-1}(x)'_x = \frac{1}{f(y)'_y}\ .$$

דוגמה 7.6

מהי הנגזרת של $y = \arcsin(x)$.

פתרון:

$$y = \arcsin(x) \qquad \Rightarrow \qquad x = \sin(y)\ .$$

הפונקציה ההפוכה היא $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$ והפונקציה f היא $f(y) = \sin y$. לכן לפי הנוסחה,

$$\arcsin(x)'_x = \frac{1}{\sin(y)'_y} = \frac{1}{\cos y}$$

נשתמש זיהוי $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ שנובע ל- $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$ ונקבל

$$\arcsin(x)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

או שקול, מכיוון ש $x=\sin y$,

$$\arcsin(x)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

■

דוגמה 7.7

מהי הנגזרת של $y=\arctan(x)$.

פתרון:

$$y=\arctan(x)\qquad\Rightarrow\qquad x=\tan(y)\ .$$

הפונקציה ההפוכה היא $f^{-1}(x)=\arctan(x)$ והפונרציה f היא $f(y)=\tan y$. לכן לפי הנוסחה,

$$\arctan(x)'_x=\frac{1}{\tan(y)'_y}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\cos^2 y$$

נשתמש זיהוי $\frac{1}{\cos^2 y}=\tan^2 y+1$ שנובע ל- $\cos^2 y=\frac{1}{\tan^2 y+1}$ ונקבד

$$\arctan(x)'_x=\frac{1}{1+\tan^2 y}$$

או שקול, מכיוון ש $x=\tan y$,

$$\arctan(x)'_x=\frac{1}{1+x^2}\ .$$

■

7.4 משוואת פרמטרית

הגדרה 7.1 פונקציה פרמטרית

פונקציה פרמטרית היא פונקציה הנתונה בצורה

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$$

באמצעות פרמטר t.

דוגמה 7.8

נתונה הפונקציה

$$\begin{cases}x=t^3\\ y=t^2\end{cases}$$

הבע אותו בצורה קנונית.

פתרון:

$$y=t^2=\left(t^3\right)^{2/3}=x^{2/3}\ .$$

■

7.5 נגזרת של פונקציה פרמטרית

משפט 7.2 נגזרת של פונקציה פרמטרית

נתונה פונקציה בצורה פרמטרית

$$y=f(t)\ ,\qquad x=g(t)\ .$$

הנגזרת ניתנת ע"י הנוסחה

$$y'_x=\frac{f(t)'_t}{g(t)'_t}\ .$$

הוכחה: נתונה פונקציה בצורה פרמטרית

$$y=f(t)\ ,\qquad x=g(t)\ .$$

מכאן

$$t=g^{-1}(x)$$

זאת אומרת ניתן להסתכל אל הפרמטר t כפונקציה של x. ע"י כלל השרשרת,

$$y'_x=f\,(t)'_x=f(t)'_t\cdot t'_x=f(t)'_t\cdot g^{-1}(x)'_x$$

אבל $g^{-1}(x)'_x=\dfrac{1}{g(t)'_t}$ ולכן

$$y'_x=\frac{f(t)'_t}{g(t)'_t}\ .$$

■

דוגמה 7.9

נתונה הפונקציה

$$x=\ln(t+2)\ ,\qquad y=t^2-3t\ .$$

מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y(x)$ בנקודה שבה $x=0$.

פתרון:

נציב $x=0$:

$$\ln(t+2)=0\qquad\Rightarrow\qquad t+2=1\qquad\Rightarrow\qquad t=-1\ .$$

נציב את $t=-1$ לתוך הנוסחה של y:

$$y=(-1)^2-3(-1)=4\ .$$

נגזור את הפונקציה הפרמטרית:

$$x'_t=\frac{1}{t+2}\ ,\qquad y'_t=2t-3\ ,\qquad\Rightarrow\qquad y'_x=\frac{2t-3}{\left(\frac{1}{t+2}\right)}=(t+2)(2t-3)$$

נציב $t=-1$:
$$y'_x = (1)(-2-3) = -5 \ .$$
משוואת המשיק:
$$y = 4-5x \ .$$
■

דוגמה 7.10
מצאו את משוואת המשיק והנורמל לגרף הפונקציה $y(x)$ הנתונה ע"י
$$x=(t-2)e^t \ , \qquad y=t^2+t-1$$
בנקודה שבה $t=0$.

פתרון:
בנקודה $t=0$,
$$x=-2 \ , \qquad y=-1 \ .$$
הנגזרת היא
$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t+1}{(t-1)e^t}$$
ובנקודה $t=0$:
$$y'_x(t=0) = -1 \ .$$
משוואת המשיק:
$$y=-1-(x+2) \ .$$
משוואת הנורמל:
$$y=-1+(x+2)$$
■

דוגמה 7.11
נתונה הפונקציה
$$x=4\cos t \ , \qquad y=3\sin t \ .$$
מהי משוואת המשיק בנקודה $(4,3)$.

פתרון:
שים לב שלפי הזהות $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ ניתן לבטא הפונקציה בצורה
$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$
וזו דווקא הצורה של משוואה של אליפסה.

הנקודה $(2,3\sqrt{3}/2)$ מתאימה לערך $t=\pi/3$.

$$x(t)'_t = -4\sin t \ , \qquad y(t)'_t = 3\cos t \ .$$

בנקודה $t=\pi/3$,

$$x'_t = -2\sqrt{3}\ , \qquad y'_t = 3/2\ ,$$

ולכן לפי הנוסחה

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-\sqrt{3}}{4}\ .$$

משוואת המישק:

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}(x-2)\ .$$

■

7.6 נגזרת באמצעות לוגריתמים

דוגמה 7.12

מצאו את הנגזרת של הפונקציה

$$y = \frac{(x^2+2)\sqrt[4]{(x-1)^3}e^x}{(x+5)^3}$$

פתרון:

נפעיל $\ln$ על שני הצדדים:

$$\ln y = \ln(x^2+2) + \frac{3}{4}\ln(x-1) + x - 3\ln(x+5)$$

נגזור את שני הצדדים:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}$$

מכאן

$$\begin{aligned} y' &= y\left[\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right] \\ y' &= \frac{(x^2+2)\sqrt[4]{(x-1)^3}e^x}{(x+5)^3}\left[\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right] \end{aligned}$$

■

דוגמה 7.13

מצאו את הנגזרת של

$$y = x^x\ .$$

פתרון:

$$y = x^x \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = \ln x^x = x\ln x\ .$$

נגזור את שני הצדדים:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1\ .$$

מכאן

$$y' = y\left(\ln x + 1\right) = x^x\left(\ln x + 1\right) \ .$$

■

דוגמה 7.14

מצאו את הנגזרת של

$$y = \left(\sin 2x\right)^{x^2+1} \ .$$

פתרון:

$$\ln y = (x^2+1)\cdot \ln(\sin 2x) \ .$$

נגזור את שני הצדדים:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = 2x\cdot \ln(\sin 2x) + (x^2+1)\cdot \frac{1}{\sin 2x}\cdot 2\cos 2x \ ,$$

מכאן

$$\begin{aligned} y' =& y\left[2x\cdot \ln(\sin 2x) + (x^2+1)\cdot \frac{1}{\sin 2x}\cdot 2\cos 2x\right] \\ y' =& (x^2+1)\cdot \ln(\sin 2x)\left[2x\cdot \ln(\sin 2x) + (x^2+1)\cdot \frac{2\cos(2x)}{\sin 2x}\right] \\ y' =& (x^2+1)\cdot \ln(\sin 2x)\left[2x\cdot \ln(\sin 2x) + (x^2+1)\cdot 2\tan 2x\right] \ . \end{aligned}$$

■

7.7 נגזרת מסדר גבוהה

נגזרת ראשונה	$f(x)'$
נגזרת שניה	$f(x)''$ או $f(x)^{(2)}$
נגזרת שלישית	$f(x)'''$ או $f(x)^{(3)}$
נגזרת רביעית	$f(x)^{(4)}$
נגזרת חמישית	$f(x)^{(5)}$
נגזרת ה- n	$f(x)^{(n)}$

דוגמה 7.15

$f(x)$	$\sin x$
$f(x)'$	$\cos x$
$f(x)''$	$-\sin x$
$f(x)^{(3)}$	$-\cos x$
$f(x)^{(4)}$	$\sin x$

7.8 נגזרת מסדר גבוה של פונקציה סתומה

דוגמה 7.16

נתונה הפונקציה $x^2+y^2=1$ מהי הנגזרת השניה של y?

פתרון:
נגזור את שני הצדדים:
$$2x+2yy'=0 \qquad \Rightarrow \qquad y'=-\frac{x}{y}\ .$$
נגזור שוב פעם:
$$2+2y'y'+2yy''=0 \qquad \Rightarrow \qquad y''=\frac{-1-(y')^2}{y}=\frac{-1-\frac{x^2}{y^2}}{y}=-=\frac{x^2+y^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3}\ .$$
■

7.9 נגזרת מסדר גבוה של פונקציה פרמטרית

משפט 7.3 נגזרת מסדר גבוה של פונקציה פרמטרית

נתונה פונקציה פרמטרית
$$y=y(t)\ ,\qquad x=x(t)\ .$$
אז הנגזרת השנייה ניתנת ע"י הנוסחה
$$y''_{xx}=\frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t}\ .$$

הוכחה: נתונה פונקציה פרמטרית
$$y=y(t)\ ,\qquad x=x(t)\ .$$
הנגזרת הראשונה היא
$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}\ .$$
דרך זה נקבל פונקציה פרמטרית חדשה:
$$y'_x=y'_x(t)\ ,\qquad x=x(t)\ .$$
נגזור אותה לפי אותו כלל ונקבל
$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$
$$y''_{xx}=\frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t}=\frac{y''_{tt}}{(x'_t)^2}-\frac{y'_tx''_{tt}}{(x'_t)^3}\ .$$
■

דוגמה 7.17

$$y = \sin t \ , \qquad x = \cos t \ .$$

פתרון:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\cot t \ .$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \ .$$

$$(y'_x)'_t = -(\cot t)'_t = -\frac{1}{\sin^2 t} \ .$$

לכן

$$y''_{xx} = \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \frac{-1}{\sin t} = \frac{1}{\sin^3 t} \ .$$

■