# שעור 4
# משפט קיילי-המילטון ופולינום מינימלי

## 4.1 הצבה של מטריצה ריבועית בפולינם

**הגדרה 4.1 הצבה של מטריצה ריבועית בפולינם**

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$. יהי

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_k x^k$$

פוליניום כאשר $\alpha_i \in \mathbb{F}$ סקלרים. הצבה של $A$ בפולינים $p$ מוגדרת להיות

$$p(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_k A^k$$

כאשר $I_n$ המטריצה היחידה של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

**דוגמה 4.1**

יהיו $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $p(x) = 2x^2 - 2x - 4$. חשבו את $p(A)$.

**פתרון:**

$$p(x) = 2x^2 - 2x - 4 = 2(x-2)(x+1) \ .$$

$$p(A) = 2(A - I_2)(A + I_2) = 2\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 24 & 32 \end{pmatrix} \ .$$

**דוגמה 4.2**

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ו $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \in \mathbb{R}_3[x]$. פרקו $p(x)$ לגורמים ליניאריים והשתמשו בפירוק זה כדי לחשב שוב את ההצבה של $A$ ב- $p(x)$.

**פתרון:**

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x+1) \ .$$

$$p(A) = (A - I_3)(A - 2I_3)(A + I_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 10 \\ -5 & 1 & 18 \\ 1 & -5 & 26 \end{pmatrix}$$

**משפט 4.1**

תהי $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית ויהי $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום. אז

$$p(D) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

**הוכחה:** תרגיל בית

■

**משפט 4.2**

תהיינה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ו- $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. נניח ש $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה הפיכה. מתקיים:

$$(BAB^{-1})^k = BA^kB^{-1} .$$

**הוכחה:** נוכיח ע"י אינדוקציה.

<u>בסיס:</u> עבור $k=1$

$$(BAB^{-1})^1 = BA^1B^{-1} .$$

<u>מעבר:</u>

נניח ש- $(BAB^{-1})^k = BA^kB^{-1}$. (ההנחת האינדוקציה). נוכיח ש- $(BAB^{-1})^{k+1} = BA^{k+1}B^{-1}$.

$$\begin{aligned}
(BAB^{-1})^{k+1} =& (BAB^{-1})^k \cdot BAB^{-1} \\
=& BA^kB^{-1} \cdot BAB^{-1} \qquad \text{(ההנחת האינדוקציה)} \\
=& BA^k \cdot \underbrace{(B^{-1}B)}_{=I} \cdot AB^{-1} \\
=& BA^k \cdot I \cdot AB^{-1} \\
=& BA^k \cdot AB^{-1} \\
=& BA^{k+1}B^{-1} .
\end{aligned}$$

■

**משפט 4.3**

תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות. כלומר קיימת $P$ הפיכה כך ש- $B = PAP^{-1}$. נניח ש- $Q(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום. אז

$$Q(A) = PQ(B)P^{-1} .$$

**הוכחה:** נסמן $Q(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\ldots+\alpha_k x^k$.

$$\begin{aligned}Q(A)=&\alpha_0 I+\alpha_1 A+\ldots+\alpha_k A^k\\ =&\alpha_0 I+\alpha_1(PBP^{-1})+\ldots+\alpha_k(PBP^{-1})^k\\ =&\alpha_0 PP^{-1}+\alpha_1(PBP^{-1})+\ldots+\alpha_k(PBP^{-1})^k\end{aligned}$$

$(PBP^{-1})^k=PB^kP^{-1}$ (לפי משפט 4.2) לכן נקבל

$$\begin{aligned}Q(A)=&\alpha_0 PP^{-1}+\alpha_1 PBP^{-1}+\ldots+\alpha_k PB^kP^{-1}\\ =&P\left(\alpha_0 I+\alpha_1 B+\ldots+\alpha_k B^k\right)P^{-1}\\ =&PQ(B)P^{-1}\ .\end{aligned}$$

■

**משפט 4.4**

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה, כלומר קיימת $P$ הפיכה ו- $D$ אלכסונית כך ש- $A=PDP^{-1}$. נניח ש- $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. אז לכל $q(x)\in\mathbb{F}[x]$ מתקיים

$$q(A)=P\begin{pmatrix}q(\lambda_1)&0&\ldots&0\\0&q(\lambda_2)&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&q(\lambda_n)\end{pmatrix}P^{-1}$$

**הוכחה:** נסמן $D=P^{-1}AP$. לפי משפט 4.3,

$$P^{-1}q(A)P=q(P^{-1}AP)=q(D)\ .$$

לפי משפט 4.1,

$$q(D)=\begin{pmatrix}q(\lambda_1)&0&\ldots&0\\0&q(\lambda_2)&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&q(\lambda_n)\end{pmatrix}$$

לכן נקבל

$$P^{-1}q(A)P=\begin{pmatrix}q(\lambda_1)&0&\ldots&0\\0&q(\lambda_2)&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&q(\lambda_n)\end{pmatrix}\ ,$$

מכאן נובע כי

$$q(A)=P\begin{pmatrix}q(\lambda_1)&0&\ldots&0\\0&q(\lambda_2)&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&q(\lambda_n)\end{pmatrix}P^{-1}\ .$$

■

**דוגמה 4.3**

חשבו את ההצבה של $A=\begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 20 & -11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ בפולינום $Q(x)=x^{100}+2x^{51}-3$.

**פתרון:**
הערכים עצמיים של $A$ הם $\lambda=-1$ ו- $\lambda=1$. המרחבים עמציים הם

$$V_{-1}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\} \ , V_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\right\} \ .$$

לכן $A=PDP^{-1}$ כאשר $P=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$ ו- $D=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} q(A)=&P\begin{pmatrix}q(-1)&0\\0&q(1)\end{pmatrix}P^{-1}= \quad \begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}-4&0\\-8&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}20&-12\\40&-24\end{pmatrix}\end{aligned}$$

**דוגמה 4.4**

תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ סקלר. נניח ש $p(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינום. הוכיחו:

$p(A)=\lambda I_n$ אם"ם $p(B)=\lambda I_n$.

**הוכחה:** $\Leftarrow$

$A,B$ דומות לכן קיימת $C\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה כך ש $B=C^{-1}AC$. לכן לפי 4.3,

$$p(B)=p\left(C^{-1}AC\right)=C^{-1}p(A)C$$

אם $p(A)=\lambda I_n$ אז

$$p(B)=C^{-1}\lambda I_n C=\lambda I_n \ .$$

$\Rightarrow$

$A=CBC^{-1}$ לכן לפי 4.3,

$$p(A)=p\left(CBC^{-1}\right)=Cp(B)C^{-1} \ .$$

לכן אם $p(B)=\lambda I_n$ אז

$$p(A)=C\lambda I_n C^{-1}=\lambda I_n \ .$$

■

# 4.2 הצבת של העתקה לינארית בפולינום

**הגדרה 4.2 הצבה של העתקה ליניארית בפולינום**

יהי $V$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, נניח ש $T : V \to V$ אופרטור ליניארי ו- $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots \alpha_k x^k$ פולינום. נגדיר את האופרטור הליניארי $p(T) : V \to V$ ע"י

$$p(T) = \alpha_0 I_V + \alpha_1 T + \ldots \alpha_k T^k$$

כאשר $I_V$ האופרטור הזהות ($I_V(u) = u$ לכל $u \in V$).
$p(T)$ נקראת ההצבה של $T$ ב- $p$.

### דוגמה 4.5

יהי $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ אופרטור המוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y \\ 2x + y \end{pmatrix} \ .$$

חשבו את $p(T)$ עבור $p(x) = 3x^2 - 4x - 1$ תוך כדי שימוש של המטריצה המייצגת הסטנדרטית של $T$.

**פתרון:**

**שיטה 1**

הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$ הוא $E = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. המטריצה המייצגת הסטנדרטית מוגדרת $[T]_E = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(e_1)]_E & [T(e_1)]_E \\ | & | \end{pmatrix}$. נקבל

$$[T(e_1)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ , \qquad [T(e_2)]_E = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$

לכן $[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. נשתמש בנוסחה

$$[p(T)]_E = p([T]_E) \ .$$

נחשב $p([T]_E)$:

$$p([T]_E) = 3([T]_E)^2 - 4[T]_E - I_3 = 3\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 - 4\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -6 \\ 4 & -20 \end{pmatrix}$$

לכן לכל וקטור $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} [p(T)u]_E &= [p(T)]_E \cdot [u]_E \\ &= p([T]_E)[u]_E \\ &= \begin{pmatrix} -20 & -6 \\ 4 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -20x - 6y \\ 4x - 20y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**שיטה 2**

$$
\begin{aligned}
p(T)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} =&3T^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-4T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
=&3T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
=&3\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}-15\\12\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}-20\\4\end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(T)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} =&3T^2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-4T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
=&3T\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
=&3\begin{pmatrix}-6\\-5\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}-18\\-15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-12\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}-6\\-20\end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(T)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} =&p\left(x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\\
=&\begin{pmatrix}-20x-6y\\4x-20y\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

## דוגמה 4.6

יהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ אופרטור שמוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-3y\\2x+y\end{pmatrix} .$$

חשבו את ההצבה $p(T)$ עבור $p(x)=3x^2-4x+1$.

**פתרון:**

נחשב את המטריצה המייצגת של $T$ שמוגדרת $[T]_E=\begin{pmatrix}| & |\\ [T(e_1)]_E & [T(e_1)]_E\\ | & |\end{pmatrix}$.

$$[T(e_1)]_E=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} ,\qquad [T(e_2)]_E=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$$

לכן $[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^2 - 4x + 1 = (3x-1)(x-1) \\ p([T]_E) &= (3[T]_E - I)([T]_E - I) \\ &= \left(3\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -18 & -6 \\ 4 & -18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$p(T)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = p\left([T]_E\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -6 \\ 4 & -18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18x - 6y \\ 4x - 18y \end{pmatrix} \ .$$

### דוגמה 4.7

נסמן $p(x) = 2x^2 + 3x - 4 \in \mathbb{R}[x]$. יהי $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ שמוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + 2y \end{pmatrix} \ .$$

חשבו את $p(T)$.

**פתרון:**

$$\begin{aligned} p(T)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 2T^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 32\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$p(T)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(T)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= p\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= x\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -9 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x - 9y \\ 9x + 8y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### דוגמה 4.8

יהי $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ אופרטור שמוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 3x + 7y \end{pmatrix} \ .$$

חשבו את $p(T)$ עבור $p(x)=5x^2-6x+1$ תוך כדי שימוש של המטריצה המייצגת הסטנדרטית של $T$.

**פתרון:**

**שיטה 1**

הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$ הוא $E=\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$. ההגדרה של המטריצה המייצגת הסטנדרטית היא $[T]_E=\begin{pmatrix}| & | \\ [T(e_1)]_E & [T(e_1)]_E \\ | & |\end{pmatrix}$.

$$[T(e_1)]_E=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\ ,\qquad [T(e_2)]_E=\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}\ ,$$

לכן נקבל $[T]_E=\begin{pmatrix}2&-2\\3&7\end{pmatrix}$. ניתן לפרק את $p(x)$ לגורמים לינאריים:

$$p(x)=5x^2-6x+1=(5x-1)(x-1)\ .$$

בלהיעזר בפירוק הזה נחשב את $p\left([T]_E\right)$:

$$\begin{aligned}p([T]_E)&=\left(5\left([T]_E\right)-I_2\right)\left([T]_E-I_2\right)\\&=\left(5\begin{pmatrix}2&-2\\3&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix}2&-2\\3&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\\&=\begin{pmatrix}9&-10\\15&34\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\3&6\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-21&-78\\117&174\end{pmatrix}\end{aligned}$$

לכן עבור וקטור $u=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}[p(T)u]_E&=[p(T)]_E\cdot[u]_E\\&=\begin{pmatrix}-21&-78\\117&174\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-21x-78y\\117x+174y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

**שיטה 2**

$$\begin{aligned}p(T)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}&=5T^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-6T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=5T\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=5\begin{pmatrix}-2\\27\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-21\\117\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p(T)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} &=5T^2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-6T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ &=5T\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ &=5\begin{pmatrix}-18\\43\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-90\\215\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12\\-42\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-78\\174\end{pmatrix}\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p(T)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &=p\left(x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\\ &=\begin{pmatrix}-21x-78y\\117x+174y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

בדיוק כמו הפתרון המתקבל ע"י שיטה 1.

### דוגמה 4.9

נגדיר $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3y+z\\2x-y+z\\x+y+z\end{pmatrix}\ .$$

נסמן $p(x)=x^2+x-2\in\mathbb{R}[x]$. יהי $E$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.

**א** חשבו את $[p(T)]_E$.

**ב** היעזרו בחישוב בסעיף א' כדי למצוא את $p(T)$.

**פתרון:**

**סעיף א** $[T]_E=\begin{pmatrix}0&3&1\\2&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. ניתן לפרק את $p(x)$ כ- $p(x)=(x-1)(x+2)$. לכן

$$[p(T)]_E=\left([T]_E-I_3\right)\left([T]_E+2I_3\right)=\begin{pmatrix}-1&3&1\\2&-2&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&1\\2&1&1\\1&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1&5\\1&5&3\\4&4&2\end{pmatrix}$$

**סעיף ב** לכן

$$\begin{aligned}
p(T)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &= [p(T)]_E\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\
&= x\,[p(T)]_E\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\,[p(T)]_E\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\,[p(T)]_E\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
&= x\begin{pmatrix}5&1&5\\1&5&3\\4&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}5&1&5\\1&5&3\\4&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}5&1&5\\1&5&3\\4&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
&= x\begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}5x+y+5z\\x+5y+3z\\4x+4y+2z\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

**משפט 4.5**

יהי $V$ מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T:V\to V$. נניח ש $p\in\mathbb{F}[x]$.
אם $u\in V$ וקטור עצמי של $T$ ששייך לערך עצמי $\lambda$, אז $u$ וקטור עצמי של $p(T)$ ששייך לערך עצמי $p(\lambda)$.
כלומר, אם

$$T(u)=\lambda u$$

אז

$$p(T)\,(u)=p(\lambda)u\ .$$

**הוכחה:** ראו משפט 3.18 למעלה:

$$\begin{aligned}
p(T)(u) &= \left(\alpha_0+\alpha_1 T+\ldots+\alpha_k T^k\right)(u)\\
&= \left(\alpha_0+\alpha_1 T(u)+\ldots+\alpha_k T^k(u)\right)\\
&= \left(\alpha_0+\alpha_1\lambda u+\ldots+\alpha_k\lambda^k u\right)\\
&= \left(\alpha_0+\alpha_1\lambda+\ldots+\alpha_k\lambda^k\right)u\\
&= p(\lambda)u\ .
\end{aligned}$$

■

## 4.3 איפוס פולינום על ידי מטריצה

**הגדרה 4.3 איפוס פולינום ע"י מטריצה**

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ויהי $p(x)\in\mathbb{F}[x]$. אומרים כי $A$ מאפסת את $p(x)$ אם

$$p(A)=0_{n\times n}$$

כאשר $0_{n\times n}$ מטריצה האפס של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

**משפט 4.6 מטריצות דומות מאפסות אותו פולינום**

אם $A$ ו- $B$ מטריצות דומות, אז הפולינום $f$ מתאפס ע"י $A$ אם"ם הוא מתאפס ע"י $B$.

**הוכחה:** נניח ש $f(A)=0$. נוכיח ש $f(B)=0$:
נסמן

$$f(x)=\alpha_k x^k+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0\ ,$$

אז

$$f(A)=\alpha_k A^k+\ldots+\alpha_1 A+\alpha_0 I=0\ .$$

$A$ ו $B$ מטריצות דומות לכן קיימת מטריצה הפיכה $C$ כך ש

$$A=C^{-1}BC\ .$$

לכן

$$\alpha_k(C^{-1}BC)^k+\ldots+\alpha_1(C^{-1}BC)+\alpha_0 I=0\ .$$

$(C^{-1}BC)^k=C^{-1}B^kC$ (לפי משפט 4.2) לכן נקבל

$$C^{-1}\left(\alpha_k B^k+\ldots+\alpha_1 B+\alpha_0 I\right)C=0\ .$$

$C$ הפיכה אז נכפיל מצד שמאל ב- $C$ ומצד ימין ב- $C^{-1}$ ונקבל

$$\alpha_k B^k+\ldots+\alpha_1 B+\alpha_0 I=0\ .$$

קיבלנו ש

$$f(B)=0\ .$$

■

**משפט 4.7**

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$.

**א.** $A^n\in\mathrm{sp}\{I_n,A,A^2,\ldots,A^{n-1}\}$ אם"ם קיים פולינום $p(x)\in\mathbb{F}[x]$ מסדר $n$ כך ש $p(A)=0$.

**ב.** הקבוצה $\{I_n,A,A^2,\ldots,A^n\}$ ת"ל אם"ם קיים פולינום שונה מאפס $p(x)\in\mathbb{F}[x]$ מסדר $n$ לכל היותר כך ש- $p(A)=0$.

**הוכחה:**

**סעיף א.** נניח ש $A^n\in\mathrm{sp}\{I_n,A,A^2,\ldots,A^{n-1}\}$. אז קיימים סקלרים כך ש-

$$A^n=\alpha_0 I_n+\alpha_1 A+\alpha_2 A^2+\ldots+\alpha_{n-1}A^{n-1}$$

ז"א

$$A^n-\alpha_{n-1}A^{n-1}-\alpha_{n-2}A^{n-2}-\ldots-\alpha_1 A-\alpha_0 I_n=0$$

לכן $A$ מאפסת את

$$p(x)=x^n-\alpha_{n-1}x^{n-1}-\ldots-\alpha_1 x-\alpha_0\in\mathbb{F}[x]\ .$$

נניח ש- $A$ מאפסת את הפולינויום

$$Q(x)=\beta_n x^n+\beta_{n-1}x^{n-1}+\ldots+\beta_1 x+\beta_0\in\mathbb{F}[x]$$

מסדר $n$, כלומר $Q(A)=0$. נניח ש $\beta_n\neq 0$. אז

$$\beta_n A^n=-\left(\beta_{n-1}A^{n-1}+\ldots+\beta_1 A+\beta_0 I_n\right)$$

נחלק שני האגפים ב $\beta_n$:

$$A^n=-\left(\frac{\beta_{n-1}}{\beta_n}A^{n-1}+\ldots+\frac{\beta_1}{\beta_n}A+\frac{\beta_0}{\beta_n}I_n\right)$$

קיבלנו כי $A^n\in\text{sp}\{I_n,A,A^2,\ldots,A^{n-1}\}$.

**סעיף ב.** נניח ש- $\{I_n,A,A^2,\ldots,A^n\}$ ת"ל. אז קיימים סקלירם שאינם כולם אפסים כך ש-

$$\alpha_0 I_n+\alpha_1 A+\alpha_2 A^2+\ldots+\alpha_{n-1}A^{n-1}+\alpha_n A^n=0$$

מכאן $A$ מאפסת $\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i x^i$ שהוא פולינום שונה מאפס מסדר $n$ לכל היותר.

להיפך, נניח ש- $p(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i x^i$ אינו פולינום האפס כך ש $p(A)=0$. אז

$$\alpha_0 I_n+\alpha_1 A+\ldots+\alpha_n A^n=0$$

הוא צירוף לנארי לא טריוויאלי.

■

## 4.4 איפוס פולינום על ידי העתקה לינארית

**הגדרה 4.4 איפוס פולינום על ידי העתקה לינארית**

יהי $T:V\to V$ אופרטור ויהי $p(x)\in\mathbb{F}[x]$. אומרים כי $T$ מאפס את $p(x)$ אם $p(T)=0$ כאשר $0$ מסמן את העתקת האפס.

**דוגמה 4.10**

נתון $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדר ע"י

$$T(x,y)=(-y,x)$$

חשבו את $f(T)$ כאשר $f(x)$ הפולינום

$$f(x)=x^3-x^2+x-1\ .$$

**פתרון:**

$$T^2(x,y)=T\left(T(x,y)\right)=T\left(-y,x\right)=(-x,-y)$$
$$T^3(x,y)=T\left(T^2(x,y)\right)=T\left(-x,-y\right)=(y,-x)$$

לכן

$$f(T)=(y,-x)-(-x,-y)+(-y,x)-(x,y)=(0,0)\ .$$

# 4.5 משפט קיילי-המילטון (Cayley-Hamilton)

**משפט 4.8 משפט קיילי-המילטון**

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם $p_A(x)$ הוא הפולינום האופייני של $A$ אז

$$p_A(A) = 0_{n\times n}$$

כאשר $0_{n\times n}$ מטריצה האפס של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

**דוגמה 4.11**

נתונה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**א)** בדקו ש- $p_A(A) = 0$.

**ב)** חשבו את $A^2$ ללא חישוב ישיר.

**פתרון:**

**א)**

$$p_A(\lambda) = |\lambda - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda$$

$$\begin{aligned} p_A(A) =& A^2 - 2A = A(A-2I) \\ =& \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ =& \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**ב)** לפי קיילי-המילטון $p_A(A) = 0$ לכן

$$A^2 - 2A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A^2 = 2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

**דוגמה 4.12**

נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. מצאו את $A^{-1}$ בעזרת משפט קיילי המילטון.

**פתרון:**

הפולינום האופייני של $A$ הוא:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3) - 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 1$$

לכן

$$p_A(A) = A^2 - 4A + I = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 4A - A^2 = I \qquad \Rightarrow \qquad A(4I - A) = I \ . \qquad (*)$$

$|A| = 1$ לכן $A$ הפיכה. נכפיל (*) ב- $A^{-1}$ ונקבל $4I - A = A^{-1}$, ולכן

$$A^{-1} = 4I - A = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

### דוגמה 4.13

נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

להיעזר במשפט קיילי המילטון חשבו את $A^3$ ו- $A^{-1}$.

**פתרון:**

הפולינום האופייני של $A$ הוא

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = & \begin{vmatrix} \lambda+3 & -1 & 1 \\ 5 & \lambda-3 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda+4 \end{vmatrix} \\ =& (\lambda+3)\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 \\ -6 & \lambda+4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & \lambda+4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & \lambda-3 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} \\ =& (\lambda+3)\left((\lambda-3)(\lambda+4)+6\right) + (5(\lambda+4)-6) + (-30-6(\lambda-3)) \\ =& (\lambda+3)(\lambda+3)(\lambda-2) + 5\lambda + 14 - 6\lambda - 12 \\ =& (\lambda+3)(\lambda+3)(\lambda-2) - \lambda + 2 \\ =& (\lambda+3)(\lambda+3)(\lambda-2) - (\lambda-2) \\ =& (\lambda-2)\left((\lambda+3)(\lambda+3)-1\right) \\ =& (\lambda-2)\left(\lambda^2+6\lambda+8\right) \\ =& (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda+4) \\ =& \lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda - 16 \ . \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = -2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = -4$ מריבוי אלגברי 1.

נבדוק אם $A$ הפיכה דרך הדטרמיננטה:

$$|A| = p_A(0) = -16 \neq 0$$

לכן $A$ הפיכה.

לפי משפט קיילי-המילטון,

$$p_A(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad A^3 + 4A^2 - 4A - 16I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad A^3 = -4A^2 + 4A + 16I_3$$

$$A^2=\begin{pmatrix}-3&1&-1\\-5&3&-1\\-6&6&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&1&-1\\-5&3&-1\\-6&6&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&-6&6\\6&-2&6\\12&-12&16\end{pmatrix}$$

לכן

$$A^3=-4\begin{pmatrix}10&-6&6\\6&-2&6\\12&-12&16\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}-3&1&-1\\-5&3&-1\\-6&6&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}16&0&0\\0&16&0\\0&0&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-36&28&-28\\-44&36&-28\\-72&72&-64\end{pmatrix}$$

לפי משפט קיילי-המילטון,

$$p_A(A)=0 \quad\Rightarrow\quad A^3+4A^2-4A-16I_3=0 \quad\Rightarrow\quad I_3=\frac{1}{16}A^3+\frac{1}{4}A^2-\frac{1}{4}A=\left(\frac{1}{16}A^2+\frac{1}{4}A-\frac{1}{4}I_3\right)A$$

ז"א

$$\begin{aligned}A^{-1}=&\frac{1}{16}A^2+\frac{1}{4}A-\frac{1}{4}I_3\\=&\frac{1}{16}\begin{pmatrix}10&-6&6\\6&-2&6\\12&-12&16\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3&1&-1\\-5&3&-1\\-6&6&-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac14&0&0\\0&\frac14&0\\0&0&\frac14\end{pmatrix}\\=&\begin{pmatrix}-\frac38&-\frac18&\frac18\\-\frac78&\frac38&\frac18\\-\frac34&\frac34&-\frac14\end{pmatrix}\end{aligned}$$

### דוגמה 4.14

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו את הטענות הבאות:

**א.**

$$A^n\in \text{sp}\left\{I_n,A,A^2,\ldots,A^{n-1}\right\}$$

**ב.** אם $A$ הפיכה אז

$$A^{-1}\in \text{sp}\left\{I_n,A,A^2,\ldots,A^{n-1}\right\}$$

**ג.** עבור

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$$

מבלי לחשב ישירות מטריצות הופכיות, מצאו את $A^{-1}$ ואת $A^{-2}$.

**פתרון:**

**סעיף א.** לפי משפט ק"ה $A$ מאפסת את $p_A(x)$. כלומר

$$p_A(A)=A^n+\alpha_{n-1}A^{n-1}+\ldots+\alpha_1A+\alpha_0I_n=0\ .$$

לכן

$$A^n=-\alpha_{n-1}A^{n-1}-\ldots-\alpha_1A-\alpha_0I_n\in \text{sp}\left\{I_n,A,A^2,\ldots,A^{n-1}\right\}\ .$$

**סעיף ב.** לפי משפט ק"ה $A$ מאפסת את $p_A(x)$, כלומר

$$p_A(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n = 0 \ ,$$

לכן

$$-\alpha_0 I_n = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A \ . \qquad (*)$$

$|A| = p_A(0)$. מכיוון ש- $A$ הפיכה אז $\alpha_0 \neq 0$ ו $\alpha_0^{-1}$ קיים. נכפיל את שני אגפים של (*) ב $\dfrac{-1}{\alpha_0}A^{-1}$:

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_0}A^{n-1} - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0}A^{n-2} - \ldots - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}I_n \ . \qquad (\#)$$

לכן קיבלנו כי

$$A^{-1} \in \text{sp}\left\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\right\} \ .$$

**סעיף ג.**

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) =& |\lambda I_3 - A| \\
=& \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
=& (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & \lambda-1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \\
=& (\lambda-5)(\lambda+1)^2 \\
=& \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5
\end{aligned}$$

$$p_A(A) = A^3 - 3A^2 - 9A - 5I_n = 0 \quad \Rightarrow \quad I_n = \frac{1}{5}A^3 - \frac{3}{5}A^2 - \frac{9}{5}A = A\left(\frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A - \frac{9}{5}I_3\right)$$

אזי

$$A^{-1} = \frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A - \frac{9}{5}I_3 \ . \qquad (*1)$$

לכן $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{9}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

כדי למצוא את $A^{-2}$ נכפיל את שני אגפי (*1) ב $A^{-1}$ ונקבל:

$$A^{-2} = \frac{1}{5}A - \frac{3}{5}I_3 - \frac{9}{5}A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{9}{5}\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 17 & -8 & -8 \\ -8 & 17 & -8 \\ -8 & -8 & 17 \end{pmatrix} .$$

**משפט 4.9 משפט קיילי-המילטון עבור העתקות**

יהי $V$ מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $T:V\to V$ אופרטור. $T$ מאפס את הפולינום האופייני שלה.

**דוגמה 4.15**

נתון אופרטור לינארי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ שמוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6x+y+12z\\-8x+2y+15z\\-2x+5z\end{pmatrix}$$

הוכיחו ש- $T$ הפיך באמצעות משפט ק"ה וחשבו $T^{-1}\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$

**פתרון:**

הממ"ס היא

$$A=[T]_E=\begin{pmatrix}-6&1&12\\-8&2&15\\-2&0&5\end{pmatrix}\ .$$

אז הפולינום האופייני

$$\begin{aligned}p_A(x)=&|xI-A|\\=&\begin{vmatrix}x+6&-1&-12\\8&x-2&-15\\2&0&x-5\end{vmatrix}\\=&2\begin{vmatrix}-1&-12\\x-2&-15\end{vmatrix}+(x-5)\begin{vmatrix}x+6&-1\\8&x-2\end{vmatrix}\\=&2\left(15+12x-24\right)+(x-5)\left((x+6)(x-2)+8\right)\\=&-18+24x+(x-5)\left(x^2+4x-4\right)\\=&x^3-x^2+2\ .\end{aligned}$$

האיבר החופשי שונה מאפס לכן $T$ הפיך. לפי משפט ק"ה:

$$T^3-T^2+2I=0$$

כאשר האגף הימין הוא אופרטור האפס. נפעיל $T^{-1}$ על המשוואה ונקבל:

$$T^2-T+2T^{-1}=0$$

לכן

$$T^{-1}=-\frac{1}{2}T^2+\frac{1}{2}T$$

# 4.6 הפולינום המינימלי של מטריצה

### הגדרה 4.5 פולינום המינימלי

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. הפולינום המינימלי הוא פולינום מתוקן מצורה

$$m(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{k-1}x^{k-1} + x^k \ , \qquad (\#)$$

כאשר $k \geq 1$ כך ש:

**1)** $m(A) = 0$

**2)** $k$ היא הסדר הנמוכה ביותר מבין הפולינומים מצורה (#) שמתאפסים ע"י $A$.

נסמן את הפולינום המינימלי של $A$ ב- $m_A(x)$.

### מסקנה 4.1 פולינום מינימלי של טריצה אלכסונית

אם $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה אלכסונית:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

אם $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ האיברים השונים על האלכסון ($k \leq n$) אז הפולינום המינימלי של $D$ הוא

$$m_D(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_k) \ .$$

### משפט 4.10 ל- $m_A(x)$ ול- $p_A(x)$ יש בדיוק אותם גורמים אי-פריקים.

ל- $m_A(x)$ ול- $p_A(x)$ יש בדיוק אותם גורמים אי-פריקים. כלומר

$$m_A(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_A(\lambda) = 0 \ .$$

**הוכחה:**

נניח ש $m_A(\lambda) = 0$.

אז $m_A(x) = q(x)(x-\lambda)$ כאשר $\deg q(x) < \deg m_A(x)$ (נוסחת איוקליד לחיוק פולינומים).

$m_A(x)$ הוא הפולינים המינימלי של $A$ לכן $q(A) \neq 0$.

נגדיר וקטורים v ו- w כך ש- $\mathrm{w} = q(A)\mathrm{v} \neq \bar{0}$.

$$\bar{0} = m_A(A)\mathrm{v} = (A-\lambda I)q(A)\mathrm{v} = (A-\lambda I)\mathrm{w} \ ,$$

לכן

$$A\mathrm{w} = \lambda \mathrm{w} \ .$$

ז"א w וקטור עצמי של $A$ ששייך לערך עצמי $\lambda$ של $A$.

לכן $p_A(\lambda) = 0$.

נניח ש $p_A(\lambda)=0$.
אז $\lambda$ ערך עצמי של $A$.
נניח ש- w הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda$. אז

$$A\mathrm{w}=\lambda\mathrm{w}\ .$$

לכן

$$m_A(A)\mathrm{w}=m_A(\lambda)\mathrm{w}\ .$$

$m_A(A)=0$ לכן $m(\lambda)\mathrm{w}=0$.
w וקטור עצמי אז $\mathrm{w}\neq\bar{0}$, לכן $m_A(\lambda)=0$. ■

**משפט 4.11 מטריצה מאפסת הפולינום המינימלי של מטריצה שאליה היא דומה**

תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות ריבועיות. יהי $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של $A$ ויהי $m_B(x)$ הפולינום המינימלי של $B$. אם $A,B$ מטריצות דומות אז

$$m_A(B)=0$$

ו-

$$m_B(A)=0\ .$$

**הוכחה:** $A$ ו- $B$ דומות לכן קיימת $P$ הפיכה כך ש- $A=PBP^{-1}$. לפי משפט 4.3:

$$m_A(A)=P\cdot m_A(B)\cdot P^{-1}$$

$P$ הפיכה אז נכפיל מצד ימין ב- $P$ ומצד שמאל ב- $P^{-1}$:

$$P^{-1}\cdot m_A(A)\cdot P=m_A(B)\ .$$

$m_A(A)=0$ לכן $m_A(B)=0$. ■

**משפט 4.12 למטריצות דומות יש אותו פולינום מינימלי**

תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות. ל- $A$ ו- $B$ יש אותו פולינום מינימלי.

**הוכחה:** $A$ ו- $B$ דומות $\Leftarrow$ ל- $A$ ו- $B$ יש אותם ערכים עצמיים (לפי משפט 3.21).
יהי $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של $A$ ו- $m_B(x)$ הפולינום המינימלי של $B$.
כיוון של- $A$ ו- $B$ אותם ערכים עצמיים אז $m_A(x)$ ו- $m_B(x)$ מתפרקים לאותם גורמים ליניאריים:

$$m_A(x)=(x-\lambda_1)^{d_1}\ldots(x-\lambda_k)^{d_k}\ ,\qquad m_B(x)=(x-\lambda_1)^{e_1}\ldots(x-\lambda_k)^{e_k}\ .$$

$A$ ו- $B$ דומות אז $m_A(B)=0$ ו- $m_B(A)=0$ (לפי משפט 4.11 למעלה).

כעת נוכיח דרך השלילה כי $d_i=e_i$ לכל $1\leq i\leq k$ ולכן הפולינומים $m_A$ ו- $m_B$ זהים.

נניח כי עבור אחד הגורמים, $d_i\neq e_i$.

אם $d_i<e_i$, כיוון ש- $m_A(B)=0$ אז מתקיים ש- $B$ מאפסת פולינום מדרגה נמוכה יותר מ- $m_B(x)$. בסתירה לכך כי $m_B(x)$ הוא הפולינום המינימלי של $B$.

אם $e_i < d_i$, כיוון ש- $m_B(A) = 0$, אז מתקיים ש- $A$ מאפסת פולינום מדרגה נמוכה יותר מ- $m_A(x)$. בסתירה לכך כי $m_A(x)$ הוא הפולינום המינימלי של $A$.

■

**משפט 4.13 $A$ לכסינה אא"ם לפולינום מינימלי יש גורמים ליניאריים שונים**

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ויהי $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של $A$. $A$ לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אם"ם כל הגורמים האי-פריקים של $m_A(x)$ הם ליניאריים ושונים.
כלומר $A$ לכסינה אם"ם $m_A(x)$ מתפרק ל-

$$m_A(x) = (x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_i)\ldots(x-\lambda_k) \ .$$

**הוכחה:** נניח ש- $A$ לכסינה.
יהיו $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ הערכים עצמיים השונים של $A$.
קיימת $P$ הפיכה ו- $D$ אלכסונית כך ש-

$$A = PDP^{-1} \ .$$

לפי משפט 4.12 הפולינום המינימלי של $A$ שווה לפולינום המינימלי של $D$ ולפי מסקנה 4.1 $m_D(x) = (x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_k)$ לכן

$$m_A(x) = m_D(x) = (x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_k) \ .$$

■

## 4.7 תרגילים על הפולינום המינימלי

### דוגמה 4.16

אם הפולינום המינימלי של מטריצה $A$ הוא $m(x) = (x-1)(x-2)$, אז $A$ לכסינה.

### דוגמה 4.17

נניח $A$ מטריצה מעל $\mathbb{R}$ כך שהפולינום המינימלי שלה הוא

$$m_A(x) = (x-1)(x-2)^2$$

אז $A$ לא לכסינה.

### דוגמה 4.18

נניח ש

$$p_A(x) = (x-1)^2(x-2)^2$$

אז

$$m_A(x) \neq (x-1)(x-2)(x-3)$$

כי $m_A(x) \nmid p_A(x)$.

### דוגמה 4.19

נניח ש

$$p_A(x)=(x-1)(x-2)x$$

אז

$$m_A(x)=(x-1)(x-2)x \ .$$

### דוגמה 4.20

נניח ש

$$p_A(x)=(x-1)^2(x-2)^2$$

מהן האפשרויות עבור $m_A$?

**פתרון:**

ישנן 4 אפשרויות:

$$(x-1)(x-2) \ , \qquad (x-1)^2(x-2) \ , \qquad (x-1)(x-2)^2 \ , \qquad (x-1)^2(x-2)^2 \ .$$

(אם $A$ נתונה אפשר לבדוק איזה מהם מתאפס ע"י $A$. יש להציב את $A$ בכל אחד מהפולינומים)

### דוגמה 4.21

מצאו את הפולינום המינימלי של $A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&5\end{pmatrix}$.

**פתרון:**

$$p_A(x)=(x-2)^3(x-5) \ .$$

האפשרויות ל- $m_A(x)$ הם

$$f_1(x)=(x-2)(x-5) \ , \qquad f_2(x)=(x-2)^2(x-5) \ , \qquad f_3(x)=(x-2)^3(x-5) \ .$$

נציב את $A$:

$$\begin{aligned}f_1(A)=&(A-2I)(A-5I)\\
=&\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1&0&0\\0&-3&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}0&-3&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\
\neq&0 \ .\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_2(A) =&(A-2I)^2(A-5I)\\
=&\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1&0&0\\0&-3&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-3&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\
=&0 \ .
\end{aligned}
$$

לכן $m_A(x)=f_2(x)=(x-2)^2(x-5)$.

### דוגמה 4.22

תהיינה

$$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\ , \qquad B=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$$

האם $A$ ו- $B$ דומות?

**פתרון:**

$$p_A(x)=(x-2)^2=p_B(x)$$

$A$ אלכסונית. $B$ לא לכסינה, כי עבור הערך עצמי $\lambda=2$, הריבוי אלגברי שווה 2 אבל הריבוי גאומטרי שווה 1.

$$A-2I=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \dim V_2=1\ .$$

$$m_A(x)=x-2\ , \qquad m_B(x)=(x-2)^2\ .$$

לכן $A$ ו- $B$ לא דומות.

### דוגמה 4.23

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו שכל ערך עצמי של $A$ הוא שורש של הפולינום המינימלי.

**הוכחה:** נניח ש $\lambda_0$ ערך עצמי של $A$. אז

$$p_A(x)=(x-\lambda_0)^k\cdot q(x)\ ,$$

$k\geq 1$. ז"א, ב- $p_A(x)$ יש גורם אי פריק $(x-\lambda_0)$. לכן, לפי משפט 4.10, הוא מופיע גם ב- $m_A(x)$. ז"א

$$m_A(x)=(x-\lambda_0)^l\cdot t(x)\ .$$

ז"א

$$m_A(\lambda_0)=0\ .$$

■

### דוגמה 4.24

תהי $A$ מטריצה ריבועית כך שהפולינום המינימלי שלה הוא $m_A(x)=(x-1)^2$. יהי $f(x)=x^2+4x+3$.
הוכיחו כי המטריצה $f(A)$ הפיכה.

**פתרון:**
$m_A(A)=0 \Leftarrow (A-I)^2=0$.

$$f(A)=A^2+4A+3I=(A^2-2A+I)+6A+2I=(A-I)^2+6A+2I=6A+2I\ .$$

נוכיח כי $|6A+2I|\neq 0$ בדרך השלילה.

נניח ש $|6A+2I|=0$. אז

$$|6A+2A|=\left|6(A+\frac{2}{6}I)\right|=6^n\left|A+\frac{1}{3}I\right|=0$$

ז"א $\lambda=-\frac{1}{3}$ ערך עצמי של $A$. לכן הוא חייב להיות שורש של הפולינום המינימלי. סתירה.

### דוגמה 4.25

מצאו את הפולינום המינימלי של $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}$

**פתרון:**
הפולינום האופייני של $A$ הוא

$$p_A(\lambda)=(\lambda-2)^3=\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8\ .$$

לכו האפשרויות בשביל הפולינום מינימלי הן

$$f_1(x)=x_2\ ,\qquad f_2(x)=(x-2)^2\ ,\qquad f_3(x)=(x-2)^3\ .$$

$$f_1(A)=A-2I=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix}\neq 0$$

$$f_2(A)=(A-2I)^2=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן הפולינום המינימלי הוא

$$m_A(x)=(x-2)^2\ .$$

**דוגמה 4.26**

מצאו את הפולינום המינימלי והפולינום האופייני של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I \ .$$

**פתרון:**
הפולינום האופייני של $A$ הוא

$$p_A(x) = (x-4)^3 \ .$$

$A$ מטריצה סקלרית (מטריצה סקלרית היא מצורה $\alpha I$ כאשר $\alpha$ סקלר). הפולינום המינימלי של מטריצה סלרית הוא $m_A(x) = (x-\alpha)$. לכן הפולינום המינימלי של $A$ הוא

$$m_A(x) = x-4 \ .$$

## 4.8 *משפטים: חילוק פולינומים, פולינום המינימלי ופולינומים שמתאפסים ע"י מטריצה

**משפט 4.14**

הפולינום המינימלי הוא יחיד.

**הוכחה:** נניח שיש שני פולינומים $f_1(x)$ ו- $f_2(x)$, $f_1(x) \neq f_2(x)$ מאותו סדר, כלומר

$$f_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{k-1}x^{k-1} + x^k \ ,$$

$$f_2(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_{k-1}x^{k-1} + x^k \ .$$

כך ש $f_1(A) = 0$ ו- $f_2(A) = 0$, אז

$$(f_1 - f_2)(A) = 0 \ .$$

$(f_1 - f_2)(x)$ פולינום מסדר קטן מ- $k$. סתירה. ■

**משפט 4.15 משפט חילוק של פולינומים**

יהיו $f(x), g(x)$ פוליניומים כך ש- $\deg g \leq \deg f$. אז קיימים פולינמים $r(x), q(x)$ יחידים כך ש

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

כאשר

$$\deg\ r(x) < \deg\ g(x), \qquad \deg\ g(x) \leq \deg\ f(x) \ .$$

**משפט 4.16 פולינום שמתאפס ע"י $A$ מחלק את הפולינום המינימלי**

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית ויהי $f(x)$ פולינום. אם $f(A) = 0$ אז

$$m_A(x) \mid f(x) \ .$$

**הוכחה:** נחלק את $f(x)$ ב- $m_A(x)$. לפי משפט חילוק פולינומים,

$$f(x) = m_A(x) \cdot q(x) + r(x)$$

כאשר $\deg\, r(x) < \deg\, m_A(x)$. אז

$$f(A) = q(A)m_A(A) + r(A)\ .$$

$f(A) = 0$ ו $m_A(A) = 0$ לכן $r(A) = 0$.

ז"א או $r(x)$ הוא הפולינום האפס או הוא לא פולינום האפס אבל $r(x)$ מתאפס ע"י $A$.
$m_A(x)$ הוא הפולינום המינימלי ו $\deg\, r(x) < \deg\, m_A(x)$, כלומר $m_A(x)$ הוא הפולינום מדרגה הכי נמוכה המתאפס ע"י $A$.
לכן $r(A) = 0$ אם"ם $r(x) = 0$, כלומר $r(x)$ פולינום האפס.
כלומר קיבלנו ש- $f(x) = q(x) \cdot m_A(x)$ ולכן $m_A(x) \mid f(x)$. ■

**מסקנה 4.2 פולינום המינימלי מחלק את הפולינום האופייני**

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. אם $p_A(x)$ הפולינום האופייני ו- $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של $A$, אז

$$m_A(x) \mid p_A(x)\ .$$

**הוכחה:** לפי משפט קיילי המילטון , $p_A(A) = 0$. הפולינום המינימלי מחלק כל פולינום המתאפס ע"י $A$, לכן $m_A(x)|p_A(x)$. ■

**משפט 4.17 $p_A(x)$ מחלק כל פולינום המתאפס ע"י $A$ בחזקת הסדר של $A$.**

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. יהי $p_A(x)$ הפולינום האופייני של $A$. אם $A$ מאפסת את הפולינום $f(x)$, כלומר אם $f(A) = 0$, אז

$$p_A(x) \mid f^n(x)\ .$$

**הוכחה:** $\deg\, p_A(x) = n$.
$f(A) = 0$ אז $f(x)$ אינו פולינום קבוע, ז"א $\deg\, f(x) \geq 1$, ולכן $\deg\, p_A(x) \leq \deg\, f^n(x)$.
נחלק $f^n(x)$ ב- $p_A(x)$ ע"י האלגוריתם איוקלידי:

$$f^n(x) = q(x)p_A(x) + r(x)\ , \qquad (*1)$$

$\deg\, r(x) < \deg\, p_A(x) \leq \deg\, f^n(x)$.

$m_A(x)|p_A(x)$ אז $p_A(x) = q_1(x)m_A(x)$. נציב זה ב- (*1) ונקבל

$$f^n(x) = q_1(x)q(x)m_A(x) + r(x)\ . \qquad (*2)$$

$f(A) = 0$ לכן $f^n(A) = 0$ לכן $m_A(x) \mid f^n(x)$.
נניח ש- $r(x) \neq 0$ ב- (*2). אז $m_A(x) \nmid f^n(x)$. סתירה.

■

**משפט 4.18 גורם אי-פריק של הפולינום האופייני מחלק כל פולינום המתאפס ע"י $A$.**

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. יהי $p_A(x)$ הפולינום האופייני של $A$. אם $(x-\lambda_0)$ גורם אי פריק של $p_A(x)$ ו- $f(x)$ פולינום המתאפס ע"י $A$, כלומר אם $f(A)=0$, אז

$$(x-\lambda_0) \mid f(x) \ .$$

**הוכחה:**

אם $(x-\lambda_0)$ גורם אי-פריק של $p_A(x)$, אז $\lambda_0$ ערך עצמי של $A$.

נחלק $f(x)$ ב- $(x-\lambda_0)$. כלומר לפי משפט חילוק פולינומים קיימים פולינומים יחידים $q(x), r(x)$ כך ש-

$$f(x) = q(x)(x-\lambda_0) + r(x)$$

כאשר $\deg\ r(x) < \deg\ (x-\lambda_0) \leq \deg\ f(x)$.

$\deg\ (x-\lambda_0) = 1$ אז $\deg\ r(x) = 0$.

ז"א $r(x)$ פולינום קבוע: $r(x) = c \in \mathbb{F}$ כאשר $c$ סקלר.

יהי $\mathrm{v}$ וקטור עצמי השייך ל- $\lambda_0$. אז

$$0 = f(A)\mathrm{v} = q(A)(A-\lambda_0 I)\mathrm{v} + c\mathrm{v}$$

$\mathrm{v}$ הוא הוקטור עצמי השייך ל- $\lambda_0$, אז

$(A-\lambda_0)\mathrm{v} = A\mathrm{v} - \lambda_0\mathrm{v} = \lambda_0\mathrm{v} - \lambda_0\mathrm{v} = 0$.

לכן $c=0$, ואז נקבל

$$f(x) = q(x)(x-\lambda_0) \ ,$$

ז"א $(x-\lambda_0) \mid f(x)$. ■