# אלגברה לינארית סמסטר סתו 2022-23
# עבודה עצמית 10

**שאלה 1** במרחב וקטורי $\mathbb{R}^4$ נתונים הוקטורים

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\2\end{pmatrix},\ \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\0\end{pmatrix},\ \mathrm{u}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \mathrm{u}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

נסמן $V=\mathrm{sp}\left(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\right)$, $U=\mathrm{sp}\left(\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2\right)$

**א)** מצאו בסיס ומימד של $V$, $U$.

**ב)** מצאו בסיס ומימד של $V+U$.

**ג)** מצאו בסיס ומימד של $V\cap U$.

**שאלה 2** במרחב וקטורי $\mathbb{R}^4$ נתונים הוקטורים

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\ \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ \mathrm{u}_1=\begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\end{pmatrix},\ \mathrm{u}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

נסמן $V=\mathrm{sp}\left(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\right)$, $U=\mathrm{sp}\left(\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2\right)$

**א)** מצאו בסיס ומימד של $V$, $U$.

**ב)** מצאו בסיס ומימד של $V+U$.

**ג)** מצאו בסיס ומימד של $V\cap U$.

# פתרונות

## שאלה 1

**א)** בסיס של $V$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של $V$:

$$B(V) = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\}$$

$\dim(V) = 2$.

בסיס של $U$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של $U$:

$$B(U) = \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2\}$$

$\dim(U) = 2$.

**ב)**

$$Q = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות לכן בסיס של $V+U$ הוא

$$B(V+U) = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2\}$$

ו $\dim(V+U) = 4$.

**ג)** לפי משפט המימדים:

$$\dim(V+U) = \dim(V) + \dim(U) - \dim(V\cap U)$$

כיוון ש $\dim(V)=2$, $\dim(U)=2$ ו $\dim(V+U)=4$, אז

$$\dim(V\cap U)=0\ .$$

לכן $V\cap U$ מורכב מוקטור האפס:

$$V\cap U=\{\bar{0}\}\ .$$

■

## שאלה 2

**א)** בסיס של $V$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\\ 0 & 1\\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של $V$:

$$B(V)=\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\}$$

$\dim(V)=2$.

בסיס של $U$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של $U$:

$$B(U)=\{\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2\}$$

$\dim(U)=2$.

**ב)**

$$Q=(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

העמודות 1, 2, 3 מובילות לכן בסיס של $V+U$ הוא

$$B(V+U)=\{\mathrm{v}_1,\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_1\}$$

ו $\dim(V+U)=3$.

**ג)** לפי משפט המימדים:

$$\dim(V+U)=\dim(V)+\dim(U)-\dim(V\cap U)$$

כיוון ש $\dim(V)=2$, $\dim(U)=2$, ו $\dim(V+U)=3$, אז

$$\dim(V\cap U)=1\ .$$

כדי למצוא בסיס של $V\cap U$ נמצא את $\mathrm{Nul}Q$. מסעיף הקודם המדורגת של $Q$ היא:

$$Q\to\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&0\\0&0&-2&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית $Q\mathrm{x}=0$ הוא

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=x_4\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

לכן בסיס של $\mathrm{Nul}Q$ הוא $\left\{\mathrm{x}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$. הוקטור $\mathrm{x}_1$ מקיים את משוואת ההומוגנית של $Q$, לכן

$$Q\cdot\mathrm{x}_1=\bar{0}\qquad\Rightarrow\qquad(\mathrm{v}_1\ \mathrm{v}_2\ \mathrm{u}_1\ \mathrm{u}_2)\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\2\end{pmatrix}=\bar{0}$$

לכן נקבל

$$-1\cdot\mathrm{v}_1+1\cdot\mathrm{v}_2-1\cdot\mathrm{u}_1+2\cdot\mathrm{u}_2=\bar{0}\qquad\Rightarrow\qquad-1\cdot\mathrm{v}_1+1\cdot\mathrm{v}_2=1\cdot\mathrm{u}_1-2\cdot\mathrm{u}_2\ .$$

נגדיר את שני האגפים דהיות הוקטור y:

$$\mathrm{y}:=-1\cdot\mathrm{v}_1+1\cdot\mathrm{v}_2=1\cdot\mathrm{u}_1-2\cdot\mathrm{u}_2$$

נציב את הוקטורים ונמצא כי

$$\mathrm{y}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}\ .$$

לכן בסיס של $V \cap U$ הוא

$$B(V \cap U) = \{\mathrm{y}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$\blacksquare$