תרגילים 11: שלמות NP

שאלה 1 האם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה.

עבור שתי בעיות A ו- B, נגדיר את הבעיה $C = \left\{ ww \;\middle|\; w \in A \wedge w \notin B \right\}$.
אם $A \in NP$ וגם $B \in NP$ אזי $C \in NP$.

שאלה 2 הוכיחו כי לכל 3 בעיות A, B, C, אם $A \leq_P B$ וגם $B \leq_P C$ אזי $A \leq_P C$.

שאלה 3 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לשאלה פתוחה:

קיימת שפה רגולירת L כך ש- $L \in NP \backslash P$.

שאלה 4 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לשאלה פתוחה:

אם $L_{\text{acc}} \notin NP$ אזי $L_{\text{halt}} \notin NP$.

שאלה 5 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, דא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה.

אם B היא בעיה NP- קשה וגם A היא בעיה NP -קשה, אזי קיימת רדוקציה $A \leq_P B$.

תשובות

שאלה 1 הטענה שקולה לבעיה פתוחה:

נבחר $A = \Sigma^* \in NP$, $B = SAT \in NP$.
נגדיר את הבעיה
$$C' = A \backslash B = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; w \notin SAT \right\} = \overline{SAT} \ .$$
נראה כי אם $C \in NP$ אזי גם $C' \in NP$ ע"י רדוקציה $C' \leq_P C$.
פונקצית הרדוקציה: $f(w) = ww$ לכל $w \in \Sigma^*$.

ניתן להראות כי
$$w \in C' \quad \Leftrightarrow \quad f(w) \in C \ .$$
ולכן לפי משפט הרדוקציה, אם $C \in NP$ אזי $C' = \overline{SAT} \in NP$ וזו שאלה פתוחה.

שאלה 2 תהי f פונקצית הרדוקציה $A \leq_P B$ שמקיימת $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$ לכל $w \in \Sigma^*$.

תהי g פונקצית הרדוקציה $B \leq_P C$ שמקיימת $w \in B \Leftrightarrow f(w) \in C$ לכל $w \in \Sigma^*$.

נוכיח שקיימת רדוקציה $A \leq_P C$.

<u>פונקצית הרדוקציה h</u>

לכל $w \in \Sigma^*$ נגדיר $h(w) = g\left(f(w)\right)$.

<u>נכונות הרדוקציה</u>

שלב 1. נוכיח כי $w \in A \Leftrightarrow h(w) \in C$.

- אם $w \in A \Leftarrow f(w) \in B \Leftarrow h(w) = g\left(f(w)\right) \in C$.
- אם $w \notin A \Leftarrow f(w) \notin B \Leftarrow h(w) = g\left(f(w)\right) \notin C$.

שלב 2. נוכיח כי h חשיבה בזמן פולינומיאלי:

נסמן ב- p_f את הפולינום של f.

נסמן ב- p_g את הפולינום של g.

אזי לכל $w \in \Sigma^*$, זמן החישוב של $h(w)$ חסום על ידי :

$$p_f(|w|) + p_g\left(|f(w)|\right) \leq p_f(|w|) + p_g\left(p_f\left(|w|\right)\right) = p_f\left(|w|\right) + \left(p_f \circ p_f\right)\left(|w|\right)$$

כאשר $p_f \circ p_f$ הוא הרכבה של שני פולינומים. לכן ניתן לחשב את $h(w)$ בזמן פולינומיאלי בגודל $|w|$.

שאלה 3 הטענה לא נכונה.
לכל שפה רגולרית קיים אוטומט סופי ולכן שייכת ל- P.

<u>שאלה 5</u> הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: A בעייה NP קשה עבורה $A \notin NP$ ו- B היא שפה NP שלמה.
נניח בשלילה כי $A \leq_P B$. ממשפט הרדוקציה, מכיוון ש- $B \in NP$ (כי B היא NP שלמה) מתקיים ש- $A \in NP$ וזו סתירה לבחירה של A.