שיעור 6
תכונות סגירות של R ו- RE

6.1 הגדרה של השפות R ו- RE

הגדרה 6.1 R

אוסף השפות הכריעות מסומן R ומוגדר

$$R = \{L \subseteq \Sigma^* \ : \ \text{קיימת מ"ט המכריעה את } L\} \ .$$

הגדרה 6.2 RE

אוסף השפות הקבילות מסומן RE ומוגדר

$$RE = \{L \subseteq \Sigma^* \ : \ \text{קיימת מ"ט המקבלת את } L\} \ .$$

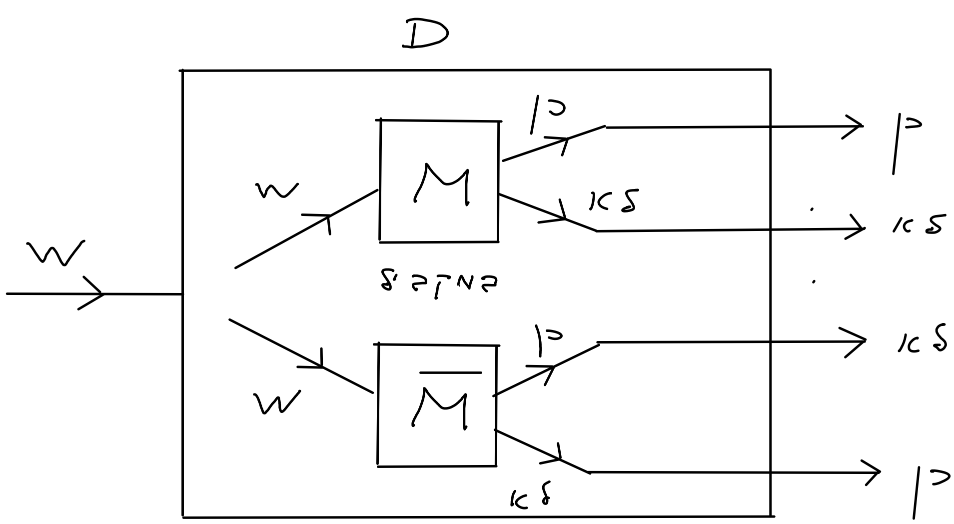
6.2 היחס בין הכרעה וקבלה

למה 6.1 היחס בין הכרעה וקבלה

אם $L \in RE$ וגם $\bar{L} \in RE$ אזי $L \in R$.

הוכחה: תהי M מ"ט המקבלת את L ותהי $\bar{M}$ מ"ט המקבלת את $\bar{L}$.

נבנה מ"ט D המכריעה את L.



$D=$ על קלט w:

1) D מעתיקה את w לסרט נוסף.
2) מריצה במקביל את M על w ואת $\bar{M}$ על העותק של w.
   - אם M מקבלת $\Leftarrow D$ מקבלת.
   - אם $\bar{M}$ מקבלת $\Leftarrow D$ דוחה.
   - אם M דוחה $\Leftarrow D$ דוחה.
   - אם $\bar{M}$ דוחה $\Leftarrow D$ מקבלת.

נוכיח כי D מכריעה את L.

אם $w\in L$

$\Leftarrow$ $w\in L(M)$

$\Leftarrow$ (M מקבלת את w) או ($\bar{M}$ דוחה את w)

$\Leftarrow$ D עוצרת ומקבלת את w.

אם $w\notin L$

$\Leftarrow$ $w\in\bar{L}$

$\Leftarrow$ $w\in L\left(\bar{M}\right)$

$\Leftarrow$ ($\bar{M}$ מקבלת את w) או (M דוחה את w)

$\Leftarrow$ D עוצרת ודוחה את w.

■

6.3 סגירות של שפות כריעות ושפות קבילות

משפט 6.1 סגירות של השפה הכריעות

R סגורה תחת:

1) איחוד
2) חיתוך
3) משלים
4) שרשור
5) סגור קלין

משפט 6.2 סגירות של השפה הקבילות

RE סגורה תחת:

1) איחוד

2) חיתוך

3) שרשור

4) סגור קלין

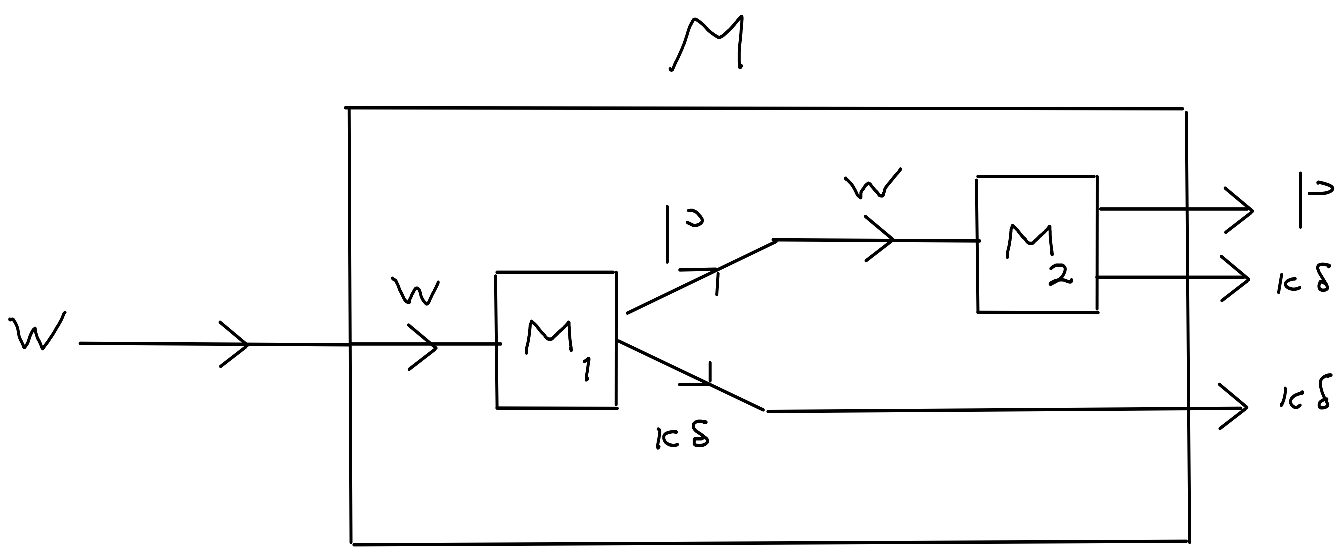
הוכחה:

1) חיתוך:

(א) R **סגורה תחת חיתוך**

נוכיח כי לכל שתי שפות $L_1, L_2 \in R$ מתקיים $L_1 \cap L_2 \in R$.

תהי M_1 ו- M_2 מ"ט המכריעות את L_1 ו- L_2 בהתאמה. נבנה מ"ט M המכריעה את $L_1 \cap L_2$.



תאור הבנייה

$M =$ על קלט w:

1) M מעתיקה את w לסרט נוסף.
2) M מריצה את M_1 על w.
- אם M_1 דוחה $\Leftarrow$ M דוחה.
- אחרת M מריצה את M_2 על העותק של w ועונה כמוה.

נכונות:

נוכיח כי M מכריעה את $L_1 \cap L_2$.

אם $w \in L_1 \cap L_2$

$\Leftarrow$ $w \in L_1$ וגם $w \in L_2$

$\Leftarrow$ M_1 מקבלת את w וגם M_2 מקבלת את w

$\Leftarrow$ M מקבלת את w.

אם $w \notin L_1 \cap L_2$

$\Leftarrow$ $w \notin L_1$ או $w \notin L_2$

$\Leftarrow$ M_1 דוחה את w או M_2 דוחה את w

$\Leftarrow$ M דוחה את w.

(ב) <u>RE **סגורה תחת חיתוך**</u>

נוכיח כי לכל שתי שפות $L_1, L_2 \in RE$ מתקיים $L_1 \cap L_2 \in RE$.

תהיינה M_1 ו- M_2 שתי מכונות טיורינג המקבלות את L_1 ו- L_2 בהתאמה.
נבנה מ"ט M המקבלת את $L_1 \cap L_2$ באותו אופן כמו **(א)**.

2) איחוד:

(א) <u>R **סגורה תחת איחוד**</u>

נוכיח כי לדל שתי שפות $L_1, L_2 \in R$ מתקיים $L_1 \cup L_2 \in R$.

תהיינה M_1 מ"ט המכריעה את L_1 ו- M_2 מ"ט המכריעה את L_2.
נבנה מ"ט M המכריעה את $L_1 \cup L_2$.

<u>תאור הבנייה</u>

$M =$ על קלט w:

1) M מעתיקה את w לסרט נוסף.
2) M מריצה את M_1 על w.
   - אם M_1 מקבלת $\Leftarrow$ M מקבלת.
   - אחרת, M מריצה את M_2 על העותק של w ועונה כמוה.

(ב) <u>RE **סגורה תחת איחוד**</u>

נוכיח כי לכל שתי שפות $L_1, L_2 \in RE$ מתקיים $L_1 \cup L_2 \in RE$.
תהיינה M_1 מ"ט המקבלת את L_1 ו- M_2 מ"ט המקבלת את L_2.
נבנה מ"ט א"ד M המקבלת את $L_1 \cup L_2$.

<u>תאור הבנייה</u>

$M =$ על קלט w:

1) M בוחרת באופן א"ד $i \in \{1, 2\}$.
2) M מריצה את M_i על w ועונה כמוה.

3) שרשור:

(א) <u>R **סגורה תחת שרשור**</u>

נוכיח כי לכל שתי שפות $L_1, L_2 \in R$ מתקיים $L_1 \cdot L_2 \in R$ כאשר

$$L_1 \cdot L_2 = \left\{ w = w_1 w_2 \;\middle|\; w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2 \right\} .$$

תהיינה M_1 מ"ט המכריעה את L_1 ו- M_2 מ"ט המכריעה את L_2.
נבנה מ"ט א"ד M המכריעה את $L_1 \cdot L_2$.

<u>תאור הבנייה</u>

$M =$ על קלט w:

1) M בוחרת באופן א"ד חלוקה של w ל- $w = w_1 w_2$.
2) M מריצה את M_1 על w_1.
- אם M_1 דוחה $\Leftarrow M$ דוחה.
- אחרת, M מריצה את M_2 על w_2 ועונה כמוה.

(ב) <u>RE **סגורה תחת שרשור**</u>

RE סגורה תחת שרשור באותו אופן כמו ב- **(א)**

4) $*$ קליני

א) <u>R **סגורה תחת $*$ קליני**</u>

נוכיח כי לכל שפה L:

$$L \in R \quad \Rightarrow \quad L^* \in R$$

כאשר

$$L^* = \left\{ w = w_1 w_2 \cdots w_k \;\middle|\; \forall 1 \leqslant i \leqslant k \;,\; w_i \in L \right\} \;.$$

תהי M מ"ט המכריעה את L.
נבנה מ"ט M^* א"ד המכריעה את L^*.

<u>תאור הבנייה</u>

$M^* =$ על קלט w:

1) אם $w = \varepsilon$ אז M^* מקבלת.
2) אחרת M^* בוחרת באופן א"ד חלוקה של w ל- $w = w_1 \cdots w_k$.
3) לכל $1 \leqslant i \leqslant k$:

M^* מריצה את M על w_i.

- אם M דוחה את $w_i \Leftarrow M^*$ דוחה.
- אחרת חוזרים לשלב 3).

4) אם M קיבלה את כל המחרוזות $\{w_i\}$ אזי M^* מקבלת.

ב) <u>RE **סגורה תחת $*$ קליני**</u>

5) משלים

א) <u>R **סגורה תחת המשלים**</u>

נוכיח כי

$$L \in R \quad \Rightarrow \quad \bar{L} \in R \;,$$

כאשר

$$\bar{L}=\left\{w\in\Sigma^*\;\middle|\;w\notin L\right\}\ .$$

תהי M מ"ט המכריעה את L.
נבנה מ"ט $\bar{M}$ המכריעה את $\bar{L}$.

$\bar{M}=$ על קלט w:

(1) $\bar{M}$ מריצה את M על w.

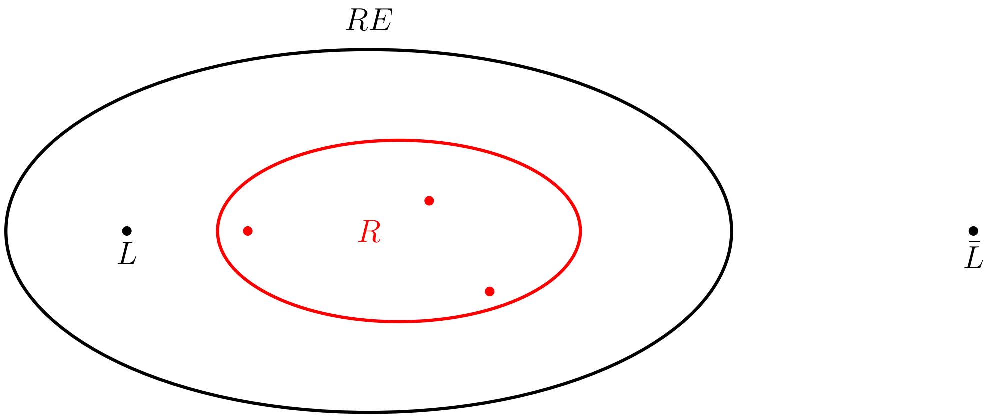
- אם M מקבלת $\Leftarrow$ $\bar{M}$ דוחה.
- אם M דוחה $\Leftarrow$ $\bar{M}$ מקבלת.

ב) <u>RE אינה סגורה תחת המשלים</u>

■

משפט 6.3 RE אינה סגורה תחת המשלים

$$L\in RE\backslash R\quad\Rightarrow\quad\bar{L}\notin RE\ .$$



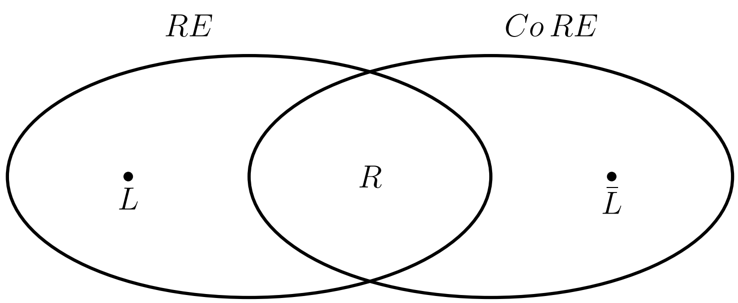
הוכחה:
נניח כי $L\in RE\backslash R$ ונניח בשלילה כי $\bar{L}\in RE$.

אזי לפי טענת עזר (למה 6.1), $L\in R$ וזו סתירה.

■

הגדרה 6.3 $Co\,RE$

$$Co\,RE=\left\{L\subseteq\Sigma^*\;\middle|\;\bar{L}\in RE\right\}\ .$$



<u>אבחנה</u>

לפי למה 6.1:

$$RE \cap Co\,RE = R\ .$$

6.4 סגירות של שפות כריעות תחת $DROPOUT$

משפט 6.4 סגירות של שפות כריעות תחת $DROPOUT$

תהי L שפי כריעה ותהי $\mathrm{DROPOUT}(L)$ השפה הבאה:

$$\mathrm{DROPOUT}(L) = \left\{ u\mathrm{v} \;\middle|\; u\mathrm{v} \in L\ ,\ \sigma \in \Sigma^*\ :\ u\sigma\mathrm{v} \in L \right\}$$

אזי השפה $\mathrm{DROPOUT}(L)$ גם כריעה.

הוכחה:
השפה L כריעה אזי קיימת מכונת טיורינג M_L המכריעה אותה. נבנה מכונת טיורינג M_{DROPOUT} המכרעיה את $\mathrm{DROPOUT}(L)$ באופן הבא:

<u>בניית המכונת טיורינג</u>

$M_{\mathrm{DROPOUT}} =$ על כל קלט w:

1) בוחרת חילוק של המילה w לשרשור של שני מילים באופן אי-דטרמיניסטי כך ש: $w = u\mathrm{v}$.

2) בוחרת אות $\sigma \in \Sigma^*$ באופן אי-דטרמיניסטי ובונה את המילה $w = u\sigma\mathrm{v}$.

3) מריצה M_L על המילה $w = u\sigma\mathrm{v}$ ועונה כמוה.

<u>הוכת הנכונות</u>

נניח ש- $w \in \mathrm{DROPOUT(L)}$.

⇐ קיימים מילים $u, \mathrm{v} \in L$ וקיים $\sigma \in \Sigma^*$ כך ש- $u\sigma\mathrm{v} \in L$.

⇐ קיימת ריצה של M_{DROPOUT} עבורה M_{DROPOUT} תבחר חילוק $w = u\mathrm{v}$ ו- M_{DROPOUT} תבחר $\sigma \in \Sigma^*$ כך ש- $u\sigma\mathrm{v} \in L$.

⇐ M_{DROPOUT} תקבל את w.

נניח ש- $w \notin \mathrm{DROPOUT(L)}$.

⇐ לא קיימים מילים $u, \mathrm{v} \in L$ ו- $\sigma \in \Sigma^*$ כך ש- $u\sigma\mathrm{v} \in L$.

⇐ כל ריצה של M_{DROPOUT} עוברת ל- q_{rej}.

⇐ M_{DROPOUT} תדחה את w.

■

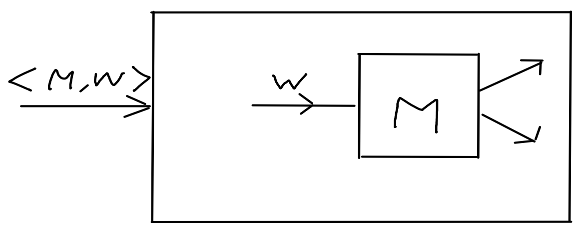
6.5 קידוד של מ"ט דטרמיניסטית

הגדרה 6.4 קידוד של מ"ט

בהינתן קבוצה O של עצמים מופשטים (למשל מכונת טיורינג, תוכנית מחשב, גרף).
הקידוד של O, מסומן $\langle O \rangle$, הוא מיפוי של O אל מחרוזת מעל אלפבית סופי שיש בו לפחות שני סימנים.

במידה ויש רב עצמים $O_1, \ldots, O_k$ נסמן את הקידוד שלהם $\langle O_1, O_2, \ldots, O_k \rangle$.

6.6 מ"ט אוניברסלית U



מ"ט אוניברסלית U מקבלת כקלט זוג, קידוד של מ"ט $\langle M \rangle$ וקידוד של מילה $\langle w \rangle$, ומבצעת סימוציה של ריצה של M על w ועונה בהתאם.

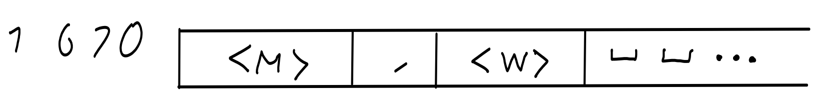
<u>תאור הפעולה של U</u>

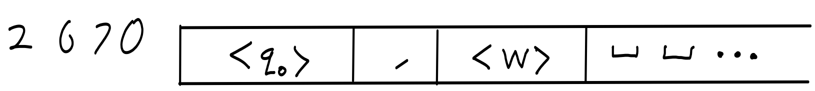
$U =$ על קלט x:

(1) בודקת האם x הוא קידוד של מ"ט $\langle M \rangle$ וקידוד של מילה $\langle w \rangle$.

- אם לא $\Leftarrow$ דוחה.

(2) מבצעת סימולציה של M על w:





- רושמת את הקונפיגורציה ההתחלתית $q_0 w$ על סרט 2.
- מחשבת את הקונפיגורציה הבאה בעזרת טבלת המעברים.
- בסוף כל מעבר בין שתי קונפיגורציות, U בודקת האם המצב הנוכחי הוא q_{acc}.
  * אם כן U עוצרת ומקבלת.

* אחרת U בודקת האם המצב הוא q_{rej}.
* אם כן U עוצרת ודוחה.
* אחרת U ממשיכה לקונפיגורציה הבאה.

<u>מהי השפה של U?</u>

לכל x:

(1) אם $x \neq \langle M, w\rangle \Leftarrow$ U דוחה את x.

(2) אם $x = \langle M, w\rangle$:

- אם M מקבלת $w \Leftarrow$ U מקבלת את x.
- אם M דוחה את $w \Leftarrow$ U דוחה את x.
- אם M לא עוצרת על $w \Leftarrow$ U לא עוצרת על x.

$$L(U) = \{\langle M, w\rangle \mid w \in L(M)\} \ .$$

הגדרה 6.5 L_{acc}

$$L_{\text{acc}} = \{\langle M, w\rangle \mid w \in L(M)\} \in RE \backslash R$$

הגדרה 6.6 L_{halt}

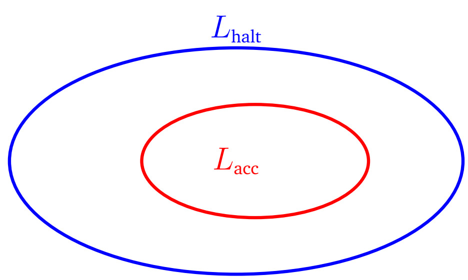
$$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w\rangle \mid \text{עוצרת על } w \ M\} \in RE \backslash R$$

הגדרה 6.7 L_{d}

$$L_{\text{d}} = \{\langle M\rangle \mid \langle M\rangle \notin L(M)\} \notin RE$$

<u>אבחנה:</u>

$$L_{\text{acc}} \subseteq L_{\text{halt}} \ .$$



משפט 6.5

$$L_{\text{acc}} \in RE\ .$$

הוכחה: מכיוון ש- $L(U) = L_{\text{acc}}$, U מקבלת את L_{acc} ולכן $L_{\text{acc}} \in RE$. ■

משפט 6.6

$$L_{\text{halt}} \in RE\ .$$

הוכחה: נבנה מ"ט U' שהיא למעשה U פרט למקום שבו U עצרה ודחתה, U' תעצור ותקבל.

נוכיח כי U' מקבלת את L_{halt}:

אם $x \in L_{\text{halt}}$

$\Leftarrow$ $x = \langle M, w\rangle$ ו- M עוצרת על w

$\Leftarrow$ U' עוצרת ומקבלת את x.

אם $x \notin L_{\text{halt}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

- $x \neq \langle M, w\rangle$ $\Leftarrow$ U' דוחה את x.
- $x = \langle M, w\rangle$ ו- M לא עוצרת על w $\Leftarrow$ U' לא עוצרת על x.

■