

## שעור 5

### אסטרטגיות מעורבות

#### 5.1 אסטרטגיות מעורבות

##### הגדרה 5.1 אסטרטגיה מעורבת

נתון משחק בצורה אסטרטגית  $G = ((S_1, \dots, S_n), (u_1, \dots, u_n))$ . אסטרטגיה מעורבת היא פונקציה הסתברות על כל קבוצות האסטרטגיות של השחקנים.

כלומר, אם  $S_1 = (s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1k_1})$  אז נגדיר פונקציה הסתברות

$$P_{S_1}(s_{11}) = p_{11}, \quad P_{S_1}(s_{12}) = p_{12}, \quad \dots \quad P_{S_1}(s_{1k_1}) = p_{1k_1}.$$

אם  $S_2 = (s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2k_2})$  אז נגדיר פונקציה הסתברות

$$P_{S_2}(s_{21}) = p_{21}, \quad P_{S_2}(s_{22}) = p_{22}, \quad \dots \quad P_{S_2}(s_{2k_2}) = p_{2k_2}.$$

אם  $S_n = (s_{n1}, s_{n2}, \dots, s_{nk_n})$  אז נגדיר פונקציה הסתברות

$$P_{S_n}(s_{n1}) = p_{n1}, \quad P_{S_n}(s_{n2}) = p_{n2}, \quad \dots \quad P_{S_n}(s_{nk_n}) = p_{nk_n}.$$

##### דוגמה 5.1 ( )

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס.

$I \backslash II$	$L$	$R$
$T$	4	1
$B$	2	3

(א) מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות טהורות.

(ב) מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

(א)

$I \backslash II$	$L$	$R$	$\min_{s_2 \in S_2}$
$T$	4	1	1
$B$	2	3	2
$\max_{s_1 \in S_1}$	4	3	2, 3

ערך המקסמין של שחקן 1:

$$\underline{v} = \max_{s_1 \in \{T, B\}} \min_{s_2 \in \{L, R\}} = 2.$$

ז"א שחקן 1 יכול להבטיח שיקבל לפחות 2 אם הוא ישחק  $B$ .

ערך המינימקס של שחקן 2:

$$\bar{v} = \min_{s_2 \in \{L, R\}} \max_{s_1 \in \{T, B\}} = 3.$$

ז"א שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר 3 אם הוא ישחק  $R$ .

$$\bar{v} = 3 > 2 = \underline{v}.$$

למשחק אין ערך.

**ב)** כאשר לשחקן 1 יש שתי אסטרטגיות טהורות  $T$  ו- $B$ , נזהה את האסטרטגיה המעורבת

$$[x(T), (1-x)(B)]$$

עם ההסתברות  $x$  שבה נבחרת האסטרטגיה הטהורה  $T$ .

באופן דומה, כאשר יש לשחקן 2 יש שתי אסטרטגיות טהורות  $L$  ו- $R$ , נזהה את האסטרטגיה המעורבת

$$[y(L), (1-y)(R)]$$

עם ההסתברות  $y$  שבה נבחרת האסטרטגיה הטהורה  $L$ .

לכל זוג אסטרטגיות מעורבות התשלום ניתן על ידי פונקצית התועלת

$$U(x, y) = 4xy + 1x(1-y) + 2(1-x)y + 3(1-x)(1-y) = 4xy - 2x - y + 3.$$

ראשית נחשב לכל  $x \in [0, 1]$  את

$$\min_{y \in [0, 1]} U(x, y) = \min_{y \in [0, 1]} (4xy - 2x - y + 3) = \min_{y \in [0, 1]} (y(4x - 1) - 2x + 3)$$

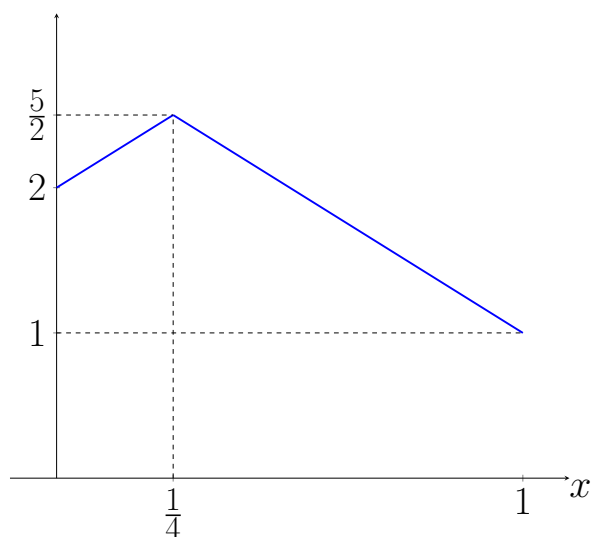
עבור  $x$  קבוע זוהי פונקציה לינארית ב- $y$ , ולכן הנקודה שבה המינימום מתקבל נקבעת לפי השיפוע  $4x - 1$ .

אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה והמינימום מתקבל ב- $y = 0$ .

אם השיפוע שלילי הפונקציה יורדת והמינימום מתקבל ב- $y = 1$ .

אם השיפוע 0 הפונקציה קבועה וכל הנקודות הן נקודות מינימום. לכן

$$\min_{y \in [0, 1]} u(x, y) = \begin{cases} 2x + 2 & x \leq \frac{1}{4}, \\ -2x + 3 & x \geq \frac{1}{4}, \end{cases}$$

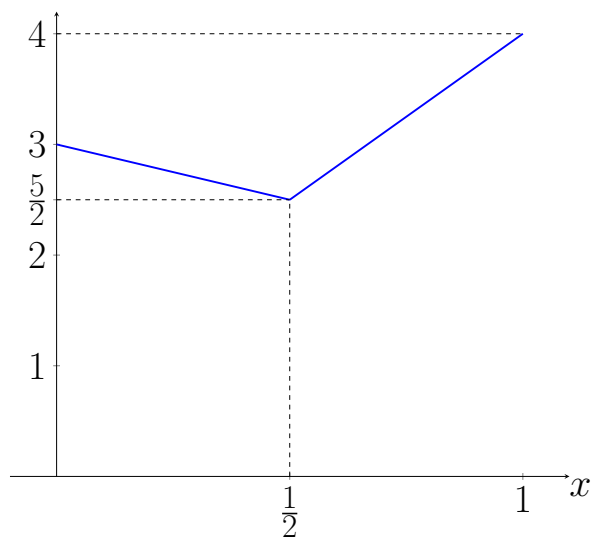


לפונקציה זו של  $x$  יש מקסימום יחיד ב-  $x = \frac{1}{4}$  וערכו  $\frac{5}{2}$ . לכן

$$\underline{v} = \max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} U(x, y) = \frac{5}{2}.$$

באופן דומה נחשב:

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0,1]} U(x, y) &= \max_{x \in [0,1]} [4xy - 2x - y + 3] \\ &= \max_{x \in [0,1]} [x(4y - 2) - y + 3] \\ &= \begin{cases} -y + 3 & y \leq \frac{1}{2}, \\ 3y + 1 & y \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$



לפונקציה זו של  $y$  יש מינימום יחיד ב-  $y = \frac{1}{2}$  וערכו  $\frac{5}{2}$ . לכן

$$\bar{v} = \min_{y \in [0,1]} \max_{x \in [0,1]} U(x, y) = \frac{5}{2}.$$

כלומר, למשחק יש ערך  $v = \underline{v} = \bar{v} = \frac{5}{2}$ , והאסטרטגיות האופטימליות הן  $x^* = \frac{1}{4}$ ,  $y^* = \frac{1}{2}$ .

מכיוון ש-  $x^*$  ו-  $y^*$  הן אסטרטגיות האופטימליות היחידות של השחקנים, אז  $(x^*, y^*)$  הוא שיווי המשקל נאש היחיד במשחק.

■

## דוגמה 5.2 (I)

נתון משחק שני שחקנים (שאינו סכום אפס) בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

$I \backslash II$	$L$	$R$
$T$	1, -1	0, 2
$B$	0, 1	2, 0

מצאו התשלום מקסמין והתשלום מינמקס באסטרטגיות מעורבות.

מצאו שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

## פתרון:

ראשית נחשב את התשלום מקסמין של השחקנים.

קבוצות האסטרטגיות של שחקן 1:

$$S_1 = \{[x(T), (1-x)(B)] \mid x \in [0, 1]\}.$$

המזוהה עם הקטע  $[0, 1]$ .

קבוצות האסטרטגיות של שחקן 2:

$$S_2 = \{[y(L), (1-y)(R)] \mid y \in [0, 1]\}.$$

פונקצית התועלת של שחקן 1:

$$U_1(x, y) = xy + 2(1-x)(1-y) = 3xy - 2x - 2y + 2.$$

פונקצית התועלת של שחקן 2:

$$U_2(x, y) = -xy + 2x(1-y) + y(1-x) = -4xy + 2x + y.$$

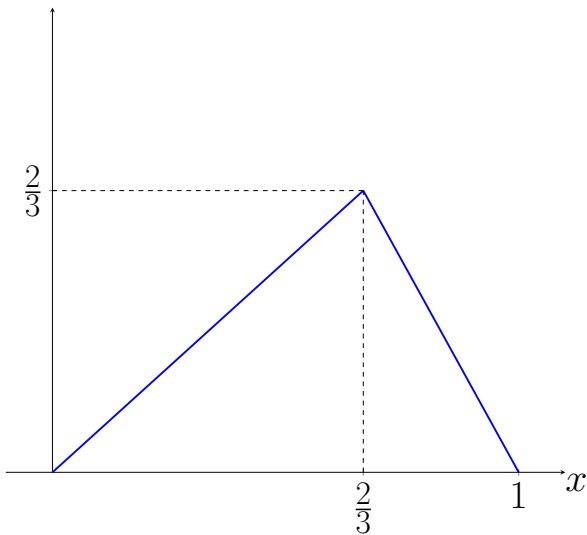
התשלום מקסמין של שחקן 1 הינו:

$$\underline{v}_1 = \max_{x \in [0, 1]} \min_{y \in [0, 1]} U_1(x, y).$$

התשלום מקסמין של שחקן 2 הינו:

$$\underline{v}_2 = \max_{y \in [0, 1]} \min_{x \in [0, 1]} U_2(x, y).$$

$$\begin{aligned}\min_{y \in [0,1]} U_1(x, y) &= \min_{y \in [0,1]} 3xy - 2x - 2y + 2 \\ &= \min_{y \in [0,1]} y(3x - 2) - 2x + 2 \\ &= \begin{cases} x & x \leq \frac{2}{3} \\ -2x + 2 & x \geq \frac{2}{3} \end{cases}\end{aligned}$$



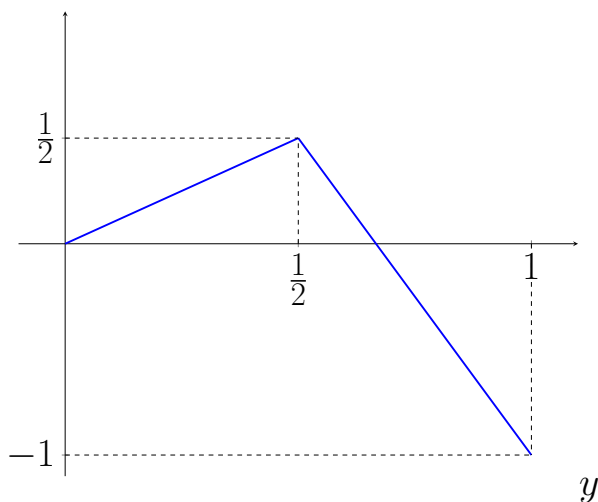
לפונקציה זו יש מקסימום ב-  $x = \frac{2}{3}$ . לפיכך

$$\underline{v}_1 = \max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} U_1(x, y) = \frac{2}{3}.$$

התשלום מקסמין של שחקן 2 הינו:

$$\underline{v}_2 = \max_{y \in [0,1]} \min_{x \in [0,1]} U_2(x, y).$$

$$\begin{aligned}\min_{x \in [0,1]} U_2(x, y) &= \min_{x \in [0,1]} 3xy - 2x - 2y + 2 \\ &= \min_{x \in [0,1]} x(2 - 4y) + y \\ &= \begin{cases} y & y \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 3y & y \geq \frac{1}{2} \end{cases}\end{aligned}$$



לפונקציה זו יש מקסימום ב-  $y = \frac{1}{2}$ . לפיכך

$$\underline{v}_2 = \max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} U_2(x, y) = \frac{1}{2}.$$

כעת נחשב את השיווי משקל של המשחק באסטרטגיות מעורבות. נסמן תשובה טובה ביותר של שחקן 2 לאסטרטגיה  $x$  של שחקן 1 כ:

$$\sigma_2(x) = \operatorname{argmax}_{y \in [0,1]} U_2(x, y) = \{y \in [0, 1], U_2(x, y) \geq U_2(x, z) \forall z \in [0, 1]\}$$

במילים פשוטות  $\sigma_2(x)$  הוא אוסף של כל הערכים של  $y$  עבורם ל-  $U_2(x, y)$  יש מקסימום.

כדי לחשב את  $\sigma_2(x)$  רושמים בצורה

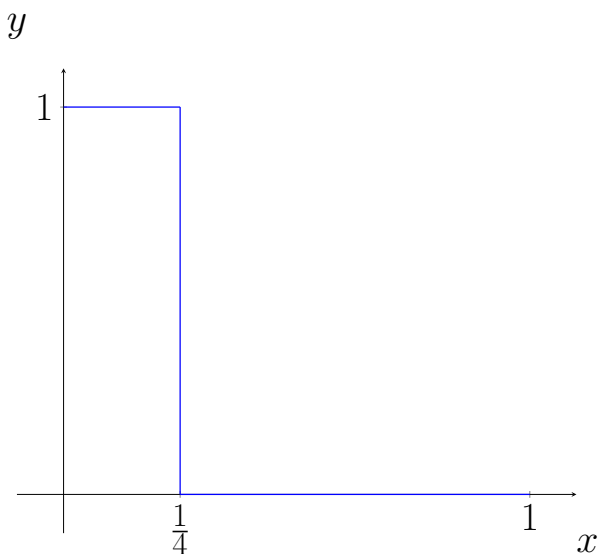
$$U_2(x, y) = y(1 - 4x) + 2x.$$

עבור  $x$  קבוע זוהי פונקציה לינארית ב-  $y$ , ולכן הנקודה שבה המינימום מתקבל נקבעת לפי השיפוע  $1 - 4x$ .

אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה והמקסימום מתקבל ב-  $y = 1$ .

אם השיפוע שלילי הפונקציה יורדת והמקסימום מתקבל ב-  $y = 0$ .

אם השיפוע 0 הפונקציה קבועה וכל הנקודות הן נקודות מקסימום. הסימן של השיפוע משתנה ב-  $x = \frac{1}{4}$ . הגרף של  $\sigma_2(x)$  מתואר להלן.



שימו לב ש-  $\sigma_2(x)$  לא פונקציה בגלל ש-  $\sigma_2\left(\frac{1}{4}\right)$  לא שווה לנקודה אלא לתחום  $[0, 1]$ .

נסמן תשובה טובה ביותר של שחקן 1 לאסטרטגיה  $y$  של שחקן 2 כ:

$$\sigma_1(y) = \operatorname{argmax}_{x \in [0,1]} U_1(x, y) = \{x \in [0, 1], U_1(x, y) \geq U_1(x, z) \forall z \in [0, 1]\}$$

במילים פשוטות  $\sigma_1(y)$  הוא אוסף של כל הערכים של  $x$  עבורם ל-  $U_1(x, y)$  יש מקסימום.

כדי לחשב את  $\sigma_1(y)$  רושמים  $U_1(x, y)$  בצורה

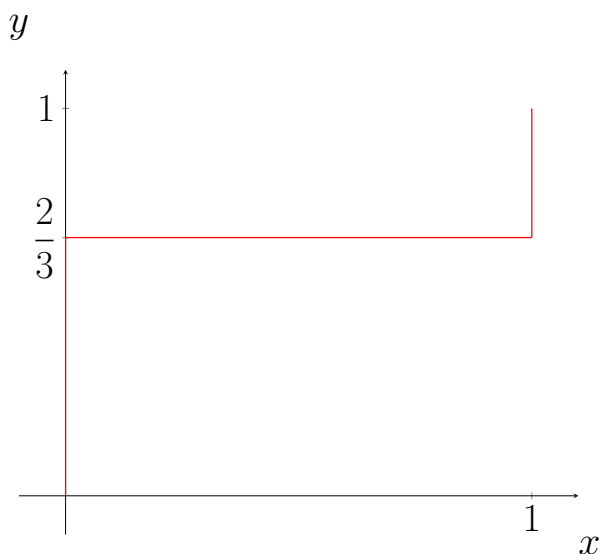
$$U_1(x, y) = x(3y - 2) - 2y + 2.$$

עבור  $y$  קבוע זוהי פונקציה לינארית ב-  $x$ , ולכן הנקודה שבה המינימום מתקבל נקבעת לפי השיפוע  $3y - 2$ .

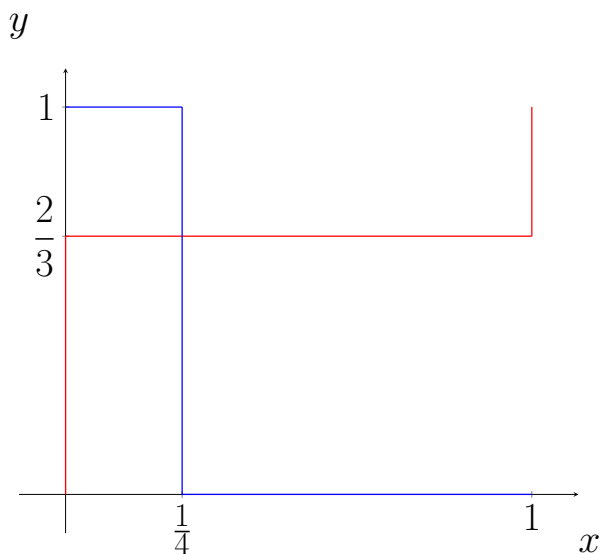
אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה והמקסימום מתקבל ב-  $x = 1$ .

אם השיפוע שלילי הפונקציה יורדת והמקסימום מתקבל ב-  $x = 0$ .

אם השיפוע 0 הפונקציה קבועה וכל הנקודות הן נקודות מקסימום. הסימן של השיפוע משתנה ב-  $y = \frac{2}{3}$ . הגרף של  $\sigma_1(y)$  מתואר להלן.



הצמד אסטרטגיות  $(x^*, y^*)$  נקודת שיווי משקל אם ורק אם  $x^* \in \sigma_1(y^*)$  ו-  $y^* \in \sigma_2(x^*)$ . במילים אחרות נדרש כי הנקודה  $(x^*, y^*)$  תהיה על שני הגרפים של  $\sigma_2(x)$  ו-  $\sigma_1(y)$ . הנקודה היחידה שמקיימת את התנאי הזה היא  $\left(x^* = \frac{1}{4}, y^* = \frac{2}{3}\right)$ .



לכן השיווי משקל היחיד של המשחק הוא  $\left(x^* = \frac{1}{4}, y^* = \frac{2}{3}\right)$  והתשלומים לשחקן 1 ולשחקן 2 של השיווי משקל הם

$$U_1(x^*, y^*) = \frac{2}{3}, \quad U_2(x^*, y^*) = \frac{1}{2}.$$

■

## 5.2 שיטה ישירה למציאת אסטרטגיה אופטימלית

### דוגמה 5.3 ()

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

$I \backslash II$	$L$	$R$
$T$	5	0
$B$	3	4

מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

### פתרון:

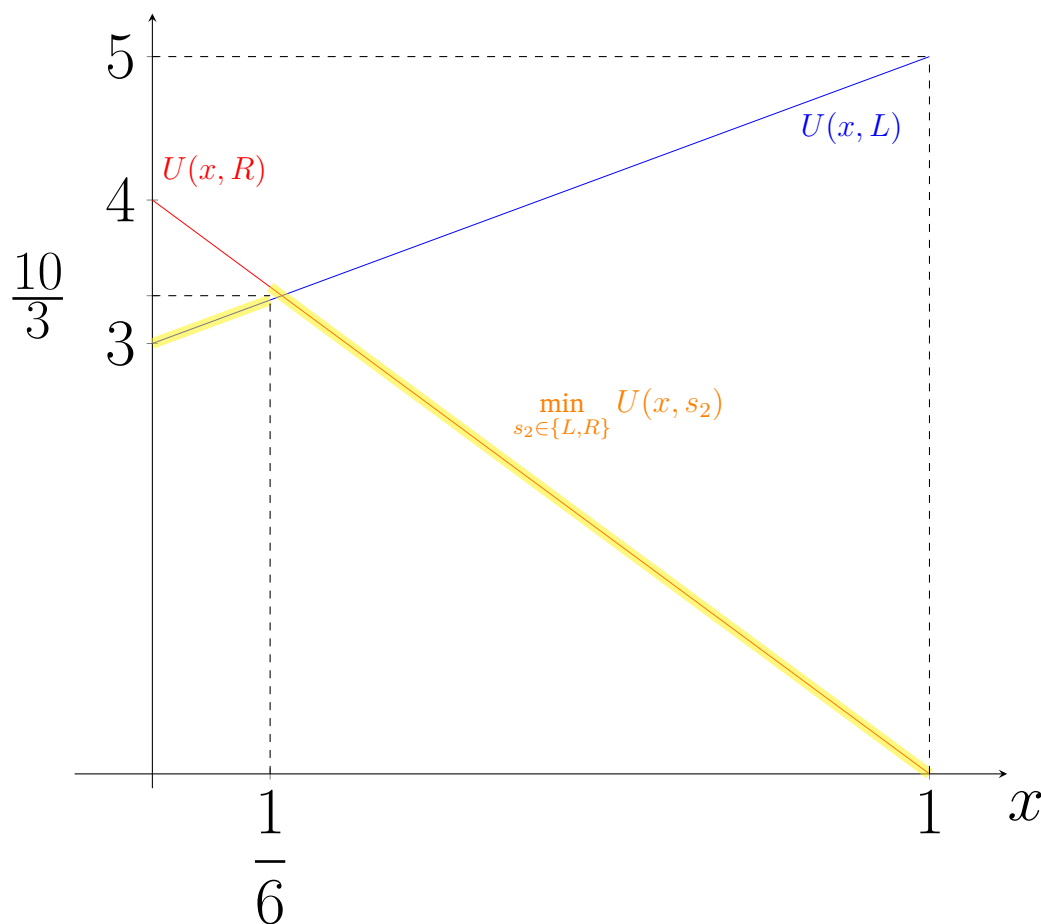
תחילה נחשב את המקסמין של שחקן 1. אם שחקן 1 משחק את האסטרטגיה המעורבת  $[x(T), (1-x)(B)]$  התשלום שלו כפונקציה של  $x$  תלוי על האסטרטגיה של שחקן 2:

• אם שחקן 2 משחק  $L$  אז  $U(x, L) = 5x + 3(1-x) = 2x + 3.$

• אם שחקן 2 משחק  $R$  אז  $U(x, R) = 4(1-x) = -4x + 4.$

הגרף למטה מראה את הגרפים של הפונקציות האלו. הקו של  $\min_{s_2 \in \{L, R\}} U(x, s_2)$  מראה את התשלום המינימלי ששחקן 1 יקבל אם הוא משחק  $x$ . הקו הזה נקרא **מעטפת תחתונה** של התשלומים.





הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות שווה ל-  $\max_{x \in [0,1]} \min_{s_2 \in \{L,R\}} U(x, s_2)$ , אשר מתקבל בנקודת מקסימום של המעטפת התחתונה. המקסימום מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של שתי הפונקציות, כלומר בנקודה

$$2x + 3 = -4x + 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{6}.$$

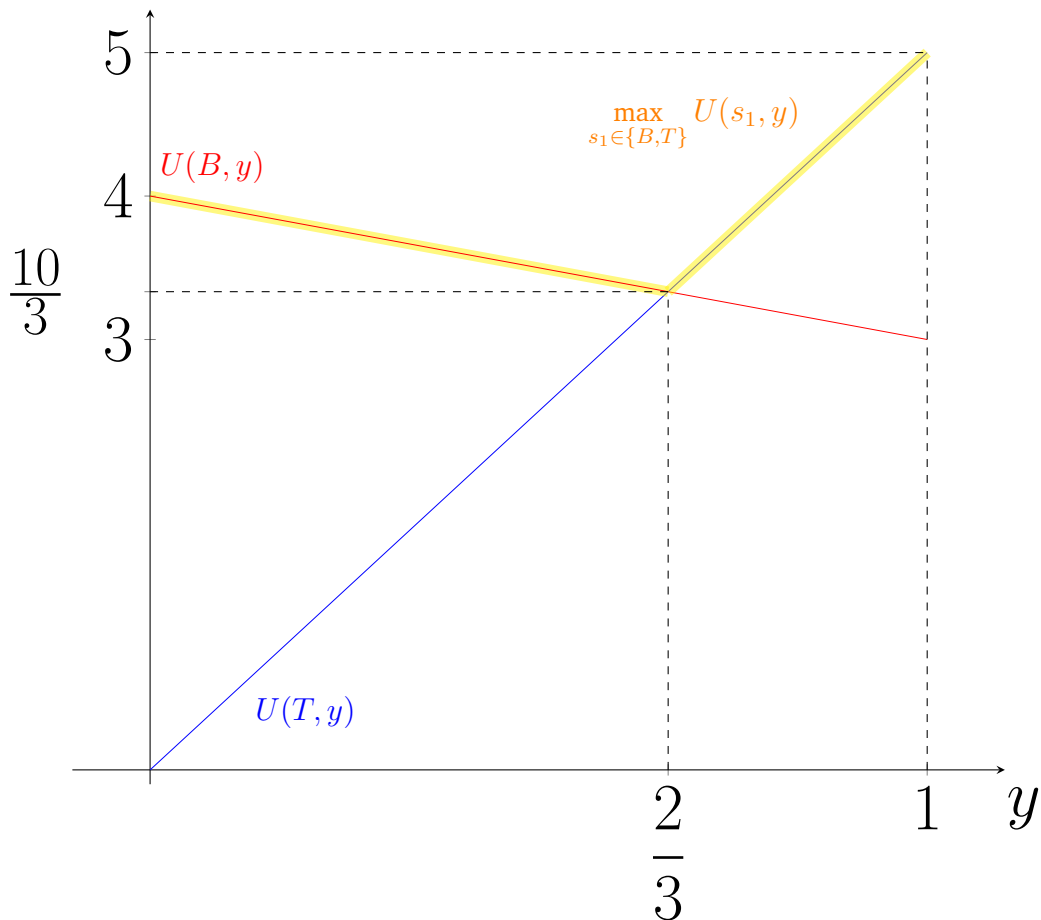
מכאן האסטרטגיה האופטימלית של שחקן 1 היא  $x^* = \left(\frac{1}{6}(T), \frac{5}{6}(B)\right)$ . הערך של המשחק שווה לגובה של הנקודת חיתוך:  $v = \frac{10}{3}$ .

כעת נחשב את המינמקס של שחקן 2. אם שחקן 2 משחק את האסטרטגיה המעורבת  $[y(L), (1-y)(R)]$  התשלום שלו כפונקציה של  $y$  תלוי על האסטרטגיה של שחקן 1:

• אם שחקן 1 משחק  $T$  אז  $U(T, y) = 5y$ .

• אם שחקן 1 משחק  $B$  אז  $U(B, y) = 4 - y$ .

הגרף למטה מראה את הגרפים של הפונקציות האלו. הקו של  $\max_{s_1 \in \{B,T\}} U(s_1, y)$  מראה את התשלום המקסימלי ששחקן 2 יקבל אם הוא משחק  $y$ . הקו הזה נקרא **מעטפת עליונה** של התשלומים.



הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות שווה ל-  $\min_{y \in [0,1]} \max_{s_1 \in \{B,T\}} U(s_1, y)$ , אשר מתקבל בנקודת מינימום של המעטפת העליונה. המינימום מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של שתי הפונקציות, כלומר בנקודה

$$5y = 4 - y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}.$$

מכאן האסטרטגיה האופטימלית של שחקן 2 היא  $y^* = \left(\frac{2}{3}(L), \frac{1}{3}(R)\right)$ . הערך של המשחק שווה לגובה של הנקודת

חיתוך:  $v = \frac{10}{3}$ . ■

דוגמה 5.4 ()

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

$I \backslash II$	$L$	$M$	$R$
$T$	2	5	-1
$B$	1	-2	5

מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

נחשב את המקסמין של שחקן 1. אם שחקן 1 משחק את האסטרטגיה המעורבת  $[x(T), (1-x)(B)]$  התשלום שלו כפונקציה של  $x$  תלוי על האסטרטגיה של שחקן 2:

• אם שחקן 2 משחק  $L$  אז  $U(x, L) = 2x + (1-x) = 1 + x$ .

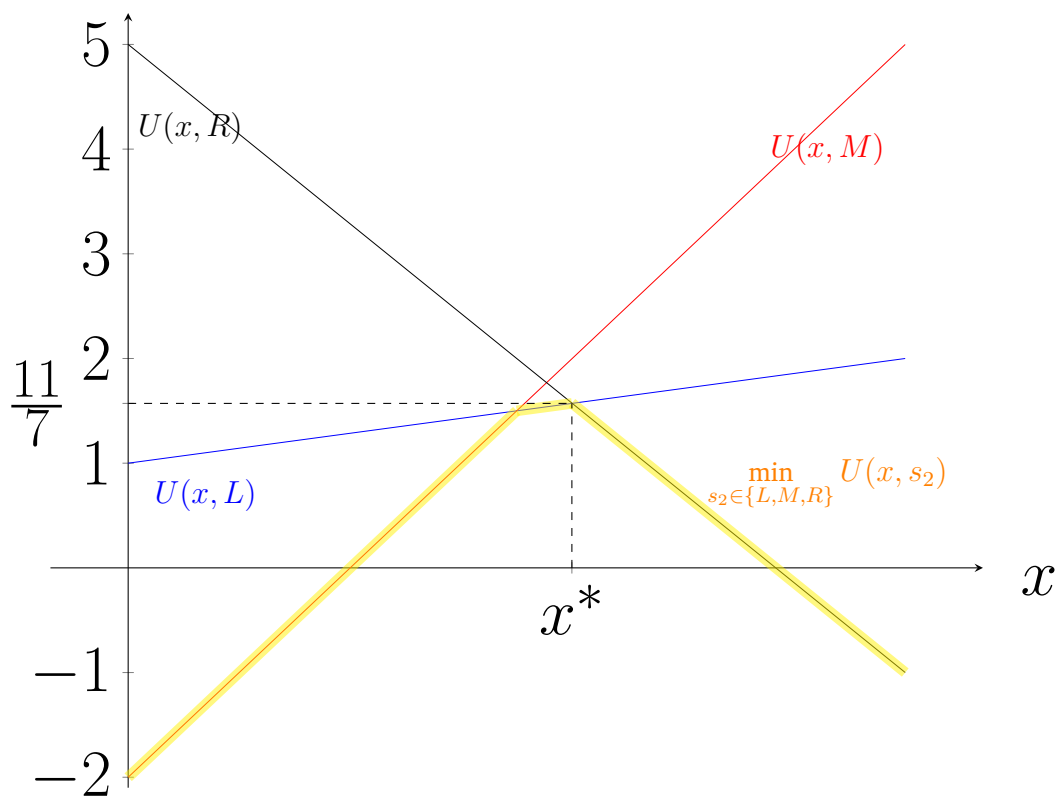
$$U(x, M) = 5x - 2(1 - x) = 7x - 2.$$

• אם שחקן 2 משחק  $M$  אז

$$U(x, R) = -x + 5(1 - x) = -6x + 5.$$

• אם שחקן 2 משחק  $R$  אז

התרשים למטה מתאר את הגרפים של שלוש פונקציות אלו.



המקסימום של המעטפת התחתונה מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של  $U(x, L)$  ו-  $U(x, R)$ :

$$1 + x \stackrel{!}{=} -6x + 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{7}$$

■

## 5.3 חישוב נקודות שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות

### דוגמה 5.5 ()

נתון משחק שני שחקנים בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

$I \backslash II$	$F$	$C$
$F$	2, 1	0, 0
$C$	0, 0	1, 2

מצאו שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

**פתרון:**

לכל אסטרטגיה מעורבת,  $[x(F), (1-x)(C)]$  של שחקן 1, הקבוצת תשובות טובות ביותר של שחקן 2 הן

$$\sigma_2(x) = \arg \max_{y \in [0,1]} u_2(x, y) = \{y \in [0, 1] \mid u_2(x, y) \geq u_2(x, z) \forall z \in [0, 1]\} .$$

כדי לחשב את  $\sigma_2(x)$ , נרשום את  $U_2(x, y)$ :

$$U_2(x, y) = xy + 2(1-x)(1-y) = 3xy - 2x - 2y + 2 = y(3x - 2) - 2x + 2 .$$

לכל  $x$  קבוע זוהי פונקציה לינארית של  $y$ .

$$\bullet \quad x > \frac{2}{3} \Leftrightarrow \text{השיפוע חיובי ויש מקסימום ב- } y = 1 .$$

$$\bullet \quad x < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \text{השיפוע שלילי ויש מקסימום ב- } y = 0 .$$

$$\bullet \quad x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \text{השיפוע שווה אפס והפונקציה קבוע וכל נקודה } y \in [0, 1] \text{ נקודת מקסימום} .$$

השיפוע משתנה מחיובי לשלילי ב-  $x = \frac{2}{3}$ . הגרף של  $\sigma_2(x)$  מתואר בתרשים למטה.

באותה מידה, לכל אסטרטגיה מעורבת,  $[y(F), (1-y)(C)]$  של שחקן 2, הקבוצת תשובות טובות ביותר של שחקן 1 הן

$$\sigma_1(y) = \arg \max_{x \in [0,1]} u_1(x, y) = \{x \in [0, 1] \mid u_1(x, y) \geq u_1(z, y) \forall z \in [0, 1]\} .$$

כדי לחשב את  $\sigma_1(y)$ , נרשום את  $U_1(x, y)$ :

$$U_1(x, y) = 2xy + (1-x)(1-y) = 3xy - x - y + 1 = x(3y - 1) - y + 1 .$$

לכל  $y$  קבוע זוהי פונקציה לינארית של  $x$ .

$$\bullet \quad y > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{השיפוע חיובי ויש מקסימום ב- } x = 1 .$$

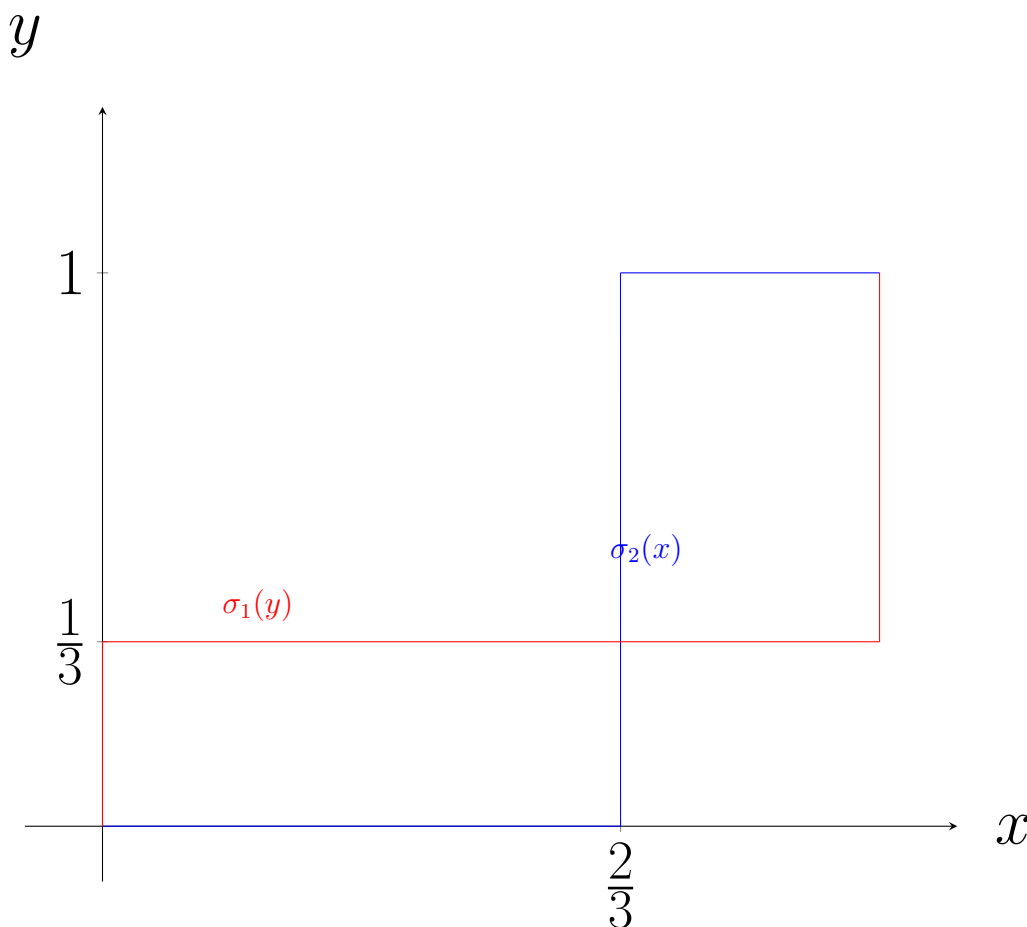
$$\bullet \quad y < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{השיפוע שלילי ויש מקסימום ב- } x = 0 .$$

$$\bullet \quad y = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{השיפוע שווה אפס והפונקציה קבוע וכל נקודה } x \in [0, 1] \text{ נקודת מקסימום} .$$

השיפוע משתנה מחיובי לשלילי ב-  $y = \frac{1}{3}$ . הגרף של  $\sigma_1(y)$  מתואר בתרשים למטה.

לסיכום, עבור משחק זה,

$$\sigma_2(x) = \begin{cases} 0 & x < \frac{2}{3} , \\ [0, 1] & x = \frac{2}{3} , \\ 1 & x > \frac{2}{3} , \end{cases} , \quad \sigma_1(y) = \begin{cases} 0 & y < \frac{1}{3} , \\ [0, 1] & y = \frac{1}{3} , \\ 1 & y > \frac{1}{3} , \end{cases}$$



נקודה  $(x^*, y^*)$  היא שיווי משקל אם ורק אם  $x^* \in \sigma_1(y^*)$  ו-  $y^* \in \sigma_2(x^*)$ . ז"א  $(x^*, y^*)$  נקודת שיווי משקל אם ורק אם היא נקודת חיתוך של הגרפים של  $\sigma_1(y)$  ו-  $\sigma_2(x)$ . יש 3 נקודות חיתוך:

•  $(x^*, y^*) = (0, 0)$  אשר מתאימה לאסטרטגיה טהורה  $(C, C)$ .

•  $(x^*, y^*) = (1, 1)$  אשר מתאימה לאסטרטגיה טהורה  $(F, F)$ .

•  $(x^*, y^*) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$  אשר היא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות

$$x^* = \left[ \frac{2}{3}(F), \frac{1}{3}(C) \right], \quad y^* = \left[ \frac{1}{3}(F), \frac{2}{3}(C) \right],$$

■

## 5.4 תחרות דואפול על פי קורנוט

### 5.6 דוגמה (I)

שני יצרניים 1 ו-2 מייצרים אותו מוצר ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאליים. היצרנים מחליטים סימולטנית על הכמות שהם ייצרו, וההיצע הכולל קובע את מחיר המוצר, שהוא זהה לשני היצרנים. נסמן ב-  $q_1$  וב-  $q_2$  את הכמויות שמייצרים היצרנים 1 ו-2 בהתאמה. אזי הכמות הכוללת של מוצרים בשוק היא  $q_1 + q_2$ . נניח כי המחיר של יחידה שווה ל-

$$2 - q_1 - q_2.$$

עלות הייצור של יחידה ליצרן הראשון היא  $c_1 > 0$  וליצרן השני היא  $c_2 > 0$ . האם קיים שיווי משקל במשחק

זה, ואם כן, מה הוא?

### פתרון:

זהו משחק שני שחקנים (היצרנים 1 ו-2) שבו קבוצת האסטרטגיות של כל שחקן היא  $[0, \infty)$ . אם שחקן 1 בוחר באסטרטגיה  $q_1$  ושחקן 2 בוחר באסטרטגיה  $q_2$ , התשלום לשחקן 1 הוא

$$u_1(q_1, q_2) = q_1(2 - q_1 - q_2) - q_1 c_1 = q_1(2 - c_1 - q_1 - q_2), \quad (*)$$

והתשלום לשחקן 2 הוא

$$u_2(q_1, q_2) = q_2(2 - q_1 - q_2) - q_2 c_2 = q_2(2 - c_2 - q_1 - q_2).$$

התשובה בטובה ביותר של שחקן 1 לאסטרטגיה  $q_2$  של שחקן 2 הוא ערך  $q_1$  המביא למקסימום את  $u_1(q_1, q_2)$ . הפונקציה  $q_1 \mapsto u_1(q_1, q_2)$  היא פונקציה ריבועית עם מקסימום בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = 0.$$

על ידי גזירה של אגף ימין של משוואה (\*) נקבל את התנאי  $2 - c_1 - 2q_1 - q_2 = 0$  או

$$q_1 = \frac{2 - c_1 - q_2}{2}. \quad (1*)$$

באותו אופן, התשובה הטובה ביותר של שחקן 2 לאסטרטגיה  $q_1$  של שחקן 1 היא ערך  $q_2$  שבו הנגזרת של  $u_2(q_1, q_2)$  לפי  $q_2$  מתאפסת. על ידי גזירה נקבל

$$q_2 = \frac{2 - c_2 - q_1}{2}. \quad (2*)$$

פתרון המשוואות (1\*) ו-(2\*) נותן

$$q_1^* = \frac{2 - 2c_1 + c_2}{3}, \quad q_2^* = \frac{2 - 2c_2 + c_1}{3}.$$

זה אמנם שיווי משקל וזהו שיווי משקל היחיד של המשחק. התשלומים של השחקנים בשיווי משקל זה הם

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = \left( \frac{2 - 2c_1 + c_2}{3} \right)^2 = (q_1^*)^2, \quad u_2(q_1^*, q_2^*) = \left( \frac{2 - 2c_2 + c_1}{3} \right)^2 = (q_2^*)^2.$$

כעת נוכיח כי הצמד אסטרטגיות  $(q_1^*, q_2^*)$  מהווה נקודת שיווי משקל. יש להוכיח כי  $q_1^*$  תשובה טובה ביותר לשחקן 1 ביחס ל-  $q_2^*$  ולהפך.

$$u(q_1, q_2^*) = q_1(2 - c_1 - q_1 - q_2^*) = -q_1^2 + (2 - c_1 - q_2^*)q_1.$$

לכן  $u(q_1, q_2^*)$  פולינום מסדר 2 של  $q_1$ , כאשר המקדם של  $q_1^2$  הוא -1. לכן המקסימום המתקבל הוא

$$q_1 = \frac{(2 - c_1 - q_2^*)}{2} = \frac{(2 - c_1 - \frac{2 - 2c_2 + c_1}{3})}{2} = q_1^*.$$

בפרט  $q_1^*$  תשובה טובה ביותר של שחקן 2 ביחס ל-  $q_2^*$ .

