שאלות

שאלה 1

1) נתונה מערכת משוואות לינאריות $A \cdot X = b$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ k+1 & -(k+1) & -1 \\ k & -2k & -3 \end{pmatrix} \quad , \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5k-2 \\ 4k-3 \end{pmatrix}$$

מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין פתרון, יש פתרון יחיד, יש אינסוף פתרונות. במקרה של אינסוף פתרונות רשמו את הפתרון הכללי.

2) יהי V מרחב וקטורי, $A = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subseteq V$, $B = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_m\} \subseteq V$, $A \cap B = \emptyset$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א) אם קבוצת וקטורים $A \cup B$ היא בלתי תלויה לינארית., אז $\mathrm{sp}(A) \cap \mathrm{sp}(B) = \{\bar{0}\}$.

ב) אם $\mathrm{sp}(A) \cap \mathrm{sp}(B) = \{\bar{0}\}$ אז קבוצת וקטורים $A \cup B$ היא בלתי תלויה לינארית.

פתרונות

שאלה 1

(1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ k+1 & -(k+1) & -1 & 5k-2 \\ k & -2k & -3 & 4k-3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-kR_1]{R_2\to R_2-(k+1)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & k+1 & k & 2k-5 \\ 0 & 0 & k-3 & k-3 \end{array}\right)$$

$\underline{k=-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-4R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{array}\right)$$

שורה סתירה: אין פתרון.

$\underline{k=0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to -\frac{1}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

פתרון יחיד:

$$\left.\begin{aligned} x-2y-z &= 3 \\ y &= -5 \\ z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned} x+10-1 &= 3 \\ y &= -5 \\ z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned} x &= -6 \\ y &= -5 \\ z &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

$\underline{k=3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שורת אפסים: ∞ פתרונות.

$$\left.\begin{aligned} x-2y-z &= 3 \\ 4y+3z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned} x &= 3+2y+z \\ y &= \tfrac{1}{4}-\tfrac{3}{4}z \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned} x &= 3+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}z \\ y &= \tfrac{1}{4}-\tfrac{3}{4}z \end{aligned}\right\}.$$

■

2) יהי V מרחב וקטורי, $A=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$, $B=\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_m\}$, $A\cap B=\emptyset$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א) אם קבוצת וקטורים $A\cup B$ היא בת"ל, אז $\mathrm{sp}(A)\cap\mathrm{sp}(B)=\{\bar{0}\}$.

פתרון:

נתון: $A\subseteq V$, $B\subseteq V$, $A\cap B=\emptyset$, $A\cup B$ בת"ל.

צריך להוכיח: $\mathrm{sp}(A)\cap\mathrm{sp}(B)=\{\bar{0}\}$

הוכחה:

נוכיח דרך השלילה. נניח $A\cup B$ בת"ל וקיים $\mathrm{x}\in\mathrm{sp}(A)\cap\mathrm{sp}(B)$ כך ש $\mathrm{x}\neq\bar{0}$. אז

$$\mathrm{x}=\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_nu_n=\beta_1\mathrm{v}_1+\ldots+\beta_m\mathrm{v}_m$$

נחסיר אגף השמאל מאגף הימין ונקבל

$$\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_nu_n-\beta_1\mathrm{v}_1-\ldots-\beta_m\mathrm{v}_m=\bar{0}\ .$$

כיוון ש $A\cup B$ בת"ל, אז הצירוף לינארי הזה מתקיים רק אם $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=\beta_1=\ldots=\beta_m=0$. ז"א $\mathrm{x}=\bar{0}$. סתירה.

■

ב) אם $\mathrm{sp}(A)\cap\mathrm{sp}(B)=\{\bar{0}\}$, אז קבוצת וקטורים $A\cup B$ היא בת"ל.

פתרון:

נתון: $A\subseteq V$, $B\subseteq V$, $A\cap B=\emptyset$, $\mathrm{sp}(A)\cap\mathrm{sp}(B)=\{\bar{0}\}$.

צריך להוכיח: $A\cup B$ קבוצת בת"ל.

דוגמה נגדית:

$$A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ ,\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}\subset\mathbb{R}^2\ ,\qquad B=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\subset\mathbb{R}^2$$

$A\cap B=\emptyset$ ו $\mathrm{sp}(A)\cap\mathrm{sp}(B)=\{\bar{0}\}$.

$$A\cup B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ ,\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\ ,\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$A\cup B$ קבוצת תלויה לינארית.

■
