שיעור 3
טרוי פונקציות וטורי חזקות

3.1 טור חזקות

הגדרה 3.1 טור חזקות

טור חזקות הנם טורים מהצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

כלומר הסכום החלקי הוא פולינום:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_N x^N \ .$$

משפט 3.1 רדיוס התכנסות

לכל טור חזקות קיים מספר חיובי R, כלומר $0 \leq R \leq \infty$ כך
שהטור מתכנס לכל x בתחום $|x| < R$
ומתבדר לכל x בתחום $|x| > R$.
בפרט:
אם $R = 0$ אז הטור מתכנס רק ב- $x = 0$.
אם $R = \infty$ אז הטור מתבדר לכל x.
המספר הזה R נקרא **רדיוס ההתכנסות** של הטור.

דוגמה 3.1 טור חזקות

מצאו את רדיוס התכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \ .$$

פתרון:

שים לב הטור הוא טור הנדסי (ראו הגדרה 2.2) בו איבר הראשון הוא $1 = x^0 = a_1$ ומנת הסדרה היא $x = \frac{x^{n+1}}{x^n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. לפי משפט 2.3 (או לפי משפט 2.2) הטור שווה ל-

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} \ .$$

הסכום מתכנס אם $|x| < 1$, לכן רדיוס ההתכנסות

$$R = 1 \ .$$

דוגמה 3.2 טור חזקות

מצאו את רדיוס התכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n \ .$$

פתרון:

בשונה לדוגמה הקודמת, הטור אינו טור הנדסית, בגלל שהיחס $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ אינו קבוע ($\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^{n+1}x^{n+1}}{(nx)^n} = n \cdot x$).
לכל x,

$$\lim_{n\to\infty} |n^n x^n| = \lim_{n\to\infty} |nx|^n = \begin{cases} \infty & x \neq 0 \ , \\ 0 & x = 0 \ . \end{cases} \ .$$

לכן רדיוס ההתכנסות הוא

$$R = 0$$

כי הטור מתכנס רק במקרה ש- $x = 0$.

דוגמה 3.3 טור חזקות

מצאו את רדיוס התכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n} \ .$$

פתרון:

נבדוק התכנסות של הטור ע"י מבחן קושי: (עין משפט 2.8 לעיל)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x}{n}\right|^n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{n}\right| = 0 \ ,$$

ולכן לפי מבחן קושי (ומשפט 2.9 #1) הטור מתכנס לכל x, לפיו הרדיוס ההתכנסות הוא ∞:

$$R = \infty \ .$$

משפט 3.2 נוסחת דלמבר לרדיוס התכנסות

רדיוס התכנסות של טור חזקות ניתן ע"י הנוסחה

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

אם הגבול קיים.

משפט 3.3 נוסחת קושי לרדיוס התכנסות

רדיוס התכנסות של טור חזקות ניתן ע"י הנוסחה

$$R = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n}\right)^{1/n}$$

אם הגבול קיים.

דוגמה 3.4

מצאו את תחום התכנסות של הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$$

פתרון:

נחשב את הרדיוס התכנסות בעזרת נוסחת קושי:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n \cdot \ln n|} = \lim_{x\to\infty} (x \cdot \ln x)^{1/x}$$

נגדיר $y = (x \ln x)^{1/x}$. אז

$$\ln y = \ln\left[(x \ln x)^{1/x}\right] = \frac{1}{x} \ln (x \ln x)$$

ו-

$$y = e^{\ln y} = e^{\frac{1}{x} \ln(x \ln x)} \ .$$

מכאן

$$\lim_{x\to\infty} y = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln(x \ln x)}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x \ln x)}{x} &= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \\
&\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x\ln x}(\ln x + 1)}{1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x + 1}{x \ln x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln x}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

לכן

$$\lim_{x\to\infty} y = e^0 = 1 \ .$$

ולכן

$$\frac{1}{R} = 1 \ , \qquad \Rightarrow \qquad R = 1 \ .$$

נבדוק התכנסות ב- $x = 1$:

לפי מבחן האינטגרל $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ מתכנס אם ורק אם $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ מתכנס.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t} = [\ln t]_{\ln 2}^{\infty} = \infty$$

לכן הטור מתבדר ב $x = 1$.

נבדוק התכנסות ב- $x = -1$:

ב- $x = -1$ נקבל טור מחליף סימן מצורה

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n \ , \qquad a_n = \frac{1}{n \ln n} \ .$$

נבדוק התכנסות ע"י מבחן לייבניץ: $a_n \downarrow$ מונוטונית. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ו- $a_n > 0$ לכל n לכן הטור $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$ מתכנס בתנאי (כיוון ש $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ מתבדר).

תשובה סופית: תחום התכנסות הוא $[-1,1)$.

דוגמה 3.5

מצאו את תחום התכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^2}{n^5 5^n}x^n$$

פתרון:

נחשב את הרדיוס התכנסות בעזרת נוסחת דלמבר. $a_n = \frac{(n+2)^2}{n^5 5^n}$.

$$\begin{aligned}
R &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{(n+2)^2}{n^5 5^n}\right)}{\left(\frac{(n+3)^2}{(n+1)^5 5^{n+1}}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^2\left(\frac{n+1}{n}\right)^5\frac{5^{n+1}}{5^n} \\
&= 5
\end{aligned}$$

נבדוק התכנסות בקצוות הקטע: ב $x=5$ נקבל טור חיובי מצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^2}{n^5} = \sum_{n=1}^{\infty}a_n \qquad a_n = \frac{(n+2)^2}{n^5}\ .$$

נשתמש במשפט ההשוואה הגבולי (משפט 2.6):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)^2}{n^5}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^2 = 1$$

לכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^2}{n^5}$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנסים ומתבדרים ביחד. לכן, כיוון ש $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס, (ראו 2.8 דוגמה למעלה) אז גם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^2}{n^5}$ מתכנס. לכן הטור חזקות מתכנס ב- $x=5$.

נבדוק התכנסות בקצוות הקטע: ב $x=-5$.

ב $x=-5$ נקבל טור מחליף סימן מצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+2)^2}{n^5} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \qquad a_n = \frac{(n+2)^2}{n^5}\ .$$

a_n חיובי, $\downarrow$ מונוטונית ו $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, לכן לפי מבחן לייבניץ הטור מתכנס בהחלט. לכן הטור חזקות מתכנס ב- $x=-5$. בסה"כ התחום התכנסות של הטור הוא $[-5,5]$.

דוגמה 3.6

מצאו את תחום התכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n(2n^2+3)}$$

פתרון:

נציב $z=x-2$ ונרשום את הטור בצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{10^n(2n^2+3)} \ .$$

נחשב את הרדיוס התכנסות בעזרת נוסחת קושי:

$$R=\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{10^n(2n^2+3)} = \lim_{n\to\infty} 10\cdot \sqrt[n]{(2n^2+3)} = 10\cdot 1 = 10 \ .$$

נבדוק התכנסות ב- $x-2=10$:

ב $x-2=10$, נקלל הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n^2+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ , \qquad a_n=\frac{1}{(2n^2+3)} \ .$$

לפי מבחן דלמבר הטור המתקבל מתכנס. מאותה מידה, ב $x-2=-10$, נקלל הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n^2+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \ , \qquad a_n=\frac{1}{(2n^2+3)} \ .$$

לפי מבחן לייבניץ הטור המתקבל מתכנס בהחלט. לכן תחום התכנסות של הטור חזקות הוא $x-2\in[-10,10]$, כלומר $x\in[-8,12]$.

דוגמה 3.7 טור חזקות

מצאו את רדיוס התכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} \ .$$

פתרון:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \qquad a_n=\frac{1}{n} \ .$$

נבדוק רדיוס התכנסות ע"י נוסחת דלמבר:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

נבדוק התכנסות בקצוות.

ב $x=1$ נקבל טור חיובי מצורה
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n} \ .$$
הטור הזה מתבדר (ראו דוגמה 2.9).

ב $x=-1$ נקבל טור חיובי מצורה
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} \ .$$
הטור הזה מתכנס בתנאי (ראו דוגמה 2.24). לכן תחום התכנסות של הטור הוא
$$x\in[-1,1) \ .$$

דוגמה 3.8

מצאו את רדיוס התכנסות של הטור
$$\sum_{n=1}^{\infty}(2x)^n$$

פתרון:

$a_n=(2)^n$. לפי מבחן קושי (ראו משפט 2.8):
$$\frac{1}{R}=\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{(2)^n}=2$$
לכן $R=\frac{1}{2}$. נבדוק התכנסות בקצוות. ב $x=\frac{1}{2}$ נקבל טור מצורה
$$\sum_{n=1}^{\infty}(1)^n$$
אשר מתבדר. ב $x=-\frac{1}{2}$ נקבל טור מצורה
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$
שלא מתכנס. לכן הטור מתכנס בתחום
$$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2} \ .$$

3.2 טורי פונקציות

הגדרה 3.2 טור פונקציות

תהיה $f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x)$ סדרת פונקציות. הטור
$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots$$
נקרא **טור פונקציות** או **טור פונקציונלי**.

אוסף הערכים של x שעבורם הטור מתכנס נקרא **תחום התכנסות של הטור**.
הפונקציה
$$S(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty} (f_1(x) + \ldots + f_N(x))$$
נקרא **סכום הטור** והיא מוגדרת רק עבור ערכי x מתחום ההתכנסות של הטור.

דוגמה 3.9

הטור
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$
מתכנס אם ורק אם $-1 < x < 1$. לכן תחום התכנסות של הטור הוא $(-1,1)$. נקבל
$$S_N(x) = 1 + x + \ldots + x^N = \frac{1-x^N}{1-x}$$
$$S(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x) = \frac{1}{1-x} \ .$$
השארית הוא
$$R(x) = S(x) - S_N(x) = x^{N+1} + x^{N+2} + \ldots = \frac{x^{N+1}}{1-x} \ .$$

דוגמה 3.10

הטור
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^n} + \ldots$$
מתכנס אם ורק אם $-1 < \left|\frac{1}{x}\right| < 1$, כלומר $|x| > 1$. לכן תחום התכנסות של הטור הוא $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$. ומקבלים
$$S(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1} \ .$$

דוגמה 3.11

תחום התכנסות של הטור
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$
הוא, לפי מבחן האינטגרל, $(1,\infty)$ זוהי דוגמה של דיריכלה והטור שווה לפונקציה הנקראת פונקציית זיטה של רימאן. היא אינה פונקציה אלמנטרית ואין לה נוסחה סגורה.

3.3 פעולות עם טורי חזקות - גזירה ואינטגרציה

משפט 3.4 אינטגרציה וגזירה איבר איבר

יהיה $0 < R \leq \infty$ רדיוס התכנסות של הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. אזי לכל $|x| < R$ מתקיים"

(1

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \end{aligned}$$

(2

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n + C$$

הטור המתקבל לאחר גזירה או אינטגרציה הם בעלי אותו רדיוס התכנסות R.

דוגמה 3.12

$f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ מתכנס ב- $(-1,1)$.

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

מתכנס ב- $(-1,1)$. (התחום לא השתנה).

דוגמה 3.13

$f(x) = \dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ מתכנס ב- $(-1,1)$.

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \; .$$

מתכנס ב- $[-1,1]$. (התחום השתנה).

3.4 טור טיילור ומקלורן

הגדרה 3.3 טור טיילור

בהינתן פונקציה $f(x)$, גזירה אינסוף פעמים בסביבה של $x=a$, נגדיר **טור טיילור** שלה סביב $x=a$

$$T_a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

זהו טור חזקות לפי חזקות של $(x-a)$.
טור טיילור הוא טור שסכומים החלקיים הם פולינומי טיילור.

הגדרה 3.4 טור מקלורן

במקרה $a=0$ נקבל את **טור מקלורן** של $f(x)$:

$$T_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(a)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

דוגמה 3.14 טורי מקלורן של פונקציות אלמנטריות

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^nx^n+\ldots \qquad -1<x<1\ ,$$

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^nx^{2n}+\ldots \qquad -1<x<1\ ,$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}\ldots \qquad -1<x<1\ ,$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \qquad -\infty<x<\infty\ ,$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^nx^n}{n!}+\ldots \qquad -\infty<x<\infty\ ,$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+-\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \qquad -\infty<x<\infty\ ,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+-\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}+\ldots \qquad -\infty<x<\infty\ ,$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots \qquad -1<x<1\ ,$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\ldots \qquad -1<x\le 1\ ,$$

$$\arctan(x)=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^nx^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{2n+1}$$

משפט 3.5 התכנסות של טור טיילור

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה אינסוף פעמים בסביבת הנקודה a. אם קיים $M>0$ כך שלכל $n\geq 0$ ולכל $x\in(a-\delta,a+\delta)$ מתקיים

$$|f^{(n)}(a)|\leq M$$

אז בקטע $(a-\delta,a+\delta)$ הטור טיילור של $f(x)$ מתכנס ומתקיים

משפט 3.6 קיום טור טיילור של פונקציה

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\ ,\qquad |x-a|<\delta\ .$$