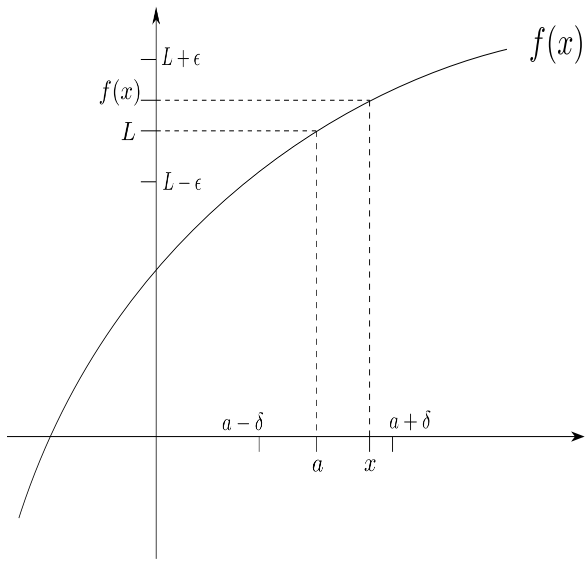
שיעור 4
גבולות

4.1 גבול של פונקציה



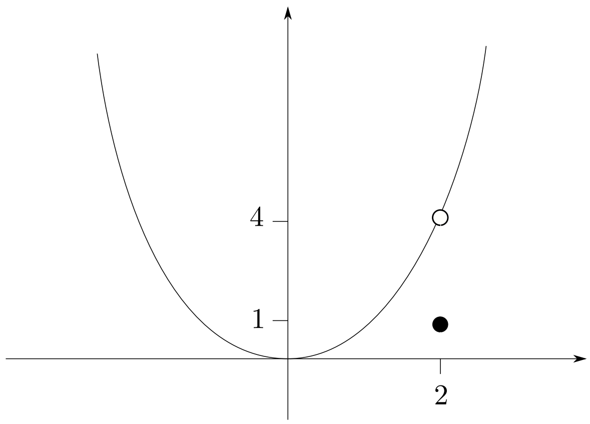
הגדרה 4.1 גבול של פונקציה

אומרים כי $\lim_{x\to a} f(x) = L$ אם לכל סביבה $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ של L קיימת סביבה $(a-\delta, a+\delta)$ של a כך שלכל $x \neq a$ השייך לסביבה של a מתקיים:
$f(x)$ שייך לסביבה של L.

במילים פשוטות, כאשר x מתקרב ל- a, $f(x)$ מתקרב ל- L. עד עכשיו הסתכלנו אל דוגמאות של גבול של פונקציה בנקודה a בה הפונקציה מוגדרת. הכלל הבא יעזור לנו לחשב גבולות של פונקציות בנקודות בהן הפונקציה מוגדרת:

דוגמה 4.1

1. $\lim_{x\to 3}(2x-1) = 5$.
2. $\lim_{x\to a} C = C$.
3. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \ , \\ 1 & x = 2 \ . \end{cases}$.

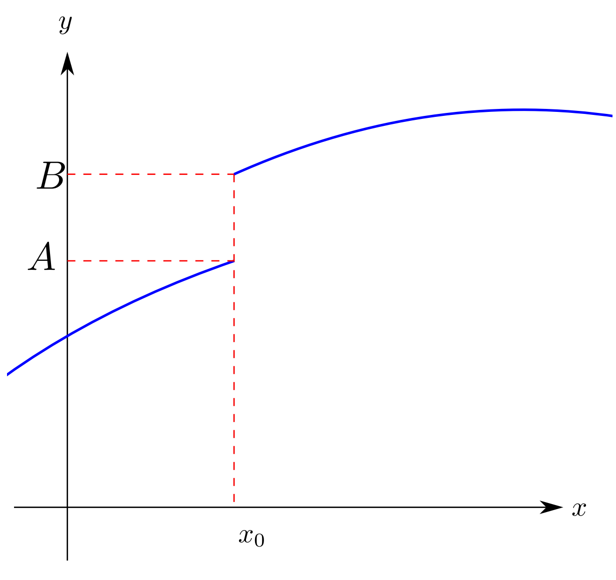


$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \ .$$

4. $\lim_{x\to 4}(x^2+\sqrt{x}) = 4^2+\sqrt{4} = 18$.

4.2 גבולות חד צדדיים

בהגדרה של גבול של פונקציה $\lim_{x\to a} f(x) = L$ לא משנה איך x שואף ל- a (מצד ימין או מצד שמאול), $f(x)$ מתקרב ל- L. לפעמים, התוצאה תלויה באופן ההתקרבות של x ל- a.



בגרף של הפונקציה לעיל, כאשר x שואף ל- a משמאול, $f(x)$ מתקרב ל- A וכאשר x שואף ל a מימין, $f(x)$ ל B. אנחנו מסמנים את זה כך:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = A \ , \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = B \ .$$

הגדרה 4.2 גבול חד צדדי

גבול מצד שמאול

הגבול משמאול של פונקציה $f(x)$ בנקודה a שווה ל- A אם לכל סביבה של A קיימת סביבה של a כך שלכל $a<x$ מהסביבה של a, גם $f(x)$ שייך לסביבה של A. סימון:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = A \ .$$

גבול מצד ימין

הגבול מימין של פונקציה $f(x)$ בנקודה a שווה ל- B אם לכל סביבה של B קיימת סביבה של a כך שלכל $a>x$ מהסביבה של a, גם $f(x)$ שייך לסביבה של B. סימון:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = B \ .$$

משפט 4.1 קיום של גבול דו-צדדי

הגבול $\lim_{x\to a} f(x) = L$ קיים אם ורק אם $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$.

הוכחה: *להעשרה בלבד

הוכחה של "אם"

אם $\lim_{x\to a} f(x) = L$ אז לפי הגדרה 4.7, $\forall\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $|x-a|<\delta$ אז $|f(x)-L|<\epsilon$. לכן אם $x\in(a-\delta,a)$ אז $|f-L|<\epsilon$ ולכן

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \ ,$$

ואם $x\in(a,a+\delta)$ אז $|f-L|<\epsilon$ ולכן

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \ .$$

הוכחה של " רק אם"

אם $\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$, אז

(i) $\forall\epsilon>0$ קיים $\delta_1>0$ כך שאם $0<x-a<\delta_1$ אז $|f-L|<\epsilon$.

(ii) $\forall\epsilon>0$ קיים $\delta_2>0$ כך שאם $-\delta_2<x-a<0$ אז $|f-L|<\epsilon$.

לכן קיים δ_1,δ_2 כך שאם $a-\delta_2<x<a+\delta_1$ אז $|f-L|<\epsilon$.
יהי $\delta:=\min(\delta_1,\delta_2)$. מזה נובע שאם $a-\delta<x<a+\delta$ אז $|f-L|<\epsilon$, ולפיו

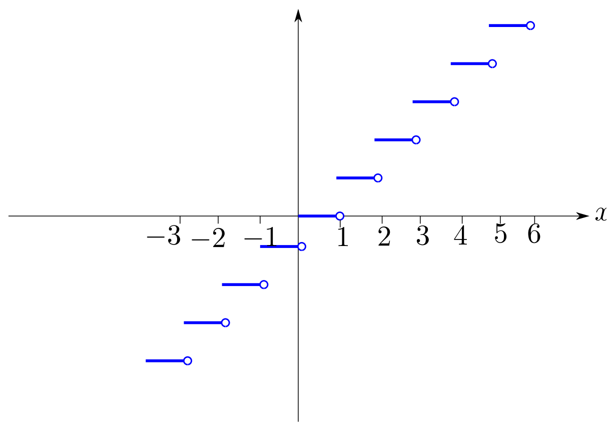
$$\lim_{x\to a} f(x) = L \ .$$

■

דוגמה 4.2

$f(x) = \lfloor x \rfloor$ (פונקציית הריצפה - המספר השלם הקרוב ביותר ל x שלא גדול ממנו.)

$$\lfloor -2.3 \rfloor = -3 \ , \qquad \lfloor 2.8 \rfloor = 2 \ , \qquad \lfloor 2.3 \rfloor = 2 \ .$$



נבדוק אם קיים $\lim\limits_{x\to 2} \lfloor x \rfloor$.

$$\lim_{x\to 2^-} \lfloor x \rfloor = 1 \ , \qquad \lim_{x\to 2^+} \lfloor x \rfloor = 2 \ .$$

ז"א הגבולות החד צדדיים שונים ולכן לא קיים $\lim\limits_{x\to 2} \lfloor x \rfloor$.

לעומת זאת,

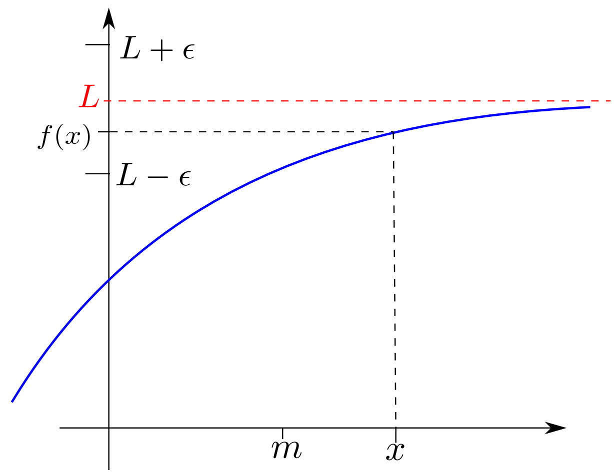
$$\lim_{x\to 2.5} \lfloor x \rfloor = 2$$

כן קיים.

4.3 גבול של פונקציה ב $x \to \infty$

הגדרה 4.3 גבול של פונקציה כאשר $x \to \infty$

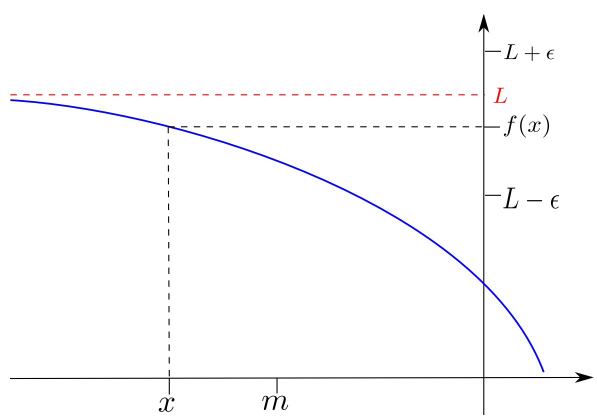
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ אם לכל סביבה של L קיים מספר m כך שלכל $x > m$ מתקיים: $f(x)$ שייך לסביבה של L.



במילים: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ אם לכל סביבה $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ של L קיים מספר m כך שלכל $x > m$ מתקיים: $f(x)$ שייך לסביבה $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ של L.

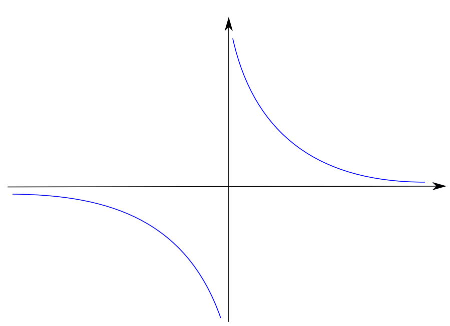
הגדרה 4.4 גבול של פונקציה כאשר $x \to -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ אם לכל סביבה של L קיים מספר m כך שלכל $x < m$ מתקיים: $f(x)$ שייך לסביבה של L.



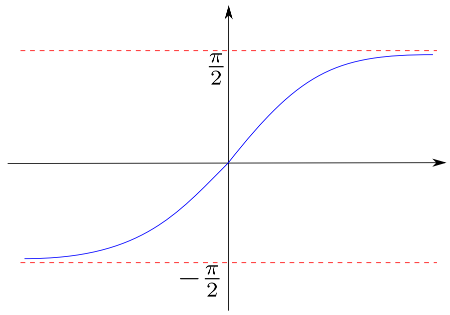
דוגמה 4.3

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \ , \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^- \ .$$



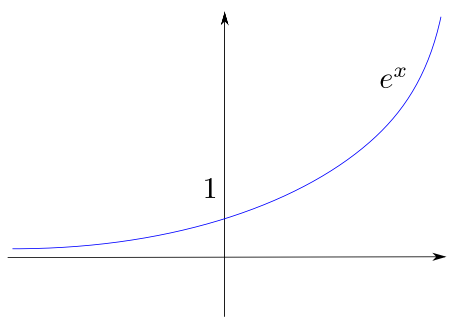
דוגמה 4.4

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \ , \qquad \lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \ .$$



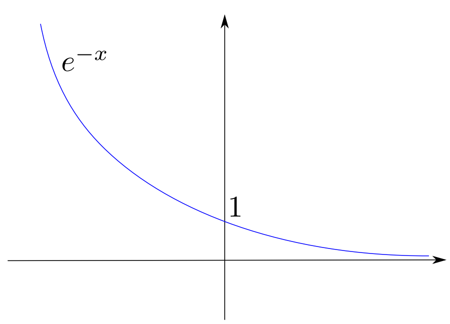
דוגמה 4.5

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \ .$$



דוגמה 4.6

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0 \ .$$



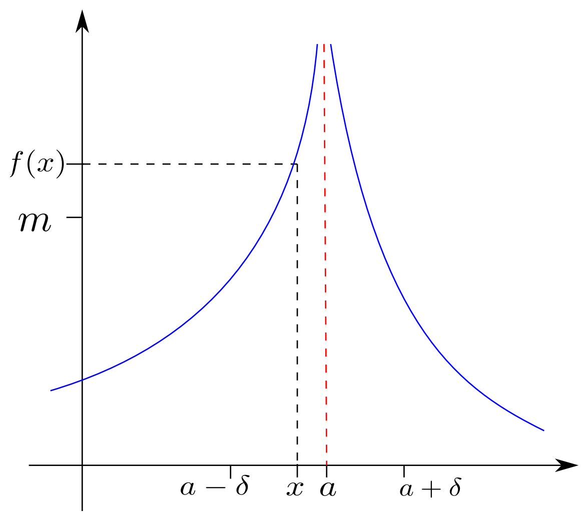
דוגמה 4.7

הגבולות $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos x$, $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin x$ לא קיימים.

4.4 גבול אינסופי בנקודה

הגדרה 4.5 גבול אינסופי של פונקציה בנקודה

$\lim_{x\to a} f(x) \to \infty$ אם לכל m קיימת סביבה של נקודה a, כך שלכל x השייך לסביבה של a, $f(x) > m$.

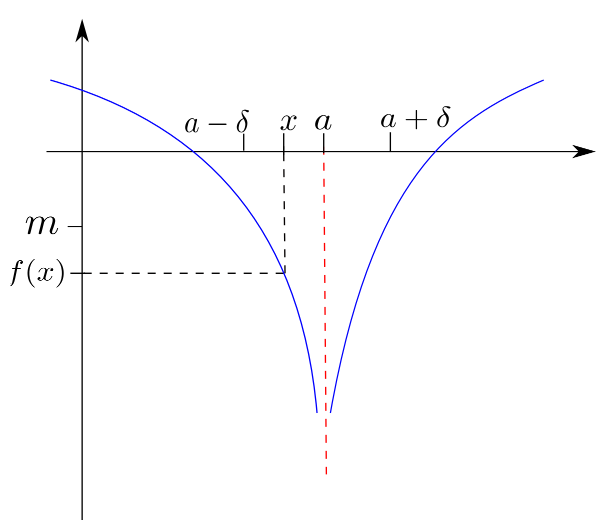


במילים: $\lim_{x\to a} f(x) \to \infty$ אם לכל מספר m קיימת סביבה $(a-\delta, a+\delta)$ של הנקודה a כך שלכל x השייך לסביבה זו, $f(x) > m$.

הגדרה 4.6 גבול מינוס אינסופי של פונקציה בנקודה

$$\lim_{x\to a} f(x) \to -\infty$$

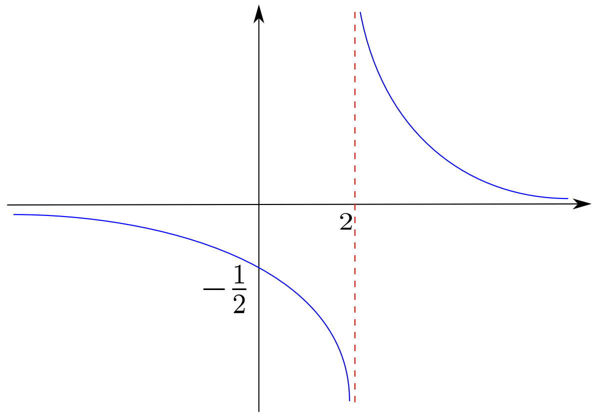
אם לכל m קיימת סביבה של a כך שלכל x השייך לסביבה של a, $f(x) < m$.



במילים: $\lim_{x\to a} f(x) \to -\infty$ אם לכל מספר m קיימת סביבה $(a-\delta, a+\delta)$ של הנקודה a כך שלכל x השייך לסביבה זו, $f(x) < m$.

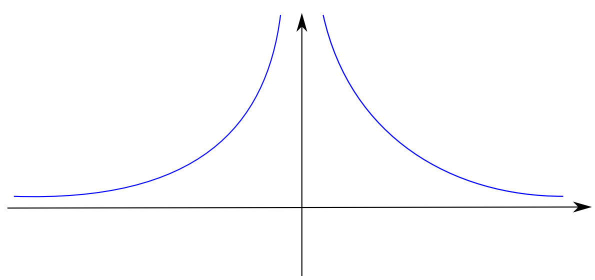
דוגמה 4.8

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x+2} = \infty,$$
$$\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty.$$



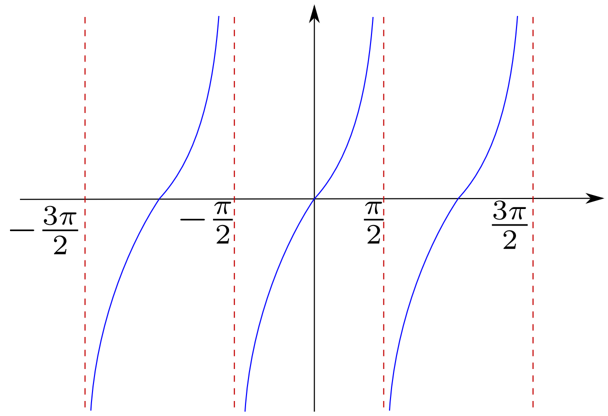
דוגמה 4.9

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty.$$



דוגמה 4.10

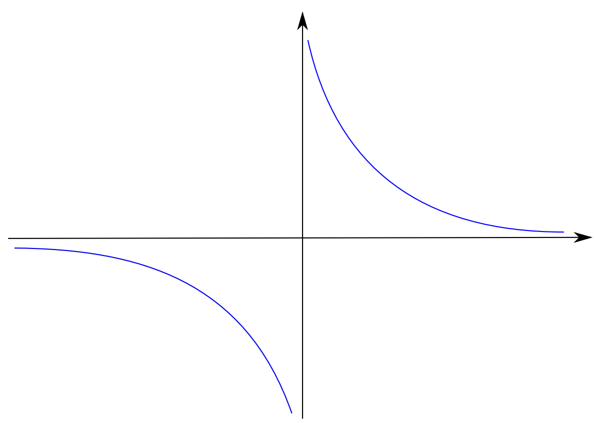
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty,$$
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty.$$



לכן $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x$ לא קיים.

דוגמה 4.11

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}x = -\infty.$$



לכן $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ לא קיים.

4.5 משפטים יסודיים של גבולות

משפט 4.2 כללים של גבולות

כלל 1) <u>גבול של פונקציה קבועה</u>

$$\lim_{x\to a} (c) = c$$

c קבוע.

כלל 2) <u>כללים הקשורים לפעולות חשבון</u>

אם קיימים הגבולות הסופיים $\lim_{x\to a} f(x)$ ו- $\lim_{x\to a} g(x)$ אז

א) <u>מכפלה בסקלר</u>

$$\lim_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

ב) <u>סכום (הפרש)</u>

$$\lim_{x\to a} \left(f(x)\pm g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

ג) <u>כפל</u>

$$\lim_{x\to a} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

ד) <u>חילוק</u>

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

אם $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

כלל 3) <u>גבול של פונקציה מורכבת</u>

$$\lim_{x\to a} f\left(g(x)\right) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

כלל 4) אם בסביבה מסוימת של נקודה a (פרט אולי לנקודה a עצמה) מתקיים $f(x)=g(x)$, אז

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) \ .$$

כלל 5) <u>כלל הסנדוויץ'</u>

אם בסביבה מסוימת של נקודה a (פרט אולי לנקודה a עצמה) מתקיים

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

וקיימים גבולות של פונקצות f ו- g בנקודה a והם שווים אחד לשני, קרי

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = A \ ,$$

אז קיים הגבול של $h(x)$ בנקודה זו ו-

$$\lim_{x\to a} h(x) = A \ .$$

כלל 6) אם $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ אז

$$\lim_{x\to a} \frac{c}{f(x)} = 0 \ ,$$

c קבוע.

כלל 7) אם $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ ופונקציה $g(x)$ חסומה בסביבה מסוימת של נקודה a, אז

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \ .$$

ניסוח אחר של המשפט:

אם $\lim_{x\to a} h(x) = 0$ ו $g(x)$ פונקציה חסומה, אז

$$\lim_{x\to a} h(x)\cdot g(x) = 0 \ .$$

כלל 8) אם מתקיים $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ אז מתקיים גם

$$\lim_{x\to a} |f(x)|=0$$

ולהיפך.

כלל 9) אם $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ ופונקציה $g(x)$ חסומה בסביבה מסוימת של נקודה a, אז

$$\lim_{x\to a} \left(f(x)\pm g(x)\right)=\infty\ .$$

כלל 10) אם קיים גבול של פונקציה $f(x)$ בנקודה a אז היא חסומה בסביבה מסוימת של נקודה זו.

כלל 11) אם $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c>0$, אז קיימת סביבה מסוימת של הנקודה a כך שבה $f(x)>0$.

דוגמה 4.12

$$\lim_{x\to 1}\left[(x-1)^2\cdot \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)}{\frac{1}{(x-1)^2}}\right]=0$$

בגלל ש $\sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ פונקציה חסומה ו $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=\infty$.

משפט 4.3 גבולות מסוימים

א) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

ב) $\lim\limits_{x\to\infty} p^x=\begin{cases}0 & (0<p<1)\\ \infty & p>1\end{cases}$

ג) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=1\ ,\qquad (p>0)\ .$

ד) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\ .$

למה 4.1 גבולות של פונקציות רציונליות

נתונה פונקיה $f(x)$ רציונלית:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

א) אם $\deg(P)<\deg(Q)$ אז $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ ו- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

ב) אם $\deg(P)>\deg(Q)$ אז $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ (הגבול לא מודזר).

ג) אם $\deg(P)=\deg(Q)=n$. נניח ש- $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n}$. אז $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{a_n}{b_n}$.

דוגמה 4.13

$$\lim_{x\to 1}(3x^2-2x+7)=3\cdot 1^2-2\cdot 1+7=8\ .$$

דוגמה 4.14

חשבו את הגבול: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$

פתרון:
ננסה להציב $x=2$ בתוף הפונקציה:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

אשר לא מוגדר. לכן ננסה לפרק את פולינום לגורמים:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+16)}{(x-4)}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{18}{-2}\right)=-9\ .$$

■

דוגמה 4.15

חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}$.

פתרון:
אם נציב ∞ ב- x נקבל

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

אשר לא מוגדר. נחלק את המונה והמחנה ב- x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{2+\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{4+\frac{2}{\infty}+\frac{5}{\infty}}=\frac{2+0}{4+0}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\ .$$

■

דוגמה 4.16

חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}$.

פתרון:
אם נציב $x=1$ בהפונקציה נקבל

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

אשר לא מוגדר. נכפיל את הפונקציה ב- $\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{\sqrt{x^2+3x}+2}=1$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{\sqrt{x^2+3x}+2}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{(x-1)\cdot(\sqrt{x^2+3x}+2)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)\cdot(\sqrt{x^2+3x}+2)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x+4}{\sqrt{x^2+3x}+2}\\ &= \frac{5}{4}\ .\end{aligned}$$

■

דוגמה 4.17

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^x+4^x+3^x}{5^x-4^x-2\cdot 3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+(\frac{4}{5})^x+(\frac{3}{5})^x}{1-(\frac{4}{5})^x-2\cdot(\frac{3}{5})^x}=\ 1\ .$$

דוגמה 4.18

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x+4^x+3^x}{5^x-4^x-2\cdot 3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{5}{3})^x+(\frac{4}{3})^x+1}{(\frac{5}{3})^x+(\frac{4}{3})^x-2}=\ -\frac{1}{2}\ .$$

4.6 גדלים בלתי מוגדרים

1. $\left[\frac{a}{\infty}\right]=0$ לכל מספר a.

$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ לא מוגדר.

2. לכל לכל מספר $a>0$, $\left[\frac{a}{0^+}\right]=\infty$, $\qquad \left[\frac{a}{0^-}\right]=-\infty$

$\left[\frac{0}{0}\right]$ לא מוגדר.

$\left[\frac{\infty}{0^+}\right]=\infty$, $\qquad \left[\frac{\infty}{0^-}\right]=-\infty$.

3. $[\infty\cdot\infty]=\infty$, $\qquad a\cdot\infty=\infty$ לכל מספר $a>0$.

$[0\cdot\infty]$ לא מוגדר.

4. $[a+\infty]=\infty$, $\qquad [a-\infty]=-\infty$ לכל מספר a.

$[\infty+\infty]=\infty$.

$[\infty-\infty]$ לא מוגדר.

5. $[a^{\infty}]=\infty$, $[a^{-\infty}]=0$ לכל מספר $a>1$.

$[a^{\infty}]=0$, $[a^{-\infty}]=\infty$ לכל מספר $0<a<1$.

$[0^{\infty}]=0$, $[\infty^{\infty}]=\infty$.

1^{∞} לא מוגדר, 0^0 לא מוגדר, ∞^0 לא מוגדר.

דוגמה 4.19

חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2^x\right)^{1/x}$.

פתרון:
אם נציב ∞ ב- x נקבל

$$\lim_{x\to\infty}\left(2^x\right)^{1/x}=[\infty^0]$$

אשר לא מוגדר. נפתח סוגריים בפונקציה:

$$\lim_{x\to\infty}\left(2^x\right)^{1/x}=\lim_{x\to\infty}2^{x/x}=2^1=2\ .$$

■

דוגמה 4.20

חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\left[2^x\right]^{1/\sqrt{x}}$.

פתרון:
אם נציב ∞ ב- x נקבל

$$\lim_{x\to\infty}\left(2^x\right)^{1/\sqrt{x}}=[\infty^0]$$

אשר לא מוגדר. נפתח סוגריים בפונקציה:

$$\lim_{x\to\infty}\left(2^x\right)^{1/\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}2^{\sqrt{x}}=2^{\infty}=\infty\ .$$

■

דוגמה 4.21

חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{1/x}$.

פתרון:
אם נציב ∞ ב- x נקבל

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{1/x}=[0^0]$$

אשר לא מוגדר. נפתח סוגריים:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{1/x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x}}=\frac{1}{2}\ ,$$

■

דוגמה 4.22

חשבו אתצ הגבול $\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{1/\sqrt{x}}$.

פתרון:

אם נציב ∞ בפונקציה נקבל

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{1/\sqrt{x}}=[0^0]$$

אשר לא מוגדר. נפתח סוגריים:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{1/\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}=0\ .$$

■

דוגמה 4.23

חשבו אצ הגבול $\lim_{x\to\infty}\left(x^2-x\right)$

פתרון:

אם נציב ∞ ב- x נקבל

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-x\right)=[\infty-\infty]$$

אשר לא מוגדר.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-x\right)=\lim_{x\to\infty}x(x-1)=\infty\ .$$

■

דוגמה 4.24

חשבו את הגבול $\lim_{x\to\infty}\left(\ln(x+2)-\ln x\right)$.

פתרון:

אם נציב ∞ ב- x נקבל

$$\lim_{x\to\infty}\left(\ln(x+2)-\ln x\right)=\infty-\infty$$

אשר לא מוגדר.

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{2}{\infty}\right)=\ln\left(1+0\right)=\ln(1)=0\ .$$

■

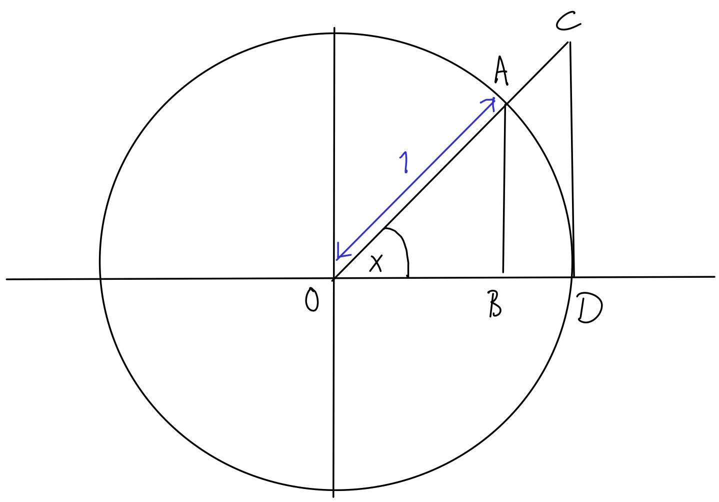
4.7 גבול המופלא הראשון

משפט 4.4

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

הוכחה:

$\underline{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$



$$S_{\Delta OAB}<S_{\Delta OAD}<S_{\Delta OCD}$$

$$S_{\Delta OAB}=\frac{OB\cdot OA}{2}=\frac{\sin x\cdot\cos x}{2}\ ,$$

$$S_{\Delta OAD}=\frac{AD\cdot OA}{2}=\frac{1\cdot 1\cdot x}{2}=\frac{x}{2}\ ,$$

$$S_{\Delta OCD}=\frac{CD\cdot OA}{2}=\frac{1\cdot\tan x}{2}=\frac{\tan x}{2}\ ,$$

$$\frac{\sin x\cdot\cos x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\tan x}{2}$$

שימו לב $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$. נחלק את האי-שוויון ב- $\sin x$:

$$\frac{\cos x}{2}<\frac{x}{2\sin x}<\frac{1}{2\cos x}$$

נכפיל את האי-שוויון ב- 2:

$$\cos x<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

נקח את הגבול $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\cos x < \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} < \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} \qquad \Rightarrow \qquad 1 < \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} < 1$$

לכן לפי כלל הסנדוויץ'

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1 \ .$$

■

דוגמה 4.25

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2} \ .$$

דוגמה 4.26

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1$$

דוגמה 4.27

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$$

נרשום $x = \sin t \qquad \Leftrightarrow \qquad t = \arcsin x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = 1$$

דוגמה 4.28

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$$

נרשום $x = \tan t \qquad \Leftrightarrow \qquad t = \arctan x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\cdot\cos t = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\cdot\lim_{t\to 0}\cos t = 1$$

דוגמה 4.29

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \ .$$

דוגמה 4.30

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x-\sin 2x}{\sin x+\sin 3x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin 4x}{x}-\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 3x}{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4\cdot\frac{\sin 4x}{4x}-2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin x}{x}+3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}\right)$$

$$=\frac{4-2}{1+3}$$

$$=\frac{1}{2}\ .$$

דוגמה 4.31

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x+7x^2}{\sin 2x}\right)=3\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin 2x}\right)+7\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin 2x}\right)$$

$$=3\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{2\sin 2x}\right)+7\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot 2x}{2\sin 2x}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\ .$$

דוגמה 4.32

חשבו את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

פתרון:

עבור הדוגמה הזאת אסור להשתמש בגבול המפופלא הראשון. שימו לב ש $\sin x$ פונקציה חסומה, ו- $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.
לכן

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\left(\lim_{x\to\infty}\sin x\right)\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)=\left(\lim_{x\to\infty}\sin x\right)\cdot 0=0\ .$$

■

4.8 גבול המופלא השני

משפט 4.5

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\ .$$

הגבול המופלא השני פותר את הגבולות במצב 1^{∞}. נקבל את הצורה האחרת של הגבול ע"י ההצבה $\alpha=\frac{1}{x}$.
כך נקבל
$$\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e\ .$$

דוגמה 4.33

חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$.

פתרון:
אם נציב ∞ נקבל
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=1^{\infty}$$
אשר לא מוגדר.

נגדיר משתנה חדש: $t=\frac{x}{2}$. כאשר $x\to\infty$ גם $t\to\infty$. לפיכך
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{2}=e^{2}\ .$$
■

דוגמה 4.34

חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{5/x}$

פתרון:
$$\lim_{x\to0}(1+2x)^{5/x}=1^{\infty}$$
לא מוגדר.
נגדיר $t=2x$ ונשים לב כי כאשר $x\to0$ גם $t\to0$. אז ניתן לרשום את הגבול בצורה
$$\lim_{x\to0}(1+2x)^{5/x}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{10}{t}}=\lim_{t\to0}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{10}=\left(\lim_{t\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{t}}\right)^{10}=e^{10}\ .$$
■

דוגמה 4.35

חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$.

פתרון:
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}=1^{\infty}$$

אשר לא מוגדר.

$$\frac{x}{1+x}=\frac{1+x-1}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}\ .$$

נגדיר $t=\frac{-1}{1+x}$ ונשים לב כי כאשר $x\to\infty$ אז $t\to 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}&=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{t}-1}\\&=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}(1+t)^{-1}\\&=\left[\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-1}\lim_{t\to 0}(1+t)^{-1}\\&=[e]^{-1}(1+0)^{-1}\\&=e^{-1}=\frac{1}{e}\ .\end{aligned}$$

■

דוגמה 4.36

חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2}$.

פתרון:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2}=1^{\infty}$$

לא מוגדר.
נרשום

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2}&=\lim_{x\to 0}\Big(1+(\cos 2x-1)\Big)^{\frac{1}{\cos 2x-1}\cdot\frac{\cos 2x-1}{x^2}}\\&=\left[\lim_{x\to 0}(1+(\cos 2x-1))^{\frac{1}{\cos 2x-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}}\\&=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}}\ .\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2-\sin^2 x-(\cos^2 x+\sin^2 x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{x^2}$$
$$=-2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$
$$=-2\ .$$

לכן

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2}=e^{-2}\ .$$

■

דוגמה 4.37

חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

פתרון:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1^{-\infty}$$

אשר לא מוגדר .

נגדיר $t=\frac{1}{x}$ ונשים לב כי כאשר $x\to\infty$ אז $t\to 0$. נרשום את הגבול בצורה

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=e$$

■

דוגמה 4.38

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-1}{2x^2+5x}\right)^x=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-1}{2x^2+5x}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}x}=\left(\frac{1}{2}\right)^\infty=0$$

דוגמה 4.39

חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-1}{x^2+5x}\right)^x$.

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-1}{x^2+5x}\right)^x=1^\infty$$

לא מוגדר.

$$\frac{x^2+3x-1}{x^2+5x} = \frac{x^2+5x-2x-1}{x^2+5x} = 1 + \frac{-2x-1}{x^2+5x}$$

נגדיר $t = \dfrac{-2x-1}{x^2+5x}$. כאשר $x \to \infty$ אז $t \to 0$. נרשום את הגבול בצורה

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-1}{x^2+5x}\right)^x &= \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}\cdot t\cdot x}\\
&= \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{-2x^2-x}{x^2+5x}\right)}\\
&= \left[\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-2x^2-x}{x^2+5x}\right)}\\
&= e^{-2} = \frac{1}{e^2}\ .
\end{aligned}$$

■

דוגמה 4.40

לאלו ערכי פרמטר m קיים גבול סופי $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(m^2+\frac{1}{x}\right)^x$

פתרון:

עבור $m=1$ או $m=-1$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\ .$$

עבור $m>1$ או $m<-1$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(m^2+\frac{1}{x}\right) = m^2 > 1$$

לכן

$$\lim_{x\to\infty}\left(m^2+\frac{1}{x}\right)^x = \infty\ .$$

עבור $-1<m<1$,

$$\lim_{x\to\infty}\left(m^2+\frac{1}{x}\right) = m^2 < 1$$

לכן

$$\lim_{x\to\infty}\left(m^2+\frac{1}{x}\right)^x = 0\ .$$

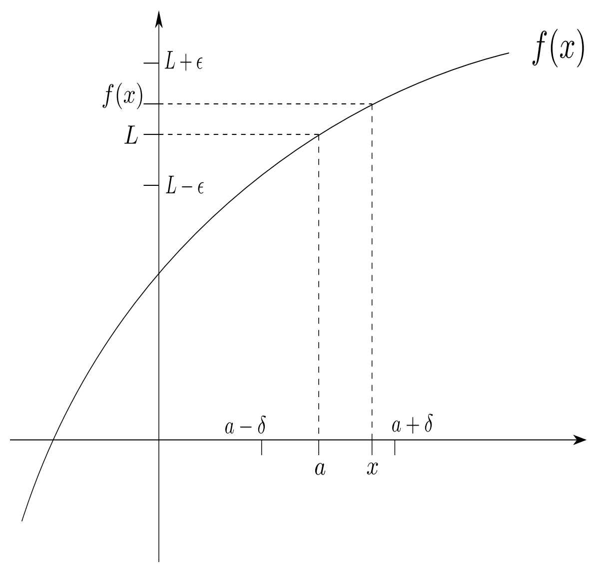
תשובה סופית: הגבול סופי עבור $-1 \le m \le 1$.

■

4.8 הפרקים הבאים להעשרה בלבד

4.9 * הגדרה של גבול של פונקציה לפי $\epsilon - \delta$

נניח שפונקציה $f(x)$ מוגדרת בכל נקודה $a \neq x$ השייכת לסביבה של a.

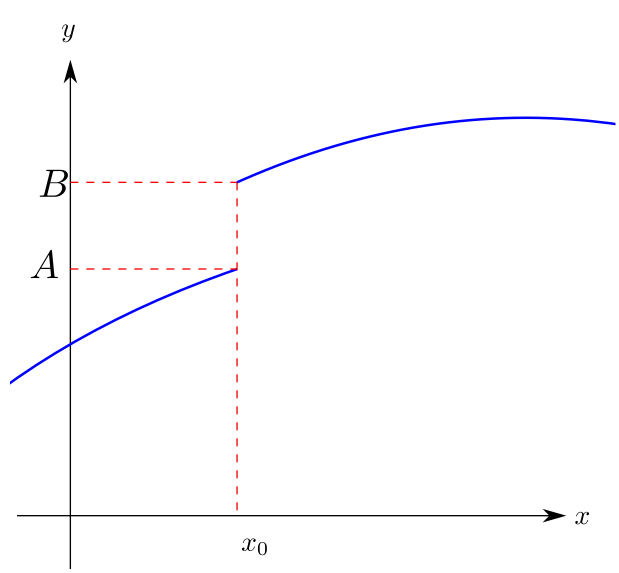


הגדרה 4.7 גבול של פונקציה

אומרים כי $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ אם התנאי הבא מתקיים:
לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש-

$$a-\delta < x < a+\delta \qquad \Rightarrow \qquad L-\epsilon < f(x) < L+\epsilon \ .$$

4.10 * הגדרת גבול חד-צדדי לפי $\epsilon - \delta$



הגדרה 4.8 גבול חד צדדי

גבול מצד שמאול

A נקרא גבול של $f(x)$ בנקודה a **מצד שמאול** אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שהתנאי הבא מתקיים:

$$a-\delta<x<a \qquad \Rightarrow \qquad A-\epsilon<f(x)<A+\epsilon\ .$$

גבול מצד ימין

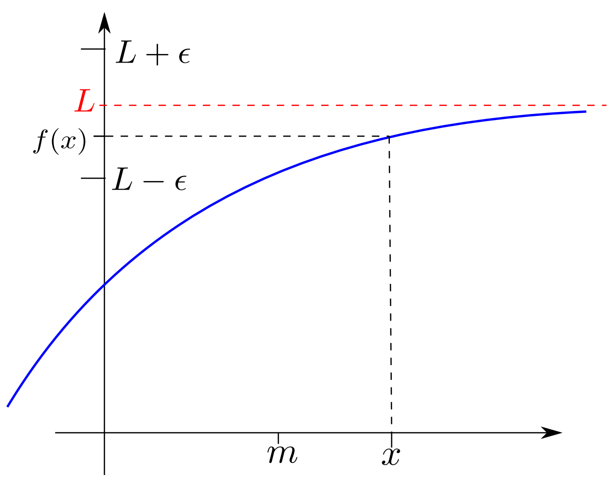
B נקרא גבול של $f(x)$ בנקודה a **מצד ימין** אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שהתנאי הבא מתקיים:

$$a<x<a+\delta \qquad \Rightarrow \qquad B-\epsilon<f(x)<B+\epsilon\ .$$

4.11 * גבול של פונקציה באינסוף לפי $\delta-\epsilon$

הגדרה 4.9

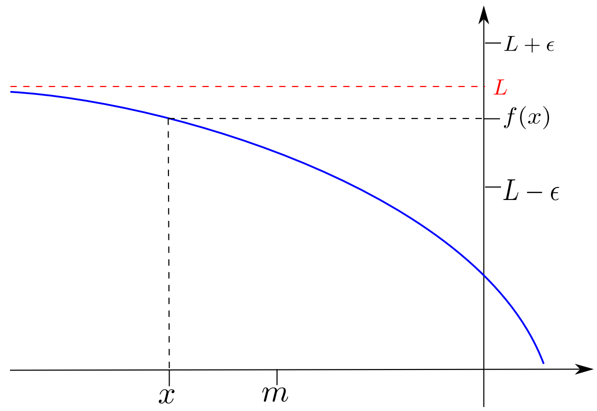
$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$ אם לכל $\epsilon>0$ קיים $m>0$ כך שאם $x>m$ אז $L-\epsilon<f(x)<L+\epsilon$.



4.12 * גבול של פונקציה במינוס אינסוף לפי $\delta-\epsilon$

הגדרה 4.10

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ אם לכל $\epsilon>0$ קיים $m>0$ כך שאם $x<m$ אז $L-\epsilon<f(x)<L+\epsilon$.

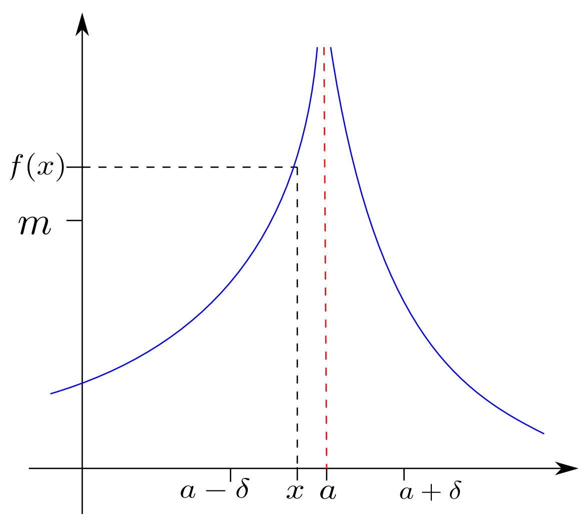


במילים: $\lim_{x\to-\infty} = L$ אם לכל סביבה $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ של L קיים מספר m כך שלכל $x<m$ מתקיים: $f(x)$ שייך לסביבה $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ של L.

4.13 * גבול אינסופי בנקודה לפי $\epsilon-\delta$

הגדרה 4.11 גבול אינסופי של פונקציה בנקודה

$\lim_{x\to a} f(x)\to\infty$ אם לכל m קיים $\delta>0$ כך שאם $a-\delta<x<a+\delta$ אז $f(x)>m$.

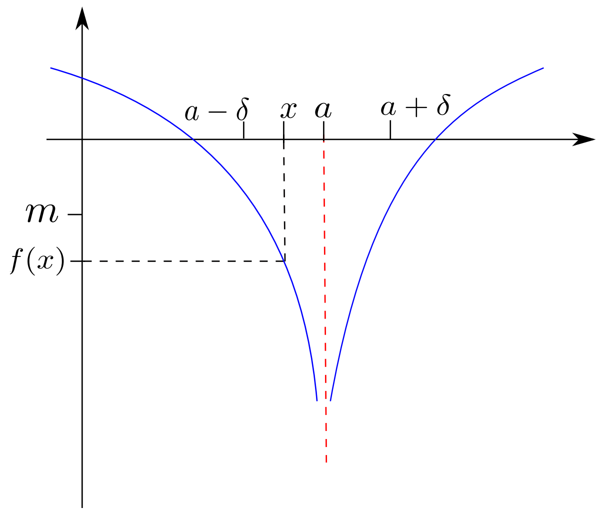


במילים: $\lim_{x\to a} f(x)\to\infty$ אם לכל מספר m קיימת סביבה $(a-\delta, a+\delta)$ של הנקודה a כך שלכל x השייך לסביבה זו, $f(x)>m$.

הגדרה 4.12 גבול מינוס אינסופי של פונקציה בנקודה

$$\lim_{x\to a} f(x)\to-\infty$$

אם לכל m קיים $\delta>0$ כך שלכל $|x-a|<\delta$ אז $f(x)<m$.

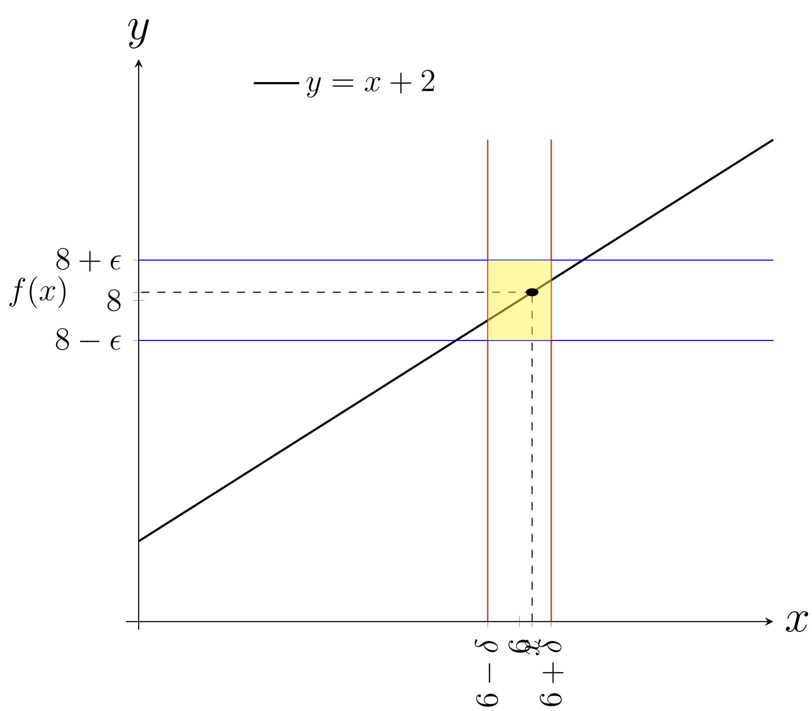


במילים: $\lim_{x\to a} f(x) \to -\infty$ אם לכל מספר m קיימת סביבה $(a-\delta, a+\delta)$ של הנקודה a כך שלכל x השייך לסביבה זו, $f(x) < m$.

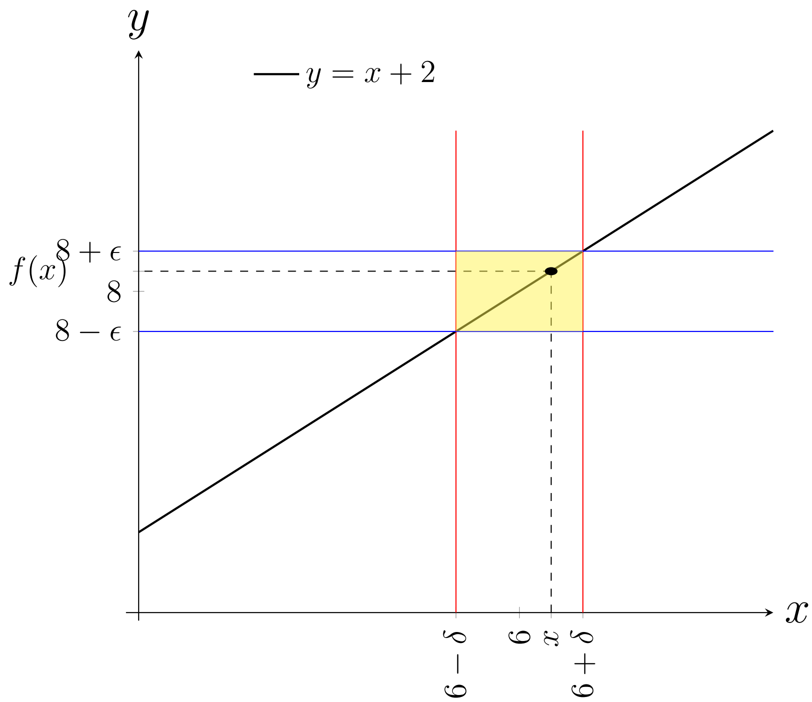
4.14 * הוכחה של קיום גבול

דוגמה 4.41

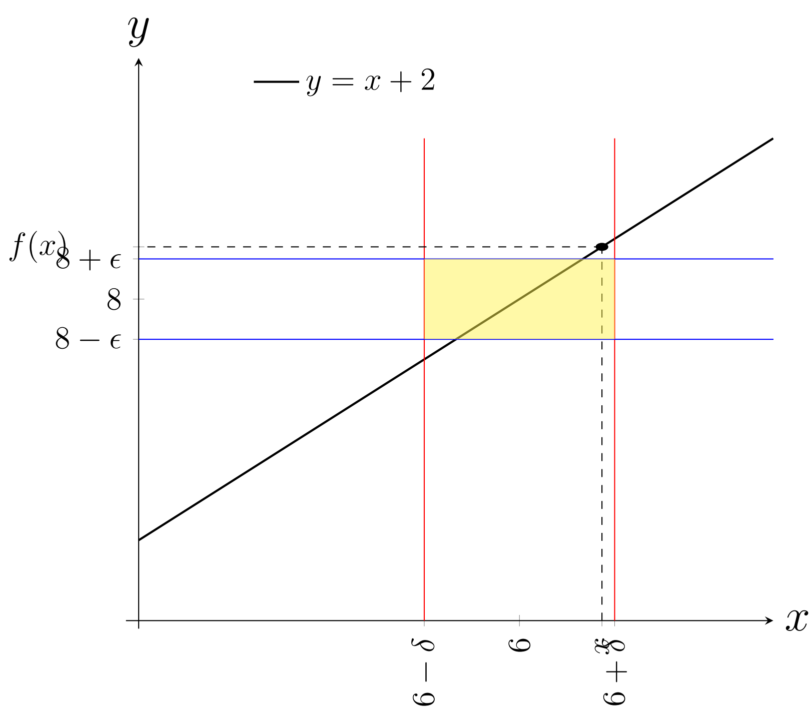
בעזרת ההגדרה של הגבול, עבור הפונקציה $f(x) = x + 2$ נוכיח ש- $\lim_{x\to 6} f(x) = 8$.
נניח שכבר בחרנו ערך של ϵ ובנינו את הסביבה $(8-\epsilon, 8+\epsilon)$ על ציר ה- y.
עכשיו אנחנו בונים את הסביבה $(6-\delta, 6+\delta)$ על ציר ה- x.
הגבול של $f(x)$ שווה ל- 8 אם אנחנו יכולים למצוא סביבה $(6-\delta, 6+\delta)$ כך שאם x נמצא בתוכה, אז הערך של $f(x)$ יהיה מוכל בסביבה $(8-\epsilon, 8+\epsilon)$.
זאת אומרת, הנקודה על הגרף של $f(x)$ שמתאים לנקודה x תהיה בתוך המלבן הצהוב בתרשים.



לסביבת ϵ שבחרנו, אפשר להרחיב את הסביבת δ, כך שלכל x בסביבה $(6-\delta, 6+\delta)$, הערך המתאים של $f(x)$ עדיין יהיה בתוך הסביבה $(8-\epsilon, 8+\epsilon)$. ז"א הנקודה $f(x)$ על הגרף עדיין תהיה בתוך המלבן הצהוב, כמתואר בתרשים להלן.



האם אפשר להרחיב את הסביבת δ כמה שאנחנו רוצים? לא. הרי, נתונה סביבה $(8-\epsilon, 8+\epsilon)$, אם אנחנו בוחרים δ גדול מדיי של הסביבה $(6-\delta, 6+\delta)$, אז יהיו ערכים של x שבתוכה, כך שהערך המתאים של $f(x)$ לא יהיה בתוך הסביבה $(8-\epsilon, 8+\epsilon)$. ז"א הנקודה $f(x)$ על הגרף תהיה בחוץ למלבן הצהוב, כפי שמשורטט בתרשים להלן.



לפיכך, לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש:

$$6-\delta < x < 6+\delta \qquad \Rightarrow \qquad 8-\epsilon < f(x) < 8+\epsilon\ .$$

ה- δ הזה שקיים, הוא ה- δ המקסימלי כך שהתנאי הזה מתקיים, כפי שהסברנו לעיל.

נוכיח ש- $\lim\limits_{x\to 6} f(x)=8$ ע"י למצוא δ כך שהתנאי לקיום הגבול מתקיים, ע"י השלבים הבאים:

שלב 1. לרשום את התנאי לקיום הגבול:

לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש-

$$6-\delta<x<6+\delta \qquad \Rightarrow \qquad 8-\epsilon<x+2<8+\epsilon\ .$$

שלב 2. לרשום תנאי ה- ϵ בצורת ערך מוחלט

$$8-\epsilon<x+2<8+\epsilon \qquad \Rightarrow \qquad -\epsilon<x-6<\epsilon \qquad \Rightarrow \qquad |x-6|<\epsilon\ .$$

שלב 3. להפוך את התנאי ה- δ לצורה דומה לתנאי ה- ϵ

$$6-\delta<x<6+\delta \qquad \Rightarrow \qquad -\delta<x-6<\delta \qquad \Rightarrow \qquad |x-6|<\delta\ .$$

שלב 4. להציב בתנאי לקיום הגבול

$$|x-6|<\delta \qquad \Rightarrow \qquad |x-6|<\epsilon\ .$$

לכן התנאי מתקיים לכל $\delta<\epsilon$.

דוגמה 4.42

עבור הפונקציה $f(x)=3x-8$, הוכיחו כי

$$\lim_{x\to 10} f(x)=22$$

פתרון:

שלב 1. לרשום את התנאי לקיום הגבול:

לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש-

$$10-\delta<x<10+\delta \qquad \Rightarrow \qquad 22-\epsilon<3x-8<22+\epsilon\ .$$

שלב 2. לרשום תנאי ה- ϵ בצורת ערך מוחלט

$$22-\epsilon<3x-8<22+\epsilon \qquad \Rightarrow \qquad -\epsilon<3x-30<\epsilon \qquad \Rightarrow \qquad |3x-30|<\epsilon\ .$$

שלב 3. להפוך את התנאי ה- δ לצורה דומה לתנאי ה- ϵ

$$10-\delta < x < 10+\delta \qquad \Rightarrow \qquad -\delta < x-10 < \delta \qquad \Rightarrow \qquad -3\delta < 3x-30 < 3\delta \qquad \Rightarrow \qquad |3x-30| < 3\delta \ .$$

שלב 4. להציב בתנאי לקיום הגבול

$$|3x-30| < 3\delta \qquad \Rightarrow \qquad |3x-30| < \epsilon \ .$$

לכן התנאי מתקיים לכל $3\delta < \epsilon$,

ז"א $\delta < \dfrac{\epsilon}{3}$.

■

דוגמה 4.43

עבור הפונקציה $f(x) = x^2$, הוכיחו כי

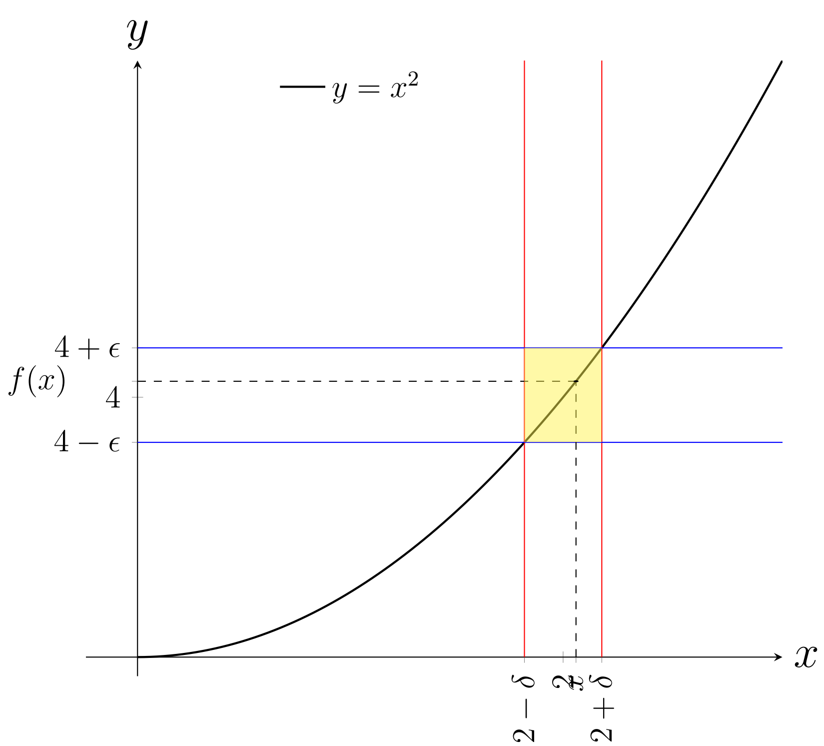
$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \ .$$

פתרון:

באותה מידה של הדומגאות לעיל, ההוכחה של הגבול עניין של למצוא $\delta > 0$ כך שלכל $\epsilon > 0$ התנאי הבא מתקיים:

$$2-\delta < x < 2+\delta \qquad \Rightarrow \qquad 4-\epsilon < x^2 < 4+\epsilon \ ,$$

זאת אומרת לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם x בסביבה $(2-\delta, 2+\delta)$ אז $f(x)$ יהיה בתוב הסביבה $(4-\delta, 4+\delta)$ כמתואר בתרשים.



שלב 1. לרשום את התנאי לקיום הגבול:

לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש-

$$2-\delta < x < 2+\delta \qquad \Rightarrow \qquad 4-\epsilon < x^2 < 4+\epsilon \ .$$

שלב 2. לרשום תנאי ה- ϵ בצורת ערך מוחלט

$$4-\epsilon < x^2 < 4+\epsilon \qquad \Rightarrow \qquad -\epsilon < x^2-4 < \epsilon \qquad \Rightarrow \qquad |x^2-4| < \epsilon \ .$$

שלב 3. להפוך את התנאי ה- δ לצורה דומה לתנאי ה- ϵ

$$2-\delta < x < 2+\delta \qquad \Rightarrow \qquad -\delta < x-2 < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |x-2| < \delta \ .$$

$$2-\delta < x < 2+\delta \quad \Rightarrow \quad 4-\delta < x+2 < 4+\delta \quad \Rightarrow \quad -4-\delta < x+2 < 4+\delta \quad \Rightarrow \quad |x+2| < 4+\delta \ .$$

$$|x^2-4| < \delta(\delta+4)$$

שלב 4. להציב בתנאי לקיום הגבול

$$|x^2-4| < \delta(\delta+4) \qquad \Rightarrow \qquad |x^2-4| < \epsilon \ .$$

לכן התנאי מתקיים לכל $\delta(\delta+4) < \epsilon$. ז"א

$$\delta^2+4\delta-\epsilon < 0 \quad \Rightarrow \quad (\delta-\delta_-)(\delta-\delta_+) < 0$$

כאשר $\delta_+ = -2+\sqrt{4+\epsilon}$ ו- $\delta_- = -2+\sqrt{4-\epsilon}$.

נשים לב כי $\delta_+ > 0$ ו- $\delta_- < 0$. בנוסף, מההגדרה של קיום גבול, δ חיובי. לכן, האופציה היחידה לפנינו היא

$$0 < \delta < \delta_+ \ .$$

אנחנו הוכחנו שקיים δ עבורו התנאי של קיום הגבול מתקיים, והערך הזה הינו $0 < \delta < \delta_+$.

■

דוגמה 4.44

תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת להיות

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ x+2 & x > 2 \end{cases} \ .$$

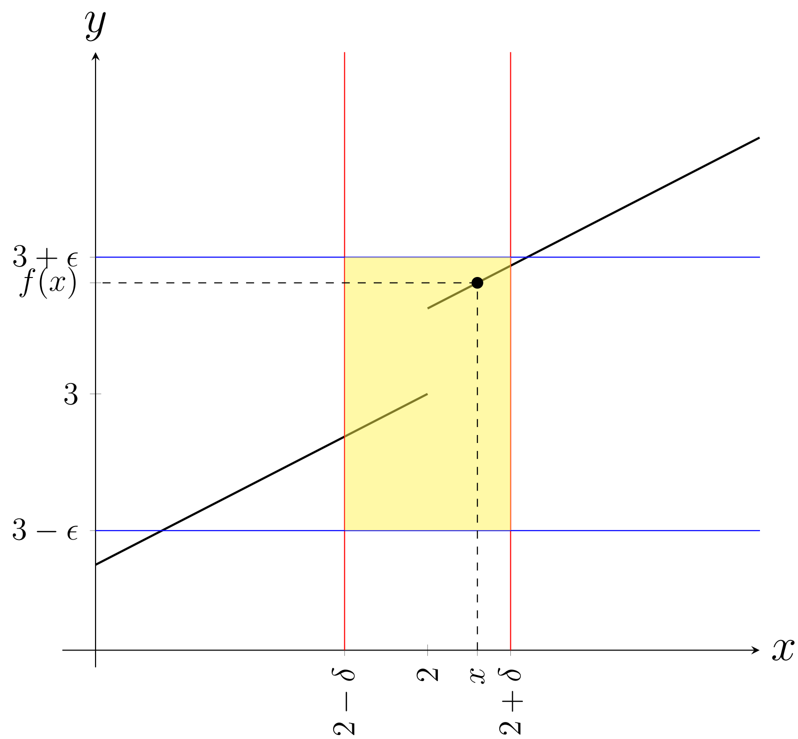
ונוכיח כי המספר $L=3$ לא גבול של $f(x)$ בנקודה $x=2$.

פתרון:

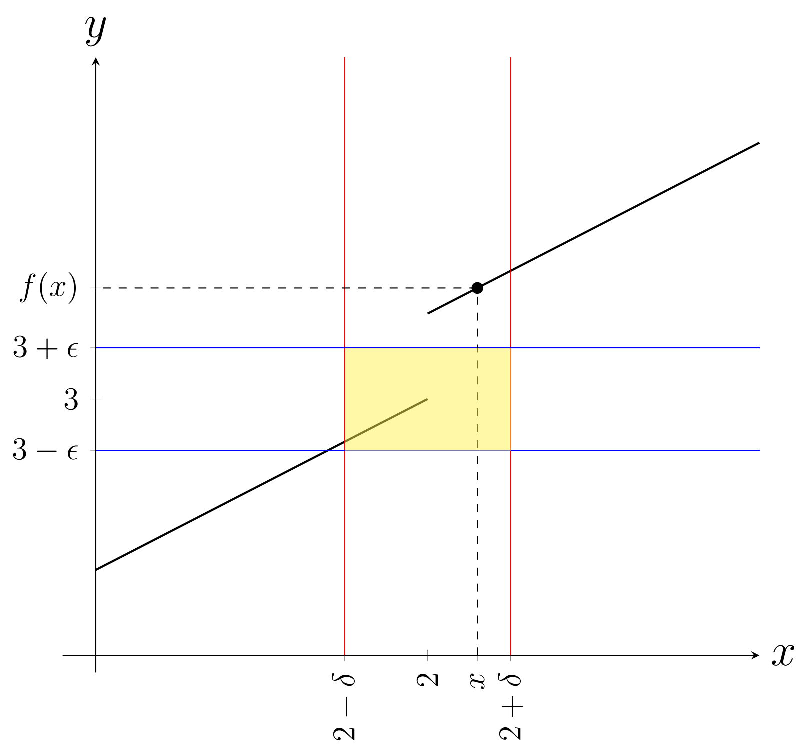
(נראה בהמשך כי הנקודה $x=2$ נקראת נקודת אי-רציפות). נזכיר שאומרים כי $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם

$$-2-\delta < x < 2+\delta \qquad \Rightarrow \qquad 3-\epsilon < f(x) < 3+\epsilon \ .$$

נניח שנבחור $\epsilon = 1$ או כל ערך של ϵ כך הסביבת ϵ מכיל את השני קווים של הגרף של $f(x)$ בצד שמאות וצד ימין של $x=2$ כמתואר בתרשים להלן. אז אפשר למצוא δ כך שלכל x בסביבה $(2-\delta, 2+\delta)$ אז הערך של $f(x)$ המתאים יהיה בתוך הסביבה $(3-\epsilon, 3+\epsilon)$.



אבל נניח שנבחור $\epsilon = \frac{1}{2}$ למשל כמתואר בעשרים להלן. עכשיו אי-אפשר לבנות סביבה $(2-\delta, 2+\delta)$ כך שלכל x בתוכה, $f(x)$ יהיה בתוך הסביבה $(3-\epsilon, 3+\epsilon)$. ז"א יהיו ערכי x שבסביבה $(2-\delta, 2+\delta)$, בפרט ערכי x בצד ימין של $x=2$, עבורם הנקודה $f(x)$ על הגרף יהיה בחוץ למלבן הצהוב, כמתואר בתרשים להלן.



לכן התנאי לקיום הגבול לא מתקיים, ולכן $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq 3$.

ננסח ההוכחה בצורה פורמלית.
נוכיח שהגבול לא קיים בנקודה $x=2$ דרך השלילה.
נניח ש- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$. אז לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש-

$$2-\delta < x < 2+\delta \qquad \Rightarrow \qquad 3-\epsilon < f(x) < 3+\epsilon \ .$$

נניח ש- $x>2$. אז $f(x)=x+2$ ונקבל

$$2<x<2+\delta \qquad \Rightarrow \qquad 3-\epsilon<x+2<3+\epsilon \ .$$

נזכיר כי התנאי מתקיים לכל $\epsilon>0$. נבחור $\epsilon=\frac{1}{2}$ נקלבל

$$2<x<2+\delta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{5}{2}<x+2<\frac{7}{2} \ ,$$

ז"א

$$2<x<2+\delta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2} \ ,$$

בסתירה לכך ש- $x>2$! לפיכך הגבול לא קיים. ∎

דוגמה 4.45

תהי $f(x)$ הפונקציה המוגדרת ע"י

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\leq x\leq 3 \ , \\ x+12 & x>3 \ . \end{cases}$$

הוכיחו כי המספר $A=9$ לא גבול של $f(x)$ בנקודה $x=3$.

פתרון:

תרגיל בית ∎