אלגברה ליניארית 1
סמסטר א' תשפ"ד
תרגילים שונים

שאלות

שאלה 1

א) נתונה מערכת משוואות ליניאריות $A \cdot X = b$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ k+1 & -(k+1) & -1 \\ k & -2k & -3 \end{pmatrix} \ , \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5k-2 \\ 4k-3 \end{pmatrix}$$

מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין פתרון, יש פתרון יחיד, יש אינסוף פתרונות. במקרה של אינסוף פתרונות רשמו את הפתרון הכללי.

ב) יהי V מרחב וקטורי, $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subseteq V$, $B = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \dots, \mathrm{v}_m\} \subseteq V$, $A \cap B = \emptyset$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1) אם קבוצת וקטורים $A \cup B$ היא בלתי תלויה לינארית., אז $\mathrm{sp}(A) \cap \mathrm{sp}(B) = \{\bar{0}\}$.

2) אם $\mathrm{sp}(A) \cap \mathrm{sp}(B) = \{\bar{0}\}$ אז קבוצת וקטורים $A \cup B$ היא בלתי תלויה לינארית.

שאלה 2 (מבחן תשפ"ב סמסבר ב מועד ב)

נתונות הקבוצות הבות:

$$W_1 = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \big| \det(A) = 1\} \ , \qquad W_2 = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \big| 2(A + A^t) = 0\} \ ,$$

א) לכל אחת מהקבוצות הנתונות, מצאו איבר הנמצא בה.

ב) לכל אחת מהקבוצות W_1, W_2, בדקו אם היא תת מרחב ווקטורי של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$. נמקו את תשובותכם.

שאלה 3

פתרו

א)

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & -3 & -10 & 8 \\ 9 & -3 & 7 & 7 \\ 5 & -10 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -14 & 0 & 5 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ג)

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ד)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ה)

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & -5 \\ 4 & 1 & -7 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

שאלה 4

נסמן $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$. מצאו את $A^2 - 5A + 2I$.

שאלה 5

נתונות המטריצות A, B. חשב את המטריצה AB ו- BA אם הן קיימות

א)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

ב)

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

שאלה 6

מטריצות A ו- B נקראות מתחלפות אם $AB = BA$. מצאו את כל המצטריות $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ המתחלפות עם המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

שאלה 7

נתונות $A = \begin{pmatrix} 3 & -k \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & k \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. מצאו את כל ערכי של הפרמטר k כך ש- $AB = BA$.

שאלה 8

תהיינה $A,B,C\in M_n(\mathbb{R})$. הוכח או הפרך:

א) אם $AB=BC$ אז $B=C$.

ב) אם $AB=0$ אז $A=0$ או $B=0$.

ג) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

ד) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

ה) $(AB)^t=A^tB^t$.

ו) $(A+B)^t=A^t+B^t$.

שאלה 9

לכל $1\le i\le m$, $1\le j\le n$ נגדיר $E_{ij}\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ המטריצה אשר כולה אפסים מלבד הרכיב בשורה ה- i והעמודה ה- j שערכו 1. למשל $E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{12}\in M_{3\times 2}$. נסמן $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\6&7&8&9&10\\11&12&13&14&15\\16&17&18&19&20\\21&22&23&24&25\end{pmatrix}$ ויהיו $E_{43},E_{23}\in M_{5\times 5}$. מצאו את $B=E_{43}AE_{23}$.

שאלה 10

תהי $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י

$$T(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix}a+b+c+d & -a+c+2d\\ b+2c+3d & 3a+3b+3c+3d\end{pmatrix}$$

א) מצאו בסיס ומימד לגרעין של T.

ב)
מצאו בסיס ומימד לתמונה של T.
מצאו מטריצה בתמונה של T שהיא בעלת דטרמיננטה השווה ל- 27.

ג) תהי $S:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ ההעתקה הלינארית המוגדרת ע"י

$$S(A)=A-A^t\ .$$

הוכיחו כי כל מטריצה שונה מ- 0 ב- $\mathrm{Im}(S\circ T)$ היא הפיכה.

ד) מצאו מטריצה מייצגת של $2S+3I$ לפנ הבסיס הסטנדרטי E של $R^{2\times 2}$ (I היא העתקת הזהות על $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ו- S היא ההעתקה מסעיף ד')

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

פתרונות

שאלה 1

א)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ k+1 & -(k+1) & -1 & 5k-2 \\ k & -2k & -3 & 4k-3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-kR_1]{R_2\to R_2-(k+1)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & k+1 & k & 2k-5 \\ 0 & 0 & k-3 & k-3 \end{array}\right)$$

$\underline{k=-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-4R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{array}\right)$$

שורה סתירה: אין פתרון.

$\underline{k=0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to -\frac{1}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

פתרון יחיד:

$$\left.\begin{aligned} x-2y-z &= 3 \\ y &= -5 \\ z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned} x+10-1 &= 3 \\ y &= -5 \\ z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned} x &= -6 \\ y &= -5 \\ z &= 1 \end{aligned}\right\} .$$

$\underline{k=3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שורת אפסים: ∞ פתרונות.

$$\left.\begin{aligned} x-2y-z &= 3 \\ 4y+3z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned} x &= 3+2y+z \\ y &= \tfrac{1}{4}-\tfrac{3}{4}z \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned} x &= 3+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}z \\ y &= \tfrac{1}{4}-\tfrac{3}{4}z \end{aligned}\right\} .$$

■

ב) יהי V מרחב וקטורי, $A=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$, $B=\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_m\}$, $A\cap B=\emptyset$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1) אם קבוצת וקטורים $A\cup B$ היא בת"ל, אז $\mathrm{sp}(A)\cap\mathrm{sp}(B)=\{\bar{0}\}$.

פתרון:

נתון: $A\subseteq V$, $B\subseteq V$, $A\cap B=\emptyset$, $A\cup B$ בת"ל.

צריך להוכיח: $\mathrm{sp}(A)\cap\mathrm{sp}(B)=\{\bar{0}\}$

הוכחה:

נוכיח דרך השלילה. נניח $A\cup B$ בת"ל וקיים $\mathrm{x}\in\mathrm{sp}(A)\cap\mathrm{sp}(B)$ כך ש $\mathrm{x}\neq\bar{0}$. אז

$$\mathrm{x}=\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_nu_n=\beta_1\mathrm{v}_1+\ldots+\beta_m\mathrm{v}_m$$

נחסיר אגף השמאל מאגף הימין ונקבל

$$\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_nu_n-\beta_1\mathrm{v}_1-\ldots-\beta_m\mathrm{v}_m=\bar{0}\ .$$

כיוון ש $A\cup B$ בת"ל, אז הצירוף לינארי הזה מתקיים רק אם $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=\beta_1=\ldots=\beta_m=0$. ז"א $\mathrm{x}=\bar{0}$. סתירה.

■

---

2) אם $\mathrm{sp}(A)\cap\mathrm{sp}(B)=\{\bar{0}\}$, אז קבוצת וקטורים $A\cup B$ היא בת"ל.

פתרון:

נתון: $A\subseteq V$, $B\subseteq V$, $A\cap B=\emptyset$, $\mathrm{sp}(A)\cap\mathrm{sp}(B)=\{\bar{0}\}$.

צריך להוכיח: $A\cup B$ קבוצת בת"ל.

דוגמה נגדית:

$$A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ ,\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}\subset\mathbb{R}^2\ ,\qquad B=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\subset\mathbb{R}^2$$

$A\cap B=\emptyset$ ו $\mathrm{sp}(A)\cap\mathrm{sp}(B)=\{\bar{0}\}$.

$$A\cup B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ ,\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\ ,\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$A\cup B$ קבוצת תלויה לינארית.

■

שאלה 2

$$W_1=\{A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})\big|\det(A)=1\}\ ,\qquad W_2=\{A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})\big|2(A+A^t)=0\}\ ,$$

א)

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in W_1\ ,\qquad \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in W_2\ .$$

ב) W_1 לא תת מרחב של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ כי $\bar{0}\notin W_1$.

נסמן $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. $\Leftarrow$

$$A+A^t=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a&b+c\\c+b&2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

לכן $a=0$, $d=0$, $b+c=0$. ז"א

$$W_2=\left\{A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})\big|a=0,d=0,b+c=0\right\}$$

מרחב וקטורי של מערכת הונוגנית. לכן W_2 תת מרחב של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

■

שאלה 3

א)

$$3\cdot\begin{pmatrix}-4&0&1&-2\\5&-3&-1&2\\-1&0&-3&-1\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}-2&1&5&-3\\0&-2&-4&-1\\-3&1&2&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5&-3&-10&8\\9&-3&7&7\\5&-10&-12&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-12&0&3&-6\\15&-9&-3&6\\-3&0&-9&-1\end{pmatrix}+\cdot\begin{pmatrix}8&-4&-20&12\\0&8&16&4\\12&-4&-8&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&3&10&-8\\-9&3&-7&-7\\-5&10&12&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&-1&-7&-2\\6&2&6&3\\4&6&-5&9\end{pmatrix}$$

■

ב)

$$\begin{pmatrix}1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-14&0&5\\4&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&16&9\end{pmatrix}$$

■

ג)

$$\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9 & 7\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3\\ -3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 6\end{pmatrix}$$

■

ד)

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -2 & 0 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -3\end{pmatrix}$$

■

ה)

$$\begin{pmatrix}7 & -6 & -5\\ 4 & 1 & -7\\ 5 & -1 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 4\\ -1 & 2\\ 9 & -10\end{pmatrix}$$

■

שאלה 4

$$\begin{aligned}A^2-5A+2I &= \begin{pmatrix}7 & 0 & 0\\ 4 & 1 & -7\\ 0 & -1 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 0 & 0\\ 4 & 1 & -7\\ 0 & -1 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}35 & 0 & 0\\ 20 & 5 & -35\\ 0 & -5 & 30\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}49 & 0 & 0\\ 32 & 8 & -49\\ -4 & -7 & 43\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}35 & 0 & 0\\ 20 & 5 & -35\\ 0 & -5 & 30\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}16 & 0 & 0\\ 12 & 5 & -14\\ -4 & -2 & 15\end{pmatrix}\end{aligned}$$

■

שאלה 5

א)

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 10\\ -10 & -2\end{pmatrix}\ ,\qquad BA=\begin{pmatrix}-8 & -8\\ 20 & 8\end{pmatrix}\ .$$

■

ב) AB לא קיים.

$$BA = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 6 \\ 12 & 18 & 6 \end{pmatrix} .$$

■

שאלה 6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} .$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ x+z & w+y \end{pmatrix} ,$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & y \\ w+z & w \end{pmatrix} .$$

לכן

$$A \cdot B = B \cdot A \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} x & y \\ x+z & w+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & y \\ w+z & w \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x & = x+y \\ x+z & = z+w \\ y+w & = w \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad y=0 \ , x=w \ .$$

$$B = \begin{pmatrix} w & 0 \\ z & w \end{pmatrix} \ , z,w \in \mathbb{R} \ .$$

■

שאלה 7

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 21-5k & -6k \\ -30 & 9-5k \end{pmatrix} , \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 21-5k & -6k \\ -30 & 9-5k \end{pmatrix} .$$

לכן $AB = BA$ לכל $k \in \mathbb{R}$.

■

שאלה 8

תהיינה $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$. הוכח או הפרך:

א) <u>אם $AB = BC$ אז $B = C$</u>:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

$$A\cdot B=A\cdot C=0\ ,\qquad B\neq C\ .$$

■

ב) <u>אם $AB=0$ אז $A=0$ או $B=0$</u>:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

$$A\cdot B=0\ ,\qquad A\neq 0\ ,B\neq 0\ .$$

■

ג) <u>$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$</u>:

טענה לא נכונה. הסבר:

$$(A+B)^2=(A+B)\cdot(A+B)=A^2+AB+BA+B^2\neq A^2+2AB+B^2$$

עבור מטריצות A,B לא מתחלפות.

דוגמה נגדית:

$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&2\\0&0\end{pmatrix}$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}-1&2\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

$AB\neq BA$ לכן $A^2+AB+BA+B^2\neq A^2+2AB+B^2$.

■

ד) <u>$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$</u>:

טענה לא נכונה. הסבר:

$$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2$$

רק עבור מטריצות מתחלפות, ז"א $AB=BA$.

דוגמה נגדית:

$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix} \ , \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \ .$$

$AB \neq BA$ לכן $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq^2 -B^2$.

■

ה) $(AB)^t = A^t B^t$:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 15\end{pmatrix} \ , \qquad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 15\end{pmatrix} \ .$$

$A^t = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 0\end{pmatrix}$.

$$A^t \cdot B^t = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14 & 2\\ 18 & 4\end{pmatrix} \ .$$

ז"א $(AB)^t \neq A^t B^t$.

■

ו) $(A+B)^t = A^t + B^t$:

טענה נכונה. הוכחה:

נוכיח את הטענה לכל איבר A_{ij} של A וכל איבר B_{ij} של B ($i, j = 1, \ldots n$).

$$(A_{ij} + B_{ij})^t = A_{ji} + B_{ji} = (A^t)_{ij} + (B^t)_{ij} = (A^t + B^t)_{ij}$$

לכל $i, j = 1, \ldots n$.

■

שאלה 9

$$A \cdot E_{23} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 17 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 22 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$E_{43}\cdot A\cdot E_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&12&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

■

שאלה 10

מטרימה מיצגת:

$$A=\begin{pmatrix}[T(e_1)]_E & [T(e_2)]_E & [T(e_3)]_E & [T(e_4)]_E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&0&1&2\\0&1&2&3\\3&3&3&3\end{pmatrix}$$

א) $\text{Ker}(T)\approx\text{Nul}(A)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\-1&0&1&2&0\\0&1&2&3&0\\3&3&3&3&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_4\to R_4-3R_1]{R_2\to R_2+R_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&2&3&0\\0&1&2&3&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&2&3&0\\0&1&2&3&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&2&3&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

הפתרון הוא

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z+2w\\-2z-3w\\z\\w\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\ .$$

$\text{Nul}(A)$ שווה ל- Nul של המדורגת של A. ולכן בסיס של $\text{Nul}(A)$ הינו

$$B_{\text{Nul}}(A)=\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

והבסיס המתאים של $\text{Ker}(T)$ הוא

$$B_{\text{Ker}(T)}\left\{1-2x+x^2,2-3x+x^3\right\}$$