שיעור 8
רדוקציה

8.1 טבלה של רדוקציות

טבלה של רדוקציות

רדוקציה	עמוד
$L_{\text{HALT}} \leqslant L_{\text{acc}}$	דוגמה 8.6 עמוד 86
$\bar{L}_{\text{acc}} \leqslant L_{\text{NOTREG}}$	דוגמה 8.11 עמוד 90
$L_{\text{acc}} \leqslant L_{\text{NOTREG}}$	דוגמה 8.12 עמוד 91
$L_{\text{HALT}} \leqslant L_{\text{NOTREG}}$	דוגמה 8.13 עמוד 92
$L_{\text{acc}} \leqslant L_{\text{REG}}$	דוגמה 8.15 עמוד 94
$\bar{L}_{\text{acc}} \leqslant L_{\text{REG}}$	דוגמה 8.14 עמוד 93
$\bar{L}_{\text{acc}} \leqslant L_{M_1 \neg M_2}$ כאשר $L_{M_1 \neg M_2} = \{\langle M_1, M_2, w\rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2)\}$.	דוגמה 8.16 עמוד 95
$\bar{L}_{\text{acc}} \leqslant L_{M_1 \subset M_2}$ כאשר $L_{M_1 \subset M_2} = \{\langle M_1, M_2\rangle \mid L(M_1) \subset L(M_2)\}$.	דוגמה 8.17 עמוד 95

8.2 מ"ט המחשבת את פונקציה

הגדרה 8.1 מ"ט המחשבת פונקציה

בהינתן פונקציה $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ אומרים כי מ"ט M מחשבת את f אם לכל $x \in \Sigma^*$:

- M מגיעה ל- q_{acc} בסוף החישוב של $f(x)$ וגם
- על סרט הפלט של M רשום $f(x)$.

הערה 8.1

מ"ט שמחשבת פונקציה עוצרת תמיד.

הגדרה 8.2 מ"ט המחשבת פונקציה

בהינתן פונקציה $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ אומרים כי f חשיבה אם קיימת מ"ט המחשבת את f.

דוגמה 8.1

$$f_1(x) = xx \ . \tag{8.1}$$

$f_1(x)$ חשיבה.

דוגמה 8.2

$$f_2(x) = \begin{cases} x & \text{זוגי} |x| \\ xx & \text{אי-זוגי} |x| \end{cases} \ . \tag{8.2}$$

$f_2(x)$ חשיבה.

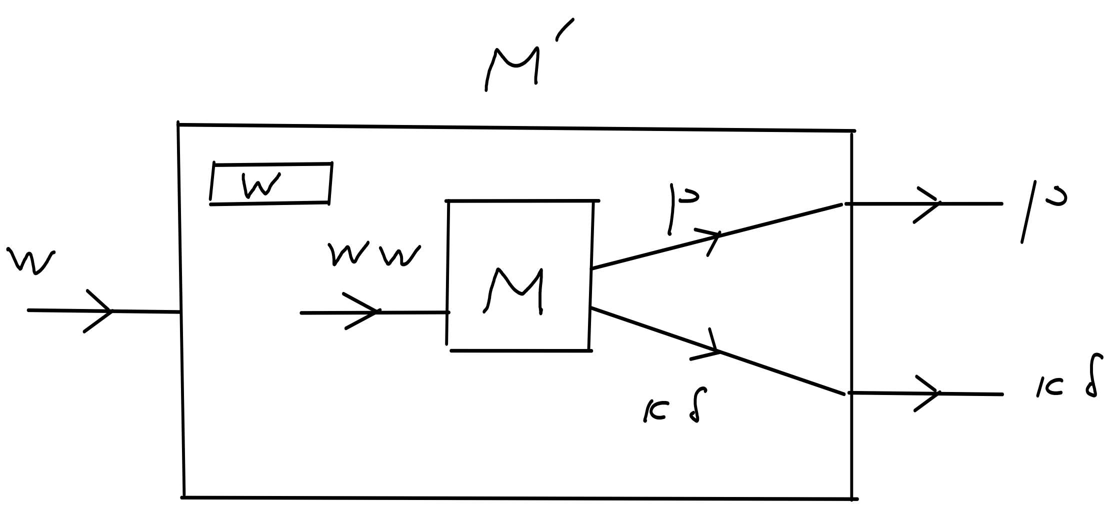
דוגמה 8.3

$$f_3(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M \rangle \\ \langle M^* \rangle & x \neq \langle M \rangle \end{cases} \ . \tag{8.3}$$

כאשר

- M^* מ"ט שמקבלת כל קלט.
- M' מ"ט המקבלת את השפה

$$L(M') = \{ w \in \Sigma^* \mid ww \in L(M) \ .\}$$



$f_3(x)$ חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שבודקת האם $x = \langle M \rangle$. אם לא, מחזירה קידוד קבוע $\langle M^* \rangle$. ואם כן, מחזירה קידוד $\langle M' \rangle$ ע"י הוספת מעברים המשכפלים את הקלט בתחילת הקידוד $\langle M \rangle$.

דוגמה 8.4

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & x = \langle M\rangle \wedge \langle M\rangle \in L(M) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \tag{8.4}$$

$f_4(x)$ לא חשיבה כי ייתכנו קלטים $x = \langle M\rangle$ ו- M לא עוצרת על $\langle M\rangle$.

8.3 רדוקציות

הגדרה 8.3 רדוקציות

בהינתן שתי שפות $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ אומרים כי L_1 ניתנת לרדוקציה ל- L_2, ומסמנים

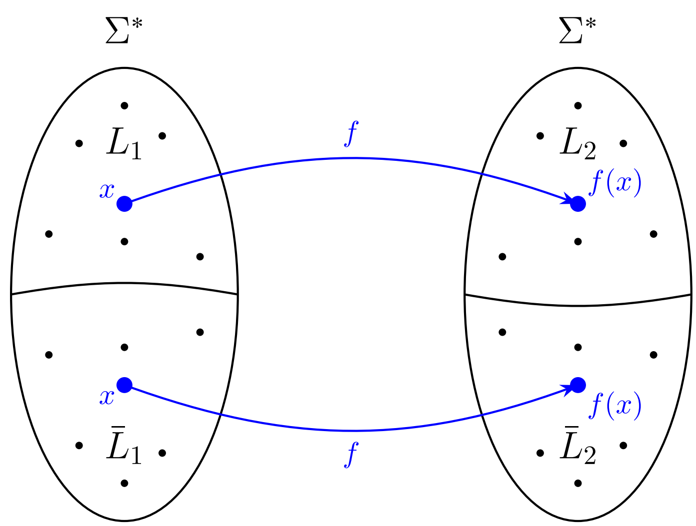
$$L_1 \leqslant L_2 \ ,$$

אם $\exists$ פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ המקיימת:

(1 f חשיבה

(2 לכל $x \in \Sigma^*$:

$$x \in L_1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_2 \ .$$



דוגמה 8.5

נתונות השפות

$$L_1 = \left\{x \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \text{זוגי } |x|\right\} \ ,$$
$$L_2 = \left\{x \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \text{אי-זוגי } |x|\right\} \ .$$

הוכיחו כי

$$L_1 \leqslant L_2 \ .$$

פתרון:

נגדיר את הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{זוגי } |x|,\\ 10 & \text{אי-זוגי } |x|\end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

$x\in L_1 \Leftarrow$ זוגי $|x| \Leftarrow f(x)=1 \Leftarrow$ אי-זוגי $|f(x)|$ $f(x)\in L_2$.

$x\notin L_1 \Leftarrow$ אי-זוגי $|x| \Leftarrow f(x)=10 \Leftarrow$ זוגי $|f(x)|$ $f(x)\notin L_2$.

משפט 8.1 משפט הרדוקציה

לכל שתי שפות $L_1,L_2\subseteq\Sigma^*$, אם קיימת רדוקציה

$$L_1 \leqslant L_2$$

אזי התנאים הבאים מתקיימים:

(1) $L_2\in R \Rightarrow L_1\in R$

(2) $L_2\in RE \Rightarrow L_1\in RE$

(3) $L_1\notin R \Rightarrow L_2\notin R$

(4) $L_1\notin RE \Rightarrow L_2\notin RE$

הוכחה: מכיוון ש-

$$L_1\leqslant L_2$$

קיימת פונקציה f חשיבה המקיימת:

$$x\in L_1 \quad\Leftrightarrow\quad f(x)\in L_2$$

לכל $x\in\Sigma^*$.

תהי M_f מ"ט המחשבת את f.

(1) נוכיח $L_2\in R \Leftarrow L_1\in R$

תהי M_2 מ"ט המכריעה את L_2.

נבנה מ"ט M_1 המכריעה את L_1.

התאור של M_1

$M_1=$ על קלט x:

1. מחשבת את $f(x)$ בעזרת M_f.
2. מריצה את M_2 על $f(x)$ ועונה כמוה.

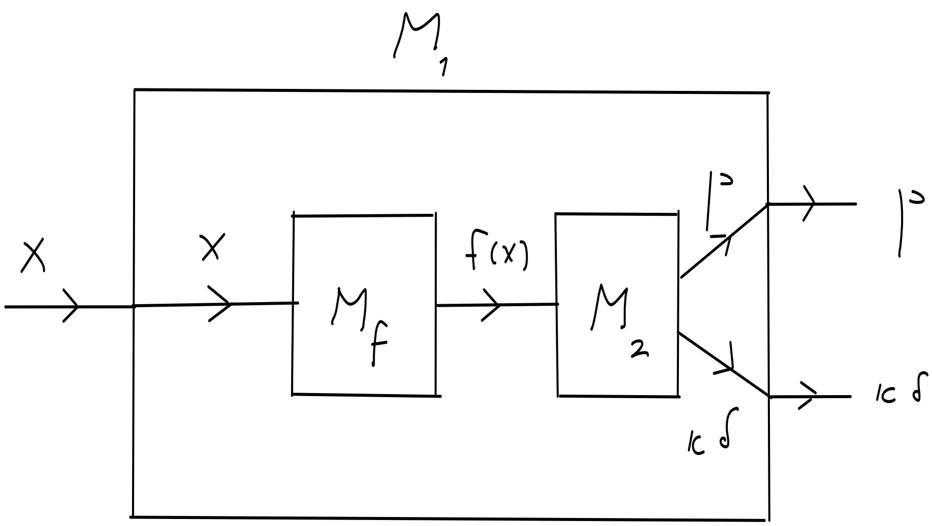
נוכיח כי M_1 מכריעה את L_1.

- אם $x\in L_1 \quad\Leftarrow\quad f(x)\in L_2 \quad\Leftarrow\quad M_2$ מקבלת את $f(x) \quad\Leftarrow\quad M_1$ מקבלת את x.

- אם $x \notin L_1$ $\Leftarrow$ $f(x) \notin L_2$ $\Leftarrow$ M_2 דוחה את $f(x)$ $\Leftarrow$ M_1 דוחה את x.

(2) <u>נוכיח $L_2 \in RE \Leftarrow L_1 \in RE$</u>

תהי M_2 מ"ט המקבלת את L_2.
נבנה מ"ט M_1 המקבלת את L_1.



<u>התאור של M_1</u>

$M_1 =$ על קלט x:

1. מחשבת את $f(x)$ בעזרת M_f.
2. מריצה את M_2 על $f(x)$ ועונה כמוה.

נוכיח כי M_1 מקבלת את L_1:

- אם $x \in L_1$ $\Leftarrow$ $f(x) \in L_2$ $\Leftarrow$ M_2 מקבלת את $f(x)$ $\Leftarrow$ M_1 מקבלת את x.
- אם $x \notin L_1$ $\Leftarrow$ $f(x) \notin L_2$ $\Leftarrow$ M_2 לא מקבלת את $f(x)$ $\Leftarrow$ M_1 לא מקבלת את x.

(3)

(4)

■

כלל 8.1

- אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי $L \in RE$, בוחרים שפה אחרת $L' \in RE$ ומראים שקיימת רדוקציה $L \leqslant L'$.

לדוגמה:

$$L \leqslant L_{\text{acc}}$$

(כנ"ל לגבי R)

- אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי $L \notin RE$ בוחרים שפה אחרת $L' \notin RE$ ומראים שקיימת רדוקציה

$$L' \leqslant L \ .$$

לדוגמה

$$L_{\text{d}} \leqslant L$$

(כנ"ל לגבי R).

דוגמה 8.6

נתונות השפות $L_{\text{acc}} = \{\langle M, w\rangle \mid w \in L(M)\}$ ו- $L_{\text{halt}} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ עוצרת על } w\}$.
הוכיחו כי $L_{\text{acc}} \notin R$ ע"י רדוקציה $L_{\text{acc}} \leqslant L_{\text{halt}}$.

פתרון:
נבנה פונקציה f חשיבה ומקיימת

$$x \in L_{\text{acc}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_{\text{halt}} \ .$$

M מקבלת את w $\Leftarrow$ M' תעצור על w'.
M דוחה את w $\Leftarrow$ M' לא תעצור על w'.
M לא עוצרת את w $\Leftarrow$ M' לא תעצור על w'.

$$f(x) = \begin{cases} \langle M', w\rangle & : x = \langle M, w\rangle \\ \langle M_{\text{loop}}, \varepsilon\rangle & : x \neq \langle M, w\rangle \end{cases}$$

כאשר

- M_{loop} מ"ט שלא עוצרת על אף קלט.
- M' מ"ט המתנהגת כמו M פרט למקומות בהם M עצרה ודחתה, M' תיכנס ללולאה אינסופית.

נכונות הרדוקציה

f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x = \langle M, w\rangle$.

אם לא, תחזיר קידוד קבוע $\langle M_{\text{loop}}, w\rangle$

ואם כן, תחזיר קידוד $\langle M', w\rangle$ ע"י ביצוע שינויים לוקלים בקידוד של M.

נוכיח כי $f(x) \in L_{\text{halt}} \quad \Leftrightarrow \quad x \in L_{\text{acc}}$.

אם $x \in L_{\text{acc}}$:

$\Leftarrow$ $x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \in L(M)$

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M', w\rangle$ ו- M' עוצרת ומקבלת את w

$\Leftarrow$ $f(x) \in L_{\text{halt}}$.

אם $x \notin L_{\text{acc}}$ אז שני מקרים:

מקרה 1:

$x \neq \langle M, w\rangle$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M_{\text{loop}}, \varepsilon\rangle$ ו- M_{loop} לא עוצרת על ε $\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\text{halt}}$.

מקרה 2:

$x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \notin L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M', w\rangle$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

מקרה א: M לא עוצרת על w $\Leftarrow$ M' לא עוצרת על w $\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\text{halt}}$.

מקרה ב: M דוחה את w $\Leftarrow$ M' לא עוצרת על w $\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\text{halt}}$.

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $L_{\text{halt}} \leqslant L_{\text{acc}}$. ומכיוון ש- $L_{\text{acc}} \notin R$ (משפט 7.4) אז ממשט הרדוקציה 8.1, מתקיים $L_{\text{halt}} \notin R$.

דוגמה 8.7

נתונה השפה

$$L_{\Sigma^*} = \{\langle M\rangle \mid L(M) = \Sigma^*\}$$

ונתונה השפה

$$\bar{L}_{\Sigma^*} = \{\langle M\rangle \mid L(M) \neq \Sigma^*\} \cup \{x \neq \langle M\rangle\} \ .$$

הוכיחו כי:

א) $L_{\Sigma^*} \notin RE$

ב) $L_{\Sigma^*} \notin R$

ג) $\bar{L}_{\Sigma^*} \notin RE$

פתרון:

נוכיח כי $L_{\Sigma^*} \notin R$ ע"י רדוקציה

$$L_{\text{acc}} \leqslant L_{\Sigma^*} \ .$$

נבנה פונקציה חשיבה f המקיימת

$$x \in L_{\text{acc}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_{\Sigma^*} \ .$$

$$w \in L(M) \quad \Rightarrow \quad L(M') = \Sigma^*$$

$$w \notin L(M) \quad \Rightarrow \quad L(M') \neq \Sigma^*$$

$$f(x) = \begin{cases} \langle M'\rangle & : x = \langle M, w\rangle \\ \langle M_{\varnothing}\rangle & : x \neq \langle M, w\rangle \end{cases}$$

כאשר

- $M_{\varnothing}$ מ"ט שדוחה כל קלט.
- M' היא מ"ט שעל כל קלט x, מתעלמת מ- x ומריצה את M על w ועונה כמוה.

<u>אבחנה:</u>

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & : w \in L(M) \\ \varnothing & : w \notin L(M) \end{cases}$$

<u>נכונות הרדוקציה:</u>

f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x = \langle M, w\rangle$.

אם לא תחזיר קידוד קבוע $\langle M_{\varnothing}\rangle$.

אם כן, תחזיר קידוד $\langle M'\rangle$ ע"י הוספת קוג ל- M שמוחק את הקלט מהסרט וכותב w במקומו.

נוכיח כי

$$x \in L_{\text{acc}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_{\Sigma*}$$

אם $x \in L_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ $x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \in L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M'\rangle$ ולפי האבחנה $L(M') = \Sigma^*$ $\Leftarrow$ $f(x) \in L_{\Sigma*}$.

אם $x \in L_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

<u>מקרה 1):</u> $x \neq \langle M, w\rangle$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M_{\varnothing}\rangle$ ו- $L\left(M_{\varnothing}\right) = \varnothing$ $\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\Sigma*}$.

<u>מקרה 2):</u> $x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \notin L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M'\rangle$ ולפי האבחנה $L\left(M'\right) = \varnothing$ $\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\Sigma*}$.

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $L_{\text{acc}} \leqslant L_{\Sigma*}$. ומכיוון ש- $L_{\text{acc}} \notin R$ (משפט 7.4) אז ממשפט הרדוקציה 8.1, מתקיים $L_{\Sigma*} \notin R$.

דוגמה 8.8

נתונה השפה

$$L_{\text{d}} = \{\langle M\rangle \mid \langle M\rangle \notin L(M)\}$$

ונתונה השפה

$$\bar{L}_{\text{acc}} = \{\langle M, w\rangle \mid w \notin L(M)\} \cup \{x \neq \langle M, w\rangle\} \ .$$

הוכיחו כי
$\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$ ע"י רדוקציה

$$L_{\text{d}} \leqslant \bar{L}_{\text{acc}} \ .$$

פתרון:
נבנה פונקציה חשיבה f המקיימת

$$x \in L_{\text{d}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_{\text{acc}} \ .$$

$$\langle M\rangle \notin L(M) \quad \Rightarrow \quad w' \notin L(M')$$

$$\langle M\rangle \in L(M) \quad \Rightarrow \quad w' \in L(M')$$

$$f(x)=\begin{cases}\langle M,\langle M\rangle\rangle & : x=\langle M\rangle\\ \langle M^*,\varepsilon\rangle & : x\neq\langle M\rangle\end{cases}$$

כאשר M^* המ"ט שמקבלת כל קלט.

נכונות הרדוקציה:

f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x=\langle M,w\rangle$.

אם לא תחזיר קידוד קבוע $\langle M^*,\varepsilon\rangle$.

אם כן, תחשב $\langle M,\langle M\rangle\rangle$.

נוכיח כי

$$x\in L_{\mathrm{d}}\quad\Leftrightarrow\quad f(x)\in\bar{L}_{\mathrm{acc}}$$

אם $x\in L_{\mathrm{d}}$ $\Leftarrow$ $x=\langle M\rangle$ ו- $\langle M\rangle\notin L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x)=\langle M,\langle M\rangle\rangle$ ו- $\langle M\rangle\notin L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x)\in\bar{L}_{\mathrm{acc}}$.

אם $x\notin L_{\mathrm{d}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

מקרה 1): $x\neq\langle M\rangle$ $\Leftarrow$ $f(x)=\langle M^*,\varepsilon\rangle$ ו- $\varepsilon\in L(M^*)$ $\Leftarrow$ $f(x)\notin\bar{L}_{\mathrm{acc}}$.

מקרה 2): $x=\langle M\rangle$ ו- $\langle M\rangle\in L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x)=\langle M,\langle M\rangle\rangle$ ו- $\langle M\rangle\in L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x)\notin\bar{L}_{\mathrm{acc}}$.

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $L_{\mathrm{d}}\leqslant\bar{L}_{\mathrm{acc}}$, ומכיוון ש- $L_{\mathrm{d}}\notin RE$ (משפט 7.3) אז ממשפט הרדוקציה 8.1, מתקיים $\bar{L}_{\mathrm{acc}}\notin RE$.

משפט 8.2 משפט הרדוקציה בין שפות משלימות

אם קיימת רדוקציה $L_1\leqslant L_2$, אזי קיימת רדוקציה $\bar{L}_1\leqslant\bar{L}_2$.

הוכחה:

אם $\exists$ רדוקציה

$$L_1\leqslant L_2$$

אזי $\exists$ פונקציה חשיבה f המקיימת

$$x\in L_1\quad\Leftrightarrow\quad f(x)\in L_2$$

ולכן עבור אותה פונקציה f היא גם חשיבה וגם מקיימת

$$x\in\bar{L}_1\quad\Leftrightarrow\quad f(x)\in\bar{L}_2$$

ולכן

$$\bar{L}_1\leqslant\bar{L}_2\ .$$

■

8.4 דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה בין שפות משלימות (משפט 8.2)

דוגמה 8.9

הוכחנו בדוגמה 8.7 רדוקציה

$$L_{\text{acc}} \leqslant L_{\Sigma^*} \ .$$

לכן לפי משפט 8.2 קיימת רדוקציה

$$\bar{L}_{\text{acc}} \leqslant \bar{L}_{\Sigma^*} \ .$$

מכיוון ש- $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$, אזי ממשפט הרדוקציה 8.1 מתקיים $\bar{L}_{\Sigma^*} \notin RE$.

דוגמה 8.10

הוכחנו בדוגמה 8.8 רדוקציה

$$L_{\text{d}} \leqslant \bar{L}_{\text{acc}} \ .$$

לכן לפי משפט 8.2 קיימת רדוקציה

$$\bar{L}_{\text{d}} \leqslant L_{\text{acc}} \ .$$

מכיוון ש- $L_{\text{acc}} \in RE$, אזי ממשט הרדוקציה 8.1 מתקיים $\bar{L}_{\text{d}} \in RE$.

8.5 דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה (משפט 8.1)

דוגמה 8.11 $\bar{L}_{\text{acc}} \leqslant L_{\text{NOTREG}}$

תהי L_{NOTREG} השפה

$$L_{\text{NOTREG}} = \left\{ \langle M \rangle \ \middle| \ L(M) \text{ לא רגולרית} \right\} \ .$$

הוכיחו כי השפה L_{NOTREG} לא כריעה על ידי רדוקציה מ- $\bar{L}_{\text{acc}}$.

פתרון:

השפה $\bar{L}_{\text{acc}}$ מוגדרת

$$\bar{L}_{\text{acc}} = \left\{ \langle M, w \rangle \ \middle| \ M \text{ לא מקבלת } w \right\} \cup \left\{ x \neq \langle M, w \rangle \right\} \ .$$

והשפה L_{NOTREG} מוגדרת

$$L_{\text{NOTREG}} = \left\{ \langle M \rangle \ \middle| \ L(M) \text{ לא רגולרית} \right\} \ .$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ w' \in PAL & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M' מ"ט הבאה:

$M' =$ על כל קלט y:

1) אם $y \in PAL$ $\Leftarrow$ מקבלת.

2) אחרת מריצה M על w ועונה כמוה.

<u>הוכחת נכונות הרדוקציה</u>

אם $x \in \bar{L}_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

<u>מקרה 1:</u> $x = \langle M, w \rangle$

$\Leftarrow$ M לא מקבלת w

$\Leftarrow$ $L(M') \in PAL$

$\Leftarrow$ $\langle M' \rangle \in PAL$

$\Leftarrow$ $f(x) \in PAL$

$\Leftarrow$ $f(x) \in L_{\text{NOTREG}}$.

<u>מקרה 2:</u> $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow f(x) \in PAL \Leftarrow f(x) \in L_{\text{NOTREG}}$.

אם $x \notin \bar{L}_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ M מקבלת w $\Leftarrow$ $L(M') = \Sigma^*$ $\Leftarrow$ $f(x) \in \Sigma^*$ $\Leftarrow$ $f(x) \in L_{\text{NOTREG}}$.

לכן הוכחנו כי $f(x) \in NOTERG \Leftrightarrow x \in \bar{L}_{\text{acc}}$, ז"א $f(x)$ היא רדוקציה מ- L_{acc} ל- L_{NOTREG}.

השפה $\bar{L}_{\text{acc}}$ לא כריעה. לפיכך, לפי משפט הרדוקציה גם L_{NOTREG} לא כריעה.

דוגמה 8.12 $L_{\text{acc}} \leqslant L_{\text{NOTREG}}$

תהי L_{NOTREG} השפה

$$L_{\text{NOTREG}} = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; \text{לא רגולרית } L(M) \right\} .$$

הוכיחו כי השפה L_{NOTREG} לא כריעה על ידי רדוקציה מ- L_{acc}.

פתרון:

השפה L_{acc} מוגדרת

$$L_{\text{acc}} = \left\{ \langle M, w \rangle \;\middle|\; M \text{ מקבלת } w \right\} .$$

והשפה L_{NOTREG} מוגדרת

$$L_{\text{NOTREG}} = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; \text{לא רגולרית } L(M) \right\} .$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\varnothing} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M' מ"ט הבאה:

$M' =$ על כל קלט y:

1) M' מריצה M על w.

2) • אם M דוחה $\Leftarrow$ דוחה.

- אם M מקבלת $\Leftarrow M'$ בודקת אם y פלינדרום.
  - אם כן $\Leftarrow$ מקבלת.
  - אם לא $\Leftarrow$ דוחה.

הוכחת נכונות הרדוקציה

אם $x \in L_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ M מקבלת w $\Leftarrow$ $L(M') = PAL$ $\Leftarrow$ $f(x) \in PAL$ $\Leftarrow$ $f(x) \in L_{\text{NOTREG}}$.

$x \notin L_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים.

מקרה 1: $x \neq \langle M, w\rangle$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M_{\varnothing}\rangle$ ו- $L(M_{\varnothing}) = \varnothing$ $\Leftarrow$ $\langle M_{\varnothing}\rangle \notin L_{\text{NOTREG}}$
$\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\text{NOTREG}}$.

מקרה 2: $x = \langle M, w\rangle$ ו- M לא מקבלת w $\Leftarrow$ $L(M') = \varnothing$ $\Leftarrow$ $\langle M'\rangle \notin L_{\text{NOTREG}}$
$\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\text{NOTREG}}$.

דוגמה 8.13 $L_{\text{HALT}} \leqslant L_{\text{NOTREG}}$

תהי L_{NOTREG} השפה

$$L_{\text{NOTREG}} = \left\{\langle M\rangle \;\middle|\; \text{לא רגולרית } L(M)\right\} .$$

הוכיחו כי השפה L_{NOTREG} לא כריעה על ידי רדוקציה מ- L_{HALT}.

פתרון:

השפה L_{HALT} מוגדרת

$$L_{\text{HALT}} = \left\{\langle M, w\rangle \;\middle|\; \text{עוצרת על } w \text{ } M\right\} .$$

והשפה L_{NOTREG} מוגדרת

$$L_{\text{NOTREG}} = \left\{\langle M\rangle \;\middle|\; \text{לא רגולרית } L(M)\right\} .$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M'\rangle & x = \langle M, w\rangle \\ \langle M_{\varnothing}\rangle & x \neq \langle M, w\rangle \end{cases} .$$

כאשר M' מ"ט הבאה:

$M' =$ על כל קלט y:

1) M' מריצה M על w.
2)
- אם M דוחה $\Leftarrow$ דוחה.
- אם M מקבלת $\Leftarrow$ ממשיכה לשלב 3).

3) M' בודקת אם $y \in PAL$.
- אם כן $\Leftarrow$ מקבלת.
- אם לא $\Leftarrow$ דוחה.

<u>הוכחת הנכונות</u>

$x \in L_{\text{HALT}}$ $\Leftarrow$ $L(M') \in PAL$ $\Leftarrow$ $L(M') \in L_{\text{NOTREG}}$.

$x \notin L_{\text{HALT}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

<u>מקרה 1:</u> $x \neq \langle M, w\rangle$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M_\varnothing\rangle$ ו- $L(M_\varnothing) = \varnothing$ $\Leftarrow$ $\langle M_\varnothing\rangle \notin L_{\text{NOTREG}}$
$\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\text{NOTREG}}$.

<u>מקרה 2:</u> $x = \langle M, w\rangle$ ו- M לא עוצרת על w $\Leftarrow$ $L(M_\varnothing) = \varnothing$ $\Leftarrow$ $\langle M_\varnothing\rangle \notin L_{\text{NOTREG}}$
$\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\text{NOTREG}}$.

דוגמה 8.14 $\bar{L}_{\text{acc}} \leqslant L_{\text{REG}}$

תהי L_{REG} השפה

$$L_{\text{REG}} = \left\{ \langle M\rangle \mid \text{רגולרית } L(M) \right\} .$$

הוכיחו כי השפה L_{REG} לא כריעה על ידי רדוקציה מ- $\bar{L}_{\text{acc}}$.

פתרון:

השפה $\bar{L}_{\text{acc}}$ מוגדרת

$$\bar{L}_{\text{acc}} = \left\{ \langle M, w\rangle \mid w \text{ לא מקבלת } M \right\} \cup \{ x \mid x \neq \langle M, w\rangle \} .$$

והשפה L_{REG} מוגדרת

$$L_{\text{REG}} = \left\{ \langle M\rangle \mid \text{רגולרית } L(M) \right\} .$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M'\rangle & x = \langle M, w\rangle \\ \langle M_\varnothing\rangle & x \neq \langle M, w\rangle \end{cases}$$

כאשר $M_\varnothing$ המ"ט שדוחה כל קלט ו- M' מ"ט הבאה:

$M' =$ על כל קלט y:

1) מריצה M על w.

2)
- אם M דוחה $\Leftarrow$ דוחה.
- אם M מקבלת $\Leftarrow$ בודקת אם y פלינדרום:
  - אם כן $\Leftarrow$ מקבלת.
  - אם לא $\Leftarrow$ דוחה.

<u>אבחנה</u>

$$L(M') = \begin{cases} PAL & w \in L(M) \\ \varnothing & w \notin L(M) \end{cases}$$

<u>הוכחת נכונות הרדוקציה</u>

אם $x \in \bar{L}_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

<u>מקרה 1:</u> $x \neq \langle M, w\rangle$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M_\varnothing\rangle$ ו- $L(M_\varnothing) = \varnothing$ $\Leftarrow$ $\langle M_\varnothing\rangle \in L_{\text{REG}}$ $\Leftarrow$ $f(x) \in L_{\text{REG}}$.

<u>מקרה 2:</u> $x = \langle M, w\rangle$ ו- $x \notin L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M'\rangle$ ולפי האבחנה $L(M') = \varnothing$ $\Leftarrow$ $\langle M_\varnothing\rangle \in L_{\text{REG}}$
$\Leftarrow$ $f(x) \in L_{\text{REG}}$.

אם $x \notin \bar{L}_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ $w \in L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M'\rangle$ ולפי האבחנה $L(M') \in PAL$ $\Leftarrow$ $f(x) \in PAL$
$\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\text{REG}}$.

דוגמה 8.15 $L_{\text{acc}} \leqslant L_{\text{REG}}$

תהי L_{REG} השפה

$$L_{\text{REG}} = \left\{\langle M\rangle \;\middle|\; \text{רגולרית } L(M)\right\} .$$

הוכיחו כי השפה L_{REG} לא כריעה על ידי רדוקציה מ- L_{acc}.

פתרון:

השפה L_{acc} מוגדרת

$$L_{\text{acc}} = \left\{\langle M, w\rangle \;\middle|\; w \text{ מקבלת } M\right\} .$$

והשפה L_{REG} מוגדרת

$$L_{\text{REG}} = \left\{\langle M\rangle \;\middle|\; \text{רגולרית } L(M)\right\} .$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M'\rangle & x = \langle M, w\rangle \\ \langle M_{PAL}\rangle & x \neq \langle M, w\rangle \end{cases}$$

כאשר M_{PAL} המ"ט שמכריעה את השפה של פלינדרומים, ו- M' מ"ט הבאה:

$M' =$ על כל קלט y:

1) M' בודקת אם y פלינדרום:

- אם כן $\Leftarrow$ מקבלת.
- אם לא מריצה M על w ועונה כמוה.

<u>הוכחת נכונות הרדוקציה</u>

אם $x \in L_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ M מקבלת w $\Leftarrow$ $L(M') = \Sigma^*$ $\Leftarrow$ $f(x) \in REG$.

$x \notin L_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

<u>מקרה 1:</u> $x \neq \langle M, w\rangle$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M_{PAL}\rangle$ ו- $L(M_{PAL}) = PAL$ $\Leftarrow$ $\langle M_{PAL}\rangle \notin L_{\text{REG}}$
$\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\text{REG}}$.

<u>מקרה 2:</u> $x = \langle M, w\rangle$ ו- M לא מקבלת w $\Leftarrow$ $L(M') = PAL$ $\Leftarrow$ $\langle M'\rangle \notin L_{\text{REG}}$
$\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\text{REG}}$.

דוגמה 8.16 $\bar{L}_{\rm acc} \leqslant L_{M_1 \neg M_2}$

נתונה השפה הבאה:
$$L = \left\{ \langle M_1, M_2, w\rangle \;\middle|\; w \in L\left(M_1\right) \wedge w \notin L\left(M_2\right) \right\} \ .$$
הוכיחו כי $L \notin RE$ ע"י רדוקציה מ- $\bar{L}_{\rm acc}$.

פתרון:

פונקצית הרדוקציה:
$$f(x) = \begin{cases} \langle M^*, M, w\rangle & x = \langle M, w\rangle \\ \langle M^*, M_{\varnothing}, \varepsilon\rangle & x \neq \langle M, w\rangle \end{cases}$$
כאשר

- M^* היא מ"ט שמקבלת כל קלט
- $M_{\varnothing}$ היא מ"ט שדוחה כל קלט.

נכונת הרדוקציה:

ראשית, f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x = \langle M, w\rangle$. אם לא, תחזיר קידוד קבוע $\langle M^*, M_{\varnothing}, \varepsilon\rangle$ ואם כן, תחזיר קידוד $\langle M^*, M, w\rangle$.

נוכיח כי
$$x \in \bar{L}_{\rm acc} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_{M_1 \neg M_2} \ .$$
אם $x \in \bar{L}_{\rm acc}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

מקרה 1: $x \neq \langle M, w\rangle$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M^*, M_{\varnothing}, \varepsilon\rangle$ ו- $\varepsilon \in L\left(M^*\right)$ ו- $\varepsilon \notin L\left(M_{\varnothing}\right)$ $\Leftarrow$ $f(x) \in \bar{L}_{M_1 \neg M_2}$.

מקרה 2: $x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \notin L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M^*, M, w\rangle$ ו- $w \in L\left(M^*\right)$ ו- $w \notin L\left(M\right)$ $\Leftarrow$ $f(x) \in L_{M_1 \neg M_2}$.

אם $x \notin \bar{L}_{\rm acc}$ $\Leftarrow$ $x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \in L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M^*, M, w\rangle$ ו- $w \in L\left(M^*\right)$ ו- $w \notin L\left(M\right)$ $\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{M_1 \neg M_2}$.

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $\bar{L}_{\rm acc} \leqslant L_{M_1 \neg M_2}$, ומכיוון ש- $\bar{L}_{\rm acc} \notin RE$ ממשפט הרדוקציה מתקיים $L_{M_1 \neg M_2} \notin RE$.

דוגמה 8.17 $L_{\rm acc} \leqslant L_{M_1 \subset M_2}$

נתונה השפה הבאה:
$$L = \left\{ \langle M_1, M_2, w\rangle \;\middle|\; w \in L\left(M_1\right) \wedge w \notin L\left(M_2\right) \right\} \ .$$
הוכיחו כי $L \notin RE$ ע"י רדוקציה מ- $L_{\rm acc}$.

פתרון:

פונקצית הרדוקציה:
$$f(x) = \begin{cases} \langle M_{\varnothing}, M'\rangle & x = \langle M, w\rangle \\ \langle M_{\varnothing}, M_{\varnothing}\rangle & x \neq \langle M, w\rangle \end{cases}$$

כאשר

- $M_\varnothing$ היא מ"ט שדוחה כל קלט.
- M' היא מ"ט שעל קלט y מתעלמת מ- y ומריצה M על w ועונה כמוה.

<u>אבחנה:</u>

$$L\left(M'\right)=\begin{cases}\Sigma^* & w\in L(M)\\ \varnothing & w\notin L(M)\end{cases} .$$

<u>נכונת הרדוקציה:</u>

ראשית, f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x=\langle M,w\rangle$. אם לא, תחזיר קידוד קבוע $\langle M_\varnothing,M_\varnothing\rangle$ ואם כן, תחזיר קידוד $\langle M^*,M'\rangle$, כאשר $M_\varnothing$ היא קידוד קבוע ו- M' נוצר ע"י הוספת קוד ל- $\langle M\rangle$ המוחק את הקלט y ורושם w במקומו.

נוכיח כי

$$x\in L_{\text{acc}} \quad\Leftrightarrow\quad f(x)\in L_{M_1\subset M_2} .$$

אם $x\in L_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ $x=\langle M,w\rangle$ ו- $w\in L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x)=\langle M_\varnothing,M'\rangle$ ולפי האבחנה $L\left(M'\right)=\Sigma^*$ $\Leftarrow$ $L\left(M_\varnothing\right)\subset L\left(M'\right)$ $\Leftarrow$ $f(x)\in L_{M_1\subset M_2}$.

$x\notin L_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

<u>מקרה 1</u>: $x\neq\langle M,w\rangle$ $\Leftarrow$ $f(x)=\langle M_\varnothing,M_\varnothing\rangle$ ו- $L\left(M_\varnothing\right)=L\left(M_\varnothing\right)$ $\Leftarrow$ $f(x)\notin L_{M_1\subset M_2}$.

<u>מקרה 2</u>: $x=\langle M,w\rangle$ ו- $w\notin L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x)=\langle M_\varnothing,M'\rangle$ ולפי האבחנה $L\left(M'\right)=\varnothing$ $\Leftarrow$ $L\left(M'\right)=L\left(M_\varnothing\right)$ $f(x)\notin L_{M_1\subset M_2}$.

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $L_{\text{acc}}\leqslant L_{M_1\subset M_2}$, ומכיוון ש- $L_{\text{acc}}\notin R$ ממשפט הרדוקציה מתקיים $L_{M_1\subset M_2}\notin R$.