שעור 7
צירוף לינארי ופרישה לינארית

7.1 הגדרה של צרוף לינארי

הגדרה 7.1 צרוף לינארי

נניח כי V מרחב ווקטורי מעל שדה, $\mathbb{F}$. יהיו $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n\in V$ ווקטוים של V, ו- $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ סקלרים של $\mathbb{F}$. הווקטור

$$\alpha_1\mathrm{v}_1+\alpha_2\mathrm{v}_2+\ldots\alpha_n\mathrm{v}_n$$

נקרא **צירוף לינארי (צ"ל)** של הווקטורים $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n$ עם מקדמים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

דוגמה 7.1

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}\ ,\qquad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$2\mathrm{v}_1-5\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}-8\\-19\\8\end{pmatrix}$$

וקטור $\begin{pmatrix}-8\\-19\\8\end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של v_1, v_2.

דוגמה 7.2

האם ווקטור $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של הווקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\ ,\qquad u_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad u_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

? אם כן, רשמו את הצירוף הלינארי.

פתרון:

$$\mathrm{v}=xu_1+yu_2+zu_3\qquad\rightsquigarrow\qquad\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\ .$$

$$\begin{aligned} x+2y &= 0 \\ x-y+z &= 4 \\ x+2z &= 4 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to 3\cdot R_3 + 2\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to \frac{1}{4}\cdot R_3]{R_2 \to -\frac{1}{3}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + \frac{1}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$x=2$, $y=-1$, $z=1$,

$$\mathrm{v} = 2u_1 - u_2 + u_3 \ .$$

דוגמה 7.3

האם ווקטור $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של הווקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \ , \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

? אם כן, רשמו את הצירוף הלינארי.

פתרון:

$$\mathrm{v} = xu_1 + yu_2 + zu_3 \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

$$\begin{aligned} x+2y+z &= 1 \\ -5x-4y-3z &= -2 \\ 7x-y+2z &= 5 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -5 & -4 & -3 & -2 \\ 7 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-7R_1]{R_2\to R_2+5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -5 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{6}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & -15 & -5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+15R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{2} \end{array}\right)$$

אין פתרון ולכן v הוא לא צירוף לינארי של u_1, u_2, u_3.

דוגמה 7.4

בדקו אם ווקטור $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}0\\4\\7\end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של הווקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}\ ,\qquad u_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad u_3=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$$

? אם כן, רשמו את הצירוף הלינארי.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3+3R_1]{R_2\to R_2+2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-\frac{7}{4}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

למערכת ∞ פתרונות, לכן v הוא צירוף לינארי של u_1, u_2, u_3.

הפתרון הכללי:

$$(x,y,z)=(2-z,1-z,z)\ ,\qquad (z\in\mathbb{R})\ .$$

נציב $z=1$, ונקבל

$$\mathrm{v}=u_1+0\cdot u_2+u_3\ .$$

דוגמה 7.5

בטאו את הפולינום $p(x)=-3+4x+x^2$ כצירוף לינארי של

$$p_1(x)=5-2x+x^2\ ,\qquad p_2(x)=-3x+2x^2\ ,\qquad p_3(x)=3+x\ .$$

פתרון:

$$-3+4x+x^2=\alpha_1(5-2x+x^2)+\alpha_2(-3x+2x^2)+\alpha_3(3+x)$$

השוויון אמור להתקיים לכל $x\in\mathbb{R}$. לכן

$$\begin{cases} 5\alpha_1+3\alpha_3 &= -3\ , \\ -2\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3 &= 4\ , \\ \alpha_1+2\alpha_2 &= 1\ . \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-5R_1]{R_2\to R_2+2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -10 & 3 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+10R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 52 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to\frac{1}{13}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$\alpha_1=-3$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=4$.

$$p(x)=-3p_1(x)+2p_2(x)+4p_3(x)\ .$$

דוגמה 7.6

רשמו מטריצה $D=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של המטריצות

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\ .$$

פתרון:

$$\alpha_1A+\alpha_2B+\alpha_3C=D$$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0&2\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_1+2\alpha_3\\\alpha_1+\alpha_2&\alpha_2-\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{rl}\alpha_1&=3\\\alpha_2+2\alpha_3&=1\\\alpha_1+\alpha_2&=1\\\alpha_2-\alpha_3&=-1\end{array}\right.\qquad\Rightarrow\qquad\alpha_1=3\ ,\alpha_2=-2\ ,\alpha_3=-1\ .$$

ז"א

$$3A-2B-C=D\ .$$

דוגמה 7.7

קבעו אם הפונקציה $y=\sin(2x)$ צירוף ליניארי של $\sin x$ ו- $\cos x$?

פתרון:

נניח שקיימים α_1,α_2 כך ש

$$\alpha_1\sin x+\alpha_2\cos x=\sin(2x)\ .$$

השוויון אמור להתקיים לכל $x\in\mathbb{R}$.

נציב $x=0$ ואז נקבל $\alpha_1\cdot 0+\alpha_2\cdot 1=0 \Leftarrow \alpha_2=0$. לכן

$$\sin(2x)=\alpha_1\sin x\ .$$

כעת נציב $x=\frac{\pi}{2}$ ונקבל $\sin(\pi)=\alpha_1\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, כלומר

$$\alpha_1=\sin\pi=0\ .$$

לכן $\alpha_1=\alpha_2=0$. נציב את הערכים בצירוף ליניארי המקורי $\alpha_1\sin x+\alpha_2\cos x=\sin(2x)$ ונקבל כי $\sin 2x=0$ לכל $x\in\mathbb{R}$. סתירה.

לכן לא קיימים α_1, α_2 כך ש

$$\alpha_1\sin x+\alpha_2\cos x=\sin(2x)\ .$$

7.2 פרישה ליניארי

הגדרה 7.2 פרישה ליניארי

נניח כי V מרחב ווקטורי מעל שדה, $\mathbb{F}$. יהיו $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n\in V$. הקבוצה

$$\{\alpha_1\mathrm{v}_1+\alpha_2\mathrm{v}_2+\ldots\alpha_n\mathrm{v}_n|\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}\}$$

נקראת פרישה ליניארית של $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n$.

הפרישה של ווקטורים מסומן ב $\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$.

ז"א פרישה ליניארית זה אוסף כל הצירופים הליניאריים של $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n$.

משפט 7.1 פרישה היא תת מרחב

לכל מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$ ולכל $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n\in V$,

$$\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$$

הוא תת מרחב של V.

הוכחה: נוכיח את הטענה ע"י להראות כי כל פרישה מקיימת את כל התנאים של תת מרחב.

1) צריך להוכיח כי $\bar{0}\in\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$.

הרי

$$\bar{0}=0\cdot\mathrm{v}_1+\ldots+0\cdot\mathrm{v}_n$$

ז"א וקטור האפס צירוף לינארי עם מקדמים כולם אפסים. לפיכך $\bar{0}\in\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$.

2) נניח $u_1,u_2\in\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$. צריך להוכיח כי $u_1+u_2\in\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$.

$u_1,u_2\in\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$. ז"א קיימים סקלרים כך ש:

$$u_1=k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_n\mathrm{v}_n\ ,\qquad u_2=t_1\mathrm{v}_1+\ldots+t_n\mathrm{v}_n\ .$$

מכאן

$$u_1+u_2=(k_1+t_1)\mathrm{v}_1+\ldots+(k_n+t_n)\mathrm{v}_n\ ,$$

ז"א $u_1+u_2\in\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$.

3) נניח $u\in\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$, $t\in\mathbb{F}$. צריך להוכיח $tu\in\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$.

$$u=k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_n\mathrm{v}_n\quad\Rightarrow\quad tu=(tk_1)\mathrm{v}_1+\ldots+(tk_n)\mathrm{v}_n\in\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)\ .$$

מש"ל. ■

דוגמה 7.8

בדקו אם וקטור $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}-1&3&4\\0&-1&8\end{pmatrix}$ במרחב וקטורי $\mathbb{R}^{2\times3}$ שייך לפרישה לינארית של

$$u_1=\begin{pmatrix}2&1&4\\-1&0&3\end{pmatrix}\ ,\quad u_2=\begin{pmatrix}-3&2&0\\1&-1&5\end{pmatrix}\ ,\quad u_3=\begin{pmatrix}1&4&8\\-1&-1&11\end{pmatrix}\ .$$

פתרון:

$\mathrm{v}\in\mathrm{span}(u_1,u_2,u_3)$ אם ורק אם קיימים סקלרים k_1, k_2, k_3 כך ש

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=\mathrm{v}\ .$$

לכן

$$k_1\begin{pmatrix}2&1&4\\-1&0&3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-3&2&0\\1&-1&5\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1&4&8\\-1&-1&11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3&4\\0&-1&8\end{pmatrix}\ .$$

מקבלים מערכת משוואות:

$$\begin{cases}2k_1-3k_2+k_3&=-1\\k_1+2k_2+4k_3&=3\\4k_1+8k_3&=4\\-k_1+k_2-k_3&=0\\3k_1+5k_2+11k_3&=8\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_5 \to R_5 - 3R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 4R_1 \\ R_4 \to R_4 + R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון כללי:

$$k_1 = 1 - 2k_3 \ , \qquad k_2 = 1 - k_3 \ , \qquad k_3 \in \mathbb{R} \ .$$

נציב $k_3 = 1 \Leftarrow k_2 = 0$, $k_1 = -1$. נקבל

$$\mathrm{v} = -u_1 + 0 \cdot u_2 + u_3 \ .$$

לכן

$$\mathrm{v} \in \mathrm{span}(u_1, u_2, u_3) \ .$$

יש שתי דרכים להגדיר תת מרחב:

1) ע"י פרישה לינארית

2) ע"י מערכת הומוגנית.

ניתן לעבור מדרך אחת לשניה.

דוגמה 7.9

נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

הציגו את $\mathrm{Nul}(A)$ בצורת פרישה לינארית.

פתרון:

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן למערכת ההומוגנית $AX=0$ יש ∞ פתרונות. הפתרון הכללי:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2x_2+x_4-3x_5 \\ x_3 &= -2x_4+2x_5 \end{aligned}\right\} \quad x_2,x_4,x_5\in\mathbb{R}$$

ז"א

$$u=\begin{pmatrix} 2x_2+x_4-3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4+2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}\in \text{Nul}(A)$$

הצורת הכללית של וקטור ב $\text{Nul}(A)$:

$$u=\begin{pmatrix} 2x_2+x_4-3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4+2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}-3\\0\\2\\0\\1\end{pmatrix}$$

קיבלנו צירוף ליניארי של ווקטורים

$$\text{v}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \text{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \text{v}_3=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\\0\\1\end{pmatrix} .$$

לכן $u\in\text{span}(\text{v}_1,\text{v}_2,\text{v}_3)$. ז"א $\text{Nul}(A)=\text{span}(\text{v}_1,\text{v}_2,\text{v}_3)$.

דוגמה 7.10

נתונה מטריצה

$$u_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \qquad u_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\\5\end{pmatrix}, u_3=\begin{pmatrix}3\\-5\\18\\21\end{pmatrix}$$

הציגו את $\text{span}(u_1,u_2,u_3)$ באוסף של פתרונות של מערכת הומוגנית.

פתרון:

ווקטור $\text{v}\in\text{span}(u_1,u_2,u_3)$ אם ורק אם קיימים סקלירם k_1,k_2,k_3 כך ש

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=\text{v} .$$

ז"א למערכת הזאת קיים פתרון. נסמן $\text{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ ונפתור את המערכת המשוואות

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & x \\ 3 & -2 & -5 & y \\ 2 & 4 & 18 & z \\ 1 & 5 & 21 & w \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & 4 & 3x+y \\ 0 & 0 & 0 & -16x-6y+z \\ 0 & 0 & 0 & x+z-w \end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון כאשר

$$\begin{cases} -16x-6y+z &= 0 \\ x+z-w &= 0 \end{cases}$$