

# חישוביות וסיבוכיות

## טבלה של רדוקציות

עמוד	רדוקציה
68 דוגמה 7.6 עמוד	$L_{HALT} \leq L_{acc}$
72 דוגמה 7.11 עמוד	$\bar{L}_{acc} \leq L_{NOTREG}$
73 דוגמה 7.12 עמוד	$L_{acc} \leq L_{NOTREG}$
74 דוגמה 7.13 עמוד	$L_{HALT} \leq L_{NOTREG}$
76 דוגמה 7.15 עמוד	$L_{acc} \leq L_{REG}$
75 דוגמה 7.14 עמוד	$\bar{L}_{acc} \leq L_{REG}$
77 דוגמה 7.16 עמוד	$\bar{L}_{acc} \leq L_{M_1 \rightarrow M_2}$ כasher $.L_{M_1 \rightarrow M_2} = \{\langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2)\}$
77 דוגמה 7.17 עמוד	$\bar{L}_{acc} \leq L_{M_1 \subset M_2}$ כasher $.L_{M_1 \subset M_2} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) \subset L(M_2)\}$

## תוכן העניינים

4	<b>1 מוכנות טיורינג</b>
4	הגדרה של מוכנת טיורינג .....
18	טבלת המעברים .....
22	חישוב פונקציות .....
25	<b>2 מודלים חישוביים שקולית</b>
28	<b>3 מוכנות טיורינג מרובת סרטים</b>
28	מוכנת טיורינג מרובה סרטים: הגדרה היוריסטית .....
28	מוכנת טיורינג מרובה סרטים: הגדרה פורמלית .....
29	קונפיגורציה של מטמ"ס .....
31	שקליות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד .....
37	<b>4 מוכנת טיורינג אי-דטרמיניסטיבם</b>
37	הגדרה של מוכנת טיורינג אי-דטרמיניסטיב .....
39	ע"ז החישוב של מ"ט א"ד .....
40	שקליות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטיב .....

<b>44</b>	<b>5 תכונות סגורות של <math>R</math> ו- <math>RE</math></b>
44	הגדרה של השפות $R$ ו- $RE$
50	קידוד של מ"ט דטרמיניסטיבית
50	מ"ט אוניברסלית $U$
<b>53</b>	<b>6 אי-כריעות</b>
53	השפה $L_{halt}, L_{acc}$ לא כריעות
57	השפה $L_E$ לא כריעה
59	השפה $L_{EQ}$ לא כריעה
62	סיכום: כריעות וקבילות של שפות
<b>63</b>	<b>7 רדוקציה</b>
63	טבלה של רדוקציות
63	מ"ט המחשבת את פונקציה
65	רדוקציות
72	דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה בין שפות משלימות (משפט 7.2)
72	דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה (משפט 7.1)
<b>79</b>	<b>8 מבוא לסיבוכיות</b>
79	הגדרה של סיבוכיות
81	יחס בין הסיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס
82	יחס בין הסיבוכיות של מ"ט דטרמיניסטיבית ומ"ט א"ד
84	המחלקה $P$
84	בעיית PATH
86	בעיית RELPRIME
<b>89</b>	<b>9 המחלקה <math>P</math> והמחלקה NP</b>
89	המחלקה $P$
89	דוגמאות לבעיות ב-
89	בעיית המסלול הAMILTONI HAMPATH
90	אלגוריתם AIMOTS
90	המחלקה NP
93	הקשר בין NP למ"ט א"ד
94	הקשר בין המחלקה $P$ ו- NP
<b>97</b>	<b>10 NP שלמות</b>
97	המחלקות $NPC$ ו- $NPH$
98	בעיית הספיקות
98	בעיית SAT
99	משפט קוק לין
99	גרסאות של $kSAT$
99	בעיית 3SAT
101	הוכחת משפט קוק לין*
<b>107</b>	<b>11 רדוקציות פולינומיאליות</b>
107	CLIQUE היא NP-שלמה
109	בעיית הקבוצה הבלתי תלויה
111	בעיית הכיסוי בקודקודים
112	הבעייה $VC$
113	$PARTITION$
113	רדוקציות פולינומיאליות



# שיעור 1

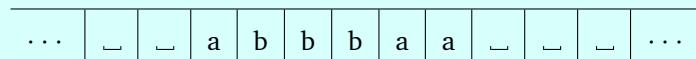
## מכונות טיורינג

### 1.1 הגדרה של מכונת טיורינג

#### הגדרה 1.1 מכונת טיורינג (הגדרה היריסטיבית)

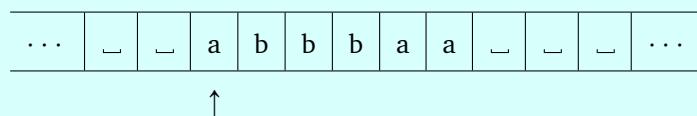
##### הקלט והסרט

- מכונת טיורינג ("מ"ט) קורא קלט.
- הקלט עצמו נמצא על סרט אינסופי מחולק למשבצות.
- כל تو של הקלט כתוב במשבצת אחת של הסרט.
- במכונת טיורינג אנחנו מניחים שהסרט אינסופי לשני הצדדים.
- \* משמאל לתחילת הקלט יש רצף אינסופי של תווים "—" .
- \* מימין לסוף הקלט יש רצף אינסופי של תווים "—" .



##### הראש

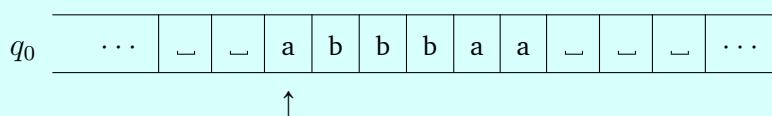
- במצב ההתחלתי הראש בקצה השמאלי של הקלט.



- הראש יכול לאוז ימינה על הסרט וגם שמאלה על הסרט.
- הראש קורא את התוכן של המשבצת שבה הוא נמצא.
- הראש יכול לכתוב על משבצת, אבל רק על המשבצת שבה הראש נמצא.

##### תאור העבודה של המכונה

- בתחלת הריצה, הקלט כתוב בהתאם לסדר כאשר מימינו נמצא רצף אינסופי של תווים — -ים.
- הראש מצביע על התא הראשוני בסדרת והמכונה נמצאת במצב ההתחלתי  $q_0$ .



- בכל צעד חישוב, בהתאם במצב הנוכחי ולאות שמתוחת לראש (התו הנקרא), המכונה מחליטה:
  - \* לאיזה מצב לעבור
  - \* מה לכתוב מתחת לראש (התו הנכתב)
  - \* לאן להזיז את הראש (תא אחד ימינה, או תא אחד שמאלה, או להישאר במקום).
- המכונה ישם שני מצבים מיוחדים:
  - \*  $q_{acc}$ : אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל-  $q_{acc}$  היא עוברת ומתקבלת.
  - \*  $q_{rej}$ : אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל-  $q_{rej}$  היא עוברת ודוחה.
  - אם המכונה לא מגיעה ל-  $q_{acc}$  או  $q_{rej}$  היא תמשיך לרוץ לנצח.

**הגדרה 1.2 מכונת טיורינג**

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר:

$Q$	קבוצת מצבים סופית ולא ריקה
$\Sigma$	אלפבית הקלט
$\Gamma$	אלפבית הסרט
$\delta$	פונקציית המעברים
$q_0$	מצב התחלתי
$q_{\text{acc}}$	מצב מקבל יחיד
$q_{\text{rej}}$	מצב דוחה יחיד

**דוגמה 1.1**

נבנה מכונת טיורינג אשר מקבלת מילה אם היא בשפה

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#a_w = \#b_w\}.$$

ז"א השפט כל המילים עם מספר שווה אותיות  $a$  ו  $b$ . הפאודו-קוד של המכונה, כדלקמן.**פאודו-קוד**

1) סורקים את הקלט משמאול לימין.

- אם לא מצאנו  $a$  וגם לא מצאנו  $b \Leftarrow$  מקבלת.
- אם האות הראשונה שהראשאש מצא היא  $a$ , כתובים עליו ✓, וועברים לשלב 2).
- אם האות הראשונה שהראשאש מצא היא  $b$ , כתובים עליו ✓, וועברים לשלב 3).

2) ממשיכים לוזז ימינה עד שנמצא  $a$  תואם.

- אם לא מצאנו  $a \Leftarrow$  דוחה.
- אם מצאנו  $a$  כתובים עליו ✓, חוזרים לתחילת הקלט וחוזרים לשלב 1).

3) ממשיכים לוזז ימינה עד שנמצא  $a$  תואם.

- אם לא מצאנו  $a \Leftarrow$  דוחה.
- אם מצאנו  $a$  כתובים עליו ✓, חוזרים לIntialized הקלט וחוזרים לשלב 1).

כעת נתן הגדרה פורמלית של המכונת טיורינג שמבצעת את האלגוריתם זהה.

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר  $Q$  הקבוצת המצביעים הבאה:

$$Q = \{q_0, q_a, q_b, q_{\text{back}}, q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}\}.$$

המשמעותם של כל המצביעים נרשומים בטבלה למטה:

$q_0$	ה מצב ההתחלתי. אליו נוחזר אחרי כל סבר התאמה של זוג אותיות.
$q_a$	מצב שבו ראיינו a ומחפשים a תואם.
$q_b$	מצב שבו ראיינו b ומחפשים a תואם.
$q_{\text{back}}$	מצב שנשתמש בו כדי לחזור לказה השמאלי של הקלט ולהתחל את הסריקה הבא (סבר התאמה הבא).
$q_{\text{acc}}$	מצב מקבל.
$q_{\text{rej}}$	מצב דוחה.

האלפבית של הקלט,  $\Sigma$ , והלפבית של הסרט,  $\Gamma$ , הינם:

$$\Sigma = \{a, b\} , \quad \Gamma = \{a, b, \_, \checkmark\} .$$

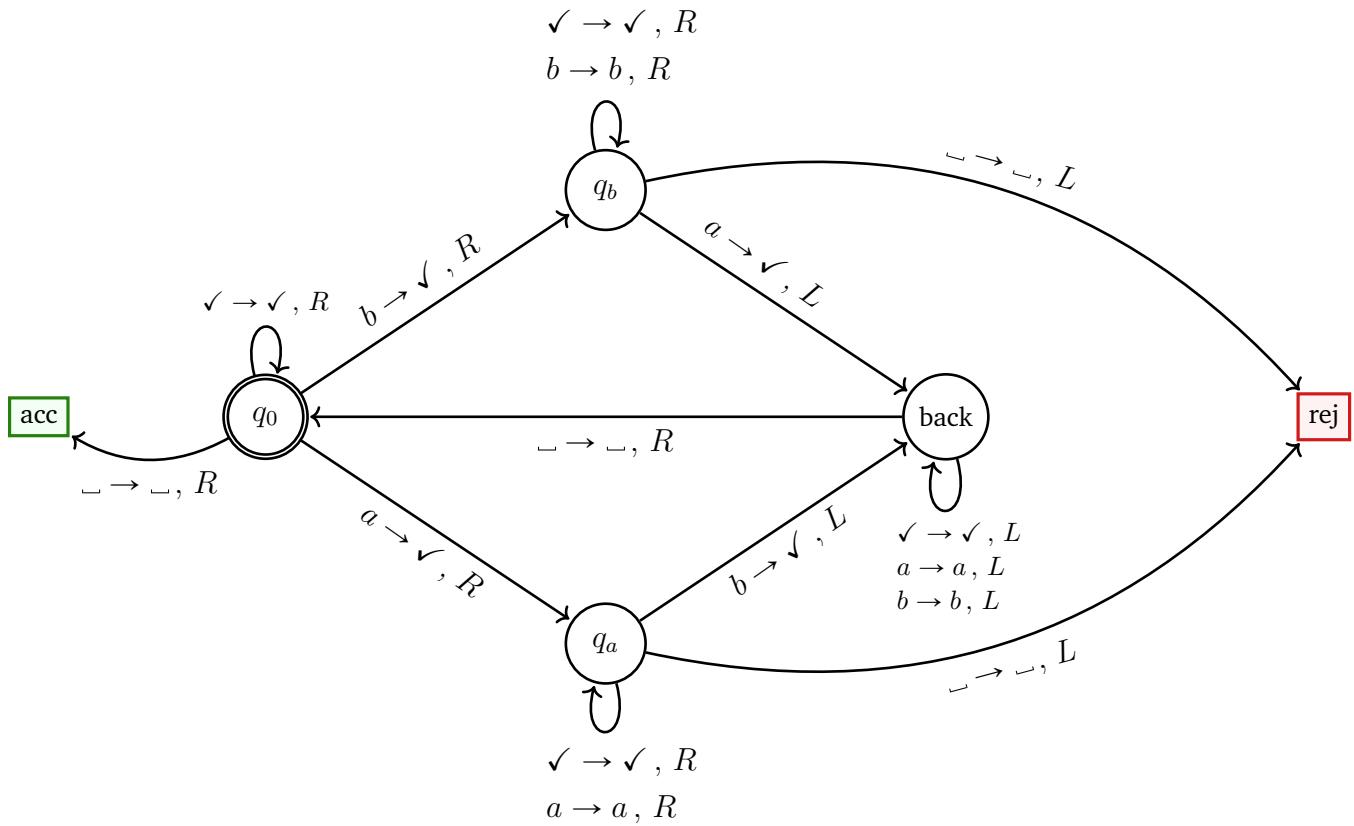
הfonקציית המעברים מוגדרת כדלקמן.

$$\begin{aligned}\delta(q_0, a) &= (q_a, \checkmark, R) , \\ \delta(q_0, b) &= (q_b, \checkmark, R) , \\ \delta(q_0, \_) &= (q_{\text{acc}}, \_, R) , \\ \delta(q_a, \checkmark) &= (q_a, \checkmark, R) , \\ \delta(q_a, a) &= (q_a, a, R) , \\ \delta(q_a, b) &= (q_{\text{back}}, \checkmark, L) , \\ \delta(q_b, \checkmark) &= (q_b, \checkmark, R) , \\ \delta(q_b, b) &= (q_a, b, R) , \\ \delta(q_b, a) &= (q_{\text{back}}, \checkmark, L) .\end{aligned}$$

לעתים קל יותר לרשום את פונקציית המעברים  $\delta$  כטבלה:

$Q \setminus \Gamma$	a	b	$\_$	$\checkmark$
$q_0$	$(q_a, \checkmark, R)$	$(q_b, \checkmark, R)$	$(q_{\text{acc}}, \_, R)$	$(q_0, \checkmark, R)$
$q_a$	$(q_a, a, R)$	$(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$	$(q_{\text{rej}}, \_, L)$	$(q_a, \checkmark, R)$
$q_b$	$(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$	$(q_b, b, R)$	$(q_{\text{rej}}, \_, L)$	$(q_b, \checkmark, R)$
$q_{\text{back}}$	$(q_{\text{back}}, a, L)$	$(q_{\text{back}}, b, L)$	$(q_0, \_, R)$	$(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$

### תרשים מצבאים

**דוגמה 1.2**

בדקו אם המוכנת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה `aab`.

**פתרונות:**

—	$q_0$	a	a	b	—
—	✓	$q_a$	a	b	—
—	✓	a	$q_a$	b	—
—	✓	$q_{back}$	a	✓	—
—	$q_{back}$	✓	a	✓	—
$q_{back}$	—	✓	a	✓	—
—	$q_0$	✓	a	✓	—
—	✓	$q_0$	a	✓	—
—	✓	✓	$q_a$	✓	—
—	✓	✓	✓	$q_a$	—
—	✓	✓	✓	rej	✓

**דוגמה 1.3**

בדקו אם המוכנת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה `abbbbaaa`.

**פתרונות:**



— ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ —  $q_{\text{acc}}$

### הגדרה 1.3 קונפיגורציה

תהי  $M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$  מכונת טיורינג. **קונפיגורציה** של  $M$  הינה מחרוזת

$uqv$

כאשר משמעות:

$$u, v \in \Gamma^*, \quad \sigma \in \Gamma, \quad q \in Q.$$

$q$	מצב המכוна,
$\sigma$	הסימן במיקום הראש
$u$	תוכן הסרט משמאל לראש,
$v$	תוכן הסרט מימין לראש.

### דוגמה 1.4 (המשך של דוגמה 1.2)

$u$	$q$	$\sigma$	$v$
—	$q_0$	a	a b —
—✓	$q_a$	a	b —
—✓ a	$q_a$	b	—
—✓	$q_{\text{back}}$	a	✓ —
—	$q_{\text{back}}$	✓	a ✓ —
—	$q_{\text{back}}$	—	✓ a ✓ —
—	$q_0$	✓	a ✓ —
—✓	$q_0$	a	✓ —
—✓ ✓	$q_a$	✓	—
—✓ ✓ ✓	$q_a$	—	—
—✓ ✓ ✓	$q_{\text{rej}}$	✓	—

### דוגמה 1.5

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת כל מילה בשפה

$$L = \{a^n \mid n = 2^k, k \in \mathbb{N}\}$$

ז"א מילים בעלי מספר אותיות a אשר חזקה של 2.

**פתרונות:**

ראשית נשים לב למשפט הבא:

### משפט 1.1

מספר שלם  $n$  שווה לחזקה אי-שלילית של 2, כלומר  $n = 2^k$  ( $k \geq 0$ ) אם ורק אם קיים שלם  $m$  עבورو חילוק של  $n$  ב- 2 בדיקת  $m$  פעמיים נותנת 1.

כיוון

$$\text{אם } \frac{n}{2^k} = 1 \text{ או } n = 2^k \ (k \geq 0)$$

כיוון

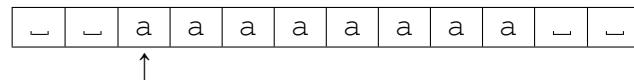
■ אם קיימ  $m \geq 0$  עבורו  $1 = 2^m$  או  $n = 2^m$  ולכן  $n$  שווה לחזקה אי-שלילית של 2.

לאור המשפט הזה נבנה אלגוריתם אשר מחלק את מספר האותיות במילה ב- 2 שוב ושוב בצורה איטרטיבית.

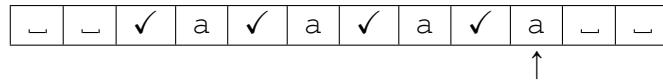
- אם אחרי סיבוב מסוים קיבל מספר אי-זוגי שונה מ- 1, אז אין מצב שמספר האותיות  $a$  הוא חזקה של 2.
- בצד שני אם אחרי סיבוב כלשהו קיבל בדיק  $a$  אחת הנשארת, "א" אחרי מספר מסוים של חילוקים של המספר אותיות  $a$  קיבלנו 1, אז מובטח לנו שהמספר של אותיות  $a$  הוא שווה לחזקה של 2.

כעת נסביר כיצד המכונת טיריניג מבצעת את השיטה הזאת בפועל כלהלן.

1) במצב ההתחלתי יש מחרוזת של רצף אותיות  $a$  כתובה על הסרט והראש נמצא מתחת האות הראשונה.



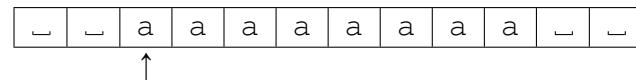
2) עוברים על הקלט משמאלי לימין ומבצעים מחיקה לシリוגין של האות  $a$ . כמובן, אותן אחת נמחק ואות אחרת נשאיר וכן הלאה, עד שמנגנים לכמה הימין של המילה.



3) אחרי שהראש הגיע לסוף המילה:

- אם מצאנו אותן  $a$  אחת בדיק  $\Leftarrow$  המכונה תקבל.
- אם כתוב ✓ בתו האחרון  $\Leftarrow$  המכונה תדחה.
- אחרת, אם כתוב  $a$  בתו האחרון הרושן חוזר לתחילת המחרוזת וחזריים לשלב 2.

כדוגמה של מילה המתקיים על ידי האלגוריתם, למטה רשומות האיטרציות של האלגוריתם הזה על המילה 8 אותיות  $a$ ). במצב ההתחלתי הסרט נראה כדלקמן.



**איטרציה 1)** לבסוף האיטרציה  $i = 1$  הסרט נראה כך:

התו האחרון  $a$  איז מושיכים לאיטרציה הבאה.

**איטרציה 2)** בסוף האיטרציה  $i = 2$  הסרט נראה כך:

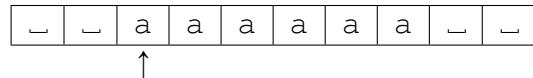
התו הראשון הוא  $a$  איז מושיכים לאיטרציה הבאה.

**איטרציה 3)** לאחר האיטרציה  $i = 3$  הסרט נראה כך:

התו האחרון הוא  $a$  איז מושיכים לאיטרציה הבאה.

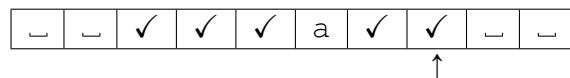
**איטרציה 4)** באיטרציה  $i = 4$  יש אותן  $a$  אחת בדיק איז המכונה מקבלת.

כדוגמה של מילה הלא המתקבלה על ידי האלגוריתם, למיטה רשות האיטרציות של האלגוריתם זהה על המילה  $w = aaaaaa$  (6 אותיות  $a$ ).  
במצב ההתחלתי הشرط נראה כדלקמן.



**איטרציה 1**) לבסוף האיטרציה  $i = 1$  הסדרת נראית כך:

התו האחרון  $a$  או ממשיכים לאיטרציה הבאה.



התו הראשון הוא ✓ או דוחה.

כעת ניתן הגדרה פורמלית של המוכנות טיורונג שמקבלת השפה הזאת:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}) \quad ,$$

כאשר  $Q = \{q_0, \text{one}, \text{even}, \text{odd}, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}$ ,  $\Gamma = \{a, \sqsubset, \checkmark\}$ ,  $\Sigma = \{a\}$  והקבוצת המצבים היא כה שמשמעותם הם מפורטים למטה:

**מצב one:** מצב התחלתי. עדין לא קראנו  $a$  בסביבה סריקה זה.  
**מצב none:** קראנו  $a$  בודד.

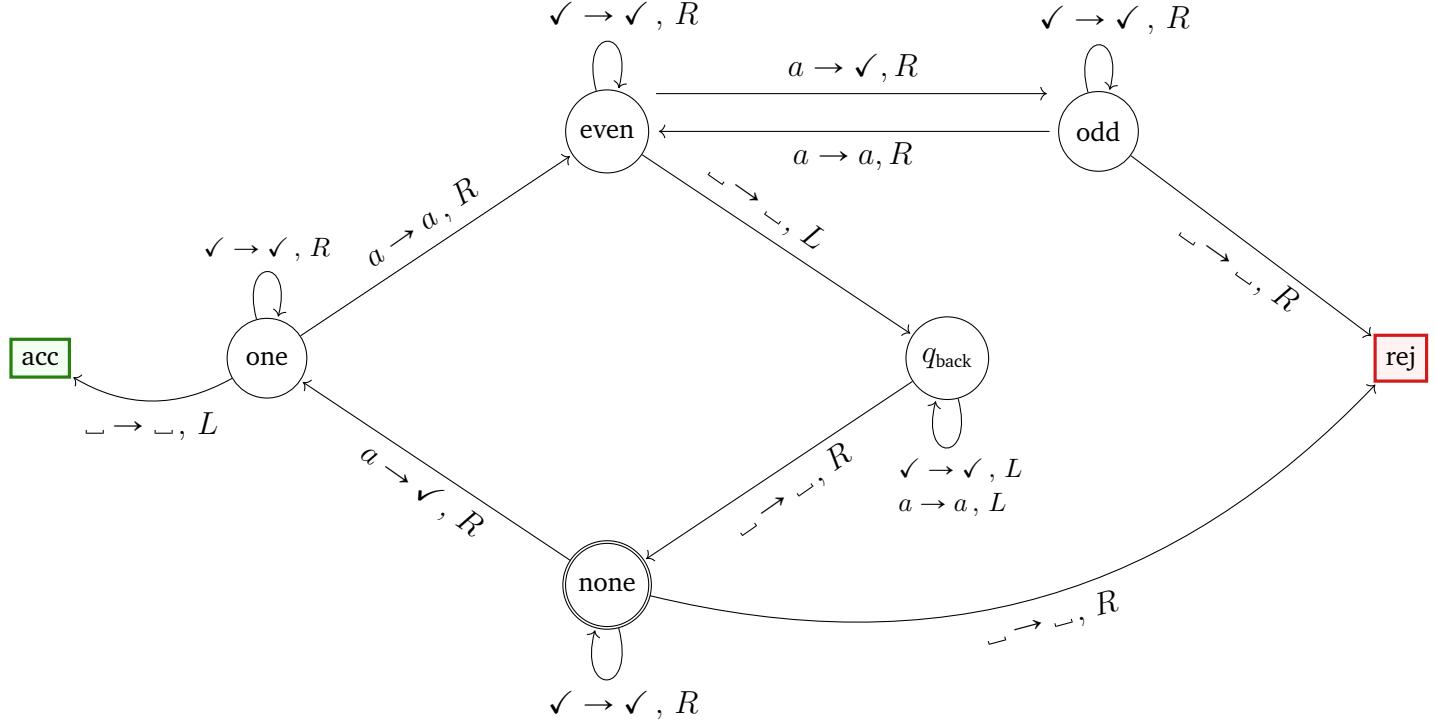
**מצב even:** קראנו מספר זוגי של a.

**מצב even:** קראו מספר זוגי של a.

מצב pp: קראנו מספר אי-זוגי של a.

**מצב**  $q_{\text{back}}$ : **חזרה של מלאה.**

**נצבים למטה.**



**דוגמה 1.6**

בדקו אם המילה `aaaa` מתקבלת על ידי המכונת טיריניג בדוגמה 1.5.

**פתרון:**

„	<b>none</b>	a	a	a	a	„
„	✓	<b>one</b>	a	a	a	„
„	✓	a	<b>even</b>	a	a	„
„	✓	a	✓	<b>odd</b>	a	„
„	✓	a	✓	a	<b>even</b>	„
„	✓	a	✓	<b>back</b>	a	„
„	✓	a	<b>back</b>	✓	a	„
„	✓	<b>back</b>	a	✓	a	„
<b>back</b>	„	✓	a	✓	a	„
„	<b>none</b>	✓	a	✓	a	„
„	✓	<b>none</b>	a	✓	a	„
„	✓	✓	<b>one</b>	✓	a	„
„	✓	✓	✓	<b>one</b>	a	„
„	✓	✓	✓	a	<b>even</b>	„
„	✓	✓	✓	<b>back</b>	a	„
„	✓	✓	<b>back</b>	✓	a	„
„	✓	<b>back</b>	✓	✓	a	„
<b>back</b>	„	✓	✓	✓	a	„
„	<b>none</b>	✓	✓	✓	a	„
„	✓	<b>none</b>	✓	✓	a	„
„	✓	✓	<b>none</b>	✓	a	„
„	✓	✓	✓	<b>none</b>	a	„
„	✓	✓	✓	✓	<b>one</b>	„
„	✓	✓	✓	<b>acc</b>	✓	„

<i>u</i>	<i>q</i>	$\sigma$	v
„	<b>none</b>	a	aaa „
„ ✓	<b>one</b>	a	aa „
„ ✓ a	<b>even</b>	a	a „
„ ✓ a ✓	<b>odd</b>	a	„
„ ✓ a ✓ a	<b>even</b>	„	„
„ ✓ a ✓	<b>back</b>	a	„
„ ✓ a	<b>back</b>	✓	a „
„ ✓	<b>back</b>	a	✓ a „
„	<b>back</b>	✓	a ✓ a „
„	<b>back</b>	„	✓ a ✓ a „
„	<b>none</b>	✓	a ✓ a „
„ ✓	<b>none</b>	a	✓ a „
„ ✓ ✓	<b>one</b>	✓	a „
„ ✓ ✓ ✓	<b>one</b>	a	„

✓✓✓ a	even	—	—
✓✓✓	back	a	—
✓✓	back	✓ a	—
✓	back	✓	✓ a —
—	back	✓	✓✓ a —
—	back	—	✓✓✓ a —
—	none	✓	✓✓ a —
✓	none	✓	✓ a —
✓✓	none	✓	a —
✓✓✓	none	a	—
✓✓✓✓	one	—	—
✓✓✓	acc	✓	—

**דוגמה 1.7**

בדקו אם המילה aaa מתקבלת על ידי המוכנת טיריניג בדוגמה 1.5.

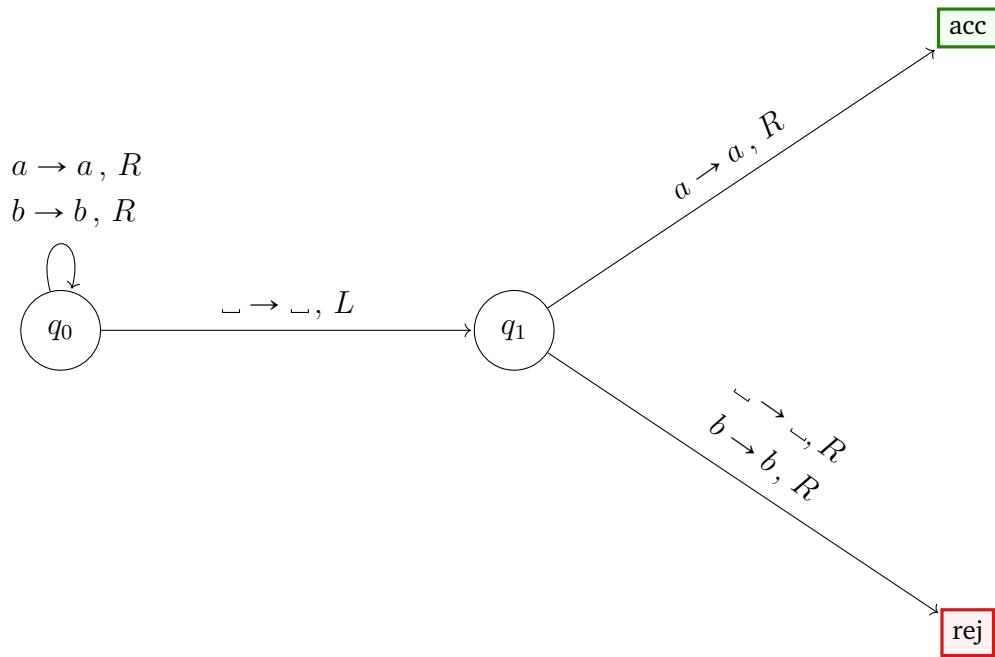
**פתרונות:**

—	none	a	a	a	—
—	✓	one	a	a	—
—	✓	a	even	a	—
—	✓	a	✓	odd	—
—	✓	a	✓	—	rej

<i>u</i>	<i>q</i>	$\sigma$	v
—	none	a	aa —
— ✓	one	a	a —
— ✓ a	even	a	—
— ✓ a ✓	odd	—	—
— ✓ a ✓ —	rej	—	—

**דוגמה 1.8**

מהי השפה של המוכנה למטה:



**פתרונות:**

- 1) סורקים את הקלט משמאל לימין.
  - אם הtau הנקרא  $a$  או  $b$  עוברים לtau ימינה הבא וחוזרים לשלב 1).
  - אם הtau הנקרא  $\_$  הגיעו לסוף הקלט, ועוברים לשלב 2).

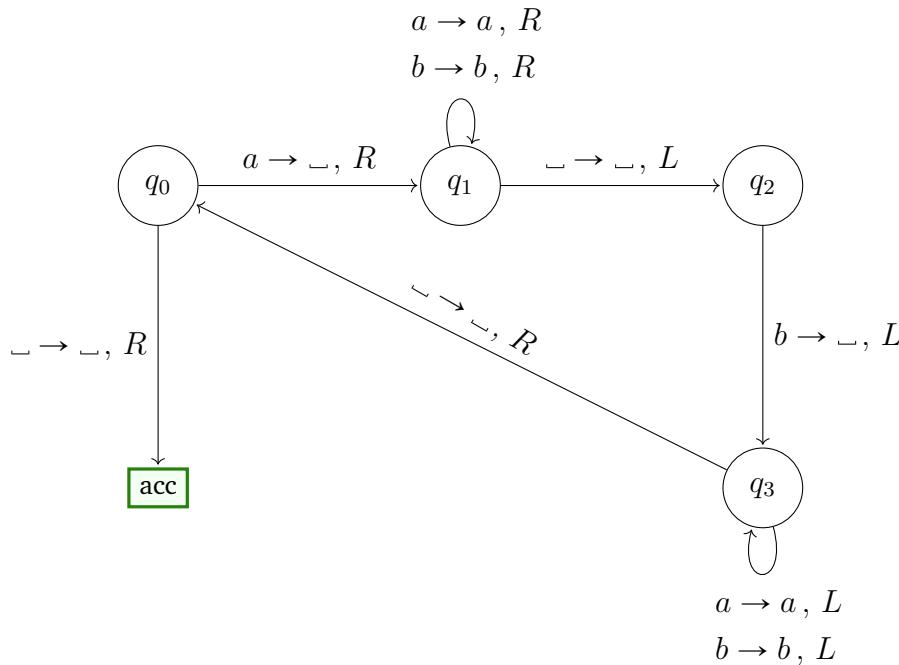
2) עוברים שמאלה לtau הארון של המילה.

- אם הtau הנקרא  $a \Leftarrow$  מקבל.
- אחרת דוחה.

לכן המכונה מקבלת שפת המילים המסתויימות באות  $a$ .

### דוגמה 1.9

מהי השפה של המכונה למטה:

**פתרונות:****1)** במצב ההתחלתי:

- אם התו הנקרא  $\_$  מקבל.
- אם התו הנקרא  $a$  מורידים אותו על ידי  $\_$  וועברים לשלב 2).
- אחרת  $\Rightarrow$  דוחה.

**2)** עוברים ימינה עד שמנגנים לסוף המילה.

- אם התו האחרון הוא  $b$ , מורידים אותו על ידי  $\_$ , חוזרים לתחילת המילה וחוזרים לשלב 1).
- אחרת דוחה.

בכל איטרציה המכונה מורידה תו  $a$  בתחילת המילה וחזרת ומורידה תו  $b$  תואם בסוף המילה. בכל איטרציה אם המכונה לא מוצאת  $b$  תואם בסוף המילה היא דוחה המילה. אחרת אם המכונה לא דוחה המילה וכל האותיות נמחקוות אז המילה מתתקבלת. לכן המכונה מקבלת שפת המילים

$$\{a^n b^n | n \geq 0\} .$$

**הגדרה 1.4 גירה בצעד אחד**

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$  מכונת טיריניג, ותהיינה  $c_1$  ו-  $c_2$  קונפיגורציות של  $M$ . נסמן

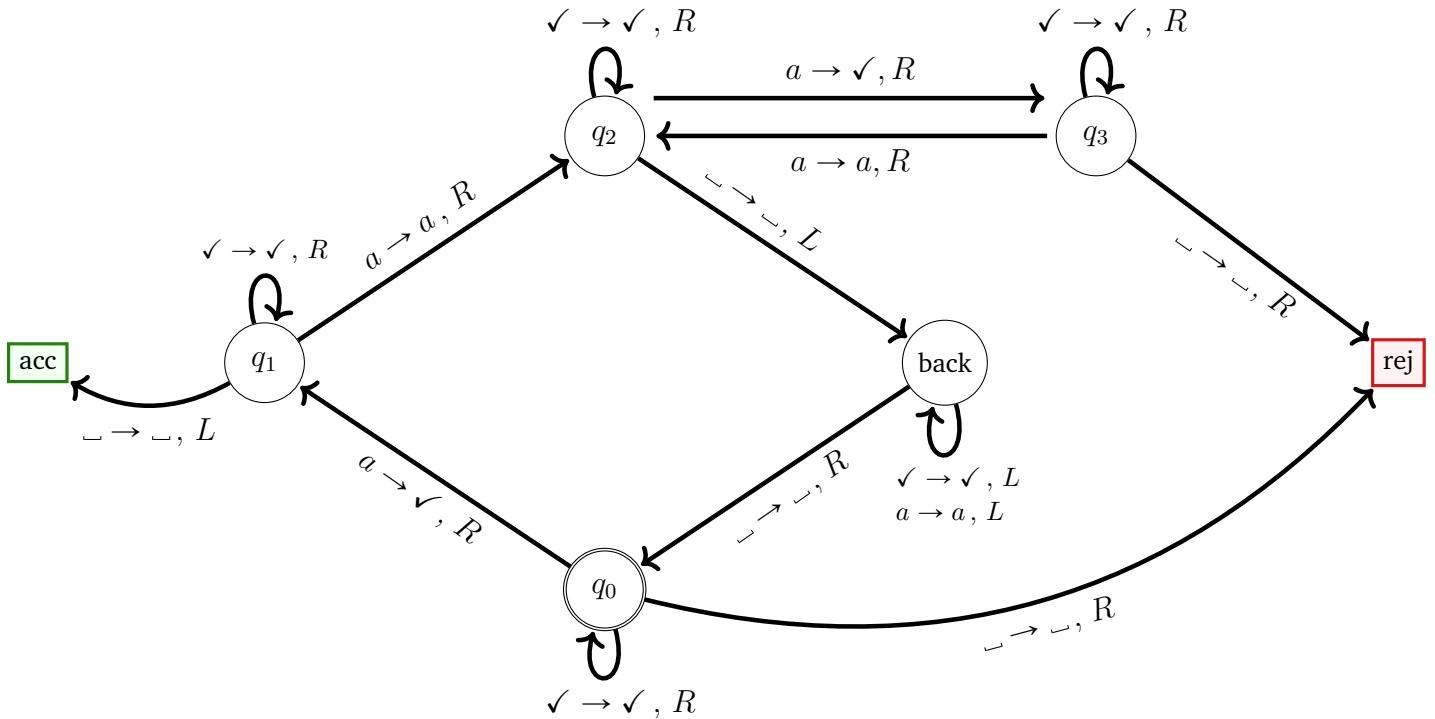
$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים,  $c_1$  גורר את  $c_2$ ) אם כשנמצאים ב-  $c_1$  עוברים ל-  $c_2$  בצעד בודד.

**דוגמה 1.10 (המשך של דוגמה 1.5)**

עבור המكونת טיורינג שמתוארת בתרשים למטה מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$

**הגדרה 1.5 גירירה בכללי**

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$  מكونת טיורינג, ותהינה  $c_1$  ו-  $c_2$  קונפיגורציות של  $M$ . נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

אם ניתן לעבור מ-  $c_1$  ל-  $c_2$  ב- 0 או יותר צעדים.

**דוגמה 1.11 (המשך של דוגמה 1.5)**

עבור המكونת טיורинг שמתוארת בתרשים למטה מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M^* \checkmark \checkmark \checkmark q_4 a$$

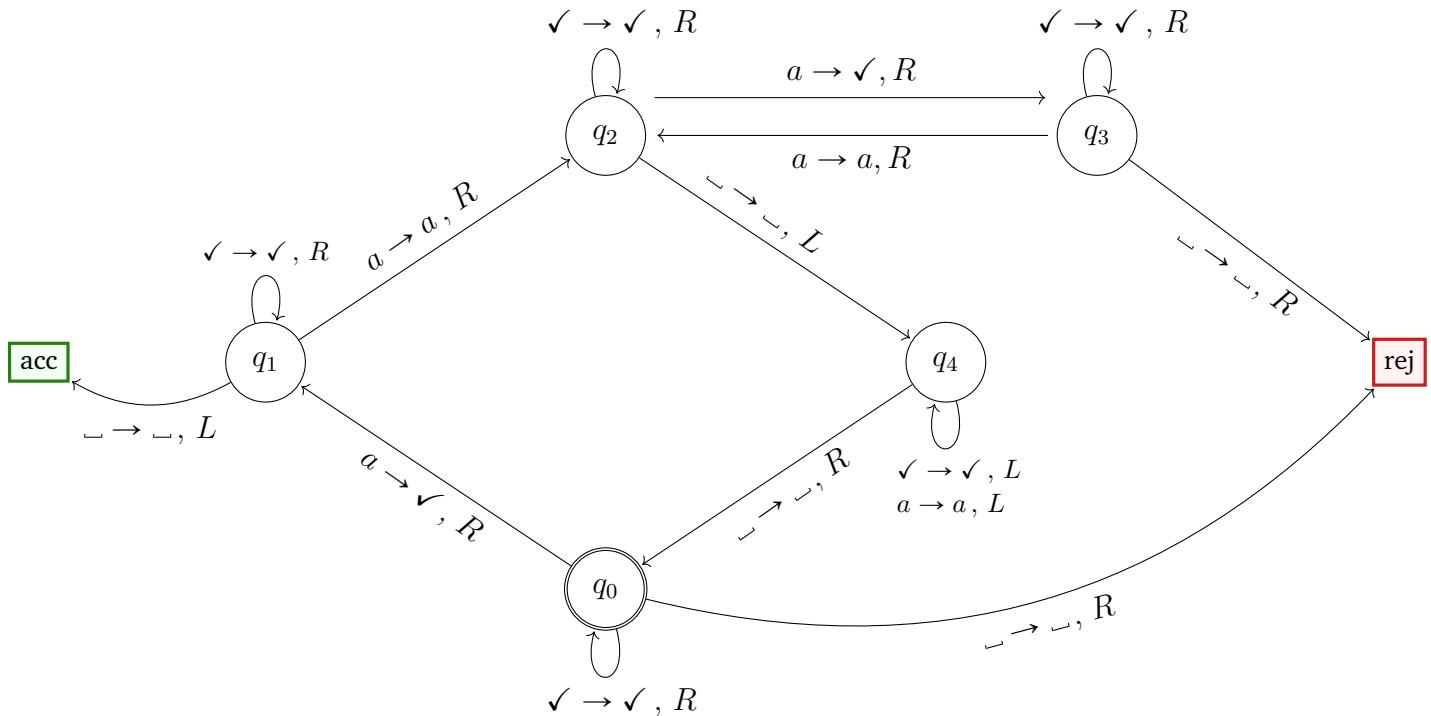
בגלל ש:

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark q_1 a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark a q_2 \_\_$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark \checkmark q_4 a .$$



### הגדרה 1.6 קבלת ודוחיה של מחרוזות

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$  מכונת טיורינג, ו-  $w \in \Sigma^*$  מחרוזת. אומרים כי:

- **מקבלת את  $w$  אם**

$$q_0 w \vdash_M^* u q_{\text{acc}} \sigma v$$

כאשר  $\Gamma^* v, \sigma \in \Gamma^*$ ,  $u$  כלשהם.

- **דוחה את  $w$  אם**

$$q_0 w \vdash_M^* u q_{\text{rej}} \sigma v$$

כאשר  $\Gamma^* v, \sigma \in \Gamma^*$ ,  $u$  כלשהם.

### הגדרה 1.7 הכרעה של שפה

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, q_{\text{rej}})$  מכונת טיורינג, ו-  $L \subseteq \Sigma^*$  שפה. אומרים כי  $M$  **מכריעה** את  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$  מתקיים:

- $M$  מקבלת את  $w$ .

- $M$  דוחה את  $w$ .

### הגדרה 1.8 קבלת של שפה

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$  מכונת טיורינג, ו-  $L \subseteq \Sigma^*$  שפה. אומרים כי  $M$  **מקבלת** את  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$  מתקיים:

- אם  $w \in L$  מקבלת את  $w$ .

- אם  $w \notin L$  לא מקבלת את  $w$ .

במקרה זה כאשר  $M$  מקבלת את השפה  $L$ , נכתב ש-

$$L(M) = L .$$

## 1.2 טבלת המעברים

### דוגמה 1.12

בנו מכונה טיורינג שמכריעת את השפה

$$L = \{w = \{a, b, c\}^* \mid \#a_w = \#b_w = \#c_w\}$$

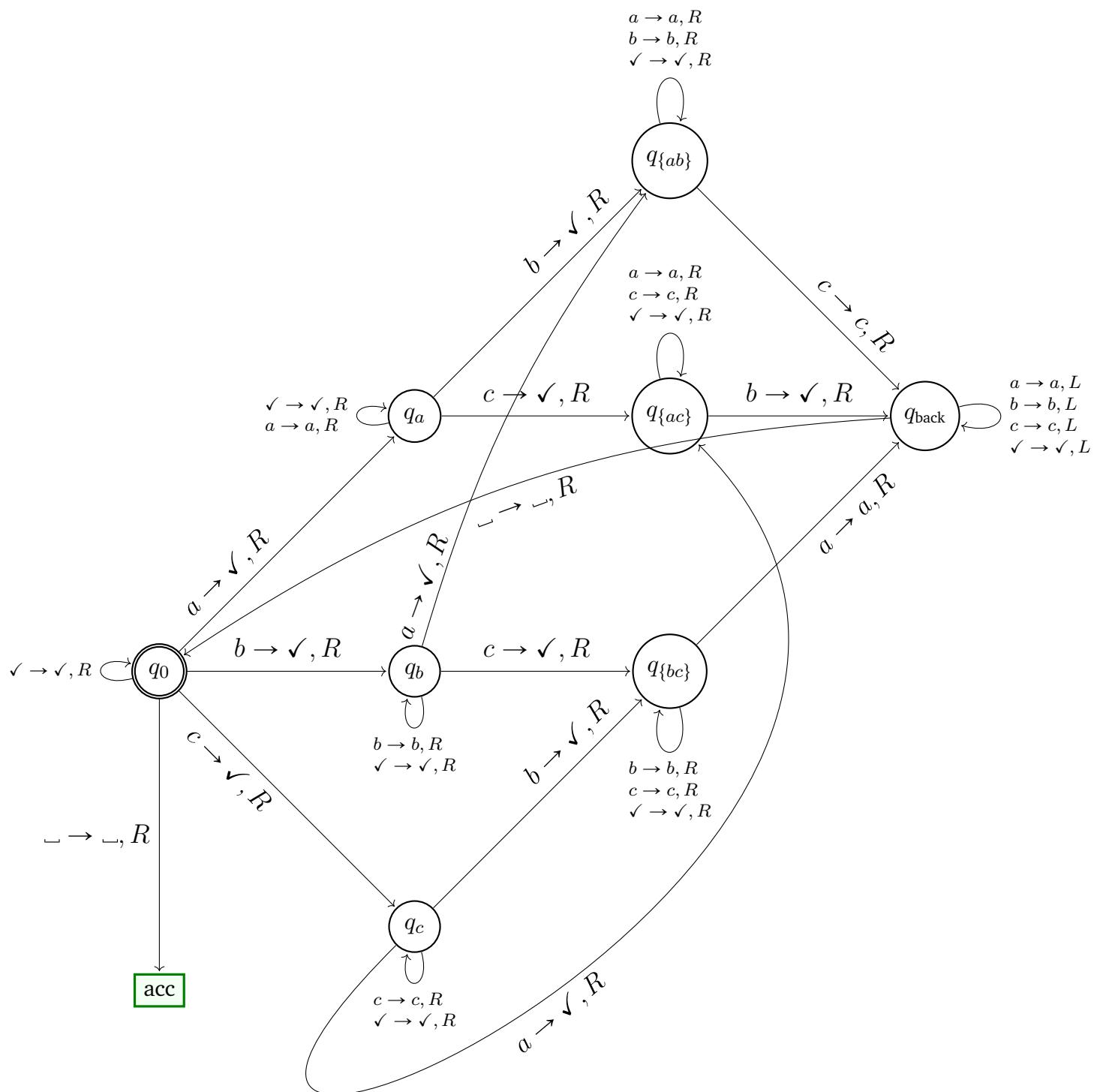
**פתרון:**

נתאר את המכונה על ידי הטבלת המעברים של המכונה. הסימן  $S$  מסמן כל זוג אותיות שונות מהקבוצה  $\{a, b, c\}$  ללא חשיבות לסדר. ככלומר:

$$S = \{a, b\} , \quad S = \{b, c\} , \quad S = \{a, c\} .$$

מצב	מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזואה	תנאי
$q_0$	$\sigma$	$q.\sigma$		✓	$R$	$\sigma \in \{a, b, c\}$
$q.\sigma$	$\sigma$	$q.\sigma$		∅	$R$	$\sigma \in \{a, b, c\}$
$q.\sigma$	$\tau$	$q.\{\sigma\tau\}$		✓	$R$	$\sigma, \tau \in \{a, b, c\} \wedge \sigma \neq \tau$
$q.S$	$\sigma$	$q.S$		$\sigma$	$R$	$\sigma \in S$
$qS$	$\sigma$	$q_{\text{back}}$		✓	$L$	$\sigma \notin S$
$q_{\text{back}}$	$a, b, c, \checkmark$	$q_{\text{back}}$		∅	$L$	
$q_0$	—	$q_{\text{acc}}$		∅	$R$	
$q_{\text{back}}$	$a, b, c, \checkmark$	$q_{\text{back}}$		∅	$L$	
$q_{\text{back}}$	—	$q_0$		∅	$R$	

כעת נתאר את המכונה על ידי תרשيم המצביעים של המכונה:



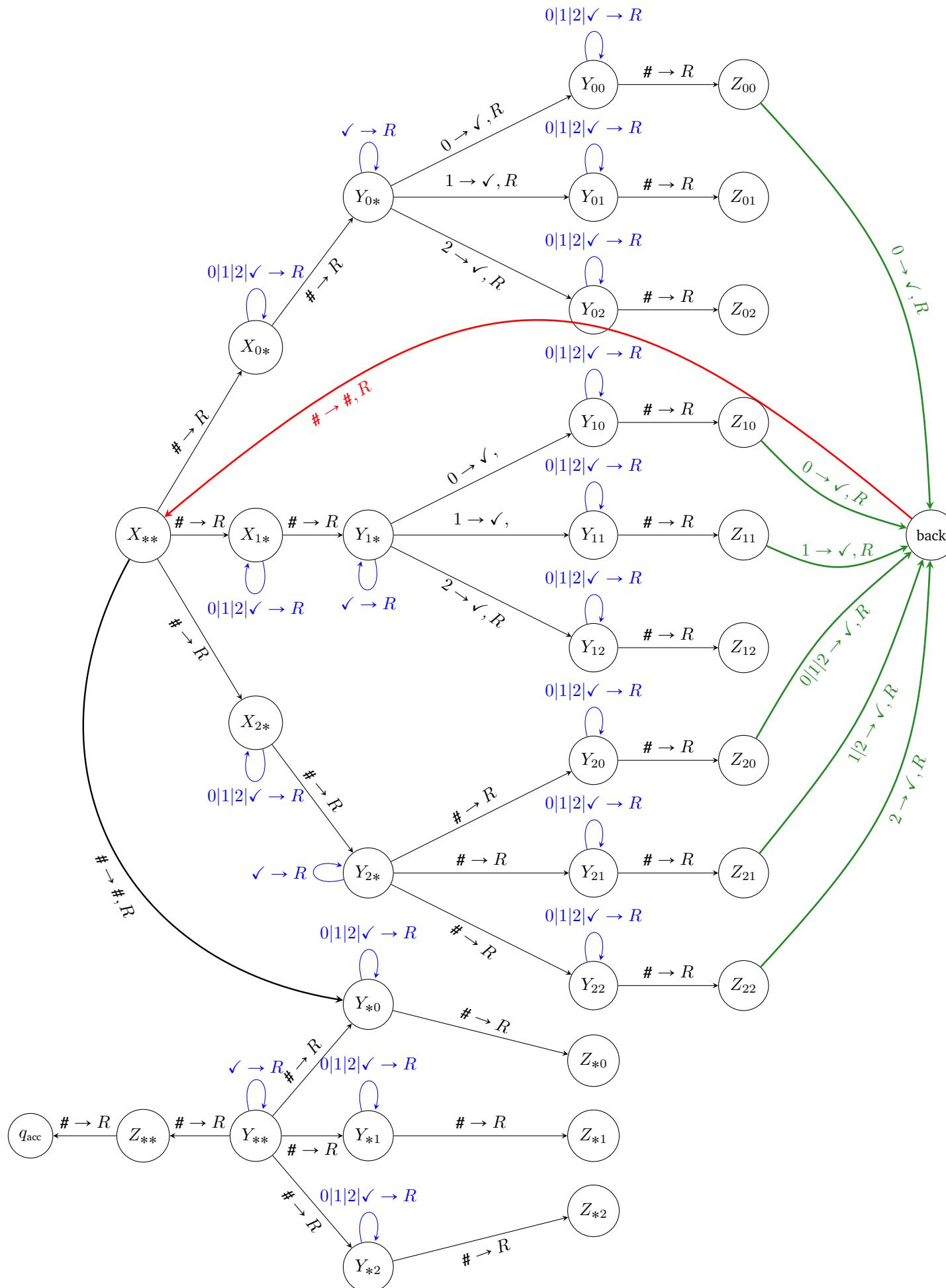
**דוגמה 1.13**

בנו מכונת טיורינג שמקריעה את השפה

$$\{x_1 \dots x_k \# y_1 \dots y_k \# z_1 \dots z_k \mid x_i, y_i, z_i \in \{0, 1, 2\}, \forall i, x_i \geq z_i \geq y_i\}$$

**פתרונות:**

מצב	מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזואה	תנאי
$X * *$	$\sigma$	$X\sigma*$	✓	$R$		
$X * *$	✓	$X * *$	✓	$R$		
$X\sigma*$	0, 1, 2, ✓	$X\sigma*$	∅	$R$		
$X\tau*$	#	$Y\tau*$	∅	$R$		
$Y\tau*$	$\sigma$	$Y\tau\sigma$	∅	$R$		
$Y\tau*$	✓	$Y\tau*$	∅	$R$		
$Y\tau\sigma$	0, 1, 2, ✓	$Y\tau\sigma$	∅	$R$		
$Y\tau_1\tau_2$	#	$Z\tau_1\tau_2$	∅	$R$		
$Z\tau_1\tau_2$	✓	$Z\tau_1\tau_2$	∅	$R$		
$Z\tau_1\tau_2$	$\sigma$	$q_{\text{back}}$	✓	$L$		
$Z * *$	—	$q_{\text{acc}}$	∅	$R$	$\tau_1 \geq \sigma \geq \tau_2$	
$q_{\text{back}}$	0, 1, 2, ✓	$q_{\text{back}}$	∅	$L$		
$q_{\text{back}}$	—	$X * *$	∅	$R$		



### 1.3 חישוב פונקציות

#### הגדרה 1.9 מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה $f$

תהי  $\Sigma_2^* \rightarrow \Sigma_1^*$  ותהי  $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$  מכונת טיורינג  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$  מוחשבת את  $f$  אם:

- $\Sigma_2 \subset \Gamma$  ו-  $\Sigma = \Sigma_1$ .
- לכל  $q_0 w \vdash q_{\text{acc}}, f(w) \in \Sigma_1^*$  מתקיים.

#### דוגמה 1.14 חיבור אונרי

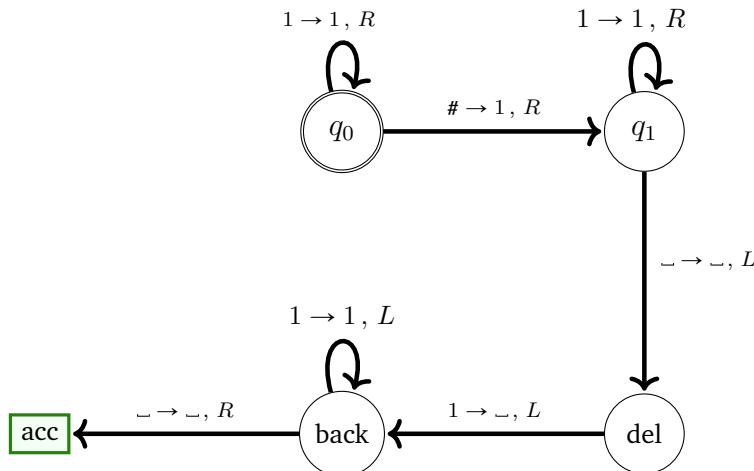
בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i \# 1^j$$

ומחזירה את פלט

$$1^{i+j}.$$

פתרונות:



#### דוגמה 1.15 כפל אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i \# 1^j$$

ומחזירה את פלט

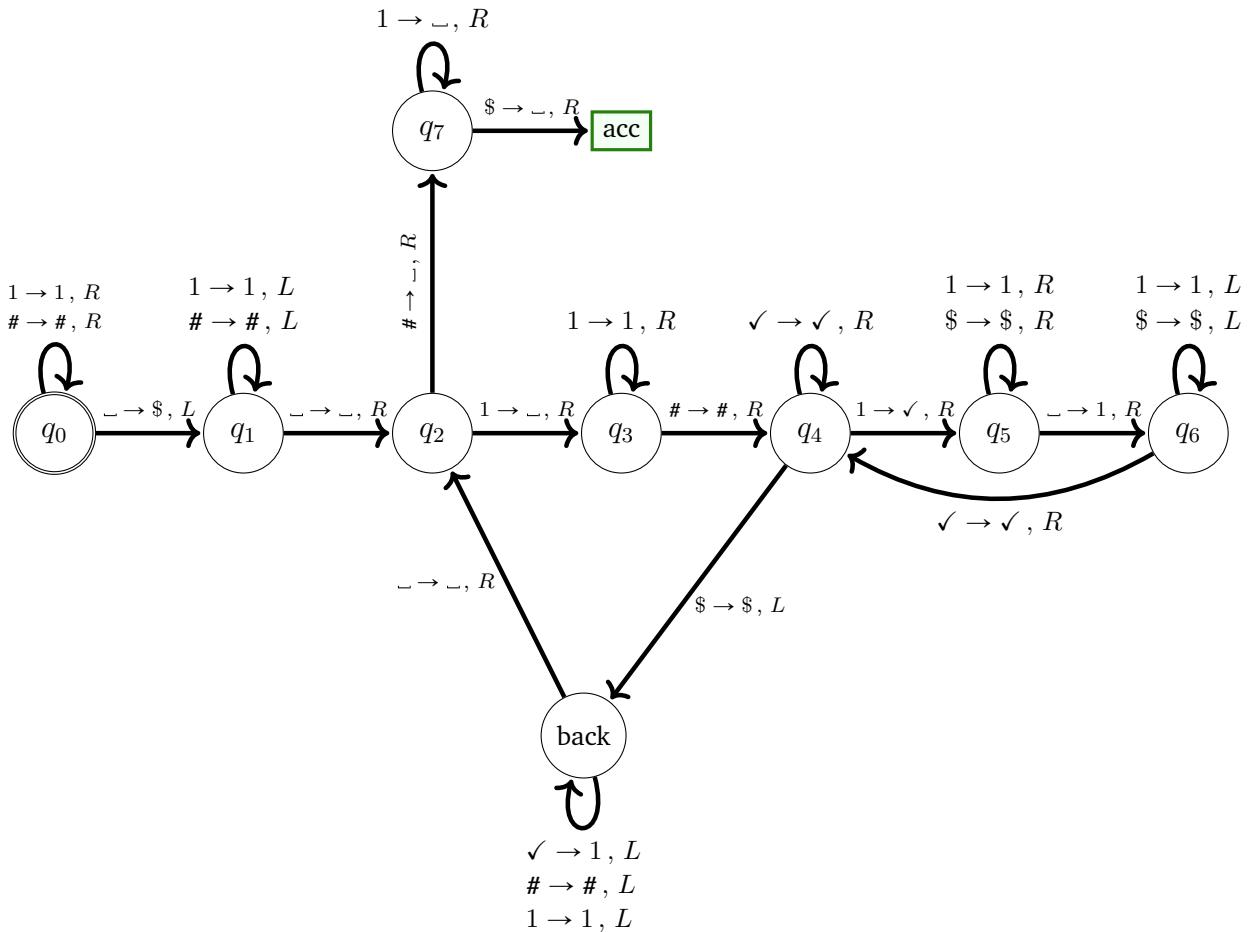
$$1^{i \cdot j}.$$

פתרונות:

- לדוגמה, נניח שהקלט הוא 2 כפול 2.

הקלט הוא 11#11.

- נרצה להבדיל בין הקלט לבין הפלט.  
לכן בתחילת הריצה, נתקדם ימינה עד סוף הקלט ונוסף שם את התו \$.  
לאחר מכן נחזור לתחילת הקלט.
- על כל אות 1 במילה השמאלית נעתק את המילה הימנית לאחר סימן ה- \$.
- לאחר מכן נשאיר רק את התווים שלאחר סימן ה \$. כמובן, נמחק את כל מה שאינו פלט.



$\mu$	$q$	$\sigma$	$\nu$
$\_$	$q_0$	1	$1\#\underline{11}\_$
$\underline{11}\#\underline{11}$	$q_1$	$\underline{\_}$	$\underline{\_}$
$\underline{11}\#\underline{11}$	$q_1$	$\$$	$\underline{\_}$
$\underline{\_}$	$q_1$	$\underline{\_}$	$11\#\underline{11}\$$
$\underline{\_}$	$q_2$	1	$1\#\underline{11}\$$
$\underline{\_}\underline{\_}$	$q_3$	1	$\#\underline{11}\$$
$\underline{\_}\underline{1\#}$	$q_4$	1	$1\$$
$\underline{\_}\underline{1\#\checkmark}$	$q_5$	1	$\$$
$\underline{\_}\underline{1\#\checkmark}\underline{1\$}$	$q_5$	$\underline{\_}$	$\underline{\_}$
$\underline{\_}\underline{1\#\checkmark}\underline{1\$1}$	$q_6$	$\underline{\_}$	$\underline{\_}$
$\underline{\_}\underline{1\#}$	$q_6$	$\checkmark$	$1\$1\_\underline{\_}$
$\underline{\_}\underline{1\#\checkmark}$	$q_4$	1	$\$1\_\underline{\_}$
$\underline{\_}\underline{1\#\checkmark}\underline{\checkmark}$	$q_5$	$\$$	$1\_\underline{\_}$
$\underline{\_}\underline{1\#\checkmark}\underline{\checkmark}\underline{\$1}$	$q_5$	$\underline{\_}$	$\underline{\_}$
$\underline{\_}\underline{1\#\checkmark}\underline{\checkmark}\underline{\$11}$	$q_6$	$\underline{\_}$	$\underline{\_}$

<u>        </u>	<u>        </u> 1#✓	$q_6$	✓	\$11 <u>        </u>
<u>        </u>	<u>        </u> 1#✓✓	$q_4$	\$	11 <u>        </u>
<u>        </u>	<u>        </u> 1#✓	back	✓	\$11 <u>        </u>
<u>        </u>	<u>        </u>	back	—	1#11\$11 <u>        </u>
<u>        </u>	<u>        </u>	$q_2$	1	#11\$11 <u>        </u>
<u>        </u>	<u>        </u>	$q_3$	#	11\$11 <u>        </u>
<u>        </u>	<u>        </u>	$q_4$	1	1\$11 <u>        </u>
<u>        </u>	<u>        </u>	$q_5$	1	\$11 <u>        </u>
<u>        </u>	<u>        </u> #✓1\$11	$q_5$	—	—
<u>        </u>	<u>        </u> #✓1\$111	$q_6$	—	—
<u>        </u>	<u>        </u>	$q_6$	✓	1\$111 <u>        </u>
<u>        </u>	<u>        </u>	$q_4$	1	\$111 <u>        </u>
<u>        </u>	<u>        </u>	$q_5$	\$	111 <u>        </u>
<u>        </u>	<u>        </u> #✓✓\$111	$q_5$	—	—
<u>        </u>	<u>        </u> #✓✓\$1111	$q_6$	—	—
<u>        </u>	<u>        </u>	$q_4$	✓	\$1111
<u>        </u>	<u>        </u>	$q_4$	\$	1111
<u>        </u>	<u>        </u>	back	✓\$	1111
<u>        </u>	<u>        </u>	back	—	#11\$1111
<u>        </u>	<u>        </u>	$q_2$	#	11\$1111
<u>        </u>	<u>        </u>	$q_7$	1	1\$1111
<u>        </u>	<u>        </u>	$q_7$	\$	1111
<u>        </u>	<u>        </u>	acc	1	111

## שיעור 2

# מודלים חישוביים שקולית

### הגדרה 2.1 מודל חישובי

מודל חישובי הוא אוסף של מכונות טיורינג שעבורן מוגדרים המושגים של הכרעה וקבלת של שפות.

### הגדרה 2.2 מודלים שקולים חישובית

יהיו  $A$  ו-  $B$  מודלים חישוביים. אומרים כי  $A$  ו-  $B$  שקולים אם לכל שפה  $L$  התנאים הבאים מותקינים:

- 1) קיימת מ"ט במודל  $A$  שמכריעה את  $L$  אם ו רק אם קיימת מ"ט במודל  $B$  שמכריעת את  $L$ .
- 2) קיימת מ"ט במודל  $A$  שמקבלת את  $L$  אם ו רק אם קיימת מ"ט במודל  $B$  שמקבלת את  $L$ .

### דוגמה 2.1

**נסמן ב-** $T$  את מודל המכונה הטיורינג הבסיסי.

במודל זה בכלל צעד ניתן לוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת הסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לשני הצדדים. בתחילת החישוב הראש נמצא בתחילת הקלט.

**נסמן ב-** $O$  את מודל המכונה הטיורינג עם סרט ימינה בלבד.

במודל זה בכלל צעד ניתן לוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת הסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לכיוון אחד בלבד - ימינה. בתחילת החישוב, הקלט ממוקם בקצתה השמאלי של הסרט והראש נמצא בתחילת הקלט. החישוב מתנהל כמו במכונה במודל  $T$  למעט כאשר הראש נמצא במשבצת השמאלית ביותר הסרט וצריך לוז ש מלאה - במקרה כזה הראש נשאר במקום ולא זו.

הוכיחו כי המודל  $T$  והמודל  $O$  שקולים חישובית.

**פתרון:**

יש להוכיח ש:

- לכל מ"ט במודל  $O$  קיימת מ"ט שcolaה במודל  $T$ .
- לכל מ"ט במודל  $T$  קיימת מ"ט שcolaה במודל  $O$ .

#### כיוון ראשון

נווכיח כי לכל מ"ט במודל  $O$  קיימת מ"ט שcolaה במודל  $T$ . כלומר:

נתונה  $(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, acc^O, rej^O)$  מודל  $O$ .

נבנה,  $M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, acc^T, rej^T)$  שcolaה במודל  $T$ .

נעבוד רק עם צד ימין של הסרט האינסופי של  $M^T$  ואז  $M^T$  תהיהcolaה ל-  $M^O$ .

רכיבי המ"ט  $M^T$  זהים לאלו של המ"ט  $M^O$ , מלבד מהתמונה שהראש של  $M^O$  לא זו מעבר לנקודה השמאלית של הקלט.

לכן כדי ש-  $M^T$  תהיה שcolaה ל-  $M^O$  נוסף מעברים לפונקציית המעברים של  $M^T$  כדי שהראש של  $M^T$  לא זו מעבר לכמה השמאלי של הקלט.

הרעיון הוא לסמן את המשבצת שמשמעותו לתחילת הקלט עם סימן מיוחד  $\$$ , ואז להוסיף מעברים לפונקציית המעברים של  $M^T$  שבティחים שאם הראש נמצא למשבצת שמשמעותו  $\$$  אז הוא מיד חוזר ו-  $M^T$  חוזרת למצב ההתחתי של המ"ט  $M^O$ . זה מתבצע על ידי הוספת השורשות הבאות לטבלת המעברים של  $M^T$ :

תנאי	$R$	טזזה	כתיבה	מצב חדש	סימון	מצב
		$\emptyset$	$\emptyset$	$L$	$q_0^T$	$\sigma$
		$\$$	$q_0^O$	$R$	$q\$$	$-$
	$\forall q \in Q^O$	$\$$	$q$	$R$	$q$	$\$$

$$Q^T = Q^O \cup \{q_0^T, q\$ \} , \quad \Sigma^T = \Sigma^O , \quad \Gamma^T = \Gamma^O \cup \{\$\} , \quad \text{acc}^T = \text{acc}^O , \quad \text{rej}^T = \text{rej}^O .$$

### כיוון שני

נוכיח כי לכל מ"ט במודל  $T$  קיימת מ"ט שcolaה במודל  $O$ . כלומר:

$$\text{נתונה } M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T) \text{ במודל } T .$$

$$\text{נבנה } M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O) \text{ שcolaה במודל } O .$$

הרעיון הוא לסמן קו על הסרט במשבצת באמצע הקלט, ואז לкопל את הסרט בקו זהה. באופן זה קיבל סרט עם כמה שמאלי ואין סופי ימינה. במשבצות של הסרט החדש המ קופל יש שני תווים, אחד לעלה ( $U$ ) ואחד למטה ( $D$ ), מלבד מנוקודת הקיפול שבו יש משבצת אחת שמשמעותו  $\$$ .

באופן זה אפשר לסמלץ את המכונה  $M^O$  במכונה  $M^T$  על ידי הוספת המעברים הבאים לטבלת המעברים של  $M^T$ . לכל  $\tau, \sigma, \pi \in \Gamma^T$ :

מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזואה	תנאי
$q.D$	$\pi$ $\sigma$	$p.D$	$\pi$ $\tau$	$L$	תזואה שמאליה: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$
$q.U$	$\sigma$ $\pi$	$p.U$	$\tau$ $\pi$	$R$	
$q.D$	$\sqcup$	$p.D$	$\sqcup$ $\tau$	$L$	תזואה שמאליה: $(q, \sqcup) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$
$q.U$	$\sqcup$	$p.U$	$\tau$ $\sqcup$	$R$	
$q.D$	$\pi$ $\sigma$	$p.D$	$\pi$ $\tau$	$R$	תזואה ימינה: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$
$q.U$	$\sigma$ $\pi$	$p.U$	$\tau$ $\pi$	$L$	
$q.D$	$\sqcup$	$p.D$	$\sqcup$ $\tau$	$R$	תזואה ימינה: $(q, \sqcup) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$
$q.U$	$\sqcup$	$p.U$	$\tau$ $\sqcup$	$L$	
$q.D$	\$	$q.U$	$\emptyset$	$R$	
$q.U$	\$	$q.D$	$\emptyset$	$R$	
<b>אתחול</b>					
$q_0^O$	$\tau$	$q.\tau$	\$	$R$	$\tau \in \Sigma \cup \{\sqcup\}$ $\sigma \in \Sigma$
$q.\sigma$	$\tau$	$q.\tau$	$\sqcup$ $\sigma$	$R$	
$q.\sqcup$	$\sqcup$	back	$\sqcup$ $\sqcup$	$L$	
back	$\sqcup$ $\tau$	back	$\emptyset$	$L$	
back	\$	$q_0^T.D$	$\emptyset$	$R$	
<b>סיום</b>					
$acc^T.D$	הכל	$acc^O$			
$acc^T.U$	הכל	$acc^O$			
$rej^T.D$	הכל	$rej^O$			
$rej^T.U$	הכל	$rej^O$			
<b>כל השאר עוברים-rej</b>					

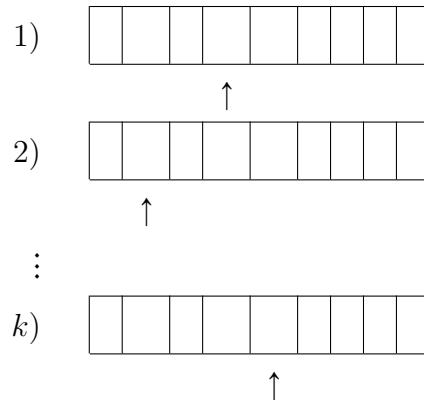
$$\Gamma^O \supseteq (\Gamma^T \times \Gamma^T) \cup \{ \$ \} .$$

## שיעור 3

### מכונות טיורינג מרובת סרטים

#### 1.3. מכונת טיורינג מרובה סרטים: הגדרה היוריסטית

מכונת טיורינג מרובה סרטים (מטמ"ס) היא הכללה של מ"ט עם סרט יחיד. ההבדל הוא של מטמ"ס ישנו מספר סופי של סרטים, נניח  $1 < k$  סרטים.



- לכל סרט יש ראש שלו.
- בתחלת העבודה הקלט  $w$  כתוב בתחילת הסרט הראשון וכל שאר הסרטים ריקים. הראשים בכל סרט מצביעים על הטא הראשון הסרט, והמכונה נמצאת במצב התחלתי  $q_0$ .
- בכל צעד חישוב, לפי המצב הנוכחי ול-  $k$  התווים שמתוחת ל-  $k$  הראשים, המכונה מחליט לאיזה מצב לעבור, מה לכתוב מתחת לכל אחד מ-  $k$  הראשים ולאן להזיז את הראש בכל אחד מ-  $k$  הסרטים.
- הראשים של הסרטים יכולים לזרז באופן בלתי- תלוי בהתאם לפונקציית המעברים של המטמ"ס.

#### 2. מכונת טיורינג מרובה סרטים: הגדרה פורמלית

##### הגדרה 1.3. מכונת טיורינג מרובה סרטים

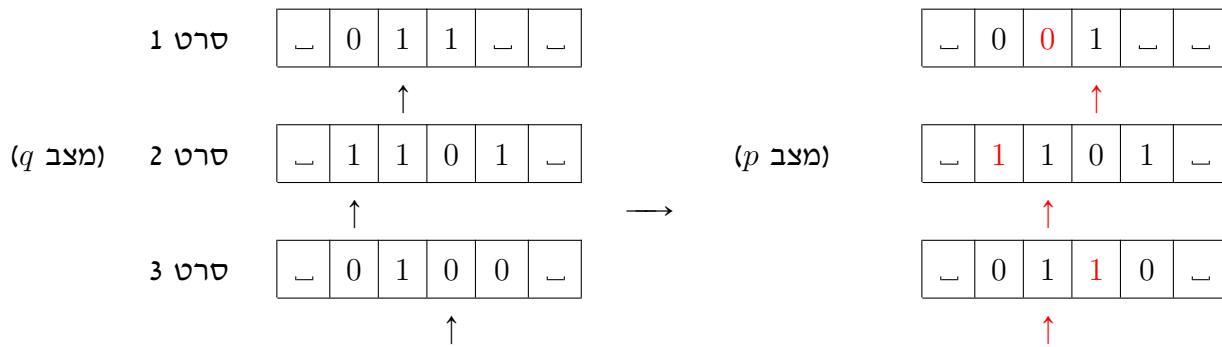
מכונת טיורינג מרובה סרטים היא שביעייה:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר  $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}$  מוגדרים כמו מ"ט עם סרט יחיד (ראו הגדרה 1.2).  
ההבדל היחיד בין מ"ט עם סרט יחיד לבין מטב"ס הוא הפונקציית המעברים. עבור מטמ"ס הפונקציית המעברים היא מצורה הבא:

$$\delta_k : (Q \setminus \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$$

### 3.1 דוגמה



$$\delta_k \left( q, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left( p, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \\ L \end{pmatrix} \right).$$

### **3.3 קונפיגורציה של מטמ"ס**

הכללה של קונפיגורציה של מ"ט עם סרט יחיד:

$$\begin{pmatrix} u_1 q & v_1 \\ u_2 q & v_2 \\ \vdots \\ u_k q & v_k \end{pmatrix}$$

### **3.2 דוגמה**

**בנו מטמ"ס שמכריעת את השפה:**

$$L_{w^R} = \{w = \{a, b\}^* \mid w = w^R.\}$$

כלומר שפט הפלינדרומיים.

## פתרונות:

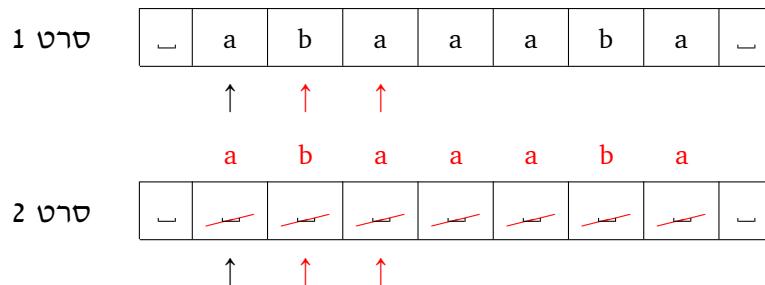
נבנה מ"ט עם שני סרטים:

## תאור המכונה:

נסמן  $M_2$  המ"ט עם 2 סרטים שמכריעת את השפה

*:w* על הקלט =  $M_2$

(1) מעתיקת את  $w$  לסרט 2.



(2) מזיה את הראש בסרט 1 לטו הראשון ב-  $w$  ואת הראש בסרט 2 לטו האחרון ב-  $w$ .

(3) משווה בין התווים שמתוחת לראשים:

- אם הטו שמתוחת לראש 1 בסרט 1 הוא  $\_ \leftarrow .acc$
- אם התווים שמתוחת לראשים שונים  $\_ \leftarrow .rej$
- אחרת מזיה את הראש בסרט 1 ימינה ואת הראש בסרט 2 שמאליה, וחזרת לשלב (3).

הfonקציית המעברים של  $M_2$  היא:

$$\begin{aligned}\delta\left(q_0, \begin{pmatrix} a \\ \_ \end{pmatrix}\right) &= \left(q_0, \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}\right), \\ \delta\left(q_0, \begin{pmatrix} b \\ \_ \end{pmatrix}\right) &= \left(q_0, \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}\right), \\ \delta\left(q_0, \begin{pmatrix} \_ \\ \_ \end{pmatrix}\right) &= \left(q_{back}, \begin{pmatrix} \_ \\ \_ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ L \end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

נשים לב כי הסיבוכיות זמן של המכונה עם שני סרטים,  $M_2$  היא  $O(|w|)$ , כאשר  $w$  האורך של המילה.

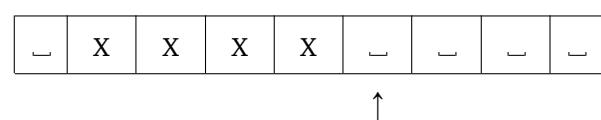
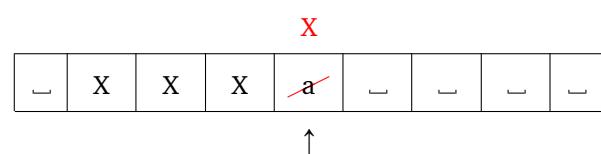
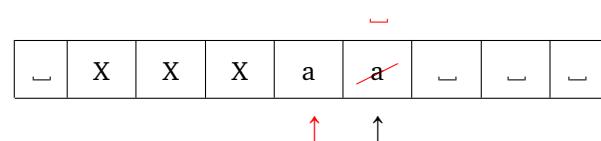
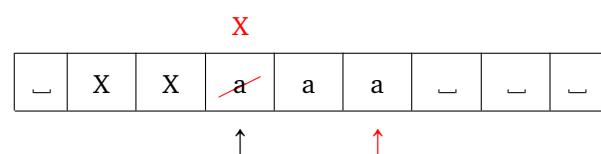
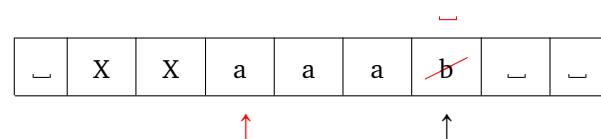
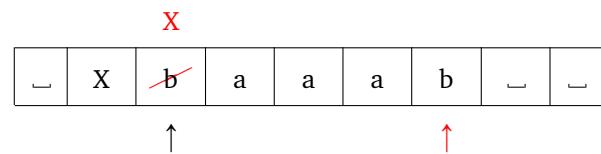
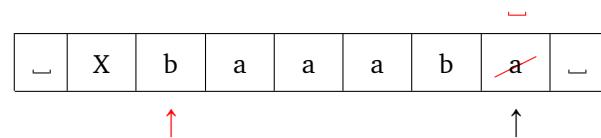
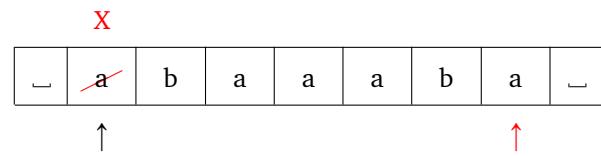
cut נבנה מ"ט עם סרט ייחיד שמכריעה את השפה  $L_{W^R}$ .

תאור המכונה:

נסמן  $M_1$  המכונה עם סרט ייחיד שמכריעת את השפה  $L_{w^R}$ .

על הקלט  $w = M_1$ :

- (1) אם הטו שמתוחת לראש הוא  $\_ \leftarrow M_1 \_ \leftarrow .acc$
- (2) זכרת את הטו שמתוחת לראש ומוחקת אותו ע"י  $X$ .
- (3) מזיה את הראש ימינה עד הטו הראשון משמאל ל-  $\_$ .
- אם הטו שמתוחת לראש הוא  $X \leftarrow .acc$
  - אם הטו שונה מהטו שזכרנו  $\_ \leftarrow .rej$
  - מוחקת את הטו שמתוחת לראש ע"י  $\_$ , מזיה את הראש שמאליה עד הטו הראשון מימין ל-  $X$  וחזרת לשלב (1).



## **3.4 שיקולות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד**

מ"ט עם סרט ייחד היא מקרה פרטי של מטמ"ס.

**משפט 3.1 שיקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד**

לכל מטמ"ס  $M$  קיימת מ"ט עם סרט יחיד  $M'$  השקולה לו- $M$ .

כלומר, לכל קלט  $w \in \Sigma^*$ :

- אם  $M$  מקבלת את  $w$     $\Leftarrow$     $M'$  מקבלת את  $w$ .
- אם  $M$  דוחה את  $w$     $\Leftarrow$     $M'$  דוחה את  $w$ .
- אם  $M$  לא עוצרת על  $w$     $\Leftarrow$     $M'$  לא עוצרת על  $w$ .

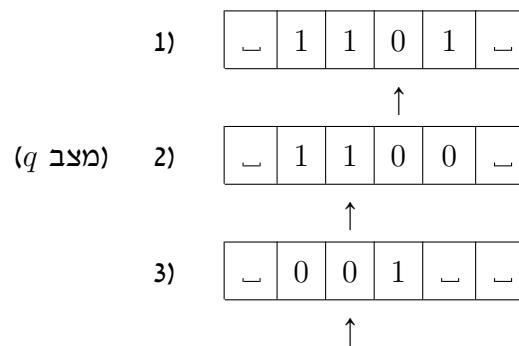
**הוכחה:**

בහינתן מטמ"ס  $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q'_0, q'_{\text{acc}}, q'_{\text{rej}})$  נבנה מ"ט עם סרט יחיד  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$  עם  $k$  סרטיים, נבנה מ"ט עם סרט יחיד  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$  עם  $k$  סרטיים, נבנה מ"ט עם סרט יחיד  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$  השקולה לו- $M$  באופן הבא:

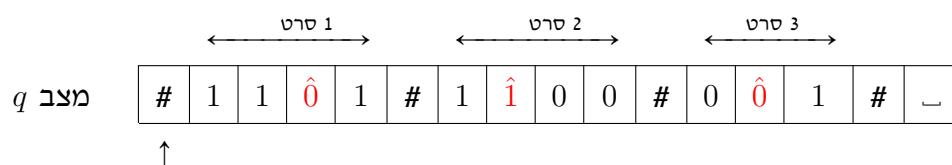
רעיון הבנייה:

בහינתן קלט  $w \in \Sigma^*$ , תבצע "סימולציה" של ריצה  $M$  על  $w$ .

$M$ -ב



$M'$ -ב



- $M'$  תשמור את התוכן של  $k$  הסרטיים של  $M$  על הסרט, רק שהתוכן של סרט  $i$  יופיע בין  $\#_{i+1}$  ל- $\#_i$ .
  - $M'$  תשמור את המיקום של הראשיים של  $M$  ע"י הכפלת הא"ב  $\Gamma$ .
- כלומר, לכל אות  $\Gamma \in \alpha$ ,  $M'$  תשמור שתי אותיות  $\alpha$  ו-  $\hat{\alpha}$  בו- $\Gamma$ , כך ש-  $\hat{\alpha}$  תסמן את התו שמתוחת בראש בכל סרט.

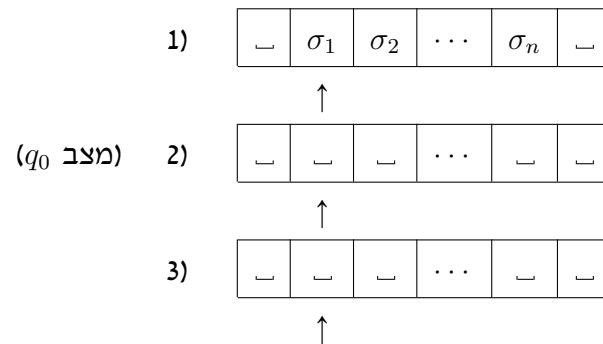
- בכל צעד חישוב,  $M'$  סורק את הסרט שלה משמאלי לيمין כדי ללמידה מהם התווים שמתוחת בראשים (התווים שמסומנים ב- $\hat{\alpha}$ ).
- $M'$  משתמש בפונקציית המעברים  $\delta_k$  של  $M$  כדי לחשב את המעבר הבא.
- $M'$  סורק את הסרט שלה משמאלי לימין כדי לבדוק את הסרטים ואת המיקום הראשיים בהם.

תאור הבנייה של  $M'$ :

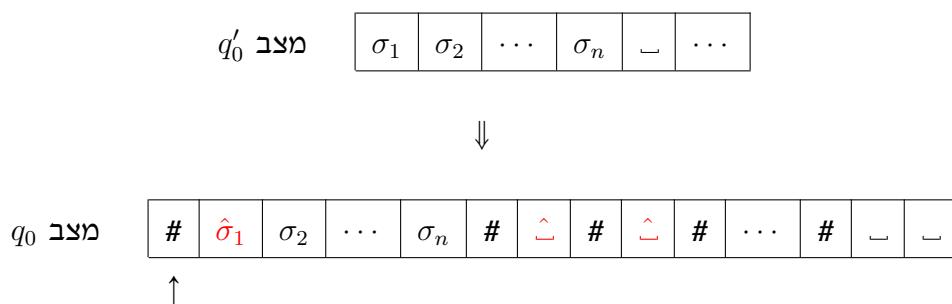
1) שלב האיתחול

בاهינתן קלט  $M', w = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n$  מתחילה את הקוניגורציה ההתחלתית של  $M$  על הסרט שלה.

$M$ -ב

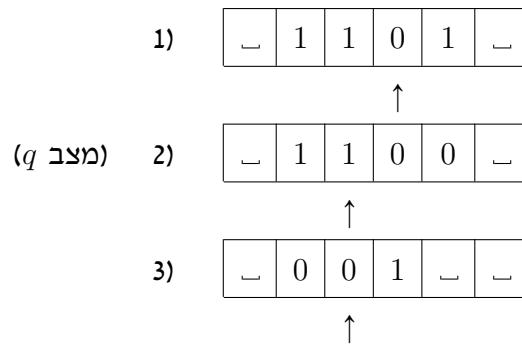


$M'$ -ב

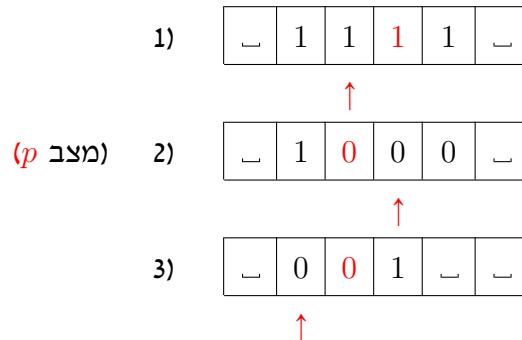
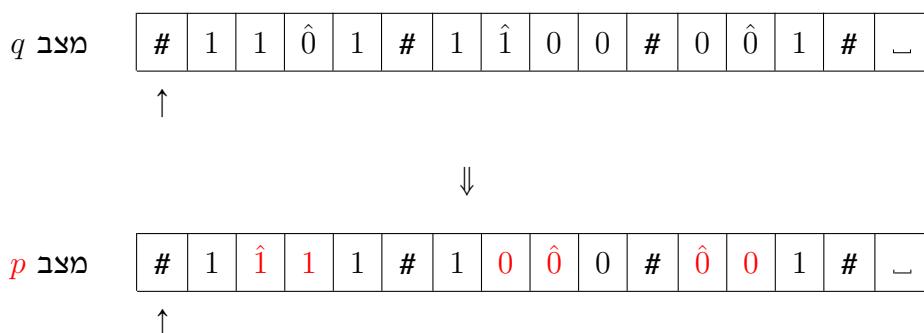


2) תאור צעד חישוב של  $M$

$M$ -ב



$$\delta_k \left( q, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left( p, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ R \\ L \end{pmatrix} \right)$$

 $M' - b$ • איסוף מידע

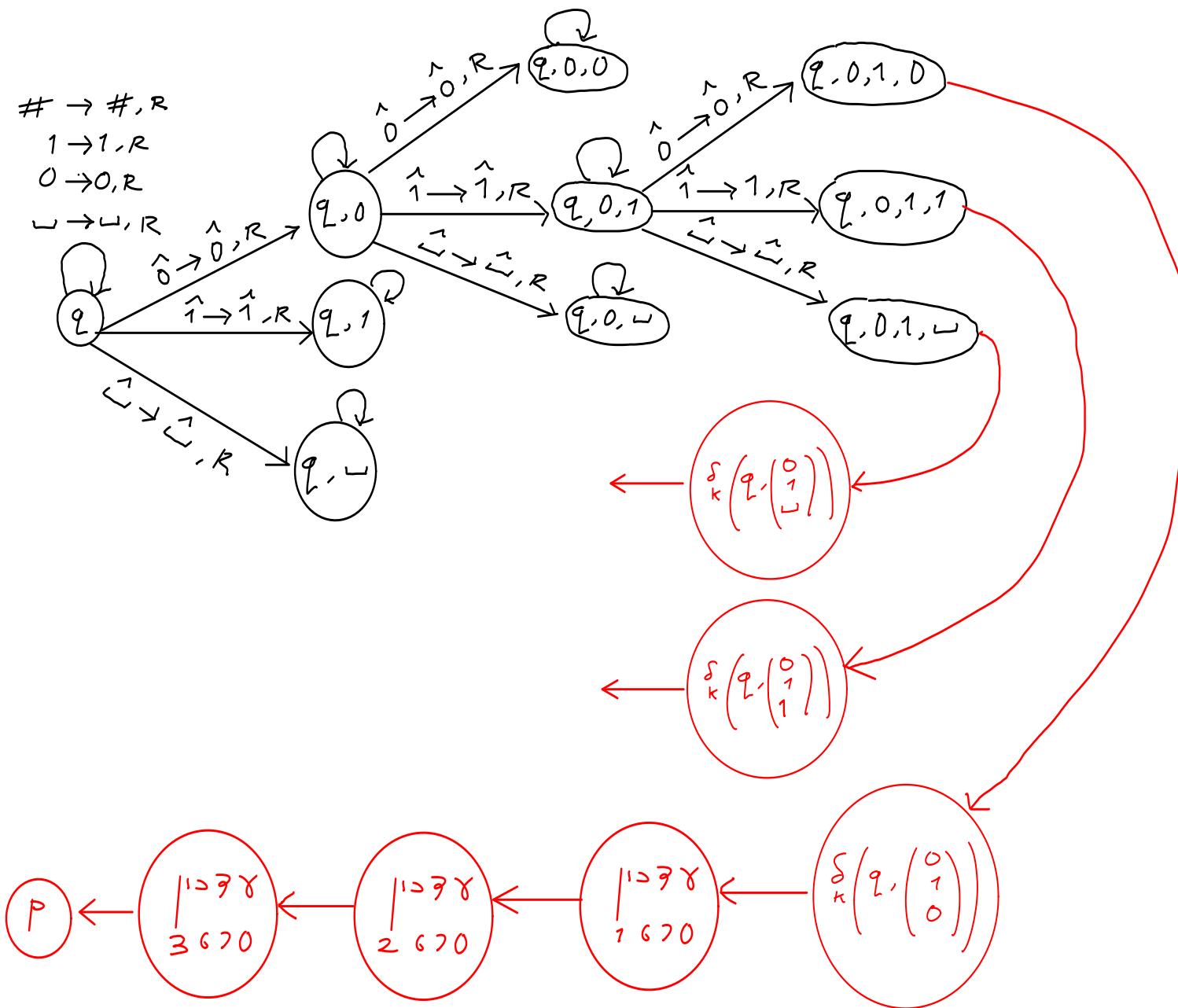
- $M'$  סורקת את הרצף שלה משמאל לימין ומזהה את התווים שמסומנים ב-  $\hat{}$ .

מידע זה ניתן לשמר במצבים. לדוגמה:

$$q, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

זה אפשרי מכיוון שמספר המצביעים הנדרש הוא סופי:

$$|Q| \times |\Gamma|^k \quad .$$



- ## • עדכון הסרטים

*M* סורקת את הסרט שלא עם נוספת כדי לפעול על פי פונקציית המעברים, כלומר, לעדכן את התאים שמתוחת לראשים ולעדכן את מיקום הראשים.

## שיעור 4

### מכונת טיריניג אי-דטרמיניסטיבית

#### 4.1 הגדרה של מכונת טיריניג אי-דטרמיניסטיבית

##### הגדרה 4.1 מכונת טיריניג אי-דטרמיניסטיבית

מכונת טיריניג אי-דטרמיניסטיבית (מ"ט א"ד) היא שביעיה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר  $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}$  מוגדרים כמו במ"ט דטרמיניסטי (ראו הגדרה 1.2).

$\Delta$  היא פונקציה המעבירים

$$\Delta : (Q \setminus \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}) .$$

$$\Delta(q, a) = \{(q_1, a, S), (q_2, b, L), \dots\} .$$

כלומר, לכל זוג  $q \in Q, a \in \Gamma$  יתכן מספר מעברים אפשריים, 0, 1 או יותר.

- קונפיגורציה של מ"ט א"ד זהה לקונפיגורציה של מ"ט דטרמיניסטיבית.

- לכל קונפיגורציה יתכן מספר קונפיגורציות עוקבות.

- לכל מילה  $w \in \Sigma^*$  יתכן מספר ריצות שונות:

- \* ריצות שמנגיעה ל-  $q_{\text{acc}}$ .

- \* ריצות שמנגיעה ל-  $q_{\text{rej}}$ .

- \* ריצות שלא עוזרות.

- \* ריצות שנתקעות.

##### הגדרה 4.2

מילה  $w \in \Sigma^*$  מתקבלת במ"ט א"ד  $M$  אם קיימת לפחות ריצה אחת שמנגעה ל-  $q_{\text{acc}}$ .

השפה של מ"ט א"ד  $M$  היא

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Gamma^* : q_0 w \vdash_* u q_{\text{acc}} v\}$$

כלומר,  
 $w \in L(M)$  אם קיימת ריצה אחת שבה  $M$  מקבלת את  $w$ .

$w \notin L(M)$  אם בכל ריצה של  $M$  על  $w$ ,  $M$  דוחה או לא עוזרת, או נתקעת.

**הגדרה 4.3 מ"ט א"ד המכריעת שפה  $L$** 

תהי  $M$  מ"ט א"ד.  
אומרים כי מ"ט א"ד  $M$  מכריעה שפה  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$ :

- אם  $w \in L$  מקבלת את  $w$ .
- אם  $w \notin L$  דוחה את  $w$ .

**הגדרה 4.4 מ"ט א"ד המקבלת שפה  $L$** 

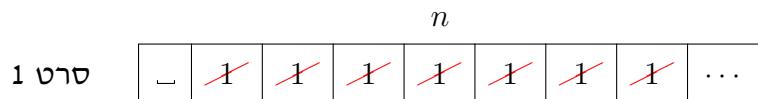
תהי  $M$  מ"ט א"ד.  
אומרים כי מ"ט א"ד  $M$  מקבלת שפה  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$ :

- אם  $w \in L$  מקבלת את  $w$ .
- אם  $w \notin L$  דוחה את  $w$  או  $M$  לא עוצרת על  $w$ .

**דוגמה 4.1**

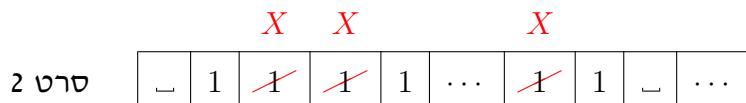
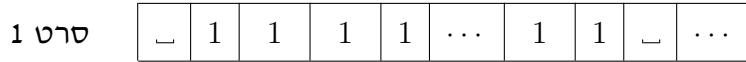
נתונה השפה

$$L = \{1^n \mid n \text{ איינו ראשוני}\}, \quad \Sigma = \{1\}.$$

בנו מ"ט המכריעה את השפה  $L$ .**פתרון:**הרעיוןنبנה מ"ט א"ד  $N$  המכריעה את  $L$ . $N$  תבחר באופן א"ד מספר  $1 < t < n$  ותבדוק האם  $t$  מחלק את  $n$ .תאור הבניה $w = 1^n$  על קלט  $= N$  :**שלב 1**

- $N$  בוחרת באופן א"ד מספר  $1 < t < n$ .

- מעתיקת את  $w$  לסדרת 2.
- עופרת על העותק משמאלי ימינו, ובכל תא מחליטה באופן א"ד האם להשאיר את ה- 1 או למחוק אותו ע"י  $X$  (לדאוג שהמספר שנבחר הוא לא 1 ולא  $w$ ).
- בסוף המעבר המספר  $t$  שנבחר הוא כמוות ה- 1 - ים שלא נמחקו.



**שלב 2)**  $N$  בודקת אם  $t$  שנבחר מחלק את  $w$ .

- אם כן  $\Leftarrow N$  מקבלת.
- אם לא  $\Leftarrow N$  דוחה.

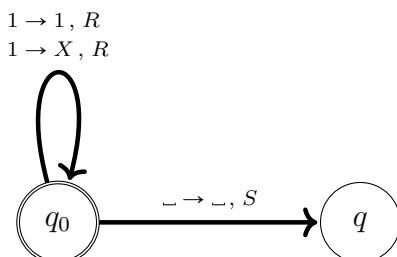
## 4.2 עץ חישוב של מ"ט א"ד

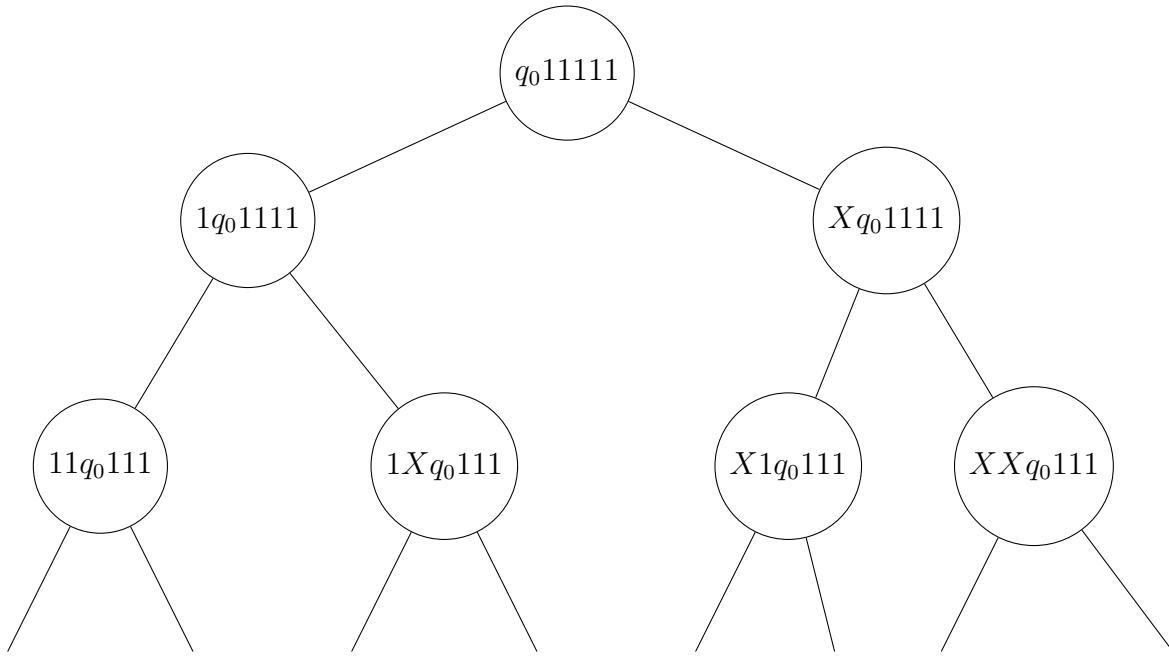
### הגדרה 4.5 עץ חישוב של מ"ט א"ד

בהינתן מ"ט א"ד  $M$  ומילה  $\Sigma^* \in w$ , עץ חישוב של  $M$  ו-  $w$  הוא עץ מושרש שבו:

- 1) כל קדקוד בעץ מתאר קונפיגורציה בחישוב של  $M$  על  $w$ .
- 2) שורש העץ מתאר את הקונפיגורציה ההתחלתית  $w_0$ .
- 3) לכל קדקוד  $v$  בעץ הבנים של  $v$  הם כל הקדקודים הנובעים מהקונפיגורציה המתוארת ע"י  $v$ .

### דוגמה 4.2





### 4.3 שיקולות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטיבית

**משפט 4.1** **שיקולות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטיבית ב-**  $RE$

לכל מ"ט א"ד  $N$  קיימת מ"ט דטרמיניסטיבית  $D$  כך ש-

$$L(N) = L(D).$$

כלומר לכל  $w \in \Sigma^*$ :

- אם  $N$  מקבלת את  $w \iff D$  קיבל את  $w$ .
- אם  $N$  לא מקבלת את  $w \iff D$  לא קיבל את  $w$ .

**הוכחה:** בהינתן מ"ט א"ד  $N$  נבנה מ"ט דטרמיניסטיבית  $D$  ונוכיח כי

$$L(N) = L(D).$$

רעיון ההוכחה

בהינתן קלט  $w \in \Sigma^*$ ,  $D$  תבצע ריצה של כל החישובים האפשריים של  $N$  על  $w$ , ואם אחד החישובים מסתיים ב-  $q_{acc}$  אז  $D$  תעוצר ותקבל.

מכיוון שיתכננו חישובים אינסופיים, לא יוכל לסרוק את עץ החישוב לעומק. במקומות זה נסrox את העץ לרוחב. ככלומר, נבדוק את כל החישובים באורך 1, ולאחר מכן נבדוק את כל החישובים באורך 2, וכן הלאה. אם אחד החישובים הסטיים ב-  $q_{acc}$ , אז  $D$  תעוצר ותקבל.

תאור הבניה

מכיוון שלכל  $q \in Q$  ולכל  $\alpha \in \Gamma$

$$\Delta(q, \alpha) \subseteq Q \times \Gamma \times \{L, R, S\} .$$

אז

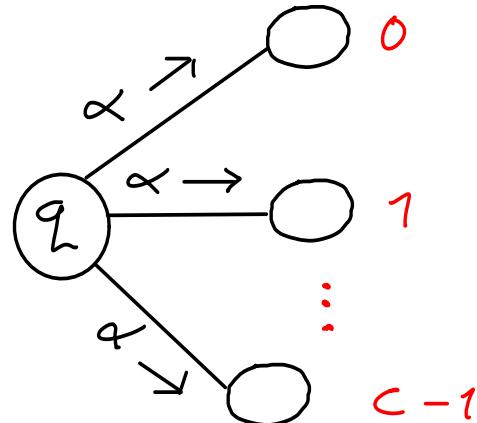
$$|\Delta(q, \alpha)| \leq |Q| \cdot |\Gamma| \cdot |\{L, R, S\}| = 3|Q| \cdot |\Gamma| .$$

נסמן:

$$C = 3|Q| \cdot |\Gamma| .$$

- לכל מצב  $q \in Q$  ולכל אות  $\alpha \in \Gamma$  נמספר את המעברים ב-  $\Delta(q, \alpha)$  שירוטית

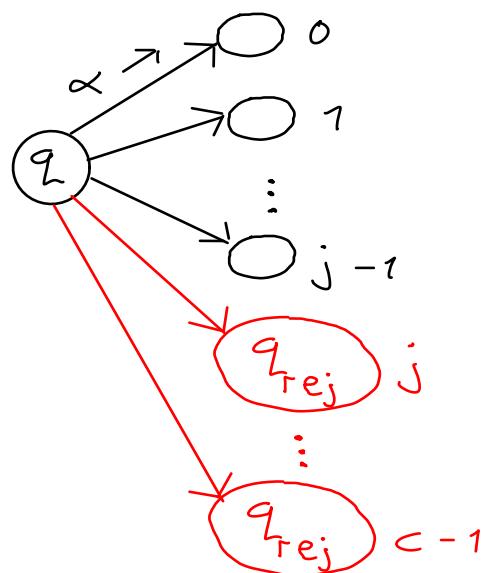
$$\{0, 1, 2, \dots, C - 1\} .$$



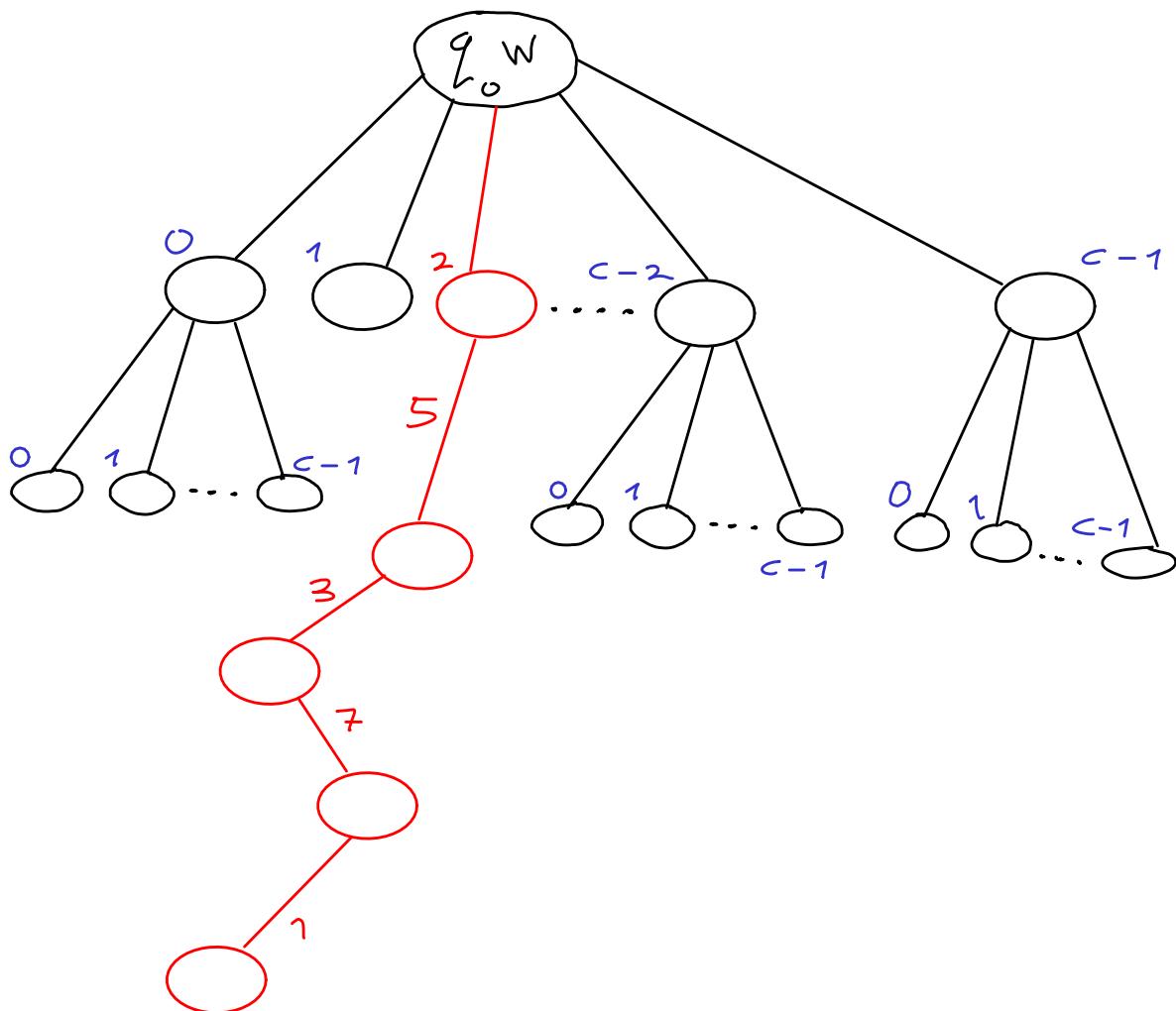
,  $|\Delta(q, \alpha)| = j < C$  •

אי לכל  $j \leq k \leq C - 1$

.  $k = (q_{\text{rej}}, \alpha, S)$  נקבע



- נשים לב כי שינוי זה לא משנה את השפה של  $N$ .



קידום לקסיקוגרפיה:

0	00	10	...	$(C - 1)0$	000
1	01	11	...	$(C - 1)1$	001
2	02	12	...	$(C - 1)2$	002
:	:	:	...	:	...
$C - 1$	$0(C - 1)$	$1(C - 1)$	...	$(C - 1)(C - 1)$	$00(C - 1)$

הבניה של  $D$

$D$  מכילה 3 סרטים:

סרט 1	$\_ \quad   \quad \cancel{1} \quad   \quad \dots$	$n$
-------	--	-----

סרט 2	$\_ \quad   \quad 1 \quad   \quad 1 \quad   \quad 1 \quad   \quad \_ \quad \dots$	$t$
-------	---	-----

סרט 3	$\_ \quad   \quad 1 \quad   \quad 1 \quad   \quad 1 \quad   \quad \_ \quad \dots$
-------	---

: $w$  על קלט  $= D$

(1) מתחילה את המחרוזת בסרט 3 ל- 0.

(2) מעתקה את  $w$  לסרט 2.

(3) מרים את  $N$  על  $w$  לפי המחרוזת בסרט 3.

- אם  $N$  קיבלה את  $w \Leftarrow D$  עוצרת ומתקבלת.

- אחרת,  $D$  מוחקת את סרט 2, מקדמת את המחרוזת בסרט 3 לקסיקוגרפיה וחזרה לשלב 2).



## שיעור 5

### תכונות סגירות של $R$ ו- $RE$

#### 5.1 הגדרה של השפות $R$ ו- $RE$

##### הגדרה 5.1

אוסף השפות הכריעות מסומן  $R$  ומוגדר

$$R = \{L \subseteq \Sigma^* : L \text{ קיימת מ"ט המכreira את } L\}.$$

##### הגדרה 5.2

אוסף השפות הקבילות מסומן  $RE$  ומוגדר

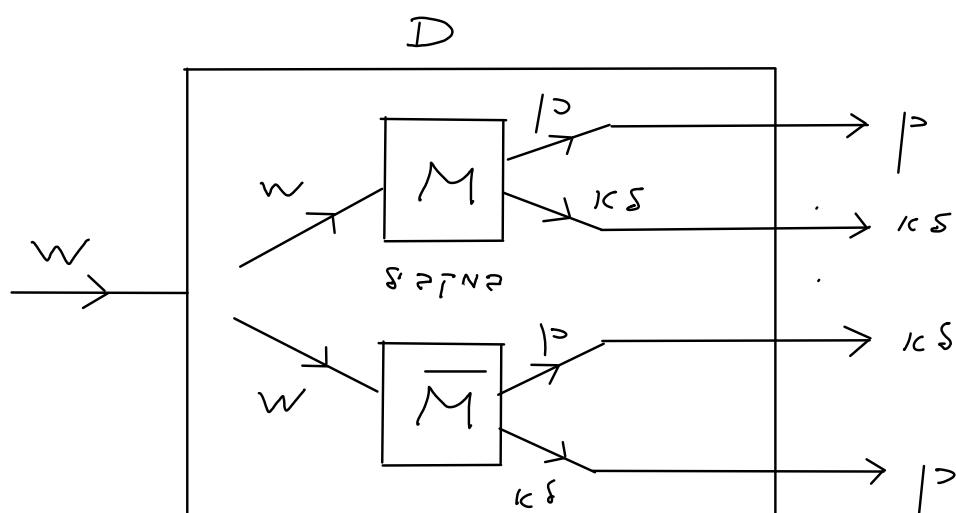
$$RE = \{L \subseteq \Sigma^* : L \text{ קיימת מ"ט מקבלת את } L\}.$$

##### лемה 5.1

אם  $L \in R$  אז  $\bar{L} \in RE$  וגם  $L \in RE$

**הוכחה:** תהי  $M$  מ"ט מקבלת את  $L$  ותהי  $\bar{M}$  מ"ט מקבלת את  $\bar{L}$ .

נבנה מ"ט  $D$  המכreira את  $L$ .



על קלט  $w = D$ :

1)  $D$  מעתקה את  $w$  לסדרת נוספת.

2) מריצה במקביל את  $M$  על  $w$  ואת  $\bar{M}$  על העותק של  $w$ .

- אם  $M$  מקבלת  $D$   $\Leftrightarrow$  מקבלת.
- אם  $\bar{M}$  מקבלת  $D$  דוחה.
- אם  $M$  דוחה  $D \Leftrightarrow$  דוחה.
- אם  $\bar{M}$  דוחה  $D \Leftrightarrow$  מקבלת.

נוכיח כי  $D$  מכריע את  $L$ .

אם  $w \in L$

$w \in L(M) \Leftrightarrow$

( $w$  מקבלת את  $w$ ) או ( $\bar{M}$  דוחה את  $w$ )  $\Leftrightarrow$

עוצרת ומתקבלת את  $w$ .

אם  $w \notin L$

$w \in \bar{L} \Leftrightarrow$

$w \in L(\bar{M}) \Leftrightarrow$

( $w$  מקבלת את  $w$ ) או ( $M$  דוחה את  $w$ )  $\Leftrightarrow$

עוצרת ודוחה את  $w$ .

### משפט 5.1 סגירות של השפות הכריעות

סגורה תחת:  $R$

- 1) איחוד
- 2) חיתוך
- 3) משלימים
- 4) שרשור
- 5) סגור קלין

### משפט 5.2 סגירות של השפות הקבילות

סגורה תחת:  $RE$

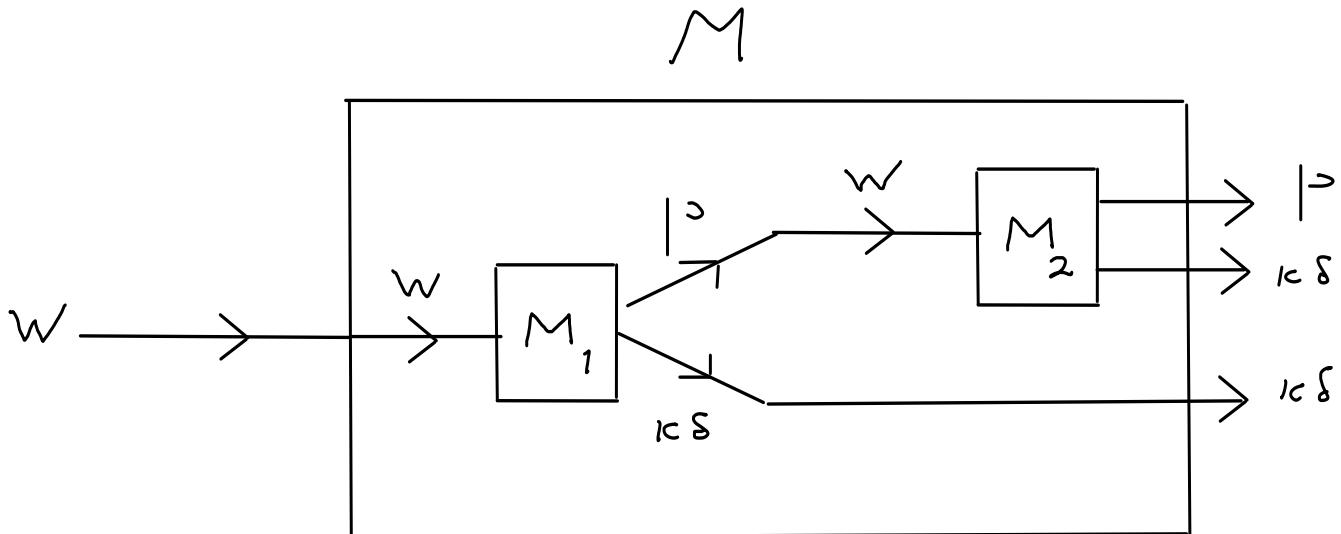
- 1) איחוד
- 2) חיתוך
- 3) שרשור
- 4) סגור קלין

1) חיתוך:

(א) סגורה תחת חיתוך  $R$ 

נוכיח כי לכל שתי שפות  $L_1 \cap L_2 \in R$  מתקיים  $L_1, L_2 \in R$  המכריעה את  $L_1 \cap L_2$ .

תהי  $M_1$  ו-  $M_2$  מ"ט המכרייעות את  $L_1$  ו-  $L_2$  בהתאם. נבנה מ"ט  $M$  המכריעה את  $L_1 \cap L_2$ .

תאור הבנייה

על קלט  $w = M$ :

1) מעתיקת את  $w$  לסדרת נוספת.

2) מרכיבת את  $M_1$  על  $w$ .

- אם  $M_1$  דוחה  $\Leftarrow M$  דוחה.

- אחרת  $M$  מרכיבת את  $M_2$  על העותק של  $w$  ועונה כמוותה.

נכונות:

נוכיח כי  $M$  מכריעה את  $L_1 \cap L_2$ .

אם  $w \in L_1 \cap L_2$

$w \in L_2$  וגם  $w \in L_1 \Leftarrow$

$w$  מקבלת את  $w$  וגם  $M_1$  מקבלת את  $w$   $\Leftarrow$

$M$  מקבלת את  $w$   $\Leftarrow$

אם  $w \notin L_1 \cap L_2$

$w \notin L_2$  או  $w \notin L_1 \Leftarrow$

$w$  דוחה את  $w$  או  $M_2$  דוחה את  $w$   $\Leftarrow$

$M$  דוחה את  $w$   $\Leftarrow$

**(ב) סגורה תחת חיתוך  $RE$** 

nocih ci lcl shi shfot  $L_1, L_2 \in RE$  matk'ym  $L_1 \cap L_2 \in RE$ .

tahiyeh  $M_1$  -  $M_2$  shti m'conot tivrigg m'kbelot at  $L_1$  -  $L_2$  b'hetamah.  
n'bna m'yt  $M$  m'kbelat at  $L_1 \cap L_2$  ba'otzo open cmoh (א).

**(2) איחוד:**

**(א) סגורה תחת איחוד  $R$** 

nocih ci ldl shi shfot  $L_1, L_2 \in R$  matk'ym  $L_1 \cup L_2 \in R$ .

tahiyeh  $M_1$  m'yt m'kri'ya at  $L_1$  -  $M_2$  m'yt m'kri'ya at  $L_2$   
n'bna m'yt  $M$  m'kri'ya at  $L_1 \cup L_2$ .

תאור הבנייה

عل קלט  $w = M$ :

(1) מעתיקה את  $w$  לסדרת נסף.

(2) מרים את  $M_1$  על  $w$ .

- אם  $M_1$  מקבלת  $M \Leftarrow$  מקבלת.
- אחרת,  $M$  מרים את  $M_2$  על העותק של  $w$  ועונה כמווה.

**(ב) סגורה תחת איחוד  $RE$** 

nocih ci lcl shi shfot  $L_1, L_2 \in RE$  matk'ym  $L_1 \cup L_2 \in RE$ .

tahiyeh  $M_1$  m'yt m'kbelat at  $L_1$  -  $M_2$  m'yt m'kbelat at  $L_2$ .  
n'bna m'yt a'd  $M$  m'kbelat at  $L_1 \cup L_2$ .

תאור הבנייה

על קלט  $w = M$ :

(1)  $M$  בוחרת באופן a'd  $i \in \{1, 2\}$

(2)  $M$  מרים את  $M_i$  על  $w$  ועונה כמווה.

**(3) שרשור:**

**(א) סגורה תחת שרשור  $R$** 

nocih ci lcl shi shfot  $L_1, L_2 \in R$  matk'ym  $L_1 \cdot L_2 \in R$  casr

$$L_1 \cdot L_2 = \{w = w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\} .$$

tahiyeh  $M_1$  m'yt m'kri'ya at  $L_1$  -  $M_2$  m'yt m'kri'ya at  $L_2$

n'bna m'yt a'd  $M$  m'kri'ya at  $L_1 \cdot L_2$ .

תאור הבנייה

על קלט  $w = M$ :

- 1)  $M$  בוחרת באופן א"ד חלוקה של  $w$  ל-  
 $w = w_1 w_2$ .  
 2) מרים את  $M_1$  על  $w_1$   
 • אם  $D$  דוחה  $M \Leftarrow D$   
 • אחרת,  $M$  מרים את  $M_2$  על  $w_2$  ועונה כמוות.

(ב) סגורה תחת שרשור  
 $RE$  סגורה תחת שרשור באותו אופן כמו ב- (א)

4) \* קליני

(א)  $R$  סגורה תחת \* קליני

נוכיח כי לכל שפה  $L$ :

$$L \in R \Rightarrow L^* \in R$$

כasher

$$L^* = \{w = w_1 w_2 \cdots w_k \mid \forall 1 \leq i \leq k, w_i \in L\} .$$

תהי  $M$  מ"ט המכיריה את  $L$ .

نبנה מ"ט  $M^*$  א"ד המכיריה את  $L^*$ .

תאור הבנייה

על קלט  $w = M^*$ :

1) אם  $w = \varepsilon$  אז  $M^*$  מקבלת.

2) אחרת  $M^*$  בוחרת באופן א"ד חלוקה של  $w$  ל-

3) לכל  $1 \leq i \leq k$

מרים את  $M$  על  $w_i$ .

• אם  $M$  דוחה את  $w_i$   $M^* \Leftarrow w_i$  דוחה.

• אחרת חוזרים לשלב 3).

4) אם  $M$  קיבלה את כל המחרוזות  $\{w_i\}$  אז  $M^*$  מקבלת.

(ב)  $RE$  סגורה תחת \* קליני

5) משלים

(א)  $R$  סגורה תחת המשלים

נוכיח כי

$$L \in R \Rightarrow \bar{L} \in R ,$$

כasher

$$\bar{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\} .$$

תהי  $M$  מ"ט המכיריה את  $L$ .

نبנה מ"ט  $\bar{M}$  המכיריה את  $\bar{L}$ .

על קלט  $w = \bar{M}$ :

(1) מרייצה את  $M$  על  $w$ .

- אם  $M$  מקבלת דוחה.

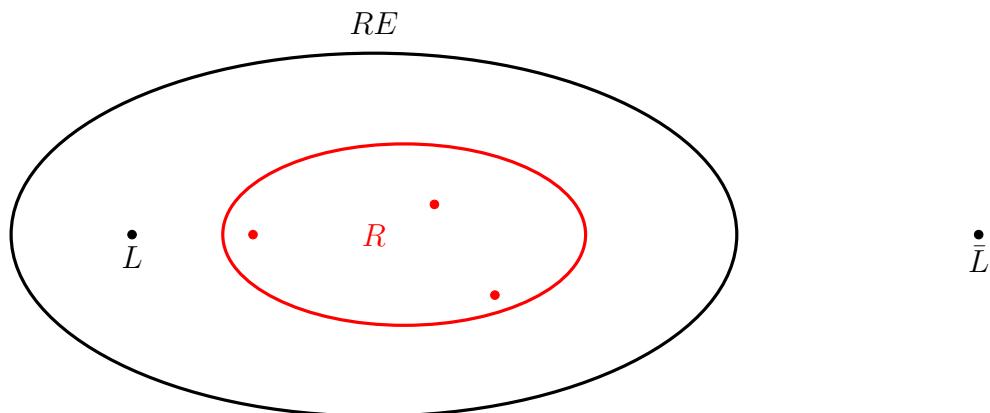
- אם דוחה  $M$  מקבלת.

### ב) אינה סגורה תחת המשלימים



**משפט 5.3 אינה סגורה תחת המשלימים**

$L \in RE \setminus R \Rightarrow \bar{L} \notin RE$ .



הוכחה:

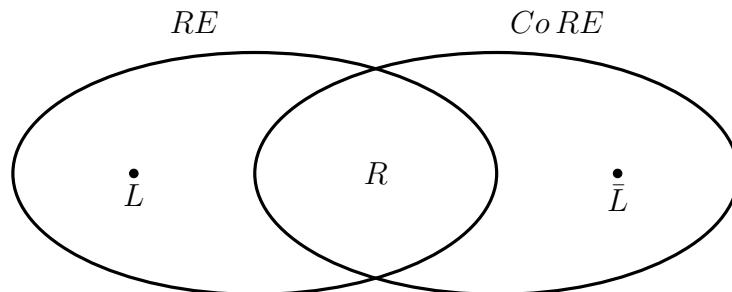
נניח כי  $\bar{L} \in RE$  ונניח בשילילה כי  $L \in RE \setminus R$ .

אזי לפי טענת עזר (лемה 5.1),  $L \in R$  או סטירה.



**הגדרה 5.3**

$Co\ RE = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \bar{L} \in RE\}$ .



אבחנה

לפי למה 5.1:

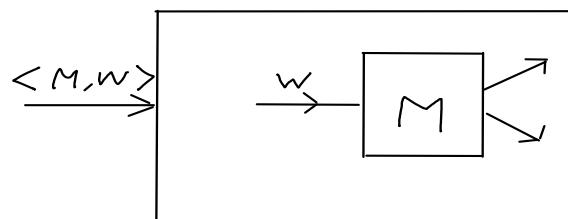
$$RE \cap Co\ RE = R.$$

## 5.2 קידוד של מ"ט דטרמיניסטי

### הגדרה 5.4 קידוד של מ"ט

בاهינתן קבוצה  $O$  של עצמים מופשטים (למשל מכונת טיורינג, תוכנית מחשב, גרפ'). הקידוד של  $O$ , מסומן  $\langle O \rangle$ , הוא מיפוי של  $O$  אל מהירות מעל אלףית סופי ששי בו לפחות שני סימנים. במידה ויש רב עצמים  $O_1, \dots, O_k$  נסמן את הקידוד שלהם  $\langle O_1, O_2, \dots, O_k \rangle$ .

## 5.3 מ"ט אוניברסלית $U$



מ"ט אוניברסלית  $U$  מקבלת כקלט זוג, קידוד של מילה  $\langle w \rangle$  וקידוד של מ"ט  $\langle M \rangle$ , וביצעת סימולציה של ריצה של  $M$  על  $w$  ועונה בהתאם.

### תאור הפעולה של $U$

$U$  על קלט  $x$ :

(1) בודקת אם  $x$  הוא קידוד של מ"ט  $\langle M \rangle$  וקידוד של מילה  $\langle w \rangle$ .

- אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

(2) מבצעת סימולציה של  $M$  על  $w$ :

1	6	7	0	$\langle M \rangle$	-	$\langle w \rangle$	...
---	---	---	---	---------------------	---	---------------------	-----

2	6	7	0	$\langle \# \rangle$	-	$\langle w \rangle$	...
---	---	---	---	----------------------	---	---------------------	-----

- רושמת את הקוניגורציה ההתחלתית  $w_{q_0}$  על סרט 2.
  - מחשבת את הקוניגורציה הבאה בעזרת טבלת המעברים.
  - בסוף כל מעבר בין שתי קוניגורציות,  $U$  בודקת אם המצב הנוכחי הוא  $q_{acc}$ .
- \* אם כן  $U$  עוצרת ומקבלת.

- \* לאחרת  $U$  בודקת האם המצב הוא  $q_{\text{rej}}$ .
- \* אם כן  $U$  עוצרת ודוחה.
- \* אחרת  $U$  ממשיכה לكونפיגורציה הבאה.

מהי השפה של  $U$ ?

לכל  $x$ :

$$\text{אם } U \text{ דוחה את } x \Leftrightarrow x \neq \langle M, w \rangle \quad (1)$$

$$\text{אם } x = \langle M, w \rangle \quad (2)$$

- אם  $M$  מקבלת  $w$  מקבלת  $U$  את  $x$ .
- אם  $M$  דוחה את  $w$  דוחה את  $U$ .
- אם  $M$  לא עוצרת על  $w$  לא עוצרת על  $U$ .

$$L(U) = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} .$$

### הגדרה 5.5 $L_{\text{acc}}$

$$L_{\text{acc}} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} \in \text{RE} \setminus \text{R}$$

### הגדרה 5.6 $L_{\text{halt}}$

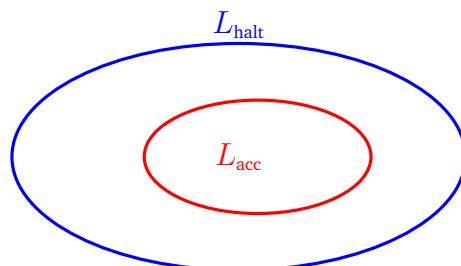
$$L_{\text{halt}} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \text{ עוצרת על } M \} \in \text{RE} \setminus \text{R}$$

### הגדרה 5.7 $L_{\text{d}}$

$$L_{\text{d}} = \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \} \notin \text{RE}$$

אבחנה:

$$L_{\text{acc}} \subseteq L_{\text{halt}} .$$



**משפט 5.4**

$$L_{\text{acc}} \in RE .$$

**הוכחה:** מכיוון ש-  $L_{\text{acc}} \in RE$  מקבלת את  $U$ ,  $L(U) = L_{\text{acc}}$ .

**משפט 5.5**

$$L_{\text{halt}} \in RE .$$

**הוכחה:** נבנה מ"ט  $U'$  שהוא למעשה  $U$  פרט למקום שבו  $U$  עצמה ומחטה,  $U'$  תעצור ותקבל.

נווכיח כי  $U'$  מקבלת את  $L_{\text{halt}}$ :

אם  $x \in L_{\text{halt}}$

ו-  $M$  עוצרת על  $w$   $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$

$x$  עוצרת ומתקבלת את  $U' \Leftarrow$

אם  $x \notin L_{\text{halt}}$  שני מקרים:

. $x$  דוחה את  $U' \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$  •

. $M$  לא עוצרת על  $U' \Leftarrow w$  לא עוצרת על  $x = \langle M, w \rangle$  •



## שיעור 6

### אי-כריעות

### 6.1 השפות $L_d$ , $L_{\text{halt}}$ , $L_{\text{acc}}$ לא כריעות

**הגדרה 6.1**  $L_{\text{acc}}$

$$L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} \in RE \setminus R$$

**הגדרה 6.2**  $L_{\text{halt}}$

$$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ עוצרת על } M\} \in RE \setminus R$$

**הגדרה 6.3**  $L_d$

$$L_d = \{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M)\} \notin RE$$

**משפט 6.1**  $L_{\text{acc}} \in RE$

$$L_{\text{acc}} \in RE .$$

**הוכחה:** מכיוון ש-  $L(U) = L_{\text{acc}}$  כאשר  $U$  המכונת טיורינג האוניברסלית אשר מקבלת את  $L_{\text{acc}}$ , לכן  $L_{\text{acc}} \in RE$ .

**משפט 6.2**  $L_{\text{halt}} \in RE$

$$L_{\text{halt}} \in RE .$$

**הוכחה:** נבנה מ"ט  $U'$  שהוא למעשה  $U$  פרט למקום שבו  $U$  עצמה ומחטה,  $U'$  תעוצר ותחזור ותקבל.

נווכיח כי  $U'$  מקבלת את  $L_{\text{halt}}$ :

אם  $x \in L_{\text{halt}}$

$w$  עוצרת על  $M$  ו-  $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$

$x$  עוצרת ומקבלת את  $U' \Leftarrow$

אם  $x \notin L_{\text{halt}}$  ⇐ שני מקרים:

•  $U'$  דוחה את  $x$ .

•  $M$  לא עוצרת על  $U'$  לא עוצרת על  $w$ .

### משפט 6.3 $L_d \notin RE$

$$L_d \notin RE .$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי  $L_d \in RE$ .

• אם  $M$  מקבלת את  $L_d$  ⇐

$$. L(M_d) = L_d \Leftarrow$$

נבדוק ריצה של  $M_d$  על  $\langle M_d \rangle$ :

• אם  $L(M_d) \neq L_d \Leftarrow \langle M_d \rangle \notin L_d \Leftarrow \langle M_d \rangle \in L(M_d)$

• אם  $L(M_d) \neq L_d \Leftarrow \langle M_d \rangle \in L_d \Leftarrow \langle M_d \rangle \notin L(M_d)$

בשני המקרים קיבלנו סתיירה לכך ש-  $L_d \notin RE$  ולכן  $L(M_d) = L_d$ .

### משפט 6.4 $L_{\text{acc}} \text{ לא ברעה}$

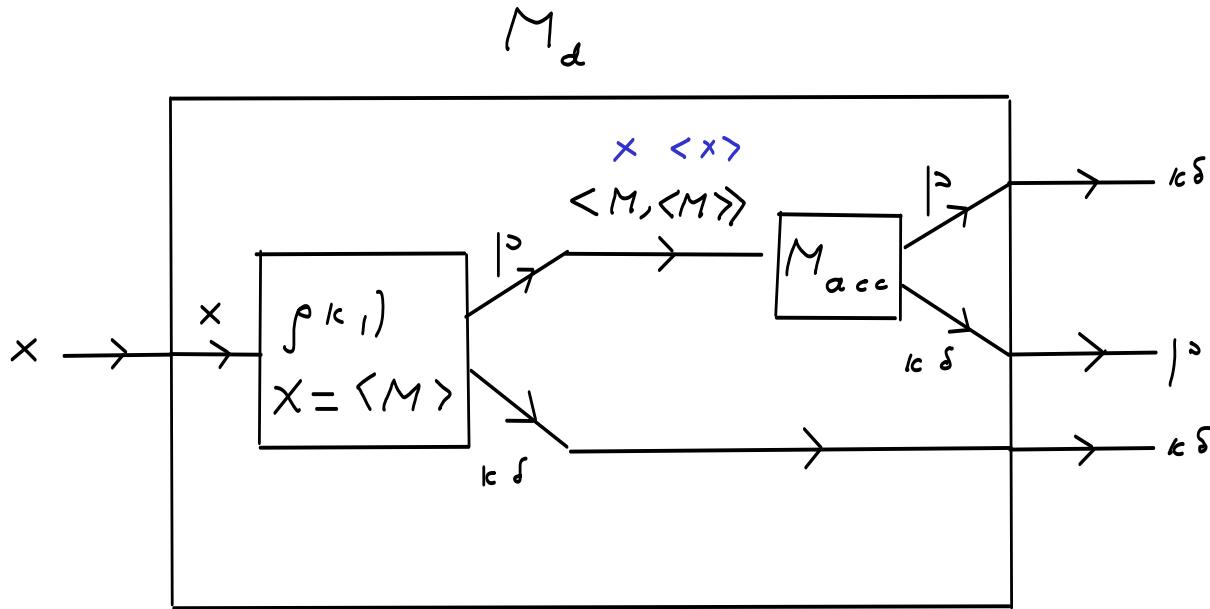
$$L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} \notin R .$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי  $L_{\text{acc}} \in R$  ותהי  $M_{\text{acc}}$  המכריעה את  $L_{\text{acc}}$ .

נשתמש ב-  $M_{\text{acc}}$  כדי לבנות מ"ט  $M_d$  המכריעה את  $L_d$  (בסתירה לכך ש-  $L_d \notin RE$  כפי שהוכחנו במשפט 6.3).

$$L_d = \{\langle M, w \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M)\} .$$

התאור של  $M_d$ 

: $x$  על קלט  $= M_d$

**1)** בודקת האם  $x = \langle M \rangle$ . אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

**2)** מחשבת את  $\langle x \rangle = \langle\langle M \rangle\rangle$

**3)** מרייצה את  $\langle M, \langle M \rangle \rangle$  על  $M_{acc}$

- אם  $M_{acc}$  מקבלת  $M_d \Leftarrow$  דוחה.

- אם  $M_{acc}$  דוחה  $\Leftarrow$  מקבלת.

כעת נוכיח כי  $M_d$  מכירעה את  $L_d$ :

אם  $x \in L_d$

$\langle M \rangle \notin L(M) \wedge x = \langle M \rangle \Leftarrow$

$\langle M, \langle M \rangle \rangle$  דוחה את הזוג  $\Leftarrow M_{acc}$

$x$  מקבלת את  $M_d \Leftarrow$

אם  $x \notin L_d$  שני מקרים:

$x$  דוחה את  $M_d \Leftarrow x \neq \langle M \rangle$  :**(1)**

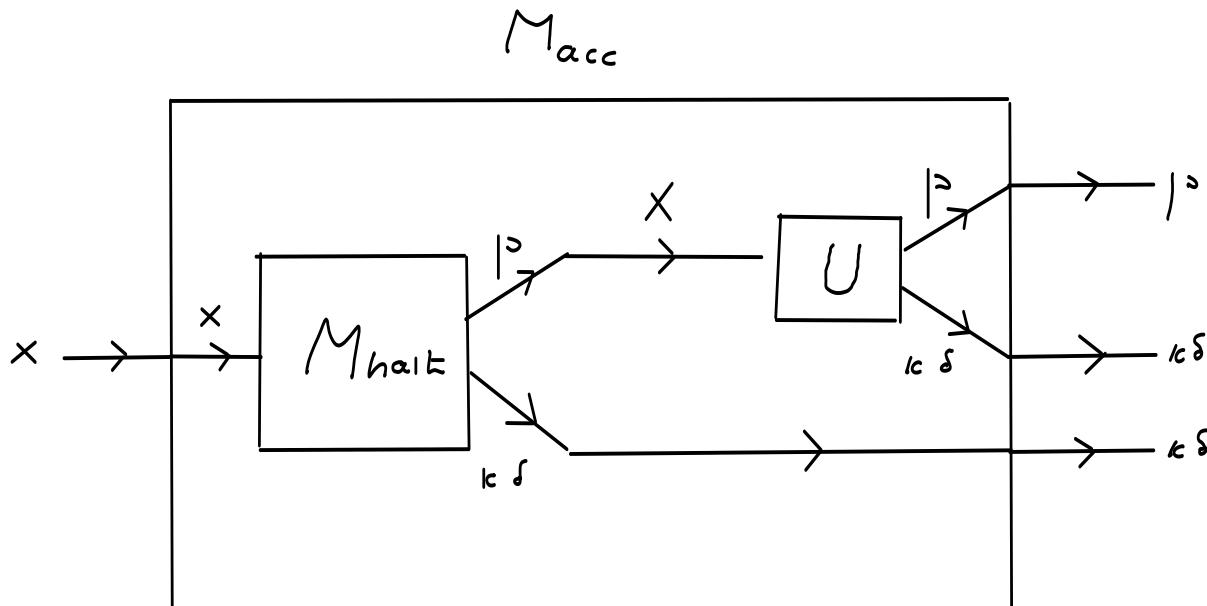
מקרה (2):  $\langle M \rangle \in L(M) \wedge x = \langle M \rangle$

$\langle M, \langle M \rangle \rangle$  מקבלת את זוג  $M_{acc} \Leftarrow$

$x$  דוחה את  $M_d \Leftarrow$

**משפט 6.5 לא כרעה**  $L_{\text{halt}}$ 

$$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ עצרת על } M \} \notin R .$$

**הוכחה:**נניח בשילhouette כי  $L_{\text{halt}} \in R$  ותהי  $M_{\text{halt}} \in R$  מ"ט המכריעה את  $L_{\text{halt}}$ .נשתמש בו- כדי לבנות מ"ט המכריעה את  $L_{\text{acc}}$  (בסתירה לכך שגם  $L_{\text{acc}} \notin R$  כפי שהוכחנו במשפט 6.4).התאור של  $M_{\text{acc}}$  $x$  על קלט :  $M_{\text{acc}}$ 1) מ裏יצה את  $M_{\text{halt}}$  על  $x$ .• אם  $M_{\text{acc}}$  דוחה  $M_{\text{halt}}$ .• אם  $M_{\text{acc}}$  מקבלת  $M_{\text{halt}}$  מ裏יצה את  $U$  על  $x$  ועונה כמוה.אבחנהנוכיח כי  $M_{\text{acc}}$  מכריעה את  $L_{\text{acc}}$ אם  $x \in L_{\text{acc}}$ 

$$\langle w \rangle \in L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$$

מקבלת את  $x$  וגם  $U$  מקבלת את  $x$   $M_{\text{halt}} \Leftarrow$ מקבלת את  $M_{\text{acc}}$   $\Leftarrow .x$

אם  $x \notin L_{\text{acc}}$  ⇔ שני מקרים:

מקרה (1)  $\langle M, w \rangle$  :

דוחה את  $M_{\text{halt}} \Leftarrow$   
דוחה את  $x . M_{\text{acc}} \Leftarrow$

מקרה (2)  $\langle w \rangle \notin L(M)$  ו-  $x = \langle M, w \rangle$  :

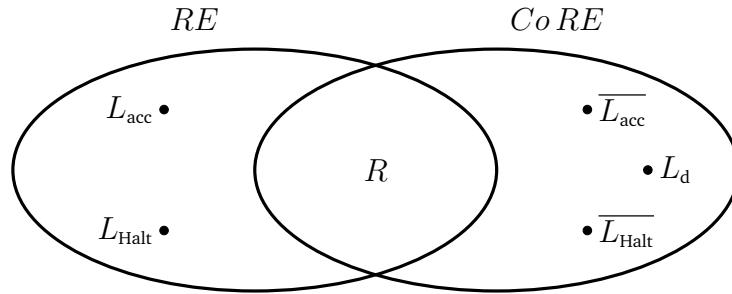
מקרה (א):  $M$  לא עוצרת על  $w$  דוחה את  $x . M_{\text{acc}} \Leftarrow$  דוחה את  $x$ .

מקרה (ב):  $M$  דוחה את  $w$  מקבלת את  $x$  אבל  $M_{\text{halt}} \Leftarrow$  דוחה את  $x$ .

הראנו כי  $M_{\text{acc}}$  מכיריעת  $L_{\text{acc}}$  בסתייה לכך ש-  $L_{\text{acc}} \notin R$ .  
 $L_{\text{halt}} \notin R$  לכן

## משפט 6.6

$$\begin{aligned} L_{\text{acc}} \in RE \setminus R &\Rightarrow \bar{L}_{\text{acc}} \notin RE , \\ L_{\text{halt}} \in RE \setminus R &\Rightarrow \bar{L}_{\text{halt}} \notin RE , \\ L_d \notin RE \setminus R . \end{aligned}$$



## 6.2 השפה $L_E$ לא כריעה

### הגדרה 6.4 השפה $L_E$

$$L_E = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\} .$$

### משפט 6.7 $L_E \notin R$

$$L_E \notin R .$$

כלומר  $L_E$  לא כריעה.

הוכחה:

נניח בשלילה כי  $L_E$  כריעה. אז נבנה מ"ט  $M_{\text{acc}}$  המכיריעת  $L_{\text{acc}}$  באופן הבא.

בנייה של  $M_w$

ראשית נגדיר את המ"ט  $M_w$ :

על כל קלט  $x = M_w$ :

(1) אם  $x \neq w$  ⇐ דוחה.

(2) אם  $x = w$  אז מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוות.

### אבחנה

אם  $x = w$  מקבלת את  $w$  אז  $L(M_w) = \Sigma^*$ .

אם  $x \neq w$  או אם  $M$  דוחה את  $w$  אז  $L(M_w) = \emptyset$ .

### בנייה של $M_{\text{acc}}$

נניח כי קיימת מ"ט  $M_E$  המכrica את  $L_E$ . אז נבנה מ"ט  $M_{\text{acc}}$  המכrica את  $L_{\text{acc}}$ :

על כל קלט  $x = M_{\text{acc}}$ :

(1) אם  $x \neq \langle M, w \rangle$  ⇐ דוחה.

(2) אם  $x = \langle M, w \rangle$ , בעזרת התאור  $\langle M, w \rangle$ , בונה מ"ט  $M_w$ :

(3) מריצה  $M_E$  על  $M_w$ :

(4) • אם  $M_E$  מקבלת ⇐ דוחה.

• אם  $M_E$  דוחה ⇐ מקבלת.

### נכונות

$\langle M_w \rangle$  דוחה  $M_E$  ⇐  $L(M_w) = \Sigma^* \neq \emptyset$  ⇐  $w \in L(M)$  ו-  $x = \langle M, w \rangle$  ⇐  $x \in L_{\text{acc}}$  מקבלת.  $M_{\text{acc}}$  ⇐

אם  $x \notin L_{\text{acc}}$  ⇐ שני מקרים:

מקרה 1:  $M_{\text{acc}}$  מקבלת  $M_E$  ⇐  $L(M_w) = \emptyset$  ⇐  $x \neq \langle M, w \rangle$

מקרה 2:  $M_{\text{acc}}$  ⇐  $\langle M_w \rangle$   $M_E$  ⇐  $L(M_w) = \emptyset$  ⇐  $w \notin L(M)$  ו-  $x = \langle M, w \rangle$

### לסיכום:

אם  $L_E$  כרעה אז אפשר לבנות מ"ט  $M_{\text{acc}}$  המכrica את  $L_{\text{acc}}$  בסתייה לכך ש-  $L_{\text{acc}} \notin R$ .  
לכן  $L_E \notin R$ .

**משפט 6.8**  $L_E \notin RE$

$L_E \notin RE$

הוכחה:  
הרעיון

בנייה מכונת טיריניג אי-דטרמיניסטיבית  $N$  מקבלת את

$$\bar{L}_E = \{\langle M \rangle \mid L(M) \neq \emptyset\} .$$

: $x$  על קלט  $= N$

**1** אם  $x \neq \langle M \rangle$  דוחה.

**2** אם  $x \in N$  בוחרת מילה  $\Sigma^*$   $w$  באופן אי-דטרמיניסטיבי.

**3** מרים  $M$  על  $w$ .

- אם  $M$  מקבלת  $\Rightarrow N$  מקבלת.

- אם  $M$  דוחה  $\Rightarrow N$  דוחה.

#### הוכחת הנכונות

אם  $x \in \bar{L}_E$

$L(M) \neq \emptyset \wedge x = \langle M \rangle \Leftarrow$

$w \in L(M) \wedge \exists w \in \Sigma^* \text{ כך ש } -$

$\exists \text{ ניחוש } \Sigma^* \in w \text{ כך ש } M \text{ מקבלת את } w$

$x = \langle M \rangle \Leftarrow \text{קיים חישוב של } N \text{ מקבל את}$

$.x \in L(N) \Leftarrow$

לכן קיימת מ"ט א"ד  $N$  מקבלת את השפה  $\bar{L}_E$  שכן  $\bar{L}_E \in RE$

כעת נוכיח כי  $\bar{L}_E \notin RE$

$.L_E \in R$ , 5.1 הוכחנו לעלה ש-  $\bar{L}_E \in RE$ . לכן  $L_E \in RE$  מושפט או בסתרה לכך ש-  $L_E \notin R$   $.L_E \notin RE$  לכן ■

## 6.3 השפה $L_{EQ}$ לא כריעה

הגדרה 6.5

$$L_{EQ} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\}$$

משפט 6.9  $L_{EQ} \notin R$

$L_{EQ} \notin R$

השפה  $L_{EQ}$  לא כריעה.

נניח בשלילה כי  $L_{EQ}$  כריעה. תהי  $M_{EQ}$  מ"ט המכריעה את  $L_E$  באופן הבא.

### בנייה של $M_E$

על כל קלט  $x = M_E$

• אם  $x \neq \langle M \rangle$  דוחה. **(1)**

• אם  $x$ , מריצה  $M_\emptyset$  על  $M_{EQ}$  כאשר  $\langle M, M_\emptyset \rangle$  המ"ט שדוחה כל קלט. **(2)**

• אם  $M_{EQ}$  מקבלת מקלט. **(3)**

• אם  $M_{EQ}$  דוחה  $M_E$  דוחה. **(4)**

### נכונות

אם  $x \in L_E$

$L(M) = \emptyset \wedge x = \langle M \rangle \Leftarrow$

$L(M) = L(M_\emptyset) \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle \in L_{EQ} \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle$  מקבלת  $M_{EQ} \Leftarrow$

$M_E$  מקבל. **(5)**

אם  $x \notin L_E$  שני מקרים:

• אם  $x \neq \langle M \rangle$  דוחה.  $M_E \Leftarrow x \neq \langle M \rangle$  **(1)**

• אם  $x = \langle M \rangle$  דוחה. **(2)**

$L(M) \neq \emptyset \wedge x = \langle M \rangle \Leftarrow$

$L(M) \neq L(M_\emptyset) \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle \notin L_{EQ} \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle$  דוחה  $M_{EQ} \Leftarrow$

$M_E$  דוחה. **(6)**

### לסיכום:

אם  $L_E \notin R$  כריעה אז אפשר לבנות מ"ט  $M_E$  בסתיירה למשפט 6.7 האומר ש-  
 $L_{EQ} \notin R$  לכן  $L_{EQ} \notin RE$ .

**משפט 6.10**  $L_{EQ} \notin RE$

$L_{EQ} \notin RE$

לא קבילה.  $L_{EQ}$

### הוכחה:

נניח בשלילה כי  $L_{EQ}$  קבילה. תהי  $M_{EQ}$  מ"ט המכבלת את  $L_E$  באופן הבא.

בנייה של  $M_E$ 

$x$  על כל קלט  $= M_E$

1 אם  $x \neq \langle M \rangle$  דוחה.

2 אם  $x$ , מריצה  $M_\emptyset$  על  $M_{EQ}$  כאשר  $\langle M, M_\emptyset \rangle$  המ"ט שדוחה כל קלט.

• אם  $M_{EQ}$  מקבלת  $\Leftarrow$  מקבלת.

נכונות

אם  $x \in L_E$

$L(M) = \emptyset \wedge x = \langle M \rangle \Leftarrow$

$L(M) = L(M_\emptyset) \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle \in L_{EQ} \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle$  מקבלת  $M_{EQ} \Leftarrow$

$M_E$  מקבל.

**לסיכום:**

אם  $L_E \notin RE$  קבילה אז אפשר לבנות מ"ט  $M_E$  המקבלת את  $L_E$  בסתיויה למשפט 6.8 האומר ש-  
לכן  $.L_{EQ} \notin RE$

**משפט 6.11**  $\bar{L}_{EQ} \notin RE$

$\bar{L}_{EQ} \notin RE$ .

**הוכחה:**

נניח בשליליה כי  $\bar{L}$  קבילה. תהי  $M_{\bar{acc}}$  מ"ט המקבלת את  $\bar{L}_{EQ}$ . אז נבנה מ"ט  $M_{EQ}$  המקבלת את  $\bar{L}_{EQ}$  קבילה. אוסף הבא.

בנייה של  $M_1$ 

ראשית נגדיר מ"ט  $M_1$  באוסף הבא:

$x$  על קלט  $= M_1$

1) מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוות.

בנייה של  $M_{\bar{acc}}$ 

$x$  על כל קלט  $= M_{\bar{acc}}$

1 אם  $x \neq \langle M, w \rangle$  מקבלת.

(2) אם  $x = \langle M, w \rangle$  אז  $M_1$  בונה  $.M$ .

(3) מריצה  $\langle M_1, M^* \rangle$  על  $M_{\overline{EQ}}$  כאשר  $M^*$  המ"ט שמקבלת כל קלט.

(4) • אם  $M_{\overline{EQ}}$  מקבלת  $\Leftarrow$  מקבלת.

### נכונות

אם  $x \in L_{\overline{\text{acc}}}$

לא מקבלת  $M \Leftarrow$

$L(M_1) = \emptyset \Leftarrow$

$\langle M_1, M^* \rangle \in L_{\overline{EQ}} \Leftarrow$

$\langle M_1, M^* \rangle$  מקבלת  $M_{\overline{EQ}} \Leftarrow$

$M_{\overline{\text{acc}}} \Leftarrow$  מקבל.

### **סיכום:**

אם  $L_{\overline{\text{acc}}} \notin RE$  קבילה או אפשר לבנות מ"ט  $M_{\overline{\text{acc}}}$  בסתירה למשפט 6.6 האומר ש-  
לכן  $L_{\overline{EQ}} \notin RE$ .

## 6.4 סיכום: כרייעות וקבילות של שפות

קבילה	כרייעה	
✓	✗	$L_{\text{acc}}$
✗	✗	$\overline{L}_{\text{acc}}$
✗	✗	$L_d$
✓	✗	$L_{\text{Halt}}$
✗	✗	$\overline{L}_{\text{Halt}}$
✗	✗	$L_E$
✓	✗	$\overline{L}_E$
✗	✗	$L_{\text{EQ}}$
✗	✗	$\overline{L}_{\text{EQ}}$
✗	✗	$L_{\text{REG}}$
✗	✗	$L_{\text{NOTREG}}$

## שיעור 7

### רדוֹקצִיה

## 7.1 טבלה של רדוֹקצִיות

### טבלה של רדוֹקצִיות

עמוד	רדוקציה
דוגמיה 7.6 עמוד 68	$L_{\text{HALT}} \leq L_{\text{acc}}$
דוגמיה 7.11 עמוד 72	$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{\text{NOTREG}}$
דוגמיה 7.12 עמוד 73	$L_{\text{acc}} \leq L_{\text{NOTREG}}$
דוגמיה 7.13 עמוד 74	$L_{\text{HALT}} \leq L_{\text{NOTREG}}$
דוגמיה 7.15 עמוד 76	$L_{\text{acc}} \leq L_{\text{REG}}$
דוגמיה 7.14 עמוד 75	$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{\text{REG}}$
דוגמיה 7.16 עמוד 77	$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \neg M_2}$ כאשר $.L_{M_1 \neg M_2} = \{\langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2)\}$
דוגמיה 7.17 עמוד 77	$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \subset M_2}$ כאשר $.L_{M_1 \subset M_2} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) \subset L(M_2)\}$

## 7.2 מ"ט המחשבת את פונקציה

### הגדרה 7.1 מ"ט המחשבת פונקציה

בاهינתן פונקציה  $* \rightarrow \Sigma^*$  :  $f$  אומרים כי מ"ט  $M$  מחשבת את  $f$  אם לכל  $x \in \Sigma^*$

- $M$  מגיעה ל-  $q_{\text{acc}}$  בסוף החישוב של  $f(x)$  וגם
- על סרט הפלט של  $M$  רשום  $f(x)$ .

### הערה 7.1

מ"ט שמחשבת פונקציה עוזרת תמיד.

### הגדרה 7.2 מ"ט המחשבת פונקציה

בاهינתן פונקציה  $* \rightarrow \Sigma^*$  :  $f$  אומרים כי  $f$  חסיבה אם קיימת מ"ט המחשבת את  $f$ .

**דוגמה 7.1**

$$f_1(x) = xx . \quad (7.1)$$

$f_1(x)$  חסיבה.

**דוגמה 7.2**

$$f_2(x) = \begin{cases} x & |x| \text{ זוגי} \\ xx & |x| \text{ אי-זוגי} \end{cases} . \quad (7.2)$$

$f_2(x)$  חסיבה.

**דוגמה 7.3**

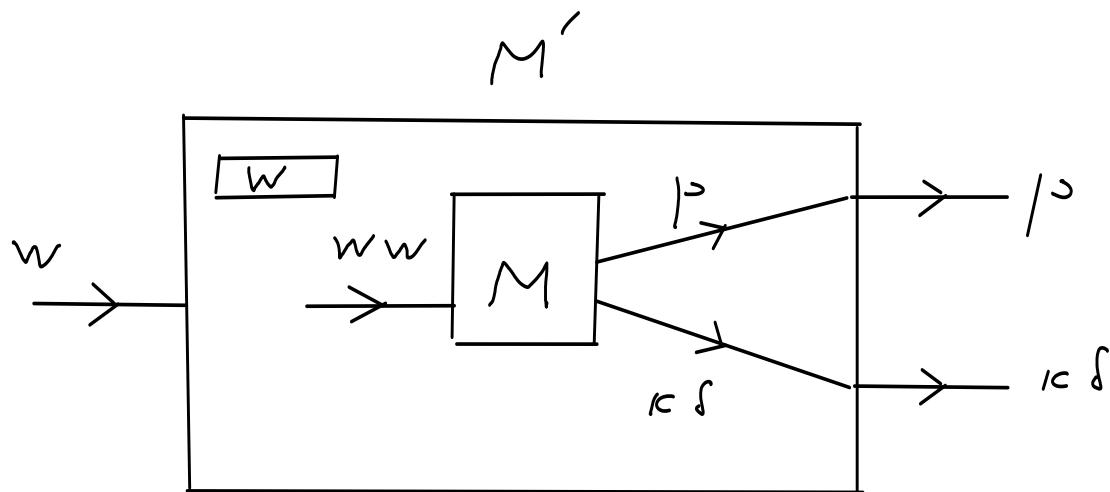
$$f_3(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M \rangle \\ \langle M^* \rangle & x \neq \langle M \rangle \end{cases} . \quad (7.3)$$

כאשר

$M^*$  מ"ט שמקבלת כל קלט.

$M'$  מ"ט מקבלת את השפה

$$L(M') = \{w \in \Sigma^* \mid ww \in L(M)\} .$$



חסיבה כי ניתן לבנות מ"ט שבודקת האם  $\langle M \rangle = x$ . אם לא, מחזירה קידוד קבוע  $\langle M^* \rangle$ . ואם כן, מחזירה קידוד  $\langle M' \rangle$  ע"י הוספת מעברים המשכפלים את הקלט בתחילת הקידוד  $\langle M \rangle$ .

**דוגמה 7.4**

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & x = \langle M \rangle \wedge \langle M \rangle \in L(M) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad (7.4)$$

לא חשיבה כי יתכונו קלטים  $x$  ו-  $M$  לא עוצרת על  $\langle M \rangle$ .  $f_4(x)$

**7.3 רדוקציות****הגדרה 7.3 רדוקציות**

בහינתן שתי שפות  $\Sigma^*$  אומרים כי  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$  ניתנת לרדוקציה ל-  $L_2$ , ומיסמנים

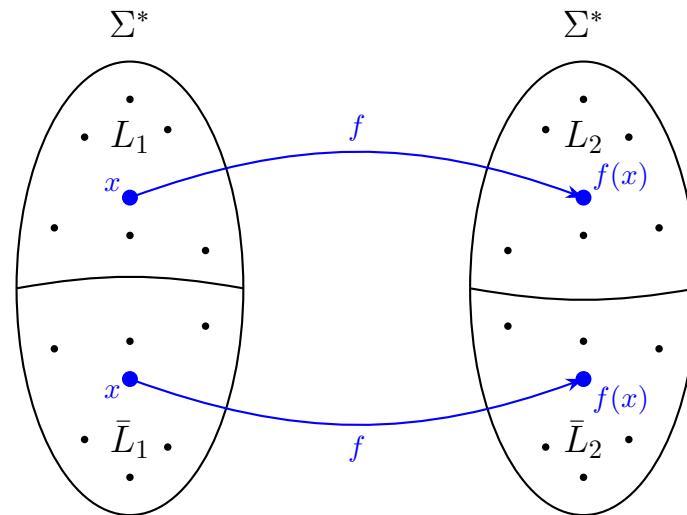
$$L_1 \leq L_2 ,$$

אם  $\exists$  פונקציה  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  המקיים:

**(1)** חשיבה  $f$

**(2)** לכל  $x \in \Sigma^*$

$$x \in L_1 \iff f(x) \in L_2 .$$

**דוגמה 7.5**

נתונות השפות

$$L_1 = \{x \in \{0,1\}^* \mid \text{זוגי } |x|\} ,$$

$$L_2 = \{x \in \{0,1\}^* \mid \text{אי-זוגי } |x|\} .$$

הוכיחו כי

$$L_1 \leq L_2 .$$

פתרונות:

נדיר את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{זוגי } |x|, \\ 10 & \text{אי-זוגי } |x| \end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

$$\cdot f(x) \in L_2 \text{ זוגי } |f(x)| \Leftarrow f(x) = 1 \Leftarrow |x| \Leftarrow x \in L_1$$

$$\cdot f(x) \notin L_2 \text{ זוגי } |f(x)| \Leftarrow f(x) = 10 \Leftarrow |x| \Leftarrow x \notin L_1$$

### משפט 7.1 משפט הרדוקציה

לכל שתי שפות  $* \Sigma^*, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ , אם קיימת רדוקציה

$$L_1 \leq L_2$$

אזי התנאים הבאים מתקיימים:

$$L_1 \in R \Leftarrow L_2 \in R \quad (1)$$

$$L_1 \in RE \Leftarrow L_2 \in RE \quad (2)$$

$$L_1 \notin R \Rightarrow L_2 \notin R \quad (3)$$

$$L_1 \notin RE \Rightarrow L_2 \notin RE \quad (4)$$

הוכחה: מכיוון ש-

$$L_1 \leq L_2$$

קיימת פונקציה  $f$  חסיבה המקיים:

$$x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$$

לכל  $x \in \Sigma^*$ תהי  $M_f$  מ"ט המחשבת את  $f$ .

$$(1) \quad \underline{\text{נוכיח}} \quad L_1 \in R \Leftarrow L_2 \in R$$

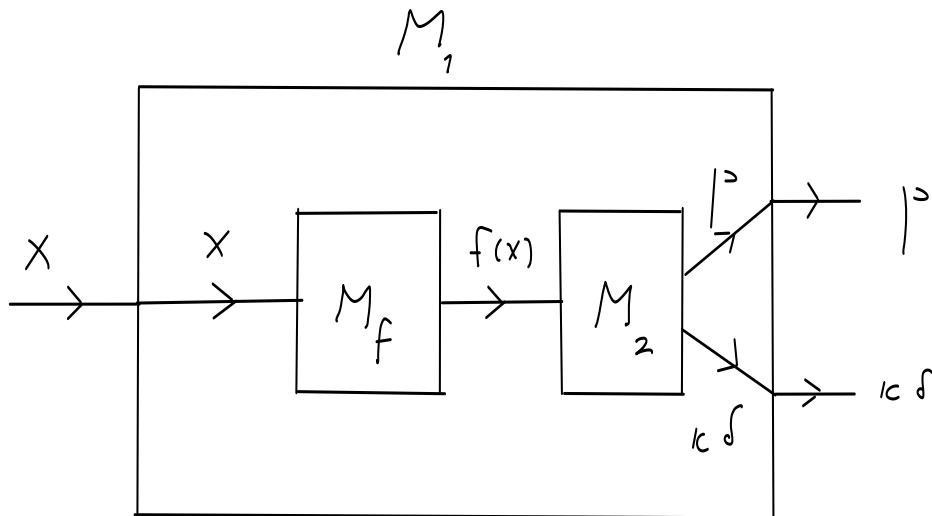
תהי  $M_2$  מ"ט המכריעה את  $L_2$ .נבנה מ"ט  $M_1$  המכריעה את  $L_1$ .התאור של  $M_1$  $=$  על קלט  $x$ . מוחשבת את  $f(x)$  בעזרת  $M_f$ . מריצה את  $M_2$  על  $f(x)$  ועונה כמוה.נוכיח כי  $M_1$  מכריעה את  $L_1$ .

$$.x \in M_1 \Leftarrow f(x) \text{ מקבלת את } M_2 \Leftarrow f(x) \in L_2 \Leftarrow x \in L_1 \text{ •}$$

$x \in M_1 \iff f(x) \in M_2$  דוחה את  $M_2$   $\iff f(x) \notin L_2 \iff x \notin L_1$  •

$$L_1 \in RE \iff L_2 \in RE \quad (2)$$

תהי  $M_2$  מ"ט המקבלת את  $L_2$ .  
نبנה מ"ט  $M_1$  המקבלת את  $L_1$ .



התאור של  $M_1$

: $x =$  על קלט  $M_1$

1. מחשבת את  $f(x)$  בעזרת  $M_f$ .

2. מרים את  $M_2$  על  $f(x)$  ועונה כmoה.

נוכיח כי  $M_1$  מקבלת את  $L_1$ :

$x \in M_1 \iff f(x) \in M_2 \iff f(x) \in L_2 \iff x \in L_1$  •  
 $x \in M_1 \iff f(x) \notin M_2 \iff f(x) \notin L_2 \iff x \notin L_1$  •

(3)

(4)

### כל 7.1

• אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי  $L' \in RE$ , בוחרים שפה אחרת  $L \in RE$  ומראים שקיים רדוקציה

$$L \leq L'.$$

לדוגמה:

$$L \leq L_{\text{acc}}$$

(כנ"ל לגבי  $R$ )

- אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי  $L' \neq RE$  בוחרים שפה אחרת  $L$  ומראים שקיימת רדוקציה

$$L' \leq L .$$

לדוגמה

$$L_d \leq L$$

(כנ"ל לגבי  $R$ ).

## 7.6 דוגמה

$.L_{\text{halt}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ עצמן על } M\}$  ו  $L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\}$

הוכינו כי  $L_{\text{acc}} \leq L_{\text{halt}}$  ע"י רדוקציה  $L_{\text{acc}} \notin R$

**פתרון:**בנייה פונקצייתית  $f$  חשיבה ומקיימת

$$x \in L_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{\text{halt}} .$$

$w$  מתקבלת על  $M'$  מתקבלת על  $w$   $\Leftarrow$   $M$

$w$  מתקבלת על  $M'$  לא מתקבלת על  $w$   $\Leftarrow$   $M$

$w$  לא מתקבלת על  $M'$  לא מתקבלת על  $w$   $\Leftarrow$   $M$

$$f(x) = \begin{cases} \langle M', w \rangle & : x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\text{loop}}, \varepsilon \rangle & : x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

$M'$  מ"ט שלא עצרת על אף קלט. •

•  $M'$  מ"ט המתנהגת כמו  $M$  פרט למקומות בהם  $M$  עצרה ודחתה,  $M'$  תיכנס ללולאה אינסופית.

### nocnost redokcji

$x = \langle M, w \rangle$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם

$\langle M_{\text{loop}}, w \rangle$  אם לא, תחזר קידוד קבוע

ואם כן, תחזר קידוד  $\langle M', w \rangle$  ע"י ביצוע שינויים לוקלים בקידוד של  $M$ .

נכיח כי  $x \in L_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{\text{halt}}$

: $x \in L_{\text{acc}}$  אם

$$\begin{aligned} w \in L(M) \text{ ו } x = \langle M, w \rangle \Leftarrow \\ w \text{ עוצרת ומתקבלת את } M' \text{ ו } f(x) = \langle M', w \rangle \Leftarrow \\ f(x) \in L_{\text{halt}} \Leftarrow \end{aligned}$$

אם  $x \notin L_{\text{acc}}$  אז שני מקרים:

מקרה 1:

$$f(x) \notin L_{\text{halt}} \Leftarrow \text{לא עוצרת על } \varepsilon \text{ מ } M_{\text{loop}} \text{ ו } f(x) = \langle M_{\text{loop}}, \varepsilon \rangle \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$$

מקרה 2:

$$f(x) = \langle M', w \rangle \Leftarrow w \notin L(M) \text{ ו } x = \langle M, w \rangle$$

מקרה א:  $M$  לא עוצרת על  $w$   $\Leftarrow w \in L_{\text{acc}}$

מקרה ב:  $M$  דוחה את  $w$   $\Leftarrow w \notin L(M)$

לסיום, הוכחנו רדוקציה (6.4) אז ממשט הרדוקציה 7.1, מתקיים  $L_{\text{acc}} \leq L_{\text{halt}}$ . ומכיוון ש-  $R$  (משפט 6.4) איז ממשט רדוקציה,  $L_{\text{halt}} \notin R$ .

## 7.7 דוגמה

נתונה השפה

$$L_{\Sigma^*} = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^*\}$$

ונתונה השפה

$$\bar{L}_{\Sigma^*} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \neq \Sigma^*\} \cup \{x \neq \langle M \rangle\} .$$

הוכיחו כי:

$$L_{\Sigma^*} \notin RE \quad (\text{א})$$

$$L_{\Sigma^*} \notin R \quad (\text{ב})$$

$$\bar{L}_{\Sigma^*} \notin RE \quad (\text{ג})$$

**פתרון:**

nocich ci  $R$  ע"י  $L_{\Sigma^*} \notin R$

$$L_{\text{acc}} \leq L_{\Sigma^*} .$$

בנייה פונקצייתית חשיבה  $f$  המקיים

$$x \in L_{\text{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L_{\Sigma^*} .$$

$$L(M') = \Sigma^* \Leftarrow w \in L(M)$$

$$L(M') \neq \Sigma^* \Leftarrow w \notin L(M)$$

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & : x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & : x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- $M_\emptyset$  מ"ט שדוכה כל קלט.
- $M'$  היא מ"ט שעל כל קלט  $x$ , מתעלמת מ-  $x$  ומריצה את  $M$  על  $w$  ועונה כמוות.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & : w \in L(M) \\ \emptyset & : w \notin L(M) \end{cases}$$

נכונות הרדוקציה: $f$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם  $.x = \langle M, w \rangle$ אם לא תחזר קידוד קבוע  $\langle M_\emptyset \rangle$ אם כן, תחזר קידוד  $\langle M' \rangle$  ע"י הוספת קוג ל-  $M$  שמוחק את הקלט מהסרט וכותב  $w$  במקומו.

נוכיח כי

$$\begin{aligned} x \in L_{\text{acc}} &\Leftrightarrow f(x) \in L_{\Sigma^*} \\ \Leftarrow L(M') = \Sigma^* \quad f(x) = \langle M' \rangle &\Leftarrow w \in L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \Leftarrow x \in L_{\text{acc}} \quad \text{אם} \\ .f(x) \notin L_{\Sigma^*} &.f(x) \in L_{\Sigma^*} \end{aligned}$$

אם שני מקרים:

$$.f(x) \notin L_{\Sigma^*} \Leftarrow L(M_\emptyset) = \emptyset \wedge f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle \quad \text{מקרה 1}$$

$$.f(x) \notin L_{\Sigma^*} \Leftarrow L(M') = \emptyset \quad \text{ולפי האבחנה } \emptyset \Leftarrow w \notin L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \quad \text{מקרה 2}$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $L_{\text{acc}} \leq L_{\Sigma^*} \neq R$ . ומכיון ש-  $L_{\text{acc}} \leq L_{\Sigma^*}$  (משפט 6.4) אז ממשט הרדוקציה 7.1, מתקיים  $L_{\Sigma^*} \notin R$ .

## 7.8 דוגמה

נתונה השפה

$$L_d = \{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M)\}$$

ונתונה השפה

$$\bar{L}_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \notin L(M)\} \cup \{x \neq \langle M, w \rangle\} .$$

הוכחו כי  $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$  ע"י רדוקציה

$$L_d \leq \bar{L}_{\text{acc}} .$$

**פתרונות:**בנייה פונקצייתית חשיבה  $f$  המקיים

$$x \in L_d \Leftrightarrow f(x) \in L_{\text{acc}} .$$

$$w' \notin L(M') \Leftarrow \langle M \rangle \notin L(M)$$

$$w' \in L(M') \Leftarrow \langle M \rangle \in L(M)$$

$$f(x) = \begin{cases} \langle M, \langle M \rangle \rangle & : x = \langle M \rangle \\ \langle M^*, \varepsilon \rangle & : x \neq \langle M \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M^*$  המ"ט שמקבלת כל קלט.

נכונות הרדוקציה:

$f$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם  $x = \langle M, w \rangle$ .

אם לא תחזיר קידוד קבוע  $\langle M^*, \varepsilon \rangle$ .

אם כן, תחשב  $\langle M, \langle M \rangle \rangle$ .

נוכיח כי

$$x \in L_d \Leftrightarrow f(x) \in \bar{L}_{\text{acc}}$$

$$\Leftarrow \langle M \rangle \notin L(M) \text{ ו } f(x) = \langle M, \langle M \rangle \rangle \Leftarrow \langle M \rangle \notin L(M) \text{ ו } x = \langle M \rangle \Leftarrow x \in L_d \text{ אם } f(x) \in \bar{L}_{\text{acc}}$$

אם שני מקרים:

$$. f(x) \notin \bar{L}_{\text{acc}} \Leftarrow \varepsilon \in L(M^*) \text{ ו } f(x) = \langle M^*, \varepsilon \rangle \Leftarrow x \neq \langle M \rangle \quad : \underline{\text{מקרה 1}}$$

$$. f(x) \in \bar{L}_{\text{acc}} \Leftarrow \langle M \rangle \in L(M) \text{ ו } f(x) = \langle M, \langle M \rangle \rangle \Leftarrow \langle M \rangle \in L(M) \text{ ו } x = \langle M \rangle \quad : \underline{\text{מקרה 2}}$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $L_d \leq \bar{L}_{\text{acc}}$ , ומכיון ש-  $L_d \leq RE$  (משפט 6.3) אז ממשט הרדוקציה 7.1, מתקיים  $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$ .

## משפט 7.2 ממשפט הרדוקציה בין שפות משלימות

אם קיימת רדוקציה  $\bar{L}_1 \leq \bar{L}_2$ , אז קיימת רדוקציה  $\bar{L}_2 \leq \bar{L}_1$ .

הוכחה:

אם  $\exists$  רדוקציה

$$L_1 \leq L_2$$

אז  $\exists$  פונקציה חשיבה  $f$  המקיים  $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$

ולכן עבור אותה פונקציה  $f$  היא גם חשיבה וגם מקיימת

$$x \in \bar{L}_1 \Leftrightarrow f(x) \in \bar{L}_2$$

ולכן

$$\bar{L}_1 \leq \bar{L}_2 .$$



## 7.4 דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה בין שפות משלימות (משפט 7.2)

### דוגמה 7.9

הוכחנו בדוגמה 7.7 רדוקציה

$$L_{\text{acc}} \leq L_{\Sigma^*} .$$

לכן לפי משפט 7.2 קיימת רדוקציה

$$\bar{L}_{\text{acc}} \leq \bar{L}_{\Sigma^*} .$$

מכיוון ש-  $\bar{L}_{\Sigma^*} \notin RE$ , אז ממשפט הרדוקציה 7.1 מתקיים

מכיוון ש-  $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$ , אז ממשפט הרדוקציה 7.1 מתקיים

### דוגמה 7.10

הוכחנו בדוגמה 7.8 רדוקציה

$$L_d \leq \bar{L}_{\text{acc}} .$$

לכן לפי משפט 7.2 קיימת רדוקציה

$$\bar{L}_d \leq L_{\text{acc}} .$$

מכיוון ש-  $\bar{L}_d \in RE$ , אז ממשפט הרדוקציה 7.1 מתקיים

## 7.5 דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה (משפט 7.1)

### דוגמה 7.11

תהי  $L_{\text{NOTREG}}$  השפה

$$L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית}\} .$$

הוכחו כי השפה  $L_{\text{NOTREG}}$  לא כריעה על ידי רדוקציה מ-

**פתרונות:**

השפה  $\bar{L}_{\text{acc}}$  מוגדרת

$$\bar{L}_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ לא מקבלת } w\} \cup \{x \neq \langle M, w \rangle\} .$$

והשפה  $L_{\text{NOTREG}}$  מוגדרת

$$L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית}\} .$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ w' \in PAL & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M'$  מ"ט הבא:

$M' = \text{על כל קלט } y$

(1) אם  $y \in PAL \iff \text{מקבלת.}$

(2) אחרת מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוות.

### הוכחת נכונות הרדוקציה

אם  $x \in \bar{L}_{\text{acc}}$       ⇐      שני מקרים:

מקרה 1:  $x = \langle M, w \rangle$

$w$  לא מקבלת  $M$  ⇐

$L(M') \in PAL$  ⇐

$\langle M' \rangle \in PAL$  ⇐

$f(x) \in PAL$  ⇐

$.f(x) \in L_{\text{NOTREG}}$  ⇐

מקרה 2:  $.f(x) \in L_{\text{NOTREG}} \Leftarrow f(x) \in PAL \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$

אם  $.f(x) \in L_{\text{NOTREG}}$       ⇐       $f(x) \in \Sigma^*$       ⇐       $L(M') = \Sigma^*$       ⇐       $w$  מקבלת  $M$       ⇐       $x \notin \bar{L}_{\text{acc}}$

לכן הוכחנו כי  $f(x)$  היא רדוקציה מ-  $L_{\text{acc}}$  ל-  $L_{\text{NOTREG}}$  ⇔  $f(x) \in NOTERG$ .

השפה  $\bar{L}_{\text{acc}}$  לא כריעה. לפיכך, לפי משפט הרדוקציה גם  $L_{\text{NOTREG}}$  לא כריעה.

### דוגמה 7.12

תהי  $L_{\text{NOTREG}}$  השפה

$$L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid \text{לא רגולרית } L(M)\}.$$

הוכיחו כי השפה  $L_{\text{NOTREG}}$  לא כרעה על ידי רדוקציה מ-  $L_{\text{acc}}$ .

**פתרון:**

השפה  $L_{\text{acc}}$  מוגדרת  $L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ מקבלת } M\}$ .

והשפה  $L_{\text{NOTREG}}$  מוגדרת  $L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid \text{לא רגולרית } L(M)\}$ .

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M'$  מ"ט הבאה:

$M' = M'$  על כל קלט  $u$ :

(1)  $M'$  מריצה  $M$  על  $w$ .

(2) אם  $M$  דוחה ⇐  $M'$  דוחה.

- אם  $M$  מקבלת  $\Rightarrow M'$  בודקת אם  $y$  פלינדרום.

\* אם כן  $\Rightarrow$  מקבלת.

\* אם לא  $\Rightarrow$  דוחה.

### הוכחת נכונות הרדוקציה

$$\begin{aligned} f(x) \in L_{\text{NOTREG}} &\Leftrightarrow f(x) \in PAL \Leftrightarrow L(M') = PAL \Leftrightarrow M \text{ מקבלת } w \Leftrightarrow x \in L_{\text{acc}} \\ &\quad . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle M_\emptyset \rangle \notin L_{\text{NOTREG}} &\Leftrightarrow L(M_\emptyset) = \emptyset \text{ ו } f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \Leftrightarrow x \neq \langle M, w \rangle \\ &\quad . f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle M' \rangle \notin L_{\text{NOTREG}} &\Leftrightarrow L(M') = \emptyset \Leftrightarrow M \text{ לא מקבלת } w \text{ ו } x = \langle M, w \rangle \\ &\quad . f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

### **דוגמה 7.13** $L_{\text{HALT}} \leq L_{\text{NOTREG}}$

תהי השפה  $L_{\text{NOTREG}}$  הטענה  
 $L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית}\}$ .

הוכיחו כי השפה  $L_{\text{NOTREG}}$  לא כרעה על ידי רדוקציה מ-  $L_{\text{HALT}}$ .

### **פתרון:**

השפה  $L_{\text{HALT}}$  מוגדרת  
 $L_{\text{HALT}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ עצרת על } M\}$ .

והשפה  $L_{\text{NOTREG}}$  מוגדרת  
 $L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית}\}$ .

נדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}.$$

כאשר  $M'$  מ"ט הבאה:

: $y$  על כל קלט  $u$  :

(1)  $M'$  מרכיבה  $M$  על  $w$ .

• אם  $M$  דוחה  $\Rightarrow$  דוחה. (2)

• אם  $M$  מקבלת  $\Rightarrow$  ממשיכה לשלב (3).

(3)  $.y \in PAL$  אם  $M'$  בודקת אם  $y$

• אם כן  $\Rightarrow$  מקבלת.

• אם לא  $\Rightarrow$  דוחה.

הוכחת נכונות

$$\cdot L(M') \in L_{\text{NOTREG}} \iff L(M') \in PAL \iff x \in L_{\text{HALT}}$$

$$\text{שני מקרים:} \iff x \notin L_{\text{HALT}}$$

$$\begin{array}{lcl} \langle M_\emptyset \rangle \notin L_{\text{NOTREG}} & \Leftarrow & L(M_\emptyset) = \emptyset \wedge f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \\ & & \cdot f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} \Leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \langle M_\emptyset \rangle \notin L_{\text{NOTREG}} & \Leftarrow & L(M_\emptyset) = \emptyset \Leftarrow w \text{ לא עוצרת על } M \wedge x = \langle M, w \rangle \\ & & \cdot f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} \Leftarrow \end{array}$$

**דוגמה 7.14**  $\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{\text{REG}}$

$$L_{\text{REG}} = \{\langle M \rangle \mid \text{רגולרית } L(M)\}.$$

הוכחו כי השפה  $L_{\text{REG}}$  לא כריעה על ידי רדוקציה מ-

תהי  $L_{\text{REG}}$  השפה

**פתרונות:** השפה  $\bar{L}_{\text{acc}}$  מוגדרת

$$\bar{L}_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ לא מקבלת } M\} \cup \{x \mid x \neq \langle M, w \rangle\}.$$

והשפה  $L_{\text{REG}}$  מוגדרת

$$L_{\text{REG}} = \{\langle M \rangle \mid \text{רגולרית } L(M)\}.$$

נדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M_\emptyset$  המ"ט שדוחה כל קלט ו-  $M'$  מ"ט הבאה:

$M' = \text{על כל קלט } y$ :

(1) מריצה  $M$  על  $w$ .

(2) • אם  $M$  דוחה  $\Leftarrow$  דוחה.

• אם  $M$  מקבלת  $\Leftarrow$  בודקת אם  $y$  פלינדרום:

• אם כן  $\Leftarrow$  מקבלת.

• אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

אבחנה

$$L(M') = \begin{cases} PAL & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

הוכחת נכונות הרדוקציה

אם  $x \in \bar{L}_{\text{acc}}$  שני מקרים:

מקרה 1:  $f(x) \in L_{\text{REG}} \iff \langle M_{\emptyset} \rangle \in L_{\text{REG}} \iff L(M_{\emptyset}) = \emptyset \wedge f(x) = \langle M_{\emptyset} \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle$

מקרה 2:  $\langle M_{\emptyset} \rangle \in L_{\text{REG}} \iff L(M') = \emptyset \wedge f(x) = \langle M' \rangle \iff x \notin L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \iff f(x) \in L_{\text{REG}}$

$f(x) \in PAL \iff L(M') \in PAL \wedge f(x) = \langle M' \rangle \iff w \in L(M) \iff x \notin \bar{L}_{\text{acc}} \wedge f(x) \notin L_{\text{REG}}$

## דוגמה 7.15

תהי  $L_{\text{REG}}$  השפה

$$L_{\text{REG}} = \{\langle M \rangle \mid \text{רגולרית } L(M)\}.$$

הוכיחו כי השפה  $L_{\text{REG}}$  לא כריעה על ידי רדוקציה מ-

## פתרונות:

השפה  $L_{\text{acc}}$  מוגדרת  $L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ מקבלת } M\}$ .

והשפה  $L_{\text{REG}}$  מוגדרת  $L_{\text{REG}} = \{\langle M \rangle \mid \text{רגולרית } L(M)\}$ .

נדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{PAL} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M_{PAL}$  המ"ט שמכריע את השפה של פלינדרומים, ו-  $M'$  מ"ט הבאה:

$M' = \text{על כל קלט } y$ :

(1)  $M'$  בודקת אם  $y$  פלינדרום:

- אם כן  $\iff$  מקבלת.
- אם לא מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוות.

## הוכחת נכונות הרדוקציה

$.f(x) \in REG \iff L(M') = \Sigma^* \iff w \text{ מקבלת } M \iff x \in L_{\text{acc}}$  אם

שני מקרים:

מקרה 1:  $\langle M_{PAL} \rangle \notin L_{\text{REG}} \iff L(M_{PAL}) = PAL \wedge f(x) = \langle M_{PAL} \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle \iff f(x) \notin L_{\text{REG}}$

מקרה 2:  $\langle M' \rangle \notin L_{\text{REG}} \iff L(M') = PAL \iff w \text{ לא מקבלת } M \wedge x = \langle M, w \rangle \iff f(x) \notin L_{\text{REG}}$

**דוגמה 7.16**

נתונה השפה הבאה:

$$L = \{\langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2)\} .$$

הוכחנו כי  $L \notin RE$  ע"י רדוקציה מ-**פתרון:**פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M^*, M, w \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- $M^*$  היא מ"ט שמקבלת כל קלט.
- $M_\emptyset$  היא מ"ט שדוחה כל קלט.

נכונות הרדוקציה:

ראשית,  $f$  חסיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם  $x = \langle M, w \rangle$  או לא, תחזר קידוד קבוע  $\langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle$ . אם לא, תחזר קידוד  $\langle M^*, M, w \rangle$ .

נכיח כי

$$x \in \bar{L}_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{M_1 \rightarrow M_2} .$$

אם שני מקרים:  $\iff x \in \bar{L}_{\text{acc}}$ 

מקרה 1:  $f(x) \in \iff \varepsilon \notin L(M_\emptyset) \wedge \varepsilon \in L(M^*) \wedge f(x) = \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle \iff x \in \bar{L}_{\text{acc}}$ .

מקרה 2:  $w \notin L(M) \wedge w \in L(M^*) \wedge f(x) = \langle M^*, M, w \rangle \iff w \notin L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \iff f(x) \in L_{M_1 \rightarrow M_2} \iff$

$w \notin L(M) \wedge w \in L(M^*) \wedge f(x) = \langle M^*, M, w \rangle \iff w \in L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \iff x \notin \bar{L}_{\text{acc}}$  אם  $f(x) \notin L_{M_1 \rightarrow M_2} \iff$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$ , ומכיון ש-  $\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \rightarrow M_2}$  ממשפט הרדוקציה מתקיים

**דוגמה 7.17**

נתונה השפה הבאה:

$$L = \{\langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2)\} .$$

הוכחנו כי  $L \notin RE$  ע"י רדוקציה מ-**פתרון:**פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M_\emptyset, M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset, M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- $M_\emptyset$  היא מ"ט שדועה כל קלט.
- $M'$  היא מ"ט של קלט  $y$  מתעלמת מ-  $y$  ומריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוות.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases} .$$

נכונות הרדוקציה:

ראשית,  $f$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם  $x = \langle M, w \rangle$ . אם לא, תחזיר קידוד קבוע  $\langle M_\emptyset, M_\emptyset \rangle$ . אם כן, תחזיר קידוד קבוע  $\langle M'_\emptyset, M'_\emptyset \rangle$ , כאשר  $M'_\emptyset$  הוסיף kod ל-  $\langle M \rangle$  המוחק את הקלט  $y$  ורושם  $w$  במקומו.

נוכיח כי

$$x \in L_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{M_1 \subset M_2} .$$

$$L(M') = \Sigma^* \quad f(x) = \langle M_\emptyset, M' \rangle \quad \iff \quad w \in L(M) \quad \text{ו-} \quad x = \langle M, w \rangle \quad \iff \quad x \in L_{\text{acc}}$$

$$\cdot f(x) \in L_{M_1 \subset M_2} \quad \iff \quad L(M_\emptyset) \subset L(M') \iff$$

$$\text{שני מקרים:} \quad \iff \quad x \notin L_{\text{acc}}$$

$$\cdot f(x) \notin L_{M_1 \subset M_2} \quad \iff \quad L(M_\emptyset) = L(M_\emptyset) \quad \text{ו-} \quad f(x) = \langle M_\emptyset, M_\emptyset \rangle \quad \iff \quad x \neq \langle M, w \rangle \quad \underline{\text{מקרה 1:}}$$

$$L(M') = \emptyset \quad f(x) = \langle M_\emptyset, M' \rangle \quad \iff \quad w \notin L(M) \quad \text{ו-} \quad x = \langle M, w \rangle \quad \underline{\text{מקרה 2:}}$$

$$\cdot f(x) \notin L_{M_1 \subset M_2} \quad L(M') = L(M_\emptyset) \quad \iff$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה מתקיים  $L_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \subset M_2}$ , ומכיון רדוקציה מתקיים  $L_{M_1 \subset M_2} \leq L_{\text{acc}}$ , ומכיוון ש-  $R \neq L_{\text{acc}}$  ממשפט הרדוקציה מתקיים  $R \leq L_{M_1 \subset M_2}$ .

## שיעור 8

### מבוא לסיבוכיות

## 8.1 הגדרה של סיבוכיות

### הערה 8.1

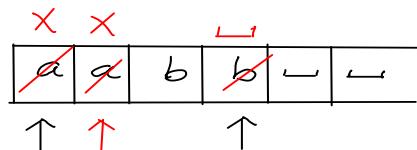
זמן ריצה של מ"ט  $M$  על קלט  $w$ , נמדד ביחס לגודל הקלט  $w$ , כЛОMER ( $|w|$ ).  $f(|w|)$

### הגדרה 8.1

נאמר כי ניתן להכריע שפה  $L$  בזמן  $f(n)$ , אם קיימת מ"ט  $M$  המכ裏עה את  $L$  ולכן קלט  $w \in \Sigma^*$ , זמן הריצה של  $M$  על  $w$  חסום ע"י  $f(|w|)$ .

### דוגמה 8.1

נבנה מ"ט  $M$  המכ裏עה השפה  $.L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$



התאור של  $M$ :

על קלט  $w$ :

- (1) אם הtau שמתוחת לראש הוא  $\_ \leftarrow$  מקבלת.
- (2) אם הtau שמתוחת לראש הוא  $b \leftarrow$  דוחה.
- (3) מוחקת את הtau שמתוחת לראש ע"י  $X$ .
- (4) מזיהה את הראש ימינה עד הtau הראשון משמאלו  $\_ \leftarrow \_$ .
  - אם הtau הוא  $a$  או  $X \leftarrow$  דוחה.
  - מוחקת את הtau שמתוחת לראש ע"י  $\_ \leftarrow$ , מזיהה את הראש שמאלה עד הtau הראשון מימין ל-  $X$  וחוזרת ל- (1).

זמן הריצה

•  $\frac{|w|}{2}$  איטרציות.

• בכל איטרציה מבצעים  $O(|w|)$  צעדים.

$$\frac{|w|}{2} \cdot O(|w|) = O(|w|^2).$$

**הגדרה 8.2 זמן הריצה**

זמן הריצה של מ"ט  $M$  על קלט  $w$  היא פונקציה  $f(|w|)$  השווה למספר הצעדים הנדרש בחישוב של  $M$  על  $w$ .

**הערה 8.2**

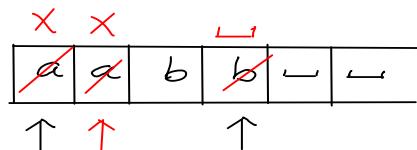
זמן הריצה של מ"ט נמדד ביחס לגודל הקלט  $|w|$ .

**הגדרה 8.3**

אומרים כי ניתן להכריעה שפה  $L$  בזמן  $f(n)$  אם קיימת מ"ט  $M$  המכריעה את  $L$  כך שלכל  $\Sigma^*$ , זמן הריצה של  $M$  על  $w$  חסום ע"י  $f(|w|)$ .

**דוגמה 8.2**

נבנה מ"ט  $M$  עם סרט ייחיד שמכריעה את השפה  $.L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$



התאור של  $M$ :

על קלט  $w$ :

- (1) אם התו שמתוחת לראש הוא  $\_ \leftarrow$  מקבלת.
- (2) אם התו שמתוחת לראש הוא  $b \leftarrow$  דוחה.
- (3) מוחקת את התו שמתוחת לראש ע"י  $X$ .
- (4) מזיהה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאלו  $\_ \leftarrow$ .
  - אם התו הוא  $a$  או  $X \leftarrow$  דוחה.
  - מוחקת את התו שמתוחת לראש ע"י  $\_ \leftarrow$ , מזיהה את הראש שמאלה עד התו הראשון מימין לו  $X$  ו חוזרת  $\_ \leftarrow$  (1).

זמן הריצה

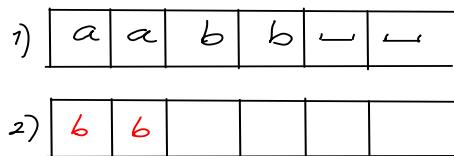
•  $M$  מבצעת  $\frac{|w|}{2}$  איטרציות.

- בכלל איטרציה  $M$  סורקת את הסרט פעמיים וזה עולה  $O(|w|)$ .
- לכן סה"כ זמן הריצה של  $M$  חסום ע"י

$$\frac{|w|}{2} \cdot O(|w|) = O(|w|^2).$$

**דוגמה 8.3**

נבנה מ"ט מרובת סרטים'  $M'$  שמכריעת את השפה  $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ .



התאור של  $M'$ :

על קלט  $w$ :

(1) מעתיקת את ה-  $b$  -ים לסרט 2 (ותוך כדי בודקת האם  $w$  מהצורה  $a^* b^*$ ).

(2) מזיהה את הראשים לתחילת הסרטים.

(3) אם שני הראשים מצביעים על  $\_ \leftarrow$  מקבלת.

(4) אם אחד הראשים מצביע על  $\_ \leftarrow$  והשני לא  $\leftarrow$  לא.

(5) מזיהה את שע הראשים ימינה וחוזרת לשלב (3).

**שלבים (3-5):**  $O(|w|)$

זמן הריצה

זמן הריצה של  $M'$  הוא  $O(|w|)$ .

## 8.2 יחס בין הסיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס

### משפט 8.1

לכל מ"ט מרובת סרטים  $M$  הריצה בזמן  $f(n)$  קיימת מ"ט סרט יחיד'  $M'$  השקולה לו-  $M$  ורצה בזמן  $O(f^2(n))$ .

**הוכחה:**

בhinתן מ"ט מרובת סרטים  $M$ , הריצה בזמן  $f(n)$ , נבנה מ"ט עם סרט יחיד'  $M'$  באותו אופן כמו בהוכחת השקילות במשפט 3.1.

כולומר,  $M'$  שומרת את התוכן של  $k$  סרטים של  $M$  על הסרט היחיד שלו (עם הפרדה ע"י '#), ובכל צעד חישוב,  $M'$  סורקית את הסרט שלו כדי להזיהות שת האותיות שמתחאת הראשים (שמסומנות ב-  $\hat{\alpha}$ ) ואחרי זה, משתמשת בפונקציית המעברים של  $M$ , וسورקית את הסרט פעם נוספת כדי לעדכן את התוכן בכל אחד מהסרטים ואת מיקום הראש בכל אחד מהסרטים.

1)

2)

⋮  
⋮  
⋮

κ)

#	$\hat{\alpha}_1$	#	$\hat{\alpha}_2$	#	$\hat{\alpha}_3$	#	
---	------------------	---	------------------	---	------------------	---	--

כמה לוקח לנו  $M'$  לסרוק את הסרט שלה? מכיוון שהסרט של  $M'$  מכיל את התוכן של  $k$  הסרטים של  $M$ , והגודל של כל אחד מהסרטים של  $M$  חסום ע"י  $f(n)$ , גודל הסרט של  $M'$  חסום ע"י

$$k \cdot f(n) = O(f(n)) .$$

הוצאות של הסקירה של  $M'$  לסרט שלה היא  $O(f(n))$  וזה עלות של צעד חישוב בדיקה של  $M'$  על הקלט.

מכיוון ש-  $M$  רצה בזמן  $f(n)$ , זמן היזהה של  $M'$  חסום ע"י

$$f(n) \cdot O(f(n)) = O(f^2(n)) .$$

## 8.3 יחס בין הסיבוכיות של מ"ט דטרמיניסטי ומ"ט א"ד

### הגדרה 8.4

בהתנחת מ"ט א"ד  $M$ , זמן הריצה של  $M$  על קלט  $w$ , היא פונקציה  $f(|w|)$  השווה במספר הצעדים בחישוב המקסימלי של  $M$  על  $w$ .

### משפט 8.2

לכל מ"ט א"ד  $N$  הריצה בזמן  $f(n)$ , קיימת מ"ט דטרמיניסטי  $D$  השකלה ל-  $N$  ורצה בזמן  $.2^{(f(n))}$ .

**הוכחה:**

בhinתן מ"ט א"ד  $N$  הרצה בזמן  $f(n)$  מ"ט דטרמיניסטי  $D$  באותו אופן כמו בהוכחת השקלות במשפט 4.1. כלומר, בהינתן קלט  $w$ ,  $D$  תשרו את עץ החישוב של  $N$  ו-  $w$  לרוחב ותקבל כל אחד החישובים של  $N$  המסתויים כולם, בהינתן קלט  $w$ ,  $D$  מבצע חסום ע"י מספר הקודקודים בעץ החישוב של  $N$  ו-  $w$ . ב-  $q_{\text{acc}}$ .

בhinתן קלט  $w$  באורך  $n$ :

- כל מסלול בעץ החישוב של  $N$  על  $w$  חסום ע"י  $f(n)$ .
- מסגר החישובים ש-  $D$  מבצע חסום ע"י מספר הקודקודים בעץ החישוב של  $N$  ו-  $w$ .
- מכיוון שמספר הבנים של כל קודקוד בעץ החישוב חסום ע"י

$$C = 3|Q| \cdot |\Gamma|$$

מספר הקודקודים בעץ החישוב חסום ע"י

$$C^0 + C^2 + \dots C^{f(n)} \leq C^{f(n)+1} = C \cdot C^{f(n)}.$$

ולכן זמן הריצה של  $D$  חסום ע"י

$$f(n) \cdot C \cdot C^{f(n)} \leq C^{f(n)} \cdot C^{f(n)} = C^{2f(n)} = (C^2)^{f(n)} = 2^{C' \cdot f(n)} = 2^{O(f(n))}.$$

נתיחס כאן לשני החסמים הבאים:

1) חסם פולינומיAli הוא חסם מהצורה  $n^c$  עבור  $0 < c > c$  כלשהו.2) חסם אקספוננציאלי הוא חסם מהצורה  $2^{n^c}$  עבור  $0 < c > c$  כלשהו.

### הגדרה 8.5 בעיית הברעה

בעיית הברעה מוגדרת באופן הבא:

"בהינתן קלט כלשהו, האם הקלט מקיים תנאים מסוימים"

### דוגמה 8.4

בhinתן מספר  $n$ , האם  $n$  ראשוני?

כל בעיית הברעה ניתנת לתאר כפשה שකולה:

$$L_{\text{prime}} = \{\langle n \rangle \mid n \text{ ראשוני}\}.$$

### משפט 8.3

. שפה  $\equiv$  בעיית הברעה

**הגדרה 8.6 אלגוריתם זמן פולינומיAli**

אומרים כי אלגוריתם  $A$  מכריע בעיה בזמן פולינומיAli אם קיים קבוע  $c > 0$  כך שזמן הריצה של  $A$  על כל קלט  $w$  חסום ע"י  $O(|w|^c)$ .

**משפט 8.4 התזה של צירץ' (Church Thesis)**

אם קיים אלגוריתם המכריע בעיה בזמן פולינומיAli, אז קיימת מ"ט דטרמיניסטית המכריע את השפה השכללה לבעיה זו בזמן פולינומיAli.

. מכונת טיורינג ≡ אלגוריתם מכריע

**8.4 המחלקה  $P$** **הגדרה 8.7 המחלקה  $P$** 

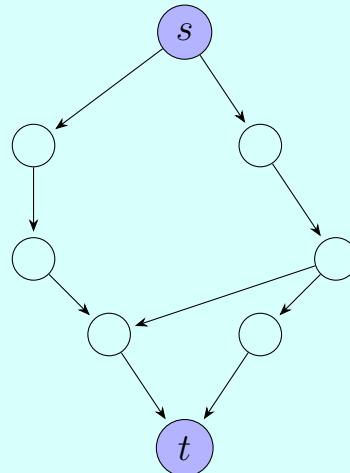
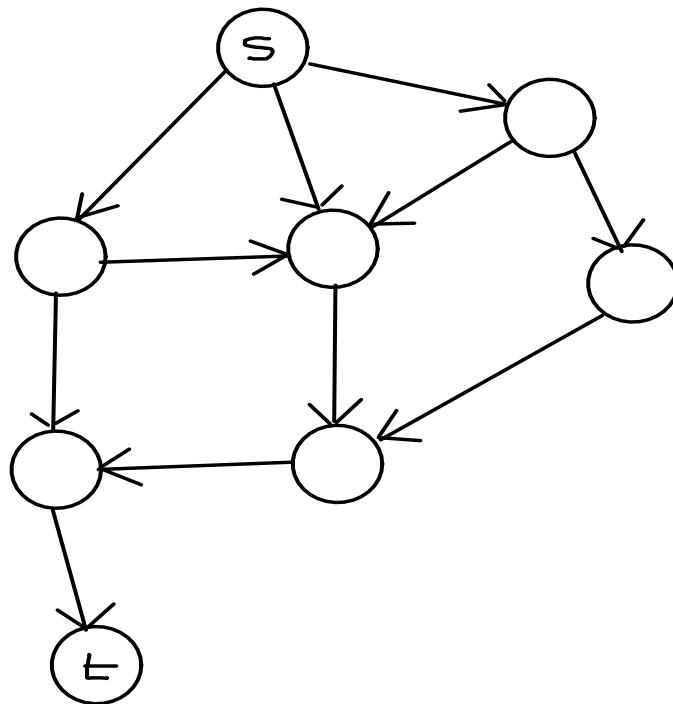
המחלקה  $P$  היא אוסף כל הבעיות (השפות) שקיים עבורן אלגוריתם (מכונת טיורינג דטרמיניסטית) המכריע אותן בזמן פולינומיAli.

**דוגמה 8.5**

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \in P .$$

**8.5 בעיית PATH**

## הגדרה 8.8 בעיית המסלול בגרף מכוען



קלט: גראף מכוען  $G = (V, E)$  ושני קודקודים  $s, t \in V$

פלט: האם קיים מסלול ב-  $G$  מ-  $s$  ל-  $t$  ?

$$PATH = \{\langle G, s, t \rangle \mid \text{קיים מסלול ב- } G \text{ מ- } s \text{ ל- } t\}$$

משפט 8.5

$$PATH \in P .$$

**הוכחה:** בניית אלגוריתם  $A$  עבור הבעיה  $PATH$

$\langle G, s, t \rangle = A$

(1) צבע את  $s$ .

(2) מבצע  $|V| - 1$  פעמים:

- לכל צלע  $(u, v) \in E$
- \* אם  $u$  צבוע  $\Leftarrow$  צבע את  $v$ .
- אם  $t$  צבוע  $\Leftarrow$  החזיר "כן".
- אחרת  $\Leftarrow$  החזיר "לא".

זמן ריצה של האלגוריתם הוא  $O(|V| \cdot |E|)$  פולינומיAli במספר הקודקודים  $|V|$ .

האם זה פולינומיAli בגודל הקלט  $|\langle G \rangle|$ ?

איך נקודד את  $G$ ?

• נניח כי  $n = |V| = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

• נניח כי הצלעות נתונות ע"י מטריצה  $M$  בגודל  $n \times n$  כך ש-

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & (i, j) \in E \\ 0 & (i, j) \notin E \end{cases}.$$

• נניח כי מספרים מקודדים בסיסי ביניארי.

• אזי גודל הקידוד של  $G$  שווה  $n^2 + n \log_2 n$ , כלומר

$$|\langle G \rangle| = \Omega(|V|^2) \Rightarrow |V| = O(|\langle G \rangle|).$$

ולכן כל אלגוריתם הרץ בזמן פולינומיAli במספר הקודקודים  $|V|$  ירוץ בזמן פולינומיAli בגודל הקידוד  $|\langle G \rangle|$ .

■  
ולכן  $A$  רץ בזמן פולינומיAli בגודל הקלט.

## RELPRIME 8.6 בעית

### הגדרה 8.9 מספרים זרים (Relatively prime)

שני מספרים  $x, y$  זרים אם המחלק המשותף הגדול ביותר, מסומן  $\text{gcd}(x, y)$ , שווה 1.

### הגדרה 8.10 בעית RELPRIME

קלט: שני מספרים  $x$  ו-  $y$ .

פלט: האם  $x$  ו-  $y$  זרים?

$$\text{RELPRIME} = \{\langle x, y \rangle \mid \text{gcd}(x, y) = 1\}.$$

## משפט 8.6

$$RELPRIME \in P .$$

**הוכחה:** נבנה אלגוריתם  $A$  המכרייע את  $RELPRIME$  בזמן פולינומייאלי.

האלגוריתם מבוסס על העובדה ש-

$$\gcd(x, y) = 1 \iff \langle x, y \rangle \in RELPRIME .$$

ולכן נשתמש באלגוריתם האוקלידי לחישוב  $\gcd$ :

$$\gcd(x, y) = \begin{cases} x & y = 0 \\ \gcd(y, x \bmod y) & y \neq 0 \end{cases} .$$

**הוכחה:** נסמן  $(qy + r) \text{ נסמן } r = x \bmod y \text{ ו } d = \gcd(x, y)$ . אזי קיימים שלמים  $s, t$  כך ש-  $sx + ty = d$ .

לכן

$$s(qy + r) + ty = d \Rightarrow sr + (t + sq)y = d \Rightarrow \gcd(x, y) = d = \gcd(y, r) .$$

לדוגמא:

$$\gcd(18, 32) = \gcd(32, 18) = \gcd(18, 14) = \gcd(14, 4) = \gcd(4, 2) = \gcd(2, 0) = 2 .$$

האלגוריתם האוקלידי:

על קלט  $x$  ו-  $y$ :

**(1)** כל עוד  $y \neq 0$ :

$$x \bmod y \rightarrow x \bullet$$

$$\text{swap}(x, y) \bullet$$

(כלומר מחליפים בין  $x$  ו-  $y$ ).

**(2)** מחזירים את  $x$ .

האלגוריתם  $A$  המכרייע  $RELPRIME$ 

על קלט  $\langle x, y \rangle = A$ :

**(1)** מרים את האלגוריתם האוקלידי על  $x$  ו-  $y$ .

• אם האלגוריתם האוקלידי החזר  $1 \Leftarrow$  מקבל.

• אחרת  $\Leftarrow$  דוחה.

נכונות האלגוריתם נובעת מנכונות האלגוריתם האוקלידי.

נוכיח כי  $A$  רץ בזמן פולינומייאלי בגודל הקלט.

טענת עזר:

$$\text{אם } x \bmod y < \frac{x}{2} \text{ אזי } x > y$$

הוכחה:

יש שתי אפשרויות:

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ אם } y \leq \frac{x}{2} \\ x \mod y < y \leq \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ נניח ש- } x < y < \frac{x}{2}.$$

מכיוון ש-  $(y - x) < 2y$ , וגם  $x = qy + (x \mod y)$  אז בהכרח  $2 < q$  ולכן  $x = qy + (x \mod y)$  ולכן  $y = x \mod y$ .

לפיכך

$$x \mod y = x - y < \frac{x}{2}.$$



לפי טענת העזר, אחרי כל איטרציה  $x$  קטן לפחות חצי.

מכיוון שבכל איטרציה מחליפים בין  $x$  ו-  $y$ , אחרי כל שתי איטרציות גם  $x$  וגם  $y$  קטנים לפחות חצי.

ולכן לאחר  $\log_2 y + \log_2 x$  איטרציות לפחות  $x$  או  $y$  שווים ל- 0.

ולכן מספר האיטרציות באlgorigithm האוקלידי חסום ע"י  $\log_2 x + \log_2 y$ , וזה בדיק זמן הריצה של האlgorigithm  $A$ .  
ולכן  $A$  רץ בזמן פולינומילי בגודל הקלט.

ולכן

$$RELPRIME \in P.$$



## שיעור 9

# המחלקה P והמחלקה NP

### 9.1 המחלקה P

- המחלקה P היא אוסף כל הבעיה שקיים עboroן אלגוריתם המכרייע אותה בזמן פולינומיAli.
- אלגוריתם מכרייע מ"ט דטרמיניסטיית בעית הכרעה שפה,
- אלגוריתם A מכרייע בעיה בזמן פולינומיAli אם קיים קבוע  $c > 0$  כך שזמן הריצה של A על כל קלט  $w$  חסום ע"י  $O(|w|^c)$ .

### 9.2 דוגמאות לבעיות ב- P

$$PATH = \{ \langle G, s, t \rangle \mid \text{graf } G \text{ מכיל מסלול מ- } s \text{ ל- } t \} \in P \quad (1)$$

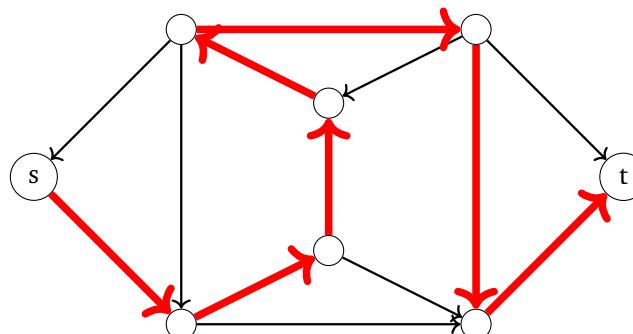
$$RELPRIME = \{ \langle x, y \rangle \mid x \text{ ו- } y \text{ זרים} \} \in P \quad (2)$$

### 9.3 בעיית המסלול המילטוני HAMPATH

#### הגדרה 9.1 HAMPATH

בහינתן גרף מכון  $G = (V, E)$  ושני קודקודים  $s, t \in V$ . מסלול המילטוני מ-  $s$  ל-  $t$  ב-  $G$  הוא מסלול מ-  $s$  ל-  $t$  שעובר דרך כל קודקוד בגרף בדיקוק פעם אחת.

לדוגמה:



#### הגדרה 9.2 בעיית HAMPATH

קלט: גרף מכון  $G = (V, E)$  ושני קודקודים  $s, t \in V$

פלט: האם  $G$  מכיל מסלול המילוטוני מ-  $s$  ל-  $t$  ?

$$HAMPATH = \{\langle G, s, t \rangle \mid \text{גרף } G \text{ מכון המכיל מסלול המילוטוני מ- } s \text{ ל- } t\}$$

נשאל שאלת: האם  $HAMPATH \in P$  ?

לא ידוע האם קיים אלגוריתם המכריע את  $HAMPATH$  בזמן פולינומיAli (שאלת פתוחה).

- בהינתן קלט  $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH$ , האם  $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH$  ?
- נעה על שאלת אחרת:

בהינתן קלט  $y$ , ומחרוזת  $y$ , האם  $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH$  ?

- ניתן לבדוק האם  $y$  היא מסלול המילוטוני מ-  $s$  ל-  $t$  בזמן פולינומיAli ולענות בהתאם.
- במקרה זה, אומרים כי  $HAMPATH$  ניתנת לאיומות בזמן פולינומיAli.

## 9.4 אלגוריתם איומות

### הגדרה 9.3 אלגוריתם איומות

אלגוריתם איות עבור בעיה  $A$  הוא אלגוריתם  $V$  כך שלכל קלט  $\Sigma^* \in w$  מתקיים:

( $w, y \in A$  אם ורק אם קיימת מחרוזת (עדות)  $y$  באורך פולינומיAli ב-  $|w|$  כך ש-  $V$  מקבל את הזוג  $(w, y)$ )  
כלומר:

- אם  $w \in A$  . $\exists y : V(w, y) = T \iff w \in A$
- אם  $w \notin A$  . $\forall y : V(w, y) = F \iff w \notin A$

### הערה 9.1

- זמן ריצה של אלגוריתום איות נמדד ביחס לגודל הקלט  $|w|$ .
- אלגוריתם איות פולינומיAli אם הוא רץ בזמן פולינומיAli.

## 9.5 המחלקה NP

### הגדרה 9.4 המחלקה NP

המחלקה NP היא אוסף כל הבעיה שקיים עבורן אלגוריתם איות פולינומיAli.

### משפט 9.1 $HAMPATH \in NP$

בעיית המסלול המילוטוני  $: HAMPATH$

קלט: גרף מכון  $G = (V, E)$  ושני קודקודים  $.s, t \in V$

פלטו: האם  $G$  מכיל מסלול המילטוני מ-  $s$  ל-  $t$  ?

$$HAMPATH = \{ \langle G, s, t \rangle \mid G \text{ גראף מכוכן המכיל מסלול המילטוני מ- } s \text{ ל- } t \}$$

הוכחה כי  $HAMPATH \in NP$

הוכחה: בניית אלגוריתם אimotoת  $V$  עבור  $HAMPATH$ .

$V$  על קלט  $(\langle G, s, t \rangle, y)$ :

1) בודק האם  $y$  היא סדרה של

$$u_1, u_2, \dots, u_n$$

השונים זה מזוהה.

- אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

2) בודק האם  $u_n = t$  ו-  $u_1 = s$

- אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

3) בודק שככל הצלעות  $(u_i, u_{i+1})$  (לכל  $n \leq i \leq 1$ ) קיימות ב-  $G$ .

- אם כן  $\Leftarrow$  מקבל.

- אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

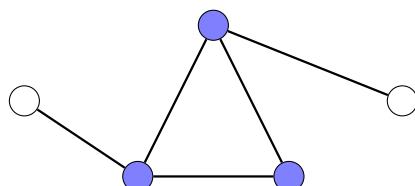
### נכונות

- זמן הריצה של האלגוריתם הוא פולינומילי בגודל הקלט.
- אם  $G$  מכיל מסלול המילטוני מ-  $s$  ל-  $t$   $\Leftarrow$  עבור  $y$  שהוא קידוד של מסלול זה,  $V$  קיבל את הזוג  $(\langle G, s, t \rangle, y)$ .
- אם  $G$  לא מכיל מסלול המילטוני מ-  $s$  ל-  $t$   $\Leftarrow$  לכל  $y$ , האלגוריתם ידחה את הזוג  $(\langle G, s, t \rangle, y)$ .

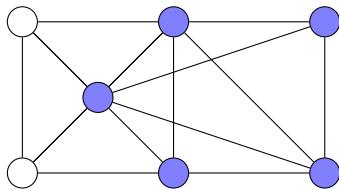


### הגדרה 9.5 קליקה

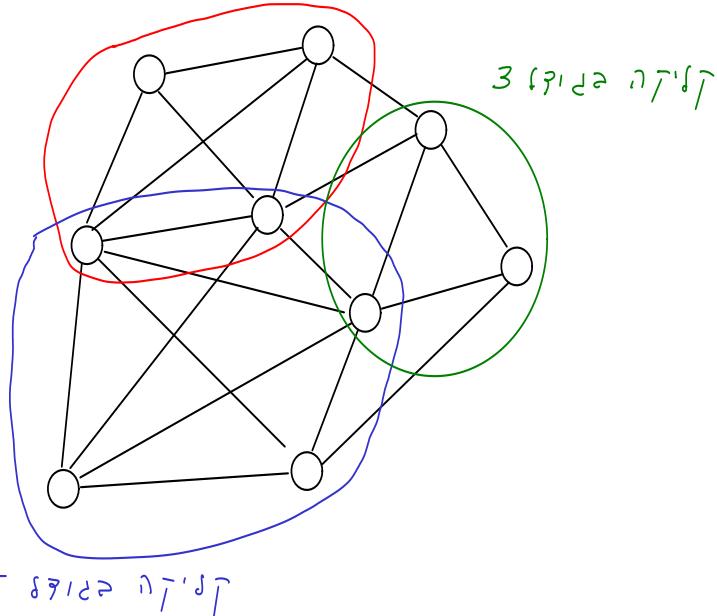
בහינתנו גראף לא מכוכן  $G = (V, E)$ , קליקה ב-  $G$  היא תת-קובוצה של קודקודים  $C \subseteq V$  כך שלכל שני קודקודים  $u, v \in C$  מתקיים  $(u, v) \in E$ .



קליקה בגודל 3 :  $k = 3$

קliquה בגודל 5 : $k = 5$ 

הliquה הגדולה ביותר

**הגדרה 9.6 בעיית הקלliquה**קלט: גרף לא מכוון  $G = (V, E)$  ומספר  $k$ .פלט: האם  $G$  קלliquה בגודל  $k$ ?

$$\text{CLIQUE} = \{\langle G, k \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל קלliquה בגודל } k\}$$

**משפט 9.2**  $\text{CLIQUE} \in NP$ 

$$\text{CLIQUE} \in NP.$$

**הוכחה:** נבנה אלגוריתם אימות  $V$  עבור  $.CLIQUE$ על קלט  $(\langle G, k \rangle, y)$  :1) בודק האם  $y$  היא קבוצה של  $k$  קודקודים שונים מ-  $G$ .

- אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

2) בודק האם כל שני קודקודים מ-  $y$  מחוברים בצלע ב-  $G$ .

- אם כן  $\Leftarrow$  מקבל.

- אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

■

**הגדרה 9.7 בעיית  $SubSetSum$** 

קלט: קבוצת מספרים  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ומספר  $t$ .

פלט: האם קיימת תת-קבוצה של  $S$  שסכום איבריה שווה  $t$ ?

$$SubSetSum = \left\{ \langle S, t \rangle \mid \sum_{x \in Y} x = t \text{ כך ש- } Y \subseteq S \right\}$$

**משפט 9.3  $SubSetSum \in NP$** 

$SubSetSum \in NP$ .

**הוכחה:** נבנה אלגוריתם אimotoת  $V$  עבור  $.SubSetSum$

: על קלט  $(\langle S, t \rangle, y) = V$

1) בודק האם  $y$  היא תת-קבוצה של  $S$ .

- אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

2) בודק האם סכום המספרים ב-  $y$  שווה  $t$ .

- אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

- אחרת  $\Leftarrow$  מקבל.

■

**9.6 הקשר בין NP למ"ט א"ד**

NP=Non-deterministic polynomial-time.

**משפט 9.4**

לכל בעיה  $A$ :

$A \in NP$  אם ורק אם קיימת מ"ט א"ד המכריעה את  $A$  בזמן פולינומיAli.

**דוגמה 9.1**

نبנה מ"ט א"ד  $M$  המכריעה את  $CLIQUE$  בזמן פולינומיAli.

: על קלט  $\langle G, k \rangle = M$

- בוחרת באופן א"ד קבוצה  $y$  של  $k$  קודקודים מ-  $G$ .

- בודקת האם כל שני קודקודים מ-  $y$  מחוברים בצלע ב-  $G$ .

- \* אם כן  $\Leftarrow$  מקבלת.
- \* אחרת  $\Leftarrow$  דוחה.

אלגוריתם אimoto  $\equiv$  מ"ט א"ד.

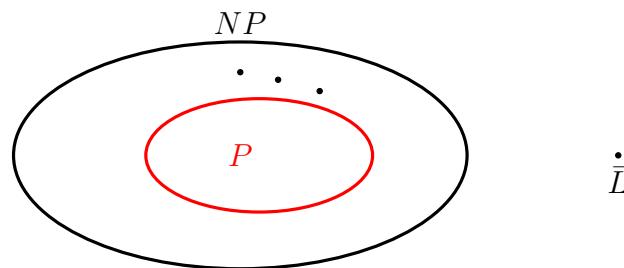
## 9.7 הקשר בין המחלקה P ו- NP

$P$  = כל הבעיות שניתן להכרייה בזמן פולינומיAli.

$NP$  = כל הבעיות שניתן לאמת בזמן פולינומיAli.

### משפט 9.5

$$P \subseteq NP .$$



שאלה פתוחה: האם  $?P = NP$

### משפט 9.6

$P$  סגורה תחת משלים.

הוכחה: אם  $A \in P$  אז גם  $\bar{A} \in P$ .

### הגדרה 9.8

$$Co\ NP = \{A \mid \bar{A} \in NP .\}$$

לדוגמה:

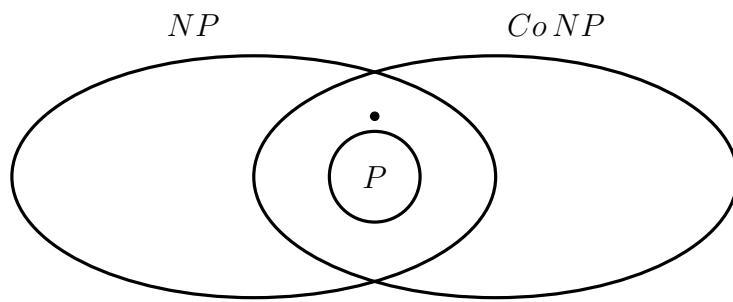
$$\overline{HAMPATH} \in Co\ NP .$$

$$\overline{CLIQUE} \in Co\ NP .$$

שאלה פתוחה: האם  $?NP = Co\ NP$

### משפט 9.7

$$P \subseteq NP \cap Co\ NP .$$



שאלה פתוחה: האם  $P = NP \cap Co\ NP$ ?

נדון בשאלה המרכזית: האם  $P = NP$ ?

### הגדרה 9.9 פונקציה פולינומיאלית

בහינתן פונקציה  $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ , אומרים כי  $f$  חסיבה בזמן פולינומיאלי אם קיים אלגוריתם (מ"ט דטרמיניסטי) המחשב את  $f$  בזמן פולינומיאלי.

### הגדרה 9.10 רזוקציה פולינומיאלית

בහינתן שתי הבעיות  $A$  ו-  $B$ . אומרים כי  $A$  ניתנת לרזוקציה פולינומיאלית ל-  $B$ , ומסמנים  $A \leqslant_P B$ , אם קיימת פונקציה  $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  המקיים:

(1)  $f$  חסיבה בזמן פולינומיאלי

(2) לכל  $w \in \Sigma^*$ :

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B .$$

### משפט 9.8 משפט הרזוקציה

לכל שתי בעיות  $A$  ו-  $B$ , אם  $A \leqslant_P B$  אז  $A \in P$

(1) אם  $A \in P$  אז  $B \in P$ .

(2) אם  $A \in NP$  אז  $B \in NP$ .

מסקנה מ- (1) ו- (2):

(3) אם  $B \notin P$  אז  $A \notin P$ .

(4) אם  $B \notin NP$  אז  $A \notin NP$ .

**הוכחה:** מכיוון שקיימת רזוקציה  $B \leqslant_P A$ , קיימת פונקציה  $f$  חסיבה בזמן פולינומיאלי המקיים, לכל  $w \in \Sigma^*$ ,

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B .$$

יהי  $M_f$  האלגוריתם שמחשבת את  $f$  בזמן פולינומיאלי.

(1) נוכחות כי אם  $B \in P$  אז  $.A \in P$ .

יהי  $M_B$  האלגוריתם שמכריע את  $B$  בזמן פולינומיאלי. נבנה אלגוריתם  $M_A$  המכrüע את  $A$  בזמן פולינומיאלי.

התאור של  $M_A$ 

= על כל קלט  $w$ :  $M_A$

1. מחשב את  $f(w)$  ע"י  $M_f$
2. מרים את  $M_B$  על ( $f(w)$  ועונה כמוות).

נוכיח כי  $M_A$  מכיר את  $A$  בזמן פולינומיאלי:

- אם  $M_B \Leftarrow f(w) \in B \Leftarrow w \in A$  מקבל את  $w$ .
- אם  $M_A \Leftarrow f(w) \notin B \Leftarrow w \notin A$  דוחה את  $w$ .

נוכיח כי זמן הריצה של  $M_A$  הוא פולינומיائي בגודל הקלט  $|w|$  בזמן פולינומיאלי:

- נסמן ב-  $P_f$  את הפולינום של  $M_f$ .
- נסמן ב-  $P_B$  את הפולינום של  $M_B$ .

זמן הריצה של  $M_A$  על קלט  $w$  שווה

$$P_f(|w|) + P_B(|f(w)|)$$

מכיוו ש-  $(|f(w)| \leq P_f(|w|))$ , הזמן הריצה של  $M_A$  על  $w$  חסום ע"י

$$P_f(|w|) + P_B(P_f(|w|)) = P_f(|w|) + (P_B \circ P_f)(|w|)$$

כאשר  $P_B \circ P_f$  מסמן את ההרכבה של שני פולינומים. לכן  $M_A$  רץ בזמן פולינומיאלי בגודל  $|w|$ .



# שיעור 10

## NP שלמות

### 10.1 המחלקות $NPH$ ו- $NP$

#### הגדרה 10.1 NP-hard

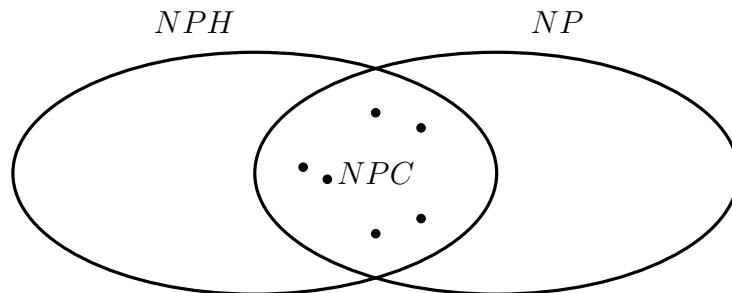
ב夷יה  $B$  נקראת  $NP$  קשה אם לכל夷יה  $A \in NP$  קיימת רדוקציה

#### הגדרה 10.2 NP-complete

ב夷יה  $B$  נקראת  $NP$  שלמה אם

$$B \in NP \quad (1)$$

(2) לכל夷יה  $A \in NP$  קיימת רדוקציה



#### משפט 10.1

אם  $B$ 夷יה  $NP$  שלמה וגם  $P = NP$  אז  $A \in P$   $\forall A \in NP$

הוכחה:

- הוכחנו כבר שה-  $P \subseteq NP$ .
- נוכיח כי  $NP \subseteq P$ .

לכל夷יה  $A \subseteq NP$  קיימת רדוקציה  $B \in P$  ומכיוון שה-  $B \leq_P A$ , מושפט הרדוקציה מתקיים

#### מסקנה 10.1

אם  $\bar{A} \leq_P \bar{B}$  אז  $A \leq_P B$

#### משפט 10.2

אם  $A \leq_p C$  ו-  $B \leq_p C$  וגם  $A \leq_p B$

הוכחה:

**משפט 10.3**

תהי  $B$  בעיה  $NP$ -שלמה. אזי לכל בעיה  $C \in NP$ , אם  $B \leq_p C$  אז גם  $C$  היא  $NP$ -שלמה.

**הוכחה:** מכיוון ש-  $B$  היא  $NP$ -שלמה, לכל בעיה  $A \in NP$  קיימת רדוקציה  $B \leq_p A$ . מכיוון ש- מהטרנסיטיביות מתקיים  $A \leq_p C \leq_p B$  לכל בעיה  $A \in NP$  ולכן  $C$  היא  $NP$ -שלמה.

**10.2 בעית הספיקות****הגדרה 10.3**

נוסחת  $\phi$  היא נוסחה בוליאנית מעל  $n$  משתנים  $x_1, x_2, \dots, x_n$  המכילה  $m$  פסוקיות  $C_1, C_2, \dots, C_m$  כאשר כל פסוקית מכילה אוסף של ליטרלים ( $x_i \setminus \bar{x}_i$ ) המוחברים ע"י  $OR$  ( $\vee$ ) בוליאני והפסוקיות מחוברים ע"י  $AND$  ( $\wedge$ ) בוליאני.

לדוגמה

$$\phi = \left( x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4 \vee \bar{x}_7 \right) \wedge \left( x_3 \vee x_5 \vee \bar{x}_8 \right) \wedge \dots$$

**הגדרה 10.4 נוסחת CNF ספיקה**

נוסחת  $\phi$  היא ספיקה אם קיימת השמה למשתנים  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ע"י  $T \setminus F$  כך ש-  $\phi$  מקבלת ערך  $T$ , כלומר בכל פסוקית ישנו לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך  $T$ .

**10.3 בעית SAT****הגדרה 10.5 בעית SAT**

קלט: נוסחת  $\phi$ , פלט: האם  $\phi$  ספיקה?

$$SAT = \{ \langle \phi \rangle \mid \text{נוסחת CNF ספיקה } \phi \}$$

**משפט 10.4 SAT  $\in NP$** 

$$SAT \in NP .$$

**הוכחה:** בניית אלגוריתם אimotoת  $V$  עבור  $SAT$ .

: על קלט  $V = \langle \langle \phi \rangle, y \rangle$

**1)** בודק האם  $y$  היא השמה למשתנים  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

- אם לא  $\Leftrightarrow 3CNF$  דוחה.

(2) בודק האם השמה זו מספקת את  $\phi$ .

- אם כן  $\Leftrightarrow$  מקבל.
- אם לא  $\Leftrightarrow$  דוחה.

■

## 10.4 משפט קוק לוין

### משפט 10.5 (1973) משפט קוק לוין

הבעית  $SAT$  היא  $NP$  - שלמה.

**רעיון ההוכחה:**

. $A \leq_p SAT$ ,  $A \in NP$   
לכל  $:w \in \Sigma^*$  לכל

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in SAT,$$

$$\text{כאן } f(w) = \langle \phi_w \rangle$$

### מסקנה 10.2

$$P = NP \Leftrightarrow SAT \in P.$$

## 10.5 גרסאות של $kSAT$

ישנן לכל היותר  $k$  ליטרלים בכל פסוקית:

$$.1SAT \in P \bullet$$

$$\phi = x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge \dots$$

$$.2SAT \in P \bullet$$

$$\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge \dots$$

$$.3SAT \in P \text{ - שלמה.} \bullet$$

## 10.6 בעיית $3SAT$

### הגדרה 10.6 בעיית $3SAT$

קלט: נוסחת  $\phi$ ,  $3CNF$

פלט: האם  $\phi$  ספיקה?

$$3SAT = \{\langle \phi \rangle \mid \phi \text{ נוסחת } 3CNF \text{ ספיקה}\}$$

**משפט 10.6**  $3SAT \in NP$  שלמה. $3SAT \in NP$  שלמה.

הוכחה:

ישקיימים את השני תנאים הבאים:

(1)  $3SAT \in NP$

ניתן לבנות אלגוריתם אimoto עבור  $SAT \in NP$  דומה לאלגוריתם האimoto עבור  $SAT$  שבנו בהוכחה של המשפט קוק-לוין 10.5 לעלה.

(2)  $3SAT \in NP$  קשה ע"י רדוקציה

$SAT \leq_p 3SAT$ .

ואז בגלל ש-  $SAT \in NP$  שלמה (לפי משפט קוק-לוין 10.5) ומכיון ש-  $3SAT \in NP$  אז לפי משפט האסימפטוטית 10.2 גם  $3SAT \in NP$ - שלמה.

קיים פונקציה הרדוקציה  $SAT \leq_p 3SAT$

כעת נבנה את פונקציה הרדוקציה מ-  $SAT$  ל-  $3SAT$ .ראשית נציג כי כל נוסחה בוליאנית  $\phi$  ניתנת לרשום בצורה  $CNF$  בזמן פולינומיAli.

בහינתנו נוסחת  $CNF$ ,  $\phi$  (הקלט של  $SAT$ ) נבנה בזמן פולינומיAli נוסחת  $\phi'$  (הקלט של  $3SAT$ ) ואז נוכחים מתקיים

$\langle\phi'\rangle \in 3SAT \Leftrightarrow \langle\phi\rangle \in SAT$ .

לכל פסוקית  $C$  ב-  $\phi$  המכילה יותר מ- 3 ליטרלים, ניצור אוסף  $C'$  ב-  $\phi'$  של פסוקיות כך שכל פסוקית ב-  $C'$  תכיל 3 ליטרלים. למשל בהינתן הפסוקית  $C$  הבאה של  $\phi$ :

$$C = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5$$

ניצור את הפסוקית  $C'$  הבאה ב-  $\phi'$ :

$$C' = (x_1 \vee x_2 \vee y_1) \wedge (\bar{y}_1 \vee x_3 \vee y_2) \wedge (\bar{y}_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)$$
.

באופן כללי, לכל פסוקית  $a_k$  המכיל  $k > 3$  ליטרלים, ניצור אוסף  $C'$  של פסוקיות שבו כל פסוקית מכילה 3 ליטרלים, ע"י הוספה 3 משתנים  $y_1, y_2, \dots, y_{k-3}$ :

$$C' = (a_1 \vee a_2 \vee y_1) \wedge (\bar{y}_1 \vee a_3 \vee y_2) \wedge \dots \wedge (\bar{y}_{i-2} \vee a_i \vee y_{i-1}) \wedge \dots \wedge (\bar{y}_{k-3} \vee a_{k-1} \vee a_k)$$
.

בפרט, עבור כל פסוקית  $(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k)$  נניח  $a_i = 1$  הוא הלiteral הראשון שווה ל- 1. אז

• נשים  $y_j = 1$  לכל  $1 \leq j \leq i-2$

• ונסים  $y_j = 0$  לכל  $i-1 \leq j \leq k-3$

סימנו להגדר את הפונקציה הרדוקציה.

כעת נוכחים כי הפונקציה הזאת מקיימת את התנאי ההכרחי

$$\langle\phi'\rangle \in 3SAT \Leftrightarrow \langle\phi\rangle \in SAT$$
.

כיון  $\Leftarrow$ :

נניח כי  $\langle\phi\rangle \in SAT$  ותהי  $X$  השמה המספקת את  $\phi$ .  
nocich שקיימת השמה  $X'$  מתאימה המספקת את  $\phi'$ .

- בכל פסוקית  $C$  של  $\phi$ , עבור הליטרלים  $a_1, a_2, \dots, a_k$  ניתן אותם ערכים כמו ב-  $X$ .
- מכיוון ש-  $X$  מספקת את  $\phi$ , בכל פסוקית  $C = (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k)$  יש לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך 1. נניח  $a_i = 1$ . אז על פי ההגדרה של פונקציית הרודוקציה:

$$\begin{aligned} * \text{ נשים } 1 = y_j \text{ לכל } 2 \leq j \leq i-1, \\ * \text{ ונשים } 0 = y_j \text{ לכל } i-1 \leq j \leq k-3. \end{aligned}$$

באופן זהה אנחנו נזכיר אוסף  $C'$  של פבוקיות עם המבנה הבא:

$$\begin{aligned} & \left( a_1 \vee a_2 \vee y_1 \right) \wedge \left( \bar{y}_1 \vee a_2 \vee y_2 \right) \wedge \dots \wedge \left( \bar{y}_{i-3} \vee a_{i-1} \vee y_{i-2} \right) \wedge \left( \bar{y}_{i-2} \vee a_i \vee y_{i-1} \right) \wedge \left( \bar{y}_{i-1} \vee a_{i+1} \vee y_i \right) \\ & \wedge \dots \wedge \left( \bar{y}_{k-3} \vee a_{k-1} \vee a_k \right) \end{aligned}$$

ולכן השמה זו מספקת את  $C'$  ולכן  $\langle \phi' \rangle \in 3SAT$

כיוון:  $\Rightarrow$

נניח כי  $\langle \phi' \rangle \in 3SAT$  ותהי  $X'$  השמה המספקת את  $\phi'$ .  
נוכיח שקיימות השמה  $X$  המספקת את  $\phi$ .

נסתכל על פסוקית  $C = (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k)$  נניח בשלילה שלא קיימת השמה  $X$  המספקת את  $C$ . אז בהכרח

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$$

לפי זה, באוסף פסוקיות  $C'$  שנתקבל על פי ההגדרה של פונקציית הרודוקציה,  $a_i = 1$  לכל  $1 \leq i \leq k-3$   $y_j = 0$  לכל  $i-1 \leq j \leq k-3$ . כלומר מתקיים  $y_1 = y_2 = \dots = y_{k-3} = 0$ .

$$C' = \left( a_1 \vee a_2 \vee y_1 \right) \wedge \left( \bar{y}_1 \vee a_3 \vee y_2 \right) \wedge \dots \wedge \left( \bar{y}_{i-2} \vee a_i \vee y_{i-1} \right) \wedge \dots \wedge \left( \bar{y}_{k-3} \vee a_{k-1} \vee a_k \right)$$

הפסוקית האחרונה  $\left( \bar{y}_{k-3} \vee a_{k-1} \vee a_k \right)$  אינה מסופקת.  
לכן  $C'$  אינה מסופקת, בסתיו לכך  $X'$  מספקת את  $\phi'$ .

ולכן  $\langle \phi \rangle \in SAT$ .

הוכחנו שקיימת הרודוקציה  $SAT \leq 3SAT$

כעת נוכיח כי הרודוקציה זו היא זמן פולינומיאלית.

סיבוכיות

הчисוב של הפונקציה מתבצע בזמן פולינומילי. ספציפי, אם האורך של הנוסחה  $\phi$  הוא  $| \phi | = n$  אז הרודוקציה היא  $O(n)$ .

■

## 10.7 הוכחת משפט קוק לוין\*

**משפט 10.7 משפט קוק לוין**

הבעית  $SAT$  היא  $NP$  - שלמה.

**הוכחה:**

חסיפה מלאה: ההוכחה הבאה מtbססת על ההוכחה שנותונה בספר של Sipser.

על פי הדרה 10.2 יש להוכיח שני התנאים הבאים מתקיימים:

**תנאי 1:**  $SAT \in NP$

**תנאי 2:**  $A \in NP \leq_p SAT$

ראשית נוכח כי  $SAT \in NP$ :

כדי להוכיח כי  $SAT$  שייכת ל-  $NP$ , נוכח כי אישור המרכיב מהשמה מספקת עבור נוסחת קלט  $\phi$  ניתן לאיומות בזמן פולינומיAli.

נניח כי  $n = |\phi|$ . כאמור ב-  $\phi$  מופיעים  $n$  ליטרלים. "א השמה כלשהי דורשת  $n$  משתני בוליאניים לכל היוטר.

- אלגוריתם האimotoות מחליף כל משתנה בנוסחה בערך המתאים לו על פי ההשמה. השלב זהה הוא  $(n)O$ .

- אחר כך האלגוריתם מחשב את ערכו של הביטוי:

\* נניח כי הנוסחה  $\phi$  מכילה  $k$  דורות של סוגרים בתוך סוגרים.

\* החישוב מתחילה עם החישובים של הביטויים בתוך הסוגרים הכל בפנים.

\* יש  $n$  סוגרים הći-בפנים לכל היוטר, וכל אחד של סוגרים אלה מכיל  $n$  ליטרלים לכל היוטר. לכן החישוב זהה הוא  $(n^2)O$ .

\* יש  $k$  דורות של סוגרים לכן החישוב כולל הוא  $(kn^2)O$ .

- בסה"כ הסיבוכיות זמן הריצה היא

$$O(n) + O(kn^2) = O(n^2)$$

לפיכך אישור של השמה כלשהי מתבצע בזמן פולינומיAli.

- אם ערכו של הביטוי הוא 1 הנוסחה ספיתה.

הוכחנו כי  $SAT \in NP$ . עכשו נוכח כי  $A \leq_p SAT$ .

תהי  $N$  מ"ט אי-דטרמיניסטי זמן-פולינומיAli שמכריעה שפה  $A$  כלשהי בזמן  $O(n^k)$  עבור  $k$  טבעי. התרשימים למטה מראה טבלה של קונפיגורציות של  $N$ . ברשימה הבאה רשומות ההדרות של הטבלה:

- כל שורה מראה את תוכן הסרט בשלב מסוים של מסלול אחד של  $N$ .
- בשורה הראשונה יש את הקונפיגורציה ההתחלתית.
- אנחנו מניחים כי האורך של המילה, כאמור אורץ הקלט הוא  $n$ . הסימנים  $w_n, \dots, w_1$  מסמנים את התווים של הקלט.

- בתא הראשון בכל שורה יש  $\#$ , ולאחר מכן רשומה הקונפיגורציה של  $N$ .  
בסוף הקונפיגורציה בכל שורה יש  $\#$ .
  - אחרי  $\#$  בקצתה הימין של המילה, בכל תא יש תו רוח עד הסוף של השורה.  
התווי רוחם לפני המשבצת הראשונה של הקונפיגורציה לא מופיעים בטבלה.
  - האורך של כל שורה הוא בדיק  $n^k$  תאים.
  - בטבלה יש בדיק  $n^k$  שורות לסיבת הבאה:
    - המכונת טיריניג מבצעת  $n^k$  צעדים לכל היוטר.
    - בכל צעד המ"ט עוברת לקונפיגורציה חדשה.
    - בכל שורה רשומה קונפיגורציה.
    - בסה"כ יש  $n^k$  שורות עבור ה-  $n^k$  קונפיגוריוט שוניות האפשרויות.

אנחנו אומרים כי טבלה שליה היא טבלה המקבלת אם באחת השורות יש קונפיגורציה אשר  $N$  מקבלת אותה.

בעזרת הטבלה נתאר את הרדוקציה זמו-פולינומיאלית  $f$  משפה  $A$  קלשיי ל- $SAT$ .

הפונקציה הרדוקציה  $f$  מקבלת קלט  $w$  ומחזירה נוסחה  $f(w) = \phi$ , אשר לפי ההגדרה של פונקציה הרדוקציה, עומדת בתנאי הבא:

$$w \in A \quad \Leftrightarrow \quad f(w) \in SAT .$$

יהיו  $Q$  קבוצת המצבים ו-  $\Gamma$  האלפיבית של השרת של  $N$ . נגדיר

$$C = Q \cup \Gamma \cup \{\#\}.$$

נסמן ב-  $s$  איבר כלשהו של  $C$ .  
 עבור כל תא ה-  $(i, j)$  של הטבלת הקונפיגורציות נגדיר משתנה בוליאני  $x_{i,j,s}$  לכל  $1 \leq i, j \leq n^k$  לכל המשטנה  $x_{ijs}$  מוגדר על פי התנאי

$$x_{jjs} = 1$$

אם בטא ה-  $z_j$  של הטבלה יש  $s \in C$ . למשל, אם בטא ה-  $(2, 5)$  של הטבלה מופיע הטע  $a$  אז

$$x_{2,5,a} = 1$$

בעוד

$$x_{2,5,b} = 0 .$$

במובן זהה, התכנים של כל התאים של הטבלה מסומנים על ידי המשתנים של  $\phi$ .

עכשו נבנה נוסחה  $\phi$  על סמך התנאי שהשמה מספקת של  $\phi$  תהיה מתאימה לטבלה המתקבלת של  $N$ . נגיד:

$$\phi = \phi_{\text{cell}} \wedge \phi_{\text{start}} \wedge \phi_{\text{move}} \wedge \phi_{\text{acc}} . \quad (10.1)$$

אנו נסביר את כל הנוסחאות  $\phi_{\text{acc}}, \phi_{\text{start}}, \phi_{\text{cell}}, \phi_{\text{move}}$  אחד אחד למטרה.

• נוסחה  $\phi_{\text{cell}}$

כפי שמצוין לעיל, אם המשתנה  $x_{i,j,s}$  "דולק", כלומר אם  $x_{i,j,s} = 1$ , זאת אומרת שיש סימן  $s$  בתא ה- $i,j$  של הטבלה. אנחנו רוצים להבטיח שהשמה כלשהי בנוסחה אשר מתאימה לקונפיגורציה של הטבלה, מדliquה בדיק משותה אחד לכל תא של הטבלה. למטרה זו נגיד  $\phi_{\text{cell}}$  כך:

$$\phi_{\text{cell}} = \bigwedge_{1 \leq i, j \leq n^k} \left[ \left( \bigvee_{s \in C} x_{i,j,s} \right) \wedge \left( \bigwedge_{\substack{s,t \in C \\ s \neq t}} (\bar{x}_{i,j,s} \vee \bar{x}_{i,j,t}) \right) \right] \quad (10.2)$$

\* האיבר הראשון בסוגרים מרובעים, מבטיח שלכל תא של הטבלה, לפחות משתנה אחד דולק.

\* האיבר השני מבטיח שעבור כל תא של הטבלה, משתנה אחד לכל היוטר Dolk.

לפיכך כל השמה מספקת עומדת בתנאי שיהי בדיק סימן אחד,  $s$ , בכל תא של הטבלה.

• נוסחה  $\phi_{\text{start}}$

נוסחה  $\phi_{\text{start}}$  מבטיחה ששורה הראשונה של הטבלה היא הקונפיגורציה ההתחלתית של  $N$  על הקלט  $w$ :

$$\begin{aligned} \phi_{\text{start}} = & x_{1,1,\#} \wedge x_{1,2,q_0} \wedge x_{1,3,w_1} \wedge x_{1,4,w_2} \\ & \wedge \dots \wedge \\ & x_{1,n+2,w_n} \wedge x_{1,n+3,\_} \wedge \dots \wedge x_{1,n^k-1,\_} \wedge x_{1,n^k,\#} \end{aligned} \quad (10.3)$$

• נוסחה  $\phi_{\text{acc}}$

הנוסחה  $\phi_{\text{acc}}$  מבטיחה שקיימת טבלה קונפיגורציה אשר המ"ט  $N$  מקבלת אותה. בפרט  $\phi_{\text{acc}}$  מבטיחה שהסימן  $q_{\text{acc}}$  מופיע בתא אחד של הטבלה דרך התנאי שלפחות אחד המשתנים  $x_{i,j,q_{\text{acc}}}$  דולק:

$$\phi_{\text{acc}} = \bigvee_{1 \leq i, j \leq n^k} x_{i,j,q_{\text{acc}}} \quad (10.4)$$

• הנוסחה  $\phi_{\text{move}}$

הנוסחה  $\phi_{\text{move}}$  מבטיחה שכל שורה של הטבלה היא "שורה חוקית".  
כלומר בכל שורה, הקונפיגורציה היא כך שאפשר הגיע אליה על ידי תזוזה חוקית של  $N$  מהקונפיגורציה הקודמת שMOVEDה בשורה אחת לעיל.

תזוזה חוקית בין כל שתי קונפיגורציות נקבעת על ידי הfonקציית המעברים של המ"ט  $N$ .  
בשפה פורמלית, אם  $c_i$  הקונפיגורציה של שורה  $i$ , ו-  $c_{i+1}$  הקונפיגורציה של השורה  $i + 1$  אחת למטה, אז  
 $\phi_{\text{move}}$  מבטיחה כי לכל  $1 \leq i \leq n^k$  מתקיים

$$c_i \vdash_N c_{i+1} .$$

במנוחי הטבלה, אפשר להגיד תזוזה חוקית בין כל שתי שורות על ידי תת-טבלה מסדר  $3 \times 2$  שמכילה 3  
תאים מתאימים של שתי שורות שכנות.  
 مكان ואילך אנחנו נקרא לתת-טבלה כזאת "חלון".

למטה יש דוגמאות של חלונות חוקיים:

<table border="1"><tr><td>a</td><td><math>q_1</math></td><td>b</td></tr><tr><td><math>q_2</math></td><td>a</td><td>c</td></tr></table>	a	$q_1$	b	$q_2$	a	c	<table border="1"><tr><td>a</td><td><math>q_1</math></td><td>b</td></tr><tr><td>a</td><td>a</td><td><math>q_2</math></td></tr></table>	a	$q_1$	b	a	a	$q_2$	<table border="1"><tr><td>a</td><td>a</td><td><math>q_1</math></td></tr><tr><td>a</td><td>a</td><td>b</td></tr></table>	a	a	$q_1$	a	a	b
a	$q_1$	b																		
$q_2$	a	c																		
a	$q_1$	b																		
a	a	$q_2$																		
a	a	$q_1$																		
a	a	b																		
<table border="1"><tr><td>#</td><td>b</td><td>a</td></tr><tr><td>#</td><td>b</td><td>a</td></tr></table>	#	b	a	#	b	a	<table border="1"><tr><td>a</td><td>b</td><td>a</td></tr><tr><td>a</td><td>b</td><td><math>q_2</math></td></tr></table>	a	b	a	a	b	$q_2$	<table border="1"><tr><td>b</td><td>b</td><td>b</td></tr><tr><td>c</td><td>b</td><td>b</td></tr></table>	b	b	b	c	b	b
#	b	a																		
#	b	a																		
a	b	a																		
a	b	$q_2$																		
b	b	b																		
c	b	b																		

החלונות האלה למטה הם דוגמאות לחלונות לא חוקיים:

<table border="1"><tr><td>a</td><td>b</td><td>a</td></tr><tr><td>a</td><td>a</td><td>a</td></tr></table>	a	b	a	a	a	a	<table border="1"><tr><td>a</td><td><math>q_1</math></td><td>b</td></tr><tr><td><math>q_1</math></td><td>a</td><td>a</td></tr></table>	a	$q_1$	b	$q_1$	a	a	<table border="1"><tr><td>b</td><td><math>q_1</math></td><td>b</td></tr><tr><td><math>q_2</math></td><td>b</td><td><math>q_2</math></td></tr></table>	b	$q_1$	b	$q_2$	b	$q_2$
a	b	a																		
a	a	a																		
a	$q_1$	b																		
$q_1$	a	a																		
b	$q_1$	b																		
$q_2$	b	$q_2$																		

הנוסחה  $\phi_{\text{move}}$  קובעת שכל חלון של הטבלה חוקי. בפרט, כל חלון מכיל 6 תאים. לכן  $\phi_{\text{move}}$  קובעת שהתכנים של ה-6 תאים של כל חלון מהוות חלון חוקי. ז"א

$$\phi_{\text{move}} = \bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq n^k \\ 1 \leq j \leq n^k}} (\text{חלון } i, j \text{ חוקי}) \quad (10.5)$$

אנחנו מציבים בטקסט "חלון  $i, j$  חוקי" את הנוסחה הבאה, כאשר  $a_6, \dots, a_1$  מסמנים את התכנים של ה-6 תאים של כל חלון:

$$\bigvee_{\substack{\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} \\ \text{חלון חוקי}}} (x_{i,j-1,a_1} \wedge x_{i,j,a_2} \wedge x_{i,j+1,a_3} \wedge x_{i+1,j-1,a_4} \wedge x_{i+1,j,a_5} \wedge x_{i+1,j+1,a_6}) \quad (10.6)$$

עד כה הוכחנו שקיים רדוקציה מכל שפה  $.SAT$  ל-  $A \in NP$ .  
כעת נוכיח כי הרדוקציה זו חישובית בזמן-פולינומייאלי.

הטבלה של  $N$  היא מסדר  $n^k \times n$  ולכן היא מכילה  $n^{2k}$  תאים.

נחשב את הסיבוכיות של כל הנוסחים  $\phi_{\text{move}}, \phi_{\text{acc}}, \phi_{\text{start}}, \phi_{\text{cell}}$ .

• הנוסחה  $\phi_{\text{cell}}$ 

הנוסחה (10.2) של  $\phi$  מכילה  $n^{2k}$  נוסחאות עם 3 ליטרלים. לכן

$$\phi_{\text{cell}} = O(n^{2k}) .$$

• הנוסחה  $\phi_{\text{start}}$ 

הנוסחה (10.3) של  $\phi$  מכילה בדיק  $n^k$  ליטרלים. לכן

$$\phi_{\text{start}} = O(n^k) .$$

• הנוסחה  $\phi_{\text{acc}}$ 

הנוסחה (10.4) של  $\phi$  מכילה בדיק  $n^k$  ליטרלים. לכן

$$\phi_{\text{acc}} = O(n^k) .$$

• הנוסחה  $\phi_{\text{move}}$ 

הנוסחה (10.6,10.5) של  $\phi$  מכילה  $n^{2k}$  נוסחאות עם 6 ליטרלים. לכן

$$\phi_{\text{move}} = O(n^{2k}) .$$

לכן בסה"כ

$$\phi = O(n^{2k}) + O(n^k) + O(n^k) + O(n^{2k}) = O(n^{2k}) .$$

לפיכך קיימת רדוקציה חישובית בזמן פולינומייאלי מכל שפה  $SAT \leq A \in NP$



# שיעור 11

## רذוקציות פולינומיאליות

### CLIQUE 11.1 - שלמה NP היא

**משפט 11.1**  $CLIQUE \in NPC$

הבעית CLIQUE היא (ראו הגדרה 9.5):

$$CLIQUE = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ מכיל קליקה בגודל } k \}.$$

הטענה: CLIQUE היא  $NP$ -שלמה

הוכחה:

1) הוכחנו כי  $CLIQUE \in NP$  במשפט 9.2.

2) נוכח כי  $3SAT \leqslant_P CLIQUE$  קשה ע"י רזוקציה.

פונקציית הרזוקציה

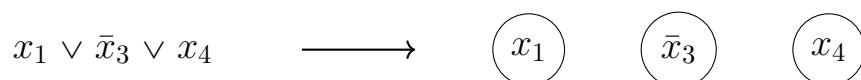
בhinintן נוסחת  $\phi$  3CNF מעל  $n$  משתנים  $x_1, x_2, \dots, x_n$  המכילה  $m$  פסוקיות, ניצור זוג  $\langle G, k \rangle$  ונוכח כי

$$\langle \phi \rangle \in 3SAT \Leftrightarrow \langle G, k \rangle \in CLIQUE.$$

בנייה את הגרף  $G$  באופן הבא:

הקודקודים של  $G$ :

לכל פסוקית  $C_i$  ב-  $\phi$  המכילה 3 ליטרלים ניצור שלשה  $t_i$  המכילה 3 קודקודים המתאימים להחטறלים של  $C_i$ :



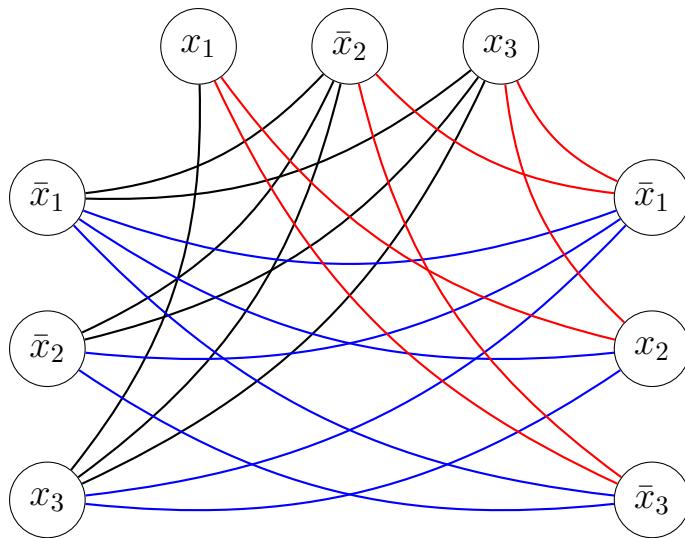
הצלעות של  $G$ :

נבחר בין כל שני קודקודים פרט לזוגות הבאים:

- זוג קודקודים המתאימים למשתנה ומשלים שלו.
- זוג קודקודים שנמצאים באותו שלושה.

לדוגמא:

$$\phi = \left( \begin{array}{c} \textcolor{red}{x}_1 \vee \textcolor{red}{x}_2 \vee x_3 \\ C_1 \end{array} \right) \wedge \left( \begin{array}{c} \bar{x}_1 \vee \textcolor{red}{x}_2 \vee x_3 \\ C_2 \end{array} \right) \wedge \left( \begin{array}{c} \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \textcolor{red}{x}_3 \\ C_3 \end{array} \right)$$



נקבע  $k = m$ .

### נכונות הרדוקציה

1) ניתן לבנות את  $G$  בזמן פולינומיائي בגודל  $\phi$ .

2) נוכיח כי

$$\langle \phi \rangle \in 3SAT \Leftrightarrow \langle G, k \rangle \in CLIQUE .$$

כיוון  $\Leftarrow$

- נניח כי  $\phi$  ספיקה ונסתכל על השמה המספקת את  $\phi$ .
- בכל פסוקית  $C_i$  ב-  $\phi$  יש לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך  $T$ .
- נבחר מכל שלשה  $t_i$  בקודקוד אחד המתאים לליטרל שקיבל ערך  $T$  ב-  $C_i$  ונוסיף אותו לקליקה.
- מספר הקודקודים שבחרנו שווה  $k$  וכל שניים מהם מחוברים בצלע כי לא בחרנו שני קודקודים מאותה שלשה ולא בחרנו שני קודקודים המתאימים לשינויו ומשלים שלו.
- ולכן  $G$  מכיל קליקה בגודל  $k$ .

כיוון  $\Rightarrow$

- נניח כי  $G$  מכיל קליקה בגודל  $k$  ונסתכל על קליקה כזו.
- לפי הבנייה הקליקה מכילה בדיזוק קודקוד אחד מכל שלשה  $t_i$ . ניתן השמה למשתנים של  $\phi$  כך שהליטרל שמתאים לקודקוד שנמצא בклיקה קיבל ערך  $T$ .
- השמה זו אפשרית מכיוון שהקליקה לא מכילה שני קודקודים המתאימים לשינויו ומשלים שלו.

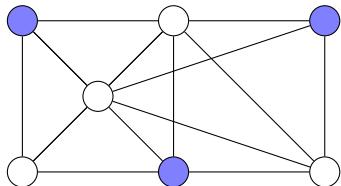
- בנוסף לשם זו מספקת את  $\phi$  מכיוון שהקליקה מכילה קודקוד מכל שלשה  $t_i$  ולכן הliterל המתאים לקודקוד בשלה  $t_i$  קיבל ערך  $T$  ולכן הוא מספק את הפסוקית  $C_i$ .
- לכן  $\phi$  ספיקה.

■

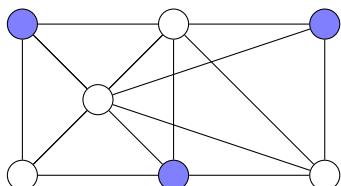
## 11.2 בעיית הקבוצה הבלתי תלויות

### הגדרה 11.1 קבוצה בלתי תלויות

בاهינתן גרף לא מכוון  $G = (V, E)$ , קבוצה בלתי תלויות ב-  $G$  היא תת-קבוצה של קודקודיים  $S \subseteq V$  כך שלכל שני קודקודיים  $S$   $u, v \in S$  מתקיים  $(u, v) \notin E$ .



קבוצת בלתי תלויות בגודל 3:  $k = 3$



קבוצת בלתי תלויות בגודל 3:  $k = 3$

### הגדרה 11.2 בעית IS

קלט: גרף לא מכוון  $G = (V, E)$  ומספר  $k$ .

פלט: האם קיימת קבוצה בלתי תלויות ב-  $G$  בגודל  $k$ ?

$$IS = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויות בגודל } k \}$$

### משפט 11.2 בעית IS $\in NPC$

הבעיה  $IS$  היא  $NP$  - שלמה.

הוכחה:

(1) נומינצי  $IS \in NP$

בנייה אלגוריתם אimoto  $V$  עבור  $IS$ .  $V = \langle G, k \rangle$  על קלט  $y$ :

- בודק האם  $y$  היא קבוצה של  $k$  קודקודיים מ-  $G$  השוניים זה מזה.
- אם לא  $\Rightarrow$  דוחה.
- בודק האם כל שני קודקודיים מ-  $y$  לא מחוברים בצלע ב-  $G$ .
- אם כן  $\Rightarrow$  מקבל.

- אם לא  $\Rightarrow$  דוחה.

## (2) נוכחות כ' $CLIQUE \leqslant_P IS$

פונקציית הרדוקציה:

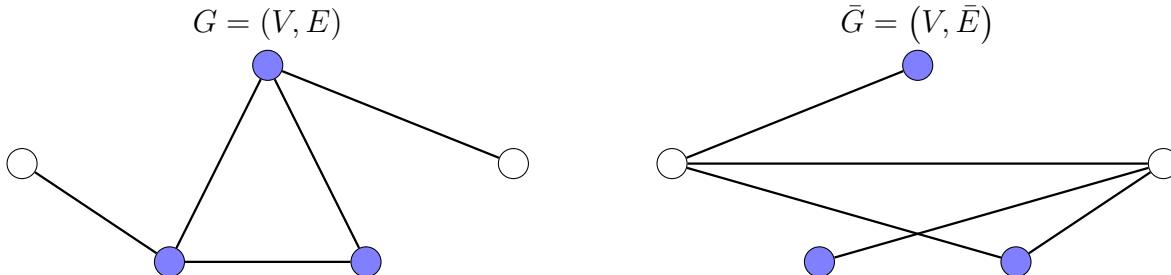
בhinתן זוג  $\langle G, k \rangle$  הקלט של  $CLIQUE$ , ניצור זוג  $\langle G', k' \rangle$ , הקלט של  $IS$ , ונוכח כי:

$$\langle G, k \rangle \in CLIQUE \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in IS .$$

הfonקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקייםים:

- 1) נניח שהגרף הוא  $G = (V, E)$ . אז הגרף  $G'$  הוא הגרף המשלים של  $G = (V, E)$  כאשר  $G' = \bar{G} = (V, \bar{E})$  ו"
- 2)  $k' = k$ .

לדוגמא, בהינתן הגרף  $G = (V, E)$  שמכיל קliquה בגודל  $3, k = 3$ , הפונקציית הרדוקציה  $R$  מחזירה את הגרף  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  ואת המספר  $3, k' = k = 3$ , כמתואר בתרשימים למטה:



nocחות הרדוקציה

- 1) ניתן לבנות  $G'$  בזמן פולינומיאלי בגודל  $G$ .
- 2) נוכחה כ' .  $\langle G, k \rangle \in CLIQUE \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in IS$

כיון

- בhinתן גרף  $G = (V, E)$  ושלם נניח כי  $\langle G, k \rangle \in CLIQUE$ .
- מן הטענה  $\langle G, k \rangle \in CLIQUE$ 能得到  $G$  מכיל קliquה  $S$  בגודל  $k$ .
- אם  $(u_1, u_2) \in E$  (אם  $u_1, u_2 \in S$  שני קודקודים בקliquה  $S$  איי קלומר, כל שני קודקודים ב-  $S$  **מחוברים** בצלע של  $G$ ).
- אם  $(u_1, u_2) \notin \bar{E}$  (אם  $u_1, u_2 \in S$  איי קלומר, כל שני קודקודים ב-  $S$  **לא מחוברים** בצלע של המשלים של הגרף  $\bar{G}$ , דהיינו  $G'$ ).

$\Leftarrow$  אותה הקבוצה  $S$  היא קבוצה בלתי תלوية ב-  $G'$  בגודל  $k' = k$ .

$\Leftarrow$   $G'$  מכיל קבוצה בלתי תלوية בגודל  $k'$ .

$\langle G', k' \rangle \in IS \Leftarrow$

כיוון  $\Rightarrow$

בhinתן גרף  $G'$  ושלם  $k'$ .

$\langle G', k' \rangle \in IS$ .

$\Leftarrow G'$  מכיל קבוצה בלתי תלوية  $S$  בגודל  $k'$ .

$\Leftarrow$  אם  $u_1, u_2 \in S$  איזי  $(u_1, u_2) \notin \bar{E}$ .

כלומר, כל שני קדוקודים ב-  $S$  לא מחוברים בצלע של  $G'$ .

$\Leftarrow$  אם  $u_1, u_2 \in E$  איזי  $(u_1, u_2) \in \bar{E}$ .

כלומר, כל שני קדוקודים ב-  $S$  מחוברים בצלע של  $G(V, E)$ .

$\Leftarrow$  אותה הקבוצה  $S$  היא קליקה ב-  $G$  בגודל  $k' = k$ .

$\Leftarrow G$  מכיל קליקה בגודל  $k$ .

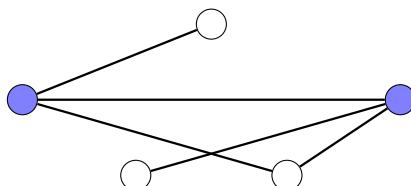
$\Leftarrow \langle G, k \rangle \in CLIQUE$ .

■

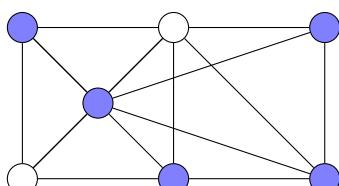
### 11.3 בעיית הcisוי בקדוקודים

#### הגדרה 11.3 cisוי בקדוקודים

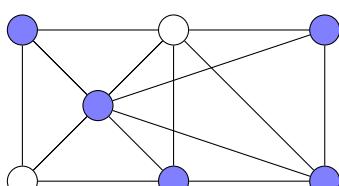
בhinתן גרף לא מכון  $G = (V, E)$ , cisוי בקדוקודים ב-  $G$  הוא תת-קבוצה של קודוקודים  $C \subseteq V$  כך שלכל צלע  $S \in C$ ,  $u \in S$ ,  $v \in S$  מתקיים  $u \neq v$ .



cisוי בקדוקודים בגודל 2:  $k = 2$



cisוי בקדוקודים בגודל 5:  $k = 5$



cisוי בקדוקודים בגודל 5:  $k = 5$

## 11.4 הבועייה $VC$

### הגדרה 11.4 בעית $VC$

קלט: גראף לא מכוון  $G = (V, E)$  ומספר  $k$ .

פלט: האם קיימים כיסוי בקודקודים ב-  $G$  בגודל  $k$ ?

$$VC = \{\langle G, k \rangle \mid \text{גראף לא מכוון המכיל כיסוי בקודקודים בגודל } k\}$$

### משפט 11.3

הבועייה  $VC$  היא  $NP$  - שלמה.

הוכחה:

נוכיח כי  $VC \in NP$

בנייה אלגוריתם אימות  $VC$  עבור  $V$ .  
על קלט  $(\langle G, k \rangle, y) = V$ :

- בודק האם כל צלע ב-  $G$  מכילה לפחות קצה אחד ב-  $y$ .

○ אם כן  $\Rightarrow$  מקבל.

○ אם לא  $\Rightarrow$  דוחה.

נוכיח כי  $VC$  היא  $NP$ -קשה ע"י רדוקציה

פונקציית הרדוקציה:

בהתנחת זוג  $\langle G, k \rangle$  הקלט של  $IS$ , נוצר זוג  $\langle G', k' \rangle$  הקלט של  $VC$  ונוכיח כי

$$\langle G, k \rangle \in IS \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in VC.$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

- 1) נניח שהגרף הוא  $.G = (V, E)$   
או הגרף  $G'$  הוא אותו גראף  $.G = (V, E)$

$$.k' = |V| - k \quad (2)$$

נכונות הרדוקציה

1) ניתן לבנות  $G'$  בזמן פולינומיאלי בגודל  $G$ .

2) נוכיח כי  $\langle G, k \rangle \in IS \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in VC$ .

כיוון

בהתנחת גראף  $G = (V, E)$  ושלם  $k$ .

נניח כי  $\langle G, k \rangle \in IS$ .

$\Leftarrow G$  מכיל קבוצה בלתי תלوية  $S$  בגודל  $k$ .

$\Leftarrow$  אם  $u_1 \in S$  וגם  $u_2 \in S$  אז  $(u_1, u_2) \notin E$ .

כלומר, כל שני קדוקדים ב-  $S$  לא מחוברים בצלע ב-  $G$ .

$\Leftarrow$  השלילה הלוגית של הגרירה הזאת היא:

אם  $u_2 \notin S$  אז  $u_1 \notin S$  או  $(u_1, u_2) \in E$ .

$\Leftarrow$  אם  $u_2 \in V \setminus S$  אז  $u_1 \in V \setminus S$  או  $(u_1, u_2) \in E$ .

$.k' = |V| - k$  הינו כיסוי קדוקדים ב-  $G$  בגודל  $k'$ .

$\Leftarrow$  הגרף  $G' = G$  מכיל כיסוי קדוקדים בגודל  $k'$ .

$\Leftarrow \langle G', k' \rangle \in VC$

כיוון  $\Rightarrow$

בහינתן גרף  $G'$  ושלם  $k'$ .

נניח כי  $\langle G', k' \rangle \in VC$ .

$\Leftarrow G'$  מכיל כיסוי בקדוקדים  $C$  בגודל  $k'$ .

$.u_2 \in C$  אז  $u_1 \in C$  או  $(u_1, u_2) \in E$ .

$\Leftarrow$  השלילה הלוגית של הגרירה הזאת היא:

אם  $u_2 \notin C$  וגם  $u_1 \notin C$ .

$.(u_1, u_2) \notin E$  או  $u_2 \in V \setminus C$  וגם  $u_1 \in V \setminus C$ .

$\Leftarrow$  כל שני קדוקדים ב-  $V \setminus C$  לא מחוברים בצלע ב-  $G'$ .

$.k = |V| - k'$  הינו כיסוי בלתי תלوية ב-  $G'$  בגודל  $k'$ .

$\Leftarrow$  הגרף  $G$  מכיל קבוצה בלתי תלوية בגודל  $k$ .



## PARTITION 11.5

### הגדרה 11.5 בעית PARTITION

קלט: קבוצת מספרים שלמים  $.S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

פלט: האם קיימת תת-קבוצה  $Y \subseteq S$  כך ש-

$$\sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in S \setminus Y} y$$

$$PARTITION = \left\{ S \mid \sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in S \setminus Y} y \text{ קבוצת שלמים, וקיימת תת-קבוצה } Y \subseteq S \text{ כך ש-} \right\}$$

## 11.6 רדוקציות פולינומיאליות

**משפט 11.4 רזוקציות פולינומיאליות**

$$\begin{aligned}
 SAT &\leqslant_P 3SAT \\
 3SAT &\leqslant_P CLIQUE \\
 CLIQUE &\leqslant_P IS \\
 IS &\leqslant_P VC \\
 SubSetSum &\leqslant_P PARTITION \\
 HAMPATH &\leqslant_P HAMCYCLE
 \end{aligned}$$

**11.7 שפות NP שלמות****משפט 11.5 שפות NP- שלמות**

(משפט קוק לוין) **NP- שלמה.** **SAT** **-NP- שלמה.** **3SAT** **-NP- שלמה.** **HAMPATH** **-NP- שלמה.** **CLIQUE** **-NP- שלמה.** **IS** **-NP- שלמה.** **VC** **-NP- שלמה.**