שעור 6
צורת ז'ורדן

הגדרה 6.1 מטריצת ז'ורדן נילפוטנטית יסודית מסדר n

יהי $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\}=E=\{e_1,\ldots,e_n\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$.
המטריצה $J_n(0)\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מוגדרת

$$J_n(0)=\begin{pmatrix}| & | & | & & | \\ \bar{0} & e_1 & e_2 & \ldots & e_{n-1} \\ | & | & | & & |\end{pmatrix}$$

שהעמודה הראשונה שלה היא וקטור האפס ושלכל $2\leq i\leq n$ העמודה ה- i שלה היא e_{i-1}, נקראת מטריצת ז'ורדן נילפוטנטית יסודית מסדר n. כלומר:

$$J_n(0)=\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0\end{pmatrix}$$

הגדרה 6.2 בלוק ז'ורדן

בלוק ז'ורדן $J_k(\lambda)$, $k\in\mathbb{N}$, $\lambda\in\mathbb{F}$ הוא מטריצה מסדר $k\times k$ מצורה

$$J_k(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & & \ddots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda\end{pmatrix}$$

דוגמה 6.1

$$J_4(2)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

דוגמה 6.2

מצאו את הפולינום האופייני של $J_4(2)$.

פתרון:
$J_4(2)$ משולשית עליונה, לכן הפולינום האופייני מתפרק לגורמים ליניאריים, והערכים עצמיים נמצאים על האלכסון הראשי. לכן נקבל

$$P_{J_4(2)}=(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-2)=(\lambda-2)^4\ .$$

יש ערך עצמי יחיד $\lambda=2$ מריבוי אלגברי 4. נמצא את הריבוי הגאומטרי:

$$(A-2I_{4\times 4})=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

אנחנו רואים מייד כי $\dim V_2=3$. ז"א הריבוי גאומרטי פחות מהריבוי אלגברי, ולכן המטריצה לא לכסינה.

משפט 6.1 בלוק ז'ורדן לא לכסין

$J_k(\lambda)$ לא לכסין.

הוכחה:

$$J_k(\lambda_1)=\begin{pmatrix}\lambda_1&1&0&0&\ldots&0\\0&\lambda_1&1&0&\ldots&0\\0&0&\lambda_1&1&\ldots&0\\\vdots&&&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&&&\ddots&1\\0&0&0&0&\ldots&\lambda_1\end{pmatrix}$$

$J_k(\lambda_1)$ משולשית עליונה. לכן הפולינום האופייני מתפרק לגורמים ליניאריים, והערכים עצמיים נמצאים על האלכסון הראשי (משפט 3.19).

$$p_{J_k(\lambda_1)}(\lambda)=\underbrace{(\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_1)}_{k\text{ פעמים}}=(\lambda-\lambda_1)^k$$

יש ערך עצמי יחיד: $\lambda=\lambda_1$ מריבוי אלגברי k. נחשב את המרחב עצמי V_{λ_1}:

$$(A-\lambda_1 I_{k\times k})=\begin{pmatrix}0&1&0&0&\ldots&0\\0&0&1&0&\ldots&0\\0&0&0&1&\ldots&0\\\vdots&&&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&&&\ddots&1\\0&0&0&0&\ldots&0\end{pmatrix}$$

נקבל כי $\dim V_{\lambda_1}=k-1$. ז"א הריבוי גאומרטי פחות מהריבוי אלגברי, ולכן המטריצה לא לכסינה. ■

הגדרה 6.3 צרות ז'ורדן

צורת ז'ורדן היא מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ שעל האלכסון הראשי שלה יש בלוקים ז'ורדן ו- 0 בכל מקום אחר.

$$A=\text{diag}\Big(J_{k_1}(\lambda_1),J_{k_2}(\lambda_2),\ldots,J_{k_l}(\lambda_l)\Big)=\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0\\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & J_{k_l}(\lambda_l)\end{pmatrix}$$

דוגמה 6.3

$$\text{diag}\Big(J_2(1),J_3(0)\Big)=\begin{pmatrix} J_1(1) & 0\\ 0 & J_3(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\text{diag}\Big(J_3(5),J_2(7),J_4(9)\Big)=\begin{pmatrix} J_3(5) & 0 & 0\\ 0 & J_2(7) & 0\\ 0 & 0 & J_4(9)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&5&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&5&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&7&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&7&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&9&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&9&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&9&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&9\end{pmatrix}$$

1) צורת ז'ורדן היא משולשית.

2) מטריצה אלכסונית היא בצורת ז'ורדן.

3) צורת ז'ורדן היא הצורה הקרובה ביותר למטירצה אלכסונית.

תהי A מטריצה ריבועית מסדר 2×2 עם ערך עצמיי אחד, λ מריבוי אלגברי 2. יהי V_λ המרחב עצמי. אז ישנן שתי אפשרויות:

(1) $\dim(V_\lambda)=2$ (הריבוי גאומרטי 2).

(2) $\dim(V_\lambda)=1$ (הריבוי גאומרטי 1).

מקרה (1): $\dim(V_\lambda)=2$.

A לכסינה כי לכל ערך עצמי הריבוי אלגברי שווה לריבוי גאומטרי. יהיו שני וקטורים עצמיים u_1, u_2 השייכים לערך עצמי λ. כלומר $A\cdot u_1=\lambda u_1$ ו- $A\cdot u_2=\lambda u_2$. לכן

$$A\cdot\begin{pmatrix} | & |\\ u_1 & u_2\\ | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & |\\ A\cdot u_1 & A\cdot u_2\\ | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & |\\ \lambda u_1 & \lambda u_2\\ | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & |\\ u_1 & u_2\\ | & |\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

נסמן $P=\begin{pmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{pmatrix}$ ו- $D=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. אז

$$A\cdot P=PD \qquad \Rightarrow \qquad A=PDP^{-1}$$

A דומה למטריצה אלכסונית ולכן A לכסינה.

מקרה (2): $\dim(V_\lambda)=1$

A לא לכסינה כי עבור הערך עצמי λ הריבוי אלגברי לא שווה לריובי גאומטרי. אז A לא לכסינה אבל היא כן דומה למטריצה בלוק ז'ורדן $J_2(\lambda)$.

יש וקטור עצמי אחד, u_1 השייך לערך עצמי λ. כלומר

$$A\cdot u_1=\lambda u_1 \qquad \Rightarrow \qquad (A-\lambda I)\cdot u_1=0\ .$$

נגדיר וקטור u_2 כך ש-

$$(A-\lambda I)\cdot u_2=u_1 \qquad \Rightarrow \qquad A\cdot u_2=\lambda u_2+u_1\ .$$

מכאן

$$(A-\lambda I)^2 u_2=(A-\lambda I)\cdot u_1=0\ .$$

לכן נקבל

$$A\cdot\begin{pmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & | \\ A\cdot u_1 & A\cdot u_2 \\ | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & | \\ \lambda u_1 & \lambda u_2+u_1 \\ | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\ .$$

נשים לב שהמטריצה בסוף היא $J_2(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. נסמן $P=\begin{pmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{pmatrix}$. אז קיבלנו

$$A\cdot P=P\cdot J_2(\lambda) \qquad \Rightarrow \qquad A=PJ_2(\lambda)P^{-1}\ .$$

הקבוצת וקטורים $\{u_1,u_2\}$ נקראת **בסיס ז'ורדן** של A.

דוגמה 6.4

תהי $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. מצאו צורת זיורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $A=PJP^{-1}$.

פתרון:

הפולינום האופיינו הוא:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 \\ 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(2-\lambda)^2=0$$

לכן יש ערך עצמי אחד, $\lambda=2$, מירבוי אלגברי 2. נמצא את המרחב עצמי:

$$(A-2I)=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

הפתרון הוא $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. לכן

$$V_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\} \ .$$

נסמן ב- $u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ הוקטור עצמי של ערך עצמי $\lambda = 2$. $\dim(V_\lambda) = 1 < 2$. לכן A לא לכסינה. נסמו הוקטור עצמי $u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

$$(A - \lambda I) \cdot u_2 = u_1 \ .$$

נסמן $u_2 = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

$$(A - 2I) \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

לכן $u_2 = \begin{pmatrix}x\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. נבחר $x = 1$ ונקבל $u_2 = \begin{pmatrix}1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

$P = \begin{pmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix}\lambda & 1\\0 & \lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$.

$$A = PJP^{-1} \ .$$

דוגמה 6.5

תהי $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. מצאו צורת זיורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $A = PJP^{-1}$.

פתרון:
הפולינום האופיינו הוא:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^3 = 0$$

לכן יש ערך עצמי אחד, $\lambda = 4$, מירבוי אלגברי 3. נמצא את המרחב עצמי:

$$(A - 4I) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

הפתרון הוא $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} y + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. לכן

$$V_4 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \ .$$

$\dim(V_\lambda) = 2 < 3$. לכן A לא לכסינה. נסמן הוקטורים בבסיס של V_4 ב- $u_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. נרשום וקטור עצמי w_1 של $\lambda = 4$ כצירוף לינארי של הבסיס הזה:

$$w_1 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \ .$$

נגדיר w_2 לפי:

$$(A - 4I) \cdot w_2 = w_1 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \ .$$

נסמן $w_2 = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ונרשום את המשוואה בצורה

$$(A - 4I) \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_2\\\alpha_1\\0\end{pmatrix}$$

נרכיב את המטריצה המורחבת של המשוואה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש פתרון כאשר $\alpha_1 = 0$. נבחור $\alpha_2 = 1$ ונקבל את הפתרון $w_2 = \begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$. המשתנים x, y יכולים לקבל כל ערך. נציב $x = 1, y = 1$ ונקבל $w_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

נבנה בסיס ז'ורדן מהוקטורים עצמיים $u_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ והוקטור המוכלל $u_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A = PJP^{-1} \ .$$

שימו לב שבדוגמה הזאת J צורת ז'ורדן מצורה

$$J = \mathrm{diag}\left(J_1(\lambda), J_2(\lambda)\right) = \mathrm{diag}\left(J_1(4), J_2(4)\right) \ .$$

דוגמה 6.6

תהי $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. מצאו צורת זיורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $A = PJP^{-1}$.

פתרון:

הפולינום האופייני הוא:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -1 & -1\\ 0 & \lambda-4 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-4)^3=0$$

לכן יש ערך עצמי אחד, $\lambda=4$, מירבוי אלגברי 3. נמצא את המרחב עצמי:

$$(A-4I)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

הפתרון הוא $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. לכן

$$V_4=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\ .$$

$\dim(V_\lambda)=1<3$. לכן A לא לכסינה. נסמן הוקטור בבסיס של V_4 ב- $u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

$$(A-4I)\cdot u_2=u_1\ .$$

נסמן $u_2=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$$(A-4I)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

הפתרון הוא $u_2=\begin{pmatrix}\alpha\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$(A-4I)\cdot u_3=u_2\ .$$

נסמן $u_3=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&\alpha\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&\alpha-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

הפתרון הוא $u_3=\begin{pmatrix}\beta\\\alpha-1\\1\end{pmatrix}$ $\beta\in\mathbb{R}$. נציב $\alpha=1$, $\beta=1$ ונקבל הבסיס ג'ורדן:

$$\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},u_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A = PJP^{-1} \ .$$

שימו לב שבדוגמה הזאת J צורת ז'ורדן מצורה

$$J = J_3(\lambda) = J_3(4) \ .$$

משפט 6.2 משפט ז'ורדן

יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי מעל שדה $\mathbb{F}$. נניח שהפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים

$$p(x) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(x - \lambda_2)^{n_2} \dots (x - \lambda_l)^{n_l}$$

כאשר $\lambda_i \neq \lambda_j$ עבור $i \neq j$ לכל $1 \leq i \leq l$. נניח שפולינום המינימלי הוא

$$m(x) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_l)^{m_l}$$

כאשר $1 \leq m_i \leq n_i$ לכל i. אז יש ל- T יצוג ע"י מטריצה מצורת ז'ורדן מצורה

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 & \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \beta_l \end{pmatrix}$$

כאשר β_i מתאים לערך עצמי λ_i,

$$\beta_i = \text{diag}\Big(J_{a_1}(\lambda_i), J_{a_2}(\lambda_i), \dots, J_{a_s}(\lambda_i)\Big) = \begin{pmatrix} J_{a_1}(\lambda_i) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{a_2}(\lambda_i) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & J_{a_s}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

כאשר

1) $a_1 = m_i$

2) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_s$

3) $a_1 + a_2 + \dots + a_s = n_i$

4) s הוא הריבוי הגאומרטי של λ_i

לכן, שתי מטריצות דומות אם ורק אם יש להן אותה צורת ז'ורדן עד כדי סדר הבלוקים.

דוגמה 6.7

נתון פולינום אופייני $p(x) = (x-2)^4(x-3)^3$ ופולינום מינימלי $m(x) = (x-2)^2(x-3)^2$ אז צורת ז'ורדן

היא

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

נמצא β_1 עבור $\lambda = 2$:

יש שתי אפשרויות עבור β_1.

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} J_2(2) & 0 \\ 0 & J_2(2) \end{pmatrix} \qquad \text{או} \qquad \beta_1 = \begin{pmatrix} J_2(2) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(2) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(2) \end{pmatrix}$$

נחשב β_2 עבור $\lambda = 3$:

$$\beta_2 = \begin{pmatrix} J_2(3) & 0 \\ 0 & J_1(3) \end{pmatrix}$$

בכדי לקבוע β_1 יש למצוא את הירבוי הגאומטרי של $\lambda = 2$.

מספר הבלוקים ב- β_1 שווה לריבוי הגאומרי של $\lambda = 2$.

דוגמה 6.8

נתון הפולינום האופייני $p(x) = (x-2)^3(x-5)^2$ מצאו את הצורות ז'ורדן האפשריות.

פתרון:

האפשרויות של הפולינום המינימלי הן

$$(x-2)(x-5)\,, \quad (x-2)(x-5)^2\,, \quad (x-2)^2(x-5)\,, \quad (x-2)^2(x-5)^2\,, \quad (x-2)^3(x-5)\,, \quad (x-2)^3(x-5)^2\,.$$

לכן האפשרויות לצורת ז'ורדן הן:

$\underline{m(x) = (x-2)(x-5)}$

$$\begin{pmatrix} J_1(2) & & & & \\ & J_1(2) & & & \\ & & J_1(2) & & \\ & & & J_1(5) & \\ & & & & J_1(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\underline{m(x) = (x-2)^2(x-5)}$

$$\begin{pmatrix} J_2(2) & & & \\ & J_1(2) & & \\ & & J_1(5) & \\ & & & J_1(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$\underline{m(x) = (x-2)^3(x-5)}$

$$\begin{pmatrix} J_3(2) & & \\ & J_1(5) & \\ & & J_1(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{m(x) = (x-2)(x-5)^2}$$

$$\begin{pmatrix} J_1(2) & & & \\ & J_1(2) & & \\ & & J_1(2) & \\ & & & J_2(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{m(x) = (x-2)^2(x-5)^2}$$

$$\begin{pmatrix} J_2(2) & & \\ & J_1(2) & \\ & & J_2(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{m(x) = (x-2)^3(x-5)^2}$$

$$\begin{pmatrix} J_3(2) & \\ & J_2(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

דוגמה 6.9

למטריצות A ו- B יש אותו פולינום מינימלי ופולינום אופייני:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad p_A(x) = x^4 , \qquad m_A(x) = x^2 .$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad p_B(x) = x^4 , \qquad m_B(x) = x^2 .$$

מטריצות A ו- B לא דומות אבל

- למרטיצות A ו- B יש אותם ערכים עצמיים,
- $|A| = |B|$ אבל
- $\text{rank}(A) \neq \text{rank}(B)$.

בדוגמה היו שתי מטריצות לא דומות עם אותם $p(x)$ ו- $m(x)$, $|A|=|B|$ אותם ערכים עצמיים וגם אותה דרגה.

משפט 6.3 צורת ז'ורדן של מטריצה 3×3

עבור מטריצות 3×3 צורות פולינום אופייני הן:

$$p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ , \qquad p(x)=(x-a)^2(x-b)\ , \qquad p(x)=(x-a)^3\ .$$

מקרה 1:

$$p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ , \qquad m(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ .$$

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

מטריצה אלכסונית. הצ'ורת ז'ורדן היא

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_1(a) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(b) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(c) \end{pmatrix}$$

מקרה 2:

$$p(x)=(x-a)^2(x-b)$$

$\Leftarrow$ ישנן שתי אפשרויות לפולינום המינימלי:

$$m(x)=(x-a)(x-b) \qquad \vee \qquad m(x)=(x-a)^2(x-b)$$

$\underline{m(x)=(x-a)(x-b)}$

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$\begin{pmatrix} J_1(a) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(a) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(b) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$\underline{m(x)=(x-a)^2(x-b)}$

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$\begin{pmatrix} J_2(a) & 0 \\ 0 & J_1(b) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

מקרה 3:

$$p(x) = (x-a)^3$$

אז ישנן 3 אפשרויות ל- $m(x)$:

$$(x-a)\ , \qquad (x-a)^2\ , \qquad (x-a)^3\ .$$

$\underline{m(x) = (x-a)}$

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$\begin{pmatrix} J_1(a) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(a) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$\underline{m(x) = (x-a)^2}$

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$\begin{pmatrix} J_2(a) & 0 \\ 0 & J_1(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$\underline{m(x) = (x-a)^3}$

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$\begin{pmatrix} J_3(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

ז"א לכל פולינום מינימלי כאן יש צורת ז'ורדן אחת. לכן כל שתי מטריצות מסדר 3×3 עם אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי הן דומות אחת לשניה.

דוגמה 6.10

מצאו את צורת ז'ורדן ובסיס מז'רדן אל מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{aligned}
p_A(x) =& |xI-A| \\
=& \begin{vmatrix} x-1 & 3 & -4 \\ -4 & x+7 & -8 \\ -6 & 7 & x+7 \end{vmatrix} \\
=& (x-1)\begin{vmatrix} x+7 & -8 \\ 7 & x+7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -4 & -8 \\ -6 & x+7 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -4 & x+7 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} \\
=& (x-1)\left((x+7)^2+56\right) - 3\left(-28-4x+48\right) - 4\left(-28-6(7+x)\right) \\
=& -(x+1)^2(x-3)
\end{aligned}$$

האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$m(x)=(x+1)(x-3) \qquad \text{או} \qquad m(x)=(x+1)^2(x-3)\ .$$

נבדוק איזה מהם מתאפס ע"י A:

$$(A+I)(A-3) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix} \neq 0$$

לכן $m(x)=(x+1)^2(x-3)$. הצורת ז'ורדן היא

$$\begin{pmatrix} J_2(-1) & 0 \\ 0 & J_1(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

נמצא את הבסיס המז'רדן: $\lambda=-1$ ערך עצמי. נמצא וקטור עצמי השייך ל $\lambda=-1$:

$$(A+I) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z)=(z,2z,z)$ $z\in\mathbb{R}$.

$$V_{-1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

נסמן את הבסיס של V_{-1} ב- $u_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$(A+I)u_2 = u_1$$

נסמן $u_2=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -6 & 8 & 2 \\ 6 & -7 & 8 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 6 & -7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $(x,y,z)=(-1+z,-1+2z,z)$ $z\in\mathbb{R}$. **נציב** $z=1$:

$$u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

נחפש הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=3$:

$$(A-3I)=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 0 & -16 & 16 \\ 0 & -16 & 16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(x,y,z)=(\frac{1}{2}z,z,z)$ $z\in\mathbb{R}$.

$$u_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

לכן המרוצה P של הבסיס ג'ורדן היא
$$P=\begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

והצורת ז'ורדן היא
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_2(-1) & 0 \\ 0 & J_1(3) \end{pmatrix}=J$$
. לכן

$$A=PJP^{-1}$$

דוגמה 6.11

מצאו את צורת ז'ורדן אל מטריצה

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

מעל $\mathbb{C}$ ומטריצה P כך ש $P^{-1}AP=J$.

פתרון:

$$
\begin{aligned}
p_A(x) =& |x - IA| \\
=& \begin{vmatrix} x+4 & -2 & -10 \\ 4 & x-3 & -7 \\ 3 & -1 & x-7 \end{vmatrix} \\
=& (x+4) \begin{vmatrix} x-3 & -7 \\ -1 & x-7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 3 & x-7 \end{vmatrix} - 10 \begin{vmatrix} 4 & x-3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\
=& (x+4) \left(x^2 - 10x + 21 - 7\right) + 2\left(4x - 28 + 21\right) - 10\left(-4 - 3x + 9\right) \\
=& (x+4)(x^2 - 10x + 14) + 2\left(4x - 7\right) - 10\left(-3x + 5\right) \\
=& x^3 - 10x^2 + 14x + 4x^2 - 40x + 56 + 8x - 14 + 30x - 50 \\
=& x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \\
=& (x-2)^3 \ .
\end{aligned}
$$

האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$m(x) = (x-2) \qquad \text{או} \qquad m(x) = (x-2)^2 \qquad \text{או} \qquad m(x) = (x-2)^3 \ .$$

נבדוק איזה מהם מתאפס ע"י A:

$$(A - 2I) \neq 0 \ , \qquad (A-2I)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \neq 0$$

לכן $m(x) = (x-2)^3$. הצורת ז'ורדן היא

$$J = \left(J_3(2)\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

נמצא את הבסיס המז'רדן: $\lambda = 2$ ערך עצמי. נמצא את המרחב עצמי ששייך ל $\lambda = 2$:

$$
\begin{aligned}
(A - 2I) = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

פתרון: $(x,y,z) = (2z, z, z)$ $z \in \mathbb{R}$. לכן המרחב עצמי הוא $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. נסמן את הוקטור בבסיס של V_2 ב-

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נסמן $u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$(A - 2I) \cdot u_2 = u_1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 2 & 10 & 2 \\ -4 & 1 & 7 & 1 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $(x,y,z)=(2z,z+1,z)$, $z\in\mathbb{R}$. נסמן

$$u_2 = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 1+\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} , \qquad \alpha \in \mathbb{R} .$$

נסמן $u_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$(A-2I)u_3 = u_2 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 2 & 10 & 2 \\ -4 & 1 & 7 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 1+\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} .$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 2 & 10 & 2\alpha \\ -4 & 1 & 7 & 1+\alpha \\ -3 & 1 & 5 & \alpha \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 5 & \alpha \\ -4 & 1 & 7 & 1+\alpha \\ -3 & 1 & 5 & \alpha \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to 3R_2 - 4\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 5 & \alpha \\ 0 & -1 & 1 & 3-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1 \to -\frac{1}{3}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיים פתרון לכל α. נבחור $\alpha=1$ ונקבל את הפתרון $(x,y,z)=(-1+2z,-2+z,z)$, $z\in\mathbb{R}$. נציב $z=1$ ונקבל

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן המטריצה של הבסיס ז'ורדן היא

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

והצורת ז'ורדן היא

$$J = J_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

דוגמה 6.12

תהי $A=\begin{pmatrix} 4&1&1&0&0\\ 0&4&1&0&0\\ 0&0&4&0&0\\ 0&0&0&2&3\\ 0&0&0&0&2 \end{pmatrix}$. מצאו צורת זיורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $A=PJP^{-1}$.

פתרון:

הפולינום האופיינו הוא:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-4&-1&-1&0&0\\ 0&\lambda-4&-1&0&0\\ 0&0&\lambda-4&0&0\\ 0&0&0&\lambda-2&-3\\ 0&0&0&0&\lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-4)^3(\lambda-2)^2=0$$

הערכים עצמיים הם:

$\lambda=2$ מירבוי אלגברי 2.

$\lambda=4$ מירבוי אלגברי 3.

נמצא את המרחב עצמי V_2:

$$(A-2I)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 2&1&1&0&0&0\\ 0&2&1&0&0&0\\ 0&0&2&0&0&0\\ 0&0&0&0&3&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right)$$

הפתרון הוא $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\s\\0\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $s\in\mathbb{R}$. לכן

$$V_2=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\ .$$

$\dim(V_2)=1<2$. לכן A לא לכסינה. נסמו הוקטור עצמי $u_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$.

$$(A-2I)\cdot u_2=u_1\ .$$

נסמן $u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix}$.

$$(A-2I)\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

לכן $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. לכל α קיים פתרון. נציב $\alpha = 0$ ונקל $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

נמצא את המרחב עצמי V_4:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

הפתרון הוא $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. לכן

$$V_4 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

$\dim(V_4) = 1 < 3$. לכן A לא לכסינה. נסמו הוקטור עצמי $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$(A-4I)\cdot u_4 = u_3 \ .$$

נסמן $u_4 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix}$.

$$(A-4I)\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

לכן $u_4 = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

$$(A-4I)\cdot u_5 = u_4\ .$$

נסמן $u_5 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix}$.

$$(A-4I)\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

לכל β קיים פתרון. נציב $\beta = 0$ ונקבל

$u_5 = \begin{pmatrix} \gamma \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\gamma \in \mathbb{R}$. נציב $\gamma = 0$ ונקבל $u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(2) & 0 \\ 0 & J_3(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

$$A = PJP^{-1} .$$