

שיעור 15

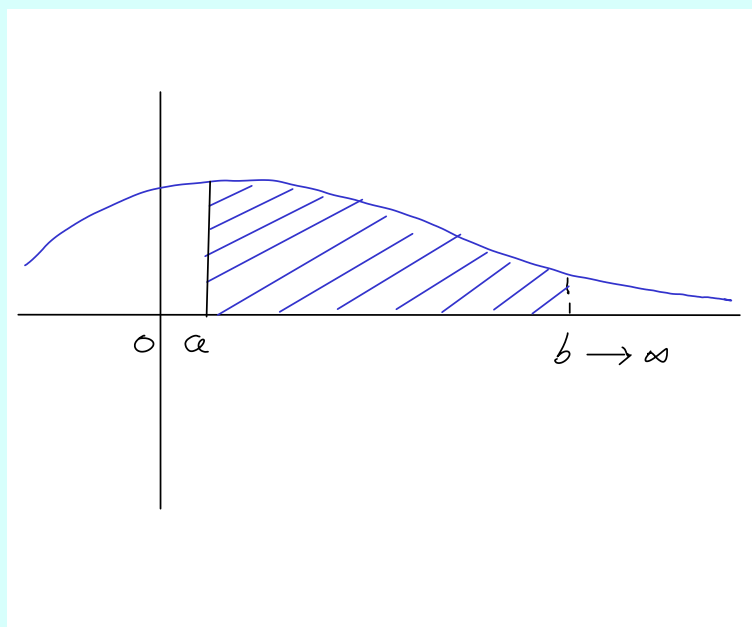
אינטגרל לא אמיתי והערכת סכומים בעזרת אינטגרל מסוים

15.1 אינטגרל לא אמיתי

הגדרה 15.1 אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

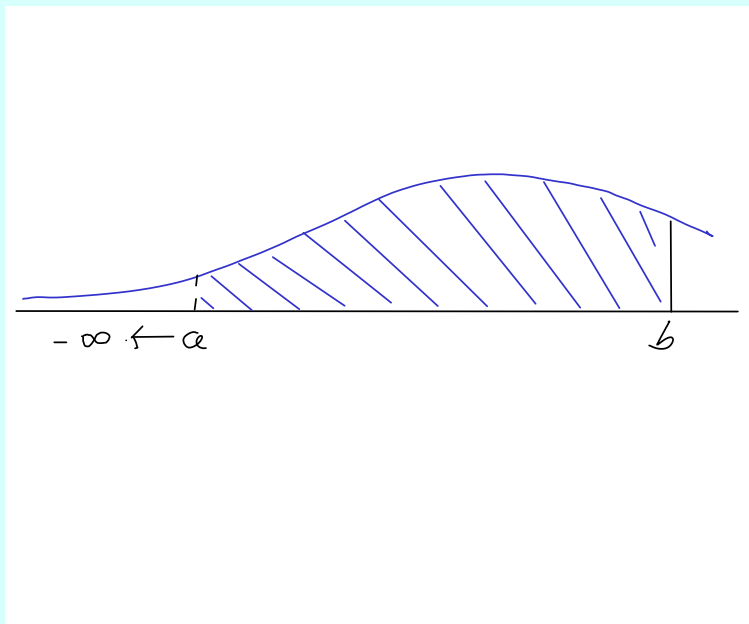
1. נניח שפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע (a, ∞) . אז

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$



2. נניח שפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $(-\infty, b)$. אז

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$



3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$$

לכל $-\infty < c < \infty$.

אם התשובה של האינטגרל הלא אמיתי היא מספר סופי אז אומרים שהאינטגרל מתכנס, אחרת אומרים שהאינטגרל מתבדר.

דוגמה:

אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון חשבו את $I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$.

פתרון:

$$I = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln|b| - \ln|1| = \infty.$$

האינטגרל מתבדר.

דוגמה:

אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון חשבו את $I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

פתרון:

$$I = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{b} + 1 \right] = 1.$$

האינטגרל מתכנס.

דוגמה:

אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון חשבו את $I = \int_{-\infty}^0 \cos x dx$.

פתרון:

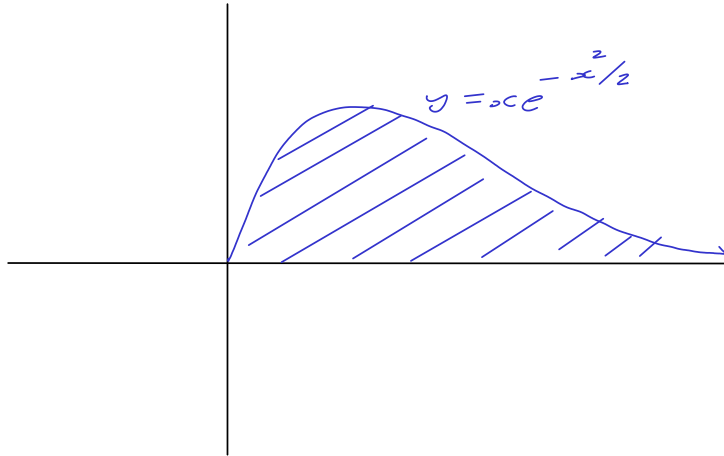
$$I = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \cos x \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} [\sin 0 - \sin a] = \lim_{a \rightarrow -\infty} \sin(a)$$

לא קיים. האינטגרל לא מתכנס.

דוגמה:

אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון חשבו את השטח החסום ע"י $f(x) = xe^{-x^2/2}$, $y = 0$, $x \geq 0$.

פתרון:



$$S = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b xe^{-x^2/2} \, dx.$$

נגדיר

$$u = \frac{x^2}{2}, \quad u' = x.$$

כך

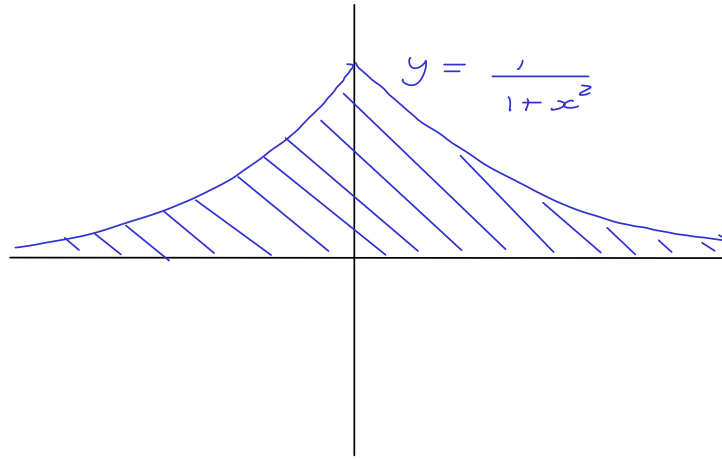
$$\begin{aligned} S &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b u' e^{-u} \, dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-u} \, du \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-u} + 1] \\ &= 1. \end{aligned}$$

האינטגרל מתבדר.

דוגמה:

אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון חשבו את השטח החסום ע"י $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, $y = 0$, $x \geq 0$.

פתרון:



$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 1} dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{x^2 + 1} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{x^2 + 1} dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} [\arctan 0 - \arctan a] + \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctan b - \arctan 0] \\
 &= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 \\
 &= \pi .
 \end{aligned}$$

■

משפט 15.1 מבחן השוואה הראשון

נניח שפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפות בקטע $[a, \infty)$ ולכל x השייך לקטע מתקיים

$$0 \leq f(x) \leq g(x) .$$

אז

1. אם $\int_a^{\infty} g(x) dx$ מתכנס אז גם $\int_a^{\infty} f(x) dx$ מתכנס.

2. אם $\int_a^{\infty} f(x) dx$ מתבדר אז גם $\int_a^{\infty} g(x) dx$ מתבדר.

דוגמה:

מבחן השוואה הראשון האם מתכנס האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(1+3^x)} dx$

פתרון:

נגדיר $f(x) = \frac{1}{x^2(1+3^x)}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$. לכל $x \geq 1$ מתקיים $f(x) \leq g(x)$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = 1$$

מתכנס, לכן גם

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2(1+3^x)} dx$$

מתכנס.

משפט 15.2 מבחן השוואה השני

נניח שפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפות בקטע $[a, \infty)$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, וגם

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

כאשר $0 < k < \infty$. אז $\int_a^\infty f(x) dx$ ו- $\int_a^\infty g(x) dx$ מתכנסים או מתבדרים בו זמנים.

דוגמה:

מבחן השוואה השני האם האינטגרל $\int_1^\infty \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) dx$ מתכנס?

פתרון:

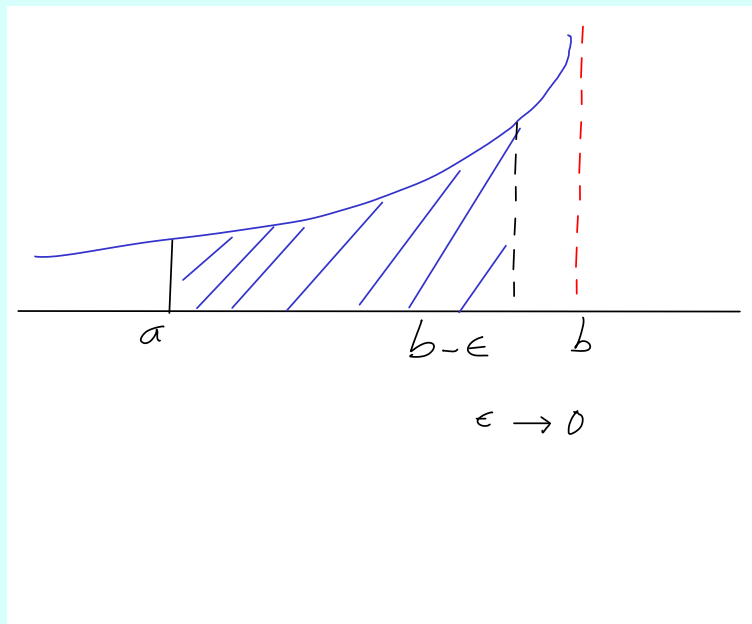
נגדיר $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$. אז

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = \ln e = 1 < \infty$$

מתכנס, אז גם $\int_1^\infty f(x) dx$ מתכנס.

הגדרה 15.2 אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

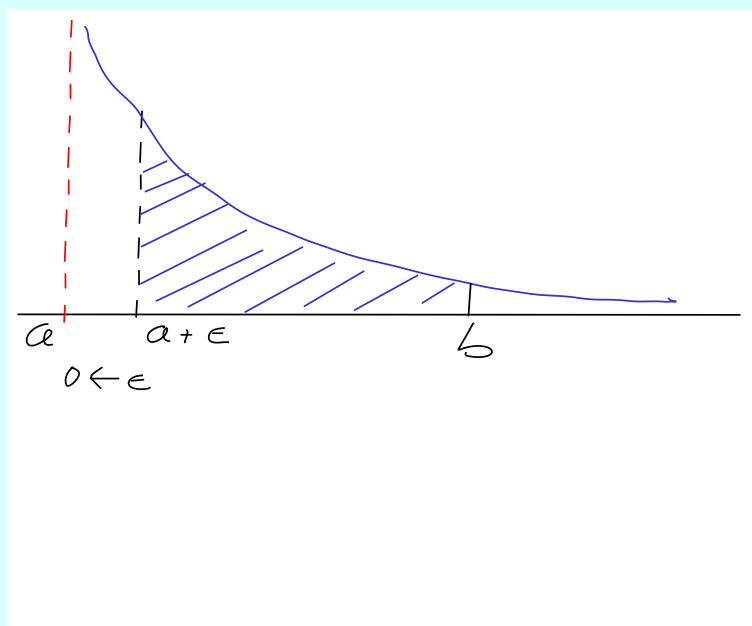
מצב 1. פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$ ו- $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$



אז

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx .$$

מצב 2. פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$ ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$



אז

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx .$$

אם התשובה של האינטגרל הלא אמיתי היא מספר סופי אז אומרים שהאינטגרל מתכנס, אחרת אומרים שהאינטגרל מתבדר.

דוגמה:

אינטגרל לא אמיתי מסוג שני חשבו את האינטגרל $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$

פתרון:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\epsilon} - 1 \right] \\ &= \infty \end{aligned}$$

דוגמה:

אינטגרל לא אמיתי מסוג שני חשבו את האינטגרל $I = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$

פתרון:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{3-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\arcsin \left(\frac{x}{3} \right) \right]_0^{3-\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\arcsin \left(\frac{3-\epsilon}{3} \right) - \arcsin 0 \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \arcsin \left(\frac{3-\epsilon}{3} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

15.2 הערכת סכומים בעזרת אינטגרל מסוים

משפט 15.3 אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

תהי $f(x)$ פונקציה חיובית, יורדת מונוטונית ורציפה בחצי הישר $x \geq 1$. אזי מתקיים

$$\int_1^{n+1} f(x) dx < \sum_{k=1}^n f(k) < \int_1^{n+1} f(x) dx + f(1).$$

תהי $f(x)$ פונקציה חיובית, עולה מונוטונית ורציפה בחצי הישר $x \geq 0$. אזי מתקיים

$$\int_0^n f(x) dx < \sum_{k=1}^n f(k) < \int_0^n f(x) dx + f(n).$$

דוגמה:

הערכת סכומים הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}} < 2 .$$

פתרון:

נגדיר

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

פונקציה יורדת.

$$f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(n) < \int_1^{n+1} f(x) dx + f(1) = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^n + f(1) = -\frac{2}{\sqrt{n}} + 2 + 1 = -\frac{2}{\sqrt{n}} + 3 < 3 .$$

לכן

$$1+f(2)+f(3)+\dots+f(n) < 3 \quad \Rightarrow \quad f(2)+f(3)+\dots+f(n) < 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}} < 2 .$$

■

דוגמה:

הערכת סכומים הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים

$$\frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 < \frac{n^3}{3} + n^2 .$$

פתרון:

נגדיר

$$f(x) = x^2$$

פונקציה עולה.

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) < \int_0^n f(x) dx + f(n) .$$

לכן

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 < \int_0^n x^2 dx + n^2 = \frac{n^3}{3} + n^2 . \quad (1*)$$

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) > \int_0^n f(x) dx .$$

לכן

$$1^2 + 2^2 + 3^2 \dots + n^2 > \frac{n^3}{3} . \quad (2*)$$

■