

שיעור 9

מונוטוניות, נקודות קיצון ונוסחת טיילור

נוסחת טיילור ומקלורן

כדי למצוא ערכים של פונקציה מקרבים אותה באמצעות פולינום.

9.1 משפט. (משפט טיילור)

תהי f פונקציה מוגדרת בסביבה של נקודה a וגזירה לפחות $n + 1$ פעמים בנקודה a . אז לכל x בסביבה לנקודה a קיימת נקודה c בין a ל- x כך ש-

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}$$

הנוסחה זו נקראת נוסחת טיילור. האיבר הסופי

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}$$

נקרא השארית. זאת אומרת

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n}_{\text{פולינום טיילור מסדר } n} + R_n(x)$$

נוסחת מקלורן היא נוסחת טיילור עבור $a = 0$.

9.2 משפט. (מקלורן)

תהי f פונקציה מוגדרת בסביבה של נקודה 0 וגזירה לפחות $n + 1$ פעמים בנקודה 0. אז לכל x בסביבה לנקודה 0 קיימת נקודה c בין 0 ל- x כך ש-

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

כאשר

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}x^{n+1}.$$

דוגמאות

1. $f(x) = e^x$

נרשום פולינום מקלורן מסדר n :

$$f(0) = e^0 = 1$$

-1

$$f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$$

לכן

$$f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1,$$

ונקבל

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

$f(x) = \sin x$.2

נרשום פולינום מקלורן מסדר n :

$$f(0) = \sin(0) = 0 .$$

-1

$$f'(x) = \cos x , \quad f'(0) = \cos(0) = 1 .$$

$$f''(x) = -\sin x , \quad f''(0) = -\sin(0) = 0 .$$

$$f'''(x) = -\cos x , \quad f'''(0) = -\cos(0) = -1 .$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x , \quad f^{(4)}(0) = \sin(0) = 0 .$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x , \quad f^{(5)}(0) = \cos(0) = 1 .$$

$$f^{(6)}(x) = -\sin x , \quad f^{(6)}(0) = -\sin(0) = 0 .$$

$$f^{(7)}(x) = -\cos x , \quad f^{(7)}(0) = -\cos(0) = -1 .$$

לכן

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} .$$

$f(x) = \cos x$.3

נרשום פולינום מקלורן מסדר n :

$$f(0) = \cos(0) = 1 .$$

-1

$$f'(x) = -\sin x , \quad f'(0) = -\sin(0) = 0 .$$

$$f''(x) = -\cos x , \quad f''(0) = -\cos(0) = -1 .$$

$$f^{(3)}(x) = \sin x , \quad f^{(3)}(0) = \sin(0) = 0 .$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x , \quad f^{(4)}(0) = \cos(0) = 1 .$$

$$f^{(5)}(x) = -\sin x , \quad f^{(5)}(0) = -\sin(0) = 0 .$$

$$f^{(6)}(x) = -\cos x , \quad f^{(6)}(0) = -\cos(0) = -1 .$$

$$f^{(7)}(x) = \sin x , \quad f^{(7)}(0) = \sin(0) = 0 .$$

לכן

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} .$$

תרגילים

דוגמא.

רשום את פולינום מקלורן מסדר 3 עבור הפונקציה $y = \arctan(x + 1)$.

פיתרון.

$$f(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} .$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2 + 1} , \quad f'(0) = \frac{1}{2} .$$

$$f''(x) = \frac{-2(x+1)}{((x+1)^2 + 1)^2} , \quad f''(0) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} .$$

$$P_2(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} .$$

■

דוגמא.

ידוע שפולינום מקלורן מסדר 3 של פונקציה $f(x)$ הוא $x + 2x^2 - x^3$. חשב את $f''(0) \cdot f'''(0)$.

פיתרון.

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 = x + 2x^2 - x^3 .$$

לכן

$$f'(0) = 1 , \quad \frac{f''(0)}{2!} = 2, \quad \frac{f^{(3)}(0)}{3!} = -1$$

ז"א

$$f''(0) \cdot f'''(0) = 4 \cdot (-6) = -24 .$$

■

דוגמא.

רשום פולינום מקלורן מסדר 2 עבור פונקציה $y(x)$ הנתונה בצורה סתומה:

$$xy + y^3 = \cos(2x) .$$

פיתרון.

נציב $x = 0$:

$$y(0)^3 = \cos(2 \cdot 0) = 1 \quad \Rightarrow \quad y(0) = 1 .$$

נגזור את שני הצדדים:

$$y + xy' + 3y^2 \cdot y' = -2 \sin(2x)$$

נציב $y(0) = 1, x = 0$:

$$1 + 3 \cdot 1^2 \cdot y'(0) = -2 \sin(2 \cdot 0) \quad \Rightarrow \quad 1 + 3 \cdot y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(0) = -\frac{1}{3} .$$

נגזור את שני הצדדים פעם שניה:

$$y' + y' + xy'' + 6y \cdot (y')^2 + 3y^2 \cdot y'' = -4 \cos(2x)$$

$$\text{נציב } y'(0) = -\frac{1}{3}, y(0) = 1, x = 0$$

$$-\frac{2}{3} + 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 3y'' = -4 \Rightarrow -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 3y'' = -4 \Rightarrow y'' = -\frac{4}{3}.$$

$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{3 \cdot 2!}x^2 = 1 - \frac{x}{3} - \frac{2}{3}x^2$$



דוגמא.

רשום פולינום מקלורן מסדר 2 עבור פונקציה $y(x)$ הנתונה בצורה פרמטרית:

$$x = \ln(t+2), \quad y = t^2 - 3t.$$

פיתרון.

$$x = 0 \Rightarrow \ln(t+2) = 0 \Rightarrow t = -1.$$

לכן

$$y = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) = 4.$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t-3}{\frac{1}{t+2}} = (2t-3)(t+2) = 2t^2 + t - 6.$$

$$y'_x(t = -1) = -5.$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{4t+1}{\frac{1}{t+2}} = (4t+1)(t+2).$$

$$y''_x(t = -1) = -3.$$

לכן

$$P_2(x) = 5 - 5x - \frac{3x^2}{2!} = 5 - 5x - \frac{3x^2}{2}.$$



תחומי עליה וירידה של פונקציה

9.3 משפט. (תנאי הכרחי למונוטוניות)

תהי f פונקציה גזירה בקטע (a, b) ועולה בקטע זה. אז $f'(x) \geq 0$ לכל $x \in (a, b)$.

תהי f פונקציה גזירה בקטע (a, b) ויורדת בקטע זה. אז $f'(x) \leq 0$ לכל $x \in (a, b)$.

הוכחה.

נניח ש f עולה בקטע (a, b) .

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ז"א

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

נתבונן ב- $f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ו- $\Delta x > 0$ ו- $f(x + \Delta x) - f(x) > 0$ לכן $f'_+(x) > 0$.

עבור $f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ו- $\Delta x < 0$ ו- $f(x + \Delta x) - f(x) < 0$ לכן $f'_-(x) > 0$.

$$\blacksquare \quad f'(x) \geq 0 \quad \text{לכן} \quad f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$$

הערה.

לא ניתן להשתמש במשפט הזה בכיוון הפוך. כלומר, לכל $x \in (a, b)$

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftarrow \quad f(x) \text{ עולה מונוטונית}$$

$$f'(x) \geq 0 \quad \not\Rightarrow \quad f(x) \text{ עולה מונוטונית}$$

-ו

$$f'(x) \leq 0 \quad \Leftarrow \quad f(x) \text{ יורדת מונוטונית}$$

$$f'(x) \leq 0 \quad \not\Rightarrow \quad f(x) \text{ יורדת מונוטונית}$$

■

9.4 משפט. (תנאי המספיק למונוטוניות)

תהי f פונקציה גזירה בקטע (a, b) . לכל $x \in (a, b)$

$$f'(x) > 0 \quad \Leftarrow \quad f(x) \text{ עולה מונוטונית}$$

$$f'(x) < 0 \quad \Leftarrow \quad f(x) \text{ יורדת מונוטונית}$$

הוכחה.

נניח ש $f'(x) > 0$ לכל $x \in (a, b)$. נקח $x_1 < x_2$ בתוך הקטע. לפי משפט לגרנז' ?? קיים c כך ש-
 $x_1 < c < x_2$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

לפי הנתון, $f'(c) > 0$, לכן $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$. ז"א f עולה מונוטונית בקטע (a, b) . ■

תרגילים

דוגמא.

בדוק את תחומי עליה וירידה של פונקציה $f(x) = x^3 - 3x - 4$.

פיתרון.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1) .$$

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	\nearrow	\searrow	\nearrow

■

דוגמא.

הראו כי למשוואה $2 \ln x + x^2 - 5 = 0$ יש שורש ממשי אחד בדיוק.

פיתרון.

נגדיר $f(x) = 2 \ln x + x^2 - 5$. שים לב

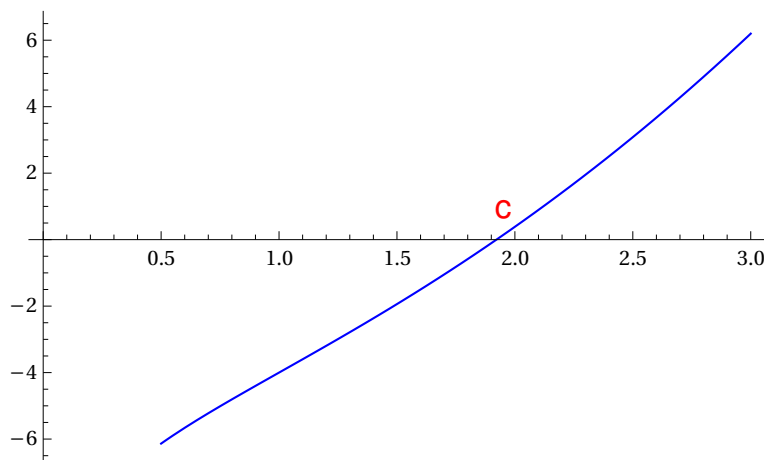
$$f(1) = -4 < 0, \quad f(2) = 2 \ln 2 - 1 > 0 .$$

תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא $x > 0$. מכיוון ש $f(x)$ פונקציה אלמנטרית, ומוגדרת בקטע $[1, 2]$, אז היא רציפה בקטע זה וגזירה בקטע $(1, 2)$. לפי משפט ערך הביניים ?? קיים $c \in (1, 2)$ כך ש- $f(c) = 0$.

נוכיח שהשורש c היא יחיד:

שים לב

$$f'(x) = \frac{2}{x} + 2x > 0$$

לכל x בתחום ההגדרה. לכן, f עולה מונוטונית בתחום $(0, \infty)$. ז"א השורש הוא יחיד.

■

נקודות קיצון

9.5 משפט. (נקודת מקסימום)

נקודה a נקראת נקודת מקסימום מקומי של פונקציה $f(x)$ אם קיימת סביבה של a כך שלכל $x \neq a$ השייך לסביבה, מתקיים

$$f(x) < f(a).$$

9.6 משפט. (נקודת מינימום)

נקודה a נקראת נקודת מינימום מקומי של פונקציה $f(x)$ אם קיימת סביבה של a כך שלכל $x \neq a$ השייך לסביבה, מתקיים

$$f(x) > f(a).$$

נקודות מקסימום ומינימום נקראים **נקודות קיצון** אן גם **נקודות אקסטremום**.

9.7 משפט. (משפט פרמה (תנאי הכרחי לאקסטremום))

תהי f פונקציה גזירה בסביבה של נקודה a . נניח ש- $x = a$ נקודת קיצון של $f(x)$. אז $f'(a) = 0$.

המשמעות הגיאומטרית: בנקודהת קיצון המשיק מקביל לציר ה- x .

הערה.

שים לב המשפט ההפוך לא נכון. כלומר בהינתן פונקציה גזירה בסביבה של נקודה a .

$$a \text{ נקודת קיצון של } f \Leftrightarrow f'(a) = 0$$

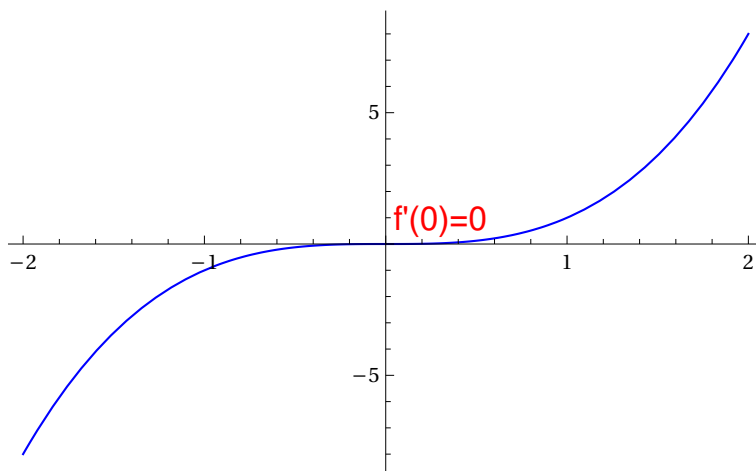
$$f'(a) = 0 \not\Leftrightarrow a \text{ נקודת קיצון של } f$$



לדוגמה: $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2, \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 0$$

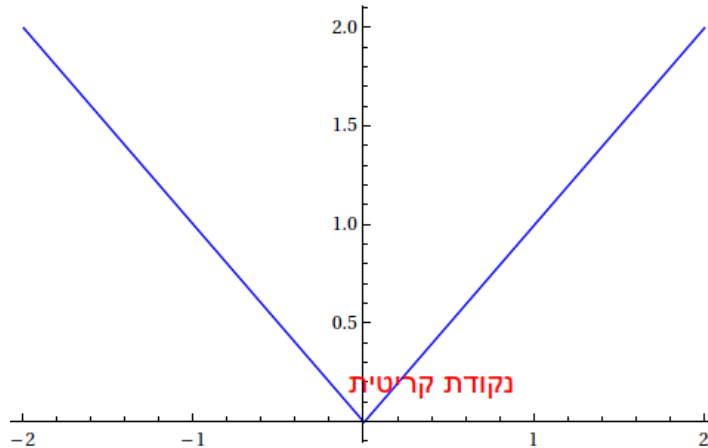
אבל $x = 0$ לא נקודת קיצון (עיין תרשים להלן)



גם קיימות פונקציות שיש להן נקודת קיצון אבל הן לא גזירות בנקודה הזאת. לדוגמה:

$$f(x) = |x|$$

$f'(0)$ לא קיימת אבל הנקודה $x = 0$ נקודת מינימום (עיין תרשים להלן)



9.8 כלל: (נקודת קריטית)

נקודת אקסטרמום של פונקציה יכולה להיות בין הנקודות שבהן הנגזרת שווה ל-0 או לא קיימת. נקודות האלה נקראים נקודות קריטיות (או נקודות חשודות לאקסטרמום).

9.9 משפט. (תנאי המספיק למונוטוניות)

תהי f פונקציה מוגדרת בנקודה a וגזירה בסביבה של a , אבל לא בהכרח גזירה ב- a . תהי a היא נקודה חשודה לקיצון. אז:

(1) אם במעבר דרך הנקודה a משמאל לימין $f'(x)$ משנה את הסימן מ $+$ ל- $-$ אז a נקודת מקסימום מקומי.

(2) אם במעבר דרך הנקודה a משמאל לימין $f'(x)$ משנה את הסימן מ $-$ ל- $+$ אז a נקודת מינימום מקומי.

תרגילים

דוגמא.

$$f(x) = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$$

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה

פיתרון.

$$f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{3\sqrt[3]{x}}$$

הנקודות החשודות לקיצון $x = 0, 8$.

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 8)$	$(8, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	\nearrow	\searrow	\nearrow

לכן $(0, f(0)) = (0, 0)$ נקודת מקסימום מקומי.

■ $(8, f(8)) = (8, -\frac{4}{3})$ נקודת מינימום מקומי.

דוגמא.

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$.

פיתרון.

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

הנקודות הקריטיות הן $x = -1, 1, 3$.

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	\nearrow	\searrow	\searrow	\nearrow

לכן נקבל:

$x = 3$ נק' מינימום מקומי: $f(3) = 8$
 $x = -1$ נק' מקסימום מקומי: $f(-1) = 0$

■

מציאת הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של פונקציה רציפה בקטע סגור

תהי f רציפה בקטע סגור $[a, b]$. אז לפי משפט וירשטרס ??, $f(x)$ מקבלת בקטע $[a, b]$ את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר.

הערך הזה יכול להתקבל בנקודה פנימית של הקטע, (אז היא נקודה קריטית של פונקציה $f(x)$) או באחד הקצוות של הקטע. לכן השלבים למציאת הערך הגדול ביותר והקטן ביותר הם:

1. למצוא את כל הנקודות החשודות לאקסטרמום השייכות לקטע (a, b) .

2. לחשב את הערך של $f(x)$ בכל הנקודות של סעיף הקודם.

3. לחשב את $f(a)$ ו- $f(b)$.

4. מתוך הערכים שחישבנו לבחור את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר.