שיעור 1
תכונות של פונקציה ופונקציות אלמנטריות

קבוצות של מספרים

קבוצה זה אוסף של עצמים. ישנן שתי דרכים להגדרת קבוצה ספציפית.

<u>דרך 1:</u>

לתת רשימה שלמה של איברים. לדוגמה:
$$A=\{1,2,3,4,5\}$$

<u>דרך 2:</u>

לתת תנאי שמאפיין את איברי הקבוצה, בצורה

$$A=\{x|\text{תנאי שמאפיין את } x\}$$

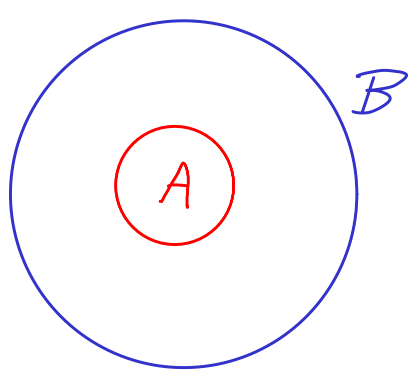
לגודמה:
$$A=\{x|2\le x\le 5 \text{ וגם } x \text{ מספר ממשי}\}$$

אם $A=\{1,3,4,5\}$ אז $1,3,4,5$ שייכים לקבוצה A ומספרים $1\in A$, $3\in A$, $4\in A$, $5\in A$.

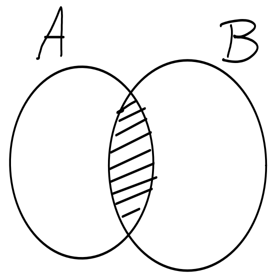
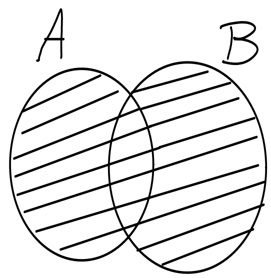
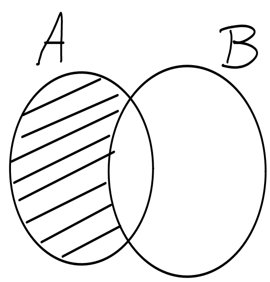
סדר האיברים בקבוצה אינו חשוב, לכן
$$\{1,2,3\}=\{2,1,3\}\ .$$
לא משנה כמה פעמים איבר מופיע ברשימה האיברים, ז"א

$$\{1,2,3\}=\{1,2,3,2\}\ .$$

קבוצה ללא איברים מסומנת ב- $\emptyset$. כלומר
$$\emptyset=\{\}\ .$$
אומרים ש- A היא תת קבוצה של B אם כל איבר של A שייך ל- B. מסמנים תת קבוצה בצורה $A\subset B$.



פעולות בין קבוצות

חיתוך של קבוצות		$A \cap B = \{x \mid x \in A$ וגם $x \in B\}$
איחוד של קבוצות		$A \cup B = \{x \mid x \in A$ או $x \in B\}$
הפרש בין קבוצות		$A - B = \{x \mid x \notin B$ וגם $x \in A\}$

קבוצות של מספרים

קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

קבוצת המספרים השלמים: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

קבוצת המספרים הרציונלים: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid n \neq 0, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}\}$

שים לב,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \ .$$

המספרים הרציונלים מקיימים את תכונת הצפיפות. ז"א בין כל שני מספרים רציונלים יש מספר רציונלי אחר. אבל עדיין קיימות הרבה מאוד נקודות על הציר שלא מתאימות לאף מספר רציונלי.

1.1 טענה.
לא קיים מספר רציונלי שהריבוע שלו שווה ל-2.

הוכחה.
נוכיח בדרך השלילה. נניח שקיים מספר רציונלי $\frac{m}{n}$ כך ש-

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \ .$$

אפשר להניח ש- $\frac{m}{n}$ שבר מצומצם. אז
$$m^2 = 2n^2 \ ,$$
ז"א m^2, מספר זוגי, ולכן גם m מספר זוגי. כלומר ניתן לבטא m כ $m = 2k$ כאשר $k \in \mathbb{Z}$ (k מספר שלם).
אז נקבל
$$m = 2k \qquad \Rightarrow \qquad 4k^2 = 2n^2 \qquad \Rightarrow \qquad n^2 = 2k^2 \ .$$
לכן n^2 זוגי $\Leftarrow$ n זוגי. זאת אומרת m ו- n מספרים זוגיים. לכן אפשר לצמצם את השבר ב- 2. סתירה.
כלומר, לא קיים מספר רציונלי שריבועו שווה ל- 2. ■

אחרי שממלאים את כל הציר, מקבלים את קבוצת המספרים הממשיים, $\mathbb{R}$. ז"א

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

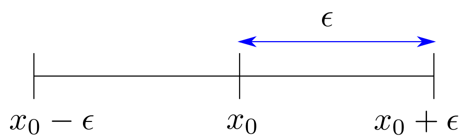
סביבות וקטעים

קטע סגור	$[a,b]$	$=$	$\{x \vert a \le x \le b\}$
קטע פתוח	(a,b)	$=$	$\{x \vert a < x < b\}$
קטע חצי פתוח	$[a,b)$	$=$	$\{x \vert a \le x < b\}$
קטע חצי פתוח	$(a,b]$	$=$	$\{x \vert a < x \le b\}$
קטע חד פתוח	$[a,\infty)$	$=$	$\{x \vert x \ge a\}$
קטע חד פתוח	(a,∞)	$=$	$\{x \vert x > a\}$
קטע חד פתוח	$(-\infty,b]$	$=$	$\{x \vert x \le b\}$
קטע חד פתוח	$(-\infty,b)$	$=$	$\{x \vert x < b\}$
קטע חד פתוח	$(-\infty,\infty)$	$=$	$\{x \vert -\infty < x < \infty\} = \mathbb{R}$

1.2 הגדרה: (סביבה של נקודה)

א) כל קטע פתוח (a,b) שמכיל נקודה x_0 נקרא סביבה של x_0.

ב) קטע פתוח $(x_0+\epsilon, x_0-\epsilon)$ נקרא ϵ- סביבה של נקודה x_0.



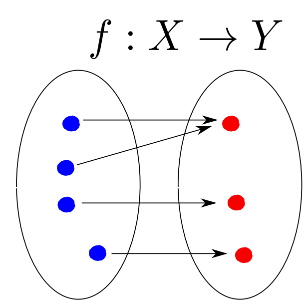
x_0 נמצא באמצע הקטע ϵ- מרחק מהאמצע עד הקצה.

מושג של פונקציה

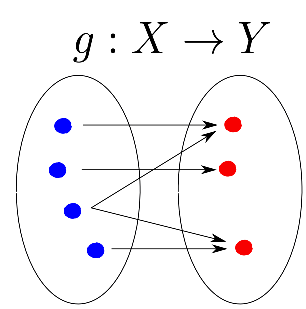
1.1 הגדרה: (פונקציה)
פונקציה

$$f:X\to Y$$

היא כלל המתאימה לכל איבר $x\in X$ איבר יחיד $y\in Y$.



פונקציה



לא פונקציה

1.2 הגדרה: (תחום הגדרה, טווח ותמונה של פונקציה)
תהי f הפונקציה

$$f:X\to Y$$

מקבוצה X לקבוצה Y.

א) הקבוצה X נקראת **תחום ההגדרה** של f. התחום הגדרה מסומן ב- $\mathrm{dom}(f)$, כלומר

$$\mathrm{dom}(f)=X\ .$$

ב) הקבוצה Y נקראת ה **טווח** של f. הטווח מסומן ב- $\mathrm{Rng}(f)$, ז"א

$$\mathrm{Rng}(f)=Y\ .$$

ג) **התמונה** של פונקציה f מסומנת ב- $\mathrm{Im}(f)$ ומוגדרת באופן הבא:

$$\mathrm{Im}(f)=\{y|\forall y\in Y\ \exists\ x\in X\ :\ f(x)=y\}$$

או במילים פשוטות,

$\mathrm{Im}(f)$ היא הקבוצה $\{y\}$ כך שלכל $y\in Y$ קיים $x\in X$ כך ש $f(x)=y$ מתקיים.

דוגמא.

תהי f הפונקציה המוגדרת ע"י הנוסחה

$$f(x)=(x+2)^2.$$

$$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}\ ,\qquad \mathrm{Rng}(f)=\mathbb{R}\ ,\qquad \mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^+\ .$$

כאשר $\mathbb{R}^+$ מסמן את הקבוצת המספרים הממשיים גדולים או שווים ל-0.

1.3 הגדרה: (חד חד ערכית)

תהי

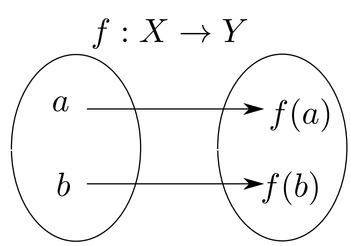
$$f:X\to Y$$

פונקציה. f תקרא חד חד ערכית אם לכל $a,b\in X$,

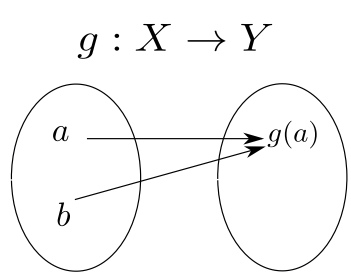
$$a\neq b\qquad\Rightarrow\qquad f(a)\neq f(b)\ ,$$

או שקול

$$f(a)=f(b)\qquad\Rightarrow\qquad a=b\ .$$



פונקציה חח"ע



פונקציה לא חח"ע

1.4 הגדרה: (על)

תהי

$$f:X\to Y$$

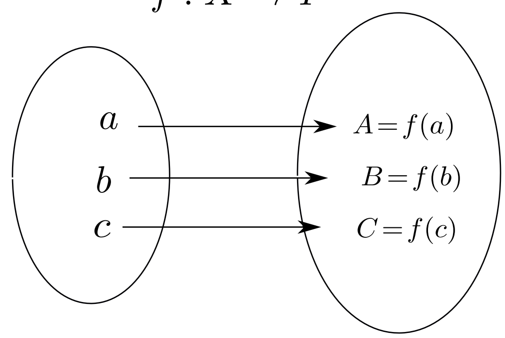
פונקציה. f תקרא על Y, אם לכל $y \in Y$ קיים $x \in X$ כך ש-

$$f(x) = y \ .$$

במילים אחרות, $\mathrm{Im}(f) = Y$.

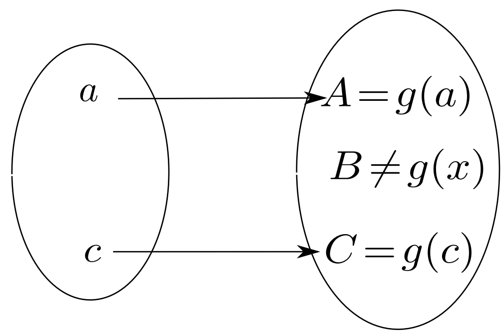
$$f : X \to Y$$

פונקציה על



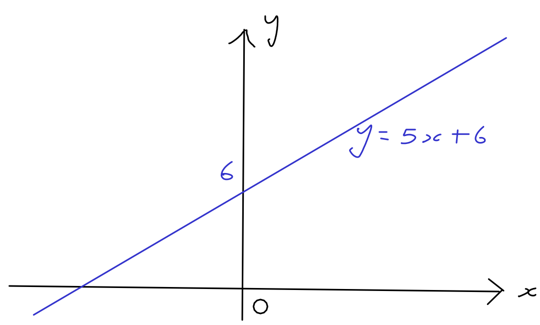
$$g : X \to Y$$

פונקציה לא על



דוגמאות.

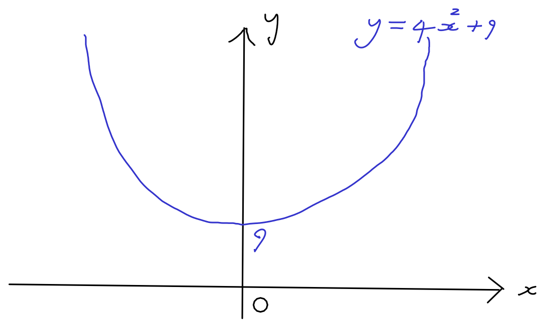
.1 $f(x) = 5x + 6$.



$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \ , \quad \mathrm{Rng}(f) = \mathbb{R} \ , \quad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \ .$$

f חד חד ערכית ועל.

.2 $f(x) = 4x^2 + 9$.

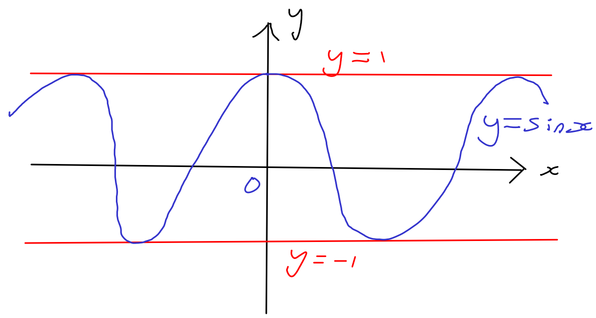


$\text{Dom}(f)=\mathbb{R}\ ,\quad \text{Rng}(f)=\mathbb{R}\ ,\quad \text{Im}(f)=[9,\infty)$

f לא חד חד ערכית ולא על.

---

3. $f(x)=\sin x$.

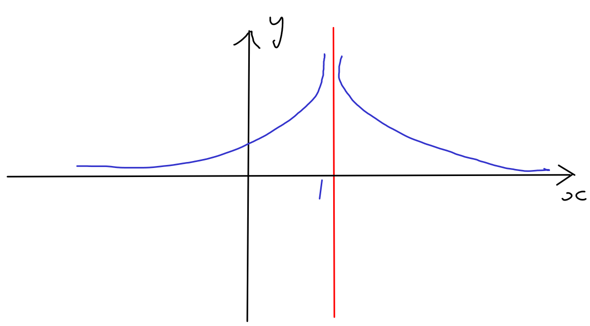


$\text{Dom}(f)=\mathbb{R}\ ,\quad \text{Rng}(f)=\mathbb{R}\ ,\quad \text{Im}(f)=[-1,1]$

f לא חד חד ערכית ולא על.

---

4. $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$.



$\text{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}\cap x\neq 1\}\ ,\quad \text{range}(f)=\mathbb{R}\ ,\text{Im}(f)=(0,\infty)$

f לא חד חד ערכית ולא על.

5. $f(x)=2x^2-3$.

$\text{Dom}(f)=\mathbb{R}\ ,\quad \text{Rng}(f)=\mathbb{R}\ ,\quad \text{Im}(f)=[-3,\infty)$

f לא חד חד ערכית ולא על.

---

6. $.f(x)=\sqrt{1-x^2}$

$$\mathrm{Dom}(f)=[-1,1]\ ,$$

f לא חד חד ערכית.

תכונות של פונקציות

I זוגיות

1.5 הגדרה: (פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית)
נניח ש $f(x)$ פונקציה המוגדרת בתחום D. $f(x)$ נקראת פונקציה זוגית אם לכל $x\in D$ מתקיים:

$$f(-x)=f(x)\ .$$

גרף של פונקציה זוגית סימטרי ביחס לציר ה-y.

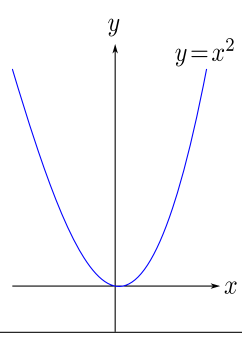
$f(x)$ נקראת פונקציה אי-זוגית אם לכל $x\in D$ מתקיים:

$$f(-x)=-f(x)\ .$$

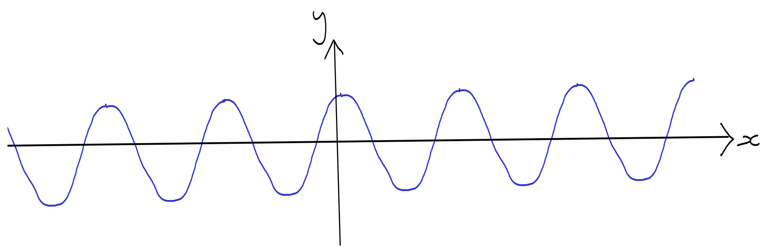
גרף של פונקציה זוגית סימטרי יחסית ראשית הצירים.

דוגמאות.

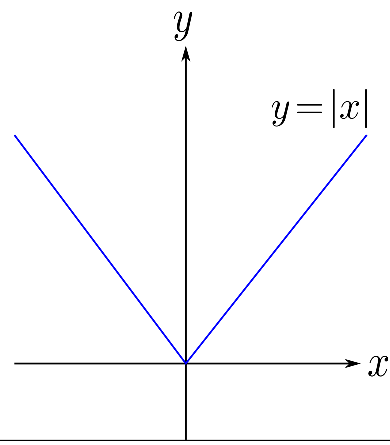
$y=x^2$ זוגית.



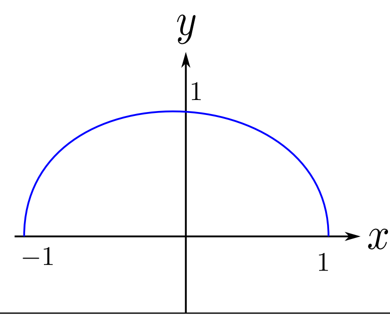
$y = \cos x$ זוגית.



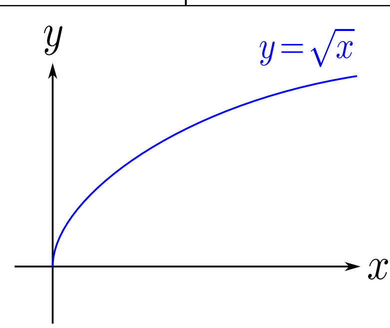
$y = |x|$ זוגית.



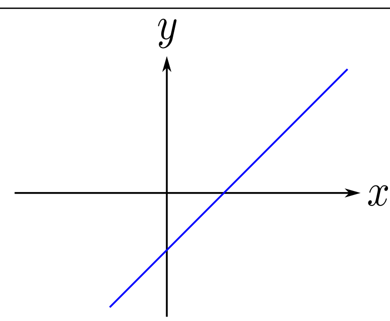
$y = \sqrt{1-x^2}$ זוגית.



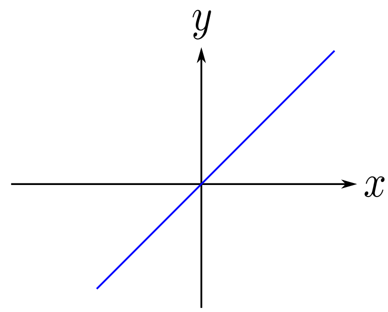
$y = \sqrt{x}$ לא זוגית.



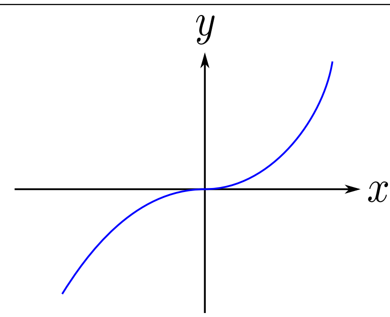
$y = x - 1$ לא זוגית.



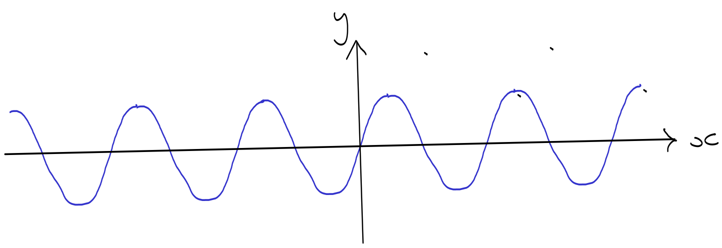
$y = x$ אי זוגית.



$y = x^3$ אי זוגית.



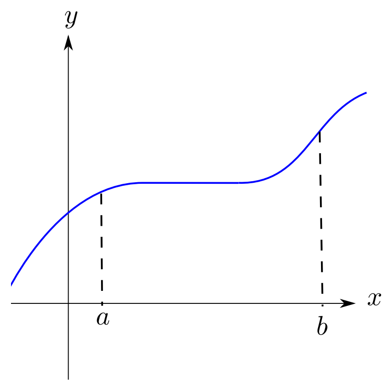
$y = \sin x$ אי זוגית.



II מונוטוניות

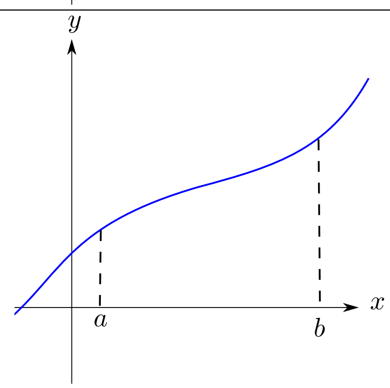
1.6 הגדרה: (עלייה וירידה של פונקציה)

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בתחום D. אומרים כי:



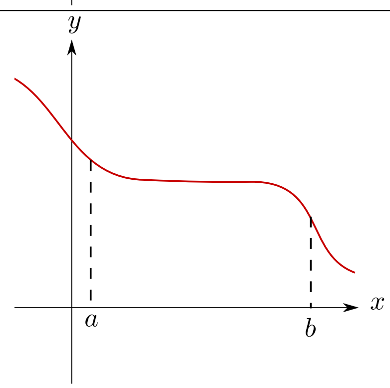
1. f **עולה מונוטונית** בתחום זה אם לכל $a,b \in D$

$$b > a \quad \Rightarrow \quad f(b) \geq f(a) \ ,$$



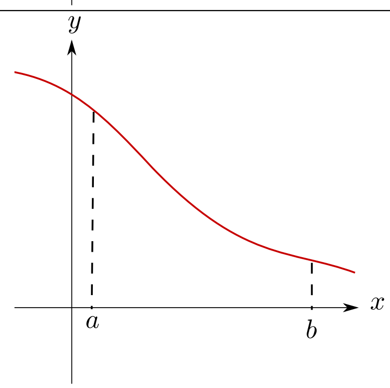
2. f **עולה מונוטונית ממש** בתחום זה אם לכל $a,b \in D$

$$b > a \quad \Rightarrow \quad f(b) > f(a) \ ,$$



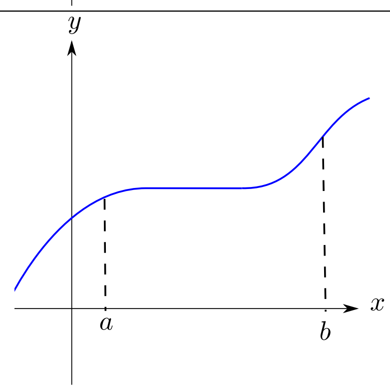
3. f **יורדת מונוטונית** בתחום זה אם לכל $a,b \in D$

$$b > a \quad \Rightarrow \quad f(b) \leq f(a) \ ,$$



4. f **יורדת מונוטונית ממש** בתחום זה אם לכל $a,b \in D$

$$b > a \quad \Rightarrow \quad f(b) < f(a) \ ,$$

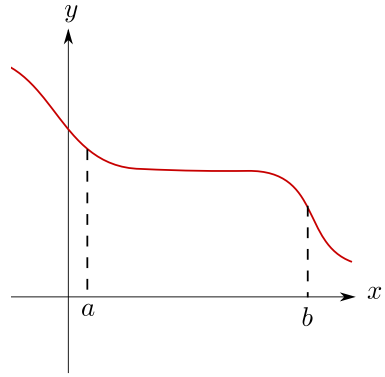


5. f **לא יורדת** בתחום זה אם לכל $a,b \in D$

$$b > a \quad \Rightarrow \quad f(b) \geq f(a) \ ,$$

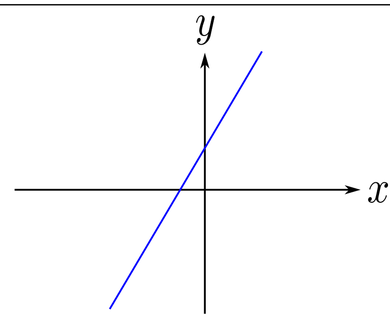
6. f **לא עולה** בתחום זה אם לכל $a, b \in D$

$$b > a \quad \Rightarrow \quad f(b) \leq f(a) \ ,$$

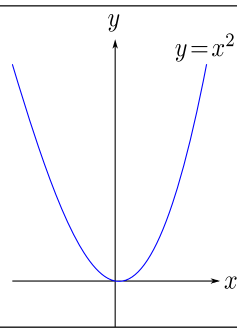


דוגמאות.

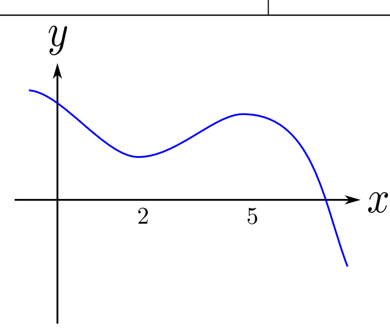
$f(x) = 2x + 1$ עולה מונוטונית ממש.



$f(x) = x^2$ עולה ממש בתחום $(0, \infty)$ ויורדת ממש בתחום $(-\infty, 0)$.



הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחומים $(-\infty, 2)$, $(5, \infty)$ ועולה בתחום $(2, 5)$.



III חסימות

1.7 הגדרה: (חסימות של פונקציה)

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בתחום D. אומרים כי:

1) f **חסומה מלמעלה** אם קיים מספר M כך שלכל $x \in D$ מתקיים

$$f(x) < M \ ,$$

2) f **חסומה מלמטה** אם קיים מספר m כך שלכל $x \in D$ מתקיים

$$f(x) > m \ ,$$

3) f **חסומה** אם קיים מספרים m ו- M כך שלכל $x \in D$ מתקיים

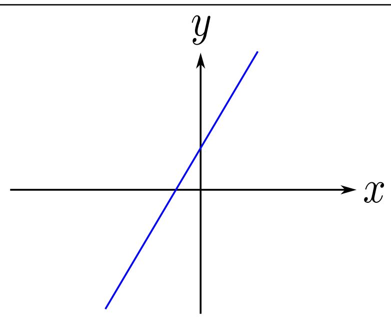
$$m < f(x) < M \ ,$$

או באופן שקול, אם קיים מספר M כך שלכל $x \in D$ מתקיים

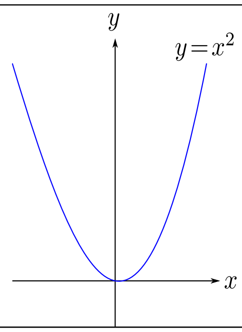
$$|f(x)| < M \ .$$

דוגמאות.

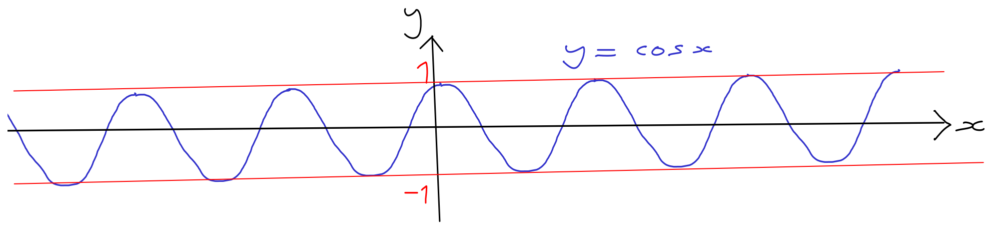
$f(x) = 2x + 1$ עולה מונוטונית ממש.

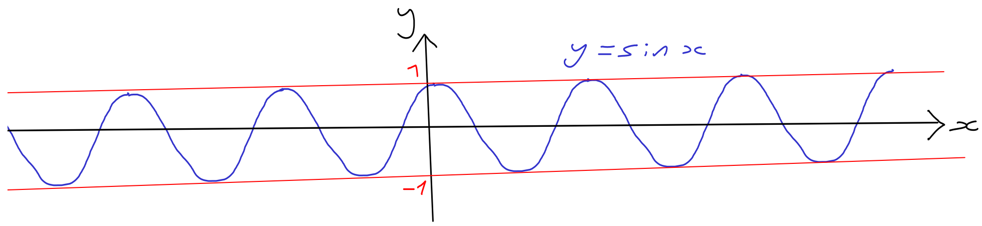


$y = x^2$ חסומה מלמטה אבל לא חסומה מלמעלה.



הפונקציות $y = \sin x$, $y = \cos x$ חסומות:
$-1 \le \sin x \le 1$, $-1 \le \cos x \le 1$.





IV מחזוריות

1.8 הגדרה: (פונקציה מחזורית)
פונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום D נקראת מחזורית אם קיים מספר $T>0$ כך שלכל $x\in D$ גם $x\pm T\in D$.

$$f(x+T)=f(x)\ ,\qquad f(x-T)=f(x)\ .$$

מספר $T>0$ כזה הקטן ביותר נקרא **המחזור** של f.

דוגמאות.

$T=2\pi$	$y=\sin x$
$T=2\pi$	$y=\cos x$
$T=\pi$	$y=\tan x$
$T=\pi$	$y=\cot x$

דוגמא.
תהי $f(x)=\sin(2x+3)$. נחפש את המחזור של T.

$$f(x+T)=f(x)\qquad \rightsquigarrow \qquad \sin(2(x+T)+3)=\sin((2x+3)+2T)=\sin(2x+3)\ .$$

לכן $2T=2\pi\ \Leftarrow\ T=\pi$.

פונקציה הפוכה

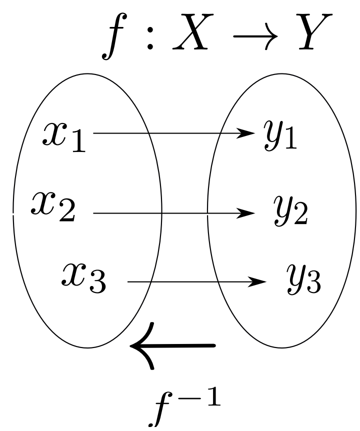
1.9 הגדרה: (פונקציה הפוכה)
תהי

$$f : X \to Y$$

פונקציה. אם $f(x)$ חד חד ערכית אז ניתן להגדיר פונקציה הפוכה, שתסומן $f^{-1} : \mathrm{Dom}(f) \to X$ באופן הבא.

$$f(x) = y \qquad \Leftrightarrow \qquad x = f^{-1}(y) \ .$$

$$f^{-1}(y_1) = x_1 \ ,$$
$$f^{-1}(y_2) = x_2 \ ,$$
$$f^{-1}(y_3) = x_3 \ .$$



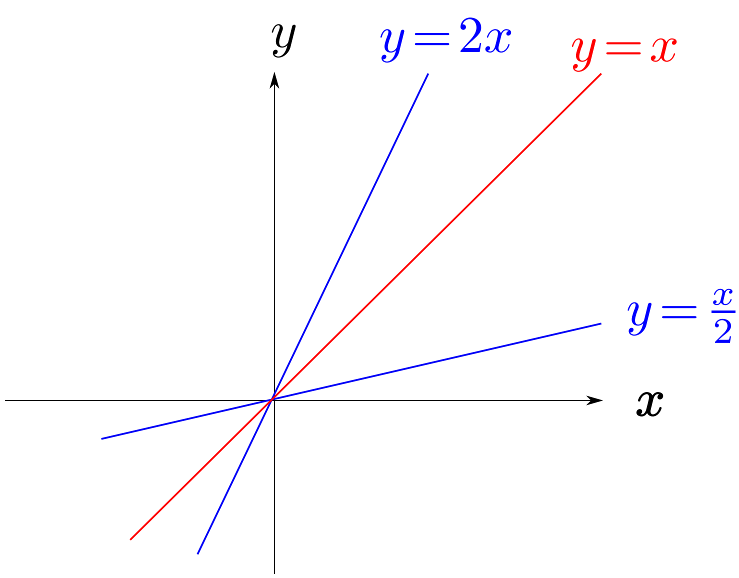
דוגמאות.

1) $f(x) = 2x$.

$$y = 2x \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{y}{2}$$

לכן

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2} \ .$$

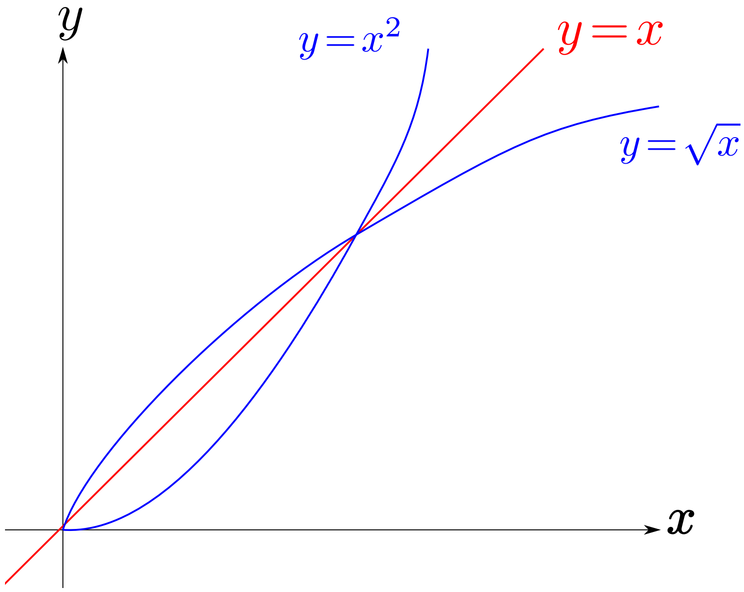


2) $x \geq 0$,$f(x) = x^2$.

$$y = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt{y}$$

לכן

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \ .$$



1.10 הערה. הגרפים של שתי פונקציות הפוכות אחד לשניה סימטריים ביחס לקו $y = x$. ■

1.11 משפט. (תחום הגדרה ותמונה של פונקציה הפוכה)
שים לב לפי הגדרה של פונקציה הפוכה, התמונה של f שווה לתחום ההגדרה של f^{-1} ולהפך.

דוגמא.
נתונה הפונקציה

$$y = \sqrt{x+5} - 2 \ .$$

מצאו את

1) תחום הגדרה ותמונה של הפונקציה

2) פונקציה ההפוכה

3) תחום הגדרה של פונקציה ההפוכה

4) התמונה של פונקציה ההפוכה

5) צייר הגרפים שלהם.

פיתרון.

1) <u>תחום ההגדרה של הפונקציה:</u>

.$[-5,\infty)$

<u>תמונה של הפונקציה:</u>

$[-2,\infty)$

2) <u>פונקציה ההפוכה:</u>

$$y=\sqrt{x+5}-2 \qquad \Rightarrow \qquad x=(y+2)^2-5$$

לכן פונקציה ההפוכה היא

$$f^{-1}(x)=(x+2)^2-5\ .$$

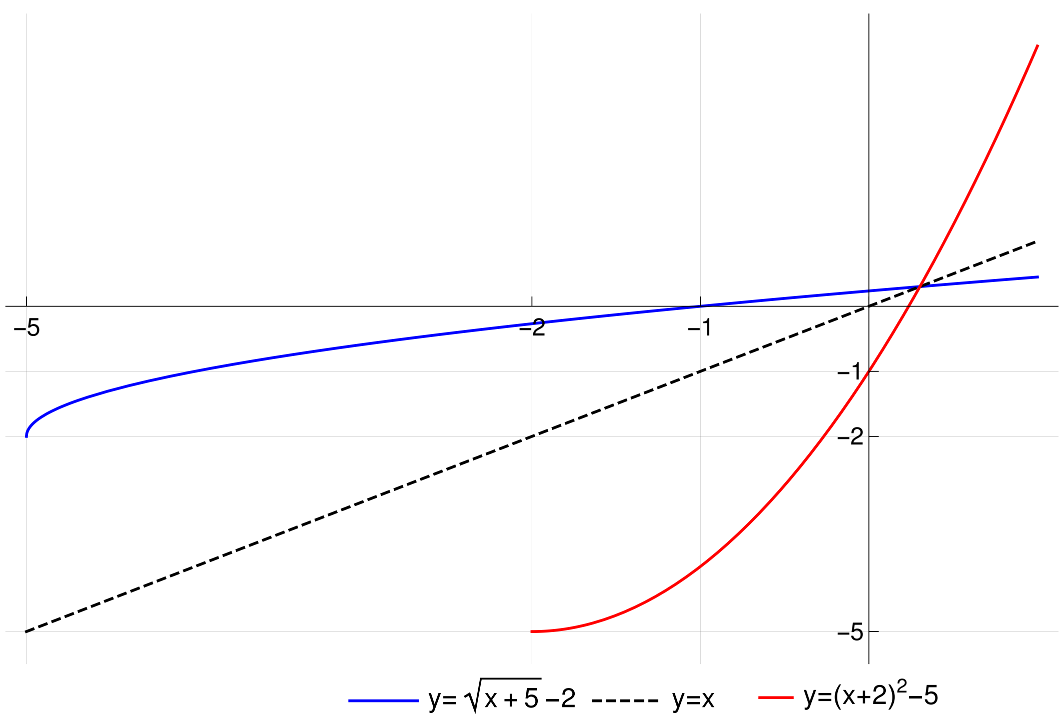
3) <u>תחום הגדרה של פונקציה ההפוכה :</u>

.$[-2,\infty)$

4) <u>התמונה של פונקציה ההפוכה:</u>

.$[-5,\infty)$

5) <u>שירטוט של הגרפים של f ו- f^{-1}:</u>



■

פונקציה מורכבת

1.12 הגדרה: (פונקציה מורכבת)
נניח ש $y = f(u)$ ו- $u = g(x)$, אז לפונקציה $y = f(g(x))$ קוראים **פונקציה מורכבת**.

דוגמאות.

1)
$$y = \sin(x^2)$$
הוא פונקציה המורכבת מהפונקציה $y = \sin u$ ו- $u = x^2$.

2)
$$y = e^{\sqrt{x}}$$
הוא פונקציה המורכבת מהפונקציה $y = e^u$ ו- $u = \sqrt{x}$.

3)
$$y = \frac{1}{(x^2-3)^3}$$
הוא פונקציה המורכבת מהפונקציה $y = \frac{1}{u^3}$ ו- $u = x^2 - 3$.

טרנספורמציות של הגרפים במערכת הצירים

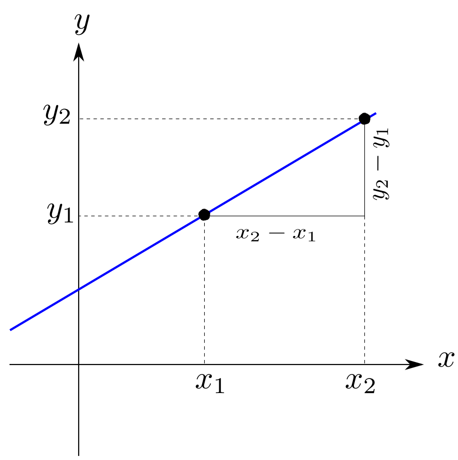
תהי f פונקציה כלשהי. להלן מתואר מה יקרה עם הגרף $y = f(x)$ תחת הטרנספורמציות הבאות:

.1	$f(x)+a$	הזזת הגרף ב- $\lvert a\rvert$ יחידות למעלה אם $a > 0$ או למטה אם $a < 0$.
.2	$f(x+a)$	הזזת הגרף ב- $\lvert a\rvert$ יחידות שמאלה אם $a > 0$ או ימינה אם $a < 0$.
.3	$-f(x)$	היפוך של הגרף לעומת ציר ה- x (שיקוף הגרף ביחס לציר ה-x).
.4	$f(-x)$	היפוך של הגרף לעומת ציר ה- y (שיקוף הגרף ביחס לציר ה-y).
.5	$k \cdot f(x)$	$(k > 0)$ מתיחה, אם $k > 1$, או כיווץ, אם $0 < k < 1$, של הגרף בכיוון של ציר ה- y.
.6	$f(k \cdot x)$	$(k > 0)$ כיווץ, אם $k > 1$, או מתיחה, אם $0 < k < 1$, של הגרף בכיוון של ציר ה- x.
.7	$\lvert f(x)\rvert$	שיקוף של חלקי הגרף הנמצאים מתחת לציר ה-x לעומת ציר ה- x
.8	$f(\lvert x\rvert)$	החלפת חלק הגרף הנמצא משמאל לציר y בשיקופו של החלק הימין של הגרף לעומת ציר ה- y
.9	$f(-\lvert x\rvert)$	החלפת חלק הגרף הנמצא מימין לציר y לשיקוף של החלק השמאלי של הגרף לעומת ציר ה- y
.10	$\lvert f(x)-a\rvert+a$	שיקוף לעומת ישר $y = a$ של חלקי הגרף הנמצאים מתחת לישר זה
.11	$f(\lvert x-a\rvert+a)$	ההחלפת החלק הגרף הנמצא משמאל לישר $x = a$ לשיקוף לעומת ישר זה של חלק הגרף אשר מימין לישר $x = a$

פונקציות אלמנטריות בסיסיות

קו ישר

1.13 כלל: (שיפוע של גרף של קו ישר)
בהינתן גרף של קו ישר כמתואר בתרשים.



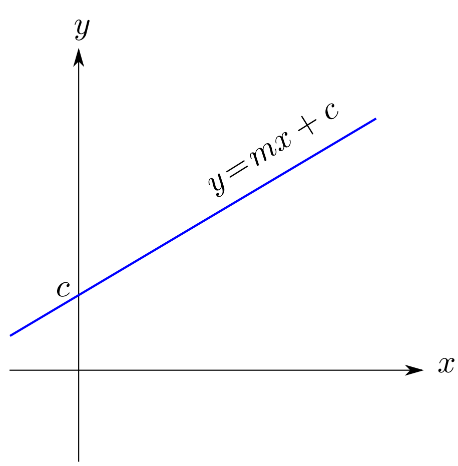
בכדי למצוא השיפוע, בוחרין כל שתי נקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) והשיפוע ניתן ע"י הנוסחה:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \ .$$

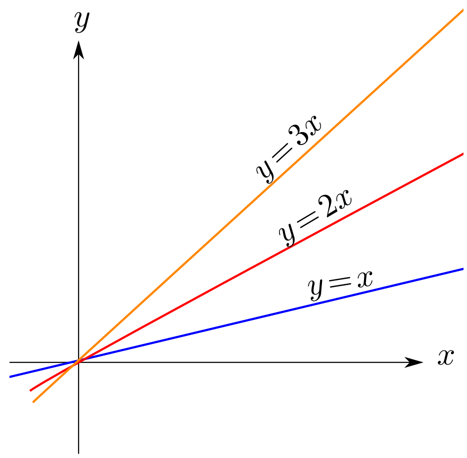
1.14 כלל: (גרף של קו ישר)
הפונקציה הניתנת ע"י הנוסחה

$$y = mx + c$$

הינה קו ישר עם שיפוע m שחותכת את ציר ה- y בנקודה $(0, c)$.

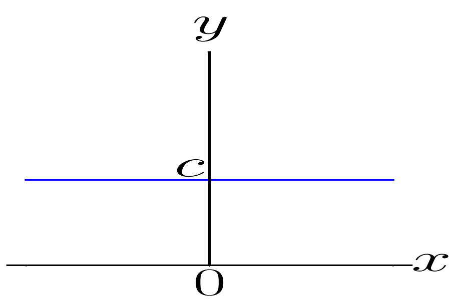


לכן ככל ש- m גדול יותר, השיפוע גבוה יותר (ולהפך).



---

1) פונקציה קבועה

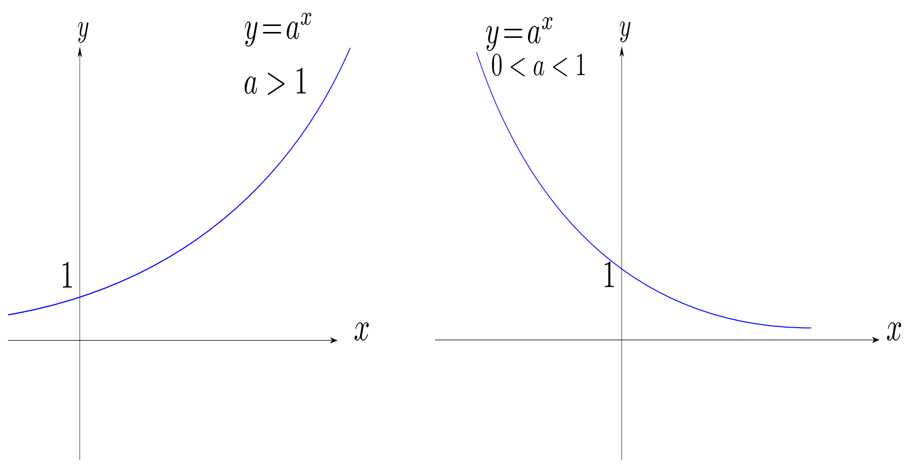


$y = c$.

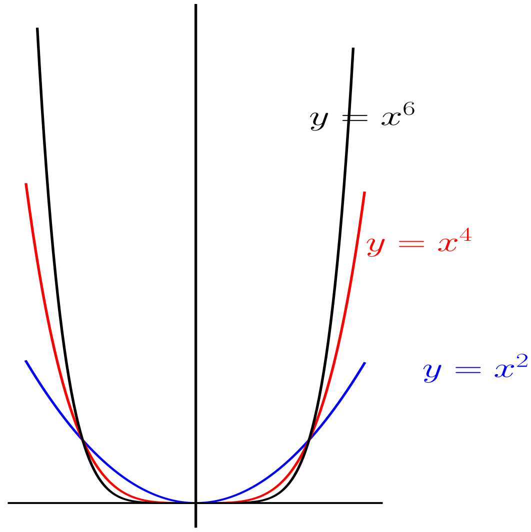
2) פונקציה מעריכית

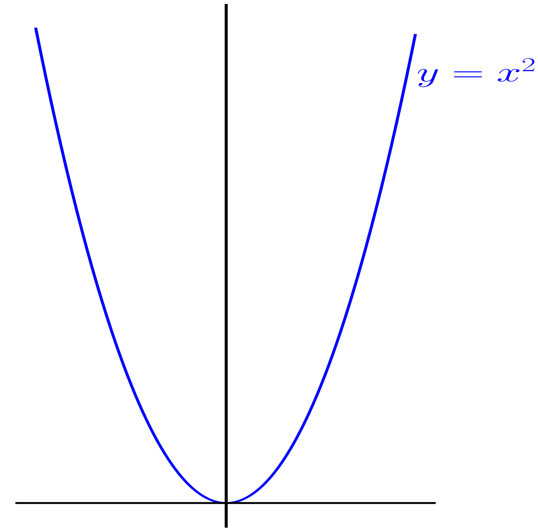
$$y = a^x \ , \qquad a \neq 1 \ , a > 0$$

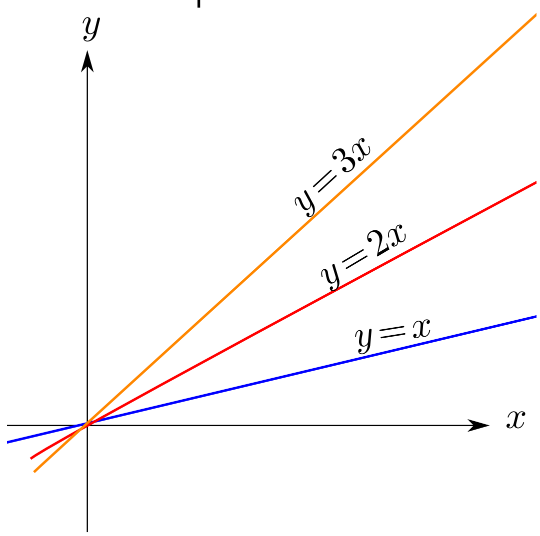
תחום הגדרה:	$\mathbb{R}$
התמונה:	$y \in (0,\infty)$.

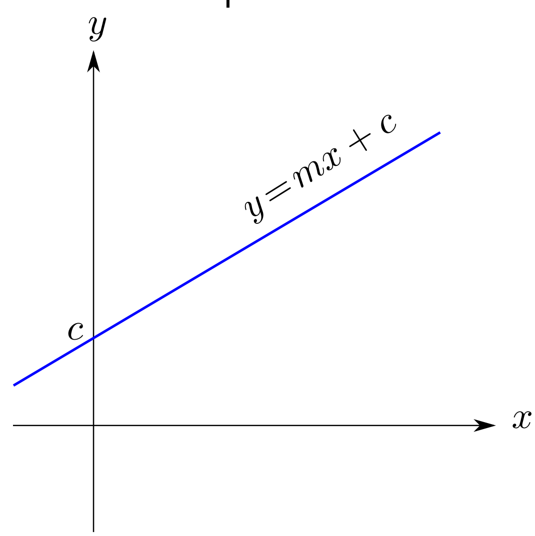


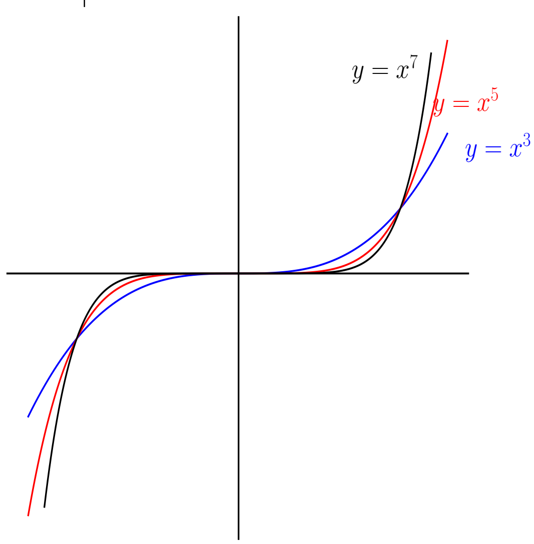
3) פונקציה חזקה

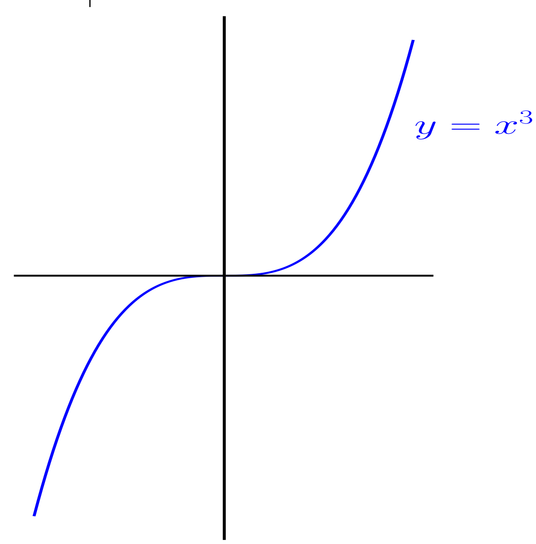

$y = x^6$
$y = x^4$
$y = x^2$

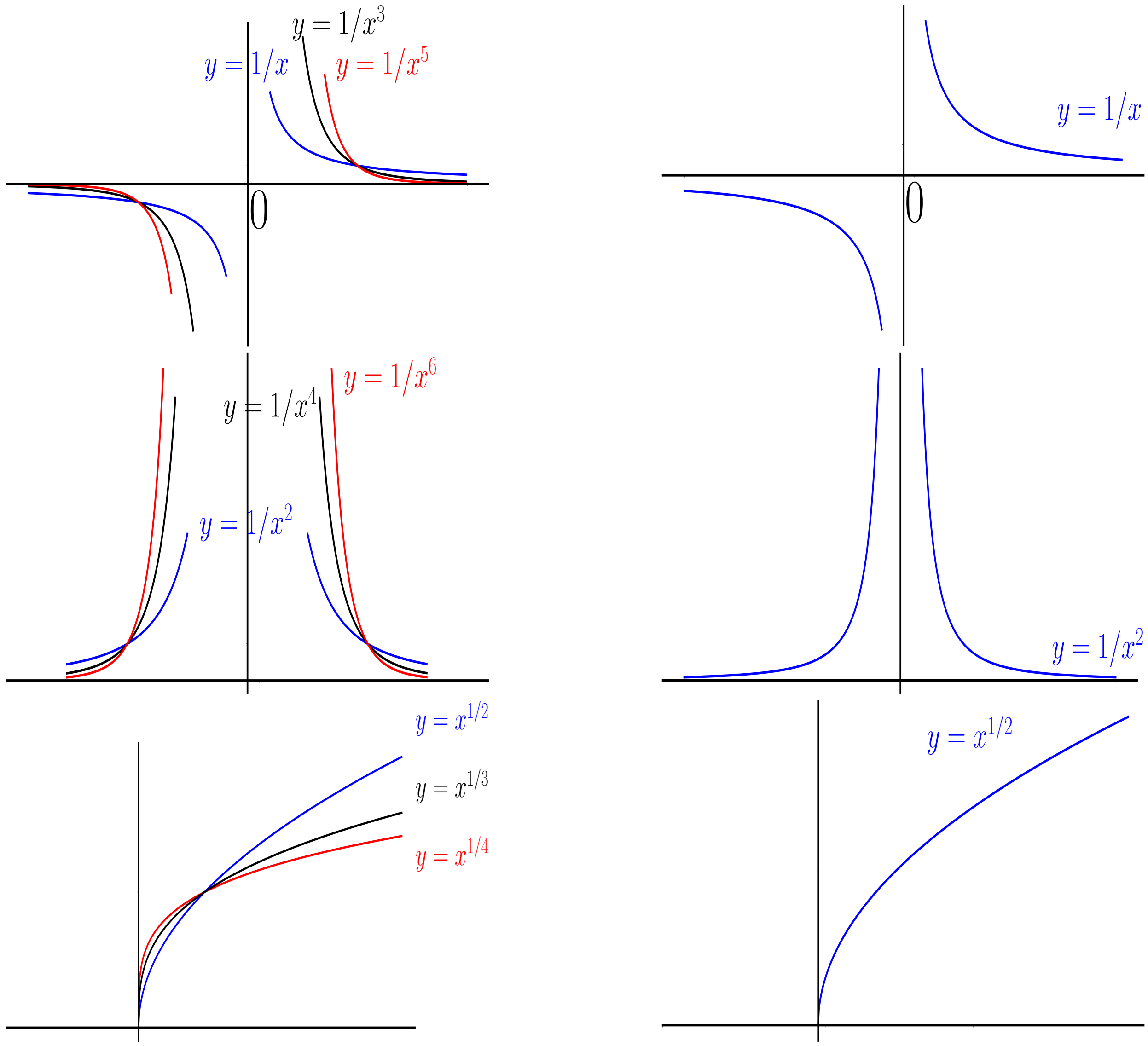

$y = x^2$


y
$y=3x$
$y=2x$
$y=x$
x


y
$y=mx+c$
c
x


$y = x^7$
$y = x^5$
$y = x^3$


$y = x^3$



4) **פונקציה לוגריתמית**

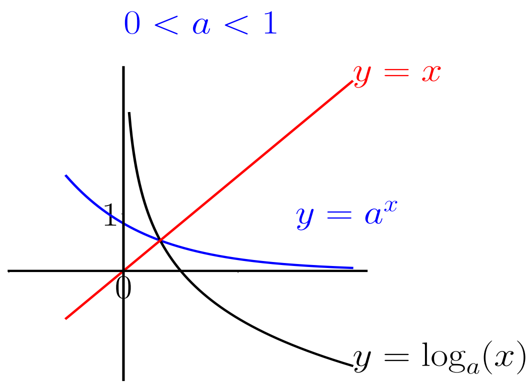
פונקציה לוגריתמית היא פונקציה הפוכה לפונקציה מעריכית. כלומר

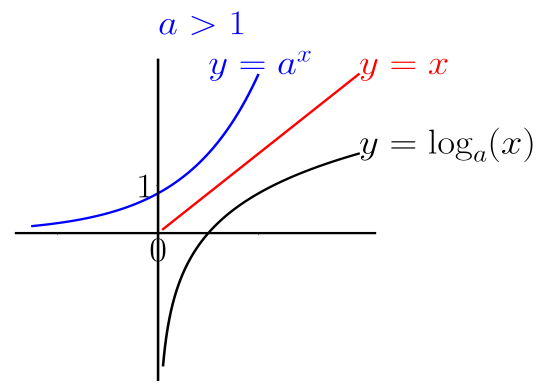
$$y=a^x$$

אם ורק אם $x=\log_a y$. מכאן נובע

$$a^{\log_a y}=y\ .$$

מכיוון שתחום הגדרה של $y=a^x$ הוא $\mathbb{R}$ והתמונה היא $y>0$, תחום ההגדרה של פונקציה $y=\log_a x$ הוא $x>0$. קיימים שני סוגים של גרף לפונקציה $y=\log_a x$:





<u>נוסחאות של $\log_a x$</u>

1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

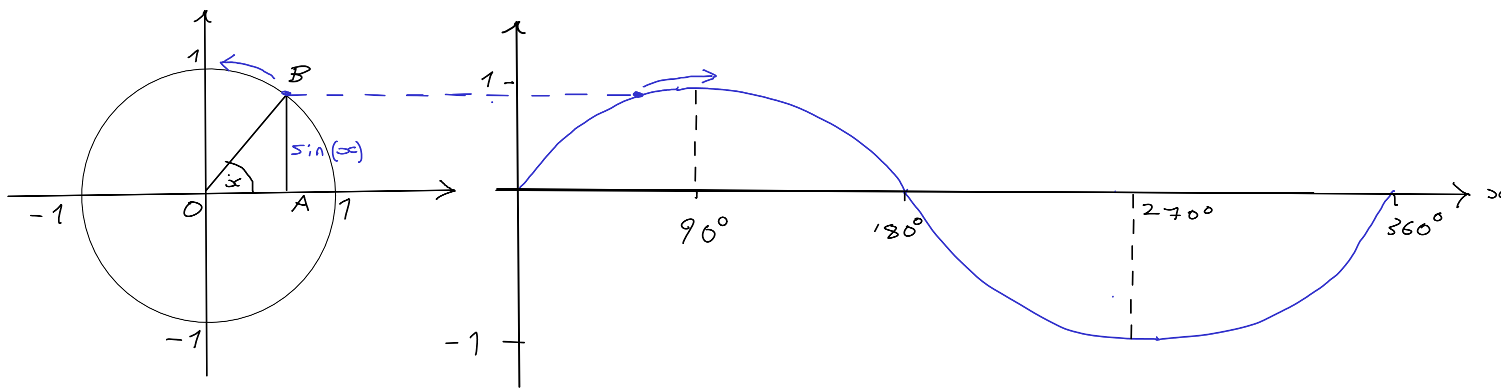
2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

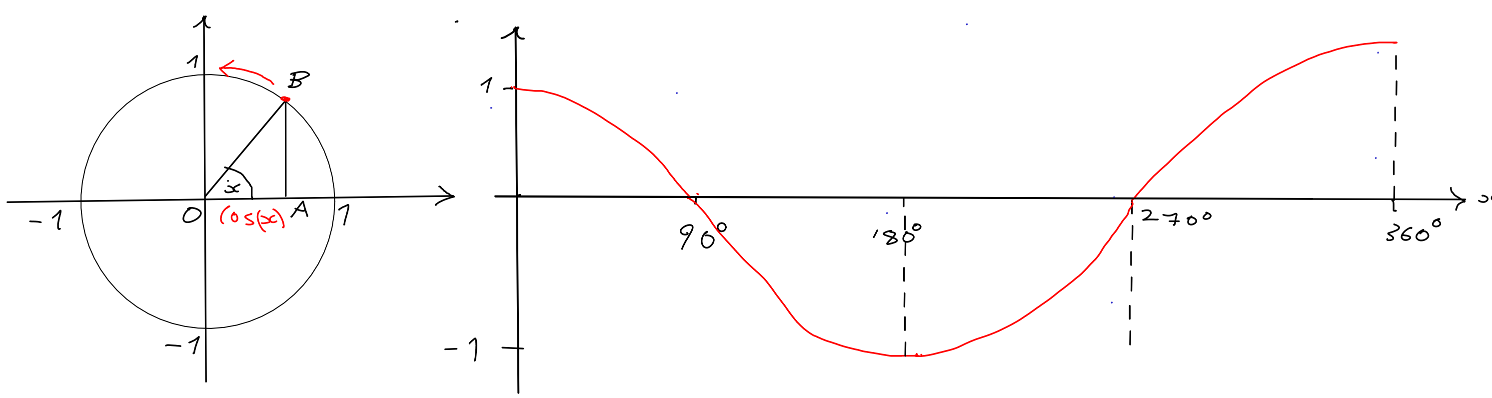
עבור $a = e$ מסמנים $\log_e x = \ln x$.

5) פונקציה טריגונומטריות

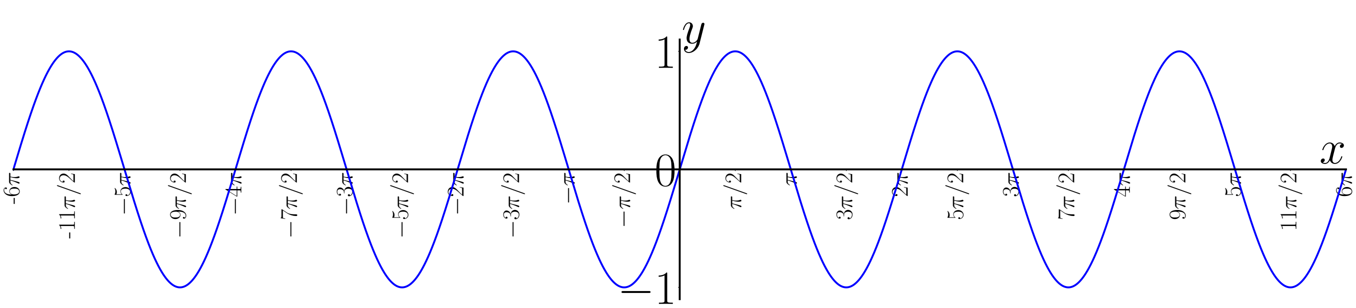
פונקציות הטריגונומטריות מוגדרות ע"י מעגל היידה:

$$\sin x = AB\ , \qquad \cos x = OA\ , \qquad \tan x = \frac{AB}{OA} = \frac{\sin x}{\cos x}\ , \qquad \cot x = \frac{OA}{AB} = \frac{\cos x}{\sin x}\ .$$





$\underline{y = \sin x}$



ערכים עיקריים:

$$\sin(0) = 0\ , \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1\ , \qquad \sin(\pi) = 0\ , \qquad \sin\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) = 1\ , \qquad \sin(2\pi) = 0\ .$$

פונקציה אי-זוגית:

$$\sin(-x) = -\sin(x)\ .$$

פונקציה מחזורית עם מחזור $T = 2\pi$:

$$\sin(x + 2\pi n) = \sin(x) \;, \quad n \in \mathbb{Z}$$

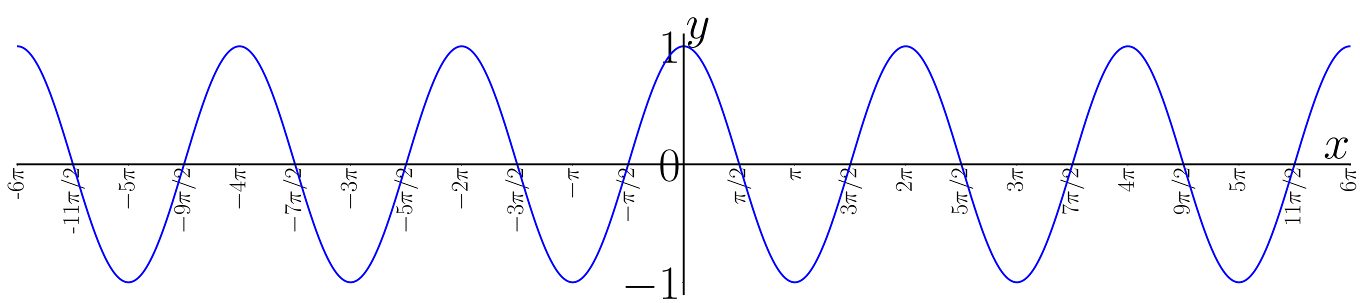
ערכים מחזוריים:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \;, \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1 \;, \quad \sin(n\pi) = 0 \;, \quad \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n \;, \quad n \in \mathbb{Z} \;.$$

ערכים שיקופיים:

$$\sin(\pi - x) = \sin x \;, \qquad \sin(x - \pi) = -\sin x \qquad \sin(x + \pi) = -\sin(x) \;.$$

$y = \cos x$



ערכים עיקריים:

$$\cos(0) = 1 \;, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \;, \qquad \cos(\pi) = -1 \;, \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \;, \qquad \cos(2\pi) = 0 \;.$$

פונקציה זוגית:

$$\cos(-x) = \cos(x) \;.$$

פונקציה מחזורית עם מחזור $T = 2\pi$:

$$\cos(x + 2\pi n) = \cos(x) \;, \quad n \in \mathbb{Z}$$

ערכים מחזוריים:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0 \;, \qquad \cos(2\pi n) = 1 \;, \qquad \cos(\pi + 2\pi n) = -1 \;, \qquad \cos(n\pi) = (-1)^n \;, \qquad n \in \mathbb{Z} \;.$$

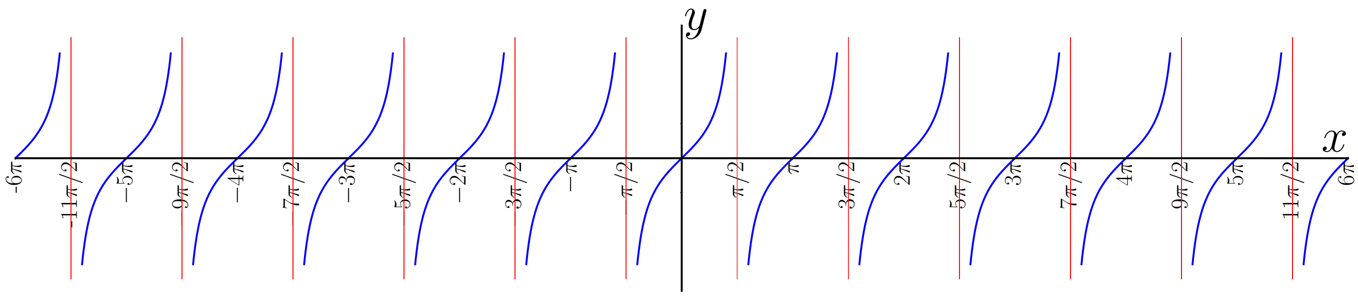
ערכים שיקופיים:

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \;, \qquad \cos(x - \pi) = -\cos x \qquad \cos(x + \pi) = -\cos(x) \;.$$

$y = \tan x$

תחום הגדרה:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \;, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \;.$$



ערכים עיקריים:

$$\tan(0)=0\ , \qquad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1\ , \qquad \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1\ , \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)\to\infty\ , \qquad \tan\left(-\frac{\pi}{2}\right)\to-\infty\ .$$

פונקציה אי-זוגית:

$$\tan(-x)=-\tan(x)\ .$$

פונקציה מחזורית עם מחזור $T=\pi$:

$$\tan(x+\pi n)=\tan(x)\ , \quad n\in\mathbb{Z}$$

ערכים מחזוריים:

$$\tan\left(\frac{|n|\pi}{2}\right)\to\infty\ , \qquad \tan\left(-\frac{|n|\pi}{2}\right)\to-\infty\ , \qquad \tan(n\pi)=0\ , \qquad n\in\mathbb{Z}\ .$$

ערכים שיקופיים:

$$\tan(\pi-x)=-\tan x\ , \qquad \tan(x-\pi)=\tan x \qquad \tan(x+\pi)=\tan(x)\ .$$

6) פונקציה טריגונומטריות הפוכות

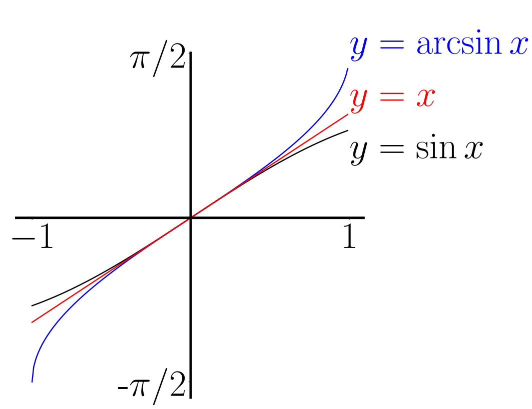
$$y=\arcsin x\ , \qquad y=\arccos x\ , \qquad y=\arctan x\ .$$

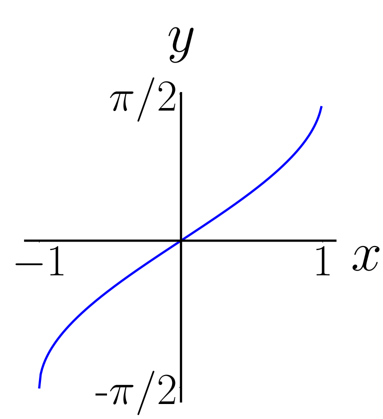
$y=\arcsin x$

$y=\arcsin x$ היא פונקציה הפוכה ל- $y=\sin x$ בתחום $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$.

$$y=\sin x\ , \qquad -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\ , \qquad -1\leq y\leq 1$$

לכן תחום ההגדרה של $y=\arcsin x$ הוא $-1\leq x\leq 1$ והתמונה של $y=\arcsin x$ היא $-\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}$.





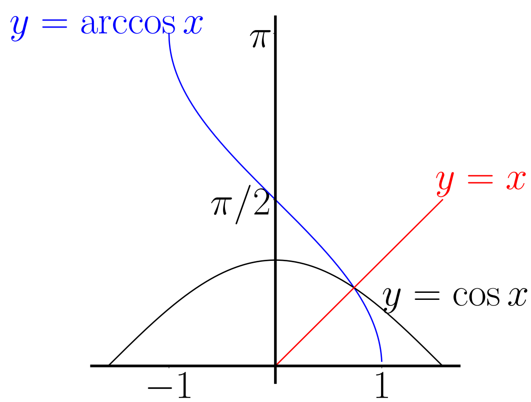
$\underline{y = \arccos x}$

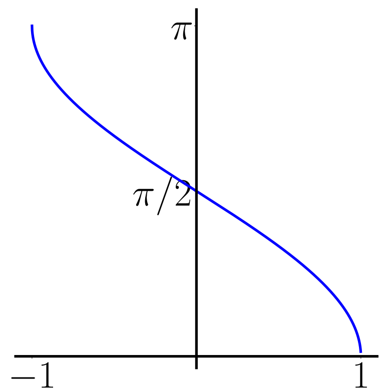
$y = \arccos x$ היא פונקציה הפוכה ל- $y = \cos x$ בתחום $0 \le x \le \pi$. זאת אומרת

$$y = \cos x \ , \qquad 0 \le x \le \pi \ , \qquad -1 \le y \le 1$$

לכן

$$y = \arccos x \ , \qquad -1 \le x \le 1 \ , \qquad 0 \le y \le \pi \ .$$





$\underline{y = \arctan x}$

$y = \arctan x$ היא פונקציה הפוכה ל- $y = \tan x$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. זאת אומרת

$$y = \tan x \ , \qquad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \ , \qquad -\infty \le y \le \infty$$

לכן

$$y = \arctan x \ , \qquad -\infty \le x \le \infty \ , \qquad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \ .$$