

שיעור 2

חוגים מתמטיים

2.1 הפונקציה אוילר

הגדרה 2.1 פונקציה אוילר

יהי m מספר שלם. הפונקציה אוילר מסומנת $\phi(m)$ ומוגדרת להיות כמות השלמים שקטנים ממש m וזרים ביחס ל- m .

$$\phi(m) := |\{a \in \mathbb{N} \mid \gcd(a, m) = 1, a < m\}|.$$

דוגמה 2.1

מכיוון ש- $26 = 2 \times 13$, הערכים של a עבורם $\gcd(a, 26) = 1$ הם

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25\}.$$

ז"א יש בדיוק 12 ערכים של a עבורם $\gcd(a, 26) = 1$.

$$\phi(26) = 12.$$

משפט 2.1 הפירוק לראשוניים של פונקציה אוילר

יהי $m \geq 2$ מספר שלם ונניח כי הפירוק למספרים ראשוניים שלו הוא

$$m = \prod_{i=1}^n p_i^{e_i}.$$

אזי

$$\phi(m) = \prod_{i=1}^n (p_i^{e_i} - p_i^{e_i-1}).$$

דוגמה 2.2

מצאו את $\phi(60)$.

פתרון:

$$60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \text{ לכן}$$

$$\phi(60) = (2^2 - 2^1) (3^1 - 3^0) (5^1 - 5^0) = (2)(2)(4) = 16.$$

דוגמה 2.3

חשבו את $\phi(24)$

פתרון:

$$24 = 2^3 3^1 .$$

לכן

$$\phi(24) = (2^3 - 2^2)(3^1 - 3^0) = (8 - 4)(3 - 1) = 8 .$$

משפט 2.2

אם p מספר ראשוני אז

$$\phi(p) = p - 1 .$$

הוכחה: תרגיל בית.

משפט 2.3

אם p מספר ראשוני אז

$$\phi(p^n) = p^n - p^{n-1} .$$

הוכחה: תרגיל בית.

משפט 2.4

אם a, b שלמים זרים (כלומר $\gcd(a, b) = 1$) אז

$$\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b) .$$

הוכחה:

• נניח ש- a, b זרים.• נניח שהפירוקים לראשוניים של a ו- b הם:

$$a = p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n} , \quad b = q_1^{f_1} \dots q_m^{f_m} .$$

• a ו- b זרים לכן הראשוניים בין השני הפירוקים כולם שונים, כלומר $p_i \neq q_j$ לכל $1 \leq i, j \leq \min n, m$.• לכן אם הפירוק לראשוניים של ab הוא

$$ab = p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n} q_1^{f_1} \dots q_m^{f_m} .$$

• מכאן

$$\phi(ab) = (p_1^{e_1} - p_1^{e_1-1}) \dots (p_n^{e_n} - p_n^{e_n-1}) (q_1^{f_1} - q_1^{f_1-1}) \dots (q_m^{f_m} - q_m^{f_m-1}) = \phi(a)\phi(b) .$$

משפט 2.5

אם p ו- q מספרים ראשוניים שונים אז

$$\phi(p \cdot q) = (p - 1)(q - 1) .$$

הוכחה: תרגיל בית.

2.2 החוג \mathbb{Z}_m

הגדרה 2.2 החוג \mathbb{Z}_m

החוג \mathbb{Z}_m מוגדר להיות הקבוצה של מספרים שלמים

$$\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m - 1\}$$

יחד עם הפעולות \oplus ו- \odot המוגדרות כך:

לכל $a, b \in \mathbb{Z}_m$,

$$a \oplus b = (a + b) \bmod m \quad a \odot b = ab \bmod m .$$

במילים אחרות, \mathbb{Z}_m היא קבוצת השארית בחלוקה ב- m .

מכאן ואילך נסמן חיבור וכפל ב- \mathbb{Z}_m עם הסימנים הרגילים $+$ ו- \times או \cdot .

דוגמה 2.4

חשבו את 11×13 ב- \mathbb{Z}_{16} .

פתרון:

$$11 \times 13 = 143 . \text{ נמצא את השארית בחלוקה ב- } 16 :$$

$$(11 \times 13) \bmod 16 = 143 \bmod 16 = 15 .$$

לפיכך $11 \times 13 = 15$ ב- \mathbb{Z}_{16} .

משפט 2.6 תכונות של החוג \mathbb{Z}_m

לכל $a, b, c \in \mathbb{Z}_m$ התנאים הבאים מתקיימים.

1. סגירה תחת חיבור:

$$a + b \in \mathbb{Z}_m .$$

2. חוק החילוף לחיבור:

$$a + b = b + a .$$

3. חוק הקיבוץ לחיבור:

$$(a + b) + c = a + (b + c) .$$

4. קיום איבר הניטרלי ביחס לחיבור:

$$a + 0 = 0 + a = a .$$

5. האיבר הנגדי של a הוא $m - a$, ז"א $-a = m - a$. הסבר:

$$a + (m - a) = (m - a) + a = m = 0$$

ב- \mathbb{Z}_m .

6. סגירה תחת כפל:

$$ab \in \mathbb{Z}_m.$$

7. חוק החילוף לכפל:

$$ab = ba.$$

8. חוק הקיבוץ לכפל:

$$(ab)c = a(bc).$$

9. קיום איבר הניטרלי ביחס לכפל:

$$a \times 1 = 1 \times a = a.$$

10. חוק הפילוג:

$$(a + b)c = (ac) + (bc).$$

תכונות 1, 3-5 אומרות כי \mathbb{Z}_m הינו "חבורה מתמטית".

יחד עם תכונה 2, \mathbb{Z}_m הוא חבורה אָבֵלִית.

כל התכונות 1-10 אומרות כי \mathbb{Z}_m הוא חוג מתמטי.

הגדרה 2.3 איבר ההופכי ב- \mathbb{Z}_m

יהי $a \in \mathbb{Z}_m$. האיבר ההופכי של a מסומן ב- a^{-1} ומקיים את התנאי

$$aa^{-1} \equiv 1 \pmod{m} \quad \text{וגם} \quad a^{-1}a \equiv 1 \pmod{m}.$$

משפט 2.7

נתון היחס שקילות

$$ax \equiv y \pmod{m}.$$

יש פתרון יחיד $x \in \mathbb{Z}_m$ לכל $y \in \mathbb{Z}_m$ אם ורק אם $\gcd(a, m) = 1$.

הוכחה:

כיוון \Leftarrow

נניח בשלילה כי למשוואה $ax \equiv y \pmod{m}$ יש פתרון יחיד $x = x_1$ אבל $\gcd(a, m) = d > 1$.

אזי $ax_1 \equiv y \pmod{m}$ ולכן קיים q שלם עבורו $ax_1 = qm + y$.

לכן $\frac{am}{d}$ הוא שלם ולכן $ax_1 + \frac{am}{d} = qm + y + \frac{am}{d}$.

מכאן $a\left(x_1 + \frac{m}{d}\right) = \left(q + \frac{a}{d}\right)m + y$, ז"א קיים שלם $Q = q + \frac{a}{d}$ כך ש-

$$a\left(x_1 + \frac{m}{d}\right) = Qm + y \Rightarrow a\left(x_1 + \frac{m}{d}\right) \equiv y \pmod{m}$$

ולכן $ax_2 \equiv y \pmod{m}$ כאשר $x_2 = x_1 + \frac{m}{d}$.

לכן x_2 הוא גם פתרון, בסתירה לכך שיש רק פתרון יחיד.

כיוון \Rightarrow

ננחיש ש: $\gcd(a, m) = 1$ ונניח בשלילה כי יש שני פתרונות $x_1 \not\equiv x_2 \pmod{26}$. כלומר:

$$ax_1 \equiv y \pmod{m} \quad \text{ו-} \quad ax_2 \equiv y \pmod{m} .$$

לפי טרנזיטיביות $ax_1 \equiv ax_2 \pmod{m}$ ולכן $m \mid a(x_1 - x_2)$.

■ $\gcd(a, m) = 1$ ולכן $m \nmid a$ ולכן $m \mid x_1 - x_2$ לכן $x_1 \equiv x_2 \pmod{26}$, בסתירה לכך ש- $x_1 \not\equiv x_2 \pmod{26}$.

מסקנה 2.1

יהי $a \in \mathbb{Z}_m$. קיים איבר הופכי $a^{-1} \in \mathbb{Z}_m$ כך ש- 2.3 מקיים את התנאי

$$aa^{-1} \equiv 1 \pmod{m} ,$$

אם ורק אם $\gcd(a, m) = 1$.

הוכחה:

כיוון \Leftarrow

נניח ש- $\gcd(a, m) = 1$. לכן לפי משפט בזו קיימים שלמים x, y כך ש- $xa + ym = 1$. נבעיר אגפים ונקבל: $xa \equiv 1 \pmod{m}$ ולכן $xa = 1 - ym$.

כיוון \Rightarrow

נניח ש- $ax \equiv 1 \pmod{m}$. אזי קיים שלם q עבורו $ax = qm + 1$. נעביר אגפים ונקבל: $ax + (-q)m = 1$. לכן קיימים שלמים x ו- $y = -q$ כך ש: $ax + ym = 1$. לכן לפי משפט בזו, $\gcd(a, m) = 1$.

דוגמה 2.5

הוכיחו שקיים איבר הופכי ל- 11 ב- \mathbb{Z}_{26} ואם כן מצאו אותו.

פתרון:

קיים איבר הופכי של a ב- \mathbb{Z}_m אם ורק אם $\gcd(a, m) = 1$. לכן נבדוק את ה- $\gcd(26, 11)$ באמצעות האלגוריתם של אוקליד המוכלל. יהיו $a = 26, b = 11$.

$$\begin{aligned} r_0 &= a = 26 , & r_1 &= b = 11 , \\ s_0 &= 1 , & s_1 &= 0 , \\ t_0 &= 0 , & t_1 &= 1 . \end{aligned}$$

$q_1 = 2$	$r_2 = 26 - 2 \cdot 11 = 4$	$s_2 = 1 - 2 \cdot 0 = 1$	$t_2 = 0 - 2 \cdot 1 = -2$	שלב $i = 1$
$q_2 = 2$	$r_3 = 11 - 2 \cdot 4 = 3$	$s_3 = 0 - 2 \cdot 1 = -2$	$t_3 = 1 - 2 \cdot (-2) = 5$	שלב $i = 2$
$q_3 = 1$	$r_4 = 4 - 1 \cdot 3 = 1$	$s_4 = 1 - 1 \cdot (-2) = 3$	$t_4 = -2 - 1 \cdot (5) = -7$	שלב $i = 3$
$q_4 = 3$	$r_5 = 3 - 3 \cdot 1 = 0$	$s_5 = -2 - 3 \cdot (3) = -11$	$t_5 = 5 - 3 \cdot (-7) = 28$	שלב $i = 4$

$$\gcd(a, b) = r_4 = 1, \quad x = s_4 = 3, \quad y = t_4 = -7.$$

$$ax + by = 3(26) - 7(11) = 1.$$

מכאן אנחנו רואים כי $\gcd(26, 11) = 1$ ולכן לפי משפט 2.7 ההופכי של 11 קיים ב- \mathbb{Z}_{26} . מחשבים את האיבר ההופכי לפי השיטה הבאה:

$$-7(11) = 1 - 9(26) \Rightarrow -7(11) \equiv 1 \pmod{26} \Rightarrow 19(11) \equiv 1 \pmod{26} \Rightarrow 11^{-1} \equiv 19 \pmod{26}.$$

■

כלל 2.1

האיברים של \mathbb{Z}_{26} שעבורם קיימים איברים הופכיים הינם

1^{-1}	3^{-1}	5^{-1}	7^{-1}	9^{-1}	11^{-1}	15^{-1}	17^{-1}	19^{-1}	21^{-1}	23^{-1}	25^{-1}
1	9	21	15	3	19	7	23	11	5	17	25

הגדרה 2.4 פונקציית אוילר $\phi(m)$

נתון החוג \mathbb{Z}_m כאשר $m \geq 2$ מספר טבעי.

$\phi(m)$ תוגדר להיות הפונקציה הנותנת את מספר איברים ב- \mathbb{Z}_m אשר זרים ל- m .

(שימו לב ההגדרה הזאת זהה להגדרה 2.1).

מסקנה 2.2 מספר איברים הפיכיים ב- \mathbb{Z}_m

מספר האיברים של החוג \mathbb{Z}_m שעבורם קיימים איברים הופכיים שווה ל- $\phi(m)$.

הוכחה: $\phi(m)$ שווה למספר איברים $a \in \mathbb{Z}_m$

עבורם $\gcd(a, m) = 1$, ולפי משפט 2.1 אותם האיברים הם האיברים ההפיכיים של \mathbb{Z}_m .

■

2.3 הפיכת מטריצות בחוג \mathbb{Z}_m

הגדרה 2.5 המטריצה של קופקטורים

תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

הקופקטור ה- (i, j) של A מוגדר להיות הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת מ- A ע"י מחיקת שורה i ועמודה j , כפול $(-1)^{i+j}$.

המטריצה של קופקטורים של המטריצה A מוגדרת

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

כאשר C_{ij} הקופקטור ה- (i, j) של A .

הגדרה 2.6 המטריצה המצורפת

תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. המטריצה המצורפת של A היא מטריצה מסדר $n \times n$ שמסומנת $\text{adj}(A)$ ומוגדרת

$$\text{adj}(A) = C^t$$

כאשר C המטריצה של קופקטורים של A .

משפט 2.8 נוסחת למטריצה ההופכית

נניח כי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית. אם A הפיכה, (כלומר אם $|A| \neq 0$) אז המטריצה ההופכית נתונה ע"י נוסחת קיילי המילטון:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A),$$

כאשר $\text{adj}(A)$ המטריצה המצורפת של A .

דוגמה 2.6

מצאו את ההופכית של

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{2 \times 2}.$$

פתרון:

$$|A| = 11 \cdot 7 - 8 \cdot 3 = 53 = 1 \pmod{26}.$$

$\gcd(1, 26) = 1$ לכן המטריצה הפיכה ב- \mathbb{Z}_{26} .

$$\begin{pmatrix} \cancel{11} & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{11} = (-1)^{1+1} 7 = 7$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{11} & \cancel{8} \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{12} = (-1)^{1+2} 3 = -3$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ \cancel{3} & \cancel{7} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{21} = (-1)^{2+1} 8 = -8$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & \cancel{7} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{22} = (-1)^{2+2} 11 = 11$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = C^t = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = |A|^{-1} \text{adj}(A) .$$

$$|A|^{-1} = 1^{-1} = 1 \in \mathbb{Z}_{26}$$

לפיכך

$$A^{-1} = |A|^{-1} \text{adj}(A) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 22 \\ 23 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{2 \times 2} .$$

■

2.7 דוגמה

מצאו את ההופכית של

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3 \times 3} .$$

פתרון:

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 15 + 1 \cdot (-10) = 5 .$$

$$\gcd(15, 26) = 1 \text{ לכן המטריצה הפיכה ב- } \mathbb{Z}_{26} .$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & 0 & \cancel{1} \\ 0 & 5 & 0 \\ \cancel{2} & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 15 .$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 .$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & 0 & \cancel{1} \\ 0 & 5 & \cancel{0} \\ 2 & 0 & \cancel{3} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -10 .$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{0} \\ \cancel{2} & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{0} \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} \\ \cancel{0} & 5 & \cancel{0} \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 .$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = C^t = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -10 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 21 \\ 0 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3 \times 3} .$$

$$A^{-1} = |A|^{-1} \text{adj}(A) .$$

$$|A|^{-1} = 5^{-1} = 21 \in \mathbb{Z}_{26}$$

לפיכך

$$A^{-1} = |A|^{-1} \text{adj}(A) = 21 \cdot \begin{pmatrix} 15 & 0 & 21 \\ 0 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 315 & 0 & 441 \\ 0 & 21 & 0 \\ 336 & 0 & 105 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3 \times 3} .$$

$$315 \% 26 = 315 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{315}{26} \right\rfloor = -23 \equiv 3 \pmod{26} \Rightarrow 315 \equiv 3 \pmod{26} .$$

$$441 \% 26 = 441 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{441}{26} \right\rfloor = 25 \Rightarrow 441 \equiv 25 \pmod{26} .$$

$$336 \% 26 = 336 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{336}{26} \right\rfloor = 24 \Rightarrow 336 \equiv 24 \pmod{26} .$$

$$105 \% 26 = 105 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{105}{26} \right\rfloor = 1 \Rightarrow 105 \equiv 1 \pmod{26} .$$

לפיכך

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 25 \\ 0 & 21 & 0 \\ 24 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3 \times 3} .$$

בדיקה:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 25 \\ 0 & 21 & 0 \\ 24 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 26 \\ 0 & 105 & 0 \\ 78 & 0 & 53 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{26} .$$