

שיעור 5

צופן RSA

5.1 משפט השאריות הסיני

משפט 5.1 משפט השאריות הסיני

יהיו m_1, m_2, \dots, m_r שלמים אשר זרים בזוגות ויהיו a_1, a_2, \dots, a_r שלמים. למערכת של יחסים שקילות

$$x = a_1 \pmod{m_1},$$

$$x = a_2 \pmod{m_2},$$

$$\vdots$$

$$x = a_r \pmod{m_r},$$

קיים פתרון יחיד מודולו $M = m_1 m_2 \cdots m_r$ שניתן על ידי

$$x = \sum_{i=1}^r a_i M_i y_i \pmod{M}$$

כאשר $M_i = \frac{M}{m_i}$ ו- $y_i = M_i^{-1} \pmod{m_i}$ לכל $1 \leq i \leq r$.

דוגמה 5.1

היעזרו במשפט השאריות הסיני כדי לפתור את המערכת

$$x = 22 \pmod{101},$$

$$x = 104 \pmod{113}.$$

פתרון:

$$a_1 = 22, \quad a_2 = 104, \quad m_1 = 101, \quad m_2 = 113.$$

$$M = m_1 m_2 = 11413, \quad M_1 = \frac{M}{m_1} = 113, \quad M_2 = \frac{M}{m_2} = 101.$$

$$y_1 = M_1^{-1} \pmod{m_1} = 113^{-1} \pmod{101}, \quad y_2 = M_2^{-1} \pmod{m_2} = 101^{-1} \pmod{113}.$$

כדי לחשב את האיברים ההופכיים נשתמש בהאלגוריתם המוכלל של אוקליד.

נסמן $a = 113, b = 101$.

$$r_0 = a = 113, \quad r_1 = b = 101,$$

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 0,$$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 1.$$

$q_1 = 1$	$t_2 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$	$s_2 = 1 - 1 \cdot 0 = 1$	$r_2 = 113 - 1 \cdot 101 = 12$	שלב $k = 1$
$q_2 = 4$	$t_3 = 1 - 8 \cdot (-1) = 9$	$s_3 = 0 - 8 \cdot 1 = -8$	$r_3 = 101 - 8 \cdot 12 = 5$	שלב $k = 2$
$q_3 = 2$	$t_4 = -1 - 2 \cdot (9) = -19$	$s_4 = 1 - 2 \cdot (-8) = 17$	$r_4 = 12 - 2 \cdot 5 = 2$	שלב $k = 3$
$q_4 = 2$	$t_5 = 9 - 2 \cdot (-19) = 47$	$s_5 = -8 - 2 \cdot 17 = -42$	$r_5 = 5 - 2 \cdot 2 = 1$	שלב $k = 4$
$q_5 = 2$	$t_6 = -19 - 2 \cdot (47) = -113$	$s_6 = 17 - 2 \cdot (-42) = 101$	$r_6 = 2 - 2 \cdot 1 = 0$	שלב $k = 5$

$$\gcd(a, b) = r_5 = 1, \quad s = s_5 = -42, \quad t = t_5 = 47.$$

$$ta + sb = -42(113) + 47(101) = 1.$$

מכאן

$$101^{-1} \equiv 47 \pmod{113}$$

ו-

$$113^{-1} \equiv -42 \pmod{101} = 59 \pmod{101}$$

לכן

$$y_1 = M_1^{-1} \pmod{m_1} = 113^{-1} \pmod{101} = 59$$

ו-

$$y_2 = M_2^{-1} \pmod{m_2} = 101^{-1} \pmod{113} = 47$$

$$\begin{aligned} x &= a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 \pmod{M} \\ &= 22 \cdot 113 \cdot 59 + 104 \cdot 111 \cdot 47 \pmod{11413} \\ &= 640362 \pmod{11413} \\ &= 1234. \end{aligned}$$



5.2 משפטים של מספרים ראשוניים

משפט 5.2 קיימים אינסוף מספרים ראשוניים

קיימים אינסוף מספרים ראשוניים.

הוכחה: נוכיח הטענה דרך השלילה.

נניח כי $\{p_1, \dots, p_n\}$ הוא הקבוצה של כל הראשוניים שקיימים וקבוצה זו נוצרת סופי.

נגדיר השלם $M = (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n) + 1$.

לפי משפט הפירוק לראשוניים (ראו משפט 1.3 למעלה או משפט 5.3 למטה) M הוא מספר ראשוני או שווה למכפלה של ראשוניים.

M לא מספר ראשוני בגלל ש- $M > p_i$ לכל $1 \leq i \leq n$.

גם לא קיים מספק ראשוני p_i אשר מחלק את M . הרי

$$M \% p_i = 1 \Rightarrow p_i \nmid M.$$

הגענו לסתירה של המשפט הפירוק לראשוניים, לכן קיימים אינסוף מספרים ראשוניים.

משפט 5.3 משפט הפירוק לראשוניים

(ראו משפט 1.3) לכל מספר שלם n קיימים שלמים e_i וראשוניים p_i כך ש-

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$$

הוכחה: אינדוקציה.

משפט 5.4

אם a, b שלמים זרים (כלומר $\gcd(a, b) = 1$) אז

$$\phi(m \cdot n) = \phi(m) \cdot \phi(n).$$

הוכחה: (להעשרה בלבד)

משפט 5.5

אם p מספר ראשוני אז

$$\phi(p^n) = p^n - p^{n-1}.$$

הוכחה: נתבונן על $\gcd(p^n, m)$ כאשר m שלם ו- p ראשוני.

האפשרויות היחידות של המחלק המשותף הגדול ביותר $\gcd(p^n, m)$ הן $1, p, p^2, \dots, p^n$. בסה"כ יש p^n אפשרויות.

$\gcd(p^n, m) > 1$ רק אם $m \in \{p, 2p, 3p, \dots, p^{n-1}p\}$, כלומר רק אם m שווה לכפולה של p .

מכאן קיימים $p^n - p^{n-1}$ שלמים עבורם $\gcd(p^n, m) = 1$.

משפט 5.6 נוסחה לפונקציית אוילר

(ראו משפט 1.4) לכל מספר שלם n בעל פירוק לראשוניים

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$$

פונקציית אוילר ניתנת על ידי

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^k (p_i^{e_i} - p_i^{e_i-1}) = (p_1^{e_1} - p_1^{e_1-1}) (p_2^{e_2} - p_2^{e_2-1}) \cdots (p_k^{e_k} - p_k^{e_k-1})$$

הוכחה: משפט 5.4 ו- 5.5.

דוגמה 5.2

חשבו את $\phi(24)$

פתרון:

$$24 = 2^3 3^1 .$$

לכן

$$\phi(24) = (2^3 - 2^2)(3^1 - 3^0) = (8 - 4)(3 - 1) = 8 .$$

משפט 5.7

אם p מספר ראשוני אז

$$\phi(p) = p - 1 .$$

הוכחה: משפט 5.4 ו- 5.5.

משפט 5.8

אם p ו- q מספרים ראשוניים שונים אז

$$\phi(p \cdot q) = (p - 1)(q - 1) .$$

הוכחה: תרגיל בית.

משפט 5.9 המשפט הקטן של פרמה

אם p מספר ראשוני ו- $a \in \mathbb{Z}_p$ אז התנאים הבאים מתקיימים:

$$1. \quad a^p \equiv a \pmod{p}$$

$$2. \quad a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$3. \quad a^{-1} \equiv a^{p-2} \pmod{p}$$

הוכחה:

טענה 1. נוכיח באינדוקציה.

בסיס:עבור $a = 0$ הטענה $0^p \equiv 0 \pmod{p}$ מתקיימת.מעבר:נניח כי הטענה מתקיימת עבור a .

$$(a + 1)^p = a^p + pa^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2}a^{p-2} + \dots + pa + 1 \equiv a^p + 1 \pmod{p}$$

ההנחת האינדוקציה אומרת ש- $a^p \equiv a \pmod p$ לכן

$$(a+1)^p \pmod p \equiv a^p + 1 \pmod p \equiv (a+1) \pmod p$$

כנדרש.

טענה 2. $\gcd(a, p) = 1$ לפיכך קיים איבר הופכי $a^{-1} \in \mathbb{Z}_p$. נכפיל ב- a^{-1} אשר הוכחנו בסעיף הקודם:

$$a^{-1}a^p \equiv a^{-1} \cdot a \pmod p \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod p .$$

טענה 3.

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p \Leftrightarrow 1 \equiv a^{p-1} \pmod p \Rightarrow a^{-1} \equiv a^{p-2} \pmod p .$$

משפט 5.10 משפט אוילר

אם a, n שלמים ו- $\gcd(a, n) = 1$ אז

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod n .$$

משפט 5.11

אם a, n שלמים ו- $\gcd(a, n) = 1$ אז

$$a^{-1} \equiv a^{\phi(n)-1} \pmod n .$$

דוגמה 5.3

חשבו את האיבר ההופכי ל- 5 ב- \mathbb{Z}_{11} .

פתרון:

לפי משפט פרמט 5.9:

$$5^{-1} = 5^{11-2} \pmod{11} = 5^9 \pmod{11} .$$

לפי הנוסחת לשארית 1.2 :

$$5^9 \% 11 = 5^9 - 11 \left\lfloor \frac{5^9}{11} \right\rfloor = 9$$

לכן $5^{-1} \in \mathbb{Z}_{11} = 9$.

5.3 אלגוריתם RSA

צופן RSA הומצא בשנה 1977 על ידי Ron Rivest, Adi Shamir and Len Adleman .

הגדרה 5.1 צופן RSA

יהי $n = pq$ כאשר p, q מספרים ראשוניים שונים. תהי הקבוצת טקסט גלוי $P = \mathbb{Z}_n$, והקבוצת טקסט מוצפן $C = \mathbb{Z}_n$. נגדיר קבוצת המפתחות

$$K = \left\{ (n, p, q, a, b) \mid ab = 1 \pmod{\phi(n)} \right\}$$

לכל $k = (n, p, q, a, b) \in K$, ולכל $x \in P$ ו- $y \in C$ נגדיר כלל מצפין

$$e_k(x) = x^b \mod n,$$

ונגדיר כלל מפענח

$$d_k(x) = y^a \mod n.$$

הערכים של n ו- b הם ערכים ציבוריים בעוד p, q, a ערכים סודיים.

משפט 5.12 קריפטו-מערכת RSA ניתן לפענוח

יהי $n = pq$ מספרים ראשוניים שונים, $a, b \in \mathbb{Z}$ שלמים חיוביים כך ש- $ab = 1 \mod \phi(n)$.

אם $x \in \mathbb{Z}_n$ אז

$$(x^b)^a = x \mod n.$$

הוכחה: נתון כי $ab = 1 \mod \phi(n)$.

לפי משפט 5.8, $\phi(n) = \phi(pq) = (p-1)(q-1)$, $\phi(n)$ ז"א

$$ab = 1 \mod \phi(n) = 1 \mod (p-1)(q-1)$$

לכן קיים $t \in \mathbb{Z}$ כך ש-

$$ab - 1 = t(p-1)(q-1).$$

לכל $z \neq 0 \in \mathbb{Z}$ לפי משפט 5.9, $z^{p-1} = 1 \mod p$ בפרט

$$x^{ab-1} = x^{t(p-1)(q-1)} = (x^{t(q-1)})^{p-1} = y^{p-1}$$

כאשר $y = x^{t(q-1)}$. מכאן $x^{ab-1} = 1 \mod p$

משיקולות של סיימטריה באותה מידה $x^{ab-1} = 1 \mod q$

לכן $x^{ab-1} - 1 = 0 \mod p$ ו- $x^{ab-1} - 1 = 0 \mod q$.

מכיוון ש- p ו- q זרים אז

$$x^{ab-1} - 1 = 0 \mod (pq).$$

לפיכך

$$x^{ab-1} = 1 \mod (pq).$$

נכפיל ב- x ונקבל

$$(x^a)^b = x \mod (pq).$$

ז"א הוכחנו כי לכל טקסט גלוי x , אם נצפין אותו ואז אחר כך נפענח את הטקסט מוצפן המתקבל מאלגוריתם RSA, נקבל אותו טקסט גלוי המקורי בחזרה. ■

הגדרה 5.2 אלגוריתם RSA

שלב הרכבת המפתח

נניח שאלים (A) שולחת הודעה לבוב (B) .

[1] יוצר B שני מספרים ראשוניים גדולים שונים, p ו- q בסדר גודל של 100 ספרות דצמליות.

[2] B מחשב $n = pq$ ו- $\phi(n) = (p-1)(q-1)$.

[3] בוחר במספר שלם באופן מקרי $(0 \leq b \leq \phi(n))$ כך ש- $\gcd(b, \phi(n)) = 1$.

[4] מחשב a כך ש- $a = b^{-1} \mod \phi(n)$ בעזרת האלגוריתם של אוקלידס, (ראו כלל 1.10) ולכן $0 \leq a < \phi(n)$.

[5] שומר את המפתח ציבורי (b, n) בכתובת קובץ ציבורי, ושומר על המפתח פענוח הפרטי (a, p, q) סודי.

בניית מפתח עשוי פעם אחת.

שלב הצפנה

[6] אליס (A) קוראת את המפתח הצפנה (הציבורי) $k = (b, n)$ מכתובת קובץ הציבורי.

[7] בכדי להצפין הודעה x , $(0 \leq x < n)$ אליס (A) מחשבת $y = x^b \mod n$.

[8] A שולחת טקסט מוצפן ל- B .

[9] בכדי לפענח את הטקסט מוצפן y , בוב (B) משמש במפתח הפרטי שלו $k^{-1} = (a, p, q)$ ומחשב $x = y^a \mod n$.

דוגמה 5.4

בוב בונה צופן RSA עם המפתח ציבורי $(b = 47, p = 127, q = 191)$.

(א) חשבו את n , $\phi(n)$ ו- a .

(ב) אליס קוראת את המפתח ציבורי (b, n) ומשתמשת בה כדי להצפין את המסר 2468. מהי הטקסט מוצפן שהיא שולחת לבוב?

(ג) כעת בוב מפענח את הטקסט מוצפן שהוא קיבל מאליס בעזרת המפתח (a, p, q) . בדקו כי הפענוח של הטקסט מוצפן מסעיף ב' זהה לטקסט גלוי אשר אליס שלחה.

פתרון:

סעיף א)

$$n = pq = 191 \times 127 = 24257$$

$$\phi(n) = \phi(pq) = (p-1)(q-1) = 190 \times 126 = 23940$$

$$a = 47^{-1} \mod 23940 \text{ נשתמש באלגוריתם של אוקלידס:}$$

שיטה 1

$$a = 23940, b = 47$$

$$\begin{array}{ll} r_0 = a = 23940, & r_1 = b = 47, \\ s_0 = 1, & s_1 = 0, \\ t_0 = 0, & t_1 = 1. \end{array}$$

$q_1 = 509$	$t_2 = 0 - 509 \cdot 1 = -509$	$s_2 = 1 - 509 \cdot 0 = 1$	$r_2 = 23940 - 509 \cdot 47 = 17$	שלב $k = 1$:
$q_2 = 2$	$t_3 = 1 - 2 \cdot (-509) = 1019$	$s_3 = 0 - 2 \cdot 1 = -2$	$r_3 = 47 - 2 \cdot 17 = 13$	שלב $k = 2$:
$q_3 = 1$	$t_4 = -509 - 1 \cdot (1019) = -1528$	$s_4 = 1 - 1 \cdot (-2) = 3$	$r_4 = 17 - 1 \cdot 13 = 4$	שלב $k = 3$:
$q_4 = 3$	$t_5 = 1019 - 3 \cdot (-1528) = 5603$	$s_5 = -2 - 3 \cdot (3) = -11$	$r_5 = 13 - 3 \cdot 4 = 1$	שלב $k = 4$:
$q_5 = 4$	$t_6 = -1528 - 4 \cdot (5603) = -23940$	$s_6 = 3 - 4 \cdot (-11) = 47$	$r_6 = 4 - 4 \cdot 1 = 0$	שלב $k = 5$:

$$\gcd(a, b) = r_5 = 1, \quad x = s_5 = -11, \quad y = t_5 = 5603.$$

$$sa + tb = -11(23940) + 5603(47) = 1.$$

מכאן

$$5603(47) = 1 + 11(23940) \Rightarrow 5603(47) = 1 \pmod{23940} \Rightarrow 47^{-1} = 5603 \pmod{23940}.$$

שיטה 2

$$23940 = 509(47) + 17$$

$$47 = 2(17) + 13$$

$$17 = 13 + 4$$

$$13 = 3(4) + 1$$

$$4 = 4(1) + 0.$$

$$1 = 13 - 3(4)$$

$$= 13 - 3(17 - 13)$$

$$= 4(13) - 3(17)$$

$$= 4(47 - 2(17)) - 3(17)$$

$$= 4(47) - 11(17)$$

$$= 4(47) - 11(23940 - 509(47))$$

$$= 5603(47) - 11(23940)$$

$$.a^{-1} = 5603 \text{ לכן}$$

סעיף ב) אליס שולחת את ההודעה $2468^{47} \pmod{24257}$. כדי לחשב זה נשתמש בשיטת ריבועים:

$$.47 = 32 + 8 + 4 + 2 + 1$$

$$(2468)^2 = 2517 \pmod{24257}$$

$$(2468)^4 = (2517)^2 = 4212 \pmod{24257}$$

$$(2468)^8 = (4212)^2 = 9077 \pmod{24257}$$

$$(2468)^{16} = (9077)^2 = 15157 \pmod{24257}$$

$$(2468)^{32} = (15157)^2 = 20859 \pmod{24257}$$

לכן

$$\begin{aligned}
 246847 &= (2468)^{32} \times (2468)^8 \times (2468)^4 \times (2468)^2 \times 2468 \pmod{24257} \\
 &= 20859 \times 9077 \times 4212 \times 2517 \times 2468 \pmod{24257} \\
 &= 10642 \pmod{24257}.
 \end{aligned}$$

לכן הטקסט מוצפן הוא $y = 10642$.סעיף ג) $y = 10642$

$$y \pmod{p} = 10642 \pmod{127} = 101, \quad a \pmod{(p-1)} = 5603 \pmod{126} = 59.$$

לכן

$$\begin{aligned}
 x_1 &= (y \pmod{p})^{a \pmod{(p-1)}} \pmod{p} = 101^{59} \pmod{127} = 55 \\
 &\quad (\text{ניתן לחשב זה לפי } 101^{32} \times 101^{16} \times 101^8 \times 101^2 \times 101)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (101)^2 &\equiv 41 \pmod{127} \\
 (101)^4 &\equiv (41)^2 \pmod{127} \equiv 30 \pmod{127} \\
 (101)^8 &\equiv (30)^2 \pmod{127} \equiv 11 \pmod{127} \\
 (101)^{16} &\equiv (11)^2 \pmod{127} \equiv 121 \pmod{127} \\
 (101)^{32} &\equiv (121)^2 \pmod{127} \equiv 36 \pmod{127}
 \end{aligned}$$

לכן

$$101^{59} \pmod{127} = (101)(41)(11)(121)(36) \pmod{127} = 55.$$

$$y \pmod{q} = 10642 \pmod{191} = 137, \quad a \pmod{(p-1)} = 5603 \pmod{190} = 93.$$

לכן

$$\begin{aligned}
 x_2 &= (y \pmod{q})^{a \pmod{(q-1)}} \pmod{q} = 137^{93} \pmod{191} = 176 \\
 &\quad (\text{ניתן לחשב זה לפי } 137^{64} \times 137^{16} \times 137^8 \times 137^4 \times 137)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (137)^2 &\equiv 51 \pmod{191} \\
 (137)^4 &\equiv (51)^2 \pmod{191} \equiv 118 \pmod{191} \\
 (137)^8 &\equiv (118)^2 \pmod{191} \equiv 172 \pmod{191} \\
 (137)^{16} &\equiv (172)^2 \pmod{191} \equiv 170 \pmod{191} \\
 (137)^{32} &\equiv (170)^2 \pmod{191} \equiv 59 \pmod{191} \\
 (137)^{64} &\equiv (59)^2 \pmod{191} \equiv 43 \pmod{191}
 \end{aligned}$$

לכן

$$137^{93} \pmod{191} = (137)(118)(172)(170)(43) \pmod{191} = 176.$$

בנוסף

$$y \pmod{q} = 9625 \pmod{127} = 100, \quad a \pmod{(q-1)} = 5603 \pmod{126} = 59.$$

לכן

$$x_2 = (y \pmod{q})^{a \pmod{(q-1)}} \pmod{q} = 100^{59} \pmod{127} = 87$$

לכן עלינו לפתור את המערכת

$$x = x_1 \pmod{p} = 55 \pmod{127}$$

$$x = x_2 \pmod{q} = 176 \pmod{191}$$

בעזרת המשפט השאריות הסיני. נסמן $m_2 = 191, a_2 = 176, m_1 = 127, a_1 = 55$.

$$M = m_1 m_2 = (191)(127) = 24257, \quad M_1 = \frac{M}{m_1} = 191, \quad M_2 = \frac{M}{m_2} = 127.$$

כעת נחשב $y_2 = M_2^{-1} \pmod{m_2} = 127^{-1} \pmod{191}$ ו- $y_1 = M_1^{-1} \pmod{m_1} = 191^{-1} \pmod{127}$.

שיטה 1

$$.a = 191, b = 127$$

$$r_0 = a = 191, \quad r_1 = b = 127,$$

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 0,$$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 1.$$

$q_1 = 1$	$t_2 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$	$s_2 = 1 - 1 \cdot 0 = 1$	$r_2 = 191 - 1 \cdot 127 = 64$	שלב $k = 1$:
$q_2 = 1$	$t_3 = 1 - 1 \cdot (-1) = 2$	$s_3 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$	$r_3 = 127 - 1 \cdot 64 = 63$	שלב $k = 2$:
$q_3 = 1$	$t_4 = -1 - 1 \cdot (2) = -3$	$s_4 = 1 - 1 \cdot (-1) = 2$	$r_4 = 64 - 1 \cdot 63 = 1$	שלב $k = 3$:
$q_4 = 63$	$t_5 = 2 - 63 \cdot (-3) = 191$	$s_5 = -1 - 63 \cdot (2) = -127$	$r_5 = 63 - 63 \cdot 1 = 0$	שלב $k = 4$:

$$\gcd(a, b) = r_4 = 1, \quad s = s_4 = 2, \quad t = t_4 = -3.$$

$$sa + tb = 2(191) - 3(127) = 1.$$

לכן

$$191^{-1} \equiv 2 \pmod{127}$$

$$127^{-1} \equiv (-3) \pmod{191} \equiv 188 \pmod{191}.$$

שיטה 2

נחשב $y_2 = 127^{-1} \pmod{191}$ ו- $y_1 = 191^{-1} \pmod{127}$ בעזרת האלגוריתם של אוקליד:

$$191 = 127 \cdot 1 + 64$$

$$127 = 64 \cdot 1 + 63$$

$$64 = 63 \cdot 1 + 1$$

$$63 = 1 \cdot 63 + 0.$$

$$\gcd(191, 127) = 1 \text{ לכן}$$

$$\begin{aligned}
 1 &= 64 - 63 \cdot 1 \\
 &= 64 - (127 - 64 \cdot 1) \\
 &= 64 \cdot 2 - 127 \cdot 1 \\
 &= (191 - 127 \cdot 1) \cdot 2 - 127 \\
 &= 191 \cdot 2 + 127 \cdot (-3) .
 \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}
 y_1 &= M_1^{-1} \bmod m_1 = 127^{-1} \bmod 191 \equiv 188 \bmod 191 \\
 y_2 &= M_2^{-1} \bmod m_2 = 191^{-1} \bmod 127 \equiv 2 \bmod 127 .
 \end{aligned}$$

נחשב

$$y_1 = M_1^{-1} \bmod m_1 = 127^{-1} \bmod 191 = 188, \quad y_2 = M_2^{-1} \bmod m_2 = 191^{-1} \bmod 127 = 2 .$$

לכן

$$\begin{aligned}
 y &= a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 \\
 &= 55(191)(2) + 176(127)(188) \bmod 24257 \\
 &= 4223186 \bmod 24257 \\
 &= 2468 .
 \end{aligned}$$

משפט 5.13

יהיו p, q מספרים ראשוניים ויהי $n = pq$. יהי

$$\lambda(n) = \frac{(p-1)(q-1)}{\gcd(p-1, q-1)} .$$

נגדיר צופן חדש אשר זהה ל-RSA אלא $\phi(n)$ הוחלף עם $\lambda(n)$ כך ש- $ab \equiv 1 \bmod \lambda(n)$. אזי הקריפטו-מערכת ניתן לפענח.

הוכחה:

(שלב 1) רושמים את הצופן:

$$\left. \begin{aligned} e_k(x) &= x^b \bmod n \\ d_k(y) &= y^a \bmod n \end{aligned} \right\} \quad n = pq, \quad ab \equiv 1 \bmod \lambda(n) .$$

(שלב 2) נתון כי $d = \gcd(p-1, q-1)$. ז"א שקיים p' שלם כך ש-

$$p-1 = p'd \Leftrightarrow \frac{p-1}{d} = p' \Leftrightarrow d = \frac{p-1}{p'} . \quad (\#1)$$

באותה מידה קיים q' שלם כך ש-

$$q-1 = q'd \Leftrightarrow \frac{q-1}{d} = q' \Leftrightarrow d = \frac{q-1}{q'} . \quad (\#2)$$

(שלב 3)

$$\lambda(n) = \frac{(p-1)(q-1)}{\gcd(p-1, q-1)} = \frac{(p-1)(q-1)}{d} .$$

$$\lambda(n) \stackrel{(\#1)}{=} \frac{(p-1)(q-1)}{\left(\frac{p-1}{p'}\right)} = p'(q-1) . \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{p-1}{p'} . \quad (1*)$$

$$\lambda(n) \stackrel{(\#2)}{=} \frac{(p-1)(q-1)}{\left(\frac{q-1}{q'}\right)} = q'(p-1) . \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{p-1}{p'} . \quad (2*)$$

שלב 4 $ab \equiv 1 \pmod{\lambda(n)}$ (נתון) לכן קיים t שלם כך ש-

$$ab = 1 + t\lambda(n) \stackrel{(2*)}{=} 1 + t(p-1)q' .$$

לכן

$$ab - 1 = t(p-1)q' .$$

מכאן

$$x^{ab-1} x^{tq'(p-1)} = y^{p-1} \stackrel{\text{פרמה}}{\equiv} 1 \pmod{p}$$

כאשר $y = x^{tq'}$ והשוויון השני מתקיים בגלל ש- p מספר ראשוני. לפיכך

$$x^{ab-1} \equiv 1 \pmod{p} .$$

שלב 5 $ab \equiv 1 \pmod{\lambda(n)}$ (נתון) לכן קיים t שלם כך ש-

$$ab = 1 + t\lambda(n) \stackrel{(1*)}{=} 1 + t(q-1)p' .$$

לכן

$$ab - 1 = t(q-1)p' .$$

מכאן

$$x^{ab-1} x^{tp'(q-1)} = z^{q-1} \stackrel{\text{פרמה}}{\equiv} 1 \pmod{q}$$

כאשר $z = x^{tp'}$ והשוויון השני מתקיים בגלל ש- q מספר ראשוני. לפיכך

$$x^{ab-1} \equiv 1 \pmod{q} .$$

שלב 6 מכיוון ש- p, q ראשוניים אז

$$\left. \begin{array}{l} x^{ab-1} \equiv 1 \pmod{q} \\ x^{ab-1} \equiv 1 \pmod{p} \end{array} \right\} \Rightarrow x^{ab-1} \equiv 1 \pmod{pq}$$

לפיכך

$$x^{ab-1} \equiv 1 \pmod{n} \Rightarrow (x^b)^a \equiv x \pmod{n}$$

כנדרש.