

חישוביות וסיבוכיות תשפ"ה סמסטר א'

שיעור 7

אי-כריעות

תוכן העניינים

1	7.1	השפה ATM
1	7.2	השפה E

7.1 השפה ATM

הגדרה 7.1: השפה ATM

נגדיר A_{TM} להיות אוסף כל הקידודים של כל מכונת טיורינג M וכל קלט w כך ש- M מקבלת את w . כלומר

$$A_{TM} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ מכונת טיורינג שמקבלת את } w \}$$

7.2 השפה E

הגדרה 7.2: השפה E

השפה E מכילה את כל התוכניות שהשפה שלהם ריקה. כלומר, תוכניות שלא מקבלות אף קלט.

$$E = \{ P \mid L(P) = \emptyset \}$$

נסוח חלופי של ההגדרה הזו היא, במונחי מכונת טיורינג,

$$E_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset \}$$

משפט 7.1: E_{TM} לא כריעה

השפה E_{TM} לא כריעה.

רעיון ההוכחה: ההוכחה היא דרך השלילה.

הרעיון הוא להניח ש- E_{TM} כיעה. אם כך אז אפשרי להרכיב מכונן טיורינג אשר מכריעה את השפה A_{TM} , בסתירה לכך ש- A_{TM} לא כריעה.

בפרט, תהי R המ"ט שמכריעה את E_{TM} . אנחנו נרכיב מ"ט S מ- R אשר מכריעה את A_{TM} .

רעיון אחד הוא בשביל S כך. על הקלט $\langle M, w \rangle$, המ"ט S מריצה את המ"ט R על w . אם $R \leftarrow acc$ אז $L(M)$ ריקה ולכן M לא מקבלת w . אם $R \leftarrow rej$ אז $L(M)$ לא ריקה $M \leftarrow$ מקבלת קלט כלשהו אבל לא בהכרח w . כלומר אנחנו יודעים שקיים קלט אשר M מקבלת אך איננו יודעים אם M מקבלת את הקלט w ספציבי.

לכן אנחנו נצטרך מ"ט חדשה, M_1 מ- M אשר דוחה כל קלט מלבד מ- w . ואז נריץ R על $\langle M_1, w \rangle$ בכדי לבדוק אם $L(M_1) = \emptyset$. אבל על הקלט w M_1 עובדת בדיוק כמו M . לכן $L(M_1) \neq \emptyset$ אם ורק אם M_1 מקבלת w . לכן, אם R מקבלת $\langle M_1, w \rangle$ אז $L(M_1) = \emptyset$ אז M לא מקבלת w .

הוכחה: ראשית נגדיר את המכונת טיורינג החדשה M_1 .

M_1 = על הקלט x :

1. אם $x \neq w$ אז $M_1 \leftarrow rej$

2. אם $x = w$ מריצים M על w :

• אם M מקבלת w אז $M_1 \leftarrow acc$.

ל- M_1 יש תיאור של המ"ט M ושל המחרוזת w . היא מבצעת הבדיקה $x == w$ על ידי לסרוק את הקלט משמאל לימין והשוות את המחרוזת x עם המחרוזת w תו תו.

כעת נגדיר את המכונה S שמכריעה את A_{TM} . נניח שקיימת מ"ט R שמכריעה את E_{TM} .

S = על הקלט $\langle M, w \rangle$:

1. על סמך התיאור $\langle M, w \rangle$ של הקידוד של M והמחרוזת w , בונים המ"ט M_1 .

2. מריצים R על M_1 .

3. • אם R מקבלת אז $S \leftarrow acc$.

• אם R מקבלת אז $S \leftarrow rej$.

קיבלנו את התוצאה שאם קיימת R שמכריעה את E_{TM} אז קיימת S שמכריעה את A_{TM} , בסתירה לכך שקיימת מכונת טיורינג שמכריעה את A_{TM} .

