

עבודה עצמית 11

שאלה 1 במרחב וקטורי \mathbb{R}^4 נתונים הוקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

נסמן $U = \text{sp}(u_1, u_2)$, $V = \text{sp}(v_1, v_2)$

(א) מצאו בסיס ומימד של U, V .

(ב) מצאו בסיס ומימד של $V + U$.

(ג) מצאו בסיס ומימד של $V \cap U$.

שאלה 2 במרחב וקטורי \mathbb{R}^4 נתונים הוקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

נסמן $U = \text{sp}(u_1, u_2)$, $V = \text{sp}(v_1, v_2)$

(א) מצאו בסיס ומימד של U, V .

(ב) מצאו בסיס ומימד של $V + U$.

(ג) מצאו בסיס ומימד של $V \cap U$.

שאלה 3

במרחב וקטורי \mathbb{R}^4 נתונים וקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

נגדיר

$$W = \text{sp}(v_1, v_2, v_3), \quad U = \text{sp}(v_4, v_5, v_6)$$

(א) מצאו בסיס ומימד של U ו W .

(ב) האם הוקטורים $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ פורשים את \mathbb{R}^4 ? נמקו את תשובתכם.

(ג) האם $U + W = \mathbb{R}^4$? מקו את תשובתכם.

(ד) האם $U \oplus W = \mathbb{R}^4$? נמקו את תשובתכם.

שאלה 4

נתונים שני תתי מרחבים של \mathbb{R}^3 :

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 0 \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = z, x = y \right\},$$

הוכיחו כי $U \oplus W = \mathbb{R}^3$.

שאלה 5 יהיו U_1, U_2 תתי מרחבים של מרחב וקטורי V בעל מימד סופי. הוכיחו כי

(א) אם $\dim(V) < \dim(U_1) + \dim(U_2)$ אז $U_1 \cap U_2 \neq \{\bar{0}\}$.

(ב) אם $\dim(U_1 + U_2) = 1 + \dim(U_1 \cap U_2)$ אז $U_1 + U_2$ שווה לאחד מתתי המרחבים U_1 ו U_2 שווה לתת המרחב השני.

פתרונות

שאלה 1

(א) בסיס של V :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של V :

$$B(V) = \{v_1, v_2\}$$

$$\dim(V) = 2$$

בסיס של U :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של U :

$$B(U) = \{u_1, u_2\}$$

$$\dim(U) = 2$$

(ב)

$$Q = (v_1, v_2, u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות לכן בסיס של $V + U$ הוא

$$B(V + U) = \{v_1, u_1, u_2\}$$

$$\dim(V + U) = 4$$

(ג) לפי משפט המימדים:

$$\dim(V + U) = \dim(V) + \dim(U) - \dim(V \cap U)$$

כיוון ש $\dim(V) = 2$, $\dim(U) = 2$, $\dim(V + U) = 4$ ואז

$$\dim(V \cap U) = 0.$$

לכן $V \cap U$ מורכב מוקטור האפס:

$$V \cap U = \{\bar{0}\}.$$

שאלה 2

(א) בסיס של V :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של V :

$$B(V) = \{v_1, v_2\}$$

$$\dim(V) = 2$$

בסיס של U :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של U :

$$B(U) = \{u_1, u_2\}$$

$$\dim(U) = 2$$

(ב)

$$Q = (v_1, v_2, u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

העמודות 1, 2, 3 מובילות לכן בסיס של $V + U$ הוא

$$B(V + U) = \{v_1, u_1, u_1\}$$

$$\dim(V + U) = 3$$

(ג) לפי משפט המימדים:

$$\dim(V + U) = \dim(V) + \dim(U) - \dim(V \cap U)$$

כיון ש $\dim(V) = 2$, $\dim(U) = 2$, $\dim(V + U) = 3$, אז

$$\dim(V \cap U) = 1.$$

כדי למצוא בסיס של $V \cap U$ נמצא את $\text{Nul } Q$. מסעיף הקודם המדורגת של Q היא:

$$Q \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית $Qx = 0$ הוא

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן בסיס של $\text{Nul } Q$ הוא $\left\{ x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. הוקטור x_1 מקיים את משוואת ההומוגנית של Q , לכן

$$Q \cdot x_1 = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad (v_1 \ v_2 \ u_1 \ u_2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \bar{0}$$

לכן נקבל

$$-1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 - 1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad -1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = 1 \cdot u_1 - 2 \cdot u_2.$$

נגדיר את שני האגפים להיות הוקטור y :

$$y := -1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = 1 \cdot u_1 - 2 \cdot u_2$$

נציב את הוקטורים ונמצא כי

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

לכן בסיס של $V \cap U$ הוא

$$B(V \cap U) = \{y\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

שאלה 3

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$W = \text{sp}(v_1, v_2, v_3), \quad U = \text{sp}(v_4, v_5, v_6)$$

(א)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עמודה 1 ועמודה 2 מובילות, לכן בסיס של W הינו

$$B(W) = \{v_1, v_2\}.$$

$$\dim(W) = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \\ R_4 \rightarrow 2R_4 - R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עמודה 1 ועמודה 2 מובילות, לכן בסיס של U הינו

$$B(U) = \{v_4, v_5\}.$$

$$\dim(U) = 2$$

(ב)

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_3 + 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

עמודות 1, 2, 4 מובילות לכן בסיס של $U \cup W$ הינו

$$B(W \cup U) = \{v_1, v_2, v_4\}.$$

$\dim(W \cup U) = 3$ לכן הוקטורים $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ לא פורשים \mathbb{R}^4 כי

$$\dim(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}) < 4.$$

ג) האם $U + W = \mathbb{R}^4$? נמקו את תשובתיכם.
לא.

$$U + W = \text{sp}(U \cup W)$$

$\dim(U \cup W) < 4$ מסעיף הקודם, לכן $U + W \neq \mathbb{R}^4$.

ד) האם $U \oplus W = \mathbb{R}^4$? נמקו את תשובתיכם.
לא. $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ רק אם $U + W = \mathbb{R}^4$ ו $U \cap W = \{\bar{0}\}$. כיוון ש $U + W \neq \mathbb{R}^4$ מסעיף הקודם אז $U \oplus W \neq \mathbb{R}^4$.

שאלה 4 נמצא מימד של W, U ושל $U \cap W$.

הפתרון הכללי הוא $x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - z$, $x, y, z \in \mathbb{R}$. לכן $\dim(U) = 2$.

$$\left. \begin{aligned} x &= z \\ x &= y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

פתרון הכללי: $(x, y, z) = z(1, 1, 1)$, $z \in \mathbb{R}$. לכן $\dim(W) = 1$.

נמצא את $\dim(U \cap W)$.

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - z &= 0 \\ x - y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dim(U \cap W) = 0$ בגלל שאין עמודות לא מובילות.

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 1 - 0 = 3 = \dim \mathbb{R}^3 .$$

לכן $U + W = \mathbb{R}^3$ וגם $U \cap W = \{\bar{0}\}$. ז"א $U \oplus W = \mathbb{R}^3$.

שאלה 5

(א)

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

מצד שני $U_1 + U_2 \subseteq V$ לכן

$$\dim(U_1 + U_2) \leq \dim(V)$$

קיבלנו:

$$\dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) \leq \dim(V) .$$

לפי הנתון, $\dim(V) < \dim(U_1) + \dim(U_2)$ ז"א

$$\dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) < \dim(U_1) + \dim(U_2) .$$

מכאן

$$\dim(U_1 \cap U_2) > 0 .$$

לפיכך

$$U_1 \cap U_2 \neq \{\bar{0}\} .$$

(ב)

הנתון, $\dim(U_1 + U_2) = 1 + \dim(U_1 \cap U_2)$. לפי משפט המימדים:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

לכן

$$1 + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

מכאן

$$1 + 2\dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$$

נסמן $\dim(U_1 \cap U_2) = k$. מתקיים: לכל $1 \leq i \leq 2$

$$U_1 \cap U_2 \subseteq U_i \subseteq U_1 + U_2$$

לכן

$$\dim(U_1 \cap U_2) \leq \dim(U_i) \leq \dim(U_1 + U_2)$$

ז"א

$$k \leq \dim(U_i) \leq k + 1$$

כלומר $\dim(U_i) = k + 1$ או $\dim(U_i) = k$.

קיבלנו קודם כי $\dim(U_1) + \dim(U_2) = 1 + 2k$. לפיכך מקבלנים אחד מהמקרים הבאים:

מקרה 1 $\dim(U_2) = k + 1$, $\dim(U_1) = k$

$$\dim(U_2) = k, \dim(U_1) = k + 1 \quad \underline{\text{מקרה 2}}$$

$$\dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1), U_1 \cap U_2 \subseteq U_1 \quad \underline{\text{במקרה 1}}$$

$$U_1 = U_1 \cap U_2 .$$

$$\dim(U_2) = \dim(U_1 + U_2), U_2 \subseteq U_1 + U_2$$

$$U_2 = U_1 + U_2 .$$

$$\dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_2), U_1 \cap U_2 \subseteq U_2 \quad \underline{\text{במקרה 2}}$$

$$U_2 = U_1 \cap U_2 .$$

$$\dim(U_1) = \dim(U_1 + U_2), U_1 \subseteq U_1 + U_2$$

$$U_1 = U_1 + U_2 .$$