חישוביות וסיבוכיות תשפ"ה סמסטר א'
שיעור 5
מכונות טיורינג לא דטרמיניסטית

תוכן העניינים

5.1 מודל לא דטרמיניסטית

הגדרה 5.1: מודל לא דטרמיניסית

תהי M מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית. עבור שפה $w \in \Sigma^*$ אומרים ע׳

- M **מקבלת** את w אם קיים חושוב של M על w שמגיע למצב acc.
- M **דוחה** את w אם **כל** חישוב של M על w מגיע למצב rej.

הגדרה 5.2: מודל לא דטרמיניסית

תהי M מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית.

עבור שפה $w \in \Sigma^*$ אומרים ע׳

- M **מקבלת** את w אם קיים חושוב של M על w שמגיע למצב acc.
- M **דוחה** את w אם **כל** חישוב של M על w מגיע למצב rej.

עבור שפה $L \subseteq \Sigma^*$ אומרים כי M **מגריעה** אצ L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $w \in L$ אז M **מקבלת** את w.
- אם $w \notin L$ אז M **דוחה** את w.

M **מקבלת** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$, M מקבלת את w אם"ם $w \in L$.

במודל הלא דטרמיניסטי

- בהכרעה לא דטרמיניסטית של שפה
  לכל מילה בשפה $\exists$ לפחות חישוב אחד שעוצר במצב מקבל.
  לכל מילה שאינה בשפה כל החישובים חייבים לעצור במצב דוחה.
- בקבלה לא דטרמיניסטית של שפה
  לכל מילה בשפה $\exists$ לפחות חישוב אחד שעוצר במצב מקבל.
  לכל מילה שאינה בשפה המכונה יכולה לדחות או לא לעצור.

5.1 דוגמה

$$L = \left\{ w \in \{0,1\}^* \middle| w = u\text{v} \ , \ (u\bar{\text{v}}) = (u\bar{\text{v}})^R \right\}$$

שפת כל המחרוזות שניתן להפוך אותן לפילנדרום ע"י פעולת "משלים לסיפא". למשל: $w \in 01101$ מכיוון ש-

$$011\overline{01} = 01110 = (01110)^R \ .$$

$w \in 1010010$ מכיוון ש-

$$1010\overline{010} = 1010101 = (1010101)^R \ .$$

בנו מכונת

א) דטרמיניסית שמכריעה את שפת כל הפלינדרומים.

ב) לא דטרמיניסית שמכריעה את השפה L.

פתרון:

סעיף א)

מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה
q_0	$\sqcup$	acc		R
q_0	σ	$q.\sigma$	$\sqcup$	R
$q.\sigma$	τ	$q.\sigma$		R
$q.\sigma$	$\sqcup$	$p.\sigma$	$\sqcup$	L
$p.\sigma$	σ	back	$\sqcup$	L
$p.\sigma$	$\sqcup$	acc		R
$p.\sigma$	τ	rej		R
back	σ	back		L
back	$\sqcup$	q_0	$\sqcup$	R

כאשר

$$\tau \neq \sigma \ , \ \tau \in \Sigma \ , \ \sigma \in \Sigma \ .$$

זאת מכונה דטרמיניסטית המכריעה עת שפת הפלינגרומים.

סעיף ב) לבניית המכונה הלא דטרמיניסטית שמכריעה את L, נוסיף את המעברים החדשים הבאים:

מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	
$\hat{q}_0$	$0,1$	$\hat{q}_0$		R	תזוזה ימינה
$\hat{q}_0$	$0,1,\sqcup$	flip		S	מעבר אי-דטרמיניסטי למצב flip
flip	0	1	flip	R	ביצוע פעולת "משלים לסיפא" החל מהנקודה שנבחרה אי-דטרמיניסטית
flip	1	0	flip	R	ביצוע פעולת "משלים לסיפא" החל מהנקודה שנבחרה אי-דטרמיניסטית
flip	$\sqcup$	back	$\sqcup$	L	
back	$0,1$	back		L	חזרה להתחלה
back	$\sqcup$	q_0		R	מעבר למכונה לבדיקת פלינדרום

- אם $L \in w$ אז $\exists$ חישוב שעושה flip בדיוק במקום הנכון $\leftarrow$ הופך את הסיפא של המילה $\leftarrow$ המכונה pal מקבלת w.
- אם $w \notin L$ אז לא משנה באיזה מיקום במילה עוברים למצב flip לא מקבלים פלינדרום $\leftarrow$ כל חישוב ידיע למצב rej.
- לפיכך המכונה הלא דטרמיניסטית הזו מכריעה את השפה L.

משפט 5.1: סגירות תחת פעולת ה Prefix

תהי L שפה שמתקבלת ע"י מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית.
אזי גם
$$\text{prefix}(L) = \left\{u \middle| \exists \text{v}, u\text{v} \in L\right\}$$
מתקבלת ע"י מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית.

הוכחה: תהי M^L מ"ט שמקבלת את L.
נבנה M^P שמקבלת את $\text{prefix}(L)$.

נוסיף באופן אי דטרמיניסטי סיפא v לאחר הקלט u ואז נבדוק אם המילה היא בשפה L.

בפרט, נתונה טבלת המעברים של המכונה M^L שמקבלת את השפה L:

מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזוזה
q_0^L	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$				

נוסיף את הטבלת המעברים הבאה:

מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תיאור מילולי
q_0^p	σ	q_0^p		R	
q_0^p	$\sqcup$	add	$\sqcup$	S	
add	$\sqcup$	add	σ	R	$\forall \sigma \in \Sigma$ מגיעים לסוף המילה ואז מוסיפים אותיות באופן לא דטרמיניסטי.
add	$\sqcup$	back	$\sqcup$	L	חוזרים להתחלה.
back	σ	back		L	
back	$\sqcup$	q_0^L		R	עוברים למכונה M^L ובודקים אם המילה בשפה L.

אם המילה $u \in \text{prefix}(L)$ $\Leftarrow$ $\exists \text{v}$ כך ש- $u\text{v} \in L$.
$\Leftarrow$ $\exists$ חישוב שמנחש לכתוב בדיוק v לאחר u
$\Leftarrow$ M^L מגיעה למצב acc
$\Leftarrow$ M^p מגיעה למצב acc.

אם המילה $u \notin \text{prefix}(L)$ $\Leftarrow$ לא משנה איזה v נוסיף, לא נגיע למילה בשפה L.
$\Leftarrow$ המכונה המקורית M^L לא תקבל את $u\text{v}$
$\Leftarrow$ המכונה שלנו M^p לא תקבל את u. ■

שימו לב, M^p **מקבלת** את השפה $\text{prefix}(L)$.

אבל היא לא מכריעה את $\text{prefix}(L)$.
בשביל להכריע צריך שכל מילה שלא בשפה $\text{prefix}(L)$ תדחה, אבל $\exists$ חישוב אחד שלא מגיע למצב rej וזה חישוב שלא עוצר, שנשאר במצב add כל הזמן ורק מוסיף אותיות.

5.2 שקילות חישוב של מכונה דטרמיניסטית ולא דטרמיניסית

משפט 5.2: שקילות בין מ"ט דטרמיניסטית לבין מ"ט לא דטרמיניסית

לכל מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית $\exists$ מכונה דטרמיניסיטת שקולה.

הוכחה:
תהי N מ"ט לא דטרמיניסיטת.

נבנה M מ"ט דטרמיניסטית שקולה.

הרעיון הבניה הוא שהמ"ט דטרמיניסטית תנסה את כל החישובים של הטט"לד אחד אחד.
אם המט"ד מגלה חישוב שעובר ל- acc אז נקבל.
אם היא מגלה שכל החישובים מובילים ל- rej אז נדחה.

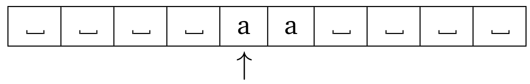
■

דוגמה 5.2

נתונה הטבלת המעברים של מטל"ד

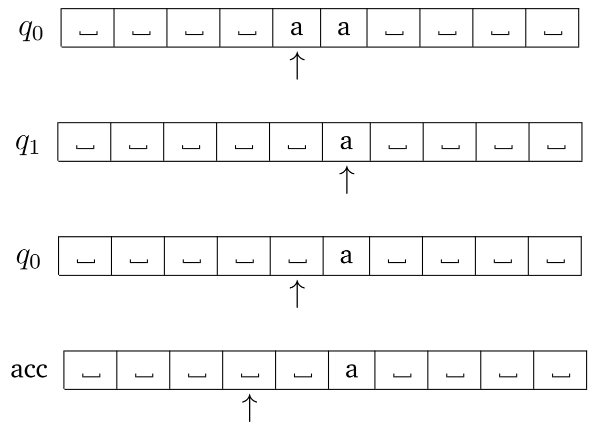
	מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזוזה
1	q_0	a	q_0	a	R
2	q_0	a	q_1	$\sqcup$	R
3	q_0	a	q_1	a	R
4	q_0	a	q_0	a	L
1	q_0	$\sqcup$	acc	$\sqcup$	L
1	q_1	a	q_0	a	L
2	q_1	a	q_1	a	R
1	q_1	$\sqcup$	rej	a	R
2	q_1	$\sqcup$	q_1	a	L

נתון הקלט:



ריצה אפשרית על הקלט הינה

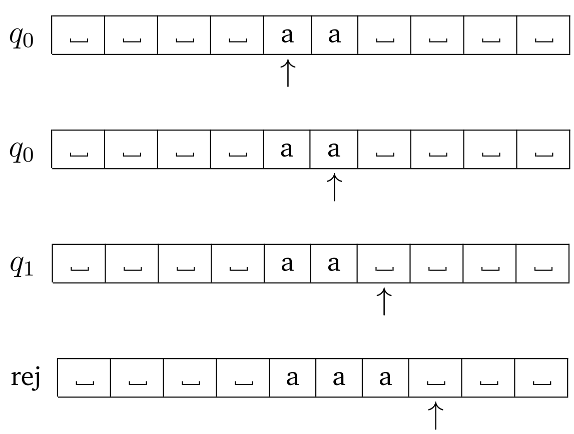
$$\sqcup\ q_0\ a\ a\ \sqcup \xrightarrow{2} \sqcup\ \sqcup\ q_1\ a\ \sqcup \xrightarrow{1} \sqcup\ q_0\ \sqcup\ a\ \sqcup \xrightarrow{1} \text{acc}\ \sqcup\ \sqcup\ a\ \sqcup$$



החישוב הגיע למצב מקבל.

ריצה אחרת אפשרית על הקלט הינה

$$\sqcup\ q_0\ a\ a\ \sqcup \xrightarrow{1} \sqcup\ a\ q_0\ a\ \sqcup \xrightarrow{3} \sqcup\ a\ a\ q_1\ \sqcup \xrightarrow{1} \sqcup\ a\ a\ a\ \text{rej}\ \sqcup$$



החישוב הגיע למצב דוחה.

בסה"כ $\exists$ סדרת בחירות שמובילה למצב acc
ו- $\exists$ סדרת בחירות שמובילה למצב rej.

מכונת טיורינג היא אי-דטרמיניסטית אם היא קובעת בעצמה את הבחירות שלה כאשר יש מספר אפשרויות לבצע צעד.

כדי להפוך אותה למט"ד אנחנו נקבע את הבחירות והיא לא תבחר בצורה אי-דטרמיניסטית.

כשלב ביניים להסבר, נעבור למכונה עם 2 סרטים: סרט הקלט וסרט הבחיורת.

סרט הבחירות יכלול סדרת מספרים שהיא בחירה ספציפית של מעברים. כך המ"ט לא תהיה יותר אי-דטרמיניסטית.

סרט הבחירות יקבע מה לעשות בכל שלב בחישוב.

המכונה עובדת על סרט הקלט ובכל צעד מבצעת את מה שכתוב על סרט הבחירות.

5.3 דוגמה

קלט	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
					↑					
בחירות	␣	␣	␣	␣	1	4	1	3	1	␣
					↑					

	מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה
1	q_0	a	q_0	a	R
2	q_0	a	q_1	␣	R
3	q_0	a	q_1	a	R
4	q_0	a	q_0	a	L
1	q_0	␣	acc	␣	L
1	q_1	a	q_0	a	L
2	q_1	a	q_1	a	R
1	q_1	␣	rej	a	R
2	q_1	␣	q_1	a	L

ההוספה של סרט הבחירות הופכת את המ"ט למט"ד ונקבל את הריצה הבאה על הקלט aa:

$$\sqcup\ q_0\ a\ a\ \sqcup\ \sqcup \xrightarrow{1} \sqcup\ a\ q_0\ a\ \sqcup\ \sqcup \xrightarrow{4} \sqcup\ q_0\ a\ a\ \sqcup\ \sqcup \xrightarrow{1} \sqcup\ a\ q_0\ a\ \sqcup\ \sqcup$$
$$\xrightarrow{3} \sqcup\ a\ a\ q_1\ \sqcup\ \sqcup \xrightarrow{1} \sqcup\ a\ a\ a\ \text{rej}\ \sqcup$$

q_0	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
					↑					
בחירות	␣	␣	␣	␣	1	4	1	3	1	␣
					↑					

q_0	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
						↑				
בחירות	␣	␣	␣	␣	1	4	1	3	1	␣
						↑				

q_0	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
					↑					
בחירות	␣	␣	␣	␣	1	4	1	3	1	␣
							↑			

q_0	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
						↑				
בחירות	␣	␣	␣	␣	1	4	1	3	1	␣
								↑		

q_1	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
							↑			
בחירות	␣	␣	␣	␣	1	4	1	3	1	␣
									↑	

rej	␣	␣	␣	␣	a	a	a	␣	␣	␣
								↑		
בחירות	␣	␣	␣	␣	1	4	1	3	1	␣
										↑

החישוב הסתיים במצב דחייה.

5.4 דוגמה

קלט	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
					↑					
בחירות	␣	␣	␣	␣	2	1	1	␣	␣	␣
					↑					

	מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזוזה
1	q_0	a	q_0	a	R
2	q_0	a	q_1	␣	R
3	q_0	a	q_1	a	R
4	q_0	a	q_0	a	L
1	q_0	␣	acc	␣	L
1	q_1	a	q_0	a	L
2	q_1	a	q_1	a	R
1	q_1	␣	rej	a	R
2	q_1	␣	q_1	a	L

ההוספה של סרט הבחירות הופכת את המ"ט למט"ד ונקבל את הריצה הבאה על הקלט aa:

$$\sqcup\, q_0\, a\, a \sqcup \sqcup \xrightarrow{2} \sqcup \sqcup\, q_1\, a \sqcup \sqcup \xrightarrow{1} \sqcup\, q_0 \sqcup a \sqcup \sqcup \xrightarrow{1} \text{acc} \sqcup \sqcup\ a \sqcup \sqcup$$

q_0	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
					↑					
בחירות	␣	␣	␣	␣	2	1	1	␣	␣	␣
					↑					

q_1	␣	␣	␣	␣	␣	a	␣	␣	␣	␣
						↑				
בחירות	␣	␣	␣	␣	2	1	1	␣	␣	␣
						↑				

q_0	␣	␣	␣	␣	␣	a	␣	␣	␣	␣
					↑					
בחירות	␣	␣	␣	␣	2	1	1	␣	␣	␣
							↑			

acc	␣	␣	␣	␣	␣	a	␣	␣	␣	␣
				↑						
בחירות	␣	␣	␣	␣	2	1	1	␣	␣	␣
								↑		

החישוב הסתיים במצב קבלה.

דוגמה 5.5

קלט	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
					↑					
בחירות	␣	␣	␣	␣	1	4	1	4	␣	␣
					↑					

	מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזוזה
1	q_0	a	q_0	a	R
2	q_0	a	q_1	␣	R
3	q_0	a	q_1	a	R
4	q_0	a	q_0	a	L
1	q_0	␣	acc	␣	L
1	q_1	a	q_0	a	L
2	q_1	a	q_1	a	R
1	q_1	␣	rej	a	R
2	q_1	␣	q_1	a	L

ההוספה של סרט הבחירות הופכת את המ"ט למט"ד ונקבל את הריצה הבאה על הקלט aa:

$$\sqcup\ q_0\ a\ a\ \sqcup\ \sqcup \xrightarrow{2} \sqcup\ \sqcup\ q_1\ a\ \sqcup\ \sqcup \xrightarrow{1} \sqcup\ q_0\ \sqcup\ a\ \sqcup\ \sqcup \xrightarrow{1} \text{acc}\ \sqcup\ \sqcup\ a\ \sqcup\ \sqcup$$

q_0	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
					↑					
בחירות	␣	␣	␣	␣	1	4	1	4	␣	␣
					↑					

q_0	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
						↑				
בחירות	␣	␣	␣	␣	1	4	1	4	␣	␣
						↑				

q_0	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
					↑					
בחירות	␣	␣	␣	␣	1	4	1	4	␣	␣
							↑			

q_0	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
						↑				
בחירות	␣	␣	␣	␣	1	4	1	4	␣	␣
								↑		

q_0	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
					↑					
בחירות	␣	␣	␣	␣	1	4	1	4	␣	␣
									↑	

החישוב הסתייסבלי להגיע למצב עצירה.

כיצד תעבוד המכונה הדטרמיניסיטית?

הסדרה בסרט הבחירות קובעת את סדרת הבחירות לביצוע בסרט הראשון.
המכונה הזו היא מכונה דטרמיניסטית.
בסרט הבחירות התנועה היא תמיד ימינה, כי מדובר בבחירות שעושים בזו אחר זו בכל צעד וצעד.
בסרט הקלט התזוזה יכולה להיות לכל כיוון.

הרעיון הוא שהמכונה תייצר את כל סדרות הבחירות האפשרויות.
לכל סדרת בחירות ,המכונה תריץ את החישוב כפי שראינו.
כך המכונה תמשיך עד שתמצא חישוב שמגיע למצב קבלה.
אם תמצא כזה היא תעבור לקבלה.
ואם לא ,אז המכונה תמשיך לחפש ,עוד חישוב ועוד חישוב.
למכונה יהיה סרט נוסף שיקרא כספת הקלט.
הוא ישמור גרסא מקורית של הקלט.
את הקלט נעתיק בכל סבב מכספת הקלט (הסרט העליון) לסרט העבודה (הסרט האמצעי).

במט"ד:

סבב ריצה = סדרת בחירות אחת

בתהליך:
בכספת כתובה המילה.
כותבים " 1 " בסרט הבחירות (זאת סדרת הבחירות הראשונה).
מעתיקים את הקלט לסרט העבודה.
מפעילים את המכונה על הסרט העבודה לפי הסדרת הבחירות המופיעות בסרט הבחירות.
אם נגיע למצב קבלה של N אז M עוברת למצב קבלה.
אם לא נגיע למצב קבלה ב- N (כלומר מגיעים לדחייה אן לא נגיע למצב עצירה בכלל) אז נעלה את המספר של הסדרת הבחיורת ב- 1 וחוזרים על התהתליך הזה שוב.

5.6 דוגמה

סבב 1)

סדרת הבחירות = 1.

כספת הקלט	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
					↑					
עבודה	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
					↑					
בחירות	␣	␣	␣	␣	1	␣	␣	␣	␣	␣
					↑					

מעתיקים סרט הכספת לסרט העבודה:

כספת הקלט	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
					↑					
עבודה	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
					↑					
בחירות	␣	␣	␣	␣	1	␣	␣	␣	␣	␣
					↑					

ריצה של סדרת הבחירות על סרט העבודה:

	מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזוזה
1	q_0	a	q_0	a	R
2	q_0	a	q_1	␣	R
3	q_0	a	q_1	a	R
4	q_0	a	q_0	a	L
1	q_0	␣	acc	␣	L
1	q_1	a	q_0	a	L
2	q_1	a	q_1	a	R
1	q_1	␣	rej	a	R
2	q_1	␣	q_1	a	L

כספת הקלט		␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
						↑					
עבודה	q_0	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
						↑					
בחירות		␣	␣	␣	␣	1	␣	␣	␣	␣	␣
						↑					

כספת הקלט		␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
						↑					
עבודה	q_0	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
							↑				
בחירות		␣	␣	␣	␣	1	␣	␣	␣	␣	␣
							↑				

כאשר מגיעים לרווח בסרט הבחירות מסתיים סבב הריצה לפי סדרת הבחירות הנוכחית.

במקרה הזה לא הגענו לא לקבלה ולא לדחיה.

נעבור לבדוק את סדרת הבחירות הבאה.

סבב 2)

סדרת הבחירות = 2.

כספת הקלט		␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
עבודה		␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
בחירות		␣	␣	␣	␣	2	␣	␣	␣	␣	␣

מעתיקים סרט הכספת לסרט העבודה:

כספת הקלט		␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
עבודה		␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
בחירות		␣	␣	␣	␣	2	␣	␣	␣	␣	␣

ריצה של סדרת הבחירות על סרט העבודה:

	מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזוזה
1	q_0	a	q_0	a	R
2	q_0	a	q_1	␣	R
3	q_0	a	q_1	a	R
4	q_0	a	q_0	a	L
1	q_0	␣	acc	␣	L
1	q_1	a	q_0	a	L
2	q_1	a	q_1	a	R
1	q_1	␣	rej	a	R
2	q_1	␣	q_1	a	L

כספת הקלט		␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
עבודה	q_0	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
בחירות		␣	␣	␣	␣	2	␣	␣	␣	␣	␣

כספת הקלט		␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
עבודה	q_1	␣	␣	␣	␣	␣	a	␣	␣	␣	␣
בחירות		␣	␣	␣	␣	2	␣	␣	␣	␣	␣

לא הגענו לא לקבלה ולא לדחיה, לכן נעבור לבדוק את סדרת הבחירות הבאה.

⋮

סבב 21)

סדרת הבחירות = 111.

כספת הקלט	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
					↑					
עבודה	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
					↑					
בחירות	␣	␣	␣	␣	1	1	1	␣	␣	␣
					↑					

מעתיקים סרט הכספת לסרט העבודה:

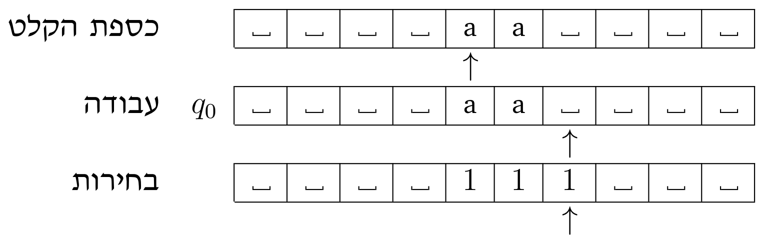
כספת הקלט	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
					↑					
עבודה	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
					↑					
בחירות	␣	␣	␣	␣	1	1	1	␣	␣	␣
					↑					

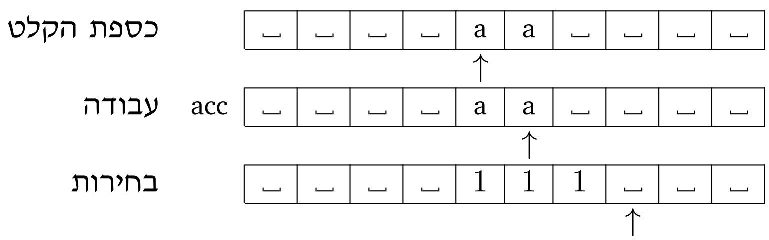
ריצה של סדרת הבחירות על סרט העבודה:

	מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזוזה
1	q_0	a	q_0	a	R
2	q_0	a	q_1	␣	R
3	q_0	a	q_1	a	R
4	q_0	a	q_0	a	L
1	q_0	␣	acc	␣	L
1	q_1	a	q_0	a	L
2	q_1	a	q_1	a	R
1	q_1	␣	rej	a	R
2	q_1	␣	q_1	a	L

כספת הקלט		␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
						↑					
עבודה	q_0	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
						↑					
בחירות		␣	␣	␣	␣	1	1	1	␣	␣	␣
						↑					

כספת הקלט		␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
						↑					
עבודה	q_0	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
							↑				
בחירות		␣	␣	␣	␣	1	1	1	␣	␣	␣
							↑				





המכונה N הגיעה למצב acc^N לכן המכונה M עוברת למצב acc^M והתהליך מתסתיים.

הגדרה 5.3: שקילות חישובית של מטל"ט למט"ד

המכונה M תייצר את כל הסדרות. את הסדרות נייצר בסדר המנייה

- 1
- 2
- 3
- 4
- 11
- 12
- 13
- 14
- 21
- 22
- $\vdots$
- 111
- 112
- $\vdots$

הסדר הוא לפי אורך הסדרה ובכל אורך בסדר לקסיקוגרפי.
סדר זה נקרא סדר המניה.
תיאור מילולי של המכונה:

(1 כתבו 1 בסרט בחירות.

2) העתיקו קלט מסרט כספת הקלט לסרט עבודה.

3) הריצו את המכונה N על סרט עבודה לפי הסדרה שבסרט בחירות. בכל צעד בדקו:

- אם המכונה N הגיעה למצב acc^N עבור למצב acc^M.
- אם הבחירה לא אפשרית, עברו לשלב 4.

4) מחקו תוכן הסרט עבודה.

5) בסרט הבחירות כתבו המחרוזת הבאה לפי סדר המניה.

6) חזרו לשלב 2.

5.3 סגירות תחת שרשור

משפט 5.3: סגירות תחת שרשור

תהיינה A,B שפות כריעות ותהיינה M^A ו- M^B המכונות המכריעות אותן.
$\exists$ מ"ט M^C המכריעה את השפה $A\cdot B$.

הוכחה: הרעיון של בניית המ"ט שמכריעה את $A\cdot B$ הוא:
לחלק את המילה,
להריץ M^A על הרישא,
ואז להריץ M^B על הסיפא.

בפרט:

סרט הראשון	␣	a	b	a	b	c	␣	␣	␣
		↑							
סרט השני	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
	↑								

1) כל עוד שלא הגענו ל- ␣ בסרט הראשון, בחרו אית מבין השתי אופציות הבאות:

א) העתיקו אות מהסרט הראשון לשני, מחקו את האות מהסרט הראשון והתקדמו ימינה בשני הסרטים.

ב) חזרו לתחילת הקלט בסרט השני ועברו לשלב 2.

2) הריצו את M^A על הסרט השני: אם דחתה $\leftarrow$ rej.

3) אם M^A קיבלה, הריצו את M^B על הסרט הראשון.

אם קיבלה $\leftarrow$ acc.

אם דחתה $\leftarrow$ rej.

■

5.4 סגירות בעזרת אי-דטרמיניזם

משפט 5.4:

אם L כריעה אז גם L^* כריעה.

כמו כן, אם L קבילה אז גם L^* קבילה.

הוכחה:

הרעיון

תהי M מ"טד שמכריעה את L.
נבנה מטל"ט N שמכריעה את L^*.

למכונה N שני סרטים שנקרא "קלט" ו"עבודה".
N תפרק את הקלט שלה באופן אי-דטרמיניסטי לחלקים.
היא תעתיק כל "חלק" מסרט "קלט" לסרט "עבודה", ואז תפעיל את המכונה M על סרט "עבודה".
רק אם המכונה M קיבלה את כל החלקים, אז המכונה N גם תקבל.
אחרת היא תדחה.

השיטה

1) אם בסרט הקלט קוראים $\sqcup$ $\leftarrow$ acc.

2) כל עוד בסרט "קלט" לא קוראים $\sqcup$ חזרו על התהליך הבא.

בחרו באופן אי-דטרמיניסטי בין האפשרויות הבאות:

א) העתיקו אות מסרט "קלט" לסרט "עבודה", והזזו את שני הראשים ימינה.

ב) הזזו את הראש בסרט "עבודה" לתו השמאלי ביותר שאינו תו רווח ועברו לשלב 3.
אם שין כזה, בצעו את שלב א.

3) הריצו את המכונה M על סרט "עבודה" עד לעצירה.
אם החיושב הסתיים במצב דחיה $\leftarrow$ rej.

4) מחקו תוכן סרט " עבודהז" וחזרו לשלב 1.

הערות

- M מכונה להכרעה לכן שלב 3 בהכרח מסתיים ולכן כל התהליך בהכרח מסתיים.
לפיכך זוהי מכונה להכרעה.
- אם קלט $w \in L^*$ יש לו פירוק $w = w_1 \dots w_k$ כך ש- $w_i \in L$.
לכן החישוב של N שבשלב 2 בדיוק מעתיק בכל פעם את ה- w_i המתאים, יוביל את המכונה למצב acc.
- אם $w \notin L^*$ אז לכל ריצה, בהכרח יהיה חלק שמועתק לסרט "עבודה" שהוא לא בשפה L ולכן המכונה תדחה בשלב 3.
- באופן דומה אם L קבילה, אז יש מכונה M שמקבלת אותה.
לכן המכונה N שלעיל מקבלת את L^*.

■

הגדרה 5.4: שפה dropout

$$\text{drop}-\text{out}(L)=\left\{u\text{v}\;\middle|\exists\sigma\in\Sigma\ ,\ u,\text{v}\in\Sigma^*\ ,\ u\sigma\text{v}\in L\right\}\ .$$

דוגמה 5.7

נתונה הא"ב $\Sigma=\{a,b\}$
והשפה מעל Σ שמוגדרת

$$L=\{aba,ba\}\ .$$

אז

$$\text{drop}-\text{out}(L)=\{ba\ ,\ aa\ ,\ ab\ ,\ a\ ,\ a\}\ .$$

מעל