

## פתרונות

### חישוביות וסיבוכיות

מועד א'

### פתרון לדוגמא

ד"ר יוחאי טוויטו, ד"ר ירמיהו מילר, .

סמסטר א, תשפ"ה

מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הינן פתרונות לדוגמא. ניתן לפתור חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

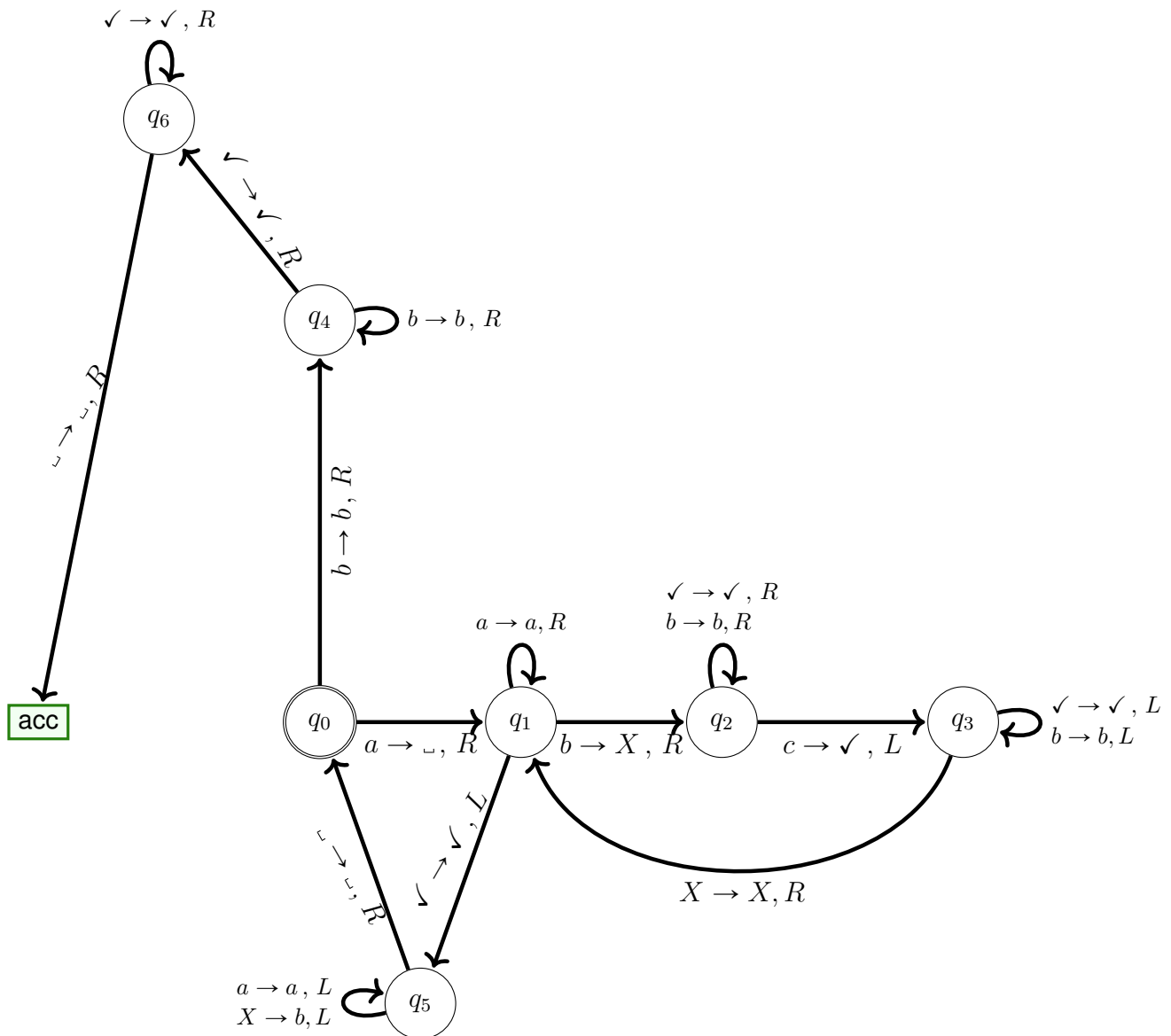
עמוד 1 מתוך 9

**המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון**

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245,84 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il) | חייג: ☎ 052-7777777

## שאלה 1: מכונת טיורינג 20 נקודות

סעיף א'



עמוד 2 מתוך 9

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

## פתרונות

**סעיף ב'** הפונקציה שאותה המכונה מחשבת היא הפונקציה:

$$f(x) = x \mod 3.$$

כלומר, המכונה מחשבת את שארית החלוקה ב-3 של המספר האונרי הנתון כקלט.

**סעיף ג'** הפונקציה שאותה המכונה מחשבת היא הפונקציה:

$$f(1^i \# 1^j) = 1^{|i-j|}.$$

כלומר, המכונה מחשבת את הערך המוחלט של ההפרש בין שני מספרים  $1^i, 1^j$ , הנתונים בקלט. הסבר:

$$q_0 \ 1 \# 1 \vdash q_1 \# 1 \vdash_* \# 1 q_1 \vdash \# q_2 1 \vdash_* q_{back} \sqcup \# \vdash q_0 \# \vdash acc.$$

לכן  $f(1 \# 1) = 0$ .

$$q_0 \ 11 \# 1 \vdash q_1 \ 1 \# 1 \vdash_* 1 \# 1 q_1 \vdash 1 \# q_2 1 \vdash_* q_{back} \sqcup 1 \# \vdash q_0 \ 1 \#$$

$$\vdash q_1 \# \vdash \# q_1 \sqcup \vdash q_2 \# \sqcup \vdash q_4 \sqcup 1 \vdash \sqcup acc \ 1$$

לכן  $f(11 \# 1) = 1$ .

נסתכל על קלט כללי  $1^i \# 1^j$  כאשר  $i \geq j$ :

$$q_0 \ 1^i \# 1^j \vdash_* 1^{i-1} \# q_1 1^j \vdash_* 1^{i-1} \# 1^j q_1 \sqcup \vdash 1^{i-1} \# 1^{j-1} q_2 1 \vdash 1^{i-1} \# 1^{j-2} q_{back} 1 \sqcup$$

$$\vdash_* q_{back} \sqcup 1^{i-1} \# 1^{j-1} \vdash q_0 \ 1^{i-1} \# 1^{j-1}$$

⋮

$$\vdash_* q_0 \ 1^{i-j} \# \sqcup \vdash_* 1^{i-j-1} \# q_1 \sqcup \vdash 1^{i-j-1} q_2 \# \vdash 1^{i-j-2} q_4 11 \vdash_* q_4 \sqcup 1^{i-j}$$

$$\vdash acc \ 1^{i-j}$$

לכן

$$f(1^i \# 1^j) = 1^{i-j}, \quad i \geq j. \quad (*)$$

נסתכל על קלט כללי  $1^i \# 1^j$  כאשר  $i < j$ :

## פתרונות

$$\begin{aligned}
 q_0 1^i \# 1^j &\vdash_* 1^{i-1} \# q_1 1^j && \vdash_* 1^{i-1} \# 1^j q_1 \sqsubset && \vdash 1^{i-1} \# 1^{j-1} q_2 1 && \vdash 1^{i-1} \# 1^{j-2} q_{\text{back}} 1 \sqsubset \\
 &\vdash_* q_{\text{back}} \sqsubset 1^{i-1} \# 1^{j-1} && \vdash q_0 1^{i-1} \# 1^{j-1} \\
 &\vdots \\
 &\vdash_* q_0 \# 1^{j-i} \sqsubset && \vdash \text{acc } 1^{j-i} \sqsubset
 \end{aligned}$$

לכן

$$f(1^i \# 1^j) = 1^{j-i}, \quad i < j. \quad (*)2$$

המשוואות (\*)1 ו- (\*)2 אומרות ש:

$$f(1^i \# 1^j) = 1^{|i-j|}. \quad (*)3$$

## שאלה 2: וריאציות על מכונת טיורינג 20 נקודות

כיוון ראשון: לכל מכונה ממודל  $OR$  קיימת מכונה שקולה ממודל  $TS$

תהי  $M_{OR} = (Q^{OR}, \Sigma^{OR}, \Gamma^{OR}, \delta^{OR}, q_0^{OR}, q_{\text{acc}}^{OR}, q_{\text{rej}}^{OR})$  מכונה ממודל  $OR$ .  
 נבנה מכונה שקולה  $M_{TS} = (Q^{TS}, \Sigma^{TS}, \Gamma^{TS}, \delta^{TS}, q_0^{TS}, q_{\text{acc}}^{TS}, q_{\text{rej}}^{TS})$  ממודל  $TS$ .  
 כל הרכיבים של המכונה  $M_{TS}$  יהיו זהים לרכיבים של המכונה  $M_{OR}$  מלבד פונקציית המעברים.  
 נגדיר את פונקציית המעברים  $\delta^{TS}$ .

**מעברי תנועה**

נניח ש  $\delta^{OR}$  מכילה את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q, \sigma) = (p, \text{move})$$

כאשר:

$$p, q \in Q^{OR}, \quad \sigma \in \Gamma^{OR}, \quad \text{move} \in \{L, R\}.$$

אז ב-  $\delta^{TS}$  נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{TS}(q, \sigma) = (p, \sigma, \text{move})$$

**מעברי כתיבה**

נניח ש  $\delta^{OR}$  מכילה את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q, \sigma) = (p, \tau)$$

עמוד 4 מתוך 9

**המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון**

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245, 84 | חייג: 08-9400777 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il)

## פתרונות

כאשר:

$$p, q \in Q^{OR}, \quad \sigma, \tau \in \Gamma^{OR}.$$

אז ב-  $\delta^{TS}$  נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{TS}(q, \sigma) = (p, \tau, S)$$

כיוון שני: לכל מכונה ממודל  $TS$  קיימת מכונה שקולה ממודל  $OR$

תהי  $M_{TS} = (Q^{TS}, \Sigma^{TS}, \Gamma^{TS}, \delta^{TS}, q_0^{TS}, q_{acc}^{TS}, q_{rej}^{TS})$  מכונה ממודל  $TS$ .

נבנה מכונה שקולה  $M_{OR} = (Q^{OR}, \Sigma^{OR}, \Gamma^{OR}, \delta^{OR}, q_0^{OR}, q_{acc}^{OR}, q_{rej}^{OR})$  ממודל  $OR$ .

במעברים בהן המכונה  $M_{TS}$  כותבת אות וגם זזה ימינה או שמאלה, לא יתכן מעבר שקול יחיד במכונה ממודל  $OR$ . לכן נמיר חלק מהמעברים במכונה  $M_{TS}$  לשני מעברים עוקבים במכונה  $M_{OR}$ . במעבר הראשון נכתוב אות ובמעבר השני נבצע את התזוזה.

לשם כך, נצטרך מצבי ביניים חדשים, שיחברו בין המעברים. לכל מצב  $q$  נגדיר שני מצבי ביניים ייחודיים  $q^L$  ו-  $q^R$ . כלומר:

$$Q^{OR} = Q^{TS} \cup \{q^L \mid q \in Q^{TS}\} \cup \{q^R \mid q \in Q^{TS}\}.$$

נגדיר כעת את  $\delta^{OR}$  תוך שימוש במצבי ביניים.

מצבי הביניים תמיד יבצעו תזוזה שמאלה או ימינה בלבד, לכל אות שבסרט. פורמלית:

$$\begin{aligned} \forall q \in Q^{TS}, \sigma \in \Gamma^{TS} : \quad & \delta^{OR}(q^R, \sigma) = (q, R), \\ \forall q \in Q^{TS}, \sigma \in \Gamma^{TS} : \quad & \delta^{OR}(q^L, \sigma) = (q, L). \end{aligned}$$

עבור מעברים בהן מתבצעת כתיבה ותנועה, נגדיר את  $\delta^{OR}$  תוך שימוש במצבי ביניים.

בהינתן מעבר עם תנועה ימינה:

$$\delta^{TS}(q, \sigma) = (p, \tau, R).$$

כאשר:

$$q, p \in Q^{TS}, \quad \sigma, \tau \in \Gamma^{TS}$$

אז ב-  $\delta^{OR}$  נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q, \sigma) = (p^R, \tau).$$

באופן דומה, בהינתן מעבר עם תנועה שמאלה:

$$\delta^{TS}(q, \sigma) = (p, \tau, L).$$

כאשר:

$$q, p \in Q^{TS}, \quad \sigma, \tau \in \Gamma^{TS}$$

אז ב-  $\delta^{OR}$  נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q, \sigma) = (p^L, \tau).$$

## פתרונות

במעברים בהם המכונה  $M_{TS}$  אינה מבצעת תנועה (נשארת במקום) לא נשתמש במצבי הביניים. כלומר, בהינתן מעבר בו המכונה נשארת במקום:

$$\delta^{TS}(q, \sigma) = (p, \tau, S)$$

כאשר:

$$q, p \in Q^{TS}, \quad \sigma, \tau \in \Gamma^{TS}$$

אז ב  $\delta^{OR}$  נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q, \sigma) = (p, \tau).$$

### שאלה 3: התזה של צ'רץ' טיורינג 20 נקודות

סעיף א' השפה שהדקדוק  $G$  יוצר היא:

$$L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

סעיף ב'

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$$

כלומר, שפת כל המילים בהן מספר שווה של אותיות  $a$ , אותיות  $b$ , ואותיות  $c$ .

### שאלה 4: אי-כריעות 20 נקודות

נתון: השפה  $L_{M_1 \cup M_2}$  מוגדרת:

$$L_{M_1 \cup M_2} = \{\langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \cup L(M_2)\}$$

ז"א  $L_{M_1 \cup M_2}$  השפה שכוללת כל המחרוזות  $\langle M_1, M_2, w \rangle$  כאשר  $w$  שייך לאחת השפות  $L(M_1)$  או  $L(M_2)$  לפחות.

צריך להוכיח: קיימת רדוקציה התאמה בין השפה  $A_{TM}$  לשפה  $L_{M_1 \cup M_2}$ , כלומר

$$A_{TM} \leq L_{M_1 \cup M_2}.$$

הגדרת הרדוקציה:

בהינתן  $\langle M, w \rangle$  קלט של  $A_{TM}$  ניצור  $\langle M_1, M_2, w \rangle$  קלט של  $L_{M_1 \cup M_2}$  כך שמתקיים התנאי הבא:

$$\begin{aligned} \langle M, w \rangle \in A_{TM} &\Rightarrow \langle M_1, M_2, w \rangle \in L_{M_1 \cup M_2}, \\ \langle M, w \rangle \notin A_{TM} &\Rightarrow \langle M_1, M_2, w \rangle \notin L_{M_1 \cup M_2}. \end{aligned}$$

נגדיר את פונקציית הרוקציה באופן הבא:

$$M_1 = \text{"על כל קלט } x \text{ } M_1 \leftarrow \text{rej."}$$

$$M_2 = \text{"על כל קלט } x \text{ } M_2$$

עמוד 6 מתוך 9

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245, 84 | חייג: 08-9400700 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il)

## פתרונות

- מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוה.

### נכונות הרדוקציה:

#### כיוון $\Leftarrow$

אם  $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$

$$w \in L(M) \Leftarrow$$

$$.w \in L(M_2) \Leftarrow$$

$$w \in L(M_2) \cup \emptyset \Leftarrow$$

$$w \in L(M_2) \cup L(M_1) \Leftarrow$$

$$.\langle M_1, M_2, w \rangle \in L_{M_1 \cup M_2} \Leftarrow$$

#### כיוון $\Rightarrow$

אם  $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$

$$.w \notin L(M) \Leftarrow$$

$$.w \notin L(M_2) \Leftarrow$$

$$w \notin L(M_2) \text{ וגם } w \notin L(M_1) \text{ (כי השפה של } M_1 \text{ היא } \emptyset).$$

$$.\langle M_1, M_2, w \rangle \notin L_{M_1 \cup M_2} \Leftarrow$$

## שאלה 5: סיבוכיות זמן 20 נקודות

### פונקציית הרדוקציה:

נגדיר פונקציית הרדוקציה  $f$  שבהינתן זוג  $\langle G, k \rangle \in IS$ , (הקלט של  $IS$ ), יוצרת  $\langle G', k' \rangle \in VC$ , (הקלט של  $VC$ ), אשר מקיימת את התנאי:

$$\langle G, k \rangle \in IS \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in VC. \quad (*)$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

עמוד 7 מתוך 9

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245, 84 | חייג: 08-9400777 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il)

## פתרונות

(1) בהינתן הגרף  $G = (V, E)$ , אז הגרף  $G'$  הוא אותו גרף  $G = (V, E)$ .

$$(2) \quad k' = |V| - k$$

### נכונות הרדוקציה

כעת נוכיח שמתקיים:  $\langle G, k \rangle \in IS \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in VC$

#### כיוון $\Leftarrow$

בהינתן גרף  $G = (V, E)$  ושלם  $k$ .

נניח כי  $\langle G, k \rangle \in IS$ .

$\Leftarrow$  מכיל קבוצה בלתי תלויה  $S$  בגודל  $k$  לפחות:  $|S| \geq k$ .

$\Leftarrow$  אם  $u_1, u_2 \in S$  אז  $(u_1, u_2) \notin E$ .

כלומר, כל שני קדקודים ב- $S$  לא מחוברים בצלע ב- $G$ .

$\Leftarrow$  השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם  $(u_1, u_2) \in E$  אז  $u_1 \notin S$  או  $u_2 \notin S$ .

$\Leftarrow$  אם  $(u_1, u_2) \in E$  אז  $u_1 \in V \setminus S$  או  $u_2 \in V \setminus S$ .

$\Leftarrow$  התת-קבוצה  $V \setminus S$  היא כיסוי קדקודים של  $G$ .

$|S| \geq k$  ו- $|V \setminus S| = |V| - |S| \leq |V| - k$  לכן  $|V \setminus S| \leq |V| - k$ .

$\Leftarrow$   $G' = G$  מכיל כיסוי קדקודים  $U$  בגודל  $k' = |V| - k$  לכל היותר.

$\Leftarrow$   $\langle G', k' \rangle \in VC$

#### כיוון $\Rightarrow$

בהינתן גרף  $G' = (V, E)$  ושלם  $k'$ .

נניח כי  $\langle G', k' \rangle \in VC$ .

$\Leftarrow$   $G' = (V, E)$  מכיל כיסוי קדקודים  $U$  בגודל  $k'$  לכל היותר:  $|U| \leq k'$ .

$\Leftarrow$  אם  $(u_1, u_2) \in E$  אז  $u_1 \in U$  או  $u_2 \in U$ .

$\Leftarrow$  השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם  $u_1 \notin U$  וגם  $u_2 \notin U$  אז  $(u_1, u_2) \notin E$ .

$\Leftarrow$  השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם  $u_1 \in V \setminus U$  וגם  $u_2 \in V \setminus U$  אז  $(u_1, u_2) \notin E$ .

## פתרונות

$\Leftarrow$  התת-קבוצה  $S = V \setminus U$  היא קבוצה בלתי תלויה.

$|S| = |V| - |U|$  ו-  $|U| \leq k'$  אז  $|S| \geq |V| - k'$ .

$\Leftarrow G' = G$  מכיל קבוצה בלתי תלויה  $S$  בגודל  $|V| - k' = k$  לפחות.

$\Leftarrow \langle G, k \rangle \in IS$