שיעור 7
צירוף לינארי ופרישה לינארית

הגדרה של צרוף לינארי

7.1 הגדרה: (צרוף לינארי)
נניח כי V מרחב וקטורי מעל שדה, $\mathbb{F}$. יהיו $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n \in V$, ו- $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. הוקטור

$$\alpha_1 \mathrm{v}_1 + \alpha_2 \mathrm{v}_2 + \ldots \alpha_n \mathrm{v}_n$$

נקרא **צירוף לינארי (צ"ל)** של הוקטורים $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n$ עם מקדמים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

7.2 דוגמא.

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} , \qquad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$2\mathrm{v}_1 - 5\mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ -19 \\ 8 \end{pmatrix}$$

וקטור $\begin{pmatrix} -8 \\ -19 \\ 8 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של v_1, v_2.

7.3 דוגמא.
האם וקטור $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של הוקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} , \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

? אם כן, רשמו את הצירוף הלינארי.

פיתרון.

$$\mathrm{v} = xu_1 + yu_2 + zu_3 \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ x - y + z &= 4 \\ x + 2z &= 4 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to 3\cdot R_3+2\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to\frac{1}{4}\cdot R_3]{R_2\to-\frac{1}{3}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2+\frac{1}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$x=2$, $y=-1$, $z=1$,

$$\mathrm{v}=2u_1-u_2+u_3\ .$$

■

7.4 דוגמא.
האם וקטור $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של הוקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\-5\\7\end{pmatrix}\ ,\qquad u_2=\begin{pmatrix}2\\-4\\-1\end{pmatrix}\ ,\qquad u_3=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$$

? אם כן, רשמו את הצירוף הלינארי.

פיתרון.

$$\mathrm{v}=xu_1+yu_2+zu_3 \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\-5\\7\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\-4\\-1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\ .$$

$$\begin{aligned} x+2y+z &= 1 \\ -5x-4y-3z &= -2 \\ 7x-y+2z &= 5 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -5 & -4 & -3 & -2 \\ 7 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-7R_1]{R_2\to R_2+5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -5 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{6}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & -15 & -5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+15R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{2} \end{array}\right)$$

אין פתרון ולכן v הוא לא צ"ל של u_1, u_2, u_3. ■

7.5 דוגמא.
בדקו אם וקטור $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}0\\4\\7\end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של הוקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}\ ,\qquad u_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad u_3=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$$

? אם כן, רשמו את הצירוף הלינארי.

פיתרון.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&2&1&0\\2&0&2&4\\3&1&4&7\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3+3R_1]{R_2\to R_2+2R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&2&1&0\\0&4&4&4\\0&7&7&7\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-\frac{7}{4}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&2&1&0\\0&4&4&4\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}-1&2&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&-1&-2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

למערכת ∞ פתרונות, לכן v הוא צ"ל של u_1, u_2, u_3.

הפתרון הכללי:
$$(x,y,z)=(2-z,1-z,z)\ ,\qquad (z\in\mathbb{R})\ .$$

נציב $z=1$, ונקבל
$$\mathrm{v}=u_1+0\cdot u_2+u_3\ .$$

■

7.6 דוגמא.
בטאו את הפולינום $p(x)=-3+4x+x^2$ כצירוף לינארי של

$$p_1(x)=5-2x+x^2\ ,\qquad p_2(x)=-3x+2x^2\ ,\qquad p_3(x)=3+x\ .$$

פיתרון.

$$-3+4x+x^2=\alpha_1(5-2x+x^2)+\alpha_2(-3x+2x^2)+\alpha_3(3+x)$$

השוויון אמור להתקיים לכל $x\in\mathbb{R}$. לכן

$$\begin{cases} 5\alpha_1+3\alpha_3 &= -3\ , \\ -2\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3 &= 4\ , \\ \alpha_1+2\alpha_2 &= 1\ . \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-5R_1]{R_2\to R_2+2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -10 & 3 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+10R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 52 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to \frac{1}{13}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$\alpha_1=-3$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=4$.

$$p(x)=-3p_1(x)+2p_2(x)+4p_3(x)\ .$$

■

7.7 דוגמא.

רשמו מטריצה $D=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של מטריצות

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\ .$$

פיתרון.

$$\alpha_1A+\alpha_2B+\alpha_3C=D$$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_1+2\alpha_3\\ \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_2-\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 &= 3 \\ \alpha_2+2\alpha_3 &= 1 \\ \alpha_1+\alpha_2 &= 1 \\ \alpha_2-\alpha_3 &= -1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1=3\ ,\alpha_2=-2\ ,\alpha_3=-1\ .$$

ז"א

$$3A-2B-C=D\ .$$

■

7.8 דוגמא.
האם פונקציה $y=\sin(2x)$ צירוף לינארי של $\sin x$ ו- $\cos x$?

פיתרון.
נניח שקיימים α_1,α_2 כך ש

$$\alpha_1\sin x+\alpha_2\cos x=\sin(2x)\ .$$

השוויון אמור להתקיים לכל $x\in\mathbb{R}$.

נציב $x=0$ $\Leftarrow$ $\alpha_2=0$. $\Leftarrow$

$$\sin(2x)=\alpha_1\sin x\ .$$

נציב $x=\frac{\pi}{2}$ $\Leftarrow$

$$\alpha_1=\sin\pi=0$$

קיבלנו $\sin 2x=0$ לכל $x\in\mathbb{R}$. סתירה.

לכן לא קיימים α_1, α_2 כך ש

$$\alpha_1\sin x+\alpha_2\cos x=\sin(2x)\ .$$

■

פרישה לינארי

7.9 הגדרה: (פרישה לינארי)
נניח כי V מרחב וקטורי מעל שדה, $\mathbb{F}$. יהיו $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n\in V$. הקבוצה

$$\{\alpha_1\mathrm{v}_1+\alpha_2\mathrm{v}_2+\ldots\alpha_n\mathrm{v}_n|\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}\}$$

נקראת פרישה לינארית של $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n$.

הפרישה של וקטורים מסומן ב $\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$.

ז"א פרישה לינארית זה אוסף כל הצירופים הלינאריים של $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n$.

7.10 משפט: פרישה היא ת"מ

לכל מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$ ולכל $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n \in V$,

$$\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$$

הוא תת מרחב של V.

הוכחה.

1) צ"ל $\bar{0} \in \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$ כי

$$\bar{0} = 0 \cdot \mathrm{v}_1 + \ldots + 0 \cdot \mathrm{v}_n$$

$\Leftarrow$ $\bar{0} \in \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$.

2) נניח $u_1, u_2 \in \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$. צ"ל כי $u_1 + u_2 \in \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$.

לפי הנתון:

$$u_1 = k_1 \mathrm{v}_1 + \ldots + k_n \mathrm{v}_n \ , \qquad u_2 = t_1 \mathrm{v}_1 + \ldots + t_n \mathrm{v}_n \ .$$

אז

$$u_1 + u_2 = (k_1 + t_1)\mathrm{v}_1 + \ldots + (k_n + t_n)\mathrm{v}_n \ ,$$

ז"א $u_1 + u_2 \in \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$.

3) נניח $u \in \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$, $t \in \mathbb{F}$. צ"ל $tu \in \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$.

$$u = k_1 \mathrm{v}_1 + \ldots + k_n \mathrm{v}_n \quad \Rightarrow \quad tu = (tk_1)\mathrm{v}_1 + \ldots + (tk_n)\mathrm{v}_n \in \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n) \ .$$

מש"ל. ■

7.11 דוגמא.
בדקו אם וקטור $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ במרחב וקטורי $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ שייך לפרישה לינארית של $u_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 11 \end{pmatrix}$.

פיתרון.
$\mathrm{v} \in \mathrm{sp}(u_1, u_2, u_3)$ אם ורק אם קיימים סקלרים k_1, k_2, k_3 כך ש

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \mathrm{v} \ .$$

לכן

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix} \ .$$

מקבלים מערכת משוואות:

$$\left\{ \begin{array}{rl} 2k_1 - 3k_2 + k_3 & = -1 \\ k_1 + 2k_2 + 4k_3 & = 3 \\ 4k_1 + 8k_3 & = 4 \\ -k_1 + k_2 - k_3 & = 0 \\ 3k_1 + 5k_2 + 11k_3 & = 8 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_5 \to R_5 - 3R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 4R_1 \\ R_4 \to R_4 + R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון כללי:

$$k_1 = 1 - 2k_3 \ , \qquad k_2 = 1 - k_3 \ , \qquad k_3 \in \mathbb{R} \ .$$

נציב $k_3 = 1 \Leftarrow k_2 = 0$, $k_1 = -1$. נקבל

$$\mathrm{v} = -u_1 + o \cdot u_2 + u_3 \ .$$

לכן

$$\mathrm{v} \in \mathrm{sp}(u_1, u_2, u_3) \ .$$

■

יש שתי דרכים להגדיר ת"מ:

1) ע"י פרישה לינארית

2) ע"י מערכת הומוגנית.

ניתן לעבור מדרך אחת לשניה.

7.12 דוגמא.
נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

הציגו את $\mathrm{Nul}(A)$ בצורת פרישה לינארית.

פיתרון.

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן למערכת ההומוגנית $AX = 0$ יש ∞ פתרונות. הפתרון הכללי:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_3 &= -2x_4 + 2x_5 \end{aligned}\right\} \ x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

ז"א

$$u = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Nul}(A)$$

הצורת הכללית של וקטור ב $\mathrm{Nul}(A)$:

$$u = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

קיבלנו צ"ל של וקטורים

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

לכן $u \in \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$. ז"א $\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$. ■

7.13 דוגמא.

נתונה מטריצה

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} , u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 18 \\ 21 \end{pmatrix}$$

הציגו את $\mathrm{sp}(u_1, u_2, u_3)$ באוסף של פתרונות של מערכת הומוגנית.

פיתרון.

וקטור $\mathrm{v} \in \mathrm{sp}(u_1, u_2, u_3)$ אם ורק אם קיימים סקלירים k_1, k_2, k_3 כך ש

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \mathrm{v} \ .$$