המחלקה למדעי המחשב

24/02/24-20/02/24

חדו"א 2 למדמ"ח

מועד מיוחד'

מרצים: ד'ר ירמיהו מילר,

תשפ"ג סמסטר קיץ'

השאלון מכיל 3 עמודים.

בהצלחה!

==

<u>אחר / הערות</u>

- תשובה ללא הסבר, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות <u>בלבד</u> מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** <u>בלבד</u> מתוך **שתיים**.
- **סטודנט יהיה זכאי להגיש ערעור / בקשות שונות לגבי הבוחן במשך 5 ימים בלבד מיום קבלת הציון.**

==

שאלה 1 (20 נקודות)

נתונה הפונקציה $f(x,y)=\sqrt{6x-8y-x^2-y^2}$.

א) (10 נק') מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה ומצאו את האקסטרמומים מקומיים של הפונקציה ובררו את סוגיהם.

ב) (10 נק')
מצאו את הערך הגדול ביותר והערך הקקן ביותר של הפונקציה בריבוע:
$D=\{(x,y)|-4\le y\le 4\ ,\ \ -2\le x\le 2\}$.

שאלה 2 (20 נקודות)

א) (10 נק') נתונה סדרה

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{7}{a_n}\right)\ ,\qquad a_1=3\ .$$

הוכיחו כי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת וחשבו את גבולה.

ב) (10 נק') הוכיחו או הפריכו: אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$ מתכנס אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

שאלה 3 (20 נקודות)

א) (10 נק') החליפו את סדר האינטגרציה וחשבו את האינטגרל: $\int_0^9 dy\int_{\sqrt{y}}^3\cos\left(x^3\right)\,dx$

ב) (10 נק') פתרו את המשוואה הדיפרנציאלית: $2y'\cot(x)+y-2=0$.

שאלה 4 (20 נקודות)

א) (10 נק') מצאו את הנפח של הגוף המוגדר על ידי אי-השוויונים:

$$0\le x\le 2\ ,\quad 0\le y\le 2\ ,\quad 0\le z\le 4-x-y\ .$$

ב) (5 נק') ציירו במערכת הצירים xyz את הגוף שמדובר עליו בסעיף א'.

ג) (5 נק') חשבו את הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right)$ או הוכיחו שהוא אינו קיים.

שאלה 5 (20 נקודות)

א) (10 נק') מצאו את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{3^n + 7^n}$.

ב) (10 נק') יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ שני טורים. הוכיחו או הפריכו: אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ מתכנס אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס וגם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

שאלה 6 (20 נקודות)

א) (10 נק') עבור הפונקציה $f(x,y) = e^{1+x^2+y^2}$ והנקודה $A(2,3)$ מצאו את הנגזרת המכוונת בנקודה A בכיוון ממנה אל הראשית $O(0,0)$.

ב) (10 נק') רשמו את המשוואת הפרמטרית של הישר $\begin{cases} x+2y+z &= 0 \\ 3x+y &= 5 \end{cases}$ וחשבו את הזווית בינו לבין המישור $x+z=0$.

שאלה 7 (10 נקודות)

במישור $y=0$ מצאו את הנקודה P כך שסכום המרחקים ממנה לנקודות $M(4,3,1)$ ו- $N(-12,4,6)$ יהיה מינימלי וחשבו את הסכום המינימלי.

שאלה 8 (10 נקודות)

על המישור $x+y-z=2$ מצאו את הנקודה P הקרובה ביותר למשטח:

$$x^2+y^2+z^2+4y+3=0\ .$$

פתרונות

שאלה 1

א) נרשום את הפונקציה בצורה

$$f(x,y)=\sqrt{-(x-3)^2-(y+4)^2+25}\ .$$

תחום ההגדרה:

$$(x-3)^2+(y+4)^2-25\leq 0 \quad\Rightarrow\quad (x-3)^2+(y+4)^2\leq 25\ .$$

לפיכך התחום ההגדרה הינו מעגל של רדיוס 5 ומרכזו בנקודה $(x,y)=(3,-4)$.

תנאי הכרחי לאקסרמום:

ראשית נגדיר את הפונקציה $F(x,y)=f^2(x,y)=-(x-3)^2-(y+4)^2-25$. בעזרת הפונקציה החדשה נחשב את הנגזרות הראשונות לפי x ו- y באופן הבא:

(*1)

$$F'_x=-2(x-3)$$

ומצד שני $F'_x=2ff'_x$ לכן

$$2ff'_x=-2(x-3)\quad\Rightarrow\quad f'_x=\frac{-(x-3)}{f}=\frac{-(x-3)}{\sqrt{-(x-3)^2-(y+4)^2+25}}\ .$$

באותה מידה

(*2)

$$F'_y=-2(y+4)$$

ומצד שני $F'_y=2ff'_y$ לכן

$$2ff'_y=-2(y+4)\quad\Rightarrow\quad f'_y=\frac{-(y+4)}{f}=\frac{-(y+4)}{\sqrt{-(x-3)^2-(y+4)^2+25}}\ .$$

$$f'_x\overset{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad x=3\ .$$

$$f'_y\overset{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad y=-4\ .$$

לפיכך $P_0(3,-4)$ נקודת קריטית.

תנאי מספיק (מבחן Δ):

כדי לחשב את f''_{xx} נחק נגזרת של משוואה (1*) לפי x:

$$F''_{xx} = (2ff'_x)'_x = 2\left(f'_x\right)^2 + 2ff''_{xx} = 2\frac{(x-3)^2}{f^2} + 2ff''_{xx}$$

מצד שני $F''_{xx} = -2$ לכן

$$-2 = 2\frac{(x-3)^2}{f^2} + 2ff''_{xx} \quad \Rightarrow \quad 2ff''_{xx} = -2 - 2\frac{(x-3)^2}{f^2}$$

$$\Rightarrow \quad ff''_{xx} = -1 - \frac{(x-3)^2}{f^2} = \frac{-f^2-(x-3)^2}{f^2} = \frac{(y+4)^2-25}{f^2}$$

ולכן

$$f''_{xx} = \frac{(y+4)^2-25}{f^3} = \frac{(y+4)^2-25}{(-(x-3)^2-(y+4)^2+25)^{3/2}}$$

באותה מידה, כדי לחשב את f''_{yy} נחק נגזרת של משוואה (2*) לפי y:

$$F''_{yy} = \left(2ff'_y\right)'_x = 2\left(f'_y\right)^2 + 2ff''_{yy} = 2\frac{(y+4)^2}{f^2} + 2ff''_{yy}$$

מצד שני $F''_{yy} = -2$ לכן

$$-2 = 2\frac{(y+4)^2}{f^2} + 2ff''_{yy} \quad \Rightarrow \quad 2ff''_{yy} = -2 - 2\frac{(y+4)^2}{f^2}$$

$$\Rightarrow \quad ff''_{yy} = -1 - \frac{(y+4)^2}{f^2} = \frac{-f^2-(y+4)^2}{f^2} = \frac{(x-3)^2-25}{f^2}$$

ולכן

$$f''_{yy} = \frac{(x-3)^2-25}{f^3} = \frac{(x-3)^2-25}{(-(x-3)^2-(y+4)^2+25)^{3/2}}$$

הנגזרת f''_{xy} נחשב באותו אופן:

$$F''_{xy} = 2f'_yf'_x + 2ff''_{xy} = 2\frac{(x-3)(y+4)}{f^2} + 2ff''_{xy}\ .$$

מצד שני $F''_{xy} = 0$ לכן

$$0 = 2\frac{(x-3)(y+4)}{f^2} + 2ff''_{xy} \quad \Rightarrow \quad f''_{xy} = -\frac{2(x-3)(y+4)}{f^3} = -\frac{2(x-3)(y+4)}{(-(x-3)^2-(y+4)^2+25)^{3/2}}$$

נציב את הנקודה $P_0(3,-4)$ בהנגזרות f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy} ונקבל:

$$f''_{xx}(3,-4) = \frac{25}{(-25)^{3/2}} = -\frac{1}{5}\ ,$$

$$f'_{yy}\left(P_0\right)=\frac{25}{(-25)^{3/2}}=-\frac{1}{5}\ ,$$

$$f'_{xy}\left(P_0\right)=-\frac{0}{(-25)^{3/2}}=0\ .$$

לכן

$$\Delta\left(P_0\right)=f'_{xx}\left(P_0\right)f'_{yy}\left(P_0\right)-f'_{xy}\left(P_0\right)^2=\frac{1}{25}\ .$$

$f'_{xx}\left(P_0\right)<0$ ו- $\Delta\left(P_0\right)>0$ לכן P_0 נקודת מקסימום.

ב)

- על השפה $x=2$:

$$f_1(y)=f(x=2,y)=\sqrt{-1-(y+4)^2+25}\ ,\qquad f_1'(y)=\frac{-y-4}{\sqrt{-(y+4)^2+24}}\stackrel{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad x=2,y=-4\ .$$

- על השפה $x=-2$:

$$f_2(y)=f(x=-2,y)=\sqrt{-25-(y+4)^2+25}\ ,\qquad f_2'(y)=\frac{-y-4}{\sqrt{-(y+4)^2}}=1$$

לא קיים y עבורו $f_2(y)'_y=0$.

- על השפה $y=4$:

$$f_3(x)=f(x,y=4)=\sqrt{-(x-3)^2-39}\ ,\qquad f_3'(x)=\frac{-x+3}{\sqrt{-(x-3)^2-39}}\stackrel{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad x=3,y=4\ .$$

הנקודה $(3,4)\notin D$.

- על השפה $y=-4$:

$$f_4(x)=f(x,y=-4)=\sqrt{-(x-3)^2+25}\ ,\qquad f_3'(x)=\frac{-x+3}{\sqrt{-(x-3)^2+25}}\stackrel{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad x=3,y=-4\ .$$

הנקודה $(3,-4)\notin D$.

כעת נבדוק את הערך של הפונקציה בקודקודים של התחום D.

- הנקודה $A(2,4)$ לא בתחום ההגדרה של $f(x,y)$.
- בנקודה $B(2,-4)$: $f(2,-4)=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.
- הנקודה $C(-2,4)$ לא בתחום ההגדרה של $f(x,y)$.
- בנקודה $D(-2,-4)$: $f(-2,-4)=0$.

נקודה	ערך של $f(x,y)$
$P_0(3,-4)$	5
$P_1(2,-4)$	$2\sqrt{6}$
$B(2,-4)$	$2\sqrt{6}$
$D(-2,-4)$	0

תשובה סופית:

$\max\limits_{D}(f)=5$

$\arg\max\limits_{D}(f)=(3,-4)$.

$\min\limits_{D}(f)=0$

$\arg\min\limits_{D}(f)=(-2,-4)$.

שאלה 2

א) נשתמש בזהות: לכל $x\geq 0, y\geq 0$ מתקיים $\frac{1}{2}(x+y)\geq\sqrt{xy}$. לכן

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{7}{a_n}\right)\geq\sqrt{a_n\cdot\frac{7}{a_n}}=\sqrt{7}\ .$$

קיבלנו לכן כי $a_n\geq\sqrt{7}$ לכל n, ולכן הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלמטה. נוכיח כי a_n מונוטונית יורדת:

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{7}{a_n}\right)<\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{7}{\sqrt{7}}\right)=\frac{1}{2}\left(a_n+\sqrt{7}\right)<\frac{1}{2}(a_n+a_n)=a_n$$

לכן הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מונוטונית יורדת. ז"א $a_n\leq a_1=3$ לכל n. לכן

$$\sqrt{7}\leq a_n\leq 3\ .$$

לכן a_n וחסומה, וגם יורדת מונוטונית $\Leftarrow$
a_n מתכנסת.
נחשב את הגבול. נסמן $L=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ ו- $L=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}$:

$$L=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{7}{a_n}\right)=\frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}\frac{7}{a_n}\right)=\frac{1}{2}\left(L+\frac{7}{L}\right)$$

ז"א

$$L=\frac{1}{2}\left(L+\frac{7}{L}\right)\ \Rightarrow\ 2L^2=L^2+7\ \Rightarrow\ L^2=7\ \Rightarrow\ L=\sqrt{7}\ .$$

ב) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $a_n=\frac{1}{n}$. הרי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$ מתכנס אבל $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ לא מתכנס.

שאלה 3

א) $\int_0^9 dy \int_{\sqrt{y}}^3 \cos\left(x^3\right)\, dx$. תחום האינטגרציה:

$$D = \{\sqrt{y} \le x \le 3\ ,\ 0 \le y \le 9\} = \left\{0 \le x \le 3\ ,\ 0 \le y \le x^2\right\}$$

$$\int_0^3 dx \int_0^{x^2} dy\ \cos\left(x^3\right) = \int_0^3 dx\ \cos\left(x^3\right) \int_0^{x^2} dy = \int_0^3 dx\ \cos\left(x^3\right) \left[y\right]_{y=0}^{y=x^2} = \int_0^3 dx\ \cos\left(x^3\right) x^2\ .$$

נציב $t = x^3 \Leftarrow x^2 = \frac{1}{3}t'$:

$$\int_0^3 \cos\left(t\right) \frac{1}{3}t'\, dx = \frac{1}{3}\int_{t=0}^{t=27} dt\ \cos\left(t\right) = \frac{1}{3}\left[\sin\left(t\right)\right]_0^{27} = \frac{1}{3}\sin(27)\ .$$

ב)

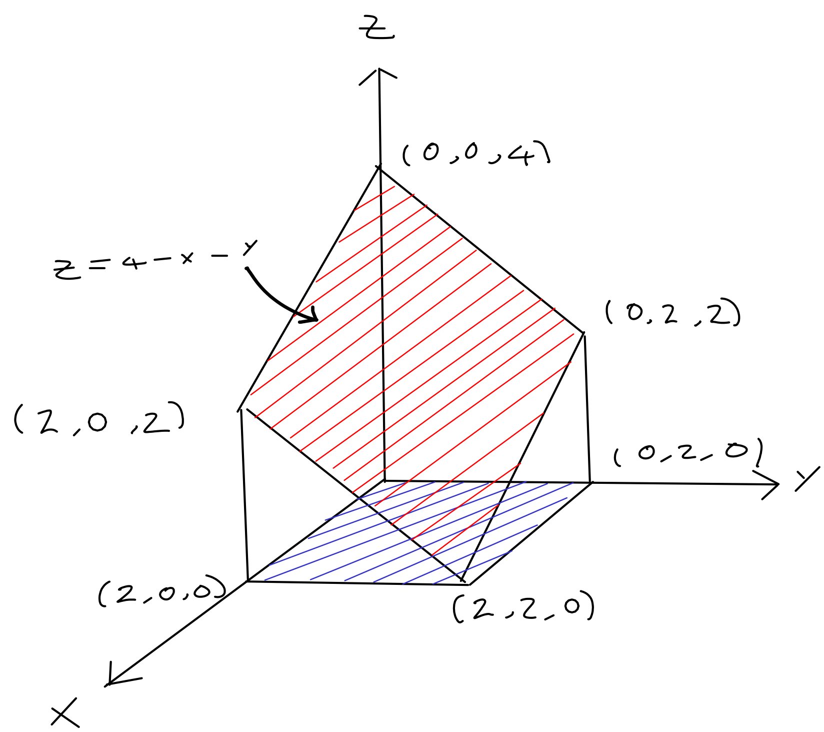
$$\begin{aligned}
2y'\cot(x) + y - 2 &= 0 \\
2y'\cot(x) &= 2 - y \\
\frac{2y'}{2-y} &= \frac{1}{\cot x} = \tan x \\
\int \frac{2y'}{2-y}\, dx &= \int \tan x\, dx \\
-2\ln|2-y| &= -\ln\left(\cos x\right) + C \\
2\ln|2-y| &= \ln\left(\cos x\right) - C \\
(y-2)^2 &= a\cos x \\
y &= \sqrt{a\cos x} + 2\ .
\end{aligned}$$

<u>שאלה 4</u>

א)

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 dx \int_0^2 dy(4-x-y) \\
&= \int_0^2 dx \left[\frac{-(4-x-y)^2}{2}\right]_0^2 \\
&= \int_0^2 dx \left[\frac{-(2-x)^2+(4-x)^2}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 dx \left[(4-x)^2-(2-x)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{(4-x)^3}{3}+\frac{(2-x)^3}{3}\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{8}{3}+\frac{0}{3}+\frac{64}{3}-\frac{8}{3}\right] \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{48}{3} = 8\ .
\end{aligned}
$$

ב)



ג) נציב את המסלול $y = x$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^4}{x^4}\right) = 1$$

נציב את המסלול $y = 0$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2\cdot 0}{0\cdot x^2+x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^2}\right)$$

לא מוגדר.

קיבלנו שני ערכים שונים ולכן הגבול לא קיים.

שאלה 5

א)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \ , \qquad a_n = \frac{3^n}{3^n+7^n} \ .$$

נוסחת דלמבר לרדיוס התכנסות:

$$\begin{aligned}
R &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3^n}{3^n+7^n}\right)}{\left(\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}+7^{n+1}}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\cdot\frac{3^{n+1}+7^{n+1}}{3^n+7^n} \\
&= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\cdot\frac{\frac{3^{n+1}}{7^n}+7}{\frac{3^n}{7^n}+1} \\
&= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\cdot\frac{3\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^n+7}{\left(\frac{3}{7}\right)^n+1} \\
&= \frac{1}{3}\frac{3\cdot 0+7}{0+1} \\
&= \frac{1}{3}\cdot 7 = \frac{7}{3} \ .
\end{aligned}$$

לכן הטור מתכנס לכל $-\frac{7}{3} < x < \frac{7}{3}$.

$x = \frac{7}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{3^n+7^n} \overset{x=\frac{7}{3}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{3^n+7^n} \ .$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{7^n+7^n}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{3^n+7^n}$. לפי מבחן השוואה, מכיוון ש- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$ מתבדר אז גם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{3^n+7^n}$ מתבדר. לכן הטור לא מתכנס ב- $x=\frac{7}{3}$.

$x=\frac{-7}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{3^n+7^n}\overset{x=\frac{-7}{3}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n\ ,\qquad b_n=\frac{7^n}{3^n+7^n}$$

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{3^n+7^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{3}{7}\right)^n+1}=1\neq 0$ לכן הטור לא מתכנס. לכן הטור לא מתכנס ב- $x=\frac{-7}{3}$.

תשובה סופית: התחום התכנסות הינו $\left(-\frac{7}{3},\frac{7}{3}\right)$.

ב) לא נכון. דוגמה נגדית:

$$a_n=\frac{1}{n}\ ,\qquad b_n=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\qquad a_n+b_n=\frac{1}{n^2}\ .$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\right)$ מתבדר.

שאלה 6

א)

$$\nabla f=\left(2xe^{x^2+y^2+1},2ye^{x^2+y^2+1}\right)\ ,\qquad \nabla f(A)=e^{14}(2,6)\ .$$

$$\frac{df}{d\vec{AO}}=\frac{\nabla f(A)\cdot\vec{AO}}{|\vec{AO}|}=\frac{e^{14}(2,6)\cdot(-2,-3)}{|(-2,-3)|}=\frac{-26e^{14}}{\sqrt{13}}=-2\sqrt{13}e^{14}\ .$$

ב) משוואת הפרמטרית:

$$x=2+\frac{t}{5}\ ,\qquad y=-1-\frac{3t}{5}\ ,\qquad z=t$$

$$(x,y,z)=(2,-1,0)+t\left(\frac{1}{5},\frac{-3}{5},1\right)$$

נוציא גורם משותף בוקטור הכיוון ונרשום את משוואת הישר בצורה:

$$(x,y,z)=(2,-1,0)+t\,(1,-3,5)\ .$$

הנורמל למישור $x+z=0$ הינו $n=(1,0,1)$. הווקטור הכיוון של הישר הינו $a=(1,-3,5)$. הזווית בין הישר והמישור ניתנת ע"י הנוסחה

$$\sin\alpha=\frac{a\cdot n}{|a||n|}=\frac{(1,-3,5)\cdot(1,0,1))}{|(1,-3,5)||(1,0,1)|}=\frac{6}{\sqrt{35}\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{3}{35}}\,.$$

$\alpha=\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{35}}\right)$.

שאלה 7

מישור xz נתון על ידי המשוואה $y=0$, נשים לב ששתי הנקודות M ו- N אינן על המישור ושתיהן נמצאות "מימין" למישור (כן ערך ה- y של שתיהן חיובי). נשים לב גם שאם $N^*(-12,-4,6)$ היא השיקוף של B ביחס למישור xz, אז לכל נקודה $P(x,y,z)$ על המישור מתקיים שהמרחק $d(P,N)=d(P,N^*)$. כלומר, ניתן לנסח את הבעיה מחדש כך: מצאו את הנקודה על מישור xz שסכום מרחקיה מהנקודות M ו- N^* הוא מינימאלי. מצד שני, אם P היא נקודת החיתוך של הקטע MN^* עם מישור xz אז

$$d(P,M)+d(P,N^*)=d(A,N^*)$$

ולכל נקודה אחרת על המישור, Q, מתקבל משולש MN^*Q במרחב ומאי-שיוויון המשולש מתקיים

$$d(M,N^*)\leq d(Q,M)+d(Q,N^*)$$

כלומר, הנקודה המבוקשת P היא נקודת החיתוך בין הקטע MN^* לבין מישור xz. אם נרשום הצגה פרמטרית של הישר נקבל

$$M(t)=M+t\overrightarrow{MN^*}=(4,3,1)+t(-16,-7,5)=(4-16t,3-7t,1+5t)$$

ומהצבה במשוואת המישור נקבל

$$3-7t=0\Rightarrow t=\frac{3}{7}$$

ולכן נקודת החיתוך היא

$$P=M\left(\frac{3}{7}\right)=\left(-\frac{20}{7},0,\frac{22}{7}\right)$$

ומתקיים

$$d(P,M)+d(P,N^*)=\sqrt{\left(\frac{48}{7}\right)^2+3^2+\left(-\frac{15}{7}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{-64}{7}\right)^2+4^2+\left(\frac{20}{7}\right)^2}$$
$$=\frac{3\sqrt{330}}{7}+\frac{4\sqrt{330}}{7}=\sqrt{330}$$

ו-

$$d(M,N^*) = \sqrt{(-16)^2 + (-7)^2 + 5^2} = \sqrt{256+49+25} = \sqrt{330}$$

לפיכך $d(P,M) + d(P,N^*) = d(M,N^*)$
כנדרש.

שאלה 8 נרשום את המשטח בצורה פרמטרית:

$$x^2+y^2+z^2+4y+3=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+(y+2)^2+z^2=1$$

משטח כדורי של רדיוס 1 שמרכזו בנקודה $C(0,-2,0)$. נסמן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר למרכז הכדור ב- $P(x,y,z)$. הווקטור הנורמל של המישור הוא הווקטור הכיוון של הישר המחבר את הנקודות P ו- C:

$$n = (1,1,-1) \ .$$

לכן משוואת הישר בין הנקודות P ו- C הינה

$$M(t) = (0,-2,0) + t(1,1,-1) \qquad \Rightarrow \qquad x=t \ ,y=-2+t \ ,z=-t \ .$$

נציב משוואת הישר במשוואת המישור:

$$x+y-z-2=0 \ \Rightarrow \ t-2+t+t-2=0 \ \Rightarrow \ 3t-4=0 \ \Rightarrow \ t=\frac{4}{3} \ .$$

לכן

$$P = M\left(t=\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) \ .$$