

# שיעור 13

## סיבוכיות מקום ושלמות ב PSPACE

### 13.1 הגדרה של סיבוכיות מקום

#### הגדרה 13.1 סיבוכיות מקום של מבנה טיורינג

הסיבוכיות מקום של מ"ט  $M$  על קלט  $w$  היא פונקציה  $(|w|) f$  השווה למספר התאי סרט לכל היותר של המוכנה  $M$  שבהם נעשה שימוש בחישוב של  $M$  על  $w$ .

#### הגדרה 13.2 המחלקה $SPACE(f(n))$

מחלקת  $(f(n))$  היא אוסף כל השפות  $L$  עבורן קיימת מבנה טיורינג דטרמיניסטי  $M$  שמכריעה אותה כך ש: על כל קלט  $w$  באורך  $|w| = n$ , המוכנה  $M$  משתמשת לכל היותר  $O(f(n))$  תאים סרט.  $SPACE(f(n)) = \{L \mid L \text{ שמכריעה } L \text{ ומשתמשת לכל היותר ב- } O(f(n)) \text{ תאים סרט.}\}$

#### דוגמה 13.1

נראה כי ניתן לפתר את הבעיה  $SAT$  ע"י אלגוריתם שהוא רץ במקום ליניארי. כלומר:

$$SAT \in SPACE(n).$$

תהי  $\phi$  נוסחה בוליאנית כלשהי. נסמן  $|\phi| = n$  ונסמן ב-  $m$  את מספר המשתנים ב-  $\phi$ . נגדיר מבנה  $M$  שפועלת כך:

$$\text{על כל קלט } \langle\phi\rangle = M$$

**1**  $M$  רושמת את המחרוזת  $\langle\phi\rangle$  על סרט הקלט.

**2** לכל השמה  $a_1, a_2, \dots, a_m$  (כאשר  $a_i \in \{0, 1\}$ ) הוא הערך הנוכחי של  $x_i$ :

**a**  $M$  רושמת את מחרוזת של ההשמה  $a_1 a_2 \dots a_m$  על סרט העבודה.

**b**  $M$  מחשבת את הערך של  $\phi$  עבור ההשמה הנוכחית  $a_1, a_2, \dots, a_m$  ע"י סריקה של הקלט  $\langle\phi\rangle$  שרשום על סרט הקלט.

**ג** אם מתקיים  $\phi(a_1, \dots, a_m) = 1$  אז  $M$  מקבלת.

**3** אם עבור כל ההשומות התקבל  $0 = \phi(a_1, \dots, a_m)$  אז  $M$  דוחה.

מכאן אנחנו רואים כי המוכנה  $M_1$  רצתה במקום ליניארי. בפרט:

- $M$  שומרת על סרט העבודה את ההשמה  $a_1 \dots a_m$  וזה נדרש  $O(m)$  תאימים.
- המספר המשתנים,  $m$  הוא  $n$  לכל היותר.

- לכן  $M$  רצה במקום  $O(n)$ .

לפיכך:

$$SAT \in SPACE(n) .$$

### הגדלה 13.3 המחלוקת $NSPACE(f(n))$

מחלקה  $NSPACE(f(n))$  היא אוסף כל השפות  $L$  עבורן קיימת מכונה טירונג אי-דטרמיניסטיבית  $N$  שמכריעה אותה כך ש: על כל קלט  $w$  באורך  $|w| = n$  המכונה  $N$  משתמשת לכל היותר  $O(f(n))$  תאי סרט מותך כל המסלולי חישוב של  $N$ .

$$NSPACE(f(n)) = \{L \mid \text{קיימים } L \text{ שפה } L \text{ ומשתמשת לכל היותר ב- } O(f(n)) \text{ תאי סרט.}\}$$

### דוגמה 13.2

תהי השפה הבאה:

$$ALL_{NFA} = \{\langle A \rangle \mid L(A) = \Sigma^* \text{ עבורו } NFA \text{ הוא } A\} .$$

הוכיחו כי  $ALL_{NFA} \in NSPACE(n)$ .**פתרון:**

הפתרון מתבסס על זה שזה פשוט יותר לבנות אלגוריתם המכريع את השפה המשילמה:

$$\overline{ALL_{NFA}} = \{\langle A \rangle \mid w \in \Sigma^* \text{ עבורו } A \text{ דוחה } w\} .$$

נשתמש במשפט מרכזי כדי לבנות אלגוריתם שמכريع את  $\overline{ALL_{NFA}}$ :

### משפט 13.1

אם  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  הוא  $NFA$  וקיים מילה  $w$  שנדחה ע"י  $M$  אז האורך המילה  $|w| \leq 2^q$  כאשר  $q = |Q|$

לפנינו שנותאר את האלגוריתם עצמו, נגדיר סימון שנשתמש בו בבניית האלגוריתם. נניח ש-  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  היא מכונית  $NFA$  כלשהי. תהי  $P(Q)$  הקבוצה החזקה של  $Q$ . עבר כל הפונקציית המעברים היא מהצורה

$$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow P(Q) .$$

בהתנחת מילה  $w = a_1 a_2 \dots a_n$  אשר  $\Sigma$  הוא התו ה-  $i$  של המילה,  $n \leq i \leq 1$ . נגדיר את הסדרה הבאה:

$$S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$$

כך אשר

$$S_0 \triangleq \{q_0\}, \quad S_{i+1} \triangleq \delta(S_i, a_i),$$

כך אשר  $S_i \in P(Q)$  לכל  $0 \leq i \leq n$ .

### בנייה האלגוריתם

בנייה אלגוריתם לא-דטרמיניסטי,  $N$  המכريع את  $\overline{ALL_{NFA}}$  באופן הבא:על כל קלט  $x = N$ :

1) בודקת אם  $\langle M \rangle$ , כאשר  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  היא מכונת NFA.

• אם לא  $\Leftarrow N$ .

2) יי'  $|q|$  מספר המ מצבים של  $M$ . נגדיר  $S_0 = \{q_0\}$ .

3)  $N$  מבצעת את הלולאה הבאה:

$$\text{לכל } 0 \leq i \leq 2^q - 1$$

a) בוחרת באופן אידטרמיניסטי תו קלט  $\Sigma$   $a_i \in$ .

b) מחשבת

$$S_{i+1} = \delta(S_i, a_i).$$

4) אם  $N \Leftarrow S_{i+1} \cap F \neq \emptyset$  תדחה.

בפועל  $N$  בודקת את התנאי הזה ע"י לסמן את כל המ מצבים שב-  $S_{i+1}$ . אם אחד מה מצבים המסומנים הוא מצב קבלה אז  $N$  תדחה.

4) אם בסיום הלולאה לא הייתה מצב-קבלה באף אחת מן הקבוצות  $S_i$  אז  $N$  מקבל.

אם  $x \in \overline{\text{ALL}_{NFA}}$

כasher  $A$  היא מכונת NFA. וקיימת מילה  $w \in \Sigma^*$  כך ש-  $A$  תדחה.

$\Leftarrow$  קיימת מילה  $w'$  באורך לפחות  $2^q$  ש-  $A$  תדחה.

$\Leftarrow$  קיימת ריצה של  $N$  שבה  $N$  בוחרת את התווים של  $w'$  בלולאה.

$\Leftarrow$  במהלך הריצה של  $A$  על  $w'$ , אין מצב קבלה באף אחת מן הקבוצות  $S_i$ .

$\Leftarrow$   $N$  לא דחתה עד סוף הלולאה.

$\Leftarrow$  בסופה  $N$  מקבל.

אם  $x \notin \overline{\text{ALL}_{NFA}}$  אז שני מקרים:

מקרה 1)  $N \Leftarrow x \neq \langle A \rangle$  תדחה בשלב 1.

מקרה 2)  $L(A) = \Sigma^*$  ו-  $x = \langle A \rangle$

$\Leftarrow$  לכל מילה  $w \in \Sigma^*$ , קיים שלב שבו  $A$  נמצא במצב קבלה.

$\Leftarrow$  בכל ריצה של  $N$ , קיימת איטרציה  $i$  עבורה  $\emptyset \neq \cap S_i \cap F \neq \emptyset$ .

$\Leftarrow$  באיטרציה זו  $N$  תדחה.

$\Leftarrow$  בכל ריצה  $N$  תדחה.

$\Leftarrow$   $N$  דוחה את  $x$ .

### סיבוכיות מקומ

• נסמן ב-  $| \langle M \rangle | = n$  את אורך הקלט, וב-  $|Q| = q$  את מספר המ מצבים של ה- NFA.

• כל מצב וכל מעבר של  $M$  מופיעים בקיים, מתקיים  $O(n) = q$ .

• במהלך כל ריצה,  $N$  שומרת רק את המידע הבא:

- \* הקבוצה הנווחית  $Q \subseteq S_i$  של מצבים אפשריים.
- לפועל  $N$  שומרת  $S_i$  בוקטור ביטים באורך  $q$  לכל היוטר.
- \* מונה של האיטרציות הלולאה עד  $2^q$ , המאושר ביצוג בינארי ודורש ( $q$ ) ביטים.
- \*תו קלט אחד הנבחר באופן א-דטרמיניסטי בכל איטרציה, ומשתני עזר לחישוב  $S_{i+1}$ , הדורשים מקום קבוע או בינארי ב- $q$ .

לפיכך סיבוכיות המקום הכלולת של  $N$  היא

$$O(q) = O(n).$$

לפיכך האלגוריתם  $N$  פועל במקום לינארי.

משמעותו לב:  $N$  לינארי במקום אף על פי שזמן הריצה שלו עלול להיות אקספוננציאלי.

## 13.2 משפט סביז'

### הגדלה 13.4 CANYIELD

בהתנחת מוכנות טירינג א-דטרמיניסטי  $N$ , מספר טבעי חיובי  $t$ , ושתי קונפיגורציות  $c_1, c_2$  של  $N$  (ראו את ההגדלה של קונפיגורציה בהגדלה 1.3). האלגוריתם  $CANYIELD$  הוא אלגוריתם דטרמיניסטי הבודק אם ניתן לעבור מ-  $c_1$  ל-  $c_2$  על ידי לכל היוטר  $t$  צעדי חישוב של  $N$ . התאזר פסודוקוד של  $CANYIELD$  הוא כדלקמן:

$$\langle N, c_1, c_2, t \rangle \text{ על קלט } = CANYIELD$$

**1)** רושם את  $c_1$  ו-  $c_2$  על מחסנית.

**2)** בודק אם  $N$  היא מוכנת טירינג,  $c_1, c_2$  קונפיגורציות ו-  $t$  מספר טבעי חיובי.

• אם לא אז הוא דוחה.

: $t = 1$  **3)**

• אם  $c_1 = c_2$  אז הוא מקבל.

• אחרת אם  $c_1 \vdash_N c_2$  (אם אפשר לעבור מ-  $c_1$  ל-  $c_2$  בצעד אחד [ראו הגדלה 1.4]) מקבל.

• אחרת הוא דוחה.

**4)** אם  $t > 1$ , לכל קונפיגורציה  $c_k$  של הריצה של  $N$  על  $w$  אשר משתמשת במקום ( $f(n)$  כאשר  $w$  היא המילה הנקרהת של הקונפיגורציה  $(c_k)$ :

$$CANYIELD\left(N, c_1, c_k, \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor\right) \text{ מרץ} \quad (5)$$

כאשר  $\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$  הוא השלם הכי הקרוב ל-  $\frac{t}{2}$  וקטן מ-  $\frac{t}{2}$  או שווה ל-  $\frac{t}{2}$ .

$$CANYIELD\left(N, c_k, c_2, \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil\right) \text{ מרץ} \quad (6)$$

כאשר  $\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$  הוא השלם הכי הקרוב ל-  $\frac{t}{2}$  וגדול מ-  $\frac{t}{2}$  או שווה ל-  $\frac{t}{2}$ .

**7)** אם שתי ההצלחות בשלבי (4) ו- (5) הסתיימו בקבלה  $\Leftarrow$  מקבל.

**8)** אחרת אם לא התקבלה תשובה קבלה  $\Leftarrow$  דוחה.

**משפט 13.2 משפט סבץ'**

לכל פונקציה  $f(n) \geq n$ , אם  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$NSPACE(f(n)) \subseteq SPACE(f^2(n)).$$

**הוכחה:**

הריינו של ההוכחה:

תהי  $N$  מ"ט אי-דטרמיניסטי שמכריעה את השפה  $A$  במקומות  $O(f(n))$ , כאשר  $n$  אורך הקלט  $w$  של  $N$ .  
נבנה מכונת טיריניג דטרמיניסטית,  $M$  שמכריעה את  $A$  במקומות  $O(f^2(n))$ .  
כלומר, בהינתן  $N \in NSPACE(f(n))$  המכריעה שפה  $A$ , נבנה  $M \in SPACE(f^2(n))$  המכריעה  $A$ .  
כלומר, אנחנו נראה שלכל  $N \in NSPACE(f(n))$  קיימת  $M \in SPACE(f^2(n))$  כזו ש  $M$  המכריעה  $A$  במקומות  $O(f^2(n))$ .

$$NSPACE(f(n)) \subseteq SPACE(f^2(n)).$$

בנייה המכונה:

תהי  $N$  מכונת טיריניג אי-דטרמיניסטי שמכריעה השפה  $A$ .  
תהי  $w$  מחרוזת שהיא הקלט של  $N$ .  
בהינתן שתי קונפיגורציות  $c_1, c_2$  של  $N$  ומספר טבעי  $t$ .

- אם ניתן לעבור מ-  $c_1$  ל-  $c_2$  בכל היותר  $t$  צעדים  $\Leftarrow CANYIELD(N, c_1, c_2, t)$  מקבל.
- אחרות  $\Leftarrow CANYIELD(N, c_1, c_2, t)$ .

נגידר מכונת טיריניג דטרמיניסטי  $M$  שמסמלצת את המכונה האי-דטרמיניסטי  $N$  באופן הבא.

ראשית נסמן ב-  $n$  את אורך הקלט  $w$  של  $N$ .

תהי  $c_0$  הקונפיגורציה ההתחלתית.

נתקן את  $N$  כך שלאחר כל ריצה הראש חוזר לקצה השמאלי של תוכן הסרטט ו-  $N$  עוברת לkonfiguracji  $c_{acc}$ .

נגידר  $d$  כך ש-  $2^{df(n)}$  הוא חסם עלין של מספר הקונפיגורציות שקיימות בריצות של  $N$  שדורשות  $O(f(n))$  מוקום.

המכונת טיריניג הדטרמיניסטי  $M$  תוגדר כך:

$M$  על קלט  $w$ :

1) מריצה  $CANYIELD$  על הקלט  $\langle N, c_0, c_{acc}, 2^{df(n)} \rangle$  ועונה כמוות.

הוכחת נכונות:

נניח  $N \in NSPACE(f(n))$  ו-  $w \in L(N)$

$\Leftarrow$  לפי ההגדרה של  $d$ , ל-  $N$  יש  $2^{df(n)}$  לכל היותר.

$\Leftarrow$  קיימים מסלול חישוב  $N$  על  $w$  מ-  $c_0$  ל-  $c_{acc}$ .

$\Leftarrow$  האלגוריתם  $CANYIELD$  על הקלט  $\langle N, c_0, c_{acc}, 2^{df(n)} \rangle$  יקבל.

$M \Leftarrow \text{יקבל } w.$

$N \in NSPACE(f(n))$  ו-  $w \notin L(N)$ .

$\Leftarrow$  לפי ההגדרה של  $d$ , ל-  $N$  יש  $2^{df(n)}$  לכל היותר.

$\Leftarrow$  לא קיים מסלול חישוב של  $N$  על  $w$  מ-  $c_0$  ל-  $c_{\text{acc}}$ .

$\Leftarrow$  האלגוריתם  $CANYIELD$  על הקלט  $\langle N, c_0, c_{\text{acc}}, 2^{df(n)} \rangle$  ידחה.

$M \Leftarrow \text{ידחה } w.$

### סיבוכיות מקום:

- כל פעם ש-  $CANYIELD$  מפעיל את עצמו באופן רקורסיבי, הוא רושם את  $c_1, c_2$  ו-  $t$  על מחסנית, כך שניתן יהיה לשזר אותו לאחר הקריאה הרקורסיבית הבאה.

- בכלל ש-  $N \in NSPACE(f(n))$  אז הכתיבה של  $c_1, c_2$  ו-  $t$  על המחסנית דורשת  $O(f(n))$  מקום.

- בכל שלב של הרקורסיה, האלגוריתם  $CANYIELD$  מחלק את  $t$  ב- 2.

- הערך ההתחלתי של  $t$  הוא  $2^{df(n)}$  שכן העומק של הרקורסיה הוא

$$O(\log_2(2^{df(n)})) = O(f(n)).$$

- שכן המקום הכלול ש-  $M$  דורש הוא  $O(f^2(n))$ .

לפיכך

$$M \in SPACE(f^2(n)).$$

לסיכום: הוכחנו שהינתן מכונת א-טרמיניסטית  $N$  כלשהי שמכריעה שפה  $A$  כלשי עבורה

$$N \in NSPACE(f(n)),$$

קייםת מכונת טיריניג דטרמיניסטית  $M$  שמכריעה  $A$  במקום  $O(f^2(n))$ , כלומר:

$$M \in SPACE(f^2(n)).$$

לפיכך:

$$NSPACE(f(n)) \subseteq SPACE(f^2(n)).$$



## 13.3 המחלוקת PSPACE

ההגדרה הבאה היא האנלוג של הגדרה 10.2 של אלגוריתם זמן פולינומיAli.

### הגדרה 13.5 אלגוריתם מקום פולינומיAli

אומרים כי אלגוריתם  $A$  מכריע בעיה במקומות פולינומיAli אם קיים קבוע  $c > 0$  כך שהמקומות הריצה של  $A$  על קלט  $w$  חסום ע"י  $|w|^c$ .

התזה של צרץ' טיריניג אומר שאם קיים אלגוריתם המכריע בעיה במקומות פולינומיAli, אז קיימת מכונת טיריניג דטרמיניסטית המכrica את השפה השקולה לעביה זו במקומות פולינומיAli.

. אלגוריתם מכריע  $\equiv$  מכונת טיריניג דטרמיניסטית

**הגדרה 13.6 המחלקה  $PSPACE$** 

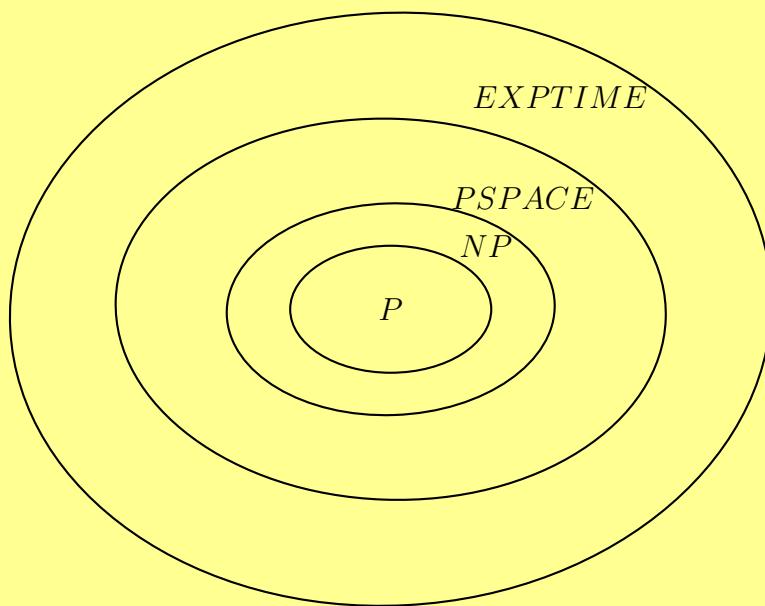
המחלקה  $PSPACE$  היא אוסף כל הבעיה (השפות) שקיים עבורן אלגוריתם (מכונת טירונג) דטרמיניסטי המכריע אותו במקומות פולינומילי.

**הגדרה 13.7 המחלקה  $NPSPACE$** 

המחלקה  $NPSPACE$  היא אוסף כל הבעיה (השפות) שקיים עבורן אלגוריתם (מכונת טירונג) אי-דטרמיניסטי המכריע אותו במקומות פולינומילי.

**משפט 13.3**

$$P \subseteq NP \subseteq PSPACE \subseteq EXPTIME .$$

**13.4 שלמות ב-  $PSPACE$** **הגדרה 13.8  $PSPACE$  קשה**

בעיה  $B$  נקראת  $PSPACE$  קשה אם לכל בעיה  $A \in PSPACE$  קיימת רדוקציה זמן פולינומיאלית מ- $A$  ל- $B$ . כלומר:  $A \leq_P B$ .

**הגדרה 13.9 שלמות  $PSPACE$** 

בעיה  $B$  נקראת  $PSPACE$  שלמה אם שני התנאים הבאים מתקיימים:

$$B \in PSPACE \quad (1)$$

(2) לכל בעיה  $A \in PSPACE$  קיימת רדוקציה זמן פולינומיאלית מ- $A$  ל- $B$ . כלומר:  $A \leq_p B$ .

## 13.5 נוסחאות בוליאניות עם כמתים

בפרק 11 ו- 12 הגדרנו נוסחה בוליאנית כביטוי מתמטי שבינוי מהמרכיבים הבאים:

- משתנים בוליאניים, שמקבלים את הערכים 0 ו- 1 (לעתים מסומנים  $F$  ו-  $T$ ).
- אופרטורים בוליאניים עיקריים

ונם	$\wedge$
או	$\vee$
לא	$\neg$

כעת נכליל את החגדרה זו לסוג היותר מורחב של נוסחה בוליאנית: נוסחה בוליאנית עם כמתים.

### הגדרה 13.10 נוסחת בוליאנית עם כמתים - $QBF$

בנוסחת בוליאנית עם כמתים מופיעעה אחת מהשני כמתים העיקריים העיקריים:

"לכל" (נקרא גם "כמת כולל")	$\forall$
"קיים" (נקרא גם "כמת יש")	$\exists$

### דוגמה 13.3 דוגמאות של נוסחאות בוליאניות עם כמתים

בדוגמאות הבאות  $y$ ,  $x$  הם משתנים בוליאניים. קלומר  $x, y \in \{0, 1\}$ .

$$\phi = \forall x \exists y [(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})] . \quad (1)$$

בדוגמה זו  $\phi = 1$ .

$$\phi = \forall x [x \vee \bar{x}] \rightarrow \phi = 1 . \quad (2)$$

$$\phi = \exists x (x \wedge \bar{x}) \rightarrow \phi = 0 . \quad (3)$$

### הגדרה 13.11 $TQBF$

$\langle \phi \rangle$  בשפה  $TQBF$  אם  $\phi$  נוסחת בוליאנית עם כמתים והנוסחה מעורכת לאמת.

$$TQBF = \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ נוסחת בוליאנית עם כמתים ו- } \phi = 1 \} .$$

### הערה 13.1

בניגוד ל-  $SAT$  עבורה השאלה היא האם האם קיימת הצבת אמת, ב-  $TQBF$  לכל נוסחה יש ערך אמת או שקר יחיד, מכיוון שאין משתנים חופשיים.

**משפט 13.4** $SAT \subseteq TQBF$ .

הוכחה: תרגיל בית.

**13.6 המחלקה L****13.7 המחלקה NL****13.8 שלמות ב- NL****13.9 שיוויון NL ו- coNL**