

עבודה 5: סיבוכיות זמן

מועד הגשה

- 1) הגשה היא עד סוף יום ראשון 18.01.2026 עד השעה 23:59 באותו היום. אל תחכו לרגע האחרון. תכננו את זמנכם בהתאם. הגישו לפני.
- 2) אישור במועד ההגשה יגרור הורדת של ציון, 5 נק' לכל יום אחר או חלק ממנו. בכל מקרה לא יהיה ניתן להגיש מעבר ל-2 ימי אישור ממועד ההגשה דלעיל כלומר עד יום שלישי 20.01.26 (עד השעה 23:59).

אופן הגשה

- 1) קראו היטב את השאלות. עלייכם לענות על כל השאלות בעבודה זו.
- 2) הגשת העבודה תהיה דרך אתר הקורס במודול בלבד בלבד. הגשת העבודה היא ביחידים.
- 3) כיצד להגיש?
- א) יש לסרוק או להמיר את העבודה לקובץ pdf ולהגיש אותו (סיריקה לא ברורה או מוטשטשת לא תיבדק).
- ב) שם הקובץ שיוגש למערכת ההגשה יהיה מספר ת"ז המגיש. לדוגמה: 123456789.pdf.
- 4) בקובץ המוגש יש להוסיף את התיעוד הבא בעמוד הראשון (בערבית או באנגלית, לבחירתכם). יש לשנות את השם שלכם ואת תעודה זהה לתעודה הזהות שלכם. ובמקום סולמית יש לכתוב את מספר העבודה.
- Assignment: #
Author: Israel Israeli, ID: 01234567
- 5) לאחר שהעליתם את הקבצים שלכם למודול, הורידו אותם מהמודול למחשב שלכם וודאו כי הקבצים תקין וכי העליתם את הקבצים הנכונים והמלאים. לאחר תום מועד ההגשה לא יתקבלו ערורים על כך שהעליתם קבצים לא תקין או שהעליתם בטעות קבצים אחרים / לא נכונים.

שאלות

- 1) שאלות בנוגע לעבודה יש לשאול בפורום באתר המודול של הקורס או בשעות קבלה של המתרגל/ת האחראי/ת בלבד. אין לשאול שאלות במיל לא למתרגל האחראי ולא למתרגלים/מרצים אחרים.
- 2) ניתן לשאול שאלות הבקרה ומיקוד על המשימות שבעבודה במידה ומשימה מסויימת לא ברורה. לא ניתן לשאול על הਪתרונות שלכם. לדוגמה, לא ניתן לשאול האם הפתרון שלי נכון, לא ניתן לשאול למה הפתרון לא עובד, וכדומה.

שונות

- 1) שאלות בעבודה זו הינו שות משקל. כלומר, משקל כל שאלה הוא 100 חלקים מספר השאלות בעבודה.
- 2) בשאלת מרובת סעיפים, הסעיפים הם שווים משקל. כלומר משקל כל סעיף הוא משקל השאלה כולה חלק מספר הסעיפים השאלה.

- המתרגל אחראי: צביקה שורץ.
- העודה מכילה 5 שאלות.
- **בהצלחה!**

שאלה 1 (20 נקודות)

בעית *HAMCYCLE* (מעגל המילטוני) מוגדרת באופן הבא:
בhinintן גראַף מכוון (V, E) , האם G מכיל מעגל שעובר בכל קדקוד בגרף פעם אחת בדיקוק? הוכיחו את הטענה הבאה:

$$HAMCYCLE \in NP .$$

שאלה 2 (20 נקודות)

הבעית *KNAPSACK* מוגדרת באופן הבא:

קלט:

1. מספר טבעי n .
2. קבוצת משקלים $\{w_1, \dots, w_n\} \subseteq \mathbb{N}^+$ כאשר $w_i \in \mathbb{N}^+$ לכל i .
3. קבוצת ערכים $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq \mathbb{N}^+$ כאשר $u_i \in \mathbb{N}^+$ לכל i .
4. סך משקל כולל $W \in \mathbb{N}^+$.
5. סך ערך כולל $U \in \mathbb{N}^+$.

פלט: האם קיימת תת-קובוצה $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ של הפריטים כך ש:

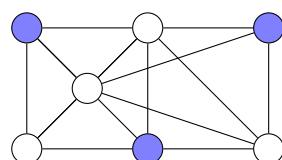
$$\sum_{i \in S} w_i \leq W \quad \text{(סך המשקל לא חורג משקל מקסימלי W)}$$

$$\sum_{i \in S} u_i \geq U \quad \text{(סך הערך לפחות U)}$$

הוכיחו כי *KNAPSACK* שייכת ל-*NP*.

שאלה 3 (20 נקודות)

בhinintן גראַף לא מכוון (V, E) , קבוצה בלתי תלויה ב- G היא תת-קובוצה של קודקודים $S \subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u, v \in S$ מתקיים $e \notin E(u, v)$. התרשים הבא מראה דוגמה של קבוצה בלתי תלויה בגודל 3.



הבעית IS מוגדרת באופן הבא:

קלט: גראף לא מסוים $G = (V, E)$ ומספר k .

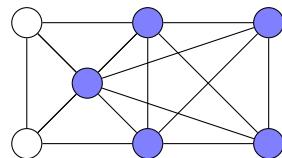
פלט: האם קיימת קבוצה בלתי תלויות ב- G בגודל k ?

$$IS = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ גראף לא מסוים המכיל קבוצה בלתי תלויות בגודל } k \}$$

הוכיחו כי IS שייכת ל- NP .

שאלה 4 (20 נקודות)

בහינתן גראף לא מסוים $G = (V, E)$, קליקה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $C \subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u, v \in C$ מתקיים $(u, v) \in E$. התרשים מראה קליקה בגודל 5.



נדיר: $\frac{1}{2} CLIQUE = \{ \langle G \rangle \mid |V| = n = \text{קובודדים וקיימת קליקה בגרף בגודל } \frac{n}{2} \text{ גראף בעל } G = (V, E) \}$
הוכיחו כי השפה $CLIQUE$ היא $\frac{1}{2} NP$ שלמה.

שאלה 5 (20 נקודות) תהי L השפה הבאה:

$DOUBLESAT = \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ נוסחה בוליאנית עברורה קיימות לפחות 2 השמות מספקות .} \}$
הוכיחו כי L היא NP שלמה.

פתרונות

שאלה 1 נבנה מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטיבית המכreira את $HAMCYCLE$ בזמן פולינומיAli.

בנייה המבונה

$M = \text{על קלט } \langle G \rangle :$

- 1) בודקת באופן אי-דטרמיניסטיבי סדרת קודקודים u_n, \dots, u_1 מתוך V כאשר $n = |V|$.
- 2) בודקת שהקודקודים שונים זה מזה.
- 3) בודקת שככל הצלעות (u_i, u_{i+1}) לכל $1 \leq i \leq n-1$ וגם את הצלע (u_n, u_1) נמצאת ב- G .
 - אם לא \Leftarrow דוחה.
 - אם לא \Leftarrow דוחה.
 - אחרת \Leftarrow מקבלת.

מבנהביוון \Leftarrow

- $\langle G \rangle \in HAMCYCLE$ אם \Leftarrow מ Engel המילטוני ב- G .
 \Leftarrow ריצה של M על $\langle G \rangle$ בה תבחר בקודודי מעגל זה. נסמן הסדרת הקודקודים הזו u_n, \dots, u_1 .
 \Leftarrow M תבדוק שהקודקודים בסדרה הזו שונים זה מזה, ולא תדחה.
 \Leftarrow M תבדוק התלע (u_1, u_{i+1}) והצלע (u_n, u_1) קיימות ותקבל.

ביוון \Rightarrow

- אם $\langle G \rangle \notin HAMCYCLE$ לא קיים מעגל המילטוני ב- G .
 \Leftarrow בכל ריצה של M על $\langle G \rangle$ היא תבחר סדרת קודקודים ולפחות אחת הבדיקות לא תתקיימ. $M \Leftarrow$ תדחה.

סיבוכיות זמן

- שלב 1) עולה $O(|V|)$ צעדים.
- שלב 2) עולה $O(|V|)$ צעדים.
- שלב 1) עולה $O(|V||E|)$ צעדים.

לפיכך M ריצה בזמן $\langle G \rangle = O(N)$ כאשר N הוא האורך הקלט $\langle G \rangle = O(|V|) + O(|V|) + O(|V||E|) = O(|V||E|)$. מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטיבית لكن $HAMCYCLE \in NP$.

שאלה 2 נראה שקיימת מ"ט אי-דטרמיניסטיבית M שמכרעה $KNAPSACK$ בזמן פולינואלי ואז נראה שהוא ריצה בזמן פולינואלי.

בנייה המכונה

: $\langle \{w_1, \dots, w_n\}, \{u_1, \dots, u_n\}, W, U \rangle = M$

1) בוחרת תת קבוצה $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ באופן אי-דטרמיניסטי.

2) בודקת אם $\sum_{i \in S} w_i \leq W$

• אם לא \Leftarrow דוחה.

3) בודקת אם $\sum_{i \in S} u_i \geq U$.

• אם לא \Leftarrow דוחה.

• אחרת מקבלת.”

הוכחת נכונות

סיבוכיות זמן

שאלה 3 נבנה מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטיבית המכרעה את IS בזמן פולינומיאי.

בנייה המכונה

: $\langle G \rangle = M$

1) בודקת באופן אי-דטרמיניסטי סדרת קודקודים u_1, \dots, u_k מתוך V כאשר $n \leq k$, כאשר $n = |V|$.

2) בודקת שהקודקודים שונים זה מזה.

• אם לא \Leftarrow דוחה.

3) בודקת שכל $(u_i, u_j) \notin E$ כאשר $(u_i, u_j) \in E$: $1 \leq i, j \leq k$.

- אם לא \Leftarrow דוחה.
- אחרת \Leftarrow מקבלת.

נכונות

$$\frac{\text{כיוון} \Leftarrow}{\text{כיוון} \Rightarrow}$$

סיבוכיות זמןשאלה 4

ידוע כי $CLIQUE$ שפה NP שלמה. לכן נראה שקיימת רדוקציה פולינומיאלית מ- $CLIQUE$ ל- NP שלמה. ולכן $\frac{1}{2} CLIQUE$ שלמה.

בנייה הרדוקציה

$$f(\langle G, k \rangle) = \langle G' \rangle ,$$

כאשר, אם $G = (V, E)$ כאשר $n = |V|$, אז G' הוא הגרף הבא:

- מוסיפים לו G גראף שלם K_n בעל n קודקודים.
- מחברים כל קודקוד של K_n לכל קודקוד של G .
- מוסיפים קבוצה של $2k$ קודקודים בודדים אשר לא מחברים לאף קודקוד אחר בצלע.

הוכחת נכונות

$$\frac{\text{כיוון} \Leftarrow}{\text{כיוון} \Rightarrow}$$

אם $\langle G, k \rangle \in CLIQUE$

$\Leftarrow G$ מכיל קליקה בגודל k .

$\Leftarrow G'$ מכיל קליקה בגודל $n + k$.

\Leftarrow מכיוון של- G' יש n' קודקודים או G' מכיל קליקה בגודל $\frac{n'}{2}$.

$. \langle G' \rangle \in \frac{1}{2} CLIQUE \Leftarrow$

$$\frac{\text{כיוון} \Rightarrow}{\text{כיוון} \Leftarrow}$$

אם $\langle G' \rangle \in \frac{1}{2} CLIQUE$

$n' = |V'| \frac{n'}{2}$, כאשר $G' = (V', E')$ \Leftarrow גרא לא מכון שמקיל גליקה בגודל $n + k$.
 \Leftarrow מכיוון ש- $n' = 2k + 2n$, אז G' מכיל גליקה בגודל k .
 \Leftarrow אם נוציא מהגרף G' את ה- $2k$ קודקודים בודדים ואת הגרף שלם K_n אז נקבל גרא G שמקיל קליקה בגודל k .
 $\langle G, k \rangle \in CLIQUE \Leftarrow$

סיבוכיות זמן

שאלה 5 ממשפט קוק לוין השפה $NP \text{ SAT}$ שלמה. נראה שקיימת רוקוציה פולינומיאלית מ- SAT ל- $NP \text{ DOUBLESAT}$, ולכן $NP \text{ DOUBLESAT}$ שלמה.

בנייה הרדוקציה

$$f(\langle \phi \rangle) = \langle \phi' \rangle$$

כאשר ϕ נוסחהبولיאנית ו-

$$\phi' = \phi \vee x$$

כאשר x משתנהبولיאני.

הוכחת נכונותביוון \Leftarrow

אם $\langle \phi \rangle \in SAT$

$\Leftarrow \exists$ השמה מספקת ל- ϕ . נסמן ההשמה המספקת X_1 .

$\Leftarrow \exists$ שתי השמות המספקות ל- ϕ' : ההשמה X_1 והשמה $\{x = 1\}$.
 $\langle \phi' \rangle \in DOUBLESAT \Leftarrow$

ביוון \Rightarrow

נניח ש- $\langle \phi \rangle \in DOUBLESAT$ ונניח בשלילה כי $\langle \phi' \rangle \notin SAT$.

\Leftarrow לא קיימת השמה מספקת של ϕ .

$\Leftarrow \neg \phi'$ רק השמה מספקת אחת: $x = 1$, בסתיו לכך ש- $\langle \phi' \rangle \in DOUBLESAT$.
 $\langle \phi \rangle \in SAT \Leftarrow$