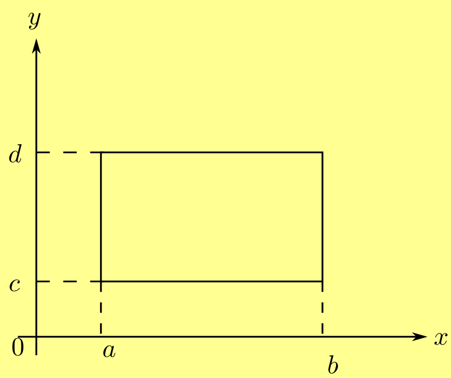
שיעור 10
אינטגרלים כפולים

משפט 10.1 אינטגרל כפול בתחום מלבני

במקרה של התחום המלבני

$$D = \{(x,y)|a \leq x \leq b\ , c \leq y \leq d\}$$

הסדר של האינטגרלים מעל x ו-y לא משנה את הערך של האינטגרל הכפול, כלומר



$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) = \int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x,y)\ . \qquad (*1)$$

דוגמה 10.1

חשבו את האינטגרל של הפונקציה $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + 6xy$ בתחום

$$D = \{(x,y)| -3 \leq x \leq 3,\ 2 \leq y \leq 8\}$$

פתרון:

נבדוק שהסדר של האינטגרלים אינו משנה את הערך של האינטגרל:

נבצע האינטגרל מעל x ואחר כך האינטגרל מעל y:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) =& \int_2^8 dy \int_{-3}^3 dx\,(3x^2+2y^2+6xy)\\
=& \int_2^8 dy\, \left[x^3+2xy^2+3x^2y\right]_{x=-3}^{x=3}\\
=& \int_2^8 dy\, \left(54+12y^2\right)\\
=& \int_2^8 dy\, \left[54y+4y^3\right]_{y=2}^{y=8}\\
=& (432-108+2048-32)\\
=& 2340\ .\end{aligned}$$

נבצע האינטגרל מעל y ואחר כך האינטגרל מעל x:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) =& \int_{-3}^3 dx \int_2^8 dy\,(3x^2+2y^2+6xy)\\
=& \int_{-3}^3 dx\, \left[3x^2y+\frac{2}{3}y^3+3xy^2\right]_{y=2}^{y=8}\\
=& \int_{-3}^3 dx\, \left(18x^2+180x+336\right)\\
=& \left[6x^3+90x^2+336x\right]_{x=-3}^{x=3}\\
=& 2340\ .\end{aligned}$$

דוגמה 10.2

חשבו את האינטגרל $\iint\limits_D \left(x^2-y\right)dx\,dy$ על המלבן

$$D=\{(x,y)|0\le x\le 3,\ 0\le y\le 4\}$$

פתרון:

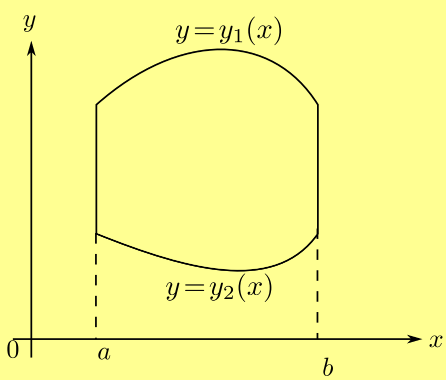
נבצע האינטגרל של y ואז האינטגרל של x:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) =& \int_0^3 dx \int_0^4 dy\,\left(x^2-y\right)\\
=& \int_0^3 dx\, \left[x^2y-\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{4}\\
=& \int_0^3 dx\, \left(4x^2-8\right)\\
=& \left[\frac{4x^3}{3}-8x\right]_{x=0}^{3}\\
=& (36-24)\\
=& 12\ .\end{aligned}$$

נבצע האינטגרל של x ואז האינטגרל של y:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) &= \int_0^4 dy\ \int_0^3 dx\ \left(x^2-y\right)\\ &= \int_0^4 dy\ \left[\frac{x^3}{3}-xy\right]_{x=0}^3\\ &= \int_0^4 dy\ [9-3y]_{x=0}^3\\ &= \left[9y-\frac{3y^2}{2}\right]_{y=0}^4\\ &= (36-24)\\ &=12\ .\end{aligned}$$

משפט 10.2 אינטגרל כפול של פונקציה בתחום בין שני קווים



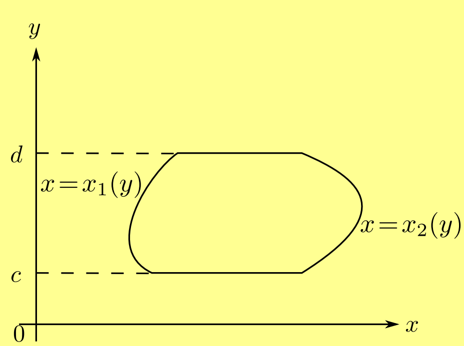
נתון אינטגרל כפול של פונקציה $f(x,y)$ מצורה

$$\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\,f(x,y)$$

בתחום

$$D=\{(x,y)|a\le x\le b\ ,y_1(x)\le y\le y_2(x)\}\ ,$$

אי-אפשר להחליף את סדר האינטגרלים. במקרה זה מבצעים את האינטגרל של y בין הקווים $y_1(x)$ ו- $y_2(x)$, ואחר כך מבצעים את האינטגרל של x.



נתון אינטגרל כפול של פונקציה $f(x,y)$ מצורה

$$\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx\,f(x,y)$$

בתחום

$$D=\{(x,y)|x_1(y)\le x\le x_2(y)\ ,c\le y\le d\ ,\}\ ,$$

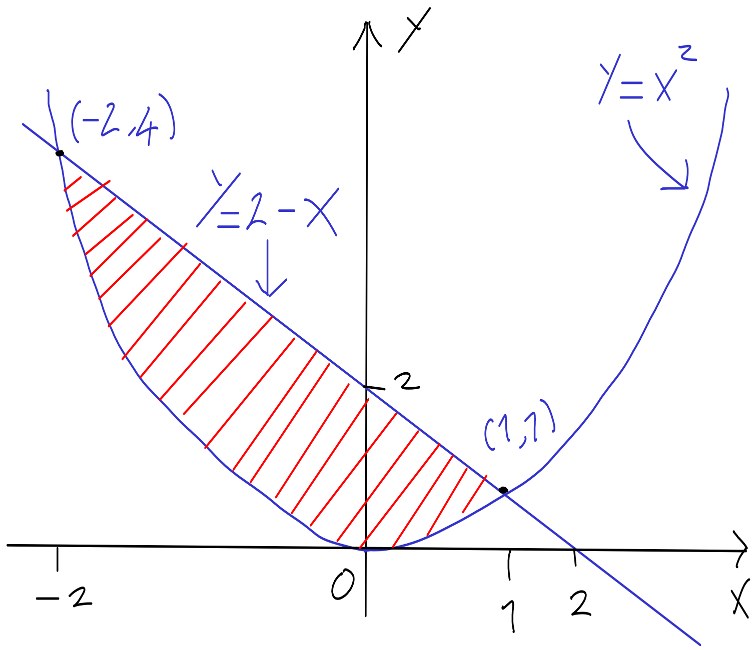
אי-אפשר להחליף את סדר האינטגרלים. מבצעים את האינטגרל של x בין הקווים $x_1(y)$ ו- $x_2(y)$, ואחר כך מבצעים את האינטגרל של y.

דוגמה 10.3

חשבו את $\iint\limits_{D} y\,dx\,dy$ כאשר D הוא התחום החסום על ידי הווים $y = 2 - x$, $y = x^2$.

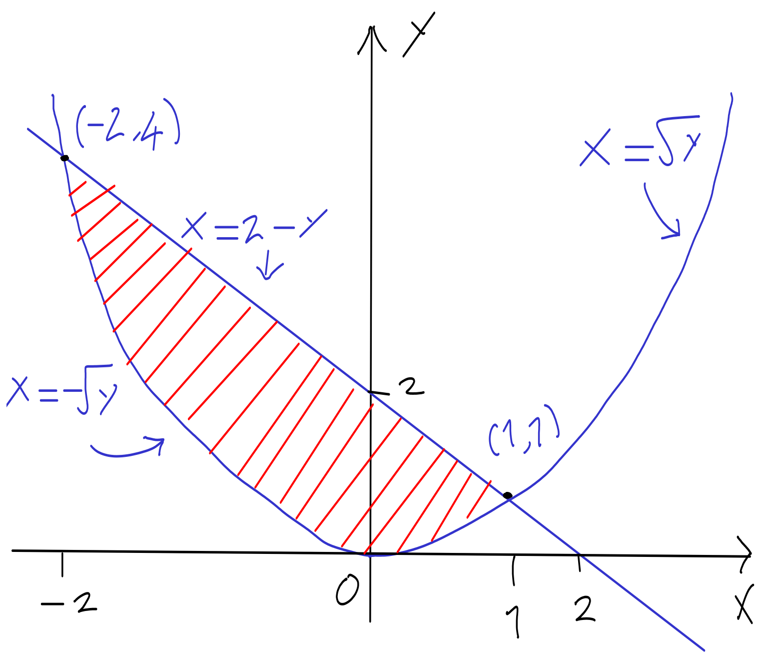
פתרון:

<u>שיטה 1</u>



$$\begin{aligned}
\iint_D y\,dx\,dy &= \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} y\,dy \\
&= \int_{-2}^{1} dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{2-x} \\
&= \int_{-2}^{1} dx \left(\frac{(2-x)^2}{2} - \frac{x^4}{2}\right) \\
&= \left[\frac{-(2-x)^3}{6} - \frac{x^5}{10}\right]_{x=-2}^{1} \\
&= \left[\frac{-1}{6} - \frac{1}{10}\right] - \left[-\frac{4^3}{6} - \frac{(-2)^5}{10}\right] \\
&= \frac{-1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{64}{6} - \frac{32}{10} \\
&= \frac{63}{6} - \frac{33}{10} \\
&= \frac{432}{60} \\
&= \frac{72}{10} = 7.2
\end{aligned}$$

שיטה 2



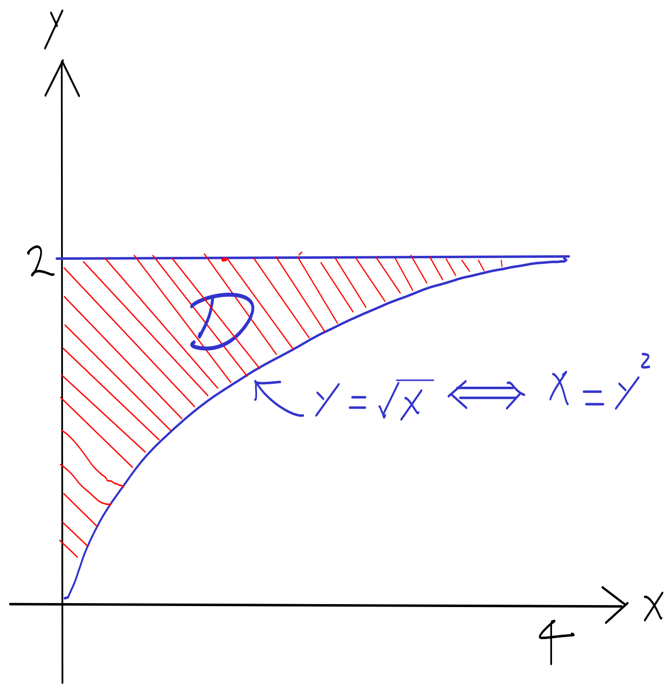
$$\begin{aligned}
\iint\limits_D y\,dx\,dy &= \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} y\,dx + \int_1^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} y\,dx \\
&= \int_0^1 dy\,[yx]_{x=-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} + \int_1^4 dy\,[yx]_{x=-\sqrt{y}}^{2-y} \\
&= \int_0^1 dy\,2y\sqrt{y}\; + \int_1^4 dy\,(y(2-y)+y\sqrt{y}) \\
&= \int_0^1 dy\,2y^{3/2}\; + \int_1^4 dy\left(2y-y^2+y^{3/2}\right) \\
&= \left[5y^{5/2}\right]_0^1 + \left[y^2-\frac{y^3}{3}+\frac{2}{5}y^{5/2}\right]_1^4 \\
&=5+\left(16-\frac{64}{3}+\frac{64}{5}\right)-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right) \\
&=5+64\cdot\frac{7}{15}-\frac{16}{15} \\
&=5-\frac{7}{60}-\frac{64}{60} \\
&=5-\frac{71}{60} \\
&=\frac{300-71}{60} \\
&=\frac{229}{60}
\end{aligned}$$

דוגמה 10.4

חשבו את $\displaystyle\int_0^4 dx\ \int_{\sqrt{x}}^2 dy\, e^{x/y}$

פתרון:

לא ניתן להחליף את האינטגרל הפנימי בעזרת פונקציה אלמנטריות.



$$
\begin{aligned}
\int_0^4 dx\, \int_{\sqrt{x}}^2 dx\, e^{x/y} &= \int_0^2 dy\, \int_0^{y^2} dx\, e^{x/y} \\
&= \int_0^2 dy\, \left[y e^{x/y} \right]_{x=0}^{y^2} \\
&= \int_0^2 dy\, \left(y e^{y} - y \right) \\
&= \left[y e^y - e^y - \frac{y^2}{2} \right]_0^2 \\
&= 2e^2 - e^2 - 2 - (-1) \\
&= e^2 - 1
\end{aligned}
$$

דוגמה 10.5

1) חשבו את האינטגרל $I = \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_0^{x^2} dy\, \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right)\, dy$

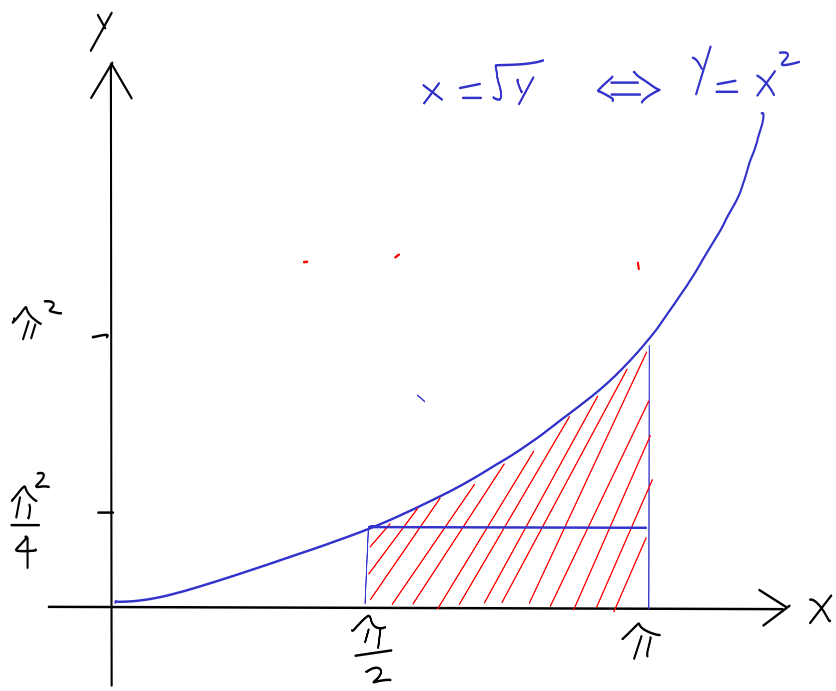
2) שרטטו את תחום האינטגרציה ושנו את סדר האינטגרציה

פתרון:

(1

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_0^{x^2} dy \, \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi} dx \, \left[\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]_0^{x^2} \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi} dx \, (\sin x - \sin(0)) \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi} dx \sin x \\
&= [-\cos x]_{\pi/2}^{\pi} \\
&= -\cos\pi + \cos\tfrac{\pi}{2} \\
&= 1 \ .
\end{aligned}
$$

(2



$$I = \int_0^{\pi^2/4} dy \int_{\pi/2}^{\pi} dx \, \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \int_{\pi^2/4}^{\pi} dy \int_{\sqrt{y}}^{\pi} dx \, \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

דוגמה 10.6 שינוי סדר של אינטגרלים

חשב את האינטגרל

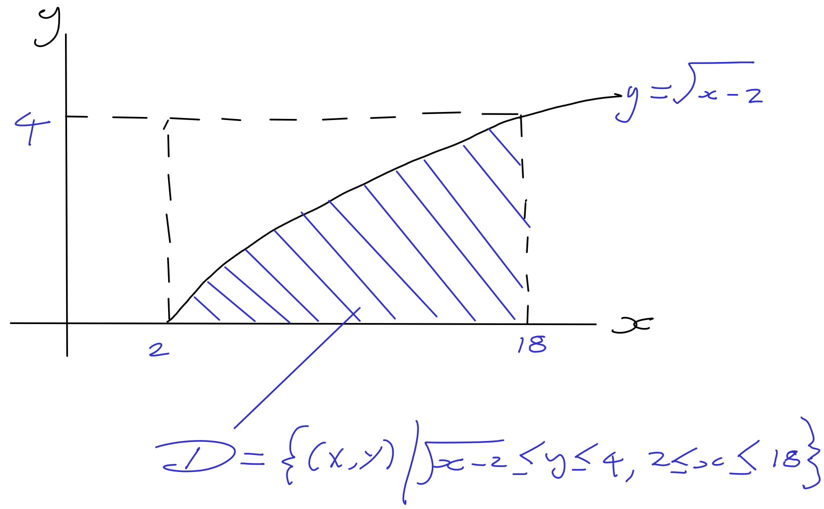
$$I = \int_2^{18} dx \int_{\sqrt{x-2}}^{4} dy \; e^{-5(x-2)/y}$$

פתרון:

התחום של האינטגרל הוא

$$D = \{(x,y) \mid 2 \le x \le 18 \ , \sqrt{x-2} \le y \le 4\}$$

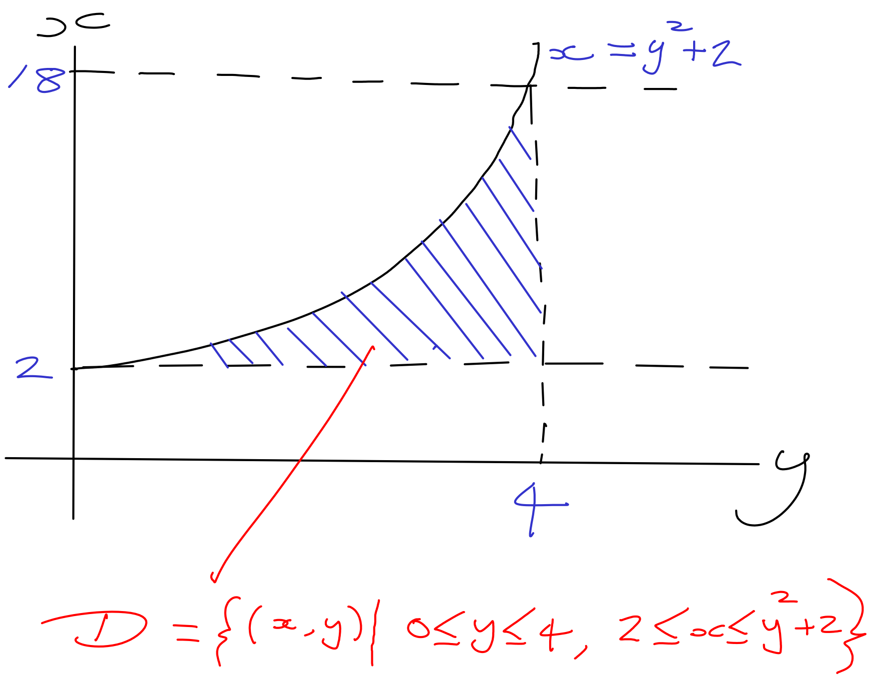
כמתואר בתרשים.



ניתן לשנות את הסדר של האינטגרלים של x ו- y כך שהתחום הוא

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 4 \ , \ 2 \le x \le y^2+2\}$$

כמתואר בתרשים



$$\begin{aligned}
I &= \int_0^4 dy \int_2^{y^2+2} dx\ e^{-5(x-2)/y} \\
&= \int_0^4 dy\ \left[-\frac{y}{5}\cdot e^{-5(x-2)/y}\right]_2^{y^2+2} \\
&= -\frac{1}{5}\int_0^4 dy\ \left[y\cdot e^{-5(x-2)/y}\right]_2^{y^2+2} \\
&= -\frac{1}{5}\int_0^4 dy\ \left(y\cdot e^{-5(y^2+2-2)/y} - y\cdot e^{-5(0)/y}\right) \\
&= -\frac{1}{5}\int_0^4 dy\ \left(ye^{-5y} - y\right) \\
&= -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{5}ye^{-5y} + \frac{1}{25}e^{-5y} - \frac{y^2}{2}\right]_0^4 \\
&= -\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}e^{-20} + \frac{1}{25}e^{-20} - \frac{4^2}{2} + \frac{1}{25}\right)
\end{aligned}$$

10.1 תכונות חשובות של האינטגרל הכפול

משפט 10.3 תכונות האינטגרל הכפול

בהינתן אינטגרל כפולה מצורה

$$\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y)$$

בתחום D במישור xy.

(1) אם הפונקציה $f(x,y)=1$ האינטגרל שווה לשטח התחום $S(D)$:

$$\iint\limits_D dx\,dy = S(D)\ .$$

(2) נתון קבוע $c\in\mathbb{R}$, אז מתקיים

$$\iint\limits_D dx\,dy\,c\cdot f(x,y) = c\cdot\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y)\ .$$

(3) הפעולה של אינטגרציה כפולה שומרת סכום:

$$\iint\limits_D dx\,dy\,\left(f_1(x,y)+f_2(x,y)\right) = \iint\limits_D dx\,dy\,f_1(x,y) + \iint\limits_D dx\,dy\,f_2(x,y)$$

(4) נתון שני תחומים D_1 ו- D_2. אם $D = D_1 \cup D_2$ ו- $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ אזי

$$\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) = \int\int_{D_1} dx\,dy\,f(x,y) + \int\int_{D_2} dx\,dy\,f(x,y)$$

(5) אם $f(x,y) \geq 0$ בכל התחום D אז

$$\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) \geq 0\ .$$

(6) אם $m \leq f(x,y) \leq M$ בתחום D אז

$$m \cdot S(D) \leq \iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) \leq M \cdot S(D)\ .$$

(7)

$$\left|\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y)\right| \leq \iint\limits_D dx\,dy\,|f(x,y)|\ .$$

10.2 שטח של תחום ע"י אינטגרל כפול

משפט 10.4 שטח התחום

במקרה שבתוך האינטגרל הכפול בנוסחא (1*) הפונקציה $f(x,y)=1$, אז האינטגרל הכפול שווה לשטח של התחום D:

$$\iint\limits_D dx\,dy\,(1) = S(D)\ .$$

כאשר $S(D)$ מסמן את שטח התחום D.

דוגמה 10.7

חשבו את שטח המלבן המוגדר ע"י התחום

$$D = \{(x,y)|2 \leq x \leq 5\,, 3 \leq y \leq 6\ \}$$

באמצעות אינטגרציה כפולה.

פתרון:

$$\begin{aligned}
S(D) &= \int_2^5 dx \int_3^6 dy \\
&= \int_2^5 dx \, [y]_3^6 \\
&= \int_2^5 dx \, (6-3) \\
&= \int_2^5 dx \, 3 \\
&= 3 \int_2^5 dx \\
&= 3[x]_2^5 \\
&= 3(5-2) \qquad\qquad = 9 \ .
\end{aligned}$$

דוגמה 10.8

חשבו את הערך של האינטגרל של הפונקציה $z(x,y) = 3x^2 + 4y^2$ בין הקווים $y_1 = x+4$ $y_2 = -x+2$ בקטע $1 \le x \le 2$.

פתרון:

$$\begin{aligned}
\iint_D dx\, dy\, z(x,y) &= \int_1^2 dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \, \left(3x^2 + 4y^2\right) \\
&= \int_1^2 dx \, \left[3x^2 y + \frac{4}{3} y^3\right]_{y_1}^{y_2} \\
&= \int_1^2 dx \, \left(3x^2 y_2 + \frac{4}{3} y_2^3 - 3x^2 y_1 - \frac{4}{3} y_1^3\right) \\
&= \int_1^2 dx \, \left(3x^2 (x+4) + \frac{4}{3}(x+4)^3 - 3x^2(2-x) - \frac{4}{3}(2-x)^3\right) \\
&= \int_1^2 dx \, \left(3x^3 + 12x^2 + \frac{4}{3}(x+4)^3 - 6x^2 + 3x^3 - \frac{4}{3}(2-x)^3\right) \\
&= \int_1^2 dx \, \left(6x^3 + 6x^2 + \frac{4}{3}(x+4)^3 - \frac{4}{3}(2-x)^3\right) \\
&= \left[\frac{3}{2}x^4 + 2x^3 + \frac{1}{3}(x+4)^4 + \frac{1}{3}(2-x)^4\right]_1^2 \\
&= \left(24 + 16 + 432 - \frac{3}{2} - 2 - \frac{625}{3} - \frac{1}{3}\right) \\
&= \left(470 - \frac{3}{2} - \frac{626}{3}\right) \\
&= \frac{1559}{6}
\end{aligned}$$

דוגמה 10.9

מהו השטח של האליפסה הנתון ע"י

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

בשטח התחום

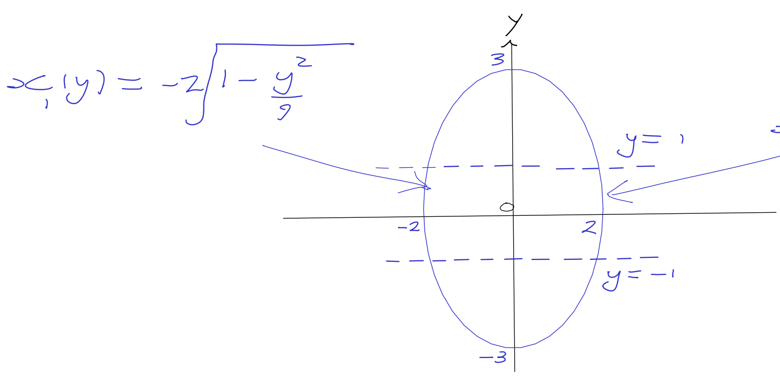
$$-1 \le y \le 1 \ .$$

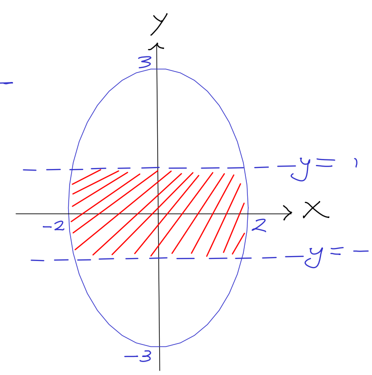
פתרון:

הקו של האליפסה מוצג בתרשים והתחום D מוצג בתרשים בצבע אדום. שים לב:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \qquad \Rightarrow \qquad x=\pm 2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}$$

במונחים של x.





הקו של האליפסה בצד שמאל ניתן ע"י

$$x_1(y)=-2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}$$

והקו של האליפסה בצד ימין ניתן ע"י

$$x_2(y)=+2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}$$

השטח ניתן באמצעות האינטגרל הכפול

$$\begin{aligned}
A &= \iint\limits_D dx\,dy \\
&= \int_{-1}^{1} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \\
&= \int_{-1}^{1} dy \ [x]_{x_1(y)}^{x_2(y)} \\
&= \int_{-1}^{1} dy \left(2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}-(-2)\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}\right) \\
&= \int_{-1}^{1} dy\, 4\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}
\end{aligned}$$

בכדי לחשב את האינטגרל של y ניתן להשתמש בהטבלה של אינטגרלים הסטנדרטים להלן:

$$\begin{aligned}A =&4\left[\frac{1}{2}\left(y\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}+3\sin^{-1}\left(\frac{y}{3}\right)\right)\right]_{-1}^{1}\\ =&2\left(\sqrt{\frac{8}{9}}+3\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)-(-1)\sqrt{\frac{8}{9}}-3\sin^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)\right) \quad = 7.84928\ .\end{aligned}$$

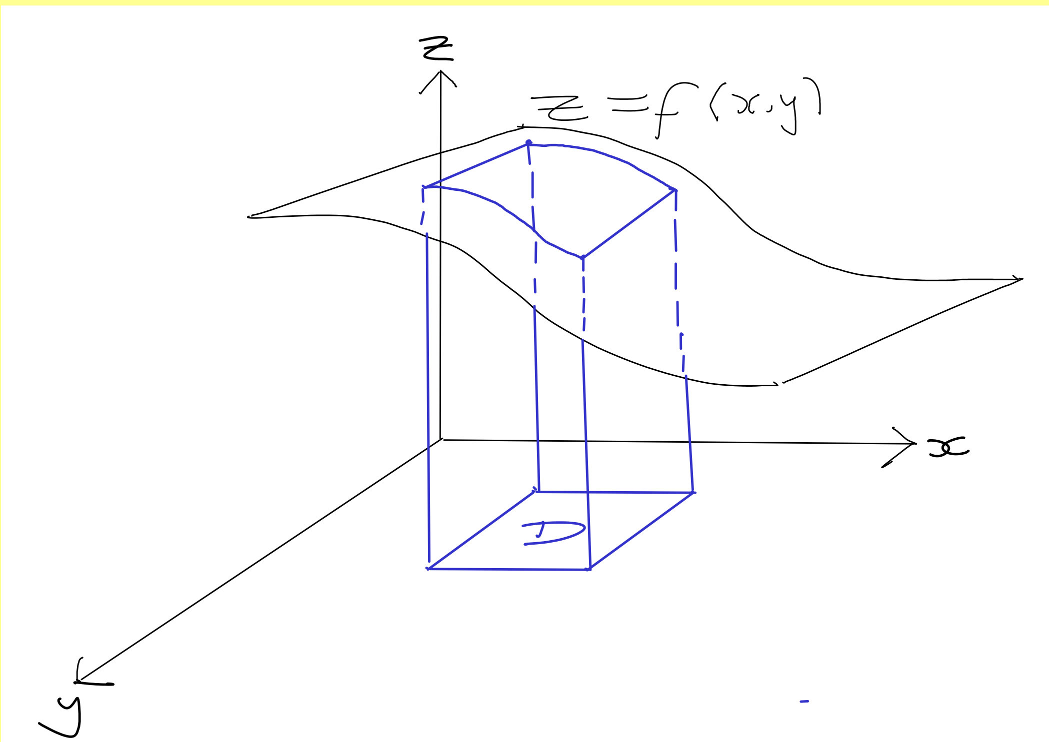
10.3 נפח מתחת משטח בתחום ע"י אינטגרל כפול

משפט 10.5 נפח תחת משטח בתחום D

נתון פונקציה $f(x,y)$ האי-שלילית ותחום D במישור xy (כלומר $f(x,y)\geq 0$ בכל נקודה בתחום D).
הנפח מתחת המשטח $z=f(x,y)$ בתוך התחום D ניתן ע"י האינטגרל הכפול

$$V=\iint\limits_{D} dx\,dy\, f(x,y)\ .$$

הנפח מדובר מוצג בתרשים להלן בכחול.



דוגמה 10.10 נפח פירמידה

מהו הנפח מתחת המישור הניתן ע"י המשוואה

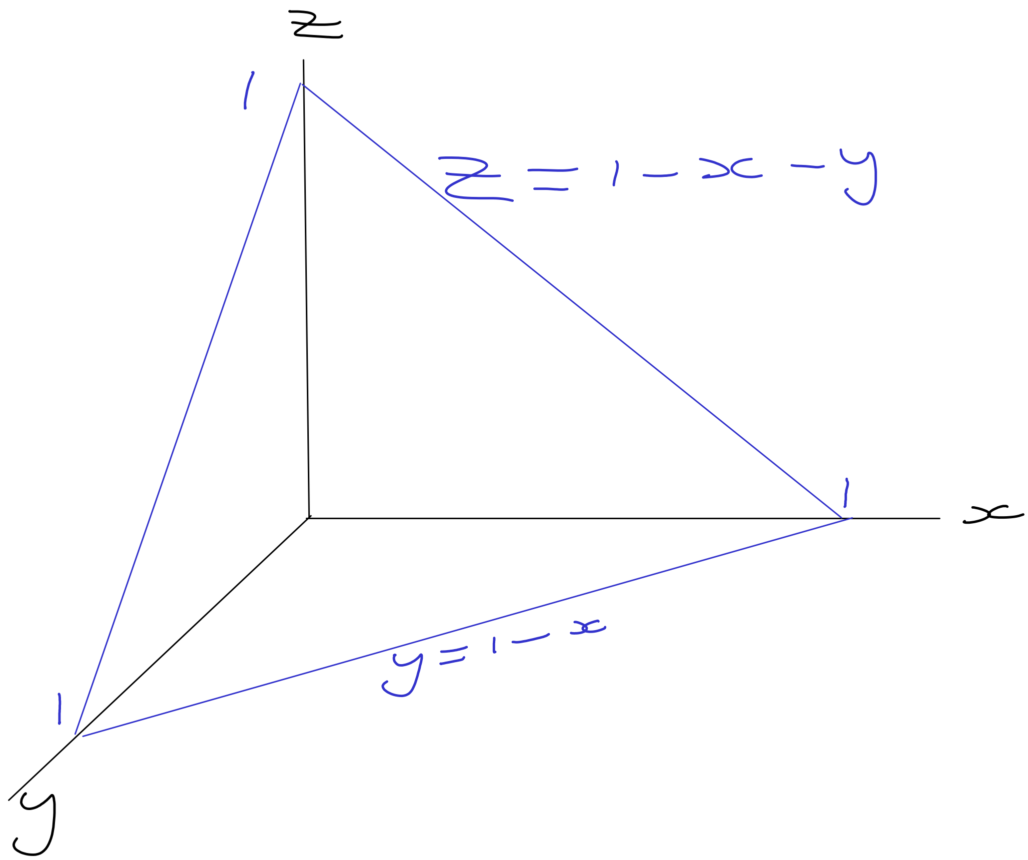
$$z=f(x,y):=1-x-y$$

בתחום

$$D = \{(x,y) | 0 \le x \le 1 \ , 0 \le y \le 1 - x \ \}$$

פתרון:

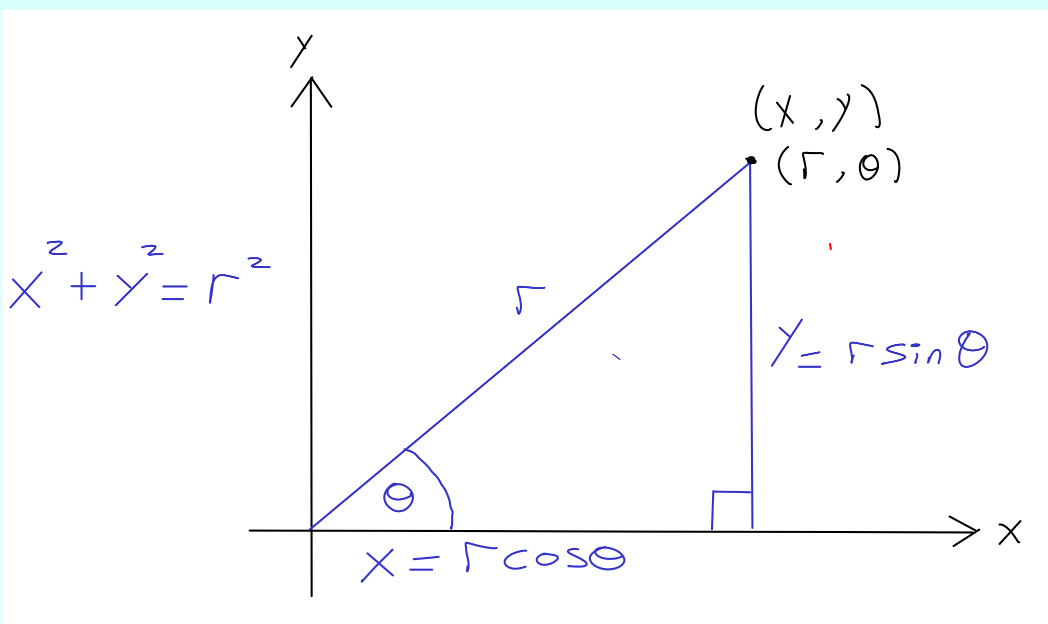
שים לב, הנפח מדובר הינו נפח של פירמדיה משולשית, כמתואר בתרשים להלן.



$$
\begin{aligned}
V &= \iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{y=1-x} dy\,(1-x-y) \\
&= \int_0^1 dx \left[y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} \\
&= \int_0^1 dx \left((1-x) - x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2\right) \\
&= \int_0^1 dx \left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2}\right) \\
&= \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6}\ .
\end{aligned}
$$

10.4 קואורדינטות קוטביות

הגדרה 10.1 קואורדינטות קוטביות



מקואורדינטות קרטיזיות לקואורדינטות קוטביות:

$$x = r\cos\theta\ , \qquad y = r\sin\theta\ .$$

מקואורדינטות קוטביות לקואורדינטות קרטיזיות:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\qquad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\ .$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta\ .$$

דוגמה 10.11

חשבו את האינטגרל

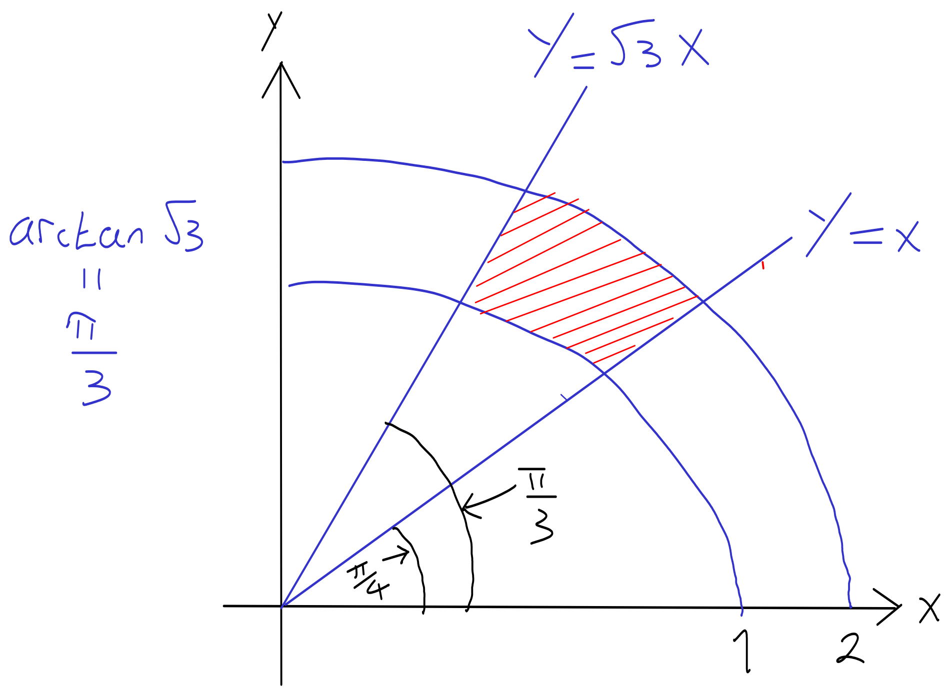
$$\iint\limits_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right)dx\,dy$$

כאשר

$$D=\{(x,y)|1\leq x^2+y^2\leq 4, x\leq y\leq \sqrt{3}\cdot y\}$$

פתרון:

$$D=\{(r,\theta)|\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{3},1\leq r\leq 2\ .\}$$

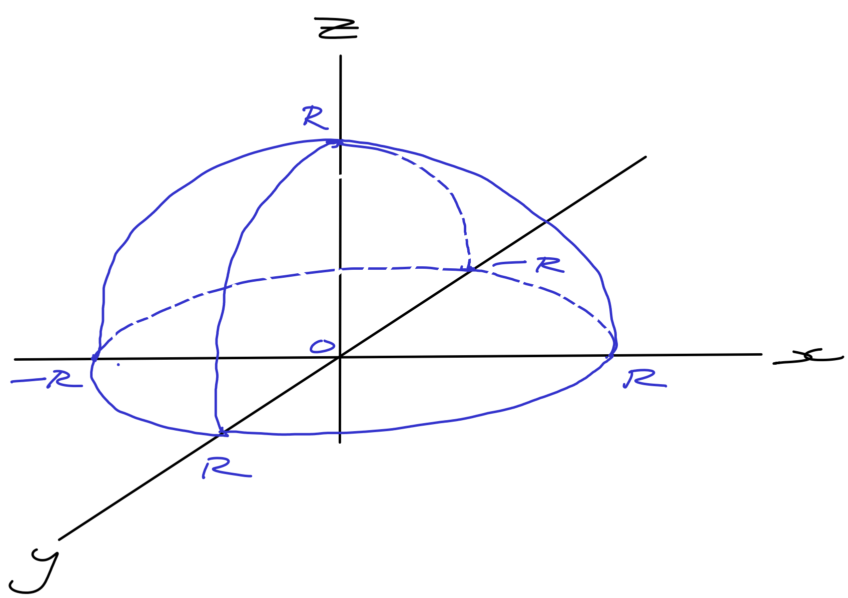


$$\begin{aligned}
\iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\,dx\,dy &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_1^2 \arctan\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right) r\,dr \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_1^2 \arctan\left(\tan\theta\right) r\,dr \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta\,\theta \int_1^2 r\,dr \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta\,\theta \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta\,\theta \left[\frac{3}{2}\right] \\
&= \frac{3}{2}\cdot\int_{\pi/4}^{\pi/3} \theta\,d\theta \\
&= \frac{3}{2}\cdot\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/3} \\
&= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi^2}{16}\right] \\
&= \frac{3}{4}\cdot\frac{7\pi^2}{144} \\
&= \frac{7\pi^2}{192}
\end{aligned}$$

דוגמה 10.12 נפח של ספירה

מהו הנפח של ספירה מרדיוס R?

פתרון:



$$f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}=\sqrt{R^2-r^2}$$

$$V=\int_0^R dr\int_0^\pi d\theta\, r\sqrt{R^2-r^2}$$

יהי $w=r^2$ משתנה חדש. שים לב:

$$w'=2r$$

כך ש-

$$V=\int_0^R dr\int_0^\pi d\theta\,\frac{w'}{2}\sqrt{R^2-w}$$

לפי שיטת אינטגרציה ע"י הצבה ניתן לחשב את האינטגרל של r באמצעות אינטגרל של w:

$$\begin{aligned}V=&\frac{1}{2}\int_{w=0}^{w=R^2}dw\int_0^\pi d\theta\,\sqrt{R^2-w}\\=&\frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta\,\left[-\frac{2}{3}\cdot\left(R^2-w\right)^{3/2}\right]_{w=0}^{w=R^2}\\=&\frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta\,\frac{2R^3}{3}\\=&\frac{R^3}{3}\int_0^\pi d\theta\\=&\frac{\pi R^3}{3}\ .\end{aligned}$$

10.5 החלפת משתנים - קואורדינטות עקומות

משפט 10.6 החלפת משתנים באינטגרל כפול והיעקוביאן

נניח שקואורדינטות u,v מוגדרות באמצעי קואורדינטות קרטיזיות x,y ע"י הביטוים

$$x=x(u,\mathrm{v})\ ,\qquad x=x(u,\mathrm{v})\ .$$

נתון אינטגרל כפול $\iint_D f(x,y)dx\,dy$. ניתן לעבור לאינטגרל של הקואורדינטות u,v דרך היחס

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D f\left(x(u,\mathrm{v}),y(u,\mathrm{v})\right)|J|\,du\,d\mathrm{v},$$

כאשר

$$J=\det\begin{pmatrix}x'_u & y'_u\\ x'_{\mathrm{v}} & y'_{\mathrm{v}}\end{pmatrix}\ .$$

J נקרא היעקוביאן.

דוגמה 10.13

קואורדינטות קוטביות:

$$J = \det \begin{pmatrix} x'_r & y'_r \\ x'_\theta & y'_\theta \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r \ .$$

דוגמה 10.14

קואורדינטות פרבוליות:

$$x = u \cdot \mathrm{v} \ , \qquad y = \frac{1}{2}\left(u^2 - \mathrm{v}^2\right)$$

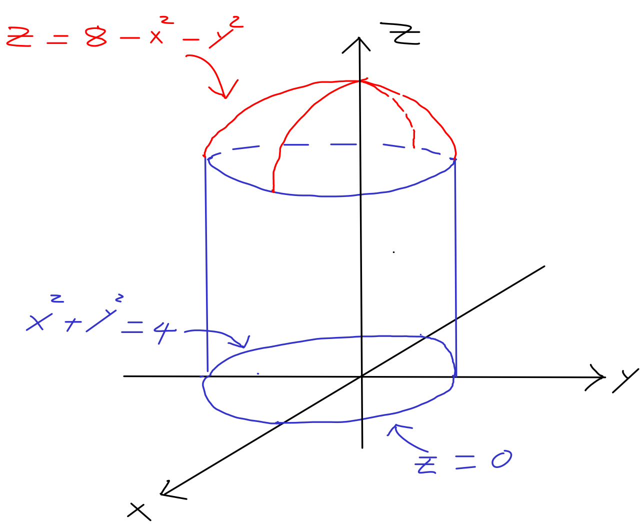
$$J = \det \begin{pmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_\mathrm{v} & y'_\mathrm{v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathrm{v} & u \\ u & -\mathrm{v} \end{pmatrix} = -\mathrm{v}^2 - u^2 \ .$$

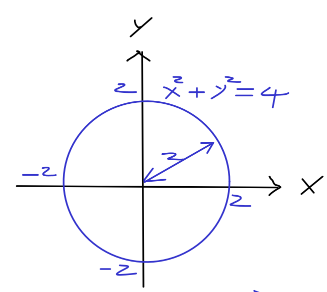
דוגמה 10.15

חשבו בעזרת אינטגרל כפול את נפח הגוף החסום ע"י המשטחים:

$$x^2 + y^2 = 4 \ , \qquad z = 0 \ , \qquad z = 8 - x^2 - y^2 \ .$$

פתרון:





$D = \{(x,y) | x^2+y^2 \le 4\}$

$= \{(r,\theta) | 0 \le r \le 2, \ 0 \le \theta \le 2\pi\}$

$$V = \iint_D (8 - x^2 - y^2)dx\,dy \ , \qquad D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 4\} = \{(r,\theta)|0 \le r \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

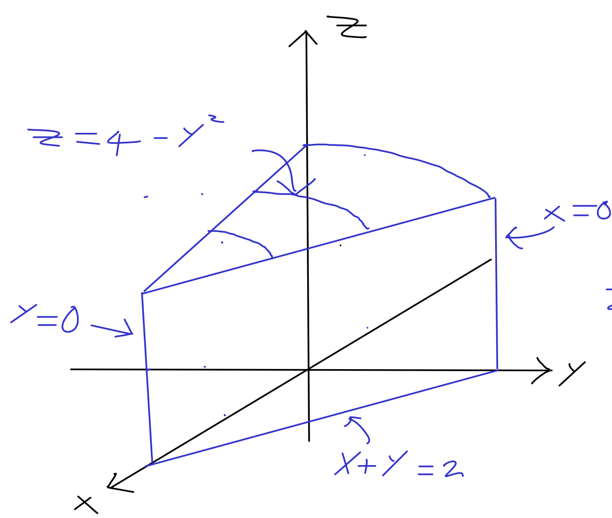
$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta\, r(8-r^2) \\
&= \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta\, (8r-r^3) \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \left[4r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta\ (16-4) \\
&= 12 \cdot [\theta]_0^{2\pi} = 24\pi\ .
\end{aligned}
$$

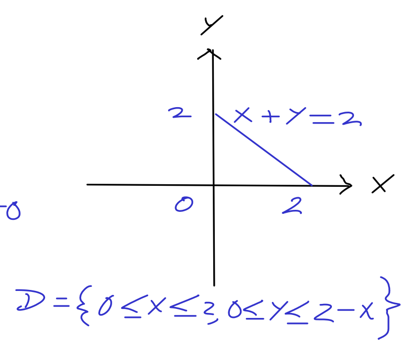
דוגמה 10.16

חשבו בעזרת אינטגרל כפול את נפח הגוף החסום ע"י המשטחים:

$$z=-y^2+4\ , \qquad z=0\ , \qquad x+y=2\ , \qquad y=0\ , \qquad x=0\ .$$

פתרון:





$$V = \iint_D (4-y^2)dx\,dy\ , \qquad D=\{(x,y)|0\le x\le 2\ ,0\le y\le 2-x\}$$

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (4-y^2)dy \\
&= \int_0^2 dx \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{2-x} \\
&= \int_0^2 dx \left(4(2-x) - \frac{(2-x)^3}{3}\right) \\
&= \left[-2(2-x)^2 + \frac{(2-x)^4}{12}\right]_{x=0}^{2} \\
&= 8 - \frac{16}{12} \\
&= 8 - \frac{4}{3} \\
&= \frac{20}{3} \ .
\end{aligned}
$$

10.6 מרכז מסה

משפט 10.7 מרכז מסה

נתון תחום D ופונקציה $\rho(x,y) \geq 0$ לכל $x,y \in D$. המסה של התחום D עם צפיפות $\rho(x,y)$ מוגדרת

$$M = \iint\limits_D \rho(x,y)dx\,dy \ .$$

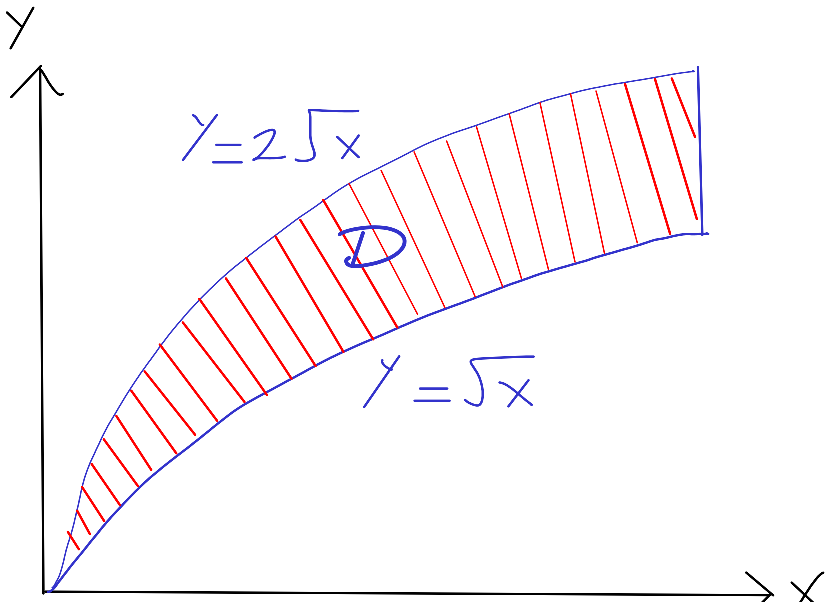
המרכז מסה של D היא נקודה $(x_c,y_c) \in D$ שניתנת ע"י

$$x_c = \frac{\iint_D x\,\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy} \ , \qquad y_c = \frac{\iint_D y\,\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy} \ .$$

דוגמה 10.17

מצאו את המסה של הגוף מישורי המוגדר ע"י הקווים $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x=4$ כאשר הצפיפות החומר היא $\rho(x,y) = 4-x$.

פתרון:



$$\begin{aligned}
M &= \iint_D (4-x)dx\,dy \\
&= \int_0^4 dx\ \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4-x)dy \\
&= \int_0^4 dx\,(4-x)\left[y\right]_{y=\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \\
&= \int_0^4 (4-x)\sqrt{x}\,dx \\
&= \int_0^4 (4x^{1/2}-x^{3/2})\,dx \\
&= \left[4\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{2}{5}\cdot x^{5/2}\right]_0^4 \\
&=\frac{64}{3}-\frac{64}{5} \\
&=\frac{320-192}{15} \\
&=\frac{128}{15}\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_D x\cdot\rho(x,y)dx\,dy &= \iint_D (4x-x^2)dx\,dy \\
&= \int_0^4 dx\ \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4x-x^2)dy \\
&= \int_0^4 dx\,(4x-x^2)\left[y\right]_{y=\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \\
&= \int_0^4 (4x-x^2)\sqrt{x}\,dx \\
&= \int_0^4 (4x^{3/2}-x^{5/2})\,dx \\
&= \left[4\cdot\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{2}{7}\cdot x^{7/2}\right]_0^4 \\
&= \frac{256}{5}-\frac{256}{7} \\
&= \frac{512}{35}\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_D y\cdot\rho(x,y)dx\,dy &= \iint_D (4-x)y\,dx\,dy \\
&= \int_0^4 dx\ \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4-x)y\,dy \\
&= \int_0^4 dx\,(4-x)\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \\
&= \int_0^4 dx\,(4-x)\left(2x-\frac{x}{2}\right) \\
&= \int_0^4 dx\,(4-x)\cdot\frac{3}{2}x \\
&= \frac{3}{2}\int_0^4 dx\,(4x-x^2) \\
&= \frac{3}{2}\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^4 \\
&= \frac{3}{2}\left(32-\frac{64}{3}\right) \\
&= \frac{3}{2}\cdot\frac{64}{6} \\
&= 16\ .
\end{aligned}$$

$$x_c=\frac{\iint_D x\cdot\rho(x,y)dx}{M}=\frac{\frac{512}{35}}{\frac{128}{15}}=\frac{3}{7}\cdot\frac{512}{128}=\frac{3}{7}\cdot 4=\frac{12}{7}\ .$$

$$y_c=\frac{\iint_D y\cdot\rho(x,y)dx}{M}=\frac{16}{\frac{128}{15}}=15\cdot\frac{16}{128}=15\cdot\frac{1}{8}=\frac{15}{8}$$