המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

המחלקה למדעי המחשב

$13/03/25\ 12:00 - 15/03/25\ 23:59$ תשפ"ה

אלגברה 2

מועד מיוחד

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר,

תשפ"ד סמסטר ב'

השאלון מכיל 12 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות

- יש לפתור את כל השאלות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבירו היטב את מהלך הפתרון. תשובה ללא הסבר (גם נכונה) לא תתקבל.
- אסור לחלוטין לקבל עזרה מסטודנט אחר או מאף אחד. עליכם להעלות את הפתרונות שלכם דרך אתר המודל של הקורס אלגברה 2 למדמ"ח, או במייל, לא יאוחר משעה $23:59$ $15-03-25$.

  פתרונות שהוגשו אחרי המועד הזה לא יתקבלו.
- מותר להשתמש בחומר של הקורס, התרגילים של הקורס והספרים של הקורס בלבד, אבל אסור להשתמש בשום מקורות אחרים.
- אחרי הגשת פתרונות אתם תקבלו הזמנה למבחן קצר בעל פה על הפתרונות שלכם.

ייתכן שלא תעבור את המבחן או תורידו נקודות במקרה שאתם לא יכולים להסביר הפתרונות שלכם היטב.

==

שאלה 1 (25 נקודות)

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & i\pi & 0 & 0 \\ -i\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{i\pi}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-i\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

א) (5 נק')

הוכיחו כי A לכסינה אוניטרית.

ב) (15 נק')

מצאו D אלכסונית ו- Q אוניטרית כך ש- $A = QD\bar{Q}$.

ג) (5 נק')

חשבו את $\cos(A)$.

שאלה 2 (25 נקודות)

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$. מצאו צורת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $A = PJP^{-1}$.

שאלה 3 (25 נקודות)

תהיינה $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ מטריצות מסדר 2×2 מעל $\mathbb{C}$.

הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

א) (12 נק')

אם $A = AB - BA$ אז $A^2 = 0$ כאשר 0 המטריצת האפס של $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

ב) (13 נק')

אם $(AB)^2 = 0$ אז $(BA)^2 = 0$ כאשר 0 המטריצת האפס של $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

שאלה 4 (25 נקודות)

תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. יהי $p_A(x)$ הפולינום האופייני של A:

$$p_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

כאשר a_i מספרים ממשיים. תהי B המטריצה שנתונה על ידי

$$B=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&-a_0\\1&0&\dots&0&-a_1\\0&1&\dots&0&-a_2\\\vdots&\vdots&\ddots&&\vdots\\0&0&\dots&1&-a_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|&|&&|&|\\e_2&e_3&\dots&e_n&-a\\|&|&&|&|\end{pmatrix}$$

כאשר הוקטור a מוגדר להיות $a=\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_{n-1}\end{pmatrix}$, ו- e_i הוא הוקטור היחידה במרחב $\mathbb{C}^n$, אשר בו הרכיה ה- i הוא 1 וכל רכיב אחר הוא 0. כלומר:

$$e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad\dots\quad e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

הוכיחו את הטענה הבאה:

קיים וקטור $u\in\mathbb{C}^n$ כך שהוקטורים $u,Au,A^2u,\dots,A^{n-1}u$ מהווים בסיס של $\mathbb{C}^n$ אם ורק אם קיימת מטריצה $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ הפיכה כך ש- $B=P^{-1}AP$.

פתרונות

שאלה 1

א) $A = \begin{pmatrix} 0 & i\pi & 0 & 0 \\ -i\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{i\pi}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-i\pi}{2} & 0 \end{pmatrix} = \bar{A}$ לכן A צמודה לעצמה $\Leftarrow$ A נורמלית $\Leftarrow$ A לכסינה אוניטרית.

ב) פולינום אופייני:

$$p_A(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\left(x + \frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)(x+\pi) \ .$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = \frac{\pi}{2}$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = -\frac{\pi}{2}$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = \pi$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = -\pi$ מריבוי אלגברי 1.

<u>מרחב עצמי של $\lambda = \frac{\pi}{2}$:</u>

$$V_{\pi/2} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda = -\frac{\pi}{2}$:</u>

$$V_{-\pi/2} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda = \pi$:</u>

$$V_\pi = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda = -\pi$:</u>

$$V_{-\pi} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$A = PDP^{-1}\ , \qquad D = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\pi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\pi \end{pmatrix}\ , \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ i & -i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

$$A = QD\bar{Q}\ , \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad D = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\pi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\pi \end{pmatrix}\ .$$

ג)

$$\cos(A) = Q\cos(D)\bar{Q} = Q\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\bar{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

<u>שאלה 2</u>

$$A = P.J.P^{-1}\ , \qquad P = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -9 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 12 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

<u>שאלה 3</u>

א) ראשית נחשב את העקבה של המטריצה A:

$$\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(AB-BA)=\mathrm{tr}(AB)-\mathrm{tr}(BA)=\mathrm{tr}(AB)-\mathrm{tr}(AB)=0\ .$$

לכן $\mathrm{tr}(A)=0$ ולכן לפי משפט קיילי-המילטון, עבור המטריצה A:

$$0=A^2-\mathrm{tr}(A)A+|A|I=A^2+|A|I\ .$$

לכן

$$A^2=-|A|I\ . \qquad \text{(\#)}$$

כעת נחשב את A^2 בשתי דרכים:

$$A^2=A(AB-BA)=A^2B-ABA\ ,$$

ו-

$$A^2=(AB-BA)A=ABA-BA^2\ .$$

החיבור שלהם הוא

$$2A^2=A^2B-BA^2\overset{(\#)}{=}-|A|IB-B\left(-|A|I\right)=-|A|B+|A|B=0\ .$$

לפיכך $A^2=0$. כנדרש.

ב) נסמן $C=AB$.
C מטריצה מסדר 2×2 ולכן לפי המשפט קיילי-המילטון:

$$C^2-\mathrm{tr}(C)C+|C|I=0\ . \qquad (*)$$

נחשב את $|C|$:

$$|C|^2=\left|C^2\right|=\left|(AB)^2\right|=|0|=0\ .$$

לכן $|C|=0$.
בנוסף, $C^2=0$ וגם $|C|=0$ לכן לפי משפט קיילי-המילטון:

$$\mathrm{tr}(C)C=0\ .$$

ז"א $C=0$ או $\mathrm{tr}(C)=0$.
בכל מקרה בהכרח $\mathrm{tr}(C)=0$.
נשים לב:

$$|BA|=|AB|=|C|=0\ , \qquad \mathrm{tr}(BA)=\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(C)=0\ .$$

לפי המשפט קיילי-המילטון, עבור המטריצה BA, נקבל:

$$0=(BA)^2-\mathrm{tr}(BA)\cdot BA+|BA|I=(BA)^2\ .$$

לפיכך $(BA)^2=0$, כנדרש.

שאלה 4

כיוון $\Leftarrow$

נניח שקיים וקטור $u\in\mathbb{C}^n$ כך שהוקטורים $u,Au,A^2u,\dots,A^{n-1}u$ מהווים בסיס של $\mathbb{C}^n$.

לכן הקבוצת וקטורים בלתי תלוינ לינארית.

נבנה את המטריצה $P=\begin{pmatrix}| & | & & | \\ u & Au & \cdots & A^{n-1}u \\ | & | & & |\end{pmatrix}$.

העמודות של P בלתי תלויות ליניארית לכן P הפיכה.

כעת נוכיח ש $AP=PB$.

$$AP=A\begin{pmatrix}| & | & & | \\ u & Au & \cdots & A^{n-1}u \\ | & | & & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}| & | & & | \\ Au & A^2u & \cdots & A^nu \\ | & | & & |\end{pmatrix}\ .$$

מצד שני

$$PB=P\begin{pmatrix}| & | & & | & | \\ e_2 & e_3 & \cdots & e_n & -a \\ | & | & & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}| & | & & | & | \\ Pe_2 & Pe_3 & \cdots & Pe_n & -Pa \\ | & | & & | & |\end{pmatrix}$$

נציב $Pe_k=A^{k-1}u$:

$$PB=\begin{pmatrix}| & | & & | & | \\ Au & A^2u & \cdots & A^{n-1}u & -Pa \\ | & | & & | & |\end{pmatrix}$$

נשאר רק להוכיח כי $-Pa=A^nu$:

$$a=\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_{n-1}\end{pmatrix}=a_0e_1+a_1e_2+\cdots+a_{n-1}e_n\ .$$

לכן

$$\begin{aligned}Pa=&P\left(a_0e_1+a_1e_2+\cdots+a_{n-1}e_n\right)\\ =&a_0Pe_1+a_1Pe_2+\cdots+a_{n-1}Pe_n\\ =&a_0u+a_1Au+\ldots+a_{n-1}A^{n-1}u\\ =&\left(a_0I+a_1A+\cdots+a_{n-1}A^{n-1}\right)u\\ =&-A^nu\end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון מנובע ממשפט קיילי המילטון: $0=p(A)=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\ldots+a_1A+a_0I$.

לכן הוכחנו כי $-Pa=A^nu$.

לכן $AP=PB$. מכיוון ש- P הפיכה אזי

$$P^{-1}AP=B\ .$$

כנדרש.

כיוון $\Leftarrow$

נניח שקיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $C = P^{-1}AP$. אזי $AP = CP$.
נגדיר $u := Pe_1$ להיות הוקטור הראשון של P.
נוכיח כי הקבוצת ווקטורים $u, Au, A^2u, \ldots, A^{n-1}u$ מהווה בסיס של $\mathbb{C}^n$.

$$AP = A \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Pe_1 & Pe_2 & \cdots & Pe_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ APe_1 & APe_2 & \cdots & APe_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

ו-

$$PB = P \begin{pmatrix} | & | & & | & | \\ e_2 & e_3 & \cdots & e_n & -a \\ | & | & & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | & | \\ Pe_2 & Pe_3 & \cdots & Pe_n & -Pa \\ | & | & & | & | \end{pmatrix}$$

מכיוון ש- $AP = PB$, על ידי השוואה בין עמודות נקבל

$$\begin{aligned} APe_1 &= Pe_2 \ , \\ APe_2 &= Pe_3 \ , \\ &\vdots \\ APe_{n-1} &= Pe_n \ , \\ APe_n &= -Pa \ . \end{aligned}$$

לכן באופן איטרטיבי:

$$\begin{aligned} Au &= Pe_2 \ , \\ A^2u &= A(Au) && = APe_2 && = Pe_3 \ , \\ A^3u &= A(A^2u) && = APe_3 && = Pe_4 \ , \\ &\vdots \\ A^{n-1}u &= A(A^{n-2}u) && = APe_{n-1} && = Pe_n \ . \end{aligned}$$

ז"א $A^ku = Pe_{k+1}$ לכל $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

נניח שנרשום את הצירוף הלינארי

$$c_1u + c_2Au + \ldots + c_nA^{n-1}u = 0$$

כאשר $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ סקלרים כלשהם.
אזי

$$c_1Pe_1 + c_2Pe_2 + \ldots + c_nPe_n = 0$$

מכיוון ש- P הפיכה, אז בהכרח הווקטורים Pe_k בלתי תלויים ליניאריים.

לכן, בהכרח $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.
לכן הוקטורים $u, Au, A^2u, \cdots, A^{n-1}u$ בלתי תלויים ליניאריים.
לכן הם מהווים בסיס של $\mathbb{C}^n$ בגלל שהם n וקטורים אשר בלתי תלויים ליניאריים במרחב וקטורי n ממדי: $\mathbb{C}^n$.