קריפטוגרפיה

תוכן העניינים

1 תורת המספרים **3**
הגדרות בסיסיות 3
האלגוריתם של אוקליד 10
משפטים של מספרים ראשוניים 14
משפט השאריות הסיני 17

2 חוגים מתמטיים **19**
החוג $\mathbb{Z}_m$ 19
הפיכת מטריצות בחוג $\mathbb{Z}_m$ 22
תמורות 25

3 הצפנים הבסיסיים **29**
מושג של קריפטו-מערכת 29
צופן ההזזה 30
צופן ההחלפה 32
צופן האפיני 35
צופן ויז'נר 40
צופן היל 45
צופן התמורה 52

4 הצפנים הבסיסיים (המשך) **55**
צפני זרם 55

5 צופן RSA **58**
משפט השאריות הסיני 58
משפטים של מספרים ראשוניים 59
אלגוריתם RSA 62

6 קריפטו-אנליזה **70**
סוגים של התקפת סייבר 70
קבוצות אותיות הנפוצים ביותר בטקטסט גלוי 70
קריפטו-אנליזה של צופן האפיני 72
קריפטו-אנליזה של צופן היל 77
מדד צירוף המקרים 80
קריפטו-אנליזה של צופן ויז'נר - מבחן פרידמן 81

7 סודיות מושלמת 86
סודיות מושלמת 86
תכונות של אנטרופיה 94
צופן מרוכב 99
משפט האנטרופיה לקריפטו-מערכת 100

8 אנטרופיה ומידע 104
המושג של מידע 104
הגדרה של מידע 107
אנטרופיה 110
הצפנת האפמן 112

שיעור 1
תורת המספרים

1.1 הגדרות בסיסיות

הגדרה 1.1

יהיו a, b מספרים שלמים. אומרים כי b מחלק את a אם קיים מספר שלם q כך ש-

$$a = qb \ .$$

כלומר $\frac{a}{b}$ שווה למספר שלם q.

הסימון $a \mid b$ אומר כי b מחלק את a.

דוגמה 1.1

א) $6 \mid 3$ בגלל שקיים מספר שלם $q = 2$ כך ש- $6 = 3q$.

ב) $42 \mid 7$ בגלל שקיים מספר שלם $q = 6$ כך ש- $42 = 7q$.

ג) $8 \nmid 5$ בגלל שלא קיים מספר שלם q כך ש- $8 = 5q$.

הגדרה 1.2 יחס שקילות בין a ל- b

נניח כי $a, b \in \mathbb{Z}$ מספרים שלמים ו- m מספר שלם חיובי. היחס

$$a \equiv b \mod m$$

אומר כי m מחלק את ההפרש $a - b$, כלומר $m|a-b$.

בנסוח שקול, $a \equiv b \mod m$ אם קיים שלם q כך ש- $a = qm + b$.

לעתים אומרים כי "a שקול ל- b מודולו m".

דוגמה 1.2

הוכיחו כי

א $5 \equiv 2 \mod 3$

ב $43 \equiv 23 \mod 10$

ג $7 \not\equiv 2 \mod 4$

פתרון:

א)

$$5-2=3=1\cdot 3 \quad \Rightarrow \quad 3\,|\,5-2 \quad \Rightarrow \quad 5\equiv 2 \mod 3 \ .$$

ב)

$$43-23=20=2\cdot 10 \quad \Rightarrow \quad 10\,|\,43-23 \quad \Rightarrow \quad 43\equiv 23 \mod 10 \ .$$

ג) $7-2=5$.

לא קיים שלם q כך ש- $7-2=4q$ לכן $4\nmid 7-2$ לכן

$$7\not\equiv 2 \mod 4 \ .$$

■

הגדרה 1.3 השארית

נתונים מספרים שלמים $a,b\in\mathbb{Z}$, היחס

$$a \ \% \ b$$

מציין את השארית בחלוקת a ב- b.

דוגמה 1.3

$$43 \ \% \ 10 = 3 \ .$$
$$13 \ \% \ 4 = 1 \ .$$
$$8 \ \% \ 2 = 0 \ .$$

$$-10 \ \% \ 3 = -1 \ .$$

משפט 1.1 משפט החילוק של אוקלידס

יהיו a,b מספרים שלמים $b\neq 0$. קיימים מספרים שלמים q,r יחידים כך ש-

$$a=qb+r$$

כאשר $0\leq r<|b|$.

- b נקרא ה **מודולו**,
- q נקראת ה**מנה**
- ואילו r נקרא ה**שארית**.

  שימו לב: $r=a \ \% \ b$.

דוגמה 1.4

עבור המספרים $a=46$, $b=8$ מצאו את הפירוק האוקלידי $a=bq+r$.

פתרון:

עבור $b=8$ ו- $a=46$ מתקיים

$$46=8\cdot 5+6 \qquad \Rightarrow \qquad q=5\ ,r=6\ .$$

■

דוגמה 1.5

עבור $b=8$ ו- $a=-46$ מתקיים

$$-46=8\cdot(-6)+2 \qquad \Rightarrow \qquad q=-6\ ,r=2\ .$$

משפט 1.2 נוסחת השארית

נתונים $a,b>0$ מספר שלמים.

א) $a \text{ \% } b=a-b\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor$.

ב) $(-a) \text{ \% } b=b-(a \text{ \% } b)=b\left\lceil\frac{a}{b}\right\rceil-a$.

הוכחה:

א) לפי משפט החילוק של אוקלידס 1.1, קיימים שלמים q,r כך ש-

$$a=qb+r \qquad (*1)$$

כאשר $0\leq r<b$ ו- $r=a \text{ \% } b$. נחלק ב- b ונקבל

$$\frac{a}{b}=q+\frac{r}{b} \qquad (*2)$$

נשים לב כי $0<\frac{r}{b}<1$, לכן לפי (*2)

$$\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor=q\ .$$

נציב זה ב- (*1) ונקבל

$$a=\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor b+r \quad \Rightarrow \quad r=a-b\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor\ . \qquad (*3)$$

ב) לפי משפט החילוק של אוקלידס 1.1, קיימים שלמים $q',0\leq r'<b$ כך ש-

$$-a=q'b+r'$$

כאשר $r'=(-a) \text{ \% } b$. מכאן

$$a=-q'b-r'=-q'b-b+b-r'=-(q'+1)b+(b-r')\ . \qquad (*4)$$

נשים לב כי $b-r'\geq 0$. אבל לפי (*1) $a=qb+r$ כאשר $r=a \text{ \% } b$ ו- r יחיד. לכן

$$r=b-r' \quad \Rightarrow \quad r'=b-r \overset{\text{משוואה } (*3)}{=} b-a+b\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor=b-\left(a-b\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor\right)=b-(a \text{ \% } b)\ . \qquad (*5)$$

לכן $r'=(-a) \text{ \% } b=b-(a \text{ \% } b)$.

הזהות השני מנובע מ- (*5):

$$r=b-r' \quad \Rightarrow \quad r'=b-r \overset{\text{משוואה } (*3)}{=} b-a+b\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor-a+\left\lceil\frac{a}{b}\right\rceil\ .$$

לכן $r'=(-a) \text{ \% } b=-a+\left\lceil\frac{a}{b}\right\rceil$.

■

דוגמה 1.6

מצאו את $101 \ \% \ 7$.

פתרון:
$a=101$, $b=7$,
$$101 \ \% \ 7 = 101 - 7\left\lfloor \frac{101}{7} \right\rfloor = 101 - 7(14) = 3 \ .$$

■

דוגמה 1.7

מצאו את $-101 \ \% \ 7$.

פתרון:
$-a=-101$, $b=7$. נשתמש בנוסחה $(-a) \ \% \ b = b-(a \ \% \ m)$. מדוגמה הקודמת: $(101 \ \% \ 7)=3$ לפיכך
$$(-101) \ \% \ 7 = 7-(101 \ \% \ 7) = 7-3 = 4 \ .$$

■

הגדרה 1.4 המחלק המשותף הגדול ביותר gcd

נתונים שני מספרים שלמים $a,b>0$.
המחלק המשותף הגדול ביותר של a ו- b מסומן $\mathrm{gcd}(a,b)$ (greatest common dividor) ומוגדר להיות המספר שלם הגדול ביותר שמחלק גם a וגם b.

דוגמה 1.8

$$\begin{aligned} \mathrm{gcd}(2,6) =& 2 \ , \\ \mathrm{gcd}(3,6) =& 3 \ , \\ \mathrm{gcd}(24,5) =& 1 \ , \\ \mathrm{gcd}(20,10) =& 10 \ , \\ \mathrm{gcd}(14,12) =& 2 \ , \\ \mathrm{gcd}(8,12) =& 4 \ . \end{aligned}$$

הגדרה 1.5 כפולה משותפת קטנה ביותר

נתונים שני מספרים שלמים $a,b>0$.
הכפולה המשותפת הקטנה ביותר מסומן $\mathrm{lcm}(a,b)$ (lowest common multiple) ומוגדר להיות המספר השלם החיובי הקטן ביותר ש a ו- b מחלקים אותו.

דוגמה 1.9

$$\begin{aligned}\mathrm{lcm}(6,21) =& 42 \ ,\\ \mathrm{lcm}(3,6) =& 6 \ ,\\ \mathrm{lcm}(24,5) =& 120 \ ,\\ \mathrm{lcm}(20,10) =& 20 \ ,\\ \mathrm{lcm}(14,12) =& 84 \ ,\\ \mathrm{lcm}(8,12) =& 24 \ .\end{aligned}$$

הגדרה 1.6 מספרים זרים

נניח כי $a \geq 1$ ו- $b \geq 2$ מספרים שלמים. אומרים כי a ו- b **מספרים זרים** אם

$$\gcd(a,b) = 1 \ .$$

במילים פשוטות, שני מספרים שלמים נקראים **מספרים זרים** אם המחלק המשותף המקסימלי שלהם הוא 1, כלומר, אין אף מספר גדול מאחת שמחלק את שניהם.

משפט 1.3 משפט הפירוק לראשוניים

המשפט היסודי של האריתמטיקה או **משפט הפירוק לראשוניים** קובע כי כל מספר טבעי ניתן לרשום כמכפלה יחידה של מספרים ראשוניים.
ז"א, יהי $a \in \mathbb{N}$ כל מספר טבעי. אז

$$a = p_1^{e_1} \times p_2^{e_2} \times \cdots \times p_n^{e_n} \ .$$

כאשר $p_1,\ldots,p_n$ מספרים ראשוניים ו- $e_1 \ldots e_n \in \mathbb{N}$, והפירוק הזה יחיד.

דוגמה 1.10

$$60 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \ ,$$

דוגמה 1.11

$$98 = 2^1 \times 7^2 \ .$$

הגדרה 1.7 פונקציית אוילר

יהי m מספר שלם.
הפונקצית אוילר מסומנת ב- $\phi(m)$ ומוגדרת להיות השלמים שקטנים ממש מ- m וזרים ביחס ל- m.

$$\phi(m) := \left\{a \in \mathbb{N} \,\middle|\, \gcd(a,m) = 1, \ a < m\right\} \ .$$

דוגמה 1.12

מכיוון ש- $26 = 2 \times 13$, הערכים של a עבורם $\gcd(a, 26) = 1$ הם

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25\} \ .$$

ז"א יש בדיוק 12 ערכים של a עבורם $\gcd(a, 26) = 1$.

$$\phi(26) = 12 \ .$$

משפט 1.4 הפירוק לראשוניים של פונקציית אוילר

נתון מספר טבעי m. נניח כי הפירוק למספרים ראשוניים שלו הוא

$$m = \prod_{i=1}^{n} p_i^{e_i} \ ,$$

כאשר p_i מספרים ראשוניים שונים ו- $e_i > 0$ מספרים שלמיים ו- $1 \leq i \leq n$. אז

$$\phi(m) = \prod_{i=1}^{n} \left(p_i^{e_i} - p_i^{e_i - 1}\right) \ .$$

דוגמה 1.13

מצאו את $\phi(60)$.

פתרון:

$60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$ לכן

$$\phi(60) = \left(2^2 - 2^1\right)\left(3^1 - 3^0\right)\left(5^1 - 5^0\right) = (2)(2)(4) = 16 \ .$$

■

משפט 1.5 שיטה לחישוב $\gcd$

נתונים השלמים a, b כך שהפירוק לראשוניים שלהם הם:

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_k^{e_k} \ , \qquad b = {p_1}^{f_1} {p_2}^{f_2} \ldots {p_n}^{f_n}$$

וללא הגבלה כלליות נניח כי $k \leq n$. אז ה- gcd נתון על ידי

$$\gcd(a, b) = p_1^{\min(e_1, f_1)} p_2^{\min(e_2, f_2)} \ldots {p_k}^{\min(e_k, f_k)}$$

הוכחה: ■

דוגמה 1.14

מצאו את $\gcd(19200, 320)$.

פתרון:

$$19200 = 2^8\,3^1\,5^2\ , \qquad 320 = 2^6\,5^1 = 2^6\,3^0\,5^1\ .$$

$$\text{gcd}(19200, 320) = 2^{\min(8,6)}3^{\min(1,0)}5^{\min(2,1)} = 2^6\,3^0\,5^1 = 320\ .$$

■

דוגמה 1.15

מצאו את $\text{gcd}(154, 36)$.

פתרון:

$$154 = 2^1\,7^1\,11^1\ , \qquad 36 = 2^2\,3^2\ .$$

ז"א

$$154 = 2^1\,3^0\,7^1\,11^1\ , \qquad 36 = 2^2\,3^2\,7^0\,11^0\ .$$

$$\text{gcd}(154, 36) = 2^{\min(1,2)}3^{\min(0,2)}7^{\min(1,0)}11^{\min(1,0)} = 2^1\,3^0\,7^0\,11^0 = 2\ .$$

■

משפט 1.6 שיטה לחישוב lcm

נתונים השלמים a, b כך שהפירוק לראשוניים שלהם הם:

$$a = p_1^{e_1}p_2^{e_2}\ldots p_k^{e_k}\ , \qquad b = {p_1}^{f_1}{p_2}^{f_2}\ldots {p_n}^{f_n}$$

וללא הגבלה כלליות נניח כי $n \leq k$. אז ה- lcm נתון על ידי

$$\text{lcm}(a, b) = p_1^{\max(e_1,f_1)}p_2^{\max(e_2,f_2)}\ldots {p_k}^{\max(e_k,f_k)}$$

הוכחה: ■

משפט 1.7

$$\text{gcd}(a, b)\,\text{lcm}(a, b) = ab\ .$$

הוכחה:

$$\min(a, b) + \max(a, b) = a + b\ .$$

■

1.2 האלגוריתם של אוקליד

משפט 1.8 האלגוריתם של אוקליד

יהיו a,b משפרים שלמים חיוביים ($a,b\in\mathbb{Z},a>0,b>0$). קיים אלגוריתם אשר נותן את $d=\gcd(a,b)$.

האלגוריתם הינו מתואר להלן. נגדיר

$$r_0=a\ ,\qquad r_1=b\ .$$

לפי משפט החילוק 1.1 קיימים שלמים q_1 ו- $0\leq r_2<|b|$ עבורם $a=bq_1+r_2$ כלומר

$$r_0=r_1q_1+r_2\ .$$

באותה מידה, לפי משפט החילוק קיימים שלמים q_2 ו- $0\leq r_3<|r_2|$ עבורם

$$r_1=r_2q_2+r_3\ .$$

התהליך ממשיך עד שנקבל $r_{n+1}=0$ בשלב ה- n -ית.

שלב $k=1$:	$a=bq_1+r_2$	$0\leq r_2<|b|$
שלב $k=2$:	$b=r_2q_2+r_3$	$0\leq r_3<|r_2|$
שלב $k=3$:	$r_2=r_3q_3+r_4$	$0\leq r_4<|r_3|$
$\vdots$		
שלב $k=n-1$:	$r_{n-2}=r_{n-1}q_{n-1}+r_n$	$0\leq r_n<|r_{n-1}|$
שלב $k=n$:	$r_{n-1}=r_nq_n$	$r_{n+1}=0$

התהליך מסתיים בשלב ה-n-ית אם $r_{n+1}=0$. ואז

$$r_n=\gcd(a,b)\ .$$

דוגמה 1.16

מצאו את ה- $\gcd(1071,462)$.

פתרון:

$a=1071,b=462$.

נגדיר $r_0=a=1071$ ו- $r_1=b=462$.

נבצע את האלגוריתם $r_{k-1}=q_kr_k+r_{k+1}$ עד השלב ה-n-ית שבו $r_{n+1}=0$.

שלב		q_k	r_{k+1}
$k=1$:	$1071=2\cdot 462+147\ .$	$q_1=2$	$r_2=147$
$k=2$:	$462=3\cdot 147+21$	$q_2=3$	$r_3=21$
$k=3$:	$147=7\cdot 21+0$	$q_3=7$	$r_4=0$

לפיכך $\gcd(1071, 462) = r_3 = 21$.

■

דוגמה 1.17

מצאו את $\gcd(26, 11)$.

פתרון:

$a = 26, b = 11$.

נגדיר $r_0 = a = 26$ ו- $r_1 = b = 11$.

נבצע את האלגוריתם $r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1}$ עד השלב ה-n-ית שבו $r_{n+1} = 0$.

שלב		q_k	r_{k+1}
$k = 1$:	$26 = 2 \cdot 11 + 4$.	$q_1 = 2$	$r_2 = 4$
$k = 2$:	$11 = 2 \cdot 4 + 3$	$q_2 = 2$	$r_3 = 3$
$k = 3$:	$4 = 1 \cdot 3 + 1$	$q_3 = 1$	$r_4 = 1$
$k = 4$:	$3 = 3 \cdot 1 + 0$	$q_4 = 3$	$r_5 = 0$

לכן $\gcd(26, 11) = r_4 = 1$.

■

משפט 1.9 משפט בזו (Bezout's identity)

יהיו a, b שלמים ויהי $d = \gcd(a, b)$.

קיימים שלמים s, t כך שניתן לרשום ה- $\gcd(a, b)$ כצירוף לינארי של a ו- b:

$$sa + tb = d \ .$$

משפט 1.10 האלגוריתם של אוקליד המוכלל (שיטה 1)

יהיו a, b שלמים חיוביים. קיים אלגוריתם אשר נותן שלמים s, t עבורם

$$d = sa + tb$$

כאשר $d = \gcd(a, b)$, כמפורט להלן.

מגדירים את הפרמטרים ההתחלתיים:

$$\begin{aligned} r_0 &= a \ , & r_1 &= b \ , \\ s_0 &= 1 \ , & s_1 &= 0 \ , \\ t_0 &= 0 \ , & t_1 &= 1 \ . \end{aligned}$$

אז מבצעים את השלבים הבאים:

שלב 1:	$r_2 = r_0 - q_1 r_1$	$s_2 = s_0 - q_1 s_1$	$t_2 = t_0 - q_1 t_1$	$(0 \leq r_2 < \lvert r_1 \rvert)$
שלב 2:	$r_3 = r_1 - q_2 r_2$	$s_3 = s_1 - q_2 s_2$	$t_3 = t_1 - q_2 t_2$	$(0 \leq r_3 < \lvert r_2 \rvert)$
$\vdots$				
שלב k:	$r_{k+1} = r_{k-1} - q_k r_k$	$s_{k+1} = s_{k-1} - q_k s_k$	$t_{k+1} = t_{k-1} - q_k t_k$	$(0 \leq r_{k+1} < \lvert r_k \rvert)$
$\vdots$				
שלב $n-1$:	$r_n = r_{n-2} - q_{n-1} r_{n-1}$	$s_n = s_{n-2} - q_{n-1} s_{n-1}$	$t_n = t_{n-2} - q_{n-1} t_{n-1}$	$(0 \leq r_n < \lvert r_{n-1} \rvert)$
שלב n:	$r_{n+1} = 0$			

$$d = \gcd(a,b) = r_n \ , \qquad s = s_n \ , \qquad t = t_n \ .$$

דוגמה 1.18 (אלגוריתם איוקליד המוכלל)

מצאו את $d = \gcd(240, 46)$ ומצאו שלמים s,t עבורם $d = 240s + 46t$.

פתרון:

<u>פתרון לדוגמה 1.18 עם השיטה במשפט 1.10 של האלגוריתם איוקליד המוכלל</u>

$a = 240, b = 46$.

$$r_0 = a = 240 \ , \qquad r_1 = b = 46 \ ,$$
$$s_0 = 1 \ , \qquad s_1 = 0 \ ,$$
$$t_0 = 0 \ , \qquad t_1 = 1 \ .$$

שלב $k=1$:	$r_2 = 240 - 5 \cdot 46 = 10$	$s_2 = 1 - 5 \cdot 0 = 1$	$t_2 = 0 - 5 \cdot 1 = -5$	$q_1 = 5$
שלב $k=2$:	$r_3 = 46 - 4 \cdot 10 = 6$	$s_3 = 0 - 4 \cdot 1 = -4$	$t_3 = 1 - 4 \cdot (-5) = 21$	$q_2 = 4$
שלב $k=3$:	$r_4 = 10 - 1 \cdot 6 = 4$	$s_4 = 1 - 1 \cdot (-4) = 5$	$t_4 = -5 - 1 \cdot (21) = -26$	$q_3 = 1$
שלב $k=4$:	$r_5 = 6 - 1 \cdot 4 = 2$	$s_5 = -4 - 1 \cdot 5 = -9$	$t_5 = 21 - 1 \cdot (-26) = 47$	$q_4 = 1$
שלב $k=5$:	$r_6 = 4 - 2 \cdot 2 = 0$	$s_6 = 5 - 2 \cdot (-9) = 23$	$t_6 = -26 - 2 \cdot (47) = -120$	$q_5 = 2$

$$\gcd(a,b) = r_5 = 2 \ , \qquad s = s_5 = -9 \ , \qquad t = t_5 = 47 \ .$$

$$ta + sb = -9(240) + 47(46) = 2 \ .$$

■

יש שיטה נוספת למציאת המקדמים s,t במשפט בזו. נתאר אותה על ידי הדוגמה הקודמת.

<u>פתרון לדוגמה 1.18 עם השיטה השניה של האלגוריתם איוקליד המוכלל</u>

לשיטה הזאת יש 2 שלבים. בשלב הראשון מבצעים האלגוריתם של אוקליד במשפט 1.8.

$$\begin{aligned}
\boxed{240} &= 5 \cdot \boxed{46} + \boxed{10} && (*0)\\
\boxed{46} &= 4 \cdot \boxed{10} + \boxed{6} && (*1)\\
\boxed{10} &= 1 \cdot \boxed{6} + \boxed{4} && (*2)\\
\boxed{6} &= 1 \cdot \boxed{4} + \boxed{2} && (*3)\\
\boxed{4} &= 2 \cdot \boxed{2} + 0 && (*4)
\end{aligned}$$

לכן $d = \gcd(240, 46) = 2$.

בשלב השני רושמים 2 כצירוף לינארי של 240 ו- 46 באמצעות המשוואות למעלה:

$$\begin{aligned}
\boxed{2} &= \boxed{6} - 1 \cdot \boxed{4} && \text{לפי } (*3)\\
&= \boxed{6} - 1 \cdot \left(\boxed{10} - 1 \cdot \boxed{6}\right) && \text{לפי } (*2)\\
&= 2 \cdot \boxed{6} - 1 \cdot \boxed{10} \\
&= 2 \cdot \left(\boxed{46} - 4 \cdot \boxed{10}\right) - 1 \cdot \boxed{10} && \text{לפי } (*1)\\
&= 2 \cdot \boxed{46} - 9 \cdot \boxed{10} \\
&= 2 \cdot \boxed{46} - 9 \cdot \left(\boxed{240} - 5 \cdot \boxed{46}\right) && \text{לפי } (*0)\\
&= 47 \cdot \boxed{46} - 9 \cdot \boxed{240} \ .
\end{aligned}$$

■

דוגמה 1.19 (אלגוריתם איוקליד המוכלל)

מצאו את $d = \gcd(326, 78)$ ומצאו שלמים s, t עבורם $d = 326s + 78t$.

פתרון:

פתרון לדוגמה 1.19 עם השיטה במשפט 1.10 של האלגוריתם איוקליד המוכלל

$a = 326, b = 78$.

$$\begin{aligned}
r_0 &= a = 326 \ , && r_1 = b = 78 \ ,\\
s_0 &= 1 \ , && s_1 = 0 \ ,\\
t_0 &= 0 \ , && t_1 = 1 \ .
\end{aligned}$$

שלב $k = 1$:	$r_2 = 326 - 4 \cdot 78 = 14$	$s_2 = 1 - 4 \cdot 0 = 1$	$t_2 = 0 - 4 \cdot 1 = -4$	$q_1 = 4$
שלב $k = 2$:	$r_3 = 78 - 5 \cdot 14 = 8$	$s_3 = 0 - 5 \cdot 1 = -5$	$t_3 = 1 - 5 \cdot (-4) = 21$	$q_2 = 5$
שלב $k = 3$:	$r_4 = 14 - 1 \cdot 8 = 6$	$s_4 = 1 - 1 \cdot (-5) = 6$	$t_4 = -4 - 1 \cdot (21) = -25$	$q_3 = 1$
שלב $k = 4$:	$r_5 = 8 - 1 \cdot 6 = 2$	$s_5 = -5 - 1 \cdot 6 = -11$	$t_5 = 21 - 1 \cdot (-25) = 46$	$q_4 = 1$
שלב $k = 5$:	$r_6 = 6 - 3 \cdot 2 = 0$			$q_5 = 3$

$$\gcd(a,b) = r_5 = 2\ , \qquad s = s_5 = -11\ , \qquad t = t_5 = 46\ .$$

$$sa + tb = -11(326) + 46(78) = 2\ .$$

■

יש שיטה נוספת למציאת המקדמים s,t במשפט בזו. נתאר אותה על ידי הדוגמה הקודמת.

פתרון לדוגמה 1.19 עם השיטה השניה של האלגוריתם איוקליד המוכלל

לשיטה הזאת יש 2 שלבים. בשלב הראשון מבצעים האלגוריתם של אוקליד במשפט 1.8.

$$\boxed{326} = 4\cdot\boxed{78} + \boxed{14} \qquad (*0)$$
$$\boxed{78} = 5\cdot\boxed{14} + \boxed{8} \qquad (*1)$$
$$\boxed{14} = 1\cdot\boxed{8} + \boxed{6} \qquad (*2)$$
$$\boxed{8} = 1\cdot\boxed{6} + \boxed{2} \qquad (*3)$$
$$\boxed{4} = 3\cdot\boxed{2} + 0 \qquad (*4)$$

לכן $d = \gcd(326,78) = 2$.

בשלב השני רושמים 2 כצירוף לינארי של 326 ו- 78 באמצעות המשוואות למעלה:

$$\begin{aligned}
\boxed{2} &= \boxed{8} - 1\cdot\boxed{6} && \text{לפי } (*3)\\
&= \boxed{8} - 1\cdot\left(\boxed{14} - 1\cdot\boxed{8}\right) && \text{לפי } (*2)\\
&= 2\cdot\boxed{8} - 1\cdot\boxed{14}\\
&= 2\cdot\left(\boxed{78} - 5\cdot\boxed{14}\right) - 1\cdot\boxed{14} && \text{לפי } (*1)\\
&= 2\cdot\boxed{78} - 11\cdot\boxed{14}\\
&= 2\cdot\boxed{78} - 11\cdot\left(\boxed{326} - 4\cdot\boxed{78}\right) && \text{לפי } (*0)\\
&= 46\cdot\boxed{78} - 11\cdot\boxed{326}\ .
\end{aligned}$$

■

1.3 משפטים של מספרים ראשוניים

משפט 1.11 קיימים אינסוף מספרים ראשוניים

קיימים אינסוף מספרים ראשוניים.

הוכחה: נוכיח הטענה דרך השלילה.
נניח כי $\{p_1,\ldots,p_n\}$ הוא הקבוצה של כל הראשוניים שקיימים וקבוצה זו נוצרת סופי.
נגדיר השלם $M = (p_1\cdot p_2\cdot \ldots \cdot p_n) + 1$.
לפי משפט הפירוק לראשוניים (ראו משפט 1.3 למעלה או משפט 5.3 למטה) M הוא מספר ראשוני או שווה למכפלה של ראשוניים.

M לא מספר ראשוני בגלל ש- $M > p_i$ לכל $1 \leq i \leq n$.
גם לא קיים מספק ראשוני p_i אשר מחלק את M. הרי

$$M \% p_i = 1 \quad \Rightarrow \quad p_i \nmid M \ .$$

הגענו לסתירה של המשפט הפירוק לראשוניים, לכן קיימים אינסוף מספרים ראשוניים. ■

משפט 1.12 משפט הפירוק לראשוניים

(ראו משפט 1.3) לכל מספר שלם n קיימים שלמים e_i וראשוניים p_i כך ש-

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$$

הוכחה: אינדוקציה. ■

משפט 1.13 נוסחה לפונקצית אוילר

(ראו משפט 1.4) לכל מספר שלם n בעל פירוק לראשוניים

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$$

פונקציית אוילר ניתנת על ידי

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^{k} \left(p_i^{e_i} - p_i^{e_i-1}\right) = \left(p_1^{e_1} - p_1^{e_1-1}\right)\left(p_2^{e_2} - p_2^{e_2-1}\right) \ldots \left(p_k^{e_k} - p_k^{e_k-1}\right)$$

דוגמה 1.20

חשבו את $\phi(24)$

פתרון:

$$24 = 2^3 3^1 \ .$$

לכן

$$\phi(24) = (2^3 - 2^2)(3^1 - 3^0) = (8-4)(3-1) = 8 \ .$$

■

משפט 1.14

אם p מספר ראשוני אז

$$\phi(p) = p - 1 \ .$$

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 1.15

אם p מספר ראשוני אז

$$\phi\left(p^n\right) = p^n - p^{n-1} \ .$$

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 1.16

אם s,t שלמים זרים (כלומר $\gcd(s,t)=1$) אז

$$\phi\left(s\cdot t\right)=\phi(s)\cdot\phi(t)\ .$$

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 1.17

אם p ו- q מספרים ראשוניים שונים אז

$$\phi(p\cdot q)=(p-1)(q-1)\ .$$

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 1.18 המשפט הקטן של פרמה

אם p מספר ראשוני ו- $a\in\mathbb{Z}_p$. אז התנאים הבאים מתקיימים:

1. $a^p\equiv a \mod p$
2. $a^{p-1}\equiv 1 \mod p$
3. $a^{-1}\equiv a^{p-2} \mod p$

הוכחה:

טענה 1. נוכיח באינדוקציה.

<u>בסיס:</u>

עבור $a=0$ הטענה $0^p\equiv 0 \mod p$ מתקיימת.

<u>מעבר:</u>

נניח כי הטענה מתקיימת עבור a.

$$(a+1)^p=a^p+pa^{p-1}+\frac{p(p-1)}{2}a^{p-2}+\cdots+pa+1\equiv a^p+1 \mod p$$

ההנחת האינדוקציה אומרת ש- $a^p\equiv a \mod p$ לכן

$$(a+1)^p \mod p\equiv a^p+1 \mod p\equiv(a+1) \mod p$$

כנדרש.

טענה 2. $\gcd(a,p)=1$ לפיכך קיים איבר הופכי $a^{-1}\in\mathbb{Z}_p$. נכפיל $a^p\equiv 1 \mod p$ ב- a^{-1} אשר הוכחנו בסעיף הקודם:

$$a^{-1}a^p\equiv a^{-1}\cdot a \mod p \qquad\Rightarrow\qquad a^{p-1}\equiv 1 \mod p\ .$$

טענה 3.

$$a^{p-1}\equiv 1 \mod p \qquad\Leftrightarrow\qquad 1\equiv a^{p-1} \mod p \quad\Rightarrow\quad a^{-1}\equiv a^{p-2} \mod p\ .$$

■

משפט 1.19 משפט אוילר

אם a,n שלמים ו- $\gcd(a,n)=1$ אז
$$a^{\phi(n)}\equiv 1 \mod n\ .$$

משפט 1.20

אם a,n שלמים ו- $\gcd(a,n)=1$ אז
$$a^{-1}\equiv a^{\phi(n)-1} \mod n\ .$$

דוגמה 1.21

חשבו את האיבר ההופכי ל- 5 ב- $\mathbb{Z}_{11}$.

פתרון:

לפי משפט פרמט 5.9:
$$5^{-1}=5^{11-2} \mod 11=5^9 \mod 11\ .$$
לפי הנוסחת לשארית 1.2 :
$$5^9\ \%\ 11=5^9-11\left\lfloor\frac{5^9}{11}\right\rfloor=9$$
לכן $5^{-1}\in\mathbb{Z}_{11}=9$. ■

1.4 משפט השאריות הסיני

משפט 1.21 משפט השאריות הסיני

יהיו $m_1,m_2,\ldots,m_r$ שלמים אשר זרים בזוגות ויהיו $a_1,a_2,\ldots,a_r$ שלמים. למערכת של יחסים שקילות
$$\begin{aligned} x=&a_1 \mod m_1\ ,\\ x=&a_2 \mod m_2\ ,\\ &\vdots\\ x=&a_r \mod m_r\ ,\end{aligned}$$
קיים פתרון יחיד מודולו $M=m_1m_2\cdots m_r$ שניתן על ידי
$$x=\sum_{i=1}^{r}a_iM_iy_i \mod M$$
כאשר $M_i=\dfrac{M}{m_i}$ ו- $y_i=M_i^{-1} \mod m_i$ לכל $1\leq i\leq r$.

דוגמה 1.22

היעזרו במשפט השאריות הסיני כדי לפתור את המערכת
$$\begin{aligned} x=&22 \mod 101\ ,\\ x=&104 \mod 113\ .\end{aligned}$$

פתרון:

$$a_1 = 22 \ , \qquad a_2 = 104 \ , \qquad m_1 = 101 \ , \qquad m_2 = 113 \ .$$
$$M = m_1 m_2 = 11413 \ , \qquad M_1 = \frac{M}{m_1} = 113 \ , \qquad M_2 = \frac{M}{m_2} = 101 \ .$$

בעזרת הקוד-פיתון `modularinverse.py`

$$y_1 = M_1^{-1} \mod m_1 = 113^{-1} \mod 101 = 59$$
$$x = 22 \cdot \left(\frac{101 \cdot 113}{101}\right) \cdot$$

ו-

$$y_2 = M_2^{-1} \mod m_2 = 101^{-1} \mod 113 = 47$$
$$\begin{aligned} x =& a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 \mod M \\ =& 22 \cdot 113 \cdot 59 + 104 \cdot 111 \cdot 47 \mod 11413 \\ =& 640362 \mod 11413 \\ =& 1234 \ . \end{aligned}$$

■

שיעור 2
חוגים מתמטיים

2.1 החוג $\mathbb{Z}_m$

הגדרה 2.1 החוג $\mathbb{Z}_m$

החוג $\mathbb{Z}_m$ מוגדר להיות הקבוצה של מספרים שלמים

$$\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$$

יחד עם הפעולות $\oplus$ ו- $\odot$ המוגדרות כך:

לכל $a, b \in \mathbb{Z}_m$,

$$a \oplus b = (a + b) \ \% \ m \ , \qquad a \odot b = ab \ \% \ m \ .$$

במילים אחרות, $\mathbb{Z}_m$ היא קבוצת השארית בחלוקה ב-m.

מכאן ואילך נסמן חיבור וכפל ב- $\mathbb{Z}_m$ עם הסימנים הרגילים $+$ ו- $\times$ או $\cdot$.

דוגמה 2.1

חשבו את 11×13 ב- $\mathbb{Z}_{16}$.

פתרון:
$11 \times 13 = 143$. נמצא את השארית בחלוקה ב- 16:

$$(11 \times 13) \ \% \ 16 = 143 \ \% \ 16 = 15 \ .$$

לפיכך $11 \times 13 = 15$ ב- $\mathbb{Z}_{16}$.

■

משפט 2.1 תכונות של החוג $\mathbb{Z}_m$

לכל $a, b, c \in \mathbb{Z}_m$ התנאים הבאים מתקיימים.

1. סגירה תחת חיבור:
$$a + b \in \mathbb{Z}_m \ .$$
2. חוק החילוף לחיבור:
$$a + b = b + a \ .$$
3. חוק הקיבוץ לחיבור:
$$(a + b) + c = a + (b + c) \ .$$
4. קיום איבר הניטרלי ביחס לחיבור:
$$a + 0 = 0 + a = a \ .$$
5. האיבר הנגדי של a הוא $m - a$, ז"א $-a = m - a$. הסבר:
$$a + (m - a) = (m - a) + a = m = 0$$

ב- $\mathbb{Z}_m$.

.6 סגירה תחת כפל:

$$ab \in \mathbb{Z}_m \ .$$

.7 חוק החילוף לכפל:

$$ab = ba \ .$$

.8 חוק הקיבוץ לכפל:

$$(ab)c = a(bc) \ .$$

.9 קיום איבר הניטרלי ביחס לכפל:

$$a \times 1 = 1 \times a = a \ .$$

.10 חוק הפילוג:

$$(a+b)c = (ac) + (bc) \ .$$

תכונות 1, 3-5 אומרות כי $\mathbb{Z}_m$ הינו "חבורה מתמטית".
יחד עם תכונה 2, $\mathbb{Z}_m$ הוא חבורה אָבֶּלִית.
כל התכונות 1-10 אומרות כי $\mathbb{Z}_m$ הוא חוג מתמטי.

הגדרה 2.2 איבר ההופכי ב- $\mathbb{Z}_m$

יהי $a \in \mathbb{Z}_m$. האיבר ההופכי של a מסומן ב- a^{-1} ומקיים את התנאי

$$a^{-1}a \equiv 1 \mod m \qquad \text{וגם} \qquad aa^{-1} \equiv 1 \mod m \ .$$

משפט 2.2

נתון היחס שקילות

$$ax \equiv y \mod m \ .$$

יש פתרון יחיד $x \in \mathbb{Z}_m$ לכל $y \in \mathbb{Z}_m$ אם ורק אם $\gcd(a,m)=1$.

הוכחה:

ללא הגבלת כלליות נניח כי $a > m$.

נניח כי יש פתרון יחיד. נוכיח דרך השלילה כי ו- $\gcd(a,m)=1$.

כלומר, נניח כי יש פתרון יחיד אך $\gcd(a,m)=d>1$.

יהי $x_1 = a^{-1}y$ פתרון ל- $ax \equiv y \mod m$.

נשים לב ש- $ax_1 + \frac{am}{d} = ax_1 + km \equiv ax_1 \mod m$, כאשר $k = \frac{a}{d}$ שלם.
ז"א גם $x_1 + \frac{m}{d}$ פתרון.

זאת בסתירה לכך שהפתרון יחיד.

נניח כי $\gcd(a,m)=1$. נוכיח בשלילה כי הפתרון יחיד.

נניח כי $\gcd(a,m)=1$ וקיימים שני פתרונות שונים: $x_1 \not\equiv x_2 \mod m$.

ז"א
$$ax_1 \equiv y \mod m\ , \quad \text{וגם} \quad ax_2 \equiv y \mod m\ .$$
לכן
$$ax_1 \equiv ax_2 \mod m\ .$$
לכן
$$m \mid ax_1 - ax_2\ .$$
$\gcd(a,m)=1$ לפיכך
$$m \mid x_1 - x_2\ ,$$
ז"א
$$x_1 \equiv x_2 \mod m\ ,$$
בסתירה לכך ש- $x_1 \not\equiv x_2 \mod m$.

■

מסקנה 2.1

יהי $a \in \mathbb{Z}_m$. קיים איבר הופכי $a^{-1} \in \mathbb{Z}_m$ אשר לפי הגדרתו 2.2 מקיים את התנאי
$$aa^{-1} \equiv 1 \mod m\ ,$$
אם ורק אם $\gcd(a,m)=1$.

הוכחה: משפט 2.2. ■

דוגמה 2.2

הוכיחו שקיים איבר הופכי ל- 11 ב- $\mathbb{Z}_{26}$ ואם כן מצאו אותו.

פתרון:
קיים איבר הופכי של a ב- $\mathbb{Z}_m$ אם ורק אם $\gcd(a,m)=1$. לכן נבדוק את ה- $\gcd(26,11)$ באמצעות האלגוריתם של אוקליד המוכלל.
יהי $a=26, b=11$.

$$\begin{aligned} r_0 &= a = 26\ , & r_1 &= b = 11\ ,\\ s_0 &= 1\ , & s_1 &= 0\ ,\\ t_0 &= 0\ , & t_1 &= 1\ . \end{aligned}$$

שלב $i=1$:	$r_2 = 26-2\cdot 11 = 4$	$s_2 = 1-2\cdot 0 = 1$	$t_2 = 0-2\cdot 1 = -2$	$q_1 = 2$
שלב $i=2$:	$r_3 = 11-2\cdot 4 = 3$	$s_3 = 0-2\cdot 1 = -2$	$t_3 = 1-2\cdot(-2) = 5$	$q_2 = 2$
שלב $i=3$:	$r_4 = 4-1\cdot 3 = 1$	$s_4 = 1-1\cdot(-2) = 3$	$t_4 = -2-1\cdot(5) = -7$	$q_3 = 1$
שלב $i=4$:	$r_5 = 3-3\cdot 1 = 0$	$s_5 = -2-3\cdot(3) = -11$	$t_5 = 5-3\cdot(-7) = 28$	$q_4 = 3$

$$\gcd(a,b)=r_4=1\ ,\qquad x=s_4=3\ ,\qquad y=t_4=-7\ .$$

$$ax+by=3(26)-7(11)=1\ .$$

מכאן אנחנו רואים כי $\gcd(26,11)=1$ ולכן לפי משפט 2.2 ההופכי של 11 קיים ב- $\mathbb{Z}_{26}$.
מחשבים את האיבר ההופכי לפי השיטה הבאה:

$$-7(11)=1-9(26)\quad\Rightarrow\quad -7(11)=1\mod 26\quad\Rightarrow\quad 19(11)=1\mod 26\quad\Rightarrow\quad 11^{-1}=19\mod 26\ .$$

■

כלל 2.1

האיברים של $\mathbb{Z}_{26}$ שעבורם קיימים איברים הופכיים הינם

1^{-1}	3^{-1}	5^{-1}	7^{-1}	9^{-1}	11^{-1}	15^{-1}	17^{-1}	19^{-1}	21^{-1}	23^{-1}	25^{-1}
1	9	21	15	3	19	7	23	11	5	17	25

הגדרה 2.3 פונקצית אוילר $\phi(m)$

נתון החוג $\mathbb{Z}_m$ כאשר $m\geq 2$ מספר טבעי.
$\phi(m)$ תוגדר להיות הפונקציה הנותנת את מספר איברים ב- $\mathbb{Z}_m$ אשר זרים ל- m.

(שימו לב ההגדרה הזאת זהה להגדרה 1.7.)

מסקנה 2.2 מספר איברים הפיכיים ב- $\mathbb{Z}_m$

מספר האיברים של החוג $\mathbb{Z}_m$ שעבורם קיימים איברים הופכיים שווה ל- $\phi(m)$.

הוכחה: $\phi(m)$ שווה למספר איברים $a\in\mathbb{Z}_m$
עבורם $\gcd(a,m)$, ולפי משפט 2.1 אותם האיברים הם האיברים ההפיכים של $\mathbb{Z}_m$. ■

2.2 הפיכת מטריצות בחוג $\mathbb{Z}_m$

הגדרה 2.4 המטריצה של קופקטורים

תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

הקופקטור ה- (i,j) של A מוגדר להיות הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת מ-A ע"י מחיקת שורה i ועמודה j, כפול $(-1)^{i+j}$.

המטריצה של קופקטורים של המטריצה A מוגדרת

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ C_{n1} & \cdots & C_{nn}\end{pmatrix}$$

כאשר C_{ij} הקופקטור ה- (i,j) של A.

הגדרה 2.5 המטריצה המצורפת

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. המטריצה המצורפת של A היא מטריצה מסדר $n\times n$ שמסומנת $\mathrm{adj}(A)$ ומוגדרת

$$\mathrm{adj}(A) = C^t$$

כאשר C המטריצה של קופקטורים של A.

משפט 2.3 נוסחת למטריצה הופכית

נניח כי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. אם A הפיכה, (כלומר אם $|A| \neq 0$) אז המטריצה ההופכית נתונה ע"י נוסחת קיילי המילטון:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A) \ ,$$

כאשר $\mathrm{adj}(A)$ המטריצה המצורפת של A.

דוגמה 2.3

מצאו את ההופכית של

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{2\times 2} \ .$$

פתרון:

$$|A| = 11\cdot 7 - 8\cdot 3 = 53 = 1 \mod 26 \ .$$

$\gcd(1,26)=1$ לכן המטריצה הפיכה ב- $\mathbb{Z}_{26}$.

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{11} = (-1)^{1+1} 7 = 7$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{12} = (-1)^{1+2} 7 = -3$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{21} = (-1)^{2+1} 8 = -8$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{22} = (-1)^{2+2} 11 = 11$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}(A) = C^t = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = |A|^{-1}\mathrm{adj}(A) \ .$$

$$|A|^{-1} = 1^{-1} = 1 \in \mathbb{Z}_{26}$$

לפיכך

$$A^{-1} = |A|^{-1}\text{adj}(A) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 22 \\ 23 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{2\times 2} \ .$$

■

דוגמה 2.4

מצאו את ההופכית של

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3\times 3} \ .$$

פתרון:

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 15 + 1 \cdot (-10) = 5 \ .$$

$\gcd(15,26) = 1$ לכן המטריצה הפיכה ב- $\mathbb{Z}_{26}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 15 \ .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -10 \ .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \ .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 \ .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \ .$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}(A) = C^t = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -10 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 21 \\ 0 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3\times 3} \ .$$

$$A^{-1} = |A|^{-1}\mathrm{adj}(A) \ .$$

$$|A|^{-1} = 5^{-1} = 21 \in \mathbb{Z}_{26}$$

לפיכך

$$A^{-1} = |A|^{-1}\mathrm{adj}(A) = 21 \cdot \begin{pmatrix} 15 & 0 & 21 \\ 0 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 315 & 0 & 441 \\ 0 & 21 & 0 \\ 336 & 0 & 105 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3\times 3} \ .$$

$$315 \,\%\, 26 = 315 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{315}{26} \right\rfloor = -23 \equiv 3 \mod 26 \quad \Rightarrow \quad 315 \equiv 3 \mod 26 \ .$$

$$441 \,\%\, 26 = 441 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{441}{26} \right\rfloor = 25 \quad \Rightarrow \quad 441 \equiv 25 \mod 26 \ .$$

$$336 \,\%\, 26 = 336 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{336}{26} \right\rfloor = 24 \quad \Rightarrow \quad 336 \equiv 24 \mod 26 \ .$$

$$105 \,\%\, 26 = 105 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{105}{26} \right\rfloor = 1 \quad \Rightarrow \quad 105 \equiv 1 \mod 26 \ .$$

לפיכך

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 25 \\ 0 & 21 & 0 \\ 24 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3\times 3} \ .$$

בדיקה:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 25 \\ 0 & 21 & 0 \\ 24 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 26 \\ 0 & 105 & 0 \\ 78 & 0 & 53 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mod 26 \ .$$

■

2.3 תמורות

הגדרה 2.6 תמורה

נתונה קבוצה מסודרת נוצר סופית $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ללא חזרות. תמורה היא פונקציה חד-חד-ערכית ועל $\pi : X \to X$ שמקבלת X ומחזירה הקבוצה X ומשנה את הסדר של האיברים.

דוגמה 2.5

- תמורות של הקבוצה (a,b):

$$\pi_1(a,b)=(a,b)\ ,\quad \pi_2(a,b)=(b,a)\ .$$

הראשון הוא מקרה פרטי של תמורה, אשר הוא פונקצית הזהות. קיימים $2!$ תמורות. תמורות.

- תמורות של הקבוצה (a,b,c):

$$\begin{aligned}&\pi_1(a,b,c)=(a,b,c)\ ,\quad \pi_2(a,b,c)=(c,a,b)\ ,\quad \pi_3(a,b,c)=(b,c,a)\ ,\\ &\pi_4(a,b,c)=(b,a,c)\ ,\quad \pi_5(a,b,c)=(a,c,b)\ ,\quad \pi_6(a,b,c)=(c,b,a)\ .\end{aligned}$$

קיימים $3!$ תמורות.

- תמורות של הקבוצה $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$:

$$\pi_1(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(\delta,\alpha,\gamma,\beta)\ ,\ldots$$

קיימים $4!$

- תמורות של הקבוצה $(\text{א},\text{ב},\text{ג},\text{ד})$:

$$\pi_1(\text{א},\text{ב},\text{ג},\text{ד})=(\text{ב},\text{א},\text{ג},\text{ד})\ ,\qquad \pi_2(\text{א},\text{ב},\text{ג},\text{ד})=(\text{א},\text{ד},\text{ג},\text{ב})\ ,\ldots$$

קיימים $4!$ תמורות.

משפט 2.4

יהי X קבוצה מסודרת נוצר סופית ללא חזרות של אורך n.
קיימות $n!$ תמורות.

הוכחה: תרגיל בית. ■

הגדרה 2.7 סימון אינדקס של תמורה

יהי $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ויהי $\pi:X\to X$ תמורה.
נניח שאחרי ביצוע של התמורה π על X, האיבר שהיה במיקום ה-i עכשיו במיקום ה-j $(1\leq i,j\leq n)$.
אז אנחנו כותבים

$$\pi(i)=j\ .$$

הביטוי הזה נקרא **סימון אינדקס**.

דוגמה 2.6

א) נתונה התמורה

$$\pi(a,b)=(b,a)\ .$$

בסימון אינדקס,

$$\pi(1)=2\ ,\quad \pi(2)=1\ .$$

ב) נתונה התמורה

$$\pi(a,b,c)=(b,c,a)\ .$$

בסימון אינדקס,

$$\pi(1)=3\ ,\quad \pi(2)=1\ ,\quad \pi(3)=2\ .$$

ג) נתונה התמורה

$$\pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(\beta,\gamma,\delta,\alpha)\ .$$

בסימון אינדקס,

$$\pi(1)=4\ ,\quad \pi(2)=1\ ,\quad \pi(3)=2\ ,\quad \pi(4)=3\ .$$

הגדרה 2.8 הצגת שתי-שורות והצגת שורת-אחת

יהי $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ויהי $\pi:X\to X$ תמורה שמוגדרת

$$\pi(X)=\left(x_{\pi(1)},x_{\pi(2)},\ldots,x_{\pi(n)}\right)\ .$$

- ההצגה שתי-שורות של התמורה הזאת הינה

$$\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & i & \ldots & n\\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(i) & \ldots & \pi(n)\end{pmatrix}$$

- ההצגה שורת-אחת של התמורה הזאת הינה

$$\pi=\begin{pmatrix}\pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(i) & \ldots & \pi(n)\end{pmatrix}$$

דוגמה 2.7

א) נתונה התמורה

$$\pi(a,b)=(b,a)\ .$$

בסימון אינדקס: $\pi(1)=2\ ,\ \pi(2)=1.$

הצגת שתי-שורות: $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$

הצגת שורה-אחת: $\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}.$

ב) נתונה התמורה

$$\pi(a,b,c)=(b,c,a)\ .$$

בסימון אינדקס: $\pi(1)=3\ ,\ \pi(2)=1\ ,\ \pi(3)=2.$

הצגת שתי-שורות: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$

הצגת שורה-אחת: $\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$

ג) נתונה התמורה

$$\pi(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(\beta,\gamma,\delta,\alpha)\ .$$

בסימון אינדקס: $\pi(1)=4\ ,\quad \pi(2)=1\ ,\quad \pi(3)=2\ ,\pi(4)=3.$

הצגת שתי-שורות: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$

הצגת שורה-אחת: $\begin{pmatrix}4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$

דוגמה 2.8 הרכבה של תמורות

תהיינה $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ו- $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. חשבו את $\alpha \circ \beta$ ו- $\beta \circ \alpha$.

פתרון:

$$\alpha \circ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha\left(\beta(1)\right) & \alpha\left(\beta(2)\right) & \alpha\left(\beta(3)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha\left(2\right) & \alpha\left(1\right) & \alpha\left(3\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta \circ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \beta\left(\alpha(1)\right) & \beta\left(\alpha(2)\right) & \beta\left(\alpha(3)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \beta\left(2\right) & \beta\left(3\right) & \beta\left(1\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

■

שיעור 3
הצפנים הבסיסיים

3.1 מושג של קריפטו-מערכת

אליס ובוב, לתקשר מעל גבי ערוץ תקשורת בלתי אמין (נאמר קו טלפון או דואר אלקרוני), ומבקשים ליהנות מסודיות. כלומר , הם מעוניינים ש שום גורם עוין, אוסקר, שעלול לצותת לשיחתם , לא יוכל להבין את תוכנה.

לשם כך משתמשים אליס ובוב בצופן (cryptosystem). אליס ובוב מסכימים ביניהם מראש על שיטה מסויימת להצפנה ועל מפתח, (key) שהוא ערך מספרי (או כמה ערכים מספריים). כעת , נניח שאליס מעוניינת לשלוח לבוב הודעה מסוימת. היא מצפינה encrypt את ההודעה בשיטה שהיא ובוב בחרו בה תוך כדי שימוש במפתח שהם קבעו. לאחר ההצפנה, ההודעה שינתה את צורתה. להודעה המקורית אנו קוראים טקסט גלוי (plaintext) ואילו ההודעה לאחר ההצפנה נקראת טקסט מוצפן (ciphertext). אליס שולחת את הטקסט המוצפן לבוב. בוב מפענח (decrypt) אותו ומשחזר את הטקסט הגלוי , המקורי. אוסקר, המצותת לערוץ , איננו יודע את ערכו של המפתח שנעשה בו שימוש (למרות ש י יתכן בהחלט ואף סביר להניח שהוא י ודע מהו הצופן ש השתמשו בו אליס ובוב).

הגדרה 3.1 צופן

צופן, (או לעתים קריפטו-מערכת) מוצג באמצעות קבוצה (P, C, K, E, D), כאשר:

(1 E מסמן קבוצה של טקסט גלוי plaintext,

(2 C מסמן קבוצה של טקסט מוצפן ciphertext,

(3 K מסמן את מרחב המפתח keyspace,

(4 לכל $k \in K$ יש שתי פונקציות: כלל מצפין $e \in E$ וכלל מפענח $d \in D$:

$$e : P \to C \ , \qquad d : C \to P \ ,$$

כך ש-

$$d\left(e\left(x\right)\right) = x$$

לכל איבר של מרחב הטקסט גלוי $x \in P$.

נניח כי ההודעה הנשלחה על ידי אליס לבוב היא הרצף האותיות

$$X = x_1 x_2 \cdots x_n$$

עבור $n \geq 1$ טבעי, כאשר כל אות הוא אות של טקטסט גלוי $x_i \in P$, $1 \leq i \leq n$. כל x_i מוצפן באמצעות הכלל הצפנה e_k אשר נקבעת מראש על ידי המפתח k הנבחר. ז"א אליס מחשבת

$$y_i = e_k(x_i)$$

$1 \leq i \leq n$ ומקבלת את רצף אותיות מוצפנות

$$Y = y_1 y_2 \cdots y_n \ .$$

הרצף הזה נשלח מעל גבי הערוץ. כאשר בוב מקבל את Y הוא מפענח אותו באמצעות הפונקציה d_k וכך הוא מקבל הרצף אותיות של טקסט גלוי המקורי

$$X = x_1 x_2 \cdots x_n \ .$$

פונקציה הצפנה e_k חד-חד ערכית. אחרת לא יהיה אפשרי לפענח את הרצף אותיות מוצפנות. הרי אם e_k לא חד-חד ערכית אז יכול להיות מצב ש-

$$y = e_k(x_1) = e_k(x_2)$$

כאשר $x_1 \neq x_2$ ואז לבוב לא יכול לדעת אם y ההפענחה של x_1 או x_2.

3.2 צופן ההזזה

הגדרה 3.2 צופן ההזזה

יהיו $P = C = K = \mathbb{Z}_{26}$. עבור $0 \leq k \leq 25$ נגדיר

$$e_k(x) = (x + k) \ \% \ 26 , \qquad x \in \mathbb{Z}_{26}$$

ו-

$$d_k(y) = (y - k) \ \% \ 26 , \qquad y \in \mathbb{Z}_{26} .$$

צופן ההזזה מוגדר מעל $\mathbb{Z}_{26}$ בגלל שיש 26 אותיות באלפבית.

במטרה להשתמש בצופן ההזזה כדי להצפין טקסט גלוי, קודם כל נגדיר התאמה בין אותיות של האלפבית ומספרים של $\mathbb{Z}_{26}$:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

דוגמה 3.1

נתון טקסט גלוי

`shamoon`

נניח כי המפתח בשביל צופן הזזה הוא $k = 11$. מצאו את הטקסט מוצפן.

פתרון:

שלב 1) נמיר את הטקסט גלוי לרצף מספרים לפי הסדר של האלפבית:

$\mathtt{x} \in P$	s	h	a	m	o	o	n
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	7	0	12	14	14	13

שלב 2) נוסיף 11 לכל ערך ולעבור את הערך המתקבל לאיבר ב- $\mathbb{Z}_{26}$:

$\mathtt{x} \in P$	s	h	a	m	o	o	n
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	7	0	12	14	14	13
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	3	18	11	23	25	25	24

שלב 3 נעבור את הרצץ מספרים לטקסט מוצפן:

$\mathrm{x} \in P$	s	h	a	m	o	o	n
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	7	0	12	14	14	13
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	3	18	11	23	25	25	24
$\mathrm{y} \in C$	D	S	L	X	Z	Z	Y

הטקסט מוצפן המתקבל הוא

DSLXZZY

■

דוגמה 3.2

נתון הטקסט מוצפן על ידי צופן קיסר (צופן הזזה):

UJCNQO

מצאו את הטקסט גלוי.

פתרון:

ננסה לפענח את הטקסט מוצפן בעזרת הצופן הזזה עם המפתחות $d_0 = 0, d_1 = 1, d_2 = 2 \ldots$ בתור.

$\mathrm{y} \in C$	U	J	C	N	Q	O
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	20	9	2	13	16	14
$y - d_1 \in \mathbb{Z}_{26}$	19	8	1	12	15	13
$\mathrm{x} \in P$	t	i	b	m	p	n
$y - d_2 \in \mathbb{Z}_{26}$	18	7	0	11	14	12
$\mathrm{x} \in P$	s	h	a	l	o	m

■

דוגמה 3.3

נתון הטקסט מוצפן הבא:

QRQXFJANHXD

מצאו את הטסטק גלוי

פתרון:

ננסה לפענח את הטקסט מוצפן בעזרת הצופן הזזה עם המפתחות $d_0, d_1, \ldots$ בתור.

d_0 `qrqxfjanhxd`

d_1 `pqpweizmgwc`

d_2 `opovdhylfvb`

d_3 `nonucgxkeua`

d_4 `mnmtbfwjdtz`

d_5 `lmlsaevicsy`

d_6 `klkrzduhbrx`

d_7 `jkjqyctgaqw`

d_8 `ijipxbsfzpv`

d_9 `hihowareyou`

בשלב זה מצאנו את הטקסט גלוי:

`hihowareyou` .

המפתח הוא $k = 9$. ■

3.3 צופן ההחלפה

הגדרה 3.3 (substitution cypher) צופן ההחלפה

בצופן ההחלפה, $P = C = \mathbb{Z}_{26}$.

K מורכב מכל ההחלפות האפשריות של ה- 26 סמלים $0, 1, 2, \ldots, 25$.

עבור כל החלפה $\pi \in K$ נגדיר כלל מצפין

$$e_\pi(x) = \pi(x)$$

ונגדיר כלל מפענח

$$d_\pi(x) = \pi^{-1}(x) \ ,$$

כאשר π^{-1} ההחלפה ההופכית של π.

קיימות $10^{26} \times 4.0329146112660563558 = 26!$ החלפות אפשרויות.

דוגמה 3.4

הצופן החלפה π נתון ע"י הטבלה

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
Z	T	B	A	H	P	O	G	X	Q	W	Y	N	S	F	L	R	C	V	M	U	E	K	J	D	I

בפרט,

$$e_\pi(\mathtt{a}) = \mathtt{Z} \ , \qquad e_\pi(\mathtt{b}) = \mathtt{T} \ , \ldots$$

וכן הלאה. הכלל המפענח הוא ההחלפה ההופכית, π^{-1} אשר נתונה באמצעות הטבלה

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
d	c	r	y	v	o	h	e	z	x	w	p	t	m	g	f	j	q	n	b	u	s	k	i	l	a

בפרט, ו-

$$d_\pi(\mathtt{A}) = \mathtt{d} \ , \qquad d_\pi(\mathtt{B}) = \mathtt{c} \ , \ldots$$

וכן הלאה.
נתון הטקסט מוצפן

GHYYF

מצאו את הטקסט גלוי.

פתרון:

$$d_\pi(\mathtt{G}) = \mathtt{h} \ , \quad d_\pi(\mathtt{H}) = \mathtt{e} \ , \quad d_\pi(\mathtt{Y}) = \mathtt{l} \ , \quad d_\pi(\mathtt{F}) = \mathtt{o} \ .$$

לכן הטקסט גלוי הינו

hello .

■

דוגמה 3.5

למטה יש דוגמה של צופן החלפה. ההחלפה עצמה, π נתונה ע"י הטבלה

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
X	N	Y	A	H	P	O	G	Z	Q	W	B	T	S	F	L	R	C	V	M	U	E	K	J	D	I

בפרט,

$$e_\pi(\mathtt{a}) = \mathtt{X} \ , \qquad e_\pi(\mathtt{b}) = \mathtt{N} \ ,$$

וכן הלאה. הכלל המפענח הוא ההחלפה ההופכית, π^{-1} אשר נתונה באמצעות הטבלה

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
d	l	r	y	v	o	h	e	z	x	w	p	t	b	g	f	j	q	n	m	u	s	k	a	c	i

בפרט,

$$d_\pi(\mathtt{A}) = \mathtt{d} \ , \qquad d_\pi(\mathtt{B}) = \mathtt{l} \ ,$$

וכן הלאה.

דוגמה 3.6

נתון הטקסט מוצפן הבא:

MGZVYZLGHCMHJMYXSSFMNHAHYCDLMHA

והכלל מפענח של דוגמה 3.5. מצאו את הטקסט גלוי.

פתרון:

כלל מפענח :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
d	l	r	y	v	o	h	e	z	x	w	p	t	b	g	f	j	q	n	m	u	s	k	a	c	i

ז"א

$$d_\pi(\texttt{M}) = \texttt{t} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{G}) = \texttt{h} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{Z}) = \texttt{i} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{V}) = \texttt{s} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{Y}) = \texttt{c} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{L}) = \texttt{p} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{H}) = \texttt{e} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{C}) = \texttt{r} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{M}) = \texttt{t} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{J}) = \texttt{x} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{Y}) = \texttt{c} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{X}) = \texttt{a} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{S}) = \texttt{n} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{S}) = \texttt{n} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{F}) = \texttt{o} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{M}) = \texttt{t} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{N}) = \texttt{b} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{H}) = \texttt{e} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{A}) = \texttt{d} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{H}) = \texttt{e} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{Y}) = \texttt{c} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{C}) = \texttt{r} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{D}) = \texttt{y} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{L}) = \texttt{p} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{M}) = \texttt{t} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{H}) = \texttt{e} \ ,$$
$$d_\pi(\texttt{A}) = \texttt{d} \ ,$$

קיבלנו את הטקסט גלוי

thisciphertextcannotbedecrypted

■

3.4 צופן האפיני

באופן כללי, בצופן האפיני הכלל מצפין נתון ע"י הפונקציה מצורה

$$e(x) = (ax+b) \ \texttt{\%} \ 26 \ .$$

עבור $a,b\in\mathbb{Z}_{26}$. פונקציה מסוג זה נקראת **פונקציה אפינית**.

כדי שפענוח יהיה אפשרי נדרוש כי הפונקציה הזאת חד-חד-ערכית. במילים אחרות, נדרוש כי לביטוי (יחס שקילות)

$$ax+b\equiv y \mod 26$$

יש פתרון יחיד ל-x.

למטה נוכיח כי אכן יש פתרון יחיד אם ורק אם $\gcd(a,26)=1$.

משפט 3.1

ליחס שקילות

$$ax+b\equiv y \mod 26$$

יש פתרון יחיד בשביל x אם ורק אם $\gcd(a,26)=1$.

הוכחה: (ראו גם הוכחה למשפט 2.2).

נניח כי יש פתרון יחיד. נוכיח דרך השלילה כי ו- $\gcd(a,26)=1$.

נניח כי $\gcd(a,26)=d>1$.

אם $x_1=a^{-1}y$ פתרון ל- $ax\equiv y \mod 26$, אז גם $x_1+\dfrac{26}{d}$ פתרון
הסבר:

$$ax_1+\frac{a26}{d}=ax_1+k26\equiv ax_1 \mod 26 \ ,$$

כאשר $k=\dfrac{a}{d}$. שלם.

בפרט, מכיוון ש- $d>1$ אז $x_1+\dfrac{26}{d}\not\equiv x_1 \mod 26$, ז"א קיימים שני פתרונות שונים, בסתירה לכך שהפתרון יחיד.

נניח כי $\gcd(a,26)=1$. נוכיח בשלילה כי הפתרון יחיד.
נניח כי קיים שני פתרונות שונים: $x_1\not\equiv x_2 \mod 26$.

ז"א

$$ax_1\equiv y \mod 26 \ , \qquad ax_2\equiv y \mod 26 \ .$$

לכן

$$ax_1\equiv ax_2 \mod 26 \ .$$

לכן

$$26 \mid ax_1-ax_2 \ .$$

$\gcd(a,26)=1$ לפיכך

$$26 \mid x_1-x_2 \ ,$$

ז"א

$$x_1 \equiv x_2 \mod 26 ,$$

בסתירה לכך ש- $x_1 \not\equiv x_2 \mod 26$.

■

דוגמה 3.7

בדקו אם הפונקציה

$$e(x) = 4x + 7 \mod 26$$

כלל מצפין תקין, כלומר בדקו אם קיים כלל מפענח.

פתרון:
$\gcd(4, 26) = 2$, אז הפונקציה $e(x) = 4x + 7 \mod 26$ אינה כלל מצפין תקין, בגלל שהיא לא חד-חד ערכית ולכן לא יכולה להיות כלל מצפין.

למשל, הפונקציה הזאת מחזירה הערכים הבאים בשביל x ו- $x + 13$:

$$e(x) = 4x + 7 \mod 26$$

בעוד

$$\begin{aligned} e(x+13) =& 4(x+13) + 7 \mod 26 \\ =& 4x + 52 + 7 \mod 26 \\ =& 4x + 2 \cdot 26 + 7 \mod 26 \\ =& 4x + 7 \mod 26 \end{aligned}$$

ז"א $e(x)$ מצפין את x ו- $x + 13$ לאותו אות מוצפן.

■

הגדרה 3.4 צופן האפיני

יהי $P = C = \mathbb{Z}_{26}$ ויהי

$$K = \{a, b \in \mathbb{Z}_{26} | \gcd(a, 26) = 1\} .$$

עבור $k = (a, b) \in K$ ועבור $x \in \mathbb{Z}_{26}$ נגדיר כלל המצפין

$$e_k(x) = (ax + b) \mod 26 ,$$

ועבור $y \in \mathbb{Z}_{26}$ נגדיר כלל המענח

$$d_k(y) = a^{-1}(y - b) \mod 26 .$$

כלל 3.1

הפירוק לראשוניים של 26 הינו

$$26 = 2^1 13^2 .$$

לכן האיברים $a \in \mathbb{Z}_{26}$ עבורם $\gcd(a, 26) = 1$ הם

$$a = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25 .$$

ז"א יש בדיוק 12 ערכים של a עבורם $\gcd(a, 26) = 1$.

המספר איברים ב- $\mathbb{Z}_{26}$ עבורם $\gcd(a,26)=1$ נובע מנוסחת אוילר (הגדרה 2.3):

$$\phi(26) = \left(2^1 - 2^0\right)\left(13^1 - 13^0\right) = 12 \ .$$

הפרמטר b מקבל כל איבר של $\mathbb{Z}_{26}$.
לפיכך לצופן האפיני יש $12 \times 26 = 312$ מפתחות אפשריות.

דוגמה 3.8

נתון כלל מצפין של צופן אפיני בעל המפתח $k=(7,3)$ ($a=7, b=3$).

1) רשמו את כלל המצפין.

2) רשמו את כלל המפענח.

3) בדקו כי התנאי

מתקיים.

פתרון:

1) כלל המצפין הוא

$$e_k(x) = 7x + 3 \mod 26 \ ,$$

2) כלל המפענח הוא

$$\begin{aligned} d_k(y) =& 7^{-1}(y-3) \mod 26 \\ =& 15(y-3) \mod 26 \\ =& 15y - 45 \mod 26 \\ =& 15y - 19 \\ =& 15y + 7 \ . \end{aligned}$$

3) נבדוק כי הכלל מפענח המתקבל מקיים $d_k\left(e_k(x)\right) = x$:

$$\begin{aligned} d_k\left(e_k(x)\right) =& d_k\left(7x+3\right) \mod 26 \\ =& 15(7x+3)+7 \mod 26 \\ =& 105x + 45 + 7 \mod 26 \\ =& 104x + x + 52 \mod 26 \\ =& 4 \times 26x + x + 52 \mod 26 \\ =& x \ . \end{aligned}$$

■

דוגמה 3.9

בעזרת הצופן של דוגמה 3.8:

1) מצאו את הטקסט מוצפן של הטקסט גלוי

$\texttt{hot}$.

2) בדקו שהפעולה של הכלל מפענח על הטקסט מוצפן מחזיר את טקסט גלוי

hot .

פתרון:

סעיף 1) נעביר את האותיות של hot לערכים של $\mathbb{Z}_{26}$:

$\text{x} \in P$	h	o	t
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	7	14	19

נפעיל את הכלל מצפין על הערכים x:

$$\begin{aligned} e_k(7) =& 7 \times 7 + 3 \mod 26 \\ =& 52 \mod 26 \\ =& 2 \times 26 \mod 26 \\ =& 0 \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_k(14) =& 7 \times 14 + 3 \mod 26 \\ =& 101 \mod 26 \\ =& 3 \times 26 + 23 \mod 26 \\ =& 23 \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_k(19) =& 7 \times 19 + 3 \mod 26 \\ =& 136 \mod 26 \\ =& 5 \times 26 + 6 \mod 26 \\ =& 6 \ . \end{aligned}$$

מכאן נקבל

$\text{x} \in P$	h	o	t
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	7	14	19
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	0	23	6
$\text{y} \in C$	A	X	G

לכן הטקסט מוצפן המתקבל הוא

AXG

סעיף 2) הכלל מפענח הוא

$$d_k(y) = 15y + 7 \ .$$

נעביר את האותיות של AXG לערכים של $\mathbb{Z}_{26}$:

$\text{y} \in P$	A	X	G
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	1	23	6

נפעיל את הכלל מפענח על הערכים y:

$$\begin{aligned} d_k(1) =&15 \times 1 + 7 \mod 26 \\ =&22 \mod 26 \\ =&22 \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_k(23) =&15 \times 23 + 7 \mod 26 \\ =&352 \mod 26 \\ =&338 + 14 \mod 26 \\ =&13 \times 26 + 14 \mod 26 \\ =&14 \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_k(6) =&15 \times 6 + 7 \mod 26 \\ =&97 \mod 26 \\ =&3 \times 26 + 19 \mod 26 \\ =&19 \ . \end{aligned}$$

$\mathtt{y} \in C$	A	X	G
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	1	23	6
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	22	14	19
$\mathtt{x} \in P$	h	o	t

לכן הטקסט גלוי המתקבל הוא

hot

כנדרש.

■

דוגמה 3.10

נתון הטקסט מוצפן

ACSE

והמפתח $(23, 2)$ של צופן אפיני. מצאו את הטקסט גלוי.

פתרון:

$$\begin{aligned} d_k(y) =&23^{-1}(y-2) \mod 26 \\ =&17(y-2) = \qquad 17y - 34 \mod 26 \\ =&17y - 26 - 8 \mod 26 \\ =&17y - 8 \mod 26 \\ =&17y + 18 \ . \end{aligned}$$

נעביר את הואתיות של ACSE לערכים של $\mathbb{Z}_{26}$:

$\mathtt{y} \in C$	A	C	S	E
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	0	2	18	4

$$\begin{aligned} d_k(0) =& 18 \mod 26 \\ =& 18 \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_k(2) =& 17 \times 2 + 18 \mod 26 \\ =& 52 \mod 26 \\ =& 0 \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_k(18) =& 17 \times 18 + 18 \mod 26 \\ =& 324 \mod 26 \\ =& 12 \times 26 + 12 \mod 26 \\ =& 12 \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_k(4) =& 17 \times 4 + 18 \mod 26 \\ =& 86 \mod 26 \\ =& 3 \times 26 + 8 \mod 26 \\ =& 8 \ . \end{aligned}$$

y $\in C$	A	C	S	E
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	0	2	18	4
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	0	12	8
x $\in P$	s	a	m	i

■

3.5 צופן ויז'נר

צופן ההזזה וצופן ההחלפה דוגמאות של צופן מונואלפביתי: כל תו אלפביתי ב- P נתאים לתו אלפביתי יחיד ב- C. צופן ויז'נר הוא צופן פוליאלפיביתי: אין מצפינים כל אות בנפרד, אלא בלוקים, או קבוצות של כמה אותיות באורך קבוע m.

הגדרה 3.5 צופן ויז'נר (Vigenere Cipher)

יהי m מספר שלם חיובי.
נגדיר $P = C = K = \mathbb{Z}_{26}^m$.
עבור מפתח $k = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$ נגדיר כלל מצפין

$$e_k(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (x_1 + k_1, x_2 + k_2, x_3 + k_3, \ldots, x_m + k_m)$$

ונגדיר כלל מפענח

$$d_k(y_1, y_2, \ldots, y_m) = (y_1 - k_1, y_2 - k_2, y_3 - k_3, \ldots, y_m - k_m) \ ,$$

כאשר כל הפעולות נבצעות ב- $\mathbb{Z}_{26}$.

דוגמה 3.11

נתון הטקסט גלוי

string

והמפתח AND $= k$.

1) מצאו את הכלל מצפין והכלל מפענח.

2) מצאו את הטקסט מצפון.

3) בדקו כי הכלל מפענח מחזיר את הטקסט גלוי.

פתרון:

1) והמפתח הוא

AND.

הערכים המתאימים ב- $\mathbb{Z}_{26}$ הינם

$$k = (0, 13, 3) \ .$$

לכן $m = 3$.

הכלל מצפין הוא

$$e_k(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + 13, x_3 + 3) \ ,$$

והכלל מפענח הוא

$$d_k(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2 - 13, y_3 - 3) \ .$$

2) נעביר את האותיות של הטקסט גלוי לערכים של $\mathbb{Z}_{26}$:

$x \in P$	s	t	r	i	n	g
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	19	17	8	13	6

נפרק את הטבלה של התווים של הטקסט גלוי יחד עם הערכים המתאימים של $\mathbb{Z}_{26}$ לתת-קבוצות של $m = 3$ תווים:

$x \in P$	s	t	r	i	n	g
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	19	17	8	13	6

בכל תת-קבוצה, נתאים לכל תו ערך של המפתח $k = (0, 13, 3)$:

$x \in P$	s	t	r	i	n	g
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	19	17	8	13	6
$k_i \in k$	0	13	3	0	13	3

על כל שלישיה (x_1, x_2, x_3) בבלוק אחד, נפעיל את כלל המצפין

$$e_k(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + k_1, x_2 + k_2, x_3 + k_3) \mod 26 \ .$$

לדוגמה בבלוק הראשון נקבל

$$\begin{aligned} e_k(18, 19, 17) =& (18 + 0, 19 + 13, 17 + 3) \mod 26 \\ =& (18, 32, 20) \mod 26 \\ =& (18, 6, 20) \ . \end{aligned}$$

בבלוק השני נקבל

$$\begin{aligned} e_k(8, 13, 6) =& (8 + 0, 13 + 13, 6 + 3) \mod 26 \\ =& (8, 26, 9) \mod 26 \\ =& (8, 0, 9) \ . \end{aligned}$$

x $\in P$	s	t	r	i	n	g
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	19	17	8	13	6
$k_i \in k$	0	13	3	0	13	3
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	6	20	8	0	9

נעבור את הערכים $y \in \mathbb{Z}_{26}$ לאותיות של הטקסט מוצפן:

x $\in P$	s	t	r	i	n	g
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	19	17	8	13	6
$k_i \in k$	0	13	3	0	13	3
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	18	6	20	8	0	9
y $\in C$	S	G	U	I	A	J

הטקסט מוצפן המתקבל הוא

SGUIAJ .

3) נעביר את האותיות של הטקסט מוצפן לערכים של $\mathbb{Z}_{26}$:

y $\in C$	S	G	U	I	A	J
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	18	6	20	8	0	9

נפרק את הטבלה של התווים של הטקסט גלוי יחד עם הערכים המתאימים של $\mathbb{Z}_{26}$ לתת-קבוצות של $m = 3$ תווים:

y $\in C$	S	G	U	I	A	J
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	18	6	20	8	0	9

בכל תת-קבוצה, נתאים לכל תו ערך של המפתח $k = (0, 13, 3)$:

x $\in P$	S	G	U	I	A	J
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	18	6	20	8	0	9
$k_i \in k$	0	13	3	0	13	3

על כל שלישיה (y_1, y_2, y_3) בבלוק אחד, נפעיל את כלל המצפין

$$d_k\left(y_1, y_2, y_3\right) = \left(y_1 - k_1, y_2 - k_2, y_3 - k_3\right) \mod 26 \ .$$

לדוגמה בבלוק הראשון נקבל

$$\begin{aligned} d_k(18, 6, 20) =& (18, -7, 17) \mod 26 \\ =& (18, 19, 17) \ . \end{aligned}$$

בבלוק השני נקבל

$$\begin{aligned} d_k(8, 0, 9) =& (8 + 0, -13, 6) \mod 26 \\ =& (8, 13, 6) \ . \end{aligned}$$

y $\in C$	s	t	r	i	n	g
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	18	6	20	8	0	9
$k_i \in k$	0	13	3	0	13	3
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	19	17	8	13	6

נעבור את הערכים $x \in \mathbb{Z}_{26}$ לאותיות של הטקסט גלוי:

$\mathrm{y} \in C$	S	G	U	I	A	J
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	18	6	20	8	0	9
$k_i \in k$	0	13	3	0	13	3
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	19	17	8	13	6
$\mathrm{x} \in P$	s	t	r	i	n	g

הטקסט גלוי המתקבל הוא

string .

■

דוגמה 3.12

נניח כי $m = 6$ והמפתח הוא

CIPHER.

הערכים המתאימים ב- $\mathbb{Z}_{26}$ הינם

$$k = (2, 8, 15, 7, 4, 17)\ \ .$$

נתון הטקסט גלוי

thiscryptosystemisnotsecure.

מצאו את הטקסט מוצפן.

פתרון:

<u>שלב 1:</u>

נעביר את האותיות של הטקסט גלוי לערכים של $\mathbb{Z}_{26}$:

$\mathrm{x} \in P$	t	h	i	s	c	r	y	p	t	o	s	y	s	t	e	m	i	s
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	19	7	8	18	2	17	24	15	19	14	18	24	18	19	4	12	8	18

$\mathrm{x} \in P$	n	o	t	s	e	c	u	r	e
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	13	14	19	18	4	2	20	17	4

<u>שלב 2:</u>

נפרק את הטבלה של התווים של הטקסט גלוי יחד עם הערכים המתאימים של $\mathbb{Z}_{26}$ לתת-קבוצות של $m = 6$ תווים:

$\mathrm{x} \in P$	t	h	i	s	c	r	y	p	t	o	s	y	s	t	e	m	i	s
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	19	7	8	18	2	17	24	15	19	14	18	24	18	19	4	12	8	18

$\mathrm{x} \in P$	n	o	t	s	e	c	u	r	e
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	13	14	19	18	4	2	20	17	4

<u>שלב 3:</u>

בכל תת-קבוצה, נתאים לכל תו ערך של המפתח $k = (2, 8, 15, 7, 4, 17)$:

$x \in P$	t	h	i	s	c	r	y	p	t	o	s	y	s	t	e	m	i	s
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	19	7	8	18	2	17	24	15	19	14	18	24	18	19	4	12	8	18
$k_i \in k$	2	8	15	7	4	17	2	8	15	7	4	17	2	8	15	7	4	17

$x \in P$	n	o	t	s	e	c	u	r	e
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	13	14	19	18	4	2	20	17	4
$k_i \in k$	2	8	15	7	4	17	2	8	15

<u>שלב 3:</u>

על כל ששיה $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_5)$ בבלוק אחד, נפעיל את כלל המצפין

$$e_k(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_1 + k_1, x_2 + k_2, x_3 + k_3, x_4 + k_4, x_5 + k_5, x_6 + k_6) \mod 26 \ .$$

לדוגמה בבלוק הראשון נקבל

$$\begin{aligned} e_k(19, 7, 8, 18, 2, 17) =& (19 + 2, 7 + 8, 8 + 15, 18 + 7, 2 + 4, 17 + 17) \mod 26 \\ =& (21, 15, 23, 25, 6, 34) \mod 26 \\ =& (21, 15, 23, 25, 6, 8) \ . \end{aligned}$$

$x \in P$	t	h	i	s	c	r	y	p	t	o	s	y	s	t	e	m	i	s
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	19	7	8	18	2	17	24	15	19	14	18	24	18	19	4	12	8	18
$k_i \in k$	2	8	15	7	4	17	2	8	15	7	4	17	2	8	15	7	4	17
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	21	15	23	25	6	8	0	23	34	21	22	15	20	1	19	19	12	9

$x \in P$	n	o	t	s	e	c	u	r	e
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	13	14	19	18	4	2	20	17	4
$k_i \in k$	2	8	15	7	4	17	2	8	15
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	15	22	8	25	8	19	22	25	19

<u>שלב 4:</u>

נעבור את הערכים $y \in \mathbb{Z}_{26}$ לאותיות של הטקסט מוצפן:

$x \in P$	t	h	i	s	c	r	y	p	t	o	s	y	s	t	e	m	i	s
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	19	7	8	18	2	17	24	15	19	14	18	24	18	19	4	12	8	18
$k_i \in k$	2	8	15	7	4	17	2	8	15	7	4	17	2	8	15	7	4	17
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	21	15	23	25	6	8	0	23	8	21	22	15	20	1	19	19	12	9
$y \in \mathbb{C}$	V	P	X	Z	G	I	A	X	I	V	W	P	U	B	T	T	M	J

$x \in P$	n	o	t	s	e	c	u	r	e
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	13	14	19	18	4	2	20	17	4
$k_i \in k$	2	8	15	7	4	17	2	8	15
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	15	22	8	25	8	19	22	25	19
$y \in \mathbb{C}$	P	W	I	Z	I	T	W	Z	T

הטקסט מוצפן המתקבל הוא

VPXZGIAXIVWPUBTTMJPWIZITWZT

■

3.6 צופן היל

הגדרה 3.6 צופן היל

נניח כי $m \geq 2$ מספר שלם.
יהי $P = C = \mathbb{Z}_{26}^m$ ויהי

$$k = \mathbb{Z}_{26}^{m\times m}$$

מטריצה בחוג $\mathbb{Z}_{26}$ מסדר $m \times m$.
עבור מפתח $k \in K$ נגדיר כלל מצפין

$$e_k(x) = x \cdot k \ ,$$

ונגדיר כלל מפענח

$$d_k(y) = y \cdot k^{-1} \ ,$$

כאשר כל פעולות נצצעות ב- $\mathbb{Z}_{26}$.

הגדרה 3.7 המטריצה של קופקטורים

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

הקופקטור ה- (i,j) של A מוגדר להיות הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת מ-A ע"י מחיקת שורה i ועמודה j, כפול $(-1)^{i+j}$.

המטריצה של קופקטורים של המטריצה A מוגדרת

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

כאשר C_{ij} הקופקטור ה- (i,j) של A.

הגדרה 3.8 המטריצה המצורפת

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. המטריצה המצורפת של A היא מטריצה מסדר $n \times n$ שמסומנת $\mathrm{adj}(A)$ ומוגדרת

$$\mathrm{adj}(A) = C^t$$

כאשר C המטריצה של קופקטורים של A.

משפט 3.2 נוסחת קיילי המילטון

נניח כי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. אם A הפיכה, כלומר אם $|A| \neq 0$ אז המטריצה ההופכית נתונה ע"י נוסחת קיילי המילטון:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A) \ ,$$

כאשר $\mathrm{adj}(A)$ המטריצה המצורפת של A.

דוגמה 3.13

נתון רצף טקסטת גלוי

`july`

ונתון המפתח

$$k = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

של צופן היל. מצאו את הטקסט מוצפן.

פתרון:

שלב 1:

נעביר את האותיות של הטקסט גלוי לערכים של $\mathbb{Z}_{26}$:

$\mathrm{x} \in P$	j	u	l	y
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	9	20	11	24

שלב 2:

נפרק את הטבלה של התווים של הטקסט גלוי יחד עם הערכים המתאימים של $\mathbb{Z}_{26}$ לתת-קבוצות של $m = 2$ תווים:

$\mathrm{x} \in P$	j	u	l	y
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	9	20	11	24

שלב 3:

עבור כל תת-קבוצה המתקבל נחשב

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} k \mod 26 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \mod 26 \end{aligned}$$

עבור התת-קבוצה הראשונה נקבל

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 9 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \mod 26 \\ &= \begin{pmatrix} 99 + 60 & 72 + 140 \end{pmatrix} \mod 26 \\ &= \begin{pmatrix} 159 & 212 \end{pmatrix} \mod 26 \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

עבור התת-קבוצה השנייה נקבל

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 11 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \mod 26 \\ &= \begin{pmatrix} 121 + 72 & 88 + 168 \end{pmatrix} \mod 26 \\ &= \begin{pmatrix} 193 & 256 \end{pmatrix} \mod 26 \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 22 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\mathtt{x} \in P$	j	u	l	y
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	9	20	11	24
$x \cdot k \in \mathbb{Z}_{26}$	3	4	11	22

<u>שלב 4:</u>

נעבור את הערכים $y \in \mathbb{Z}_{26}$ לאותיות של הטקסט מוצפן:

$\mathtt{x} \in P$	j	u	l	y
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	9	20	11	24
$x \cdot k \in \mathbb{Z}_{26}$	3	4	11	22
$\mathtt{y} \in C$	D	E	L	W

הטקסט מוצפן המתקבל הוא

DELW

■

דוגמה 3.14

נתון רצף טקטסת מוצפן

DELW

ונתון המפתח

$$k = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

של צופן היל. מצאו את הטקסט גלוי.

פתרון:

<u>שלב 0:</u>

נחשב את ההופכית k^{-1}:

$$|k| = 11 \cdot 7 - 8 \cdot 3 \mod 26 = 77 - 24 \mod 26 = 53 \mod 26 = 1 \ .$$

$\gcd(1, 26) = 1$ לכן המטריצה הפיכה ב- $\mathbb{Z}_{26}$.

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{11} = (-1)^{1+1}(7) = 7 \ .$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{12} = (-1)^{2+1}(3) = -3 \ .$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{21} = (-1)^{1+2}(8) = -8 \ .$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{22} = (-1)^{2+2}(11) = 11 \ .$$

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}(A) = C^t = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} \mod 26 = \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 23 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{2\times 2} \ .$$

$$A^{-1} = |A|^{-1}\mathrm{adj}(A) \ .$$

$$|A|^{-1} = 1^{-1} = 1 \in \mathbb{Z}_{26}$$

לפיכך

$$A^{-1} = |A|^{-1}\mathrm{adj}(A) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 23 & 11 \end{pmatrix}$$

<u>שלב 1:</u>

נעביר את האותיות של הטקסט גלוי לערכים של $\mathbb{Z}_{26}$:

$\mathrm{y} \in C$	D	E	L	W
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	3	4	11	22

<u>שלב 2:</u>

נפרק את הטבלה של התווים של הטקסט מוצפן יחד עם הערכים המתאימים של $\mathbb{Z}_{26}$ לתת-קבוצות של $m=2$ תווים:

$\mathrm{y} \in C$	D	E	L	W
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	3	4	11	22

<u>שלב 3:</u>

עבור כל תת-קבוצה המתקבל נחשב

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} k^{-1} \mod 26 \\ &= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 23 & 11 \end{pmatrix} \mod 26 \end{aligned}$$

עבור התת-קבוצה הראשונה נקבל

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 23 & 11 \end{pmatrix} \mod 26 \\ &= \begin{pmatrix} 21+92 & 54+44 \end{pmatrix} \mod 26 \\ &= \begin{pmatrix} 113 & 98 \end{pmatrix} \mod 26 \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

עבור התת-קבוצה השנייה נקבל

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 11 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 23 & 11 \end{pmatrix} \mod 26 \\ &= \begin{pmatrix} 77+468 & 198+242 \end{pmatrix} \mod 26 \\ &= \begin{pmatrix} 583 & 440 \end{pmatrix} \mod 26 \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 24 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\mathrm{y} \in C$	D	E	L	W
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	3	4	11	22
$y \cdot k^{-1} \in \mathbb{Z}_{26}$	9	20	11	24

שלב 5:

נעבור את הערכים $y \in \mathbb{Z}_{26}$ לאותיות של הטקסט מוצפן:

$\mathrm{y} \in C$	D	E	L	W
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	3	4	11	22
$y \cdot k^{-1} \in \mathbb{Z}_{26}$	9	20	11	24
$\mathrm{x} \in P$	j	u	l	y

הטקסט גלוי המתקבל הוא

july

■

דוגמה 3.15

נתון רצף טקטסת מוצפן

PGRFGGCSY

ונתון המפתח

$$k = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

של צופן היל. מצאו את הטקסט גלוי.

פתרון:

שלב 0:

נחשב את ההופכית k^{-1}:

$$\begin{aligned}
|k| =& 3 \cdot (13 \cdot 10 - 11 \cdot 8) - 2 \cdot (5 \cdot 13 - 8 \cdot 6) + 5 \cdot (5 \cdot 11 - 6 \cdot 10) \mod 26 \\
=& 3 \cdot 42 - 2 \cdot 17 + 5 \cdot (-5) \mod 26 \\
=& 126 - 34 - 25 \mod 26 \\
=& 67 \mod 26 \\
=& 15 \ .
\end{aligned}$$

$\gcd(1, 26) = 1$ לכן המטריצה הפיכה ב- $\mathbb{Z}_{26}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 11 & 13 \end{vmatrix} = 42 \mod 26 = 16 \ .$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 13 \end{vmatrix} = -17 \mod 26 = 9 \ .$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = -5 \mod 26 = 21 \ .$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 11 & 13 \end{vmatrix} = -29 \mod 26 = 23 \ .$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 13 \end{vmatrix} = 9 \ .$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = -21 \mod 26 = 5 \ .$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = -34 \mod 26 = 18 \ .$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1 \ .$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 20 \ .$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 9 & 21 \\ 3 & 9 & 5 \\ 18 & 1 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}(A) = C^t = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 18 \\ 9 & 9 & 1 \\ 21 & 5 & 20 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3\times 3} \ .$$

$$k^{-1} = |k|^{-1}\mathrm{adj}(k) \ .$$

$$|k|^{-1} = 15^{-1} = 7 \in \mathbb{Z}_{26}$$

לפיכך

$$\begin{aligned} k^{-1} =& |k|^{-1}\mathrm{adj}(k) \\ =& 7 \cdot \begin{pmatrix} 16 & 3 & 18 \\ 9 & 9 & 1 \\ 21 & 5 & 20 \end{pmatrix} \mod 26 \\ =& \begin{pmatrix} 112 & 21 & 126 \\ 63 & 63 & 7 \\ 147 & 35 & 140 \end{pmatrix} \mod 26 \end{aligned}$$

$$112 \ \% \ 26 = 112 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{112}{26} \right\rfloor = 8 \ .$$

$$63 \ \% \ 26 = 63 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{63}{26} \right\rfloor = 11 \ .$$

$$147 \ \% \ 26 = 147 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{147}{26} \right\rfloor = 17 \ .$$

$$35 \ \% \ 26 = 35 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{35}{26} \right\rfloor = 9 \ .$$

$$140 \ \% \ 26 = 140 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{140}{26} \right\rfloor = 10 \ .$$

לפיכך

$$k^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 21 & 22 \\ 11 & 11 & 7 \\ 17 & 9 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3\times 3} \ .$$

<u>שלב 1:</u>

נעביר את האותיות של הטקסט גלוי לערכים של $\mathbb{Z}_{26}$:

$\mathrm{y} \in C$	P	G	R	F	G	G	C	S	Y
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	15	6	17	5	6	6	2	18	24

<u>שלב 2:</u>

נפרק את הטבלה של התווים של הטקסט מוצפן יחד עם הערכים המתאימים של $\mathbb{Z}_{26}$ לתת-קבוצות של $m = 3$ תווים:

$\mathrm{y} \in C$	P	G	R	F	G	G	C	S	Y
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	15	6	17	5	6	6	2	18	24

<u>שלב 3:</u>

עבור כל תת-קבוצה המתקבל נחשב

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} k^{-1} \mod 26 \\ &= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 21 & 22 \\ 11 & 11 & 7 \\ 17 & 9 & 10 \end{pmatrix} \mod 26 \end{aligned}$$

עבור התת-קבוצה הראשונה נקבל

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 15 & 6 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 21 & 22 \\ 11 & 11 & 7 \\ 17 & 9 & 10 \end{pmatrix} \mod 26 \\ &= \begin{pmatrix} 475 & 534 & 542 \end{pmatrix} \mod 26 \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 14 & 22 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

עבור התת-קבוצה השנייה נקבל

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 21 & 22 \\ 11 & 11 & 7 \\ 17 & 9 & 10 \end{pmatrix} \mod 26 \\ &= \begin{pmatrix} 208 & 225 & 212 \end{pmatrix} \mod 26 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 17 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

עבור התת-קבוצה השלישי נקבל

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}2 & 18 & 24\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 21 & 22\\ 11 & 11 & 7\\ 17 & 9 & 10\end{pmatrix} \mod 26\\ &= \begin{pmatrix}622 & 456 & 410\end{pmatrix} \mod 26\\ &= \begin{pmatrix}24 & 14 & 20\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$y \in C$	P	G	R	F	G	G	C	S	Y
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	15	6	17	5	6	6	2	18	24
$y \cdot k^{-1} \in \mathbb{Z}_{26}$	7	14	22	0	17	4	24	14	20

<u>שלב 5:</u>

נעבור את הערכים $y \in \mathbb{Z}_{26}$ לאותיות של הטקסט מוצפן:

$y \in C$	P	G	R	F	G	G	C	S	Y
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	15	6	17	5	6	6	2	18	24
$y \cdot k^{-1} \in \mathbb{Z}_{26}$	7	14	22	0	17	4	24	14	20
$x \in P$	h	o	w	a	r	e	y	o	u

הטקסט גלוי המתקבל הוא

howareyou

■

3.7 צופן התמורה

הגדרה 3.9 תופן התמורה (permutation cipher)

נניח כי m מספר שלים חיובי.
יהי $P = C = \mathbb{Z}_{26}^m$ ויהי K להיות הקבוצה של כל התמורות האפשריות של $\{1, \ldots, m\}$.
עבור מפתח $\pi \in K$ (עבור תמרוה של K) נגדיר כלל מצפין

$$e_\pi\left(x_1, \ldots, x_m\right) = \left(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(m)}\right)$$

ונגדיר כלל מפענח

$$d_\pi\left(y_1, \ldots, y_m\right) = \left(y_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, y_{\pi^{-1}(m)}\right) ,$$

כאשר π^{-1} התמורה ההופכית של π.

דוגמה 3.16

נתון התמורה הבאה:

x	1	2	3
$\pi(x)$	2	3	1

ונתון את הטקסט גלוי

flower

1) מצאו את הטקסט מוצפן.

2) מצאו את הטקסט גלוי באמצעות לפענח את הטקסט מצפון מסעיף הקודם עם התמורה ההופכית.

פתרון:

סעיף 1) <u>שלב 1:</u>

נעביר את האותיות של הטקסט גלוי לערכים של $\mathbb{Z}_{26}$:

$\mathrm{x} \in P$	f	l	o	w	e	r
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	5	11	14	22	4	17

<u>שלב 2:</u>

נפרק את הטבלה של התווים של הטקסט גלוי יחד עם הערכים המתאימים של $\mathbb{Z}_{26}$ לתת-קבוצות של $m = 3$ תווים:

$\mathrm{x} \in P$	f	l	o	w	e	r
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	5	11	14	22	4	17

<u>שלב 3:</u>

עבור כל תת-קבוצה המתקבל נפעיל את התמורה π:

$$\begin{pmatrix} 5 & 11 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi} \begin{pmatrix} 11 & 14 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 22 & 4 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi} \begin{pmatrix} 4 & 17 & 22 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{x} \in P$	f	l	o	w	e	r
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	5	11	14	22	4	17
$\pi(x) \in \mathbb{Z}_{26}$	11	14	5	4	17	22

<u>שלב 4:</u>

נעבור את הערכים $y \in \mathbb{Z}_{26}$ לאותיות של הטקסט מוצפן:

$\mathrm{x} \in P$	f	l	o	w	e	r
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	5	11	14	22	4	17
$\pi(x) \in \mathbb{Z}_{26}$	11	14	5	4	17	22
$\mathrm{y} \in C$	L	O	F	E	R	W

לכן הטקסט מוצפן הוא

LOFERW

סעיף 2)

<u>שלב 1:</u>

נתחיל עם הטקסט מוצפן

LOFERW

ונעביר את האותיות של הטקסט גלוי לערכים של $\mathbb{Z}_{26}$:

$\mathrm{y} \in C$	L	O	F	E	R	W
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	11	14	5	4	17	22

<u>שלב 2:</u>

נפרק את הטבלה של התווים של הטקסט גלוי יחד עם הערכים המתאימים של $\mathbb{Z}_{26}$ לתת-קבוצות של $m = 3$ תווים:

$\mathrm{y} \in C$	L	O	F	E	R	W
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	11	14	5	4	17	22

<u>שלב 3:</u>

עבור כל תת-קבוצה המתקבל נפעיל את התמרוה ההופכית: π^{-1}:

x	1	2	3
$\pi(x)$	3	1	2

$$\begin{pmatrix} 11 & 14 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi} \begin{pmatrix} 5 & 11 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 17 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi} \begin{pmatrix} 22 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{y} \in C$	L	O	F	E	R	W
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	11	14	5	4	17	22
$x = \pi^{-1}(y)$	5	11	14	22	4	17

<u>שלב 4:</u>

נעבור את הערכים $y \in \mathbb{Z}_{26}$ לאותיות של הטקסט גלוי:

$\mathrm{y} \in C$	L	O	F	E	R	W
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	11	14	5	4	17	22
$x = \pi^{-1}(y)$	5	11	14	22	4	17
$\mathrm{x} \in C$	f	l	o	w	e	r

לכן הטקסט מוצפן הוא

LOFERW

■

שיעור 4
הצפנים הבסיסיים (המשך)

4.1 צפני זרם

עד כה דיברנו על צפנים המבוססים על מפתח k אילו הטקסט מוצפן y מתקבל על ידי הכלל מצפין

$$\mathrm{y} = y_1 y_2 \cdots = e_k(x_1) e_k(x_2) \cdots \ .$$

צפנים מסוג זה נקראים צפני בלוק.

כעת נדבר על צפני זרם. להתחיל נגדיר **צופן זרם סינכרוני** .

הגדרה 4.1 צופן זרם סינכרוני

צופן זרם סינכרוני (synchronized stream cipher) מוצג באמצעות קבוצה (P, C, K, L, E, D) יחד עם פונקציה g כאשר:

(1 E מסמן קבוצה של טקסטים גלויים אפשריים (plaintexts),

(2 C מסמן קבוצה של טקסטים מוצפנים אפשריים (ciphertexts),

(3 K מסמן קבוצה של המפתחות אפשריים (keyspace),

(4 L מסמן את האלפיבית של המפתח הפנימי (key-stream alphabet).

(5 g מסמן את ה **מחולל הפנימי** (keystream generator). g מקבלת מפתח k ומחזירה רצף אותיות אינסופי $z_1 z_2 \cdots$ כאשר $z_i \in L$ לכל $i \geq 1$.

(6 לכל $z \in L$ יש כלל מצפין $e_z \in E$ וכלל מפענח $d_z \in D$:

$$e_z : P \to C \ , \qquad d_z : C \to P \ ,$$

כך ש-

$$d_z\left(e_z\left(x\right)\right) = x$$

לכל איבר של מרחב הטקסט גלוי $x \in P$.

הגדרה 4.2 צופן אוטו מפתח (Autokey cipher)

נניח כי $P = C = K = L = \mathbb{Z}_{26}$.
נגדיר מפתח הפנימי

$$g : \qquad z_1 = k \ , \qquad z_i = x_{i-1} \ \forall i \geq 2 \ .$$

לכל $z \in \mathbb{Z}_{26}$ נגדיר כלל מצפין

$$e_z(x) = (x + z) \mod 26$$

לכל $x \in \mathbb{Z}_{26}$ ונגדיר כלל מפענח

$$d_z(y) = (y - z) \mod 26$$

לכל $y \in \mathbb{Z}_{26}$.

דוגמה 4.1 (צופן אוטו-מפתח)

נתון צופן אוטו-מפתח עם מפתח $k=8$.

1) מצאו את הטקסט מוצפן של המילה

rendezvous .

2) פענחו את הטקסט מוצפן המתקבל וודאו שקיבלתם את הטקסטסט הגלוי.

פתרון:

סעיף 1) נרשום את האותיות של הטקסטסט גלוי ב- $\mathbb{Z}_{26}$:

$x \in P$	r	e	n	d	e	z	v	o	u	s
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	17	4	13	3	4	25	21	14	20	18

המפתח הפנימי הוא

$x_i \in \mathbb{Z}_{26}$	17	4	13	3	4	25	21	14	20	18
$z_i \in \mathbb{Z}_{26}$	8	17	4	13	3	4	25	21	14	20

על פי המפתח הפנימי נפעיל את הכלל מצפין

$$e_z(x_i) = x_i + z_i \mod 26$$

על הטקסט גלוי ונחשב את ה- x_i של הטקסט מצפון באמצעות הכלל מצפין:

$$\begin{aligned}
y_1 =& e_8(17) &= (8+17) \mod 26 = 25 \ ,\\
y_2 =& e_{17}(4) &= (17+4) \mod 26 = 21 \ ,\\
y_3 =& e_4(13) &= (4+13) \mod 26 = 17 \ ,\\
y_4 =& e_{13}(3) &= (13+3) \mod 26 = 16 \ ,\\
y_5 =& e_3(4) &= (3+4) \mod 26 = 7 \ ,\\
y_6 =& e_4(25) &= (4+25) \mod 26 = 3 \ ,\\
y_7 =& e_{25}(21) &= (25+21) \mod 26 = 20 \ ,\\
y_8 =& e_{21}(14) &= (21+14) \mod 26 = 9 \ ,\\
y_9 =& e_{14}(20) &= (14+20) \mod 26 = 8 \ ,\\
y_{10} =& e_{20}(18) &= (20+18) \mod 26 = 12 \ .
\end{aligned}$$

$x \in P$	r	e	n	d	e	z	v	o	u	s
$x_i \in \mathbb{Z}_{26}$	17	4	13	3	4	25	21	14	20	18
$z_i \in \mathbb{Z}_{26}$	8	17	4	13	3	4	25	21	14	20
$y_i = e_{z_i}(x_i)$	25	21	17	16	7	3	20	9	8	12

נמיר את האיברים y_i של $\mathbb{Z}_{26}$ לתווים של הטקסט מוצפן:

$\mathrm{x} \in P$	r	e	n	d	e	z	v	o	u	s
$x_i \in \mathbb{Z}_{26}$	17	4	13	3	4	25	21	14	20	18
$z_i \in \mathbb{Z}_{26}$	8	17	4	13	3	4	25	21	14	20
$y_i = e_{z_i}(x_i)$	25	21	17	16	7	3	20	9	8	12
$\mathrm{y} \in C$	Z	V	R	Q	H	D	U	J	I	M

סעיף 2) נתחיל עם הטקסט מוצפן:

ZVRQHDUJIM

$\mathrm{y} \in C$	Z	V	R	Q	H	D	U	J	I	M
$y_i = \mathbb{Z}_{26}$	25	21	17	16	7	3	20	9	8	12

נחשב את ה- x_i של הטקסט גלוי באמצעות הכלל מפענח:

$$\begin{aligned}
x_1 =& d_8(25) &&= (25-8) \mod 26 = 17 \ , \\
x_2 =& d_{17}(21) &&= (21-17) \mod 26 = 4 \ , \\
x_3 =& d_4(17) &&= (17-4) \mod 26 = 13 \ , \\
x_4 =& d_{13}(16) &&= (16-13) \mod 26 = 3 \ , \\
x_5 =& d_3(7) &&= (7-3) \mod 26 = 4 \ , \\
x_6 =& d_4(3) &&= (3-4) \mod 26 = 25 \ , \\
x_7 =& d_{25}(20) &&= (20-25) \mod 26 = 21 \ , \\
x_8 =& d_{21}(9) &&= (9-21) \mod 26 = 14 \ , \\
x_9 =& d_{14}(8) &&= (8-14) \mod 26 = 20 \ , \\
x_{10} =& d_{20}(12) &&= (12-20) \mod 26 = 18 \ .
\end{aligned}$$

$\mathrm{y} \in C$	Z	V	R	Q	H	D	U	J	I	M
$y_i = \mathbb{Z}_{26}$	25	21	17	16	7	3	20	9	8	12
$x_i = d_{z_i}(y_i)$	17	4	13	3	4	25	21	14	20	18

לבסוף נעבור מאיברים של $\mathbb{Z}_{26}$ דתווים של טקטסט גלוי:

$\mathrm{y} \in C$	Z	V	R	Q	H	D	U	J	I	M
$y_i = \mathbb{Z}_{26}$	25	21	17	16	7	3	20	9	8	12
$x_i = d_{z_i}(y_i)$	17	4	13	3	4	25	21	14	20	18
x	r	e	n	d	e	z	v	o	u	s

■

שיעור 5
צופן RSA

5.1 משפט השאריות הסיני

משפט 5.1 משפט השאריות הסיני

יהיו $m_1, m_2, \ldots, m_r$ שלמים אשר זרים בזוגות ויהיו $a_1, a_2, \ldots, a_r$ שלמים. למערכת של יחסים שקילות

$$\begin{aligned} x =& a_1 \mod m_1 \ , \\ x =& a_2 \mod m_2 \ , \\ & \vdots \\ x =& a_r \mod m_r \ , \end{aligned}$$

קיים פתרון יחיד מודולו $M = m_1 m_2 \cdots m_r$ שניתן על ידי

$$x = \sum_{i=1}^{r} a_i M_i y_i \mod M$$

כאשר $M_i = \frac{M}{m_i}$ ו- $y_i = M_i^{-1} \mod m_i$ לכל $1 \le i \le r$.

דוגמה 5.1

היעזרו במשפט השאריות הסיני כדי לפתור את המערכת

$$\begin{aligned} x =& 22 \mod 101 \ , \\ x =& 104 \mod 113 \ . \end{aligned}$$

פתרון:

$$a_1 = 22 \ , \qquad a_2 = 104 \ , \qquad m_1 = 101 \ , \qquad m_2 = 113 \ .$$

$$M = m_1 m_2 = 11413 \ , \qquad M_1 = \frac{M}{m_1} = 113 \ , \qquad M_2 = \frac{M}{m_2} = 101 \ .$$

$$y_1 = M_1^{-1} \mod m_1 = 113^{-1} \mod 101 \ , y_2 = M_2^{-1} \mod m_2 = 101^{-1} \mod 113 \ .$$

כדי לחשב את האיברים ההופכיים נשתמש בהאלגוריתם המוכלל של אוקליד.

נסמן $a = 113, b = 101$.

$$\begin{aligned} r_0 =& a = 113 \ , \qquad & r_1 = b = 101 \ , \\ s_0 =& 1 \ , & s_1 = 0 \ , \\ t_0 =& 0 \ , & t_1 = 1 \ . \end{aligned}$$

שלב $k=1$:	$r_2 = 113 - 1 \cdot 101 = 12$	$s_2 = 1 - 1 \cdot 0 = 1$	$t_2 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$	$q_1 = 1$
שלב $k=2$:	$r_3 = 101 - 8 \cdot 12 = 5$	$s_3 = 0 - 8 \cdot 1 = -8$	$t_3 = 1 - 8 \cdot (-1) = 9$	$q_2 = 4$
שלב $k=3$:	$r_4 = 12 - 2 \cdot 5 = 2$	$s_4 = 1 - 2 \cdot (-8) = 17$	$t_4 = -1 - 2 \cdot (9) = -19$	$q_3 = 2$
שלב $k=4$:	$r_5 = 5 - 2 \cdot 2 = 1$	$s_5 = -8 - 2 \cdot 17 = -42$	$t_5 = 9 - 2 \cdot (-19) = 47$	$q_4 = 2$
שלב $k=5$:	$r_6 = 2 - 2 \cdot 1 = 0$	$s_6 = 17 - 2 \cdot (-42) = 101$	$t_6 = -19 - 2 \cdot (47) = -113$	$q_5 = 2$

$$\gcd(a,b) = r_5 = 1 \ , \qquad s = s_5 = -42 \ , \qquad t = t_5 = 47 \ .$$

$$ta + sb = -42(113) + 47(101) = 1 \ .$$

מכאן

$$101^{-1} \equiv 47 \mod 113$$

ו-

$$113^{-1} \equiv -42 \mod 101 = 59 \mod 101 .$$

לכן

$$y_1 = M_1^{-1} \mod m_1 = 113^{-1} \mod 101 = 59$$

ו-

$$y_2 = M_2^{-1} \mod m_2 = 101^{-1} \mod 113 = 47$$

$$\begin{aligned} x =& a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 \mod M \\ =& 22 \cdot 113 \cdot 59 + 104 \cdot 111 \cdot 47 \mod 11413 \\ =& 640362 \mod 11413 \\ =& 1234 \ . \end{aligned}$$

■

5.2 משפטים של מספרים ראשוניים

משפט 5.2 קיימים אינסוף מספרים ראשוניים

קיימים אינסוף מספרים ראשוניים.

הוכחה: נוכיח הטענה דרך השלילה.
נניח כי $\{p_1, \ldots, p_n\}$ הוא הקבוצה של כל הראשוניים שקיימים וקבוצה זו נוצרת סופי.
נגדיר השלם $M = (p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n) + 1$.
לפי משפט הפירוק לראשוניים (ראו משפט 1.3 למעלה או משפט 5.3 למטה) M הוא מספר ראשוני או שווה למכפלה של ראשוניים.
M לא מספר ראשוני בגלל ש- $M > p_i$ לכל $1 \leq i \leq n$.
גם לא קיים מספר ראשוני p_i אשר מחלק את M. הרי

$$M \,\%\, p_i = 1 \quad \Rightarrow \quad p_i \nmid M \ .$$

הגענו לסתירה של המשפט הפירוק לראשוניים, לכן קיימים אינסוף מספרים ראשוניים. ■

משפט 5.3 משפט הפירוק לראשוניים

(ראו משפט 1.3) לכל מספר שלם n קיימים שלמים e_i וראשוניים p_i כך ש-

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$$

הוכחה: אינדוקציה. ■

משפט 5.4

אם a, b שלמים זרים (כלומר $\gcd(a, b) = 1$) אז

$$\phi(m \cdot n) = \phi(m) \cdot \phi(n) \ .$$

הוכחה: (להעשרה בלבד)

■

משפט 5.5

אם p מספר ראשוני אז

$$\phi(p^n) = p^n - p^{n-1} \ .$$

הוכחה: נתבונן על $\gcd(p^n, m)$ כאשר m שלם ו- p ראשוני.

האפשרויות היחידות של המחלק המשותף הגדול ביותר $\gcd(p^n, m)$ הן $1, p, p^2, \ldots, p^n$. בסה"כ יש p^n אפשרויות.

$\gcd(p^n, m) > 1$ רק אם $m \in \{p, 2p, 3p, \ldots, p^{n-1}p\}$, כלומר רק אם m שווה לכפולה של p.

מכאן קיימים $p^n - p^{n-1}$ שלמים עבורם $\gcd(p^n, m) = 1$.

■

משפט 5.6 נוסחה לפונקציית אוילר

(ראו משפט 1.4) לכל מספר שלם n בעל פירוק לראשוניים

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$$

פונקציית אוילר ניתנת על ידי

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^{k} \left(p_i^{e_i} - p_i^{e_i - 1}\right) = \left(p_1^{e_1} - p_1^{e_1-1}\right)\left(p_2^{e_2} - p_2^{e_2-1}\right) \ldots \left(p_k^{e_k} - p_k^{e_k-1}\right)$$

הוכחה: משפט 5.4 ו- 5.5. ■

דוגמה 5.2

חשבו את $\phi(24)$

פתרון:

$$24 = 2^3 3^1 \ .$$

לכן

$$\phi(24) = (2^3 - 2^2)(3^1 - 3^0) = (8-4)(3-1) = 8 \ .$$

■

משפט 5.7

אם p מספר ראשוני אז
$$\phi(p) = p - 1 \ .$$

הוכחה: משפט 5.4 ו- 5.5. ■

משפט 5.8

אם p ו- q מספרים ראשוניים שונים אז

$$\phi(p \cdot q) = (p-1)(q-1) \ .$$

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 5.9 המשפט הקטן של פרמה

אם p מספר ראשוני ו- $a \in \mathbb{Z}_p$. אז התנאים הבאים מתקיימים:

1. $a^p \equiv a \mod p$
2. $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$
3. $a^{-1} \equiv a^{p-2} \mod p$

הוכחה:

טענה 1. נוכיח באינדוקציה.

<u>בסיס:</u>

עבור $a=0$ הטענה $0^p \equiv 0 \mod p$ מתקיימת.

<u>מעבר:</u>

נניח כי הטענה מתקיימת עבור a.

$$(a+1)^p = a^p + pa^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} a^{p-2} + \cdots + pa + 1 \equiv a^p + 1 \mod p$$

ההנחת האינדוקציה אומרת ש- $a^p \equiv a \mod p$ לכן

$$(a+1)^p \mod p \equiv a^p + 1 \mod p \equiv (a+1) \mod p$$

כנדרש.

טענה 2. $\gcd(a,p) = 1$ לפיכך קיים איבר הופכי $a^{-1} \in \mathbb{Z}_p$. נכפיל $a^p \equiv 1 \mod p$ ב- a^{-1} אשר הוכחנו בסעיף הקודם:

$$a^{-1}a^p \equiv a^{-1} \cdot a \mod p \qquad \Rightarrow \qquad a^{p-1} \equiv 1 \mod p \ .$$

טענה 3.

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 \equiv a^{p-1} \mod p \quad \Rightarrow \quad a^{-1} \equiv a^{p-2} \mod p \ .$$

■

משפט 5.10 משפט אוילר

אם a,n שלמים ו- $\gcd(a,n) = 1$ אז

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n \ .$$

משפט 5.11

אם a,n שלמים ו- $\gcd(a,n) = 1$ אז

$$a^{-1} \equiv a^{\phi(n)-1} \mod n \ .$$

דוגמה 5.3

חשבו את האיבר ההופכי ל- 5 ב- $\mathbb{Z}_{11}$.

פתרון:

לפי משפט פרמט 5.9:

$$5^{-1} = 5^{11-2} \mod 11 = 5^9 \mod 11 \ .$$

לפי הנוסחת לשארית 1.2 :

$$5^9 \ \% \ 11 = 5^9 - 11 \left\lfloor \frac{5^9}{11} \right\rfloor = 9$$

לכן $5^{-1} \in \mathbb{Z}_{11} = 9$. ■

5.3 אלגוריתם RSA

צופן RSA הומצא בשנה 1977 על ידי Ron Rivest, Adi Shamir and Len Adleman .

הגדרה 5.1 צופן RSA

יהי $n = pq$ כאשר p,q מספרים ראשוניים שונים. תהי הקבוצת טקסט גלוי $P = \mathbb{Z}_n$, והקבוצת טקסט מוצפן $C = \mathbb{Z}_n$. נגדיר קבוצת המפתחות

$$K = \left\{ (n,p,q,a,b) \middle| ab = 1 \mod \phi(n) \right\}$$

לכל $k=(n,p,q,a,b)\in K$, ולכל $x\in P$ ו- $y\in C$ נגדיר כלל מצפין

$$e_k(x)=x^b \mod n \ ,$$

ונגדיר כלל מפענח

$$d_k(x)=y^a \mod n \ .$$

הערכים של n ו- b הם ערכים ציבוריים בעוד p,q,a ערכים סודיים.

משפט 5.12 קריפטו-מערכת RSA ניתן לפענוח

יהי $n=pq$ מספרים ראשוניים שונים, $a,b\in\mathbb{Z}$ שלמים חיוביים כך ש- $ab=1 \mod \phi(n)$.
אם $x\in\mathbb{Z}_n$ אז

$$\left(x^b\right)^a=x \mod n \ .$$

הוכחה: נתון כי $ab=1 \mod \phi(n)$.
לפי משפט 5.8, $\phi(n)=\phi(pq)=(p-1)(q-1)$.
ז"א

$$ab=1 \mod \phi(n)=1 \mod (p-1)(q-1)$$

לכן קיים $t\in\mathbb{Z}$ כך ש-

$$ab-1=t(p-1)(q-1) \ .$$

לכל $z\neq 0\in\mathbb{Z}$ לפי משפט 5.9, $z^{p-1}=1 \mod p$. בפרט

$$x^{ab-1}=x^{t(p-1)(q-1)}=\left(x^{t(q-1)}\right)^{p-1}=y^{p-1}$$

כאשר $y=x^{t(q-1)}$. מכאן $x^{ab-1}=1 \mod p$.

משיקולות של סיימטריה באותה מידה $x^{ab-1}=1 \mod q$.

לכן $x^{ab-1}-1=0 \mod p$ ו- $x^{ab-1}-1=0 \mod q$.

מכיוון ש- p ו- q זרים אז

$$x^{ab-1}-1=0 \mod (pq) \ .$$

לפיכך

$$x^{ab-1}=1 \mod (pq) \ .$$

נכפיל ב- x ונקבל

$$(x^a)^b=x \mod (pq) \ .$$

ז"א הוכחנו כי לכל טקסט גלוי x, אם נצפין אותו ואז אחר כך נפענח את הטקסט מוצפן המתקבל מאלגוריתם RSA, נקבל אותו טקסט גלוי המקורי בחזרה. ■

הגדרה 5.2 אלגוריתם RSA

<u>שלב הרכבת המפתח</u>

נניח שאליס (A) שולחת הודעה לבוב (B).

[1] B יוצר שני מספרים ראשוניים גדולים שונים, p ו- q בסדר גודל של 100 ספרות דצמליות.

[2] B מחשב $n=pq$ ו- $\phi(n)=(p-1)(q-1)$.

[3] B בוחר במספר שלם באופן מקרי $(0 \leq b \leq \phi(n))$ כך ש- $\gcd(b, \phi(n)) = 1$.

[4] B מחשב a כך ש- $a = b^{-1} \mod \phi(n)$ בעזרת האלגוריתם של אוקלידס, (ראו כלל 1.10) ולכן $0 \leq a < \phi(n)$.

[5] B שומר את המפתח ציבורי (b, n) בכתובת קובץ ציבורי, ושומר על המפתח פענוח הפרטי (a, p, q) סודי.

בניית מפתח עשוי פעם אחת.

<u>שלב הצפנה</u>

[6] אליס (A) קוראת את המפתח הצפנה (הציבורי) $k = (b, n)$ מכתובת קובץ הציבורי.

[7] בכדי להצפין הודעה x, $(0 \leq x < n)$ אליס (A) מחשבת $y = x^b \mod n$.

[8] A שולחת טקסט מוצפן ל- B.

[9] בכדי לפענח את הטקסט מוצפן y, בוב (B) משמש במפתח הפרטי שלו $k^{-1} = (a, p, q)$ ומחשב $x = y^a \mod n$.

דוגמה 5.4

בוב בונה צופן RSA עם המפתח ציבורי $(b = 47, p = 127, q = 191)$.

א) חשבו את n, $\phi(n)$ ו- a.

ב) אליס קוראת את המפתח ציבורי (b, n) ומשתמשת בה כדי להצפין את המסר `2468`. מהי הטקסט מוצפן שהיא שולחת לבוב?

ג) כעת בוב מפענח את הטקסט מוצפן שהוא קיבל מאליס בעזרת המפתח (a, p, q). בדקו כי הפענוח של הטקסט מוצפן מסעיף ב' זהה לטקסט גלוי אשר אליס שלחה.

פתרון:

סעיף א)

$$n = pq = 191 \times 127 = 24257$$

$$\phi(n) = \phi(pq) = (p-1)(q-1) = 190 \times 126 = 23940 \ .$$

$a = 47^{-1} \mod 23940$. נשתמש באלגוריתם של אוקליד:

<u>שיטה 1</u>

$a = 23940, b = 47$.

$$\begin{aligned} r_0 &= a = 23940 \ , & r_1 &= b = 47 \ , \\ s_0 &= 1 \ , & s_1 &= 0 \ , \\ t_0 &= 0 \ , & t_1 &= 1 \ . \end{aligned}$$

שלב $k=1$:	$r_2=23940-509\cdot 47=17$	$s_2=1-509\cdot 0=1$	$t_2=0-509\cdot 1=-509$	$q_1=509$
שלב $k=2$:	$r_3=47-2\cdot 17=13$	$s_3=0-2\cdot 1=-2$	$t_3=1-2\cdot(-509)=1019$	$q_2=2$
שלב $k=3$:	$r_4=17-1\cdot 13=4$	$s_4=1-1\cdot(-2)=3$	$t_4=-509-1\cdot(1019)=-1528$	$q_3=1$
שלב $k=4$:	$r_5=13-3\cdot 4=1$	$s_5=-2-3\cdot(3)=-11$	$t_5=1019-3\cdot(-1528)=5603$	$q_4=3$
שלב $k=5$:	$r_6=4-4\cdot 1=0$	$s_6=3-4\cdot(-11)=47$	$t_6=-1528-4\cdot(5603)=-23940$	$q_5=4$

$$\gcd(a,b)=r_5=1\ ,\qquad x=s_5=-11\ ,\qquad y=t_5=5603\ .$$

$$sa+tb=-11(23940)+5603(47)=1\ .$$

מכאן

$$5603(47)=1+11(23940)\quad\Rightarrow\quad 5603(47)=1\mod 23940\quad\Rightarrow\quad 47^{-1}=5603\mod 23940\ .$$

<u>שיטה 2</u>

$$\begin{aligned}23940&=509(47)+17\\47&=2(17)+13\\17&=13+4\\13&=3(4)+1\\4&=4(1)+0\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1&=13-3(4)\\&=13-3(17-13)\\&=4(13)-3(17)\\&=4(47-2(17))-3(17)\\&=4(47)-11(17)\\&=4(47)-11(23940-509(47))\\&=5603(47)-11(23940)\end{aligned}$$

לכן $a^{-1}=5603$.

סעיף ב) אליס שולחת את ההודעה $2468^{47}\mod 24257$. כדי לחשב זה נשתמש בשיטת ריבועים:
$47=32+8+4+2+1$.

$$\begin{aligned}(2468)^2&&=2517\mod 24257\\(2468)^4&=(2517)^2&=4212\mod 24257\\(2468)^8&=(4212)^2&=9077\mod 24257\\(2468)^{16}&=(9077)^2&=15157\mod 24257\\(2468)^{32}&=(15157)^2&=20859\mod 24257\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}
246847 =&(2468)^{32}\times(2468)^{8}\times(2468)^{4}\times(2468)^{2}\times 2468 \mod 24257\\
=&20859\times 9077\times 4212\times 2517\times 2468 \mod 24257\\
=&10642 \mod 24257 \ .
\end{aligned}$$

לכן הטקסט מוצפן הוא $y=10642$.

סעיף ג) $y=10642$.

$$y \mod p = 10642 \mod 127 = 101 \ , \qquad a \mod (p-1) = 5603 \mod 126 = 59 \ .$$

לכן

$$x_1 = (y \mod p)^{a \mod (p-1)} \mod p = 101^{59} \mod 127 = 55$$

(ניתן לחשב זה לפי $101^{32}\times 101^{16}\times 101^{8}\times 101^{2}\times 101$.)

$$\begin{aligned}
(101)^2 & & &\equiv 41 \mod 127\\
(101)^4 &\equiv (41)^2 &\mod 127 &\equiv 30 \mod 127\\
(101)^8 &\equiv (30)^2 &\mod 127 &\equiv 11 \mod 127\\
(101)^{16} &\equiv (11)^2 &\mod 127 &\equiv 121 \mod 127\\
(101)^{32} &\equiv (121)^2 &\mod 127 &\equiv 36 \mod 127
\end{aligned}$$

לכן

$$101^{59} \mod 127 = (101)(41)(11)(121)(36) \mod 127 = 55 \ .$$

$$y \mod q = 10642 \mod 191 = 137 \ , \qquad a \mod (p-1) = 5603 \mod 190 = 93 \ .$$

לכן

$$x_2 = (y \mod q)^{a \mod (q-1)} \mod q = 137^{93} \mod 191 = 176$$

(ניתן לחשב זה לפי $137^{64}\times 137^{16}\times 137^{8}\times 137^{4}\times 137$.)

$$\begin{aligned}
(137)^2 & & &\equiv 51 \mod 191\\
(137)^4 &\equiv (51)^2 &\mod 191 &\equiv 118 \mod 191\\
(137)^8 &\equiv (118)^2 &\mod 191 &\equiv 172 \mod 191\\
(137)^{16} &\equiv (172)^2 &\mod 191 &\equiv 170 \mod 191\\
(137)^{32} &\equiv (170)^2 &\mod 191 &\equiv 59 \mod 191\\
(137)^{64} &\equiv (59)^2 &\mod 191 &\equiv 43 \mod 191
\end{aligned}$$

לכן

$$137^{93} \mod 191 = (137)(118)(172)(170)(43) \mod 191 = 176 \ .$$

בנוסף

$$y \mod q = 9625 \mod 127 = 100 \ , \qquad a \mod (q-1) = 5603 \mod 126 = 59 \ .$$

לכן

$$x_2 = (y \mod q)^{a \mod (q-1)} \mod q = 100^{59} \mod 127 = 87$$

לכן עלינו לפתור את המערכת

$$\begin{aligned} x =& x_1 \mod p = 55 \mod 127 \\ x =& x_2 \mod q = 176 \mod 191 \end{aligned}$$

בעזרת המשפט השאריות הסיני. נסמן $a_1 = 55$, $m_1 = 127$, $a_2 = 176$, $m_2 = 191$.

$$M = m_1 m_2 = (191)(127) = 24257 \ , \qquad M_1 = \frac{M}{m_1} = 191 \ , \qquad M_2 = \frac{M}{m_2} = 127 \ .$$

כעת נחשב $y_1 = M_1^{-1} \mod m_1 = 191^{-1} \mod 127$ ו- $y_2 = M_2^{-1} \mod m_2 = 127^{-1} \mod 191$.

<u>שיטה 1</u>

$a = 191, b = 127$.

$$\begin{aligned} r_0 =& a = 191 \ , \qquad & r_1 = b = 127 \ , \\ s_0 =& 1 \ , & s_1 = 0 \ , \\ t_0 =& 0 \ , & t_1 = 1 \ . \end{aligned}$$

שלב $k = 1$:	$r_2 = 191 - 1 \cdot 127 = 64$	$s_2 = 1 - 1 \cdot 0 = 1$	$t_2 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$	$q_1 = 1$
שלב $k = 2$:	$r_3 = 127 - 1 \cdot 64 = 63$	$s_3 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$	$t_3 = 1 - 1 \cdot (-1) = 2$	$q_2 = 1$
שלב $k = 3$:	$r_4 = 64 - 1 \cdot 63 = 1$	$s_4 = 1 - 1 \cdot (-1) = 2$	$t_4 = -1 - 1 \cdot (2) = -3$	$q_3 = 1$
שלב $k = 4$:	$r_5 = 63 - 63 \cdot 1 = 0$	$s_5 = -1 - 63 \cdot (2) = -127$	$t_5 = 2 - 63 \cdot (-3) = 191$	$q_4 = 63$

$$\gcd(a, b) = r_4 = 1 \ , \qquad s = s_4 = 2 \ , \qquad t = t_4 = -3 \ .$$

$$sa + tb = 2(191) - 3(127) = 1 \ .$$

לכן

$$\begin{aligned} 191^{-1} &\equiv 2 \mod 127 \\ 127^{-1} &\equiv (-3) \mod 191 \equiv 188 \mod 191 \ . \end{aligned}$$

<u>שיטה 2</u>

נחשב $y_1 = 191^{-1} \mod 127$ ו- $y_2 = 127^{-1} \mod 191$ בעזרת האלגוריתם של אוקליד:

$$\begin{aligned} 191 =& 127 \cdot 1 + 64 \\ 127 =& 64 \cdot 1 + 63 \\ 64 =& 63 \cdot 1 + 1 \\ 63 =& 1 \cdot 63 + 0 \ . \end{aligned}$$

לכן $\gcd(191, 127) = 1$.

$$\begin{aligned}1 =&64-63\cdot 1\\ =&64-(127-64\cdot 1)\\ =&64\cdot 2-127\cdot 1\\ =&(191-127\cdot 1)\cdot 2-127\\ =&191\cdot 2+127\cdot(-3)\ .\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}y_1 = M_1^{-1} \mod m_1 &= 127^{-1} \mod 191 \equiv 188 \mod 191\\ y_2 = M_2^{-1} \mod m_2 &= 191^{-1} \mod 127 \equiv 2 \mod 127\ .\end{aligned}$$

נחשב

$$y_1 = M_1^{-1} \mod m_1 = 127^{-1} \mod 191 = 188\ , \qquad y_2 = M_2^{-1} \mod m_2 = 191^{-1} \mod 127 = 2\ .$$

לכן

$$\begin{aligned}y =&a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2\\ =&55(191)(2) + 176(127)(188) \mod 24257\\ =&4223186 \mod 24257\\ =&2468\ .\end{aligned}$$

■

משפט 5.13

יהיו p,q מספרים ראשוניים ויהי $n=pq$. יהי

$$\lambda(n) = \frac{(p-1)(q-1)}{\gcd(p-1,q-1)}\ .$$

נגדיר צופן חדש אשר זהה ל- RSA אלא $\phi(n)$ הוחלף עם $\lambda(n)$ כך ש- $ab\equiv 1 \mod \lambda(n)$. אזי הקריפטו-מערכת ניתן לפענח.

הוכחה:

שלב 1) רושמים את הצופן:

$$\left.\begin{aligned}e_k(x) &= x^b \mod n\\ d_k(y) &= y^a \mod n\end{aligned}\right\} \qquad n=pq\ , \qquad ab\equiv 1 \mod \lambda(n)\ .$$

שלב 2) נתון כי $d=\gcd(p-1,q-1)$. ז"א שקיים p' שלם כך ש-

$$p-1=p'd \quad\Leftrightarrow\quad \frac{p-1}{d}=p' \quad\Leftrightarrow\quad d=\frac{p-1}{p'}\ . \tag{\#1}$$

באותה מידה קיים q' שלם כך ש-

$$q-1=q'd \quad\Leftrightarrow\quad \frac{q-1}{d}=q' \quad\Leftrightarrow\quad d=\frac{q-1}{q'}\ . \tag{\#2}$$

שלב 3)

$$\lambda(n) = \frac{(p-1)(q-1)}{\gcd(p-1,q-1)} = \frac{(p-1)(q-1)}{d}\ .$$

$$\lambda(n) \overset{(\#1)}{=} \frac{(p-1)(q-1)}{\left(\frac{p-1}{p'}\right)} = p'(q-1) \ . \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{p-1}{p'} \ . \qquad (1*)$$

$$\lambda(n) \overset{(\#2)}{=} \frac{(p-1)(q-1)}{\left(\frac{q-1}{q'}\right)} = q'(p-1) \ . \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{p-1}{p'} \ . \qquad (2*)$$

שלב 4) $ab \equiv 1 \mod \lambda(n)$ (נתון) לכן קיים t שלם כך ש-

$$ab = 1 + t\lambda(n) \overset{(2*)}{=} 1 + t(p-1)q' \ .$$

לכן

$$ab - 1 = t(p-1)q' \ .$$

מכאן

$$x^{ab-1}x^{tq'(p-1)} = y^{p-1} \overset{\text{פרמה}}{\equiv} 1 \mod p$$

כאשר $y = x^{tq'}$ והשוויון השני מתקיים בגלל ש- p מספר ראשוני. לפיכך

$$x^{ab-1} \equiv 1 \mod p \ .$$

שלב 5) $ab \equiv 1 \mod \lambda(n)$ (נתון) לכן קיים t שלם כך ש-

$$ab = 1 + t\lambda(n) \overset{(1*)}{=} 1 + t(q-1)p' \ .$$

לכן

$$ab - 1 = t(q-1)p' \ .$$

מכאן

$$x^{ab-1}x^{tp'(q-1)} = z^{q-1} \overset{\text{פרמה}}{\equiv} 1 \mod q$$

כאשר $z = x^{tp'}$ והשוויון השני מתקיים בגלל ש- q מספר ראשוני. לפיכך

$$x^{ab-1} \equiv 1 \mod q \ .$$

שלב 6) מכיוון ש- p, q ראשוניים אז

$$\left.\begin{array}{ll} x^{ab-1} & \equiv 1 \mod q \\ x^{ab-1} & \equiv 1 \mod q \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^{ab-1} \equiv 1 \mod pq$$

לפיכך

$$x^{ab-1} \equiv 1 \mod n \quad \Rightarrow \quad \left(x^b\right)^a \equiv x \mod n$$

כנדרש.

■

שיעור 6
קריפטו-אנליזה

6.1 סוגים של התקפת סייבר

נניח שאליס שולחת הודעה מוצפנת לבוב. ויש גורם עוין, אוסקר, שמנסה לצותת לשיחתם. אנחנו מניחים כי אוסקר מודע לקריפטו-מערכת (הצופן) שבאמצעותה אליס הצפינה את ההודעה. ההנחה הזאת נקראת עקרון קירשוף Kercheoff's principle.

המטרה בהרכבת צופן היא שהצופן מספיק בטוח כך שאוסקר לא יכול לפענח אפילו אם הוא יודע את הסוג של הצופן בשימוש.

ישנם 4 סוגים של התקפת סייבר.

1) **התקפת טקסט מוצפן בלבד.**

למתקיף (אוסקר) יש מחרוזת של טקסט מוצפן y .

2) **התקפת טקסט גלוי ידוע**

למתקיף יש מחרוזת של טקסט גלוי x יחד עם הטקסט מוצפן המתאים y.

3) **התקפת טקסט גלוי נבחר**

למתקיף היכולת להשיג טקסטים גלויים x של טקסטים מוצפנים y כלשהם חפי בחירתו, שהוצפנו באמצעות הקריפטו-מערכת המותקפה.

4) **התקפת טקסט מוצפן נבחר**

למתקיף היכולת להשיג טקסטים מוצפנים y של טקסטים גלויים x כלשהם חפי בחירתו, שהוצפנו באמצעות הקריפטו-מערכת המותקפה.

החלק הבא מתעסק עם התקפת טקסט מוצפן.

6.2 קבוצות אותיות הנפוצים ביותר בטקטסט גלוי

התקפת טקסט מוצפן בלבד מבוסס על ההתדיקויות של אותיות בקטסט גלוי בשפה אנגלית.

כלל 6.1 פונקציית הסתברות של האותיות של האלפיבית

אות	הסתברות
a	0.082
b	0.015
c	0.028
d	0.043
e	0.127
f	0.022
g	0.02
h	0.061
i	0.07
j	0.002
k	0.008
l	0.04
m	0.024

אות	הסתברות
n	0.067
o	0.075
p	0.019
q	0.001
r	0.06
s	0.063
t	0.091
u	0.028
v	0.01
w	0.023
x	0.001
y	0.02
z	0.001

Becker ו- Piper סדרו את האותיות לחמש קבוצות שונות, לפי הסדר גודל של התדירות של האותיות בטקסט גלוי.

כלל 6.2 קבוצות תדירות של אותיות בטקסט גלוי

	אות	הסתברות
1.	e	$p = 0.127$
2.	t,a,o,i,n,s,h,r	$0.06 \lessapprox p \lessapprox 0.09$
3.	d,l	$p \approx 0.04$
4.	c,u,m,w,f,g,y,p,b	$0.015 \lessapprox p \lessapprox 0.028$
5.	v,k,j,x,q,z	$p < 0.01$

כלל 6.3 זוגות אותיות הנפוצים ביותר בטקסט גלוי

השלושים זוגות אותיות הנפוצים ביותר בטקסט גלוי רשומים בטבלה למטה:

th	he	in	er	an	re	ed	on	es	st
en	at	to	nt	ha	nd	ou	ea	ng	as
or	ti	is	et	it	ar	te	se	hi	of

כלל 6.4 קבוצות שלשת אותיות הנפוצים ביותר בטקסט גלוי

ה12 שלשות של אותיות הנפוצים ביותר בטקסט גלוי רשומים בטבלה למטה:

the	ing	and	her	ere	ent
tha	nth	was	eth	for	dth

6.3 קריפטו-אנליזה של צופן האפיני

זו דוגמה של התקפת טקסט מוצפן בלבד.

דוגמה 6.1

נניח כי אליס שלחה הודעה מוצפנת לבוב ואוסקר השיג את ההודעה. הטקסט מוצפן הוא

KARSRROHVUKARPFSZFERXERFKREKAFSKARSRROHVUKARURTVEKARVSR

אוסקר יודע כי אליס הצפינה את ההודעה באמצעות צופן איפיני אבל הוא לא יודע את המפתח. כעת הוא מנסה לפענח אותה. מצאו את הטקסט גלוי.

פתרון:

שלב 1) נרשום את התדירויות של האותיות המופיעות בטקסט מוצפן:

A	6	N	0
B	0	O	2
C	0	P	1
D	0	Q	0
E	4	R	14
F	4	S	5
G	0	T	1
H	2	U	3
I	0	V	4
J	0	W	0
K	7	X	1
L	0	Y	0
M	0	Z	1

שלב 2) נרשום את האותיות הנפוצות ביותר:

- R מופיעה 14 פעמים.
- K מופיעה 7 פעמים.
- A מופיעה 6 פעמים.
- S מופיעה 5 פעמים.
- E,F,V מופיעות 4 פעמים.
- U מופיעה 3 פעמים.

שלב 3) ננסה למצוא את המפתח $k=(a,b)$ $(a,b\in\mathbb{Z}_{26})$ של הכלל מצפין של הצופן אפיני

$$e_k(x)=ax+b\ ,$$

לכל $x\in\mathbb{Z}_{26}$ על ידי **התאמת אותיות הכי נפוצים.**

- נניח כי

$$\mathtt{e}\xrightarrow{e_k}\mathtt{R}\ ,\qquad \mathtt{t}\xrightarrow{e_k}\mathtt{K}\ .$$

- ז"א

$$\begin{aligned} e_k(4)=&17\\ e_k(19)=&10\ . \end{aligned}$$

- נציב $e_k=ax+b$ ונקבל

$$\begin{aligned} 4a+b=17\ ,\\ 19a+b=10\ . \end{aligned}$$

כעת נפתור את המערת מעל $\mathbb{Z}_{26}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17\\ 19 & 1 & 10 \end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17\\ 15 & 0 & -7 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17\\ 15 & 0 & 19 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to 15^{-1}R_2=7R_2}\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17\\ 1 & 0 & 133 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17\\ 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-4R_2}\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 5\\ 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$a=3, b=5$.

$\gcd(a,26)=1$ אז המפתח $k=(3,5)$ תקין.

- נבנה את הכלל מפענח עם המפתח המתקבל:

$$\begin{aligned} d_k(y) =& a^{-1}(y-b) \mod 26 \\ =& 3^{-1}(y-5) \\ =& 9(y-5) \mod 26 \\ =& 9y-45 \mod 26 \\ =& 9y+7 \ . \end{aligned}$$

שלב 4) ננסה לפענח את הטקטסט מצפון עם הכלל מפענח

$y \in C$	K	A	R	S	R	R	O	H	V	U	K	A	R	P	F	S	Z	F	E	R
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	10	0	17	18	17	17	14	7	21	20	10	0	17	15	5	18	25	5	4	17
$x = d_k(y) \in \mathbb{Z}_{26}$	19	7	4	13	4	4	3	18	14	5	19	7	4	12	0	13	24	0	17	4
$x \in P$	t	h	e	n	e	e	d	s	o	t	t	h	e	m	a	n	y	a	r	e

$y \in C$	X	E	R	F	K	R	E	K	A	F	S	K	A	R	S	R	R	O	H
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	23	4	17	5	10	17	4	10	0	5	18	10	0	17	18	17	17	14	7
$x = d_k(y) \in \mathbb{Z}_{26}$	6	17	4	0	19	4	17	19	7	0	13	19	7	4	13	4	4	3	18
$x \in P$	g	r	e	a	t	e	r	t	h	a	n	t	h	e	n	e	e	d	s

$y \in C$	V	U	K	A	R	U	R	T	V	E	K	A	R	V	S	R
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	21	20	10	0	17	20	17	19	21	4	10	0	17	21	18	17
$x = d_k(y) \in \mathbb{Z}_{26}$	14	5	19	7	4	5	4	22	14	17	19	7	4	14	13	4
$x \in P$	o	f	t	h	e	f	e	w	o	r	t	h	e	o	n	e

■

דוגמה 6.2

נניח כי אליס שלחה הודעה מוצפנת לבוב ואוסקר השיג את ההודעה. הטקטס מוצפן הוא

FMXVEDKAPHFERBNDKRXRSREFMORUDSDKDVSHVUFEDKAPRKDLYEVLRHHRH

אוסקר יודע כי אליס השתמשה בצופן איפיני אבל אינו יודע את המפתח . כעת הוא מנסה לפענח אותה. מצאו את הטקטס גלוי.

פתרון:

שלב 1) נרשום את התדירויות של האותיות המופיעות בטקטסט מוצפן:

A	2	N	1
B	1	O	1
C	0	P	2
D	7	Q	0
E	5	R	8
F	4	S	3
G	0	T	0
H	5	U	2
I	0	V	4
J	0	W	0
K	5	X	2
L	2	Y	1
M	2	Z	0

שלב 2) נרשום את האותיות הנפוצות ביותר:

- R מופיעה 8 פעמים.
- D מופיעה 7 פעמים.
- E,H,K מופיעות 5 פעמים.
- F,V מופיעה 4 פעמים.

שלב 3) ננסה למצוא את המפתח $k=(a,b)$ $(a,b\in\mathbb{Z}_{26})$ של הכלל מצפין של הצופן אפיני

$$e_k(x)=ax+b\ ,$$

לכל $x\in\mathbb{Z}_{26}$ על ידי **התאמת אותיות הכי נפוצים.**

- נניח כי
$$\mathtt{e}\xrightarrow{e_k}\mathtt{R}\ ,\qquad \mathtt{t}\xrightarrow{e_k}\mathtt{D}\ .$$
- ז"א
$$\begin{aligned} e_k(4)=&17\\ e_k(19)=&3\ .\end{aligned}$$
- נציב $e_k=ax+b$ ונקבל
$$\begin{aligned} 4a+b&=17\ ,\\ 19a+b&=3\ .\end{aligned}$$

כעת נפתור את המערת מעל $\mathbb{Z}_{26}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c}4&1&17\\19&1&3\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{cc|c}4&1&17\\15&0&-14\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}4&1&17\\15&0&12\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to 15^{-1}R_2=7R_2}\left(\begin{array}{cc|c}4&1&17\\1&0&84\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}4&1&17\\1&0&6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-4R_2}\left(\begin{array}{cc|c}0&1&-7\\1&0&6\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}0&1&19\\1&0&6\end{array}\right)$$

ז"א $a=6,b=19$ המפתח הזה לא תקין בגלל ש- $\gcd(a,26)=2\neq 1$.

- עכשיו נחזור וננסה
$$\mathtt{e}\xrightarrow{e_k}\mathtt{R}\ ,\qquad \mathtt{t}\xrightarrow{e_k}\mathtt{E}\ .$$
- ז"א
$$\begin{aligned} e_k(4)=&17\\ e_k(19)=&4\ .\end{aligned}$$

- נציב $e_k=ax+b$ ונקבל

$$4a+b=17\ ,$$
$$19a+b=4\ .$$

כעת נפתור את המערת מעל $\mathbb{Z}_{26}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 19 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 15 & 0 & -13 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 15 & 0 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to 15^{-1}R_2=7R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 1 & 0 & 91 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 1 & 0 & 13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-4R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -35 \\ 1 & 0 & 13 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 17 \\ 1 & 0 & 13 \end{array}\right)$$

ז"א $a=13, b=17$ המפתח הזה גם לא תקין בגלל ש- $\gcd(a,26)=2\neq 1$.

עכשיו נחזור וננסה

$$\texttt{e} \xrightarrow{e_k} \texttt{R}\ , \qquad \texttt{t} \xrightarrow{e_k} \texttt{H}\ .$$

- ז"א

$$e_k(4)=17$$
$$e_k(19)=7\ .$$

- נציב $e_k=ax+b$ ונקבל

$$4a+b=17\ ,$$
$$19a+b=7\ .$$

כעת נפתור את המערת מעל $\mathbb{Z}_{26}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 19 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 15 & 0 & -10 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 15 & 0 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to 15^{-1}R_2=7R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 1 & 0 & 112 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 1 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-4R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -15 \\ 1 & 0 & 8 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & 13 \end{array}\right)$$

ז"א $a=8, b=11$ המפתח הזה גם לא תקין בגלל ש- $\gcd(a,26)=2\neq 1$.

עכשיו נחזור וננסה

$$\texttt{e} \xrightarrow{e_k} \texttt{R}\ , \qquad \texttt{t} \xrightarrow{e_k} \texttt{K}\ .$$

- ז"א

$$e_k(4)=17$$
$$e_k(19)=10\ .$$

- נציב $e_k=ax+b$ ונקבל

$$4a+b=17\ ,$$
$$19a+b=10\ .$$

כעת נפתור את המערת מעל $\mathbb{Z}_{26}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 19 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 15 & 0 & -7 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 15 & 0 & 19 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to 15^{-1}R_2=7R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 1 & 0 & 133 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-4R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

ז"א $a=3, b=5$.

$\gcd(a,26)=1$ אז המפתח $k=(3,5)$ תקין.

• נבנה את הכלל מפענח עם המפתח המתקבל:

$$\begin{aligned} d_k(y) =& a^{-1}(y-b) \mod 26 \\ =& 3^{-1}(y-5) \\ =& 9(y-5) \mod 26 \\ =& 9y-45 \mod 26 \\ =& 9y+7 \ . \end{aligned}$$

שלב 4) ננסה לפענח את הטקסטט מצפון עם הכלל מפענח

$y \in C$	F	M	X	V	E	D	K	A	P	H	F	E	R	B	N	D	K	R	X	R
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	5	12	23	21	4	3	10	0	15	7	5	4	17	1	13	3	10	17	23	17
$x = d_k(y) \in \mathbb{Z}_{26}$	0	11	6	14	17	8	19	7	12	18	0	17	4	16	20	8	19	4	6	4
$x \in P$	a	l	g	o	r	i	t	h	m	s	a	r	e	q	u	i	t	e	g	e

$y \in C$	S	R	E	F	M	O	R	U	D	S	D	K	D	V	S	H	V	U	F	E
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	18	17	4	5	12	14	17	20	3	18	3	10	3	21	18	7	21	20	5	4
$x = d_k(y) \in \mathbb{Z}_{26}$	13	4	17	0	11	3	4	5	8	13	8	19	8	14	13	18	14	5	0	17
$x \in P$	n	e	r	a	l	d	e	f	i	n	i	t	i	o	n	s	o	f	a	r

$y \in C$	D	K	A	P	R	K	D	L	Y	E	V	L	R	H	H	R	H
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	3	10	0	15	17	10	3	11	24	4	21	11	17	7	7	17	7
$x = d_k(y) \in \mathbb{Z}_{26}$	8	19	7	12	4	19	8	2	15	17	14	2	4	18	18	4	18
$x \in P$	i	t	h	m	e	t	i	c	p	r	o	c	e	s	s	e	s

■

6.4 קריפטו-אנליזה של צופן היל

זו דוגמה של התקפת טקסט גלוי ידוע.

משפט 6.1

נניח שלמתקיף יש מחרוזת טקסטט גלוי x ומחרוזת טקסט מוצפן שלו. נניח כי המתקיף יודע כי הטקסט הוצפן באמצעות צופן היל עם מפתח של סדר m.

נניח שיש למתקיף לפחות m טקסטים גלוים וטקסטים מוצפנים. של הטקסטט גלוי:

$$x_j = (x_{1j} \ , \ x_{2j} \ , \ \ldots \ , \ x_{mj})$$

ו-

$$y_j = (y_{1j} \ , \ y_{2j} \ , \ \ldots \ , \ y_{mj})$$

כך ש- $1 \leq j \leq m$

$$y_j = e_k(x_j) \ .$$

נגדיר שתי מטריצות

$$X = (x_{i,j}) \ , \qquad Y = (y_{i,j}) \ .$$

אם X הפיכה אז
$$Y = XK \qquad \Leftrightarrow \qquad K = X^{-1}Y \ .$$
כאשר $K \in \mathbb{Z}_{26}^{m\times m}$ המפתח של הצופן היל.

דוגמה 6.3

נתון הטקסט גלוי

friday

אשר הוצפן באמצעות צופן היל עם מפתח של סדר $m = 2$. נניח כי הטקסט מוצפן הינו

PQCFKU

מצאו את המפתח של הצופן.

פתרון:

$$(\mathtt{f}\ ,\ \mathtt{r}) \xrightarrow{e_k} (\mathtt{P}\ ,\ \mathtt{Q})\ , \qquad (\mathtt{i}\ ,\ \mathtt{d}) \xrightarrow{e_k} (\mathtt{C}\ ,\ \mathtt{F})\ , \qquad (\mathtt{a}\ ,\ \mathtt{y}) \xrightarrow{e_k} (\mathtt{K}\ ,\ \mathtt{U})$$

ז"א
$$e_k(5,17) = (15,16)\ , \qquad e_k(8,3) = (2,5)\ , \qquad e_k(0,24) = (10,20)\ .$$
נקח את שני טקסטים גלוים וטקסוים מוצפנים המתאימיפו נגדיר את המטריצות
$$X = \begin{pmatrix} 5 & 17 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}\ , \qquad Y = \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\ .$$
אזי
$$K = X^{-1}Y\ .$$
נחשב את ההופכית X^{-1} באמצעות נוסחת קיילי $X^{-1} = |X|^{-1}\mathrm{adj}(X)$.
$$\begin{aligned} |X| =& 15 - 136 \mod 26 \\ =& -121 \mod 26 \\ =& -4(26) - 17 \mod 26 \\ =& -17 \mod 26 \\ =& 9 \mod 26\ . \end{aligned}$$
לכן
$$|K|^{-1} \mod 26 = 9^{-1} \mod 26 = 3.$$
המטריצת הקופקטורים של X היא $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$ כאשר
$$C_{11} = 3\ , \qquad C_{12} = -8\ , \qquad C_{21} = -17\ , \qquad C_{22} = 5\ .$$
לכן
$$C = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -17 & 5 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{adj}(X) = C^t = \begin{pmatrix} 3 & -17 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \mod 26 = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 18 & 5 \end{pmatrix}\ .$$
לבסוף נקבל
$$X^{-1} = 3\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 18 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 27 \\ 54 & 15 \end{pmatrix} \mod 26 = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 15 \end{pmatrix}\ .$$

לפיכך

$$\begin{aligned} K &= \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \mod 26 \\ &= \begin{pmatrix} 137 & 149 \\ 60 & 107 \end{pmatrix} \mod 26 \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 19 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

■

דוגמה 6.4

נתון הטקסט גלוי

theresnoplacelikehome

אשר הוצפן באמצעות צופן היל עם מפתח של סדר $m=3$. נניח כי הטקסט מוצפן הינו

FHVTUTGQVRWPCPSFGGAMG

מצאו את המפתח של הצופן.

פתרון:

$$(\texttt{t , h , e}) \xrightarrow{e_k} (\texttt{F , H , V}) , \qquad (\texttt{r , e , s}) \xrightarrow{e_k} (\texttt{T , U , T}) , \qquad (\texttt{n , o , p}) \xrightarrow{e_k} (\texttt{G , Q , V})$$

ז"א

$$e_k(19,7,4) = (5,7,21) , \qquad e_k(17,4,18) = (19,20,19) , \qquad e_k(13,14,15) = (6,16,21) .$$

נקח את שני טקסטים גלוים וטקסוים מוצפנים המתאימיפו נגדיר את המטריצות

$$X = \begin{pmatrix} 19 & 7 & 4 \\ 17 & 4 & 18 \\ 13 & 14 & 15 \end{pmatrix} , \qquad Y = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 21 \\ 19 & 20 & 19 \\ 6 & 16 & 21 \end{pmatrix} .$$

אזי

$$K = X^{-1} Y .$$

נחשב את ההופכית X^{-1} באמצעות נוסחת קיילי $X^{-1} = |X|^{-1}\text{adj}(X)$.

$$\begin{aligned} |X| &= 15 - 136 \mod 26 \\ &= -3051 \mod 26 \\ &= 17 . \end{aligned}$$

לכן

$$|K|^{-1} \mod 26 = 17^{-1} \mod 26 = 23.$$

המטריצת הקופקטורים של X היא

$$C = \begin{pmatrix} -192 & -21 & 186 \\ -49 & 233 & -175 \\ 110 & -274 & -43 \end{pmatrix} \mod 26 = \begin{pmatrix} 16 & 5 & 4 \\ 3 & 25 & 7 \\ 6 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

לכן

$$\mathrm{adj}(X) = C^t = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 6 \\ 5 & 25 & 12 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix} .$$

לבסוף נקבל

$$X^{-1} = 23 \begin{pmatrix} 16 & 3 & 6 \\ 5 & 25 & 12 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 368 & 69 & 138 \\ 115 & 575 & 276 \\ 92 & 161 & 207 \end{pmatrix} \mod 26 = \begin{pmatrix} 4 & 17 & 8 \\ 11 & 3 & 16 \\ 14 & 5 & 25 \end{pmatrix} .$$

לפיכך

$$\begin{aligned} K =& X^{-1} \cdot Y \mod 26 \\ =& \begin{pmatrix} 4 & 17 & 8 \\ 11 & 3 & 16 \\ 14 & 5 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & 21 \\ 19 & 20 & 19 \\ 6 & 16 & 21 \end{pmatrix} \mod 26 \\ =& \begin{pmatrix} 391 & 496 & 575 \\ 208 & 393 & 624 \\ 315 & 598 & 914 \end{pmatrix} \mod 26 \\ =& \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

■

6.5 מדד צירוף המקרים

הגדרה 6.1 מדד צירוף המקרים I_c

נתון מחרוזת של טקסט גלוי $\mathrm{x} = x_1 x_2 \cdots x_n$ של אורך n.

המדד צירוף המקרים של x מסומן $I_c(\mathrm{x})$ ומוגדר להיות ההסתברות ששתי אותיות הנבחרות באקראי מתוך x יהיו זהות.

משפט 6.2 נוסחה לחישוב המדד צירוף המקרים

נתון מחרוזת של טקסט גלוי $\mathrm{x} = x_1 x_2 \cdots x_n$ של אורך n.
יהי f_k מספר הפעמים שהאות מספר k באלפבית מופיעה במחרוזת x. למשל, f_0 מסמן את מסםר הפעמים שהאות a מופיעה, f_1 מסמן את מסםר הפעמים שהאות b מופיעה, וכן הלא.

מספר הדרכים לבחור שתי אותיות מתוך n אותיות של x ללא החזרה ניתן על ידי

$$\binom{n}{2} .$$

לכן לכל $0 \leq k \leq 25$ יש $\binom{f_k}{2}$ דרכים לבחור שתי אותיות k מתוך x.

המדד צירוף המקרים של הטקסט גלוי x נתון על ידי הנוסחה

$$I_c(\mathrm{x})=\frac{\sum\limits_{k=0}^{25}\binom{f_k}{2}}{\binom{n}{2}}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{25}f_k\left(f_k-1\right)}{n(n-1)}\ .$$

משפט 6.3 מדד צירוף המקרים בטקסט גלוי

נניח כי $\mathrm{x}=x_1x_2\cdots x_n$ הוא טקסטס של n אותיות.
נסמן ב- $p_0,p_1,\ldots,p_{25}$ ההסתברויות של האותיות כמפורט למטה:

אות	p_i
a	0.082
b	0.015
c	0.028
d	0.043
e	0.127
f	0.022

אות	p_i
g	0.02
h	0.061
i	0.07
j	0.002
k	0.008
l	0.04

אות	p_i
m	0.024
n	0.067
o	0.075
p	0.019
q	0.001
r	0.06

אות	p_i
s	0.063
t	0.091
u	0.028
v	0.01
w	0.023
x	0.001
y	0.02
z	0.001

המדד צירוף המקרים מצופה להיות

$$I_c(\mathrm{x})\approx\sum_{k=0}^{25}p_k^2=0.065\ .$$

6.6 קריפטו-אנליזה של צופן ויז'נר - מבחן פרידמן

דוגמה 6.5

נתון הטקטסט מוצפן

```
MOKSMNXBIUCMQXGCAXOFXMUWLNRNSFMIQBHNCFCGDTAHANTTIJNIERGCHURYHOGGSWTMP
CCOYISKOGXLQAFMVXNFEDAEMHQTNAAQXUDIXXRSILCIZKGWEFLAWGUJAOAUPLXRQTGATPS
MKLQSWRGTXJNPXEUNSYIACRGWLQEIMDUBQQGAEEYULEEWXDLIIDUHQOFXWEAZJTUOFXWKS
MTNAAFXTTMFPMUWLNRNSFMOBIJJTUSFPRMRVBLMQXXRURKCAZGWCWAAGADECGDMMCZJVQS
NNRTISADILALHOEFWOFTGBSUFDHHMZWJNKWAPNUJALAZGWCOKSMXRMRQXNQMFHOGVGAGMR
AIAFMGWCMRQXUMJXXRPXGCAWILQAFGZJNOIQXUMVWZUUXWAISLLVIEXWABARVHOGEJNWAV
LQMAVWCOYISUIHIK
```

שהוצפן באמצעות צופן ויז'נר עם מפתח של אורך 5. מצאו את המפתח ואת הטקטס גלוי.

פתרון:

שלב 1: נפרק את הטקסט לעמודות של 3 אותיות

y_1	M	N	C	C	X	N	M	N	D	N	N	C	H	W	C	K	Q	X	A	T	X	X	C	W	W	O	X	A	K	R	··
y_2	O	X	M	A	M	R	I	C	T	T	I	H	O	T	O	O	A	N	E	N	U	R	I	E	G	A	R	T	L	G	··
y_3	K	B	Q	X	U	N	Q	F	A	T	E	U	G	M	Y	G	F	F	M	A	D	S	Z	F	U	U	Q	P	Q	T	··
y_4	S	I	X	O	W	S	B	C	H	I	R	R	G	P	I	X	M	E	H	A	I	I	K	L	J	P	T	S	S	X	··
y_5	M	U	G	F	L	F	H	G	A	J	G	Y	S	C	S	L	V	D	Q	Q	X	L	G	A	A	L	G	M	W	J	··

שלב 2: נחשב את המדד המשותף של כל שורה

יהיו f_i התדירויות של האותיות במחרוזת y_i ונניח כי האורך של y_i הוא n. אזי הפונקציות הסתברות של האותיות ב- y_i הן

$$\frac{f_0}{n}, \dots, \frac{f_{25}}{n} .$$

כל רצף אותיות y_i מתקבל על ידי הזזה קבועה של k_i מקומות של הטקסט גלוי. לפי זה, הפונקציות הסבתרות של האותיות המוזזות,

$$\frac{f_{k_i}}{n}, \dots, \frac{f_{25+k_i}}{n} ,$$

תהיו קרובות להסתברויות $p_0, \dots, p_{25}$ של אותיות בטקסט גלוי.
כעת נגדיר את המדד המשותף

$$M_g(\mathrm{y}_i) = \sum_{i=0}^{25} \frac{p_i f_{i+g}}{n} .$$

לכל $0 \leq g \leq 25$. אם $g = k_i$ אז

$$M_g(\mathrm{y}_i) \approx \sum_{i=0}^{25} p_i^2 = 0.065 .$$

על פי זה נבדוק את המדד המשותף לכל y_i ולכל $0 \leq g \leq 25$:

<u>y_1</u>

a	0.0336437	b	0.0285977	c	0.0381264	d	0.0335977
e	0.0374943	f	0.0414023	g	0.0374138	h	0.034046
i	0.0388046	j	0.0647931	k	0.0382184	l	0.0352414
m	0.0347586	n	0.0328391	o	0.0302759	p	0.0468161
q	0.0384253	r	0.0272184	s	0.0344828	t	0.0484253
u	0.0454598	v	0.0395747	w	0.0457011	x	0.0391839
y	0.0390345	z	0.0374253				

<u>y_2</u>

a	0.0602644	b	0.0361839	c	0.0321264	d	0.0373333
e	0.0423333	f	0.0316092	g	0.0397816	h	0.0383333
i	0.0391954	j	0.0425057	k	0.0407586	l	0.0352759
m	0.037	n	0.0468046	o	0.0396092	p	0.0426207
q	0.0327931	r	0.0309655	s	0.0317816	t	0.0412529
u	0.0371609	v	0.0383218	w	0.0422989	x	0.0324828
y	0.0340575	z	0.0381494				

$\underline{y_3}$

a	0.0396092	b	0.046931	c	0.0417011	d	0.0312299
e	0.0352069	f	0.0387701	g	0.0417816	h	0.0348161
i	0.0475402	j	0.0337356	k	0.0285977	l	0.030977
m	0.0625517	n	0.0407816	o	0.0315977	p	0.029931
q	0.0469885	r	0.0332989	s	0.0376782	t	0.042977
u	0.041954	v	0.0300115	w	0.036069	x	0.0395287
y	0.039931	z	0.0368046				

$\underline{y_4}$

a	0.0459655	b	0.0364483	c	0.0323908	d	0.0362184
e	0.0632644	f	0.0395747	g	0.0334598	h	0.0316092
i	0.0438276	j	0.0342414	k	0.0386437	l	0.0336092
m	0.0323333	n	0.0371379	o	0.045092	p	0.0466207
q	0.0363448	r	0.0403678	s	0.0388851	t	0.0392874
u	0.035954	v	0.0374253	w	0.0336207	x	0.0362069
y	0.0.0372529	z	0.0352184				

$\underline{y_5}$

a	0.0288046	b	0.0362529	c	0.0446322	d	0.0437586
e	0.037069	f	0.0421839	g	0.0347931	h	0.0410805
i	0.0387126	j	0.036977	k	0.0274253	l	0.0331839
m	0.0445172	n	0.0405172	o	0.0408391	p	0.0345977
q	0.0306897	r	0.0342759	s	0.064046	t	0.0436322
u	0.0348161	v	0.0311494	w	0.0374368	x	0.0362414
y	0.0438046	z	0.0395632				

ננסה לפענח את הטקסט מוצפן עם המפתח

JAMES

ונקבל את התשובה

doyouexpectmetotalknomisterbondiexpectyoutodiethereisnothingyoucantalk
tomeaboutthatidontalreadyknowyoureforgettingonethingififailtoreportdou
bleoeightreplacesmeitrusthewillbemoresuccessfulwellheknowswhatiknowyou
knownothingmisterbondoperationgrandslamforinstancetwowordsyoumayhaveov
erheardwhichcannotpossiblyhaveanysignificancetoyouoranyoneinyourorgani
zationcanyouaffordtotakethatchanceyouarequiterightmisterbondyouarewort
hmoretomealives

עם רווחים וסימני פיסוק:

Do you expect me to talk? No, Mister Bond, I expect you to die. There is nothing you can talk to me about that I don't already know. You're forgetting one thing: if I fail to report, Double-O Eight replaces me. I trust he will be more successful. Well, he knows what I know. You know nothing, Mister Bond. Operation Grand Slam, for instance. Two words you may have overheard, which cannot possibly have any significance to you or anyone in your organization. Can you afford to take that chance? You are quite right, Mister Bond. You are worth more to me alive.

```python
def letterToZ26(a):
    if a.isalpha():
        if a.isupper():
            return ord(a) - 65
        if a.islower():
            return ord(a) - 97

def Z26ToUpperLetter(a):
    return chr(a+65)

def Z26ToLowerLetter(a):
    return chr(a+97)

probabilities = [0.082, 0.015, 0.028, 0.043, 0.127, 0.022, 0.02, 0.061, 0.07, 0.002,
    0.008, 0.04, 0.024, 0.067, 0.075, 0.019, 0.001, 0.06, 0.063, 0.091,  0.028, 0.01,
    0.023, 0.001, 0.02, 0.001]

alphabetLower = ['a','b','c','d','e','f','g','h','i','j','k','l','m','n','o','p','q',
    'r','s','t','u','v','w','x','y','z']
alphabetUpper = ['A','B','C','D','E','F','G','H','I','J','K','L','M','N','O','P','Q',
    'R','S','T','U','V','W','X','Y','Z']

def P(a):
    i = alphabetLower.index(a)
    return probabilities[i]

cipherText = "
    MOKSMNXBIUCMQXGCAXOFXMUWLNRNSFMIQBHNCFCGDTAHANTTIJNIERGCHURYHOGGSWTMPCCOYISKOGXLQAFMVXNFEDAE
    "

cipherTextList = list(cipherText)

y= [None]*5
for i in range(0,6):
    y[i] = cipherTextList[i::5]

```

```python
print( len(y[0]) == len(y[1]) == len(y[2]) ==  len(y[3]) == len(y[4]) )

f = [None]*26

n = len(y[0])

My = [None]*5

for k, yi in enumerate(y):
    for i,X in enumerate(alphabetUpper):
            f[i] = yi.count(X)

    A = [None]*26

    for g in range(0,26):
        Sum = 0;
        b = alphabetLower[g]

        for i in range(0,26):
            a = alphabetLower[i]
            Sum += P(a)*f[(i+g) % 26]

        Sum = Sum / n

        A[g] = [b , Sum   ]

    My[k] = A

keyWord = 'james'

keyZ26 = [letterToZ26(a) for a in list(keyWord)]

Y = [letterToZ26(a) for a in cipherTextList]

X = []

for i,y in enumerate(Y):
    x = ( y - keyZ26[ i%5 ] ) % 26
    X.append(x)

plainTextList = [Z26ToLowerLetter(a) for a in X]
plainText = ''.join(plainTextList)
```

■

שיעור 7
סודיות מושלמת

7.1 סודיות מושלמת

נתונה קריפטו-מערכת
$$(X, Y, K, E, D)$$
כאשר X הקבוצה של כל טקסטים גלויים האפשריים, Y הקבוצה של כל טקסטים מוצפנים האפשריים, K הקבוצה של כל המפתחות האפשריים, E הקבוצה של כל כללי מצפין האפשריים ו- D הקבוצה של כל כללי מפענח האפשריים.

אנחנו נתייחס לטקסטים גלויים
$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$
כמשתנה מקרי (מ"מ) בדיד, אשר ערכו שווה לתוצאה של בחרית טקסט גלוי. כמו כן נתייחס למפתחות
$$K = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$$
כמשתנה מקרי בדיד אשר ערכו שווה למפתח הנבחר.

נסמן את הפונקציית הסתברות של הטקסט גלוי ב-
$$P_X(x_i) = P(X = x_i) \ .$$
כלומר $P(X = x_i)$ מסמן את ההסתברות לבחור את הטקסט גלוי x מתוך X.
נסמן את הפונקציית הסתברות של המפתחות ב-
$$P_K(k_i) = P(K = k_i) \ .$$
כלומר $P(K = k_i)$ הוא ההסתברות לבחור את המפתח k_i מתוך K.

הטקסט מוצפן $Y = y$ המתקבל באמצעות הטקסט גלוי $X = x$ הנבחר והמתפח $K = k$ הנבחר הוא גם משתנה מקרי בדיד שמוגדר
$$Y(k) = \left\{ e_k(x) \middle| \ x \in X \right\} \ .$$
ז"א $Y(k)$ מייצג את קבוצת כל הטקסטעם המוצפנים האפשריים המתקבלים על ידי המפתח $k \in K$.
לפיכך, ההסתרות ש- $Y = y$ כאשר y מתקבל על ידי להצפין הטקסט גלוי x באמצעות המפתח k היא
$$P(Y = y) = \sum_{k \in K} P(K = k) P\left(X = d_k(y)\right) \ . \tag{7.1}$$

ההסתברות מותנית $P(Y = y | X = x)$, כלומר ההסתברות לקבל הטקסט מוצפן y בידיעה כי הטקסט גלוי הוא x, היא בדיוק ההסתברות לבחור מפתח מסוים k אשר באמצעותו מקבלים y על ידי להצפין x עם המפתח זה k.
$$P(Y = y | X = x) = \sum_{\substack{k \in K \\ x = d_k(y)}} P(K = k) \ . \tag{7.2}$$

מכאן, לפי נוסחת בייס, $P(X=x|Y=y)=\dfrac{P(Y=y|X=x)P(X=x)}{P(Y=y)}$. נציב את משוואת (7.1) ומשוואות (7.2) ונקבל את הביטוי

$$P(X=x|Y=y)=\frac{P(X=x)\displaystyle\sum_{\substack{k\in K\\ x=d_k(y)}}P(K=k)}{\displaystyle\sum_{k\in K}P(K=k)P\left(X=d_k(y)\right)}\ . \tag{7.3}$$

דוגמה 7.1

נתונה קבוצת טקסט גלוי $X=\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$ עם פונקצית הסתברות

$$P(X=\mathtt{a})=\frac{1}{4}\ ,\quad P(X=\mathtt{b})=\frac{3}{4}\ ,$$

נתונה קבוצת מפתחות $K=\{k_1,k_2,k_3\}$ עם פונקצית הסתברות

$$P(K=k_1)=\frac{1}{2}\ ,\quad P(K=k_2)=P(K=k_3)=\frac{1}{4}\ .$$

ונתונה קבוצת טקסט מוצפן

$$Y=\{1,2,3,4\}\ .$$

נניח כי הכלל מצפין מוגדר כך ש-

$$e_{k_1}(\mathtt{a})=1\ ,\quad e_{k_1}(\mathtt{b})=2\ ,\quad e_{k_2}(\mathtt{a})=2\ ,\quad e_{k_2}(\mathtt{b})=3\ ,\quad e_{k_3}(\mathtt{a})=3\ ,\quad e_{k_3}(\mathtt{b})=4\ .$$

מצאו את $P(X=x|Y=y)$ לכל $x\in X$ ולכל $y\in Y$.

פתרון:

אפשר לייצג את הקריפטו-מערכת כמטריצת הצפנה:

$K \backslash X$	a	b
k_1	1	2
k_2	2	3
k_3	3	4

נחשב את הפונקצית ההסתברות של Y:

$$\begin{aligned}P(Y=1)=&P(K=k_1)P\left(X=d_{k_1}(1)\right)+P(K=k_2)P\left(X=d_{k_2}(1)\right)+P(K=k_3)P\left(X=d_{k_3}(1)\right)\\=&P(K=k_1)P\left(X=\mathtt{a}\right)+P(K=k_2)P\left(X=\emptyset\right)+P(K=k_3)P\left(X=\emptyset\right)\\=&\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+0+0\\=&\frac{1}{8}\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(Y=2) =& P(K=k_1)P\left(X=d_{k_1}(2)\right)+P(K=k_2)P\left(X=d_{k_2}(2)\right)+P(K=k_3)P\left(X=d_{k_3}(2)\right)\\
=& P(K=k_1)P\left(X=\texttt{b}\right)+P(K=k_2)P\left(X=\texttt{a}\right)+P(K=k_3)\cdot P\left(X=\emptyset\right)\\
=& \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\\
=& \frac{7}{16}\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(Y=3) =& P(K=k_1)P\left(X=d_{k_1}(3)\right)+P(K=k_2)P\left(X=d_{k_2}(3)\right)+P(K=k_3)P\left(X=d_{k_3}(3)\right)\\
=& P(K=k_1)\cdot P\left(X=\emptyset\right)+P(K=k_2)P\left(X=\texttt{b}\right)+P(K=k_3)\cdot P\left(X=\texttt{a}\right)\\
=& \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\\
=& \frac{1}{4}\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(Y=4) =& P(K=k_1)P\left(X=d_{k_1}(4)\right)+P(K=k_2)P\left(X=d_{k_2}(4)\right)+P(K=k_3)P\left(X=d_{k_3}(4)\right)\\
=& P(K=k_1)\cdot P\left(X=\emptyset\right)+P(K=k_2)\cdot P\left(X=\emptyset\right)+P(K=k_3)\cdot P\left(X=\texttt{b}\right)\\
=& \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\\
=& \frac{3}{16}\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X=\texttt{a}|Y=1) =& \frac{P(Y=1|X=\texttt{a})P(X=\texttt{a})}{P(Y=1)}\\
=& \frac{P(Y=1|X=\texttt{a})\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{8}\right)}\\
=& 2\sum_{\substack{k\in K\\ \texttt{a}=d_k(1)}} P(K=k)\\
=& 2P(K=k_1)\\
=& 1\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X=\texttt{b}|Y=1) =& \frac{P(Y=1|X=\texttt{b})P(X=\texttt{b})}{P(Y=1)}\\
=& \frac{P(Y=1|X=\texttt{b})\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{1}{8}\right)}\\
=& 6\sum_{\substack{k\in K\\ \texttt{b}=d_k(1)}} P(K=k)\\
=& 6\cdot 0\\
=& 0\ .
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(X = \texttt{a}|Y = 2) =& \frac{P(Y = 2|X = \texttt{a})P(X = P\left(X = \texttt{a}\right))}{P(Y = 2)} \\
=& \frac{P(Y = 2|X = \texttt{a})\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{7}{16}\right)} \\
=& \frac{4}{7} \sum_{\substack{k \in K \\ \texttt{a} = d_k(2)}} P(K = k) \\
=& \frac{4}{7} P(K = k_2) \\
=& \frac{1}{7} \ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X = \texttt{b}|Y = 2) =& \frac{P(Y = 2|X = \texttt{b})P(X = \texttt{b})}{P(Y = 2)} \\
=& \frac{P(Y = 2|X = \texttt{b})\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{7}{16}\right)} \\
=& \frac{12}{7} \sum_{\substack{k \in K \\ \texttt{b} = d_k(2)}} P(K = k) \\
=& \frac{12}{7} P(K = k_1) \\
=& \frac{6}{7} \ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X = \texttt{a}|Y = 3) =& \frac{P(Y = 3|X = \texttt{a})P(X = \texttt{a})}{P(Y = 3)} \\
=& \frac{P(Y = 3|X = \texttt{a})\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)} \\
=& \sum_{\substack{k \in K \\ \texttt{a} = d_k(3)}} P(K = k) \\
=& P(K = k_3) \\
=& \frac{1}{4} \ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X = \texttt{b}|Y = 3) =& \frac{P(Y = 3|X = \texttt{b})P(X = \texttt{b})}{P(Y = 3)} \\
=& \frac{P(Y = 3|X = \texttt{b})\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)} \\
=& 3 \sum_{\substack{k \in K \\ \texttt{b} = d_k(3)}} P(K = k) \\
=& 3P(K = k_2) \\
=& \frac{3}{4} \ .
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
P(X=\texttt{a}|Y=4) =& \frac{P(Y=4|X=\texttt{a})P(X=\texttt{a})}{P(Y=4)}\\
=& \frac{P(Y=4|X=\texttt{a})\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{3}{16}\right)}\\
=& \frac{4}{3}\sum_{\substack{k\in K\\ \texttt{a}=d_k(4)}} P(K=k)\\
=& \frac{4}{3}\cdot 0\\
=& 0\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X=\texttt{b}|Y=4) =& \frac{P(Y=4|X=\texttt{b})P(X=\texttt{b})}{P(Y=4)}\\
=& \frac{P(Y=4|X=\texttt{b})\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{3}{16}\right)}\\
=& 4\sum_{\substack{k\in K\\ \texttt{b}=d_k(4)}} P(K=k)\\
=& 4P(K=k_3)\\
=& \frac{1}{4}\\
=& 1\ .
\end{aligned}$$

■

דוגמה 7.2 (משך של דוגמה 7.1)

$$\begin{aligned}
H(X) =& -P(X=\ \texttt{a})\log_2 P(X=\ \texttt{a}) - P(X=\ \texttt{b})\log_2 P(X=\ \texttt{b})\\
=& -\frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4}\log_2\left(\frac{3}{4}\right)\\
=& -\frac{1}{4}(-2) - \frac{3}{4}(\log_2 3 - \log_2 4)\\
=& \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\log_2 3 + \frac{6}{4}\\
=& 2 - \frac{3}{4}\log_2 3\\
\approx& 0.81\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(K) =& -P(K=k_1)\log_2 P(K=k_1) - P(K=k_2)\log_2 P(K=k_2) - P(K=k_3)\log_2 P(K=k_3)\\
=& -\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{4}\right)\\
=& -\frac{1}{2}(-1) - \frac{1}{4}(-2) - \frac{1}{4}(-2)\\
=& 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\\
=& \frac{3}{2}\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(Y) =& - P(Y=1)\log_2 P(Y=1) - P(Y=2)\log_2 P(Y=2) - P(Y=3)\log_2 P(Y=3)\\
&- P(Y=4)\log_2 P(Y=4)\\
=& - \frac{1}{8}\log_2\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{7}{16}\log_2\left(\frac{7}{16}\right) - \frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{16}\log_2\left(\frac{3}{16}\right)\\
=&\frac{27}{8} - \frac{7}{16}\log_2 7 - \frac{3}{16}\log_2 3\\
\approx& 1.85\ .
\end{aligned}$$

הגדרה 7.1 סודיות מושלמת

אומרים כי לקריפטו-מערכת יש סודיות מושלמת אם

$$P(X=x|Y=y) = P(X=x)$$

לכל $x \in X$, $y \in Y$.

ז"א ההסתברות כי הטקסט גלוי $X=x$, בידיעה כי הטקסט מוצפן $Y=y$ שווה רק להסתברות כי הטקסט גלוי הוא $X=x$ והבחירה של המפתח שבאמצעותו מתקבל הטקסט מוצפן y לא משפיע על ההסתברות כי הטקסט גלוי $X=x$.

משפט 7.1 תנאי לסודיות מושלמת של צופן קיסר

אם לכל מפתח $k \in K$ בצופן קיסר יש הסתברות שווה, כלומר

$$P(K=k) = \frac{1}{26}\ .$$

אז לצופן קיסר יש סודיות מושלמת.

הוכחה: תחילה נחשב את ההסתברות $P(Y=y)$ באמצעות (7.1). הקבוצת מפתחות בצופן קיסר היא

$$K = \{0,1,\ldots,25\} = \mathbb{Z}_{26}\ .$$

לכן

$$P(Y=y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_{26}} P(K=k)P\left(X=d_k(y)\right)\ .$$

אם ההסתברות של כל מפתח שווה אז $P(K=k) = \frac{1}{26}$ ולכן

$$P(Y=y) = \frac{1}{26}\sum_{k\in\mathbb{Z}_{26}} P\left(X=d_k(y)\right)\ .$$

הכלל מצפין והכלל מפענח של צופן קיסר מוגדרים

$$e_k(x) = x+k \mod 26\ ,\qquad d_k(y) = y-k \mod 26\ .$$

כאשר $k \in \mathbb{Z}_{26}$. לכן $P(X=d_k(y)) = P(X=y-k \mod 26)$. לפיכך

$$P(Y=y) = \frac{1}{26}\sum_{k\in\mathbb{Z}_{26}} P\left(X=y-k \mod 26\right)\ .$$

הסכום בצד הימין הוא רק סכום של $P(X=k)$ מעל כל האיברים k ב- $\mathbb{Z}_{26}$. לכן

$$P(Y=y)=\frac{1}{26}\sum_{k\in\mathbb{Z}_{26}}P\left(X=k\right)=\frac{1}{26}\cdot 1=\frac{1}{26}\ .$$

כאשר בשוויון השני השתמשנו בתכונת הנרמול של הפונקצית הסתברות של המ"מ X.

מצד שני, לפי (7.2),

$$P(Y=y|X=x)=\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}_{26}\\ x=d_k(y)}}P(K=k)$$

האילוץ על הסכום $x=d_k(y)$ אומר ש-

$$x=k-y\mod 26\qquad\Rightarrow\qquad k=x+y\mod 26\ .$$

לכל $X\in x$ ולכל $Y\in y$ קיים רק מפתח אחד אשר מקיים תנאי זה. ז"א רק איבר אחד של הסכום נשאר ולפיכך

$$P(Y=y|X=x)=\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}_{26}\\ x=d_k(y)}}P(K=k)=P(K=y-x\mod 26)\ .$$

אם ההסתברות של כל מפתח שווה, כלומר אם $P_K(k)=\dfrac{1}{26}$ לכל $k\in K$, אז

$$P(Y=y|X=x)=P(K=y-x\mod 26)=\frac{1}{26}\ .$$

לכן

$$P(Y=y)=\frac{1}{26}=P(Y=y|X=x)$$

ז"א לצופן קיסר יש סודיות מושלמת. ■

במילים פשוטות צופן קיסר אינו ניתן לפענח בתנאי שמשתמשים במפתח מקרי חדש כל פעם שמצפינים אות אחד של טקסט גלוי.

למה 7.1 תנאי חילופי לסודיות מושלמת

לפי נוסחת בייס אם לקריפטו-מערכת יש סודיות מושלמת אז מתקיים גם

$$P(Y=y|X=x)=P(Y=y)\ . \tag{7.4}$$

למה 7.2

נתונה קריפטו-מערכת בעלת סודיות מושלמת.

אם $P(Y=y)>0$ אז

1) קיים לפחות מפתח אחד $k\in K$ כך ש- $e_k(x)=y$

2) $|K|\geq|Y|$.

הוכחה:

1) לפי (7.4),

$$P(Y = y|X = x) = P(Y = y) > 0 \qquad (\#1)$$

נציב (7.2) בצד שמאל ונקבל

$$\sum_{\substack{k\in K \\ x=d_k(y)}} P(K = k) = P(Y = y) > 0 \qquad (\#2)$$

ז"א

$$\sum_{\substack{k\in K \\ x=d_k(y)}} P(K = k) > 0 \qquad (\#3)$$

לכן קיים לפחות מפתח אחד, k עבורו $x = d_k(y)$.

ז"א קיים לפחות מפתח אחד, k עבורו $y = e_k(x)$.

2) לפי (#1) ו- (#3), לכל $Y \in y$ קיים לפחות מפתח אחד, k עבורו $y = e_k(x)$, לכן בהכרח

$$|K| \geq |Y| \ . \qquad (\#4)$$

■

משפט 7.2 משפט שאנון

נתונה קריפטו-מערכת (X, Y, K, E, D) כך ש- $|K| = |X| = |Y|$.
למערכת יש סודיות מושלמת אם ורק אם

1) לכל $x \in X$ ולכל $y \in Y$ קיים מפתח k יחיד עבורו $y = e_k(x)$.

2) לכל מפתח יש הסתברות שווה, כלומר $P(K = k) = \frac{1}{|K|}$.

הוכחה:

1) נניח כי $|K| = |Y|$. כלומר

$$|\{e_k(x)|x \in X\}| = |K| \ .$$

ז"א לא קיימים שני מפתחות $k_1 \neq k_2$ כך ש- $e_{k_1}(x) = y = e_{k_2}(x)$.

לכן לכל $x \in X$ ולכל $y \in Y$ קיים מפתח k יחיד עבורו $e_k(x) = y$.

2) נסמן אורך של קבוצת מפתחות ב- $n = |K|$. נרשום את הקבוצה טקטסים גלויים כ-

$$X = \{x_i|1 \leq i \leq n\} \ .$$

נתון $y \in Y$ קבוע. נמספר את המפתחות כ- $k_1, k_2, \ldots, k_n$ כך ש- $e_{k_i}(x_i) = y$. לפי נוסחת בייס,

$$P(X = x_i|Y = y) = \frac{P(Y = y|X = x_i)P(X = x_i)}{P(Y = y)}$$

$$\stackrel{\text{(7.2) לפי}}{=} \frac{P(K = k_i)P(X = x_i)}{P(Y = y)}$$

אם למערכת יש סודיות מושלמת אז $P(X=x_i|Y=y)=P(X=x_i)$ לכן

$$P(X=x_i)=\frac{P(K=k_i)P(X=x_i)}{P(Y=y)} \quad \Rightarrow \quad P(K=k_i)=P(Y=y)$$

לכל $1\leq i\leq n$. ז"א לכל מפתח יש הסתברות שווה

$$P(K=k_i)=\frac{1}{|K|}\ .$$

■

הגדרה 7.2 צופן חד פעמי

יהי n שלם ויהי $X=Y=K=(\mathbb{Z}_2)^n$. לכל $k\in(\mathbb{Z}_2)^n$ נגדיר כלל מצפין

$$e_k(x)=(x_1+k_1,\ldots,x_n+k_n) \mod 2\ ,$$

ונגדיר כלל מפענח

$$\begin{aligned} d_k(y) &= (y_1-k_1,\ldots,y_n-k_n) \mod 2 \\ &= (y_1+k_1,\ldots,y_n+k_n) \mod 2\ . \end{aligned}$$

דוגמה 7.3

נתון הקבוצת מפתחות $K=\{0,1,1,0,0\}$ של צופן חד-פעמי ונתון הטקסט גלוי $x=1110100010$.

1) מצאו את הטקסט מוצפן.

2) וודאו כי הכלל מפענח מחזירה הטקסט גלוי המקורי.

פתרון:

1)

$$\begin{aligned} e_k(x) =& \{1+0\ ,\ 1+1\ ,\ 1+1\ ,\ 0+0\ ,\ 1+1\ ,\ 0+0\ ,\ 0+1\ ,\ 0+1\ ,\ 1+0\ ,\ 0+1\} \mod 2 \\ =& \{1,0,0,0,0,0,1,1,1,1\}\ . \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} d_k(y) =& \{1+0\ ,\ 0+1\ ,\ 0+1\ ,\ 0+0\ ,\ 0+1\ ,\ 0+0\ ,\ 1+1\ ,\ 1+1\ ,\ 1+0\ ,\ 1+1\} \mod 2 \\ =& \{1,1,1,0,1,0,0,0,1,0\}\ . \end{aligned}$$

■

נשים לב כי בצופן חד-פעמי

$$|X|=|Y|=|K|=\mathbb{Z}_2^n$$

לפיכך לפי משפט שאנון לצופן חד-פעמי יש סודיות מושלמת.

7.2 תכונות של אנטרופיה

הגדרה 7.3 פונקציה קעורה

פונקציה ממשית $f(x)$ נקראת **פונקציה קעורה** בתחום I אם

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

לכל $x_1,x_2\in I$.

פונקציה ממשית $f(x)$ נקראת **פונקציה קעורה ממש** בתחום I אם

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

לכל $x_1,x_2\in I$.

משפט 7.3 אי-שוויון ינסן

נניח כי f פונקציה רציפה וקעורה ממש בקטע I. נתון מספרים ממשיים $a_i>0$, $i=1,\ldots,n$ כך ש- $\sum\limits_{i=1}^n a_i=1$. אז

$$\sum_{i=1}^n a_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right)$$

לכל $x\in I$. $\sum\limits_{i=1}^n a_i f(x_i) = f\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i x_i\right)$ אם ורק אם $x_1=\cdots=x_n$.

משפט 7.4

יהי

$$X=\{x_1,\cdots,x_n\}$$

משתנה מקרי בדיד בעל פונקצית הסתברות

$$P_X(x_1)=p_1\ ,\ldots\ ,P_X(x_n)=p_n\ ,$$

$0<p_i\leq 1$ לכל $1\leq i\leq n$. אז

$$H(X)\leq \log_2 n$$

אם ורק אם

$$p_i=\frac{1}{n}$$

לכל $1\leq i\leq n$.

הוכחה: לפי אי-שוויון ינסן:

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 \left(\frac{1}{p_i}\right) \\ &\leq \log_2 \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \frac{1}{p_i}\right) \\ &= \log_2 \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right) \\ &= \log_2 n \ . \end{aligned}$$

בנוסף $H(X) = \log_2 n$ אם ורק אם $p_i = \frac{1}{n}$ לכל $1 \leq i \leq n$. ■

משפט 7.5

יהי $X = \{x_1, \cdots, x_m\}$ משתנה מקרי בדיד בעל פונקצית הסתברות

$$P_X(x_1) = p_1 \ , \ldots \ , P_X(x_m) = p_m \ ,$$

$0 < p_i \leq 1$ לכל $1 \leq i \leq m$, ויהי $Y = \{y_1, \cdots, y_n\}$ משתנה מקרי בדיד בעל פונקצית הסתברות

$$P_Y(y_1) = q_1 \ , \ldots \ , P_Y(y_n) = q_n \ ,$$

$0 < q_i \leq 1$ לכל $1 \leq i \leq n$. אז

$$H(X,Y) \leq H(X) + H(Y)$$

ו- $H(X,Y) = H(X) + H(Y)$ אם ורק אם X ו- Y בלתי תלויים.

הוכחה: **(*להעשרה בלבד)**
פונקצית הסתברות של X היא $P_X(x_i) = p_i$ ופונקצית הסתברות של X היא $P_Y(y_i) = q_i$. נגדיר הפוקנצית הסתברות של המשתנה מקרי דו-ממדי:

$$r_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) \ .$$

אז הפונקצית הסתברות שולית של X היא

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \ , \qquad \forall 1 \leq i \leq m$$

והפונקצית הסתברות שולית של Y היא

$$q_j = \sum_{i=1}^{m} r_{ij} \ , \qquad \forall 1 \leq j \leq m \ .$$

מכאן

$$\begin{aligned}H(X)+H(Y) &= -\sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 p_i - \sum_{j=1}^{n} q_j \log_2 q_j \\ &= -\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\right)\log_2 p_i - \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} r_{ij}\right)\log_2 q_j \\ &= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\log_2 p_i - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} r_{ij}\log_2 q_j \\ &= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\left(\log_2 p_i + \log_2 q_j\right) \\ &= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\log_2\left(p_i q_j\right) \ .\end{aligned}$$

מצד שני:

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\log_2 r_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\log_2\frac{1}{r_{ij}} \ .$$

לכן

$$\begin{aligned}H(X,Y)-H(X)-H(Y) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\log_2\frac{1}{r_{ij}} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\log_2\left(p_i q_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\log_2\left(\frac{p_i q_j}{r_{ij}}\right) \\ &\leq \log_2\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j\right) && \text{(אי-שוויון ינסן)} \\ &= \log_2 1 \\ &= 0 \ .\end{aligned}$$

לכן

$$H(X,Y)-H(X)-H(Y)\leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad H(X,Y)\leq H(X)+H(Y) \ .$$

■

הגדרה 7.4 אנטרופיה מותנית

יהיו X,Y משתנים מקריים בדידים. נגדיר

$$H(X|Y=y) = -\sum_{x\in X} P(X=x|Y=y)\log_2 P(X=x|Y=y) \ .$$

האנטרופיה מותנית תסומן $H(X|y)$ ותוגדר הממוצע המשוקללת של $H(X|Y=y)$ ביחס להתברויות $P(Y=y)$, כלומר התוחלת של $H(X|Y=y)$:

$$H(X|Y) = -\sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} P(Y=y)P(X=x|Y=y)\log_2 P(X=x|Y=y) \ .$$

האנטרופיה המותנית $H(X|Y)$ מכמתת המידע הממוצע של המ"מ X המועברת אשר לא מוגלה באמצעות Y.

משפט 7.6

$$H(X,Y)=H(Y)+H(X|Y)\ .$$

הוכחה: (*להעשרה בלבד)

$$\begin{aligned}H(X|Y)&=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}P(Y=y_j)P(X=x_i|Y=y_j)\log_2 P(X=x_i|Y=y_j)\\&=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}P(X=x_i\cap Y=y_j)\log_2\frac{P(X=x_i\cap Y=y_j)}{P(Y=y_j)}\\&=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}r_{ij}\log_2\frac{r_{ij}}{q_j}\ .\end{aligned}$$

מצד שני

$$H(Y)=-\sum_{j=1}^{n}q_j\log_2 q_j=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}r_{ij}\log_2 q_j$$

ו-

$$H(X,Y)=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}r_{ij}\log_2 r_{ij}\ .$$

לכן

$$\begin{aligned}H(Y)+H(X|Y)&=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}r_{ij}\log_2\frac{r_{ij}}{q_j}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}r_{ij}\log_2 q_j\\&=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}r_{ij}\left(\log_2\frac{r_{ij}}{q_j}+\log_2 q_j\right)\\&=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}r_{ij}\log_2\left(\frac{r_{ij}}{q_j}\cdot q_j\right)\\&=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}r_{ij}\log_2 r_{ij}\\&=H(X,Y)\ .\end{aligned}$$

■

משפט 7.7

$$H(X|Y)\leq H(X)$$

ו- $H(X|Y)=H(X)$ אם ורק אם X ו- Y משתנים מקיים בלתי-תלויים.

הוכחה: (*להעשרה בלבד)
לפי משפט 7.5, $H(X,Y)\leq H(X)+H(Y)$. נציב משפט 7.6 ונקבל

$$H(Y)+H(X|Y)\leq H(X)+H(Y)\qquad\Rightarrow\qquad H(X|Y)\leq H(X)\ .$$

בנוסף לפי משפט 7.5, $H(X,Y)=H(X)+H(Y)$ אם ורק אם X,Y משתנים בלתי תלויים, לכן
$$H(X|Y)=H(X)$$
אם ורק אם X,Y משתנים בלתי תלויים.

■

7.3 צופן מרוכב

הגדרה 7.5 צופן מרוכב

נתון קריפטו-מערכת
$$S_1=(P,P,K_1,E_1,D_1)$$
וקריפטו-מערכת שניה
$$S_2=(P,P,K_2,E_2,D_2)$$
הקריפטו-מערכת המורכבת מ- S_1 ו- S_2 מסומנת $S_1\times S_2$ ומוגדרת להיות הקריפטו-מערכת
$$(P,P,K_1\times K_2,E,D)$$
מפתח של הקריפטו-מערכת המורכבת $k\in K$,
$$k=(k_1,k_2)$$
כאשר $k_1\in K_1$ ו- $k_2\in K_2$. הכלל מצפין של $S_1\times S_2$ הוא
$$e_{(k_1,k_2)}(x)=e_{k_2}\left(e_{k_1}(x)\right)$$
והכלל מפענח של $S_1\times S_2$ הוא
$$d_{(k_1,k_2)}(y)=d_{k_1}\left(d_{k_2}(y)\right)$$
כלומר, ראשית מצפינים x עם $e_{k_1}(x)$ ואז חוזרים ומצפינים שוב עם e_{k_2}. מבצעים פענוח בסדר הפוך, כלומר
$$\begin{aligned}d_{k_1,k_2}\left(e_{(k_1,k_2)}(x)\right)=&d_{k_1,k_2}\left(e_{k_2}\left(e_{k_1}(x)\right)\right)\\=&d_{k_1}\left(d_{k_2}\left(e_{k_2}\left(e_{k_1}(x)\right)\right)\right)\\=&d_{k_1}\left(\left(e_{k_1}(x)\right)\right)\\=&x\ .\end{aligned}$$

לכל קריפטו-מערכת יש פונקצית הסתברות של הקבוצת מפתחות. נגדיר את הפונקצית הסתברות של המפתח של הצופן המורכב כך:
$$P\left(k_1,k_2\right)=P(k_1)P(k_2)$$
ז"א הבחירות של המפתחות k_1 ו- k_2 הם מאורעות בלתי-תלויים.

הגדרה 7.6 צופן הרכבה

יהיו $P=C=\mathbb{Z}_{26}$ ונגדיר קבוצת מפתחות
$$K=\{a\in\mathbb{Z}_{26}\mid \gcd(a.26)=1\}\ .$$
לכל $a\in K$ נגדיר כלל מצפין
$$e_a(x)=ax\mod 26\ ,$$

לכל $x \in \mathbb{Z}_{26}$, ונגדיר כלל מפענח

$$d_a(y) = a^{-1}y \mod 26 ,$$

לכל $y \in \mathbb{Z}_{26}$.

דוגמה 7.4

יהי S צופן הזזה עם מפתח $k \in \mathbb{Z}_{26}$ ויהי M צופן מכפלה עם מפתח $a \in \mathbb{Z}_{26}$. הוכיחו כי הקריפטו-מערכת המורכבת $M \times S$ היא צופן איפיני.

פתרון:

$$e_{a,k}(x) = e_a(x + k) = ax + ak .$$

מכיוון ש- $\gcd(a, 26) = 1$ לכן $ak \mod 26 = k$ ולכן

$$e_{a,k}(x) = e_a(x + k) = ax + k .$$

ז"א $e_{a,k}(x)$ זהה לכלל מצפין של צופן אפיני. נשאר להוכיח כי הפונקצית הסתברות של המפתח (a, k) של $M \times S$ שווה להסתברות של המפתח של צופן האפיני, דהיינו $\frac{1}{312}$: עבור צופן הזזה:

$$P_S(k) = \frac{1}{26}$$

עבור צופן הרכבה:

$$P_M(a) = \frac{1}{12}$$

לכן

$$P_{M\times S} = P_M(a)P_S(k) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{26} = \frac{1}{312} .$$

■

דוגמה 7.5

יהי S צופן הזזה עם מפתח $k \in \mathbb{Z}_{26}$ ויהי M צופן מכפלה עם מפתח $a \in \mathbb{Z}_{26}$. הוכיחו כי הקריפטו-מערכת המורכבת $S \times M$ היא צופן איפיני.

פתרון:

$$e_{k,a}(x) = e_k(ax) = ax + k .$$

לכן $e_{k,a}(x)$ זהה לכלל מצפין של צופן אפיני.

$$P_{S\times M} = P_S(k)P_M(a) = \frac{1}{26} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{312} .$$

■

7.4 משפט האנטרופיה לקריפטו-מערכת

משפט 7.8 משפט האנטרופיה לקריפטו-מערכת

תהי (P,C,K,E,D) קריפטו-מערכת. אז

$$H(K|C)=H(K)+H(P)-H(C)\ .$$

הוכחה: (*להעשרה בלבד)
לפי משפט 7.6,

$$H(K,P,C)=H(K,P)+H(C|K,P)\ .$$

בגלל שהכלל מצפין $y=e_k(x)$ הוא פונקציה חד-חד-ערכית, אז המפתח והטקסט גלוי קובעים את הטקסט מוצפן בדרך יחידה. ז"א

$$H(C|K,P)=0\ .$$

לכן

(*1)
$$H(K,P,C)=H(K,P)\ .$$

המשתנים מקריים K ו- P בלתי-תלויים. לכן לפי משפט 7.5, $H(K,P)=H(K)+H(P)$ ולפיכך נקבל

(*2)
$$H(K,P,C)=H(K)+H(P)\ .$$

באותה מידה, לפי משפט 7.6,

(*3)
$$H(K,P,C)=H(K,C)+H(P|K,C)\ .$$

מכיוון שהכלל מפענח $x=d_k(y)$ פונקציה חד-חד ערכית, אז המפתח והטקסט מוצפן קובעים את הטקסט גלוי בדרך יחידה. לכן

$$H(P|K,C)=0\ .$$

ומכאן

(*4)
$$H(K,P,C)=H(K,C)\ .$$

לפי משפט 7.6, $H(K,C)=H(C)+H(K|C)$. לכן

$$\begin{aligned}
H(K|C) &= H(K,C)-H(C) && \\
&= H(K,P,C)-H(C) && \text{(לפי *4)} \\
&= H(K)+H(P)-H(C) && \text{(לפי *2)} \qquad (7.5)
\end{aligned}$$

כנדרש.

■

דוגמה 7.6 (המשך של דוגמה 7.1 והמשך של דוגמה 7.2)

עבור דוגמה 7.1 מצאו את $H(K|C)$ ובדקו כי הערך המתקבל תואם עם $H(K|C)=H(K)+H(P)-H(C)$.

פתרון:
בדוגמה 7.2 מצאנו כי $H(P)=0.81$, $H(K)=1.5$ ו- $H(C)=1.85$. ז"א $H(K|C)=H(K)+H(P)-H(C)=0.46$.

כעת נחשב את $H(K|C)$ בעזרת התוצאות של דוגמה 7.1:

$$P\left(K=k_1|C=1\right)=\frac{P\left(C=1|K=k_1\right)P(K=k_1)}{P(C=1)}=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{8}\right)}=1\ ,$$

$$P\left(K=k_2|C=1\right)=\frac{P\left(C=1|K=k_2\right)P(K=k_2)}{P(C=1)}=\frac{0\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{8}\right)}=0\ ,$$

$$P\left(K=k_3|C=1\right)=\frac{P\left(C=1|K=k_3\right)P(K=k_3)}{P(C=1)}=\frac{0\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{8}\right)}=0\ ,$$

$$P\left(K=k_1|C=2\right)=\frac{P\left(C=2|K=k_1\right)P(K=k_1)}{P(C=2)}=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{7}{16}\right)}=\frac{6}{7}\ ,$$

$$P\left(K=k_2|C=2\right)=\frac{P\left(C=2|K=k_2\right)P(K=k_2)}{P(C=2)}=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{7}{16}\right)}=\frac{1}{7}\ ,$$

$$P\left(K=k_3|C=2\right)=\frac{P\left(C=2|K=k_3\right)P(K=k_3)}{P(C=2)}=\frac{0\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{7}{16}\right)}=0\ ,$$

$$P\left(K=k_1|C=3\right)=\frac{P\left(C=3|K=k_1\right)P(K=k_1)}{P(C=3)}=\frac{(0)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)}=0\ ,$$

$$P\left(K=k_2|C=3\right)=\frac{P\left(C=3|K=k_2\right)P(K=k_2)}{P(C=3)}=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)}=\frac{3}{4}\ ,$$

$$P\left(K=k_3|C=3\right)=\frac{P\left(C=3|K=k_3\right)P(K=k_3)}{P(C=3)}=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{4}\ ,$$

$$P\left(K=k_1|C=4\right)=\frac{P\left(C=4|K=k_1\right)P(K=k_1)}{P(C=4)}=\frac{(0)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{16}\right)}=0\ ,$$

$$P\left(K=k_2|C=4\right)=\frac{P\left(C=4|K=k_2\right)P(K=k_2)}{P(C=4)}=\frac{0\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{3}{16}\right)}=0\ ,$$

$$P\left(K=k_3|C=4\right)=\frac{P\left(C=4|K=k_3\right)P(K=k_3)}{P(C=4)}=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{3}{16}\right)}=1\ .$$

מכאן

$$\begin{aligned}
H(K|C) =& -\sum_{y=1}^{4} \sum_{k\in\{k_1,k_2,k_3,k_4\}} P(C=y)P(K=k|C=y)\log_2 P(K=k|C=y)\\
=& - P_C(1)P_{K|C}(k_1|1)\log_2 P_{K|C}(k_1|1) - P_C(2)P_{K|C}(k_1|2)\log_2 P_{K|C}(k_1|2)\\
& - P_C(3)P_{K|C}(k_1|3)\log_2 P_{K|C}(k_1|3) - P_C(4)P_{K|C}(k_1|4)\log_2 P_{K|C}(k_1|4)\\
& - P_C(1)P_{K|C}(k_2|1)\log_2 P_{K|C}(k_2|1) - P_C(2)P_{K|C}(k_2|2)\log_2 P_{K|C}(k_2|2)\\
& - P_C(3)P_{K|C}(k_2|3)\log_2 P_{K|C}(k_2|3) - P_C(4)P_{K|C}(k_2|4)\log_2 P_{K|C}(k_2|4)\\
& - P_C(1)P_{K|C}(k_3|1)\log_2 P_{K|C}(k_3|1) - P_C(2)P_{K|C}(k_3|2)\log_2 P_{K|C}(k_3|2)\\
& - P_C(3)P_{K|C}(k_3|3)\log_2 P_{K|C}(k_3|3) - P_C(4)P_{K|C}(k_3|4)\log_2 P_{K|C}(k_3|4)\\
=& -\frac{1}{8}\log_2 1 - \frac{7}{16}\cdot\frac{6}{7}\log_2\frac{6}{7} - \frac{1}{4}\cdot 0\log_2 0 - \frac{3}{16}\cdot 0\log_2 0\\
& -\frac{1}{8}0\cdot\log_2 0 - \frac{7}{16}\cdot\frac{1}{7}\log_2\frac{1}{7} - \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\log_2\frac{3}{4} - \frac{3}{16}\cdot 0\log_2 0\\
& -\frac{1}{8}\cdot 0\log_2 0 - \frac{7}{16}\cdot 0\log_2 0 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{3}{16}\cdot 1\cdot\log_2 1\\
=& 0.461676\ .
\end{aligned}$$

הרי

$$H(K|C) = 0.46 = H(K) + H(P) - H(C)$$

כנדרש. ■

שיעור 8
אנטרופיה ומידע

8.1 המושג של מידע

נניח נניח ש- X משתנה מקרי אשר יכול לקבל אחת מארבע אפשריות:

$$X \in \{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c},\mathtt{a}\} \ .$$

X ידוע לבוב (B) אבל לא ידוע לאליס (A). כל שאליס יודעת הוא ש- X יכול להיות אחת האותיות $\{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c},\mathtt{a}\}$ בהסתברות שווה. אנחנו אומרים כי לאליס יש אי-ודאות על הערך של X. כדי שאליס תמצא את הערך של X אליס שואלת סדרת שאלות בינאריות (שאלות כן/לא) לבוב כדי לקבל מידע על המ"מ X עד שהיא תדע את הערך של X עם אי-ודאות אפס.

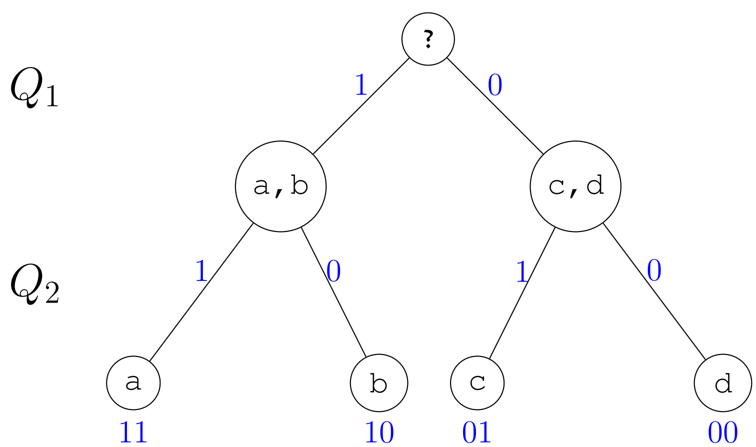
אפשרות אחת לסדרת שאלות היא כך:

Q_1: האם $X \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$?

לפי התשובה אחר כך אליס שואלת

Q_2: אם $X \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$ האם $X=\mathtt{a}$?

אחרת אם $X \notin \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$ האם $X=\mathtt{c}$?



הסדרה של שאלות בינאריות שמאפשרת לאליס למצוא את X ללא שום אי-ודאות מתוארת בעץ-שאלות למעלה. מספר השאלות הבינאריות $N_Q[X]$, שנדרשות כדי למצוא X ללא אי-ודאות הוא $N_Q[X]=2$.

כל שאלה היא בינארית, כלומר התשובה היא כן או לא אנחנו מצפינים תשובה כן עם "1" ותשובה לא עם "0". לפי התשובות אנחנו מצפינים את האותיות כך:

$$a \to 11 \ , \quad b \to 10 \ , \quad c \to 01 \ , \quad d \to 00 \ .$$

מכיוון ששתי תשובות בינאריות נדרשות כדי למצוא את X, אנחנו אורמים כי נדרש שני ביטים (bits) של מידע נדרשים כדי למצוא את X.

במילים אחרות, שתי ספרות ביניאריות $X=d_1d_2$ נדרשות כדי להצפין את X, שערכן הן התשובות לשתי שאלות ביניאריות,

לכן המידע המתקבל על מציאת הערך של X הוא 2 bit.

אליס הייתה יכולה לשנות את הסדרת שאלות שלה כך:

Q'_1 האם $X = \mathtt{a}$?

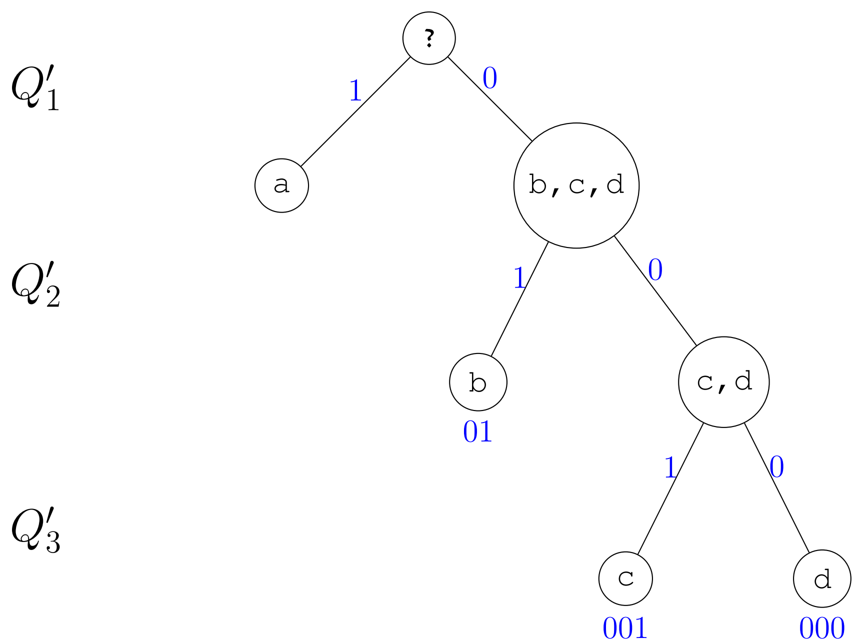
רק אם התשובה היא "לא" אז היא צריכה לשאול שאלה נוספת:

Q'_2 האם $X = \mathtt{b}$?

ורק אם השתובה היא "לא" אז היא צריכה לשאול שאלה נוספת:

Q'_3 האם $X = \mathtt{c}$?

מספר השאלות הביניאריות הנדרשות למצוא את X תלוי על הערך של X: $N_Q(\mathtt{a}) = 1$, $N_Q(\mathtt{b}) = 2$ או $N_Q(\mathtt{c}) = N_Q(\mathtt{d}) = 3$.



X הוא משתנה מקרי בדיד ולכן בהינתן מערכת שאלות, $N_Q(X)$ הוא פונקציה של משתנה מקרי בדיד, ולכן $N_Q[X]$ הוא בעצמו משתנה מקרי בדיד.

כעת נשאל שאלה. נניח כי אליס מעוניינת למצוא מערכת שאלות Q, אשר נותנת את מספר השאלות הממוצע המינימלי. כלומר, כיצד נמצא מערכת שאלות $N_Q[X]$ עבורה התוחלת

$$E\left[N_Q[X]\right] = \sum_{k \in X} P_X(k) N_Q[k]$$

תהיה מינימלית.

לפני שנענה על שאלה הזאת נתן דוגמה.

נתון המשתנה מקרי $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$ בעל הפונקצית הסתברות

$$P_X(\mathtt{a}) = \frac{1}{2}\ , \quad P_X(\mathtt{b}) = \frac{1}{4}\ , \quad P_X(\mathtt{c}) = P_X(\mathtt{d}) = \frac{1}{8}\ .$$

עם ההצפנה הראשונה $N_Q[k] = 2$ לכל $X \ni k$ אז התוחלת תהיה $2 = \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{4}(2) + \frac{1}{8}(2) + \frac{1}{8}(2)$ כלומר תוחלת מספר השאלות הוא 2.
התוחלת עבור ההצפנה השנייה היא

$$E\left[N_{Q'}[X]\right] = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{4}(2) + \frac{1}{8}(3) + \frac{1}{8}(3) = \frac{7}{4}\ .$$

אשר פחות מהתוחלת עבור ההצפנה הקודמת.

אליס שואלת סדרת שאלות ולכל שאלה נשים ערך ביניארי 0 אם התשובה לא ו- 1 אם התשובה כן. כך אנחנו נשים לכל ערך של X מספר בינארי $d_1 \dots d_k$ המורכב מספרות ביניאריות $d_i = 0,1$. טרנספורמציה כזרת בין ערכים של X לבין מספרים בינארים נקראת הצפנה. שימו לב כי אורך ההצפנה $\ell_Q[X]$ של כל ערך של X שווה למספר השאלות ביניאריות הנדרשותת כדי למצוא את X ללא אי-ודאות:

$$\ell_Q[X] = N_Q[X] \ .$$

התוחלת המינימלית מתקבלת באמצעות מערכת שאלות שבה מספר השאלות שמובילות לערך כלשהו ביחס הפוך להסתברות שלו. במילים פשוטות, ככל שההסתברויות של ערך של X גבוהה מספר השאלות המובילות לערך זה יותר קטן, ולהפך.

אקסיום 1) מספר ביטים האופטימלי $\ell_{Q^*}(k)$ הנדרש להצפין את הסימן $X = k$ הוא פונקציה של ההסתברות $P_X(k)$.

אקסיום 2)

$$P_X(k) \geq P_X(k') \quad \Rightarrow \quad \ell_{Q^*}(k) \leq \ell_{Q^*}(k') \ .$$

משפט 8.1 אנטרופיה של שאנון

$$H[X] = -\sum_{k \in X} P_X(k) \log_2 P_X(k) \ .$$

הוכחה: נניח כי $X = Y \cap Z$, כאשר Y, Z משתנים מקרים בלתי תלויים. אז

$$H[X] = H[Y] + H[Z]$$

נסמן $p_x = P_X(x)$. לפי אקסיום 1):

$$\ell_Q(x) = f\left(p_x\right) \ .$$

$$H[X] = \sum p_x \ell_Q(x) = \sum p_x f\left(p_x\right) \ .$$

כעת נניח שיש לנו משתנים מקרים Y ו- Z ושהם בלתי תלויים. יהיו $P_Y(y)$ ו- $P_Z(z)$ פונציות ההסתברות של Y ושל Z בהתאמה. נסמן $p_y = P_Y(y)$ ו- $p_z = P_Z(z)$.

נגדיר את המאורע $X = Y \cap Z$. מכיוון ש- Y ו- Z משתנים בלתי תלויים אז

$$P\left(X = Y \cap Z\right) = P_Y(y) P_Z(z) = p_y p_z \ .$$

ידיעה של Y לא נותנת שום מידע על הערך של Z, אז

$$\ell_Q[Y \cap Z] = \ell_Q[Y] + \ell_Q[Z] \ .$$

לפיכך

$$H[X] = \sum p_x \ell_Q(x) = \sum p_y p_z \left(\ell_Q(y) + \ell_Q(y)\right)$$

$$H[X] = \sum p_x \ell_Q(x) = \sum p_y p_z \left(\ell_Q(y) + \ell_Q(y)\right)$$

מכאן

$$H[X] = \sum p_y p_z f\left(p_y p_z\right) = \sum p_y p_z \left[f\left(p_y\right) + f\left(p_z\right)\right]$$

לכל p_y ו- p_z. לכן

$$f\left(p_y p_z\right)=f\left(p_y\right)+f\left(p_z\right)\ .$$

ז"א $f(p)=C\log(p)$. נדרש כי $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ ונקבל $f(p)=-\log_2(p)$.

■

8.2 הגדרה של מידע

הגדרה 8.1 מידע של מאורע (שאנון)

נתון משתנה מקרי X. המידע של ערך מסוים של X מסומן $I_X(x)$ ומוגדר ליהות

$$I\left(X=x\right)=\log_2\left(\frac{1}{P_X(x)}\right)=-\log_2\left(P_X(x)\right)$$

כאשר $P_X(x)$ פונקצית ההסתברות של המשתנה מקרי X.

דוגמה 8.1 המידע המתקבל בגילוי תוצאה של הטלת מטבע

נטיל מטבע הוגנת ונגדיר משתנה מקרי X להיות התוצאה של הניסוי. מכאן X מקבל את הערכים

$$X=\{H,T\}\ .$$

מצאו את המידע של המאורע $X=H$.

פתרון:

$P(X=H)=\dfrac{1}{2}$. לכן

$$I(X=H)=-\log_2\left(\frac{1}{2}\right)=1\ .$$

כלומר על קבלת התוצאה "H" אנחנו מקבלים ביט אחד של מידע.

הסבר:

במקום הסימנים "H" ו- "T" בשביל המ"מ X ניתן להצפין את הערכים האפשריים בספרות בינאריות "0" או "1". כלומר

ערך של X	הצפנה בספרות בינאריות
H	0
T	1

ז"א כדי להצפין את הערכים של X אנחנו צריכים ספרה בינארית אחת:

$$d_1\in\{0,1\}\ .$$

אשר יכול להחזיק את הערכים 0 או 1.

ספרה ביניארית אחת נדרשת להחזיק את הערך של X לכן המידע של ערך כלשהו של X הוא 1 bit (ביט אחד). ■

דוגמה 8.2 שליפת קלף מחבילת קלפים תיקנית

בניסוי שליפת קלף אחד מחבילת קלפים תיקנית. נגדיר את המשתנה מקרי X להיות הסוג של הקלף (תלתן, עלה לב או יהלום). חשבו את את המידע של המאורע ששלפני קלף מסוג לב.

פתרון:
ההסתברות לשלוף קלף של הסוג לב מחבילת קלפים סטנדרטית היא

$$P\left(X=\heartsuit\right)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}\ .$$

לכן

$$I\left(X=\heartsuit\right)=-\log_2\left(\frac{1}{4}\right)=2\ \text{bits}$$

הסבר:

יש 4 הערכים האפשריים של X:

$$X=\{\spadesuit,\clubsuit,\heartsuit,\diamondsuit\}$$

כל ספרה בינארית מחזיקה 2 ערכים אפשריים: 0 או 1 לכן ידרש שתי ספרות בינאריות כדי להצפין את ה-4 ערכים האפשריים של X:

$$d_1d_2\ ,\qquad d_1,d_2\in\{0,1\}\ .$$

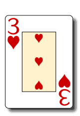
ההצפנה עצמה מתוארת בטבלא למטה:

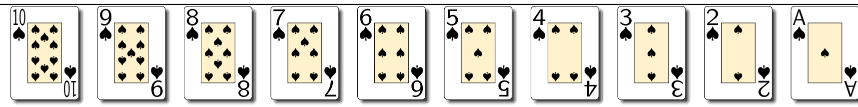
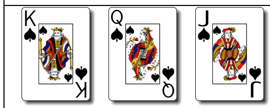
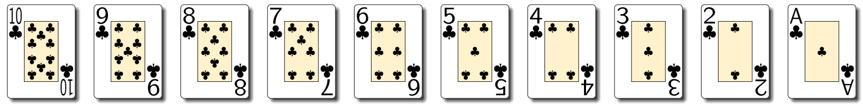
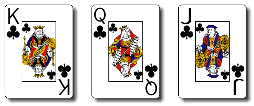
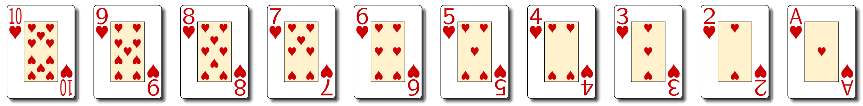
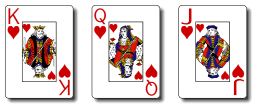
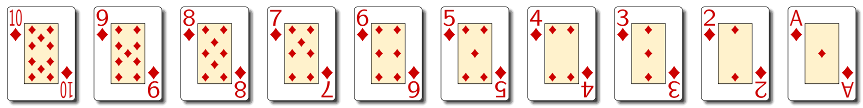
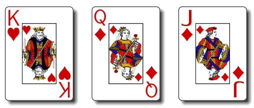
ערך של X	הצפנה בספרות בינאריות
$\spadesuit$	00
$\clubsuit$	01
$\heartsuit$	10
$\diamondsuit$	11

אורך המספר d_1d_2 הוא 2 לכן המידע של המשתנה מקרי X הוא 2 bits (שני ביטים).

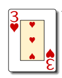
■

דוגמה 8.3 שליפת קלף מחבילת קלפים תיקנית

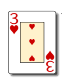
בניסוי שליפת קלף אחד מחבילת קלפים תיקנית. מצאו את המידע המתקבל אם הקלף  נשלף.

צורה	מספרים	תמונות
עלה		
תלתן		
לב		
יהלום		

פתרון:
יהי X המ"מ שמסמן את הקלף הנשלף. ההסתברות לשלוף הקלף שלוש מצורת לב מחבילת קלפים סטנדרטית היא

$$P\Bigg(X =$$  $$\Bigg) = \frac{1}{52}\ .$$

לכן

$$I\Bigg(X =$$  $$\Bigg) = -\log_2\left(\frac{1}{52}\right) = 5.7\ \text{bits}$$

הסבר:

כדי להצפין את כל הערכים האפשריים של X כרצף סיבית, נדרש רצף סיביתחם אשר מקבל לפחות 52 ערכים שונים. רצף עם 5 סיביות לא מספיק כי יש לו רק $2^5 = 32$ ערכים שונים. אבל רצף עם 6 סיביות נותן $2^6 = 64$ ערכים שונים, אשר מספיק להצפין את כל הערכים האפשריים של X.

$$d_1d_2d_3d_4d_5d_6$$

האורך של הרצף סיביות הזה הוא 6 ולכן הרצף סיבית זה נותן 6 bits של מידע.
לכל סיבית יש 2 ערכים אפשריים ולכן 64 ערכים שונים בסה"כ.

רק 52 מתוך ה- 64 צירופים נדרשים כדי להצפין את הערכים האפשריים של X לכן נוריד חלק של הסיביות. הקבוצת סיביות הנשארים מכילה 5.7 bits של מידע.

■

ככל שההסתברות של מאורע יותר קטנה אז המידע המתקבל יותר גבוהה.

כלומר, ככל שהמידע של מאורע יותר גבוהה אז ההסתברות שלו יותר קטנה

8.3 אנטרופיה

הגדרה 8.2 אנטרופיה של מ"מ X

נתון מ"מ בדיד X. נניח כי הערכים האפשריים של X הם

$$X = \{x_1, \ldots, x_N\} \ .$$

האנטרופיה $H(X)$ של מ"מ X מוגדרת להיות התוחלת (הממוצע המשוקלל) של המידע המתקבל על ידי למצוא את הערך של X (כלומר על גילוי התוצאה של הניסוי):

$$H(X) = \sum_{i=1}^{N} P(X = x_i) I(X = x_i) = -\sum_{i=1}^{N} P(X = x_i) \log_2 \left(P(X = x_i)\right)$$

במקרה שההסתברות של כל תוצאה שווה, כלומר

$$P(X = x_i) = \frac{1}{|X|} = \frac{1}{N}$$

אז

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \log_2 \left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \log_2 N = \log_2 N \ .$$

לכן

$$N = 2^{H(X)} \ .$$

ניתן להוכיח ש- $\log_2 N$ הוא הערך המקסימלי האפשרי של $H(X)$.

משפט 8.2

נתון מ"מ בדיד X אשר מקבל N ערכים שונים:

$$X = \{x_1, \ldots, x_N\}$$

אם ההסתברות של כל ערך שווה, כלומר

$$P(X = x_i) = \frac{1}{N}$$

אז האנטרופיה מקבלת ערך מקסימלי שניתנת על ידי

$$H_{\text{max}}(X) = \log_2 N \ .$$

ערך זה הוא הערך המקסימלי האפשרי של האנטרופיה.

דוגמה 8.4 אנטרופיה בהטלת מטבע

נניח כי נטיל מטבע עם הסתברות p ($0 \le p \le 1$). לקבל H. מצאו את האנטרופיה של המ"מ מקרי X אשר שווה לתוצאת הניסוי.

פתרון:

נסמן $X=\{0,1\}$ כאשר $X=0$ מסמן תוצאת H ו- $X=1$ מסמן תוצאת T. הפונקצית הסתברות היא

$$P_X(0)=p\ ,\qquad P_X(1)=1-p\ .$$

לכן המידע של המאורע לקבל תוצאת H הוא

$$I(X=0)=-\log_2\left(P_X(0)\right)=-\log_2\left(p\right)$$

והמידע של המאורע לקבל תוצאת H הוא

$$I(X=1)=-\log_2\left(P_X(1)\right)=-\log_2\left(1-p\right)$$

נשים לב שאם המטבע הוגנת אז $p=\dfrac{1}{2}$ ו- $I(X=0)=I(X=1)=1$. כעת נחשב את האנטרופיה של X:

$$H(X)=-P_X(0)\log_2\left(P_X(0)\right)-P_X(1)\log_2\left(P_X(1)\right)=-p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p)\ .$$

נרשום את האנטרופיה כפונקציה של ההסתברות p:

$$H(X)=--p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p)\ \ =:h(p).$$

ל- $h(p)$ יש נקודת מקסימום ב- $p=\dfrac{1}{2}$:

$$h'(p)=-\frac{1}{\ln 2}-\log_2 p+\frac{1}{\ln 2}+\log_2(1-p)=-\log_2 p+\log_2(1-p)=\log_2\left(\frac{1}{p}-1\right)\stackrel{!}{=}0\Rightarrow p=\frac{1}{2}\ .$$

ז"א הערך המקסימלי של האנטרופיה מתקבל כאשר לכל הערכים של X יש הסתברות שווה, $P_X(0)=P_X(1)=\dfrac{1}{2}$.
אכן

$$h(p=\tfrac{1}{2})=-\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}=\log_2 2=1\ .$$

■

דוגמה 8.5

בניסוי הטלת מטבע לא מאוזנת, ההסתברות לקבל תוצאה H היא $p=\dfrac{1}{1024}$. מצאו את האנטרופיה של X.

פתרון:
נסמן $X=\{0,1\}$, כאשר $X=0$ מסמן תוצאת H ו- $X=1$ מסמן תוצאת T.

$$I(X=0)=-\log_2\frac{1}{1024}=10\ \text{bits}\ ,\qquad I(X=1)=-\log_2\left(1-p\right)=-\log_2\frac{1023}{1024}=0.00141\ \text{bits}\ .$$

לפי זה

$$H(X)=-p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p)=-\frac{1}{1024}\log_2\frac{1}{1024}-\frac{1023}{1024}\log_2\frac{1023}{1024}=0.0112\ \text{bits}\ .$$

■

המשמעות של התשובה לדוגמה הקודמת היא כך. נניח שנטיל אותה מטבע הלא מאוזנת $100,000$ פעמים. בכדי להצפין את כל התוצאות נדרש רצף סיביות של אורך $100,000$, כאשר כל ספרה נותנת התוצאה של ניסוי אחד. ז"א 10^5 bits של מידע נדרש כדי להצפין את כל התוצאות.

מצד שני מצאני כי התוחלת של המידע המתקבל לניסוי (כמות מידע פר ניסוי) הוא 0.0112 bit פר ניסוי. במילים אחרות, ב- 10^5 ניסוים רק 1120 bit של מידע נדרש בממוצע כדי להצפין את כל התוצאות של הרצף ניסויים.

אנטרופיה (בביטים) אומרת לנו את כמות המידע הממוצעת (בביטים) שיש לספק על מנת להעביר את כל התוצאות של המאורע. זהו חסם תחתון על מספר הסיביות שיש להשתמש בהן, בממוצע לקודד (להצפין) את התווים של ההודעה שלנו.

8.4 הצפנת האפמן

נסביר הצפנת האפמן בעזרת הדוגמה הבאה. נתון הטקסט גלוי

$$X = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$$

ונניח כי הפונקצית הסתברות של X היא לפי הטבלה הבאה:

בחירת אות של $x_i \in X$	$p_i = P_X(x_i)$	$I(X = x_i) = -\log_2(p_i)$
a	$\frac{1}{3}$	1.58 bit
b	$\frac{1}{2}$	1 bit
c	$\frac{1}{12}$	3.58 bit
d	$\frac{1}{12}$	3.58 bit

נשאל את השאלה: כמה ביטים של מידע נדרשים כדי להצפין (בסיביות) רצף של 1000 אותיות של טקסט גלוי X?

יש 4 אותיות ב- X, כלומר 4 ערכים אפשריים של המ"מ בדיד X. לפיכך נדרש רצף של 2 סיביות כדי להצפין טקסט גלוי של תו אחד בהצפנת סיביות קבועה. לדוגמה:

בחירת אות של $x_i \in X$	הצפנה
a	00
b	01
c	10
d	11

ז"א להצפין תו אחד של הטקסט גלוי X נדרש 2 bit. לכן להצפין רצף אותיות של טקטסט גלוי נדרש $2 \times 1000 =$ 2000 bit, כלומר 2000 סיביות.

האנטרופיה של X היא

$$H(X) = -p_1 \log_2(p_1) - p_2 \log_2(p_2) - p_3 \log_2(p_3) - p_4 \log_2(p_4) = 1.62581 \text{ bit} .$$

ז"א לכל ניסוי המידע הממוצע הנדרש כדי להצפין תו אחד של טקסט גלוי הוא 1.62581 bit. לכן המידע הממוצע הנדרש כדי להצפין רצף אותיות של טקסט גלוי הוא

$$1000 \times 1.62581 = 1625.81 \text{ bit} .$$

לכן, רצף סיביות של אורך 1626 בממוצע יהיה מספיק כדי להעביר את ההודעה.

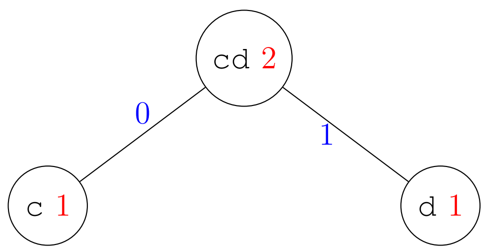
כעת נבנה הצפנה של הטקסט גלוי על ידי האלגוריתם של האפמן.

שלב 1)

	c	d	a	b
	1	1	4	6

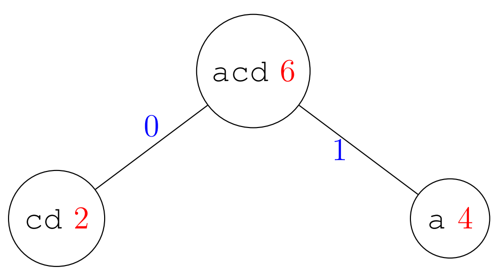
שלב 2)

	c	d	a	b
	1	1	4	6
	0	1		
	2		4	6



שלב 3)

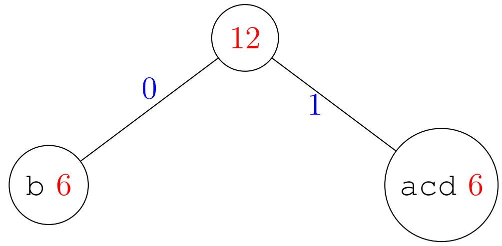
	cd	a	b
	2	4	6
	0	1	
	6		6



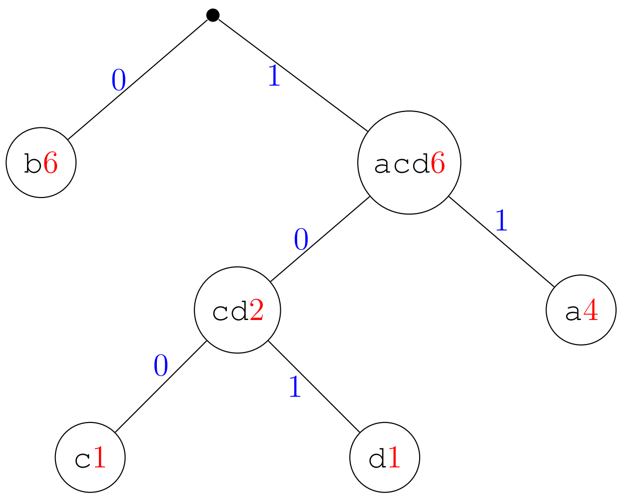
שלב 4)

שלב 5)

	acd	b
	6	6
	0	1
	12	



שלב 6)



בסוף של התהליך האותיות של הטקסט גלוי יהיו בעלים של העץ וההצפנה ניתנת על ידי הרצף סיביות על הענפים במסלול מהנקודת התחלתית של העץ עד העלה בו רשום האות בשאלה.

בחירת אות של $x_i \in X$	הצפנת האפמן
a	11
b	100
c	110
d	101

דוגמה 8.6

נתון הטקסט גלוי הבא

$$X = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}\}$$

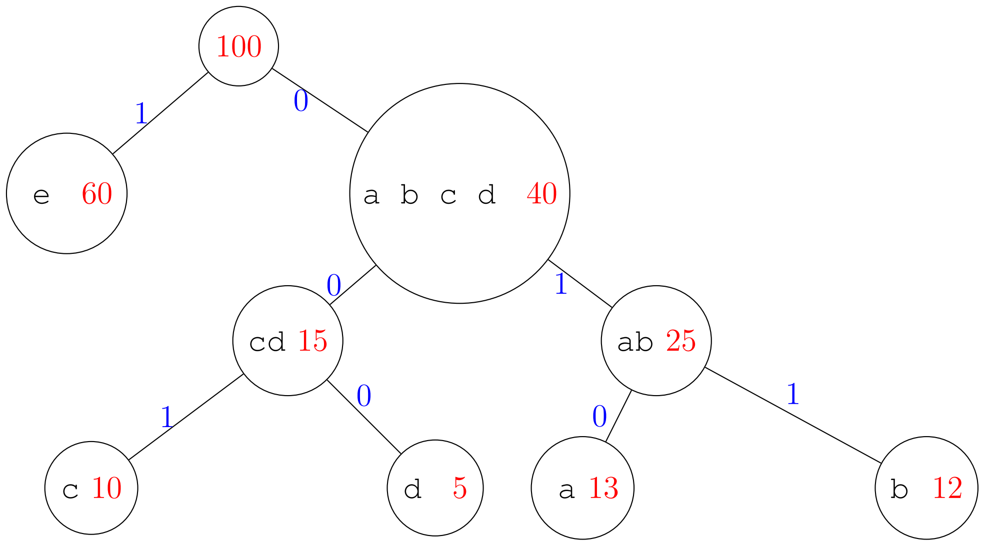
והפונקצית הסתברות

$$P(X = \mathrm{a}) = \frac{13}{100} = 0.13 \ , \quad P(X = \mathrm{b}) = \frac{3}{25} = \frac{12}{100} = 0.12 \ , \quad P(X = \mathrm{c}) = \frac{1}{10} = \frac{10}{100} = 0.1 \ ,$$

$$P(X = \mathrm{d}) = \frac{1}{20} = \frac{5}{100} = 0.05 \ , \quad P(X = \mathrm{e}) = \frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 0.6 \ .$$

מצאו את העץ הצפנה וההצפנת האפמן של כל תו של X.

פתרון:



בחירת אות של $x_i \in X$	הצפנת האפמן
a	010
b	011
c	001
d	000
e	1

■

פורמלי הצפנת האפמן מוגדרת לפי ההגדרה הבאה:

הגדרה 8.3 הצפנת האפמן

נתון משתנה מקרי X. נגדיר הצפנת האפמן של X להיות הפונקציה (כלל מצפין)

$$f : X \to \{0,1\}^*$$

כאשר $\{0,1\}^*$ קבוצת רצפים של סיביות סופיים.

נתון רצף מאורעות $x_1, \ldots, x_n$. נגדיר

$$f(x_1 \ldots x_n) = f(x_1)||\ldots||f(x_n)$$

כאשר "||" מסמן שרשור (concatenation).

הגדרה 8.4 תוחלת האורך של הצפנת האפמן

נתונה הצפנת האפמן f. תוחלת האורך של ההצפנה מוגדרת

$$l(f) = \sum_{x \in X} P(X = x)\,|f(x)| \ .$$

משפט 8.3 אי שוויון האפמן

נתון קבוצת אותיות של טקסט גלוי X והצפנת האפמן f. נניח כי $l(f)$ תוחלת האורך של ההצפנה ו-$H(X)$ האנטרופיה של הטקסט גלוי. מתקיים

$$H(X) \leq l(f) \leq H(X) + 1 \ .$$

דוגמה 8.7 (המשך של דוגמה 8.6)

נתון הטקסט גלוי הבא

$$X = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}\}$$

והפונקצית הסתברות

$$P(X = \mathrm{a}) = \frac{13}{100} = 0.13 \ , \quad P(X = \mathrm{b}) = \frac{3}{25} = 0.12 \ , \quad P(X = \mathrm{c}) = \frac{1}{10} = 0.1 \ , \quad P(X = \mathrm{d}) = \frac{1}{20} = 0.05 \ ,$$

$$P(X = \mathrm{e}) = \frac{3}{5} = 0.6 \ .$$

1) מצאו את תוחלת האורך של ההצפנת האפמן.

2) מצאו את האנטרופיה.

3) הוכיחו כי אי-שוויון האפמן של ההצפנה שמצאתם בדוגמה 8.6 למעלה מתקיים.

פתרון:

סעיף 1)

$$\begin{aligned} l(f) =& \frac{5}{100} \cdot 3 + \frac{10}{100} \cdot 3 + \frac{12}{100} \cdot 3 + \frac{13}{100} \cdot 3 + \frac{60}{100} \cdot 1 \\ =& \frac{15 + 30 + 36 + 30 + 60}{100} \\ =& \frac{180}{100} \\ =& 1.8 \end{aligned}$$

סעיף 2)

$$\begin{aligned} H(X) =& -P(X = \mathrm{a}) \log_2 P(X = \mathrm{a}) - P(X = \mathrm{b}) \log_2 P(X = \mathrm{b}) - P(X = \mathrm{c}) \log_2 P(X = \mathrm{c}) \\ & - P(X = \mathrm{d}) \log_2 P(X = \mathrm{d}) - P(X = \mathrm{e}) \log_2 P(X = \mathrm{e}) \\ =& 1.74018 \ . \end{aligned}$$

סעיף 3) $H(X) = 1.74018$, $H(X) + 1 = 1.84018$, $l(f) = 1.8$. לכן

$$H(X) \leq l(f) \leq H(X) + 1$$

מתקיים.

■