13 תרגילים על התפלגות נורמלית 10-8

13.1 הקירוב הנורמלי להתפלגות הבינומית

אנו זוכרים כי מ"מ בדיד המתפלג בינומיאלי, כלומר $X \sim \text{Bin}(n,p)$, יש לה פונקציית התפלגות

$$f_X(k) = b(x,n,p) := \binom{n}{p} p^k q^{n-k} \ .$$

ההתפלגות הנורמאלי בעל תוחלת $\mu = np$ ו- $\sigma^2 = np(1-p)$ היא קירוב לההתפלגות הבינומיאלי לא רק כאשר n גדול ו- p לא קרוב מדיי ל- 0 או 1, אלא היא גם קירוב טובה כאשר n קטן ו- p קרוב ל $\frac{1}{2}$. כדי להמחיש את הקירוב של ההתפלגות המורמאלי לההתפלגות הבינומיאלי, ההיסטוגרמה של ההתפלגות הבינומיאלי $b(x,15,0.4)$ והגרף (עקומת פעמון) של ההתפלגות הנורמאלי מצויירים ביחד באיור להלן, כאשר יש לההתפלגות הנורמאלי תוחלת ושונות כך ש תוחלת

$$\mu = np = 15(0.4), \qquad \sigma^2 = npq = 15(0.4)(0.6) = 3.6 \ .$$

ההסתברות המדוייקת כי המ"מ בדיד X מקבל ערך נתון x היא שווה לשטח של המלבן אשר בסיסו מרוכז על x. למשל, ההסתברות ש X מקבל הערך של 4, היא שווה לשטח של המלבן אשר בסיסו מרוכז על $x = 4$:

$$P(X=4) = b(4,15,0.4) = \binom{15}{4}(0.4)^4(0.6)^{15-4} = 0.1268 \ .$$

זו גם שווה בערך לשטח התחום של הגרף בין $x_1 = 3.5$ ו- $x_2 = 4.5$. במונחים של הערכים המתאימים של הz:

$$z_1 = \frac{3.5-6}{1.897} = -1.32 \ , \qquad z_2 = \frac{4.5-6}{1.897} = -0.79 \ ,$$

נמצא את השטח זו להיות

$$P(-1.32 < Z < -0.79) = P(Z < -0.79) - P(Z < -1.32) = 0.214764 - 0.093418 = 0.121346 \ ,$$

והמספר זו כמעט מסכים לגמרי עם הערך לעייל.

הקריוב הנורמאלי שימושי בלחשב סכום של הסתברויות של מ"מ בינומיאלי כאשר n הוא גדול. לדוגמה, נתון $X \sim \text{Bin}(n,p)$ כאשר $n = 15$ ו- $p = 0.4$, מהי ההסתברות $P(7 < X < 9)$? התשובה היא

$$\sum_{k=7}^{9} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 0.356354 \ .$$

אבל קשה לחשב סכום ארוך כזה. במקום נשתמש בקירוב של מ"מ נורמאלי בעל $\mu = np = 6$ ו- $\sigma^2 = npq = 3.6$: עבור $x_1 = 6.5$ ו- $x_2 = 9.5$, ה z_1 ו- z_2 המתאימים הם

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = 0.2635, \qquad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = 1.84466,$$

נמצא ש

$$P(z_1 < Z < z_2) = P(Z < 1.84466) - P(Z < 0.2635) = 0.9678 - \quad 0.6026 \quad = 0.3652.$$

פורמאלית:

13.1 חוק. (קירוב הנורמלי להתפלגות הבינומית) אם X הוא משתנה מקרי בדיד ומתפלג בינומיאלי, ובעל תוחלת $\mu = np$ ושונות $\sigma^2 = npq$, הגבול של ההתפלגות של

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

כאשר $n \to \infty$ שואף להתפלגות הנורמאלי הסטנדרדי $n(z,0,1)$.