המחלקה למדעי המחשב

י"ד בתמוז תשפ"ה 10/07/2025
09 : 00 – 12 : 00

אלגברה לינארית 2 למדמ"ח

מועד א'

מרצים: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר .

תשפ"ה סמסטר ב'

השאלון מכיל 6 עמודים (כולל עמוד זה).

בהצלחה!

==

<u>הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה</u>

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

<u>חומר עזר</u>

- דפי נוסחאות של הקורס (3 עמודים בפורמט $A4$) מצורפים לשאלון.

<u>אחר / הערות</u> יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- יש לרשום בראש המחברת איזה שאלות לבדוק.

==

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *

שאלה 1 (25 נקודות)

א) (16 נק')
נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ מצאו צורת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $J = P^{-1}AP$.

ב) (3 נק')
תהי $B \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ מטריצה עבורה הפולינום האופייני הוא $p_B(x) = (x-1)^3(x-2)^3$
והפולינום המינימלי הוא $m_B(x) = (x-1)^2(x-2)$.
מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של B.

ג) (3 נק')
הוכיחו או הפריכו: קיימת מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ הרמיטית המקיימת $\text{tra}(A) = i$.

ד) (3 נק')
הוכיחו או הפריכו: אם $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ לכסינה וכל הערכים העצמיים שלה הם 1 או -1 אז $A^2 = I$.

שאלה 2 (25 נקודות)

א) (16 נק') נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ המוגדרת ע"י

$$T(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

לכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.
האם ההעתקה ניתנת ללכסון? במידה וכן, מצאו בסיס שבו המטריצה המייצגת של ההעתקה היא מטריצה אלכסונית. במידה ולא, נמקו מדוע.

יהי V מקחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ ויהיו שלושה וקטורים שונים $u_1, u_2, u_3 \in V$ בת"ל. ענו על הסעיפים ב' וג' הבאים:

ב) (5 נק') יהי $w \neq 0 \in V$ המקיים $\langle u_k, w\rangle = 0$ לכל $k = 1, 2, 3$. הוכיחו כי הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3, w\}$ בת"ל.

ג) (4 נק') נתון כי $\langle u_1 + u_2, u_1\rangle = \langle u_1 - u_3, u_2\rangle$. הוכיחו כי הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ אינה אורתוגונלית.

שאלה 3 (25 נקודות)

א) (16 נק') הוכיחו כי המטריצה $A=\begin{pmatrix}11 & -8 & 4\\ -8 & -1 & -2\\ 4 & -2 & -4\end{pmatrix}$ לכסינה אורתוגונלית ומצאו מטקיצה אורתוגונלית P ומטריצה אלכסונית D כך ש- $P^tAP=D$. נמקו היטב את תשובתכם.

ב) (9 נק') הוכיחו כי מטריצה $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ היא צמודה לעצמה ואוניטרית אם ורק אם B לכסינה אוניטרית ומקיימת $B^2=I$.

שאלה 4 (25 נקודות)

א) (7 נקודות) תהי $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת $A^3=4A$. מצאו את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של A.

ב) (6 נקודות) תהי $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת $A^3=4A$. מצאו את כל האפשרויות עבור $|A|$.

ג) (6 נקודות) תהי $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה הרמיטית ונניח כי $A^k=I$ עבור $k\geq 1$ כלשהו. הוכיחו כי $A^2=I$.

ד) (6 נקודות) תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית ויהיו $\lambda_1\neq\lambda_2$ ערכים עצמיים שונים של A וכן u_1,u_2 וקטורים עצמיים המתאימים ל- λ_1,λ_2. הוכיחו כי u_1,u_2 אורתוגונליים.

שאלה 5 (25 נקודות) יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב וקטורי V.

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הענות הבאות:

א) (6 נק') אם T אוניטרי אז הערך מוחלט של כל ערך עצמי של T שווה ל- 1.

ב) (6 נק') אם T נורמלי אז T צמוד לעצמו.

ג) (6 נק') יהי λ ערך עצמי של T, אז המרחב העצמי V_λ הוא T- שמור.

ד) (7 נק') אם T אנטי הרמיטי, אז כל ערך עצמי של T מדומה טהור.

מרחב אוקלידי: מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$.

מרחב אוניטרי: מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$.

הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי V מעל $\mathbb{R}$:
לכל $u, \mathrm{v}, w \in V$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{R}$:

1) סימטריות: $\langle u, \mathrm{v} \rangle = \langle \mathrm{v}, u \rangle$

2) ליניאריות: $\langle u + \mathrm{v}, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle \mathrm{v}, w \rangle$

$\langle \lambda u, \mathrm{v} \rangle = \lambda \langle u, \mathrm{v} \rangle$

3) חיוביות: $\langle u, u \rangle \geq 0.$

$\langle u, u \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$

הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי V מעל $\mathbb{C}$:
לכל $u, \mathrm{v}, w \in V$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{C}$:

1) הרמיטיות: $\langle u, \mathrm{v} \rangle = \overline{\langle \mathrm{v}, u \rangle}$

2) ליניאריות: $\langle u + \mathrm{v}, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle \mathrm{v}, w \rangle$

$\langle \lambda u, \mathrm{v} \rangle = \lambda \langle u, \mathrm{v} \rangle$

3) חיוביות: $\langle u, u \rangle \geq 0$

$\langle u, u \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$

אי-שוויון קושי שוורץ: $|\langle u, \mathrm{v} \rangle| \leq \|u\| \cdot \|\mathrm{v}\|$

אי-שוויון המשולש: $\|u + \mathrm{v}\| \leq \|u\| + \|\mathrm{v}\|$

היטל אורתוגונלי של ווקטור v על תת מרחב בעל בסיס אורתוגונלי $u_1, \ldots, u_n$:

$$P_U(\mathrm{v}) = \frac{\langle \mathrm{v}, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle \mathrm{v}, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 + \cdots + \frac{\langle \mathrm{v}, u_n \rangle}{\|u_n\|^2} u_n \ .$$

תהליך גרם שמידט לבניית בסיס אורתוגונלי:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \mathrm{v}_1 \ , \\
u_2 &= \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \\
u_3 &= \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \\
&\vdots \\
u_n &= \mathrm{v}_n - \frac{\langle \mathrm{v}_n, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_n, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \ldots - \frac{\langle \mathrm{v}_n, u_{n-1} \rangle}{\|u_{n-1}\|^2} u_{n-1} \ .
\end{aligned}$$

$\lambda \in \mathbb{F}$ **ערך עצמי** ו- $u \in \mathbb{F}^n$ **ווקטור עצמי** ($u \neq 0$) של מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ אם: $Au = \lambda u$

$\lambda \in \mathbb{F}$ **ערך עצמי** ו- $u \in V$ **ווקטור עצמי** ($u \neq 0$) של אופרטור $T : V \to V$ אם: $T(u) = \lambda u$

פולינום אופייני של מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$: $p_A(\lambda) = |\lambda I - A|$

מרחב עצמי של מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ששייך לערך עצמי λ הוא כל וקטור $u \in \mathbb{F}^n$ כאשר $u \neq 0$ כך ש:
$$Au = \lambda u \ .$$

מרחב עצמי של אופרטור $T : V \to V$ ששייך לערך עצמי λ הוא כל וקטור $u \in \mathbb{V}$ כאשר $u \neq 0$ כך ש:
$$T(u) = \lambda u \ .$$

בסיס אורתונורמלי:

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. בסיס אורתונורמלי, מסומן $\{b_1, \ldots, b_n\}$, מקיים את התנאי
$$\langle b_i, b_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \ , \qquad 1 \leq i, j \leq n \ .$$

כל וקטור $u \in V$ ניתן לרשום בבסיס אורתונורמלי:
$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, b_i\rangle \, b_i$$

סימון חלופי:
$$[u]_B = \begin{pmatrix} \langle u, b_1\rangle \\ \langle u, b_2\rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_i\rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_n\rangle \end{pmatrix}_B$$

יהי $T : V \to V$ אופרטור. המצרטיצה המייצגת על פי בסיס B היא
$$[T]_B = \begin{pmatrix} \langle T(b_1), b_1\rangle & \langle T(b_2), b_1\rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_1\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_1\rangle \\ \langle T(b_1), b_2\rangle & \langle T(b_2), b_2\rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_2\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_2\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_i\rangle & \langle T(b_2), b_i\rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_i\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_i\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_n\rangle & \langle T(b_2), b_n\rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_n\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_n\rangle \end{pmatrix} .$$

כלומר האיבר ה- ij של המטריצה המייצגת של T על פי הבסיס B היא . $[T]_{ij} = \langle T(b_j), b_i\rangle$

ההגדרה של אופרטור הצמוד:

אם $T : V \to V$ אופרטור, ו- $u, w \in V$ שני וקטורים כלשהם של V, אזי האופרטור הצמוד של T מוגדר כך שמתקיים

(*1) $$\langle T(u), w\rangle = \langle u, T^*(w)\rangle \ .$$

מההגדרה (*1) נובע:

(*2) $$\langle T^*(u), w\rangle = \langle u, T(w)\rangle$$

נוסחה ל- $T(u)$ ו- $T^*(u)$ במונחי בסיס אורתונורמלי $\{b_1, \cdots, b_n\}$:

(*3) $$T(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(u), b_i\rangle\, b_i$$

(*4) $$T^*(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u, T(b_i)\rangle\, b_i$$

משפט:

(*5) $$T^{**} = T$$

משפט: המטריצה המייצגת של אופרטור צמוד T^* נתונה ע"י

(*6) $$[T^*] = [T]^*$$

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית.

A הרמיטית:	$A = A^*$
A אנטי-הרמיטית:	$A^* = -A$
A אוניטרית:	$AA^* = I = A^*A$
A אורתוגונלית :	$AA^t = I = A^tA$
A נורמלית:	$AA^* = A^*A$

יהי $T : V \to V$ אופרטור מעל מרחב וקטורי V. נסמן המטריצה המייצגת $A = [T]$.

T צמוד לעצמו:	$A = A^*$	$\Leftrightarrow$	$T = T^*$
T אנטי-הרמיטי:	$A^* = -A$	$\Leftrightarrow$	$T^* = -T$
T אוניטרי:	$AA^* = I = A^*A$	$\Leftrightarrow$	$TT^* = I_V = T^*T$
T נורמלי:	$AA^* = A^*A$	$\Leftrightarrow$	$TT^* = T^*T$

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה Q אוניטרית ומטריצה D אלכסונית כך ש:

$$A = QDQ^* \quad \Leftrightarrow \quad D = Q^*AQ \ .$$

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אורתוגונלית אם קיימת מטריצה P אורתוגונלית ומטריצה D אלכסונית כך ש:

$$A = PDP^t \quad \Leftrightarrow \quad D = P^tAP \ .$$

פתרונות

שאלה 1

שאלה 3

א) (16 נק')

$$A=\begin{pmatrix}11 & -8 & 4\\ -8 & -1 & -2\\ 4 & -2 & -4\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t=\begin{pmatrix}11 & -8 & 4\\ -8 & -1 & -2\\ 4 & -2 & -4\end{pmatrix}=A$$

ז"א $A^t=A$ $\Leftarrow$ A סימטרית $\Leftarrow$ A לכסינה אורתוגונלית.

$$\begin{aligned}
p_A(x) &= |xI-A| \\
&= \begin{vmatrix}x-11 & 8 & -4\\ 8 & x+1 & 2\\ -4 & 2 & x+4\end{vmatrix} \\
&= (x-11)\begin{vmatrix}x+1 & 2\\ 2 & x+4\end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix}8 & 2\\ -4 & x+4\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}8 & x+1\\ -4 & 2\end{vmatrix} \\
&= (x-11)\left(x^2+5x\right) - 8\left(8x+40\right) - 4\left(4x+20\right) \\
&= x(x-11)\left(x+5\right) - 64\left(x+5\right) - 16\left(x+5\right) \\
&= x(x-11)\left(x+5\right) - 80\left(x+5\right) \\
&= \left(x^2-11x-80\right)\left(x+5\right) \\
&= \left(x-16\right)\left(x+5\right)\left(x+5\right) \\
&= \left(x-16\right)\left(x+5\right)^2
\end{aligned}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda=16$</u>

$$\text{Nul}\left(A-16I\right) = \begin{pmatrix}-5 & -8 & 4\\ -8 & -17 & -2\\ 4 & -2 & -20\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to 5R_3+4R_1]{R_2\to 5R_2-8R_1} \begin{pmatrix}-5 & -8 & 4\\ 0 & -21 & -42\\ 0 & -42 & -84\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2} \begin{pmatrix}-5 & -8 & 4\\ 0 & -21 & -42\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to \frac{-1}{21}R_2} \begin{pmatrix}-5 & -8 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1+8R_2} \begin{pmatrix}-5 & 0 & 20\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to \frac{-1}{5}R_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$V_{16}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}\backslash\{0\}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda=-5$</u>

$$\text{Nul}\,(A+5I) = \begin{pmatrix}16&-8&4\\-8&4&-2\\4&-2&1\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to 4R_3-R_1]{R_2\to 2R_2+R_1} \begin{pmatrix}16&-8&4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{4}R_1} \begin{pmatrix}4&-2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$V_{-5}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1/2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/4\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\backslash\{0\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}\right\}\backslash\{0\}$$

נסמן

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix},\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix},\quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

נפעיל האלגוריתם של גרם שמידט כדי למצוא בסיס אורתוגונלי:

$$u_1=\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

$$u_2=\mathrm{v}_2-\frac{\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}-\frac{0}{21}\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$$

$$u_3=\mathrm{v}_3-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}-\frac{0}{21}\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}-\frac{-1}{17}\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix}16\\34\\4\end{pmatrix}$$

לכן מצאנו בסיס אורתוגונלי:

$$u_1=\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix},\quad u_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix},\quad u_3=\begin{pmatrix}8\\17\\2\end{pmatrix}.$$

בסיס אורתונורמלי:

$$\hat{u}_1=\frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix},\quad \hat{u}_2=\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix},\quad \hat{u}_3=\frac{1}{\sqrt{357}}\begin{pmatrix}8\\17\\2\end{pmatrix}.$$

ב) כיוון $\Leftarrow$

נניח כי B צמודה לעצמה וגם B אוניטרית.

(1) $\Leftarrow$ $B=B^*$ וגם $BB^*=I$.

(2) מכיוון ש- B צמודה לעצמה $\Leftarrow$ B נורמלית $\Leftarrow$ ממשפט הלכסון אוניטרית $\Leftarrow$ B לכסינה אוניטרית.

(3)
$$BB \overset{(1):\ B\ \text{צמוד לעצמו}}{=} BB^* \overset{(1):\ B\ \text{אוניטרי}}{=} I$$

לכן $B^2=I$, כנדרש.

כנדרש.

כיוון $\Rightarrow$

נניח כי $B^2=I$ וגם B לכסינבה אוניטרית.

(1) $\Leftarrow$ $B^2=I$ וגם קיימת Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $B=QDQ^*$.

(2)
$$I=B^2=QDQ^*QDQ^*=QD^2Q^* \quad \Rightarrow \quad D^2=Q^*IQ=Q^*Q=I\ .$$

לכן $D=\mathrm{diag}\left(\lambda_1, \quad \cdots \quad \lambda_n\right)$ כשאר $\lambda_i=\pm 1$

(3) $\Leftarrow$ D ממשית ואלכסונית $\Leftarrow$ $D=D^*$.

(4) לכן
$$B^* \overset{(1)}{=} (QDQ^*)^*=QD^*Q^* \overset{(3)}{=} QDQ^*=B$$

לכן $B=B^*$ ולכן B לעצמה, כנדרש.

(5)
$$BB^* \overset{(1)}{=} QDQ^*(QDQ^*)^*=QDQ^*QD^*Q=QDD^*Q \overset{(3)}{=} QD^2Q^* \overset{(2)}{=} QQ^*=I$$

לכן B אוניטרית, כנדרש.

שאלה 4

שאלה 5

א) נניח ש- $T:V\to V$ אופרטור אוניטרי, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v})=\lambda\mathrm{v}$. אז

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),T(\mathrm{v})\rangle &= \langle \lambda\mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (T\ \text{וקטור עצמי של}\ \mathrm{v})\\ &=\lambda\,\langle \mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית})\\ &=\lambda\bar{\lambda}\,\langle \mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית})\end{aligned}$$
.

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),T(\mathrm{v})\rangle &= \langle \mathrm{v},T^*T(\mathrm{v})\rangle && \text{(הגדרה של אופרטור הצמוד)}\\ &= \langle \mathrm{v},I(\mathrm{v})\rangle && (T \text{ אוניטרי})\\ &= \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle = \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \quad \Rightarrow \quad (\lambda\cdot\bar{\lambda}-1)\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle = 0\ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow$ $\mathrm{v}\neq 0$ $\Leftarrow$ $\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \neq 0$ $\Leftarrow$ $(\lambda\cdot\bar{\lambda}-1)=0$ $\Leftarrow$ $\lambda\bar{\lambda}=1$ $\Leftarrow$ $|\lambda|^2=1$.

ב) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:
האופרטור $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדר:

$$T(u)=Au\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}0&i\\1&0\end{pmatrix}$$

לכל $u\in\mathbb{R}^2$.

$$[T]=\begin{pmatrix}0&i\\1&0\end{pmatrix}\ ,\qquad [T]^*=\begin{pmatrix}0&1\\-i&0\end{pmatrix}$$

$$[T][T]^*=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=[T][T]^*$$

לכן T נורמלי אבל $[T]\neq[T]^*$ לכן T לא צמוד לעצמו.

ג) (6 נק') אם λ ערך עצמי של T אזי לכל וקטור עצמי $u\in V_\lambda$ מתקיים

$$T(u)=\lambda u\in \operatorname{span}\{u\}\subseteq V_\lambda$$

לכן לכל $u\in V_\lambda$ מתקיים $T(u)\in V_\lambda$.

ד) (7 נק')

<u>**שיטה 1**</u>

נניח ש- $T:V\to V$ אופרטור צמוד לעצמו, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v})=\lambda\mathrm{v}$. אז

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \lambda\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\mathrm{v} \text{ וקטור עצמי של } T)\\ &=\lambda\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && \text{(לינאריות של מכפלה פנימית)}\end{aligned}\ .$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \mathrm{v},T^*(\mathrm{v})\rangle && \text{(הגדרה של אופרטור הצמוד)}\\ &= \langle \mathrm{v},-T(\mathrm{v})\rangle && (T \text{ אנטי-הרמיטי})\\ &= -\langle \mathrm{v},T(\mathrm{v})\rangle\\ &= -\langle \mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\mathrm{v} \text{ וקטור עצמי של } T)\\ &= -\bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && \text{(לינאריות חלקית של מכפלה פנימית)}\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda \langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle = -\bar{\lambda} \langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle \quad \Rightarrow \quad (\lambda + \bar{\lambda}) \langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle = 0 \ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v} \neq 0 \Leftarrow \langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle \neq 0 \Leftarrow (\lambda + \bar{\lambda}) = 0 \Leftarrow \lambda = -\bar{\lambda}$.

<u>שיטה 2</u>

כל אופרטור ניתן לרשום בצורה

$$T = T_1 + T_2$$

כאשר T_1 אופרטור הרמיטי ו- T_2 אופרטור אנטי-הרמיטי.
ז"א

$$T^* = T_1 - T_2$$