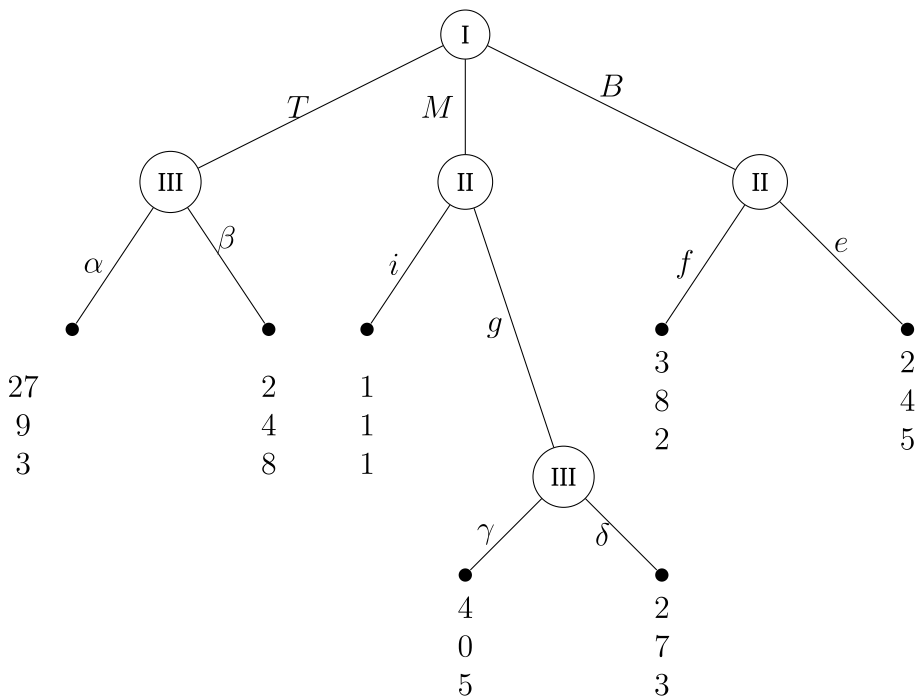
שאלה 1 **(25 נקודות)**

א) **(20 נק')** מצאו את כל שיווי משקל במשחק הבא:



ב) **(5 נקודות)**

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה של משחק שני שחקנים. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית: אם A סימטרית וחיובית אז למשחק אין שיווי משקל.

שאלה 2 **(25 נקודות)**

נתון המשחק הבא בצורה אסטרטגית.

II / I	L	C	R
T	$2,4$	$3,0$	$2,0$
M	$0,4$	$4,10$	$4,0$
B	$0,4$	$0,2$	$6,6$

מצאו את כל שיווי המשקל, ואת התשלומים של כל שחקן של כל שיווי משקל.

שאלה 3 **(25 נקודות)**

א) (15 נקודות)
נתון המשחק הבא בצורה אסטרטגית:

II / I	a	b	c	d
T	$-2,-40$	$-14,-14$	$-2,4$	$-10,16$
M	$54,40$	$26,-4$	$42,4$	$26,-2$
B	$-10,40$	$-6,10$	$14,-2$	$6,-8$

אילו עסקה של אליס היא אסטרטגית מקסמין? אילו עסקה של בוב היא אסטרטגית מינמקס?
האם קיים ערך למשחק זה? אם כן, מהו? אם לא, הסבירו מדוע.

ב) (10 נק')
משחק שני שחקנים נקרא משחק סימטרי אם לשני השחקנים אותה קבוצת אסטרטגיות $S_1 = S_2$ ופונקצית התשלומים מתקיימים $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$ לכל $s_1, s_2 \in S_1$.
הוכיחו שקבוצת שיווי המשקל במשחק סימטרי היא קבוצת סימטרי, כלומר אם $(s_1 = s_1^*, s_2 = s_2^*)$ היא שיווי משקל, אז גם $(s_1 = s_2^*, s_2 = s_1^*)$ הוא שיווי משקל.

שאלה 4 **(25 נקודות)**

א) (15 נק') אליס ובוב מייצרים יין ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאלים. הם מחליטים סימולטנית על המכות שהם ייצרו, וההיצע הכולל קובע את מחיר לליטר אחד של היין, שהוא זהה לשניהם. הפרמטר

הביקוש הוא $a = 12$ שקלים לליטר. עלות הייצור של ליטר אחד לאליס היא שלושה שקלים אחד לליטר, ועלות הייצור לבוב הוא שני שקלים לליטר.
חשבו את שיווי המשקל במשחק זה.

ב) **(10 נק')** מהו התשלום של אליס והתשלום של בוב בשיווי משקל?

שאלה 5 **(25 נקודות)**

יהי $G = ((1, \ldots, n), (S_1, \ldots, S_n), (u_1, \ldots, u_n))$ משחק n שחקנים בצורה אסטרטגיות.
הוכיחו את הטענה הבאה:
אם הווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ שיווי משקל נאש, אז s^* הוא פתרון באסטרטגיות השולטות חזק.

פתרונות

שאלה 1 (25 נקודות)

שאלה 2 (25 נקודות)

שאלה 3 (25 נקודות)

א)

ב)

ג) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ שמוגדרת

$$A = \begin{pmatrix} (1,3) & (2,1) \\ (2,1) & (4,5) \end{pmatrix} \ .$$

I \ II	a	b
A	$1,\underline{3}$	$2,1$
B	$2,1$	$\underline{4},\underline{5}$

הרי הווקטור אסטרטגיות (B,b) שיווי משקל.

ד) יהיה G משחק שני שחקנים סימטרי. יהי הוקטור אסטרטגיות (s_1^*,s_2^*) שווי משקל ב- G. אז

$$u_1\left(s_1^*,s_2^*\right) = \max_{s_1\in S_1}\left(s_1,s_2^*\right)$$

ו-

$$u_1\left(s_1^*,s_2^*\right) = \max_{s_2\in S_2}\left(s_1^*,s_2\right) \ .$$

לפי הסימטריות של המשחק:

$$u_2\left(s_2^*,s_1^*\right) \overset{\text{סימטריות}}{=} u_1\left(s_1^*,s_2^*\right) \overset{\text{הגדרת שווי משקל}}{=} \max_{s_1\in S_1} u_1\left(s_1,s_2^*\right) \overset{\text{סימטריות}}{=} \max_{s_1\in S_1} u_2\left(s_2^*,s_1\right) \overset{\text{סימטריות}}{=} \max_{s\in S_2} u_2\left(s_2^*,s\right)$$

ו-

$$u_1\left(s_2^*,s_1^*\right) \overset{\text{סימטריות}}{=} u_2\left(s_1^*,s_2^*\right) \overset{\text{הגדרת שווי משקל}}{=} \max_{s_2\in S_2} u_2\left(s_1^*,s_2\right) \overset{\text{סימטריות}}{=} \max_{s_2\in S_2} u_1\left(s_2,s_1^*\right) \overset{\text{סימטריות}}{=} \max_{s\in S_1} u_1\left(s,s_1^*\right) \ .$$

לכן

$$u_1\left(s_2^*, s_1^*\right) = \max_{s\in S_1} u_1\left(s, s_1^*\right) \ ,$$
$$u_2\left(s_2^*, s_1^*\right) = \max_{s\in S_2} u_2\left(s_2^*, s\right)$$

ולכן $\left(s_2^*, s_1^*\right)$

שאלה 4 **(25 נקודות)**

שאלה 5 **(25 נקודות)**

א) (10 נק')

משפט זו אומר שאם הווקטור אסטרטגיות $s^* = \left(s_1^*, \ldots, s_n^*\right)$ הוא שיווי משקל נאש, אז s^* תישאר לאחר תהליך סילוק חוזר של אסטרטגיות הנשלטות חזק.

נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי $\left(s_1^*, \ldots, s_n^*\right)$ שיווי משקל נאש אבל הוא לא פתרון באסטרטגיות שולטות חזק.
אם כן אז תהי s_i^* האסטרטגיה הראשונה שיורדת בתהליך סילוק חוזר.
ז"א קיימת אסטרטגיה $t_i \in S_i$ אשר שולטת חזק ב- s_i^*, כלומר

$$u_i\left(s_1, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n\right) < u_i\left(s_1, \ldots, t_i, \ldots, s_n\right) \quad . \qquad \text{(\#1)}$$

לכל $s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n$ אשר עדיין נשארות בתהליך.

בפרט, מכיוון שהאסטרטגיות $s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*$ עדיין נשארות בתהליך אחרי מחיקת אסטרטגיה s_i^*, אז לפי (#1) מתקיים

$$u_i\left(s_1^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*\right) < u_i\left(s_1^*, \ldots, t_i, \ldots, s_n^*\right) \quad . \qquad \text{(\#2)}$$

בסתירה לכך ש $s^* = \left(s_1^*, \ldots, s_n^*\right)$ הוא שיווי משקל.