תרגילים: גרם שמידט,

שאלה 1 נתון התת מרחב

$$U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

של המרחב מכפלה פנימית $\mathbb{C}^3$.

א) מצאו בסיס אורתוגונלי.

ב) מצאו בסיס אורתונומרלי.

שאלה 2 מצאו בסיס אורתוגונלי של התת-מרחב

$$U = \text{span}\left\{ \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

של המרחב מכפלה פנימית $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

שאלה 3 מצאו בסיס אורתוגונלי של התת-מרחב

$$U = \text{span}\left\{ \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} , \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} , \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} , \mathrm{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

של המרחב מכפלה פנימית $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

שאלה 4 יהי $V = R_{\leq 2}[x]$ מרחב מכפלה פנימית עם המכפלה הפנימית הבאה:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx \ .$$

ונתבונן בתת המרחב הבא: $W = \text{span}\{1, x\}$.

א) מצאו בסיס אורתוגונלי ל W.

ב) השלימו את הבסיס האורתוגונלי שמצאתם בסעיף א לבסיס אורתוגונלי למרחב V.

ג) נסמן ב־ $P_W : V \to V$ את אופרטור ההטלה האורתוגנלית על W. נניח ש־ B הוא הבסיס הסדור שמצאתם בסעיף ב של V כך שאברי הבסיס B_W הם האברים הראשונים. מצאו את $[P_W]_B^B$.

שאלה 5

נתון מרחב ווקטורי $\mathbb{R}_3[x]$ עם מכפלה פנימית אינטגרלית בקטע $[-1, 1]$:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) \ .$$

א) מצאו בסיס אורתוגונלי למרחב $V = \text{span}\left\{1-3x, x, 5x^3+8\right\}$.

ב) מצאו את ההיטל האורתוגונלי של כל אחד מהווקטורים:

$$w_1 = 38 - 16x + 24x^3 \ , \qquad w_2 = 3x^2 + 5x^3 \ ,$$

שאלה 6 נתון מרחב וקטורי $\mathbb{R}_3[x]$ (פולינומים מדרגה 3 לכל היותר) עם מכפלה פנימית אינטגרלית בקטע $[-1,1]$:

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\, dx \ .$$

מצאו בסיס אורתוגונלי למרחב $U = \text{span}\left\{1, x, x^2\right\}$.

תשובות

שאלה 1

א) נבנה בסיס אורתוגונלי של V_2 ע"י שיטת גרם שמידט:

$$u_1=\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\ ,\qquad \|u_1\|^2=2\ .$$

$$\begin{aligned}u_2=&\mathrm{v}_2-\frac{1}{\|u_1\|^2}\left\langle \mathrm{v}_2,u_1\right\rangle\cdot u_1\\ =&\begin{pmatrix}i\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\left\langle\begin{pmatrix}i\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}i\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\cdot i\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\\ =&\frac{1}{2}\begin{pmatrix}i\\-2\\i\end{pmatrix}\end{aligned}$$

בסה"כ קיבלנו בסיס אורתוגונלי של V_2:

$$\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}i\\-2\\i\end{pmatrix}\right\}\ .$$

ב) כעת נבנה בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{\hat{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\hat{u}_2=\sqrt{\frac{1}{6}}\begin{pmatrix}i\\-2\\i\end{pmatrix}\right\}\ .$$

שאלה 2

נמצא בסיס א"ג של $\{\mathrm{v}_1\ ,\mathrm{v}_2\ ,\mathrm{v}_3\}$.

$$u_1=\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

$$u_2=\mathrm{v}_2-\frac{\left\langle\mathrm{v}_2,u_1\right\rangle}{\|u_1\|^2}u_1$$

$$\|u_1\|^2=\mathrm{tr}\left(u_1^t\cdot u_1\right)=\mathrm{tr}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=1\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle = \mathrm{tr}\left(u_1^t \cdot \mathrm{v}_2\right) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \ .$$

לכן

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle = \mathrm{tr}\left(u_1^t \cdot \mathrm{v}_3\right) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle = \mathrm{tr}\left(u_2^t \cdot \mathrm{v}_3\right) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2 \ .$$

$$\|u_2\|^2 \mathrm{tr}\left(u_2^t \cdot u_2\right) = \frac{6}{7}\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2 \ .$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן בסיס אורתונוגונלי:

$$U = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

<u>שאלה 3</u> נשים לב כי הקבוצה $\{\mathrm{v}_1\ ,\mathrm{v}_2\ ,\mathrm{v}_3\}$ בת"ל ו- $\mathrm{v}_4 = 2\mathrm{v}_3$. לכן $\dim(U) = 3$. נמצא בסיס א"ג של $\{\mathrm{v}_1\ ,\mathrm{v}_2\ ,\mathrm{v}_3\}$.

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\|u_1\|^2 = \mathrm{tr}\left(u_1^t \cdot u_1\right) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 14 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle = \mathrm{tr}\left(u_1^t \cdot \mathrm{v}_2\right) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2 \ .$$

לכן

$$u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ 4 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \ .$$

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

$$\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle = \mathrm{tr}\left(u_1^t\cdot \mathrm{v}_3\right) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\right) = 15 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle = \mathrm{tr}\left(u_2^t\cdot \mathrm{v}_3\right) = \frac{6}{7}\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{15}{14} & -\frac{15}{7}\\ 0 & \frac{25}{14}\end{pmatrix} = \frac{5}{14}\begin{pmatrix} -3 & -6\\ 0 & 5\end{pmatrix} \ .$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} -\frac{85}{78} & -\frac{80}{39}\\ \frac{20}{39} & \frac{45}{26}\end{pmatrix}$$

לכן בסיס אורתונוגונלי:

$$U=\left\{u_1=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix},\quad u_2=\frac{6}{7}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix}\ ,\quad u_3=\begin{pmatrix} -\frac{85}{78} & -\frac{80}{39}\\ \frac{20}{39} & \frac{45}{26}\end{pmatrix}\right\} \ .$$

שאלה 4

$V=R_{\leq 2}[x]$ מרחב מכפלה פנימית:

$$\langle f(x),g(x)\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \ .$$

נסמן

$$W=\mathrm{span}\left\{u_1=1,u_2=x\right\} \ .$$

א) נמצא בסיס אורתוגונלי ל W.

$$\mathrm{v}_1=u_1=1 \ .$$

$$\|\mathrm{v}_1\|^2=1$$

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_2 =& u_2-\frac{\langle u_2,\mathrm{v}_1\rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\mathrm{v}_1\\ =&x-\frac{\langle x,1\rangle}{1}\cdot 1\\ =&x-\langle x,1\rangle \ .\end{aligned}$$

$$\langle x,1\rangle=\int_0^1 dx\,1\cdot x=\int_0^1 dx\,x=\int_0^1 dx\,x=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

לכן

$$\mathrm{v}_2 =x-\frac{1}{2} \ .$$

לכן נקבל הבסיס האורתונורמלי

$$B=\left\{\mathrm{v}_1=1,\mathrm{v}_2=\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$\|\text{v}_1\|^2 = 1$ ו-

$$\|\text{v}_2\|^2 = \langle \text{v}_2, \text{v}_2 \rangle = \int_0^1 dx \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \ .$$

לכן נקבל הבסיס האורתונורמלי

$$\hat{B} = \left\{1, \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right\}$$

ב) נמצא בסיס אורתוגונלי של $W^\perp$. נסמן $p(x) = a + bx + cx^2$.

$$p(x) \in W^\perp \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle p(x), 1 \rangle = 0 \ , \ \langle p(x), x \rangle = 0 \ .$$

$$\langle a + bx + cx^2, 1 \rangle = \int_0^1 dx \ \left(a + bx + cx^2\right) = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$$

$$\langle a + bx + cx^2, x \rangle = \int_0^1 dx \, x \cdot \left(a + bx + cx^2\right) = \int_0^1 dx \ \left(ax + bx^2 + cx^3\right) = \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4}$$

$$\left.\begin{array}{ll} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} & = 0 \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} & \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{ll} 6a + 3b + 2c & = 0 \\ 6a + 4b + 3c & = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \ \rightarrow \ \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $(a,b,c) = \left(\frac{1}{6}, -1, 1\right) c = \frac{1}{6}(1,-6,6)\, c$ לכן

$$B_{W^\perp} = \left\{1 - 6x + 6x^2\right\}$$

ג) לכל $w \in W$:

$$P_W(w) = w \ .$$

לכל $w^\perp \in W^\perp$:

$$P_W(w^\perp) = 0 \ .$$

לכן

$$[P_W]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

■

<u>שאלה 5</u>

א) נסמן

$$\mathrm{v}_1 = 1-3x, \quad \mathrm{v}_2 = x\ , \quad \mathrm{v}_3 = 5x^3+8\ .$$

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = 1-3x\ .$$

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\|u_1\|^2 = \int_{-1}^{1} dx\,(1-3x)^2 = \left[\frac{(1-3x)^3}{-9}\right]_{-1}^{1} = \frac{(-2)^3-4^3}{-9} = \frac{-72}{-9} = 8\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} dx\, x(1-3x) = \int_{-1}^{1} dx\ \left(x-3x^2\right) = \left[\frac{x^2}{2}-x^3\right]_{-1}^{1} = -2\ .$$

לכן

$$u_2 = \frac{x+1}{4}\ .$$

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} dx\ \left(5x^3+8\right)(1-3x) = \int_{-1}^{1} dx\ \left(5x^3-15x^4+8-24x\right) = \left[\frac{5x^4}{4}-3x^5+8x-12x^2\right]_{-1}^{1} = 10\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle = \int_{-1}^{1} dx\,\frac{1}{4}(x+1)\left(5x^3+8\right) = \int_{-1}^{1} dx\ \left(\frac{5x^4}{4}+\frac{5x^3}{4}+2x+2\right) = \left[\frac{x^5}{4}+\frac{5x^4}{16}+x^2+2x\right]_{-1}^{1} = \frac{9}{2}\ .$$

$$\|u_2\|^2 = \int_{-1}^{1} dx\ \left(\frac{x+1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\int_{-1}^{1} dx\ (x+1)^2 = \frac{1}{16}\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{6}\ .$$

לכן

$$\begin{aligned} u_3 =& 5x^3+8-\frac{10}{8}(1-3x)-\frac{\left(\frac{9}{2}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)}\cdot\left(\frac{x+1}{4}\right)\\ =& 5x^3+8-\frac{5}{4}+\frac{15x}{4}-\frac{27}{4}\cdot(x+1)\\ =& 5x^3+8-\frac{32}{4}-\frac{12x}{4}\\ =& 5x^3+8-8-3x\\ =& 5x^3-3x\ . \end{aligned}$$

בסיס אורתונוגונלי:

$$U = \left\{u_1 = 1-3x, \quad u_2 = \frac{x+1}{4}\ , \quad u_3 = 5x^3-3x\right\}\ .$$

ב) $w_1 \in U$ לכן

$$P_U(w_1) = w_1 \ .$$

$$P_U(w_2) = \frac{\langle w_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 + \frac{\langle w_2, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 + \frac{\langle w_2, u_3\rangle}{\|u_3\|^2}u_3$$

$$\langle w_2, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} dx \ \left(5x^3+3x^2\right)(1-3x) = \int_{-1}^{1} dx \ \left(-15x^4-4x^3+3x^2\right) = \left[-3x^5-x^4+x^3\right]_{-1}^{1} = -4 \ .$$

$$\langle w_2, u_2\rangle = \int_{-1}^{1} dx \ \frac{1}{4}(x+1)\left(5x^3+3x^2\right) = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} dx \ \left(5x^4+8x^3+3x^2\right) = \frac{1}{4}\left[x^5+2x^4+x^3\right]_{-1}^{1} = 1 \ .$$

$$\begin{aligned}\langle w_2, u_3\rangle &= \int_{-1}^{1} dx \ \left(5x^3-3x\right)\left(5x^3+3x^2\right)\\ &= \int_{-1}^{1} dx \ \left(25x^6+15x^5-15x^4-9x^3\right)\\ &= \left[\frac{25x^7}{7}+\frac{5x^6}{2}-3x^5-\frac{9x^4}{4}\right]_{-1}^{1}\\ &= \frac{25}{7}+\frac{5}{2}-3-\frac{9}{4}-\left(\frac{25\cdot(-1)}{7}+\frac{5}{2}-3\cdot(-1)-\frac{9}{4}\right)\\ &= \frac{25}{7}+\frac{25}{7}-3-3\\ &= \frac{50}{7}-6\\ &= \frac{50-42}{7}\\ &= \frac{8}{7} \ .\end{aligned}$$

$$\|u_3\|^2 = \int_{-1}^{1} dx \ \left(5x^3-3x\right)^2 = \int_{-1}^{1} dx \left(25x^6-30x^4+9x^2\right) = \left[\frac{25x^7}{7}-6x^5+3x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{7} \ .$$

$$\begin{aligned}P_U(w_2) &= \frac{-4}{8}(1-3x) + \frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)}\left(\frac{x+1}{4}\right) + \frac{\left(\frac{8}{7}\right)}{\left(\frac{8}{7}\right)}\left(5x^3-3x\right)\\ &= \frac{-1}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{6}{4}(x+1)+5x^3-3x\\ &= \frac{-1}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{3}{2}+5x^3-3x\\ &= 1+3x+5x^3-3x\\ &= 1+5x^3 \ .\end{aligned}$$

שאלה 6

נסמן

$$\mathrm{v}_1 = 1, \quad \mathrm{v}_2 = x \ , \quad \mathrm{v}_3 = x^2 \ .$$

$U = \text{span}\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$.

נבנה בסיס אורתוגונלי באמצעות תהליך גרם שמידט:

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = 1 \ .$$

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\|u_1\|^2 = \int_{-1}^{1} dx\,(1)^2 = [x]_{-1}^{1} = 2 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} dx\,x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0 \ .$$

לכן

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = x - \frac{0}{2}x = x \ .$$

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} dx\,x^2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle = \int_{-1}^{1} dx\,x^2 \cdot x = \int_{-1}^{1} dx\,x^3 = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0 \ .$$

$$\|u_2\|^2 = \int_{-1}^{1} dx\,x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \ .$$

לכן

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = x^2 - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{2} \cdot 1 - \frac{0}{\left(\frac{2}{3}\right)} x = x^2 - \frac{1}{3}$$

קיבלנו בסיס אורתוגונלי של U:

$$U = \left\{ u_1 = 1, \quad u_2 = x \ , \quad u_3 = x^2 - \frac{1}{3} \right\} \ .$$