המחלקה למדעי המחשב

15/07/2024 ט' תמוז תשפ"ד
08 : 30 – 10 : 00

חדוא-2 למדמ"ח

בוחן אמצע סמסטר

מרצים: ד"ר זהבה צבי , ד"ר ירמיהו מילר .

תשפ"ד סמסטר ב'

השאלון מכיל 9 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לענות על שאלות 1-4.

==

שאלה 1 **(20 נקודות)** תהיינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתבדרת. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענות הבאות.

א) (10 נק') $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

ב) (10 נק') $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת.

שאלה 2 **(30 נקודות)**

עבור כל אחד של הטורים הבאים בדקו אם הוא מתכנס או מתבדר:

א) (10 נק') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}{n!}$

ב) (10 נק') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 3^n}{n^n}$

ג) (10 נק') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{(2n)^2}$

שאלה 3 **(25 נקודות)**

מצאו את הרדיוס התכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n \ n}$.

שאלה 4 **(25 נקודות)**

נתונה סדרה הרקורסיבית $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n},\ a_1 = \sqrt{2}$.

א) (8 נקודות) הוכיחו כי $\sqrt{2} \leq a_n < 2$.

ב) (8 נקודות) הוכיחו כי הסדרה עולה מונוטונית.

ג) (9 נקודות) הוכיחו כי הסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.

פתרונות

שאלה 1

א) לא נכונה. דוגמה נגדית: $a_n = \frac{1}{n}\,, b_n = n^2$.

ב) לא נכונה. דוגמה נגדית: $a_n = \frac{1}{n^2}\,, b_n = n$.

שאלה 2 (25 נקודות)

א) נבדוק התכנסות באמצעות מבחן דלמבר:

$$a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}{n!}\ .$$

לכן

$$a_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)(2(n+1)+1)}{(n+1)!} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)(2n+3)}{(n+1)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n+1)(2n+3)}{(n+1)!}\right)}{\left(\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n+1)}{n!}\right)} = \frac{n!}{(n+1)!}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)(2n+3)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)} = \frac{1}{n+1}\cdot(2n+3) = \frac{2n+3}{n+1} = \frac{2n+3}{n+1}$$

מכאן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1} = 2 > 1$$

לכן הטור מתבדר.

ב) נבדוק התכנסות באמצעות מבחן דלמבר:

$$a_n = \frac{3^n n!}{n^n}\ .$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right)}{\left(\frac{3^n n!}{n^n}\right)} = \frac{3^{n+1}}{3^n}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = 3(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1} = 3\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 3\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = 3e^{-1} = \frac{3}{e} > 1\ .$$

לכן הטור מתבדר.

ג) לכל $n \geq 5$:

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{(2n)^2} > \sum_{n=5}^{\infty} \frac{n}{(2n)^2} = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{4n}$$

הטור $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{4n}$ מתבדר לכן גם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{(2n)^2}$ מתבדר.

שאלה 3 (30 נקודות)

הטור הנתון הוא

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

כאשר $a_n = \frac{1}{n4^n}$. נוסחת דלמבר לרדיוס התכנסות:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n4^n}\right)}{\left(\frac{1}{(n+1)4^{n+1}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)4^{n+1}}{n4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)}{n} = 4 \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 4 \ .$$

שאלה 4 (30 נקודות)

א) עבור $n = 1$, $a_1 = \sqrt{2}$ לכן

$$\sqrt{2} \leq a_1 < 2$$

מתקיים. נניח כי $a_n > \sqrt{2}$. אז

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} > \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} \ .$$

נניח כי $a_n < 2$. אז

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} < 2 \ .$$

ב) $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > a_1$. נניח כי $a_{n+1} > a_n$. אז

$$a_{n+2} = \sqrt{2 + a_{n+1}} > \sqrt{2 + a_n} = a_{n+1}$$

ז"א $a_{n+2} > a_{n+1}$.

ג) הסדרה חסומה ומונוטונית עולה לכן מתכנסת. נניח כי $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. אז גם $L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$.

$$L = \sqrt{2+L} \quad \Rightarrow \quad L^2 = 2+L \quad \Rightarrow \quad L^2 - L - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (L-2)(L+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad L = -1 \text{ או } 2 \ .$$

מכיוון ש- $a_n \geq \sqrt{2}$ אז $L = 2$.