# שעור 3

# הרצאה 3: שיווי משקל נאש (המשך)

## 3.1 דילמה האסיר

**דוגמה 3.1 (דילמה האסיר)**

משחק פשוט מאוד, ויחד עם זאת מהרבה בחינות, הוא המשחק הידוע בשם "דילמה האסיר". המשחק מופיע בספרות בצורת הסיפור הבא.

שני עבריינים אליס (שחקן 1) ובוב (שחקן 2) ביצעו פשע חמור ונעצרו. בהעדר כל הוכחות אחרות, הדרך היחידה שבה יכולה המשטרה להשיג הרשעה על עבירה זו היא שאחד העצורים (או שניהם) מודה. בביצוע המעשה. בחקירתם העמידה המשטרה כל אחד מהעצורים בפני ההחלטה הבאה:

- אם אליס מלשינה ובוב שותק אליס יוצאת חופשי ובוב מקבל 10 שנים מאסר.
- אם בוב מלשין ואליס שותקת, בוב יוצא חופשי ואליס מקבלת 10 שנים מאסר.
- אם שניהם שותקים, יש בידי המשטרה ראיות להרשעתם בעבירות פחותות (למשל, העלמת מס) שמוביל למאסר של שנה אחת לכל אחד.
- אם שניהם מלשינים המשטרה מבקשת להתחשב בשיתוף הפעולה שלהם ולגזור את עונשם ל־6 שנות מאסר לכל אחד.

**א)** רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית.

**ב)** מצאו את הפתרון באסטרטגיות שולטות חזק.

**ג)** מצאו את השיווי משקל של המשחק.

**פתרון:**

**א)** נסמן:

$C_1 =$ האסטרטגיה שאליס "מלשינה".

$D_1 =$ האסטרטגיה שאליס "שותקת".

$C_2 =$ האסטרטגיה שבוב "מלשין".

$D_2 =$ האסטרטגיה שבוב "שותק".

המשחק בצורה אסטרטגית הינו:

| 2 בוב \ 1 אליס | $C_2$ | $D_2$ |
|---|---|---|
| $C_1$ | $-6,-6$ | $0,-10$ |
| $D_1$ | $-10,0$ | $-1,-1$ |

**ב)**

| 1 \ 2 | $C_2$ | $D_2$ |
|---|---|---|
| $C_1$ | $-6,-6$ | $0,-10$ |
| $D_1$ | $-10,-10$ | $-1,-1$ |

$\xrightarrow{D_2 \prec C_2}$

| 1 \ 2 | $C_2$ |
|---|---|
| $C_I$ | $-6,-6$ |
| $D_I$ | $\cancel{-10,-10}$ |

$\xrightarrow{D_I \prec C_1}$

| 1 \ 2 | $C_2$ |
|---|---|
| $C_1$ | $-6,-6$ |

לכן לפי הכללים של שחקנים רציונליים, שחקן $I$ ישתמש באסטרטגיה $C_1$, שחקן $2$ ישתמש באסטרטגיה $C_{II}$ והתשלום הסופי יהיה:

$$u_1(C_1,C_2)=-6\ ,\qquad u_2(C_1,C_2)=-6\ .$$

**ג)**

| 1 \ 2 | $C_2$ | $D_2$ |
|---|---|---|
| $C_1$ | $\underline{-6}\,,\ \underline{-6}$ | $\underline{0},-10$ |
| $D_1$ | $-10,-10$ | $-1\,,\ \underline{-1}$ |

השיווי משקל הוא

$$s^*=(C_1,C_2)\ ,\qquad u\left(s^*\right)=(-6,-6)\ .$$

■

## דוגמה 3.2 (מלחמת המינים)

המשחק המשחק הבא נקרא "מלחמת המינים" (battle of the sexes). שמו של המשחק בא מהתיאור הבא. זוג מתכנן בילוי למוצא שבת. האפשרויות העומדות לרשותם הן קונצרט $(C)$ או צפייה במשחק כדורגל $(F)$. הגבר (שחקן $I$) מעדיף צפייה במשחק הכדורגל, בעוד האישה (שחקן $II$) מעדיפה את הקונצרט, אך שניהם מעדיפים להיות יחד גם אם הבילוי המשותף הוא הפחות עדיף בעיניהם. השמחק בצורה אסטרטגית מתואר למטה. מצאו את כל שיווי משקל.

| $I$ \ $II$ | $C$ | $F$ |
|---|---|---|
| $C$ | $1,2$ | $0,0$ |
| $F$ | $0,0$ | $2,1$ |

**פתרון:**

| $I$ \ $II$ | $C$ | $F$ |
|---|---|---|
| $C$ | $\underline{1}\,,\ \underline{2}$ | $0,0$ |
| $F$ | $0,0$ | $\underline{2}\,,\ \underline{1}$ |

■

### דוגמה 3.3 (משחק תיאום)

המשחק המתואר בטבלה למטה שייך למשפחה של משחקים הנקראים "משחקי תיאום" (coordination games).

| $I \backslash II$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $A$ | $\underline{1}\,,\,\underline{1}$ | $0,0$ |
| $B$ | $0,0$ | $\underline{3}\,,\,\underline{3}$ |

מצאו את כל שיווי משקל במשחק.

**פתרון:**
הווקטורי אסטרטגיות אשר שיווי משקל הינם: $s^*=(A,a)$ ו- $s^*=(B,b)$. ■

### הגדרה 3.1 תשובה טובה ביות

(ההגדרה הזאת היא אותה הגדרה של תשובה טובה ביותר ב- 2.4. אני פשוט כתבתי אותה כאן שוב לנוחות.)

יהי $s_{-i}$ וקטור אסטרטגיות של השחקנים ללא $i$. אסטרטגיה $s_i$ של שחקן $i$ נקראת **תשובה טובה ביותר ל-** $s_{-i}$ אם מתקיים

$$u_i\left(s_i,s_{-i}\right)=\max_{t_i\in S_i}u_i\left(t_i,s_{-i}\right)\ .$$

### הגדרה 3.2 הגדרות שקולות של שיווי משקל

ההגדרות הבאות של שיווי משקל שקולות:

- וקטור אסטרטגיות $s^*=\left(s_1^*,\ldots,s_n^*\right)$ נקרא שיווי משקל נאש אם לכל שחקן $i\in N$ ולכל $s_i\in S_i$ מתקיים
$$u_i\left(s^*\right)\geq u_u\left(s_i,s_{-i}^*\right)\ .$$
- וקטור אסטרטגיות $s^*=\left(s_1^*,\ldots,s_n^*\right)$ נקרא שיווי משקל נאש אם לכל שחקן $i\in N$ האסטרטגיה $s_i^*$ היא תשובה טובה ביותר ל- $s_{-i}^*$.

## 3.2 תחרות דואפול על פי Cournot

**דוגמה 3.4 (דואפול)**

שני יצרניים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאלים. היצרנים מחליטים סימולטנית על הכמות שהם ייצרו, וההיצע הכולל קובע את מחיר המוצר, שהוא זהה לשני היצרנים. נסמן ב- $q_1$ וב- $q_2$ את הכמויות שמייצרים היצרנים 1 ו- 2 בהתאמה. אזי הכמות הכוללת של מוצרים בשוק היא $q_1+q_2$. נניח כי המחיר של יחידה שווה ל-

$$2-q_1-q_2 \ .$$

עלות הייצור של יחידה ליצרן הראשון היא $c_1>0$ וליצרן השני היא $c_2>0$. האם קיים שיווי משקל במשחק זה, ואם כן, מה הוא?

**פתרון:**

זהו משחק שני שחקנים (היצרנים 1 ו- 2) שבו קבוצת האסטטרגיות של כל שחקן היא $[0,\infty)$. אם שחקן 1 בוחר באסטרטגיה $q_1$ ושחקן $q_2$ בוחר באסטרטגיה $q_2$, התשלום לשחקן 1 הוא

$$u_1(q_1,q_2)=q_1(2-q_1-q_2)-q_1c_1=q_1(2-c_1-q_1-q_2) \ , \qquad (*)$$

והתשלום לשחקן 2 הוא

$$u_2(q_1,q_2)=q_2(2-q_1-q_2)-q_1c_2=q_2(2-c_2-q_1-q_2) \ . \qquad (\#)$$

התשובה הטובה ביותר של שחקן 1 לאסטרטגיה $q_2$ של שחקן 2 הוא ערך $q_1$ המביא למקסימום את $u_1(q_1,q_2)$. הפונקציה $q_1\mapsto u_1(q_1,q_2)$ היא פונקציה ריבועית עם מקסימום בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_1(q_1,q_2)}{\partial q_1}=0 \ .$$

על ידי גזירה של אגף ימין של משוואה (*) נקבל את התנאי $2-c_1-2q_1-q_2=0$ או

$$q_1=\frac{2-c_1-q_2}{2} \ . \qquad (1*)$$

באותו אופן, התשובה הטובה ביותר של שחקן 2 לאסטרטגיה $q_1$ של שחקן 1 היא ערך $q_2$ שבו הנגזרת של $u_2(q_1,q_2)$ לפי $q_2$ מתאפסת. על ידי גזירה נקבל

$$q_2=\frac{2-c_2-q_1}{2} \ . \qquad (2*)$$

פתרון המשוואות (1*) ו- (2*) נותן

$$q_1^*=\frac{2-2c_1+c_2}{3} \ , \qquad q_2^*=\frac{2-2c_2+c_1}{3} \ .$$

זה אמנם שיווי משקל וזהו שיווי משקל היחיד של המשחק. התשלומים של השחקנים בשיווי משקל זה הם

$$u_1\left(q_1^*,q_2^*\right)=\left(\frac{2-2c_1+c_2}{3}\right)^2=\left(q_1^*\right)^2 \ , \qquad u_2\left(q_1^*,q_2^*\right)=\left(\frac{2-2c_2+c_1}{3}\right)^2=\left(q_2^*\right)^2 \ .$$

כעת נוכיח כי הצמד אסטרטגיות $(q_1^*,q_2^*)$ מהווה נקודת שיווי משקל. יש להוכיח כי $q_1^*$ תשובה טובה ביותר לשחקן 1 ביחס ל- $q_2^*$ ולהפך.

$$u(q_1,q_2^*)=q_1(2-c_1-q_1-q_2^*)=-q_1^2+(2-c_1-q_2^*)q_1 \ .$$

לכן $u(q_1,q_2^*)$ פולינום מסדר 2 של $q_1$, כאשר המקדם של $q_1^2$ הוא $-1$. לכן המקסימום המתקבל הוא

$$q_1=\frac{(2-c_1-q_2^*)}{2}=\frac{\left(2-c_1-\frac{2-2c_2+c_1}{3}\right)}{2}=q_1^*\ .$$

בפרט $q_1^*$ תשובה טובה ביותר של שחקן 2 ביחס ל- $q_2^*$.

■

### דוגמה 3.5 (דואפול)

שני יצרניים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאלים. יהי $q_1$ כמות המוצר שיצרן 1 מייצר ו- $q_2$ כמות המוצר שיצרן 2 מייצר. הכמות הכוללת של מוצרים בשוק היא

$$Q=q_1+q_2\ .$$

יהי $P(Q)$ המחיר של יחידה של המוצר בשוק:

$$P(Q)=\begin{cases}a-Q & Q<a\\ 0 & Q\geq a\end{cases}\ .$$

הפרמטר $a$ נקרא **פרמטר הביקוש**. הפרמטר הזה מכמת את הביקוש של המוצר בשוק. נניח כי עלות הייצור של יחידה ליצרן 1 ועלות הייצור של יחידה וליצרן 2 נתונות על ידי

$$C_1(q_1)=cq_1\ ,\qquad C_2(q_2)=cq_2\ .$$

מצאו את השיווי משקל של המשחק.

**פתרון:**

זהו משחק שני שחקנים. נקרא לשחקו 1 אליס ולשחקן 2 בוב.
הכמות $q_1$ אשר אליס בוחרת היא האסטרטגיה שלה. וכמו כן הכמות $q_2$ אשר בוב בוחר היא האסטרטגיה שלו.
$q_1$ מקבל כל ערך בתחום $[0,\infty)$, או במילים אחרות $q_1\in[0,\infty)$, ובאותה מידה $q_2\in[0,\infty)$.

אם שחקן 1 בוחר באסטרטגיה $q_1$ ושחקן 2 בוחר באסטרטגיה $q_2$, התשלום לשחקן 1 הוא

$$u_1(q_1,q_2)=q_1(a-q_1-q_2)-q_1c=q_1(a-c-q_1-q_2)\ ,$$

והתשלום לשחקן 2 הוא

$$u_2(q_1,q_2)=q_2(a-q_1-q_2)-q_1c=q_2(a-c-q_1-q_2)\ .$$

במשחק שני שחקנים ווקטור אסטרטגיות $(s_1^*,s_2^*)$ שיווי משקל אם הווקטור אסטרטגיות $(q_1^*,q_2^*)$ הוא שיווי משקל אם לכל שחקן:

$$u_1(q_1^*,q_2^*)=\max_{0\leq q_1<\infty}u_1(q_1,q_2^*)=\max_{0\leq q_1\leq\infty}\left[q_1\left(a-c-q_1-q_2^*\right)\right]$$

ו-

$$u_2(q_1^*,q_2^*)=\max_{0\leq q_2<\infty}u_1(q_1^*,q_2)=\max_{0\leq q_2<\infty}\left[q_2\left(a-c-q_1^*-q_2\right)\right]\ .$$

המקסימום של $u_1(q_1,q_2^*)$ לפי $q_1$ מתקבל בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_1(q_1,q_2^*)}{\partial q_1}=a-c-2q_1-q_2^*\stackrel{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad q_1^*=\frac{a-c-q_2^*}{2}\ .$$

ובאותה מידה המקסימום של $u_2(q_1^*, q_2)$ לפי $q_2$ מתקבל בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_2(q_1^*, q_2)}{\partial q_2} = a - c - q_1^* - 2q_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_2^* = \frac{a - c - q_1^*}{2} \ .$$

לפיכך, אם הצמד כמויות $(q_1^*, q_2^*)$ שיווי משקל אז הכמויות חייבות לקיים את התנאים

$$q_1^* = \frac{1}{2}(a - q_2^* - c) \ , \qquad q_2^* = \frac{1}{2}(a - q_1^* - c) \ .$$

הפתרון למערכת זו הינו

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a - c}{3} \ .$$

■

### דוגמה 3.6 (דואפול)

שני יצרניים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאלים. יהי $q_1$ כמות המוצר שיצרן 1 מייצר ו- $q_2$ כמות המוצר שיצרן 2 מייצר. שחקן 1 בוחר במחיר של המוצר שלו להיות $p_1$ ליחידה, ושחקן 2 בוחר במחיר של המוצר שלו להיות $p_2$ ליחידה. הכמות $q_1$ ששחקן 1 צריך לייצר נקבע על ידי הפונקציה

$$q_1 = a - p_1 + bp_2$$

כאשר $b > 0$ והכמות $q_2$ ששחקן 2 צריך לייצר נקבע על ידי הפונקציה

$$q_2 = a - p_2 + bp_1 \ .$$

מצאו את השיווי משקל של המשחק.

**פתרון:**
נניח כי אליס שחקן 1 ובוב שחקן 2. במשחק זה המחיר שאליס בוחרת, $p_1$ הוא האסטרטגיה שלה והמחיר שבוב בחור, $p_2$ הוא האסטרטגיה שלו. הערכים האפשריים של $p_1$ הם מ- 0 עד $\infty$, כלומר $p_1 \in [0, \infty]$ ובאותה מידה $p_2 \in [0, \infty]$.

אם אליס (שחקן 1) בוחרת באסטרטגיה $p_1$ ובוב (שחקן 2) בוחר באסטרטגיה $q_2$, אז אליס מקבלת את התשלום

$$u_1(p_1, p_2) = p_1 q_1 - cq_1 = (p_1 - c)(a - p_1 + bp_2)$$

ובוב מקבל את התשלום

$$u_2(p_1, p_2) = p_2 q_2 - cq_2 = (p_2 - c)(a - p_2 + bp_1)$$

הווקטור אסטרטגיות $(p_1^*, p_2^*)$ שיווי משקל אם התנאים הבאים מתקיימים:

$$u_1(p_1^*, p_2^*) = \max_{0 \le p_1 < \infty} u_1(p_1, q_2^*) = \max_{0 \le p_1 < \infty} [(p_1 - c)(a - p_1 + bp_2^*)]$$

ו-

$$u_2(p_1^*, p_2^*) = \max_{0 \le p_2 < \infty} u_1(p_1^*, p_2) = \max_{0 \le p_2 < \infty} [(p_2 - c)(a - p_2 + bp_1^*)]$$

המקסימום של $u_1(p_1, p_2^*)$ ביחס $p_1$ מתקבל בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_1(p_1, p_2^*)}{\partial p_1} = a - 2p_1 + bp_2^* + c \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad p_1^* = \frac{a + c + bp_2^*}{2} \ ,$$

והמקסימום של $u_2(p_1^*, p_2)$ ביחס $p_2$ מתקבל בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_2(p_1^*, p_2)}{\partial p_2} = a - 2p_2 + bp_1^* + c \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad p_2^* = \frac{a+c+bp_1^*}{2} \ .$$

לפיכך, אם הווקטור אסטרטגיות $(p_1^*, p_2^*)$ נקודת שיווי משקל של המשחק אז המחירים $p_1^*, p_2^*$ חייבים לקיים את התנאים

$$p_1^* = \frac{a+c+bp_2^*}{2} \ , \qquad p_2^* = \frac{a+c+bp_1^*}{2} \ .$$

הפתרון למערכת זו הינו

$$p_1^* = p_2^* = \frac{a+c}{2-b} \ .$$

■