תרגילים: רדוקציות

שאלה 1 נתונה השפה הבאה:

$$L_{\geq 3}=\left\{\langle M\rangle \;\middle|\; |L(M)|\geq 3\right\}$$

$L_{\geq 3}$ מכילה קידודים של מכונות טיורינג שמקבלות לפחות 3 מילים שונות.
הוכיחו כי $L_{\geq 3}\notin R$ ע"י רדוקציה מ- L_{acc}.

שאלה 2 נתונה השפה הבאה:

$$L=\left\{\langle M_1,M_2,w\rangle \;\middle|\; w\in L(M_1)\wedge w\notin L(M_2)\right\}\ .$$

הוכיחו כי $L\notin RE$ ע"י רדוקציה מ- $\bar{L}_{\text{acc}}$.

שאלה 3 תהי L השפה

$$L_{1a}=\left\{\langle M\rangle \;\middle|\; \text{מקבלת בדיוק מילה אחת המתחילה ב- } a \text{ } M\right\}$$

א) מצאו פונקצית רדוקציה מ- $\bar{L}_{\text{acc}}$ ל- L_{1a}.

ב) הוכיחו כי $L_{1a}\notin RE$.

ג) הוכיחו כי $L_{1a}\notin R$.

שאלה 4 תהי L השפה

$$L_{\geq 1a}=\left\{\langle M\rangle \;\middle|\; \text{מקבלת לפחות מילה אחת המתחילה ב- } a \text{ } M\right\}$$

א) מצאו פונקצית רדוקציה מ- L_{acc} ל- L_{1a}.

ב) הוכיחו כי $L_{1a}\notin R$.

שאלה 5 תהי L השפה

$$L_{M_1\subset M_2\subset M_3}=\left\{\langle M_1,M_2,M_3\rangle \;\middle|\; L(M_1)\subset L(M_2)\subset L(M_3)\right\}$$

א) מצאו פונקצית רדוקציה מ- $\bar{L}_{\text{acc}}$ ל- $L_{M_1\subset M_2\subset M_3}$.

ב) הוכיחו כי $L_{M_1\subset M_2\subset M_3}\notin R$.

ג) הוכיחו כי $L_{M_1\subset M_2\subset M_3}\notin RE$.

שאלה 6 תהי L_ε השפה הבאה:

$$L_\varepsilon = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; \text{עוצרת על מילת הריקה } \varepsilon \;\; M \right\}$$

א) האם L_ε כריעה?

ב) האם L_ε קבילה?

שאלה 7 נתונה השפה הבאה:

$$L = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; L(M) = \varepsilon \right\} \;.$$

הוכיחו כי $L \notin R$ ע"י רדוקציה מ- L_{acc}.

שאלה 8 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה.

אם $L_1 \notin R$ אז לכל שפה $L_2 \notin R$ קיימת רדוקציה $L_2 \leq L_1$.

תשובות

שאלה 1

פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר $M_\emptyset$ היא מ"ט הדוחה כל קלט ו- M' היא מ"ט שעל כל קלט y, מתעלמת מ- y ומריצה את M על w ועונה כמוה.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

נכונות הרדוקציה:

נוכיח כי

$$x \in L_{\text{acc}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_{\geq 3} \ .$$

אם $x \in L_{\text{acc}} \quad \Leftarrow \quad x = \langle M, w \rangle$ ו- $w \in L(M) \quad \Leftarrow \quad f(x) = \langle M' \rangle$ ולפי האבחנה $L(M') = \Sigma^*$ ולכן $|L(M')| = \infty \quad \Leftarrow \quad f(x) \in L_{\geq 3}$.

אם $x \notin L_{\text{acc}} \quad \Leftarrow$ שני מקרים:

מקרה 1: $x \neq \langle M, w \rangle \quad \Leftarrow \quad f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \quad \Leftarrow \quad |L(M_\emptyset)| = 0 \quad \Leftarrow \quad f(x) \notin L_{\geq 3}$.

מקרה 2: $x \neq \langle M, w \rangle$ ו- $w \notin L(M) \quad \Leftarrow \quad f(x) = \langle M' \rangle$ ולפי האבחנה $L(M') = \emptyset \quad \Leftarrow \quad |L(M')| = 0$ $\Leftarrow f(x) \notin L_{\geq 3}$.

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $L_{\text{acc}} \leq L_{\geq 3}$ ולכן ממשפט הרדוקציה, מכיוון ש- $L_{\text{acc}} \notin R$, מתקיים $L_{\geq 3} \notin R$.

שאלה 2

פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M^*, M, w \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- M^* היא מ"ט שמקבלת כל קלט
- $M_\emptyset$ היא מ"ט שדוחה כל קלט.

נכונות הרדוקציה:

ראשית, f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x = \langle M, w \rangle$. אם לא, תחזיר קידוד קבוע $\langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle$ ואם כן, תחזיר קידוד $\langle M^*, M, w \rangle$.

נוכיח כי

$$x \in \bar{L}_{\text{acc}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L \ .$$

אם $x \in \bar{L}_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

מקרה 1: $x \neq \langle M, w\rangle$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon\rangle$ ו- $\varepsilon \in L(M^*)$ ו- $\varepsilon \notin L(M_\emptyset)$ $\Leftarrow$ $f(x) \in \bar{L}$.

מקרה 2: $x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \notin L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M^*, M, w\rangle$ ו- $w \in L(M^*)$ ו- $w \notin L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x) \in L$.

אם $x \notin \bar{L}_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ $x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \in L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M^*, M, w\rangle$ ו- $w \in L(M^*)$ ו- $w \notin L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x) \notin L$.

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $\bar{L}_{\text{acc}} \leq L$, ומכיוון ש- $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$ ממשפט הרדוקציה מתקיים $L \notin RE$.

שאלה 3

א) פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w\rangle \\ \{\text{“}ab\text{''}\} & x \neq \langle M, w\rangle \end{cases}$$

כאשר M' המ"ט הבאה:

$M' =$ על כל קלט y:

1) אם $y = \text{“}ab\text{''}$ $\Leftarrow$ מקבלת.

2) אחרת מריצה M על w ועונה כמוה.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \{ab\} & w \notin L(M) \end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

אם $x \in \bar{L}_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

מקרה 1: $x \neq \langle M, w\rangle$ $\Leftarrow$ $f(x) = \{\text{“}ab\text{''}\}$ $\Leftarrow$ $f(x) \in L_{1a}$.

מקרה 2: $x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \notin L(M)$ $\Leftarrow$ לפי האבחנה $L(M') = \{\text{“}ab\text{''}\}$ $\Leftarrow$ $f(x) \in L_{1a}$

אם $x \notin \bar{L}_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ $x = \langle M, w\rangle$ - $w \in L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M' \rangle$ ולפי האבחנה $L(M') = \Sigma^*$
$\Leftarrow$ $L(M')$ מכילה יותר ממילה אחת המתחילה ב- a $\Leftarrow$ $\langle M' \rangle \notin L_{1a}$
$\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{1a}$.

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{1a}$.

ב) מכיוון ש- $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$ ממשפט הרדוקציה מתקיים $L_{1a} \notin RE$.

ג) מכיוון ש- $\bar{L}_{\text{acc}} \notin R$ ממשפט הרדוקציה מתקיים $L_{1a} \notin R$.

שאלה 4

א) פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר $M_\emptyset$ היא מ"ט שדוחה כל קלט ו- M' המ"ט הבאה:

$M' =$ על כל קלט y:

1) אם $y \neq$ "ab" $\Leftarrow$ דוחה.

2) אחרת מריצה M על w ועונה כמוה.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \{\text{“}ab\text{''}\} & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

אם $x \in L_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ $x = \langle M, w \rangle$ ו- $w \in L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M' \rangle$ ולפי האבחנה $L(M') = \{\text{“}ab\text{''}\}$
$\Leftarrow$ $\langle M' \rangle \in L_{\geq 1a}$ $\Leftarrow$ $f(x) \in L_{\geq 1a}$.

אם $x \notin L_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

מקרה 1: $x \neq \langle M, w \rangle$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M_\emptyset \rangle$ ו- $L(M_\emptyset) = \emptyset$
$\Leftarrow$ $L(M_\emptyset)$ לא מכילה מילה המתחילה ב- a $\Leftarrow$ $L(M_\emptyset) \notin L_{\geq 1a}$ $\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\geq 1a}$.

מקרה 2: $x = \langle M, w \rangle$ ו- $w \notin L(M)$ $\Leftarrow$ לפי האבחנה $L(M') = \emptyset$ $L(M_\emptyset) \notin L_{1a}$
$\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{1a}$.

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $L_{\text{acc}} \leq L_{\geq 1a}$.

ב) מכיוון ש- $L_{\text{acc}} \notin R$ ממשפט הרדוקציה מתקיים $L_{\geq 1a} \notin R$.

שאלה 5

א) פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M_\emptyset, M', M^* \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset, M_{\text{even}}, M^* \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- $M_\emptyset$ היא מ"ט שדוחה כל קלט,
- M^* היא מ"ט שמקבלת כל קלט,
- M_{even} היא מ"ט שמקבלת רק מילים $x \in \Sigma^*$ עבורן $|x| \mod 2 = 0$
- M' המ"ט הבאה:

$M' =$ על כל קלט y:

1) אם $|y|$ אי-זוגי $\Leftarrow$ מקבלת.

2) אחרת מריצה M על w ועונה כמוה.

<u>אבחנה:</u>

$$L\left(M'\right)=\begin{cases}\Sigma^{*} & w\in L(M)\\ \{y\ :\ |y|\mod 2=0\} & w\notin L(M)\end{cases}$$

<u>הוכחת הנכונות:</u>

אם $x\in\bar{L}_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

<u>מקרה 1:</u>

$x\neq\langle M,w\rangle$

$\Leftarrow$ $f(x)=\langle M_{\emptyset},M_{\text{even}},M^{*}\rangle$ ו- $L\left(M_{\emptyset}\right)\subset L\left(M_{\text{even}}\right)\subset L\left(M^{*}\right)$

$\Leftarrow$ $f(x)\in L_{M_1\subset M_2\subset M_3}$.

<u>מקרה 2:</u>

$x=\langle M,w\rangle$ ו- $w\notin L(M)$

$\Leftarrow$ $f(x)=\langle M'\rangle$ ולפי האבחנה $L\left(M'\right)=\{y:|y|\mod 2=0\}$

$\Leftarrow$ $L\left(M_{\emptyset}\right)\subset L\left(M'\right)\subset L\left(M^{*}\right)$

$\Leftarrow$ $f(x)\in L_{M_1\subset M_2\subset M_3}$.

אם $x\notin\bar{L}_{\text{acc}}$

$\Leftarrow$ $x=\langle M,w\rangle$ ו- $w\in L(M)$

$\Leftarrow$ $f(x)=\langle M_{\emptyset},M',M^{*}\rangle$ ולפי האבחנה $L\left(M'\right)=\Sigma^{*}$

$\Leftarrow$ $L\left(M'\right)\not\subset L\left(M^{*}\right)$

$\Leftarrow$ $f(x)\notin L_{M_1\subset M_2\subset M_3}$.

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $\bar{L}_{\text{acc}}\leq L_{M_1\subset M_2\subset M_3}$.

ב) מכיוון ש- $\bar{L}_{\text{acc}}\notin R$ ממשפט הרדוקציה מתקיים $L_{M_1\subset M_2\subset M_3}\notin R$.

ג) מכיוון ש- $\bar{L}_{\text{acc}}\notin RE$ ממשפט הרדוקציה מתקיים $L_{M_1\subset M_2\subset M_3}\notin RE$.

שאלה 6 נבנה רדוקציה מ- L_ε ל- L_{acc}:

$$f(x)=\begin{cases}\langle M'\rangle & x=\langle M,w\rangle\\ \langle M_{\text{loop}}\rangle & x\neq\langle M,w\rangle\end{cases}$$

כאשר M_{loop} מ"ט שלא עוצרת על אף קלט ו- M' המ"ט הבאה:

$M'=$ על כל קלט y:

1) מריצה M על ε.

2) אם M מקבלת $\Leftarrow$ M' מקבלת.

3) אם M דוחה $\Leftarrow$ M' מקבלת.

אבחנה:

$$L(M')=\begin{cases}\Sigma^* & \text{עוצרת על } \varepsilon \text{ } M\\ \emptyset & \text{לא עוצרת על } \varepsilon \text{ } M\end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

$x\in L_\varepsilon$ $\Leftarrow$ $x=\langle M,w\rangle$ ו- M עוצרת על ε $\Leftarrow$ $L(M')=\Sigma^*$ $\Leftarrow$ $\langle M'\rangle\in L_{\text{acc}}$
$\Leftarrow$ $f(x)\in L_{\text{acc}}$.

$x\notin L_\varepsilon$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

מקרה 1: $x\neq\langle M,w\rangle$ $\Leftarrow$ $f(x)=\langle M_{\text{loop}}\rangle$ $\Leftarrow$ $f(x)\notin L_{\text{acc}}$.

מקרה 2: $x=\langle M,w\rangle$ ו- M לא עוצרת על ε $\Leftarrow$ $L(M')=\emptyset$ $\Leftarrow$ לא קיים מילה אשר M' מקבלת
$\Leftarrow$ $\langle M'\rangle\notin L_{\text{acc}}$.

שאלה 7 פונקצית הרדוקציה:

$$f(x)=\begin{cases}\langle M'\rangle & x=\langle M,w\rangle\\ \langle M_\emptyset\rangle & x\neq\langle M,w\rangle\end{cases}$$

כאשר $M_\emptyset$ מכונת טיורינג שדוחה כל קלט.
$M'=$ על קלט y:

- שומרת את y על סרט נוסף.
- מריצה את M על w.
  - אם M דוחה $\Leftarrow$ M' דוחה.
  - אם M מקבלת $\Leftarrow$ M' בודקת האם $y=\varepsilon$.
    - אם כן, מקבלת.
    - אם לא, דוחה.

<u>אבחנה</u>

$$L\left(M'\right)=\begin{cases}\{\varepsilon\} & w\in L(M)\\ \emptyset & w\notin L(M)\end{cases}.$$

<u>נכונות הרדוקציה</u>

(1) f חשיבה כי ניתן לבנות מכונת טיורינג שבודקת האם $x=\langle M,w\rangle$. אם לא, מחזירה קידוד קבוע של $\langle M_\emptyset\rangle$.
אם כן, מחזירה קידוד של M' ע"י הוספת קוד שמעתיק את y לסרט נוסף ומבצע השווה בין y ל- ε.

(2) נראה כי $f(x)\in L \Leftrightarrow w\in L_{\text{acc}}$.

אם $x\in L_{\text{acc}}$

$\Leftarrow$ $x=\langle M,w\rangle$ ו- $w\in L(M)$

$\Leftarrow$ $f(x)=\langle M'\rangle$ ולפי האבחנה $L(M')=\{\varepsilon\}$.

$\Leftarrow$ $f(x)\in L$.

אם $x\notin L_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

- $x\neq\langle M,w\rangle \Leftarrow f(x)=\langle M_\emptyset\rangle$ ו- $L\left(M_\emptyset\right)=\emptyset \Leftarrow f(x)\notin L$.
- $x=\langle M,w\rangle$ ו- $w\notin L(M) \Leftarrow f(x)=\langle M'\rangle$ ולפי האבחנה $L\left(M'\right)=\emptyset \Leftarrow f(x)\notin L$.

הראינו רדוקציה $L_{\text{acc}}\leq L$ ומכיוון ש- $L_{\text{acc}}\notin R$, ממשפט הרדוקציה מתקיים, $L\notin R$.

<u>שאלה 8</u>

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $L_1=L_{\text{acc}}$, $L_2=\overline{L_{\text{acc}}}$.

- $L_1\notin R$ וגם $L_2\notin R$.
- נניח בשלילה כי $L_2\leq L_1$.
- נתון כי $L_1=L_{\text{acc}}$ ואנחנו יודעים ש: $L_{\text{acc}}\in RE$ לכן $L_1\in RE$.
- אזי ממפשט הרדוקציה $L_2\in RE$, בסתירה לכך ש- $\overline{L_{\text{acc}}}\notin RE$.

הסבר: כפי שהוכחנו בכיתה, נניח בשלילה כי $\overline{L_{\text{acc}}}\in RE$.
מכיוון ש- $L_{\text{acc}}\in RE$ אז בהכרח $L_{\text{acc}}\in R$.
זאת סתירה לכך ש- L_{acc} לא כריעה.