

המחלקה למדעי המחשב

4 – 12 – 22
9 : 10 – 10 : 40

אלגברה ליניארית 1 למדעי המחשב

בוחן אמצע סמסטר

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר

תשפ"ג סמסטר א'

השאלון מכיל עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דף נוסחאות של הקורס (עמוד אחד A4), מצורפים לשאלון.
- אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:
- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לענות על כל השאלות 1-3.

שאלה 1 (35 נקודות)

א) (25) נתונה המערכת הלינארית הבאה מעל \mathbb{R} :

$$ax + y + 2z = 0$$

$$ax + (a - 4)y + 5z = 3$$

$$2ax + (a - 3)y + (a^2 - 8a + 19)z = a - 3$$

א. (6)

מצאו את ערכי הפרמטר a עבורם למערכת אין פתרון.

ב. (8)

מצאו את הערכים של a עבורם למערכת יש פתרון יחיד.

ג. (11)

מצאו את הערכים של a עבורם למערכת יש אינסוף פתרונות. עבור ערך a הגדול מבין אלו שמצאתם, רשמו את הפתרון הכללי.

ב) (10) פתרו את המערכת הבאה

$$\begin{aligned} 2iz_1 + (1 - i)z_2 &= 3i, \\ (1 + i)z_1 - 4z_2 &= 2. \end{aligned}$$

שאלה 2 (30 נקודות)

א) (20) נתונה המערכת הבאה:

$$\bar{2}x + \bar{4}y + \bar{3}z = \bar{2}$$

$$\bar{3}x + \bar{2}y + z = \bar{2}$$

$$x + \bar{2}y + \bar{3}z = \bar{4}$$

פתרו את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_5 . רשמו את כל הפתרונות בצורה מפורשת. כמה פתרונות יש למערכת?

ב) (10) בהינתן מערכת לינארית בעלת 2 משוואות ו-3 משתנים מעל \mathbb{Z}_3 , רשמו את כל האפשרויות למספר הפתרונות של המשוואה.

שאלה 3 (35 נקודות)

(א) (16) תהינה $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A \neq 0$. הוכיחו או הפריכו:

א. **(8)** אם $AB = AC$ אז $B = C$.

ב. **(8)** אם $AB = 0$ אז $A = 0$ או $B = 0$.

(ב) (14) תהינה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(א) (14) פתרו את המשוואה

$$A \cdot X = B$$

ומצאו את המטריצה X .

(ב) (5) האם X הפיכה? נמקו את תשובותיכם.

פתרונות

שאלה 1

א) נדרג את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 2 & | & 0 \\ a & a-4 & 5 & | & 3 \\ 2a & a-3 & a^2-8a+19 & | & a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - 2 \cdot R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & a-5 & 3 & | & 3 \\ 0 & a-5 & a^2-8a+15 & | & a-3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & a-5 & 3 & | & 3 \\ 0 & 0 & a^2-8a+12 & | & a-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & a-5 & 3 & | & 3 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-6) & | & a-6 \end{pmatrix}$$

$$:a = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -5 & 3 & | & 3 \\ 0 & 0 & 12 & | & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 5 \cdot R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 13 & | & 3 \\ 0 & 0 & 12 & | & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 13 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

שורה סתירה, ז"א אין פתרון.

$$:a = 5$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 3 \\ 0 & 0 & -3 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2 \cdot R_2} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}$$

שורה סתירה, ז"א אין פתרון.

$$:a = 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & -4 \end{pmatrix}$$

שורה סתירה, ז"א אין פתרון.

$$:a = 6$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

יש משתנה חופשי לכן יהיו ∞ פתרונות.

$$\left. \begin{array}{l} 6x + y + 2z = 0 \\ y + 3z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + y + 2z = 0 \\ y = 3 - 3z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x = -y - 2z \\ y = 3 - 3z \end{array} \right\} \\ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x = 3z - 3 - 2z \\ y = 3 - 3z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{1}{6}z - \frac{1}{2} \\ y = 3 - 3z \end{array} \right\}.$$

לסיכום,

א. אין פתרון כאשר $a = 0, 2, 5$.

ב. יש פתרון יחיד כאשר $a \neq 0, 2, 5, 6$.

ג. אינסוף פתרונות כאשר $a = 6$ מצורה $(x, y, z) = \left(\frac{z-3}{6}, 3-3z, z\right)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2i & 1-i & 3i \\ 1+i & -4 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow 2iR_2 - (1+i) \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2i & 1-i & 3i \\ 0 & -2-8i & 3+i \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 2iz_1 + (1-i)z_2 = 3i \\ (-2-8i)z_2 = 3+i \end{cases}$$

$$z_2 = \frac{3+i}{-2-8i} = \frac{3+i}{-2-8i} \cdot \left(\frac{-2+8i}{-2+8i}\right) = \frac{(3+i)(-2+8i)}{68} = \frac{-14+22i}{68} = \frac{-7+11i}{34}$$

$$2iz_1 = -(1-i)z_2 + 3i = -(1-i) \cdot \frac{(-7+11i)}{34} + 3i = \frac{-4-18i}{34} + 3i$$

ז"א

$$z_1 = \frac{-4-18i}{68i} + \frac{3}{2} = \frac{4i-18}{68} + \frac{3}{2} = \frac{2i-9}{34} + \frac{3}{2} = \frac{2i-9}{34} + \frac{51}{34} = \frac{2i-9+51}{34} = \frac{2i+42}{34} = \frac{i+21}{17}$$

תשובה סופית:

$$z_1 = \frac{21+i}{17}, \quad z_2 = \frac{-7+11i}{34}.$$

שאלה 2

(א)

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{2} \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + R_3 \\ R_3 \rightarrow R_3 + \bar{3} \cdot R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow \bar{3} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + \bar{3} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + \bar{3} \cdot R_2 + \bar{2} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) \\
 & \text{פתרון יחיד:} \\
 & x = \bar{1}, \quad y = \bar{1}, \quad z = \bar{2}.
 \end{aligned}$$

(ב)

ישנן 2 משוואות ו-3 משתנים אז יהיה לפחות משתנה חופשי אחד.

יש שורה סתירה	למערכת 0 פתרונות.
משתנה חופשי אחד	למערכת יש 3 פתרונות.
2 משתנים חופשיים	למערכת יש 3^2 פתרונות.

שאלה 3

(א)

א. אם $AB = AC$ אז $B = C$. לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$AB = AC \text{ אבל } B \neq C$$

ב. אם $AB = 0$ אז $A = 0$ או $B = 0$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:}$$

$$A \cdot B = 0, \quad A \neq 0, B \neq 0.$$

(א) (ב)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow 3R_3 - 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 15 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow \frac{1}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 15 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 3 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 23 & 0 & -6 \\ 4 & 0 & -1 \\ -10 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(ב) X הדטרמיננטה של X שווה 0 כי יש למטריצה עמודה של אפסים. לכן X אינה הפיכה.