תוכן העניינים

1 מכונות טיורינג

הגדרה 1: מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעיה $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ כאשר:

Q	קבוצת מצבים סופית ולא ריקה	
Σ	א"ב הקלט סופי	$\sqcup \notin \Sigma$
Γ	א"ב הסרט סופי	$\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$
δ	פונקציית המעברים	$\delta : (Q \backslash \{q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}\} \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$
q_0	מצב התחלתי.	
q_{acc}	מצב מקבל יחיד.	
q_{rej}	מצב דוחה יחיד.	

הגדרה 2: קונפיגורציה

בהינתן מכונת טיורינג M ומילה $w \in \Sigma^*$. **קונפיגורציה** בריצה של M על w היא שלושה (u, q, v) (או $uq\text{v}$ לשם קיצור) כאשר:

- $u \in \Sigma^*$: המילה מתחילת הסרט עד (לא כולל) התו שמתחת לראש.
- $\text{v} \in \Sigma^*$: המילה שמתחילה מהתן שמתחת לראש ועד (לא כולל) ה- $\sqcup$ הראשון.

הגדרה 3: גרירה בצעד אחד

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M. נסמן

$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם כשנמצאים ב- c_1 עוברים ל- c_2 בצעד בודד.

הגדרה 4: גרירה בכללי

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M. נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם ניתן לעבור מ- c_1 ל- c_2 ב- 0 או יותר צעדים.

הגדרה 5: קבלה ודחייה של מילה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}\ , q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $w \in \Sigma^*$ מחרוזת. אומרים כי

- M **מקבלת** את w אם $q_0 w \vdash_M^* u\ q_{\text{acc}}\ \text{v}$
- M **דוחה** את w אם $q_0 w \vdash_M^* u\ q_{\text{rej}}\ \text{v}$

עבור $\text{v}, u \in \Gamma^*$ כלשהם.

הגדרה 6: הכרעה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}\ , q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מכריעה** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים

- $w \in L \Leftarrow M$ מקבלת את w.
- $w \notin L \Leftarrow M$ דוחה את w.

הגדרה 7: קבלה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}\ , q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מקבלת** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים

- אם $w \in L$ אז M מקבלת את w.
- אם $w \notin L$ אז M לא מקבלת את w.

במקרה כזה נכתוב ש- $L(M) = L$.

הגדרה 8: מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה f

תהי $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ ותהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג. אומרים כי M מחשבת את f אם:

- $\Sigma = \Sigma_1$ ו- $\Sigma_2 \subset \Gamma$.
- לכל $w \in \Sigma_1^*$ מתקיים $q_0 w \vdash q_{\text{acc}} f(w)$.

הגדרה 9: מודלים שקולים חישובית

יהיו A ו- B מודלים חישוביים. אומרים כי A ו- B שקולים אם לכל שפה L מתקיימים:

1) קיימת מ"ט במודל A שמכריעה את L אם"ם קיימת מ"ט במודל B שמכריעה את L.

2) קיימת מ"ט במודל A שמקבלת את L אם"ם קיימת מ"ט במודל B שמקבלת את L.

הגדרה 10: מכונט טיורינג מרובת סרטים

מכונת טיורינג מרובת סרטים היא שביעייה:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר Q, Σ, Γ, q_0, q_{acc},q_{rej} מוגדרים כמו מ"ט עם סרט יחיד (ראו הגדרה 1).
ההבדל היחיד בין מ"ט עם סרט יחיד לבין מטב"ס הוא הפונקצית המעברים. עבור מטמ"ס הפונקצית המעברים היא מצורה הבאה:

$$\delta_k : (Q \backslash \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$$

הקונפיגורציה של מכונת טיורנג מרובת סרטים מסומנת $(u_1 q \text{ v}_1 \ , \ u_2 q \text{ v}_2 \ , \ \ldots \ , \ u_k q \text{ v}_k$.)

משפט 1: שקילות בין מ"ט מרובת סרטים למ"ט עם סרט יחיד

לכל מטמ"ס M קיימת מ"ט עם סרט יחיד M' השקולה ל- M.
כלומר, לכל קלט $w \in \Sigma^*$:

- אם M מקבלת את w $\Leftarrow$ M' מקבלת את w.
- אם M דוחה את w $\Leftarrow$ M' דוחה את w.
- אם M לא עוצרת על w $\Leftarrow$ M' לא עוצרת על w.

הגדרה 11: מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית (מ"ט א"ד) היא שביעייה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}$ מוגדרים כמו במ"ט דטרמיניסטי (ראו הגדרה 1).
Δ היא פונקצית המעברים

$$\Delta : (Q \backslash \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma \to P\left(Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}\right) \ .$$

$$\Delta(q, a) = \{(q_1, a, S) \ , \ (q_2, b, L) \ , \ \ldots\} \ .$$

כלומר, לכל זוג $q \in Q, \alpha \in \Gamma$ ייתכן מספר מעברים אפשריים, 0, 1 או יותר.

- קונפיגורציה של מ"ט א"ד זהה לקונפיגורציה של מ"ט דטרמיניסטית.
- לכל קונפיגורציה ייתכן מספר קונפיגורציות עוקבות.
- לכל מילה $w \in \Sigma^*$ ייתכן מספר ריצות שונות:
  - ריצות שמגיעות ל- q_{acc}.
  - ריצות שמגיעות ל- q_{rej}.
  - ריצות שלא עוצרות.
  - ריצות שנתקעות.

הגדרה 12: קבלה ודחייה של מילה ושפה של מכונט טיורינג אי דטרמיניסטית

מילה $w \in \Sigma^*$ מתקבלת במ"ט א"ד M אם קיימת לפחות ריצה אחת שמגיעה ל- q_{acc}. השפה של מ"ט א"ד M היא

$$L(M) = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \exists u, \mathrm{v} \in \Gamma^* \;:\; q_0 w \vdash_* u\ q_{\text{acc}}\ \mathrm{v} \right\}$$

כלומר:

- $w \in L(M)$ אם קיימת ריצה אחת שבה M מקבלת את w.
- $w \notin L(M)$ אם בכל ריצה של M על w, M דוחה או לא עוצרת, או נתקעת.

הגדרה 13: מ"ט אי דטרמיניסטית המכריעה שפה L

אומרים כי מ"ט אי דטרמיניסטית M מכריעה שפה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $w \in L \Leftarrow M$ מקבלת את w.
- אם $w \notin L \Leftarrow M$ דוחה את w.

הגדרה 14: מ"ט א"ד המקבלת שפה L

אומרים כי מ"ט אי דטרמיניסטית M מקבלת שפה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $w \in L \Leftarrow M$ מקבלת את w.
- אם $w \notin L \Leftarrow M$ דוחה את w או M לא עוצרת על w.

משפט 2: שקילות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטית ב- RE

לכל מ"ט א"ד N קיימת מ"ט דטרמיניסטית D כך ש-

$$L(N) = L(D)\ .$$

כלומר לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם N מקבלת את w $\Leftarrow$ D תקבל את w.

- אם N לא מקבלת את $w \Leftarrow D$ לא תקבל את w.

2 המחלקות החישוביות R, RE ו- $Co\,RE$ ותכונותן

הגדרה 15: כוכב קליני

בהינתן השפה L. השפה L^* מוגדרת:

$$L^* = \{\varepsilon\} \cup \left\{ w = w_1 w_2 \cdots w_k \;\middle|\; \forall\, 1 \le i \le k \;,\; w_i \in L \right\}$$

הגדרה 16:

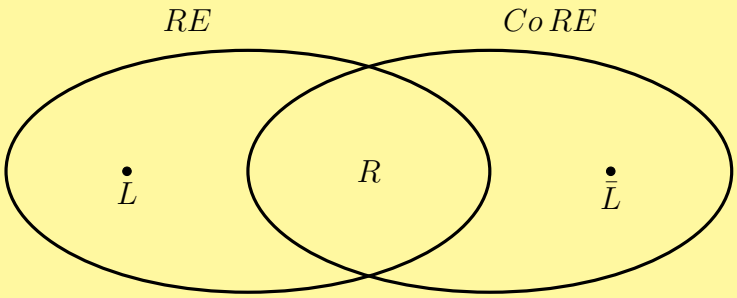
- אוסף השפות הכריעות מסומן R ומוגדר $\{$קיימת מ"ט המכריעה את $L\}$. $R = \left\{ L \subseteq \Sigma^* \;\middle|\; L \right.$
- אוסף השפות הקבילות מסומן R ומוגדר $\{$קיימת מ"ט המקבלת את $L\}$. $RE = \left\{ L \subseteq \Sigma^* \;\middle|\; L \right.$
- אוסף השפות שהמשלימה שלהן קבילה מסומן R ומוגדר $Co\,RE = \left\{ L \subseteq \Sigma^* \;\middle|\; \bar{L} \in RE \right\}$.

משפט 3: סגירות של השפות הכריעות והשפות הקבילות

- R סגורה תחת: **1)** איחוד **2)** חיתוך **3)** שרשור **4)** סגור קלין **5)** משלים.
- RE סגורה תחת: **1)** איחוד **2)** חיתוך **3)** שרשור **4)** סגור קלין.

משפט 4: תכונות של השפות החישוביות

1. אם $L \in RE$ וגם $\bar{L} \in RE$ אזי $L \in R$.
2. אם $L \in RE \backslash R$ אזי $\bar{L} \notin RE$ (כי $\bar{L} \in Co\,RE \backslash R$).
3. $RE \cap Co\,RE = R$.



הגדרה 17: מכונת טיורינג אוניברסלית

מ"ט אוניברסלית U מקבלת כקלט זוג, קידוד של מ"ט $\langle M \rangle$ וקידוד של מילה $\langle w \rangle$, ומבצעת סימולציה של ריצה של M על w ועונה בהתאם.

$$L(U) = \{\langle M, w\rangle \mid w \in L(M)\} \ .$$

3 אי-כריעות

משפט 5: סיווג שפות ידועות - חישוביות

	כריעה	קבילה
L_{acc}	×	✓
$\overline{L_{\text{acc}}}$	×	×
L_{d}	×	×
L_{Halt}	×	✓
$\overline{L_{\text{Halt}}}$	×	×
L_{E}	×	×
$\overline{L_{\text{E}}}$	×	✓
L_{EQ}	×	×
$\overline{L_{\text{EQ}}}$	×	×
L_{REG}	×	×
L_{NOTREG}	×	×

$L_{\text{acc}} = \{\langle M, w\rangle \,|\, w \in L(M)\}$ $\in RE \backslash R$

$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w\rangle \mid w$ עוצרת על $M\}$ $\in RE \backslash R$

$L_M = \{\langle M\rangle \ || \ \langle M\rangle$ המקבלת את $M\}$ $\in RE \backslash R$

$L_{\text{d}} = \{\langle M\rangle \,|\, \langle M\rangle \notin L(M)\}$ $\in Co\,RE \backslash R$

$L_E = \{\langle M\rangle \,|\, L(M) = \emptyset\}$ $\in Co\,RE \backslash R$

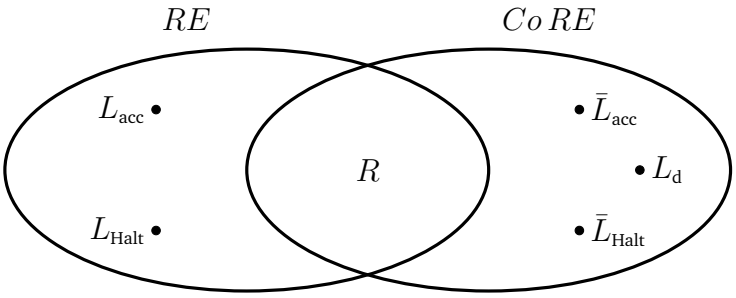
$L_{EQ} = \{\langle M_1, M_2\rangle \,|\, L(M_1) = L(M_2)\}$ $\notin RE \backslash R, \notin Co\,RE \backslash R$

$L_{REG} = \{\langle M\rangle \mid L(M)$ רגולרית$\}$ $\notin RE \backslash R, \notin Co\,RE \backslash R$

$L_{NOTREG} = \{\langle M\rangle \mid L(M)$ לא רגולרית$\}$ $\notin RE \backslash R, \notin Co\,RE \backslash R$

משפט 6:

$$\begin{aligned} L_{\text{acc}} \in RE \backslash R \quad &\Rightarrow \quad \bar{L}_{\text{acc}} \notin RE \ , \\ L_{\text{halt}} \in RE \backslash R \quad &\Rightarrow \quad \bar{L}_{\text{halt}} \notin RE \ , \\ L_{\text{d}} \notin RE \backslash R \ . & \end{aligned}$$



4 רדוקציות

הגדרה 18: מ"ט המחשבת פונקציה

בהינתן פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ אומרים כי מ"ט M מחשבת את f אם לכל $x \in \Sigma^*$:

- M מגיעה ל- q_{acc} בסוף החישוב של $f(x)$ וגם
- על סרט הפלט של M רשום $f(x)$.

הגדרה 19: מ"ט המחשבת פונקציה

בהינתן פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ אומרים כי f חשיבה אם קיימת מ"ט המחשבת את f.

הגדרה 20: רדוקציה

בהינתן שתי שפות $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ אומרים כי L_1 ניתנת לרדוקציה ל- L_2, ומסמנים

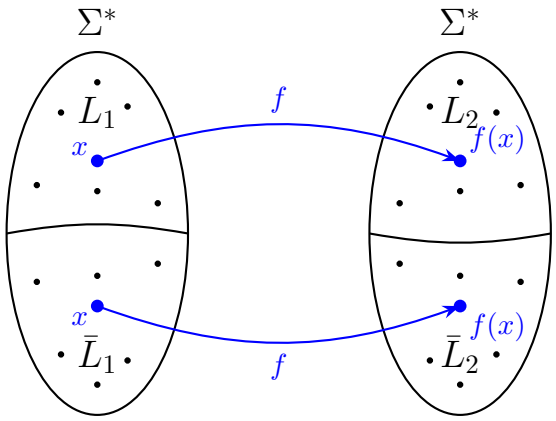
$$L_1 \leq L_2 \ ,$$

אם קיימת פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ המקיימת:

1) f חשיבה

2) לכל $x \in \Sigma^*$:

$$x \in L_1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_2 \ .$$



משפט 7: משפט הרדוקציה

לכל שתי שפות $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, אם קיימת רדוקציה $L_1 \leq L_2$ אזי

$$\begin{aligned} L_1 \in R &\Leftarrow L_2 \in R \\ L_1 \in RE &\Leftarrow L_2 \in RE \\ L_1 \in Co\,RE &\Leftarrow L_2 \in Co\,RE \\ L_1 \notin R &\Rightarrow L_2 \notin R \\ L_1 \notin RE &\Rightarrow L_2 \notin RE \\ L_1 \notin Co\,RE &\Leftarrow L_2 \notin Co\,RE \end{aligned}$$

משפט 8: תכונות של רדוקציה

- לכל שפה L מתקיים: $L \leq L$.
- אם $L_1 \leq L_2$ אזי $\bar{L}_1 \leq \bar{L}_2$.
- אם $L_1 \leq L_2$ וגם $L_2 \leq L_3$ אזי $L_1 \leq L_3$.
- לכל $L \in R$ ולכל L' שאינה $\Sigma^*, \emptyset$ מתקיים $L \leq L'$.

משפט 9: משפט רייס

עבור כל תכונה S של שפות שאינה טריויאלית מתקיים: $L_S \notin R$

- תכונה S לא טריויאלית היא קבוצה של שפות ב RE כך ש $S \neq RE$ וגם $S \neq \emptyset$.
- $L_S = \{\langle M \rangle \mid L(M) = S\}$.

5 סיבוכיות

משפט 10:

לכל מ"ט מרובת סרטים M הרצה בזמן $f(n)$, קיימת מ"ט סרט יחיד M' השקולה ל- M ורצה בזמן $O\left(f^2(n)\right)$.

משפט 11:

לכל מ"ט א"ד N הרצה בזמן $f(n)$, קיימת מ"ט דטרמיניסטית D השקולה ל- N ורצה בזמן $2^{(f(n))}$.

הגדרה 21: אלגוריתם אימות

אלגוריתם אימות עבור בעייה A הוא אלגוריתם V כך שלכל קלט $w \in \Sigma^*$ מתקיים:
$w \in A$ אם ורק אם קיימת מילה y באורך פולינומיאלי ב- $|w|$ כך ש- V מקבל את הזוג (w, y). כלומר:

- אם $w \in A \quad \Leftarrow$ קיים $y \in \Sigma^*$ כך ש- $V(w, y) = T$.

- אם $w \notin A \quad \Leftarrow \quad$ לכל $y \in \Sigma^*$ מתקיים $V(w,y) = F$.

הגדרה 22:

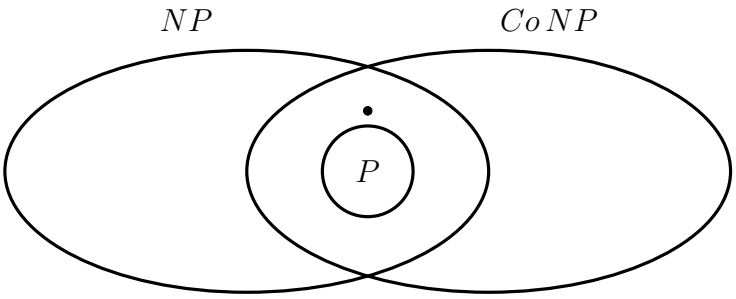
- $P =$ קבוצת כל השפות שיש להן מ"ט דטרמיניסטית המכריעה אותן בזמן פולינומי.
- $NP =$ קבוצת כל השפות שיש להן אלגוריתם אימות המאמת אותן בזמן פולינומי.

הגדרה שקולה:

- $NP =$ קבוצת כל השפות שיש להן מ"ט אי-דטרמיניסטית המכריעה אותן בזמן פולינומי.
- $Co\,NP =$ קבוצת כל השפות שהמשלימה שלהן שייכת ל- $NP \quad Co\,NP = \{A \mid \bar{A} \in NP\ .\}$.

משפט 12: תכונות של P ו- NP

- $P \subseteq NP$.
- P סגורה תחת משלים: אם $A \in P$ אזי גם $\bar{A} \in P$.
- $P \subseteq NP \cap Co\,NP$.



6 רדוקציה פולינומיאלית

הגדרה 23: פונקציה פולינומיאלית

בהינתן פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$. אומרים כי f חשיבה בזמן פולינומיאלי אם קיים אלגוריתם (מ"ט דטרמיניסטית) המחשב את f בזמן פולינומיאלי.

הגדרה 24: רדוקציה פולינומיאלית

בהינתן שתי הבעיות A ו- B. אומרים כי A ניתנת לרדוקציה פולינומיאלית ל- B, ומסמנים $A \leq_P B$, אם קיימת פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ המקיימת:

1) f חשיבה בזמן פולינומיאלי

2) לכל $w \in \Sigma^*$:

$$w \in A \quad \Leftrightarrow \quad f(w) \in B\ .$$

משפט 13: משפט הרדוקציה

לכל שתי בעיות A ו- B, אם $A \leq_P B$ אזי

$$\begin{aligned} A \in P &\Leftarrow B \in P \\ A \in NP &\Leftarrow B \in NP \\ A \notin P &\Rightarrow B \notin P \\ A \notin NP &\Rightarrow B \notin NP \end{aligned}$$

7 NP שלמות

הגדרה 25: NP - קשה (NP-hard)

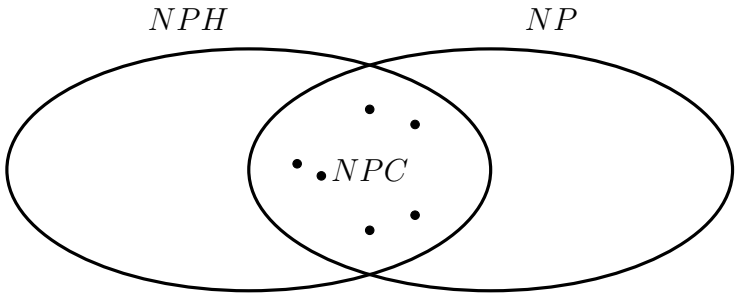
בעייה B נקראת NP קשה אם לכל בעייה $A \in NP$ קיימת רדוקציה $A \leq_P B$.

הגדרה 26: NP- שלמה (NP-complete)

בעייה B נקראת NP שלמה אם

1) $B \in NP$

2) לכל בעייה $A \in NP$ קיימת רדוקציה $A \leq_p B$.



משפט 14: תכונות של רדוקציה פולינומיאלית

- אם קיימת שפה $B \in NPC$ (NP שלמה) וגם $B \in P$ אזי $P = NP$.
- אם $A \leq_P B$ אזי $\bar{A} \leq_P \bar{B}$.
- אם $A \leq_p B$ וגם $B \leq_p C$ אזי $A \leq_p C$.
- לכל $A \in P$ ולכל B שאינה $\emptyset, \Sigma^*$ מתקיים $A \leq_P B$.

משפט 15:

תהי B בעייה NP- שלמה. אזי לכל בעייה $C \in NP$, אם $B \leq_p C$ אזי גם C היא NP שלמה.

8 בעיית הספיקות (SAT)

הגדרה 27: נוסחת CNF

נוסחת CNF, ϕ היא נוסחה בוליאנית מעל n משתנים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ המכילה m פסוקיות $C_1, C_2, \ldots, C_m$, כאשר כל פסוקית מכילה אוסף של ליטרלים ($x_i \backslash \bar{x}_i$) המחוברים ע"י OR ($\vee$) בוליאני והפסוקיות מחוברות ע"י AND ($\wedge$) בוליאני. לדוגמה:

$$\phi = \left(\begin{matrix} C_1 \\ x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4 \vee \bar{x}_7 \end{matrix} \right) \wedge \left(\begin{matrix} C_2 \\ x_3 \vee x_5 \vee \bar{x}_8 \end{matrix} \right) \wedge \quad \cdots$$

הגדרה 28: נוסחת $3CNF$

נוסחת $3CNF$, ϕ היא נוסחה CNF שבה בכל פסקוית יש בדיוק שלוש ליטרלים. לדוגמה:

$$\phi = \left(\begin{matrix} C_1 \\ x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4 \end{matrix} \right) \wedge \left(\begin{matrix} C_2 \\ x_3 \vee x_5 \vee \bar{x}_8 \end{matrix} \right) \wedge \quad \cdots$$

הגדרה 29: נוסחת CNF ספיקה

נוסחת CNF, ϕ היא ספיקה אם קימת השמה למשתנים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ע"י $T \backslash F$ כך ש- ϕ מקבלת ערך T, כלומר בכל פסוקית ישנו לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך T.

הגדרה 30: בעיית SAT

קלט: נוסחת CNF, ϕ.
פלט: האם ϕ ספיקה?

$$SAT = \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ נוסחת } CNF \text{ ספיקה} \}$$

הגדרה 31: בעיית $3SAT$

קלט: נוסחת $3CNF$ ϕ.
פלט: האם ϕ ספיקה?

$$3SAT = \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ נוסחת } 3CNF \text{ ספיקה} \}$$

משפט 16:

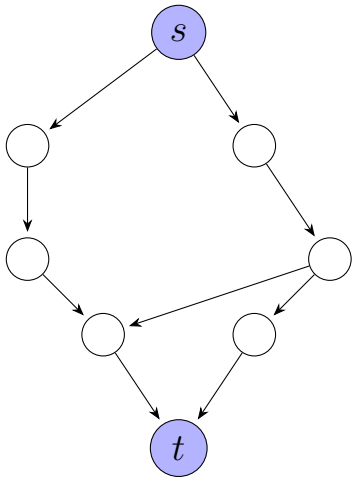
- $SAT \in NP$.
- **משפט קוק לוין:** $SAT \in NPC$.
- $3SAT \in NPC$.
- $SAT \in P \Leftrightarrow P = NP$.

9 סיווג שפות ידיועות - סיבוכיות

הגדרה 32: בעיית מסלול $PATH$

קלט: גרף מכוון G ושני קודקודים s ו- t.
פלט: האם G מכיל מסלול מקודקוד s לקודדוק t.

$$PATH = \{\langle G, s, t\rangle \mid G \text{ גרף מכוון המכיל מסלול מ- } s \text{ ל- } t\}$$



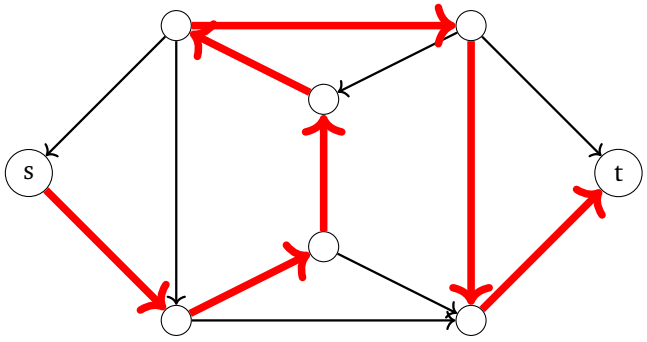
הגדרה 33: בעיית $RELPRIME$

קלט: שני מספרים x ו- y.
פלט: האם x ו- y זרים?

$$RELPRIME = \{\langle x, y\rangle \mid \gcd(x, y) = 1\} .$$

הגדרה 34: מסלול המילטוני

בהינתן גרף מכוון $G = (V, E)$ ושני קודקודים $s, t \in V$. מסלול המילטוני מ- s ל- t הוא מסלול מ- s ל- t שעובר דרך כל קודקוד ב-G בדיוק פעם אחת.



הגדרה 35: בעיית מסלול המילטוני - $HAMPATH$

קלט: גרף מכוון $G = (V, E)$ ושני קודקודים $s, t \in V$.
פלט: האם G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t?

$$HAMPATH = \{\langle G, s, t\rangle \mid G \text{ גרף מכוון המכיל מסלול המילטוני מ- } s \text{ ל- } t\text{?}\}$$

הגדרה 36: מעגל המילטוני

בהינתן גרף מכוון $G = (V, E)$.
מעגל המילטוני הוא מסלול מעגלי שעובר כל קודקוד ב- G בדיוק פעם אחת.

הגדרה 37: בעיית מעגל המילטוני - $HAMCYCLE$

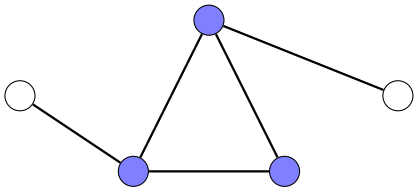
קלט: גרף מכוון $G = (V, E)$.
פלט: האם G מכיל מעגל המילטוני?

$$HAMCYCLE = \{\langle G\rangle \mid G \text{ גרף מכוון המכיל מעגל המילטוני.}\}$$

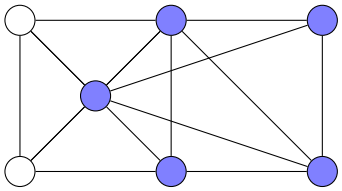
הגדרה 38: קליקה

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$.
קליקה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $C \subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u, \mathrm{v} \in C$ מתקיים $(u, \mathrm{v}) \in E$.

קליקה בגודל $k = 3$:



קליקה בגודל $k = 5$:



הגדרה 39: בעיית הקליקה - $CLIQUE$

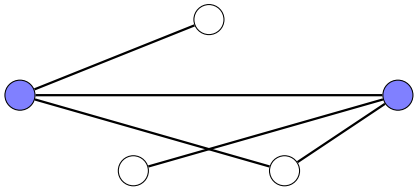
קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר k.
פלט: האם G קליקה בגודל k?

$$CLIQUE = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל } k\}$$

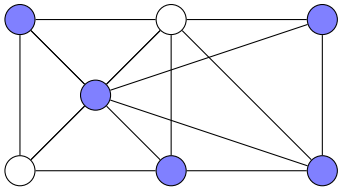
הגדרה 40: כיסוי בקודקודים

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, כיסוי בקודקודים ב- G הוא תת-קבוצה של קודקודים $C \subseteq V$ כך שלכל צלע $u, \mathrm{v} \in S$ מתקיים $u \in C$ או $\mathrm{v} \in C$.

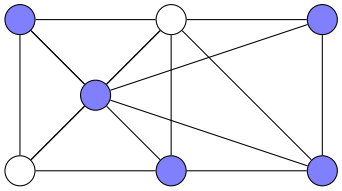
כיסוי בקדקודים בגודל $k = 2$:



כיסוי בקדקודים בגודל $k = 5$:



כיסוי בקדקודים בגודל $k = 5$:



הגדרה 41: בעיית VC

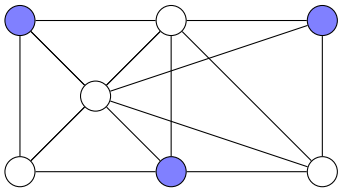
קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר k.
פלט: האם קיים כיסוי בקודקודים ב- G בגודל k?

$$VC = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל כיסוי בקודקודים בגודל } k\}$$

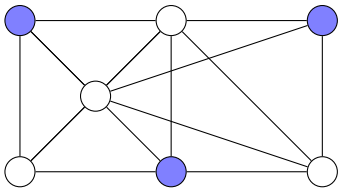
הגדרה 42: קבוצה בלתי תלויה

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, קבוצה בלתי תלויה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $S \subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u, \mathrm{v} \in S$ מתקיים $(u, \mathrm{v}) \notin E$.

קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k = 3$:



קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k = 3$:



הגדרה 43: בעיית IS

קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר k.
פלט: האם קיימת קבוצה בלתי תלויה ב- G בגודל k?

$$IS = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k\}$$

הגדרה 44: בעיית $PARTITION$

קלט: קבוצת מספרים שלמים $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
פלט: האם קיימת תת-קבוצה $Y \subseteq S$ כך ש- $\sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in S \setminus Y} y$?

$$PARTITION = \left\{ S \;\middle|\; S \text{ קבוצת שלמים, וקיימת תת-קבוצה } Y \subseteq S \text{ כך ש- } \sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in S \setminus Y} y \right\}$$

הגדרה 45: בעיית $SubSetSum$

קלט: קבוצת מספרים $S = \{x_1, x_2, \quad \ldots \quad x_n\}$ ומספר t.
פלט: האם קיימת תת-קבוצה של S שסכום איבריה שווה t?

$$SubSetSum = \left\{ \langle S, t \rangle \;\middle|\; \text{קיימת } Y \subseteq S \text{ כך ש- } \sum_{x \in Y} x = t \right\}$$

משפט 17:

$PATH = \{\langle G, s, t\rangle \mid G$ גרף מכוון המכיל מסלול מ- s ל- $t\}$	$\in P$
$RELPRIME = \{\langle x, y\rangle \mid \gcd(x, y) = 1\}$	$\in P$
$SAT = \{\langle \phi\rangle \mid \phi$ היא נוסחת CNF ספיקה$\}$	$\in NP, \in NPC$
$3SAT = \{\langle \phi\rangle \mid \phi$ היא נוסחת $3CNF$ ספיקה$\}$	$\in NP, \in NPC$
$IS = \{\langle G, k\rangle \mid G$ גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל $k\}$	$\in NP, \in NPC$
$CLIQUE = \{\langle G, k\rangle \mid G$ גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל $k\}$	$\in NP, \in NPC$
$VC = \{\langle G, k\rangle \mid G$ גרף לא מכוון המכיל כיסוי בקודקודים בגודל $k\}$	$\in NP, \in NPC$
$HAMPATH = \{\langle G, s, t\rangle \mid G$ גרף מכוון המכיל מסלול המילטוני מ- s ל- $t\}$	$\in NP, \in NPC$
$HAMCYCLE = \{\langle G\rangle \mid G$ גרף מכוון המכיל מעגל המילטוני$\}$	$\in NP$
$SubSetSum = \left\{ \langle S, t\rangle \mid \text{קיימת } Y \subseteq S \text{ כך ש- } \sum_{x \in Y} x = t \right\}$	$\in NP$
$\overline{HAMPATH}$	$\in CoNP$
$\overline{CLIQUE}$	$\in CoNP$

משפט 18: בעיות פתוחות בתורת הסיבוכיות

- האם $P = NP$?
- האם $Co\,NP = NP$?
- האם $Co\,NP \cap NP = P$?

10 רדוקציות זמן פולינומיאליות

משפט 19: רדוקציות פולינומיאליות

$$\begin{aligned} SAT &\leq_P 3SAT \\ 3SAT &\leq_P CLIQUE \\ CLIQUE &\leq_P IS \\ IS &\leq_P VC \\ SubSetSum &\leq_P PARTITION \\ HAMPATH &\leq_P HAMCYCLE \end{aligned}$$