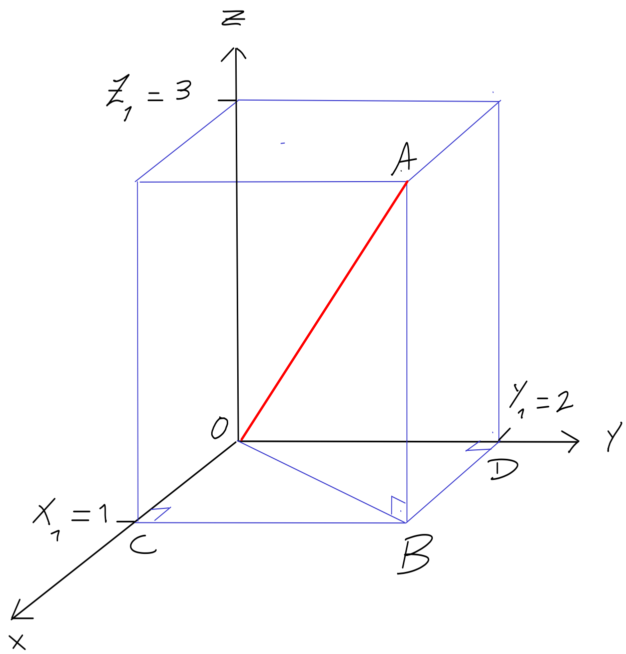
שיעור 4
אלגברה וקטורית

נניח ש A נקודה עם קואורדינטות $(1,2,3)$ ביחס לראשית.



אפשר להגדיר הוקטור $\overline{OA}$ להיות הקו שמתחיל בנקודה O ומסתיים בנקודה A.

כדי לעבור מנקודה O לנקודה A, אפשר לעבור

יחידה אחת לאורך ציר ה- x (לאורך OC),
2 יחידות לאורך ציר ה- y (לאורך CB),
ו- 3 יחידות לאורך ציר ה- z (לאורך BA).

אומרים כי הקואורדינטות של הוקטור $\overline{OA}$ הן $(1,2,3)$ ביחס למערכת צירים. נסמן את הוקטור בצורה

$$\overline{OA} = (1,2,3) \ .$$

המספרים $(1,2,3)$ נקראים הקואורדינטות או הרכיבים של הוקטור. לוקטור יש גודל וכיוון. הגודל של הוקטור מוגדר להיות האורך של הקו של הוקטור מהזנב להראש.

נחשב את אורך הוקטור OA לפי פיתגרוס:

$$|OA|^2 = |OB|^2 + |AB|^2$$

$$|OB|^2 = |OC|^2 + |BC|^2 = x_1^2 + y_1^2 \ , \qquad |AB|^2 = z_1^2$$

לכן

$$|OA|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \ ,$$

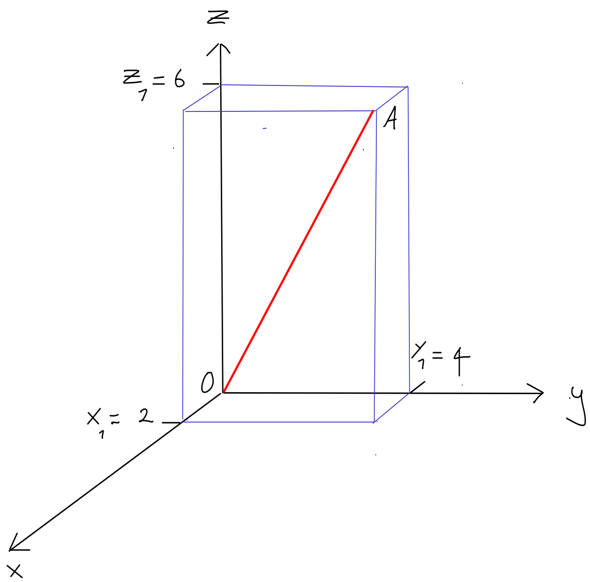
לכן גודל הוקטור $\overline{OA}$ הוא

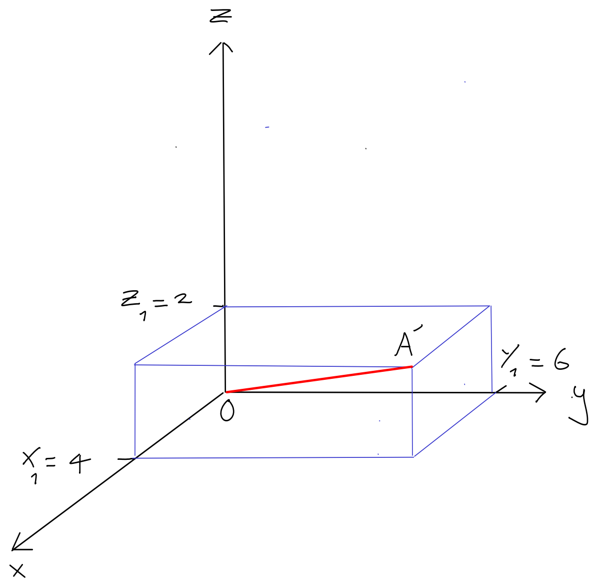
$$|OA| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{14} \ .$$

באופן כללי נתון וקטור $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ הגודל של הוקטור ניתן ע"י

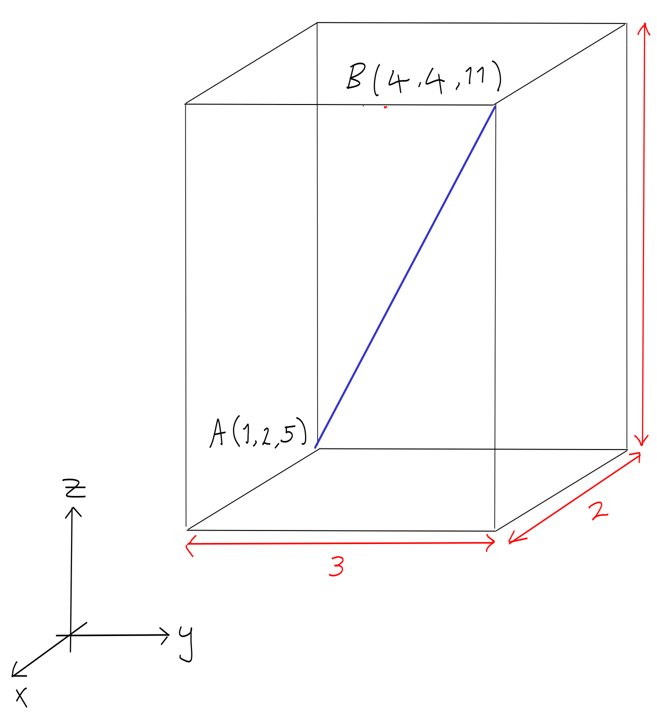
$$|\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\ .$$

לוקטור יש גודל וכיוון. בפרט, אפשר שלשני וקטורים יש גודל שווה אבל כיוונים שונים. לדוגמה יש לוקטורים $\overline{OA} = (2,4,6)$ ו $\overline{OA'} = (4,6,2)$ אותו גודל: $|OA| = |OA'| = \sqrt{56}$, אבל יש להם כיוונים שונים (ראו שרטוט).





נכליל את ההגדרה למעלה של וקטור מראשית לנקודה במרחב- xyz לוקטור מנקודה לנקודה, אשר אף משניהם לא בהכרח הראשית. לדוגמה, נתונות שתי נקודות $A(1,2,5)$ ו- $B(4,4,11)$, ניתן להגדיר את הוקטור מנקודה A לנקודה B.



כדי לעבור מנקודה A לנקודה B, יש לעבור

3 יחידות בכיוון ה- x,
2 יחידות בכיוון ה- y,
ו- 6 יחידות בכיוון ה- z.

לכן נגדיר את הוקטור $\overline{AB}$ כך:

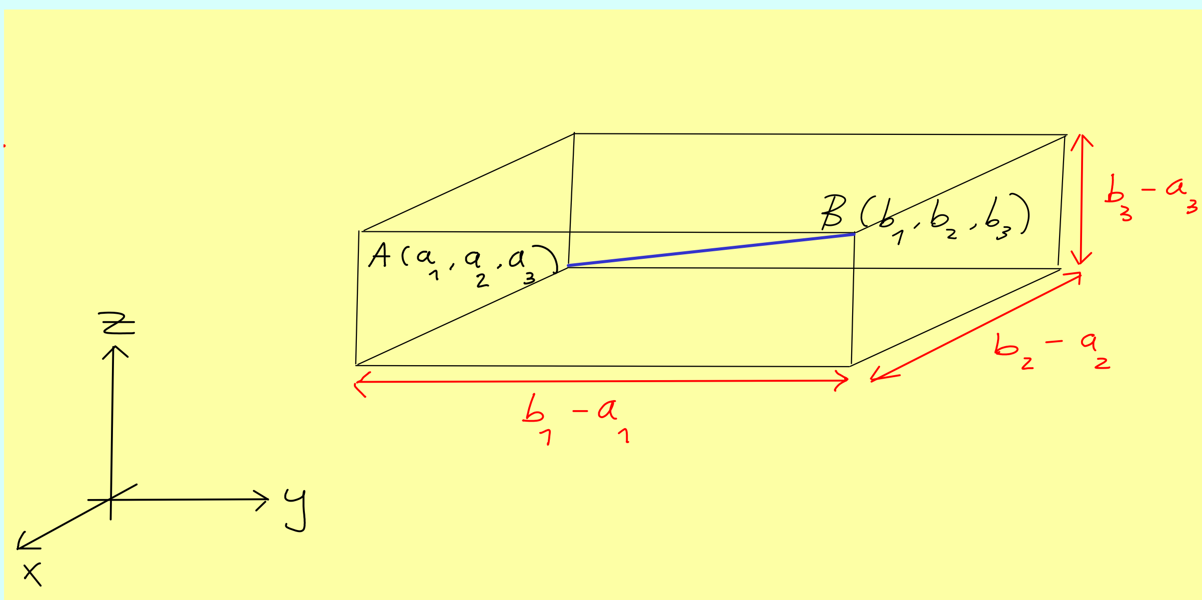
$$\overline{AB} = (3, 2, 6) \ .$$

הרכיב ה- x של $\overline{AB}$ הוא ההפרש בין הקואורדינטות ה- x של הנקודות A ו- B: $x_B - x_A = 3$.
מאותה מידה, הרכיב ה- y של $\overline{AB}$ הוא ההפרש בין הקואורדינטות ה- y של A ו- B: $y_B - y_A = 2$,
והרכיב ה- z של $\overline{AB}$ הוא ההפרש בין הקואורדינטות ה- z של A ו- B: $z_B - z_A = 6$.

הגדרה 4.1 וקטור בין שתי נקודות

באופן כללי, בהינתן שתי נקודות $A(a_1, a_2, a_3)$ ו- $B(b_1, b_2, b_3)$, הוקטור $\overline{AB}$ בין A ל- B הינו

$$\overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \ .$$



הגודל של הוקטור, לפי פיתגרוסת הינו

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} \ .$$

דוגמה 4.1

אם $A = (1, 2, 3)$ ו $B = (-5, 6, -7)$, חשב את הרכיבים ואת הגודל של הוקטור בין הנקודות A ו- B?

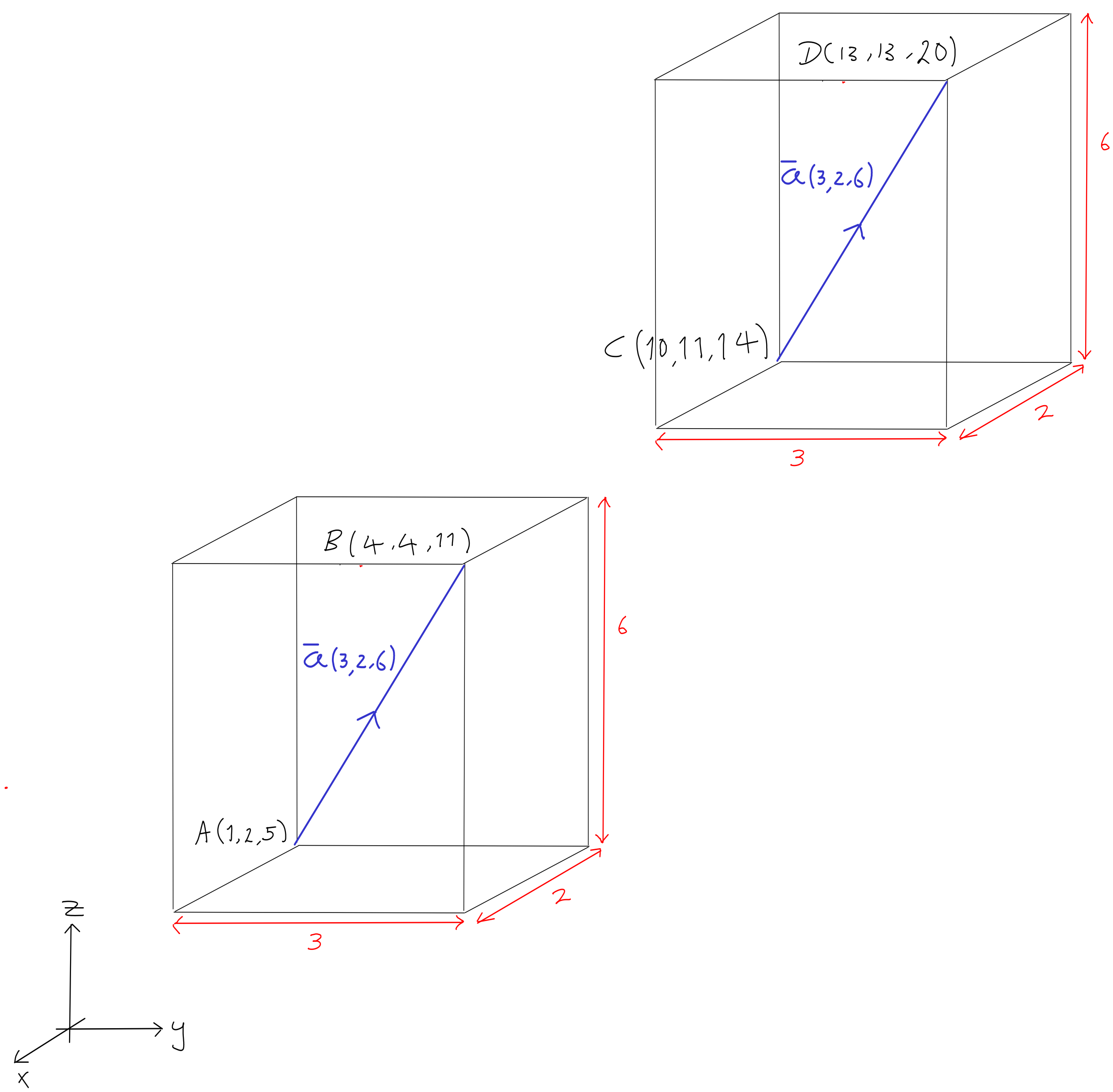
פתרון:

$$\overline{AB} = (-5-1, 6-2, -7-3) = (-6, 4, -10)$$
$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + 4^2 + 10^2} = \sqrt{142} \ .$$

למעשה אנחנו לא צריכים נקודות מסוימות כדי להגדיר וקטור. לוקטור אין נקודת התחלתית קבועה אבל אפשר "להניח" אותו בכל נקודה במישור / מרחב. לדוגמה נקח הוקטור מדוגמה הקודמת. הוקטור בעל בת קואורדינטות $(3,2,6)$ התחיל בנקודה $A(1,2,5)$ והסתיים בנקודה $B(4,4,11)$. אבל ניתן לקחת אותו וקטור, להניח את הזנב על הנקודה $C(10,11,14)$ ונמצא כי הראש של הוקטור יהיה בנקודה

$$D = (10,11,14) + (3,2,6) = (13,13,20) \ ,$$

כלומר הוקטור $(3,2,6)$, כאשר הוא מתחיל בנקודה $C(10,11,14)$ מסתיים בנקודה $D(13,13,20)$ (ראו שרטוט למטה).



נשים לב כי יש לוקטורים $\overline{AB}$ ו- $\overline{CD}$ אותם רכיבים:

$$\overline{AB} = (3,2,6) = \overline{CD} \ ,$$

ויותר מזה הכיוונים של השני וקטורים שווים, כלומר הוקטורים מקבילים. זאת תוצאה של העובדה שיש להשני וקטורים אותם רכיבים. הכיוון של וקטור נקבע ע"י הרכיבים שלו.

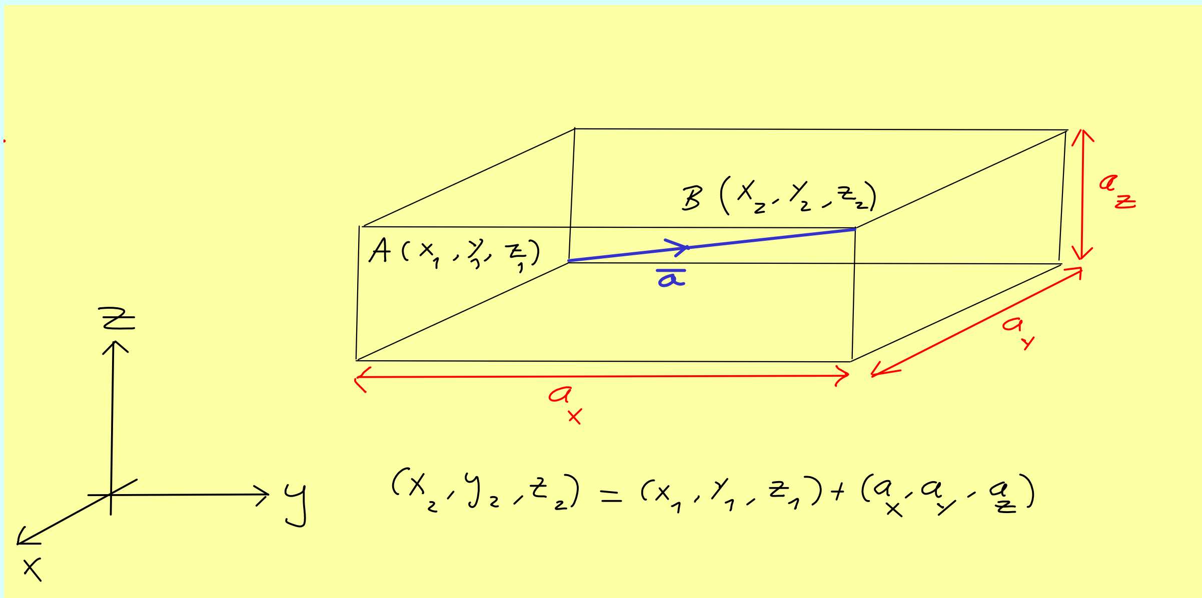
האורך של הוקטור גם לא משתנה כאשר נניח אותו על נקודה התחלתית שונה. לפי פיתגורס:

$$|AB| = \sqrt{3^2+2^2+6^2} = 7 \ , \qquad |CD| = \sqrt{3^2+2^2+6^2} = 7 \ .$$

הגדרה 4.2 וקטור כיוון

נתון וקטור $\bar{a}\,(a_x,a_y,a_z)$ ונתון הנקודה $A=(x_1,y_1,z_1)$ כלשהי. אז כאשר הוקטור $\bar{a}$ מתחיל בנקודה A, הוא עובר לנקודה B בת קואורדינטות (x_2,y_2,z_2) כאשר

$$x_2 = x_1 + a_x \ , \qquad y_2 = y_1 + a_y \ , \qquad z_2 = z_1 + a_z \ .$$



משפט 4.1 אורך של וקטור

האורך (או גודל) של הוקטור $\bar{a}(a_x,a_y,a_z)$ יסומן ב $|\bar{a}|$ או לעיתים a (בלי הגג מעל) וניתן ע"י הנוסחה של פיתגורס:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

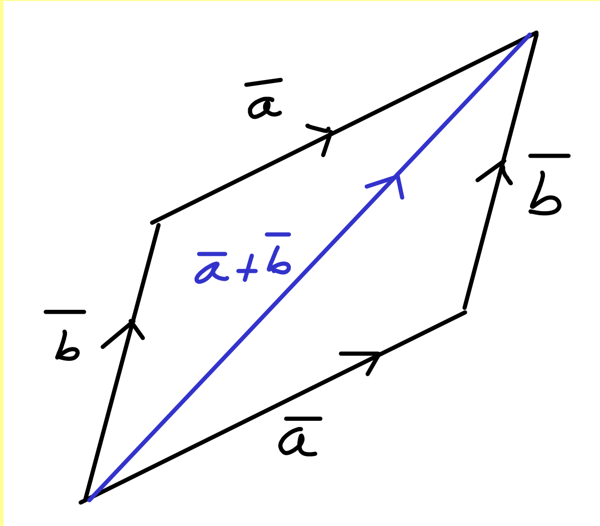
משפט 4.2 חיבור וקטורים

מבחינת קואורדינטות, הסכום של $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3$ ו- $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$ נתון ע"י

$$\bar{a}+\bar{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) \ .$$

גיאומטרית, החיבור מתבצע ע"י כלל המקבילית:

מניחים את שני הוקטורים כך שיתחילו באותה הנקודה ומניחים עותק של כל אחד מהם בקצה של השני כך שנוצרת מקבילית. האלכסון של המקבילית הוא הסכום.



משפט 4.3 כפל וקטור בסקלר

הכפלה של וקטור $\bar{a}$ בסקלר k תשנה אורכו.

אם $k > 0$ כיוונו לא ישתנה,

אם $k < 0$ כיוונו יהופך,

אם $k = 0$ נקבל וקטור האפס.

אלגברית: אם $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ אז

$$k\bar{a} = (ka_1, ka_2, ka_3) \ .$$

דוגמה 4.2

אם $\bar{a} = (-3, 2, -5)$ חשבו את $2\bar{a}$.

פתרון:

$$2\bar{a} = (-6, 4, -10) \ .$$

משפט 4.4 תנאי קוליניאריות

אם שני וקטורים $\bar{a}$ ו- $\bar{b}$ קוליניאריות אז קיים $t \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$\bar{b} = t \cdot \bar{a} \ .$$

פורמאלית:

$$\bar{b} || \bar{a} \quad \Leftrightarrow \quad \exists t : \bar{b} = t \cdot \bar{a} \ .$$

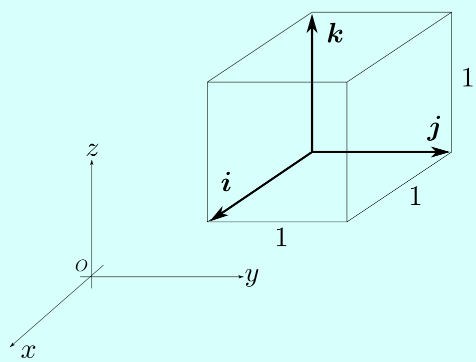
הגדרה 4.3 הבסיס הסטנדרטי

נגדיר שלושה וקטורים הבאים:

- הוקטור i מקביל לכיוון x וגודלו 1
- הוקטור j מקביל לכיוון y וגודלו 1
- הוקטור k מקביל לכיוון z וגודלו 1

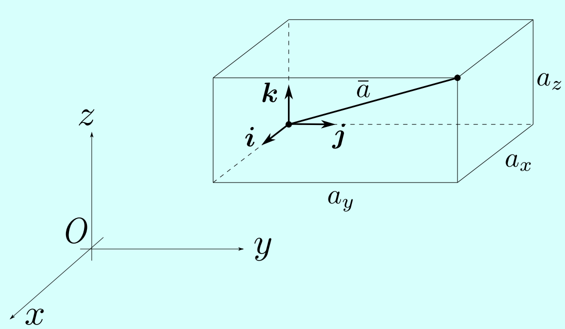
הקבוצה של הוקטורים i, j, k נקרא הבסיס הסטנדרטי. הקואורדינטות של הוקטורים אלו הן:

$$i(1,0,0) \ , \qquad j(0,1,0) \ , \qquad k(0,0,1) \ .$$



בהינתן וקטור $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ניתן לבטא אותו במונחים של הבסיס מצורה

$$\bar{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k} \ .$$



הגדרה 4.4 וקטור יחידה

בהינתן וקטור $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ בעל אורך $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ נגדיר וקטור יחידה המסומן $\hat{a}$, אשר כיוונו שווה לכיוון של $\bar{a}$ ואורכו שווה 1.
$\hat{a}$ ניתן ע"י הנוסחה

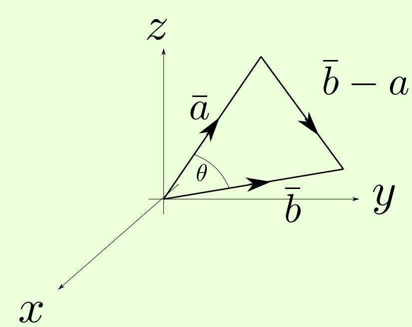
$$\hat{a} = \frac{1}{|\bar{a}|}\bar{a} = \left(\frac{a_x}{|\bar{a}|}, \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \frac{a_z}{|\bar{a}|} \right)$$

הגדרה 4.5 מכפלת סקלרית

נתונים שני וקטורים $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ ו- $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$, המכפלת סקלרית שלהם הוא

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3c_3\ . \tag{\#1}$$

כלל 4.1



נתונים שני וקטורים $\bar{a}$ ו- $\bar{b}$, הזווית θ ביניהם, הינה

$$\cos\theta=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\ |\bar{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}\ .$$

הוכחה: לפי חוק הקוסינוס:

$$|\bar{a}-\bar{b}|^2=|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2-2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta \tag{1*}$$

לפי ההגדרת מכפלת סקלרית:

$$|\bar{a}-\bar{b}|^2=(\bar{a}-\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b})=\bar{a}\cdot\bar{a}+\bar{b}\cdot\bar{b}-\bar{b}\cdot\bar{a}-\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2-2\bar{a}\cdot\bar{b} \tag{2*}$$

נציב (2*) באגף השמאל של (1*):

$$\begin{aligned}|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2-2\bar{a}\cdot\bar{b}=&|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2-2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta\\-2\bar{a}\cdot\bar{b}=&-2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta\\\bar{a}\cdot\bar{b}=&|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta\end{aligned}$$

כנדרש. ■

משפט 4.5

1. אם $\bar{=}0$ או $\bar{b}=0$ אז $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$.
2. אם $\bar{a}$ מאונך ל- $\bar{b}$ $(\theta=90^\circ=\pi/2)$ אז $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$.
3. אם θ זווית קהה אז $\cos\theta<0$ ולכן גם $\bar{a}\cdot\bar{b}<0$.
4. $$\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|^2$$

.5

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$$

לכל $\bar{a},\bar{b}\in\mathbb{R}^3$.

דוגמה 4.3

חשבו את הזווית בין הוקטורים $(3,2,1)$ ו- $(4,5,6)$.

פתרון:

$$(3,2,1)\cdot(4,5,6)=12+10+6=28$$
$$\cos(\theta)=\frac{(3,2,1)\cdot(4,5,6)}{|(3,2,1)||(4,5,6)|}=\frac{28}{\sqrt{14}\sqrt{77}}$$
$$\theta=\arccos\left(\frac{28}{\sqrt{14}\sqrt{77}}\right)$$

דוגמה 4.4

מצאו את קוסינוס הזווית החדה בין:
הישר l_1 העובר דרך הנקודות $A=(-1,1,2)$ $B=(-3,-2,6)$,
והישר l_2 העובר דרך הנקודות $C=(5,-1,-4)$ $D=(4,3,-5)$.

פתרון:
נחשב את הקואורדינטות של וקטורים המקבילים ל- l_1 ו- l_2:

$$\bar{a}=\overline{AB}=(-2,-3,4)\qquad\Rightarrow\qquad|\bar{a}|=\sqrt{29}\ .$$
$$\bar{b}=\overline{CD}=(-1,4,-1)\qquad\Rightarrow\qquad|\bar{b}|=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\ .$$
$$\bar{a}\cdot\bar{b}=(-2,-3,4)\cdot(-1,4,-1)=-14\ .$$

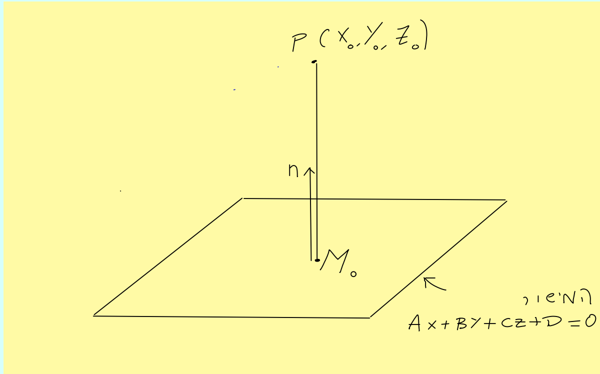
לכן

$$\cos\theta=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}=\frac{-14}{3\sqrt{58}}$$

שימו לב, שיצא לנו שקוסינוס הזאת הוא שלילי. זה תלוי בכיוון שבו מוגדר את הזווית (עם כיוון השעון או נגד כיוון השעון). מכיוון שאנחנו רוצים לבעת את הזוית מבלי להתחשב בכיוון, נקח

$$\cos\theta=\left|\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}\right|=\frac{14}{3\sqrt{58}}\ .$$

הגדרה 4.6 היטל של וקטור $\bar{a}$ על וקטור $\bar{b}$

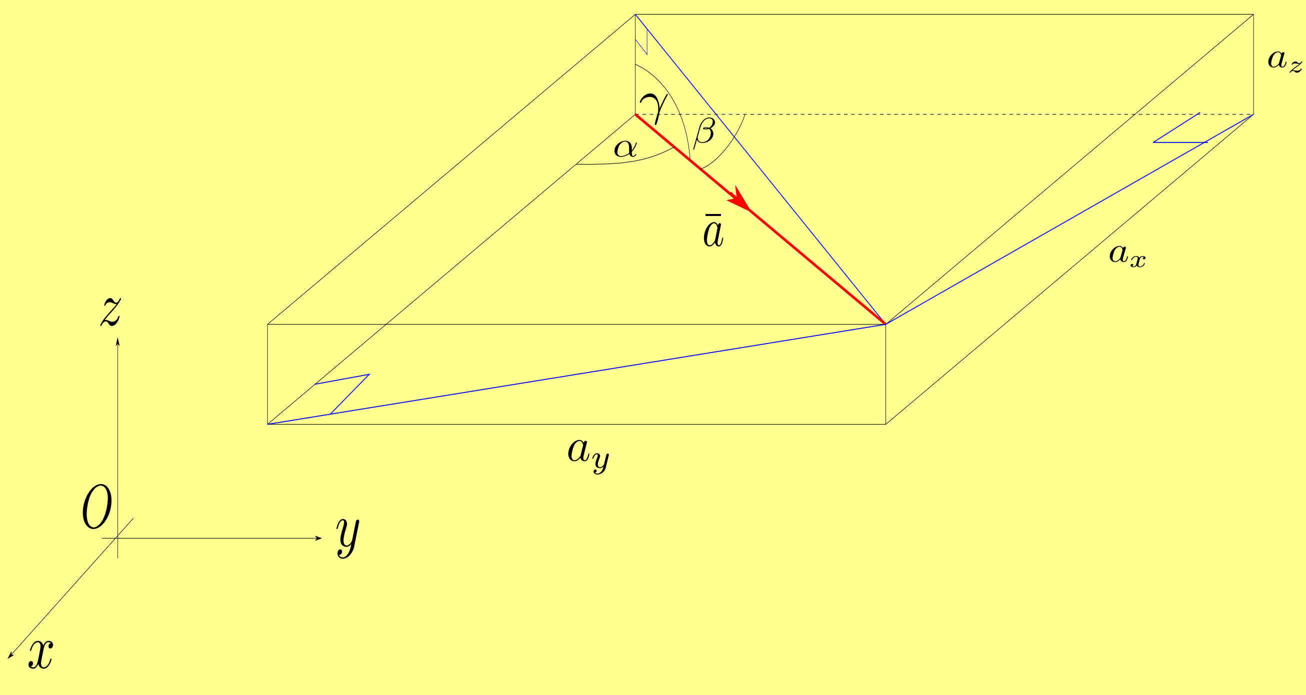


אורך ההיטל של $\bar{a}$ על וקטור $\bar{b}$ הוא

$$|\bar{b}| \cdot \cos(\alpha) \ .$$

לכן, $|\bar{a}\cdot\bar{b}|$ שווה למכפלת האורך של $\bar{a}$ באורך ההיטל של $\bar{b}$ על $\bar{a}$.

משפט 4.6 זוויות של וקטור



נתון וקטור $\bar{a}=(a_x,a_y,a_z)$. נניח ש-

α הזווית בין $\bar{a}$ וכיוון ה- x,

β הזווית בין $\bar{a}$ וכיוון ה- y,

γ הזווית בין $\bar{a}$ וכיוון ה- z,

(תראו תרשים לעיל). אז

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}\ , \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}\ , \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}\ .$$

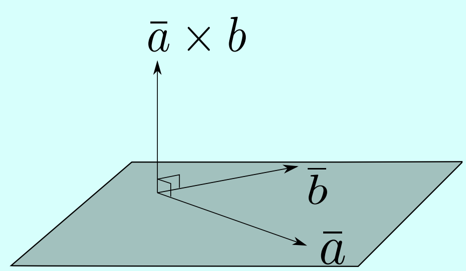
שים לב לפי משפט ??, נתון וקטור $\bar{a}$ עם זוויות α,β,γ ביחס לצירים, הוקטור היחידה של $\bar{a}$ ניתן ע"י ז

$$\hat{a} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\ .$$

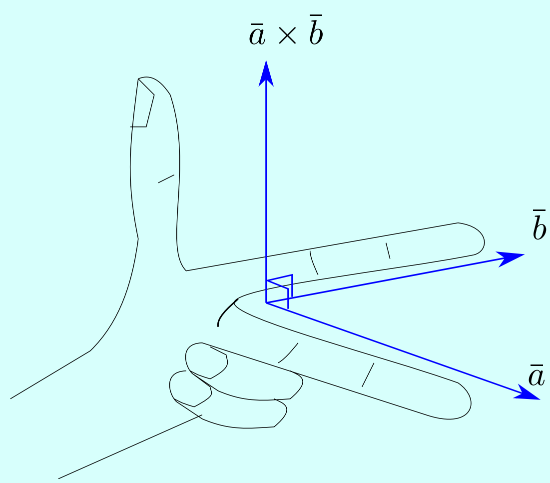
הגדרה 4.7 מכפלת וקטורית

נתון שני וקטורים $\bar{a} = (a_1,a_2,a_3)$ ו- $\bar{b} = (b_1,b_2,b_3)$ המכפלת וקטורית מוגדרת להיות

$$\bar{a}\times\bar{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$



המכפלת וקטורית היא וקטור שניצב למישור בו נמצאים הוקטורים $\bar{a}$ ו- $\bar{b}$.



משפט 4.7 מכפלת וקטורית וזווית בין וקטורים

אם θ הזיית בין הוקטורים $\bar{a}$ ו- $\bar{b}$ אז מתקיים

$$|\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\theta\ .$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
|\bar{a}\times\bar{b}|^2 &= (y_1z_2-y_2z_1)^2+(z_1x_2-z_2x_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2\\
&=\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2+z_2^2\right)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2\\
&=|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2-(\bar{a}\cdot\bar{b})^2\\
&=|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2-|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\cos^2\theta\\
&=|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\left(1-\cos^2\theta\right)\\
&=|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\sin^2\theta\ .
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\qquad |\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}||\bar{b}|\sin\theta\ .$$

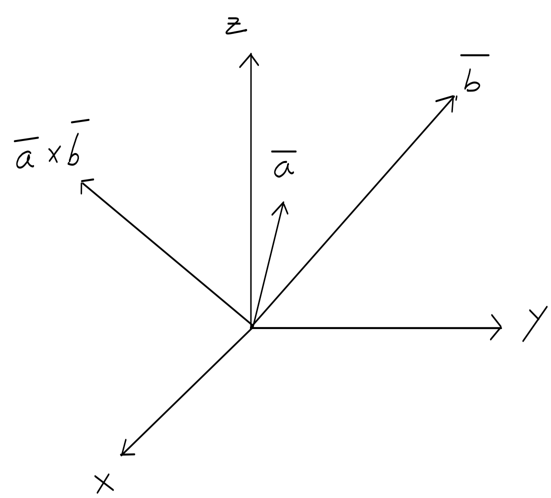
■

דוגמה 4.5

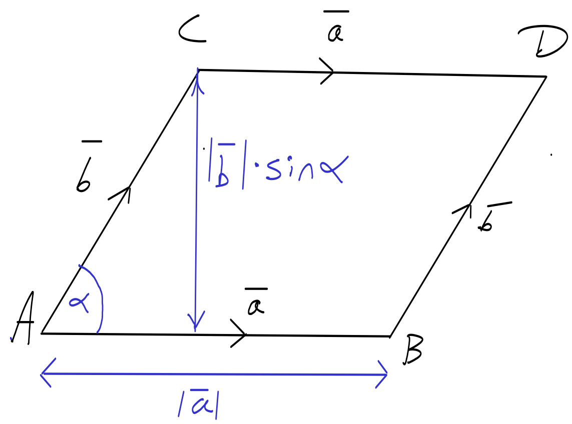
הוכיחו כי הנקודות $A=(0,0,0)$, $B=(1,1,1)$, $C=(2,3,4)$ לא כולן על ישר אחד וחשבו את שח המשולש ΔABC.

פתרון:
צריך להוכיח כי $\bar{a}=\overline{AB}=(1,1,1)$ ו- $\bar{b}=\overline{AC}=(2,3,4)$ לא מקבילים:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=(1,-2,1)\ .$$



הוקטורים $\bar{a}$ ו- $\bar{b}$ יוצרים מקבילית



(ראו שרטוט למטה).
שטח המקבילית הנוצרת ע"י הוקטורים $\bar{a}$ ו $\bar{b}$ הוא

$$S_{ABCD} = |\bar{a} \times \bar{b}| \ ,$$

ולכן שטי המשולש הוא

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}| \ .$$

בדוגמה שלנו,

$$S = \frac{1}{2}|(1,-2,1)| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \ .$$

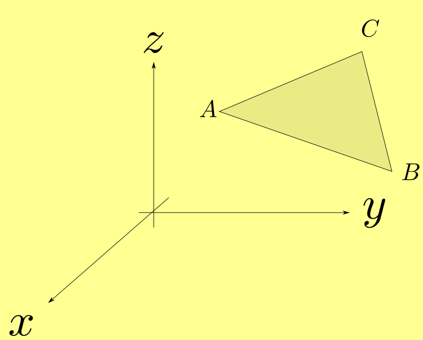
משפט 4.8 תנאי קופלנריות

שלושה וקטורים $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ נמצאים במישור אחת א"אם

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = 0 \ .$$

משפט 4.9 שטח משולש

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$$



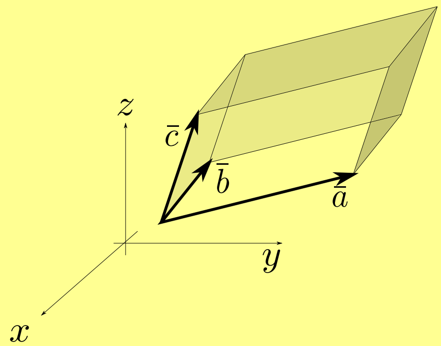
משפט 4.10 מכפלה מעורבת

א) נתון שלושה וקטורים $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ המכפלה מעורבת מוגדרת להיות

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b}) = \bar{b}\cdot(\bar{c}\times\bar{a}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

ב)
$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=\bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})=\bar{b}\cdot(\bar{c}\times\bar{a})\ .$$

ג) הערך מוחלט של המכפלה מעורבת שווה לנפח של המקבילון הנוצר ע"י השלושה וקטורים $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ כמתואר בתרשים. כלומר
$$V_{\text{מקבילון}}=|\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})|\ .$$



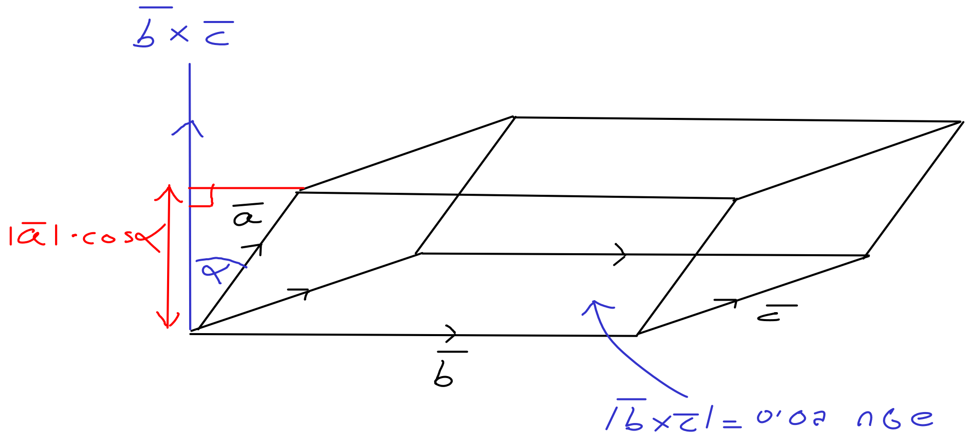
ד) הוקטורים $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ הם קופלנריים (שלשתם נמצאים באותו מישור) אם ורק אם
$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=0\ .$$

הוכחה:

א)
$$a\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$

ב) מספר אי-זוגי של החלפות שורות בדטרמיננטה משנה את הסימן של הדטרמיננטה. מספר זוגי של החלפות שורות בדטרמיננטה לא משנה את הסימן של הדטרמיננטה. לכן
$$a\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_1&c_2&c_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=c\cdot(\bar{a}\times\bar{b})$$

ג)
$$|\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}\times\bar{c}|\cos\alpha=\underbrace{|\bar{b}\times\bar{c}|}_{\bar{b},\bar{c}\ \text{שטח הקבילית בבסיס}}\cdot\underbrace{|\bar{a}|\cos\alpha}_{\bar{a}\ \text{אורך הניצב לבסיס}\ \bar{b},\bar{c}\ \text{העובר בנקודה שקצה}}$$



ד)

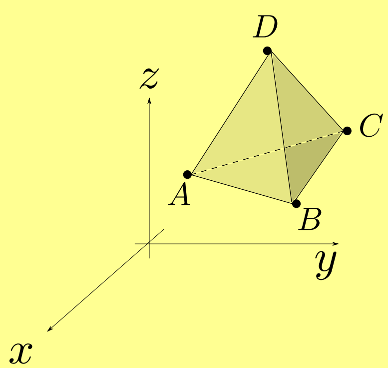
$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$ שורות המטריצה תלויות לינאריות ,

כלומר $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ קופלנריים.

■

משפט 4.11 נפח פירמידה

$$V = \frac{1}{6} \left| \overline{AD} \cdot \left(\overline{AB} \times \overline{AC} \right) \right|$$



דוגמה 4.6 ח

שבו את נפח הפירמידה המשולשת שקדקודיה הם

$$A = (1, 2, 3)\ ,\ B = (0, 1, 2)\ ,\ C = (-1, 2, 3)\ ,\ D = (1, 1, 1)\ .$$

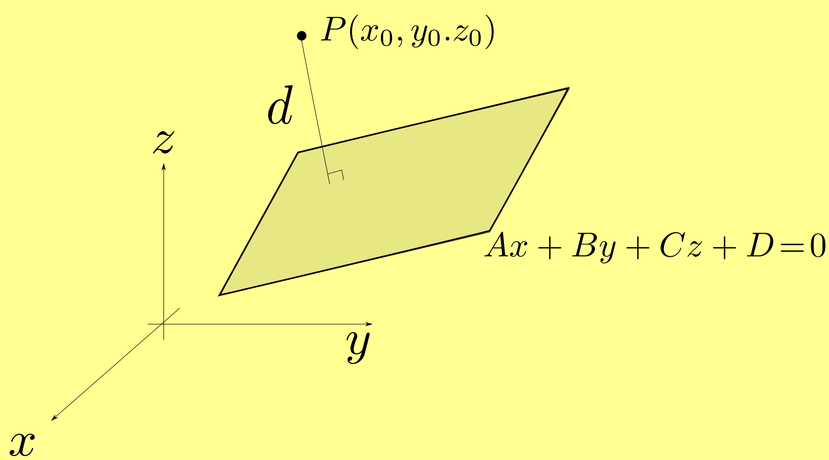
פתרון:

$$
\begin{aligned}
V =& \frac{1}{6}|\overline{AB}\cdot(\overline{AC}\times\overline{AD})|\\
=& \frac{1}{6}\left|(-1,-1,-1)\cdot[(-2,0,0)\times(0,-1,-2)]\right|\\
=& \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1\\ -2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2\end{vmatrix}\\
=& \frac{1}{3} \ .
\end{aligned}
$$

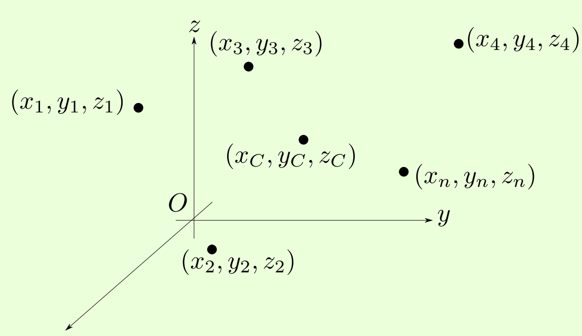
משפט 4.12 מרחק מנקודה למישור

בהינתן נקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ ומישור בעל משוואה $Ax+By+Cz+D=0$, המרחק d בין P לנקודה הכי קרובה אליו הנמצא במישור ניתן ע"י

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \ .$$



כלל 4.2 מרכז המסה



מרכז המסה C של מערכת של n נקודות חומריות בעלות מסות $m_1,m_2,\ldots,m_n$ כמתואר בתרשים, נמצאת במיקום x_C,y_C,z_C ביחס למערכת צירי x,y,z, כאשר

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \ ,$$
$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \ ,$$
$$z_c = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \ .$$