המחלקה למדעי המחשב

$29/11/23 12:00 - 26/11/23 12:00$ תשפ"ג

אלגברה 2

מועד ב'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר, ד'ר שי סרוסי.

תשפ"ג סמסטר ק'

השאלון מכיל 12 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

אחר / הערות

- יש לפתור את כל השאלות.
- המשקל של כל שאלה מפורט להלן:
  - שאלה 1: 30 נקודות.
  - שאלה 2: 20 נקודות.
  - שאלה 3: 20 נקודות.
  - שאלה 4: 30 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבירו היטב את מהלך הפתרון. תשובה ללא הסבר (גם נכונה) לא תתקבל.
- אסור לחלוטין לקבל עזרה מסטודנט אחר או מאף אחד.
- עליכם להעלות את הפתרונות שלכם דרך אתר המודל של הקורס אלגברה 2 למדמ"ח לא יאוחר משעה $12:00$ ביום ד' $23-11-29$. פתרונות שהוגשו אחרי המועד הזה לא יתקבלו.
- מותר להשתמש בחומר של הקורס, התרגילים של הקורס והספרים של הקורס בלבד, אבל אסור להשתמש בשום מקורות אחרים.
- אחרי הגשת פתרונות אתם תקבלו הזמנה למבחן קצר בעל פה על הפתרונות שלכם. ייתכן שלא תעבור את המבחן או יורידו נקודות במקרה שאתם לא יכולים להסביר הפתרונות שלכם היטב.
- **סטודנט יהיה זכאי להגיש ערעור / בקשות שונות לגבי הבוחן במשך 5 ימים בלבד מיום קבלת הציון.**

==

שאלה 1 תהי $A \in \mathbb{C}^{3\times3}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 2 & -i & 4 \\ 0 & 0 & 7i \end{pmatrix}$.

א) מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

ב) יהי $f(x)$ הפולינום $f(x) = x^3 - 7ix^2 - x + 7i + 4$. הוכיחו כי המטריצה $f(A)$ הפיכה.

שאלה 2

א) תהי $A \in \mathbb{R}^{6\times6}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ב) הוכיחו כי A לכסינה.

ג) הוכיחו כי כל הערכים עצמיים של A יהיו ממשיים.

ד) הוכיחו כי הערכים עצמיים לא יהיו כולם שווים ל- 1 בערך מוחלט.

ה) יהיו $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ הווקטורים העצמיים של A. הוכיחו כי

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0$$

לכל $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 6$.

שאלה 3 תהי $A \in \mathbb{C}^{3\times3}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1+i \\ 0 & -1-i & 0 \end{pmatrix}$.

א) מצאו את הערכים עצמיים של A.

ב) מצאו בסיס אורתנורמלי המורכב מווקטורים עצמיים של A.

ג) חשבו את e^A.

שאלה 4 יהי $n \in \mathbb{Z}_+$ מספר טבעי. תהי $\{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathbb{R}$ קבוצה של n מספרים ממשיים, ותהי $\{b_1, \ldots, b_n\} \in \mathbb{R}$

קבוצה של n מספרים ממשיים. הוכיחו כי

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} k a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{k}\right)$$

פתרונות

שאלה 1

א) נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned} p_A(x) = |xI - A| = &\begin{vmatrix} x-i & -1 & 0 \\ -2 & x+i & -4 \\ 0 & 0 & x-7i \end{vmatrix} \\ =&(x-7i)\begin{vmatrix} x-i & -1 \\ -2 & x+i \end{vmatrix} \\ =&(x-7i)\left((x-i)(x+i)-2\right) \\ =&(x-7i)(x^2+1-2) \\ =&(x-7i)(x^2-1) \\ =&(x-7i)(x+1)(x-1)\ . \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:
$\lambda = 7i$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda = -1$ מריבוי אלגברי 1.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 7i$.</u>

$$(A-7iI) = \begin{pmatrix} -6i & 1 & 0 \\ 2 & -8i & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to 6iR_2+2R_1} \begin{pmatrix} -6i & 1 & 0 \\ 0 & 50 & 24i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2\to\frac{1}{50}R_2]{R_1\to -\frac{1}{6i}R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{6} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{12i}{25} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{i}{6}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{25} \\ 0 & 1 & \frac{12i}{25} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z) = (\frac{-2}{25}z, \frac{-12i}{25}z, z) = (\frac{-2}{25}, \frac{-12i}{25}, 1)z,\ \ z\in\mathbb{C}$.

$$V_{7i} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 12i \\ -25 \end{pmatrix}\right\}\ .$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1$.

$$(A-I) = \begin{pmatrix} -1+i & 1 & 0 \\ 2 & -1-i & 4 \\ 0 & 0 & -1+7i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{-1+i} \cdot R_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}-\frac{i}{2} & 0 \\ 2 & -1-i & 4 \\ 0 & 0 & -1+7i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}-\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1+7i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to 4R_3 - (-1+7i)R_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}-\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}-\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z) = (\frac{1+i}{2}y, y, 0) = (\frac{1+i}{2}, 1, 0)y, \ \ y \in \mathbb{C}$.

$$V_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = -1$.

$$(A+I) = \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 0 \\ 2 & 1-i & 4 \\ 0 & 0 & 1+7i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{1+i} \cdot R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-\frac{i}{2} & 0 \\ 2 & 1-i & 4 \\ 0 & 0 & 1+7i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1+7i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to 4R_3 - (1+7i)R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z) = (\frac{-1+i}{2}y, y, 0) = (\frac{-1+i}{2}, 1, 0)y, \ \ y \in \mathbb{C}$.

$$V_{-1} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1+i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_{7i} & u_{-1} & u_1 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1+i & 1+i \\ -12i & 2 & 2 \\ 25 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

ב) הפולינום האופייני הוא $p_A(x) = (x+1)(x-1)(x-7i) = x^3 - 7ix^2 - x + 7i$. לכן

$$f(x) = x^3 - 7ix^2 - x + 7i + 4 = p_A(x) + 4$$

לפי משפט קיילי-המילטון $p_A(A) = 0$ אז

$$f(A) = p_A(A) + 4I = 4I .$$

מכאן

$$|f(A)| = |4I| = 4^3 = 64 \neq 0$$

כלומר $|f(A)| \neq 0$ אז $f(A)$ הפיכה.

שאלה 2

א) נשים לב כי A סימטרית:

$$A^t = A .$$

בנוסף $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$, בפרט A ממשית, לכן

$$\bar{A} = A ,$$

כלומר A צמודה לעצמה.
לפי משפט לכסון אוניטרית, מטריצה שצמודה לעצמה לכסינה אוניטרית, לפיכך A לכסינה.

ב) הערכים עצמיים של מטריצה הצמודה לעצמה ממשיים, לכן הערך עצמי של A יהיו כולם ממשיים.

ג) A נורמלית. ז"א כל ערך עצמי של A יהיה 1 בערך מוחלט אם ורק אם A אוניטרית ($\bar{A} \cdot A = I$).
A לא אוניטרית לכן לא ייתכן שהערך מוחלט של כל ערך עצמי יהיה 1.

ד) A נורמלית לכן A לכסינה אוניטרית לכן הווקטורים עצמיים מהווים בסיס אורתונורמלי.

שאלה 3

א) נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned} p_A(x) =&|xI-A| = \begin{vmatrix} x-5 & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & 1-i \\ 0 & 1+i & x \end{vmatrix} \\ =&(x-5)\begin{vmatrix} x+1 & 1-i \\ 1+i & x \end{vmatrix} \\ =&(x-5)\left(x(x+1)-2\right) \\ =&(x-5)(x+2)(x-1)\ . \end{aligned}$$

ערכים עצמיים: $\lambda=1,\lambda=-2,\lambda=5$.
כל הערכים עצמיים שוים לכן A לכסינה.

ב) נשים לב כי $A=\bar{A}$, כלומר A צמודה לעצמה ולכן A נורמלית ולכן הווקטורים עצמיים מהווים בסיס אורתוגונלי.

$A=QDQ^{-1}$.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=5$</u>

$$(A-5I) \qquad = \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1+i \\ 0 & -1-i & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_1]{\substack{R_1\to -\frac{1}{6}R_2 \\ R_2\to \frac{-1+i}{2}\cdot R_3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{6}-\frac{i}{6} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2}-\frac{5i}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{6}-\frac{i}{6} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2}-\frac{5i}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{6}-\frac{i}{6} \\ 0 & 0 & \frac{7}{3}-\frac{7i}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to 3(7+7i)R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{6}-\frac{i}{6} \\ 0 & 0 & 98 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to \frac{1}{98}R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{6}-\frac{i}{6} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z)=(1,0,0)x,\ \ x\in\mathbb{C}$

$$V_5=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=-2$</u>

$$(A+2I) \;=\; \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1+i \\ 0 & -1-i & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3+(1+i)R_2]{R_1\to\frac{1}{7}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1+i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z)=(0,(1-i)z,z),\ \ z\in\mathbb{C}$

$$V_{-2}=\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=1$</u>

$$(A-I) \;=\; \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1+i \\ 0 & -1-i & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to -2R_3+(1+i)R_2]{R_1\to\frac{1}{4}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1+i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z)=(0,\frac{-1+i}{2}z,z),\ \ z\in\mathbb{C}$

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1+i \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$D=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$Q=\begin{pmatrix} | & | & | \\ u_5 & u_{-2} & u_1 \\ | & | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & -1+i \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

ג) לכל פונקציה $f(x)$,

$$f(A)=f(QDQ^{-1})=Qf(D)Q^{-1} .$$

לכן

$$e^A=e^{QDQ^{-1}}=Qe^DQ^{-1} .$$

כיצד נחשב e^D? נשים לב כי אם $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ אלכסונית אז $f(D)=\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$

באותה מידה $e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$. לכן

$$e^A = e^{QDQ^{-1}} = Qe^DQ^{-1} = Q \begin{pmatrix} e^5 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & e^1 \end{pmatrix} Q^{-1} \ .$$

שאלה 4 נגדיר ווקטורים $u, w \in \mathbb{R}^n$: יהיו

$$u = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\sqrt{1}} \\ \frac{a_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{a_3}{\sqrt{3}} \\ \vdots \\ \frac{a_n}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} , \qquad w = \begin{pmatrix} \sqrt{1} \cdot b_1 \\ \sqrt{2} \cdot b_2 \\ \sqrt{3} \cdot b_3 \\ \vdots \\ \sqrt{n} \cdot b_n \end{pmatrix} .$$

$a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

$$(u,w) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{k} b_k = \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k \ , \qquad \|u\|^2 = (u,u) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{k} \ , \qquad \|w\|^2 = (w,w) = \sum_{k=1}^n k \cdot b_k^2 \ .$$

לפי אי-השוויון קושי-שוורץ:

$$|(u,w)|^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|w\|^2 \ .$$

לכן נקבל

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right\|^2 \leq \left| \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{k} \right|^2 \cdot \left| \sum_{k=1}^n k \cdot b_k \right|^2 \ .$$