עבודה עצמית 5

שאלה 1 חשבו את הדטרמיננטות הבאות:

א)
$$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -6 & -7 \end{vmatrix}$$

ב)
$$\begin{vmatrix} 3m-2 & 4 \\ 5m+3 & 7 \end{vmatrix}$$

ג)
$$\begin{vmatrix} -4 & -5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

ד)
$$\begin{vmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

ה)
$$\begin{vmatrix} 2m-3 & m-4 & 3m-1 \\ 1 & -2 & 1 \\ m & 4m+1 & 2 \end{vmatrix}$$

ו)
$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & -2 \\ -1 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

ז)
$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

ח)
$$\begin{vmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{vmatrix}$$

ט)
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$$

י)
$$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$$

יא)
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

שאלה 2 פתרו את המשוואות הבאות:

א) $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$

ב) $\begin{vmatrix} x & 3x-8 \\ x-2 & 2x-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & x-1 \\ x+1 & 2x-4 \end{vmatrix}$

שאלה 3

נתון $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = t$. חשבו את $\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 3x & 3y & 3z \\ -p & -q & -r \end{vmatrix}$.

שאלה 4 תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ונניח ש- $|A| = a$, $|B| = b \neq 0$. מצאו את:

א) $|AB|$

ב) $|7A|$

ג) $|7AB^{-1}A^2|$

ד) $|A+A|$

ה) $|4A^tB^3A^2(B^t)^{-1}|$

שאלה 5 פתרו את המערכות הבאות בעזרת כלל קרמר:

א)
$$\begin{cases} -3x - 6y + 2z = -1 \\ x + 8y - z = 12 \\ -5x - 9y + 3z = 0 \end{cases}$$

ב)
$$\begin{cases} -5x + y - 4z = 1 \\ -4x - y = 8 \\ 5x + 2z = -5 \end{cases}$$

ג)
$$\begin{cases} -5x - 4y + 5z - 2t = -2 \\ 4x - y - 5z - 2t = -9 \\ 4x - y - 4z - t = -10 \\ 2x - y - 3z - 2t = -5 \end{cases}$$

שאלה 6 עבור אילו ערכים של k קיים פתרון יחיד למערכות הבאות:

א)
$$\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 1 \\ x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \end{cases}$$

ב)
$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$$

ג)
$$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ x + 5y - z = 7 \\ 3x + ky + 4z = k^2 \end{cases}$$

ד)
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = -2 \end{cases}$$

שאלה 7

תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו:

א) $|A+B| = |B+A|$.

ב) אם $AB + AC$ אז $|B| = |C|$.

ג) אם קיים $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ כך ש- $(AB)\cdot X = 0$ אז $|A| = 0$ או $|B| = 0$.

ד) $|A+B| = |A| + |B|$.

ה) $|AB| = |BA|$.

ו) $|A^t B| = |B^t A|$.

ז) $|A^{-1}| = |A|$ אז $A = I$.

ח) $A^2 = I$ אז לפחות אחת מהמטריצות $A - I$ או $A + I$ איננה הפיכה.

שאלה 8

א) פתרו את המערכת הבאה באמצעות כלל קרמר:

$$\left.\begin{aligned} 2ix + 3y &= 1 - 2i \\ x - 4iy &= 3 + 5i \end{aligned}\right\}$$

ב) תהיינה A, B מטריצות מסדר 4×4. נתונות הדטרמיננטות $|A| = a$, $|B| = b$, ($b \neq 0$). מצאו את $|25A^3B^{-1}A^2B^2|$.

פתרונות

<u>שאלה 1</u>

א) $$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = 15$$

ב) $$\begin{vmatrix} 3m-2 & 4 \\ 5m+3 & 7 \end{vmatrix} = -26+m$$

ג) $$\begin{vmatrix} -4 & -5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

ד) $$\begin{vmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ה) $$\begin{vmatrix} 2m-3 & m-4 & 3m-1 \\ 1 & -2 & 1 \\ m & 4m+1 & 2 \end{vmatrix} = 11m^2-7m+22$$

ו) $$\begin{vmatrix} 7 & 8 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & -2 \\ -1 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

ז) $$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

ח) $$\begin{vmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{vmatrix} = t^3-12t-16$$

ט) $$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

י) $$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$$

יא) $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = -(a-b)(a-c)(b-c)$$

שאלה 2

א)

$$4x^2 - 13x + 3 = (x-3)(4x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3, \frac{1}{4}$$

ב) המשוואה היא

$$-x^2 + 9x - 16 = x^2 - 7 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 9x + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2x-3)(x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3, \frac{3}{2} \ .$$

שאלה 3

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 3x & 3y & 3z \\ -p & -q & -r \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 3x & 3y & 3z \\ p & q & r \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

$$= -3\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3t.$$

שאלה 4

נתון: $|A| = a$, $|B| = b \neq 0$.

A, B מסדר $n \times n$.

א) $|AB| = |A| \cdot |B| = ab$.

ב) $|7A| = 7^n |A| = 7^n a$.

ג) $|7AB^{-1}A^2| = 7^n |A||B^{-1}||A^2| = 7^n |A||B^{-1}||A|^2 = 7^n \cdot a \cdot \frac{1}{b} \cdot a^2 = \frac{7^n a^3}{b}$.

ד) $|A + A| = |2A| = 2^n |A| = 2^n \cdot a$

ה) $|4A^t B^3 A^2 (B^t)^{-1}| = 4^n |A^t||B^3||A^2||B^t|^{-1} = 4^n |A||B|^3|A|^2|B|^{-1} = 4^n \cdot a \cdot b^3 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{b} = 4^n \left(ab\right)^3 .$

שאלה 5

א)

$$\begin{cases} -3x & - & 6y & + & 2z & = & -1 \\ x & + & 8y & - & z & = & 12 \\ -5x & - & 9y & + & 3z & = & 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 1 & 8 & -1 \\ -5 & -9 & 3 \end{vmatrix} = 5 \ ,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -6 & 2 \\ 12 & 8 & -1 \\ 0 & -9 & 3 \end{vmatrix} = -15 \ ,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 1 & 12 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 10 \ ,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & -6 & -1 \\ 1 & 8 & 12 \\ -5 & -9 & 0 \end{vmatrix} = 5 \ .$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -3 \ , \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2 \ , \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1 \ .$$

ב)

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -5x & + & y & - & 4z & = & 1 \\ -4x & - & y & & & = & 8 \\ 5x & & & + & 2z & = & -5 \end{array} \right.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 \\ -4 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \ ,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 8 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \ ,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 \\ -4 & 8 & 0 \\ 5 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 8 \ ,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 8 \\ 5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1 \ , \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -4 \ , \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0 \ .$$

ג)

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} -5x & - & 4y & + & 5z & - & 2t & = & -2 \\ 4x & - & y & - & 5z & - & 2t & = & -9 \\ 4x & - & y & - & 4z & - & t & = & -10 \\ 2x & - & y & - & 3z & - & 2t & = & -5 \end{array} \right.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & -5 & -2 \\ 4 & -1 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 5 & -2 \\ -9 & -1 & -5 & -2 \\ -10 & -1 & -4 & -1 \\ -5 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & -2 & 5 & -2 \\ 4 & -9 & -5 & -2 \\ 4 & -10 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -16$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & -4 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -9 & -2 \\ 4 & -1 & -10 & -1 \\ 2 & -1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & -5 & -9 \\ 4 & -1 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 8$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1 \ , \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 4 \ , \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1 \ , \qquad w = \frac{\Delta_4}{\Delta} = -2 \ .$$

<u>שאלה 6</u> למערכת $AX = b$ יש פתרון יחיד $\Leftrightarrow$ A הפיכה $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$.

א) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & k \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

$|A| = k - 5$. לכן $|A| \neq 0$ לכל $k \neq 5$.
לכן A הפיכה לכל $k \neq 5$.
לכן למערכת יש פתרון יחיד לכל $k \neq 5$.

ב) $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$.

$|A| = (k-1)^2(k+2)$. לכן $|A| \neq 0$ לכל $k \neq 1, -2$.
לכן A הפיכה לכל $k \neq 1, -2$.
לכן יש פתרון יחיד לכל $k \neq 1, -2$.

ג) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & k & 4 \end{pmatrix}$.

$|A| = k + 62$.

לכן $|A| \neq 0$ לכל $k \neq -62$.

לכן A הפיכה לכל $k \neq -62$. לכן יש פתרון יחיד לכל $k \neq -62$.

ד) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$.

$|A| = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2$.

$A \neq 0$ לכל $k \neq 1$.
לכן A הפיכה לכל $k \neq 1$.
לכן למערכת יש פתרון יחיד לכל $k \neq 1$.

שאלה 7

א) $|A+B| = |B+A|$.

טענה נכונה. הוכחה: הקבוצה של מטריצות שדה לכן חוק החילוף מתקיים, ז"א

$$A+B = B+A \qquad \Rightarrow \qquad |A+B| = |B+A| \ .$$

ב) אם $AB = AC$ אז $|B| = |C|$.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ , \qquad AB = AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

$|B| = 1 \neq |C| = 4$.

ג) אם קיים $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ כך ש- $(AB) \cdot X = 0$ אז $|A| = 0$ או $|B| = 0$.

טענה נכונה. הוכחה:
למערכת $(AB) \cdot X = 0$ קיים פתרון לא טריוויאלי, כלומר $X \neq 0$.
לכן AB לא הפיכה.

$$\Rightarrow \quad |AB| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |A| \cdot |B| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |A| \neq 0, \ |B| \neq 0 \ .$$

ד) $|A+B| = |A| + |B|$.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

$$|A+B| = 1 \ , \qquad |A| + |B| = 0 \ .$$

ה) $|AB|=|BA|$.

טענה נכונה. הוכחה:

$$|AB|=|A|\cdot|B|=|B|\cdot|A|=|BA|\ .$$

ו) $|A^tB|=|B^tA|$.

טענה נכונה. הוכחה:

$$|A^tB|=|A^t|\cdot|B|=|A|\cdot|B|=|A|\cdot|B^t|=|B^t|\cdot|A|=|B^tA|\ .$$

ז) אם $|A^{-1}|=|A|$ אז $A=I$.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\ .$$

$$|A|=-1=|A^{-1}|\ .$$

ח) אם $A^2=I$ אז לפחות אחת מהמטריצות $A-I$ או $A+I$ איננה הפיכה.

טענה נכונה. הוכחה:

$$A^2-I=0\quad\Rightarrow\quad(A-I)(A+I)=0\quad\Rightarrow\quad|(A-I)(A+I)|=0\quad\Rightarrow\quad|A-I|\cdot|A+I|=0$$

מכאן $|A-I|=0$ או $|A+I|=0$.

לכן $A+I$ לא הפיכה או $A-I$ לא הפיכה.

שאלה 8

א)

$$\Delta=\begin{vmatrix}2i&3\\1&-4i\end{vmatrix}=5\ ,\quad\Delta_1=\begin{vmatrix}1-2i&3\\3+5i&-4i\end{vmatrix}=-19i-17\ ,\quad\Delta_2=\begin{vmatrix}2i&1-2i\\1&3+5i\end{vmatrix}=8i-11\ .$$

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-17-19i}{5}\ ,\quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-11+8i}{5}\ .$$

ב)

$$|25A^3B^{-1}A^2B^2|=25^4|A^3|\cdot|B^{-1}|\cdot|A^2|\cdot|B^2|=25^4|A|^3\cdot\frac{1}{|B|}\cdot|A|^2\cdot|B|^2=25^4\cdot a^3\cdot\frac{1}{b}\cdot a^2\cdot b^2=25^4\cdot a^5\cdot b\ .$$