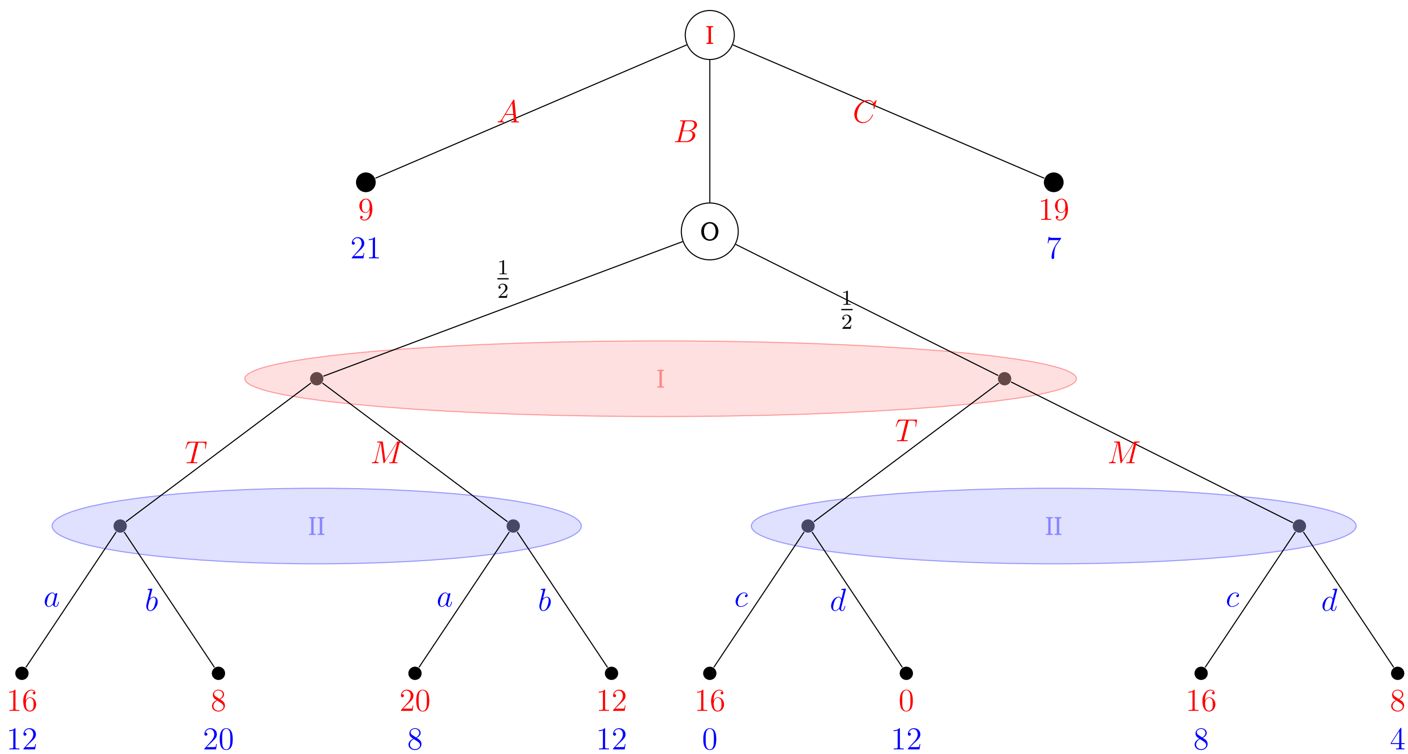
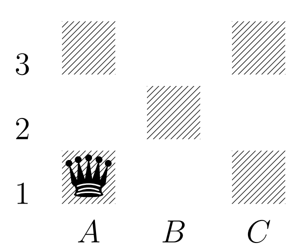
שאלה 1 (25 נקודות)

מצאו את כל שיווי משקל במשחק הבא:



שאלה 2 (25 נקודות)

א) **(15 נקודות)** מלכה מונחת על המשבצת $A1$ כמתואר למטה. המלכה יכולה לעבור ימינה, למעלה, או בכיוון אלכסוני למעלה וימינה. כאשר המלכה מגיעה למשבצת $C3$ היא לא יכולה לנוע עוד והמשחק מסתיים. הוכיחו: אם קיימים מסלולים בעלי אורך 5 צעדים רק בין משבצת $A1$ לבין משבצת $C3$ ולא בין אף צמד משבצות אחרות, אז לא קיים אף מסלול של אורך 6.



ב) **(10 נקודות)** הוכיחו: במשחק שני שחקנים, אם אסטרטגיה σ_1 של שחקן 1 שולטת בכל האסטרטגיות האחרות שלו, אז σ_1 היא אסטרטגית מקסמין שלו.

שאלה 3 **(25 נקודות)**

מצאו את כל וקטורי האסטרטגיות הרציונליים במשחקים הבאים:

א) **(10 נקודות)**

I \ II	a	b	c	d
T	$6, 2$	$10, 6$	$14, 12$	$4, 16$
B	$16, 10$	$12, 18$	$8, 12$	$8, 14$

ב) **(10 נקודות)**

I \ II	a	b	c	d
T	$-2, -40$	$-14, -14$	$-2, 4$	$-10, 16$
M	$54, 40$	$26, -4$	$42, 4$	$26, -2$
B	$-10, 40$	$-6, 10$	$14, -2$	$6, -8$

ג) **(5 נקודות)**
תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה של משחק שני שחקנים. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית: אם A סימטרית וחיובית אז למשחק אין שיווי משקל.

שאלה 4 **(25 נקודות)**

שני מדינות שכנות רוצות לבחור כמה להשקיע בניקיון רצועת חוף משותפת. רווח שולי (במיליארדי דולרים) מהאמץ המושקע בניקיון של כל מדינה נתון על ידי

$$V_1 = 20 - r_1 + \frac{r_2}{2}\ , \qquad V_2 = 20 - r_2 + \frac{r_1}{2}\ ,$$

כאשר r_1 מציין את המאמץ המושקע בניקיון של מדינה למדינה 1 ו- r_2 מציין את המאמץ המושקע בניקיון של מדינה למדינה 2. עלויות המאמצים נתונות על ידי הפונקציות הבאות בהתאמה:

$$c_2(r_2) = 2r_2, \quad c_1(r_1) = 4r_1\ .$$

נסחו את הבעיה המתאימה (רמז: מודל דואפול), מצאו את רמות המאמץ ואת תועלות המדינות בשיווי משקל נאש.

שאלה 5 (25 נקודות)

אליס ובוב קונים מניות בשתי חברות: אל-על וישרוטל. בוב מעדיף לקנות מניות של אל-על בעוד אליס מעדיפה לקנות מניות של ישרוטל. שניהם מעדיפים לקנות מניות באותה חברה.

אם שניהם קונים מניות של ישרוטל, אז בוב מקבל 1₪ ואליס מקבלת 2₪ פלוס 10% הרווח שנתי של ישרוטל של שנה שעבר. הרווח שנתי של ישרוטל ידוע רק לאליס ולא לבוב.

אם שניהם קונים מניות של אל-על, אליס מקבלת 1₪ ובוב מקבל 2₪ פלוס 10% הרווח שנתי של אל-על של שנה שעבר. הרווח שנתי של אל-על ידוע רק לבוב ולא לאליס.

אם הם קונים בחברות שונות אז התשלום לשניהם הוא אפס. הרווח שנתי מתפלג אחיד בטווח $[0, 100]$.

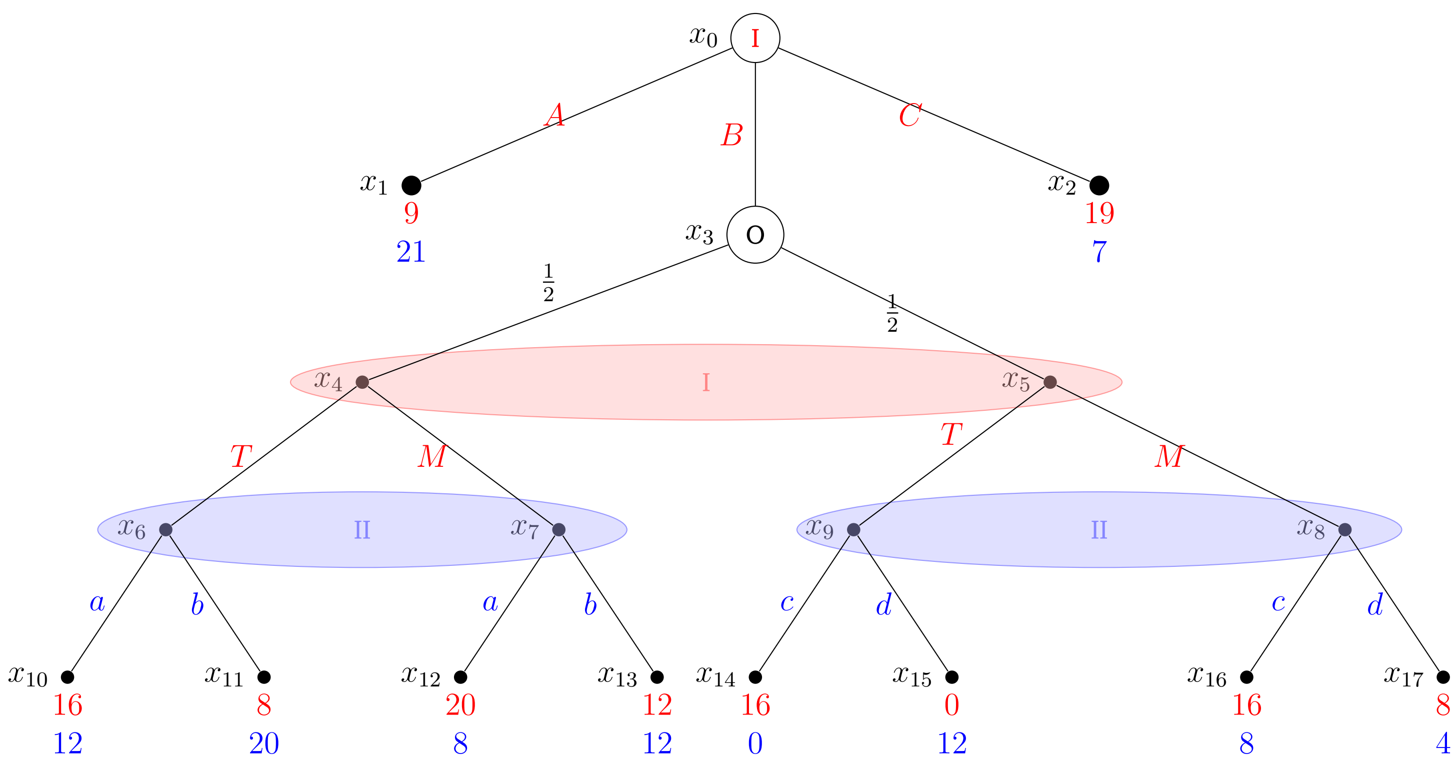
אליס קונה מניות בישרוטל אם הרווח שנתי של ישרוטל עולה על α אחרת היא קונה מניות באל-על.

בוב קונה מניות באל-על אם הרווח שנתי של אל-על עולה על β אחרת הוא קונה מניות בישרוטל.

מצאו את הערכים של α ו- β עבורם הווקטור אסטרטגיות $(s^*_{\text{אליס}}, s^*_{\text{בוב}}) = (\text{אל-על}, \text{ישרוטל})$ שיווי משקל נאש בייסיאני של המשחק.

פתרונות

שאלה 1 (25 נקודות)



קבוצת ידיעה של שחקן I:

$$x_0 : (A, B, C) \ , \qquad x_4x_5 : (T, M) \ .$$

קבוצת אסטרטגיות של I:

$$S_I = (A/T, A/M, B/T, B/M, C/T, C/M) \ .$$

קבוצת ידיעה של שחקן II:

$$x_6x_7 : (a, b) \ , \qquad x_8x_9 : (c, d) \ .$$

קבוצת אסטרטגיות של I:

$$S_{II} = (a/c, a/d, b/c, b/d) \ .$$

הצורה אסטרטגית של המשחק:

	a/c	a/d	b/c	b/d
A/T	$9,21$	$9,21$	$9,21$	$9,21$
A/M	$9,21$	$9,21$	$9,21$	$9,21$
B/T	$\frac{1}{2}(16,12)+\frac{1}{2}(16,0)$	$\frac{1}{2}(16,12)+\frac{1}{2}(0,12)$	$\frac{1}{2}(8,20)+\frac{1}{2}(16,0)$	$\frac{1}{2}(8,20)+\frac{1}{2}(0,12)$
B/M	$\frac{1}{2}(20,8)+\frac{1}{2}(16,8)$	$\frac{1}{2}(20,8)+\frac{1}{2}(8,4)$	$\frac{1}{2}(12,12)+\frac{1}{2}(16,8)$	$\frac{1}{2}(12,12)+\frac{1}{2}(8,4)$
C/T	$19,7$	$19,7$	$19,7$	$19,7$
C/M	$19,7$	$19,7$	$19,7$	$19,7$

	a/c	a/d	b/c	b/d
A/T	$9,21$	$9,21$	$9,21$	$9,21$
A/M	$9,21$	$9,21$	$9,21$	$9,21$
B/T	$16,12$	$8,12$	$12,10$	$4,16$
B/M	$18,8$	$14,6$	$14,10$	$10,8$
C/T	$19,7$	$19,7$	$19,7$	$19,7$
C/M	$19,7$	$19,7$	$19,7$	$19,7$

	a/c	a/d	b/c	b/d
A/T	$9,\underline{21}$	$9,\underline{21}$	$9,\underline{21}$	$9,\underline{21}$
A/M	$9,\underline{21}$	$9,\underline{21}$	$9,\underline{21}$	$9,\underline{21}$
B/T	$16,12$	$8,12$	$12,10$	$4,\underline{16}$
B/M	$18,8$	$14,6$	$14,\underline{10}$	$10,8$
C/T	$\underline{19},7$	$\underline{19},7$	$\underline{19},7$	$\underline{19},7$
C/M	$\underline{19},7$	$\underline{19},7$	$\underline{19},7$	$\underline{19},7$

אין שיווי משקל באסטרטגיות טהורות.

<u>שאלה 2</u> (25 נקודות)

א) יהי G גרף המשחק עם 9 קדקודים כאשר כל קדקוד מייצג משבצת אחת ותהי $A \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ מטריצת שכנות של הגרף.

אם קיימים מסלולים בעלי אורך 5 צעדים רק בין משבצת $A1$ לבין משבצת $C3$ ולא בין אף צמד משבצות אחרות, אז

$$\left(A^5\right)_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j=9 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

A מטריצה משולשית עליונה אם אפסים על האלכסון. לכן

$$A^6 = A \cdot A^5 = 0 \ .$$

לכן לא קיים אף מסלול של אורך 6.

ב) נניח כי σ_1 היא אסטרטגית שולטת של שחקן 1.
תהי $t_2 \in S_2$ אסטרטגיה של שחקן 2 כך ש-

$$u_1(\sigma_1, t_2) = \min_{s_2 \in S_2} u_1(\sigma_1, s_2)$$

מכאן

$$\min_{s_2 \in S_2} u_1(\sigma_1, s_2) = u_1(\sigma_1, t_2) \geq u_1(s_1, t_2) \geq \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$$

כלומר

$$\min_{s_2 \in S_2} u_1(\sigma_1, s_2) \geq \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) \ .$$

לפיכך

$$\min_{s_2 \in S_2} u_1(\sigma_1, s_2) = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) \ .$$

אבל $\underline{v}_1 = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$. לכן σ_1 היא אסטרטגית מקסמין של שחקן 1.

<u>שאלה 3</u> (25 נקודות)

א)

ב)

ג) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ שמוגדרת

$$A = \begin{pmatrix} (1,3) & (2,1) \\ (2,1) & (4,5) \end{pmatrix} \ .$$

I \ II	a	b
A	$1,\underline{3}$	$2,1$
B	$2,1$	$\underline{4},\underline{5}$

הרי הווקטור אסטרטגיות (B,b) שיווי משקל.

<u>שאלה 4</u> (25 נקודות)

$$u_1 = r_1V_1 - 4r_1 = r_1\left(20 - r_1 + \frac{r_2}{2}\right) - 4r_1 \ , \qquad u_2 = r_2V_2 - 2r_2 = r_2\left(20 - r_2 + \frac{r_1}{2}\right) - 2r_2 \ .$$

$$(u_1)'_{r_1} = 20 - 2r_1 + \frac{r_2}{2} - 4 = 16 - 2r_1 + \frac{r_2}{2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad r_1^* = 8 + \frac{r_2}{4} \ .$$

$$(u_2)'_{r_2} = 20 - 2r_2 + \frac{r_1}{2} - 2 = 18 - 2r_2 + \frac{r_1}{2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad r_2^* = 9 + \frac{r_1}{4} \ .$$

נציב השני בראשון:

$$r_1^* = 8 + \frac{9}{4} + \frac{r_1^*}{16} = \frac{128+36}{16} + \frac{r_1^*}{16} = \frac{164}{16} + \frac{r_1^*}{16} \quad \Rightarrow \quad r_1^* = \frac{164}{15} \ .$$

$$r_2^* = 9 + \frac{164}{60} = \frac{704}{60} = \frac{176}{15}$$

שאלה 5 **(25 נקודות)**

נסמן:

$t_A =$ 10% הרווח שנתי של ישרוטל של שנה שעבר.

$t_B =$ 10% הרווח שנתי של אל-על של שנה שעבר.

$E =$ אסטרטגית קניית מניות באל-על.

$Y =$ אסטרטגית קניית מניות בישרוטל.

אליס מקבלת תשלום $2 + t_A$ אם שניהם קונים מניות של ישרוטל כאשר t_A ערך פרטי שידוע רק ל- אליס ולא ל- בוב.

בוב מקבל תשלום $2 + t_B$ אם שניהם קונים מניות של אל-על כאשר t_B ערך פרטי שידוע רק ל- בוב ולא ל- אליס.

אליס \ בוב	ישרוטל	אל-על
ישרוטל	$2+t_A, 1$	$0, 0$
אל-על	$0, 0$	$1, 2+t_B$

הערך הפרטי t_A מתפלג אחיד בטווח $[0, x]$ ו t_B מתפלג אחיד בטווח $[0, x]$.

t_B ו- t_A בלתי תלויים.

אליס משחקת Y אם t_A גדול מערך מסויים α, אחרת היא משחקת E.

בוב משחק E אם t_B גדול מערך מסויים β, אחרת הוא משחק Y.

מצאו את הערכים של α ו- β עבורם הווקטור אסטרטגיות $(s_1^*, s_2^*) = (Y, E)$ שיווי משקל נאש בייסיאני של המשחק.

P \ C	Y	E
Y	$2+t_A, 1$	$0,0$
E	$0,0$	$1, 2+t_B$

$$G = \{(A_A, A_B), (T_A, T_B), (p_A, p_B), u_A, u_B\}$$

t_A ו- t_B מתפלגים אחידה בתחום $[0,x]$ והם בלתי תלויים, לכן

$$p_A = P(t_A|t_B) = P(t_A) \ , \qquad p_B = P(t_B|t_A) = P(t_B) \ .$$

$$A_A = \{\text{ישרוטל}, \text{אל-על}\} = \{Y, E\} \ , \qquad A_B = \{\text{ישרוטל}, \text{אל-על}\} = \{Y, E\} \ .$$

אליס משחקת Y בהסתברות $\frac{x-\alpha}{x}$ ומשחקת E בהסתברות $\frac{\alpha}{x}$.

בוב משחק E בהסתברות $\frac{x-\beta}{x}$ ומשחק Y בהסתברות $\frac{\beta}{x}$.

תשלום ל- אליס אם היא משחקת Y:

$$u_1(s_1 = Y) = \frac{\beta}{x}(2+t_A) + \left(\frac{x-\beta}{x}\right) \cdot 0 = \frac{\beta}{x}(2+t_A) \ .$$

תשלום ל- אליס אם היא משחקת E:

$$u_1(s_1 = E) = \frac{\beta}{x} \cdot 0 + \left(\frac{x-\beta}{x}\right) \cdot 1 = \frac{1-\beta}{x} \ .$$

$$u_1(s_1 = Y) \ge u_1(s_1 = E) \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta}{x}(2+t_A) \ge \frac{x-\beta}{x} \quad \Rightarrow \quad t_A \ge \frac{x-\beta}{\beta} - 2 = \frac{x}{\beta} - 3 \stackrel{!}{=} \alpha \ .$$

תשלום ל- בוב אם הוא משחק Y:

$$u_2(s_2 = Y) = \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) \cdot 1 + \frac{\alpha}{x} \cdot 0 = 1 - \frac{\alpha}{x} \ .$$

תשלום ל- בוב אם הוא משחק E:

$$u_2(s_2 = E) = \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) \cdot 0 + \frac{\alpha}{x}(2+t_B) = \frac{\alpha}{x}(2+t_B) \ .$$

$$u_2(s_2 = E) \ge u_2(s_2 = Y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{x}(2+t_B) \ge 1 - \frac{\alpha}{x} \quad \Rightarrow \quad (2+t_B) \ge \frac{x}{\alpha} - 1 \quad \Rightarrow \quad t_B \ge \frac{x}{\alpha} - 3 \stackrel{!}{=} \beta \ .$$

הפתרון של המערכת הוא

$$\frac{x}{\left(\frac{x}{\beta}-3\right)}-3=\beta \quad\Rightarrow\quad x-\frac{3x}{\beta}+9=x-3\beta \quad\Rightarrow\quad -\frac{3x}{\beta}+9+3\beta=0 \quad\Rightarrow\quad -3x+9\beta+3\beta^2=0$$

$$\Rightarrow\quad \beta^2+3\beta-x=0 \quad\Rightarrow\quad \beta=\frac{-3+\sqrt{9+4x}}{2}\ .$$

לכן $\frac{x}{\alpha}-3=\beta$

$$\alpha=\frac{x}{3+\beta}=\frac{2x}{3+\sqrt{9+4x}}=\frac{2x}{3+\sqrt{9+4x}}\cdot\left(\frac{3-\sqrt{9+4x}}{3-\sqrt{9+4x}}\right)=\frac{-3+\sqrt{9+4x}}{2}=\beta$$

לכן התשובה סופית היא האסטרטגיה $(s_1^*,s_2^*)=(Y,E)$ שיווי משקל אם

$$t_A\geq\alpha=\frac{-3+\sqrt{9+4x}}{2}=\frac{-3+\sqrt{409}}{2}\ ,\qquad t_B\geq\beta=\frac{-3+\sqrt{9+4x}}{2}=\frac{-3+\sqrt{409}}{2}\ .$$