תורת המשחקים

תוכן העניינים

שעור 1
משחקים בצורה רחבה

1.1 הגדרת צורה הרחבה של משחק

התיאור הכי טבעי של משחק הוא **הצורה הרחבה**.

הגדרה 1.1 משחק בצורה רחבה

הצורה רחבה של משחק ניתנת על ידי הקבוצה

$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_1, V_2, V_3, \ldots\}, O, u) \ ,$$

כאשר

1) N הוא קבוצה סופית של **השחקנים**.

2) V קבוצת **הקדקודים** של עץ המשחק.

קדקוד מייצג החלטה של שחקן.

3) E קבוצת **הקשתות** או **הצלעות** של עץ המשחק.

כל צלע הולך בין שני קדקודים. צלע מייצג אסטרטגיה של שחקן, אשר נקבעת על ידי ההחלטתו שמסומנת בקדקוד שממנו הצלע יוצא.

4) x_0 הוא הקדקוד של **המצב ההתחלתי** של המשחק.

5) V_1 הוא הקבוצה של קדקודים שבהן שחקן 1 מקבל החלטה, V_2 הקבוצת קדקודים בהן שחקן 2 מקבל החלטה, וכן הלאה.

בכללי, V_i הקבוצה קדקודים בהם שחקן i מקבל החלטה ונקראת הקבוצת ידיעה של שחקן i.

6) O הוא **קבוצת התוצאות** האפשרייות.

התוצאות מצויינות ב **נקודות סיום** (**עלים**) של עץ המשחק.

7) u **פונקצית התשלום** המתאימה לכל ווקטור אסטרטגיות של המשחק תשלום לכל שחקן.

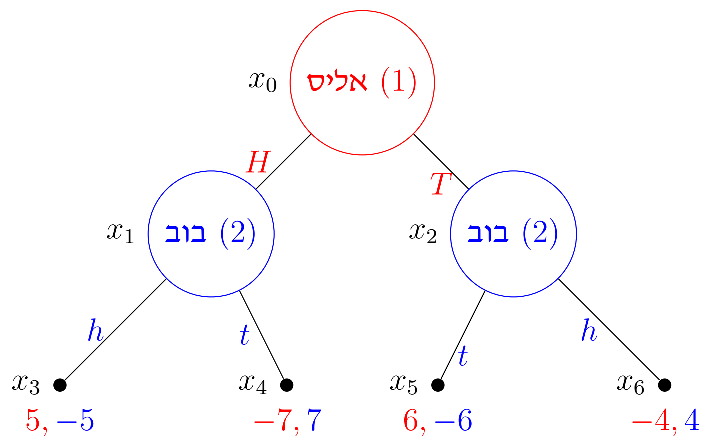
דוגמה 1.1 (משחק התאמת המטבעות)

אליס בוחרת אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי). היא רושמת בחירותה על פתק, חותמת עליו ומעבירה אותו לשופט. אחר כך בוב בוחר H או T, רושם בחירותו על פתק, חותם עליו ומעביר אותו לשופט.

- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר h אז בוב משלם לאליס 5₪.
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר t אז אליס משלמת לבוב 7₪.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר h אז בוב משלם לאליס 6₪.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר t אז אליס משלמת לבוב 4₪.

רשמו את המשחק בצורה רחבה.

פתרון:
תהי אליס שחקן 1 ובוב שחקן 2.



$$\Gamma=(N,V,E,x_0,\{V_1,V_2\},O,u)\ .$$

שחקנים: $N=\{\text{אליס},\text{בוב}\}=\{1,2\}$.
קדקודים: $V=\{x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$.
קשתות: $E=\{x_0x_1\ ,x_0x_2\ ,\ x_1x_3\ ,\ x_1x_4\ ,\ x_2x_5\ ,\ x_2x_6\}$.
מצב המשחק ההתחלתי: x_0.
קדקודים:
קבוצות ידיעה של שחקן 1: $V_1=\{\ x_0(H,T)\ \}$.
קבוצת ידיעה של שחקן 2: $V_2=\{\ x_1(h,t)\ ,\ x_2(h,t)\ \}$.
תוצאות אפשרייות: $O=\{x_3,x_4,x_5,x_6\}$.
פונקציית התשלום:

$$u_1(H,h)=5\ ,\qquad u_2\,(H,h)=-5\ ,$$
$$u_1(H,t)=-7\ ,\qquad u_2\,(H,t)=7\ ,$$
$$u_1(T,h)=-4\ ,\qquad u_2\,(T,h)=4\ ,$$
$$u_1(T,t)=6\ ,\qquad u_2\,(T,t)=-6\ .$$

■

הגדרה 1.2 קבוצת אסטרטגיות של שחקן

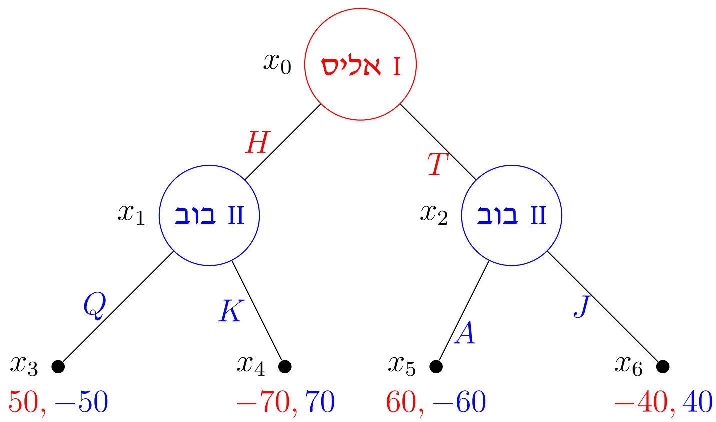
נתון משחק N -שחקנים.
נסמן ב- S_i את הקבוצה של כל האסטרטגיות האפשריות של שחקן i במשחק.

דוגמה 1.2 (מטבע וקלפים)

נתבונן על המשחק הבא:

שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
אחר כך, אם אליס בוחרת H אז שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).
אחרת אם אליס בוחרת T בוב בוחר קלף נסיך (J) או קלף אס (A).

- אם אליס בוחרת H ובוב בחר Q אז בוב משלם לאליס ₪50.
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר K אז אליס משלם לבוב ₪70.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר J אז בוב משלם לאליס ₪60.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר A אז אליס משלם לבוב ₪40.



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H,T.
אומרים כי לשחקן I יש **קבוצה ידיעה אחת** שנסמן

$$V_I = \{ \ x_0(H,T) \ \}$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I = (H,T) \ .$$

לשקחן II יש שני קדקודים x_1,x_2 בהם הוא מקבל החלטה.
אומרים גם כי לשחקן II יש 2 קבוצת ידיעה, x_1,x_2 אשר מייצגות שתי אפשריות שונות המנובעות מההחלטה הקודמת של שחקן I בקדקוד x_0.
הקבוצות ידיעה של שחקן II הינן:

$$V_{II} = \{ \ x_1(Q,K) \ , \ x_2(J,A) \ \}$$

מכיוון שלשחקן II יש שתי קבוצות ידיעה x_1,x_2 ובכל אחד יש שתי פעולות אפשריות, אז יש לבוב $2\times 2=4$ אסטרטגיות:

$$S_{II} = (Q/J \ , \ Q/A \ , \ K/J \ , \ K/A)$$

מטבע וקלפים

הגדרה 1.3 ווקטור אסטרטגיות של משחק

נתון משחק n -שחקנים.
נניח כי שחקן 1 משחק לפי אסטרטגיה s_1, שחקן 2 משחק לפי אסטרטגיה s_2, ... ושחקן n משחק לפי אסטרטגיה s_n.
אז הווקטור אסטרטגיות של המשחק הינו

$$s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \ .$$

הגדרה 1.4 פונקצית תשלום

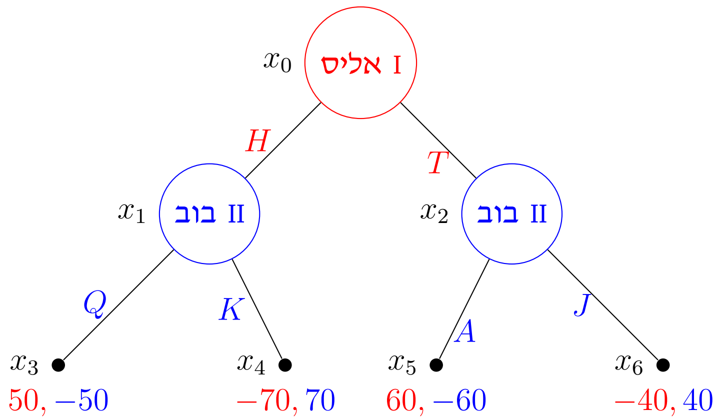
נתון משחק n- שחקנים. פונקצית תשלום $u : S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ היא פונקציה אשר משייכת לכל ווקטור אסטרטגיות של המשחק, תשלום לכל שחקן.

נניח כי שחקן 1 משחק לפי אסטרטגיה s_1, שחקן 2 משחק לפי אסטרטגיה s_2, ... ושחקן n משחק לפי אסטרטגיה s_n. ז"א הווקטור האסטרטגיות של המשחק הינו $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$.
פונקצית התשלום של המשחק מקבלת את הווקטור אסטרטגיות ומחזירה תשלום לכל שחקן:

$$u(s_1, s_2, \ldots, s_n) = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

כאשר u_1 התשלום לשחקן 1, u_2 התשלום לשחקן 1, ... ו- u_n התשלום לשחקן n.

דוגמה 1.3 (המשך של דוגמה 1.2)



- נניח כי אליס משחקת לפי האסטרטגיה $s_I = H$ ובוב משחק לפי האסטרטגיה $s_{II} = Q/A$.
הווקטור אסטרטגיות של המשחק הוא

$$s = (s_I, s_{II}) = (H, Q/A) \ .$$

- אם אליס משחקת לפי האסטרטגיה $s_I = H$ ובוב משחק לפי האסטרטגיה $s_{II} = Q/J$.
הווקטור אסטרטגיות של המשחק הוא

$$s = (s_I, s_{II}) = (H, Q/J) \ .$$

- וכן הלאה.

בסה"כ למשחק הזה יש 8 ווקטורי אסטרטגיות:

$$\begin{aligned}
(s_I, s_{II}) &= (H, Q/A) \ , \\
(s_I, s_{II}) &= (H, Q/J) \ , \\
(s_I, s_{II}) &= (H, K/A) \ , \\
(s_I, s_{II}) &= (H, K/J) \ , \\
(s_I, s_{II}) &= (T, Q/A) \ , \\
(s_I, s_{II}) &= (T, Q/J) \ , \\
(s_I, s_{II}) &= (T, K/A) \ , \\
(s_I, s_{II}) &= (T, K/J) \ .
\end{aligned}$$

הפונקצית תשלום של המשחק הינו

$$
\begin{aligned}
u(H,Q/A) &= (50,-50)\ ,\\
u(H,Q/J) &= (50,-50)\ ,\\
u(H,K/A) &= (-70,70)\ ,\\
u(H,K/J) &= (-70,70)\ ,\\
u(T,Q/A) &= (60,-60)\ ,\\
u(T,Q/J) &= (-40,40)\ ,\\
u(T,K/A) &= (60,-60)\ ,\\
u(T,K/J) &= (-40,40)\ .
\end{aligned}
$$

1.2 משחקים עם ידיעה שלמה והצורה אסטרטגית

הגדרה 1.5 משחק עם ידיעה שלמה

בכל שלב של המשחק, כל שחקן יודע את כל ההחלטות של שאר השחקנים לפני אותו שלב, ולכן הוא יודע בדיוק אילו פעולות נעשו על ידי כל שאר השחקנים.
כתוצאה, כל שחקן, כשמגיע תורו יודע בדיוק באיזה קודקוד בעץ המשחק הוא נמצא.

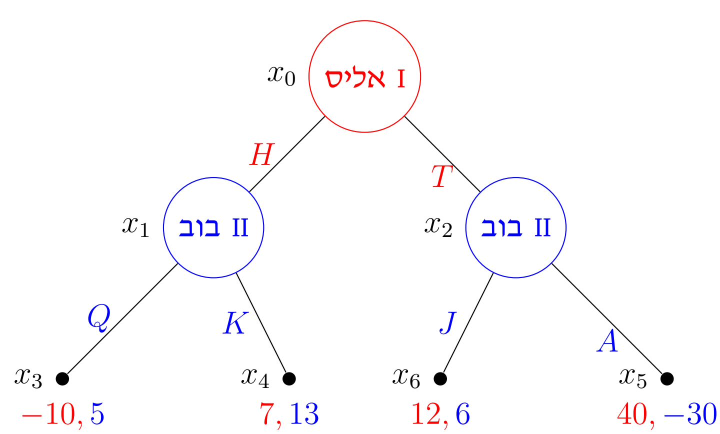
דוגמה 1.4 (משחק מטבע וקלף עם ידיעה שלמה)

נתבונן על המשחק הבא:

שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
אחר כך, אם אליס בוחרת H אז שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).
אחרת אם אליס בוחרת T בוב בוחר קלף נסיך (J) או קלף אס (A).

- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר Q אז בוב מקבל 5₪ ואליס מפסידה 10₪
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר K אז אליס מקבלת 7₪ ובוב מקבל 13₪
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר J אז בוב מקבל 6₪ ואליס מקבלת 12₪.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר A אז אליס מקבלת 40₪ ובוב מפסיד 30₪

ניתן לרשום את עץ המשחק **בצורה רחבה אסטרטגית**:



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H,T.
ז"א4 לשחקן I יש **קבוצה ידיעה אחת**:

$$x_0(H,T)\ .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I=(H,T)\ .$$

לשקחן II יש שני קדקודים x_1,x_2 בהם הוא מקבל החלטה.
אז לשחקן II יש 2 קבוצות ידיעה,

$$V_{II}=\{x_1(Q,K)\ ,\ x_2(J,A)\ \}\ .$$

אשר מייצגות שתי אפשריות שונות המנובעות מההחלטה הקודמת של שחקן I בקדקוד x_0.
מכיוון שלשחקן II יש שתי קבוצותצ ידיעה x_1,x_2 ובכל אחד יש שתי פעולות אפשריות, אז יש לבוב4 $2\times 2=4$ אסטרטגיות:

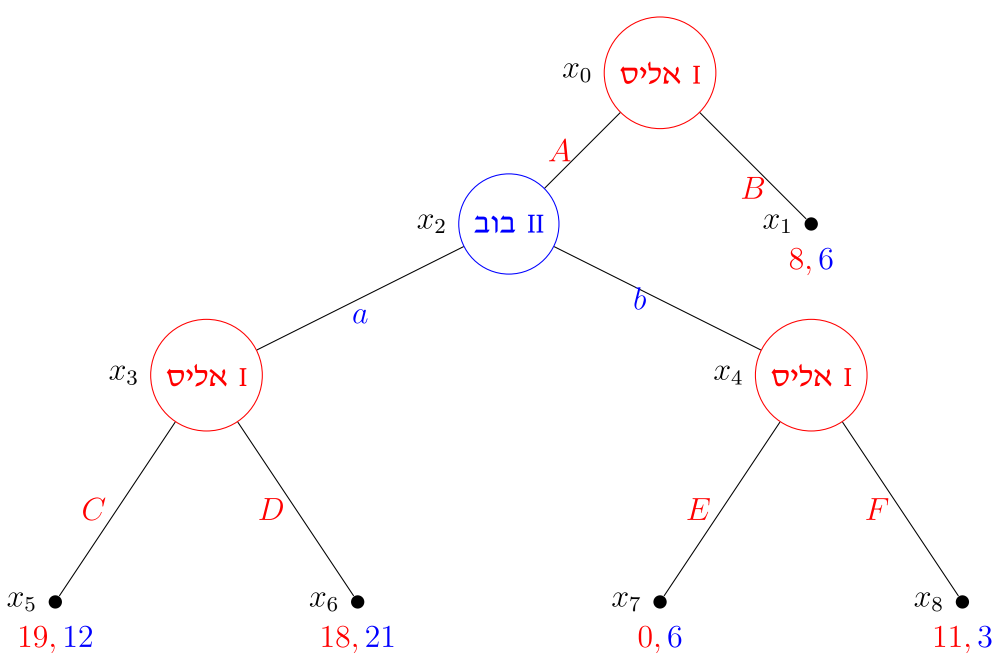
$$S_{II}=(Q/J\ ,\ Q/A\ ,\ K/J\ ,\ K/A)$$

(נהוג לרשום את האסטרטגיות מלמעלה עד למטה ומשמאל לימון.)
ניתן לרשום את המשחק **בצורה אסטרטגית**:

I \ II	Q/J	Q/A	K/J	K/A
H	$-10,5$	$-10,5$	$7,13$	$7,13$
T	$12,6$	$40,-30$	$12,6$	$40,-30$

דוגמה 1.5 ()

נתון המשחק הבא בצורה רחבה. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

במשחק הזה, אליס (שחקן I) פותח עם המהלך הראשון, ואחר כך בוב מבצע המהלך השני, ואז אליס מבצע מהלך שוב.

המשחק הוא משחק עם ידיעה שלמה.

לאליס יש שלוש קבוצות ידיעה:

$$x_0\ (A,B)\ , \qquad x_3\ (C,D)\ , \qquad x_4\ (E,F)\ .$$

בכל אחד של הקדקודים האלה לאליס יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לה $8 = 2 \times 2 \times 2$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_I = (A/C/E\ ,\ A/C/F\ ,\ A/D/E\ ,\ A/D/F\ ,\ B/C/E\ ,\ B/C/F\ ,\ B/D/E\ ,\ B/D/F)\ .$$

לבוב יש קבוצות ידיעה אחת:

$$x_2\ (a,b)\ .$$

בקבוצת ידיעה הזאת של בוב יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לו 2 קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a\ ,\ b)\ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

I \ II	a	b
$A/C/E$	$19,12$	$0,6$
$A/C/F$	$19,12$	$11,3$
$A/D/E$	$18,21$	$0,6$
$A/D/F$	$18,21$	$11,3$
$B/C/E$	$8,6$	$8,6$
$B/C/F$	$8,6$	$8,6$
$B/D/E$	$8,6$	$8,6$
$B/D/F$	$8,6$	$8,6$

■

1.3 משחקים עם ידיעה לא שלמה

הגדרה 1.6 משחק עם ידיעה לא שלמה

משחק עם ידיעה לא שלמה הוא משחק בו לפחות שחקן לא יודע את ההחלטה של שחקן אחר בקדקוד הקודם שממנו יוצא צלע לקדקוד החלטה שלו.
כתוצאה, השחקן אשר לו יודע את ההחלטה של שחקן אחר, לא יודע באיזה קדקוד הוא נמצא בעץ המשחק.

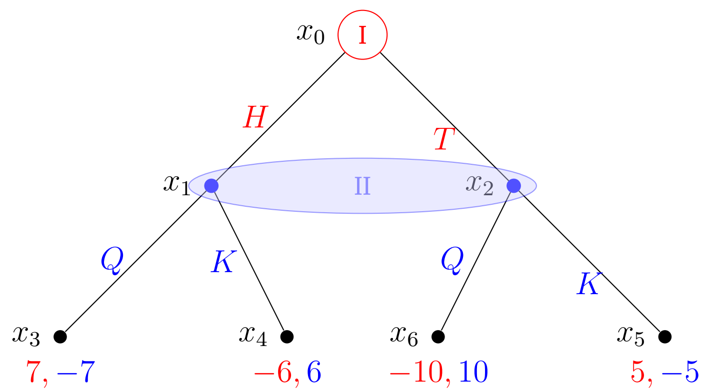
דוגמה 1.6 (משחק מטבע וקלף עם ידיעה לא שלמה)

בשונה לדוגמה הקודמת נתבונן על המשחק הבא עבורו שחקן II לא יודע את ההחלטה של שחקן I עד סוף המשחק.

שחקן I (אליס) בוחרת אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
אחר כך, **בלי ידיעה של הבחירה של אליס**, שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).

- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר Q אז בוב משלם לאליס 7₪.
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר K אז אליס משלם לבוב 6₪.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר Q אז אליס משלם לבוב 10₪.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר K אז בוב משלם לאליס 5₪.

נרשום את המשחק **בצורה רחבה**:



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H, T.
כלומר לאליס יש **קבוצה ידיעה אחת**:

$$V_I = \{ \ x_0(H,T) \ \} \ .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I = (H,T) \ .$$

בניגוד לדוגמה הקודמת, לבוב (שקחן II) יש רק קבוצת ידעיה אחת שמכילה שני קדקודים.
ז"א בוב לא יודע איזה אופציה אליס בחרה, H או T. אז בוב לא יודע על איזה קדקוד הוא נמצא, x_1 או x_2.
בגלל שהוא לא יודע מה ההחלטה של אליס, הוא בוחר בין רק שתי אפשרויות, בלי ידיעה של ההחלטה של אליס.
לכן אנחנו מסתכלים אל הקדקודים x_1x_2 **כקבוצת ידיעה אחת** שממנה יוצאות רק שתי הפעולות:

$$V_{II} = \{ \ x_1x_2(Q,K) \ \} \ .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של בוב הינה

$$S_{II} = (Q \ , \ K)$$

נשים לב כי מכל אחד של הקדקודים x_1 ו- x_2 יוצאות אותן קבוצת פעולות. אחרת בוב היה יודע מה ההחלטה של אליס.

כעת נרשום את הצורה האסטרטגית של המשחק:

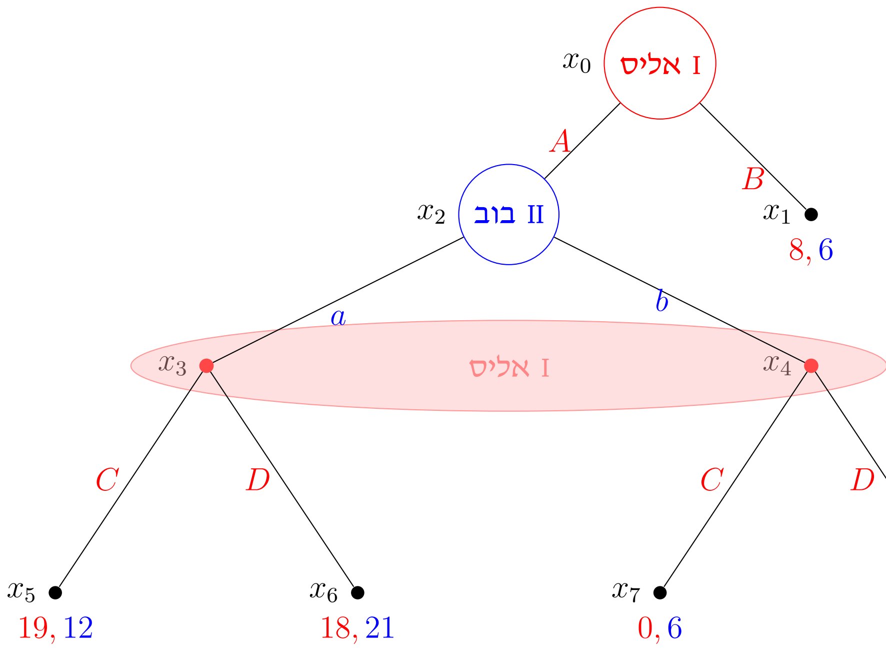
$I \backslash II$	Q	K
H	$7, -7$	$-6, 6$
T	$-10, 10$	$5, -5$

כלל 1.1 פעולות שיוצאות מקבוצת ידיעה ללא ידיעה שלמה

לשחקן יש אותה קבוצה של פעולות אפשריות בכל קדקוד שמוכל אותה קבוצת ידיעה.

דוגמה 1.7 (משחק עם ידיעה לא שלמה)

נתון המשחק הבא בצורה רחבה. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

שימו לב, דומה לדוגמה הקודמת, הקדקודים x_3 ו- x_4 באותה קבוצת ידיעה של אליס בגלל שהיא לא ידועת מה ההחלטה של בוב בקדקוד x_2, כלומר אליס לא יודעת אם בוב בחר a או b. לכן הפעולות היוצאות מקדקוד x_3 הן אותן פעולות שיוצאות מקדקדוד x_4, בגלל שאם היו פעולות אפשריות שונות היוצאות ב- x_3 ו- x_4, אז אליס היתה יודעת איזה פעולה בוב בחר, a או b. כלומר אם לאליס יש החלטה בין הפעולות E ו- F אז היא היתה ידועת שהיא נמצאת בקדקוד x_4 בעץ המשחק ובוב בחר b. ולהפך, אם היתה לה בחירה בין הפעולות C ו- D במקום הבחירה בין הפעולות E ו- F אז היא היתה יודעת שהיא נמצאת ב- x_3 ושבוב בחר a.

לאליס יש שתי קבוצות ידיעה:

$$x_0 \ (A,B) \ , \qquad x_3x_4 \ (C,D) \ .$$

בכל אחד של הקדקודים האלה לאליס יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לה $4 = 2 \times 2$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_I = (A/C \ , \ A/D \ , \ B/C \ , \ B/D) \ .$$

לבוב יש קבוצת ידיעה אחת:

$$x_2 : \ (a,b) \ .$$

בקבוצת ידיעה הזאת של בוב יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לו 2 קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a \ , \ b) \ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

$I \backslash II$	a	b
A/C	$19, 12$	$0, 6$
A/D	$18, 21$	$11, 3$
B/C	$8, 6$	$8, 6$
B/D	$8, 6$	$8, 6$

■

1.4 משחק עם מהלכי גורל

במשחקים שבהם עסקנו עד כה, המעבר ממצב למצב נעשה על ידי אחד השחקנים. מודל כזה מתאים למשחקים כגון שחמט ודמקה, אך לא למשחקי קלפים או קוביה (כמו פוקר או שש־בש), שבהם מעבר ממצב למצב יכול להיעשות על ידי תהליך מקרי: במשחקי קלפים אנחנו טורפים את הקלפים שבחפיסה, ובשש־בש אנו מטילים קוביה. ניתן לחשוב גם על סיטואציות שבהן המעבר ממצב למצב תלוי בגורמים מקריים אחרים, כגון ירידת גשם, רעידת אדמה או נפילת הבורסה. מעבר מסוג זה נקרא **מהלך גורל**. ההרחבה של המודל שלנו תיעשה על ידי כך שחלק מהקדקודים בעץ המשחק (V, E, x_0) יסומנו כמהלכי גורל. הצלעות היוצאות מקדקוד המתאים למהלך גורל מתאימות לתוצאות האפשריות של ההגרלה וליד כל צלע כזו נרשמת ההסתברות לקבלת התוצאה המתאימה.

הגדרה 1.7 משחק בצורה רחבה עם מהלכי גורל

משחק בצורה רחבה עם מהלכי גורל ניתן ע"י הווקטור

$$\Gamma = \left(N, V, E, x_0, \{V_0, V_1, V_2, V_3, \ldots\}, O, u, (p_x)_{x \in V_0}\right) ,$$

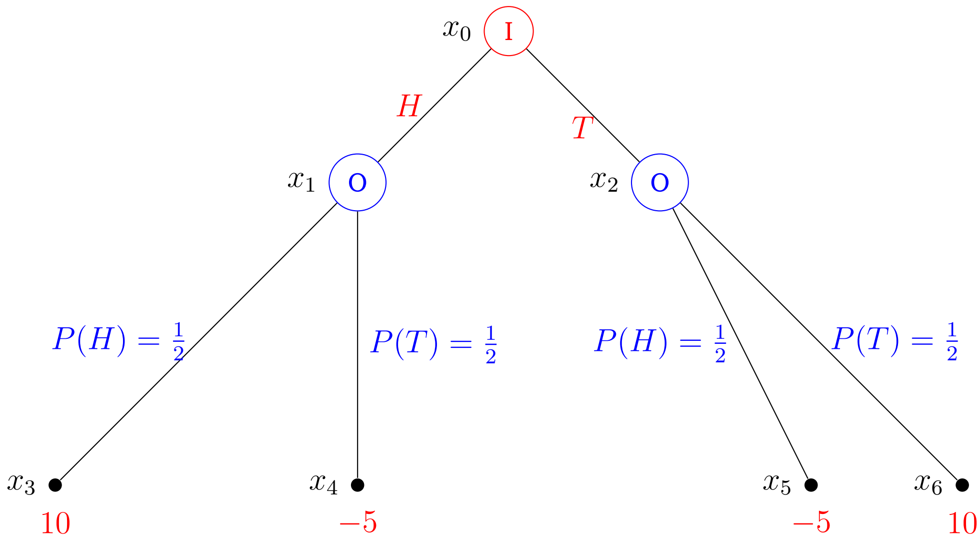
כאשר המשמעות של כל האיברים אותו דבר להגדרה של משחק בצורה רחבה כפי שנתון בהגדרה 1.1. ההבדל היחיד הוא הקבוצת קדקודים V_0, אשר מסמן את הקבוצה של הקדקודים בהם יש הגרלה על ידי **שחקן הגורל**.

לכל קדקוד $x \in V_0$, אנחנו משייכים הסתברות לכל צלע שיוצא ממנו.

דוגמה 1.8 (משחק עם מהלך גורל)

שחקן בוחר H ("עץ") או T ("פלי"). אחרי שהשחקן בוחר, הוא מטיל מטבע. אם המטבע מראה את בחירתו, הוא מנצח ומקבל 10 ₪. אם לא הוא מפסיד 5 ₪. שרטטו את המשחק בצורה רחבה.

פתרון:



$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_1, V_2\}, O, u) \ .$$

שחקנים: $N = \{I\} = \{1, 2\}$.

קדקודים: $V = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

קשתות: $E = \{x_0x_1 \ , x_0x_2 \ , \ x_1x_3 \ , \ x_1x_4 \ , \ x_2x_5 \ , \ x_2x_6\}$.

מצב המשחק ההתחלתי: x_0.

קדקודים:

קבוצות ידיעה של שחקן 1: $V_1 = \{ \ x_0(H, T) \ \}$.

קבוצת ידיעה של שחקן 2: $V_0 = \left\{ \ x_1 \left(P(H) = \frac{1}{2}, P(T) = \frac{1}{2}\right) \ , \ x_2 \left(P(H) = \frac{1}{2}, P(T) = \frac{1}{2}\right) \ \right\}$.

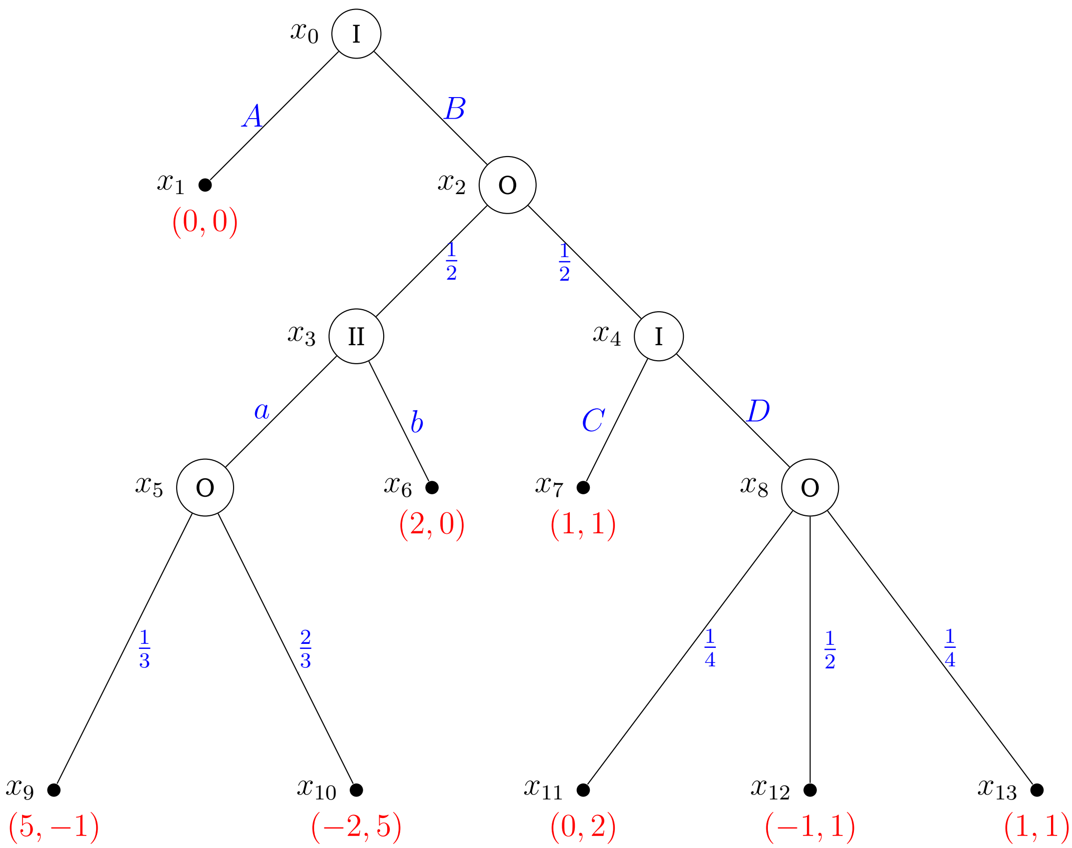
תוצאות אפשרייות: $O = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

פונקציית התשלום:

$$u(H) = \frac{1}{2} \cdot (10) + \frac{1}{2}(-5) \quad = \frac{5}{2} \ ,$$
$$u(T) = \frac{1}{2} \cdot (-5) + \frac{1}{2} \cdot (10) \quad = \frac{5}{2} \ .$$

■

דוגמה 1.9 (אסטרטגיות במשחק עם מהלכי גורל)



קבוצות ידיעה של שחקן I:

$$x_0(A,B)\ ,\qquad x_4(C,D)\ .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I=(A/C\ ,\ A/D\ ,\ B/C\ ,\ B/D\ )\ .$$

קבוצות ידיעה של שחקן II:

$$x_3(a,b)\ .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן I:

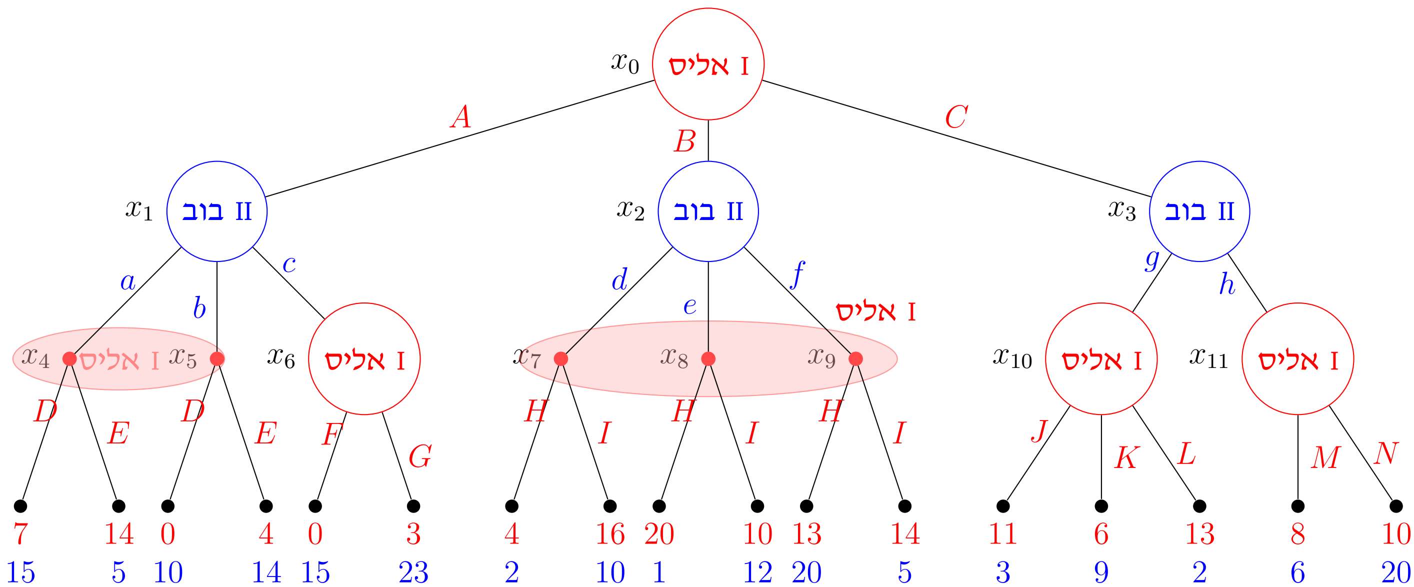
$$S_{II}=(a\ ,\ b\ )\ .$$

פונקצית התשלום:

$$u\left(A/C,a\right)=(0,0)\ ,$$
$$u\left(A/D,a\right)=(0,0)\ ,$$
$$u\left(B/C,a\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(5,-1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(-2,5)+\frac{1}{2}(1,1)=\left(\frac{2}{3},\frac{7}{6}\right)\ ,$$
$$u\left(B/D,a\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(5,-1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(-2,5)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(0,2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-1,1)+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}(1,1)=\left(-\frac{1}{48},\frac{33}{16}\right)\ ,$$
$$u\left(A/C,b\right)=(0,0)\ ,$$
$$u\left(A/D,b\right)=(0,0)\ ,$$
$$u\left(B/C,b\right)=\frac{1}{2}(2,0)+\frac{1}{2}(1,1)=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\ ,$$
$$u\left(B/D,b\right)=\frac{1}{2}(2,0)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(0,2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-1,1)+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}(1,1)=\left(-\frac{11}{16},\frac{9}{16}\right)\ ,$$

דוגמה 1.10 ()

נתון המשחק הבא בצורה רחבה אסטרטגית. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

המשחק הוא משחק עם ידיעה לא שלמה.

לאליס יש 5 קבוצות ידיעה:

$$x_0 : \ (A, B, C) \ , \qquad x_4x_5 : \ (D, E) \ , \qquad x_6 : \ (F, G) \ , \qquad x_7x_8x_9 : (H, I) \ , \quad x_10 : \ (J, K, L) \ , \quad x_{11} : \ (M, N) \ .$$

לכן יהיו לאליס $144 = 2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$ קבוצות אסטרטגיות.

$$S_I = (A/D/E/F/G/H/J/M \ , \ A/D/E/F/G/H/J/N \ , \ldots \ , C/E/G/I/L/N) \ .$$

לבוב יש 3 קבוצות ידיעה:

$$x_1 : \ (a, b, c) \ , \quad x_2 : \ (d, e, f) \ , \quad x_3 : \ (g, h) \ .$$

לכן לבוב יהיו: $18 = 2 \times 3 \times 3$ קבוצות אסטרטגיות:

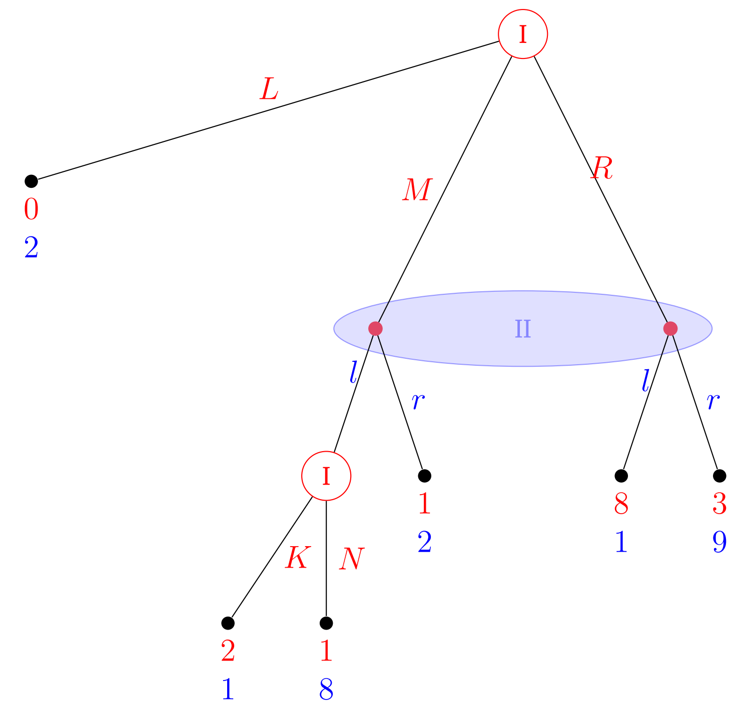
$$S_{II} = (a/d/g \ , \ a/d/h \ , \ldots \ , c/f/h) \ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד

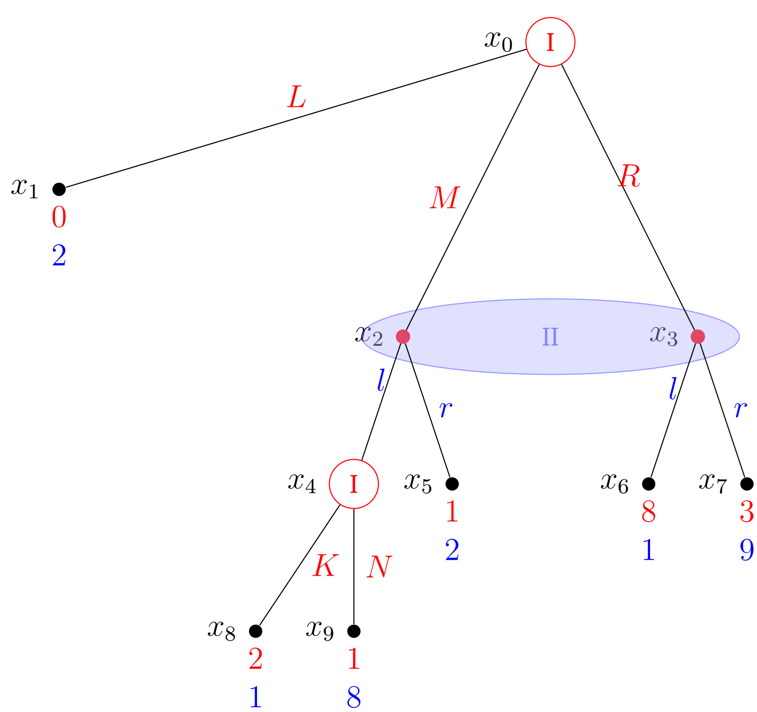
■

דוגמה 1.11 (משחק)

רשמו את המשחק הבא בצורה אסטרטגית.



פתרון:



קבוצת אסטרטגיות של שחקן 1:

$$S_1 = (L/K\ ,\ M/K\ ,\ R/K\ ,\ L/N\ ,\ M/N\ ,\ R/N\ )\ .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן 2:

$$S_2 = (l, r)\ .$$

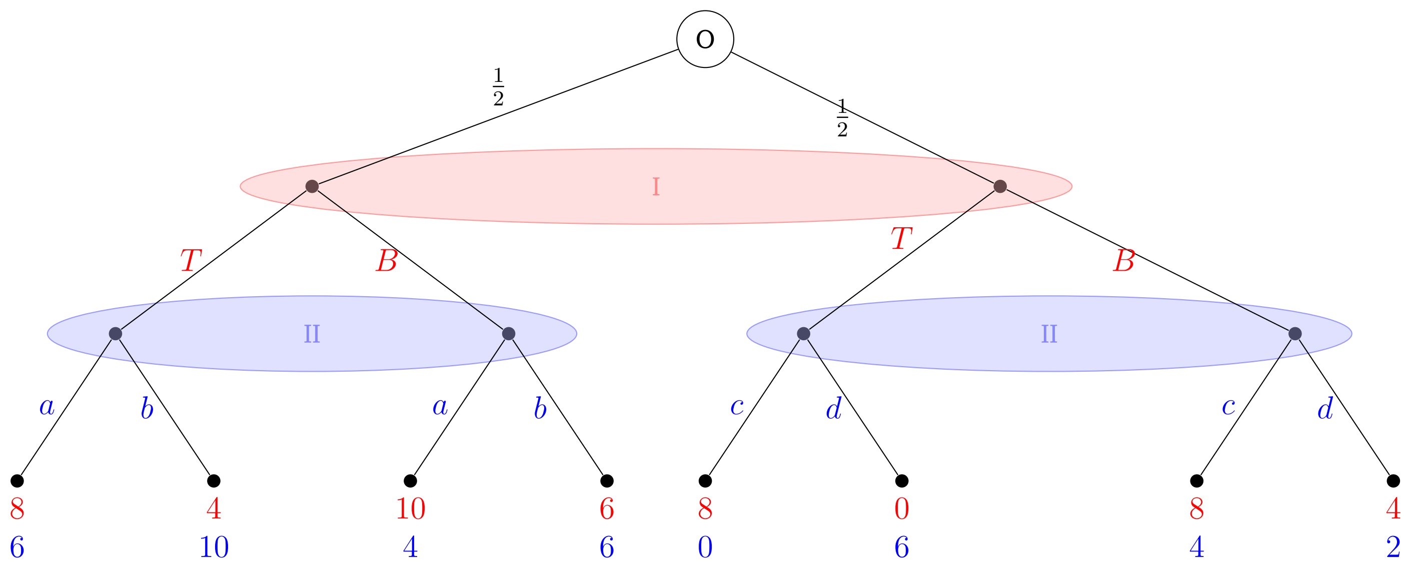
מכאן הצורה אסטרטגית של המשחק היא:

I \ II	l	r
L/K	$0,2$	$0,2$
M/K	$2,1$	$1,2$
R/K	$8,1$	$3,9$
L/N	$0,2$	$0,2$
M/N	$1,8$	$1,2$
R/N	$8,1$	$3,9$

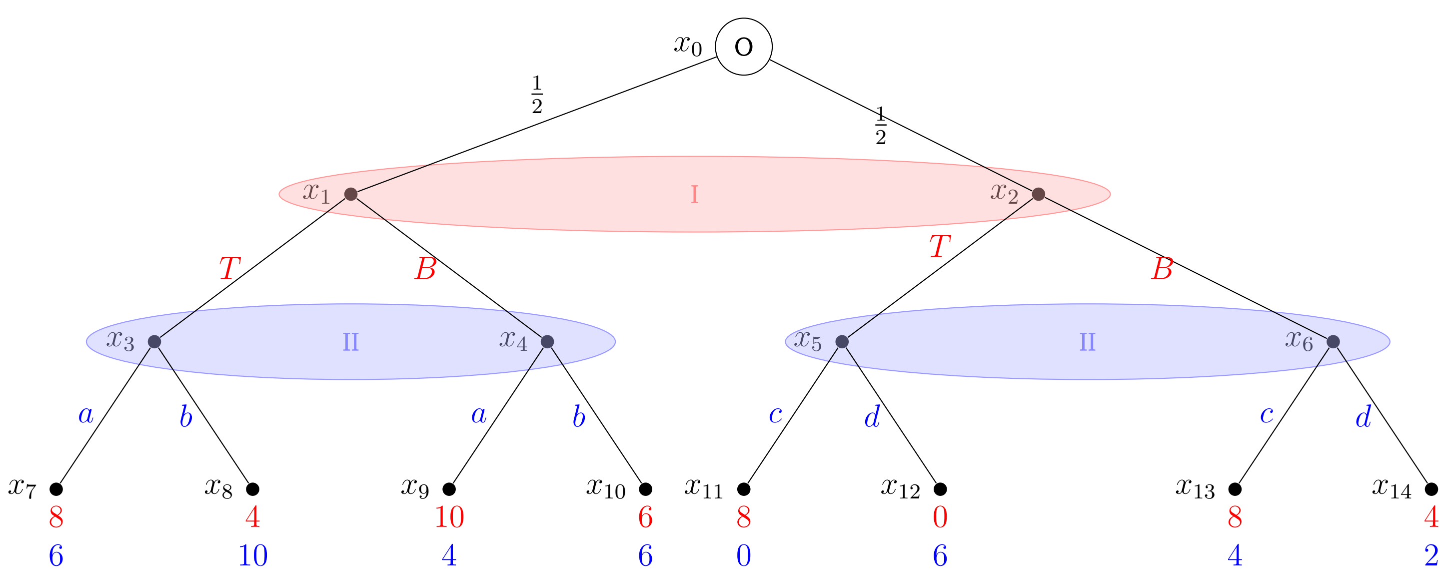
■

דוגמה 1.12 (משחק עם ידיעה לא שלמה עם מהלכ גורל)

רשמו את המשחק הבא בצורה אסטרטגית.



פתרון:



קבוצות ידיעה של שחקן I:

$$x_1x_2 : (T,B) \ .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I = (T,B) \ .$$

קבוצות ידיעה של שחקן II:

$$x_3x_4 : (a,b) \ , \qquad x_5x_6 : (c,d) \ .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן II:

$$S_{II} = (a/c \ , \ a/d \ , \ b/c \ , \ b/d) \ .$$

$I \backslash II$	a/c	a/d	b/c	b/d
T	$\frac{1}{2}(8,6)+\frac{1}{2}(8,0)$	$\frac{1}{2}(8,6)+\frac{1}{2}(0,6)$	$\frac{1}{2}(4,10)+\frac{1}{2}(8,0)$	$\frac{1}{2}(4,10)+\frac{1}{2}(0,6)$
B	$\frac{1}{2}(10,4)+\frac{1}{2}(8,4)$	$\frac{1}{2}(10,4)+\frac{1}{2}(4,2)$	$\frac{1}{2}(6,6)+\frac{1}{2}(8,4)$	$\frac{1}{2}(6,6)+\frac{1}{2}(4,2)$

$I \backslash II$	a/c	a/d	b/c	b/d
T	$(4,3)$	$(4,6)$	$(6,5)$	$(2,8)$
B	$(9,6)$	$(7,3)$	$(7,5)$	$(5,4)$

■

שעור 2
משחקים בצורה אסטרטגית, שליטה ושיווי משקל נאש

2.1 הגדרה של משחק בצורה אסטרטגית

הגדרה 2.1 משחק בצורה אסטרטגית

הצורה אסטרטגית או **צורה נורמלית** של משחק n- שחקנים היא קבוצה

$$G = (N \ , \ (S_1, S_2, \ldots, S_n) \ , \ (u_1, u_2, \ldots, u_n))$$

שבה

(1 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ היא קבוצת שחקנים סופית.

(2 S_i היא קבוצת האסטרטגיות של שחקן i $(1 \leq i \leq n)$

(3 u_i היא פונקציית התשלום של שחקן i:

$$u_i : S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \to \mathbb{R}$$

אשר מקבלת וקטור אסטרטגיות של המשחק $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ (כאשר $s_i \in S_i$ אסטרטגיה של שחקן i) ומחזירה מספר ממשי שווה לתשלום של שחקן i.

כדוגמה של משחק בצורה אסטרטגית, נחזור לדוגמה 1.1.

דוגמה 2.1 (משחק התאמת המטבעות)

נתון משחק של התאמת מטבעות כמתואר בדוגמה 1.1. רשמו את צורה רחבה וצורה אסטרטגית של המשחק.

שחקן אחד בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי). הוא רושם בחירותו על פתק, חותם עליו ומעביר אותו לשופט. אחר כך שחקן שני בוחר H או T, רושם בחירותו על פתק, חותם עליו ומעביר אותו לשופט.

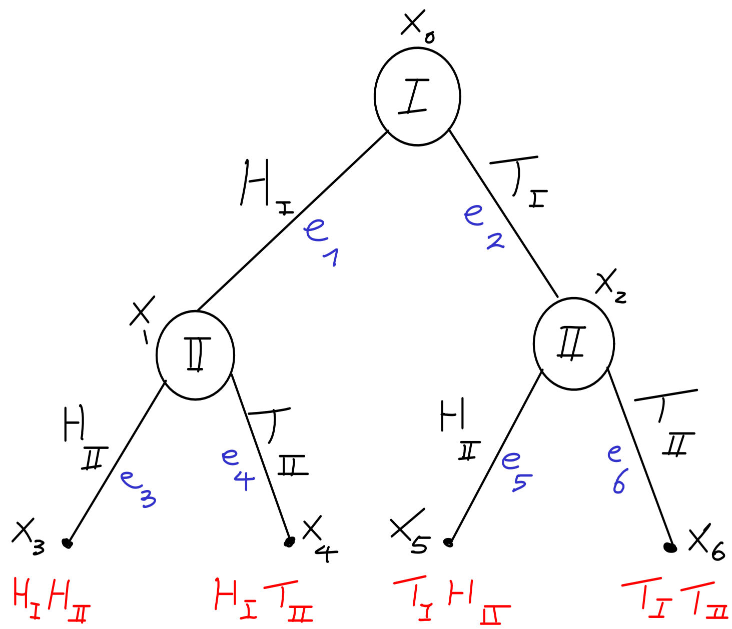
- אם שני השחקנים בוחרים באותו צד, משלם שחקן השני לשחקן הראשון ₪1.
- אם הם בוחרים בצדדים שונים, משלם שחקן הראשון לשחקן השני ₪1.

רשמו את המשחק בצורה רחבה.

פתרון:

__צורה רחבה__

נסמן ב- I הראשון ונסמן ב- II השקחן השני. התיאור של המשחק בצורה רחבה נתון בתרשים למטה.



$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_I, V_{II}\}, O, u)$$

שחקנים: $N = \{I, II\}$.

קדקודים: $V = \{x_0, x_1, x_2, x_3, e_4, x_5, x_6\}$.

קשתות: $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

מצב המשחק ההתחלתי: x_0.

קדקודים:

$$V_I = \{x_0\} \ , \quad V_{II} = \{x_1, x_2\} \ .$$

תוצאות אפשרייות:

$$O = \{x_3, x_4, x_5, x_6\} = \{H_I H_{II} \ , \ H_I T_{II} \ , \ T_I H_{II} \ , \ T_I T_{II}\} \ .$$

הפונקציות תשלום כפונקציות של האסטרטגיות הן:

$$\begin{aligned} u_I(HH) &= 1 \ , & u_{II}(HH) &= -1 \ , \\ u_I(HT) &= -1 \ , & u_{II}(HT) &= 1 \ , \\ u_I(TH) &= -1 \ , & u_{II}(HT) &= 1 \ , \\ u_I(TT) &= -1 \ , & u_{II}(TT) &= -1 \ . \end{aligned}$$

צורה אסטרטגית

$$G = ((I, II) \ , \ (S_I = (H, T), S_{II} = (H, T)) \ , \ (u_I, u_{II}) \ )$$

$$\begin{aligned} u_I(HH) &= 1 \ , & u_{II}(HH) &= -1 \ , \\ u_I(HT) &= -1 \ , & u_{II}(HT) &= 1 \ , \\ u_I(TH) &= -1 \ , & u_{II}(HT) &= 1 \ , \\ u_I(TT) &= -1 \ , & u_{II}(TT) &= -1 \ . \end{aligned}$$

		שחקן II	
		H	T
שחקן I	H	$1,-1$	$-1,1$
	T	$-1,1$	$1,-1$

■

דוגמה 2.2 (דילמה האסיר בצורה אסטרטגית)

המשטרה עצרה שני פושעים שביצעו פשע משותף, ושמה אותם בחדרים נפרדים.

אין למשטרה מספיק ראיות להביא אותם להרשעתם על העבירה שבוצעו.

במקום, המשטרה מתכננת להעמיד אותם לדין על עבירה משנית.

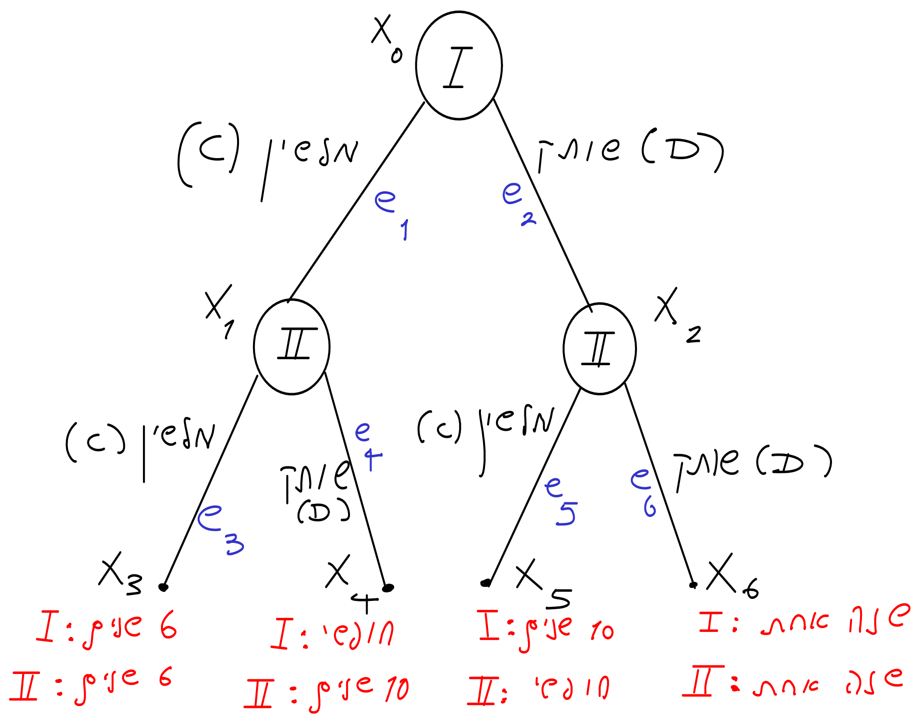
המשטרה מציעה לשני הפושעים דיל. אבל יש קאץ'....

שני עבריינים ביצעו פשע חמור ונעצרו. בהעדר כל הוכחות אחרות, הדרך היחידה שבה יכולה המשטרה להשיג הרשעה על עבירה זו היא שאחד העצורים (או שניהם) מודה. העמידה המשטרה כל אחד מהעצורים בפני ההחלטה הבאה:

- אם I מלשין (C) ו-II שותק (D), I יוצא חופשי ו- II מקבל 10 שנים מאסר.
- אם II מלשין (C)ו-I שותק (D), II יוצא חופשי ו- I מקבל 10 שנים מאסר.
- אם שניהם שותקים (D), יש בידי המשטרה ראיות להרשעתם בעבירות פחותות (למשל, העלמת מס) שמוביל למאסר של שנה אחת לכל אחד.
- אם שניהם מלשינים (C), המשטרה מבקשת להתחשב בשיתוף הפעולה שלהם ולגזור את עונשם ל־6 שנות מאסר לכל אחד.

פתרון:

<u>צורה רחבה</u>



$$\Gamma = \big(N, V, E, x_0, (V_i)_{i\in N} \cup V_0, O, u\big)$$

שחקנים: $N = \{I, II\}$.

קדקודים: $V = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

קשתות: $E = \{e_1, \dots, e_6\}$.

מצב המשחק ההתחלתי: x_0.

קדקודים:

$$V_I = \{x_0\} \ , \quad V_{II} = \{x_1, x_2\} \ .$$

תוצאות אפשרייות:

$$O = \{x_3, x_4, x_5, x_6\} \ .$$

לשחקן I יש אסטרטגיות C או D.

לשחקן II יש אסטרטגיות C או D.

פונקציה תשלום במונחי האסטרטגיות היא (ביחידות של שנים מאסר):

$$\begin{array}{ll} u_I\,(C,C) = -\,6 \ , & u_{II}\,(C,C) = -6 \ , \\ u_I\,(C,D) = 0 \ , & u_{II}\,(C,D) = -10 \ , \\ u_I\,(D,C) = -\,10 \ , & u_{II}\,(D,C) = 0 \ , \\ u_I\,(D,D) = -\,1 \ , & u_{II}\,(D,D) = -1 \ . \end{array} \ .$$

צורה אסטרטגית

		שחקן II	
		C	D
שחקן I	C	$-6,-6$	$0,-10$
	D	$-10,0$	$-1,-1$

■

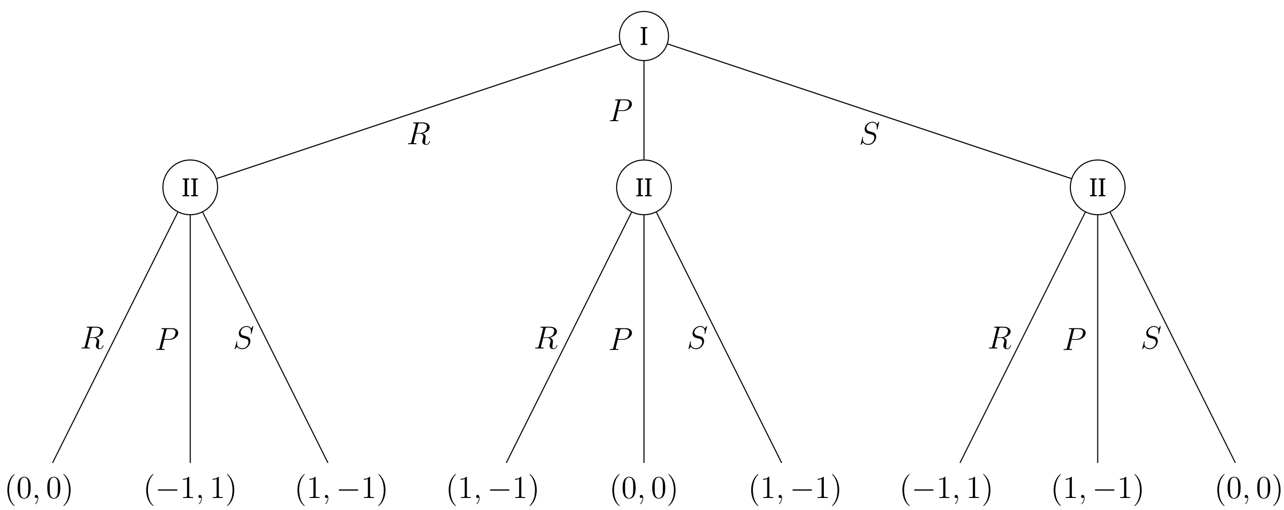
דוגמה 2.3 (
)

במשחק "אבן, נייר ומספריים" כל אחד משני שחקנים בוחר אחת מתוך שלוש אפשרויות: אבן, נייר או מספריים. יש יחס שליטה מעגלי בין שלושת הסמלים:

האבן שוברת את המספריים שגוזרים את הנייר שעוטף את האבן.

רשמו את הצורת רחבה והצורה אסטרטגית של המשחק.

פתרון:
המשחק בצורתו הרחבה מתואר בתרשים למטה.



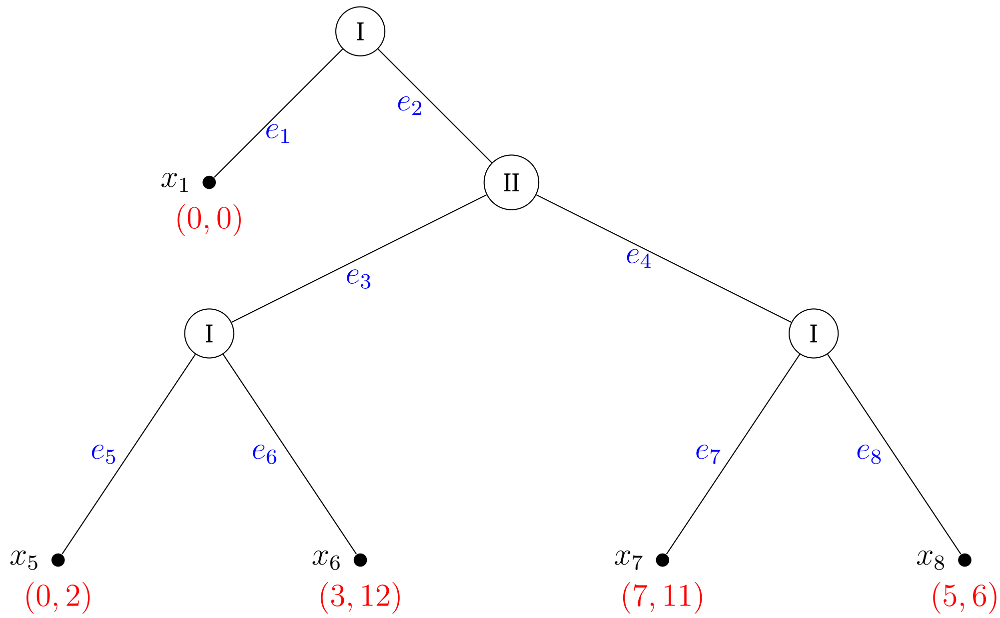
אם נסמן ניצחון לשחקן כתשלום 1, הפסד כתשלום -1, ותיקו כתשלום 0, נקבל את המשחק בצורה אסטרטגית המופיע בטבלה למטה.

		שחקן II		
		R	P	S
	R	$0,0$	$-1,1$	$1,-1$
שחקן I	P	$1,-1$	$0,0$	$-1,1$
	S	$-1,1$	$1,-1$	$0,0$

■

דוגמה 2.4 ( )

נתון המשחק הבא בצורה קרחבה רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



ונתונים האסטרטגיות הבאות:

$$s_{I,0}(x_0) = e_1 \ ,$$
$$s_{I,1}(x_0) = e_2 \ , \qquad s_{I,1}(x_3) = e_5 \ , \quad s_{I,1}(x_4) = e_7 \ ,$$
$$s_{I,2}(x_0) = e_2 \ , \qquad s_{I,2}(x_3) = e_6 \ , \quad s_{I,2}(x_4) = e_7 \ ,$$
$$s_{I,3}(x_0) = e_2 \ , \qquad s_{I,3}(x_3) = e_5 \ , \quad s_{I,3}(x_4) = e_8 \ ,$$
$$s_{I,4}(x_0) = e_2 \ , \qquad s_{I,4}(x_3) = e_6 \ , \quad s_{I,4}(x_4) = e_8 \ ,$$
$$s_{II,1}(x_2) = e_3 \ ,$$
$$s_{II,2}(x_2) = e_4 \ .$$

רשמו את כל המסלולים האפשריים ורשמו את המשחק בצורה אסטרטגית.

פתרון:

$\underline{s_{I,0}}$

$$w = x_0 \ e_1 \ x_1 \ .$$

$$u_I(s_{I,0}) = 0 \ , \qquad u_{II}(s_{I,0}) = 0 \ .$$

$\underline{s_{I,1}, s_{II,1}}$

$$w = x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_3 \ x_3 \ e_5 \ x_5 \ .$$

$$u_I(s_{I,1}, s_{II,1}) = 10 \ , \qquad u_{II}(s_{I,1}, s_{II,1}) = 2 \ .$$

$\underline{s_{I,1}, s_{II,2}}$

$$w = x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_4 \ x_4 \ e_7 \ x_7 \ .$$

$$u_I(s_{I,1}, s_{II,2}) = 7 \ , \qquad u_{II}(s_{I,1}, s_{II,2}) = 11 \ .$$

$\underline{s_{I,3}, s_{II,1}}$

$$w = x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_3 \ x_3 \ e_5 \ x_5 \ .$$

$$u_I(s_{I,3}, s_{II,1}) = 10, \qquad u_{II}(s_{I,3}, s_{II,1}) = 2 \ .$$

$\underline{s_{I,3}, s_{II,2}}$

$$w = x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_4 \ x_4 \ e_8 \ x_8 \ .$$

$$u_I(s_{I,3}, s_{II,1}) = 7, \qquad u_{II}(s_{I,3}, s_{II,1}) = 11 \ .$$

$\underline{s_{I,4}, s_{II,1}}$

$$w = x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_3 \ x_3 \ e_6 \ x_6 \ .$$

$$u_I(s_{I,4}, s_{II,1}) = 3, \qquad u_{II}(s_{I,4}, s_{II,1}) = 12 \ .$$

$\underline{s_{I,4}, s_{II,2}}$

$$w = x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_4 \ x_4 \ e_7 \ x_7 \ .$$

$$u_I(s_{I,4}, s_{II,1}) = 5, \qquad u_{II}(s_{I,4}, s_{II,1}) = 6 \ .$$

$\underline{s_{I,2}, s_{II,1}}$

$$w = x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_3 \ x_3 \ e_6 \ x_6 \ .$$

$$u_I(s_{I,2}, s_{II,1}) = 3, \qquad u_{II}(s_{I,2}, s_{II,1}) = 12 \ .$$

$\underline{s_{I,2}, s_{II,2}}$

$$w = x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_7\ x_7\ .$$

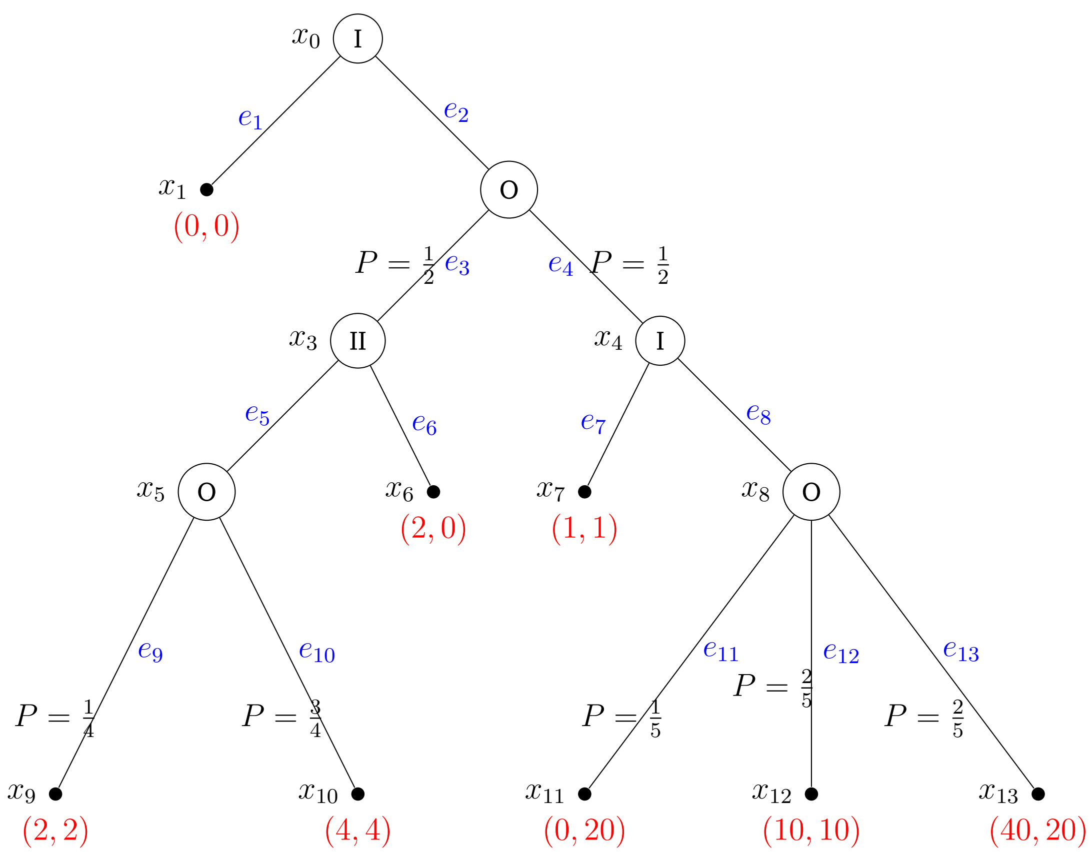
$$u_I(s_{I,2}, s_{II,1}) = 7, \qquad u_{II}(s_{I,2}, s_{II,1}) = 11\ .$$

	$s_{II,1}$	$s_{II,2}$
$s_{I,0}$	$0,0$	$0,0$
$s_{I,1}$	$10,2$	$7,11$
$s_{I,2}$	$3,12$	$7,11$
$s_{I,3}$	$10,2$	$5,6$
$s_{I,4}$	$3,12$	$5,6$

■

דוגמה 2.5)
(

נתון המשחק הבא בצורה רחבה רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

$$\underline{s_{I,0}}$$

$$w = x_0\ e_1\ x_1\ .$$

$$u = (0,0)\ .$$

$\underline{s_{I,1}, s_{II,1}}$

$$w = \begin{cases} x_0\ e_2\ x_2\ e_3\ x_3\ e_5\ x_5\ e_9\ x_9 & P = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} & u = (2,2) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_3\ x_3\ e_5\ x_5\ e_{10}\ x_{10} & P = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8} & u = (4,4) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_7\ x_7 & P = \frac{1}{2} & u = (1,1) \end{cases} .$$

תוחלת התשלום:

$$E = \frac{1}{8}(2,2) + \frac{3}{8}(4,4) + \frac{1}{2}(1,1) = \left(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right) .$$

$\underline{s_{I,2}, s_{II,1}}$

$$w = \begin{cases} x_0\ e_2\ x_2\ e_3\ x_3\ e_5\ x_5\ e_9\ x_9 & P = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} & u = (2,2) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_3\ x_3\ e_5\ x_5\ e_{10}\ x_{10} & P = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8} & u = (4,4) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_8\ x_8\ e_{11}\ x_{11} & P = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{10} & u = (0,20) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_8\ x_8\ e_{12}\ x_{12} & P = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{10} & u = (10,10) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_8\ x_8\ e_{13}\ x_{13} & P = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{10} & u = (40,20) \end{cases} .$$

תוחלת התשלום:

$$E = \frac{1}{8}(2,2) + \frac{3}{8}(4,4) + \frac{1}{10}(0,20) + \frac{2}{10}(10,10) + \frac{2}{10}(40,20) = \left(\frac{47}{4}, \frac{39}{4}\right) .$$

$\underline{s_{I,1}, s_{II,2}}$

$$w = \begin{cases} x_0\ e_2\ x_2\ e_3\ x_3\ e_6\ x_6 & P = \frac{1}{2} & u = (2,0) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_7\ x_7 & P = \frac{1}{2} & u = (1,1) \end{cases} .$$

תוחלת התשלום:

$$E = \frac{1}{2}(2,0) + \frac{1}{2}(1,1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) .$$

$\underline{s_{I,2}, s_{II,2}}$

$$w = \begin{cases} x_0\ e_2\ x_2\ e_3\ x_3\ e_6\ x_6 & P = \frac{1}{2} & u = (2,0) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_8\ x_8\ e_{11}\ x_{11} & P = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{10} & u = (0,20) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_8\ x_8\ e_{12}\ x_{12} & P = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{10} & u = (10,10) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_8\ x_8\ e_{13}\ x_{13} & P = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{10} & u = (40,20) \end{cases} .$$

תוחלת התשלום:

$$E = \frac{1}{2}(2,0) + \frac{1}{10}(0,20) + \frac{2}{10}(10,10) + \frac{2}{10}(40,20) = (11,8) \ .$$

$I \backslash II$	$s_{II,1}$	$s_{II,2}$
$s_{I,0}$	$0,0$	$0,0$
$s_{I,1}$	$\frac{9}{4},\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2},\frac{1}{2}$
$s_{I,2}$	$\frac{47}{4},\frac{39}{4}$	$11,8$

■

2.2 אסטרטגיה נשלטת חזק

הגדרה 2.2 אסטרטגיה נשלטת חזק במשחק עם 2 שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים I ו- II. נניח כי
S_I מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של I,
ו- S_{II} מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של II.

- אסטרטגיה $\sigma_I \in S_I$ של שחקן I נשלטת חזק על ידי אסטרטגיה $t_I \in S_I$ של שחקן I אם

$$u_I(\sigma_I, s_{II}) < u_I(t_I, s_{II})$$

לכל $s_{II} \in S_{II}$.

- אסטרטגיה $\sigma_{II} \in S_{II}$ של שחקן II נשלטת חזק ע"י אסטרטגיה $t_{II} \in S_{II}$ של שחקן II אם

$$u_{II}(s_I, \sigma_{II}) < u_{II}(s_I, t_{II})$$

לכל $s_I \in S_I$.

הגדרה 2.3 אסטרטגיה נשלטת חזק במשחק עם 3 שחקנים

נתון משחק עם שלוש שחקנים I, II ו- III. נניח כי
S_I מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של I,
S_{II} מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של II
ו- S_{III} מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של III,

- אסטרטגיה $\sigma_I \in S_I$ של שחקן I נשלטת חזק על ידי אסטרטגיה $t_I \in S_I$ של שחקן I אם

$$u_I(\sigma_I, s_{II}, s_{III}) < u_I(t_I, s_{II}, s_{III})$$

לכל $s_{II} \in S_{II}$ ולכל $s_{III} \in S_{III}$.

- אסטרטגיה $\sigma_{II} \in S_{II}$ של שחקן II נשלטת חזק על ידי אסטרטגיה $t_{II} \in S_{II}$ של שחקן II אם

$$u_{II}(s_I, \sigma_{II}, s_{III}) < u_{II}(s_I, t_{II}, s_{III})$$

לכל $s_I \in S_I$ ולכל $s_{III} \in S_{III}$.

- אסטרטגיה $\sigma_{III} \in S_{III}$ של שחקן III נשלטת חזק ע"י אסטרטגיה $t_{III} \in S_{III}$ של שחקן III אם

$$u_{III}\left(s_I, s_{II}, \sigma_{III}\right) < u_{III}\left(s_I, s_{II}, t_{III}\right)$$

לכל $s_I \in S_I$ ולכל $s_{II} \in S_{II}$.

דוגמה 2.6 ()

נתון המשחק הבא בצורה אסטקטגית.

1) מצאו אסטרטגיה הנשלטת חזק של שחקן I.
2) מצאו אסטרטגיה הנשלטת חזק של שחקן II.

$I \backslash II$	L	M	R
T	$1,0$	$1,2$	$0,1$
B	$0,3$	$0,1$	$2,0$

פתרון:

$$1 = u_{II}(T,R) < u_{II}(T,M) = 2 \ ,$$

$$0 = u_{II}(B,R) < u_{II}(B,M) = 1 \ .$$

לכן אסטרטגיה R נשלטת חזק על ידי M. ■

2.3 הנחות של רציונליות בתורת המשחקים

הנחה 2.1 הנחות של רציונליות בתורת המשחקים

1) שחקן רציונלי לא ישתמש באסטרטגיה נשלטת חזק.
2) כל השחקנים במשחק רציונליים.
3) העובדה שכל השחקנים רציונליים היא ידיעה משותפת בין כל השחקנים.

2.4 סילוק חוזר

דוגמה 2.7 ()

נתון המשחק הבא, מצאו את התשלום סופי של המשחק, והאסטרטגיות השולטות חזק של שני השחקנים, לפי הכללים של רציונליות.

$I \backslash II$	L	M	R
T	$1,0$	$1,2$	$0,1$
B	$0,3$	$0,1$	$2,0$

פתרון:

$$\begin{array}{c|ccc} I\backslash II & L & M & R \\ \hline T & 1,0 & 1,2 & \cancel{0,1} \\ B & 0,3 & 0,1 & \cancel{2,0} \end{array} \xrightarrow{R\prec M} \begin{array}{c|cc} I\backslash II & L & M \\ \hline T & 1,0 & 1,2 \\ \cancel{B} & \cancel{0,3} & \cancel{0,1} \end{array} \xrightarrow{B\prec T} \begin{array}{c|cc} I\backslash II & L & M \\ \hline T & \cancel{1,0} & 1,2 \end{array} \xrightarrow{L\prec M} \begin{array}{c|c} I\backslash II & M \\ \hline T & 1,2 \end{array}$$

לכן לפי הכללים של שחקנים רציונליים, שחקו I ישתמש באסטרטגיה T, שחקן II ישתמש באסטרטגיה M והתשלום הסופי יהיה:

$$u_I(T,M)=1\ , \qquad u_{II}(T,M)=2\ .$$

■

דוגמה 2.8 (דילמה האסיר)

המשטרה עצרה שני פושעים שביצעו פשע משותף, ושמה אותם בחדרים נפרדים.

אין למשטרה מספיק ראיות להביא אותם להרשעתם על העבירה שבוצעו.

במקום, המשטרה מתכננת להעמיד אותם לדין על עבירה משנית.

המשטרה מציעה לשני הפושעים דיל. אבל יש קאץ'....

שני עבריינים ביצעו פשע חמור ונעצרו. בהעדר כל הוכחות אחרות, הדרך היחידה שבה יכולה המשטרה להשיג הרשעה על עבירה זו היא שאחד העצורים (או שניהם) מודה. העמידה המשטרה כל אחד מהעצורים בפני ההחלטה הבאה:

- אם I מלשין (C) ו-II שותק (D), I יוצא חופשי ו- II מקבל 10 שנים מאסר.
- אם II מלשין (C)ו-I שותק (D), II יוצא חופשי ו- I מקבל 10 שנים מאסר.
- אם שניהם שותקים (D), יש בידי המשטרה ראיות להרשעתם בעבירות פחותות (למשל, העלמת מס) שמוביל למאסר של שנה אחת לכל אחד.

- אם שניהם מלשינים (C), המשטרה מבקשת להתחשב בשיתוף הפעולה שלהם ולגזור את עונשם ל-6 שנות מאסר לכל אחד.

רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית ומצאו את הפתרון של אסטרטגיות שולטות חזק.

פתרון:
המשחק בצורה אסטרטגית הנה:

		שחקן II	
		C_{II}	D_{II}
שחקן I	C_I	$-6,-6$	$0,-10$
	D_I	$-10,0$	$-1,-1$

$I \backslash II$	C_{II}	D_{II}
C_I	$-6,-6$	$\cancel{0,-10}$
D_I	$-10,-10$	$\cancel{-1,-1}$

$\xrightarrow{D_{II} \prec C_{II}}$

$I \backslash II$	C_{II}
C_I	$-6,-6$
D_I	$\cancel{-10,-10}$

$\xrightarrow{D_I \prec C_I}$

$I \backslash II$	C_{II}
C_I	$-6,-6$

לכן לפי הכללים של שחקנים רציונליים, שחקן I ישתמש באסטרטגיה C_I, שחקן II ישתמש באסטרטגיה C_{II} והתשלום הסופי יהיה:

$$u_I(C,C) = -6 \ , \qquad u_{II}(C,C) = -6 \ .$$

■

2.5 שיווי משקל נאש

הגדרה 2.4 שיווי משקל נאש במשחקים עם שני שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים I ו- II. נניח כי S_I מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של I, ו- S_{II} מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של II.

קבוצת אסטרטגיות $s^* = (s_I^*, s_{II}^*)$ נקראת **שיווי משקל נאש (שמ"ן)** אם התנאים הבאים מתקיימים:

$$u_I\left(s_I^*, s_{II}^*\right) \geq u_I\left(s_I, s_{II}^*\right) \qquad \text{לכל } s_I \in S_I \ ,$$

$$u_{II}\left(s_I^*, s_{II}^*\right) \geq u_{II}\left(s_I^*, s_{II}\right) \qquad \text{לכל } s_{II} \in S_{II} \ ,$$

הגדרה 2.5 שיוויי משקל נאש במשחקים עם שלוש שחקנים

נתון משחק עם שלוש שחקנים I, II ו- III. נניח כי S_I מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של I, S_{II} מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של II ו- S_{III} מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של III.

קבוצת אסטרטגיות $s^* = (s_I^*, s_{II}^*, s_{III}^*)$ נקראת **שיווי משקל נאש** אם התנאים הבאים מתקיימים:

$$u_I(s_I^*, s_{II}^*, s_{III}^*) \geq u_I(s_I, s_{II}^*, s_{III}^*) \qquad , \ s_I \in S_I \ \text{לכל}$$

$$u_{II}(s_I^*, s_{II}^*, s_{III}^*) \geq u_{II}(s_I^*, s_{II}, s_{III}^*) \qquad , s_{II} \in S_{II} \ \text{לכל}$$

$$u_{III}(s_I^*, s_{II}^*, s_{III}^*) \geq u_{III}(s_I^*, s_{II}^*, s_{III}) \qquad , s_{III} \in S_{III} \ \text{לכל}$$

דוגמה 2.9 (דילמה האסיר)

בדילמה האסיר מצאו את השיווי משקל נאש.

פתרון:

$I \backslash II$	C_{II}	D_{II}
C_I	$-6, -6$	$0, -10$
D_I	$-10, -10$	$-1, -1$

$$(s_I^*, s_{II}^*) = (C_I, C_{II}) \ .$$

הסבר:

$$-6 = u_I(C_I, C_{II}) > u_I(D_I, C_{II}) = -10 \ ,$$

$$-6 = u_{II}(C_I, C_{II}) > u_{II}(C_I, D_{II}) = -10 \ .$$

■

דוגמה 2.10 (משחק תיאום)

המשחק המתואר בטבלה למטה שייך למשפחה של משחקים הנקראים "משחקי תיאום" (coordination games).

$I \backslash II$	a	b
A	$1, 1$	$0, 0$
B	$0, 0$	$3, 3$

מצאו את כל שיווי משקל במשחק.

פתרון:

(A, a) שיווי משקל.

הסבר:

$$1 = u_I(A,a) > u_I(B,a) = 0 \ ,$$

$$1 = u_{II}(A,a) > u_{II}(A,b) = 0 \ .$$

(B,b) שיווי משקל.
הסבר:

$$3 = u_I(B,b) > u_I(A,b) = 0 \ ,$$

$$3 = u_{II}(B,b) > u_{II}(B,a) = 0 \ .$$

■

דוגמה 2.11 (מלחמת המינים.)

המשחק המשחק הבא נקרא "מלחמת המינים" (battle of the sexes). שמו של המשחק בא מהתיאור הבא. זוג מתכנן בילוי למוצא שבת. האפשרויות העומדות לרשותם הן קונצרט (C) או צפייה במשחק כדורגל (F). הגבר (שחקן I) מעדיף צפייה במשחק הכדורגל, בעוד האישה (שחקן II) מעדיפה את הקונצרט, אך שניהם מעדיפים להיות יחד גם אם הבילוי המשותף הוא הפחות עדיף בעיניהם. השמחק בצורה אסטרטגית מתואר למטה. מצאו את כל שיווי משקל.

I \ II	C	F
C	1, 2	0, 0
F	0, 0	2, 1

פתרון:
(C,C) שיווי משקל.
הסבר:

$$1 = u_I(C,C) > u_I(F,C) = 0 \ ,$$

$$2 = u_{II}(C,C) > u_{II}(C,F) = 0 \ .$$

(F,F) שיווי משקל.
הסבר:

$$2 = u_I(F,F) > u_I(C,F) = 0 \ ,$$

$$1 = u_{II}(F,F) > u_{II}(F,C) = 0 \ .$$

■

דוגמה 2.12 ()

נתון המשחק הבא מצאו כל השיווי משקל נאש.

I \ II	L	C	R
T	1, 2	2, 3	0, 3
M	2, 2	2, 1	3, 2
B	2, 1	0, 0	1, 0

פתרון:
הקבוצת אסטרטגיות (T,C) שיווי משקל. הסבר:

$$u_I(T,C)>u_{II}(B,C)\ ,\qquad u_I(T,C)=u_I(M,C)\ ,$$
$$u_{II}(T,C)>u_{II}(T,L)\ .\qquad u_{II}(T,C)=u_{II}(T,R)\ ,$$

הקבוצת אסטרטגיות (M,L) שיווי משקל. הסבר:

$$u_I(M,L)=u_I(B,L)\ ,\qquad u_I(M,L)>u_I(T,L)\ ,$$
$$u_{II}(M,L)=u_{II}(M,R)\ .\qquad u_{II}(M,L)>u_{II}(M,C)\ ,$$

הקבוצת אסטרטגיות (M,R) שיווי משקל. הסבר:

$$u_I(M,R)>u_I(B,R)\ ,\qquad u_I(M,R)>u_I(T,R)\ ,$$
$$u_{II}(M,R)=u_{II}(M,L)\ .\qquad u_{II}(M,R)>u_{II}(M,C)\ ,$$

■

שעור 3
משחקים בצורה אסטרטגית

3.1 הגדרה של משחק בצורה אסטרטגית

הגדרה 3.1 משחק בצורה אסטרטגית

משחק בצורה אסטרטגית או צורה נורמלית הוא ווקטור מצורה

$$G = (N \ , \ (S_I, S_{II}, \ldots) \ , \ (u_I, u_{II}, \ldots))$$

שבה

1) $N = \{I, II, \ldots\}$ היא קבוצת שחקנים סופית.

2) לכל שחקן $i \in N$, S_i היא קבוצה של כל האסטרטגיות האפשריות של שחקן i.

3) לכל שחקן $i \in N$
$$u_i(s_I, s_{II}, \ldots)$$
היא פונקציה המתאימה לכל ווקטור אסטרטגיות $(s_I, s_{II}, \ldots)$ תשלום לשחקן i.

כדוגמה של משחק בצורה אסטרטגית, נחזור לדוגמה 1.1.

דוגמה 3.1 (משחק התאמת המטבעות)

נתון משחק של התאמת מטבעות כמתואר בדוגמה 1.1. רשמו את צורה רחבה וצורה אסטרטגית של המשחק.

שחקן אחד בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי). הוא רושם בחירותו על פתק, חותם עליו ומעביר אותו לשופט. אחר כך שחקן שני בוחר H או T, רושם בחירותו על פתק, חותם עליו ומעביר אותו לשופט.

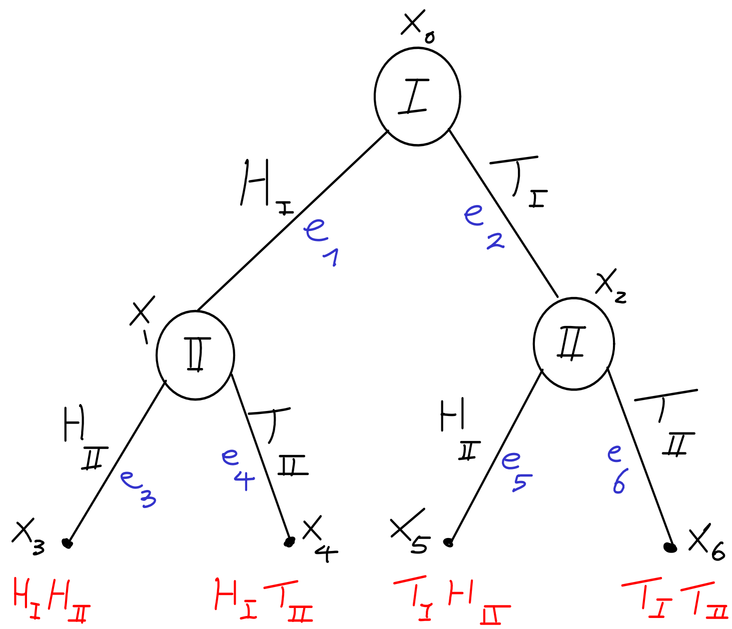
- אם שני השחקנים בוחרים באותו צד, משלם שחקן השני לשחקן הראשון ₪1.
- אם הם בוחרים בצדדים שונים, משלם שחקן הראשון לשחקן השני ₪1.

רשמו את המשחק בצורה רחבה.

פתרון:

__צורה רחבה__

נסמן ב- I הראשון ונסמן ב- II השקחן השני. התיאור של המשחק בצורה רחבה נתון בתרשים למטה.



$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_I, V_{II}\}, O, u)$$

שחקנים: $N = \{I, II\}$.

קדקודים: $V = \{x_0, x_1, x_2, x_3, e_4, x_5, x_6\}$.

קשתות: $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

מצב המשחק ההתחלתי: x_0.

קדקודים:

$$V_I = \{x_0\} \ , \quad V_{II} = \{x_1, x_2\} \ .$$

תוצאות אפשרייות:

$$O = \{x_3, x_4, x_5, x_6\} = \{H_I H_{II} \ , \ H_I T_{II} \ , \ T_I H_{II} \ , \ T_I T_{II}\} \ .$$

הפונקציות תשלום כפונקציות של האסטרטגיות הן:

$$\begin{aligned} u_I(HH) &= 1 \ , & u_{II}(HH) &= -1 \ , \\ u_I(HT) &= -1 \ , & u_{II}(HT) &= 1 \ , \\ u_I(TH) &= -1 \ , & u_{II}(HT) &= 1 \ , \\ u_I(TT) &= -1 \ , & u_{II}(TT) &= -1 \ . \end{aligned}$$

<u>צורה אסטרטגית</u>

$$G = ((I, II) \ , \ (S_I = (H, T), S_{II} = (H, T)) \ , \ (u_I, u_{II}) \ )$$

$$\begin{aligned} u_I(HH) &= 1 \ , & u_{II}(HH) &= -1 \ , \\ u_I(HT) &= -1 \ , & u_{II}(HT) &= 1 \ , \\ u_I(TH) &= -1 \ , & u_{II}(HT) &= 1 \ , \\ u_I(TT) &= -1 \ , & u_{II}(TT) &= -1 \ . \end{aligned}$$

		שחקן II	
		H	T
שחקן I	H	$1,-1$	$-1,1$
	T	$-1,1$	$1,-1$

■

דוגמה 3.2 (דילמה האסיר בצורה אסטרטגית)

המשטרה עצרה שני פושעים שביצעו פשע משותף, ושמה אותם בחדרים נפרדים.

אין למשטרה מספיק ראיות להביא אותם להרשעתם על העבירה שבוצעו.

במקום, המשטרה מתכננת להעמיד אותם לדין על עבירה משנית.

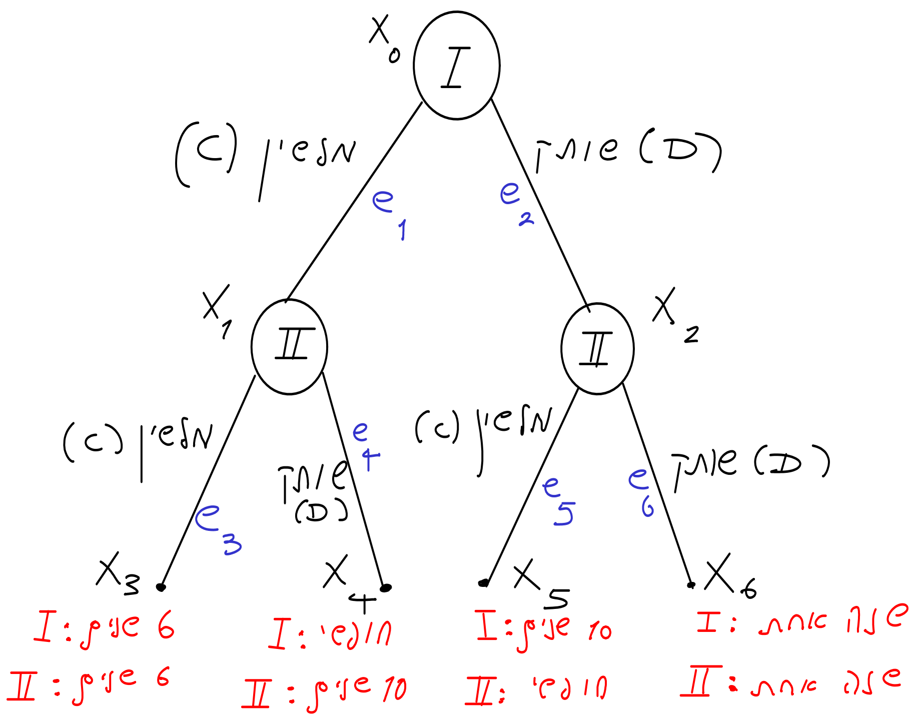
המשטרה מציעה לשני הפושעים דיל. אבל יש קאץ'....

שני עבריינים ביצעו פשע חמור ונעצרו. בהעדר כל הוכחות אחרות, הדרך היחידה שבה יכולה המשטרה להשיג הרשעה על עבירה זו היא שאחד העצורים (או שניהם) מודה. העמידה המשטרה כל אחד מהעצורים בפני ההחלטה הבאה:

- אם I מלשין (C) ו-II שותק (D), I יוצא חופשי ו- II מקבל 10 שנים מאסר.
- אם II מלשין (C)ו-I שותק (D), II יוצא חופשי ו- I מקבל 10 שנים מאסר.
- אם שניהם שותקים (D), יש בידי המשטרה ראיות להרשעתם בעבירות פחותות (למשל, העלמת מס) שמוביל למאסר של שנה אחת לכל אחד.
- אם שניהם מלשינים (C), המשטרה מבקשת להתחשב בשיתוף הפעולה שלהם ולגזור את עונשם ל־6 שנות מאסר לכל אחד.

פתרון:

<u>**צורה רחבה**</u>



$$\Gamma = \big(N, V, E, x_0, (V_i)_{i\in N} \cup V_0, O, u\big)$$

שחקנים: $N = \{I, II\}$.

קדקודים: $V = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

קשתות: $E = \{e_1, \ldots, e_6\}$.

מצב המשחק ההתחלתי: x_0.

קדקודים:

$$V_I = \{x_0\} \ , \quad V_{II} = \{x_1, x_2\} \ .$$

תוצאות אפשרייות:

$$O = \{x_3, x_4, x_5, x_6\} \ .$$

לשחקן I יש אסטרטגיות C או D.

לשחקן II יש אסטרטגיות C או D.

פונקציה תשלום במונחי האסטרטגיות היא (ביחידות של שנים מאסר):

$$\begin{array}{ll}
u_I\,(C,C) = -\,6 \ , & u_{II}\,(C,C) = -6 \ , \\
u_I\,(C,D) = 0 \ , & u_{II}\,(C,D) = -10 \ , \\
u_I\,(D,C) = -\,10 \ , & u_{II}\,(D,C) = 0 \ , \\
u_I\,(D,D) = -\,1 \ , & u_{II}\,(D,D) = -1 \ .
\end{array}$$

<u>צורה אסטרטגית</u>

		שחקן II	
		C	D
שחקן I	C	$-6,-6$	$0,-10$
	D	$-10,0$	$-1,-1$

■

דוגמה 3.3 ( )

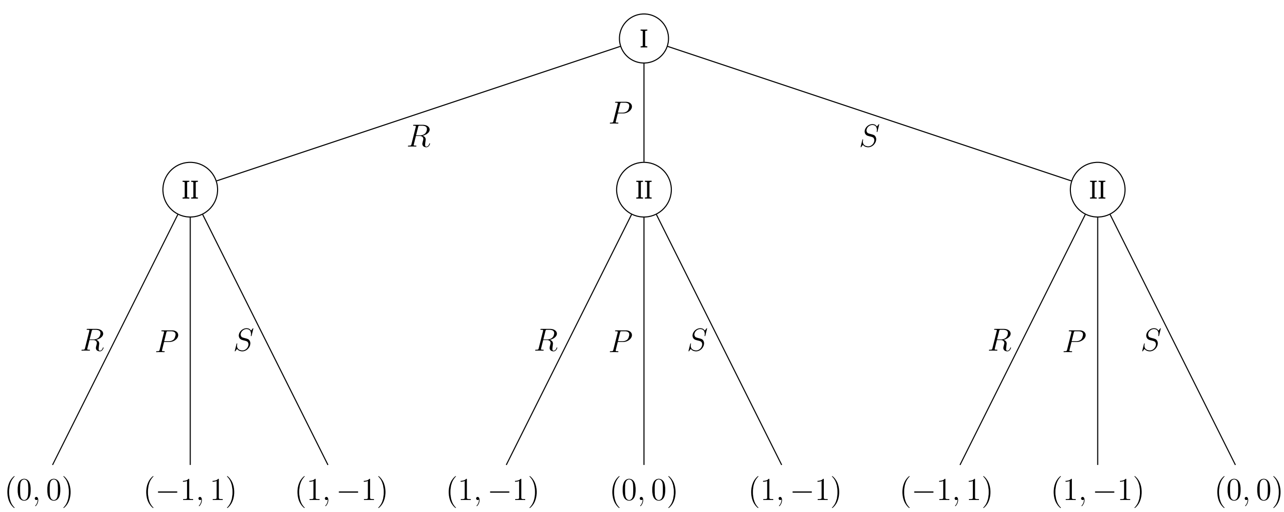
במשחק "אבן, נייר ומספריים" כל אחד משני שחקנים בוחר אחת מתוך שלוש אפשרויות: אבן, נייר או מספריים. יש יחס שליטה מעגלי בין שלושת הסמלים:

האבן שוברת את המספריים שגוזרים את הנייר שעוטף את האבן.

רשמו את הצורת רחבה והצורה אסטרטגית של המשחק.

פתרון:

המשחק בצורתו הרחבה מתואר בתרשים למטה.



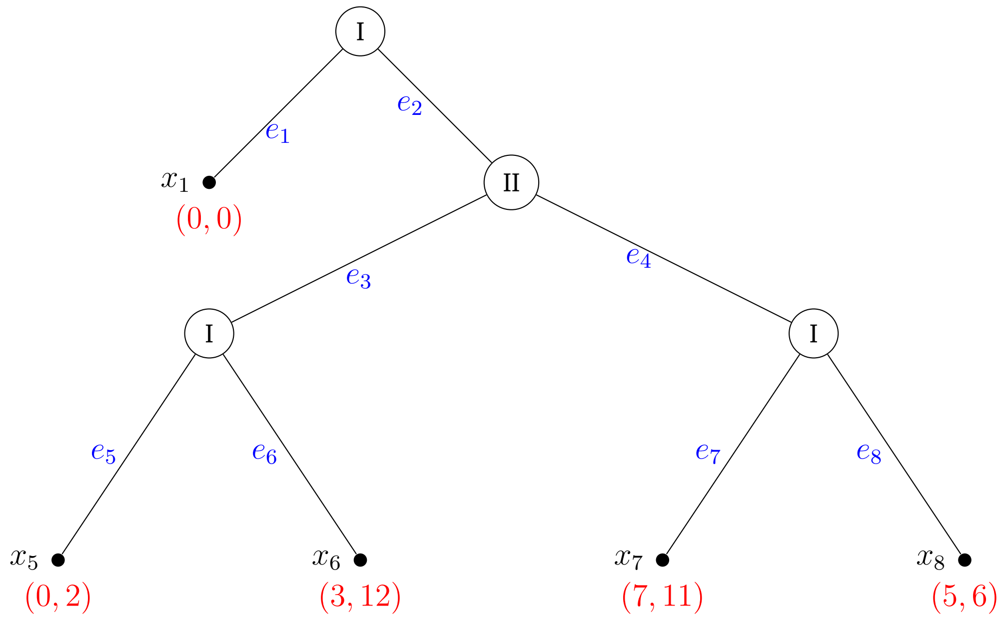
אם נסמן ניצחון לשחקן כתשלום 1, הפסד כתשלום -1, ותיקו כתשלום 0, נקבל את המשחק בצורה אסטרטגית המופיע בטבלה למטה.

		שחקן II		
		R	P	S
	R	$0,0$	$-1,1$	$1,-1$
שחקן I	P	$1,-1$	$0,0$	$-1,1$
	S	$-1,1$	$1,-1$	$0,0$

■

דוגמה 3.4 (
)

נתון המשחק הבא בצורה קרחבה רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



ונתונים האסטרטגיות הבאות:

$$s_{I,0}(x_0) = e_1 \ ,$$

$$s_{I,1}(x_0) = e_2 \ , \qquad s_{I,1}(x_3) = e_5 \ , \quad s_{I,1}(x_4) = e_7 \ ,$$

$$s_{I,2}(x_0) = e_2 \ , \qquad s_{I,2}(x_3) = e_6 \ , \quad s_{I,2}(x_4) = e_7 \ ,$$

$$s_{I,3}(x_0) = e_2 \ , \qquad s_{I,3}(x_3) = e_5 \ , \quad s_{I,3}(x_4) = e_8 \ ,$$

$$s_{I,4}(x_0) = e_2 \ , \qquad s_{I,4}(x_3) = e_6 \ , \quad s_{I,4}(x_4) = e_8 \ ,$$

$$s_{II,1}(x_2) = e_3 \ ,$$

$$s_{II,2}(x_2) = e_4 \ .$$

רשמו את כל המסלולים האפשריים ורשמו את המשחק בצורה אסטרטגית.

פתרון:

$\underline{s_{I,0}}$

$$w = x_0 \ e_1 \ x_1 \ .$$

$$u_I(s_{I,0}) = 0 \ , \qquad u_{II}(s_{I,0}) = 0 \ .$$

$\underline{s_{I,1}, s_{II,1}}$

$$w = x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_3 \ x_3 \ e_5 \ x_5 \ .$$

$$u_I(s_{I,1}, s_{II,1}) = 10 \ , \qquad u_{II}(s_{I,1}, s_{II,1}) = 2 \ .$$

$\underline{s_{I,1}, s_{II,2}}$

$$w = x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_4 \ x_4 \ e_7 \ x_7 \ .$$

$$u_I(s_{I,1}, s_{II,2}) = 7 \ , \qquad u_{II}(s_{I,1}, s_{II,2}) = 11 \ .$$

$\underline{s_{I,3}, s_{II,1}}$

$$w = x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_3 \ x_3 \ e_5 \ x_5 \ .$$

$$u_I(s_{I,3}, s_{II,1}) = 10, \qquad u_{II}(s_{I,3}, s_{II,1}) = 2 \ .$$

$\underline{s_{I,3}, s_{II,2}}$

$$w = x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_4 \ x_4 \ e_8 \ x_8 \ .$$

$$u_I(s_{I,3}, s_{II,1}) = 7, \qquad u_{II}(s_{I,3}, s_{II,1}) = 11 \ .$$

$\underline{s_{I,4}, s_{II,1}}$

$$w = x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_3 \ x_3 \ e_6 \ x_6 \ .$$

$$u_I(s_{I,4}, s_{II,1}) = 3, \qquad u_{II}(s_{I,4}, s_{II,1}) = 12 \ .$$

$\underline{s_{I,4}, s_{II,2}}$

$$w = x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_4 \ x_4 \ e_7 \ x_7 \ .$$

$$u_I(s_{I,4}, s_{II,1}) = 5, \qquad u_{II}(s_{I,4}, s_{II,1}) = 6 \ .$$

$\underline{s_{I,2}, s_{II,1}}$

$$w = x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_3 \ x_3 \ e_6 \ x_6 \ .$$

$$u_I(s_{I,2}, s_{II,1}) = 3, \qquad u_{II}(s_{I,2}, s_{II,1}) = 12 \ .$$

$\underline{s_{I,2}, s_{II,2}}$

$$w = x_0 \; e_2 \; x_2 \; e_4 \; x_4 \; e_7 \; x_7 \; .$$

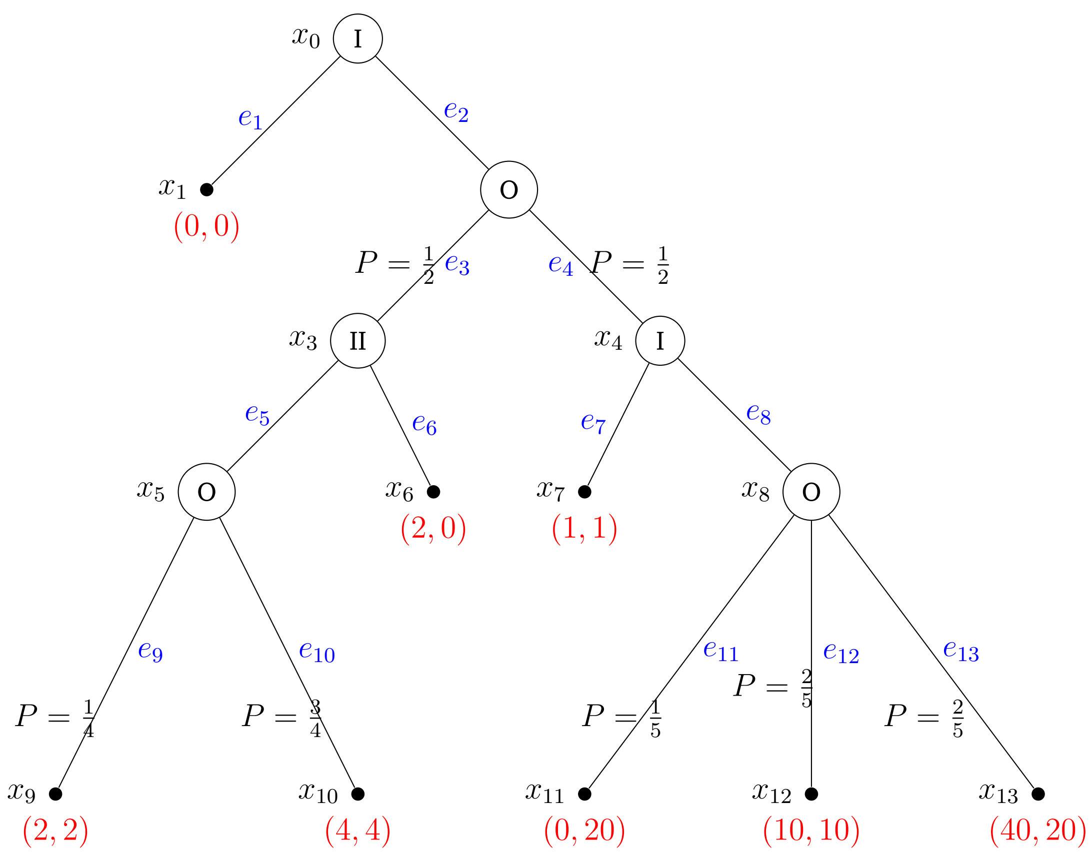
$$u_I(s_{I,2}, s_{II,1}) = 7, \qquad u_{II}(s_{I,2}, s_{II,1}) = 11 \; .$$

	$s_{II,1}$	$s_{II,2}$
$s_{I,0}$	$0,0$	$0,0$
$s_{I,1}$	$10,2$	$7,11$
$s_{I,2}$	$3,12$	$7,11$
$s_{I,3}$	$10,2$	$5,6$
$s_{I,4}$	$3,12$	$5,6$

■

דוגמה 3.5 ( )

נתון המשחק הבא בצורה רחבה רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

$\underline{s_{I,0}}$

$$w = x_0 \; e_1 \; x_1 \; .$$

$$u = (0,0) \; .$$

$\underline{s_{I,1}, s_{II,1}}$

$$w = \begin{cases} x_0\ e_2\ x_2\ e_3\ x_3\ e_5\ x_5\ e_9\ x_9 & P = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} & u = (2,2) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_3\ x_3\ e_5\ x_5\ e_{10}\ x_{10} & P = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8} & u = (4,4) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_7\ x_7 & P = \frac{1}{2} & u = (1,1) \end{cases} .$$

תוחלת התשלום:

$$E = \frac{1}{8}(2,2) + \frac{3}{8}(4,4) + \frac{1}{2}(1,1) = \left(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right) .$$

$\underline{s_{I,2}, s_{II,1}}$

$$w = \begin{cases} x_0\ e_2\ x_2\ e_3\ x_3\ e_5\ x_5\ e_9\ x_9 & P = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} & u = (2,2) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_3\ x_3\ e_5\ x_5\ e_{10}\ x_{10} & P = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8} & u = (4,4) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_8\ x_8\ e_{11}\ x_{11} & P = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{10} & u = (0,20) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_8\ x_8\ e_{12}\ x_{12} & P = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{10} & u = (10,10) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_8\ x_8\ e_{13}\ x_{13} & P = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{10} & u = (40,20) \end{cases} .$$

תוחלת התשלום:

$$E = \frac{1}{8}(2,2) + \frac{3}{8}(4,4) + \frac{1}{10}(0,20) + \frac{2}{10}(10,10) + \frac{2}{10}(40,20) = \left(\frac{47}{4}, \frac{39}{4}\right) .$$

$\underline{s_{I,1}, s_{II,2}}$

$$w = \begin{cases} x_0\ e_2\ x_2\ e_3\ x_3\ e_6\ x_6 & P = \frac{1}{2} & u = (2,0) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_7\ x_7 & P = \frac{1}{2} & u = (1,1) \end{cases} .$$

תוחלת התשלום:

$$E = \frac{1}{2}(2,0) + \frac{1}{2}(1,1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) .$$

$\underline{s_{I,2}, s_{II,2}}$

$$w = \begin{cases} x_0\ e_2\ x_2\ e_3\ x_3\ e_6\ x_6 & P = \frac{1}{2} & u = (2,0) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_8\ x_8\ e_{11}\ x_{11} & P = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{10} & u = (0,20) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_8\ x_8\ e_{12}\ x_{12} & P = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{10} & u = (10,10) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_8\ x_8\ e_{13}\ x_{13} & P = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{10} & u = (40,20) \end{cases} .$$

תוחלת התשלום:

$$E=\frac{1}{2}(2,0)+\frac{1}{10}(0,20)+\frac{2}{10}(10,10)+\frac{2}{10}(40,20)=(11,8)\ .$$

$I \backslash II$	$s_{II,1}$	$s_{II,2}$
$s_{I,0}$	$0,0$	$0,0$
$s_{I,1}$	$\frac{9}{4},\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2},\frac{1}{2}$
$s_{I,2}$	$\frac{47}{4},\frac{39}{4}$	$11,8$

■

3.2 אסטרטגיה נשלטת חזק

הגדרה 3.2 אסטרטגיה נשלטת חזק במשחק עם 2 שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים I ו- II. נניח כי
S_I מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של I,
ו- S_{II} מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של II.

- אסטרטגיה $\sigma_I\in S_I$ של שחקן I נשלטת חזק על ידי אסטרטגיה $t_I\in S_I$ של שחקן I אם

$$u_I\left(\sigma_I,s_{II}\right)<u_I\left(t_I,s_{II}\right)$$

לכל $s_{II}\in S_{II}$.

- אסטרטגיה $\sigma_{II}\in S_{II}$ של שחקן II נשלטת חזק ע"י אסטרטגיה $t_{II}\in S_{II}$ של שחקן II אם

$$u_{II}\left(s_I,\sigma_{II}\right)<u_{II}\left(s_I,t_{II}\right)$$

לכל $s_I\in S_I$.

הגדרה 3.3 אסטרטגיה נשלטת חזק במשחק עם 3 שחקנים

נתון משחק עם שלוש שחקנים I, II ו- III. נניח כי
S_I מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של I,
S_{II} מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של II
ו- S_{III} מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של III,

- אסטרטגיה $\sigma_I\in S_I$ של שחקן I נשלטת חזק על ידי אסטרטגיה $t_I\in S_I$ של שחקן I אם

$$u_I\left(\sigma_I,s_{II},s_{III}\right)<u_I\left(t_I,s_{II},s_{III}\right)$$

לכל $s_{II}\in S_{II}$ ולכל $s_{III}\in S_{III}$.

- אסטרטגיה $\sigma_{II}\in S_{II}$ של שחקן II נשלטת חזק על ידי אסטרטגיה $t_{II}\in S_{II}$ של שחקן II אם

$$u_{II}\left(s_I,\sigma_{II},s_{III}\right)<u_{II}\left(s_I,t_{II},s_{III}\right)$$

לכל $S_I \in s_I$ ולכל $s_{III} \in S_{III}$.

- אסטרטגיה $\sigma_{III} \in S_{III}$ של שחקן III נשלטת חזק ע"י אסטרטגיה $t_{III} \in S_{III}$ של שחקן III אם

$$u_{III}\left(s_I, s_{II}, \sigma_{III}\right) < u_{III}\left(s_I, s_{II}, t_{III}\right)$$

לכל $s_I \in S_I$ ולכל $s_{II} \in S_{II}$.

דוגמה 3.6 ()

נתון המשחק הבא בצורה אסטקטגית.

1) מצאו אסטרטגיה הנשלטת חזק של שחקן I.

2) מצאו אסטרטגיה הנשלטת חזק של שחקן II.

$I \backslash II$	L	M	R
T	$1,0$	$1,2$	$0,1$
B	$0,3$	$0,1$	$2,0$

פתרון:

$$1 = u_{II}(T,R) < u_{II}(T,M) = 2\ ,$$

$$0 = u_{II}(B,R) < u_{II}(B,M) = 1\ .$$

לכן אסטרטגיה R נשלטת חזק על ידי M. ■

3.3 הנחות של רציונליות בתורת המשחקים

הנחה 3.1 הנחות של רציונליות בתורת המשחקים

1) שחקן רציונלי לא ישתמש באסטרטגיה נשלטת חזק.

2) כל השחקנים במשחק רציונליים.

3) העובדה שכל השחקנים רציונליים היא ידיעה משותפת בין כל השחקנים.

3.4 סילוק חוזר

דוגמה 3.7 ()

נתון המשחק הבא, מצאו את התשלום סופי של המשחק, והאסטרטגיות השולטות חזק של שני השחקנים, לפי הכללים של רציונליות.

$I \backslash II$	L	M	R
T	$1,0$	$1,2$	$0,1$
B	$0,3$	$0,1$	$2,0$

פתרון:

$I \backslash II$	L	M	R
T	$1,0$	$1,2$	$\cancel{0,1}$
B	$0,3$	$0,1$	$\cancel{2,0}$

$\xrightarrow{R\prec M}$

$I \backslash II$	L	M
T	$1,0$	$1,2$
$\cancel{B}$	$\cancel{0,3}$	$\cancel{0,1}$

$\xrightarrow{B\prec T}$

$I \backslash II$	L	M
T	$\cancel{1,0}$	$1,2$

$\xrightarrow{L\prec M}$

$I \backslash II$	M
T	$1,2$

לכן לפי הכללים של שחקנים רציונליים, שחקו I ישתמש באסטרטגיה T, שחקן II ישתמש באסטרטגיה M והתשלום הסופי יהיה:

$$u_I(T,M)=1\ ,\qquad u_{II}(T,M)=2\ .$$

■

דוגמה 3.8 (דילמה האסיר)

המשטרה עצרה שני פושעים שביצעו פשע משותף, ושמה אותם בחדרים נפרדים.

אין למשטרה מספיק ראיות להביא אותם להרשעתם על העבירה שבוצעו.

במקום, המשטרה מתכננת להעמיד אותם לדין על עבירה משנית.

המשטרה מציעה לשני הפושעים דיל. אבל יש קאץ'....

שני עבריינים ביצעו פשע חמור ונעצרו. בהעדר כל הוכחות אחרות, הדרך היחידה שבה יכולה המשטרה להשיג הרשעה על עבירה זו היא שאחד העצורים (או שניהם) מודה. העמידה המשטרה כל אחד מהעצורים בפני ההחלטה הבאה:

- אם I מלשין (C) ו-II שותק (D), I יוצא חופשי ו- II מקבל 10 שנים מאסר.
- אם II מלשין (C)ו-I שותק (D), II יוצא חופשי ו- I מקבל 10 שנים מאסר.
- אם שניהם שותקים (D), יש בידי המשטרה ראיות להרשעתם בעבירות פחותות (למשל, העלמת מס) שמוביל למאסר של שנה אחת לכל אחד.

- אם שניהם מלשינים (C), המשטרה מבקשת להתחשב בשיתוף הפעולה שלהם ולגזור את עונשם ל-6 שנות מאסר לכל אחד.

רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית ומצאו את הפתרון של אסטרטגיות שולטות חזק.

פתרון:
המשחק בצורה אסטרטגית הנה:

		שחקן II	
		C_{II}	D_{II}
שחקן I	C_I	$-6, -6$	$0, -10$
	D_I	$-10, 0$	$-1, -1$

$I \backslash II$	C_{II}	D_{II}
C_I	$-6, -6$	$0, \cancel{-10}$
D_I	$-10, -10$	$-1, \cancel{-1}$

$$\xrightarrow{D_{II} \prec C_{II}}$$

$I \backslash II$	C_{II}
C_I	$-6, -6$
D_I	$\cancel{-10, -10}$

$$\xrightarrow{D_I \prec C_I}$$

$I \backslash II$	C_{II}
C_I	$-6, -6$

לכן לפי הכללים של שחקנים רציונליים, שחקן I ישתמש באסטרטגיה C_I, שחקן II ישתמש באסטרטגיה C_{II} והתשלום הסופי יהיה:

$$u_I(C, C) = -6 \ , \qquad u_{II}(C, C) = -6 \ .$$

■

3.5 שיווי משקל נאש

הגדרה 3.4 שיווי משקל נאש במשחקים עם שני שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים I ו- II. נניח כי S_I מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של I, ו- S_{II} מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של II.

קבוצת אסטרטגיות $s^* = (s_I^*, s_{II}^*)$ נקראת **שיווי משקל נאש (שמ"ן)** אם התנאים הבאים מתקיימים:

$$u_I\left(s_I^*, s_{II}^*\right) \geq u_I\left(s_I, s_{II}^*\right) \qquad \text{לכל } s_I \in S_I \ ,$$

$$u_{II}\left(s_I^*, s_{II}^*\right) \geq u_{II}\left(s_I^*, s_{II}\right) \qquad \text{לכל } s_{II} \in S_{II} \ ,$$

הגדרה 3.5 שיווי משקל נאש במשחקים עם שלוש שחקנים

נתון משחק עם שלוש שחקנים I, II ו- III. נניח כי S_I מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של I, S_{II} מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של II ו- S_{III} מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של III.

קבוצת אסטרטגיות $s^* = \left(s_I^*, s_{II}^*, s_{III}^*\right)$ נקראת **שיווי משקל נאש** אם התנאים הבאים מתקיימים:

$$u_I\left(s_I^*, s_{II}^*, s_{III}^*\right) \geq u_I\left(s_I, s_{II}^*, s_{III}^*\right) \qquad , \ s_I \in S_I \text{ לכל}$$

$$u_{II}\left(s_I^*, s_{II}^*, s_{III}^*\right) \geq u_{II}\left(s_I^*, s_{II}, s_{III}^*\right) \qquad , s_{II} \in S_{II} \text{ לכל}$$

$$u_{III}\left(s_I^*, s_{II}^*, s_{III}^*\right) \geq u_{III}\left(s_I^*, s_{II}^*, s_{III}\right) \qquad , s_{III} \in S_{III} \text{ לכל}$$

דוגמה 3.9 (דילמה האסיר)

בדילמה האסיר מצאו את השיווי משקל נאש.

פתרון:

$I \backslash II$	C_{II}	D_{II}
C_I	$-6,-6$	$0,-10$
D_I	$-10,-10$	$-1,-1$

$$\left(s_I^*, s_{II}^*\right) = \left(C_I, C_{II}\right) \ .$$

הסבר:

$$-6 = u_I\left(C_I, C_{II}\right) > u_I\left(D_I, C_{II}\right) = -10 \ ,$$

$$-6 = u_{II}\left(C_I, C_{II}\right) > u_{II}\left(C_I, D_{II}\right) = -10 \ .$$

■

דוגמה 3.10 (משחק תיאום)

המשחק המתואר בטבלה למטה שייך למשפחה של משחקים הנקראים "משחקי תיאום" (coordination games).

$I \backslash II$	a	b
A	$1,1$	$0,0$
B	$0,0$	$3,3$

מצאו את כל שיווי משקל במשחק.

פתרון:

(A,a) שיווי משקל.

הסבר:

$$1 = u_I(A,a) > u_I(B,a) = 0 \ ,$$

$$1 = u_{II}(A,a) > u_{II}(A,b) = 0 \ .$$

(B,b) שיווי משקל.
הסבר:

$$3 = u_I(B,b) > u_I(A,b) = 0 \ ,$$

$$3 = u_{II}(B,b) > u_{II}(B,a) = 0 \ .$$

■

דוגמה 3.11 (מלחמת המינים.)

המשחק המשחק הבא נקרא "מלחמת המינים" (battle of the sexes). שמו של המשחק בא מהתיאור הבא. זוג מתכנן בילוי למוצא שבת. האפשרויות העומדות לרשותם הן קונצרט (C) או צפייה במשחק כדורגל (F). הגבר (שחקן I) מעדיף צפייה במשחק הכדורגל, בעוד האישה (שחקן II) מעדיפה את הקונצרט, אך שניהם מעדיפים להיות יחד גם אם הבילוי המשותף הוא הפחות עדיף בעיניהם. השמחק בצורה אסטרטגית מתואר למטה. מצאו את כל שיווי משקל.

$I \backslash II$	C	F
C	$1,2$	$0,0$
F	$0,0$	$2,1$

פתרון:
(C,C) שיווי משקל.
הסבר:

$$1 = u_I(C,C) > u_I(F,C) = 0 \ ,$$

$$2 = u_{II}(C,C) > u_{II}(C,F) = 0 \ .$$

(F,F) שיווי משקל.
הסבר:

$$2 = u_I(F,F) > u_I(C,F) = 0 \ ,$$

$$1 = u_{II}(F,F) > u_{II}(F,C) = 0 \ .$$

■

דוגמה 3.12 ()

נתון המשחק הבא מצאו כל השיווי משקל נאש.

$I \backslash II$	L	C	R
T	$1,2$	$2,3$	$0,3$
M	$2,2$	$2,1$	$3,2$
B	$2,1$	$0,0$	$1,0$

פתרון:
הקבוצת אסטרטגיות (T,C) שיווי משקל. הסבר:

$$u_I(T,C) > u_{II}(B,C) \ , \qquad u_I(T,C) = u_I(M,C) \ ,$$
$$u_{II}(T,C) > u_{II}(T,L) \ . \qquad u_{II}(T,C) = u_{II}(T,R) \ ,$$

הקבוצת אסטרטגיות (M,L) שיווי משקל. הסבר:

$$u_I(M,L) = u_I(B,L) \ , \qquad u_I(M,L) > u_I(T,L) \ ,$$
$$u_{II}(M,L) = u_{II}(M,R) \ . \qquad u_{II}(M,L) > u_{II}(M,C) \ ,$$

הקבוצת אסטרטגיות (M,R) שיווי משקל. הסבר:

$$u_I(M,R) > u_I(B,R) \ , \qquad u_I(M,R) > u_I(T,R) \ ,$$
$$u_{II}(M,R) = u_{II}(M,L) \ . \qquad u_{II}(M,R) > u_{II}(M,C) \ ,$$

■

שעור 4
משחקים בצורה אסטרטגית רחבה ושיווי משקל נאש

4.1 הגדרה של משחק בצורה רחבה אסטרטגית

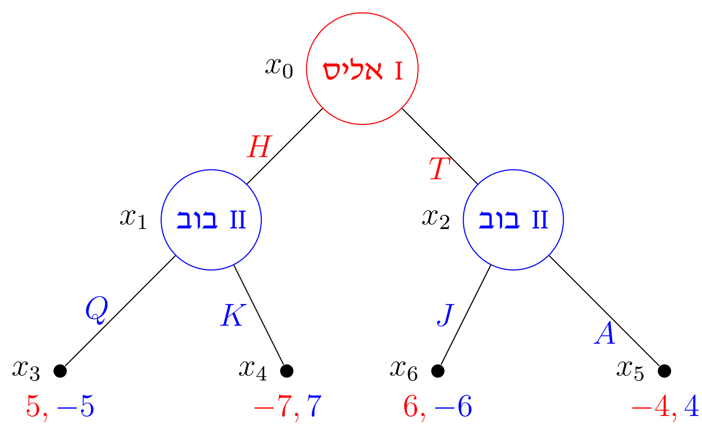
דוגמה 4.1 (התאמת מטבעות אם ידיעה שלמה)

נתבונן על המשחק הבא:

שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
אחר כך, אם אליס בחרה H אז שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).
אחרת אם אליס בחרה T בוב בוחר קלף נסיך (J) או קלף אס (A).

- אם אליס בחרה H ובוב בחר Q אז בוב משלם לאליס 5₪.
- אם אליס בחרה H ובוב בחר K אז אליס משלם לבוב 7₪.
- אם אליס בחרה T ובוב בחר J אז בוב משלם לאליס 6₪.
- אם אליס בחרה T ובוב בחר A אז אליס משלם לבוב 4₪.

ניתן לרשום את עץ המשחק **בצורה רחבה אסטרטגית**:



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H,T.
אומרים כי לשחקן I יש **קבוצה ידיעה אחת**.
לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I = (H,T) \ .$$

לשקחן II יש שני קדקודים x_1,x_2 בהם הוא מקבל החלטה.
אומרים גם כי לשחקן II יש 2 קבוצות ידיעה, x_1,x_2 אשר מייצגות שתי אפשריות שונות המנובעות מהההחלטה הקודמת של שחקן I בקדקוד x_0.
כל קבוצת ידיעה מכילה הפעולות הבאות:

$$x_1 : (Q,K) \qquad x_2 : (J,A)$$

מכיוון שלשחקן II יש שתי קבוצתצ ידיעה x_1, x_2 ובכל אחד יש שתי פעולות אפשריות, אז יש לבוב $2\times 2=4$ אסטרטגיות:

$$S_{II}=(Q/J\ ,\ Q/A\ ,\ K/J\ ,\ K/A)$$

(נהוג לרשום את האסטרטגיות מלמעלה עד למטה ומשמאל לימון.)
הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

$I \backslash II$	Q/J	Q/A	K/J	K/A
H	$5,-5$	$5,-5$	$-7,7$	$-7,7$
T	$6,-6$	$-4,4$	$6,-6$	$-4,4$

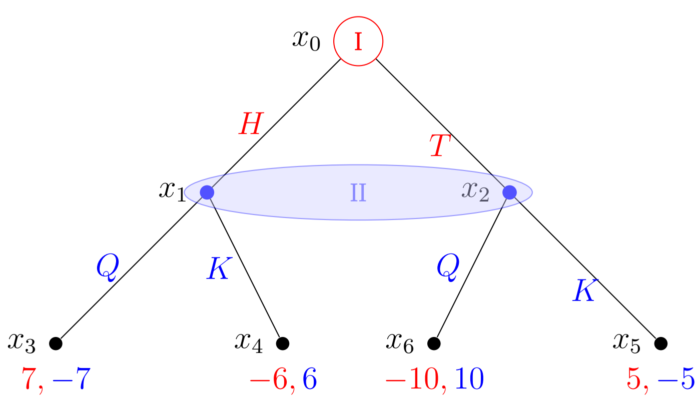
דוגמה 4.2 (התאמת מטבעות אם ידיעה לא שלמה)

בשונה לדוגמה הקודמת נתבונן על המשחק הבא עבורו שחקן II לא יודע את ההחלטה של שחקן I עד סוף המשחק.

שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
אחר כך, בלי ידיעה של הבחיר השל אליס, שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).

- אם אליס בחרה H ובוב בחר Q אז בוב משלם לאליס ₪7.
- אם אליס בחרה H ובוב בחר K אז אליס משלם לבוב ₪6.
- אם אליס בחרה T ובוב בחר Q אז אליס משלם לבוב ₪10.
- אם אליס בחרה T ובוב בחר K אז בוב משלם לאליס ₪5.

ניתן לרשום את עץ המשחק **בצורה רחבה אסטרטגית**:



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H,T.
כלומר לאליס יש **קבוצה ידיעה אחת**.
לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I=(H,T)\ .$$

בניגוד לדוגמה הקודמת, לבוב (שקחן II) יש רק קבוצת ידעיה אחת שמכילה שני קדקודים.
ז"א בוב לא יודע איזה אופציה אליס בחרה, H או T, אז בוב לא יודע על איזה קדקוד הוא נמצא, x_1 או x_2.
בגלל שהוא לא יודע מה ההחלטה של אליס, הוא בוחר בין רק שתי אסשריות, בלי ידיעה של ההחלטה של אליס.

לכן אנחנו מסתכלים אל הקדקודים x_1x_2 **כקבוצת ידיעה אחת** שממנה יוצאות רק שתי הפעולות:

$$x_1x_2 : (Q, K) \ ,$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של בוב הינה

$$S_{II} = (Q \ , \ K)$$

נשים לב כי מכל אחד של הקדקודים x_1 ו- x_2 יוצאות אותן קבוצת פעולות. אחרת בוב היה יודע מה ההחלטה של אליס.

$I \backslash II$	Q	K
H	$7, -7$	$-6, 6$
T	$-10, 10$	$5, -5$

דוגמה 4.3 (התאמת מטבעות אם ידיעה שלמה)

שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
אחר כך שחקן II (בוב) בוחר H או T.

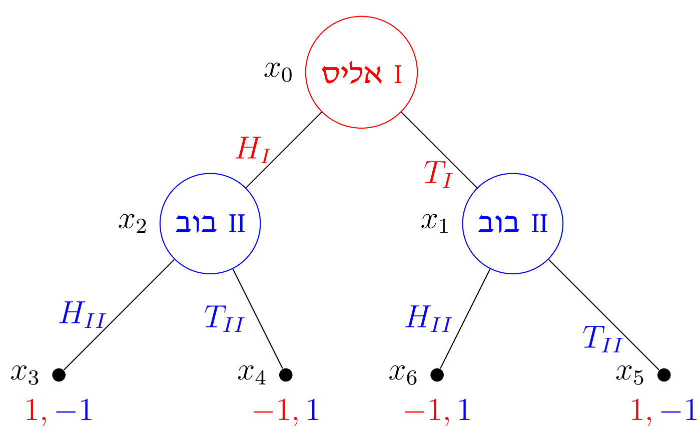
- אם שני השחקנים בוחרים באותו צד, משלם שחקן השני לשחקן הראשון ₪1.
- אם הם בוחרים בצדדים שונים, משלם שחקן הראשון לשחקן השני ₪1.

סעיף א) רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית רחבה.

סעיף ב) רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית בלבד.

פתרון:

סעיף א) נשים לב שזה משחק עם ידיעה שלמה. לכן עץ המשחק הינו



סעיף ב) לשחקן I (אליס) יש קבוצת ידיעה אחת:

$$x_0 : \ (H_I, T_I) \ .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של אליס היא

$$S_I = (H_I, T_I) \ .$$

לשחקן II (בוב) יש שתי קבוצות ידיעה של :

$$x_1: \ (H_{II},T_{II}) \ , \qquad x_2: \ (H_{II},T_{II}) \ .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של אליס היא

$$S_{II}=(H_{II}/H_{II} \ ,H_{II}/T_{II} \ , \ T_{II}/H_{II} \ , \ T_{II}/T_{II}) \ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

$I \backslash II$	H_{II}/H_{II}	H_{II}/T_{II}	T_{II}/H_{II}	T_{II}/T_{II}
H_I	$1,-1$	$1,-1$	$-1,1$	$-1,1$
T_I	$-1,1$	$1,-1$	$-1,1$	$1,-1$

■

דוגמה 4.4 (התאמת מטבעות אם ידיעה לא שלמה)

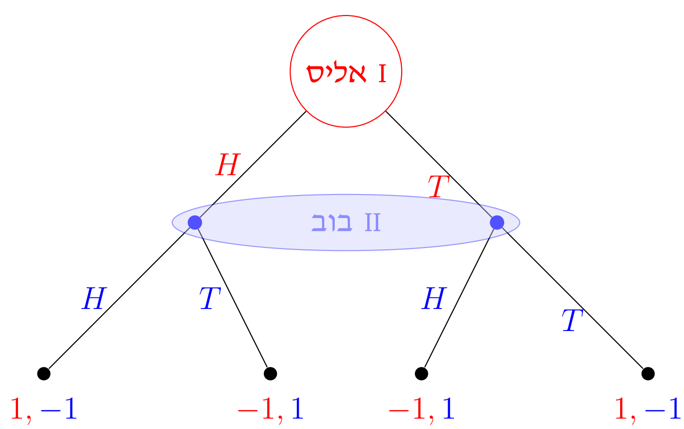
שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי). הוא רושם בחירותו על פתק, חותם עליו ומעביר אותו לשופט.
אחר כך שחקן II (בוב) בוחר H או T. רושם בחירותו על פתק, חותם עליו ומעביר אותו לשופט.

- אם שני השחקנים בוחרים באותו צד, משלם שחקן השני לשחקן הראשון ₪1.
- אם הם בוחרים בצדדים שונים, משלם שחקן הראשון לשחקן השני ₪1.

סעיף א) רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית רחבה.

סעיף ב) רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית בלבד.

פתרון:
נשים לב שזה משחק עם ידיעה לא שלמה, בגלל ששחקן II (בוב) לא יודע מה ההחלטה של שחקן I (אליס). לכן עץ המשחק הוא:



קבוצות ידיעה של שחקן I (אליס):

$$x_0: \ (H_I,T_I) \ .$$

קבוצות ידיעה של שחקן II (בוב):

$$x_1x_2: \ (H_{II},T_{II}) \ .$$

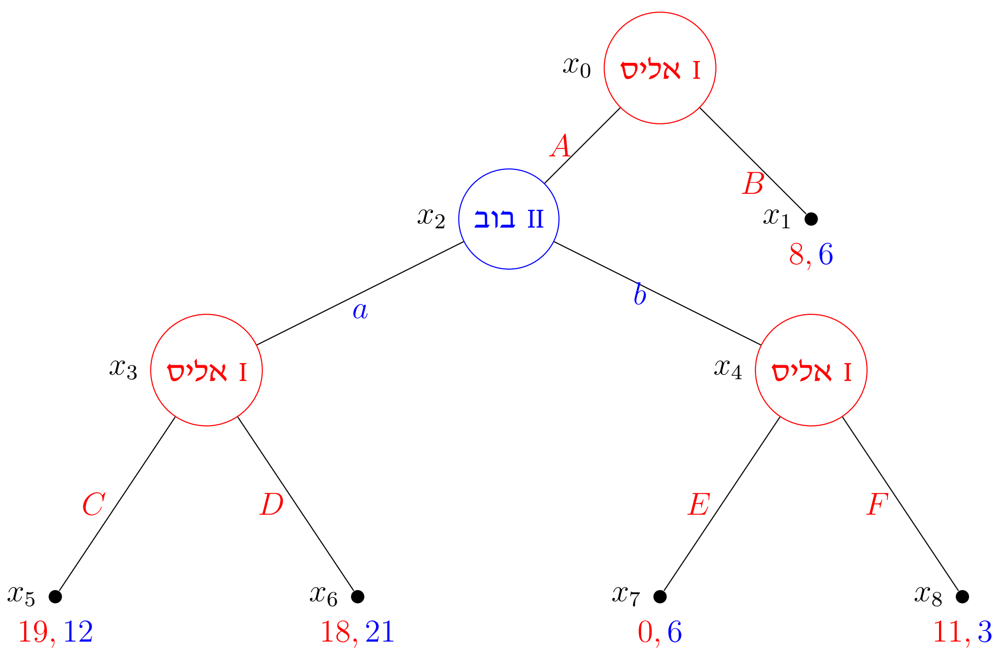
מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

$I \setminus II$	H_{II}	T_{II}
H_I	$1,-1$	$-1,1$
T_I	$-1,1$	$1,-1$

■

דוגמה 4.5 ()

נתון המשחק הבא בצורה רחבה אסטרטגית. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

במשחק הזה, אליס (שחקן I) פותח עם המהלך הראשון, ואחר כך בוב מבצע המהלך השני, ואז אליס מבצע מהלך שוב.

המשחק הוא משחק עם ידיעה שלמה.

לאליס יש שלוש קבוצות ידיעה:

$$x_0 : \ (A, B) \ , \qquad x_3 : \ (C, D) \ , \qquad x_4 : \ (E, F) \ .$$

בכל אחד של הקדקודים האלה לאליס יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לה $8 = 2 \times 2 \times 2$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_I = (A/C/E \ , \ A/C/F \ , \ A/D/E \ , \ A/D/F \ , \ B/C/E \ , \ B/C/F \ , \ B/D/E \ , \ B/D/F) \ .$$

לבוב יש קבוצת ידיעה אחת:

$$x_2 : \ (a, b) \ .$$

בקבוצת ידיעה הזאת של בוב יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לו 2 קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a \ , \ b) \ .$$

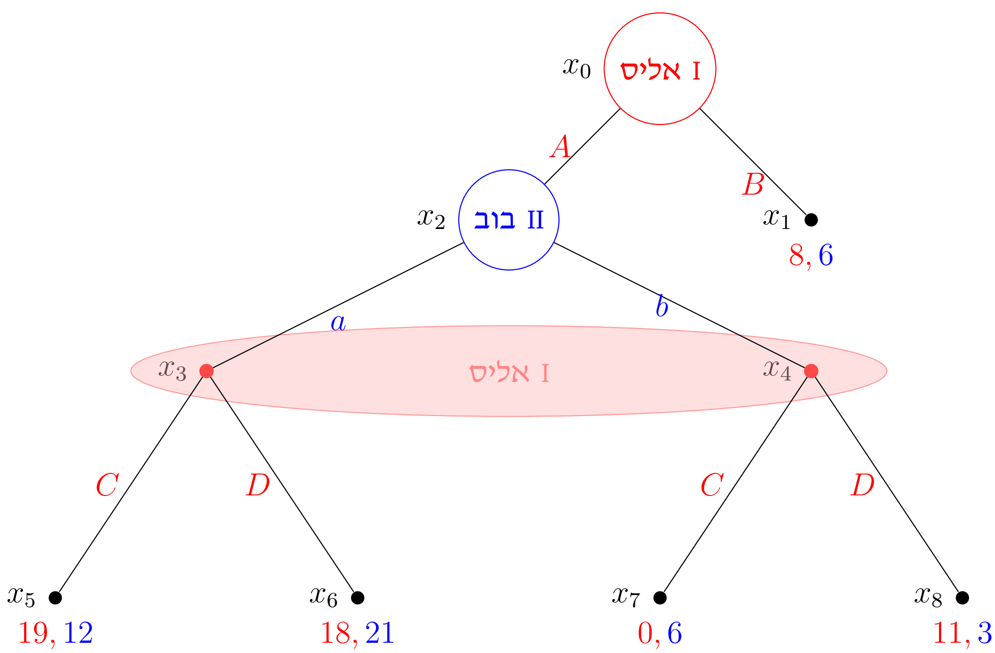
מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

$I \backslash II$	a	b
$A/C/E$	$19,12$	$0,6$
$A/C/F$	$19,12$	$11,3$
$A/D/E$	$18,21$	$0,6$
$A/D/F$	$18,21$	$11,3$
$B/C/E$	$8,6$	$8,6$
$B/C/F$	$8,6$	$8,6$
$B/D/E$	$8,6$	$8,6$
$B/D/F$	$8,6$	$8,6$

■

דוגמה 4.6 ()

נתון המשחק הבא בצורה רחבה אסטרטגית. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

שימו לב, בהשוואה עם הדוגמה הקודמת, הקדקודים x_3 ו- x_4 באותה קבוצת ידיעה של אליס בגלל שהיא לא ידועת מה ההחלטה של בוב בקדקוד x_2, כלומר אליס לא יודעת אם בוב בחר a או b. לכן הפעולות היוצאות מקדקוד x_3 הן אותן פעולות שיוצאות מקדקוד x_4, בגלל שאם היו פעולות אפשריות שונות היוצאות ב- x_3 ו- x_4, אז אליס היתה יודעת איזה פעולה בוב בחר, a או b. כלומר אם לאליס יש החלטה בין הפעולות E ו- F אז היא היתה ידועת שהיא נמצאת בקדקוד x_4 בעץ המשחק ובוב בחר b. ולהפך, אם היתה לה בחירה בין הפעולות C ו- D במקום הבחירה בין הפעולות E ו- F אז היא היתה יודעת שהיא נמצאת ב- x_3 ושבוב בחר a.

לאליס יש שתי קבוצות ידיעה:

$$x_0 : \ (A,B) \ , \qquad x_3x_4 : \ (C,D) \ .$$

בכל אחד של הקדקודים האלה לאליס יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לה $2\times 2=4$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_I = (A/C \ , \ A/D \, B/C \, B/D) \ .$$

לבוב יש קבוצות ידיעה אחת:

$$x_2 : \ (a,b) \ .$$

בקבוצת ידיעה הזאת של בוב יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לו 2 קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a\ ,\ b)\ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

I \ II	a	b
A/C	$19,12$	$0,6$
A/D	$18,21$	$11,3$
B/C	$8,6$	$8,6$
B/D	$8,6$	$8,6$

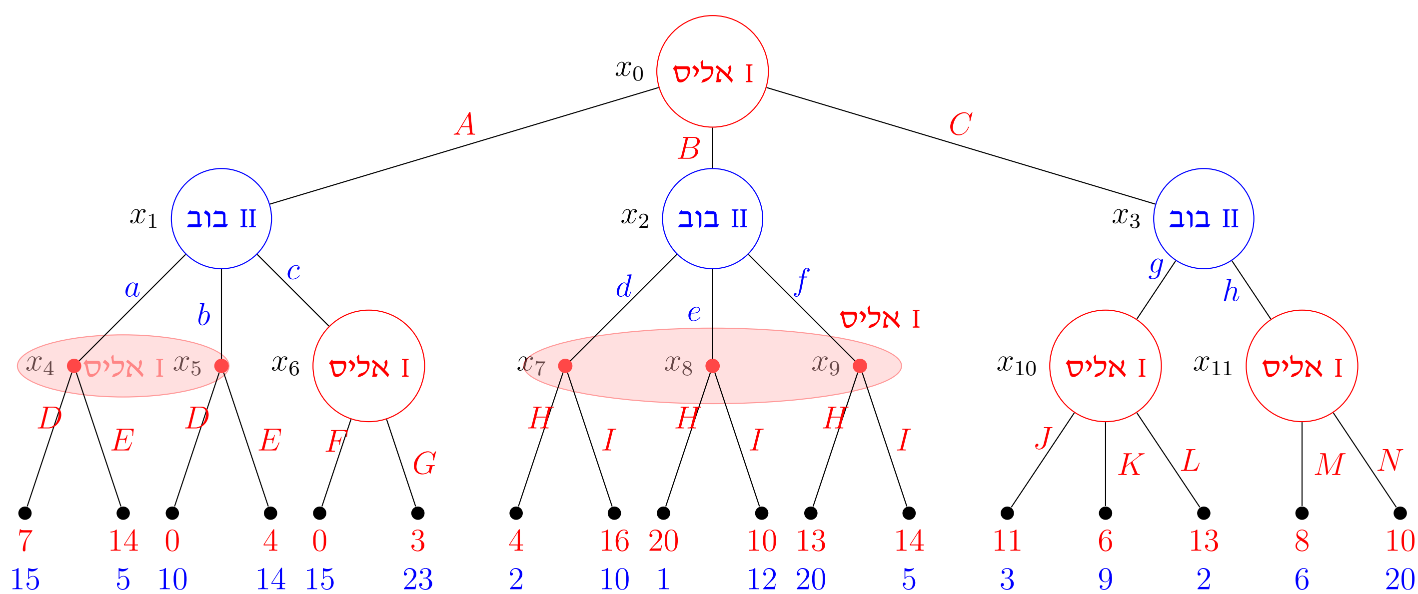
■

כלל 4.1 פעולות שיוצאות מקבוצת ידיעה ללא ידיעה שלמה

לשחקן יש אותה קבוצה של פעולות אפשריות בכל קדקוד שמוכל אותה קבוצת ידיעה.

דוגמה 4.7 ()

נתון המשחק הבא בצורה רחבה אסטרטגית. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

המשחק הוא משחק עם ידיעה לא שלמה.

לאליס יש 5 קבוצות ידיעה:

$$x_0:\ (A,B,C)\ ,\qquad x_4x_5:\ (D,E)\ ,\qquad x_6:\ (F,G)\ ,\qquad x_7x_8x_9:(H,I)\ ,\quad x_10:\ (J,K,L)\ ,\quad x_{11}:\ (M,N)\ .$$

לכן יהיו לאליס $3\times 2\times 2\times 2\times 3\times 2 = 144$ קבוצות אסטרטגיות.

$$S_I = (A/D/E/F/G/H/J/M\ ,\ A/D/E/F/G/H/J/N\ ,\dots\ ,C/E/G/I/L/N)\ .$$

לבוב יש 3 קבוצות ידיעה:

$$x_1 : \ (a,b,c) \ , \quad x_2 : \ (d,e,f) \ , \quad x_3 : \ (g,h) \ .$$

לכן לבוב יהיו: $18 = 2 \times 3 \times 3$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a/d/g \ , \ a/d/h \ , \ldots \ , c/f/h) \ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד

■

4.2 שיטת תשובה הטובה ביותר למציאת שיווי משקל נאש

הגדרה 4.1 ווקטור אסטרטגיות

נתון משחק עם N שחקנים.

נניח כי לחקן 1 יש קבוצה של אסטרטגיות אפשריות S_1,
לחקן 2 יש קבוצה של אסטרטגיות אפשריות S_2,
...
ולחקן N יש קבוצה של אסטרטגיות אפשריות S_N.

ווקטור אסטרטטגיות הוא רשימה של אסטרטגיות

$$(s_1, s_2, \ldots, s_N)$$

כאשר $s_1 \in S_1$ אסטרטגיה של שחקן 1, $s_2 \in S_2$ אסטרטגיה של שחקן 2,
...ו- $s_N \in S_N$ אסטרטגיה של שחקן N.

הגדרה 4.2 שיווי משקל נאש במשחקים עם שני שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים 1 ו- 2. נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, ו- S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2.

קבוצת אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ נקראת **שיווי משקל נאש (שמ"ן)** אם התנאים הבאים מתקיימים:

$$u_1\left(s_1^*, s_2^*\right) \geq u_1\left(s_1, s_2^*\right) \qquad \text{לכל } s_1 \in S_1 \ ,$$

$$u_{II}\left(s_1^*, s_2^*\right) \geq u_{II}\left(s_1^*, s_2\right) \qquad \text{לכל } s_2 \in S_2 \ ,$$

הגדרה 4.3 שיווי משקל נאש במשחקים עם שלוש שחקנים

נתון משחק עם שלולש שחקנים 1, 2 ו- 3. נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2 ו- S_3 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 3.

קבוצת אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, s_2^*, s_3^*)$ נקראת **שיווי משקל נאש**

אם התנאים הבאים מתקיימים:

$$u_1(s_1^*, s_2^*, s_3^*) \geq u_1(s_1, s_2^*, s_3^*) \qquad \text{לכל } s_1 \in S_1 \ ,$$

$$u_2(s_1^*, s_2^*, s_3^*) \geq u_2(s_1^*, s_2, s_3^*) \qquad \text{לכל } s_2 \in S_2 \ ,$$

$$u_3(s_1^*, s_2^*, s_3^*) \geq u_3(s_1^*, s_2^*, s_3) \qquad \text{לכל } s_3 \in S_3 \ ,$$

הגדרה 4.4 תשובה הטובה ביותר במשחקים עם שני שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים 1 ו- 2.
נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, ו- S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2.

- אסטרטגיה $t_1 \in S_1$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 1 לווקטור אסטרטגיות (t_1, s_2) אם

$$u_1(t_1, s_2) = \max_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_2) \ .$$

- אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 2 לווקטור אסטרטגיות (s_1, t_2) אם

$$u_2(s_1, t_2) = \max_{s_2 \in S_2} u_2(s_1, s_2) \ .$$

הגדרה 4.5 תשובה הטובה ביותר במשחקים עם שלוש שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים $1, 2$ ו- 3.
נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2, ו- S_3 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 3,

- אסטרטגיה $t_1 \in S_1$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 1 לווקטור אסטרטגיות (t_1, s_2, s_3) אם

$$u_1(t_1, s_2, s_3) = \max_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_2, s_3) \ .$$

- אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 2 לווקטור אסטרטגיות (s_1, t_2, s_3) אם

$$u_2(s_1, t_2, s_3) = \max_{s_2 \in S_2} u_2(s_1, s_2, s_3) \ .$$

- אסטרטגיה $t_3 \in S_3$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 3 לווקטור אסטרטגיות (s_1, s_2, t_3) אם

$$u_3(s_1, s_2, t_3) = \max_{s_3 \in S_3} u_3(s_1, s_2, s_3) \ .$$

4.3 דוגמאות

דוגמה 4.8 (מציאת שיווי משקל נאש במשחק עם שני שחקנים)

נתון המשחק בצורה אסטרטגית הבאה:

I \ II	x	y	z
a	$2,1$	$0,0$	$1,2$
b	$0,3$	$2,2$	$3,1$
c	$1,1$	$3,2$	$2,2$

פתרון:

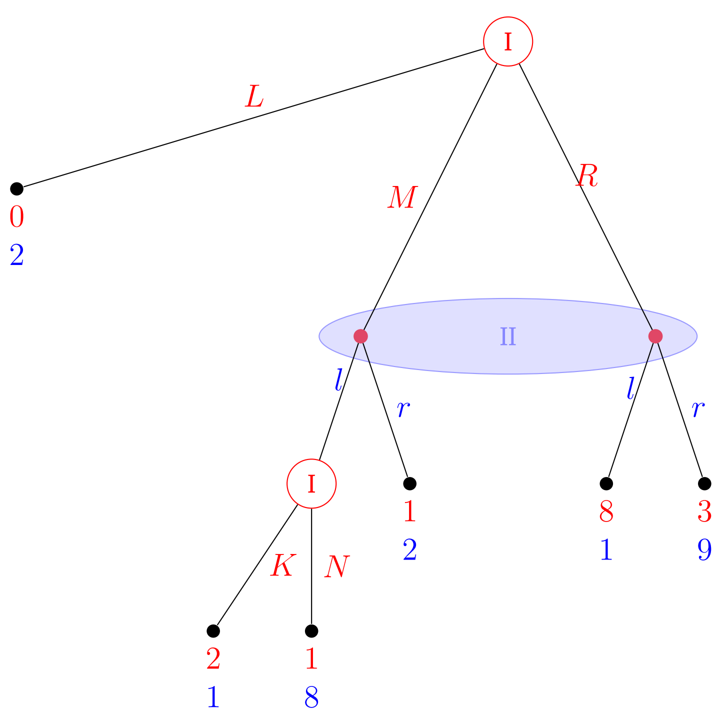
I \ II	x	y	z
a	$2,1$	$0,0$	$1,2$
b	$0,3$	$2,2$	$3,1$
c	$1,1$	$3,2$	$2,2$

לכן ווקטור אסטרטגיות של שיווי משקל נאש הינו

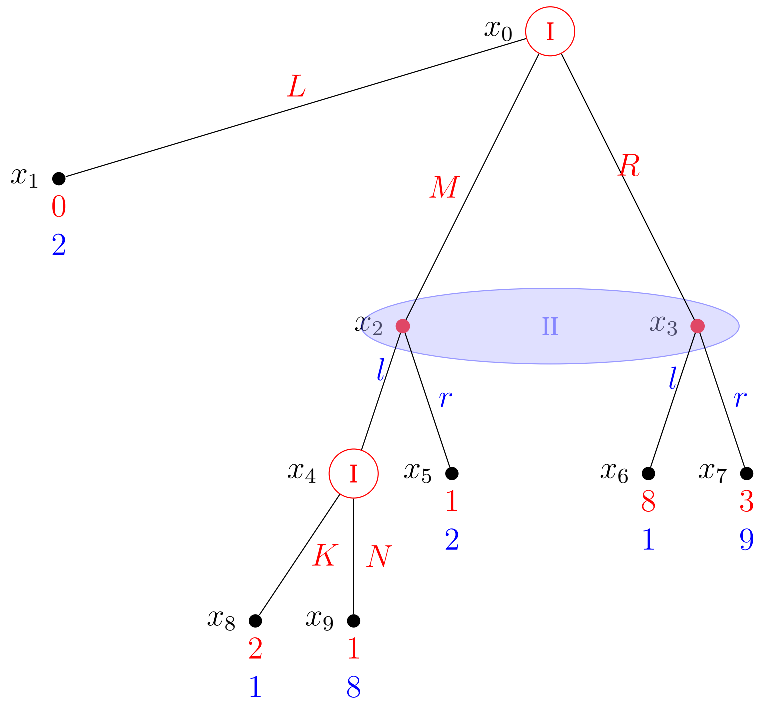
$$(s_1^*, s_2^*) = (c, y) \ .$$

■

דוגמה 4.9 ()



פתרון:



קבוצת אסטרטגיות של שחקן 1:

$$S_1 = (L/K\ ,\ M/K\ ,\ R/K\ ,\ L/N\ ,\ M/N\ ,\ R/N\ )\ .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן 2:

$$S_2 = (l, r)\ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית של המשחק היא:

I \ II	l	r
L/K	$0,2$	$0,2$
M/K	$2,1$	$1,2$
R/K	$8,1$	$3,9$
L/N	$0,2$	$0,2$
M/N	$1,8$	$1,2$
R/N	$8,1$	$3,9$

נשתמש בשיטת תשובה טובה ביותר כדי למצוא את השיווי משקל של המשחק:

I \ II	l	r
L/K	$0,2$	$0,2$
M/K	$2,1$	$1,2$
R/K	$8,1$	$3,9$
L/N	$0,2$	$0,2$
M/N	$1,8$	$1,2$
R/N	$8,1$	$3,9$

לכן הווקטור אסטרטגיות

$$(s_1^*, s_2^*) = (R/N, r)$$

שיווי משקל וגם הווקטור אסטרטגיות

$$(s_1^*, s_2^*) = (R/K, r)$$

שיווי משקל.

■

שעור 5
משפטים של אסטרטגיות, ערך מקסמין ומשחק סכום אפס

5.1 הגדרות: שיווי משקל נאש ותושבה טובה ביותר של שחקן

הגדרה 5.1 שיווי משקל נאש במשחקים עם שני שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים 1 ו- 2. נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, ו- S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2.

קבוצת אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ נקראת **שיווי משקל נאש (שמ"ן)** אם התנאים הבאים מתקיימים:

$$u_1\left(s_1^*, s_2^*\right) \geq u_1\left(s_1, s_2^*\right) \qquad \text{לכל } s_1 \in S_1$$

$$u_2\left(s_1^*, s_2^*\right) \geq u_2\left(s_1^*, s_2\right) \qquad \text{לכל } s_2 \in S_2$$

הגדרה 5.2 שיווי משקל נאש במשחקים עם שלוש שחקנים

נתון משחק עם שלוש שחקנים 1, 2 ו- 3. נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2 ו- S_3 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 3.

קבוצת אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, s_2^*, s_3^*)$ נקראת **שיווי משקל נאש** אם התנאים הבאים מתקיימים:

$$u_1\left(s_1^*, s_2^*, s_3^*\right) \geq u_1\left(s_1, s_2^*, s_3^*\right) \qquad \text{לכל } s_1 \in S_1$$

$$u_2\left(s_1^*, s_2^*, s_3^*\right) \geq u_2\left(s_1^*, s_2, s_3^*\right) \qquad \text{לכל } s_2 \in S_2$$

$$u_3\left(s_1^*, s_2^*, s_3^*\right) \geq u_3\left(s_1^*, s_2^*, s_3\right) \qquad \text{לכל } s_3 \in S_3$$

הגדרה 5.3 תשובה הטובה ביותר במשחקים עם שני שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים 1 ו- 2.
נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, ו- S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2.

- אסטרטגיה $t_1 \in S_1$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 1 לווקטור אסטרטגיות (t_1, s_2) אם

$$u_1\left(t_1, s_2\right) = \max_{s_1 \in S_1} u_1\left(s_1, s_2\right) \ .$$

- אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 2 לווקטור אסטרטגיות (s_1, t_2) אם

$$u_2(s_1, t_2) = \max_{s_2 \in S_2} u_2(s_1, s_2) \ .$$

הגדרה 5.4 תשובה הטובה ביותר במשחקים עם שלוש שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים $1, 2$ ו- 3.
נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2,
ו- S_3 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 3,

- אסטרטגיה $t_1 \in S_1$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 1 לווקטור אסטרטגיות (t_1, s_2, s_3) אם

$$u_1(t_1, s_2, s_3) = \max_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_2, s_3) \ .$$

- אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 2 לווקטור אסטרטגיות (s_1, t_2, s_3) אם

$$u_2(s_1, t_2, s_3) = \max_{s_2 \in S_2} u_2(s_1, s_2, s_3) \ .$$

- אסטרטגיה $t_3 \in S_3$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 3 לווקטור אסטרטגיות (s_1, s_2, t_3) אם

$$u_3(s_1, s_2, t_3) = \max_{s_3 \in S_3} u_3(s_1, s_2, s_3) \ .$$

5.2 הקשר בין שיווי משקל נאש ואסטרטגיה שולטת חזק

משפט 5.1

נתון משחק של 2 שחקנים בצורה אסטרטגית $G = ((S_1, S_2), (u_1, u_2))$.

אם הווקטור אסטרטגיות (s_1^*, s_2^*) הוא שיווי משקל נאש היחיד של המשחק, אז הוא פתרון באסטרטגיות השולטות חזק.

הוכחה:
המשפט הזה אומר שאם הווקטור אסטרטגיות (s_1^*, s_2^*) הוא שיווי משקל נאש היחיד, אז הוא ישרוד תהליך סילוק חוזר של אסטרטגיות הנשלטות חזק.

נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי (s_1^*, s_2^*) שיווי משקל נאש, אבל הוא לא פתרון באסטרטגיות שולטות חזק.
נניח כי s_1^* האסטרטגיה הראשונה לרדת בתהליך סילוק חוזר.
אם כן אז קיימת אסטרטגיה $t_1 \in S_1$ אשר שולטת חזק ב- s_1^*, כלומר

$$u_1(s_1^*, s_2) < u_1(t_1, s_2) \quad . \tag{\#1}$$

לכל אסטרטגיה s_2 אשר עדיין לא ירדה.

בפרט, s_2^* עדיין נשאר אפילו אחרי ש s_1^* נמקחה. לכן , לפי (#1),

(#2) $$u_1\left(s_1^*,s_2^*\right)<u_1\left(t_1,s_2^*\right)\quad .$$

בסתירה לכך ש $s^*=\left(s_1^*,s_2^*\right)$ הוא תשובה טובה ביותר לכל שחקן. ■

משפט 5.2

נתון משחק של 2 שחקנים בצורה אסטרטגית $G=\left(\left(S_1,S_2\right),\left(u_1,u_2\right)\right)$.

אם $\left(s_1^*,s_2^*\right)$ פתרון באסטרטגיות השולטות חזק אז הוא השיווי משקל נאש היחיד של המשחק.

הוכחה: נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי $\left(s_1^*,s_2^*\right)$ הוא הווקטור אסטרטגיות היחיד להישאר אחרי סילוק חוזר אבל הוא לא שיווי משקל נאש.
אז $\exists$ אסטרטגיה $s_1\in S_1$ עבורה

(#3) $$u_1\left(s_1^*,s_2^*\right)<u_1\left(s_1,s_2^*\right)\ .$$

האסטרטגיה s_1 נמחק בהליך שיחוק חוזק, לכן בהכרח קיימת אסטרטגיה אחרת $s_1'\in S_1$ עבורה

(#4) $$u_1\left(s_1,s_2\right)<u_1\left(s_1',s_2\right)\ .$$

לכל האסטרטגיות s_2 מתוך האסטרטגיות הנשארות בתהליך סילוק חוזר.
בפרט, האסטרטגיה s_2^* עדיין נשארת, לכן לפי (#4),

(#5) $$u_1\left(s_1,s_2^*\right)<u_1\left(s_1',s_2^*\right)\ .$$

אם $s_1'=s_1^*$ אז (#5) סותר את (#3).

אחרת, קיימת s_1'' אשר שולטת חזק ב- s_1', בגלל ש s_1' לא שורדת תהליך סילוק חוזר.
לכן במקום (#4) ו- (#5) נקבל

(#4') $$u_1\left(s_1',s_2\right)<u_1\left(s_1'',s_2\right)\ .$$

(#5') $$u_1\left(s_1',s_2^*\right)<u_1\left(s_1'',s_2^*\right)\ .$$

אם $s_1''=s_1^*$ אז (#5') סותר את (#3). אחרת התהליך הזה ממשיך עד שנגיע לסתירה ל- (#3).

■

5.3 אסטרטגיות נשלטות חלש

הגדרה 5.5 אסטרטגיה נשלטת חלש במשחק 2 שחקנים

הגדרה 5.6 אסטרטגיה נשלטת חלש במשחק 2 שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים 1 ו- 2. נניח כי
S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1,

ו- S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2.

- אסטרטגיה $\sigma_1 \in S_1$ של שחקן 1 נשלטת חלש על ידי אסטרטגיה $t_1 \in S_1$ של שחקן 1 אם

$$u_1(\sigma_1, s_2) \leq u_1(t_1, s_2)$$

לכל $s_2 \in S_2$.

- אסטרטגיה $\sigma_2 \in S_2$ של שחקן 2 נשלטת חלש ע"י אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ של שחקן 2 אם

$$u_2(s_1, \sigma_2) \leq u_2(s_1, t_2)$$

לכל $s_1 \in S_1$.

הגדרה 5.7 אסטרטגיה נשלטת חלש במשחק 3 שחקנים

נתון משחק עם שלוש שחקנים 1, 2 ו- 3. נניח כי
S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1,
S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2
ו- S_3 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 3.

- אסטרטגיה $\sigma_1 \in S_1$ של שחקן 1 נשלטת חלש על ידי אסטרטגיה $t_1 \in S_1$ של שחקן 1 אם

$$u_1(\sigma_1, s_2, s_3) \leq u_1(t_1, s_2, s_3)$$

לכל $s_2 \in S_2$ ולכל $s_3 \in S_3$.

- אסטרטגיה $\sigma_2 \in S_2$ של שחקן 2 נשלטת חלש על ידי אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ של שחקן 2 אם

$$u_2(s_1, \sigma_2, s_3) \leq u_2(s_1, t_2, s_3)$$

לכל $s_1 \in S_1$ ולכל $s_3 \in S_3$.

- אסטרטגיה $\sigma_3 \in S_3$ של שחקן 3 נשלטת חלש ע"י אסטרטגיה $t_3 \in S_3$ של שחקן 3 אם

$$u_3(s_1, s_2, \sigma_3) \leq u_3(s_1, s_2, t_3)$$

לכל $s_1 \in S_1$ ולכל $s_2 \in S_2$.

דוגמה 5.1 ()

נתון משחק בצורה אסטרטגית הבאה:

$I \backslash II$	L	R
T	$1,2$	$2,3$
B	$2,2$	$2,0$

$I \backslash II$	L	R
T	~~$1,2$~~	~~$2,3$~~
B	$2,2$	$2,0$

$\xrightarrow{T \preceq B}$

$I \backslash II$	L	R
B	$2,2$	~~$2,0$~~

$\xrightarrow{R \prec L}$

$I \backslash II$	L
B	$2,2$

דוגמה 5.2 (השפעת סדר הסילוק של אסטרטגיות נשלטות חלש)

$I \setminus II$	L	C	R
T	$1,2$	$2,3$	$0,3$
M	$2,2$	$2,1$	$3,2$
B	$2,1$	$0,0$	$1,0$

פתרון:

$I \setminus II$	L	C	R
T	$1,2$	$2,3$	$0,3$
M	$2,2$	$2,1$	$3,2$
B	$2,1$	$0,0$	$1,0$

$\xrightarrow{T\preceq M}$

$I \setminus II$	L	C	R
M	$2,2$	$2,1$	$3,2$
B	$2,1$	$0,0$	$1,0$

$\xrightarrow{R\preceq L}$

$I \setminus II$	L	C
M	$2,2$	$2,1$
B	$2,1$	$0,0$

$\xrightarrow{L\preceq R}$

$I \setminus II$	L	C
M	$2,2$	$2,1$
B	$2,1$	$0,0$

$\xrightarrow{B\preceq M}$

$I \setminus II$	L	C
M	$2,2$	$2,1$

$\xrightarrow{C\prec L}$

$I \setminus II$	L	C
M	$2,2$	$2,1$

תוצאת התהליך: ML.
תשלום: $(2,2)$.

$I \setminus II$	L	C	R
T	$1,2$	$2,3$	$0,3$
M	$2,2$	$2,1$	$3,2$
B	$2,1$	$0,0$	$1,0$

$\xrightarrow{B\preceq M}$

$I \setminus II$	L	C	R
T	$1,2$	$2,3$	$0,3$
M	$2,2$	$2,1$	$3,2$

$\xrightarrow[C\preceq R]{L\preceq R}$

$I \setminus II$	R
T	$0,3$
M	$3,2$

$\xrightarrow{T\prec M}$

$I \setminus II$	R
M	$3,2$

תוצאת התהליך: MR.
תשלום: $(3,2)$.

■

5.4 ביטחון: מושג המקסמין

$I \setminus II$	L	R
T	$2,1$	$2,-20$
M	$3,0$	$-10,1$
B	$-100,2$	$3,3$

השיווי משקל היחיד במשחק זה הוא (B,R) עם תשלום. אך בחירות השחקנים של אסטרטגיות אלה מסוכנות!

שחקן 1 עשוי להסס מאוד לבחור B, מחשש שמא שחקן 2 יבחר L (אם משום שאינו רציונלי אם בטעות).
כיוון שהתשלום של (B,L) קטסטרופי עבור שחקן 1, ייתכן שהוא ישחק אסטרטגיה T המבטיחה לו תשלום 2 ללא סיכון להפסיד 100.

אם כן שחקן 2 חושב שיש סיכוי ששחקן 1 יבחר אסטרטגיה T הוא יחשוש מלבחור את אסטרטגיה ש"מ R ולהסתכן בתשלום -20.
לאור זה ייתכן ששחקן 2 ישחק אסטרטגיה L.

למעשה, אסטרטגיה T של שחקן 1 מבטיחה התשלום הטובה ביותר שניתן לקבל מבלי "לסמוך" על הרציונליות של שחקן 2, ובהנחות הפסימיות ביותר על ההתנהגותו של שחקן 2.

באופן כללי, בהינתן במשחק שני שחקנים. נניח כי שחקן 1 משחק אסטרטגיה $s_1 \in S_1$. התשלום הנמוך ביותר שהוא עלול לקבל הוא

$$\min_{t_2 \in S_2} u_1(s_1, t_2) \ .$$

שחקן 1 יכול לבחור באסטרטגיה s_1 הממקסמת ערך זה. כלומר, בלי לסמוך על הרציונליות של שאר השחקנים הוא יכול להבטיח לעצמו

$$\underline{\mathrm{v}}_1 = \max_{s_1 \in S_1} \min_{t_2 \in S_2} u_1(s_1, t_2) \ .$$

הגודל $\underline{\mathrm{v}}_1$ נקרא **ערך המקסמין** של שחקן 1 או **רמת הביטחון** של שחקן 1.
אסטרטגיה s_1 המבטיחה ערך זה נקראת **אסטרטגיה מקסמין**.

דוגמה 5.3 ()

$I \backslash II$	L	R
T	$2,1$	$2,-20$
M	$3,0$	$-10,1$
B	$-100,2$	$3,3$

פתרון:

$I \backslash II$	L	R	$\min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1,s_2)$
T	$2,1$	$2,-20$	2
M	$3,0$	$-10,1$	-10
B	$-100,2$	$3,3$	-100

$$\underline{\mathrm{v}}_1 = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) = 2 \ .$$

$I \backslash II$	L	R
T	$2,1$	$2,-20$
M	$3,0$	$-10,1$
B	$-100,2$	$3,3$
$\min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1,s_2)$	0	-20

$$\underline{\mathrm{v}}_2 = \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2) = 0 \ .$$

ערך המקסמין של שחקן 1 הוא 2, ואסטרטגית המקסמין המבטיחה תשלום זה היא T.

ערך המקסמין של שחקן 2 הוא 0, ואסטרטגית המקסמין המבטיחה תשלום זה היא L.

נהוג לרשום את התשלומים המינימלים בטבלה אחת:

$I \backslash II$	L	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$
T	$2,1$	$2,-20$	2
M	$3,0$	$-10,1$	-10
B	$-100,2$	$3,3$	-100
$\min\limits_{s_1\in S_1} u_2(s_1,s_2)$	0	-20	$0,2$

בתרשים זה, מימין בכל שורה מופיע התשלום הנמוך ביותר לשחקן I אם הוא בוחר באסטרטגיה המתאימה לשורה זה. ומתחת לכל עמודה מויע התשלום הנמוך ביותר לשחקן II, אם הוא בוחר באסטרטגיה המתאימה דעמודה זו. בפינה הימינית תחתונה של התרשים, באדום מופיעים המקסמין של השחקנים.

שימו לב: אם שני השחקנים יבחור את אסטרטגית המקסמין, נקבל את הווקטור אסטרטגיות (T,L) עם תשלום $(2,1)$. עבור שחקן 2 התשלום 1 אינו ערך המקסמין אלא גבוה ממנו.

■

דוגמה 5.4 ()

נתון משחק עם שני שחקנים בצורה אסטרטגית כמתואר בטבלה.

$I \backslash II$	L	R
T	$3,1$	$0,4$
B	$2,3$	$1,1$

א) מצאו אסטרטגיה מקסמין של שחקן 1 והרמת הביטחון שלו.

ב) מצאו אסטרטגיה מקסמין של שחקן 2 והרמת הביטחון שלו.

ג) מה יהיה התשלום לשני השחקנים אם שניהם יבחור באסטרטגיות המקסמים שלהם.

פתרון:

א)

$I \backslash II$	L	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$
T	$3,1$	$0,4$	0
B	$2,3$	$1,1$	1

$$\underline{v}_1 = \max_{s_1\in S_1} \min_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2) = 1 \ .$$

ערך המקסמין של שחקן 1 הוא 1 ואסטרטגית המקסמין שלו היא B.

ב)

$I \backslash II$	L	R
T	$3,1$	$0,4$
B	$2,3$	$1,1$
$\min\limits_{s_1\in S_1} u_2(s_1,s_2)$	1	1

$$\underline{\mathrm{v}}_2 = \max_{s_2\in S_2} \min_{s_1\in S_1} u_1(s_1,s_2) = 1 \ .$$

ערך המקסמין של שחקן 2 הוא 1. גם L וגם R הן אסטרטגיות מקסמין.

ג)

$I \backslash II$	L	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$
T	$3,1$	$0,4$	0
B	$2,3$	$1,1$	1
$\min\limits_{s_1\in S_1} u_2(s_1,s_2)$	1	1	$1,1$

לכן כאשר שני השחקנים בוחרים באסטרטגיות מקסמין, התשלום עשוי להיות $(2,3)$ עבור (B,L) או $(1,1)$ עבור (B,R), בהתאם לאסטרטגית המקסמין שיבחר שחקן 2.

■

5.5 קשר בין אסטרטגית שולטת ואסטרטגית מקסמין

משפט 5.3

במשחק שני שחקנים, אם אסטרטגיה σ_1 של שחקן 1 שולטת בכל האסטרטגיות האחרות שלו, אז

א) σ_1 היא אסטרטגית מקסמין שלו.

ב) σ_1 היא תשובה טובה ביותר לכל ווקטור אסטרטגיות של שאר השחקנים.

הוכחה:

א) נניח כי σ_1 היא אסטרטגית שולטת של שחקן 1.

תהי $t_2\in S_2$ אסטרטגיה של שחקן 2 כך ש-

$$u_1(\sigma_1,t_2) = \min_{s_2\in S_2} u_1(\sigma_1,s_2)$$

מכאן

$$\min_{s_2\in S_2} u_1(\sigma_1,s_2) = u_1(\sigma_1,t_2) \geq u_1(s_1,t_2) \geq \min_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$$

כלומר

$$\min_{s_2\in S_2} u_1(\sigma_1,s_2) \geq \min_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2) \ .$$

לפיכך

$$\min_{s_2\in S_2} u_1(\sigma_1,s_2) = \max_{s_1\in S_1}\min_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2) \ .$$

אבל $\underline{\mathrm{v}}_1 = \max\limits_{s_1\in S_1}\min\limits_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$. לכן σ_1 היא אסטרטגית מקסמין של שחקן 1.

ב) לכל $s_2\in S_2$ מתקיים

$$u_1(s_1,s_2) \leq u_1(\sigma_1,s_2) \ ,$$

ז"א σ_1 שולטת חלש בכל האסטרטגיות האחרות s_1 של שחקן 1. לכן σ_1 תשובה טובה ביותר של שחרן 1 לכל אסטרטגיה של השחקן 2.

■

משפט 5.4

במשחק שני שחקנים, אם לשחקן 1 יש אסטרטגיה s_1^* השולטת חלש על שאר האסטרטגיות שלו, ולשחקן 2 יש אסטרטגיה s_2^* השולטת חלש על כל שאר האסטרטגיות שלו, אז

א) הווקטור אסטרטגיות (s_1^*, s_2^*) שיווי משקל,

ב) s_1^* היא אסטרטגית מקסמין לשחקן 1 ו- s_2^* היא אסטרטגית מקסמין לשחקן 2.

הוכחה:

א) נניח כי (s_1^*, s_2^*) ווקטור אסטרטגיות עבורו s_1^* שולטת חלש על כל שאר האסטרטגיות של שחקן 1 ו- s_2^* שולטת חלש על כל שאר האסטרטגיות של שחקן 2.

אם כן אז לפי משפט 5.3 (חלק 2) למעלה, s_1^* תשובה טובה ביותר של שחקן 1 ו- s_2^* תשובה טובה ביותר של שחקן 2, כלומר

$$u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*)$$

לכל $s_1 \in S_1$ ו-

$$u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_2(s_1^*, s_2)$$

לכל $s_2 \in S_2$. לפיכך הווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ הוא נקודת שיווי משקל.

ב) לפי משפט 5.3 (חלק 1), s_1^* היא אסטרטגית מקסמין של שחקן 1 ו- s_2^* היא אסטרטגית מקסמין של שחקן 2. לפיכך הווקטור $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ הוא ווקטור אסטרטגיות מקסמין.

■

5.6 משחקי שני שחקנים סכום אפס

הגדרה 5.8 משחק שני שחקנים סכום אפס

משחק שני משחקים נקרא **משחק סכום אפס** אם לכל זוג אסטרטגיות (s_1, s_2) מתקיים

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0 \ .$$

במילים אחרות, משחק שני שחקנים סכום אפס הוא מערכת סגורה מבחינת התשלומים: כל ששחקן אחד מרוויח השחקן השני מפסיד.
ברור אן כן שבמשחק כזה האינטרטסטים של שני השחקנים מנוגדים לחלוטים.

דוגמה 5.5 (משחק שני שחקנים סכום אפס)

נתון המשחק שני שחקנים סכום אפס הבא.

I \ II	L	C	R
T	$3,-3$	$-5,5$	$-2,2$
M	$1,-1$	$4,-4$	$1,-1$
B	$6,-6$	$-3,3$	$-5,5$

א) מצאו א הש"מ.

ב) מצאו את האסטרטגיה מקסמין של השחקנים.

פתרון:

א)

$I \backslash II$	L	C	R
T	$3,-3$	$-5,5$	$-2,2$
M	$1,-1$	$4,-4$	$1,-1$
B	$6,-6$	$-3,3$	$-5,5$

שיווי משקל: $s^* = (M,R)$.

ב)

$I \backslash II$	L	C	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$
T	$3,-3$	$-5,5$	$-2,2$	-5
M	$1,-1$	$4,-4$	$1,-1$	1
B	$6,-6$	$-3,3$	$-5,5$	-5
$\min\limits_{s_1\in S_1} u_2(s_1,s_2)$	-6	-4	-1	$1,-1$

ואסטרטגיות מקסמין: $\sigma = (M,R)$.

■

הגדרה 5.9 פונקציית תשלום של משחק שני שחקנים סכום אפס

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס. **פונקציית תשלום של המשחק** מוגדרת להיות התשלום לשחקן I:

$$u(s_1,s_2) \equiv u_1(s_1,s_2) \ .$$

לכל ווקטור אסטרטגיות $s=(s_1,s_2)$.

במונחי u, התשלום לשחקן 1 והתשלום לשחקן 2 הינם

$$u_1(s_1,s_2) = u(s_1,s_2) \ , \qquad u_2(s_1,s_2) = -u(s_1,s_2)$$

לכל ווקטור אסטרטגיות $s=(s_1,s_2)$.

דוגמה 5.6 (המשך של דוגמה 5.5)

התשרים למטה מראה את פונקציית התשלום של המשחק שני שחקנים סכום אפס של דוגמה 5.5.

$I \backslash II$	L	C	R
T	3	-5	-2
M	1	4	1
B	6	-3	-5

כלל 5.1 הנחת הרציונליות במשחק שני שחקנים סכום אפס

במשחק שני שחקנים סכום אפס בעל פונקצית תלשום u.

שחקן 1 (שהוא בדרך כלל שחקן השורה) מנסה להגדיל את $u(s)$, ככל שאפשר, שכן זה התשלום שלו.

שחקן 2 (שהוא בדרך כלל שחקן העמודה) מנסה להקטין את $u(s)$, שכן זה התשלום שהוא משלם.

דוגמה 5.7 ( )

המשחק הבא שנתון בצורה אסטרטגית למטה הוא משחק שני שחקנים סכום אפס.

$I \backslash II$	L	R
T	$3,-3$	$-2,2$
B	$-1,1$	$5,-5$

נחשב את האסטרטגיות מקסמין של השחקנים.

$I \backslash II$	L	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u_1$
T	$3,-3$	$-2,2$	-2
B	$-1,1$	$5,-5$	-1
$\min\limits_{s_1\in S_1} u_2$	-3	-5	$-1,-3$

$$\underline{\mathrm{v}}_1 = \max_{s_1\in S_1}\min_{s_2\in S_2} u_1 = -1 \ ,$$

$$\underline{\mathrm{v}}_2 = \max_{s_2\in S_2}\min_{s_1\in S_1} u_2 = -3 \ ,$$

האסטרטגיה המקסמין של שחקן 1 היא B והאסטרטגיה המקסמין של שחקן 2 היא L. כלומר הווקטור אסטרטגיות מקסמין הוא (B,L).
נרשום את הצורה אסטרטגית במונחי הפונקצית תשלום של המשחק:

$I \backslash II$	H	T
H	1	-1
T	-1	1

נשאל שאלה כללית: מה הוא הערך המקסמין של השחקנים במשחק שני שחקנים סכום אפס? ערך המקסמין של שחקן 1 נתון על ידי

$$\underline{\mathrm{v}}_1 = \max_{s_1\in S_1}\min_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2) = \max_{s_1\in S_1}\min_{s_2\in S_2} u(s_1,s_2) \ .$$

זוהי רמת הביטחון של שחקן 1 במשחק: הערך שאותו הוא יכול להבטיח לעצמו.

הערך המקסמין של שחקן 2 הוא

$$\underline{\mathrm{v}}_2 = \max_{s_2\in S_2}\min_{s_1\in S_1} u_2(s_1,s_2) = \max_{s_2\in S_2}\min_{s_1\in S_1}\left[-u(s_1,s_2)\right] = \max_{s_2\in S_2}\left[-\max_{s_1\in S_1} u(s_1,s_2)\right] = -\min_{s_2\in S_2}\max_{s_1\in S_1} u(s_1,s_2) \ .$$

נסמן

$$\underline{\mathrm{v}} := \max_{s_1\in S_1}\min_{s_2\in S_2} u(s_1,s_2) \ , \qquad \overline{\mathrm{v}} := \min_{s_2\in S_2}\max_{s_1\in S_1} u(s_1,s_2)$$

הגודל $\underline{\mathrm{v}}$ נקרא **ערך המקסמין**,
הגודל $\bar{\mathrm{v}}$ נקרא **ערך המינמקס**.

שחקן 1 יכול להבטיח שיקבל לפחות $\underline{\mathrm{v}}$.
שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר $\bar{\mathrm{v}}$.

אסטרטגיה של שחקן 1 המבטיחה את $\underline{\mathrm{v}}$ נקראת **אסטרטגיה מקסמין**.
אסטרטגיה של שחקן 2 המבטיחה את $\bar{\mathrm{v}}$ נקראת **אסטרטגיה מינמקס**.

דוגמה 5.8 ()

משחק שני משחקים סכום אפס שמתואר בטבלה הבאה. מצאו את ערך המקסמין, ערך המינמקס, אסטרטגיה מקסמין ואסטרטגיה מינמקס של המשחק.

$I \backslash II$	L	R
T	-2	5
B	3	0

פתרון:

$I \backslash II$	L	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u(s_1,s_2)$
T	-2	5	-2
B	3	0	0
$\max\limits_{s_1\in S_1} u(s_1,s_2)$	3	5	$0,3$

ערך מקסמין: . $\underline{\mathrm{v}} = \max\limits_{s_1\in S_1} \min\limits_{s_2\in S_2} u(s_1,s_2) = 0$
ערך מינמקס: . $\bar{\mathrm{v}} = \min\limits_{s_2\in S_2} \max\limits_{s_1\in S_1} u(s_1,s_2) = 3$
אסטרטגיה מקסמין: B.
אסטרטגיה מינמקס: L.

משמעות:
שחקן 1 אינו יכול להבטיח יותר מ- 0 ואסטרטגיה המקסמין היא B.

שחקן 2 אינו יכול להבטיח (שישלם) פחות מ- 3 ואסטרטגיה המינמקס היא L. ■

הגדרה 5.10 ערך המשחק ואסטרטגיות אופטימליות

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס.
אם מתקיים $\underline{\mathrm{v}} = \bar{\mathrm{v}}$ אז אומרים כי הגודל

$$\mathrm{v} = \underline{\mathrm{v}} = \bar{\mathrm{v}}$$

הוא **הערך של המשחק**.

אסטרטגיות המקסמין והמינמקס של השחקנים נקראות **אסטרטגיות אופטימליות**.

דוגמה 5.9 ()

I \ II	L	C	R
T	3	-5	-2
M	1	4	1
B	6	-3	-5

פתרון:

I \ II	L	C	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u(s_1,s_2)$
T	3	-5	-2	-5
M	1	4	1	1
B	6	-3	-5	-5
$\max\limits_{s_1\in S_1} u(s_1,s_2)$	6	4	1	$1,1$

ערך המשחק: $v = 1$.

אסטרטגיות האופטימליות: $s_1 = M, s_2 = R$.

שחקן 1 יכול להבטיח שיקבל לפחות 1 באמצעות האסטרטגיה האופימלית M.

שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר 1 באמצעות האסטרטגיה האופימלית R.

נשים לב $s = (M, R)$ גם שיווי משקל נאש של המשחק. ■

5.7 * הוכחת המשפט: ש"מ יחיד הוא פתרון באסטרטגיות שולטות חזק במשחק n שחקנים

משפט 5.5

נתון משחק של n שחקנים בצורה אסטרטגית $G = ((S_1, \dots, S_n), (u_1, \dots, u_n))$.

אם הווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ הוא שיווי משקל נאש, אז s^* פתרון באסטרטגיות השולטות חזק.

הוכחה:
משפט זו אומר שאם הווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ הוא שיווי משקל נאש, אז s^* ישרוד תהליך סילוק חוזר של אסטרטגיות הנשלטות חזק.

נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ שיווי משקל נאש אבל הוא לא פתרון באסטרטגיות שולטות חזק.

אם כן אז תהי s_i^* האסטרטגיה הראשונה שנמחקה בתהליך סילוק חוזר.
ז"א קיימת אסטרטגיה $t_i \in S_i$ אשר שולטת חזק ב- s_i^*, כלומר

$$u_i\left(s_1, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n\right) < u_i\left(s_1, \ldots, t_i, \ldots, s_n\right) \quad . \tag{\#1}$$

לכל $s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n$ אשר עדיין נשארות בתהליך.

s_i^* בפרט, האסטרטגיות $s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*$ עדיין נשארים בתהליך אחרי שנמחקה אסטרטגיה s_i^*. לכן, לפי (#1),

$$u_i\left(s_1^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*\right) < u_i\left(s_1^*, \ldots, t_i, \ldots, s_n^*\right) \quad . \tag{\#2}$$

בסתירה לכך ש $s^* = \left(s_1^*, \ldots, s_n^*\right)$ הוא תשובה טובה ביותר לכל שחקן. ■

משפט 5.6

נתון משחק של n שחקנים בצורה אסטרטגית $G = \left(\left(S_1, \ldots, S_n\right), \left(u_1, \ldots, u_n\right)\right)$.

אם וקטור אסטרטגיות $s^* = \left(s_1^*, \ldots, s_n^*\right)$ הוא פתרון באסטרטגיות השולטות חזק אז s^* הוא השיווי משקל היחיד של המשחק.

הוכחה: נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי $\left(s_1^*, \ldots, s_n^*\right)$ הוא הווקטור אסטרטגיות היחיד שנשארת אחרי סילוק חוזר, אבל הוא לא שיווי משקל.
אם כן אז בהכרח קיימת אשטרטגיה s_i של שחקן i עבורה

$$u_i\left(s_1^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*\right) < u_i\left(s_1^*, \ldots, s_i, \ldots, s_n^*\right) \quad . \tag{\#3}$$

האסטרטגיה s_i נמחקה במהלך התהליך סילוק חוזר. לכן בהכרח קיימת אסטרטגיה s_i' אשר שולטת חזק ב- s_i, כלומר

$$u_i\left(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n\right) < u_i\left(s_1, \ldots, s_i', \ldots, s_n\right) \quad . \tag{\#4}$$

לכל אסטרטגיות $s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots s_n$ אשר נשארות בתהליך סילוק חוזר.

בפרט, האסטרטגיות $\left(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*\right)$ נשארות בתהליך אפילו אחרי שהורדנו s_i^*. לכן, לפי (#4),

$$u_i\left(s_1^*, \ldots, s_i, \ldots, s_n^*\right) < u_i\left(s_1^*, \ldots, s_i', \ldots, s_n^*\right) \quad . \tag{\#5}$$

אם $s_i' = s_i^*$ אז (#5) סותר את (#3).

אם לא אז קיימת עוד אסטרטגיה s_i'' אשר שולטת חזק ב- s_i'.
לכן במקום (#4) ו- (#5) נקבל

$$u_i\left(s_1, \ldots, s_i', \ldots, s_n\right) < u_i\left(s_1, \ldots, s_i'', \ldots, s_n\right) \quad . \tag{\#4'}$$

$$u_i\left(s_1^*, \ldots, s_i', \ldots, s_n^*\right) < u_i\left(s_1^*, \ldots, s_i'', \ldots, s_n^*\right) \quad . \tag{\#5'}$$

אם $s_i'' = s_i^*$ אז (#5') סותר את (#3). אם לא אז התהליך ממשיך עד שנגיע לסתירה ל- (#3).

■

5.8 *הוכחת המשפט: במשחק n שחקנים אסטרטגיה השולטת על שאר אסטרטגיות של שחקן היא אסטרטגית מקסמין

משפט 5.7

במשחק n שחקנים, אם אסטרטגיה σ_i של שחקן i השולטת על כל שאר האסטרטגיות שלו, אז

א) σ_i היא אסטרטגית מקסמין שלו.

ב) σ_i היא תשובה טובה ביותר לכל ווקטור אסטרטגיות של שאר השחקנים.

הוכחה:

א) נניח כי σ_i היא אסטרטגית השולטת על כל שאר האסטרטגיות של שחקן i.

יהי $t_{-i} \in S_{-i}$ ווקטור אסטרטגיות כך ש-

$$u_i(\sigma_i, t_{-i}) = \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(\sigma_i, s_{-i})$$

מכאן

$$\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(\sigma_i, s_{-i}) = u_i(\sigma_i, t_{-i}) \geq u_i(s_i, t_{-i}) \geq \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i})$$

כלומר

$$\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(\sigma_i, s_{-i}) \geq \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}) \ .$$

לפיכך

$$\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(\sigma_i, s_{-i}) = \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}) \ .$$

אבל $\underline{v}_i = \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i})$. לכן σ_i היא אסטרטגית מקסמין של שחקן i.

ב) לכל $s_{-i} \in S_{-i}$ מתקיים

$$u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(\sigma_i, s_{-i}) \ ,$$

ז"א σ_i שולטת חלש על כל שאר האסטרטגיות s_i של שחקן i. לכן σ_i תשובה טובה ביותר של שחרן i לכל ווקטור אסטרטגיות של שאר השחקנים.

■

משפט 5.8

במשחק n שחקנים, אם לכל שחקן יש אסטרטגיה s_i^* ששולטת חלש כל האסטרטגיות האחרות שלו, אז

א) הווקטור אסטרטגיות $(s_1^*, \cdots, s_n^*)$ שיווי משקל,

ב) s_i^* היא אסטרטגית מקסמין לכל שחקן i.

הוכחה:

א) נניח כי $(s_1^*, \cdots, s_n^*)$ ווקטור אסטרטגיות עבורו s_i^* שולטת חלש בכל האסטרטגיות האחרות של שחקן i. אז לפי משפט 5.7 (חלק 2) למעלה, s_i^* תשובה טובה ביותר של שחקן i, כלומר

$$u_i(s_1^*, \dots, s_i^*, \dots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \dots, s_i, \dots, s_n^*)$$

לכל $s_i \in S_i$. לפיכך הווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \cdots, s_n^*)$ הוא נקודת שיווי משקל.

ב) לפי משפט 5.7 (חלק 1), s_i^* היא אסטרטגית מקסמין של שחקן i. לפיכך הווקטור $s^* = (s_1^*, \cdots, s_n^*)$ הוא ווקטור אסטרטגיות מקסמין.

■

שעור 6
אסטרטגיות מעורבות

6.1 אסטרטגיות מעורבות

הגדרה 6.1 אסטרטגיה מעורבת

נתון משחק בצורה אסטרטגית $G=((S_1,\ldots,S_n),(u_1,\ldots,u_n))$. אסטרטגיה מעורבת היא פונקצית הסתברות על כל קבוצות האסטרטגיותת של השחקנים.
כלומר, אם $S_1=(s_{11},s_{12},\ldots,s_{1k_1})$ אז נגדיר פונקצית הסתברות

$$P_{S_1}(s_{11})=p_{11}\ ,\quad P_{S_1}(s_{12})=p_{12}\ ,\quad \ldots\quad P_{S_1}(s_{1k_1})=p_{1k_1}\ .$$

אם $S_2=(s_{21},s_{22},\ldots,s_{2k_2})$ אז נגדיר פונקצית הסתברות

$$P_{S_2}(s_{21})=p_{21}\ ,\quad P_{S_2}(s_{22})=p_{22}\ ,\quad \ldots\quad P_{S_2}(s_{2k_2})=p_{2k_2}\ .$$

אם $S_n=(s_{n1},s_{n2},\ldots,s_{nk_n})$ אז נגדיר פונקצית הסתברות

$$P_{S_n}(s_{n1})=p_{n1}\ ,\quad P_{S_n}(s_{n2})=p_{n2}\ ,\quad \ldots\quad P_{S_n}(s_{nk_n})=p_{nk_n}\ .$$

דוגמה 6.1 ()

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס.

I \ II	L	R
T	4	1
B	2	3

א) מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות טהורות.

ב) מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

א)

I \ II	L	R	$\min\limits_{s_2\in S_2}$
T	4	1	1
B	2	3	2
$\max\limits_{s_1\in S_1}$	4	3	2, 3

ערך המקסמין של שחקן 1:

$$\underline{\mathrm{v}}=\max_{s_1\in\{T,B\}}\ \min_{s_2\in\{L,R\}}=2\ .$$

ז"א שחקן 1 יכול להבטיח שיקבל לפחות 2 אם הוא ישחק B.

ערך המינמקס של שחקן 2:

$$\bar{\mathrm{v}} = \min_{s_2 \in \{L,R\}} \max_{s_1 \in \{T,B\}} = 3 \ .$$

ז"א שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר 3 אם הוא ישחק R.

$$\bar{\mathrm{v}} = 3 > 2 = \underline{\mathrm{v}} \ .$$

למשחק אין ערך.

ב) כאשר לשחקן 1 יש שתי אסטרטגיות טהורות T ו- B, נזהה את האסטרטגיה המעורבת

$$[x(T) \ , \ (1-x)(B)]$$

עם ההסתברות x שבה נבחרת האסטרטגיה הטהורה T.

באופן דומה, כאשר יש לשחקן 2 יש שתי אסטרטגיות טהורות L ו- R, נזהה את האסטרטגיה המעורבת

$$[y(L) \ , \ (1-y)(R)]$$

עם ההסתברות y שבה נבחרת האסטרטגיה הטהורה L.

לכל זוג אסטרטגיות מעורבות התשלום ניתן על ידי פונקצית התועלת

$$U(x,y) = 4xy + 1x(1-y) + 2(1-x)y + 3(1-x)(1-y) = 4xy - 2x - y + 3 \ .$$

ראשית נחשב לכל $x \in [0,1]$ את

$$\min_{y\in[0,1]} U(x,y) = \min_{y\in[0,1]} (4xy - 2x - y + 3) = \min_{y\in[0,1]} (y(4x-1) - 2x + 3)$$

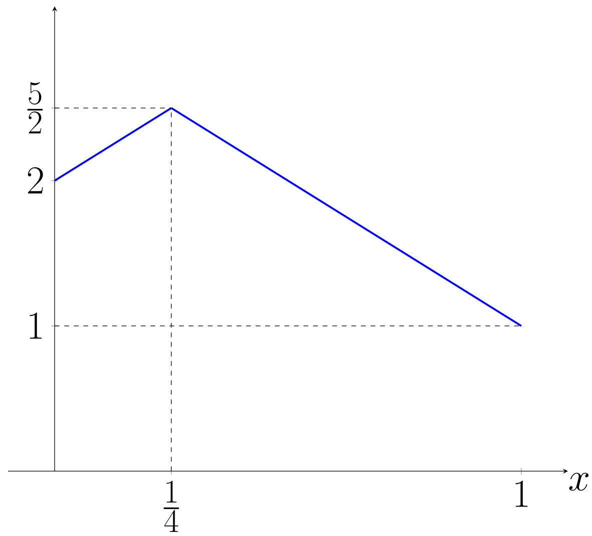
עבור x קבוע זוהי פונקציה לינארית ב- y, ולכן הנקודה שבה המינימום מתקבל נקבעת לפי השיפוע $4x-1$.

אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה והמינימום מתקבל ב- $y=0$.

אם השיפוע שלילי הפונקציה יורדת והמינימום מתקבל ב- $y=1$.

אם השיפוע 0 הפונקציה קבועה וכל הנקודות הן נקודות מינימום. לכן

$$\min_{y\in[0,1]} u(x,y) = \begin{cases} 2x+2 & x \leq \dfrac{1}{4} \ , \\ -2x+3 & x \geq \dfrac{1}{4} \ , \end{cases}$$

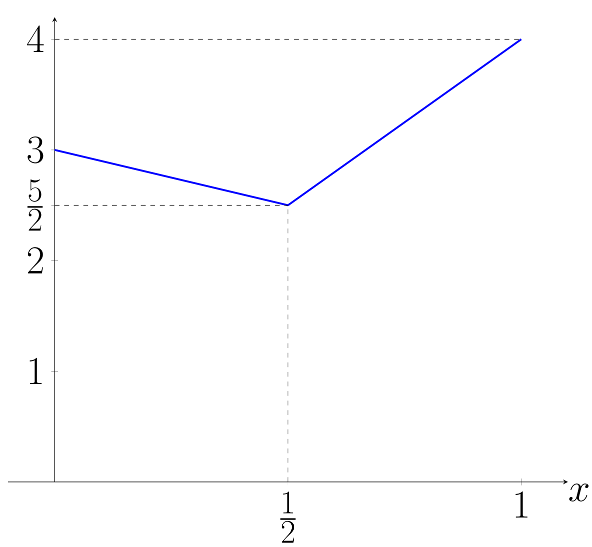


לפונקציה זו של x יש מקסימום יחיד ב- $x=\frac{1}{4}$ וערכו $\frac{5}{2}$. לכן

$$\underline{\mathrm{v}} = \max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} U(x,y) = \frac{5}{2} \ .$$

באופן דומה נחשב:

$$\begin{aligned}\max_{x\in[0,1]} U(x,y) &= \max_{x\in[0,1]} \left[4xy-2x-y+3\right]\\ &= \max_{x\in[0,1]} \left[x\left(4y-2\right)-y+3\right]\\ &= \begin{cases} -y+3 & y\leq \frac{1}{2} \ , \\ 3y+1 & y\geq \frac{1}{2} \ , \end{cases}\end{aligned}$$



לפונקציה זו של y יש מינימום יחיד ב- $y=\frac{1}{2}$ וערכו $\frac{5}{2}$. לכן

$$\bar{\mathrm{v}} = \min_{y\in[0,1]} \max_{x\in[0,1]} U(x,y) = \frac{5}{2} \ .$$

כלומר, למשחק יש ערך $\mathrm{v} = \underline{\mathrm{v}} = \overline{\mathrm{v}} = \dfrac{5}{2}$, והאסטרטגיות האופטימליות הן $x^* = \dfrac{1}{4},\ y^* = \dfrac{1}{2}$.

מכיוון ש- x^* ו- y^* הן אסטרטגיות האופטימליות היחיודת של השחקנים, אז (x^*, y^*) הוא שיווי המשקל נאש היחיד במשחק.

■

דוגמה 6.2 ()

נתון משחק שני שחקנים (שאינו סכום אפס) בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

$I \backslash II$	L	R
T	$1,-1$	$0,2$
B	$0,1$	$2,0$

מצאו התשלום מקסמין והתשלום מינמקס באסטרטגיות מעורבות.

מצאו שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

ראשית נחשב את התשלום מקסמין של השחקנים.

קבוצות האסטרטגיות של שחקן 1:

$$S_1 = \{[x(T), (1-x)(B)]\ \ ,\ x \in [0,1]\}\ .$$

המזוהה עם הקטע $[0,1]$.

קבוצות האסטרטגיות של שחקן 2:

$$S_2 = \{[y(L), (1-y)(R)]\ \ ,\ y \in [0,1]\}\ .$$

פונקצית התועלת של שחקן 1:

$$U_1(x,y) = xy + 2(1-x)(1-y) = 3xy - 2x - 2y + 2\ .$$

פונקצית התועלת של שחקן 2:

$$U_2(x,y) = -xy + 2x(1-y) + y(1-x) = -4xy + 2x + y\ .$$

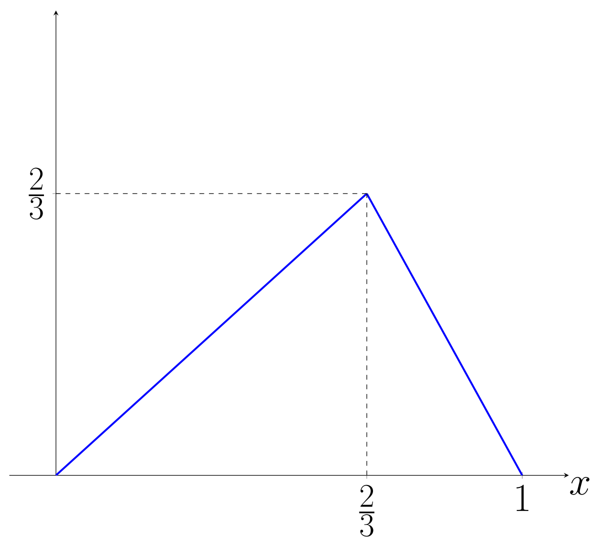
התשלום מקסמין של שחקן 1 הינו:

$$\underline{\mathrm{v}}_1 = \max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} U_1(x,y)\ .$$

התשלום מקסמין של שחקן 2 הינו:

$$\underline{\mathrm{v}}_2 = \max_{y\in[0,1]} \min_{x\in[0,1]} U_2(x,y)\ .$$

$$
\begin{aligned}
\min_{y\in[0,1]} U_1(x,y) &= \min_{y\in[0,1]} 3xy-2x-2y+2\\
&= \min_{y\in[0,1]} y\,(3x-2)-2x+2\\
&= \begin{cases} x & x\leq \frac{2}{3}\\ \\ -2x+2 & x\geq \frac{2}{3}\end{cases}
\end{aligned}
$$



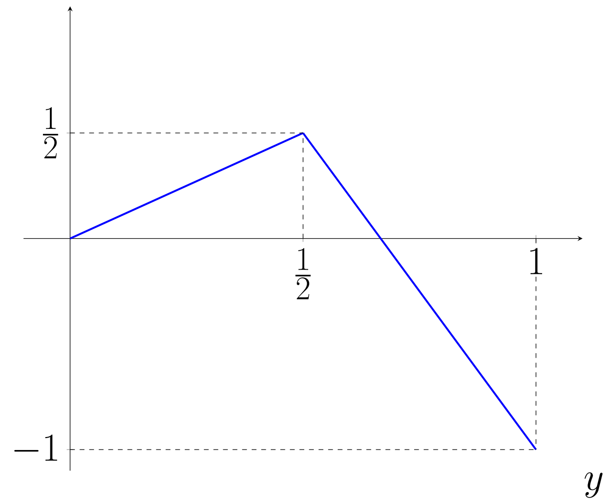
לפונקציה זו יש מקסימום ב- $x=\frac{2}{3}$. לפיכך

$$\underline{\mathrm{v}}_1=\max_{x\in[0,1]}\min_{y\in[0,1]} U_1(x,y)=\frac{2}{3}\ .$$

התשלום מקסמין של שחקן 2 הינו:

$$\underline{\mathrm{v}}_2=\max_{y\in[0,1]}\min_{x\in[0,1]} U_2(x,y)\ .$$

$$
\begin{aligned}
\min_{x\in[0,1]} U_2(x,y) &= \min_{x\in[0,1]} 3xy-2x-2y+2\\
&= \min_{x\in[0,1]} x\,(2-4y)+y\\
&= \begin{cases} y & y\leq \frac{1}{2}\\ \\ 2-3y & y\geq \frac{1}{2}\end{cases}
\end{aligned}
$$



לפונקציה זו יש מקסימום ב- $y = \frac{1}{2}$. לפיכך

$$\underline{\mathrm{v}}_2 = \max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} U_2(x,y) = \frac{1}{2} \ .$$

כעת נחשב את השיווי משקל של המשחק באסטרטגיות מעורבות. נסמן תשובה טובה ביותר של שחקן 2 לאסטרטגיה x של שחקן 1 כ:

$$\sigma_2(x) = \operatorname*{argmax}_{y\in[0,1]} U_2(x,y) = \{y \in [0,1], U_2(x,y) \geq U_2(x,z) \forall z \in [0,1]\}$$

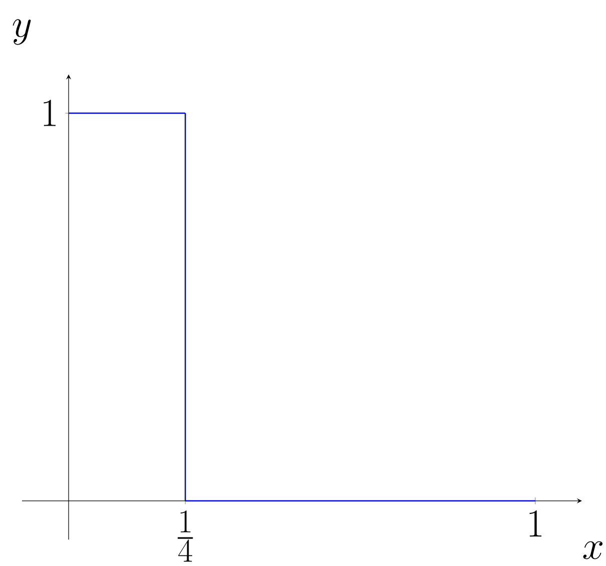
במילים פשוטות $\sigma_2(x)$ הוא אוסף של כל הערכים של y עבורם ל- $U_2(x,y)$ יש מקסימום.

כדי לחשב את $\sigma_2(x)$ רושמים $U_2(x,y)$ בצורה

$$U_2(x,y) = y(1-4x) + 2x \ .$$

עבור x קבוע זוהי פונקציה לינארית ב- y, ולכן הנקודה שבה המינימום מתקבל נקבעת לפי השיפוע $1-4x$.
אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה והמקסימום מתקבל ב- $y=1$.
אם השיפוע שלילי הפונקציה יורדת והמקסימום מתקבל ב- $y=0$.

אם השיפוע 0 הפונקציה קבועה וכל הנקודות הן נקודות מקסימום. הסימן של השיפוע משתנה ב- $x=\frac{1}{4}$. הגרף של $\sigma_2(x)$ מתואר להלן.



שימו לב ש- $\sigma_2(x)$ לא פונקציה בגלל ש- $\sigma_2\left(\frac{1}{4}\right)$ לא שווה לנקודה אלא לתחום $[0,1]$.

נסמן תשובה טובה ביותר של שחקן 1 לאסטרטגיה y של שחקן 2 כ:

$$\sigma_1(y) = \underset{x\in[0,1]}{\operatorname{argmax}}\, U_1(x,y) = \{x \in [0,1], U_1(x,y) \geq U_1(x,z) \forall z \in [0,1]\}$$

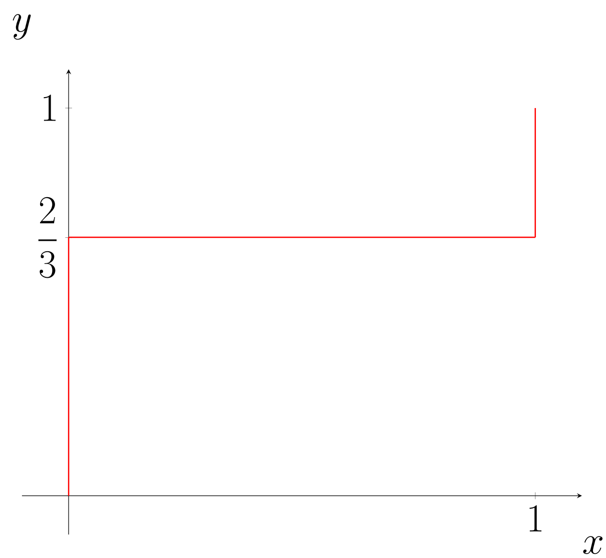
במילים פשוטות $\sigma_1(y)$ הוא אוסף של כל הערכים של x עבורם ל- $U_1(x,y)$ יש מקסימום.

כדי לחשב את $\sigma_1(y)$ רושמים $U_1(x,y)$ בצורה

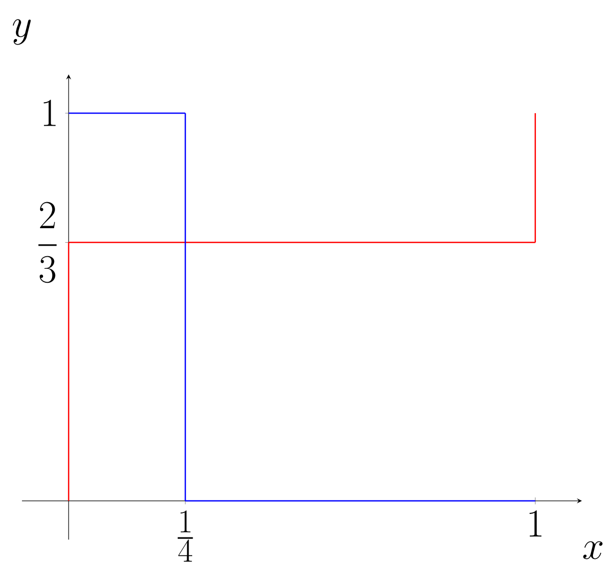
$$U_1(x,y) = x(3y-2) - 2y + 2\ .$$

עבור y קבוע זוהי פונקציה לינארית ב- x, ולכן הנקודה שבה המינימום מתקבל נקבעת לפי השיפוע $3y-2$.
אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה והמקסימום מתקבל ב- $x=1$.
אם השיפוע שלילי הפונקציה יורדת והמקסימום מתקבל ב- $x=0$.

אם השיפוע 0 הפונקציה קבועה וכל הנקודות הן נקודות מקסימום. הסימן של השיפוע משתנה ב- $y=\frac{2}{3}$. הגרף של $\sigma_1(y)$ מתואר להלן.



הצמד אסטרטגיות (x^*,y^*) נקודת שיווי משקל אם ורק אם $x^* \in \sigma_1(y^*)$ ו- $y^* \in \sigma_2(x^*)$. במילים אחרות נדרש כי הנקודה (x^*,y^*) תהיה על שני הגרפים של $\sigma_2(x)$ ו- $\sigma_1(y)$. הנקודה היחידה שמקיימת את התנאי הזה היא $\left(x^*=\frac{1}{4}, y^*=\frac{2}{3}\right)$.



לכן השיווי משקל היחיד של המשחק הוא $\left(x^*=\frac{1}{4},y^*=\frac{2}{3}\right)$ והתשלומים לשחקן 1 ולשחקן 2 של השיווי משקל הם

$$U_1\left(x^*,y^*\right)=\frac{2}{3}\ , \qquad U_2\left(x^*,y^*\right)=\frac{1}{2}\ .$$

■

6.2 שיטה ישירה למציאת אסטרטגיה אופטימלית

דוגמה 6.3 ()

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

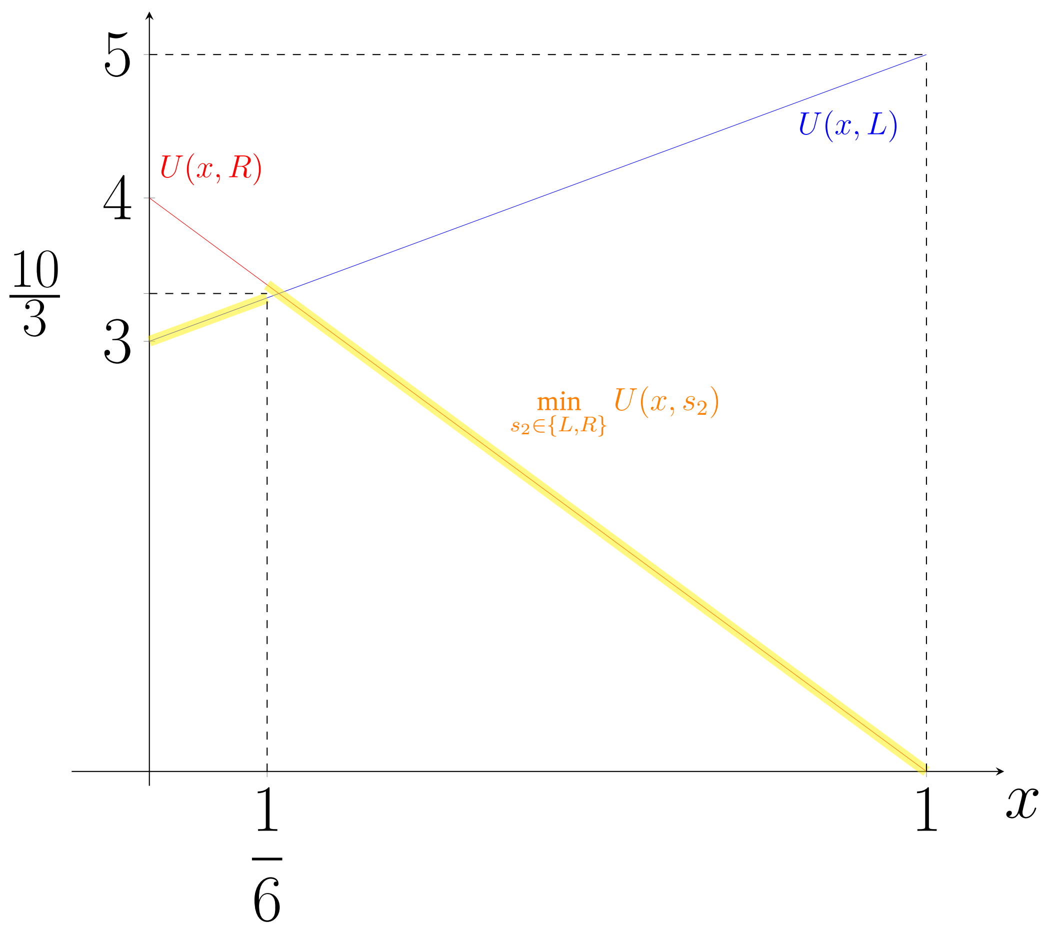
$I \backslash II$	L	R
T	5	0
B	3	4

מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:
תחילה נחשב את המקסמין של שחקן 1. אם שחקן 1 משחק את האסטרטגיה המעורבת $[x(T),(1-x)(B)]$ התשלום שלו כפונקציה של x תלוי על האסטרטגיה של שחקן 2:

- אם שחקן 2 משחק L אז $U(x,L)=5x+3(1-x)=2x+3.$
- אם שחקן 2 משחק R אז $U(x,R)=4(1-x)=-4x+4.$

הגרף למטה מראה את הגרפים של הפונקציות האלו. הקו של $\min\limits_{s_2\in\{L,R\}} U(x,s_2)$ מראה את התשלום המינימלי ששחקן 1 יקבל אם הוא משחק x. הקו הזה נקרא **מעטפת תחתונה** של התשלומים.



הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות שווה ל- $\max\limits_{x\in[0,1]}\min\limits_{s_2\in\{L,R\}} U(x,s_2)$, אשר מתקבל בנקודת מקסימום של המעטפת התחתונה. המקסימום מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של שתי הפונקציות, כלומר בנקודה

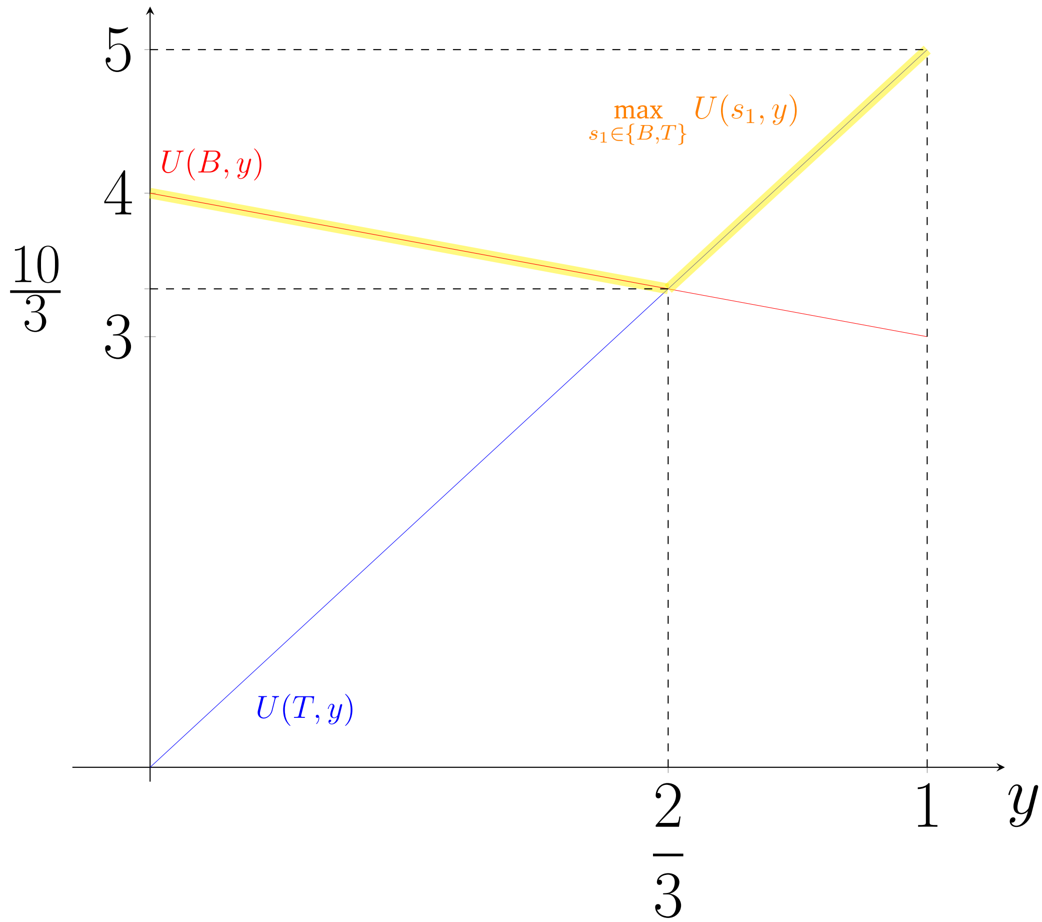
$$2x+3=-4x+4 \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{1}{6}\ .$$

מכאן האסטרטגיה האופטילית של שחקן 1 היא $x^*=\left(\frac{1}{6}(T),\frac{5}{6}(B)\right)$. הערך של המשחק שווה לגובה של הנקודת חיתוך: $\mathrm{v}=\frac{10}{3}$.

כעת נחשב את המינמקס של שחקן 2. אם שחקן 2 משחק את האסטרטגיה המעורבת $[y(L),(1-y)(R)]$ התשלום שלו כפונקציה של y תלוי על האסטרטגיה של שחקן 1:

- אם שחקן 1 משחק T אז $U(T,y)=5y.$
- אם שחקן 1 משחק B אז $U(B,y)=4-y.$

הגרף למטה מראה את הגרפים של הפונקציות האלו. הקו של $\max\limits_{s_1\in\{B,T\}} U(s_1,y)$ מראה את התשלום המקסימלי ששחקן 2 יקבל אם הוא משחק y. הקו הזה נקרא **מעטפת עליונה** של התשלומים.



הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות שווה ל- $\min_{y\in[0,1]} \max_{s_1\in\{B,T\}} U(s_1,y)$, אשר מתקבל בנקודת מינימום של המעטפת העליונה. המינימום מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של שתי הפונקציות, כלומר בנקודה

$$5y = 4 - y \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{2}{3} \ .$$

מכאן האסטרטגיה האופטילית של שחקן 2 היא $y^* = \left(\frac{2}{3}(L), \frac{1}{3}(R)\right)$. הערך של המשחק שווה לגובה של הנקודת חיתוך: $\mathrm{v} = \frac{10}{3}$. ■

דוגמה 6.4 ()

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

I \ II	L	M	R
T	2	5	-1
B	1	-2	5

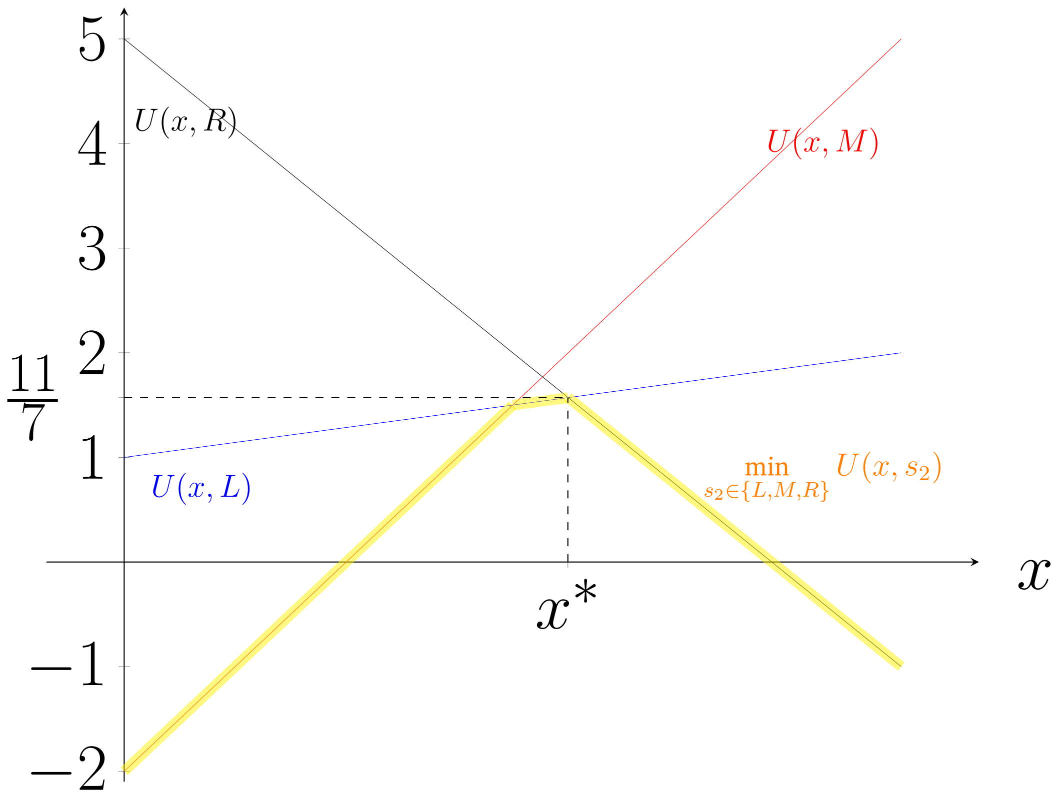
מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:
נחשב את המקסמין של שחקן 1. אם שחקן 1 משחק את האסטרטגיה המעורבת $[x(T),(1-x)(B)]$ התשלום שלו כפונקציה של x תלוי על האסטרטגיה של שחקן 2:

- אם שחקן 2 משחק L אז $U(x,L) = 2x + (1-x) = 1 + x.$

- אם שחקן 2 משחק M אז $U(x,M)=5x-2(1-x)=7x-2.$
- אם שחקן 2 משחק R אז $U(x,R)=-x+5(1-x)=-6x+5.$

התרשים למטה מתאר את הגרפים של שלוש פונקציות אלו.



המקסימום של המעטפת התחתונה מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של $U(x,L)$ ו- $U(x,R)$:

$$1+x\stackrel{!}{=}-6x+5 \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{4}{7}$$

■

6.3 חישוב נקודות שיווי משקל באסטרטגיות מערבות

דוגמה 6.5 ()

נתון משחק שני שחקנים בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

$I \backslash II$	F	C
F	$2,1$	$0,0$
C	$0,0$	$1,2$

מצאו שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

לכל אסטרטגיה מעורבת, $[x(F),(1-x)(C)]$ של שחקן 1, הקבוצת תשובות טובות ביותר של שחקן 2 הן

$$\sigma_2(x) = \underset{y\in[0,1]}{\arg\max}\, u_2(x,y) = \left\{ y \in [0,1] \,\middle|\, u_2(x,y) \geq u_2(x,z) \forall z \in [0,1] \right\} \ .$$

כדי לחשב את $\sigma_2(x)$, נרשום את $U_2(x,y)$:

$$U_2(x,y) = xy + 2(1-x)(1-y) = 3xy - 2x - 2y + 2 = y(3x-2) - 2x + 2 \ .$$

לכל x קבוע זוהי פונקציה לינארית של y.

- $x > \frac{2}{3}$ $\Leftarrow$ השיפוע חיובי ויש מקסימום ב- $y = 1$.
- x$x < \frac{2}{3}$ $\Leftarrow$ השיפוע שלילי ויש מקסימום ב- $y = 0$.
- $x = \frac{2}{3}$ $\Leftarrow$ השיפוע שווה אפס והפונקציה קבוע וכל נקודה $y \in [0,1]$ נקודת מקסימום.

השיפוע משתנה מחיובי לשלילי ב- $x = \frac{2}{3}$. הגרף של $\sigma_2(x)$ מתואר בתרשים למטה.

באותה מידה, לכל אסטרטגיה מעורבת, $[y(F),(1-y)(C)]$ של שחקן 2, הקבוצת תשובות טובות ביותר של שחקן 1 הן

$$\sigma_1(y) = \underset{x\in[0,1]}{\arg\max}\, u_1(x,y) = \left\{ x \in [0,1] \,\middle|\, u_1(x,y) \geq u_1(z,y) \forall z \in [0,1] \right\} \ .$$

כדי לחשב את $\sigma_1(y)$, נרשום את $U_1(x,y)$:

$$U_1(x,y) = 2xy + (1-x)(1-y) = 3xy - x - y + 1 = x(3y-1) - y + 1 \ .$$

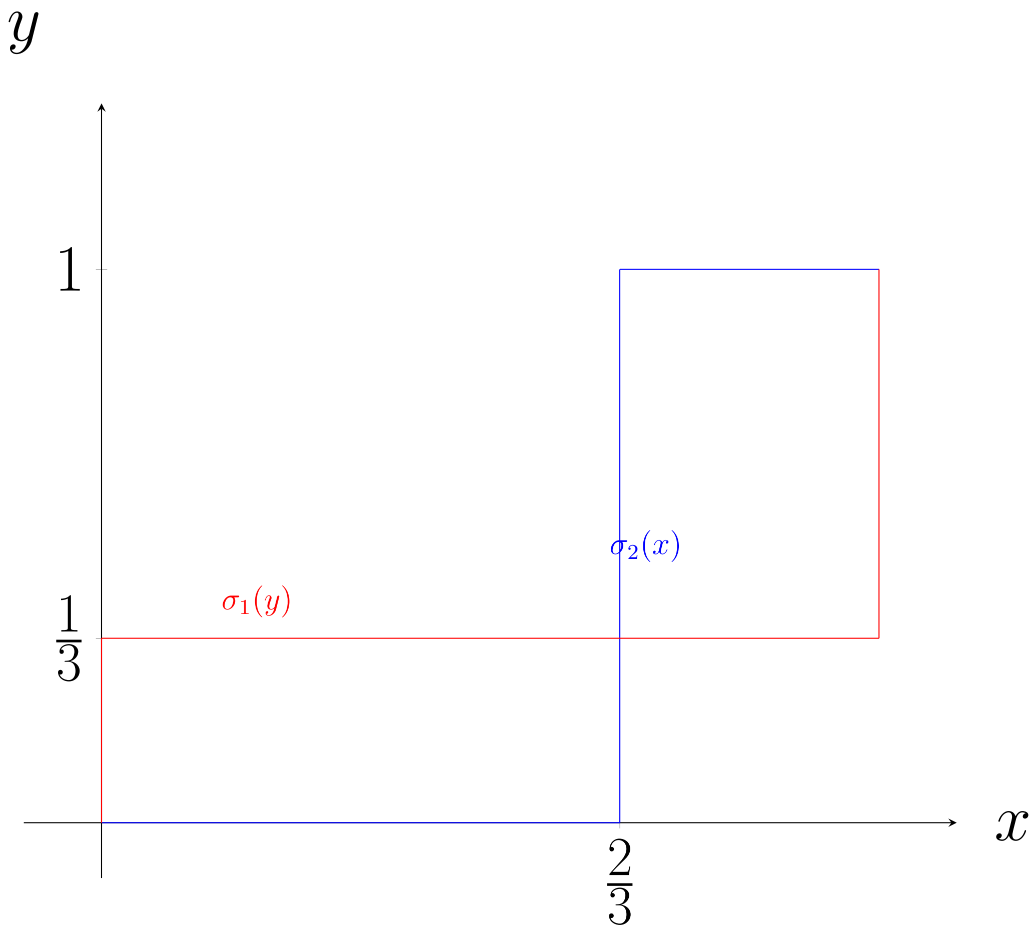
לכל y קבוע זוהי פונקציה לינארית של x.

- $y > \frac{1}{3}$ $\Leftarrow$ השיפוע חיובי ויש מקסימום ב- $x = 1$.
- $y < \frac{1}{3}$ $\Leftarrow$ השיפוע שלילי ויש מקסימום ב- $x = 0$.
- $y = \frac{1}{3}$ $\Leftarrow$ השיפוע שווה אפס והפונקציה קבוע וכל נקודה $x \in [0,1]$ נקודת מקסימום.

השיפוע משתנה מחיובי לשלילי ב- $y = \frac{1}{3}$. הגרף של $\sigma_1(y)$ מתואר בתרשים למטה.

לסיכום, עבור משחק זה,

$$\sigma_2(x) = \begin{cases} 0 & x < \frac{2}{3} \ , \\ [0,1] & x = \frac{2}{3} \ , \\ 1 & x > \frac{2}{3} \ , \end{cases} \ , \qquad \sigma_1(y) = \begin{cases} 0 & y < \frac{1}{3} \ , \\ [0,1] & x = \frac{1}{3} \ , \\ 1 & y > \frac{1}{3} \ , \end{cases}$$



נקודה (x^*, y^*) היא שיווי משקל אם ורק אם $x^* \in \sigma_1(y^*)$ ו- $y^* \in \sigma_2(x^*)$. ז"א (x^*, y^*) נקודת שיווי משקל אם ורק אם היא נקודת חיתוך של הגרפים של $\sigma_1(y)$ ו- $\sigma_2(x)$. יש 3 נקודות חיתוך:

- $(x^*, y^*) = (0, 0)$ אשר מתאימה לאסטרטגיה טהורה (C, C).
- $(x^*, y^*) = (1, 1)$ אשר מתאימה לאסטרטגיה טהורה (F, F).
- $(x^*, y^*) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ אשר היא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות

$$x^* = \left[\frac{2}{3}(F), \frac{1}{3}(C)\right] \ , \qquad y^* = \left[\frac{1}{3}(F), \frac{2}{3}(C)\right] \ ,$$

■

6.4 תחרות דואפול על פי קורנוט

דוגמה 6.6 ()

שני יצרניים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאלים. היצרנים מחליטים סימולטנית על הכמות שהם ייצרו, וההיצע הכולל קובע את מחיר המוצר, שהוא זהה לשני היצרנים. נסמן ב- q_1 וב- q_2 את הכמויות שמייצרים היצרנים 1 ו- 2 בהתאמה. אזי הכמות הכוללת של מוצרים בשוק היא $q_1 + q_2$. נניח כי המחיר של יחידה שווה ל-

$$2 - q_1 - q_2 \ .$$

עלות הייצור של יחידה ליצרן הראשון היא $c_1 > 0$ וליצרן השני היא $c_2 > 0$. האם קיים שיווי משקל במשחק

זה, ואם כן, מה הוא?

פתרון:
זהו משחק שני שחקנים (היצרנים 1 ו- 2) שבו קבוצת האסטטרגיות של כל שחקן היא $[0,\infty)$. אם שחקן 1 בוחר באסטרטגיה q_1 ושחקן q_2 בוחר באסטרטגיה q_2, התשלום לשחקן 1 הוא

$$u_1(q_1,q_2) = q_1(2-q_1-q_2) - q_1c_1 = q_1(2-c_1-q_1-q_2)\ , \qquad (*)$$

והתשלום לשחקן 2 הוא

$$u_2(q_1,q_2) = q_2(2-q_1-q_2) - q_1c_2 = q_2(2-c_2-q_1-q_2)\ .$$

התשובה בטובה ביותר של שחקן 1 לאסטרטגיה q_2 של שחקן 2 הוא ערך q_1 המביא למקסימום את $u_1(q_1,q_2)$. הפונקציה $q_1 \mapsto u_1(q_1,q_2)$ היא פונקציה ריבועית עם מקסימום בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_1(q_1,q_2)}{\partial q_1} = 0\ .$$

על ידי גזירה של אגף ימין של משוואה (*) נקבל את התנאי $2-c_1-2q_1-q_2=0$ או

$$q_1 = \frac{2-c_1-q_2}{2}\ . \qquad (1*)$$

באותו אופן, התשובה הטובה ביותר של שחקן 2 לאסטרטגיה q_1 של שחקן 1 היא ערך q_2 שבו הנגדרת של $u_2(q_1,q_2)$ לפי q_2 מתאפסת. על ידי גזירה נקבל

$$q_2 = \frac{2-c_2-q_1}{2}\ . \qquad (2*)$$

פתרון המשוואות (1*) ו- (2*) נותן

$$q_1^* = \frac{2-2c_1+c_2}{3}\ , \qquad q_2^* = \frac{2-2c_2+c_1}{3}\ .$$

זה אמנם שיווי משקל וזהו שיווי משקל היחיד של המשחק. התשלומים של השחקנים בשיווי משקל זה הם

$$u_1\left(q_1^*,q_2^*\right) = \left(\frac{2-2c_1+c_2}{3}\right)^2 = (q_1^*)^2\ , \qquad u_2\left(q_1^*,q_2^*\right) = \left(\frac{2-2c_2+c_1}{3}\right)^2 = (q_2^*)^2\ .$$

כעת נוכיח כי הצמד אסטרטגיות (q_1^*,q_2^*) מהווה נקודת שיווי משקל. יש להוכיח כי q_1^* תשובה טובה ביותר לשחקן 1 ביחס ל- q_2^* ולהפך.

$$u(q_1,q_2^*) = q_1(2-c_1-q_1-q_2^*) = -q_1^2 + (2-c_1-q_2^*)q_1\ .$$

לכן $u(q_1,q_2^*)$ פולינום מסדר 2 של q_1, כאשר המקדם של q_1^2 הוא -1. לכן המקסימום המתקבל הוא

$$q_1 = \frac{(2-c_1-q_2^*)}{2} = \frac{\left(2-c_1-\frac{2-2c_2+c_1}{3}\right)}{2} = q_1^*\ .$$

בפרט q_1^* תשובה טובה ביותר של שחקן 2 ביחס ל- q_2^*.

■

י

שעור 7
משחק בייסיאני

7.1 עקרון האדישות

משפט 7.1 עקרון האדישות במשחק שני שחקנים

יהי σ^* שיווי משקל במשחק בצורה אסטרטגית.

- תהיינה s_1 ו- $\hat{s}_1$ שתי אסטרטגיות טהורות של שחקן 1. אם $\sigma_1^*(s_1) > 0$ וכן $\sigma_1^*(\hat{s}_1) > 0$ אזי
$$U_1(s_1, \sigma_2^*) = U_1(\hat{s}_1, \sigma_2^*) \ .$$
- תהיינה s_2 ו- $\hat{s}_2$ שתי אסטרטגיות טהורות של שחקן 2. אם $\sigma_2^*(s_2) > 0$ וכן $\sigma_2^*(\hat{s}_2) > 0$ אזי
$$U_2(\sigma_1^*, s_2) = U_2(\sigma_1^*, \hat{s}_2) \ .$$

משפט 7.2 *עקרון האדישות במשחק n שחקנים

יהי σ^* שיווי משקל במשחק בצורה אסטרטגית ותהיינה s_i ו- $\hat{s}_i$ שתי אסטרטגיות טהורות של שחקן i. אם $\sigma_i^*(s_i) > 0$ וכן $\sigma_i^*(\hat{s}_i) > 0$ אזי
$$U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) = U_i\left(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*\right) \ .$$

דוגמה 7.1 ()

נתון המשחק הבא בצורה אסטרטגית.

I \ II	L	R
T	$1,-1$	$0,2$
B	$0,1$	$2,0$

מצאו כל שיווי משקל של המשחק.

פתרון:
נבדוק שיווי משקל באסטרטגיות טהורות:

I \ II	L	R
T	$\underline{1},-1$	$0,\underline{2}$
B	$0,\underline{1}$	$\underline{2},0$

ז"א אין נקודת שיווי משקל באסטרטגיות טהורות. לכן בהכרח קיימת נקודת שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

<u>שיטה 1</u>

קבוצות האסטרטגיות של שחקן 1: $S_1 = \{[x(T), (1-x)(B)] \ , \ x \in [0,1]\}$.
המזוהה עם הקטע $[0,1]$.
קבוצות האסטרטגיות של שחקן 2: $S_2 = \{[y(L), (1-y)(R)] \ , \ y \in [0,1]\}$
המזוהה עם הקטע $[0,1]$.
פונקצית התועלת של שחקן 1: $U_1(x,y) = xy + 2(1-x)(1-y) = 3xy - 2x - 2y + 2.$
פונקצית התועלת של שחקן 2: $U_2(x,y) = -xy + 2x(1-y) + y(1-x) = -4xy + 2x + y.$

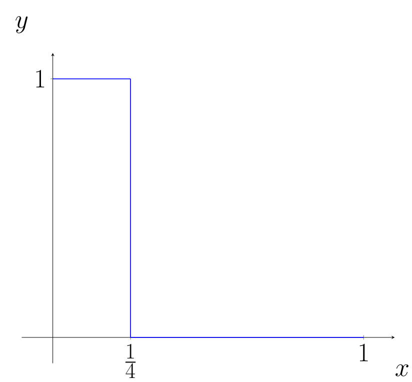
נסמן תשובה טובה ביותר של שחקן 2 לאסטרטגיה x של שחקן 1 כ:

$$\sigma_2(x) = \underset{y\in[0,1]}{\text{argmax}}\, U_2(x,y) = \{y \in [0,1], U_2(x,y) \geq U_2(x,z) \forall z \in [0,1]\}$$

ז"א $\sigma_2(x)$ הוא אוסף של כל הערכים של y עבורם ל- $U_2(x,y)$ יש מקסימום. נרשום $U_2(x,y)$ כפונקציה לינארית של y:

$$U_2(x,y) = y(1-4x) + 2x \ .$$

אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה והמקסימום מתקבל ב- $y=1$.
אם השיפוע שלילי הפונקציה יורדת והמקסימום מתקבל ב- $y=0$.
אם השיפוע 0 הפונקציה קבועה וכל הנקודות הן נקודות מקסימום והסימן של השיפוע משתנה ב- $x=\frac{1}{4}$.



נסמן תשובה טובה ביותר של שחקן 1 לאסטרטגיה y של שחקן 2 כ:

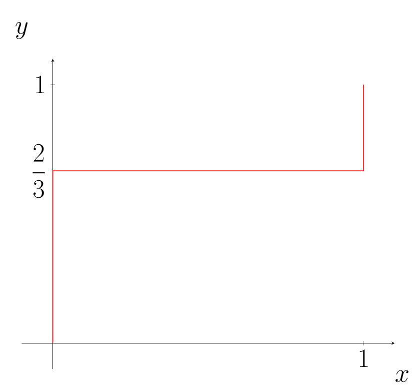
$$\sigma_1(y) = \underset{x\in[0,1]}{\text{argmax}}\, U_1(x,y) = \left\{x \in [0,1] \,\middle|\, U_1(x,y) \geq U_1(x,z) \forall z \in [0,1]\right\}$$

ז"א $\sigma_1(y)$ הוא אוסף של כל הערכים של x עבורם ל- $U_1(x,y)$ יש מקסימום.

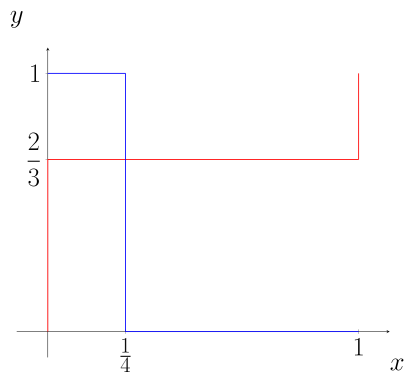
נרשום את $U_1(x,y)$ כפונקציה ליניארית של x:

$$U_1(x,y) = x(3y-2) - 2y + 2 \ .$$

אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה והמקסימום מתקבל ב- $x=1$.
אם השיפוע שלילי הפונקציה יורדת והמקסימום מתקבל ב- $x=0$.
אם השיפוע 0 הפונקציה קבועה וכל הנקודות הן נקודות מקסימום והסימן של השיפוע משתנה ב- $y=\frac{2}{3}$.



צמד אסטרטגיות (x^*,y^*) נקודת שיווי משקל אם ורק אם $x^*\in\sigma_1(y^*)$ ו- $y^*\in\sigma_2(x^*)$, כלומר אם ורק אם הנקודה (x^*,y^*) תהיה על שני הגרפים של $\sigma_2(x)$ ו- $\sigma_1(y)$. הנקודה היחידה שמקיימת את תנאי זה היא $\left(x^*=\frac{1}{4},y^*=\frac{2}{3}\right)$.



לכן השיווי משקל היחיד של המשחק הוא $\left(x^*=\frac{1}{4},y^*=\frac{2}{3}\right)$ והתשלומים לשחקנים 1 ו- 2 של השיווי משקל הם

$$U_1\left(x^*,y^*\right)=\frac{2}{3}\ ,\qquad U_2\left(x^*,y^*\right)=\frac{1}{2}\ .$$

<u>שיטה 2</u>

לכל שתי זוג אסטרטגיות מעורבות (x,y) מתקיים

$$U_1(T,y)=y\ ,\quad U_1(B,y)=2(1-y)\ ,\quad U_2(x,L)=1-2x\ ,\quad U_2(x,R)=2x\ .$$

מעקרון האדישות, בשיווי משקל בהכרח שחקן 1 אדיש בין T ל- B, ושחקן 2 אדיש בין L ו- R.
כלומר, אם (x^*,y^*) שיווי המשקל אזי

- שחקן 1 אדיש בין T ל- B:

$$U_1\left(T,y^*\right)=U_1\left(B,y^*\right)\quad\Rightarrow\quad y^*=2\left(1-y^*\right)\quad\Rightarrow\quad y^*=\frac{2}{3}\ .$$

- שחקן 2 אדיש בין L ל- R:

$$U_2\left(x^*,L\right)=U_2\left(x^*,R\right)\quad\Rightarrow\quad 1-2x^*=2x^*\quad\Rightarrow\quad x^*=\frac{1}{4}$$

וקיבלנו אמנם את שיווי משקל שמצאנו קודם.

■

7.2 תחרות דואפול על פי קורנוט

דוגמה 7.2 ()

שני יצרניים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאלים. יהי q_1 כמות המוצר שיצרן 1 מייצר ו- q_2 כמות המוצר שיצרן 2 מייצר. הכמות הכוללת של מוצרים בשוק היא

$$Q=q_1+q_2\ .$$

יהי $P(Q)$ המחיר של יחידה של המוצר בשוק:

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & Q < a \\ 0 & Q \geq a \end{cases} .$$

(a פרמטר שמכמת ביקוש למוצר בשוק שנקרא **פרמטר הביקוש**.) נניח כי עלות הייצור של יחידה ליצרן 1 ועלות הייור של יחידה וליצרן 2 נתונות על ידי

$$C_1(q_1) = cq_1 \ , \qquad C_2(q_2) = cq_2 \ .$$

מצאו את השיווי משקל של המשחק.

פתרון:

זהו משחק שני שחקנים (היצרנים 1 ו- 2). האסטרטגיות של שחקן 1 הן הכמויות q_1 שהוא בוחר לייצר, אשר קבוצה רציפה של ערכים חיוביים, ובאותה מידה האסטרטגיות לשחקן 2 הן הקבוצה הרציפה של כמויות q_2. לכן קבוצת האטסטרגיות של כל שחקן היא $[0,\infty)$.

אם שחקן 1 בוחר באסטרטגיה q_1 ושחקן 2 בוחר באסטרטגיה q_2, התשלום לשחקן 1 הוא

$$u_1(q_1,q_2) = q_1(a-q_1-q_2) - q_1 c = q_1(a-c-q_1-q_2) \ ,$$

והתשלום לשחקן 2 הוא

$$u_2(q_1,q_2) = q_2(a-q_1-q_2) - q_1 c = q_2(a-c-q_1-q_2) \ .$$

במשחק שני שחקנים ווקטור אסטרטגיות (s_1^*, s_2^*) שיווי משקל אם

$$\begin{aligned} u_1(s_1^*,s_2^*) &\geq u_1(s_1,s_2^*) \qquad \forall s_1 \in S_1 \ , \\ u_2(s_1^*,s_2^*) &\geq u_2(s_1^*,s_2) \qquad \forall s_2 \in S_2 \ . \end{aligned}$$

ז"א s_1^* הנקודה שבה

$$u_1(s_1^*,s_2^*) = \max_{s_1\in S_1} u_1(s_1,s_2^*) \ ,$$

ו- s_2^* הנקודה שבה

$$u_2(s_1^*,s_2^*) = \max_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2) \ .$$

במודל של קורנוט, תנאי זה הוא כי הווקטור אסטרטגיות (q_1^*, q_2^*) שיווי משקל אם לכל שחקן:

$$u_1(q_1^*,q_2^*) = \max_{0\leq q_1\leq\infty} u_1(q_1,q_2^*) = \max_{0\leq q_1\leq\infty} \left[q_1\left(a-c-q_1-q_2^*\right)\right]$$

ו-

$$u_2(q_1^*,q_2^*) = \max_{0\leq q_2\leq\infty} u_1(q_1^*,q_2) = \max_{0\leq q_2\leq\infty} \left[q_2\left(a-c-q_1^*-q_2\right)\right] \ .$$

המקסימום של $u_1(q_1,q_2^*)$ לפי q_1 מתקבל בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_1(q_1,q_2^*)}{\partial q_1} = a-c-2q_1-q_2^* \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_1^* = \frac{a-c-q_2^*}{2} \ .$$

ובאותה מידה המקסימום של $u_2(q_1^*,q_2)$ לפי q_2 מתקבל בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_2(q_1^*,q_2)}{\partial q_2} = a-c-q_1^*-2q_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_2^* = \frac{a-c-q_1^*}{2} \ .$$

לפיכך, אם הצמד כמויות (q_1^*, q_2^*) שיווי משקל אז הכמויות חייבות לקיים את התנאים

$$q_1^* = \frac{1}{2}(a - q_2^* - c) , \qquad q_2^* = \frac{1}{2}(a - q_1^* - c) .$$

הפתרון למערכת זו הינו

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3} .$$

■

דוגמה 7.3 ()

שני יצרניים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאלים. יהי q_1 כמות המוצר שיצרן 1 מייצר ו- q_2 כמות המוצר שיצרן 2 מייצר. שחקן 1 בוחר המחיר של המוצר שלו להיות p_1 ליחידה, ושחקן 2 בוחר המחיר של המוצר שלו להיות p_2 ליחידה. הכמות q_1 ששחקן 1 צריך לייצר נקבע על ידי הפונקציה

$$q_1 = a - p_1 + bp_2$$

כאשר $b > 0$ והכמות q_2 ששחקן 2 צריך לייצר נקבע על ידי הפונקציה

$$q_2 = a - p_2 + bp_1 .$$

מצאו את השיווי משקל של המשחק.

פתרון:
האסטרטגיות של שחקן 1 הן המחירים p_1 שהוא בוחר, אשר מהווה קבוצה רציפה של ערכים חיוביים, ובאותה מידה האסטרטגיות לשחקן 2 הן הקבוצה הרציפה של מחירים p_2. לכן קבוצת האטסטרגיות של כל שחקן היא $[0, \infty)$.

אם שחקן 1 בוחר באסטרטגיה p_1 ושחקן 2 בוחר באסטרטגיה q_2, התשלום לשחקן 1 הוא

$$u_1(p_1, p_2) = p_1 q_1 - c q_1 = (p_1 - c)(a - p_1 + bp_2)$$

והתשלום לשחקן 2 הוא

$$u_2(p_1, p_2) = p_2 q_2 - c q_2 = (p_2 - c)(a - p_2 + bp_1)$$

הווקטור אסטרטגיות (p_1^*, p_2^*) שיווי משקל אם לכל שחקן:

$$u_1(p_1^*, p_2^*) = \max_{0 \le p_1 \le \infty} u_1(p_1, q_2^*) = \max_{0 \le p_1 \le \infty} [(p_1 - c)(a - p_1 + bp_2^*)]$$

ו-

$$u_2(p_1^*, p_2^*) = \max_{0 \le p_2 \le \infty} u_1(p_1^*, p_2) = \max_{0 \le p_2 \le \infty} [(p_2 - c)(a - p_2 + bp_1^*)]$$

המקסימום של $u_1(p_1, p_2^*)$ לפי p_1 מתקבל בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_1(p_1, p_2^*)}{\partial p_1} = a - 2p_1 + bp_2^* + c \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad p_1^* = \frac{a + c + bp_2^*}{2} ,$$

והמקסימום של $u_2(p_1^*, p_2)$ לפי p_2 מתקבל בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_2(p_1^*, p_2)}{\partial p_2} = a - 2p_2 + bp_1^* + c \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad p_2^* = \frac{a + c + bp_1^*}{2} .$$

לפיכך, אם הצמד כמויות (p_1^*, p_2^*) שיווי משקל אז הכמויות חייבות לקיים את התנאים

$$p_1^* = \frac{a+c+bp_2^*}{2} \ , \qquad p_2^* = \frac{a+c+bp_1^*}{2} \ .$$

הפתרון למערכת זו הינו

$$p_1^* = p_2^* = \frac{a+c}{2-b} \ .$$

■

7.3 משחק בייסיאני

הגדרה 7.1 משחק שני שחקנים בייסיאני

הצורה הנורמלית של משחק בייסיאני 2 שחקנים היא

$$G = \{(A_1, A_2)\ , \ (T_1, T_2)\ , \ (p_1, p_2)\ , \ u_1, u_2\}$$

כאשר

- $A_1 = \{a_1, b_1, \ldots\}$ קבוצת הפעולות לשחקן 1 ו- $A_2 = \{a_2, b_2, \ldots\}$ קבוצת הפעולות לשחקן 2
- T_1 קבוצת ערכים פרטיים של שחקן 1 ו- T_2 קבוצת ערכים פרטיים של שחקן 2.
- p_1 מסמן את ההסתברות לפי שחקן 1, שהערך פרטי של שחקן 2 הוא t_2 בידיעה שהערך פרטי שלו הוא t_1:
$$p_1 = P\left(t_2 | t_1\right)$$
וכן p_2 מסמן את ההסתברות לפי שחקן 2, שהערך פרטי של שחקן 1 הוא t_1 בידיעה שהערך פרטי שלו הוא t_2:
$$p_2 = P\left(t_1 | t_2\right)$$
- u_1 פונקציית התשלום של שחקן 1 שהיא פונקציה של הפעולות $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ והערך הפרטי שלו $t_1 \in T_1$ שידוע רק לשחקן 1:
$$u_1(a_1, a_2, t_1)$$
וכן u_2 פונקציית התשלום של שחקן 2 שהיא פונקציה של הפעולות $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ והערך הפרטי שלו $t_2 \in T_2$ שידוע רק לשחקן 2:
$$u_2(a_1, a_2, t_2) \ .$$

הגדרה 7.2 אסטרטגיה במשחק שני שחקנים בייסיאני

נתון משחק שני שחקנים בייסיאני:

$$G = \{(A_1, A_2)\ , \ (T_1, T_2)\ , \ (p_1, p_2)\ , \ u_1, u_2\} \ .$$

אסטרטגיה לשחקן 1 היא פונקציה $s_1(t_1)$ של $t_1 \in T_1$ כך שלכל $t_1 \in T_1$ הפונקציה $s_1(t_1)$ נותנת פעולה $a_1 \in A_1$

$$s_1 : t_1 \mapsto a_1 \ .$$

וכן אסטרטגיה של שחקן 2 היא פונקציה $s_2(t_2)$ של $t_2 \in T_2$ כך שלכל $t_2 \in T_2$ הפונקציה $s_2(t_2)$ נותנת פעולה $a_2 \in A_2$

$$s_2 : t_2 \mapsto a_2 \ .$$

הגדרה 7.3 שיווי משקל נאש בייסיאני

נתון משחק שני שחקנים בייסיאני:

$$G = \{(A_1, A_2)\,,\ (T_1, T_2)\,,\ (p_1, p_2)\,,\ u_1, u_2\}\ .$$

הווקטור אסטרטגיות (s_1^*, s_2^*) הוא שיווי משקל נאש בייסיאני אם

$$\sum_{t_2\in T_2} u_1\left(s_1^*(t_1), s_2^*(t_2)\right) P(t_2|t_1) = \max_{a_1\in A_1} \sum_{t_2\in T_2} u_1\left(a_1, s_2^*(t_2)\right) P(t_2|t_1)$$

$$\sum_{t_1\in T_1} u_2\left(s_1^*(t_1), s_2^*(t_2)\right) P(t_1|t_2) = \max_{a_2\in A_2} \sum_{t_1\in T_1} u_2\left(s_1^*(t_1), a_2\right) P(t_1|t_2)$$

דוגמה 7.4 (מלחמת המינים עם ידיעה לא שלמה)

זוג מתכנן בילוי למוצא שבת. האפשרויות העומדות לרשותם הן מסעדה (Restaurant (R)) או צפייה במשחק כדורגל, (Football (F)). הגבר Pete (P) מעדיף צפייה במשחק הכדורגל בעוד האישה Camilla (C) מעדיפה את המסעדה אך שניהם מעדיפים להיות ביחד גם אם הבילוי המשותף הוא הפחות עדיף בעיניהם.

Camilla מקבלת תשלום $2+t_c$ אם שניהם הולכים למסעדה כאשר t_c ערך פרטי שידוע רק ל- Camilla ולא ל- Pete.

Pete מקבל תשלום $2+t_p$ אם שניהם הולכים למשחק כדורגל כאשר t_p ערך פרטי שידוע רק ל- Pete ולא ל- Camilla.

Camilla \ Pete	Restaurant	Football
Restaurant	$2+t_c, 1$	$0, 0$
Football	$0, 0$	$1, 2+t_p$

הערך הפרטי t_C מתפלג אחיד בטווח $[0,x]$ ו t_P מתפלג אחיד בטווח $[0,x]$.
t_P ו- t_C בלתי תלויים.

Camilla משחקת R אם t_C גדול מערך מסויים α, אחרת היא משחקת F.

Pete משחק F אם t_P גדול מערך מסויים β, אחרת הוא משחק R.

מצאו את הערכים של α ו- β עבורם הווקטור אסטרטגיות $(s_1^*, s_2^*) = (R, F)$ שיווי משקל נאש בייסיאני של המשחק.

פתרון:

C \ P	R	F
R	$2+t_c, 1$	$0, 0$
F	$0, 0$	$1, 2+t_p$

$$G = \{(A_C, A_P), (T_C, T_P), (p_C, p_P), u_C, u_P\}$$

t_C ו- t_P מתפלגים אחידה בתחום $[0, x]$ והם בלתי תלויים, לכן

$$p_C = P(t_C|t_P) = P(t_C) \ , \qquad p_P = P(t_P|t_C) = P(t_P) \ .$$

$$A_C = \{\text{Restaurant}, \text{Football}\} = \{R, F\} \ , \qquad A_P = \{\text{Restaurant}, \text{Football}\} = \{R, F\} \ .$$

Camilla משחקת R בהסתברות $\frac{x-\alpha}{x}$ ומשחקת F בהסתברות $\frac{\alpha}{x}$.

Pete משחק F בהסתברות $\frac{x-\beta}{x}$ ומשחק R בהסתברות $\frac{\beta}{x}$.

תשלום ל- Camilla אם היא משחקת R:

$$u_1(s_1 = R) = \frac{\beta}{x}(2 + t_C) + \left(\frac{x-\beta}{x}\right) \cdot 0 = \frac{\beta}{x}(2 + t_C) \ .$$

תשלום ל- Camilla אם היא משחקת F:

$$u_1(s_1 = F) = \frac{\beta}{x} \cdot 0 + \left(\frac{x-\beta}{x}\right) \cdot 1 = \frac{1-\beta}{x} \ .$$

$$u_1(s_1 = R) \geq u_1(s_1 = F) \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta}{x}(2 + t_C) \geq \frac{x-\beta}{x} \quad \Rightarrow \quad t_C \geq \frac{x-\beta}{\beta} - 2 = \frac{x}{\beta} - 3 \stackrel{!}{=} \alpha \ .$$

תשלום ל- Pete אם הוא משחק R:

$$u_2(s_2 = R) = \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) \cdot 1 + \frac{\alpha}{x} \cdot 0 = 1 - \frac{\alpha}{x} \ .$$

תשלום ל- Pete אם הוא משחק F:

$$u_2(s_2 = F) = \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) \cdot 0 + \frac{\alpha}{x}(2 + t_P) = \frac{\alpha}{x}(2 + t_P) \ .$$

$$u_2(s_2 = F) \geq u_2(s_2 = R) \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{x}(2 + t_P) \geq 1 - \frac{\alpha}{x} \quad \Rightarrow \quad (2 + t_P) \geq \frac{x}{\alpha} - 1 \quad \Rightarrow \quad t_P \geq \frac{x}{\alpha} - 3 \stackrel{!}{=} \beta \ .$$

הפתרון של המערכת הוא

$$\frac{x}{\left(\frac{x}{\beta} - 3\right)} - 3 = \beta \quad \Rightarrow \quad x - \frac{3x}{\beta} + 9 = x - 3\beta \quad \Rightarrow \quad -\frac{3x}{\beta} + 9 + 3\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x + 9\beta + 3\beta^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \beta^2 + 3\beta - x = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2} \ .$$

$\frac{x}{\alpha} - 3 = \beta$ לכן

$$\alpha = \frac{x}{3 + \beta} = \frac{2x}{3 + \sqrt{9 + 4x}} = \frac{2x}{3 + \sqrt{9 + 4x}} \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{9 + 4x}}{3 - \sqrt{9 + 4x}}\right) = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2} = \beta$$

לכן התשובה סופית היא האסטרטגיה $(s_1^*, s_2^*) = (R, F)$ שיווי משקל אם

$$t_C \geq \alpha = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2} \ , \qquad t_P \geq \beta = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2} \ .$$

■

דוגמה 7.5 (מכרז מחיר ראשון)

במכרז מחיר ראשון שני שחקנים $i=1,2$ מתחרים על קניית מוצר מסוים. שחקן 1 מעריך שהמוצר שווה v_1 ושחקן 2 מעריך כי המוצר שווה v_2. ז"א אם שחקן i מנצח ומשלם מחיר p אז הרווח שלו יהיה v_i-p. ההערכות של השני שחקנים הם בלתי תלויים ומפולגים אחיד בתחום $[0,1]$. השחקן עם ההצעה הגבוה ביותר מנצח ומשלם את מחיר שווה להצעה שלו. השחקן השני לא משלם כלום. במקרה של תיקו מטילים מטבע. השחקנים אדישי סיכון.

פתרון:

$$G=\{(A_1,A_2)\,,(T_1,T_2)\,,(p_1,p_2)\,,u_1,u_2\}$$

קבוצת הפעולות של שחקן 1 היא ההצעות האפשריות שלו, $b_1\in[0,\infty)$ וקבוצת הפעולות של שחקן 2 היא ההצעות האפשריות שלו $b_2\in[0,\infty)$

$$A_1=[0,\infty)\ ,\qquad A_2=[0,\infty)\ .$$

הקבוצה T_1 של ערכים פרטיים של שחרן 1 היא הקבוצה של ההערכות $\mathrm{v}_1\in[0,1]$ של המוצר שלו, וכמו כן T_2 הוא הקבוצה של ההערכות $\mathrm{v}_2\in[0,1]$. לכן

$$T_1=[0,1]\ ,\qquad T_2=[0,1]\ .$$

השתי ההערכות $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2$ בלתי תלויות לכן $p_1=P(\mathrm{v}_2=\beta|\mathrm{v}_1=\alpha)=P(\mathrm{v}_2=\beta)=\beta$ ז"א שחקן 1 מאמין כי הערך של v_2 הוא β בהסתברות β בלי קשר לערך של v_1. ולהפך, $p_2=P(\mathrm{v}_1=\alpha|\mathrm{v}_2=\beta)=P(\mathrm{v}_1=\alpha)=\alpha$ ז"א שחקן 2 מאמין כי הערך של v_1 הוא α בהסתברות α בלי קשר לערך של v_2.

$$u_1(b_1,b_2,\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2)=\begin{cases}\mathrm{v}_1-b_1 & b_1>b_2\\ \dfrac{\mathrm{v}_1-b_1}{2} & b_1=b_2\\ 0 & b_1<b_2\end{cases}\ ,\qquad u_2(b_1,b_2,\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2)=\begin{cases}\mathrm{v}_2-b_2 & b_2>b_1\\ \dfrac{\mathrm{v}_2-b_2}{2} & b_2=b_1\\ 0 & b_2<b_1\end{cases}\ ,$$

הווקטור אסטרטגיות $\left(b_1^*(\mathrm{v}_1),b_2^*(\mathrm{v}_2)\right)$ שיווי משקל נאש בייסיאני אם

$$u_1\left(b_1^*,b_2^*,\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\right)=\max_{b_1}\left[(\mathrm{v}_1-b_1)\,P\left(b_1>b_2^*(\mathrm{v}_2)\right)+\frac{1}{2}\left(\mathrm{v}_1-b_1\right)P\left(b_1=b_2^*(\mathrm{v}_2)\right)\right]$$

ו-

$$u_2\left(b_1^*,b_2^*,\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\right)=\max_{b_2}\left[(\mathrm{v}_2-b_2)\,P\left(b_2>b_1^*(\mathrm{v}_1)\right)+\frac{1}{2}\left(\mathrm{v}_2-b_2\right)P\left(b_2=b_1^*(\mathrm{v}_1)\right)\right]$$

אנחנו משערים כי קיים שיווי משקל לינארי:

$$b_1^*(\mathrm{v}_1)=a_1+c_1\mathrm{v}_1\ ,\qquad b_2^*(\mathrm{v}_2)=a_2+c_2\mathrm{v}_2\ .$$

נניח כי שחקן 2 בוחר באסטרטגיה $b_2^*(\mathrm{v}_2)=a_2+c_2\mathrm{v}_2$. אז עבור הערך v_2, תשובה טובה ביותר b_1^* לשחקן 1 מקיימת

$$\begin{aligned}u_1\left(b_1^*,b_2^*,\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\right)&=\max_{b_1}\left[(\mathrm{v}_1-b_1)\,P\left(b_1>a_2+c_2\mathrm{v}_2\right)+\frac{1}{2}\left(\mathrm{v}_1-b_1\right)\underbrace{P\left(b_1=a_2+c_2\mathrm{v}_2\right)}_{\to 0}\right]\\&=\max_{b_1}\left(\mathrm{v}_1-b_1\right)P\left(\mathrm{v}_2<\frac{b_1-a_2}{c_2}\right)\\&=\max_{b_1}\left(\mathrm{v}_1-b_1\right)\left(\frac{b_1-a_2}{c_2}\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial b_1}\left(\frac{1}{c_2}\left(\mathrm{v}_1-b_1\right)\left(b_1-a_2\right)\right)=\frac{\mathrm{v}_1+a_2-2b_1}{c_2}\stackrel{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad b_1^*=\frac{\mathrm{v}_1+a_2}{2}$$

נניח כי שחקן 1 בוחר באסטרטגיה $b_1^*(\mathrm{v}_1)=a_1+c_1\mathrm{v}_1$. אז עבור הערך v_1, תשובה טובה ביותר b_2^* לשחקן 2 מקיימת

$$\begin{aligned}
u_2\left(b_1^*,b_2^*,\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\right)&=\max_{b_2}\left[\left(\mathrm{v}_2-b_2\right)P\left(b_2>a_1+c_1\mathrm{v}_1\right)+\frac{1}{2}\left(\mathrm{v}_2-b_2\right)\cancelto{0}{P\left(b_2=a_1+c_1\mathrm{v}_1\right)}\right]\\
&=\max_{b_2}\left(\mathrm{v}_2-b_2\right)P\left(\mathrm{v}_1<\frac{b_2-a_1}{c_1}\right)\\
&=\max_{b_2}\left(\mathrm{v}_2-b_2\right)\left(\frac{b_2-a_1}{c_1}\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial b_2}\left(\frac{1}{c_1}\left(\mathrm{v}_2-b_2\right)\left(b_2-a_1\right)\right)=\frac{\mathrm{v}_2+a_1-2b_2}{c_1}\stackrel{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad b_2^*=\frac{\mathrm{v}_2+a_1}{2}$$

לכן

$$b_1^*=\frac{\mathrm{v}_1}{2}+\frac{a_2}{2}=a_1+c_1\mathrm{v}_1 \quad\Rightarrow\quad c_1=\frac{1}{2}\ ,\quad a_1=\frac{a_2}{2}\ ,$$

$$b_2^*=\frac{\mathrm{v}_2}{2}+\frac{a_1}{2}=a_2+c_2\mathrm{v}_2 \quad\Rightarrow\quad c_2=\frac{1}{2}\ ,\quad a_2=\frac{a_1}{2}\ .$$

הפתרון למערכת זה היא

$$c_1=\frac{1}{2},\quad a_1=0\ ,\quad c_2=\frac{1}{2}\ ,\quad a_2=0\ .$$

לפיכך האסטרטגיות של שיווי משקל הן

$$b_1^*(\mathrm{v}_1)=\frac{\mathrm{v}_1}{2}\ ,\qquad b_2^*(\mathrm{v}_2)=\frac{\mathrm{v}_2}{2}\ .$$

■

דוגמה 7.6 (דואפול עם ערכים פרטיים)

שני יצרנים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתרחים על שוק הקונים הפוטנציאלים. היצרנים מחליטים על הכמות שהם ייצרו, וההיצע הכולל קובע את מחיר המוצר, שהוא זהה לשני היצרנים. נסמן ב- q_1 וב- q_2 את הכמויות שמיצרים היצרנים 1 ו- 2 בהתאמה. אזי הכמות הכוללת של המוצרים בשוק הוא q_1+q_2. נניח כי המחיר של יחידה שווה ל- $P=a-q_1-q_2$ כאשר a פרמטר הביקוש. עלות הייצור של יחידה ליצרן הראשון וליצרן 2 הוא c.
הפרמטר הביקוש a שווה ל- a^H (ביקוש גבוהה) או a^L (ביקוש נמוך). הערך של a ידוע ליצרן הראשון אך אינה ידוע ליצרן השני. כל שיצרן זה יודע הוא שהפרמטר הביקוש שווה ל- a^L בהסתברות θ או a^H בהסתברות $1-\theta$.

מה הם התנאים על a_H, a_L, θ ו- c כך ש- הכמויות q_1,q_2 חיוביים בשיווי משקל.

מהו השיווי משקל נאש הבייסיאני של המשחק?

פתרון:

כמות של יצרן 1: q_1.　　כמות של יצרן 2: q_2.

מחיר ליחידה אחת של המוצר: $P=a-q_1-q_2$.

עלות ליחידה לשחקן 1 ולשחקן 2: $c=1$.

פרמטר הביקוש לשחקן 1: $a=a^H$ או $a=a^L$ והוא ידוע לשחקו 1 ולא לשחקן 2.

עבור שחקן 2: $a=a^L$ בהסתברות θ ו- $a=a^H$ בהסתברות $1-\theta$.

צורה בייסיאנית של המשחק:

- $N=\{1,2\}$.
- $T_1=\{a^L,a^H\}$, $T_2=\{1\}$.
- $p_{II}\left(t_1=a^L|t_2=1\right)=p_{II}\left(t_1=a^L\right)=\theta$.
- $p_{II}\left(t_1=a^H|t_2=1\right)=p_{II}\left(t_1=a^H\right)=1-\theta$.
- $A_1=\{q_1^H,q_1^L\}$, $A_2=\{q_2\}$.
- פורנצית תשלום לשחקן 1:
$$u_1\left(s_1(t_1),s_2(t_2),t_1\right)$$
פורנצית תשלום לשחקן 2:
$$u_2\left(s_1(t_1),s_2(t_2),t_2=1\right)$$
- $$s_1(t=a^H)=q_1^H\ ,\qquad s_2(t_2=a^L)=q_1^L\ ,\qquad s_2(t_2=1)=q_2\ .$$

לשחקן 1, אם $a=a^H$:
$$u_1(s_1(t=a^H),s_2(t_2),t_1=a^H)=u_1(q_1^H,q_2)=q_1^H(a-q_1^H-q_2-c)\ .$$

לשחקן 1, אם $a=a^L$:
$$u_1(s_1(t=a^L),s_2(t_2),t_1=a^L)=u_1(q_1^L,q_2)=q_1^L(a-q_1^L-q_2-c)\ .$$

לשחקן 2, $s_1(t_1=q^L)=q_1^L$ בהסתברות θ ו- $s_1(t_1=a^H)=q_1^H$ בהסתברות $1-\theta$.
$$u_2\left(s_1(t_1),s_2(t_2),t_2=1\right)=u_1\left(q_1^H,q_1^L,q_2\right)=q_2\left(\theta a^L+(1-\theta)a^H-\theta q_1^L-(1-\theta)q_1^H-q_2-c\right)$$

$$\frac{\partial u_1\left(q_1^H,q_2\right)}{\partial q_1^H}=a-c-2q_1^H-q_2\overset{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad q_1^{H*}=\frac{a_H-c-q_2}{2}\ .$$
$$\frac{\partial u_1\left(q_1^L,q_2\right)}{\partial q_1^L}=a-c-2q_1^L-q_2\overset{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad q_1^{L*}=\frac{a_L-c-q_2}{2}\ .$$
$$\frac{\partial u_2\left(q_1^L,q_1^H,q_2\right)}{\partial q_2}=\theta a^L+(1-\theta)a^H-\theta q_1^L-(1-\theta)q_1^H-2q_2-c\overset{!}{=}0$$
$$\Rightarrow\quad q_2^*=\frac{\theta a^L+(1-\theta)a^H-\theta q_1^L-(1-\theta)q_1^H+c}{2}\ .$$

הפתרון למערכת זו הוא

$$\begin{aligned} q_2^* =& \frac{\theta a_H + (1-\theta)a_L - c}{3} \\ q_1^H =& \frac{(3-\theta)a_H - (1-\theta)a_L - 2c}{6} \\ q_1^L =& \frac{(2+\theta)a_L - \theta a_H - 2c}{6} \end{aligned}$$

התנאים עבורם $q_2 \geq 0$ הם

$$q_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \theta a_H + (1-\theta)a_L - c \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \theta \geq \frac{c - a_L}{a_H - a_L} \ .$$

$$q_1(a_L) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(2+\theta)a_L - \theta a_H - 2c}{6} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \theta \leq \frac{2(c - a_L)}{a_H - a_L} \ .$$

$$q_1(a_H) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(3-\theta)a_H - (1-\theta)a_L - 2c}{6} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \theta \leq \frac{2c - 3a_H + a_L}{a_H - a_L} \ .$$

■