עבודה 11: משפט הפירוק הספקטרלי

שאלה 1 נתונה מטריצה $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ נורמלית. נניח שהערכים עצמיים שלה הם $\lambda = -1$, ו- $\lambda = 4$. המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = -1$ הוא

$$V_{-1} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

חשבו את

א) $A \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

ב) הוכיחו כי $\begin{pmatrix} 19661 \\ 9830 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot A^6$.

שאלה 2 תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ מטריצה ריבועית נורמלית עם ערכים עצמיים $\lambda = 6$ ו- $\lambda = 3$ ויהי

$$V_6 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 6$. יהי $w \in \mathbb{R}^3$ הווקטור $w = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. חשבו את

א) $A \cdot w$

ב) $A^3 \cdot w$

שאלה 3 נתונה מטריצה $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ נורמלית. נניח ש- $\lambda = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ו- $\lambda = 2$ ערכים עצמיים של A. נניח שמרחב העצמי ששייך לע"ע $\lambda = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ הוא

$$V_{(1+\sqrt{3}i)/2} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3}i \\ 1+\sqrt{3}i \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

מצאו את

א) $A \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

ב) הוכיחו כי $\begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot A^3$.

שאלה 4 נתונה מטריצה $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ נורמלית עם ערכים עצמיים $\lambda = 1$ ו- $\lambda = 1+i$. מרחב העצמי של $\lambda = 1+i$ הוא

$$V_{1+i} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

מצאו את המטריצה A.

תשובות

שאלה 1

א) יש רק ווקטור אחד בהבסיס של V_{-1} לכן הבסיס זו כבר בסיס אורתוגונלי. נסמן

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

נסמן

$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

נחשב את ההיטל של a על V_{-1}:

$$P_{-1}(a) = \frac{1}{\|u_1\|^2} \langle a, u_1 \rangle \, u_1 = \frac{-1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

נסמן את ההיטל של a על מרחב העצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 4$ ב- $P_4(a)$. לפי משפט הנרמול של ההיטל:

$$P_4(a) = a - P_{-1}(a) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \end{pmatrix} \ .$$

לפי משפט הפירוק הספקטרלי:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot P_{-1}(a) + 4 \cdot P_4(a) = (-1) \cdot \frac{-1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 95 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 10 \end{pmatrix} \ .$$

ב) לפי משפט הפירוק הספקטרלי:

$$A^6 \cdot a = (-1)^6 \cdot P_{-1}(a) + 4^6 \cdot P_4(a) = \frac{-1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4096 \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19661 \\ 9830 \end{pmatrix} \ .$$

שאלה 2

לפי משפט הפירוק הספקטרלי:

$$A \cdot w = 3 \cdot P_3(w) + 6 \cdot P_6(w) \ ,$$

ו-

$$A^3 \cdot w = 3^3 \cdot P_3(w) + 6^3 \cdot P_6(w) \ ,$$

כאשר $P_3(w)$ ההיטל של הווקטור w על המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 3$, ו- $P_6(w)$ ההיטל של הווקטור w על המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 6$. נשים לב כי

$$P_3(w) + P_6(w) = w \qquad \Rightarrow \qquad P_3(w) = w - P_6(w) \ .$$

נחשב $P_6(w)$. נבנה בסיס אורתוגונלי של V_6.

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \qquad \|u_1\|^2 = 2 \ .$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \ .$$

נבחר $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\|u_2\|^2 = 6$.

$$\begin{aligned} P_6(w) =& \frac{1}{\|u_1\|^2} \langle w, u_1 \rangle \, u_1 + \frac{1}{\|u_2\|^2} \langle w, u_2 \rangle \, u_2 \\ =& \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$P_3(w) = w - P_6(w) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \ .$$

לכן

א)

$$A \cdot w = 3P_3(w) + 6P_6(w) = 3 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + 6 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \ .$$

ב)

$$A^3 \cdot w = 3^3 \cdot P_3(w) + 6^3 \cdot P_6(w) = 27 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + 216 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 90 \\ 90 \end{pmatrix} + 72 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ -198 \\ 18 \end{pmatrix} \ .$$

שאלה 3 $\lambda=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ערך עצמי לכן גם $\bar{\lambda}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ע"ע. הריבוי אלגברי של כל ע"ע הוא 1 לכן הריבוי גאומטרי של כל ע"ע הוא 1. נמצא את המרחב העצמי ששייך לע"ע $\bar{\lambda}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ע"י

$$V_{(1-\sqrt{3}i)/2}=\bar{V}_{(1+\sqrt{3}i)/2}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}i\\1-\sqrt{3}i\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

יש רק ווקטור אחד בבסיס של $V_{(1+\sqrt{3}i)/2}$ לכן הבסיס אורתוגונלי. מאותה סיבה הבסיס של $V_{(1-\sqrt{3}i)/2}$ גם בסיס אורתוגונלי. נסמן

$$u_1=\begin{pmatrix}1-\sqrt{3}i\\1+\sqrt{3}i\\-2\end{pmatrix}\ ,\qquad u_2=\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}i\\1-\sqrt{3}i\\-2\end{pmatrix}\ .$$

$$\begin{aligned}P_{(1+\sqrt{3}i)/2}(a)=&\frac{1}{\|u_1\|^2}\langle a,u_1\rangle\cdot u_1\\=&\frac{1}{12}\left\langle\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1-\sqrt{3}i\\1+\sqrt{3}i\\-2\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\begin{pmatrix}1-\sqrt{3}i\\1+\sqrt{3}i\\-2\end{pmatrix}\\=&\frac{1}{12}\left(5\cdot(1+\sqrt{3}i)+2\cdot(1-\sqrt{3}i)-6\right)\cdot\begin{pmatrix}1-\sqrt{3}i\\1+\sqrt{3}i\\-2\end{pmatrix}\\=&\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}5+\sqrt{3}i\\-4+2\sqrt{3}i\\-1-3\sqrt{3}i\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$P_{(1-\sqrt{3}i)/2}(a)=\bar{P}_{(1+\sqrt{3}i)/2}(a)=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}5-\sqrt{3}i\\-4-2\sqrt{3}i\\-1+3\sqrt{3}i\end{pmatrix}\ .$$

את ההיטל של הווקטור a על מרחב העצמי ששייך לע"ע $\lambda=2$ כ-

$$\begin{aligned}P_2(a)=&a-P_{(1+\sqrt{3}i)/2}(a)-P_{(1-\sqrt{3}i)/2}(a)\\=&\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}5+\sqrt{3}i\\-4+2\sqrt{3}i\\-1-3\sqrt{3}i\end{pmatrix}-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}5-\sqrt{3}i\\-4-2\sqrt{3}i\\-1+3\sqrt{3}i\end{pmatrix}\\=&\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}10\\-8\\-2\end{pmatrix}\\=&\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}\\=&\frac{1}{3}\begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix}\ .\end{aligned}$$

א) לפי משפט הפירוק הספקטרלי:

$$\begin{aligned}
A\cdot a =& \frac{1+\sqrt{3}i}{2}P_{(1+\sqrt{3}i)/2}(a)+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}P_{(1-\sqrt{3}i)/2}(a)+2P_2(a)\\
=&\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1+3\sqrt{3}i\\-5-\sqrt{3}i\\4-2\sqrt{3}i\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1-3\sqrt{3}i\\-5+\sqrt{3}i\\4+2\sqrt{3}i\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix}\\
=&+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-5\\4\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix}\\
=&\frac{1}{3}\begin{pmatrix}21\\15\\24\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}7\\5\\8\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ב) לפי משפט הפירוק הספקטרלי:

$$\begin{aligned}
A^3\cdot a =& \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3P_{(1+\sqrt{3}i)/2}(a)+\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3P_{(1-\sqrt{3}i)/2}(a)+2^3P_2(a)\\
=&(-1)P_{(1+\sqrt{3}i)/2}(a)+(-1)P_{(1-\sqrt{3}i)/2}(a)+8P_2(a)\\
=&\frac{-1}{6}\begin{pmatrix}5+\sqrt{3}i\\-4+2\sqrt{3}i\\-1-3\sqrt{3}i\end{pmatrix}-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5-\sqrt{3}i\\-4-2\sqrt{3}i\\-1+3\sqrt{3}i\end{pmatrix}+\frac{8}{3}\begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix}\\
=&\frac{-1}{6}\begin{pmatrix}10\\-8\\-2\end{pmatrix}+\frac{8}{3}\begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}25\\28\\27\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

שאלה 4 $\bar{\lambda}=1-i$ גם ע"ע של A ששייך למרחב עצמי

$$V_{1-i}=\bar{V}_{1+i}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\ .$$

יש רק וקטור אחד ב- V_{1+i} לכן הבסיס שלו הוא בסיס אורתוגונלי. מאותה סיבה הבסיס של V_{1-i} גם אורתוגונלי. נסמן

$$u_1=\begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$A=\begin{pmatrix} | & | & | \\ A\cdot e_1 & A\cdot\ e_2 & A\cdot e_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} & A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} & A\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
P_{1+i}(e_1) =&\frac{1}{\|u_1\|^2}\langle e_1,u_1\rangle u_1\\
=&\frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}\\
=&\frac{-i}{2}\begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}\\
=&\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix}\\
P_{1+i}(e_2) =&\frac{1}{\|u_1\|^2}\langle e_2,u_1\rangle u_1\\
=&\frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}\\
=&\frac{1}{2}\begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}\\
P_{1+i}(e_3) =&\frac{1}{\|u_1\|^2}\langle e_3,u_1\rangle u_1\\
=&\frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}\\
=&0\ .
\end{aligned}$$

$$P_{1-i}(e_1)=\bar{P}_{1+i}(e_1)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad P_{1-i}(e_2)=\bar{P}_{1+i}(e_2)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad P_{1-i}(e_3)=\bar{P}_{1+i}(e_3)=0\ .$$

לפי משפט הפירוק הספקטרלי, לכל ווקטור a:

$$\begin{aligned}
A\cdot a =&(1+i)P_{1+i}(a)+(1-i)P_{1-i}(a)+P_1(a)\\
=&(1+i)P_{1+i}(a)+(1-i)P_{1-i}(a)+e_1-P_{1+i}(a)-P_{1-i}(a)\\
=&iP_{1+i}(a)+(-i)P_{1-i}(a)+a\ .
\end{aligned}$$

לכן

$$A\cdot e_1=iP_{1+i}(e_1)+(-i)P_{1+i}(e_1)+e_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$A \cdot e_2 = iP_{1+i}(e_2) + (-i)P_{1+i}(e_2) + e_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ i\\ 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ -i\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \ .$$

$$A \cdot e_3 = iP_{1+i}(e_3) + (-i)P_{1+i}(e_3) + e_3 = 0 + 0 + \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \ .$$

לכן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \ .$$