

שיעור 6

מקסמיין באסטרטגיות מעורבות

דוגמה 6.1 (ערך המקסמיין של משחק סכום אפס באסטרטגיות מעורבות)

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס.

		<i>II</i>	<i>L</i>	<i>R</i>
<i>I</i>				
<i>T</i>		4	1	
<i>B</i>		2	3	

א) מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות טהורות.

ב) מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

פתרונות:

(א)

		<i>II</i>	<i>L</i>	<i>R</i>	$\min_{s_2 \in S_2}$
<i>I</i>					
<i>T</i>		4	1	1	1
<i>B</i>		2	3	2	2
$\max_{s_1 \in S_1}$		4	3	2, 3	2, 3

ערך המקסמיין של שחקן 1:

$$\underline{v} = \max_{s_1 \in \{T, B\}} \min_{s_2 \in \{L, R\}} = 2 .$$

ז"א שחקן 1 יכול להבטיח שיקבל לפחות 2 אם הוא ישחק *B*.

ערך המינימקס של שחקן 2:

$$\bar{v} = \min_{s_2 \in \{L, R\}} \max_{s_1 \in \{T, B\}} = 3 .$$

ז"א שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר 3 אם הוא ישחק *R*.

$$\bar{v} = 3 > 2 = \underline{v} .$$

למשחק אין ערך.

ב) כאשר לשחקן 1 יש שתי אסטרטגיות טהורות *T* ו- *B*, נזהה את האסטרטגיה המעורבת

$$[x(T), (1-x)(B)]$$

עם ההסתברות x שבה נבחרת האסטרטגיה הטהורה T .
באופן דומה, כאשר יש לשחקן 2 יש שתי אסטרטגיות טהורות L ו- R , נזהה את האסטרטגיה המעורבת

$$[y(L) , (1-y)(R)]$$

עם ההסתברות y שבה נבחרת האסטרטגיה הטהורה L .

לכל זוג אסטרטגיות מעורבות התשלום ניתן על ידי פונקציית התועלת

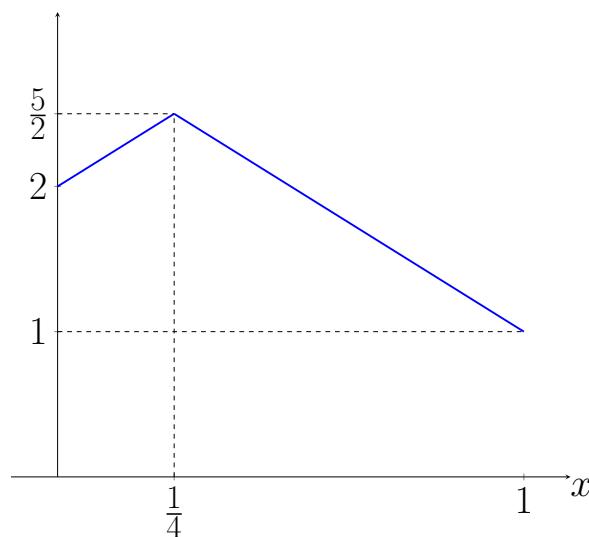
$$U(x, y) = 4xy + 1x(1-y) + 2(1-x)y + 3(1-x)(1-y) = 4xy - 2x - y + 3 .$$

ראשית נחשב לכל $x \in [0, 1]$ את

$$\min_{y \in [0,1]} U(x, y) = \min_{y \in [0,1]} (4xy - 2x - y + 3) = \min_{y \in [0,1]} (y(4x - 1) - 2x + 3)$$

עבור x קבוע זהה לפונקציה לינארית ב- y , ולכן הנקודה שבה המינימום מתקיים נקבעת לפי השיפוע $4x - 1$.
אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה והמינימום מתקיים ב- $y = 0$.
אם השיפוע שלילי הפונקציה יורדת והמינימום מתקיים ב- $y = 1$.
אם השיפוע 0 הפונקציה קבועה וכל הנקודות הן נקודות מינימום. לכן

$$\min_{y \in [0,1]} u(x, y) = \begin{cases} 2x + 2 & x \leq \frac{1}{4} \\ -2x + 3 & x \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

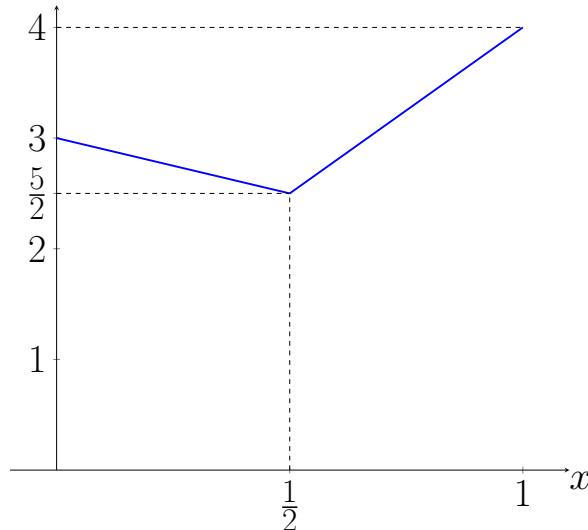


לפונקציה זו של x יש מקסIMUM יחיד ב- $x = \frac{1}{4}$ וערכו $\frac{5}{2}$. לכן

$$\underline{y} = \max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} U(x, y) = \frac{5}{2} .$$

באופן דומה נחשב:

$$\begin{aligned}
 \max_{x \in [0,1]} U(x,y) &= \max_{x \in [0,1]} [4xy - 2x - y + 3] \\
 &= \max_{x \in [0,1]} [x(4y - 2) - y + 3] \\
 &= \begin{cases} -y + 3 & y \leq \frac{1}{2}, \\ 3y + 1 & y \geq \frac{1}{2}, \end{cases}
 \end{aligned}$$



לפונקציה זו של y יש מינימום יחיד ב- $y = \frac{1}{2}$ וערכו $\frac{5}{2}$. לכן

$$\bar{v} = \min_{y \in [0,1]} \max_{x \in [0,1]} U(x,y) = \frac{5}{2}.$$

כלומר, למשחק יש ערך $v = \underline{v} = \bar{v} = \frac{5}{2}$, והסטרטגיות האופטימליות הן $x^* = \frac{1}{4}$, $y^* = \frac{1}{2}$.

מכיוון ש- x^* ו- y^* הן אסטרטגיות האופטימליות היחידות של השחקנים, אז (x^*, y^*) הוא שוויי המשקל נאש היחיד במשחק.



דוגמה 6.2 (מקסימין של משחק שני שחקנים באסטרטגיות מעורבות)

נתון משחק שני שחקנים (שאינו סכום אפס) בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

	<i>II</i>	<i>L</i>	<i>R</i>
<i>I</i>			
<i>T</i>	1, -1	0, 2	
<i>B</i>	0, 1	2, 0	

מצאו התשלומים מקסימין והתשלומים מינימום באסטרטגיות מעורבות.

פתרונות:

ראשית נחשב את התשלום מקסמין של השחקנים.

קבוצות האסטרטגיות של שחקן 1:

$$\Sigma_1 = \{[x(T), (1-x)(B)] , x \in [0, 1]\} .$$

המזוהה עם הקטע $[0, 1]$.

קבוצות האסטרטגיות של שחקן 2:

$$\Sigma_2 \{[y(L), (1-y)(R)] , y \in [0, 1]\} .$$

פונקציית התועלת של שחקן 1:

$$U_1(x, y) = xy + 2(1-x)(1-y) = 3xy - 2x - 2y + 2 .$$

פונקציית התועלת של שחקן 2:

$$U_2(x, y) = -xy + 2x(1-y) + y(1-x) = -4xy + 2x + y .$$

התשלום מקסמין של שחקן 1 הינו:

$$v_1 = \max_{x \in [0, 1]} \min_{y \in [0, 1]} U_1(x, y) .$$

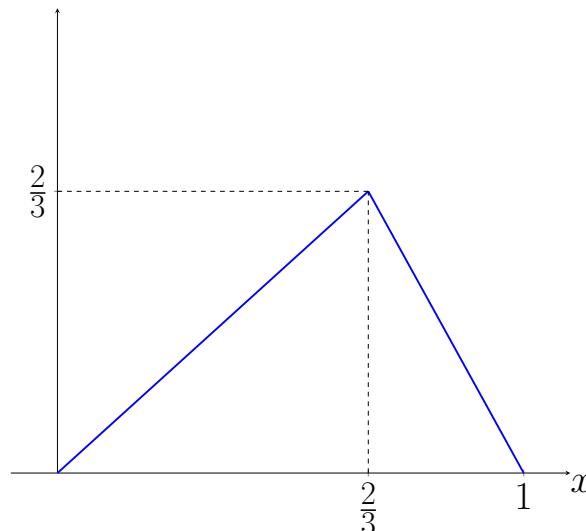
התשלום מקסמין של שחקן 2 הינו:

$$v_2 = \max_{y \in [0, 1]} \min_{x \in [0, 1]} U_2(x, y) .$$

$$\min_{y \in [0, 1]} U_1(x, y) = \min_{y \in [0, 1]} 3xy - 2x - 2y + 2$$

$$= \min_{y \in [0, 1]} y(3x - 2) - 2x + 2$$

$$= \begin{cases} x & x \leq \frac{2}{3} \\ -2x + 2 & x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$



לפונקציה זו יש מקסימום ב- $x = \frac{2}{3}$. לפיכך

$$\underline{v}_1 = \max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} U_1(x, y) = \frac{2}{3}.$$

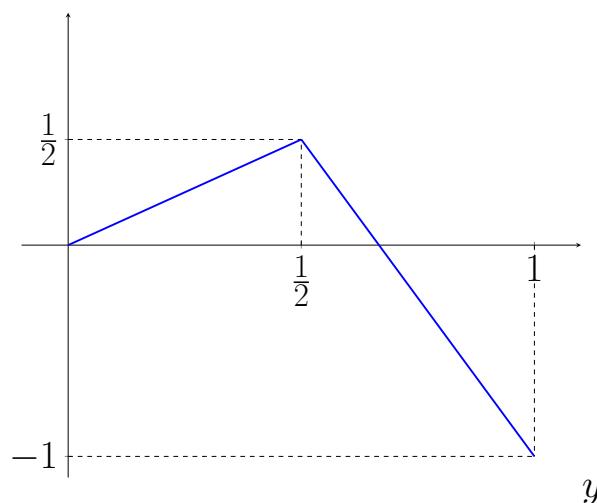
התשלום מаксימין של שחקן 2 הינו:

$$\underline{v}_2 = \max_{y \in [0,1]} \min_{x \in [0,1]} U_2(x, y).$$

$$\min_{x \in [0,1]} U_2(x, y) = \min_{x \in [0,1]} 3xy - 2x - 2y + 2$$

$$= \min_{x \in [0,1]} x(2 - 4y) + y$$

$$= \begin{cases} y & y \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 3y & y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$



לפונקציה זו יש מקסימום ב- $y = \frac{1}{2}$. לפיכך

$$\underline{v}_2 = \max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} U_2(x, y) = \frac{1}{2}.$$

דוגמה 6.3 (ערך אסטרטגי אופטימלית של משחק סכום אפס באסטרטגיות מעורבות)

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

	<i>II</i>	<i>L</i>	<i>R</i>
<i>I</i>			
<i>T</i>	5	0	
<i>B</i>	3	4	

מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

פתרונות:

תחליה נחשב את המקסימין של שחקן 1. אם שחקן 1 משחק את האסטרטגיה המעורבת $[x(T), (1-x)(B)]$ התשלום שלו כפונקציה של x תלוי על האסטרטגיה של שחקן 2:

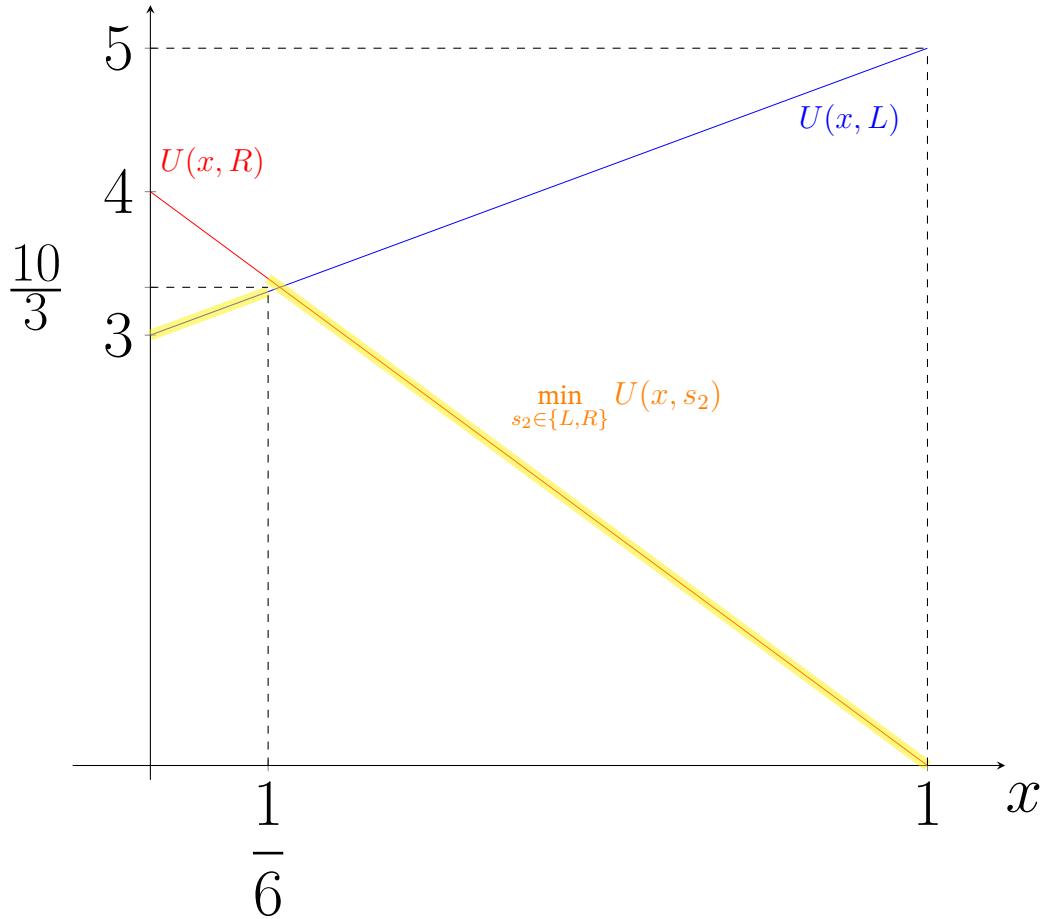
$$U(x, L) = 5x + 3(1-x) = 2x + 3.$$

- אם שחקן 2 משחק L אז

$$U(x, R) = 4(1-x) = -4x + 4.$$

- אם שחקן 2 משחק R אז

הגרף למטה מראה את הגרפים של הפונקציות האלו. הקו של $\min_{s_2 \in \{L,R\}} U(x, s_2)$ מראה את התשלום המינימלי שחקן 1 קיבל אם הוא משחק x . הקו הזה נקרא **מעטפת תחתונה** של התשלומים.



הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות שווה ל- $\max_{x \in [0,1]} \min_{s_2 \in \{L,R\}} U(x, s_2)$, אשר מתקבל בנקודת מקסימום של המעטפת התחתונה. המקסימום מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של שתי הפונקציות, כולם בנקודת

$$2x + 3 = -4x + 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{6}.$$

מכאן האסטרטגיה האופטימלית של שחקן 1 היא $x^* = \left(\frac{1}{6}(T), \frac{5}{6}(B)\right)$. הערך של המשחק שווה לגובה של הנקודה חיתוך: $v = \frac{10}{3}$.

כעת נחשב את המינימקס של שחקן 2. אם שחקן 2 משחק את האסטרטגיה המעורבת $[y(L), (1-y)(R)]$ התשלום שלו כפונקציה של y תלוי על האסטרטגיה של שחקן 1:

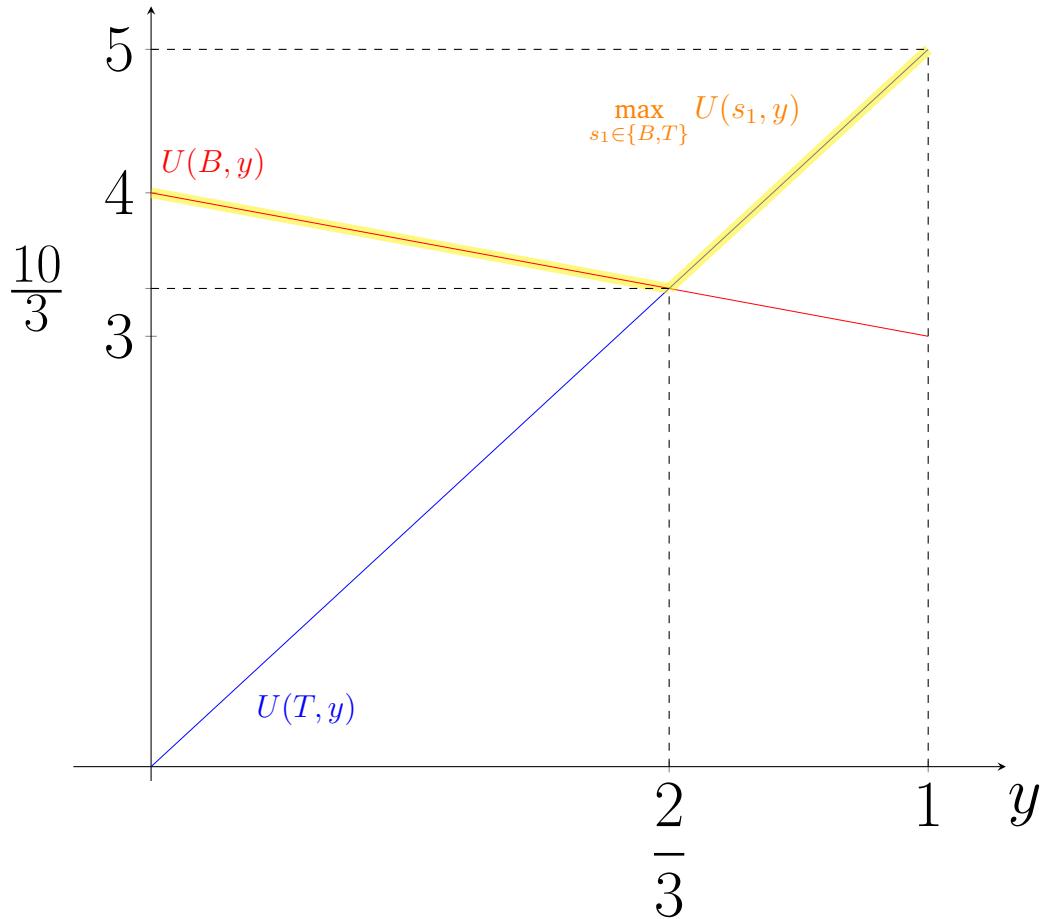
$$U(T, y) = 5y.$$

- אם שחקן 1 משחק T אז

$$U(B, y) = 4 - y.$$

- אם שחקן 1 משחק B אז

הגרף למטה מראה את הגרפים של הפונקציות האלה. הקו של $\max_{s_1 \in \{B,T\}} U(s_1, y)$ מראה את התשלום המקסימלי שחקן 2 קיבל אם הוא משחק y . הקו הזה נקרא **מעטפת עליונה** של התשלומים.



הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות שווה ל- $\min_{y \in [0,1]} \max_{s_1 \in \{B,T\}} U(s_1, y)$, אשר מתקבל בנקודת מינימום של המעטפת העליונה. המינימום מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של שתי הפונקציות, כולם בנקודה

$$5y = 4 - y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}.$$

מכאן האסטרטגיה האופטימלית של שחקן 2 היא $y^* = \left(\frac{2}{3}(L), \frac{1}{3}(R)\right)$. הערך של המשחק שווה לגובה של הנקודה

חיתוך: $v = \frac{10}{3}$

דוגמה 6.4 ()

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

	<i>II</i>	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>R</i>
<i>I</i>				
<i>T</i>	2	5	-1	
<i>B</i>	1	-2	5	

מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

פתרונות:

נחשב את המקסימין של שחקן 1. אם שחקן 1 מושך את האסטרטגיה המעורבת $[x(T), (1-x)(B)]$ התשלום שלו כפונקציה של x תלוי על האסטרטגיה של שחקן 2:

$$U(x, L) = 2x + (1-x) = 1 + x.$$

- אם שחקן 2 מושך L אז

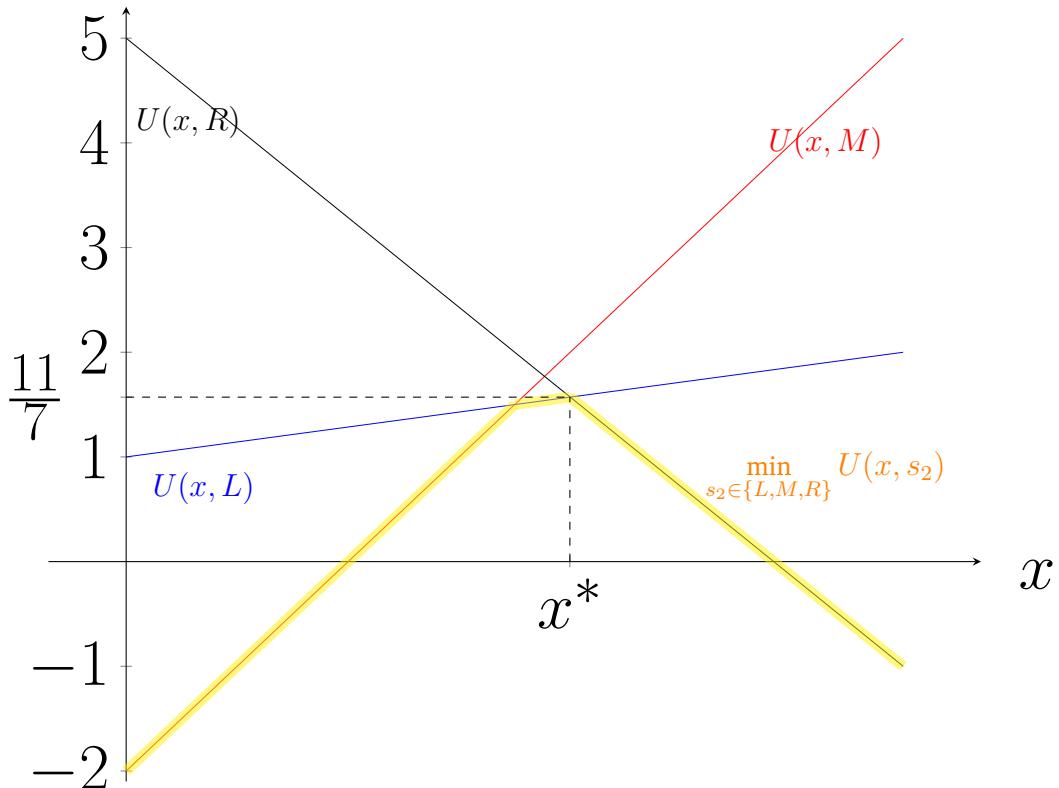
$$U(x, M) = 5x - 2(1-x) = 7x - 2.$$

- אם שחקן 2 מושך M אז

$$U(x, R) = -x + 5(1-x) = -6x + 5.$$

- אם שחקן 2 מושך R אז

התרשים מטהר את הגרפים של שלוש פונקציות אלו.



המקסימום של המעטפת התחתונה מתקיים בנקודת חיתוך של הקווים של $U(x, R)$ ו- $U(x, L)$

$$1 + x \stackrel{!}{=} -6x + 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{7}$$

