עבודה 5: סיבוכיות זמן

מועד הגשה

1) ההגשה היא עד סוף יום ראשון 18.01.2026 עד השעה 23:59 באותו היום. אל תחכו לרגע האחרון. תכננו את זמנכם בהתאם. הגישו לפני.

2) איחור במועד ההגשה יגרור הורדה של ציון, 5 נק' לכל יום איחור או חלק ממנו. בכל מקרה לא יהיה ניתן להגיש מעבר ל-2 ימי איחור ממועד ההגשה דלעיל כלומר עד יום שלישי 20.01.26 (עד השעה 23:59).

אופן הגשה

1) קראו היטב את השאלות. עליכם לענות על כל השאלות בעבודה זו.

2) הגשת העבודה תהיה דרך אתר הקורס במודל בלבד. הגשת העבודה היא ביחידים.

3) כיצד להגיש?

   א) יש לסרוק או להמיר את העבודה לקובץ pdf ולהגיש אותו (סריקה לא ברורה או מטושטשת לא תיבדק).

   ב) שם הקובץ שיוגש למערכת ההגשה יהיה מספר ת"ז המגיש. לדוגמה: 123456789.pdf.

4) בקובץ המוגש יש להוסיף את התיעוד הבא בעמוד הראשון (בעברית או באנגלית, לבחירתכם). יש לשנות את השם לשם שלכם ואת תעודת הזהות לתעודת הזהות שלכם. ובמקום סולמית יש לכתוב את מספר העבודה.

   Assignment: #
   Author: Israel Israeli, ID: 01234567

5) לאחר שהעליתם את הקבצים שלכם למודל, הורידו אותם מהמודל למחשב שלכם וודאו כי הקבצים תקינים וכי העליתם את הקבצים הנכונים והמלאים. לאחר תום מועד ההגשה לא יתקבלו ערעורים על כך שהעליתם קבצים לא תקינים או שהעליתם בטעות קבצים אחרים / לא נכונים.

שאלות

1) שאלות בנוגע העבודה יש לשאול בפורום באתר המודל של הקורס או בשעות קבלה של המתרגל/ת האחראי/ת בלבד. אין לשלוח שאלות במייל לא למתרגל האחראי ולא למתרגלים/מרצים אחרים.

2) ניתן לשאול שאלות הבהרה ומיקוד על המשימות שבעבודה במידה ומשימה מסוימת לא ברורה. לא ניתן לשאול על הפתרונות שלכם. לדוגמא, לא ניתן לשאול האם הפתרון שלי נכון, לא ניתן לשאול למה הפתרון לא עובד, וכדומה.

שונות

1) השאלות בעבודה זו הינן שוות משקל. כלומר, משקל כל שאלה הוא 100 חלקי מספר השאלות בעבודה.

2) בשאלה מרובת סעיפים, הסעיפים הם שווי משקל. כלומר משקל כל סעיף הוא משקל השאלה כולה חלקי מספר הסעיפים השאלה.

- המתרגל אחראי: צביקה שוורץ.
- העודה מכילה 5 שאלות.
- **בהצלחה!**

שאלה 1 **(20 נקודות)**

בעית $HAMCYCLE$ (מעגל המילטוני) מוגדרת באופן הבא:
בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$, האם G מכיל מעגל שעובר בכל קדקוד בגרף פעם אחת בדיוק?
הוכיחו את הטענה הבאה:

$$HAMCYCLE \in NP\ .$$

שאלה 2 **(20 נקודות)**

הבעיית $KNAPSACK$ מוגדרת באופן הבא:

קלט:

1. מספר טבעי n.
2. קבוצת משקלים $W=\{w_1,\ldots,w_n\}$ כאשר $w_i\in\mathbb{N}^+$ לכל $1\le i\le n$.
3. קבוצת ערכים $U=\{u_1,\ldots,u_n\}$ כאשר $w_i\in\mathbb{N}^+$ לכל $1\le i\le n$.
4. סך משקל כולל $W\in\mathbb{N}^+$
5. סך ערך כולל $U\in\mathbb{N}^+$.

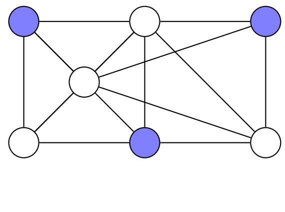
פלט: האם קיימת תת-קבוצה $S\subseteq\{1,\ldots,n\}$ של הפריטים כך ש:

1. $\sum\limits_{i\in S} w_i\le W$ (סך המשקל לא חורג ממשקל מקסימלי W)
2. $\sum\limits_{i\in S} u_i\ge U$ (סך הערך לפחות U)

הוכיחו כי $KNAPSACK$ שייכת ל- NP.

שאלה 3 **(20 נקודות)**

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$, קבוצה בלתי תלויה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $S\subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u,\mathrm{v}\in S$ מתקיים $(u,\mathrm{v})\notin E$. התרשים הבא מראה דוגמה של קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k=3$:



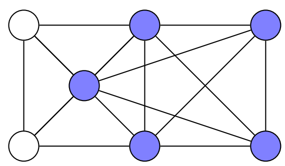
הבעיית IS מוגדרת באופן הבא:
קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר k.
פלט: האם קיימת קבוצה בלתי תלויה ב- G בגודל k?

$$IS=\left\{\langle G,k\rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ } G\right\}$$

הוכיחו כי IS שייכת ל- NP.

שאלה 4 (20 נקודות)

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$, קליקה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $C\subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u,\text{v}\in C$ מתקיים $(u,\text{v})\in E$. התרשים מראה קליקה בגודל $k=5$:



נגדיר: $\frac{1}{2}CLIQUE=\left\{\langle G\rangle \;\middle|\; G=(V,E) \text{ גרף בעל } n=|V| \text{ קודקודים וקיימת קליקה בגרף בגודל } \frac{n}{2}\right\}$.
הוכיחו כי השפה $\frac{1}{2}CLIQUE$ היא NP שלמה.

שאלה 5 (20 נקודות) תהי L השפה הבאה:

$$DOUBLESAT=\left\{\langle\phi\rangle \;\middle|\; \phi \text{ נוסחה בוליאנית עבורה קיימות לפחות } 2 \text{ השמות מספקות}\right\}.$$

הוכיחו כי L היא NP שלמה.

פתרונות

<u>שאלה 1</u> נבנה מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית המכריעה את $HAMCYCLE$ בזמן פולינומיאלי.

<u>בניית המכונה</u>

$M =$ על קלט $\langle G \rangle$:

1. בודקת באופן אי-דטרמיניסטית סדרת קודקודים $u_1, \ldots, u_n$ מתוך V כאשר $|V| = n$.
2. בודקת שהקודקודים שונים זה מזה.
   - אם לא $\Leftarrow$ דוחה.
3. בודקת שכל הצלעות (u_i, u_{i+1}) לכל $1 \leq i \leq n-1$ וגם את הצלע (u_n, u_1) נמצאת ב- G.
   - אם לא $\Leftarrow$ דוחה.
   - אחרת $\Leftarrow$ מקבלת.

<u>נכונות</u>

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

אם $\langle G \rangle \in HAMCYCLE$.

$\Leftarrow$ $\exists$ מעגל המילטוני ב- G.

$\Leftarrow$ $\exists$ ריצה של M על $\langle G \rangle$ בה תבחר בקודקודי מעגל זה. נסמן הסדרת הקודקודים הזו $u_1, \ldots, u_n$.

$\Leftarrow$ M תבדוק שהקודקודים בסדרה הזו שונים זה מזה, ולא תדחה.

$\Leftarrow$ M תבדוק שלכל $1 \leq i \leq n-1$ התלע (u_1, u_{i+1}) והצלע (u_n, u_1) קיימות ותקבל.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

אם

$\langle G \rangle \notin HAMCYCLE$.

$\Leftarrow$ לא קיים מעגל המילטוני ב- G.

$\Leftarrow$ בכל ריצה של M על $\langle G \rangle$ היא תבחר סדרת קודקודים ולפחות אחת הבדיקות לא תתקיים.

$\Leftarrow$ M תדחה.

<u>סיבוכיות זמן</u>

- שלב 1) עולה $O(|V|)$ צעדים.
- שלב 2) עולה $O(|V|)$ צעדים.
- שלב 1) עולה $O(|V||E|)$ צעדים.

לפיכך M רציה בזמן $O(|V|)+O(|V|)+O(|V||E|)=O(|V||E|)=O(N)$ כאשר N הוא האורך הקלט $\langle G\rangle$.
לכן $HAMCYCLE$ כריעה בזמן פולינויאלי ע"י מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית לכן $HAMCYCLE \in NP$.

<u>שאלה 2</u> נראה שקיימת מ"ט אי-דטרמיניסטית M שמכרעיה $KNAPSACK$ בזמן פולינויאלי ואז נראה שהיא רצה בזמן פולינויאלי.

<u>בניית המכונה</u>

$M=$ "על קלט $\langle\{w_1,\ldots,w_n\},\{u_1,\ldots,u_n\},W,U\rangle$:

1) בוחרת תת קבוצה $S\subseteq\{1,\ldots,n\}$ באופן אי-דטרמיניסטי.

2) בודקת אם $\sum\limits_{i\in S} w_i \le W$.

- אם לא $\Leftarrow$ דוחה.

3) בודקת אם $\sum\limits_{i\in S} u_i \ge U$.

- אם לא $\Leftarrow$ דוחה.
- אחרת מקבלת."

<u>הוכחת נכונות</u>

<u>סיבוכיות זמן</u>

<u>שאלה 3</u> נבנה מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית המכריעה את IS בזמן פולינומיאלי.

<u>בניית המכונה</u>

$M=$ על קלט $\langle G\rangle$:

1) בודקת באופן אי-דטרמיניסטית סדרת קודקודים $u_1,\ldots,u_k$ מתוך V כאשר $k\le n$, כאשר $|V|=n$.

2) בודקת שהקודקודים שונים זה מזה.

- אם לא $\Leftarrow$ דוחה.

3) בודקת שכל $1\le i,j\le k$: $(u_i,u_j)\notin E$ כאשר E הקבוצת הצלעות של G.

- אם לא $\Leftarrow$ דוחה.
- אחרת $\Leftarrow$ מקבלת.

<u>נכונות</u>

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>
<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

<u>סיבוכיות זמן</u>

<u>שאלה 4</u>

ידוע כי $CLIQUE$ שפה NP שלמה. לכן נראה שקיימת רדוקציה פולינומיאלית מ- $CLIQUE$ ל- $\frac{1}{2}CLIQUE$ ולכן $\frac{1}{2}CLIQUE$ NP שלמה.

<u>בניית הרדוקציה</u>

$$f(\langle G,k\rangle) = \langle G'\rangle \ ,$$

כאשר, אם $G=(V,E)$ כאשר $|V|=n$, אז G' הוא הגרף הבא:

- מוסיפים ל- G גרף שלם K_n בעל n קודקודים.
- מחברים כל קודקוד של K_n לכל קודקוד של G.
- מוספים קבוצה של $2k$ קודקודים בודדים אשר לא מחבורים לאף קודקוד אחר בצלע.

<u>הוכחת נכונות</u>

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

אם $\langle G,k\rangle \in CLIQUE$

$\Leftarrow$ G מכיל קליקה בגודל k.

$\Leftarrow$ G' מכיל קליקה בגודל $k+n$.

$\Leftarrow$ מכיוון של- G' יש $n'=2k+2n$ קודקודים אז G' מכיל קליקה בגודל $\frac{n'}{2}$.

$\Leftarrow$ $\langle G'\rangle \in \frac{1}{2}CLIQUE$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

אם $\langle G'\rangle \in \frac{1}{2}CLIQUE$

- $\Leftarrow$ $G' = (V', E')$ גרף לא מכוון שמכיל גליקה בגודל $\frac{n'}{2}$, כאשר $n' = |V'|$.
- $\Leftarrow$ מכיוון ש- $n' = 2k + 2n$, אז G' מכיל גליקה בגודל $n + k$.
- $\Leftarrow$ אם נוציא מהגרף G' את ה- $2k$ קודקודים בודדים ואת הגרף שלם K_n אז נקבל גרף G שמכיל קליקה בגודל k.
- $\Leftarrow$ $\langle G, k \rangle \in CLIQUE$.

סיבוכיות זמן

שאלה 5 ממשפט קוק לוין השפה SAT NP שלמה. נראה שקיימת רקוקציה פולינומיאלית מ- SAT ל- $DOUBLESAT$, ולכן $DOUBLESAT$ NP שלמה.

בניית הרדוקציה

$$f(\langle \phi \rangle) = \langle \phi' \rangle$$

כאשר ϕ נוסחה בוליאנית ו-

$$\phi' = \phi \vee x$$

כאשר x משתנה בוליאני.

הוכחת נכונות

כיוון $\Leftarrow$

אם $\langle \phi \rangle \in SAT$.

- $\Leftarrow$ $\exists$ השמה מספקת ל- ϕ. נסמן ההשמה המספקת X_1.
- $\Leftarrow$ $\exists$ שתי השמות המספקות ל- ϕ': ההשמה X_1 והשמה $X_2 = \{x = 1\}$.
- $\Leftarrow$ $\langle \phi' \rangle \in DOUBLESAT$.

כיוון $\Rightarrow$

נניח ש- $\langle \phi' \rangle \in DOUBLESAT$ ונניח בשלילה כי $\langle \phi \rangle \notin SAT$.

- $\Leftarrow$ לא קיימת השמה מספקת של ϕ.
- $\Leftarrow$ ל- ϕ' רק השמה מספקת אחת: $x = 1$, בסתיקה לכך ש- $\langle \phi' \rangle \in DOUBLESAT$.
- $\Leftarrow$ $\langle \phi \rangle \in SAT$.