חישוביות וסיבוכיות

מבחן לדוגמה 1

ד"ר יוחאי טוויטו, , .

סמסטר א, תשפ"ה'

מספר העמוד הנוכחי ומספר העמודים הכולל בשאלון מופיעים בתחתית כל עמוד. בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות

שאלוני בחינה

- ☑ לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ☐ לשאלון הבחינה יש לצרף כריכה בלבד.
- ☐ יש להחזיר את השאלון ביחד עם המחברת/כריכה.

שימוש במחשבונים

- ☐ ניתן להשתמש במחשבון.
- ☑ לא ניתן להשתמש במחשבון.

חומר עזר

- ☑ לא ניתן להשתמש בחומר עזר כלל.
- ☐ ניתן להשתמש בחומר עזר/דף נוסחאות, כמפורט:
- ☐ הבחינה עם חומר פתוח מותר להשתמש בכל חומר עזר מודפס או כתוב.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג:

הנחיות

נא קראו בעיון את ההנחיות הבאות בטרם תתחילו לפתור את הבחינה. מומלץ לקרוא בקצרה את כלל השאלות לפני שמתחילים לפתור את הבחינה. ניתן לענות על השאלות בכל סדר שתרצו.

1. המבחן כולל 5 שאלות. יש לענות על כולן.
2. שאלות הבחינה שוות משקל - כל שאלה 20 נקודות.
3. כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תדלגו על שלבים.
4. המבחן כולל נספחים, לשימושכם. הסתייעו בהם במידת הצורך.
5. הקפידו על כתב יד ברור וקריא.
6. הקפידו לרשום בגדול ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
7. כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבלתם. רק הן נבדקות !
8. ניתן לקחת את השאלון כאשר הבחינה מסתיימת.

בהצלחה!

הבחינה

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (15 נק')

בנו מכונת טיורינג **שמכריעה** את השפה הבאה:

$$\left\{x_1 \ldots x_k \,\#\, y_1 \ldots y_k \,\#\, z_1 \ldots\ z_k \;\middle|\; x_i, y_i, z_i \in \{0, \ldots, 9\} \wedge \forall i\big((z_i \neq x_i) \wedge (z_i \geqslant x_i + y_i)\big)\right\}$$

את המכונה יש לתאר בעזרת **טבלת מעברים**. אין לתאר את המכונה בעזרת תרשים ו/או פסאודו-קוד (תיאור מילולי).

סעיף ב' (5 נק')

בהתייחס לסעיף ב', הסבירו במילים **כיצד ניתן לממש את התנאי המורכב**:

$$(z_i \neq x_i) \wedge (z_i \geqslant x_i + y_i)\ .$$

כמו כן, הדגימו את ההסבר באיור המראה כיצד התנאי ממומש בתרשים המכונה. האיור אינו צריך להראות מימוש מלא של התנאי המורכב, אלא רק את רעיון המימוש. לדוגמא, ע"י הדגמת הרעיון כפי שהוא בא לידי ביטוי במצב אחד ספציפי של המכונה.

שאלה 2: וריאציות על מכונות טיורינג (20 נקודות)

נסמן ב- T מודל מכונת טיורינג הבסיסי. במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להשאר במקום, באותה המשבצת בסרט.

נגדיר מודל חדש של המכונת טיורינג - מודל TS. במודל זה לא חייבים להזיז את הראש בכל מעבר - ניתן להשאיר את הראש באותו מקום על הסרט, כאשר עוברים מצב וכותבים אות. במילים אחרות, במודל TS, כאשר אנחנו נמצאים במצב נתון וקוראים אות נתונה, אנחנו עוברים למצב מסויים, כותבים אות מסויימת ומבחינת תזוזה אנחנו יכולים לזוז שמאלה, ימינה, או להשאר במקום.

ההסבל בין המודלים הוא בפונקציית המעברים. והוא בא לידי ביטוי באופן פורמלי בצורה הבאה:

פונקציית מעברים של המודל T: $\delta : (Q\backslash\{\text{acc}, \text{rej}\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$

פונקציית מעברים של המודל TS: $\delta : (Q\backslash\{\text{acc}, \text{rej}\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}$

האם המודלים שקולים חישובית? כלומר, האם ישנה שפה שניתן להכריע בעזרת מודל אחד, אבל לא ניתן להכריע בעזרת המודל השני? האם ישנה שפה שניתן לקבל בעזרת מודל אחד, אבל לא ניתן לקבל בעזרת המודל השני?

1. **במידה שהמודלים שקולים חישובית, הוכיחו את שקילותן החישובית.**
2. **אחרת, אם המודלים אינם שקולים חישובית, ספקו דוגמא נגדית.**

כלומר, ספקו שפה שניתן להכריע / לקבל במודל אחד אבל לא ניתן להכריע / לקבל במודל השני.

שאלה 3: התזה של צ'רץ'-טיורינג (20 נקודות)

נתונה השפה מעל האלפבית $\Sigma = \{a\}$:

$$L = \left\{ a^{n^2} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$$

בנו דקדוק כללי עבור השפה L. יש לתאר את הדקדוק באופן פרומלי. כלומר, על ידי הגדרה פורמלית של ארבעת רכיבי הדקדוק: משתנים, אותיות (טרמינלים), כללי יצירה, סימן התחלה.

שאלה 4: אי-כריעות (20 נקודות)

נגדיר

$$2MORE = \left\{ \langle P_1, P_2 \rangle \;\middle|\; |L(P_1)| = |L(P_2)| + 2 \right\}$$

כלומר, $2MORE$ מכילה את כל זוגות התוכניות כך שראשונה מקבלת בדיוק שתי מילים יותר מהשנייה.
האם $2MORE$ כריעה? קבילה? הוכיחו.

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$. קבוצת קדקודים $U \subseteq V$ תקרא **קבוצת בלתי תלויה** אם לכל זוג קדקודים u_1, u_2 ב- U מתקיים ש- $(u_1, u_2) \notin E$.

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$. קבוצת קדקודים $U \subseteq V$ תקרא **קליקה** אם לכל זוג קדקודים u_1, u_2 ב- U מתקיים ש- $(u_1, u_2) \in E$. נתבונן בשפות הפורמליות הבאות:

$$IS = \{\langle G, k\rangle \mid \text{גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ לפחות } G\}$$

$$CLIQUE = \{\langle G, k\rangle \mid \text{גרף לא מכוון המכיל קליקה בלתי תלויה בגודל } k \text{ לפחות. } G\}$$

הוכיחו כי

$$IS \leqslant_P CLIQUE\ .$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה IS לשפה $CLIQUE$.
יש להראות כי הרדוקציה התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.