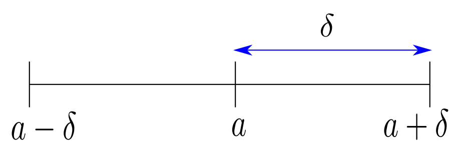
שיעור 3
גבול של פונקציה

גבול של פונקציה

3.1 הגדרה: (סביבה של נקודה)

א) כל קטע פתוח (b,c) שמכיל נקודה a נקרא "סביבה" של a.

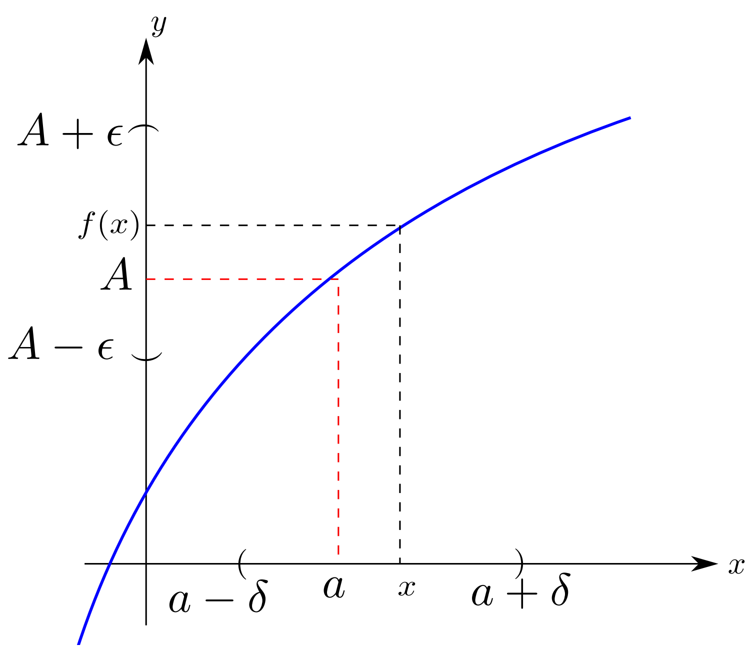
ב) קטע פתוח $(a+\delta, a-\delta)$ נקרא "δ- סביבה" של נקודה a.



a נמצא באמצע הקטע מרחק- δ מהאמצע עד הקצה.

3.2 הגדרה: (גבול דו-צדדי של פונקציה)
מספר A נקרא גבול של פונקציה $f(x)$ בנקודה a אם לכל סביבה של A קיימת סביבה של a כך שלבל $x \neq a$ השייך לסביבה של a מתקיים $f(x)$ שייך לסביבה של A.

במילים פשוטות, כאשר x מתקרב ל- a, $f(x)$ מתקרב ל- A.



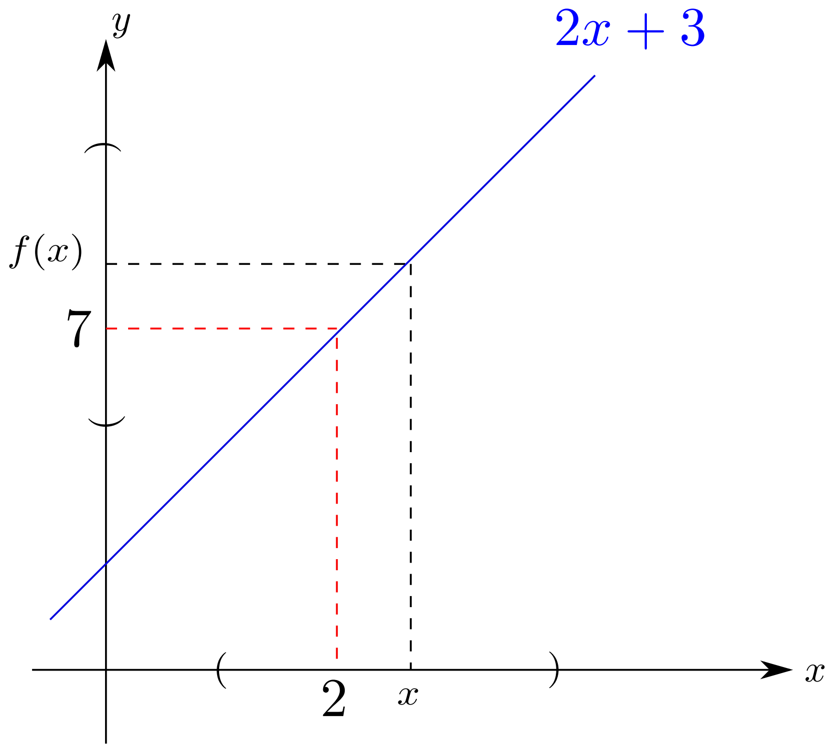
3.3 הערה.
במידה שהפונקציה מוגדרת בנקודה a, בכדי לחשב את $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ יש להציב את $x=x_0$ בנוסחה המגדירה את $f(x)$. ■

דוגמאות.

1. $\lim_{x\to 4}(x^2+\sqrt{x}) = 4^2+\sqrt{4} = 18$.

2. $\lim_{x\to \pi}(2^{\cos x}) = 2^{\cos \pi} = 2^{-1} = 0.5$.

3. $\lim_{x\to 2}(2x+3) = 7$.



4. $\lim_{x\to a} C = C$

5.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x\neq 2 \\ 1 & x=2 \ . \end{cases}$$

$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.

גבולות חד צדדיים

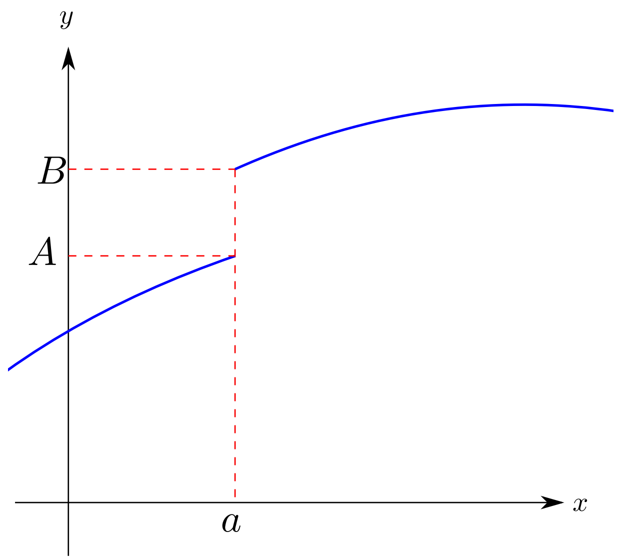
בהגדרה של גבול של פונקציה $A = \lim_{x\to a} f(x)$ לא משנה איך x שואף ל- a (מצד ימין או מצד שמאל), $f(x)$ מתקרב ל-A. לפעמים התוצאה תלויה באופן ההתקרבות של x ל a.

בגרף בתרשים, כאשר x שואף ל a משמאל, $f(x)$ מתקרב ל A, וכאשר x שואף ל a מימין, $f(x)$ מתקרב ל B.

סימנים:

$$\lim_{x\to a^-} = A \ , \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = B \ .$$

3.4 הגדרה: (גבול חד-צדדי של פונקציה)



1) הגבול משמאל של פונקציה $f(x)$ בנקודה a שווה ל- A אם לכל סביבה של A קיימת סביבה של a שך שלכל $a < x$ מהסביבה של a, גם $f(x)$ שייך לסביבה של A.

סימון: $\lim\limits_{x\to a^-} = A$.

2) הגבול מימין של פונקציה $f(x)$ בנקודה a שווה ל- B אם לכל סביבה של B קיימת סביבה של a שך שלכל $a > x$ מהסביבה של a, גם $f(x)$ שייך לסביבה של B.

סימון: $\lim\limits_{x\to a^+} = B$.

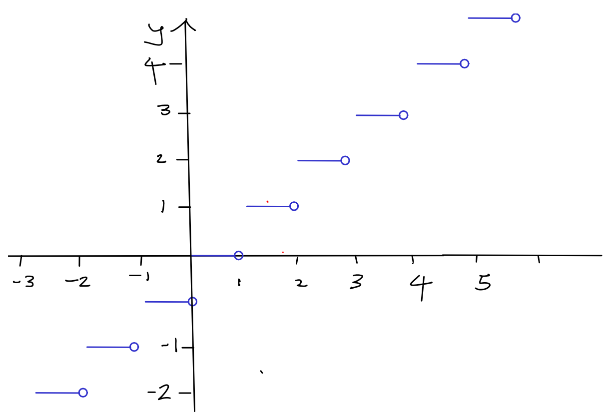
3.5 משפט. (קיום גבול דו-צדדי)

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ אם ורק אם $\lim\limits_{x\to a^+} = \lim\limits_{x\to a^-} = A$.

3.6 דוגמא.

$f(x) = \lfloor x \rfloor$ (פונקציית הריצפה - המספר השלם הקרוב ביותר ל x שלא גדול ממנו).

$$\lfloor 2.3 \rfloor = 2 \ , \qquad \lfloor 2.8 \rfloor = 2 \ , \qquad \lfloor -2.3 \rfloor = -3 \ .$$



נבדוק אם קיים $\lim\limits_{x\to 2} \lfloor x \rfloor$.

$$\lim_{x\to 2^+} \lfloor x \rfloor = 2 \ , \qquad \lim_{x\to 2^-} \lfloor x \rfloor = 1 \ .$$

ז"א הגבולות החד צדדיים שונים ולכם לא קיים $\lim_{x\to 2} \lfloor x \rfloor$.

לעומת זאת,

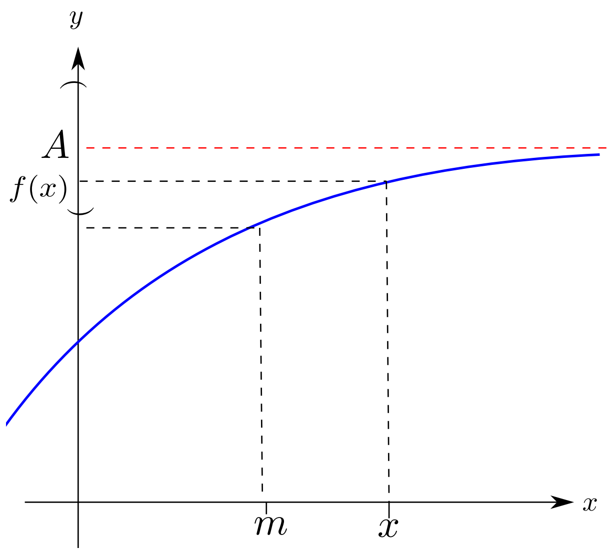
$$\lim_{x\to 2.5}\lfloor x\rfloor = 2$$

כן קיים.

גבול של פונקציה ב $x\to\infty$

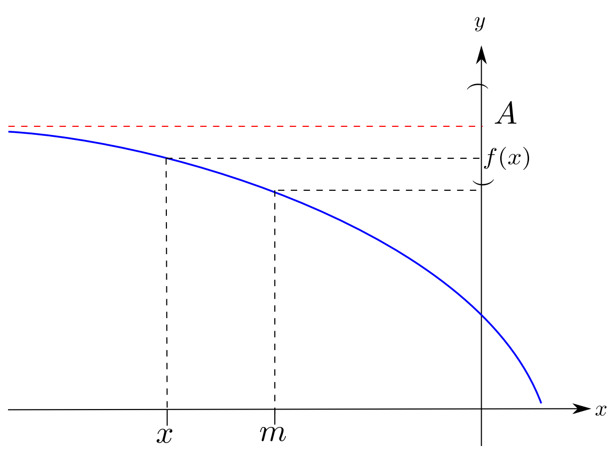
3.7 הגדרה: (גבול של פונקציה כאשר $x\to\infty$)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$



$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ אם לכל סביבה של A קיים מספר m כך שלכל $x>m$ מתקיים: $f(x)$ שייך לסביבה של A.

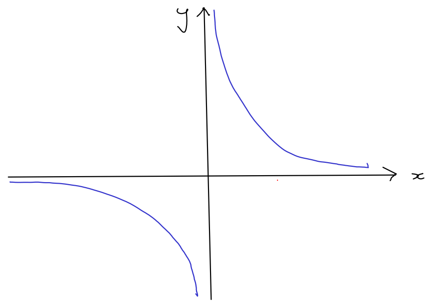
3.8 הגדרה: (גבול של פונקציה כאשר $x\to-\infty$)



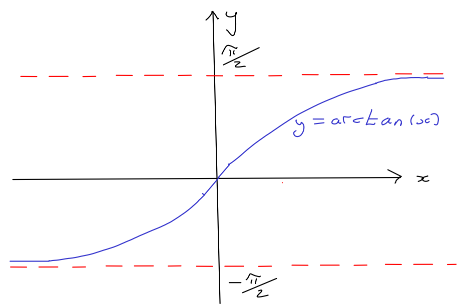
$\lim_{x\to-\infty} = A$ אם לכל סביבה של A קיים מספר m כך שלכל $x<m$ מתקיים: $f(x)$ שייך לסביבה של A.

דוגמאות.

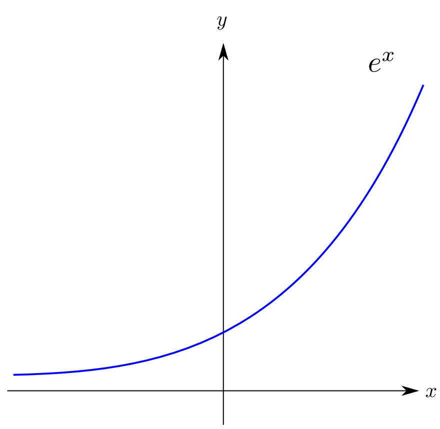
1. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0^+$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0^-$.



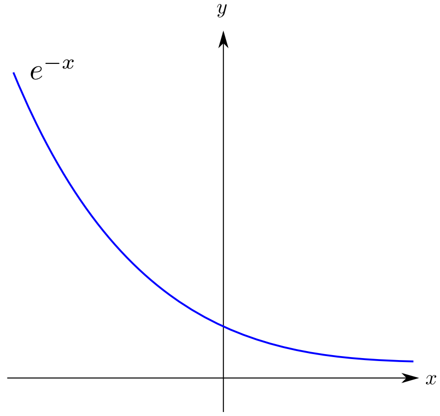
2. $\lim_{x\to-\infty}\arctan(x)=-\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to\infty}\arctan(x)=\frac{\pi}{2}$.



3. $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$.



4. $\lim_{x\to\infty}e^{-x}=0$.



5. הגבולות $\lim_{x\to\infty}\cos x$, $\lim_{x\to-\infty}\cos x$, $\lim_{x\to\infty}\sin x$, $\lim_{x\to-\infty}\sin x$ לא קיימים.

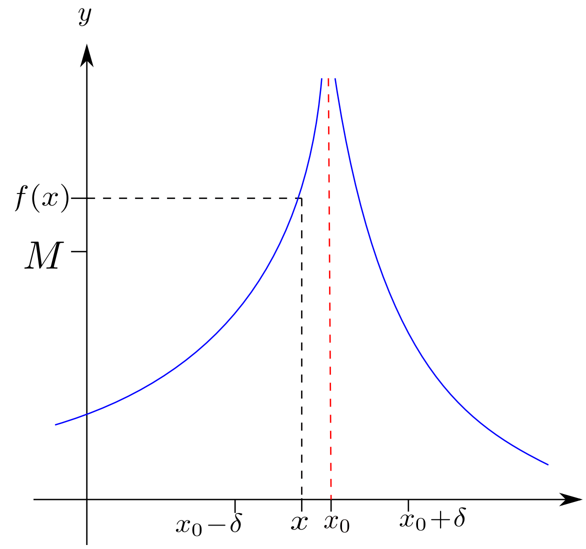
גבול אינסופי בנקודה

3.9 הגדרה: (גבול אינסופי של פונקציה בנקודה)

(i)

$$\lim_{x\to a} f(x) \to \infty$$

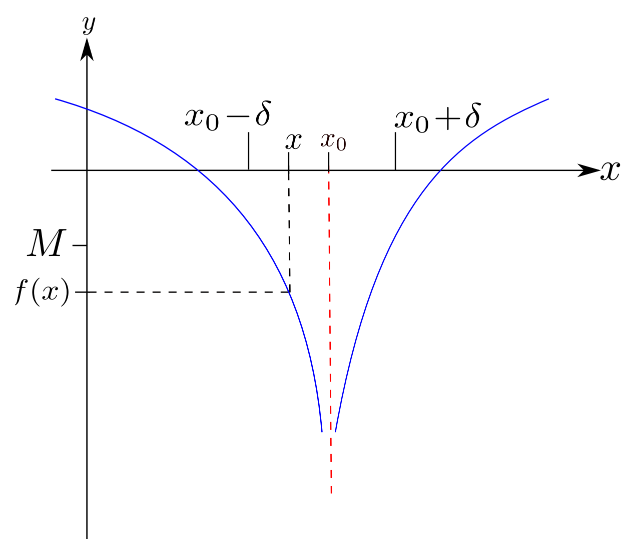
אם לכל M קיימת סביבה של נקודה a, כך שלכל x השייך לסביבה של a, $f(x) > M$.



(ii)

$$\lim_{x\to a} f(x) \to -\infty$$

אם לכל M קיימת סביבה של a כך שלכל x השייך לסביבה של a, $f(x) < M$.

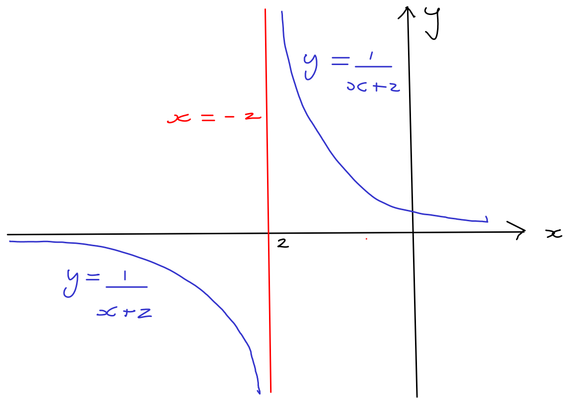


דוגמאות.

1.

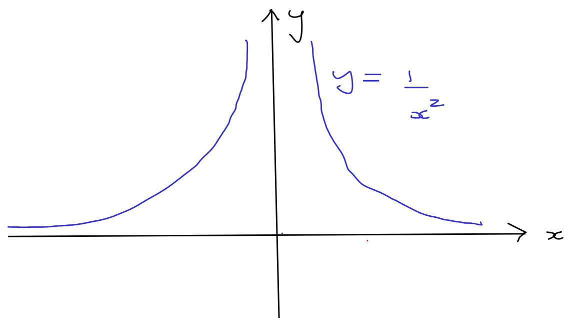
$$\lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x+2} = \infty,$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty.$$



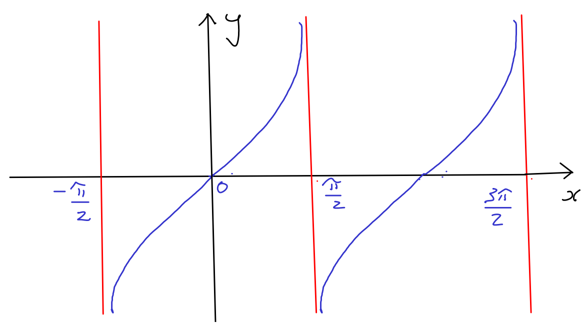
2.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=\infty,$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}=\infty.$$



3.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\tan x=\infty,$$
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty.$$



משפטים יסודיים של גבולות

3.10 משפט. (גבולות מסוימות)

א) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

ב) $\lim_{x\to\infty}p^x=\begin{cases}0 & (0<p<1)\\ \infty & p>1\end{cases}$

ג) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1 \ , \qquad (p>0) \ .$

ד) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \ .$

דוגמאות לחישוב גבולות

דוגמאות.

דוגמא 1.

$$\lim_{x\to 1}(3x^2-2x+7) = 3\cdot 1^2 - 2\cdot 1 + 7 = 8 \ .$$

דוגמא 2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8} &= \left[\frac{0}{0}\right] \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)} \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x+16)}{(x-4)} \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{18}{-2} \\ &= -9 \ .\end{aligned}$$

דוגמא 3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5} &= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}} \\ &= \frac{1}{2} \ .\end{aligned}$$

דוגמא 4.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1} &= \left[\frac{0}{0}\right] \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{\sqrt{x^2+3x}+2} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{(x-1)\cdot(\sqrt{x^2+3x}+2)} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)\cdot(\sqrt{x^2+3x}+2)} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x+4}{\sqrt{x^2+3x}+2} \\ &= \frac{5}{4} \ .\end{aligned}$$

דוגמא 5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^x+4^x+3^x}{5^x-4^x-2\cdot 3^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+(\frac{4}{5})^x+(\frac{3}{5})^x}{1-(\frac{4}{5})^x-2\cdot(\frac{3}{5})^x} = \quad 1 \ .$$

דוגמא 6.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x+4^x+3^x}{5^x-4^x-2\cdot 3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{5}{3})^x+(\frac{4}{3})^x+1}{(\frac{5}{3})^x+(\frac{4}{3})^x-2}= \quad -\frac{1}{2}\ .$$

דוגמא 7.

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)^n\right)=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^n$$

גדלים בלתי מוגדרים

1. $\left[\frac{a}{\infty}\right]=0$ לכל מספר a.

$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ לא מוגדר.

2. $\left[\frac{a}{0^+}\right]=\infty$, $\left[\frac{a}{0^-}\right]=-\infty$ לכל מספר $a>0$.

$\left[\frac{0}{0}\right]$ לא מוגדר.

$\left[\frac{\infty}{0^+}\right]=\infty$, $\left[\frac{\infty}{0^-}\right]=-\infty$.

3. $[\infty\cdot\infty]=\infty$, $a\cdot\infty=\infty$ לכל מספר $a>0$.

$[0\cdot\infty]$ לא מוגדר.

4. $[a+\infty]=\infty$, $[a-\infty]=-\infty$ לכל מספר a.

$[\infty+\infty]=\infty$.

$[\infty-\infty]$ לא מוגדר.

5. $[a^{\infty}]=\infty$, $[a^{-\infty}]=0$ לכל מספר $a>1$.

$[a^{\infty}]=0$, $[a^{-\infty}]=\infty$ לכל מספר $0<a<1$.

$[0^{\infty}]=0$, $[\infty^{\infty}]=\infty$.

1^{∞} לא מוגדר, 0^0 לא מוגדר, ∞^0 לא מוגדר.

דוגמאות.

דוגמא 1.

$$\lim_{x\to\infty}[2^x]^{1/x}=[\infty^0]=\lim_{x\to\infty}2^{x/x}=2^1=2$$

דוגמא 2.

$$\lim_{x\to\infty}[2^x]^{1/\sqrt{x}}=[\infty^0]=\lim_{x\to\infty}[2^{\sqrt{x}}]=2^{\infty}=\infty$$

דוגמא 3.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{1/x}=[0^0]=\frac{1}{2}\ ,$$

דוגמא 4.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{1/\sqrt{x}}=[0^0]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}=0\ .$$

דוגמא 5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\cdot x=[0\cdot\infty]=2$$

דוגמא 6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\cdot x^3=[0\cdot\infty]=\infty$$

לא מוגדר.

דוגמא 7.

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-x)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}x(x-1)=\infty\ .$$

משפטים יסודיים של גבולות

3.11 משפט. (משפטים של גבולות)
אם $\lim f(x)=A$ ו- $\lim f(x)=B$, אז

א)

$$\lim_{x\to a}(cf(x))=c\cdot A$$

כאשר c קבוע.

ב)

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$$

ג)

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$$

ד)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$$

בתנאי $B\neq 0$.

דוגמאות.

1)

$$\lim_{x\to\infty}3\cdot\frac{x^2-2x}{x^2+3x}=3\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{x^2+3x}=3\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x}}=3\cdot\frac{1-\frac{2}{\infty}}{1+\frac{3}{\infty}}=3\cdot\frac{1}{3}=1\ .$$

2)

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(x+4)}{2x^2-8}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(x+4)}{2(x+2)(x-2)}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{2(x-2)}\right)\cdot\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+4}{x+2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{4}=3\ .$$

3)

$$\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{x}{x-1}+\frac{2x}{x-3}\right)=\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{x}{x-1}\right)+\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{2x}{x-3}\right)=\frac{3}{2}+\frac{6}{0^+}=\frac{3}{2}+\infty=\infty\ .$$

4)

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{x^2-16}{x+8}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{(x-4)(x+4)}{x+8}\right)=\frac{\lim_{x\to 4}(x-4)(x+4)}{\lim_{x\to 4}(x+8)}=\frac{0}{12}=0\ .$$

3.12 משפט. (גבולות מיוחדים)

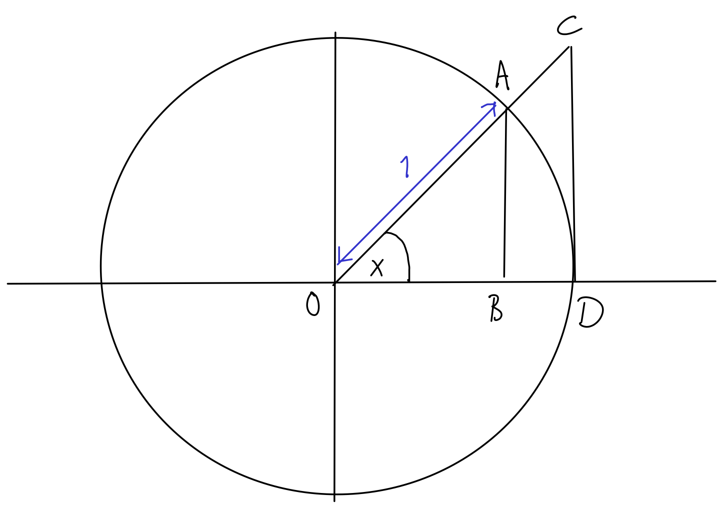
א) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

ב) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

ג) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

הוכחה.

$\underline{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$



$$S_{\Delta OAB}<S_{\Delta OAD}<S_{\Delta OCD}$$

$$S_{\Delta OAB}=\frac{OB\cdot OA}{2}=\frac{\sin x\cdot\cos x}{2}\ ,$$

$$S_{\Delta OAD}=\frac{AD\cdot OA}{2}=\frac{1\cdot 1\cdot x}{2}=\frac{x}{2}\ ,$$

$$S_{\Delta OCD}=\frac{CD\cdot OA}{2}=\frac{1\cdot\tan x}{2}=\frac{\tan x}{2}\ ,$$

$$\frac{\sin x\cdot\cos x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\tan x}{2}$$

שימו לב $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$. נחלק את האי-שוויון ב- $\sin x$:

$$\frac{\cos x}{2}<\frac{x}{2\sin x}<\frac{1}{2\cos x}$$

נכפיל את האי-שוויון ב- 2:

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

נקח אצ הגבול $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \cos x < \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} < \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \qquad \Rightarrow \qquad 1 < \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} < 1$$

לכן לפי כלל הסנדוויץ'

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \ .$$

■

דוגמאות

דוגמאות.

1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4} \frac{x^2-18x+56}{x^2-6x+8} &= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x-14)}{(x-4)(x-2)} \\ &= \lim_{x\to 4} \frac{x-14}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 4} \frac{-10}{-2} \\ &=5 \ .\end{aligned}$$

□

2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}x+\frac{5}{x^2}} = \frac{1}{2} \ .$$

□

3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{\sqrt{x^2+3x}+2} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{(x-1)\sqrt{x^2+3x}+2} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x+4)(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^2+3x}+2} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x+4}{\sqrt{x^2+3x}+2} \\ &=\frac{5}{4} \ .\end{aligned}$$

□
