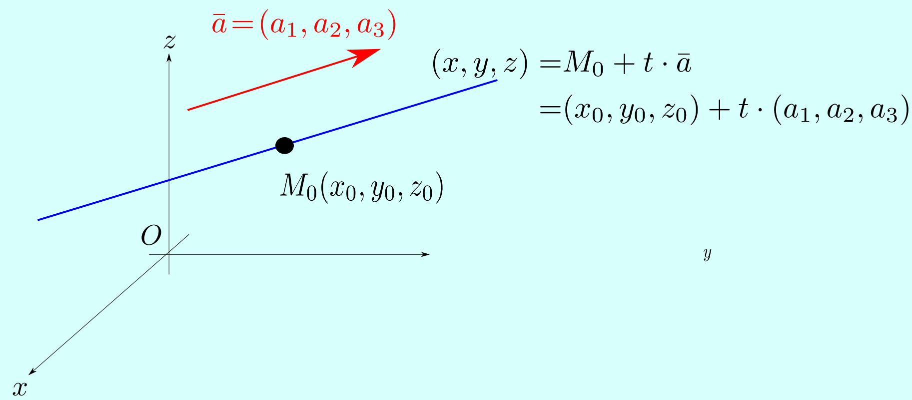
שיעור 6
ישרים במרחב תלת ממדי

הגדרה 6.1 משוואת הישר בצורה פרמטרית



משוואת הישר העובר דרך הנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$ במקביל לוקטור $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, הוא

$$(x,y,z) = M_0 + t\cdot\bar{a} = (x_0,y_0,z_0) + t(a_1,a_2,a_3)\ ,$$

או באופן שקול

$$x = x_0 + a_1 t\ , \qquad y = y_0 + a_2 t\ , \qquad z = z_0 + a_3 t\ .$$

הווקטור $\bar{a}$ נקרא וקטור הכיוון, הקוארדינטות (a_1,a_2,a_3) נקראות קואורדינטות הכיוון של הישר.

דוגמה 6.1

חשבו את משוואת הישר העובר דרך הנקודה $(2,1,3)$ במקביל לוקטור $(6,7,1)$.

פתרון:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2+6t \\ y &= 1+7t \\ z &= 3+t \end{aligned}\right\}$$

$$(x,y,z) = (2,1,3) + t\cdot(6,7,1)\ .$$

דוגמה 6.2

הישר

$$\left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= 5-2t \\ z &= 5-3t \end{aligned}\right\}$$

$$(x,y,z) = (0,5,5) + t\cdot(1,-2,-3)$$

עובר דרך $M_0(0,5,5)$ במקביל לוקטור $\bar{a}=(1,-2,-3)$.

כלל 6.1 משוואת הישר בצורה קנונית

משוואת הישר העובר דרך נקודה נתונה $M_0(x_0,y_0,z_0)$ במקביל לוקטור נתון, $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ בצורה קנונית היא

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3} \ .$$

- אם המקדם של x שווה אפס, כלומר אם $a_1=0$, נחליף את החלק שלו במשוואה ע"י

  $$x=x_0 \ .$$

  ז"א הישר מוכל במישור של $x=x_0$.
- אם המקדם של y שווה אפס, כלומר אם $a_2=0$, נחליף את החלק שלו במשוואה ע"י

  $$y=y_0 \ .$$

  ז"א הישר מוכל במישור של $y=y_0$.
- אם המקדם של z שווה אפס, כלומר אם $a_3=0$, נחליף את החלק שלו במשוואה ע"י

  $$z=z_0 \ .$$

  ז"א שהישר מוכל במישור של $z=z_0$.
- במקרה ששניהם מהמקדמים הם אפס, למשל $a_1=a_2=0$, הישר נתון ע"י

  $$\left.\begin{array}{ll} x & =x_0 \\ y & =y_0 \end{array}\right\}$$

  כלומר הישר מקביל לציר ה- z.

דוגמה 6.3

חשבו את משוואת הישר העובר דרך הנקודה $(4,4,-1)$ במקביל לוקטור $(2,-2,7)$ בצורה קנונית.

פתרון:

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+1}{7} \ .$$

דוגמה 6.4

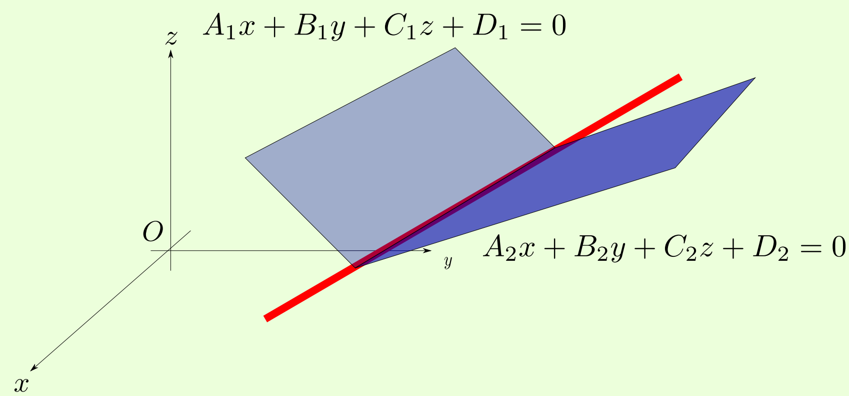
חשבו את משוואת הישר המקביל לוקטור $\bar{a}=(0,1,2)$ העובר דרך הנקודה $M_0(2,3,5)$

פתרון:

נתון ע"י

$$x = 2 \ , \qquad y - 3 = \frac{z-2}{5} \ .$$

כלל 6.2 ישר כחיתוך של שני מישורים



בהינתן שני מישורים

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \ , \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \ , \end{aligned}$$

שאינם מתלכדים או מקבילים קובעים את הישר שבו הם מפגשים. צמד המשוואות של שני המישרים נקרא **משוואה כללית של הישר** .

מכיון שיש שתי משוואות בשלושה נעלמים, אז הפתרון יהיה בצורה קבוצה של אינסוף פתרונות באמצעות פרמטר חופשי, אשר הוא דווקא הפרמטר המופיע במשוואה פרמטרית של הישר.

דוגמה 6.5

מצאו את הישר הנתון ע"י המערכת

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2x + y - 5 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

פתרון:

<u>שיטה 1</u>

$$y = 5 - 2x \quad \Rightarrow \quad z = y - x = 5 - 3x$$

נציב $x = t$ ונקבל

$$\left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= 5 - 2t \\ z &= 5 - 3t \end{aligned}\right\}$$

קיבלנו את משוואת הישר.

<u>שיטה 2</u>

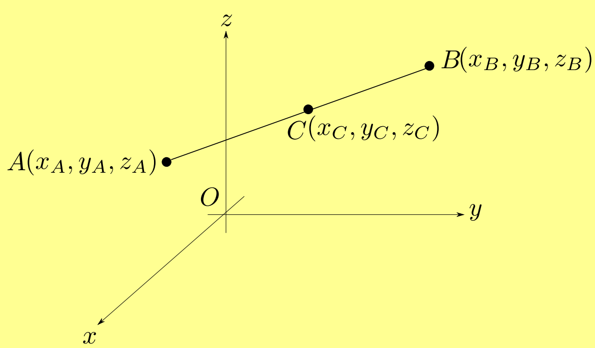
הישר מוכל בשני המישורים ולכן ניצב לוקטור $\bar{a}=(1,-1,1)$ וגם לוקטור $\bar{b}=(2,1,0)$. לכן, הוא מקביל לוקטור

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=(-1,2,3)\ .$$

כדי למצוא נקודה על הישר, נציב ערכים במשוואה. למשל, אם נציב $x_0=1$ נקבל $y_0=3$ ו- $z_0=2$. לכן הישר נתון ע"י

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{3}\ .$$

משפט 6.1 חלוקה של וקטור ביחס נתון



$$\frac{AC}{CB}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\ .$$

$$x_c=\frac{\lambda_2 x_A+\lambda_1 x_B}{\lambda_1+\lambda_2}\ ,\qquad y_c=\frac{\lambda_2 y_A+\lambda_1 y_B}{\lambda_1+\lambda_2}\ ,\qquad z_c=\frac{\lambda_2 z_A+\lambda_1 z_B}{\lambda_1+\lambda_2}\ .$$

דוגמה 6.6

מצאו נקודה C המחלקת את הקטע AB ביחס $\frac{AC}{BC}=\frac{2}{3}$, כאשר $A(1,2,3)$, $B(7,0,5)$.

פתרון:

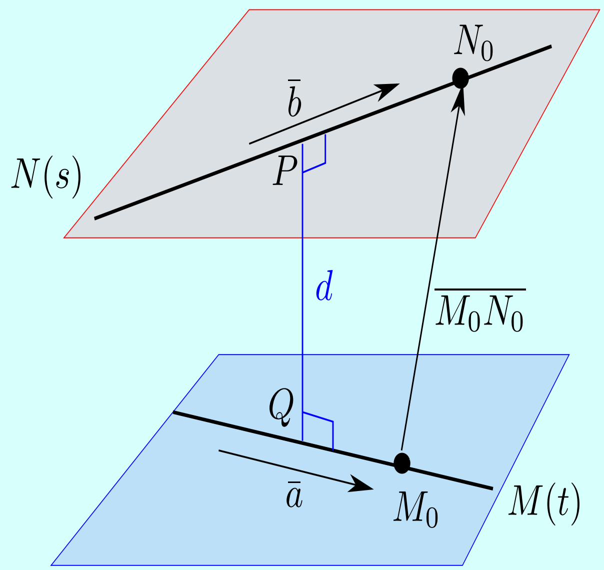
$\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$,

$$\begin{aligned} x &= \frac{3\cdot 1+2\cdot 7}{3+2}=\frac{17}{5}\\ y &= \frac{3\cdot 2+2\cdot 0}{3+2}=\frac{6}{5}\\ z &= \frac{3\cdot 3+2\cdot 5}{3+2}=\frac{19}{5}\ . \end{aligned}$$

לכן $C=\left(\frac{17}{5},\frac{6}{5},\frac{19}{5}\right)$.

הגדרה 6.2 מרחק בין ישרים מצטלבים

יהיו $M(t):\quad (x,y,z)=M_0+t\bar{a}$, $N(t):\quad (x,y,z)=N_0+t\bar{b}$ ישרים מצטלבים. המרחק ביניהם מוגדר להיות המרחק בין השתי נקודות P ו- Q, הקרובות ביותר על הישרים.



ניתן לחשב את המרחק d ע"י לבחור כל שתי נקודות M_0 ו- N_0 על השני ישרים לפי הנוסחה:

$$d = \frac{\overline{M_0N_0} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})}{|\bar{a} \times \bar{b}|} \ .$$

דוגמה 6.7

מצאו את המרחק בין הישרים $(x,y,z) = (2-t,t,t)$ ו- $(x,y,z) = (t,4-t,0)$.

פתרון:

$$\bar{a} = (-1,1,1) \ , \qquad \bar{b} = (1,-1,0) \ .$$
$$M_0 = (2,0,0) \ , \qquad N_0 = (0,4,0) \ , \qquad \overline{M_0N_0} = (-2,4,0) \ .$$
$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1,1,0) \ , \qquad \overline{M_0N_0} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = 2 \ .$$

$|\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{2}$ לכן

$$d = \frac{\overline{M_0N_0} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})}{|\bar{a} \times \bar{b}|} = \sqrt{2} \ .$$

משפט 6.2 מצב ההדדי בין שני ישרים במרחב

(1) נתונים שני ישרים

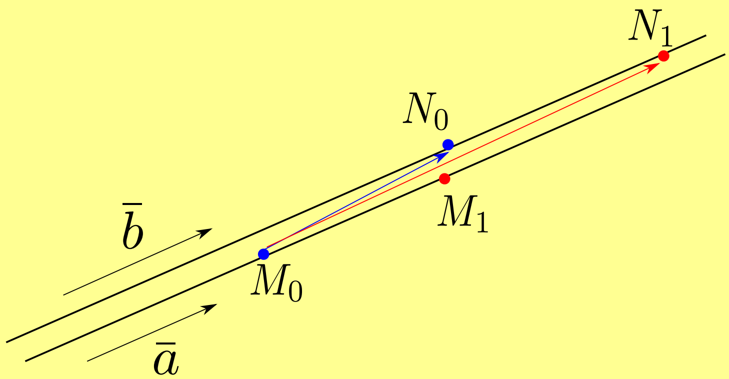
$$M(t) : \qquad (x,y,z) = M_0 + t \cdot \bar{a} = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (a_1, a_2, a_3)$$

$$N(s) : \qquad (x,y,z) = N_0 + s \cdot \bar{b} = (X_0, Y_0, Z_0) + s \cdot (b_1, b_2, b_3)$$

ונתון שתי נקודות M_1, M_2 על הישר $M(t)$ ושתי נקודות N_1, N_2 על הישר $N(t)$. ישנן ארבע אפשרויות למצב ההדדי ביניהם:

(2) **מתלכדים** אם

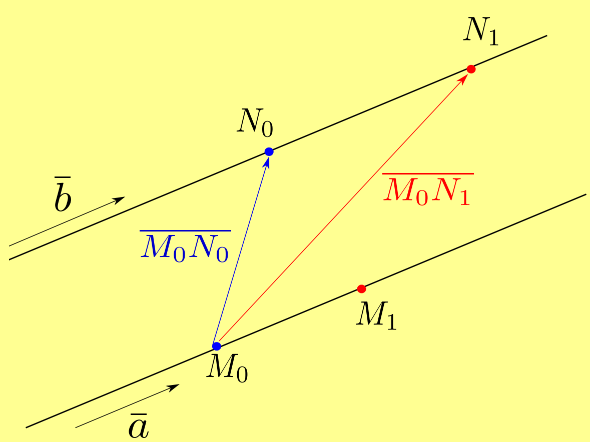
$(a_1, a_2, a_3) \parallel (b_1, b_2, b_3)$ ו- $\overline{M_0N_0} \times \overline{M_0N_1} = \bar{0}$ אז הישרים מתלכדים.



(3) **מקבילים** אם

$(a_1, a_2, a_3) \parallel (b_1, b_2, b_3)$ ו- $\overline{M_0N_0} \times \overline{M_0N_1} \neq \bar{0}$ אז הישרים מקבילים.

הישרים נמצאים באותו מישור.



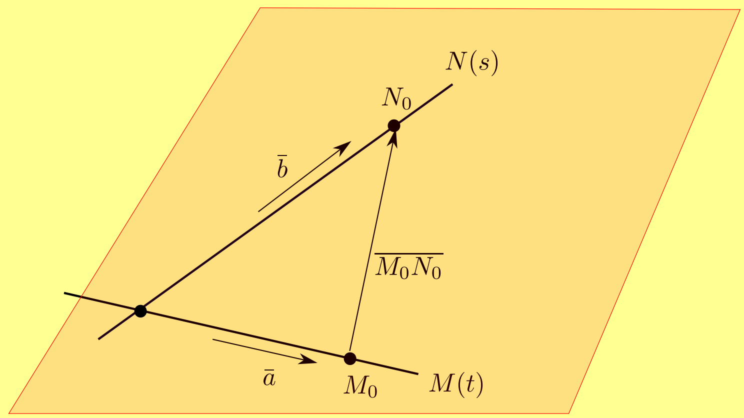
(4) **נחתכים** אם

$(a_1, a_2, a_3) \nparallel (b_1, b_2, b_3)$ ו-

$$d = \frac{\overline{M_0N_0} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})}{\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|} = 0 \ ,$$

כלומר והמרחק בין הישרים שווה לאפס, אז הישרים נחתכים.

הישירם נמצאים במישור באותו מישור ולכן הם נחתכים.



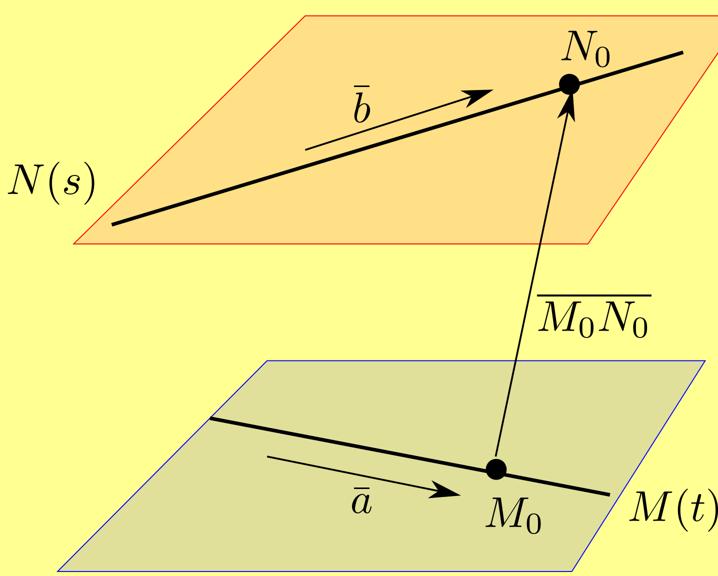
(5) <u>מצטלבים</u>

אם $(b_1, b_2, b_3) \nparallel (a_1, a_2, a_3)$ ו-

$$d = \frac{\overline{M_0N_0} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})}{\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|} \neq 0 \ ,$$

כלומר והמרחק בין הישרים אינו שווה לאפס, אז הישרים מצטלבים.

הישירם אינם נמצאים באותו מישור ולכן הם מצטלבים.



דוגמה 6.8

קבעו את המצב ההדדי של הישרים

$$\left.\begin{array}{ll} M(t): & (1,2,3) + t(1,-1,1) \\ N(t): & (0,2,1) + t(-1,1,-1) \end{array}\right\}$$

פתרון:
הווקטורים הכיוון שלהם הם $\bar{a} = (1,-1,1)$ ו- $\bar{b} = (-1,1,-1)$. הישרים מקבילים או מתלכדים בגלל שהווקטורים הכיוום שלהם מקבילים: $(1,-1,1) \parallel (-1,1,-1)$. נבדוק אם הם נחתכים.

$$M_0 = (1,2,3)\ , \qquad N_0 = (0,2,1)\ , \qquad N_1 = (-1,3,0)\ .$$

$$\overline{M_0N_0} = (-1,0,-2)\ , \qquad \overline{M_0N_1} = (-2,1,-3)\ .$$

$$\overline{M_0N_0} \times \overline{M_0N_1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (2,1,-1) \neq \bar{0}$$

לכן הישרים מקבילים.

דוגמה 6.9

קבעו את המצב ההדדי של הישרים

$$\left.\begin{array}{ll} M(t): & (x,y,z) = (1-t, 2+3t, -2+t) \\ N(t): & (x,y,z) = (4-2t, 1-t, t) \end{array}\right\}$$

פתרון:
כאן $\bar{a} = (-1,3,1)$ $\bar{b} = (-2,-1,1)$.
הישרים נחתכים או מצטלבים בגלל ש- $\bar{a} \nparallel \bar{b}$.

$$M_0 = (1,2,-2)\ , \qquad N_0 = (4,1,0)\ , \qquad \overline{M_0N_0} = (3,-1,2)\ .$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (4,-1,7)$$

לכן

$$\overline{M_0N_0} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = 27\ .$$

לכן $d = \dfrac{\overline{M_0N_0} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})}{|\bar{a} \times \bar{b}|} \neq 0$ ולכן הישרים ממצטלבים.

דוגמה 6.10

קבעו את המצב ההדדי של הישרים

$$\left.\begin{array}{ll} M(t) : & (x,y,z) = (t, 3-t, 4-3t) \\ N(t) : & (x,y,z) = (1-t, 2+t, 2t) \end{array}\right\}$$

פתרון:
$(-1,1,2) \nparallel (1,-1,-3)$. נבדוק אם יש נקודת חיתוך:
$\bar{a} \nparallel \bar{b}$.

$$M_0 = (0,3,4)\ , \qquad N_0 = (1,2,0)\ , \qquad \overline{M_0N_0} = (1,-1,-4)\ .$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1,1,0)$$

לכן
$$\overline{M_0N_0}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})=0\ .$$

לכן $d=\dfrac{\overline{M_0N_0}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})}{|\bar{a}\times\bar{b}|}=0$. לכן הישירים נחתכים.

$$\left.\begin{aligned} t &=1-s\\ 3-t &=2+s\\ 4-3t &=2s\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\left.\begin{aligned} t+s &=1\\ t+s &=1\\ 3t+2s &=4\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad t=2\ ,s=-1\ .$$

$\Leftarrow$ הנוקודת חיתוך היא $P(2,1,-2)$.

משפט 6.3 מצב הדדי בין ישר למישור

בהינתן מישור $Ax+By+Cz+D=0$ וישר $M(t):(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t\cdot(a_1,a_2,a_3)$ יש ביניהם שלושה מצבים הדדיים אפשריים:

(א) <u>הישר מוכל במישור</u>

$$(A,B,C)\perp(a_1,a_2,a_3)\qquad\Rightarrow\qquad(A,B,C)\cdot(a_1,a_2,a_3)=0\ .$$

וכל הנקודות של הישר נמצאות גם על המישור. מספיק שיהיו שתי נקודות.

(ב) <u>הישר מקביל למישור</u>

$$(A,B,C)\perp(a_1,a_2,a_3)\qquad\Rightarrow\qquad(A,B,C)\cdot(a_1,a_2,a_3)=0\ .$$

ואין להם נקודה משותפת.

(ג) <u>הישר נחתך עם המישור</u>

$$(A,B,C)\not\perp(a_1,a_2,a_3)\qquad\Rightarrow\qquad(A,B,C)\cdot(a_1,a_2,a_3)\neq0\ .$$

הווקטור הכיוון של הישר לא ניצב למישור ויש להם נקודה אחת משותפת.

דוגמה 6.11

מהו המצב הדדי בין הישר $x+4=\dfrac{y-1}{2}=-(z+1)$ והמישור $2x+3y-z-5=0$.

פתרון:

הווקטור הכיוון של הישר הוא $\bar{a}=(1,2,-1)$ והנורמל של המישור הוא $n=(2,3,-1)$. נחשב את המכפלה הסקלרית:
$$(1,2,-1)\cdot(2,3,-1)=9\neq0$$

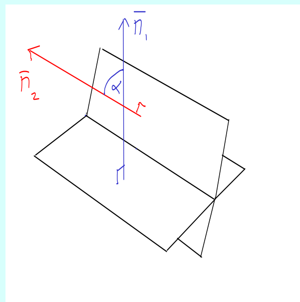
$\Leftarrow$ הישר והמישור נחתכים. נחשב את הנקודת החיתוך: נציב נקודה כללית של הישר
$$\left.\begin{aligned} x &=-4+t\\ y &=1+2t\\ z &=-1-t\end{aligned}\right\}$$

במשוואת המישור:
$$2(-4+t)+3(1+2t)-(-1-t)-5=0\quad\Rightarrow\quad 9t=9\quad\Rightarrow\quad t=1\quad\Rightarrow\quad(x,y,z)=(-3,3,-2)\ .$$

הגדרה 6.3 זווית בין מישורים וישרים

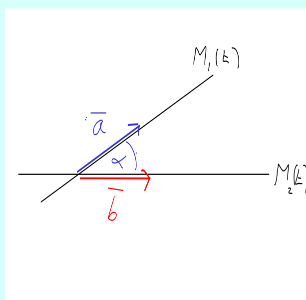
(א) הזווית בין שני מישורים מוגדרת להיות הזוית בין הווקטורים הנורמלים שלהם.

$$\cos\alpha = \frac{|\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2|}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|}$$



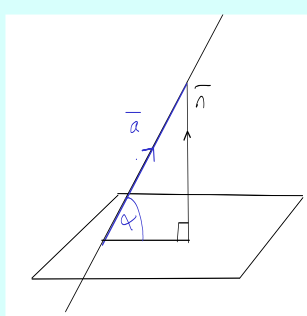
(ב) הזוית בין שני ישירים גם מצטלבים מוגדרת להיות הזוית ביו וקטורים הכיוון שלהם.

$$\cos\alpha = \frac{|\bar{a} \cdot \bar{b}|}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$$



(ג) הזוית בין מישור לישר מוגדרת להיות הזוית המשלימה לזוית בין הנורמל של המישור ווקטור הכיוון של הישר.

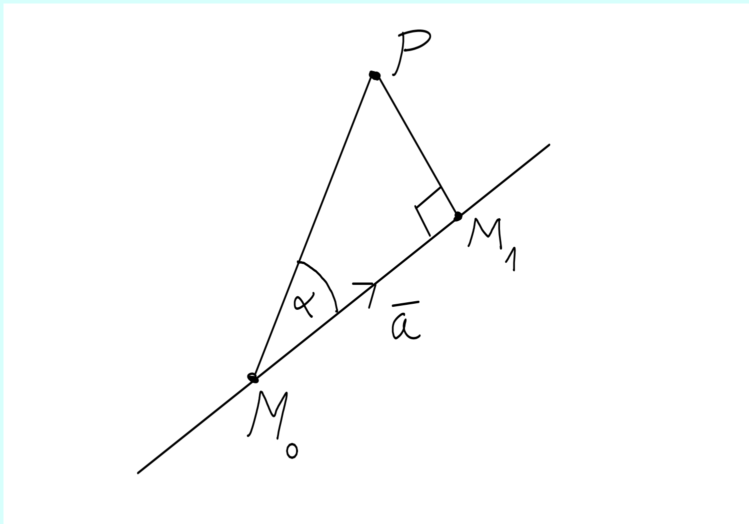
$$\sin\alpha = \frac{|\bar{a} \cdot \bar{n}|}{|\bar{a}| \cdot |\bar{n}|}$$



הגדרה 6.4 מרחק בין נקודה לישר

הנקודה הקרובה ביותר M_1 על הישר ל- P תהיה נקודה שבה $\overline{M_1P}$ ניצב ל- $\bar{a}$. ואז

$$d = |\overline{M_1P}| = |\overline{M_0P}| \sin\alpha = \frac{|\overline{M_0P} \times \bar{a}|}{|\bar{a}|}$$



דוגמה 6.12

מצאו את המרחק בין הישר $(x,y,z) = (2-t, 3+t, 1-2t)$ לנקודה $P = (0,1,0)$, ואת הנקודה על הישר הקרובה ביותר לנקודה P.

פתרון:

נקח את M_0 להיות הנקודה על הישר כאשר $t=0$. $M_0 = (2,3,1)$. אז

$$\overline{M_0P} = (0,1,0) - (2,3,1) = (-2,-2,-1) \ .$$

וקטור הכיוון של הישר הוא

$$\bar{a} = (-1,1,-2) \ .$$

לכן המרחק בין הישר $M(t)$ לנקודה P הוא

$$d = \frac{|(-2,-2,-1)\times(-1,1,-2)|}{|(-1,1,-2)|} = \frac{|(5,-3,-4)|}{|(-1,1,-2)|} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}} \ .$$

נמצא את הנקודה M_1 על הישר הקרובה ביותר ל- P. נפתור את המערכת

$$\overline{M(t)P} \perp \bar{a} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{M(t)P}\cdot\bar{a} = 0 \ .$$

בדוגמה שלנו:

$$\overline{M(t)P} = (0,1,0) - (2-t, 3+t, 1-2t) = (-2+t, -2-t, -1+2t)$$

לכן

$$\overline{M(t)P}\cdot\bar{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad (-2+t,-2-t,-1+2t)\cdot(-1,1,-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2-t-2-t+2-4t = 2-6t = 0$$

לכן $t = \dfrac{1}{3}$. לכן הנקודה הקרובה ביותר ל- P היא

$$M_1 = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{1}{3}\right) \ .$$