

תרגילים 3: צפנים בסיסיים

שאלה 1

נתון הטקסט מוצפן

HVFDDP

אשר מוצפן על ידי צופן היל עם המפתח

$$k = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 9 & 7 & 13 \end{pmatrix}.$$

מצאו את הטקסט גלוי.

שאלה 2

נתון הטקסט מוצפן

IAFDXFFUWLFEIALLCRZ

אשר מוצפן על ידי צופן אפיני עם המפתח $a = 5, b = 17$. מצאו את הטקסט גלוי.

שאלה 3

נתונה התמורה

$$\pi = (1 \ 4 \ 3 \ 2)$$

פענחו את הטקסט מצפון

CEDOB AERK GNI

שאלה 4

נתון את הטקסט מוצפן

ZFSXUHIYWU

אשר מוצפן על ידי צופן ויז'נר עם המפתח GREEN. מצאו את הטקסט גלוי.

שאלה 5 נניח כי $k = (13, 8)$ הוא מפתח של צופן האפיני מעל החוג \mathbb{Z}_{31} .

(א) מצאו את האיברים a', b' בכלל מפענח

$$d_k(y) = a'y + b'$$

כאשר $a', b' \in \mathbb{Z}_{31}$.

(ב) הוכיחו כי $d_k(e_k(x)) = x$ לכל $x \in \mathbb{Z}_{31}$.

שאלה 6 הטקסט מוצפן הבא מוצפן על ידי צופן הזה (צופן קיסר).

VW DUZDUV

מצאו את המפתח של הצופן ומצאו את הטקסט גלוי (רמז: חיפוש ממצה).

שאלה 7 נתונה התמורה הבאה:

$$\pi = (4 \ 1 \ 6 \ 2 \ 7 \ 3 \ 8 \ 5)$$

(א) מצאו את התמורה ההופכית.

(ב) פענחו את הטקסט מוצפן הבא

TGEEMNELNNTDROEOAAHDOETCSHAEIRLM

שאלה 8 נתון המפתח

$$k = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

של הצופן היל. לכל טקסט מוצפן למטה מתון את הטקסט גלוי

(א) VAZMJR

(ב) NDIMZZEMV

שאלה 9

נתון הטקסט מוצפן

FPHOEMJSUPSZZYJ

אשר מוצפן על ידי צופן היל עם המפתח

$$k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 11 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

מצאו את הטקסט גלוי.

שאלה 10

נתונה התמורה

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(x)$	4	1	6	2	7	3	8	5

(א) מצאו את $\pi^{-1}(x)$.

(ב) פענחו את הטקסט מצפון

SQIUOENTMFHREOFTLIXNAAME

שאלה 11

נתון את הטקסט מוצפן

YGSOYNGSUUTOYZNKHKYZIURRKMKOTOYXGKR

אשר מוצפן על ידי צופן קיסר. מצאו את המפתח ואת הטקסט גלוי.

שאלה 12 נניח כי $k = (5, 21)$ הוא מפתח של צופן האפיני מעל החוג \mathbb{Z}_{29} .**(א)** מצאו את האיברים a', b' בכלל מפענח

$$d_K(y) = a'y + b'$$

כאשר $a', b' \in \mathbb{Z}_{29}$.**(ב)** הוכיחו כי $d_K(e_K(x)) = x$ לכל $x \in \mathbb{Z}_{29}$.

פתרונות

שאלה 1

$y \in C$	H	V	F	D	D	P
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	7	21	5	3	3	15

הדטרמיננטה של k היא $k = 7 \bmod 26 = 7$.
 $\gcd(7, 26) = 1$ לכן המטריצה הפיכה ב- \mathbb{Z}_{26} .

$$\begin{pmatrix} 13 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 9 & 7 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} \bmod 26 = -36 \bmod 26 = 16.$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 9 & 7 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 13 \end{vmatrix} \bmod 26 = 37 \bmod 26 = 11.$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 9 & 7 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} \bmod 26 = 5 \bmod 26 = 5.$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 9 & 7 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} \bmod 26 = -23 \bmod 26 = 3.$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 9 & 7 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 9 & 13 \end{vmatrix} \bmod 26 = 115 \bmod 26 = 11.$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 9 & 7 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 13 & 5 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} \bmod 26 = -46 \bmod 26 = 6.$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 9 & 7 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \bmod 26 = 29 \bmod 26 = 3.$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 9 & 7 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \bmod 26 = -79 \bmod 26 = 25.$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 9 & 7 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 13 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \bmod 26 = 3 \bmod 26 = 3.$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 11 & 5 \\ 3 & 11 & 6 \\ 3 & 25 & 3 \end{pmatrix} .$$

$$\text{adj}(A) = C^t = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 3 \\ 11 & 11 & 25 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} .$$

$$k^{-1} \bmod 26 = (\det k)^{-1} \text{adj}(k) .$$

$$(\det k)^{-1} \bmod 26 = 7^{-1} \bmod 26 = 15 .$$

$$k^{-1} = 15 \begin{pmatrix} 16 & 3 & 3 \\ 11 & 11 & 25 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 & 45 & 45 \\ 165 & 165 & 375 \\ 75 & 90 & 45 \end{pmatrix} \bmod 26 = \begin{pmatrix} 6 & 19 & 19 \\ 9 & 9 & 11 \\ 23 & 12 & 19 \end{pmatrix}$$

$$(7, 21, 5) \cdot k^{-1} = (346, 382, 459) \bmod 26 = (8, 18, 17)$$

$$(3, 3, 15) \cdot k^{-1} = (390, 264, 375) \bmod 26 = (0, 4, 11)$$

$y \in C$	H	V	F	D	D	P
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	7	21	5	3	3	15
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	8	18	17	0	4	11
$x \in C$	i	s	r	a	e	l

שאלה 2 הכלל מפענח הוא

$$d_k(y) = a^{-1}(y - b) \bmod 26$$

$$a^{-1} \bmod 26 = 5^{-1} \bmod 26 = 21 \text{ לכן}$$

$$d_k(y) = 21(y - 17) \bmod 26 = 21y - 357 \bmod 26 .$$

$$(-357) \bmod 26 = 26 - (357 \bmod 26) = 26 - 19 = 7 \text{ לכן } 357 \bmod 26 = 357 - 26 \left\lfloor \frac{357}{26} \right\rfloor = 357 - 26(13) = 19$$

$$7 \text{ לכן } -289 \bmod 26 = 7 . \text{ מכאן}$$

$$d_k(y) = 21y + 7 .$$

$y \in C$	I	A	F	D	X	F	U	U	W	L	F	E	I	A	L	L	C	R	Z
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	8	0	5	3	23	5	20	20	22	11	5	4	8	0	11	11	2	17	25
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	19	7	8	18	22	8	11	11	1	4	8	13	19	7	4	4	23	0	12
$x \in P$	t	h	i	s	w	i	l	l	b	e	i	n	t	h	e	e	x	a	m

שאלה 3

x	1	2	3	4
$\pi^{-1}(x)$	1	4	3	2

$y \in C$	C	E	D	O	B	A	E	R	K	G	N	I
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	2	4	3	14	1	0	4	17	10	6	13	8
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	2	14	3	4	1	17	4	0	10	8	13	6
$x \in P$	c	o	d	e	b	r	e	a	k	i	n	g

שאלה 4

$$d_k(y_1 y_2 y_3 y_4 y_5) = (x_1 - 6, x_2 - 17, x_3 - 4, x_4 - 4, x_5 - 13) \bmod 26.$$

$y \in C$	Z	F	S	X	U	H	I	Y	W	U
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	25	5	18	23	20	7	8	24	22	20
$d_k(y)$	19	14	14	19	7	1	17	20	18	7
$x \in P$	t	o	o	t	h	b	r	u	s	h

שאלה 6

$y \in C$	V	W	D	U	Z	D	U	V
$y \in C$	21	22	3	20	25	3	20	21
$x = y - 0 \in P$	21	22	3	20	25	3	20	21
$x \in P$	v	w	d	u	z	d	u	v
$x = y - 1 \in P$	20	21	2	19	24	2	19	20
$x \in P$	u	v	c	t	y	c	t	u
$x = y - 2 \in P$	19	20	1	18	23	1	18	19
$x \in P$	t	u	b	s	x	b	s	t
$x = y - 3 \in P$	18	19	0	17	22	0	17	18
$x \in P$	s	t	a	r	w	a	r	s

המפתח הוא 3 והטקסט גלוי הוא

starwars

שאלה 7

$y \in C$	T	G	E	E	M	N	E	L	N	N	T	D	R	O	E	O
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	19	6	4	4	12	13	4	11	13	13	19	3	17	14	4	14

$y \in C$	A	A	H	D	O	E	T	C	S	H	A	E	I	R	L	M
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	0	0	7	3	14	4	19	2	18	7	0	4	8	17	11	12

נפרק את האותיות לתת-קבוצות מאורך $m = 8$ (לפי האורך של התמורה).
נפעיל את התמורה ההופכית:

$y \in C$	T	G	E	E	M	N	E	L	N	N	T	D	R	O	E	O
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	19	6	4	4	12	13	4	11	13	13	19	3	17	14	4	14

$y \in C$	A	A	H	D	O	E	T	C	S	H	A	E	I	R	L	M
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	0	0	7	3	14	4	19	2	18	7	0	4	8	17	11	12

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi^{-1}(i)$	2	4	6	1	8	3	5	7

$y \in C$	T	G	E	E	M	N	E	L	N	N	T	D	R	O	E	O
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	19	6	4	4	12	13	4	11	13	13	19	3	17	14	4	14
$x = \pi^{-1}(y)$	6	4	13	19	11	4	12	4	13	3	14	13	14	19	17	4

$y \in C$	A	A	H	D	O	E	T	C	S	H	A	E	I	R	L	M
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	0	0	7	3	14	4	19	2	18	7	0	4	8	17	11	12
$x = \pi^{-1}(y)$	0	3	4	0	2	7	14	19	7	4	17	18	12	0	8	11

$y \in C$	T	G	E	E	M	N	E	L	N	N	T	D	R	O	E	O
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	19	6	4	4	12	13	4	11	13	13	19	3	17	14	4	14
$x = \pi^{-1}(y)$	6	4	13	19	11	4	12	4	13	3	14	13	14	19	17	4
$x \in P$	g	e	n	t	l	e	m	e	n	d	o	n	o	t	r	e

$y \in C$	A	A	H	D	O	E	T	C	S	H	A	E	I	R	L	M
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	0	0	7	3	14	4	19	2	18	7	0	4	8	17	11	12
$x = \pi^{-1}(y)$	0	3	4	0	2	7	14	19	7	4	17	18	12	0	8	11
$x \in P$	a	d	e	a	c	h	o	t	h	e	r	s	m	a	i	l

gentlemandonotreadeachothersmail

שאלה 8

$$|k| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 9.$$

\mathbb{Z}_{26} הפיכה ב- $\gcd(9, 26) = 1$ לכן המטריצה הפיכה ב-

$$\begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \textcolor{red}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 9 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 9 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = C^t = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \bmod 26 = \begin{pmatrix} 0 & 23 & 3 \\ 3 & 1 & 25 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3 \times 3} .$$

$$A^{-1} = |A|^{-1} \text{adj}(A) .$$

$$|A|^{-1} = 9^{-1} = 3 \in \mathbb{Z}_{26}$$

לפיכך

$$\begin{aligned} A^{-1} &= |A|^{-1} \text{adj}(A) \\ &= 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 23 & 3 \\ 3 & 1 & 25 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \text{mod } 26 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 69 & 9 \\ 9 & 3 & 75 \\ 0 & 27 & 0 \end{pmatrix} \text{mod } 26 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 17 & 9 \\ 9 & 3 & 23 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(א) שלב 1:

נעביר את האותיות של הטקסט גלוי לערכים של \mathbb{Z}_{26} :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} Y \in C & V & A & Z & M & J & R \\ \hline y \in \mathbb{Z}_{26} & 21 & 0 & 25 & 12 & 9 & 17 \end{array}$$

שלב 2:

נפרק את הטבלה של התווים של הטקסט מוצפן יחד עם הערכים המתאימים של \mathbb{Z}_{26} לתת-קבוצות של $m = 3$ תווים:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} Y \in C & V & A & Z & M & J & R \\ \hline y \in \mathbb{Z}_{26} & 21 & 0 & 25 & 12 & 9 & 17 \end{array}$$

שלב 3:

עבור כל תת-קבוצה המתקבל נחשב

$$\begin{aligned} (x_1 \ x_2 \ x_3) &= (y_1 \ y_2 \ y_3) k^{-1} \text{mod } 26 \\ &= (y_1 \ y_2 \ y_3) \begin{pmatrix} 0 & 17 & 9 \\ 9 & 3 & 23 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{mod } 26 \end{aligned}$$

עבור התת-קבוצה הראשונה נקבל

$$\begin{aligned} (x_1 \ x_2 \ x_3) &= (21 \ 0 \ 25) \begin{pmatrix} 0 & 17 & 9 \\ 9 & 3 & 23 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{mod } 26 \\ &= (0 \ 382 \ 189) \text{mod } 26 \\ &= (0 \ 18 \ 7) \end{aligned}$$

עבור התת-קבוצה השנייה נקבל

$$\begin{aligned} (x_1 \ x_2 \ x_3) &= (12 \ 9 \ 17) \begin{pmatrix} 0 & 17 & 9 \\ 9 & 3 & 23 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{mod } 26 \\ &= (81 \ 248 \ 315) \text{mod } 26 \\ &= (3 \ 14 \ 3) \end{aligned}$$

$y \in C$	V	A	Z	M	J	R
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	21	0	25	12	9	17
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	0	18	7	3	14	3

שלב 5:

נעבור את הערכים $y \in \mathbb{Z}_{26}$ לאותיות של הטקסט מוצפן:

$y \in C$	V	A	Z	M	J	R
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	21	0	25	12	9	17
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	0	18	7	3	14	3
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	a	s	h	d	o	d

הטקסט גלוי המתקבל הוא

ashdod

שלב 1:

(ב)

נעביר את האותיות של הטקסט גלוי לערכים של \mathbb{Z}_{26} :

$y \in C$	N	D	I	M	Z	Z	E	M	V
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	13	3	8	12	25	25	4	12	21

שלב 2:

נפרק את הטבלה של התווים של הטקסט מוצפן יחד עם הערכים המתאימים של \mathbb{Z}_{26} לתת-קבוצות של $m = 3$ תווים:

$y \in C$	N	D	I	M	Z	Z	E	M	V
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	13	3	8	12	25	25	4	12	21

שלב 3:

עבור כל תת-קבוצה המתקבל נחשב

$$\begin{aligned} (x_1 \ x_2 \ x_3) &= (y_1 \ y_2 \ y_3) k^{-1} \bmod 26 \\ &= (y_1 \ y_2 \ y_3) \begin{pmatrix} 0 & 17 & 9 \\ 9 & 3 & 23 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bmod 26 \end{aligned}$$

עבור התת-קבוצה הראשונה נקבל

$$\begin{aligned} (x_1 \ x_2 \ x_3) &= (13 \ 3 \ 8) \begin{pmatrix} 0 & 17 & 9 \\ 9 & 3 & 23 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bmod 26 \\ &= (27 \ 238 \ 186) \bmod 26 \\ &= (1 \ 4 \ 4) \end{aligned}$$

עבור התת-קבוצה השנייה נקבל

$$\begin{aligned}
 (x_1 \ x_2 \ x_3) &= (12 \ 25 \ 25) \begin{pmatrix} 0 & 17 & 9 \\ 9 & 3 & 23 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bmod 26 \\
 &= (225 \ 304 \ 683) \bmod 26 \\
 &= (17 \ 18 \ 7)
 \end{aligned}$$

עבור התת-קבוצה השלישית נקבל

$$\begin{aligned}
 (x_1 \ x_2 \ x_3) &= (4 \ 12 \ 21) \begin{pmatrix} 0 & 17 & 9 \\ 9 & 3 & 23 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bmod 26 \\
 &= (108 \ 125 \ 312) \bmod 26 \\
 &= (4 \ 21 \ 0)
 \end{aligned}$$

$y \in C$	N	D	I	M	Z	Z	E	M	V
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	13	3	8	12	25	25	4	12	21
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	1	4	4	17	18	7	4	21	0

שלב 5:

נעבור את הערכים $y \in \mathbb{Z}_{26}$ לאותיות של הטקסט מוצפן:

$y \in C$	N	D	I	M	Z	Z	E	M	V
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	13	3	8	12	25	25	4	12	21
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	1	4	4	17	18	7	4	21	0
$x \in P$	b	e	e	r	s	h	e	v	a

הטקסט גלוי המתקבל הוא

beersheva

שאלה 9

$y \in C$	F	P	H	O	E	M	J	S	U	P	S	Z	Z	Y	J
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	5	15	7	14	4	12	9	18	20	15	18	25	25	24	9

דטרמיננטה של k היא $k = -3 \bmod 26 = 23$.
 $\gcd(23, 26) = 1$ לכן המטריצה הפיכה ב- \mathbb{Z}_{26} .

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & 5 & 6 \\ 11 & 9 & 8 \end{pmatrix} &\Rightarrow C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} \bmod 26 = -14 \bmod 26 = 12. \\
 \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & \cancel{5} & 6 \\ 11 & 9 & 8 \end{pmatrix} &\Rightarrow C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 11 & 8 \end{vmatrix} \bmod 26 = 24 \bmod 26 = 8.
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 11 & 9 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 11 & 9 \end{vmatrix} \bmod 26 = -19 \bmod 26 = 7 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 11 & 9 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 11 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 11 & 9 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 8 \end{vmatrix} \bmod 26 = -25 \bmod 26 = 1 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 11 & 9 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 9 \end{vmatrix} = 13 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 11 & 9 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \bmod 26 = -3 \bmod 26 = 23 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 11 & 9 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 11 & 9 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \bmod 26 = -3 \bmod 26 = 23 .$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 34 & -19 \\ 11 & -25 & 13 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \bmod 26 = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 7 \\ 11 & 1 & 13 \\ 23 & 6 & 23 \end{pmatrix} .$$

$$\text{adj}(A) = C^t = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 18 \\ 9 & 9 & 1 \\ 21 & 5 & 20 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3 \times 3} .$$

$$k^{-1} = |k|^{-1} \text{adj}(k) .$$

$$|k|^{-1} = 23^{-1} = 17 \in \mathbb{Z}_{26}$$

$$k^{-1} = 17 \begin{pmatrix} 16 & 3 & 18 \\ 9 & 9 & 1 \\ 21 & 5 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 204 & 187 & 391 \\ 136 & 17 & 102 \\ 119 & 221 & 391 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 5 & 1 \\ 6 & 17 & 24 \\ 15 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(5, 15, 7) \cdot k^{-1} = (19, 7, 8) , \quad (14, 4, 12) \cdot k^{-1} = (18, 8, 18) , \quad (9, 18, 20) \cdot k^{-1} = (8, 13, 19) ,$$

$$(15, 18, 25) \cdot k^{-1} = (7, 4, 4) , \quad (25, 24, 9) \cdot k^{-1} = (23, 0, 12) .$$

$y \in C$	F	P	H	O	E	M	J	S	U	P	S	Z	Z	Y	J
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	5	15	7	14	4	12	9	18	20	15	18	25	25	24	9
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	19	7	8	18	8	18	8	13	19	7	4	4	23	0	12
$x \in P$	t	h	i	s	i	s	i	n	t	h	e	e	x	a	m

שאלה 10

(א)

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi^{-1}(x)$	2	4	6	1	8	3	5	7

$y \in C$	S	Q	I	U	O	E	N	T	M	F	H	R	E	O	F	T
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	18	16	8	20	14	4	13	19	12	5	7	17	4	14	5	19

$y \in C$	L	I	X	N	A	A	M	E
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	11	8	23	13	0	0	12	4

$y \in C$	S	Q	I	U	O	E	N	T	M	F	H	R	E	O	F	T
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	18	16	8	20	14	4	13	19	12	5	7	17	4	14	5	19
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	16	20	4	18	19	8	14	13	5	17	14	12	19	7	4	5
$x \in P$	q	u	e	s	t	i	o	n	f	r	o	m	t	h	e	f

$y \in C$	L	I	X	N	A	A	M	E
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	11	8	23	13	0	0	12	4
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	8	13	0	11	4	23	0	12
$x \in P$	i	n	a	l	e	x	a	m

שאלה 11

$y \in C$	Y	G	S	O	Y	N	G	S	U	U	T	O	Y	Z	N	K	H	K	Y	Z
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	24	6	18	14	24	13	6	18	20	20	19	14	24	25	13	10	7	10	24	25
$d_6(y)$	18	0	12	8	18	7	0	12	14	14	13	8	18	19	7	4	1	4	18	19
$x \in P$	s	a	m	i	s	h	a	m	o	o	n	i	s	t	h	e	b	e	s	t

$y \in C$	I	U	R	R	K	M	K	O	T	O	Y	X	G	K	R
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	8	20	17	17	10	12	10	14	19	14	24	23	6	10	17
$d_6(y)$	2	14	11	11	4	6	4	8	13	8	18	17	0	4	11
$x \in P$	c	o	l	l	e	g	e	i	n	i	s	r	a	e	l

שאלה 12

(א) נתון המפתח $a = 5, b = 21$ בכלל מצפין $e_k(x) = ax + b$. אז הכלל מפענח הינו

$$d_k(y) = a^{-1}(y - b) = 5^{-1}(y - 21) .$$

ב- $\mathbb{Z}_{29}, 5^{-1} = 6$ מכיוון ש- $5 \cdot 6 \bmod 29 = 30 \bmod 29 = 1$ לפיכך

$$d_k(y) = 6(y - 21) = 6y - 126 \bmod 29 = 6y - 4 \cdot 29 - 10 \bmod 29 = 6y - 10 \bmod 29 = 6y + 19 .$$

$$\text{לפיכך } a' = 6, b' = 19 .$$

(ב)

$$d_k(e_k(x)) = 6(5x + 21) + 19 \bmod 29 = 30x + 126 + 19 \bmod 29 = 1 \cdot x + 145 \bmod 29 = x + 5 \cdot 29 \bmod 29 = x .$$