המחלקה למדעי המחשב

22/09/23 תשפ"ג
08 : 30 − 11 : 30

אלגברה ליניארית 2 למדמ"ח

מועד א'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר, ד"ר שי סרוסי.

תשפ"ג סמסטר ק'

השאלון מכיל 12 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (8 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.

==

שאלה 1

א) (20 נק') נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

מצאו צורת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $A = PJP^{-1}$.

ב) (5 נק') תהי T העתקה לינארית במרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו כי אם T צמודה לעצמה אז כל ערך עצמי של T ממשי.

שאלה 2

א) (15 נק') נתון מרחב וקטורי $\mathbb{R}_3[x]$ עם מכפלה פנימית אינטגרלית בקטע $[-1,1]$:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) \ .$$

1) (10 נק')
מצאו בסיס אורתוגונלי למרחב $V = \text{span}\left\{1-3x, x, 5x^3+8\right\}$.

2) (5 נק')
מצאו את ההיטל האורתוגונלי של כל אחד מהווקטורים:

$$w_1 = 38 - 16x + 24x^3 \ , \qquad w_2 = 3x^2 + 5x^3 \ ,$$

על תת המרחב U.

ב) (10 נק')
יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו $u, w \in V$. הוכיחו או הפריכו:

1) (5 נק')
אם $\|u+w\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2$ אז $u \perp w$.

2) (5 נק')
אם $u \perp w$ אז $\|u+w\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2$.

לכן

שאלה 3 תהי $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $(n \geq 2)$ מטריצה ריבועית כך שהפולינום המינימלי שלה הינו $m_A(x) = (x-1)(x-2)$. יהי $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

א) (10 נק') הוכיחו כי המטריצה $f(A)$ הפיכה.

ב) (5 נק') הוכיחו או הפריכו: A ניתנת לשילוש מעל $\mathbb{R}$.

ג) (5 נק') הוכיחו או הפריכו: A הפיכה.

ד) (5 נק') בנוסף לכך נניח כי A נורמלית. האם A צמודה לעצמה?

שאלה 4

א) (10 נק') מצאו $a, b \in \mathbb{R}$ עבורם

$$(1-a)^2 + (1-2b)^2 + (1-(a+b))^2 + (1-(a+2b))^2$$

יהיה מינימלי.

ב) (15 נק') יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbb{C}$, ויהיו $T : V \to V$, $S : V \to V$ אופרטורים לינאריים. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

1) (5 נק') אם T אופרטור אוניטרי אז הערך מוחלט של כל ערך עצמי של T שווה ל 1.

2) (5 נק') אם T צמוד לעצמו ו- S צמוד לעצמו, אזי גם $S \cdot T$ צמוד לעצמו.

3) (5 נק') אם T נורמלי ו- $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ סקלרים. אזי גם $\alpha T + \beta \bar{T}$ נורמלי.

שאלה 5

א) (15 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ מטריצה ריבועית נורמלית עם ערכים עצמיים $\lambda = 6$ ו- $\lambda = 3$ ויהי

$$V_6 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 6$. יהי $w \in \mathbb{R}^3$ הווקטור $w = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. חשבו את

1) $A \cdot w$

2) $A^3 \cdot w$

ב) (10 נק') תהיינה $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ו- $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצות ריבועיות. הוכיחו או הפריכו:

1) (5 נק') אם B נורמלית ו- Q אוניטרית, אז המטריצה $\bar{Q} \cdot B \cdot Q$ היא נורמלית.

2) (5 נק') אם B נורמלית אזי היא גם צמודה לעצמה.

פתרונות

שאלה 1

א) $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&2&1\\1&0&2\end{pmatrix}$

$$p_A(x)=|xI-A|=\begin{vmatrix}x-3&0&0\\-1&x-2&-1\\-1&0&x-2\end{vmatrix}$$
$$=(x-3)(x-2)^2\ .$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=3$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=2$ מריבוי אלגברי 2.

<u>פולינום מינימלי:</u>

נבדוק $(x-3)(x-2)$:

$$(A-3I)(A-2I)=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\neq 0$$

לכן

$$m_A(x)=(x-3)(x-2)^2$$

$$J=\begin{pmatrix}J_2(2)&\\&J_1(3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda=2$:</u>

$$(A-2I)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z)=(0,y,0)=y(0,1,0)$, $y\in\mathbb{R}$. לכן $V_2=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

נסמן את הווקטור עצמי ב- $u_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

<u>ווקטור עצמי מוכלל:</u>

נסמן $u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(A-2I)u_2 = u_1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $y \in \mathbb{R}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$. נבחר $y = 1$ ואז $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>מרחב עצמי של $\lambda = 3$</u>:

$$(A-3I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $z \in \mathbb{R}$, $(x,y,z) = (z,2z,z) = z(1,2,1)$. לכן

$$V_3 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נסמן את הווקטור עצמי $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad J = \begin{pmatrix} J_2(2) & \\ & J_1(3) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{3} \end{array}\right) .$$

ב) נניח כי u ווקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי λ. תהי $\langle , \rangle$ מכפלה פנימית.

$$\begin{aligned} \langle T(u), u \rangle &= \langle \lambda u, u \rangle \quad (u \text{ ערך עצמי של } T) \\ &= \lambda \langle u, u \rangle \quad (\text{לפי תכונת ליניאריות של המכפלה פנימית}) . \end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(u),u\rangle =&\langle u,\bar{T}(u)\rangle && \text{(הגדרה של העתקה צמודה)}\\ =&\langle u,T(u)\rangle && \text{(} T \text{ צמודה לעצמה)}\\ =&\langle u,\lambda u\rangle && \text{(} u \text{ ערך עצמי של } T\text{)}\\ =&\bar{\lambda}\langle u,u\rangle && \text{(לינאריות חלקית של מכפלה פנימית)} .\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\langle u,u\rangle=\bar{\lambda}\langle u,u\rangle \qquad\Rightarrow\qquad (\lambda-\bar{\lambda})\langle u,u\rangle=0\ .$$

$u\neq\bar{0}$ כי u וקטור עצמי לכן $\langle u,u\rangle\neq 0$ לכן $\lambda-\bar{\lambda}=0 \Leftarrow \bar{\lambda}=\lambda$.

<u>שאלה 2</u>

א) נסמן

$$\mathrm{v}_1=1-3x,\quad \mathrm{v}_2=x\ ,\quad \mathrm{v}_3=5x^3+8\ .$$

$$u_1=\mathrm{v}_1=1-3x\ .$$

$$u_2=\mathrm{v}_2-\frac{\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1$$

$$\|u_1\|^2=\int_{-1}^1 dx\,(1-3x)^2=\left[\frac{(1-3x)^3}{-9}\right]_{-1}^1=\frac{8}{9}-\frac{64}{-9}=8\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle=\int_{-1}^1 dx\,x(1-3x)=\left[\frac{x^2}{2}-x^3\right]_{-1}^1=-2\ .$$

לכן

$$u_2=\frac{x+1}{4}\ .$$

$$u_3=\mathrm{v}_3-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2$$

$$\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle=\int_{-1}^1 dx\ \left(5x^3+8\right)(1-3x)=\int_{-1}^1 dx\ \left(5x^3-15x^4+8-24x\right)=\left[\frac{5x^4}{4}-3x^5+8x-12x^2\right]_{-1}^1=10\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle=\int_{-1}^1 dx\,\frac{1}{4}(x+1)\left(5x^3+8\right)=\int_{-1}^1 dx\ \left(\frac{5x^4}{4}+\frac{5x^3}{4}+2x+2\right)=\left[\frac{x^5}{4}+\frac{5x^4}{16}+x^2+2x\right]_{-1}^1=\frac{9}{2}\ .$$

$$\|u_2\|^2=\int_{-1}^1 dx\ \left(\frac{x+1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}\int_{-1}^1 dx\ (x+1)^2=\frac{1}{16}\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^1=\frac{1}{6}\ .$$

לכן

$$u_3 = 5x^3 + 8 - \frac{10}{8}(1-3x) - \frac{\left(\frac{9}{2}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)} \cdot \left(\frac{x+1}{4}\right) = 5x^3 - 3x \ .$$

בסיס אורתונוגונלי:

$$U = \left\{ u_1 = 1-3x, \quad u_2 = \frac{x+1}{4} \ , \quad u_3 = 5x^3 - 3x \right\} \ .$$

ב) $w_1 \in U$ לכן

$$P_U(w_1) = w_1 \ .$$

$$P_U(w_2) = \frac{\langle w_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle w_2, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 + \frac{\langle w_2, u_3\rangle}{\|u_3\|^2} u_3$$

$$\langle w_2, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} dx \ \left(5x^3 + 3x^2\right)(1-3x) = \int_{-1}^{1} dx \ \left(-15x^4 - 4x^3 + 3x^2\right) = \left[-3x^5 - x^4 + x^3\right]_{-1}^{1} = -4 \ .$$

$$\langle w_2, u_2\rangle = \int_{-1}^{1} dx \ \frac{1}{4}(x+1)\left(5x^3 + 3x^2\right) = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} dx \ \left(5x^4 + 8x^3 + 3x^2\right) = \frac{1}{4}\left[x^5 + 2x^4 + x^3\right]_{-1}^{1} = 1 \ .$$

$$\begin{aligned} \langle w_2, u_3\rangle &= \int_{-1}^{1} dx \ \left(5x^3 - 3x\right)\left(5x^3 + 3x^2\right) \\ &= \int_{-1}^{1} dx \ \left(25x^6 + 15x^5 - 15x^4 - 9x^3\right) \\ &= \left[\frac{25x^7}{7} + \frac{5x^6}{2} - 3x^5 - \frac{9x^4}{4}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{8}{7} \ . \end{aligned}$$

$$\|u_3\|^2 = \int_{-1}^{1} dx \ \left(5x^3 - 3x\right)^2 = \int_{-1}^{1} dx \left(25x^6 - 30x^4 + 9x^2\right) = \left[\frac{25x^7}{7} - 6x^5 + 3x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{7} \ .$$

$$P_U(w_2) = \frac{-4}{8}(1-3x) + \frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)}\left(\frac{x+1}{4}\right) + \frac{\left(\frac{8}{7}\right)}{\left(\frac{8}{7}\right)}\left(5x^3 - 3x\right) = 5x^3 + 1 \ .$$

ג) **1)** לא נכון. דוגמה נגדית:

$V = \mathbb{C}^2$ עם המ"פ הסטנדרטית.

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{v} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \ , \qquad \Rightarrow \qquad u + \mathrm{v} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

$$\|u\|^2 = \|\mathrm{v}\|^2 = 1 \ , \qquad \|u+\mathrm{v}\|^2 = 2 \ .$$

$\mathrm{v} \not\perp u$, אך $\|u\|^2 + \|\mathrm{v}\|^2 = \|u+\mathrm{v}\|^2$.

2) טענה נכונה. הוכחה:

לפי משפט פיתגורס:

$$\|u+\mathrm{v}\|^2 = \|u\|^2 + \|\mathrm{v}\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle u, \mathrm{v}\rangle \ .$$

$\mathrm{v} \perp u$ לכן $\langle u, \mathrm{v}\rangle = 0$ לכן

$$\|u+\mathrm{v}\|^2 = \|u\|^2 + \|\mathrm{v}\|^2 \ .$$

מש"ל.

שאלה 3

א)

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 = x^2 - 3x + 2 - x + 3 = (x-1)(x-2) - x + 3 = m_A(x) - x + 3 \ .$$

נציב A ב $f(x)$:

$$f(A) = m_A(A) - A + 3I = -A + 3I \ .$$

נקח את הדטרמיננטה:

$$|f(A)| = |3I - A| \ .$$

השורשים של הפולינום המינימלי הם 1 ו- 2. לכן 3 לא שורש של הפולינום המינימלי, לכן $\lambda = 3$ לא ערך עצמי של $A \Leftarrow |3I - A| \neq 0 \Leftarrow |f(A)| \neq 0$. לכן $f(A)$ הפיכה.

ב) הפולינום המינימלי מתפרק ל **גורמים ליניארים** מעל $\mathbb{R}$ לכן A ניתנת לשילוש מעל $\mathbb{R}$.

ג) 0 לא שורש של הפולינום המינימלי לכן $\lambda = 0$ לא ערך עצמי של A, לכן $|A| \neq 0$ לכן A הפיכה.

ד) השורשים של הפולינום המינימלי הם 1 ו- 2 לכן הערכים עצמיים של A הם $\lambda = 2$ ו- $\lambda = 1$. בפרט כל הערכים עצמיים של A ממשיים.

כל מטריצה שנורמלית וכל הערכים עצמיים שלה ממשיים היא גם צמודה לעצמה.

לכן אם A נורמלית אז בהכרח היא גם צמודה לעצמה.

שאלה 4

א)

$$(1-a)^2+(1-2b)^2+(1-(a+b))^2+(1-(a+2b))^2=\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a\\2b\\a+b\\a+2b\end{pmatrix}\right\|^2$$

לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^4$. נחפש את הווקטור הקרוב ביותר של $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ בתת המרחב

$$W=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

נחפש בסיס אורתוגונלי ל W:

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},$$

$\|u_1\|^2=3$.

$$u_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\2\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\2\end{pmatrix}-\frac{3}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

מצאנו בסיס אורתוגונלי ל- W:

$$B_W=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$P_W\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{6}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

ז"א $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\a+b\\a+2b\end{pmatrix}$, לכן

$$a=\frac{2}{3},\quad b=\frac{1}{3}\ .$$

ב) **1)** נניח ש- u וקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי λ.

$$\begin{aligned}\langle T(u),T(u)\rangle &= \langle u,\bar{T}T(u)\rangle && \text{(הגדרה של העתקה צמודה)}\\ &= \langle u,I(u)\rangle && \text{(} T \text{ אוניטרי)}\\ &= \langle u,u\rangle\ .\end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(u),T(u)\rangle &= \langle \lambda u,\lambda\rangle && \text{(} u \text{ וקטור עצמי של } T\text{)}\\ &= \lambda\bar{\lambda}\,\langle u,u\rangle && \text{(לינאריות של המכפלה פנימית)}\ .\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\langle u,u\rangle = |\lambda|^2\langle u,u\rangle \quad\Rightarrow\quad \langle u,u\rangle-|\lambda|^2\langle u,u\rangle=0 \quad\Rightarrow\quad (1-|\lambda|^2)\langle u,u\rangle=0\ .$$

u וקטור עצמי $\Leftarrow u\neq 0 \Leftarrow \langle u,u\rangle\neq 0 \Leftarrow (1-|\lambda|^2)=0$ לכן

$$|\lambda|^2=1\ .$$

2) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:
$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ אופרטור שמוגדר

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ .$$

$S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ אופרטור שמוגדר

$$S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ .$$

$\overline{[T]}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=[T]$ לכן T צמודה לעצמה.

$\overline{[S]}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=[S]$ אז S צמודה לעצמה.

$$T\cdot S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ .$$

$[T\cdot S]=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $\overline{[T\cdot S]}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $\overline{[T\cdot S]}\neq[T\cdot S]$ לכן $T\cdot S$ לא צמודה לעצמה.

(3

$$\begin{aligned}(\alpha T+\beta\bar{T})\cdot\overline{(\alpha T+\beta\bar{T})} =&\alpha\bar{\alpha}T\bar{T}+\alpha\bar{\beta}TT+\beta\bar{\alpha}\bar{T}\bar{T}+\beta\bar{\beta}\bar{T}T\\ =&|\alpha|^2T\bar{T}+\alpha\bar{\beta}TT+\beta\bar{\alpha}\bar{T}\bar{T}+|\beta|^2\bar{T}T\\ =&|\alpha|^2\bar{T}T+\alpha\bar{\beta}TT+\beta\bar{\alpha}\bar{T}\bar{T}+|\beta|^2T\bar{T}\end{aligned}$$

כאשר בשוויון האחרון השתמשנו בעובדה כי T נורמלי, כלומר $T\bar{T}=\bar{T}T$. מצד שני

$$\begin{aligned}\overline{(\alpha T+\beta\bar{T})}\cdot(\alpha T+\beta\bar{T}) =&\bar{\alpha}\alpha\bar{T}T+\bar{\alpha}\ \beta\bar{T}\bar{T}+\bar{\beta}\alpha TT+\bar{\beta}\ \beta T\bar{T}\\ =&|\alpha|^2\bar{T}T+\bar{\alpha}\beta\bar{T}\bar{T}+\bar{\beta}\alpha TT+|\beta|^2T\bar{T}\end{aligned}$$

לכן

$$(\alpha T+\beta\bar{T})\cdot\overline{(\alpha T+\beta\bar{T})}=\overline{(\alpha T+\beta\bar{T})}\cdot(\alpha T+\beta\bar{T})$$

שאלה 5

א) לפי משפט הפירוק הספקטרלי:

$$A\cdot w=3\cdot P_3(w)+6\cdot P_6(w)\ ,$$

ו-

$$A^3\cdot w=3^3\cdot P_3(w)+6^3\cdot P_6(w)\ ,$$

כאשר $P_3(w)$ ההיטל של הווקטור w על המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=3$, ו- $P_6(w)$ ההיטל של הווקטור w על המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=6$. נשים לב כי

$$P_3(w)+P_6(w)=w \qquad\Rightarrow\qquad P_3(w)=w-P_6(w)\ .$$

נחשב $P_6(w)$. נבנה בסיס אורתוגונלי של V_6.

$$u_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad \|u_1\|^2=2\ .$$

$$u_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\left\langle\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\ .$$

נבחר $u_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$. $\|u_2\|^2=6$.

$$\begin{aligned}
P_6(w) =& \frac{1}{\|u_1\|^2}\langle w,u_1\rangle u_1 + \frac{1}{\|u_2\|^2}\langle w,u_2\rangle u_2\\
=& \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\left\langle \begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\\
=& \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\\
=& \frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\\-4\\-1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$P_3(w) = w - P_6(w) = \begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\\-4\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix} .$$

לכן

(1

$$A\cdot w = 3P_3(w) + 6P_6(w) = 3\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix} + 6\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\\-4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20\\2\\8\end{pmatrix} .$$

(2

$$A^3\cdot w = 3^3\cdot P_3(w) + 6^3\cdot P_6(w) = 27\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix} + 216\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\\-4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}90\\90\\90\end{pmatrix} + 72\cdot\begin{pmatrix}5\\-4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}450\\-198\\18\end{pmatrix} .$$

ב) **(1** טענה נכונה. הוכחה:

נניח ש- Q אוניטרית ו B נורמלית.

$$\begin{aligned}
\overline{(\bar{Q}\cdot B\cdot Q)}\cdot(\bar{Q}\cdot B\cdot Q) =& \bar{Q}\bar{B}Q\bar{Q}\cdot B\cdot Q\\
=& \bar{Q}\bar{B}\cdot I\cdot B\cdot Q && (\text{אוניטרית } Q)\\
=& \bar{Q}\cdot\bar{B}B\cdot Q\\
=& \bar{Q}\cdot B\bar{B}\cdot Q && (\text{נורמלית } B)
\end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned}
(\bar{Q}B\cdot Q)\cdot\overline{(\bar{Q}\cdot B\cdot Q)} =& \bar{Q}\cdot B\cdot Q\bar{Q}\cdot\bar{B}Q\\
=& \bar{Q}B\cdot I\cdot\bar{B}Q && (\text{אוניטרית } Q)\\
=& \bar{Q}B\bar{B}Q .
\end{aligned}$$

לכן

$$\overline{(\bar{Q}\cdot B\cdot Q)}\cdot(\bar{Q}\cdot B\cdot Q)=(\bar{Q}\cdot B\cdot Q)\cdot\overline{(\bar{Q}\cdot B\cdot Q)}$$

לכן $\bar{Q}\cdot B\cdot Q$ נורמלית.

2) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:
$B\in\mathbb{C}^{2\times 2}$.

$$B=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}\ ,\qquad \bar{B}=\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}$$

$$B\bar{B}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\ ,\qquad \bar{B}B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\ ,$$

$B\bar{B}=\bar{B}B$ אז B אז B נורמלית אך $B\neq\bar{B}$ אז B לא צמודה לעצמה.