

# שיעור 11

## אינטגרלים קוויים

### 11.1 אינטגרל הקווי מסוג ראשון

#### משפט 11.1 אינטגרל קווי מסוג ראשון 1

אם עקום מישורי  $L$  מוגדר כגרף של הפונקציה  $\{y = \gamma(x), |a \leq x \leq b\}$  אז האינטגרל הקווי של פונקציה  $f(x, y)$  דרך הקו של  $\gamma$  מוגדר להיות

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, \gamma(x)) \sqrt{1 + \gamma'(x)^2} dx$$

#### משפט 11.2 אינטגרל קווי מסוג ראשון 2

אם עקום מישורי  $L$  מוגדר באופן פרמטרי

$$\{x = x(t), y = y(t), | \alpha \leq t \leq \beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה  $f(x, y)$  דרך הקו של  $L$  מוגדר להיות

$$\int_L f(x, y) dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

#### משפט 11.3 אינטגרל קווי מסוג ראשון 3

אם  $L$  הוא עקום במרחב תלת-ממדי המוגדר באופן

$$\{x = x(t), y = y(t), z = z(t) | \alpha \leq t \leq \beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה  $f(x, y, z)$  דרך הקו של  $L$  מוגדר להיות

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

### 11.1 דוגמה

מצאו את המסה של הקשת  $\begin{cases} y = x^2 \\ 1 \leq x \leq 10 \end{cases}$  בעלת צפיפות מסה קווי  $\rho = \frac{y}{x}$ .

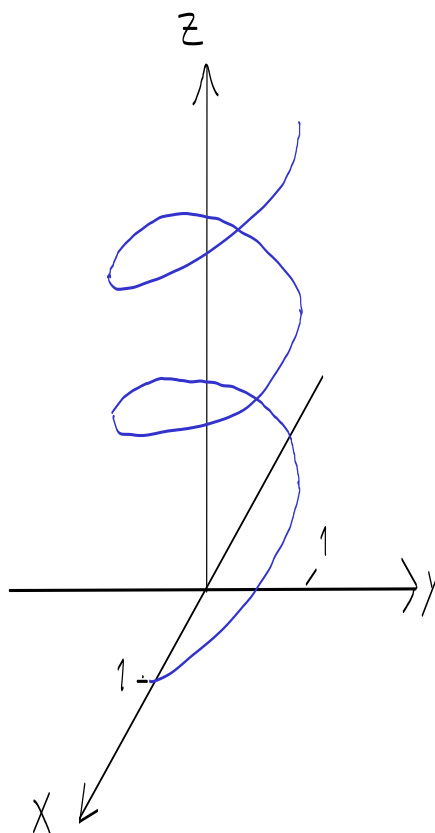
פתרון:

$$\begin{aligned}
 M &= \int_L \rho(x, y) dl \\
 &= \int_1^{10} \frac{x^2}{x} \cdot \sqrt{1 + (2x)^2} dx \\
 &= \int_1^{10} x \cdot \sqrt{1 + 4x^2} dx \\
 &= \int_1^{10} \frac{t'}{8} \cdot \sqrt{t} dx \\
 &= \frac{1}{8} \int_{t=5}^{t=401} \sqrt{t} dt \\
 &= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot [t^{3/2}]_{t=5}^{t=401} \\
 &= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot [401^{3/2} - 5^{3/2}] \\
 &= 668.24
 \end{aligned}$$

## 11.2 דוגמה

$$\rho = \frac{y}{x} \text{ בעלת צפיפות מסה קווי } \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{חשבו את אורך הקשת של קו הבורג (helix)}$$

**פתרון:**



$$\begin{aligned}
 L &= \int_L dl \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt \\
 &= 2\sqrt{2}\pi
 \end{aligned}$$

#### משפט 11.4 אורך הקשת

האינטגרל הקווי

$$\int_L dl$$

נותן את אורך הקשת  $L$ .

#### משפט 11.5 מסה של הקשת

האינטגרל הקווי

$$\int_L f(x, y, z) dl$$

נותן את המסה של הקשת  $L$  בעלת צפיפות לינארית  $f(x, y, z)$ .

### 11.3 דוגמה

חשב את אורך הקשת של קו הבורג:

$$\{x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

**פתרון:**

לפי כלל 11.3

$$\int_L dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\pi\sqrt{2}.$$

## 11.2 אינטגרל הקווי מסוג שני

כדי לחשב את האינטגרל של שדה וקטורי מצורה

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$$

דרך המסלול  $L$  משתמשים ב **האינטגרל הקווי מסוג שני**.

לדוגמא, העבודת השדה הוקטורי  $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$  בהעברת חלקיק מהנקודה  $A$  לנקודה  $B$  לאורך המסלול  $L$  ניתן ע"י

$$W = \int_L [P(x, y)dx + Q(x, y)dy].$$

דרך החישוב של אינטגרל קווי מסוג שני תלויה באופן הגדרת המסלול  $L$  של האינטגרציה.

### משפט 11.6 אינטגרל קווי מסוג שני 1

אם המסלול מישורי  $L$  מוגדר כגרף של הפונקציה  $\{y = \gamma(x), |a \leq x \leq b\}$  אז האינטגרל הקווי של פונקציה  $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$  דרך הקו של  $\gamma$  מוגדר להיות

$$\int_L [P(x, y)dx + Q(x, y)dy] = \int_a^b dx P(x, \gamma(x)) + \int_a^b dx \gamma'(x) Q(x, \gamma(x))$$

### משפט 11.7 אינטגרל קווי מסוג שני 2

אם המסלול מישורי  $L$  מוגדר באופן פרמטרי

$$\{x = x(t), y = y(t), |\alpha \leq t \leq \beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה  $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$  דרך הקו של  $L$  מוגדר להיות

$$\int_L [P(x, y)dx + Q(x, y)dy] = \int_\alpha^\beta dt x'(t) P(x(t), y(t)) + \int_\alpha^\beta dt y'(t) Q(x(t), y(t))$$

### משפט 11.8 אינטגרל קווי מסוג שני 3

אם  $L$  הוא המסלול במרחב תלת-ממדי המוגדר באופן

$$\{x = x(t), y = y(t), z = z(t) \mid \alpha \leq t \leq \beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה  $F(x, y, z) = P(x, y, z)\hat{i} + Q(x, y, z)\hat{j} + R(x, y, z)\hat{k}$  דרך הקו של  $L$  מוגדר להיות

$$\begin{aligned} & \int_L [P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz] \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} dt x'(t) P(x(t), y(t), z(t)) + \int_{\alpha}^{\beta} dt y'(t) Q(x(t), y(t), z(t)) + \int_{\alpha}^{\beta} dt z'(t) R(x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

### דוגמה 11.4 אינטגרל קווי מסוג שני

חשבו את

$$\int_L [(x + 2y)dx + (y - x)dy]$$

לאורך הפרבולה  $y = x^2$  מ- $A(1, 1)$  ל- $B(3, 9)$ .

**פתרון:**

לפי כלל 11.6,

$$\begin{aligned} \int_L [(x + 2y)dx + (y - x)dy] &= \int_1^3 dx (x + 2x^2) + \int_1^3 dx \cdot 2x \cdot (x^2 - x) \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} \right]_1^3 + \left[ \frac{2x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} \right]_1^3 \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} \right]_1^3 \\ &= 44 \end{aligned}$$

אם  $L : \{x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b\}$  מתחילה ונגמרת באותה הנקודה  $(x(a) = x(b), y(a) = y(b))$  נאמר שהיא מסילה סגורה ונסמן  $\oint_L$  במקום  $\int_L$  כדי לסמן אינטגרל מסילתי לאורך  $L$ .

### דוגמה 11.5 אינטגרל קווי מסוג שני

חשבו את

$$\int_L [y dx + x dy]$$

לאורך הקשת

$$\{x = -\sin t, y = \cos t\}$$

מ- $t = 0$  עד ל- $t = 2\pi$ .

## פתרון:

לפי כלל 11.7,

$$\begin{aligned}\int_L [y \, dx + x \, dy] &= \int_0^{2\pi} dt \cos t \cdot \cos t + \int_0^{2\pi} dt (-\sin t) \cdot (-\sin t) \\ &= \int_0^{2\pi} dt (\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= \int_0^{2\pi} dt 1 \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

## 11.3 תכונות של אינטגרלים קוויים

### משפט 11.9 תכונה חשובה של אינטגרל קווי

(1) בהינתן מסילה  $L_{AB}$  מ- $A$  ל- $B$  נסמן ב- $L_{BA}$  את המסילה ההולכת בכיוון ההפוך מ- $B$  ל- $A$ . אז

$$\int_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{L_{BA}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

(2) בהינתן מסילות  $L_{AB}$  מ- $A$  ל- $B$  ו- $L_{BC}$  מ- $B$  ל- $C$  נסמן ב- $L_{AC}$  את המסילה המשורשרת המתקבלת, אז

$$\int_{L_{AC}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{L_{BC}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

(3) עבור מסלול מרחבי  $L$  הנתון ע"י  $\begin{cases} x = x(t), y = y(t), z = z(t) \\ a \leq t \leq b \end{cases}$  ופונקציה וקטורית

$$\bar{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

$$\begin{aligned}&\int P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \\ &= \int_a^b P(x(t), y(t), z(t)) x'(t)dt + \int_a^b Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t)dt + \int_a^b R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)dt.\end{aligned}$$

## 11.4 נוסחת גרין

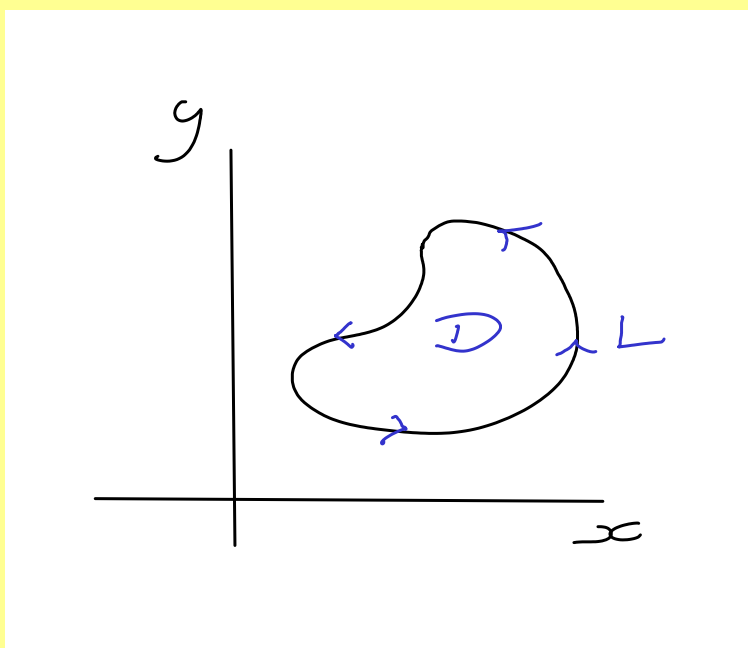
# משפט 11.10 נוסחת גרין

אם  $L$  מסלול מישורי סגור ו-  $P, Q$  גזירות, אז

$$\oint_L [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \iint_D dx dy (Q'_x - P'_y) .$$

כאשר  $D$  התחום החסום על ידי  $L$  ונמצא משמאל ל- $L$ . בפרט, שטח התחום  $S(D)$  נתון ע"י

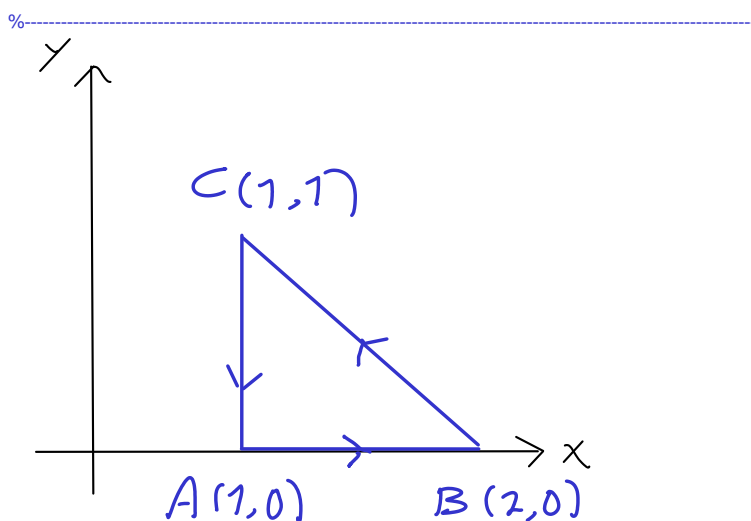
$$S(D) = \oint_L x dy = - \oint_L y dx = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx .$$



## דוגמה 11.6

חשבו את  $I = \oint_L \frac{2}{x+y} dx + \frac{1}{x+y} dy$  לאורך המשולש שקדקודיו  $A(1, 0)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(1, 1)$ .

**פתרון:**



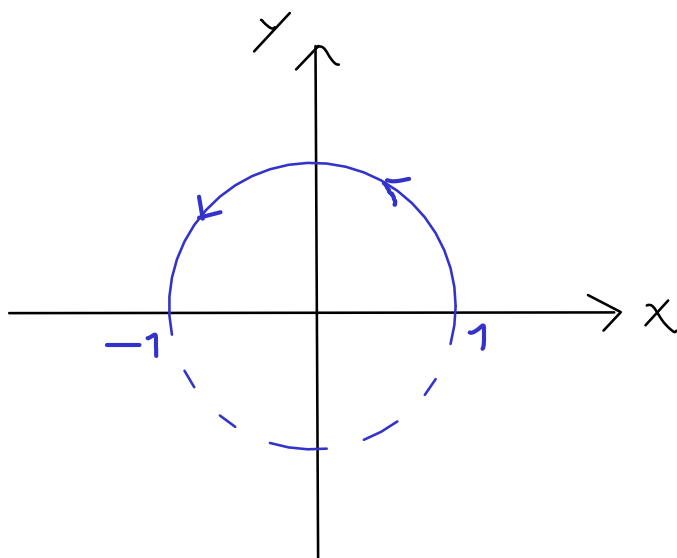
$$\begin{aligned}
 I &= \oint_L \frac{2}{x+y} dx + \frac{1}{x+y} dy \\
 &= \iint_D \left( \frac{-1}{(x+y)^2} + \frac{2}{(x+y)^2} \right) dx dy \\
 &= \int_1^2 dx \int_0^{2-x} dy \frac{1}{(x+y)^2} dx dy \\
 &= \int_1^2 dx \left[ \frac{-1}{x+y} \right]_0^{2-x} \\
 &= \int_1^2 dx \left( \frac{-1}{2} + \frac{1}{x} \right) \\
 &= \left[ \frac{-x}{2} + \ln x \right]_1^2 \\
 &= \ln 2 - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

### 11.7 דוגמה

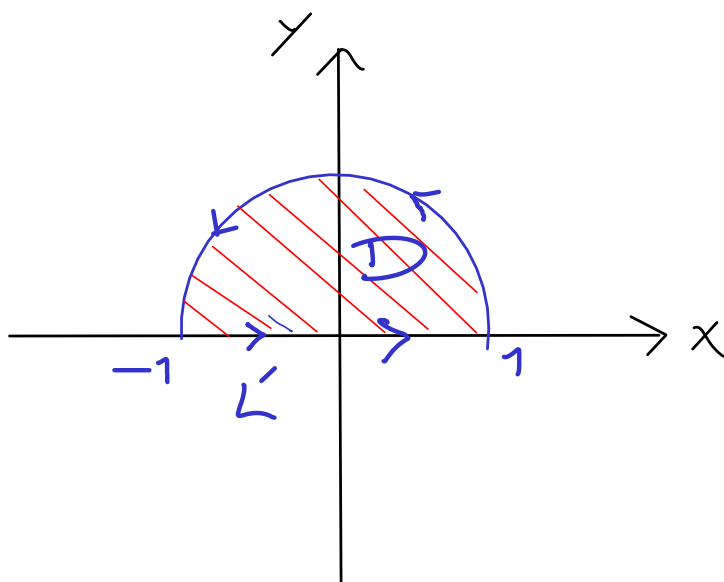
חשבו את  $I = \int_L (x^4 + e^x - y) dx + (x^2 + y^5 + y^2 e^y) dy$  לאורך המסלול  $x^2 + (\sqrt{y})^4$  מימין לשמאל.

**פתרון:**

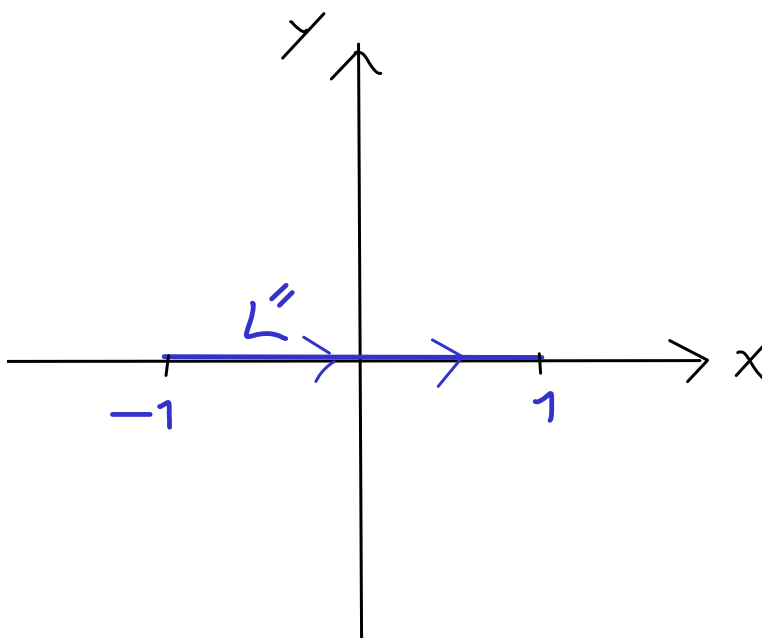




נסגור את המסלול כך:  $\begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + (\sqrt{y})^4$



כלומר נשרשר עם המסלול



$$\oint_{L'} = \int_L + \int_{L''}$$

$$\oint_{L'} P dx - Q dy = \iint_D (2x + 1) dx dy$$

$$= \int_0^1 r dr \int_0^\pi (2r \cos \theta + 1) d\theta$$

$$= \int_0^1 r [2r \sin \theta + \theta]_{\theta=0}^\pi dr$$

$$= \int_0^1 \pi \cdot r dr$$

$$= \left[ \frac{\pi r^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{L''} P dx + Q dy = \int_{-1}^1 P(x, 0) dx + \int_{-1}^1 Q(x, 0) \cdot 0 dx$$

$$= \int_{-1}^1 (x^4 + e^x) dx$$

$$= \left[ \frac{x^5}{5} + e^x \right]_{-1}^1$$

$$= \left[ \frac{2}{5} + e + \frac{1}{e} \right]$$

$$I = \frac{\pi}{2} - \left( \frac{2}{5} + e - \frac{1}{e} \right)$$

משפט 11.11 אי-תלות של אינטגרל קווי במסלול האינטגרציה

אם

$$Q'_x = P'_y$$

מתקיים, אז

(א)

$$\oint_L [P(x,y) dx + Q(x,y)] dy = 0$$

עבור כל מסלול סגור  $L$

(ב) קיימת פונקציה  $U(x,y)$  שעבורה הדיפרנציאל שלה הינה

$$dU(x,y) = P(x,y) dx + Q(x,y) dy ,$$

כך שהאינטגרל הקווי של  $P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j}$  דרך מסלול שרירותי  $L$  מנקודה  $A$  לנקודה  $B$  ניתן ע"י

$$\int_{AB} [P dx + Q dy] = \int_{AB} dU = U(B) - U(A) ,$$

כלומר האינטגרל הקווי  $\int_{AB} [P dx + Q dy]$  אינו תלוי במסלול האינטגרציה העובר מ- $A$  ל- $B$ .

11.5 דוגמאות

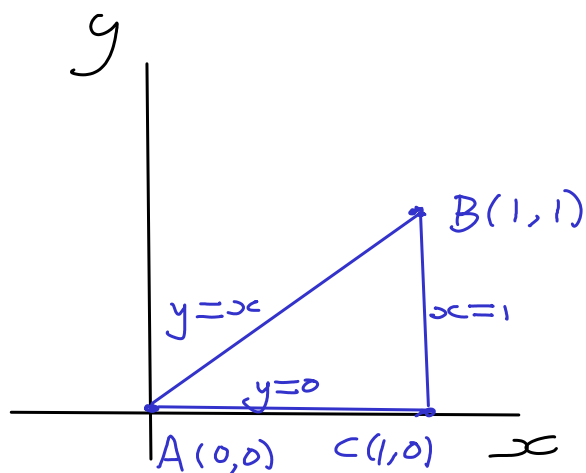
דוגמה 11.8

חשב את האינטגרל הבא כאשר המסלול  $L$  הוא המצולע בעל קדקודים נתונים:

$$\int_L (x + y) dl$$

$$C(1,0), B(1,1), A(0,0)$$

פתרון:



$$\begin{aligned}
 \int_L dl (x+y) &= \left[ \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} \right] (x+y) dl \\
 &= \int_0^1 dx \sqrt{1+(x)'} (x+x) + \int_1^0 dy (1+y) + \int_1^0 dx (x+0) \\
 &= \sqrt{2} [x^2]_0^1 + \left[ y + \frac{y^2}{2} \right]_1^0 + \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^0 \\
 &= \sqrt{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \sqrt{2} - 2.
 \end{aligned}$$

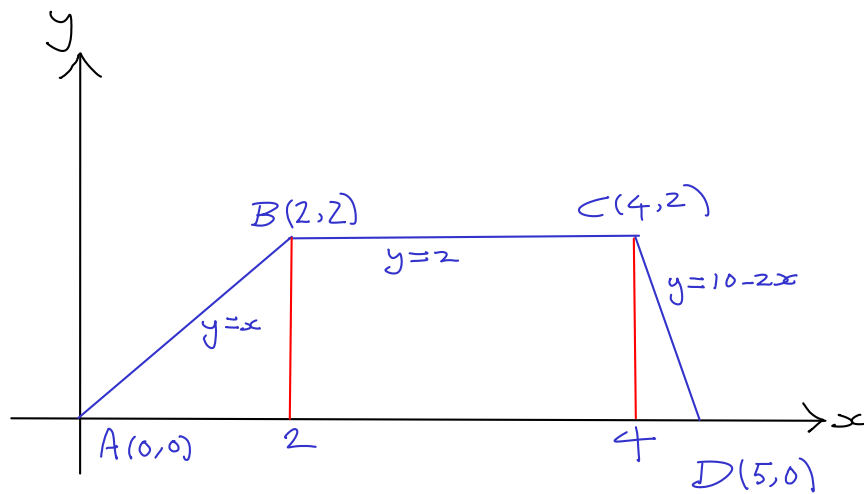
### דוגמה 11.9 נוסחת גרין

חשבו את האינטגרל הבא כאשר המסלול  $L$  הוא המצולע בעל קדקודים נתונים:

$$\oint_L (xy \, dx + (x-y) \, dy)$$

$$D(5,0), C(4,2), B(2,2), A(0,0)$$

**פתרון:**



המסלול סגור ולכן ניתן להשתמש בנוסחת גרין (כלל 11.10):

$$I = \oint_L (Pdx + Qdy) = \iint_D dx dy (Q'_x - P'_y)$$

$$P(x, y) = xy, \quad Q(x, y) = x - y, \quad Q'_x = 1, \quad P'_y = x,$$

כאן

ולכן

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 dx \int_0^x dy (1-x) + \int_2^4 dx \int_0^2 dy (1-x) + \int_4^5 dx \int_0^{-2x+10} dy (1-x) \\ &= \int_0^2 dx x(1-x) + \int_2^4 dx 2(1-x) + \int_4^5 dx (1-x)(-2x+10) \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 + [2x - x^2]_2^4 + \left[ 10x - \frac{11x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} \right]_4^5 \\ &= 4 - \frac{8}{3} + (8 - 16 - 4 + 4) + \left( -\frac{10}{3} \right) \\ &= 2 - \frac{8}{3} + (8 - 16 - 4 + 4) + \left( -\frac{10}{3} \right) \\ &= -12. \end{aligned}$$

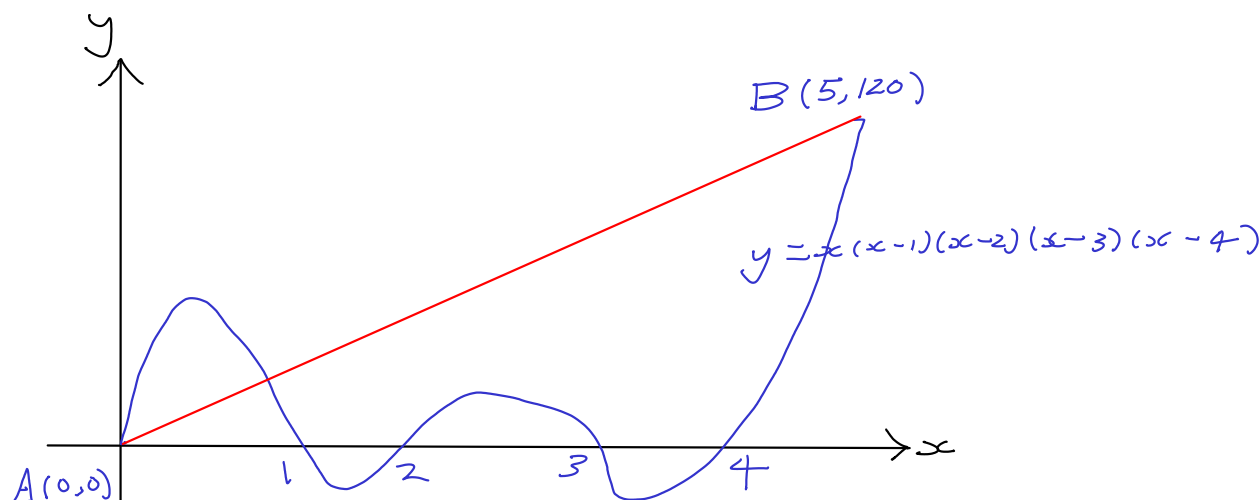
### דוגמה 11.10 אי-תלות של אינטגרל קווי במסלול

חשבו את האינטגרל

$$\int_L ((2x-y)dx + (3y-x)dy)$$

עבור המסלול  $L$  הקטע של העקום  $y = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$  בין הנקודות  $A(0,0)$ ,  $B(5,120)$ .

## פתרון:



האינטגרל הוא

$$\int_L (P(x, y)dx + Q(x, y)dy)$$

כאשר

$$P(x, y) = 2x - y, \quad Q(x, y) = 3y - x.$$

שים לב:

$$P'_y = Q'_x = -1$$

ולפיו מותר להשתמש בכלל 11.11, האורמ כי קיימת פונקציה  $U(x, y)$  כך ש-

$$dU(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

והאינטגרל אינו תלוי בהמסלול אלא רק על הנקודה התחלתית  $A(0, 0)$  והנקודה הסופית  $B(5, 120)$ . הפונקציה  $U(x, y)$  הינה

$$U(x, y) = \int dx P(x, y) = \int dx (2x - y) = x^2 - xy + p(y)$$

כאשר  $p(y)$  פונקציה התלוי רק על המשתנה  $y$  ו-

$$U(x, y) = \int dy Q(x, y) = \int dy (3y - x) = \frac{3y^2}{2} - xy + q(x)$$

כאשר  $q(x)$  פונקציה התלוי רק על המשתנה  $x$ . נשווה אותן ונקבל

$$U(x, y) = x^2 + \frac{3y^2}{2} - xy.$$

לכן לפי כלל 11.11,

$$\int_L (P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = \int_{AB} dU(x, y) = U(B) - U(A) = 5^2 + \frac{3 \cdot 120^2}{2} - 5 \cdot 120 = 21025.$$

### דוגמה 11.11 נוסחת גרין

חשבו את האינטגרל

$$\oint_L ((x+y) dx + (x-y) dy)$$

לפי המסלול  $L$  הניתן ע"י

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

### פתרון:

המסלול סגור ולכן ניתן להשתמש בנוסחת גרין (כלל 11.10) האומר כי

$$I = \oint_L (P dx + Q dy) = \iint_D dx dy (Q'_x - P'_y)$$

כאן

$$P(x,y) = x+y , \quad Q(x,y) = x-y , \quad \Rightarrow \quad Q'_x = 1 , \quad P'_y = 1 .$$

ולכן

$$I = \iint_D dx dy (1-1) = 0.$$

### דוגמה 11.12 אינטגרל הקווי מסוג שני

חשבו את האינטגרל

$$\oint_L (xy dx + (x-y) dy)$$

לפי המסלול  $L$  הניתן ע"י

$$x = a \cdot \cos t , \quad y = b \cdot \sin t$$

בכיוון נגד השעון.

### פתרון:

מתקבלים המסלול הסגור ע"י הטווח

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

כך שלפי כלל 11.7,

$$\begin{aligned}
I &= \oint_L (xy \, dx + (x - y) \, dy) \\
&= \int_0^{2\pi} dt \, (x(t)y(t) \, \dot{x} + (x(t) - y(t))\dot{y}) \\
&= \int_0^{2\pi} dt \, (-a^2b \cos t \cdot \sin^2 t + (a \cdot \cos t - b \cdot \sin t)b \cdot \cos t) \\
&= \int_0^{2\pi} dt \, (-a^2b \cos t \cdot \sin^2 t + ab \cdot \cos^2 t - b^2 \cdot \sin t \cdot \cos t) \\
&= \int_0^{2\pi} dt \, \left( -a^2b \cos t \cdot \sin^2 t + ab \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) - b^2 \cdot \sin t \cdot \cos t \right) \\
&= \left[ -a^2b \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{abt}{2} - \frac{ab}{4} \sin 2t - \frac{b^2}{2} \cdot \sin^2 t \right]_0^{2\pi} \\
&= \pi ab .
\end{aligned}$$