**שאלה 1** תהיינה $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכח או הפרך:

**א)** אם $AB = AC$ אז $B = C$.

**ב)** אם $AB = 0$ אז $A = 0$ או $B = 0$.

**ג)** $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

**ד)** $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

**ה)** $(AB)^t = A^t B^t$.

**ו)** $(A+B)^t = A^t + B^t$.

**ז)**

**שאלה 2** הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

**א)** אם $A$ מטריצה משולשת עליונה ו- $B$ מטריצה משולשת עליונה, אז $A \cdot B$ מטריצה משולשת עליונה.

**ב)** אם $A$, $B$ מטריצות אלכסוניות, אז $AB = BA$.

**ג)** אם $A$, $B$ מטריצות ריבועיות המקיימות $AB = BA$ אז $AB^2 = B^2A$.

**שאלה 3** נניח ש- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ מטריצה של משתנים ו- $b \in \mathbb{R}^n$. הוכיחו כי אם למערכת

$$AX = b \ , \qquad b \neq \bar{0} \ .$$

יש יותר מפתרון אחד אז $A$ לא הפיכה.

**שאלה 4**

**א)** נניח כי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו: אם $A$ הפיכה אז $|A| \neq 0$.

**ב)** נניח כי $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו: אם $AB$ הפיכה אז $A$ הפיכה.

**ג)** תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הוכיחו כי אם $A$ הפיכה ו- $A+B$ הפיכה אז

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(A+B)^{-1} \ .$$

**שאלה 5** תהיינה $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו:

**א)** אם $A$ הפיכה ו- $BA = CA$ אז $B = C$.

**ב)** אם $AB = AC$ אז $B = C$.

**ג)** אם $AB = 0$ אז $A$ ו- $B$ אינן הפיכות.

**ד)** אם $AB = 0$ ו- $A \neq 0$ אז $B$ איננה הפיכה.

**ה)** אם $AB$ הפיכה אז $A$ ו- $B$ הפיכות.

**ו)** אם $A$ הפיכה אז $AB$ הפיכה.

**ז)** אם $A$ הפיכה ו- $B$ הפיכה אז $A + B$ הפיכה.

**ח)** אם $A$ הפיכה ו- $B$ לא הפיכה אז $A + B$ לא הפיכה.

**ט)** תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ויהי $f(x) = 2x^4 - x^2 + 3x - 2$ פולינום כך ש- $f(A) = 0$. אזי $A$ הפיכה.

**י)** אם $A$ הפיכה אז $A + A^t$ הפיכה.

**שאלה 6** הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:
תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם $A$ הפיכה ו- $A + B$ הפיכה אז

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(A + B)^{-1} \ .$$

**שאלה 7** נתונה הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ של וקטורים במרחב וקטורי $\mathbb{R}^3$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:
אם הווקטורים $\{u_1, u_2\}$ בת"ל אז הווקטורים $\{u_1, u_2, u_3\}$ בת"ל.

**שאלה 8** תהי $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. אומרים כי $A$ מטריצה סטוקסטית אם הסכום של האיברים בכל עמודה שווה 1.
הוכיחו כי המכפלה של כל שתי מטריצות סטוקסטיות שווה למטריצה סטוקסטית.

**שאלה 9** נניח ש- $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה המקדמים, ו- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$ ווקטור המשתנים של המערכת
הוכיחו: אם $A$ הפיכה אז הפתרון היחיד למערכת $AX = 0$ הוא $X = 0$ (ווקטור האפס).

**שאלה 10** תן דוגמא לשתי קבוצות $S$, $T$ כך ש- $S \subseteq T$ ומתקיים:

**א)** $T$ פורשת את $\mathbb{R}^4$ ו- $S$ לא פורשת את $\mathbb{R}^4$ .

**ב)** $T$ לא פורשת את $\mathbb{R}^4$ ו- $S$ לא פורשת את $\mathbb{R}^4$ .

**ג)** $T$ פורשת את $\mathbb{R}^4$ ו- $S$ פורשת את $\mathbb{R}^4$ .

**שאלה 11**

**א)** נתון כי $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ ומתקיים $A^8 + A = 0$. מצאו את $|A|$.

**שאלה 12**

הוכיחו או הפריכו: אם $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ ומתקיים $A^5 + A = 0$ אז $A$ לא הפיכה.

**שאלה 13**

**א)** נניח כי $\{u_1, \cdots, u_k\} \in \mathbb{R}^n$ קבוצת ווקטורים בת"ל ונניח ש $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

**ב)** אם $\{Au_1, \cdots, Au_k\}$ בת"ל אז גם $\{u_1, \cdots, u_k\}$ בת"ל.

**ג)** אם $\{u_1, \cdots, u_k\}$ בת"ל אז גם $\{Au_1, \cdots, Au_k\}$ בת"ל.

**שאלה 14** תהיינה $X \subseteq Y$ קבוצות של וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$. הוכח או הפרך:

**א)** אם $Y$ פורשת את $\mathbb{R}^n$ אז $X$ פורשת את $\mathbb{R}^n$.

**ב)** אם $0 \in X$ אז $X$ פורשת את $\mathbb{R}^n$.

**ג)** אם $0 \in X$ אז $X$ לא פורשת את $\mathbb{R}^n$.

**ד)** אם $X$ פורשת את $\mathbb{R}^n$ אז $Y$ פורשת את $\mathbb{R}^n$.

**ה)** אם מספר הוקטורים ב- $X$ גדול מ- $n$ אז $X$ פורשת את $\mathbb{R}^n$

**ו)** אם קיים $v \in Y$ כך ש- $v \notin X$ אז $\mathrm{sp}(Y) \neq \mathrm{sp}(X)$.

**שאלה 15** תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times n}$. הוכח או הפרך:

**א)** אם למערכת $AX = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$ קיים פתרון אז למערכת $AX = \begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}$ קיים פתרון.

**ב)** אם למערכת $AX = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$ קיים פתרון יחיד אז למערכת $AX = \begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}$ קיים פתרון יחיד.

**ג)** אם $n = 3$ ולמערכת $AX = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$ קיים פתרון יחיד אז למערכת $AX = \begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}$ קיים פתרון יחיד.

**ד)** אם למערכת $AX = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ קיים פתרון אז למערכת $AX = \begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}$ קיים פתרון.

**ה)** יהיו $c, d \in \mathbb{R}^n$. אם למערכת $AX = c$ קיים פתרון ולמערכת $AX = d$ קיים פתרון, אז למערכת $AX = c + d$ קיים פתרון.

## שאלה 16

תן דוגמא לשתי קבוצות $S$, $T$ המוכלות ב - $\mathbb{R}^4$ כך ש- $S \subseteq T$ ומתקיים:

**א)** $T$ בת"ל ו- $S$ בת"ל.

**ב)** $T$ ת"ל ו- $S$ ת"ל.

**ג)** $T$ ת"ל ו- $S$ בת"ל.

## שאלה 17

תהיינה $X \subseteq Y$ קבוצות של וקטורים ב - $\mathbb{R}^n$. הוכח או הפרך:

**א)** אם $X$ בת"ל אז $Y$ בת"ל.

**ב)** אם $Y$ בת"ל אז $X$ בת"ל.

**ג)** אם $0 \in X$ אז $X$ ת"ל.

**ד)** אם מספר הוקטורים ב - $X$ קטן מ - $n$ אז $X$ בת"ל.

**שאלה 18** יהי $V$ מרחב וקטורי, $T : U \to V$ העתקה לינארית ונניח כי וקטורים $\{u_1, \ldots, u_n\} \in U$. וקטורים. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדיתאת הטענה הבאה:

**א)** אם $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ בת"ל אז $u_1, \ldots, u_n$ בת"ל.

**ב)** אם $u_1, \ldots, u_n$ בת"ל אז $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ בת"ל.

## שאלה 19

**א)** תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times 2}$ כאשר $F$ שדה. נתון שקיימים $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in \mathbb{F}^2$ כך ש $A\mathrm{v}_1 = A\mathrm{v}_2 = 0$ וכן $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ בת"ל. הוכיחו ש- $A = 0$.

**ב)** תהי $A$ מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$ המקיימת את המשוואה

$$A^2 + 5A + I = 0 \ .$$

הוכיחו ש- $A$ הפיכה ומצאו את $A^{-1}$.

**שאלה 20** תהיינה $X \subseteq Y$ קבוצות של וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$. הוכח או הפרך:

**א)** אם $Y$ פורשת את $\mathbb{R}^n$ אז $X$ פורשת את $\mathbb{R}^n$.

**ב)** אם $0 \in X$ אז $X$ פורשת את $\mathbb{R}^n$.

**ג)** אם $0 \in X$ אז $X$ לא פורשת את $\mathbb{R}^n$.

**ד)** אם $X$ פורשת את $\mathbb{R}^n$ אז $Y$ פורשת את $\mathbb{R}^n$.

**ה)** אם מספר הוקטורים ב- $X$ גדול מ- $n$ אז $X$ פורשת את $\mathbb{R}^n$.

**ו)** אם קיים $\mathrm{v} \in Y$ כך ש $\mathrm{v} \notin X$ אז $\mathrm{sp}(Y) \neq \mathrm{sp}(X)$.

# פתרונות

## שאלה 1

תהיינה $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו:

**א)** אם $AB = AC$ אז $B = C$:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = A \cdot C = 0 \ , \qquad B \neq C \ .$$

**ב)** אם $AB = 0$ אז $A = 0$ או $B = 0$:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = 0 \ , \qquad A \neq 0 \ , B \neq 0 \ .$$

**ג)** $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$:

טענה לא נכונה. הסבר:

$$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

עבור מטריצות $A, B$ לא מתחלפות.

דוגמה נגדית:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

$AB \neq BA$ לכן

$$A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2 \ .$$

**ד)** $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$:

טענה לא נכונה. הסבר:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$$

רק עבור מטריצות מתחלפות, ז"א $AB = BA$.

דוגמה נגדית:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

$AB \neq BA$ לכן

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2 \ .$$

**ה)** $\underline{(AB)^t = A^t B^t}$:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} \ , \qquad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} \ .$$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^t \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 18 & 4 \end{pmatrix} \ .$$

ז"א $(AB)^t \neq A^t B^t$.

**ו)** $\underline{(A+B)^t = A^t + B^t}$:

טענה נכונה. הוכחה:

נוכיח את הטענה לכל איבר $A_{ij}$ של $A$ וכל איבר $B_{ij}$ של $B$ ($i, j = 1, \dots n$).

$$\left((A+B)^t\right)_{ij} = A_{ji} + B_{ji} = (A^t)_{ij} + (B^t)_{ij} = (A^t + B^t)_{ij}$$

לכל $i, j = 1, \dots n$.

**ז)**

## <u>שאלה 2</u>

**א)** <u>טענה:</u> אם $A$, $B$ משולשית עליונה אז $A \cdot B$ משולשית עליונה.

מספיק להוכיח כי $(A \cdot B)_{ij} = 0$ לכל $i > j$.

הוכחה: נניח ש- $i > j$.

$$(A \cdot B)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots A_{in}B_{nj} \ .$$

לכל איבר $A_{ik}B_{kj}$ יש 5 אפשריות:

$i > j \geq k$:

$A$ משולשית עליונה לכן $A_{ik} = 0$.

$i > k > j$:

$A$ משולשית עליונה ו- $B$ משולשית עליונה לכן $A_{ik} = 0$ ו- $B_{kj} = 0$.

$i = k > j$:

$B$ משולשית עליונה לכן $B_{kj} = 0$.

$i > k = j$:

$A$ משולשית עליונה לכן $A_{ik} = 0$.

$k > i \geq j$:

$B$ משולשית עליונה לכן $B_{kj} = 0$.

בסה"כ עבור כל אחד מהאפשריות, כל איבר בסכום, $A_{ik}B_{kj} = 0$. כלומר כל איבר מתאפס בגלל ש- $A$ משולשית עליונה ו- $B$ משולשית עליונה.
לפיכך, מצאנו כי אם $i > j$ אז $(A \cdot B)_{ij} = 0$. מש"ל.

**ב)** טענה: אם $A$, $B$ אלכסוניות, אז $AB = BA$.

צריך להוכיח: $(A \cdot B)_{ij} = (B \cdot A)_{ij}$.

הוכחה (שיטה 1):

המכפלה של שתי מטריצות אלכסוניות $A$, $B$ שווה למטריצה אלכסונית, והאיברים באלכסון של המטריצה המתקבלת שווים למכפלה של האיברים על האלכסונים של $A$ ו- $B$, כלומר אם

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix} ,$$

אז

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22}B_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn}B_{nn} \end{pmatrix} .$$

לכן

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22}B_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn}B_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_{11}A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{22}A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{nn}A_{nn} \end{pmatrix}=B\cdot A$$

מש"ל.

<u>הוכחה (שיטה 1):</u>

אם $A$, $B$ אלכסוניות, אז

$$\begin{aligned}(A\cdot B)_{ij} =& A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\ldots+A_{ii}B_{ij}+\ldots+A_{in}B_{nj}=A_{ii}B_{ij}\\ =&\begin{cases} A_{ii}B_{ii} & i=j\ , \\ 0 & i\neq j\ . \end{cases}\end{aligned}$$

מצד שני,

$$(B\cdot A)_{ij}=\begin{cases} B_{ii}A_{ii} & i=j\ , \\ 0 & i\neq j\ . \end{cases}=\begin{cases} A_{ii}B_{ii} & i=j\ , \\ 0 & i\neq j\ . \end{cases}$$

ז"א

$$(A\cdot B)_{ij}=(B\cdot A)_{ij}$$

לכן $AB=BA$. מש"ל.

## <u>שאלה 3</u>

נוכיח דרך השלילה.
נניח ש- $X_1$, $X_2$ פתרונות למערכת $A\mathrm{x}=b$, כאשר $X_1\neq X_2$ ו- $b\neq\bar{0}$.
נניח ש- $A$ הפיכה.
אז $AX_1=b$ ו- $AX_2=b$.
לכן

$$A\cdot(X_1-X_2)=b-b=\bar{0}\ .$$

$A$ הפיכה אז $A^{-1}$ קיימת. נכפיל ב- $A^{-1}$ מצד שמאל ונקבל

$$A^{-1}\cdot A\cdot(X_1-X_2)=A^{-1}\cdot\bar{0}\quad\Rightarrow\quad I\cdot(X_1-X_2)=\bar{0}\quad\Rightarrow\quad X_1-X_2=\bar{0}\quad\Rightarrow\quad X_1=X_2\ ,$$

בסתירה לכך ש- $X_1\neq X_2$. לכן $A$ לא יכולה להיות הפיכה.

## <u>שאלה 4</u>

**א)** טענה נכונה. $A$ הפיכה $\Leftarrow$ קיימת $A^{-1}$ כך ש- $AA^{-1}=I\Leftarrow|AA^{-1}|=|I|=1\Leftarrow|A||A^{-1}|=1$ ולכן $|A|\neq 0$.

**ב)** $AB$ הפיכה לכן $|AB|\neq 0$ לכן $|A||B|\neq 0$ לכן $|A|\neq 0$ ו- $|B|\neq 0$ לכן $A$ הפכיה.

**ג)**

$$(A+B)^{-1}(A+B) = A^{-1}(A+B) - A^{-1}B(A+B)^{-1}(A+B) = I_{n\times n} + A^{-1}B - A^{-1}BI_{n\times n} = I_{n\times n} \ .$$

## שאלה 5

**א)** אם $A$ הפיכה ו- $BA = CA$ אז $B = C$.

טענה נכונה. הוכחה:

$A$ הפיכה לכן קיימת $A^{-1}$. נכפיל מצד ימין ב- $A^{-1}$:

$$B \cdot A \cdot A^{-1} = C \cdot A \cdot A^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad B = C \ .$$

**ב)** אם $AB = AC$ אז $B = C$.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ , \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \ .$$

$AB = AC = 0$, $B \neq C$.

**ג)** אם $AB = 0$ אז $A$ ו- $B$ אינן הפיכות.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

$A \cdot B = 0$ ו- $B$ הפיכה.

**ד)** אם $AB = 0$ ו- $A \neq 0$ אז $B$ איננה הפיכה.

טענה נכונה. הוכחה:
נוכיח בדרך השלילה. נניח ש- $A \cdot B = 0$ ו- $A \neq 0$ ו- $B$ הפיכה.
אז קיימת $B^{-1}$. נכפיל את $AB = 0$ מצד ימין ב- $B^{-1}$:

$$A \cdot B \cdot B^{-1} = 0 \cdot B^{-1} \quad \Rightarrow \quad A \cdot I = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \ ,$$

בסתירה דכך ש- $A \neq 0$.

**ה)** אם $AB$ הפיכה אז $A$ ו- $B$ הפיכות.

טענה נכונה. הוכחה:
$AB$ הפיכה $\Leftarrow |AB| \neq 0 \Leftarrow |A| \cdot |B| \neq 0 \Leftarrow |A| \neq 0$ וגם $|B| \neq 0$. לפיכך $A$ הפיכה וגם $B$ הפיכה.

**ו)** אם $A$ הפיכה אז $AB$ הפיכה.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

$A$ הפיכה אבל $AB$ לא הפיכה.

**ז)** אם $A$ הפיכה ו- $B$ הפיכה אז $A+B$ הפיכה.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+I_{2\times 2}\ ,\qquad B=-I\ ,\qquad A+B=I_{2\times 2}-I_{2\times 2}=0_{2\times 2}\ .$$

$|A|=|I|=1$,

$|B|=|-I|=(-1)^2|I|=1$,

$|A+B|=0$.

ז"א $A$ הפיכה, $B$ הפיכה, $A+B$ לא הפיכה.

**ח)** אם $A$ הפיכה ו- $B$ לא הפיכה אז $A+B$ לא הפיכה.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad A+B=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\ .$$

$|A|=1$, $|B|=0$, $|A+B|=2$.
ז"א $A$ הפיכה, $B$ לא הפיכה, $A+B$ הפיכה.

**ט)** תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ויהי $f(x)=2x^4-x^2+3x-2$ פולינום כך ש- $f(A)=0$. אזי $A$ הפיכה.

טענה נכונה. הוכחה:
לפי הנתון,

$$f(A)=2A^4-A^2+3A-2I=0\quad\Rightarrow\quad A\cdot(2A^3-A+3)=2I\quad\Rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{2}\left(2A^3-A+3I\right)$$

ז"א $A^{-1}$ קיימת לכן $A$ הפיכה.

**י)** אם $A$ הפיכה אז $A+A^t$ הפיכה.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad A^t=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\ ,\qquad A+A^t=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\ .$$

$|A|=1 \Leftarrow A$ הפיכה.
$|A+A^t|=0 \Leftarrow A+A^t$ לא הפיכה.

**שאלה 6** הטענה נכונה. הוכחה:

נכפיל מצד ימין ב- $A+B$:

$$(A+B)^{-1}(A+B) = A^{-1}(A+B) - A^{-1}B(A+B)^{-1}(A+B) = I_{n\times n} + A^{-1}B - A^{-1}BI_{n\times n} = I_{n\times n} \ .$$

**שאלה 7**

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \ , \quad u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \ , u_3 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \ .$$

הרי $\{u_1, u_2\}$ בת"ל ו- $\{u_1, u_2, u_3\}$ ת"ל בגלל ש- $u_3 = 2u_1$.

**שאלה 8**

$$A_1 = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\c_1 & d_1\end{pmatrix} \ , \qquad A_2 = \begin{pmatrix}a_2 & b_2\\c_2 & d_2\end{pmatrix} \ .$$

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix}a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2\\c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2\end{pmatrix}$$

$$a_1a_2 + b_1c_2 + c_1a_2 + d_1c_2 = a_2(a_1+c_1) + c_2(b_1+d_1) = a_2 + c_2 = 1 \ ,$$

$$a_1b_2 + b_1d_2 + c_1b_2 + d_1d_2 = b_2(a_1+c_1) + d_2(b_1+d_1) = b_2 + d_2 = 1 \ .$$

**שאלה 9** נוכיח דרך השלילה. נניח ש $A$ הפיכה ו קיים פתרון $X \neq 0$.
$A$ הפיכה אז $A^{-1}$ קיימת.

$$AX = 0 \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}\cdot 0 \quad \Rightarrow \quad IX = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 0$$

בסתירה לכך ש- $X \neq 0$.

**שאלה 10**

**א)** $S = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$, $T = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$, $S \subseteq T$. $S$ לא פורשת את $\mathbb{R}^4$, $T$ פורשת את $\mathbb{R}^4$ כי $T$ הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^4$.

**ב)** $S = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$, $T = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$, $S \subseteq T$. $S$ ו $T$ לא פורשות את $\mathbb{R}^4$.

ג) $T = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$ , $S = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$.

## שאלה 11

$$A^8 + A = 0 \quad \Rightarrow \quad A^8 = -A \quad \Rightarrow \quad |A^8| = (-1)^8|A| \quad \Rightarrow \quad |A|^8 = |A|$$

$A$ הפיכה לכן $|A| \neq 0$ לכן אפשר לחלק ב- $|A|$:

$$|A|^8 = |A| \quad \Rightarrow \quad |A|^7 = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| = 1 \ .$$

## שאלה 12

$$A^5 + A = 0 \quad \Rightarrow \quad A^5 = -A \quad \Rightarrow \quad |A^5| = |-A| \quad \Rightarrow \quad |A|^5 = -|A| \ .$$

נניח כי $A$ הפיכה. אז $|A| \neq 0$ ז"א קיים $\frac{1}{|A|}$. אז נקבל

$$|A|^4 = -1 \ .$$

בסתירה לכך ש- $|A|^4$ חיובי.

## שאלה 13

**א)** טענה נכונה. הסבר:

נניח ש- $\{Au_1, \ldots, Au_k\}$ בת"ל.

הקבוצה בת"ל לכן ווקטור האפס לא בקבוצה $\{Au_1, \ldots, Au_k\}$. לכן $A \neq 0$.

נוכיח ש- $\{u_1, \cdots, u_k\}$ בת"ל דרך השלילה.

נניח כי $\{u_1, \cdots, u_k\}$ ת"ל.

ז"א קיימים סקלרים שלא כולם אפסים כך ש- $t_1u_1 + \cdots + t_ku_k = \bar{0}$.

ז"א קיימים סקלרים שלא כולם אפסים כך ש-

$$A(t_1u_1 + \cdots + t_ku_k) = A\bar{0} \quad \Rightarrow \quad t_1Au_1 + \cdots t_kAu_k = \bar{0}$$

ז"א $\{Au_1, \ldots, Au_k\}$ ת"ל.

בסתירה לכך ש- $\{Au_1, \ldots, Au_k\}$ בת"ל.

**ב)** טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: הקבוצה $\left\{ u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \right\}$ בת"ל. נניח כי $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = 0$ (מטריצה האפס). אז $\left\{ Au_1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, Au_2 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}. \right\}$ ת"ל.

## שאלה 14

**א)** $X \subseteq Y$ ו- $Y$ פורשת $\mathbb{R}^n \Leftarrow X$ פורשת $\mathbb{R}^n$.

דוגמה נגדית:

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \ , \ , \qquad X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \ ,$$

$X, Y \in \mathbb{R}^2$. $Y$ פורשת את $\mathbb{R}^2$, $X$ לא פורשת את $\mathbb{R}^2$.

**ב)** $0 \in X \Leftarrow X$ פורשת את $\mathbb{R}^n$.

דוגמה נגדית:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$X$ לא פורשת את $\mathbb{R}^2$.

**ג)** $0 \in X \Leftarrow X$ לא פורשת את $\mathbb{R}^n$.

דוגמה נגדית:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$X$ פורשת את $\mathbb{R}^2$.

**ד)** $X$ פורשת את $\mathbb{R}^n \Leftarrow Y$ פורשת את $\mathbb{R}^n$.

נתון: $\mathrm{sp}(X) = \mathbb{R}^n, X \subseteq Y$.
צ"ל: $\mathrm{sp}(Y) = \mathbb{R}^n$.
הוכחה:
נקח $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^n$. אז $\mathrm{v} \in \mathrm{sp}(X)$. לכן קיימים $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$ כך ש

$$\mathrm{v} = k_1 u_1 + \ldots + k_m u_m \ .$$

$X \subseteq Y$, לכן $u_1, \ldots, u_m \in Y$, $\Leftarrow \mathrm{v} \in \mathrm{sp}(Y)$.

**ה)** מספר הוקטורים ב- $X$ גדול מ- $n \Leftarrow X$ פורשת את $\mathbb{R}^n$

דוגמה נגדית:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

$X$ אינה פורשת את $\mathbb{R}^2$.

**ו)** קיים $\mathrm{v} \in Y$ כך ש- $\mathrm{v} \notin X \Leftarrow \mathrm{sp}(Y) \neq \mathrm{sp}(X)$.

דוגמה נגדית:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \ , \qquad Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathrm{sp}(Y) = \mathrm{sp}(X) = \mathbb{R}^2 \ .$$

**שאלה 15** $A \in \mathbb{R}^{3\times n}$, נסמן את העמודות $u_1,\dots,u_n$. אז $u_1,\dots,u_n \in \mathbb{R}^3$.

**א)** טענה: למערכת $AX = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$ יש פתרון, ז"א וקטור $\mathrm{v} = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix} \in \mathrm{sp}(u_1,\dots,u_n)$.

דוגמה נגדית: $u_1 = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. $\mathrm{v} \in \mathrm{sp}(u_1,u_2)$ וקטור $\mathrm{v}' = \begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix} \notin \mathrm{sp}(u_1,u_2)$

**ב)** דוגמה נגדית: $u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $u_1 = \begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}$. $\mathrm{v} \in \mathrm{sp}(u_1,u_2)$ כי $\mathrm{v} = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix} = u_1 + u_2$. $u_1$,$u_2$ בת"ל, לכן למערכת $AX = \mathrm{v}$ יש פתרון יחיד.

נבדוק אם למערכת $AX = \begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}$ יש פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&7\\0&4&4\\0&7&3\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}1&2&7\\0&1&1\\0&7&3\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}1&2&7\\0&1&1\\0&0&-4\end{array}\right)$$

אין פתרון למערכת.

**ג)** $n = 3$. למערכת $AX = \mathrm{v}$ יש פתרון יחיד, לכן הוקטורים $u_1,u_2,u_3$ בת"ל. לכן, $u_1,u_2,u_3$ מהווים בסיס של $\mathbb{R}^3$ $\Leftarrow$ למערכת $AX = \begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}$ יש פתרון יחיד.

**ד)** <u>דוגמה נגדית:</u>

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad , \quad u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad .$$

למערכת $AX = 0$ יש פתרון, למערכת $AX = \begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}$ אין פתרון.

**ה)** נסמן ב $\mathrm{v}_1$ פתרון של המערכת $AX = c$, וב $\mathrm{v}_2$ פתרון של המערכת $AX = d$.
ז"א

$$A\mathrm{v}_1 = c \ , \qquad A\mathrm{v}_2 = d \ .$$

לכן

$$A(\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2) = A\mathrm{v}_1 + A\mathrm{v}_2 = c + d \ .$$

**שאלה 16**

**א)**

$$T=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\ ,\qquad S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

**ב)**

$$T=\{\bar{0}\}\ ,\qquad S=\{\bar{0}\}$$

**ג)**

$$T=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\ ,\qquad S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

## שאלה 17

**א)** נתון: $X,Y\in\mathbb{R}^n$, $X\subseteq Y$.

טענה: $X$ בת"ל $\Leftarrow$ $Y$ בת"ל.

דוגמה נגדית:

$X=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^2$ בת"ל, $Y=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^2$ ת"ל.

**ב)** נתון: $X\subseteq Y$, $Y$ בת"ל.

צריך להוכיח: $X$ בת"ל.

הוכחה:

נניח מדרך השלילה, $X=\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\}$ ת"ל. לכן קיימים סקלרים $k_1,\ldots,k_n$ שלא כולם אפסים כך ש- $k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_n\mathrm{v}_n=\bar{0}$. $X\subseteq Y\Leftarrow\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\in Y$. מכאן נובע ש $Y$ ת"ל. סתירה.

**ג)** נתון: $X\subseteq Y$, $\bar{0}\in X$

צ"ל : $X$ ת"ל

הוכחה :

לכל $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\in X$ מתקיים

$$0\cdot\mathrm{v}_1+\ldots 0\cdot\mathrm{v}_n+1\cdot\bar{0}=\bar{0}\ .$$

לכן $X$ ת"ל.

■

**ד)** <u>טענה:</u> מספר הוקטורים ב - $X$ קטן מ - $n \Leftarrow X$ בת"ל.

<u>דוגמה נגדית:</u>

$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^2$ ת"ל.

## <u>שאלה 18</u>

הטענה נכונה. הסבר:

<u>נתון:</u> $T : U \to V$ העתקה לינארית. $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ בת"ל.

<u>צריך להוכיח:</u> $u_1, \ldots, u_n$ בת"ל.

<u>הוכחה:</u> נוכיח דרך השלילה. נניח כי $u_1, \ldots, u_n$ ת"ל. אז קיימים סקלרים $k_1, \ldots, k_n$ שכולם אפסים כך ש

$$k_1 u_1 + \ldots + k_n u_n = \bar{0} \ .$$

לכן

$$T(k_1 u_1 + \ldots + k_n u_n) = T(\bar{0}) = \bar{0}$$

$\Leftarrow$

$$k_1 \cdot T(u_1) + \ldots + k_n \cdot T(u_n) = \bar{0}$$

ז"א $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ ת"ל.
בסתירה לכך ש- $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ בת"ל.

**א)** טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: נניח כי $T$ העתקה לינארית שמוגדרת $T(u) = 0$ לכל $u \in U$. נניח כי הקבוצה $\{u_1, \ldots, u_n\}$ בת"ל. הקבוצה $\{T(u_1) = 0, \ldots, T(u_n) = 0\}$ ת"ל.

## <u>שאלה 19</u>

**א)** תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times 2}$ כאשר $F$ שדה. נתון שקיימים $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in \mathbb{F}^2$ כך ש $A\mathrm{v}_1 = A\mathrm{v}_2 = 0$ וכן $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ בת"ל.
הוכיחו ש- $A = 0$.

<u>נתון:</u> $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ בת"ל, $A\mathrm{v}_1 = \bar{0}$,$A\mathrm{v}_2 = \bar{0}$.

<u>צריך להוכיח::</u> $A = 0$

<u>הוכחה:</u>

$A\mathrm{v}_1 = \bar{0}$ ו- $A\mathrm{v}_2 = \bar{0}$ יהיו $k_1, k_2 \in F$ סקלירים כך ש- $k_1 \neq 0, k_2, \neq 0$. אז

$$k_1 \cdot A\mathrm{v}_1 + k_2 \cdot A\mathrm{v}_2 = \bar{0} \qquad \Rightarrow \qquad A \cdot (k_1 \mathrm{v}_1 + k_2 \mathrm{v}_2) = \bar{0} \ .$$

ז"א $A = 0$ או $k_1 \mathrm{v}_1 + k_2 \mathrm{v}_2 = 0$.

אם $k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2 = 0$ אז קיים צירוף לינארי של $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ השווה לאפס עם מקדמים שלא כולם אפסים.
ואז $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ ת"ל.
וזאת בסתירה לכך ש- $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ בת"ל.

לכן $A = 0$.

**ב)** <u>נתון:</u> $A^2 + 5A + I = 0$.
לכן

$$A^2 + 5A = -I \quad \Rightarrow \quad A(A+5I) = -I \quad \Rightarrow \quad |A| \cdot |A+5I| = (-1)^n \ .$$

נניח כי $A$ לא הפיכה $\Leftarrow |A| = 0$ ואז נקבל כי $0 = (-1)^n$. סתירה.
לכן $A$ הפיכה.

$$-A(A+5I) = I \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = -(A+5I) \ .$$

## <u>שאלה 20</u>

**א)** דוגמה נגדית:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$X$ לא פורשת את $\mathbb{R}^2$, $Y$ פורשת את $\mathbb{R}^2$.

**ב)** דוגמה נגדית: $X = \{\bar{0}\}$ לא פורשת את $\mathbb{R}^2$.

**ג)** דוגמה נגדית: $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ פורשת את $\mathbb{R}^2$.

**ד)** <u>נתון:</u> $X \subseteq Y$

<u>צ"ל:</u> $Y$ פורשת את $\mathbb{R}^n$.

<u>הוכחה</u>

$\mathrm{sp}(X) = \mathbb{R}^n$, לכן לכל $u \in \mathbb{R}^n$ קיימים $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n \in X$ כך ש

$$u = k_1\mathrm{v}_1 + \ldots + k_n\mathrm{v}_n \ .$$

$X \subseteq Y$ לכן $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n \in Y \Leftarrow u \in \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$. ז"א $\mathrm{sp}(Y) = \mathbb{R}^n$.

**ה)** דוגמה נגדית: $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ לא פורשת את $\mathbb{R}^2$.

**ו)** דוגמה נגדית: $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathrm{sp}(X) = \mathrm{sp}(Y)$.