

תרגילים: שפות כריעות ושפות קבילות

**שאלה 1** בהינתן השפה  $L$ . השפה  $L^*$  מוגדרת:

$$L^* = \{\varepsilon\} \cup \{w = w_1 w_2 \cdots w_k \mid \forall 1 \leq i \leq k, w_i \in L\}$$

(א) בהינתן מכונת טיורינג  $M$  המקבלת שפה  $L$ .  
בנו מכונת טיורינג אי דטרמיניסטית  $M^*$  המקבלת את השפה  $L^*$ .

(ב) בהינתן מכונת טיורינג  $M$  המכריעה שפה  $L$ .  
בנו מכונת טיורינג אי דטרמיניסטית  $M^*$  המכריעה את השפה  $L^*$ .

**שאלה 2** האם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה.

לכל מכונת טיורינג  $M$ , אם  $L(M) \in CoRE$  אזי  $L(M) \in R$ .

**שאלה 3** האם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה.

אם  $L_1 \cap L_2 \in R$  אזי  $L_1 \in RE$  או  $L_2 \in CoRE$ .

## תשובות

שאלה 1

(א) תהי  $M$  מכונת טיורנג שמזהה את  $L$ .  
נבנה מכונת טיורנג  $M^*$  אי-דטרמיניסטית המקבלת את  $L^*$ .

תאור הבנייה

$M^* = \text{על קלט } w$ :

1. אם  $w = \varepsilon$  אז  $M^*$  מקבלת.
  2. אחרת  $M^*$  בוחרת באופן אי דטרמיניסטי חלוקה של  $w$  ל-  $w = w_1, w_2, \dots, w_k$  כאשר  $k \in \mathbb{N}^+$ .
  3. לכל  $1 \leq i \leq k$ :
  - $M^*$  מריצה את  $M$  על  $w_i$  ועונה כמוה.
  - \* אם  $M$  קיבלה חוזרים לשלב 3.
  4. אם  $M$  קיבלה את כל המחרוזות  $\{w_i\}$  אזי  $M^*$  מקבלת.
- $M^*$  - ניתנת לחישוב - מספר הפירוקים האפשריים ל-  $w$  הוא סופי ולכן הניחוש הוא סופי, לפיכך כתיבה על הסרט והרצת  $M$  ניתן לחישוב.

הוכחת נכונות:  $L^* = L(M^*)$

כיוון  $\Leftarrow$ 

נניח כי  $w \in L(M^*)$

$\Leftarrow$  קיימת חלוקה  $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_k$  ( $k \in \mathbb{N}^+$ ) כך שעבור כל  $w_i$  ( $1 \leq i \leq k$ )  $M$  קיבלה.  
 $\Leftarrow$  כל  $w_i \in L(M)$ , בפרט,  $L(M) = L$ .  
 $\Leftarrow w_i \in L$   
 $\Leftarrow w = w_1 w_2 \dots w_k \in L^*$   
 $\Leftarrow L(M^*) \subseteq L^*$

כיוון  $\Rightarrow$ 

נניח כי  $w \in L^*$

$\Leftarrow$  קיימת חלוקה  $w = w_1 w_2 \dots w_k$  ( $k \in \mathbb{N}^+$ ) כך שכל  $w_i \in L$  ( $1 \leq i \leq k$ )  
 $\Leftarrow M^*$  תנחש את הפירוק הזה עבור  $w$   
 $\Leftarrow$  המכונה  $M$  תקבל כל  $w_i$  כזה  
 $\Leftarrow M^*$  תקבל את  $w$   
 $\Leftarrow w \in L(M^*)$   
 $\Leftarrow L^* \subseteq L(M^*)$   
 לכן, מאחר ומצאנו ש-  $L(M^*) \subseteq L^*$  ו-  $L^* \subseteq L(M^*)$  אזי  $L(M^*) = L^*$ .

(ב)

תהי  $M$  מכונת טיורנג שמכריעה את  $L$ .  
נבנה מכונת טיורנג  $M^*$  אי-דטרמיניסטית המכריעה את  $L^*$ .

### תאור הבנייה

$M^* =$  על קלט  $w$ :

1. אם  $w = \varepsilon$  אז  $M^*$  מקבלת.

2. אחרת  $M^*$  בוחרת באופן אי דטרמיניסטי חלוקה של  $w$  ל-  $w = w_1, w_2, \dots, w_k$  כאשר  $k \in \mathbb{N}^+$ .

3. לכל  $1 \leq i \leq k$ :

•  $M^*$  מריצה את  $M$  על  $w_i$ .

\* אם  $M$  דחתה אז  $M^*$  דוחה.

\* אחרת אם  $M$  קיבלה חוזרים לשלב 3).

4. אם  $M$  קיבלה את כל המחרוזות  $\{w_i\}$  אזי  $M^*$  מקבלת.

$M^*$  - ניתנת לחישוב - מספר הפירוקים האפשריים ל-  $w$  הוא סופי ולכן הניחוש הוא סופי, לפיכך כתיבה על הסרט והרצת  $M$  ניתן לחישוב.

הוכחת נכונות:  $L^* = L(M^*)$

### כיוון $\Leftarrow$

נניח כי  $w \in L(M^*)$

$\Leftarrow$  קיימת חלוקה  $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_k$  ( $k \in \mathbb{N}^+$ ) כך שעבור כל  $w_i$  ( $1 \leq i \leq k$ )  $M$  קיבלה.

$\Leftarrow$  כל  $w_i \in L(M)$ , בפרט,  $L(M) = L$ .

$\Leftarrow w_i \in L$

$\Leftarrow w = w_1 w_2 \dots w_k \in L^*$

$\Leftarrow L(M^*) \subseteq L^*$

### כיוון $\Rightarrow$

נניח כי  $w \in L^*$

$\Leftarrow$  קיימת חלוקה  $w = w_1 w_2 \dots w_k$  ( $k \in \mathbb{N}^+$ ) כך שכל  $w_i \in L$  ( $1 \leq i \leq k$ )

$\Leftarrow M^*$  תנחש את הפירוק הזה עבור  $w$

$\Leftarrow$  המכונה  $M$  תקבל כל  $w_i$  כזה

$\Leftarrow M^*$  תקבל את  $w$

$\Leftarrow w \in L(M^*)$

$\Leftarrow L^* \subseteq L(M^*)$

לכן, מאחר ומצאנו ש-  $L(M^*) \subseteq L^*$  ו-  $L^* \subseteq L(M^*)$  אזי  $L(M^*) = L^*$ .

**שאלה 2** הטענה נכונה:

לכל לכל מכונת טיורינג מתקיים, לפי ההגדרה:  $L(M) \in RE$ .  
 לכן, אם  $L(M) \in CoRE$  אזי  
 $L(M) \in RE \cap CoRE = R$ .

**שאלה 3** הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

יהי  $L_1 = L_{\Sigma^*} \notin RE$  כאשר  
 $L_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^* \}$   
 ותהי  $L_2 = \overline{L_{\Sigma^*}}$ .

בורר ש-  $L_1 \cap L_2 = \emptyset \in R$ .

מצד שני,  $L_1 = L_{\Sigma^*} \notin RE$  וגם  $L_1 \notin CoRE$ ,

ו-  $L_2 = \overline{L_{\Sigma^*}} \notin CoRE$  וגם  $L_2 \notin RE$ .