# שיעור 13
# סיבוכיות מקום ושלמות ב PSPACE

## 13.1 הגדרה של סיבויות מקום

**הגדרה 13.1 סיבוכיות מקום של מכונת טיורינג**

הסיבוכיות מקום של מ"ט $M$ על קלט $w$ היא פונקציה $f(|w|)$ השווה למספר התאי סרט לכל היותר של המכונה $M$ שבהם נעשה שימוש בחישוב של $M$ על $w$.

**הגדרה 13.2 המחלקה $SPACE(f(n))$**

מחלקת $SPACE(f(n))$ היא אוסף כל השפות $L$ עבורן קיימת מכונת טיורינג דטרמיניסטית $M$ שמכריעה אותה כך ש:
על כל קלט $w$ באורך $n=|w|$, המכונה $M$ משתמשת לכל היותר $O(f(n))$ תאי סרט.

$$SPACE(f(n)) = \{L \mid \text{מ"ט } M \text{ שמכריעה } L \text{ ומשתמשת לכל היותר ב- } O(f(n)) \text{ תאי סרט} \ \exists\} \ .$$

**דוגמה 13.1**

נראה כי ניתן לפתור את הבעיה $SAT$ ע"י אלגוריתם שהוא רץ במקום ליניארי. כלומר:

$$SAT \in SPACE(n) \ .$$

תהי $\phi$ נוסחה בוליאנית כלשהי. נסמן $n=|\phi|$ ונסמן ב- $m$ את מספר המשתנים ב- $\phi$. נגדיר מכונה $M$ שפועלת כך:

$M=$ על כל קלט $\langle\phi\rangle$:

1) $M$ רושמת את המחרוזת $\langle\phi\rangle$ על סרט הקלט.

2) לכל השמה $a_1,a_2,\ldots,a_m$ (כאשר $a_i\in\{0,1\}$ הוא הערך הנוכחי של $x_i$):

   א) $M$ רושמת את מחרוזת של ההשמה $a_1a_2\cdots a_m$ על סרט העבודה.

   ב) $M$ מחשבת את הערך של $\phi$ עבור ההשמה הנוכחית $a_1,\ldots a_m$ ע"י סריקה של הקלט $\langle\phi\rangle$ שרשום על סרט הקלט.

   ג) אם מתקבל $\phi(a_1,\ldots,a_m)=1$ אז $M$ מקבלת.

3) אם עבור כל ההשמות התקבל $\phi(a_1,\ldots,a_m)=0$ אז $M$ דוחה.

מכאן אנחנו רואים כי המכונה $M_1$ רצה במקום ליניארי. בפרט:

- $M$ שומרת על סרט העבודה את ההשמה $a_1\ldots a_m$ וזה נדרש $O(m)$ תאים.
- המספר המשתנים, $m$ הוא $n$ לכל היותר.
- לכן $M$ רצה במקום $O(n)$.

לפיכך:

$$SAT \in SPACE(n) \ .$$

**הגדרה 13.3 המחלקה $NSPACE\left(f(n)\right)$**

מחלקת $NSPACE\left(f(n)\right)$ היא אוסף כל השפות $L$ עבורן קיימת מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית $N$ שמכריעה אותה כך ש:
על כל קלט $w$ באורך $n=|w|$ המכונה $N$ משתמשת לכל היותר $O\left(f(n)\right)$ תאי סרט מתוך כל המסלולי חישוב של $N$.

$NSPACE\left(f(n)\right)=\{L \mid$ ∃ מ"ט א"ד $N$ שמכריעה $L$ ומשתמשת לכל היותר ב- $O\left(f(n)\right)$ תאי סרט. $\}$ .

**דוגמה 13.2**

תהי $ALL_{NFA}$ השפה הבאה:

$ALL_{NFA}=\{\langle A\rangle \mid$ $A$ הוא NFA ו- $L(A)=\Sigma^*$ $\}$ .

הוכיחו כי $ALL_{NFA}\in NSPACE\left(n\right)$.

# 13.2 משפט סביץ'

# 13.3 המחלקה PSPACE

**הגדרה 13.4 PSPACE**

PSPACE היא מחלקת כל הבעיות שניתן לפתור על ידי מכונת טיורינג דטרמיניסטית תוך שימוש בסיבוכיות מקום פולינומית.

**הגדרה 13.5 NPSPACE**

NPSPACE היא מחלקת כל הבעיות שניתן לפתור על ידי מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית תוך שימוש בסיבוכיות מקום פולינומית.

# 13.4 שלמות ב- PSPACE

# 13.5 המחלקה L

# 13.6 המחלקה NL

# 13.7 שלמות ב- NL

# 13.8 שיוויון NL ו- coNL