

עבודה 11: משפט הפירוק הספקטרלי

**שאלה 1** נתונה מטריצה  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  נורמלית. נניח שהערכים עצמיים שלה הם  $\lambda = -1$ , ו-  $\lambda = 4$ . המרחב עצמי ששייך לערך עצמי  $\lambda = -1$  הוא

$$V_{-1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

חשבו את

(א)  $A \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

(ב)  $A^6 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19661 \\ 9830 \end{pmatrix}$  הוכיחו כי

**שאלה 2** תהי  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  מטריצה ריבועית נורמלית עם ערכים עצמיים  $\lambda = 6$  ו-  $\lambda = 3$  ויהי

$$V_6 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

המרחב עצמי ששייך לערך עצמי  $\lambda = 6$ . יהי  $w \in \mathbb{R}^3$  הווקטור  $w = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ . חשבו את

(א)  $A \cdot w$

(ב)  $A^3 \cdot w$

**שאלה 3** נתונה מטריצה  $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$  נורמלית. נניח ש-  $\lambda = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$  ו-  $\lambda = 2$  ערכים עצמיים של  $A$ . נניח

שמרחב העצמי ששייך לע"ע  $\lambda = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$  הוא

$$V_{(1+\sqrt{3}i)/2} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3}i \\ 1 + \sqrt{3}i \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

מצאו את

(א)  $A \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(ב)  $A^3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 27 \end{pmatrix}$  הוכיחו כי

**שאלה 4** נתונה מטריצה  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  נורמלית עם ערכים עצמיים  $\lambda = 1$  ו-  $\lambda = 1 + i$ . מרחב העצמי של  $\lambda = 1 + i$  הוא

$$V_{1+i} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

מצאו את המטריצה  $A$ .

## תשובות

### שאלה 1

(א) יש רק ווקטור אחד בהבסיס של  $V_{-1}$  לכן הבסיס זו כבר בסיס אורתוגונלי. נסמן

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

נסמן

$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

נחשב את ההיטל של  $a$  על  $V_{-1}$ :

$$P_{-1}(a) = \frac{1}{\|u_1\|^2} \langle a, u_1 \rangle u_1 = \frac{-1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

נסמן את ההיטל של  $a$  על מרחב העצמי ששייך לערך עצמי  $\lambda = 4$  ב-  $P_4(a)$ . לפי משפט הנרמול של ההיטל:

$$P_4(a) = a - P_{-1}(a) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

לפי משפט הפירוק הספקטרלי:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot P_{-1}(a) + 4 \cdot P_4(a) = (-1) \cdot \frac{-1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 95 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

(ב) לפי משפט הפירוק הספקטרלי:

$$A^6 \cdot a = (-1)^6 \cdot P_{-1}(a) + 4^6 \cdot P_4(a) = \frac{-1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4096 \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19661 \\ 9830 \end{pmatrix}.$$

### שאלה 2

לפי משפט הפירוק הספקטרלי:

$$A \cdot w = 3 \cdot P_3(w) + 6 \cdot P_6(w),$$

ג-

$$A^3 \cdot w = 3^3 \cdot P_3(w) + 6^3 \cdot P_6(w) ,$$

כאשר  $P_3(w)$  ההיטל של הווקטור  $w$  על המרחב עצמי ששייך לערך עצמי  $\lambda = 3$ , ו-  $P_6(w)$  ההיטל של הווקטור  $w$  על המרחב עצמי ששייך לערך עצמי  $\lambda = 6$ . נשים לב כי

$$P_3(w) + P_6(w) = w \quad \Rightarrow \quad P_3(w) = w - P_6(w) .$$

נחשב  $P_6(w)$ . נבנה בסיס אורתוגונלי של  $V_6$ .

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \|u_1\|^2 = 2 .$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

$$\|u_2\|^2 = 6 . \quad u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{נבחר}$$

$$\begin{aligned} P_6(w) &= \frac{1}{\|u_1\|^2} \langle w, u_1 \rangle u_1 + \frac{1}{\|u_2\|^2} \langle w, u_2 \rangle u_2 \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$P_3(w) = w - P_6(w) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} .$$

לכן

(א)

$$A \cdot w = 3P_3(w) + 6P_6(w) = 3 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + 6 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} .$$

(ב)

$$A^3 \cdot w = 3^3 \cdot P_3(w) + 6^3 \cdot P_6(w) = 27 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + 216 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 90 \\ 90 \end{pmatrix} + 72 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ -198 \\ 18 \end{pmatrix} .$$

**שאלה 3**  $\lambda = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$  ערך עצמי לכן גם  $\bar{\lambda} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$  ע"ע. הריבוי אלגברי של כל ע"ע הוא 1 לכן הריבוי

גאומטרי של כל ע"ע הוא 1. נמצא את המרחב העצמי ששייך לע"ע  $\bar{\lambda} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$  ע"י

$$V_{(1-\sqrt{3}i)/2} = \bar{V}_{(1+\sqrt{3}i)/2} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3}i \\ 1 - \sqrt{3}i \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

יש רק ווקטור אחד בבסיס של  $V_{(1+\sqrt{3}i)/2}$  לכן הבסיס אורתוגונלי. מאותה סיבה הבסיס של  $V_{(1-\sqrt{3}i)/2}$  גם בסיס אורתוגונלי. נסמן

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3}i \\ 1 + \sqrt{3}i \\ -2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3}i \\ 1 - \sqrt{3}i \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} P_{(1+\sqrt{3}i)/2}(a) &= \frac{1}{\|u_1\|^2} \langle a, u_1 \rangle \cdot u_1 \\ &= \frac{1}{12} \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3}i \\ 1 + \sqrt{3}i \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3}i \\ 1 + \sqrt{3}i \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{12} (5 \cdot (1 + \sqrt{3}i) + 2 \cdot (1 - \sqrt{3}i) - 6) \cdot \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3}i \\ 1 + \sqrt{3}i \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 + \sqrt{3}i \\ -4 + 2\sqrt{3}i \\ -1 - 3\sqrt{3}i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$P_{(1-\sqrt{3}i)/2}(a) = \bar{P}_{(1+\sqrt{3}i)/2}(a) = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 - \sqrt{3}i \\ -4 - 2\sqrt{3}i \\ -1 + 3\sqrt{3}i \end{pmatrix}.$$

את ההיטל של הווקטור  $a$  על מרחב העצמי ששייך לע"ע  $\lambda = 2$  כ-

$$\begin{aligned} P_2(a) &= a - P_{(1+\sqrt{3}i)/2}(a) - P_{(1-\sqrt{3}i)/2}(a) \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 + \sqrt{3}i \\ -4 + 2\sqrt{3}i \\ -1 - 3\sqrt{3}i \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 - \sqrt{3}i \\ -4 - 2\sqrt{3}i \\ -1 + 3\sqrt{3}i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(א) לפי משפט הפירוק הספקטרלי:

$$\begin{aligned} A \cdot a &= \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} P_{(1+\sqrt{3}i)/2}(a) + \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} P_{(1-\sqrt{3}i)/2}(a) + 2P_2(a) \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 + 3\sqrt{3}i \\ -5 - \sqrt{3}i \\ 4 - 2\sqrt{3}i \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 - 3\sqrt{3}i \\ -5 + \sqrt{3}i \\ 4 + 2\sqrt{3}i \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \\ &= + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 21 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ב) לפי משפט הפירוק הספקטרלי:

$$\begin{aligned} A^3 \cdot a &= \left( \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^3 P_{(1+\sqrt{3}i)/2}(a) + \left( \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^3 P_{(1-\sqrt{3}i)/2}(a) + 2^3 P_2(a) \\ &= (-1) P_{(1+\sqrt{3}i)/2}(a) + (-1) P_{(1-\sqrt{3}i)/2}(a) + 8P_2(a) \\ &= \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} 5 + \sqrt{3}i \\ -4 + 2\sqrt{3}i \\ -1 - 3\sqrt{3}i \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 - \sqrt{3}i \\ -4 - 2\sqrt{3}i \\ -1 + 3\sqrt{3}i \end{pmatrix} + \frac{8}{3} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{8}{3} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 27 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

שאלה 4  $\bar{\lambda} = 1 - i$  גם ע"ע של  $A$  ששייך למרחב עצמי

$$V_{1-i} = \bar{V}_{1+i} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

יש רק ווקטור אחד ב-  $V_{1+i}$  לכן הבסיס שלו הוא בסיס אורתוגונלי. מאותה סיבה הבסיס של  $V_{1-i}$  גם אורתוגונלי. נסמן

$$u_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ A \cdot e_1 & A \cdot e_2 & A \cdot e_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_{1+i}(e_1) &= \frac{1}{\|u_1\|^2} \langle e_1, u_1 \rangle u_1 \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{1+i}(e_2) &= \frac{1}{\|u_1\|^2} \langle e_2, u_1 \rangle u_1 \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{1+i}(e_3) &= \frac{1}{\|u_1\|^2} \langle e_3, u_1 \rangle u_1 \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 . \end{aligned}$$

$$P_{1-i}(e_1) = \bar{P}_{1+i}(e_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} , \quad P_{1-i}(e_2) = \bar{P}_{1+i}(e_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad P_{1-i}(e_3) = \bar{P}_{1+i}(e_3) = 0 .$$

לפי משפט הפירוק הספקטרלי, לכל ווקטור  $a$ :

$$\begin{aligned} A \cdot a &= (1+i)P_{1+i}(a) + (1-i)P_{1-i}(a) + P_1(a) \\ &= (1+i)P_{1+i}(a) + (1-i)P_{1-i}(a) + e_1 - P_{1+i}(a) - P_{1-i}(a) \\ &= iP_{1+i}(a) + (-i)P_{1-i}(a) + a . \end{aligned}$$

לכן

$$A \cdot e_1 = iP_{1+i}(e_1) + (-i)P_{1-i}(e_1) + e_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$A \cdot e_2 = iP_{1+i}(e_2) + (-i)P_{1+i}(e_2) + e_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$A \cdot e_3 = iP_{1+i}(e_3) + (-i)P_{1+i}(e_3) + e_3 = 0 + 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

לכן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$