# שיעור 6 אי-כריעות

## לא כריעות $L_{ m d}$ , $L_{ m halt}$ , $L_{ m acc}$ השפות 6.1

 $L_{
m acc}$  6.1 הגדרה

 $L_{\text{acc}} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} \in RE \backslash R$ 

 $L_{
m halt}$  6.2 הגדרה

 $L_{ ext{halt}} = \{\langle M, w 
angle \mid w$  עוצרת על א $M \} \in RE \backslash R$ 

 $L_{
m d}$  6.3 הגדרה

 $L_{d} = \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \} \notin RE$ 

 $L_{
m acc} \in RE$  6.1 משפט

 $L_{\rm acc} \in RE$  .

 $L_{
m acc}\in$  לכן לכן , $L_{
m acc}$  את מכיוון ש- מכיוון ש- , $L(U)=L_{
m acc}$  , לכן מכיוון ש- הוכחה: מכיוון ש- .RE

 $L_{
m halt} \in RE$  6.2 משפט

 $L_{\text{halt}} \in RE$ .

. תעצור ותקבל עצרה ודחתה, U' שהיא למעשה שבו U פרט למקום שבו U עצרה ודחתה, U' שהיא למעשה למעשה שבו ותקבל.

 $:\!L_{
m halt}$  את מקבלת U' נוכיח כי

 $x \in L_{\mathrm{halt}}$  אם

w עוצרת על הי ו-  $x=\langle M,w \rangle \Leftarrow$ 

x עוצרת ומקבלת את  $U' \Leftarrow$ 

אם מקרים:  $x \notin L_{\text{halt}}$  אם

- .x את דוחה  $U' \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$
- x א עוצרת על  $U' \Leftarrow w$  אוצרת על M -ו  $x = \langle M, w \rangle$

## $L_{ m d} otin RE$ 6.3 משפט

 $L_{\rm d} \notin RE$  .

### הוכחה:

 $.L_{ extsf{d}} \in RE$  נניח בשלילה כי

 $.L_{ ext{d}}$  מ"ט  $M_{ ext{d}}$  המקבלת את  $\exists \ \Leftarrow$ 

$$L(M_d) = L_d \Leftarrow$$

 $:\!\!\langle M_d 
angle$ על איל על פבדוק ריצה של

$$L(M_{
m d}) 
eq L_{
m d} \quad \Leftarrow \quad \langle M_{
m d} 
angle 
eq L_{
m d} \quad \Leftarrow \quad \langle M_{
m d} 
angle 
eq L(M_{
m d})$$
 אם •

$$L(M_{\mathrm{d}}) 
eq L_{\mathrm{d}} \quad \Longleftarrow \quad \langle M_{\mathrm{d}} \rangle \in L_{\mathrm{d}} \quad \Longleftarrow \quad \langle M_{\mathrm{d}} \rangle \notin L(M_{\mathrm{d}})$$
 אם •

 $L_{
m d} \notin RE$  ולכן וולכן המקרים ש- לכך ש- מתירה לכך חיבלנו סתירה בשני המקרים המקרים

## משפט 6.4 לא כריעה $L_{ m acc}$

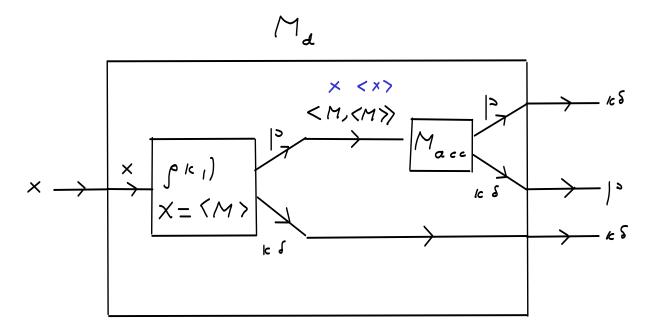
$$L_{\mathrm{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} \notin R$$
.

### הוכחה:

 $L_{
m acc}$  את המכריעה המ"ט המכריעה ותהי ותהי  $L_{
m acc} \in R$  נניח בשלילה כי

.(6.3 כפי שהוכחנו במשפט בי לכך ש-  $L_{
m d}$  לבסתירה מ"ט  $M_{
m d}$  המכריעה את לבנות מ"ט  $M_{
m d}$  כפי שהוכחנו במשפט אונ

$$L_{\mathsf{d}} = \{ \langle M, w \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \}$$
.



## $M_{ m d}$ התאור של

:x על קלט  $=M_{\mathrm{d}}$ 

. דוחה. 
$$\langle M \rangle$$
 דוחה. בודקת האם  $\langle x = \langle M \rangle$ 

$$\langle x \rangle = \langle \langle M \rangle \rangle$$
 מחשבת מחשבת (2

$$:\langle M,\langle M
angle
angle$$
 על הזוג  $M_{
m acc}$  את מריצה (3

. דוחה 
$$M_{
m d} \Leftarrow M_{
m acc}$$
 אם  $M_{
m acc}$ 

. אם 
$$M_{
m d} \Leftarrow M_{
m acc}$$
 אם  $M_{
m acc}$ 

 $:\!L_{
m d}$  את מכריעה את מכריעה לע

 $x \in L_{\mathrm{d}}$  אם

$$\langle M \rangle \not\in L(M) \text{ -1 } x = \langle M \rangle \Leftarrow$$

$$\langle M, \langle M 
angle 
angle$$
 דוחה את הזוג  $M_{
m acc} \Leftarrow$ 

.x מקבלת את  $M_{
m d}$ 

:שני מקרים  $x \notin L_{\mathrm{d}}$  אם

x את את דוחה את  $M_{
m d} \quad \Leftarrow \quad x 
eq \langle M \rangle$  דוחה את

$$\langle M 
angle \in L(M)$$
 -1  $x = \langle M 
angle$  :(2) מקרה

$$\langle M, \langle M \rangle 
angle$$
 מקבלת את מקבל  $M_{
m acc} \Leftarrow$ 

.x דוחה את  $M_{
m d}$ 

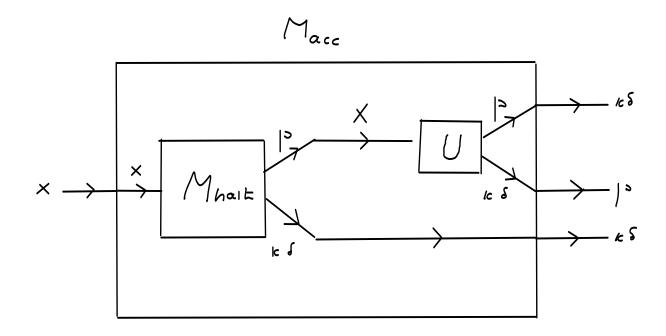
## משפט 6.5 לא כריעה $L_{ m halt}$

$$L_{ ext{halt}} = ig\{\langle M, w 
angle \mid w$$
 עוצרת על  $M ig\} 
otin R$  .

### הוכחה:

 $L_{
m halt}$  את מ"ט המכריעה את נניח בשלילה כי  $L_{
m halt} \in R$  ותהי

. (המפט במשפט שהוכחנו במשפט בי לבנות ע"ט ביי לבנות את המכריעה את המכריעה  $M_{
m acc}$  כפי שהוכחנו במשפט  $M_{
m halt}$ 



## $M_{ m acc}$ של התאור של

:x על קלט  $=M_{\mathrm{acc}}$ 

- .x על  $M_{
  m acc}$  מריצה את (1
- דוחה.  $M_{
  m acc} \Leftarrow T$  דוחה אם  $M_{
  m halt}$
- . מריצה על U את מריצה  $M_{\mathrm{acc}} \Leftarrow m$ ועונה מקבלת  $\bullet$

### <u>אבחנה</u>

 $:\!\!L_{
m acc}$  את מכריעה  $M_{
m acc}$ 

 $x \in L_{\mathrm{acc}}$  אם

$$\langle w \rangle \in L(M)$$
 -1  $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$ 

x את מקבלת את מקבלת את מקבלת  $M_{\mathrm{halt}} \Leftarrow$ 

.x מקבלת את מקבלת  $M_{\mathrm{acc}} \Leftarrow$ 

אם מקרים:  $x \notin L_{\mathrm{acc}}$  אם

 $x \neq \langle M, w \rangle$  :(1) מקרה

x דוחה את  $M_{\mathrm{halt}} \Leftarrow$ 

.x דוחה את  $M_{\mathrm{acc}} \leftarrow$ 

"מקרים: שני מקרים: - עני מקרים:  $x=\langle M,w \rangle$  שני מקרים:

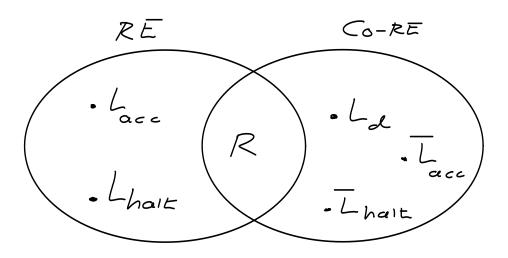
x את אחת דוחה את את דוחה את את אוצרת על אוצרת על אוצרת את אוצרת את מקרה (א): M

 $M_{\mathrm{acc}} \leftarrow x$  דוחה את  $M_{\mathrm{acc}} \leftarrow x$  דוחה את אבל  $M_{\mathrm{halt}} \leftarrow w$  אבל דוחה את מקרה (ב):

 $L_{
m acc} \notin R$  -ש בסתירה לכך בסתירה את מכריעה את הראנו כי  $M_{
m acc}$  לכן  $L_{
m halt} \notin R$ 

משפט 6.6

$$\begin{array}{ccc} L_{\rm acc} \in RE \backslash R & \Rightarrow & \bar{L}_{\rm acc} \notin RE \ , \\ L_{\rm halt} \in RE \backslash R & \Rightarrow & \bar{L}_{\rm halt} \notin RE \ , \\ L_{\rm d} \notin RE \backslash R \ . \end{array}$$



# לא כריעה $L_E$ השפה 6.2

 $L_E$  השפה 6.4

$$L_E = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset \}$$
.

## $L_E otin R$ משפט

 $L_E \notin R$ .

 $L_E$  כלומר לא כריעה.

### הוכחה:

. באופן באופן באר את המכריעה  $M_{
m acc}$  מ"ט בינה מ"ט כריעה. אז באופן הבא נניח בשלילה כי

## $M_w$ בנייה של

 $:M_w$  ראשית נגדיר את המ"ט

x על כל קלט  $=M_w$ 

- . אם  $x \neq w$  אם (1
- על w ועונה כמוה. M אז מריצה x=w אם (2

### אבחנה

 $L(M_w) = \Sigma^*$  אם M -ו x = w אם M

 $L(M_w)=arnothing$  אז w אז m דוחה את m או  $x\neq w$  אם  $x\neq w$ 

### $M_{ m acc}$ בנייה של

 $:L_{
m acc}$  את המכריעה את המכריעה מ"ט אז נבנה מ"ט המכריעה את המכריעה את המכריעה את מ"ט אוניח כי קיימת מ

:x על כל קלט  $=M_{\mathrm{acc}}$ 

- דוחה.  $\langle M,w \rangle$  אם (1
- $M_w$  בונה מ"ט,  $\langle M,w \rangle$  אם געזרת בעזרת גע $x=\langle M,w \rangle$  אם (2
  - $:\!\!\langle M_w
    angle$  על  $M_E$  מריצה (3
  - אם  $M_E$  אם אם (4
  - אם  $M_E$  אם  $M_E$  אם •

### <u>נכונות</u>

 $\langle M_w \rangle$  דוחה  $M_E \Leftarrow L(M_w) = \Sigma^* \neq \varnothing \Leftarrow w \in L(M)$  -ו  $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow x \in L_{\mathrm{acc}}$  אם  $M_{\mathrm{acc}} \Leftarrow M_{\mathrm{acc}}$ 

אם אפני מקרים:  $x \notin L_{\mathrm{acc}}$  אם

. דוחה  $M_{
m acc} \ \Leftarrow \ \langle M_w \rangle$  מקבלת  $M_E \ \Leftarrow \ L(M_w) = arnothing \ \Leftrightarrow \ x 
eq \langle M, w 
angle$  בחחה.

. דוחה.  $M_{
m acc} \Leftarrow \langle M_w \rangle$  מקבלת  $M_E \Leftarrow L(M_w) = arnothing \Leftrightarrow w \notin L(M)$  דוחה.  $x = \langle M, w \rangle$ 

### לסיכום:

 $L_{
m acc} \notin R$  -ש בסתירה לכך בסתירה את המכריעה  $M_{
m acc}$  מ"ט אפשר לבנות כריעה אז אפשר לבנות המכריעה  $L_E \notin R$ לכן לכן  $L_E \notin R$ 

## $L_E otin RE$ 6.8 משפט

## $L_E \notin RE$

### הוכחה:

### הרעיון

נבנה מ"ט א"ד N המקבלת את

$$\bar{L}_E = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \neq \emptyset \}$$

:x על קלט =N

- . אם  $\langle M \rangle$  אם (1
- . באופן א"ד.  $w \in \Sigma^*$  אז N בוחרת אי"ד. אם ער גא אם אם ער אז אי
  - .w על M מריצה (3
  - אם M מקבלת M מקבלת.
    - . אם M דוחה  $M \Leftarrow$

### הוכחת הנכונות

 $x\in \bar{L}_E$  אם

$$L(M) \neq \emptyset$$
 -1  $x = \langle M \rangle \Leftarrow$ 

- $w \in L(M)$  -פיימת מילה  $w \in \Sigma^*$  כך ש
- wאת מקבלת מקבל ע $w \in \Sigma^*$ ניחוש  $\exists \ \Leftarrow$
- $x = \langle M \rangle$  את המקל של של + קיים חישוב של +
  - $.x \in L(N) \Leftarrow$

 $ar{L}_E \in RE$  לכן קיימת מ"ט א"ד N המקבלת את השפה לכן קיימת

 $.L_{E} 
otin RE$  כעת נוכיח כי

 $L_E\in R$  ,5.1 לכם לפי משפט.  $\bar{L}_E\in RE$  - הוכחנו למעלה ש.  $L_E\in RE$  הוכחנו למעלה.  $L_E\notin R$  או בסתירה לכך ש-  $L_E\notin R$ 

# לא כריעה $L_{EQ}$ השפה 6.3

## $L_{EQ}$ 6.5 הגדרה

$$L_{EQ} = \left\{ \left\langle M_1, M_2 \right\rangle \mid L\left(M_1\right) = L\left(M_2\right) \right\}$$

## $L_{EQ} otin R$ משפט 6.9 משפט

## $L_{EQ} \notin R$

.השפה  $L_{EQ}$  לא כריעה

### הוכחה:

נניח בשלילה כי  $M_E$  כריעה את מ"ט המכריעה את מ"ט המכריעה את  $M_{EQ}$  המכריעה את כייעה. תהי  $L_{EQ}$  באופן הבא.

## $M_E$ בנייה של

$$:x$$
 על כל קלט  $=M_E$ 

דוחה. 
$$\langle M \rangle$$
 אם (1

. כל קלט. אדוחה 
$$M_{arnothing}$$
 כאשר  $M_{arnothing}$  על על  $M_{EQ}$  מריצה  $x=\langle M \rangle$  אם (2

. אם 
$$M_{EQ}$$
 מקבלת  $\bullet$  (3

. אם 
$$M_{EQ}$$
 דוחה  $+$ 

### נכונות

$$x \in L_E$$
 אם

$$L(M) = \varnothing - 1 \ x = \langle M \rangle \Leftarrow$$

$$L(M) = L(M_{\varnothing}) \Leftarrow$$

$$\langle M, M_{\varnothing} \rangle \in L_{EQ} \Leftarrow$$

$$\langle M, M_{\varnothing} 
angle$$
 מקבלת  $M_{EQ} \Leftarrow$ 

.מקבל 
$$M_E \Leftarrow$$

:שני מקרים 
$$\Leftarrow x \notin L_E$$
 אם

מקרה 
$$M_E \leftarrow x \neq \langle M \rangle$$
 דוחה.

$$\langle M, M_{\varnothing} 
angle$$
 דוחה  $M_{EQ} \Leftarrow$ 

.דוחה 
$$M_E \Leftarrow$$

### לסיכום:

 $L_E \notin R$  -שומר ש- 6.7 בסתירה למשפט המכריעה את המכריעה  $M_E$  מ"ט מ"ט לבנות כריעה אז  $L_{EQ}$  לכן  $L_{EQ} \notin R$ לכן לבנות המכריעה לבנות מ"ט המכריעה לבנות המכריעה לבנות המכריעה לבנות המכריעה לבנות המכריעה לבנות המכריעה המכריעה לבנות המכריעה המכריעה

## $L_{EQ} otin RE$ 6.10 משפט

## $L_{EQ} \notin RE$

לא קבילה.  $L_{EQ}$ 

### הוכחה:

נניח בשלילה כי  $M_E$  קבילה. תהי  $M_{EQ}$  מ"ט המקבלת את מ"ט  $M_{EQ}$  אז נבנה מ"ט קבילה. תהי  $M_{EQ}$  קבילה. תהי  $M_{EQ}$  המקבלת את באופן הבא.

## $M_E$ בנייה של

x על כל קלט  $=M_E$ 

- דוחה.  $\langle M \rangle$  אם (1
- על קלט. איז המ"ט אדוחה  $M_{m{\varnothing}}$  כאשר  $M_{m{\varnothing}}$  על אדוחה כל קלט.  $x=\langle M 
  angle$  אם  $x=\langle M 
  angle$ 
  - מקבלת  $\leftarrow$  מקבלת  $M_{EQ}$  (3

### נכונות

 $x \in L_E$  אם

$$L(M) = \varnothing$$
 -1  $x = \langle M \rangle \Leftarrow$ 

$$L(M) = L\left(M_{\varnothing}\right) \Leftarrow$$

$$\langle M, M_{\varnothing} \rangle \in L_{EQ} \Leftarrow$$

$$\langle M, M_{\varnothing} 
angle$$
 מקבלת  $M_{EQ} \Leftarrow$ 

.מקבל מקבל 
$$M_E \Leftarrow$$

### לסיכום:

 $L_E 
otin RE$  אם  $L_{EQ}$  קבילה אז אפשר לבנות מ"ט  $M_E$  המקבלת את בסתירה למשפט 6.8 האומר ש $L_{EQ} 
otin RE$  לכן

## $ar{L}_{EQ} otin RE$ 6.11 משפט

$$\bar{L}_{EQ} \notin RE$$
.

### הוכחה:

 $ar{L}_{
m acc}$  את המקבלת מ"ט  $M_{ar{acc}}$  אז נבנה מ"ט בשלילה כי המקבלת מ"ט המקבלת מ"ט המקבלת מ"ט המקבלת המקבלת בשלילה כי באופן הבא.

## $M_1$ בנייה של

ראשית נגדיר מ"ט  $M_1$  באופן הבא:

$$x$$
 על קלט  $= M_1$ 

. על w ועונה כמוה M מריצה (1

## $M_{\overline{ m acc}}$ בנייה של

x על כל קלט  $=M_{\overline{\mathrm{acc}}}$ 

. אם 
$$\langle M,w \rangle$$
 אם (1

$$M_1$$
 אז בונה  $x=\langle M,w 
angle$  (2

. כל קלט שמקבלת המ"ט המ"ט על 
$$\langle M_1, M^* 
angle$$
 על  $M_{\overline{EQ}}$  מריצה (3

. אם 
$$M_{\overline{EQ}}$$
 מקבלת  $ullet$  מקבלת.

### נכונות

 $x \in L_{\overline{\mathrm{acc}}}$  אם

$$w$$
 לא מקבלת  $M \Leftarrow$ 

$$L(M_1) = \emptyset \Leftarrow$$

$$\langle M_1, M^* \rangle \in L_{\overline{EQ}} \Leftarrow$$

$$\langle M_1, M^* 
angle$$
 מקבלת  $M_{\overline{EQ}} \Leftarrow$ 

.מקבל מקבל 
$$M_{\overline{\mathrm{acc}}} \Leftarrow$$

### לסיכום:

 $L_{\overline{acc}} \notin RE$  -שם 6.6 בסתירה למשפט  $L_{\overline{acc}}$  את המקבלת את המקבלת מ"ט  $M_{\overline{acc}}$  האומר ש $L_{\overline{EQ}} \notin RE$  לכן  $L_{\overline{EQ}} \notin RE$