

המחלקה למדעי המחשב

7/03/24 כ"ז באדר תשפ"ד

16 : 10 – 17 : 40

חדו"א 1 למדמ"ח

בוחן אמצע סמסטר

מרצים: ד"ר מרינה ברשדסקי, ד"ר ירמיהו מילר, ד"ר זהבה זהבית צבי.

תשפ"ד סמסטר א'

השאלון מכיל עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (עמודים בפורמט A4), מצורפים לשאלון.
- אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:
- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לענות על שאלות 1-3.

שאלה 1 (35 נקודות) נתונה הפונקציה $f(x) = |x^2 - 9| + 3$.

(א) (5 נק') מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$.

(ב) (5 נק') מצאו את התמונה של $f(x)$.

(ג) (5 נק') קבעו אם $f(x)$ זוגית או אי-זוגית.

(ד) (5 נק') קבעו אם $f(x)$ חח"ע. נמקו את התשובה שלכם.

(ה) (5 נק') קבעו אם f על \mathbb{R} .

(ו) (5 נק') האם f הפיכה? נמקו את התשובה שלכם.

(ז) (5 נק') שרטטו את סקיצת הגרף של $f(x)$.

שאלה 2 (35 נקודות) נגדיר פונקציה

$$f(x) = 5^{\frac{1}{3x+9}}.$$

(א) (10 נק') מצאו התנהגות של הפונקציה מסביב לנקודה אי הגדרה.

(ב) (10 נק') חשבו את הגבולות של הפונקציה ב- ∞ וב- $-\infty$.

(ג) (15 נק') היעזרו בסעיפים א' וב' ושרטטו סקיצה של גרף הפונקציה כולל אסימפטוטות אופקיות ואסימפטוטות אנכיות שלה.

שאלה 3 (30 נקודות)

תהינה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ו- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות.
הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את כל הטענות הבאות:

(א) (10 נק') אם $f(x)$ פונקציה עולה ממש ו- $g(x)$ פונקציה עולה ממש אז הפונקציה $(f+g)(x)$ תהיה פונקציה עולה ממש.

(ב) (10 נק') אם $f(x)$ פונקציה עולה ממש ונניח ש- $f(x) > 0$ לכל x . אז הפונקציה $\left(\frac{1}{f}\right)(x)$ תהיה פונקציה יורדת ממש.

(ג) (10 נק') אם $f(x)$ פונקציה חסומה אז $f(x)$ תהיה חד-חד ערכית.

פתרונות

שאלה 1

א) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ (כל x).

ב)

$$|x^2 - 9| \geq 0 \Rightarrow |x^2 - 9| + 3 \geq 3 \Rightarrow f(x) \geq 3.$$

$$\text{Im}(f) = [3, \infty)$$

ג)

$$f(-x) = |(-x)^2 - 9| + 3 = |x^2 - 9| + 3 = f(x),$$

ז"א $f(-x) = f(x)$ לכן f זוגית.

ד) f פונקציה f חח"ע אם התנאי

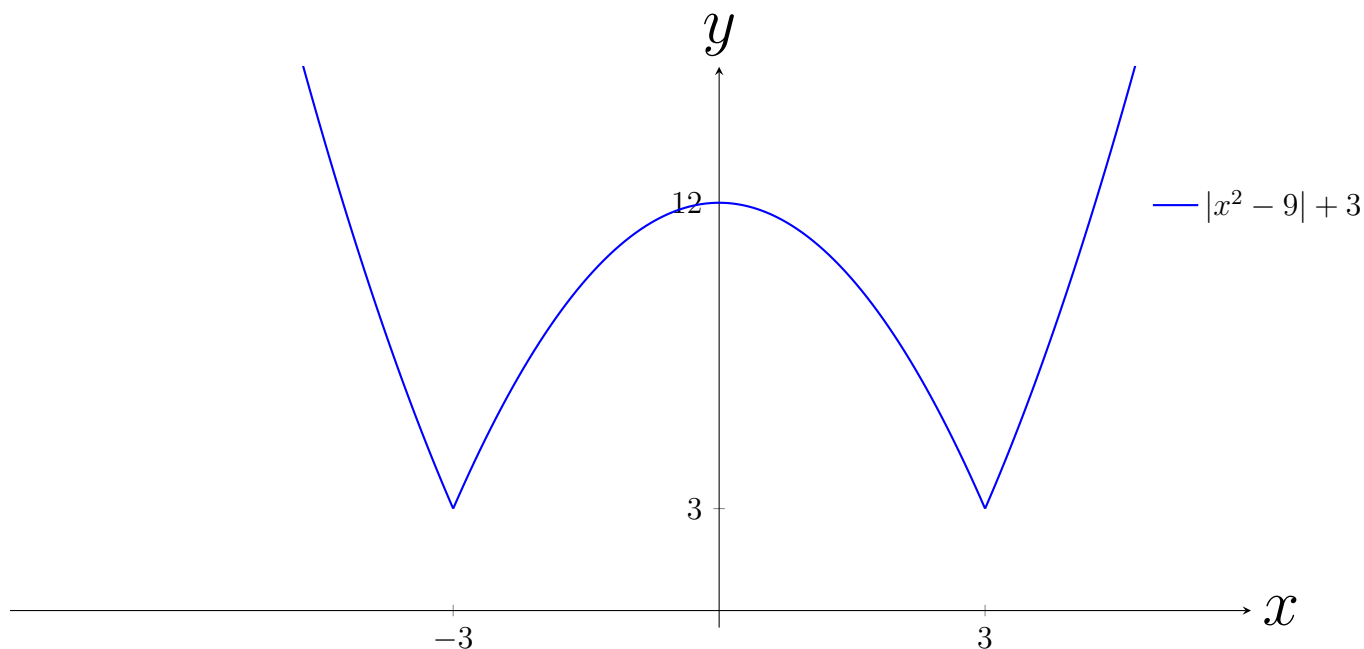
$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

מתקיים. הרי התנאי לא מתקיים. לדוגמה $f(-2) = 8 = f(2)$.

ה) $\text{Im}(f) = [3, \infty) \subset \mathbb{R}$, כלומר $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}$ לכן f לא על \mathbb{R} .

ו) פונקציה הפיכה אם ורק אם היא חח"ע ועל. הרי f לא חח"ע לכן f לא הפיכה.

ז)



שאלה 2

א) נרשום $f(x)$ בצורה

$$f(x) = 5^{\frac{1}{3x+9}} = 5^{\frac{1}{3(x+3)}}.$$

ל- $f(x)$ יש נקודת אי-הגדרה ב- $x = -3$.

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \left(5^{\frac{1}{3(x+3)}} \right) = 5^{\frac{1}{3 \cdot 0^-}} = 5^{\frac{1}{0^-}} = 5^{-\infty} = 0.$$

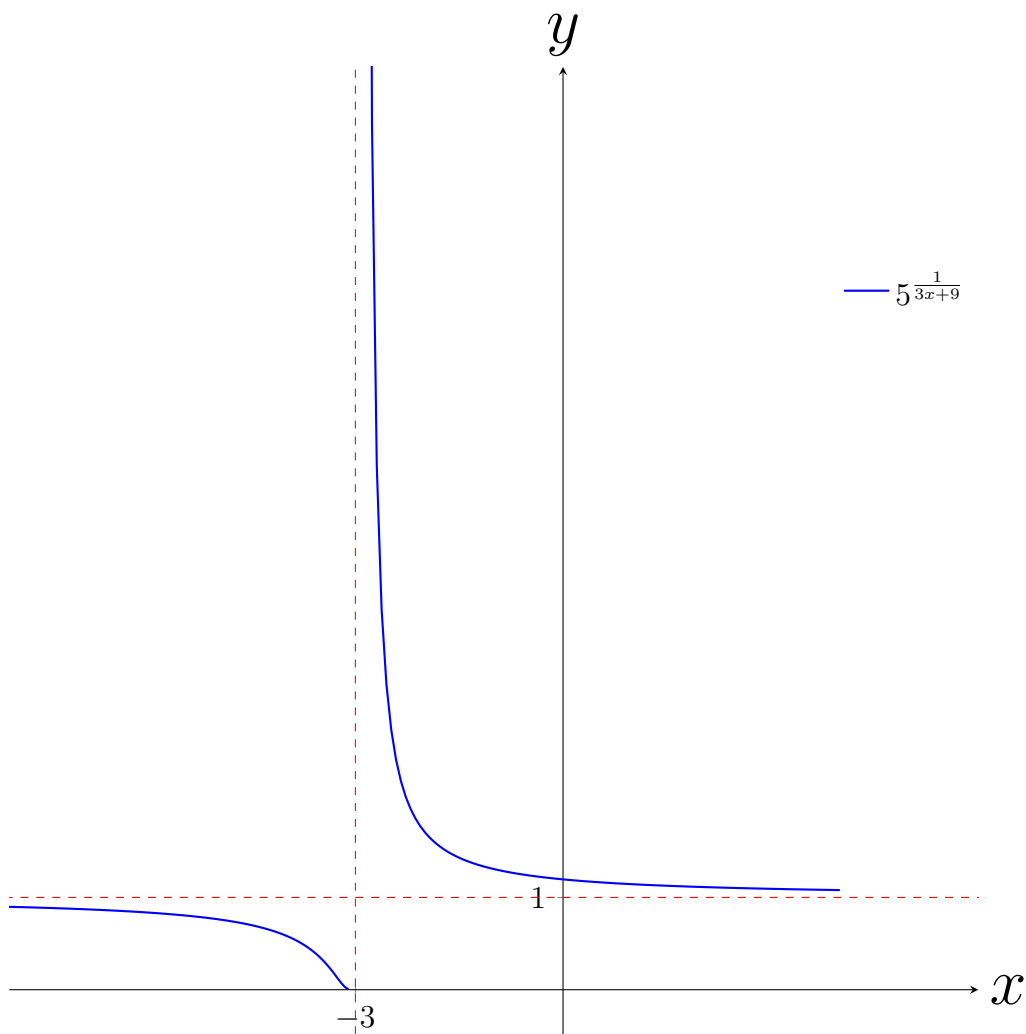
$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \left(5^{\frac{1}{3(x+3)}} \right) = 5^{\frac{1}{3 \cdot 0^+}} = 5^{\frac{1}{0^+}} = 5^{\infty} = \infty.$$

ב)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(5^{\frac{1}{3(x+3)}} \right) = 5^{\frac{1}{3(\infty+3)}} = 5^{\frac{1}{3 \cdot \infty}} = 5^{\frac{1}{\infty}} = 5^0 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(5^{\frac{1}{3(x+3)}} \right) = 5^{\frac{1}{3(-\infty+3)}} = 5^{\frac{1}{3 \cdot (-\infty)}} = 5^{\frac{1}{-\infty}} = 5^0 = 1.$$

ג)



שאלה 3

(א) (10 נק') הטענה נכונה. הוכחה:

נתון כי f ו- g פונקציות עולות ממש. ז"א $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b), \quad a < b \Rightarrow g(a) < g(b).$$

לפיכך

$$a < b \Rightarrow f(a) + g(a) < f(b) + g(b) \Rightarrow (f + g)(a) < (f + g)(b).$$

לכן $f + g$ עולה ממש.

(ב) f עולה ממש. ז"א לכל $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b).$$

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

$f(x) > 0$ לכל x . מכאן

$$f(a) < f(b) \Rightarrow \frac{1}{f(a)} > \frac{1}{f(b)}.$$

לכן קיבלנו כי

$$a < b \Rightarrow \frac{1}{f(a)} > \frac{1}{f(b)}.$$

ז"א הפונקציה $\left(\frac{1}{f}\right)(x)$ יורדת ממש.

(ג) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $f(x) = \sin(x)$. הרי

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

חסומה אבל הפונקציה $\sin(x)$ אינה חד חד ערכית.