

עבודה עצמית 7

שאלה 1 נסמן $S = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (11, 16, 21)\}$.

(א) האם S פורשת את \mathbb{R}^3 ?

(ב) האם $(6, 9, 12) \in \text{sp}(S)$? אם כן, הצג אותו כצירוף לינארי של הוקטורים ב- S . האם יש יותר מדרך אחת להציגו כצירוף לינארי של הוקטורים ב- S ?

שאלה 2 תן דוגמא לשתי קבוצות S, T כך ש- $S \subseteq T$ ומתקיים:

(א) T פורשת את \mathbb{R}^4 ו- S לא פורשת את \mathbb{R}^4 .

(ב) T לא פורשת את \mathbb{R}^4 ו- S לא פורשת את \mathbb{R}^4 .

(ג) T פורשת את \mathbb{R}^4 ו- S פורשת את \mathbb{R}^4 .

שאלה 3 תהינה $X \subseteq Y$ קבוצות של וקטורים ב- \mathbb{R}^n . הוכח או הפרך:

(א) אם Y פורשת את \mathbb{R}^n אז X פורשת את \mathbb{R}^n .

(ב) אם $0 \in X$ אז X פורשת את \mathbb{R}^n .

(ג) אם $0 \in X$ אז X לא פורשת את \mathbb{R}^n .

(ד) אם X פורשת את \mathbb{R}^n אז Y פורשת את \mathbb{R}^n .

(ה) אם מספר הוקטורים ב- X גדול מ- n אז X פורשת את \mathbb{R}^n .

(ו) אם קיים $v \in Y$ כך ש- $v \notin X$ אז $\text{sp}(Y) \neq \text{sp}(X)$.

שאלה 4 נתונים הוקטורים $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix}$

(א) מצא לאילו ערכי a מתקיים $u_3 \in \text{sp}\{u_1, u_2\}$. עבור ערך a הקטן שמצאת, הצג את u_3 כצירוף לינארי של u_1, u_2 .

(ב) מצא לאילו ערכי a הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ פורשת את \mathbb{R}^3 .

שאלה 5 תהי $A \in \mathbb{R}^{3 \times n}$. הוכח או הפרך:

(א) אם למערכת $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ קיים פתרון אז למערכת $AX = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ קיים פתרון.

(ב) אם למערכת $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ קיים פתרון יחיד אז למערכת $AX = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ קיים פתרון יחיד.

(ג) אם $n = 3$ ולמערכת $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ קיים פתרון יחיד אז למערכת $AX = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ קיים פתרון יחיד.

(ד) אם למערכת $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ קיים פתרון אז למערכת $AX = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ קיים פתרון.

(ה) יהיו $c, d \in \mathbb{R}^n$. אם למערכת $AX = c$ קיים פתרון ולמערכת $AX = d$ קיים פתרון, אז למערכת $AX = c + d$ קיים פתרון.

שאלה 6 נסמן $p_1(x) = x + 1$, $p_2(x) = -x + 3$, $g(x) = 3x + 11$. האם $g(x) \in \text{sp}\{p_1(x), p_2(x)\}$? אם כן, הצגו אותו כצ"ל שלהם.

שאלה 7 נסמן $p_1(x) = x^2 + 2x + 1$, $p_2(x) = x^2 - x + 1$, $p_3(x) = x^2 + x - 1$, $g(x) = x^2 + 6$. הצגו את $g(x)$ כצ"ל של $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$. האם יש יותר מדרך אחת?

שאלה 8 נסמן $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. האם $u \in \text{sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$? אם כן, הצגו את u כצ"ל של הוקטורים הנ"ל.

שאלה 9 לאילו ערכי m מתקיים $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$?

שאלה 10 לכל $a \in \mathbb{C}$ קבעו האם $V(a) = \mathbb{C}^3$ כאשר

$$V(a) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

שאלה 11 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{R} . נניח כי $v_1, v_2, v_3 \in V$ וקטורים בלתי תלויים לינארית. קבעו האם הוקטורים הבאים הם בלתי תלויים לינארית:

$$w_1 = v_1 + v_2 + v_3, \quad w_2 = v_1 - v_2 + 3v_3, \quad w_3 = v_1 + 2v_2.$$

פתרונות

שאלה 1

(א) נבדוק אם S בת"ל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 2 & 5 & 16 \\ 3 & 6 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

יש עמודה לא מובילה, לכן הוקטורים ת"ל.

$$\dim(\text{sp}(S)) = 2 < \dim(\mathbb{R}^3)$$

לכן S לא פורשת את \mathbb{R}^3 .

(ב) נסמן $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (4, 5, 6)$, $v_3 = (11, 16, 21)$, $u = (6, 9, 12)$. נבדוק אם

$$u = k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 11 & 6 \\ 2 & 5 & 16 & 9 \\ 3 & 6 & 21 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 11 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -12 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 11 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 11 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 4R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$k_3 \in \mathbb{R}$, $k_2 = 1 - 2k_3$, $k_1 = 2 - 3k_3$ יש ∞ פתרונות למערכת, לכן יש ∞ דרכים להציג את u כצירוף לינארי של v_1, v_2, v_3 . נציב $k_3 = 1 \Leftrightarrow k_2 = -1 \Leftrightarrow k_1 = -1$

$$-v_1 - v_2 + v_3 = u$$

שאלה 2

(א) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $S \subseteq T$, T לא פורשת את \mathbb{R}^4 , T פורשת את \mathbb{R}^4 כי T הוא הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^4 .

(ב) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $S \subseteq T$, T לא פורשות את \mathbb{R}^4 .

(ג) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

שאלה 3

(א) $X \subseteq Y$ ו- Y פורשת את X $\Leftrightarrow X$ פורשת את Y .

דוגמה נגדית:

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$X, Y \in \mathbb{R}^2$. Y פורשת את X , X לא פורשת את Y .

(ב) $0 \in X \Leftrightarrow X$ פורשת את \mathbb{R}^n .

דוגמה נגדית:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

X לא פורשת את \mathbb{R}^2 .

(ג) $0 \in X \Leftrightarrow X$ לא פורשת את \mathbb{R}^n .

דוגמה נגדית:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

X פורשת את \mathbb{R}^2 .

(ד) X פורשת את $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow Y$ פורשת את \mathbb{R}^n .

נתון: $\text{sp}(X) = \mathbb{R}^n, X \subseteq Y$.

צ"ל: $\text{sp}(Y) = \mathbb{R}^n$.

הוכחה:

נקח $v \in \mathbb{R}^n$. אז $v \in \text{sp}(X)$. לכן קיימים $u_1, \dots, u_m \in X$ כך ש

$$v = k_1 u_1 + \dots + k_m u_m.$$

$X \subseteq Y$, לכן $u_1, \dots, u_m \in Y$, $v \in \text{sp}(Y)$.

(ה) מספר הוקטורים ב- X גדול מ- $n \Leftrightarrow X$ פורשת את \mathbb{R}^n .

דוגמה נגדית:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

X אינה פורשת את \mathbb{R}^2 .

(ו) קיים $v \in Y$ כך ש- $v \notin \text{sp}(X) \Leftrightarrow \text{sp}(Y) \neq \text{sp}(X)$.

דוגמה נגדית:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{sp}(Y) = \text{sp}(X) = \mathbb{R}^2.$$

$$\Leftrightarrow u_3 \in \text{sp}(u_1, u_2) \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{שאלה 4}}$$

$$u_3 = k_1 u_1 + k_2 u_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & a+1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a-2 \\ 0 & a-1 & a-1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a-3) \end{array} \right)$$

יש פתרון אם $a = 1, 3$.

לכן $u_3 \in \text{sp}(u_1, u_2)$ עבור $a = 1$ ו $a = 3$.

$$\underline{a = 1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow k_1 = 3, k_2 = -1$$

$$u_3 = 3u_1 - u_2.$$

$$\underline{a = 3}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$k_2 = -k_3, k_1 = k_3$$

עבור $a \neq 1, 3$ הוקטורים u_1, u_2, u_3 בת"ל, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 \Leftrightarrow u_1, u_2, u_3$ בסיס של \mathbb{R}^3 .

לכן $\mathbb{R}^3 = \text{sp}(u_1, u_2, u_3)$.

שאלה 5 $A \in \mathbb{R}^{3 \times n}$, נסמן את העמודות u_1, \dots, u_n . אז $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^3$.

$$\text{א) טענה: למערכת } AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ יש פתרון, ז"א וקטור } v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \in \text{sp}(u_1, \dots, u_n)$$

$$\text{דוגמה נגדית: } u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v \in \text{sp}(u_1, u_2) \text{ וקטור } v' = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \notin \text{sp}(u_1, u_2)$$

$$\text{ב) דוגמה נגדית: } u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = u_1 + u_2 \text{ כי } v \in \text{sp}(u_1, u_2) \quad u_2, u_1 \text{ בת"ל, לכן}$$

למערכת $AX = v$ יש פתרון יחיד.

$$\text{נבדוק אם למערכת } AX = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ יש פתרון:}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{array} \right)$$

אין פתרון למערכת.

ג) $n = 3$. למערכת $AX = v$ יש פתרון יחיד, לכן הוקטורים u_1, u_2, u_3 בת"ל. לכן, u_1, u_2, u_3 מהווים בסיס של $\mathbb{R}^3 \Leftarrow$ למערכת $AX = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ יש פתרון יחיד.

ד) דוגמה נגדית:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

למערכת $AX = 0$ יש פתרון, למערכת $AX = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ אין פתרון.

ה) נסמם ב v_1 פתרון של המערכת $AX = c$, וב v_2 פתרון של המערכת $AX = d$. ז"א

$$Av_1 = c, \quad Av_2 = d.$$

לכן

$$A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = c + d.$$

שאלה 6 $g(x) = 3x + 11, p_2(x) = -x + 3, p_1(x) = x + 1$

$$g(x) = k_1 p_1(x) + k_2 p_2(x)$$

$$k_1(x + 1) + k_2(-x + 3) = 3x + 11$$

$$(k_1 + 3k_2) + (k_1 - k_2)x = 3x + 11$$

$$\left. \begin{array}{l} k_1 + 3k_2 = 11 \\ k_1 - k_2 = 3 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 11 \\ 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 11 \\ 0 & -4 & -8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$k_1 = 5, \quad k_2 = 2.$$

$$5p_1(x) + 2p_2(x) = g(x).$$

שאלה 7 $g(x) = x^2 + 6, p_3(x) = x^2 + x - 1, p_2(x) = x^2 - x + 1, p_1(x) = x^2 + 2x + 1$

$$k_1 p_1(x) + k_2 p_2(x) + k_3 p_3(x) = g(x)$$

$$k_1(x^2 + 2x + 1) + k_2(x^2 - x + 1) + k_3(x^2 + x - 1) = x^2 + 6$$

$$(k_1 + k_2 + k_3)x^2 + (2k_1 - k_2 + k_3)x + (k_1 + k_2 - k_3) = x^2 + 6$$

$$\left. \begin{array}{l} k_1 + k_2 + k_3 = 1 \\ 2k_1 - k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 - k_3 = 6 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_2 \rightarrow 2R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow 2R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & -6 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array} \right) \\
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array} \right) \\
 & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

פתרון יחיד:

$$\begin{aligned}
 (k_1, k_2, k_3) &= \left(2, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2} \right) \\
 g(x) &= 2p_1(x) + \frac{3}{2}p_2(x) - \frac{5}{2}p_3(x)
 \end{aligned}$$

שאלה 8

$$\begin{aligned}
 .u &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ נסמן} \\
 u &= \text{sp}(u_1, u_2, u_3), \quad u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = u$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow -R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 2R_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

אין פתרון למערכת, לכן $u \notin \text{sp}(u_1, u_2, u_3)$

שאלה 9

$$u \in \text{sp}(v_1, v_2, v_3)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{sp} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 2 \\ 1 & m & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - mR_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 2 \\ 0 & m-1 & 1-m & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-m^2 & 1 & -1-2m \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_2 + R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 2 \\ 0 & m-1 & 1-m & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m^2-m+2 & -2m-4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 2 \\ 0 & m-1 & 1-m & -3 \\ 0 & 0 & -m^2-m+2 & -2m-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

עבור $m = 1$ למערכת אין פתרון, לכן $u \notin \text{sp}(v_1, v_2, v_3)$.

עבור $m \neq 1$ למערכת יש פתרון, לכן $u \in \text{sp}(v_1, v_2, v_3)$.

שאלה 10 נשים לב שכדי ש $V(a) = \mathbb{C}^3$ צריך להתקיים ש $\dim V(a) = 3$. לכן יספיק לבדוק עבור אילו ערכי $a \in \mathbb{C}$ הווקטורים v_1, v_2, v_3 בת"ל.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & a \\ a & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - aR_1}} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-3 \\ 0 & 1-a & 1-a \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 + 4R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 3R_1}} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-3 \\ 0 & 0 & 1-a-(1-a)(a-3) \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-3 \\ 0 & 0 & (1-a)(4-a) \end{array} \right)$$

מכאן אם $a \neq 1, 4$ למערכת פתרון יחיד ובפרט $V(a) = \mathbb{C}^3$.

עבור $a = 1, 4$, $\dim V(a) < 3$ ובפרט $V(a) \neq \mathbb{C}^3$.

שאלה 11 עלינו לבדוק האם \exists צירוף לינארי לא טריוויאלי של w_1, w_2, w_3 אשר נותן את $\bar{0}$ (ווקטור האפס).

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 \\ &= \alpha_1 (v_1 + v_2 + v_3) + \alpha_2 (v_1 - v_2 + 3v_3) + \alpha_3 (v_1 + v_2 + v_3) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)v_1 + (\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3)v_2 + (\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0\alpha_3)v_3 \end{aligned}$$

יש לנו כאן צירוף לינארי של v_1, v_2, v_3 שנותן את 0 מאחר והם בת"ל נקבל את המערכת הבאה:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0$$

אם למערכת פתרון יחיד אז w_1, w_2, w_3 בת"ל אחרת w_1, w_2, w_3 ת"ל.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

למערכת יש ∞ פתרונות $\Leftrightarrow w_1, w_2, w_3$ ת"ל.
נשים לב

$$\frac{3}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2 = w_3 .$$