

## שיעור 2

# מודלים חישוביים שקולית

### הגדירה 2.1 מודל חישובי

מודל חישובי הוא אוסף של מכונות טיורינג שעבורן מוגדרים המושגים של הכרעה וקבלת של שפות.

### הגדירה 2.2 מודלים שקולים חישובית

יהיו  $A$  ו-  $B$  מודלים חישוביים. אומרים כי  $A$  ו-  $B$  שקולים אם לכל שפה  $L$  התנאים הבאים מתקיימים:

- 1) קיימת מ"ט במודל  $A$  שמכריעה את  $L$  אם ו רק קיימת מ"ט במודל  $B$  שמכריעת את  $L$ .
- 2) קיימת מ"ט במודל  $A$  שמקבלת את  $L$  אם ו רק קיימת מ"ט במודל  $B$  שמקבלת את  $L$ .

### דוגמה 2.1

**נסמן ב-  $T$  את מודל המכונה הטיורינג הבסיסי.**

במודל זה בכלל צעד ניתן לוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת הסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לשני הצדדים. בתחילת החישוב הראש נמצא בתחילת הקלט.

**נסמן ב-  $O$  את מודל המכונה הטיורינג עם סרט ימינה בלבד.**

במודל זה בכלל צעד ניתן לוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת הסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לכיוון אחד בלבד - ימינה. בתחילת החישוב, הקלט ממוקם בקצתה השמאלי של הסרט והראש נמצא בתחילת הקלט. החישוב מתנהל כמו במכונה במודל  $T$ , למעט כאשר הראש נמצא באותה המשבצת השמאלית ביותר הסרט וצריך לוז שמאלה - במקרה זה הראש נשאר במקום ולא זו.

**הוכיחו כי המודל  $T$  והמודל  $O$  שקולים חישובית.**

**פתרון:**

יש להוכיח ש:

- לכל מ"ט במודל  $O$  קיימת מ"ט שcolaה במודל  $T$ .
- לכל מ"ט במודל  $T$  קיימת מ"ט שcolaה במודל  $O$ .

#### כיוון ראשון

נווכיח כי לכל מ"ט במודל  $O$  קיימת מ"ט שcolaה במודל  $T$ . כלומר:

נתונה  $(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, acc^O, rej^O)$  במודל  $O$ .

نبנה  $M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, acc^T, rej^T)$ .

- רכיבי המ"ט  $M^T$  זהים לאלו של המ"ט  $M^O$ , מלבד מהתוכנה שהראש של  $M^O$  לעולם לא זו מעבר לказחה השמאלי של הקלט.
- נבודד רק עם צד ימין של הסרט האינסופי של  $M^T$  ואז  $M^T$  תהיהcolaה ל-  $M^O$ .

- כדי לדאוג שהראש של המוכונה הדו-כיוונית  $M^T$  לא יעבור לכמה השמאלי של הקלט, נוסיף מצבים חדשים וגם מעברים חדשים לפונקציית המעברים של  $M^T$ , שmbטיחים שהראש של  $M^T$  לא יעבור לכמה השמאלי של הקלט, באופן הבא.
- בתחילת כל חישוב, המוכונה  $M^T$  מסמנת את המשבצת מצד שמאל וליד המשבצת הראשונה של הקלט בסימן מיוחד \$.  
לכן, המוכונה  $M^T$  השקולה למוכונה  $M^O$  היא
- ונדר את הפונקציית המעברים של  $M^T$  כך שכל פעם שהראש מגע למשבצת המסומנת \$, הראש חוזר ימינה למשבצת הראשונה של הקלט, כמפורט בטבלה המעברים למטה.

$$Q^T = Q^O \cup \{q_0^T, q_\$^T\}, \quad \Sigma^T = \Sigma^O, \quad \Gamma^T = \Gamma^O \cup \{\$\}, \quad q_{acc}^T = q_{acc}^O, \quad q_{rej}^T = q_{rej}^O$$

והפונקציית המעברים מתוארת בטבלה למטה.

מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	позזה	תנאי
$q_0^T$	$\sigma$	$q_\$^T$	$\emptyset$	$L$	
$q_\$^T$	-	$q_0^O$	\$	$R$	
$q$	\$	$q$	\$	$R$	$\forall q \in Q^O$

הוכחנו את הכיוון הראשון:  
ריאנו מוכנה דו-כיוונית השקולה למוכנה חד-כיוונית.

כעת נוכיח את הטענה בכיוון השני:  
נראה מוכנה חד-כיוונית השקולה למוכנה דו-כיוונית.

### כיוון שני

נוכיח כי לכל מ"ט במודול  $T$  קיימת מ"ט שקופה במודול  $O$ . כלומר:

נתונה  $M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, acc^T, rej^T)$  במודול  $T$ .

נבנה  $M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, acc^O, rej^O)$  שקופה במודול  $O$ .

- נסמן "קו המפריד" על הסרט של המוכנה הדו-כיוונית  $M^T$ .



- נסמן את המשבצת הראשונה של הסרט של המוכנה החד-כיוונית  $M^O$  עם \$.
- כל שאר המשבצות של הסרט של  $M^O$  נחלק לשני צאים: חצי העליון  $U$  וחצי התחתון  $D$ .
- תוכן הסרט של המוכנה הדו-כיוונית  $M^T$  נכתב על סרטה של המוכנה החד-כיוונית  $M^O$  כך:
  - \* החלק של הסרט שמצד שמאל של קו המפריד נכתב בשורה העליונה של סרט  $M^O$  בכיוון ההפוך (מיימין לשמאל).

- \* החלק של הסרט שמצד ימין של קו המפריד נכתב בשורה התחתונה של סרט  $M^O$  בכוון הרגיל (משמאל לימין).

\$	b	b	a	—	—	—	—	...
b	c	c	a	b	—	—	—	...
...								

- \* תזוזה ימינה של  $M^T$  **מצד ימין של קו המפריד**  $\Leftarrow$  תזוזה ימינה בשורה התחתונה של  $M^O$ .
- \* תזוזה ימינה של  $M^T$  **מצד שמאל של קו המפריד**  $\Leftarrow$  תזוזה שמאלה בשורה העליונה של  $M^O$ .

תזוזה ימינה ב-  $M^T$ :

—	a $\rightarrow$	b $\rightarrow$		b $\rightarrow$	b $\rightarrow$	c $\rightarrow$	c $\rightarrow$	a $\rightarrow$	— $\rightarrow$
---	-----------------	-----------------	--	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

תזוזה שකולה ב-  $M^O$ :

\$	$\leftarrow$ b	$\leftarrow$ b	$\leftarrow$ a	—	—	—	—
b $\rightarrow$	c $\rightarrow$	c $\rightarrow$	a $\rightarrow$	b $\rightarrow$	— $\rightarrow$	—	—

- \* תזוזה שמאלה של  $M^T$  **מצד ימין של קו המפריד**  $\Leftarrow$  תזוזה שמאלה בשורה התחתונה של  $M^O$ .
- \* תזוזה שמאלה של  $M^T$  **מצד שמאל של קו המפריד**  $\Leftarrow$  תזוזה ימינה בשורה העליונה של  $M^O$ .

תזוזה שמאלה ב-  $M^T$ :

—	a $\leftarrow$	b $\leftarrow$		b $\leftarrow$	b $\leftarrow$	c $\leftarrow$	c $\leftarrow$	a $\leftarrow$	— $\leftarrow$
---	----------------	----------------	--	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------

תזוזה שתקולה ב-  $M^O$ :

\$	$\rightarrow$ b	$\rightarrow$ b	$\rightarrow$ a	—	—	—	—
b $\leftarrow$	c $\leftarrow$	c $\leftarrow$	a $\leftarrow$	b $\leftarrow$	— $\leftarrow$	—	—

לכן, המכונה  $M^O$  השકולה למכונה  $M^T$  היא

$$M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, q_{\text{acc}}^O, q_{\text{rej}}^O) ,$$

סביר את כל הרכיבים של  $M^O$ :

- לכל מצב  $q \in Q^T$  נגיד  $q_U$  ו-  $q_D$  של  $Q^O$ , כדי לבדוק בין המצביעים שבהם הראש נמצא בחלק העליון לבין המצביעים שבהם הראש נמצא בחלק התיכון של הסרט.

$$\cdot \Sigma^O = \Sigma^T \quad \bullet$$

$$\cdot \Gamma^O \subseteq (\Gamma^T \times \Gamma^T) \cup \{\$\} \quad \bullet$$

$$\cdot q_{\text{acc}}^O = q_{\text{acc}}^T \quad \bullet$$

$$\cdot q_{\text{rej}}^O = q_{\text{rej}}^T \quad \bullet$$

- הפונקציות המעבירים  $\delta$  מותוארת בטבלה המעבירים למיטה. בטבלה, הסימנים  $\pi, \sigma, \tau$  מסמנים כל תואם הפונקציית  $\Gamma^T$  שבאלפבית:

תנאי	תזואה	כתיבה	מצב חדש	סימון	מצב
<b>אותחול</b>					
$q_0^O$	$\tau$	$q_\tau$	\$	$R$	$\tau \in \Sigma \cup \{\_\}$ $\sigma \in \Sigma$
$q_\sigma$	$\tau$	$q_\tau$	$\_\sigma$	$R$	
$q.\_$	$\_$	back	$\_$ $\_$	$L$	
$q_{\text{back}}$	$\_\tau$	$q_{\text{back}}$	$\cap$	$L$	
$q_{\text{back}}$	\$	$q_0^T.D$	$\cap$	$R$	
<b>תזואה מקורית שמאלתית</b>					
$q_D$	$\pi$ $\sigma$	$p_D$	$\pi$ $\tau$	$L$	תזואה שמאלתית: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$
$q_U$	$\sigma$ $\pi$	$p_U$	$\tau$ $\pi$	$R$	
$q_D$	$\_$	$p_D$	$\_$ $\tau$	$L$	תזואה שמאלתית: $(q, \_) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$
$q_U$	$\_$	$p_U$	$\tau$ $\_$	$R$	
<b>תזואה מקורית ימינה</b>					
$q_D$	$\pi$ $\sigma$	$p_D$	$\pi$ $\tau$	$R$	תזואה ימינה: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$
$q_U$	$\sigma$ $\pi$	$p_U$	$\tau$ $\pi$	$L$	
$q_D$	$\_$	$p_D$	$\_$ $\tau$	$R$	תזואה ימינה: $(q, \_) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$
$q_U$	$\_$	$p_U$	$\tau$ $\_$	$L$	
<b>פגיעה בקצתה</b>					
$q_D$	\$	$q_U$	$\cap$	$R$	
$q_U$	\$	$q_D$	$\cap$	$R$	
כל השאר עוברים ל- rej					