שעור 10
שונות

10.1 לכסון אורתוגונית

הגדרה 10.1 מטריצה לכסינה אורתוגונלית

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אורתוגונלית אן קיימת מטריצה אורתוגונלית U ומטריצה אלכסונית D כך ש-

$$A = UDU^{-1} = UDU^t \ .$$

הגדרה 10.2 מטריצה סימטרית

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת מטריצה סימטרית אם

$$A = A^t \ .$$

משפט 10.1 מטריצה לכסינה אורתוגונלית היא סימטירת

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ שלכסינה אורתוגונלית היא בהכרח מטירצה סימטרית.

הוכחה: נניח כי A לכסינה אורתוגונלית.

ז"א קיימת D אלכסונית ו- U אורתוגונלית כך ש-

$$A = UDU^{-1} = UDU^t \ .$$

לפיכך

$$A^t = \left(UDU^t\right)^t = \left(U^t\right)^t D^t U^t = UDU^t = A \ .$$

■

משפט 10.2 תנאי מספיק למטירצה סימטרית

מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ היא מטירצה סימטרית אם ורק אם

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$, כאשר $(,)$ המכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^n$.

הוכחה: נניח כי A סימטרית. אזי

$$(Ax, y) = (Ax)^t y = x^t A^t y = \left(x, A^t y\right) = (x, Ay)$$

נניח כי $(Ax, y) = (x, Ay)$. נרשום

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

כאשר $a_i \in \mathbb{R}^n$ העמודות של המטריצה A.

$$(Ae_i, e_j) = (a_i, e_j) = A_{ji} = \text{רכיב ה-}(j,i)\text{ של } A$$

$$(e_i, Ae_j) = (e_i, a_j) = A_{ij} = \text{רכיב ה-}(i,j)\text{ של } A$$

לכן

$$(Ae_i, e_j) = (e_i, Ae_j) \quad \Rightarrow \quad A_{ji} = A_{ij} \quad \Rightarrow \quad A^t = A \ .$$

ז"א A סימטרית. ■

כלל 10.1 תכונות של מספרים מרוכבים

- כל מספר $z \in \mathbb{C}$ ניתן לרשום בצורה $z = a + ib$ כאשר $a, b \in \mathbb{R}$.
- $i^2 = -1$.
- נתון מספר מרוכב $z \in \mathbb{C}$ מצורה $z = a + ib$. נגדיר הצמוד של z לפי $\bar{z} = a - ib$.
- $z \in \mathbb{R}$ אם ורק אם $\bar{z} = z$.
- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
- נתון $z \in \mathbb{C}$. הערך מוחלט של z מסומן $|z|$ ומוגדר $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.
- לכל $z, w \in \mathbb{C}$ מתקיים $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.

משפט 10.3 הערכים עצמיים של מטריצה סימטרית ממשיים

אם $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ סימטרית אז כל הערכים עצמיים של A ממשיים.

הוכחה: לפי משפט הפירוק הפרימרי, ל-A יש ערכים עצמיים $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (לא בהכרח שונים).

לכל $u = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, הסקלר $a = \bar{u} A u$ ממשי:

$$\begin{aligned}
a &= (u^*)^t Au = (u^*)^t A^t u && \text{(סימטרית } A\text{)} \\
&= (Au^*)^t u = u^t (Au^*) && \text{(משפט 10.2)} \\
&= u^t A^* u^* && \text{(ממשי } A\text{)} \\
&= a^* \ .
\end{aligned}$$

נניח כי $u = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ ווקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ_i. אזי

$$\bar{u} A z = \bar{u} \lambda_i u = \lambda_i \bar{u} u = \lambda_i (\bar{u}, u) = \lambda_i \left(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 \right)$$

u וקטור עצמי $\Leftarrow u \neq 0 \Leftarrow \exists\, z_k \neq 0 \Leftarrow (|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2) \neq 0$.
בנוסף $(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2)$ ממשי, ו- $\bar{u} A z$ ממשי. לכן λ_i בהכרח ממשי. ■

משפט 10.4 מטריצה ממשית לכסינה אורתוגונלית אם"ם היא סימטרית

נתונה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריתה ממשית. A לכסינה אורתוגונלית אם ורק אם היא סימטרית.

הוכחה: נניח כי A לכסינה אורתוגונלית.
ז"א קיימת D אלכסונית ו- U אורתוגונלית כך ש-

$$A = UDU^{-1} = UDU^t \ .$$

אזי

$$A^t = \left(UDU^t\right)^t = \left(U^t\right)^t D^t U^t = UDU^t = A \ .$$

נניח כי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית. נוכיח באמצעות אינדוקציה על n כי היא לכסינה אורתוגונלית.

<u>שלב הבסיס</u>

עבור $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, כלומר $A = a$ כאשר $a \in \mathbb{R}$ סקלר.

$$A = a = UDU^t$$

כאשר $U = (1) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ אורתוגונלית ו- $D = (a) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ אלכסונית.

<u>שלב האינדוקציה</u>

נניח כי כל מטריצה סימטרית מסדר $(n-1)\times(n-1)$ לכסינה אורתוגונלית (ההנחת האינדוקציה).

לכל מטריצה קיימת לפחות ווקטור עצמי אחד.
לכן נניח כי v_1 ווקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ_1 ונניח כי $\|\mathrm{v}_1\| = 1$.
A סימטרית לכן $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ (משפט 10.3).
נשלים $\{\mathrm{v}_1\}$ לבסיס של $\mathbb{R}^n$:

$$\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\} \ .$$

נבצע התהליך של גרם שמידט כדי להמיר בסיס זו לבסיס אורתוגונלי של $\mathbb{R}^n$:

$$B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \ ,$$

כאשר $u_1 = \mathrm{v}_1$, $u_2 = \mathrm{v}_2 - \dfrac{(\mathrm{v}_2, u_1)}{\|u_1\|^2} u_1$ וכן הלאה.
נגדיר

$$P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \ .$$

נשים לב כי P היא המטריצה המעבר מבסיס הסטנדרטי לבסיס B.
P אורתוגונלי לכן $P^{-1} = P^t$.
נתבונן על המטריצה $P^{-1}AP = P^tAP$. נשים לב כי היא סימטרית

$$\left(P^tAP\right)^t = P^tA^t\left(P^t\right)^t = P^tA^tP = P^tAP \ .$$

והעמודה הראשונה הינה

$$P^{-1}APe_1 = P^{-1}Au_1 = P^{-1}\lambda_1 u_1 = \lambda_1 P^{-1}u_1 = \lambda_1 [u_1]_B = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

לפיכך $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & B\end{pmatrix}$ כאשר $\mathbb{0}$ בלוק עם $n-1$ אפסים ו- B מטריצה סימטרית מסדר $(n-1)\times(n-1)$.

לפי ההנחת האינדוקציה B לכסינה אורתוגונלית.
ז"א קיימת $U'\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ אורתוגונלית ו- $D'\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ אלכסונית כך ש- $B=U'D'U'^{-1}=U'D'U'^{t}$.

לכן

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & U'D'U'^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & U'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & D'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & U'^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & U'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & D'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & U'\end{pmatrix}^{-1}$$

נכפיל מצד שמאל ב- P ומצד ימין ב- P^{-1}:

$$A=P\begin{pmatrix}1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & U'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & D'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & U'\end{pmatrix}^{-1}P^{-1}$$

נגדיר $U=P\begin{pmatrix}1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & U'\end{pmatrix}$ ו- $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & D'\end{pmatrix}$. ז"א

$$A=UDU^{-1}\ .$$

נשים לב כי U אורתוגונלית ו- D אלכסונית. לפיכך A לכסינה אורתוגונלית.

■

10.2 שילוש לכיסון של מטריצה לפי פולינום מינימלי

הגדרה 10.3 צמצום של העתקה

נתון מרחב ווקטורי V ונתונה אופרטור $T:V\to V$. נניח כי $W\subset V$ תת-מרחב T-שמור של V.
נניח כי $\mathrm{v}\in V$ ווקטור של V.
נגדיר קבוצת פולינומים $S_T(\mathrm{v},W)$ כך שכל פולינום $g\in S_T(\mathrm{v},W)$ מקיים את התנאי

$$g(T)\mathrm{v}\in W\ .$$

הקבוצה $S_T(\mathrm{v},W)$ תקרא המנחה T.

הגדרה 10.4

נתון $S_T(\mathrm{v},W)$. הפולינום המתוקן של דרגה הקטנה ביותר ב- $S_T(\mathrm{v},W)$ נקרא מנחה-T מינימלי.

משפט 10.5

נניח כי $S_T(\mathrm{v},W)$ T conductor של v ונניח כי g המנחה-T מינימלי.

$$f\in S_T(\mathrm{v},W)\Leftrightarrow g\mid f\ .$$

הוכחה: נניח כי $f\in S_T(\mathrm{v},W)$. נוכיח כי $g\mid f$ דרך השלילה. ז"א נניח כי $g\nmid f$. לפי כלל אוקליד,

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x)\qquad\Rightarrow\qquad f(x)-q(x)g(x)=r(x)\ .$$

כאשר $\deg(r)<\deg(g)\le\deg(f)$.

$f,g\in S_T(\mathrm{v},W)$ לכן $f(T)\mathrm{v}\in W$, ו- $g(T)\mathrm{v}\in W$. לכן גם $q(T)g(T)\mathrm{v}\in W$ בגלל ש- W תת-מרחב T שמור. לפיכך $r(T)\mathrm{v}\in W$. אך $\deg(r)<\deg(g)$, בסתירה לכך ש- g הפולינום של דרגה קטנה ביותר המקיים $g(T)\mathrm{v}\in W$.

נניח כי $g\mid f$.
$\Leftarrow f(x)=q(x)g(x) \Leftarrow f(T)\mathrm{v}=q(T)g(T)\mathrm{v}$
$g(T)\mathrm{v}\in W$ לכן $q(T)g(T)\mathrm{v}\in W$ בגלל ש- W תת-מרחב T-שמור.
לכן $f(T)\mathrm{v}\in W$.

■

משפט 10.6

נניח כי $S_T(\mathrm{v},W)$ T-conductor. נניח כי g המנחה T-מינימלי ו- m_T הפולינום המינימלי של T. אז $m_T\mid g$.

הוכחה: נוכיח כי $g\mid m_T$ דרך השלילה.
נניח כי $g\nmid m_T$. לפי כלל אוקליד:
$$m_T(x)=q(x)g(x)+r(x)\ ,$$
$\deg(r)<\deg(g)\leq\deg(m_T)$.
$$0=m_T(T)=g(T)q(T)+r(T)=0+r(T)\quad\Rightarrow\quad r(T)=0$$
בסתירה לכך כי $m_T(T)$ הפולינום המינימלי.

■

משפט 10.7

$m_T\in S_T(\mathrm{v},W)$.

הוכחה: נניח כי $g(x)$ המנחה T-מינימלי . לפי משפט 10.6, $g\mid m_T$.
לכן לפי משפט 10.5, $m_T\in S_T(\mathrm{v},W)$.

■

משפט 10.8

נניח כי V מרחב ווקטורי $T:V\to V$ אופרטור. נניח כי $W\subset V$ תת מרחב T שמור. קיים $\alpha\in V\notin W$ כך ש-
$$(T-\lambda)\alpha\in W$$
כאשר λ ערך עצמי של T.

הוכחה:
נוכיח כי המנחה T-המינימלי של α ל- W הוא פולינום ליניארי.

נניח כי β כל ווקטור שב- V אבל לא ב- W, כלומר $\beta\in V\notin W$.
יהי g המנחה T-המינימלי של β ל- W.
משפט 10.6 $\Leftarrow g\mid m_T \Leftarrow g(x)=(x-\lambda_i)h(x)$ כאשר λ_i ערך עצמי של T ו- $h(x)$ פולינום.

g הפולינום של דרגה קטנה ביותר כך ש- $g(T)\beta\in W$. לכן $\alpha=h(T)\beta\notin W$.

לכן
$$(T-\lambda_i I)\alpha=(T-\lambda_i)h(T)\beta=g(T)\beta\in W$$
בגלל ש- $g(T)$ המנחה-T המינימלי של β.

■

משפט 10.9

T לכסינה אם ורק אם m_T מתפרק לגורמים ליניאריים שונים:
$$m_T(x)=(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)\ .$$

הוכחה: נניח כי $m_T(x)=(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$.
נניח כי $W=\text{span}\{u_1,\ldots,u_k\}$ כאשר $u_1,\ldots,u_k$ הווקטורים עצמיים של T, ו- $W\neq V$.
לפי משפט 10.8 קיים $\alpha\notin W$ וערך עצמי λ_i של T כך שהווקטור $\beta=(T-\lambda_i I)\alpha\in W$.

מכיוון ש- $\beta\in W$ אז $\beta=u_1+\ldots+u_k$, כאשר $Tu_i=\lambda_i u_i$ לכל $1\leq i\leq k$.

לכן

(*)
$$h(T)\beta=h(\lambda_1)u_1+\ldots+h(\lambda_k)u_k\in W\ .$$

לכל פולינום h.

(**)
$$m_T(x)\beta=(x-\lambda_i)q(x)$$

כאשר $q(x)$ פולינום.

לפי מפשט השארית,

(***)
$$q(x)=(x-\lambda_i)h(x)+q(\lambda_i)$$

כאשר $q(x)$ פולינום. לכן

(****)
$$q(T)\alpha-q(\lambda_i)\alpha=h(T)(T-\lambda_i I)\alpha=h(T)\beta$$

לפי (*), $h(T)\beta\in W$.

מכיוון ש-
$$0=m_T(T)\alpha=(T-\lambda_i)q(T)\alpha,$$
כלומר $q(T)\alpha$ ווקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי λ_i, אז $q(T)\alpha\in W$.

לכן לפי (****), $q(\lambda_i)\alpha\in W$.

אבל $\alpha\notin W$, לכן $q(\lambda_i)=0$.

אז לפי (**), לא כל השורשים של m_T שונים. סתירה!

■

משפט 10.10

T ניתנת לשילוש אם ורק אם m_T מתפרק לגורמים ליניאריים (לא בהכרח שונים):

$$m_T(x) = (x-\lambda_1)^{r_1}\cdots(x-\lambda_k)^{r_k} \ .$$

הוכחה: נניח כי $m_T(x) = (x-\lambda_1)^{r_1}\cdots(x-\lambda_k)^{r_k}$.
אנחנו רוצים למצוא בסיס $\beta_1,\ldots\beta_n$ כך ש-

$$[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

נדרוש כי

$$T(\beta_i) = a_{1i}\beta_1 + \ldots + a_{ii}\beta_i \ .$$

ז"א $T(\beta_i) \in \{\beta_1,\ldots,\beta_i\}$.
יהי $W = \{0\} \subset V$.
לפי משפט 10.8 $\exists \alpha \in V \notin \{0\}$ כך ש- $(T-\lambda_1)\alpha \in \{0\}$.
ז"א

$$(T-\lambda_1 I)\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad T\alpha = \lambda_1\alpha \ ,$$

ז"א α ווקטור עצמי של T.
נבחור $\alpha = \beta_1$. אז $[T(\beta_1)]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
יהי $W_1 = \{\beta_1\} \subset V$. נשים לב כי W_1 תת מרחב T שמור.
לפי משפט 10.8 $\exists \alpha \in V \notin W_1$ כך ש- $(T-\lambda_2)\alpha \in W_1$.
ז"א

$$(T-\lambda_2 I)\alpha = k\beta_1 \quad \Rightarrow \quad T(\alpha) = k\beta_1 + \lambda_2\alpha \ ,$$

נבחור $\alpha = \beta_2$. אז $T(\beta_2) = k\beta_1 + \lambda_2\beta_2$.
שימו לב, $\beta_2 \notin W_1$ ו- $\beta_1 \in W$, לכן $\{\beta_1,\beta_2\}$ בלתי תלויים ליניארית.
$[T(\beta_2)]_\beta = \begin{pmatrix} k \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
נמשיך עם התהליך הזה:
יהי $W_i = \{\beta_1,\ldots,\beta_i\} \subset V$. נשים לב כי W_i תת מרחב T שמור.
לפי משפט 10.8 $\exists \alpha \in V \notin W_i$ כך ש- $(T-\lambda_j)\alpha \in W_i$.
ז"א

$$(T-\lambda_j I)\alpha = c_1\beta_1 + \ldots + c_i\beta_i \quad \Rightarrow \quad T(\alpha) = c_1\beta_1 + \ldots + c_i\beta_i + \lambda_j\alpha\alpha \ .$$

שימו לב, $\alpha \notin W_i$ לכן α בלתי תלוי ליניאריית מ- $\{\beta_1,\ldots,\beta_i\}$.
נבחור $\alpha = \beta_{i+1}$.

$$[T(\beta_{i+1})]_\beta = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \lambda_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

נניח כי T ניתנת לשילוש.

$\Leftarrow$ קיים בסיס עבורו המטריצה המייצגת $[T]$ לכסין.

$\Leftarrow$ הפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים (לא בהכרלח שונים).

$p \mid m \Leftarrow m$ מתפרק לגורמים ליניאריים (לא בהכרח שונים). $\blacksquare$