

שיעור 7

משחק בייסיאני

7.1 משחק בייסיאני

במשחק עם מידע מלא, כל פונקציית התשלום של כל השחקן היא ידועה משותפת. בנווגוד, במקרים עם מידע לא מלא, יש לפחות שחקן אחד עם אי-זדאות על פונקציית התשלום של לפחות שחקן אחד אחר.

דוגמה נפוצה של משחק אם מידע לא מלא היא מכרז סגור, שבו השחקנים לא יודעים את ההצעות של שאר השחקנים.

הגדרה 7.1 משחק בייסיאני

הצורה הנורמלית של משחק בייסיאני n שחקנים היא

$$G = \{ \{A_1, \dots, A_n\}, \{T_1, \dots, T_n\}, \{p_1, \dots, p_n\}, \{u_1, \dots, u_n\} \}$$

כאשר

- A_i הקבוצת הפעולות של שחקן i .
- $T_i = (t_i^1, t_i^2, \dots)$ הקבוצות הטיפוסים של שחקן i .
- p_i מסמן את האמונה של שחקן i בטיפוסים האפשריים של שאר ה- $1 - n$ שחקנים ומוגדר

$$p_i = P(t_{-i} | t_i)$$

$$\text{כאשר } t_{-i} = (t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n)$$

לפי הרסניני (1967) התזמון של משחק בייסיאני הוא לפי הסדר הבא:

- 1) צעד גורל בוختار טיפוסים $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ כאשר t_i נבחר מהקבוצת טיפוסים האפשריים T_i .
- 2) שחקן הגורל מגלה t_i אבל לא אף שחקן אחר.
- 3) השחקנים בוחרים בפעולות. שחקן 1 בוחר פעולה a_1 מקבוצת הפעולות A_1 , שחקן 2 בוחר פעולה a_2 מקבוצת הפעולות A_2 , וכן הלא.
- 4) שחקן i מקבל תשלום $u_i(a_1, a_2, \dots, a_n; t_i)$.

אנו מניחים שזה ידועה משותפת בשלב 1 של התזמון של משחק בייסיאני, שחקן הגורל בוחר בוختار טיפוסים $(t_1, \dots, t_n) = t$ לפי פונקציית ההסתברות $p(t)$.
כאשר שחקן הגורל מגלה את t_i לשחקן i , הוא מחשב את האמונה

$$p_i = P(t_{-i} | t_i) = \frac{P(t_{-i} \cap t_i)}{P(t_i)} = \frac{P(t_{-i} \cap t_i)}{\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} P(t_{-i} \cap t_i)}$$

דוגמה 7.1 ()

אליס (שחקן I שחקן השורה) ובוב (שחקן II שחקן העמודה) משחקים משחק שבו פונקציית התשלומים היא אחת משתי פונקציות התשלומים המופיעות למטה. במשחק זה יש לבוב שתי סעולות אפשריות a ו- b ולאليس יש שתיים או שלוש פעולות אפשריות, כתלות בפונקציית התשלומים שנבחרה.

השחקן הנפטר G_1		השחקן הנפטר G_2	
$t_1 = \text{buy}:$	II	a	b
	I		
	U	1, 0	0, 2
	V	0, 3	1, 0
$t_1 = \text{sell}:$	II	a	b
	I		
	U	1, 1	1, 0
	V	0, 2	1, 1
W	1, 0	0, 2	

אליס יודעת את פונקציית התשלומים (ולכן היא בפרט יודעת אם ברשותה שתיים או שלוש פעולות) ובוב יודע רק שפונקציות התשלומים ניתנות או על ידי המטריצה G_1 או על ידי המטריצה G_2 . הוא מייחס הסתברות p לכך שמטריצת התשלומים היא G_1 והסתברות $p - 1$ לכך שמטריצת התשלומים היא G_2 . תיאור זה ידועה משותפת בין אליס ובוב.

- הקבוצת בטיפוסים של שחקן I הן

$$T_1 = (\text{buy}, \text{sell}) , \quad T_2 = (t_2) .$$

לשחקן II יש רק טיפוס אחד שנסמך

- הפעולות האפשריים של I הן

$$A_1 = (U, V, W)$$

והפעולות האפשריים של II הן

$$A_2 = (a, b) .$$

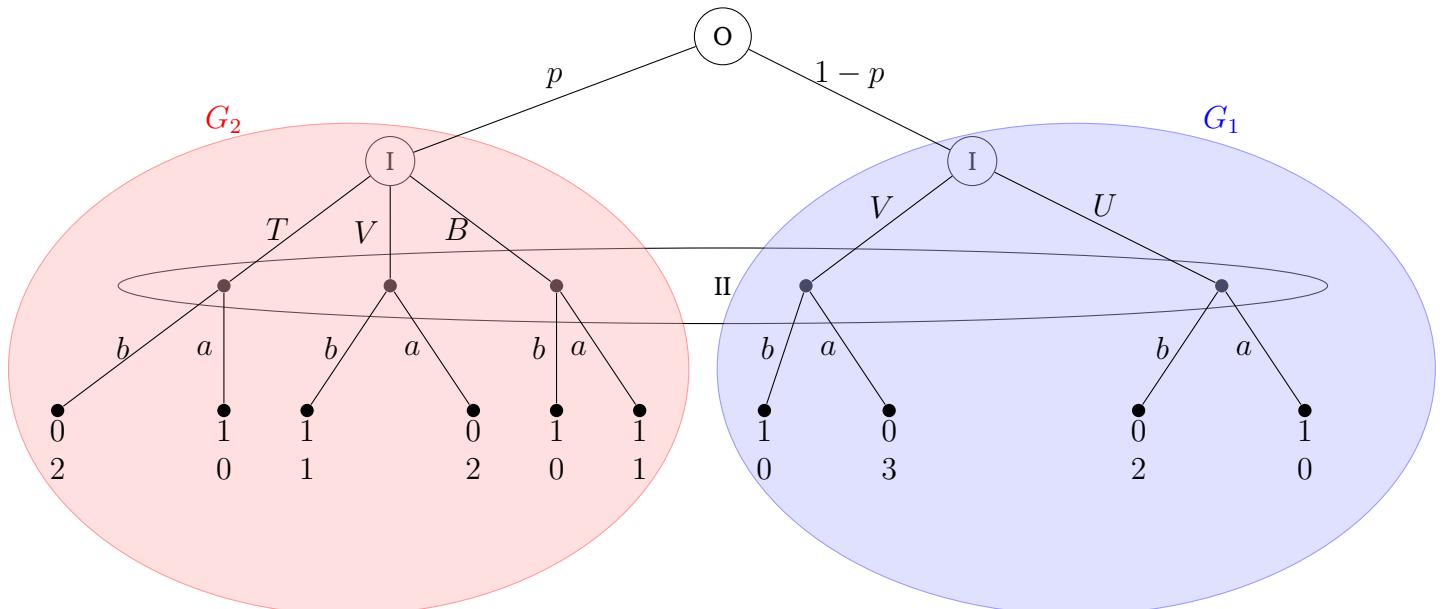
- יש רק אפשרות אחת לאמונה של שחקן I :

$$p_1 = P(t_2|t_1 = \text{buy}) = 1$$

יש שתי אפשרויות לאמונה של שחקן II :

$$p_2 = P(t_1 = \text{buy}|t_2) , \quad p_2 = P(t_1 = \text{sell}|t_2) .$$

$P(t_1 = \text{sell}|t_2) = 1 - p$ ו- $P(t_1 = \text{buy}|t_2) = p$



מצב אמונות זה הוא מצב האמונה של השחקנים במשחק בצורה רחבה המופיע לעיל. ברגע שהשחקנים באים לשחק את פעולותיהם. במשחק זה צעד גורל בוחר את G_1 ו- G_2 לפי הסתברויות p ו- $1 - p$ בהתאם. הבחירה נודעת לאليس אך לא לבוב. בעז המשחק כל משחק נסתר מוקף באלייסה. אף אחד משני המשחקים הנסתורים אינם תט-משחק מכיוון שינוי קבוצת ידיעת המכילה קדוקדים בשניהם.

הגדרה 7.2 אסטרטגיה במשחק בייסיאני

נתון בייסיאני:

$$G = \{(A_1, \dots, A_n), (T_1, \dots, T_n), (p_1, \dots, p_n), u_1, \dots, u_n\} .$$

אסטרטגיה של שחקן i היא פונקציה $s_i(t_i)$ אשר משייכת לכל $t_i \in T_i$ פעולה a_i שבוחר שחקן i מטיפוס t_i ערך פי האסטרטגיה s_i .

דוגמה 7.2 (דילמה השריף)

שריף עומד מול חמוד חמוץ. שניהם צריכים להחליט בו זמנית אם לירות בשני או לא.

החשוד יכול להיות מטיפוס "פושע" או מטיפוס "ازרח". לשريف יש רק טיפוס אחד. החשוד ידע את טיפוסו ואת טיפוס השrieve, אך השrieve אינו יודע את טיפוסו של החשוד. לפיכך, יש מידע לא שלם. لكن המשחק זה הוא משחק בייסיאני.

השריף מעדיף להגן על עצמו ולירות אם החשוד יורה, או לא לירות אם החשוד לא עשה זאת (גם אם החשוד עבריין). החשוד מעדיף לירות אם הוא עבריין, גם אם השrieve לא יורה, אבל מעדיף לא לירות אם הוא אזרח, גם אם השrieve יורה.

רשמו את המשחק בצורה רחבה ובצורה אסטרטגית.

פתרונות:

נקרא לחשוד שחקן I ונקרא לשrieve שחקן II. השrieve מייחס הסתברות p לכך שהחשוד הוא מטיפוס "פושע" והסתברות $1 - p$ שהחשוד מטיפוס "ازרח".

שני השחקנים מודעים להסתברות זו.

משחק זה מוגדר על ידי

$$G = \{N, (A_1, A_2), (T_1, T_2), (p_1, p_2), (u_1, u_2)\}$$

- כאשר קבוצת השחקנים הינה

$$N = \{I, II\} = \{\text{שריף, חמוד}\} .$$

- קבוצת הפעולות הן

$$A_1 = \{a_1^1, a_1^2\} = \{\text{לא לירות, לירות}\} , \quad A_2 = \{a_2^1, a_2^2\} = \{\text{לא לירות, לירות}\} .$$

- הטיפוסים הינם

$$T_{\text{חשוד}} = T_1 = \{t_1^1, t_1^2\} = \{\text{ازרח, פושע}\} , \quad T_{\text{שריף}} = T_2 = \{t_2\} .$$

- יש שתי אפשרויות לאמונה של שחקן II (השריף):

$$p_2 = P(t_1 = \text{פושע} | t_2) = p , \quad p_2 = P(t_1 = \text{ازרח} | t_2) = 1 - p .$$

- ההפונקציית התשלומים ניתנת בהצורה אסטרטגית למטרה:

		פושע = t_1	
שריף II		shoot	not shoot
חשוד I	shoot	0, 0	2, -2
	not shoot	-2, -1	-1, 1

		ازרח = t_2	
שריף II		shoot	not shoot
חשוד I	shoot	-3, -1	-1, -2
	not shoot	-2, -1	0, 0

הסטרטגייה של שחקן I (חשוד), לפי התיאור בשאלה, היא

$$s_1(t_1 = \text{פושע}), \quad \text{לא לירות} = (t_1 = \text{פושע}).$$

כעת נמצא את השווי משקל הביסיאני.

אם טיפoso של החשוד הוא "פושע", האסטרטגייה השולטת של החשוד היא "לא לירות".

אם טיפoso של החשוד הוא "ازרח", האסטרטגייה השולטת של החשוד היא "לא לירות".

לאחר סילוק של אסטרטגיות הנשלטות חזק, אם השrif יורה הוא קיבל תשלום 0 בהסתברות p – 1. כלומר תוחלת התשלום

של השrif היא $1 - p$.

אם השrif לא יורה הוא קיבל תשלום 2 – בהסתברות p ויקבל תשלום 0 בהסתברות p – 1. כלומר תוחלת התשלום

של השrif היא $2p$.

לפיכך השrif תמיד יורה אם

$$p - 1 > -2p \Rightarrow p > \frac{1}{3}.$$

הגדרה 7.3 שווי משקל נאש ביסיאני

נתון משחק ביסיאני:

$$G = \{(A_1, \dots, A_n), (T_1, \dots, T_n), (p_1, \dots, p_n), u_1, \dots, u_n\}.$$

: $t_i \in T_i$ הוא שווי משקל נאש ביסיאני אם לכל שחקן i ולכל טיפוס

$$\sum_{t_{-i} \in T_i} u_i(s_1^*(t_1), \dots, s_i^*(t_i), \dots, s_n^*(t_n)) P(t_{-i}|t_i) = \max_{a_i \in A_i} \sum_{t_{-i} \in T_i} u_i(s_1^*(t_1), \dots, a_i, \dots, s_n^*(t_n)) P(t_{-i}|t_i)$$

ז"א אף שחקן לא רוצה לשנות את האסטרטגייה שלו (שלה), גם אם השינוי הוא בפועל אחת בטיפוס אחד.

הגדרה 7.4 משחק שני שחקנים ביסיאני

הצורה הנורמלית של משחק ביסיאני 2 שחקנים היא

$$G = \{(A_1, A_2), (T_1, T_2), (p_1, p_2), u_1, u_2\}$$

כאשר

• A_1 קבוצות הפעולות לשחקן 1 ו- $A_2 = \{a_2, b_2, \dots\}$ קבוצות הפעולות לשחקן 2

• T_1 קבוצת ערכיים פרטיים של שחקן 1 ו- T_2 קבוצת ערכיים פרטיים של שחקן 2.

• p_1 מסמן את ההסתברות לפיקוחן 1, שהערך פרטיא של שחקן 2 הוא t_2 במידעה שהערך פרטיא של

הו t_1 :

$$p_1 = P(t_2|t_1)$$

וכן p_2 מסמן את ההסתברות לפי שחקן 2, שהערך פרט依 של שחקן 1 הוא t_1 בידיעת שהערך פרט依 שלו הוא t_2 :

$$p_2 = P(t_1|t_2)$$

- u_1 פונקציית התשלום של שחקן 1 שהיא פונקציה של הפעולות $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ והערך הפרט依 שלו $t_1 \in T_1$ שידוע רק לשחקן 1:
 $u_1(a_1, a_2, t_1)$

- u_2 פונקציית התשלום של שחקן 2 שהיא פונקציה של הפעולות $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ והערך הפרט依 שלו $t_2 \in T_2$ שידוע רק לשחקן 2:
 $u_2(a_1, a_2, t_2)$.

הגדרה 7.5 אסטרטגיה במשחק שני שחקנים בייסיאני

נתון משחק שני שחקנים בייסיאני:

$$G = \{(A_1, A_2), (T_1, T_2), (p_1, p_2), u_1, u_2\}.$$

אסטרטגיה לשחקן 1 היא פונקציה $s_1(t_1)$ של $t_1 \in T_1$ כך שלכל $t_1 \in T_1$ הפונקציה $s_1(t_1)$ נותנת פעולה $a_1 \in A_1$
 $s_1 : t_1 \mapsto a_1$.

וכן אסטרטגיה של שחקן 2 היא פונקציה $s_2(t_2)$ של $t_2 \in T_2$ כך שלכל $t_2 \in T_2$ הפונקציה $s_2(t_2)$ נותנת פעולה $a_2 \in A_2$
 $s_2 : t_2 \mapsto a_2$.

הגדרה 7.6 שיווי משקל נאש בייסיאני

נתון משחק שני שחקנים בייסיאני:

$$G = \{(A_1, A_2), (T_1, T_2), (p_1, p_2), u_1, u_2\}.$$

הוקטור אסטרטגיות (s_1^*, s_2^*) הוא שיווי משקל נאש בייסיאני אם

$$\sum_{t_2 \in T_2} u_1(s_1^*(t_1), s_2^*(t_2)) P(t_2|t_1) = \max_{a_1 \in A_1} \sum_{t_2 \in T_2} u_1(a_1, s_2^*(t_2)) P(t_2|t_1)$$

$$\sum_{t_1 \in T_1} u_2(s_1^*(t_1), s_2^*(t_2)) P(t_1|t_2) = \max_{a_2 \in A_2} \sum_{t_1 \in T_1} u_2(s_1^*(t_1), a_2) P(t_1|t_2)$$

דוגמה 7.3 (מלחמת המינים עם ידיעה לא שלמה)

זוג מתכנן בילוי למועדון שבת. האפשרויות העומדות לרשותם הן מסעדה (R) או צפיה במסעדה כדורגל, (F). הגבר (P) מעדיף צפיה במסעדה הכדורגל בעוד האישה (C) מעדיפה את המסעדה אך שניהם מעדיפים להיות ביחד גם אם הבילוי המשותף הוא הפחות עדיף בעיניהם.

אם מקבלת תשלום $t_c + 2$ אם שניהם הולכים למסעדה כאשר t_c ערך פרטי שידוע רק ל- Camilla ולא -Pete.

Pete מקבל תשלום $2 + t_p$ אם שניהם הולכים למשחק כדורגל כאשר t_p ערך פרטי שידוע רק ל- Pete ולא Camilla.

	Pete	Restaurant	Football
Camilla			
Restaurant	$2 + t_c, 1$	0, 0	
Football	0, 0		$1, 2 + t_p$

הערך הפרטי t_C מתפלג אחיד בתחום $[0, x]$ ו- t_P מתפלג אחיד בתחום $[0, x]$.

Camilla משחקת R אם t_C גדול מערך מסוים α , אחרת היא משחקת F .

Pete משחק F אם t_P גדול מערך מסוים β , אחרת הוא משחק R .

מצאו את הערכיהם של α ו- β עבורם הווקטור אסטרטגיות $(s_1^*, s_2^*) = (R, F)$ שיווי משקל נאש בייסיאני של המשחק.

פתרון:

	P	R	F
C			
R	$2 + t_c, 1$	0, 0	
F	0, 0		$1, 2 + t_p$

$$G = \{(A_C, A_P), (T_C, T_P), (p_C, p_P), u_C, u_P\}$$

t_P ו- t_C מתפלגים אחידה בתחום $[0, x]$ והם בלתי תלויים, לכן

$$p_C = P(t_C|t_P) = P(t_C), \quad p_P = P(t_P|t_C) = P(t_P).$$

$$A_C = \{\text{Restaurant, Football}\} = \{R, F\}, \quad A_P = \{\text{Restaurant, Football}\} = \{R, F\}.$$

. $\frac{\alpha}{x}$ משחקת R בהסתברות Camilla

. $\frac{\beta}{x}$ משחק F בהסתברות Pete

תשלום ל- Camilla אם היא משחקת R

$$u_1(s_1 = R) = \frac{\beta}{x} (2 + t_C) + \left(\frac{x - \beta}{x}\right) \cdot 0 = \frac{\beta}{x} (2 + t_C).$$

תשלום ל- Camilla אם היא משחקת F

$$u_1(s_1 = F) = \frac{\beta}{x} \cdot 0 + \left(\frac{x - \beta}{x}\right) \cdot 1 = \frac{1 - \beta}{x}.$$

$$u_1(s_1 = R) \geq u_1(s_1 = F) \Rightarrow \frac{\beta}{x} (2 + t_C) \geq \frac{x - \beta}{x} \Rightarrow t_C \geq \frac{x - \beta}{\beta} - 2 = \frac{x}{\beta} - 3 \stackrel{!}{=} \alpha .$$

תשלום ל- A אם הוא משחק R :

$$u_2(s_2 = R) = \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) \cdot 1 + \frac{\alpha}{x} \cdot 0 = 1 - \frac{\alpha}{x} .$$

תשלום ל- A אם הוא משחק F :

$$u_2(s_2 = F) = \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) \cdot 0 + \frac{\alpha}{x} (2 + t_P) = \frac{\alpha}{x} (2 + t_P) .$$

$$u_2(s_2 = F) \geq u_2(s_2 = R) \Rightarrow \frac{\alpha}{x} (2 + t_P) \geq 1 - \frac{\alpha}{x} \Rightarrow (2 + t_P) \geq \frac{x}{\alpha} - 1 \Rightarrow t_P \geq \frac{x}{\alpha} - 3 \stackrel{!}{=} \beta .$$

הפתרונות של המערכת הוא

$$\frac{x}{\left(\frac{x}{\beta} - 3\right)} - 3 = \beta \Rightarrow x - \frac{3x}{\beta} + 9 = x - 3\beta \Rightarrow -\frac{3x}{\beta} + 9 + 3\beta = 0 \Rightarrow -3x + 9\beta + 3\beta^2 = 0$$

$$\Rightarrow \beta^2 + 3\beta - x = 0 \Rightarrow \beta = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2} .$$

$$\text{לכן } \frac{x}{\alpha} - 3 = \beta$$

$$\alpha = \frac{x}{3 + \beta} = \frac{2x}{3 + \sqrt{9 + 4x}} = \frac{2x}{3 + \sqrt{9 + 4x}} \cdot \frac{(3 - \sqrt{9 + 4x})}{(3 - \sqrt{9 + 4x})} = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2} = \beta$$

לכן התשובה סופית היא האסטרטגיה $(s_1^*, s_2^*) = (R, F)$ שיווי משקל אם

$$t_C \geq \alpha = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2} , \quad t_P \geq \beta = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2} .$$



דוגמה 7.4 (מרכז מחיר ראשון)

במרכז מחיר ראשון שני שחקנים $1, 2 = i$ מתחרים על קניית מוצר מסוים. שחקן 1 מעריך שה מוצר שווה v_1 ושהקן 2 מעריך כי המוצר שווה v_2 . ז"א אם שחקן i מנצח ומשלם מחיר p או הרווח שלו יהיה $p - v_i$. הערכות של השני שחקנים הם בלתי תלויים ומפולגים אחד בתחום $[0, 1]$. השחקן עם ההצעה הגבוהה ביותר מנצח ומשלם את מחיר שווה להצעה שלו. השחקן השני לא משלם כלום. במקרה של תיקו מטילים מטבע. השחקנים אדישים טיכון.

פתרון:

$$G = \{(A_1, A_2), (T_1, T_2), (p_1, p_2), u_1, u_2\}$$

קבוצת הפעולות של שחקן 1 היא ההצעות האפשרות שלו, $b_1 \in [0, \infty)$, וקבוצת הפעולות של שחקן 2 היא ההצעות האפשרות שלו $b_2 \in [0, \infty)$

$$A_1 = [0, \infty) , \quad A_2 = [0, \infty) .$$

הקבוצה T_1 של ערכיהם פרטיים של שחקן 1 היא הקבוצה של הערכות $v_1 \in [0, 1]$ של המוצר שלו, כמו כן T_2 הוא הקבוצה של הערכות $v_2 \in [0, 1]$.

$$T_1 = [0, 1] , \quad T_2 = [0, 1] .$$

השתי הערכות v_1, v_2 בלתי תלויות לנכון $p_1 = P(v_2 = \beta | v_1 = \alpha) = P(v_2 = \beta) = \beta$ $\text{ז"א שחקן } 1 \text{ מאמין כי}$
 $p_2 = P(v_1 = \alpha | v_2 = \beta) = P(v_1 = \alpha) = \alpha$. ולהפוך, β בנסיבות v_1 קשור לערך של v_2 . $\text{ולחץ, שחקן } 2 \text{ מאמין כי}$
 α בנסיבות v_2 קשור לערך של v_1 .

$$u_1(b_1, b_2, v_1, v_2) = \begin{cases} v_1 - b_1 & b_1 > b_2 \\ \frac{v_1 - b_1}{2} & b_1 = b_2 \\ 0 & b_1 < b_2 \end{cases}, \quad u_2(b_1, b_2, v_1, v_2) = \begin{cases} v_2 - b_2 & b_2 > b_1 \\ \frac{v_2 - b_2}{2} & b_2 = b_1 \\ 0 & b_2 < b_1 \end{cases},$$

הוקטור אסטרטגיות $(b_1^*(v_1), b_2^*(v_2))$ שיווי משקל נאש בייסיאני אם

$$u_1(b_1^*, b_2^*, v_1, v_2) = \max_{b_1} \left[(v_1 - b_1) P(b_1 > b_2^*(v_2)) + \frac{1}{2} (v_1 - b_1) P(b_1 = b_2^*(v_2)) \right]$$

$$u_2(b_1^*, b_2^*, v_1, v_2) = \max_{b_2} \left[(v_2 - b_2) P(b_2 > b_1^*(v_1)) + \frac{1}{2} (v_2 - b_2) P(b_2 = b_1^*(v_1)) \right]$$

אנחנו משערים כי קיים שיווי משקל לינארי:

$$b_1^*(v_1) = a_1 + c_1 v_1, \quad b_2^*(v_2) = a_2 + c_2 v_2.$$

נניח כי שחקן 2 בוחר באסטרטגיה v_2 , אז עבור הערך $b_2^*(v_2) = a_2 + c_2 v_2$, תשובה טובה ביותר לשחקן 1 מקיימת

$$\begin{aligned} u_1(b_1^*, b_2^*, v_1, v_2) &= \max_{b_1} \left[(v_1 - b_1) P(b_1 > a_2 + c_2 v_2) + \frac{1}{2} (v_1 - b_1) P(b_1 = a_2 + c_2 v_2) \right] \\ &= \max_{b_1} (v_1 - b_1) P\left(v_2 < \frac{b_1 - a_2}{c_2}\right) \\ &= \max_{b_1} (v_1 - b_1) \left(\frac{b_1 - a_2}{c_2}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial b_1} \left(\frac{1}{c_2} (v_1 - b_1) (b_1 - a_2) \right) = \frac{v_1 + a_2 - 2b_1}{c_2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow b_1^* = \frac{v_1 + a_2}{2}$$

נניח כי שחקן 1 בוחר באסטרטגיה v_1 , אז עבור הערך $b_1^*(v_1) = a_1 + c_1 v_1$, תשובה טובה ביותר לשחקן 2 מקיימת

$$\begin{aligned} u_2(b_1^*, b_2^*, v_1, v_2) &= \max_{b_2} \left[(v_2 - b_2) P(b_2 > a_1 + c_1 v_1) + \frac{1}{2} (v_2 - b_2) P(b_2 = a_1 + c_1 v_1) \right] \\ &= \max_{b_2} (v_2 - b_2) P\left(v_1 < \frac{b_2 - a_1}{c_1}\right) \\ &= \max_{b_2} (v_2 - b_2) \left(\frac{b_2 - a_1}{c_1}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial b_2} \left(\frac{1}{c_1} (v_2 - b_2) (b_2 - a_1) \right) = \frac{v_2 + a_1 - 2b_2}{c_1} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow b_2^* = \frac{v_2 + a_1}{2}$$

לכן

$$b_1^* = \frac{v_1}{2} + \frac{a_2}{2} = a_1 + c_1 v_1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{a_2}{2},$$

$$b_2^* = \frac{v_2}{2} + \frac{a_1}{2} = a_2 + c_2 v_2 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{a_1}{2}.$$

הפתרון למערכת זה היא

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 0.$$

לפיכך האסטרטגיות של שיווי משקל הן

$$b_1^*(v_1) = \frac{v_1}{2}, \quad b_2^*(v_2) = \frac{v_2}{2}.$$

■

דוגמה 7.5 (דו-אPOL עם ערכיהם פרטיים)

שני יצנים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתרחמים על שוק הקונים הפורטנציאליים. הייצנים מחליטים על הכמות שהם ייצורו, וההיצע הכלול קובע את מחיר המוצר, שהוא זהה לשני הייצנים. נסמן ב- q_1 וב- q_2 את הכמות שמייצרים הייצנים 1 ו- 2 בהתאם. אזי הכמות הכלולות של המוצרים בשוק הוא $q_1 + q_2$. נניח כי המחיר של יחידה שווה ל- $P = a - q_1 - q_2$ כאשר a פרמטר הביקוש. עלות הייצור של יחידה לייצן הראשון וליצן 2 הוא c .

הפרמטר הביקוש a שווה ל- a^H (ביקוש גבוה) או a^L (ביקוש נמוך). הערך של a ידוע לייצן הראשון אך אינה ידוע לייצן השני. כל שיצן זה יודע שהוא שפהפרמטר הביקוש שווה ל- a^L בהסתברות θ או a^H בהסתברות $1 - \theta$.

מה הם התנאים על a_H, a_L, θ ו- c כך ש- הכמות q_1, q_2 חיוביות בשוויי משקל.

מהו השוויי משקל נאש הביסיאני של המשחק?

פתרון:

כמות של יצן 1: q_1 . כמות של יצן 2: q_2 .

מחיר ליחידה אחת של המוצר: $P = a - q_1 - q_2$.

עלות ליחידה לשחקן 1 ולשחקן 2: $c = 1$.

פרמטר הביקוש לשחקן 1: $a = a^L$ או $a = a^H$ והוא ידוע לשחקן 1 ולא לשחקן 2.

עבור שחקן 2: $a = a^L$ בהסתברות θ ו- $a = a^H$ בהסתברות $1 - \theta$.

צורה ביסיאנית של המשחק:

$$N = \{1, 2\} \bullet$$

$$T_2 = \{1\}, T_1 = \{a^L, a^H\} \bullet$$

$$p_{II}(t_1 = a^L | t_2 = 1) = p_{II}(t_1 = a^L) = \theta \bullet$$

$$p_{II}(t_1 = a^H | t_2 = 1) = p_{II}(t_1 = a^H) = 1 - \theta \bullet$$

$$A_2 = \{q_2\}, A_1 = \{q_1^H, q_1^L\} \bullet$$

- פורניצית תשלום לשחקן 1:

$$u_1(s_1(t_1), s_2(t_2), t_1)$$

- פורניצית תשלום לשחקן 2:

$$u_2(s_1(t_1), s_2(t_2), t_2 = 1)$$

•

$$s_1(t = a^H) = q_1^H, \quad s_2(t_2 = a^L) = q_1^L, \quad s_2(t_2 = 1) = q_2.$$

לשחקן 1 אם $a = a^H$

$$u_1(s_1(t = a^H), s_2(t_2), t_1 = a^H) = u_1(q_1^H, q_2) = q_1^H(a - q_1^H - q_2 - c).$$

לשחקן 1 אם $a = a^L$

$$u_1(s_1(t = a^L), s_2(t_2), t_1 = a^L) = u_1(q_1^L, q_2) = q_1^L(a - q_1^L - q_2 - c).$$

לשחקן 2 בהסתברות θ $s_1(t_1 = a^H) = q_1^H$ ו θ $s_1(t_1 = q^L) = q_1^L$

$$u_2(s_1(t_1), s_2(t_2), t_2 = 1) = u_1(q_1^H, q_1^L, q_2) = q_2(\theta a^L + (1 - \theta)a^H - \theta q_1^L - (1 - \theta)q_1^H - q_2 - c)$$

$$\frac{\partial u_1(q_1^H, q_2)}{\partial q_1^H} = a - c - 2q_1^H - q_2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow q_1^{H*} = \frac{a_H - c - q_2}{2}.$$

$$\frac{\partial u_1(q_1^L, q_2)}{\partial q_1^L} = a - c - 2q_1^L - q_2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow q_1^{L*} = \frac{a_L - c - q_2}{2}.$$

$$\frac{\partial u_2(q_1^L, q_1^H, q_2)}{\partial q_2} = \theta a^L + (1 - \theta)a^H - \theta q_1^L - (1 - \theta)q_1^H - 2q_2 - c \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow q_2^* = \frac{\theta a^L + (1 - \theta)a^H - \theta q_1^L - (1 - \theta)q_1^H + c}{2}.$$

פתרונות למערכת זו הוא

$$q_2^* = \frac{\theta a_H + (1 - \theta)a_L - c}{3}$$

$$q_1^H = \frac{(3 - \theta)a_H - (1 - \theta)a_L - 2c}{6}$$

$$q_1^L = \frac{(2 + \theta)a_L - \theta a_H - 2c}{6}$$

התנאים עבורם $q_2 \geq 0$ הם

$$q_2 \geq 0 \Rightarrow \theta a_H + (1 - \theta)a_L - c \geq 0 \Rightarrow \theta \geq \frac{c - a_L}{a_H - a_L}.$$

$$q_1(a_L) \geq 0 \Rightarrow \frac{(2 + \theta)a_L - \theta a_H - 2c}{6} \geq 0 \Rightarrow \theta \leq \frac{2(c - a_L)}{a_H - a_L}.$$

$$q_1(a_H) \geq 0 \Rightarrow \frac{(3 - \theta)a_H - (1 - \theta)a_L - 2c}{6} \geq 0 \Rightarrow \theta \leq \frac{2c - 3a_H + a_L}{a_H - a_L}.$$

