

# שיעור 10

## המחלקה P והמחלקה NP

### 10.1 המחלקה P

#### הגדרה 10.1 בעיית הכרעה

בעיית הכרעה מוגדרת באופן הבא:

"בהינתן קלט כלשהו, האם הקלט מקיים תנאי מסויים ? "

#### דוגמה 10.1 דוגמה של בעיית הכרעה

לדוגמה, בהינתן מספר  $n$ , האם  $n$  ראשוני?

#### משפט 10.1 שקיות בין בעייה לשפה

כל בעייה הכרעה ניתן לתאר כשפה שקולה:

. בעיית הכרעה  $\equiv$  שפה

#### דוגמה 10.2

לדוגמה, הבעיית הכרעה הבאה:

"בהינתן מספר  $n$ , האם  $n$  ראשוני? "

ניתנת לרשום כשפה הבאה:

$$L_{\text{prime}} = \{ \langle n \rangle \mid n \text{ ראשוני} \}.$$

#### הגדרה 10.2 אלגוריתם זמן פולינומיאלי

אומרים כי אלגוריתם  $A$  מכריע בעייה בזמן פולינומיאלי אם קיים קבוע  $c > 0$  כך שזמן הריצה של  $A$  על קלט  $w$  חסום ע"י  $O(|w|^c)$ .

התזה של צרף' טיורינג אומר שאם קיים אלגוריתם המכריע בעייה בזמן פולינומיאלי, אזי קיימת מכונת טיורינג דטרמיניסטית המכריעה את השפה השקולה לבעייה זו בזמן פולינומיאלי.

. אלגוריתם מכריע  $\equiv$  מכונת טיורינג דטרמיניסטית

#### הגדרה 10.3 המחלקה P

המחלקה  $P$  היא אוסף כל הבעיות (השפות) שקיים עבורן אלגוריתם (מכונת טיורינג דטרמיניסטית) המכריע אותן בזמן פולינומיאלי.

## 10.2 דוגמאות לבעיות ב- $P$

(1)

$$PATH = \{ \langle G, s, t \rangle \mid t \text{ - ל- } s \text{ מסלול מ- } G \} \in P$$

(2)

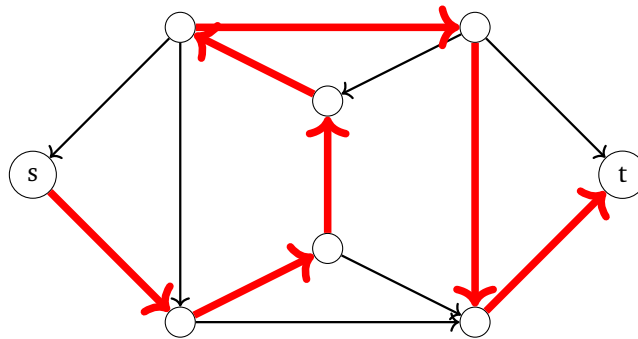
$$RELPRIME = \{ \langle x, y \rangle \mid x \text{ ו- } y \text{ זרים} \} \in P$$

## 10.3 בעיית המסלול ההמילטוני $HAMPATH$

### הגדרה 10.4 $HAMPATH$

בהינתן גרף מכוון  $G = (V, E)$  ושני קודקודים  $s, t \in V$ . מסלול ההמילטוני מ- $s$  ל- $t$  ב- $G$  הוא מסלול מ- $s$  ל- $t$  שעובר דרך כל קודקוד בגרף בדיוק פעם אחת.

לדוגמה:



### הגדרה 10.5 בעיית $HAMPATH$

קלט: גרף מכוון  $G = (V, E)$  ושני קודקודים  $s, t \in V$ .

פלט: האם  $G$  מכיל מסלול ההמילטוני מ- $s$  ל- $t$ ?

$$HAMPATH = \{ \langle G, s, t \rangle \mid t \text{ - ל- } s \text{ מסלול ההמילטוני מ- } G \}$$

נשאל שאלה: האם  $HAMPATH \in P$ ?

לא ידוע האם קיים אלגוריתם המכריע את  $HAMPATH$  בזמן פולינומיאלי (שאלה פתוחה).

• בהינתן קלט  $\langle G, s, t \rangle$ , האם  $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH$ ?

• נענה על שאלה אחרת:

בהינתן קלט  $\langle G, s, t \rangle$ , ומחרוזת  $y$ , האם  $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH$ ?

• יתן לבדוק האם  $y$  היא מסלול ההמילטוני מ- $s$  ל- $t$  ב- $G$  בזמן פולינומיאלי ולענות בהתאם.

• במקרה זה, אומרים כי  $HAMPATH$  ניתנת לאימות בזמן פולינומיאלי.

## 10.4 אלגוריתם אימות

### הגדרה 10.6 אלגוריתם אימות

אלגוריתם אימות עבור בעיית  $A$  הוא אלגוריתם  $V$  כך שלכל קלט  $w \in \Sigma^*$  מתקיים:

אם  $w \in A$  אז ורק אם קיימת מחרוזת (עדות)  $y$  באורך פולינומיאלי ב-  $|w|$  כך ש-  $V$  מקבל את הזוג  $(w, y)$  כלומר:

• אם  $w \in A \iff$  קיים  $y$  כך ש:  $V(w, y) = T$ .

• אם  $w \notin A \iff$  לכל  $y$  מתקיים  $V(w, y) = F$ .

### הערה 10.1

- זמן ריצה של אלגוריתם אימות נמדד ביחס לגודל הקלט  $|w|$ .
- אלגוריתם אימות פולינומיאלי אם הוא רץ בזמן פולינומיאלי.

## 10.5 המחלקה NP

### הגדרה 10.7 המחלקה NP

המחלקה NP היא אוסף כל הבעיות שקיים עבורן אלגוריתם אימות פולינומיאלי.

### משפט 10.2 $HAMPATH \in NP$

בעיית המסלול ההמילטוני  $HAMPATH$ :

קלט: גרף מכוון  $G = (V, E)$  ושני קודקודים  $s, t \in V$ .

פלט: האם  $G$  מכיל מסלול המילטוני מ-  $s$  ל-  $t$ ?

$$HAMPATH = \{ \langle G, s, t \rangle \mid \text{גרף מכוון המכיל מסלול המילטוני מ- } s \text{ ל- } t \}$$

הוכיחו כי  $HAMPATH \in NP$ .

**הוכחה:** נבנה אלגוריתם אימות  $V$  עבור  $HAMPATH$ .

$= V$  על קלט  $(\langle G, s, t \rangle, y)$ :

(1) בודק האם  $y$  היא סדרה של

$$u_1, u_2, \dots, u_n$$

השונים זה מזה.

• אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

(2) בודק האם  $u_1 = s$  ו-  $u_n = t$ .

• אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

(3) בודק שכל הצלעות  $(u_i, u_{i+1})$  (לכל  $1 \leq i \leq n$ ) קיימות ב-  $G$ .

• אם כן  $\Leftarrow$  מקבל.

• אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

נכונות

• זמן הריצה של האלגוריתם הוא פולינומיאלי בגודל הקלט.

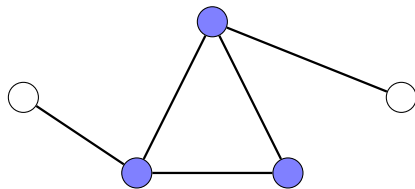
• אם  $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH \Leftarrow G$  מכיל מסלול המילטוני מ-  $s$  ל-  $t \Leftarrow$  עבור  $y$  שהוא קידוד של מסלול זה,  $V$  יקבל את הזוג  $(\langle G, s, t \rangle, y)$ .

• אם  $\langle G, s, t \rangle \notin HAMPATH \Leftarrow G$  לא מכיל מסלול המילטוני מ-  $s$  ל-  $t \Leftarrow$  לכל  $y$ , האלגוריתם ידחה את הזוג  $(\langle G, s, t \rangle, y)$ .

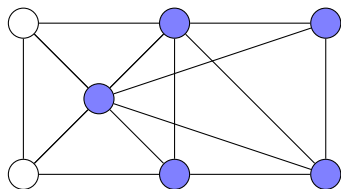
■

### הגדרה 10.8 קליקה

בהינתן גרף לא מכוון  $G = (V, E)$ , קליקה ב-  $G$  היא תת-קבוצה של קודקודים  $C \subseteq V$  כך שלכל שני קודקודים  $u, v \in C$  מתקיים  $(u, v) \in E$ .



קליקה בגודל  $k = 3$ :



קליקה בגודל  $k = 5$ :



### הגדרה 10.9 בעיית הקליקה

קלט: גרף לא מכוון  $G = (V, E)$  ומספר  $k$ .

פלט: האם  $G$  קליקה בגודל  $k$ ?

$$CLIQUE = \{ \langle G, k \rangle \mid k \text{ גודל קליקה בגודל } k \}$$

### משפט 10.3 $CLIQUE \in NP$

$$CLIQUE \in NP.$$

**הוכחה:** נבנה אלגוריתם אימות  $V$  עבור  $CLIQUE$ .

$$V = \text{על קלט } (\langle G, k \rangle, y)$$

(1) בודק האם  $y$  היא קבוצה של  $k$  קודקודים שונים מ- $G$ .

• אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

(2) בודק האם כל שני קודקודים מ- $y$  מחוברים בצלע ב- $G$ .

• אם כן  $\Leftarrow$  מקבל.

• אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

הגדרה 10.10 בעיית  $SubSetSum$ 

קלט: קבוצת מספרים  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ומספר  $t$ .

פלט: האם קיימת תת-קבוצה של  $S$  שסכום איבריה שווה  $t$ ?

$$SubSetSum = \left\{ \langle S, t \rangle \mid \sum_{x \in Y} x = t \text{ ש-} Y \subseteq S \text{ קיימת} \right\}$$

משפט 10.4  $SubSetSum \in NP$ 

$$SubSetSum \in NP.$$

הוכחה: נבנה אלגוריתם אימות  $V$  עבור  $SubSetSum$ .

$V = \text{על קלט } (\langle S, t \rangle, y)$ :

(1) בודק האם  $y$  היא תת-קבוצה של  $S$ .

• אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

(2) בודק האם סכום המספרים ב-  $y$  שווה  $t$ .

• אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

• אחרת  $\Leftarrow$  מקבל.

■

## 10.6 הקשר בין NP למכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

NP=Non-deterministic polynomial-time.

## משפט 10.5

לכל בעייה  $A$ :

$A \in NP$  אם ורק אם קיימת מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית המכריעה את  $A$  בזמן פולינומיאלי.

## דוגמה 10.3

נבנה מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית  $M$  המכריעה את  $CLIQUE$  בזמן פולינומיאלי.

$M = \text{על קלט } \langle G, k \rangle$ :

• בוחרת באופן אי-דטרמיניסטי קבוצה  $y$  של  $k$  קודקודים מ-  $G$ .

• בודקת האם כל שני קודקודים מ-  $y$  מחוברים בצלע ב-  $G$ .

\* אם כן  $\Leftarrow$  מקבלת.

\* אחרת  $\Leftarrow$  דוחה.

אלגוריתם אימות  $\equiv$  מ"ט א"ד.

## 10.7 הקשר בין המחלקה P ו-NP

$P =$  כל הבעיות שניתן להכריע בזמן פולינומיאלי.

$NP =$  כל הבעיות שניתן לאמת בזמן פולינומיאלי.

### משפט 10.6

$$P \subseteq NP.$$



שאלה פתוחה: האם  $P = NP$ ?

### משפט 10.7

$P$  סגורה תחת משלים.

הוכחה: אם  $A \in P$  אזי גם  $\bar{A} \in P$ .

### הגדרה 10.11 $CoNP$

$$CoNP = \{A \mid \bar{A} \in NP\}.$$

לדוגמה:

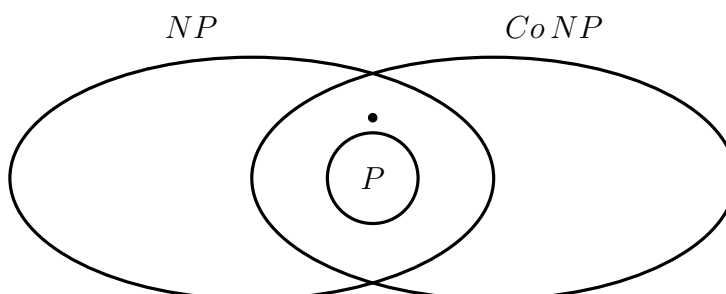
$$\overline{HAMPATH} \in CoNP.$$

$$\overline{CLIQUE} \in CoNP.$$

שאלה פתוחה: האם  $NP = CoNP$ ?

### משפט 10.8

$$P \subseteq NP \cap CoNP.$$



שאלה פתוחה: האם  $P = NP \cap CoNP$ ?

נדון בשאלה המרכזית: האם  $P = NP$ ?

**הגדרה 10.12 פונקציה פולינומיאלית**

בהינתן פונקציה  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ , אומרים כי  $f$  חשיבה בזמן פולינומיאלי אם קיים אלגוריתם (מ"ט דטרמיניסטי) המחשב את  $f$  בזמן פולינומיאלי.

**הגדרה 10.13 רדוקציה פולינומיאלית**

בהינתן שתי בעיות  $A$  ו- $B$ . אומרים כי  $A$  ניתנת לרדוקציה פולינומיאלית ל- $B$ , ומסמנים  $A \leq_P B$ , אם קיימת פונקציה  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  המקיימת:

(1) חשיבה בזמן פולינומיאלי

(2) לכל  $w \in \Sigma^*$ :

$$w \in A \iff f(w) \in B.$$

**משפט 10.9 משפט הרדוקציה**

לכל שתי בעיות  $A$  ו- $B$ , אם  $A \leq_P B$  אזי

(1) אם  $B \in P$  אזי  $A \in P$ .

(2) אם  $B \in NP$  אזי  $A \in NP$ .

מסקנה מ- (1) ו- (2):

(3) אם  $A \notin P$  אזי  $B \notin P$ .

(4) אם  $A \notin NP$  אזי  $B \notin NP$ .

**הוכחה:** מכיוון שקיימת רדוקציה  $A \leq_P B$ , קיימת פונקציה  $f$  חשיבה בזמן פולינומיאלי המקיימת, לכל  $w \in \Sigma^*$ ,

$$w \in A \iff f(w) \in B.$$

יהי  $M_f$  האלגוריתם שמחשבת את  $f$  בזמן פולינומיאלי.

(1) נוכיח כי אם  $B \in P$  אזי  $A \in P$ .

יהי  $M_B$  האלגוריתם שמכריע את  $B$  בזמן פולינומיאלי. נבנה אלגוריתם  $M_A$  המכריע את  $A$  בזמן פולינומיאלי.

התאור של  $M_A$

$M_A =$  על כל קלט  $w$ :

1. מחשב את  $f(w)$  ע"י  $M_f$ .

2. מריץ את  $M_B$  על  $f(w)$  ועונה כמוה.

נוכיח כי  $M_A$  מכריע את  $A$  בזמן פולינומיאלי:

- אם  $w \in A$   $\iff f(w) \in B \iff M_B$  מקבל את  $f(w)$   $\iff M_A$  מקבל את  $w$ .
- אם  $w \notin A$   $\iff f(w) \notin B \iff M_B$  דוחה את  $f(w)$   $\iff M_A$  דוחה את  $w$ .

נוכיח כי זמן הריצה של  $M_A$  הוא פולינומיאלי בגודל הקלט  $|w|$  בזמן פולינומיאלי:



- נסמן ב-  $P_f$  את הפולינום של  $M_f$ .
- נסמן ב-  $P_B$  את הפולינום של  $M_B$ .

זמן הריצה של  $M_A$  על קלט  $w$  שווה

$$P_f(|w|) + P_B(|f(w)|)$$

מכיוו ש-  $|f(w)| \leq P_f(|w|)$ , זמו הריצה של  $M_A$  על  $w$  חסום ע"י

$$P_f(|w|) + P_B(P_f(|w|)) = P_f(|w|) + (P_B \circ P_f)(|w|)$$

כאשר  $P_B \circ P_f$  מסמן את ההרכבה של שני פולינומים. לכן  $M_A$  רץ בזמן פולינומיאלי בגודל  $|w|$ .

