המחלקה למדעי המחשב

י' באייר תשפ"ה 08/05/2025
09 : 10 – 10 : 40

אלגברה לינארית 2 למדמ"ח

בוחן אמצע סמסטר

מרצים: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר .

תשפ"ה סמסטר ב'

השאלון מכיל 2 עמודים (כולל עמוד זה).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (0 עמודים בפורמט $A4$) מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לענות על כל השאלות 1-3.

==

שאלה 1 (40 נקודות)

א) (25 נק') נתונה הקבוצה של וקטורים $\{x\ ,\ 1-2x\ ,\ 1+x^2\}$ של המרחב וקטורי $\mathbb{R}_2[x]$ עם המכפלה פנימית אינטגרלית בקטע $[-1,1]$:

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx\ .$$

מצאו בסיס אורתוגונלי של הקבוצה.

ב) (15 נק') הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענה הבאה:
הנוסחה הבאה

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\ x^{2k+1}\,dx$$

כאשר k מספר טבעי, לכל $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ פולינומים, מהווה מכפלה פנימית במרחב של הפולינומים.

שאלה 2 (40 נקודות)

א) (14 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ המטריצה הבאה $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
האם A לכסינה? במידה שכן מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

ב) (16 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ המטריצה הבאה $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
מצאו את ערכי הפרמטרים a, b, c, d עבורם $A^{-1} = aI + bA + cA^2 + dA^3$.

ג) (10 נק') תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$. הוכיחו כי λ ערך עצמי של AB אם ורק אם λ ערך עצמי של BA.

שאלה 3 (20 נקודות)

א) (10 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה לכסינה שכל הערכים העצמיים שלה אי שליליים. הוכיחו שקיימת מטריצה $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש- $B^2 = A$.

ב) (10 נק') הוכיחו או הפריכו: תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות לכסינות. אזי $A + B$ לכסינה.

פתרונות

שאלה 1

א) (25 נק') נסמן

$$\mathrm{v}_1 = x \ , \quad \mathrm{v}_2 = 1-2x \ , \quad \mathrm{v}_3 = 1+x^2 \ .$$

ראשית נבדוק איזה מהוקטורים מהווים בסיס של $\mathrm{span}\left\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3\right\}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות במטריצה המדורגת לכן כל הוקטורים $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3$ מהווים בסיס של $\mathrm{span}\left\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3\right\}$.

נממש התהליך של גרם שמידט כדי לגזור בסיס אורתוגונלי:

שלב 1)

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = x \ .$$

שלב 2)

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 \ .$$

נחשב את המכפלה הפנימית $\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle$ לפי הנוסחה להמכפלה הפנימית הנתונה:

$$\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle = \int_{-1}^{1} x(1-2x)dx = \int_{-1}^{1}\left(x-2x^2\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{-4}{3} \ .$$

נחשב את המכפלה הפנימית $\|u_1\|^2 = \langle u_1,u_1\rangle$:

$$\|u_1\|^2 = \langle u_1,u_1\rangle = \int_{-1}^{1} x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \ .$$

לכן

$$u_2 = 1-2x-\frac{\left(-\frac{4}{3}\right)}{\frac{2}{3}}x = 1-2x+2x = 1 \ .$$

שלב 3)

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 \ .$$

ראשית נחשב את המכפלה הפנימית $\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle$ לפי הנוסחה להמכפלה הפנימית הנתונה:

$$\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle = \int_{-1}^{1}(1+x^2)xdx = \int_{-1}^{1}\left(x+x^3\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0 \ ,$$

ונחשב את המכפלה הפנימית $\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle$:

$$\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle = \int_{-1}^{1}(1+x^2)(1)dx = \int_{-1}^{1}\left(1+x^2\right)dx = \left[x+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}\ .$$

הנורמה $\|u_2\|^2 = \int_{-1}^{1}(1)^2 dx = 2$ לכן

$$u_3 = 1+x^2-\frac{0}{\left(\frac{2}{3}\right)}x-\frac{\left(\frac{8}{3}\right)}{2}(1) = 1+x^2-\frac{4}{3} = \frac{-1}{3}+x^2\ .$$

ב) (15 נק') הנוסחה אינה מכפלה פנימית. נקח לדוגמה את הדוגמה נגדית $p(x)=q(x)=1$ ו- $k=1$. הרי

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1}(1)(1)x^3 = 0$$

ז"א קיבלנו ש- $\langle p(x), p(x)\rangle = 0$ אך $p(x)\neq 0$ בסתירה לתכונת החיוביות של המכפלה הפנימית.

שאלה 2

א) (14 נק') הפולינום האופייני של A הוא:

$$\begin{aligned}
p_A(x) = |xI-A| &= \begin{vmatrix} x-3 & 2 & -1 \\ -4 & x+3 & -2 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}\\
&=(x-1)\begin{vmatrix} x-3 & 2 \\ -4 & x+3 \end{vmatrix}\\
&=(x-1)\left((x-3)(x+3)+8\right)\\
&=(x-1)\left(x^2-1\right)\\
&=(x-1)(x-1)(x+1)\ .
\end{aligned}$$

הערכים העצמיים של A הם:

$$\begin{aligned}
\lambda = 1: &\quad \mathrm{alg}(\lambda=1)=2\\
\lambda = -1: &\quad \mathrm{alg}(\lambda=-1)=1
\end{aligned}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda = 1$</u>

$$\mathrm{Nul}\,(A-I) = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הפתרון ההומוגני הוא $(x,y,z)=\left(y-\frac{1}{2}z,y,z\right)=(1,1,0)\,y+\left(-\frac{1}{2},0,1\right)$. לכן

$$V_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

ו- $\text{geo}(\lambda=1)=2$.

<u>מרחב עצמי של $\lambda=-1$</u>

$$\text{Nul}\,(A+I)=\text{Nul}\begin{pmatrix}4&-2&1\\4&-2&2\\0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}4&-2&1\\0&0&2\\0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\begin{pmatrix}4&-2&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{2}R_2}\begin{pmatrix}4&-2&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\begin{pmatrix}4&-2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{2}R_1}\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

הפתרון ההומוגני הוא $(x,y,z)=\left(\frac{1}{2}y,y,0\right)=\left(\frac{1}{2},1,0\right)y$. לכן

$$V_{-1}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ו- $\text{geo}(\lambda=-1)=1$.

$$\text{geo}(\lambda=1)=2=\text{alg}(\lambda=1)\ ,\quad \text{geo}(\lambda=-1)=2=\text{alg}(\lambda=-1)\ .$$

כלומר הריבוי אלגברי שווה להריבוי גאומטרי לכל ערך עצמי של A לכן A לכסינה.

$$A=PDP^{-1}\ ,\quad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\ ,\quad P=\begin{pmatrix}|&|&|\\u_1&u_1'&u_{-1}\\|&|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}\ .$$

ב) (16 נק') נשים לב כי A מטריצה מושלית ולכן הערכים העצמיים שלה היא האיברים שעל האלכסון. לפיכך הפולינום האופייני של A הוא:

$$p_A(x)=(x-2)(x-3)(x+2)(x+3)=(x^2-4)(x^2-9)=x^4-13x^2+36\ .$$

לפי משפט קיילי-המילטון $p_A(A)=0$. לכן

$$A^4-13A^2+36I=0\quad\Rightarrow\quad\frac{-1}{36}A^4+\frac{13}{36}A^2=I\quad\Rightarrow\quad A\left(\frac{-1}{36}A^3+\frac{13}{36}A\right)=I\quad\Rightarrow\quad A^{-1}=\frac{-1}{36}A^3+\frac{13}{36}A$$

לכן $a=0,b=\frac{13}{36},c=0,d=\frac{-1}{36}$.

ג) (10 נק')
נניח כי $\lambda \neq 0$ ערך עצמי של AB.
ז"א $\exists$ וקטור עצמי u של AB שמקיים
$$ABu = \lambda u \ .$$
נכפיל את המשוואה הזו מצד ימין ב- B:
$$BABu = \lambda Bu \quad \Rightarrow \quad (BA)\,Bu = \lambda Bu \quad \Rightarrow \quad BAw = \lambda w$$
כאשר $w := Bu$.
אם $w \neq 0$ אזי λ הוא ערך עצמי של BA.
נשאר להוכיח כי $w \neq 0$.

נניח בשלילה כי $w = 0 \Leftarrow Bu = 0 \Leftarrow ABu = 0 \Leftarrow ABu = 0 \cdot u \Leftarrow u$ וקטור עצמי של AB ששייך לערך עצמי 0, בסתירה לכך ש- u שייך לערך עצמי $\lambda \neq 0$.

שאלה 3

א) (10 נק')
A לכסינה וכל הערכים עצמיים אי-שליליים לכן $\exists$ P הפיכה ו- $D = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \quad \cdots \quad, \lambda_n\right)$ אלכסונית כאשר $\lambda_i \geq 0$ כך ש- $A = PDP^{-1}$.
מאחר ו- $\lambda_i \geq 0$ אזי קיים $D' = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \quad \cdots \quad, \sqrt{\lambda_n}\right)$ אלכסונית עבורה $D = D'^2$.
לכן
$$A = PDP^{-1} = PD'D'P^{-1} = PD'P^{-1}PD'P^{-1} \ .$$
נגדיר $B := PD'P^{-1}$ ואז נקבל $A = B^2$.

ב) (10 נק')
הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
A ו- B לכסינות.
$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
לא לכסינה.