1 דוגמא. אוטובוס מגיע לתחנה כל 30 דקות. בר מגיעה לתחנה באקראי, מבלי לתכנן מראש ומבלי לבדוק את לוחות הזמנים של האוטובוס. נסמן ב-T את זמן ההמתנה המדוייק לאוטובוס, בדקות. רשמו את פונקצית ההתפלגות המצטברת ואת פונקצית הצפיפות של T. חשבו את ההסתברויות

$$P(20 \leq T \leq 40)$$

ו-

$$P(T > 23)\ .$$

ענו שוב על השאלה עבור אוטובוס המגיע כל 40 דקות.

פיתרון. במקרה הנוכחי, זמן ההמתנה הוא אחיד משום שמועד ההגעה של בר הוא אחיד בזמן לכן,

$$F_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t}{30}, & 0 \leq t \leq 30, \\ 1, & t \geq 30, \end{cases}$$

$$f_T(t) = F_T'(t) = \begin{cases} \frac{1}{30}, & 0 \leq t \leq 30, \\ 0, & \text{אחרת}, \end{cases}$$

$$P(20 \leq T \leq 40) = F_T(40) - F_T(20) = 1 - \frac{20}{30} = \frac{1}{3},$$

$$P(T > 23) = 1 - P(T \leq 23) = 1 - F_T(23) = 1 - \frac{23}{30} = \frac{7}{30}.$$

עבור אוטובוס המגיע כל 40 דקות נקבל

$$F_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t}{40}, & 0 \leq t \leq 40, \\ 1, & t \geq 40, \end{cases}$$

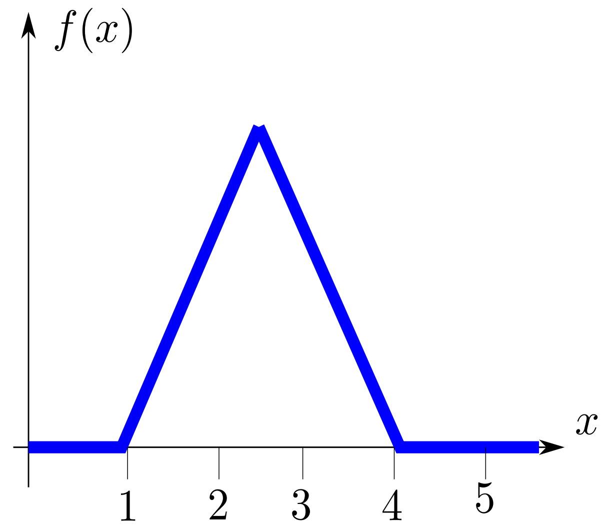
$$, f_T(t) = F_T'(t) = \begin{cases} \frac{1}{40}, & 0 \leq t \leq 40, \\ 0, & \text{אחרת}, \end{cases}$$

$$, P(20 \leq T \leq 40) = F_T(40) - F_T(20) = 1 - \frac{20}{40} = \frac{1}{2},$$

$$, P(T > 23) = 1 - P(T \leq 23) = 1 - F_T(23) = 1 - \frac{23}{40} = \frac{17}{40}.$$

■

2 דוגמא. מכונה במפעל ברגים אמורה לייצר ברגים בקוטר 3 מ"מ. בפועל, קוטר הברגים אינו מדויק והצפיפות שלו נתונה על ידי איור להלן אשר מראה את צפיפות קוטר הברגים.



רשמו במדויק את פונקצית הצפיפות. מה ההסתברות שקוטר בורג יעלה על 3 מ"מ? על 4 מ"מ?

פיתרון. יש צורך למצוא את פונקצית הצפיפות בצורה מדוייקת. נשתמש תחילה בתנאי הנרמול. אנחנו יודעים כי השטח שבין הגרף לציר x שווה ל-1 כי כלל השטח מייצג את כל ההסתברות,

$$\int_1^5 f_X(x)\,dx = P(1 \le X \le 5) = 1.$$

נשתמש בנוסחה לשטח משולש (שטח משולש שווה למכפלת הבסיס בחצי הגובה) ונקבל שגובה המשולש h מקיים

$$\frac{4h}{2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad h = 0.5\ .$$

עם כן, יש לנו את הנקודות

$$(1,0), \quad (5,0), \quad (3,0.5)\ .$$

ונוכל למצוא את משוואות הקווים בהתאם. לכן הצפיפות נתונה על ידי

$$, f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 \le x \le 3, \\ -\frac{1}{4}(x-5), & 3 \le x \le 5, \\ 0, & x > 5. \end{cases}$$

בעזרת הצפיפות נוכל לחשב ישירות את ההסתברויות המבוקשות.

$$P(X > 3) = \int_3^5 \left(-\frac{1}{4}(x-5)\right)dx \quad = -\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_3^5 = \frac{1}{2},$$
$$P(X > 4) = \int_4^5 \left(-\frac{1}{4}(x-5)\right)dx \quad = -\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_4^5 = \frac{1}{8}.$$

■

3 דוגמא. לדוגמה, נגיד שמוקד שרות פתוח בין השעות $18:00$ עד $22:00$, כלומר לאורך זמן של 240 דקות.
ההסתברות ששיחה התקבלה בין $18:05$ עד $18:10$, כלומר תוך 5 דקות כלשהן, כאשר $\lambda = \frac{1}{12}$, היא

$$P(18:05 – 18:10) = P(X = 5) = \int_0^5 f_X(x)dx = \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x}dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^5 = 1 - e^{-5\lambda} = 1 - e^{-5/12} = 0.34.$$

ההסתברות ששיחה אחת תגיע תוך 15 דקות היא

$$P(X = 15) = \int_0^{15} f_X(x)dx = \int_0^{15} \lambda e^{-\lambda x}dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{15} = 1 - e^{-15\lambda} = 1 - e^{-15/12} = 0.71.$$

4 דוגמא. ההסתברות אשר השיחה הראשונה תגיע בין הדקה השנייה לבין הדקה הרביעית היא

$$P(2 \le X \le 4) = F_X(4) - F_X(2) = 1 - e^{-4/12} - (1 - e^{-2/12}) = 0.13\ .$$

5 דוגמא. בהנחה שבחמש הדקות הראשונות לא התקבל שיחה, ההסתברות שנמתין לפחות עוד דקה עד לשיחה הראשונה ניתנת ע"י

$$P(X > 5+1 | X > 5) = \frac{P(X > 6 \cap X > 5)}{P(X > 5)} = \frac{P(X > 6)}{P(X > 5)} = \frac{1 - F_X(6)}{1 - F_X(5)} = \frac{e^{-6/12}}{e^{-5/12}} = e^{-1/12} = P(X > 1).$$

6 דוגמא. מספר טיפות הגשם הנופלות ביחידת שטח נתונה מתפלגות על פי התפלגות פואסון. ניקח מטר אחד ונניח כי בממוצע נפלו לאורכו 10 טיפות:

$\lambda = 10$ טיפות למטר .

המרחק X (במטרים) בין טיפות מתפלג פואסונית

$$X \sim \exp(\lambda = 10).$$

ההסתברות שטיפה אחד תיפול לתוך 10 ס"מ (0.1 [m]) כלשהו היא

$$P(X \le 2) = F_X(20) = 1 - e^{-0.1\lambda} = 1 - e^{-1} = 0.63\ .$$