מחלקה למדעי המחשב

$20/09/24$ י"ז באלול תשפ"ד
$08:30 - 11:30$

תורת המשחקים

מועד ב'

מרצה: ד"ר ירמיהו מילר

תשפ"ד סמסטר ב'

השאלון מכיל 7 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

===

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (3 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

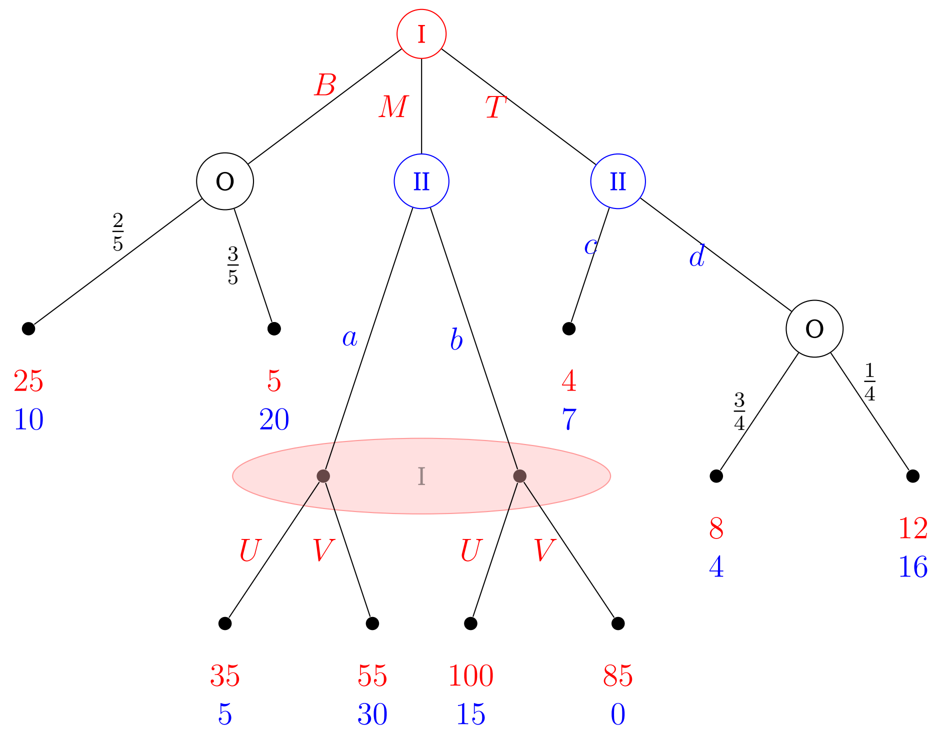
אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.

===

שאלה 1 (25 נקודות)

מצאו את כל שיווי המשקל של המשחק הבא:



שאלה 2 (25 נקודות)

א) (15 נקודות)

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס.
הצורה האסטרטגית של המשחק נתונה בטבלה הבאה:

$I \backslash II$	L	R
T	2	50
B	100	18

חשבו את הערך של המשחק וחשבו את התשלום האופטימלי לכל שחקן במשחק הזה.

ב) (10 נקודות)

הערך של משחק שני שחקנים סכום אפס הנתון על ידי מטריצה A הוא 0.
הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:
הערך של משחק שני שחקנים סכום אפס הנתון על ידי המטריצה $-A$ הוא 0.

שאלה 3 (25 נקודות)

א) (15 נקודות)

נתון משחק שני שחקנים.
תהי S_1 קבוצת האסטרטגיות של שחקן I, ותהי S_2 קבוצת האסטרטגיות של שחקן II.
תהיינה $u_1(s_1,s_2)$ ו- $u_2(s_1,s_2)$ הפונקציות תשלום של שחקן I ושחקן II בהתאמה, כאשר $s_1 \in S_1$ אסטרטגיה של שחקן I ו- $s_2 \in S_2$ אסטרטגיה של שחקן II.
משחק שני שחקנים נקרא סימטרי אם השני תנאים הבאים מתקיימים:

1) הקבוצות אסטרטגיות של שני השחקנים זהות, ז"א

$$S_1 = S_2 \ .$$

2) הפונקציות תשלום מקיימות את התנאי

$$u_1(s_1,s_2) = u_2(s_2,s_1) \ .$$

לכל $s_1 \in S_1$ ולכל $s_2 \in S_2$.

הוכיחו את הטענה הבאה:
אם הווקטור אסטרטגיות $(s_1 = s_1^*, s_2 = s_2^*)$ שיווי משקל אז הווקטור אסטרטגיות $(s_1 = s_2^*, s_2 = s_1^*)$ שיווי משקל.

ב) (10 נקודות)

תהיינה A ו- B שתי מטריצות שונות עם תשלומים חיוביים (בעלות ממדים סופיים).

	שחקן II	
שחקן I	A	0
	0	B

הוכיחו כי למשחק לא קיים ערך.

שאלה 4 (25 נקודות)

שני יצרניים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאלים. יהי q_1 כמות המוצר שיצרן 1 מייצר ו- q_2 כמות המוצר שיצרן 2 מייצר. שחקן 1 בוחר את המחיר של המוצר שלו להיות p_1 ליחידה, ושחקן 2 בוחר את המחיר של המוצר שלו להיות p_2 ליחידה. הכמות q_1 ששחקן 1 צריך לייצר נקבע על ידי הפונקציה

$$q_1 = a - p_1 + bp_2$$

כאשר $b > 0$ והכמות q_2 ששחקן 2 צריך לייצר נקבע על ידי הפונקציה

$$q_2 = a - p_2 + bp_1 \ .$$

מצאו את השיווי משקל של המשחק.

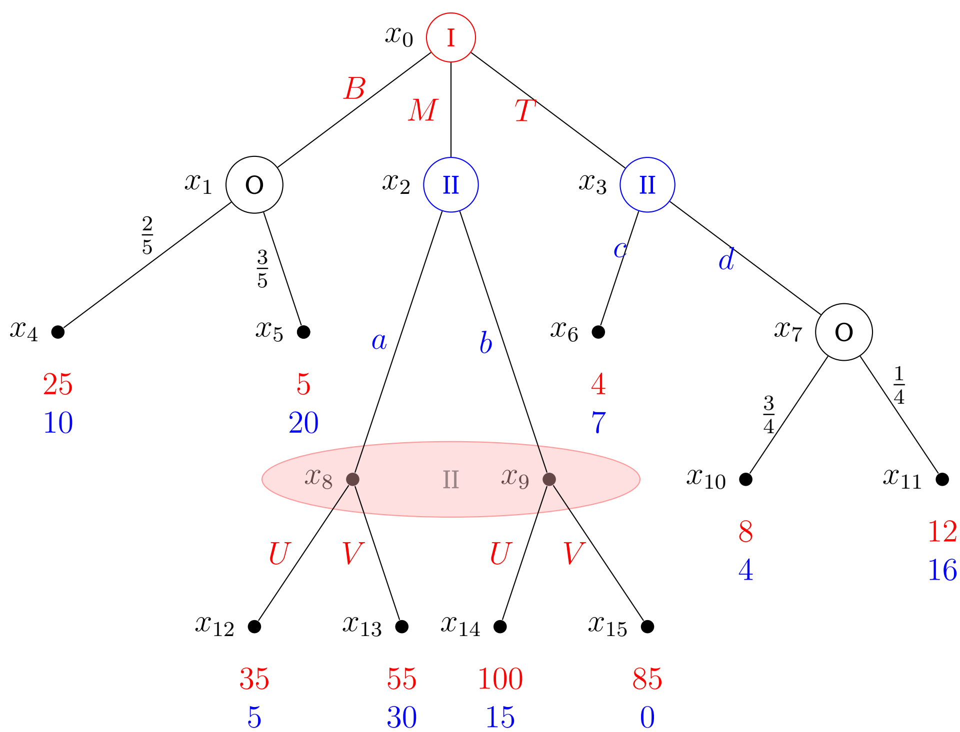
שאלה 5 **(25 נקודות)**

שני יצרנים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאלים. היצרנים מחליטים על הכמות שהם ייצרו, וההיצע הכולל קובע את מחיר המוצר, שהוא זהה לשני היצרנים. נסמן ב- q_1 וב- q_2 את הכמויות שמיצרים היצרנים 1 ו- 2 בהתאמה. אזי הכמות הכוללת של המוצרים בשוק הוא q_1+q_2. נניח כי המחיר של יחידה שווה ל- $P=a-q_1-q_2$ כאשר $a=2$ פרמטר הביקוש. עלות הייצור של יחידה ליצרן הראשון הוא ידיעה משותפת בין שני היצרנים ושווה ל- $c_1=1$. עלות הייצור של יחידה ליצרן השני ידועה ליצרן השני אך אינה ידועה ליצרן הראשון. כל שיצרן זה יודע הוא שהעלות שווה ל- $c_2^L=\frac{1}{4}$ (עלות יצור נמוך) בהסתברות $\theta=\frac{1}{3}$ או $c_2^H=\frac{7}{4}$ (עלות יצור גבוהה) בהסתברות $1-\theta=\frac{2}{3}$.

האם קיים שיווי משקל בייסיאני במשחק זה? אם כן, מה הוא?

פתרונות

שאלה 1 (25 נקודות)



קבוצות ידיעה של שחקן I:

$$x_0 : \ (B, M, T) \ , \qquad x_8 x_9 : \ (U, V) \ .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I = (B/U, \ B/V, \ M/U, \ M/V, \ T/U, \ T/V) \ .$$

קבוצות ידיעה של שחקן II:

$$x_2 : \ (a, b) \ , \qquad x_3 : \ (c, d) \ .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן II:

$$S_{II} = (a/c, \ a/d, \ b/c, \ b/d) \ .$$

$\begin{smallmatrix} & II \\ I & \end{smallmatrix}$	a/c	a/d	b/c	b/d
B/U	$\frac{2}{5}(25,10)+\frac{3}{5}(5,20)$	$\frac{2}{5}(25,10)+\frac{3}{5}(5,20)$	$\frac{2}{5}(25,10)+\frac{3}{5}(5,20)$	$\frac{2}{5}(25,10)+\frac{3}{5}(5,20)$
B/V	$\frac{2}{5}(25,10)+\frac{3}{5}(5,20)$	$\frac{2}{5}(25,10)+\frac{3}{5}(5,20)$	$\frac{2}{5}(25,10)+\frac{3}{5}(5,20)$	$\frac{2}{5}(25,10)+\frac{3}{5}(5,20)$
M/U	$35,5$	$35,5$	$100,15$	$100,15$
M/V	$55,30$	$55,30$	$85,0$	$85,0$
T/U	$4,7$	$\frac{3}{4}(8,4)+\frac{1}{4}(12,16)$	$4,7$	$\frac{3}{4}(8,4)+\frac{1}{4}(12,16)$
T/V	$4,7$	$\frac{3}{4}(8,4)+\frac{1}{4}(12,16)$	$4,7$	$\frac{3}{4}(8,4)+\frac{1}{4}(12,16)$

$\begin{smallmatrix} & II \\ I & \end{smallmatrix}$	a/c	a/d	b/c	b/d
B/U	$13,16$	$13,16$	$13,16$	$13,16$
B/V	$13,16$	$13,16$	$13,16$	$13,16$
M/U	$35,5$	$35,5$	$100,15$	$100,15$
M/V	$55,30$	$55,30$	$85,0$	$85,0$
T/U	$4,7$	$9,7$	$4,7$	$9,7$
T/V	$4,7$	$9,7$	$4,7$	$9,7$

$\begin{smallmatrix} & II \\ I & \end{smallmatrix}$	a/c	a/d	b/c	b/d
B/U	$13,\underline{16}$	$13,\underline{16}$	$13,\underline{16}$	$13,\underline{16}$
B/V	$13,\underline{16}$	$13,\underline{16}$	$13,\underline{16}$	$13,\underline{16}$
M/U	$35,5$	$35,5$	$\underline{100},\underline{15}$	$\underline{100},\underline{15}$
M/V	$\underline{55},\underline{30}$	$\underline{55},\underline{30}$	$85,0$	$85,0$
T/U	$4,\underline{7}$	$9,\underline{7}$	$4,\underline{7}$	$9,\underline{7}$
T/V	$4,\underline{7}$	$9,\underline{7}$	$4,\underline{7}$	$9,\underline{7}$

שיווי משקל:

$$(M/U,b/c)\ ,\quad (M/U,b/d)\ ,\quad (M/V,a/c)\ ,\quad (M/V,a/d)\ .$$

שאלה 2 **(25 נקודות)**

א) (15 נקודות)

$I \backslash II$	L	R	$\min_{s_2} u$
T	2	50	2
B	100	18	18
$\max_{s_1} u$	100	50	$\max_{s_1}\min_{s_2} u = 50$ / $\min_{s_2}\max_{s_1} u = 18$

$$\underline{\mathrm{v}} = \max_{s_1}\min_{s_2} u = 50 \ , \qquad \bar{\mathrm{v}} = \min_{s_2}\max_{s_1} u = 18 \ .$$

$\bar{\mathrm{v}} = 18 \neq 50 = \underline{\mathrm{v}}$ לכן למשחק אין ערך באסטרטגיות טהורות.

לכן נחפש ערך למשחק באסטרטגיות מעורבות.

$I \backslash II$	$y(L)$	$(1-y)(R)$
$x(T)$	2	50
$(1-x)(B)$	100	18

נחשב את ערך המשחק באסטרטגיות מעורבות באמצעות השיטה הישירה:

$$U(T,y^*) = U(B,y^*) \quad \Rightarrow \quad 2y^*+50(1-y^*) = 100y^*+18(1-y^*) \quad \Rightarrow \quad 130y^* = 32 \quad \Rightarrow \quad y^* = \frac{16}{65} \ .$$

$$U(x^*,L) = U(x^*,R) \quad \Rightarrow \quad 2x^*+100(1-y^*) = 50x^*+18(1-x^*) \quad \Rightarrow \quad 130y^* = 82 \quad \Rightarrow \quad x^* = \frac{41}{65} \ .$$

$$U(x^*,y^*) = U\left(\frac{41}{65},\frac{16}{65}\right) = \frac{2482}{65} \ .$$

ב) **(10 נקודות)** טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

תהי A מטירצה 2×2 של המשחק הבא:

$I \backslash II$	L	R	$\min_{s_2} u$
T	0	1	0
B	0	2	0
$\max_{s_1} u$	0	2	$\max_{s_1}\min_{s_2} u = 0$ / $\min_{s_2}\max_{s_1} u = 0$

המשחק של המטריצה $-A$ הינו

$I \backslash II$	L	R	$\min u$
T	0	-1	-1
B	0	-2	-2
$\max u$	0	-1	$\max\limits_{s_1} \min_{s_2} u = -1$ / $\min\limits_{s_2} \max\limits_{s_1} u = -1$

הערך של המשחק של המטריצה A הוא 0 בעוד הערך של המשחק של $-A$ הוא -1.

שאלה 3 **(25 נקודות)**

א) **(15 נקודות)** יהי G משחק שני שחקנים סימטרי. נניח כי הווקטור אסורוגיות (s_1^*, s_2^*) הוא נקודת שיווי משקל. אז

$$u_1(s_1^*, s_2^*) = \max_{\sigma \in S_1} u_1(\sigma, s_2^*) \ ,$$

ו-

$$u_2(s_1^*, s_2^*) = \max_{\sigma \in S_2} u_2(s_1^*, \sigma) \ .$$

לפי הסימטריות של המשחק:

$$\begin{aligned} u_2(s_2^*, s_1^*) &= u_1(s_1^*, s_2^*) && \text{(הסימטריות של המשחק)} \\ &= \max_{\sigma \in S_1} u_1(\sigma, s_2^*) && \text{(הגדרה של שיווי משקל)} \\ &= \max_{\sigma \in S_2} u_2(s_2^*, \sigma) && \text{(הסימטריות של המשחק)} \end{aligned}$$

וכן

$$\begin{aligned} u_1(s_2^*, s_1^*) &= u_2(s_1^*, s_2^*) && \text{(הסימטריות של המשחק)} \\ &= \max_{\sigma \in S_2} u_2(s_1^*, \sigma) && \text{(הגדרה של שיווי משקל)} \\ &= \max_{\sigma \in S_1} u_2(\sigma, s_1^*) && \text{(הסימטריות של המשחק)} \end{aligned}$$

ז"א

$$\left. \begin{aligned} u_2(s_2^*, s_1^*) &= \max_{\sigma \in S_2} u_2(s_2^*, \sigma) \\ u_1(s_2^*, s_1^*) &= \max_{\sigma \in S_1} u_2(\sigma, s_1^*) \end{aligned} \right\}$$

לכן (s_2^*, s_1^*) גם שיווי משקל.

ב) (10 נקודות)

תהיינה A ו- B מטריצות בעלות תשלומים חיוביים. אזי למשחק

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline A & 0 \\ \hline 0 & B \\ \hline \end{array} \; .$$

לכן $T_{ij} \geq 0$.

בכל עמודה יש לפחות אפס אחד, לכן

$$\underline{\mathrm{v}} = \max_i \min_j T_{ij} = \max_i 0 = 0 \; .$$

מצד שני מכיוון ש- A ו- B מטריצות חיוביות, אזי קיים לפחות איבר חיובי אחד בכל שורה. לפיכך

$$\bar{\mathrm{v}} = \min_j \max_i T_{ij} > 0 \; .$$

לכן $\underline{\mathrm{v}} = 0 < \bar{\mathrm{v}}$ ז"א $\underline{\mathrm{v}} \neq \bar{\mathrm{v}}$ ולכן למשחק אין ערך.

שאלה 4 (25 נקודות)

האסטרטגיות של שחקן 1 הן המחירים p_1 שהוא בוחר, אשר מהווה קבוצה רציפה של ערכים חיוביים, ובאותה מידה האסטרטגיות לשחקן 2 הן הקבוצה הרציפה של מחירים p_2. לכן קבוצת האטסטרגיות של כל שחקן היא $[0, \infty)$.

אם שחקן 1 בוחר באסטרטגיה p_1 ושחקן 2 בוחר באסטרטגיה q_2, התשלום לשחקן 1 הוא

$$u_1(p_1, p_2) = p_1 q_1 - c q_1 = (p_1 - c)(a - p_1 + b p_2)$$

והתשלום לשחקן 2 הוא

$$u_2(p_1, p_2) = p_2 q_2 - c q_2 = (p_2 - c)(a - p_2 + b p_1)$$

הווקטור אסטרטגיות (p_1^*, p_2^*) שיווי משקל אם לכל שחקן:

$$u_1(p_1^*, p_2^*) = \max_{0 \leq p_1 \leq \infty} u_1(p_1, q_2^*) = \max_{0 \leq p_1 \leq \infty} [(p_1 - c)(a - p_1 + b p_2^*)]$$

ו-

$$u_2(p_1^*, p_2^*) = \max_{0 \leq p_2 \leq \infty} u_1(p_1^*, p_2) = \max_{0 \leq p_2 \leq \infty} [(p_2 - c)(a - p_2 + b p_1^*)]$$

המקסימום של $u_1(p_1, p_2^*)$ לפי p_1 מתקבל בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_1(p_1, p_2^*)}{\partial p_1} = a - 2p_1 + b p_2^* + c \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad p_1^* = \frac{a + c + b p_2^*}{2} \; ,$$

והמקסימום של $u_2(p_1^*, p_2)$ לפי p_2 מתקבל בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_2(p_1^*, p_2)}{\partial p_2} = a - 2p_2 + bp_1^* + c \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad p_2^* = \frac{a + c + bp_1^*}{2} \ .$$

לפיכך, אם הצמד כמויות (p_1^*, p_2^*) שיווי משקל אז הכמויות חייבות לקיים את התנאים

$$p_1^* = \frac{a + c + bp_2^*}{2} \ , \qquad p_2^* = \frac{a + c + bp_1^*}{2} \ .$$

הפתרון למערכת זו הינו

$$p_1^* = p_2^* = \frac{a + c}{2 - b} \ .$$

שאלה 5 (25 נקודות)

לשחקן 1, $c_2 = c_2^L$ וכן $q_2 = q_2^L$ בהסתברות $\theta = \frac{1}{3}$ ו- $c_2 = c_2^H$ וכן $q_2 = q_2^H$ בהסתברות $1 - \theta = \frac{2}{3}$.

$$u_1\left(q_1, q_2^H, q_2^L\right)) = q_1\left(a - q_1 - \theta q_2^L - (1-\theta) q_2^H - c_1\right) = q_1\left(2 - q_1 - \frac{1}{3}q_2^L - \frac{2}{3}q_2^H - 1\right)$$

לשחקן 2, אם $c_2 = c_2^L$:

$$u_2\left(q_1, q_2^L\right) = q_2^L\left(a - q_1 - q_2^L - c_2^L\right) = q_2^L\left(2 - q_1 - q_2^L - \frac{1}{4}\right) = q_2^L\left(\frac{7}{4} - q_1 - q_2^L\right) \ .$$

אם $c_2 = c_2^H$:

$$u_2\left(q_1, q_2^H\right) = q_2^H\left(a - q_1 - q_2^H - c_2^H\right) = q_2^H\left(2 - q_1 - q_2^H - \frac{7}{4}\right) = q_2^H\left(\frac{1}{4} - q_1 - q_2^H\right) \ .$$

$$(u_2)'_{q_2^H} = \frac{1}{4} - q_1^* - 2q_2^H \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_2^{H*} = \frac{\frac{1}{4} - q_1^*}{2} \ .$$

$$(u_2)'_{q_2^L} = \frac{7}{4} - q_1^* - 2q_2^L \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_2^{L*} = \frac{\frac{7}{4} - q_1^*}{2} \ .$$

$$(u_1)'_{q_1} = 1 - 2q_1 - \frac{1}{3}q_2^{L*} - \frac{2}{3}q_2^{H*} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad {q_1}^* = \frac{1 - \frac{1}{3}q_2^{L*} - \frac{2}{3}q_2^{H*}}{2} \ .$$

הפתרון למערכת הזה אוא

$$q_1^* = \frac{5}{12} \ , \qquad q_2^{H*} = \frac{-1}{12}, \qquad q_2^{L*} = \frac{2}{3} \ .$$

התשלומים הם:

$$u_1\left(q_1^*=\frac{5}{12},q_2^{H*}=\frac{-1}{12},q_2^{L*}=\frac{2}{3}\right)=\frac{25}{144}\ ,$$
$$u_2^L\left(q_1^*=\frac{5}{12},q_2^{H*}=\frac{-1}{12},q_2^{L*}=\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}\ ,$$
$$u_2^H\left(q_1^*=\frac{5}{12},q_2^{H*}=\frac{-1}{12},q_2^{L*}=\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{144}\ .$$