המחלקה למדעי המחשב

כ"א באלול תשפ"ד 24/09/2024
$09:00 - 12:00$

חדו"א 2

מועד ב'

מרצים: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר.

תשפ"ד סמסטר ב'

השאלון מכיל 10 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות בלבד מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** בלבד מתוך **שתיים**.

==

שאלות $1-2$ **חובה**

שאלה 1 **(20 נקודות)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=2xy^2-3x^2-2y^2+5$.

א) (10 נק') מצאו ומיינו את כל נקודות האקסטרמום (נקודות קיצון ואוכף) המקומיות של הפונקציה.

ב) (10 נק') מצאו את הערך הקטן ביותר ואת הערך הגדול ביותר של $f(x,y)$ בתחום החסום על ידי הקווים

$$x+y=0\ ,\qquad x=-1\ ,\qquad y=-1\ .$$

שאלה 2 **(22 נקודות)** תהי a_n סדרה המקיימת $a_{n+1}=\sqrt{a_n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$ וכן $a_1=\frac{1}{2}$.

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

תענו על 3 **מתוך** 4 **השאלות** $3-6$

שאלה 3 **(16 נקודות)**

א) (12 נק') חשבו את המסה של הגוף החסום על ידי הקווים

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}}\ ,\qquad y=x\ ,\qquad x^2+y^2=4\ ,\qquad x^2+y^2=16\ ,$$

כאשר הצפיפות מסה היא $\rho(x,y)=xy$.

ב) (4 נק') תהי $f(x,y,z)$ הפונקציה $f(x,y,z)=3x^2+4xz+yz+10$. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: קיים ווקטור a כך שהנגזרת המכוונת $\frac{df(P)}{da}=10$ כאשר P הנקודה $(1,1,1)$.

שאלה 4 **(16 נקודות)**

א) (5 נק') קבעו לאילו ערכי $\alpha\in\mathbb{R}$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n$ מתכנס?

ב) (6 נק') יהי טור חיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(1) (3 נק') אם לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

(2) (3 נק') אם לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

ג) (5 נק') מצאו היכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x-2)^{2n}$ מתכנס בהחלט. נמקו את תשובתכם.

שאלה 5 **(16 נקודות)** נתונה הפונקציה $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^3$.

א) (10 נק') מצאו את משוואת המישור המשיק לפונקציה $f(x,y)$ בנקודה $(1,1)$.

ב) (6 נק') מצאו ומיינו את כל נקודות האקסטרמום (נקודות קיצון ואוכף) המקומיות של הפונקציה.

שאלה 6 **(16 נקודות)** שנו את סדר האינטגרלים, שרטטו את תחום האינטגרציה וחשבו:

$$\int_1^3 \int_{x-2}^{\sqrt{x-2}} xy \; dy \; dx \; .$$

פתור אחת מבין השאלות $7-8$

שאלה 7 **(10 נקודות)** נתון הישר אשר מקביל לווקטור $(4,-3,0)$ שעובר דרך הנקודה $(1,2,3)$. מצאו את הנקודות הקרובות ביותר על הישר הזה ועל ציר ה-z.

שאלה 8 **(10 נקודות)** הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{\alpha^n + 1}$ מתבדר לכל $\alpha > 1$.

פתרונות

שאלה 1

א) (10 נק')

$$\left.\begin{array}{r} f'_x = 2y^2 - 6x \overset{!}{=} 0 y^2 = 3x \\ f'_y = 4xy - 4y = 4y(x-1) \overset{!}{=} 0 \end{array}\right\} .$$

נקבל את הנקודות קריטיות: $P_0(0,0)$, $P_1(1,\sqrt{3})$ ו- $P_2(1,-\sqrt{3})$.

$$\Delta = f''_{xx}f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 = -6(4x-4) - 16y^2 .$$

$$f''_{xx}(0,0) = -6 < 0 , \qquad \Delta\,(0,0) = 24 > 0 .$$

לכן $P_0(0,0)$ נקודת מקסימום.

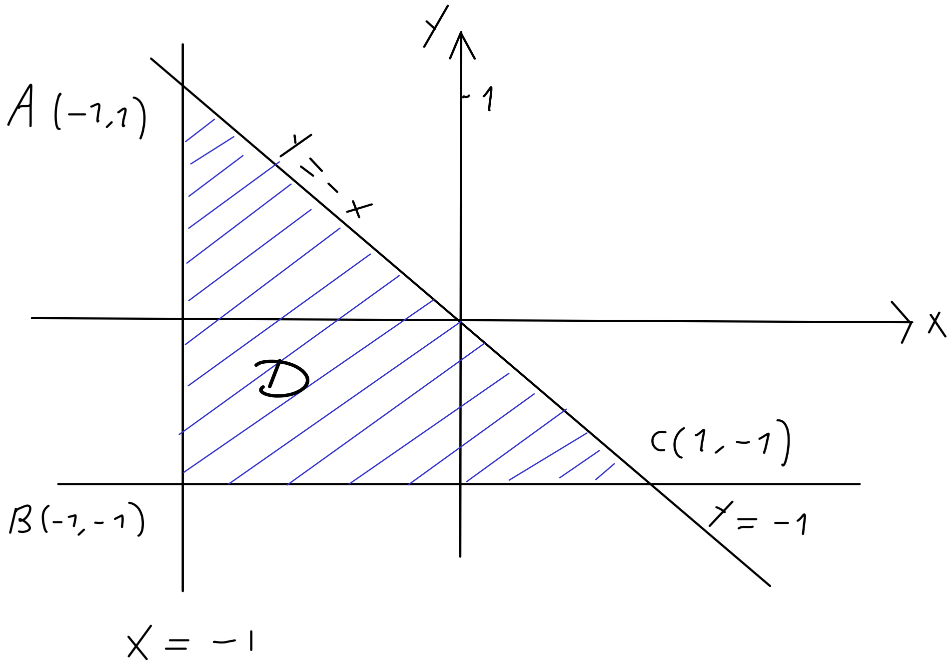
$$f''_{xx}(1,\sqrt{3}) = -6 < 0 , \qquad \Delta\left(1,\sqrt{3}\right) = -48 < 0 .$$

לכן $P_1(1,\sqrt{3})$ נקודת אוכף.

$$f''_{xx}(1,-\sqrt{3}) = -6 < 0 , \qquad \Delta\left(1,\sqrt{3}\right) = -48 < 0 .$$

לכן $P_1(1,-\sqrt{3})$ נקודת אוכף.

ב) (10 נק')



$f(P_0)=5$, $f(P_1)=2$, $f(P_2)=2$.

$$f_1(y)=f(x=-1,y)=2-4y^2\ .$$

$$f_1'(y)=-8y\overset{!}{=}0\ .$$

קיבלנו את הנקודה $P_3(-1,0)$. $f(P_3)=2$.

$$f_2(x)=f(x,y=-1)=-3x^2+2x+3\ .$$

$$f_2'(x)=2-6x\overset{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{3},y=-1\ .$$

קיבלנו את הנקודה $P_4(-1,0)$. $f(P_4)=\frac{10}{3}$.

$$f_3(x)=f(x,y=-x)=2x^3-5x^2+5\ .$$

$$f_3'(x)=6x^2-10x\overset{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad x=0 \text{ או } x=\frac{5}{3}\ .$$

קיבלנו את הנקודה $P_5(0,0)$. $x=-\frac{5}{3}$ לא בתחום.

נקודה	$f(x,y)$
$P_0(0,0)$	5
$P_1(1,\sqrt{3})$	2
$P_2(1,-\sqrt{3})$	2
$P_3(-1,0)$	2
$P_4(-1,0)$	$\frac{10}{3}$
$A(-1,-1)$	-2
$B(-1,1)$	-2
$C(1,-1)$	2

$\max\limits_D f(x,y)=5$ בנקודה $P_0(0,0)$.

$\min\limits_D f(x,y)=-2$ בנקודה $A(-1,-1)$ ו- $B(-1,1)$.

שאלה 2 נוכיח כי a_n עולה מונוטונית באינדוקציה.

בסיס:

$$a_2=\sqrt{a_1}=\sqrt{\frac{1}{2}}>\frac{1}{2}=a_1\ .$$

מעבר: הנחת האינדוקציה: נניח כי $a_{n+1}>a_n$. אז

$$a_{n+2}=\sqrt{a_{n+1}}>\sqrt{a_n}=a_{n+1}\ .$$

נוכיח כי a_n חסומה. ראשית a_n סדרה עולה ו- $a_1=\frac{1}{2}$ לכן

$$a_n\geq\frac{1}{2}\ .$$

נוכיח באינדוקציה כי $a_n<1$.

בסיס: $a_1=\frac{1}{2}<1$.

מעבר: נניח כי $a_n<1$.

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n}<\sqrt{1}=1$$

לפיכך

$$\frac{1}{2}\leq a_n<1\ .$$

הוכחנו כי a_n מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת.

נסמן

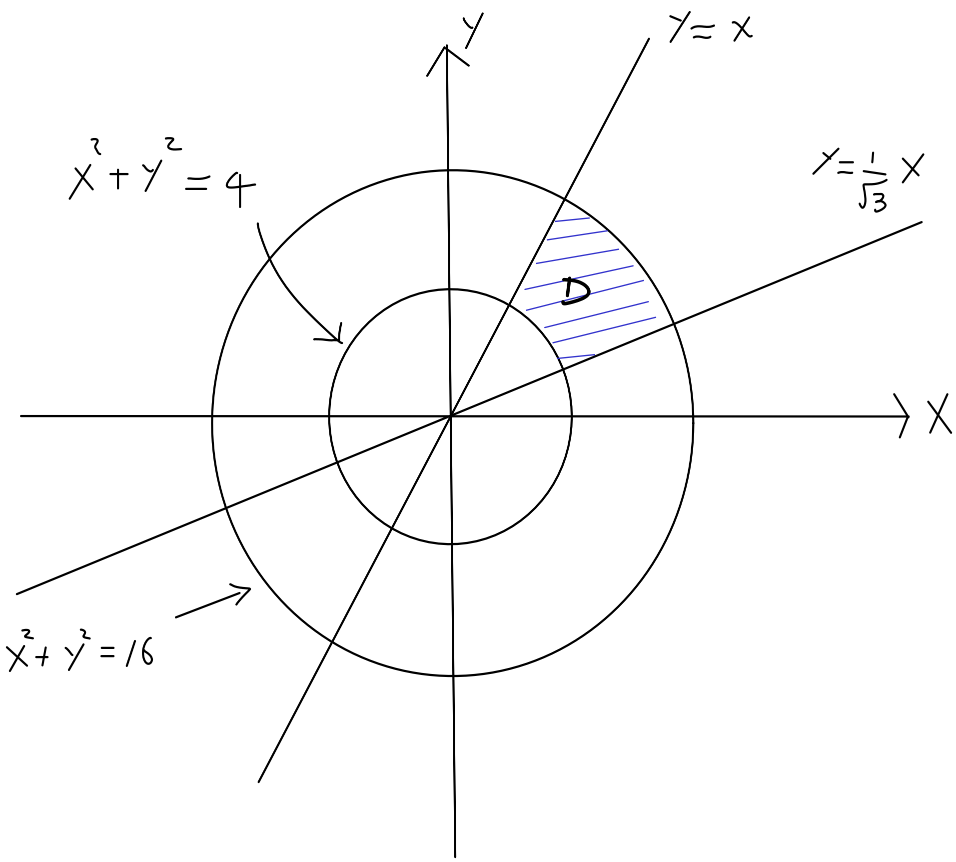
$$L=\lim_{n\to\infty}a_n\ ,\qquad L=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}\ .$$

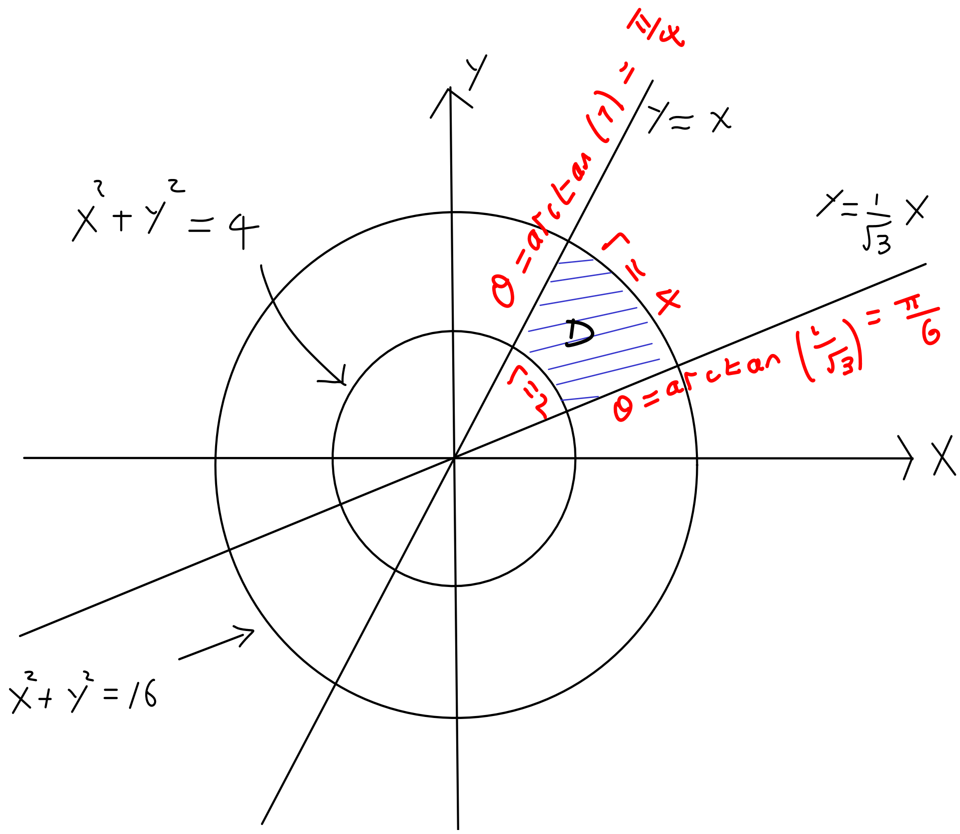
$$L=\sqrt{L}\quad\Rightarrow\quad L^2=L\quad\Rightarrow\quad L(L-1)=0\quad\Rightarrow\quad L=0\ \text{או}\ 1\ .$$

$a_n \geq \frac{1}{2}$ לכן $L = 1$.

<u>שאלה 3</u> <u>(16 נקודות)</u>

א) (12 נק')




$\theta = \arctan(1) = \pi/4$
$y = x$
$y = \frac{1}{\sqrt{3}} x$
$x^2 + y^2 = 4$
$r = 4$
D
$\theta = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$
$r = 2$
y
x
$x^2 + y^2 = 16$

$$
\begin{aligned}
M =& \int_{\pi/6}^{\pi/4} d\theta \int_{2}^{4} dr\, r^3 \cos\theta \sin\theta \\
=& \int_{\pi/6}^{\pi/4} d\theta \cos\theta \sin\theta \int_{2}^{4} dr\, r^3 \\
=& \int_{\pi/6}^{\pi/4} d\theta \cos\theta \sin\theta \left[\frac{r^4}{4}\right]_2^4 \\
=& \int_{\pi/6}^{\pi/4} d\theta \cos\theta \sin\theta \left[\frac{256}{4} - \frac{16}{4}\right] \\
=&60 \int_{\pi/6}^{\pi/4} d\theta \cos\theta \sin\theta \\
=&60 \int_{\pi/6}^{\pi/4} d\theta \frac{1}{2} \sin 2\theta \\
=&\frac{60}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/4} d\theta \sin 2\theta \\
=&30 \left[\frac{-1}{2} \cos 2\theta\right]_{\pi/6}^{\pi/4} \\
=&30 \left[\frac{-1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\
=&30 \left[0 + \frac{1}{4}\right] \\
=&\frac{15}{2} \ .
\end{aligned}
$$

ב) (4 נק')

$$
\nabla f = \left(f'_x, f'_y, f'_z\right) = (6x + 4z, z, 4x + y) \qquad \Rightarrow \qquad \nabla f(P) = (10, 1, 5)
$$

$$
-|\nabla f(P)| \le \frac{df(P)}{da} \le |\nabla f(P)| \qquad \Rightarrow \qquad -126 \le \frac{df(P)}{da} \le 126
$$

לפיכך קיים ווקטור a עבורו $\frac{df(P)}{da} = 10$.

שאלה 4 (16 נקודות)

א) (5 נק') $a_n = n\alpha^n$.

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\alpha^{n+1}}{n\alpha^n} = \lim_{n\to\infty} \alpha \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \alpha \overset{!}{<} 1 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha < 1 \ .
$$

ב) (6 נק')

(1) (3 נק')

(2) (3 נק') לא נכונה. דוגמה נגדית: $a_n = \frac{1}{n}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{n}{n+1} < 1$$

אבל הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר.

ג) (5 נק')

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n!}{n^n}\right)}{\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) \cdot (n+1) \frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= e \ . \end{aligned}$$

לכן הטור מתכנס לכל $(x-2)^2 < e$. בנקודה $(x-2)^2 = e$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-2)^{2n}}{n^n} \quad \xrightarrow{(x-2)^2 = e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n}$$

נרשום את הטור בצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ כאשר $a_n = \frac{n!e^n}{n^n}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\right)}{\left(\frac{n!e^n}{n^n}\right)} = e\frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ לכל $n \geq 1$ לכן $a_{n+1} > a_n$ לכל $n \geq 1$ לכן a_n עולה לכן $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ לכן הטור מתבדר.

לפיכך הטור מתבדר ב- $(x-2)^2 = e$.

לכן הטור מתבדר לכל $(x-2)^2 < e$.

שאלה 5 (16 נקודות)

א) (10 נק') הווקטור הנורמל למשטח בנקודה $(1,1)$ נתון ע"י

$$n = \left(f'_x(1,1), f'_y(1,1), -1\right) \ .$$

$$f'_x = 2x + 2y \quad \Rightarrow \quad f'_x(1,1) = 4 \ .$$
$$f'_y = 2x + 3y^2 \quad \Rightarrow \quad f'_y(1,1) = 5 \ .$$

לכן $n = (4,5,-1)$. בנקודה $P(1,1)$:

$$z = 4 \ .$$

משוואת המשיור בנקודה $(1,1,4)$:

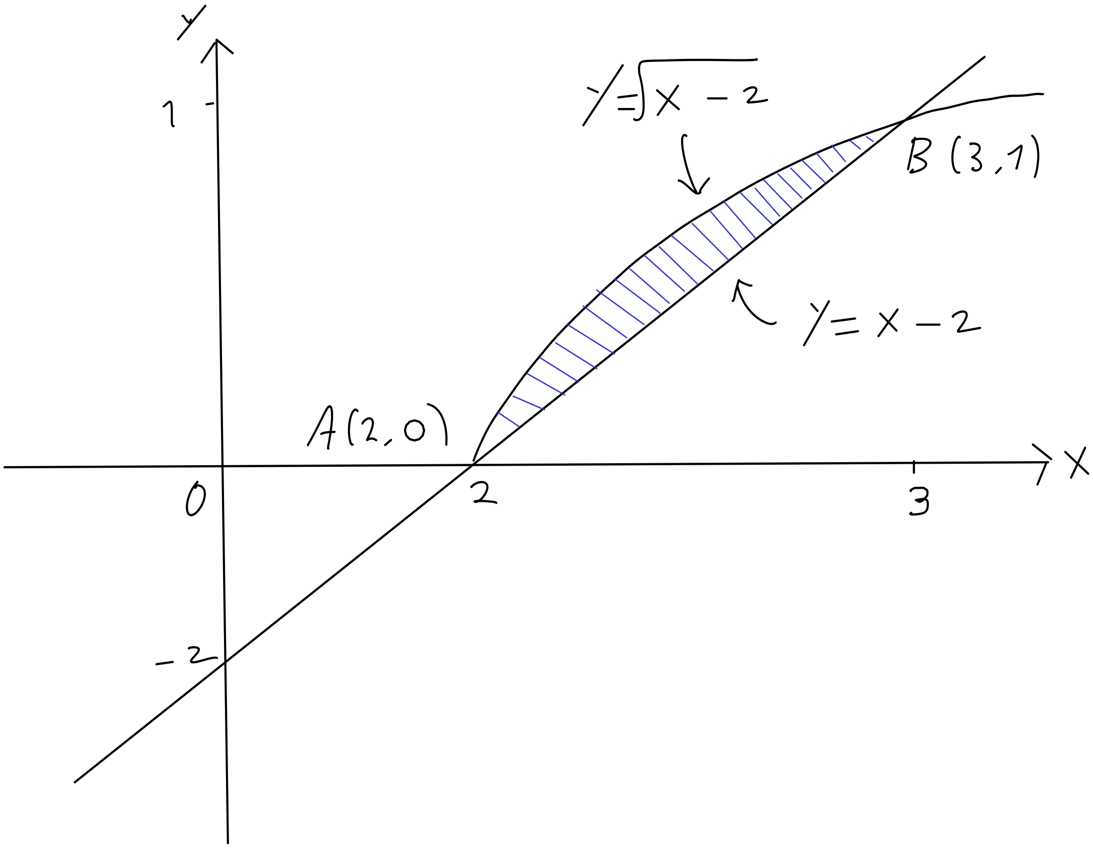
$$4(x-1) + 5(y-1) - (z-4) = 4x + 5y - z - 5 \ .$$

ב) (6 נק')

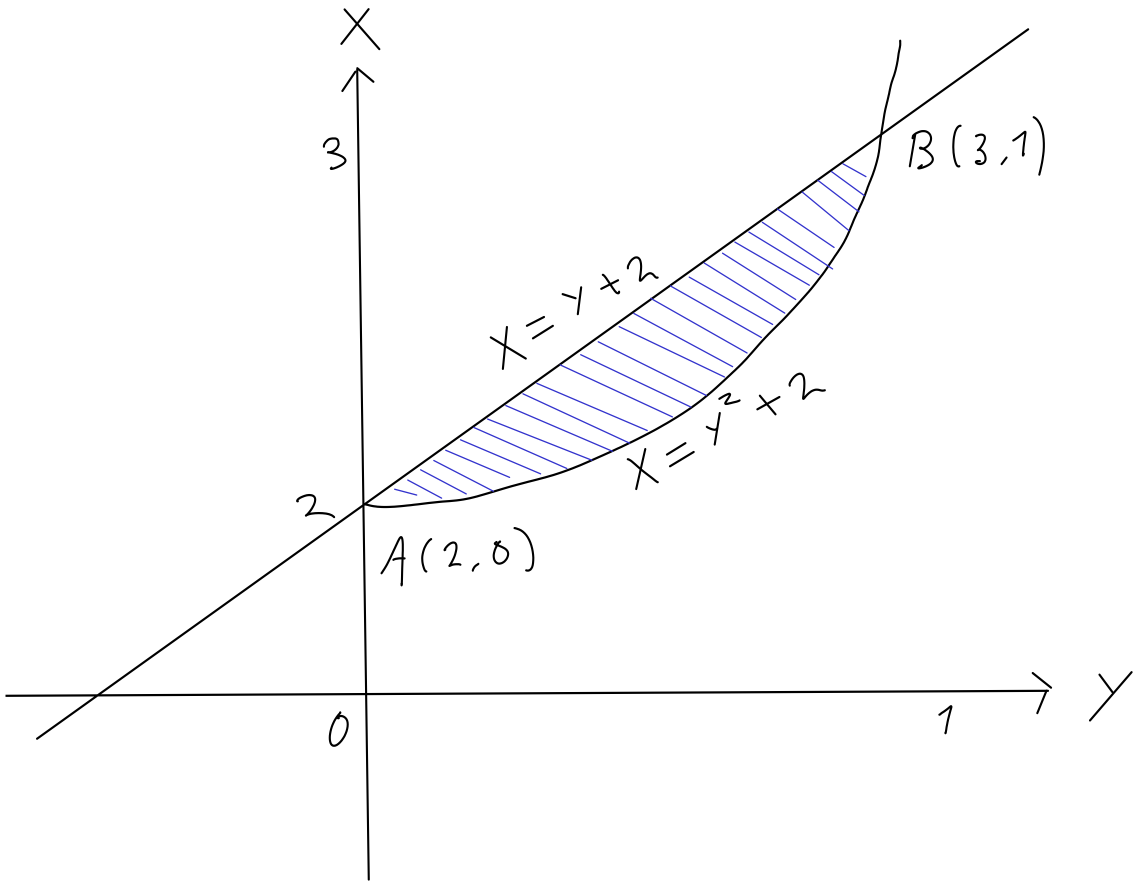
$$f'_x = 2x + 2y \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y = -x \ .$$

$$f'_y = 2x + 3y^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{3y^2}{2} \ .$$

שאלה 6 (16 נקודות)



$$D=\left\{2\leq x\leq 3\ ,x-2\leq y\leq \sqrt{x-2}\right\}\ .$$



$$D=\left\{0\le y\le 1\ ,y^2+2\le x\le y+2\right\}\ .$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 dy \int_{y^2+2}^{y+2} dx\, xy = \int_0^1 dy\, \left[\frac{x^2}{2}\right]_{y^2+2}^{y+2} y
&= \frac{1}{2}\int_0^1 dy\, \left[(y+2)^2 - \left(y^2+2\right)^2\right] y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 dy\, \left[y^2+4y+4-y^4-4y^2-4\right] y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 dy\, \left[y^2+4y+4-y^4-4y^2-4\right] y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 dy\, \left[-3y^2+4y-y^4\right] y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 dy\, \left[-3y^3+4y^2-y^5\right] \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 dy\, \left[-\frac{3y^4}{4}+\frac{4y^3}{3}-\frac{y^6}{6}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{3}{4}+\frac{4}{3}-\frac{1}{6}\right] \\
&= \frac{5}{24}\ ,
\end{aligned}
$$

$$\int_2^3 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x-2}} dyxy = \int_2^3 dx \left[\frac{y^2}{2}x\right]_{x-2}^{\sqrt{x-2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^3 dx \left[x-2-(x-2)^2\right]x$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^3 dx \left[x^2-2x-x^3+4x^2-4x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^3 dx \left[5x^2-6x-x^3\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{5x^3}{3}-3x^2-\frac{x^4}{4}\right]_2^3$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{135}{3}-27-\frac{81}{4}-\frac{40}{3}+12+4\right]$$

$$= \frac{5}{24} \ .$$

שאלה 7 משוואת הישר שמקביל לווקטור $(4,-3,0)$ שעובר דרך הנקודה $(1,2,3)$:

$$M(t) = (1,2,3) + t(4,-3,0) \ .$$

משוואת הישר של ציר ה- z:

$$N(s) = s(0,0,1) \ .$$

$$(1+4t, 2-3t, 3-s)\cdot(4,-3,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4+16t-6+9t=0 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{2}{25} \ .$$

$$(1+4t, 2-3t, 3-s)\cdot(0,0,1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3-s=0 \quad \Rightarrow \quad s=3 \ .$$

לכן הנקודות הקרובות ביותר הן $\left(\frac{33}{25},\frac{44}{25},3\right) = M(t=\frac{2}{25})$ ו- $N(s=3)=(0,0,3)$.

$$d = \frac{|\overline{MN}\cdot a\times b|}{|a\times b|} = \frac{|(1,2,3)\cdot(-3,-4,0)|}{|(-3,-4,0)|} = \frac{11}{5} \ .$$

<u>שאלה 8</u>

<u>שיטה 1</u>

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ כאשר $a_n = \frac{(-1)^n\alpha^n}{\alpha^n+1}$.

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\alpha^n}{\alpha^n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n}{\alpha^n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{\alpha^n}} = 1 \neq 0$$

לכן הטור מתבדר.

<u>שיטה 2</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^n}{\alpha^n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n - \frac{(-1)^n}{\alpha^n+1}\right] \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^n}{\alpha^n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^n+1}\ .$$

נתבונן על $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^n+1}$. נבדוק התכנסות של הטור החיובי:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^n+1} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n$$

אשר מתכנס עבור $\alpha > 1$ לכן לפי מבחן השאוואה $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^n+1}$ מתכנס לכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^n+1}$ מתכנס בהחלט.

הוכחנו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^n+1}$. כעת נוכיח כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^n}{\alpha^n+1}$ דרך השלילה.

נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^n}{\alpha^n+1}$ מתכנס.

אז $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^n}{\alpha^n+1}$ מתכנס.

ז"א $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ מתכנס.

זאת בסתירה לכך ש- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ מתבדר.