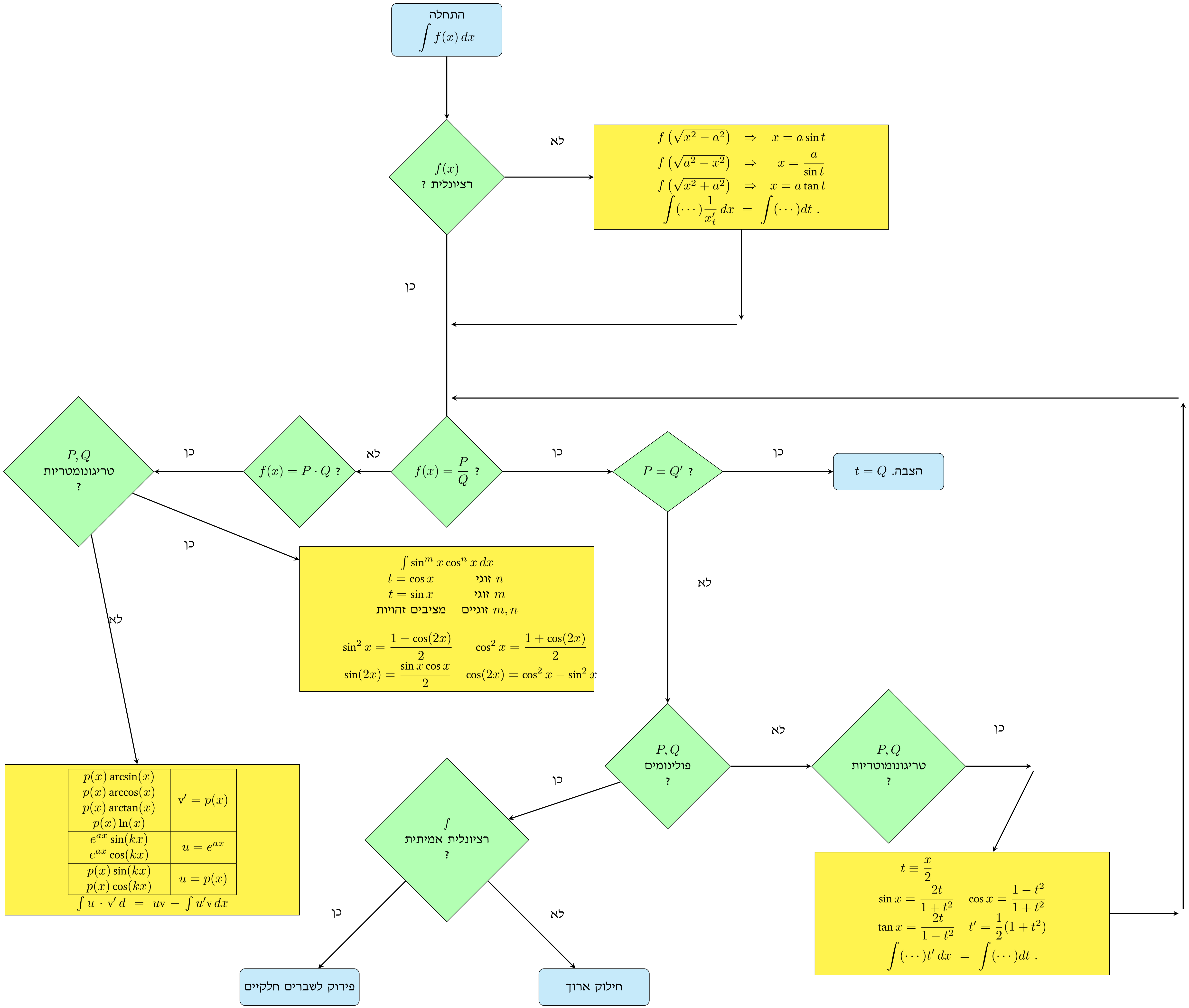

התחלה
$\int f(x)\,dx$
$f(x)$
רציונלית ?
לא
$f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right) \Rightarrow x = a\sin t$
$f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right) \Rightarrow x = \frac{a}{\sin t}$
$f\left(\sqrt{x^2+a^2}\right) \Rightarrow x = a\tan t$
$\int (\cdots)\frac{1}{x'_t}\,dx = \int (\cdots)dt\ .$
כן
$f(x) = \frac{P}{Q}$?
כן
$P = Q'$?
כן
הצבה. $t = Q$
לא
$f(x) = P \cdot Q$?
כן
P, Q
טריגונומטריות
?
כן
$\int \sin^m x \cos^n x\,dx$
$t = \cos x$ זוגי n
$t = \sin x$ זוגי m
מציבים זהויות זוגיים m, n
$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
$\sin(2x) = \frac{\sin x\cos x}{2}$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
לא
$p(x)\arcsin(x)$
$p(x)\arccos(x)$
$p(x)\arctan(x)$
$p(x)\ln(x)$
$\mathrm{v}' = p(x)$
$e^{ax}\sin(kx)$
$e^{ax}\cos(kx)$
$u = e^{ax}$
$p(x)\sin(kx)$
$p(x)\cos(kx)$
$u = p(x)$
$\int u \cdot \mathrm{v}'\,d = u\mathrm{v} - \int u'\mathrm{v}\,dx$
לא
P, Q
פולינומים
?
לא
P, Q
טריגונומטריות
?
כן
$t \equiv \frac{x}{2}$
$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$ $t' = \frac{1}{2}(1+t^2)$
$\int (\cdots)t'\,dx = \int (\cdots)dt\ .$
כן
f
רציונלית אמיתית
?
כן
פירוק לשברים חלקיים
לא
חילוק ארוך

חדו"א 1 סמסטר א' תשפד
דף חזרה

תוכן העניינים

1 משוואת המשיק והנורמל

שאלה 1

מצאו את משוואת המשיק והנורמל לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הנתונות

א) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, $x = -2$

ב) $y = x\sqrt{x} - 6\sqrt{x}$, $x = 4$

שאלה 2 מצאו את משוואות שלושת המשיקים לגרף הפונקציה

$$y = 3x^3 + 5x^2 + 3x - 3$$

שעוברים בנקודה $(1, 0)$.

שאלה 3 מצאו את הזווית בין הגרפים של הפונקציות

$$y = x^3\ , \qquad y = x^3 + x^2 - 3x + 2$$

בנקודת החיתוך השמאלית שלהן.

שאלה 4 מצאו משוואת משיק ונורמל ל-

$$x^5 + y^5 = 2xy$$

בנקודה $(1,1)$. מצאו את ערך הנגזרת השניה בנקודה $(1,1)$.

שאלה 5 מצאו משוואת משיק ונורמל ל-

$$\begin{cases} x = \tan t\ , \\ y = \sin^2 t \end{cases}$$

בנקודה שבה $x = 1$. מצאו את ערך הנגזרת השניה בנקודה זו.

שאלה 6 לאילו ערכים של הפרמטר a לפונקציה

$$y = x^{a+7} \ln(x + 17)$$

יש אסימפטוטה אופקית?

שאלה 7 מצאו את הזווית בין

$$\begin{cases} x = \arctan t\ , \\ y = t + \tan(2t) \end{cases}$$

ו-

$$x + y + xy = 0$$

בראשית הצירים.

שאלה 8

א) הוכיחו שהמשיקים לגרפים של הפונקציות

$$y = \sqrt{ax}\ , \qquad y = \sqrt{0.5a^2 - ax}\ , \qquad (a > 0)$$

בנקודת החיתוך שלהם מאונכים זו לזו.

ב) הוכיחו ששטח המשולש שנוצר בין המשיקים וציר ה- x גדול פי 4 משטח המשולש שנוצר בין המשיקים וציר ה- y.

שאלה 9

פונקציה $y(x)$ מוגדרת על יד המשוואה

$$11xy^3 - 7x^2y^2 = 60x$$

כאשר $y(1) = 2$. מצאו את ערכו של $y'(1)$.

שאלה 10 תהי פונקציה $f(x)$ גזירה לכל x וידוע ש- $f(0)=3$ ן-

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(\Delta x\right)-f(0)}{\Delta x}=5\ .$$

נגדיר $g(x)=f(x)\cdot\ln(3x+e)$. מצאו את

$$g'(0)\ .$$

שאלה 11 פונקציה $y(x)$ מוגדרת על יד המשוואה $9y^5+6x^5=15xy$ כאשר $y(1)=1$. מצאו את ערכו של $y'(1)$.

שאלה 12 מצאו את השיפוע של המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\dfrac{4x+4}{5x+10}$ בנוקדה $x=4$.

שאלה 13 תהי פונקציה $f(x)$ גזירה לכל x וידוע ש- $f(0)=3$ ו-

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(\Delta x\right)-f(0)}{\Delta x}=4\ .$$

נגדיר $g(x)=f(x)\cdot\ln(2x+e)$. מצאו את

$$g'(0)\ .$$

2 כלל לופיטל

שאלה 14 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+\ln x-1}{e^x-e}$

שאלה 15 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{e^x}}{x+e^x}$

שאלה 16 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}$

שאלה 17 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$

שאלה 18 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^{100}}{e^x}$

שאלה 19 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

שאלה 20 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^2\ln x$

שאלה 21 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2}$

שאלה 22 $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

שאלה 23 $\lim\limits_{x\to\infty} (2x)^{\frac{1}{\ln x}}$

שאלה 24 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

שאלה 25 $\lim\limits_{x\to 0} (x+e^x)^{\frac{1}{x}}$

שאלה 26 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - \sin\frac{1}{x} - 1\right)$

שאלה 27 פתרו את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{5x}-5x-1}{3x^3+x^2}\right) .$$

שאלה 28 פתרו את הגבול

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin(2x))}{\ln(\sin(11x))} .$$

שאלה 29 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2(2x)}{x}$

שאלה 30 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x+3^x}{3^x+4^x}$

שאלה 31 $\lim\limits_{x\to 0} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]^{1/x^2}$

שאלה 32 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+\tan(x)}{1+\sin(x)}\right)^{\frac{1}{\sin(x)}}$

שאלה 33 $\lim\limits_{x\to 1} (x^2+\sin(\pi x))^{\frac{1}{\log(x)}}$

שאלה 34 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

שאלה 35 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{\cos(4x)-1}$

שאלה 36 $\lim_{x\to 6} (x-5)^{\frac{x}{x-6}}$

שאלה 37 $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{2x}$

שאלה 38 $\lim_{x\to 0} \left(1-\sin^2(x)\right)^{\frac{1}{\tan^2(x)}}$

שאלה 39 $\lim_{x\to 1} (6-5x)^{\frac{1}{\log(2-x)}}$

שאלה 40 $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^{\log(x)}$

שאלה 41 $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\cot(x)}$

שאלה 42 $\lim_{x\to\infty} \left(\log\left(2x^2+x\right)-2\log(x)\right)$

שאלה 43 $\lim_{x\to 0} \left(1+\sqrt{x}\right)^{\cot\left(\sqrt{x}\right)}$

שאלה 44 $\lim_{x\to 0} \left(1+2x^2\right)^{\frac{3}{1-\cos(2x)}}$

שאלה 45 $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$

שאלה 46 $\lim_{x\to 1} \left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{1-x}}$

שאלה 47 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x-\sin(2x)}$

שאלה 48 $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x^2}}(1-x)^{\frac{1}{x^2}}$

3 פולינום מקלורן

שאלה 49

א) רשמו פולינום מקלורן מסדר 2 לפונקציה $y(x)$ המוגדרת בצורה סתומה:

$$y^5 + xy + e^x = 33\ .$$

ב) רשמו פולינום מקלורן מסדר 2 לפונקציה $y(x)$ המוגדרת בצורה פרמטרית:

$$y = t^2 + 2t + 1\ , \qquad x = te^t\ .$$

ג) ידוע שפולינום מקלורן מסדר 3 של $f(x)$ הוא

$$P_3(x) = x - 3x^2 + 2x^3\ .$$

חשב את

$$f''(0) + f'''(0).$$

שאלה 50

א) מצאו את נוסחת מקלורן של הפונקציה $f(x) = \ln(1+x)$.

ב) הוכיחו שלכל $x > 0$ מתקיים

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

שאלה 51

חשבו בעזרת נוסחת מקלורן מתאימה את

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}\ .$$

שאלה 52

רשמו את פולינום מקלורן מסדר 2 של פונקציה

$$f(x) = \ln|9x+4|$$

$$P_2(x) = \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_ x + \_\_\_\_\_\_ x^2\ .$$

שאלה 53

הגדר מהי אסימפטוטה משופעת של פונקציה ומצא את האסימפטוטות המשופעות של הפונקציות הבאות:

א) $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

ב) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

ג) $f(x) = x - e^x$

4 חקירה מלאה

שאלה 54 שרטטו את הפונקציה $f(x) = -(x+2)^2$.

שאלה 55 שרטטו את הפונקציה $f(x) = x^2(x-2)^2$.

שאלה 56 שרטטו את הפונקציה $f(x) = \dfrac{x}{x^2+9}$

שאלה 57

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)^2}$

שאלה 58

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-4}$

שאלה 59

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = x^2e^{1-x}$

שאלה 60

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$

שאלה 61

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = (x+2)e^{1/x}$

שאלה 62

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x}$

שאלה 63

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

שאלה 64 שרטטו את הגרף של הפונקציה $f(x) = \dfrac{x^4-x^3-2x^2}{(x-3)^2}$.

שאלה 65 (סמסטר ב תשע"ח מועד ב שאלה 1)

חקרו באופן מלא את הפונקציה

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

(תחום הגדרה, חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וצייר את סקיצת הגרף של הפונקציה.

שאלה 66 **(סמסטר א תשע"ח מועד א שאלה 1)**

חקרו באופן מלא את הפונקציה

$$f(x) = \frac{(x+2)^2}{x-2}$$

(תחום הגדרה, חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וצייר את סקיצת הגרף של הפונקציה.

שאלה 67 **(סמסטר א תשע"ט מועד ב שאלה 1)** חקור באופן מלא את הפונקציה

$$f(x) = \frac{2-x^2}{e^x}$$

(תחום הגדרה, חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וצייר את סקיצת הגרף של הפונקציה.

5 בעיות קיצון

שאלה 68 על הקו המוגדר ע"י המשוואה $x^2 - y^2 = 1$ מצא את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(0,1)$.

שאלה 69 על גרף הפונקציה $y = \dfrac{1}{x^3}$ מצא את הנקודה הקרובה ביותר לישר $y + 3x = 1$.

שאלה 70 בין הגרפים של פונקציה $y = e^{-x}$ ו- $y = e^{x/2}$ וציר ה- x חסום מלבן. מצא את שטח המקסימלי האפשרי של המלבן הזה.

שאלה 71 מצא את הזווית של משולש ישר זוויות בעל השטח הגדול ביותר שבו סכום אורכי היתר ואחד הניצבים שווה ל- K.

שאלה 72 נתונות שתי פונקציות $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = bx^2$, ($b > 0$). הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודות A ו- B. מצא את ערכו של b שעבורו אורך הקטע AO יהיה מינימאלי, כאשר O ראשיתהצירים. צייר ואת הסקיצה המתאימה.

שאלה 73 מצאו את הנקודה על המעגל $x^2 + y^2 = 16$ הקרובה ביותר לנקודה $A(6,5)$.

שאלה 74

על העקומה $x^2 + y^2 = 4$ מצא את כל הנקודות $M(x_0, y_0)$ שבהן המשיק לעקומה מקביל לקו $x + y = 1$.

שאלה 75 **(להעשרה בלבד)** מצאו לאילו ערכי הפרמטר a השטח החסום ע"י הקווים $x = 0$, $y = 0$, $y = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{2a^2}$ יהיה מינימדי וחשבו את השטח המינימלי.

6 משפטים רול ולגרנז'

שאלה 76 מצא את C עבורו $f(x)=g(x)+C$ או הוכח שהוא לא קיים.

א) $f(x)=\frac{\cos^4 x}{4}-\frac{\cos^2 x}{2}$ ו- $g(x)=\frac{\sin^4 x}{4}$.

ב) $f(x)=\arcsin x$ ו- $g(x)=-\arccos x$.

ג) $f(x)=\frac{\cos^2 x}{2}$ ו- $g(x)=\frac{\sin^2 x}{2}$.

רמז: השתמש במשפט הבא: אם $f'(x)=g'(x)$ אז $f(x)=g(x)+C$, כאשר C מספר קבוע.

שאלה 77 הוכיחו שהפונקציה $f(x)=3x-\sin(2x)$ עולה בכל $\mathbb{R}$.

שאלה 78 הוכיחו שלמשוואה $x+e^{2x}=2$ יש פתרון יחיד.

שאלה 79 לאילו ערכי a ו b מתקיים

$$\lim_{x\to\infty}\left(xe^{1/x}-ax-b\right)=0\ .$$

שאלה 80 לאילו ערכי a ו b הישר $y=bx$ משיק לפרבולה $y=x^2+a$?

שאלה 81 מצא את הזוויות של משולש ישר זווית בעל השטח הגדול ביותר שבו סכום אורכי היתר ואחד הניצבים שווה ל- K.

שאלה 82 בדקו שהפונקציה $f(x)=\frac{4}{x^2}$ מקיימת את את תנאי משפט לגרנז' בקטע $[-2,-1]$ ומצאו את הנקודה c המופיע במשפט.

שאלה 83 יהי $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ פולינום המוגדר על קטע סגור $[a,b]$. הוכיחו שהנקודה c שבמשפט לגרנז' יוצאת במרכז הקטע.

שאלה 84 תהי $f(x)$ פונקציה גזירה על כל הישר הממשי. נניח ש- $f'(x)\leq 7$ לכל x ממשי וכן $f(9)=68$, $f(1)=20$. הוכיחו כי $54\leq f(7)\leq 62$.

שאלה 85 תהי $f(x)$ פונקציה גזירה על כל הישר הממשי. נניח ש- $|f'(x)|\leq 5$ לכל x ממשי וכן $f(2)=10$. הוכיחו כי $0\leq f(4)\leq 20$.

שאלה 86 תהי $f(x)$ גזירה לכל x ונניח כי $f'(x)\leq 4$ לכל x ו- $f(-3)=2$. הוכיחו כי $f(0)\leq 14$.

שאלה 87 נתונה פונקציה $f(x)$ גזירה לכל x. נניח כי $f'(x)\leq 3$ לכל x ו- $f(-2)=5$. הוכיחו כי $f(1)\leq 14$.

שאלה 88 הוכיחו את האי-שוויונים הבאים בעזרת משפט לגרנז':

א) $\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$ $(0<a<b)$.

ב) $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan(b)-\tan(a) < \frac{b-a}{\cos^2 b}$ $(0<a<b<\frac{\pi}{2})$.

ג) $a\cdot 2^{a-1} < 3^a-2^a < a\cdot 3^{a-1}$ $(a>1)$.

ד) $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$ $(x>0)$

ה) $\sin 73^\circ - \sin 28^\circ < \frac{\pi}{4}$

ו) $|\sin x - \sin y| \le |x-y|$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$.

שאלה 89 הוכיחו כי לכל $0<x<y$,$x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$\frac{x-y}{x} < \ln\left(\frac{x}{y}\right) < \frac{x-y}{y} \ .$$

שאלה 90 יהיו $f(x)$, $g(x)$ פונקציות גזירות בקטע (a,b). תהי $c\in(a,b)$ נקודה שבה

(#1) $$f(c)=g(c)$$

ו-

(#2) $$f'(x)>g'(x) \qquad \forall x\in(a,b)\ ,\ x<c\ .$$

הוכיחו כי

(#3) $$g(x)>f(x) \qquad \forall x\in(a,b)\ ,\ x<c\ .$$

שאלה 91 יהיו $f(x)$, $g(x)$ פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b) כך ש-

(1*) $$f(a)=g(a)$$

אם

(2*) $$f'(x)<g'(x) \qquad \forall x\in(a,b)\ ,$$

הוכיחו כי

(3*) $$f(x)<g(x) \qquad \forall x\in(a,b]\ .$$

שאלה 92 הוכיחו כי למשוואה

$$x^3-7x^2+25x+8=0$$

יש פתרון יחיד.

שאלה 93 הוכיחו שלכל ערכים ממשיים a ו- b מתקיים

$$|\arctan(2b) - \arctan(2a)| \leq 2\,|b-a|$$

שאלה 94 תהיי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). ידוע כי

$$f(a)=f(b)=0 \ .$$

הראו שקיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש -

$$f(c)+f'(c)=0 \ .$$

רמז: הסתכלו על פונקציה $g(x)=e^x f(x)$

שאלה 95 הוכיחו או הפריכו: למשוואה $e^x=-x$ יש 2 שורשים.

שאלה 96

א) הוכיחו כי למשוואה $e^x=(1+x)^2$ יש שלושה שורשים לכל היותר.

ב) הוכיחו כי למשוואה $e^x=(1+x)^2$ יש לפחות שלושה שורשים.

שאלה 97

תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה בקטע $(0,1)$. יהי $f(0)=0$ ו- $f(x)>0$ לכל $x\in(0,1]$. הוכיחו כי קיימת $c\in(0,1)$ כך ש-

$$\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}=\frac{2f'(c)}{f(c)} \ .$$

רמז: הגדירו את פונקציה $g(x)=f(x)^2 f(1-x)$.

7 אינטגרלים

שאלה 98

א) מהי הפונקציה הקדומה ל- $f(x)$? תן את ההגדרה ואת הדוגמאות המתאימות.

ב) בדקו שהפונקציה $F(x)$ הנתונה היא קדומה ל- $f(x)$:

1)

$$f(x)=\frac{3}{9+x^2},\ F(x)=\arctan\left(\frac{x}{3}\right)$$

2)

$$f(x)=\frac{2}{x^2-1},\ F(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

ג) רשום פונקציה קדומה לפונקציה הנתונה:

1)

$$f(x)=e^{3x}$$

(2

$$f(x) = \cos(5x+6)$$

(3

$m \neq 0$,$f(x) = (mx+n)^{1/3}$

(4

($n \neq -1$,$a \neq 0$) $f(x) = (ax+b)^n$

שאלה 99 חשב את האינטגרלים הבאים:

א) $$\int \frac{(x+2)^2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

ב) $$\int e^{-3x+2}\,dx$$

ג) $$\int \frac{3^{2x}+5^{x+1}}{4^x}\,dx$$

ד) $$\int \frac{x}{x+1}\,dx$$

ה) $$\int \sin^2 x\,dx$$

ו) $$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$$

ז) $$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-12x}}\,dx$$

ח) $$\int \frac{1}{\sqrt{12x-2x^2}}dx$$

ט) $$\int \sqrt[3]{2-5x}\,dx$$

י) $$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$$

יא) $$\int (\sin x + \cos x)^2\,dx$$

יב) $$\int \sin(3x)\cos(5x)\,dx$$

יג) $$\int \cot^2(x)\,dx$$

יד) $$\int \frac{(2x+1)}{x^2+x+1}\,dx$$

שאלה 100 חשב את האינטגרלים הבאים:

א) $$\int \ln x\,dx$$

ב) $$\int 2x\ln x\,dx$$

ג) $$\int x^2\sin(2x)\,dx$$

ד) $$\int x^2\arctan(x)\,dx$$

ה) $$\int 9x^2e^{3x}\,dx$$

שאלה 101 חשב את האינטגרלים הבאים:

א) $$\int \frac{(x+1)}{x(x-3)}\,dx$$

ב) $$\int \frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}\,dx$$

ג) $$\int \frac{5x^3-17x^2+18x-5}{(x-1)^3(x-2)}\,dx$$

ד) $$\int \frac{x^2}{x^2-4x+3}\,dx$$

ה) $$\int \frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}\,dx$$

ו) $$\int \frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x}\,dx$$

שאלה 102 חשב את האינטגרלים הבאים:

א) $$\int \frac{1}{3+\sin x}\,dx$$

ב) $$\int \frac{1}{1+5\cos x}\,dx$$

ג) $$\int \frac{1}{\sin x + 2\cos x + 6}\,dx$$

שאלה 103 בצעו את ההצבה המביאה את חישוב האינטגרל לאינטגרציה של שבר אלגברי וחשבו את האינטגרל:

א) $$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$$

ב) $$\int \frac{\sqrt{x+2}}{x}\,dx$$

ג) $$\int \frac{1+e^x}{(1-e^{2x})e^x}\,dx$$

שאלה 104 חשב את האינטגרלים הבאים:

א) $$\int \sin^4 x \cos^5 x\,dx$$

ב) $$\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$$

ג) $$\int \cos^6 x\,dx$$

ד) $$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx$$

8 תשובות

שאלה 1

א) משוואת המשיק:

$$y = 2x + 7$$

משוואת הנומרל:

$$y = 2 - \frac{x}{2}$$

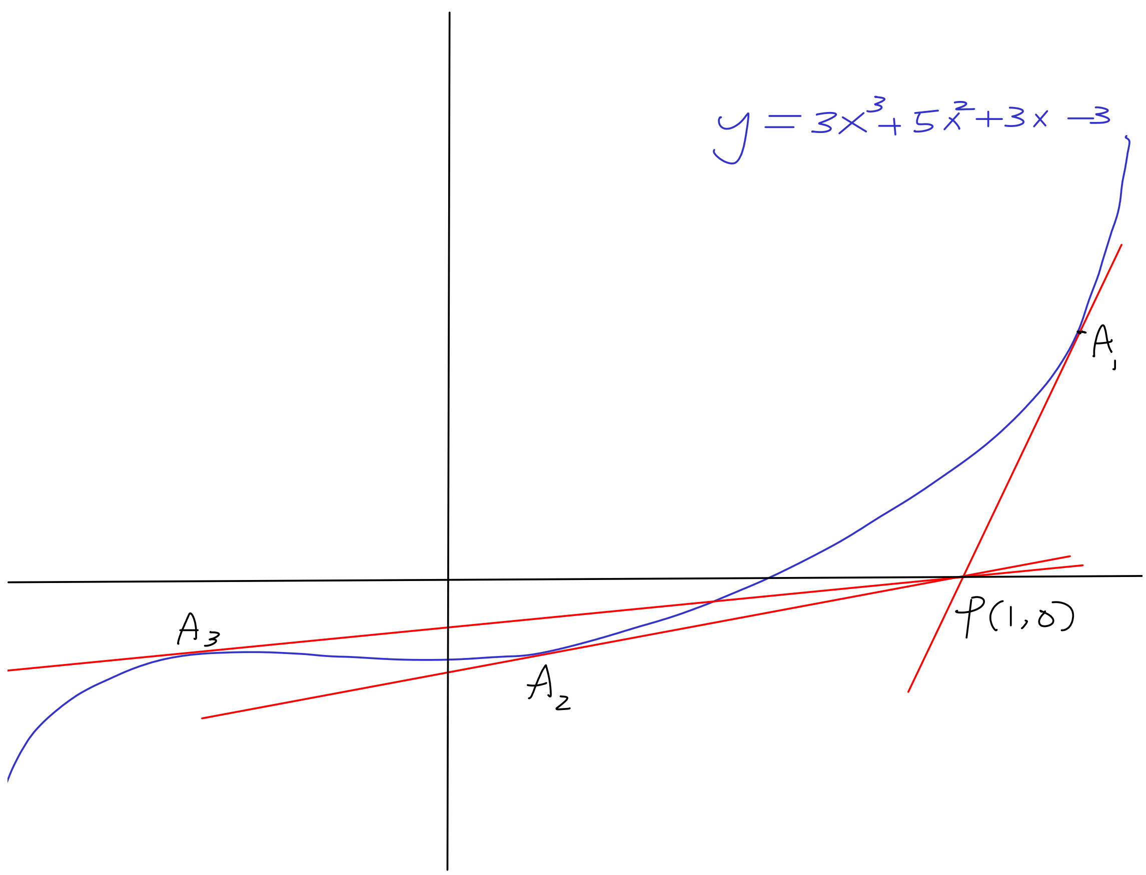
ב) משוואת המשיק:

$$y = \frac{3}{2}x - 3$$

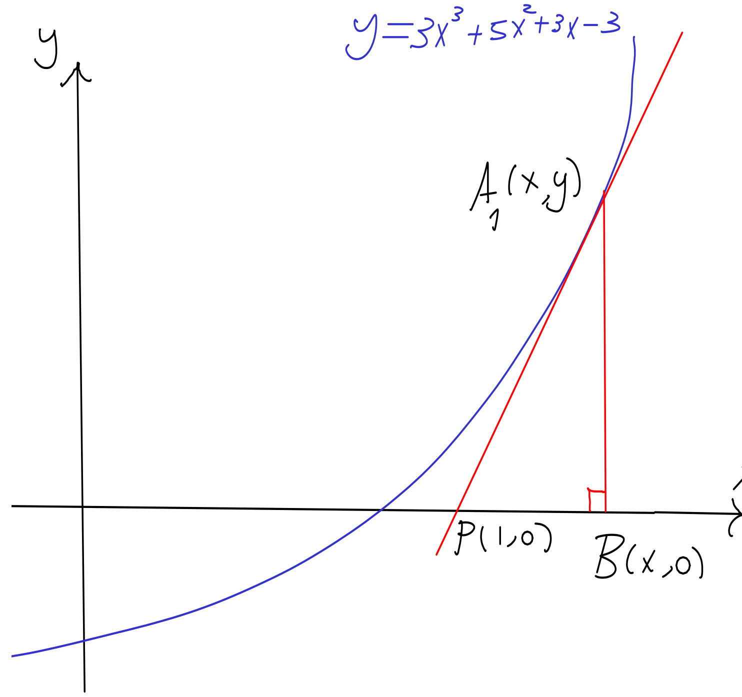
משוואת הנומרל:

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

שאלה 2 נחפש את המשוואות של השלוש המשיקים A_1P,A_2P,A_3P, לגרף של $y = 3x^3 + 5x^2 + 3x - 3$ בנקודה P (ראו שרטוט).



נסתכל אל המשיק A_1P (ראו שרטוט למטה).



נמצא את הקואורדינטות (x,y) של הנקודה A_1. מגיאומטריה השיפוע של המשיק הוא

$$m=\frac{BA_1}{PB}=\frac{y-0}{x-1}=\frac{y}{x-1}$$

בשיפוע גם ניתן ע"י הנזרת של y על הנקודה A:

$$m=y'(x).$$

נשווה ביניהם:

$$\frac{y}{x-1}=y'(x)$$

נציב $y=3x^3+5x^2+3x-3$:

$$\frac{3x^3+5x^2+3x-3}{x-1}=\left(3x^3+5x^2+3x-3\right)' \qquad \Rightarrow \qquad \frac{3x^3+5x^2+3x-3}{x-1}=9x^2+10x+3$$

$$\Rightarrow \qquad 3x^3+5x^2+3x-3=(9x^2+10x+3)(x-1) \qquad \Rightarrow \qquad 3x^3+5x^2+3x-3=9x^3+10x^2+3x-9x^2-10x-3$$

$$\Rightarrow \qquad 6x^3-4x^2-10x=0 \qquad \Rightarrow \qquad 2x(3x^2-2x-5)=0 \qquad \Rightarrow \qquad 2x(3x-5)(x+1)=0$$

הפתרון הוא $x=0,\frac{5}{3},-1$.

<u>עבור $x=0$:</u>

$$y'(0)=9\cdot 0^2+10\cdot 0+3=3\ , \qquad y(0)=3\cdot 0^3+5\cdot 0^2+3\cdot 0-3=-3$$

לכן משוואת המשיק:

$$y+3=3x\ .$$

<u>עבור $x=\frac{5}{3}$:</u>

$$y'\left(\frac{5}{3}\right)=9\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2+10\cdot\frac{5}{3}+3=\frac{134}{3}\ ,\qquad y\left(\frac{5}{3}\right)=3\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^3+5\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2+3\cdot\left(\frac{5}{3}\right)-3=\frac{268}{9}$$

לכן משוואת המשיק:

$$y-\frac{268}{9}=\frac{134}{3}\left(x-\frac{5}{3}\right)\qquad\Rightarrow\qquad y=\frac{134}{3}x-\frac{134}{3}\ .$$

<u>עבור $x=-1$:</u>

$$y'(-1)=9\cdot(-1)^2+10\cdot(-1)+3=2\ ,\qquad y(-1)=3\cdot(-1)^3+5\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)-3=-4$$

לכן משוואת המשיק:

$$y+4=2(x+1)\ ,\qquad\Rightarrow\qquad y=2x-2\ .$$

תשובה סופית:

$$y=-2+2x\ ,\qquad y=-3+3x\ ,\qquad y=-\frac{134}{3}+\frac{134}{3}x\ .$$

<u>שאלה 3</u>

$$y=x^3\ ,\qquad y=x^3+x^2-3x+2$$

הנוסחה לזווית ביו שני הגרפים היא:

$$\tan\alpha=\left|\frac{f'(a)-g'(a)}{1+f'(a)\cdot g'(a)}\right|$$

(הנוסחה מופיעה בדף הנוסחאות שלכם). כאשר $(a,g(a))=(a,f(a))$ נקודת ההשקה.

$$g(x)=x^3\ ,\qquad f(x)=x^3+x^2-3x+2\ .$$

נמצא את נקודת החיתוך:

$$x^3+x^2-3x+2=x^3\qquad\Rightarrow\qquad x^2-3x+2=0\qquad\Rightarrow\qquad x=1,2$$

נקודת החיתוך השמאלית היא נקודה שבה $x=1$. ז"א $a=1$.

$$f'(x)=3x^2+2x-3\ ,\qquad f'(1)=2\ ,\qquad g'(x)=3x^2\ ,\qquad g'(1)=3\ .$$

$$\tan\alpha=\left|\frac{2-3}{1+2\cdot3}\right|=\frac{1}{7}\ ,\qquad\alpha=\arctan\left(\frac{1}{7}\right)\ .$$

שאלה 4

$$x^5+y^5=2xy\ ,\qquad (\#1)$$

שלב 1: לגזור (*1):

$$5x^4+5y^4y'=2y+2xy'\ ,\qquad (\#2)$$

שלב 2: להציב $x=1$, $y=1$ ב (*2):

$$5+5y(1)^4y'(1)=2y(1)+2y'(1)\qquad\Rightarrow\qquad y'(1)=-1\ .\ ,\qquad (\#3)$$

שלב 3: להציב במשוואת המשיק בנקודה a:

$$y-y(a)=y'(a)(x-a)$$

נציב $a=1$, $y(1)=1$, $y(1)=-1$ ונקבל

$$y-1=-1(x-1)\qquad\Rightarrow\qquad y=-x+2\ .$$

שלב 4: להציב במשוואת הנורמל בנקודה a:

$$y-y(a)=-\frac{1}{y'(a)}(x-a)$$

נציב $a=1$, $y(1)=1$, $y'(1)=-1$ ונקבל

$$y-1=\frac{-1}{-1}(x-1)\qquad\Rightarrow\qquad y=x\ .$$

שלב 5: נגזור (*2):

$$\begin{aligned}\left(5x^4+5y^4y'\right)'&=(2y+2xy')'\\ 20x^3+\left(5y^4y'\right)'&=2y'+(2xy')'\\ 20x^3+\left(5y^4\right)'y'+5y^4y''&=2y'+2y'+2xy''\\ 20x^3+\left(20y^3y'\right)y'+5y^4y''&=2y'+2y'+2xy''\\ 20x^3+20y^3y'^2+5y^4y''&=4y'+2xy''\ ,\end{aligned}\qquad (\#3)$$

<u>שלב 6:</u> נציב $x=1$, $y(1)=1$, $y'(1)=-1$: ב (#3):

$$\begin{aligned} 20+20y^3(1)y'(1)^2+5y^4(1)y''(1) =& 4y'(1)+2y''(1) \\ 20+20+5y''(1) =& -4+2y''(1) \\ 3y''(1) =& -44 \\ y''(1) =& \frac{-44}{3} \ ., \end{aligned} \tag{\#4}$$

<u>שאלה 5</u>

בנקודה $x=1$, $\tan t=1$ ולכן $t=\frac{\pi}{4}$ ו-

$$y(t=\frac{\pi}{4})=y(x=1)=\frac{1}{2}\ .$$

$$x'_t=\frac{1}{\cos^2 t}\ , \qquad y'_t=2\sin t\cos t\ , \qquad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2}{\sin}t\cos^3 t\ .$$

נציב $t=\frac{\pi}{4}$:

$$y'_x(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}\ .$$

משוואת המשיק:

$$y=\frac{x}{2}\ .$$

משוואת הנורמל:

$$y=-2x+\frac{5}{2}\ .$$

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{2(\cos^4 t+\sin t\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t))}{\frac{1}{\cos^2 t}}$$

נציב $t=\frac{\pi}{4}$:

$$y''_{xx}=-\frac{1}{2}\ .$$

<u>שאלה 6</u>

אסימפטוטה מושפעת קיימת כאשר $\lim\limits_{x\to\infty} y$ מספר סופי.

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty} x^{a+7}\ln(x+17)$$

כעת ישנן שתי אופציות. אם החזקה של x^{a+7} גדול או שווה ל-0, כלומר $a+7\geq 0$, אז בוודאות $\lim\limits_{x\to\infty} x^{a+7}\ln(x+17)=\infty$. אבל אם החזקה של x^{a+7} קטן מ-0, כלומר $a+7<0$, אז הגבול לא שווה ל ∞.

בסיכום:

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty} x^{a+7}\ln(x+17)=\begin{cases}\infty & a+7\geq 0\\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+17)}{x^{-a-7}} & a+7<0\end{cases}$$

נבדוק את הערך של הגבול עבור המצב ש $a+7<0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+17)}{x^{-a-7}} &= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \\
&\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+17)'}{(x^{-a-7})'} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(x+17)}}{(-a-7)x^{-a-8}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(-a-7)(x+17)x^{-a-8}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(-a-7)\left(1+\frac{17}{x}\right)x^{-a-7}} \\
&=\frac{1}{(-a-7)\left(1+\frac{17}{\infty}\right)\infty^{-a-7}} \\
&=\frac{1}{(-a-7)\left(1+0\right)\infty^{-a-7}} \\
&=\frac{1}{(-a-7)\infty^{-a-7}}
\end{aligned}$$

שימו לב $a+7<0$ לכן $-a-7>0$ ולכן $\infty^{-a-7}=\infty$, לכן

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+17)}{x^{-a-7}} &=\frac{1}{(-a-7)\infty^{-a-7}} \\
&=\frac{1}{(-a-7)\infty} \\
&=0
\end{aligned}$$

תשובה סופית: $y=0$ אסימפטוטה אופקית כאשר

$$a<-7\ .$$

שאלה 7 $\alpha=\arctan(2)=63.44^\circ$

שאלה 8

א) נקודת חיתוך:

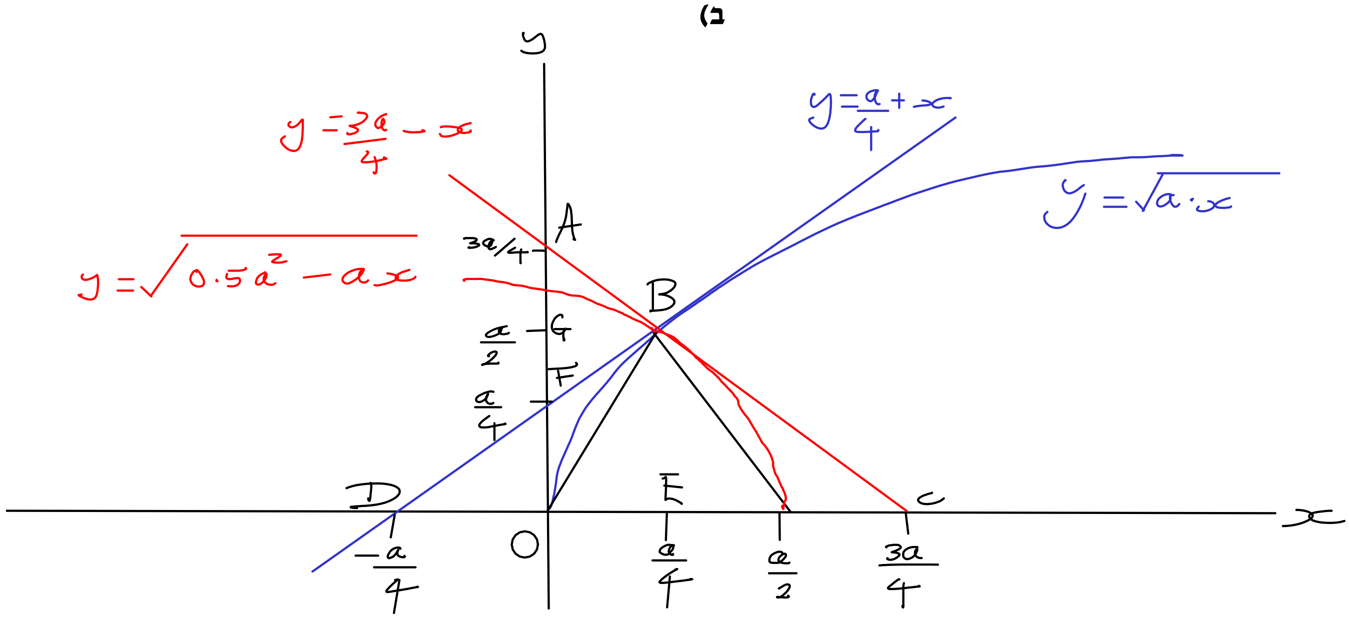
$$(0.25a, 0.5a)$$

$$m1=(\sqrt{ax})'=\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{a}}{2\cdot 0.5\cdot\sqrt{a}}=1\ ,$$

$$m2=(\sqrt{0.5a^2-ax})'=\frac{-a}{2\sqrt{0.5a^2-ax}}=\frac{-a}{2\sqrt{0.5a^2-0.25\cdot a^2}}=\frac{-a}{2\cdot 0.5\cdot a}=-1\ ,$$

$$m1\cdot m2=-1$$

ב)



המשולש שנוצר בין המשיקים וציר ה- x הוא המשולש ΔDBC. שטח המשולש ΔDBC הוא

$$S_{\Delta DBC}=\frac{1}{2}DC\cdot EB=DE\cdot EB=\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2}{4}\ .$$

המשולש שנוצר בין המשיקים וציר ה- y הוא המשולש ΔFAB.

$$S_{\Delta FAB}=\frac{1}{2}FA\cdot GB=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{4}=\frac{a^2}{16}\ .$$

$$\frac{S_{\Delta DBC}}{S_{\Delta FAB}}=\frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a^2}{16}}=4$$

שאלה 9 נגזור:

$$\left(11xy^3-7x^2y^2\right)'=(60x)'$$

$$\Rightarrow\quad 11y^3+11x\cdot 3y^2\cdot y'-14xy^2-7x^2\cdot 2y\cdot y'=60$$

$$\Rightarrow\quad 11y^3+33xy^2y'-14xy^2-14x^2yy'=60$$

נציב $x=1$, $y(1)=2$:

$$11y(1)^3+33y(1)^2y'(1)-14y(1)^2-14y(1)y'(1)=60$$

$$\Rightarrow\quad 11\cdot 8+33\cdot 4y'(1)-14\cdot 4-14\cdot 2y'(1)=60$$

$$\Rightarrow\quad 88+132y'(1)-56-28y'(1)=60$$

$$\Rightarrow\quad 32+104y'(1)=60$$

$$\Rightarrow\quad 104y'(1)=28$$

$$\Rightarrow\quad y'(1)=\frac{28}{104}=\frac{14}{52}=\frac{7}{26}\ .$$

<u>שאלה 10</u> נשים לב כי

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} &=5\\ \Rightarrow \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} &=5\\ \Rightarrow \quad f'(0) &=5\ . \end{aligned}$$

נגזור את הפונקיציה $g(x)=f(x)\ln(3x+e)$:

$$g'(x)=f'(x)\ln(3x+e)+f(x)\cdot\frac{3}{3x+e}$$

נציב $x=0$:

$$\begin{aligned} g'(0)=&f'(0)\ln(3\cdot 0+e)+f(0)\cdot\frac{3}{3\cdot 0+e}\\ =&f'(0)\ln(e)+\frac{3f(0)}{e}\\ =&f'(0)+\frac{3f(0)}{e}\ . \end{aligned}$$

נציב $f(0)=3$ ונקבל

$$g'(0)=5+\frac{9}{e}\ .$$

<u>שאלה 11</u> נגזור את המשווא לפי x:

$$\begin{aligned} &\left(9y^5+6x^5\right)'=(15xy)'\\ \Rightarrow\quad &\left(9y^5+6x^5\right)'=(15xy)'\\ \Rightarrow\quad &45y^4\cdot y'+30x^4=15y+15xy'\\ \Rightarrow\quad &3y^4\cdot y'+2x^4=y+xy'\ . \end{aligned}$$

נציב $x=1$, $y(1)=1$:

$$\begin{aligned} &3y(1)^4\cdot y'(1)+2\cdot 1^4=y(1)+1\cdot y'(1)\\ \Rightarrow\quad &3y'(1)+2=1+y'(1)\\ \Rightarrow\quad &2y'(1)=-1\\ \Rightarrow\quad &y'(1)=-\frac{1}{2}\ . \end{aligned}$$

<u>שאלה 12</u> השיפוע של הגרף ב- $x=4$ ניתן ע"י $f'(4)$. נשים לב כי

$$f(x)=\frac{4x+4}{5x+10}=\frac{4(x+1)}{5(x+2)}=\frac{4}{5}\left(\frac{x+2-1}{x+2}\right)=\frac{4}{5}\left(\frac{x+2}{x+2}-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{4}{5}\left(1-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{x+2}\ .$$

$$f'(x)=\left(\frac{4}{5}\right)'-\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{x+2}\right)'=0-\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{-1}{(x+2)^2}\right)=\frac{4}{5(x+2)^2}$$

לכן

$$f'(4)=\frac{4}{5\cdot 6^2}=\frac{4}{5\cdot 36}=\frac{1}{45}\ .$$

<u>שאלה 13</u> נשים לב כי

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=&4\\ \Rightarrow\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=&4\\ \Rightarrow\quad f'(0)=&4\ .\end{aligned}$$

נגזור את הפונקיציה $g(x)=f(x)\ln(2x+e)$:

$$g'(x)=f'(x)\ln(2x+e)+f(x)\cdot\frac{2}{2x+e}$$

נציב $x=0$:

$$\begin{aligned}g'(0)=&f'(0)\ln(2\cdot 0+e)+f(0)\cdot\frac{2}{2\cdot 0+e}\\ =&f'(0)\ln(e)+\frac{2f(0)}{e}\\ =&f'(0)+\frac{2f(0)}{e}\ .\end{aligned}$$

נציב $f(0)=3$ ונקבל

$$g'(0)=4+\frac{6}{e}\ .$$

<u>שאלה 26</u> $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+\ln x-1}{e^x-e}=\frac{3}{e}$

<u>שאלה 26</u> $\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{e^x}}{x+e^x}=0$

<u>שאלה 26</u> $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}=0$

<u>שאלה 26</u> $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}=1$

<u>שאלה 26</u> $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{100}}{e^x}=0$

<u>שאלה 26</u> $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{2}$

<u>שאלה 26</u> $\lim_{x\to 0^+}x^2\ln x=0$

שאלה 26 $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

שאלה 26 $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$

שאלה 26 $\lim_{x\to\infty} (2x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{1/2}$

שאלה 26 $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{1/3}$

שאלה 26 $\lim_{x\to 0} (x+e^x)^{\frac{1}{x}} = e^2$

שאלה 26 $\lim_{x\to 0} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - \sin\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{1}{2}$

שאלה 27

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{5x}-5x-1}{3x^3+x^2}\right) = \left[\frac{0}{0}\right]$$
$$\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^{5x}-5x-1)'}{(3x^3+x^2)'}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{5e^{5x}-5}{9x^2+2x}\right)$$
$$= \left[\frac{0}{0}\right]$$
$$\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{(5e^{5x}-5)'}{(9x^2+2x)'}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{25e^{5x}}{18x+2}\right)$$
$$= \frac{25}{2}\ .$$

שאלה 28

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin(2x))}{\ln(\sin(11x))} &= \left[\frac{-\infty}{-\infty}\right]\\
&\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)}}{\frac{11\cos(11x)}{\sin(11x)}}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{2\tan(11x)}{11\tan(2x)}\\
&= \left[\frac{0}{0}\right]\\
&\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{2\cdot 11\sec(11x)}{11\cdot 2\sec(2x)}\\
&=\frac{\sec(0)}{\sec(0)}\\
&=1\ .
\end{aligned}
$$

שאלה 29

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(2x)}{x} = \frac{0}{0} \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2(2x))'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin(2x)2\cos(2x)}{1} = 4\sin(0)\cos(0) = 0\ .$$

שאלה 30 0

שאלה 31 $\frac{1}{\sqrt{e}}$

שאלה 32 1

שאלה 33 $e^{2-\pi}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(x^2+\sin(\pi x)\right)^{\frac{1}{\log(x)}} &= \lim_{x\to 1}\left(x^2\cdot\left[1+\frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right]\right)^{\frac{1}{\log(x)}}\\
&= \lim_{x\to 1} x^{2/\log x}\left(1+\frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right)^{\frac{1}{\log(x)}}\\
&= \lim_{x\to 1} x^{2/\log x}\cdot\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right)^{\frac{1}{\log(x)}}
\end{aligned}
$$

הגבול הראשון הוא

$$\lim_{x\to 1} x^{2/\log x} = \lim_{x\to 1}\left(e^{\log x}\right)^{2/\log x} = \lim_{x\to 1} e^{2\log x/\log x} = e^2\ .$$

הגבול השני הוא

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right)^{1/\log(x)} = \lim_{x\to 1}\left[\left(1+\frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right)^{x^2/\sin(\pi x)}\right]^{\sin(\pi x)/(x^2\log(x))}$$

שים לב $\sin\pi x$ מתאפס כאשר $x \to 1$ ולכן $\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y} = e$, $\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right)^{x^2/\sin(\pi x)} =$ לכן נקבל

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right)^{1/\log(x)} = \lim_{x\to 1} e^{\sin(\pi x)/(x^2\log(x))} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\sin(\pi x)/(x^2\log(x))}$$

הגבול $\lim_{x\to 1}\sin(\pi x)/(x^2\log(x))$ נמצא ע"י כלל לופיטל:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x^2\log x} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sin\pi x)'_x}{(x^2\log x)'_x} = \lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos\pi x}{x+2x\log x} = -\pi$$

לכן $\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right)^{1/\log(x)} = e^{-\pi}$ סך הכל

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+\sin(\pi x)\right)^{\frac{1}{\log(x)}} = e^{2-\pi}$$

<u>שאלה 34</u> e

<u>שאלה 35</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\cos(4x)-1} = \frac{0}{0} \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x)'}{(\cos(4x)-1)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{-4\sin(4x)} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(2\sin x\cos x)'}{(-4\sin(4x))'} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2 x-2\sin^2 x}{-16\cos(4x)} = \frac{2\cos^2 0-2\sin^2 0}{-16\cos(0)} = \frac{-2}{16} = \frac{-1}{8}\ .$$

<u>שאלה 36</u> e^6

<u>שאלה 37</u> e^4

<u>שאלה 38</u> $\frac{1}{e}$

<u>שאלה 39</u> e^5

<u>שאלה 40</u> 1

<u>שאלה 41</u> e

<u>שאלה 42</u> $\log(2)$

<u>שאלה 43</u> e

<u>שאלה 44</u> e^3

שאלה 45 3

שים לב:

$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}} = \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}} \cdot \frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}\right)\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}\right)} \cdot \frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}$$

$$= \frac{x+2-(3x-2)}{4x+1-(5x-1)} \cdot \frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}$$

$$= \frac{-2x+4}{-x+2} \cdot \frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}$$

$$= \frac{-2(x-2)}{-(x-2)} \cdot \frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}$$

ולכן

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}} = \lim_{x\to 2}\left[2 \cdot \frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}\right]$$

$$= \lim_{x\to 2}\left[2 \cdot \frac{\sqrt{9}+\sqrt{9}}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}\right]$$

$$= 3 \ .$$

שאלה 46 $\frac{1}{\sqrt{e}}$

שאלה 47 -2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x-\sin(2x)} = \frac{0}{0} \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(2x))'}{(x-\sin(2x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x)}{1-2\cos(2x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} 2\cos(2x)}{\lim\limits_{x\to 0}(1-2\cos(2x))} = \frac{2\cos(0)}{(1-2\cos(0))} = -2 \ .$$

שאלה 48 $\frac{1}{e}$

שים לב

$$(1+x)^{\frac{1}{x^2}}(1-x)^{\frac{1}{x^2}} = ((1+x)(1-x))^{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

לכן, אם נגדיר משתנה חדש $y \equiv x^2$ ושים לב כי $y \to 0$ בתהליך כאשר $x \to 0$, אז

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x^2}}(1-x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to 0}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}\\ &= \lim_{y\to 0}(1-y)^{\frac{1}{y}}\\ &= \lim_{y\to 0}(1-y)^{\frac{-1}{-y}}\\ &= \lim_{y\to 0}\left[(1-y)^{\frac{1}{-y}}\right]^{-1}\\ &= e^{-1} = \frac{1}{e}\ .\end{aligned}$$

שאלה 49

א)

$$y^5 + xy + e^x = 33 \qquad \text{(\#)}$$

שלב 1 :

נציב $x = 0$:

$$\begin{aligned} y^5(0) + 0\cdot y(0) + e^0 &= 33\\ y^5(0)+1 &= 33\\ y^5(0) &= 32\\ y(0) &= \sqrt[5]{32}\\ y(0) &= 2\ . \end{aligned} \qquad \text{(\#1)}$$

שלב 2 :

גוזרים (#):

$$\begin{aligned} 5y^4y' + (xy)' + e^x &= 0\\ 5y^4y' + y + xy' + e^x &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(\#2)}$$

שלב 3 :

נציב $x = 0$ ב (#2):

$$\begin{aligned} 5y^4(0)y'(0)+y(0)+0\cdot y'(0)+e^0 =&0\\ 5y^4(0)y'(0)+y(0)+1 =&0 \end{aligned} \tag{\#2}$$

נציב $y(0)=2$ מ (#1) ונקבל:

$$\begin{aligned} 5\cdot 2^4 y'(0)+2+1 =&0\\ 80y'(0) =&-3\\ y'(0) =&\frac{-3}{80}\ . \end{aligned} \tag{\#3}$$

שלב 4 :

גוזרים (#2):

$$\begin{aligned} (5y^4y')'+y'+(xy')'+(e^x)' =&0\\ 20y^3\cdot y'\cdot y'+5y^4\cdot y''+y'+xy''+y'+e^x =&0\\ 20y^3\cdot y'^2+5y^4\cdot y''+2y'+xy''+e^x =&0 \end{aligned} \tag{\#4}$$

שלב 5 :

נציב $x=0$ ב (#4):

$$\begin{aligned} 20y^3(0)\cdot y'^2(0)+5y^4(0)\cdot y''(0)+2y'(0)+xy''(0)+e^0 =&0\\ 20y^3(0)\cdot y'^2(0)+5y^4(0)\cdot y''(0)+2y'(0)+xy''(0)+1 =&0 \end{aligned} \tag{1}$$

נציב $y(0)=2$ ו $y'(0)=-\frac{3}{80}$:

$$\begin{aligned} 20\cdot 2^3\cdot\left(-\frac{3}{80}\right)^2+5\cdot 2^4\cdot y''(0)+2\cdot\frac{-3}{80}+0\cdot y''(0)+1 =&0\\ \frac{18}{80}+80\cdot y''(0)-\frac{6}{80}+1 =&0\\ 80\cdot y''(0) =&\frac{-23}{20}\\ \cdot y''(0) =&\frac{-23}{1600}\ . \end{aligned} \tag{\#5}$$

נוסחת מקלורן מסדר 2 הוא

$$P_2(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2\ .$$

נציב (1#), (3#) ו (5#) ונקבל

$$P_2(x) = 2 - \frac{3}{80}x - \frac{23}{3200}x^2$$

ב)

(*) $$y = t^2 + 2t + 1 \ , \qquad x = te^t$$

<u>שלב 1</u> :

נציב $x = 0$:

(*1) $$0 = te^t \qquad \Rightarrow \qquad t = 0 \ .$$

<u>שלב 2</u> :

נציב $x = 0$ ב y

(*2) $$y(x=0) = y(t=0) = 1 \ .$$

<u>שלב 3</u> :

גוזרים (*):

$$\begin{aligned} y'_x =& \frac{y'_t}{x'_t} \\ x'_t =& e^t + te^t = (1+t)e^t \\ y'_t =& 2t + 2 = 2(1+t) \\ y'_x =& \frac{2(1+t)}{(1+t)e^t} = \frac{2}{e^t} = 2e^{-t} \end{aligned}$$ (*3)

<u>שלב 4</u> :

נציב $x = 0$ ב (*3):

(4*) $$y'(x=0) = y'(t=0) = 2$$

<u>שלב 5</u> :

נחשב y''_{xx}:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)_t}{x'_t}$$

נציב y'_x ו x'_t מ (*3):

$$\begin{aligned} y''_{xx} =& \frac{(y'_x)_t}{x'_t} \\ y''_{xx} =& \frac{(2e^{-t})'_t}{(1+t)e^t} = \frac{-2e^{-t}}{(1+t)e^t} = \frac{-2e^{-2t}}{1+t} \end{aligned} \qquad (*5)$$

שלב 6 :

$t = 0$:

$$y''_{xx}(x=0) = y''_{xx}(t=0) = \frac{-2e^{-0}}{1} = -2 \ . \qquad (*6)$$

שלב 7 :

נוסחת מקלורן מסדר 2 הוא

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \ .$$

נציב (*2), (*4) ו (*6) ונקבל

$$P_2(x) = 1 + 2x - x^2$$

ג) נתון כי פולינום מקלורן מסדר 3 של $f(x)$ הוא $P_3(x) = x - 3x^2 + 2x^3$. ז"א

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x - 3x^2 + 2x^3 \ .$$

כלומר

$$\begin{aligned} f(0) =& 0 \ , \\ f'(0) =& 1 \ , \\ \frac{f''(0)}{2} =& -3 \qquad \Rightarrow \qquad f''(0) = -6 \ , \\ \frac{f'''(0)}{6} =& 2 \qquad \Rightarrow \qquad f'''(0) = 12 \ . \end{aligned}$$

לכן

$$f''(0) + f'''(0) = -6 + 12 = 6$$

שאלה 50

א)

$f(x) = \ln(1+x)$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$	$f''(0) = -1$
$f^{(3)}(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$	$f^{(3)}(0) = 2$
$f^{(4)}(x) = \dfrac{-3!}{(1+x)^4}$	$f^{(4)}(0) = -3!$
$f^{(5)}(x) = \dfrac{4!}{(1+x)^5}$	$f^{(5)}(0) = 4!$
$\vdots$	
$f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^n}$	$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

$$\begin{aligned} P_n(x) =& f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \ldots + + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ =& 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \end{aligned}$$

ב) צריך להוכיח:

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

הוכחה:

$$P_2(x) = x - \frac{x^2}{2} + R_2(x) \ ,$$

כאשר

$$R_2(x)=\frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3=\frac{1}{3(1+c)^3}x^3>0$$

לכן

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+R_2(x)>x-\frac{x^2}{2}\ . \qquad (*1)$$

$$P_3(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+R_3(x)\ ,$$

כאשר

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4=\frac{-1}{4(1+c)^4}x^4<0$$

לכן

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+R_3(x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\ . \qquad (*2)$$

לפי (*1) ו (*2) נקבל

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\ .$$

משל.

שאלה 51 נגדיר

$$f(x)=e^x\sin x-x(1+x)\ .$$

פולינום מקלורן מסדר 3 הוא

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+R_4(x)\ .$$

$f(x)=e^x\sin x-x(1+x)$	$f(0)=0$
$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x-1-2x$	$f'(0)=0$
$f''(x)=e^x\sin x+e^x\cos x-e^x\sin x+e^x\cos x-2=2e^x\cos x-2$	$f''(0)=0$
$f'''(x)=2e^x\cos x-2e^x\sin x$	$f'''(0)=2$

לכן

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + R_4(x)$$
$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 \ .$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3} + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x\right) = \frac{1}{3} \ .$$

שאלה 52

$$f(x) = \ln|9x+4| \qquad \Rightarrow \qquad f(0) = \ln(4) \ .$$

$$f'(x) = \frac{9}{9x+4} \qquad \Rightarrow \qquad f'(0) = \frac{9}{4} \ .$$
$$f''(x) = \frac{-81}{(9x+4)^2} \qquad \Rightarrow \qquad f'(0) = \frac{-81}{16} \ .$$

נוסחת מקלורן היא

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \ .$$

נציב ונקבל

$$P_2(x) = \ln(4) + \frac{9x}{4} - \frac{81x^2}{16} \ .$$

שאלה 53

קו ישר $y = m \cdot x + n$ נקרא אסימפטוטה משופעת של פונקציה $f(x)$ אם המרחק בין גרף הפונקציה לבין הקו $y = m \cdot x + n$ שואף ל- 0 כאשר x שואף ל ∞ או $-\infty$.

במידה ש $y = mx + n$ אסימפטוטה משופעת של $f(x)$, אז m ו n ניתנים ע"י הנוסחאות

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \ , \qquad n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$$

(אותו דבר עבור $x \to -\infty$). אם m, n מספרים סולפיים, אז קיימת אסימפטוטה משופעת.

א) $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x} = 2$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x + \sqrt{x^2+1} - 2x\right) = 0 \ .$$

לכן $y = 2x$ אסימפטוט המשופעת ב- $\pm\infty$.

ב) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = 1 \ .$$

לכן $y = x + 1$ אסימפטוט המשופעת ב- $\pm\infty$.

ג) $f(x) = x - e^x$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x - e^x}{x} = -\infty$$

אין אסימפטוט המשופעת ב- $+\infty$.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - e^x}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x} \to -\infty\,(x - e^x - x) = 0\ .$$

לכן $y = x$ אסימפטוט המשופעת ב- $-\infty$.

שאלה 54

שלב 1 תחום הגדרה: כל x.

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה-x:

$y = 0$ כאשר $x = -2$ ולכן נקודת חיתוך עם ציר x היא $(-2, 0)$.

נקודת חיתוך עם ציר ה-y:

$y = -4$ כאשר $x = 0$ ולכן נקודת חיתוך עם ציר y היא $(0, -4)$.

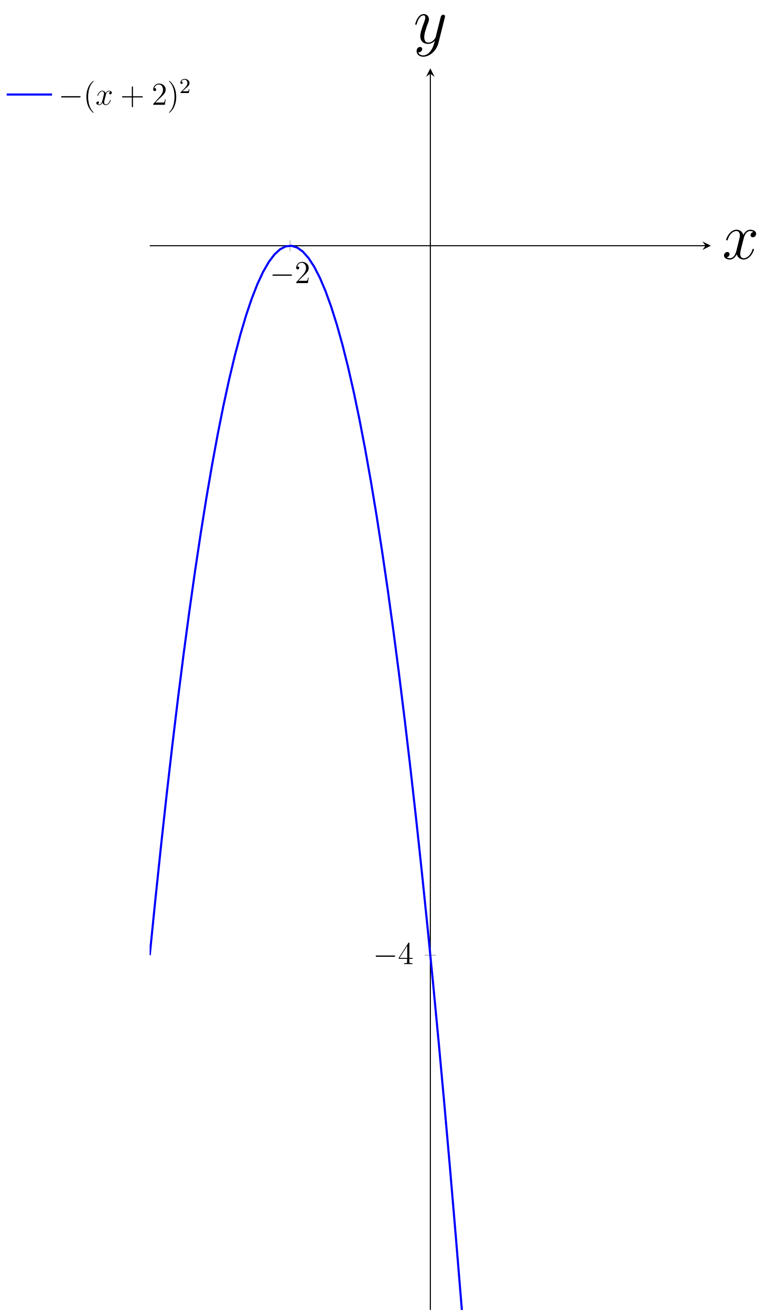
$y \leq 0$ בכל מקום בתחום.

שלב 3 הפונקציה מוגדרת בכל נקודה בתחום.

שלב 4

$$\lim_{x\to+\infty} \left\{-(x+2)^2\right\} = -\infty\ , \qquad \lim_{x\to-\infty} \left\{-(x+2)^2\right\} = -\infty\ .$$

שלב 5



שאלה 55

שלב 1 תחום הגדרה: כל x.

שלב 2 נקודות חיתוך עם ציר ה-x:

$y=0$ כאשר $x=0$ או $x=2$. ולכן נקודות חיתוך עם ציר ה- x הן $(0,0)$ ו- $(2,0)$.

נקודות חיתוך עם ציר ה-y:

$y=0$ כאשר $x=0$ ולכן נקודת חיתוך עם ציר ה- y היא $(0,0)$.

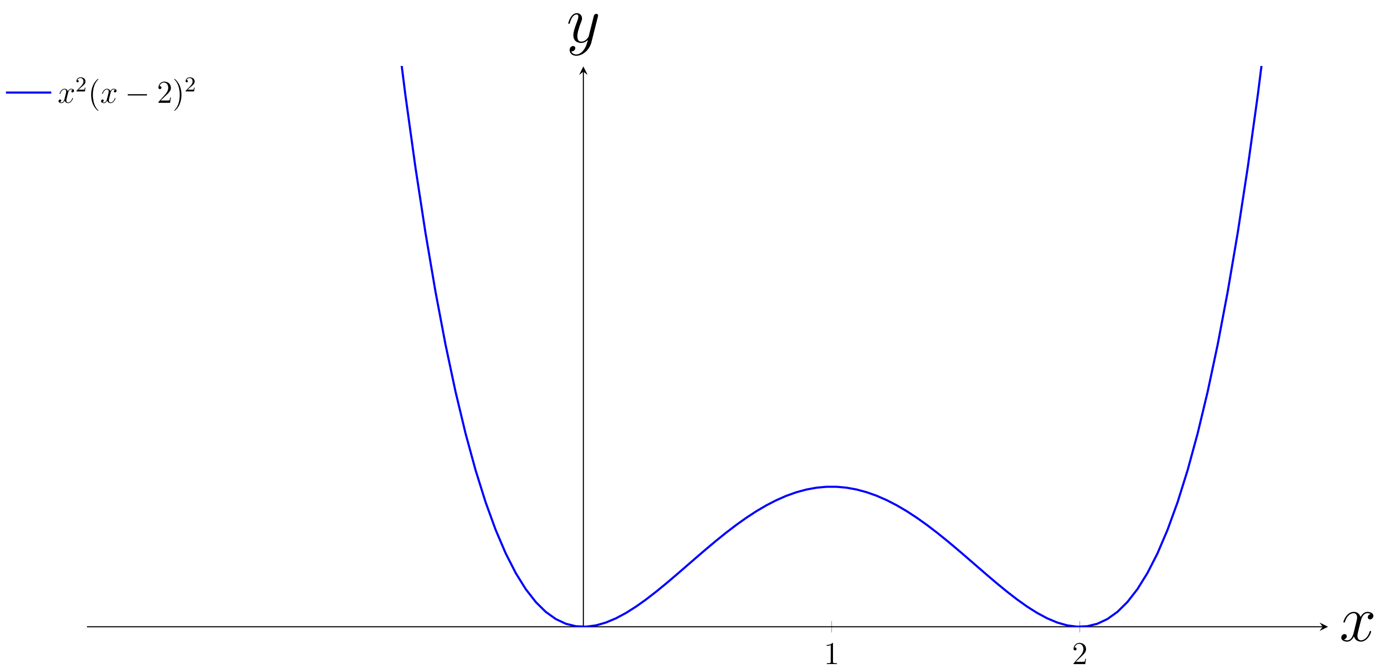
$y\geq 0$ בכל מקום בתחום.

<u>שלב 3</u> הפונקציה מוגדרת בכל נקודה בתחום.

<u>שלב 4</u>

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{x^2(x-2)^2\right\}=+\infty\ ,\qquad \lim_{x\to-\infty}\left\{x^2(x-2)^2\right\}=+\infty\ .$$

<u>שלב 5</u>



<u>שאלה 56</u>

<u>שלב 1</u> תחום הגדרה: כל x.

<u>שלב 2</u> <u>נקודת חיתוך עם ציר ה-x:</u>

$y=0$ כאשר $x=0$. ולכן נקודת חיתוך עם ציר ה-x היא $(0,0)$.

<u>נקודות חיתוך עם ציר ה-y:</u>

נציב $x=0$ בפונקציה ונקבל $y=0$. לכן נקודת חיתוך עם ציר ה-y היא $(0,0)$.

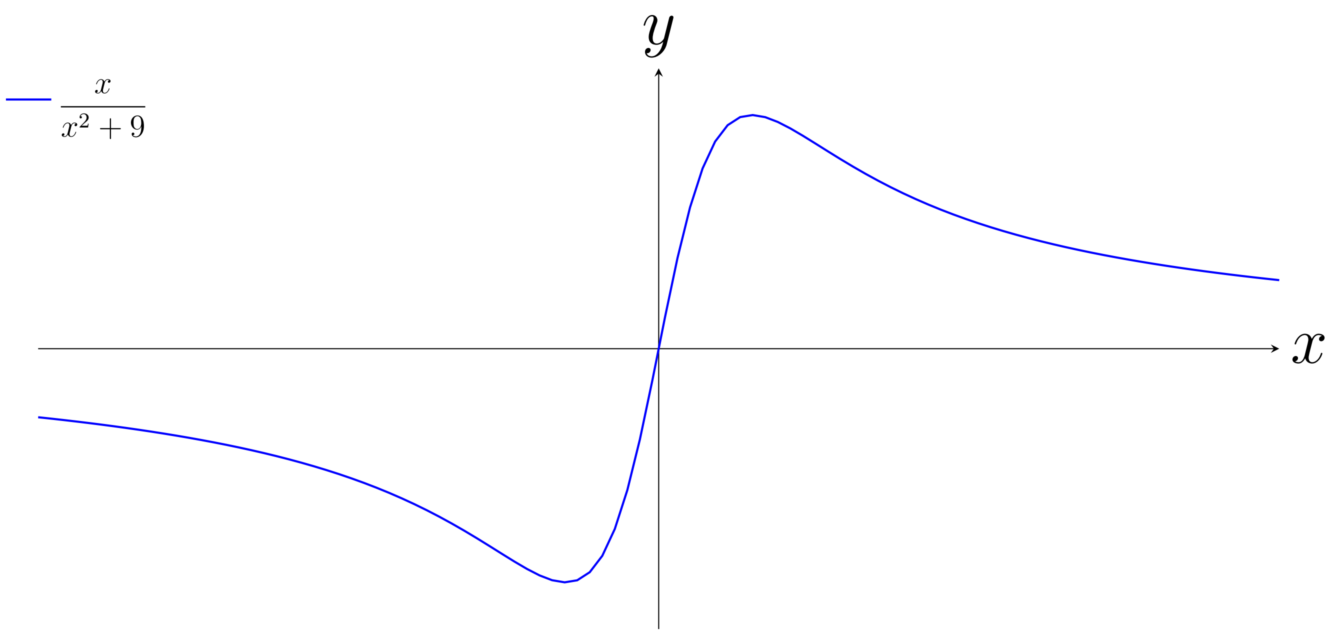
x	y
$x>0$	$y>0$
$x<0$	$y<0$
$x=0$	$y=0$.

<u>שלב 3</u> אינן נקודות בהן הפונקציה לא מוגדרת.

<u>שלב 4</u>

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+9}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\ ,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+9}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\ .$$

<u>שלב 5</u>



<u>שאלה 57</u>

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

<u>שלב 1</u> תחום הגדרה: $x \neq -1$.

<u>שלב 2</u> נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(1,0)$,$(0,-1)$.

x	$x<-1$	$-1<x<1$	$x>1$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

<u>שלב 3</u> אסימפטוטה אנכית: $x=-1$

<u>שלב 4</u> אסימפטוטה אופקית: $y=0$ ב $\pm\infty$.

<u>שלב 5</u> אסימפטוטה משופעת: אין.

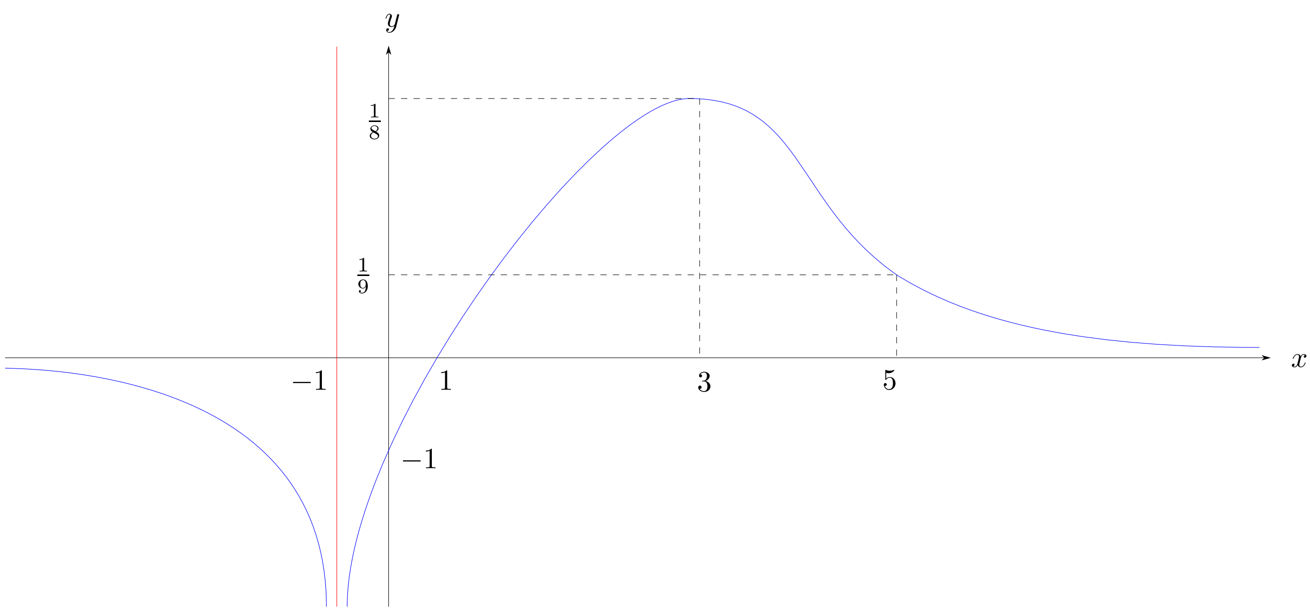
<u>שלב 6</u> נקודות קריטיות: $f'(x) = \dfrac{3-x}{(1+x)^3}$. יש נקודת קריטית ב- $\left(3, \dfrac{1}{8}\right)$.

x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<3$	$x=3$	$x>3$
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	לא מוגדר	$\nearrow$	מקסימום	$\searrow$

<u>שלב 7</u> תחומי קמירות: $f''(x)=\dfrac{2(x-5)}{(x+1)^4}$. נקודות פיתול: $\left(5,\dfrac{1}{9}\right)$.

x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<5$	$x=5$	$x>5$
$f''(x)$	$-$	לא מוגדר	$-$	0	$+$
$f(x)$	קמורה $\downarrow$	לא מוגדר	קמורה $\downarrow$	נקודת פיתול	קמורה $\uparrow$

<u>שלב 8</u> שרטוט:



<u>שאלה 58</u>

$$f(x)=\frac{2x^3}{x^2-4}\ .$$

<u>שלב 1</u> תחום הגדרה: $x\neq\pm 2$.

<u>שלב 2</u> נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0,0)$.

x	$x<-2$	$-2<x<0$	$0<x<2$	$x>2$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x=-2$ ו- $x=2$.

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: אין.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת:

$$m_1=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^2-4}=2\ ,$$
$$n_1=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-m_1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2-4}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-2x(x^2-4)}{x^2-4}=0\ .$$

לכן $y=2x$ אסימפטוטה משופעת ב- $x=\infty$.

$$m_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2-4}=2\ ,$$
$$n_2=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-m_2\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2-4}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-2x(x^2-4)}{x^2-4}=0\ .$$

$y=2x$ אסימפטוטה משופעת ב- $x=-\infty$.

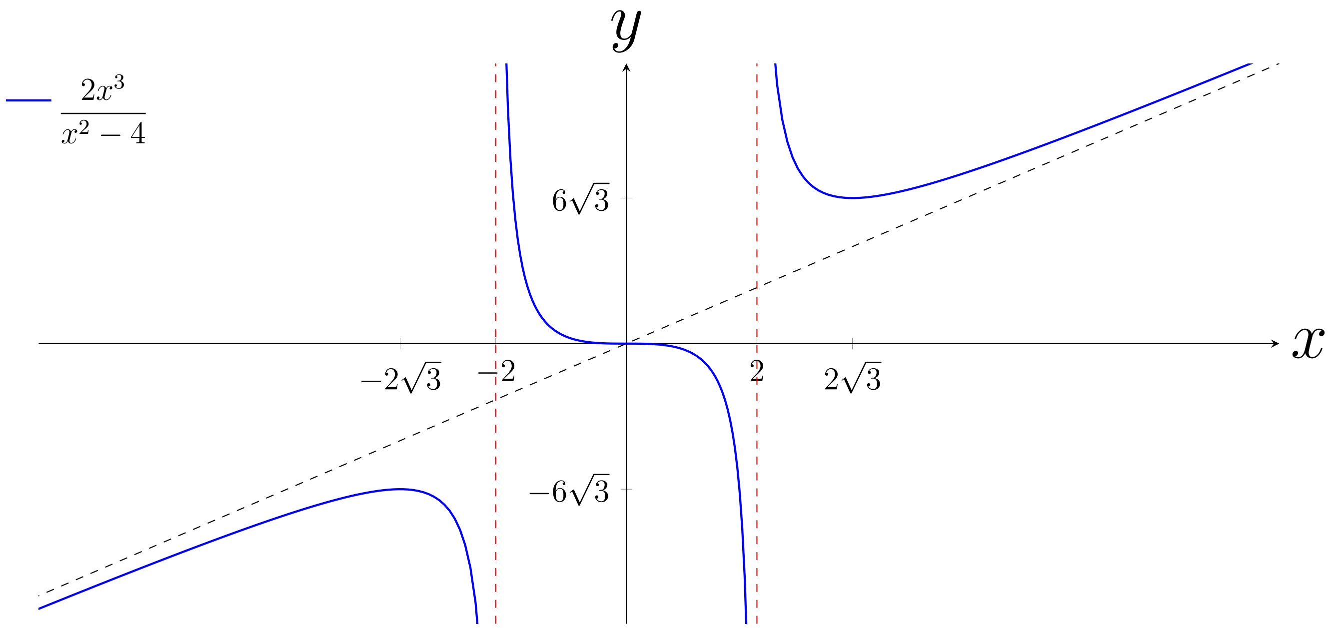
שלב 6 תחומי עליה וירידה: $f'(x)=\dfrac{2x^2\left(x^2-12\right)}{\left(x^2-4\right)^2}$. ישנן נקודות קריטיות ב- $(0,0)$, $(-2\sqrt{3},-6\sqrt{3})$ ו- $(2,\sqrt{3},6\sqrt{3})$.

x	$<-2\sqrt{3}$	$x=-2\sqrt{3}$	$\in(-2\sqrt{3},-2)$	$\in(-2,0)$	$x=0$	$\in(0,2)$	$\in(2,2\sqrt{3})$	$x=2\sqrt{3}$	$x>2\sqrt{3}$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	מקס	$\searrow$	$\searrow$	פיתול	$\searrow$	$\searrow$	מינימום	$\nearrow$

שלב 7 תחומי קמירות: $f''(x)=\dfrac{16x\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3}$ נקודות פיתול ב- $(0,0)$.

x	$x<-2$	$x\in(-2,0)$	$x\in(0,2)$	$x>2$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	קמורה $\downarrow$	קמורה $\uparrow$	קמורה $\downarrow$	קמורה $\uparrow$

שלב 8 שרטוט:



שאלה 59

$$f(x) = x^2 e^{1-x}\ .$$

שלב 1 תחום הגדרה: $x \in (-\infty, \infty)$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0,0)$.

$f(x) \geq 0$ לכל x.

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: אין.

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: הישר $y = 0$ אסימפטוטה אופקית ב- $x = +\infty$. ב- $x = -\infty$ אין אסימפטוטה אופקית.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת: אין.

שלב 6 תחומי עליה וירידה: $f'(x) = -e^{1-x}(x-2)x$. ישנו נקודות קריטיות ב- $(0,0)$ ו- $(2, 4/e)$

x	$x<0$	$x=0$	$0<x<2$	$x=2$	$x>2$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	מינימום	$\nearrow$	מקסימום	$\searrow$

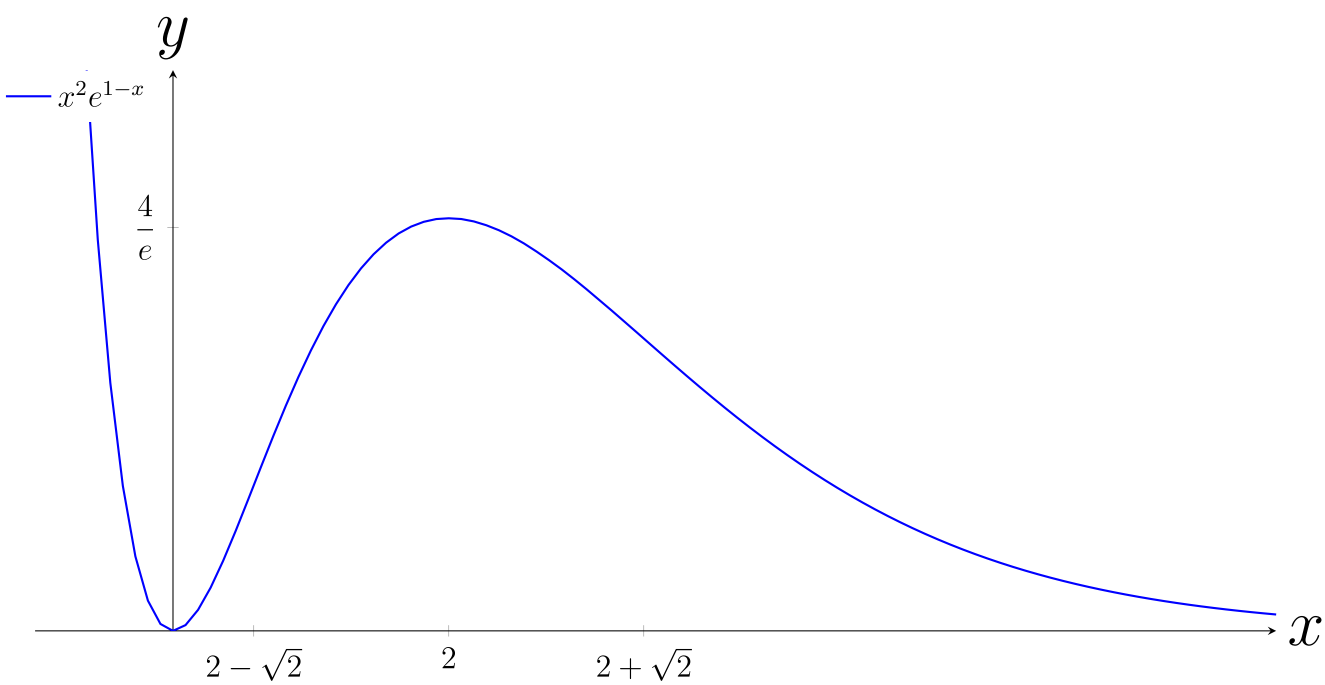
שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x)=e^{1-x}\left(x^2-4x+2\right)=e^{1-x}\left(x-2+\sqrt{2}\right)\left(x-2-\sqrt{2}\right)$$

יש נקודת פיתול ב- $x=2-\sqrt{2}$ ו- $x=2+\sqrt{2}$.

x	$x<2-\sqrt{2}$	$x\in(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$	$x>2+\sqrt{2}$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	קמורה $\uparrow$	קמורה $\downarrow$	קמורה $\uparrow$

שלב 8 שרטוט:



שאלה 60

$$f(x)=\frac{e^x}{x+1}\ .$$

שלב 1 תחום הגדרה: $x\neq-1$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0,1)$.

x	$x<-1$	$x>-1$
$f(x)$	$-$	$+$

<u>שלב 3</u> אסימפטוטה אנכית: $x=-1$.

<u>שלב 4</u> אסימפטוטה אופקית: ב- $x=+\infty$ אין אסימפטוטה אופקית. הישר $y=0$ אסימפטוטה אופקית ב- $x=-\infty$.

<u>שלב 5</u> אסימפטוטה משופעת: אין.

<u>שלב 6</u> תחומי עליה וירידה: $f'(x)=\frac{e^x x}{(x+1)^2}$. ישנו נקודות קריטיות ב- $(0,1)$

x	$x<-1$	$-1<x<0$	$x=0$	$x>0$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	מינימום	$\nearrow$

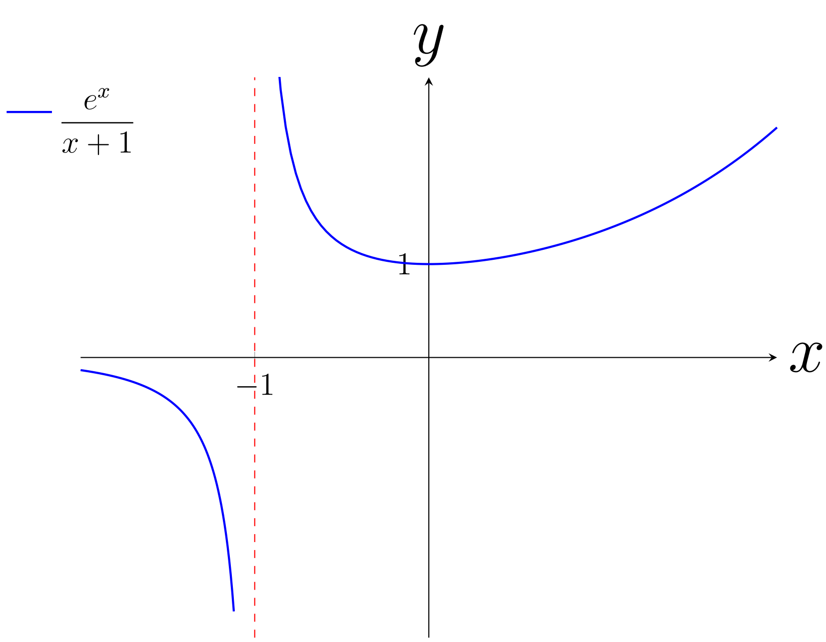
<u>שלב 7</u> תחומי קמירות:

$$f''(x)=\frac{e^x\left(x^2+1\right)}{(x+1)^3}$$

נקודת פיתול: אין.

x	$x<-1$	$x<-1$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	קמורה $\downarrow$	קמורה $\uparrow$

<u>שלב 8</u> שרטוט:



שאלה 61

$$f(x) = (x+2)e^{1/x} \ .$$

שלב 1 תחום הגדרה: $x \neq 0$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0,1)$.

x	$x<-2$	$x>-2$
$f(x)$	$-$	$+$

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x=0$.

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: אין.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת: הישר $y=x+3$ אסימפטוטה משופעת ב- $x=+\infty$ וב- $x=-\infty$.

שלב 6 תחומי עליה וירידה: $f'(x) = \dfrac{e^{1/x}\left(x^2-x-2\right)}{x^2}$. ישנו נקודות קריטיות ב-
$\left(-1, \dfrac{1}{e}\right)$ ו- $(2, 4\sqrt{e})$

x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<0$	$0<x<2$	$x=2$	$x>2$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	מקסימום	$\searrow$	$\searrow$	מינימום	$\nearrow$

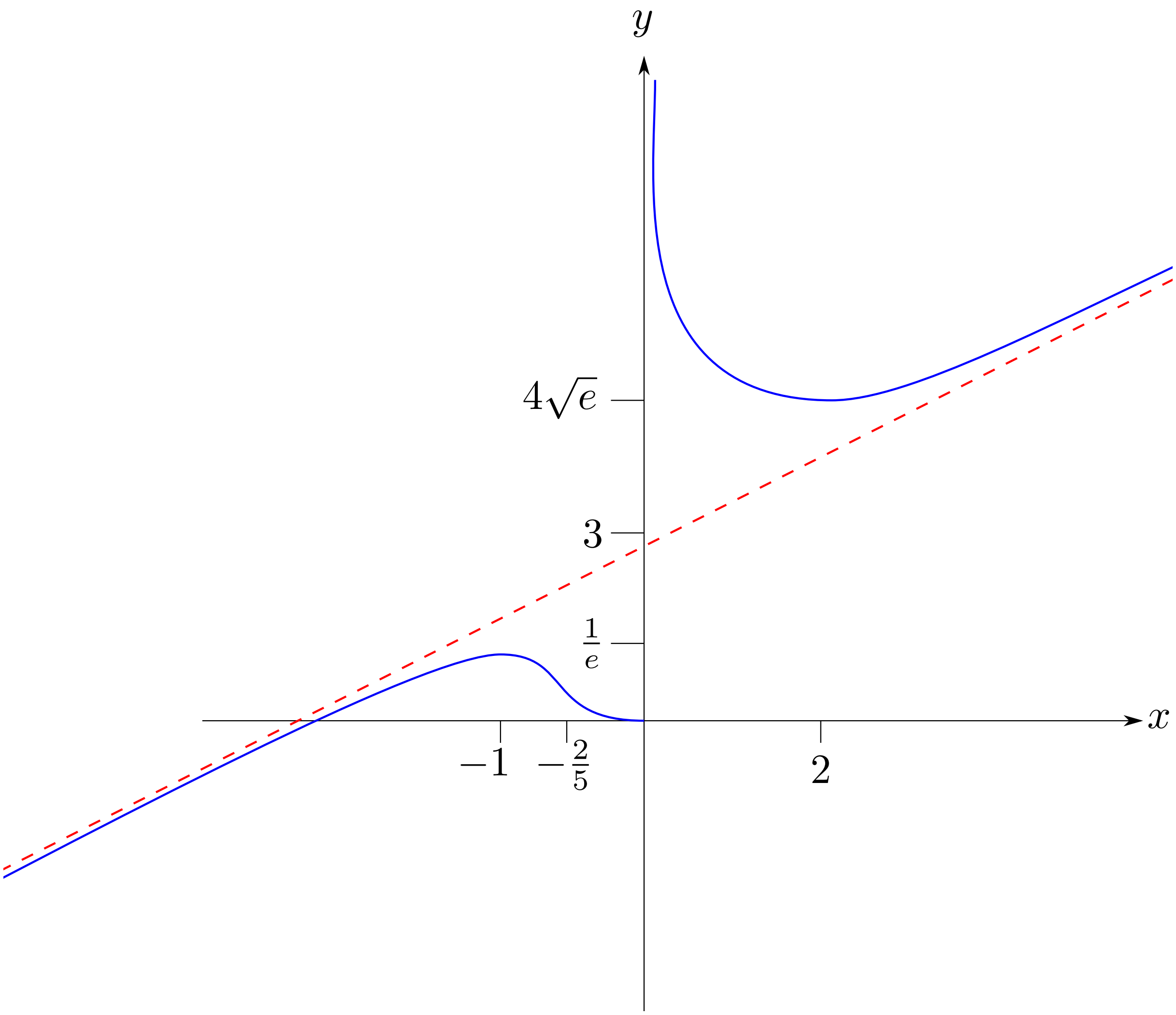
שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{e^{1/x}(5x+2)}{x^4}$$

נקודת פיתול ב- $\left(-\dfrac{2}{5}, \dfrac{8}{5e^{5/2}}\right)$ אין.

x	$x<-\frac{2}{5}$	$x=-\frac{2}{5}$	$x>-\frac{2}{5}$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	קמורה $\downarrow$	נקודת פיתול	קמורה $\uparrow$

שלב 8 שרטוט:



שאלה 62

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\ .$$

שלב 1 תחום הגדרה: $(-\infty,-3]$ ו $[3,\infty)$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(3,0)$ ו $(-3,0)$.

x	$x<-3$	$-3<x<3$	$x>3$
$f(x)$	$-$	$\nexists$	$+$

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: אין.

שלב 4 אסימפטוטה אופקית:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

ולפיו הקו $y=1$ אסימפטוטה אופקית ב $+\infty$.

$$\lim_{x\to infty} f(x) = -1$$

ולפיו הקו $y=-1$ אסימפטוטה אופקית ב $-\infty$.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת: אין.

שלב 6 תחומי עליה וירידה: $f'(x)=\dfrac{9}{x^2\sqrt{x^2-9}}$. אינן נקודות קריטיות.

x	$x<-3$	$-3<x<3$	$x>3$
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

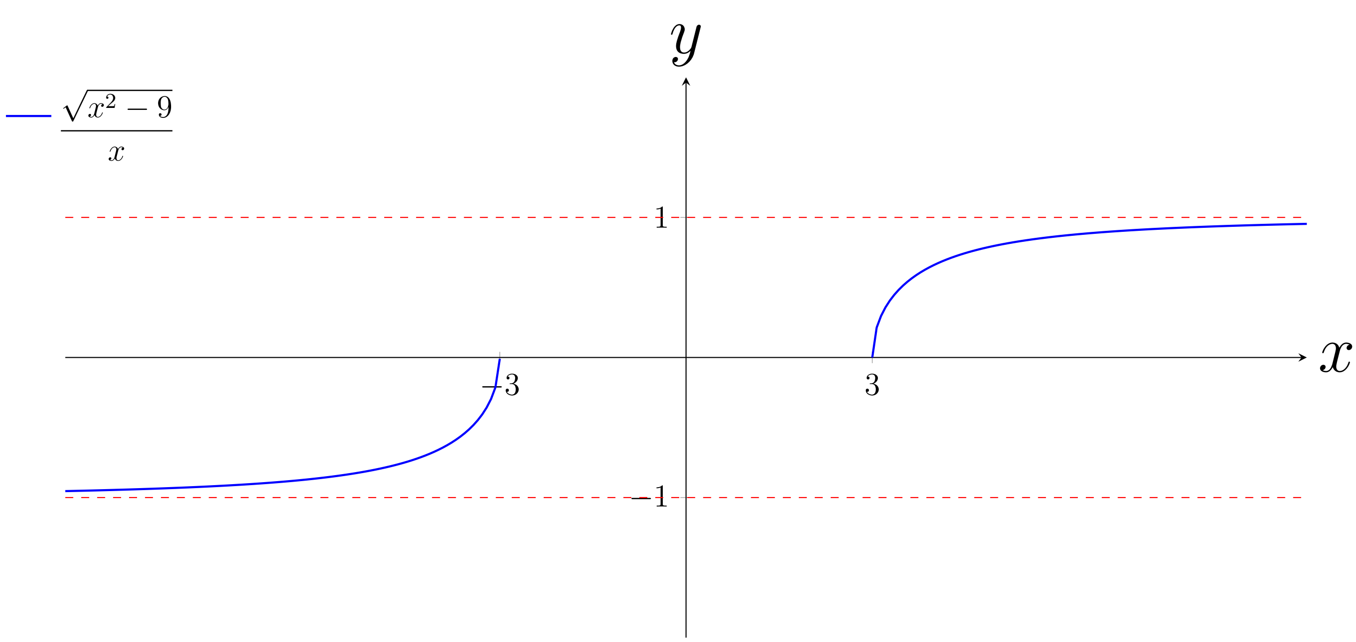
שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x) = -\frac{27\left(x^2-6\right)}{x^3\left(x^2-9\right)^{3/2}}$$

אינו נקודות פיתול בתופ הגדרתה של הפונקציה.

x	$x<-3$		$x>3$
$f''(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	קמורה $\uparrow$		קמורה $\downarrow$

שלב 8 שרטוט:



שאלה 63

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \ .$$

שלב 1 תחום הגדרה: $x > 0$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(1, 0)$.

x	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f(x)$	$-$	0	$+$

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x = 0$.

שלב 4 אסימפטוטה אופקית:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

ולפיו הקו $y = 0$ אסימפטוטה אופקית.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת: אין.

שלב 6 תחומי עליה וירידה: $f'(x) = \dfrac{2 - \log(x)}{2x \cdot \sqrt{x}}$. יש נקודת קריטית ב- $\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$.

x	$0 < x < e^2$	$x = e^2$	$x > e^2$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	מקסימום	$\searrow$

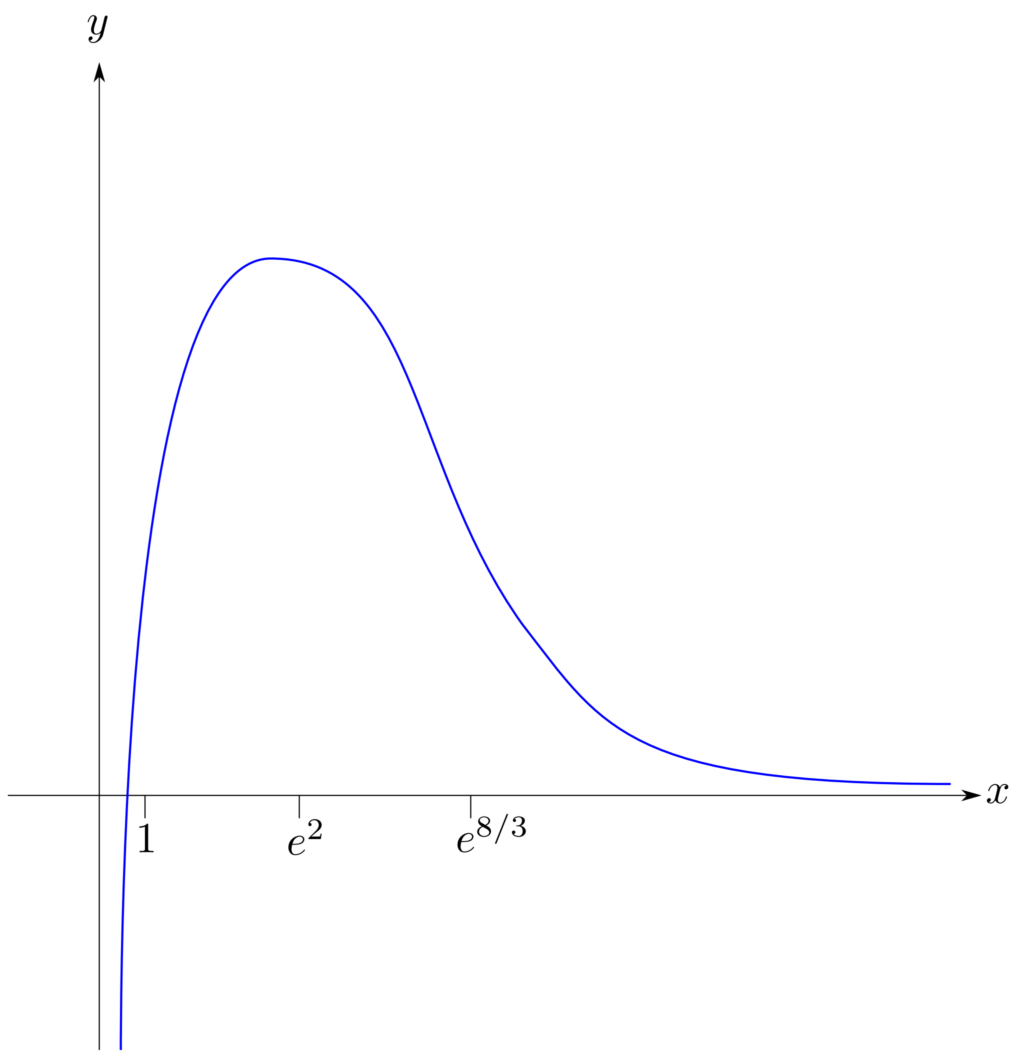
שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{3\log(x) - 8}{4x^{5/2}}$$

יש נקודת פיתול ב- $\left(e^{8/3}, \frac{8}{3e^{4/3}}\right)$.

x	$0 < x < e^{8/3}$	$x = e^{8/3}$	$x > e^{8/3}$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	קמורה $\downarrow$	נקודת פיתול	קמורה $\uparrow$

שלב 8 שרטוט:



שאלה 64

שלב 1) <u>תחום הגדרה:</u>

$x \neq 3$.

שלב 2) <u>נקודות חיתוך:</u>

שים לב,

$$f(x) = \frac{x^2(x+1)(x-2)}{(x-3)^3}$$

ולכן קל לראות שהנקודות חיתוך הן $(0,0)$, $(-1,0)$ ו- $(2,0)$.

<u>סימני הפונקציה</u>

y	x
$y<0$	$x<-1$
$y>0$	$-1<x<0$
$y>0$	$0<x<2$
$y<0$	$2<x<3$
$y>0$	$x>3$

שלב 3) <u>אסימפטוטות אנכיות</u>

$x=3$.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \ , \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty \ .$$

שלב 4) <u>אסימפטוטות אופקיות</u>

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \ , \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \ .$$

שלב 5) <u>אסימפטוטות משופעת</u>

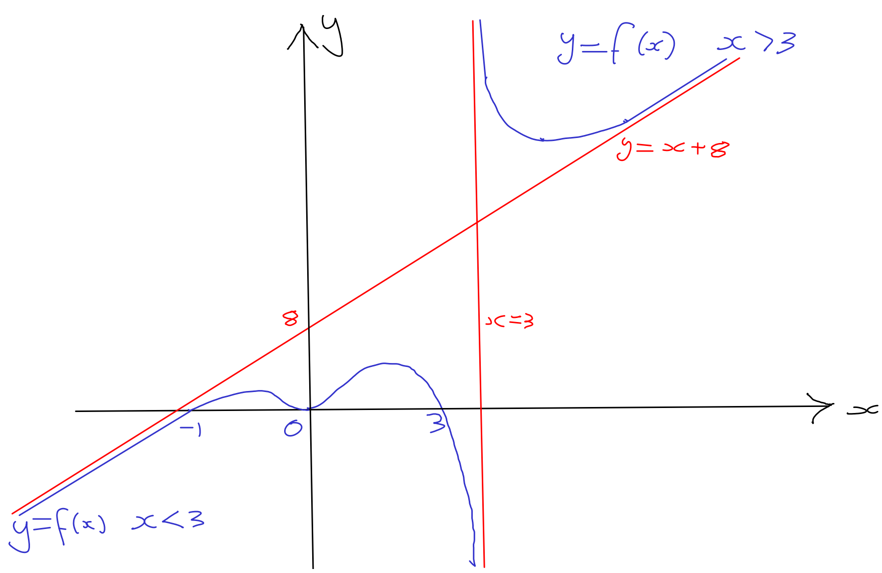
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$
$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = 8$$

לכן הישר $y=x+8$ הוא אסימפטוטה משופעת כאשר $x\to+\infty$.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = 8$$

לכן הישר $y=x+8$ הוא אסימפטוטה משופעת כאשר $x\to-\infty$.



<u>שאלה 65</u>

<u>שלב 1</u> תחום הגדרה: $x \neq -1$.

<u>שלב 2</u> נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0,0)$.

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x > 0$
$f(x)$	$-$	$+$	$+$

<u>שלב 3</u> אסימפטוטה אנכית: $x = -1$

<u>שלב 4</u> אסימפטוטה אופקית: אין.

<u>שלב 5</u> אסימפטוטה משופעת:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \ , \qquad n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - m\cdot x) = -1 \ .$$

לכן הקו $y = x - 1$ אסימפטוטה משופעת בתהליך כאשר $x \to \infty$.

ב- $x \to -\infty$ אותו הדבר.

<u>שלב 6</u> תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

נקודות קריטיות: $(-2,-4)$ ו- $(0,0)$.

x	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	מקס	$\searrow$	$\searrow$	מינימום	$\nearrow$

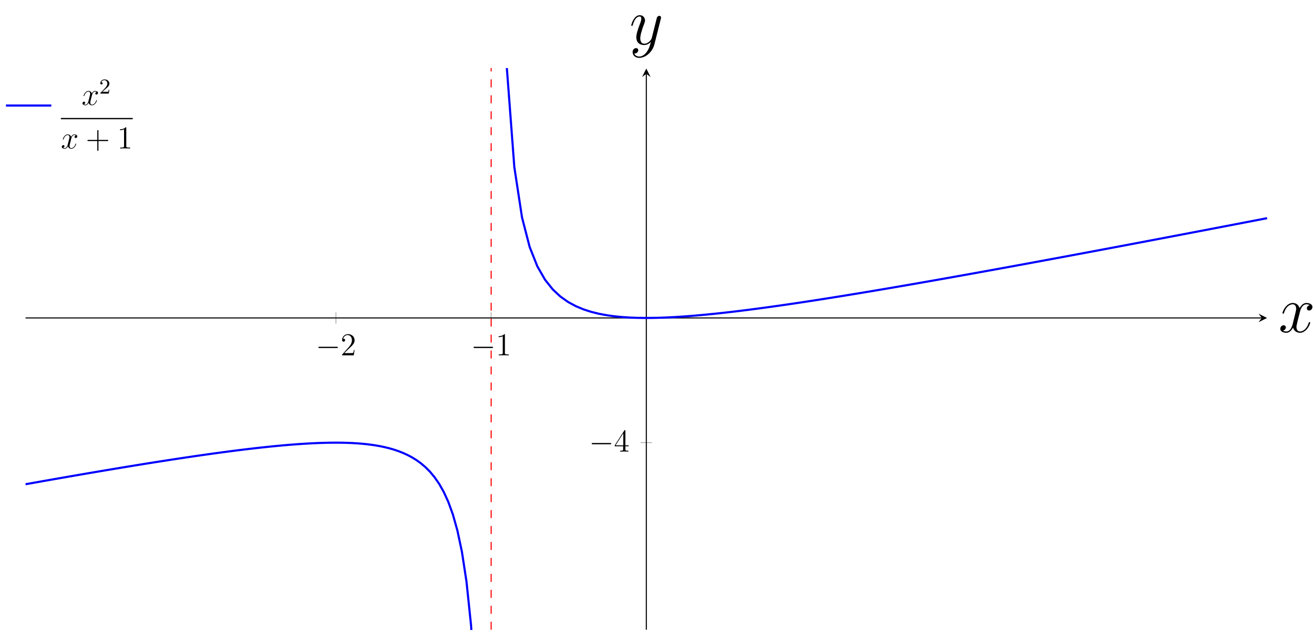
<u>שלב 7</u> תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$$

נקודות פיתול: אין.

x	$x < -1$	$x > -1$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	קמורה $\downarrow$	קמורה $\uparrow$

<u>שלב 8</u> שרטוט:



שאלה 66

שלב 1 תחום הגדרה: $x \neq 2$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(-2,0)$ ו- $(0,-2)$.

x	$x<-2$	$-2<x<2$	$x>2$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x=2$

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: אין.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1\ ,\qquad n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-m\cdot x\right)=6\ .$$

לכן הקו $y=x+6$ אסימפטוטה משופעת בתהליך כאשר $x\to\infty$.

ב- $x\to-\infty$ אותו הדבר.

שלב 6 תחומי עליה וירידה:

$$f'(x)=\frac{(x-6)(x+2)}{(x-2)^2}$$

נקודות קריטיות: $(-2,0)$ ו- $(6,16)$.

x	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<2$	$2<x<6$	$x=6$	$x>6$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	מקס	$\searrow$	$\searrow$	מינימום	$\nearrow$

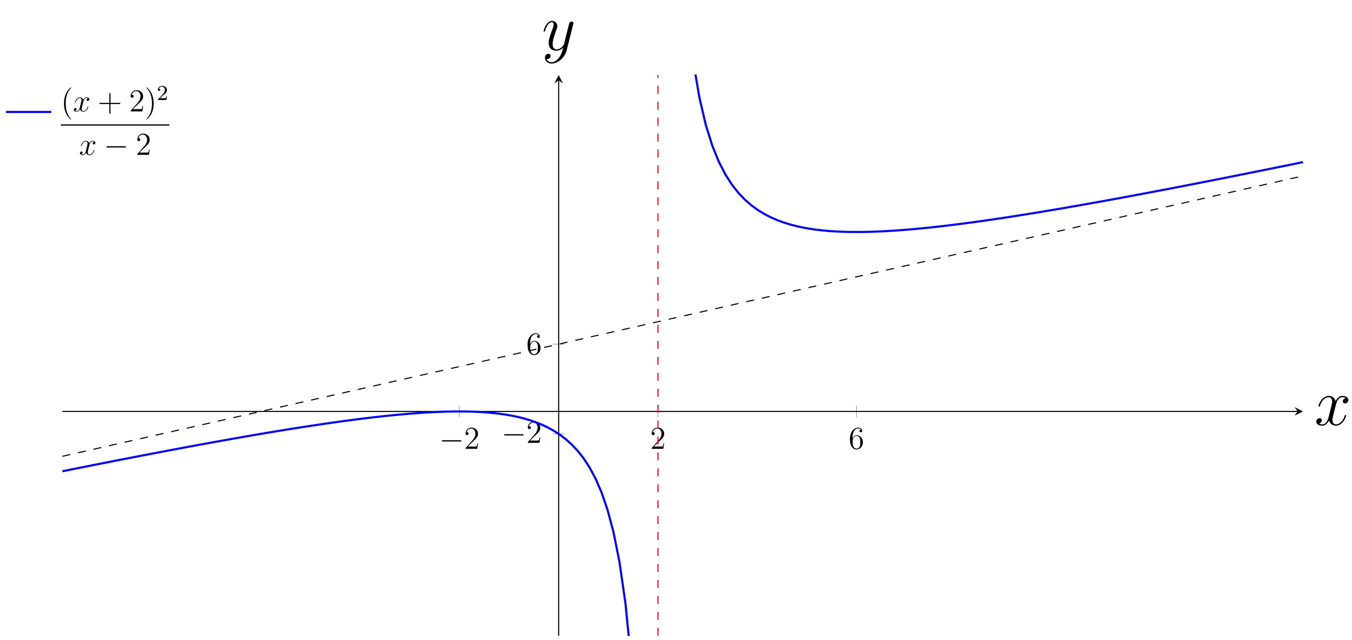
<u>שלב 7</u> תחומי קמירות:

$$f''(x)=\frac{32}{(x-2)^3}$$

נקודות פיתול: אין.

x	$x<2$	$x>2$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	קמורה $\downarrow$	קמורה $\uparrow$

<u>שלב 8</u> שרטוט:



<u>שאלה 67</u>

<u>שלב 1</u> תחום הגדרה: כל x.

<u>שלב 2</u> נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(\sqrt{2},0)$,$(-\sqrt{2},0)$,$(0,2)$.

x	$x<-1$	$-1<x<0$	$x>0$
$f(x)$	$-$	$+$	$+$

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: אין.

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: $y=0$.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת: אין.

שלב 6 תחומי עליה וירידה:

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-2}{e^x}$$

נקודות קריטיות:

$$(1-\sqrt{3},3.04437)=(-0.732051,3.04437)$$

ו-

$$(1+\sqrt{3},-0.355635)=(2.73205,-0.355635)\ .$$

x	$x<1-\sqrt{3}$	$x=1-\sqrt{3}$	$1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3}$	$x=1+\sqrt{3}$	$x>1+\sqrt{3}$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	מקס	$\searrow$	מינימום	$\nearrow$

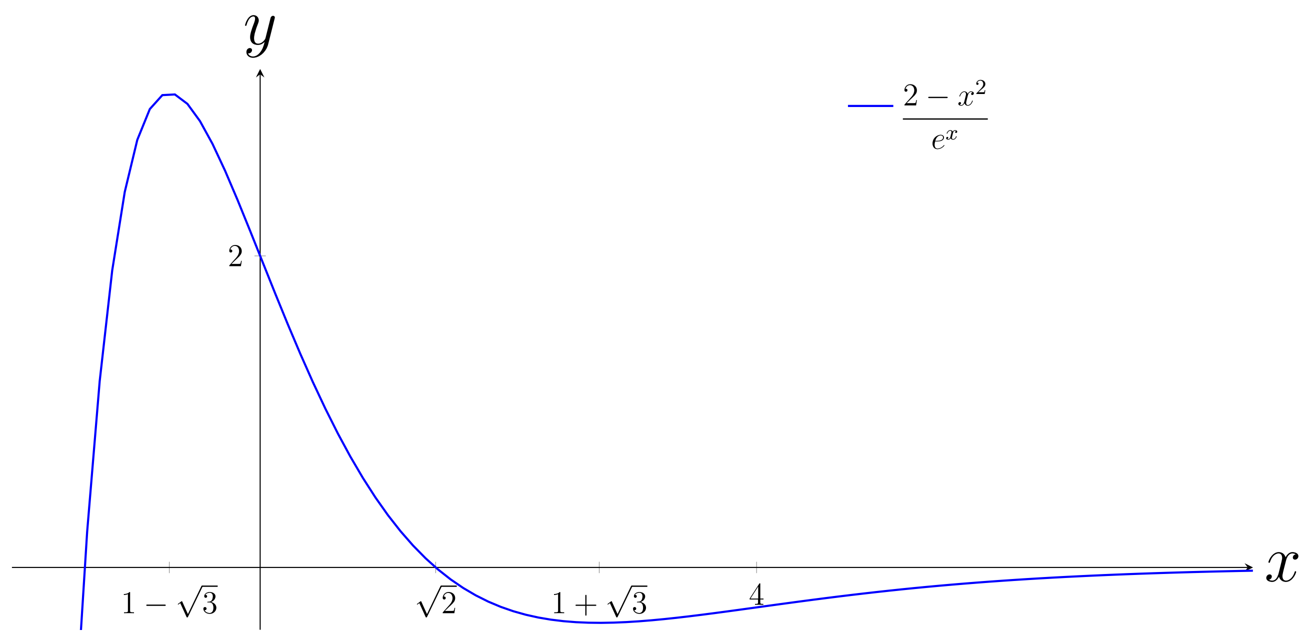
שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x)=-\frac{x(x-4)}{e^x}$$

נקודות פיתול: $(0,2)$ ו- $(4,-0.256419)$.

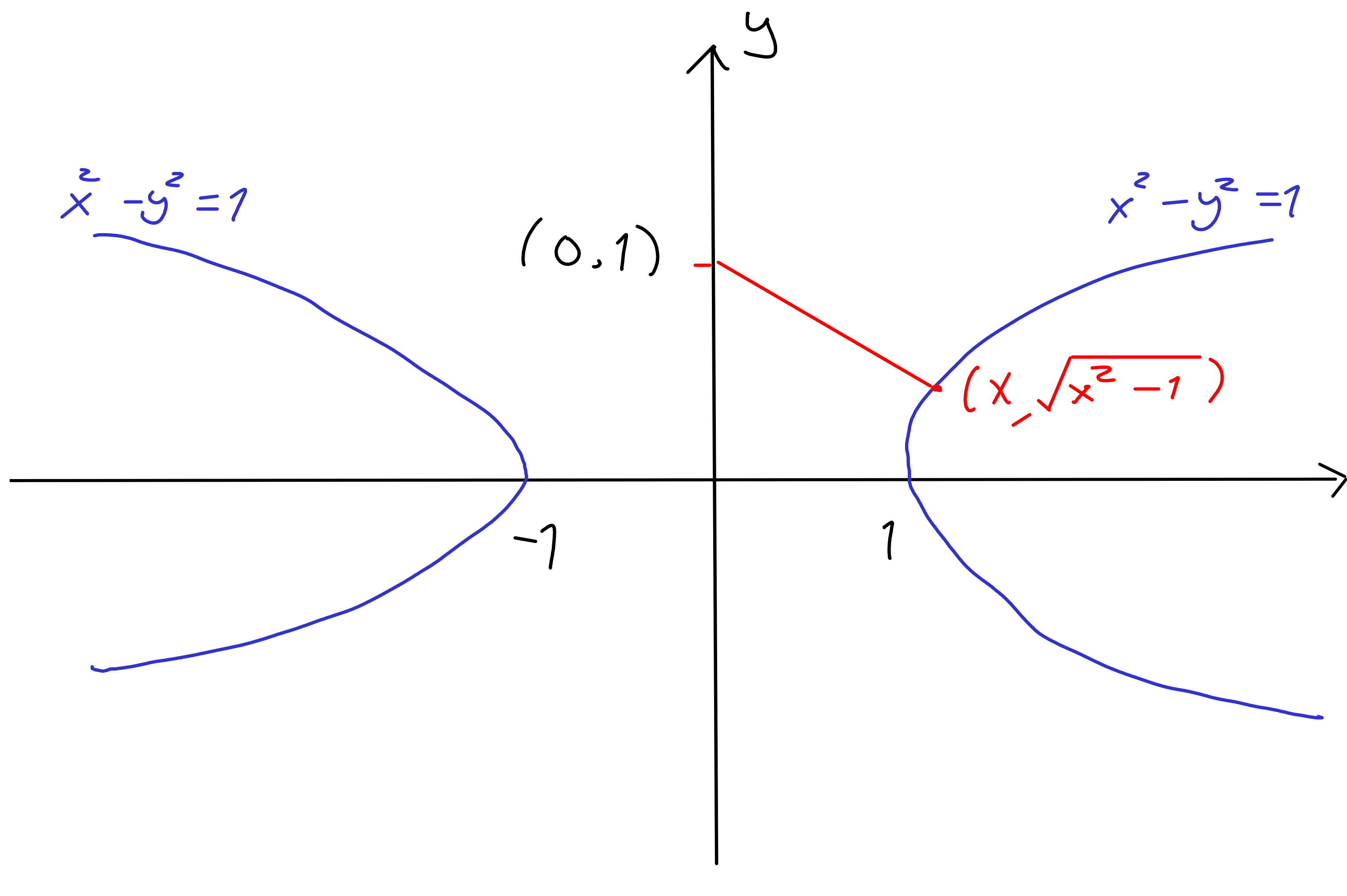
x	$x<0$	$x=0$	$0<x<4$	$x=4$	$x>4$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	קמורה $\downarrow$	פיתול	קמורה $\uparrow$	פיתול	קמורה $\downarrow$

שלב 8 שרטוט:



y
$\frac{2-x^2}{e^x}$
2
x
$1-\sqrt{3}$
$\sqrt{2}$
$1+\sqrt{3}$
4

שאלה 68



y
$x^2-y^2=1$
$x^2-y^2=1$
$(0,1)$
$(x,\sqrt{x^2-1})$
-1
1

נבחר נקודה שרירותית על הגרף:

$$(x, \sqrt{x^2-1})$$

המרחק בינה לבין הנקודה $(0,1)$ הוא

$$d = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x^2-1}-1)^2} \qquad \Rightarrow \qquad d^2 = x^2 + x^2 - 1 - 2\sqrt{x^2-1} + 1 = 2x^2 - 2\sqrt{x^2-1}$$

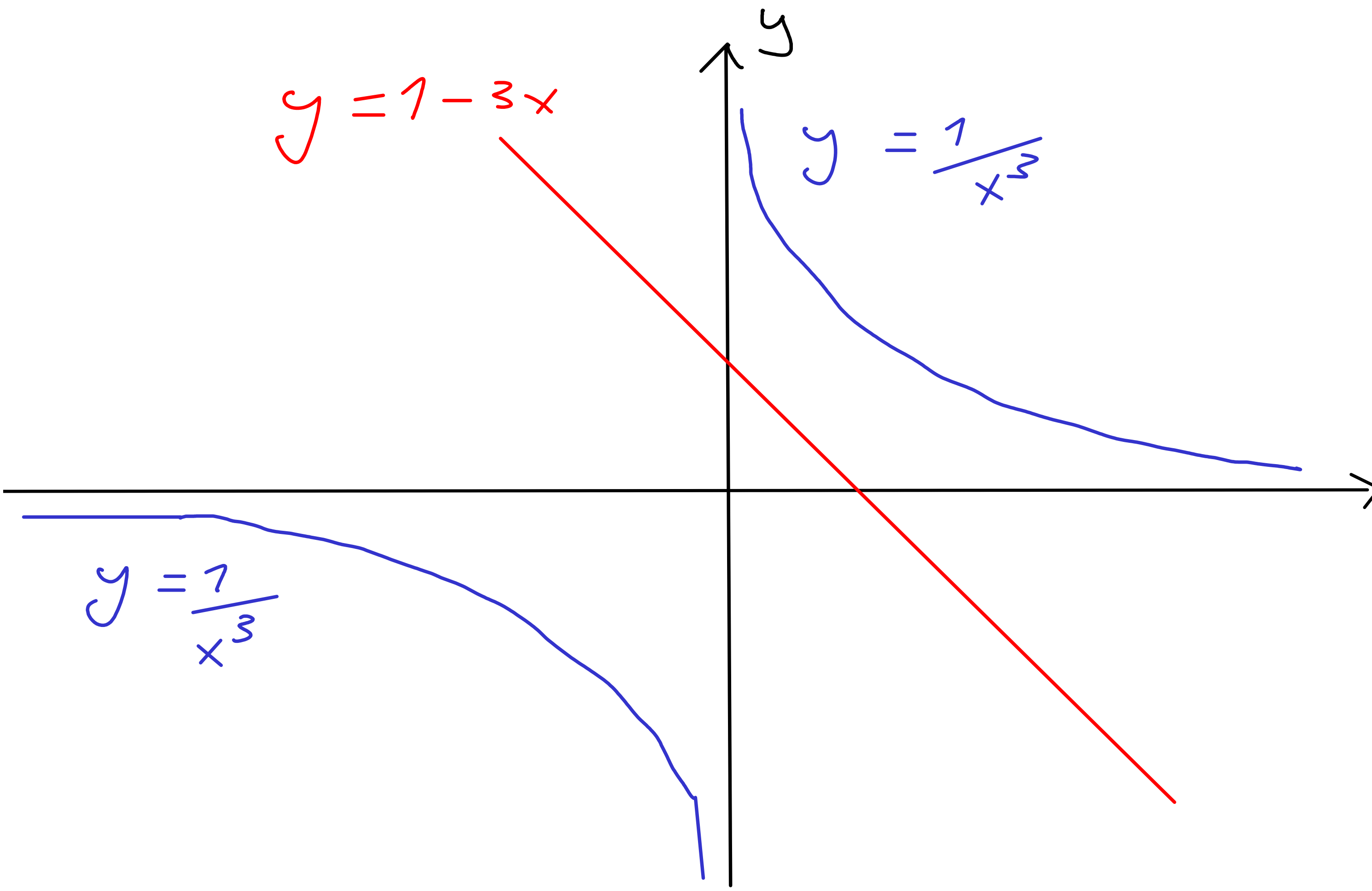
נמצא את המינימום של d^2:

$$\left(d^2\right)' = 4x - 2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x\left(2\sqrt{x^2-1}-1\right)}{\sqrt{x^2-1}} = 0$$

$$\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}\,, \qquad x^2 - 1 = \frac{1}{4}\,, \qquad x^2 = \frac{5}{4}\,, \qquad x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\,.$$

תשובה סופית: $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

שאלה 69

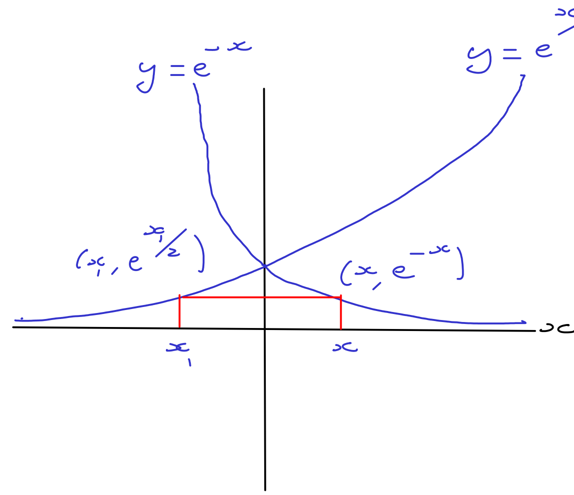


הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה על גרף הפונקציה בה שיפוע המשיק שווה לשיפוע של הקו הישר (המשיק מקביל לקו $y = 1 - 3x$). ז"א

$$y; = -\frac{3}{x}^4 = -3 \qquad \Rightarrow \qquad x^4 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1\,.$$

תשובה סופית: $(1,1)$.

שאלה 70



$$e^{x_1/2}=e^{-x} \qquad \Rightarrow \qquad x_1=-2x \ .$$

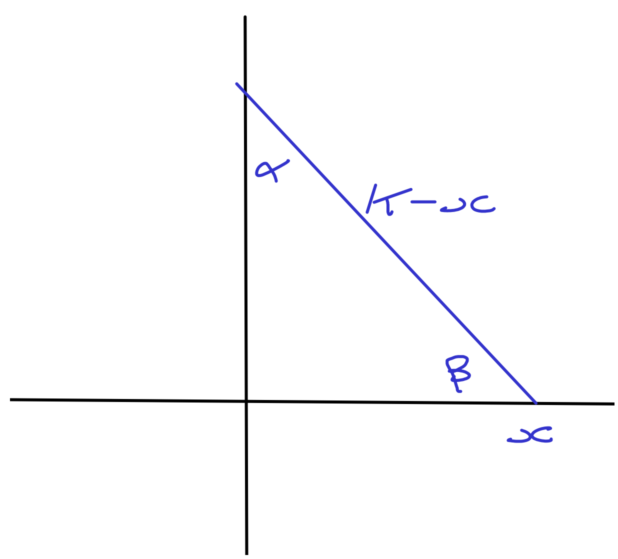
$$S=(x+|x_1|)e^{-x}=3x\cdot e^{-x} \ .$$

$$S'_x=3e^{-x}-3xe^{-x}=3e^{-x}(1-x) \ .$$

שים לב $S'_x=0$ בנקודה $x=1$. לכן הנקודה $x=1$ מקסימום מקומי.

$$S_{\max}=3\cdot 1\cdot e^{-1}=\frac{3}{e} \ .$$

שאלה 71



נסמן את אורכי אחד הניצבים ב-x. אז אורך היתר הוא $k-x$ ואורך הניצב השני הוא

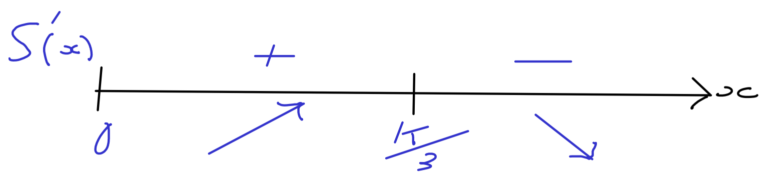
$$\sqrt{(k-x)^2-x^2}=\sqrt{k^2-2kx}$$

אז

$$S=\frac{x\cdot\sqrt{k^2-2kx}}{2}$$

$$\begin{aligned}S'_x=&x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-2k}{2\sqrt{k^2-2kx}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k^2-2kx}\\=&\frac{1}{2}\left[\frac{-kx}{\sqrt{k^2-2kx}}+\sqrt{k^2-2kx}\right]\\=&\frac{1}{2\sqrt{k^2-2kx}}\left(-kx+k^2-2kx\right)\\=&\frac{1}{2\sqrt{k^2-2kx}}k\left(k-3x\right)\end{aligned}$$

$S'_x=0$ כאשר $x=\frac{k}{3}$.



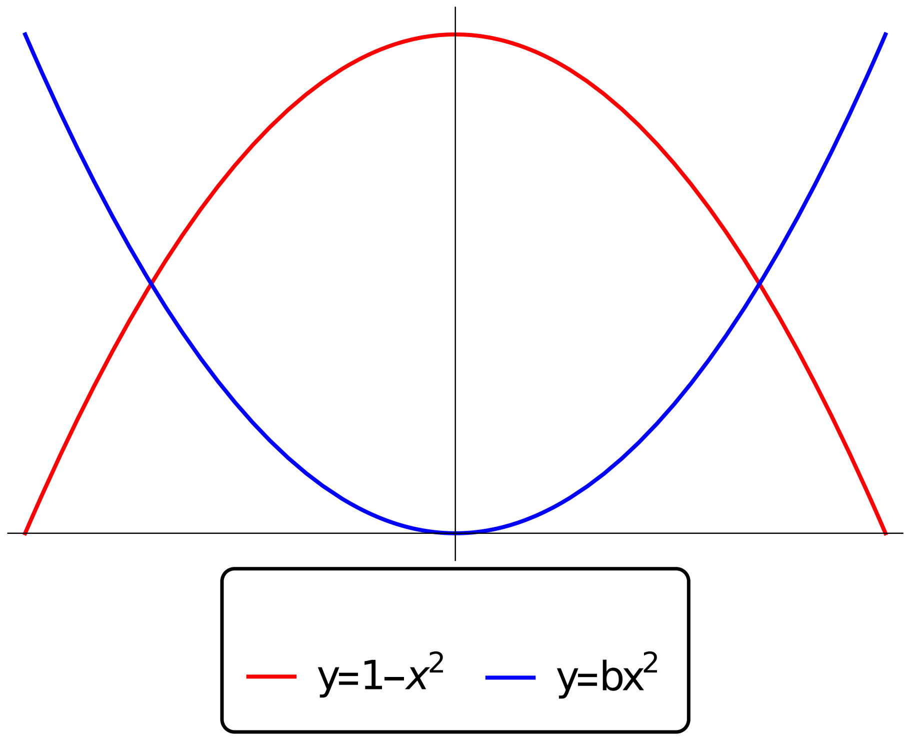
$x=\frac{k}{3}$ נקודת מקסימום.

$$\sin\alpha=\frac{x}{k-x}=\frac{\frac{k}{3}}{k-\frac{k}{3}}=\frac{1}{2}\ ,\qquad\Rightarrow\qquad\alpha=\frac{\pi}{6}\ .$$

הזווית השניה

$$\beta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\ .$$

שאלה 72



נקודת חיתוך:

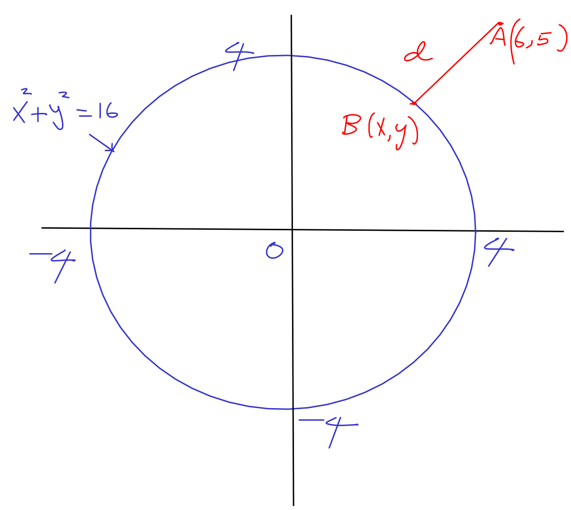
$$1-x^2=bx^2 \qquad \Rightarrow \qquad (x,y)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{b+1}}\,,\frac{b}{1+b}\right)$$

$$d^2=OA^2=(x_A-x_O)^2+(y_A+y_O)^2=\frac{1}{b+1}+\frac{b^2}{(1+b)^2}$$

$$\left(d^2\right)'_b=\frac{b-1}{(b+1)^3}\ .$$

$$\left(d^2\right)'_b=0 \qquad \Rightarrow \qquad b=1\ .$$

<u>**שאלה 73**</u>



תהי $B(x,y)$ הנקודה על המעגל הקרובה ביותר לנקודה A. המרחק בריבוע בין A ל- B הוא

$$d^2 = (6-x)^2 + (5-y)^2 \ .$$

יש למזער את d^2 לפי x.

נפתח סוגריים ונקבל:

$$d^2 = x^2 - 12x + y^2 - 10y + 61$$

נציב את $y^2 = 16 - x^2$ ממשוואת המעגל ונקבל:

$$d^2 = -12x - 10y + 77$$

ואז נציב $y = \pm\sqrt{16-x^2}$ ממשוואת המעגל:

$$d^2 = \mp 10\sqrt{16-x^2} - 12x + 77 \ .$$

יש למזער d^2 לפי x:

$$\left(d^2\right)'_x = \mp\frac{10x}{\sqrt{16-x^2}} - 12 = 0$$

הפתרון הוא

$$x_B = \frac{24}{\sqrt{61}} = \mp 3.07289 \ ,$$

וכדי לקבל ה- y המתאים נציב במשוואת המעגל ונקבל $y_B = \dfrac{20}{\sqrt{61}} = 2.56074$. הנקודה הקרובה ביותר ל $A(6,5)$ היא $(3.07289, 2.56074)$ בעוד הנקודה הרחוקה ביותר היא $(-3.07289, 2.56074)$. לכן התשובה הסופית היא $B = (3.07289, 2.56074)$.

<u>שאלה 74</u> השיפוע של הקו $x + y = 1$, או שקול $y = 1 - x$, הוא $m = -1$. לכן יש לחפש את כל הנקודות על העקומה שבהן השיפוע של המשיק שווה -1. נגזור את משוואת העקומה:

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{x}{y} \ .$$

נציב $y' = -1$ ונקבל

$$-\frac{x}{y} = -1 \qquad \Rightarrow \qquad y = x \ . \qquad (*)$$

נציב את היחס הזה לתוך משוואת העקומה, קרי $x^2 + y^2 = 4$ ונקבל:

$$2x^2 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \sqrt{2} \ , \quad x_2 = -\sqrt{2} \ .$$

נציב את הערכים האלה במשוואת המשיק (*) . עבור $x_1 = \sqrt{2}$ נקבל $y_1 = \sqrt{2}$ ועבור $x_2 = -\sqrt{2}$ נקבל $y_2 = -\sqrt{2}$. לכן מצאנו שתי נקודות על העקומה שבהן המשיק מקביל להקו: $P_1(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $P_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

<u>שאלה 75</u> נסמן ב $S(a)$ (עבור $a > 0$) את הפונקציה המתארת את השטח המבוקש ונחשב את המקסימום.

$$S(a) = \int_0^a \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2a^2}\right) = \left[\arctan(x) + \frac{x}{2a^2}\right]_0^a = \arctan(a) + \frac{1}{2a} \ .$$

$$S'(a) = \frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{2a^2} = \frac{a^2-1}{2a^2(1+a^2)} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 1 \ .$$

כיוון ש $a > 0$ אז $a = 1$.

$$S(a=1) = \arctan(1) + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ .$$

שאלה 76 נשתמש במשפט הבא: אם $f'(x) = g'(x)$ אז $f(x) = g(x) + C$, כאשר C מספר קבוע.

א)

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{4\cos^3 x \cdot (-\sin x)}{4} - \frac{2\cos x \cdot (-\sin x)}{2} \\ =& -\cos^3 x \sin x + \cos x \sin x \\ =& \sin x \cos x \left(1 - \cos^2 x\right) \\ =& \sin x \cos x \cdot \sin^2 x \\ =& \sin^3 x \cos x \ , \end{aligned}$$

ו-

$$g'(x) = \frac{4\sin^3 x \cdot \cos x}{4} = \sin^3 x \cos x \ ,$$

ולכן קיים C כך ש- $f(x) = g(x) + C$. שים לב

$$\begin{aligned} g(x) =& \frac{\sin^4 x}{4} \\ =& \frac{1}{4}\sin^2 x \cdot \sin^2 x \\ =& \frac{1}{4}\left(1 - \cos^2 x\right) \cdot \left(1 - \cos^2 x\right) \\ =& \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x\right) \\ =& \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{4}\cos^4 x \\ =& \frac{1}{4} + f(x) \end{aligned}$$

לכן $f(x) = g(x) - \frac{1}{4}$ ו- $C = \frac{1}{4}$.

ב) הנגזרות של arcsin ו arccos הן $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ו $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. שימו לב שיש להם סימנים שונים. לכן, נתון $f(x) = \arcsin x$ ו- $g(x) = -\arccos x$ (שימו לב לסימן של g) אז $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ו- $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ כלומר הנגזרות שוות. לכן קיים C כך ש- $f(x) = g(x) + C$. נציב $x = 0$ ונמצא כי $C = \frac{\pi}{2}$.

ג)

$$f'(x) = \frac{2\cos x \cdot (-\sin x)}{2} = -\sin x \cos x$$

ו-

$$g'(x) = \frac{2\sin x \cdot \cos x}{2} = \sin x \cos x$$

ולכן $f'(x) \neq g'(x)$ ולפי המשפט לא קיים C כך ש- $f(x) = g(x) + C$.

שאלה 77

$$f'(x) = 3 + 2\cos(2x)$$

$\cos(2x)$ פונקציה חסומה: $-1 \le \cos(2x) \le 1$ לכן

$$2 \le 3 + 2\cos(2x) \le 4 \qquad \Rightarrow \qquad 2 \le f'(x) \le 4$$

ז"א $f'(x) \ge 0$, ולפיו $f(x)$ עולה לכל x.

<u>שאלה 78</u> נגדיר $f(x) = x + e^{2x} - 2$. נוכיח כי קיים שורש לפונקציה $f(x)$.

$f(0) = -1 < 0$, ו $f(1) = 6.380$. $f(x)$ אלמנטרית ומוגדרת בקטע $[0,1]$ לכן היא רציפה וגזירה בקטע הזה. $f(0) < 0$, $f(1) > 0$. לכן לפי משפט בולנצו קיים c כך ש $f(c) = 0$.

נוכיח שהשורש יחיד:

$f'(x) = 1 + 2e^{2x} > 0$ לכל x, ז"א $f(x)$ עולה מונוטונית לכל x, לכן השורש הוא יחיד.

<u>שאלה 79</u>

$$\lim_{x\to\infty}\left(xe^{1/x} - ax - b\right) = 0 \ .$$

זאת ההגדרה של אסימפטוטה משופעת.

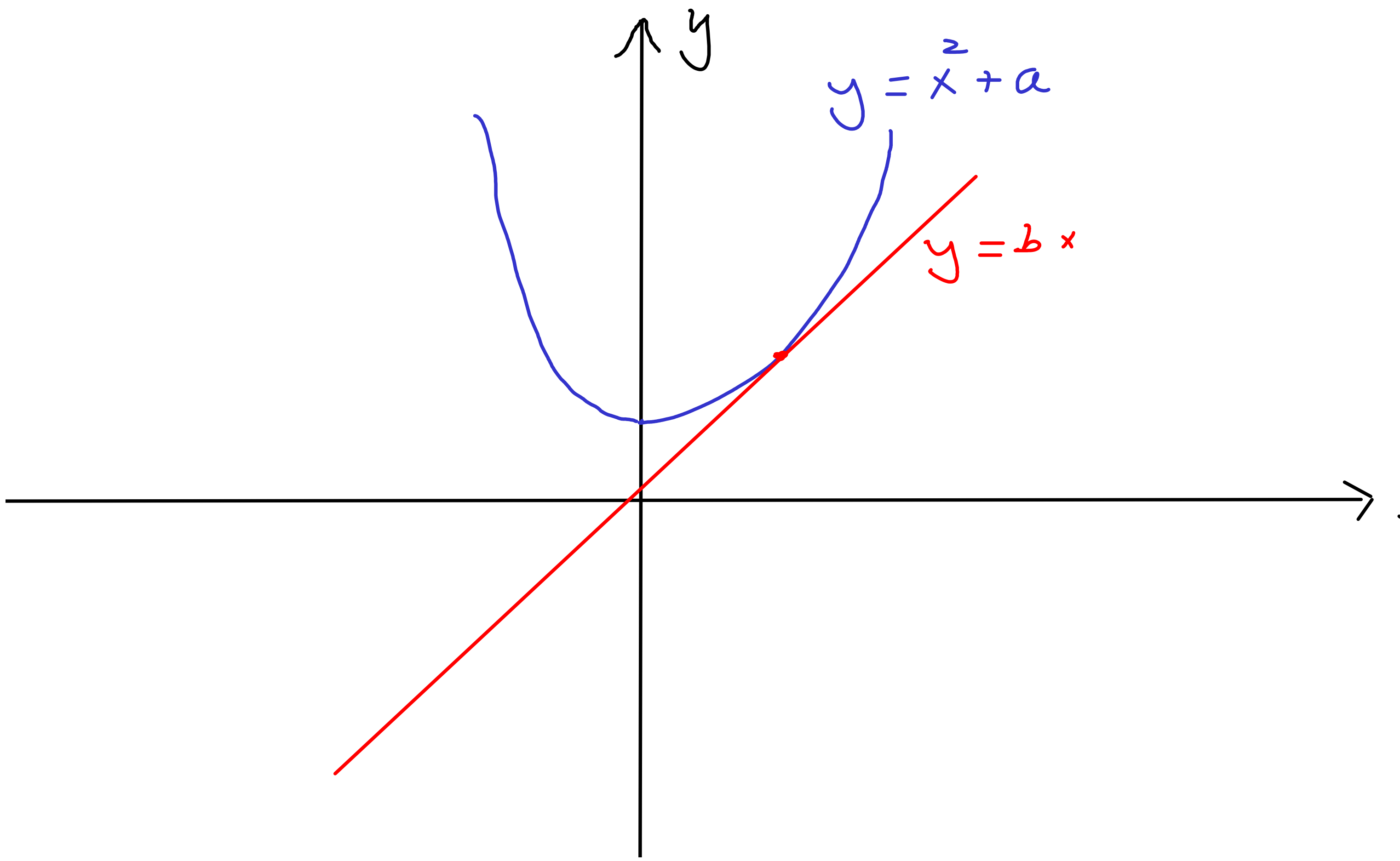
$$a = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{xe^{1/x}}{x}\right) \ , \qquad b = \lim_{x\to\infty}\left(xe^{1/x} - ax\right) \ ,$$

$$a = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{xe^{1/x}}{x}\right) = 1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x\to\infty}\left(xe^{1/x} - ax\right) \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(xe^{1/x} - x\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} x\left(e^{1/x} - 1\right) \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}}\right) \\ &\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

תשובה סופית: $a = 1$,$b = 1$.

<u>שאלה 80</u>



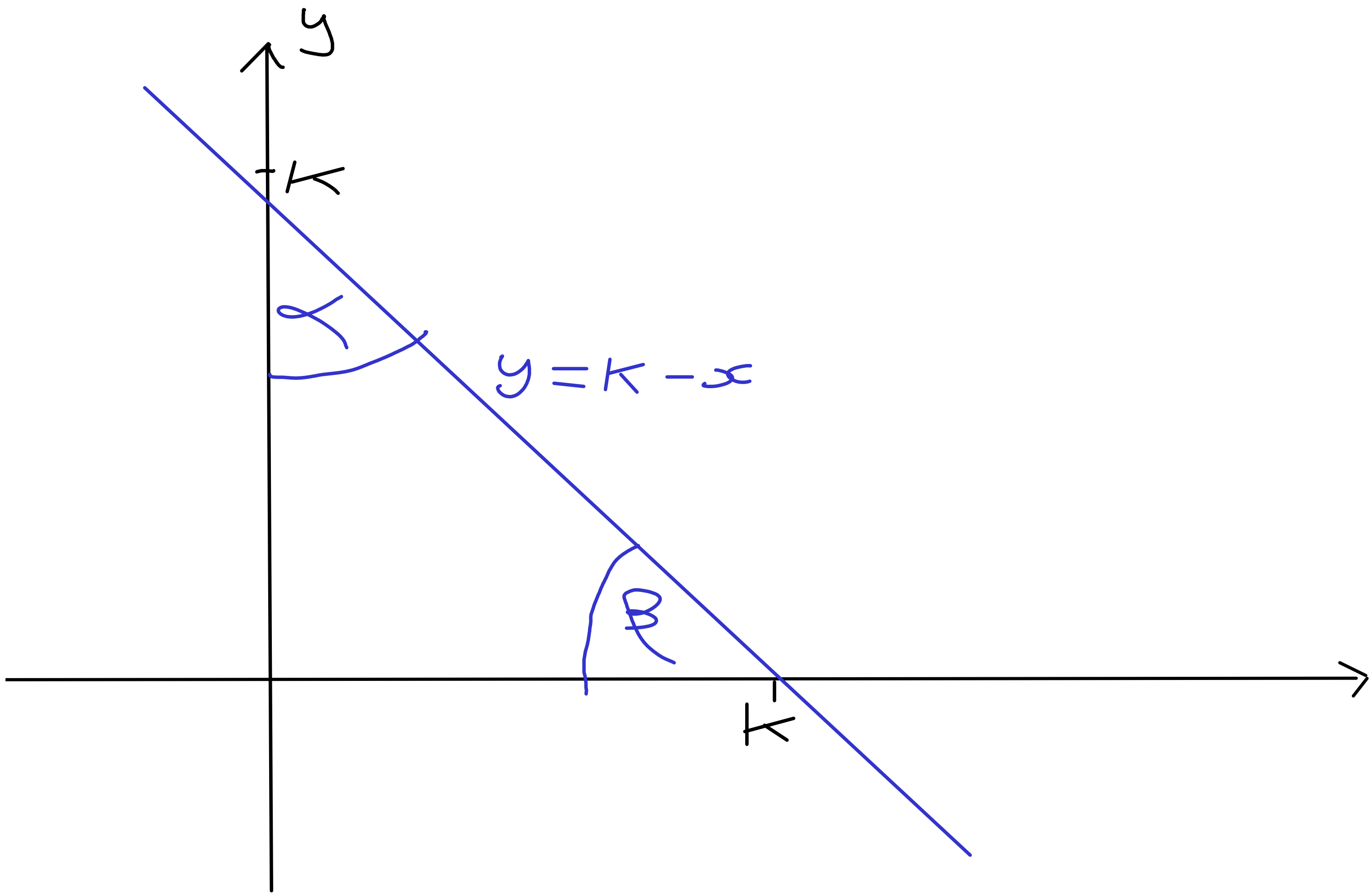
הקו $y = bx$ משיק לפרבולה כאשר יש נקודת חיתוך אחת עם הפרבולה. ז"א

$$x^2 + a = bx \quad \Rightarrow \quad x^2 - bx + a = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

יש פתרון אחד כאשר

$$b^2 - 4a = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \pm\sqrt{4a}\ , \quad a \geq 0$$

שאלה 81



נסמן ב x את האורך של ניצב אחד, אז אורך היתר $k-x$. לכן, אורך הניצב השני:

$$\sqrt{(k-x)^2-x^2}=\sqrt{k^2-2kx}\ .$$

אז שטח המשולש שווה

$$S=\frac{x\cdot\sqrt{k^2-2kx}}{2}$$

נמתא את x עבורו S מקסימלי:

$$S'=\frac{1}{2}\left(\sqrt{k^2-2kx}+\frac{x\cdot(-2k)}{2\sqrt{k^2-2kx}}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{k(k-3x)}{\sqrt{k^2-2kx}}\ .$$

S'	$+$	0	$-$
S	$\nearrow$	מקס	$\searrow$

$x=\dfrac{k}{3}$ נקודת מקסימום. לכן

$$\sin\alpha=\frac{k}{3\cdot(k-\frac{k}{3})}=\frac{1}{2}\qquad\Rightarrow\qquad\alpha=30^\circ,\quad\beta=90^\circ-30^\circ=60^\circ\ .$$

תשובה סופית:
$\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

שאלה 82

$f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ זאת פונקציה אלמנטרית ומוגדרת בקטע $[-2,-1]$.

$f'(x) = -\dfrac{8}{x^3}$ מוגדרת בקטע הזה, ז"א $f(x)$ גזירה בקטע $(-2,-1)$. לכן לפי משפט לגרנז', קיימת נקודה c כך ש

$$f(-1) = f(-2) = f'(c)(-1-(-2))$$

ז"א

$$\frac{4}{(-1)^2} - \frac{4}{(-2)^2} = -\frac{8}{c^3} \ .$$

$\Downarrow$

$$\frac{-8}{c^3} \qquad \Rightarrow \qquad c = -\frac{2}{\sqrt[3]{3}} \ .$$

שאלה 83

משפט לגרנז' $\Leftarrow$ $\exists\, c \in (a,b)$ כך ש

$$P(b) - P(a) = (b-a)P'(c)$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha b^2 + \beta b + \gamma - \alpha a^2 - \beta a - \gamma = (b-a)\left(2\alpha c + \beta\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha(b^2 - a^2) + \beta(b-a) = (b-a)\left(2\alpha c + \beta\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha(b+a)(b-a) + \beta(b-a) = (b-a)\left(2\alpha c + \beta\right)$$

נחלק אגף השמאל ואגף הימין בגורם משותף של $(b-a)$ ונקבל:

$$\alpha(b+a) + \beta = 2\alpha c + \beta \qquad \Rightarrow \qquad \alpha(b+a) = 2\alpha c \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{b+a}{2} \ .$$

שאלה 84

<u>נוכיח $f(7) \leq 62$:</u>

לפי משפט לגרנז', קיימת $c \in [1,7]$ כך ש-

(1*)

$$\frac{f(7)-f(1)}{7-1} = f'(c) \leq 7 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(7)-f(1)}{6} \leq 7 \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad f(7) - 20 \leq 42 \quad \Rightarrow \quad f(7) \leq 62 \ .$$

<u>נוכיח $f(7) \geq 54$:</u>

לפי משפט לגרנז', קיימת $c \in [7,9]$ כך ש-

(2*)

$$\frac{f(9)-f(7)}{9-7} = f'(c) \le 7 \ \Rightarrow\ \frac{f(9)-f(7)}{2} \le 7 \ \Rightarrow\ 68-f(7) \le 14 \ \Rightarrow\ 68 \le 14+f(7) \ \Rightarrow\ 54 \le f(7) \ .$$

לפיכך לפי (1*) ו- (2*):

$$54 \le f(7) \le 62 \ .$$

<u>שאלה 85</u> נתון כי $|f'(x)| \le 5$ ז"א $-5 \le f'(x) \le 5$.

<u>נוכיח $f(4) \le 20$:</u>

לפי משפט לגרנז', קיימת $c \in [2,4]$ כך ש-

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2} = f'(c) \le 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(4)-10}{2} \le 5 \quad \Rightarrow \quad f(4)-10 \le 10 \quad \Rightarrow \quad f(4) \le 20 \ . \qquad (1*)$$

<u>נוכיח $f(4) \ge 0$:</u>

לפי משפט לגרנז', קיימת $c \in [2,4]$ כך ש-

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2} = f'(c) \ge -5 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(4)-10}{2} \ge -5 \quad \Rightarrow \quad f(4)-10 \ge -10 \quad \Rightarrow \quad f(4) \ge 0 \ . \qquad (1*)$$

לפיכך לפי (1*) ו- (1*):

$$0 \le f(4) \le 10 \ .$$

<u>שאלה 86</u> נתון:

$f(-3)=2$ ו- $f'(x) \le 4$ לכל x. לפי משפט לגרנז' קיים $c \in (-3,0)$ כך ש-

$$\frac{f(0)-f(-3)}{0-(-3)} = f'(c) \ . \qquad (\#1)$$

נתון כי $f'(c) \le 4$. נציב (#1):

$$\frac{f(0)-f(-3)}{3} \le 4 \ .$$

נציב $f(-3)=2$ ונקבל

$$\frac{f(0)-2}{3} \le 4 \qquad \Rightarrow \qquad f(0)-2 \le 12 \qquad \Rightarrow \qquad f(0) \le 14 \ .$$

שאלה 87 נתון:

$f(-2)=5$ ו- $f'(x)\leq 3$ לכל x.

לפי משפט לגרנז' קיים $c\in(-2,1)$ כך ש-

$$\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=f'(c)\ . \qquad \text{(\#1)}$$

נתון כי $f'(c)\leq 3$. נציב **(#1)**:

$$\frac{f(1)-f(-2)}{3}\leq 3\ .$$

נציב $f(-2)=5$ ונקבל

$$\frac{f(1)-5}{3}\leq 3 \qquad \Rightarrow \qquad f(1)-5\leq 9 \qquad \Rightarrow \qquad f(1)\leq 14\ .$$

לכן מצאנו כי

$$f(1)\leq 14$$

שאלה 88

א) צריך להוכיח:

$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$ $(0<a<b)$.

$\ln(x)$ רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b) לכל $0<a<b$. לכן לפי משפט לגרנז' קיימת $c\in[a,b]$ כך ש- $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ ז"א

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{(b-a)}{c}\ .$$

שים לב $0<a<c<b$ כך ש-

$$\frac{(b-a)}{b}<\frac{(b-a)}{c}<\frac{(b-a)}{a}\ ,$$

ולכן

$$\frac{(b-a)}{b}<\ln\left(\frac{b}{a}\right)<\frac{(b-a)}{a}\ .$$

ב) צריך להוכיח:

$\frac{b-a}{\cos^2 a}<\tan(b)-\tan(a)<\frac{b-a}{\cos^2 b}$ $(0<a<b<\frac{\pi}{2})$.

$\tan(x)$ רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b) לכל $0<a<b<\pi/2$. לכן לפי משפט לגרנז' קיימת $c\in[a,b]$ כך ש- $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ ז"א

$$\tan(b)-\tan(a)=(b-a)\frac{1}{\cos^2 c}\ .$$

שים לב $0<a<c<b<\frac{\pi}{2}$ והפונקציה $\cos x$ מונוטומית $\downarrow$ ממש בקטע זו, ולכן

$$\cos a > \cos c > \cos b \ .$$

$\cos x$ חיובי בקטע $[0,\pi/2]$ אז

$$\cos^2 a > \cos^2 c > \cos^2 b \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\cos^2 a} < \frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 b} \ .$$

לכן נקבל

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan(b)-\tan(a) = \frac{b-a}{\cos^2 b} \ .$$

ג) צריך להוכיח:

$a\cdot 2^{a-1} < 3^a-2^a < a\cdot 3^{a-1}$ ($a>1$).

$f(x)=x^a$ $a>1$ רציפה בכל x וגזירה בכל x, ובפרט בקטע $[2,3]$. לכן לפי משפט לגרנז' קיימת $c\in(2,3)$ כך ש-

$$\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=f'(c) \qquad \Rightarrow \qquad 3^a-2^a = a\cdot c^{a-1} \ . \tag{\#}$$

שים לב, עבור $c\in(2,3)$ ו- $a>1$, $a\cdot 2^{a-1} < a\cdot c^{a-1} < a\cdot 3^{a-1}$. נציב $3^a-2^a=a\cdot c^{a-1}$ מביטוי (#) ונקבל

$$a\cdot 2^{a-1} < 3^a-2^a < a\cdot 3^{a-1} \ .$$

ד) צריך להוכיח:

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \quad (x>0)$$

לפי משפט לגרנז' קיימת $c\in(0,x)$ כך ש-

$$\frac{\arctan x - \arctan 0}{x-0} = \arctan(c)' = \frac{1}{1+c^2}$$

ז"א

$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{1}{1+c^2} \ .$$

נכפיל ב-x:

$$\arctan x = \frac{x}{1+c^2} \ . \tag{\#1}$$

בגלל ש- $0<c<x$ אז

$$\frac{x}{1+c^2} > \frac{x}{1+x^2} \ , \tag{\#2}$$

ו-

$$\frac{x}{1+c^2} < x \ . \tag{\#3}$$

לכן, מ (#2) ו- (#3) נקבל

$$\frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+c^2} < x \ . \qquad \text{(\#4)}$$

לפי (#1) נציב $\arctan x$ ב- $\frac{x}{1+c^2}$ ונקבל

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \ .$$

ה) צריך להוכיח:

$$\sin 73^\circ - \sin 28^\circ < \frac{\pi}{4}$$

נעבר לרדיאנים:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ רדיאן}$$

לכן

$$28^\circ = \frac{28\pi}{180} \ , \qquad 73^\circ = \frac{73\pi}{180} \ .$$

לכן

$$\sin(28^\circ) = \sin\left(\frac{28\pi}{180}\right) \ , \qquad \sin(73^\circ) = \sin\left(\frac{73\pi}{180}\right) \ .$$

לכן צריך להוכיח כי

$$\sin\left(\frac{73\pi}{180}\right) - \sin\left(\frac{28\pi}{180}\right) < \frac{\pi}{4} \ .$$

נקח קטע $\left[\frac{28\pi}{180}, \frac{73\pi}{180}\right]$. $f(x)$ רציפה בקטע הזה, וגזירה בקטע הפתוח, לכן קיים c כך ש $\frac{28\pi}{180} < c < \frac{73\pi}{180}$ ו

$$\sin\left(\frac{73\pi}{180}\right) - \sin\left(\frac{28\pi}{180}\right) = \cos c \cdot \left(\frac{73\pi}{180} - \frac{28\pi}{180}\right)$$

$0 < \cos c < 1$ ו $\frac{73\pi}{180} - \frac{28\pi}{180} < \frac{\pi}{4}$. ז"א

$$\sin\left(73^\circ\right) - \sin\left(28^\circ\right) < \frac{\pi}{4} \ .$$

ו) צריך להוכיח:

$|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$ לכל $x, y \in \mathbb{R}$.

נגדיר $f(x) = \sin x$. f רציפה בכל x וגזירה לכל x. לכם לפי משפט לגרנז', לכל x, y $x < y$ קיימת $c \in [x, y]$ כך ש-

$$\frac{\sin y - \sin x}{y-x} = \sin'(c) = \cos c \qquad \Rightarrow \qquad \sin y - \sin x = (y-x) \cdot \cos c \ .$$

נקח את הערך מוחלט ונקבל

$$|\sin y-\sin x|=|(y-x)\cdot\cos c|=|y-x|\cdot|\cos c|\ .$$

או שקול

$$|\sin x-\sin y|=|x-y|\cdot|\cos c|\ .$$

$\cos c$ חסומה: $-1\leq\cos c\leq 1$ אז $0\leq|\cos c|\leq 1$. לכן

$$|\sin x-\sin y|\leq|x-y|\ .$$

<u>שאלה 89</u> נגדיר $f(x)=\ln x$. שים לב $f(x)$ רציפה בקטע $[x,y]$ וגזירה בקטע (x,y). לכן לפי משפט לגרנז' **??**, קיים $c\in(x,y)$ כך ש

$$f(y)-f(x)=f'(c)\cdot(y-x)\ .$$

ז"א

$$\ln y-\ln x=\frac{1}{c}\cdot(y-x)\qquad\Rightarrow\qquad\ln x-\ln y=\frac{1}{c}\cdot(x-y)\qquad\Rightarrow\qquad\ln\frac{x}{y}=\frac{x-y}{c}\ .\qquad(\#)$$

שים לב $0<c<y\ \Leftarrow\ \frac{1}{c}<\frac{1}{y}$, לכן

$$\frac{y-x}{y}<\frac{y-x}{c}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{x-y}{y}>\frac{x-y}{c}\ .$$

לכן לפי (#) נקבל

$$\ln\frac{x}{y}<\frac{x-y}{y}\ .$$

שים לב $0<x<c\ \Leftarrow\ \frac{1}{x}<\frac{1}{c}$, לכן

$$\frac{y-x}{c}<\frac{y-x}{x}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{x-y}{c}>\frac{x-y}{x}\ .$$

לכן לפ (#)

$$\ln\frac{x}{y}>\frac{x-y}{x}\ .$$

<u>שאלה 90</u> יהי $h(x):=f(x)-g(x)$. לפי (#2), $h'(x)>0$ לכל $x\in(a,b)\ ,\ \ x<c$. אז לפי משפט לגרנז' **??**, $h(x)$ עולה מונוטונית. לכן

$$h(n)>h(m)\qquad\Leftrightarrow\qquad n>m\qquad\forall m,n<c\ .\qquad(\#4)$$

אבל $h(c)=0$, לכן

$$h(x)<0\quad\forall x<c\ .\qquad(\#5)$$

ומכאן

$$f(x)-g(x)<0\quad\Rightarrow\quad g(x)>f(x)\quad\forall x<c\ .\qquad(\#6)$$

שאלה 91 יהי $h(x) := f(x) - g(x)$. לפי (*1),

(*4) $$h(a) = 0 \ .$$

לפי (*2),

(*5) $$h'(x) < 0 \qquad \forall x \in (a,b).$$

לכל $x \in (a,b) \ , \quad x < c$. אז לפי משפט לגרנז' **??**, $h(x)$ יורדת מונוטונית. לכן

(*6) $$h(n) < h(m) \qquad \Leftrightarrow \qquad n > m \qquad \forall m,n < (a,b) \ .$$

אבל לפי (*4) $h(a) = 0$, לכן

(*7) $$h(x) < 0 \quad \forall a < x \leq b \ .$$

ומכאן

(*8) $$f(x) - g(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) > f(x) \quad \forall x \in (a,b] \ .$$

שאלה 92 נגדיר

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 25x + 8 \ .$$

שים לב

$$f(0) = 8 \ , \qquad f(-1) = -25 \ ,$$

אז לפי משפט ערך ביניים **??**, קיימת לפחות נקודה אחת שבה הפונקציה מקבלת הערך 0. נניח שקיימת יותר מנקודה אחת, a, b, שבהן

$$f(a) = f(b) = 0 \ .$$

$f(x)$ פולינום ולכן היא רציפה וגזירה בכל x. לכן לפי משפט רול **??**, קיים נקודה $c \in (a,b)$ כל ש-

(#) $$f'(c) = 0.$$

שים לב,

$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 25$$

לכן אם (#) מתקיים,

$$3c^2 - 14c + 25 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{7 \pm \sqrt{26}i}{3}$$

סתירה. לכן אין יותר מפתרון אחד.

שאלה 93 פונקציה $f(x) = \arctan(x)$ היא אלמנטרית ומוגדרת לכל x ממשי. לכן היא רציפה וגזירה לכל x ממשי ולכן מקיימת את תנאיי משפט לגרנז' **??** עבור גל קטע $[a,b]$. לכן קיים ערך c מקטע זו כך ש-

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \ .$$

מכאן

(**) $$\frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} = |f'(c)|$$

שים לב,

$$f'(x) = \frac{2}{1+4x^2}$$

ולכן לפי (**),

$$\frac{|\arctan(2b) - \arctan(2a)|}{|b-a|} = \frac{2}{1+4c^2} \leq 2$$

מש"ל.

שאלה 94

נתון:

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b).

$f(a) = f(b) = 0$.

צריך להוכיח:

$f(c) + f'(c) = 0$.

הוכחה:

נגדיר $g(x) = e^x f(x)$.
$f(x)$ רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b), ו e^x רציפה וגזירה לכל x. לכן $g(x)$ רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b).

$f(a) = f(b) = 0$ (נתון) לכן $g(a) = e^a f(a) = 0$, $g(b) = e^b f(b) = 0$, ז"א

$$g(a) = g(b) = 0 \ .$$

לפי משפט רול קיימת $c \in (a,b)$ כך ש $g'(c) = 0$. ז"א

$$e^c f(c) + e^c f'(c) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e^c \left(f(c) + f'(c)\right) = 0$$

$e^c > 0$ לכל c ממשי, לכן $f(c) + f'(c) = 0$.

שאלה 95

נגדיר $f(x) = e^x + x$. נניח כי ל- $f(x)$ יש 2 שורשים. אז לפי רול קיימת c כך ש- $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = e^x + 1 \ .$$

לא קיימת נקודה שבה הנגזרת מתאפסת, בסתירה לכך שקיימת c שבה $f'(c) = 0$.

שאלה 96

א) נגדיר

$$f(x) = e^x - (1+x)^2 \ .$$

נוכיח כי ל- $f(x)$ יש שלושה שורשים לכל היותר, דרך השלילה.
נניח שיש ל- $f(x)$ ארבעה שורשים.

אם היו ארבעה שורשים אזי לפי רול הנגזרת הראשונה מתאפסת לפחות שלוש פעמים.
שוב לפי רולהנגזרת השנייה תתאפס לפחות פעמיים.
הנגזרת השנייה הינה

$$f''(x) = e^x - 2 \ .$$

ז"א הנגזרת מתאפסת רק פעם אחת, בסתירה לכך שהנגזרת מתאפסת פעמיים. לאור זאת אין ארבעה שורשים.

ב) נגדיר

$$f(x) = e^x - (1+x)^2 \ .$$

$$f(-2) = \frac{1}{e^2} - 1 < 0 \ , \qquad f(-1) = \frac{1}{e} > 0, \qquad f(0) = -1 < 0 \ , \qquad f(3) = e^3 - 16 > 0 \ .$$

לכן לפי משפט ערך הביניים:

קיימת $c_1 \in (-2,-1)$ שבה $f(c_1) = 0$,

קיימת $c_2 \in (-1,0)$ שבה $f(c_2) = 0$,

וקיימת $c_3 \in (0,3)$ שבה $f(c_3) = 0$.

שאלה 97

נגדיר $g(x) = f(x)^2 f(1-x)$.

$$g(0) = f(0)^2 \cdot f(1) = 0 \ , \qquad g(1) = f(1)^2 f(0) = 0 \ .$$

לכן לפי משפט רול קיימת $c \in [0,1]$ כך ש- $g'(c) = 0$.

$$g'(x) = 2f(x)f'(x)f(1-x) + f(x)^2 f'(1-x) \cdot (-1) = f(x)\left[2f'(x)f(1-x) - f(x)f'(1-x)\right] \ .$$

$$g'(c) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(c)\left[2f'(c)f(1-c) - f(c)f'(1-c)\right] = 0$$

לכל $c \in (0,1)$ נתון כי $f(c) > 0$. לכן $2f'(c)f(1-c) - f(c)f'(1-c) = 0$. לכן

$$\frac{f'(1-c)}{f(1-c)} = \frac{2f'(c)}{f(c)} \ .$$

שאלה 98

א) <u>הגדרה</u>: $F(x)$ פונקציה קדומה של פונקציה $f(x)$ אם $F'(x) = f(x)$.
<u>דוגמאות</u>:
$(x^2)' = 2x \Leftarrow F(x) = x^2$ פונקציה קדומה ל $f(x) = 2x$.
$(a^x)' = a^x \ln a \Leftarrow F(x) = a^x$ פונקציה קדומה ל $f(x) = a^x \ln a$.

ב)

ג) **1)**

$$f(x) = e^{3x}$$

$$F(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$$

2) $f(x)=\cos(5x+6)$

$$F(x)=\frac{1}{5}\sin(5x+6)$$

3) $m\neq 0$, $f(x)=(mx+n)^{1/3}$

$$F(x)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{m}\cdot(mx+n)^{4/3}$$

4) $f(x)=(ax+b)^n$ ($n\neq -1$, $a\neq 0$)

$$F(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$$

■

שאלה 99

א)

$$\int\frac{(x+2)^2}{\sqrt[3]{x}}\,dx=\int\frac{x^2+4x+4}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$
$$=\int\left(x^{5/3}+4x^{2/3}+4x^{-1/3}\right)\,dx$$
$$=\frac{3}{8}x^{8/3}+\frac{12}{5}x^{5/3}+6x^{2/3}+C$$

ב)

$$\int e^{-3x+2}\,dx=-\frac{1}{3}e^{-3x+2}+C$$

ג)

$$\int\frac{3^{2x}+5^{x+1}}{4^x}\,dx=\int\left(\left(\frac{9}{4}\right)^x+5\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^x\right)\,dx$$
$$=\frac{\left(\frac{9}{4}\right)^x}{\ln\left(\frac{9}{4}\right)}+5\cdot\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^x}{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}+C$$

ד)

$$\int\frac{x}{x+1}\,dx=\int\frac{x+1-1}{x+1}\,dx$$
$$=x-\ln|x+1|+C$$

ה)

$$\int\sin^2 x\,dx=\int\frac{(1-\cos(2x))}{2}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin(2x))+C$$

ז)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx\\ &= \int \frac{1}{t^2+2}\,dt\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+C\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C\end{aligned}$$

ז)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-12x}}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x}}\,dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2-9}}\,dx\end{aligned}$$

$$t = x-3$$
$$t' = 1$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{t^2-9}}\,dt\\ &\overset{\text{נוסחה 11 בדף הנוסחאות}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t+\sqrt{t^2-9}\right|+C\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x}\right|+C\end{aligned}$$

ח)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{12x-2x^2}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}dx\\ &= \int \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{-(x^2-6x)}}dx\\ &= \int \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{-((x-3)^2-9)}}dx\\ &= \int \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{9-(x-3)^2}}dx\end{aligned}$$

$$t = x-3$$
$$t' = 1$$

$$\begin{aligned}&= \int \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{9-t^2}}dt\\ &\overset{\text{נוסחה 10 בדף הנוסחאות}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{t}{3}\right)+C\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x-3}{3}\right)+C\end{aligned}$$

ט)

$$\int \sqrt[3]{2-5x}\,dx$$

$$t = 2-5x$$
$$t' = -5$$

$$-\frac{1}{5}\int t^{1/3}\,dx = -\frac{1}{5}\frac{t^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C$$
$$= -\frac{3}{20}(2-5x)^{4/3} + C$$

י)

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$$

$$t = \sqrt{x}$$
$$t' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{t^2-1}{t+1}\cdot 2t \cdot dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right) + C$$
$$= 2\left(\frac{x^{3/2}}{3} - \frac{x}{2}\right) + C$$

יא)

$$\int (\sin x + \cos x)^2\ dx = \int \left(\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x\right)\ dx$$
$$= \int (1 + 2\sin x \cos x)\ dx$$
$$= \int (1 + \sin(2x))\ dx$$
$$= x - \frac{1}{2}\cos(2x) + C\ .$$

יב)

$$\int \sin(3x)\cos(5x)\,dx = \int \frac{\sin(8x)-\sin(2x)}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\cos(8x) + \frac{1}{2}\cos(2x)\right) + C$$

יג)

$$\int \cot^2(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - 1\right)\ dx$$
$$= -\cot(x) - x + C$$

יד)

$$\int \frac{(2x+1)}{x^2+x+1}\,dx$$

$$t = x^2+x+1$$
$$t' = 2x+1$$

$$\int \frac{t'}{t}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt$$
$$= \ln|t| + C$$
$$= \ln|x^2+x+1| + C \ .$$

■

שאלה 100

א) $\int \ln x\,dx$

$u = \ln x$

$\mathrm{v}' = 1$

$u' = \frac{1}{x}$

$\mathrm{v}' = x$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + C$$

■

ב) $\int 2x\ln x\,dx$ הנוסחה של אינטגרציה בחלקים:

$$\int u\cdot \mathrm{v}'\,dx = u\cdot \mathrm{v} - \int u'\cdot \mathrm{v}\,dx$$

עבור u ו v' נבחר:

$$u = \ln x\ , \qquad \mathrm{v}' = 2x\ , \qquad u' = \frac{1}{x}\ , \qquad \mathrm{v} = x^2$$

כך ש

$$\int u\cdot \mathrm{v}'\,dx = u\cdot \mathrm{v} - \int u'\cdot \mathrm{v}\,dx\ ,$$

$$\int 2x\ln x\,dx = x^2\ln x - \int x\,dx = x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + C$$

■

ג) $\int x^2\sin(2x)\,dx$

$u = x^2$

$\mathrm{v}' = \sin(2x)$

$u' = 2x$

$\mathrm{v} = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

$$\begin{aligned}\int x^2\sin(2x)\,dx =& x^2\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)-\int\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)\cdot 2x\,dx\\ =&-\frac{x^2}{2}\cos(2x)+\int x\cos(2x)\,dx\end{aligned}$$

$$u = x$$
$$\text{v}' = \cos(2x)$$
$$u' = 1$$
$$\text{v} = \tfrac{1}{2}\sin(2x)$$

$$\begin{aligned}=&-\frac{x^2}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}x\sin(2x)-\frac{1}{2}\int\sin(2x)\,dx\\ =&-\frac{x^2}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}x\sin(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)+C\ .\end{aligned}$$

■

ד)

$$\int x^2\arctan(x)\,dx$$

$$u = \arctan(x)$$
$$\text{v}' = x^2$$
$$u' = \tfrac{1}{1+x^2}$$
$$\text{v} = \tfrac{x^3}{3}$$

$$\begin{aligned}\int x^2\arctan(x) =& \frac{x^3}{3}\arctan(x)-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{x^2+1}\,dx\\ =& \frac{x^3}{3}\arctan(x)-\frac{1}{3}\int\left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)\,dx\\ =& \frac{x^3}{3}\arctan(x)-\frac{1}{3}\int x\,dx+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx\\ =& \frac{x^3}{3}\arctan(x)-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln|x^2+1|+C\ .\end{aligned}$$

■

ה)

$$\int 9x^2e^{3x}\,dx$$

$$u = 9x^2$$
$$\text{v}' = e^{3x}$$
$$u' = 18x$$
$$\text{v} = \tfrac{e^{3x}}{3}$$

$$\int 9x^2e^{3x}\,dx = 3x^2e^{3x}-\int 6xe^{3x}\,dx$$

$$u = 6x$$
$$\text{v}' = e^{3x}$$
$$u' = 6$$
$$\text{v} = \tfrac{e^{3x}}{3}$$

$$\int 9x^2e^{3x}\,dx = 3x^2e^{3x} - 2xe^{3x} + \int 2e^{3x}\,dx$$
$$= 3x^2e^{3x} - 2xe^{3x} + \frac{2}{3}e^{3x} + C\ .$$

$\blacksquare$

שאלה 101

א) $\int \frac{(x+1)}{x(x-3)}\,dx$

$$\frac{(x+1)}{x(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3}\ , \qquad A(x-3) + Bx = x+1$$

$B = \frac{4}{3}$, $A = \frac{-1}{3}$

$$\int \left(-\frac{1}{3x} + \frac{4}{3(x-3)}\right) dx = -\frac{1}{3}\ln|x| + \frac{4}{3}\ln|x-3| + C$$

$\blacksquare$

ב) $\int \frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}\,dx$

$$\frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}\ , \qquad A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x+2) = 2x^2+x+3$$

$$x^2:\ , A+B=2\ , \qquad x:\ A+2B+C=1\ , \qquad x^0:\ A+2C=3$$

$B=-1$, $A=3$
$C=0$

$$\int \left(\frac{3}{x+2} - \frac{x}{x^2+x+1}\right) dx = 3\ln|x+2| - \int \frac{x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,dx$$

$t = x + \frac{1}{2}$
$t' = 1$

$$\begin{aligned}
&= 3\ln|x+2| - \int \frac{t-\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\,dx \\
&= 3\ln|x+2| - \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt \\
&= 3\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln|t^2+\frac{3}{4}| + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right) + C \\
&= 3\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

ג) $\displaystyle\int \frac{5x^3-17x^2+18x-5}{(x-1)^3(x-2)}\,dx$

$$\frac{5x^3-17x^2+18x-5}{(x-1)^3(x-2)}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x-2}$$

$$A(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)^2(x-2)+D(x-1)^3=5x^3-17x^2+18x-5$$

$$A=-1$$
$$B=0$$
$$C=2$$

$$=\int\frac{-1}{(x-1)^3}\,dx+2\int\frac{1}{x-1}\,dx+3\int\frac{1}{x-2}\,dx$$
$$=\frac{1}{2(x-1)^2}+2\ln|x-1|+3\ln|x-2|+C$$

■

ד)

$$\int\frac{x^2}{x^2-4x+3}\,dx=\int\left(1+\frac{4x-3}{x^2-4x+3}\right)dx=x+\int\frac{4x-3}{x^2-4x+3}\,dx=x+\int\frac{4x-3}{(x-1)(x-3)}\,dx$$

$$\frac{4x-3}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}\ ,\qquad A(x-3)+B(x-1)=4x-3\ .$$

$$A=-\tfrac{1}{2}$$
$$B=\tfrac{9}{2}$$

$$x+\int\left(-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{9}{2(x-3)}\right)dx=x-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{9}{2}\ln|x-3|+C$$

■

ה) $\displaystyle\int\frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}\,dx$

$$x^2-6x+5\overline{)\,x^3+x^2\,}$$

$$\begin{array}{r} x \\ x^2-6x+5\,\overline{)\,x^3+\ \ x^2\qquad} \\ \underline{x^3-6x^2}+5x \\ 7x^2-5x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x\ +7 \\ x^2-6x+5\,\overline{)\,x^3+\ \ x^2\qquad\quad} \\ \underline{x^3-6x^2}+\ \ 5x\quad \\ 7x^2-\ \ 5x\quad \\ \underline{7x^2-42x}+35 \\ 37x-35 \end{array}$$

$$\frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5} = x+7+\frac{37x-35}{x^2-6x+5} = x+7+\frac{37x-35}{(x-5)(x-1)}$$

$$\frac{37x-35}{(x-5)(x-1)} = \frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x-5)}{(x-5)(x-1)}$$

$$A(x-1)+B(x-5) = 37x-35$$

נציב $x=1$:

$$-4B=2 \qquad \Rightarrow \qquad B=-\frac{1}{2}\ .$$

נציב $x=5$:

$$4A=150 \qquad \Rightarrow \qquad A=\frac{75}{2}\ .$$

לכן

$$\frac{37x-35}{(x-5)(x-1)} = \frac{75}{2(x-5)}-\frac{1}{2(x-1)}$$

ובסה"כ

$$\frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5} = x+7+\frac{75}{2(x-5)}-\frac{1}{2(x-1)}\ .$$

לכן

$$\int \frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}\,dx = \int\left(x+7+\frac{75}{2(x-5)}-\frac{1}{2(x-1)}\right)dx = \frac{x^2}{2}+7x+\frac{75}{2}\ln|x-5|-\frac{1}{2}\ln|x-1|\ .$$

■

ו) $\displaystyle\int \frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x}\,dx$

$$x^3+x\overline{\big)\,3x^3+x^2+5x+1}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ x^3+x\overline{\big)\,3x^3+x^2+5x+1} \\ \underline{3x^3+\quad\ \ } \quad 3x \quad\ \\ x^2+2x+1 \end{array}$$

$$\frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x} = 3+\frac{x^2+2x+1}{x^3+x}$$

$$\frac{x^2+2x+1}{x^3+x} = \frac{x^2+2x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)}$$

$$A(x^2+1)+(Bx+C)x = x^2+2x+1$$

x^2:	$A+B=1$
x:	$C=2$
x^0:	$A=1$

לכן $A=1$, $B=0$, $C=2$ ונקבל

$$\frac{x^2+2x+1}{x^3+x}=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2+1}$$

ובסה"כ

$$\frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x}=3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2+1}$$

לכן

$$\int\frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x}\,dx=\int\left(3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2+1}\right)dx=3x+\ln|x|+2\arctan(x)+C$$

■

שאלה 102

א) $\int\frac{1}{3+\sin x}\,dx$

$t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$t'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}(1+t^2)$

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ (זהות)

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{3+\sin x}\,dx&=\int\frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,t'dx\\&=\int\frac{2}{3(1+t^2)+2t}\,dt\\&=\int\frac{2}{3+3t^2+2t}\,dt\\&=\frac{2}{3}\cdot\int\frac{1}{t^2+\frac{2}{3}t+1}\,dt\\&=\frac{2}{3}\cdot\int\frac{1}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}}\,dt\ .\end{aligned}$$

$z=t+\frac{1}{3}$

$z'_t=1$

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{3}\cdot\int\frac{1}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}}\,dt =&\frac{2}{3}\cdot\int\frac{1}{z^2+\frac{8}{9}}\,dz\\
=&\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{8}}\,\text{arctan}\left(\frac{3}{\sqrt{8}}z\right)+C\\
=&\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{8}}\,\text{arctan}\left(\frac{3\left(t+\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{8}}\right)+C\\
=&\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{8}}\,\text{arctan}\left(\frac{3\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{8}}\right)+C\ .
\end{aligned}
$$

■

ב)
$$\int\frac{1}{1+5\cos x}\,dx$$

$$t=\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)$$

$$t'=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\tfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)=\tfrac{1}{2}(1+t^2)$$

(זהות) $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$$
\begin{aligned}
\int\frac{1}{1+5\cos x}\,dx=&\int\frac{1}{1+5\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\left(\frac{2}{1+t^2}\right)\cdot t'dx\\
=&\int\frac{2}{1+t^2+5(1-t^2)}\,dt\\
=&\int\frac{2}{6-4t^2}\,dt\\
=&\frac{-1}{2}\int\frac{1}{t^2-\frac{3}{2}}\,dt\ .
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{t^2-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\left(t+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(t-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}=\frac{A}{t+\sqrt{\frac{3}{2}}}+\frac{B}{t-\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$A\left(t-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+B\left(t+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=1$$

$$A=\frac{1}{\sqrt{6}}\ ,\qquad B=-\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{-1}{2}\int\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\left(t-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}-\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\left(t+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}\right)\,dt=-\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|t-\sqrt{\frac{3}{2}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|t+\sqrt{\frac{3}{2}}\right|$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{t+\sqrt{\frac{3}{2}}}{t-\sqrt{\frac{3}{2}}}\right|$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{\frac{3}{2}}}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{\frac{3}{2}}}\right|+C$$

$\blacksquare$

ג) $\int\frac{1}{\sin x+2\cos x+6}\,dx$. זהויות של הצבה אוניברסלית:

$$t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)\ ,\qquad t'=\frac{1}{2}(1+t^2)\ ,\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\int\frac{1}{\sin x+2\cos x+6}\,dx=\int\frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)+2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+6}\cdot\left(\frac{2}{1+t^2}\right)\cdot t'dx$$

$$=\int\frac{2}{2t+2-2t^2+6+6t^2}\,dt$$

$$=\int\frac{2}{8+2t+4t^2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+\frac{t}{2}+2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{31}{16}}\,dt$$

$$z=t+\frac{1}{4}\ ,\qquad z'_t=1$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{z^2+\frac{31}{16}}\,dz=\frac{1}{2}\frac{4}{\sqrt{31}}\arctan\left(\frac{4z}{\sqrt{31}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\frac{4}{\sqrt{31}}\arctan\left(\frac{4t+1}{\sqrt{31}}\right)+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{31}}\arctan\left(\frac{4\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{31}}\right)+C$$

$\blacksquare$

שאלה 103

א) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$

$t=\sqrt{x}$

$t'=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2t}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx =& \int \frac{t}{1+t^2}\,dx\\
=& \int \frac{t}{1+t^2}\cdot\frac{1}{t'}\cdot t' dx\\
=& \int \frac{t}{1+t^2}\cdot\frac{1}{t'}\;dt\\
=& \int \frac{t}{1+t^2}\cdot 2t\,dt\\
=& \int \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt\\
=& \int \frac{2(1+t^2-1)}{1+t^2}\,dt\\
=& \int \frac{2(1+t^2)-2}{1+t^2}\,dt\\
=& \int \left(\frac{2(1+t^2)}{1+t^2}-\frac{2}{1+t^2}\right)\,dt\\
=& \int \left(2-\frac{2}{1+t^2}\right)\,dt\\
=& 2t-2\arctan t+C\\
=& 2\sqrt{x}-2\arctan\sqrt{x}+C\ .
\end{aligned}$$

■

ב) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x}\,dx$

$$t=\sqrt{x+2}\ ,\qquad t'=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}=\frac{1}{2t}$$

$x=t^2-2 \quad\Leftarrow\quad x+2=t^2 \Leftarrow$

$$\begin{aligned}\int \frac{t}{t^2-2}\,dx &= \int \frac{t}{t^2-2}\cdot\frac{1}{t'}\cdot t'\,dx\\ &= \int \frac{t}{t^2-2}\cdot\frac{1}{t'}\ dt\\ &= \int \frac{t}{t^2-2}\cdot 2t\,dt\\ &= \int \frac{2t^2}{t^2-2}\,dt\end{aligned}$$

השבר בתוך האינטגרל ניתן לרשום כשברים חלקיים:

$$\begin{aligned}\frac{2t^2}{t^2-2} =&\frac{2(t^2-2+2)}{t^2-2}\\ =&\frac{2(t^2-2)+2)}{t^2-2}\\ =&\frac{2(t^2-2)}{t^2-2}+\frac{4}{t^2-2}\\ =&2+\frac{4}{t^2-2}\\ =&2+\frac{4}{(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})}\end{aligned}$$

$$\frac{4}{(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})}=\frac{A}{t+\sqrt{2}}+\frac{B}{t-\sqrt{2}}=\frac{A(t-\sqrt{2})+B(t+\sqrt{2})}{(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})}$$

$B=\sqrt{2} \Leftarrow 2\sqrt{2}B=4 \Leftarrow :t=\sqrt{2}$

$A=-\sqrt{2} \Leftarrow -2\sqrt{2}A=4 \Leftarrow :t=-\sqrt{2}$

לכן

$$\frac{2t^2}{t^2-2}=2+\frac{\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}$$

והאינטגרל הופך ל

$$\begin{aligned}\int \frac{2t^2}{t^2-2}\,dt = &\int\left(2+\frac{\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}-\frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)dt\\ =&2t+\sqrt{2}\ln|t-\sqrt{2}|-\sqrt{2}\ln|t+\sqrt{2}|+C\\ =&2\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\ln|\sqrt{x+2}-\sqrt{2}|-\sqrt{2}\ln|\sqrt{x+2}+\sqrt{2}|+C\end{aligned}$$

$\blacksquare$

ג) $$\int \frac{1+e^x}{(1-e^{2x})e^x}\,dx$$

$$t=e^x$$

$$t' = e^x = t$$

$$\int \frac{1+t}{(1-t^2)t}dx = \int \frac{1+t}{(1-t^2)t^2} \cdot t'\, dx = \int \frac{1+t}{(1-t^2)t^2}dt = \int \frac{1}{(1-t)t^2}dt$$

$$\frac{1}{(1-t)t^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t} = \frac{At^2 + B(1-t) + Ct(1-t)}{(1-t)t^2}$$

$$At^2 + B(1-t) + Ct(1-t) = 1$$

$$t=0 \ \rightsquigarrow B=1\ , \qquad t=1 \ \rightsquigarrow A=1\ , \qquad t=2 \ \rightsquigarrow 4A-B-2C=1 \ \Rightarrow C=1\ .$$

$$\int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} \right) dt = -\ln|1-t| - \frac{1}{t} + \ln|t| + C = -\ln|1-e^x| - \frac{1}{e^x} + x + C$$

■

שאלה 104

א) $\displaystyle\int \sin^4 x \cos^5 x\, dx$

$$t = \sin x\ , \qquad t' = \cos x$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2\ , \qquad \cos^4 x = (1-t^2)^2\ .$$

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \cos^5 x\, dx &= \int t^4 (1-t^2)^2\, t'\, dx \\ &= \int t^4(1-t^2)^2\, dt \\ &= \int (t^8 - 2t^6 + t^4)\, dt \\ &= \frac{t^9}{9} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^5}{5} + C \\ &= \frac{\sin^9 x}{9} - \frac{2\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^5 x}{5} + C\end{aligned}$$

■

ב) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$

$$\sin^2 x \cos^2 = (\sin x \cos x)^2 = \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2x \ , = \frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{8}\left(1-\cos 4x\right)$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{8}\left(1-\cos 4x\right)\,dx =& \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + C\\ &\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C\end{aligned}$$

■

ג) $\int \cos^6 x\,dx$

$$\begin{aligned}\cos^6 x &= \left(\cos^2 x\right)^3\\ &= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3\\ &= \frac{1}{8}\left(1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(1+3\cos 2x+3\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)+\cos^3 2x\right)\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{8}\left(1+3\cos 2x+3\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)+\cos^3 2x\right)dx = \frac{x}{8}+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{16}x+\frac{3}{64}\sin 4x+\int \cos^3 2x dx$$

$$t = \sin 2x \ , \qquad t' = 2\cos 2x$$

$$\begin{aligned}&\frac{x}{8}+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{16}x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{8}\int\left(1-\sin^2 2x\right)\cos 2x\,dx\\ =&\frac{x}{8}+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{16}x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{8}\int\left(1-t^2\right)\frac{t'}{2}dx\\ =&\frac{x}{8}+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{16}x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{16}\int\left(1-t^2\right)dt\\ =&\frac{x}{8}+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{16}x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{16}\int\left(1-t^2\right)dt\\ =&\frac{x}{8}+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{16}x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{16}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\\ =&\frac{5x}{16}+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{16}\left(\sin 2x-\frac{\sin^3 2x}{3}\right)\\ =&\frac{5x}{16}+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{\sin^3 2x}{48}\\ =&\frac{5x}{16}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C\end{aligned}$$

■

(٦

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x \, dx$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2} \ , \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \ .$$

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = & \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x \, dx \\
= & \int \frac{\sin^2 x}{4} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx \\
= & \frac{1}{8} \int \left(\sin^2 x + \sin^2 2x \cos 2x\right) \, dx \\
= & \frac{1}{8} \int \left(\frac{1-\cos 4x}{2} + \sin^2 2x \cos 2x\right) \, dx \\
= & \frac{1}{8} \int \left(\frac{1-\cos 4x}{2} + \sin^2 2x \cos 2x\right) \, dx \\
= & \frac{1}{16} \int (1-\cos 4x) \, dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx \\
= & \frac{1}{16} \left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x
\end{aligned}$$

$$t = \sin 2x \ , \qquad t' = 2\cos 2x$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{16} \left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x = & \frac{1}{16} \left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + \frac{1}{8} \int t^2 \, \frac{t'}{2} \, dx \\
= & \frac{1}{16} \left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + \frac{1}{16} \int t^2 \, dt \\
= & \frac{1}{16} \left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + \frac{1}{16} \frac{t^3}{3} + C \\
= & \frac{1}{16} \left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + \frac{1}{16} \frac{\sin^3 2x}{3} + C \\
= & \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C
\end{aligned}$$