

שיעור 6 תת מרחב

6.1 הגדרה: (תת מרחב)

נניח כי V מרחב וקטורי מעל שדה, \mathbb{F} .

תת קבוצה W של V נקראת תת מרחב (ת"מ) של V אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

$$(1) \quad \bar{0} \in W$$

$$(2) \quad \text{לכל } u, v \in W,$$

$$u + v \in W.$$

$$(3) \quad \text{לכל } u \in W \text{ ולכל } \alpha \in \mathbb{F} \text{ מתקיים}$$

$$\alpha \cdot u \in W.$$

6.2 דוגמא.

נגדיר $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, $W \subseteq \mathbb{R}^2$. האם W ת"מ של \mathbb{R}^2 ?

פיתרון. לא. דוגמה נגדית:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \notin W.$$

לכן W לא ת"מ של \mathbb{R}^2 . ■

6.3 דוגמא.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{R} \right\}.$$

$W \subseteq \mathbb{R}^2$. האם W ת"מ של \mathbb{R}^2 ?

פיתרון.

$$(1) \quad \text{לכל } u = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \in W, v = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \in W,$$

$$u + v = \begin{pmatrix} k + t \\ 2(k + t) \end{pmatrix} \in W,$$

$$(2) \quad \text{לכל } u = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \in W, \text{ ולכל סקלר } t \in \mathbb{R},$$

$$tu = \begin{pmatrix} tk \\ 2(tk) \end{pmatrix} \in W,$$

(3)

$$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \in W.$$

לכן השלושה התנאים של ת"מ בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W ת"מ של \mathbb{R}^2 . ■

6.4 דוגמא.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+2 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

האם W ת"מ של \mathbb{R}^2 ?

פיתרון. $\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$ לכן W לא ת"מ של \mathbb{R}^2 . ■

6.5 דוגמא.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x \geq 0, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

האם W ת"מ של \mathbb{R}^2 ?

פיתרון.

לא. דוגמה נגדית:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in W, \quad (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \notin W.$$

■

6.6 דוגמא.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 - y^2 = 0 \right\}.$$

האם W ת"מ של \mathbb{R}^2 ?

פיתרון.

לא. דוגמה נגדית:

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in W, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \in W, \quad u + v = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \notin W.$$

■

6.7 דוגמא.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right\}.$$

האם W ת"מ של \mathbb{R}^3 ?

פיתרון.

כך:

(1) צ"ל $\bar{0} \in W$:

$$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{0} \in W \Leftrightarrow \begin{cases} 0 - 2 \cdot 0 + 0 = 0 \\ 0 - 0 = 0 \end{cases}$$

(2) נניח $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W$ וז"א מתקיים $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$. נקח סקלר k . צ"ל: $ku \in W$.

$$ku = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} kx - 2ky + kz = k(x - 2y + z) = 0 \\ ky - kz = k(y - z) = 0 \end{cases}$$

לכן $ku \in W$.

(3) נקח $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in W$, $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in W$ וז"א מתקיים

$$\begin{cases} x_2 - 2y_2 + z_2 = 0 \\ y_2 - z_2 = 0 \end{cases} \text{ וגם } \begin{cases} x_1 - 2y_1 + z_1 = 0 \\ y_1 - z_1 = 0 \end{cases}$$

אז

$$u + v = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}.$$

נבדוק אם $u + v \in W$.

$$(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 - 2y_1 + z_1) + (x_2 - 2y_2 + z_2) = 0,$$

$$(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = (y_1 - z_1) + (y_2 - z_2) = 0,$$

לכן $u + v \in W$. לכן השלושה התנאים של ת"מ בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W ת"מ של \mathbb{R}^3 .

■

6.8 דוגמא.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + b + c = d \right\}.$$

האם W ת"מ של $M_{2 \times 2}(\mathbb{F})$?

פיתרון.

(1)

$$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

$$0 + 0 + 0 = 0$$

(2) נקח

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W.$$

ז"א מתקיים $a + b + c = d$. נקח סקלר k . אז

$$ku = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} \in W.$$

$ku \in W$ לכן $ka + kb + kc = k(a + b + c) = kd$

(3)

$$u = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in W, \quad v = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in W.$$

צ"ל $u + v \in W$.

$$a_1 + b_1 + c_1 = d_1 \Leftrightarrow u \in W$$

$$a_2 + b_2 + c_2 = d_2 \Leftrightarrow v \in W$$

$$u + v = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

$$u + v \in W \text{ ז"א } (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) = (a_1 + b_1 + c_1) + (a_2 + b_2 + c_2) = d_1 + d_2$$

לכן השלושה התנאים של ת"מ בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W ת"מ של $M_{2 \times 2}(\mathbb{F})$. ■

6.9 דוגמא.

תהי

$$W = \{p(x) \mid \deg(p(x)) = 2, p(x) \in \mathbb{F}[x]\}$$

קבוצת כל הפולינומים במעלה 2 בדיוק עם מקדמים מתוך שדה \mathbb{F} . קבעו אם W ת"מ של $\mathbb{F}[x]$.

פיתרון.

W לא ת"מ של $\mathbb{F}[x]$. הסבר:

$$\blacksquare \quad 0 \notin W$$

6.10 דוגמא.

נסמן

$$\mathbb{F}_2[x] = \{p(x) \in \mathbb{F}[x] \mid \deg(p(x)) \leq 2\}$$

קבוצת כל הפולינומים של $\mathbb{F}[x]$ מסדר 2 לכל היותר.

$$\mathbb{F}_2[x] \text{ ת"מ של } \mathbb{F}[x]$$

6.11 דוגמא.

$$W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid f(3) = 0\}$$

$W \subseteq F(\mathbb{R})$. קבעו האם W ת"מ של $F(\mathbb{R})$.

פיתרון.

(1) האיבר $\bar{0}$ הינו הפונקציה $f(x) = 0$. לכן $\bar{0}(3) = 0 \Leftrightarrow \bar{0} \in W$.

(2) אם $f \in W$ ו- $k \in \mathbb{R}$, אז $f(3) = 0$ לכן

$$(kf)(3) = k(f(3)) = k \cdot 0 = 0.$$

ז"א $kf \in W$.

(3) נניח $f, g \in W$, ז"א $f(3) = 0$, $g(3) = 0$. אז

$$(f + g)(3) = f(3) + g(3) = 0 + 0 = 0,$$

כלומר $f + g \in W$.

לכן השלושה התנאים של ת"מ בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W ת"מ של $F(\mathbb{R})$. ■

6.12 דוגמא.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 3x + y - z = 1 \\ 2x + 5y = 0 \\ -x + 10y - z = 5 \end{array} \right\}$$

קבעו האם W ת"מ של \mathbb{R}^3 .

פיתרון.

■ W לא ת"מ של \mathbb{R}^3 , $\bar{0} \notin W$.

6.13 משפט. (מרחב האפס הוא ת"מ)

לכל מטריצה A מסדר $m \times n$ מעל שדה \mathbb{F} , אוסף הפתרונות של מערכת הומוגנית $A \cdot X = 0$ הוא ת"מ של \mathbb{F}^n .

הוכחה.

נסמן

$$\text{Nul}(A) = \{X \mid A \cdot X = 0, X \in \mathbb{F}^n\}$$

נוכיח כי $\text{Nul}(A)$ ת"מ של \mathbb{F}^n .

(1) צ"ל $\bar{0} \in \text{Nul}(A)$, כאשר $\bar{0}$ מטריצה האפס.

$$A \cdot \bar{0} = 0,$$

לכן $\bar{0} \in \text{Nul}(A)$.

(2) נניח $u, v \in \text{Nul}(A)$. צ"ל $u + v \in \text{Nul}(A)$.

$$A \cdot u = 0 \Leftrightarrow u \in \text{Nul}(A)$$

$$A \cdot v = 0 \Leftrightarrow v \in \text{Nul}(A)$$

לכן

$$A(u + v) = Au + Av = 0 + 0 = 0 \Rightarrow u + v \in \text{Nul}(A)$$