

עבודה עצמית 1
סדרות

שאלה 1 רשום את חמשת האיברים הראשונים של כל אחת מהסדרות הבאות:

(א) $a_n = 2^{n-1} - n^2 + 1$

(ב) $a_{n+1} = 2a_n + 3(-1)^n$

(ג) $a_n = (-1)^n + 1$

(ד) $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

שאלה 2 רשום את האיבר הכללי של כל אחת מהסדרות הבאות:

(א) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \dots$

(ב) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$

(ג) $2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, \dots$

(ד) $-1, 2, -3, 4, -5, \dots$

שאלה 3 בדקו אם הסדרות הבאות חסומות :

(א) $a_n = \frac{n^2 + 1}{n^3 + 10n + 1}$

(ב) $a_n = \frac{n^2 + 1}{n + 2}$

(ג) $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$

(ד) $a_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right)$

(ה) $a_n = \sin(n)$

שאלה 4 בדקו את המונוטוניות של הסדרות הבאות:

(א) $a_n = \frac{2^n}{n}$

(ב) $a_n = n^2 + n - 5$

(ג) $a_n = \frac{n}{2n^2 + 1}$

(ד) $a_n = \sin(n)$

(ה) $a_n = \sqrt{n} + \frac{1}{n}$

שאלה 5 בדקו אם הסדרות הבאות חסומות :

(א) $a_n = \frac{2n^2 + 3}{n^3 + 8n + 2}$

(ב) $a_n = \frac{3n^2 + 2}{n + 4}$

(ג) $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n}$

(ד) $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

(ה) $a_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

(ו) $a_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right)$

שאלה 6 בדקו את המונוטוניות של הסדרות הבאות:

(א) $a_n = \frac{3^n}{n}$

(ב) $a_n = n^2 + n - 7$

(ג) $a_n = \frac{3n}{4n^2 + 5}$

(ד) $a_n = \cos(n)$

(ה) $a_n = \sqrt{n} + \frac{1}{n}$

שאלה 7 הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{n+5}{4n^2+n}$ יורדת מונוטונית.

שאלה 8 הסדרה a_n נתונה על ידי נוסחת הנסיגה הבאה:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right), \quad a_1 = 3.$$

- (א) הוכיחו כי לכל n מתקיים $a_n \geq 1$.
- (ב) הוכיחו כי הסדרה a_n מונוטונית יורדת.
רמז: לכל $x, y \geq 0$ מתקיים $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.
- (ג) הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת וחשבו את גבולה.

שאלה 9 סדרה נתונה על ידי נוסחאת נסיגה (רקורסיה)

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

- (א) הוכיחו כי לכל $n \geq 1$ מתקיים $1 \leq a_n < 3$.
- (ב) הוכיחו כי a_n עולה מונוטונית.
- (ג) הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

שאלה 10 סדרה נתונה על ידי נוסחאת נסיגה (רקורסיה)

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{3a_n} \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

- (א) הוכיחו כי הסדרה מונוטונית עולה.
- (ב) הוכיחו כי הסדרה חסומה.
- (ג) הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

שאלה 11 הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{(n+1)^4}{n^5}$ יורדת מונוטונית.

שאלה 12 נניח כי a_n מתבדרת ו- b_n מתבדרת. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:
 $a_n b_n$ מתבדרת.

שאלה 13 נניח כי a_n סדרה מתכנסת ו- b_n סדרה מתבדרת. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:
 $a_n b_n$ מתבדרת.

שאלה 14 הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{(n+2)^3}{n^6}$ יורדת מונוטונית.

שאלה 15 סדרה נתונה על ידי נוסחאת נסיגה (רקורסיה)

$$\begin{cases} a_{n+1} = -\sqrt{24 - 2a_n} \\ a_1 = 11 \end{cases}$$

(א) הוכיחו כי לכל $n \geq 2$ מתקיים $-6 < a_n < 0$.

(ב) הוכיחו כי a_n יורדת מונוטונית.

(ג) הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

שאלה 16 נניח כי a_n מתבדרת ו- b_n מתבדרת. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית: $a_n b_n$ מתכנסת.

שאלה 17 נניח כי a_n סדרה מתכנסת ו- b_n סדרה מתבדרת. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית: $a_n b_n$ מתכנסת.

פתרונות

שאלה 1

$$a_n = 2^{n-1} - n^2 + 1 \quad (\text{א})$$

$$a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = -4, a_4 = -7, a_5 = -8 .$$

$$a_{n+1} = 2a_n + 3(-1)^n \quad (\text{ב})$$

$$a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 1, a_4 = -1, a_5 = 1 .$$

$$a_n = (-1)^n + 1 \quad (\text{ג})$$

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 1, a_5 = 0 .$$

$$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (\text{ד})$$

$$a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -1, a_4 = 0, a_5 = 1 .$$

שאלה 2

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad (\text{א})$$

$$a_n = \frac{1}{2n-1} \quad (\text{ב})$$

$$a_n = \frac{n+1}{n} \quad (\text{ג})$$

$$a_n = n \cdot (-1)^n \quad (\text{ד})$$

שאלה 3

$$, n \in \mathbb{N} \quad (\text{א})$$

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{n^3 + 10n + 1} = \frac{n^2}{n^3 + 10n + 1} + \frac{1}{n^3 + 10n + 1} < \frac{n^2}{n^3} + 1 = \frac{1}{n} + 1 < 2$$

,

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{n^3 + 10n + 1} > 0 ,$$

לכן הסדרה חסומה:

$$0 < a_n < 2 .$$

(ב) עבור $n \geq 2$,

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{n + 2} \geq \frac{n^2 + 1}{2n} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2}.$$

הסדרה $\{\frac{n}{2}\}$ לא חסומה, לכן גם $\{a_n\}$ לא חסומה.

(ג)

$$a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + 1} - n)(\sqrt{n^2 + 1} + n)}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} < 1$$

ו $a_n > 0$ לכן $0 < a_n < 1$ חסומה.

$$a_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\text{ד})$$

$0 < \frac{1}{n} < 1$. בקטע $[0, 1]$ \tan עולה מונוטונית, לכן

$$0 < \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow \tan(0) < \tan\left(\frac{1}{n}\right) < \tan(1)$$

לכן a_n חסומה.

$$a_n = \sin(n) \quad (\text{ה})$$

\sin פונקציה חסומה:

$$-1 < \sin(n) < 1$$

לכן $\{a_n\}$ חסומה.

שאלה 4

(א) לכל $n \geq 2$,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} < 1$$

$a_n > 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ לכן $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 \Leftrightarrow a_n < a_{n+1}$ ז"א הסדרה עולה מונוטונית.

(ב)

$$a_{n+1} = (n+1)^2 + n + 1 - 5 > n^2 + n - 5 = a_n$$

ז"א $a_{n+1} > a_n$ לכן הסדרה עולה מונוטונית.

$$a_n = \frac{n}{2n^2 + 1} \text{ נגדיר } f(x) = \frac{x}{2x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 1 - 4x^2}{(2x^2 + 1)^2} = \frac{1 - 2x^2}{(2x^2 + 1)^2} = 0 \rightsquigarrow x = \pm\sqrt{1}\sqrt{2} = \pm 0.7.$$

	$x > 1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$	$x < -1/\sqrt{2}$	x
עבור $x > \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$ הפונקציה יורדת	–	+	–	$f'(x)$
	\searrow	\nearrow	\searrow	$f(x)$

מונוטונית. לכן הסדרה $\{a_n\}$ יורדת מונוטונית.

(ד) נבדוק מונוטוניות בקטע $[k\pi, (k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{N}$.

אורך הקטע הוא $(k+1)\pi - k\pi = \pi > 3$.

לכן קיים מספר טבעי n כך ש $k\pi < n < \pi(k+1)$. נניח שעבור $k\pi < n < \pi(k+1)$, $a_n = \sin(n) > 0$.

אז קיים $(k+1)\pi < m < (k+2)\pi$, כך ש $a_m < 0$.

וקיים t כך ש $(k+2)\pi < t < (k+3)\pi$, כך ש $a_t > 0$.

ז"א $n < m < t$ ו $a_n > a_m$, $a_m < a_t$.

לכן הסדרה לא מונוטונית.

(ה) נגדיר $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^{3/2} - 2}{2x^2} > 0$$

לכל $x > 2\sqrt{2}$. לכן $f(x)$ עולה מונוטונית בתחום $(2\sqrt{2}, \infty)$. ז"א הסדרה $\{a_n\}$ עולה מונוטונית החל מ $n = 2$.

שאלה 5

(א) לכל $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{2n^2 + 3}{n^3 + 8n + 2} = \frac{2n^2}{n^3 + 8n + 2} + \frac{3}{n^3 + 8n + 2} < \frac{2n^2}{n^3} + \frac{3}{2} = \frac{2}{n} + \frac{3}{2} < \frac{7}{2}$$

$$a_n = \frac{2n^2 + 3}{n^3 + 8n + 2} > 0$$

לכן הסדרה חסומה:

$$0 < a_n < \frac{7}{2}.$$

(ב) עבור $n \geq 4$,

$$a_n = \frac{3n^2 + 2}{n + 4} \geq \frac{3n^2 + 2}{2n} = \frac{3n}{2} + \frac{1}{n} > \frac{3n}{2}.$$

הסדרה $\{\frac{3n}{2}\}$ לא חסומה, לכן גם $\{a_n\}$ לא חסומה.

(ג)

$$a_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n})(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}} = \frac{n^2 + 1 - n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}$$

לכל $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &\geq \frac{n^2 + 1 - n}{\sqrt{2n^2} + \sqrt{n}} = \frac{n^2 + 1 - n}{\sqrt{2}n + \sqrt{n}} \\ &\geq \frac{n^2 + 1 - n}{\sqrt{2}n + n} = \frac{n^2 + 1 - n}{(\sqrt{2} + 1)n} = \frac{n^2 + 1}{(\sqrt{2} + 1)n} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \\ &\geq \frac{n^2}{(\sqrt{2} + 1)n} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{n}{\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \end{aligned}$$

לכן a_n לא חסומה מלעיל. לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים n כך ש $a_n > M$. לכן a_n לא חסומה.

$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\text{ד})$$

\sin פונקציה חסונה:

$$-1 < \sin\left(\frac{1}{n}\right) < 1$$

לכן $\{a_n\}$ חסומה.

$$a_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\text{ה})$$

\sin פונקציה חסונה:

$$-1 < \cos\left(\frac{1}{n}\right) < 1$$

לכן $\{a_n\}$ חסומה.

$$a_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\text{ו})$$

$0 < \frac{1}{n} < 1$. בקטע $[0, 1]$ \tan עולה מונוטונית, לכן

$$0 < \frac{1}{n} < 1 \quad \Rightarrow \quad \tan(0) < \tan\left(\frac{1}{n}\right) < \tan(1)$$

לכן a_n חסומה.

שאלה 6

$$a_n = \frac{3^n}{n} \quad \text{לכל } n \geq 1 \quad (\text{א})$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{n}{n+1} = 3 \cdot \frac{n}{n+1} > 3 \cdot \frac{n}{2n} = 3 \cdot \frac{1}{2} > 1.$$

$$a_n > 0 \text{ לכל } n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \text{ לכן } \{a_n\} \text{ עולה מונוטונית.}$$

$$a_n = n^2 + n - 7 \quad (ב) \\ \text{לכל } n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n+1} = (n+1)^2 + n + 1 - 7 > n^2 + n - 7 = a_n$$

$$a_{n+1} > a_n \text{ לכן } \{a_n\} \text{ עולה מונוטונית.}$$

$$a_n = \frac{3n}{4n^2 + 5} \quad (ג)$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(\frac{3n}{4n^2+5}\right)}{\left(\frac{3(n+1)}{4(n+1)^2+5}\right)} = \frac{12n^3 + 24n^2 + 12 + 15n}{12n^3 + 12n^2 + 15n + 15}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{12n^3 + 12n^2 + 15n + 15}{12n^3 + 24n^2 + 27n} \leq 1$$

$$\Rightarrow 12n^3 + 12n^2 + 15 + 15n \leq 12n^3 + 24n^2 + 27n$$

$$\Rightarrow 15 \leq 12n^2 + 12n$$

$$\text{הרי } 15 < 12n^2 + 12n \text{ לכל } n \geq 1 \text{ לכן } \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ לכן הסדרה יורדת מונוטונית.}$$

$$a_n = \cos(n) \text{ לא מונוטונית:} \quad (ד)$$

$$a_{n+1} < a_n \text{ לכל } n \in \{1, 2, 3\}$$

$$a_{n+1} > a_n \text{ לכל } n \in \{4, 5, 6\}$$

$$a_{n+1} < a_n \text{ לכל } n \in \{7, 8, 9\}$$

$$a_{n+1} > a_n \text{ לכל } n \in \{10, 11, 12\}$$

וכן הלה.

באופן כללי,

$$\begin{cases} a_{n+1} < a_n & (-1)^{\lceil \frac{n}{3} \rceil} = -1 \\ a_{n+1} > a_n & (-1)^{\lceil \frac{n}{3} \rceil} = 1 \end{cases}$$

או שקול

$$\begin{cases} a_{n+1} < a_n & \lceil \frac{n}{3} \rceil \text{ אי זוגי} \\ a_{n+1} > a_n & \lceil \frac{n}{3} \rceil \text{ זוגי} \end{cases}$$

(ה) $a_n = \sqrt{n} + \frac{1}{n}$ נגדיר $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^{3/2} - 2}{2x^2} > 0$$

לכל $x > 2\sqrt{2}$. לכן $f(x)$ עולה מונוטונית בתחום $(2\sqrt{2}, \infty)$. ז"א הסדרה $\{a_n\}$ עולה מונוטונית החל מ $n = 2$.

שאלה 7

$$a_n = \frac{n+5}{4n^2+n} = \frac{n+5}{n(4n+1)} = \frac{1+\frac{5}{n}}{4n+1}$$

$$a_{n+1} = \frac{1+\frac{5}{n+1}}{4(n+1)+1} < \frac{1+\frac{5}{n}}{4(n+1)+1} < \frac{1+\frac{5}{n}}{4n+1} = a_n$$

כלומר $a_{n+1} < a_n$ לכן הסדרה יורדת מונוטונית.

שאלה 8

(א) נוכיח את הטענה באינדוקציה.

בסיס:

עבור $n = 1$ מתקיים

$$a_1 = 3 \geq 1.$$

מעבר:

נניח כי $a_n \geq 1$. אם כן, מתקיים (לפי אי-השוויון ברמז) כי

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = 1.$$

(ב) מכיוון ש- $a_n \geq 1$ לכל n , מתקיים כי

$$\frac{1}{a_n} \leq 1 \leq a_n \Rightarrow a_n + \frac{1}{a_n} \leq 2a_n \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) \leq a_n$$

כנדרש.

(ג) מהסעיפים הקודמים, a_n סדרה מונוטונית יורדת ומתקיים כי $1 \leq a_n \leq 3$ לכל n . כלומר, הסדרה חסומה ומונוטונית ולכן מתכנסת. נסמן

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}.$$

ומכאן שמתקיים

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \left(L + \frac{1}{L} \right)$$

כלומר,

$$2L^2 = L^2 + 1 \Rightarrow L^2 = 1 \Rightarrow L = \pm 1.$$

מכיוון שהסדרה a_n היא סדרה חיובית, הגבול שלה הוא בהכרח אי-שלילי. מכאן

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 .$$

שאלה 9

(א) נוכיח כי לכל $n \geq 1$ מתקיים $1 \leq a_n$ בעזרת אינדוקציה.
מקרה בסיס: עבור $n = 1$ $a_1 = 1$. מעבר: נניח כי $1 \leq a_n$. אם כן:

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} < \sqrt{7} > 1$$

ז"א $a_{n+1} > 1$, כנדרש.

נוכיח כי לכל $n \geq 1$ מתקיים $a_n < 3$ בעזרת אינדוקציה.
מקרה בסיס:

$$a_1 = 1 < 3 .$$

מעבר: נניח כי $a_n < 3$. אם כן:

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} < \sqrt{9} = 3 ,$$

ז"א $a_{n+1} < 3$, כנדרש.

(ב) נוכיח כי a_n עולה מונוטונית בעזרת אינדוקציה.
מקרה הבסיס:

$$a_2 = \sqrt{6 + a_1} = \sqrt{7} > a_1 .$$

מעבר:

נניח כי $a_{n+1} \geq a_n$. אם כן, מכיוון שאיברי הסדרה חיוביים, אז

$$a_{n+2} = \sqrt{6 + a_{n+1}} > \sqrt{6 + a_n} = a_{n+1}$$

ז"א $a_{n+2} > a_{n+1}$, כנדרש.

(ג) מכיוון שהוכחנו שהסדרה יורדת וחסומה, היא גם מתכנסת. נסמן

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} .$$

מכיוון שמשוואת הרקורסיה $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ מתקיימת לכל n , מתקיים גם

$$L = \sqrt{6 + L} \Rightarrow L^2 = 6 + L \Rightarrow L^2 - L - 6 = 0 \Rightarrow (L - 3)(L + 2) = 0 .$$

אבל מכיוון שהחל מ- a_1 כל איברי הסדרה חיוביים, בהכרח

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3 .$$

שאלה 10

(א) נוכיח כי a_n עולה דרך אינדוקציה.

שלב הבסיס

$$a_2 = \sqrt{3} > a_1$$

שלב המעבר

נניח כי $a_{n+1} > a_n$ (ההנחת האינדוקציה).

$$\Rightarrow a_{n+2} = \sqrt{3a_{n+1}} > \sqrt{3a_n} = a_{n+1}$$

ז"א $a_{n+2} > a_{n+1}$.

לכן על פי אינדוקציה $a_{n+1} > a_n$ לכל n .

(ב) נוכיח כי a_n חסומה מלמטה.

a_n עולה (ממש) מונוטונית לכן $a_n > a_1 = 1$ לכל n .

נוכיח כי $a_n \leq 3$ באינדוקציה.

שלב הבסיס:

$$a_1 = 1 < 3$$

שלב המעבר:

נניח כי $a_n < 3$ (ההנחת האינדוקציה). נראה כי $a_{n+1} < 3$:

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n} < \sqrt{9} = 3$$

ז"א $a_{n+1} < 3$.

לכן על פי אינדוקציה $a_n < 3$ לכל n .

(ג) הוכחנו כי $1 \leq a_n \leq 3$ לכל n לכן a_n חסומה.

הוכחנו גם כי a_n מונוטונית לכן a_n מתכנסת.

$$\text{נסמן } L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3a_n} \Rightarrow L = \sqrt{3L} \Rightarrow L^2 = 3L \Rightarrow L(L-3) = 0.$$

מכאן $L = 0$ או $L = 3$. ברור כי $L = 0$ לא אפשרי כי הסדרה עולה מונוטונית והאיבר ההתחלתי הוא $a_1 = 1$ לכן $L = 3$.

שאלה 11

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^4 < \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 = a_n$$

כלומר $a_{n+1} < a_n$ לכן a_n יורדת מונוטונית.

שאלה 12

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $a_n = (-1)^n$ מתבדרת, $b_n = (-1)^n$ מתבדרת אבל $a_n \cdot b_n = (-1)^{2n} = 1$ מתכנסת.

שאלה 13

לא נכונה. דוגמה נגדית: $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = n$.

שאלה 14

$$a_n = \frac{(n+2)^3}{n^6} = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n+2)^3}{n^3} = \frac{1}{n^3} \cdot \left(\frac{n+2}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^3} \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)^3$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^3} \cdot \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^3 < \frac{1}{n^3} \cdot \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^3 < \frac{1}{n^3} \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)^3 = a_n$$

לפיכך $a_{n+1} < a_n$ לכל n לכן הסדרה יורדת מונוטונית.

שאלה 15

(א) נוכיח כי לכל $n \geq 1$ מתקיים $-6 < a_n$ בעזרת אינדוקציה.
מקרה בסיס:

$$a_2 = -\sqrt{24 - 2a_1} = -\sqrt{24 - 22} = -\sqrt{2} > -6$$

מעבר: נניח כי $-6 < a_n$. אם כן:

$$a_{n+1} = -\sqrt{24 - 2a_n} > -\sqrt{24 - 2(-6)} = -\sqrt{36} = -6$$

ז"א $a_{n+1} > -6$ כנדרש.

נוכיח כי לכל $n \geq 2$ מתקיים $a_n < 0$ בעזרת אינדוקציה.
מקרה בסיס:

$$a_2 = -\sqrt{24 - 2a_1} = -\sqrt{24 - 22} = -\sqrt{2} < 0$$

מעבר: נניח כי $a_n < 0$. אם כן:

$$a_{n+1} = -\sqrt{24 - 2a_n} < -\sqrt{24} < 0$$

ז"א $a_{n+1} < 0$ כנדרש.

(ב) נוכיח כי a_n יורדת מונוטונית בעזרת אינדוקציה.
מקרה הבסיס:

$$a_2 = -\sqrt{24 - 2a_1} = -\sqrt{24 - 22} = -\sqrt{2} < a_1 .$$

מעבר:

כיוון שאיברי הסדרה שליליים עבור $n \geq 2$:

$$a_{n+2} = -\sqrt{24 - 2a_{n+1}} \Rightarrow a_{n+2}^2 = 24 - 2a_{n+1} > 24 - 2a_n = a_{n+1}^2$$

ז"א $a_{n+2}^2 > a_{n+1}^2$. לפיכך $|a_{n+2}| > |a_{n+1}|$. כיוון שאיברי הסדרה שליליים עבור $n \geq 2$, אז

$$a_{n+2} < a_{n+1} .$$

(ג) מכיוון שהוכחנו שהסדרה יורדת וחסומה, היא גם מתכנסת. נסמן

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} .$$

מכיוון שמשוואת הרקורסיה $a_{n+1} = -\sqrt{24 - 2a_n}$ מתקיימת לכל n , מתקיים גם

$$L = -\sqrt{24 - 2L} \Rightarrow L^2 = 24 - 2L \Rightarrow L^2 + 2L - 24 = 0 \Rightarrow (L + 6)(L - 4) = 0 .$$

אבל מכיוון שהחל מ- a_2 כל איברי הסדרה שליליים, בהכרח

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -6 .$$

שאלה 16

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $a_n = n$ מתבדרת, $b_n = n$ מתבדרת אבל $a_n \cdot b_n = n^2$ מתכנסת.

שאלה 17

לא נכונה. דוגמה נגדית: $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n^2$.