חדו"א 2

תוכן העניינים

שיעור 1
סדרות של מספרים

1.1 הגדרה של סדרה של מספרים

סדרה של מספרים ממשיים היא רשימה מסודרת (ממוספרת) של מספרים ממשיים.

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \ .$$

סימון:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \qquad \text{או} \qquad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

הגדרה 1.1 סדרות של מספרים

סדרה של מספרים ממשיים היא פונקציה

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ .$$

נסמן

$$a_n := a(n) \ .$$

דוגמה 1.1

סדרה קבועה:	$a_n = 1$.	$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, \ldots$
	$a_n = n$.	$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, \ldots$
הסדרה ההרמונית:	$a_n = \frac{1}{n}$.	$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \ldots$
	$a_n = (-1)^n$.	$a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, \ldots$
	$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.	$a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{5}, a_3 = -\frac{1}{10}, \ldots$

1.2 התכנסות של סדרות מספרים

L הוא הגבול של הסדרה a_n אם איברי a_n הולכים ומתקרבים ל L.

הגדרה 1.2 גבול של סדרה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. אומרים כי מספר L הוא הגבול של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $N > 0$ כך שלכל $n > N$,

$$|a_n - L| < \epsilon \ .$$

מתקיים.

נסמן את הגבול של סדרה ב

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n \ .$$

ז"א a_n יהיו קרובים כרצוננו ל- L עבור n מספיק גדול.

שימו לב כי N תלוי ב- ϵ.

הגדרה 1.3 התכנסות של סדרה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. אם הגבול של (a_n) קיים (לפי הגדרה 1.2) אז אומרים כי הסדרה **מתכנסת**.

אם הגבול של (a_n) לא קיים אז אומרים כי הסדרה **מתבדרת**.

דוגמה 1.2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \ .$$

הוכחה: הסדרה היא $a_n = \frac{1}{n}$ והגבול הוא $L = 0$.

נניח כי $\epsilon > 0$. נבחר N כך ש- $N > \frac{1}{\epsilon}$.

עבור $N > n$ מתקיים:

$$|a_n - L| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon \ .$$

מש"ל. ■

דוגמה 1.3

הוכיחו כי

$$\lim_{n\to\infty} c = c \ .$$

כאן $a_n = c$ סדרה קבועה והגבול הוא $L = c$ קבוע כלשהו.

הוכחה: נניח כי $\epsilon > 0$. נבחר $N = 1$. אז לכל $n > N$ מתקיים:

$$|a_n - L| = |c - c| = 0 < \epsilon \ .$$

כנדרש. ■

דוגמה 1.4

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\ .$$

כאן, הסדרה היא $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ והגבול הוא $L=1$.

הוכחה: נניח כי $\epsilon>0$. נבחר N כך ש-

$$N>\frac{1}{\epsilon}-1\ .$$

ז"א

$$N>\frac{1}{\epsilon}-1 \quad\Rightarrow\quad N+1>\frac{1}{\epsilon} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{N+1}<\epsilon\ .$$

לכל $n>N$ מתקיים:

$$|a_n-L|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{N+1}<\epsilon\ .$$

כנדרש. ■

לא כל סדרה מתכנסת לגבול!

דוגמה 1.5

הסדרה $a_n=(-1)^n$ לא מתכנסת.

הוכחה: נוכיח דרך השלילה. נניח כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$ עבור L סופי.

ז"א **לכל** $\epsilon>0$, קיים $N>0$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $|a_n-L|<\epsilon$.

נקבע $\epsilon=\frac{1}{2}$. מההנחה קיים $N>0$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $|a_n-L|<\dfrac{1}{2}$.

בפרט, $|a_{2N}-L|<\frac{1}{2}$ וגם $|a_{2N+1}-L|<\frac{1}{2}$.

ז"א $|1-L|<\frac{1}{2}$ וגם $|-1-L|<\frac{1}{2}$. לפיכך

$$|1-L|<\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{2}<1-L<\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad -\frac{3}{2}<-L<-\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}<L<\frac{3}{2}$$

ו

$$|-1-L|<\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{2}<-1-L<\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}<-L<\frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad -\frac{3}{2}<L<-\frac{1}{2}\ .$$

סתירה. ■

דוגמה 1.6

הסדרה $a_n=(-1)^n\cdot n$ לא מתכנסת.

הוכחה: נוכיח דרך השלילה. נניח כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ עבור L סופי.

ז"א **לכל** $\epsilon > 0$, קיים $N > 0$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \epsilon$.

נקבע $\epsilon = 1$. מההנחה קיים $N \in \mathbb{N} > 0$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < 1$.

בפרט, $|a_{2N} - L| < 1$ וגם $|a_{2N+1} - L| < 1$.

ז"א $|2N - L| < 1$ וגם $|-2N - 1 - L| < 1$. לפיכך

$$|2N - L| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < 2N - L < 1 \quad \Rightarrow \quad -2N-1 < -L < -2N+1 \quad \Rightarrow \quad 2N-1 < L < 2N+1$$

ו

$$|-2N - 1 - L| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < -2N-1-L < 1 \quad \Rightarrow \quad 2N < -L < 2N+2 \quad \Rightarrow \quad -2N-2 < L < -2N \ .$$

סתירה. ■

משפט 1.1 יחידות של גבול

אם לסדרה קיים גבול אז הוא יחיד.

הוכחה: נוכיח המשפט דרך השלילה.
נניח כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ ו- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_2$ עבור $L_1 \neq L_2$.

נבחר $\epsilon = \dfrac{|L_2 - L_1|}{2}$.

(a_n) מתכנסת ל- L_1. לכן קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_1$, מתקיים $|a_n - L_1| < \epsilon$.

(a_n) מתכנסת ל- L_2. לכן קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_2$, מתקיים $|a_n - L_2| < \epsilon$.

$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - a_n) + (a_n - L_2)| \leq |L_1 - a_n| + |a_n - L_2| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |L_2 - L_1|.$$

ז"א קיבלנו ש $|L_1 - L_2| < |L_2 - L_1|$. סתירה. ■

משפט 1.2 אריתמטיקה חשבון של גבולות

תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות כך ש $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ ו $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$.

יהיה $c \in \mathbb{R}$ קבוע. התכונות הבאות מתקיימות:

.1 $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = c \cdot A$

.2 $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \pm B$.

.3 $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right) = A \cdot B$

.4 אם $B \neq 0$ (ולכן $b_n \neq 0$ עבור n מספיק גדול) אז

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B} \ .$$

הוכחה:

.1 יהי $\epsilon > 0$ ו- $c \neq 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ (נתון), אז קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - A| < \dfrac{\epsilon}{|c|}$.

לכן

$$|ca_n - cA| = |c| \cdot |a_n - A| < |c| \cdot \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon\ .$$

$\blacksquare$.

.2 יהי $\epsilon > 0$.

a_n מתכנסת ל A אז קיים $N_A \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_A$ מתקיים $|a_n - A| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

b_n מתכנסת ל B אז קיים $N_B \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_B$ מתקיים $|b_n - B| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

יהי N הגדול מבין N_A ו N_B. אז לכל $n > N$,

$|a_n - A| < \dfrac{\epsilon}{2}$ ו $|b_n - B| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

לכן לכל $n > N$,

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) - (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\ .$$

$\blacksquare$.

.3 יהי $\epsilon > 0$.

a_n מתכנסת ל A אז קיים $N_A \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_A$ מתקיים $|a_n - A| < \dfrac{\epsilon}{2|B|}$.

b_n מתכנסת ל B אז קיים $N_B \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_B$ מתקיים $|b_n - B| < \dfrac{\epsilon}{2A'}$ כאשר $|a_n| < A'$ לכל n
(a_n מתכנסת ולכן חסומה לפי משפט 1.4 למטה).

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \\
&= |a_n (b_n - B) + B (a_n - A)| \\
&\leq |a_n| \cdot |b_n - B| + |B| \cdot |a_n - A| \\
&< A' \cdot \frac{\epsilon}{2A'} + |B| \cdot \frac{\epsilon}{2|B|} = \epsilon
\end{aligned}$$

$\blacksquare$.

4. בעזרת 3, מספיק להראות כי $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{B}$.

יהי $\epsilon>0$.

b_n מתכנסת אז הסדרה חסומה (ראו משפט 1.4 למטה).

ז"א קיים $m\in\mathbb{R}$ כך ש $|b_n|>m$.

b_n מתכנסת, אז קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים

$$|b_n-B|<m\cdot|B|\epsilon$$

ואז

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{B}\right|=\left|\frac{B-b_n}{b_n\cdot B}\right|<\frac{m\cdot|B|\cdot\epsilon}{|b_n|\cdot|B|}<\frac{m\cdot|B|\cdot\epsilon}{m\cdot|B|}=\epsilon\ .$$

■

דוגמה 1.7

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2=0^2=0\ .$$

דוגמה 1.8

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n+9}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(7+\frac{a}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}7+a\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}7+a\cdot 0=7\ .$$

דוגמה 1.9

תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתבדרת. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

$(a_n+b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת.

פתרון:

טענה נכונה. הוכחה

נוכיח דרך השלילה. נניח ש $(a_n+b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- L (סופי). נתון ש (a_n) מתכנסת. לכן אם (a_n) מתכנסת ל- A, אז לפי תכונה 2 במשפט 1.2,

$$\lim_{n\to\infty}(b_n)=\lim_{n\to\infty}([a_n+b_n]-a_n)=L-A$$

כאשר $L-A$ קבוע סופי. ז"א קיבלנו ש (b_n) מתכנסת, בסתירה לכך ש- (b_n) מתבדרת.

דוגמה 1.10

תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתבדרת. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

$(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת.

פתרון:

<u>טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:</u>

$a_n = \frac{1}{n}$, ו $b_n = n$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ מתכנסת ו- (b_n) מתבדרת.

$$a_n \cdot b_n = 1$$

לפיכך

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 1 \ .$$

מתכנסת.

דוגמה 1.11

תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתבדרת. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

$(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

פתרון:

<u>טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:</u>

$a_n = \frac{1}{n}$, ו $b_n = n^2$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{n}$ מתכנסת ו- $b_n = n^2$ מתבדרת.

$$a_n \cdot b_n = n$$

מתבדרת.

<u>עוד דוגמה נגדית:</u>

$a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n^3$.

משפט 1.3 משפט הסנדוויץ'

תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות כך ש

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$$

ונניח כי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$a_n \leq b_n \leq c_n \ .$$

אז

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L \ .$$

הוכחה: יהי $\epsilon > 0$.
מההנחה קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$|a_n - L| < \epsilon \ , \qquad |c_n - L| < \epsilon \ .$$

ז"א

$$-\epsilon < a_n - L < \epsilon \ , \qquad -\epsilon < c_n - L < \epsilon \ .$$

לכן

$$-\epsilon < a_n - L \leq b_n - L \leq c_n - L < \epsilon \qquad \Rightarrow \qquad |b_n - L| < \epsilon \ .$$

■

דוגמה 1.12

חשבו את $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}}$ בעזרת כלל הסנוויץ'.

פתרון:
לכל $n \geq 1$,

$$1 \leq \sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq 1+\frac{1}{n}$$

מצד שמאל,

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \ .$$

מצד ימין,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \ .$$

ז"א $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 1$ ולכן לפי כלל הסנדוויץ':

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1 \ .$$

1.3 סדרות חסומות

הגדרה 1.4 סדרות חסומות

1. אומרים כי סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **חסומה מלמעלה** אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \leq M$.

   M תקרא **חסם עליון של הסדרה**.

2. אומרים כי סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **חסומה מלמטה** אם קיים $m \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \geq m$.

   m תקרא **חסם תחתון של הסדרה**.

3. אומרים כי סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **חסומה** אם היא חסומה מלמעלה וגם מלמטה . במילים אחרות, אם קיים $K > 0$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$,
$$|a_n| \leq K \ .$$
   כל מספר K כזה נקרא **חסם מוחלט** של הסדרה.

דוגמה 1.13

לכל אחת מהסדרות הבאות, קבעו אם היא חסומה מלמעלה, חסומה מלמטה או חסומה.

1. $a_n = \dfrac{1}{n}$
2. $a_n = n$
3. $a_n = b \cdot q^n$ עבור $-1 < q < 1$.
4. $a_n = (-1)^n n$
5. $a_n = n^2 - n + 3$

פתרון:

1. $a_n = \dfrac{1}{n}$. לכל n:
$$0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$$
   לככן a_n חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה, ולכן חסומה. ■

2. $a_n = n$. לכל n:
$$a_n = n \geq 0 \ .$$
   לככן a_n חסומה מלמטה.

   אבל היא אינה חסומה מלמעלה. אכן לכל $M \in \mathbb{R}$ ניתן למצוא $n \in \mathbb{N}$ כך ש $a_n = n > M$.

   בפרט, a_n גם לא חסומה. ■

.3 $a_n = b \cdot q^n$, $-1, q < 1$.

לכל n:

$$|a_n| = |bq^n| = |b| \cdot |q|^n \leq b$$

ולכן הסדרה חסומה (גם מלמעלה וגם מלמטה). ■

.4 $a_n = (-1)^n n$.

לא חסומה מלמעלה:

הרי לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $a_n > M$.

לא חסומה מלמטה.

הרי לכל $m \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $a_n < m$.

לפיכך הסדרה לא חסומה. ■

.5 $a_n = n^2 - n + 3$

$$n^2 \geq n \quad \Rightarrow \quad n^2 - n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad n^2 - n + 3 \geq 3 \quad \Rightarrow \quad a_n \geq 3$$

ז"א הסדרה חסומה מלמטה.

$$a_n = n^2 - n + 3 = n^2 - 2n + 2 + n = (n-1)^2 + 2 + n$$
$$(n-1)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (n-1)^2 + 3 \geq 3 \quad \Rightarrow \quad (n-1)^2 + 2 + n \geq 2 + n \quad \Rightarrow \quad a_n \geq 2 + n$$

ז"א $a_n > n$ לכל n.

לכן לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $a_n > M$. לכן הסדרה אינה חסומה מלמעלה.

לכן הסדרה גם לא חסומה. ■

1.4 סדרות מונוטוניות

הגדרה 1.5 סדרות מונוטוניות

.1 סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית עולה** אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים

$$a_{n+1} \geq a_n \ .$$

.2 סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית עולה ממש** אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים

$$a_{n+1} > a_n \ .$$

.3 סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית יורדת** אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים

$$a_{n+1} \leq a_n \ .$$

4. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית יורדת ממש** אם קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq N$ מתקיים

$$a_{n+1}<a_n\ .$$

5. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית** אם היא מונוטונית עולה או יורדת.

6. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית ממש** אם היא מונוטונית עולה ממש או יורדת ממש.

דוגמה 1.14

לכל אחת מהסדרות הבאות, קבעו אם היא מונוטונית.

.1 $a_n=\dfrac{1}{n}$

.2 $a_n=n$

.3 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$

.4 $a_n=\dfrac{n^2}{2^n}$

פתרון:

.1 $a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}=a_n$ לכל n.

ולכן הסדרה יורדת ממש. ■

.2 $a_{n+1}=n+1>n=a_n$, לכל n.

לכן הסדרה עולה ממש. ■

.3 $a_1=-1$, $a_2=\dfrac{1}{2}$, $a_3=-\dfrac{1}{3}$

$a_1<a_2>a_3$.

באופן כללי,

$$a_{2n+1}<0\ ,\qquad a_{2n}>0\ .$$

לכן הסדרה לא מונוטונית. ■

.4

$$a_n=\frac{n^2}{2^n}\ ,\qquad a_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\ .$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

לכל $n\geq 3$:

$$1+\frac{1}{n}\leq\frac{4}{3}\qquad\Rightarrow\qquad\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\leq\frac{16}{9}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\leq\frac{8}{9}<1\ .$$

ז"א לכל $n \geq 3$ מתקיים

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \qquad \forall n \geq 3 \ .$$

ז"א הסדרה יורדת ממש החל מ $n = 3$. ■

דוגמה 1.15

בדקו האם הסדרה $a_n = \dfrac{n^2+1}{n+2}$ חסומה מלמעלה או חסומה מלמטה , וקבעו אם הסדרה מונוטונית.

פתרון:

__שיטה 1__:

$$a_n = \frac{n^2+1}{n+2} = \frac{n(n+2)-2n+1}{n+2} = n + \frac{-2n+1}{n+2} = n + \frac{-2(n+2)+5}{n+2} = n-2+\frac{5}{n+2}$$

לפיכך $a_n \geq -2$ לכן a_n חסומה מלמטה.

בנוסף $a_n \geq n-2$ אז a_n לא חסומה מלמעלה (לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $a_n > n-2 > M$).

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{(n+1)^2+1}{n+3}\right)}{\left(\frac{n^2+1}{n+2}\right)} = \frac{\left((n+1)^2+1\right)(n+2)}{\left(n^2+1\right)(n+3)} = \frac{\left(n^2+2n+2\right)(n+2)}{\left(n^2+1\right)(n+3)} = \frac{n^3+4n^2+6n+4}{n^3+3n^2+n+3}$$

$$n^3+4n^2+6n+4 > n^3+3n^2+n+3$$

לכל $n \geq 0$ לכן

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

לכל $n \geq 0$, ולכן הסדרה עולה ממש.

__שיטה 2__:

נגדיר פונקציה $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+2}$, $x \neq -2$. אנו מעוניינים בערכים $a_n = f(n)$ ולכן נחקור את הפונקציה בקטע $[1,\infty)$.

$$f'(x) = \frac{2x(x+2)-1\cdot(x^2+1)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-4\pm\sqrt{16+4}}{2} = -2\pm\sqrt{5} \ .$$

ז"א $f'(x) = \left(x-(-2+\sqrt{5})\right)\left(x-(-2-\sqrt{5})\right)$.

x	$x<-2-\sqrt{5}$	$-2-\sqrt{5}<x<-2$	$-2<x<-2+\sqrt{5}$	$x>-2+\sqrt{5}$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

כלומר $f(x)$ עולה ממש בקטע $[1,\infty)$ ולכן גם a_n עולה ממש.

בנוסף $f(x)\geq f(-2+\sqrt{5})$ לכל $x\geq -2+\sqrt{5}$. כלומר $f(x)$ חסומה מלמטה ולכן גם a_n חסומה מלמטה .

למה 1.1 גבול של סדרה שווה לגבול של הפונקציה

תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה.

אם $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ אז $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=L$

כאשר $n\in\mathbb{N}$, ו $a_n=f(n)$ סדרה.

הוכחה: נתון כי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$. לכן לפי ההגדרה של גבול של פונקציה ב ∞, לכל $\epsilon>0$ קיים $m>0$ כך שלכל $x>m$,

$$|f(x)-L|<\epsilon\ .$$

ז"א, עבור $N\in\mathbb{N}$, לכל $\epsilon>0$ קיים $N>m>0$ כך שלכל $n>N>m$,

$$|f(n)-L|<\epsilon\ .$$

לכן, לפי הגדרה 1.2, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=L$.

■

למה 1.2 מונוטוניות של סדרה והפוקנציה

תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה.

אם $f(x)$ מונוטונית (עולה או יורדת) אז גם $a_n=f(n)$ מונוטונית (עולה או יורדת בהתאמה).

הוכחה: אם $f(x)$ עולה מונוטונית, אז לכל $x_1,x_2\in\mathbb{R}$,

$$x_2>x_1 \qquad\Rightarrow\qquad f(x_2)\geq f(x_1)\ .$$

עבור $n\in\mathbb{N}$ נציב $x_1=n$, $x_2=n+1$. $x_2>x_1$ לכן

$$f(n+1)>f(n)\ .$$

■

אם $f(x)$ יורדת מונוטונית, אז לכל $x_1,x_2\in\mathbb{R}$,

$$x_2<x_1 \qquad\Rightarrow\qquad f(x_2)\leq f(x_1)\ .$$

עבור $n \in \mathbb{N}$ נציב $x_1 = n$, $x_2 = n + 1$. $x_2 > x_1$ לכן

$$f(n+1) \leq f(n) \ .$$

■

דוגמה 1.16

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. הוכיחו או הפריכו: אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה אז היא מתכנסת.

פתרון:
לא נכון. דוגמה נגדית:

$a_n = (-1)^n$ חסומה:

$$|a_n| = 1$$

לכל n.

a_n לא מתכנסת (ראו דוגמה 1.5 לעיל).

משפט 1.4

כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

הוכחה: מסמן $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
נניח כי $\epsilon = 1$. קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \epsilon = 1$.
ז"א

$$-1 < a_n - L < 1 \quad \Rightarrow \quad L - 1 < a_n < L + 1 \ .$$

נסמן

$$M = \max\left\{a_1, a_2, \ldots, a_N, L+1\right\} \ , \qquad m = \min\left\{a_1, a_2, \ldots, a_N, L-1\right\} \ ,$$

ואז לכל $n \leq N$:

$$m \leq a_n \leq M \ .$$

לכן (a_n) חסומה. ■

דוגמה 1.17

נניח כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. הוכיחו או הפריכו:

אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה אז היא מתכנסת.

פתרון:
טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$a_n = (-1)^n$ חסומה ולא מתכנסת:

- $|a_n| = 1$ לכל n ולכן (a_n) חסומה.
- (a_n) לא מתכנסת (ראו דוגמה 1.5 למעלה).

1.5 התכנסות של סדרות חסומות ומונוטוניות

משפט 1.5 סדרה חסומה ומונוטונית מתכנסת

סדרה חסומה ומונוטונית היא מתכנסת.

הוכחה: נניח כי (a_n) עולה וחסומה.

ז"א $a_n > a_{n+1}$ לכל n, וקיים M כך ש $|a_n| < M$. לכל n.

נסמן ב L את החסם מלמעלה הקטן ביותר של הסדרה. נוכיח כי

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \ . \tag{*1}$$

יהי $\epsilon > 0$. כיוון ש L חסם עליון הקטן ביותר של (a_n), אז קיים a_N כך ש $L - \epsilon < a_N \leq L$.

כיוון ש (a_n) עולה מונוטונית, אז לכל $n > N$, מתקיים

$$L - \epsilon < a_N \leq a_n \leq L \ .$$

$L < L + \epsilon$, לכן נקבל

$$L - \epsilon < a_N \leq a_n \leq L < L + \epsilon \ . \tag{*2}$$

לכן לכל $n > N$:

$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon \ . \tag{*3}$$

ז"א נתון $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$,

$$|a_n - L| < \epsilon \ .$$

ז"א $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = L$.

■

למה 1.3

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \ .$$

הוכחה: $\underline{\Rightarrow}$

נתון $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. ז"א לכל $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$,

$$|a_n - 0| < \epsilon \qquad \Rightarrow \qquad |a_n| < \epsilon \qquad \Rightarrow \qquad ||a_n| - 0| < \epsilon \ .$$

$\Leftarrow$

נתון $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$. ז"א לכל $\epsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$,

$$||a_n|-0|<\epsilon \qquad \Rightarrow \qquad |a_n|<\epsilon \qquad \Rightarrow \qquad |a_n-0|<\epsilon\ .$$

■

משפט 1.6

יהי $q\in\mathbb{R}$ כך ש $|q|<1$. אז

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0\ .$$

הוכחה:

1. אם $q=0$ אז $q^n=0$, ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$.
2. אם $0<q<1$ אז לכל $n\in\mathbb{N}$,
$$0<q^{n+1}<q^n$$
ולכן (q^n) יורדת וחסומה. לכן לפי 1.5, הסדרה מתכנסת.

נסמן $L=\lim\limits_{n\to\infty} q^n$.
$$L=\lim_{n\to\infty} q^{n+1}=q\cdot\lim_{n\to\infty} q^n = q\cdot L$$
ז"א
$$(1-q)L=0 \qquad \Rightarrow \qquad L=0\ .$$
3. אם $-1<q<0$ אז $0<|q|<1$. לכן לפי **2.**, $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n=0$, ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}|q^n|=0$.

אז לפי למה 1.3, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$.

■

דוגמה 1.18

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0\ .$$

1.6 התכנסות במובן הרחב

הגדרה 1.6

תהיה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

- אומרים כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ (שואפת לאינסוף) אם לכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$

מתקיים

$$a_n > M \ .$$

- אומרים כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (שואפת למינוס אינסוף) אם לכל $m \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$a_n > m \ .$$

דוגמה 1.19

הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$.

פתרון:

לכל $M \in \mathbb{R} > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש $N > \frac{\ln M}{\ln 2}$. אז לכל $n > N$,

$$n > \frac{\ln M}{\ln 2} \qquad \Rightarrow \qquad n \ln 2 > \ln M \qquad \Rightarrow \qquad \ln 2^n > \ln M \ . \qquad (\#)$$

$\ln$ עולה מונוטונית. לכן מ (#), לכל $n > N$:

$$2^n > M \ .$$

ז"א אומרת, מצאנו שלכל $M > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$,

$$a_n = 2^n > M \ .$$

דוגמה 1.20

הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

פתרון:

לכל $M \in \mathbb{R} > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש $N > M$. אז לכל $n > N$,

$$n > M \ . \qquad (*)$$

ז"א אומרת, מצאנו שלכל $M > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$,

$$a_n = n > M \ .$$

1.7 סדרות שימושיות

סדרה	עולה	יורדת	מונוטונית	חסומה	מתכנסת למספר סופי L	מתכנסת במובן הרחב
$a_n = 1$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark \Leftarrow$	$\checkmark$
$a_n = n$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	$\times$	$\times \Leftarrow$	$\checkmark$
$a_n = \dfrac{1}{n}$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark \Leftarrow$	$\checkmark$
$a_n = (-1)^n$	$\times$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\times \Leftarrow$	$\times$
$a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^1+1}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\times \Leftarrow$	$\times$
$a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark \Leftarrow$	$\checkmark$

דוגמה 1.21

לפי משפט **??**,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \ .$$

דוגמה 1.22

הסדרה (2^n) לא מתכנסת.

1.8 דוגמאות

דוגמה 1.23

הוכיחו שהסדרה

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

מתכנסת.

פתרון:

נוכיח כי a_n $\downarrow$ מונוטונית:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n = & \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \\
= & \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \\
< & \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = 0
\end{aligned}$$

לכן $a_{n+1} - a_n < 0$, ז"א $a_{n+1} < a_n$ ולכן הסדרה $\downarrow$ מונוטונית.

נוכיח כי a_n חסומה:

$$a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

ז"א $a_n>\frac{1}{2}$. הסדרה $\downarrow$ מונוטונית, כלומר

$$a_1>a_2>\ldots>a_n>\ldots$$

לכן

$$a_n<a_1\ .$$

לכן הסדרה חסומה.

סיכום: (a_n) מונוטונית יורדת וחסומה ולכן היא מתכנסת.

דוגמה 1.24

תהי (a_n) סדרה המוגדרת ע"י רקורסיה

$$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\ ,\qquad a_1=\sqrt{2}\ .$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

פתרון:

נוכיח כי (a_n) $\uparrow$ מונוטונית ע"י אינדוקציה:

עבור $n=1$,

$$a_1=\sqrt{2}<\sqrt{2+\sqrt{2}}=a_2$$

נניח $a_n<a_{n+1}$ (הנחת האינדוקציה) ונוכיח $a_{n+1}<a_{n+2}$:

$$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+a_{n+1}}=a_{n+2}\ .$$

קבלנו $a_n<a_{n+1}\Leftarrow a_{n+1}<a_{n+2}$ לכן הסדרה עולה מונוטונית.

נוכיח כי (a_n) חסומה ע"י אינדוקציה:

נוכיח כי לכל n, $a_n<2$.

עבור $n=1$,

$$a_1=\sqrt{2}<2\ .$$

נניח כי $a_n<2$ (הנחת האינדוקציה) ונוכיח $a_{n+1}<2$:

$$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2\ .$$

קבלנו $a_n<2\Leftarrow a_{n+1}<2$ לכן הסדרה חסומה מלמעלה . נוכיח כי היא חסומה מלמטה: הסדרה עולה מונוטונית, אז $a_1<a_2<\ldots<a_n$ לכן $a_n\geq a_1=\sqrt{2}$. מצאנו הסדרה חסומה מלמעלה ומלמטה ולכן חסומה:

$$\sqrt{2}\leq a_n<2\ .$$

לסיכום הסדרה עולה מונוטונית וחסומהת ולכן מתכנסת. נחשב את גבולה: נסמן $L=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

$$L=\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+a_n}=\sqrt{2+\lim_{n\to\infty} a_n}=\sqrt{2+L}\ .$$

ז"א

$$L=\sqrt{2+L}\quad\Rightarrow\quad L^2=2+L\quad\Rightarrow\quad L^2-L-2=0\quad\Rightarrow\quad (L-2)(L+1)=0$$

לכן $L=-1$ או $L=2$. הסדרה חיובית לכן התשובה היא $L=2$.

דוגמה 1.25

תהי (a_n) סדרה המוגדרת ע"י רקורסיה

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right)\ ,\qquad a_1=2\ .$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

פתרון:

נוכיח כי (a_n) חסומה:

נשתמש בעובדה כי הממוצע החשבוני של שני מספרים חיוביים תמיד גדול או שווה לממוצע ההנדסי שלהם, כלומר $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{a\cdot b}$ לכל $a,b>0$. לכן

$$a_{n+1}=\frac{a_n+\dfrac{3}{a_n}}{2}\geq\sqrt{a_n\cdot\frac{3}{a_n}}=\sqrt{3}$$

ז"א $a_n\geq\sqrt{3}$, כלומר הסדרה חסומה מלמטה.
נוכיח כי $\{a_n\}$ יורדת מונוטונית:

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right)<\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{3}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(a_n+\sqrt{3}\right)<\frac{1}{2}\left(a_n+a_n\right)=a_n$$

לכן הסדרה מונוטונית יורדת.

נוכיח כי היא חסומה מלמעלה: (a_n) יורדת מונוטונית לכן $a_n\leq a_1=2$ לכן הסדרה חסומה מלמעלה .
לסיכום הסדרה יורדת מונוטונית וחסומהת ולכן מתכנסת. נחשב את גבולה: נסמן $L=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

$$L=\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right)=\frac{1}{2}\left(L+\frac{3}{L}\right)=\frac{L^2+3}{2L}\ .$$

ז"א

$$2L^2=L^2+3\quad\Rightarrow\quad L^2=3\quad\Rightarrow\quad L=\pm\sqrt{3}\ .$$

הסדרה חיובית לכן $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{3}$.

דוגמה 1.26

נתונה הסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.
הוכיחו כי הסדרה עולהמ מונוטונית, והוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

פתרון:
הסדרה עולה מונוטונית:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = a_{n+1} \ .$$

הסדרה אינה חסומה:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \ .$$

קיבלנו שלכל n, מתקיים $a_n \geq \sqrt{n}$. לכן לכל מספר ממשי $M > 0$ קיים מספר טבעי N כך ש $\sqrt{n} > M$ ולכן $a_n > M$ ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

דוגמה 1.27

סדרה נתונה באופן רקורסיבי ע"י הכלל

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \ ,$$

יחד עם התנאי ההתחלה

$$a_1 = 1 \ .$$

קבעו האם קיים הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ואם כן, חשבו אותו.

פתרון:
נבדוק אם הסדרה מונוטונית וחסומה.

<u>מונוטונית:</u>

נוכיח כי (a_n) מונוטונית $\uparrow$ ע"י אינדוקציה:

עבור $n = 1$:

$$a_2 = \sqrt{6 + a_1} = \sqrt{7} > a_1$$

נניח ש $a_{n+1} > a_n$ (הנחת אינדוקציה). אז

$$a_{n+2} = \sqrt{6 + a_{n+1}} > \sqrt{6 + a_n} = a_{n+1} \ .$$

קיבלנו ש $a_{n+1} > a_n \Leftarrow a_{n+2} > a_{n+1}$ לכן לפי אינדוקציה הסדרה עולה מונוטונית.

<u>חסימות:</u>

נוכיח כי (a_n) ע"י אינדוקציה:

נוכיח כי שלכל n, $a_n < 3$.

עבור $n = 1$, $a_1 = 1 < 3$.

נניח שלכל n, $a_n < 3$ (הנחת האינדוקציה) ונוכיח $a_{n+1} < 3$:

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} < \sqrt{6 + 3} = 3$$

קיבלנו שאם $a_n < 3$ אז $a_{n+1} < 3$. לכן לפי אינדוקציה

$$a_n < 3$$

לכל n.

הסדרה עולה מונוטונית לכן $a_n \geq a_1 = 1$ לכל n לכן הסדרה חסומה:

$$1 \leq a_n < 3 \ .$$

לסיכום הסדרה חסומה ומונוטונית לכן היא מתכנסת.

נחשב את גבולה:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6 + a_n} = \sqrt{6 + \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{6 + L} \ .$$

$$L^2 = 6 + L \quad \Rightarrow \quad L^2 - L - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (L - 3)(L + 2) = 0$$

לכן $L = 3$ או $L = -2$ הסדרה חיובית לכן $L = 3$. מסקנה :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 3 \ .$$

שיעור 2
טורים חיוביים וטורים כלליים

2.1 סדרות חשבוניות

הגדרה 2.1 סדרה חשבונית

(א) סדרה חשבונית היא סדרה של מספרים שבה ההפרש בין כל איבר לקודמו הוא גודל קבוע. את הפרש הסדרה מסמנים באות d.

(ב) באופן כללי אם נתונה סדרה חשבונית

$$a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \ldots$$

שהפרשה d, אזי מתקיים

$$a_2-a_1=d\,,\ a_3-a_2=d\,,\ a_4-a_3=d\,,$$

וכו'.

(ג) הנוסחה לאיבר הכללי בסדרה חשבונית היא

$$a_n=a_1+(n-1)d\ .$$

כלל 2.1 הסכום של סדרה חשבונית

נסמן את סכום n האיברים הראשונים בסדרה ב- S_n, כלומר

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\ .$$

הסכום של n האיברים הראשונים בסדרה חשבונית שהפרשה d ואיבר הראשונה שלה a_1 ניתן ע"י הנוסחה

$$S_n=\frac{n}{2}\left(a_1+a_n\right)$$

או שקול

$$S_n=\frac{n}{2}\left(2a_1+(n-1)d\right)\ .$$

2.2 סדרה הנדסית

הגדרה 2.2 סדרה הנדסית

(א) סדרה הנדסית היא סדרה של מספרים שבה המנה של כל איבר באיבר הקודם לו היא גודל קבוע. את מנת הסדרה מסמנים באות q.

(ב) באופן כללי אם נתונה סדרה הנדסית

$$a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \ldots$$

ומנה הסדרה היא q, אזי מתקיים

$$\frac{a_2}{a_1}=q\,,\ \frac{a_3}{a_2}=q\,,\ \frac{a_4}{a_3}=q\,,$$

וכו'.

(ג) בסדרה הנדסית $a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ldots$ שהמנה שלה q מתקיים

$$a_1\neq 0\,,\qquad q\neq 0\ .$$

(ד) כל איבר בסדרה הנדסית (פרט לראשון) מתקבל ע"י כפל של האיבר הקודם לו במנה q, כלומר מתקיים

$$a_1=qa_2\,,\quad a_3=qa_2\,,\quad a_4=qa_3\,,$$

וכו'.

(ה) הנוסחה לאיבר הכללי בסדרה הנדסית היא

$$a_n=q^{n-1}a_1\ .$$

כלל 2.2 התנהגות של סדרה הנדסית

ניתן לקבוע אם סדרה הנדסית היא סדרה הנדסית עולה, סדרה הנדסית יורדת או סדרה הנדסית שאינה עולה ואינה יורדת לפי הערך של המנה q ושל האיבר הראשון a_1.

(א) עבור $q>1$:

(1) אם $a_1>0$ אז הסדרה היא סדרה הנדסית עולה, למשל

$$3\,,\ 15\,,\ 45\,,\ldots$$

(2) אם $a_1<0$ אז הסדרה היא סדרה הנדסית יורדת, למשל

$$-3\,,\ -6\,,\ -12\,,\ldots$$

(ב) עבור $0<q<1$:

(1) אם $a_1>0$ אז הסדרה היא סדרה הנדסית יורדת, למשל

$$20\,,\ 10\,,\ 5\,,\ldots$$

(2) אם $a_1<0$ אז הסדרה היא סדרה הנדסית עולה, למשל

$$-36\,,\ -12\,,\ -4\,,\ldots$$

(ג) עבור $a<0$ הסדרה אינה עולה ואינה יורדת, למשל

$$5\,,\ -10\,,\ 20\,,\ -40\,,\ \ldots$$

(ד) עבור $q=1$: במקרה זה מתקבלת סדרה שכל איבריה שווים זה לזה, למשל

$$8\,,\ 8\,,\ 8\,,\ldots$$

סדרה זו גם נקרא סדרה קבועה.

כלל 2.3 הסכום של סדרה הנדסית

נסמן את סכום N האיברים הראשונים בסדרה ב- S_N, כלומר

$$S_N=a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\ldots+a_1q^{N-1}=\sum_{n=1}^{N}a_1q^{n-1}\ .$$

הסכום של n האיברים הראשונים בסדרה הנדסית שמנת הסדרה היא q ואיבר הראשונה שלה a_1 ניתן ע"י הנוסחה

$$S_N=\frac{a_1\left(1-q^N\right)}{1-q}\ .$$

כלל 2.4 הסכום אינסופי של סדרה הנדסית

הסכום אינסופי של טור הנדסי הוא

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_1q^{n-1}=\lim_{N\to\infty}\frac{a_1(1-q^N)}{1-q}=\begin{cases}\text{מתבדר} & |q|>1\\ \dfrac{a_1}{1-q} & |q|<1\end{cases}$$

דוגמה 2.1

חשבו את
$S_{10}=\sum\limits_{n=1}^{10}\frac{1}{2^n}$
ו $S_\infty=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

פתרון:
$q=\frac{1}{2}$ $a_1=\frac{1}{2}$

$$S_{10}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1023}{1024}\ .$$

$$S_\infty=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=1\ .$$

דוגמה 2.2

עבור אילט ערכים של הפרמטר p מתכנס הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{p^{2n}}$.

פתרון:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{p^{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{p^2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}q^n\ .$$

כאשר $q=\frac{e}{p^2}$. טור זה מתכנס אם $|q|=\left|\frac{e}{p^2}\right|<1$ ז"א $p^2>e$. לכן הטור מתכנס אם

$$|p|>\sqrt{e}\ ,$$

כלומר הטור מתכנס עבור $p>\sqrt{e}$ או $p<-\sqrt{e}$.

2.3 טור טלסקופי

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\\
&\qquad=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&\qquad=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&\qquad=\lim_{N\to\infty}\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}+\ldots+\cancel{\frac{1}{N}}-\frac{1}{N+1}\right)\\
&\qquad=\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{N+1}\right)\\
&\qquad=1\ .
\end{aligned}$$

2.4 טורים חיוביים

הגדרה 2.3 טור

ביטוי מצורה

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\ldots$$

נקרא **סכום אינסופי** או **טור** .

הגדרה 2.4 סכום החלקי

הסכום החלקי S_n של הטור יסומן ב- S_n ויוגדר כסכום של n האיברים הראשונים בטור:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ .$$

הגדרה 2.5 טור חיובי

הטור $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ נקרא **טור חיובי** אם לכל k מתקיים

$$a_k > 0 \ .$$

הגדרה 2.6 התכנסות

אם קיים גבול סופי $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, אומרים שהטור **מתכנס** וגבול זה נקרא סכום הטור ומסומן ב- S. כלומר

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \ .$$

במקרה כאשר גבול של S_n אינו קיים (או הוא אינסופי) אומרים שהטור **מתבדר**.

דוגמה 2.3

נתון הטור

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots$$

קבעו אם הטור מתכנס.

פתרון:

הטור מתבדר:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} \to \infty$$

דוגמה 2.4

הטור

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots$$

הוא טור הנדסי בעל מנה q. קבעו לאיזה ערכים של q הטור מתכנס.

פתרון:

לפי נוסחה **??**,

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \ .$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q}$$

ולכן הטור מתכנס אם ורק אם $|q|<1$ ובמקרה זה

$$S=\frac{1}{1-q}\ .$$

לרוב הטורים נוסחאות מדויקות אינן קיימות. במקרים אלה ניתן להעריך את הסכומים החלקיים בעזרת אינטגרל ע"י שימוש במשפט הבא.

2.5 תנאי הכרחי להתכנסות ותנאי מספיק להתבדרות

משפט 2.1 תנאי הכרחי להתכנסות טור

אם הטור $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס, אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

הוכחה: שים לב שלכל n טבעי, $a_n=S_n-S_{n-1}$ ולפיו אם קיים $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$ כך ש- S סופי, אז

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0\ .$$

■

משפט 2.2 תנאי מספיק להתבדרות טור

אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\neq 0$ אז הטור $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ מתבדר.

כלל 2.5

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}|a_n|=0$$

ולכן בבדיקה המתאימה אינם חשובים סימני איבריו של הטור.

דוגמה 2.5

קבעו אם הטורים הבאים מתכנסים ומתבדרים:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{1+n^2}$

פתרון:

.1 $a_n=(-1)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|\neq 0$ לכן הטור מתבדר.

.2 $a_n=n$

$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|\neq 0$ לכן הטור מתבדר.

.3 $a_n=\dfrac{n^2}{1+n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=1\neq 0$ לכן הטור מתבדר.

2.6 משפטים בסיסיים על התכנסות טורים

משפט 2.3

.1 הורדת מספר סופי של איברים מהטור אינה משפיעה על התכנסותו או התבדרותו.

.2 אם $c\in\mathbb{R}$ מספר ממשי שונה מאפס, אז אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אז גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c\cdot a_n$ מתכנס.

אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר אז גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c\cdot a_n$ מתבדר. מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}c\cdot a_n=c\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ .$$

.3 אם הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ ו- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנסים, אז גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ מתכנס ומתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\ .$$

.4 אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס אז גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס (ואומרים כי הטור מתכנס בהחלט).

דוגמה 2.6

קבעו אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3\cdot 2^n+4\cdot 5^n}{10^n}$ מתכנס.

פתרון:

לפי משפטים 2 ו 3:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 2^n+4\cdot 5^n}{10^n} &=3\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{10^n}+4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{10^n}\\ &=3\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n+4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ &=3\cdot\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}}+4\cdot 1\\ &=3\cdot\frac{1}{4}+4\\ &=\frac{19}{4}\ .\end{aligned}$$

דוגמה 2.7

קבעו אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ מתכנס.

פתרון:

לפי משפטים 4: הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס לכן גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ מתכנס.

2.7 מבחן האינטגרל להתכנסות

משפט 2.4 מבחן האינטגרל להתכנסות של טורים חיוביים

אם פונקציה חיובית $f(x)$ מונוטונית יורדת בתחום $x\geq 1$.

(1) אם $\int_1^{\infty}dx\, f(x)$ מתכנס אז $S=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f(k)$ מתכנס, כך ש-

$$\int_1^{\infty}dx\, f(x)\leq S\leq\int_1^{\infty}dx\, f(x)+f(1)\ .$$

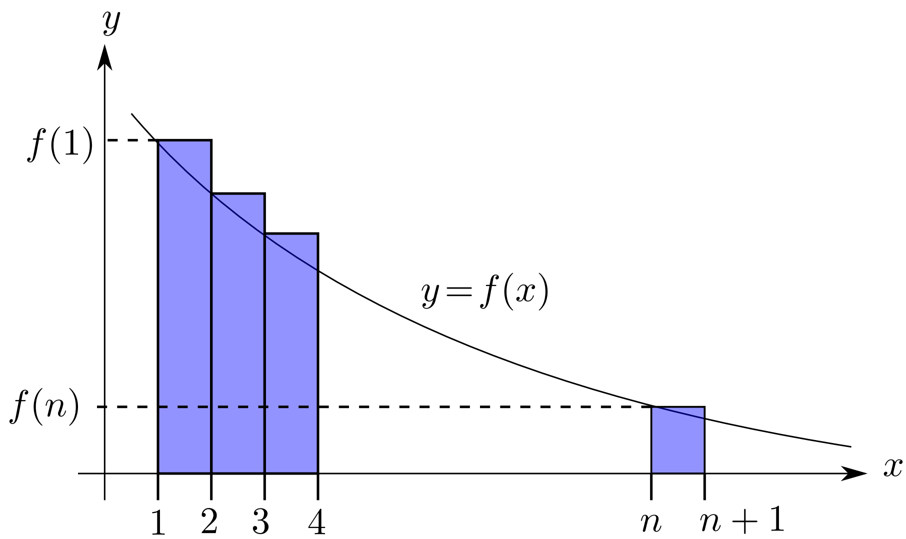
(2) אם $\int_1^{\infty}dx\, f(x)$ מתבדר אז $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f(k)$ מתבדר.

במקרה זה התכנסות הטור $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f(k)$ שקולה להתכנסות האינטגרל הלא אמיתי $\int_1^{\infty}dx\, f(x)$.

הוכחה: אם פונקציה חיובית $f(x)$ מונוטונית יורדת בתחום $x\geq 1$ אזי

$$\int_1^{n+1}f(x)\,dx\leq f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$$

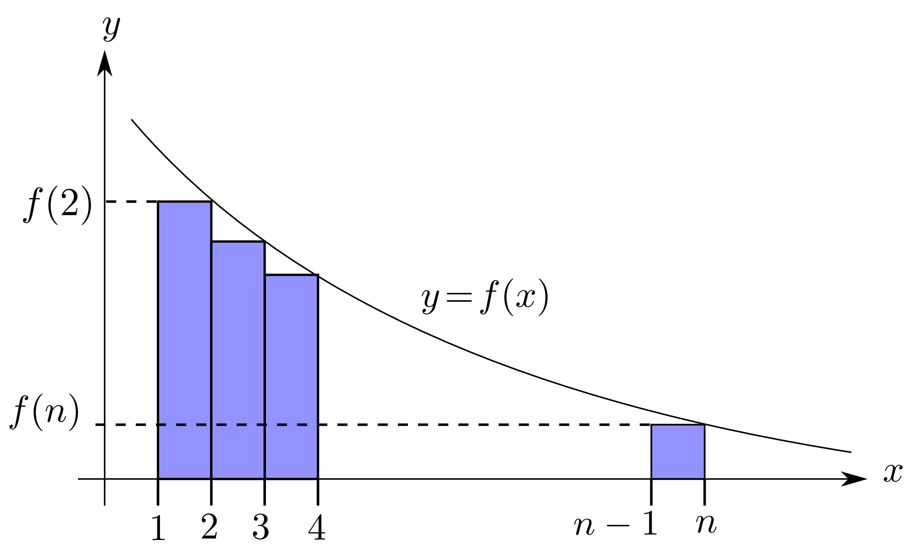
בגלל ש- $f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$ שווה לסכום של השטחים של המלבנים מעל הקו כמתואר בהתרשים.



מאותה מידה,

$$f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\leq\int_1^n f(x)\,dx$$

בגלל ש- $f(2)+f(2)+\ldots+f(n)$ שווה לסכום של השטחים של המלבנים מתחת הקו כמתואר בהתרשים.



הפונקציה חיובית לכן

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\leq f(1)+\int_1^n f(x)\,dx\ .$$

בסה"כ נקבל את אי-השוויון

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx\leq f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\leq f(1)+\int_1^n f(x)\,dx\ .$$

נקח את הגבול $n\to\infty$ ונקבל

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx\leq\sum_{k=1}^{\infty} f(k)\leq f(1)+\int_1^{\infty} f(x)\,dx\ .$$

■

דוגמה 2.8

קבעו אם הטור

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

מתכנס ואם כך מהו הערך של הטור.

פתרון:

יהי $f(k) = \frac{1}{k^2}$.

$$\int_1^\infty dx\, f(x) = \int_1^\infty dx\, \frac{1}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\infty = 1 \ .$$

לכן לפי מבחן האינטגרל במשפט 2.4 לעיל הטור מתכנס, ו-

$$1 \leq S \leq 2 \ .$$

דוגמה 2.9

קבעו אם הטור

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \ldots$$

מתכנס ואם כך מהו הערך של הטור.

פתרון:

יהי $f(k) = \frac{1}{k}$.

$$\int_1^{n+1} dx\, f(x) = \int_1^{n+1} dx\, \frac{1}{x} = [\ln x]_1^{n+1} = \ln(n+1).$$

האינטגרל אינו מתכנס כאשר $n \to \infty$ ולכן הטור גם לא מתכנס לפי מבחן האינטגרל במשפט 2.4 לעיל.

דוגמה 2.10

קבעו אם הטור

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

מתכנס או לא.

פתרון:

יהי $f(k) = \frac{1}{k^p}$.

$$\int_1^\infty dx\, f(x) = \int_1^\infty dx\, \frac{1}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^\infty$$

האינטגרל מתכנס אם $p > 1$ ומתבדר אם $p \leq 1$. לכן לפי מבחן האינטגרל במשפט 2.4 לעיל, הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ מתכנס אם $p > 1$ ומתבדר אם $p \leq 1$.

דוגמה 2.11

קבעו אם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2^n}{3^n \cdot n^3}$$

מתכנס.

פתרון:

נרשום $f(x)=\dfrac{x^2+2^x}{3^x\cdot x^3}$. זו פונקציה חיובית ויורדת מונוטונית

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{(2x+\ln 2\cdot 2^x)\cdot 3^x\cdot x^3-(x^2+2^x)(\ln 3\cdot 3^x\cdot x^3+3^x\cdot 3x^2)}{3^{2x}x^6} \\ =& \frac{(2x+\ln 2\cdot 2^x)\cdot x-(x^2+2^x)(\ln 3\cdot x+3)}{3^x x^4} \\ =& \frac{-x^2-(\ln 3-\ln 2)x\cdot 2^x-3\cdot 2^x-\ln 3\cdot 2^x\cdot x^3}{3^x x^4} \ . \end{aligned}$$

בתחום $[1,\infty)$ $f'<0$ לכן מונוטונית יורדת. לכן הטור מתכנס אם $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)$ מתכנס.

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{x^2+2^x}{3^x\cdot x^3}dx &= \int_1^{\infty}\frac{1}{3^x\cdot x}dx+\int_1^{\infty}\frac{2^x}{3^x\cdot x^3}dx \\ &< \int_1^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x dx+\int_1^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x dx \\ &= \left[\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\right]_1^{\infty} \\ &= \left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\right] \end{aligned}$$

לכן הטור מתכנס.

דוגמה 2.12

קבעו אם הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$$

מתכנס.

פתרון:

נרשום $f(x)=\dfrac{1}{x\cdot\ln x}$. זו פונקציה חיובית ויורדת מונוטונית בתחום $[2,\infty)$. לכן הטור מתכנס רק אם האינטגרל $\displaystyle\int_2^{\infty} f(x)\,dx$ מתכנס.

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\cdot \ln x}dx = \lim_{R\to\infty}\int_2^R \frac{1}{x\cdot\ln x}dx$$
$$= \lim_{R\to\infty}\int_{e^2}^{e^R}\frac{1}{t}dt$$
$$= \lim_{R\to\infty}\left[\ln t\right]_{e^2}^{e^R}$$
$$= \lim_{R\to\infty}\left[R-2\right]$$
$$=\infty\ .$$

לכן הטור מתבדר.

2.8 מבחן השוואה

משפט 2.5 מבחן השוואה

יהיו a_n, b_n סדרות חיוביות כך ש- $a_n \leq b_n$ לכל n החל ממספר מסוים k. אזי

1. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
2. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

דוגמה 2.13

קבעו אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ מתכנס.

פתרון:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

נבדוק התכנסות של הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$. האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{2^x}dx = \frac{1}{2\cdot\ln 2}$ מתכנס, לכן לפי מבחן האינטגרל הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ מתכנס, ולכן לפי מבחן השוואה הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ מתכנס.

דוגמה 2.14

קבעו אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ מתכנס.

פתרון:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

לכן לפי מבחן השוואה הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ מתבדר.

דוגמה 2.15

עבור אילו ערכים שלמים של הפרמטר p הטור $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^p}{\ln(n!)}$ מתכנס.

פתרון:
$2^n < n! < n^n$ לכל $n > 3$. לכן

$$\begin{aligned} n \cdot \ln 2 < \ln(n!) < n \cdot \ln n \qquad & \Rightarrow \quad \frac{n^p}{n \cdot \ln 2} > \frac{n^p}{\ln(n!)} > \frac{n^p}{n \cdot \ln n} \\ \Rightarrow \quad \frac{n^{p-1}}{\ln 2} > \frac{n^p}{\ln(n!)} > \frac{n^{p-1}}{\ln n} \qquad & \Rightarrow \quad \frac{1}{n^{1-p} \ln 2} > \frac{n^p}{\ln(n!)} > \frac{1}{n^{1-p} \ln n} \end{aligned}$$

מכאן אם $1 - p > 1$ (כלומר $p < 0$) הטור מתכנס.
אם $1 - p \leq 1$ (כלומר $p \geq 0$) הטור מתבדר.

משפט 2.6 מבחן השוואה הגבולי

יהיו a_n, b_n סדרות חיוביות כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$ אז הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.

דוגמה 2.16

קבעו אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(5^{-n}\right)$ מתכנס.

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(5^{-n})}{5^{-n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

לכן $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(5^{-n}\right)$ מתכנס יחד עם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(5^{-n}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

דוגמה 2.17

קבעו אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ מתכנס.

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\pi}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

לכן $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ מתכנס או מתבדר יחד עם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\pi}{n}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$$

מתכנס לכן גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ מתכנס.

2.9 שארית הטור

הגדרה 2.7 שארית הטור

הטור

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}a_n$$

נקרא **שארית-** n (או "זנב") של הטור $\sum\limits_{k=1}^{n}a_n$.

אם טור השארית מתכנס אז נסמן את סכומו ב- R_n.

אם טור $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס אזי

$$R_n=S-S_n$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty}R_n=0\ .$$

2.10 מבחן דלמבר ומבחן קושי

משפט 2.7 מבחן דלמבר (d'Alembert)

נתון הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$. אם קיים הגבול

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

אז

1. אם $q<1$ הטור מתכנס.
2. אם $q>1$ הטור מתבדר.

3. אם $q=1$ המבחן דלמבר אינו נותן תשובה על התכנסות הטור.

משפט 2.8 מבחן קושי (Cauchy)

נתון הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$. אם קיים הגבול

$$q=\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \equiv \lim_{n\to\infty} a_n{}^{1/n}$$

(כאשר הסימונים $\sqrt[n]{a_n} \equiv a_n{}^{1/n}$ שקולים ואומרים השורש ה-n של a_n)
אז

1. אם $q<1$ הטור מתכנס.

2. אם $q>1$ הטור מתבדר.

3. אם $q=1$ המבחן קושי אינו נותן תשובה על התכנסות הטור.

דוגמה 2.18 מבחן דלמבר

קבעו אם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

מתכנס.

פתרון:
שים לב האיבר ה- n בסדרה הוא

$$a_n=\frac{n}{2^n}$$

נשתמש במבחן דלמבר:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2} < 1 \ .\end{aligned}$$

לכן הטור מתכנס.
נשתמש במבחן קושי:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$
$$= \frac{1}{2} < 1 \ .$$

דוגמה 2.19 מבחן קושי

קבעו אם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$$

מתכנס.

פתרון:

שים לב האיבר ה- n בסדרה הוא

$$a_n = \frac{1}{n^n}$$

נשתמש במבחן קושי:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$
$$= 0 < 1$$

.

לכן הטור מתכנס.

2.11 גבולות שימושיים

1 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

2 אם $c > 0$ אז $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

3 אם $a_k > 0$ אז

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_0 + a_1 n + \ldots + a_k n^k} = 1$$

4 אם $1 \leq f(n) \leq n^p$ כאשר $p > 0$ אז

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f(n)} = 1$$

דוגמה 2.20

קבעו אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$ מתכנס.

פתרון:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}}\\
&=\lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\\
&=\lim_{n\to\infty} 3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\\
&=\lim_{n\to\infty} 3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}}\\
&=\frac{3}{e}>1\ .
\end{aligned}$$

ולכן הטור מתבדר לפי מבחן דלמבר.

2.12 טורים כללים

הגדרה 2.8 טור כללי

טור כללי הוא טור מצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ אשר כל איברו a_n לא בהכרח חיובי, אלא ישנם אינסוף איברים חיוביים ואינסוף איברים שליליים. לדוגמא הטור

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

הוא סוג של טור כללי הנקרא **טור מחליף סימן** .

הגדרה 2.9 טור מחליף סימן

טור מצורה

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$$

שבו איברים מחליפים סימן לסירוגין נקרא **טור מחליף סימן**.

משפט 2.9 התכנסות של טור כללי

1. אם $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$ מתכנס אז גם $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס, ואומרים שהטור $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ **מתכנס בהחלט** (absolutely convergent).

2. אם $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$ מתבדר אבל $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$ יש להמשיך לחקור את הטור $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ ע"י מבחן לייבניץ (Leibinz).

3. אם $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$ מתבדר אבל הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, אומרים שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ **מתכנס בתנאי** (conditionally convergent).

דוגמה 2.21

קבעו אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ מתכנס.

פתרון:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס לכן $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ מתכנס בהחלט.

דוגמה 2.22

קבעו אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס.

פתרון:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$ מתבדר (ראו דוגמה ?? לעיל) אבל $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס (ראו דוגמה למטה). לכן $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס בתנאי.

דוגמה 2.23

קבעו אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^3 n}{n!}$ מתכנס.

פתרון:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos^3 n}{n!}\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

הטור באגף הימין מתכנס (ראו דוגמה ?? לעיל) לכן לפי מבחן השוואה $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos^3 n}{n!}\right|$ מתכנס ולכן $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^3 n}{n!}$ מתכנס בהחלט.

2.13 מבחן לייבניץ (Leibniz)

משפט 2.10 מבחן לייבניץ (Leibniz)

מבחן לייבניץ קשור לטור מחליף סימן.

נתון טור מחליף סימן מצורה

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n\ ,\qquad a_n>0\ .$$

אם הסדרה מקיימת את התנאים הבאים:

1 $a_n>0$ לכל n.

2 $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת ($a_{n+1}\leq a_n$ לכל n)

3 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

אז הטור מתכנס ומתקיים

$$0<S<a_1\ ,$$

ו-

$$|S-S_N|<a_{N+1}-1\ .$$

דוגמה 2.24

קבעו אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ מתבדר או מתכנס.

פתרון:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n\ ,\qquad a_n=\frac{1}{n}\ .$$

1) $a_n=\frac{1}{n}>0$ לכל n.

2) $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}=a_n$ לכל n, כלומר $a_n\downarrow$ מונוטונית.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

לכן הטור מתכנס.

שימו לב הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n}\right|$ מתבדר (עין דוגמה **??** לעיל) לכן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ מתכנס בתנאי.

דוגמה 2.25

קבעו אם הטור $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n\cdot\cos(n\pi)}{n^2+\sqrt{n}}$ מתבדר או מתכנס.

פתרון:

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

לכן ניתן לרשום את הטור בצורה

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\cdot\cos(n\pi)}{n^2+\sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+\sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n\ , \qquad a_n = \frac{n}{n^2+\sqrt{n}}\ .$$

1) $a_n = \frac{n}{n^2+\sqrt{n}} > 0$ לכל n.

2) כדי לבדוק מונוטוניות נגדיר פונקציה

$$f(x) = \frac{x}{x^2+\sqrt{x}}\ .$$

$$\begin{aligned} f(x) =& \frac{(x^2+\sqrt{x}) - x\cdot\left(2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x^2+\sqrt{x})^2} \\ =& \frac{-x^2+\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(x^2+\sqrt{x})^2} \end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \quad \rightsquigarrow \quad x^2 = \frac{1}{2}\sqrt{x} \quad \rightsquigarrow \quad x^4 = \frac{1}{4}x \quad \rightsquigarrow \quad x^3 = \frac{1}{4} \quad \rightsquigarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\ .$$

x	$x < 4^{-1/3}$	$x > 4^{-1/3}$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

כלומר, $f\downarrow$ עבור $x \geq 2$.

לכל $n\geq 2$, כלומר $a_n\downarrow$ מונוטונית.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 0$.

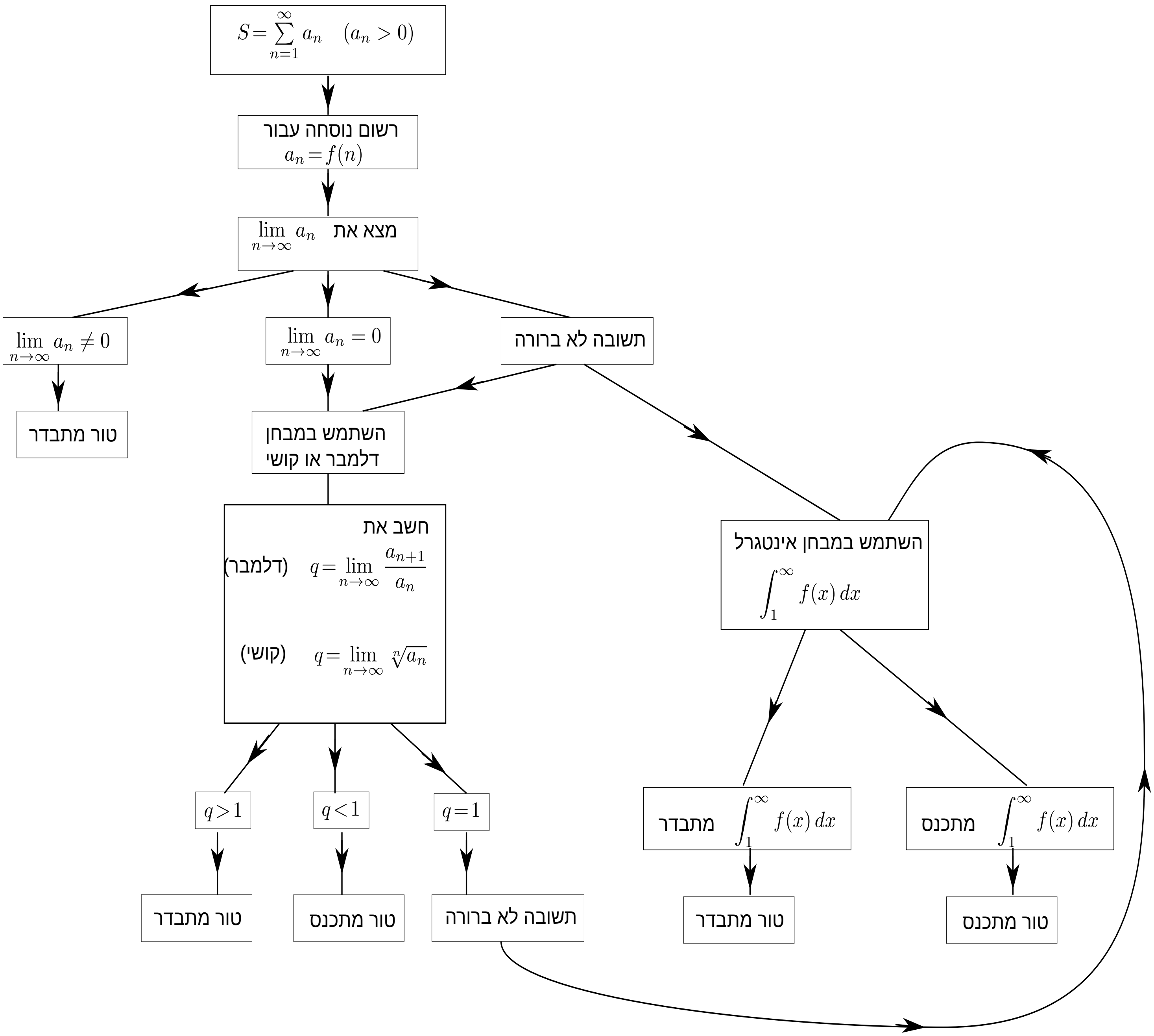
לכן הטור מתכנס.

שימו לב הטור $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2+\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left|\frac{n\cdot\cos(n\pi)}{n^2+\sqrt{n}}\right|$ מתבדר:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2+\sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{\sqrt{n}}} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$$

לכן הטור $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n\cdot\cos(n\pi)}{n^2+\sqrt{n}}$ מתכנס בתנאי.

2.14 כיצד בודקים התכנסות טור חיובי



2.15 כיצד בודקים התכנסות טור כללי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

כיצד בודקים התכנסות טור חיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

1. אם $\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

2. אם $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$ בודקים את התכנסות של הטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ ע"י השיטה המתואר בתרשים לעיל.

3. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט.

4. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתבדר אז נשארת האפשרות שהטור הנתון $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בתנאי .

5. כדי לבדוק את התכנסות הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ במקרה האחרון ניתן להשתמש בשיטה ליבנייץ אשר טוען

אם סימנים איברי הטור מתחלפים והסדרה $\{|a_n|\}$ מונוטונית יורדת ושואפת לאפס אזי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

2.16 תרגילים

דוגמה 2.26

רשמו את הנוסחה לחישוב של S_n עבור הטור הנתון, בדקו את התכנסות הטור על סמך ההגדרה ומצאו את סכום הטור במקרה שהוא מתכנס.

א) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)$

ב) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(0.1)^n$

ג) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+3^n}{5^n}$

ד) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

ה) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

פתרון:

א) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)=2\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}k-\sum\limits_{k=1}^{n}1$

שים לב,

$$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n$$

הוא סכום של סדרה חשבונית עם $a_1=1$ ו- $d=1$ (עיין הגדרה **??**). לכן לפי כלל **??**,

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

ולכן

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n(n+1) - n = n^2$$

ואז קל לראות כי

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \to \infty$$

לא מתכנס. ■

ב)

$$S_n \sum_{k=1}^{n} (0.1)^k = 0.1 + 0.1^2 + 0.1^3 + \cdots + (0.1)^n$$

הוא טור הנדסי אשר מנת הסדרה $q = 0.1$ ואיבר הראשון הוא $a_1 = 0.1$ (עין הגדרה **??** לעיל). הסכום של n איברים הראשונים הוא, לפי הנוסחא בכלל **??**,

$$S_n = \frac{0.1(1-0.1^n)}{1-0.1} = \frac{0.1(1-0.1^n)}{0.9} = \frac{1-0.1^n}{9} \ .$$

הטור מתכנס:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{9} \ .$$

ג)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k + 3^k}{5^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{5^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{5^k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{5}\right)^k + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{5}\right)^k = \sum_{k=1}^{n} (0.4)^k + \sum_{k=1}^{n} (0.6)^k$$

אז קבלנו שני סכומים של סדרה הנדסית. עבור הראשון, $a_1 = 0.4$, $q = 0.4$ כך שהסכום החלקי (סכום של n איברים הראשונים) לפי **??** הוא

$$\frac{0.4(1-0.4^n)}{1-0.4} = \frac{2(1-0.4^n)}{3}$$

ועבור השני, $a_1 = 0.6$, $q = 0.6$ כך שהסכום החלקי ולפי משפט **??** הוא

$$\frac{0.6(1-0.6^n)}{1-0.6} = \frac{3(1-0.6^n)}{2}$$

אז בסך הכל

$$S_n = \frac{2(1-0.4^n)}{3} + \frac{3(1-0.6^n)}{2} \ .$$

הטור מתכנס:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6} \ .$$

ד) הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ לא חשבוני ולא הנדסי אבל הוא טור חיובי וגם מונוטוני יורד, לפיו ניתן לבדוק התכנסותו ע"י מבחן האינטגרל (עין משפט 2.4). הפונקציה של האיבר ה- n הוא $a_n = f(n) =$

$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. נבדוק אם האינטגרל המתאים מתכנס:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty f(x)\,dx &= \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,dx \\
&= \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\,dx \\
&= \int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}\,dx \\
&= \int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x}\,dx \\
&= \int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{1}\,dx \\
&= \int_1^\infty \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\,dx \\
&= \left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{2x^{3/2}}{3}\right]_1^\infty \to \infty
\end{aligned}$$

בגלל שהאינטגרל לא מתכנס אז גם הטור לא מתכנס.

ה) כמו הסעיף הקודם, הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ לא חשבוני ולא הנדסי אבל הוא טור חיובי וגם מונוטוני יורד, לפיו ניתן לבדוק התכנסותו ע"י מבחן האינטגרל (עין משפט 2.4). הפונקציה של האיבר ה- n הוא $a_n = f(n) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. נבדוק אם האינטגרל המתאים מתכנס:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty f(x)\,dx &= \int_1^\infty \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\,dx \\
&= \int_1^\infty \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\,dx \\
&= \int_1^\infty \left(\ln(x+1)-\ln(x)\right)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right]_1^\infty \\
&= \left[\frac{-1}{x(x+1)}\right]_1^\infty \to \infty
\end{aligned}$$

בגלל שהאינטגרל לא מתכנס אז גם הטור לא מתכנס.

דוגמה 2.27

חשבו את הערך את S_n בעזרת האינטגרל ובדקו את התכנסות הטור על סמך הערכה זו

א) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

ב) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

ג) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

ד) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

ה) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

פתרון:

א) הפונקציה עבור איבר ה- n הינה

$$a_n = \frac{1}{2n-1} \equiv f(n)$$

נבדוק את האינטגרל המתאים:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{2x-1}\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}\ln(2x-1)\right]_1^{\infty} \to \infty$$

ולכן לפי משפט 2.4 הטור מתבדר. ■

ב) הפונקציה עבור איבר ה- n הינה

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \equiv f(n)$$

נבדוק את האינטגרל המתאים:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$= \left[2\sqrt{x}\right]_1^{\infty} \to \infty$$

ולכן לפי משפט 2.4 הטור מתבדר. ■

ג) הפונקציה עבור איבר ה- n הינה

$$a_n = \frac{1}{n^2} \equiv f(n)$$

נבדוק את האינטגרל המתאים:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty}$$
$$=1$$

ולכן לפי משפט 2.4 הטור מתכנס כך ש-

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx + f(1) \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \leq 2$$

■

החישוב של הערך המדויק של הטור לא חלק של השאלה וגם לא בסילבוס, אבל למי שמעוניין החישוב נמצא בסוף הפרק הזה, לפיו

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\ .$$

ד) הפונקציה עבור איבר ה- n הינה

$$a_n=\frac{n}{2^n}\equiv f(n)$$

נבדוק את האינטגרל המתאים:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}f(x)\,dx&=\int_1^{\infty}\frac{x}{2^x}\,dx\\&=\left[-\frac{2^{-x}(x\ln(2)+1)}{\ln^2(2)}\right]_1^{\infty}\\&=\frac{1+\ln(2)}{2\ln^2(2)}\end{aligned}$$

ולכן לפי משפט 2.4 הטור מתכנס כך ש-

$$\int_1^{\infty}f(x)\,dx\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\leq\int_1^{\infty}f(x)\,dx+f(1)\quad\Rightarrow\quad 1.76203\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\leq 2.26203$$

■

החישוב של הערך המדויק של הטור לא חלק של השאלה ולא בסילבוס, אבל למי שמעוניין:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^n}\right)\right)\Bigg|_{z=2}\\&=-z\frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z^n}\right)\Bigg|_{z=2}\\&=-z\frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z^n}\right)\Bigg|_{z=2}\\&=-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)\Bigg|_{z=2}\\&=-z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-1}\right)\Bigg|_{z=2}\\&=-z\left(\frac{-1}{(z-1)^2}\right)\Bigg|_{z=2}\\&=\frac{z}{(z-1)^2}\Bigg|_{z=2}\\&=2\end{aligned}$$

ה) הפונקציה עבור איבר ה- n הינה

$$a_n=\frac{1}{n^2}\equiv f(n)$$

נבדוק את האינטגרל המתאים:

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty$$
$$=1$$

ולכן לפי משפט 2.4 הטור מתכנס כך ש-

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \le \int_1^\infty f(x)\,dx + f(1) \quad \Rightarrow \quad 1 \le \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \le 2$$

■

החישוב של הערך המדויק של הטור לא חלק של השאלה וגם לא בסילבוס, אבל למי שמעוניין החישוב נמצא בסוף הפרק הזה, לפיו

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

ו) הפונקציה עבור איבר ה- n הינה

$$a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \equiv f(n)$$

נבדוק את האינטגרל המתאים:

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$$
$$= \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$$
$$= \left[-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_0^\infty$$
$$=\frac{2}{3}\ .$$

ולכן לפי משפט 2.4 הטור מתכנס כך ש-

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\sqrt{n}} \le \int_1^\infty f(x)\,dx + f(1) \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3} \le \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\sqrt{n}} \le 1$$

שיעור 3
טרוי פונקציות וטורי חזקות

3.1 טור חזקות

הגדרה 3.1 טור חזקות

טור חזקות הנם טורים מהצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

כלומר הסכום החלקי הוא פולינום:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_N x^N \ .$$

משפט 3.1 רדיוס התכנסות

לכל טור חזקות קיים מספר חיובי R, כלומר $0 \leq R \leq \infty$ כך
שהטור מתכנס לכל x בתחום $|x| < R$
ומתבדר לכל x בתחום $|x| > R$.
בפרט:
אם $R = 0$ אז הטור מתכנס רק ב- $x = 0$.
אם $R = \infty$ אז הטור מתבדר לכל x.
המספר הזה R נקרא **רדיוס ההתכנסות** של הטור.

דוגמה 3.1 טור חזקות

מצאו את רדיוס התכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \ .$$

פתרון:
שים לב הטור הוא טור הנדסי (ראו הגדרה **??**) בו איבר הראשון הוא $a_1 = x^0 = 1$ ומנת הסדרה היא $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{x^n} = x$. לפי משפט **??** (או לפי משפט **??**) הטור שווה ל-

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} \ .$$

הסכום מתכנס אם $|x|<1$, לכן רדיוס ההתכנסות

$$R=1\ .$$

דוגמה 3.2 טור חזקות

מצאו את רדיוס התכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n\ .$$

פתרון:

בשונה לדוגמה הקודמת, הטור אינו טור הנדסית, בגלל שהיחס $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ אינו קבוע ($\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n^{n+1}x^{n+1}}{(nx)^n}=n\cdot x$).

לכל x,

$$\lim_{n\to\infty}|n^n x^n|=\lim_{n\to\infty}|nx|^n=\begin{cases}\infty & x\neq 0\ ,\\ 0 & x=0\ .\end{cases}\ .$$

לכן רדיוס ההתכנסות הוא

$$R=0$$

כי הטור מתכנס רק במקרה ש- $x=0$.

דוגמה 3.3 טור חזקות

מצאו את רדיוס התכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}\ .$$

פתרון:

נבדוק התכנסות של הטור ע"י מבחן קושי: (עין משפט 2.8 לעיל)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x}{n}\right|^n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n}\right|=0\ ,$$

ולכן לפי מבחן קושי (ומשפט **??** #1) הטור מתכנס לכל x, לפיו הרדיוס ההתכנסות הוא ∞:

$$R=\infty\ .$$

משפט 3.2 נוסחת דלמבר לרדיוס התכנסות

רדיוס התכנסות של טור חזקות ניתן ע"י הנוסחה

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

אם הגבול קיים.

משפט 3.3 נוסחת קושי לרדיוס התכנסות

רדיוס התכנסות של טור חזקות ניתן ע"י הנוסחה

$$R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)^{1/n}$$

אם הגבול קיים.

דוגמה 3.4

מצאו את תחום התכנסות של הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n\ln n}$$

פתרון:

נחשב את הרדיוס התכנסות בעזרת נוסחת קושי:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n\cdot\ln n|}=\lim_{x\to\infty}(x\cdot\ln x)^{1/x}$$

נגדיר $y=(x\ln x)^{1/x}$. אז

$$\ln y=\ln\left[(x\ln x)^{1/x}\right]=\frac{1}{x}\ln(x\ln x)$$

ו-

$$y=e^{\ln y}=e^{\frac{1}{x}\ln(x\ln x)}\ .$$

מכאן

$$\lim_{x\to\infty}y=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(x\ln x)}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x\ln x)}{x}&=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\\ &\stackrel{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x\ln x}(\ln x+1)}{1}\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x+1}{x\ln x}\\ &=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x\ln x}\right)\\ &=0\end{aligned}$$

לכן

$$\lim_{x\to\infty}y=e^0=1\ .$$

ולכן

$$\frac{1}{R}=1\ ,\qquad\Rightarrow\qquad R=1\ .$$

נבדוק התכנסות ב- $x=1$:

לפי מבחן האינטגרל $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ מתכנס אם ורק אם $\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$ מתכנס.

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{1}{t}=[\ln t]_{\ln 2}^{\infty}=\infty$$

לכן הטור מתבדר ב $x=1$.
נבדוק התכנסות ב- $x=-1$:
ב- $x=-1$ נקבל טור מחליף סימן מצורה

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n \ , \qquad a_n=\frac{1}{n\ln n} \ .$$

נבדוק התכנסות ע"י מבחן לייבניץ: $a_n\downarrow$ מונוטונית. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ ו- $a_n>0$ לכל n לכן הטור $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$ מתכנס בתנאי (כיוון ש $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ מתבדר).
תשובה סופית: תחום התכנסות הוא $[-1,1)$.

דוגמה 3.5

מצאו את תחום התכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^2}{n^5 5^n}x^n$$

פתרון:

נחשב את הרדיוס התכנסות בעזרת נוסחת דלמבר. $a_n=\frac{(n+2)^2}{n^5 5^n}$.

$$\begin{aligned}
R&=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{(n+2)^2}{n^5 5^n}\right)}{\left(\frac{(n+3)^2}{(n+1)^5 5^{n+1}}\right)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^2\left(\frac{n+1}{n}\right)^5\frac{5^{n+1}}{5^n}\\
&=5
\end{aligned}$$

נבדוק התכנסות בקצוות הקטע: ב $x=5$ נקבל טור חיובי מצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^2}{n^5}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \qquad a_n=\frac{(n+2)^2}{n^5} \ .$$

נשתמש במשפט ההשוואה הגבולי (משפט 2.6):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)^2}{n^5}}{\frac{1}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^2=1$$

לכן $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^2}{n^5}$ ו- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנסים ומתבדרים ביחד. לכן, כיוון ש $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס, (ראו **??** דוגמה למעלה) אז גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^2}{n^5}$ מתכנס. לכן הטור חזקות מתכנס ב- $x=5$.

נבדוק התכנסות בקצוות הקטע: ב $x=-5$.

ב $x=-5$ נקבל טור מחליף סימן מצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+2)^2}{n^5}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \qquad a_n=\frac{(n+2)^2}{n^5} \ .$$

a_n חיובי, $\downarrow$ מונוטונית ו $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, לכן לפי מבחן לייבניץ הטור מתכנס בהחלט. לכן הטור חזקות מתכנס ב- $x=-5$. בסה"כ התחום התכנסות של הטור הוא $[-5,5]$.

דוגמה 3.6

מצאו את תחום התכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{10^n(2n^2+3)}$$

פתרון:

נציב $z=x-2$ ונרשום את הטור בצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{10^n(2n^2+3)} \ .$$

נחשב את הרדיוס התכנסות בעזרת נוסחת קושי:

$$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{10^n(2n^2+3)}=\lim_{n\to\infty}10\cdot\sqrt[n]{(2n^2+3)}=10\cdot 1=10 \ .$$

נבדוק התכנסות ב- $x-2=10$:

ב $x-2=10$, נקלל הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n^2+3)}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \ , \qquad a_n=\frac{1}{(2n^2+3)} \ .$$

לפי מבחן דלמבר הטור המתקבל מתכנס. מאותה מידה, ב $x-2=-10$, נקלל הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n^2+3)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \ , \qquad a_n=\frac{1}{(2n^2+3)} \ .$$

לפי מבחן לייבניץ הטור המתקבל מתכנס בהחלט. לכן תחום התכנסות של הטור חזקות הוא $x-2\in[-10,10]$, כלומר $x\in[-8,12]$.

דוגמה 3.7 טור חזקות

מצאו את רדיוס התכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n} \ .$$

פתרון:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \ , \qquad a_n=\frac{1}{n} \ .$$

נבדוק רדיוס התכנסות ע"י נוסחת דלמבר:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

נבדוק התכנסות בקצוות.

ב $x=1$ נקבל טור חיובי מצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\ .$$

הטור הזה מתבדר (ראו דוגמה ??).

ב $x=-1$ נקבל טור חיובי מצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\ .$$

הטור הזה מתכנס בתנאי (ראו דוגמה ??). לכן תחום התכנסות של הטור הוא

$$x\in[-1,1)\ .$$

דוגמה 3.8

מצאו את רדיוס התכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2x)^n$$

פתרון:

$a_n=(2)^n$. לפי מבחן קושי (ראו משפט 2.8):

$$\frac{1}{R} = \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{(2)^n} = 2$$

לכן $R=\dfrac{1}{2}$. נבדוק התכנסות בקצוות. ב $x=\frac{1}{2}$ נקבל טור מצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1)^n$$

אשר מתבדר. ב $x=-\dfrac{1}{2}$ נקבל טור מצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

שלא מתכנס. לכן הטור מתכנס בתחום

$$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\ .$$

3.2 טורי פונקציות

הגדרה 3.2 טור פונקציות

תהיה $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ סדרת פונקציות. הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

נקרא **טור פונקציות** או **טור פונקציונלי**.
אוסף הערכים של x שעבורם הטור מתכנס נקרא **תחום התכנסות של הטור**.
הפונקציה

$$S(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty} \left(f_1(x) + \ldots + f_N(x)\right)$$

נקרא **סכום הטור** והיא מוגדרת רק עבור ערכי x מתחום ההתכנסות של הטור.

דוגמה 3.9

הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

מתכנס אם ורק אם $-1 < x < 1$. לכן תחום התכנסות של הטור הוא $(-1, 1)$. נקבל

$$S_N(x) = 1 + x + \ldots + x^N = \frac{1 - x^N}{1 - x}$$

$$S(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x) = \frac{1}{1 - x} \ .$$

השארית הוא

$$R(x) = S(x) - S_N(x) = x^{N+1} + x^{N+2} + \ldots = \frac{x^{N+1}}{1 - x} \ .$$

דוגמה 3.10

הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^n} + \ldots$$

מתכנס אם ורק אם $-1 < \left|\frac{1}{x}\right| < 1$, כלומר $|x| > 1$. לכן תחום התכנסות של הטור הוא $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. ומקבלים

$$S(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x}{x - 1} \ .$$

דוגמה 3.11

תחום התכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

הוא, לפי מבחן האינטגרל, $(1,\infty)$ זוהי דוגמה של דיריכלה והטור שווה לפונקציה הנקראת פונקציית זיטה של רימאן. היא אינה פונקציה אלמנטרית ואין לה נוסחה סגורה.

3.3 פעולות עם טורי חזקות - גזירה ואינטגרציה

משפט 3.4 אינטגרציה וגזירה איבר איבר

יהיה $0 < R \leq \infty$ רדיוס התכנסות של הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. אזי לכל $|x| < R$ מתקיים"

(1

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \end{aligned}$$

(2

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n + C$$

הטור המתקבל לאחר גזירה או אינטגרציה הם בעלי אותו רדיוס התכנסות R.

דוגמה 3.12

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = f(x)$ מתכנס ב- $(-1,1)$.

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

מתכנס ב- $(-1,1)$. (התחום לא השתנה).

דוגמה 3.13

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} = f(x)$ מתכנס ב- $(-1,1)$.

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \ .$$

מתכנס ב- $[-1,1]$. (התחום השתנה).

3.4 טור טיילור ומקלורן

הגדרה 3.3 טור טיילור

בהינתן פונקציה $f(x)$, גזירה אינסוף פעמים בסביבה של $x=a$, נגדיר **טור טיילור** שלה סביב $x=a$

$$T_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

זהו טור חזקות לפי חזקות של $(x-a)$.
טור טיילור הוא טור שסכומים החלקיים הם פולינומי טיילור.

הגדרה 3.4 טור מקלורן

במקרה $a=0$ נקבל את **טור מקלורן** של $f(x)$:

$$T_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(a) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

דוגמה 3.14 טורי מקלורן של פונקציות אלמנטריות

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \qquad -1 < x < 1\ ,$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots \qquad -1 < x < 1\ ,$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} \ldots \qquad -1 < x < 1\ ,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad -\infty < x < \infty\ ,$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \ldots \qquad -\infty < x < \infty\ ,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + -\frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad -\infty < x < \infty\ ,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + -\frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad -\infty < x < \infty\ ,$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \qquad -1 < x < 1\ ,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \ldots \qquad -1 < x \leq 1\ ,$$

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$$

משפט 3.5 התכנסות של טור טיילור

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה אינסוף פעמים בסביבת הנקודה a. אם קיים $M > 0$ כך שלכל $n \geq 0$ ולכל $x \in (a-\delta, a+\delta)$ מתקיים

$$|f^{(n)}(a)| \leq M$$

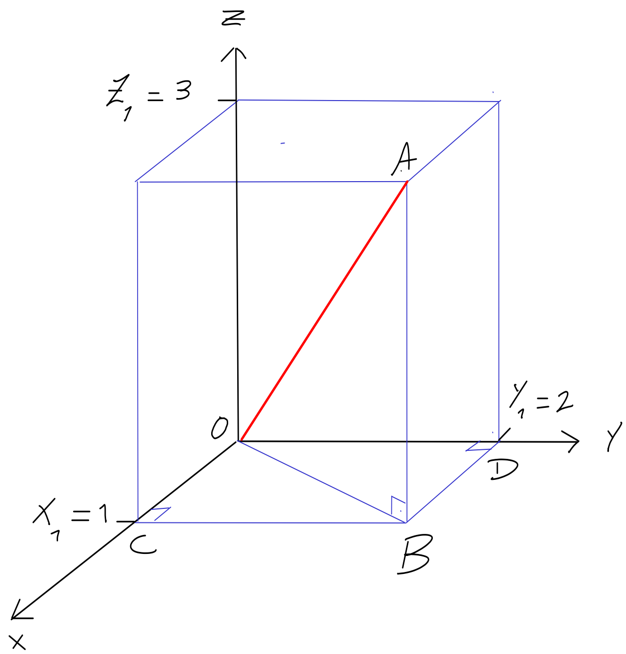
אז בקטע $(a-\delta, a+\delta)$ הטור טיילור של $f(x)$ מתכנס ומתקיים

משפט 3.6 קיום טור טיילור של פונקציה

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\ , \qquad |x-a| < \delta\ .$$

שיעור 4
אלגברה וקטורית

נניח ש A נקודה עם קואורדינטות $(1,2,3)$ ביחס לראשית.



אפשר להגדיר הוקטור $\overline{OA}$ להיות הקו שמתחיל בנקודה O ומסתיים בנקודה A.

כדי לעבור מנקודה O לנקודה A, אפשר לעבור

יחידה אחת לאורך ציר ה- x (לאורך OC),
2 יחידות לאורך ציר ה- y (לאורך CB),
ו- 3 יחידות לאורך ציר ה- z (לאורך BA).

אומרים כי הקואורדינטות של הוקטור $\overline{OA}$ הן $(1,2,3)$ ביחס למערכת צירים. נסמן את הוקטור בצורה

$$\overline{OA} = (1,2,3) \ .$$

המספרים $(1,2,3)$ נקראים הקואורדינטות או הרכיבים של הוקטור. לוקטור יש גודל וכיוון. הגודל של הוקטור מוגדר להיות האורך של הקו של הוקטור מהזנב להראש.

נחשב את אורך הוקטור OA לפי פיתגרוס:

$$|OA|^2 = |OB|^2 + |AB|^2$$

$$|OB|^2 = |OC|^2 + |BC|^2 = x_1^2 + y_1^2 \ , \qquad |AB|^2 = z_1^2$$

לכן

$$|OA|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \ ,$$

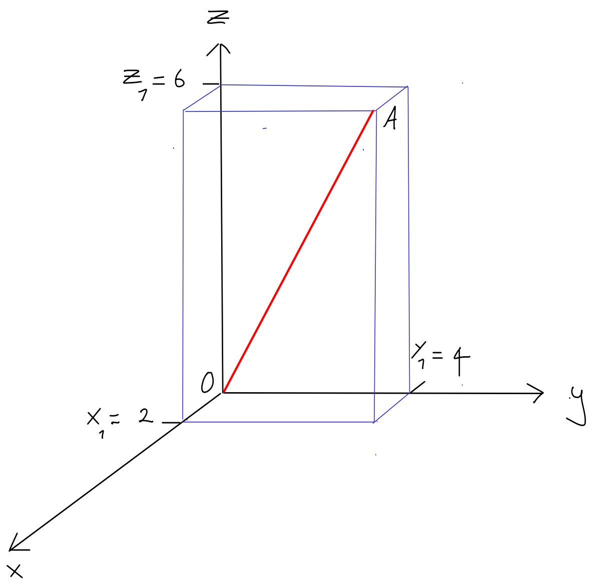
לכן גודל הוקטור $\overline{OA}$ הוא

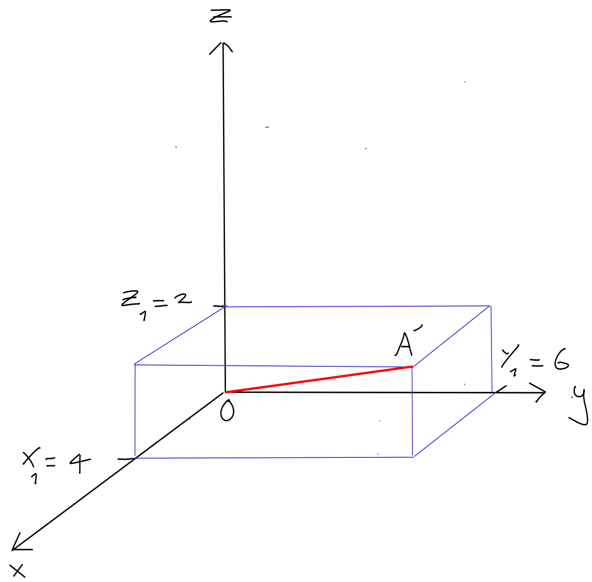
$$|OA| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{14} \ .$$

באופן כללי נתון וקטור $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ הגודל של הוקטור ניתן ע"י

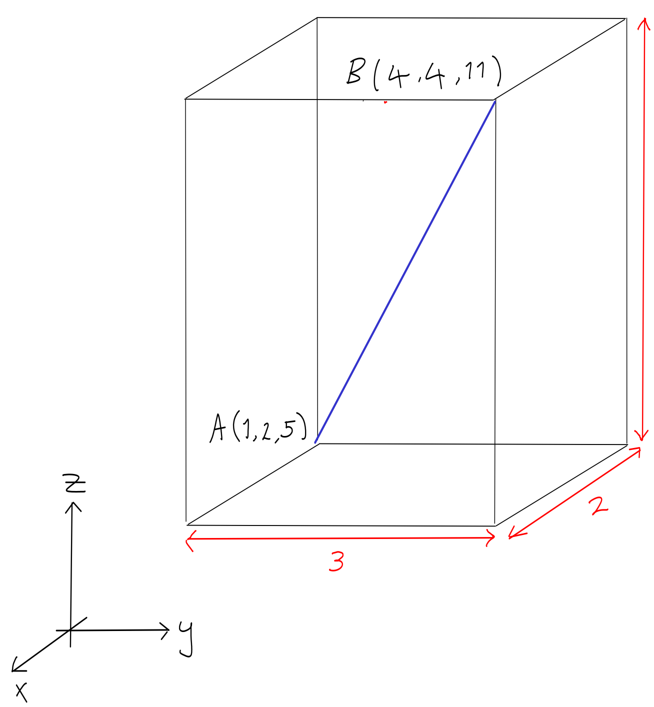
$$|\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\ .$$

לוקטור יש גודל וכיוון. בפרט, אפשר שלשני וקטורים יש גודל שווה אבל כיוונים שונים. לדוגמה יש לוקטורים $\overline{OA} = (2,4,6)$ ו $\overline{OA'} = (4,6,2)$ אותו גודל: $|OA| = |OA'| = \sqrt{56}$, אבל יש להם כיוונים שונים (ראו שרטוט).





נכליל את ההגדרה למעלה של וקטור מראשית לנקודה במרחב- xyz לוקטור מנקודה לנקודה, אשר אף משניהם לא בהכרח הראשית. לדוגמה, נתונות שתי נקודות $A(1,2,5)$ ו- $B(4,4,11)$, ניתן להגדיר את הוקטור מנקודה A לנקודה B.



כדי לעבור מנקודה A לנקודה B, יש לעבור

3 יחידות בכיוון ה- x,
2 יחידות בכיוון ה- y,
ו- 6 יחידות בכיוון ה- z.

לכן נגדיר את הוקטור $\overline{AB}$ כך:

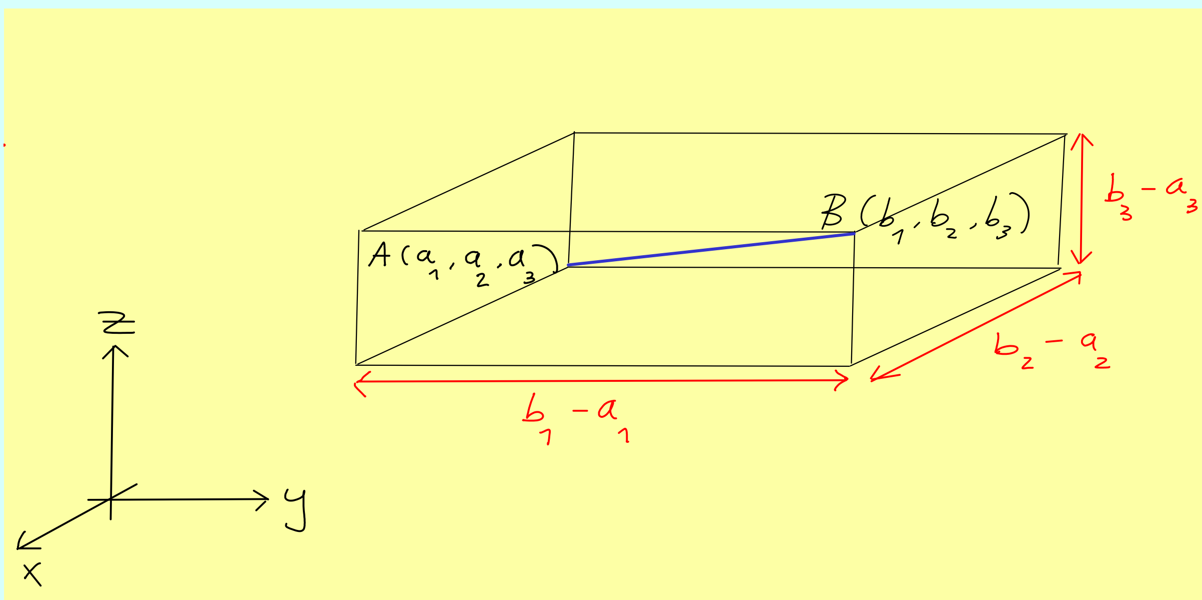
$$\overline{AB} = (3, 2, 6) \ .$$

הרכיב ה- x של $\overline{AB}$ הוא ההפרש בין הקואורדינטות ה- x של הנקודות A ו- B: $x_B - x_A = 3$.
מאותה מידה, הרכיב ה- y של $\overline{AB}$ הוא ההפרש בין הקואורדינטות ה- y של A ו- B: $y_B - y_A = 2$,
והרכיב ה- z של $\overline{AB}$ הוא ההפרש בין הקואורדינטות ה- z של A ו- B: $z_B - z_A = 6$.

הגדרה 4.1 וקטור בין שתי נקודות

באופן כללי, בהינתן שתי נקודות $A(a_1, a_2, a_3)$ ו- $B(b_1, b_2, b_3)$, הוקטור $\overline{AB}$ בין A ל- B הינו

$$\overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \ .$$



הגודל של הוקטור, לפי פיתגורוסת הינו

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} \ .$$

דוגמה 4.1

אם $A = (1, 2, 3)$ ו $B = (-5, 6, -7)$, חשב את הרכיבים ואת הגודל של הוקטור בין הנקודות A ו- B?

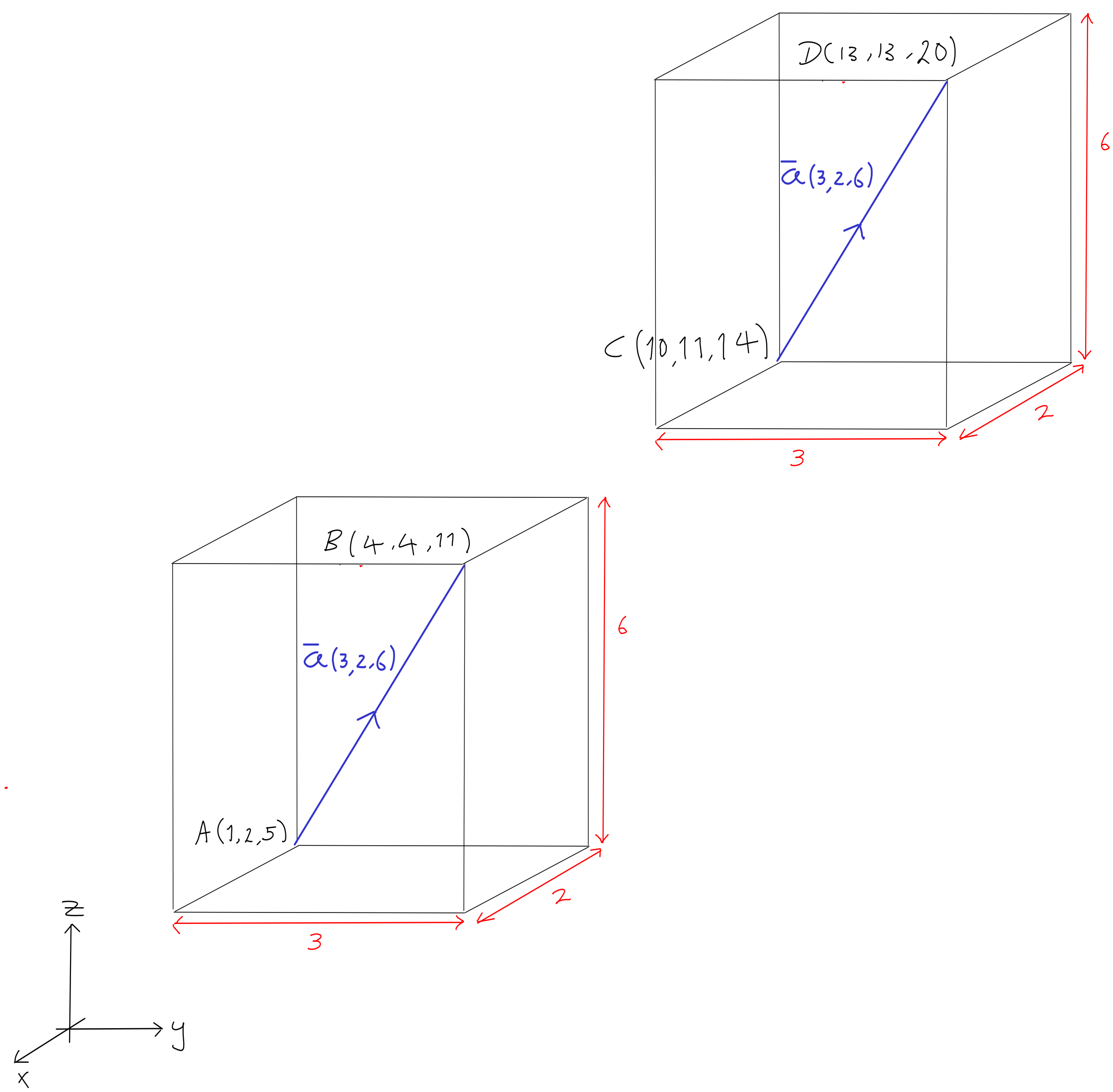
פתרון:

$$\overline{AB} = (-5-1, 6-2, -7-3) = (-6, 4, -10)$$
$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + 4^2 + 10^2} = \sqrt{142} \ .$$

למעשה אנחנו לא צריכים נקודות מסוימות כדי להגדיר וקטור. לוקטור אין נקודת התחלתית קבועה אבל אפשר "להניח" אותו בכל נקודה במישור / מרחב. לדוגמה נקח הוקטור מדוגמה הקודמת. הוקטור בעל בת קואורדינטות $(3,2,6)$ התחיל בנקודה $A(1,2,5)$ והסתיים בנקודה $B(4,4,11)$. אבל ניתן לקחת אותו וקטור, להניח את הזנב על הנקודה $C(10,11,14)$ ונמצא כי הראש של הוקטור יהיה בנקודה

$$D = (10,11,14) + (3,2,6) = (13,13,20) \ ,$$

כלומר הוקטור $(3,2,6)$, כאשר הוא מתחיל בנקודה $C(10,11,14)$ מסתיים בנקודה $D(13,13,20)$ (ראו שרטוט למטה).



נשים לב כי יש לוקטורים $\overline{AB}$ ו- $\overline{CD}$ אותם רכיבים:

$$\overline{AB} = (3,2,6) = \overline{CD} \ ,$$

ויותר מזה הכיוונים של השני וקטורים שווים, כלומר הוקטורים מקבילים. זאת תוצאה של העובדה שיש להשני וקטורים אותם רכיבים. הכיוון של וקטור נקבע ע"י הרכיבים שלו.

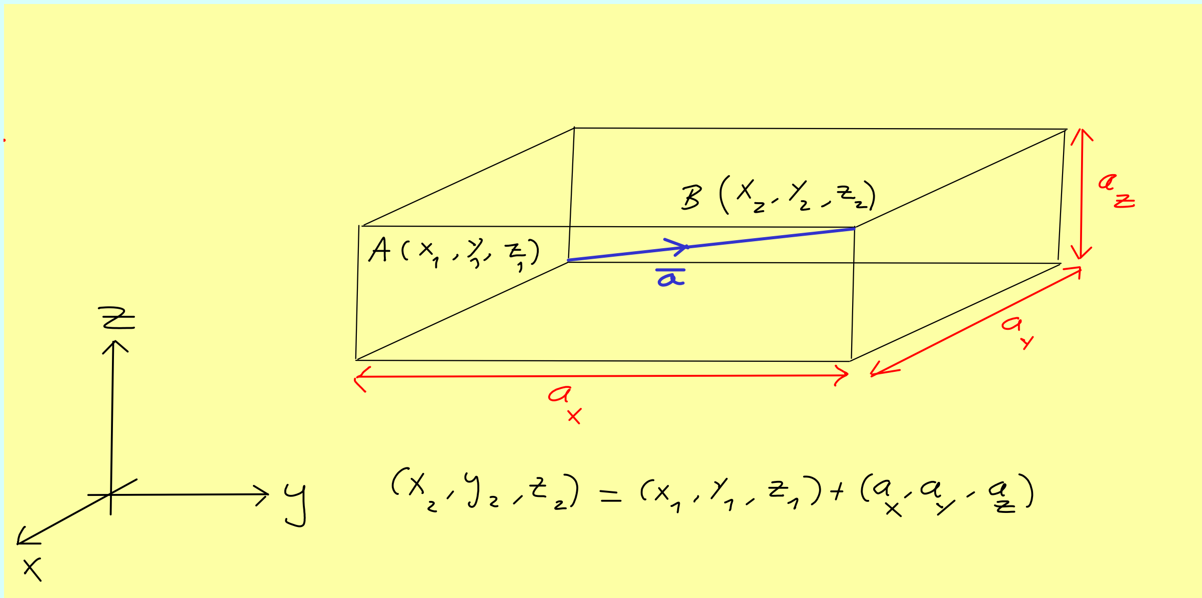
האורך של הוקטור גם לא משתנה כאשר נניח אותו על נקודה התחלתית שונה. לפי פיתגורס:

$$|AB| = \sqrt{3^2+2^2+6^2} = 7 \ , \qquad |CD| = \sqrt{3^2+2^2+6^2} = 7 \ .$$

הגדרה 4.2 וקטור כיוון

נתון וקטור $\bar{a}\,(a_x, a_y, a_z)$ ונתון הנקודה $A = (x_1, y_1, z_1)$ כלשהי. אז כאשר הוקטור $\bar{a}$ מתחיל בנקודה A, הוא עובר לנקודה B בת קואורדינטות (x_2, y_2, z_2) כאשר

$$x_2 = x_1 + a_x \ , \qquad y_2 = y_1 + a_y \ , \qquad z_2 = z_1 + a_z \ .$$



משפט 4.1 אורך של וקטור

האורך (או גודל) של הוקטור $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ יסומן ב $|\bar{a}|$ או לעיתים a (בלי הגג מעל) וניתן ע"י הנוסחה של פיתגורס:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

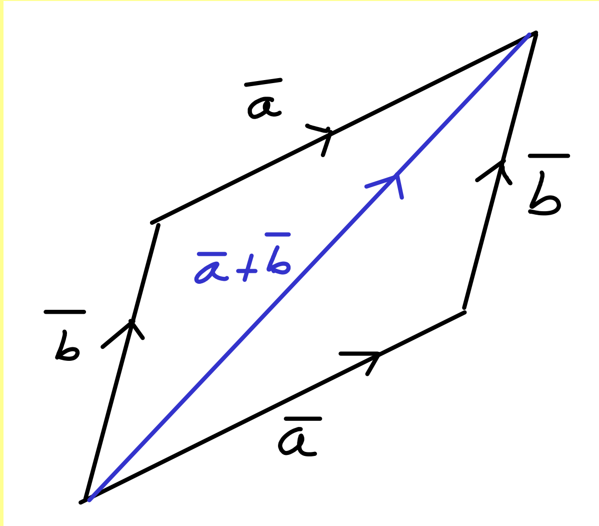
משפט 4.2 חיבור וקטורים

מבחינת קואורדינטות, הסכום של $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ו- $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ נתון ע"י

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \ .$$

גיאומטרית, החיבור מתבצע ע"י כלל המקבילית:

מניחים את שני הוקטורים כך שיתחילו באותה הנקודה ומניחים עותק של כל אחד מהם בקצה של השני כך שנוצרת מקבילית. האלכסון של המקבילית הוא הסכום.



משפט 4.3 כפל וקטור בסקלר

הכפלה של וקטור $\bar{a}$ בסקלר k תשנה אורכו.

אם $k>0$ כיוונו לא ישתנה,

אם $k<0$ כיוונו יהופך,

אם $k=0$ נקבל וקטור האפס.

אלגברית: אם $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ אז

$$k\bar{a}=(ka_1,ka_2,ka_3) \ .$$

דוגמה 4.2

אם $\bar{a}=(-3,2,-5)$ חשבו את $2\bar{a}$.

פתרון:

$$2\bar{a}=(-6,4,-10) \ .$$

משפט 4.4 תנאי קוליניאריות

אם שני וקטורים $\bar{a}$ ו- $\bar{b}$ קוליניאריות אז קיים $t\in\mathbb{R}$ כך ש-

$$\bar{b}=t\cdot\bar{a} \ .$$

פורמאלית:

$$\bar{b}||\bar{a} \quad \Leftrightarrow \quad \exists t:\bar{b}=t\cdot\bar{a} \ .$$

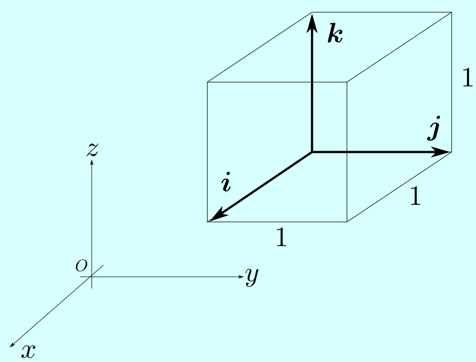
הגדרה 4.3 הבסיס הסטנדרטי

נגדיר שלושה וקטורים הבאים:

- הוקטור i מקביל לכיוון x וגודלו 1
- הוקטור j מקביל לכיוון y וגודלו 1
- הוקטור k מקביל לכיוון z וגודלו 1

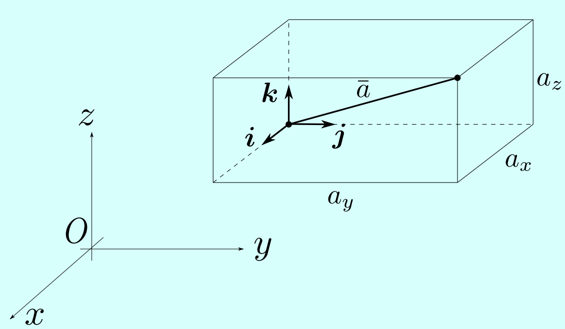
הקבוצה של הוקטורים i,j,k נקרא הבסיס הסטנדרטי. הקואורדינטות של הוקטורים אלו הן:

$$i(1,0,0)\ ,\qquad j(0,1,0)\ ,\qquad k(0,0,1)\ .$$



בהינתן וקטור $\bar{a}=(a_x,a_y,a_z)$ ניתן לבטא אותו במונחים של הבסיס מצורה

$$\bar{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\ .$$



הגדרה 4.4 וקטור יחידה

בהינתן וקטור $\bar{a}(a_x,a_y,a_z)$ בעל אורך $|\bar{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$ נגדיר וקטור יחידה המסומן $\hat{a}$, אשר כיוונו שווה לכיוון של $\bar{a}$ ואורכו שווה 1.
$\hat{a}$ ניתן ע"י הנוסחה

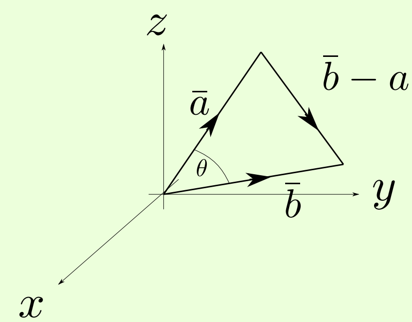
$$\hat{a}=\frac{1}{|\bar{a}|}\bar{a}=\left(\frac{a_x}{|\bar{a}|},\frac{a_y}{|\bar{a}|},\frac{a_z}{|\bar{a}|}\right)$$

הגדרה 4.5 מכפלת סקלרית

נתונים שני וקטורים $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ ו- $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$, המכפלת סקלרית שלהם הוא

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3c_3\ . \qquad (\#1)$$

כלל 4.1



נתונים שני וקטורים $\bar{a}$ ו- $\bar{b}$, הזווית θ ביניהם, הינה

$$\cos\theta=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\ |\bar{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}\ .$$

הוכחה: לפי חוק הקוסינוס:

$$|\bar{a}-\bar{b}|^2=|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2-2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta \qquad (1*)$$

לפי ההגדרת מכפלת סקלרית:

$$|\bar{a}-\bar{b}|^2=(\bar{a}-\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b})=\bar{a}\cdot\bar{a}+\bar{b}\cdot\bar{b}-\bar{b}\cdot\bar{a}-\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2-2\bar{a}\cdot\bar{b} \qquad (2*)$$

נציב (2*) באגף השמאל של (1*):

$$\begin{aligned}|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2-2\bar{a}\cdot\bar{b}=&|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2-2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta\\ -2\bar{a}\cdot\bar{b}=&-2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta\\ \bar{a}\cdot\bar{b}=&|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta\end{aligned}$$

כנדרש. ∎

משפט 4.5

1. אם $\bar{=}0$ או $\bar{b}=0$ אז $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$.
2. אם $\bar{a}$ מאונך ל- $\bar{b}$ ($\theta=90^\circ=\pi/2$) אז $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$.
3. אם θ זווית קהה אז $\cos\theta<0$ ולכן גם $\bar{a}\cdot\bar{b}<0$.
4. $$\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|^2$$

.5

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$$

לכל $\bar{a},\bar{b}\in\mathbb{R}^3$.

דוגמה 4.3

חשבו את הזווית בין הוקטורים $(3,2,1)$ ו- $(4,5,6)$.

פתרון:

$$(3,2,1)\cdot(4,5,6)=12+10+6=28$$
$$\cos(\theta)=\frac{(3,2,1)\cdot(4,5,6)}{|(3,2,1)||(4,5,6)|}=\frac{28}{\sqrt{14}\sqrt{77}}$$
$$\theta=\arccos\left(\frac{28}{\sqrt{14}\sqrt{77}}\right)$$

דוגמה 4.4

מצאו את קוסינוס הזווית החדה בין:
הישר l_1 העובר דרך הנקודות $A=(-1,1,2)$ $B=(-3,-2,6)$,
והישר l_2 העובר דרך הנקודות $C=(5,-1,-4)$ $D=(4,3,-5)$.

פתרון:

נחשב את הקואורדינטות של וקטורים המקבילים ל- l_1 ו- l_2:

$$\bar{a}=\overline{AB}=(-2,-3,4)\qquad\Rightarrow\qquad|\bar{a}|=\sqrt{29}\ .$$
$$\bar{b}=\overline{CD}=(-1,4,-1)\qquad\Rightarrow\qquad|\bar{b}|=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\ .$$
$$\bar{a}\cdot\bar{b}=(-2,-3,4)\cdot(-1,4,-1)=-14\ .$$

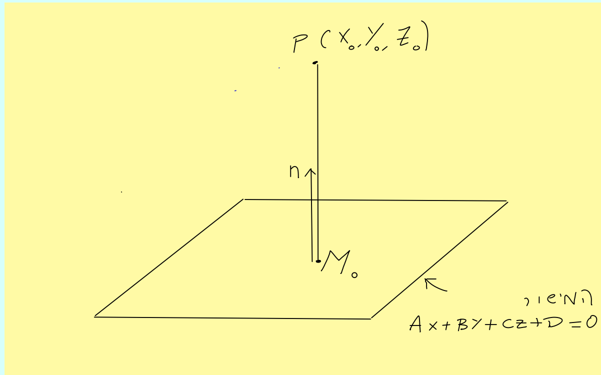
לכן

$$\cos\theta=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}=\frac{-14}{3\sqrt{58}}$$

שימו לב, שיצא לנו שקוסינוס הזאת הוא שלילי. זה תלוי בכיוון שבו מוגדר את הזווית (עם כיוון השעון או נגד כיוון השעון). מכיוון שאנחנו רוצים לבעת את הזוית מבלי להתחשב בכיוון, נקח

$$\cos\theta=\left|\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}\right|=\frac{14}{3\sqrt{58}}\ .$$

הגדרה 4.6 היטל של וקטור $\bar{a}$ על וקטור $\bar{b}$

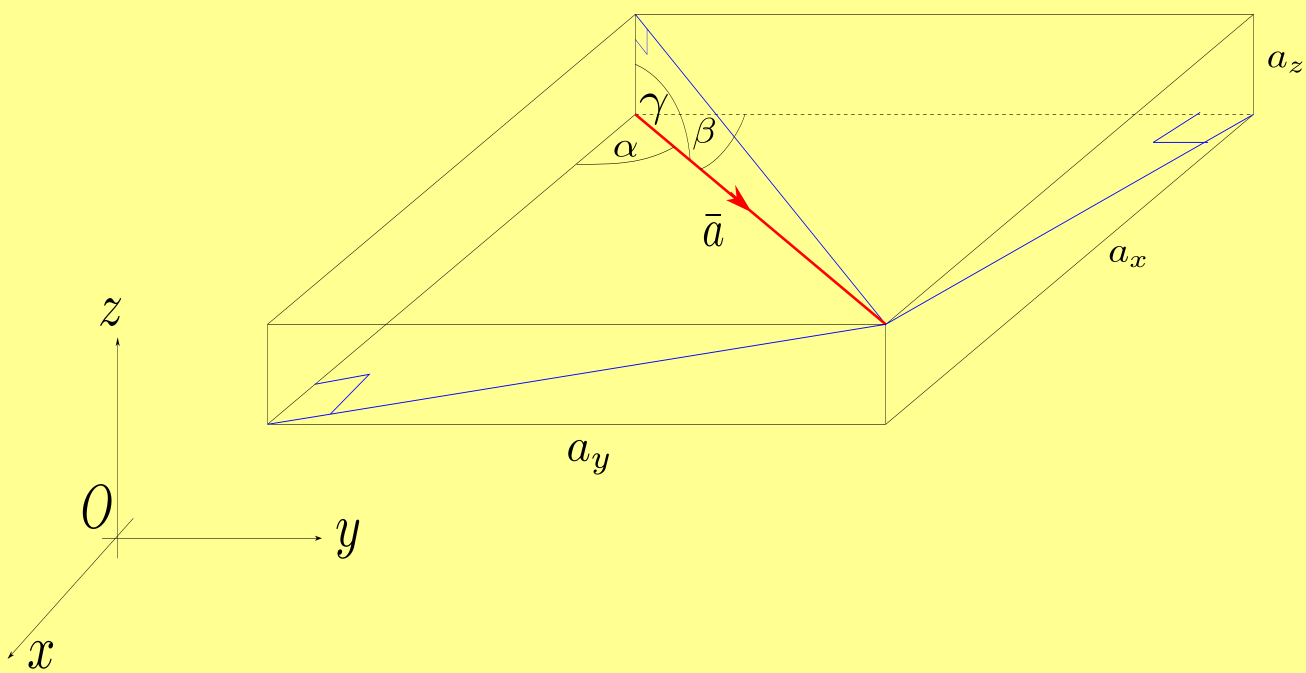


אורך ההיטל של $\bar{a}$ על וקטור $\bar{b}$ הוא

$$|\bar{b}|\cdot\cos(\alpha)\ .$$

לכן, $|\bar{a}\cdot\bar{b}|$ שווה למכפלת האורך של $\bar{a}$ באורך ההיטל של $\bar{b}$ על $\bar{a}$.

משפט 4.6 זוויות של וקטור



נתון וקטור $\bar{a}=(a_x,a_y,a_z)$. נניח ש-

α הזווית בין $\bar{a}$ וכיוון ה- x,

β הזווית בין $\bar{a}$ וכיוון ה- y,

γ הזווית בין $\bar{a}$ וכיוון ה- z,

(תראו תרשים לעיל). אז

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|} \ , \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|} \ , \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|} \ .$$

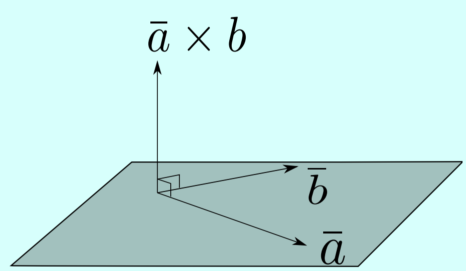
שים לב לפי משפט **??**, נתון וקטור $\bar{a}$ עם זוויות α,β,γ ביחס לצירים, הוקטור היחידה של $\bar{a}$ ניתן ע"י ז

$$\hat{a} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \ .$$

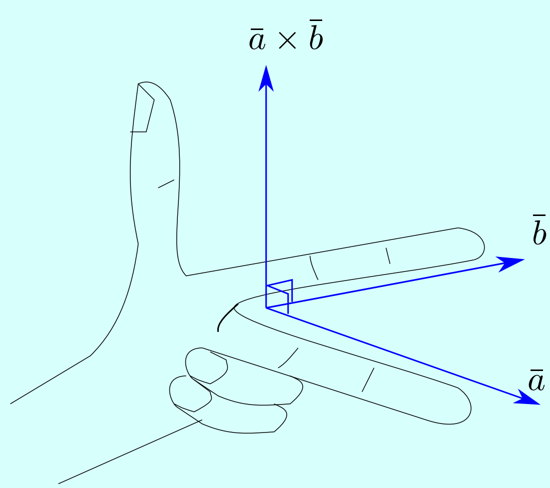
הגדרה 4.7 מכפלת וקטורית

נתון שני וקטורים $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ו- $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ המכפלת וקטורית מוגדרת להיות

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$



המכפלת וקטורית היא וקטור שניצב למישור בו נמצאים הוקטורים $\bar{a}$ ו- $\bar{b}$.



משפט 4.7 מכפלת וקטורית וזווית בין וקטורים

אם θ הזיית בין הוקטורים $\bar{a}$ ו- $\bar{b}$ אז מתקיים

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}| \sin\theta \ .$$

הוכחה:

$$
\begin{aligned}
|\bar{a}\times\bar{b}|^2 &= (y_1z_2-y_2z_1)^2+(z_1x_2-z_2x_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2\\
&=\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2+z_2^2\right)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2\\
&=|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2-(\bar{a}\cdot\bar{b})^2\\
&=|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2-|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\cos^2\theta\\
&=|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\left(1-\cos^2\theta\right)\\
&=|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\sin^2\theta\ .
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow\qquad |\bar{a}\times\bar{b}| =|\bar{a}||\bar{b}|\sin\theta\ .
$$

■

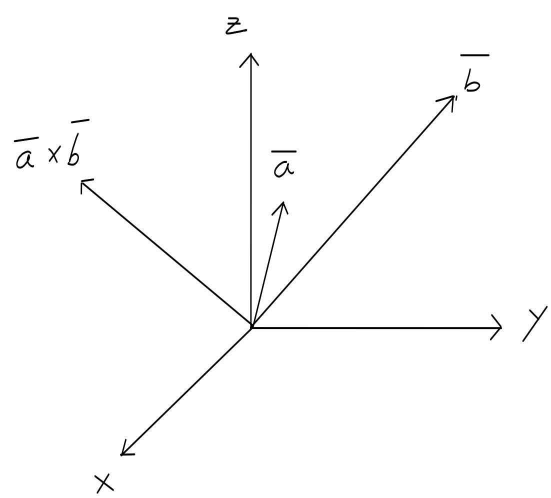
דוגמה 4.5

הוכיחו כי הנקודות $A=(0,0,0)$, $B=(1,1,1)$, $C=(2,3,4)$ לא כולן על ישר אחד וחשבו את שח המשולש ΔABC.

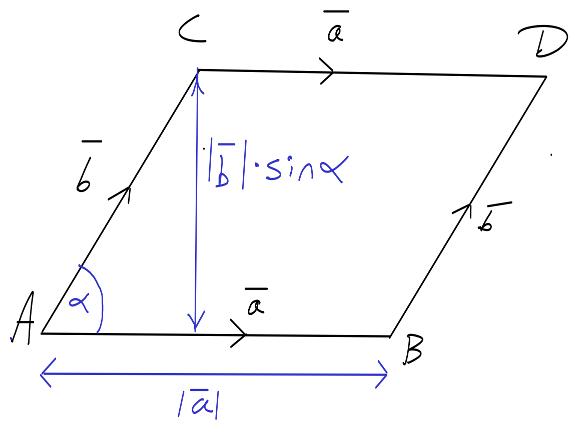
פתרון:

צריך להוכיח כי $\bar{a}=\overline{AB}=(1,1,1)$ ו- $\bar{b}=\overline{AC}=(2,3,4)$ לא מקבילים:

$$
\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=(1,-2,1)\ .
$$



הוקטורים $\bar{a}$ ו- $\bar{b}$ יוצרים מקבילית



(ראו שרטוט למטה).

שטח המקבילית הנוצרת ע"י הוקטורים $\bar{a}$ ו $\bar{b}$ הוא

$$S_{ABCD} = |\bar{a} \times \bar{b}| \ ,$$

ולכן שטי המשולש הוא

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}| \ .$$

בדוגמה שלנו,

$$S = \frac{1}{2}|(1,-2,1)| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \ .$$

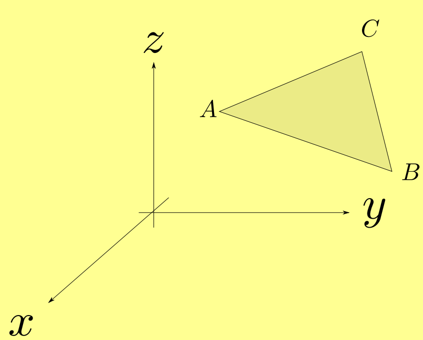
משפט 4.8 תנאי קופלנריות

שלושה וקטורים $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ נמצאים במישור אחת א"אם

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = 0 \ .$$

משפט 4.9 שטח משולש

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|$$



משפט 4.10 מכפלה מעורבת

א) נתון שלושה וקטורים $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ המכפלה מעורבת מוגדרת להיות

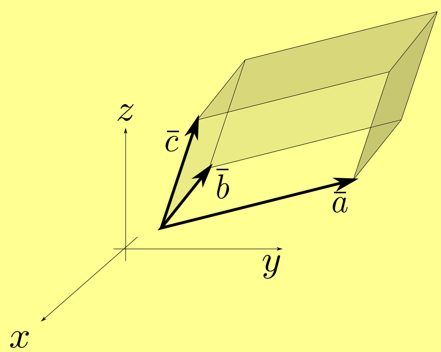
$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b}) = \bar{b}\cdot(\bar{c}\times\bar{a}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

ב)

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=\bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})=\bar{b}\cdot(\bar{c}\times\bar{a})\ .$$

ג) הערך מוחלט של המכפלה מעורבת שווה לנפח של המקבילון הנוצר ע"י השלושה וקטורים $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ כמתואר בתרשים. כלומר

$$V_{\text{מקבילון}}=|\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})|\ .$$



ד) הוקטורים $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ הם קופלנריים (שלשתם נמצאים באותו מישור) אם ורק אם

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=0\ .$$

הוכחה:

א)

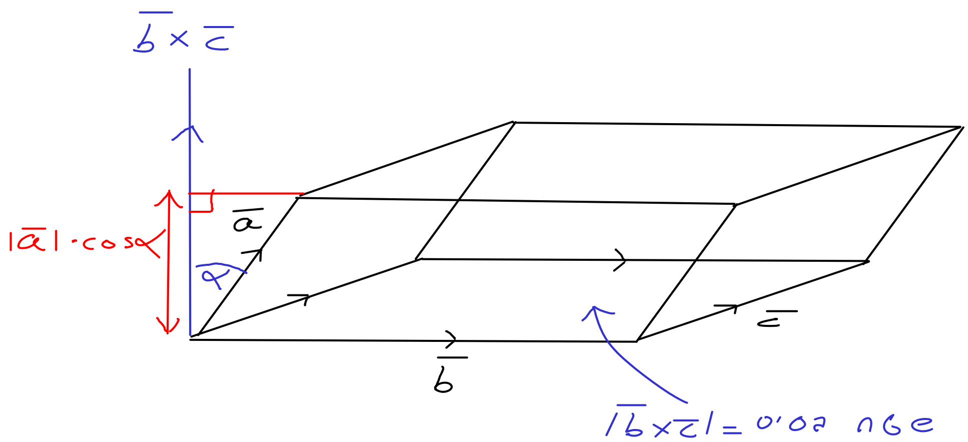
$$a\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$

ב) מספר אי-זוגי של החלפות שורות בדטרמיננטה משנה את הסימן של הדטרמיננטה. מספר זוגי של החלפות שורות בדטרמיננטה לא משנה את הסימן של הדטרמיננטה. לכן

$$a\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_1&c_2&c_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=c\cdot(\bar{a}\times\bar{b})$$

ג)

$$|\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}\times\bar{c}|\cos\alpha=\underbrace{|\bar{b}\times\bar{c}|}_{\text{שטח הקבילית בבסיס } \bar{b},\bar{c}}\cdot\underbrace{|\bar{a}|\cos\alpha}_{\text{אורך הניצב לבסיס } \bar{b},\bar{c} \text{ העובר בנקודה שקצה } \bar{a}}$$



ד)

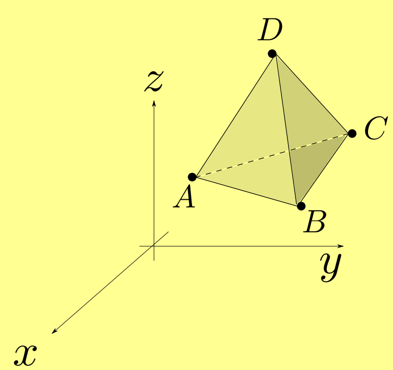
$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$ שורות המטריצה תלויות ליניארית ,

כלומר $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ קופלנריים.

■

משפט 4.11 נפח פירמידה

$$V = \frac{1}{6} \left| \overline{AD} \cdot \left(\overline{AB} \times \overline{AC} \right) \right|$$



דוגמה 4.6 ח

שבו את נפח הפירמידה המשולשת שקדקודיה הם

$$A = (1,2,3) \ , \ B = (0,1,2) \ , \ C = (-1,2,3) \ , \ D = (1,1,1) \ .$$

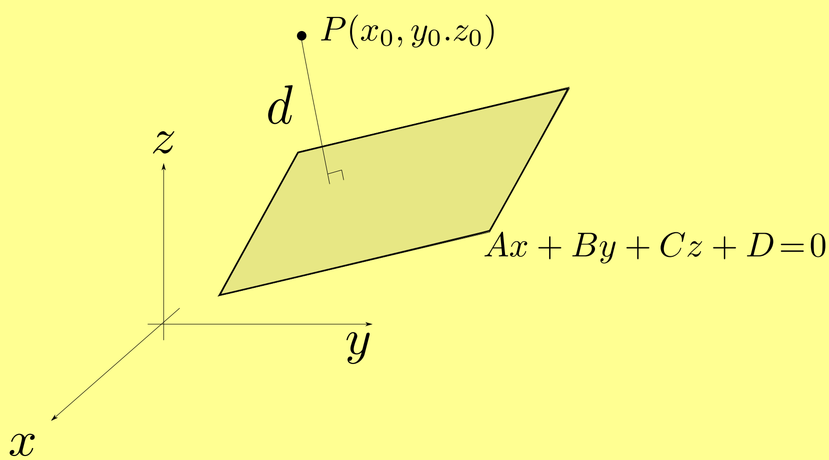
פתרון:

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{6}|\overline{AB}\cdot(\overline{AC}\times\overline{AD})|\\ &= \frac{1}{6}\left|(-1,-1,-1)\cdot[(-2,0,0)\times(0,-1,-2)]\right|\\ &= \frac{1}{6}\begin{vmatrix}-1 & -1 & -1\\ -2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2\end{vmatrix}\\ &= \frac{1}{3}\ .\end{aligned}$$

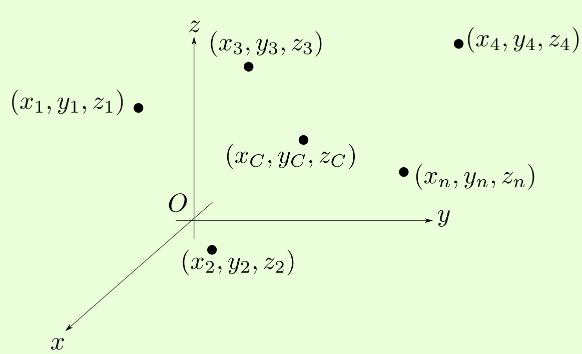
משפט 4.12 מרחק מנקודה למישור

בהינתן נקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ ומישור בעל משוואה $Ax+By+Cz+D=0$, המרחק d בין P לנקודה הכי קרובה אליו הנמצא במישור ניתן ע"י

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ .$$



כלל 4.2 מרכז המסה



מרכז המסה C של מערכת של n נקודות חומריות בעלות מסות $m_1,m_2,\dots,m_n$ כמתואר בתרשים, נמצאת במיקום x_C,y_C,z_C ביחס למערכת צירי x,y,z, כאשר

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \ ,$$
$$y_c = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \ ,$$
$$z_c = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \cdots + m_nz_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \ .$$

שיעור 5
מישורים במרחב תלת ממדי

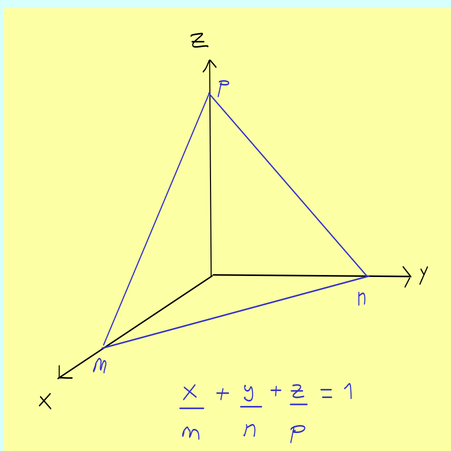
5.1 הגדרה ומשוואת המישור במרחב

מישור הוא משטח דו-ממדי שטוח במרחב xyz.

הגדרה 5.1 משוואת המישור

המשוואה המתארת מישור בכללי במרחב xyz הינה
$$Ax + By + Cz + D = 0$$
כאשר לפחות אחד המקדמים A, B, C אינו אפס.

ניתן לרשום משוואת המישור בצורה
$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1 \ .$$
בצורה הזאת המספרים m, n, p הם הנקודות חיתוך של המישור עם הצירי x, y, z בהתאמה כמתואר בשרטוט.



מישור מוגדר ע"י שלוש נקודות שבהן הוא עובר, בתנאי ששלושת הנקודות לא על אותו ישר (כלומר לא קולינאריות).

דוגמה 5.1

מצאו את משוואת המישור העובר דרך הנקודות $P(2,0,4)$, $Q(1,1,1)$, $R(0,0,6)$.

פתרון:

נציב את הנקודות במשוואת המישור $Ax+By+Cz+D=0$:

$$\begin{cases} 2A+4C+D &=0 \\ A+B+C+D &=0 \\ 6C+D &=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D &=-6C \\ 2A+4C-6C &=0 \\ A+B+C-6C &=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D &=-6C \\ A &=C \\ A+B &=5C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D &=-6C \\ A &=C \\ B &=4C \end{cases}$$

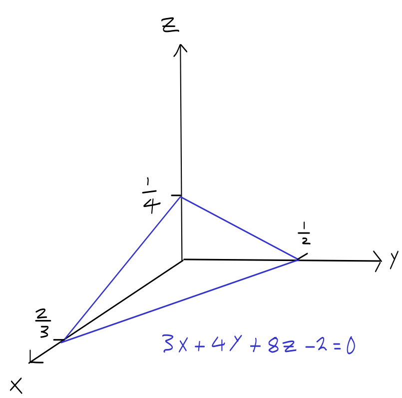
$$Cx+4Cy+Cz-6C=0 \qquad \Rightarrow \qquad x+4y+z-6=0 \ .$$

דוגמה 5.2

שרטטו את המישור $3x+4y+8z-2=0$.

פתרון:
נרשום את משוואת המישור בצורה קנונית.

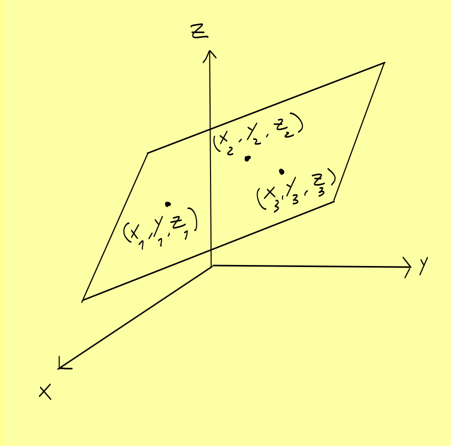
$$3x+4y+8z-2=0 \quad \Rightarrow \quad 3x+4y+8z=2 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}x+2y+4z=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\frac{2}{3}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}+\frac{z}{\frac{1}{4}}=1$$



משפט 5.1 משוואת המישור העובר דרך שלוש נקודות

משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנתונות (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) ו- (x_3,y_3,z_3) ניתן לרשום בצורה:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ .$$



דוגמה 5.3

מצאו את משאוות המישור העובר דרך הנקודות $(1,1,1)$, $(1,2,2)$, $(2,3,4)$ ושרטטו אותו.

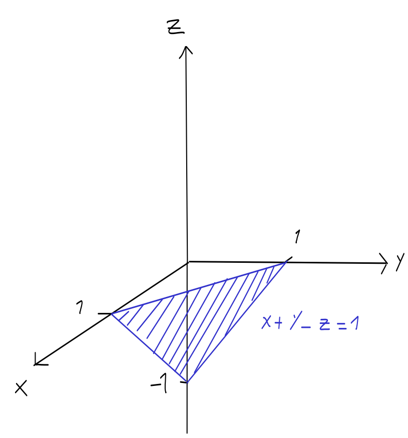
פתרון:

$$(x_1, y_1, z_1) = (1,1,1)\ , \quad (x_2, y_2, z_2) = (1,2,2)\ , \quad (x_3, y_3, z_3) = (2,3,4)\ .$$

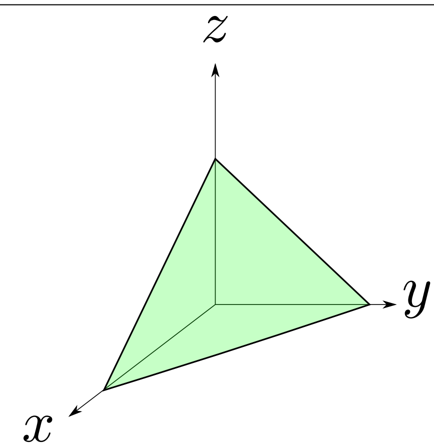
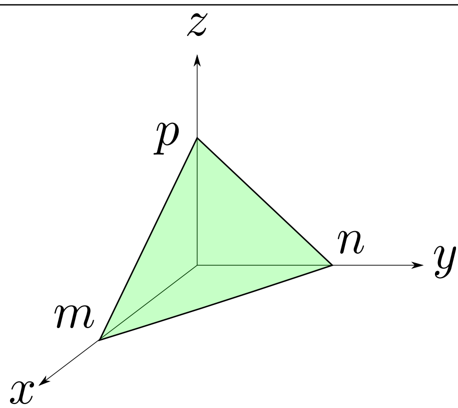
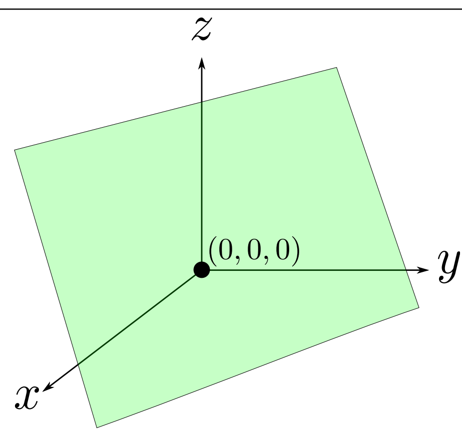
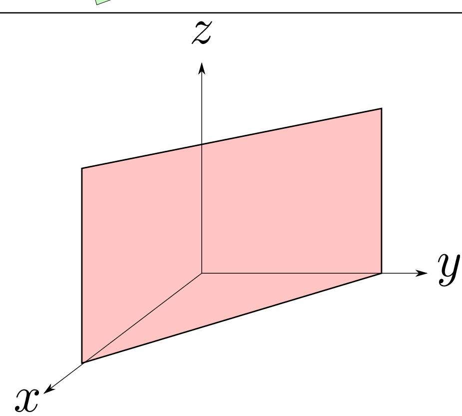
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0\ .$$

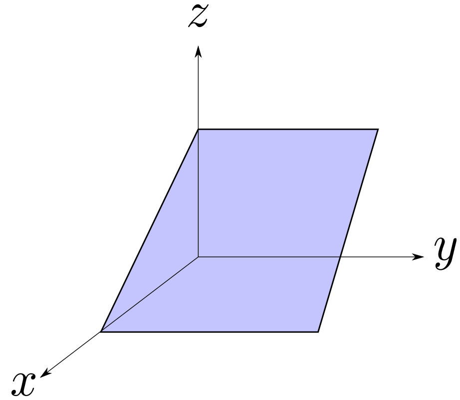
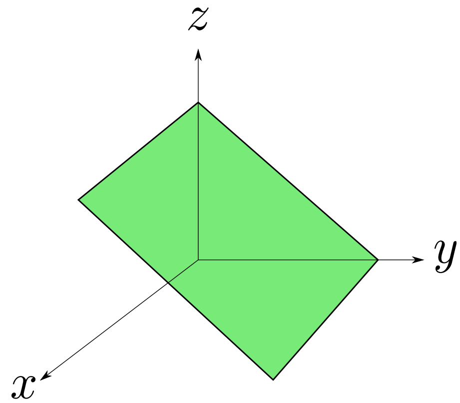
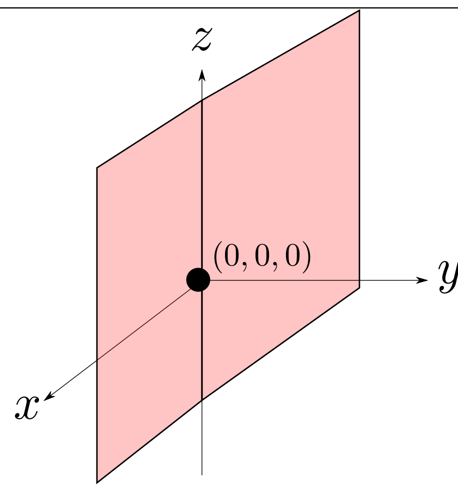
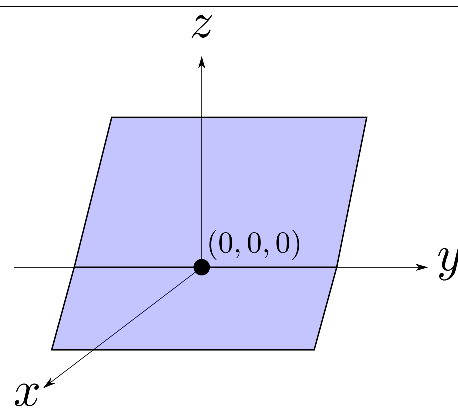
$$x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

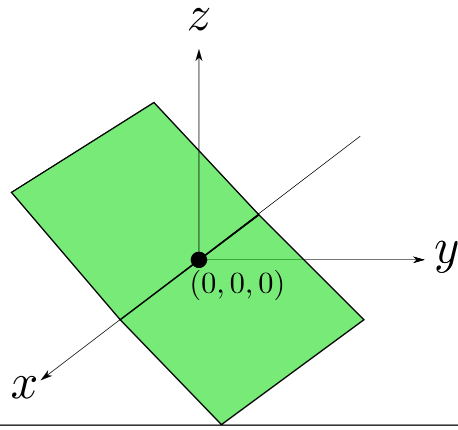
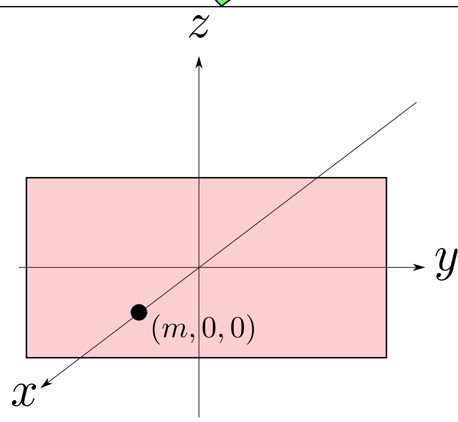
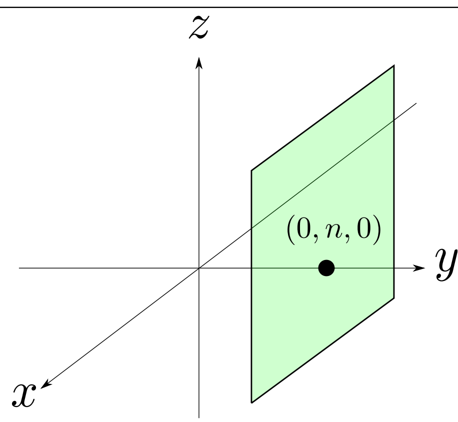
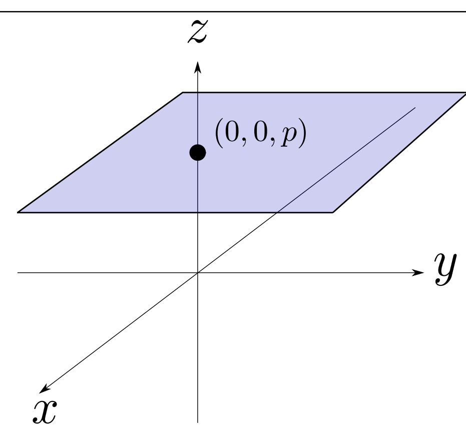
$$x + y - z - 1 = 0$$



5.2 מצבים מיוחדים של מישורים במערכת צירים xyz

$Ax+By+Cz+D=1$		$A,B,C,D \neq 0$. המישור לא עובר את הראשית הצירים.
$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$		$m,n,p \neq 0$. המישור לא עובר את הראשית הצירים. אין הבדל איכותי בתרשים הזה והתרשים לעיל. השני ביטוים האלה מציגים אותו מישור.
$Ax+By+Cz=0$		המישור עובר דרך הראשית הצירים. המישור חותך את כל אחד של הצירים בנקודה $(0,0,0)$.
$Ax+By+D=0$		$A,B,D \neq 0$. משתנה ה- z לא משתתף במשוואת המישור. המישור לא חותך את ציר ה-z ולא עובר דרך הראשית הצירים.

$Ax + Cz + D = 0$		$A, C, D \neq 0$. משתנה ה- y לא משתתף במשוואת המישור. המישור לא חותך את ציר ה-y ולא עובר דרך הראשית הצירים.
$By + Cz + D = 0$		$B, C, D \neq 0$. משתנה ה- x לא משתתף במשוואת המישור. המישור לא חותך את ציר ה-x ולא עובר דרך הראשית הצירים.
$Ax + By = 0$		$A, B \neq 0$. משתנה ה- z לא משתתף במשוואת המישור. המישור עובר דרך הראשית הצירים. המישור מכיל את ציר ה-z.
$Ax + Cz = 0$		$A, C \neq 0$. משתנה ה- y לא משתתף במשוואת המישור. המישור עובר דרך הראשית הצירים. המישור מכיל את ציר ה-y.

$By+Cz=0$		$B,C\neq 0$. משתנה ה- x לא משתתף במשוואת המישור. המישור עובר דרך הראשית הצירים. המישור מכיל את ציר ה-x.
$Ax+D=0 \Leftrightarrow x=m$		$A,D\neq 0$. משתני y ו- z לא משתתפים במשוואת המישור. המישור חותך את ציר ה-x ב- $x=m$. המישור מקביל למישור yz.
$By+D=0 \Leftrightarrow y=n$		$B,D\neq 0$. משתני x ו- z לא משתתפים במשוואת המישור. המישור חותך את ציר ה-x ב- $y=n$. המישור מקביל למישור xz.
$Cz+D=0 \Leftrightarrow z=p$		$C,D\neq 0$. משתני x ו- y לא משתתפים במשוואת המישור. המישור חותך את ציר ה-x ב- $z=p$. המישור מקביל למישור xy.

משפט 5.2 שטח משולש במישור xy

שטחו S של המשולש אשר קדקודיו הם בנקודות (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) הוא

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$

משפט 5.3 מרחק מנקודה למישור

המרחק d מהנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ למישור $Ax+By+Cz+D=0$ הוא

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

משפט 5.4 נפח הפירמידה המשולשת במרחב xyz

הנפח V של הפירמידה המשולשת אשר קדקודיה הם בנקודות (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3), (x_4,y_4,z_4), הוא

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}$$

5.3 דוגמאות

דוגמה 5.4

שרטטו את המישור המוגבל ע"י המישורים

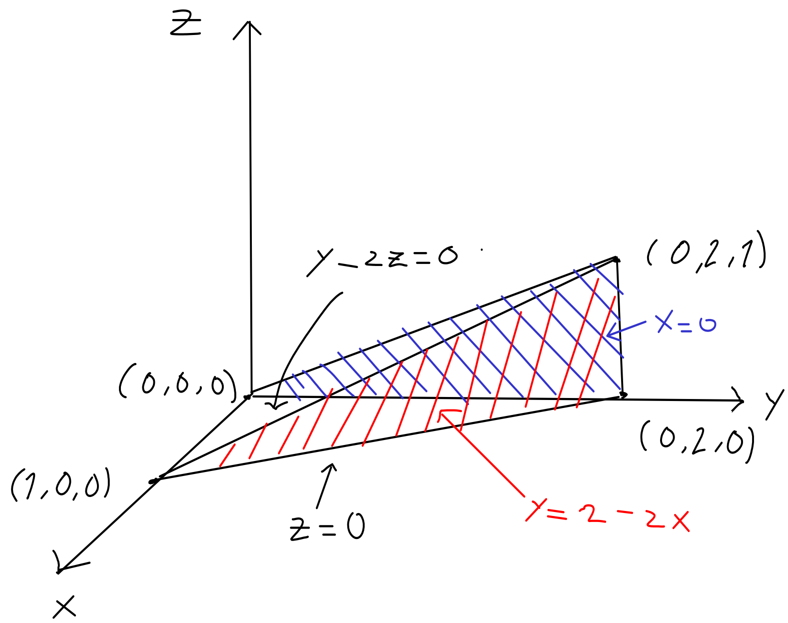
$$x=0\ ,\quad z=0\ ,\quad y-2z=0\ ,\quad y=2-2x\ .$$

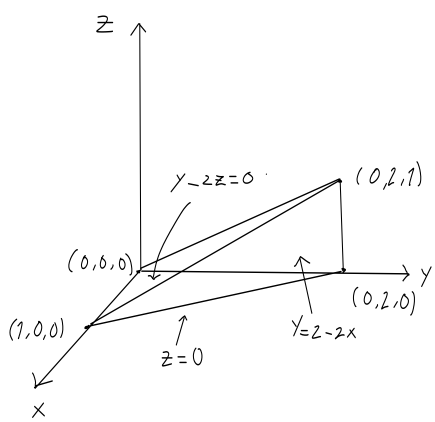
פתרון:

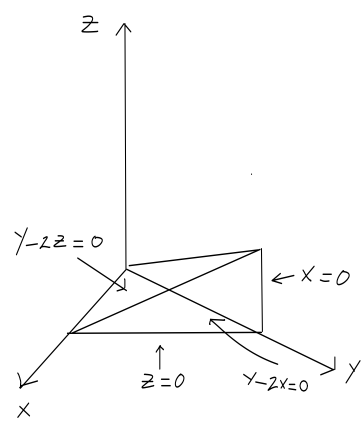
חיתוך בין שלושה מישורין יצא נקודה. אלו הן הקודקודים של הגוף:

$$\begin{cases} x &=0\\ z &=0\\ y-2x &=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad(0,2,0)\qquad\qquad \begin{cases} x &=0\\ z &=0\\ y-2z &=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad(0,0,0)$$

$$\begin{cases} z &=0\\ y-2z &=0\\ y &=2-2x\end{cases}\quad\Rightarrow\quad(1,0,0)\qquad\qquad \begin{cases} x &=0\\ y-2z &=0\\ y &=2-2x\end{cases}\quad\Rightarrow\quad(0,2,1)$$







דוגמה 5.5

שרטטו את הגוף במרחב xyz המוגבל ע"י המישורים

$$x=0\ , \quad y=0\ , \quad z=0\ , \quad x+y=2\ , \quad z=y+1\ .$$

פתרון:

- המישור $x+y=2$ מקביל לציר ה- z.
- המישור $z=y+1$ מקביל לציר ה- x.
- המישור $x=0$ הוא המישור yz.
- המישור $y=0$ הוא המישור xz.
- המישור $z=0$ הוא המישור xy.

נחפש את החיתוך של המישור $x+y=2$ עם המישור $x=0$:

$$x=0 \quad \to \quad y=2 \quad (0,2,z)\ .$$

נחפש את החיתוך של המישור $x+y=2$ עם המישור $y=0$:

$$y=0 \quad \to \quad x=2 \quad (2,0,z)\ .$$

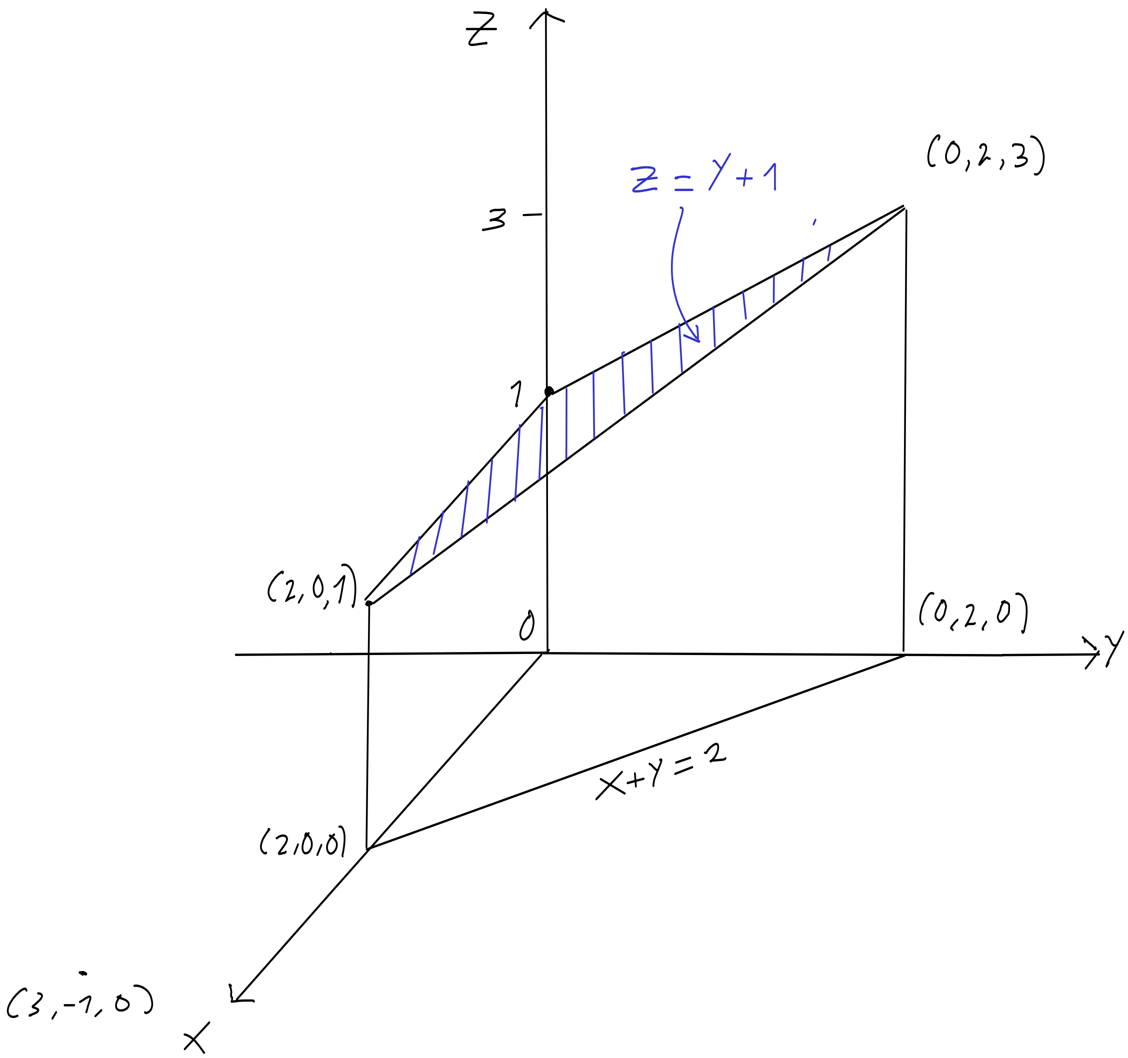
$$\left\{\begin{aligned} x+y &= 2 \\ z &= y+1 \\ x &= 0 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad (0,2,3)$$

$$\left\{\begin{aligned} x+y &= 2 \\ z &= y+1 \\ y &= 0 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} z &= 1 \\ x &= 2 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad (2,0,1)$$

$$\left\{\begin{aligned} x+y &= 2 \\ z &= y+1 \\ z &= 0 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} y &= -1 \\ x &= 3 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad (3,0,-1)$$

$$\left\{\begin{aligned} z &= y+1 \\ y &= 0 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ z = 1 \right. \quad \Rightarrow \quad (x,0,1)$$

$$\left\{\begin{aligned} z &= y+1 \\ z &= 0 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ y = -1 \right. \quad \Rightarrow \quad (x,-1,0)$$

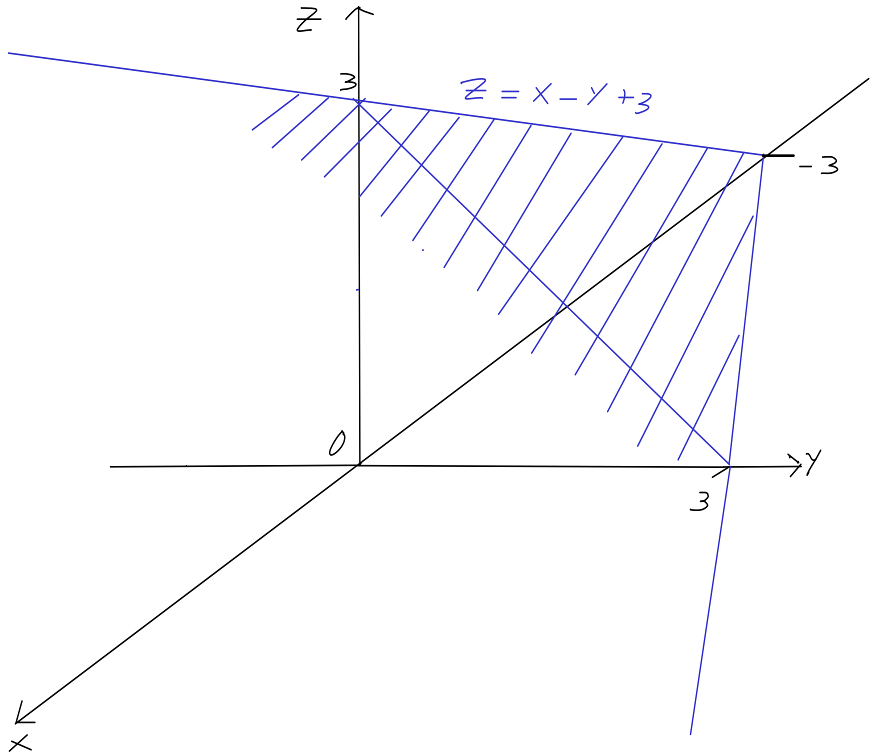


דוגמה 5.6

ציירו את הגוף המוגבל על ידי המישורים $z = x - y + 3$, $y = x$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

פתרון:

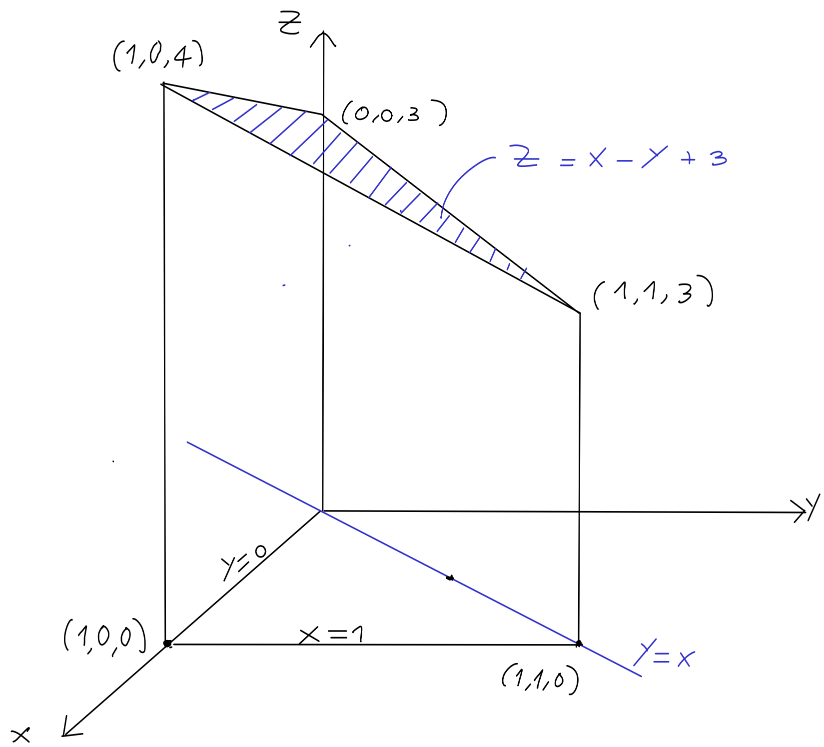
- המישור $z = 0$ הוא המישור xy.
- המישור $y = 0$ הוא המישור xz.
- המישור $x = 1$ מקביל למישור yz.
- המישור $y = x$ הוא המישור $x - y = 0$, מקביל לציר ה- z.
- $$z = x - y + 3 \quad \Rightarrow \quad x - y - z = -3 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{-3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} \ .$$



$$\begin{cases} z &= x - y + 3 \\ y &= 0 \\ x &= 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \qquad z = 4$$

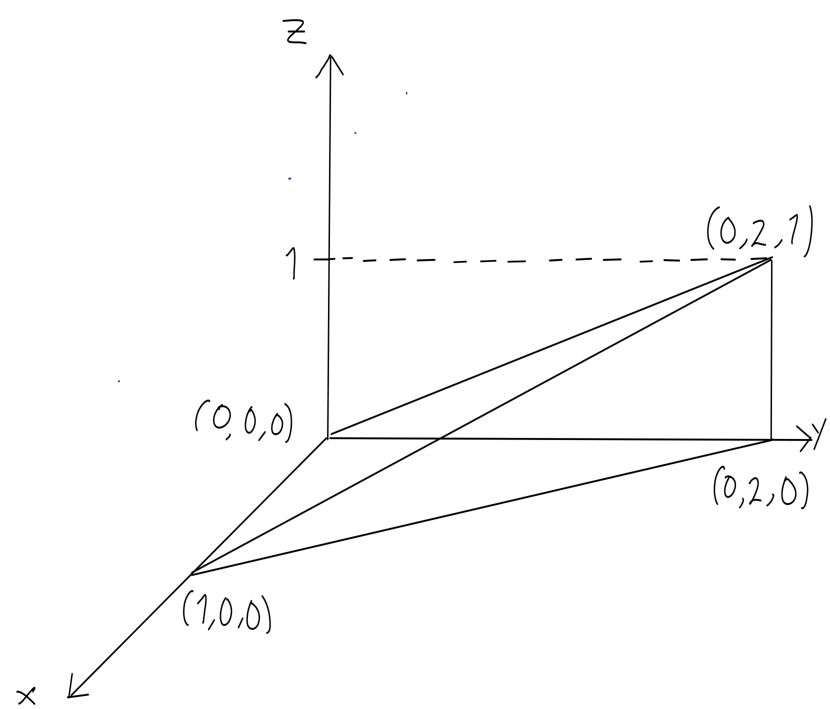
$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= x \\ z &= x - y + 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y &= 1 \\ z &= 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= x \\ z &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= 0 \end{cases}$$



דוגמה 5.7

מהן משוואות המישורים המגבילים את הגוף הבא:



פתרון:

יש לצורה הזאת ארבע פאות:

- מישור xy:

$$z=0\ .$$

מישור yz:

$$x=0\ .$$

- המישור שמכיל את $(0,0,0)$, $(0,2,1)$, $(1,0,0)$:

$$Ax+By+Cz+D=0\ .$$

נציב את הנקודה $(0,0,0)$ ונקבל $D=0$.

נציב את הנקודה $(1,0,0)$ ונקבל $A+D=0 \Leftarrow A=0$.

נציב את הנקודה $(0,2,1)$ ונקבל $2B+C=0 \Leftarrow C=-2B$. נבחור $B=1$, $\Leftarrow C=-2$. לכן משוואת המישור היא

$$y-2z=0$$

- המישור שמכיל את $(1,0,0)$, $(0,2,1)$, $(0,2,0)$:

$$Ax+By+Cz+D=0\ .$$

$$\left.\begin{array}{ccc} (0,2,1) & \Rightarrow & 2B+C+D=0 \\ (0,2,0) & \Rightarrow & 2B+D=0 \\ (1,0,0) & \Rightarrow & A+D=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{c} D=-A \\ A=2B \\ C=-2B-D=-A+A=0 \end{array}\right\}$$

נבחר $B=1 \Leftarrow A=2 \Leftarrow D=-2$. לכן משוואת המישור היא

$$2x+y-2=0$$

משפט 5.5 משוואת המישור במרחב

משוואת המישור המאונך לוקטור $n=(A,B,C)$ העובר דרך הנקודה $M=(x_0,y_0,z_0)$ היא

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\ .$$

אם נשווה למשוואה $Ax+By+Cz+D=0$ נקבל ש- $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

n נקרא הנורמל למישור.

הוכחה: עבור הנקודה $P=(x,y,z)$ במישור מתקיים כי

$$n\cdot\overline{MP}=0$$

בגלל ש n מאונך למישור ו- $\overline{MP}$ מוכל מקביל למישור.

$$\Rightarrow \qquad A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0\ .$$

■

דוגמה 5.8

משוואת המישור המאונך לוקטור $n=(1,2,0)$ העובר דרך הנקודה $M=(-1,2,0)$ היא

$$1\cdot(x+1)+2\cdot(y-2)+3\cdot(z-0)=0 \qquad\Rightarrow\qquad x+2y+3z-3=0 \ .$$

דוגמה 5.9

מצאו את משוואת המישור העובר דרך הנקודות $A=(1,2,3)$, $B=(1,1,1)$, $C=(-1,2,0)$.

פתרון:
הוקטור $n=\overline{AB}\times\overline{AC}$ מאונך למישור.

$$n=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}=(3,4,-2) \ .$$

לכן המישור נתון ע"י המשוואה:

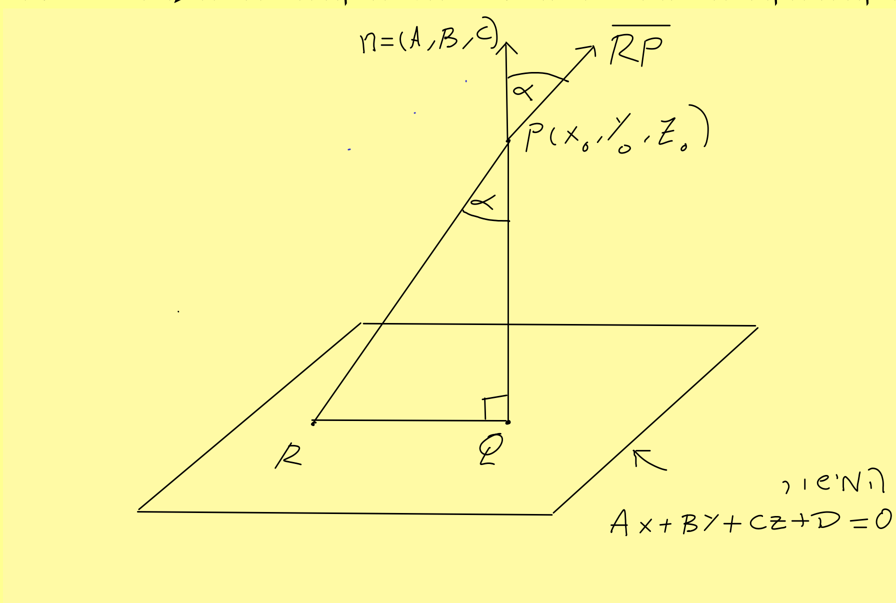
$$3(x-1)+4(y-2)-2(z-3)=0 \qquad\Rightarrow\qquad 3x+4y-2z-5=0 \ .$$

משפט 5.6 מרחק מנקודה למישור

המרחק d מהנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ למישור $Ax+By+Cz+D=0$ הוא

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \ .$$

הנקודה הקרובה ביותר במישור ל- P היא הנקודה שדרכה עובר ניצב למישור שעובר דרך P.



הוכחה: נסמן ב- Q את הנקודה על המישור שהיא הקרובה ביותר ל- P. ממשפט פיתגורס, $\overline{QP}$ מאונך למישור. נקח כל נקודה אחרת R במישור. PQR יוצרות משולש ישר זווית, כך ש- PR היתר ו- PQ קטע קצר מ- PR.

עבור נקודה כלשהי $R(x_1,y_1,z_1)$ על המישור, נסמן ב- α את הזווית בין $\overline{RP}$ ל- n.

$$\begin{aligned}
|\overline{QP}| =& |\overline{RP}|\cos\alpha \\
=& \frac{|\overline{RP}|\cdot|n|\cdot\cos\alpha}{|n|} \\
=& \frac{\overline{RP}\cdot n}{|n|} \\
=& \frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\
=& \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}
\end{aligned}$$

■

דוגמה 5.10

מצאו את המרחק בין $(1,-1,2)$ למישור $2x+y-z+3=0$ ומצאו את הנקודה במישור הקרובה ביותר ל $(1,-1,2)$.

פתרון:

המרחק הוא

$$d=\frac{|2\cdot1+1\cdot(-1)-1\cdot2+3|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\ .$$

הנורמל למישור הוא $(2,1,-1)$. כדי למצוא את הנקודה הקרובה ביותא על המישור, נרכיב את משוואת הישר המקביל לוקטור n שעובר דרך הנקודה $(1,-1,2)$:

$$(x+2t,y+t,z-t)=(1,-1,2)\qquad\Rightarrow\qquad \left.\begin{aligned} x &=1-2t\\ y &=-1-t\\ z &=2+t\end{aligned}\right\}$$

הנקודה (x,y,z) נמצא במישור לכן נציב אותה למשוואת המישור:

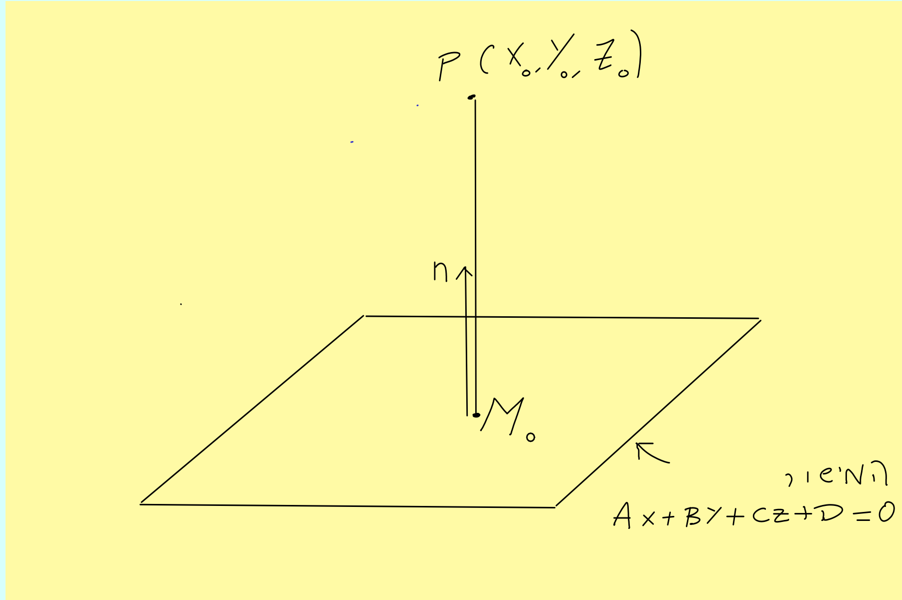
$$2x+y-z+3=0\quad\Rightarrow\quad 2(1-2t)+(-1-t)-(2+t)+3=0\quad\Rightarrow\quad 2-6t=0\quad\Rightarrow\quad t=\frac{1}{3}\ .$$

לכן הנקודה היא

$$(x,y,z)=\left(1-2\cdot\frac{1}{3},-1-\frac{1}{3},2+\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)\ .$$

הגדרה 5.2 היטל של נקודה על מישור

ההיטל של נקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ על מישור $Ax+By+Cz+D=0$ היא הנקודה על המישור הקרובה ביותר ל- P. כלומר, נקודה M_0 כך ש- $\overline{M_0P}$ מקביל לנורמל n למישור.



דוגמה 5.11

מצאו את ההיטל של הנקודה $P(2,-3,4)$ על המישור $x+2y+2z=13$.

פתרון:

הנורמל למישור הוא

$$n=(1,2,2)\ .$$

משוואת הישר הנרמל למישור העובר דרך הנקוה P היא

$$M(t)=(2,-3,4)+t(1,2,2)=(2+t,-3+2t,4+2t)\ .$$

נציב את $M(t)$ במשוואת המישור:

$$1\cdot(2+t)+2\cdot(-3+2t)+2\cdot(4+2t)=13 \quad\Rightarrow\quad 9t+4=13 \quad\Rightarrow\quad 9t=9 \quad\Rightarrow\quad t_0=1\ .$$

לכן הנקודה M_0 היא

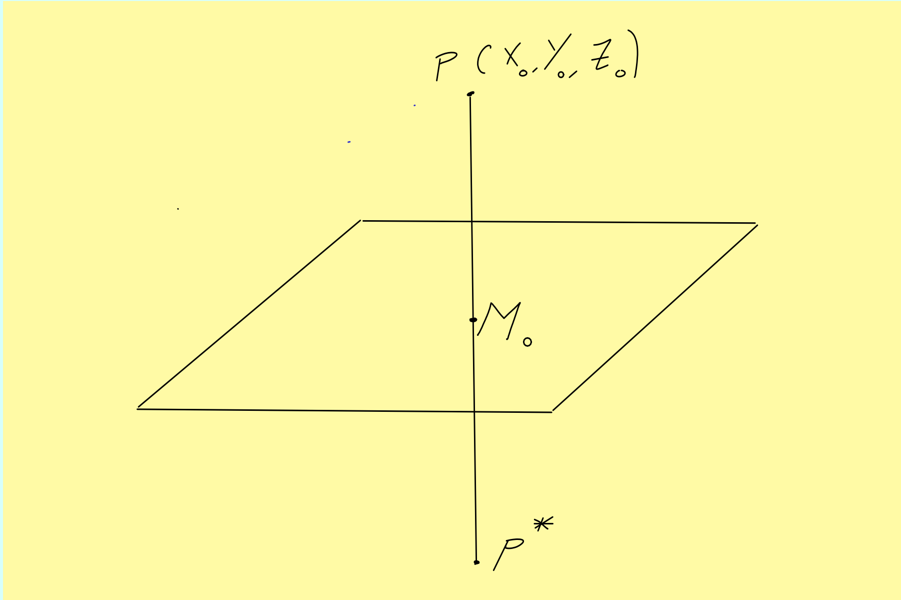
$$M(t_0=1)=(3,-1,6)\ .$$

הגדרה 5.3 השיקוף של נקודה ביחס מישור

השיקוף P^* של נקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ ביחס למישור מוגדר להיות

$$P^*=P-2\overline{M_0P}\ ,$$

כאשר M_0 ההיטל של P על המישור.



שיטה אחרת ויותר קלה:

אם נרשום את הישר העובר את הנקודה P וההיטל שלו במישור בצורה

$$M(t) = P + t \cdot \bar{n}$$

כשאר $\bar{n}$ הנורמל של המישור. נניח ש- t_0 הוא הערך של הפרמטר t בנקודת ההיטל, M_0 של P ביחס למישור. אז השיקוף של P ביחס למישור זו ניתן ע"י

$$P^* = M(2t_0) = P + 2t_0\bar{n}\ .$$

דוגמה 5.12

מצאו את השיקוף של הנקודה $P(2,-3,4)$ ביחס למישור $x + 2y + 2z = 13$.

פתרון:

שיטה 1

מדוגמה הקודמת ההיטל הוא $M_0 = (3,-1,6)$.

$$\overline{M_0P} = (-1,-2,-2)$$

לכן

$$P^* = P - 2(-1,-2,-2) = (2,-3,4) - (-2,-4,-4) = (4,1,8)\ .$$

שיטה 2

מהדוגמה הקודמת הערך של הפרמטר של הישר על הנקודה של ההיטל הוא $t_0 = 1$. לכן השיקוף נמצא בנוקודה

$$P^* = M(2t_0) = M(2) = P + 2\bar{n} = (2,-3,4) + 2(1,2,2) = (4,1,8)\ .$$

5.4 מצבים הדדיים בין שני מישורים

בהינתן שני מישורים $\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1 &= 0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$ ניתן להגדיר להם שלושה מצבים הדדיים: נחתכים, מתלכדים או מקבילים.

1) המישורים נחתכים אם הוקטורים (A_1,B_1,C_1) ו- (A_2,B_2,C_2) לא מקבילים. במצב זה החיתוך בין המישורים הוא קו ישר.

לדוגמה, נתונים שני מישורים $\left.\begin{aligned} 2x-3y+z+1 &= 0 \\ x-z+3 &= 0 \end{aligned}\right\}$. המישורים נחתכים בגלל ש- $(2,-3,1) \nparallel (1,0,-1)$.

2) המישורים מקבילים אם אין להם נקודה משותפת. כלומר אין פתרון למערכת במצב זה. הוקטור (A_1,B_1,C_1) מקביל לוקטור (A_2,B_2,C_2) אבל $\frac{D_2}{A_2} \neq \frac{D_1}{A_1}$ (ניתן להחליף ב- B או C).

לדוגמה, נתונים המישורים $\left.\begin{aligned} 2x-3y+z+1 &= 0 \\ 6x-9y+3z+2 &= 0 \end{aligned}\right\}$. $(6,-9,3) \parallel (2,-3,1)$ אבל $\frac{D_2}{A_2} \neq \frac{D_1}{A_1}$. לכן המישורים מקבילים.

3) המישורים מתלכדים אם כל הנקודות שלהם משותפות במצב זה, הוקטורים (A_1,B_1,C_1) ו- (A_2,B_2,C_2) מקבילים. מספיק שיש רק נקודה אחת משותפת שכן מישור נקבע ע"י נקודה ווקטור ניצבו.

לדוגמה, נתונים שני מישורים $\left.\begin{aligned} 2x-3y+z+1 &= 0 \\ -4x+6y-2z-2 &= 0 \end{aligned}\right\}$. המישורים מתלכדים בגלל ש- $(-4,6,-2) \parallel (2,-3,1)$ והנקודה $(0,0,-1)$ נקודה משותפת.

5.5 משפטים נוספים

משפט 5.7 שטח משולש במישור xy

שטחו S של המשולש אשר קדקודיו הם בנקודות (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) הוא

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

משפט 5.8 מרחק מנקודה למישור

המרחק d מהנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ למישור $Ax+By+Cz+D=0$ הוא

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

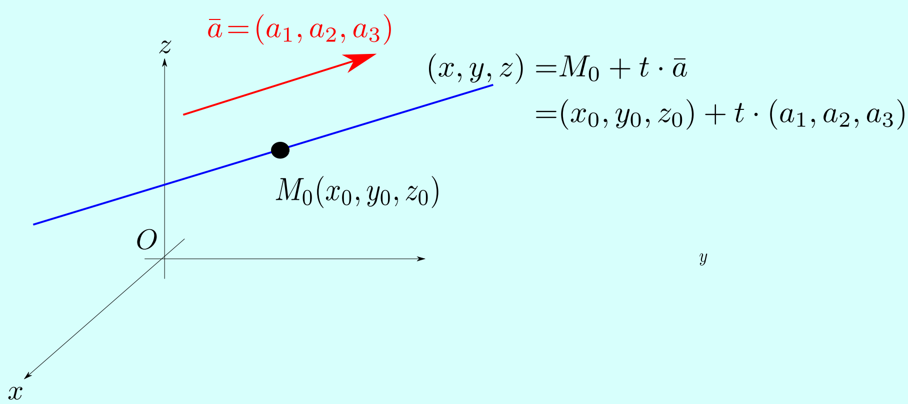
משפט 5.9 נפח הפירמידה המשולשת במרחב xyz

הנפח V של הפירמידה המשולשת אשר קדקודיה הם בנקודות (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4), הוא

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

שיעור 6
ישרים במרחב תלת ממדי

הגדרה 6.1 משוואת הישר בצורה פרמטרית



משוואת הישר העובר דרך הנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$ במקביל לוקטור $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, הוא

$$(x,y,z)=M_0+t\cdot\bar{a}=(x_0,y_0,z_0)+t(a_1,a_2,a_3)\ ,$$

או באופן שקול

$$x=x_0+a_1t\ ,\qquad y=y_0+a_2t\ ,\qquad z=z_0+a_3t\ .$$

הווקטור $\bar{a}$ נקרא וקטור הכיוון, הקואורדינטות (a_1,a_2,a_3) נקראות קואורדינטות הכיוון של הישר.

דוגמה 6.1

חשבו את משוואת הישר העובר דרך הנקודה $(2,1,3)$ במקביל לוקטור $(6,7,1)$.

פתרון:

$$\left.\begin{aligned} x&=2+6t\\ y&=1+7t\\ z&=3+t\end{aligned}\right\}$$

$$(x,y,z)=(2,1,3)+t\cdot(6,7,1)\ .$$

דוגמה 6.2

הישר

$$\left.\begin{aligned} x&=t\\ y&=5-2t\\ z&=5-3t\end{aligned}\right\}$$

$$(x,y,z)=(0,5,5)+t\cdot(1,-2,-3)$$

עובר דרך $M_0(0,5,5)$ במקביל לוקטור $\bar{a}=(1,-2,-3)$.

כלל 6.1 משוואת הישר בצורה קנונית

משוואת הישר העובר דרך נקודה נתונה $M_0(x_0,y_0,z_0)$ במקביל לוקטור נתון, $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ בצורה קנונית היא

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}\ .$$

- אם המקדם של x שווה אפס, כלומר אם $a_1=0$, נחליף את החלק שלו במשוואה ע"י

  $$x=x_0\ .$$

  ז"א הישר מוכל במישור של $x=x_0$.
- אם המקדם של y שווה אפס, כלומר אם $a_2=0$, נחליף את החלק שלו במשוואה ע"י

  $$y=y_0\ .$$

  ז"א הישר מוכל במישור של $y=y_0$.
- אם המקדם של z שווה אפס, כלומר אם $a_3=0$, נחליף את החלק שלו במשוואה ע"י

  $$z=z_0\ .$$

  ז"א שהישר מוכל במישור של $z=z_0$.
- במקרה ששניהם מהמקדמים הם אפס, למשל $a_1=a_2=0$, הישר נתון ע"י

  $$\left.\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \end{aligned}\right\}$$

  כלומר הישר מקביל לציר ה- z.

דוגמה 6.3

חשבו את משוואת הישר העובר דרך הנקודה $(4,4,-1)$ במקביל לוקטור $(2,-2,7)$ בצורה קנונית.

פתרון:

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+1}{7}\ .$$

דוגמה 6.4

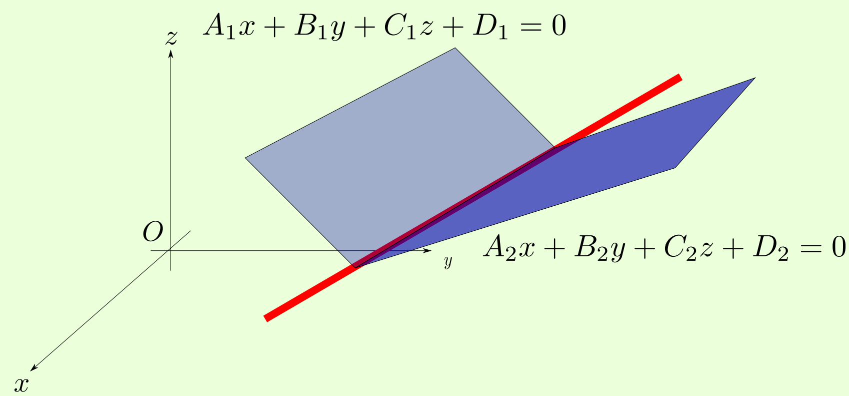
חשבו את משוואת הישר המקביל לוקטור $\bar{a}=(0,1,2)$ העובר דרך הנקודה $M_0(2,3,5)$

פתרון:

נתון ע"י

$$x = 2 \ , \qquad y - 3 = \frac{z-2}{5} \ .$$

כלל 6.2 ישר כחיתוך של שני מישורים



בהינתן שני מישורים

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \ , \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \ , \end{aligned}$$

שאינם מתלכדים או מקבילים קובעים את הישר שבו הם מפגשים. צמד המשוואות של שני המישרים נקרא **משוואה כללית של הישר** .

מכיון שיש שתי משוואות בשלושה נעלמים, אז הפתרון יהיה בצורה קבוצה של אינסוף פתרונות באמצעות פרמטר חופשי, אשר הוא דווקא הפרמטר המופיע במשוואה פרמטרית של הישר.

דוגמה 6.5

מצאו את הישר הנתון ע"י המערכת

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2x + y - 5 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

פתרון:

<u>שיטה 1</u>

$$y = 5 - 2x \quad \Rightarrow \quad z = y - x = 5 - 3x$$

נציב $x = t$ ונקבל

$$\left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= 5 - 2t \\ z &= 5 - 3t \end{aligned}\right\}$$

קיבלנו את משוואת הישר.

<u>שיטה 2</u>

הישר מוכל בשני המישורים ולכן ניצב לוקטור $\bar{a}=(1,-1,1)$ וגם לוקטור $\bar{b}=(2,1,0)$. לכן, הוא מקביל לוקטור

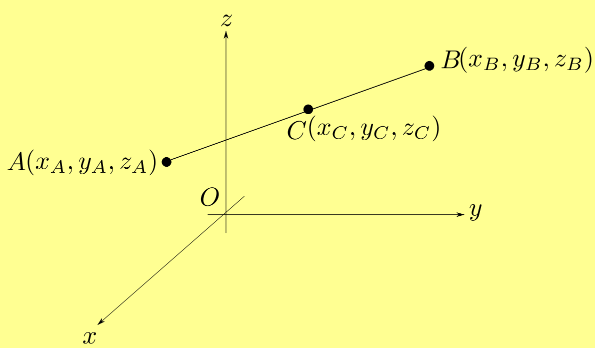
$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-1,2,3)\ .$$

כדי למצוא נקודה על הישר, נציב ערכים במשוואה. למשל, אם נציב $x_0=1$ נקבל $y_0=3$ ו- $z_0=2$. לכן הישר נתון ע"י

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{3}\ .$$

משפט 6.1 חלוקה של וקטור ביחס נתון

$$\frac{AC}{CB}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\ .$$



$$x_c=\frac{\lambda_2x_A+\lambda_1x_B}{\lambda_1+\lambda_2}\ ,\qquad y_c=\frac{\lambda_2y_A+\lambda_1y_B}{\lambda_1+\lambda_2}\ ,\qquad z_c=\frac{\lambda_2z_A+\lambda_1z_B}{\lambda_1+\lambda_2}\ .$$

דוגמה 6.6

מצאו נקודה C המחלקת את הקטע AB ביחס $\frac{2}{3}=\frac{AC}{BC}$, כאשר $A(1,2,3)$, $B(7,0,5)$.

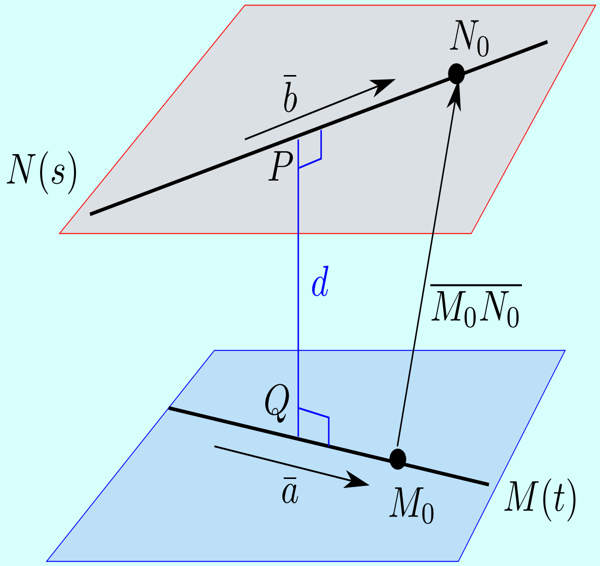
פתרון:
$\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$,

$$\begin{aligned} x &= \frac{3\cdot1+2\cdot7}{3+2}=\frac{17}{5} \\ y &= \frac{3\cdot2+2\cdot0}{3+2}=\frac{6}{5} \\ z &= \frac{3\cdot3+2\cdot5}{3+2}=\frac{19}{5}\ . \end{aligned}$$

לכן $C=\left(\frac{17}{5},\frac{6}{5},\frac{19}{5}\right)$.

הגדרה 6.2 מרחק בין ישרים מצטלבים

יהיו $M(t):\quad (x,y,z)=M_0+t\bar{a}$, $N(t):\quad (x,y,z)=N_0+t\bar{b}$ ישרים מצטלבים. המרחק ביניהם מוגדר להיות המרחק בין השתי נקודות P ו- Q, הקרובות ביותר על הישרים.



ניתן לחשב את המרחק d ע"י לבחור כל שתי נקודות M_0 ו- N_0 על השני ישרים לפי הנוסחה:

$$d=\frac{\overline{M_0N_0}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})}{|\bar{a}\times\bar{b}|}\ .$$

דוגמה 6.7

מצאו את המרחק בין הישרים $(x,y,z)=(2-t,t,t)$ ו- $(x,y,z)=(t,4-t,0)$.

פתרון:

$$\bar{a}=(-1,1,1)\ ,\qquad \bar{b}=(1,-1,0)\ .$$

$$M_0=(2,0,0)\ ,\qquad N_0=(0,4,0)\ ,\qquad \overline{M_0N_0}=(-2,4,0)\ .$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=(1,1,0)\ ,\qquad \overline{M_0N_0}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})=2\ .$$

$|\bar{a}\times\bar{b}|=\sqrt{2}$ לכן

$$d=\frac{\overline{M_0N_0}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})}{|\bar{a}\times\bar{b}|}=\sqrt{2}\ .$$

משפט 6.2 מצב ההדדי בין שני ישרים במרחב

(1) נתונים שני ישרים

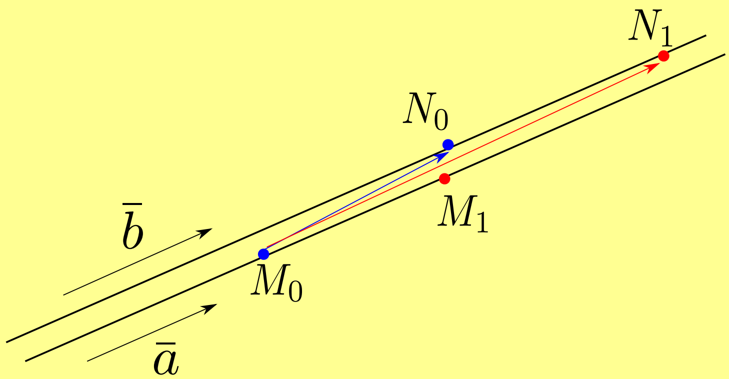
$$M(t):\qquad (x,y,z)=M_0+t\cdot\bar{a}=(x_0,y_0,z_0)+t\cdot(a_1,a_2,a_3)$$

$$N(s):\qquad (x,y,z)=N_0+s\cdot\bar{b}=(X_0,Y_0,Z_0)+s\cdot(b_1,b_2,b_3)$$

ונתון שתי נקודות M_1,M_2 על הישר $M(t)$ ושתי נקודות N_1,N_2 על הישר $N(t)$. ישנן ארבע אפשרויות למצב ההדדי ביניהם:

(2) **מתלכדים** אם

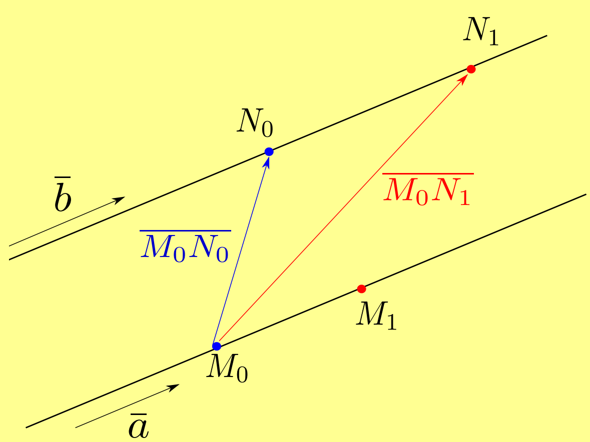
$(a_1,a_2,a_3) \parallel (b_1,b_2,b_3)$ ו- $\overline{M_0N_0} \times \overline{M_0N_1} = \bar{0}$ אז הישרים מתלכדים.



(3) **מקבילים** אם

$(a_1,a_2,a_3) \parallel (b_1,b_2,b_3)$ ו- $\overline{M_0N_0} \times \overline{M_0N_1} \neq \bar{0}$ אז הישרים מקבילים.

הישרים נמצאים באותו מישור.



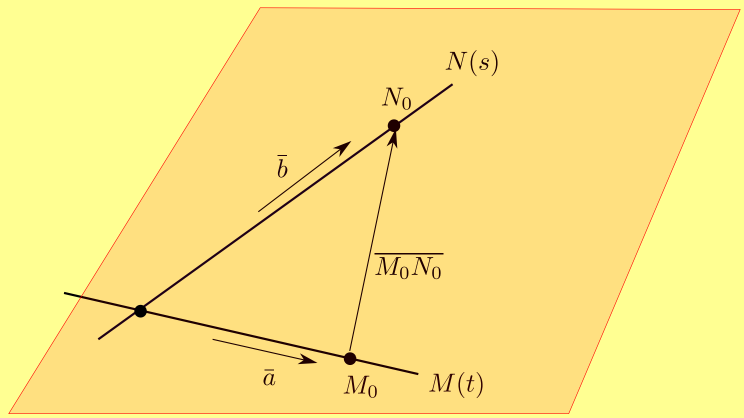
(4) **נחתכים** אם

$(a_1,a_2,a_3) \nparallel (b_1,b_2,b_3)$ ו-

$$d = \frac{\overline{M_0N_0} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})}{\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|} = 0 \ ,$$

כלומר והמרחק בין הישרים שווה לאפס, אז הישרים נחתכים.

הישירם נמצאים במישור באותו מישור ולכן הם נחתכים.



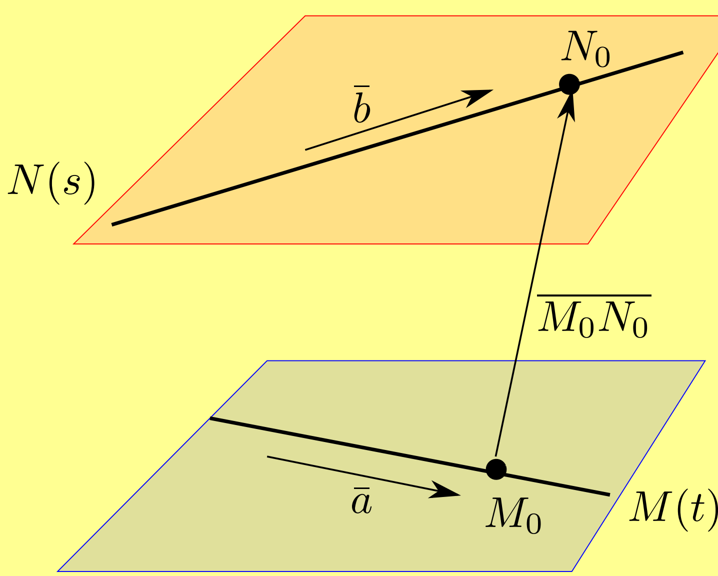
(5) <u>מצטלבים</u>

אם $(b_1,b_2,b_3) \nparallel (a_1,a_2,a_3)$ ו-

$$d = \frac{\overline{M_0N_0}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})}{\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|} \neq 0 \ ,$$

כלומר והמרחק בין הישרים אינו שווה לאפס, אז הישרים מצטלבים.

הישירם אינם נמצאים באותו מישור ולכן הם מצטלבים.



דוגמה 6.8

קבעו את המצב ההדדי של הישרים

$$\left.\begin{array}{ll} M(t): & (1,2,3)+t(1,-1,1) \\ N(t): & (0,2,1)+t(-1,1,-1) \end{array}\right\}$$

פתרון:
הווקטורים הכיוון שלהם הם $\bar{a}=(1,-1,1)$ ו- $\bar{b}=(-1,1,-1)$. הישרים מקבילים או מתלכדים בגלל שהווקטורים הכיוום שלהם מקבילים: $(1,-1,1)\parallel(-1,1,-1)$. נבדוק אם הם נחתכים.

$$M_0=(1,2,3)\ ,\qquad N_0=(0,2,1)\ ,\qquad N_1=(-1,3,0)\ .$$

$$\overline{M_0N_0}=(-1,0,-2)\ ,\qquad \overline{M_0N_1}=(-2,1,-3)\ .$$
$$\overline{M_0N_0}\times\overline{M_0N_1}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & 0 & -2\\ -2 & 1 & -3\end{vmatrix}=(2,1,-1)\neq\bar{0}$$

לכן הישרים מקבילים.

דוגמה 6.9

קבעו את המצב ההדדי של הישרים

$$\left.\begin{array}{ll} M(t): & (x,y,z)=(1-t,2+3t,-2+t)\\ N(t): & (x,y,z)=(4-2t,1-t,t)\end{array}\right\}$$

פתרון:
כאן $\bar{a}=(-1,3,1)$ $\bar{b}=(-2,-1,1)$.
הישרים נחתכים או מצטלבים בגלל ש- $\bar{a}\nparallel\bar{b}$.

$$M_0=(1,2,-2)\ ,\qquad N_0=(4,1,0)\ ,\qquad \overline{M_0N_0}=(3,-1,2)\ .$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & 3 & 1\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}=(4,-1,7)$$

לכן

$$\overline{M_0N_0}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})=27\ .$$

לכן $d=\dfrac{\overline{M_0N_0}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})}{|\bar{a}\times\bar{b}|}\neq 0$ ולכן הישרים ממצטלבים.

דוגמה 6.10

קבעו את המצב ההדדי של הישרים

$$\left.\begin{array}{lll} M(t) & : & (x,y,z)=(t,3-t,4-3t)\\ N(t) & : & (x,y,z)=(1-t,2+t,2t)\end{array}\right\}$$

פתרון:
$(-1,1,2)\nparallel(1,-1,-3)$. נבדוק אם יש נקודת חיתוך:
$\bar{a}\nparallel\bar{b}$.

$$M_0=(0,3,4)\ ,\qquad N_0=(1,2,0)\ ,\qquad \overline{M_0N_0}=(1,-1,-4)\ .$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -1 & -3\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=(1,1,0)$$

לכן
$$\overline{M_0N_0}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})=0\ .$$

לכן $d=\dfrac{\overline{M_0N_0}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})}{|\bar{a}\times\bar{b}|}=0$. לכן הישירים נחתכים.

$$\left.\begin{array}{rl} t &= 1-s \\ 3-t &= 2+s \\ 4-3t &= 2s \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{array}{rl} t+s &= 1 \\ t+s &= 1 \\ 3t+2s &= 4 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad t=2\ ,s=-1\ .$$

$\Leftarrow$ הנוקודת חיתוך היא $P(2,1,-2)$.

משפט 6.3 מצב הדדי בין ישר למישור

בהינתן מישור $Ax+By+Cz+D=0$ וישר $M(t):(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t\cdot(a_1,a_2,a_3)$ יש ביניהם שלושה מצבים הדדיים אפשריים:

(א) הישר מוכל במישור

$$(A,B,C)\perp(a_1,a_2,a_3) \qquad\Rightarrow\qquad (A,B,C)\cdot(a_1,a_2,a_3)=0\ .$$

וכל הנקודות של הישר נמצאות גם על המישור. מספיק שיהיו שתי נקודות.

(ב) הישר מקביל למישור

$$(A,B,C)\perp(a_1,a_2,a_3) \qquad\Rightarrow\qquad (A,B,C)\cdot(a_1,a_2,a_3)=0\ .$$

ואין להם נקודה משותפת.

(ג) הישר נחתך עם המישור

$$(A,B,C)\not\perp(a_1,a_2,a_3) \qquad\Rightarrow\qquad (A,B,C)\cdot(a_1,a_2,a_3)\neq 0\ .$$

הווקטור הכיוון של הישר לא ניצב למישור ויש להם נקודה אחת משותפת.

דוגמה 6.11

מהו המצב הדדי בין הישר $x+4=\dfrac{y-1}{2}=-(z+1)$ והמישור $2x+3y-z-5=0$.

פתרון:

הווקטור הכיוון של הישר הוא $\bar{a}=(1,2,-1)$ והנורמל של המישור הוא $n=(2,3,-1)$. נחשב את המכפלה הסקלרית:
$$(1,2,-1)\cdot(2,3,-1)=9\neq 0$$

$\Leftarrow$ הישר והמישור נחתכים. נחשב את הנקודת החיתוך: נציב נקודה כללית של הישר

$$\left.\begin{array}{rl} x &= -4+t \\ y &= 1+2t \\ z &= -1-t \end{array}\right\}$$

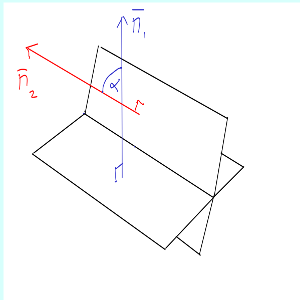
במשוואת המישור:

$$2(-4+t)+3(1+2t)-(-1-t)-5=0 \quad\Rightarrow\quad 9t=9 \quad\Rightarrow\quad t=1 \quad\Rightarrow\quad (x,y,z)=(-3,3,-2)\ .$$

הגדרה 6.3 זווית בין מישורים וישרים

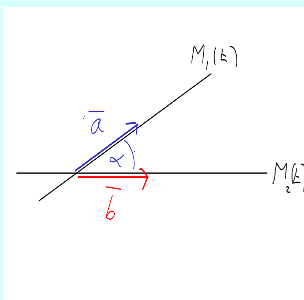
(א) הזווית בין שני מישורים מוגדרת להיות הזוית בין הווקטורים הנורמלים שלהם.

$$\cos\alpha = \frac{|\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2|}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|}$$



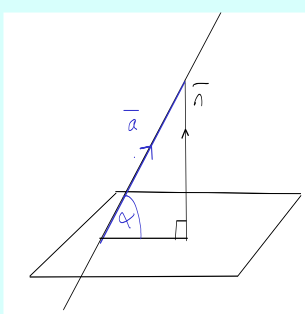
(ב) הזוית בין שני ישירים גם מצטלבים מוגדרת להיות הזוית ביו וקטורים הכיוון שלהם.

$$\cos\alpha = \frac{|\bar{a} \cdot \bar{b}|}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$$



(ג) הזוית בין מישור לישר מוגדרת להיות הזוית המשלימה לזוית בין הנורמל של המישור ווקטור הכיוון של הישר.

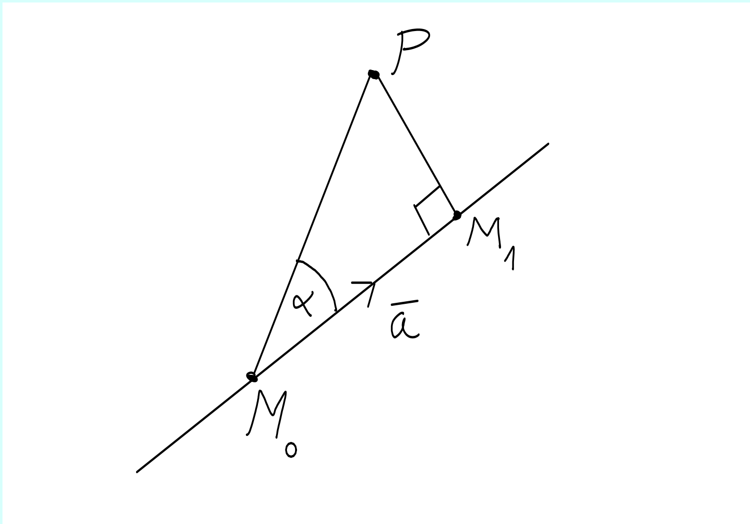
$$\sin\alpha = \frac{|\bar{a} \cdot \bar{n}|}{|\bar{a}| \cdot |\bar{n}|}$$



הגדרה 6.4 מרחק בין נקודה לישר

הנקודה הקרובה ביותר M_1 על הישר ל- P תהיה נקודה שבה $\overline{M_1P}$ ניצב ל- $\bar{a}$. ואז

$$d = |\overline{M_1P}| = |\overline{M_0P}|\sin\alpha = \frac{|\overline{M_0P}\times\bar{a}|}{|\bar{a}|}$$



דוגמה 6.12

מצאו את המרחק בין הישר $(x,y,z)=(2-t,3+t,1-2t)$ לנקודה $P=(0,1,0)$, ואת הנקודה על הישר הקרובה ביותר לנקודה P.

פתרון:

נקח את M_0 להיות הנקודה על הישר כאשר $t=0$. $M_0=(2,3,1)$. אז

$$\overline{M_0P}=(0,1,0)-(2,3,1)=(-2,-2,-1)\ .$$

וקטור הכיוון של הישר הוא

$$\bar{a}=(-1,1,-2)\ .$$

לכן המרחק בין הישר $M(t)$ לנקודה P הוא

$$d=\frac{|(-2,-2,-1)\times(-1,1,-2)|}{|(-1,1,-2)|}=\frac{|(5,-3,-4)|}{|(-1,1,-2)|}=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}}\ .$$

נמצא את הנקודה M_1 על הישר הקרובה ביותר ל- P. נפתור את המערכת

$$\overline{M(t)P}\perp\bar{a}\qquad\Rightarrow\qquad\overline{M(t)P}\cdot\bar{a}=0\ .$$

בדוגמה שלנו:

$$\overline{M(t)P}=(0,1,0)-(2-t,3+t,1-2t)=(-2+t,-2-t,-1+2t)$$

לכן

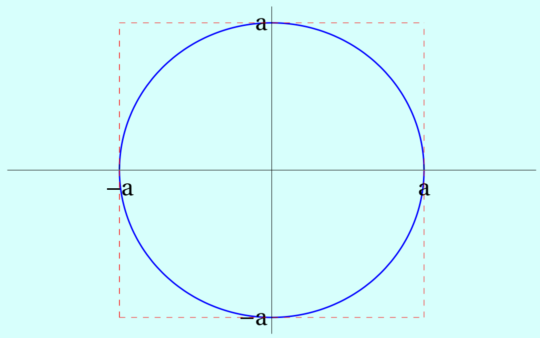
$$\overline{M(t)P}\cdot\bar{a}=0\quad\Rightarrow\quad(-2+t,-2-t,-1+2t)\cdot(-1,1,-2)=0\quad\Rightarrow\quad 2-t-2-t+2-4t=2-6t=0$$

לכן $t=\frac{1}{3}$. לכן הנקודה הקרובה ביותר ל- P היא

$$M_1=\left(\frac{5}{3},\frac{10}{3},\frac{1}{3}\right)\ .$$

שיעור 7
חתכי חרוט, משטחים וקווי גובה

הגדרה 7.1 מעגל

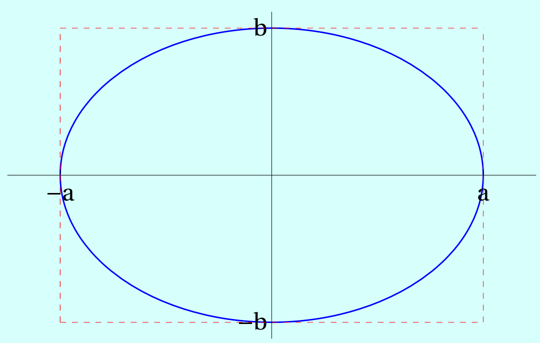


תחום הגדרה:

$$x^2+y^2=a^2\ .$$

$$-\infty\leq x\leq\infty \qquad -\infty\leq y\leq\infty$$

הגדרה 7.2 אליפסה

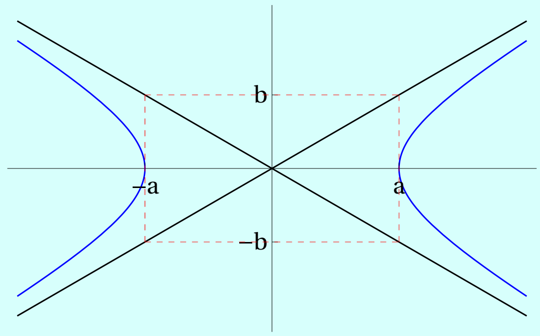


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ .$$

תחום הגדרה:

$$-\infty\leq x\leq\infty \qquad -\infty\leq y\leq\infty$$

הגדרה 7.3 היפרבולה 1

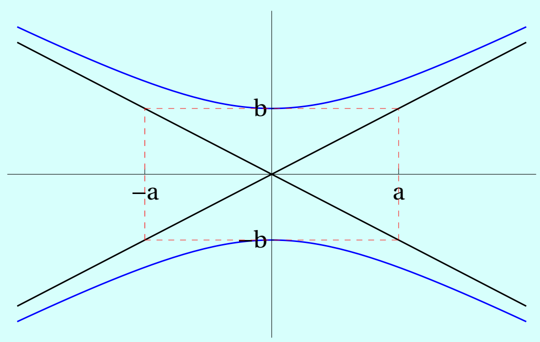


$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ .$$

תחום הגדרה:

$$x\geq a\ ,\quad x\leq -a\ ,\qquad -\infty\leq y\leq \infty$$

הגדרה 7.4 היפרבולה 2



$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ .$$

תחום הגדרה:

$$-\infty\leq x\leq \infty\qquad y\geq b\ ,\quad y\leq -b\ .$$

הגדרה 7.5 קווי גובה

קו גובה הינו קו החתך של המשטח ע"י המישור האופקי $z=c$ כאשר $c\in\mathbb{R}$ מספר קבוע. מבחינה אנליטית: קו גובה $L_{f,c}$ של $f(x,y)$ הינו עקום המוגדר במישור xy ע"י המשוואה

$$f(x,y)=c\ .$$

דוגמה 7.1 פרבולויד של סיבוב מסביב ציר z

שרטטו את המשטח של הפונקציה

$$z=x^2+y^2\ .$$

פתרון:

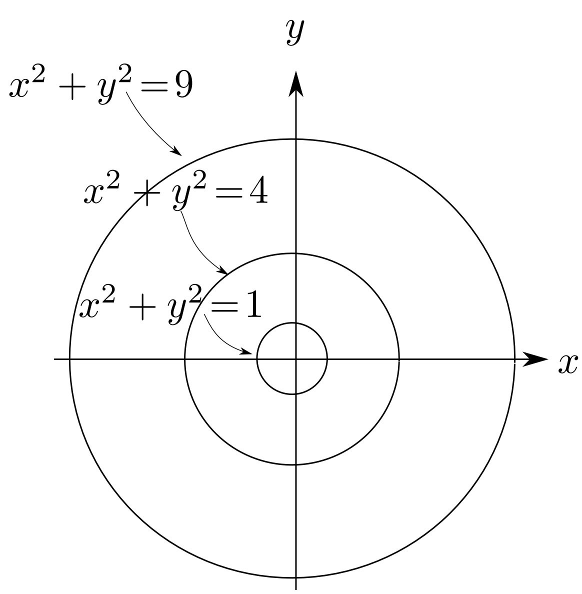
שלב 1. תחום הגדרה

$$z \geq 0 \ , \qquad -\infty \leq x \leq \infty \ , \qquad -\infty \leq y \leq \infty \ .$$

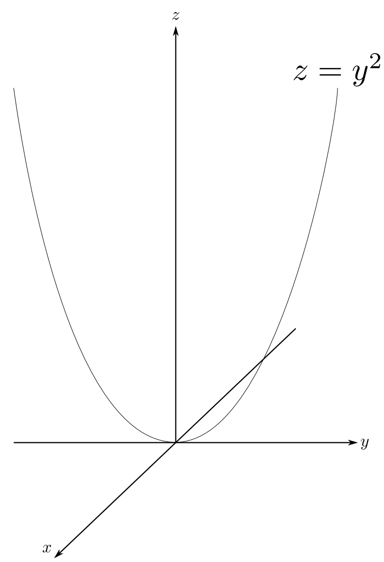
כלומר המשטח מוגדר רק מעל המישור $z=0$.

שלב 2. קווי הגובה

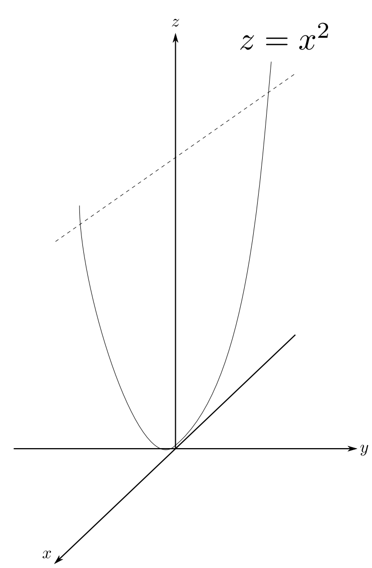
$f(x,y)=c$	$z=c$
$x^2+y^2=0$	$z=0$
$x^2+y^2=1$	$z=1$
$x^2+y^2=4$	$z=4$
$x^2+y^2=9$	$z=9$
$x^2+y^2=16$	$z=16$



שלב 3. שרטוט במישור $x=0$.

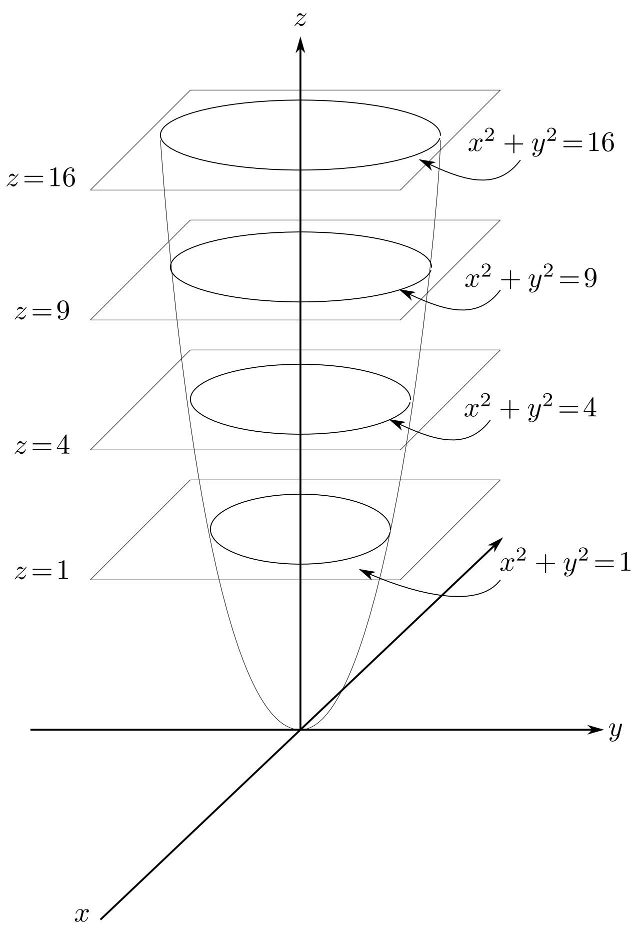


שלב 4. שרטוט במישור $y = 0$.



שלב 5. שרטוט של כל המשטח במערכת xyz

בסך הכל ניתן לשרטט את המשטח ע"י להשתלב את השרטוטים:



דוגמה 7.2 מעשנה כפולה

שרטטו את המשטח של הפונקציה

$$z=\sqrt{x^2+y^2-9}\ , \qquad z\geq 0\ .$$

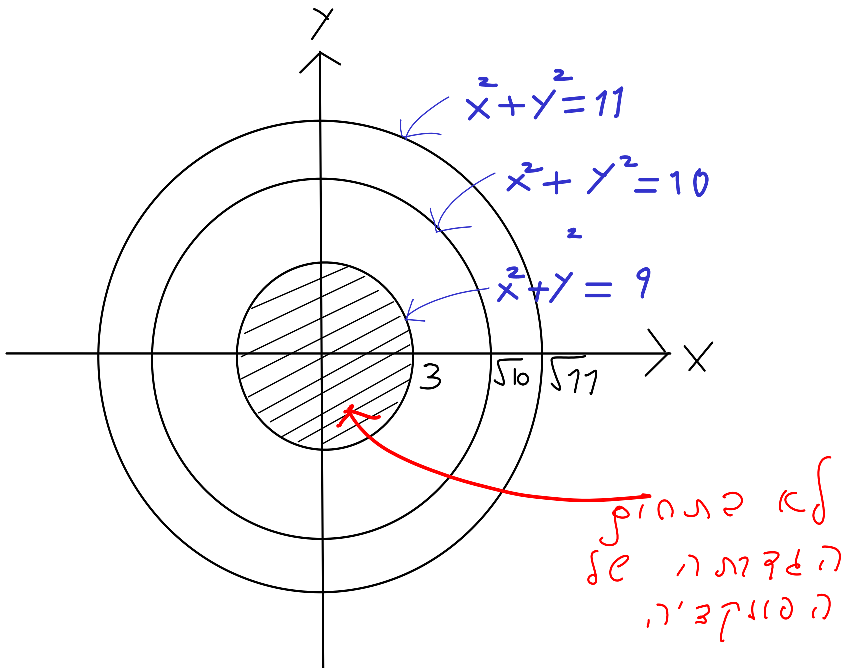
פתרון:

שלב 1. תחום הגדרה

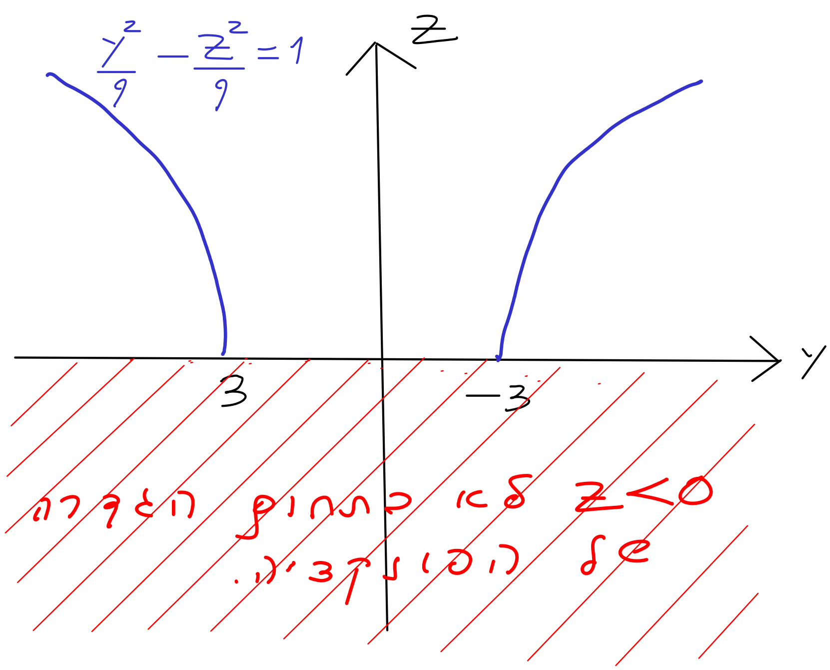
$$x^2+y^2\geq 9$$

שלב 2. קווי הגובה

$z=c$	$f(x,y)=c$
$z=0$	$x^2+y^2=9$
$z=1$	$x^2+y^2=10$
$z=2$	$x^2+y^2=11$



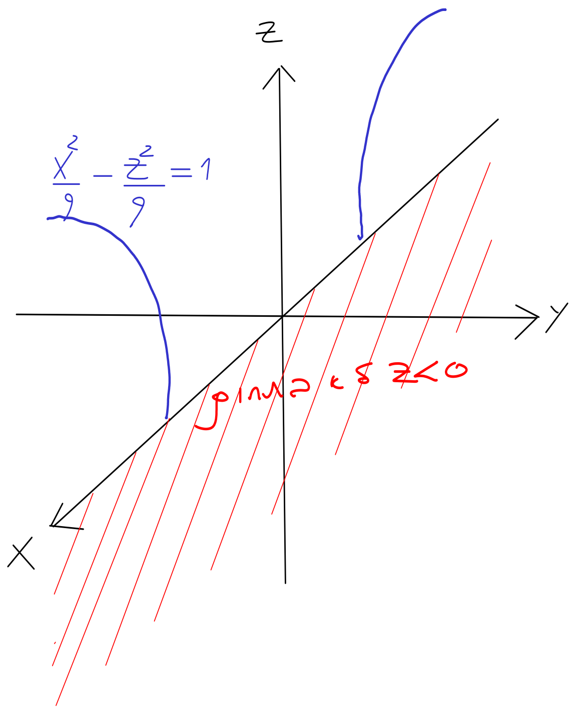
שלב 3. שרטוט במישור $x=0$.



$$\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{9}=1$$

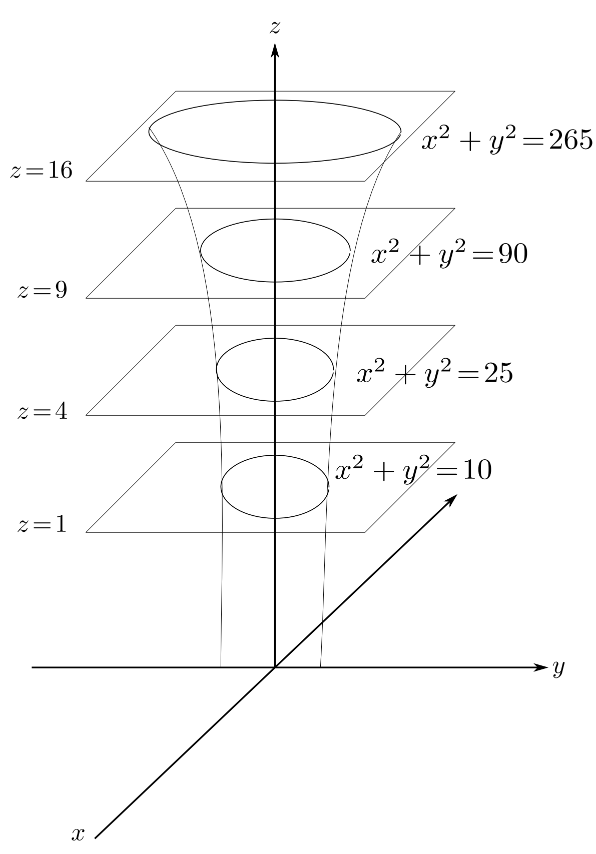
שלב 4. שרוטו במישור $y=0$.

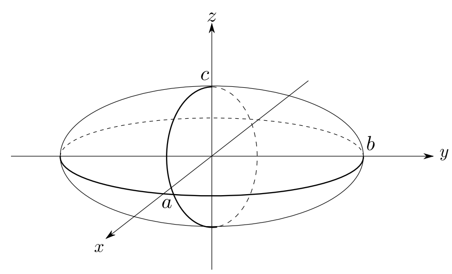
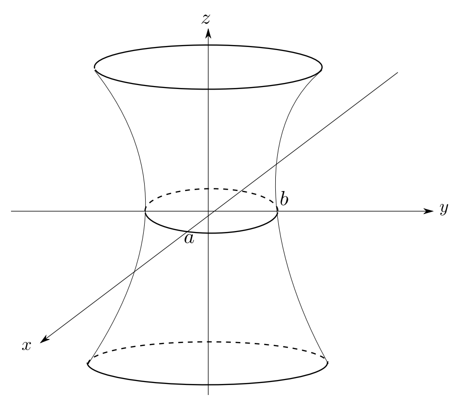
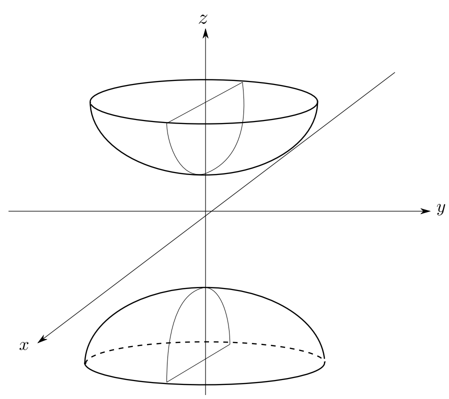
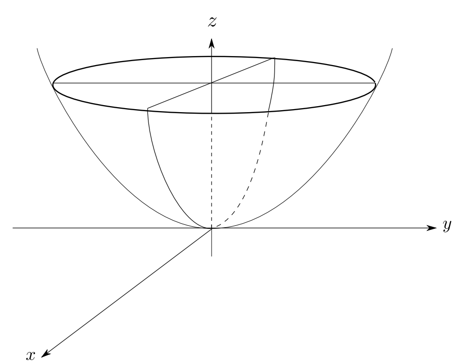
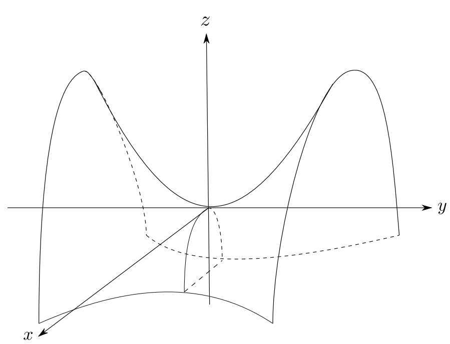
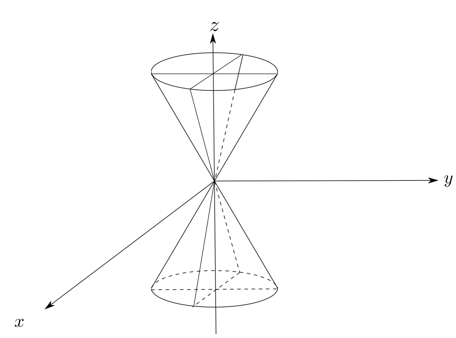
$$\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{9}=1$$



שלב 5. שרטוט של המשטח

בסך הכל ניתן לשרטט את המשטח ע"י להשתלב את השרטוטים:



אליפסויד: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		ספירה $(a=b=c=r)$ $x^2+y^2+z^2=r^2$
היפרבולויד:	חד יריעתי: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 	דו יריעתי: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 
פרבולויד:	אליפטי: $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 	היפרבולי: $z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 
חרוט אליפטי: $z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$		

שיעור 8
גבולות ונגזרות חלקיות

8.1 תחום של פונקציה בכמה משתנים

הגדרה 8.1 פונקציה בשני משתנים ופונקציה בשלושה משתנים

פונקציה בשני משתנים זו פונקציה $f : D \to \mathbb{R}$ כאשר $D \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום ב- $\mathbb{R}^2$.

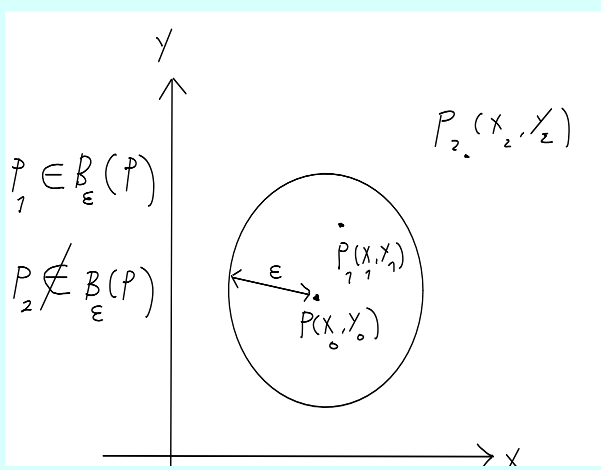
פונקציה בשלושה משתנים זו פונקציה $f : D \to \mathbb{R}$ כאשר $D \subseteq \mathbb{R}^3$ תחום ב- $\mathbb{R}^3$.

הגדרה 8.2 כדור פתוח סביב נקודה

נתונה נקודה $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ונתון $\varepsilon > 0$, **כדור פתוח סביב הנקודה** P או **סביבה של נקודה** P מוגדר להיות הקבוצה של כל הנקודות $P' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ כך שהמרחק בין P ו- P' קטן מ- ε:

$$B_\varepsilon(P) = \left\{ P' \middle| d(P, P') < \varepsilon \right\} \ , \qquad \varepsilon > 0$$

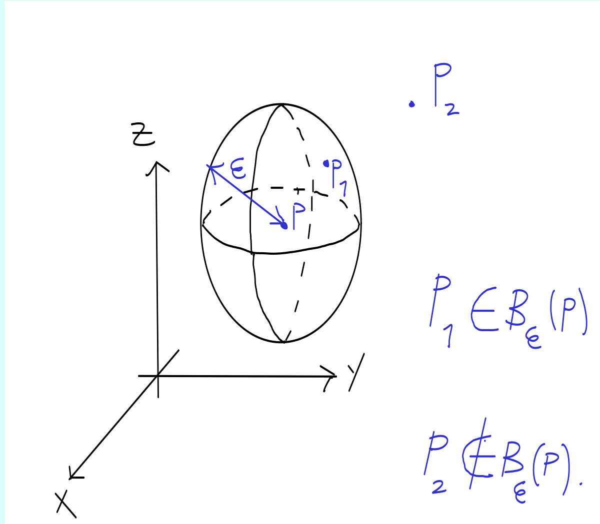
כאשר $d(P, P')$ פונקציה המרחק: $d(P, P') = |(x - x')^2 + (y - y')^2|^{1/2}$.



מאותה מידה, נתונה נקודה $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ונתון $\varepsilon > 0$, כדור פתוח סביב הנקודה P מוגדר להיות הקבוצה של כל הנקודות $P' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ כך שהמרחק בין P ו- P' קטן מ- ε:

$$B_\varepsilon(P) = \left\{ P' \middle| d(P, P') < \varepsilon \right\} \ , \qquad \varepsilon > 0$$

כאשר $d(P, P')$ פונקציה המרחק: $d(P, P') = |(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2|^{1/2}$.

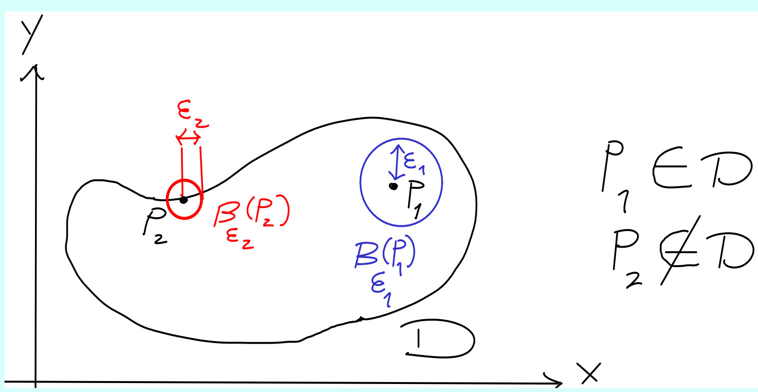


הגדרה 8.3 תחום פתוח

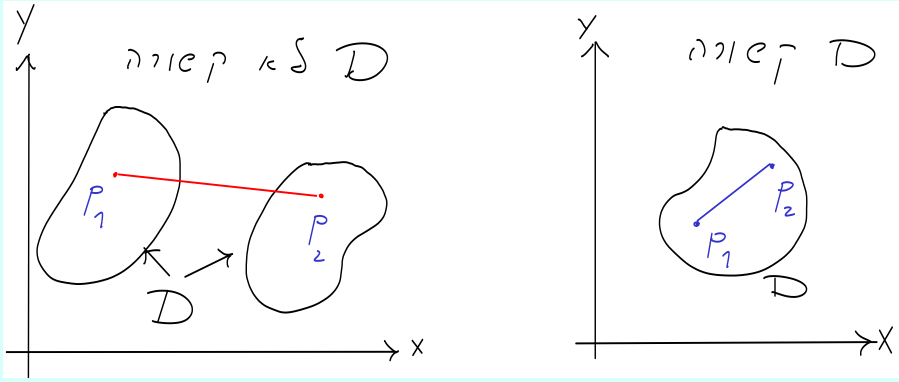
קבוצה פתוחה D הוא קבוצה, כך שלכל נקודה ב- D, יש סביבה כך שכל הנקודות של סביבה זו מוכלות ב- D.

בפרט, לכל נקודה P_1 בפנים של D קיימת סביבה של P_1 (כלומר כדור סביב הנקודה P_1) כך שכל נקודה בסביבה של P_1 מוכלת ב- D. לעומת זאת, נקודה P_2 כלשהי על הפשה של D לא בקבוצה פתוחה D עצמה, בגלל שלא קיימת אף סביבה של P_2 כך שכל נקודה בסביבתה היא ב- D.

לכן קבוצה פתוחה D כוללת את כל הנקודות בפנים של D אבל לא כוללת את הנקודות על השפה של D.



קבוצה קשירה היא קבוצה כך שכל שתי נקודות ב- D ניתן לחבר ע"י קו שמוכל ב- D.



תחום פתוח הוא קבוצה פתוחה וקשירה.

תחום סגור הוא האיחוד של תחום פתוח והנקודות על השפה.

דוגמה 8.1

$x^2+y^2<1$ תחום פתוח.

$x^2+y^2\leq 1$ תחום סגור.

$\begin{cases} 0<x<1 \\ 0<y<1 \end{cases}$ תחום פתוח.

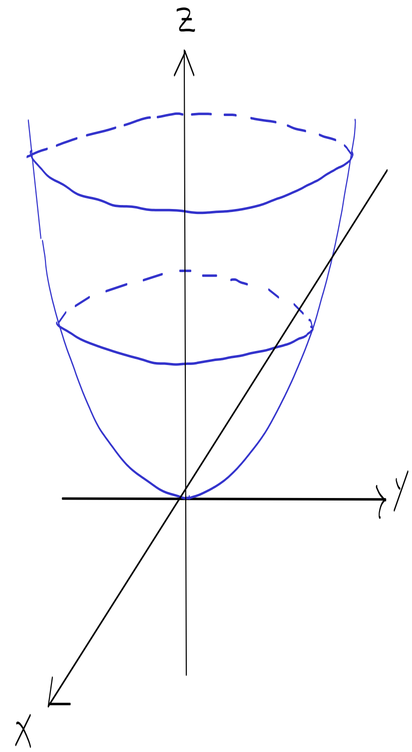
$\begin{cases} 0\leq x\leq 1 \\ 0\leq y\leq 1 \end{cases}$ תחום סגור.

דוגמה 8.2

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x,y,z)=\ln(z-x^2-y^2)$ ושרטטו אותו.

פתרון:

$$D=\{(x,y,z)|z-x^2-y^2>0\}=\{(x,y,z)|z>x^2+y^2\}\ .$$



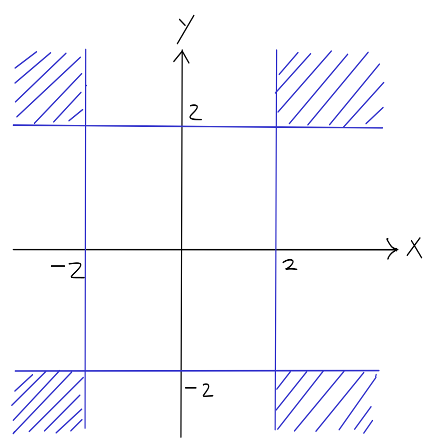
תחום ההגדרה של הפונקציה הוא התחום שמעל הפרבולואיד המעגלי $z = x^2 + y^2$.

דוגמה 8.3

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{y^2 - 4}$. ושרטטו אותו.

פתרון:

$$D = \{(x,y)|x^2 > 4\ ,\ y^2 > 4\} = \{(x,y)\,|\{x < -2 \cup x > 2\} \cap \{y < -2 \cup y > 2\}\}\ .$$



תחום ההגדרה של הפונקציה הוא התחום שמעל הפרבולואיד המעגלי $z = x^2 + y^2$.

8.2 גבול של פונקציה בכמה משתנים

הגדרה 8.4 גבול של פונקציה בכמה משתנים

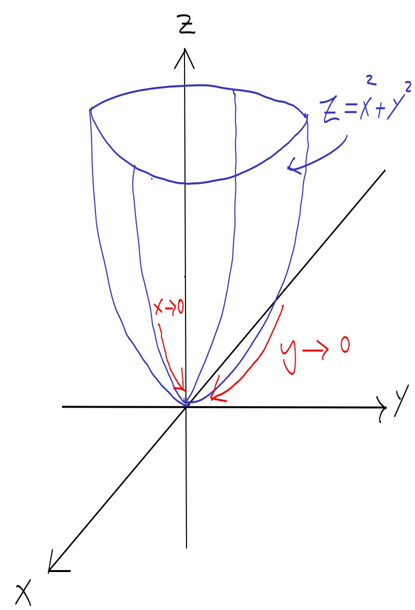
יהיו $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה ו- D תחום פתוח. תהי $P_0 = (x_0, y_0) \in D$. נסמן ב- $P(x, y)$ נקודה כללית ב- D. אומרים כי הגבול של $f(P)$ ב- P_0 הוא L אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $|P - P_0| > \delta$ מתקיים

$$|f(P) - L| < \varepsilon \ .$$

דוגמה 8.4

חשבו את הגבול

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2 + y^2\right)$$



פתרון:

אחת הדרכים הפשוטות לחשב גבול של פונקציה מרבת משתנים $f(P)$ היא אם ניתן לרשום אותה כפונקציה של אורך של וקטור $\overline{OP}$ בלבד, או של $\overline{MP}$ עבור נקודה קבועה $M \in \mathbb{R}^n$.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = |(x, y)|^2 \ .$$

לכן, אם נרשום $t = |(x, y)|^2$ נקבל $f(x, y) = t^2 \equiv g(t)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{t\to 0} g(t) = 0 \ .$$

משפט 8.1 יחידות של גבול

אם הגבול $\lim\limits_{P\to P_0}$ קיים אז הוא יחיד.

ז"א אם הגבול קיים, אז לא משנה לאורך איזה מסלול נחשב את הגבול, תמיד נקבל אותו ערך של הגבול. הגבול לא תלוי על הבחירת המסלול. בפרט אם הגבול קיים, הוא יתקבל לאורך כל קו ישר.

דוגמה 8.5

הראו כי הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^2y^2}{x^4+3y^4}\right)$ לא קיים.

פתרון:
נעשה זאת ע"י בדיקת הגבול לאורך ישרים. נציב $y=0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^4}\right)=0\ .$$

נציב $x=0$:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{3y^4}\right)=0\ .$$

זה ששני הגבולות האלו שוות לא אומר שהגבול קיים, אבל במידה שהוא קיים הוא יהיה 0.
נציב $y=\alpha x$ ($\alpha>0$):

$$\lim_{x\to 0} f(x,\alpha x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2\cdot(\alpha x)^2}{x^4+3(\alpha x)^4}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\alpha^2}{1+3\alpha^4}\right)=\frac{\alpha^2}{1+3\alpha^4}\neq 0$$

עבור $\alpha>0$. לכן, הגבול לא קיים.

דוגמה 8.6

הראו כי הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^2-xy}{x^2+2y^2}$ לא קיים.

פתרון:
נציב $y=\alpha x$ ($\alpha>0$):

$$\lim_{x\to 0} f(x,\alpha x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3+(\alpha x)^2-x(\alpha x)}{x^2+2(\alpha x)^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3+(\alpha^2-\alpha)x^2}{(1+2\alpha^2)x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+\alpha^2-\alpha}{1+2\alpha^2}\right)$$
$$=\frac{\alpha^2-\alpha}{1+2\alpha^2}\ .$$

הגבול תלוי בשיפוע α ולכן הגבול לא קיים.

דוגמה 8.7

חשבו את $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^3y}{x^6+y^2}\right)$

פתרון:
נציב את $y=\alpha x$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3\cdot\alpha x}{x^6+(\alpha x)^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\alpha x^2}{x^4+\alpha^2}\right)=0$$

נציב $x=0$:

$$\lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y^2}\right)=0$$

האם זה אומר שהגבול קיים ושווה ל- 0? לאו דווקא. נציב $y=x^3$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3\cdot x^3}{x^6+x^6}\right)=\frac{1}{2}\ .$$

לכן הגבול לא קיים.

8.3 כלל הסנדוויץ'

הגדרה 8.5 כלל הסנדוויץ'

אם

$$h(p)\leq f(p)\leq g(p)$$

לכל p בסביבת p_0 ו-

$$\lim_{p\to p_0} g(p)=\lim_{p\to p_0} h(p)=L$$

אז

$$\lim_{p\to p_0} f(p)=L$$

דוגמה 8.8

חשבו את $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\left(y\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right)$.

פתרון:

$\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$ חסומה:

$$-1\leq \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\leq 1$$

לכן

$$-y\leq y\cdot\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\leq y\ .$$

כיוון ש- $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} y\to 0$ וגם $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(-y)\to 0$ אז לפי כלל הסנדוויץ':

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\left(y\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right)=0\ .$$

דוגמה 8.9

הראו כי $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}\right)=0$

פתרון:

$$0 \leq \frac{x^3}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{x^3}{x^2} = x \ .$$

כיוון ש

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (0) = 0$$

ו-

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (x) = 0$$

אז לפי כלל הסנדוויץ':

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(\frac{x^3}{x^2+y^2+z^2}\right) = 0 \ .$$

מאותה מידה גם $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(\frac{y^3}{x^2+y^2+z^2}\right) = 0$ ו- $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(\frac{z^3}{x^2+y^2+z^2}\right) = 0$.

לכן

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to0\\y\to0\\z\to0}} \left(\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}\right) =& \lim_{\substack{x\to0\\y\to0\\z\to0}} \left(\frac{x^3}{x^2+y^2+z^2}\right) + \lim_{\substack{x\to0\\y\to0\\z\to0}} \left(\frac{y^3}{x^2+y^2+z^2}\right) + \lim_{\substack{x\to0\\y\to0\\z\to0}} \left(\frac{z^3}{x^2+y^2+z^2}\right)\\ =&0+0+0=0 \ .\end{aligned}$$

8.4 מעבר למשתנה

דוגמה 8.10

חשבו את הגבול $\lim_{\substack{x\to0\\y\to\pi/2}} (1-\cos(x+y))^{\tan(x+y)}$

פתרון:

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to\pi/2}} (1-\cos(x+y))^{\tan(x+y)}$$

נציב $t=x+y$ ונקבל

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{t\to\pi/2\\y\to\pi/2}} (1-\cos t)^{\tan(t)} =& \lim_{t\to\pi/2} (1-\cos t)^{\frac{\sin t}{\cos t}}\\ =& \lim_{t\to\pi/2} \left[(1-\cos t)^{\frac{1}{\cos t}}\right]^{\sin t}\\ =& \left[e^{-1}\right]^{\lim_{t\to\pi/2}(\sin t)}\\ =& \left[e^{-1}\right]^1\\ =&e^{-1} = \frac{1}{e} \ .\end{aligned}$$

דוגמה 8.11

חשבו את הגבול $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1\\ z\to 2}}\left(\frac{\sin\left[x\left(y^2+z^2\right)\right]}{xy^2}\right)$

פתרון:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1\\ z\to 2}}\left(\frac{\sin\left[x\left(y^2+z^2\right)\right]}{xy^2}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1\\ z\to 2}}\left(\frac{\sin\left[x\left(y^2+z^2\right)\right]}{x\left(y^2+z^2\right)}\cdot\frac{\cancel{x}\left(y^2+z^2\right)}{\cancel{x}y^2}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1\\ z\to 2}}\left(\frac{\sin\left[x\left(y^2+z^2\right)\right]}{x\left(y^2+z^2\right)}\cdot\frac{\left(y^2+z^2\right)}{y^2}\right)$$

נגדיר $t=x(y^2+z^2)$ ונקבל

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1\\ z\to 2}}\left(\frac{y^2+z^2}{y^2}\right)=1\cdot 5=5\ .$$

8.5 גבול חוזר

דוגמה 8.12

קבעו אם הגבול $\lim_{x,y\to 0}\left(x^2+y^2\right)^{x^2\cdot y^2}$ קיים ואם כן, חשבו אותו.

פתרון:

נציב $y=ax$:

$$f(x,ax)=\left(x^2+a^2x^2\right)^{a^2\cdot x^4}=\left(1+a^2\right)^{a^2\cdot x^4}\cdot\left(x^2\right)^{a^2\cdot x^4}$$

לכן נקבל

$$\lim_{x\to 0}\left(\left[\left(1+a^2\right)^{a^2}\right]^{x^4}\cdot e^{a^2\cdot x^4\ln x^2}\right)=1\cdot 1=1$$

נציב $x=0$:

$$f(0,y)=\left(y^2\right)^0=1$$

לכן נקבל

$$\lim_{y\to 0}(1)=1\ .$$

לכן נראה שהגבול קיים ואם כן הוא שווה ל- 1.

נראה שזה כן המצב.

תחילה נשים לב כי $(x-y)^2\geq 0$ לכל x,y ולכן $x^2+y^2-2xy\geq 0$ לכל x,y, לכן $2xy\leq x^2+y^2$ לכל x,y.
מכאן נובע ש-

$$(2xy)^{x^2y^2}\leq\left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}\leq\left(x^2+y^2\right)^{(x^2+y^2)^2/4}$$

$$\lim_{x,y\to 0}(2xy)^{x^2y^2}=\lim_{t\to 0}(2t)^{t^2}=\lim_{t\to 0}\left(e^{t^2\ln(2t)}\right)=1$$

$$\lim_{x,y\to 0}(x^2+y^2)^{(x^2+y^2)^2/4}=\lim_{t\to 0}(t)^{t^2/4}=\lim_{t\to 0}e^{t^2\ln(t)/4}=1\ .$$

לכן, לפי כלל הסנדוויץ',

$$\lim_{x,y\to 0}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=1\ .$$

8.6 פונקציות רציפות

הגדרה 8.6 רציפות

אומרים ש- $f:D\to\mathbb{R}$ רציפה ב- $p_0\in D$ אם $\lim\limits_{p\to p_0}f(p)=f(p_0)$.

אומרים ש- f רציפה ב- D אם היא רציפה ב- p_0 לכל $p_0\in D$.

דוגמה 8.13

כל פונקציה אלמנטרית רציפה.

דוגמה 8.14

הפונקציה

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ \\ 0 & x=y=z=0\end{cases}\ .$$

רציפה בכל נקודה $p_0\in\mathbb{R}^3$. (ראו דוגמה **??**).

8.7 נגזרות חלקיות

הגדרה 8.7 הנגזרת החלקית

נתונה פונקציה $f:D\to\mathbb{R}$ כאשר D תחום פתוח ו- $p_0=(x_0,y_0,z_0)\in D$. הנגזרת החלקית של f בנקודה p_0 לפי המשתנה x מוגדרת להיות הגבול

$$f'_x(p_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}\ .$$

המשמעות היא ש"מקפיאים" את כל המשתנים פרט ל- x, וגוזרים לפי x כאשר חושבים על $y,z,\ldots$ כקבועים (פרמטרים).

כדומה מגדירים $f'_y(p_0)$, $f'_z(p_0)$.

דוגמה 8.15

נתונה הפונקציה $f(x,y)=xy+x^2+y^2$ חשבו את f'_x ו- f'_y.

דוגמה 8.16

הפונקציה

$$f'_x = y+2x+0 = y+2x \ .$$
$$f'_y = x+0+2y = x+2y \ .$$

דוגמה 8.17

נתונה הפונקציה $f(x,y)=\ln\left(1-x^2+y^2\right)$ חשבו את f'_x ו- f'_y.

דוגמה 8.18

הפונקציה

$$f'_x = \frac{1}{1-x^2-y^2}\cdot\left(1-x^2+y^2\right)'_x = \frac{-2x}{1-x^2-y^2} \ .$$
$$f'_y = \frac{1}{1-x^2-y^2}\cdot\left(1-x^2+y^2\right)'_y = \frac{2y}{1-x^2-y^2} \ .$$

דוגמה 8.19

הוכיחו כי הפונקציה $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$ מקיימת את המשוואה

$$y\cdot z'_x = x\cdot z'_y \ .$$

דוגמה 8.20

הפונקציה

$$\left.\begin{array}{ll} z'_x &= \dfrac{2x}{x^2+y^2} \\ z'_y &= \dfrac{2y}{x^2+y^2} \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad y\cdot z'_x = x\cdot z'_y \ .$$

דוגמה 8.21

נתונה הפונקציה

$$f(x,y,z)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ & \\ 0 & x=y=z=0 \end{cases} \ .$$

חשבו את $f'_x(0,0,0)$, $f'_y(0,0,0)$ ו- $f'_z(0,0,0)$.

פתרון:

$$f'_y(0,0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0,0)-f(0,0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3+0}{t^2+0}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t-0}{t}=\lim_{t\to 0}1=1\ .$$

בדומה $f'_y(0,0,0)=1$ ו- $f'_z(0,0,0)=1$.

משפט 8.2 כלל השרשרת 1

נסתכל על פונקציה בשני משתנים $f:D\to\mathbb{R}$ כאשר $D\subseteq\mathbb{R}^2$. נתון הקטע $I=(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ ושתי פונקציות $x(t):I\to\mathbb{R}$ ו- $y(t):I\to\mathbb{R}$, כך ש- $(x(t),y(t))\in D$ לכל $t\in I$. נגדיר

$$g(t)\equiv f\left(x(t),y(t)\right)\ .$$

אזי

$$g'(t)=f'_x\cdot x'_t+f'_y\cdot y'_t\ .$$

דוגמה 8.22

נתונה הפונקציה

$$f(x,y)=x^2+y^2\ ,\qquad x(t)=\cos t\ ,\quad y(t)=\sin t\ .$$

חשבו את f'_t.

פתרון:

$$f'_t=f'_x\cdot x'_t+f'_t\cdot y'_t=2x\cdot(-\sin t)+2y\cdot\cos t=-2\cos t\sin t+2\sin t\cos t=0\ .$$

משפט 8.3 כלל השרשרת 2

נתונה פונקציה $f(x,y)$ כאשר $x=x(u,\mathrm{v})$ בפני עצמה פונקציה של השני משתנים u,v וגם $y=y(u,\mathrm{v})$ בפני עצמה פונקציה של השני משתנים u,v. נגדיר

$$g(u,\mathrm{v})=f\left(x(u,\mathrm{v}),y(u,\mathrm{v})\right)\ .$$

אז

$$\begin{aligned}g'_u&=f'_x\cdot x'_u+f'_y\cdot y'_u\ ,\\ g'_{\mathrm{v}}&=f'_x\cdot x'_{\mathrm{v}}+f'_y\cdot y'_{\mathrm{v}}\ .\end{aligned}$$

דוגמה 8.23

נתונה הפונקציה

$$f(x,y)=x^2+y^2\ ,\qquad x=r\cdot\cos\theta\ ,\quad y=r\cdot\sin\theta\ .$$

חשבו את f'_r ו- f'_θ.

פתרון:

$$f'_r = f'_x \cdot x'_r + f'_y \cdot y'_r = 2x \cdot \cos\theta + 2y \cdot \sin\theta = 2r\cos^2\theta + 2r\sin^2\theta = 2r \ ,$$

$$f'_\theta = f'_x \cdot x'_\theta + f'_y \cdot y'_\theta = 2x \cdot (-r\sin\theta) + 2y \cdot r\cos\theta = -2r^2\sin\theta\cos\theta + 2r\sin\theta\cos\theta = 0 \ .$$

שיעור 9
גרדיאנט נגדרת כיוונית מישור משיק למשטח

9.1 מישור משיק למשטח והגרדיאנט

משפט 9.1 מישור משיק למשטח

תהי $f: D \to \mathbb{R}$ פונקציה בשלושה משתנים. נגדיר משטח $f(x,y,z)=c$ כאשר $c \in \mathbb{R}$ מספר קבוע. תהי $P(x_0,y_0,z_0)$ נקודה על המשטח.

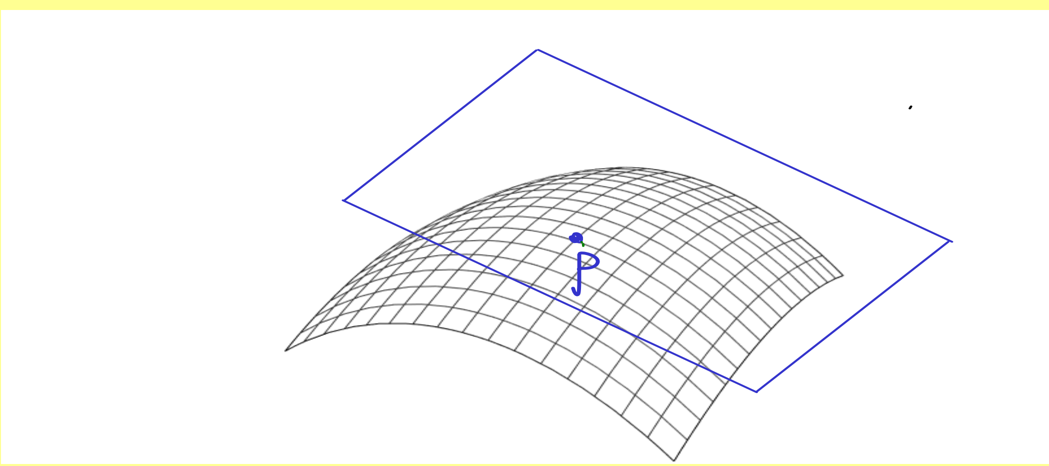
1) קיים מישור העובר דרך הנקודה P כך שהמשיק לכל קו שנמצא על משטח ועובר דרך הנודה P, נמצא במישור זו.

2) הוקטור הנורמל של המישור המשיק למשטח $f(x,y,z)=c$ בנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ הינו

$$\boldsymbol{n} = \left(f'_x(P), f'_y(P), f'_z(P)\right) \ .$$

3) המשוואה של המישור המשיק למשטח בנקודה P הינה

$$f'_x(P)(x-x_0) + f'_y(P)(x-x_0) + f'_z(P)(x-x_0) = 0 \ .$$



המישור הזה נקרא **המישור המשיק למשטח בנוקדה** P.

הוכחה: נסתכל אל קו על המשטח העובר דרך הנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$. נרשום את משוואת הקו בצורה פרמטרית:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t) \ .$$

משוואת המשטח הינה

$$f(x,y,z) = c \ , \qquad c \in \mathbb{R} \ .$$

בפרט, הקו נמצא על המשטח ולכן משוואת המשטח מתקיים בכל נקודה על הקו. נציב את משוואת הקו במשוואת המשטח ונקבל

$$f\Big(x(t), y(t), z(t)\Big) = c \ .$$

נקח נגזרת של משוואת המשטח לפי הפרמטר t בנקודה P:

$$f'_t(x_0, y_0, z_0) = 0 \ .$$

לפי כלל השרשרת:

$$f'_x(P)x'_t(t_0) + f'_y(P)y'_t(t_0) + f'_z(P)z'_t(t_0) = 0 \ ,$$

כאשר t_0 הערך של הפרמטר בנקודה P. נרשום את זה בצורה הבאה:

$$\Big(f'_x(P), f'_y(P), f'_z(P)\Big) \cdot \Big(x'_t(t_0), y'_t(t_0), z'_t(t_0)\Big) = 0 \ .$$

שימו לב, הוקטור $\Big(x'_t(t_0), y'_t(t_0), z'_t(t_0)\Big)$ הוא וקטור כיוון של הישר המשיק לקו $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ בנקודה P. כיוון שהמכפלה סקלרית שווה אפס, אז המשיק לקו, ניצב לוקטור $\Big(f'_x(P), f'_y(P), f'_z(P)\Big)$. בגלל ש המשיק לקו נמצא בהמישור, אז הוקטור הנורמל למישור הינו

$$\boldsymbol{n} = \Big(f'_x(P), f'_y(P), f'_z(P)\Big) \ .$$

■

דוגמה 9.1

חשבו את המישור המשיק למשטח $z = 3x^2 + y^3$ בנקודה $P(3, -2, 19)$.

פתרון:

נשרום את משוואת המשטח בצורה

$$f(x, y, z) = 3x^2 + y^3 - z = 0 \ .$$

$$f'_x = 6x, \qquad f'_y = 3y^2, \qquad f'_z = -1 \ .$$

משואת המישור היא

$$18(x - 3) + 12(y + 2) - (z - 19) = 0 \ ,$$

או

$$18x + 12y - z - 11 = 0 \ .$$

דוגמה 9.2

מצאו את הזווית ביו המישור המשיק למשטח $2x^2 + xyz + z^2 = 4$ העובר דרך הנקודה $P(1, 1, 1)$ ובין ציר ה- x.

פתרון:

נשרום את משוואת המשטח בצורה

$$f(x, y, z) = 2x^2 + xyz + z^2 = 4 \ .$$

$$f'_x = 4x + yz, \qquad f'_y = xz, \qquad f'_z = xy + 2z \ .$$
$$f'_x(1,1,1) = 5, \qquad f'_y(1,1,1) = 1, \qquad f'_z(1,1,1) = 3 \ .$$

משואת המישור היא

$$5(x-1) + (y-1) + 3(z-1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 5x + y + 3z - 9 = 0 \ .$$

הנורמל למשיור המשיק למשטח בנקודה $P(1,1,1)$ הוא

$$n = \big(f'_x(1,1,1), f'_y(1,1,1), f'_z(1,1,1)\big) = (5,1,3) \ .$$

הזוית α בין n לציר ה- x נתונה ע"י

$$\cos\alpha = \frac{n \cdot i}{|n||i|} = \frac{(5,1,3)\cdot(1,0,0)}{|(5,1,3)||(1,0,0)|} = \frac{5}{\sqrt{35}} = \sqrt{\frac{5}{7}} \ .$$

דוגמה 9.3

המישור π_1 משיק למשטח $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2y+4z+1 = 0$ בנקודה $M(\sqrt{3},1,-1)$. מצאו את משוואת המישור π_2 אשר משיק לאותו המשטח ומקביל ל- π_1 (שימו לב: מישורים מקבילים לא מתלכדים). חשבו את הזווית בין המישורים הללא לציר ה- y.

פתרון:

שיטה 1

הנורמל למישור המשיק:

$$\nabla f = (2x, 2y-2, 2z+4) \ .$$

בנקודה M:

$$n_1 = (2\sqrt{3}, 0, 2) \ .$$

לא קיימים עוד ערכים שבהם $\nabla(P_0) = n$ אבל ניתן לחפש נקודה שבה $n_1 \parallel n_2$.

$$\left.\begin{aligned} 2x &= 2\sqrt{3}\cdot t \\ 2y-2 &= 0\cdot t \\ 2z+4 &= 2\cdot t \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \left.\begin{aligned} x &= \sqrt{3}\cdot t \\ y &= 1 \\ z &= t-2 \end{aligned}\right\}$$

נציב זה במשוואת המשטח:

$$x^2+y^2+z^2-2y+4z+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3t^2+1+(t-2)^2-2+4(t-2)+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4t^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad t = \pm 1 \ .$$

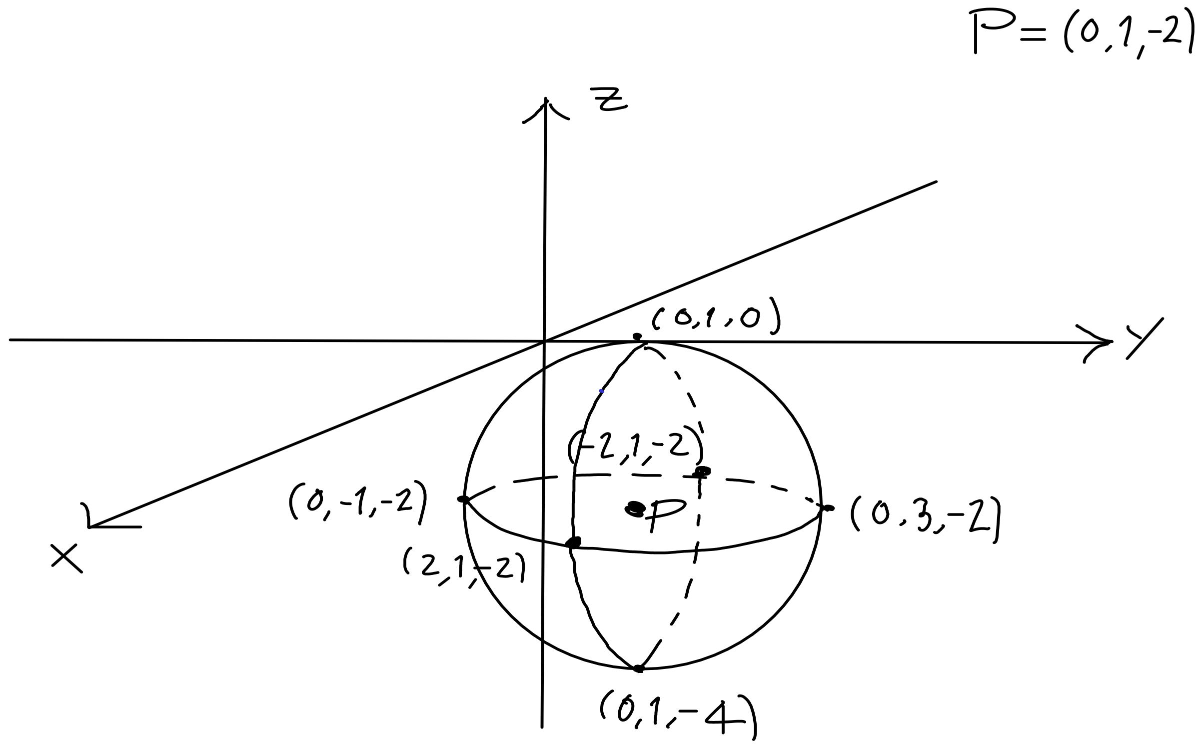
לכן
$(x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{3}, 1, -1)$
או
$(x_0, y_0, z_0) = (-\sqrt{3}, 1, -3)$. מכיוון ש $j \perp n_1$ וגם $j \perp n_2$ אז הזווית בין המישורים לציר ה- y הוא 0 (המישורים מקבילים לציר ה- y).

שיטה 2

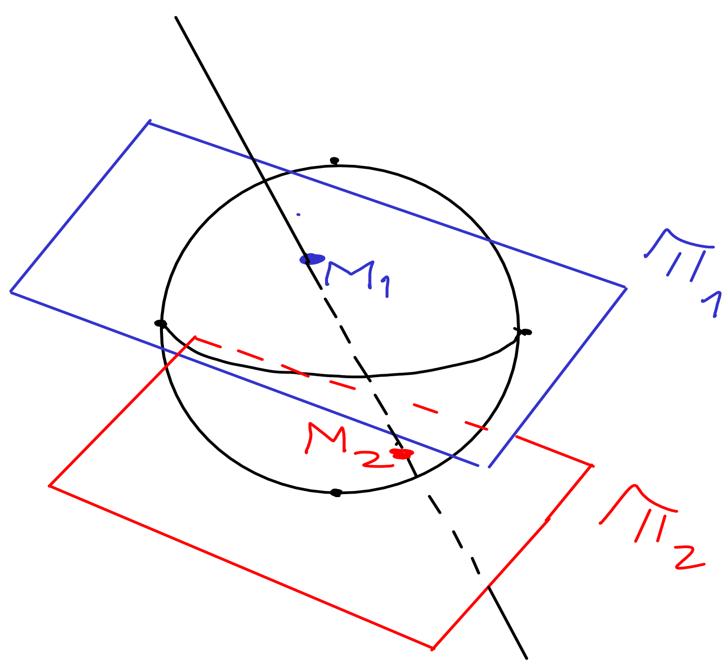
משוואת המשטח היא

$$x^2+y^2+z^2-2y+4z+1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4 \ .$$

המשטח היא ספירה:



לכן הישר הנורמל לספירה בנקודה M_1 עובר דרך הנקודה M_2



שבה המישור המשיק המבוקש.

$$n_1 = (2\sqrt{3}, 0, 2)$$
$$M(t) = (\sqrt{3} + 2\sqrt{3}t, 1, -1 + 2t)$$

נבדוק נקודת חיתוך של הישר עם הספירה:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3}+2\sqrt{3}t)^2+(1-1)^2+(-1+2t+2)^2 &=4\\
3(1+2t)^2+(1+2t)^2 &=4\\
3(1+4t+4t^2)+(1+4t+4t^2) &=4\\
4(1+4t+4t^2) &=4\\
1+4t+4t^2 &=1\\
4t+4t^2 &=0\\
4t(1+t) &=0
\end{aligned}$$

לכן $t=0$ או -1.

$t=0$ נותן את M_1.

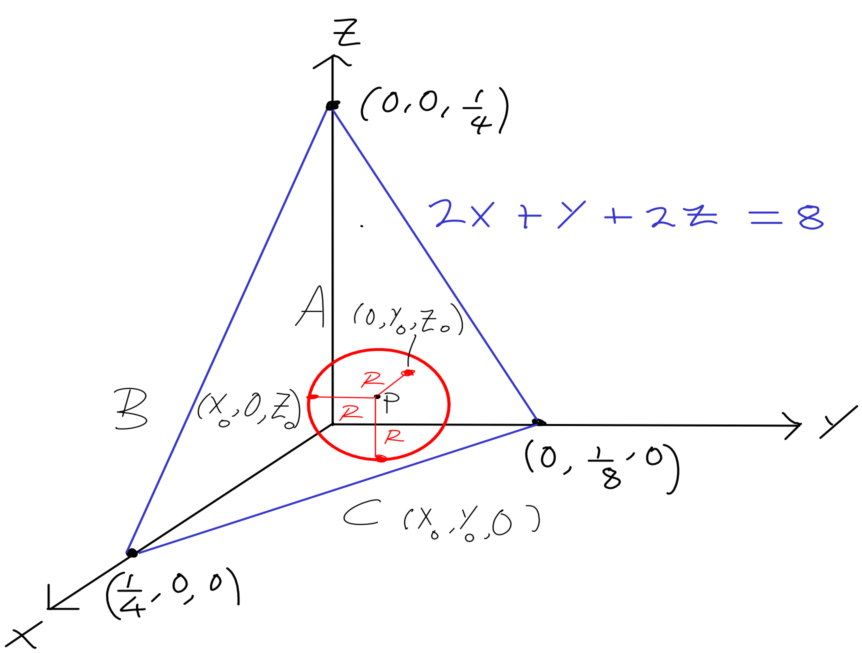
$t=-1$ נותן את M_2.

דוגמה 9.4

מצאו את משוואת הספירה החסומה ע"י המישורים

$$x=0\ ,\quad y=0\ ,\quad z=0\ ,\quad 2x+y+2z=8\ .$$

פתרון:



המרחק ממרכז הספירה $P(x_0,y_0,z_0)$ מכל אחד מבין המישורים שווה, בגלל שהמרחק הוא הרדיוס. צההשקה למישורים $\left.\begin{aligned} x&=0\\ y&=0\\ z&=0\end{aligned}\right\}$ נקבל

$$R=|x_0|=|y_0|=|z_0|$$

לכן $R = x_0 = y_0 = z_0 > 0$. מההשקה למישור הנוסף:

$$\frac{|2x_0 + y_0 + 2z_0 - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = R$$
$$\frac{|2R + R + 2R - 8|}{\sqrt{9}} = R$$
$$\frac{|5R - 8|}{3} = R$$
$$|5R - 8| = 3R$$
$$5R - 8 = \pm 3R$$
$$5R \pm 3R = 8$$
$$R = 4 \quad \text{או} \quad 1 \ .$$

$R = 4$ לא אפשרי כי אז מרכז ההספירה היה מחוץ לפירמידה. לכן $R = 1$ ומשוואת המשטח של הספירה הינה

$$(x-1)^1 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \ .$$

דוגמה 9.5

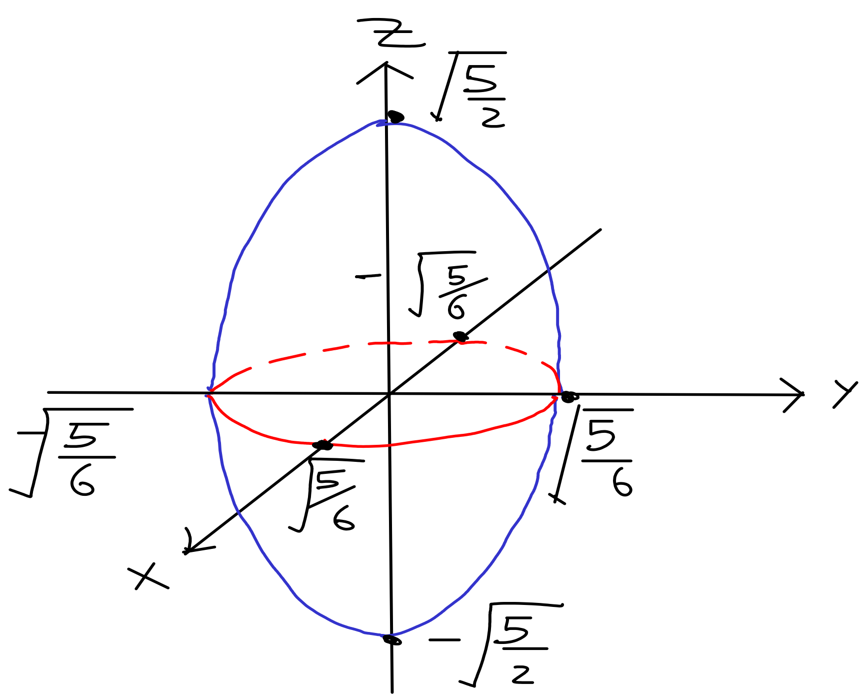
מצאו את המרחק בין המשטח

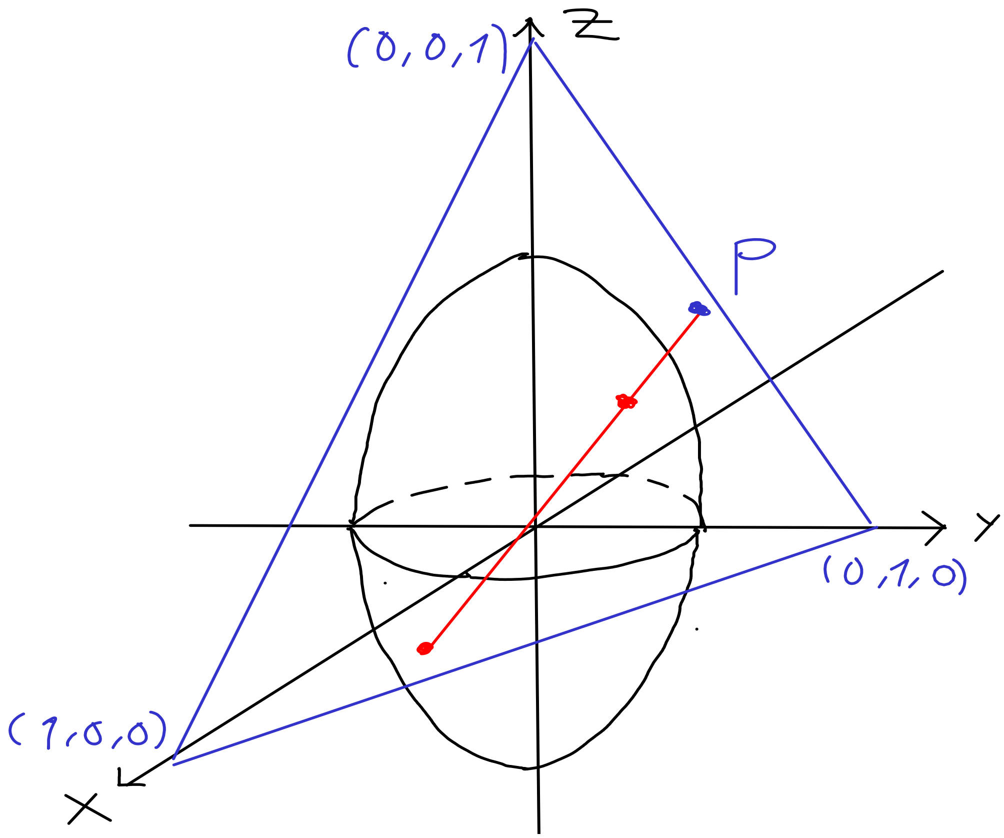
$$6x^2 + 6y^2 + 2z^2 = 5 \ .$$

לבין המישור

$$x + y + z = 9 \ .$$

פתרון:





צריך נקודה שבה המישור המשיק לאליפסה מקביל למישור $x+y+z=9$.

$$f(x,y,z)=6x^2+6y^2+2z^2-5=0\ .$$

$$n=(f'_x,f'_y,f'_z)=(12x,12y,4z)\stackrel{!}{=}(1,1,1)\cdot t\ ,$$

לכן

$$(x,y,z)=\left(\frac{t}{12},\frac{t}{12},\frac{t}{4}\right)$$

$$6\left(\frac{t}{12}\right)^2+6\left(\frac{t}{12}\right)^2+2\cdot\left(\frac{t}{4}\right)^2-5=0\qquad\Rightarrow\qquad t=\pm\sqrt{24}\ .$$

לכן $t=\sqrt{24}$. לכן הנקודה הקרובה ביותר היא $(\sqrt{24},\sqrt{24},\sqrt{24})$.

$$d=\frac{|\sqrt{24}+\sqrt{24}+\sqrt{24}-9|}{\sqrt{3}}$$

9.2 הגראדיאנט ונגזרת מכוונת

הגדרה 9.1 הגרדיאנט

תהי $f(x,y,z)$ פונקציה בשלושה משתנים. הגרדיאנט של f בנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ מוגדר להיות הוקטור

$$\nabla f(P)=\Big(f'_x(P),f'_y(P),f'_z(P)\Big)\ .$$

הגדרה 9.2 הנגזרת המכוונת

הנגזרת המכוונת של $f(x,y,z)$ בנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ בכיוון של הוקטור $\bar{a}\in\mathbb{R}^3$ מוגדרת להיות

$$\frac{df}{d\bar{a}}=\frac{1}{|a|}\lim_{t\to 0}\frac{f\left(P_0+t\bar{a}\right)-f\left(P_0\right)}{t}\ .$$

זוהי הנגזרת של f בנקודה P_0 בכיוון של $\bar{a}$.

משפט 9.2 נוסחה לנגזרת מכוונת

$$\frac{df}{d\bar{a}}=\frac{\nabla f\cdot\bar{a}}{|\bar{a}|}\ .$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{f\left(P_0+t\bar{a}\right)-f\left(P_0\right)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0+ta_x,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0+ta_x,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)}{t}\\
&\quad+\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0+ta_x,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)}{t}\\
&\quad+\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0+ta_z\right)}{t}\\
&\quad+\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0+ta_x,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)}{t}\\
&\quad+\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0+ta_z\right)}{t}\\
&\quad+\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}a_x\cdot\frac{f\left(x_0+ta_x,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)}{ta_x}\\
&\quad+\lim_{t\to 0}a_y\cdot\frac{f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0+ta_z\right)}{ta_y}\\
&\quad+\lim_{t\to 0}a_z\cdot\frac{f\left(x_0,y_0,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{ta_z}\\
&= \lim_{t\to 0}a_x\cdot\frac{f\left(x_0+ta_x,y_0,z_0\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{ta_x}\\
&\quad+\lim_{t\to 0}a_y\cdot\frac{f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{ta_y}\\
&= \lim_{h\to 0}a_x\cdot\frac{f\left(x_0+h,y_0,z_0\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{h}\\
&\quad+\lim_{h\to 0}a_y\cdot\frac{f\left(x_0,y_0+h,z_0\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{h}\\
&\quad+\lim_{h\to 0}a_z\cdot\frac{f\left(x_0,y_0,z_0+h\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{h}\\
&=a_x\cdot f'_x(P)+a_y\cdot f'_y(P)+a_z\cdot f'_z(P)\\
&=\bar{a}\cdot\nabla f(P)
\end{aligned}$$

לכן

$$\frac{df}{d\bar{a}}=\frac{1}{|\bar{a}|}\lim_{t\to 0}\frac{f\left(P_0+t\bar{a}\right)-f\left(P_0\right)}{t}=\frac{\bar{a}\cdot\nabla f(P)}{|\bar{a}|}\ .$$

■

דוגמה 9.6

חשבו את הגרדיאנט של הפונקציה $f(x,y,z)=x^2y^3-z$ בנקודה $P(2,-1,0)$ ואת הנגזרת המכוונת שלה בכיוון $\bar{a}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

פתרון:

$f'_x=2xy^3$, $f'_y=3x^2y^2$, $f'_z=-1$.

$$\nabla f(P)=\left(f'_x(P),f'_y(P),f'_z(P)\right)=(-4,12,-1)$$

$$\frac{df(P)}{d\bar{a}}=\frac{\nabla f(P)\cdot\bar{a}}{|\bar{a}|}=\frac{(-4,12,-1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)}{1}=\frac{-4}{\sqrt{2}}+\frac{12}{\sqrt{2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}\ .$$

דוגמה 9.7

על המעגל $x^2+y^2=9$ מצאו את הנקודה $P(x_0,y_0)$ כך ש הנגזרת $\frac{dz}{\overrightarrow{OP}}$ של $z=-4y+x^2+4x+4$ מקסימלי.

פתרון:

קצב עלייה של המשטח בנקודה $(0,0)$, הנקודה שממנה יוצא הוקטור $\overrightarrow{OP}$, הוא $\nabla z(O)$. הנקודה בשאלה היא נקודה הנמצאת על המעגל $x^2+y^2=9$.

$$\nabla z=z'_x\hat{\boldsymbol{i}}+z'_y\hat{\boldsymbol{j}}=(2x+4)\hat{\boldsymbol{i}}-4\hat{\boldsymbol{j}}$$

ולכן בנקודה O,

$$\nabla z(O)=4\hat{\boldsymbol{i}}-4\hat{\boldsymbol{j}}\ .$$

לכן הכיוון שבו $\frac{dz}{\overrightarrow{OP}}$ יהיה מקסימלי הוא $(4,-4)$. הישר בעל וקטור כיוון $(4,-4)$ הוא

$$x=4t\ ,y=-4t\quad\Rightarrow\quad\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=0\quad\Rightarrow\quad y=-x\ .$$

נקודת חיתוך של הישר הזה והמעגל $x^2+y^2=9$ הוא

$$P=\left(\frac{3}{\sqrt{2}},-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

דוגמה 9.8

על המעגל $x^2+y^2=1$ מצאו את הנקודה $P(x_0,y_0)$ כך ש הנגזרת $\frac{dz}{\overrightarrow{OP}}$ של $z=xy-4y+x^2+2x+4$ בנקודה $O(0,0)$ ובכיוון של $\vec{OP}$ תהיה מקסימלית וחשבו את קוסינוס הזווית α בין $\vec{OP}$ לישר $y=x$.

פתרון:

הנגזרת מכוונת, אשר מוגדרת להיות
$$\frac{dz}{d\overrightarrow{OP}} = \nabla z \cdot \overrightarrow{OP} \ ,$$
תהיה מקסימלית כאשר הזווית בין הוקטור $\overrightarrow{OP}$ ובין הגורדיאנט ∇z שווה אפס, כלומר כאשר $\overrightarrow{OP}$ ו- ∇z מקבילים.
הגרדיאנט של z בנקודה $(0,0)$ הינו
$$\nabla z\big|_{x=0,y=0} = (y+2x+2, x-4)\big|_{x=0,y=0} = (2,-4)$$
הזנב של וקטור $\overrightarrow{OP}$ נמצא בראשית הצירים $(0,0)$ והראש בנקודה $P(x_0,y_0)$ על המעגל מרדיוס 1. לכן יש לו את הקואורדינטות
$$\overrightarrow{OP} = (x_0-0, y_0-0) = (x_0,y_0) \ .$$
אבל $\overrightarrow{OP}$ גם מקביל ל- ∇z, לכן נחפש וקטור בעל כיוון $(2,-4)$ ואורך 1. נכתוב
$$\overrightarrow{OP} = (2t,-4t)$$
כך ש $|\overrightarrow{OP}| = 1$:
$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{(2t)^2+(-4t)^2} = \sqrt{4t^2+16t^2} = \sqrt{20t^2} = 2\sqrt{5}t = 1$$
(שים לב האורך חייב להיות חיובי), לכן $t=\frac{1}{2\sqrt{5}}$. נציב ונקבל
$$\overrightarrow{OP} = (2t,-4t) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$
סך הכל הנקודה הינה
$$P(x_0,y_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$
הזווית בין הישר $\overrightarrow{OP}$ ו- $y=x$ היא הזווית בין הוקטור $\overrightarrow{OP}$, כלומר $(2,-4)$, ובין יקטור הכיוון של הישר $y=x$, כלומר $(1,1)$:
$$\cos\alpha = \frac{(2,-4)\cdot(1,1)}{|(2,-4)|\ |(1,1)|} = \frac{(2,-4)\cdot(1,1)}{|(2,-4)|\ |(1,1)|} = \frac{-2}{\sqrt{2^2+(-4)^2}\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{-2}{\sqrt{20}\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{10}}$$
ולכן
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right) = 108.4349488^\circ \ .$$

משפט 9.3 כיוון של קצב שינוי מקסימלי של פונקציה

תהי $f(x,y,z)$ פונקציה.
∇f מצביע בכיוון שבו הקצב שינוי של f מקסימלי.
$-\nabla f$ מצביע בכיוון שבו הקצב שינוי של f מינימלי.

הוכחה:
$$\frac{df}{d\bar{a}} = \frac{\nabla f\cdot\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{|\nabla f|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos\theta}{|\bar{a}|} = |\nabla f|\cdot\cos\theta \ .$$
$-1\leq\cos\theta\leq 1$. לכן הביטוי יהיה מקסימלי כאשר $\cos\theta=1 \Leftarrow \theta=0$. כלומר $\frac{df}{d\bar{a}}$ יהיה מקסימלי אם $\bar{a}$ מצביע באותו הכיוון כמו ∇f.

■

דוגמה 9.9

מצאו את הכיוון של שינוי הגדול ביותר של הפונקציה $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$ בנקודה $P_0(1,1,1)$.

פתרון:

$$\nabla f=(2x,2y,-1) \ .$$
$$\nabla f(P)=(2,2,-1) \ .$$

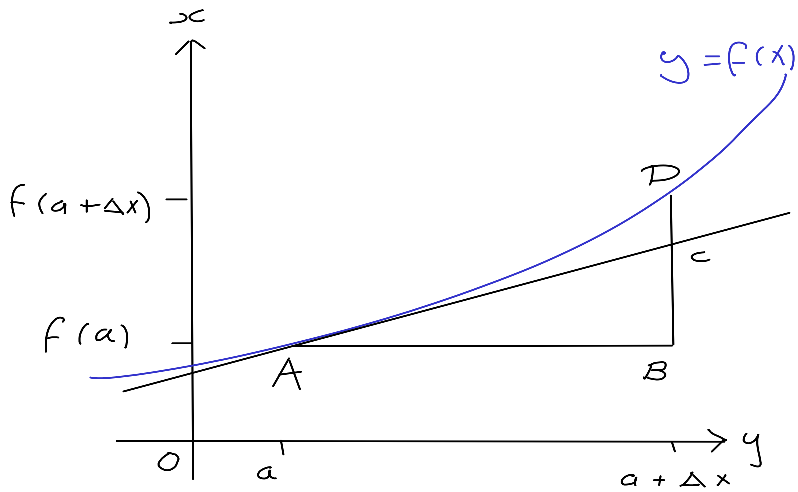
9.3 תזכורת - המשוג של הדיפרנציאל מחדוא 1

הגדרה 9.3 הדיפרנציאל של פונקציה של משתנה אחד

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע I. נניח ש- $a\in I$ וגם $a+\Delta x\in I$.
נגדיר את הנקודות

$$A=(a,f(a)),\qquad B=(a+\Delta x,f(a)),\qquad D(a+\Delta x,f(a+\Delta x)) \ .$$

(ראו תרשים).
תהי C הנקודה שבה BD נחתך ע"י המשיק ל- $f(x)$ בנקודה a.



יהי

$$\Delta f = BD = f(a + \Delta x) - f(a)$$

השינוי בערך של f. AC הוא המשיק ל- f ב- a, אז

$$\frac{BC}{AB} = f'(a) \qquad \Rightarrow \qquad BC = AB \cdot f'(a) = f'(a)\Delta x \ .$$

נסמן $CD = \epsilon$. בגבול כאשר $\Delta x \to 0$, D יתלכד עם C, ו- $\epsilon \to 0$. כיוון ש- $BD = BC + CD$ אז

$$\Delta f = f'(a)\Delta x + \epsilon \ .$$

ע"י לקחת את הגבול כאשר $\Delta x \to 0$, אז הגבול $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f$ נקבל את הגבול בנקודה a. הדיפרנציאל של f בנקודה a מוגדר להיות הגבול הזה, כלומר

$$df := \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} f'(a)\Delta x \ .$$

למה 9.1 הדיפרנציאל dx

נניח ש- $f(x)$ הפונקציה $f(x)=x$. אז בכל נקודה $x=a$, $f'(a)=1$. לכן, לפי ההגדרה של הדיפרנציאל, הדיפרציאל ב- a הינו

$$dx=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\ .$$

למה 9.2 קשר בין הדיפרנציאל והנגזרת

לפי הגדרה **??** ולמה **??**, הדיפרנציאל של פונקציה f בנקודה a ניתן ע"י

$$df=f'(a)dx\ .$$

9.4 הדיפרנציאל

הגדרה 9.4 הדיפרנציאל של פונקציה של שלושה משתנים

נתונה פונקציה $f=f(x,y,z)$. הדיפרנציאל מסדר ראשון שני, שלישי, וכלל מסדר n יוגדרו

$$df=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)f(x,y,z)$$

$$d^2f=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2f(x,y,z)$$

$$d^3f=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^3f(x,y,z)$$

$$\vdots$$

$$d^nf=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^nf(x,y,z)$$

9.5 אקסטרמום מקומי במשטח

משפט 9.4 תנאי הכרחי לקיום נקודת קיצון

תהי $f(x,y)$ פונקציה של שני משתנים. אם ל- f יש נקודת קיצון מקומי בנקודה P_0 אז $\nabla f\left(P_0\right)=0$.

הגדרה 9.5 נקודת קריטית

נקודה P שבה

$$f'_x(P)=0\ ,\qquad \text{ו}\qquad f'_y(P)=0$$

או $f'_x(P)$, $f'_y(P)$ לא קיים, נקראת נקודת קריטית.

משפט 9.5 תנאי מספיק לקיום נקודת קיצון

נתון פונקציה $z=f(x,y)$ של שני משתנים. נגדיר

$$\Delta=f''_{xx}f''_{yy}-\left(f''_{xy}\right)^2$$

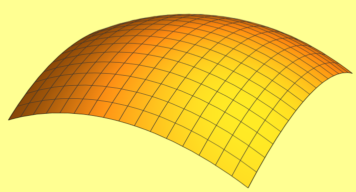
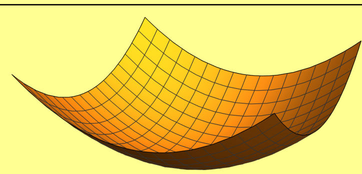
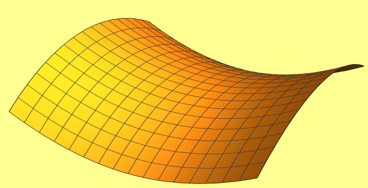
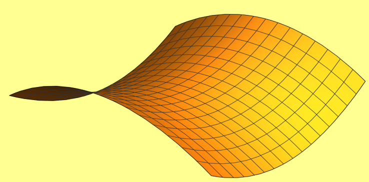
אם בנקודה $P(x_0,y_0)$ שבה $f'_x(P)=0$ וגם $f'_y(P)=0$,

1) $\Delta>0$ ו- $f_{xx}(P)>0$ אז P מינימום מקומי.

2) $\Delta>0$ ו- $f_{xx}(P)<0$ אז P מקסימום מקומי.

3) $\Delta<0$ אז P נקודת אוכף.

4) $\Delta=0$ אז הקריטריון לא נותן תשובה והנקודה P יכול להיות מינימום, מקסימום אן אוכף, ויש לחרוק את $f(x,y)$ סביב לנקודה P בדרכים נוספות.

$f'_y(P)=0$ $\quad f'_x(P)=0$ $f''_{xx}(P)<0$ $\quad \Delta>0$		מקסימום
$f'_y(P)=0$ $\quad f'_x(P)=0$ $f''_{xx}(P)>0$ $\quad \Delta>0$		מינימום
$f'_y(P)=0$ $\quad f'_x(P)=0$ $\Delta<0$		אוכף
$f'_y(P)=0$ $\quad f'_x(P)=0$ $\Delta<0$		אוכף

דוגמה 9.10

מצאו אקסטרמום מקומי של הפונקציה $z = xy^2 - 2x^2y - 4xy$.

פתרון:

$$z'_x = y^2 - 4xy - 4y \ , \qquad z'_y = 2xy - 2x^2 - 4x \ .$$

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= 0 \\ z'_y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y^2 - 4xy - 4y &= 0 \\ 2xy - 2x^2 - 4x &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y(y-4x-4) &= 0 \\ x(2y-2x-4) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y(y-4x-4) &= 0 \\ x(2y-2x-4) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

יש 4 פתרונות:

(1 $y - 4x - 4 = 0$ ו- $x = 0$

$\Leftarrow$ $(x, y) = (0, 4)$.

(2 $y - 4x - 4 = 0$ ו- $2y - 2x - 4 = 0$

$\Leftarrow$ $(x, y) = (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.

(3 $y = 0$ ו- $x = 0$

$\Leftarrow$ $(x, y) = (0, 0)$.

(4 $y = 0$ ו- $2y - 2x - 4 = 0$

$\Leftarrow$ $(x, y) = (-2, 0)$.

$$z''_{xx} = -4y \ , \qquad z''_{xy} = 2y - 4x - 4 \ , \qquad z''_{yy} = 2x \ .$$

	$(0,0)$	$(0,4)$	$(-2,0)$	$(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$
$z''_{xx}(P)$	0	-16	0	$-\frac{16}{3}$
$z''_{xy}(P)$	-4	4	4	$\frac{4}{3}$
$z''_{yy}(P)$	0	0	-4	$-\frac{4}{3}$
Δ	-16	-16	-16	$\frac{48}{9}$
	אוכף	אוכף	אוכף	מקסימום

9.6 נקודות קיצון בתנאי וכופלי לגרנז'

משפט 9.6 שיטת כופלי לגרנז'

האקסרמום של הפונקציה $f(x,y)$ כאשר x ו- y קשורים אחד בשני ע"י האילוץ

$$\phi(x,y) = 0$$

הנתון במישור xy, ניתן ע"י השיטה הבאה:

(1) מרכיבים את פונקצית לגרנז':

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\phi(x,y)$$

(2) גוזרים את $L(x,y,\lambda)$ לפי שלושת המשתנים x,y,λ:

$$L'_x=f'_x+\lambda\phi'_x\ , \qquad L'_y=f'_y+\lambda\phi'_y\ , \qquad L'_\lambda=\phi(x,y)\ .$$

(3) מוצאים את הנקודות הקריטיות של $L(x,y,\lambda)$ ע"י לפתור את המערכת

$$\begin{cases} L'_x &=0\\ L'_y &=0\\ L'_\lambda &=0\ . \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} f'_x(x,y)+\lambda\phi'_x(x,y) &=0\\ f'_y(x,y)+\lambda\phi'_y(x,y) &=0\\ \phi(x,y) &=0 \end{cases}$$

דוגמה 9.11

מצא את הערך הגדול ביותר של הפונקציה

$$z=5-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}$$

בתנאי

$$x^2+\frac{y^2}{4}=1$$

פתרון:

יהי $z(x,y)$ הפונקציה

$$z(x,y)=5-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}$$

ו- $\phi(x,y)$ האילוץ

$$\phi(x,y)=x^2+\frac{y^2}{4}-1=0\ .$$

נרכיב את פונקצית לגרנז':

$$L(x,y,\lambda)=z(x,y)+\lambda\phi(x,y)=5-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}+\lambda\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right)$$

גוזרמים את $L(x,y,\lambda)$ לפי x, y ו- λ:

$$L'_x=-\frac{1}{3}+2\lambda x\ , \qquad L'_y=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lambda y\ , \qquad L'_z=x^2+\frac{y^2}{4}-1\ .$$

פותרים את המערכת:

$$\begin{cases} L'_x &=0\\ L'_y &=0\\ L'_\lambda &=0\ . \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} -\frac{1}{3}+2\lambda x &=0\\ -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lambda y &=0\\ x^2+\frac{y^2}{4}-1 &=0\ . \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x &=\frac{1}{6\lambda}\\ y &=\frac{1}{2\lambda}\\ \lambda &=\frac{\pm\sqrt{13}}{12}\ . \end{cases}$$

בכך מקבלים את שתי הנקודות הקריטיות הבאות:

$$P_1\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{6}{\sqrt{13}}\right)\ ,\qquad P_2\left(-\frac{2}{\sqrt{13}},-\frac{6}{\sqrt{13}}\right)$$

שים לב כי

$$z(P_1)=5-\frac{\sqrt{13}}{6}\ ,\qquad z(P_2)=5+\frac{\sqrt{13}}{6}$$

הערך הגדול ביותר הוא בנקודה P_2 והערך המקסימלי של $z=5-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}$ בתנאי $x^2+\frac{y^2}{4}-1=0$ הוא

$$z(P_2)=5+\frac{\sqrt{13}}{6}\ .$$

דוגמה 9.12

מצאו את הערך הגדול והקטן ביותר של $z=x+2y+7$ על האליפסה $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

פתרון:

האילוץ הוא $\phi(x,y)=4x^2+9y^2-36=0$. נגדיר $f(x,y)=x+2y+7$.

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\phi(x,y)\ .$$

$$\begin{aligned} L'_x &= f'_x-\lambda\phi'_x &&= 1-8\lambda x &&= 0\\ L'_y &= f'_y-\lambda\phi'_y &&= 2-18\lambda y &&= 0\\ L'_\lambda &= -\phi &&= -4x^2-9y^2+36 &&= 0\ . \end{aligned}$$

הפתרון הוא

$$\left.\begin{aligned} 8\lambda x &= 1\\ 18\lambda y &= 2\\ 4x^2+9y^2-36 &= 0 \end{aligned}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{8\lambda}\\ y &= \frac{1}{9\lambda}\\ 4x^2+9y^2 &= 36 \end{aligned}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{aligned} y &= \frac{8}{9}x\\ 4x^2+9y^2 &= 36 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{aligned} 8x &= 9y\\ 4x^2+9\left(\frac{8}{9}\cdot x\right)^2 &= 36 \end{aligned}\right\}\ \Rightarrow\ \left(4+\frac{64}{9}\right)x^2=36\ \Rightarrow\ \frac{100}{9}x^2=36$$

$$\Rightarrow\ x^2=\frac{36\cdot 9}{100}\ \Rightarrow\ x=\pm\frac{9}{5}\ \Rightarrow\ y=\frac{8}{9}x=\pm\frac{8}{5}$$

משפט 9.7

האקסרמום של הפונקציה $f(x,y,z)$ כאשר x, y, z קשורים אחד בשני ע"י האילוץ

$$\phi(x,y,z)=0$$

הנתון במרחב xyz, ניתן ע"י השיטה הבאה:

(1) מרכיבים את פונקצית לגרנז':

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\phi(x,y,z)$$

(2) גוזרים את $L(x,y,z,\lambda)$ לפי שלושת המשתנים x,y,λ:

$$L'_x=f'_x+\lambda\phi'_x\ ,\qquad L'_y=f'_y+\lambda\phi'_y\ ,\qquad L'_z=f'_z+\lambda\phi'_z\ ,\qquad L'_\lambda=\phi(x,y,z)\ .$$

(3) מוצאים את הנקודות הקריטיות של $L(x,y,z,\lambda)$ ע"י לפתור את המערכת

$$\begin{cases} L'_x &=0\\ L'_y &=0\\ L'_z &=0\\ L'_\lambda &=0\ . \end{cases}\qquad\Leftrightarrow\qquad \begin{cases} f'_x(x,y,z)+\lambda\phi'_x(x,y,z) &=0\\ f'_y(x,y,z)+\lambda\phi'_y(x,y,z) &=0\\ f'_z(x,y,z)+\lambda\phi'_z(x,y,z) &=0\\ \phi(x,y,z) &=0 \end{cases}$$

דוגמה 9.13

מצאו את הערך הקטן ביותר של הפונקציה $f(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2$ בתנאי $x-y+z-1=0$.

פתרון:

האילוץ הוא $\phi(x,y,z)=x-y+z-1=0$. נגדיר

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda\phi(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2-\lambda\left(x-y+z-1\right)\ .$$

$$\begin{aligned} L'_x=&f'_x-\lambda\phi'_x &&=2x-\lambda &&=0\\ L'_y=&f'_y-\lambda\phi'_y &&=2y+\lambda &&=0\\ L'_z=&f'_z-\lambda\phi'_z &&=4z-\lambda &&=0\\ L'_\lambda=&-\phi &&=-x+y-z+1 &&=0\ . \end{aligned}$$

הפתרון הוא

$$\left.\begin{aligned} 2x-\lambda &= 0\\ 2y+\lambda &= 0\\ 4z-\lambda &= 0\\ -x+y-z &= -1 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4\to 2R_4+R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4\to R_4-R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4\to 2R_4+R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -5 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4\to 2R_4+R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3\to R_3+R_4\\ R_2\to R_2-R_4\\ R_1\to R_1+R_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5}\\ 0 & 2 & 0 & 0 & -\frac{4}{5}\\ 0 & 0 & 4 & 0 & \frac{4}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{array}\right) \quad\rightarrow\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{array}\right)$$

פתרון: $x=\frac{2}{5}$, $y=\frac{-2}{5}$, $z=\frac{1}{5}$, $\lambda=\frac{4}{5}$.

9.7 הערך המקסימלי והמינימלי של פונקציה בתחום סגור

משפט 9.8

פונקציה רציפה בתחום חסום וסגור מקבלת בן ערך מקסימלי וערך מינימלי.
ערכים אלה יכולים להתקבל בפנים על התחום או על השפה, אם הם מתקבלים פנימית אז זו תהיה נרודת קריטית.

דוגמה 9.14

נתונה הפונקציה $f(x,y)=e^{2x^2+y^2+4x+5}$

א) מצאו את הנקודות קיצום מקומיות של פונקציה זו.

ב) מצאו את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר של הפונקציה בתחום $x^2+y^2\le 25$.

פתרון:

סעיף א) מכיוון ש e^t עולה ממש, מספיק לחקור את הפונקציה $z = 2x^2 + y^2 + 4x + 5$.

$$z'_x = 4x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \ , \qquad z'_y = 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \ .$$

מצאנו נקודת קריטית ב- $(-1, 0)$.

$$\left. \begin{aligned} z''_{xx} &= 4 > 0 \\ z''_{xy} &= 0 \\ z''_{yy} &= 2 \end{aligned} \right\} \quad \Rightarrow \quad \Delta = z''_{xx} \cdot z''_{yy} - \left(z''_{xy} \right)^2 = 8 > 0$$

לכן הנקודה $(-1, 0)$ היא נקודת מינימום מקומי.

סעיף ב) הנקודה $(-1, 0)$ היא נקודה פנימים למעדל. נבדוק נקודות קיצון בתנאי על המעגל.

שיטה 1

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 25$$

$$L(x, y, \lambda) = 2x^2 + y^2 + 4x + 5 - \lambda \left(x^2 + y^2 - 25 \right)$$

$$\left. \begin{aligned} L'_x &= 4x + 4 - 2\lambda x &\stackrel{!}{=} 0 \\ L'_y &= 2y - 2\lambda y &\stackrel{!}{=} 0 \\ L'_\lambda &= x^2 + y^2 - 25 &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \right\} \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{aligned} \frac{4x+4}{2x} &= \lambda \\ \lambda &= 1 \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned} \right\} \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{aligned} x &= -2 \\ (-2)^2 + y^2 &= 25 \end{aligned} \right\} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 21$$

פתרון $(x, y) = (-2, \sqrt{21})$ או $(x, y) = (-2, -\sqrt{21})$.

$$z = (-2, \sqrt{21}) = 26 \ , \qquad z = (-2, -\sqrt{21}) = 26 \ .$$

$$z(5, 0) = 75 \ , \qquad z = (-5, 0) = 35 \ .$$

שיטה 2

אם $x^2 + y^2 = 25$ אז

$$g(x) = z = x^2 + 4x + 30 \ , \qquad -5 \le x \le 5 \ .$$

$$g'(x) = 2x + 4 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{21} \ .$$

מכאן מציבים. אבל לא לשכוח את קצוות הקטע $-5 \le x \le 5$.

הערך הגדול ביותר של z הוא 75 בנקודה $(5, 0)$.

הערך הגדול ביותר של z הוא 3 בנקודה $(-1, 0)$.

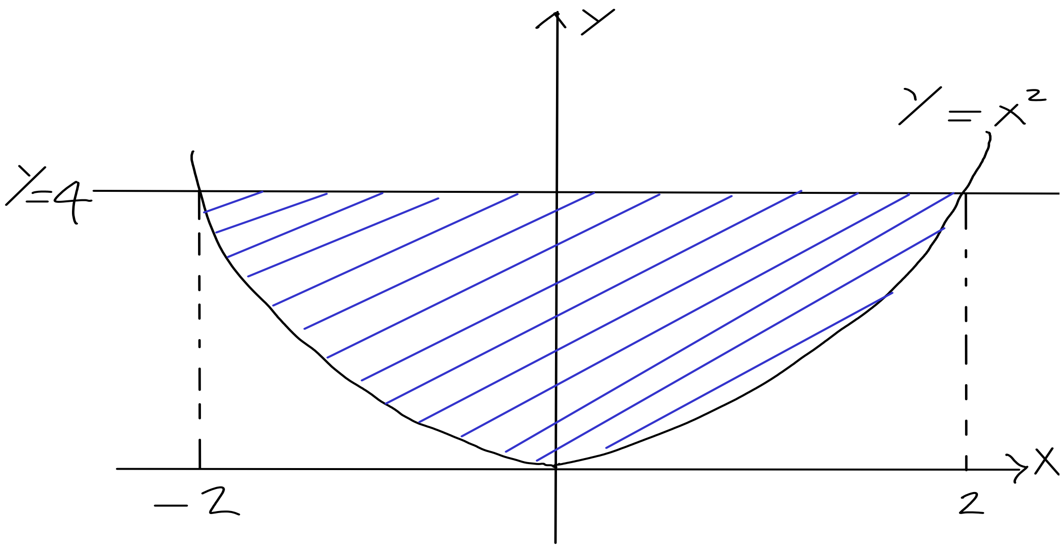
תשובה סופית:

$$\max f = f(5, 0) = e^{75} \ , \qquad \min f = f(-1, 0) = e^3 \ .$$

דוגמה 9.15

מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה $f(x,y)=x^2+xy-y-4x$ בתחום החסום ע"י הישר $y=4$ והפרבולה $y=x^2$.

פתרון:



$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2x+y-4 \overset{!}{=} 0 \\ f'_y &= x-1 \overset{!}{=} 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} f''_{xx} &= 2 \\ f''_{xy} &= 1 \\ f''_{yy} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta = f''_{xx}\cdot f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 = -1 \ .$$

לכן הנקודה $(1,2)$ היא נקודת אוכף.

נבדוק קיצון לאורך $\left\{\begin{array}{c} y=4 \\ -2\leq x\leq 2 \end{array}\right. \Leftarrow$

$$f(x,4)=x^2+4x-4-4x=x^2-4$$

ערך מקסימלי: 0

ערך מינימלי: -4.

נבדוק קיצון לאורך $\left\{\begin{array}{c} y=x^2 \\ -2\leq x\leq 2 \end{array}\right. \Leftarrow$

$$g(x)=f(x,x^2)=\cancel{x^2}+x^3-\cancel{x^2}-4x=x^3-4x$$

$$g'(x)=3x^2-4\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$g\left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = \left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^3 - 4\left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}\left(\frac{4}{3}-4\right) = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}\left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{16}{\sqrt{27}} \ .$$

$$\max_D f(x,y) = f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{4}{3}\right) = \frac{16}{\sqrt{27}}$$

$$\min_D f(x,y) = f(0,4) = -4$$

9.8 מרחק בין משטח למישור

דוגמה 9.16

מצאו את שתי הנקודות הכי קרובות על המשטח

$$f(x,y,z) = \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{16} + \frac{(z+2)^2}{9} = 1$$

והמישור

$$\phi(x,y,z) = 36x + 9y + 4z - 3600 = 0$$

והמרחק ביניהן.

פתרון:

שים לב, בנקודות האלה הנורמל למשטח מקביל עם הנורמל למישור:

$$\nabla f = t\nabla\phi$$

כך ש

$$\left(\frac{2(x-3)}{4}, \frac{2(y-1)}{16}, \frac{2(z+2)}{9}\right) = t\,(36,9,4)$$

המשוואה הפרמטרית מתאימה להישר המאונך להמישור ולמשטח.

$$\frac{2x-6}{4} = 36t \ , \quad \frac{2y-2}{16} = 9t \ , \quad \frac{2z+4}{9} = 4t \ .$$

או שקול

$$x = 72t+3 \ , \quad y = 72t+1 \ , \quad z = 18t-2 \ .$$

נציב למשוואת המשטח $f(x,y,z)=0$ ונקבל

$$t = \pm\frac{1}{6\sqrt{46}}$$

ולכן נקבל שתי נקודות על המשטח:

$$(x_1,y_1,z_1) = (1.2307, -0.769303, -2.44233) \ , \qquad (X_1,Y_1,Z_1) = (4.7693, 2.7693, -1.55767)$$

עכשיו נציב את $x=72t+3$, $y=72t+1$, $z=18t-2$ למשוואת המישור לקבל

$$36(72t+3) + 9(72t+1) + 4(18t-2) - 3600 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1.05405$$

ולכן הנקודה על המישור הינה

$$(x_2, y_2, z_2) = (78.8913, 76.8913, 16.9728)$$

המרחק בין הנקודות (x_1, y_1, z_1) ו- (x_2, y_2, z_2) הוא

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = 111.532$$

המרחק בין הנקודות (X_1, Y_1, Z_1) ו- (x_2, y_2, z_2) הוא

$$d = \sqrt{(x_2 - X_1)^2 + (y_2 - Y_1)^2 + (z_2 - Z_1)^2} = 106.45$$

לכן הנקודה (X_1, Y_1, Z_1) על המשטח קרובה ביותר לנקודה (x_2, y_2, z_2) על המישור.

דוגמה 9.17 מרחק בין משטח למישור: סוג 2

על המשטח

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 4y^2 - z = 0$$

מצאו את הנקודה $P_0(x_0, y_0, z_0)$ הקרובה ביותר למישור

$$\phi(x, y, z) = 2x + 3y - z - 5 = 0$$

וחשבו את המרחק d ביניהם.

פתרון:

הנקודות הקרובות ביותר על המשטח והמישור נמצאות על הקו המאונך למישור ולמשטח. לכן מספיק למצוא שתי נקודות על המישור והמשטח בהן הנורמלים מקבילים. הנורמל למשטח הינו

$$\nabla f = (4x, 6y, -1)$$

והנורמל למישור הינו

$$\nabla \phi = (2, 3, -1)$$

שים לב, שונה מהדוגמה הקודמת לא ניתן למצוא את משוואת הישר ע"י להשוואות את הנורמלים ע"י פרמטר $\nabla f = t\nabla\phi$ כי הקואורדינט הz של ∇f לא תלוי ב- z.

במקום מחפשם את הנקודה P_0 על השמטח בעל הנורמל ∇f מקביל ל $\nabla\phi$:

$$(4x, 6y, -1) = (2, 3, -1) \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \frac{1}{2}, y_1 = \frac{1}{2}$$

נמצא את z_0 בנקודה P_0 ע"י להציב את x_0, y_0 במשוואת המשטח:

$$z_0 = 2x_0^2 + 3y_0^2 \qquad \rightarrow \qquad z_0 = \frac{5}{4} = 1.25 \ .$$

לכן

$$P_0 = (0.5, 0.5, 1.25)$$

משוואת הישר המקביל לוקטור הנורמל של המישור $(2, 3, -1)$ העובר דרך נקודה P_0 על המשטח היא

$$x - x_1 = 2t \ , \quad y - y_1 = 3t \ , \quad z - z_1 = -t \ , \qquad \Leftrightarrow \qquad (x, y, z) = (0.5 + 2t, 0.5 + 3t, 1.25 - t)$$

כדי למצוא את הנקודה בה הישר חותך את המישור נציב משוואת המישור לתוך משוואת המישור $2x-3y-z-5=0$:

$$2\,(0.5+2t)+3\,(0.5+3t)-(1.25-t)-5=0 \quad\Rightarrow\quad 10t+1.25=0 \quad\Rightarrow\quad t=-0.125\ .$$

ואז נציב את $t=-0.125$ לתוך משוואת הישר כדי לקבל את הקואורדינטות של הנקודה $P_1(x_1,y_1,z_1)$ בה הישר חותך את המישור:

$$x_1=0.5+2(-0.125)=0.25,\quad y_1=0.5+3(-0.125)=0.125\ ,\quad z_1=1.25-(-0.125)=1.375$$

לכן $P_1=(0.25,.125,1.375)$ המרחק d ניתן ע"י הנוסחה הרגילה:

$$\begin{aligned} d=&\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}\\ =&\sqrt{(0.25-0.5)^2+(0.125-0.5)^2+(1.375-1.25)^2}\\ =&0.467707 \end{aligned}$$

9.9 מרחק בין נקודה למשטח

דוגמה 9.18

נתון הנקודה $P_0(10,10,10)$ מצאו את הנקודה על המשטח

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-9=0$$

הקרובה ביותר לנקודה P.

פתרון:
ניתן לפתור בעיה של מרחק בין נקודה למשטח ע"י כופלי לגרנז'. המרחק בריבוע בין נקודה $P_1(x_1,y_1,z_1)$ הנמצא על השמטח והנקודה P_0 הוא

$$d^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2$$

יש לעשות את d^2 מינימום בתנאי ש P_1 נמצא עך המשטח. נבנה את פונקצית לגרנז':

$$L=d^2(x_1,y_1,z_1)+\lambda f(x_1,y_1,z_1)$$

$$\begin{aligned} L'_{x_1}&=2(x_1-x_0)+2\lambda x_1 &&=0\\ L'_{y_1}&=2(y_1-x_0)+2\lambda y_1 &&=0\\ L'_{z_1}&=2(z_1-z_0)+2\lambda z_1 &&=0\\ L'_{\lambda}&=f(x_1,y_1,z_1) &&=0 \end{aligned}$$

כך ש

$$\begin{aligned} x_1&=\frac{x_0}{\lambda+1}\\ y_1&=\frac{y_0}{\lambda+1}\\ z_1&=\frac{z_0}{\lambda+1}\\ \left(\frac{x_0}{1+\lambda}\right)^2+\left(\frac{y_0}{1+\lambda}\right)^2+\left(\frac{z_0}{1+\lambda}\right)^2&=1 \end{aligned}$$

ולכן

$$(1+\lambda)^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2=300 \quad\Rightarrow\quad \lambda=\pm\sqrt{300}-1$$

והנקודה P_1 הינה

$$P_1 = \left(\frac{10}{\sqrt{300}}, \frac{10}{\sqrt{300}}, \frac{10}{\sqrt{300}}\right) \qquad \text{או} \qquad \left(\frac{-10}{\sqrt{300}}, \frac{-10}{\sqrt{300}}, \frac{-10}{\sqrt{300}}\right)$$

אחת משתי הנקודות אלה עושה את המרחק d מקסימום והשני עושה את d מינימום. יש לבדוק לפי הערך של d איזה מהן מתאים מרחק המינימום.

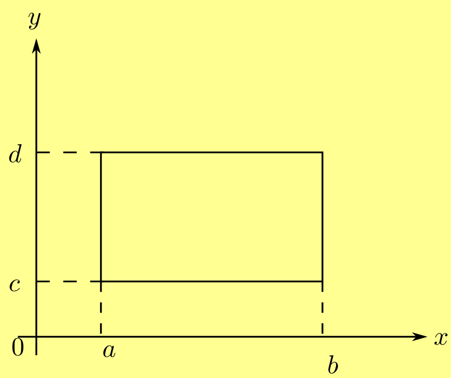
שיעור 10
אינטגרלים כפולים

משפט 10.1 אינטגרל כפול בתחום מלבני

במקרה של התחום המלבני

$$D = \{(x,y)|a \le x \le b\ , c \le y \le d\}$$

הסדר של האינטגרלים מעל x ו-y לא משנה את הערך של האינטגרל הכפול, כלומר



$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) = \int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x,y)\ . \qquad (*1)$$

דוגמה 10.1

חשבו את האינטגרל של הפונקציה $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + 6xy$ בתחום

$$D = \{(x,y)| -3 \le x \le 3,\ 2 \le y \le 8\}$$

פתרון:

נבדוק שהסדר של האינטגרלים אינו משנה את הערך של האינטגרל:

נבצע האינטגרל מעל x ואחר כך האינטגרל מעל y:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) =& \int_2^8 dy \int_{-3}^3 dx\,(3x^2+2y^2+6xy)\\ =& \int_2^8 dy\ \left[x^3+2xy^2+3x^2y\right]_{x=-3}^{x=3}\\ =& \int_2^8 dy\ \left(54+12y^2\right)\\ =& \int_2^8 dy\ \left[54y+4y^3\right]_{y=2}^{y=8}\\ =&(432-108+2048-32)\\ =&2340\ .\end{aligned}$$

נבצע האינטגרל מעל y ואחר כך האינטגרל מעל x:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) =& \int_{-3}^3 dx \int_2^8 dy\,(3x^2+2y^2+6xy)\\ =& \int_{-3}^3 dx\ \left[3x^2y+\frac{2}{3}y^3+3xy^2\right]_{y=2}^{y=8}\\ =& \int_{-3}^3 dx\ \left(18x^2+180x+336\right)\\ =&\left[6x^3+90x^2+336x\right]_{x=-3}^{x=3}\\ =&2340\ .\end{aligned}$$

דוגמה 10.2

חשבו את האינטגרל $\iint\limits_D \left(x^2-y\right)dx\,dy$ על המלבן

$$D=\{(x,y)|0\leq x\leq 3,\ 0\leq y\leq 4\}$$

פתרון:

נבצע האינטגרל של y ואז האינטגרל של x:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) =& \int_0^3 dx \int_0^4 dy\ \left(x^2-y\right)\\ =& \int_0^3 dx\ \left[x^2y-\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{4}\\ =& \int_0^3 dx\ \left(4x^2-8\right)\\ =&\left[\frac{4x^3}{3}-8x\right]_{x=0}^{3}\\ =&(36-24)\\ =&12\ .\end{aligned}$$

נבצע האינטגרל של x ואז האינטגרל של y:

$$\iint_D dx\,dy\,f(x,y) = \int_0^4 dy\, \int_0^3 dx\, \left(x^2-y\right)$$
$$= \int_0^4 dy\, \left[\frac{x^3}{3} - xy\right]_{x=0}^3$$
$$= \int_0^4 dy\, [9-3y]_{x=0}^3$$
$$= \left[9y - \frac{3y^2}{2}\right]_{y=0}^4$$
$$= (36-24)$$
$$=12\ .$$

משפט 10.2 אינטגרל כפול של פונקציה בתחום בין שני קווים

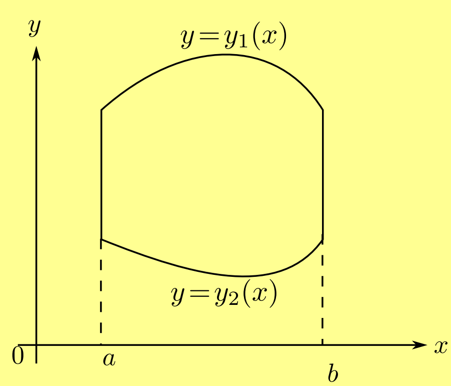
נתון אינטגרל כפול של פונקציה $f(x,y)$ מצורה

$$\iint_D dx\,dy\,f(x,y) = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\,f(x,y)$$

בתחום

$$D = \{(x,y)|a \le x \le b\ , y_1(x) \le y \le y_2(x)\}\ ,$$

אי-אפשר להחליף את סדר האינטגרלים. במקרה זה מבצעים את האינטגרל של y בין הקווים $y_1(x)$ ו- $y_2(x)$, ואחר כך מבצעים את האינטגרל של x.



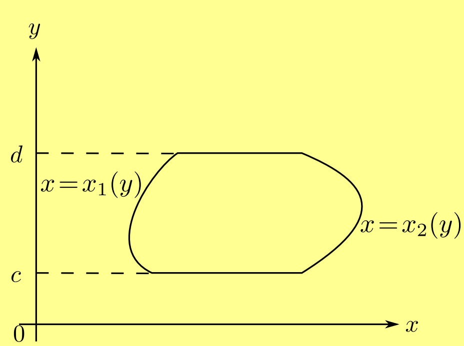
נתון אינטגרל כפול של פונקציה $f(x,y)$ מצורה

$$\iint_D dx\,dy\,f(x,y) = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx\,f(x,y)$$

בתחום

$$D = \{(x,y)|x_1(y) \le x \le x_2(y)\ , c \le y \le d\ , \}\ ,$$

אי-אפשר להחליף את סדר האינטגרלים. מבצעים את האינטגרל של x בין הקווים $x_1(y)$ ו- $x_2(y)$, ואחר כך מבצעים את האינטגרל של y.

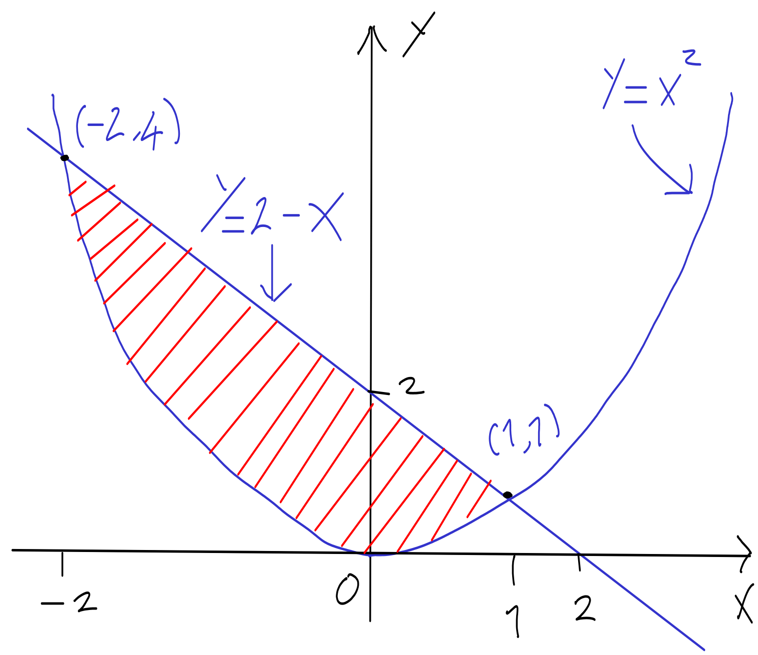


דוגמה 10.3

חשבו את $\iint\limits_D y\,dx\,dy$ כאשר D הוא התחום החסום על ידי הווים $y = 2 - x$, $y = x^2$.

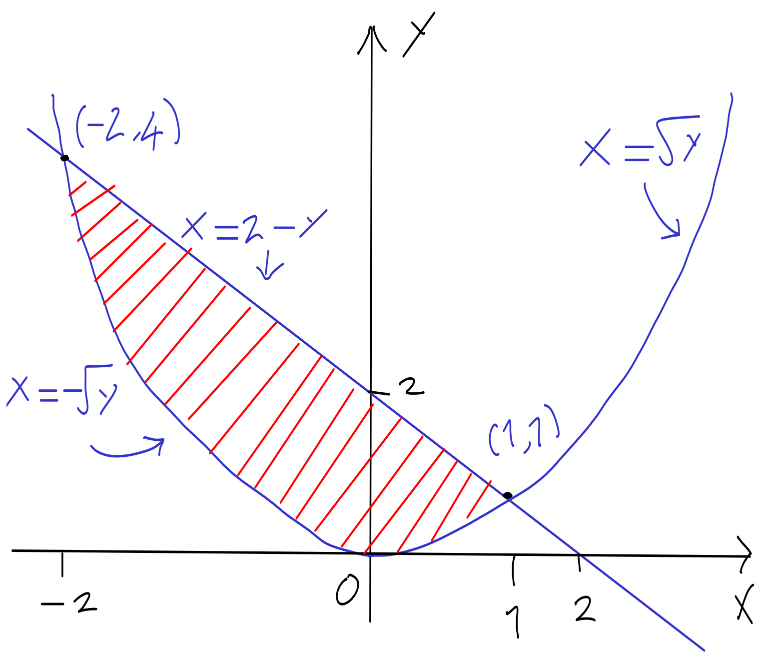
פתרון:

<u>שיטה 1</u>



$$\iint_D y\,dx\,dy = \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} y\,dy$$
$$= \int_{-2}^{1} dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{2-x}$$
$$= \int_{-2}^{1} dx \left(\frac{(2-x)^2}{2} - \frac{x^4}{2}\right)$$
$$= \left[\frac{-(2-x)^3}{6} - \frac{x^5}{10}\right]_{x=-2}^{1}$$
$$= \left[\frac{-1}{6} - \frac{1}{10}\right] - \left[-\frac{4^3}{6} - \frac{(-2)^5}{10}\right]$$
$$= \frac{-1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{64}{6} - \frac{32}{10}$$
$$= \frac{63}{6} - \frac{33}{10}$$
$$= \frac{432}{60}$$
$$= \frac{72}{10} = 7.2$$

<u>שיטה 2</u>



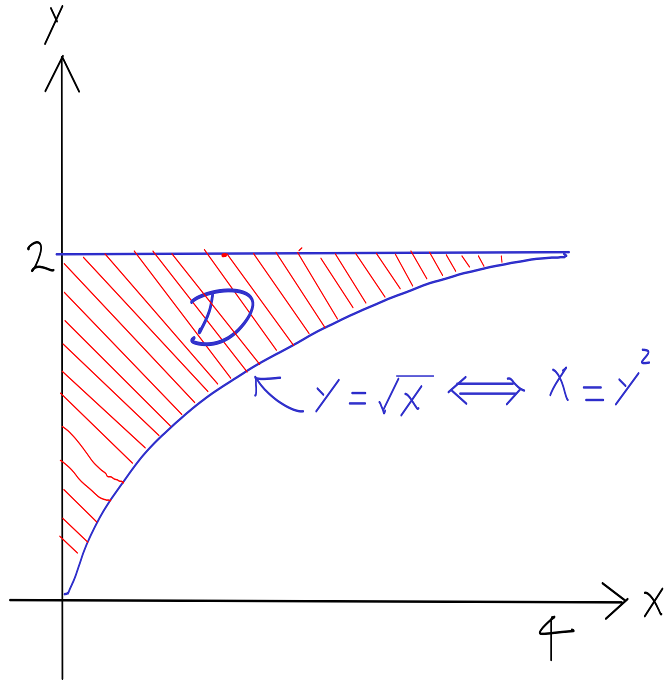
$$\begin{aligned}
\iint_D y\,dx\,dy &= \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} y\,dx + \int_1^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} y\,dx \\
&= \int_0^1 dy\,[yx]_{x=-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} + \int_1^4 dy\,[yx]_{x=-\sqrt{y}}^{2-y} \\
&= \int_0^1 dy\,2y\sqrt{y} + \int_1^4 dy\,(y(2-y)+y\sqrt{y}) \\
&= \int_0^1 dy\,2y^{3/2} + \int_1^4 dy\left(2y-y^2+y^{3/2}\right) \\
&= \left[5y^{5/2}\right]_0^1 + \left[y^2-\frac{y^3}{3}+\frac{2}{5}y^{5/2}\right]_1^4 \\
&=5+\left(16-\frac{64}{3}+\frac{64}{5}\right)-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right) \\
&=5+64\cdot\frac{7}{15}-\frac{16}{15} \\
&=5-\frac{7}{60}-\frac{64}{60} \\
&=5-\frac{71}{60} \\
&=\frac{300-71}{60} \\
&=\frac{229}{60}
\end{aligned}$$

דוגמה 10.4

חשבו את $\displaystyle\int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 dy\, e^{x/y}$

פתרון:

לא ניתן להחליף את האינטגרל הפנימי בעזרת פונקציה אלמנטריות.



$$
\begin{aligned}
\int_0^4 dx\ \int_{\sqrt{x}}^2 dx\, e^{x/y} = & \int_0^2 dy\ \int_0^{y^2} dx\, e^{x/y} \\
= & \int_0^2 dy\ \left[ye^{x/y}\right]_{x=0}^{y^2} \\
= & \int_0^2 dy\ (ye^y - y) \\
= & \left[ye^y - e^y - \frac{y^2}{2}\right]_0^2 \\
= & 2e^2 - e^2 - 2 - (-1) \\
= & e^2 - 1
\end{aligned}
$$

דוגמה 10.5

1) חשבו את האינטגרל $I = \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_0^{x^2} dy\, \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right)\, dy$

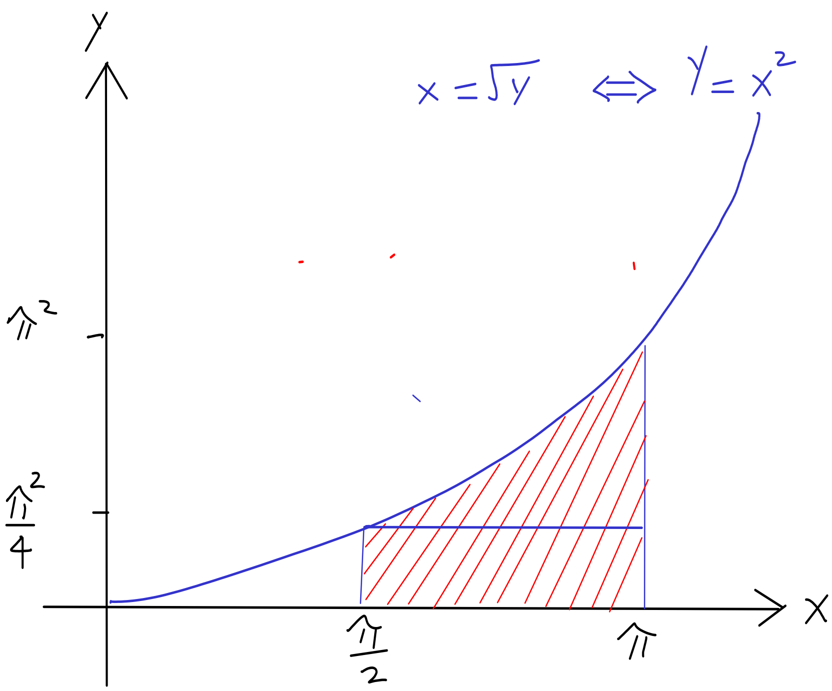
2) שרטטו את תחום האינטגרציה ושנו את סדר האינטגרציה

פתרון:

(1

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_0^{x^2} dy \, \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} dx \, \left[\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]_0^{x^2} \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} dx \, (\sin x - \sin(0)) \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} dx \sin x \\ &= [-\cos x]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= -\cos \pi + \cos \frac{\pi}{2} \\ &= 1 \ . \end{aligned}$$

(2



$$I = \int_0^{\pi^2/4} dy \int_{\pi/2}^{\pi} dx \, \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \int_{\pi^2/4}^{\pi} dy \int_{\sqrt{y}}^{\pi} dx \, \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

דוגמה 10.6 שינוי סדר של אינטגרלים

חשב את האינטגרל

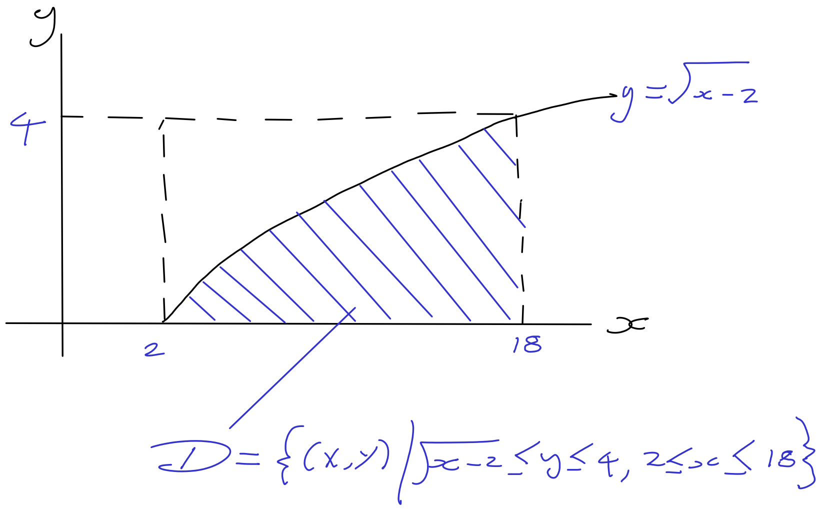
$$I = \int_2^{18} dx \int_{\sqrt{x-2}}^{4} dy \; e^{-5(x-2)/y}$$

פתרון:

התחום של האינטגרל הוא

$$D=\{(x,y)\mid 2\le x\le 18\ ,\sqrt{x-2}\le y\le 4\}$$

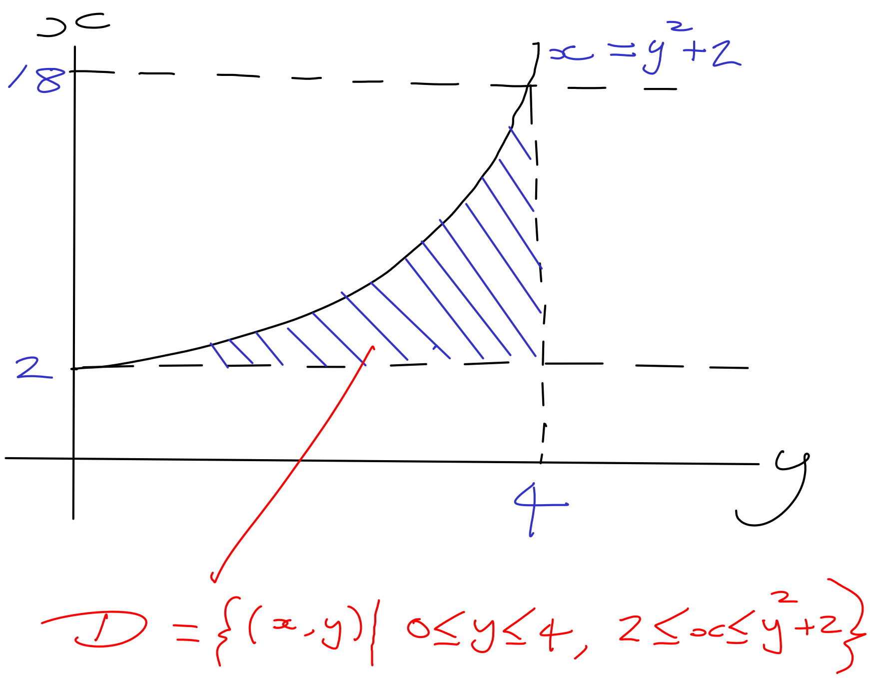
כמתואר בתרשים.



ניתן לשנות את הסדר של האינטגרלים של x ו- y כך שהתחום הוא

$$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 4\ ,\ 2\le x\le y^2+2\}$$

כמתואר בתרשים



$$\begin{aligned}
I &= \int_0^4 dy \ \int_2^{y^2+2} dx \ e^{-5(x-2)/y} \\
&= \int_0^4 dy \ \left[-\frac{y}{5}\cdot e^{-5(x-2)/y}\right]_2^{y^2+2} \\
&= -\frac{1}{5}\int_0^4 dy \ \left[y\cdot e^{-5(x-2)/y}\right]_2^{y^2+2} \\
&= -\frac{1}{5}\int_0^4 dy \ \left(y\cdot e^{-5(y^2+2-2)/y} - y\cdot e^{-5(0)/y}\right) \\
&= -\frac{1}{5}\int_0^4 dy \ \left(ye^{-5y} - y\right) \\
&= -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{5}ye^{-5y} + \frac{1}{25}e^{-5y} - \frac{y^2}{2}\right]_0^4 \\
&= -\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}e^{-20} + \frac{1}{25}e^{-20} - \frac{4^2}{2} + \frac{1}{25}\right)
\end{aligned}$$

10.1 תכונות חשובות של האינטגרל הכפול

משפט 10.3 תכונות האינטגרל הכפול

בהינתן אינטגרל כפולה מצורה

$$\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y)$$

בתחום D בהמישור xy.

(1) אם הפונקציה $f(x,y)=1$ האינטגרל שווה לשטח התחום $S(D)$:

$$\iint\limits_D dx\,dy = S(D) \ .$$

(2) נתון קבוע $c\in\mathbb{R}$, אז מתקיים

$$\iint\limits_D dx\,dy\,c\cdot f(x,y) = c\cdot\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) \ .$$

(3) הפעולה של אינטגרציה כפולה שומרת סכום:

$$\iint\limits_D dx\,dy\,\left(f_1(x,y)+f_2(x,y)\right) = \iint\limits_D dx\,dy\,f_1(x,y) + \iint\limits_D dx\,dy\,f_2(x,y)$$

(4) נתון שני תחומים D_1 ו- D_2. אם $D = D_1 \cup D_2$ ו- $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ אזי

$$\iint\limits_D dx\,dy\, f(x,y) = \int\int_{D_1} dx\,dy\, f(x,y) + \int\int_{D_2} dx\,dy\, f(x,y)$$

(5) אם $f(x,y) \geq 0$ בכל התחום D אז

$$\iint\limits_D dx\,dy\, f(x,y) \geq 0 \ .$$

(6) אם $m \leq f(x,y) \leq M$ בתחום D אז

$$m \cdot S(D) \leq \iint\limits_D dx\,dy\, f(x,y) \leq M \cdot S(D) \ .$$

(7)

$$\left| \iint\limits_D dx\,dy\, f(x,y) \right| \leq \iint\limits_D dx\,dy\, |f(x,y)| \ .$$

10.2 שטח של תחום ע"י אינטגרל כפול

משפט 10.4 שטח התחום

במקרה שבתוך האינטגרל הכפול בנוסחא (1*) הפונקציה $f(x,y) = 1$, אז האינטגרל הכפול שווה לשטח של התחום D:

$$\iint\limits_D dx\,dy\,(1) = S(D) \ .$$

כאשר $S(D)$ מסמן את שטח התחום D.

דוגמה 10.7

חשבו את שטח המלבן המוגדר ע"י התחום

$$D = \{(x,y)|2 \leq x \leq 5\,, 3 \leq y \leq 6\ \}$$

באמצעות אינטגרציה כפולה.

פתרון:

$$
\begin{aligned}
S(D) &= \int_2^5 dx \int_3^6 dy \\
&= \int_2^5 dx \, [y]_3^6 \\
&= \int_2^5 dx \, (6-3) \\
&= \int_2^5 dx \, 3 \\
&= 3 \int_2^5 dx \\
&= 3[x]_2^5 \\
&= 3(5-2) \qquad = 9 \ .
\end{aligned}
$$

דוגמה 10.8

חשבו את הערך של האינטגרל של הפונקציה $z(x,y)=3x^2+4y^2$ בין הקווים $y_1=x+4$ $y_2=-x+2$ בקטע $1\le x\le 2$.

פתרון:

$$
\begin{aligned}
\iint_D dx\,dy\,z(x,y) &= \int_1^2 dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \, \left(3x^2+4y^2\right) \\
&= \int_1^2 dx \, \left[3x^2 y + \frac{4}{3}y^3\right]_{y_1}^{y_2} \\
&= \int_1^2 dx \, \left(3x^2 y_2 + \frac{4}{3}y_2^3 - 3x^2 y_1 - \frac{4}{3}y_1^3\right) \\
&= \int_1^2 dx \, \left(3x^2 (x+4) + \frac{4}{3}(x+4)^3 - 3x^2(2-x) - \frac{4}{3}(2-x)^3\right) \\
&= \int_1^2 dx \, \left(3x^3 + 12x^2 + \frac{4}{3}(x+4)^3 - 6x^2 + 3x^3 - \frac{4}{3}(2-x)^3\right) \\
&= \int_1^2 dx \, \left(6x^3 + 6x^2 + \frac{4}{3}(x+4)^3 - \frac{4}{3}(2-x)^3\right) \\
&= \left[\frac{3}{2}x^4 + 2x^3 + \frac{1}{3}(x+4)^4 + \frac{1}{3}(2-x)^4\right]_1^2 \\
&= \left(24 + 16 + 432 - \frac{3}{2} - 2 - \frac{625}{3} - \frac{1}{3}\right) \\
&= \left(470 - \frac{3}{2} - \frac{626}{3}\right) \\
&= \frac{1559}{6}
\end{aligned}
$$

דוגמה 10.9

מהו השטח של האליפסה הנתון ע"י

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

בשטח התחום

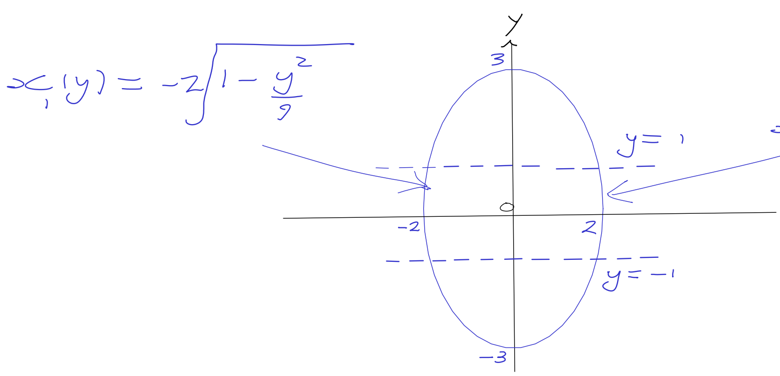
$$-1\leq y\leq 1\ .$$

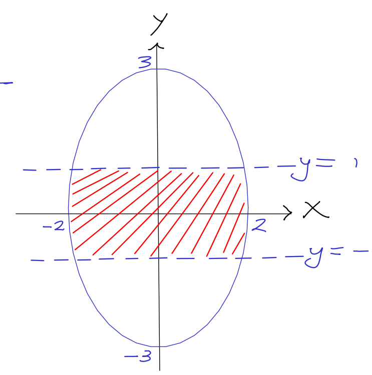
פתרון:

הקו של האליפסה מוצג בתרשים והתחום D מוצג בתרשים בצבע אדום. שים לב:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \qquad \Rightarrow \qquad x=\pm 2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}$$

במונחים של x.





הקו של האליפסה בצד שמאל ניתן ע"י

$$x_1(y)=-2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}$$

והקו של האליפסה בצד ימין ניתן ע"י

$$x_2(y)=+2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}$$

השטח ניתן באמצעות האינטגרל הכפול

$$\begin{aligned}
A&=\iint\limits_D dx\,dy\\
&=\int_{-1}^{1}dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}dx\\
&=\int_{-1}^{1}dy\,[x]_{x_1(y)}^{x_2(y)}\\
&=\int_{-1}^{1}dy\left(2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}-(-2)\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}\right)\\
&=\int_{-1}^{1}dy\,4\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}
\end{aligned}$$

בכדי לחשב את האינטגרל של y ניתן להשתמש בהטבלה של אינטגרלים הסטנדרטים להלן:

$$\begin{aligned} A =& 4\left[\frac{1}{2}\left(y\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}+3\sin^{-1}\left(\frac{y}{3}\right)\right)\right]_{-1}^{1} \\ =& 2\left(\sqrt{\frac{8}{9}}+3\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)-(-1)\sqrt{\frac{8}{9}}-3\sin^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)\right) \quad = 7.84928 \ . \end{aligned}$$

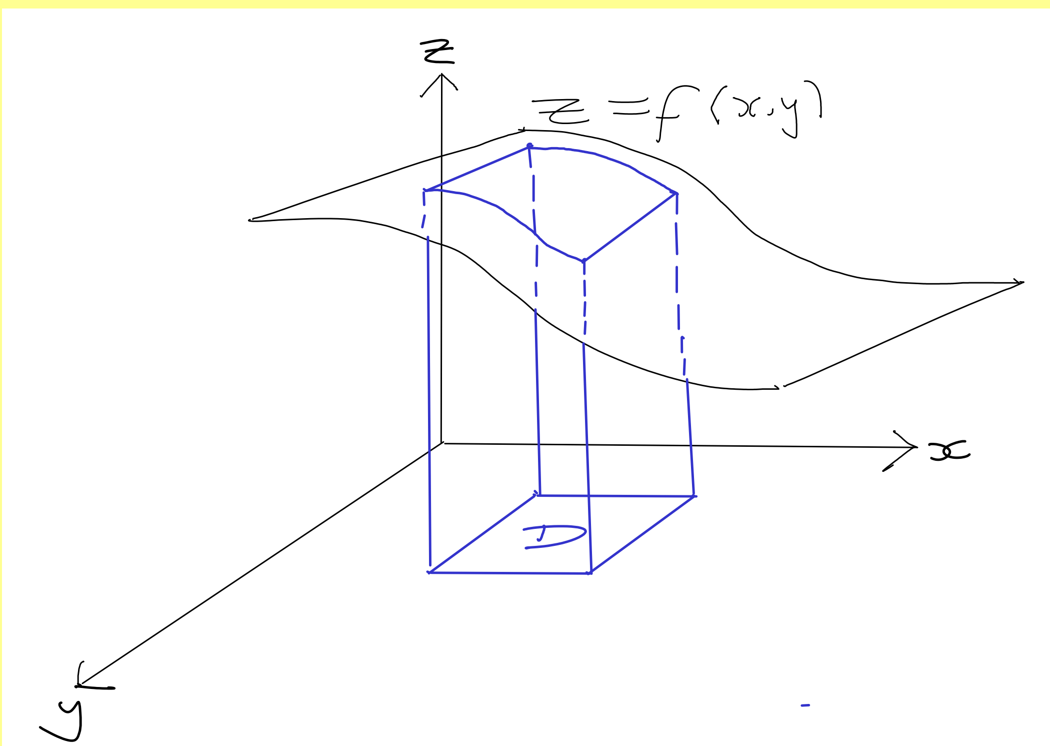
10.3 נפח מתחת משטח בתחום ע"י אינטגרל כפול

משפט 10.5 נפח תחת משטח בתחום D

נתון פונקציה $f(x,y)$ האי-שלילית ותחום D במישור xy (כלומר $f(x,y)\geq 0$ בכל נקודה בתחום D). הנפח מתחת המשטח $z=f(x,y)$ בתוך התחום D ניתן ע"י האינטגרל הכפול

$$V=\iint\limits_{D} dx\,dy\,f(x,y) \ .$$

הנפח מדובר מוצג בתרשים להלן בכחול.



דוגמה 10.10 נפח פירמידה

מהו הנפח מתחת המישור הניתן ע"י המשוואה

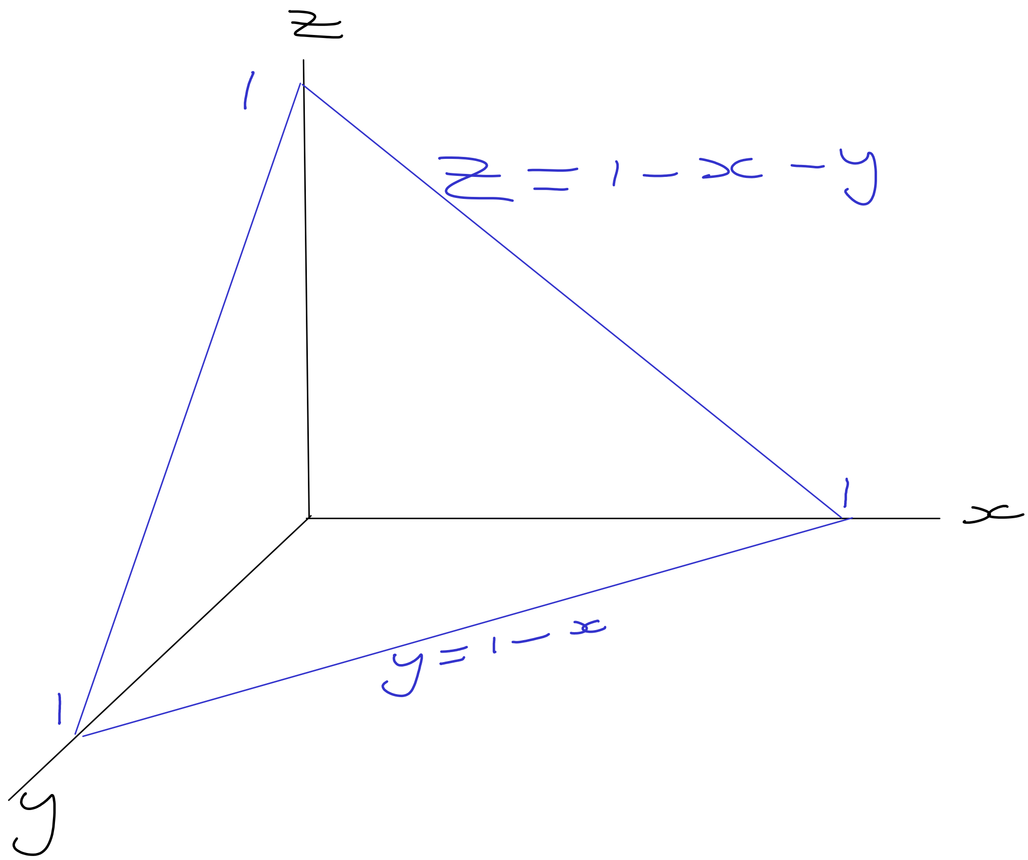
$$z=f(x,y):=1-x-y$$

בתחום

$$D=\{(x,y)|0\leq x\leq 1\ ,0\leq y\leq 1-x\ \}$$

פתרון:

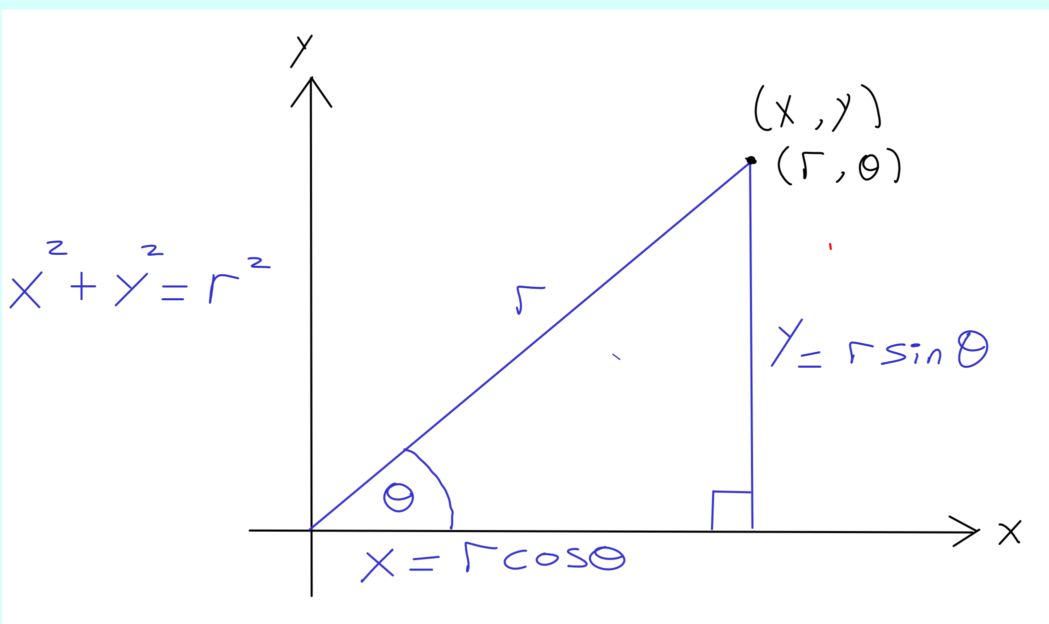
שים לב, הנפח מדובר הינו נפח של פירמדיה משולשית, כמתואר בתרשים להלן.



$$\begin{aligned}
V &= \iint\limits_D dx\, dy\, f(x,y) \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{y=1-x} dy\, (1-x-y) \\
&= \int_0^1 dx \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} \\
&= \int_0^1 dx \left((1-x) - x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2 \right) \\
&= \int_0^1 dx \left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right) \\
&= \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6} \ .
\end{aligned}$$

10.4 קואורדינטות קוטביות

הגדרה 10.1 קואורדינטות קוטביות



מקואורדינטות קרטיזיות לקואורדינטות קוטביות:

$$x = r\cos\theta\ , \qquad y = r\sin\theta\ .$$

מקואורדינטות קוטביות לקואורדינטות קרטיזיות:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\qquad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\ .$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta\ .$$

דוגמה 10.11

חשבו את האינטגרל

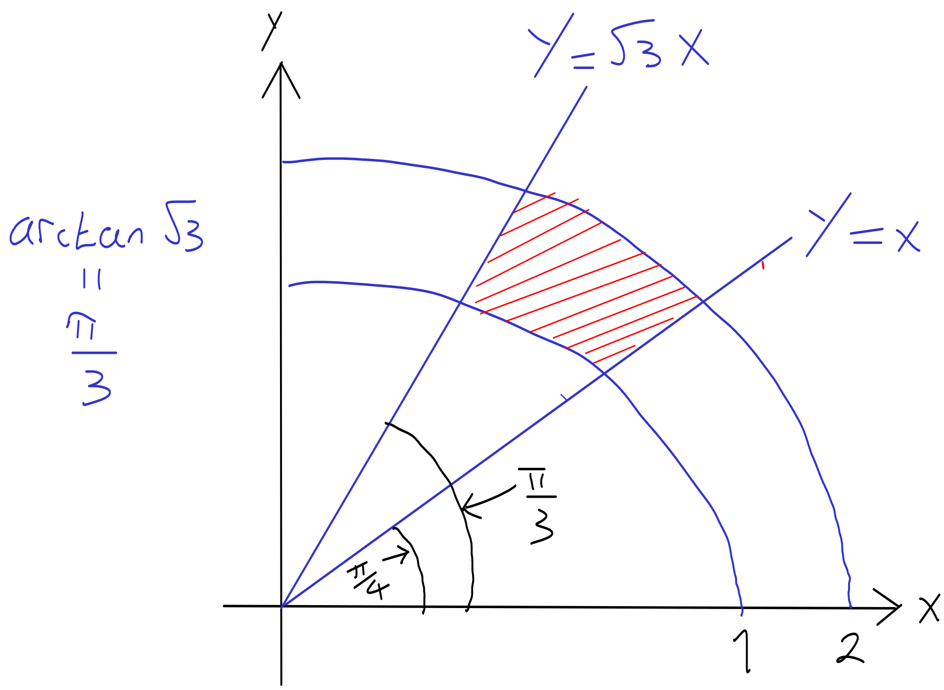
$$\iint\limits_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right)dx\,dy$$

כאשר

$$D=\{(x,y)|1\leq x^2+y^2\leq 4,x\leq y\leq\sqrt{3}\cdot y\}$$

פתרון:

$$D=\{(r,\theta)|\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{3},1\leq r\leq 2\ .\}$$

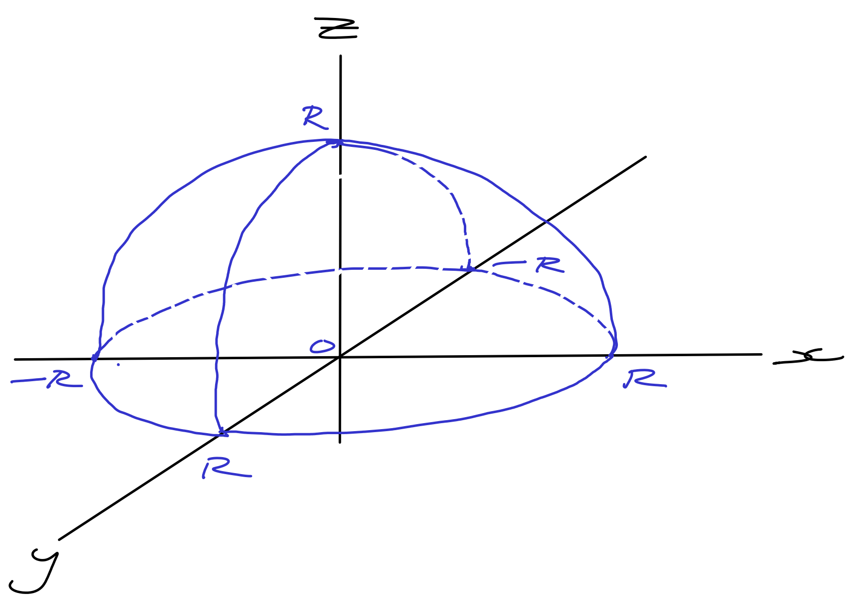


$$\begin{aligned}
\iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\,dx\,dy &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_1^2 \arctan\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right) r\,dr \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_1^2 \arctan\left(\tan\theta\right) r\,dr \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta\,\theta \int_1^2 r\,dr \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta\,\theta \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta\,\theta \left[\frac{3}{2}\right] \\
&= \frac{3}{2}\cdot\int_{\pi/4}^{\pi/3} \theta\,d\theta \\
&= \frac{3}{2}\cdot\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/3} \\
&= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi^2}{16}\right] \\
&= \frac{3}{4}\cdot\frac{7\pi^2}{144} \\
&= \frac{7\pi^2}{192}
\end{aligned}$$

דוגמה 10.12 נפח של ספירה

מהו הנפח של ספירה מרדיוס R?

פתרון:



$$f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}=\sqrt{R^2-r^2}$$

$$V=\int_0^R dr\int_0^\pi d\theta\, r\sqrt{R^2-r^2}$$

יהי $w=r^2$ משתנה חדש. שים לב:

$$w'=2r$$

כך ש-

$$V=\int_0^R dr\int_0^\pi d\theta\,\frac{w'}{2}\sqrt{R^2-w}$$

לפי שיטת אינטגרציה ע"י הצבה ניתן לחשב את האינטגרל של r באמצעות אינטגרל של w:

$$\begin{aligned}
V=&\frac{1}{2}\int_{w=0}^{w=R^2} dw\int_0^\pi d\theta\,\sqrt{R^2-w}\\
=&\frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta\,\left[-\frac{2}{3}\cdot\left(R^2-w\right)^{3/2}\right]_{w=0}^{w=R^2}\\
=&\frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta\,\frac{2R^3}{3}\\
=&\frac{R^3}{3}\int_0^\pi d\theta\\
=&\frac{\pi R^3}{3}\ .
\end{aligned}$$

10.5 החלפת משתנים - קואורדינטות עקומות

משפט 10.6 החלפת משתנים באינטגרל כפול והיעקוביאן

נניח שקואורדינטות u,v מוגדרות באמצעי קואורדינטות קרטיזיות x,y ע"י הביטוים

$$x=x(u,\mathrm{v})\ ,\qquad x=x(u,\mathrm{v})\ .$$

נתון אינטגרל כפול $\iint_D f(x,y)dx\,dy$. ניתן לעבור לאינטגרל של הקואורדינטות u,v דרך היחס

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D f\left(x(u,\mathrm{v}),y(u,\mathrm{v})\right)|J|\,du\,d\mathrm{v},$$

כאשר

$$J=\det\begin{pmatrix} x'_u & y'_u\\ x'_\mathrm{v} & y'_\mathrm{v}\end{pmatrix}\ .$$

J נקרא היעקוביאן.

דוגמה 10.13

קואורדינטות קוטביות:

$$J=\det\begin{pmatrix} x'_r & y'_r \\ x'_\theta & y'_\theta \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}=r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r\ .$$

דוגמה 10.14

קואורדינטות פרבוליות:

$$x=u\cdot \mathrm{v}\ ,\qquad y=\frac{1}{2}\left(u^2-\mathrm{v}^2\right)$$

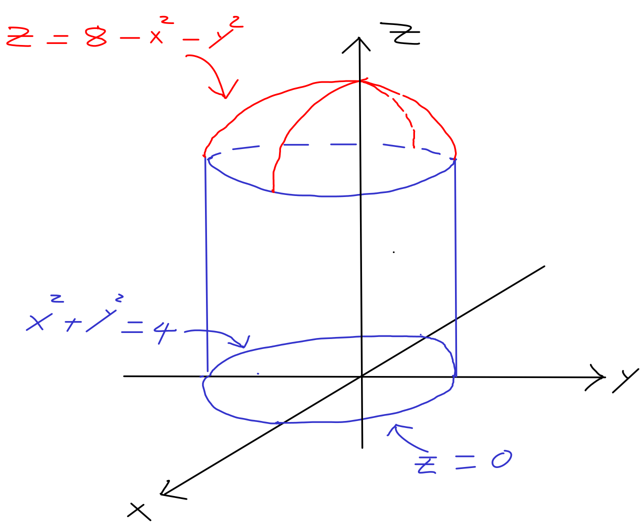
$$J=\det\begin{pmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_\mathrm{v} & y'_\mathrm{v} \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} \mathrm{v} & u \\ u & -\mathrm{v} \end{pmatrix}=-\mathrm{v}^2-u^2\ .$$

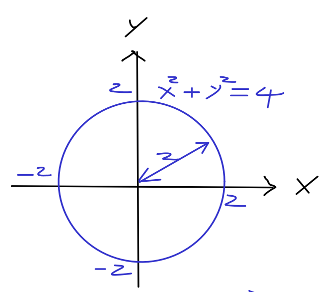
דוגמה 10.15

חשבו בעזרת אינטגרל כפול את נפח הגוף החסום ע"י המשטחים:

$$x^2+y^2=4\ ,\qquad z=0\ ,\qquad z=8-x^2-y^2\ .$$

פתרון:





$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$

$=\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$

$$V=\iint\limits_D (8-x^2-y^2)dx\,dy\ ,\qquad D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4\}=\{(r,\theta)|0\le r\le 2, 0\le\theta\le 2\pi\}$$

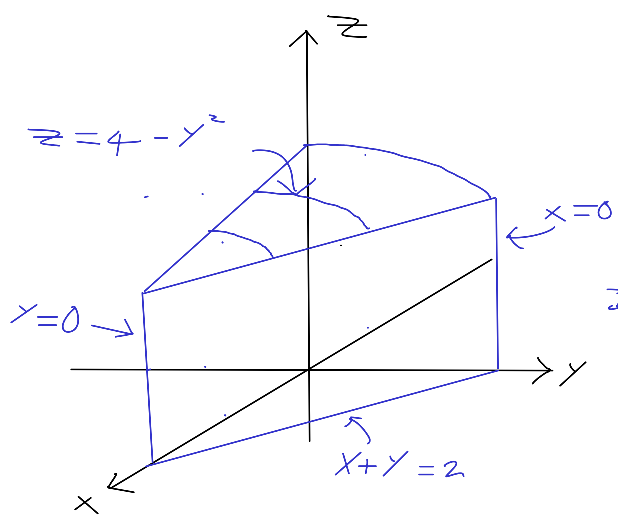
$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta\, r(8-r^2) \\ &= \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta\, (8r-r^3) \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \left[4r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta\ (16-4) \\ &=12\cdot[\theta]_0^{2\pi} = 24\pi\ . \end{aligned}$$

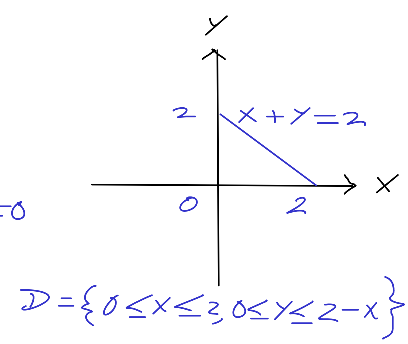
דוגמה 10.16

חשבו בעזרת אינטגרל כפול את נפח הגוף החסום ע"י המשטחים:

$$z=-y^2+4\ , \qquad z=0\ , \qquad x+y=2\ , \qquad y=0\ , \qquad x=0\ .$$

פתרון:





$$V=\iint\limits_D (4-y^2)dx\,dy\ , \qquad D=\{(x,y)|0\le x\le 2\ ,0\le y\le 2-x\}$$

$$\begin{aligned}
V =& \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (4-y^2)dy \\
=& \int_0^2 dx \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{2-x} \\
=& \int_0^2 dx \left(4(2-x) - \frac{(2-x)^3}{3}\right) \\
=& \left[-2(2-x)^2 + \frac{(2-x)^4}{12}\right]_{x=0}^{2} \\
=& 8 - \frac{16}{12} \\
=& 8 - \frac{4}{3} \\
=& \frac{20}{3} \ .
\end{aligned}$$

10.6 מרכז מסה

משפט 10.7 מרכז מסה

נתון תחום D ופונקציה $\rho(x,y) \geq 0$ לכל $x,y \in D$. המסה של התחום D עם צפיפות $\rho(x,y)$ מוגדרת

$$M = \iint_D \rho(x,y)dx\,dy \ .$$

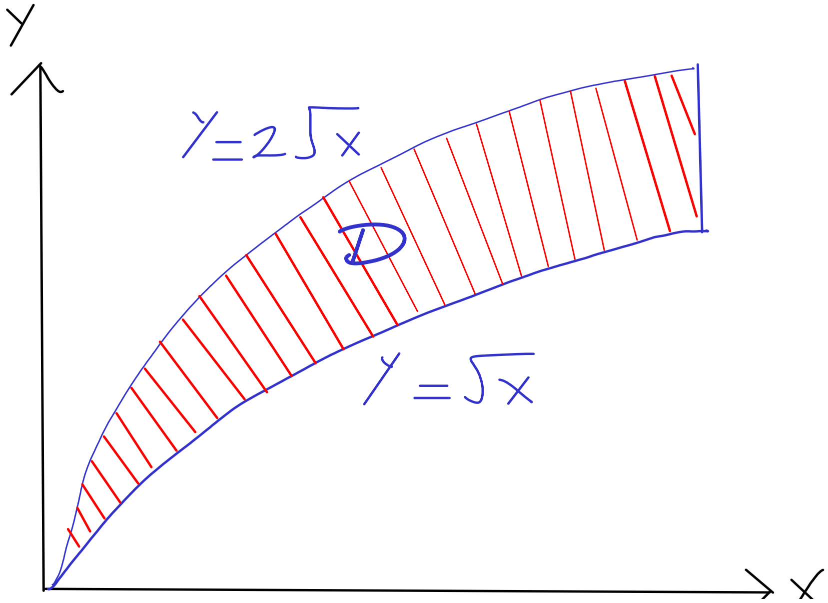
המרכז מסה של D היא נקודה $(x_c, y_c) \in D$ שניתנת ע"י

$$x_c = \frac{\iint_D x\,\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy} \ , \qquad y_c = \frac{\iint_D y\,\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy} \ .$$

דוגמה 10.17

מצאו את המסה של הגוף מישורי המוגדר ע"י הקווים $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x=4$ כאשר הצפיפות החומר היא $\rho(x,y) = 4-x$.

פתרון:



$$\begin{aligned}
M &= \iint_D (4-x)dx\,dy \\
&= \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4-x)dy \\
&= \int_0^4 dx\,(4-x)\left[y\right]_{y=\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \\
&= \int_0^4 (4-x)\sqrt{x}\,dx \\
&= \int_0^4 (4x^{1/2}-x^{3/2})\,dx \\
&= \left[4\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{2}{5}\cdot x^{5/2}\right]_0^4 \\
&=\frac{64}{3}-\frac{64}{5} \\
&=\frac{320-192}{15} \\
&=\frac{128}{15}\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D x\cdot\rho(x,y)dx\,dy &= \iint\limits_D (4x-x^2)dx\,dy \\
&= \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4x-x^2)dy \\
&= \int_0^4 dx\,(4x-x^2)\left[y\right]_{y=\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \\
&= \int_0^4 (4x-x^2)\sqrt{x}\,dx \\
&= \int_0^4 (4x^{3/2}-x^{5/2})\,dx \\
&= \left[4\cdot\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{2}{7}\cdot x^{7/2}\right]_0^4 \\
&= \frac{256}{5}-\frac{256}{7} \\
&= \frac{512}{35}\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D y\cdot\rho(x,y)dx\,dy &= \iint\limits_D (4-x)y\,dx\,dy \\
&= \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4-x)y\,dy \\
&= \int_0^4 dx\,(4-x)\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \\
&= \int_0^4 dx\,(4-x)\left(2x-\frac{x}{2}\right) \\
&= \int_0^4 dx\,(4-x)\cdot\frac{3}{2}x \\
&= \frac{3}{2}\int_0^4 dx\,(4x-x^2) \\
&= \frac{3}{2}\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^4 \\
&= \frac{3}{2}\left(32-\frac{64}{3}\right) \\
&= \frac{3}{2}\cdot\frac{64}{6} \\
&= 16\ .
\end{aligned}$$

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\cdot\rho(x,y)dx}{M} = \frac{\frac{512}{35}}{\frac{128}{15}} = \frac{3}{7}\cdot\frac{512}{128} = \frac{3}{7}\cdot 4 = \frac{12}{7}\ .$$

$$y_c = \frac{\iint\limits_D y\cdot\rho(x,y)dx}{M} = \frac{16}{\frac{128}{15}} = 15\cdot\frac{16}{128} = 15\cdot\frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

שיעור 11
אינגרלים קוויים

11.1 אינגרל הקווי מסוג ראשון

משפט 11.1 אינטגרל קווי מסוג ראשון 1

אם עקום מישורי L מוגדר כגרף של הפונקציה $\{y=\gamma(x)\ ,|a\le x\le b\}$
אז האינטגרל הקווי של פונקציה $f(x,y)$ דרך הקו של γ מוגדר להיות

$$\int\limits_L f(x,y)\ dl=\int_a^b f\left(x,\gamma(x)\right)\sqrt{1+\gamma'(x)^2}\,dx$$

משפט 11.2 אינטגרל קווי מסוג ראשון 2

אם עקום מישורי L מוגדר באופן פרמטרי

$$\{x=x(t)\ ,\ \ y=y(t)\ ,\ |\ \alpha\le t\le\beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה $f(x,y)$ דרך הקו של L מוגדר להיות

$$\int\limits_L f(x,y)\ dl=\int_\alpha^\beta f\left(x(t),y(t)\right)\ \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$$

משפט 11.3 אינטגרל קווי מסוג ראשון 3

אם L הוא עקום במרחב תלת-ממדי המוגדר באופן

$$\{x=x(t)\ ,\ \ y=y(t)\ ,\ \ z=z(t)\ |\ \alpha\le t\le\beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה $f(x,y,z)$ דרך הקו של L מוגדר להיות

$$\int\limits_L f(x,y,z)\ dl=\int_\alpha^\beta f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\ \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$$

דוגמה 11.1

מצאו את המסה של הקשת $\begin{cases} y=x^2\\ 1\le x\le 10\end{cases}$ בעלת צפיפות מסה קווי $\rho=\dfrac{y}{x}$.

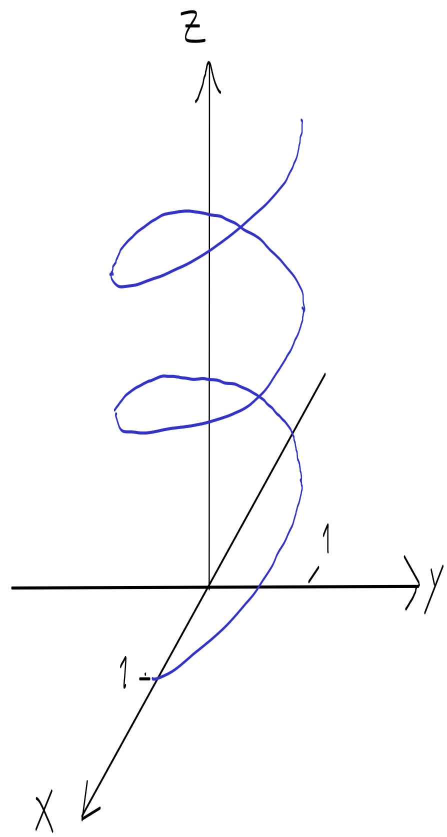
פתרון:

$$
\begin{aligned}
M &= \int\limits_L \rho(x,y)dl \\
&= \int_1^{10} \frac{x^2}{x} \cdot \sqrt{1+(2x)^2}dx \\
&= \int_1^{10} x \cdot \sqrt{1+4x^2}dx \\
&= \int_1^{10} \frac{t'}{8} \cdot \sqrt{t}dx \\
&= \frac{1}{8}\int_{t=5}^{t=401} \cdot\sqrt{t}dt \\
&= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[t^{3/2}\right]_{t=5}^{t=401} \\
&= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[401^{3/2} - 5^{3/2}\right] \\
&= 668.24
\end{aligned}
$$

דוגמה 11.2

חשבו את אורך הקשת של קו הבורג (helix) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$ בעלת צפיפות מסה קווי $\rho = \frac{y}{x}$.

פתרון:



$$
\begin{aligned}
L &= \int_L dl \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt \\
&= 2\sqrt{2}\pi
\end{aligned}
$$

משפט 11.4 אורך הקשת

האינטגרל הקווי

$$\int_L dl$$

נותן את אורך הקשת L.

משפט 11.5 מסה של הקשת

האינטגרל הקווי

$$\int_L f(x,y,z)\;dl$$

נותן את המסה של הקשת L בעלת צפיפות ליניארית $f(x,y,z)$.

דוגמה 11.3

חשב את אורך הקשת של קו הבורג:

$$\{x=\cos t\ ,\ \ y=\sin t\ ,\ \ z=t\ ,\ \ 0\leq t\leq 2\pi\}$$

פתרון:
לפי כלל ??

$$\int_L dl=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}=\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1^2}=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}=2\pi\sqrt{2}\ .$$

11.2 אינטגרל הקווי מסוג שני

כדי לחשב את האינטגרל של שדה וקטורי מצורה

$$\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\hat{\boldsymbol{\imath}}+Q(x,y)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

דרך המסלול L משתמשים ב **האינטגרל הקווי מסוג שני.**

לדוגמא, העבודת השדה הוקטורי $\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\hat{\boldsymbol{\imath}}+Q(x,y)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ בהעברת חלקיק מהנקודה A לנקודה B לאורך המסלול L ניתן ע"י

$$W=\int_L\left[P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right]\ .$$

דרך החישוב של אינטגרל קווי מסוג שני תלויה באופן הגדרת המסלול L של האינטגרציה.

משפט 11.6 אינטגרל קווי מסוג שני 1

אם המסלול מישורי L מוגדר כגרף של הפונקציה $\{y=\gamma(x)\ ,|a\leq x\leq b\}$
אז האינטגרל הקווי של פונקציה $\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\hat{\boldsymbol{\imath}}+Q(x,y)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ דרך הקו של γ מוגדר להיות

$$\int_L\left[P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right]=\int_a^b dx\ P\left(x,\gamma(x)\right)+\int_a^b dx\ y'(x)\ Q\left(x,\gamma(x)\right)$$

משפט 11.7 אינטגרל קווי מסוג שני 2

אם המסלול מישורי L מוגדר באופן פרמטרי

$$\{x=x(t)\ ,\ y=y(t)\ ,\ |\ \alpha\leq t\leq\beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה $\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\hat{\boldsymbol{i}}+Q(x,y)\hat{\boldsymbol{j}}$ דרך הקו של L מוגדר להיות

$$\int\limits_L[P(x,y)dx+Q(x,y)dy]=\int_\alpha^\beta dt\ x'(t)\ P\left(x(t)\ ,\ y(t)\right)+\int_\alpha^\beta dt\ y'(t)\ Q\left(x(t)\ ,\ y(t)\right)$$

משפט 11.8 אינטגרל קווי מסוג שני 3

אם L הוא המסלול במרחב תלת-ממדי המוגדר באופן

$$\{x=x(t)\ ,\ y=y(t)\ ,\ z=z(t)\mid\alpha\leq t\leq\beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה $\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\hat{\boldsymbol{i}}+Q(x,y,z)\hat{\boldsymbol{j}}+R(x,y,z)\hat{\boldsymbol{k}}$ דרך הקו של L מוגדר להיות

$$\int\limits_L[P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz]$$
$$=\int_\alpha^\beta dt\ x'(t)\ P\left(x(t),y(t),z(t)\right)+\int_\alpha^\beta dt\ y'(t)\ Q\left(x(t),y(t),z(t)\right)+\int_\alpha^\beta dt\ z'(t)\ R\left(x(t),y(t),z(t)\right)$$

דוגמה 11.4 אינטגרל קווי מסוג שני

חשבו את

$$\int_L[(x+2y)dx+(y-x)dy]$$

לאורך הפרבולה $y=x^2$ מ- $A(1,1)$ ל- $B(3,9)$.

פתרון:

לפי כלל **??**,

$$\int_L[(x+2y)dx+(y-x)dy]=\int_1^3 dx\left(x+2x^2\right)+\int_1^3 dx\cdot 2x\cdot\left(x^2-x\right)$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}\right]_1^3+\left[\frac{2x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}\right]_1^3$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2}\right]_1^3$$
$$=44$$

אם $L:\{x=x(t),y=y(t),a\leq t\leq b\}$ מתחילה ונגמרת באותה הנקודה $(x(a)=x(b),y(a)=y(b))$

נאמר שהיא מסילה סגורה ונסמן $\oint\limits_L$ במקום $\int\limits_L$ כדי לסמן אינטגרל מסילתי לאורך L.

דוגמה 11.5 אינטגרל קווי מסוג שני

חשבו את
$$\int_L [y\ dx + x\ dy]$$
לאורך הקשת
$$\{x = -\sin t\ ,\ \ y = \cos t\}$$
מ- $t=0$ עד ל- $t=2\pi$.

פתרון:

לפי כלל **??**,
$$\begin{aligned}\int_L [y\ dx + x\ dy] &= \int_0^{2\pi} dt\ \ \cos t \cdot \cos t + \int_0^{2\pi} dt\ \ (-\sin t)\cdot(-\sin t)\\ &= \int_0^{2\pi} dt\ \ \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)\\ &= \int_0^{2\pi} dt\ \ 1\\ &=2\pi\ .\end{aligned}$$

11.3 תכונות של אינטגרלים קוויים

משפט 11.9 תכונה חשובה של אינטגרל קווי

1) בהינתן מסילה L_{AB} מ- A ל- B נסמן ב- L_{BA} את המסילה ההולכת בכיוון ההפוך מ- B ל- A. אז
$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{L_{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

2) בהינתן מסילות L_{AB} מ- A ל- B ו- L_{BC} מ- B ל- C נסמן ב- L_{AC} את המסילה המשורשרת המתקבלת, אז
$$\int\limits_{L_{AC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{L_{BC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

3) עבור מסלול מרחבי L הנתון ע"י $\left\{\begin{array}{c} x=x(t), y=y(t), z=z(t)\\ a\le t\le b\end{array}\right.$ ופונקציה וקטורית

אז $\bar{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

$$\begin{aligned}&\int P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\\ =& \int_a^b P\left(x(t),y(t),z(t)\right)x'(t)dt + \int_a^b Q\left(x(t),y(t),z(t)\right)y'(t)dt + \int_a^b R\left(x(t),y(t),z(t)\right)z'(t)dt\end{aligned}$$

11.4 נוסחת גרין

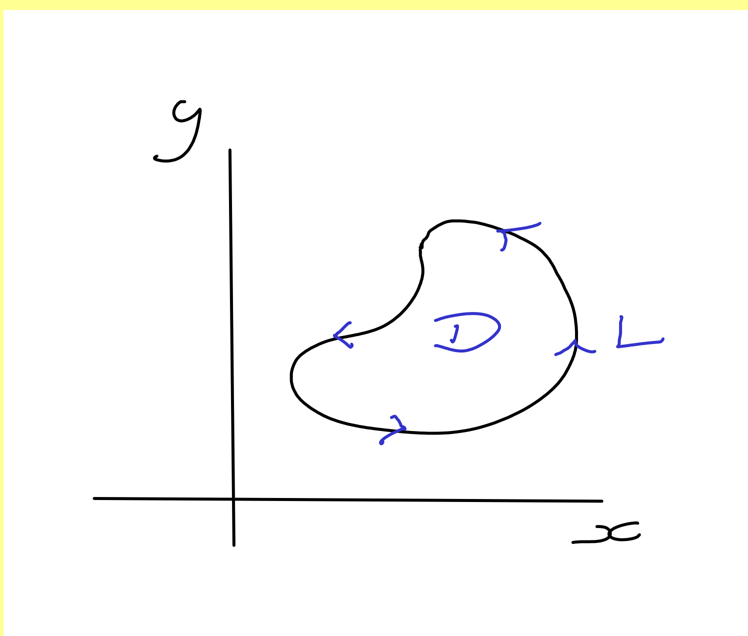
משפט 11.10 נוסחת גרין

אם L מסלול מישורי סגור ו- P,Q גזירות, אז

$$\oint\limits_L \left[P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy\right] = \iint\limits_D dx\ dy\ \left(Q'_x - P'_y\right)\ .$$

כאשר D התחום החסום על ידי L ונמצא משמאל ל-L. בפרט, שטח התחום $S(D)$ נתון ע"י

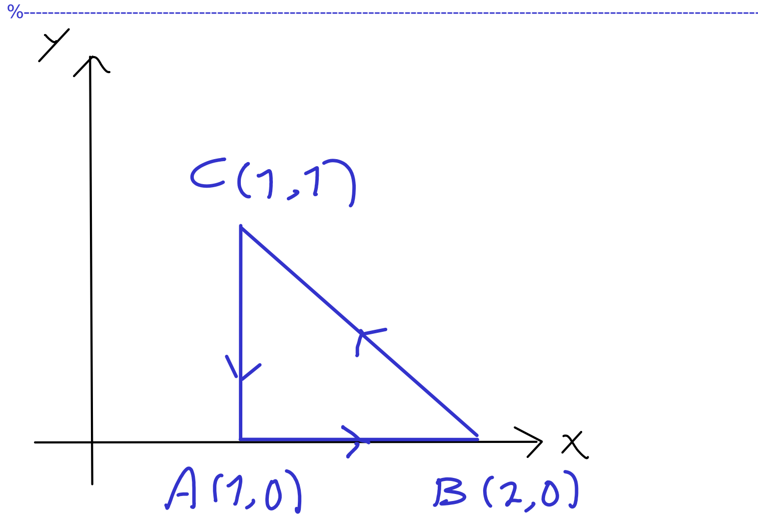
$$S(D) = \oint\limits_L x\,dy = -\oint\limits_L y\,dx = \frac{1}{2}\oint\limits_L x\,dy - y\,dx\ .$$



דוגמה 11.6

חשבו את $I = \oint\limits_L \frac{2}{x+y}dx + \frac{1}{x+y}dy$ לאורך המשולש שקדקודיו $A(1,0)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$.

פתרון:

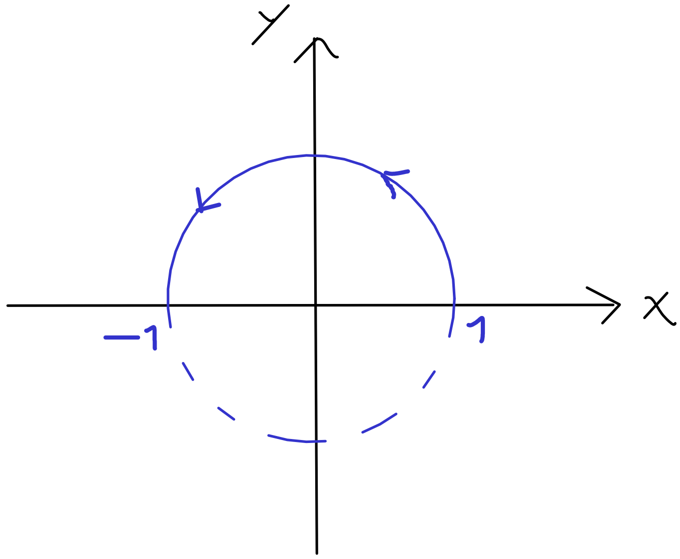


$$
\begin{aligned}
I &= \oint\limits_L \frac{2}{x+y}\,dx + \frac{1}{x+y}dy \\
&= \iint\limits_D \left(\frac{-1}{(x+y)^2} + \frac{2}{(x+y)^2}\right) dx\,dy \\
&= \int_1^2 dx \int_0^{2-x} dy\,\frac{1}{(x+y)^2} dx\,dy \\
&= \int_1^2 dx \left[\frac{-1}{x+y}\right]_0^{2-x} \\
&= \int_1^2 dx \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{x}\right) \\
&= \left[\frac{-x}{2} + \ln x\right]_1^2 \\
&= \ln 2 - \frac{1}{2}\ .
\end{aligned}
$$

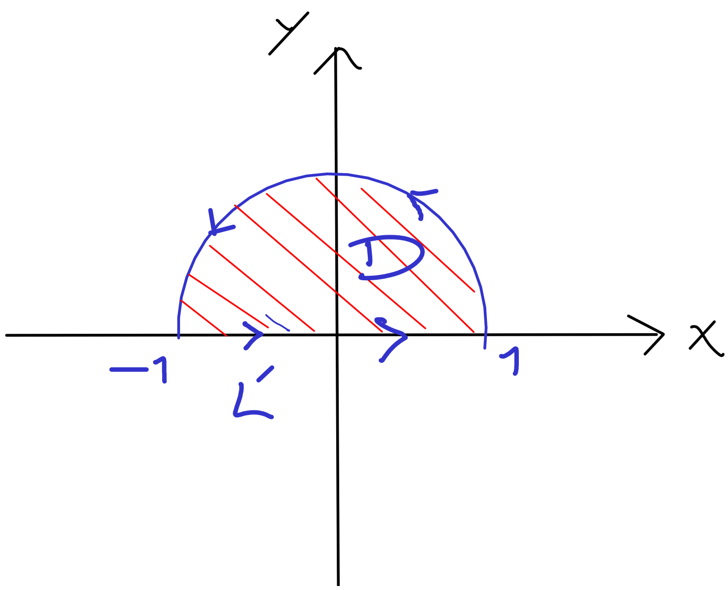
דוגמה 11.7

חשבו את $\int\limits_L \left(x^4 + e^x - y\right) dx + \left(x^2 + y^5 + y^2 e^y\right) dy$ $= I$ לאורך המסלול $x^2 + (\sqrt{y})^4$ מימין לשמאל.

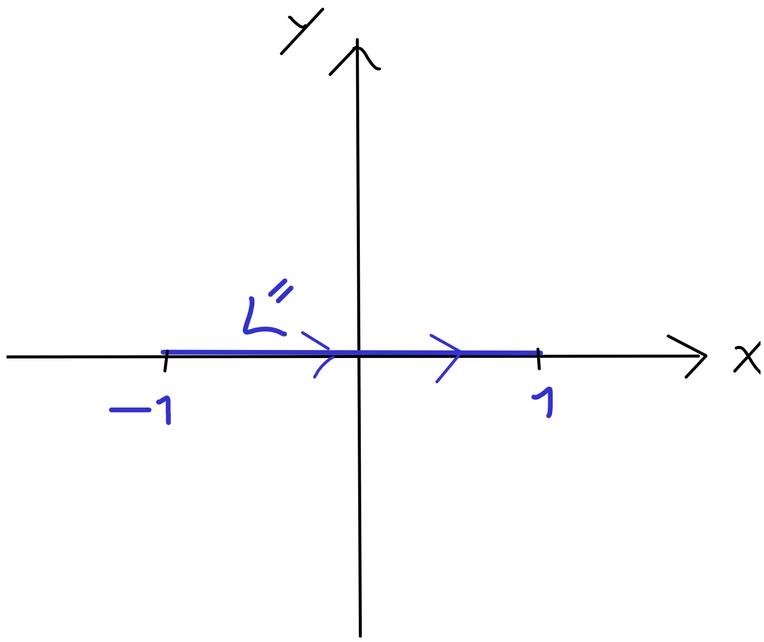
פתרון:



$\left\{\begin{array}{l} y\geq 0 \\ x^2+y^2=1\end{array}\right. \Leftarrow x^2+(\sqrt{y})^4$ נסגור את המסלול כך:



כלומר נשרשר עם המסלול



$$\oint_{L'} = \int_{L} + \int_{L''}$$

$$\oint_{L'} Pdx - Qdy = \iint_D (2x+1)dx\,dy$$

$$= \int_0^1 r\,dr \int_0^{\pi} (2r\cos\theta + 1)\,d\theta$$

$$= \int_0^1 r\left[2r\sin\theta + \theta\right]_{\theta=0}^{\pi} dr$$

$$= \int_0^1 \pi \cdot r dr$$

$$= \left[\frac{\pi r^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2} \ .$$

$$\int_{L''} P\,dx + Q\,dy = \int_{-1}^{1} P(x,0)dx + \int_{-1}^{1} Q(x,0)\cdot 0\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(x^4 + e^x\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} + e^x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left[\frac{2}{5} + e + \frac{1}{e}\right]$$

לכן

$$I = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{2}{5} + e - \frac{1}{e}\right)$$

משפט 11.11 אי-תלות של אינטגרל קווי במסלול האינטגרציה

אם

$$Q'_x = P'_y$$

מתקיים, אז

(א)

$$\oint\limits_L \left[P(x,y)\ dx + Q(x,y)\right]\ dy = 0$$

עבור כל מסלול סגור L

(ב) קיימת פונקציה $U(x,y)$ שעבורה הדיפרנציאל שלה הינה

$$dU(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\ ,$$

כך שהאינטגרל הקווי של $P(x,y)\hat{\boldsymbol{i}} + Q(x,y)\hat{\boldsymbol{j}}$ דרך מסלול שרירותי L מנקודה A לנקודה B ניתן ע"י

$$\int\limits_{AB} \left[P\,dx + Q\,dy\right] = \int\limits_{AB} dU = U(B) - U(A)\ ,$$

כלומר האינטגרל הקווי $\int\limits_{AB} \left[P\,dx + Q\,dy\right]$ אינו תלוי במסלול האינטגרציה העובר מ-A ל-B.

11.5 דוגמאות

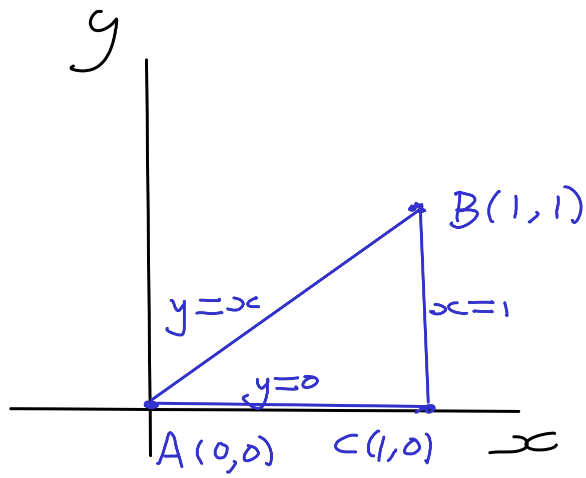
דוגמה 11.8 ח

שב את האינטגרל הבא כאשר המסלול L הוא המצולע בעל קדקודים נתונים:

$$\int\limits_L (x+y)\ dl$$

$A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(1,0)$.

פתרון:



$$\begin{aligned}\int_L dl\ (x+y) &= \left[\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}\right] (x+y)\ dl \\ &= \int_0^1 dx\,\sqrt{1+(x)'}\,(x+x) + \int_1^0 dy\,(1+y) + \int_1^0 dx\,(x+0) \\ &=\sqrt{2}\left[x^2\right]_0^1 + \left[y+\frac{y^2}{2}\right]_1^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^0 \\ &=\sqrt{2}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2} = \sqrt{2}-2\ .\end{aligned}$$

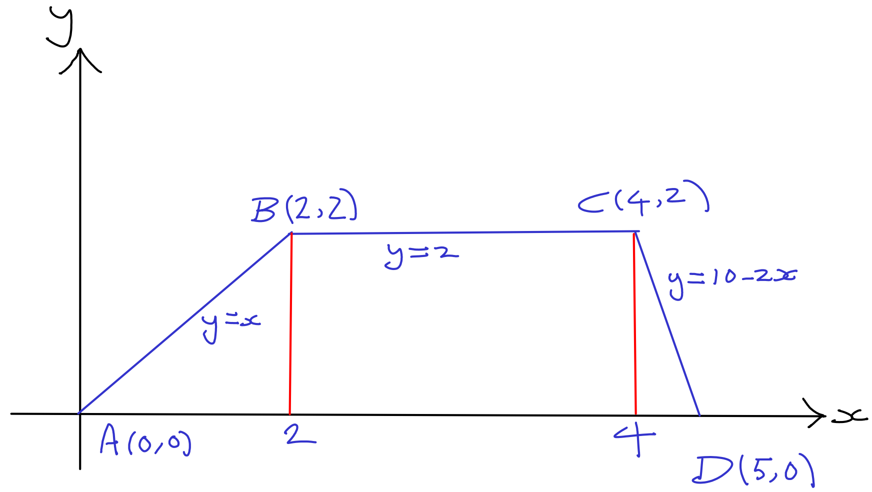
דוגמה 11.9 נוסחת גרין

חשבו את האינטגרל הבא כאשר המסלול L הוא המצולע בעל קדקודים נתונים:

$$\oint_L (xy\ dx + (x-y)\ dy)$$

$A(0,0)$, $B(2,2)$, $C(4,2)$, $D(5,0)$.

פתרון:



המסלול סגור ולכן ניתן להשתמש בנוסחת גרין (כלל ??):

$$I=\oint\limits_{L}(Pdx+Qdy)=\iint\limits_{D}dx\;dy\;\left(Q'_x-P'_y\right)$$

כאן

$$P(x,y)=xy\;,\qquad Q(x,y)=x-y\;,\qquad Q'_x=1\;,\qquad P'_y=x\;,$$

ולכן

$$\begin{aligned}
I=&\int_0^2dx\int_0^x dy\,(1-x)+\int_2^4dx\int_0^2dy\,(1-x)+\int_4^5dx\int_0^{-2x+10}dy\,(1-x)\\
=&\int_0^2dx\;x\,(1-x)+\int_2^4dx\;2\,(1-x)+\int_4^5dx\;\;(1-x)\,(-2x+10)\\
=&\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\left[2x-x^2\right]_2^4+\;\left[10x-\frac{11x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}\right]_4^5\\
=&4-\frac{8}{3}+(8-16-4+4)+\left(-\frac{10}{3}\right)\\
=&2-\frac{8}{3}+(8-16-4+4)+\left(-\frac{10}{3}\right)\\
=&-12\;.
\end{aligned}$$

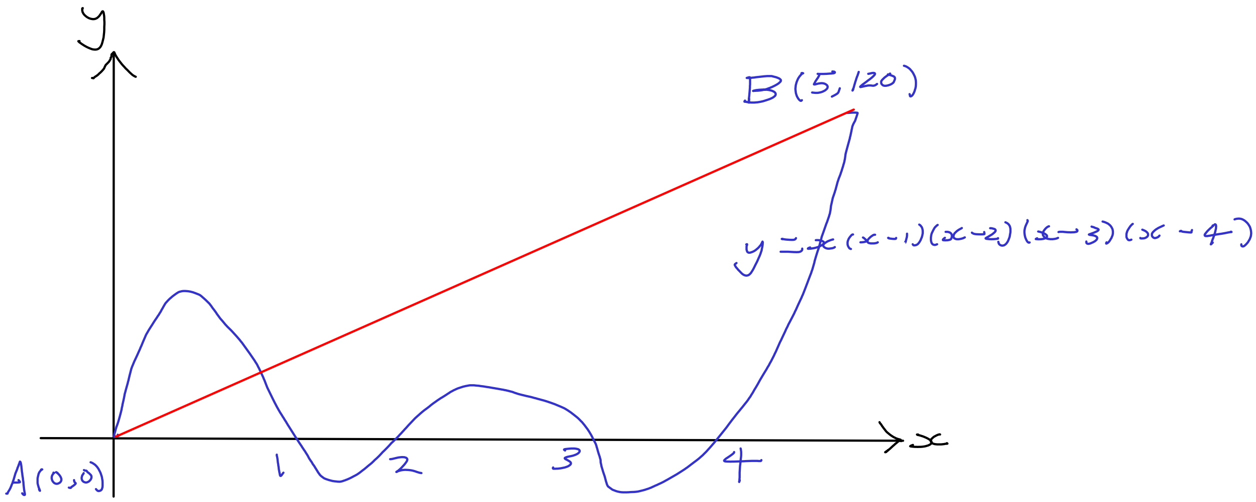
דוגמה 11.10 אי-תלות של אינטגרל קווי במסלול

חשבו את האינטגרל

$$\int\limits_{L}((2x-y)dx+(3y-x)dy)$$

עבור המסלול L הקטע של העקום $y=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ בין הנקודות $A(0,0)$, $B(5,120)$.

פתרון:



האינטגרל הוא

$$\int_L (P(x,y)dx + Q(x,y)dy)$$

כאשר

$$P(x,y) = 2x - y \ , \qquad Q(x,y) = 3y - x \ .$$

שים לב:

$$P'_y = Q'_x = -1$$

ולפיו מותר להשתמש בכלל **??**, האורם כי קיימת פונקציה $U(x,y)$ כך ש-

$$dU(x,y) = P(x,y) \ dx + Q(x,y) \ dy$$

והאינטגרל אינו תלוי בהמסלול אלא רק על הנקודה התחלתי $A(0,0)$ והנקודה הסופי $B(5,120)$. הפונקציה $U(x,y)$ הינה

$$U(x,y) = \int dx \ P(x,y) = \int dx \ (2x - y) = x^2 - xy + p(y)$$

כאשר $p(y)$ פונקציה התלוי רק על המשתנה y ו-

$$U(x,y) = \int dy \ Q(x,y) = \int dy \ (3y - x) = \frac{3y^2}{2} - xy + q(x)$$

כאשר $q(x)$ פונקציה התלוי רק על המשתנה x. נשוואה אותן ונקבל

$$U(x,y) = x^2 + \frac{3y^2}{2} - xy \ .$$

לכן לפי כלל **??**,

$$\int\limits_L (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \int\limits_{AB} dU(x,y) = U(B) - U(A) = 5^2 + \frac{3\cdot 120^2}{2} - 5\cdot 120 = 21025 \ .$$

דוגמה 11.11 נוסחת גרין

חשבו את האינטגרל

$$\oint\limits_L ((x+y)\ dx + (x-y)\ dy)$$

לפי המסלול L הניתן ע"י

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

פתרון:

המסלול סגור ולכן ניתן להשתמש בנוסחת גרין (כלל **??**) האומר כי

$$I = \oint\limits_L (P\ dx + Q\ dy) = \iint\limits_D dx\ dy\ \left(Q'_x - P'_y\right)$$

כאן

$$P(x,y) = x+y\ , \qquad Q(x,y) = x-y\ , \qquad \Rightarrow \quad Q'_x = 1\ , \qquad P'_y = 1\ .$$

ולכן

$$I = \iint\limits_D\ dx\ dy\ \ (1-1) = 0.$$

דוגמה 11.12 אינטגרל הקווי מסוג שני

חשבו את האינטגרל

$$\oint\limits_L (xy\ dx + (x-y)\ dy)$$

לפי המסלול L הניתן ע"י

$$x = a\cdot\cos t\ , \quad y = b\cdot\sin\ t$$

בכיוון נגד השעון.

פתרון:

מתקבלים המסלול הסגור ע"י הטווח

$$0 \le t \le 2\pi$$

כך שלפי בלל **??**,

$$\begin{aligned}
I =& \oint\limits_L (xy\ dx + (x-y)\ dy) \\
=& \int_0^{2\pi} dt\,(x(t)y(t)\ \dot{x} + (x(t)-y(t))\dot{y}) \\
=& \int_0^{2\pi} dt\left(-a^2b\ \cos t\cdot\sin^2 t + (a\cdot\cos t - b\cdot\sin t)b\cdot\cos t\right) \\
=& \int_0^{2\pi} dt\left(-a^2b\ \cos t\cdot\sin^2 t + ab\cdot\cos^2 t - b^2\cdot\sin t\cdot\cos t\right) \\
=& \int_0^{2\pi} dt\left(-a^2b\ \cos t\cdot\sin^2 t + ab\cdot\frac{1}{2}\left(1+\cos 2t\right) - b^2\cdot\sin t\cdot\cos t\right) \\
=& \left[-a^2b\,\frac{\sin^3 t}{3} + \frac{abt}{2} - \frac{ab}{4}\sin 2t - \frac{b^2}{2}\cdot\sin^2 t\right]_0^{2\pi} \\
=& \pi ab\ .
\end{aligned}$$

שיעור 12
משוואות דיפרנציאליות

12.1 הגדרת משוואה דיפרציאלית

הגדרה 12.1 משוואה דיפרניאלית רגילה

משוואה

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)$$

שקושרת בין משתנה בלתי תלוי x לבין פונקציה $y = y(x)$ ונגזרות של $y(x)$ לפי x, תיקרא משוואה דיפרניאלית רגילה (מד"ר או מישדיף).

דוגמה 12.1

1) $y' = 0$

2) $y = 2x$

3) $y' = 2xe^{x^2}$

4) $y''' + 5y'' \sin x - 17y + \tan x = 0$

5) $6y'' - 9y' = x^7$

6) אפשר גם בדיפרנציאל:

$$x \cos x \, dx + (x - 7y)dy = 0$$

זה שקול למשוואה

$$x \cos x + (x - 7y)y' = 0$$

שכן

$$y' = \frac{dy}{dx} \,.$$

למה זה מעניין? בכל מקום שכן ניתן לתאר השתנות דינמית בזמן של מערכת בעזרת קצב שינוי של הגודל הנמדד, ניתן לתאר אותה בעזרת משוואה דיפרנציאלית. למשל:
משתמשים במשידיף בתחומות כמו: פחזחקה, ביולוגיה, כימיהת הנדסה, שונות, גרפיקה, ועוד.

הגדרה 12.2 פתרון משווא דיפרניאלית רגילה

פתרון של מד"ר

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

בקטע (a, b) זו פונקציה גזירה n פעמים ב- (a, b) המקיימת את המשוואה. כלומר, לאחר הצבה שלה, המשוואה הופכת לזהות לכל x בקטע.

דוגמה 12.2 ה

וכיחו כי הפונקציה

$$y = e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + x\right) e^x$$

מהווה פתרון למד"ר:

$$y'' - 3y' + 2y = xe^x \ .$$

פתרון:
בכדי להציב את הפונקציה במשוואה, נגזור אותה פעמיים:

$$\begin{aligned} y' &= 2e^{2x} - (x+1)e^x - \left(\frac{x^2}{2} + x\right) e^x \qquad = 2e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 1\right) e^x \ , \\ y'' &= 4e^{2x} - (x+2)e^x - \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 1\right) e^x \quad = 4e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + 3x + 3\right) e^x \ , \end{aligned}$$

$$\underbrace{\left[4e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + 3x + 3\right) e^x\right]}_{y''} - 3\underbrace{\left[2e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 1\right) e^x\right]}_{y'} + 2\underbrace{\left[e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + x\right) e^x\right]}_{y}$$
$$= xe^x$$

כנדרש.

12.2 מד"ר מסדר ראשון

הגדרה 12.3 משוואה דיפרניאלית רגילה מסדר ראשון

אם ניתן להציג את המשוואה בצורה

$$y' = f(x,y)$$

אז המשוואה נקראת משוואה הפתוחה לגבי הנגזרת. משואה כזו ניתן גם להציג בצורה

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \ .$$

דוגמה 12.3

(1

$$(2x+y)dx + (x^2+y)dy = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y' + \frac{2x+y}{x^2+y} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y' = -\frac{2x+y}{x^2+y} \ .$$

(2

$$(7x+3y)dx + 7x^2 dy = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y' + \frac{7x+3y}{7x^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y' = -\frac{7x+3y}{7x^2} \ .$$

דוגמה 12.4 פ

תרו את המד"ר

$$y' = 2x \ .$$

פתרון:

$$y' = 2x \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int 2x\, dx = x^2 + C \ .$$

כלומר, יש למשוואה אינסוף פתרונות.

הגדרה 12.4 פתרון כללי למשוואה דיפרניאלית רגילה מסדר ראשון

פתרון כללי למד"ר מסדר ראשון הוא פונקציה גזירה $y = \phi(x, C)$ כאשר C הוא פרמטר כך שלכל פתרון של המשוואה (פרט אולי למקרים "מיוחדים") מתקבל ב- $\phi(x, C)$ ע"י הצבה של ערך כלשהו ב- C.

דוגמה 12.5

$y' = 2x$

$$\phi(x, C) = x^2 + C$$

הוא פתרון כללי.

הגדרה 12.5 פתרון כללי

פתרון המתקבל מהפתרון הכללי ע"י הצבה של ערך בפרמטר C נקרא פתרון פרטי.

דוגמה 12.6

$y = x^2 + 7$ הוא פתרון פרטי של המשוואה $y' = 2x$ ביחס לפתרון הכללי $\phi(x, C) = x^2 + C$.

הגדרה 12.6 פתרון פרטי

מד"ר מסדר ראשון יחד עם תנאי התחלה

$$\begin{cases} F(x, y, y') & = 0 \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$

נקראת בעית קושי.

דוגמה 12.7

נפתור את בעית קושי

$$\begin{cases} y' & = 2x \\ y(1) & = 8 \end{cases}$$

פתרון:
הפתרון הכללי שמצאנו למשוואה הוא
$$\phi(x,C)=x^2+C\ .$$
נציב את תנאי ההתחלה:
$$y(1)=8 \quad\Rightarrow\quad 1^2+C=8 \quad\Rightarrow\quad C=7\ .$$
ולכן מתקבל הפתרון הפרטי
$$y(x)=x^2+7\ .$$

דוגמה 12.8

נתונה המד"ר
$$y'-4(y-1)^{3/4}$$

1) מצאו פתרון אחד.
2) הוכיחו שמשפחות הפונקציות $y(x,C)=(x+C)^4+1$ מהווה פתרון כללי למשוואה.
3) האם קיים קבוע C שעבורו הפתרון $y=1$ מתקבל מהפתרון הכללי $y=(x+C)^4+1$ כפתרון פרטי?

פתרון:

1) $y=1$ הינו פתרון למשוואה שכן $y'=0$ ואז
$$0-4(1-1)^{3/4}=0\ .$$
2) אם נגזור את הפונקציה $y(x,C)$ נקבל $y'=4(x+C)^3$ ואם נציב את y במשוואה נקבל
$$4(x+C)^3-4\left((x+C)^4+1-1\right)^{3/4}=4(x+C)^3-4(x+C)^3=0$$
ואכן קיבלנו זהות.

למעשה, אין לנו את הכלים להראות שזה אכן פתרון כללי. הוכיחו שמשפחות הפונקציות $y(x,C)=(x+C)^4+1$ מהווה פתרון כללי למשוואה.

3) לא. שכן אז $(x+C)^4+1=1$ לכל x, $\Leftarrow$ $x+C=0$ לכל x, וזה לא יכול להיות.

הגדרה 12.7 פתרון מיוחד

פתרון של מד"ר שאינו מתקבל מהפתרון הכללי כפתרון פרטי עבור ערך כלשהו של הפרמטר C נקרא פתרון מיוחד.

דוגמה 12.9

עבור הדוגמה הקודמת, $y=1$ פתרון מיוחד.

12.3 משוואה דיפרציאלית הניתנת להפרדת משתנים

הגדרה 12.8 משוואה דיפרניאלית הניתנת להפרדת משתנים

מד"ר הניתנת להפרדת משתנים הינה משוואה מצורה

$$y' = f(x)g(y)$$

או באופן שקול

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$$

משפט 12.1 כיצד לפתור משוואה דיפרניאלית הניתנת להפרדת משתנים

נתונה מד"ר הניתנת להפרדת משתנים הינה משוואה מצורה

$$y' = f(x)g(y)$$

אז

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$$

דוגמה 12.10

פתרו את המשוואה $y' = 2xy$

פתרון:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y}y'dx &= \int 2x\,dx \\ \int \frac{1}{y}dy &= \int 2x\,dx \\ \ln|y| + C_1 &= x^2 + C_2 \\ \ln|y| &= x^2 + (C_2 - C_1) \end{aligned}$$

אין טעם בשני קבועים אינטגרציה כאן. נרשום

$$\begin{aligned} \ln|y| &= x^2 + C_3 \\ |y(x)| &= e^{x^2+C_3} \\ |y(x)| &= e^{x^2}\cdot e^{C_3} \end{aligned}$$

נרשום $C_4 = e^{C_3}$ ואז

$$|y(x)| = C_4 e^{x^2}$$

מלכתחילה, $C_4 > 0$ ואם נרצה להוריד את הערך המוחלט נקבל

$$y(x) = \pm C_4 e^{x^2}\ ,$$

אבל ייותר נוח לרשום

$$y(x) = C_4 e^{x^2}$$

כאשר מאפשרים ל- C_4 להיות גם שלילי.

במקרה ש $C_4 = 0$, נקבל $y(x) = 0$. זהו גם כן פתרון. לכן,

$$y(x) = C \cdot e^{x^2}$$

הוא פתרון למשוואה לכל ערך של C.

דוגמה 12.11

העזרו בשיטת הפרדת משתנים בכדי לפתור את המשוואה

$$y' - 4(y-1)^{3/4} = 0$$

והשוו לפתרונות שכבר ראינו קודם.

פתרון:

$$\int \frac{1}{4(y-1)^{3/4}} y' dx = \int 1 \, dx$$
$$(y-1)^{1/4} = x + C$$

לכן קיבלנו $y = (x+C)^4 + 1$ פתרון כללי

$y = 1$ פתרון מיוחד.