היחידה למתמטיקה

08/05/23 י"ז באייר תשפ"ג
$17:10-18:40$

אלגברה ליניארית 2 למדמ"ח

בוחן אמצע סמסטר

מרצה: ד"ר ירמיהו מילר, ד"ר יבגניה אקרמן.ד"ר חזי חלואי

תשפ"ג סמסטר ב'

השאלון מכיל 12עמודים (כולל עמוד זה).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (2 עמודים בפורמט $A4$) מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לענות על שאלות 1-4.

==

שאלה 1 (40 נקודות)

א) (32 נק') נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) (12 נק') מצאו את הפולינום האופייני והמינימלי של מטריצה A.

2) (15 נק') מצאו את הערכים העצמיים והמרחבים העצמיים של A.

3) (5 נק') האם המטריצה לכסינה ? אם כן, מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P שך ש: $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$. אם לא, הסבירו זאת.

ב) (8 נק') תהי A מטריצה הפיכה בעלת ערך עצמי $\alpha \in \mathbb{R}$. יהי u וקטור עצמי של A השייך לערך העצמי α.

1) הוכיחו ש- u הינו וקטור עצמי של A^{-1} ומצאו את הערך העצמי השייך ל- u.

2) הוכיחו ש- u הינו וקטור עצמי של A^2 ומצאו את הערך העצמי השייך ל- u.

שאלה 2 (40 נקודות)

א) (20 נק') נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. חשבו באמצעות משפט קיילי המילטון את

1) A^{15}

2) A^{-1}

ב) (20 נק') תהי A מטריצה ריבועית כך שהפולינום המינימלי שלה הינו $m_A(x) = (x+1)^2$. יהי $f(x) = x^2 - 2x + 3$. הוכיחו כי מטריצה $f(A)$ הפיכה.

שאלה 3 (20 נקודות)

א) (16 נק') תהי $A \in M_{7\times 7}(\mathbb{R})$ מטריצה המקיימת

$$m_A(x) = (x-3)^3(x-1) \ , \qquad p_A(x) = (x-3)^5(x-1)^2 \ .$$

מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A.

ב) (4 נק') מצאו את צורת ז'ורדן של A אם ידוע שהריבוי הגאומטרי של ערך עצמי $\lambda = 3$ שווה ל- 2.

פתרונות

שאלה 1

א) 1)

$$
\begin{aligned}
|A-\lambda I| =& \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
=&(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
=&(1-\lambda)\left((2-\lambda)(2-\lambda)-1\right) \\
=&(1-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+4-1\right) \\
=&(1-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right) \\
=&(1-\lambda)\left(\lambda-3\right)\left(\lambda-1\right) \\
=&-\left(\lambda-1\right)^2\left(\lambda-3\right)
\end{aligned}
$$

הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-3)\ .$$

האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$(\lambda-1)(\lambda-3)\ ,\qquad (\lambda-1)^2(\lambda-3)\ .$$

נבדוק $(\lambda-1)(\lambda-3)$:

$$(A-I)(A-3I)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-3)$.

2) ערכים עצמיים:

$\lambda=1$ מריבוי אלגברי 2

$\lambda=3$ מריבוי אלגברי 1.

נחשב את המרחב עצמי V_1 השייך לערך עצמי 1:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\overset{\lambda=1}{=}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+R_1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון $(x,y,z)=(y-z,y,z)=y(1,1,0)+z(-1,0,1)$ לכן

$$V_1=\mathrm{sp}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(V_1)=2$, ז"א הריבוי גאומטרי 2.

נחשב את המרחב עצמי V_3 השייך לערך עצמי 3:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \stackrel{\lambda=3}{=} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון $(x,y,z)=(-y,y,0)=y(-1,1,0)$ לכן

$$V_3=\text{sp}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(V_3)=1$, ז"א הריבוי גאומטרי 1.

3) עבור כל אחד של הערכים עצמיים הריבוי גאומטרי שווה לריבוי אלגברי לכן A לכסינה.

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\ , \qquad P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

ב) 1)

$$A\cdot u=\alpha u$$

A הפיכה לכן קיימת A^{-1} כך ש- $A\cdot A^{-1}=I$. נכפיל מצד שמאל ב- A^{-1}:

$$A^{-1}\cdot A\cdot u=A^{-1}\cdot(\alpha u) \qquad \Rightarrow \qquad I\cdot u=\alpha A^{-1}\cdot u \qquad \Rightarrow \qquad u=\alpha A^{-1}\cdot u\ .$$

A הפיכה לכן 0 לא יכול להיות ערך עצמי, כלומר $\alpha\neq 0$. לכן ההופכית $\alpha^{-1}=\dfrac{1}{\alpha}$ קיימת. נכפיל ב- α^{-1} ונקבל

$$\alpha^{-1}u=\alpha^{-1}\cdot\alpha A^{-1}\cdot u \qquad \Rightarrow \qquad A^{-1}\cdot u=\frac{1}{\alpha}u\ .$$

2)

$$A\cdot u=\alpha u \qquad \Rightarrow \qquad A^2\cdot u=A\cdot(\alpha u)=\alpha A\cdot u=\alpha\cdot\alpha u=\alpha^2 u\ .$$

שאלה 2

א) 1) הפולינום האופייני של A הוא:

$$|A-xI|=\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix}=-x\cdot(x^2)-1\cdot(-1)=1-x^3\ .$$

לכן $p_A(x) = A^3 - I$. לפי משפט קיילי-המילטון:

$$p_A(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad A^3 - I = 0 \quad \Rightarrow \quad A^3 = I \quad \Rightarrow \quad A \cdot A^2 = I$$

לכן

$$A^{-1} = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

2)

$$A^{15} = \left(A^3\right)^5 = I^5 = I .$$

ב) נרשום $f(x)$ בצורה

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 - 4x + 2 = (x+1)^2 - 4\left(x - \frac{1}{2}\right) = m_A(x) - 4\left(x - \frac{1}{2}\right) .$$

נציב A בפולינום f:

$$f(A) = m_A(A) - 4\left(A - \frac{1}{2}I\right) = -4\left(A - \frac{1}{2}I\right) ,$$

בגלל ש- $m_A(A) = 0$ כי A מאפסת את הפולינום המינימלי. לכן

$$|f(A)| = (-4)^n \left|A - \frac{1}{2}I\right| .$$

$\left|A - \frac{1}{2}I\right| \neq 0$ כי $\frac{1}{2}$ לא ערך עצמי של A בגלל ש $\frac{1}{2}$ לא שורש של הפולינום המינימלי. לכן

$$|f(A)| \neq 0$$

ולכן $f(A)$ הפיכה.

שאלה 3

א)

$$\begin{pmatrix} J_3(3) & & & \\ & J_2(3) & & \\ & & J_1(1) & \\ & & & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

או

$$\begin{pmatrix} J_3(3) & & & & \\ & J_1(3) & & & \\ & & J_1(3) & & \\ & & & J_1(1) & \\ & & & & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ב) ריבוי גאומטרי שווה למספר הבלוקים של אותו ערך עצמי, לכן, עבור $\lambda = 3$ צריך להיות שני בלוקים. לכן הצורת ז'ורדן היא:

$$\begin{pmatrix} J_3(3) & & & \\ & J_2(3) & & \\ & & J_1(1) & \\ & & & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$