

שיעור 7

אי-כריעות

7.1 השפות לא כריעות $L_d, L_{\text{halt}}, L_{\text{acc}}$

הגדרה 7.1 L_{acc}

$$L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} \in RE \setminus R$$

הגדרה 7.2 L_{halt}

$$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ עוצרת על } M\} \in RE \setminus R$$

הגדרה 7.3 L_d

$$L_d = \{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M)\} \notin RE$$

משפט 7.1 $L_{\text{acc}} \in RE$

$$L_{\text{acc}} \in RE .$$

הוכחה: מכיוון ש- $L(U) = L_{\text{acc}}$, כאשר U המכונת טיריניג האוניברסלית אשר מקבלת את L_{acc} , לכן $L_{\text{acc}} \in RE$.

משפט 7.2 $L_{\text{halt}} \in RE$

$$L_{\text{halt}} \in RE .$$

הוכחה: נבנה מ"ט U' שהוא למעשה U פרט למקום שבו U עצמה ומחטה, U' תעוצר ותחזור ותקבל.

נווכיח כי U' מקבלת את L_{halt} :

אם $x \in L_{\text{halt}}$

w עוצרת על M ו- $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$

x עוצרת ומקבלת את $U' \Leftarrow$

אם $x \notin L_{\text{halt}}$ ⇐ שני מקרים:

• U' דוחה את x .

• M לא עוצרת על U' לא עוצרת על w .

משפט 7.3 $L_d \notin RE$

$$L_d \notin RE .$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי $L_d \in RE$.

• אם M_d מקבלת את L_d ⇐

$$. L(M_d) = L_d \Leftarrow$$

נבדוק ריצה של M_d על $\langle M_d \rangle$.

• אם $L(M_d) \neq L_d$ ⇐ $\langle M_d \rangle \notin L_d$ ⇐ $\langle M_d \rangle \in L(M_d)$.

• אם $L(M_d) \neq L_d$ ⇐ $\langle M_d \rangle \in L_d$ ⇐ $\langle M_d \rangle \notin L(M_d)$.

בשני המקרים קיבלנו סתיירה לכך ש- $L_d \notin RE$ ולכן $L(M_d) = L_d$.

משפט 7.4 $L_{\text{acc}} \text{ לא כריעה}$

$$L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} \notin R .$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי $L_{\text{acc}} \in R$ ותהי M_{acc} המכריעה את L_{acc} .

נשתמש ב- M_{acc} כדי לבנות מ"ט M_d המכריעה את L_d (בסתירה לכך ש- $L_d \notin RE$ כפי שהוכחנו במשפט 7.3).

$$L_d = \{\langle M, w \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M)\} .$$



התאור של M_d

: x על קלט $= M_d$

1) בודקת האם $x = \langle M \rangle$. אם לא \Leftarrow דוחה.

2) מחשבת את $\langle x \rangle = \langle\langle M \rangle\rangle$

3) מרייצה את $\langle M, \langle M \rangle \rangle$ על הזוג M_{acc}

- אם M_{acc} מקבלת $M_d \Leftarrow$ דוחה.

- אם M_{acc} דוחה $M_d \Leftarrow$ מקבלת.

כעת נוכיח כי M_d מכירעה את L_d :

אם $x \in L_d$

$\langle M \rangle \notin L(M) \rightarrow x = \langle M \rangle \Leftarrow$

$\langle M, \langle M \rangle \rangle$ דוחה את הזוג $M_{acc} \Leftarrow$

x מקבלת את $M_d \Leftarrow$

אם $x \notin L_d$ שני מקרים:

x דוחה את $M_d \Leftarrow x \neq \langle M \rangle$:1)

מקרה (2): $\langle M \rangle \in L(M) \rightarrow x = \langle M \rangle$:2)

$\langle M, \langle M \rangle \rangle$ מקבלת את זוג $M_{acc} \Leftarrow$
 x דוחה את $M_d \Leftarrow$

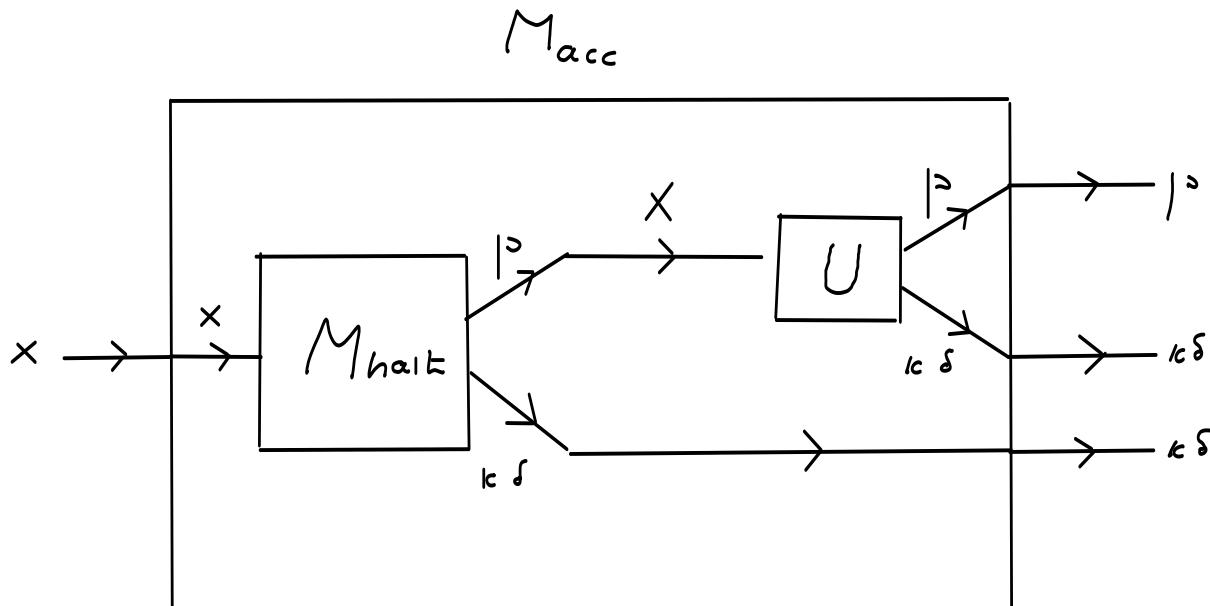
משפט 7.5 לא כריעה

$$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ עוצרת על } M\} \notin R .$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי $R \in L_{\text{halt}}$ ותהי M_{halt} מ"ט המכנית את L_{halt} .

נשתמש ב- M_{halt} כדי לבנות מ"ט המכריעה את L_{acc} (בסטירה לכך ש- $L_{\text{acc}} \notin R$ כפי שהוכחנו במשפט 7.4).



התאור של M_{acc}

:*x* על קלט = M_{acc}

1) מרים את M_{halt} על x .

- אם $M_{\text{halt}} \Leftarrow M_{\text{acc}}$ דוחה.
 - אם $M_{\text{acc}} \Leftarrow M_{\text{halt}}$ מקבלת M_{acc} מರיצה את U על x ועונה כמוותה.

אבחנה

נוכיח כי M_{acc} מכריעה את L_{acc}

$x \in L_{\text{acc}}$ **ונ**

$$\langle w \rangle \in L(M) \dashv x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$$

x מקבלת את x וגם U מקבלת את M_{halt} \Leftarrow

x מקבלת את M_{acc} \Leftarrow

אם $x \notin L_{\text{acc}}$ ⇔ שני מקרים:

מקרה (1) $\langle M, w \rangle$:

דוחה את $M_{\text{halt}} \Leftarrow$
דוחה את $M_{\text{acc}} \Leftarrow$

מקרה (2) $\langle w \rangle \notin L(M)$ ו- $x = \langle M, w \rangle$:

מקרה (א): M לא עוצרת על w דוחה את x .

מקרה (ב): M דוחה את w מקבלת את x אבל $M_{\text{halt}} \Leftarrow$ דוחה את x .

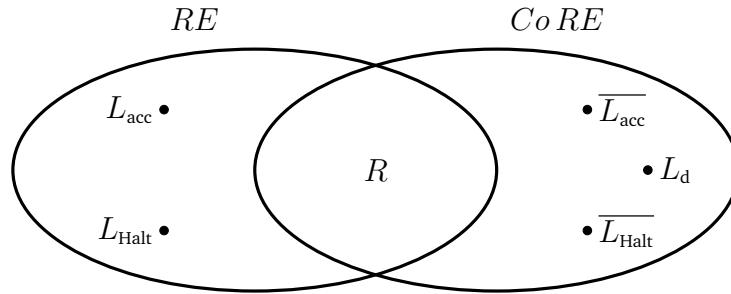
הראנו כי M_{acc} מכיריעת L_{acc} בסתייה לכך ש- $L_{\text{acc}} \notin R$.
 $L_{\text{halt}} \notin R$.

משפט 7.6

$$L_{\text{acc}} \in RE \setminus R \Rightarrow \bar{L}_{\text{acc}} \notin RE ,$$

$$L_{\text{halt}} \in RE \setminus R \Rightarrow \bar{L}_{\text{halt}} \notin RE ,$$

$$L_d \notin RE \setminus R .$$



7.2 השפה L_E לא כריעה

הגדרה 7.4 השפה L_E

$$L_E = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\} .$$

משפט 7.7 $L_E \notin R$

$$L_E \notin R .$$

כלומר L_E לא כריעה.

הוכחה:

נניח בשלילה כי L_E כריעה. אז נבנה מ"ט M_{acc} המכיריעת L_{acc} באופן הבא.

בנייה של M_w

ראשית נגדיר את המ"ט M_w :

על כל קלט $x = M_w$:

(1) אם $x \neq w$ ⇐ דוחה.

(2) אם $x = w$ אז מריצה M על w ועונה כמוות.

אבחנה

אם $x = w$ מקבלת את w אז $L(M_w) = \Sigma^*$.

אם $x \neq w$ או אם M דוחה את w אז $L(M_w) = \emptyset$.

בנייה של M_{acc}

נניח כי קיימת מ"ט M_E המכrica את L_E . אז נבנה מ"ט M_{acc} המכrica את L_{acc} :

על כל קלט $x = M_{\text{acc}}$:

(1) אם $x \neq \langle M, w \rangle$ ⇐ דוחה.

(2) אם $x = \langle M, w \rangle$, בעזרת התאור $\langle M, w \rangle$, בונה מ"ט M_w :

(3) מריצה M_E על M_w :

(4) • אם M_E מקבלת ⇐ דוחה.

• אם M_E דוחה ⇐ מקבלת.

נכונות

$\langle M_w \rangle$ דוחה M_E ⇐ $L(M_w) = \Sigma^* \neq \emptyset$ ⇐ $w \in L(M)$ ו- $x = \langle M, w \rangle$ ⇐ $x \in L_{\text{acc}}$ מקבלת. M_{acc} ⇐

אם $x \notin L_{\text{acc}}$ ⇐ שני מקרים:

מקרה 1: M_{acc} מקבלת M_E ⇐ $L(M_w) = \emptyset$ ⇐ $x \neq \langle M, w \rangle$

מקרה 2: M_{acc} ⇐ $\langle M_w \rangle$ M_E ⇐ $L(M_w) = \emptyset$ ⇐ $w \notin L(M)$ ו- $x = \langle M, w \rangle$

לסיכום:

אם L_E כרעה אז אפשר לבנות מ"ט M_{acc} המכrica את L_{acc} בסתירה לכך ש- $L_E \notin R$.

משפט 7.8 $L_E \notin RE$

$L_E \notin RE$

הוכחה:
הרעיון

בנייה מכונת טיריניג אי-דטרמיניסטיבית N מקבלת את

$$\bar{L}_E = \{\langle M \rangle \mid L(M) \neq \emptyset\} .$$

: x על קלט $= N$

1 אם $x \neq \langle M \rangle$ דוחה.

2 אם $x \in N$ בוחרת מילה Σ^* w באופן אי-דטרמיניסטיבי.

3 מרים M על w .

- אם M מקבלת $\Rightarrow N$ מקבלת.

- אם M דוחה $\Rightarrow N$ דוחה.

הוכחת הנכונות

אם $x \in \bar{L}_E$

$L(M) \neq \emptyset \wedge x = \langle M \rangle \Leftarrow$

$w \in L(M) \wedge \Sigma^* w \text{ כך ש } \Leftarrow$

$\exists \text{ ניחוש } \Sigma^* w \text{ כך ש } M \text{ מקבלת את } w \Leftarrow$

$\text{קיים חישוב של } N \text{ מקבל את } x \Leftarrow$

$.x \in L(N) \Leftarrow$

לכן קיימת מ"ט א"ד N מקבלת את השפה \bar{L}_E שכן $\bar{L}_E \in RE$

כעת נוכיח כי $\bar{L}_E \notin RE$

$.L_E \in R$, 6.1 הוכחנו לעלה ש- $\bar{L}_E \in RE$. לכן $\bar{L}_E \in RE$ הוכחה כי $L_E \in RE$.
או בסתרה לכך ש- $L_E \notin R$.
 $L_E \notin RE$ לכן ■

7.3 השפה L_{EQ} לא כריעה

הגדרה 7.5

$$L_{EQ} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\}$$

משפט 7.9 $L_{EQ} \notin R$

$L_{EQ} \notin R$

השפה L_{EQ} לא כריעה.

נניח בשלילה כי L_{EQ} כריעה. תהי M_{EQ} מ"ט המכריעה את L_E באופן הבא.

בנייה של M_E

על כל קלט $x = M_E$

• אם $x \neq \langle M \rangle$ דוחה. **(1)**

• אם x , מריצה M_\emptyset על M_{EQ} כאשר $\langle M, M_\emptyset \rangle$ המ"ט שדוחה כל קלט. **(2)**

• אם M_{EQ} מקבלת M_E מתקבלת. **(3)**

• אם M_{EQ} דוחה דוחה. **(4)**

נכונות

אם $x \in L_E$

$L(M) = \emptyset \wedge x = \langle M \rangle \Leftarrow$

$L(M) = L(M_\emptyset) \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle \in L_{EQ} \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle$ מקבלת $M_{EQ} \Leftarrow$

M_E מקבל. **(5)**

אם $x \notin L_E$ שני מקרים:

• אם $x \neq \langle M \rangle$ דוחה. $M_E \Leftarrow x \neq \langle M \rangle$ **(1)**

• אם $x = \langle M \rangle$ דוחה. **(2)**

$L(M) \neq \emptyset \wedge x = \langle M \rangle \Leftarrow$

$L(M) \neq L(M_\emptyset) \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle \notin L_{EQ} \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle$ דוחה $M_{EQ} \Leftarrow$

M_E דוחה. **(6)**

לסיכום:

אם $L_E \notin R$ כריעה אז אפשר לבנות מ"ט M_E בסתיירה למשפט 7.7 האומר ש-
 $L_{EQ} \notin R$. לכן $L_{EQ} \notin RE$.

משפט 7.10 $L_{EQ} \notin RE$

$L_{EQ} \notin RE$

לא קבילה. L_{EQ}

הוכחה:

נניח בשלילה כי L_{EQ} קבילה. תהי M_{EQ} מ"ט המכבלת את L_E באופן הבא.

בנייה של M_E

x על כל קלט $= M_E$

1 אם $x \neq \langle M \rangle$ דוחה.

2 אם x , מריצה M_\emptyset על M_{EQ} כאשר $\langle M, M_\emptyset \rangle$ המ"ט שדוחה כל קלט.

• אם M_{EQ} מקבלת \Leftarrow מקבלת. 3

נכונות

אם $x \in L_E$

$L(M) = \emptyset \wedge x = \langle M \rangle \Leftarrow$

$L(M) = L(M_\emptyset) \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle \in L_{EQ} \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle$ מקבלת $M_{EQ} \Leftarrow$

M_E מקבל.

לסיכום:

אם $L_E \notin RE$ קבילה אז אפשר לבנות מ"ט M_E מקבלת את L_E בסתייה למשפט 7.8 האומר ש-
לכן $L_{EQ} \notin RE$

משפט 7.11 $\bar{L}_{EQ} \notin RE$

$\bar{L}_{EQ} \notin RE$.

הוכחה:

נניח בשליליה כי \bar{L} קבילה. תהי $M_{\bar{acc}}$ מ"ט מקבלת את \bar{L}_{EQ} . אז נבנה מ"ט M_{EQ} מקבלת את \bar{L}_{EQ} מ"ט קבילה. באופן הבא.

בנייה של M_1

ראשית נגדיר מ"ט M_1 באופן הבא:

x על כל קלט $= M_1$

1) מריצה M על w ועונה כמוות.

בנייה של $M_{\bar{acc}}$

x על כל קלט $= M_{\bar{acc}}$

1 אם $x \neq \langle M, w \rangle$ מקבלת.

(2) אם $x = \langle M, w \rangle$ אז בונה M_1 .

(3) מרים $\langle M_1, M^* \rangle$ על $M_{\overline{EQ}}$ כאשר M^* המ"ט שמקבלת כל קלט.

(4) • אם $M_{\overline{EQ}}$ מקבלת \Leftarrow מקבלת.

נכונות

אם $x \in L_{\overline{\text{acc}}}$

לא מקבלת $M \Leftarrow$

$L(M_1) = \emptyset \Leftarrow$

$\langle M_1, M^* \rangle \in L_{\overline{EQ}} \Leftarrow$

$\langle M_1, M^* \rangle$ מקבלת $M_{\overline{EQ}} \Leftarrow$

$M_{\overline{\text{acc}}} \Leftarrow$ מקבל.

סיכום:

אם $L_{\overline{\text{acc}}} \notin RE$ קבילה או אפשר לבנות מ"ט $M_{\overline{\text{acc}}}$ בסתירה למשפט 7.6 האומר ש-
לכן $L_{\overline{EQ}} \notin RE$.

7.4 סיכום: כרייעות וקבילות של שפות

קבילה	כרייעה	
✓	✗	L_{acc}
✗	✗	$\overline{L}_{\text{acc}}$
✗	✗	L_d
✓	✗	L_{Halt}
✗	✗	$\overline{L}_{\text{Halt}}$
✗	✗	L_E
✓	✗	\overline{L}_E
✗	✗	L_{EQ}
✗	✗	\overline{L}_{EQ}
✗	✗	L_{REG}
✗	✗	L_{NOTREG}