אלגברה לינארית סמסטר סתו 2022-23
עבודה עצמית 3

שאלות

שאלה 1 חשב את המטריצה ההפוכה של A ובדקו כי מתקיים $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

א) $$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

ב) $$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$$

ג)

ד) $$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ה) $$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 0 \\ -5 & 9 & 1 \\ -4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

ו) פתרו את המערכת $\left.\begin{aligned} -5x + 8y \quad &= 1 \\ -5x + 9y + z \quad &= 2 \\ -4x + 7y + 2z \quad &= 3 \end{aligned}\right\}$ בעזרת סעיף ד.

שאלה 2 פתרו את המשוואות המטריציאליות הבאות:

א)

$$A \cdot X = B \ , \qquad A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} -13 & -9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ב)

$$A \cdot X = B \ , \qquad A = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} -11 & 5 & -15 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ג)

$$A\cdot X=B\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\2&0&3\\1&1&3\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}0&-2\\-4&4\\-3&4\end{pmatrix}$$

ד)

$$X\cdot A=B\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}2&-5&0\\-3&-6&1\\4&4&-1\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}-9&9&1\\1&-3&0\end{pmatrix}$$

ה)

$$A\cdot X\cdot B=C\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}2&-3\\-2&4\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}-3&6\\-2&5\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}7&-4\\-12&12\end{pmatrix}$$

שאלה 3 נתונות המטריצות:

$$A=\begin{pmatrix}5&-4\\-8&6\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\ .$$

פתרו את המשוואות הבאות:

א) $AX=C$

ב) $XB=C$

ג) $AXB=C$

שאלה 4 נתונה מטריצות $A,B,C\in M_n(\mathbb{R})$ כך ש- A ו- C הפיכות. נתון ש- $BC=C(2A-3X)A$ כאשר $X\in M_n(\mathbb{R})$. מצאו את X.

שאלה 5 עבור אילו ערכים של הפרמטר k המטריצה $\begin{pmatrix}0&4--k&3\\3+k&0&2\\0&4&-k\end{pmatrix}$ הפיכה?

שאלה 6 מצאו את המטריצה A המקיימת $(2I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$.

שאלה 7 תהי $A\in M_3(\mathbb{R})$ המקיימת

$$A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}\ ,\qquad A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\ ,\qquad A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\ .$$

מצאו את A.

שאלה 8 תהיינה $A,B,C\in M_n(\mathbb{R})$ מטריצות הפיכות. מצאו את ההופכית של $7B^{-1}CA^{-1}B^2$.

שאלה 9 נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&6\\3&6&10\end{pmatrix}$

א) מצאו את A^{-1}.

ב) מצאו $X\in M_3(\mathbb{R})$ כך ש- $AXA+A=A^2$.

שאלה 10 תהיינה $A,B,C\in M_n(\mathbb{R})$. הוכח או הפרך:

א) אם A הפיכה ו- $BA=CA$ אז $B=C$.

ב) אם $AB=AC$ אז $B=C$.

ג) אם $AB=0$ אז A ו- B אינן הפיכות.

ד) אם $AB=0$ ו- $A\neq 0$ אז B איננה הפיכה.

ה) אם AB הפיכה אז A ו- B הפיכות.

ו) אם A הפיכה אז AB הפיכה.

ז) אם A הפיכה ו- B לא הפיכה אז $A+B$ לא הפיכה.

ח) אם A הפיכה אז עמודות של A בת"ל ופורשות את $\mathbb{R}^n$.

ט) תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $f(x)=2x^4-x^2+3x-2$ פולינום כך ש- $f(A)=0$. אזי A הפיכה.

י) אם A הפיכה אז $A+A^t$ הפיכה.

פתרונות

<u>שאלה 1</u>

א)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to \frac{-1}{7}\cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to -R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-4}{7} & \frac{-1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix}$$

■

ב)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 2 & 1 & 0 \\ -9 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-3\cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+2R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to -\frac{1}{3}\cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to -R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

■

ג)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to 4\cdot R_1+5\cdot R_3]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -25 & -7 & 4 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to 7\cdot R_3+25\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -7 & -49 & -70 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to \frac{1}{7}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+5\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & -3 & -4 & -35 & -50 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+3\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 5 & 40 & 55 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to \frac{1}{5}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 8 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 11 \\ -1 & -7 & -10 \\ 3 & 25 & 35 \end{pmatrix}$$

■

ד) $A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 0 \\ -5 & 9 & 1 \\ -4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to 4\cdot R_1-5\cdot R_3]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -10 & 4 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+3\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to 7\cdot R_2+R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -6 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to 7R_1-8R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -35 & 0 & 0 & 55 & -80 & 40 \\ 0 & 7 & 0 & -6 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to \frac{1}{5}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -7 & 0 & 0 & 11 & -16 & 8 \\ 0 & 7 & 0 & -6 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1\to \frac{-1}{7}\cdot R_1 \\ R_2\to \frac{1}{7}\cdot R_2 \\ R_3\to \frac{-1}{7}\cdot R_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-11}{7} & \frac{16}{7} & \frac{-8}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-6}{7} & \frac{10}{7} & \frac{-5}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{5}{7} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-11}{7} & \frac{16}{7} & \frac{-8}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{10}{7} & \frac{-5}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

■

ה) פתרו את המערכת $\left.\begin{aligned} -5x+8y &= 1 \\ -5x+9y+z &= 2 \\ -4x+7y+2z &= 3 \end{aligned}\right\}$ בעזרת סעיף ד.

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-11}{7} & \frac{16}{7} & \frac{-8}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{10}{7} & \frac{-5}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ \frac{8}{7} \end{pmatrix} .$$

$$x = -\frac{3}{7} , \qquad y = -\frac{1}{7} , \qquad z = \frac{8}{7} .$$

■

שאלה 2

א)

$$A \cdot X = B , \qquad A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} -13 & -9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B , \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} .$$

לכן

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -13 & -9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

■

ב)

$$A \cdot X = B , \qquad A = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} -11 & 5 & -15 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B , \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} .$$

לכן

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 & 5 & -15 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} .$$

■

ג)

$$A\cdot X=B\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\2&0&3\\1&1&3\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}0&-2\\-4&4\\-3&4\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B\ ,\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-4&6\\3&-5&7\\-2&3&-4\end{pmatrix}\ .$$

לכן

$$X=\begin{pmatrix}3&-4&6\\3&-5&7\\-2&3&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-2\\-4&4\\-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2\\-1&2\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

■

ד)

$$X\cdot A=B\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}2&-5&0\\-3&-6&1\\4&4&-1\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}-9&9&1\\1&-3&0\end{pmatrix}$$

$$X=B\cdot A^{-1}\ ,\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&5&5\\-1&2&2\\-12&28&27\end{pmatrix}\ .$$

לכן

$$X=\begin{pmatrix}-9&9&1\\1&-3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&5&5\\-1&2&2\\-12&28&27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&1&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}\ .$$

■

ה)

$$A\cdot X\cdot B=C\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}2&-3\\-2&4\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}-3&6\\-2&5\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}7&-4\\-12&12\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}\ .$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&\frac{3}{2}\\1&1\end{pmatrix}\ ,\qquad B^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}&2\\-\frac{2}{3}&1\end{pmatrix}\ .$$

$$X=\begin{pmatrix}2&\frac{3}{2}\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&-4\\-12&12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}&2\\-\frac{2}{3}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\3&-2\end{pmatrix}\ .$$

■

שאלה 3

$$A=\begin{pmatrix}5&-4\\-8&6\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\ .$$

פתרו את המשוואות הבאות:

א)

$$AX = C \qquad \Rightarrow \qquad X = A^{-1} \cdot C$$
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$
$$X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -\frac{13}{2} & \frac{13}{2} \end{pmatrix} \ .$$

■

ב)

$$XB = C \qquad \Rightarrow \qquad X = C \cdot B^{-1}$$
$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$X = C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \ .$$

■

ג)

$$AXB = C \qquad \Rightarrow \qquad X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -35 & 25 \\ -\frac{91}{2} & \frac{65}{2} \end{pmatrix} \ .$$

■

שאלה 4

$$BC = C(2A - 3X)A \ \Rightarrow \ C^{-1}BC = (2A - 3X)A \ \Rightarrow \ C^{-1}BCA^{-1} = 2A - 3X$$
$$\Rightarrow \ C^{-1}BCA^{-1} - 2A = -3X \ \Rightarrow \ X = -\tfrac{1}{3}\left(C^{-1}BCA^{-1} - 2A\right) \ .$$

■

שאלה 5 תהי $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 - -k & 3 \\ 3 + k & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -k \end{pmatrix}$. $\det(A) = -((k-6)(k+2)(k+3))$. לכן המטריצה הפיכה לכל $k \neq 6, -2, -3$.

■

שאלה 6

$$\begin{aligned}(2I-A)^{-1}=&\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\\ 2I-A=&\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}^{-1} \qquad =\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}\\ A=&2I-\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}\\ A=&\begin{pmatrix}5&-2\\-2&3\end{pmatrix} .\end{aligned}$$

■

שאלה 7 נגדיר את המטריצות

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix} , \qquad C=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&0&1\\2&3&1\end{pmatrix} .$$

אז

$$A\cdot B=C , \qquad A=B^{-1}\cdot C .$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix} .$$

לכן

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&2&3\\1&0&1\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix} .$$

■

שאלה 8 תהי $X=(7B^{-1}CA^{-1}B^2)^{-1}$. אז

$$\begin{aligned}X\cdot 7B^{-1}CA^{-1}B^2=&I\\ X\cdot B^{-1}CA^{-1}B^2=&\frac{1}{7}\cdot I\\ X\cdot B^{-1}CA^{-1}=&\frac{1}{7}B^{-2}\\ X\cdot B^{-1}C=&\frac{1}{7}B^{-2}\cdot A\\ X\cdot B^{-1}=&\frac{1}{7}B^{-2}\cdot A\cdot C^{-1}\\ X=&\frac{1}{7}B^{-2}\cdot A\cdot C^{-1}\cdot B .\end{aligned}$$

■

שאלה 9

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&6\\3&6&10\end{pmatrix}$$

א)

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}14&-2&-3\\-2&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}.$$

■

ב)

$$AXA+A=A^2\qquad\Rightarrow\qquad AX+I=A\qquad\Rightarrow\qquad X=A^{-1}\cdot(A-I)=I-A^{-1}$$

לכן

$$X=\begin{pmatrix}14&-2&-3\\-2&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&-2&-3\\-2&0&0\\-3&0&0\end{pmatrix}$$

■

שאלה 10

א) אם A הפיכה ו- $BA=CA$ אז $B=C$.

טענה נכונה. הסבר:

A הפיכה לכן

$$B\cdot A\cdot A^{-1}=C\cdot A\cdot A^{-1}\qquad\Rightarrow\qquad B=C\ .$$

■

ב) אם $AB=AC$ אז $B=C$.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}5&1\\8&7\end{pmatrix}\ .$$

$AB=AC=0$, $B\neq C$.

■

ג) אם $AB=0$ אז A ו- B אינן הפיכות.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ .$$

$A\cdot B=0$, B הפיכה.

■

ד) אם $AB=0$ ו- $A\neq 0$ אז B איננה הפיכה.

טענה נכונה. הסבר:

נניח בדרך השלילה ש $A\cdot B=0$ ו- $A\neq 0$ ו- B הפיכה. אז קיימת B^{-1}. לכן

$$A\cdot B\cdot B^{-1}=0\quad\Rightarrow\quad A=0\ .$$

סתירה!

■

ה) אם AB הפיכה אז A ו- B הפיכות.

טענה נכונה. הסבר:

$A\cdot B$ הפיכה לכן קיימת $(AB)^{-1}$. ז"א $A\cdot B\cdot(AB)^{-1}=I$. אז $B\cdot(AB)^{-1}=A^{-1}$. כלומר A מטריצה הפיכה. מכאן

$$A^{-1}\cdot A\cdot B\cdot(AB)^{-1}=A^{-1}\ \ \Rightarrow\ \ B\cdot(AB)^{-1}=A^{-1}$$

$$\Rightarrow\qquad B(AB)^{-1}A=I\qquad\Rightarrow\ \ (AB)^{-1}A=B^{-1}$$

לכן B הפיכה.

■

ו) אם A הפיכה אז AB הפיכה.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

$$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

A הפיכה אבל AB לא הפיכה.

■

ז) אם A הפיכה ו- B לא הפיכה אז $A+B$ לא הפיכה.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad A+B=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\ .$$

A הפיכה, B לא הפיכה, $A+B$ הפיכה.

■

ח) אם A הפיכה אז עמודות של A בת"ל ופורשות את $\mathbb{R}^n$.

טענה נכונה. הסבר:

■

ט) תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $f(x)=2x^4-x^2+3x-2$ פולינום כך ש- $f(A)=0$. אזי A הפיכה.

טענה נכונה. הסבר:

לפי הנתון,

$$2A^4-A^2+3A-2I=0\quad\Rightarrow\quad A\cdot\left(2A^3-A+3\right)=2I\quad\Rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{2}\left(2A^3-A+3I\right)$$

לכן A הפיכה.

■

י) אם A הפיכה אז $A+A^t$ הפיכה.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad A^t=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\ .$$

A הפיכה, אבל

$$A+A^t=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$$

לא הפיכה.

■
