

# שיעור 11

## NP שלמות

### 11.1 המחלקות $NPH$ ו- $NP$

#### הגדרה 11.1 NP-hard

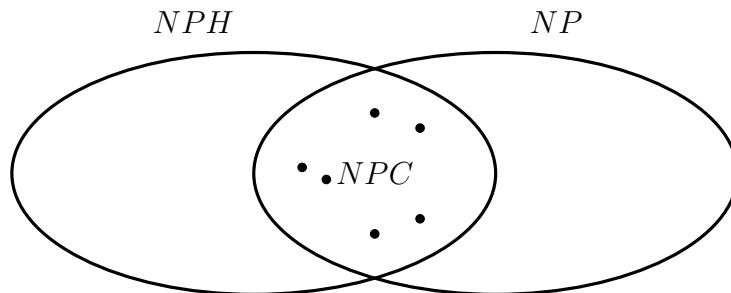
בשפה  $B$  נקראת  $NP$  קשה אם לכל בעיה  $A \in NP$  קיימת רדוקציה . $A \leqslant_P B$

#### הגדרה 11.2 NP-complete

בשפה  $B$  נקראת  $NP$  שלמה אם

$$B \in NP \quad (1)$$

(2) לכל בעיה  $A \in NP$  קיימת רדוקציה . $A \leqslant_p B$



#### משפט 11.1

אם  $B$  בעיה  $NP$  שלמה וגם  $P = NP$  אז  $A \leqslant_P B$   $\forall A \in NP$

הוכחה:

- הוכחנו כבר שה- . $P \subseteq NP$
- נוכח כי  $NP \subseteq P$

לכל בעיה  $A \subseteq NP$  קיימת רדוקציה  $A \leqslant_P B$  ומכיון ש-  $B \in P$ , מושפט הרדוקציה מתקיים . $A \leqslant_P B$

#### מסקנה 11.1

אם  $\bar{A} \leqslant_P \bar{B}$  אז  $A \leqslant_P B$

#### משפט 11.2

אם  $A \leqslant_p C$  ו-  $B \leqslant_p C$  וגם  $A \leqslant_p B$  אז

הוכחה:

**משפט 11.3**

תהי  $B$  בעיה  $NP$ -שלמה. אז לכל בעיה  $C \in NP$ , אם  $B \leq_p C$  אז גם  $C$  היא  $NP$ -שלמה.

**הוכחה:** מכיוון ש-  $B$  היא  $NP$ -שלמה, לכל בעיה  $A \in NP$  קיימת רדוקציה  $B \leq_p A$ . מכיוון ש- מהטרנסיטיביות מתקיים  $A \leq_p C \leq_p B$  לכל בעיה  $A \in NP$  ולכן  $C$  היא  $NP$ -שלמה.

**11.2 בעית הספיקות****הגדרה 11.3**

נוסחת  $\phi$  היא נוסחה בוליאנית מעל  $n$  משתנים  $x_1, x_2, \dots, x_n$  המכילה  $m$  פסוקיות כאשר כל פסוקית מכילה אוסף של ליטרלים ( $x_i \setminus \bar{x}_i$ ) המוחברים ע"י  $OR$  ( $\vee$ ) בוליאני והפסוקיות מחוברים ע"י  $AND$  ( $\wedge$ ) בוליאני.

לדוגמה

$$\phi = \left( x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4 \vee \bar{x}_7 \right) \wedge \left( x_3 \vee x_5 \vee \bar{x}_8 \right) \wedge \dots$$

**הגדרה 11.4 נוסחת CNF ספיקה**

נוסחת  $\phi$  היא ספיקה אם קיימת השמה למשתנים  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ע"י  $T \setminus F$  כך ש-  $\phi$  מקבלת ערך  $T$ , כלומר בכל פסוקית ישנו לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך  $T$ .

**11.3 בעית SAT****הגדרה 11.5 בעית SAT**

קלט: נוסחת  $\phi$ , פלט: האם  $\phi$  ספיקה?

$$SAT = \{ \langle \phi \rangle \mid \text{נוסחת CNF ספיקה } \phi \}$$

**משפט 11.4**

$$SAT \in NP$$

**הוכחה:** בניית אלגוריתם אimotoת  $V$  עבור  $SAT$ .

: על קלט  $V = \langle \phi \rangle, y$

(1) בודק האם  $y$  היא השמה למשתנים  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

- אם לא  $\leq 3CNF \Leftrightarrow$  דוחה.

(2) בודק האם השמה זו מספקת את  $\phi$ .

- אם כן  $\Leftrightarrow$  מקבל.
- אם לא  $\Leftrightarrow$  דוחה.

■

## 11.4 משפט קוק לוין

### משפט 11.5 (1973) משפט קוק לוין

הבעית  $SAT$  היא  $NP$  - שלמה.

**רעיון ההוכחה:**

$A \leq_p SAT, A \in NP$  לכל  $w \in \Sigma^*$

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in SAT,$$

$$\text{כאן } f(w) = \langle \phi_w \rangle$$

### מסקנה 11.2

$$P = NP \Leftrightarrow SAT \in P.$$

## 11.5 גרסאות של $kSAT$

ישנן לכל היותר  $k$  ליטרלים בכל פסוקית:

$$.1SAT \in P \bullet$$

$$\phi = x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge \dots$$

$$.2SAT \in P \bullet$$

$$\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge \dots$$

$$.3SAT \in P \bullet \text{ היא } NP - \text{ שלמה.}$$

## 3SAT בעית 11.6

### הגדרה 11.6 בעית 3SAT

קלט: נוסחת  $\phi, 3CNF$

פלט: האם  $\phi$  ספיקת?

$$3SAT = \{\langle \phi \rangle \mid \phi \text{ נוסחת } 3CNF \text{ ספיקת}\}$$

**משפט 11.6**  $3SAT \in NP$  שלמה. $3SAT \in NP$  שלמה.

הוכחה:

ישקיימים את השני תנאים הבאים:

(1)  $3SAT \in NP$

ניתן לבנות אלגוריתם אimoto עבור  $SAT \in NP$  דומה לאלגוריתם האimoto עבור  $SAT$  שבנו בהוכחה של המשפט קוק-ליין 11.5 לעילו.

(2)  $3SAT \in NP$  קשה ע"י רדוקציה

$SAT \leq_p 3SAT$ .

ואז בגלל ש-  $SAT \in NP$  שלמה (לפי משפט קוק-ליין 11.5) ומכיון ש-  $3SAT \in NP$  אז לפי האסימפטוטית 11.2 גם  $3SAT \in NP$ - שלמה.

קיים פונקציה הרדוקציה  $SAT \leq_p 3SAT$

כעת נבנה את פונקציה הרדוקציה מ-  $SAT$  ל-  $3SAT$ .ראשית נזכיר כי כל נוסחה בוליאנית  $\phi$  ניתנת לרשום בצורה  $CNF$  בזמן פולינומיAli.

בහינתנו נוסחת  $CNF$ ,  $\phi$  (הקלט של  $SAT$ ) נבנה בזמן פולינומיAli נוסחת  $\phi'$  (הקלט של  $3SAT$ ) ואז נוכחים מתקיים

$\langle\phi'\rangle \in 3SAT \Leftrightarrow \langle\phi\rangle \in SAT$ .

לכל פסוקית  $C$  ב-  $\phi$  המכילה יותר מ- 3 ליטרלים, ניצור אוסף  $C'$  ב-  $\phi'$  של פסוקיות כך שכל פסוקית ב-  $C'$  תכיל 3 ליטרלים. למשל בהינתן הפסוקית  $C$  הבאה של  $\phi$ :

$$C = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5$$

ניצור את הפסוקית  $C'$  הבאה ב-  $\phi'$ :

$$C' = (x_1 \vee x_2 \vee y_1) \wedge (\bar{y}_1 \vee x_3 \vee y_2) \wedge (\bar{y}_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)$$
.

באופן כללי, לכל פסוקית  $a_k$  המכיל  $k > 3$  ליטרלים, ניצור אוסף  $C'$  של פסוקיות שבו כל פסוקית מכילה 3 ליטרלים, ע"י הוספה 3 משתנים  $y_1, y_2, \dots, y_{k-3}$ :

$$C' = (a_1 \vee a_2 \vee y_1) \wedge (\bar{y}_1 \vee a_3 \vee y_2) \wedge \dots \wedge (\bar{y}_{i-2} \vee a_i \vee y_{i-1}) \wedge \dots \wedge (\bar{y}_{k-3} \vee a_{k-1} \vee a_k)$$
.

בפרט, עבור כל פסוקית  $(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k)$  נניח  $a_i = 1$  הוא הלiteral הראשון שווה ל- 1. אז

• נשים  $y_j = 1$  לכל  $1 \leq j \leq i-2$

• ונסים  $y_j = 0$  לכל  $i-1 \leq j \leq k-3$

סימנו להגדר את הפונקציה הרדוקציה.  
כעת נוכחים כי הפונקציה הזאת מקיימת את התנאי ההכרחי

$$\langle\phi'\rangle \in 3SAT \Leftrightarrow \langle\phi\rangle \in SAT$$
.

כיון  $\Leftarrow$ :

נניח כי  $\langle\phi\rangle \in SAT$  ותהי  $X$  השמה המספקת את  $\phi$ .  
nocich שקיימת השמה  $X'$  מתאימה המספקת את  $\phi'$ .

- בכל פסוקית  $C$  של  $\phi$ , עבור הליטרלים  $a_1, a_2, \dots, a_k$  ניתן אותם ערכים כמו ב-  $X$ .
- מכיוון ש-  $X$  מספקת את  $\phi$ , בכל פסוקית  $C = (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k)$  יש לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך 1. נניח  $a_i = 1$ . אז על פי ההגדרה של פונקציית הרודוקציה:

$$\begin{aligned} * \text{ נשים } 1 = y_j \text{ לכל } 2 \leq j \leq i-1 \\ * \text{ ונשים } 0 = y_j \text{ לכל } i-1 \leq j \leq k-3 \end{aligned}$$

באופן זהה אנחנו נזכיר אוסף  $C'$  של פבוקיות עם המבנה הבא:

$$\begin{aligned} & \left( a_1 \vee a_2 \vee y_1 \right) \wedge \left( \bar{y}_1 \vee a_2 \vee y_2 \right) \wedge \dots \wedge \left( \bar{y}_{i-3} \vee a_{i-1} \vee y_{i-2} \right) \wedge \left( \bar{y}_{i-2} \vee a_i \vee y_{i-1} \right) \wedge \left( \bar{y}_{i-1} \vee a_{i+1} \vee y_i \right) \\ & \wedge \dots \wedge \left( \bar{y}_{k-3} \vee a_{k-1} \vee a_k \right) \end{aligned}$$

ולכן השמה זו מספקת את  $C'$  ולכן  $\langle \phi' \rangle \in 3SAT$

כיוון:  $\Rightarrow$

נניח כי  $\langle \phi' \rangle \in 3SAT$  ותהי  $X'$  השמה המספקת את  $\phi'$ .  
נוכיח שקיימות השמה  $X$  המספקת את  $\phi$ .

נסתכל על פסוקית  $C = (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k)$  נניח בשלילה שלא קיימת השמה  $X$  המספקת את  $C$ . אז בהכרח

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$$

לפי זה, באוסף פסוקיות  $C'$  שנתקבל על פי ההגדרה של פונקציית הרודוקציה,  $y_j = 1$  לכל  $1 \leq j \leq k-3$   $y_j = 0$  לכל  $y_1 = y_2 = \dots = y_{k-3} = 0$ . כלומר מתקיים

$$C' = \left( a_1 \vee a_2 \vee y_1 \right) \wedge \left( \bar{y}_1 \vee a_3 \vee y_2 \right) \wedge \dots \wedge \left( \bar{y}_{i-2} \vee a_i \vee y_{i-1} \right) \wedge \dots \wedge \left( \bar{y}_{k-3} \vee a_{k-1} \vee a_k \right)$$

הפסוקית האחרונה  $\left( \bar{y}_{k-3} \vee a_{k-1} \vee a_k \right)$  אינה מסופקת.  
לכן  $C'$  אינה מסופקת, בסתיו לכך  $X'$  מספקת את  $\phi'$ .

ולכן  $\langle \phi \rangle \in SAT$

$SAT \leq 3SAT$

כעת נוכיח כי הרודוקציה זו היא זמן פולינומיאלית.

סיבוכיות

הчисוב של הפונקציה מתבצע בזמן פולינומילי. ספציפי, אם האורך של הנוסחה  $\phi$  הוא  $| \phi | = n$  אז הרודוקציה היא  $O(n)$ .

■

## 11.7 הוכחת משפט קוק לוין\*

**משפט 11.7 משפט קוק לוין**

הבעית  $SAT$  היא  $NP$  - שלמה.

**הוכחה:**

חישפה מלאה: ההוכחה הבאה מتبוססת על ההוכחה שנותונה בספר של Sipser.

על פי הגדירה 11.2 יש להוכיח שני התנאים הבאים מתקיימים:

**תנאי 1:**  $SAT \in NP$

**תנאי 2:**  $A \in NP \leq_p SAT$

ראשית נוכיח כי  $SAT \in NP$ :

כדי להוכיח כי  $SAT$  שייכת ל-  $NP$ , נוכיח כי אישור המרכיב מהשמה מספקת עבור נוסחת קלט  $\phi$  ניתן לאיומות בזמן פולינומייאלי.

נניח כי  $n = |\phi|$ . כאמור ב-  $\phi$  מופיעים  $n$  ליטרלים. "א" השמה כלשהי דורשת  $n$  משתני בוליאניים לכל היוטר.

- אלגוריתם האimotoות מחליף כל משתנה בנוסחה בערך המתאים לו על פי ההשמה. השלב זהה הוא  $(n)O$ .

- אחר כך האלגוריתם מחשב את ערכו של הביטוי:

\* נניח כי הנוסחה  $\phi$  מכילה  $k$  דורות של סוגרים בתוך סוגרים.

\* החישוב מתחילה עם החישובים של הביטויים בתוך הסוגרים הכל בפנים.

\* יש  $n$  סוגרים הći-בפנים לכל היוטר, וכל אחד של סוגרים אלה מכיל  $n$  ליטרלים לכל היוטר. לכן החישוב זהה הוא  $(n^2)O$ .

\* יש  $k$  דורות של סוגרים לכן החישוב כולל הוא  $(kn^2)O$ .

- בסה"כ הסיבוכיות זמן הריצה היא

$$O(n) + O(kn^2) = O(n^2)$$

לפיכך אישור של השמה כלשהי מatabase בזמן פולינומייאלי.

- אם ערכו של הביטוי הוא 1 הנוסחה ספיקה.

הוכחנו כי  $SAT \in NP$ . עכשו נוכיח כי  $SAT \leq_p A$ .

תהי  $N$  מ"ט אי-דטרמיניסטי זמני-פולינומייאלית שמכריעה שפה  $A$  כלשהי בזמן  $O(n^k)$  עבור  $k$  טבעי. התרשים למטה מראה טבלה של קונפיגורציות של  $N$ . ברשימה הבאה רשומות ההגדרות של הטבלה:

- כל שורה מראה את תוכן הסרט בשלב מסוים של מסלול אחד של  $N$ .

- בשורה הראשונה יש את הקונפיגורציה ההתחלתית.

- אנחנו מניחים כי האורך של המילה, כאמור אורץ הקלט הוא  $n$ .

הסימנים  $w_n, \dots, w_1$  מסמנים את התווים של הקלט.

- בתא הראשון בכל שורה יש #, ולאחר מכן רשומה הקונפיגורציה של  $N$ . בסוף הקונפיגורציה בכל שורה יש #.
  - אחרי #- בקצתה הימין של המילה, בכל תא ישתו רוח עד הסוף של השורה. התוויי רוח לפני המשבצת הראשונה של הקונפיגורציה לא מופיעים בטבלה.
  - האורך של כל שורה הוא בדיקת  $n$  תאים.
  - בטבלה יש בדיקת  $n$  שורות לסייע בהאה:
    - המכונת טיריניג מבצעת  $n$  צעדים לכל היותר.
    - בכל צעד המ"ט עוברת לקונפיגורציה חדשה.
    - בכל שורה רשומה קונפיגורציה.
    - בסה"כ יש  $n$  שורות עבור ה-  $n$  קונפיגורציות שונות האפשריות.

אנו אומרים כי טבלה כלשהי היא **טבלה המבלטת** אם באחת השורות יש קו ניגורציה אשר  $N$  מקבלת אותה.

בעזרת הטבלה נתאר את הרדוקציה זמו-פולינומיאלית  $f$  משפה  $A$  כלשוי  $L$ - $SAT$ .

הפונקציה הרדוקציה  $f$  מקבלת קלט  $w$  ומחזירה נוסחה  $\phi = f(w)$ , אשר לפי ההגדרה של פונקציית הרדוקציה, עומדת בתנאי הבא:

$$w \in A \quad \Leftrightarrow \quad f(w) \in SAT .$$

יהיו  $Q$  קבוצת המצבים ו-  $\Gamma$  האלפיבית של הסרט של  $N$ . נגדיר:

$$C = Q \cup \Gamma \cup \{\#\}.$$

נסמן ב-  $s$  איבר כלשהו של  $C$ .

עבור כל תא  $(i, j)$  של הטבלת הקונפיגורציות נגידר משתנה בוליאני  $x_{i,j,s}$  לכל המסתנה  $x_{ijs}$  מוגדר על פי התנאי

$$x_{ijs} = 1$$

אם בתא ה-  $i,j$  של הטבלה יש  $s \in C$ . למשל, אם בתא ה-  $(2,5)$  של הטבלה מופיע התו  $a$  אז

$$x_{2,5,a} = 1$$

בעוד

$$x_{2,5,b} = 0 .$$

במובן זהה, התכנים של כל התאים של הטבלה מסומנים על ידי המשתנים של  $\phi$ .

עכשו נבנה נוסחה  $\phi$  על סמך התנאי שהשמה מספקת של  $\phi$  תהיה מתאימה לטבלה המתקבלת של  $N$ . נגידר:

$$\phi = \phi_{\text{cell}} \wedge \phi_{\text{start}} \wedge \phi_{\text{move}} \wedge \phi_{\text{acc}} . \quad (11.1)$$

נסביר את כל הנוסחאות  $\phi_{\text{acc}}$ ,  $\phi_{\text{move}}$ ,  $\phi_{\text{start}}$ ,  $\phi_{\text{cell}}$  אחד אחד למטה.

• הנוסחה  $\phi_{\text{cell}}$

כפי שמצוין לעיל, אם המשתנה  $x_{i,j,s}$  "דולק", כלומר אם  $x_{i,j,s} = 1$ , זאת אומרת שיש סימן  $s$  בתא ה- $i,j$  של הטבלה. אנחנו רוצים להבטיח שהשמה כלשהי בנוסחה אשר מתאימה לקונפיגורציה של הטבלה, מדliquה בדיק משותה אחד לכל תא של הטבלה. למטרה זו נגידר  $\phi_{\text{cell}}$  כך:

$$\phi_{\text{cell}} = \bigwedge_{1 \leq i, j \leq n^k} \left[ \left( \bigvee_{s \in C} x_{i,j,s} \right) \wedge \left( \bigwedge_{\substack{s,t \in C \\ s \neq t}} (\bar{x}_{i,j,s} \vee \bar{x}_{i,j,t}) \right) \right] \quad (11.2)$$

\* האיבר הראשון בסוגרים מרובעים, מבטיח שלכל תא של הטבלה, לפחות משתנה אחד דולק.

\* האיבר השני מבטיח שעבור כל תא של הטבלה, משתנה אחד לכל היוטר דולק.

לפיכך כל השמה מספקת עומדת בתנאי שיהיה בדיק סימן אחד,  $s$ , בכל תא של הטבלה.

• הנוסחה  $\phi_{\text{start}}$

נוסחה  $\phi_{\text{start}}$  מבטיחה ששורה הראשונה של הטבלה היא הקונפיגורציה ההתחלתית של  $N$  על הקלט  $w$ :

$$\begin{aligned} \phi_{\text{start}} = & x_{1,1,\#} \wedge x_{1,2,q_0} \wedge x_{1,3,w_1} \wedge x_{1,4,w_2} \\ & \wedge \dots \wedge \\ & x_{1,n+2,w_n} \wedge x_{1,n+3,\_} \wedge \dots \wedge x_{1,n^k-1,\_} \wedge x_{1,n^k,\#} \end{aligned} \quad (11.3)$$

• הנוסחה  $\phi_{\text{acc}}$

הנוסחה  $\phi_{\text{acc}}$  מבטיחה שקיים טבלה קונפיגורציה אשר המ"ט  $N$  מקבל אותה. בפרט  $\phi_{\text{acc}}$  מבטיחה שהסימן  $q_{\text{acc}}$  מופיע בתא אחד של הטבלה דרך התנאי שלפחות אחד המשתנים  $x_{i,j,q_{\text{acc}}}$  דולק:

$$\phi_{\text{acc}} = \bigvee_{1 \leq i, j \leq n^k} x_{i,j,q_{\text{acc}}} \quad (11.4)$$

• הנוסחה  $\phi_{\text{move}}$

הנוסחה  $\phi_{\text{move}}$  מבטיחה שכל שורה של הטליה היא "שורה חוקית".  
כלומר בכל שורה, הקונפיגורציה היא כך שאפשר הגיע אליה על ידי תזוזה חוקית של  $N$  מהקונפיגורציה הקודמת שMOVEDה בשורה אחרת מעלה.

תזוזה חוקית בין כל שתי קונפיגורציות נקבעת על ידי הפונקציה המעברים של המ"ט  $N$ .  
בשפה פורמלית, אם  $c_i$  הקונפיגורציה של שורה  $i$ , ו-  $c_{i+1}$  הקונפיגורציה של השורה  $i + 1$  אחת למטה, אז  
 $\phi_{\text{move}}$  מבטיחה כי לכל  $1 \leq i \leq n^k - 1$  מתקיים

$$c_i \vdash_N c_{i+1} .$$

במנוחי הטליה, אפשר להגיד תזוזה חוקית בין כל שתי שורות על ידי תת-טליה מסדר  $3 \times 2$  שמכילה 3  
תאים מתאימים של שתי שורות שכנות.  
 مكان ואילך אנחנו נקרא לתת-טליה כזאת "חלון".

למטה יש דוגמאות של חלונות חוקיים:

<table border="1"><tr><td>a</td><td><math>q_1</math></td><td>b</td></tr><tr><td><math>q_2</math></td><td>a</td><td>c</td></tr></table>	a	$q_1$	b	$q_2$	a	c	<table border="1"><tr><td>a</td><td><math>q_1</math></td><td>b</td></tr><tr><td>a</td><td>a</td><td><math>q_2</math></td></tr></table>	a	$q_1$	b	a	a	$q_2$	<table border="1"><tr><td>a</td><td>a</td><td><math>q_1</math></td></tr><tr><td>a</td><td>a</td><td>b</td></tr></table>	a	a	$q_1$	a	a	b
a	$q_1$	b																		
$q_2$	a	c																		
a	$q_1$	b																		
a	a	$q_2$																		
a	a	$q_1$																		
a	a	b																		
<table border="1"><tr><td>#</td><td>b</td><td>a</td></tr><tr><td>#</td><td>b</td><td>a</td></tr></table>	#	b	a	#	b	a	<table border="1"><tr><td>a</td><td>b</td><td>a</td></tr><tr><td>a</td><td>b</td><td><math>q_2</math></td></tr></table>	a	b	a	a	b	$q_2$	<table border="1"><tr><td>b</td><td>b</td><td>b</td></tr><tr><td>c</td><td>b</td><td>b</td></tr></table>	b	b	b	c	b	b
#	b	a																		
#	b	a																		
a	b	a																		
a	b	$q_2$																		
b	b	b																		
c	b	b																		

החלונות האלה למטה הם דוגמאות לחלונות לא חוקיים:

<table border="1"><tr><td>a</td><td>b</td><td>a</td></tr><tr><td>a</td><td>a</td><td>a</td></tr></table>	a	b	a	a	a	a	<table border="1"><tr><td>a</td><td><math>q_1</math></td><td>b</td></tr><tr><td><math>q_1</math></td><td>a</td><td>a</td></tr></table>	a	$q_1$	b	$q_1$	a	a	<table border="1"><tr><td>b</td><td><math>q_1</math></td><td>b</td></tr><tr><td><math>q_2</math></td><td>b</td><td><math>q_2</math></td></tr></table>	b	$q_1$	b	$q_2$	b	$q_2$
a	b	a																		
a	a	a																		
a	$q_1$	b																		
$q_1$	a	a																		
b	$q_1$	b																		
$q_2$	b	$q_2$																		

הנוסחה  $\phi_{\text{move}}$  קובעת שכל חלון של הטליה חוקי. בפרט, כל חלון מכיל 6 תאים. לכן  $\phi_{\text{move}}$  קובעת שהתכנים של ה-6 תאים של כל חלון מהוות חלון חוקי. ז"א

$$\phi_{\text{move}} = \bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq n^k \\ 1 \leq j \leq n^k}} (\text{חלון } i-j \text{ חוקי}) \quad (11.5)$$

אנטו מציירים בטקסט "חלון ה-  $i-j$  חוקי" את הנוסחה הבאה, כאשר  $a_6, \dots, a_1$  מסמנים את התכנים של ה-6 תאים של כל חלון:

$$\bigvee_{\substack{\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} \\ \text{חלון חוקי}}} (x_{i,j-1,a_1} \wedge x_{i,j,a_2} \wedge x_{i,j+1,a_3} \wedge x_{i+1,j-1,a_4} \wedge x_{i+1,j,a_5} \wedge x_{i+1,j+1,a_6}) \quad (11.6)$$

עד כה הוכחנו שקיים רדוקציה מכל שפה  $.SAT \rightarrow A \in NP$  כעת נוכיח כי הרדוקציה זו חישובית בזמן-פולינומייאלי.

הטליה של  $N$  היא מסדר  $n^k \times n$  ולכן היא מכילה  $n^{2k}$  תאים.

נחשב את הסיבוכיות של כל הנוסחים  $\phi_{\text{move}}, \phi_{\text{acc}}, \phi_{\text{start}}, \phi_{\text{cell}}$ .

• הנוסחה  $\phi_{\text{cell}}$ 

הנוסחה (11.2) של  $\phi$  מכילה  $n^{2k}$  נוסחאות עם 3 ליטרלים. לכן

$$\phi_{\text{cell}} = O(n^{2k}) .$$

• הנוסחה  $\phi_{\text{start}}$ 

הנוסחה (11.3) של  $\phi$  מכילה בדיק  $n^k$  ליטרלים. לכן

$$\phi_{\text{start}} = O(n^k) .$$

• הנוסחה  $\phi_{\text{acc}}$ 

הנוסחה (11.4) של  $\phi$  מכילה בדיק  $n^k$  ליטרלים. לכן

$$\phi_{\text{acc}} = O(n^k) .$$

• הנוסחה  $\phi_{\text{move}}$ 

הנוסחה (11.6,11.5) של  $\phi$  מכילה  $n^{2k}$  נוסחאות עם 6 ליטרלים. לכן

$$\phi_{\text{move}} = O(n^{2k}) .$$

לכן בסה"כ

$$\phi = O(n^{2k}) + O(n^k) + O(n^k) + O(n^{2k}) = O(n^{2k}) .$$

לפיכך קיימת רדוקציה חישובית בזמן פולינומייאלי מכל שפה  $L$  -  $SAT$   $\in NP$

