

שיעור 7

רדוֹקצִיה

7.1 טבלה של רדוֹקצִיות

טבלה של רדוֹקצִיות

עמוד	רדוֹקצִיה
דוגמה 7.6 עמוד 68	$L_{\text{HALT}} \leq L_{\text{acc}}$
דוגמה 7.11 עמוד 72	$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{\text{NOTREG}}$
דוגמה 7.12 עמוד 73	$L_{\text{acc}} \leq L_{\text{NOTREG}}$
דוגמה 7.13 עמוד 74	$L_{\text{HALT}} \leq L_{\text{NOTREG}}$
דוגמה 7.15 עמוד 76	$L_{\text{acc}} \leq L_{\text{REG}}$
דוגמה 7.14 עמוד 75	$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{\text{REG}}$
דוגמה 7.16 עמוד 77	$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \rightarrow M_2}$ כאשר $.L_{M_1 \rightarrow M_2} = \{\langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2)\}$
דוגמה 7.17 עמוד 77	$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \subset M_2}$ כאשר $.L_{M_1 \subset M_2} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) \subset L(M_2)\}$

7.2 מ"ט המחשבת את פונקציה

הגדרה 7.1 מ"ט המחשבת פונקציה

בاهינתן פונקציה $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ אומרים כי מ"ט M מcomputת את f אם לכל $x \in \Sigma^*$:

- M מגיעה ל- q_{acc} בסוף החישוב של $f(x)$ וגם
- על סרט הפלט של M רשום $f(x)$.

הערה 7.1

מ"ט שמחשבת פונקציה עוזרת תמיד.

הגדרה 7.2 מ"ט המחשבת פונקציה

בاهינתן פונקציה $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ אומרים כי f חסיבה אם קיימת מ"ט המחשבת את f .

דוגמה 7.1

$$f_1(x) = xx . \quad (7.1)$$

$f_1(x)$ חסיבה.

דוגמה 7.2

$$f_2(x) = \begin{cases} x & |x| \text{ זוגי} \\ xx & |x| \text{ אי-זוגי} \end{cases} . \quad (7.2)$$

$f_2(x)$ חסיבה.

דוגמה 7.3

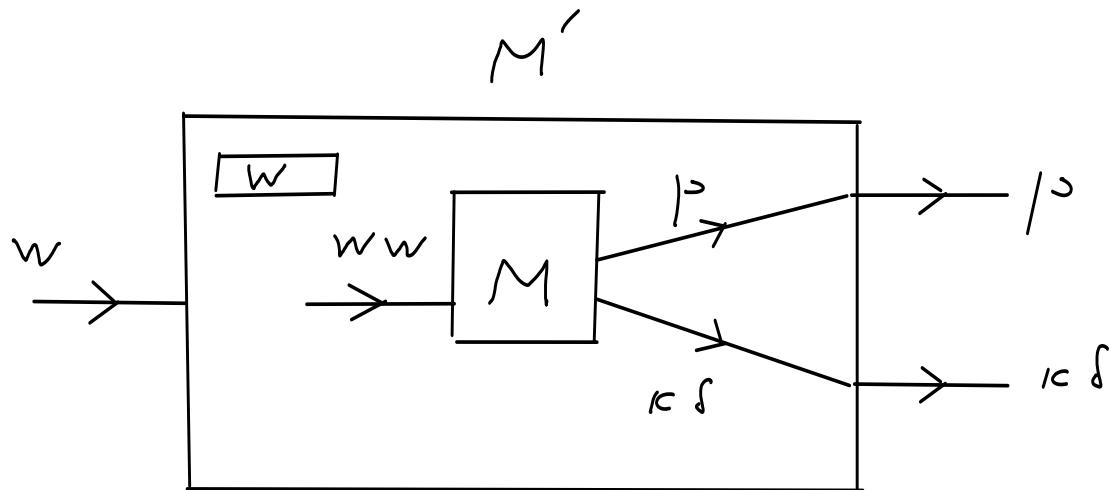
$$f_3(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M \rangle \\ \langle M^* \rangle & x \neq \langle M \rangle \end{cases} . \quad (7.3)$$

כאשר

M^* מ"ט שמקבלת כל קלט.

M' מ"ט מקבלת את השפה

$$L(M') = \{w \in \Sigma^* \mid ww \in L(M)\} .$$



חסיבה כי ניתן לבנות מ"ט שבודקת האם $\langle M \rangle = x$. אם לא, מחזירה קידוד קבוע $\langle M^* \rangle$. ואם כן, מחזירה קידוד $\langle M' \rangle$ ע"י הוספת מעברים המשכפלים את הקלט בתחילת הקידוד $\langle M \rangle$.

דוגמה 7.4

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & x = \langle M \rangle \wedge \langle M \rangle \in L(M) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad (7.4)$$

לא חשיבה כי יתכונו קלטים x ו- M לא עוצרת על $\langle M \rangle$. $f_4(x)$

7.3 רדוקציות**הגדרה 7.3 רדוקציות**

בහינתן שתי שפות Σ^* אומרים כי $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ ניתנת לרדוקציה ל- L_2 , ומיסמנים

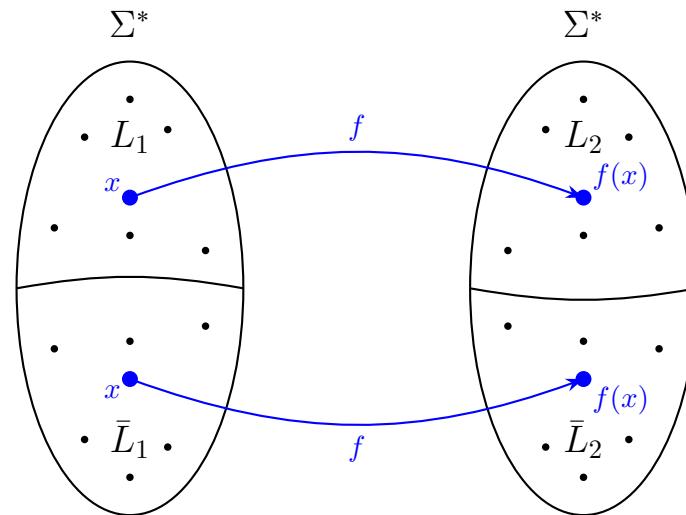
$$L_1 \leq L_2 ,$$

אם \exists פונקציה $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ המקיים:

(1) חשיבה f

(2) לכל $x \in \Sigma^*$

$$x \in L_1 \iff f(x) \in L_2 .$$

**דוגמה 7.5**

נתונות השפות

$$L_1 = \{x \in \{0,1\}^* \mid \text{זוגי } |x|\} ,$$

$$L_2 = \{x \in \{0,1\}^* \mid \text{אי-זוגי } |x|\} .$$

הוכיחו כי

$$L_1 \leq L_2 .$$

פתרונות:

נדיר את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{זוגי } |x|, \\ 10 & \text{אי-זוגי } |x| \end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

$$\cdot f(x) \in L_2 \text{ זוגי } |f(x)| \Leftarrow f(x) = 1 \Leftarrow |x| \Leftarrow x \in L_1$$

$$\cdot f(x) \notin L_2 \text{ זוגי } |f(x)| \Leftarrow f(x) = 10 \Leftarrow |x| \Leftarrow x \notin L_1$$

משפט 7.1 משפט הרדוקציה

לכל שתי שפות $* \Sigma^*, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, אם קיימת רדוקציה

$$L_1 \leq L_2$$

אזי התנאים הבאים מתקיימים:

$$L_1 \in R \Leftarrow L_2 \in R \quad (1)$$

$$L_1 \in RE \Leftarrow L_2 \in RE \quad (2)$$

$$L_1 \notin R \Rightarrow L_2 \notin R \quad (3)$$

$$L_1 \notin RE \Rightarrow L_2 \notin RE \quad (4)$$

הוכחה: מכיוון ש-

$$L_1 \leq L_2$$

קיימת פונקציה f חסיבה המקיים:

$$x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$$

לכל $x \in \Sigma^*$ תהי M_f מ"ט המחשבת את f .

$$(1) \quad \underline{\text{נוכיח}} \quad L_1 \in R \Leftarrow L_2 \in R$$

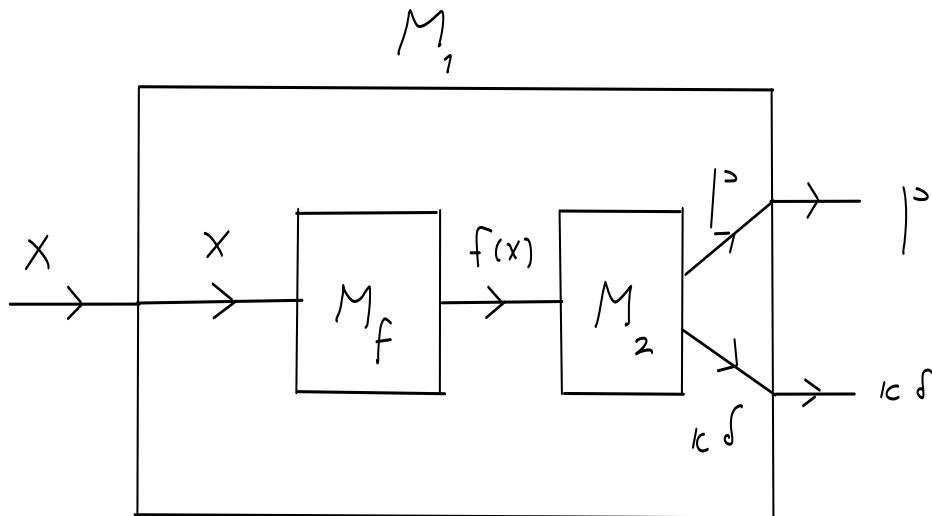
תהי M_2 מ"ט המכריעה את L_2 .נבנה מ"ט M_1 המכריעה את L_1 .התאור של M_1 $=$ על קלט x . מוחשבת את $f(x)$ בעזרת M_f . מריצה את M_2 על $f(x)$ ועונה כמוה.נוכיח כי M_1 מכריעה את L_1 .

$$. x \in L_1 \Leftarrow f(x) \in L_2 \text{ מקבלת את } M_2 \Leftarrow f(x) \in L_2 \Leftarrow x \in L_1 \text{ •}$$

$x \in M_1 \iff f(x) \in M_2$ דוחה את M_2 $\iff f(x) \notin L_2 \iff x \notin L_1$ •

$$L_1 \in RE \iff L_2 \in RE \quad (2)$$

תהי M_2 מ"ט המקבלת את L_2 .
نبנה מ"ט M_1 המקבלת את L_1 .



התאור של M_1

: $x =$ על קלט M_1

1. מחשבת את $f(x)$ בעזרת M_f .

2. מרים את M_2 על $f(x)$ ועונה כmoה.

נוכיח כי M_1 מקבלת את L_1 :

$x \in M_1 \iff f(x) \in M_2 \iff f(x) \in L_2 \iff x \in L_1$ •
 $x \in M_1 \iff f(x) \notin M_2 \iff f(x) \notin L_2 \iff x \notin L_1$ •

(3)

(4)

כל 7.1

• אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי $L' \in RE$, בוחרים שפה אחרת $L \in RE$ ומראים שקיים רדוקציה

$$L \leq L'.$$

לדוגמה:

$$L \leq L_{\text{acc}}$$

(כנ"ל לגבי R)

- אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי $L' \neq RE$ בוחרים שפה אחרת L ומראים שקיימת רדוקציה

$$L' \leq L .$$

לדוגמה

$$L_d \leq L$$

(כנ"ל לגבי R).

7.6 דוגמה

$.L_{\text{halt}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ עצמן על } M\}$ ו $L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\}$

הוכינו כי $L_{\text{acc}} \leq L_{\text{halt}}$ ע"י רדוקציה $L_{\text{acc}} \notin R$

פתרון:בנייה פונקצייתית f חשיבה ומקיימת

$$x \in L_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{\text{halt}} .$$

w מתקבלת על M' מתקבלת על w \Leftarrow M

w מתקבלת על M' לא מתקבלת על w \Leftarrow M

w לא מתקבלת על M' לא מתקבלת על w \Leftarrow M

$$f(x) = \begin{cases} \langle M', w \rangle & : x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\text{loop}}, \varepsilon \rangle & : x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

M' מ"ט שלא עצרת על אף קלט. •

• M' מ"ט המתנהגת כמו M פרט למקומות בהם M עצרה ודחתה, M' תיכנס ללולאה אינסופית.

nocnost redokcji

$x = \langle M, w \rangle$ חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם

$\langle M_{\text{loop}}, w \rangle$ אם לא, תחזר קידוד קבוע

ואם כן, תחזר קידוד $\langle M', w \rangle$ ע"י ביצוע שינויים לוקלים בקידוד של M .

נכיח כי $x \in L_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{\text{halt}}$

: $x \in L_{\text{acc}}$ אם

$$\begin{aligned} w \in L(M) \text{ ו } x = \langle M, w \rangle \Leftarrow \\ w \text{ עוצרת ומתקבלת את } M' \text{ ו } f(x) = \langle M', w \rangle \Leftarrow \\ f(x) \in L_{\text{halt}} \Leftarrow \end{aligned}$$

אם $x \notin L_{\text{acc}}$ אז שני מקרים:

מקרה 1:

$$f(x) \notin L_{\text{halt}} \Leftarrow \text{לא עוצרת על } \varepsilon \text{ מ } M_{\text{loop}} \text{ ו } f(x) = \langle M_{\text{loop}}, \varepsilon \rangle \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$$

מקרה 2:

$$f(x) = \langle M', w \rangle \Leftarrow w \notin L(M) \text{ ו } x = \langle M, w \rangle$$

מקרה א: M לא עוצרת על w $\Leftarrow w \in L_{\text{acc}}$

מקרה ב: M דוחה את w $\Leftarrow w \notin L(M)$

לסיום, הוכחנו רדוקציה (6.4) אז ממשט הרדוקציה 7.1, מתקיים $L_{\text{acc}} \leq L_{\text{halt}}$. ומכיוון ש- R (משפט 6.4) איז ממשט רדוקציה, $L_{\text{halt}} \notin R$.

7.7 דוגמה

נתונה השפה

$$L_{\Sigma^*} = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^*\}$$

ונתונה השפה

$$\bar{L}_{\Sigma^*} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \neq \Sigma^*\} \cup \{x \neq \langle M \rangle\} .$$

הוכיחו כי:

$$L_{\Sigma^*} \notin RE \quad (\text{א})$$

$$L_{\Sigma^*} \notin R \quad (\text{ב})$$

$$\bar{L}_{\Sigma^*} \notin RE \quad (\text{ג})$$

פתרון:

nocich ci R ע"י $L_{\Sigma^*} \notin R$

$$L_{\text{acc}} \leq L_{\Sigma^*} .$$

בנייה פונקצייתית חשיבה f המקיים

$$x \in L_{\text{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L_{\Sigma^*} .$$

$$L(M') = \Sigma^* \Leftarrow w \in L(M)$$

$$L(M') \neq \Sigma^* \Leftarrow w \notin L(M)$$

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & : x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & : x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- M_\emptyset מ"ט שדוכה כל קלט.
- M' היא מ"ט שעל כל קלט x , מתעלמת מ- x ומריצה את M על w ועונה כמוות.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & : w \in L(M) \\ \emptyset & : w \notin L(M) \end{cases}$$

נכונות הרדוקציה: f חישבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $.x = \langle M, w \rangle$ אם לא תחזר קידוד קבוע $\langle M_\emptyset \rangle$.אם כן, תחזר קידוד $\langle M' \rangle$ ע"י הוספת קוג ל- M שמוחק את הקלט מהסרט וכותב w במקומו.

נוכיח כי

$$\begin{aligned} x \in L_{\text{acc}} &\Leftrightarrow f(x) \in L_{\Sigma^*} \\ \Leftarrow L(M') = \Sigma^* \quad f(x) = \langle M' \rangle &\Leftarrow w \in L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \Leftarrow x \in L_{\text{acc}} \quad \text{אם} \\ .f(x) \notin L_{\Sigma^*} &.f(x) \in L_{\Sigma^*} \end{aligned}$$

אם שני מקרים:

$$.f(x) \notin L_{\Sigma^*} \Leftarrow L(M_\emptyset) = \emptyset \wedge f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle \quad \text{מקרה 1}$$

$$.f(x) \notin L_{\Sigma^*} \Leftarrow L(M') = \emptyset \quad \text{ולפי האבחנה } \emptyset \Leftarrow w \notin L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \quad \text{מקרה 2}$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $L_{\text{acc}} \leq L_{\Sigma^*} \neq R$. ומכיון ש- $L_{\text{acc}} \leq L_{\Sigma^*}$ (משפט 6.4) אז ממשט הרדוקציה 7.1, מתקיים $L_{\Sigma^*} \notin R$.

7.8 דוגמה

נתונה השפה

$$L_d = \{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M)\}$$

ונתונה השפה

$$\bar{L}_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \notin L(M)\} \cup \{x \neq \langle M, w \rangle\} .$$

הוכחו כי $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$ ע"י רדוקציה

$$L_d \leq \bar{L}_{\text{acc}} .$$

פתרונות:בנייה פונקצייתית חישיבה f המקיים

$$x \in L_d \Leftrightarrow f(x) \in L_{\text{acc}} .$$

$$w' \notin L(M') \Leftarrow \langle M \rangle \notin L(M)$$

$$w' \in L(M') \Leftarrow \langle M \rangle \in L(M)$$

$$f(x) = \begin{cases} \langle M, \langle M \rangle \rangle & : x = \langle M \rangle \\ \langle M^*, \varepsilon \rangle & : x \neq \langle M \rangle \end{cases}$$

כאשר M^* המ"ט שמקבלת כל קלט.

נכונות הרדוקציה:

f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x = \langle M, w \rangle$.

אם לא תחזיר קידוד קבוע $\langle M^*, \varepsilon \rangle$.

אם כן, תחשב $\langle M, \langle M \rangle \rangle$.

נוכיח כי

$$x \in L_d \Leftrightarrow f(x) \in \bar{L}_{\text{acc}}$$

$$\Leftrightarrow \langle M \rangle \notin L(M) \text{ ו } f(x) = \langle M, \langle M \rangle \rangle \Leftrightarrow \langle M \rangle \notin L(M) \text{ ו } x = \langle M \rangle \Leftrightarrow x \in L_d \text{ אם } f(x) \in \bar{L}_{\text{acc}}$$

אם שני מקרים:

$$. f(x) \notin \bar{L}_{\text{acc}} \Leftrightarrow \varepsilon \in L(M^*) \text{ ו } f(x) = \langle M^*, \varepsilon \rangle \Leftrightarrow x \neq \langle M \rangle \quad : \underline{\text{מקרה 1}}$$

$$. f(x) \notin \bar{L}_{\text{acc}} \Leftrightarrow \langle M \rangle \in L(M) \text{ ו } f(x) = \langle M, \langle M \rangle \rangle \Leftrightarrow \langle M \rangle \in L(M) \text{ ו } x = \langle M \rangle \quad : \underline{\text{מקרה 2}}$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $L_d \leq \bar{L}_{\text{acc}}$, ומכיון ש- $L_d \leq RE$ (משפט 6.3) אז ממשט הרדוקציה 7.1, מתקיים $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$.

משפט 7.2 ממשפט הרדוקציה בין שפות משלימות

אם קיימת רדוקציה $\bar{L}_1 \leq \bar{L}_2$, אז קיימת רדוקציה $\bar{L}_2 \leq \bar{L}_1$.

הוכחה:

אם \exists רדוקציה

$$L_1 \leq L_2$$

אז \exists פונקציה חשיבה f המקיים $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$

ולכן עבור אותה פונקציה f היא גם חשיבה וגם מקיימת

$$x \in \bar{L}_1 \Leftrightarrow f(x) \in \bar{L}_2$$

ולכן

$$\bar{L}_1 \leq \bar{L}_2 .$$



7.4 דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה בין שפות משלימות (משפט 7.2)

דוגמה 7.9

הוכחנו בדוגמה 7.7 רדוקציה

$$L_{\text{acc}} \leq L_{\Sigma^*} .$$

לכן לפי משפט 7.2 קיימת רדוקציה

$$\bar{L}_{\text{acc}} \leq \bar{L}_{\Sigma^*} .$$

מכיוון ש- $\bar{L}_{\Sigma^*} \notin RE$, אז ממשפט הרדוקציה 7.1 מתקיים

מכיוון ש- $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$, אז ממשפט הרדוקציה 7.1 מתקיים

דוגמה 7.10

הוכחנו בדוגמה 7.8 רדוקציה

$$L_d \leq \bar{L}_{\text{acc}} .$$

לכן לפי משפט 7.2 קיימת רדוקציה

$$\bar{L}_d \leq L_{\text{acc}} .$$

מכיוון ש- $\bar{L}_d \in RE$, אז ממשפט הרדוקציה 7.1 מתקיים

7.5 דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה (משפט 7.1)

דוגמה 7.11

תהי L_{NOTREG} השפה

$$L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית}\} .$$

הוכחו כי השפה L_{NOTREG} לא כריעה על ידי רדוקציה מ-

פתרונות:

השפה \bar{L}_{acc} מוגדרת

$$\bar{L}_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ לא מקבלת } w\} \cup \{x \neq \langle M, w \rangle\} .$$

והשפה L_{NOTREG} מוגדרת

$$L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית}\} .$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ w' \in PAL & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M' מ"ט הבא:

$M' = \text{על כל קלט } y$

(1) אם $y \in PAL \iff \text{מקבלת.}$

(2) אחרת מריצה M על w ועונה כמוות.

הוכחת נכונות הרדוקציה

אם $x \in \bar{L}_{\text{acc}}$ ⇐ שני מקרים:

מקרה 1: $x = \langle M, w \rangle$

w לא מקבלת M ⇐

$L(M') \in PAL$ ⇐

$\langle M' \rangle \in PAL$ ⇐

$f(x) \in PAL$ ⇐

$.f(x) \in L_{\text{NOTREG}}$ ⇐

מקרה 2: $.f(x) \in L_{\text{NOTREG}} \Leftarrow f(x) \in PAL \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$

אם $.f(x) \in L_{\text{NOTREG}}$ ⇐ $f(x) \in \Sigma^*$ ⇐ $L(M') = \Sigma^*$ ⇐ w מקבלת M ⇐ $x \notin \bar{L}_{\text{acc}}$

לכן הוכחנו כי $f(x)$ היא רדוקציה מ- L_{acc} ל- L_{NOTREG} ⇔ $f(x) \in NOTERG$.

השפה \bar{L}_{acc} לא כריעה. לפיכך, לפי משפט הרדוקציה גם L_{NOTREG} לא כריעה.

דוגמה 7.12

תהי L_{NOTREG} השפה

$$L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid \text{לא רגולרית } L(M)\}.$$

הוכיחו כי השפה L_{NOTREG} לא כרעה על ידי רדוקציה מ- L_{acc} .

פתרון:

השפה L_{acc} מוגדרת $L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ מקבלת } M\}$.

והשפה L_{NOTREG} מוגדרת $L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid \text{לא רגולרית } L(M)\}$.

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M' מ"ט הבאה:

$M' = M'$ על כל קלט u :

(1) M' מריצה M על w .

(2) אם M דוחה ⇐ M' דוחה.

- אם M מקבלת $\Rightarrow M'$ בודקת אם y פלינדרום.

* אם כן \Rightarrow מקבלת.

* אם לא \Rightarrow דוחה.

הוכחת נכונות הרדוקציה

$$\begin{aligned} f(x) \in L_{\text{NOTREG}} &\Leftrightarrow f(x) \in PAL \Leftrightarrow L(M') = PAL \Leftrightarrow M \text{ מקבלת } w \Leftrightarrow x \in L_{\text{acc}} \\ &\quad . \text{ שני מקרים.} \Leftrightarrow x \notin L_{\text{acc}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle M_\emptyset \rangle \notin L_{\text{NOTREG}} &\Leftrightarrow L(M_\emptyset) = \emptyset \text{ ו } f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \Leftrightarrow x \neq \langle M, w \rangle \\ &\quad . f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle M' \rangle \notin L_{\text{NOTREG}} &\Leftrightarrow L(M') = \emptyset \Leftrightarrow M \text{ לא מקבלת } w \text{ ו } x = \langle M, w \rangle \\ &\quad . f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

דוגמה 7.13 $L_{\text{HALT}} \leq L_{\text{NOTREG}}$

תהי L_{NOTREG} השפה
 $L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית}\}$.

הוכחו כי השפה L_{NOTREG} לא כרעה על ידי רדוקציה מ- L_{HALT} .

פתרון:

השפה L_{HALT} מוגדרת
 $L_{\text{HALT}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ עצרת על } M\}$.

והשפה L_{NOTREG} מוגדרת
 $L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית}\}$.

נדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}.$$

כאשר M' מ"ט הבאה:

: y על כל קלט u :

(1) M' מרכיבה M על w .

• אם M דוחה \Rightarrow דוחה. (2)

• אם M מקבלת \Rightarrow ממשיכה לשלב (3).

(3) $.y \in PAL$ אם M' בודקת אם y

• אם כן \Rightarrow מקבלת.

• אם לא \Rightarrow דוחה.

הוכחת נכונות

$$\cdot L(M') \in L_{\text{NOTREG}} \iff L(M') \in PAL \iff x \in L_{\text{HALT}}$$

$$\text{שני מקרים:} \iff x \notin L_{\text{HALT}}$$

$$\begin{array}{lcl} \langle M_\emptyset \rangle \notin L_{\text{NOTREG}} & \Leftarrow & L(M_\emptyset) = \emptyset \wedge f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \\ & & \cdot f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} \Leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \langle M_\emptyset \rangle \notin L_{\text{NOTREG}} & \Leftarrow & L(M_\emptyset) = \emptyset \Leftarrow w \text{ לא עוצרת על } M \wedge x = \langle M, w \rangle \\ & & \cdot f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} \Leftarrow \end{array}$$

דוגמה 7.14 $\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{\text{REG}}$

$$L_{\text{REG}} = \{\langle M \rangle \mid \text{רגולרית } L(M)\}.$$

הוכחו כי השפה L_{REG} לא כריעה על ידי רדוקציה מ-

תהי L_{REG} השפה

פתרונות: השפה \bar{L}_{acc} מוגדרת

$$\bar{L}_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ לא מקבלת } M\} \cup \{x \mid x \neq \langle M, w \rangle\}.$$

$$L_{\text{REG}} = \{\langle M \rangle \mid \text{רגולרית } L(M)\}.$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M_\emptyset המ"ט שדוחה כל קלט ו- M' מ"ט הבאה:

$M' = \text{על כל קלט } z$:

(1) מריצה M על w .

(2) • אם M דוחה \Leftarrow דוחה.

• אם M מקבלת \Leftarrow בודקת אם w פלינדרום:

• אם כן \Leftarrow מקבלת.

• אם לא \Leftarrow דוחה.

אבחנה

$$L(M') = \begin{cases} PAL & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

הוכחת נכונות הרדוקציה

אם $x \in \bar{L}_{\text{acc}}$ שני מקרים:

מקרה 1: $f(x) \in L_{\text{REG}} \iff \langle M_{\emptyset} \rangle \in L_{\text{REG}} \iff L(M_{\emptyset}) = \emptyset \wedge f(x) = \langle M_{\emptyset} \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle$

מקרה 2: $\langle M_{\emptyset} \rangle \in L_{\text{REG}} \iff L(M') = \emptyset \wedge f(x) = \langle M' \rangle \iff x \notin L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \iff f(x) \in L_{\text{REG}}$

$f(x) \in PAL \iff L(M') \in PAL \wedge f(x) = \langle M' \rangle \iff w \in L(M) \iff x \notin \bar{L}_{\text{acc}} \wedge f(x) \notin L_{\text{REG}}$

דוגמה 7.15

תהי L_{REG} השפה

$$L_{\text{REG}} = \{\langle M \rangle \mid \text{רגולרית } L(M)\}.$$

הוכיחו כי השפה L_{REG} לא כריעה על ידי רדוקציה מ-

פתרונות:

השפה L_{acc} מוגדרת $L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ מקבלת } M\}$.

והשפה L_{REG} מוגדרת $L_{\text{REG}} = \{\langle M \rangle \mid \text{רגולרית } L(M)\}$.

נדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{PAL} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M_{PAL} המ"ט שמכריע את השפה של פלינדרומים, ו- M' מ"ט הבאה:

$M' = \text{על כל קלט } y$:

(1) M' בודקת אם y פלינדרום:

- אם כן \iff מקבלת.
- אם לא מריצה M על w ועונה כמוות.

הוכחת נכונות הרדוקציה

$.f(x) \in REG \iff L(M') = \Sigma^* \iff w \text{ מקבלת } M \iff x \in L_{\text{acc}}$ אם

שני מקרים:

מקרה 1: $\langle M_{PAL} \rangle \notin L_{\text{REG}} \iff L(M_{PAL}) = PAL \wedge f(x) = \langle M_{PAL} \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle \iff f(x) \notin L_{\text{REG}}$

מקרה 2: $\langle M' \rangle \notin L_{\text{REG}} \iff L(M') = PAL \iff w \text{ לא מקבלת } M \wedge x = \langle M, w \rangle \iff f(x) \notin L_{\text{REG}}$

דוגמה 7.16

נתונה השפה הבאה:

$$L = \{\langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2)\} .$$

הוכחנו כי $L \notin RE$ ע"י רדוקציה מ-**פתרון:**פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M^*, M, w \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- M^* היא מ"ט שמקבלת כל קלט.
- M_\emptyset היא מ"ט שדוחה כל קלט.

 נכונות הרדוקציה:

ראשית, f חסיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x = \langle M, w \rangle$ או לא, תחזר קידוד קבוע $\langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle$. אם לא, תחזר קידוד $\langle M^*, M, w \rangle$.

נוכיח כי

$$x \in \bar{L}_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{M_1 \rightarrow M_2} .$$

אם שני מקרים:

$$f(x) \in \iff \varepsilon \notin L(M_\emptyset) \wedge \varepsilon \in L(M^*) \wedge f(x) = \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle \quad \text{מקרה 1:} \quad \bar{L}_{M_1 \rightarrow M_2} .$$

$$w \notin L(M) \wedge w \in L(M^*) \wedge f(x) = \langle M^*, M, w \rangle \iff w \notin L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \quad \text{מקרה 2:} \quad f(x) \in L_{M_1 \rightarrow M_2} \iff$$

$$w \notin L(M) \wedge w \in L(M^*) \wedge f(x) = \langle M^*, M, w \rangle \iff w \in L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \iff x \notin \bar{L}_{\text{acc}} \quad \text{אם } f(x) \notin L_{M_1 \rightarrow M_2} \iff$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$, ומכיון ש- $\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \rightarrow M_2}$ ממשפט הרדוקציה מתקיים**דוגמה 7.17**

נתונה השפה הבאה:

$$L = \{\langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2)\} .$$

הוכחנו כי $L \notin RE$ ע"י רדוקציה מ-**פתרון:**פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M_\emptyset, M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset, M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- M_\emptyset היא מ"ט שדועה כל קלט.
- M' היא מ"ט של קלט y מתעלמת מ- y ומריצה M על w ועונה כמוות.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases} .$$

נכונות הרדוקציה:

ראשית, f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x = \langle M, w \rangle$. אם לא, תחזיר קידוד קבוע $\langle M_\emptyset, M_\emptyset \rangle$. אם כן, תחזיר קידוד קבוע $\langle M'_\emptyset, M'_\emptyset \rangle$, כאשר M'_\emptyset הוסיף kod ל- $\langle M \rangle$ המוחק את הקלט y ורושם w במקומו.

נוכיח כי

$$x \in L_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{M_1 \subset M_2} .$$

$$L(M') = \Sigma^* \quad f(x) = \langle M_\emptyset, M' \rangle \quad \iff \quad w \in L(M) \quad \text{ו-} \quad x = \langle M, w \rangle \quad \iff \quad x \in L_{\text{acc}} \\ \text{אם } f(x) \in L_{M_1 \subset M_2} \quad \iff \quad L(M_\emptyset) \subset L(M') \iff$$

$$\text{שני מקרים:} \quad \iff \quad x \notin L_{\text{acc}}$$

$$\text{מקרה 1:} \quad .f(x) \notin L_{M_1 \subset M_2} \quad \iff \quad L(M_\emptyset) = L(M_\emptyset) \quad \text{ו-} \quad f(x) = \langle M_\emptyset, M_\emptyset \rangle \quad \iff \quad x \neq \langle M, w \rangle$$

$$\text{מקרה 2:} \quad L(M') = \emptyset \quad f(x) = \langle M_\emptyset, M' \rangle \quad \iff \quad w \notin L(M) \quad \text{ו-} \quad x = \langle M, w \rangle \\ .f(x) \notin L_{M_1 \subset M_2} \quad L(M') = L(M_\emptyset) \quad \iff \quad$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה מתקיים $L_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \subset M_2}$, ומכיון רדוקציה מתקיים $L_{M_1 \subset M_2} \leq L_{\text{acc}}$.