

עבודה 3: ערכים עצמיים, מרחבים עצמיים, לכסון.

שאלה 1

נתונה טרנספורמציה ליניארית $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י

$$T(a + bt + ct^2) = \begin{pmatrix} 2a + 5b \\ a + 6b \\ \pi a + \pi^2 b + 3c \end{pmatrix}$$

לכל $a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R})$.

- (א) מצאו את המטריצה הסטנדרטית של A של הטרנספורמציה.
- (ב) מצאו את הערכים העצמיים והמרחבים העצמיים של A .
- (ג) הוכיחו שמטריצה A לכסינה.
- (ד) מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D = P^{-1}AP$.
- (ה) מצאו את $\text{Det}(7 \cdot A^{1000})$.

שאלה 2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ תהי } A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ כך ש:}$$

- (א) מצאו את הפולינום האופייני של מטריצה A .
- (ב) מצאו את הערכים העצמיים והמרחבים העצמיים של A .
- (ג) האם המטריצה לכסינה? אם כן, מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P ש: $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$. אם לא, הסבירו זאת.

שאלה 3

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \text{ נתונה המטריצה}$$

- (א) מצאו ערכים עצמיים ומרחבים עצמיים של A .
- (ב) אם A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D = P^{-1}AP$. אחרת, הסבירו מדוע A איננה הפיכה.

$$(ג) \text{ מצאו את } A^{2014} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(ד) מצאו את A^{201} .

שאלה 4 נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(א) מצאו ערכים עצמיים ומרחבים עצמיים של A .

(ב) אם A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D = P^{-1}AP$. אחרת, הסבירו מדוע A איננה לכסינה.

שאלה 5 נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(א) מצאו ערכים עצמיים ומרחבים עצמיים של A .

(ב) אם A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D = P^{-1}AP$. אחרת, הסבירו מדוע A איננה לכסינה.

(ג) מצאו את $A^{2014} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

שאלה 6 תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ המקיימת $A^2 = A$. הוכיחו ש הינו 0 ערך עצמי של A או ש 1 הינו ערך עצמי של A .

שאלה 7 תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. הוכיחו או הפריכו: אם A הפיכה אז A לכסינה.

שאלה 8 תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. הוכיחו או הפריכו: אם A לכסינה אז A הפיכה.

שאלה 9 נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(א) מצאו ערכים עצמיים ומרחבים עצמיים של A .

(ב) אם A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D = P^{-1}AP$. אחרת, הסבירו מדוע A איננה לכסינה.

שאלה 10 נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(א) האם A לכסינה מעל הממשיים? אם כן, מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D = P^{-1}AP$. אחרת, הסבירו מדוע A איננה לכסינה.

(ב) האם A לכסינה מעל המרוכבים? אם כן, מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D = P^{-1}AP$. אחרת, הסבירו מדוע A איננה לכסינה.

שאלה 11 תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. הוכיחו או הפריכו: λ הינו ערך עצמי של A אם ורק אם λ הינו ערך עצמי של A^t .

שאלה 12 מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ נקראת סקלרית אם קיים $\alpha \in \mathbb{R}$ ש $A = \alpha I$. תהי A מטריצה שאיננה סקלרית ויהי $f(x) = x^2 - 5x + 6$ פולינום. נתון ש- $f(A) = 0$. הוכיחו ש- 2 ו- 3 הם ערך עצמי של A . (הערה: $f(A) = A^2 - 5A + 6I$).

שאלה 13 נתון כי וקטור v הוא וקטור עצמי של מטריצה B המתאים לערך עצמי 2 . הוכיחו כי v הוא וקטור עצמי של המטריצה $C = 3B + 2I$ ומצאו את הערך העצמי המתאים לו.

שאלה 14 הוכיחו או הפריכו: קבוצת כל המטריצות הריבועיות מסדר 3×3 בעלות ערך עצמי 0 מהוות תת מרחב של המרחב הווקטורי $\mathbb{R}^{3 \times 3}$.

שאלה 15 יהיו a, b, c, d כך ש- $a + b = c + d$. הוכיחו שהערכים העצמיים של המטריצה $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ הם $a + b$ ו- $a - c$.

שאלה 16 תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ בעלת ערך עצמי $\alpha \in \mathbb{R}$. יהי u וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי α . הוכיחו ש- u הינו י"ע של A^k ומצאו את הערך העצמי השייך ל- u .

שאלה 17 תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

אם A לא הפיכה אז A לא לכסינה.

שאלה 18 תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ הפיכה בעלת ערך עצמי $\alpha \in \mathbb{R}$. וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי α . הוכיחו ש- u הינו וקטור עצמי של A^{-1} ומצאו את הערך העצמי השייך ל- u .

שאלה 19 תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ויהיו u_1, u_2 וקטור עצמי של A השייכים לערך עצמי שונים λ_1, λ_2 . הוכיחו ש u_1, u_2 בת"ל.

שאלה 20 תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית: אם A לא הפיכה אז A לא לכסינה.

שאלה 21 תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית: אם ל- A יש ערך עצמי $\lambda = 0$ אז A לא הפיכה.

תשובות

שאלה 1

(א)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ \pi & \pi^2 & 3 \end{pmatrix}$$

(ב) פולינום אופייני:

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -5 & 0 \\ -1 & \lambda - 6 & 0 \\ -\pi & -\pi^2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)((\lambda - 2)(\lambda - 6) - 5) = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 8\lambda + 12 - 5) = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 8\lambda + 7)$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1,

$\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 1,

$\lambda = 7$ מריבוי אלגברי 1.

מרחב עצמי השייך ל- $\lambda = 1$

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{10}{\pi(\pi-5)} \\ \frac{-2}{\pi(\pi-5)} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim V_1 = 1.$$

מרחב עצמי השייך ל- $\lambda = 3$

$$V_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim V_3 = 1.$$

מרחב עצמי השייך ל- $\lambda = 7$

$$V_7 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{\pi+\pi^2} \\ \frac{4}{\pi+\pi^2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim V_7 = 1.$$

(ג) $\dim V_7 + \dim V_3 + \dim V_1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ לכן A לכסינה.

(ד) $A = PDP^{-1}$ כאשר

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \frac{4}{\pi+\pi^2} & 0 & \frac{10}{(\pi-5)\pi} \\ \frac{4}{\pi+\pi^2} & 0 & -\frac{2}{(\pi-5)\pi} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ה)

$$|7A^{1000}| = 7^3 |A^{1000}| = 7^3 |PD^{1000}P^{-1}| = 7^3 |D^{1000}| = 7^3 \cdot 7^{1000} \cdot 3^{1000} \cdot 1^{1000} = 343 \cdot (21)^{1000}$$

שאלה 2

(א)

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda & -3 & -1 \\ 1 & \lambda - 4 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} \lambda & -3 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda(\lambda - 4) + 3) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 1) \\ &= (\lambda - 1)^2(\lambda - 3) \end{aligned}$$

הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3).$$

(ב)

ערכים עצמיים:

$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 2

$\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 1.

נחשב את המרחב עצמי V_1 השייך לערך עצמי 1:

$$(A - I) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון $(x, y, z) = (3y + z, y, z) = y(3, 1, 0) + z(1, 0, 1)$ לכן

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(V_1) = 2$, ז"א הריבוי גאומטרי 2.

נחשב את המרחב עצמי V_3 השייך לערך עצמי 3:

$$(A - 3I) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון $(x, y, z) = (y, y, 0) = y(1, 1, 0)$ לכן

$$V_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(V_3) = 1$, ז"א הריבוי גאומטרי 1.

(ג) עבור כל אחד של הערכים עצמיים הריבוי גאומטרי שווה לריבוי אלגברי לכן A לכסינה.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

שאלה 3

(א)

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 3 & -2 \\ -6 & \lambda + 4 & -4 \\ -4 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1,

$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 1,

$\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 1.

מרחב עצמי השייך ל- $\lambda = 1$

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim V_1 = 1.$$

מרחב עצמי השייך ל- $\lambda = 2$

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim V_2 = 1.$$

מרחב עצמי השייך ל- $\lambda = 3$

$$V_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim V_3 = 1.$$

(ב) כל הערכים עצמיים שונים לכן A לכסינה.

$$A = P^{-1}DP, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ג)

$$A^{2014} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = A^{2014} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2A^{2014} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי $\lambda = 1$. לכל וקטור עצמי v השייך לערך עצמי λ , $A^k v = \lambda^k v$,
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ לכן

$$2A^{2014} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot (1)^{2014} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

שאלה 4

(א) המטריצה משולית לכן הערכים עצמיים הם האיברים על האלכסון הראשי. פולינום אופייני:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3$$

$\lambda = 1$ הוא הערך עצמי היחיד מיריבוי אלגברי 3. המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1$ הוא

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(ב) $\dim V_1 = 1 < \dim \mathbb{R}^3$. לכן A לא לכסינה. ■

שאלה 5

(א)

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 4 & 0 \\ -1 & \lambda + 4 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$$

ערכים עצמיים:

1. $\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.

2. $\lambda = -2$ מריבוי אלגברי 2.

מרחב עצמי השייך ל- $\lambda = -2$

$$V_{-2} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim V_{-2} = 1.$$

מרחב עצמי השייך ל- $\lambda = 1$

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} R \right\}, \quad \dim V_1 = 1.$$

(ב) A לא לכסינה:

$$\dim V_1 + \dim V_{-2} = 2 < \dim \mathbb{R}^3.$$

(ג) וקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda = -2$, אז $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A^{2014} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2)^{2014} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

שאלה 6 נניח ש u וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי λ .

$$A^2 u = Au \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 u = \lambda u \quad \Rightarrow \quad (\lambda^2 - \lambda)u = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(\lambda - 1)u = 0$$

$u \neq 0$ כי u וקטור עצמי לכן $\lambda(\lambda - 1) = 0$, לכן $\lambda = 0$ או $\lambda = 1$.

■

שאלה 7 טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2$$

הערך עצמי היחיד הוא $\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 2.

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ המרחב עצמי הוא}$$

$$\dim V_1 = 1 < \dim \mathbb{R}^2$$

לכן A לא לכסינה. אבל A הפיכה כי $|A| = 1 \neq 0$.

■

שאלה 8 טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ הערכים עצמיים של } A \text{ הם } \lambda = 1, \lambda = 0.$$

$$V_0 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim V_0 + \dim V_1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \text{ לכן } A \text{ לכסינה:}$$

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אבל $|A| = 0$ לא הפיכה כי $|A| = 0$. ■

שאלה 9

(א)

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \\ &= [(\lambda - 1)(\lambda - 4) + 2]^2 \\ &= (\lambda^2 - 5\lambda + 6)^2 \\ &= (\lambda - 2)^2 (\lambda - 3)^2 \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 2.

$\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 2.

מרחב עצמי השייך ל- $\lambda = 2$

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim V_2 = 2.$$

מרחב עצמי השייך ל- $\lambda = 3$

$$V_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim V_3 = 2.$$

(ב) A לכסינה:

$$\dim V_2 + \dim V_3 = 4 = \dim \mathbb{R}^4.$$

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

שאלה 10

(א)

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 5 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 5 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (3 - \lambda) [(\lambda - 2)^2 + 5] = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 4\lambda + 9)$$

יש שורש ממשי אחד של הפולינום האופייני: $\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 1.
נחשב את המרחב עצמי של $\lambda = 3$:

$$(A - 3I|\bar{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

לכן המרחב העצמי הוא

$$V_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim V_3 = 1.$$

יש ערך עצמי ממשי אחד מריבוי גיאומטרי 1, לכן A לא לכסינה מעל \mathbb{R} .

(ב) לפולינום האופייני ישנם 3 שורשים מעל \mathbb{C} :

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 2 - \sqrt{5}i)(\lambda - 2 + \sqrt{5}i)$$

השורשים של הפולינום האופייני הם

$\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 1,

$\lambda = 2 + \sqrt{5}i$ מריבוי אלגברי 1,

$\lambda = 2 - \sqrt{5}i$ מריבוי אלגברי 1.

יש 3 ערכים עצמים שונים לכן A לכסינה מעל \mathbb{C} .

מרחב עצמי השייך ל- $\lambda = 3$

$$V_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim V_3 = 1.$$

מרחב עצמי השייך ל- $\lambda = 2 + \sqrt{5}i$

$$V_{2+\sqrt{5}i} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5}i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim V_{2+\sqrt{5}i} = 1.$$

מרחב עצמי השייך ל- $\lambda = 2 - \sqrt{5}i$

$$V_{2-\sqrt{5}i} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{5}i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim V_{2-\sqrt{5}i} = 1.$$

A לכסינה מעל \mathbb{C} :

$$\dim V_3 + \dim V_{2+\sqrt{5}i} + \dim V_{2-\sqrt{5}i} = 3 = \dim \mathbb{C}^3.$$

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + i\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 - i\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{5} & -i\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

שאלה 11 הטענה נכונה. הוכחה:

נניח ש- λ ערך עצמי של A . אז $|\lambda I - A| = 0$.

$$|\lambda I - A| = |(\lambda I - A)^t| = |\lambda I^t - A^t| = |\lambda I - A^t|$$

לכן

$$|\lambda I - A| = 0 \quad \Rightarrow \quad |\lambda I - A^t| = 0.$$

כלומר אם λ ערך עצמי של A אז λ ערך עצמי של A^t .

■

שאלה 12

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

$$f(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - 2I)(A - 3I) = 0$$

יהי u וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי λ .

$$0 = f(A)u = f(\lambda)u = (\lambda - 2)(\lambda - 3)u$$

$u \neq 0$ בגלל הוא וקטור עצמי לכן $\lambda = 2$ או $\lambda = 3$.



שאלה 13

$$B \cdot u = 2u$$

$$Cu = (3B + 2I)u = 3Bu + 2u = 3 \cdot 2u + 2u = 8u$$

$$Cu = 8u \text{ כלומר}$$



שאלה 14

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: נסמן ב- V את הקבוצה של כל המטריצות 3×3 בעלות ערך עצמי

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ יהיו } 0.$$

ערכים עצמיים של A : $\lambda = 1, 0$.

ערכים עצמיים של B : $\lambda = 1, 0$.

לכן $A, B \in V$. נבדוק אם $A + B \in V$:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ יש ל- } A + B \text{ ערך עצמי אחד: } \lambda = 1 \text{ מריבוי אלגברי } 3, \text{ אבל } \lambda = 0 \text{ אינו ערך עצמי}$$

של $A + B$, לכן $A + B \notin V$ לכן V אינו תת מרחב.



שאלה 15

הפולינום האופייני של A :

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix}$$

$$p_A(a + b) = \begin{vmatrix} b & -b \\ -c & -d + a + b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & -b \\ -c & c \end{vmatrix}$$

השורה השניה שווה ל $\frac{-c}{b}$ כפול השורה הראשונה, לכן הדטרמיננטה שווה אפס, ולכן $p_A(a + b) = 0$.

$$p_A(a - c) = \begin{vmatrix} -c & -b \\ -c & -d + a - c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c & -b \\ -c & -b \end{vmatrix}$$

השורה השניה שווה לשורה ראשונה, לכן הדטרמיננטה שווה אפס, ולכן $p_A(a - c) = 0$.



שאלה 16 נוכיח ע"י אינדוקציה ש

$$A^k u = \alpha^k u .$$

שלב הבסיס:

עבור $k = 1$ הטענה נכונה.

שלב האינדוקציה:

נניח ש-

$$A^N u = \alpha^N u , \quad (*)$$

(ההנחת אינדוקציה). נוכיח ש- $A^{N+1} u = \alpha^{N+1} u$.

$$A^{N+1} u = A \cdot A^N u = A \cdot \alpha^N u = \alpha^N A \cdot u = \alpha^N \cdot \alpha u = \alpha^{N+1} u .$$



שאלה 17 טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A לא הפיכה.

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 1) .$$

הערכים עצמיים הם $\lambda = 0$ מריבוי אלגברי 1 ו- $\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1. לכן A לכסינה.

שאלה 18

$$Au = \alpha u$$

A הפיכה לכן A^{-1} קיימת. לכן

$$A^{-1}Au = A^{-1}(\alpha u) \Rightarrow u = \alpha A^{-1}u .$$

כיוון ש- A הפיכה אז 0 לא יכול להיות ערך עצמי של A , ז"א $\alpha \neq 0$. לכן אפשר לחלק ב- α ונקבל:

$$A^{-1}u = \frac{1}{\alpha} u .$$

לכן $\frac{1}{\alpha}$ ערך עצמי של A^{-1} ששייך לוקטור עצמי u . ■

שאלה 19 $Au_1 = \lambda u_1$ ו $Au_2 = \lambda u_2$ נתון. נרשום

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 = \bar{0} . \quad (*)$$

נכפיל משני האגפים ב- A :

$$A(k_1 u_1 + k_2 u_2) = A \cdot \bar{0} \Rightarrow k_1 \lambda_1 u_1 + k_2 \lambda_2 u_2 = \bar{0} \quad (*)$$

נכפיל (*) ב- λ_1 :

$$k_1 \lambda_1 u_1 + k_2 \lambda_1 u_2 = \bar{0} \quad (*)$$

נקח את החיסור של הביטויים (*) ו- (*2), כלומר (*2)-(*3):

$$k_2 (\lambda_2 - \lambda_1) u_2 = \bar{0} \quad (*)$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ בגלל זה נתון ש- הערכים עצמיים שונים, ו- $u_2 \neq \bar{0}$ כי הוא וקטור עצמי, לכן $k_2 = 0$. נציב $k_2 = 0$ ב (*) ונקבל $k_1 = 0$. לכן (*) מתקיים רק אם המקדמים מתאפסים, לכן u_1, u_2 בת"ל. ■

שאלה 20

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A לא הפיכה.

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 1) .$$

הערכים עצמיים הם:

$$\lambda = 0 \text{ מריבוי אלגברי } 1$$

$$\lambda = 1 \text{ מריבוי אלגברי } 1.$$

לכן A לכסינה.

שאלה 21

טענה נכונה. אם ל- A יש ערך עצמי $\lambda = 0$ ז"א ש-0 שורש של הפולינום האופייני, כלומר $p_A(0) = 0$. $p_A(0) = |A|$, לכן $|A| = 0$ לכן A לא הפיכה.