שיעור 9
תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, קמירות, אסימפטוטות ודוגמאות לחקירה

9.1 תחומי עליה וירידה של פונקציה

משפט 9.1 תנאי הכרחי למונוטוניות

א) נניח שפונקציה $f(x)$ גזירה בקטע (a,b) ועולה ממש בקטע הזה. אז $f'(x)\geq 0$ לכל $x\in(a,b)$.

ב) נניח שפונקציה $f(x)$ גזירה בקטע (a,b) ויורדת ממש בקטע הזה. אז $f'(x)\leq 0$ לכל $x\in(a,b)$.

הוכחה:

א) נניח ש f עולה בקטע (a,b). f גזירה בקטע (a,b) אז לכל $x\in(a,b)$:

$$f'(x)=f'_+(x)=f'_-(x)$$

כאשר

$$f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\ ,\qquad f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

f עולה ממש לכן לכל $\Delta x>0$ מתקיים $f(x+\Delta x)-f(x)>0$.

לכן $f'_+(x)>0$.

באותה מידה, מכיוון ש- f עולה ממש אז לכל $\Delta x<0$ מתקיים $f(x)<f(x+\Delta x)$, כלומר $f(x+\Delta x)-f(x)>0$.

לכן $f'_-(x)>0$. לפיכך

$f'(x)=f'_+(x)=f'_-(x)\geq 0$ לכל $x\in(a,b)$.

ב) ההוכחה דומה להוכחה של הסעיף הקודם.

■

משפט 9.2 תנאי המספיק למונוטוניות

א) נניח שפונקציה $f(x)$ גזירה בקטע (a,b) לכל $x\in(a,b)$, $f'(x)>0$. אז $f(x)$ עולה מונוטונית בקטע (a,b).

ב) נניח שפונקציה $f(x)$ גזירה בקטע (a,b) לכל $x\in(a,b)$, $f'(x)<0$. אז $f(x)$ יורדת מונוטונית בקטע (a,b).

הוכחה:

א) נניח ש $f'(x)>0$ לכל $x\in(a,b)$. נקח $x_1<x_2$ בתוך הקטע. לפי משפט לגרנז' 10.3 קיים c כך ש- $x_1<c<x_2$ ו-

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)\ .$$

לפי הנתון, $f'(c)>0$, לכן $f(x_2)-f(x_1)>0 \Leftarrow f(x_2)>f(x_1)$. ז"א f עולה מונוטונית בקטע (a,b).

ב) ההוכחה דומה להוכחה של הסעיף הקודם.

■

9.2 תרגילים

דוגמה 9.1

בדקו את תחומי עליה וירידה של פונקציה $f(x)=x^3-3x-4$.

פתרון:

$$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)\ .$$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

■

דוגמה 9.2

הראו כי למשוואה $2\ln x+x^2-5=0$ יש שורש ממשי אחד בדיוק.

פתרון:
נגדיר $f(x)=2\ln x+x^2-5$. שים לב

$$f(1)=-4<0\ ,\qquad f(2)=2\ln 2-1>0\ .$$

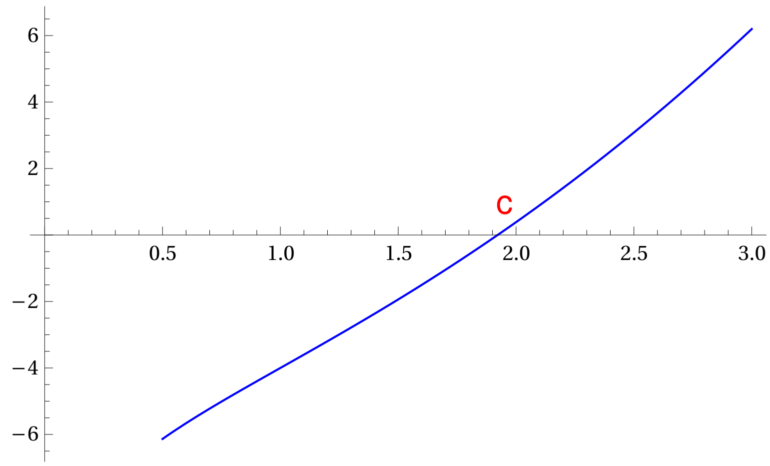
תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא $x>0$. מכיוון ש $f(x)$ פונקציה אלמנטרית, ומוגדרת בקטע $[1,2]$, אז היא רציפה בקטע זו וגזירה בקטע $(1,2)$. לפי משפט ערך הביניים 10.2 קיים $c\in(1,2)$ כך ש- $f(c)=0$.

נוכיח שהשורש c הוא יחיד:

שים לב

$$f'(x)=\frac{2}{x}+2x>0$$

לכל x בתחום ההגדרה. $\Leftarrow$ f עולה מונוטונית בתחום $(0,\infty)$ $\Leftarrow$ f חח"ע $\Leftarrow$ השורש הוא יחיד.



■

9.3 נקודות קיצון

הגדרה 9.1 נקודת מקסימום

נקודה a נקראת נקודת מקסימום מקומי של פונקציה $f(x)$ אם קיימת סביבה של a כך שלכל $x\neq a$ השייך לסביבה, מתקיים
$$f(x)<f(a) \ .$$

הגדרה 9.2 נקודת מינימום

נקודה a נקראת נקודת מינימום מקומי של פונקציה $f(x)$ אם קיימת סביבה של a כך שלכל $x\neq a$ השייך לסביבה, מתקיים
$$f(x)>f(a) \ .$$

נקודות מקסימום ומינימום נקראות **נקודות קיצון** אן גם **נקודות אקסטרמום.**

משפט 9.3 משפט פרמה (תנאי הכרחי לאקסטרמום)

אם פונקציה $f(x)$ גזירה בסביבה של נקודה a ו- $x=a$ נקודת קיצון של $f(x)$. אז $f'(a)=0$.

המשמעות הגאומטרית: בנקודהת קיצון המשיק מקביל לציר ה- x.

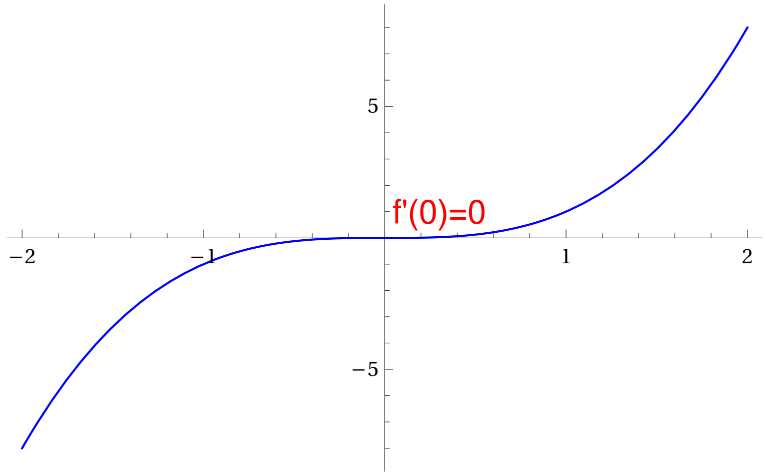
שים לב המשפט ההפוך לא נכון. ז"א אם $f'(x)=0$ אז לא בהכרח a היא נקודת אקסרמום. כמו בדוגמה הבאה:

דוגמה 9.3

$\underline{f(x)=x^3}$

$$f'(x)=3x^2 \ , \qquad \Rightarrow \qquad f'(0)=0$$

אבל $x=0$ לא נקודת קיצון (עיין תרשים להלן)

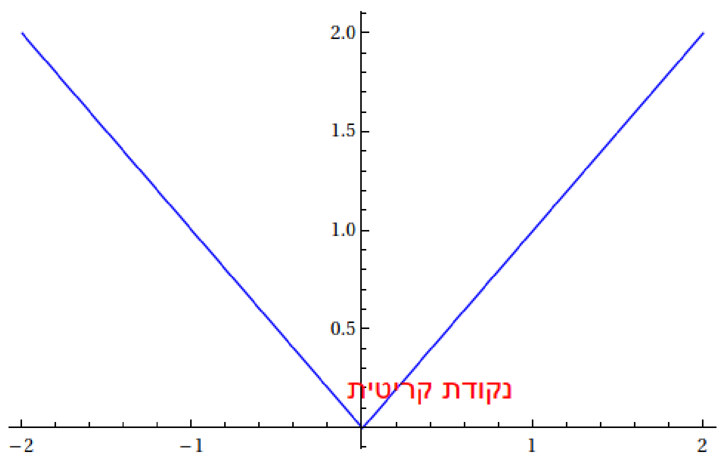


גם קיימות פונקציות שיש להן נקודת קיצון אבל הן לא גזירות בנקודה הזאת. למשל הדוגמה הבאה:

דוגמה 9.4

$f(x) = |x|$

$f'(0)$ לא קיימת אבל הנקודה $x=0$ נקודת מינימום (עיין תרשים להלן)



למה 9.1 נקודת קריטית

נקודות אקסטרמום של פונקציה יכולות להיות בין הנקודות שבהן הנגזרת שווה ל- 0 או לא קיימת.

נקודות האלה נקראים **נקודות קריטיות** (או **נקודות חשודות לאקסטרמום**).

משפט 9.4 תנאי המספיק לאקסטרמום

נניח שפונקציה $f(x)$ מוגדרת בנקודה a וגזירה בסביבה של a אבל לא בהכרח גזירה ב- a. נניח ש- a היא נקודה חשודה לקיצון. אזי:

1) אם במעבר דרך הנקודה a משמאל לימין $f'(x)$ משנה את הסימן מ $+$ ל- $-$ אז a נקודת מקסימום מקומי.

2) אם במעבר דרך הנקודה a משמאל לימין $f'(x)$ משנה את הסימן מ $-$ ל- $+$ אז a נקודת מינימום מקומי.

9.4 תרגילים

דוגמה 9.5

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)=\frac{x}{3}-\sqrt[3]{x^2}$.

פתרון:

$$f'(x)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{1}{3}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[3]{x}-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

הנקודות החשודות לקיצון $x=0,8$.

x	$(-\infty,0)$	$(0,8)$	$(8,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

לכן $(0,f(0))=(0,0)$ נקודת מקסימום מקומי.

$(8,f(8))=(8,-\frac{4}{3})$ נקודת מינימום מקומי. ■

דוגמה 9.6

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x-1}$.

פתרון:

$$f'(x)=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

הנקודות הקריטיות הן $x=-1,1,3$.

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

לכן נקבל:

$x=3$ נק' מינימום מקומי: $f(3)=8$.
$x=-1$ נק' מקסימום מקומי: $f(-1)=0$.

■

9.5 מציאת הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של פונקציה רציפה בקטע סגור

נניח ש- $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$. אז לפי משפט ויירשטרס 10.1, $f(x)$ מקבלת בקטע $[a,b]$ את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר.

הערך הזה יכול להתקבל בנקודה פנימית של הקטע, (אז היא נקודה קריטית של פונקציה $f(x)$) או באחד הקצוות של הקטע. לכן השלבים למציאת הערך הגדול ביותר והקטן ביותר הם:

1. למצוא את כל הנקודות החשודות לאקסרמום השייכות לקטע (a,b).
2. לחשב את הערך של $f(x)$ בכל הנקודות של סעיף הקודם.
3. לחשב את $f(a)$ ו- $f(b)$.
4. מתוך הערכים שחישבנו לבחור את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר.

דוגמה 9.7

מצאו את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של פונקציה

$$f(x)=3x^4+4x^3+1$$

בקטע $[-2,-\frac{1}{2}]$

פתרון:

$$f'(x)=12x^3+12x^2=12x^2(x+1)$$

לכן $f'(x)=0$ בנקודות $x=0,-1$. הנקודה הקריטית השייכת לקטע $[-2,-\frac{1}{2}]$ היא $x=-1$. $f(-1)=0$.
נוסיף את הקצוות:

$$f(-2)=17\ ,\qquad f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{16}\ .$$

הערך הגדול ביותר היא 17 המתקבל בנקודה $x=-2$.

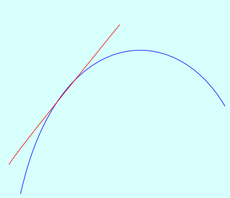
הערך הגדול ביותר היא 0 המתקבל בנקודה $x=-1$.

■

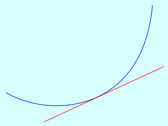
9.6 תחומי קמירות ונקודות פיתול

הגדרה 9.3 פונקציה קמורה

פונקציה $f(x)$ שגזירה בקטע (a,b) נקראת קמורה כלפי מטה אם בכל נקודה $x\in(a,b)$ המשיך לגרף הפונקציה נמצא מעל הגרף.



פונקציה $f(x)$ שגזירה בקטע (a,b) נקראת קמורה כלפי מעלה אם בכל נקודה $x \in (a,b)$ המשיק לגרף הפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה



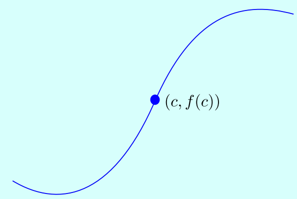
משפט 9.5

אם $f''(x) < 0$ לכל $x \in (a,b)$ אז $f(x)$ קמורה כלפי מטה בקטע (a,b).

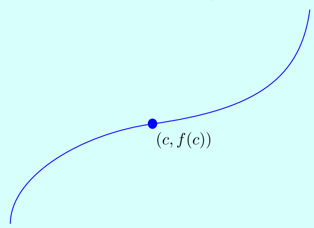
אם $f''(x) > 0$ לכל $x \in (a,b)$ אז $f(x)$ קמורה כלפי מעלה בקטע (a,b).

הגדרה 9.4 נקודת פיתול

נקודה בגרף $(c, f(c))$ נקראת נקודת פיתול של הפונקציה אם היא נמצאת בין שני תחומי קמירות שונים.



או



משפט 9.6

אם $f''(c) = 0$ או $f''(c)$ לא קיימת ובמעבר דרך נקודה c, $f''(c)$ מחליף סימן, אז הנקודה $(c, f(c))$ היא נקודת פיתול.

דוגמה 9.8

נתונה הפונקציה

$$f(x) = x^5 - x + 5$$

מצאו את נקודות פיתול של הפונקציה.

פתרון:

$$f(x) = x^5 - x + 5\ , \qquad f'(x) = 5x^4 - 1\ , \qquad f''(x) = 20x^3 = 0$$

לכן קיימת נקודת פיתול בנקודה $(0, f(0)) = (0,5)$.

■

9.7 אסימפטוטה אנכית

הגדרה 9.5 אסימפטוטה אנכית

קו ישר $x = a$ נקרא אסימפטוטה אנכית של פונקציה $f(x)$ אם לפחות אחד הגבולות החד צדדיים $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ או $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ שווה ל- $+\infty$ או $-\infty$.

דוגמה 9.9

מצאו את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה

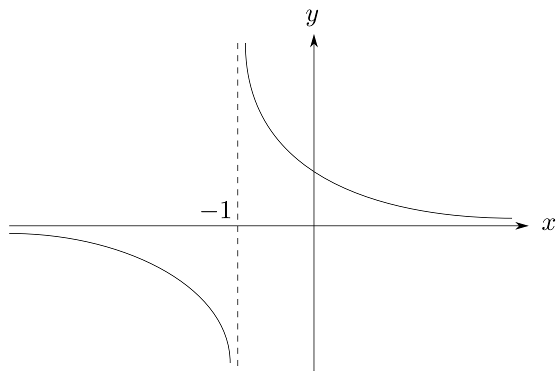
$$f(x) = \frac{2}{x+1}$$

פתרון:

שים לב

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{2}{x+1} = -\infty \ , \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{2}{x+1} = +\infty$$

ולכן ישנה אסימפטוטה אנכית ב- $x=-1$.



■

9.8 אסימפטוטה אופקית

הגדרה 9.6 אסימפטוטה אופקית

קו ישר $y=b$ נקרא אסימפטוטה אופקית של פונקציה $f(x)$ אם $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ או $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$.

דוגמה 9.10

מצאו את האסימפטוטות האופקיות של הפונקציה

$$f(x) = \frac{2}{x+1}$$

פתרון:

שים לב

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{x+1} = 0 \ , \qquad \lim_{x\to \infty} \frac{2}{x+1} = 0$$

ולכן $y=0$ אסימפטוטה אופקית ב- $\pm\infty$.

■

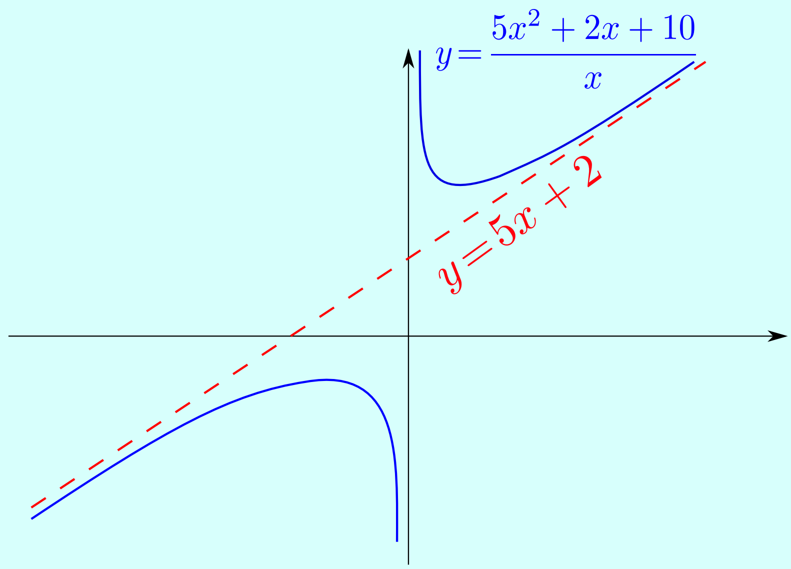
9.9 אסימפטוטה משופעת

הגדרה 9.7 אסימפטוטה משופעת

קו ישר $y = m \cdot x + n$ נקרא אסימפטוטה משופעת של פונקציה $f(x)$ אם המרחק בין גרף הפונקציה לבין הקו $y = m \cdot x + n$ שואף ל- 0 כאשר x שואף ל ∞ או $-\infty$. ז"א

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (mx+n)) = 0 \qquad \text{או} \qquad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - (mx+n)) = 0$$

.



כלל 9.1 נוסחאות למציאת אסימפטוטה משופעת

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \ , \qquad n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$$

(אותו דבר עבור $x \to -\infty$). אם m, n מספרים סופיים, אז קיימת אסימפטוטה משופעת.

9.10 דוגמאות

דוגמה 9.11

$f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-2}$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-2}{x(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-2}{x^2-2x}=1\ .$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-x-2}{x-2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-2-x^2+2x}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x-2}=1\ .$$

לכן הקו $y=x+1$ אסימפטוטה משופעת ב- $+\infty$.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-2}{x(x-2)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-2}{x^2-2x}=1\ .$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-x-2}{x-2}-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-2-x^2+2x}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{x-2}=1\ .$$

לכן הקו $y=x+1$ אסימפטוטה משופעת ב- $-\infty$.

דוגמה 9.12

$f(x)=x\cdot e^x$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{xe^x}{x}=\lim_{x\to\infty}e^x=\infty\ .$$

לכן אין אסימפטוטה משופעת ב- $+\infty$.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^x=0\ .$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}[xe^x-0\cdot x]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0\ .$$

לכן הקו $y=0$ אסימפטוטה משופעת (אופקית) ב- $-\infty$.

9.11 חקירה מלאה של פונקציה

כלל 9.2 שלבים לחקירה מלאה של פונקציה

1. תחום הגדרה
2. נקודות חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה
3. התנהגות סביב נקודות אי הגדרה, אסימפטוטות אנכיות.
4. התנהגות באינסוף, אסימפטוטות אופקיות.

5. אסימפטוטות משופעות.
6. תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון
7. תחומי קמירות, נקודות פיתול.
8. גרף הפונקציה.

דוגמה 9.13

חקרו באופן מלא את הפונקציה הבאה (תחום הגדרה, נקודות חיתוך, אסימפטוטות אנכיות אופקיות ומשופעות, תחומי עליה ורידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול), וצייר סקיצת הגרף של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

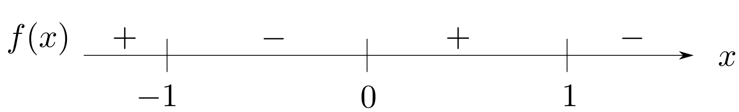
פתרון:

1. תחום הגדרה: $x \neq \pm 1$

2. נקודות חיתוך עם הצירים : $(0,0)$

סימני הפונקציה :

x	$x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$x>1$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$



3. אסימפטוטות אנכיות:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{1-x^2} = \infty \ , \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{1-x^2} = -\infty \ .$$

$x=1$ אסימפטוטה אנכית.

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x}{1-x^2} = \infty \ , \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{1-x^2} = -\infty \ .$$

$x=-1$ אסימפטוטה אנכית.

4. אסימפטוטות אופקיות:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}-1} = 0 \ , \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{1-x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}-1} = 0 \ .$$

$y=0$ אסימפטוטה אופקית ב- $\pm\infty$.

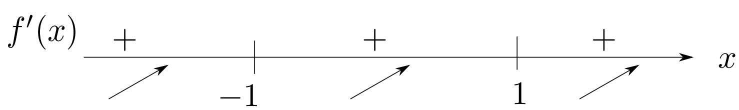
5. אסימפטוטות משופעות: יש אסימפטוטות אופקיות ב- $\pm\infty$ לכן אין אסימפטוטות משופעות.

6. תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון :

$$f'(x) = \frac{1-x^2-x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$$

מכאן $f'(x)$ לא שווה אפס באף נקודה בתחום הגדרה של הפונקציה (אף על פי שהמונה של $f'(x)$ מתאפס ב- $x=\pm 1$, באותן נקודות נמצאת אסימפטוטות אנכיות בגלל שהפונקציה המקורית $f(x)$ לא מוגדרת בהן).

x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$



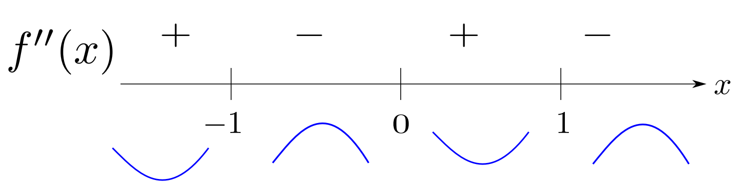
אין נקודת קיצון.

7. תחומי קמירות, נקודות פיתול:

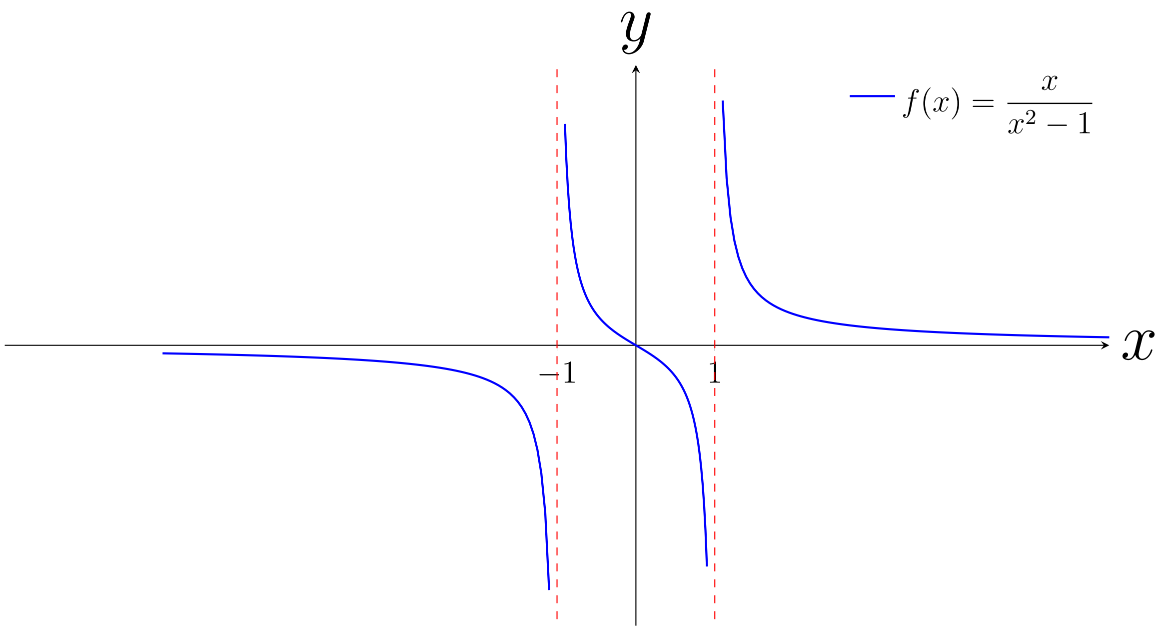
$$\begin{aligned} f''(x) =& \frac{2x(1-x^2)^2-2(1-x^2)(-2x)(x^2+1)}{(1-x^2)^4} \\ =& \frac{2x(1-x^2)\left[1-x^2+2(x^2+1)\right]}{(1-x^2)^4} \\ =& \frac{2x(1-x^2)\left[1-x^2+2x^2+2)\right]}{(1-x^2)^4} \\ =& \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3} \end{aligned}$$

לכן $f''(x)=0$ כאשר $x=0$. הנקודה $(0,0)$ נקודת פיתול.

x	$x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$x>1$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$



8. גרף הפונקציה:



■

דוגמה 9.14

חקרו באופן מלא את הפונקציה הבאה (תחום הגדרה, נקודות חיתוך, אסימפטוטות אנכיות אופקיות ומשופעות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול), וצייר סקיצת הגרף של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$$

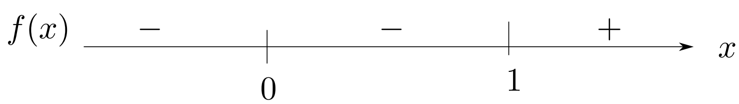
פתרון:

1. תחום הגדרה: $x \neq 0$

2. נקודות חיתוך עם הצירים : $(1,0)$

סימני הפונקציה :

x	$x<0$	$0<x<1$	$x>1$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$



.3 אסימפטוטות אנכיות:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-1}{x^2}=-\infty\ ,\qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{x^3-1}{x^2}=+\infty\ .$$

$x=0$ אסימפטוטה אנכית.

.4 אסימפטוטות אופקיות:

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x^3-1}{x^2}=\infty\ ,\qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{x^3-1}{x^2}=\infty\ .$$

$y=0$ אין אסימפטוטה אופקית ב- $\pm\infty$.

.5 אסימפטוטות משופעות:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^3}=1\ ,\qquad n=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^2}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x^2}=0\ .$$

לכן הקו $y=x$ אסימפטוטה משופעת ב- $+\infty$.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x^3}=1\ ,\qquad n=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x^2}-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x^2}=0\ .$$

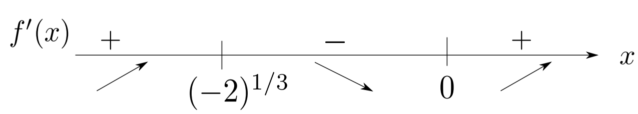
לכן הקו $y=x$ אסימפטוטה משופעת ב- $-\infty$.

.6 תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון:

$$f'(x)=\frac{3x^2\cdot x^2-2x(x^3-1)}{x^4}=\frac{x^4+2x}{x^4}=1+\frac{2}{x^3}$$

מכאן $f'(x)=0$ בנקודות $x=0$ ו- $x=(-2)^{1/3}$.

x	$x<(-2)^{1/3}$	$x=(-2)^{1/3}$	$(-2)^{1/3}<x<0$	$x=0$	$x>0$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$	$\nexists$	$\nearrow$

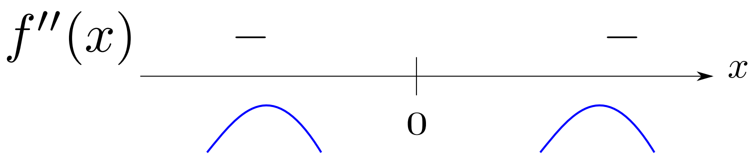


שים לב הפונקציה לא מוגדרת בנקודה $x=0$ ולכן הנקודה $(-2^{1/3},-1.89)=(-2^{1/3},f(-2^{1/3}))$ נקודת מקסימום.

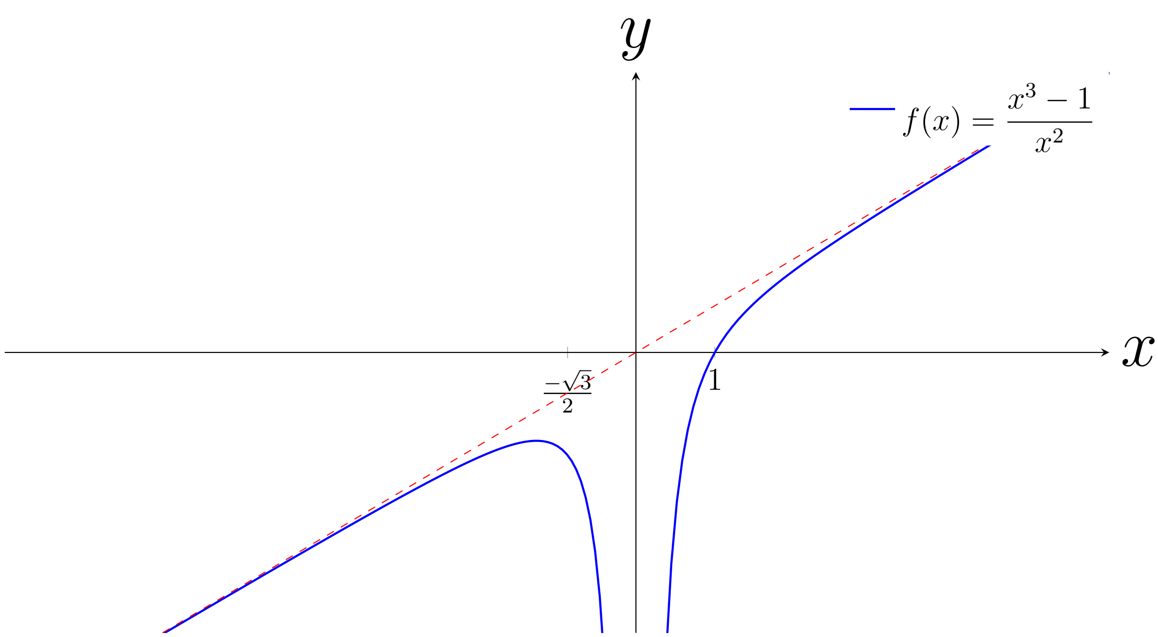
.7 תחומי קמירות, נקודות פיתול:

$$f''(x)=\frac{-6}{x^4}<0$$

x	$x<0$	0	$x>0$
$f''(x)$	$-$	0	$-$



8. גרף הפונקציה:



■

דוגמה 9.15

חקרו באופן מלא את הפונקציה הבאה (תחום הגדרה, נקודות חיתוך, אסימפטוטות אנכיות אופקיות ומשופעות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול), וצייר סקיצת הגרף של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$$

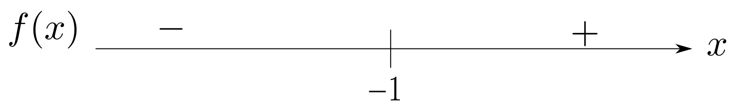
פתרון:

1) תחום הגדרה: $x \neq -1$

2) נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,1)$

סימני הפונקציה:

$x>-1$	$x<-1$	x
$+$	$-$	$f(x)$



3) אסימפטוטות אנכיות:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{e^{2x}}{1+x}=-\infty\ , \qquad \lim_{x\to -1^+}\frac{e^{2x}}{1+x}=+\infty\ .$$

$x=-1$ אסימפטוטה אנכית.

4) אסימפטוטות אופקיות.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{1+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{1}=\infty\ , \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{1+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^{2x}}{1}=0\ .$$

$y=0$ אין אסימפטוטה אופקית ב- $-\infty$.

5) אסימפטוטות משופעות.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4e^{2x}}{2}=\infty\ .$$

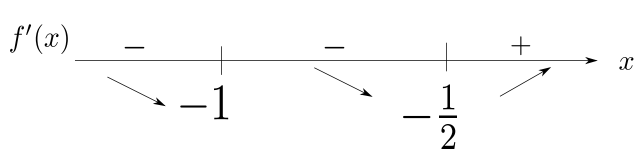
לכן אין אסימפטוטה משופעת ב- $+\infty$.

6) תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(1+x)-e^{2x}\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{e^{2x}(2x+1)}{(1+x)^2}$$

מכאן $f'(x)=0$ בנקודות $x=\frac{-1}{2}$.

x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<\frac{-1}{2}$	$x=\frac{-1}{2}$	$x>\frac{-1}{2}$
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$\frac{2}{e}$	$\nearrow$

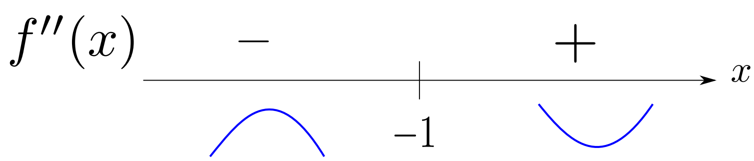


שים לב הפונקציה לא מוגדרת בנקודה $x=-1$ ולכן הנקודה $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2})) = (-\frac{1}{2}, \frac{2}{e}) = (-\frac{1}{2}, 0.74)$ נקודת מינימום.

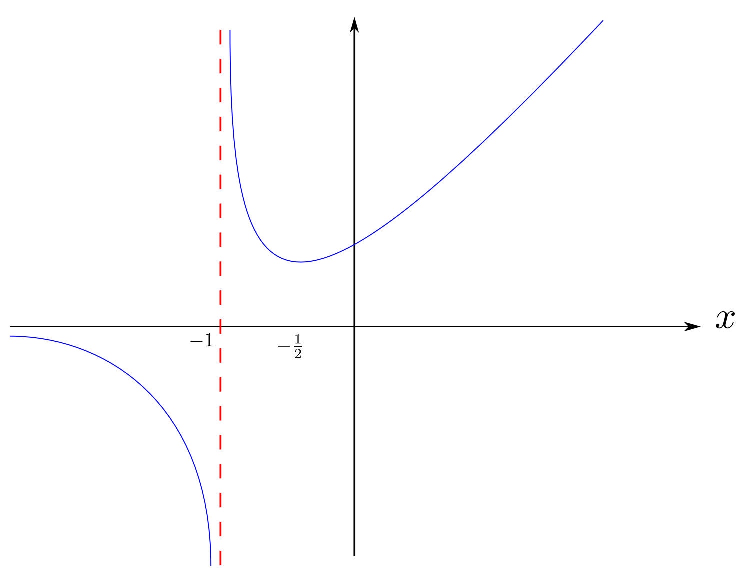
7) תחומי קמירות, נקודות פיתול.

$$\begin{aligned}
f''(x) =& \frac{\left[2e^{2x}(2x+1)+2e^{2x}\right](1+x)^2 - e^{2x}(2x+1)\cdot 2(1+x)}{(1+x)^4} \\
=& \frac{2e^{2x}(1+x)\left[(2x+2)(1+x)-(2x+1)\right]}{(1+x)^4} \\
=& \frac{2e^{2x}\left[2x^2+2+3x-2x-1\right]}{(1+x)^3} \\
=& \frac{2e^{2x}\left[2x^2+x+1\right]}{(1+x)^3}
\end{aligned}$$

x	$x<-1$	-1	$x>-1$
$f''(x)$	$-$	$\nexists$	$-$



8) גרף הפונקציה.



∎

דוגמה 9.16

חקרו באופן מלא את הפונקציה הבאה (תחום הגדרה, נקודות חיתוך, אסימפטוטות אנכיות אופקיות ומשופעות, תחומי עליה ורידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול), וצייר סקיצת הגרף של הפונקציה.

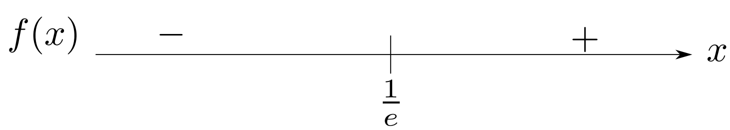
$$f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$$

פתרון:

1. **תחום הגדרה:** $x > 0$.
2. **נקודות חיתוך עם הצירים:** $(0, \frac{1}{e})$

סימני הפונקציה

x	$x < \frac{1}{e}$	$x > \frac{1}{e}$
$f(x)$	$-$	$+$



3. **אסימפטוטות אנכיות:**

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\ln x}{x} = -\frac{\infty}{0^+} = -\infty \ .$$

$x=0$ אסימפטוטה אנכית:

4. **אסימפטוטות אופקיות:**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \ .$$

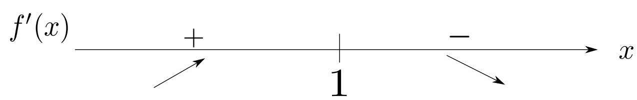
$y=0$ אסימפטוטה אופקית ב- $+\infty$.

5. **אסימפטוטות משופעות:** אין
6. **תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון:**

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (1+\ln x)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

מכאן $f'(x)=0$ בנקודות $x=1$.

x	$x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$



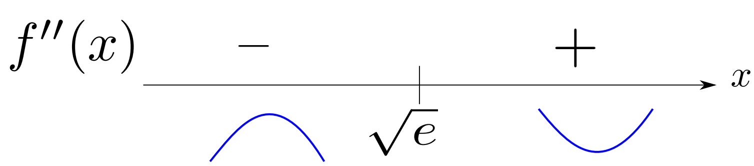
$x=1$ נקודת מקסימום מקומי. $f(1)=1$.

7. תחומי קמירות, נקודות פיתול:.

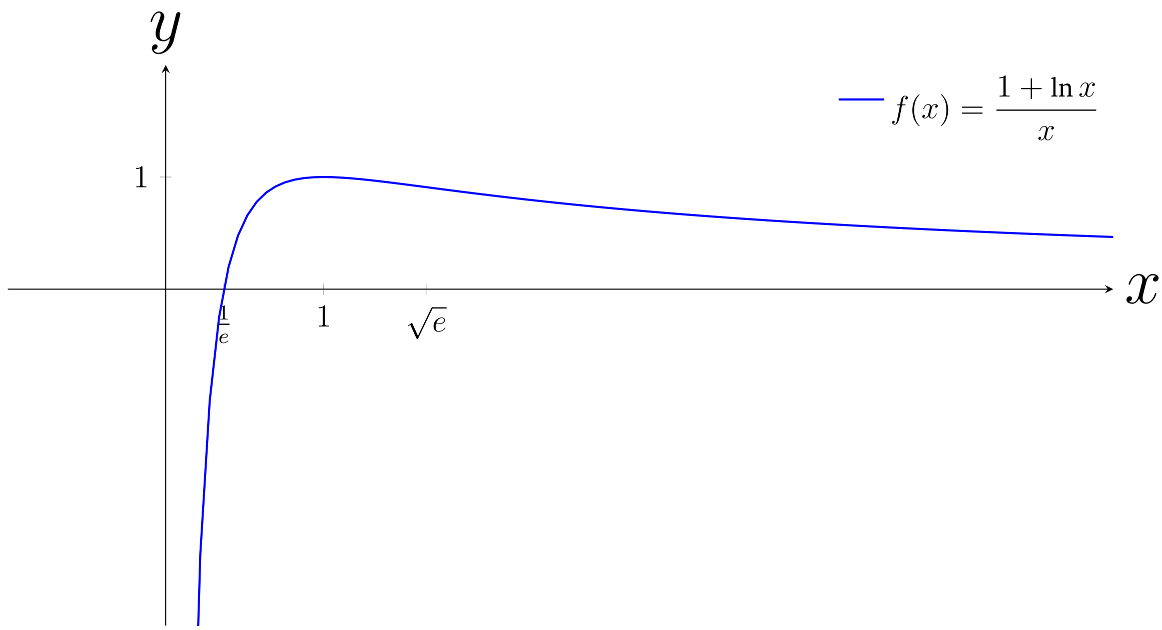
$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2+\ln x\cdot 2x}{x^4}=\frac{2\ln x-1}{x^3}$$

מכאן $f''(x)=0$ בנקודות $x=\sqrt{e}$.

x	$x<-\sqrt{e}$	$x=\sqrt{e}$	$x>\sqrt{e}$
$f''(x)$	$-$	0	$+$



8. גרף הפונקציה:


y
$f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$
1
x
$\frac{1}{e}$
1
$\sqrt{e}$

■