חדו"א 1 סמסטר א' תשפד
עבודת בית 5:
נגזרות, פונקציה סתומה ופרמטרית, משוואת המשיק ומשוואת הנורמל.

שאלה 1 חשבו לפי הגדרת הנגזרת את הנגזרות של הפונקציות הבאות

א) $\sqrt{x}$

ב) $\sqrt{2x+1}$

ג) $\dfrac{x}{x+1}$

ד) $2x^3+3x-1$

שאלה 2 תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה a. הגדר: f גזירה ב- a.

א) הוכיחו לפי הגדרה, את כלל הגזירה של מכפלת שתי פונקציות.

ב) גזרו את הפונקציות הבאות

1) $y=\sin(\ln(\cos x))$

2) $y=x^{\cos x}$

3) $y=\cos^2\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)$

4) $2x^3+3x-1$

שאלה 3

מצאו את משוואת המשיק והנורמל לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הנתונות

א) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$, $x=-2$

ב) $y=x\sqrt{x}-6\sqrt{x}$, $x=4$

שאלה 4 מצאו את משוואות שלושת המשיקים לגרף הפונקציה

$$y=3x^3+5x^2+3x-3$$

שעוברים בנקודה $(1,0)$.

שאלה 5 מצאו את הזווית בין הגרפים של הפונקציות

$$y = x^3 \ , \qquad y = x^3 + x^2 - 3x + 2$$

בנקודת החיתוך השמאלית שלהן.

שאלה 6 מצאו משוואת משיק ונורמל ל-

$$x^5 + y^5 = 2xy$$

בנקודה $(1,1)$. מצאו את ערך הנגזרת השניה בנקודה $(1,1)$.

שאלה 7 מצאו משוואת משיק ונורמל ל-

$$\begin{cases} x = \tan t \ , \\ y = \sin^2 t \end{cases}$$

בנקודה שבה $x = 1$. מצאו את ערך הנגזרת השניה בנקודה זו.

שאלה 8 לאילו ערכים של הפרמטר a לפונקציה

$$y = x^{a+7} \ln(x + 17)$$

יש אסימפטוטה אופקית?

שאלה 9 מצאו את הזווית בין

$$\begin{cases} x = \arctan t \ , \\ y = t + \tan(2t) \end{cases}$$

ו-

$$x + y + xy = 0$$

בראשית הצירים.

שאלה 10

א) הוכיחו שהמשיקים לגרפים של הפונקציות

$$y = \sqrt{ax} \ , \qquad y = \sqrt{0.5a^2 - ax} \ , \qquad (a > 0)$$

בנקודת החיתוך שלהם מאונכים זו לזו.

ב) הוכיחו ששטח המשולש שנוצר בין המשיקים וציר ה- x גדול פי 4 משטח המשולש שנוצר בין המשיקים וציר ה- y.

שאלה 11

פונקציה $y(x)$ מוגדרת על יד המשוואה

$$11xy^3 - 7x^2y^2 = 60x$$

כאשר $y(1) = 2$. מצאו את ערכו של $y'(1)$.

שאלה 12

תהי פונקציה $f(x)$ גזירה לכל x וידוע ש- $f(0) = 3$ ו-

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 5 \ .$$

נגדיר $g(x) = f(x) \cdot \ln(3x + e)$. מצאו את

$$g'(0) \ .$$

שאלה 13

אם פונקציה $y = f(x)$ מוגדרת בצורה פרמטרית

$$\left.\begin{aligned} x &= \ln(9t^2) \\ y &= 6t^3 + 10 \end{aligned}\right\} \quad t > 0$$

מצאו את הערך הנגזרת השנייה $y''(x)$ בנקודה $x = \ln 9$.

שאלה 14

נתונה הצגה פרמטרית של פונקציה $y(x)$:

$$\left.\begin{aligned} x &= \ln(9t) + 3t \\ y &= 5t^2 + 5t \end{aligned}\right\}$$

מצאו את הערך של $f''(x)$ בנקודה $t = 1$.

שאלה 15

פונקציה $y(x)$ מוגדרת על יד המשוואה $9y^5 + 6x^5 = 15xy$ כאשר $y(1) = 1$. מצאו את ערכו של $y'(1)$.

שאלה 16

מצאו את השיפוע של המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \dfrac{4x+4}{5x+10}$ בנקודה $x = 4$.

שאלה 17

תהי פונקציה $f(x)$ גזירה לכל x וידוע ש- $f(0) = 3$ ו-

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 4 \ .$$

נגדיר $g(x) = f(x) \cdot \ln(2x + e)$. מצאו את

$$g'(0) \ .$$

שאלה 18

אם פונקציה $y = f(x)$ מוגדרת בצורה פרמטרית

$$\left.\begin{aligned} x &= \ln(4t^2) \\ y &= 7t^3 + 5 \end{aligned}\right\} \quad t > 0$$

מצאו את ערך הנגזרת השנייה $y''(x)$ בנקודה $x = \ln 4$.

פתרונות

שאלה 1

א)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\cdot(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ב)

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{2x+2\Delta x+1}-\sqrt{2x+1}}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{2x+2\Delta x+1}-\sqrt{2x+1}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{2x+2\Delta x+1}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+2\Delta x+1}+\sqrt{2x+1}}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x\cdot(\sqrt{2x+2\Delta x+1}+\sqrt{2x+1})}\\&=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\end{aligned}$$

ג)

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{x+\Delta x}{x+\Delta x+1}-\frac{x}{x+1}}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+x\Delta x+\Delta x+x-x^2-x\Delta x-x}{\Delta x(x+1)(x+\Delta x+1)}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(x+1)(x+\Delta x+1)}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(x+1)(x+\Delta x+1)}\\&=\frac{1}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

ד) $6x^2+3$

שאלה 2

f גזירה ב- a אם

$$f'(a)_-=f'(a)_+$$

כאשר הנגזרת החד צדדי מצד שמאל מוגדרת

$$f'(a)_-:=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

והנגזרת החד צדדי מצד ימין מוגדרת

$$f'(a)_+:=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\ .$$

א)

$$\begin{aligned}(f(x)\cdot g(x))' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x+\Delta x)g(x)+f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}+g(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &= f(x)g'(x)+g(x)f'(x)\end{aligned}$$

ב) **1)** $y' = \tan(x)(-\cos(\log(\cos(x))))$

2)

$$y = x^{\cos x} \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = \ln\left(x^{\cos x}\right) = \cos x\cdot\ln x$$

$$(\ln y)' = (\cos x\cdot\ln x)' = \cos x'\ln x+\cos x\ln x' = -\sin x\ln x+\cos x\cdot\frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned}y' &= y\left(-\sin x\ln x+\cos x\cdot\frac{1}{x}\right)\\ y' &= x^{\cos x}\left(-\sin x\ln x+\frac{\cos x}{x}\right)\ .\end{aligned}$$

3)

$$y = \cos^2\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)$$

$$y = f(g)\cdot g(h)\cdot h(x)\ , \qquad f(g)=g^2\ , \quad g(h)=\cos(h)\ , \quad h(x)=\sqrt{x^2+x+1}\ .$$

$$y'_x = f(g)'_g\cdot g(h)'_h\cdot h(x)'_x\ .$$

שימו לב, מן הנוסחה $\sqrt{u}'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'_x$ נקבל $h(x)'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\cdot(2x+1)$. בסה"כ:

$$f(g)'_g = 2g\ , \quad g(h)'_h = -\sin h\ , \quad h(x)'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\cdot(2x+1)\ .$$

$$\begin{aligned}y'_x &= 2g\cdot(-\sin h)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\cdot(2x+1)\\ &= 2\cos(h)\cdot(-\sin h)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\cdot(2x+1)\\ &= 2\cos\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)\cdot\left(-\sin\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\cdot(2x+1)\\ &= -\cos\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)\cdot\sin\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)\cdot\frac{(2x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}\ .\end{aligned}$$

4) $6x^2+3$

שאלה 3

א) משוואת המשיק:

$$y = 2x+7$$

משוואת הנומרל:

$$y = 2-\frac{x}{2}$$

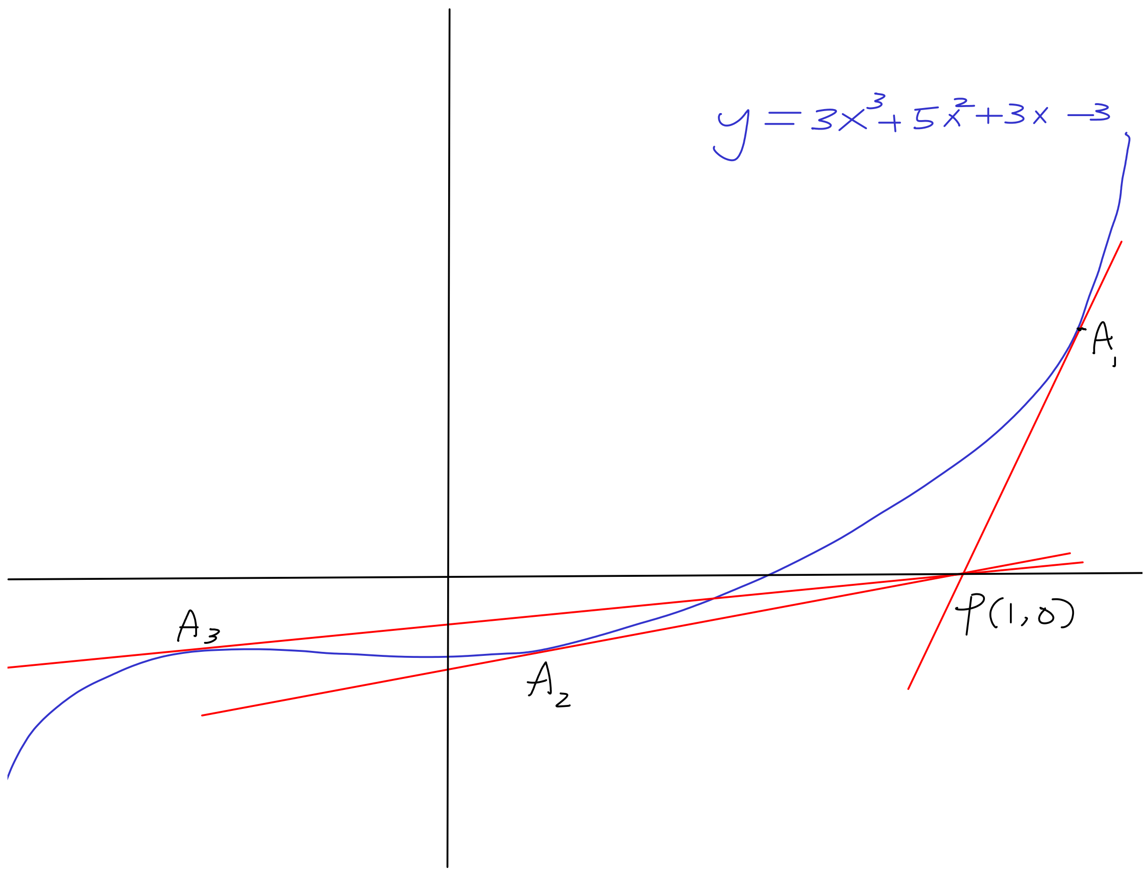
ב) משוואת המשיק:

$$y = \frac{3}{2}x - 3$$

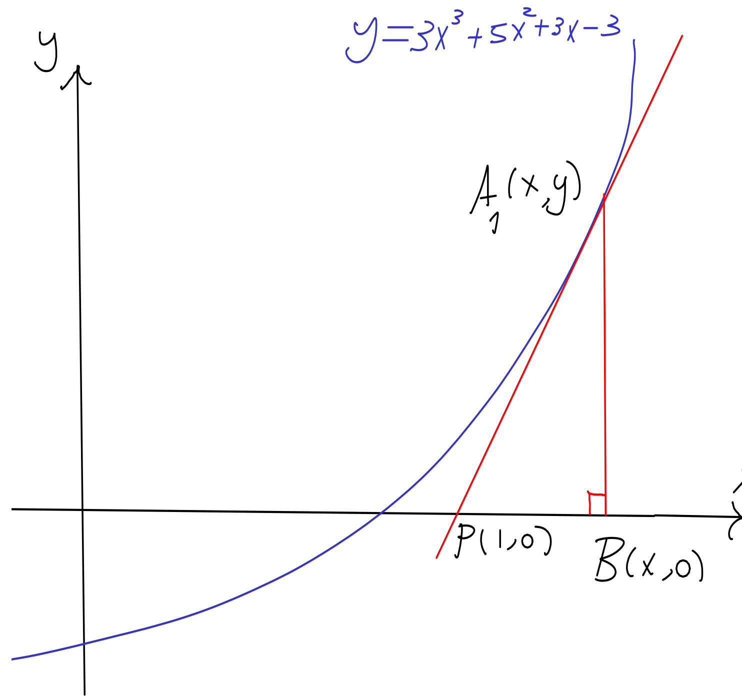
משוואת הנומרל:

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

שאלה 4 נחפש את המשוואות של השלוש המשיקים A_1P,A_2P,A_3P, לגרף של $y = 3x^3 + 5x^2 + 3x - 3$ בנקודה P (ראו שרטוט).



נסתכל אל המשיק A_1P (ראו שרטוט למטה).



נמצא את הקואורדינטות (x,y) של הנקודה A_1. מגיאומטריה השיפוע של המשיק הוא

$$m=\frac{BA_1}{PB}=\frac{y-0}{x-1}=\frac{y}{x-1}$$

בשיפוע גם ניתן ע"י הנזרת של y על הנקודה A:

$$m=y'(x).$$

נשווה ביניהם:

$$\frac{y}{x-1}=y'(x)$$

נציב $y=3x^3+5x^2+3x-3$:

$$\frac{3x^3+5x^2+3x-3}{x-1}=\left(3x^3+5x^2+3x-3\right)' \quad\Rightarrow\quad \frac{3x^3+5x^2+3x-3}{x-1}=9x^2+10x+3$$

$$\Rightarrow\quad 3x^3+5x^2+3x-3=(9x^2+10x+3)(x-1) \quad\Rightarrow\quad 3x^3+5x^2+3x-3=9x^3+10x^2+3x-9x^2-10x-3$$

$$\Rightarrow\quad 6x^3-4x^2-10x=0 \quad\Rightarrow\quad 2x(3x^2-2x-5)=0 \quad\Rightarrow\quad 2x(3x-5)(x+1)=0$$

הפתרון הוא $x=0,\frac{5}{3},-1$.

<u>עבור $x=0$:</u>

$$y'(0)=9\cdot 0^2+10\cdot 0+3=3\ , \qquad y(0)=3\cdot 0^3+5\cdot 0^2+3\cdot 0-3=-3$$

לכן משוואת המשיק:

$$y+3=3x\ .$$

עבור $x=\frac{5}{3}$:

$$y'\left(\frac{5}{3}\right)=9\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2+10\cdot\frac{5}{3}+3=\frac{134}{3}\ ,\qquad y\left(\frac{5}{3}\right)=3\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^3+5\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2+3\cdot\left(\frac{5}{3}\right)-3=\frac{268}{9}$$

לכן משוואת המשיק:

$$y-\frac{268}{9}=\frac{134}{3}\left(x-\frac{5}{3}\right)\qquad\Rightarrow\qquad y=\frac{134}{3}x-\frac{134}{3}\ .$$

עבור $x=-1$:

$$y'(-1)=9\cdot(-1)^2+10\cdot(-1)+3=2\ ,\qquad y(-1)=3\cdot(-1)^3+5\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)-3=-4$$

לכן משוואת המשיק:

$$y+4=2(x+1)\ ,\qquad\Rightarrow\qquad y=2x-2\ .$$

תשובה סופית:

$$y=-2+2x\ ,\qquad y=-3+3x\ ,\qquad y=-\frac{134}{3}+\frac{134}{3}x\ .$$

שאלה 5

$$y=x^3\ ,\qquad y=x^3+x^2-3x+2$$

הנוסחה לזווית ביו שני הגרפים היא:

$$\tan\alpha=\left|\frac{f'(a)-g'(a)}{1+f'(a)\cdot g'(a)}\right|$$

(הנוסחה מופיעה בדף הנוסחאות שלכם). כאשר $(a,f(a))=(a,g(a))$ נקודת ההשקה.

$$g(x)=x^3\ ,\qquad f(x)=x^3+x^2-3x+2\ .$$

נמצא את נקודת החיתוך:

$$x^3+x^2-3x+2=x^3\qquad\Rightarrow\qquad x^2-3x+2=0\qquad\Rightarrow\qquad x=1,2$$

נקודת החיתוך השמאלית היא נקודה שבה $x=1$. ז"א $a=1$.

$$f'(x)=3x^2+2x-3\ ,\qquad f'(1)=2\ ,\qquad g'(x)=3x^2\ ,\qquad g'(1)=3\ .$$

$$\tan\alpha=\left|\frac{2-3}{1+2\cdot 3}\right|=\frac{1}{7}\ ,\qquad \alpha=\arctan\left(\frac{1}{7}\right)\ .$$

שאלה 6

$$x^5 + y^5 = 2xy \ , \qquad \text{(\#1)}$$

שלב 1: לגזור (#1):

$$5x^4 + 5y^4 y' = 2y + 2xy' \ , \qquad \text{(\#2)}$$

שלב 2: להציב $x=1$, $y=1$ ב (#2):

$$5 + 5y(1)^4 y'(1) = 2y(1) + 2y'(1) \qquad \Rightarrow \qquad y'(1) = -1 \ . \ , \qquad \text{(\#3)}$$

שלב 3: להציב במשוואת המשיק בנקודה a:

$$y - y(a) = y'(a)(x-a)$$

נציב $a=1$, $y(1)=1$, $y(1)=-1$ ונקבל

$$y - 1 = -1(x-1) \qquad \Rightarrow \qquad y = -x + 2 \ .$$

שלב 4: להציב במשוואת הנורמל בנקודה a:

$$y - y(a) = -\frac{1}{y'(a)}(x-a)$$

נציב $a=1$, $y(1)=1$, $y'(1)=-1$ ונקבל

$$y - 1 = \frac{-1}{-1}(x-1) \qquad \Rightarrow \qquad y = x \ .$$

שלב 5: נגזור (#2):

$$\begin{aligned}
\left(5x^4 + 5y^4 y'\right)' &= (2y + 2xy')' \\
20x^3 + \left(5y^4 y'\right)' &= 2y' + (2xy')' \\
20x^3 + \left(5y^4\right)' y' + 5y^4 y'' &= 2y' + 2y' + 2xy'' \\
20x^3 + \left(20y^3 y'\right) y' + 5y^4 y'' &= 2y' + 2y' + 2xy'' \\
20x^3 + 20y^3 y'^2 + 5y^4 y'' &= 4y' + 2xy'' \ , \qquad \text{(\#3)}
\end{aligned}$$

שלב 6: נציב $x=1$, $y(1)=1$, $y'(1)=-1$: ב (#3):

$$\begin{aligned} 20+20y^3(1)y'(1)^2+5y^4(1)y''(1) =&4y'(1)+2y''(1) \\ 20+20+5y''(1) =&-4+2y''(1) \\ 3y''(1) =&-44 \\ y''(1) =&\frac{-44}{3} \ . \ , \end{aligned} \tag{\#4}$$

שאלה 7

בנקודה $x=1$, $\tan t=1$ ולכן $t=\frac{\pi}{4}$ ו-

$$y(t=\frac{\pi}{4})=y(x=1)=\frac{1}{2} \ .$$

$$x'_t=\frac{1}{\cos^2 t} \ , \qquad y'_t=2\sin t\cos t \ , \qquad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2}{\sin}t\cos^3 t \ .$$

נציב $t=\frac{\pi}{4}$:

$$y'_x(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2} \ .$$

משוואת המשיק:

$$y=\frac{x}{2} \ .$$

משוואת הנורמל:

$$y=-2x+\frac{5}{2} \ .$$

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{2(\cos^4 t+\sin t\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t))}{\frac{1}{\cos^2 t}}$$

נציב $t=\frac{\pi}{4}$:

$$y''_{xx}=-\frac{1}{2} \ .$$

שאלה 8

אסימפטוטה מושפעת קיימת כאשר $\lim\limits_{x\to\infty} y$ מספר סופי.

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty} x^{a+7}\ln(x+17)$$

כעת ישנן שתי אופציות. אם החזקה של x^{a+7} גדול או שווה ל-0, כלומר $a+7\geq 0$, אז בוודאות $\lim\limits_{x\to\infty} x^{a+7}\ln(x+17)=\infty$. אבל אם החזקה של x^{a+7} קטן מ-0, כלומר $a+7<0$, אז הגבול לא שווה ל ∞.
בסיכום:

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty} x^{a+7}\ln(x+17)=\begin{cases}\infty & a+7\geq 0 \\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+17)}{x^{-a-7}} & a+7<0\end{cases}$$

נבדוק את הערך של הגבול עבור המצב ש $a+7<0$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+17)}{x^{-a-7}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$
$$\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+17)'}{(x^{-a-7})'}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(x+17)}}{(-a-7)x^{-a-8}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(-a-7)(x+17)x^{-a-8}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(-a-7)\left(1+\frac{17}{x}\right)x^{-a-7}}$$
$$=\frac{1}{(-a-7)\left(1+\frac{17}{\infty}\right)\infty^{-a-7}}$$
$$=\frac{1}{(-a-7)\left(1+0\right)\infty^{-a-7}}$$
$$=\frac{1}{(-a-7)\infty^{-a-7}}$$

שימו לב $a+7<0$ לכן $-a-7>0$ ולכן $\infty^{-a-7}=\infty$, לכן

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+17)}{x^{-a-7}}=\frac{1}{(-a-7)\infty^{-a-7}}$$
$$=\frac{1}{(-a-7)\infty}$$
$$=0$$

תשובה סופית: $y=0$ אסימפטוטה אופקית כאשר

$$a<-7\ .$$

שאלה 9 $\alpha=\arctan(2)=63.44^\circ$

שאלה 10

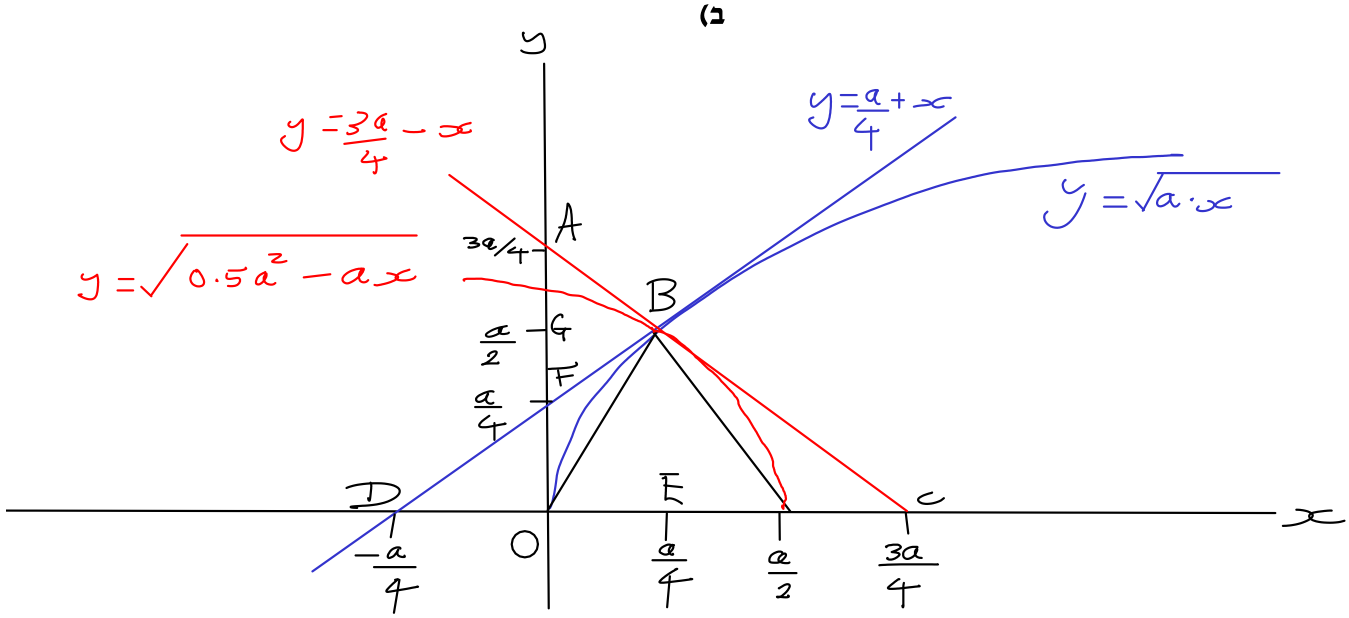
א) נקודת חיתוך:

$$(0.25a,0.5a)$$

$$m1=(\sqrt{ax})'=\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{a}}{2\cdot 0.5\cdot\sqrt{a}}=1\ ,$$

$$m2=(\sqrt{0.5a^2-ax})'=\frac{-a}{2\sqrt{0.5a^2-ax}}=\frac{-a}{2\sqrt{0.5a^2-0.25\cdot a^2}}=\frac{-a}{2\cdot 0.5\cdot a}=-1\ ,$$
$$m1\cdot m2=-1$$

ב)



המשולש שנוצר בין המשיקים וציר ה- x הוא המשולש ΔDBC. שטח המשולש ΔDBC הוא

$$S_{\Delta DBC}=\frac{1}{2}DC\cdot EB=DE\cdot EB=\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2}{4}\ .$$

המשולש שנוצר בין המשיקים וציר ה- y הוא המשולש ΔFAB.

$$S_{\Delta FAB}=\frac{1}{2}FA\cdot GB=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{4}=\frac{a^2}{16}\ .$$

$$\frac{S_{\Delta DBC}}{S_{\Delta FAB}}=\frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a^2}{16}}=4$$

שאלה 11 נגזור:

$$\left(11xy^3-7x^2y^2\right)'=(60x)'$$

$$\Rightarrow\quad 11y^3+11x\cdot 3y^2\cdot y'-14xy^2-7x^2\cdot 2y\cdot y'=60$$

$$\Rightarrow\quad 11y^3+33xy^2y'-14xy^2-14x^2yy'=60$$

נציב $x=1$, $y(1)=2$:

$$11y(1)^3+33y(1)^2y'(1)-14y(1)^2-14y(1)y'(1)=60$$

$$\Rightarrow\quad 11\cdot 8+33\cdot 4y'(1)-14\cdot 4-14\cdot 2y'(1)=60$$

$$\Rightarrow\quad 88+132y'(1)-56-28y'(1)=60$$

$$\Rightarrow\quad 32+104y'(1)=60$$

$$\Rightarrow\quad 104y'(1)=28$$

$$\Rightarrow\quad y'(1)=\frac{28}{104}=\frac{14}{52}=\frac{7}{26}\ .$$

שאלה 12

נשים לב כי

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} &=5 \\ \Rightarrow \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} &=5 \\ \Rightarrow \quad f'(0) &=5\ . \end{aligned}$$

נגזור את הפונקיציה $g(x)=f(x)\ln(3x+e)$:

$$g'(x)=f'(x)\ln(3x+e)+f(x)\cdot\frac{3}{3x+e}$$

נציב $x=0$:

$$\begin{aligned} g'(0)=&f'(0)\ln(3\cdot 0+e)+f(0)\cdot\frac{3}{3\cdot 0+e} \\ =&f'(0)\ln(e)+\frac{3f(0)}{e} \\ =&f'(0)+\frac{3f(0)}{e}\ . \end{aligned}$$

נציב $f(0)=3$ ונקבל

$$g'(0)=5+\frac{9}{e}\ .$$

שאלה 13

שלב 1) נחשב את ערך הפקמטר t בנקודה $x=\ln 9$.

$$\ln 9=\ln(9t^2) \qquad \Rightarrow \qquad 9=9t^2 \qquad \Rightarrow \qquad t=1\ . \tag{*1}$$

שלב 2) נחשב $y'(x)$ לפי הנוסחה $y'(x)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ כאשר $y(t)=6t^3+10$ ו- $x(t)=\ln(9t^2)$.

$$x'(t)=\frac{1}{9t^2}\cdot 18t=\frac{18t}{9t^2}=\frac{2}{t}\ , \qquad y'(t)=18t^2\ ,$$

לכן

$$y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{18t^2}{\frac{2}{t}}=9t^3\ . \tag{*2}$$

שלב 3) נציב $t=1$ ב (2*) כדי לחשב את $y'(x)$ בנקודה $x=\ln 9$:

$$y'(x=\ln 9)=y'(t=1)=9\ . \tag{*3}$$

שלב 4) נגזור (2*) לפי t:

$$\left(y'(x)\right)'_t=\left(9t^3\right)'_t=27t^2\ . \tag{*4}$$

שלב 5 נחשב $y''(x)$ לפי הנוסחה $y''(x)=\frac{(y'(x))'_t}{x'(t)}$. נציב (4*) ו- $x'(t)=\dfrac{2}{t}$ ונקבל

$$y''(x)=\frac{27t^2}{\frac{2}{t}}=\frac{27t^3}{2}\ . \qquad (*5)$$

שלב 6 נציב $t=1$ ב- (5*):

$$y''(x=\ln 9)=y''(t=1)=\frac{27}{2}\ .$$

שאלה 14

שלב 1 נחשב $y'(x)$ לפי הנוסחה $y'(x)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ כאשר $y(t)=5t^2+5t$ ו- $x(t)=\ln(9t)+3t$.

$$x'(t)=\frac{1}{t}+3=\frac{1+3t}{t}\ ,\qquad y'(t)=10t+5\ ,$$

לכן

$$y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{10t+5}{\frac{1+3t}{t}}=\frac{10t^2+5t}{1+3t}=\frac{5t(2t+1)}{1+3t}\ . \qquad (*1)$$

שלב 2 נגזור

(1*) לפי t.

$$y'(x)=\frac{10t^2+5t}{1+3t}=\frac{u}{\mathrm{v}}\ ,\qquad u=10t^2+5t,\quad \mathrm{v}=1+3t\ ,\qquad u'_t=20t+5\ ,\quad \mathrm{v}'_t=3\ ,$$

$$\begin{aligned}(y'(x))'_t=&\frac{u'\mathrm{v}-\mathrm{v}'u}{\mathrm{v}^2}\\ =&\frac{(20t+5)(1+3t)-3(10t^2+5t)}{(1+3t)^2}\\ =&\frac{5+35t+60t^2-30t^2-15t}{(1+3t)^2}\\ =&\frac{5+20t+30t^2}{(1+3t)^2}\\ =&\frac{5(1+4t+6t^2)}{(1+3t)^2}\end{aligned} \qquad (*2)$$

שלב 3 נחשב $y''(x)$ לפי הנוסחה $y''(x)=\frac{(y'(x))'_t}{x'(t)}$. נציב $(y'(x))'_t$ מ- (2*) ו- $x'(t)=\dfrac{1+3t}{t}$ ונקבל

$$y''(x)=\frac{\frac{5(1+4t+6t^2)}{(1+3t)^2}}{\frac{1+3t}{t}}=\frac{5t(1+4t+6t^2)}{(1+3t)^3}\ . \qquad (*3)$$

שלב 4) נציב $t=1$:

$$y''(t=1)=\frac{55}{64}\ . \qquad (*4)$$

שאלה 15

נגזור את המשווא לפי x:

$$\begin{aligned} &\left(9y^5+6x^5\right)'=(15xy)' \\ \Rightarrow\quad &\left(9y^5+6x^5\right)'=(15xy)' \\ \Rightarrow\quad &45y^4\cdot y'+30x^4=15y+15xy' \\ \Rightarrow\quad &3y^4\cdot y'+2x^4=y+xy'\ . \end{aligned}$$

נציב $x=1$, $y(1)=1$:

$$\begin{aligned} &3y(1)^4\cdot y'(1)+2\cdot 1^4=y(1)+1\cdot y'(1) \\ \Rightarrow\quad &3y'(1)+2=1+y'(1) \\ \Rightarrow\quad &2y'(1)=-1 \\ \Rightarrow\quad &y'(1)=-\frac{1}{2}\ . \end{aligned}$$

שאלה 16

השיפוע של הגרף ב- $x=4$ ניתן ע"י $f'(4)$. נשים לב כי

$$f(x)=\frac{4x+4}{5x+10}=\frac{4(x+1)}{5(x+2)}=\frac{4}{5}\left(\frac{x+2-1}{x+2}\right)=\frac{4}{5}\left(\frac{x+2}{x+2}-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{4}{5}\left(1-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{x+2}\ .$$

$$f'(x)=\left(\frac{4}{5}\right)'-\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{x+2}\right)'=0-\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{-1}{(x+2)^2}\right)=\frac{4}{5(x+2)^2}$$

לכן

$$f'(4)=\frac{4}{5\cdot 6^2}=\frac{4}{5\cdot 36}=\frac{1}{45}\ .$$

שאלה 17

נשים לב כי

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=4 \\ \Rightarrow\quad &\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=4 \\ \Rightarrow\quad &f'(0)=4\ . \end{aligned}$$

נגזור את הפונקציה $g(x)=f(x)\ln(2x+e)$:

$$g'(x)=f'(x)\ln(2x+e)+f(x)\cdot\frac{2}{2x+e}$$

נציב $x=0$:

$$\begin{aligned} g'(0) =& f'(0)\ln(2\cdot 0+e) + f(0)\cdot\frac{2}{2\cdot 0+e} \\ =& f'(0)\ln(e) + \frac{2f(0)}{e} \\ =& f'(0) + \frac{2f(0)}{e}\ . \end{aligned}$$

נציב $f(0)=3$ ונקבל

$$g'(0) = 4+\frac{6}{e}\ .$$

<u>שאלה 18</u>

שלב 1) נחשב את ערך הפקמטר t בנקודה $x=\ln 4$.

(*1)
$$\ln 4 = \ln(4t^2) \qquad \Rightarrow \qquad 4=4t^2 \qquad \Rightarrow \qquad t=1\ .$$

שלב 2) נחשב $y'(x)$ לפי הנוסחה $y'(x)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ כאשר $y(t)=7t^3+5$ ו- $x(t)=\ln(4t^2)$.

$$x'(t)=\frac{1}{4t^2}\cdot 8t = \frac{8t}{4t^2} = \frac{2}{t}\ , \qquad y'(t)=21t^2\ ,$$

לכן

(*2)
$$y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{21t^2}{\frac{2}{t}} = \frac{21t^3}{2}\ .$$

שלב 3) נציב $t=1$ ב (*2) כדי לחשב את $y'(x)$ בנקודה $x=\ln 4$:

(*3)
$$y'(x=\ln 4) = y'(t=1) = \frac{21}{2}\ .$$

שלב 4) נגזור (*2) לפי t:

(*4)
$$\left(y'(x)\right)'_t = \left(\frac{21t^3}{2}\right)'_t = \frac{63t^2}{2}\ .$$

שלב 5) נחשב $y''(x)$ לפי הנוסחה $y''(x)=\frac{(y'(x))'_t}{x'(t)}$. נציב (*4) ן- $x'(t)=\dfrac{2}{t}$ ונקבל

(*5)
$$y''(x) = \frac{\frac{63t^2}{2}}{\frac{2}{t}} = \frac{63t^2}{4}\ .$$

שלב 6) נציב $t=1$ ב- (*5):

$$y''(x=\ln 4) = y''(t=1) = \frac{63}{4}\ .$$