תרגילים: רדוקציה

הגדרה. בהינתן פוקנציה
$f:\Sigma^*\to\Sigma^*$, אומרים כי מ"ט M מחשבת את f אם לכל $x\in\Sigma^*$ מתקיים:

1) M מגיעה ל- acc בסוף החישוב על x.

2) על סרט הפלט של M כתוב את $f(x)$.

הערה. מ"ט שמחשבת פונקציה עוצרת על כל קלט.

הגדרה. בהינתן שתי שפות L_1 ו- L_2, אומרים כי L_1 ניתנת לרדוקציה ל- L_2 (נסמן $L_1\leq L_2$) אם $\exists$ פונקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ המקיימת את התנאים הבאים:

1) f חשיבה.

2) לכל $x\in\Sigma^*$ מתקיים
$$x\in L_1 \quad\Leftrightarrow\quad f(x)\in L_2\ .$$

הגדרה.
$$R=\left\{L\subseteq\Sigma^*\ \middle|\ \text{קיימת מ"ט המכריעה את } L\right\}$$

הגדרה.
$$RE=\left\{L\subseteq\Sigma^*\ \middle|\ \text{קיימת מ"ט המקבלת את } L\right\}$$

משפט (משפט הרדוקציה)**.** לכל שתי שפות L_1 ו- L_2. אם $L_1\leq L_2$ אז

1) אם $L_2\in R$ אז $L_1\in R$.

2) אם $L_2\in RE$ אז $L_1\in RE$.

3) אם $L_1\notin R$ אז $L_2\notin R$.

4) אם $L_1\notin RE$ אז $L_2\notin RE$.

לסיכום:
$$\begin{array}{lcl}
L_2\in R & \Rightarrow & L_1\in R\\
L_2\in RE & \Rightarrow & L_1\in RE\\
L_2\notin R & \Leftarrow & L_1\notin R\\
L_2\notin RE & \Leftarrow & L_1\notin RE
\end{array}$$

שאלה 1 נתונה השפה
$$L=\left\{P\middle|L(P)\neq\emptyset\right\}$$

או במילים אחרות
$$L=\left\{\langle M\rangle\ \middle|L(M)\neq\emptyset\right\}$$

א) תארו מכונת טיורינג דטרמיניסטית המקבלת את השפה L.

ב) תארו מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית המקבלת את השפה L.

ג) הוכיחו שהשפה L לא כריעה (על ידי רדוקציה).

ד) הוכיחו שלא קיימת רדוקציה $\bar{L} \leq L$.

שאלה 2 הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

א) $A \leq_m B$

ב) $\bar{A} \leq_m B$

ג) $\bar{A} \leq_m \bar{B}$

ד) $A \leq_m \bar{B}$

שאלה 3 תהי L השפה

$$L = \left\{ \langle M, w \rangle \,\middle|\, \text{ ו- } D \text{ הוא DFA ו- } L(M) = L(D) \text{ מ"ט } M \right\} .$$

הוכיחו כי $\bar{L}$ לא כריעה.

שאלה 4 תהי L הפשה

$$L = \{\langle M \rangle \,|w \in L(M) \Leftrightarrow |w| < 50\}$$

כלומר M מקבלת רק מילים באורך פחות מ-50.
הוכיחו כי L לא קבילה.

שאלה 5 תהי A שפה. הוכיחו:

$$A \leq_m A \ .$$

שאלה 6 תהי A שפה.

הוכיחו או הפריכו:

$$A \leq_m \bar{A} \ .$$

שאלה 7 תהי

$$EQ_{TM} = \left\{ \langle M_1, M_2 \rangle \,\middle|\, L(M_1) = L(M_2) \right\}$$

הוכיחו:

א) $A_{\text{TM}} \leq_m EQ_{\text{TM}}$

ב) $A_{\text{TM}} \leq_m \bar{E}Q_{\text{TM}}$

תשובות

שאלה 1

א) <u>הרעיון</u>

בהינתן קלט $x=\langle M\rangle$ נרצה לבדוק האם $\exists$ מילה ש- M מקבלת.

לשם כך נרצה לסמלץ את M על כל המילים האפשרייות ב- Σ^* ואם נמצא מילה שמתקבלת ע"י M נדע ש- $L(M)\neq\emptyset$ ולכן $\langle M\rangle\in L$.

<u>הבעיה</u>

יתכן שנסמלץ את M על מילה ו- M לא תעצור עליה, למרות שקיימת מילה אחרת ש- M מקבלת.
במקרה זה המכונה לא תעצור על $\langle M\rangle$ למרות ש- $L\ni\langle M\rangle$.

<u>הפתרון</u>

נבנה מ"ט M_L:

- M_L תסמלץ את M על כל מילה אפשרית למשך מספר סופי של צעדים בכל פעם.
- תחילה נריץ את M על כל המילים באורך 0 במשך 0 צעדים.
- אח"כ נריץ את M על כל המילים באורך $n\leq 1$ במשך צעד אחד.
- אח"כ נריץ את M על כל המילים באורך $n\leq 2$ במשך 2 צעד אחד.
- ...וכן הלאה נריץ את M על כל המילים באורך $n\leq i$ במשך i צעדים.
- בכל שלב, אם נמצאה מילה ש- M קיבלה, נפסיק את הריצה ונקבל את $\langle M\rangle$.

לשם כך נשתמש במ"ט U_t כדי לסמלץ את ריצת הקלט M על מילה x לשמך t צעדים.

תזכורת:

$$L\left(U_t\right)=\left\{\langle M,w,t\rangle\ \middle|\ \text{צעדים } t \text{ תוך } w \text{ מקבלת את } M\right\}$$

<u>תיאור פעולת M_L על קלט x:</u>

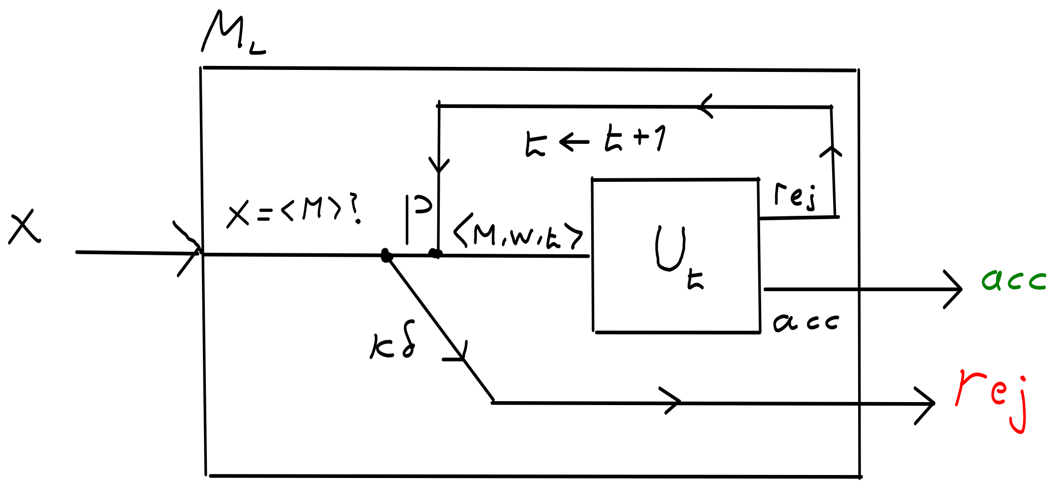
1) M_L בודקת אם x מהצורה $x=\langle M\rangle$ (האם x קידוד חוקי של מ"ט).
אם לא $\Leftarrow$ M_L דוחה את x.

2) $t\leftarrow 0$.

3) לכל מילה $w\in\Sigma^*$ כך ש- $|w|\leq t$ מריצה את U_t על הקלט $\langle M,w\rangle$.
אם U_t קיבלה $\Leftarrow$ M_L מקבלת.

4) $t\leftarrow t+1$.

5) חוזרת לשלב 3).



הוכחת הנכונת המכונה M_L:

יש להוכיח כי אכן מתקיים $L = L(M_L)$.
לשם כך נוכיח כי מתקיים

$x \in L \quad \Rightarrow \quad x \in L(M_L)$,

$x \notin L \quad \Rightarrow \quad x \notin L(M_L)$, (ז"א M_L דוחה את x או לא עוצרת על x) .

$x \in L \Rightarrow x \in L(M_L)$

- $x \in L \Leftarrow x = \langle M \rangle$ ו- $L(M) = \emptyset$.
- $\Leftarrow$ קיימת $w \in \Sigma^*$ כך ש- $w \in L(M)$.
בפרט המילה w מתקבלת ע"י מספר סופי של צעדים.
- יהי k מספר הצעדים עד לקבלת w ב- M.
לפי פעולת M_L, אם תריץ $U_t(\langle M, w, t\rangle)$ עבור $t = \max(|w|, k)$
אזי M תקבל את w ו- U_t תקבל את $\langle M, w, t\rangle$ ולכן לבסוף גם M_L תקבל את w
(לפי שלב 3 של התיואר של M_L).
- $\Leftarrow$ M_L מקבלת את $x = \langle M \rangle$.
- $\Leftarrow$ $x \in L(M_L)$.

$x \in L \Rightarrow x \in L(M_L)$

$x \notin L \Leftarrow$ שני מקרים:

מבצ 1) $x \neq \langle M \rangle$. גלומר x אינה קידוד חוקי של מ"ט.

M_L תדחה את x (לפי שלב 1) $\Leftarrow x \notin L(M_L)$.

מבצ 2) $x=\langle M\rangle$ ו- $L(M)=\emptyset$.

- במקרה זה לא קיימת מילה w (בכל אורך שהוא) המתקבלת ע"י M.
ז"א לכל $w\in\Sigma^*$, w לא מתקבלת בשום מספר סופי של צעדים ולכן $U_t\left(\langle M,x,t\rangle\right)$ לא מקבלת לאף t.
- $\Leftarrow$ הלולאה בשלב 3 לא עוצרת על x.
- $\Leftarrow$ M_L לא עוצרת על x.
- לכן M_L לא מקבלת את x. לכן $x\notin L\left(M_L\right)$.

ב) <u>הריעון</u>

נבנה מ"ט אי-דטרמיניסטית N_L שבהינתן קלט $x=\langle M\rangle$ תנחש מילה $w\in\Sigma^*$ ותסמלץ את ריצתה של M על w.

אם M מקבלת את w אז N_L תקבל את x.

<u>תיאור פעולת N_L על קלט x</u>

1) N_L בודקת אם x מהצורה $x=\langle M\rangle$ (האם x קידוד חוקי של מ"ט).
אם לא $\Leftarrow$ N_L דוחה את x.

2) N_L מנחשת מילה $w\in\Sigma^*$.

3) N_L מסמלצת את M על w.

א) אם M עצרה וקיבלה את w אז N_L מקבלת.
ב) אם M עצרה ודחתה אז N_L דוחה.

<u>הוכחת נכונות המכונה N_L</u> :

יש להוכיח כי אכן מתקיים $L=L\left(N_L\right)$.
לשם כך נוכיח כי מתקיים

$x\in L \quad \Rightarrow \quad x\in L\left(N_L\right)$,

$x\notin L \quad \Rightarrow \quad x\notin L\left(N_L\right)$, (ז"א N_L דוחה את x או לא עוצרת על x או נתקעת) .

<u>$x\in L\Rightarrow x\in L\left(N_L\right)$</u>

- $x\in L$ $\Leftarrow$ $x=\langle M\rangle$ ו- $L(M)\neq\emptyset$.
- $\Leftarrow$ קיימת $w\in\Sigma^*$ כך ש- $w\in L(M)$.
- $\Leftarrow$ קיים ניחוש $w\in\Sigma^*$ שך שבריצה M על w, M תקבל את w, ולכן N_L תקבל את $x=\langle M\rangle$ לפי שלב 3.
- $\Leftarrow$ קיים חישוב של N_L המקבל את $x=\langle M\rangle$.
- $\Leftarrow$ $x\in L\left(N_L\right)$.

$\underline{x \notin L \Rightarrow x \notin L(N_L)}$

$x \notin L$ ⇐ שני מקרים אפשריים.

מצב 1 $x \neq \langle M \rangle$, כלומר x אינה קידוד חוקי של מ"ט.
⇐ N_L דוחה את x (לפי שלב 1) ⇐ $x \notin L(N_L)$.

מצב 2 $x = \langle M \rangle$ ו- $L(M) = \emptyset$.

- במקרה זה לא קיימת w (בכל אורך שהוא) המתקבלת ע"י M.
- ז"א $\nexists$ ניחוש של $w \in \Sigma^*$ המתקבלת ע"י M.
- ⇐ לכל $w \in \Sigma^*$, M לא מקבלת את w.
  * אם M דוחה את w ⇐ N_L דוחה את x) לפי שלב 3).
  * אם M לא עוצרת על w ⇐ הסימולציה לא מסתיימת ו- N_L לא עוצרת על x.
- לכן N_L לא מקבלת את x ⇐ $x \notin L(N_L)$.

שאלה 2

$1) \Rightarrow 2)$ נניח ש- $A \leq_m B$.
ז"א

$2) \Rightarrow 3)$

$3) \Rightarrow 4)$

$4) \Rightarrow 1)$

שאלה 3 נוכיח כי

$$A_{TM} \leq_m L\ .$$

נניח בשלילה $\exists$ מ"ט M_L שמכריעה את L.
נבנה מ"ט R שמכריעה את A_{TM}:

$R =$ " על הקלט $\langle M, w \rangle$:

- בונים קידוד של מ"ט חדשה $\langle M' \rangle$ כמפורט להלן.

  $M' =$ " על הקלט x:

  * אם $x \neq w$ ← rej.
  * אם $x = w$ מריצים M על w.
    – אם M מקבלת אז M' מקבלת.
    – אחרת M' דוחה."
- בונים קידוד של DFA חדשה $\langle D \rangle$ כך ש- $L(D) = L(w) = \{w\}$.
- מריצים M_L על $\langle M', D \rangle$ ומחזירים את הפלט של M_L."

אם $\langle M,w\rangle \in A_{TM}$ אז M מקבלת את w.
לכן M' מקבלת את w ודוחה כל מילה אחרת.
לכן $L(M') = \{w\}$.
לכן $L(M') = L(D)$.
לכן M_L מקבלת $\langle M', D\rangle$.
לכן R מקבלת את $\langle M,w\rangle$.

אם $\langle M,w\rangle \notin A_{TM}$ אז M לא מקבלת את w.
לכן $L(M') = \emptyset$.
לכן $L(M') \neq L(D)$ מסיבה לכך ש- $L(D) = \{w\}$.
לכן M_L דוחה את $\langle M', D\rangle$ ולכן R דוחה את x.

שאלה 4 רמז:

$$E_{TM} \leq_m L \ .$$

שאלה 6 הטענה לא נכונה.