המחלקה למדעי המחשב

10/07/2025 י"ד בתמוז תשפ"ה
09 : 00 − 12 : 00

אלגברה לינארית 2 למדמ"ח

מועד א'

מרצים: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר .

תשפ"ה סמסטר ב'

השאלון מכיל 6 עמודים (כולל עמוד זה).

בהצלחה!

===

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (3 עמודים בפורמט $A4$) מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- יש לרשום בראש המחברת איזה שאלות לבדוק.

===

שאלה 1 (25 נקודות)

א) (16 נק')
נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ מצאו צורת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $J = P^{-1}AP$.

ב) (3 נק')
תהי $B \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ מטריצה עבורה הפולינום האופייני הוא $p_B(x) = (x-1)^3(x-2)^3$
והפולינום המינימלי הוא $m_B(x) = (x-1)^2(x-2)$.
מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של B.

ג) (3 נק')
הוכיחו או הפריכו: קיימת מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ הרמיטית המקיימת $\text{trace}(A) = i$.

ד) (3 נק')
הוכיחו או הפריכו: אם $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ לכסינה וכל הערכים העצמיים שלה הם 1 או -1 אז $A^2 = I$.

שאלה 2 (25 נקודות)

א) (16 נק') נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ המוגדרת ע"י

$$T(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} A$$

לכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.
האם ההעתקה ניתנת ללכסון? במידה וכן, מצאו בסיס שבו המטריצה המייצגת של ההעתקה היא מטריצה אלכסונית. במידה ולא, נמקו מדוע.

יהי V מקחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ ויהיו שלושה וקטורים שונים $u_1, u_2, u_3 \in V$ בת"ל. ענו על הסעיפים ב' וג' הבאים:

ב) (5 נק') יהי $w \neq 0 \in V$ המקיים $\langle u_k, w\rangle = 0$ לכל $k = 1, 2, 3$. הוכיחו כי הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3, w\}$ בת"ל.

ג) (4 נק') נתון כי $\langle u_1 + u_2, u_1\rangle = \langle u_1 - u_3, u_2\rangle$. הוכיחו כי הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ אינה אורתוגונלית.

שאלה 3 (25 נקודות)

א) (16 נק') הוכיחו כי המטריצה $A=\begin{pmatrix}11 & -8 & 4\\ -8 & -1 & -2\\ 4 & -2 & -4\end{pmatrix}$ לכסינה אורתוגונלית ומצאו מטקיצה אורתוגונלית P ומטריצה אלכסונית D כך ש- $P^tAP=D$. נמקו היטב את תשובתכם.

ב) (9 נק') הוכיחו כי מטריצה $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ היא צמודה לעצמה ואוניטרית אם ורק אם B לכסינה אוניטרית ומקיימת $B^2=I$.

שאלה 4 (25 נקודות)

א) (7 נקודות) תהי $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת $A^3=4A$. מצאו את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של A.

ב) (6 נקודות) תהי $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת $A^3=4A$. מצאו את כל האפשרויות עבור $|A|$.

ג) (6 נקודות) תהי $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה הרמיטית ונניח כי $A^k=I$ עבור $k\geq 1$ כלשהו. הוכיחו כי $A^2=I$.

ד) (6 נקודות) תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית ויהיו $\lambda_1\neq\lambda_2$ ערכים עצמיים שונים של A וכן u_1,u_2 וקטורים עצמיים המתאימים ל- λ_1,λ_2. הוכיחו כי u_1,u_2 אורתוגונליים.

שאלה 5 (25 נקודות) יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב וקטורי V.

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הענות הבאות:

א) (6 נק') אם T אוניטרי אז הערך מוחלט של כל ערך עצמי של T שווה ל- 1.

ב) (6 נק') אם T נורמלי אז T צמוד לעצמו.

ג) (6 נק') יהי λ ערך עצמי של T, אז המרחב העצמי V_λ הוא T- שמור.

ד) (7 נק') אם T אנטי הרמיטי, אז כל ערך עצמי של T מדומה טהור.

מרחב אוקלידי: מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$.

מרחב אוניטרי: מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$.

הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי V מעל $\mathbb{R}$:
לכל $u,\mathrm{v},w \in V$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{R}$:

1) <u>סימטריות:</u> $\langle u,\mathrm{v}\rangle = \langle \mathrm{v},u\rangle$

2) <u>ליניאריות:</u> $\langle u+\mathrm{v},w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle \mathrm{v},w\rangle$

$\langle \lambda u,\mathrm{v}\rangle = \lambda \langle u,\mathrm{v}\rangle$

3) <u>חיוביות:</u> $\langle u,u\rangle \geq 0.$

$\langle u,u\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u=0$

הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי V מעל $\mathbb{C}$:
לכל $u,\mathrm{v},w \in V$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{C}$:

1) <u>הרמיטיות:</u> $\langle u,\mathrm{v}\rangle = \overline{\langle \mathrm{v},u\rangle}$

2) <u>ליניאריות:</u> $\langle u+\mathrm{v},w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle \mathrm{v},w\rangle$

$\langle \lambda u,\mathrm{v}\rangle = \lambda \langle u,\mathrm{v}\rangle$

3) <u>חיוביות:</u> $\langle u,u\rangle \geq 0$

$\langle u,u\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u=0$

אי-שוויון קושי שוורץ: $|\langle u,\mathrm{v}\rangle| \leq \|u\|\cdot\|\mathrm{v}\|$

אי-שוויון המשולש: $\|u+\mathrm{v}\| \leq \|u\| + \|\mathrm{v}\|$

היטל אורתוגונלי של ווקטור v על תת מרחב בעל בסיס אורתוגונלי $u_1,\ldots,u_n$:

$$P_U(\mathrm{v}) = \frac{\langle \mathrm{v},u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 + \frac{\langle \mathrm{v},u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 + \cdots + \frac{\langle \mathrm{v},u_n\rangle}{\|u_n\|^2}u_n \ .$$

תהליך גרם שמידט לבניית בסיס אורתוגונלי:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \mathrm{v}_1 \ , \\
u_2 &= \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 \\
u_3 &= \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 \\
&\vdots \\
u_n &= \mathrm{v}_n - \frac{\langle \mathrm{v}_n,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_n,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 - \ldots - \frac{\langle \mathrm{v}_n,u_{n-1}\rangle}{\|u_{n-1}\|^2}u_{n-1} \ .
\end{aligned}$$

$\lambda \in \mathbb{F}$ **ערך עצמי** ו- $u \in \mathbb{F}^n$ **ווקטור עצמי** ($u \neq 0$) של מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ אם: $Au = \lambda u$

$\lambda \in \mathbb{F}$ **ערך עצמי** ו- $u \in V$ **ווקטור עצמי** ($u \neq 0$) של אופרטור $T : V \to V$ אם: $T(u) = \lambda u$

פולינום אופייני של מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$: $p_A(\lambda) = |\lambda I - A|$

מרחב עצמי של מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ששייך לערך עצמי λ הוא כל וקטור $u \in \mathbb{F}^n$ כאשר $u \neq 0$ כך ש:
$Au = \lambda u$.

מרחב עצמי של אופרטור $T : V \to V$ ששייך לערך עצמי λ הוא כל וקטור $u \in \mathbb{V}$ כאשר $u \neq 0$ כך ש:
$T(u) = \lambda u$.

בסיס אורתונורמלי:

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. בסיס אורתונורמלי, מסומן $\{b_1, \ldots, b_n\}$, מקיים את התנאי

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} , \qquad 1 \leq i, j \leq n \ .$$

כל וקטור $u \in V$ ניתן לרשום בבסיס אורתונורמלי:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, b_i \rangle \, b_i$$

סימון חלופי:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \langle u, b_1 \rangle \\ \langle u, b_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_i \rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_n \rangle \end{pmatrix}_B$$

יהי $T : V \to V$ אופרטור. המצרטיצה המייצגת על פי בסיס B היא

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \langle T(b_1), b_1 \rangle & \langle T(b_2), b_1 \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_1 \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_1 \rangle \\ \langle T(b_1), b_2 \rangle & \langle T(b_2), b_2 \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_2 \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_i \rangle & \langle T(b_2), b_i \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_i \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_i \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_n \rangle & \langle T(b_2), b_n \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_n \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_n \rangle \end{pmatrix} .$$

כלומר האיבר ה- ij של המטריצה המייצגת של T על פי הבסיס B היא . $[T]_{ij} = \langle T(b_j), b_i \rangle$

ההגדרה של אופרטור הצמוד:

אם $T : V \to V$ אופרטור, ו- $u, w \in V$ שני וקטורים כלשהם של V, אזי האופרטור הצמוד של T מוגדר כך שמתקיים

(*1)
$$\langle T(u), w \rangle = \langle u, T^*(w) \rangle \ .$$

מההגדרה (*1) נובע:

(*2)
$$\langle T^*(u), w \rangle = \langle u, T(w) \rangle$$

נוסחה ל- $T(u)$ ו- $T^*(u)$ במונחי בסיס אורתונורמלי $\{b_1, \cdots, b_n\}$:

(*3)
$$T(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(u), b_i \rangle \, b_i$$

(*4)
$$T^*(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u, T(b_i) \rangle \, b_i$$

משפט:

(*5)
$$T^{**} = T$$

משפט: המטריצה המייצגת של אופרטור צמוד T^* נתונה ע"י

(*6)
$$[T^*] = [T]^*$$

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית.

A הרמיטית:	$A = A^*$
A אנטי-הרמיטית:	$A^* = -A$
A אוניטרית:	$AA^* = I = A^*A$
A אורתוגונלית :	$AA^t = I = A^tA$
A נורמלית:	$AA^* = A^*A$

יהי $T : V \to V$ אופרטור מעל מרחב וקטורי V. נסמן המטריצה המייצגת $A = [T]$.

T צמוד לעצמו:	$A = A^*$	$\Leftrightarrow$	$T = T^*$
T אנטי-הרמיטי:	$A^* = -A$	$\Leftrightarrow$	$T^* = -T$
T אוניטרי:	$AA^* = I = A^*A$	$\Leftrightarrow$	$TT^* = I_V = T^*T$
T נורמלי:	$AA^* = A^*A$	$\Leftrightarrow$	$TT^* = T^*T$

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה Q אוניטרית ומטריצה D אלכסונית כך ש:

$$A = QDQ^* \quad \Leftrightarrow \quad D = Q^*AQ \ .$$

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אורתוגונלית אם קיימת מטריצה P אורתוגונלית ומטריצה D אלכסונית כך ש:

$$A = PDP^t \quad \Leftrightarrow \quad D = P^tAP \ .$$

פתרונות

שאלה 1

א) (16 נק') הפולינום האופייני של A הוא:

$$p_A(x) =$$

ב) (3 נק')

ג) (3 נק') הטענה לא נכונה.
נניח בשלילה שקיימת מטריצה הרמיטית, כלומר $A = A^*$, עבורה $\text{trace}(A) = i$.
ז"א

$$\text{trace}\left(A^*\right) = \overline{\text{trace}(A)} = \bar{i} = -i \ . \qquad (*1)$$

מצד שני, מכיוון ש- $A = A^*$ אזי

$$\text{trace}\left(A^*\right) = \text{trace}\left(A\right) = i \ , \qquad (*2)$$

בסתירה לזה שמצאני במשוואה (1*) ש: $\text{trace}\left(A^*\right) = -i$.
לכן הוכחנו שלא קיימת מטריצה הרמיטית עבורה $\text{trace}(A) = i$.

ד) (3 נק') הטענה נכונה. A לכסינה אזי קיימת P הפיכה ו- D אלכסונית:

$$A = PDP^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad D = P^{-1}AP \ .$$

כל הערכים עצמיים שלה הם 1 או -1 לפיכך

$$D = \text{diag}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix} \ ,$$

כאשר $\lambda_i = \pm 1$, $1 \leq i \leq n$. לכן

$$D^2 = \begin{pmatrix}\lambda_1^2 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1\end{pmatrix} = I \ .$$

מכאן

$$A^2 = PD^2P^{-1} = PIP^{-1} = I$$

כנדרש.

שאלה 2

א)

$$T\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad [T(e_1)]_E=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad [T(e_2)]_E=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -2 & 0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad [T(e_3)]_E=\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\0\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad [T(e_4)]_E=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

לכן המטירצה המייצגת הסנדרטית היא

$$[T]=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -2\end{pmatrix}\ .$$

הפולינום האופייני של T הוא:

$$\begin{aligned}p_T(x)=&\begin{vmatrix}x-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & x-1 & 0 & 1\\ -2 & 0 & x+2 & 0\\ 0 & -2 & 0 & x+2\end{vmatrix}\\ =&(x-1)^2(x+2)^2+2(x-1)(x+2)+2\left((x-1)(x+2)+2\right)\\ =&(x-1)(x+2)\left[(x-1)(x+2)+2\right]+2\left[(x-1)(x+2)+2\right]\\ =&\left[(x-1)(x+2)+2\right]^2\\ =&\left[x^2+x\right]^2\\ =&\left[x\left(x+1\right)\right]^2\\ =&x^2\left(x+1\right)^2\ .\end{aligned}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda=0$</u>

$$\text{Nul}\left(A-0\cdot I\right) = \text{Nul}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\2&0&-2&0\\0&2&0&-2\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-2R_1} \begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&2&0&-2\end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\to R_4-2R_2} \begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$V_0 = \text{span}\left\{ u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \ , \ u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \ .$$

מרחב עצמי של $\lambda=-1$

$$\text{Nul}\left(A+I\right) = \text{Nul}\begin{pmatrix}2&0&-1&0\\0&2&0&-1\\2&0&-1&0\\0&2&0&-1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-R_1} \begin{pmatrix}2&0&-1&0\\0&2&0&-1\\0&0&0&0\\0&2&0&-1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\to R_4-R_2} \begin{pmatrix}2&0&-1&0\\0&2&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$V_{-1} = \text{span}\left\{ u_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix} \ , \ u_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix} \right\} \ .$$

לכן בסיס שבו במטריצה המייצגת של ההעתקה היא אלכסונית הוא:

$$w_1 = \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} \ , \quad w_2 = \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} \ , \quad w_3 = \begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix} \ , \quad w_4 = \begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix} \ .$$

ב) נוכיח כי

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 w = 0 \qquad \textbf{(\#)}$$

מתקיים אם ורק אם $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$. ראשית נקח את המכפלה פנימית עם w ונקבל

$$\langle w, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 w\rangle = \langle w, 0\rangle = 0 \ .$$

נשתמש בתכונת ליניאריות של המכפלה פנימית כדי להרחיב את האגף השמאול באפן הבא:

$$\langle w, \alpha_1 u_1\rangle + \langle w, \alpha_2 u_2\rangle + \langle w, \alpha_3 u_3\rangle + \langle w, \alpha_4 w\rangle = 0 \qquad \textbf{(*1)}$$

כעת נוציא את הסקלר החוץ בכל מכפלה פנימית, בהתאם עם התכונת ליניאריות ונקבל ש:

$$\alpha_1 \langle w, u_1\rangle + \alpha_2 \langle w, u_2\rangle + \alpha_3 \langle w, u_3\rangle + \alpha_4 \langle w, w\rangle = 0 \qquad \textbf{(*2)}$$

$\langle u_k, w\rangle = 0$ לכל $k = 1,2,3$ לכן השלוש איברים הראשונים בצד שמאל של (2*) שווים ל- 0 ולכן

(3*) $$\alpha_4 \langle w, w\rangle = 0$$

נתון בשאלה כי $w \neq 0 \Leftarrow \langle w, w\rangle \neq 0 \Leftarrow$ נובע ממשוואה (3*) ש- $\alpha_4 = 0$. נציב $\alpha_4 = 0$ במשוואה (#) ונקבל ש-

(4*) $$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$$

אבל נתון בשאלה כי השלושה וקטורים u_1, u_2, u_3 הם בלתי תלויים לינארית לכן (4*) מתקיים אם ורק אם $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

הוכחנו כי (#) מתקיים אם ורק אם $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ ולכן הווקטורים u_1, u_2, u_3, w הם בלתי תלויים לינארית.

ג) נתון ש-
$$\langle u_1 - u_3, u_2\rangle = \langle u_1 + u_2, u_1\rangle \ .$$

לפי התכונת הליניאריות של המכפלה פנימית, אפשר להרחיב את המכפלות הפנימיות בשני האגפים ונקבל ש:
$$\langle u_1, u_2\rangle - \langle u_3, u_2\rangle = \langle u_1, u_1\rangle + \langle u_2, u_1\rangle \ .$$

נעביר את $\langle u_2, u_1\rangle$ מהאגף הימין לאגף השמאול:

$$\langle u_1, u_2\rangle - \langle u_3, u_2\rangle - \langle u_2, u_1\rangle = \langle u_1, u_1\rangle \ .$$

מכיוון שהמכפלה פנימית היא מוגדרת במרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{R}$, אזי התכונת סימטריות תוקפת: $\langle u_2, u_1\rangle = \langle u_1, u_2\rangle$. לכן שתי מכפלות פנימיות באגף השמאול מתבטלות ונקבל ש:

$$-\langle u_3, u_2\rangle = \langle u_1, u_1\rangle \ .$$

עכשיו נוכיח בשלילה שהקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ אינה אורתוגונלית.

נניח בשלילה כי הקבוצה כן אורתוגונלית. אזי $\{u_3, u_2\} = 0$. ז"א

$$\langle u_3, u_2\rangle = \langle u_1, u_1\rangle = 0 \ .$$

נתון בשאלה כי הקבוצת וקטורים $\{u_1, u_2, u_3\}$ היא בלתי תלויה ליניארית ולכן אף וקטור בקבוצה הזו לא שווה לוקטור האפס (כי קבוצת וקטורים המכילה וקטור האפס היא תלויה ליניארית, בסתירה לכך כי הקבוצה בת"ל).
לפיכך קיבלנו ש- $\langle u_1, u_1\rangle = 0$ ו- $u_1 \neq 0$, וזאת סותרת את התכונת חיוביות של מכפלה פנימית.

בגלל שהגענו לסתירה אזי הקבוצת וקטורים $\{u_1, u_2, u_3\}$ אינה אורתוגונלית.

שאלה 3

א) (16 נק')

$$A=\begin{pmatrix}11 & -8 & 4\\ -8 & -1 & -2\\ 4 & -2 & -4\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad A^t=\begin{pmatrix}11 & -8 & 4\\ -8 & -1 & -2\\ 4 & -2 & -4\end{pmatrix}=A$$

ז"א $A^t=A$ $\Leftarrow$ A סימטרית $\Leftarrow$ A לכסינה אורתוגונלית.

$$\begin{aligned}
p_A(x) &= |xI-A|\\
&=\begin{vmatrix}x-11 & 8 & -4\\ 8 & x+1 & 2\\ -4 & 2 & x+4\end{vmatrix}\\
&=(x-11)\begin{vmatrix}x+1 & 2\\ 2 & x+4\end{vmatrix}-8\begin{vmatrix}8 & 2\\ -4 & x+4\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}8 & x+1\\ -4 & 2\end{vmatrix}\\
&=(x-11)\left(x^2+5x\right)-8\left(8x+40\right)-4\left(4x+20\right)\\
&=x(x-11)\left(x+5\right)-64\left(x+5\right)-16\left(x+5\right)\\
&=x(x-11)\left(x+5\right)-80\left(x+5\right)\\
&=\left(x^2-11x-80\right)\left(x+5\right)\\
&=\left(x-16\right)\left(x+5\right)\left(x+5\right)\\
&=\left(x-16\right)\left(x+5\right)^2
\end{aligned}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda=16$</u>

$$\mathrm{Nul}\left(A-16I\right)=\begin{pmatrix}-5 & -8 & 4\\ -8 & -17 & -2\\ 4 & -2 & -20\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to 5R_3+4R_1]{R_2\to 5R_2-8R_1}\begin{pmatrix}-5 & -8 & 4\\ 0 & -21 & -42\\ 0 & -42 & -84\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\begin{pmatrix}-5 & -8 & 4\\ 0 & -21 & -42\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to\frac{-1}{21}R_2}\begin{pmatrix}-5 & -8 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+8R_2}\begin{pmatrix}-5 & 0 & 20\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to\frac{-1}{5}R_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$V_{16}=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}4\\ -2\\ 1\end{pmatrix}\right\}\setminus\{0\}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda = -5$</u>

$$\text{Nul}\,(A+5I) = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ -8 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to 4R_3-R_1]{R_2\to 2R_2+R_1} \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{4}R_1} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{-5} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \setminus\{0\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \setminus\{0\}$$

נסמן

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} , \quad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

נפעיל האלגוריתם של גרם שמידט כדי למצוא בסיס אורתוגונלי:

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{0}{21} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0}{21} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{17} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ 4 \end{pmatrix}$$

לכן מצאנו בסיס אורתוגונלי:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} , \quad u_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

בסיס אורתונורמלי:

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} , \quad \hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{357}} \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

ב) <u>כיוון $\Leftarrow$</u>

נניח כי B צמודה לעצמה וגם B אוניטרית.

(1) $\Leftarrow$ $B = B^*$ וגם $BB^* = I$.

(2) מכיוון ש- B צמודה לעצמה $\Leftarrow$ B נורמלית $\Leftarrow$ ממשפט הלכסון אוניטרית $\Leftarrow$ B לכסינה אוניטרית.

(3)

$$BB \overset{\text{(1): } B \text{ צמוד לעצמו}}{=} BB^* \overset{\text{(1): } B \text{ אוניטרי}}{=} I$$

לכן $B^2 = I$, כנדרש.

כנדרש.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

נניח כי $B^2 = I$ וגם B לכסינה אוניטרית.

(1) $\Leftarrow$ $B^2 = I$ וגם קיימת Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $B = QDQ^*$.

(2)

$$I = B^2 = QDQ^*QDQ^* = QD^2Q^* \quad \Rightarrow \quad D^2 = Q^*IQ = Q^*Q = I \ .$$

לכן $D = \text{diag}\left(\lambda_1, \quad \cdots \quad \lambda_n\right)$ כשאר $\lambda_i = \pm 1$

(3) $\Leftarrow$ D ממשית ואלכסונית $\Leftarrow$ $D = D^*$.

(4) לכן

$$B^* \overset{(1)}{=} (QDQ^*)^* = QD^*Q^* \overset{(3)}{=} QDQ^* = B$$

לכן $B = B^*$ ולכן B לעצמה, כנדרש.

(5)

$$BB^* \overset{(1)}{=} QDQ^*(QDQ^*)^* = QDQ^*QD^*Q = QDD^*Q \overset{(3)}{=} QD^2Q^* \overset{(2)}{=} QQ^* = I$$

לכן B אוניטרית, כנדרש.

שאלה 4

שאלה 5

א) נניח ש- $T : V \to V$ אופרטור אוניטרי, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v}) = \lambda \mathrm{v}$. אז

$$\begin{aligned} \langle T(\mathrm{v}), T(\mathrm{v}) \rangle &= \langle \lambda \mathrm{v}, \lambda \mathrm{v} \rangle && (\mathrm{v} \text{ וקטור עצמי של } T) \\ &= \lambda \langle \mathrm{v}, \lambda \mathrm{v} \rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית}) \\ &= \lambda \bar{\lambda} \langle \mathrm{v}, \lambda \mathrm{v} \rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית}) \end{aligned}$$

.

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}), T(\mathrm{v})\rangle &= \langle \mathrm{v}, T^*T(\mathrm{v})\rangle && \text{(הגדרה של אופרטור הצמוד)}\\ &= \langle \mathrm{v}, I(\mathrm{v})\rangle && (T \text{ אוניטרי})\\ &= \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle = \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \quad \Rightarrow \quad (\lambda\cdot\bar{\lambda}-1)\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle = 0 \ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v}\neq 0 \Leftarrow \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \neq 0 \Leftarrow (\lambda\cdot\bar{\lambda}-1)=0 \Leftarrow \lambda\bar{\lambda}=1 \Leftarrow |\lambda|^2=1$.

ב) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:
האופרטור $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדר:

$$T(u) = Au\ , \qquad A=\begin{pmatrix}0 & i\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

לכל $u\in\mathbb{R}^2$.

$$[T]=\begin{pmatrix}0 & i\\ 1 & 0\end{pmatrix}\ , \qquad [T]^*=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -i & 0\end{pmatrix}$$

$$[T][T]^*=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=[T]^*[T]$$

לכן T נורמלי אבל $[T]\neq[T]^*$ לכן T לא צמוד לעצמו.

ג) (6 נק') אם λ ערך עצמי של T אזי לכל וקטור עצמי $u\in V_\lambda$ מתקיים

$$T(u)=\lambda u\in \mathrm{span}\{u\}\subseteq V_\lambda$$

לכן לכל $u\in V_\lambda$ מתקיים $T(u)\in V_\lambda$.

ד) (7 נק')
נניח ש- $T:V\to V$ אופרטור צמוד לעצמו, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v})=\lambda\mathrm{v}$. אז

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \lambda\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &= \lambda\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && \text{(לינאריות של מכפלה פנימית)}\end{aligned} .$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \mathrm{v},T^*(\mathrm{v})\rangle && \text{(הגדרה של אופרטור הצמוד)}\\ &= \langle \mathrm{v},-T(\mathrm{v})\rangle && (T \text{ אנטי-הרמיטי})\\ &= -\langle \mathrm{v},T(\mathrm{v})\rangle\\ &= -\langle \mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &= -\bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && \text{(לינאריות חלקית של מכפלה פנימית)}\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle = -\bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \quad\Rightarrow\quad (\lambda+\bar{\lambda})\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle = 0\ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v}\neq 0 \Leftarrow \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\neq 0 \Leftarrow (\lambda+\bar{\lambda})=0 \Leftarrow \lambda=-\bar{\lambda}$.