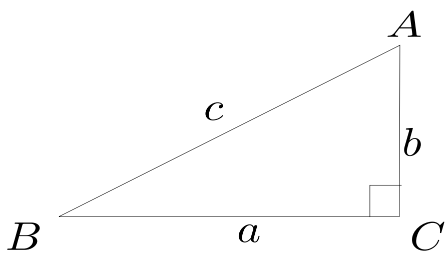
שיעור א
זהויות של פונקציות טריגונומטריות

א.1 פיתגורס, סינוסת קוסינוס וטנגנט

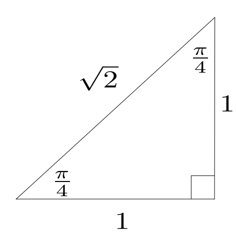


$$\sin(\angle A) = \frac{a}{c}\ , \qquad \cos(\angle A) = \frac{b}{c}\ , \qquad \tan(\angle A) = \frac{a}{b}\ .$$

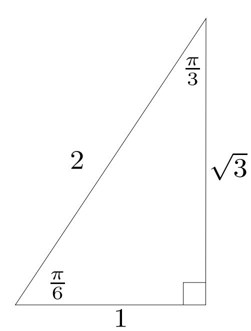
משפט פיתגורס:

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad c = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} &&= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 1 &&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$



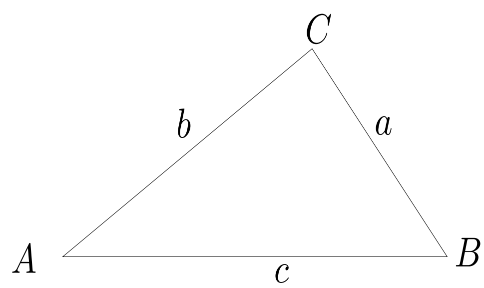
$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2} &&= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} &&= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \sqrt{3} &&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} \\ \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{\sqrt{3}} &&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \end{aligned}$$



2.א משפט הסינוסים ומשפט הקוסינוסים

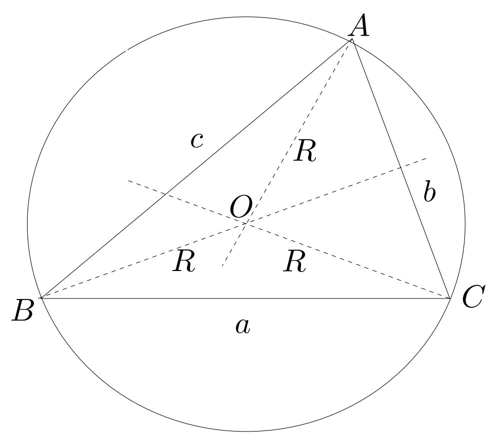
משפט הסינוסים:

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)} \ .$$



משפט הקוסינוסים:

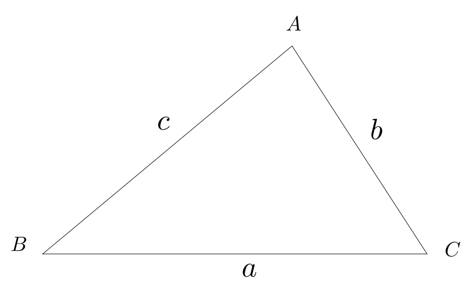
$$\begin{aligned} c^2 =& a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\angle C)) \ , \\ b^2 =& a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\angle B) \ , \\ a^2 =& b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\angle A) \ . \end{aligned}$$



רדיוס של משולש החסום במעגל:

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)} = 2R \ .$$

כאשר R הוא הרדיוס המעגל החוסם את המשולש.

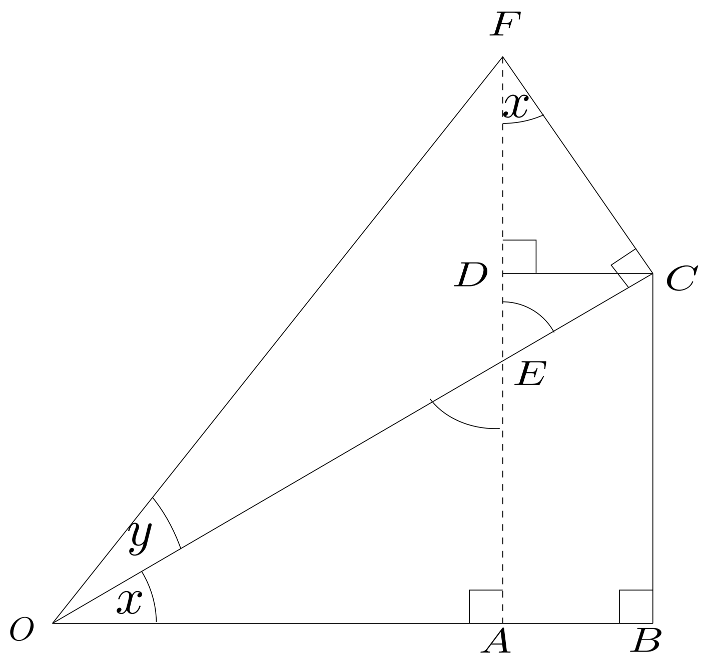


שטח משולש:

$$S_{\Delta\, ABC} = \frac{AC \cdot AB \cdot \sin(\sphericalangle A)}{2} \ .$$

3.א זיהויות טריגונומטריות

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$



משולשים ישרי זוויתים OPQ ו- OQR מכילים את הזוויות x ו- y כמתואר בתרשים. הזווית URQ שווה ל- x.

$$\begin{aligned}\sin(x+y) =& \frac{AF}{OF} = \frac{AD+DF}{OF} = \frac{BC+DF}{OF}\\ =& \frac{BC}{OC} \times \frac{OC}{OF} + \frac{DF}{CF} \times \frac{CF}{OF}\\ =& \sin x \cos y + \cos x \sin y\end{aligned}$$

הנוסחה עבור $\cos(x+y)$ ניתנת להוכיח בדרך הדומה:

$$\begin{aligned}\cos(x+y) =& \frac{OA}{OF} = \frac{OB-AB}{OF} = \frac{OB-DC}{OF}\\ =& \frac{OB}{OC} \times \frac{OC}{OF} - \frac{DC}{CF} \times \frac{CF}{OF}\\ =& \cos x \cos y - \sin x \sin y\end{aligned}$$

מהנוסחאות האלה נובעות כי

$$
\begin{aligned}
\tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} \\
&= \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} \\
&= \frac{\dfrac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \dfrac{\sin y \cos x}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \dfrac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} \\
&= \frac{\dfrac{\sin x \cancel{\cos y}}{\cos x \cancel{\cos y}} + \dfrac{\sin y \cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x} \cos y}}{\dfrac{\cancel{\cos x \cos y}}{\cancel{\cos x \cos y}} - \dfrac{\sin x}{\cos x}\dfrac{\sin y}{\cos y}} \\
&= \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\sin y}{\cos y}}{1 - \dfrac{\sin x}{\cos x}\dfrac{\sin y}{\cos y}} \\
&= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{
\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\
\sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \\
\\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\
\cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \\
\\
\tan(x+y) &= \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} \\
\tan(x-y) &= \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}
\end{aligned}
}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x)\\ &= 2\cos^2(x) - 1\\ &= 1 - 2\sin^2(x)\end{aligned}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(x)\right)$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(x)\right)$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \quad = 2\cos^2(x) - 1 \quad = 1 - 2\sin^2(x)$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \qquad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad 1 + \cot^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x) \qquad \tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$

3.א עוד זיהויות טריגונומטריות*

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\cos(x)\right)$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(x)\right)$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$$

$$\sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)-\sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x)-\cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$2\sin(x)\cos(y) = \sin(x+y)+\sin(x-y)$$

$$2\cos(x)\sin(y) = \sin(x+y)-\sin(x-y)$$

$$2\cos(x)\cos(y) = \cos(x+y)+\cos(x-y)$$

$$-2\sin(x)\sin(y) = \cos(x+y)-\cos(x-y)$$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x) \qquad \cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$