שיעור 13
אינטגרציה של פונקציות רציונליות

13.1 הגדרה: (פונקציה רציונלית)

פונקציה רציונלית (שבר אלגברי) זאת פונקציה מהצורה
$$y=\frac{P(x)}{Q(x)}\ ,$$
כאשר $P(x)$, $Q(x)$ פולינומים.

דוגמא. (פונקציה רציונלית)

$f(x)=\dfrac{x^4-5x+9}{x-2}$ פונקציה רציונלית: $P(x)=x^4-5x+9$ $Q(x)=x-2$.

13.2 הגדרה: (פונקציה רציונלית אמיתי)

שבר אלגברי
$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$
נקרא אמיתי אם
$$\deg(P)<\deg(Q)\ .$$
אם שבר אלגברי לא אמיתי, יש לעשות חילוק פולינומים.

דוגמא. (חילוק פולינומים)

חשבו את האינטגרל
$$\int\frac{x^4-5x+9}{x-2}\ .$$

פיתרון.
שלב ראשון בחישוב אינטגרל של שבר אלגברי לא אמיתי, להגיע לשבר אלגברי אמיתי ע"י חילוק פולינומים. ע"י חילוק ארוך:

שלב 1:

$$x-2\overline{\big)\ x^4\quad -5x+9}$$

שלב 2:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 \\ \hline
x-2 & x^4 \qquad\qquad -5x+9 \\
 & \underline{x^4 \ -2x^3 \qquad\qquad\quad} \\
 & \qquad 2x^3 \ -5x+9
\end{array}
$$

שלב 3:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 \quad +2x^2 \\ \hline
x-2 & x^4 \qquad\qquad\qquad -5x+9 \\
 & \underline{x^4 \ -2x^3 \qquad\qquad\qquad\quad} \\
 & \qquad 2x^3 \qquad\quad -5x+9
\end{array}
$$

שלב 4:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 \quad +2x^2 \\ \hline
x-2 & x^4 \qquad\qquad\qquad\quad -5x+9 \\
 & \underline{x^4 \ -2x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad} \\
 & \qquad 2x^3 \qquad\qquad -5x+9 \\
 & \underline{\qquad 2x^3 \quad -4x^2 \qquad\qquad\quad} \\
 & \qquad\qquad\qquad 4x^2-5x+9
\end{array}
$$

שלב 5:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 \quad +2x^2 \quad +4x \\ \hline
x-2 & x^4 \qquad\qquad\qquad\quad -5x+9 \\
 & \underline{x^4 \ -2x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad} \\
 & \qquad 2x^3 \qquad\qquad -5x+9 \\
 & \underline{\qquad 2x^3 \quad -10x^2 \qquad\qquad\quad} \\
 & \qquad\qquad\qquad 4x^2 \ -5x+9 \\
 & \underline{\qquad\qquad\qquad 4x^2 \ -8x \qquad} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 3x+9
\end{array}
$$

שלב 6:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 \quad +2x^2 \quad +4x \ + \ 3 \\
\cline{2-2}
x-2 & x^4 \qquad\qquad\qquad -5x + \ 9 \\
 & x^4 \ -2x^3 \\
\cline{2-2}
 & \quad 2x^3 \qquad\quad -5x + \ 9 \\
 & \quad 2x^3 \ \ -10x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 4x^2 \ -5x + \ 9 \\
 & \qquad\qquad 4x^2 \ -8x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 3x + \ 9 \\
 & \qquad\qquad\qquad 3x - \ 6 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\quad 15
\end{array}
$$

תשובה סופית:

$$\frac{x^4-5x+9}{x-2} = x^3+2x^2+4x+3+\frac{15}{x-2}$$

לכן

$$\int \frac{x^4-5x+9}{x-2} = \int \left(x^3+2x^2+4x+3+\frac{15}{x-2}\right) = \frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+2x^2+3x+15\ln|x-2|+C \ .$$

ז"א שלב ראשון בחישוב אינטגרל של שבר אלגברי:

ע"י חילוק ארוך פולינומים להגיע לשבר אלגברי אמיתי. כל שבר אלגברי אמיתי ניתן להציג כסכום של שברים פשוטים. ■

יש 4 סוגים של שברים אלגבריים פשוטים:

שבר אלגברי			שבר פשוט
סוג 1:	$\frac{m}{x-a}$		
סוג 2:	$\frac{m}{(x-a)^2}$		
	$\frac{m}{(x-a)^n}$	$n \in \mathbb{N}\ , \quad n \geq 2$	
סוג 3:	$\frac{mx+n}{x^2+px+q}$		כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.
סוג 4:	$\frac{mx+b}{(x^2+px+q)^2}$		כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.
	$\frac{mx+b}{(x^2+px+q)^n}$	$n \in \mathbb{N}\ , \quad n \geq 2$	כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

חשבו את $\int \frac{2x+1}{x^2-3x+1}$

פיתרון.

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+1} = \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

$$A(x-2) + B(x-1) = 2x+1$$

$$\begin{aligned} x = 2 \quad &\Rightarrow \quad B = 5 \\ x = 1 \quad &\Rightarrow \quad A = -3 \end{aligned}$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+1}\,dx = \int \left(\frac{-3}{x-1} + \frac{5}{x-2}\right) dx = -3\ln|x-1| + 5\ln|x-2| + C\ .$$

■

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

חשבו את $\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2}$

פיתרון.

$$\frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x-3}\ .$$

$$A(x-3)^2 + B(x-2) + C(x-3)(x-2) = x^2+4$$

$$\begin{array}{lll} x=3 & \Rightarrow & B=13 \\ x=2 & \Rightarrow & A=8 \\ x=0 & \Rightarrow & 9A-2B+6C=4 \Rightarrow C=-7 \end{array}$$

$$\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2}\,dx = \int \left(\frac{8}{x-2} + \frac{13}{(x-3)^2} - \frac{7}{x-3}\right) dx = 8\ln|x-2| - \frac{13}{x-3} - 7\ln|x-3| + C\ .$$

■

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

חשבו את $\int \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}$

פיתרון.

$$\frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+1}\ .$$

$$A(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1) + (Cx+D)x^2 = x^3+1$$

$$\begin{array}{ll} x^3: & B+C=1 \\ x^2: & A+D=0 \\ x: & B=0 \\ x^0: & A=1 \end{array}$$

לכן

$$D=-1\ ,\qquad C=1\ .$$

$$\int\frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}dx=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|x^2+1|-\arctan(x)+C\ .$$

■

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

חשבו את $I=\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}$

פיתרון.

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5}\ .$$
$$A(x^2-2x+5)+(Bx+C)(x-1)=2x^2-3x-3$$

$$\begin{aligned}x^2:&\quad A+B=2\\ x:&\quad -2A+C-B=-3\\ x^0:&\quad 5A-C=-3\end{aligned}$$

לכן

$$A=-1\ ,\qquad B=3\ ,\qquad C=-2\ .$$

$$I=\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx=\int\left(-\frac{1}{x-1}+\frac{3x-2}{x^2-2x+5}\right)dx=-\ln|x-1|+\int\left(\frac{3x-2}{(x-1)^2+4}\right)dx\ .$$

נגדיר $u=x-1$:

$$\begin{aligned}I&=\ln|x-1|+\int\frac{3(u+1)-2}{u^2+4}du\\&=\ln|x-1|+\int\frac{3(u+1)-2}{u^2+4}du\\&=\ln|x-1|+3\int\frac{u}{u^2+4}du-\int\frac{1}{u^2+4}du\\&=\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|u^2+4|-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u}{2}\right)\\&=\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|(x-1)^2+4|-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)\end{aligned}$$

■

13.1 כלל: (שלבים באינטגרציה של שברים אלגבריים)

<u>שלב 1.</u> לחלק במכנה (חילוק פולינומי) במידה ש $\deg(P) \geq \deg(Q)$.
<u>שלב 2.</u> להציב שבר אלגברי אמיתי כסכום של שברים פשוטים.
<u>שלב 3.</u> לבצע אינטגרציה של כל שבר פשוט.

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

חשבו את $I = \displaystyle\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$

פיתרון.

שלב 1:

$$\begin{array}{r|l} x^4+2x^3+2x^2 & \overline{x^5 \quad +2x^3 \quad +4x+4} \end{array}$$

שלב 2:

$$\begin{array}{rr} & x \\ x^4+2x^3+2x^2 \big) & \overline{x^5 \qquad\quad +2x^3 \quad +4x+4} \\ & \underline{x^5+2x^4+2x^3 \qquad\qquad\quad} \\ & -2x^4 \qquad\qquad +4x+4 \end{array}$$

שלב 3:

$$\begin{array}{rr} & x-2 \\ x^4+2x^3+2x^2 \big) & \overline{x^5 \qquad\quad +2x^3 \qquad\quad +4x+4} \\ & \underline{x^5+2x^4+2x^3 \qquad\qquad\qquad\quad} \\ & -2x^4 \qquad\qquad\qquad +4x+4 \\ & \underline{-2x^4-4x^3-4x^2 \qquad\qquad\quad} \\ & 4x^3+4x^2+4x+4 \end{array}$$

לכן ע"י חילוק ארוך קיבלנו

$$\frac{x^5+2x+4x+4}{x^4+x^3+2x^2} = x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} = x-2+4\left(\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}\right)$$