קורס מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

עבודת הגשה 3

.1

. גובה חיילים מתפלג נורמלית עם תוחלת של 172 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.

א. מה ההסתברות שגובהו של חייל שנבחר באקראי יעלה על 180 ס"מ?

ב. מה ההסתברות שממוצע הגובה בקבוצה של 20 חיילים שנבחרו באקראי יהיה בין 165 ל- 175 ס"מ?

ג. מה צריך להיות גובהו של החייל כך ש- 95% מחבריו יהיו גבוהים ממנו?

ד. מה ההסתברות שמבין 5 חיילים הנבחרים באקראי יהיו לפחות 3 חיילים הגבוהים מ- 172 ס"מ?

פתרון חלקי:

סעיף א 0.21

סעיף ב 0.91

סעיף ג 155.55

.2

למטרות סקר אוכלוסין, לוכדים מדגם מקרי של 200 סרדינים. ידוע ש- 50% מהאוכלוסייה הם סרדינים מפוספסים והיתר סרדינים כסופים.

חשבו את ההסתברות למצוא במדגם:

א. 95 סרדינים כסופים?
ב. פחות מ- 105 סרדינים כסופים?
ג. לפחות 103 ולכל היותר 107 סרדינים כסופים?

פתרון חלקי:

סעיף א 0.044
סעיף ב 0.74
סעיף ג 0.22

.3

במבחן בסטטיסטיקה הציונים התפלגו נורמלית עם ממוצע 80 וסטיית תקן 10.

א. מה ההסתברות שממוצע הציונים של 5 סטודנטים לא יעלה על 85?
ב. מה ההסתברות שסכום הציונים של 10 סטודנטים גבוהה מ 790?

פתרון חלקי:

סעיף א 0.87
סעיף ב 0.62

.4

נתונה פונקציות הצפיפות הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & , \quad 0 \le x < 2 \\ c(x^2 - 2) & , \quad 2 \le x < 3 \\ 0 & , else \end{cases}$$

א. מצאו את הקבוע c.

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של x.

ג. חשבו א את E[X].

ד. חשבו את P(x>2/x>0)

פתרון שאלה 4:

3.

נתונה פונקציית צפיפות:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{3}, & 0\le x<2\\ C(x^2-2), & 2\le x<3\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

א) מצאו את הקבוע C.

ב) מצאו את פונקציית ההתפלגות (מצטברת) של X.

ג) חשבו את $E(x)$.

ד) חשבו את $P(x>2 / x>0)$

פתרון

א)

$$\int_0^2 \frac{x}{3}\,dx+\int_2^3 C(x^2-2)\,dx=1$$

$$\left[\frac{x^2}{6}\right]_0^2+C\left[\frac{x^3}{3}-2x\right]_2^3=1$$

$$\frac{4}{6}+C\left[(9-6)-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right]=1$$

$$\frac{4}{6}+C\left[\frac{13}{3}\right]=1$$

$$C\cdot\frac{13}{3}=\frac{1}{3}$$

$$C=\frac{1}{13}\Rightarrow$$

$$\boxed{f(x)=\begin{cases}\frac{x}{3}, & 0\le x<2\\ \frac{1}{13}(x^2-2), & 2\le x<3\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}}$$

ד)

שימו לב שהפונקציה רציפה, בהמשך נסביר את הכוכבים.

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & , x\le 0\\ *\ \frac{x^2}{6} & , 0<x\le 2\\ **\ \frac{x^3}{39}-\frac{2x}{13}+\frac{10}{13} & , 2<x\le 3\\ 1 & , x>3\end{cases}$$

נוכיח את:

$$*\ \int_0^x \frac{x}{3}\,dx=\left[\frac{x^2}{6}\right]_0^x=\frac{x^2}{6}$$

ה)

$$**\ \frac{2}{3}+\int_2^x\left(\frac{x^2}{13}-\frac{2}{13}\right)dx=\left[\frac{x^3}{39}-\frac{2x}{13}\right]_2^x+\frac{2}{3}$$

נסביר בהמשך

$$=\frac{2}{3}+\frac{x^3}{39}-\frac{2x}{13}-\left[\frac{8}{39}-\frac{4}{13}\right]=\frac{x^3}{39}-\frac{2x}{13}-\frac{8}{39}+\frac{4}{13}+\frac{2}{3}$$

ו)

$$=\frac{x^3}{39}-\frac{2x}{13}+\frac{4}{39}+\frac{2}{3}=\frac{x^3}{39}-\frac{2x}{13}+\frac{10}{13}$$

מקור $\frac{2}{3}$? זה ערכו של השטח: $0<x<2$,

הנה:

$$\int_0^2 \frac{x}{3}\,dx=\left[\frac{x^2}{6}\right]_0^2=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

ג)

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{0} x\cdot f(x)+\int_{0}^{2} x\cdot f(x)+\int_{2}^{3} x\cdot f(x)+\int_{3}^{\infty} x\cdot f(x)$$

שווה אפס   שווה אפס

$$=\int_{0}^{2} x\cdot\frac{x}{3}\,dx+\int_{2}^{3}\left[x\cdot\frac{1}{13}(x^2-2)\right]dx$$

$$=\int_{0}^{2}\frac{x^2}{3}\,dx+\frac{1}{13}\int_{2}^{3}(x^3-2x)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2}+\frac{1}{13}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}\right]_{2}^{3}$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{1}{13}\left[(9-9)-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right]$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{1}{13}\left(4-\frac{8}{3}\right)=\frac{36}{13}$$

ד)

$$P(X>2\,/\,X>0)=\frac{P(X>2)}{P(X>0)}=\frac{1-P(X\le 2)}{1-P(X\le 0)}$$

$$=\frac{1-\frac{4}{6}}{1-0}=\frac{1-\frac{4}{6}}{1}=\frac{\frac{1}{3}}{1}=\frac{1}{3}$$

א. הגובה של אוכלוסיה מסויימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 174 ס"מ וכן עם סטיית תקן של 12 ס"מ. במדגם של 20 אנשים מהאוכלוסיה התקבל ממוצע של 171 ס"מ וסטיית תקן מדגמית של 16.

ברמת מובהקות של 0.05 בדקו האם חל שינוי בתוחלת הגבהים באוכלוסיה?

ב. חוקר מסוים בדק 10 חנויות ספרים שנבחרו אקראית מתוך 100 חנויות ספרים בישוב מסוים. בכל חנות בדק החוקר כמה ספרים נמכרו בשבוע הראשון של הקיץ. להלן התוצאות שהתקבלו : 358, 275, 199, 302, 318, 406, 286, 212, 365, 268.

בנו רווח סמך עבור α=0.1 לכמות הממוצעת של הספרים שנמכרו בשבוע זה.

פתרונות סופיים חלקיים :

א. לא חל שינוי.

פתרון שאלה 5 :

ב) בדיקת השערה לתוחלת.

$\mu_0 = 174 \quad \sigma_0 = 12 \quad n = 20$

$\bar{X} = 171 \quad S = 16$

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

הטענה

דברים עם שינוי [illegible]

שימו לב, σ לא ידוע, $n<30$ (מקרה ג)
כרוך מתחתון התפלגות נורמלית.

לפי כך הנוסחאות

$$c_1 = \mu_0 - t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \Rightarrow c_1 = 174 \cdot t^{19}_{0.975} \cdot \frac{16}{\sqrt{20}}$$

$$c_2 = \mu_0 + t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \Rightarrow c_2 = 174 \cdot t^{19}_{0.975} \cdot \frac{16}{\sqrt{20}}$$

פה דוחים את H_0 אם $\bar{X} \le c_1$ או $c_2 \le \bar{X}$.

שימו לב:

$$t^{19}_{0.975} = 2.09$$

$$c_1 = 166$$

$$c_2 = 181$$

ו $\bar{X} = 172$ נתון.

התקבל:

$c_1 < \bar{X} < c_2$ לכן לא דוחים את H_0.
והטענה כי חל שינוי לא מתקבלת.

התוצאה
הנבדקת
באוכלוסיה.