

עבודה עצמית 9 גרדיאנט, אקסטרמומים, נגזרת כיוונית וכופלי לגרנז'

שאלה 1

(א) הגדירו את המושג "גרדיאנט של פונקציה $f(x, y)$ " בנקודה P .

(ב) הגדירו את המושג "נגזרת כיוונית פונקציה $f(x, y)$ " בנקודה P .

(ג) הסבירו את הקשר בין שני המושגים הנ"ל

שאלה 2 עבור הנקודה $P(1, 1)$ ועבור כל אחת משתי הפונקציות הבאות $f(x, y) = xy^2 - \frac{x^2}{y^3}$

$$g(x, y) = \ln \left(\frac{x + \sqrt{y} - 1}{2y\sqrt{x}} \right)$$

(א) חשבו את הגרדיאנט של הפונקציה בנקודה P .

(ב) חשבו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה P בכיוון מהנקודה הזאת לראשית הצירים

(ג) חשבו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי האפשרי של הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה P .

(ד) מצאו וקטור a כך ש- $\frac{df}{da}(P) = 0$.

(ה) חשבו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה P בכיוונים:

(1) ציר ה- x

(2) ציר ה- y

(3) כיוון שיוצר זווית $\frac{\pi}{3}$ עם ציר ה- x

(ו) מצאו את הכיוון בו הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה P שווה ל- 5.

שאלה 3 עבור הנקודות $P(1, -1, 2)$, $Q(2, 0, 4)$ ועבור הפונקציה $f(x, y, z) = xy + z^2$

(א) חשבו את הגרדיאנט של הפונקציה בנקודה P .

(ב) מצאו את הערך המקסימלי של הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה P .

(ג) חשבו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה P בכיוון הווקטור \overrightarrow{PQ} .

(ד) מצאו את משוואת המישור המשיק למשטח הרמה $f(x, y, z) = 3$ בנקודה P .

(ה) חשבו את המרחק מנקודה Q למישור המשיק שמצאות בסעיף ד'.

(ו) מצאו את ההיטל של נקודה Q על המישור הנ"ל.

שאלה 4 מצאו נקודות אקסטרמום מקומיות וקבע את סוגיהן עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

(א) $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$

(ב) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 8x + 9y + 3xy$

(ג) $f(x, y) = 4 + x^3 - 3xy + y^3$

(ד) $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$

(ה) $f(x, y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$

(ו) $f(x, y) = x^4 - 2x^2y - 6x^2 + 4y^2$

שאלה 5 מצאו את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של כל אחת מהפונקציות הבאות בתחום הנתון:

(א) $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ בתחום החסום על ידי הישרים $x = 0, y = 0, 2x + 3y - 12 = 0$

(ב) $z = xy + x + y$ בריבוע החסום על ידי הישרים $x = 1, x = 2, y = 2, y = 3$

(ג) $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ במשולש החסום על ידי הישרים $x = 1, y = 1, x + y = 1$

(ד) $z = e^{x^2+y^2-2y}$ בתחום החסום על ידי $y = x^2, y = 4$

(ה) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ במלבן בעל קדקודים $A(1, 1), B(1, 4), C(5, 4), D(5, 1)$

שאלה 6

מצאו את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של הפונקציה $z(x, y)$ עם האילוץ הנתון:

(א) $z = xy$ בתנאי $2x + 3y - 5 = 0$

(ב) $z = xy$ בתנאי $x^2 + y^2 = 1$

(ג) $z = xy$ בתנאי $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

(ד) $z = 4x^3 + y^2$ בתנאי $2x^2 + y^2 = 1$

(ה) $z = y - x - 1$ בתנאי $x^2 + y^2 = 2x - 2y$

שאלה 7

(א) על המשטח $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ מצאו את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $A(2, 4, 0)$

(ב) על המישור $2x + y + 3z = 6$ מצאו את הנקודה הקרובה ביותר למשטח $x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - 6z + 10 = 0$

ג) על המשטח $x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - 6z + 10 = 0$ מצאו את הנקודה הקרובה ביותר ואת הנקודה הרחוקה ביותר למישור $2x + \sqrt{3}y + 3z = 6$. חשבו את המרחקים.

ד) מצאו את המרחק המינימלי בין נקודות השייכות לשני המשטחים הבאים:

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 3 = 0.$$

ה) מצאו נקודה M על המשטח $x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$ ($z \geq 0$) הקרובה ביותר לנקודה $P(0, 6, 0)$ והרכב משוואה פרמטרית של הישר העובר דרך הנקודות M ו- P .

ו) מכל המשולשים ישרי זווית בעלי שטח S , מצאו משולש בעל היתר הקטן ביותר.

שאלה 8 חשבו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימאלי של הפונקציה

$$z = 8x + 4y^2 - 8xy^2$$

בתחום

$$D = \{0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$$

שאלה 9 נתונה הפונקציה

$$f(x, y, z) = \cos(6z)(x^3 + 4y^2)$$

מצאו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה $f(x, y, z)$ בנקודה $P(-1, 1, 0)$ בכיוון ממנה לנקודה $M(1, 3, 5)$.

שאלה 10 מצאו את משוואת המישור המשיק למשטח הרמה של הפונקציה

$$f(x, y, z) = e^z(y^4 + 3x^2)$$

העובר דרך נקודה $P(1, 3, 4)$ בנקודה $P(1, 3, 4)$.

שאלה 11 מצאו את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר של הפונקציה $f(x, y) = 4y^2 - 16y + 4x^2 - 6x - 6$ בתחום $x^2 + y^2 \leq 9$.

שאלה 12 מצאו את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר של הפונקציה $f(x, y) = -6y^2 - y - 6x^2 + 14x + 2$ בתחום $x^2 + y^2 \leq 16$.

שאלה 13 על קו החיתוך בין המשטחים

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = 4$$

מצאו את הנקודה הקרובה ביותר למישור

$$z = 2x - 4y + 20.$$

שאלה 14 על המעגל $x^2 + y^2 = 9$ מצאו את הנקודה $P(x_0, y_0)$ כך ש הנגזרת $\frac{dz}{d\vec{OP}}$ של $z = -4y + x^2 + 4x + 4$ מקסימלי.

שאלה 15 על המעגל $x^2 + y^2 = 1$ מצאו את הנקודה $P(x_0, y_0)$ כך ש הנגזרת $\frac{dz}{d\vec{OP}}$ של $z = xy - 4y + x^2 + 2x + 4$ בנקודה $O(0, 0)$ ובכיוון של \vec{OP} תהיה מקסימלית וחשבו את קוסינוס הזווית α בין \vec{OP} לישר $y = x$.

שאלה 16

עבור אילו ערכים של a ו- b מישור המשיק למשטח $z = x^3 - ax + 2y^3 - by + xy$ בנקודה $x = 1, y = 1$ יהיה מקביל למישור $z = 5x + 3y + 11$?

(א) מצאו את משוואת הספירה שמרכזת בנקודה $C(0, 1, 2)$ ומשיקה את הישר AB , כאשר $A(1, 1, 0)$, $B(0, 2, 4)$.

שאלה 17

מצאו את הנקודות הקרובות ביותר על המשטחים

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 1 = 0, \quad 2x + y + 2z + 10 = 0.$$

שאלה 18

נתונה הפונקציה

$$z = x^2 - 2xy^2 - 1.$$

(א) מצאו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה $A(-1, 2)$ בכיוון ממנה לנקודה $B(2, 6)$.

(ב) האם קיימת נקודה P במישור xy כך ש- $\frac{dz(A)}{d\vec{AP}} = 13$? נמקו את תשובתכם.

שאלה 19

נתונה הפונקציה $f(x, y) = e^{x^2 + y^2 - 2x + 2}$.

(א) מצאו אקסטרמומים מקומיים של הפונקציה וקבעו את סוגם.

(ב) בתחום $x^2 + y^2 \leq 4$ מצאו את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר של הפונקציה הנתונה.

שאלה 20

מצאו את הזווית (במעלות) בין מישור המשיק למשטח $2x^2 + xyz + z^2 = 4$ העובר דרך הנקודה $P(1, 1, 1)$ ובין ציר ה- x .

שאלה 21 נתונות הנקודות $A(0, -2, -1)$ ו- $B(2, 0, 2)$. מצאו על קו ישר AB את הנקודה הקרובה ביותר למשטח

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 5 = 0.$$

שאלה 22 מצאו את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של הפונקציה $z = xy$ על הקו (בתנאי) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

פתרונות

שאלה 1

(א)

(ב)

(ג)

שאלה 2

$$\nabla g(P) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \nabla f(P) = (-1, 5) \quad (\text{א})$$

$$\frac{dg(P)}{dOP} = 0, \frac{df(P)}{dOP} = -2\sqrt{2} \quad (\text{ב})$$

(ג) ערך המקסימלי של $\nabla f(P)$ הוא $\sqrt{26}$.

ערך המינימלי של $\nabla f(P)$ הוא $-\sqrt{26}$.

ערך המקסימלי של $\nabla g(P)$ הוא $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

ערך המינימלי של $\nabla g(P)$ הוא $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\bar{a} = (-5, 1) \quad (\text{ד})$$

$$\bar{e} = (1, 0) \quad (\text{ה}) \quad (1)$$

$$\frac{df(P)}{d\bar{e}} = -1$$

$$\frac{dg(P)}{d\bar{e}} = \frac{1}{2}$$

$$\bar{e} = (0, 1) \quad (2)$$

$$\frac{df(P)}{d\bar{e}} = 5$$

$$\frac{dg(P)}{d\bar{e}} = \frac{-1}{2}$$

$$\bar{e} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \bar{a} = (1, \sqrt{3}) \quad (3)$$

$$\frac{df(P)}{d\bar{a}} = \frac{5\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\frac{dg(P)}{d\bar{a}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

שאלה 3

(א) $\nabla f(P) = (-1, 1, 4)$

(ב) הערך המקסימלי של $\nabla f(P)$ הוא $|\nabla f(P)| = \sqrt{18}$

(ג) $\bar{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$
 $\overrightarrow{PQ} = (1, 1, 2)$

$$\frac{df(P)}{d\bar{e}} = \frac{8}{\sqrt{6}}.$$

(ד) משוואת המישור המשיק:

$$x - y - 4z + 6 = 0.$$

(ה) $d = \frac{8}{\sqrt{18}}$

(ו) משוואת הישר המאונך למישור $x - y - 4z + 6 = 0$ שעובר דרך נקודה $Q(2, 0, 4)$:

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= -t \\ z &= 4 - 4t \end{aligned} \right\}$$

ההיטל של Q על המישור: $\left(\frac{22}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{20}{9} \right)$.

שאלה 4

(א) נקודת אוכף. אין נקודת מקסימום או מינימום.

(ב) נקודת אוכף. אין נקודת מקסימום או מינימום.

(ג) נקודת אוכף. $P_1(0, 0)$
 נקודת מינימום מקומי. $P_2(1, 1)$

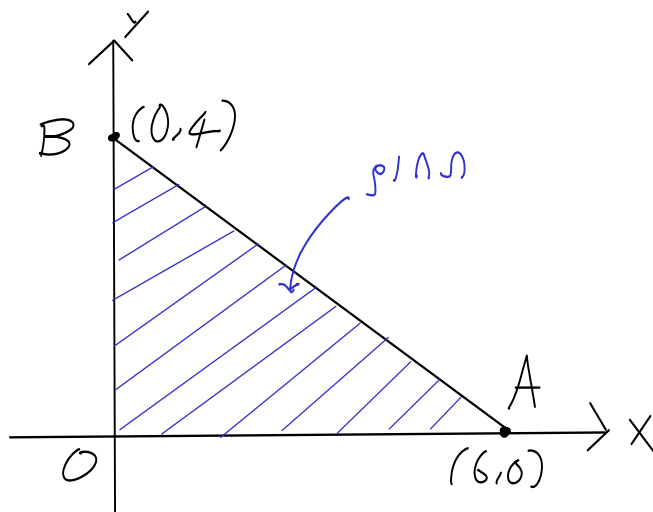
(ד) נקודת אוכף. $P_1(0, 0)$
 נקודת מקסימום מקומי. $P_2(1, 1)$
 נקודת מקסימום מקומי. $P_3(-1, -1)$

(ה) נקודת אוכף. $P_1(0, 0)$
 נקודת מקסימום מקומי. $P_2(1, 1)$
 נקודת מקסימום מקומי. $P_3(1, -1)$

- (ו) $P_1(0,0)$ נקודת אוסף.
 $P_2(2,1)$ נקודת מינימום מקומי.
 $P_3(-2,1)$ נקודת מינימום מקומי.

שאלה 5

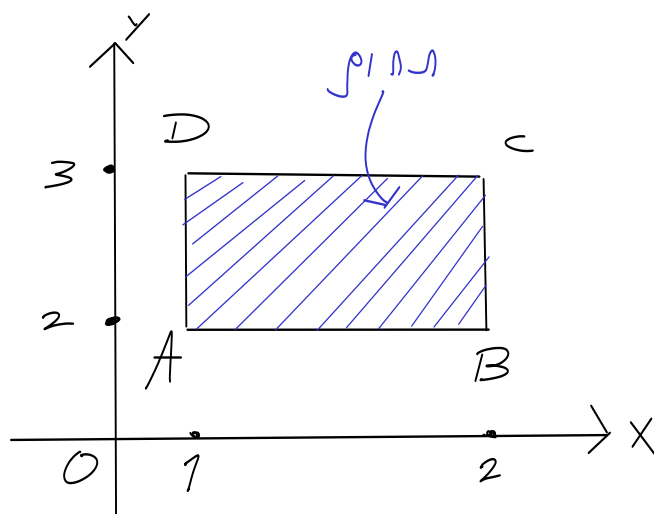
(א)



נקודה	z
$P_1 \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3} \right)$	$-\frac{16}{3}$
$P_2(2,0)$	-4
$P_3 \left(\frac{60}{19}, \frac{36}{19} \right)$	$-\frac{36}{19}$
$O(0,0)$	0
$A(6,0)$	12
$B(0,4)$	16

הערך הגדול ביותר הוא 16 המתקבל בנקודה $B(0,4)$.
הערך הקטן ביותר הוא $-\frac{16}{3}$ המתקבל בנקודה $P_1 \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3} \right)$.

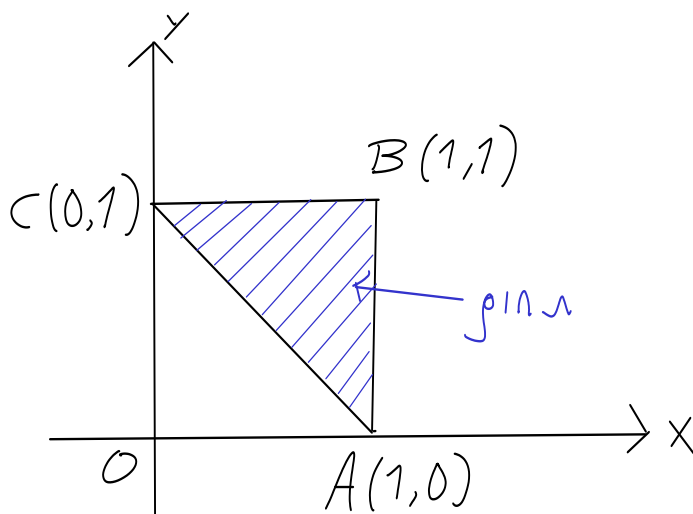
(ב)



נקודה	z
$A(1,2)$	5
$B(2,2)$	8
$C(2,3)$	11
$D(1,3)$	7

הערך הגדול ביותר הוא 11 המתקבל בנקודה $C(2,3)$.
הערך הקטן ביותר הוא 5 המתקבל בנקודה $A(1,2)$.

ג)

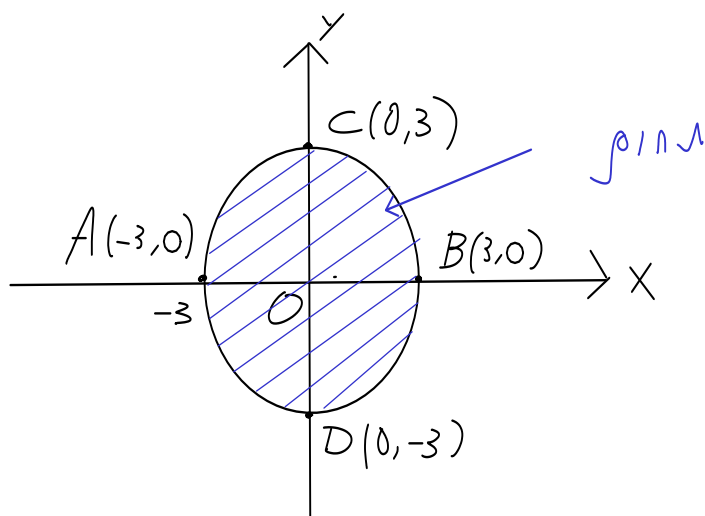


נקודה	z
$P_2 \left(1, \frac{1}{6}\right)$	$\frac{23}{12}$
$P_3 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	1
$A(1, 0)$	2
$B(1, 1)$	4
$C(0, 1)$	4

הערך הגדול ביותר הוא 4.

הערך הקטן ביותר הוא 1.

(ד)

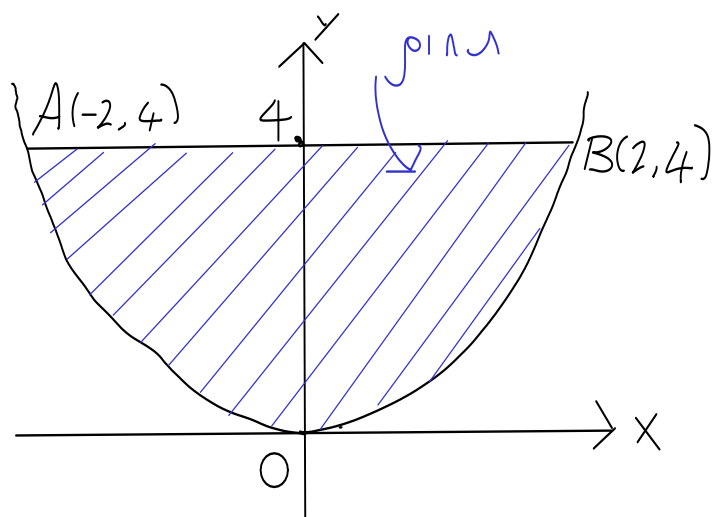


נקודה	z
$P_1(0, 1)$	e^{-1}
$C(0, 3)$	e^3
$A(-3, 0)$	e^9
$B(3, 0)$	e^9
$D(0, -3)$	e^{15}

הערך הגדול ביותר הוא e^{15} המתקבל בנקודה $D(0, -3)$.

הערך הקטן ביותר הוא e^{-1} המתקבל בנקודה $P_1(0, 1)$.

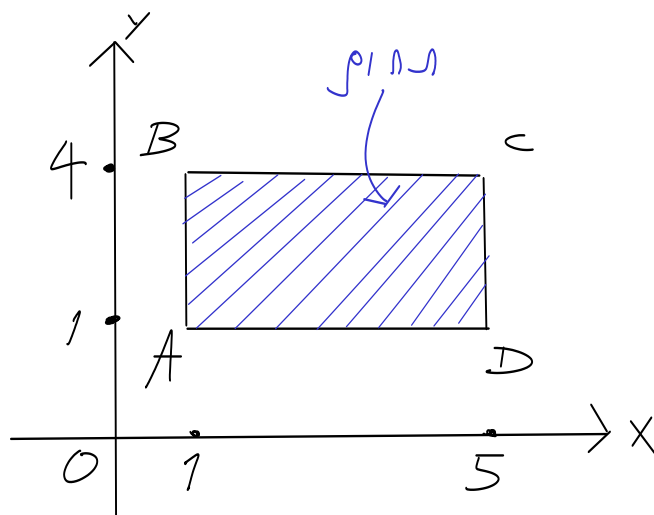
(ה)



נקודה	z
$P_1 (1, 1)$	-3
$A (-2, 4)$	24
$B (2, 4)$	8

הערך הגדול ביותר הוא 24.
הערך הקטן ביותר הוא -3.

ו



נקודה	z
$A(1, 1)$	71
$B(1, 4)$	59
$C(5, 4)$	35
$D(5, 1)$	35
$P_1(5, 2)$	30
$P_2\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, 4\right)$	$5 + 20\sqrt{2}$
$P_3(5, 2)$	30

הערך הגדול ביותר הוא 71.

הערך הקטן ביותר הוא 30.

שאלה 6

(א) ערך הגדול ביותר: $\frac{25}{24}$.

(ב) ערך הקטן ביותר: $-\frac{1}{2}$.
ערך הגדול ביותר: $\frac{1}{2}$.

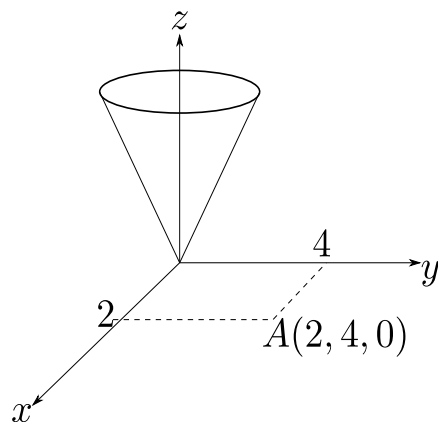
(ג) ערך הקטן ביותר: -2 .
ערך הגדול ביותר: 2 .

(ד) ערך הקטן ביותר: $-\sqrt{2}$ בנקודה $P_1\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.
ערך הגדול ביותר: $\sqrt{2}$ בנקודה $P_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(ה) ערך הקטן ביותר: -5 בנקודה $P_1(2, -2)$.
ערך הגדול ביותר: -1 בנקודה $P_2(0, 0)$.

שאלה 7

(א)



$$(1, 2, \sqrt{5})$$

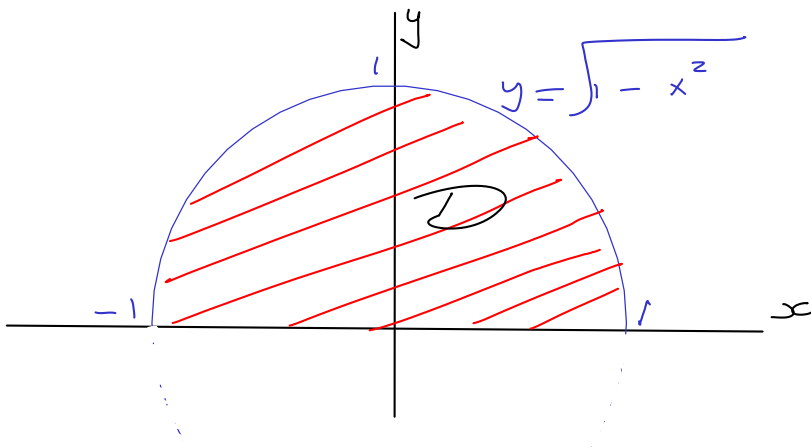
$$\left(\frac{1}{7}, \frac{4}{7}, \frac{12}{7}\right) \quad \text{ב)}$$

ג)

$$d(P_1) = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}, \quad d(P_2) = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

P_1 הנקודה הקרובה ביותר, P_2 הנקודה הרחוקה ביותר.

שאלה 8



$$z'_x = 0 \Rightarrow 8 - 8y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm 1$$

$$z'_y = 0 \Rightarrow 8y - 16xy = 0 \Rightarrow 8y(1 - 2x) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ או } x = 0.5.$$

שים לב, עבור בעיות של מקסימום ומינימום של פונקציה $z(x, y)$ בתחום סגור, אין צורך להתעסק עם מטריצת ההסיאן, אלא בודקים את הערך של z בכל אחד של הנקודות הקריטיות המתקבלות אשר נמצאות בתוך התחום, ובנוסף בודקים את המקסימום והמינימום של הפונקציה על השפות של התחום.

נקודת קריטית מתרחשת רק כאשר $z'_x = 0$ ו- $z'_y = 0$ בו זמנית, וזה מתרחשת כאשר $x = 0.5$ ו- $y = \pm 1$.
הערך $y = -1$ נמצאו מחוץ לתחום $(y$ חיובי בתוך $D)$. הנקודה $(0.5, 1)$ גם אינה נמצאות בתוך התחום D .

$$\underline{y = 0}$$

כאשר $y = 0$, הפונקציה $z(x, y)$ שווה

$$z(0, x) = 8x .$$

הנגזרת החלקית לפי x אינה שווה אפס באף נקודה בתוך התחום, אז נקודות קריטיות לא קיימות על הקבוצת נקודות $y = 0$ הנמצאות בתוך התחום.

בשתי נקודות קצה

$$x = \pm 1, y = 0 ,$$

ולכן

$$z(1, 0) = 8 , \quad z(-1, 0) = -8 .$$

נקודות קריטיות על השפה העליונה של התחום

בודקים את המקסימום והמינימום של הפונקציה על השפה העליונה, שבו $y = \sqrt{1 - x^2}$. מציבים זה בתוך הפונקציה $z(x, y)$ ומקבלים

$$z\left(x, \sqrt{1 - x^2}\right) = 8x + 4(1 - x^2) - 8x(1 - x^2) = 8x + 4 - 4x^2 - 8x + 8x^3 = 4 - 4x^2 + 8x^3 .$$

מקבלים ביטוי במונחים של x בלבד. נקח את הנגזרת ומשווא אותה לאפס:

$$z'_x = -8x + 24x^2 = -8x(1 - 3x) = 0 ,$$

כך ש $x = 0$ או $x = \frac{1}{3}$. שים לב, לערכים האלה של x נתאימים ערכים של y על השפה $y = \sqrt{1 - x^2}$:

$$x = 0 \Rightarrow y = 1 , \quad x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{8}{9}} .$$

לכן מוצאים את הנקודות

$$z(0, 1) = 4 , \quad z\left(\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{8}{9}}\right) = 3.85185 .$$

בסך הכל מוצאים את נקודות קריטיות הבאות:

$P_1(1, 0)$	$z_1 = 8$
$P_2(-1, 0)$	$z_2 = -8$
$P_3(0, 1)$	$z_3 = 4$
$P_4\left(\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{8}{9}}\right)$	$z_4 = 3.85185$

עכשיו רואים כי הקסימום והמינימום של הפונקציה z בתחום סגור הנתון D הינם

$$z_{\max} = 8, \quad z_{\min} = -8.$$

שאלה 9 הוקטור \overline{PM} הינו

$$\overline{PM} = (1 - (-1), 3 - 1, 5 - 0) = (2, 2, 5)$$

הגודל הינו

$$|\overline{PM}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{33}.$$

הגרדיאנט של f הוא:

$$\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (\cos(6z) \cdot 3x^2, \cos(6z) \cdot 8y, -6 \cdot \sin(6z) (x^3 + 4y^2))$$

לכן בנקודה P :

$$\nabla f(P) = (\cos(0) \cdot 3 \cdot (-1)^2, \cos(0) \cdot 8 \cdot 1, -6 \cdot \sin(0) ((-1)^3 + 4 \cdot 1^2)) = (3, 8, 0)$$

הנגזרת הכיוונית של f בכיוון \overline{PM} היא המכפלת סקלרית של $\nabla f(P)$ עם הוקטור \overline{PM} לחלק גודלו של וקטור $|\overline{PM}|$:

$$\frac{\nabla f(P) \cdot \overline{PM}}{|\overline{PM}|} = \frac{(3, 8, 0) \cdot (2, 2, 5)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 5^2}} = \frac{6 + 16 + 0}{\sqrt{33}} = 3.83.$$

שאלה 10 לפי הנוסחה המשוואה של מישור המשיק למשטח בנקודה $P(x_0, y_0, z_0)$ הינה

$$f'_x(P)(x - x_0) + f'_y(P)(y - y_0) + f'_z(P)(z - z_0) = 0.$$

נחשבו את הנגזרות של f :

$$f'_x = e^z \cdot 6x, \quad f'_y = e^z \cdot 4y^3, \quad f'_z = e^z (y^4 + 3x^2).$$

לכן אחרי להציב את הקואורדינטות של הנקודה $P(1, 3, 4)$ נקבל

$$f'_x(P) = 6e^4 = 327.589, \quad f'_y(P) = 108 \cdot e^4 = 5896.6, \quad f'_z(P) = 84 \cdot e^4 = 4586.24.$$

לכן משוואת המישור המשיק למשטח בנקודה P הוא

$$327.589(x - 1) + 5896.6(y - 3) + 4586.24(z - 4) = 0.$$

שאלה 11אקסטרימומים מקומיים

$$f'_x = -6 + 8x \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{3}{4}$$

$$f'_y = -16 + 8y \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 2$$

$$f''_{xx} = 8, \quad f''_{yy} = 8, \quad f''_{xy} = 0, \quad \Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 = 64 > 0$$

לכן $f''_{xx}(P_0) > 0$ ו- $\Delta(P_0) > 0$ לכן $P_0 = (\frac{3}{4}, 2)$ נקודת מינימום.

$$f(P_0) = f\left(\frac{3}{4}, 2\right) = -\frac{97}{4}.$$

ערך גדול וקטן ביותר על השפה

נבדוק ערכים גדול וקטן ביותר על השפה של חצי המעגל העליונה שבו $y = \sqrt{9 - x^2}$:

$$f_{\text{שפה מעגל עליונה}}(x) = f(x, y = \sqrt{9 - x^2}) = -16\sqrt{9 - x^2} - 6x + 30.$$

$$\begin{aligned} f'_{\text{שפה מעגל עליונה}}(x) = \frac{16x}{\sqrt{9 - x^2}} - 6 \stackrel{!}{=} 0 & \Rightarrow 6\sqrt{9 - x^2} = 16x \Rightarrow 36(9 - x^2) = 256x^2 \\ \Rightarrow 324 = 292x^2 & \Rightarrow x = \frac{18}{2\sqrt{73}} = \frac{9}{\sqrt{73}}. \end{aligned}$$

(נשים לב כי x חייב להיות חיובי)

$$f_{\text{שפה מעגל עליונה}}\left(x = \frac{9}{\sqrt{73}}\right) = 30 - 6\sqrt{73} = -21.264.$$

נבדוק ערכים גדול וקטן ביותר על השפה של חצי המעגל התחתונה שבו $y = \sqrt{9 - x^2}$:

$$f_{\text{שפה מעגל תחתונה}}(x) = f(x, y = \sqrt{9 - x^2}) = 16\sqrt{9 - x^2} - 6x + 30.$$

$$\begin{aligned} f'_{\text{שפה מעגל תחתונה}}(x) = -\frac{16x}{\sqrt{9 - x^2}} - 6 \stackrel{!}{=} 0 & \Rightarrow 6\sqrt{9 - x^2} = -16x \Rightarrow 36(9 - x^2) = 256x^2 \\ \Rightarrow 324 = 292x^2 & \Rightarrow x = -\frac{18}{2\sqrt{73}} = -\frac{9}{\sqrt{73}}. \end{aligned}$$

(נשים לב כי x חייב להיות שלילי)

$$f_{\text{שפה מעגל תחתונה}}\left(x = -\frac{9}{\sqrt{73}}\right) = 30 + 6\sqrt{73} = 81.264.$$

ערך גדול וקטן ביותר בפינות

$$f(3, 0) = 12$$

$$f(-3, 0) = 48$$

$$f(0, 3) = -18$$

$$f(-3, 0) = 78$$

בס"ה מכל אלה הערך הגול ביותר הוא 81.264 וערך הקטן ביותר הוא -21.264.

שאלה 12 $f(x, y) = -6y^2 - y - 6x^2 + 14x + 2$ בתחום $x^2 + y^2 \leq 16$.

אקסטרמומים מקומיים

$$f'_x = 14 - 12x \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{7}{6}$$

$$f'_y = -12y - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = -\frac{1}{12}$$

$$f''_{xx} = -12, \quad f''_{yy} = -12, \quad f''_{xy} = 0, \quad \Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 144 > 0$$

לכן $f''_{xx}(P_0) < 0$ ו- $\Delta(P_0) > 0$ לכן $P_0 = \left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{12}\right)$ נקודת מקסימום.

$$f(P_0) = f\left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{12}\right) = \frac{245}{24}.$$

ערך גדול וקטן ביותר על השפה

נבדוק ערכים גדול וקטן ביותר על השפה של חצי המעגל העליונה שבו $y = \sqrt{16 - x^2}$:

$$f(x) = f(x, y = \sqrt{16 - x^2}) = -\sqrt{16 - x^2} + 14x - 94.$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} + 14 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = -14\sqrt{16 - x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 196(16 - x^2)$$

$$\Rightarrow 197x^2 = 196 \cdot 16 \quad \Rightarrow \quad x = -\sqrt{\frac{196 \cdot 16}{197}} = -\frac{14 \cdot 4}{\sqrt{197}} = -\frac{56}{\sqrt{197}}.$$

(נשים לב כי x חייב להיות חיובי)

$$f\left(x = -\frac{56}{\sqrt{197}}\right) = -4\sqrt{197} - 94 = -150.143.$$

נבדוק ערכים גדול וקטן ביותר על השפה של חצי המעגל התחתונה שבו $y = -\sqrt{16 - x^2}$:

$$f(x) = f(x, y = -\sqrt{16 - x^2}) = \sqrt{16 - x^2} + 14x - 94.$$

$$f'(x) = 14 - \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 14\sqrt{16-x^2} \Rightarrow x^2 = 196(16-x^2)$$

$$\Rightarrow 197x^2 = 196 \cdot 16 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{196 \cdot 16}{197}} = \frac{14 \cdot 4}{\sqrt{197}} = \frac{56}{\sqrt{197}}.$$

(נשים לב כי x חייב להיות שלילי)

$$f\left(x = \frac{56}{\sqrt{197}}\right) = 4\sqrt{197} - 94 = -37.8573.$$

ערך גדול וקטן ביותר בפינות

$$f(4, 0) = -38$$

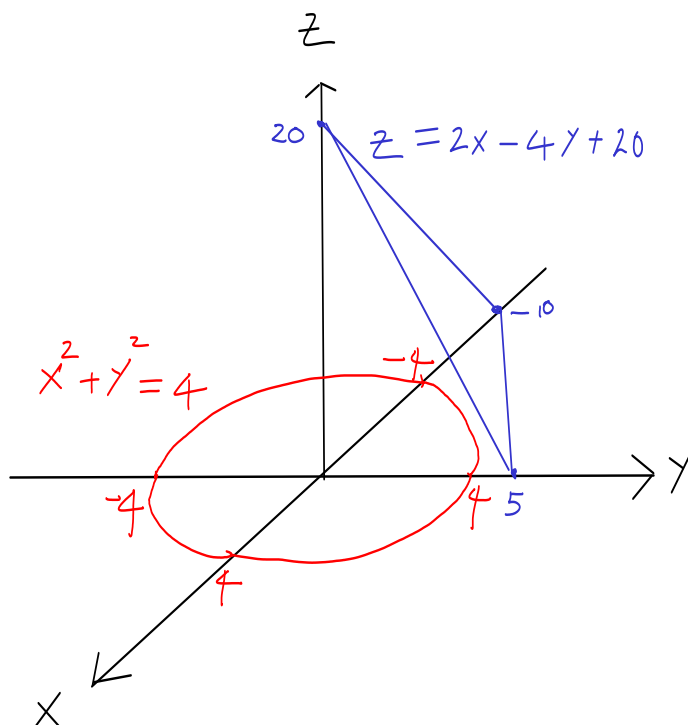
$$f(-4, 0) = -150$$

$$f(0, 4) = -98$$

$$f(-4, 0) = -90$$

בס"ה מכל אלה הערך הגול ביותר הוא $\frac{245}{24} = 10.2083$ וערך הקטן ביותר הוא -150.143 .

שאלה 13



המרחק בין נקודה למישור נתון על-ידי

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2x - 4y - z + 20|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2}}.$$

נציב $z = 0$ (מכיוון שהמעגל במישור xy) ונשתמש בשיטה של כופלי לגרנז' בכדי למצוא מינימום של המרחק תחת האילוץ $x^2 + y^2 - 4 = 0$ בכדי למצוא את הנקודה המבוקשת. למעשה, בכדי למצוא את הנקודה הקרובה ביותר, מספיק להשתמש בפונקציה המטרה $f(x, y) = 2x - 4y + 20 = 0$. נגדיר פונקציה לגרנז'

$$L(x, y, \lambda) = (2x - 4y + 20) - \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

נרשמו את מערכת המשוואות $\nabla L = \vec{0}$:

$$\begin{aligned} 2 &= 2\lambda x \\ -4 &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

משתי המשוואות הראשונות נובע שבנקודה קריטית מתקיים $x, y, \lambda \neq 0$. בנוסף, מתקיים כי $x = \frac{1}{\lambda}$ ו- $y = -\frac{2}{\lambda}$. על ידי הצבה במשוואת המעגל, נקבל

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^2} = 4 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

כלומר, מתקבלות שתי נקודות "חשודות"

$$P\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}, 0\right), \quad Q\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}, 0\right).$$

על ידי הצבה בפונקציה המרחק מוצאים שהנקודה הקרובה ביותר היא

$$P\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

בעוד הרחוקה ביותר ביותר היא

$$Q\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}, 0\right).$$

שאלה 14 לפי משפט ?? קצב עלייה של המשטח בנקודה $(0, 0)$, הנקודה שממנה יוצא הוקטור \vec{OP} , הוא $\nabla z(O)$. הנקודה בשאלה היא נקודה הנמצאת על המעגל $x^2 + y^2 = 9$.

$$\nabla z = z'_x \hat{i} + z'_y \hat{j} = (2x + 4)\hat{i} - 4\hat{j}$$

ולכן בנקודה O ,

$$\nabla z(O) = 4\hat{i} - 4\hat{j}.$$

לכן הכיוון שבו $\frac{dz}{ds}$ יהיה מקסימלי הוא $(4, -4)$. הישר בעל וקטור כיוון $(4, -4)$ הוא

$$x = 4t, y = -4t \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 0 \Rightarrow y = -x.$$

נקודת חיתוך של הישר הזה והמעגל $x^2 + y^2 = 9$ הוא

$$P = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

שאלה 15 הנגזרת מכוונת, אשר מוגדרת להיות

$$\frac{dz}{d\vec{OP}} = \nabla z \cdot \vec{OP},$$

תהיה מקסימלית כאשר הזווית בין הוקטור \vec{OP} ובין הוגרדיאנט ∇z שווה אפס, כלומר כאשר \vec{OP} ו- ∇z מקבילים. הגרדיאנט של z בנקודה $(0, 0)$ הינו

$$\nabla z|_{x=0, y=0} = (y + 2x + 2, x - 4)|_{x=0, y=0} = (2, -4)$$

הזנב של וקטור \vec{OP} נמצא בראשית הצירים $(0, 0)$ והראש בנקודה $P(x_0, y_0)$ על המעגל מרדיוס 1. לכן יש לו את הקואורדינטות

$$\vec{OP} = (x_0 - 0, y_0 - 0) = (x_0, y_0).$$

אבל \vec{OP} גם מקביל ל- ∇z , לכן נחפש וקטור בעל כיוון $(2, -4)$ ואורך 1. נכתוב

$$\vec{OP} = (2t, -4t)$$

כך ש $|\vec{OP}| = 1$:

$$|\vec{OP}| = \sqrt{(2t)^2 + (-4t)^2} = \sqrt{4t^2 + 16t^2} = \sqrt{20t^2} = 2\sqrt{5}t = 1$$

(שים לב האורך חייב להיות חיובי), לכן $t = \frac{1}{2\sqrt{5}}$. נציב ונקבל

$$\vec{OP} = (2t, -4t) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

סך הכל הנקודה הינה

$$P(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

הזווית בין הישר \vec{OP} ו- $y = x$ היא הזווית בין הוקטור \vec{OP} , כלומר $(2, -4)$, ובין יקטור הכיוון של הישר $y = x$, כלומר $(1, 1)$:

$$\cos \alpha = \frac{(2, -4) \cdot (1, 1)}{|(2, -4)| |(1, 1)|} = \frac{(2, -4) \cdot (1, 1)}{|(2, -4)| |(1, 1)|} = \frac{-2}{\sqrt{2^2 + (-4)^2} \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{-2}{\sqrt{20} \sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{10}}$$

ולכן

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{-1}{\sqrt{10}} \right) = 108.4349488^\circ.$$

שאלה 16 נרשום משוואת המשטח בצורה $f(x, y, z) = x^3 - ax + 2y^3 - by + xy - z = 0$

$$\nabla f = (3x^2 - a + y, 6y^2 - b + x, -1).$$

נורמל למישור בנקודה $x = 1, y = 1$:

$$\vec{n} = (4 - a, 7 - b, -1).$$

הנרמול של המישור $z = 5x + 3y + 11$ הוא $n_1 = (5, 3, -1)$.

$$n \parallel n_1 \Rightarrow (4 - a, 7 - b, -1) = t(5, 3, -1) \Rightarrow t = 1.$$

$$\left. \begin{array}{l} 4 - a = 5 \\ 7 - b = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -1, b = 4.$$

תשובה סופית: $a = -1, b = 4$.

שאלה 17 נציג את משוואת המשטח השני בצורה שקולה

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 9$$

שזו משוואת הכדור שמרכזו בנקודה $C(1, 3, 0)$. הנקודות הנדרשות נמצאות על הישר העובר דרך נקודת C במאונך למישור $2x + y + 2z + 10 = 0$. משוואת הישר היא:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 0 + 2t \end{array} \right\}.$$

כדי למצוא את הנקודה על המישור נציב במשוואת המישור את הביטויים מהמשוואה :

$$2(1 + 2t) + 3 + 2(2t) + 10 = 0$$

ונמצא

$$t = -\frac{5}{3}.$$

נציב במשוואת הישר ונמצא :

$$x = -\frac{7}{3}, \quad y = \frac{4}{3}, \quad z = -\frac{10}{3}.$$

כדי למצוא את הנקודה על הכדור נציב במשוואת הכדור את הביטויים ממשוואת הישר :

$$(2t)^2 + t^2 + (2t)^2 = 9 \Rightarrow t = -1.$$

נציב במשוואת הישר ונקבל את התשובה :

$$x = -1, \quad y = 2, \quad z = -2.$$

תשובה סופית - נקודה על המישור:

$$x = -\frac{7}{3}, \quad y = \frac{4}{3}, \quad z = -\frac{10}{3}.$$

נקודה על המשטח:

$$x = -1, \quad y = 2, \quad z = -2.$$

שאלה 18

(א) תשובה סופית: $\frac{dz(A)}{dAB} = \frac{2}{5}$.

(ב) תשובה סופית: לא.

שאלה 19(א) הנקודה $(1, 0)$ מינימום מקומי.(ב) ערך הגדול ביותר: e^{10} בנקודה $(-2, 0)$.
ערך הקטן ביותר: e בנקודה $(1, 0)$.**שאלה 20** 57.7° **שאלה 21**היא המבוקשת הנקודה היא $\left(\frac{32}{17}, -\frac{2}{17}, \frac{31}{17}\right)$.**שאלה 22** ערך הקטן ביותר: -2 .ערך הגדול ביותר: 2 .