

שעור 4

דטרמיננטות וכלל קרמר

4.1 הגדרה של דטרמיננטה של מטריצה ריבועית

נדון רק במטריצה ריבועית.

הדטרמיננטה של מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, תסומן $\det A$ או $|A|$, היא מספר ממשי. באופן דומה, הדטרמיננטה של מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, היא מספר מורכב.

הגדרה 4.1 דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר 2×2

נתונה מטריצה $A \in \mathbb{F}^{2 \times 2}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

הדטרמיננטה של A מוגדרת

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

דוגמה 4.1 דטרמיננטה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad |A| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

■

הגדרה 4.2 דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר 3×3

נתונה מטריצה $A \in \mathbb{F}^{3 \times 3}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ניצן לחשב את הדטרמיננטה של A ע"י כל אחת מהשורות או ע"י כל אחת מהעמודות:

שורה 1:

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

שורה 2:

$$|A| = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

שורה 3:

$$|A| = a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

עמודה 1:

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} .$$

עמודה 2:

$$|A| = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} .$$

עמודה 3:

$$|A| = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} .$$

דוגמה 4.2 דטרמיננטה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} ,$$

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} .$$

$$= 1 \cdot (4 \cdot 7 - 5 \cdot 0) - 2(0 \cdot 7 - 5 \cdot 6) + 3 \cdot (0 \cdot 0 - 4 \cdot 6)$$

$$= 28 + 60 - 72 ,$$

$$= 16 .$$

הגדרה 4.3 המינור

נתונה מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. המינור ה- (i, j) של A מסומן ב- M_{ij} ומוגדר להיות הדטרמיננטה של המטריצה הריבועית המתקבלת מ- A ע"י מחיקת שורה i ועמודה j . את המינור ה- (i, j) נסמן ב- M_{ij} .

דוגמה 4.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ עבור } M_{32}, M_{23}, M_{12}, M_{11} \text{ מצאו את}$$

פתרון:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 28 ,$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -30 ,$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -12 ,$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 .$$

הגדרה 4.4 הקופקטור

נתונה מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הקופקטור ה- (i, j) של A מסומן ב- C_{ij} ומוגדר להיות המינור ה- (i, j) כפול $(-1)^{i+j}$:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

דוגמה 4.4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ עבור } C_{32}, C_{23}, C_{12}, C_{11} \text{ מצאו את}$$

פתרון:

$$C_{11} = (-1)^2 \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 28,$$

$$C_{12} = (-1)^3 \cdot M_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 30,$$

$$C_{23} = (-1)^5 \cdot M_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 12,$$

$$C_{32} = (-1)^5 \cdot M_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5.$$

הגדרה 4.5 דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר $n \times n$

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

הדטרמיננטה של A , מסומנת ב- $|A|$. ניתן לחשב את הדטרמיננטה לפי שורה i :

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij},$$

כאשר M_{ij} המינור ה- (i, j) של A ו- C_{ij} הקופקטור ה- (i, j) של המטריצה A . ניתן לחשב את הדטרמיננטה לפי עמודה j :

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij}.$$

למעשה, ניתן לחשב את $|A|$ לפי שורה כלשהי או לפי עמודה כלשהי.

דוגמה 4.5

נסמן $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, מצאו את הדטרמיננטה של המטריצה.

פתרון:

$$\begin{aligned} |A| &\stackrel{\text{שורה ראשונה}}{=} 1 \cdot M_{11} - 5 \cdot M_{12} + 0 \cdot M_{13} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -2. \end{aligned}$$

נשתעשע....

$$\begin{aligned} |A| &\stackrel{\text{שורה שנייה}}{=} -2 \cdot M_{21} + 4 \cdot M_{22} - (-1) \cdot M_{23} \\ &= -2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A| &\stackrel{\text{עמודה שלישית}}{=} 0 \cdot M_{13} - (-1) \cdot M_{23} + 0 \cdot M_{33} \\ &= 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -2. \end{aligned}$$

הערה:

סימני האיברים הם כך:

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

דוגמה 4.6

חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{aligned}
 |A| &\stackrel{\text{עמודה ראשונה}}{=} 3 \cdot M_{11} - 0 \cdot M_{21} + 0 \cdot M_{31} - 0 \cdot M_{41} + 0 \cdot M_{51} - 0 \cdot M_{61} \\
 &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= 6 \cdot (-2) = -12.
 \end{aligned}$$

משפט 4.1 דטרמיננטה של מטריצה משולשית

אם $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה משולשית אז $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$, כלומר מכפלת איברי האלכסון הראשי.

הוכחה: תרגיל בית.

דוגמה 4.7

חשבו

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 19 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 19 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 19 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

משפט 4.2

אם $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית ו- B מטריצה המתקבלת מ- A ע"י הפעולה האלמנטרית:

(1) החלפת 2 שורות, אז

$$|B| = -|A|.$$

(2) הכפלת שורה בסקלר $\alpha \neq 0$, אז

$$|B| = \alpha |A|.$$

(3) הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת, אז

$$|B| = |A|.$$

הוכחה: תרגיל בית.

דוגמה 4.8

$$\cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} \text{ חשבו את}$$

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 12 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) = 12 \cdot (-3) = -36 .$$

דוגמה 4.9

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 12 & 15 & 18 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} \text{ חשבו את}$$

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 12 & 15 & 18 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 15 & 18 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1} 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 7R_1} 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2} 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 24 \cdot (-3) = -72 .$$

דוגמה 4.10

$$\begin{vmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 28 & 35 & 42 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix} \text{ חשבו את}$$

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 28 & 35 & 42 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 28 & 35 & 42 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix} = 7 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix} = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 7^3 \cdot \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \right)$$

$$= 7^3 \cdot (1 \cdot (50 - 48) - 2 \cdot (40 - 42) + 3 \cdot (32 - 35))$$

$$= 7^3 \cdot (-3) = -1029. .$$

משפט 4.3

$$|\alpha A| = \alpha^n \cdot |A|$$

כאשר A מסדר $n \times n$.

הוכחה: תרגיל בית.

הערה:

כל מטריצה ריבועית A (מסדר $n \times n$) ניתן להעביר למטריצה מדורגת B ע"י ביצוע מספר סופי של פעולות שורה אלמנטריות מסוג החלפת 2 שורות והוספת שורה אחת לשורה אחרת (בלי פעולת הכפלת שורה בסקלר $\alpha \neq 0$).
לכן

$$|A| = (-1)^k |B|$$

כאשר k הוא מספר החלפות השורות שביצענו. כמו כן מאחר ו- B משולשית עליונה,

$$|B| = b_{11} \cdot b_{22} \cdot \dots \cdot b_{nn} .$$

משפט 4.4

תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מתקיים:

$$|A^t| = |A| .$$

הוכחה: תרגיל בית.

דוגמה 4.11

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} , \quad |A| = -2 ,$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} , \quad |A^t| = -2 .$$

משפט 4.5 משפט המכפלה

תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מתקיים:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| .$$

הוכחה: תרגיל בית.

דוגמה 4.12

נסמן $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. מצאו את המטריצה AB ואת הדטרמיננטות הבאות: $|A|$, $|B|$, $|AB|$.

פתרון:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 20 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}, \\ |A| &= 12 - 3 = 9, \\ |B| &= 8 - 3 = 5, \\ |AB| &= 25 \cdot 13 - 20 \cdot 14 = 45. \end{aligned}$$

משפט 4.6

תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ויהי $k \in \mathbb{N}$. מתקיים:

$$|A^k| = |A|^k.$$

הוכחה: תרגיל בית.

דוגמה 4.13

נתונה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $|A| = -2$ מהי A^{2020} ?

פתרון:

$$|A^{2020}| = \underbrace{|A \cdot A \cdots A|}_{\text{פעמים } 2020} = \underbrace{|A| \cdot |A| \cdots |A|}_{\text{פעמים } 2020} = |A|^{2020}$$

ולכן $|A^{2020}| = (-2)^{2020}$.

הגדרה 4.6 המטריצה של קופקטורים

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. נגדיר את המטריצה של קופקטורים מסדר $n \times n$:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

כאשר C_{ij} הקופקטור ה- (i, j) של A .

הגדרה 4.7 המטריצה המצורפת

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. המטריצה המצורפת של A היא מטריצה מסדר $n \times n$ שמסומנת $\text{adj}(A)$ ומוגדרת

$$\text{adj}(A) = C^t$$

כאשר C המטריצה של קופקטורים של A .

משפט 4.7 נוסחת קיילי המילטון

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. נניח ש- A הפיכה. אז

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot C^t = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A) .$$

הוכחה: מעבר לקורס הזה.

דוגמה 4.14

נתונה $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ חשבו את A^{-1} .

פתרון:

$$M_{11} = -15 \quad C_{11} = 15$$

$$M_{12} = -3 \quad C_{12} = 3$$

$$M_{13} = 6 \quad C_{13} = 6$$

$$M_{21} = -20 \quad C_{21} = 20$$

$$M_{22} = -4 \quad C_{22} = -4$$

$$M_{23} = 2 \quad C_{23} = -2$$

$$M_{31} = -7 \quad C_{31} = -7$$

$$M_{32} = -5 \quad C_{32} = 5$$

$$M_{33} = -2 \quad C_{33} = -2$$

$$C = \begin{pmatrix} -15 & 3 & 6 \\ 20 & -4 & -2 \\ -7 & 5 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -15 & 20 & -7 \\ 3 & -4 & 5 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} .$$

$$|A| = 1 \cdot (-15) + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 18 .$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -15 & 20 & -7 \\ 3 & -4 & 5 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} .$$

משפט 4.8 מטריצה הפיכה

תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

$|A| \neq 0$ אם ורק אם A הפיכה.

הוכחה: נניח ש- A הפיכה. אז קיימת A^{-1} כך ש-

$$A \cdot A^{-1} = I.$$

לכן לפי משפט 4.5:

$$|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 1.$$

כלומר $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$. לכן $|A| \neq 0$.

נניח ש- $|A| \neq 0$. נסמן את הסקלר $a = |A| \in \mathbb{F}$. מכיוון ש- $a \neq 0$ אז ההופכית קיים. זאת אומרת $a^{-1} = \frac{1}{|A|}$ קיים. לכן לפי נוסחת קיילי המילטון (משפט 4.7) A^{-1} קיימת. לכן A הפיכה. ■

דוגמה 4.15

היעזרו במשפט 4.8 לעיל וקבעו האם המטריצה הבאה הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\left| \begin{array}{cccc} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{array} \right| \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1} \left| \begin{array}{cccc} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{array} \right|$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left| \begin{array}{cccc} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{array} \right|$$

$$= 0.$$

לכן A לא הפיכה.

משפט 4.9

תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ הפיכה, אז

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

הוכחה: מתקיים $A^{-1} \cdot A = I$ ולכן $|A \cdot A^{-1}| = |I|$. לפי משפט המכפלה, $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$. נחלק ב- $|A| \neq 0$ ונקבל

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

דוגמה 4.16

נתונה $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ המקיימת $A^3 = 2A^{-1}B$, כאשר $B = \begin{pmatrix} -2 & 3e & \pi \\ 0 & 1 & 23 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. מצאו את $|A|$.

פתרון:

דרך א:

לפי הנתון $A^3 = 2A^{-1}B$, ולכן $|A^3| = |2A^{-1}B|$. לפי משפט המכפלה, $|A|^3 = |2A^{-1}| \cdot |B|$. מאחר ו- $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, נקבל $|A|^3 = 2^3 \cdot |A^{-1}| \cdot |B|$. מכאן,

$$|A|^3 = 2^3 \cdot \frac{1}{|A|} \cdot |B|,$$

ולכן

$$|A|^4 = 8 \cdot |B| = 8 \cdot 2 = 16,$$

ונקבל $|A| = \pm 2$.

דרך ב:

$$\begin{aligned} A \cdot (2A^{-1}B) &= A \cdot A^3 \Rightarrow A^4 = (A \cdot 2A^{-2})B \Rightarrow A^4 = (2 \cdot AA^{-2})B \Rightarrow A^4 = (2 \cdot I)B \\ A^4 &= 2B \Rightarrow |A^4| = |2B| \Rightarrow |A|^4 = 2^3 \cdot |B| \Rightarrow |A|^4 = 8 \cdot 2 = 16. \end{aligned}$$

דוגמה 4.17

תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. הוכח או הפרד:

$$|A + B| = |A| + |B|.$$

פתרון:

הטענה איננה נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$|A| = 0, \quad |B| = 0,$$

$$|A + B| = |I| = 1,$$

$$|A + B| \neq |A| + |B|.$$

דוגמה 4.18

תהינה $A, B \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ הפיכות, כך שמתקיים $A + 3B^t = 0$. חשבו את $|A^{-1}B^2(B^t)^{-1}|$.

פתרון:

נשים לב שלא נכון לכתוב

$$A + 3B^t = 0 \Rightarrow |A + 3B^t| = |0| \Rightarrow |A| + |3B^t| = 0.$$

נחשב

$$|A^{-1}B^2(B^t)^{-1}| = |A^{-1}| \cdot |B^2| \cdot |(B^t)^{-1}| = \frac{1}{|A|} \cdot |B|^2 \cdot \frac{1}{|B^t|} = \frac{1}{|A|} \cdot |B|^2 \cdot \frac{1}{|B|} = \frac{|B|}{|A|}.$$

לפי הנתון $A + 3B^t = 0$ ולכן

$$A = -3B^t \Rightarrow |A| = |-3B^t| \Rightarrow |A| = (-3)^5 |B^t| \Rightarrow |A| = -243 |B| \Rightarrow \frac{|B|}{|A|} = -\frac{1}{243}.$$

דוגמה 4.19

תהינה $X, Y \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ המקיימות

$$XY = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(א) האם X הפיכה?

$$(ב) \text{ עבור } X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix} \text{ מצאו את } Y.$$

פתרון:

(א) נסמן $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. לפי הנתון $XY = A$. נשים לב ש- $|A| = -6$ ולפי משפט המכפלה, $|A| = |XY| = |X| \cdot |Y|$. בפרט, $|X| \neq 0$, ולכן X הפיכה.

(ב) לפי הנתון $XY = A$. הוכחנו ש- X הפיכה, נכפול את שני האגפים משמאל בהופכית של X . נקבל $Y = X^{-1}A$. לאחר חישוב, נקבל ש-

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

לכן

$$Y = X^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ \frac{2}{3} & -2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

4.2 כלל קרמר

משפט 4.10 כלל קרמר

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית הפיכה ויהי $X \in \mathbb{F}^n$ ווקטור של משתנים:

$$A = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

לכל $b \in \mathbb{F}^n$ הפתרון היחיד למערכת $AX = b$ ניתן ע"י

$$x_i = \frac{|A_{ib}|}{|A|}$$

כאשר

$$A_{ib} = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | & | & | & \dots & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{i-1} & b & a_{i+1} & \dots & a_n \\ | & | & \dots & | & | & | & \dots & | \end{pmatrix},$$

כלומר המטריצה המתקבלת מ- A ע"י החלפת העמודה ה- i ב- b .

הוכחה: תרגיל בית.

דוגמה 4.20

פתרו את המערכת הבאה בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 2. \end{aligned}$$

פתרון:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 2 \end{aligned} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_b$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \text{ ולכן המטריצה הפיכה.}$$

$$|A_1(b)| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$x_1 = \frac{|A_1(b)|}{|A|} = \frac{0}{-2} = 0 ,$$

$$|A_2(b)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 ,$$

$$x_2 = \frac{|A_2(b)|}{|A|} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} .$$