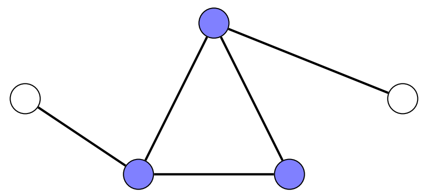
תרגילים : סיבוכיות

קליקה:

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ קליקה ב- G היא תת קבוצה של קדקודים $V \supseteq C$ כך שלכל שני קדקודים $u_1,u_2 \in C$ מתקיים $(u_1,u_2) \in E$.

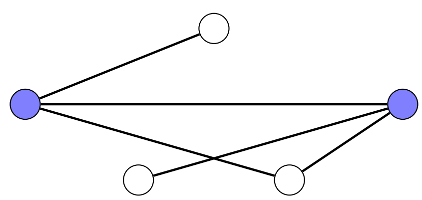
דוגמה: קליקה בגודל $k=3$



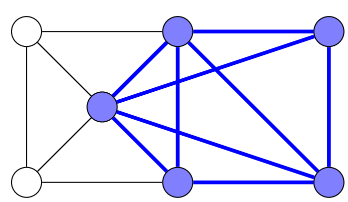
כיסוי בקדקודים:

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ כיסוי בקדקודים ב- G הוא תת קבוצה של קדקודים $V \supseteq C$ כך שלכל צלע $(u_1,u_2) \in E$ מתקיים $u_1 \in C$ או $u_2 \in C$.

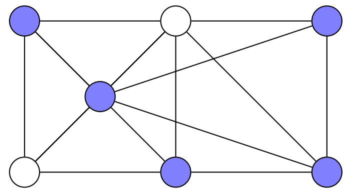
דוגמה: כיסוי בקדקודים בגודל $k=2$



דוגמה: קליקה בגודל $k=5$



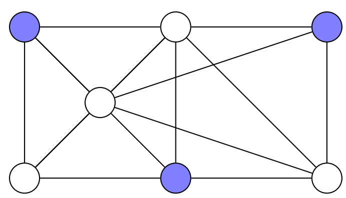
דוגמה: כיסוי בקדקודים בגודל $k=5$



<u>קבוצה בלתי תלוייה:</u>

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ קבוצה בלתי תלויה ב- G היא תת קבוצה של קדקודים $S\subseteq V$ כך שלכל שני קדקודים $(u_1,u_2)\in S$ מתקיים $(u_1,u_2)\notin E$.

<u>דוגמה: קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k=3$</u>



שאלה 1

<u>בעיית קליקה (Clique) :</u>

קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר טבעי k.

פלט: האם G מכיל קליקה בגודל k?

$$Clique=\{\langle G,k\rangle \ \big| \ G \text{ מכיל קליקה בגודל } k\} \ .$$

<u>בעיית כיסוי בקדקודים (Vertex-Cover) :</u>

קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר טבעי k.

פלט: האם G מכיל כיסוי בקדקודים k?

$$VC=\{\langle G,k\rangle \ \big| \ G \text{ מכיל כיסוי בקדקודים בגודל } k\} \ .$$

הוכיחו כי קיימת רדוקציה זמן-פולינומיאלית מבעיית Clique לבעיית Vertex-Cover. כלומר

$$\text{Clique} \le_p \text{VertexCover} \ .$$

שאלה 2

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$. קבוצת קדקודים $U \subseteq V$ תקרא **קבוצת בלתי תלויה** אם לכל זוג קדקודים u_1, u_2 ב- U מתקיים ש-

$$(u_1, u_2) \notin E \ .$$

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$. קבוצת קדקודים $U \subseteq V$ תקרא **קליקה** אם לכל זוג קדקודים u_1, u_2 ב- U מתקיים ש-

$$(u_1, u_2) \in E \ .$$

נתבונן בשפות הפורמליות הבאות:

$$IS = \left\{ \langle G, k \rangle \ \middle| \ G \text{ is an undirected graph, } k \text{ is an integer, } G \text{ includes an } \textbf{independent set} \text{ of size at least } k \right\}$$

$$CLQ = \left\{ \langle G, k \rangle \ \middle| \ G \text{ is an undirected graph, } k \text{ is an integer, } G \text{ includes an } \textbf{clique} \text{ of size at least } k \right\}$$

הוכיחו כי

$$IS \leq_P CLQ \ .$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה IS לשפה CLQ.
יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 3

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$. קבוצת קדקודים $U \subseteq V$ תקרא **קבוצת בלתי תלויה** אם לכל זוג קדקודים u_1, u_2 ב- U מתקיים ש-

$$(u_1, u_2) \notin E \ .$$

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$. קבוצת קדקודים $U \subseteq V$ תקרא **כיסוי קדקודים** ב- G אם לכל צלע $(u_1, u_2) \in E$, מתקיים ש-

$$u_1 \in U \quad \vee \quad u_2 \in U \ .$$

נתבונן בשפות הפורמליות הבאות:

$$IS = \left\{ \langle G, k \rangle \ \middle| \ G \text{ is an undirected graph, } k \text{ is an integer, } G \text{ includes an } \textbf{independent set} \text{ of size at least } k \right\}$$

$$VC = \left\{ \langle G, k \rangle \ \middle| \ G \text{ is an undirected graph, } k \text{ is an integer, } G \text{ includes a } \textbf{vertex cover} \text{ of size at least } k \right\}$$

הוכיחו כי

$$IS \leq_P VC \ .$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה IS לשפה VC.
יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 4 בעיית סכום התת קבוצה (subsetSum): בהינתן קבוצת מספרים שלמים $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ומספר שלם t, האם קיימת תת קבוצה $Y \subseteq S$ שסכום איבריה הוא בדיוק t.
בעיית סכום התת קבוצה כשפה פורמלית:

$$\text{SubsetSum} = \left\{ \langle S,t \rangle \;\middle|\; \text{קבוצת שלמים, } S \text{ שלם וקיימת תת-קבוצה } t \text{, } Y \subseteq S \text{ כך ש- } t = \sum_{y \in Y} Y \right\}$$

בעיית החלוקה (Partition): בהינתן קבוצת מספרים שלמים $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ האם קיימת תת-קבוצה $Y \subseteq S$ כך ש- $\sum_{y \in S \setminus Y} y = \sum_{y \in Y} y$.
בעיית החלוקה כשפה פורמלית:

$$\text{partition} = \left\{ S \;\middle|\; \text{קבוצת שלמים, וקיימת תת-קבוצה } S \text{ } Y \subseteq S \text{ כך ש- } \sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in S \setminus Y} y \right\}$$

הוכיחו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה SubsetSum לשפה partition. כלומר:

$$\text{SubsetSum} \leq_P \text{Partition} \;.$$

בשאלה זו עליכם:

א) להגדיר במפורש את הרדוקציה.

ב) להראות שהרדוקציה היא רדוקציית התאמה.

ג) להראות שהרדוקציה פולינומיאלית.

תשובות

<u>שאלה 1</u> בהינתן זוג $\langle G,k\rangle$ הקלט עבור Clique, ניצור זוג $\langle G',k'\rangle$ הקלט של VC ע"י פונקצית הרדוקציה f:

$$f\left(\langle G,k\rangle\right)=\langle G',k'\rangle$$

ונוכיח כי

$$\begin{aligned}\langle G,k\rangle \in \text{Clique} \quad &\Rightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in \text{VertexCover}\\ \langle G,k\rangle \in \text{Clique} \quad &\Leftarrow \quad \langle G',k'\rangle \in \text{VertexCover}\end{aligned}$$

<u>הגדרת הרדוקציה</u>

- נגדיר את $G'=(V',E')$ להיות הגרף המשלים של $G=(V,E)$,
- כלומר $V'=V$ ו- $E'=\left\{(u_1,u_2)\ \middle|\ (u_1,u_2)\notin E\right\}$.
- נגדיר $k'=|V|-k$.

<u>נכונות הרדוקציה</u>

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

נניח כי $\langle G,k\rangle \in \text{Clique}$.

$\Leftarrow$ G מכיל קליקה C בגודל k.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- C מחוברים בצלע ב- G.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- C לא מחוברים בצלע ב- G'.

$\Leftarrow$ $V\backslash C$ היא כיסוי בקדקודים ב- G' בגודל $k'=|V|-k$.

$\Leftarrow$ G' מכיל כיסוי בקדקודים בגודל k'.

$\Leftarrow$ $\langle G',k'\rangle \in \text{VertexCover}$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

נניח כי $\langle G',k'\rangle \in \text{VertexCover}$.

$\Leftarrow$ G' מכיל כיסוי בקדקודים S בגודל k'.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ש $V'\backslash S$ לא מחוברים בצלע ב- G'.

$\Leftarrow$ לפי ההגדרת הרדוקציה $V'=V$.
לכן כל שני קדקודים ש $V\backslash S$ לא מחוברים בצלע ב- G'.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ש $V\backslash S$ מחוברים בצלע ב- G.

$\Leftarrow$ $V\backslash S$ היא קליקה ב- G בגודל $k=|V|-k'$.

$\Leftarrow$ G מכיל קליקה בגודל k.

<u>שאלה 2</u> עלינו להוכיח כי $\exists$ רידוקיציית זמן-פולינומיאלית מ- IS ל- CLQ:

$$IS \leq_P CLQ \ .$$

ראשית נגדיר את הבעיות CLQ ו- IS.

<u>הגדרת הבעיית CLQ:</u>

קלט:	גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר שלם חיובי k.
פלט:	האם G מכיל קליקה בגודל לפחות k.

$$CLQ = \left\{ \langle G,k\rangle \ \middle|\ \text{מכיל קליקה בגודל } k \text{ לפחות } G \right\} \ .$$

<u>הגדרת הבעיית IS:</u>

קלט:	גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר שלם חיובי k.
פלט:	האם G מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל לפחות k.

$$IS = \left\{ \langle G,k\rangle \ \middle|\ \text{מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל } k \text{ לפחות } G \right\} \ .$$

<u>פונקצית הרדוקציה:</u>

אנחנו נגדיר פונקצית הרדוקציה R שבהינתן זוג $\langle G,k\rangle \in IS$ R מחזירה $\langle G',k'\rangle \in CLQ$, כלומר

$$R\left(\langle G,k\rangle\right) = \langle G',k'\rangle \ . \qquad (*1)$$

כך ש:

$$\langle G,k\rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in CLQ \ . \qquad (*2)$$

הפונקציית הרדוקציה במשוואה (*1) מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

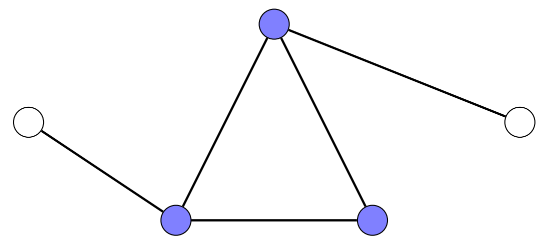
1) נניח שהגרף הוא $G=(V,E)$.
אז הגרף G' הוא הגרף המשלים של $G=(V,E)$.
ז"א $G'=\bar{G}=\left(V,\bar{E}\right)$ כאשר

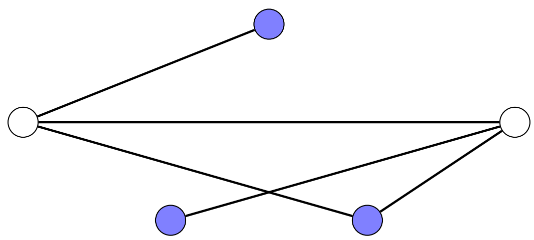
$$\bar{E} = \left\{ (u_1,u_2) \ \middle|\ (u_1,u_2) \notin E \right\} \ .$$

2) $k'=k$.

לדוגמה, בהינתן הגרף $G=(V,E)$ שמכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k=3$, הפונקציית הרדוקציה R מחזירה את הגרף $\bar{G}=(V,\bar{E})$ ואת המספר $k'=k=3$, כמתואר בתרשים למטה:

$\bar{G} = \left(V, \bar{E}\right)$ $\qquad$ $G = (V, E)$





<u>נכונות הרדוקציה</u>

כעת נוכיח שתנאי (2*) מתקיים.

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

בהינתן גרף $G = (V, E)$ ושלם k.

נניח כי $\langle G, k\rangle \in IS$.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל k לפחות.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה U בגודל k.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- U לא מחוברים בצלע של G.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- U מחוברים בצלע של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ הקבוצה U היא קליקה בגודל k של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ הקבוצה U היא קליקה בגודל $k' = k$ של $G' = \bar{G}$.

$\Leftarrow$ $\langle G', k'\rangle \in CLQ$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

בהינתן גרף G' ושלם k'.

נניח כי $\langle G', k'\rangle \in CLQ$.

$\Leftarrow$ G' מכיל קליקה בגודל k' לפחות.

$\Leftarrow$ G' מכיל קליקה U' בגודל k'.

על פי ההגדרה של הפונקציית הרדוקיה R: $G' = \bar{G}$.

$\Leftarrow$ $\bar{G}$ מכיל קליקה U' בגודל k'.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- U' מחוברים בצלע של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- U' לא מחוברים בצלע של המשלים של הגרף $\bar{G}$, דהיינו G.

$\Leftarrow$ הקבוצה U' היא קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k'=k$ של G.

$\Leftarrow$ $\langle G,k\rangle \in IS$.

<u>שאלה 3</u> עלינו להוכיח כי $\exists$ רידוקיציית זמן-פולינומיאלית מ- IS ל- VC:

$$IS \leq_P VC\ .$$

ראשית נגדיר את הבעיות VC ו- IS.

<u>הגדרת הבעיית VC:</u>

קלט:	גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר שלם חיובי k.
פלט:	האם קיים כיסוי קדקודים ב- G בגודל k לפחות.

$$VC = \left\{\langle G,k\rangle \ \middle|\ \text{מכיל כיסוי קדקודים בגודל } k \text{ לפחות } G\right\}\ .$$

<u>הגדרת הבעיית IS:</u>

קלט:	גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר שלם חיובי k.
פלט:	האם G מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל k לפחות.

$$IS = \left\{\langle G,k\rangle \ \middle|\ \text{מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל } k \text{ לפחות } G\right\}\ .$$

<u>פונקצית הרדוקציה:</u>

אנחנו נגדיר פונקצית הרדוקציה R שבהינתן זוג $\langle G,k\rangle \in IS$, R מחזירה $\langle G',k'\rangle \in VC$, כלומר

$$R\left(\langle G,k\rangle\right) = \langle G',k'\rangle\ . \qquad (*1)$$

כך ש:

$$\langle G,k\rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in VC\ . \qquad (*2)$$

הפונקציית הרדוקציה במשוואה (*1) מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

1) נניח שהגרף הוא $G=(V,E)$.
אז הגרף G' הוא אותו גרף $G=(V,E)$.

2) $k'=|V|-k$.

<u>נכונות הרדוקציה</u>

כעת נוכיח שתנאי (*2) מתקיים.

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

בהינתן גרף $G=(V,E)$ ושלם k.

נניח כי $\langle G,k\rangle \in IS$.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה U בגודל k לפחות.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה U בגודל k.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- U לא מחוברים בצלע ב- G.

$\Leftarrow$ $V\backslash U$ היא כיסוי קדקודים ב- G בגודל $k'=|V|-k$.

$\Leftarrow$ הגרף $G'=\bar{G}$ מכיל כיסוי קדקודים בגודל k.

$\Leftarrow$ $\langle G',k'\rangle \in VC$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

בהינתן גרף G' ושלם k'.

נניח כי $\langle G',k'\rangle \in VC$.

$\Leftarrow$ G' מכיל כיסוי קדקודים בגודל k' לפחות.

$\Leftarrow$ G' מכיל כיסוי קדקודים U' בגודל k'.

$\Leftarrow$ G מכיל כיסוי קדקודים U' בגודל k'.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- $V\backslash U'$ היא קבוצת בלתי תלוייה ב- G' בגודל $k=|V|-k'$.

$\Leftarrow$ הגרף $G=G'$ מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל k.

שאלה 4

א) נבנה פונקציית הרדוקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ שמוגדרת

$$f\left(\langle S,t\rangle\right)=\langle S'\rangle$$

כאשר $\langle S,t\rangle$ קלט של SubsetSum ו- $\langle S'\rangle$ קלט של Partition.

1) יהי $s=\sum\limits_{x\in S} x$.

2) נגדיר את הקבוצה החדשה S' על ידי הוספת האיבר $s-2t$ לקבוצה S:

$$S'=S\cup\{s-2t\}\ .$$

ב) <u>כיוון $\Leftarrow$</u>

נניח ש- $\langle S,t\rangle \in \text{SubsetSum}$.

$\Leftarrow$ קיימת תת-קבוצה $S \supseteq Y$ כך ש- $t=\sum\limits_{y\in Y} y$.

לכן:

$$\sum_{y\in(Y\cup\{s-2t\})} y = |Y| + s - 2t$$
$$= t + s - 2t$$
$$= s - t \ .$$

$$\sum_{y\in S'\setminus(Y\cup\{s-2t\})} y = |S'| - (|Y| + s - 2t)$$
$$= |S'| - |Y| - s + 2t$$
$$= |S| + s - 2t - |Y| - s + 2t$$
$$= |S| - |Y|$$
$$= s - t \ .$$

$\Leftarrow$ התת-קבוצה $Y \cup \{s-2t\}$ והתת-קבוצה $S'\setminus\big(Y \cup \{s-2t\}\big)$ מהוות חלקוה של הקבוצה S'.

$\Leftarrow$ $\langle S'\rangle \in \text{Partition}$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

נניח ש- $\langle S'\rangle \in \text{Partition}$.

$\Leftarrow$ קיימות תת-קבוצות $S'_1, S'_2 \subseteq S'$ כך שמתקיים

$$S'_1 \cup S'_2 = S' \qquad (1*)$$

ו-

$$\sum_{x\in S'_1} x = \sum_{x\in S'_2} x \ . \qquad (2*)$$

הקבוצה S קשור לקבוצה S' על ידי היחס $S' = S \cup \{s-2t\}$.
לכן

$$S'_1 \cup S'_2 = S \cup \{s-2t\} \qquad (3*)$$

ללא הגבלת כלליות אנחנו נגדיר את התת-קבוצה $S_1 \subseteq S$ של הקבוצה S להיות

$$S_1 = S'_1 \cup \{s-2t\} \ ,$$

ואנחנו נגדיר את התת-קבוצה $S_2 \subseteq S$ של הקבוצה S להיות

$$S_2 = S'_2 \ .$$

מכאן מנובע מהמשוואה (3*) ש:

$$S_1 \cup S_2 = S'_1 \cup S'_2 + \{s-2t\} = S \cup \{s-2t\} \qquad \Rightarrow \qquad S_1 \cup S_2 = S \ . \qquad (4*)$$

$\Leftarrow$ ניתן לרשום משוואה (2*) בצורה הבאה:

$$\sum_{x\in(S_1\cup\{s-2t\})} x = \sum_{x\in S_2} x \ . \qquad (5*)$$

ניתן לחלק את הסכום בצד השמאול של המשווה (5*) ולרשום אותה בצורה הבאה:

$$\sum_{x\in S_1} x+s-2t=\sum_{x\in S_2} x \ . \tag{6*}$$

נוסיף את הסכום $\sum\limits_{x\in S_1} x$ לשני האגפים של משוואה של (6*) ונקבל

$$\sum_{x\in S_1} x+\sum_{x\in S_1} x+s-2t=\sum_{x\in S_2} x+\sum_{x\in S_1} x \ . \tag{7*}$$

הסכום בצד הימין של משוואה (7*) הוא הסכום $\sum\limits_{x\in (S_1\cup S_2)} x$.

לפי המשוואה (4*), $S=S_1\cup S_2$ לכן $\sum\limits_{x\in S} x=\sum\limits_{x\in (S_1\cup S_2)} x$.

לכן הסכום בצד הימין של משוואה (7*) הוא הסכום של כל האיברים אשר בקבוצה S.

אנחנו מסמנים את הסכום הזה כ- $s=\sum\limits_{x\in S} x$. לכן ניתן לרשום את משוואה (7*) בצורה הבאה:

$$\sum_{x\in S_1} x+\sum_{x\in S_1} x+s-2t=s \ . \tag{8*}$$

אפשר לבטל s בצד שמאול ובצד ימין ולהעביר את ה- $2t$ לצד ימין ולקבל את המשוואה:

$$\sum_{x\in S_1} x+\sum_{x\in S_1} x=2t \ , \tag{9*}$$

זאת אומרת

$$2\sum_{x\in S_1} x=2t \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{x\in S_1} x=t \ . \tag{10*}$$

$\Leftarrow$ קיימת תת קבוצה $S_1\subseteq S$ של S שמקיימת את התנאי $\sum\limits_{x\in S_1} x=t$.

$\Leftarrow$ $\langle S,t\rangle\in \text{SubsetSum}$.

ג) הפונקצית הרדוקציה f, על קלט $\langle S,t\rangle$ מחזירה את הפלט $\langle S'\rangle$ כאשר $S'=S\cup\{s-2t\}$.

לכן הפונקציה מחשבת את הסכום s של כל האיברים שבקבוצה S ואז מחשבת את החיסור $s-2t$.

נסמן $n=|S|$ האורך של הקבוצה S.

אפשר לתאר את f בפסאודו-קוד באופן הבא:

שלב 1. הפונקציה f מאתחלת משתנה $s=0$.

שלב 2. הפונקציה נכנסת ללואה מעל כל האיברים שבקבוצה S ומחברת האיבר הנוכחי לערך של s כל איטרציה.

שלב 3. בסוף הפונקציה מחשבת את החיסור $s-2t$.

שלב 4. הפונקציה מחזירה את הקבוצה החדשה $S'=S\cup\{s-2t\}$.

- שלב 1 דורש צעד אחד. לכן הסיבוכיות של שלב 1 הוא $O(1)$.

- שלב 2 דורש n צעדים. לכן הסיבוכיות של שלב 2 הוא $O(n)$.
- שלב 3 דורש צעד אחד. לכן הסיבוכיות של שלב 3 הוא $O(1)$.
- שלב 4 דורש צעד אחד. לכן הסיבוכיות של שלב 4 הוא $O(1)$.

בסך הכל הסיבוכיות של הפונקציה f היא

$$O(1) + O(n) + O(1) + O(1) = O(n) \ .$$