שעור 10
שונות

10.1 לכסון אורתוגונית

הגדרה 10.1 מטריצה לכסינה אורתוגונלית

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אורתוגונלית אן קיימת מטריצה אורתוגונלית U ומטריצה אלכסונית D כך ש-

$$A = UDU^{-1} = UDU^t \ .$$

הגדרה 10.2 מטריצה סימטרית

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת מטריצה סימטרית אם

$$A = A^t \ .$$

משפט 10.1 מטריצה לכסינה אורתוגונלית היא סימטירת

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ שלכסינה אורתוגונלית היא בהכרח מטירצה סימטרית.

הוכחה: נניח כי A לכסינה אורתוגונלית.

ז"א קיימת D אלכסונית ו- U אורתוגונלית כך ש-

$$A = UDU^{-1} = UDU^t \ .$$

לפיכך

$$A^t = \left(UDU^t\right)^t = \left(U^t\right)^t D^t U^t = UDU^t = A \ .$$

■

משפט 10.2 תנאי מספיק למטירצה סימטרית

מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ היא מטירצה סימטרית אם ורק אם

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$, כאשר $(,)$ המכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^n$.

הוכחה: נניח כי A סימטרית. אזי

$$(Ax, y) = (Ax)^t y = x^t A^t y = \left(x, A^t y\right) = (x, Ay)$$

נניח כי $(Ax, y) = (x, Ay)$. נרשום

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

כאשר $a_i \in \mathbb{R}^n$ העמודות של המטריצה A.

$$(Ae_i, e_j) = (a_i, e_j) = A_{ji} = \text{רכיב ה-}(j,i)\text{ של } A$$

$$(e_i, Ae_j) = (e_i, a_j) = A_{ij} = \text{רכיב ה-}(i,j)\text{ של } A$$

לכן

$$(Ae_i, e_j) = (e_i, Ae_j) \quad \Rightarrow \quad A_{ji} = A_{ij} \quad \Rightarrow \quad A^t = A\ .$$

ז"א A סימטרית. ∎

כלל 10.1 תכונות של מספרים מרוכבים

- כל מספר $z \in \mathbb{C}$ ניתן לרשום בצורה $z = a + ib$ כאשר $a, b \in \mathbb{R}$.
- $i^2 = -1$.
- נתון מספר מרוכב $z \in \mathbb{C}$ מצורה $z = a + ib$. נגדיר הצמוד של z לפי $\bar{z} = a - ib$.
- $z \in \mathbb{R}$ אם ורק אם $\bar{z} = z$.
- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
- נתון $z \in \mathbb{C}$. הערך מוחלט של z מסומן $|z|$ ומוגדר $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.
- לכל $z, w \in \mathbb{C}$ מתקיים $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.

משפט 10.3 הערכים עצמיים של מטריצה סימטרית ממשיים

אם $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית אז כל הערכים עצמיים של A ממשיים.

הוכחה: לפי משפט הפירוק הפרימרי, ל-A יש ערכים עצמיים $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (לא בהכרח שונים).

לכל $u = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, הסקלר $a = \bar{u}Au$ ממשי:

$$\begin{aligned} a &= (u^*)^t Au = (u^*)^t A^t u && (\text{סימטרית } A) \\ &= (Au^*)^t u = u^t (Au^*) && (\text{משפט 10.2}) \\ &= u^t A^* u^* && (\text{ממשי } A) \\ &= a^*\ . \end{aligned}$$

נניח כי $u = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ ווקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ_i. אזי

$$\bar{u}Az = \bar{u}\lambda_i u = \lambda_i \bar{u}u = \lambda_i(\bar{u}, u) = \lambda_i \left(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2\right)$$

u ווקטור עצמי $\Leftarrow u \neq 0 \Leftarrow \exists\, z_k \neq 0 \Leftarrow (|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2) \neq 0$.

בנוסף $(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2)$ ממשי, ו- $\bar{u}Az$ ממשי. לכן λ_i בהכרח ממשי. ∎

משפט 10.4 מטריצה ממשית לכסינה אורתוגונלית אם"ם היא סימטרית

נתונה $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריתה ממשית. A לכסינה אורתוגונלית אם ורק אם היא סימטרית.

הוכחה: נניח כי A לכסינה אורתוגונלית.
ז"א קיימת D אלכסונית ו- U אורתוגונלית כך ש-

$$A=UDU^{-1}=UDU^t\ .$$

אזי

$$A^t=\left(UDU^t\right)^t=\left(U^t\right)^tD^tU^t=UDU^t=A\ .$$

נניח כי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית. נוכיח באמצעות אינדוקציה על n כי היא לכסינה אורתוגונלית.

<u>שלב הבסיס</u>

עבור $A\in\mathbb{R}^{1\times 1}$, כלומר $A=a$ כאשר $a\in\mathbb{R}$ סקלר.

$$A=a=UDU^t$$

כאשר $U=(1)\in\mathbb{R}^{1\times 1}$ אורתוגונלית ו- $D=(a)\in\mathbb{R}^{1\times 1}$ אלכסונית.

<u>שלב האינדוקציה</u>

נניח כי כל מטריצה סימטרית מסדר $(n-1)\times(n-1)$ לכסינה אורתוגונלית (ההנחת האינדוקציה).

לכל מטריצה קיימת לפחות ווקטור עצמי אחד.
לכן נניח כי v_1 ווקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ_1 ונניח כי $\|\mathrm{v}_1\|=1$.
A סימטרית לכן $\lambda_1\in\mathbb{R}$ (משפט 10.3).
נשלים $\{\mathrm{v}_1\}$ לבסיס של $\mathbb{R}^n$:

$$\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n\}\ .$$

נבצע התהליך של גרם שמידט כדי להמיר בסיס זו לבסיס אורתוגונלי של $\mathbb{R}^n$:

$$B=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}\ ,$$

כאשר $u_1=\mathrm{v}_1$, $u_2=\mathrm{v}_2-\dfrac{(\mathrm{v}_2,u_1)}{\|u_1\|^2}u_1$ וכן הלאה.
נגדיר

$$P=\begin{pmatrix}|&|&&|\\u_1&u_2&\cdots&u_n\\|&|&&|\end{pmatrix}\ .$$

נשים לב כי P היא המטריצה המעבר מבסיס הסטנדרטי לבסיס B.
P אורתוגונלי לכן $P^{-1}=P^t$.
נתבונן על המטריצה $P^{-1}AP=P^tAP$. נשים לב כי היא סימטרית

$$\left(P^tAP\right)^t=P^tA^t\left(P^t\right)^t=P^tA^tP=P^tAP\ .$$

והעמודה הראשונה הינה

$$P^{-1}APe_1=P^{-1}Au_1=P^{-1}\lambda_1u_1=\lambda_1P^{-1}u_1=\lambda_1\left[u_1\right]_B=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\ .$$

לפיכך $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & B \end{pmatrix}$ כאשר $\mathbb{0}$ בלוק עם $n-1$ אפסים ו- B מטריצה סימטרית מסדר $(n-1)\times(n-1)$.

לפי ההנחת האינדוקציה B לכסינה אורתוגונלית.
ז"א קיימת $U' \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ אורתוגונלית ו- $D' \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ אלכסונית כך ש- $B = U'D'U'^{-1} = U'D'U'^{t}$.

לכן

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & U'D'U'^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & U' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & U'^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & U' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & U' \end{pmatrix}^{-1}$$

נכפיל מצד שמאל ב- P ומצד ימין ב- P^{-1}:

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & U' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & U' \end{pmatrix}^{-1} P^{-1}$$

נגדיר $U = P \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & U' \end{pmatrix}$ ו- $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & D' \end{pmatrix}$. ז"א

$$A = UDU^{-1} \ .$$

נשים לב כי U אורתוגונלית ו- D אלכסונית. לפיכך A לכסינה אורתוגונלית.

■

10.2 שילוש לכיסון של מטריצה לפי פולינום מינימלי

הגדרה 10.3 צמצום של העתקה

נתון מרחב ווקטורי V ונתונה אופרטור $T: V \to V$. נניח כי $W \subset V$ תת-מרחב T-שמור של V.
נניח כי $\mathrm{v} \in V$ ווקטור של V.
נגדיר קבוצת פולינומים $S_T(\mathrm{v}, W)$ כך שכל פולינום $g \in S_T(\mathrm{v}, W)$ מקיים את התנאי

$$g(T)\mathrm{v} \in W \ .$$

הקבוצה $S_T(\mathrm{v}, W)$ תקרא המנחה T.

הגדרה 10.4

נתון $S_T(\mathrm{v}, W)$. הפולינום המתוקן של דרגה הקטנה ביותר ב- $S_T(\mathrm{v}, W)$ נקרא מנחה-T מינימלי.

משפט 10.5

נניח כי $S_T(\mathrm{v}, W)$ T conductor של v ונניח כי g המנחה-T מינימלי.

$$f \in S_T(\mathrm{v}, W) \Leftrightarrow g \mid f \ .$$

הוכחה: נניח כי $f \in S_T(\mathrm{v}, W)$. נוכיח כי $g \mid f$ דרך השלילה. ז"א נניח כי $g \nmid f$. לפי כלל אוקליד,

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \qquad \Rightarrow \qquad f(x) - q(x)g(x) = r(x) \ .$$

כאשר $\deg(r) < \deg(g) \le \deg(f)$.

$f,g\in S_T(\mathrm{v},W)$ לכן $f(T)\mathrm{v}\in W$, ו- $g(T)\mathrm{v}\in W$. לכן גם $q(T)g(T)\mathrm{v}\in W$ בגלל ש- W תת-מרחב T שמור. לפיכך $r(T)\mathrm{v}\in W$. אך $\deg(r)<\deg(g)$, בסתירה לכך ש- g הפולינום של דרגה קטנה ביותר המקיים $g(T)\mathrm{v}\in W$.

נניח כי $g\mid f$.
$f(T)\mathrm{v}=q(T)g(T)\mathrm{v} \Leftarrow f(x)=q(x)g(x) \Leftarrow$
$g(T)\mathrm{v}\in W$ לכן $q(T)g(T)\mathrm{v}\in W$ בגלל ש- W תת-מרחב T-שמור.
לכן $f(T)\mathrm{v}\in W$.

■

משפט 10.6

נניח כי $S_T(\mathrm{v},W)$ T-conductor. נניח כי g המנחה-T מינימלי ו- m_T הפולינום המינימלי של T. אז $g\mid m_T$.

הוכחה: נוכיח כי $g\mid m_T$ דרך השלילה.
נניח כי $g\nmid m_T$. לפי כלל אוקליד:

$$m_T(x)=q(x)g(x)+r(x)\ ,$$

$\deg(r)<\deg(g)\leq\deg(m_T)$.

$$0=m_T(T)=g(T)q(T)+r(T)=0+r(T)\quad\Rightarrow\quad r(T)=0$$

בסתירה לכך כי $m_T(T)$ הפולינום המינימלי.

■

משפט 10.7

$m_T\in S_T(\mathrm{v},W)$.

הוכחה: נניח כי $g(x)$ המנחה-T מינימלי. לפי משפט 10.6, $g\mid m_T$.
לכן לפי משפט 10.5, $m_T\in S_T(\mathrm{v},W)$.

■

משפט 10.8

נניח כי V מרחב ווקטורי $T:V\to V$ אופרטור. נניח כי $W\subset V$ תת מרחב T שמור. קיים $\alpha\in V\notin W$ כך ש-

$$(T-\lambda)\alpha\in W$$

כאשר λ ערך עצמי של T.

הוכחה:
נוכיח כי המנחה-T המינימלי של α ל- W הוא פולינום ליניארי.

נניח כי β כל ווקטור שב- V אבל לא ב- W, כלומר $\beta\in V\notin W$.
יהי g המנחה-T המינימלי של β ל- W.
משפט 10.6 $\Leftarrow$ $g\mid m_T$ $\Leftarrow$ $g(x)=(x-\lambda_i)h(x)$ כאשר λ_i ערך עצמי של T ו- $h(x)$ פולינום.

g הפולינום של דרגה קטנה ביותר כך ש- $g(T)\beta\in W$. לכן $\alpha=h(T)\beta\notin W$.

לכן

$$(T-\lambda_i I)\alpha = (T-\lambda_i)h(T)\beta = g(T)\beta \in W$$

בגלל ש- $g(T)$ המנחה-T המינימלי של β.

■

משפט 10.9

T לכסינה אם ורק אם m_T מתפרק לגורמים ליניאריים שונים:

$$m_T(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)\ .$$

הוכחה: נניח כי $m_T(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$.
נניח כי $W = \text{span}\{u_1,\ldots,u_k\}$ כאשר $u_1,\ldots,u_k$ הווקטורים עצמיים של T, ו- $W \neq V$.
לפי משפט 10.8 קיים $\alpha \notin W$ וערך עצמי λ_i של T כך שהווקטור $\beta = (T-\lambda_i I)\alpha \in W$.

מכיוון ש- $\beta \in W$ אז $\beta = u_1 + \ldots + u_k$, כאשר $Tu_i = \lambda_i u_i$ לכל $1 \leq i \leq k$.

לכן

(*)
$$h(T)\beta = h(\lambda_1)u_1 + \ldots + h(\lambda_k)u_k \in W\ .$$

לכל פולינום h.

(**)
$$m_T(x)\beta = (x-\lambda_i)q(x)$$

כאשר $q(x)$ פולינום.

לפי מפשט השארית,

(***)
$$q(x) = (x-\lambda_i)h(x) + q(\lambda_i)$$

כאשר $q(x)$ פולינום. לכן

(****)
$$q(T)\alpha - q(\lambda_i)\alpha = h(T)(T-\lambda_i I)\alpha = h(T)\beta$$

לפי (*), $h(T)\beta \in W$.

מכיוון ש-

$$0 = m_T(T)\alpha = (T-\lambda_i)q(T)\alpha,$$

כלומר $q(T)\alpha$ ווקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי λ_i, אז $q(T)\alpha \in W$.

לכן לפי (****), $q(\lambda_i)\alpha \in W$.

אבל $\alpha \notin W$, לכן $q(\lambda_i) = 0$.

אז לפי (**), לא כל השורשים של m_T שונים. סתירה!

■

משפט 10.10

T ניתנת לשילוש אם ורק אם m_T מתפרק לגורמים ליניאריים (לא בהכרח שונים):

$$m_T(x) = (x-\lambda_1)^{r_1}\cdots(x-\lambda_k)^{r_k} \ .$$

הוכחה: נניח כי $m_T(x) = (x-\lambda_1)^{r_1}\cdots(x-\lambda_k)^{r_k}$.
אנחנו רוצים למצוא בסיס $\beta_1,\ldots\beta_n$ כך ש-

$$[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

נדרוש כי

$$T(\beta_i) = a_{1i}\beta_1 + \ldots + a_{ii}\beta_i \ .$$

ז"א $T(\beta_i) \in \{\beta_1,\ldots,\beta_i\}$.
יהי $W=\{0\}\subset V$.
לפי משפט 10.8 $\exists\alpha\in V\notin\{0\}$ כך ש- $(T-\lambda_1)\alpha\in\{0\}$.
ז"א

$$(T-\lambda_1 I)\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad T\alpha = \lambda_1\alpha \ ,$$

ז"א α ווקטור עצמי של T.
נבחור $\alpha=\beta_1$. אז $[T(\beta_1)]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
יהי $W_1=\{\beta_1\}\subset V$. נשים לב כי W_1 תת מרחב T שמור.
לפי משפט 10.8 $\exists\alpha\in V\notin W_1$ כך ש- $(T-\lambda_2)\alpha\in W_1$.
ז"א

$$(T-\lambda_2 I)\alpha = k\beta_1 \quad \Rightarrow \quad T(\alpha) = k\beta_1 + \lambda_2\alpha \ ,$$

נבחור $\alpha=\beta_2$. אז $T(\beta_2) = k\beta_1+\lambda_2\beta_2$.
שימו לב, $\beta_2\notin W_1$ ו- $\beta_1\in W$, לכן $\{\beta_1,\beta_2\}$ בלתי תלויים ליניארית.
$[T(\beta_2)]_\beta = \begin{pmatrix} k \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
נמשיך עם התהליך הזה:
יהי $W_i=\{\beta_1,\ldots,\beta_i\}\subset V$. נשים לב כי W_i תת מרחב T שמור.
לפי משפט 10.8 $\exists\alpha\in V\notin W_i$ כך ש- $(T-\lambda_j)\alpha\in W_i$.
ז"א

$$(T-\lambda_j I)\alpha = c_1\beta_1+\ldots+c_i\beta_i \quad \Rightarrow \quad T(\alpha) = c_1\beta_1+\ldots+c_i\beta_i+\lambda_j\alpha\alpha \ .$$

שימו לב, $\alpha\notin W_i$ לכן α בלתי תלוי ליניארית מ- $\{\beta_1,\ldots,\beta_i\}$.
נבחור $\alpha=\beta_{i+1}$.

$$[T(\beta_{i+1})]_\beta = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \lambda_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

נניח כי T ניתנת לשילוש.

$\Leftarrow$ קיים בסיס עבורו המטריצה המייצגת $[T]$ לכסין.

$\Leftarrow$ הפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים (לא בהכרלח שונים).

$p \mid m \Leftarrow m$ מתפרק לגורמים ליניאריים (לא בהכרח שונים). ■