עבודה עצמית אינטגרלים משולשים

שאלה 1 חשבו את האינטגרל המשולש הבא:

$$\iiint\limits_V 4xy\,dx\,dy\,dz$$

כאשר V הוא התחום

$$V = \left\{0 \le x \le 1, \quad 0 \le x^2 \le y \le x, \quad 0 \le z \le 2 - x - y\right\} \; .$$

שאלה 2

מצאו את נפח הגוף המגבל ע"י המשטחים הנתונים:

$$z = 2x^2 + 2y^2 \;, \quad z = x^2 + y^2 \;, \quad y = x \;, \quad y = x^2 \; .$$

שאלה 3

$$I = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz\, \left(x^2 + y^2 + z\right)^3$$

כאשר

$$V = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1 \;,\; z = 0 \;,\; z = 1\right\}$$

שאלה 4

$$I = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz\, \left(x^2 + y^2\right)^2$$

כאשר

$$V = \left\{(x, y, z) \mid z = 2 \;,\; z = \frac{x^2 + y^2}{2}\right\}$$

שאלה 5 חשבו את

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-x}^{x} dy \int\limits_0^{x-y+2} x\,dz$$

ושרטטו את התחום האינטגרציה במערכת הצירים xyz. כאשר

שאלה 6 חשבו את מסה הגוף החסום ע"י המשטחים $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 49 - x^2$, $x + y = 7$ עם צפיפות המסה $\rho = \dfrac{1}{42 + 6x}$.

שאלה 7

א) חשבו אתצ האינטגרל

$$\iiint\limits_D \frac{1}{(x+y+z+1)^3}$$

בתחום החסום ע"י המישורים $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

ב) חשבו את

$$\iiint\limits_D x\,dx\,dy\,dz$$

מעל התחום

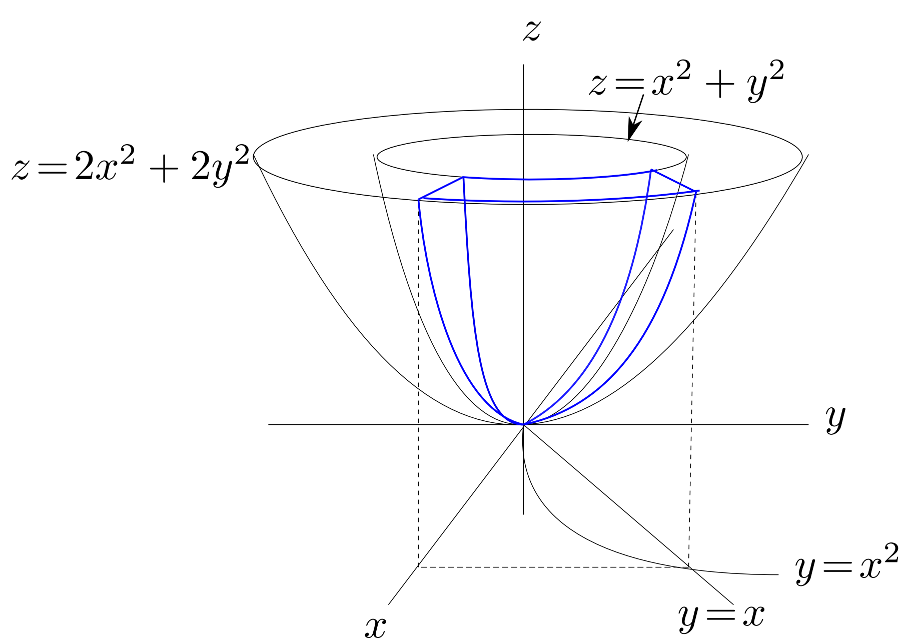
$$D=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\leq 9\ ,\ \ x\leq 0\ ,z\geq 0\right\}\ \ .$$

פתרונות

שאלה 1

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V 4xy\,dx\,dy\,dz =& 4\int_0^1 x\,dx\int_{x^2}^{x} y\,dy\int_0^{2-x-y} dz\\ =&4\int_0^1 x\,dx\int_{x^2}^{x}(2-x-y)y\,dy\\ =&4\int 1_0^x\,dx\left(y-\frac{x^5}{2}-\frac{xy^4}{2}\right)=4\int x\left(y-\frac{x^5}{2}-\frac{xy^4}{2}\right)\,dx\\ =&4\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{14}-\frac{x^6y}{6}-\frac{x^8y}{8}\right)\Bigg|_0^1=\frac{5}{21}-\frac{1}{8}\approx 0.24\end{aligned}$$

שאלה 2 התרשים מראה את הגוף במרחב xyz הנוצר ע"י המשטחים הנתונים:



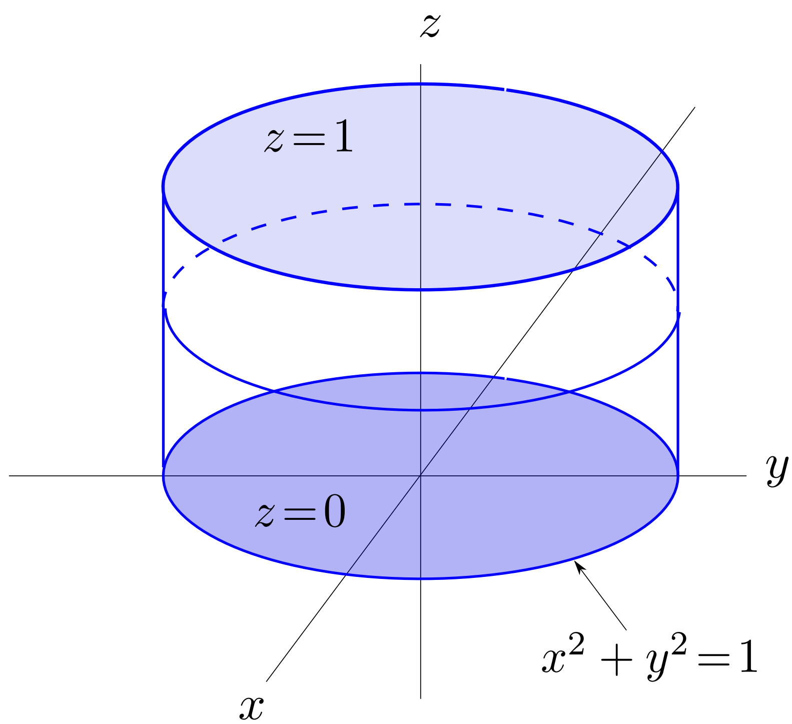
שים לב: הקווים $y = x$ ו- $y = x^2$ נחתכים בנקודות $x = 0$ ו- $x = 1$, כך שהאינטגרל הנותן את הנפח בשאלה

הוא מצורה

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 dx \ \int_{x^2}^{x} dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz \\
&= \int_0^1 dx \ \int_{x^2}^{x} dy \ \Big[z \Big]_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} \\
&= \int_0^1 dx \ \int_{x^2}^{x} dy \ \left(x^2+y^2\right) \\
&= \int_0^1 dx \ \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{x} \\
&= \int_0^1 dx \ \left(x^3 + \frac{x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) \\
&= \int_0^1 dx \ \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) \\
&= \left[\frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21} \\
&= \frac{35}{105} - \frac{21}{105} - \frac{5}{105} \\
&= \frac{9}{105} \\
&= \frac{3}{35} \ .
\end{aligned}
$$

שאלה 3

התרשים מראה שרטוט של התחום T: גליל בין המישורים $z=0$ ו- $z=1$ עם קו המדריך המעגל מרדיוס 1.



על סמך הצורה של T ניתן לכתוב את האינטגרל עם גבולות מתאימות כ-

$$I=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\;\left(x^2+y^2+z\right)^3=\int_0^1 dz\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\;\left(x^2+y^2+z\right)^3\;.$$

בכדי לבצע את האינטגרל של x ו- y ניתן לעבור לקואורדינטות פולריות, כלומר

$$I=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 dr\,r\cdot\left(r^2+z\right)^3$$

ואז ניתן לעבור למשתנה $w=r^2$, אשר עבורו $w'_r=2r$ כך שהאינטגרל הופך ל-

$$I=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 dr\,\frac{1}{2}\cdot w'_r\cdot(w+z)^3=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 dz\int_0^{2\pi} d\theta\int_{w=0}^{w=1} dw\;(w+z)^3$$

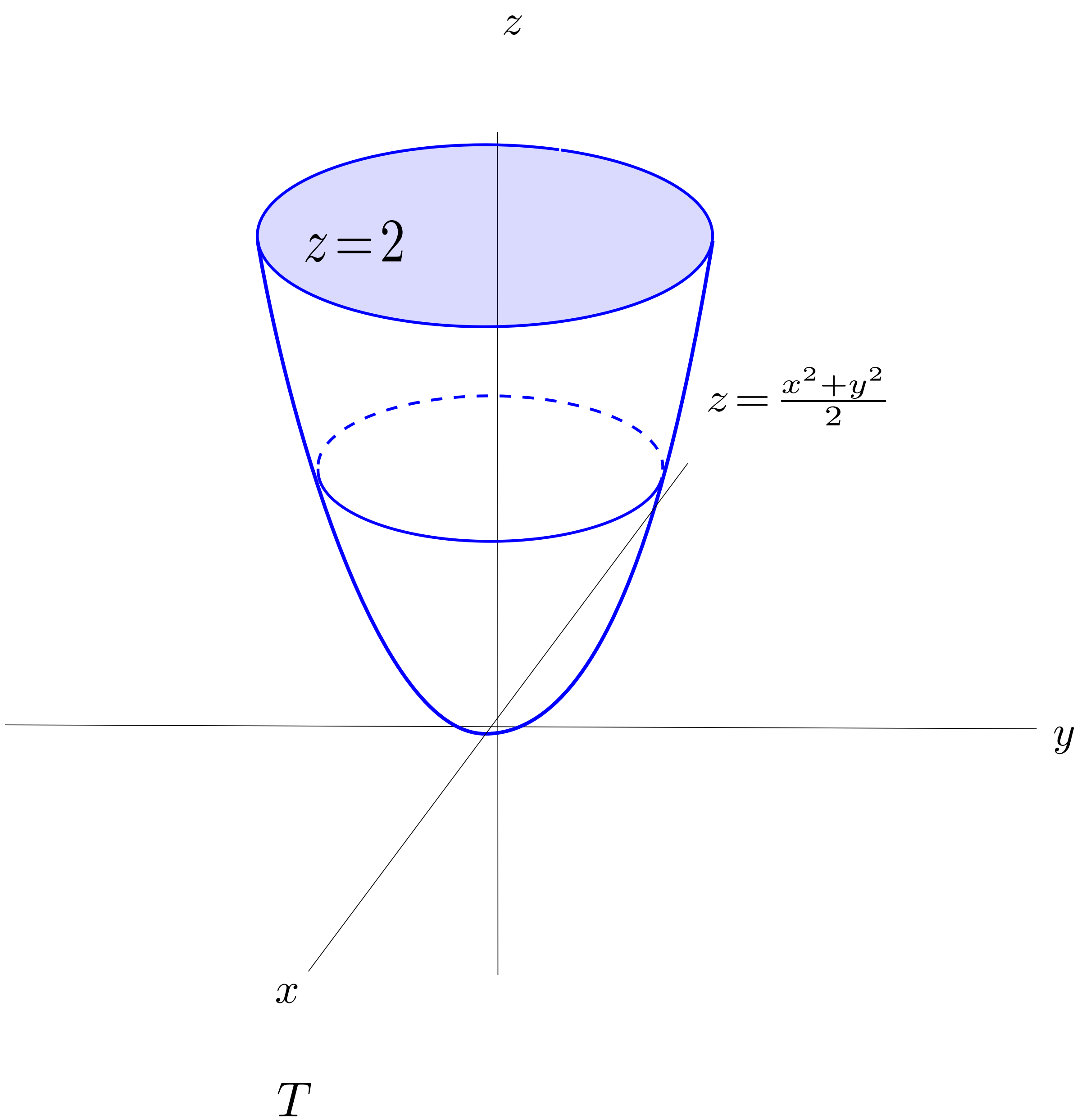
כאשר השתמשנו בשיטת אינטגרציה בהצבה. בצורה הזאת האינטגרלים של w ו- θ טריוויאלים ונקבל

$$
\begin{aligned}
I =&\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 dz\int_0^{2\pi} d\theta\,\frac{1}{4}\,\Big[(w+z)^4\Big]_{w=0}^{w=1}\\
=&\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\int_0^1 dz\int_0^{2\pi} d\theta\,\left((1+z)^4-z^4\right)\\
=&\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\int_0^1 dz\Big[\theta\Big]_0^{2\pi}\,\left((1+z)^4-z^4\right)\\
=&\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\int_0^1 dz\;2\pi\cdot\left((1+z)^4-z^4\right)\\
=&\frac{\pi}{4}\cdot\int_0^1 dz\left((1+z)^4-z^4\right)\\
=&\frac{\pi}{4}\cdot\int_0^1 dz\left(4z^3+6z^2+4z+1\right)
\end{aligned}
$$

רק נשאר האינטגרל של z:

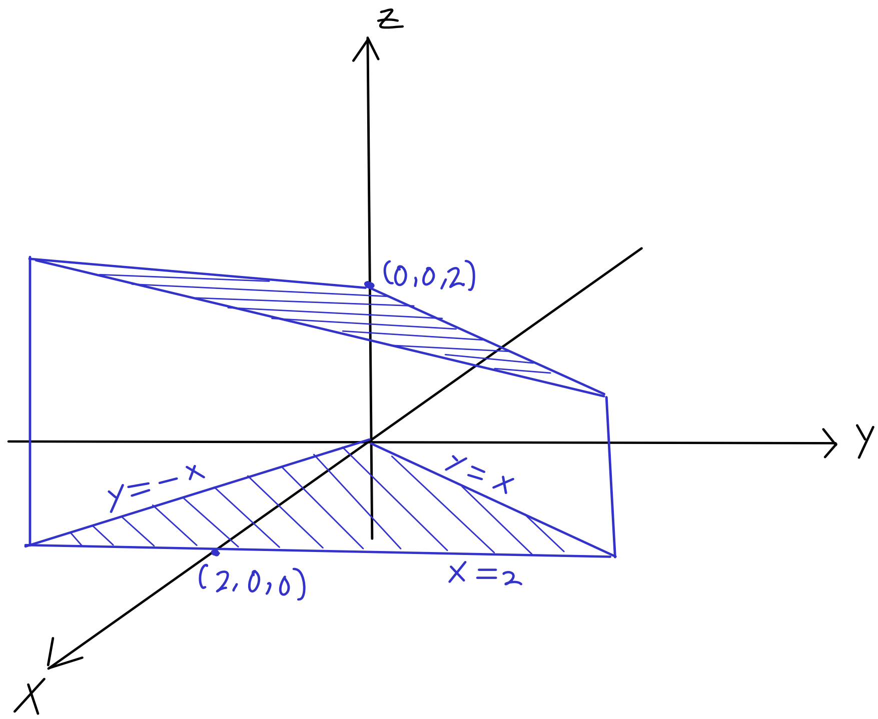
$$
\begin{aligned}
I =&\frac{\pi}{4}\cdot\int_0^1 dz\left(4z^3+6z^2+4z+1\right)\\
=&\frac{\pi}{4}\cdot\Big[z^4+2z^3+2z^2+2\Big]_0^1\\
=&\frac{7\pi}{4}\\
=&\frac{3\pi}{2}
\end{aligned}
$$

שאלה 4


z
$z=2$
$z=\frac{x^2+y^2}{2}$
y
x
T

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{2z}} dr \int_0^{2\pi} d\theta \ r \cdot r^4 \\
&= \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{2z}} dr \int_0^{2\pi} d\theta \ r^5 \\
&= \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \ \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^{\sqrt{2z}} \\
&= \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \ \frac{8z^3}{6} \\
&= \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{2z}} \ [\theta]_0^{2\pi} \ \frac{8z^3}{6} \\
&= \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{2z}} \ 2\pi \cdot \frac{8z^3}{6} \\
&= \frac{16\pi}{6} \int_0^2 dz \, z^3 \\
&= \frac{16\pi}{6} \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^2 \\
&= \frac{16\pi}{6} \cdot 4 \\
&= \frac{32\pi}{3}
\end{aligned}
$$

<u>שאלה 5</u>



$$\int_0^2 dx \int_{-x}^{x} dy \int_0^{x-y+2} x\,dz = \int_0^2 dx \int_{-x}^{x} dy x(x-y+2)$$

$$= \int_0^2 dx\, x \int_{-x}^{x} dy(x-y+2)$$

$$= \int_0^2 dx\, x \left[xy - \frac{y^2}{2} + 2y\right]_{y=-x}^{y=x}$$

$$= \int_0^2 dx\, x \left[2x^2 + 4x\right]$$

$$= \int_0^2 dx\, \left(2x^3 + 4x^2\right)$$

$$= \left[\frac{2x^4}{4} + \frac{4x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= 8 + \frac{32}{3}$$

$$= \frac{56}{3}\ .$$

<u>שאלה 7</u>

א) $\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\approx 0.034$.

ב) $\frac{15\pi}{4}\approx 11.78$.