מחלקה למדעי המחשב

20/02/25 כ"ב בשבט תשפ"ה
09 : 00 – 12 : 00

תורת המשחקים

מועד א'

מרצה: ד"ר ירמיהו מילר

תשפ"ה סמסטר א'

השאלון מכיל 11 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

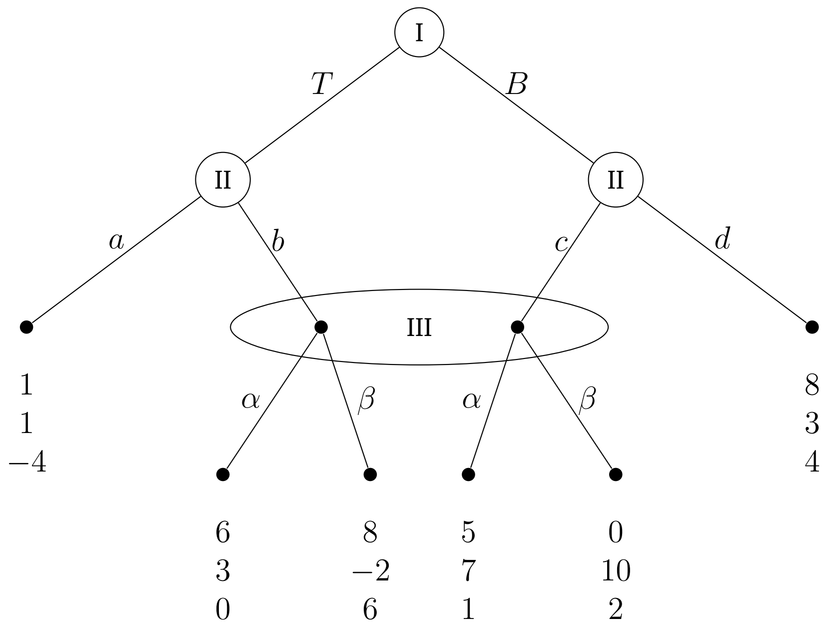
- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.

==

שאלה 1 (25 נקודות)

א) (20 נק')

מצאו את כל שיווי המשקל של המשחק הבא:



ב) (5 נק')

הטבלה למטה היא הצורה האסטרטגית של המשחק הסימטרי " אבן, נייר ומספריים", שבו לכל שחקן שלוש אסטרטגיות טהורות.

I \ II	אבן	נייר	מספריים
אבן	$\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$	$0, 1$	$1, 0$
נייר	$1, 0$	$\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$	$0, 1$
מספריים	$0, 1$	$1, 0$	$\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$

הוכיחו כי שיווי המשקל נאש היחיד במשחק זה הוא

$$\left(\left[\frac{1}{3}\,(\text{אבן}), \frac{1}{3}\,(\text{נייר}), \frac{1}{3}\,(\text{מספריים})\right] , \left[\frac{1}{3}\,(\text{אבן}), \frac{1}{3}\,(\text{נייר}), \frac{1}{3}\,(\text{מספריים})\right]\right)$$

שאלה 2 **(25 נקודות)**

נתון המשחק הבא בצורה אסטרטגית.

$I \backslash II$	L	C	R
T	$1, 2$	$3, 0$	$1, 0$
M	$0, 2$	$2, 10$	$2, 0$
B	$0, 2$	$0, 1$	$3, 3$

מצאו את כל שיווי המשקל, ואת התשלומים של כל שחקן של כל שיווי משקל.

שאלה 3

אליס מחזיקה מניות ערך בחברות הבאות: בנק לאומי, בנק הפועלים, בנק דיסקונט ובנק מזרחי. היא מתכוונת למכור מניות של חברה אחת בלבד.
בוב מתכוון לקנות מניות ערך באחת החברות הבאות: אל-על, חברת החשמל, רכבת ישראל וארקיע.
הרווחים של אליס ושל בוב עבור כל העסקאות האפשריות שלהם נתונות על ידי הצורה האסטרטגית של המשחק הבא:

אליס \ בוב	אל על	חשמל	רכבת	ארקיע
לאומי	$1, -1$	$3, -3$	$4, -4$	$6, -6$
פועלים	$2, -2$	$1, -1$	$9, -9$	$8, -8$
דיסקונט	$3, -3$	$2, -2$	$4, -4$	$5, -5$
מזרחי	$7, -7$	$6, -6$	$9, -9$	$15, -15$

נתון כי אליס ובוב משחקים את משחק זה עם אסטרטגיות טהורות בלבד.

א) **(10 נק')** אילו עסקה של אליס היא אסטרטגית מקסמין? אילו עסקה של בוב היא אסטרטגית מינמקס?

ב) (5 נק') האם קיים ערך למשחק זה? אם כן, מהו? אם לא, הסבירו מדוע.

ג) (10 נק') יהי G משחק שני שחקנים סכום אפס. יהי $\underline{\mathrm{v}}$ הערך המקסמין ויהי $\bar{\mathrm{v}}$ הערך המינמקס של המשחק. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

$$\underline{\mathrm{v}} \leq \bar{\mathrm{v}}\ .$$

שאלה 4

א) (15 נק') אליס ובוב מייצרים יין ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאלים. הם מחליטים סימולטנית על המכות שהם ייצרו, וההיצע הכולל קובע את מחיר לליטר אחד של היין, שהוא זהה לשניהם. הפרמטר הביקוש הוא $a = 6$ שקלים לליטר. עלות הייצור של ליטר אחד לאליס היא שקל אחד לליטר, ועלות הייצור לבוב הוא שני שקלים לליטר.
חשבו את שיווי המשקל במשחק זה.

ב) (10 נק') מהו התשלום של אליס והתשלום של בוב בשיווי משקל?

שאלה 5 **(25 נקודות)**

א) (15 נק')

במשחק הבא לאף שחקן אין אסטרטגיות אופטימליות טהורות.

$I \backslash II$	L	R
T	a	b
B	c	d

ב) (15 נק') הוכיחו כי

$$\min(a,d) > \max(b,c)$$

או

$$\min(b,c) > \max(a,d)\ .$$

ג) (10 נק') מצאו את הערך של המשחק.

פתרונות

שאלה 1 (25 נקודות)

א) (20 נק')

$s_{III} = \alpha$				
I \ II	a/c	a/d	b/c	b/d
T	$1,1,-4$	$1,1,-4$	$6,3,0$	$6,3,0$
B	$5,7,1$	$8,3,4$	$5,7,1$	$8,3,4$

$s_{III} = \beta$				
I \ II	a/c	a/d	b/c	b/d
T	$1,1,-4$	$1,1,-4$	$8,-2,6$	$8,-2,6$
B	$0,10,2$	$8,3,4$	$0,10,2$	$8,3,4$

$s_{III} = \alpha$				
I \ II	a/c	a/d	b/c	b/d
T	$1,1,\underline{-4}$	$1,1,\underline{-4}$	$\underline{6},\underline{3},0$	$6,\underline{3},0$
B	$\underline{5},\underline{7},1$	$\underline{8},3,\underline{4}$	$5,\underline{7},1$	$\underline{8},3,\underline{4}$

$s_{III} = \beta$				
I \ II	a/c	a/d	b/c	b/d
T	$\underline{1},\underline{1},\underline{-4}$	$1,\underline{1},\underline{-4}$	$\underline{8},-2,\underline{6}$	$\underline{8},-2,\underline{6}$
B	$0,\underline{10},\underline{2}$	$\underline{8},3,\underline{4}$	$0,\underline{10},\underline{2}$	$\underline{8},3,\underline{4}$

שיווי המשקל של המשחק:

$$s^* = (T, a/c, \beta) \ .$$

ב) (5 נק')

נרשום את המשחק באסטרטגיות מעורבות:

I \ II	$\frac{1}{3}$ (אבן)	$\frac{1}{3}$ (נייר)	$\frac{1}{3}$ (מספריים)
$\frac{1}{3}$ (אבן)	$\frac{2}{3},\frac{2}{3}$	$0,1$	$1,0$
$\frac{1}{3}$ (נייר)	$1,0$	$\frac{2}{3},\frac{2}{3}$	$0,1$
$\frac{1}{3}$ (מספריים)	$0,1$	$1,0$	$\frac{2}{3},\frac{2}{3}$

נניח כי

$$\sigma_1^* = \left[\frac{1}{3}\,(\text{אבן})\,,\frac{1}{3}\,(\text{נייר})\,,\frac{1}{3}\,(\text{מספריים})\right] \ , \qquad \sigma_2^* = \left[\frac{1}{3}\,(\text{אבן})\,,\frac{1}{3}\,(\text{נייר})\,,\frac{1}{3}\,(\text{מספריים})\right] \ .$$

שיווי המשקל של המשחק. אזי התוחלת התשלום בשיווי משקל הוא

$$\begin{aligned}U_1(\sigma_1^*,\sigma_2^*) =& \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(0)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(1)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(1)\\ &+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(0)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(0)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(1)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\\ =&\frac{5}{9}\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_2(\sigma_1^*,\sigma_2^*) =& \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(1)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(0)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(0)\\ &+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(1)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(1)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(0)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\\ =&\frac{5}{9}\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_1(\text{אבן},s_2^*) &= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)(0)+\left(\frac{1}{3}\right)(1) &= \frac{5}{9}\ .\\ U_1(\text{נייר},s_2^*) &= \left(\frac{1}{3}\right)(1)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)(0) &= \frac{5}{9}\ .\\ U_1(\text{מספריים},s_2^*) &= \left(\frac{1}{3}\right)(0)+\left(\frac{1}{3}\right)(1)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) &= \frac{5}{9}\ .\\ U_2(s_1^*,\text{אבן}) &= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)(1)+\left(\frac{1}{3}\right)(0) &= \frac{5}{9}\ .\\ U_2(s_1^*,\text{נייר}) &= \left(\frac{1}{3}\right)(0)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)(1) &= \frac{5}{9}\ .\\ U_2(s_1^*,\text{מספריים}) &= \left(\frac{1}{3}\right)(1)+\left(\frac{1}{3}\right)(0)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) &= \frac{5}{9}\ .\end{aligned}$$

הרי

$$U_1(s_1^*,s_2^*) = U_1(\text{אבן},s_2^*) = U_1(\text{נייר},s_2^*) = U_1(\text{מספריים},s_2^*)\ ,$$

לכן לפי עקרון האדישות s_2^* שיווי משקל של שחקן 2.

$$U_2(s_1^*,s_2^*) = U_2(s_1^*,\text{אבן}) = U_2(s_1^*,\text{נייר}) = U_2(s_1^*,\text{מספריים})\ ,$$

לכן לפי עקרון האדישות s_1^* שיווי משקל של שחקן 1.

שאלה 2 למשחק יש שני שיווי המשקל באסטרטגיות טהורות:

$$s^* = (T, L)\ , \qquad s^* = (B, R)\ .$$

נבדוק שייוי משקל של המשחק באסטרטגיות מעורבות:
מטריצת התשלומים של המשחק:

$$U \begin{pmatrix} \{1,2\} & \{3,0\} & \{1,0\} \\ \{0,2\} & \{2,10\} & \{2,0\} \\ \{0,2\} & \{0,1\} & \{3,3\} \end{pmatrix} .$$

מטריצת התשלומים של שחקן 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

מטריצת התשלומים של שחקן 2:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

$$e^t A^{-1} e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad U_1^* = \frac{1}{e^t A^{-1} e} = \frac{3}{2} .$$

$$e^t B^{-1} e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{3}{10} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad U_2^* = \frac{1}{e^t B^{-1} e} = 2 .$$

$$x^* = U_2^* e^t B^{-1} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{3}{10} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{15} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} .$$

$$y^* = U_1^* A^{-1} e = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

שאלה 3 **(25 נקודות)**

נשים לב כי המשחק הוא משחק סכום אפס.

בוב / אליס	אל על	חשמל	רכבת	ארקיע	$\min_{s_2\in S_2} U$
לאומי	1	3	4	6	1
פועלים	2	1	9	8	1
דיסקונט	3	2	4	5	2
מזרחי	7	6	9	15	6
$\max_{s_1\in S_1} U$	7	6	9	15	$\underline{\mathrm{v}} = \max_{s_1\in S_1} \min_{s_2\in S_2} U = 6$ $\overline{\mathrm{v}} = \min_{s_2\in S_2} \max_{s_1\in S_1} U = 6$

א) (10 נק')
אסטרטגית מקסמין של אליס: $s_1^* =$ מזרחי.

אסטרטגית מינמקס של בוב: $s_2^* =$ חשמל.

ב) (5 נק') $\underline{\mathrm{v}} = \overline{\mathrm{v}} = 6$ לכן למשחק יש ערך: $\mathrm{v} = 6$.

ג) (10 נק')
תהי A המטריצה של המשחק. אז

$$\underline{\mathrm{v}} = \max_i \min_j A_{ij} \ , \qquad \overline{\mathrm{v}} = \min_j \max_i A_{ij} \ .$$

נשים לב כי לכל i, מתקיים $\min_j A_{ij} \leq A_{ij}$,

ולכל j, מתקיים $\max_i A_{ij} \geq A_{ij}$.
מכאן

$$\min_j A_{ij} \leq A_{ij} \leq \max_i A_{ij}$$

ולכן

$$\min_j A_{ij} \leq \max_i A_{ij} \qquad (*)$$

נשים לב כי הצד ימין לא תלוי על i. ז"א משוואה (*) מתקיימת לכל i. בפרט, ניתן לקחת את ה- i אשר ממקסם את הצד ימין והרי נקבל

$$\max_i \min_j A_{ij} \leq \max_i A_{ij} \qquad (\#)$$

כעת נשים לב כי הצד שמאל לא תלוי על j. ז"א משוואה (#) מתקיימת לכל j. בפרט, ניתן לקחת את ה- j אשר ממזער את הצד ימין והרי נקבל

$$\max_i \min_j A_{ij} \leq \min_j \max_i A_{ij}$$

מש"ל.

שאלה 4

א) **(15 נק')**

הפונקצית המחיר היא $P(Q) = a - Q$ כאשר $Q = q_1 + q_2$. הרווח לשחקן 1 הוא

$$u_1 = (P - c_1)q_1 = (a - Q - c_1)q_1 = (a - q_1 - q_2 - c_1)q_1 \ ,$$

והרווח לשחקן 2 הוא

$$u_2 = (P - c_2)q_2 = (a - Q - c_2)q_2 = (a - q_1 - q_2 - c_2)q_2 \ .$$

נציב $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $a = 6$ ונקבל

$$u_1 = (6 - q_1 - q_2 - 1)q_1 = (5 - q_1 - q_2)q_1 \ ,$$
$$u_2 = (6 - q_1 - q_2 - 2)q_2 = (4 - q_1 - q_2)q_2 \ .$$

בנקודת שיווי משקל:

$$(u_1)'_{q_1} = 5 - 2q_1 - q_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_1^* = \frac{5 - q_2}{2} \ .$$

בנקודת שיווי משקל:

$$(u_2)'_{q_2} = 4 - 2q_1 - q_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_2^* = \frac{4 - q_1}{2} \ .$$

נציב התנאי השני בתנאי הראשון:

$$q_1^* = \frac{5 - q_2^*}{2} = \frac{5 - \left(\frac{4 - q_1^*}{2}\right)}{2} = \frac{\left(\frac{3 + q_1^*}{2}\right)}{2} = \frac{3}{2} + \frac{q_1^*}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{3q_1^*}{4} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad q_1^* = 2 \ .$$

נציב זה בביטוי ל- q_2^* ונקבל

$$q_2^* = \frac{4 - q_1^*}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1 \ .$$

לפיכך השיווי המשקל של המשחק הוא

$$(q_1^*, q_2^*) = (2, 1) \ .$$

ב) **(10 נק')**

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = (6-2-1-1)\,(2) = 4 \ .$$
$$u_2(q_1^*, q_2^*) = (6-2-1-2)\,(1) = 1 \ .$$

שאלה 5

א) מצב 1

נניח כי $a > c$, $a > b$.

$a > c \Rightarrow b < d$ (אחרת B נשלטת ע"י T).

$a > b \Rightarrow c < d$ (אחרת R נשלטת ע"י L).

$I \backslash II$	L	R	$\min\limits_{s_2 \in S_2} U$
T	a	b	b
B	c	d	c
$\max\limits_{s_1} U$	a	d	$\underline{\mathrm{v}} = \max(b,c)$ / $\bar{\mathrm{v}} = \min(a,d)$

למשחק אין ערך $\Rightarrow \underline{\mathrm{v}} < \bar{\mathrm{v}} \Rightarrow$

(#1) $$\max(b,c) < \min(a,d) \ .$$

מצב 2

נניח כי $a > c$, $a < b$.

$a > c \Rightarrow b < d$ (אחרת B נשלטת ע"י T).

$a < b \Rightarrow c > d$ (אחרת L נשלטת ע"י R).

II \ I	L	R	$\min_{s_2 \in S_2} U$
T	a	b	a
B	c	d	d
$\max_{s_1} U$	a	d	$\underline{v} = \max(a,d)$ \ $\overline{v} = \min(a,d)$

למשחק אין ערך $\Leftarrow \underline{v} < \overline{v} \Leftarrow$

$$\max(a,d) < \min(a,d)\ . \qquad (\#2)$$

הגענו לסתירה לכן לא ייתכן ש- $a > c$ ו- $a < b$.

<u>מצב 3</u>

נניח כי $a < c$, $a > b$.

$a < c \Rightarrow b > d$ (אחרת T נשלטת ע"י B).

$a > b \Rightarrow c < d$ (אחרת R נשלטת ע"י L).

II \ I	L	R	$\min_{s_2 \in S_2} U$
T	a	b	b
B	c	d	c
$\max_{s_1} U$	c	b	$\underline{v} = \max(b,c)$ \ $\overline{v} = \min(a,d)$

למשחק אין ערך $\Leftarrow \underline{v} < \overline{v} \Leftarrow$

$$\max(b,c) < \min(b,c)\ . \qquad (\#3)$$

הגענו לסתירה לכן לא ייתכן ש- $a < c$ ו- $a > b$.

<u>מצב 4</u>

נניח כי $a < c$, $a < b$.

$a < c \Rightarrow b > d$ (אחרת T נשלטת ע"י B).

$a < b \Rightarrow c > d$ (אחרת L נשלטת ע"י R).

$I \backslash II$	L	R	$\min\limits_{s_2 \in S_2} U$
T	a	b	a
B	c	d	d
$\max\limits_{s_1} U$	b	c	$\underline{\mathrm{v}} = \max(a,d)$ / $\overline{\mathrm{v}} = \min(b,c)$

למשחק אין ערך $\Leftarrow \underline{\mathrm{v}} < \overline{\mathrm{v}} \Leftarrow$

$$\max(a,d) < \min(b,c) \ . \qquad (\#4)$$

לכן, לפי (#1) ו- (#4) לא יהיה ערך למשחק אם

$$\max(a,d) > \min(b,c)$$

או

$$\max(a,d) < \min(b,c) \ .$$

ב) **(10 נק')**

האסורוגיות האופטימליות הן אסטרטגיות מעורבות:

$$\sigma_1^* = (x(T),(1-x)(B)) \ , \qquad \sigma_2^* = (y(L),(1-y)(R)) \ .$$

לפי עקרון האדישות:

$$\begin{aligned} ax + c(1-x) &= bx + d(1-x) \ , \\ ay + b(1-y) &= cy + d(1-y) \ . \end{aligned}$$

מכאן

$$x = \frac{d-c}{a-b+d-c} \ , \qquad y = \frac{d-b}{a-c+d-b} \ ,$$

והערך הינו

$$\mathrm{v} = \frac{ad-bc}{a-b+d-c} \ .$$