שיעור 2
מודלים חישובים שקולית

הגדרה 2.1 מודל חישובי

מודל חישובי הוא אוסף של מכונות טיורינג שעבורן מוגדרים המושגים של הכרעה וקבלה של שפות.

הגדרה 2.2 מודלים שקולים חישובית

יהיו A ו- B מודלים חישוביים. אומרים כי A ו- B שקולים אם לכל שפה L התנאים הבאים מתקיימים:

1) קיימת מ"ט במודל A שמכריעה את L אם"ם קיימת מ"ט במודל B שמכריעה את L.

2) קיימת מ"ט במודל A שמקבלת את L אם"ם קיימת מ"ט במודל B שמקבלת את L.

דוגמה 2.1

נסמן ב-T את מודל מכונת הטיורינג הבסיסי.
במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת בסרט.
במודל זה, הסרט הוא אינסופי לשני הכיוונים. ב תחילת החישוב הראש נמצא בתחילת הקלט.

נסמן ב-O את מודל מכונת הטיורינג עם סרט ימינה בלבד.
במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן לה ישאר במקום, באותה המשבצת בסרט.
במודל זה, הסרט הוא אינסופי לכיוון אחד בלבד - ימינה. בתחילת החישוב, הקלט ממוקם בקצה השמאלי של הסרט והראש נמצאת בתחילת הקלט. החישוב מתנהל כמו במכונה במודל, T למעט כאשר הראש נמצא במשבצת השמאלית ביותר בסרט וצריך לזוז ש מאלה– במקרה כזה הראש נשאר במקום ולא זז.

הוכיחו כי המודל T והמודל O שקולים חישובית.

פתרון:

יש להוכיח ש:

- לכל מ"ט במודל O קיימת מ"ט שקולה במודל T.
- לכל מ"ט במודל T קיימת מ"ט שקולה במודל O.

<u>כיוון ראשון</u>

נוכיח כי לכל מ"ט במודל O קיימת מ"ט שקולה במודל T. כלומר:

נתונה $M^O = \left(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \mathrm{acc}^O, \mathrm{rej}^O\right)$ במודל O.

נבנה , $M^T = \left(Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \mathrm{acc}^T, \mathrm{rej}^T\right)$ שקולה במודל T.

נעבוד רק עם צד ימין של הסרט האינסופי של M^T ואז M^T תהיה שקולה ל- M^O.

רכיבי המ"ט M^T זהים לאלו של המ"ט M^O, מלבד מהתכונה שהראש של M^O לא זז מעבר לקצה השמאולי של הקלט.

לכן כדי ש- M^T תהיה שקולה ל- M^O נוסיף מעברים לפונקצית המעברים של M^T כדי שהראש של M^T לא זז מעבר לקצה השמאולי של הקלט.

הרעיון הוא לסמן את המשבצת שמשמאול לתחילת הקלט עם סימן מיוחד $, ואז להוסיף מעברים לפונקצית המעברים של M^T שמבטיחים שאם הראש נמצא למשבצת שמסומנת $ אז הוא מיד חוזר ו- M^T חוזרת למצב ההתחתי של המ"ט M^O. זה מתבצע על ידי הוספת השורות הבאות לטבלת המעברים של M^T:

מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
q_0^T	σ	$q_\$$	$\circlearrowleft$	L	
$q_\$$	$\sqcup$	q_0^O	$\$$	R	
q	$\$$	q	$\$$	R	$\forall q \in Q^O$

$$Q^T = Q^O \cup \{q_0^T, q_\$\} \ , \qquad \Sigma^T = \Sigma^O \ , \qquad \Gamma^T = \Gamma^O \cup \{\$\} \ , \qquad \text{acc}^T = \text{acc}^O \ , \qquad \text{rej}^T = \text{rej}^O \ .$$

<u>כיוון שני</u>

נוכיח כי לכל מ"ט במודל T קיימת מ"ט שקולה במודל O. כלומר:

נתונה $M^T = \left(Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T\right)$ במודל T.

נבנה $M^O = \left(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O\right)$ שקולה במודל O.

הרעיון הוא לסמן קו על הסרט במשבת באמצע הקלט, ואז לקפל את הסרט בקו הזה. באופן הזה נקבל סרט עם קצה שמאולי ואינסופי ימינה. במשבצות של הסרט החדש המקופל יש שני תווים, אחד למעלה (U) ואחד למטה (D), מלבד מנקודת הקיפול שבו יש משבצת אחת שמסומנת $.

באופן הזה אפשר לסמלץ את המכונה M^T במכונה M^O על ידי הוספת המעברים הבאים לטבלת המעברים של M^T. לכל $\tau, \sigma, \pi \in \Gamma^T$:

מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
$q.D$	π σ	$p.D$	π τ	L	תזוזה שמאלה: $(q,\sigma)\xrightarrow{M^T}(p,\tau,L)$
$q.U$	σ π	$p.U$	τ π	R	
$q.D$	$\text{\textvisiblespace}$	$p.D$	$\text{\textvisiblespace}$ τ	L	תזוזה שמאלה: $(q,\text{\textvisiblespace})\xrightarrow{M^T}(p,\tau,L)$
$q.U$	$\text{\textvisiblespace}$	$p.U$	τ $\text{\textvisiblespace}$	R	
$q.D$	π σ	$p.D$	π τ	R	תזוזה ימינה: $(q,\sigma)\xrightarrow{M^T}(p,\tau,R)$
$q.U$	σ π	$p.U$	τ π	L	
$q.D$	$\text{\textvisiblespace}$	$p.D$	$\text{\textvisiblespace}$ τ	R	תזוזה ימינה: $(q,\text{\textvisiblespace})\xrightarrow{M^T}(p,\tau,R)$
$q.U$	$\text{\textvisiblespace}$	$p.U$	τ $\text{\textvisiblespace}$	L	
$q.D$	$\$$	$q.U$	$\circlearrowleft$	R	
$q.U$	$\$$	$q.D$	$\circlearrowleft$	R	
אתחול					
q_0^O	τ	$q.\tau$	$\$$	R	$\tau\in\Sigma\cup\{\text{\textvisiblespace}\}$ $\sigma\in\Sigma$
$q.\sigma$	τ	$q.\tau$	$\text{\textvisiblespace}$ σ	R	
$q.\text{\textvisiblespace}$	$\text{\textvisiblespace}$	back	$\text{\textvisiblespace}$ $\text{\textvisiblespace}$	L	
back	$\text{\textvisiblespace}$ τ	back	$\circlearrowleft$	L	
back	$\$$	$q_0^T.D$	$\circlearrowleft$	R	
סיום					
$\text{acc}^T.D$	הכל	acc^O			
$\text{acc}^T.U$	הכל	acc^O			
$\text{rej}^T.D$	הכל	rej^O			
$\text{rej}^T.U$	הכל	rej^O			
כל השאר עוברים ל-rej					

$$\Gamma^O \supseteq \left(\Gamma^T\times\Gamma^T\right)\cup\{\$\}\ .$$