שעור 2
משחקים בצורה רחבה

2.1 הגדרת צורה הרחבה של משחק

התיאור הכי טבעי של משחק הוא **הצורה הרחבה**.

הגדרה 2.1 משחק בצורה רחבה

הצורה רחבה של משחק ניתנת על ידי הקבוצה

$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_1, V_2, V_3, \ldots\}, O, u) \ ,$$

כאשר

1) N הוא קבוצה סופית של **השחקנים**.

2) V קבוצת **הקדקודים** של עץ המשחק.

קדקוד מייצג החלטה של שחקן.

3) E קבוצת **הקשתות** או **הצלעות** של עץ המשחק.

כל צלע הולך בין שני קדקודים. צלע מייצג אסטרטגיה של שחקן, אשר נקבעת על ידי ההחלטתו שמסומנת בקדקוד שממנו הצלע יוצא.

4) x_0 הוא הקדקוד של **המצב ההתחלתי** של המשחק.

5) V_1 הוא הקבוצה של קדקודים שבהן שחקן 1 מקבל החלטה, V_2 הקבוצת קדקודים בהן שחקן 2 מקבל החלטה, וכן הלאה.

בכללי, V_i הקבוצה קדקודים בהם שחקן i מקבל החלטה ונקראת הקבוצת ידיעה של שחקן i.

6) O הוא **קבוצת התוצאות** האפשרייות.

התוצאות מצויינות ב **נקודות סיום** (**עלים**) של עץ המשחק.

7) u **פונקצית התשלום** המתאימה לכל ווקטור אסטרטגיות של המשחק תשלום לכל שחקן.

דוגמה 2.1 (משחק התאמת המטבעות)

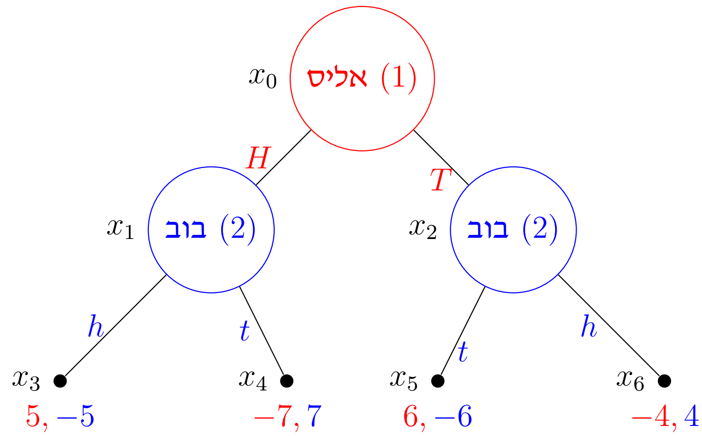
אליס בוחרת אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי). היא רושמת בחירותה על פתק, חותמת עליו ומעבירה אותו לשופט. אחר כך בוב בוחר H או T, רושם בחירותו על פתק, חותם עליו ומעביר אותו לשופט.

- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר h אז בוב משלם לאליס ₪5.
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר t אז אליס משלמת לבוב ₪7.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר h אז בוב משלם לאליס ₪6.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר t אז אליס משלמת לבוב ₪4.

רשמו את המשחק בצורה רחבה.

פתרון:

תהי אליס שחקן 1 ובוב שחקן 2.



$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_1, V_2\}, O, u) \ .$$

שחקנים: $N = \{\text{אליס}, \text{בוב}\} = \{1, 2\}$.

קדקודים: $V = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

קשתות: $E = \{x_0x_1 \ , x_0x_2 \ , \ x_1x_3 \ , \ x_1x_4 \ , \ x_2x_5 \ , \ x_2x_6\}$.

מצב המשחק ההתחלתי: x_0.

קדקודים:

קבוצת ידיעה של שחקן 1: $V_1 = \{ \ x_0(H, T) \ \}$.

קבוצת ידיעה של שחקן 2: $V_2 = \{ \ x_1(h, t) \ , \ x_2(h, t) \ \}$.

תוצאות אפשרייות: $O = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

פונקציית התשלום:

$$\begin{aligned}
u_1(H, h) &= 5 \ , \qquad & u_2\,(H, h) &= -5 \ , \\
u_1(H, t) &= -7 \ , \qquad & u_2\,(H, t) &= 7 \ , \\
u_1(T, h) &= -4 \ , \qquad & u_2\,(T, h) &= 4 \ , \\
u_1(T, t) &= 6 \ , \qquad & u_2\,(T, t) &= -6 \ .
\end{aligned}$$

■

הגדרה 2.2 קבוצת אסטרטגיות של שחקן

נתון משחק N -שחקנים.
נסמן ב- S_i את הקבוצה של כל האסטרטגיות האפשריות של שחקן i במשחק.

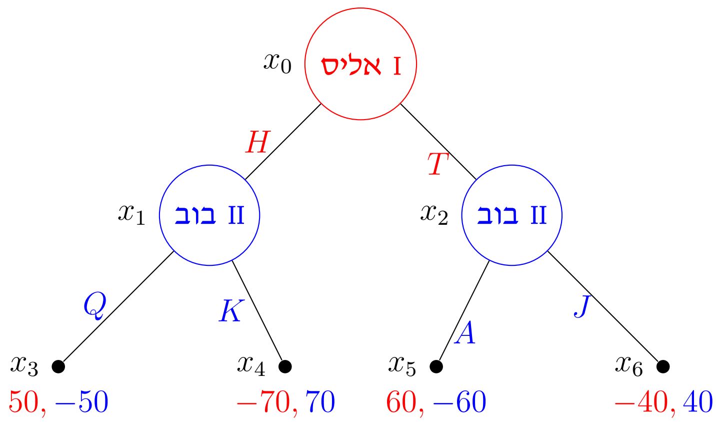
דוגמה 2.2 (מטבע וקלפים)

נתבונן על המשחק הבא:

שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
אחר כך, אם אליס בוחרת H אז שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).
אחרת אם אליס בוחרת T בוב בוחר קלף נסיך (J) או קלף אס (A).

- אם אליס בוחרת H ובוב בחר Q אז בוב משלם לאליס ₪50.
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר K אז אליס משלם לבוב ₪70.

- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר J אז בוב משלם לאליס ₪60.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר A אז אליס משלם לבוב ₪40.



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H, T.
אומרים כי לשחקן I יש **קבוצה ידיעה אחת** שנסמן

$$V_I = \{\ x_0(H,T)\ \}$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I = (H,T)\ .$$

לשחקן II יש שני קדקודים x_1, x_2 בהם הוא מקבל החלטה.
אומרים גם כי לשחקן II יש 2 קבוצות ידיעה, x_1, x_2 אשר מייצגות שתי אפשריות שונות המנובעות מהחלטה הקודמת של שחקן I בקדקוד x_0.
הקבוצות ידיעה של שחקן II הינן:

$$V_{II} = \{\ x_1(Q,K)\ ,\ x_2(J,A)\ \}$$

מכיוון שלשחקן II יש שתי קבוצות ידיעה x_1, x_2 ובכל אחד יש שתי פעולות אפשריות, אז יש לבוב $2\times 2 = 4$ אסטרטגיות:

$$S_{II} = (Q/J\ ,\ Q/A\ ,\ K/J\ ,\ K/A)$$

מטבע וקלפים

הגדרה 2.3 וקטור אסטרטגיות של משחק

נתון משחק n-שחקנים.
נניח כי שחקן 1 משחק לפי אסטרטגיה s_1, שחקן 2 משחק לפי אסטרטגיה s_2, ... ושחקן n משחק לפי אסטרטגיה s_n.
אז הווקטור אסטרטגיות של המשחק הינו

$$s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)\ .$$

הגדרה 2.4 פונקצית תשלום

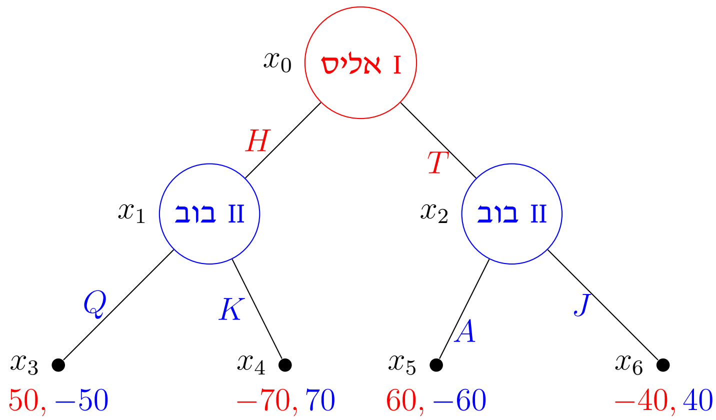
נתון משחק n- שחקנים. פונקצית תשלום $u : S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ היא פונקציה אשר משייכת לכל ווקטור אסטרטגיות של המשחק, תשלום לכל שחקן.

נניח כי שחקן 1 משחק לפי אסטרטגיה s_1, שחקן 2 משחק לפי אסטרטגיה s_2, $\ldots$ ושחקן n משחק לפי אסטרטגיה s_n. ז"א הווקטור האסטרטגיות של המשחק הינו $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$.
פונקצית התשלום של המשחק מקבלת את הווקטור אסטרטגיות ומחזירה תשלום לכל שחקן:

$$u(s_1, s_2, \ldots, s_n) = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

כאשר u_1 התשלום לשחקן 1, u_2 התשלום לשחקן 1, $\ldots$ ו- u_n התשלום לשחקן n.

דוגמה 2.3 (המשך של דוגמה 2.2)



- נניח כי אליס משחקת לפי האסטרטגיה $s_I = H$ ובוב משחק לפי האסטרטגיה $s_{II} = Q/A$.
  הווקטור אסטרטגיות של המשחק הוא
  $$s = (s_I, s_{II}) = (H, Q/A) \ .$$
- אם אליס משחקת לפי האסטרטגיה $s_I = H$ ובוב משחק לפי האסטרטגיה $s_{II} = Q/J$.
  הווקטור אסטרטגיות של המשחק הוא
  $$s = (s_I, s_{II}) = (H, Q/J) \ .$$
- וכן הלאה.

בסה"כ למשחק הזה יש 8 ווקטורי אסטרטגיות:

$$\begin{aligned}
(s_I, s_{II}) &= (H, Q/A) \ , \\
(s_I, s_{II}) &= (H, Q/J) \ , \\
(s_I, s_{II}) &= (H, K/A) \ , \\
(s_I, s_{II}) &= (H, K/J) \ , \\
(s_I, s_{II}) &= (T, Q/A) \ , \\
(s_I, s_{II}) &= (T, Q/J) \ , \\
(s_I, s_{II}) &= (T, K/A) \ , \\
(s_I, s_{II}) &= (T, K/J) \ .
\end{aligned}$$

הפונקצית תשלום של המשחק הינו

$$\begin{aligned} u(H,Q/A) &= (50,-50) \ , \\ u(H,Q/J) &= (50,-50) \ , \\ u(H,K/A) &= (-70,70) \ , \\ u(H,K/J) &= (-70,70) \ , \\ u(T,Q/A) &= (60,-60) \ , \\ u(T,Q/J) &= (-40,40) \ , \\ u(T,K/A) &= (60,-60) \ , \\ u(T,K/J) &= (-40,40) \ . \end{aligned}$$

2.2 משחקים עם ידיעה שלמה והצורה אסטרטגית

הגדרה 2.5 משחק עם ידיעה שלמה

בכל שלב של המשחק, כל שחקן יודע את כל ההחלטות של שאר השחקנים לפני אותו שלב, ולכן הוא יודע בדיוק אילו פעולות נעשו על ידי כל שאר השחקנים.
כתוצאה, כל שחקן, כשמגיע תורו יודע בדיוק באיזה קודקוד בעץ המשחק הוא נמצא.

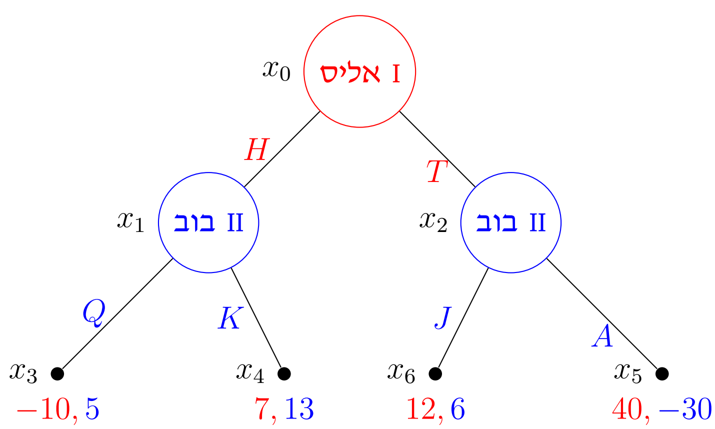
דוגמה 2.4 (משחק מטבע וקלף עם ידיעה שלמה)

נתבונן על המשחק הבא:

שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
אחר כך, אם אליס בוחרת H אז שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).
אחרת אם אליס בוחרת T בוב בוחר קלף נסיך (J) או קלף אס (A).

- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר Q אז בוב מקבל ₪5 ואליס מפסידה ₪10
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר K אז אליס מקבלת ₪7 ובוב מקבל ₪13
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר J אז בוב מקבל ₪6 ואליס מקבלת ₪12.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר A אז אליס מקבלת ₪40 ובוב מפסיד ₪30

ניתן לרשום את עץ המשחק **בצורה רחבה אסטרטגית**:



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H,T.
ז"א4 לשחקן I יש **קבוצה ידיעה אחת**:

$$x_0(H,T)\ .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I=(H,T)\ .$$

לשקחן II יש שני קדקודים x_1,x_2 בהם הוא מקבל החלטה.
אז לשחקן II יש 2 קבוצות ידיעה,

$$V_{II}=\{x_1(Q,K)\ ,\ x_2(J,A)\ \}\ .$$

אשר מייצגות שתי אפשריות שונות המנובעות מההחלטה הקודמת של שחקן I בקדקוד x_0.
מכיוון שלשחקן II יש שתי קבוצתצ ידיעה x_1,x_2 ובכל אחד יש שתי פעולות אפשריות, אז יש לבוב4 $2\times 2=4$ אסטרטגיות:

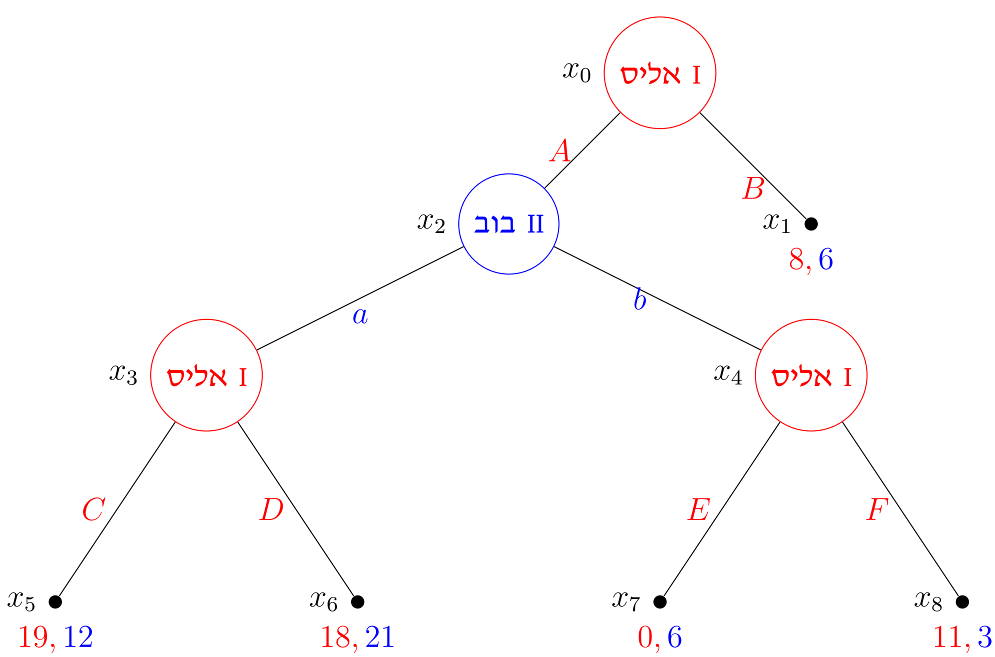
$$S_{II}=(Q/J\ ,\ Q/A\ ,\ K/J\ ,\ K/A)$$

(נהוג לרשום את האסטרטגיות מלמעלה עד למטה ומשמאל לימון.)
ניתן לרשום את המשחק **בצורה אסטרטגית**:

$I \backslash II$	Q/J	Q/A	K/J	K/A
H	$-10,5$	$-10,5$	$7,13$	$7,13$
T	$12,6$	$40,-30$	$12,6$	$40,-30$

דוגמה 2.5 ()

נתון המשחק הבא בצורה רחבה. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

במשחק הזה, אליס (שחקן I) פותח עם המהלך הראשון, ואחר כך בוב מבצע המהלך השני, ואז אליס מבצע מהלך שוב.

המשחק הוא משחק עם ידיעה שלמה.

לאליס יש שלוש קבוצות ידיעה:

$$x_0\ (A,B)\ ,\qquad x_3\ (C,D)\ ,\qquad x_4\ (E,F)\ .$$

בכל אחד של הקדקודים האלה לאליס יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לה $2\times 2\times 2=8$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_I=(A/C/E\ ,\ A/C/F\ ,\ A/D/E\ ,\ A/D/F\ ,\ B/C/E\ ,\ B/C/F\ ,\ B/D/E\ ,\ B/D/F)\ .$$

לבוב יש קבוצות ידיעה אחת:

$$x_2\ (a,b)\ .$$

בקבוצת ידיעה הזאת של בוב יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לו 2 קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II}=(a\ ,\ b)\ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

$I \backslash II$	a	b
$A/C/E$	$19,12$	$0,6$
$A/C/F$	$19,12$	$11,3$
$A/D/E$	$18,21$	$0,6$
$A/D/F$	$18,21$	$11,3$
$B/C/E$	$8,6$	$8,6$
$B/C/F$	$8,6$	$8,6$
$B/D/E$	$8,6$	$8,6$
$B/D/F$	$8,6$	$8,6$

■

2.3 משחקים עם ידיעה לא שלמה

הגדרה 2.6 משחק עם ידיעה לא שלמה

משחק עם ידיעה לא שלמה הוא משחק בו לפחות שחקן לא יודע את ההחלטה של שחקן אחר בקדקוד הקודם שממנו יוצא צלע לקדקוד החלטה שלו.
כתוצאה, השחקן אשר לו יודע את ההחלטה של שחקן אחר, לא יודע באיזה קדקוד הוא נמצא בעץ המשחק.

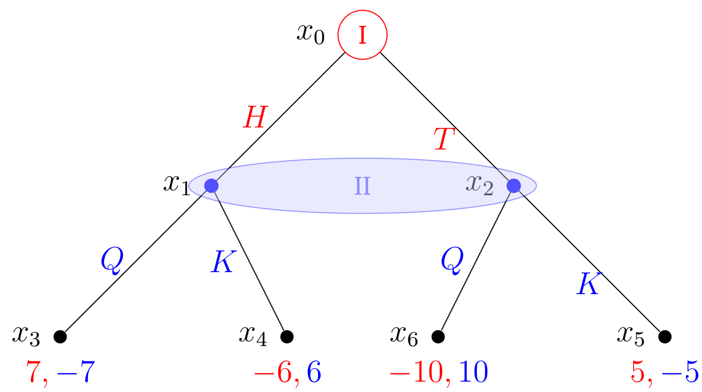
דוגמה 2.6 (משחק מטבע וקלף עם ידיעה לא שלמה)

בשונה לדוגמה הקודמת נתבונן על המשחק הבא עבורו שחקן II לא יודע את ההחלטה של שחקן I עד סוף המשחק.

שחקן I (אליס) בוחרת אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
אחר כך, **בלי ידיעה של הבחירה של אליס**, שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).

- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר Q אז בוב משלם לאליס 7₪.
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר K אז אליס משלם לבוב 6₪.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר Q אז אליס משלם לבוב 10₪.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר K אז בוב משלם לאליס 5₪.

נרשום את המשחק **בצורה רחבה**:



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H,T.
כלומר לאליס יש **קבוצה ידיעה אחת**:

$$V_I=\{\ x_0(H,T)\ \}\ .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I=(H,T)\ .$$

בניגוד לדוגמה הקודמת, לבוב (שקחן II) יש רק קבוצת ידעיה אחת שמכילה שני קדקודים.
ז"א בוב לא יודע איזה אופציה אליס בחרה, H או T. אז בוב לא יודע על איזה קדקוד הוא נמצא, x_1 או x_2.
בגלל שהוא לא יודע מה ההחלטה של אליס, הוא בוחר בין רק שתי אפשרויות, בלי ידיעה של ההחלטה של אליס.
לכן אנחנו מסתכלים אל הקדקודים x_1x_2 **כקבוצת ידיעה אחת** שממנה יוצאות רק שתי הפעולות:

$$V_{II}=\{\ x_1x_2(Q,K)\ \}\ .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של בוב הינה

$$S_{II}=(Q\ ,\ K)$$

נשים לב כי מכל אחד של הקדקודים x_1 ו- x_2 יוצאות אותן קבוצת פעולות. אחרת בוב היה יודע מה ההחלטה של אליס.

כעת נרשום את הצורה האסטרטגית של המשחק:

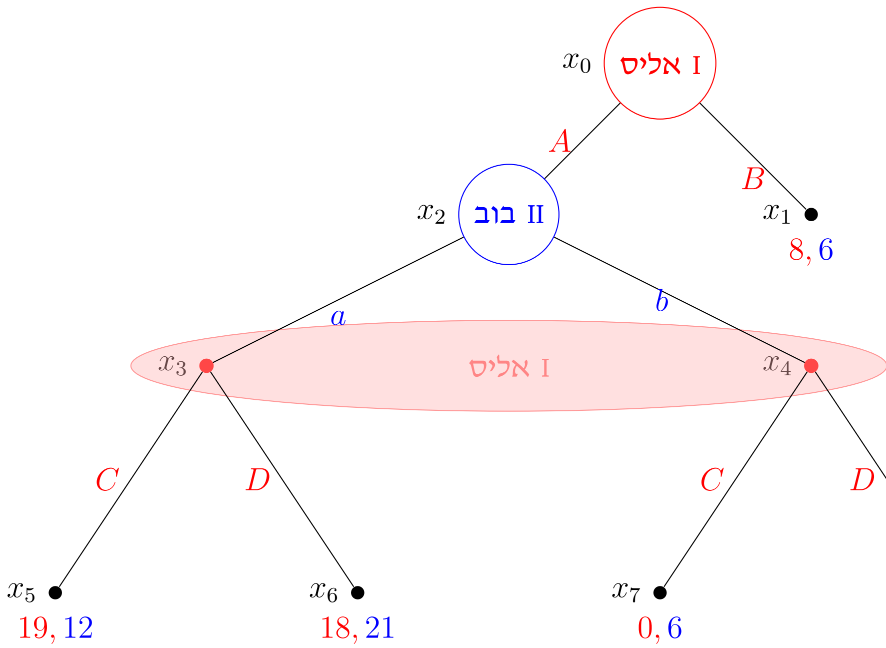
$I \backslash II$	Q	K
H	$7,-7$	$-6,6$
T	$-10,10$	$5,-5$

כלל 2.1 פעולות שיוצאות מקבוצת ידיעה ללא ידיעה שלמה

לשחקן יש אותה קבוצה של פעולות אפשריות בכל קדקוד שמוכל אותה קבוצת ידיעה.

דוגמה 2.7 (משחק עם ידיעה לא שלמה)

נתון המשחק הבא בצורה רחבה. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

שימו לב, דומה לדוגמה הקודמת, הקדקודים x_3 ו- x_4 באותה קבוצת ידיעה של אליס בגלל שהיא לא ידועת מה ההחלטה של בוב בקדקוד x_2, כלומר אליס לא יודעת אם בוב בחר a או b. לכן הפעולות היוצאות מקדקוד x_3 הן אותן פעולות שיוצאות מקדקדוד x_4, בגלל שאם היו פעולות אפשריות שונות היוצאות ב- x_3 ו- x_4, אז אליס היתה יודעת איזה פעולה בוב בחר, a או b. כלומר אם לאליס יש החלטה בין הפעולות E ו- F אז היא היתה ידועת שהיא נמצאת בקדקדוד x_4 בעץ המשחק ובוב בחר b. ולהפך, אם היתה לה בחירה בין הפעולות C ו- D במקום הבחירה בין הפעולות E ו- F אז היא היתה יודעת שהיא נמצאת ב- x_3 ושבוב בחר a.

לאליס יש שתי קבוצות ידיעה:

$$x_0 \ (A, B) \ , \qquad x_3 x_4 \ (C, D) \ .$$

בכל אחד של הקדקודים האלה לאליס יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לה $2 \times 2 = 4$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_I = (A/C \ , \ A/D \ , \ B/C \ , \ B/D) \ .$$

לבוב יש קבוצות ידיעה אחת:

$$x_2 : \ (a, b) \ .$$

בקבוצת ידיעה הזאת של בוב יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לו 2 קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a \ , \ b) \ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

$I \backslash II$	a	b
A/C	$19,12$	$0,6$
A/D	$18,21$	$11,3$
B/C	$8,6$	$8,6$
B/D	$8,6$	$8,6$

■

2.4 משחק עם מהלכי גורל

במשחקים שבהם עסקנו עד כה, המעבר ממצב למצב נעשה על ידי אחד השחקנים. מודל כזה מתאים למשחקים כגון שחמט ודמקה, אך לא למשחקי קלפים או קוביה (כמו פוקר או שש־בש), שבהם מעבר ממצב למצב יכול להיעשות על ידי תהליך מקרי: במשחקי קלפים אנחנו טורפים את הקלפים שבחפיסה, ובשש־בש אנו מטילים קוביה. ניתן לחשוב גם על סיטואציות שבהן המעבר ממצב למצב תלוי בגורמים מקריים אחרים, כגון ירידת גשם, רעידת אדמה או נפילת הבורסה. מעבר מסוג זה נקרא **מהלך גורל**. ההרחבה של המודל שלנו תיעשה על ידי כך שחלק מהקדקודים בעץ המשחק (V, E, x_0) יסומנו כמהלכי גורל. הצלעות היוצאות מקדקוד המתאים למהלך גורל מתאימות לתוצאות האפשריות של ההגרלה וליד כל צלע כזו נרשמת ההסתברות לקבלת התוצאה המתאימה.

הגדרה 2.7 משחק בצורה רחבה עם מהלכי גורל

משחק בצורה רחבה עם מהלכי גורל ניתן ע"י הווקטור

$$\Gamma = \left(N, V, E, x_0, \{V_0, V_1, V_2, V_3, \ldots\}, O, u, (p_x)_{x \in V_0}\right) ,$$

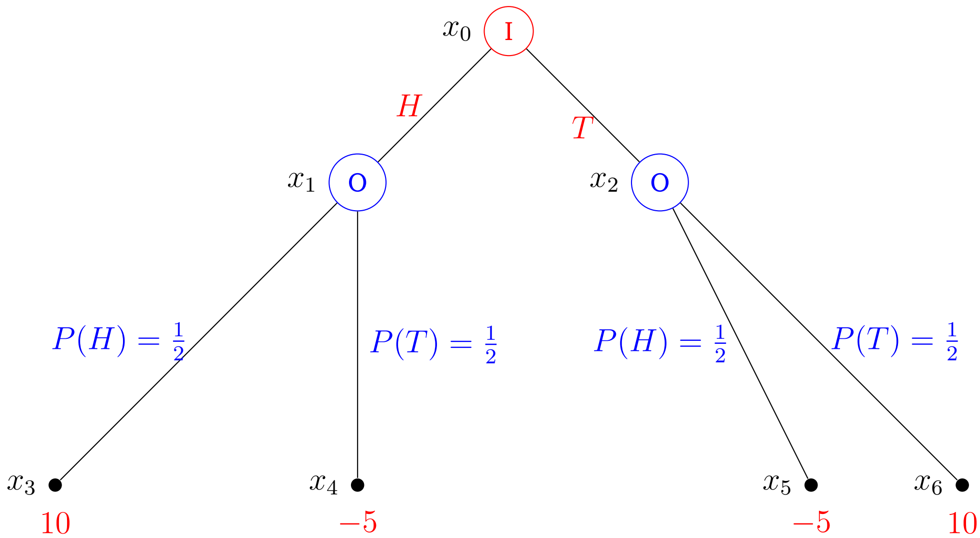
כאשר המשמעות של כל האיברים אותו דבר להגדרה של משחק בצורה רחבה כפי שנתון בהגדרה 2.1. ההבדל היחיד הוא הקבוצת קדקודים V_0, אשר מסמן את הקבוצה של הקדקודים בהם יש הגרלה על ידי **שחקן הגורל**.

לכל קדקוד $x \in V_0$, אנחנו משייכים הסתברות לכל צלע שיוצא ממנו.

דוגמה 2.8 (משחק עם מהלך גורל)

שחקן בוחר H ("עץ") או T ("פלי"). אחרי שהשחקן בוחר, הוא מטיל מטבע. אם המטבע מראה את בחירתו, הוא מנצח ומקבל 10 ₪. אם לא הוא מפסיד 5 ₪. שרטטו את המשחק בצורה רחבה.

פתרון:



$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_1, V_2\}, O, u) \ .$$

שחקנים: $N = \{I\} = \{1, 2\}$.

קדקודים: $V = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

קשתות: $E = \{x_0x_1 \ , x_0x_2 \ , \ x_1x_3 \ , \ x_1x_4 \ , \ x_2x_5 \ , \ x_2x_6\}$.

מצב המשחק ההתחלתי: x_0.

קדקודים:

קבוצות ידיעה של שחקן 1: $V_1 = \{ \ x_0(H, T) \ \}$.

קבוצת ידיעה של שחקן 2: $V_0 = \left\{ \ x_1 \left(P(H) = \frac{1}{2}, P(T) = \frac{1}{2} \right) \ , \ x_2 \left(P(H) = \frac{1}{2}, P(T) = \frac{1}{2} \right) \ \right\}$.

תוצאות אפשריות: $O = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

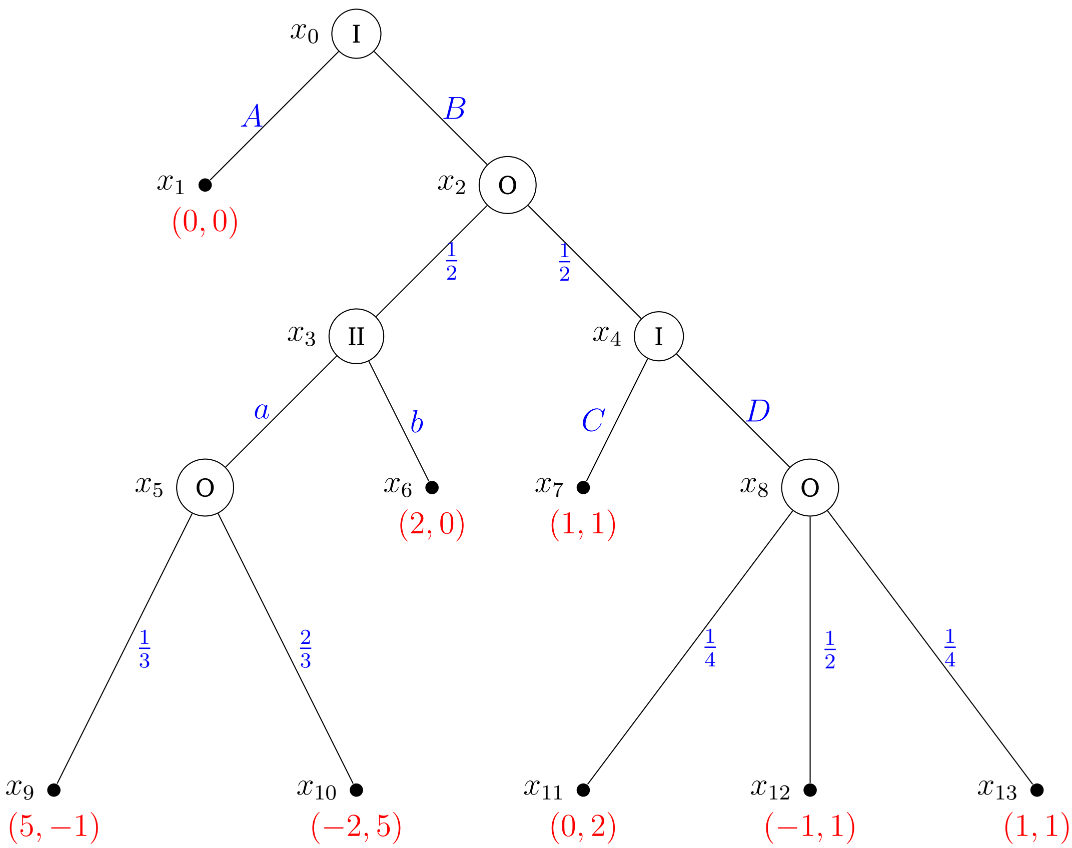
פונקציית התשלום:

$$u(H) = \frac{1}{2} \cdot (10) + \frac{1}{2}(-5) \quad = \frac{5}{2} \ ,$$

$$u(T) = \frac{1}{2} \cdot (-5) + \frac{1}{2} \cdot (10) \quad = \frac{5}{2} \ .$$

■

דוגמה 2.9 (אסטרטגיות במשחק עם מהלכי גורל)



קבוצות ידיעה של שחקן I:

$$x_0(A,B)\ ,\qquad x_4(C,D)\ .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I=(A/C\ ,\ A/D\ ,\ B/C\ ,\ B/D\ )\ .$$

קבוצות ידיעה של שחקן II:

$$x_3(a,b)\ .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן I:

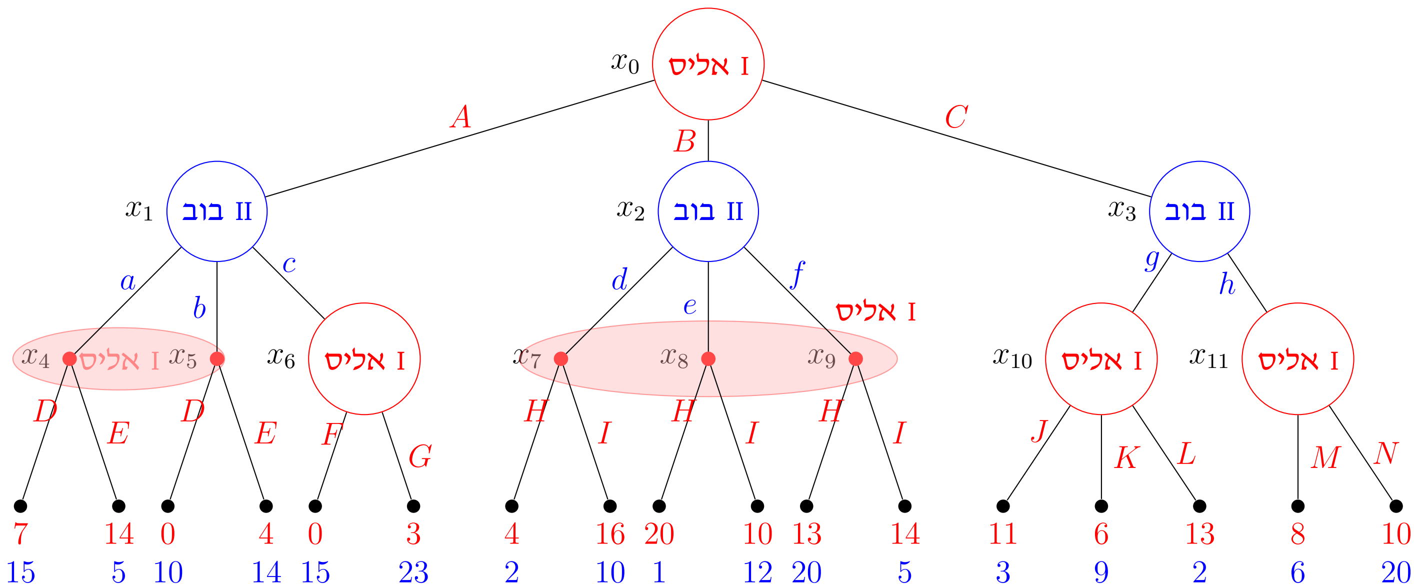
$$S_{II}=(a\ ,\ b\ )\ .$$

פונקצית התשלום:

$$\begin{aligned}
u\left(A/C,a\right)&=(0,0)\ ,\\
u\left(A/D,a\right)&=(0,0)\ ,\\
u\left(B/C,a\right)&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(5,-1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(-2,5)+\frac{1}{2}(1,1) &&=\left(\frac{2}{3},\frac{7}{6}\right)\ ,\\
u\left(B/D,a\right)&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(5,-1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(-2,5)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(0,2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-1,1)+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}(1,1)= &&\left(-\frac{1}{48},\frac{33}{16}\right)\ ,\\
u\left(A/C,b\right)&=(0,0)\ ,\\
u\left(A/D,b\right)&=(0,0)\ ,\\
u\left(B/C,b\right)&=\frac{1}{2}(2,0)+\frac{1}{2}(1,1) &&=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\ ,\\
u\left(B/D,b\right)&=\frac{1}{2}(2,0)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(0,2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-1,1)+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}(1,1) &&=\left(-\frac{11}{16},\frac{9}{16}\right)\ ,
\end{aligned}$$

דוגמה 2.10 ()

נתון המשחק הבא בצורה רחבה אסטרטגית. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

המשחק הוא משחק עם ידיעה לא שלמה.

לאליס יש 5 קבוצות ידיעה:

$$x_0 : \ (A,B,C) \ , \qquad x_4x_5 : \ (D,E) \ , \qquad x_6 : \ (F,G) \ , \qquad x_7x_8x_9 : (H,I) \ , \quad x_10 : \ (J,K,L) \ , \quad x_{11} : \ (M,N) \ .$$

לכן יהיו לאליס $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 144$ קבוצות אסטרטגיות.

$$S_I = (A/D/E/F/G/H/J/M \ , \ A/D/E/F/G/H/J/N \ , \ldots \ , C/E/G/I/L/N) \ .$$

לבוב יש 3 קבוצות ידיעה:

$$x_1 : \ (a,b,c) \ , \quad x_2 : \ (d,e,f) \ , \quad x_3 : \ (g,h) \ .$$

לכן לבוב יהיו: $3 \times 3 \times 2 = 18$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a/d/g \ , \ a/d/h \ , \ldots \ , c/f/h) \ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד

■

שעור 3
משחקים בצורה אסטרטגית רחבה ושיווי משקל נאש

3.1 הגדרה של משחק בצורה רחבה אסטרטגית

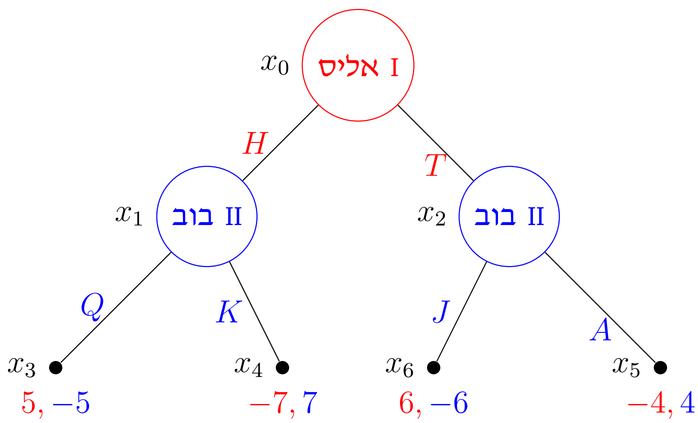
דוגמה 3.1 (התאמת מטבעות אם ידיעה שלמה)

נתבונן על המשחק הבא:

שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
אחר כך, אם אליס בחרה H אז שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).
אחרת אם אליס בחרה T בוב בוחר קלף נסיך (J) או קלף אס (A).

- אם אליס בחרה H ובוב בחר Q אז בוב משלם לאליס ₪5.
- אם אליס בחרה H ובוב בחר K אז אליס משלם לבוב ₪7.
- אם אליס בחרה T ובוב בחר J אז בוב משלם לאליס ₪6.
- אם אליס בחרה T ובוב בחר A אז אליס משלם לבוב ₪4.

ניתן לרשום את עץ המשחק **בצורה רחבה אסטרטגית**:



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H, T.
אומרים כי לשחקן I יש **קבוצה ידיעה אחת**.
לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I = (H, T) \ .$$

לשקחן II יש שני קדקודים x_1, x_2 בהם הוא מקבל החלטה.
אומרים גם כי לשחקן II יש 2 קבוצות ידיעה, x_1, x_2 אשר מייצגות שתי אפשריות שונות המנובעות מההחלטה הקודמת של שחקן I בקדקוד x_0.
כל קבוצת ידיעה מכילה הפעולות הבאות:

$$x_1 : (Q, K) \qquad x_2 : (J, A)$$

מכיוון שלשחקן II יש שתי קבוצותצ ידיעה x_1, x_2 ובכל אחד יש שתי פעולות אפשריות, אז יש לבוב $2 \times 2 = 4$ אסטרטגיות:

$$S_{II} = (Q/J \ , \ Q/A \ , \ K/J \ , \ K/A)$$

(נהוג לרשום את האסטרטגיות מלמעלה עד למטה ומשמאל לימון.)
הצורה אסטרטגית בלבב של המשחק הינה:

$I \backslash II$	Q/J	Q/A	K/J	K/A
H	$5, -5$	$5, -5$	$-7, 7$	$-7, 7$
T	$6, -6$	$-4, 4$	$6, -6$	$-4, 4$

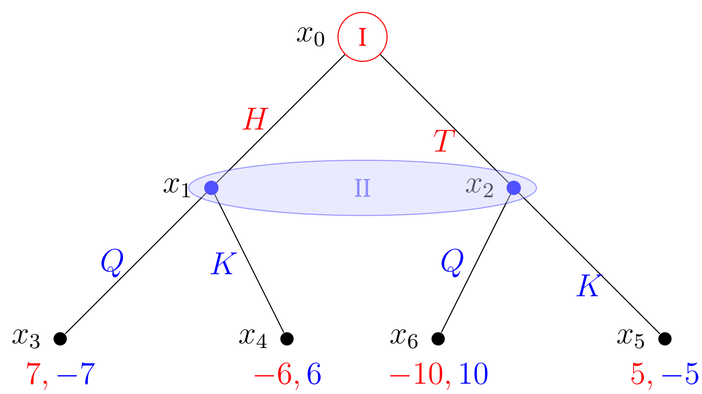
דוגמה 3.2 (התאמת מטבעות אם ידיעה לא שלמה)

בשונה לדוגמה הקודמת נתבונן על המשחק הבא עבורו שחקן II לא יודע את ההחלטה של שחקן I עד סוף המשחק.

שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
אחר כך, בלי ידיעה של הבחיר השל אליס, שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).

- אם אליס בחרה H ובוב בחר Q אז בוב משלם לאליס ₪7.
- אם אליס בחרה H ובוב בחר K אז אליס משלם לבוב ₪6.
- אם אליס בחרה T ובוב בחר Q אז אליס משלם לבוב ₪10.
- אם אליס בחרה T ובוב בחר K אז בוב משלם לאליס ₪5.

ניתן לרשום את עץ המשחק **בצורה רחבה אסטרטגית**:



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H, T.
כלומר לאליס יש **קבוצה ידיעה אחת**.
לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I = (H, T) \ .$$

בניגוד לדוגמה הקודמת, לבוב (שקחן II) יש רק קבוצת ידעיה אחת שמכילה שני קדקודים.
ז"א בוב לא יודע איזה אופציה אליס בחרה, H או T, אז בוב לא יודע על איזה קדקוד הוא נמצא, x_1 או x_2.
בגלל שהוא לא יודע מה ההחלטה של אליס, הוא בוחר בין רק שתי אסשריות, בלי ידיעה של ההחלטה של אליס.
לכן אנחנו מסתכלים אל הקדקודים $x_1 x_2$ **כקבוצת ידיעה אחת** שממנה יוצאות רק שתי הפעולות:

$$x_1 x_2 : (Q, K) \ ,$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של בוב הינה

$$S_{II} = (Q \ , \ K)$$

נשים לב כי מכל אחד של הקדקודים x_1 ו- x_2 יוצאות אותן קבוצת פעולות. אחרת בוב היה יודע מה ההחלטה של אליס.

$I \backslash II$	Q	K
H	$7, -7$	$-6, 6$
T	$-10, 10$	$5, -5$

דוגמה 3.3 (התאמת מטבעות אם ידיעה שלמה)

שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
אחר כך שחקן II (בוב) בוחר H או T.

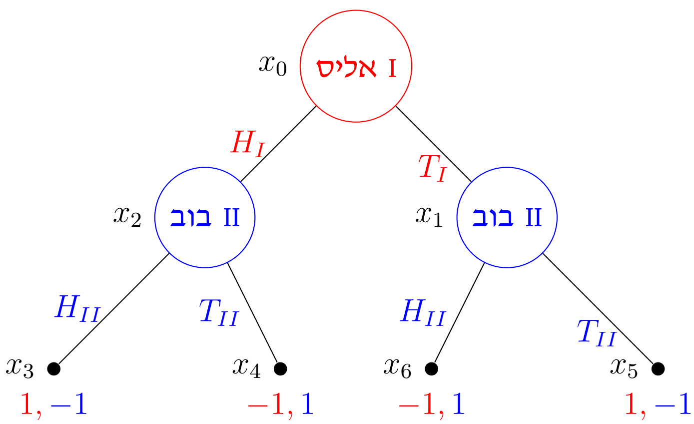
- אם שני השחקנים בוחרים באותו צד, משלם שחקן השני לשחקן הראשון 1₪.
- אם הם בוחרים בצדדים שונים, משלם שחקן הראשון לשחקן השני 1₪.

סעיף א) רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית רחבה.

סעיף ב) רשמו את המשקח בצורה אסטרטגית בלבד.

פתרון:

סעיף א) נשים לב שזה משחק עם ידיעה שלמה. לכן עץ המשחק הינו



סעיף ב) לשחקן I (אליס) יש קבוצת ידיעה אחת:

$$x_0: \ (H_I, T_I) \ .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של אליס היא

$$S_I = (H_I, T_I) \ .$$

לשחקן II (בוב) יש שתי קבוצות ידיעה של :

$$x_1: \ (H_{II}, T_{II}) \ , \qquad x_2: \ (H_{II}, T_{II}) \ .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של אליס היא

$$S_{II} = (H_{II}/H_{II} \ , H_{II}/T_{II} \ , \ T_{II}/H_{II} \ , \ T_{II}/T_{II}) \ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

$I \backslash II$	H_{II}/H_{II}	H_{II}/T_{II}	T_{II}/H_{II}	T_{II}/T_{II}
H_I	$1,-1$	$1,-1$	$-1,1$	$-1,1$
T_I	$-1,1$	$1,-1$	$-1,1$	$1,-1$

■

דוגמה 3.4 (התאמת מטבעות אם ידיעה לא שלמה)

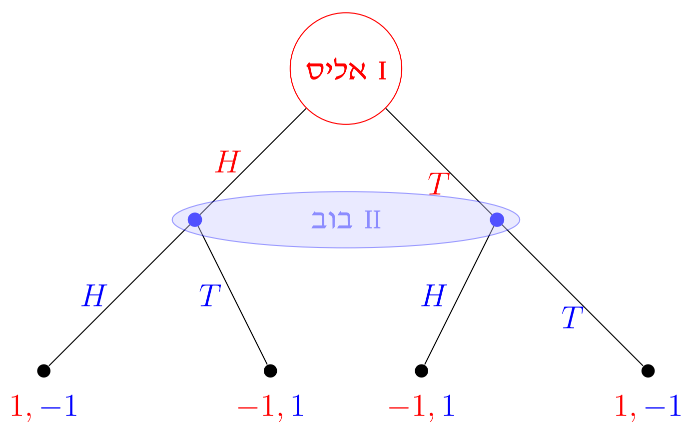
שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי). הוא רושם בחירותו על פתק, חותם עליו ומעביר אותו לשופט.
אחר כך שחקן II (בוב) בוחר H או T. רושם בחירותו על פתק, חותם עליו ומעביר אותו לשופט.

- אם שני השחקנים בוחרים באותו צד, משלם שחקן השני לשחקן הראשון ₪1.
- אם הם בוחרים בצדדים שונים, משלם שחקן הראשון לשחקן השני ₪1.

סעיף א) רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית רחבה.

סעיף ב) רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית בלבד.

פתרון:
נשים לב שזה משחק עם ידיעה לא שלמה, בגלל ששחקן II (בוב) לא יודע מה ההחלטה של שחקן I (אליס). לכן עץ המשחק הוא:



קבוצות ידיעה של שחקן I (אליס):
$$x_0 : \ (H_I, T_I) \ .$$

קבוצות ידיעה של שחקן II (בוב):
$$x_1 x_2 : \ (H_{II}, T_{II}) \ .$$

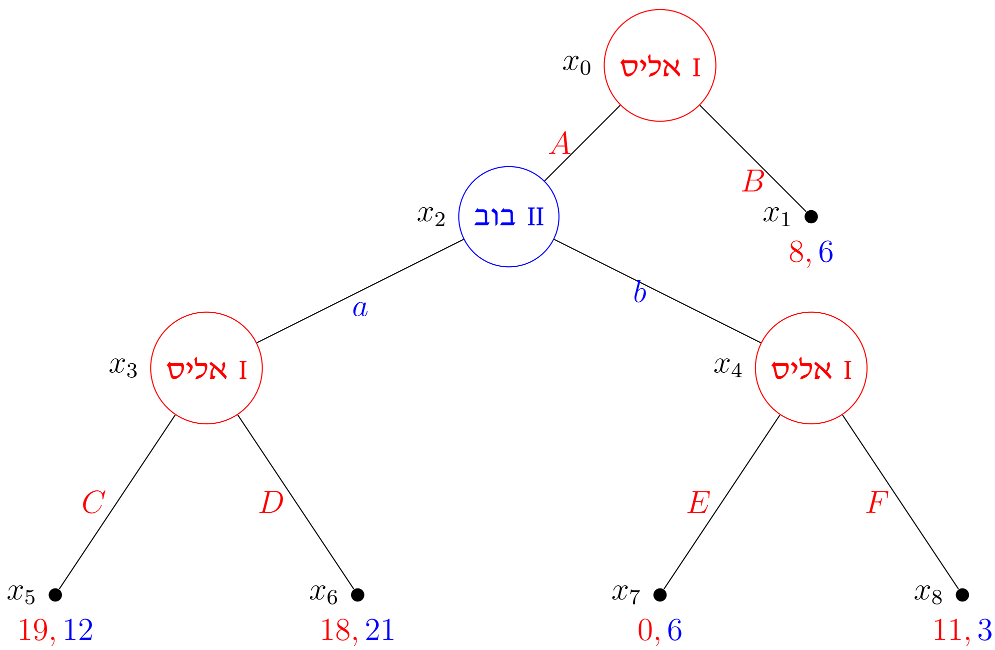
מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

$I \backslash II$	H_{II}	T_{II}
H_I	$1,-1$	$-1,1$
T_I	$-1,1$	$1,-1$

■

דוגמה 3.5 ()

נתון המשחק הבא בצורה רחבה אסטרטגית. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:
במשחק הזה, אליס (שחקן I) פותח עם המהלך הראשון, ואחר כך בוב מבצע המהלך השני, ואז אליס מבצע מהלך שוב.

המשחק הוא משחק עם ידיעה שלמה.

לאליס יש שלוש קבוצות ידיעה:

$$x_0: \ (A,B) \ , \qquad x_3: \ (C,D) \ , \qquad x_4: \ (E,F) \ .$$

בכל אחד של הקדקודים האלה לאליס יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לה $2\times 2\times 2=8$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_I = (A/C/E \ , \ A/C/F \ , \ A/D/E \ , \ A/D/F \ , \ B/C/E \ , \ B/C/F \ , \ B/D/E \ , \ B/D/F) \ .$$

לבוב יש קבוצות ידיעה אחת:

$$x_2: \ (a,b) \ .$$

בקבוצת ידיעה הזאת של בוב יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לו 2 קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a \ , \ b) \ .$$

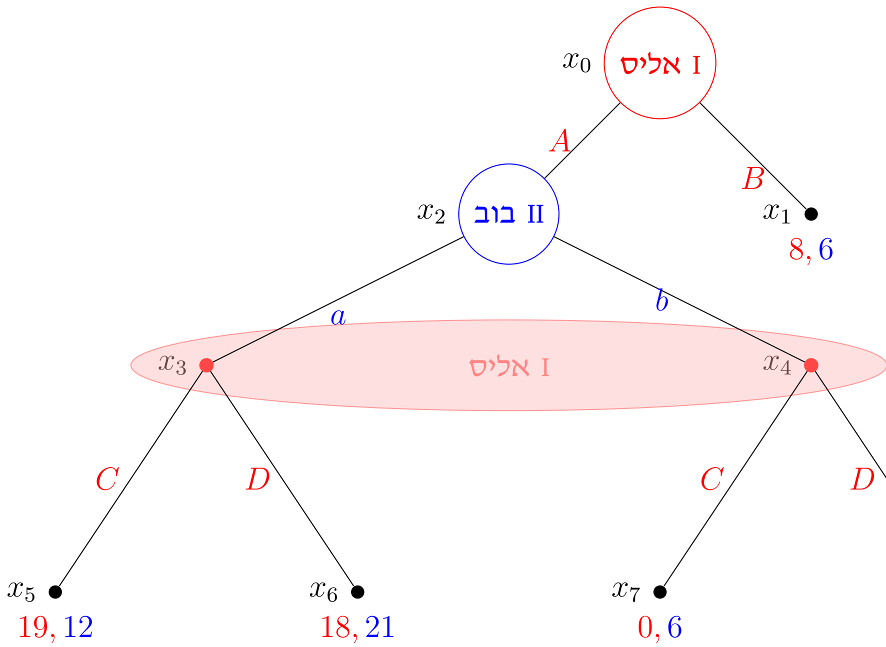
מכאן הצורה אסטרטגית בלבב של המשחק הינה:

I \ II	a	b
$A/C/E$	$19,12$	$0,6$
$A/C/F$	$19,12$	$11,3$
$A/D/E$	$18,21$	$0,6$
$A/D/F$	$18,21$	$11,3$
$B/C/E$	$8,6$	$8,6$
$B/C/F$	$8,6$	$8,6$
$B/D/E$	$8,6$	$8,6$
$B/D/F$	$8,6$	$8,6$

■

דוגמה 3.6 ()

נתון המשחק הבא בצורה רחבה אסטרטגית. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

שימו לב, בהשוואה עם הדוגמה הקודמת, הקדקודים x_3 ו- x_4 באותה קבוצת ידיעה של אליס בגלל שהיא לא ידועת מה ההחלטה של בוב בקדקוד x_2, כלומר אליס לא יודעת אם בוב בחר a או b. לכן הפעולות היוצאות מקדקוד x_3 הן אותן פעולות שיוצאות מקדקדוד x_4, בגלל שאם היו פעולות אפשריות שונות היוצאות ב- x_3 ו- x_4, אז אליס היתה יודעת איזה פעולה בוב בחר, a או b. כלומר אם לאליס יש החלטה בין הפעולות E ו- F אז היא היתה ידועת שהיא נמצאת בקדקדוד x_4 בעץ המשחק ובוב בחר b. ולהפך, אם היתה לה בחירה בין הפעולות C ו- D במקום הבחירה בין הפעולות E ו- F אז היא היתה יודעת שהיא נמצאת ב- x_3 ושבוב בחר a.

לאליס יש שתי קבוצות ידיעה:

$$x_0 : \ (A, B) \ , \qquad x_3x_4 : \ (C, D) \ .$$

בכל אחד של הקדקודים האלה לאליס יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לה $2 \times 2 = 4$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_I = (A/C \ , \ A/D \, B/C \, B/D) \ .$$

לבוב יש קבוצת ידיעה אחת:

$$x_2 : \ (a, b) \ .$$

בקבוצת ידיעה הזאת של בוב יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לו 2 קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a \ , \ b) \ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבב של המשחק הינה:

I \ II	a	b
A/C	$19,12$	$0,6$
A/D	$18,21$	$11,3$
B/C	$8,6$	$8,6$
B/D	$8,6$	$8,6$

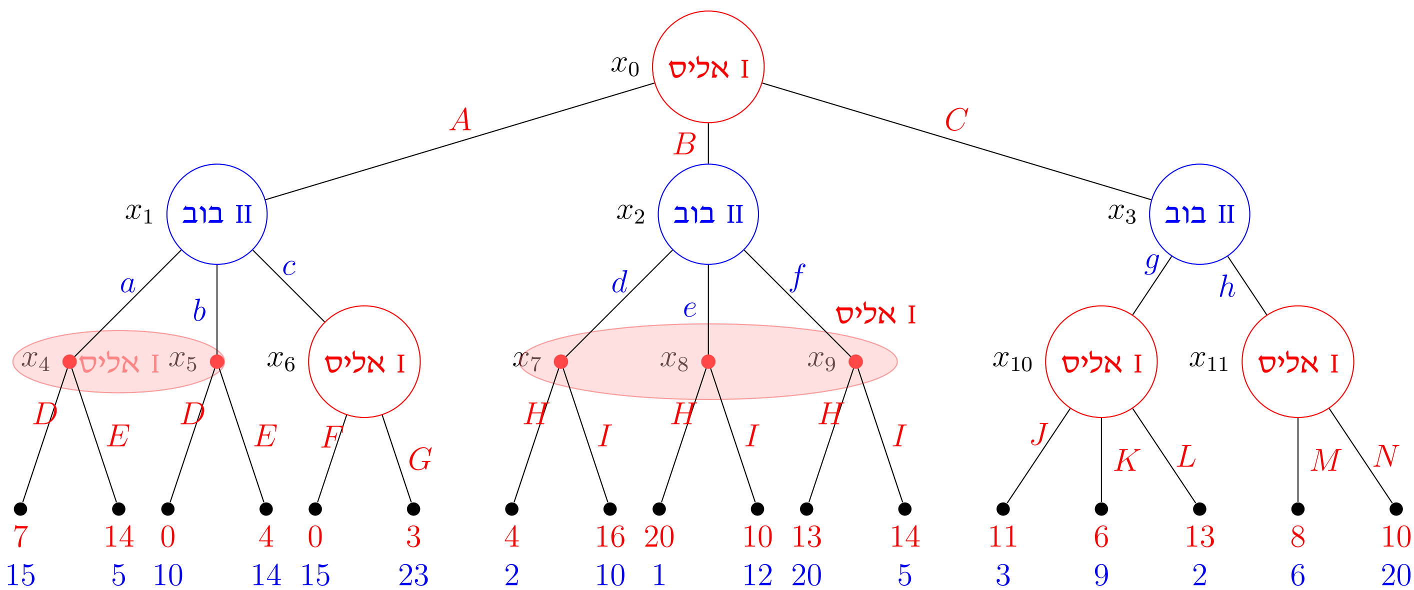
■

כלל 3.1 פעולות שיוצאות מקבוצת ידיעה ללא ידיעה שלמה

לשחקן יש אותה קבוצה של פעולות אפשריות בכל קדקוד שמוכל אותה קבוצת ידיעה.

דוגמה 3.7 ()

נתון המשחק הבא בצורה רחבה אסטרטגית. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

המשחק הוא משחק עם ידיעה לא שלמה.

לאליס יש 5 קבוצות ידיעה:

$$x_0: \ (A, B, C)\ , \qquad x_4x_5: \ (D, E)\ , \qquad x_6: \ (F, G)\ , \qquad x_7x_8x_9: (H, I)\ , \quad x_10: \ (J, K, L)\ , \quad x_{11}: \ (M, N)\ .$$

לכן יהיו לאליס $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 144$ קבוצות אסטרטגיות.

$$S_I = (A/D/E/F/G/H/J/M \ , \ A/D/E/F/G/H/J/N \ , \ldots \ , C/E/G/I/L/N) \ .$$

לבוב יש 3 קבוצות ידיעה:

$$x_1: \ (a, b, c)\ , \quad x_2: \ (d, e, f)\ , \quad x_3: \ (g, h)\ .$$

לכן לבוב יהיו: $3 \times 3 \times 2 = 18$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a/d/g \ , \ a/d/h \ , \ldots \ , c/f/h) \ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד

■

3.2 שיטת תשובה הטובה ביותר למציאת שיווי משקל נאש

הגדרה 3.1 וקטור אסטרטגיות

נתון משחק עם N שחקנים.

נניח כי לחקן 1 יש קבוצה של אסטרטגיות אפשריות S_1,
לחקן 2 יש קבוצה של אסטרטגיות אפשריות S_2,
...
ולחקן N יש קבוצה של אסטרטגיות אפשריות S_N.

וקטור אסטרטגיות הוא רשימה של אסטרטגיות

$$(s_1, s_2, \ldots, s_N)$$

כאשר $s_1 \in S_1$ אסטרטגיה של שחקן 1, $s_2 \in S_2$ אסטרטגיה של שחקן 2,
...ו- $s_N \in S_N$ אסטרטגיה של שחקן N.

הגדרה 3.2 שיווי משקל נאש במשחקים עם שני שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים 1 ו- 2. נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, ו- S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2.

קבוצת אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ נקראת **שיווי משקל נאש (שמ"ן)** אם התנאים הבאים מתקיימים:

לכל $s_1 \in S_1$, $\qquad u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*)$

לכל $s_2 \in S_2$, $\qquad u_{II}(s_1^*, s_2^*) \geq u_{II}(s_1^*, s_2)$

הגדרה 3.3 שיווי משקל נאש במשחקים עם שלוש שחקנים

נתון משחק עם שלולש שחקנים 1, 2 ו- 3. נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2 ו- S_3 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 3.

קבוצת אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, s_2^*, s_3^*)$ נקראת **שיווי משקל נאש**
אם התנאים הבאים מתקיימים:

לכל $s_1 \in S_1$, $\qquad u_1(s_1^*, s_2^*, s_3^*) \geq u_1(s_1, s_2^*, s_3^*)$

לכל $s_2 \in S_2$, $\qquad u_2(s_1^*, s_2^*, s_3^*) \geq u_2(s_1^*, s_2, s_3^*)$

לכל $s_3 \in S_3$, $\qquad u_3(s_1^*, s_2^*, s_3^*) \geq u_3(s_1^*, s_2^*, s_3)$

הגדרה 3.4 תשובה הטובה ביותר במשחקים עם שני שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים 1 ו- 2.
נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, ו- S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2.

- אסטרטגיה $t_1 \in S_1$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 1 לווקטור אסטרטגיות (t_1, s_2) אם
$$u_1(t_1, s_2) = \max_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_2) \ .$$
- אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 2 לווקטור אסטרטגיות (s_1, t_2) אם
$$u_2(s_1, t_2) = \max_{s_2 \in S_2} u_2(s_1, s_2) \ .$$

הגדרה 3.5 תשובה הטובה ביותר במשחקים עם שלוש שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים $1, 2$ ו- 3.
נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2, ו- S_3 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 3,

- אסטרטגיה $t_1 \in S_1$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 1 לווקטור אסטרטגיות (t_1, s_2, s_3) אם
$$u_1(t_1, s_2, s_3) = \max_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_2, s_3) \ .$$
- אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 2 לווקטור אסטרטגיות (s_1, t_2, s_3) אם
$$u_2(s_1, t_2, s_3) = \max_{s_2 \in S_2} u_2(s_1, s_2, s_3) \ .$$
- אסטרטגיה $t_3 \in S_3$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 3 לווקטור אסטרטגיות (s_1, s_2, t_3) אם
$$u_3(s_1, s_2, t_3) = \max_{s_3 \in S_3} u_3(s_1, s_2, s_3) \ .$$

3.3 דוגמאות

דוגמה 3.8 (מציאת שיווי משקל נאש במשחק עם שני שחקנים)

נתון המשחק בצורה אסטרטגית הבא:

$I \backslash II$	x	y	z
a	$2,1$	$0,0$	$1,2$
b	$0,3$	$2,2$	$3,1$
c	$1,1$	$3,2$	$2,2$

פתרון:

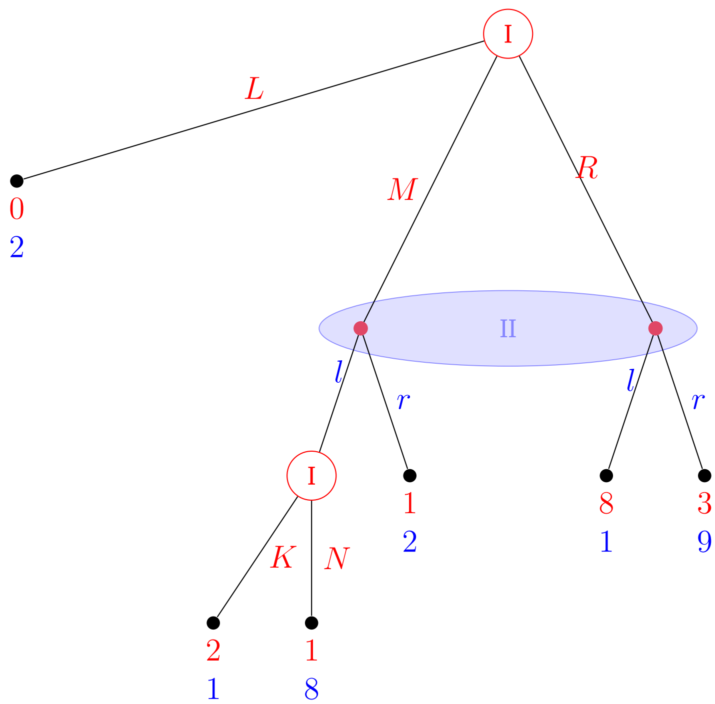
$I \backslash II$	x	y	z
a	$2, 1$	$0, 0$	$1, 2$
b	$0, 3$	$2, 2$	$3, 1$
c	$1, 1$	$3, 2$	$2, 2$

לכן ווקטור אסטרטגיות של שיווי משקל נאש הינו

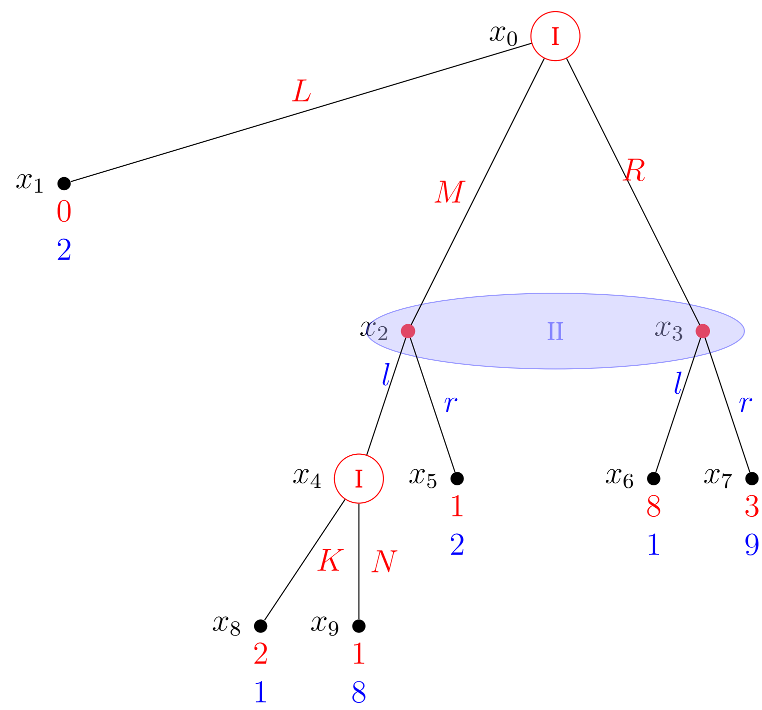
$$(s_1^*, s_2^*) = (c, y) \ .$$

■

דוגמה 3.9 ()



פתרון:



קבוצת אסטרטגיות של שחקן 1:

$$S_1 = (L/K \ , \ M/K \ , \ R/K \ , \ L/N \ , \ M/N \ , \ R/N \ ) \ .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן 2:

$$S_2 = (l, r) \ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית של המשחק היא:

I \ II	l	r
L/K	$0,2$	$0,2$
M/K	$2,1$	$1,2$
R/K	$8,1$	$3,9$
L/N	$0,2$	$0,2$
M/N	$1,8$	$1,2$
R/N	$8,1$	$3,9$

נשתמש בשיטת תשובה טובה ביותר כדי למצוא את השיווי משקל של המשחק:

I \ II	l	r
L/K	$0,2$	$0,2$
M/K	$2,1$	$1,2$
R/K	$8,1$	$3,9$
L/N	$0,2$	$0,2$
M/N	$1,8$	$1,2$
R/N	$8,1$	$3,9$

לכן הווקטור אסטרטגיות

$$(s_1^*, s_2^*) = (R/N, r)$$

שיווי משקל וגם הווקטור אסטרטגיות

$$(s_1^*, s_2^*) = (R/K, r)$$

שיווי משקל.

$\blacksquare$