

עבודה עצמית אינטגרלים משולשים

שאלה 1 חשבו את האינטגרל המשולש הבא:

$$\iiint_V 4xy \, dx \, dy \, dz$$

כאשר V הוא התחום

$$V = \{0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq x^2 \leq y \leq x, \quad 0 \leq z \leq 2 - x - y\}.$$

שאלה 2

מצאו את נפח הגוף המגבל ע"י המשטחים הנתונים:

$$z = 2x^2 + 2y^2, \quad z = x^2 + y^2, \quad y = x, \quad y = x^2.$$

שאלה 3

$$I = \iiint_V dx \, dy \, dz \, (x^2 + y^2 + z)^3$$

כאשר

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 1\}$$

שאלה 4

$$I = \iiint_V dx \, dy \, dz \, (x^2 + y^2)^2$$

כאשר

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid z = 2, \quad z = \frac{x^2 + y^2}{2} \right\}$$

שאלה 5 חשבו את

$$\int_0^2 dx \int_{-x}^x dy \int_0^{x-y+2} x \, dz$$

ושרטטו את התחום האינטגרציה במערכת הצירים xyz . כאשר

שאלה 6 חשבו את מסה הגוף החסום ע"י המשטחים $x=0, y=0, z=0, z=49-x^2, x+y=7$ עם צפיפות

$$\rho = \frac{1}{42 + 6x}.$$

שאלה 7

(א) חשבו את האינטגרל

$$\iiint_D \frac{1}{(x+y+z+1)^3}$$

בתחום החסום ע"י המישורים $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

(ב) חשבו את

$$\iiint_D x \, dx \, dy \, dz$$

מעל התחום

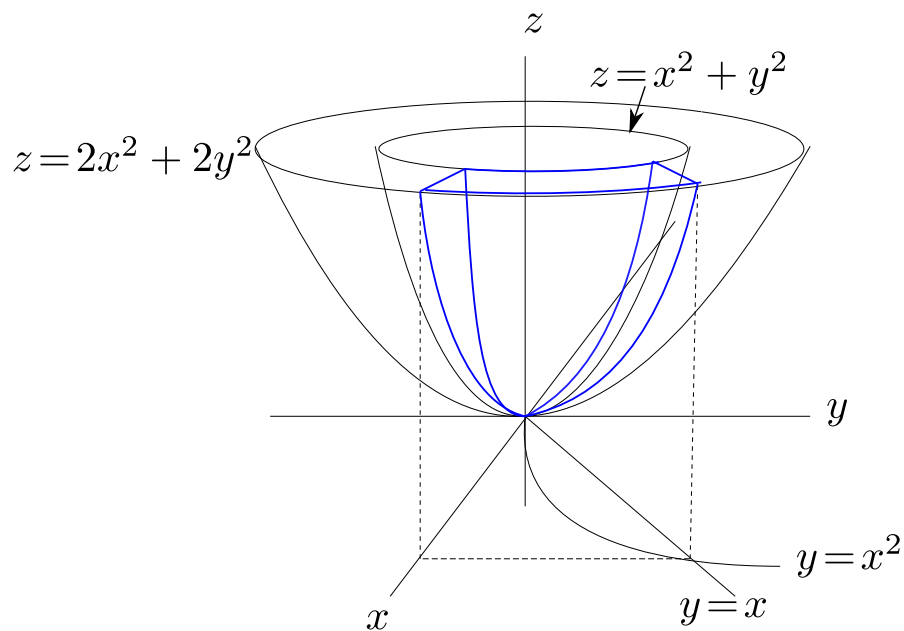
$$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \, x \leq 0, \, z \geq 0\}.$$

פתרונות

שאלה 1

$$\begin{aligned} \iiint_V 4xy \, dx \, dy \, dz &= 4 \int_0^1 x \, dx \int_{x^2}^x y \, dy \int_0^{2-x-y} dz \\ &= 4 \int_0^1 x \, dx \int_{x^2}^x (2-x-y)y \, dy \\ &= 4 \int_0^1 dx \left(y - \frac{x^5}{2} - \frac{xy^4}{2} \right) = 4 \int_0^1 x \left(y - \frac{x^5}{2} - \frac{xy^4}{2} \right) dx \\ &= 4 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{14} - \frac{x^6y}{6} - \frac{x^8y}{8} \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{21} - \frac{1}{8} \approx 0.24 \end{aligned}$$

שאלה 2 התרשים מראה את הגוף במרחב xyz הנוצר ע"י המשטחים הנתונים:



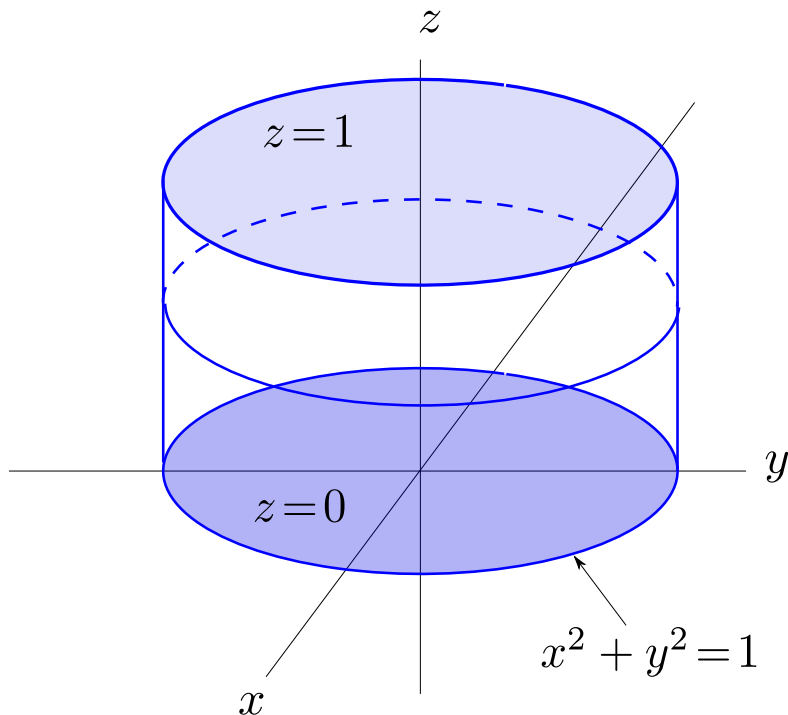
שים לב: הקווים $y = x$ ו- $y = x^2$ נחתכים בנקודות $x = 0$ ו- $x = 1$, כך שהאינטגרל הנותן את הנפח בשאלה

הוא מצורה

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz \\
&= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy \left[z \right]_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} \\
&= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy (x^2 + y^2) \\
&= \int_0^1 dx \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^x \\
&= \int_0^1 dx \left(x^3 + \frac{x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) \\
&= \int_0^1 dx \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) \\
&= \left[\frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21} \\
&= \frac{35}{105} - \frac{21}{105} - \frac{5}{105} \\
&= \frac{9}{105} \\
&= \frac{3}{35} .
\end{aligned}$$

שאלה 3

התרשים מראה שרטוט של התחום T : גליל בין המישורים $z = 0$ ו- $z = 1$ עם קו המדריך המעגל מרדיוס 1.



על סמך הצורה של T ניתן לכתוב את האינטגרל עם גבולות מתאימות כ-

$$I = \iiint_V dx dy dz (x^2 + y^2 + z)^3 = \int_0^1 dz \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy (x^2 + y^2 + z)^3 .$$

בכדי לבצע את האינטגרל של x ו- y ניתן לעבור לקואורדינטות פולריות, כלומר

$$I = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr r \cdot (r^2 + z)^3$$

ואז ניתן לעבור למשתנה $w = r^2$, אשר עבורו $w'_r = 2r$ כך שהאינטגרל הופך ל-

$$I = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \frac{1}{2} \cdot w'_r \cdot (w + z)^3 = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{w=0}^{w=1} dw (w + z)^3$$

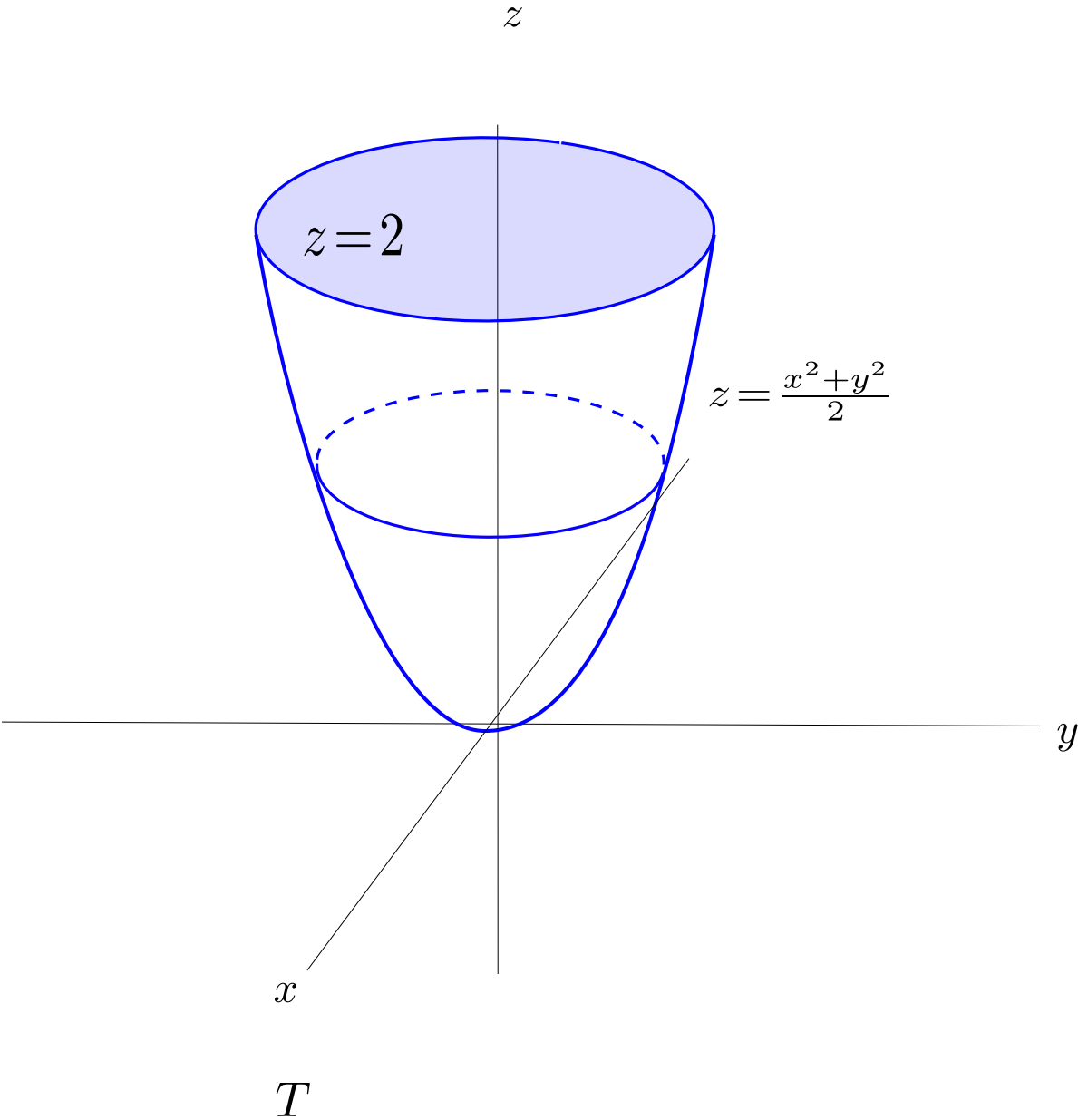
כאשר השתמשנו בשיטת אינטגרציה בהצבה. בצורה הזאת האינטגרלים של w ו- θ טריוויאליים ונקבל

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{4} [(w+z)^4]_{w=0}^{w=1} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta ((1+z)^4 - z^4) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \int_0^1 dz [\theta]_0^{2\pi} ((1+z)^4 - z^4) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \int_0^1 dz 2\pi \cdot ((1+z)^4 - z^4) \\
 &= \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^1 dz ((1+z)^4 - z^4) \\
 &= \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^1 dz (4z^3 + 6z^2 + 4z + 1)
 \end{aligned}$$

רק נשאר האינטגרל של z :

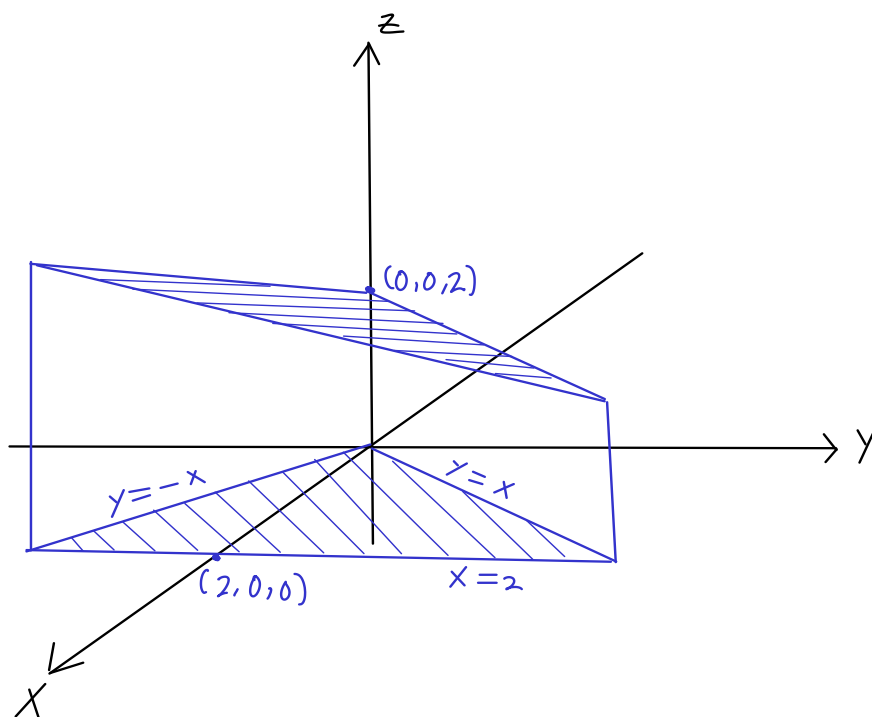
$$\begin{aligned}
 I &= \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^1 dz (4z^3 + 6z^2 + 4z + 1) \\
 &= \frac{\pi}{4} \cdot [z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2]_0^1 \\
 &= \frac{7\pi}{4} \\
 &= \frac{3\pi}{2}
 \end{aligned}$$

שאלה 4



$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{2z}} dr \int_0^{2\pi} d\theta \, r \cdot r^4 \\
 &= \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{2z}} dr \int_0^{2\pi} d\theta \, r^5 \\
 &= \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^{\sqrt{2z}} \\
 &= \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{8z^3}{6} \\
 &= \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} [\theta]_0^{2\pi} \frac{8z^3}{6} \\
 &= \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} 2\pi \cdot \frac{8z^3}{6} \\
 &= \frac{16\pi}{6} \int_0^2 dz \, z^3 \\
 &= \frac{16\pi}{6} \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^2 \\
 &= \frac{16\pi}{6} \cdot 4 \\
 &= \frac{32\pi}{3}
 \end{aligned}$$

שאלה 5



$$\begin{aligned}
 \int_0^2 dx \int_{-x}^x dy \int_0^{x-y+2} x dz &= \int_0^2 dx \int_{-x}^x dy x(x-y+2) \\
 &= \int_0^2 dx x \int_{-x}^x dy (x-y+2) \\
 &= \int_0^2 dx x \left[xy - \frac{y^2}{2} + 2y \right]_{y=-x}^{y=x} \\
 &= \int_0^2 dx x [2x^2 + 4x] \\
 &= \int_0^2 dx (2x^3 + 4x^2) \\
 &= \left[\frac{2x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} \right]_0^2 \\
 &= 8 + \frac{32}{3} \\
 &= \frac{56}{3} .
 \end{aligned}$$

שאלה 7

(א) $\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \approx 0.034$

(ב) $\frac{15\pi}{4} \approx 11.78$