

עבודה 5: סיבוכיות זמן

מועד הגשה

- (1) ההגשה היא עד סוף יום ראשון 18.01.2026 עד השעה 23:59 באותו היום. אל תחכו לרגע האחרון. תכננו את זמנכם בהתאם. הגישו לפני.
- (2) איחור במועד ההגשה יגרור הורדה של ציון, 5 נק' לכל יום איחור או חלק ממנו. בכל מקרה לא יהיה ניתן להגיש מעבר ל-2 ימי איחור ממועד ההגשה דלעיל כלומר עד יום שלישי 20.01.26 (עד השעה 23:59).

אופן הגשה

- (1) קראו היטב את השאלות. עליכם לענות על כל השאלות בעבודה זו.
- (2) הגשת העבודה תהיה דרך אתר הקורס במודל בלבד. הגשת העבודה היא ביחידים.
- (3) כיצד להגיש?
- (א) יש לסרוק או להמיר את העבודה לקובץ pdf ולהגיש אותו (סריקה לא ברורה או מטושטשת לא תיבדק).
- (ב) שם הקובץ שיוגש למערכת ההגשה יהיה מספר ת"ז המגיש. לדוגמה: 123456789.pdf.
- (4) בקובץ המוגש יש להוסיף את התיעוד הבא בעמוד הראשון (בעברית או באנגלית, לבחירתכם). יש לשנות את השם לשם שלכם ואת תעודת הזהות לתעודת הזהות שלכם. ובמקום סולמית יש לכתוב את מספר העבודה.
Assignment: #
Author: Israel Israeli, ID: 01234567
- (5) לאחר שהעליתם את הקבצים שלכם למודל, הורידו אותם מהמודל למחשב שלכם וודאו כי הקבצים תקינים וכי העליתם את הקבצים הנכונים והמלאים. לאחר תום מועד ההגשה לא יתקבלו ערעורים על כך שהעליתם קבצים לא תקינים או שהעליתם בטעות קבצים אחרים / לא נכונים.

שאלות

- (1) שאלות בנוגע העבודה יש לשאול בפורום באתר המודל של הקורס או בשעות קבלה של המתרגל/ת האחראי/ת בלבד. אין לשלוח שאלות במייל לא למתרגל האחראי ולא למתרגלים/מרצים אחרים.
- (2) ניתן לשאול שאלות הבהרה ומיקוד על המשימות שבעבודה במידה ומשימה מסוימת לא ברורה. לא ניתן לשאול על הפתרונות שלכם. לדוגמא, לא ניתן לשאול האם הפתרון שלי נכון, לא ניתן לשאול למה הפתרון לא עובד, וכדומה.

שונות

- (1) השאלות בעבודה זו הינן שוות משקל. כלומר, משקל כל שאלה הוא 100 חלקי מספר השאלות בעבודה.
- (2) בשאלה מרובת סעיפים, הסעיפים הם שווי משקל. כלומר משקל כל סעיף הוא משקל השאלה כולה חלקי מספר הסעיפים השאלה.

- המתרגל אחראי: צביקה שוורץ.
- העודה מכילה 5 שאלות.
- בהצלחה!

שאלה 1 (20 נקודות)

בעיית $HAMCYCLE$ (מעגל המילטוני) מוגדרת באופן הבא:
בהינתן גרף מכוון $G = (V, E)$, האם G מכיל מעגל שעובר בכל קדקוד בגרף פעם אחת בדיוק?
הוכיחו את הטענה הבאה:

$$HAMCYCLE \in NP.$$

שאלה 2 (20 נקודות)

הבעיית $KNAPSACK$ מוגדרת באופן הבא:

קלט:

1. מספר טבעי n .
2. קבוצת משקלים $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ כאשר $w_i \in \mathbb{N}^+$ לכל $1 \leq i \leq n$.
3. קבוצת ערכים $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ כאשר $u_i \in \mathbb{N}^+$ לכל $1 \leq i \leq n$.
4. סך משקל כולל $W \in \mathbb{N}^+$.
5. סך ערך כולל $U \in \mathbb{N}^+$.

פלט: האם קיימת תת-קבוצה $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ של הפריטים כך ש:

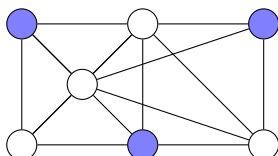
$$1. \sum_{i \in S} w_i \leq W \quad (\text{סך המשקל לא חורג ממשקל מקסימלי } W)$$

$$2. \sum_{i \in S} u_i \geq U \quad (\text{סך הערך לפחות } U)$$

הוכיחו כי $KNAPSACK$ שייכת ל- NP .

שאלה 3 (20 נקודות)

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, קבוצה בלתי תלויה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $S \subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u, v \in S$ מתקיים $(u, v) \notin E$. התרשים הבא מראה דוגמה של קבוצה בלתי תלויה בגודל $k = 3$:



הבעיית IS מוגדרת באופן הבא:

קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר k .

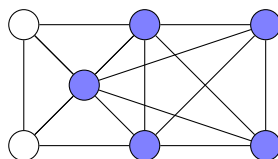
פלט: האם קיימת קבוצה בלתי תלויה ב- G בגודל k ?

$$IS = \{ \langle G, k \rangle \mid k \text{ בגודל } G \text{ בלתי תלויה בגודל } k \}$$

הוכיחו כי IS שייכת ל- NP .

שאלה 4 (20 נקודות)

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, קליקה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $C \subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u, v \in C$ מתקיים $(u, v) \in E$. התרשים מראה קליקה בגודל $k = 5$:



נגדיר: $\frac{1}{2}CLIQUE = \{ \langle G \rangle \mid n = |V| \text{ קודקודים וקיימת קליקה בגודל } \frac{n}{2} \}$
הוכיחו כי השפה $\frac{1}{2}CLIQUE$ היא NP שלמה.

שאלה 5 (20 נקודות) תהי L השפה הבאה:

$$DOUBLESAT = \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ נוסחה בוליאנית עברה קיימות לפחות 2 השמות מספקות} \}.$$

הוכיחו כי L היא NP שלמה.

פתרונות

שאלה 1 נבנה מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית המכריעה את $HAMCYCLE$ בזמן פולינומיאלי.

בניית המכונה

$M = \langle G \rangle$ על קלט

(1) בודקת באופן אי-דטרמיניסטית סדרת קודקודים u_1, \dots, u_n מתוך V כאשר $|V| = n$.

(2) בודקת שהקודקודים שונים זה מזה.

• אם לא \Leftarrow דוחה.

(3) בודקת שכל הצלעות (u_i, u_{i+1}) לכל $1 \leq i \leq n-1$ וגם את הצלע (u_n, u_1) נמצאת ב- G .

• אם לא \Leftarrow דוחה.

• אחרת \Leftarrow מקבלת.

נכונותכיוון \Leftarrow

אם $\langle G \rangle \in HAMCYCLE$

$\Leftarrow \exists$ מעגל המילטוני ב- G .

$\Leftarrow \exists$ ריצה של M על $\langle G \rangle$ בה תבחר בקודקודי מעגל זה. נסמן הסדרת הקודקודים הזו u_1, \dots, u_n .

$\Leftarrow M$ תבדוק שהקודקודים בסדרה הזו שונים זה מזה, ולא תדחה.

$\Leftarrow M$ תבדוק שלכל $1 \leq i \leq n-1$ התלע (u_1, u_{i+1}) והצלע (u_n, u_1) קיימות ותקבל.

כיוון \Rightarrow

אם

$\langle G \rangle \notin HAMCYCLE$

\Leftarrow לא קיים מעגל המילטוני ב- G .

\Leftarrow בכל ריצה של M על $\langle G \rangle$ היא תבחר סדרת קודקודים ולפחות אחת הבדיקות לא תתקיים.

$\Leftarrow M$ תדחה.

סיבוכיות זמן

• שלב 1) עולה $O(|V|)$ צעדים.

• שלב 2) עולה $O(|V|)$ צעדים.

• שלב 1) עולה $O(|V||E|)$ צעדים.

לפיכך M רציה בזמן $O(|V|) + O(|V|) + O(|V||E|) = O(|V||E|) = O(N)$ כאשר N הוא האורך הקלט $\langle G \rangle$.
לכן $HAMCYCLE \in NP$ כריעה בזמן פולינומאלי ע"י מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית לכן $HAMCYCLE \in NP$.

שאלה 2 נראה שקיימת מ"ט אי-דטרמיניסטית M שמכריעה $KNAPSACK$ בזמן פולינומאלי ואז נראה שהיא רצה בזמן פולינומאלי.

בניית המכונה

$M = \langle \{w_1, \dots, w_n\}, \{u_1, \dots, u_n\}, W, U \rangle$ על קלט

(1) בוחרת תת קבוצה $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ באופן אי-דטרמיניסטי.

(2) בודקת אם $\sum_{i \in S} w_i \leq W$.

• אם לא \Leftarrow דוחה.

(3) בודקת אם $\sum_{i \in S} u_i \geq U$.

• אם לא \Leftarrow דוחה.

• אחרת מקבלת.

הוכחת נכונות

סיבוכיות זמן

שאלה 3 נבנה מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית המכריעה את IS בזמן פולינומאלי.

בניית המכונה

$M = \langle G \rangle$ על קלט

(1) בודקת באופן אי-דטרמיניסטית סדרת קודקודים u_1, \dots, u_k מתוך V כאשר $k \leq n$, כאשר $|V| = n$.

(2) בודקת שהקודקודים שונים זה מזה.

• אם לא \Leftarrow דוחה.

(3) בודקת שכל $1 \leq i, j \leq k : (u_i, u_j) \notin E$ כאשר E הקבוצת הצלעות של G .

- אם לא \Leftarrow דוחה.
- אחרת \Leftarrow מקבלת.

נכונות

\Leftarrow כיוון
 \Rightarrow כיוון

סיבוכיות זמן

שאלה 4

ידוע כי $CLIQUE$ שפה NP שלמה. לכן נראה שקיימת רדוקציה פולינומיאלית מ- $CLIQUE$ ל- $\frac{1}{2}CLIQUE$ ולכן $\frac{1}{2}CLIQUE \in NP$ שלמה.

בניית הרדוקציה

$$f(\langle G, k \rangle) = \langle G' \rangle,$$

כאשר, אם $G = (V, E)$ כאשר $|V| = n$, אז G' הוא הגרף הבא:

- מוסיפים ל- G גרף שלם K_n בעל n קודקודים.
- מחברים כל קודקוד של K_n לכל קודקוד של G .
- מוספים קבוצה של $2k$ קודקודים בודדים אשר לא מחבורים לאף קודקוד אחר בצלע.

הוכחת נכונות

\Leftarrow כיוון

אם $\langle G, k \rangle \in CLIQUE$

$\Leftarrow G$ מכיל קליקה בגודל k .

$\Leftarrow G'$ מכיל קליקה בגודל $k + n$.

\Leftarrow מכיוון של- G' יש $n' = 2k + 2n$ קודקודים אז G' מכיל קליקה בגודל $\frac{n'}{2}$.

$\Leftarrow \langle G' \rangle \in \frac{1}{2}CLIQUE$

\Rightarrow כיוון

אם $\langle G' \rangle \in \frac{1}{2}CLIQUE$

$$\Leftarrow G' = (V', E') \text{ גרף לא מכוון שמכיל גליקה בגודל } \frac{n'}{2}, \text{ כאשר } n' = |V'|.$$

$$\Leftarrow \text{מכיוון ש- } n' = 2k + 2n, \text{ אז } G' \text{ מכיל גליקה בגודל } n + k.$$

$$\Leftarrow \text{אם נוציא מהגרף } G' \text{ את ה- } 2k \text{ קודקודים בודדים ואת הגרף שלם } K_n \text{ אז נקבל גרף } G \text{ שמכיל קליקה בגודל } k.$$

$$\Leftarrow \langle G, k \rangle \in \text{CLIQUE}$$

סיבוכיות זמן

שאלה 5 ממשפט קוק לויך השפה $NP \text{ SAT}$ שלמה. נראה שקיימת רקוקציה פולינומיאלית מ- SAT ל- $DOUBLESAT$, ולכן $NP \text{ DOUBLESAT}$ שלמה.

בניית הרדוקציה

$$f(\langle \phi \rangle) = \langle \phi' \rangle$$

כאשר ϕ נוסחה בוליאנית ו-

$$\phi' = \phi \vee x$$

כאשר x משתנה בוליאני.

הוכחת נכונות

כיוון \Leftarrow

$$\text{אם } \langle \phi \rangle \in \text{SAT}$$

$$\Leftarrow \exists \text{ השמה מספקת ל- } \phi. \text{ נסמן ההשמה המספקת } X_1.$$

$$\Leftarrow \exists \text{ שתי השמות המספקות ל- } \phi': \text{ ההשמה } X_1 \text{ והשמה } X_2 = \{x = 1\}.$$

$$\Leftarrow \langle \phi' \rangle \in \text{DOUBLESAT}$$

כיוון \Rightarrow

$$\text{נניח ש- } \langle \phi' \rangle \in \text{DOUBLESAT} \text{ ונניח בשלילה כי } \langle \phi \rangle \notin \text{SAT}$$

$$\Leftarrow \text{לא קיימת השמה מספקת של } \phi.$$

$$\Leftarrow \text{ל- } \phi' \text{ רק השמה מספקת אחת: } x = 1, \text{ בסתיקה לכך ש- } \langle \phi' \rangle \in \text{DOUBLESAT}$$

$$\Leftarrow \langle \phi \rangle \in \text{SAT}$$