

תרגילים: הוכחות

שאלה 1 הוכיחו: תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. אם הפיכה אז למערכת

$$Ax = b, \quad b \neq 0,$$

קיים פתרון אחד והוא יחיד.

שאלה 2 הוכיחו: תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. אם הפיכה אז $\dim(\text{Nul } A) = 0$.

שאלה 3 הוכיחו: תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. אם למערכת

$$Ax = b, \quad b \neq \bar{0}$$

קיים רק פתרון אחד והוא יחיד אז $\dim(\text{Nul}(A)) = 0$.

שאלה 4 תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. אם למערכת

$$Ax = b, \quad b \neq \bar{0}.$$

יש יותר מפתרון אחד אז A לא הפיכה.

שאלה 5 תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית, $x \in \mathbb{F}^n$ וקטור עמודה ו- $x \in \mathbb{F}^{1 \times n}$ וקטור שורה. הוכיחו שי התנאים הבאים שקולים:

(1) הפתרון היחיד של המערכת $A \cdot x = \bar{0}$ הוא $x = \bar{0}$.

(2) העמודות של A בת"ל.

(3) קיימת מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש- $AB = I$.

(4) הפתרון היחיד של המערכת $y \cdot A = \bar{0}$ הוא $y = \bar{0}$.

(5) השורות של A בת"ל.

(6) קיימת מטריצה $C \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש- $CA = I$.

(7) A הפיכה.

שאלה 6

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית, $x \in \mathbb{F}^n$ וקטור עמודה. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

(1) A הפיכה.

(2) למערכת $A \cdot x = \bar{0}$ יש רק את הפתרון $x = \bar{0}$.

(3) המדורגת של A היא I .

(4) למערכת $A \cdot x = b$ יש לפחות פתרון אחד.

(5) קיימת מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש- $AB = I$.

שאלה 7 תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ויהי $u \in \mathbb{F}^n$ וקטור שמקיים שת המשוואה ההומוגנית

$$A \cdot u = \bar{0}.$$

הוכיחו שאם $u \neq \bar{0}$ אז $|A| = 0$.

שאלה 8 יהי U תת מרחב של \mathbb{R}^n . נניח ש $\dim U = m$ ו $B = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ קבוצה של m וקטורים זשל U . הוכיחו כי B בת"ל אם"ם B פורשת את U .

שאלה 9 יהי $U \subseteq W$ תתי מרחבים של \mathbb{R}^n . הוכיחו:

$$1. \dim U \leq \dim W$$

$$2. \text{ אם } \dim U = \dim W \text{ אז } U = W$$

שאלה 10 תהי $T : U \rightarrow V$ העתקה ליניארית. נניח ש $\dim(U) = n$ ו $\dim(V) = m$, ותהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T . התנאים הבאים שקולים:

(א) T על.

(ב) במדורגת המתקבלת מ- A קיים איבר מוביל בכל שורה

(ג) עמודות A פורשות את \mathbb{R}^m .

שאלה 11 תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

$$(1) \text{rank}(A) = n$$

(2) השורות של A פורשות את \mathbb{R}^n .

(3) העמודות של A בת"ל ב- \mathbb{R}^m .

(4) נתון $x \in \mathbb{F}^n$. הפתרון היחיד של המערכת $Ax = \bar{0}$ הוא $x = \bar{0}$ קיים פתרון.

שאלה 12 תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

$$(1) \text{rank}(A) = m$$

(2) העמודות של A פורשות את \mathbb{R}^m .

(3) השורות של A בת"ל ב- \mathbb{R}^n .

שאלה 13

תהי $T : V \rightarrow W$ העתקה ליניארית.

$$\dim V = \dim(\ker T) + \dim(\text{Im } T)$$

פתרונות

שאלה 1 קיום: A הפיכה אז נכפיל את המשוואה $Ax = b$ בהופכית ונקבל

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b .$$

יחידות: נניח שקיימים x_1, x_2 כך ש- $x_1 \neq x_2$ כך ש- $Ax_1 = b$ ו- $Ax_2 = b$. אז

$$A(x_1 - x_2) = b - b = 0$$

A הפיכה אז נכפיל בהופכית ונקבל

$$A^{-1}A(x_1 - x_2) = A^{-1} \cdot 0 = 0 \Rightarrow I \cdot (x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

סתירה.

שאלה 2 תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה הפיכה. נניח שלמערכת $A \cdot x = \bar{0}$ קיים פתרון $x_1 \neq \bar{0}$. אז

$$A \cdot x_1 = \bar{0}$$

A הפיכה לכן $\exists A^{-1}$. נכפיל מצד שמאל ב- A^{-1} ונקבל

$$A^{-1} \cdot A \cdot x_1 = A^{-1} \cdot \bar{0} \Rightarrow x_1 = \bar{0} .$$

סתירה.

שאלה 3 למערכת

$$Ax = b , \quad b \neq \bar{0} ,$$

יש פתרון יחיד. נסמן אותו ב- x_1 . נניח ש- $\dim(\text{Nul}(A)) \neq 0$. אז למערכת $A \cdot x = \bar{0}$ קיים פתרון $x_2 \neq \bar{0}$. לכן

$$A \cdot (x_1 + x_2) = A \cdot x_1 + A \cdot x_2 = b + 0 = b .$$

קיבלנו שני פתרונות למערכת $A \cdot x = b$: x_1 ו- $(x_1 + x_2)$. סתירה.

שאלה 4 נוכיח דרך השלילה. נניח ש- x_1, x_2 פתרונות למערכת $Ax = b$, (כאשר $x_1 \neq x_2$ ו- $b \neq \bar{0}$) וגם A

הפיכה. אז

$$Ax_1 = b$$

ו-

$$Ax_2 = b$$

לכן

$$A \cdot (x_1 - x_2) = b - b = \bar{0} .$$

A הפיכה אז A^{-1} קיימת. נכפיל ב- A^{-1} מצד שמאל ונקבל

$$A^{-1} \cdot A \cdot (x_1 - x_2) = A^{-1} \cdot \bar{0} \Rightarrow I \cdot (x_1 - x_2) = \bar{0} \Rightarrow x_1 - x_2 = \bar{0} \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

סתירה.

שאלה 5

• (2) ← (1)

נרשום $A = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}$ ו- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. אם הפתרון היחיד של המערכת $A \cdot x = \bar{0}$ הוא $x = \bar{0}$,

אז

$$\begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 c_1 + x_2 c_2 + \cdots + x_n c_n = \bar{0}$$

מתקיים רק אם $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ ולכן העמודות c_1, c_2, \dots, c_n בת"ל.

• (3) ← (2)

נרשום $A = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}$. אם העמודות של A בת"ל, אז $\text{span}\{c_1, c_2, \dots, c_n\} = \mathbb{F}^n$. לכן קיימים סקלרים כך ש-

$$\begin{aligned} b_{11}c_1 + b_{21}c_2 + \cdots + b_{n1}c_n &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \\ b_{12}c_1 + b_{22}c_2 + \cdots + b_{n2}c_n &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \\ b_{1n}c_1 + b_{2n}c_2 + \cdots + b_{nn}c_n &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (*)$$

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ אז אפשר לרשום (*) בצורה

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

כלומר

$$AB = I.$$

• (4) \Leftarrow (3)

אם $y \cdot A = \bar{0}$, אז לפי (3),

$$y \cdot A \cdot B = \bar{0} \cdot B = 0 \quad \Rightarrow \quad y \cdot I = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \bar{0}.$$

• (5) \Leftarrow (4)

נרשום $A = \begin{pmatrix} - & r_1 & - \\ - & r_2 & - \\ & \vdots & \\ - & r_n & - \end{pmatrix}$ ו- $y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)$. אם הפתרון היחיד של המערכת $y \cdot A = \bar{0}$ הוא $y = \bar{0}$, אז

$$(y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n) \cdot \begin{pmatrix} - & r_1 & - \\ - & r_2 & - \\ & \vdots & \\ - & r_n & - \end{pmatrix} = y_1 r_1 + y_2 r_2 + \dots + y_n r_n = \bar{0}$$

מתקיים רק אם $y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_n = 0$ ולכן השורות r_1, r_2, \dots, r_n בת"ל.

• (6) \Leftarrow (5)

נרשום $A = \begin{pmatrix} - & r_1 & - \\ - & r_2 & - \\ & \vdots & \\ - & r_n & - \end{pmatrix}$ אם השורות של A בת"ל, אז $\text{span}\{r_1, r_2, \dots, r_n\} = \mathbb{F}^{1 \times n}$. לכן קיימים סקלרים כך ש-

$$\begin{aligned} c_{11}r_1 + c_{12}r_2 + \dots + c_{1n}r_n &= (1 \ 0 \ \dots \ 0), \\ c_{21}r_1 + c_{22}r_2 + \dots + c_{2n}r_n &= (0 \ 1 \ \dots \ 0), \\ c_{n1}r_1 + c_{n2}r_2 + \dots + c_{nn}r_n &= (0 \ 0 \ \dots \ 1). \end{aligned} \quad (*)$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \text{ אז אפשר לרשום } (*) \text{ בצורה}$$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} - & r_1 & - \\ - & r_2 & - \\ & \vdots & \\ - & r_n & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

כלומר

$$CA = I.$$

• (2) \Leftrightarrow (5)

נוכיח (2) \Leftarrow (5)

העמודות של A בת"ל \Leftarrow קיימת B כך ש- $AB = I \Leftarrow$ הפתרון היחיד של $y \cdot A = \bar{0}$ הוא $y = \bar{0}$ \Leftarrow השורות של A בת"ל.

נוכיח (5) \Leftarrow (2)

השורות של A בת"ל \Leftarrow קיימת C כך ש- $CA = I \Leftarrow$ הפתרון היחיד של $A \cdot x = \bar{0}$ הוא $x = \bar{0}$ \Leftarrow העמודות של A בת"ל.

• (5) \Leftarrow (7)

(5) \Leftarrow (6), כלומר $\exists C$ כך ש-

$$CA = I$$

נכפיל מצד שמאל ב- A ונקבל

$$ACA = A \Rightarrow AC = I.$$

כלומר קיימת C כך ש-

$$CA = AC = I,$$

לכן A הפיכה.

• (2) \Leftarrow (7)

(2) \Leftarrow (3), כלומר $\exists B$ כך ש-

$$AB = I$$

נכפיל מצד ימין ב- A ונקבל

$$ABA = A \Rightarrow BA = I.$$

כלומר קיימת B כך ש-

$$AB = BA = I,$$

לכן A הפיכה.

שאלה 6

• (1) \Leftarrow (2)

אם A הפיכה אז קיימת A^{-1} . לכן

$$Ax = \bar{0} \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}\bar{0} = \bar{0} \Rightarrow x = \bar{0}.$$

• (2) ⇐ (3)

נניח שלמערכת $A \cdot x = \bar{0}$ יש רק את הפתרון $x = \bar{0}$ אבל המדוגת של A אינה שווה ל- I . נרשום את המטריצה המורחבת של המערכת, ונסמן את המטריצה המדורגת ב- U :

$$(A|\bar{0}) \rightarrow (U|\bar{0}) .$$

אם $U \neq I$ אז ב- U יש שורת אפסים. U מטרריצה ריבועית ולכן יהיה לפחות משתנה חופשי אחד. לכן למערכת $Ax = \bar{0}$ יהיו אינסוף פתרונות. סתירה.

• (3) ⇐ (4)

המטריצה המורחבת של המערכת $Ax = b$ היא

$$(A|b) .$$

לפי (3) המדורגת של A היא I לכן אחרי דירוג נקבל

$$(A|b) \rightarrow (I|c)$$

כאשר c וקטור. לכן למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד: $x = c$.

• (4) ⇐ (5)

נרשום $I = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n)$ כאשר $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. לפי (4) למערכת $Ax = e_i$

קיים פתרון יחיד $x = c_i$ לכל $i = 1, \dots, n$. לכן קיימת מטריצה $C = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ יחידה כך ש-

$$AC = I .$$

• (5) ⇐ (1)

נניח ש- $AC = I$ אז

$$ACA = A \quad \Rightarrow \quad CA = I .$$

לכן קיבלנו כי קיימת C כך ש- $AC = CA = I$. לכן A הפיכה.

שאלה 7 נניח ש- $u \neq \bar{0}$ ו- $|A| \neq 0$. אז A הפיכה, כלומר ההופכית A^{-1} קיימת. נכפיל מצד שמאל ב- A^{-1}

ונקבל

$$A^{-1} \cdot A \cdot u = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad u = \bar{0} .$$

סתירה.

שאלה 8 \Rightarrow

נניח ש B בת"ל. נוכיח דרך השלילה ש B פורשת את U .

נניח ש B לא פורשת את U . אז ניתן להוסיף וקטורים ל B כדי לקבל בסיס של U . בבסיס חדש יהיו יותר מ- m וקטורים. ז"א $\dim(U) > m$. סתירה.

\Leftarrow

נניח ש B פורשת את U ו B ת"ל.

ניתן להוריד מ- B וקטורים כדי לקבל בסיס של U . בבסיס החדש יהיו פחות מ- m וקטורים. ז"א $\dim(U) < m$. סתירה.

שאלה 9 \Rightarrow יהי B בסיס של U . נסמן $k = \dim(W)$.

1. אם $\dim(U) > \dim(W)$, אז B קבוצה בת"ל של וקטורים של W שבה יש יותר מ- k וקטורים. סתירה. לכן $\dim U \leq \dim W$.

2. אם $\dim(U) = k$, אז B קבוצה בת"ל של וקטורים של W שבה יש $k = \dim(W)$ וקטורים. לכן, B פורשת את W . לכן $W = \text{span } B = U$.

שאלה 11

$(1) \Leftrightarrow (2)$ \square

$$\text{row}(A) \subseteq \mathbb{F}^n$$

1- $\dim(\text{row } A) = n$ לפי (1), לכן $\text{row}(A) = \mathbb{F}^n$.

$(2) \Leftrightarrow (3)$ \square

לפי (2), $\text{row}(A) = \mathbb{R}^n$ אז $\text{rank}(A) = n$. ז"א $\dim(\text{col } A) = n$. מכיוון שה- n עמודות של A פורשות את $\text{col } A$, אז הן.

$(3) \Leftrightarrow (4)$ לפי (3): נשרום

$$Ax = \bar{0} \quad (\#1)$$

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ c_1 & c_2 & c_n \\ | & | & | \end{pmatrix} \quad \text{כאשר } \{c_1, c_2, \dots, c_n\} \text{ העמודות של } A, c_i \in \mathbb{F}^m \text{ לכל } 1 \leq i \leq n. \text{ נרשום}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$Ax = \bar{0} \Rightarrow x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_n c_n = \bar{0} \quad (\#2)$$

לפי (3), $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ בת"ל לכן (#2) מתקיים רק אם $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. לכן הפתרון היחיד של (#1) הוא $x = 0$.

□ $(1) \Leftrightarrow (4)$

לפי (4) הפתרון היחיד של המערכת $Ax = \bar{0}$ הוא $x = \bar{0}$. אז לפי משפט ?? העמודות של A בת"ל. לכן $\dim(\text{col } A) = n$. לכן $\text{rank}(A) = n$.

שאלה 12

□ $(1) \Leftrightarrow (2)$

לפי (1), $\dim(\text{col } A) = m$ לכן לפי משפט ??, $\text{col}(A) = \mathbb{F}^m$.

□ $(2) \Leftrightarrow (3)$

לפי (2), $\text{col}(A) = \mathbb{F}^m$, אז $\text{rank}(A) = m$. אז $\dim(\text{row } A) = m$ מכיוון שה- m שורות של A פורשות את $\text{row } A$, אז הן בת"ל.

□ $(1) \Leftrightarrow (3)$

לפי (3) ה- m שורות של A בת"ל, לכן $\dim(\text{row } A) = m$, ולכן $\text{rank}(A) = m$.

שאלה 13 כל וקטור ב $\text{Im } T$ אפשר לרשום בצורה $T(v)$ כאשר v וקטור ב V (ראו הגדרה ??). יהי $\{T(e_1), \dots, T(e_r)\}$ בסיס של $\text{Im } T$ כאשר $\{e_1, \dots, e_r\}$ וקטורים ב V . יהי $\{f_1, \dots, f_k\}$ בסיס של $\ker T$. כך $\dim(\ker T) = k$ ו $\dim(\text{Im } T) = r$. נוכיח כי $B = \{e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_k\}$ בסיס של V .

(1) פורשת B את V

אם $v \in V$ אז $T(v) \in \text{Im } T$. לכן

$$T(v) = t_1 T(e_1) + \dots + t_r T(e_r), \quad t_i \in \mathbb{R}.$$

אזי $v - t_1 e_1 - \dots - t_r e_r \in \ker T$. לכן הוקטור הזה צירוף לינארי של $\{f_1, \dots, f_k\}$. לכן v צירוף לינארי של הוקטורים ב B .

בת"ל B

נניח

$$t_1 e_1 + \dots + t_r e_r + s_1 f_1 + \dots + s_k f_k = \bar{0} \quad (\#)$$

עבור סקלרים $t_i \in \mathbb{R}$ ו $s_j \in \mathbb{R}$. אזי

$$t_1 T(e_1) + \dots + t_r T(e_r) + s_1 T(f_1) + \dots + s_k T(f_k) = \bar{0} \quad (*1)$$

אבל $T(f_i) = \bar{0}$ לכן

$$t_1 T(e_1) + \dots + t_r T(e_r) = \bar{0}$$

$\{T(e_1), \dots, T(e_r)\}$ בסיס של $\text{Im } T$ לכן הקבוצה $\{T(e_1), \dots, T(e_r)\}$ בת"ל, לכן $t_1 = \dots = t_r = 0$ מכאן (#) הופך ל

$$s_1 f_1 + \dots + s_k f_k = \bar{0} \quad (*2)$$

$\{f_1, \dots, f_k\}$ בסיס של $\ker T$ לכן $\{f_1, \dots, f_k\}$ קבוצה בת"ל לכן $s_1 = \dots = s_k = 0$. בסה"כ קיבלנו ש B בת"ל.