חישוביות וסיבוכיות תשפ"ה סמסטר א'
שיעור 2
וריאציות של מכונות טיורינג

תוכן העניינים

משפט 2.1: קיום מכונת טיורינג שמכריע את חיתוך שפות כריעות

תהיינה M^A מ"ט שמכריעה את השפה A ו- M^B מכונט טיורינג שמכריע האת השפה B.
אז קיים מכונת טיורינג M^C שמכריעה עת הפשה $A \cap C$.

הוכחה: ? ■

2.1 הגדרה של מכונת טיורינג שמכריעה את חיתוך השפות $A\cap B$

תהי
$$M^A=\left(Q^A,\Sigma,\Gamma^A,\delta^A,q_0^A,\mathrm{acc}^A,\mathrm{rej}^A\right)$$
המכונת טיורינג שמכריעה את השפה A ותהי
$$M^B=\left(Q^B,\Sigma,\Gamma^B,\delta^B,q_0^B,\mathrm{acc}^B,\mathrm{rej}^B\right)$$
המכונת טיורינג שמכריעה את השפה B.
נגדיר את מכונת טיורינג חדש M^C אשר מכריעה את חיתוך השפות $A\cap B$ באופן הבא:
$$M^C=\left(Q^C,\Sigma,\Gamma^C,\delta^C,q_0^C,\mathrm{acc}^C,\mathrm{rej}^C\right)\ .$$
האלפיבית של הסרט של M^C מוגדר להיות
$$\Gamma^C=\Gamma^A\cup\Gamma^B\ ,$$
כלומר האלפיבית של M^C מכילה את הא"ב של M^A והא"ב של M^B.

הקבוצת מצבים של M^C מוגדרת להיות
$$Q^C=Q^A\cup Q^B\cup\left\{q_0^C,q_1^C,\mathrm{acc}^C,\mathrm{rej}^C\right\}$$
כאן
Q^A היא הקבוצת מצבים של המ"ט M^A,
Q^B היא הקבוצת מצבים של המ"ט M^B,
acc^C המצב קבלה של M^C,
rej^C המצב דחייה של M^C,
q_0^C ו- q_1^C הם מצבים אשר שייכים ל- M^C אבל לא ל- M^A או ל- M^B. למטה נסביר את הפעולות של M^C בשלבים של הכרעה של $A\cap B$, שמתוארים במשפט 2.1, וספציבי בשלב 1 נסביר את התפקיד של המצבים q_0^C ו- q_1^C.

שלב 1) העתק את הקלט w של M^A לסרט השני של M^B והחזר את הראש לתחילת הקלט בשני הסרטים.

למטרה זה נשתמש במעברים הבאים:
$$\delta^C\left(q_0^C,\sigma,\sqcup\right)=\left(q_0^C,\sigma,R,\sigma,R\right)$$
במילים, במצב q_0^C, אם הראש של M^A קורא אות σ והראש של M^B קורא $\sqcup$, כותבים σ על ה- $\sqcup$ בסרט השני של M^B, ושני הראשים זזים ימינה.

כאשר השני ראשים מגיעים לסוף הקלט של M^A, שני הראשים קוראים $\sqcup$ ואז M^C מבצעת את המעבר הבא:
$$\delta^C\left(q_0^C,\sqcup,\sqcup\right)=\left(q_0^C,\sqcup,L,\sqcup,L\right)$$
במילים M^C עוברת למצב q_1^C ושני הראשים זזים שמאלה.

כל עוד ש- M^C במצב q_1^C והראשים עדיין לא הכיעו לתחילת הקלט של M^A, היא ממשיכה להזיז את הראשים שמאלה צעד צעד, אשר מתוארת על ידי המעבר הבא:
$$\delta^C\left(q_1^C,\sigma,\sigma\right)=\left(q_0^C,\sigma,L,\sigma,L\right)\ .$$
ברגע שהראשים של M^A ו- M^B קוראים $(\sqcup,\sqcup)$, כלומר תו רווח בסרט של M^A וגם תו רווח בסרט של M^B, ז"א ששני הראשים של M^C מגיעה לתחילת הקלט היא עוברת למצב ההתחלתי של M^A, (שבו M^A מוכן להתחיל לסרוק שת הקלט, אשר בשלב 2 של ההכרעה):
$$\delta^C\left(q_1^C,\sqcup,\sqcup\right)=\left(q_0^A,\sqcup,R,\sqcup,R\right)\ .$$

שלב 2) הרץ את M^A על w בסרט הראשון. אם דחתה אז M^c עוברת ל- rej^C.

כעת אנחנו מריצים את M^A על הסרט הראשון. M^A ועוברת בין המצבים $q \in Q^A$ שלה לפי הפונקצית המעברים שלה, δ^A. בפרט נניח שבמצב $q \in Q^A$, M^A כותבת τ על σ_1 וזזה $m(= L/R)$, ועוברת ממצב q למצב q'. כלומר $\delta^A(q, \sigma_1) = (q', \tau, m)$. אז המעבר המתאים ב- M^C הוא

$$\forall q \in Q^A \qquad \delta^C\left(q, (\sigma_1, \sigma_2)\right) = \left(q', \tau, m, \sigma_2, S\right) \ .$$

שימו לב: לא שנינו את האות σ_2 על הסרט השני והראש של M^B נשאר במקומו.

היוצא דופן הוא **אם** M^A **דוחה את** w **אז** M^C **דוחה את המילה.**

לכן

$$\delta^C\left(\text{rej}^A, (\sigma_1, \sigma_2)\right) = \left(\text{rej}^C, \sigma_1, S, \sigma_2, S\right) \ .$$

אם M^A **קיבלה את המילה אז עוברים לשלב** 3.

שלב 3) הרץ את M^B על w בסרט השני.

כעת אנחנו מריצים את M^B על הסרט הראשון. M^B ועוברת בין המצבים $q \in Q^B$ שלה לפי הפונקצית המעברים שלה, δ^B. בפרט נניח שבמצב $q \in Q^B$, M^B כותבת τ על σ_2 וזזה $m(= L/R)$, ועוברת ממצב q למצב q'. כלומר $\delta^B(q, \sigma_2) = (q', \tau, m)$. אז המעבר המתאים ב- M^C הוא

$$\forall q \in Q^B \qquad \delta^C\left(q, (\sigma_1, \sigma_2)\right) = \left(q', \sigma_1, S, \tau, m\right) \ .$$

שימו לב: לא שנינו את האות σ_1 על הסרט הראשון והראש של M^A נשאר במקומו.

נטפל במקרה ש **אם** M^B **דוחה את המילה אז** M^C **עוברת ל-** rej^C על יד המעבר

$$\delta^C\left(\text{rej}^B, (\sigma_1, \sigma_2)\right) = \left(\text{rej}^C, \sigma_1, S, \sigma_2, S\right) \ .$$

לבסוף **אם** M^B **מקבלת את המילה אז** M^C **עוברת ל-** acc^C :

$$\delta^C\left(\text{acc}^B, (\sigma_1, \sigma_2)\right) = \left(\text{acc}^C, \sigma_1, S, \sigma_2, S\right) \ .$$

2.2 מודל דו-ממדי

הגדרה 2.1: סרט דו ממדי

בסרט דו ממדי הסרט כמו טבלה אינסופי (כמתואר בתרשים למטה) עם

- אינסוף שורות כלפי מעלה,
- אינסוף עמודות לכיוון ימין.
- הסרט חסום מצד שמאל ומלמטה.
- בתחילת הריצה הקלט מופיע בשורה התחתונה וצמוד לשמאל.
- הראש יכול לוז ימינה, שמאלה למעלה ולמטה.

הפונקצית המעברים של מכונת טיורינג דו ממדי מוגדר:

$$\delta : (Q \ \ \{\text{acc}, \text{rej}\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, U, D\} \ .$$

␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
a	b	a	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣

2.3 מודל לא דטרמיניסטית

הגדרה 2.2: מודל לא דטרמיניסית

תהי M מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית. עבור שפה $w \in \Sigma^*$ אומרים ע׳

- M **מקבלת** את w אם קיים חושוב של M על w שמגיע למצב acc.
- M **דוחה** את w אם **כל** חישוב של M על w מגיע למצב rej.

הגדרה 2.3: מודל לא דטרמיניסית

תהי M מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית.

עבור שפה $w \in \Sigma^*$ אומרים ע׳

- M **מקבלת** את w אם קיים חושוב של M על w שמגיע למצב acc.
- M **דוחה** את w אם **כל** חישוב של M על w מגיע למצב rej.

עבור שפה $L \subseteq \Sigma^*$ אומרים כי M **מגריעה** אצ L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $w \in L$ אז M **מקבלת** את w.
- אם $w \notin L$ אז M **דוחה** את w.

M **מקבלת** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$, M מקבלת את w אס"ם $w \in L$.

במודל הלא דטרמיניסטי

- בהכרעה לא דטרמיניסטית של שפה
  לכל מילה בשפה $\exists$ לפחות חישוב אחד שעוצר במצב מקבל.
  לכל מילה שאינה בשפה כל החישובים חייבים לעצור במצב דוחה.
- בקבלה לא דטרמיניסטית של שפה
  לכל מילה בשפה $\exists$ לפחות חישוב אחד שעוצר במצב מקבל.
  לכל מילה שאינה בשפה המכונה יכולה לדחות או לא לעצור.

דוגמה 2.1

$$L = \left\{ w \in \{0,1\}^* \middle| w = uv\ ,\ (u\bar{v}) = (u\bar{v})^R \right\}$$

שפת כל המחרוזות שניתן להפוך אותן לפילנדרום ע"י פעולת "משלים לסיפא". למשל: $w \in 01101$ מכיוון

ש-

$$01\overline{101} = 01110 = (01110)^R \ .$$

$w \in 1010010$ מכיוון ש-

$$1010\overline{010} = 1010101 = (1010101)^R \ .$$

בנו מכונת

א) דטרמיניסית שמכריעה את שפת כל הפלינדרומים.

ב) לא דטרמיניסית שמכריעה את השפה L.

פתרון:

סעיף א)

מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה
q_0	$\llcorner\!\lrcorner$	acc		R
q_0	σ	$q.\sigma$	$\llcorner\!\lrcorner$	R
$q.\sigma$	τ	$q.\sigma$		R
$q.\sigma$	$\llcorner\!\lrcorner$	$p.\sigma$	$\llcorner\!\lrcorner$	L
$p.\sigma$	σ	back	$\llcorner\!\lrcorner$	L
$p.\sigma$	$\llcorner\!\lrcorner$	acc		R
$p.\sigma$	τ	rej		R
back	σ	back		L
back	$\llcorner\!\lrcorner$	q_0	$\llcorner\!\lrcorner$	R

כאשר

$$\tau \neq \sigma \ , \ \tau \in \Sigma \ , \ \sigma \in \Sigma \ .$$

זאת מכונה דטרמיניסטית המכריעה עת שפת הפלינגרומים.

סעיף ב) לבניית המכונה הלא דטרמיניסטית שמכריעה את L, נוסיף את המעברים החדשים הבאים:

מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה	
$\hat{q}_0$	$0,1$	$\hat{q}_0$		R	תזוזה ימינה
$\hat{q}_0$	$0,1,\llcorner\!\lrcorner$	flip		S	מעבר אי-דטרמיניסטי למצב flip
flip	0	1	flip	R	ביצוע פעולת "משלים לסיפא" החל מהנקודה שנבחרה אי-דטרמיניסטית
flip	1	0	flip	R	ביצוע פעולת "משלים לסיפא" החל מהנקודה שנבחרה אי-דטרמיניסטית
flip	$\llcorner\!\lrcorner$	back	$\llcorner\!\lrcorner$	L	
back	$0,1$	back		L	חזרה להתחלה
back	$\llcorner\!\lrcorner$	q_0		R	מעבר למכונה לבדיקת פלינדרום

- אם $w \in L$ אז $\exists$ חישוב שעושה flip בדיוק במיקום הנכון $\leftarrow$ הופך את הסיפא של המילה $\leftarrow$ המכונה pal מקבלת w.
- אם $w \notin L$ אז לא משנה באיזה מיקום במילה עוברים למצב flip לא מקבלים פלינדרום $\leftarrow$ כל חישוב ידיע למצב rej.

- לפיכך המכונה הלא דטרמיניסטית הזו מכריעה את השפה L.

משפט 2.2: סגירות תחת פעולת ה Prefix

תהי L שפה שמתקבלת ע"י מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית.
אזי גם
$$\text{prefix}(L) = \{u | \exists \text{v}, u\text{v} \in L\}$$
מתקבלת ע"י מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית.

הוכחה: תהי M^L מ"ט שמקבלת את L.
נבנה M^P שמקבלת את $\text{prefix}(L)$.

נוסיף באופן אי דטרמיניסטי סיפא v לאחר הקלט u ואז נבדוק אם המילה היא בשפה L.

בפרט, נתונה טבלת המעברים של המכונה M^L שמקבלת את השפה L:

מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה
q_0^L	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$				

נוסיף את הטבלת המעברים הבאה:

מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה	תיאור מילולי
q_0^p	σ	q_0^p		R	
q_0^p	$\sqcup$	add	$\sqcup$	S	
add	$\sqcup$	add	σ	R	$\forall\sigma \in \Sigma$ מגיעים לסוף המילה ואז מוסיפים אותיות באופן לא דטרמיניסטי.
add	$\sqcup$	back	$\sqcup$	L	חוזרים להתחלה.
back	σ	back		L	
back	$\sqcup$	q_0^L		R	עוברים למכונה M^L ובודקים אם המילה בשפה L.

אם המילה $u \in \text{prefix}(L)$ $\Leftarrow$ $\exists \text{v}$ כך ש- $u\text{v} \in L$.
$\Leftarrow$ $\exists$ חישוב שמנחש לכתוב בדיוק v לאחר u
$\Leftarrow$ M^L מגיעה למצב acc
$\Leftarrow$ M^p מגיעה למצב acc.

אם המילה $u \notin \text{prefix}(L)$ $\Leftarrow$ לא משנה איזה v נוסיף, לא נגיע למילה בשפה L.
$\Leftarrow$ המכונה המקורית M^L לא תקבל את $u\text{v}$
$\Leftarrow$ המכונה שלנו M^p לא תקבל את u. ■

שימו לב, M^p **מקבלת** את השפה $\text{prefix}(L)$.

אבל היא לא מכריעה את $\text{prefix}(L)$.
בשביל להכריע צריך שכל מילה שלא בשפה $\text{prefix}(L)$ תדחה, אבל $\exists$ חישוב אחד שלא מגיע למצב rej וזה חישוב שלא עוצר, שנשאר במצב add כל הזמן ורק מוסיף אותיות.

2.4 שקילות חישוב של מכונה דטרמיניסטית ולא דטרמיניסית

משפט 2.3: שקילות בין מ"ט דטרמיניסית לבין מ"ט לא דטרמיניסית

לכל מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית $\exists$ מכונה דטרמיניסיטת שקולה.

הוכחה:
תהי N מ"ט לא דטרמיניסיטת.

נבנה M מ"ט דטרמיניסטית שקולה.

הרעיון הבניה הוא שהמ"ט דטרמיניסטית תנסה את כל החישובים של הטט"לד אחד אחד.
אם המטט"ד מגלה חישוב שעובר ל- acc אז נקבל.
אם היא מגלה שכל החישובים מובילים ל- rej אז נדחה.

■

דוגמה 2.2

נתונה הטבלת המעברים של מטלט"ד

מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה	
q_0	a	q_0	a	R	1
q_0	a	q_1	$\sqcup$	R	2
q_0	a	q_1	a	R	3
q_0	a	q_0	a	L	4
q_0	$\sqcup$	acc	$\sqcup$	L	1
q_1	a	q_0	a	L	1
q_1	a	q_1	a	R	2
q_1	$\sqcup$	rej	a	R	1
q_1	$\sqcup$	q_1	a	L	2

נתון הקלט:

$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	a	a	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
				$\uparrow$					

ריצה אפשרית על הקלט הינה

$$\sqcup\, q_0\, a\, a\, \sqcup \xrightarrow{2} \sqcup\, \sqcup\, q_1\, a\, \sqcup \xrightarrow{1} \sqcup\, q_0\, \sqcup\, a\, \sqcup \xrightarrow{1} \text{acc}\, \sqcup\, \sqcup\, a\, \sqcup$$

q_0	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	a	a	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
					$\uparrow$					

q_1	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	a	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
						$\uparrow$				

q_0	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	a	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
					$\uparrow$					

acc	␣	␣	␣	␣	␣	a	␣	␣	␣	␣
				↑						

החישוב הגיע למצב מקבל.

ריצה אחרת אפשרית על הקלט הינה

$$\sqcup\ q_0\ a\ a\ \sqcup \xrightarrow{1} \sqcup\ a\ q_0\ a\ \sqcup \xrightarrow{3} \sqcup\ a\ a\ q_1\ \sqcup \xrightarrow{1} \sqcup\ a\ a\ a\ \text{rej}\ \sqcup$$

q_0	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
					↑					

q_0	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
						↑				

q_1	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
							↑			

rej	␣	␣	␣	␣	a	a	a	␣	␣	␣
								↑		

החישוב הגיע למצב דוחה.

בסה"כ $\exists$ סדרת בחירות שמובילה למצב acc
ו- $\exists$ סדרת בחירות שמובילה למצב rej.

מכונת טיורינג היא אי-דטרמיניסטית אם היא קובעת בעצמה את הבחירות שלה כאשר יש מספר אפשרויות לבצע צעד.

כדי להפוך אותה למט"ד אנחנו נקבע את הבחירות והיא לא תבחר בצורה אי-דטרמיניסטית.

כשלב ביניים להסבר, נעבור למכונה עם 2 סרטים: סרט הקלט וסרט הבחיורת.

סרט הבחירות יכלול סדרת מספרים שהיא בחירה ספציפית של מעברים. כך המ"ט לא תהיה יותר אי-דטרמיניסטית.

סרט הבחירות יקבע מה לעשות בכל שלב בחישוב.

המכונה עובדת על סרט הקלט ובכל צעד מבצעת את מה שכתוב על סרט הבחירות.

דוגמה 2.3

קלט	␣	␣	␣	␣	a	a	␣	␣	␣	␣
					↑					
בחירות	␣	␣	␣	␣	1	4	1	3	1	␣
					↑					

	מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזוזה
1	q_0	a	q_0	a	R
2	q_0	a	q_1	$\sqcup$	R
3	q_0	a	q_1	a	R
4	q_0	a	q_0	a	L
1	q_0	$\sqcup$	acc	$\sqcup$	L
1	q_1	a	q_0	a	L
2	q_1	a	q_1	a	R
1	q_1	$\sqcup$	rej	a	R
2	q_1	$\sqcup$	q_1	a	L

ההוספה של סרט הבחירות הופכת הת המ"ט למט"ד ונקבל את הריצה הבאה על הקלט aa:

$$\sqcup\ q_0\ a\ a\ \sqcup\ \sqcup \xrightarrow{1} \sqcup\ a\ q_0\ a\ \sqcup\ \sqcup \xrightarrow{4} \sqcup\ q_0\ a\ a\ \sqcup\ \sqcup \xrightarrow{1} \sqcup\ a\ q_0\ a\ \sqcup\ \sqcup$$
$$\xrightarrow{3} \sqcup\ a\ a\ q_1\ \sqcup\ \sqcup \xrightarrow{1} \sqcup\ a\ a\ a\ \text{rej}\ \sqcup$$

q_0	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	a	a	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
					$\uparrow$					
בחירות	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	1	4	1	3	1	$\sqcup$
					$\uparrow$					

q_0	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	a	a	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
						$\uparrow$				
בחירות	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	1	4	1	3	1	$\sqcup$
						$\uparrow$				

q_0	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	a	a	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
					$\uparrow$					
בחירות	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	1	4	1	3	1	$\sqcup$
							$\uparrow$			

q_0	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	a	a	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
						$\uparrow$				
בחירות	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	1	4	1	3	1	$\sqcup$
								$\uparrow$		

q_1	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	a	a	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
							$\uparrow$			
בחירות	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	1	4	1	3	1	$\sqcup$
									$\uparrow$	

rej	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	a	a	a	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
								$\uparrow$		
בחירות	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	1	4	1	3	1	$\sqcup$
										$\uparrow$