שיעור 6
תת מרחב

הגדרה 6.1 תת מרחב

נניח כי V מרחב ווקטורי מעל שדה, $\mathbb{F}$.

תת קבוצה W של V נקראת תת מרחב (ת"מ) של V אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

(1) $\bar{0} \in W$.

(2) לכל $u, \mathrm{v}, \in W$,
$$u + \mathrm{v} \in W \ .$$

(3) לכל $u \in W$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים
$$\alpha \cdot u \in W \ .$$

דוגמה 6.1

נגדיר $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, $W \subseteq \mathbb{R}^2$. האם W תת מרחב של $\mathbb{R}^2$?

פתרון:

לא. דוגמה נגדית:
$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \notin W \ .$$

לכן W לא תת מרחב של $\mathbb{R}^2$.

דוגמה 6.2

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \middle| k \in \mathbb{R} \right\} \ .$$

$W \subseteq \mathbb{R}^2$. האם W תת מרחב של $\mathbb{R}^2$?

פתרון:

(1 לכל $u = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \in W$, $v = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \in W$,
$$u + v = \begin{pmatrix} k+t \\ 2(k+t) \end{pmatrix} \in W \ ,$$

(2 לכל $u = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \in W$, ולכל סקלר $t \in \mathbb{R}$,
$$tu = \begin{pmatrix} tk \\ 2(tk) \end{pmatrix} \in W \ ,$$

(3

$$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \in W \ .$$

לכן השלושה התנאים של תת מרחב בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W תת מרחב של $\mathbb{R}^2$.

דוגמה 6.3

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+2 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\} \ .$$

האם W תת מרחב של $\mathbb{R}^2$?

פתרון:

$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$ לכן W לא תת מרחב של $\mathbb{R}^2$.

דוגמה 6.4

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x \geq 0, x, y \in \mathbb{R} \right\} \ .$$

האם W תת מרחב של $\mathbb{R}^2$?

פתרון:

לא. דוגמה נגדית:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in W \ , \qquad (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \notin W \ .$$

דוגמה 6.5

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x^2 - y^2 = 0 \right\} \ .$$

האם W תת מרחב של $\mathbb{R}^2$?

פתרון:

לא. דוגמה נגדית:

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in W \ , \qquad \mathrm{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \in W \ , \qquad u + \mathrm{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \notin W \ .$$

דוגמה 6.6

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{rl} x - 2y + z & = 0 \\ y - z & = 0 \end{array} \right\} \ .$$

האם W תת מרחב של $\mathbb{R}^3$?

פתרון:

כן:

1) צריך להוכיח כי $W \ni \bar{0} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$:

$$\left\{\begin{array}{rl} 0-2\cdot 0+0 & =0 \\ 0-0 & =0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \bar{0}\in W \ .$$

2) נניח $W \ni u = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. ז"א מתקיים $\left\{\begin{array}{rl} x-2y+z & =0 \\ y-z & =0 \end{array}\right.$. נקח סקלר k. צריך להוכיח: $ku\in W$.

$$ku=\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rll} kx-2ky+kz & =k(x-2y+z) & =0 \\ ky-kz & =k(y-z) & =0 \end{array}\right.$$

לכן $ku\in W$.

3) נקח $W \ni u = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$, $W \ni \mathrm{v} = \begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$. ז"א מתקיים

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1-2y_1+z_1 & =0 \\ y_1-z_1 & =0 \end{array}\right. \text{ וגם } \left\{\begin{array}{rl} x_2-2y_2+z_2 & =0 \\ y_2-z_2 & =0 \end{array}\right.$$

אז

$$u+\mathrm{v}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix} \ .$$

נבדוק אם $u+\mathrm{v}\in W$.

$$(x_1+x_2)-2(y_1+y_2)+(z_1+z_2)=(x_1-2y_1+z_1)+(x_2-2y_2+z_2)=0 \ ,$$

$$(y_1+y_2)-(z_1+z_2)=(y_1-z_1)+(y_2-z_2)=0 \ ,$$

לכן $u+\mathrm{v}\in W$. לכן השלושה התנאים של תת מרחב בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

דוגמה 6.7

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\middle| a+b+c=d\right\} \ .$$

האם W תת מרחב של $\mathbb{F}^{2\times 2}$?

פתרון:

1)

$$\bar{0}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in W$$

כי $0+0+0=0$.

2) נקח

$$u=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in W \ .$$

ז"א מתקיים $a+b+c=d$. נקח סקלר k. אז

$$ku=\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}\in W \ .$$

$ka+kb+kc=k(a+b+c)=kd$. לכן $ku\in W$.

3)

$$u=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\in W \ , \qquad \mathrm{v}=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\in W \ .$$

צריך להוכיח $u+\mathrm{v}\in W$.

$u\in W \Leftarrow a_1+b_1+c_1=d_1$.

$\mathrm{v}\in W \Leftarrow a_2+b_2+c_2=d_2$.

$$u+\mathrm{v}=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix}$$

$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)=(a_1+b_1+c_1)+(a_2+b_2+c_2)=d_1+d_2$ ז"א $u+\mathrm{v}\in W$.

לכן השלושה התנאים של תת מרחב בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W תת מרחב של $\mathbb{F}^{2\times 2}$.

דוגמה 6.8

תהי

$$W=\left\{p(x)\middle|\deg(p(x))=2 \ , p(x)\in\mathbb{F}[x]\right\}$$

קבוצת כל הפולינומים במעלה 2 בדיוק עם מקדמים מתוך שדה $\mathbb{F}$. קבעו אם W תת מרחב של $\mathbb{F}[x]$.

פתרון:

W לא תת מרחב של $\mathbb{F}[x]$. הסבר:

$\bar{0}\notin W$.

דוגמה 6.9

נסמן

$$\mathbb{F}_2[x]=\left\{p(x)\in\mathbb{F}[x]\middle|\deg(p(x))\leq 2\right\}$$

קבוצת כל הפולינומים של $\mathbb{F}[x]$ מסדר 2 לכל היותר.

$\mathbb{F}_2[x]$ תת מרחב של $\mathbb{F}[x]$.

דוגמה 6.10

$$W=\left\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}\middle|f(3)=0\right\}$$

$W\subseteq F(\mathbb{R})$. קבעו האם W תת מרחב של $F(\mathbb{R})$.

פתרון:

1) האיבר $\bar{0}$ הינו הפונקציה $f(x)=0$. לכן $\bar{0}(3)=0 \Leftarrow \bar{0}\in W$.

2) אם $f\in W$ ו- $k\in\mathbb{R}$, אז $f(3)=0$ לכן

$$(kf)(3)=k(f(3))=k\cdot 0=0\ .$$

ז"א $kf\in W$.

3) נניח $f,g\in W$, ז"א $f(3)=0$, $g(3)=0$. אז

$$(f+g)(3)=f(3)+g(3)=0+0=0\ ,$$

כלומר $f+g\in W$.

לכן השלושה התנאים של תת מרחב בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W תת מרחב של $F(\mathbb{R})$.

דוגמה 6.11

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle|\ \begin{array}{rl}3x+y-z&=1\\2x+5y&=0\\-x+10y-z&=5\end{array}\right\}$$

קבעו האם W תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

פתרון:
W לא תת מרחב של $\mathbb{R}^3$, $\bar{0}\notin W$.

משפט 6.1 מרחב האפס הוא תת מרחב

לכל מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, אוסף הפתרונות של מערכת הומוגנית $A\cdot X=0$ הוא תת מרחב של $\mathbb{F}^n$.

הוכחה: נסמן

$$\mathrm{Nul}(A)=\left\{X\middle|A\cdot X=0, X\in\mathbb{F}^n\right\}$$

נוכיח כי $\mathrm{Nul}(A)$ תת מרחב של $\mathbb{F}^n$ ע"י להוכיח כי כל השלושה תנאים של תת מרחב מתקיימים עבור $\mathrm{Nul}(A)$.

1) צריך להוכיח $\bar{0}\in\mathrm{Nul}(A)$, כאשר $\bar{0}$ מטריצה האפס.

$$A\cdot\bar{0}=0\ ,$$

לכן $\bar{0}\in\mathrm{Nul}(A)$.

2) נניח $u,\mathrm{v}\in\mathrm{Nul}(A)$. צריך להוכיח $u+\mathrm{v}\in\mathrm{Nul}(A)$.

$u\in\mathrm{Nul}(A) \Leftarrow A\cdot u=0$.

$\mathrm{v}\in\mathrm{Nul}(A) \Leftarrow A\cdot\mathrm{v}=0$.

לכן

$$A(u+\mathrm{v})=Au+A\mathrm{v}=0+0=0 \quad\Rightarrow\quad u+\mathrm{v}\in\mathrm{Nul}(A)$$

3) נקח $u \in \mathrm{Nul}(A)$ וסקלר $k \in \mathbb{F}$. צריך להוכיח $ku \in \mathrm{Nul}(A)$.

$u \in \mathrm{Nul}(A) \Leftarrow A \cdot u = 0$. אז

$$A(ku) = k(Au) = k \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad ku \in \mathrm{Nul}(A) \ .$$

מש"ל.

■