

## שיעור 14

### סכום ישר

#### דוגמה 14.1 סכום ישר

נניח ש

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

תת מרחב של  $\mathbb{R}^3$  ו

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

תת מרחב של  $\mathbb{R}^3$ .

אז  $\dim(U_1) = \dim(U_2) = 2$ .

$$U_1 \cap U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}, \dim(U_1 \cap U_2) = 1.$$

$$U_1 + U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix} \mid y_1, z_1, x_2, z_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_1 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \mid x_2, y_1, z_1 + z_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^3.$$

אז כל וקטור  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U_1 + U_2$  ניתן להציג כסכום של וקטורים של  $U_1$  ו  $U_2$  באינסוף דרכים שונות:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z - z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

לכל  $z_0 \in \mathbb{R}$ .

#### דוגמה 14.2

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$U_2, U_1$  תת מרחבים של  $U_2, U_1$ .

$$\dim(U_1) = 2, \quad \dim(U_2) = 1.$$

$$U_1 \cap U_2 = \{\bar{0}\},$$

$$U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3,$$

ולכל וקטור  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  יש דרך יחידה להציג אותו כסכום של וקטורים של  $U_2$  ו  $U_1$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

דוגמה ?? היא דוגמה של סכום ישר של תת מרחבים.

### הגדרה 14.1 סכום ישר

יהיו  $U_1$  ו  $U_2$  שני תת מרחבים של מרחב וקטורי  $V$  מעל שדה  $\mathbb{F}$ .  
תת מרחב  $W$  של מרחב וקטורי  $V$  נקרא סכום ישר של  $U_1$  ו  $U_2$  אם ורק אם מתקיימים:

$$W = U_1 + U_2 \quad (\text{א})$$

(ב) לכל וקטור של  $W$  יש הצגה יחידה כסכום של וקטורים ב  $U_1$  וב  $U_2$ .

סימון:

$$W = U_1 \oplus U_2$$

הסכום הישר של  $U_2, U_1$ .

### משפט 14.1

יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $\mathbb{F}$ ,  $U$  ו  $W$  תת מרחבים של  $V$ . אז  $V = U \oplus W$  אם ורק אם

$$V = U + W \quad (\text{א})$$

$$U \cap W = \{\bar{0}\} \quad (\text{ב})$$

הוכחה:

(1) נניח כי  $V = U \oplus W$ . אז לפי הגדרה ??, סכום ישר  $V = U + W$ . נשאר להוכיח כי  $U \cap W = \{\bar{0}\}$ .

נניח  $v \in U \cap W$ , אז  $v \in U$  וגם  $v \in W$ . לכן אפשר לרשום

$$v = \begin{matrix} \in U \\ v \end{matrix} + \begin{matrix} \in W \\ \bar{0} \end{matrix}$$

וגם

$$v = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}$$

מכיוון שהסכום הוא ישר, יש רק דרך יחידה לרשום את  $v$  כסכום של וקטורים של  $U$  ו  $W$ . לכן  $v = \bar{0}$ .

(2) נניח כי  $V = U + W$  וגם  $U \cap W = \{\bar{0}\}$ .

נוכיח כי  $V = U \oplus W$ .

לפי הגדרת סכום ישר ??, נשאר להוכיח כי כל וקטור  $v \in V$  ניתן להציג בדרך יחידה כסכום של וקטורים של  $U$  ו  $W$ .

נקח  $v \in V$ . נניח כי  $v = u_1 + w_1$  וגם  $v = u_2 + w_2$  כאשר  $u_1, u_2 \in U$ ,  $w_1, w_2 \in W$ .

אז

$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \Rightarrow u_1 - u_2 = w_2 - w_1$$

(כאשר  $u_1 - u_2 \in U$  ו  $w_2 - w_1 \in W$ ). לכן

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{\bar{0}\}.$$

מכאן,  $u_1 - u_2 = \bar{0}$  וגם  $w_2 - w_1 = \bar{0}$ .

לכן  $u_1 = u_2$  וגם  $w_1 = w_2$ .

### דוגמה 14.3

נסמן

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{F} \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{F} \right\}$$

$U$  קבוצת כל המטריצות הסימטריות מסדר  $2 \times 2$ ,

$W$  קבוצת כל המטריצות האנטי-סימטריות מסדר  $2 \times 2$ .  
 $\mathbb{F}^{2 \times 2} = U \oplus W$  תת מרחבים של מרחב וקטורי  $\mathbb{F}^{2 \times 2}$ . הראו כי

הוכחה:

(1) צריך להוכיח:  $U \cap W = \{\bar{0}\}$ .

נניח  $v \in U \cap W$ .

$$v = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ -b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

מכאן,  $b_1 = -b_2$  ו  $b_1 = b_2$ ,  $c_1 = 0$ ,  $a_1 = 0$ .

לכן  $b_1 = b_2 = 0$ .

ז"א  $v = \bar{0}$ .

(2) נוכיח כי:  $\mathbb{F}^{2 \times 2} = U + W$ .

לכל מטריצה  $A \in \mathbb{F}^{2 \times 2}$ . נגדיר מטריצות  $B = A + A^t$  ו  $C = A - A^t$ , אז

$$B = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix} \in U$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} \in W$$

אז

$$A = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C \in U + W.$$

## משפט 14.2

נניח ש  $V$  מרחב וקטורי ממיד  $n$ ,  $U$  תת מרחב של  $V$  ממיד  $m$ , אז קיים תת מרחב  $W$  ממיד  $n - m$  כך ש  $V = U \oplus W$ .

הוכחה: נבחר בסיס כלשהו של  $U$ :

$$u_1, \dots, u_m$$

ונשלים אותו לבסיס של  $V$ :

$$u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n$$

אז

$$U = \text{span}(u_1, \dots, u_m)$$

$$V = \text{span}(u_1, \dots, u_n)$$

נגדיר

$$W = \text{span}(u_{m+1}, \dots, u_n)$$

נוכיח כי  $V = U \oplus W$ .

(1) לכל  $v \in V$  קיימים סקלרים  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{F}$  כך ש

$$v = k_1 u_1 + \dots + k_m u_m + k_{m+1} u_{m+1} + \dots + k_n u_n$$

נסמן

$$u = k_1 u_1 + \dots + k_m u_m \in U, \quad w = k_{m+1} u_{m+1} + \dots + k_n u_n \in W.$$

$$V = U + W \Leftarrow v = u + w$$

(2) נוכיח כי:  $U \cap W = \{\bar{0}\}$ .

נניח  $v \in W$  ו  $v \in U \Leftarrow v \in U \cap W$

לכן

$$v = k_1 u_1 + \dots + k_m u_m$$

וגם

$$v = k_{m+1}u_{m+1} + \dots + k_nu_n$$

מכאן:

$$k_1u_1 + \dots + k_mu_m - k_{m+1}u_{m+1} - \dots - k_nu_n = \bar{0} \text{ .}$$

$u_1, \dots, u_n$  בת"ל לכן

$$k_1 = 0, \dots, k_n = 0 \text{ .}$$

מכאן מקבלים כי  $v = \bar{0}$ .

משל.

