תרגילים 12: סיבוכיות

שאלה 1

הבעיית קליקה מוגדרת באופן הבא:

קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר טבעי k.
פלט: האם G מכיל קליקה בגודל k?

$$CLIQUE = \{\langle G,k\rangle \mid G \text{ מכיל קליקה בגודל } k\} \ .$$

הבעיית כיסוי בקדקודים מוגדרת:

קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר טבעי k.
פלט: האם G מכיל כיסוי בקדקודים k?

$$VC = \{\langle G,k\rangle \mid G \text{ מכיל כיסוי בקדקודים בגודל } k\} \ .$$

הוכיחו כי קיימת רדוקציה זמן-פולינומיאלית מבעיית $CLIQUE$ לבעיית VC: כלומר

$$CLIQUE \leq_p VC \ .$$

שאלה 2

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$.
תת-קבוצת קודקודים $S\subseteq V$ היא **קבוצת בלתי תלויה** אם התנאי הבא מתקיים:
אם $u_1,u_2\in S$ אז $(u_1,u_2)\notin E$.

תת-קבוצת קודקודים $C\subseteq V$ תקרא **קליקה** אם התנאי הבא מתקיים:
אם $u_1,u_2\in C$ אז $(u_1,u_2)\in E$.

הבעיית IS מוגדרת:

$$IS = \left\{\langle G,k\rangle \;\middle|\; G \text{ גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ לפחות} \right\}$$

הבעיית $CLIQUE$ מוגדרת:

$$CLIQUE = \left\{\langle G,k\rangle \;\middle|\; G \text{ גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל } k \text{ לפחות} \right\}$$

הוכיחו כי

$$IS \leq_P CLIQUE \ .$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה IS לשפה $CLIQUE$.
יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 3

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$.
תת-קבוצת קדקודים $S\subseteq V$ היא **קבוצת בלתי תלויה** אם התנאי הבא מתקיים:
אם $u_1,u_2\in S$ אז $(u_1,u_2)\notin E$.

תת-קבוצת קודקודים $U \subseteq V$ היא **כיסוי קודקודים** אם התנאי הבא מתקיים:
אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \in U$ או $u_2 \in U$.
השפה IS מוגדרת:

$$IS = \left\{ \langle G, k \rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ לפחות } G \right\}$$

השפה VC מוגדרת:

$$VC = \left\{ \langle G, k \rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל כיסוי קודקודים בגודל } k \text{ לכל היותר } G \right\}$$

הוכיחו כי

$$IS \leq_P VC \ .$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה IS לשפה VC.
יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 4

בעיית $PARTITION$ מוגדרת באופן הבא:

קלט: קבוצת מספרים $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
פלט: האם קיימת חלוקה של S לשתי קבוצות S_1, S_2 כך ש-

- $S_1 \cap S_2 = \emptyset$
- $S_1 \cup S_2 = S$
- $\sum_{x_i \in S_1} x_i = \sum_{x_i \in S_2} x_i = \frac{1}{2} \sum_{x_i \in S} x_i$.

$$PARTITION = \left\{ \langle S \rangle \;\middle|\; \sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in S \setminus Y} y \text{ כך ש- } Y \subseteq S \text{ קבוצת שלמים, וקיימת תת-קבוצה } S \right\}$$

בעיית $SubSetSum$ מוגדרת באופן הבא:

קלט: קבוצת מספרים $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ומספר t.
פלט: האם קיימת תת-קבוצה של S שסכום איבריה t?

$$SubSetSum = \left\{ \langle S, t \rangle \;\middle|\; t = \sum_{y \in Y} Y \text{ כך ש- } Y \subseteq S \text{ שלם וקיימת תת-קבוצה } t \text{ קבוצת שלמים, } S \right\}$$

הוכיחו כי $SubSetSum \leq_P PARTITION$.

שאלה 5 בהינתן גרף $G = (V, E)$ לא מכוון. אומרים כי G k- צביע אם ניתן לצבוע את הקודקודים שלו ב-
k צבעים (או פחות) כך ששני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע.
נגדיר את השפות הבאות:

$$3COLOR = \left\{ \langle G \rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון 3 - צביע } G \right\}$$
$$4COLOR = \left\{ \langle G \rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון 4 - צביע } G \right\}$$

הוכיחו:

$$3COLOR \leq_P 4COLOR \ .$$

שאלה 6 נגדיר את המושג "היפר גרף" באופן הבא: $H = (V, hE)$ כאשר

- V היא קבוצת קודקודים (בדומה לגרף רגיל)
- hE היא קבוצת של היפר-צלעות, כך שכל היפר-צלע מוגדרת ע"י שלושה קודקודים (בניגוד לצלע בגרף "רגיל" המוגדרת ע"י שני קודקודים). לדוגמה: $he_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ היא היפר-צלע.

הגדרה: **היפר כיסוי קודקודים** (hyper vertex cover) בהיפר-גרף הינה קבוצת קודקודים $S \subseteq V$ כך שלגל היפר-צלע $he \in hE$ מתקיים שלפחות אחד משלושת הקודקודים של הצלע שייך ל- S.

כלומר אם $\{u_1, u_2, u_3\} \in hE$ אז $u_1 \in S$ או $u_2 \in S$ או $u_3 \in S$.

נגדיר את השפה hyperVC באופן הבא:

$$\text{hyperVC} = \Big\{ \langle H, k \rangle \;\Big|\; \text{היפר-גרף המכיל היפר כיסוי קודקודים בגודל } k \;\; H \Big\}$$

נגדיר את השפה HS (Hitting Set) באופן הבא:

$$HS = \Big\{ \langle n, k, A_1, \dots, A_t \rangle \;\Big|\; \text{כל } A_i \in [n] \text{ וקיים } R \subseteq [n] \text{ כך ש- } |R| = k \text{ ולכל } 1 \le i \le t \text{ מתקיים } A_i \cap R \neq \emptyset \Big\}$$

כאשר $[n] = \{1, 2, \cdots, n\}$.
הוכיחו כי $HS \le_P \text{hyperVC}$.

שאלה 7 בעיית $HAMCYCLE$ (מעגל המילטוני) מוגדרת באופן הבא:

בהינתן גרף מכוון $G = (V, E)$, האם G מכיל מעגל שעובר בכל קודקוד בגרף פעם אחת בדיוק?

בעיית $HAMPATH$ (מסלול המילטוני) מוגדרת באופן הבא:
בהינתן גרף מכוון $G = (V, E)$ ושני קודקודים $s, t \in V$, האם G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t?

הוכיחו כי $HAMPATH \le_p HAMCYCLE$.

תשובות

<u>שאלה 1</u> בהינתן זוג $\langle G,k\rangle$ הקלט עבור $CLIQUE$, ניצור זוג $\langle G',k'\rangle$, הקלט של VC ע"י פונקצית הרדוקציה

$$\begin{aligned}\langle G,k\rangle \in CLIQUE \quad &\Rightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in VC\\ \langle G,k\rangle \in CLIQUE \quad &\Leftarrow \quad \langle G',k'\rangle \in VC\end{aligned}$$

<u>הגדרת הרדוקציה</u>

- נגדיר את G' להיות הגרף המשלים $\bar{G}(V,\bar{E})$:

$$\bar{E}=\left\{(u_1,u_2)\;\middle|\;(u_1,u_2)\notin E\right\}\ .$$

- נגדיר $k'=|V|-k$.

<u>נכונות הרדוקציה</u>

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

נניח כי $\langle G,k\rangle \in CLIQUE$.

$\Leftarrow$ G מכיל קליקה C בגודל k.

$\Leftarrow$ לכל $(u_1,u_2)\in\bar{E}$ של $\bar{G}$, מתקיים $(u_1,u_2)\notin E$ ולכן $u_1\notin C$ או $u_2\notin C$.

$\Leftarrow$ לכל שני קודקודים u_1,u_2 ב- $\bar{G}$, $u_1\in V\backslash C$ או $u_2\in V\backslash C$.

$\Leftarrow$ הקובצת קודקודים $V\backslash C$ היא כיסוי בקודקודים של $\bar{G}$ בגודל $k'=|V|-k$.

$\Leftarrow$ $\langle G',k'\rangle \in VC$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

נניח כי $\langle G',k'\rangle \in VC$.

$\Leftarrow$ G' מכיל כיסוי בקדקודים S בגודל $k'=|V|-k$.

$\Leftarrow$ לכל שני קודקודים u_1,u_2 של G', אם $(u_1,u_2)\in\bar{E}$ אז $u_1\in S$ או $u_2\in S$.
השלילה הלוגית של גרירה זו היא: אם $u_1\notin S$ וגם $u_2\notin S$ אז $(u_1,u_2)\notin\bar{E}$.

$\Leftarrow$ אם $u_1\in V\backslash S$ וגם $u_2\in V\backslash S$ אז $(u_1,u_2)\in\bar{E}$.

$\Leftarrow$ הקבוצת קודקודים $V\backslash S$ היא קליקה ב- G בגודל $k=|V|-k'$.

$\Leftarrow$ G מכיל קליקה בגודל k.

שאלה 2

פונקצית הרדוקציה:

אנחנו נגדיר פונקצית הרדוקציה f שבהינתן זוג $\langle G,k\rangle \in IS$ (הקלט של IS), תיצור $\langle G',k'\rangle \in CLIQUE$, (הקלט של $CLIQUE$), כלומר

(1*)
$$f\left(\langle G,k\rangle\right)=\langle G',k'\rangle \ .$$

כך שהתנאי הבא מתקיים:

(2*)
$$\langle G,k\rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in CLIQUE \ .$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת לפי התנאים הבאים:

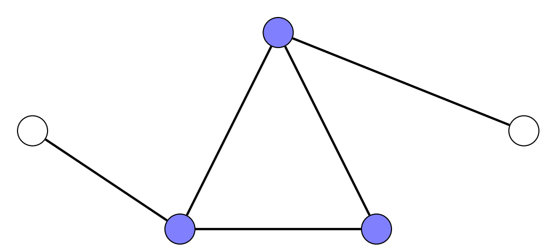
1) בהינתן גרף $G=(V,E)$.
אז G' הוא הגרף המשלים $\bar{G}=(V,\bar{E})$, כאשר

$$\bar{E}=\left\{(u_1,u_2) \;\middle|\; (u_1,u_2)\notin E\right\} \ .$$

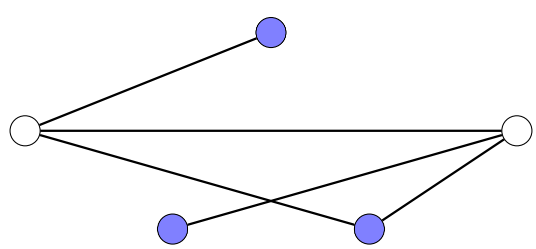
2) $k'=k$.

כדוגמה: בהינתן הגרף $G=(V,E)$ שמכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל $k=3$. הפונקציית הרדוקציה יוצרת את הגרף $\bar{G}=(V,\bar{E})$ ואת המספר $k'=k=3$, כמתואר בתרשים למטה:

$\bar{G}=\left(V,\bar{E}\right)$



$G=(V,E)$



נכונות הרדוקציה

כעת נוכיח שמתקיים: $\langle G',k'\rangle \in CLIQUE \quad \Leftrightarrow \quad \langle G,k\rangle \in IS$.

כיוון $\Leftarrow$

בהינתן גרף $G=(V,E)$ ושלם k.
נניח כי $\langle G,k\rangle \in IS$.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל k לפחות.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה S בגודל k.

$\Leftarrow$ אם $u_1,u_2\in S$ אז $(u_1,u_2)\notin E$.

כלומר, כל שני קדקודים ב- S לא מחוברים בצלע של G.

$\Leftarrow$ אם $u_1, u_2 \in S$ אז $(u_1, u_2) \in \bar{E}$.
כלומר, כל שני קדקודים ב- S מחוברים בצלע של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ הקבוצה S היא קליקה בגודל k של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ הקבוצה S היא קליקה בגודל $k' = k$ של $G' = \bar{G}$.

$\Leftarrow$ $\langle G', k' \rangle \in CLIQUE$.

כיוון $\Rightarrow$

בהינתן גרף G' ושלם k'.
נניח כי $\langle G', k' \rangle \in CLIQUE$.

$\Leftarrow$ $\langle \bar{G}, k \rangle \in CLIQUE$ (כי על פי ההגדרה של הפונקצית הרדוקציה, $G' = \bar{G}$ ו- $k' = k$).

$\Leftarrow$ $\bar{G}$ מכיל קליקה בגודל k לפחות.

$\Leftarrow$ $\bar{G}$ מכיל קליקה C בגודל k.

$\Leftarrow$ אם $u_1 \in C$ וגם $u_2 \in C$ אז $(u_1, u_2) \in \bar{E}$.
כלומר, כל שני קדקודים ב- C מחוברים בצלע של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ אם $u_1 \in C$ וגם $u_2 \in C$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.
כלומר, כל שני קדקודים ב- C לא מחוברים בצלע של הגרף G.

$\Leftarrow$ הקבוצה C היא קבוצה בלתי תלוייה בגודל k של G.

$\Leftarrow$ $\langle G, k \rangle \in IS$.

שאלה 3

פונקצית הרדוקציה:

נגדיר פונקצית הרדוקציה f שבהינתן זוג $\langle G, k \rangle \in IS$, (הקלט של IS), יוצרת $\langle G', k' \rangle \in VC$, (הקלט של VC), אשר מקיימת את התנאי:

(*2) $$\langle G, k \rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G', k' \rangle \in VC \ .$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

1) בהינתן הגרף $G = (V, E)$, אז הגרף G' הוא אותו גרף $G = (V, E)$.

2) $k' = |V| - k$.

נכונות הרדוקציה

כעת נוכיח שמתקיים: $\langle G', k' \rangle \in VC \quad \Leftrightarrow \quad \langle G, k \rangle \in IS$.

כיוון $\Leftarrow$

בהינתן גרף $G=(V,E)$ ושלם k.

נניח כי $\langle G,k\rangle \in IS$.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה S בגודל k לפחות: $|S|\geq k$.

$\Leftarrow$ אם $u_1,u_2\in S$ אז $(u_1,u_2)\notin E$.

כלומר, כל שני קדקודים ב- S לא מחוברים בצלע ב- G.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם $(u_1,u_2)\in E$ אז $u_1\notin S$ או $u_2\notin S$.

$\Leftarrow$ אם $(u_1,u_2)\in E$ אז $u_1\in V\backslash S$ או $u_2\in V\backslash S$.

$\Leftarrow$ התת-קבוצה $V\backslash S$ היא כיסוי קודקודים של G.

$|S|\geq k$ ו- $|V\backslash S|=|V|-S$ לכן $|V\backslash S|\leq |V|-k$.

$\Leftarrow$ $G'=G$ מכיל כיסוי קודקודים U בגודל $k'=\leq |V|-k$ לכל היותר.

$\Leftarrow$ $\langle G',k'\rangle \in VC$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

בהינתן גרף G' ושלם k'.

נניח כי $\langle G',k'\rangle \in VC$.

$\Leftarrow$ $G'=(V,E)$ מכיל כיסוי קדקודים U בגודל k' לכל היותר: $|U|\leq k'$.

$\Leftarrow$ אם $(u_1,u_2)\in E$ אז $u_1\in U$ או $u_2\in U$.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם $u_1\notin U$ וגם $u_2\notin U$ אז $(u_1,u_2)\notin E$.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם $u_1\in V\backslash U$ וגם $u_2\in V\backslash U$ אז $(u_1,u_2)\notin E$.

$\Leftarrow$ התת-קבוצה $S=V\backslash U$ היא קבוצה בלתי תלויה.

$|S|=|V|-|U|$ ו- $|U|\leq k'$ אז $|S|\geq |V|-k'$.

$\Leftarrow$ $G'=G$ מכיל קבוצה בלתי תלויה S בגודל $k=|V|-k'$ לפחות.

$\Leftarrow$ $\langle G,k\rangle \in IS$.

שאלה 4

<u>פונקצית הרדוקציה:</u>

בהינתן $\langle S,t\rangle$, קלט של $SubSetSum$, ניצור $\langle S'\rangle$, קלט של $PARTITION$, באופן הבא: Partition.

1) יהי $s=\sum\limits_{x\in S} x$.

2) נגדיר את הקבוצה החדשה S' על ידי הוספת האיבר $s-2t$ לקבוצה S:

$$S'=S\cup\{s-2t\}\ .$$

נוכיח כי $\langle S' \rangle \in PARTITION \quad \Leftrightarrow \quad \langle S,t \rangle \in SubSetSum$.

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

נניח ש- $\langle S,t \rangle \in SubSetSum$.

$\Leftarrow$ קיימת תת-קבוצה $S \subseteq Y$ כך ש- $t = \sum\limits_{y\in Y} y$.

לכן:

$$\begin{aligned}\sum_{y\in(Y\cup\{s-2t\})} y &= |Y| + s - 2t\\ &= t + s - 2t\\ &= s - t\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{y\in S'\backslash(Y\cup\{s-2t\})} y &= |S'| - (|Y| + s - 2t)\\ &= |S'| - |Y| - s + 2t\\ &= |S| + s - 2t - |Y| - s + 2t\\ &= |S| - |Y|\\ &= s - t\ .\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ התת-קבוצה $Y \cup \{s-2t\}$ והתת-קבוצה $S'\backslash\big(Y \cup \{s-2t\}\big)$ מהוות חלקוה של הקבוצה S'.

$\Leftarrow$ $\langle S' \rangle \in PARTITION$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

נניח ש- $\langle S' \rangle \in PARTITION$.

$\Leftarrow$ קיימות תת-קבוצות $S'_1, S'_2 \subseteq S'$ כך שמתקיים

$$S'_1 \cup S'_2 = S' \tag{1*}$$

ו-

$$\sum_{x\in S'_1} x = \sum_{x\in S'_2} x\ . \tag{2*}$$

הקבוצה S קשור לקבוצה S' על ידי היחס $S' = S \cup \{s-2t\}$.

לכן

$$S'_1 \cup S'_2 = S \cup \{s-2t\} \tag{3*}$$

ללא הגבלת כלליות אנחנו נגדיר את התת-קבוצה $S_1 \subseteq S$ של הקבוצה S להיות

$$S_1 = S'_1 \cup \{s-2t\}\ ,$$

ואנחנו נגדיר את התת-קבוצה $S_2 \subseteq S$ של הקבוצה S להיות

$$S_2 = S_2' \ .$$

נובע ממשוואה (3*) ש:

$$S_1 \cup S_2 = S_1' \cup S_2' + \{s-2t\} = S \cup \{s-2t\} \qquad \Rightarrow \qquad S_1 \cup S_2 = S \ . \tag{4*}$$

$\Leftarrow$ ניתן לרשום משוואה (2*) בצורה הבאה:

$$\sum_{x\in(S_1\cup\{s-2t\})} x = \sum_{x\in S_2} x \ . \tag{5*}$$

ניתן לפצל את הסכום בצד השמאול של המשווה (5*), באופן הבא:

$$\sum_{x\in S_1} x + s - 2t = \sum_{x\in S_2} x \ . \tag{6*}$$

נוסיף את הסכום $\sum\limits_{x\in S_1} x$ לשני האגפים של משוואה של (6*) ונקבל

$$\sum_{x\in S_1} x + \sum_{x\in S_1} x + s - 2t = \sum_{x\in S_2} x + \sum_{x\in S_1} x \ . \tag{7*}$$

הסכום בצד הימין של משוואה (7*) הוא הסכום $\sum\limits_{x\in(S_1\cup S_2)} x$.

בנוסף, לפי המשוואה (4*), $S_1 \cup S_2 = S$ לכן $\sum\limits_{x\in S} x = \sum\limits_{x\in(S_1\cup S_2)} x$.

לכן הסכום בצד הימין של משוואה (7*) הוא $\sum\limits_{x\in S} x$, שהוא הסכום של כל האיברים של S.

אנחנו מסמנים את הסכום הזה כ- $\sum\limits_{x\in S} x = s$. לכן ניתן לרשום את משוואה (7*) בצורה הבאה:

$$\sum_{x\in S_1} x + \sum_{x\in S_1} x + s - 2t = s \ . \tag{8*}$$

אפשר לבטל s בצד שמאול ובצד ימין ולהעביר את ה- $2t$ לצד ימין ולקבל את המשוואה:

$$\sum_{x\in S_1} x + \sum_{x\in S_1} x = 2t \ , \tag{9*}$$

זאת אומרת

$$2\sum_{x\in S_1} x = 2t \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{x\in S_1} x = t \ . \tag{10*}$$

$\Leftarrow$ קיימת תת קבוצה $S_1 \subseteq S$ של S שמקיימת את התנאי $\sum\limits_{x\in S_1} x = t$.

$\Leftarrow$ $\langle S,t\rangle \in SubSetSum$.

שאלה 5

פונקצית הרדוקציה:

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, הקלט של $3COLOR$, ניצור גרף לא מכוון חדש $G' = (V', E')$, הקלט של $4COLOR$.
בהינתן $G = (V, E)$ נבנה הגרף החדש $G' = (V', E')$ כאשר:

- $V' = V \cup \{u^*\}$, כלומר הוספנו קודקוד אחד חדש u^*.
- $E' = E \cup \left\{(u, u^*) \;\middle|\; u \in V\right\}$. כלומר כל קודקוד בקבוצת הקודקודים V מחובר ל- u^* בצלע.

נכונות הרדוקציה:

נסמן צבע של קודקוד $u \in V$ ע"י $c(u)$, ונסמן 3 צבעים שונים של הקודקודים של G ב- $\{1, 2, 3\}$.
כלומר $c(u) \in \{1, 2, 3\}$.

באופן דומה, נסמן צבע של קודקוד $u' \in V'$ ע"י $c(u')$, ונסמן 4 צבעים שונים של הקודקודים של G' ב- $\{1, 2, 3, 4\}$.
כלומר $c(u') \in \{1, 2, 3, 4\}$.

נוכיח ש:

$$\langle G \rangle \in 3COLOR \quad \Leftrightarrow \quad \langle G' \rangle \in 4COLOR \,.$$

כיוון $\Leftarrow$

נניח כי $\langle G \rangle \in 3COLOR$.

$\Leftarrow$ אם $c(u) \in \{1, 2, 3\}$ לכל $u \in V$, ואם $(u_1, u_2) \in E$ אז $c(u_1) \neq c(u_2)$.
כלומר, ניתן לצבוע כל קודקוד ב-3 צבעים שונים כך שני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע.

$\Leftarrow$ אם $c\left(u^*\right) = 4$ אז לכל $u \in V$ מתקיים $c(u) \neq c(u^*) = 4$.
הצבע של u^* שונה מהצבעים של כל הקודקודים של V.

$\Leftarrow$ לכל $u'_1, u'_2 \in V'$ מתקיים שאם $(u'_1, u'_2) \in E'$ אז $c(u'_1) \neq c(u'_2)$.

$\Leftarrow$ ניתן לצבוע את הקודקודים של G' ב- 4 צבעים שך ששני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע.

$\Leftarrow$ $\langle G' \rangle \in 4COLOR$.

כיוון $\Rightarrow$

נניח כי $\langle G' \rangle \in 4COLOR$.

$\Leftarrow$ אם $c(u') \in \{1, 2, 3, 4\}$ לכל $u' \in V'$, ואם $(u'_1, u'_2) \in E'$ אז $c(u'_1) \neq c(u'_2)$.
כלומר, ניתן לצבוע כל קודקוד ב-4 צבעים שונים כך שני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע.

$\Leftarrow$ מכיוון ש- $V' = V \cup \{u^*\}$ ו- u^* מחובר לכל קודקוד $u \in V$, אם $c\left(u^*\right) = 4$ אז בהכרח לכל $u \in V$ מתקיים $c(u) = 1, 2, 3$.

(אחרת קיים קודקוד $u \in V$ הצבוה בצבע 4 וקיים וצלע בין u^* הצבוע בצבע 4 לבין הקודקוד $u \in V$ הצבוע בצבע 4 בסתירה לכך ש- G' הוא 4-צביע.)

$\Leftarrow$ מכיוון ש- G' הוא 4- צביע אז בהכרח אין צלע ב- $E=\left\{(u_1,u_2)\;\middle|\;u_1,u_2\in V\right\}$ המחבר בין קודקודים בעלי אותו צבע.

$\Leftarrow$ $G=(V,E)$ הוא גרף 3- צביע.

$\Leftarrow$ $\langle G\rangle\in 3COLOR$.

שאלה 6

בהינתן $\langle H,k\rangle$ הקלט של hyperVC, כאשר $H=(V,hE)$ היפרגרף ו- k שלם, ניצור $\langle n,k,A_1,\dots,A_t\rangle$ הקלט של HS כך ש- $\langle H,k\rangle\in\text{hyperVC}\Leftrightarrow\langle n,k,A_1,\dots,A_t\rangle\in HS$, באופן הבא:

- $n=|V(H)|$.
- אם $hE=\{he_1,\dots,he_m\}$ אז $A_1=he_1,\quad\cdots\quad,A_m=he_m$.

כלומר

$$f\;(\;\langle H,k\rangle\;)=\langle\;|V|\;,\;k\;,\;he_1\;,\quad\dots\quad,\;he_m\rangle\;.$$

נכונות הרדוקציה

כיוון $\Leftarrow$

אם $\langle H,k\rangle\in\text{hyperVC}$

$\Leftarrow$ H מכיל היפר-כיסוי קודקודים $S\subseteq V$ בגודל k.

$\Leftarrow$ אם $he_i=\{u_1,u_2,u_3\}\in hE$ אז $u_1\in S$ או $u_2\in S$ או $u_3\in S$.
כלומר, התת-קבוצה של היפר-כיסוי קודקודים S מכילה לפחות קודקוד אחד מכל צלע.

$\Leftarrow$ אם $he_i\in hE$ אז $he_i\cap S\neq\emptyset$.
כלומר, כיוון שבחרנו את ה- $\{A_i\}$ להיות הקבוצות הצלעות $\{he_i\}$, אזי הקבוצה S "פוגעת" בכל הקבוצות $\{he_i\}$.

$\Leftarrow$ לכל $1\leq i\leq m$ מצקיים $he_i\subseteq V$ ו- $S\cap he_i\neq\emptyset$ ו- $|S|=k$.

$\Leftarrow$ $\langle|V|,k,he_1,\quad\dots\quad,he_m\rangle\in HS$

כיוון $\Rightarrow$

אם $\langle|V|,k,he_1,\quad\cdots\quad he_m\rangle\in HS$

$\Leftarrow$ קיימת קבוצה S ש"פוגעת" בכל הקבוצות he_i.
כלומר, קיימת $S\subseteq V$ כך ש- $he_i\cap S\neq\emptyset$ לכל $1\leq i\leq m$ ו- $|S|=k$.

$\Leftarrow$ אותה קבוצה מהווה היפר כיסוי קודקודים בגודל k של ההיפר גרף $H=(V,hE)$ כאשר $hE=\{he_1,\quad\dots\quad,he_m\}$.

$\Leftarrow$ $\langle H,k\rangle\in\text{hyperVC}$.

שאלה 7

פונקצית הרדוקציה

בהינתן $\langle G,s,t\rangle$ הקדט של $HAMPATH$, נבנה גרף $\langle G'\rangle$ הקלט של $HAMCYCLE$ בזמן פולינומיאלי ונוכיח כי:

$$\langle G,s,t\rangle \in HAMPATH \quad \Leftrightarrow \quad \langle G'\rangle \in HAMPATH \ .$$

נבנה את G' באופן הבא:

נוסיף קודקוד חדש x ל- G ושתי צלעות מכוונות חדשות (x,s) ו- (t,x) ונקבל גרף חדש G'.

נכונות הרדוקציה

1. ניתן לחשב את f בזמן קבוע.
2. נוכיח כי $\langle G'\rangle \in HAMPATH \quad \Leftrightarrow \quad \langle G,s,t\rangle \in HAMPATH$.

כיוון $\Leftarrow$

נניח כי $\langle G,s,t\rangle \in HAMPATH$.

- $\Leftarrow$ G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t.
- $\Leftarrow$ אותו מסלול קיים ב- G'.
- $\Leftarrow$ מסלול זה יחד עם הצלעות שהוספנו (x,s) ו- (t,x) מהווה מעגל המילטוני שעובר דרך כל קודקודי הגרף G'.
- $\Leftarrow$ G' מכיל מעגל המילטוני.
- $\Leftarrow$ $\langle G'\rangle \in HAMCYCLE$.

כיוון $\Rightarrow$

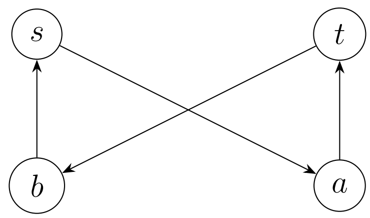
נניח כי $\langle G'\rangle \in HAMCYCLE$

- $\Leftarrow$ G' מכיל מעגל המילטוני C שעובר דרך כל הקודקודים של G'.
- $\Leftarrow$ לפי הבנייה, C בהכרח מכיל את הצלעות החדשות (x,s) ו- (t,x).
- $\Leftarrow$ הורדת x ושתי הצלעות (x,s) ו- (t,x) מ- C מאשירה מסלול המילטוני מ- s ל- t שעובר דרך כל קודקוד ב- G בדיוק פעם אחת.
- $\Leftarrow$ G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t.
- $\Leftarrow$ $\langle G,s,t\rangle \in HAMPATH$.

<u>הערה:</u>

להוסיף צלע (t,s) ל- G לא מספיק.

לדוגמה:



הגרף לא מכיל מסלול המילטוני אבל כן מכיל מעגל המילטוני. ואם נוסיף רק צלע (t,s), המעגל עדיין קיים ב- G'.