אלגברה ליניארית 1
סמסטר א' תשפ"ד
תרגילים: מערכות משוואות מעל $\mathbb{Z}_p$

לוח החיבור של איברים ב- $\mathbb{Z}_3$:

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

$-\bar{0} = \bar{0}$
$-\bar{1} = \bar{2}$
$-\bar{2} = \bar{1}$

לוח הכפל של איברים ב- $\mathbb{Z}_3$:

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$\bar{1}^{-1} = \bar{1}$
$\bar{2}^{-1} = \bar{2}$

לוח החיבור של איברים ב- $\mathbb{Z}_5$:

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

$-\bar{0} = \bar{0}$
$-\bar{1} = \bar{4}$
$-\bar{2} = \bar{3}$
$-\bar{3} = \bar{2}$
$-\bar{4} = \bar{1}$

לוח הכפל של איברים ב- $\mathbb{Z}_5$:

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$\bar{1}^{-1} = \bar{1}$
$\bar{2}^{-1} = \bar{3}$
$\bar{3}^{-1} = \bar{2}$
$\bar{4}^{-1} = \bar{4}$

לוח החיבור של איברים ב- $\mathbb{Z}_7$:

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$

$-\bar{0} = \bar{0}$
$-\bar{1} = \bar{6}$
$-\bar{2} = \bar{5}$
$-\bar{3} = \bar{4}$
$-\bar{4} = \bar{3}$
$-\bar{5} = \bar{2}$
$-\bar{6} = \bar{1}$

לוח הכפל של איברים ב- $\mathbb{Z}_7$:

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$

$\bar{1}^{-1} = \bar{1}$
$\bar{2}^{-1} = \bar{4}$
$\bar{3}^{-1} = \bar{5}$
$\bar{4}^{-1} = \bar{2}$
$\bar{5}^{-1} = \bar{3}$
$\bar{6}^{-1} = \bar{6}$

שאלה 1 רשמו את האיברים הבאים ב- $\mathbb{Z}_3$:

א) $\overline{12}$

ב) $\overline{23}$

ג) $\overline{57}$

ד) $\overline{46}$

ה) $\overline{19}$

ו) $\overline{-7}$

ז) $\bar{2}+\bar{1}$

ח) $\bar{2}+\bar{2}$

ט) $\bar{1}+\bar{1}$

י) $\bar{2}\cdot\bar{2}$

יא) $\bar{2}\cdot\bar{0}$

יב) $\bar{2}\cdot\bar{1}$

שאלה 2 רשמו את האיברים הבאים ב- $\mathbb{Z}_5$:

א) $\overline{11}$

ב) $\overline{24}$

ג) $\overline{56}$

ד) $\overline{98}$

ה) $\overline{22}$

ו) $\overline{-8}$

ז) $\bar{2}+\bar{2}$

ח) $\bar{2}+\bar{3}$

ט) $\bar{1}+\bar{4}$

י) $\bar{2}\cdot\bar{4}$

יא) $\bar{3}\cdot\bar{2}$

יב) $\bar{4}\cdot\bar{3}$

שאלה 3 רשמו את האיברים הבאים ב- $\mathbb{Z}_7$:

א) $\overline{13}$

ב) $\overline{33}$

ג) $\overline{74}$

ד) $\overline{16}$

ה) $\overline{12}$

ו) $\overline{-9}$

ז) $\bar{2}+\bar{6}$

ח) $\bar{3}+\bar{5}$

ט) $\bar{6}+\bar{3}$

י) $\bar{2}\cdot\bar{6}$

יא) $\bar{3}\cdot\bar{5}$

יב) $\bar{4}\cdot\bar{6}$

שאלה 4 פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{Z}_3$:

$$\begin{aligned} x+\bar{2}y&=\bar{2}\\ \bar{2}x-y&=\bar{1} \end{aligned}$$

שאלה 5 פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{Z}_3$:

$$\begin{aligned} \bar{2}x+\bar{2}y&=\bar{2}\\ x+y&=\bar{1} \end{aligned}$$

שאלה 6 פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} \bar{4}x+\bar{2}y&=\bar{3}\\ \bar{3}x-y&=\bar{2} \end{aligned}$$

שאלה 7 פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} \bar{3}x+y&=\bar{2}\\ \bar{3}x+\bar{4}y&=\bar{3} \end{aligned}$$

שאלה 8 פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} \bar{2}x+\bar{3}y&=\bar{0}\\ x-\bar{3}y&=\bar{4} \end{aligned}$$

שאלה 9 פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{aligned}\bar{5}x + \bar{2}y &= \bar{3}\\ \bar{4}x - \bar{3}y &= \bar{4}\end{aligned}$$

פתרונות

שאלה 1

א)

$$\overline{12} = \overline{\mathrm{rem}(12,3)} = \bar{0}$$

ב)

$$\overline{23} = \overline{\mathrm{rem}(23,3)} = \bar{2}$$

ג)

$$\overline{57} = \overline{\mathrm{rem}(57,3)} = \bar{0}$$

ד)

$$\overline{46} = \overline{\mathrm{rem}(46,3)} = \bar{1}$$

ה)

$$\overline{19} = \overline{\mathrm{rem}(19,3)} = \bar{1}$$

ו)

$$\bar{2} + \bar{7} = \bar{9} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad -\bar{7} = \bar{2} \ .$$

ז)

$$\bar{2} + \bar{1} = \bar{3} = \bar{0}$$

ח)

$$\bar{2} + \bar{2} = \bar{4} = \bar{1}$$

ט)

$$\bar{1} + \bar{1} = \bar{2}$$

י)

$$\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{4} = \bar{1}$$

יא)

$$\bar{2} \cdot \bar{0} = \bar{0}$$

יב)

$$\bar{2}\cdot\bar{1}=\bar{2}$$

שאלה 2

א)

$$\overline{11}=\overline{\text{rem}(11,5)}=\bar{1}$$

ב)

$$\overline{24}=\overline{\text{rem}(24,5)}=\bar{4}$$

ג)

$$\overline{56}=\overline{\text{rem}(56,5)}=\bar{1}$$

ד)

$$\overline{98}=\overline{\text{rem}(98,5)}=\bar{3}$$

ה)

$$\overline{22}=\overline{\text{rem}(22,5)}=\bar{2}$$

ו)

$$\bar{8}+\bar{2}=\overline{10}=\bar{0}\quad\Rightarrow\quad-\bar{8}=\bar{2}\ .$$

ז)

$$\bar{2}+\bar{2}=\bar{4}\ .$$

ח)

$$\bar{2}+\bar{3}=\bar{5}=\bar{0}$$

ט)

$$\bar{1}+\bar{4}=\bar{5}=\bar{0}$$

י)

$$\bar{2}\cdot\bar{4}=\bar{8}=\bar{3}$$

יא)

$$\bar{3}\cdot\bar{2}=\bar{6}=\bar{1}$$

יב)

$$\bar{4}\cdot\bar{3}=\overline{12}=\bar{2}\ .$$

<u>שאלה 3</u>

א)

$$\overline{13}=\overline{\text{rem}(13,7)}=\bar{6}$$

ב)

$$\overline{33}=\overline{\text{rem}(33,7)}=\bar{5}$$

ג)

$$\overline{74}=\overline{\text{rem}(74,7)}=\bar{4}$$

ד)

$$\overline{16}=\overline{\text{rem}(16,7)}=\bar{2}$$

ה)

$$\overline{12}=\overline{\text{rem}(12,7)}=\bar{5}$$

ו)

$$\bar{9}+\bar{5}=\overline{14}=\bar{0}\quad\Rightarrow\quad-\bar{9}=\bar{5}\ .$$

ז)

$$\bar{2}+\bar{6}=\bar{8}=\bar{1}\ .$$

ח)

$$\bar{3}+\bar{5}=\bar{8}=\bar{1}$$

ט)

$$\bar{6}+\bar{3}=\bar{9}=\bar{2}$$

י)

$$\bar{2}\cdot\bar{6}=\overline{12}=\bar{5}$$

יא)

$$\bar{3}\cdot\bar{5}=\overline{15}=\bar{1}$$

יב)

$$\bar{4}\cdot\bar{6}=\overline{24}=\bar{3}\ .$$

שאלה 4

$$\left(\begin{array}{cc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{2}\\ \bar{2}&-\bar{1}&\bar{1}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{2}\\ \bar{2}&\bar{2}&\bar{1}\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2+R_1}\left(\begin{array}{cc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{2}\\ \bar{3}&\bar{4}&\bar{3}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2}\left(\begin{array}{cc|c}\bar{1}&\bar{3}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}\bar{1}&\bar{0}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x,y)=(\bar{2},\bar{0})\ .$$

שאלה 5

$$\left(\begin{array}{cc|c}\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\\ \bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{cc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\ \bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-\bar{2}\cdot R_1}\left(\begin{array}{cc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{array}\right)$$

יש משתנה חופשי ואין שורת סתירה לכן יהיו 3 פתרונות:

$$x+y=\bar{1}\quad\Rightarrow\quad x=\bar{1}-\bar{1}\cdot y=\bar{1}+\bar{2}\cdot y\ .$$

לפיכך הפתרון הכללי הינו

$$(x,y)=(\bar{1}+\bar{2}y,y)\ .$$

יש 3 פתרונות:

$y=\bar{0}$: $(x,y)=(\bar{1},\bar{0})$.

$y=\bar{1}$: $(x,y)=(\bar{3},\bar{1})=(\bar{0},\bar{1})$.

$y=\bar{2}$: $(x,y)=(\bar{5},\bar{2})=(\bar{2},\bar{2})$.

שאלה 6

$$\left(\begin{array}{cc|c}\bar{4}&\bar{2}&\bar{3}\\ \bar{3}&-\bar{1}&\bar{2}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}\bar{4}&\bar{2}&\bar{3}\\ \bar{3}&\bar{4}&\bar{2}\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to\bar{4}R_1}\left(\begin{array}{cc|c}\overline{16}&\bar{8}&\overline{12}\\ \bar{3}&\bar{4}&\bar{2}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}\bar{1}&\bar{3}&\bar{2}\\ \bar{3}&\bar{4}&\bar{2}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-\bar{3}\cdot R_1}\left(\begin{array}{cc|c}\bar{1}&\bar{3}&\bar{2}\\ \bar{0}&-\bar{5}&-\bar{4}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}\bar{1}&\bar{3}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{array}\right)$$

קיבלנו שרות סתירה לכן למערכת אין פתרון.

שאלה 7

$$\left(\begin{array}{cc|c} \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \bar{2} \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{6} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - \bar{3} \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & -\bar{2} & -\bar{9} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \bar{2} R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{6} & \bar{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - \bar{2} \cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x, y) = (\bar{0}, \bar{2}) \ .$$

שאלה 8

$$\left(\begin{array}{cc|c} \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{1} & -\bar{3} & \bar{4} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - \bar{2} \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & -\bar{1} & -\bar{8} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \bar{4} \cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \overline{16} & \bar{8} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - \bar{2} \cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & -\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x, y) = (\bar{3}, \bar{3}) \ .$$

שאלה 9

$$\left(\begin{array}{cc|c} \bar{5} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{4} & -\bar{3} & \bar{4} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{5} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{4} & \bar{4} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \bar{3} \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \overline{15} & \bar{6} & \bar{9} \\ \bar{4} & \bar{4} & \bar{4} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{4} & \bar{4} & \bar{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - \bar{4} \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{0} & -\overline{20} & -\bar{4} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - \bar{6} \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & -\overline{14} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x, y) = (\bar{0}, \bar{3}) \ .$$