

# שיעור 1

## תורת המספרים

### 1.1 משפט החלוק של אוקלידס

#### הגדרה 1.1 מספר שלם שמחולק במספר שלם אחר

יהיו  $a, b$  מספרים שלמים. אומרים כי  $b$  מחלק את  $a$  אם קיימים מספר שלם  $q$  כך ש-

$$a = qb .$$

כלומר  $\frac{a}{b}$  שווה למספר שלם  $q$ .

הסימן  $a | b$  אומר כי  $b$  מחלק את  $a$ .

#### דוגמה 1.1

א)  $6 | 3$  בגלל שקיימים מספר שלם  $q = 2$  כך ש-  $6 = 3q$

ב)  $42 | 7$  בgalל שקיימים מספר שלם  $q = 6$  כך ש-  $42 = 7q$

ג)  $8 \nmid 5$  בgalל שלא קיימים מספר שלם  $q$  כך ש-  $5q = 8$

#### משפט 1.1 תכונות של חילוק שלמים

יהיו  $a, b, d$  שלמים.

(1) אם  $d | (a + b)$  ו-  $d | b$  אז  $d | a$

(2) יהיו  $x, y$  שלמים. אם  $d | b$  ו-  $d | a$  אז  $d | (xa + yb)$

(3) אם  $a = \pm b$  אז  $b | a$  ו-  $a | b$

הוכחה:

$$\left. \begin{array}{l} d|a \\ d|b \end{array} \right\} \Rightarrow a = a'd \quad \Rightarrow \quad a \pm b = d(a' + b') \quad \Rightarrow \quad d | (a + b) . \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} d|a \\ d|b \end{array} \right\} \Rightarrow a = a'd \quad \Rightarrow \quad ax + by = d(a'x + b'y) \quad \Rightarrow \quad d | (ax + by) . \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} a|b \\ b|a \end{array} \right\} \Rightarrow b = ca \quad \Rightarrow \quad b = ca = cc'b \quad \Rightarrow \quad cc' = 1 . \quad (3)$$

ונ- $c'$  הם שלמים לכך  $cc' = 1$  אם ורק אם  $c = c'$  או  $c = -c'$ . לפיכך  $b = \pm a$ .

### הגדרה 1.2 השארית

יהיו  $a, b > 0$  שלמים. השארית של  $a$  בחלוקת  $b$ -השאירה  $b$  מסומנת  $a \bmod b$  ומוגדרת

$$a \bmod b = a - b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor .$$

סימון חלופי לשארית בחלוקת  $a$  ב- $b$ :

**הערה:** השארית מוגדרת באופן חד משמעי עבור שלמים חיוביים בלבד!

### דוגמה 1.2

$$43 \bmod 10 = 43 - 10 \cdot \left\lfloor \frac{43}{10} \right\rfloor = 43 - 10(4) = 3 ,$$

$$13 \bmod 4 = 13 - 4 \cdot \left\lfloor \frac{13}{4} \right\rfloor = 13 - 4(3) = 1 ,$$

$$8 \bmod 2 = 8 - 2 \cdot \left\lfloor \frac{8}{2} \right\rfloor = 8 - 2(4) = 0 .$$

### משפט 1.2 משפט החלוק של אוקלידס

יהיו  $a, b$  מספרים שלמים. אם  $b \neq 0$  ו- $a \geq b$  אז קיימים מספרים שלמים  $q, r$  ייחודיים כך ש-

$$a = qb + r \quad (1.1)$$

כאשר  $|r| \leq b$ . השם  $q$  נקרא המנה של  $a$  בחלוקת  $b$ -השאירה  $r$  של  $a$  בחלוקת  $b$ -השאירה  $a$ .

ההוכחה עצמה היא לא חלק של הקורס.

### דוגמה 1.3

יהיו  $a = 46, b = 8$ . המנה והשאירה הם  $q = 5, r = 6$  והפירוק מנה-שאירה הוא

$$46 = 5(8) + 6 .$$

### דוגמה 1.4

יהיו  $a = -46, b = 8$ . המנה והשאירה הם  $q = -6, r = 2$  והפירוק מנה-שאירה הוא

$$-46 = (-6)(8) + 2 .$$

### משפט 1.3 שיטה מעשית לחישוב החלוקת מנת-שארית

יהיו  $a, b$  שלמים ( $a \neq 0 \neq b$ ). אין מנתה  $q$  והשארית  $r$  במשפט החלוק של אוקלידס ניתנים כך:

$$r = a \bmod b \text{ ו } q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \text{ אם } a > 0, b > 0 \quad (1)$$

$$r = a \bmod |b| \text{ ו } q = -\left\lfloor \frac{a}{|b|} \right\rfloor \text{ אם } a > 0, b < 0 \quad (2)$$

$$r = b - |a| \bmod b \text{ ו } q = -\left\lfloor \frac{|a|}{b} \right\rfloor - 1 \text{ אם } a < 0, b > 0 \quad (3)$$

$$r = |b| - |a| \bmod |b| \text{ ו } q = \left\lfloor \frac{|a|}{|b|} \right\rfloor + 1 \text{ אם } a < 0, b < 0 \quad (4)$$

**הוכחה:** נוכיח בכל אחד מארבעת המקרים.

**מצב 1** נניח  $0 < a$ . לפי משפט החלוק של אוקלידס קיימים שלמים  $r, q$  כך ש-

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < b. \quad (*)$$

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}.$$

נחלק ב- $b$ :

$$0 \leq \frac{r}{b} < 1, \text{ מתקיים } 0 \leq r < b, \text{ ולכן}$$

$$q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor.$$

$$r = a - b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = a \bmod b.$$

הצבה חוזרת ב-(\*) נותנת

**מצב 2** נניח  $0 < a$ . לפי משפט החלוק של אוקלידס עבור השלמים  $\bar{r}, \bar{q}$  כך ש:

$$a = \bar{q}|b| + \bar{r}, \quad 0 \leq \bar{r} < |b|.$$

$$|b| = -b. \bar{r} = a \bmod |b| \text{ ו } \bar{q} = \left\lfloor \frac{a}{|b|} \right\rfloor \text{ מהמקרה הראשון:}$$

$$a = \bar{q}(-b) + \bar{r} \Rightarrow a = -\bar{q}b + \bar{r}. \quad (#)$$

מצד שני משפט החלוק עבור השלמים  $b, a$  (כלומר  $b$  בלי הערך מוחלט) קיימים שלמים  $r, q$  כך ש:

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

השווואה של משווואה (#) ל- $a = qb + r$  נותנת

$$q = -\bar{q} = -\left\lfloor \frac{a}{|b|} \right\rfloor, \quad r = \bar{r} = a \bmod |b|.$$

**מצב 3** נניח  $a < 0, b > 0$ . משפט החלוק עבור הלשימים  $b$ ,  $\bar{r}$  קיימים שלמים  $\bar{q}$  כך ש:

$$|a| = \bar{q}b + \bar{r}, \quad 0 \leq \bar{r} < b.$$

מהמקרה הראשון:

$$\bar{q} = \left\lfloor \frac{|a|}{b} \right\rfloor, \quad \bar{r} = |a| \bmod b.$$

$$-a = \bar{q}b + \bar{r} \Rightarrow a = -\bar{q}b - \bar{r}. \quad :|a| = -a$$

כעת השארית  $\bar{r}$  – שלילית, ואינה עומדת בתנאי  $b < r < 0$ . לכן נוסיף ונחסר מנתה שלמה  $b$ :

$$a = -\bar{q}b - \bar{r} = -(\bar{q} + 1)b + (b - \bar{r}). \quad (**)$$

כך קיבלנו את הצורה הנדרשת. מצד שני עבור הלשימים  $a, b$  (כלומר  $a$  בלי הערך מוחלט) משפט החלוק קיימים שלמים  $r, q$  עוברים

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < b.$$

השווואה של זה עם משווה (\*\* נותרת):

$$q = -\left\lfloor \frac{|a|}{b} \right\rfloor - 1, \quad r = b - |a| \bmod b.$$

**מצב 4** נניח  $a < 0, b < 0$ . לפי משפט החלוק עבור  $|a|, |b|$  קיימים שלמים  $\bar{r}, \bar{q}$  כך ש:

$$|a| = \bar{q}|b| + \bar{r}, \quad 0 \leq \bar{r} < |b|.$$

מ-(1) קיבל

$$\bar{q} = \left\lfloor \frac{|a|}{|b|} \right\rfloor, \quad \bar{r} = |a| \bmod |b|.$$

$$:|a| = -a, |b| = -b$$

$$-a = -\bar{q}|b| + \bar{r} \Rightarrow a = \bar{q}|b| - \bar{r}.$$

כמו קודם נוסיף ונחסר  $|b|$  כדי להפוך את השארית לחיבורית:

$$\begin{aligned} a &= \bar{q}|b| - |b| + |b| - \bar{r} \\ \Rightarrow \quad a &= \bar{q}|b| + b + |b| - \bar{r} \\ \Rightarrow \quad a &= (\bar{q} + 1)|b| + |b| - \bar{r}. \end{aligned} \quad (\#)$$

מצד שני משפט החלוק עבור הלשימים  $b, a$  (לא הערכים מוחלטים שלהם) קיימים שלמים  $r, q$  עוברים:

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

השווואה של  $a = qb + r$  למשווה (# נותרת):

$$q = \bar{q} + 1 = \left\lfloor \frac{|a|}{|b|} \right\rfloor + 1, \quad r = |b| - \bar{r} = |b| - |a| \bmod |b|.$$

שארית $r$	מנה $q$	מספר $b$	סימן $a$	סימן $b$	מצב
$a \text{ mod } b$	$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$	+	+	1	
$a \text{ mod }  b $	$- \left\lfloor \frac{a}{ b } \right\rfloor$	-	+	2	
$b -  a  \text{ mod } b$	$- \left\lfloor \frac{ a }{b} \right\rfloor - 1$	+	-	3	
$ b  -  a  \text{ mod }  b $	$\left\lfloor \frac{ a }{ b } \right\rfloor + 1$	-	-	4	



### דוגמה 1.5

מצאו את הפירוק מנתה-שארית של השלמים הבאים:

$$a = 46, b = 8 \quad \text{(א)}$$

$$a = -46, b = 8 \quad \text{(ב)}$$

$$a = 101, b = -7 \quad \text{(ג)}$$

$$a = -151, b = -12 \quad \text{(ד)}$$

**פתרונות:**

(א) במקרה זה  $a > 0, b > 0$  אז

$$q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{46}{8} \right\rfloor = 5, \quad r = a \text{ mod } b = a - b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = 46 - 8 \left\lfloor \frac{46}{8} \right\rfloor = 6,$$

לכן:

$$46 = (5)(8) + 6.$$

(ב) במקרה זה  $a < 0, b > 0$  אז

$$q = - \left\lfloor \frac{|a|}{b} \right\rfloor - 1 = - \left\lfloor \frac{46}{8} \right\rfloor - 1 = -6$$

-1

$$\begin{aligned} r &= b - |a| \text{ mod } b \\ &= b - \left( |a| - b \left\lfloor \frac{|a|}{b} \right\rfloor \right) \\ &= 8 - \left( 46 - 8 \left\lfloor \frac{46}{8} \right\rfloor \right) \\ &= 8 - (46 - 8(5)) \\ &= 2. \end{aligned}$$

לכן:

$$-46 = (-6)(8) + 2.$$

ג) במקרה זה  $a > 0, b < 0$  אז

$$q = -\left\lfloor \frac{a}{|b|} \right\rfloor = -\left\lfloor \frac{101}{7} \right\rfloor = -14 .$$

-1

$$r = a \bmod |b| = a - |b| \left\lfloor \frac{a}{|b|} \right\rfloor = 101 - 7 \left\lfloor \frac{101}{7} \right\rfloor = 101 - 7(14) = 3 .$$

לכן:

$$101 = (-14)(-7) + 3 .$$

ד) במקרה זה  $a < 0, b < 0$  אז

$$q = \left\lfloor \frac{|a|}{|b|} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{151}{12} \right\rfloor + 1 = 12 + 1 = 13 .$$

-1

$$\begin{aligned} r &= |b| - |a| \bmod |b| \\ &= |b| - \left( |a| - |b| \left\lfloor \frac{|a|}{|b|} \right\rfloor \right) \\ &= 12 - \left( 151 - 12 \left\lfloor \frac{151}{12} \right\rfloor \right) \\ &= 12 - (151 - 12(12)) \\ &= 12 - 7 \\ &= 5 . \end{aligned}$$

לכן:

$$-151 = (13)(-12) + 5 .$$



## 1.2 מספרים ראשוניים

### הגדרה 1.3 מספר ראשוני

מספר ראשוני הוא מספר שלם וחיווי  $2 \geq p$  שבו המחלקים היחידים שלו הם 1 ו-  $p$  בלבד.  
ז"א  $p$  ראשוני אם התנאי הבא מתקיים:

$$a \mid p \iff a = 1 \vee p .$$

### משפט 1.4 משפט הפירוק לראשוניים

כל מספר טבעי  $a \geq 2$  הוא מספר ראשוני או שווה למכפלה של מספרים ראשוניים.  
ז"א לכל מספר טבעי  $a \geq 2$  קיימים טבעיים  $e_1, \dots, e_n$  עבורם

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$$

כאשר  $p_1, \dots, p_n$  מספרים ראשוניים.

**דוגמה 1.6**

הפירוק לראשוניים של 60 הוא:

$$60 = 2^2 \times 3^2 \times 5 ,$$

**דוגמה 1.7**

הפירוק לראשוניים של 98 הוא:

$$98 = 2^1 \times 7^2 .$$

הוכחה:

- נניח בשלילה שהטענה לא נכונה. אז קיימים לפחות מספר טבעי אחד שלא ראשוני וגם לא שווה למינימום של ראשוניים.
- יהי  $2 \leq m$  הטבעי הקטן ביותר שלא מקיים הטענה זו. ( $m$  הוא הדוגמה הנגדית הקטנה ביותר).
- אזי  $m$  לא ראשוני וגם לא שווה למינימום של ראשוניים.
- לכן  $m$  פריך, ז"א קיימים טבעיים  $2 \leq a < m$ ,  $2 \leq b < m$  כך ש:

$$m = ab .$$

- $m$  הוא הטבעי הקטן ביותר מסווג זה שמספריך את הטענה בעוד  $b$ ,  $a$ ,  $m$  הם קטנים ממש מ-  $m$  אז  $a$  ו-  $b$  בהכרח מקיימים את הטענה: ז"א  $a$  או  $b$  ראשוני או שווה למינימום של ראשוניים, ואוטו דבר עבור  $b$ .

- לכן קיימים טבעיים  $e_1, e_2, \dots, e_n$  עבורם

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n}$$

כאשר  $p_n, \dots, p_1$  מספרים ראשוניים וקיימים טבעיים  $f_1, \dots, f_n$  עבורם

$$b = q_1^{f_1} q_2^{f_2} \dots q_n^{f_n}$$

כאשר  $q_n, \dots, q_1$  מספרים ראשוניים.

- מכאן

$$m = ab = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n} q_1^{f_1} q_2^{f_2} \dots q_n^{f_n} .$$

לכן  $m$  שווה למינימום של מספרים ראשוניים, בסתיויה לכך  $m$  לא שווה למינימום של ראשוניים!**משפט 1.5 קיימים אינסוף מספרים ראשוניים**

קיימים אינסוף מספרים ראשוניים.

הוכחה: נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי  $\{p_1, \dots, p_n\} = P$  הוא הקבוצה של כל הראשוניים שקיימים וקבוצה זו נוצרת סופי. נגיד הרسلم  $1 + p_n + p_1 p_2 \dots p_n = m$ .לפי משפט הפירוק לזרים (ראו משפט 1.4)  $m$  הוא秩ני או שווה למינימום של ראשוניים. לפי ההנחה התחולית שלנו, אין מצב ש-  $m$  יכול להיות מספר秩ני בغالל ש-  $m$  גדול ממש מכל הראשוניים בקבוצת כל הראשוניים  $P$ . כלומר,  $m > p_i$  לכל  $n \leq i \leq 1$ . גם לא קיים מספק秩ני  $p_i$  אשר מחלק את  $m$ . הרי

$$m \pmod{p_i} = 1 \Rightarrow p_i \nmid m .$$

הגענו לסתירה להמשפט הפירוק לזרים. לכן קיימים אינסוף מספרים ראשוניים.

## 1.3 המחלק המשותף הגדול ביותר

### הגדירה 1.4 המחלק המשותף הגדול ביותר (gcd).

יהיו  $a, b$  שלמים. המחלק המשותף הגדול ביותר של  $a$  ו-  $b$  מסומן  $\text{gcd}(a, b)$  ומוגדר להיות השם החיוויי grootste gemeenschappelijke deler ביטר.  $a$  וגם  $b$ .

הסימון gcd מנובע מהשם אנגלי "greatest common divisor".

### דוגמה 1.8

$$\text{gcd}(2, 6) = 2 ,$$

$$\text{gcd}(3, 6) = 3 ,$$

$$\text{gcd}(24, 5) = 1 ,$$

$$\text{gcd}(20, 10) = 10 ,$$

$$\text{gcd}(14, 12) = 2 ,$$

$$\text{gcd}(8, 12) = 4 .$$

### הגדירה 1.5 כפולה המשותפת הקטנה ביותר

יהיו  $a, b$  שלמים. הcpfולה המשותפת הקטנה ביותר ביטר מסומנת  $\text{lcm}(a, b)$  ומוגדרת להיות השם החיוויי kleinste gemeenschappelijke veelvoud ביטר.  $a$  וגם  $b$  מחלקים אותו.

הסימון lcm מנובע מהשם אנגלי "lowest common multiple".

### דוגמה 1.9

$$\text{lcm}(6, 21) = 42 ,$$

$$\text{lcm}(3, 6) = 6 ,$$

$$\text{lcm}(24, 5) = 120 ,$$

$$\text{lcm}(20, 10) = 20 ,$$

$$\text{lcm}(14, 12) = 84 ,$$

$$\text{lcm}(8, 12) = 24 .$$

**הגדרה 1.6 מספרים זרים**

יהיו  $a, b$  שלמים. אומרים כי  $a$  ו-  $b$  **מספרים זרים** אם

$$\gcd(a, b) = 1.$$

כלומר, אין אף מספר גדול מאחד שמחלק את שניהם.

**משפט 1.6 שיטת פירוק לראשונה לחישוב  $\gcd$** 

יהיו  $a, b$  שלמים חיוביי כך שהפירוק לראשוניים שלהם הם:

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n}, \quad b = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_n^{f_n}$$

از ה-  $\gcd(a, b)$  הינו

$$\gcd(a, b) = p_1^{\min(e_1, f_1)} p_2^{\min(e_2, f_2)} \dots p_k^{\min(e_n, f_n)}.$$

**הוכחה:** נסמן  $.d | b$ . ראשית נראה כי  $d | a$  וגם  $d | b$ .

$$\begin{aligned} a &= p_1^{e_1} \dots p_i^{e_i} \dots p_n^{e_n} \\ &= (p_1^{e_1 - \min(e_1, f_1)} \dots p_i^{e_i - \min(e_i, f_i)} \dots p_n^{\min(e_n, f_n)}) (p_1^{\min(e_1, f_1)} \dots p_i^{\min(e_i, f_i)} \dots p_n^{\min(e_n, f_n)}) \\ &= qd \end{aligned}$$

כאשר  $e_i - \min(e_i, f_i) \geq 0$  החזקה  $q = p_1^{e_1 - \min(e_1, f_1)} \dots p_i^{e_i - \min(e_i, f_i)} \dots p_n^{\min(e_n, f_n)}$  אז  $q$  הוא מספר שלם.  $.d | a$  אז

באופן דומה אפשר להוכיח שגם  $.d | b$ .

הוכחנו כי  $d$  הוא מחלק משותף של  $a$  ו-  $b$ . כעת נראה כי  $d$  הוא המחלק המשותף הגדול ביותר.

נניח בsvilleה שקיימים  $c$  שלם כך  $c | a$  ו-  $c | b$  ו-  $c > d$ . ככלומר נניח שקיימים מחלק  $c$  של  $a$  ושל  $b$  שגדול יותר מ-  $d$ . מכיוון ש-  $c | a$  ו-  $c | b$  אז בפירוק לראשוניים של  $c$  מופיע רק אותם ראשוניים  $\{p_1, \dots, p_n\}$  שמופיעים בפירוקים של  $a$  ושל  $b$ . לכן יש לנו:

$$c = p_1^{g_1} \dots p_i^{g_i} \dots p_n^{g_n}.$$

מכיוון ש-  $c | a$  אז  $g_i \leq e_i$ , ומכיוון ש-  $c | b$  אז  $g_i \leq f_i$  לכל  $i$ . כלומר

$$g_i \leq \min(e_i, f_i) \quad \text{לכל } i.$$

לפיכך

$$c = p_1^{g_1} \dots p_i^{g_i} \dots p_n^{g_n} \leq p_1^{\min(e_1, f_1)} \dots p_i^{\min(e_i, f_i)} \dots p_n^{\min(e_n, f_n)} = d$$

וז"א בסתיו  $c > d$ .

**דוגמה 1.10**

מצאו את  $\gcd(19200, 320)$ .

**פתרון:**

הפיורוקים הראשונים של 19200 ושל 320 הם

$$19200 = 2^8 3^1 5^2 , \quad 320 = 2^6 5^1 = 2^6 3^0 5^1 .$$

לכן

$$\gcd(19200, 320) = 2^{\min(8,6)} 3^{\min(1,0)} 5^{\min(2,1)} = 2^6 3^0 5^1 = 320 .$$

### דוגמה 1.11

מצאו את  $\gcd(154, 36)$

**פתרון:**

הפיורוקים הראשונים של 154 ושל 36 הם

$$154 = 2^1 7^1 11^1 , \quad 36 = 2^2 3^2 .$$

נרשום את 154 ו- 36 כמכפלות של אותם ראשוניים על ידי הוספת חזקות של 0:

$$154 = 2^1 3^0 7^1 11^1 , \quad 36 = 2^2 3^2 7^0 11^0 .$$

$$\gcd(154, 36) = 2^{\min(1,2)} 3^{\min(0,2)} 7^{\min(1,0)} 11^{\min(1,0)} = 2^1 3^0 7^0 11^0 = 2 .$$

### משפט 1.7 $\gcd$ של מספרים ראשוניים

יהיו  $p, q$  שני מספרים ראשוניים שונים ( $p \neq q$ ). מתקיים

$$\gcd(p, q) = 1 .$$

**הוכחה:**

#### שיטת 1: הוכחה ישירה

$p$  הוא ראשוני אז הפירוק הראשון לשלו הוא

$$p = p^1 q^0 .$$

$q$  הוא ראשוני אז הפירוק הראשון לשלו הוא

$$q = p^0 q^1 .$$

לפי משפט 1.6,

$$\gcd(p, q) = p^{\min(1,0)} q^{\min(0,1)} = p^0 q^0 = 1 .$$

#### שיטת 2: הוכחה בשילילה

יהי  $d = \gcd(p, q)$  ונניח כי  $p < q$ . אז  $d$  נמצא בטוחה של שלמים האפשריים  $1 \leq d \leq q$ .

נניח בשילילה כי  $d > 1$ .

.

מכיון ש-  $d$  מחלק משותף של  $p$  ושל  $q$  אז  $d | p$  וגם  $d | q$ .

הו ראשוני אז גורר  $d | p$  או  $d | q$ , בסתיו לכך  $d = p$  ראשוני.



### משפט 1.8 שיטת פירוק לראשוניים לחישוב lcm

יהיו  $a, b$  שלמים חיוביים כך שהפירוק לראשוניים שלהם הם:

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n}, \quad b = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_n^{f_n}.$$

ה-  $\text{lcm}(a, b)$  נתונה על ידי הנוסחה

$$\text{lcm}(a, b) = p_1^{\max(e_1, f_1)} p_2^{\max(e_2, f_2)} \dots p_n^{\max(e_n, f_n)}$$

**הוכחה:** נסמן  $D = p_1^{\max(e_1, f_1)} p_2^{\max(e_2, f_2)} \dots p_n^{\max(e_n, f_n)}$

$$\begin{aligned} D &= p_1^{\max(e_1, f_1)} p_2^{\max(e_2, f_2)} \dots p_n^{\max(e_n, f_n)} \\ &= (p_1^{\max(e_1, f_1) - e_1} \dots p_i^{\max(e_i, f_i) - e_i} \dots p_n^{\max(e_n, f_n) - e_n}) (p_1^{e_1} \dots p_i^{e_i} \dots p_n^{e_n}) \\ &= qa \end{aligned}$$

כאמור  $\max(e_i, f_i) - e_i \geq 0$ . החזקה אז  $q = p_1^{\max(e_1, f_1) - e_1} \dots p_i^{\max(e_i, f_i) - e_i} \dots p_n^{\max(e_n, f_n) - e_n}$  הוא מספרשלם. אז  $a \mid D$ .

באופן דומה אפשר להוכיח שגם  $b \mid D$ .

הוכחנו כי  $D$  הוא כפולה של  $a$  ושל  $b$ .icut נראה כי  $D$  הוא הכפולה של  $a$  ושל  $b$  הקטנה ביותר.

נניח בsvilleה שקיימים  $C$  שלם כך  $a \mid C$  ו-  $b \mid C$  ו-  $C < D$ . כלומר נניח שקיימים  $C$  אשר כפולה של  $a$  ושל  $b$  שקיימת יותר מ-  $D$ . מכיוון ש-  $b \mid C$  אז כל הראשוניים בקבוצת  $\{p_1, \dots, p_n\}$  אשר בפירוקים של  $a$  ושל  $b$  חייבים להופיע גם בפירוק לראשוניים של  $C$ . לכן יש לנו:

$$C = p_1^{g_1} \dots p_i^{g_i} \dots p_n^{g_n} \dots$$

מכיוון ש-  $e_i \leq g_i$  לכל  $i$ , ומכיון ש-  $b \mid C$  אז  $f_i \leq g_i$  לכל  $i$ . לכן

$$\max(e_i, f_i) \leq g_i \quad \text{לכל } i.$$

לפיכך

$$C = p_1^{g_1} \dots p_i^{g_i} \dots p_n^{g_n} \geq p_1^{\max(e_1, f_1)} \dots p_i^{\max(e_i, f_i)} \dots p_n^{\max(e_n, f_n)} = D$$

ז"א  $C \geq D$  בסתירה לכך ש-

### משפט 1.9

יהיו  $a, b$  שלמים חיוביים. אז  $\gcd(a, b) \text{lcm}(a, b) = ab$ .

**הוכחה:** יהיו הירוקים לראשוניים של  $a$  ושל  $b$ :

$$a = p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n}, \quad b = p_1^{f_1} \dots p_n^{f_n}.$$

zioni ממשפט 1.6 וממשפט 1.8:

$$\begin{aligned} \gcd(a, b) \operatorname{lcm}(a, b) &= p_1^{\min(e_1, f_1)} \cdots p_n^{\min(e_n, f_n)} p_1^{\max(e_1, f_1)} \cdots p_n^{\max(e_n, f_n)} \\ &= p_1^{\min(e_1, f_1) + \max(e_1, f_1)} \cdots p_n^{\min(e_n, f_n) + \max(e_n, f_n)} \\ &= p_1^{e_1+f_1} \cdots p_n^{e_n+f_n} \\ &= p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n} p_1^{f_1} \cdots p_n^{f_n} \\ &= ab, \end{aligned}$$

כasher נעזרנו בהזהות

$$\min(e, f) + \max(e, f) = e + f.$$



## 1.4 האלגוריתם של אוקלידס

### משפט 1.10 האלגוריתם של אוקלידס

יהיו  $a, b$  מספרים שלמים חיוביים. קיים אלגוריתם אשר נותן את  $d = \gcd(a, b)$  כדלקמן. ראשית מאותחים:

$:r_1 \rightarrow r_0$

$$r_0 = a, \quad r_1 = b.$$

אם  $r_1 = b \neq 0$  אז מתחילה את הלולאה. בשלב  $i = 1$  מחשבים את  $q_1$  ו-  $r_2$  כך:

$$q_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor, \quad r_2 = r_0 - q_1 r_1 = r_0 - \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor r_1.$$

אם  $r_2 \neq 0$  ממשיכים לשלב  $i = 2$  שבו מחשבים את  $q_2$  ו-  $r_3$  כך:

$$q_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor, \quad r_3 = r_1 - q_2 r_2 = r_1 - \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor r_2.$$

התהליק ממשיך עד שנקבל  $0 = r_{n+1}$  בשלב ה-  $n$ -ית. כל השלבים של התהליק הם כדלקמן:

$$q_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor \quad r_2 = r_0 - q_1 r_1 = r_0 - \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor r_1 \quad :i = 1$$

$$q_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor \quad r_3 = r_1 - q_2 r_2 = r_1 - \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor r_2 \quad :i = 2$$

$$q_3 = \left\lfloor \frac{r_2}{r_3} \right\rfloor \quad r_4 = r_2 - q_3 r_3 = r_2 - \left\lfloor \frac{r_2}{r_3} \right\rfloor r_3 \quad :i = 3$$

⋮

$$q_{n-1} = \left\lfloor \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} \right\rfloor \quad r_n = r_{n-2} - q_{n-1} r_{n-1} = r_{n-2} - \left\lfloor \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} \right\rfloor r_{n-1} \quad :i = n-1$$

$$q_n = \left\lfloor \frac{r_{n-1}}{r_n} \right\rfloor \quad r_{n+1} = 0 \quad :i = n$$

התהליק מסתיים בשלב ה-  $n$ -ית אם  $0 = r_{n+1}$ . ואז הפלט של האלגוריתם הוא

למטה רשום ייצוג פסאודו-קוד של האלגוריתם של אוקלידס:

**Algorithm 1** האלגוריתם של אוקליידס

---

```

1: Input: Integers  $a, b$  .
2:  $r_0 \leftarrow a$ 
3:  $r_1 \leftarrow b$ 
4:  $n \leftarrow 1$ 
5: while  $r_n \neq 0$  do
6:    $q_n \leftarrow \left\lfloor \frac{r_{n-1}}{r_n} \right\rfloor$ 
7:    $r_{n+1} \leftarrow r_{n-1} - q_n r_n$ 
8:    $n \leftarrow n + 1$ 
9: end while
10:  $n \leftarrow n - 1$ 
11: Output:  $r_n = \gcd(a, b)$ 
```

---

**דוגמה 1.12**מצאו את  $\gcd(1071, 462)$ **פתרון:**

$$a = 1071, b = 462$$

נתחל  $r_1 = b = 462$  ו  $r_0 = a = 1071$  נבצע את האלגוריתם של אוקליידס:

$r_i$	$q_i$	שלב
$r_2 = r_0 - q_1 r_1$ $= 1071 - (2)(462) = 147$	$q_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1071}{462} \right\rfloor = 2$	: $i = 1$
$r_3 = r_1 - q_2 r_2$ $= 462 - (3)(147) = 21$	$q_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{462}{147} \right\rfloor = 3$	: $i = 2$
$r_4 = r_2 - q_3 r_3$ $= 147 - (7)(21) = 0$	$q_3 = \left\lfloor \frac{r_2}{r_3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{147}{21} \right\rfloor = 7$	: $i = 3$

לפיכך  $\gcd(1071, 462) = r_3 = 21$ **דוגמה 1.13**מצאו את  $\gcd(26, 11)$ **פתרון:**

$$a = 26, b = 11$$

נתחל  $r_1 = b = 11$  ו  $r_0 = a = 26$  נבצע את האלגוריתם של אוקליידס:

$r_i$	$q_i$	שלב
$r_2 = r_0 - q_1 r_1$ $= 26 - (2)(11) = 4$	$q_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{26}{11} \right\rfloor = 2$	: $i = 1$
$r_3 = r_1 - q_2 r_2$ $= 11 - (2)(4) = 3$	$q_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{11}{4} \right\rfloor = 2$	: $i = 2$
$r_4 = r_2 - q_3 r_3$ $= 4 - (1)(3) = 1$	$q_3 = \left\lfloor \frac{r_2}{r_3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 1$	: $i = 3$
$r_5 = r_3 - q_4 r_4$ $= 3 - (3)(1) = 0$	$q_4 = \left\lfloor \frac{r_3}{r_4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3}{1} \right\rfloor = 3$	: $i = 5$

לפי כן  $\gcd(26, 11) = r_4 = 1$



### משפט 1.11 משפט בז' (Bezout's identity)

יהיו  $a, b$ . קיימים שלמים  $s, t, d$  עבורם

$$sa + tb = d , \quad (1.2)$$

כאשר  $d = \gcd(a, b)$ .

### משפט 1.12 האלגוריתם המוכפל של אוקלידס

יהיו  $a, b$  שלמים חיוביים. קיים אלגוריתם אשר נותן שלמים  $s, t, d$  עבורם

$$d = sa + tb$$

כאשר  $d = \gcd(a, b)$ . ראשית מתחילה:

$$r_0 = a , \quad r_1 = b , \quad s_0 = 1 , \quad s_1 = 0 , \quad t_0 = 0 , \quad t_1 = 1 .$$

אם  $0 \neq r_1 = b$  מבצעים האיטרציה הראשונה של הלולאה. בשלב  $i = 1$  מחשבים את  $q_1, r_2, s_2, t_2$  כך:

$$q_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor , \quad r_2 = r_0 - q_1 r_1 , \quad s_2 = s_0 - q_1 s_1 , \quad t_2 = t_0 - q_1 t_1 .$$

אם  $0 \neq r_2$  מבצעים לאיטרציה  $i = 2$  שבה מחשבים את  $q_2, r_3, s_3, t_3$  כך:

$$q_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor , \quad r_3 = r_1 - q_2 r_2 , \quad s_3 = s_1 - q_2 s_2 , \quad t_3 = t_1 - q_2 t_2 .$$

התהlik ממשיך עד השלב ה-  $n$  שבו מקבלים  $r_{n+1}$ , ו- $0$  פולטים  $d = r_n = \gcd(a, b)$ ,  $s = s_n$ ,  $t = t_n$ . כל השלבים של האלגוריתם הם כדלקמן:

$q_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor$	$r_2 = r_0 - q_1 r_1$	$s_2 = s_0 - q_1 s_1$	$t_2 = t_0 - q_1 t_1$	שלב 1:
$q_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor$	$r_3 = r_1 - q_2 r_2$	$s_3 = s_1 - q_2 s_2$	$t_3 = t_1 - q_2 t_2$	שלב 2:
				⋮
$q_i = \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor$	$r_{i+1} = t_{i-1} - q_i t_i$	$s_{i+1} = s_{i-1} - q_i s_i$	$t_{i+1} = t_{i-1} - q_i r_i$	שלב $i$ :
				⋮
$q_{n-1} = \left\lfloor \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} \right\rfloor$	$r_n = t_{n-2} - q_{n-1} t_{n-1}$	$s_n = s_{n-2} - q_{n-1} s_{n-1}$	$t_n = t_{n-2} - q_{n-1} r_{n-1}$	שלב $n-1$ :
$q_n = \left\lfloor \frac{r_{n-1}}{r_n} \right\rfloor$	$r_{n+1} = t_{n-1} - q_n t_n$	$s_{n+1} = s_{n-1} - q_n s_n$	$t_{n+1} = t_{n-1} - q_n r_n$	שלב $n$ :

$$d = \gcd(a, b) = r_n , \quad s = s_n , \quad t = t_n .$$

למטה רשום ייצוג פסאודו-קוד של האלגוריתם:

---

### אוקלידס של המוכל האלגוריתם 2

---

```

1: Input: Integers  $a, b$  .
2:  $r_0 \leftarrow a$ 
3:  $r_1 \leftarrow b$ 
4:  $s_0 \leftarrow 1$ 
5:  $s_1 \leftarrow 0$ 
6:  $t_0 \leftarrow 0$ 
7:  $t_1 \leftarrow 1$ 
8:  $n \leftarrow 1$ 
9: while  $r_n \neq 0$  do
10:    $q_n \leftarrow \left\lfloor \frac{r_{n-1}}{r_n} \right\rfloor$ 
11:    $r_{n+1} \leftarrow r_{n-1} - q_n r_n$ 
12:    $s_{n+1} \leftarrow s_{n-1} - q_n s_n$ 
13:    $t_{n+1} \leftarrow t_{n-1} - q_n t_n$ 
14:    $n \leftarrow n + 1$ 
15: end while
16:  $n \leftarrow n - 1$ 
17: Output:  $r_n, s_n, t_n$   $\triangleright d = r_n = \gcd(a, b)$  and  $d = sa + tb$  where  $s = s_n, t = t_n.$ 

```

---

### דוגמה 1.14 (אלגוריתם המוכל של אוקלידס)

מצאו את  $d = \gcd(240, 46)$  ומצאו שלמים  $s, t$  עבורם  $d = 240s + 46t$

פתרונות:

מאתחלים:

$$\begin{array}{ll} r_0 = a = 240 , & r_1 = b = 46 , \\ s_0 = 1 , & s_1 = 0 , \\ t_0 = 0 , & t_1 = 1 . \end{array}$$

$q_1 = \left\lfloor \frac{240}{46} \right\rfloor = 5$	$r_2 = 240 - 5 \cdot 46 = 10$	$s_2 = 1 - 5 \cdot 0 = 1$	$t_2 = 0 - 5 \cdot 1 = -5$	: $i = 1$ שלב
$q_2 = \left\lfloor \frac{46}{10} \right\rfloor = 4$	$r_3 = 46 - 4 \cdot 10 = 6$	$s_3 = 0 - 4 \cdot 1 = -4$	$t_3 = 1 - 4 \cdot (-5) = 21$	: $i = 2$ שלב
$q_3 = \left\lfloor \frac{10}{6} \right\rfloor = 1$	$r_4 = 10 - 1 \cdot 6 = 4$	$s_4 = 1 - 1 \cdot (-4) = 5$	$t_4 = -5 - 1 \cdot (21) = -26$	: $i = 3$ שלב
$q_4 = \left\lfloor \frac{6}{4} \right\rfloor = 1$	$r_5 = 6 - 1 \cdot 4 = 2$	$s_5 = -4 - 1 \cdot 5 = -9$	$t_5 = 21 - 1 \cdot (-26) = 47$	: $i = 4$ שלב
$q_5 = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor = 2$	$r_6 = 4 - 2 \cdot 2 = 0$	$s_6 = 5 - 2 \cdot (-9) = 23$	$t_6 = -26 - 2 \cdot (47) = -120$	: $i = 5$ שלב

$$\gcd(a, b) = r_5 = 2 , \quad s = s_5 = -9 , \quad t = t_5 = 47 .$$

$$sa + tb = -9(240) + 47(46) = 2 .$$



### דוגמה 1.15 (אלגוריתם המוכל של איוקליידס)

מצאו את  $d = 326s + 78t$  ומצאו שלמים  $s, t$  עבורם  $d = \gcd(326, 78)$

פתרונות:  
מאתחלים:

$$\begin{array}{ll} r_0 = a = 326 , & r_1 = b = 78 , \\ s_0 = 1 , & s_1 = 0 , \\ t_0 = 0 , & t_1 = 1 . \end{array}$$

$q_1 = \left\lfloor \frac{326}{78} \right\rfloor = 4$	$r_2 = 326 - 4 \cdot 78 = 14$	$s_2 = 1 - 4 \cdot 0 = 1$	$t_2 = 0 - 4 \cdot 1 = -4$	: $i = 1$ שלב
$q_2 = \left\lfloor \frac{78}{14} \right\rfloor = 5$	$r_3 = 78 - 5 \cdot 14 = 8$	$s_3 = 0 - 5 \cdot 1 = -5$	$t_3 = 1 - 5 \cdot (-4) = 21$	: $i = 2$ שלב
$q_3 = \left\lfloor \frac{14}{8} \right\rfloor = 1$	$r_4 = 14 - 1 \cdot 8 = 6$	$s_4 = 1 - 1 \cdot (-5) = 6$	$t_4 = -4 - 1 \cdot (21) = -25$	: $i = 3$ שלב
$q_4 = \left\lfloor \frac{8}{6} \right\rfloor = 1$	$r_5 = 8 - 1 \cdot 6 = 2$	$s_5 = -5 - 1 \cdot 6 = -11$	$t_5 = 21 - 1 \cdot (-25) = 46$	: $i = 4$ שלב
$q_5 = \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor = 3$	$r_6 = 6 - 3 \cdot 2 = 0$			: $i = 5$ שלב

$$\gcd(a, b) = r_5 = 2 , \quad s = s_5 = -11 , \quad t = t_5 = 46 .$$

$$sa + tb = -11(326) + 46(78) = 2 .$$

## 1.5 יחס השקילות המודולרית

### הגדרה 1.7 שיקילות מודולרית

יהיו  $n$ ,  $a, b$  שלמים ( $0 \neq n$ ). היחס:

$$a \equiv b \pmod{n}$$

אומר כי " $n$  מחלק את ההפרש  $a - b$ ".  
כלומר:

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \text{אם ורק אם} \quad n \mid a - b .$$

### דוגמה 1.16

הוכחו כי

$$5 \equiv 2 \pmod{3} \quad \text{(א)}$$

$$43 \equiv 23 \pmod{10} \quad \text{(ב)}$$

$$7 \not\equiv 2 \pmod{4} \quad \text{(ג)}$$

**פתרונות:**

(א)

$$5 - 2 = 3 = 1 \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad 3 \mid 5 - 2 \quad \Rightarrow \quad 5 \equiv 2 \pmod{3} .$$

(ב)

$$43 - 23 = 20 = 2 \cdot 10 \quad \Rightarrow \quad 10 \mid 43 - 23 \quad \Rightarrow \quad 43 \equiv 23 \pmod{10} .$$

$$(ג) 7 - 2 = 5$$

לא קיימים שלם  $q$  כך ש-  $7 - 2 = 4q$  אבל  $7 - 2 \nmid 5$

$$7 \not\equiv 2 \pmod{4} .$$

ההגדרה 1.7 של שיקילות מודולרית בין שלמים גוררת למשפט הבא באופן טבעי:

### משפט 1.13

יהיו  $a, b, r$  שלמים,  $r \neq 0$ .

$$a = qr + b \quad \text{קיים שלם } q \text{ עבורו} \quad \text{אם ורק אם} \quad n \mid a - b \quad \text{אם ורק אם} \quad a \equiv b \pmod{n}$$

הוכחה:

הגדרה הראשונה  $r \equiv a \pmod{b} \Leftrightarrow b | a - r$  נובעת יש מההגדרה 1.7 של יחס שקולות.

נראה את הגדרה השנייה:

$$a = qn + b \Leftrightarrow a - b = qn \text{ עבור } q \mid a - b$$

### משפט 1.14 תכונות של יחס השקילות המודולרי

יהיו  $a, b$  שלמים ו-  $n \neq 0$  שלם.

(1) רפלקסיבי:

$$a \equiv a \pmod{n}$$

(2) סימטרי:  $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow b \equiv a \pmod{n}$

(3) טרנזיטיבי: אם  $a \equiv b \pmod{n}$  ו-  $b \equiv c \pmod{n}$  אז  $a \equiv c \pmod{n}$

הוכחה:

(1) רפלקסיבי:

$a \equiv a \pmod{n}$  מתקיים  $a = 0 \cdot n + a$ , כלומר  $a - a \mid n$ .

(2) סימטרי:

נניח ש-  $a \equiv b \pmod{n}$ . אז קיימים שלמים  $q$  עבורו

$$a = qn + b \Leftrightarrow b = (-q)n + a$$

זהות קיימים שלמים  $\bar{q}$  עבורו  $b = \bar{q}n + a$ .

(3) טרנזיטיבי: נניח ש-  $a \equiv b \pmod{n}$  ו-  $b \equiv c \pmod{n}$

$$\begin{array}{l} a = qn + b \\ b = \bar{q}n + c \end{array} \Rightarrow a = qn + \bar{q}n + c = (b + \bar{q})n + c$$

זהות קיימים שלמים  $Q$  עבורו  $a = Qn + c$ .

### משפט 1.15 הקשר בין יחס השקילות מודולרי והשארית

יהיו  $a, b, n > 0$  שלמים.

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a \bmod n = b \bmod n$$

הוכחה:

כיוון  $\Leftarrow$

נניח ש-  $a \equiv b \pmod{n}$ . אז קיימים שלם  $Q$  כך ש:

$$a = qn + b.$$

לפי משפט החלוקת של אוקלידס,

$$b = \bar{q}n = r_1, \quad r_1 = b \pmod{n}.$$

ולכן

$$a = (q + \bar{q})n + r_1 = Qn + r_1$$

כאשר  $\bar{q}$  שלם ו-  $r_1 = b \pmod{n}$  הוא השארית  $n$ . מכאן נובע ש:

$$a \pmod{n} = a - n \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor = Qn + r_1 - Qn = r_1$$

$$a \pmod{n} = r_1 = \pmod{n} \text{ נ"א}$$

כיוון  $\Rightarrow$

נניח ש-  $a \pmod{n} = b \pmod{n}$ . אז

$$a - n \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor = b - n \left\lfloor \frac{b}{n} \right\rfloor \Rightarrow a = \left( \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b}{n} \right\rfloor \right) n + b \Rightarrow a = qn + b$$

כלומר קיימים שלם  $q = \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b}{n} \right\rfloor$  עבורו  $a = qn + b$  ו-  $a \equiv b \pmod{n}$ .

### משפט 1.16 חיבור וכפל של שלמים השקולים מודולריים

יהיו  $a, b, c, d$  שלמים ו-  $0 \neq n$  שלם.

(1) חיבור:

אם  $a + c \equiv b + d \pmod{n}$  אז  $c \equiv d \pmod{n}$  וכן  $a \equiv b \pmod{n}$

(2) כפל:

אם  $ac \equiv bd \pmod{n}$  אז  $c \equiv d \pmod{n}$  וכן  $a \equiv b \pmod{n}$

הוכחה:

(1) חיבוריות:

אם  $a \equiv b \pmod{n}$  אז קיימים שלם  $q$  עבורו  $a = qn + b$  וכן אם  $c \equiv d \pmod{n}$  אז קיימים שלם  $q$  עבורו  $c = \bar{q}n + d$ .

$$a + c = (q + \bar{q})n + b + d \Rightarrow a + c = Qn + (b + d),$$

כאשר  $Q = q + \bar{q}$ . הוכחנו שקיימים שלם  $Q$  עבורו  $a + c = Qn + (b + d)$ .

(2) כפל:

אם  $a \equiv b \pmod{n}$  אז קיימים שלם  $q$  עבורו  $a = qn + b$  וכן אם  $c \equiv d \pmod{n}$  אז קיימים שלם  $q$  עבורו  $c = \bar{q}n + d$ .

$$ac = (qn + b)(\bar{q}n + d) \Rightarrow ac = (q\bar{q}n^2 + dq + b\bar{q}n + bd) \Rightarrow ac = Qn + bd,$$

כאשר  $Q = (q\bar{q}n^2 + dq + b\bar{q}n + bd)$ . הוכחנו שקיימים שלם  $Q$  עבורו  $ac = Qn + bd$ .