

## חישוביות וסיבוכיות

### מועד ג'

ד"ר ירמיהו מיילר,  
סמסטר ב, תשפ"ה

מספר העמוד הנוכחי ומספר העמודים הכולל בשאלון מופיעים בחתית כל עמוד. בהצלחה!

#### הנחיות למדור בחינות

#### שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- לשאלון הבחינה יש לצרף כריכה בלבד.
- יש להחזיר את השאלון ביחד עם המחברת/כריכה.

#### שימוש במחשבונים

- ניתן להשתמש במחשבון.
- לא ניתן להשתמש במחשבון.

#### חומר עזר

- לא ניתן להשתמש בחומר עזר כלל.
- ניתן להשתמש בחומר עזר/דף נוסחות, כמפורט:
- הבחינה עם חומר פתוח  מותר להשתמש בכל חומר עזר מודפס או כתוב.

עמוד 1 מתוך ??

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד 77245,84 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il) | חייג: \*טפסת

## הנחיות רגילות

נא קראו בעיון את הנחיות הבאות בטרם תתחלו לפתרו את הבחינה. מומלץ לקרוא בקצרה את כל השאלות לפני שמתחילהם לפתור את הבחינה. ניתן לענות על השאלות בכל סדר שתרצה.

1. המבחן כולל 5 שאלות. יש לענות על כולן.
2. שאלות הבחינה שוות משקל - כל שאלה 20 נקודות.
3. כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תזדגו על שלבים.
4. המבחן כולל נספחים, לשימושכם. הסתיעו בהם במידת הצורך.
5. הקפידו על כתוב יד ברור וקריא.
6. הקפידו לרשום בגודל ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
7. כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבלתם. רק הן נבדקות !
8. ניתן לקחת את השאלה כאשר הבחינה מסתיימת.

**בצלחה!**

## הנחיות פרטניות למילואימניקים

נא קראו בעיון את הנחיות הבאות בטרם תתחלו לפתרו את הבחינה. מומלץ לקרוא בקצרה את כל השאלות לפני שמתחילהם לפתור את הבחינה. ניתן לענות על השאלות בכל סדר שתרצה.

1. המבחן כולל 5 שאלות. יש לענות על 4 מתוך ה-5 שאלות.
2. שאלות הבחינה שוות משקל - כל שאלה 25 נקודות.
3. מילואימניק יכתוב בדף שנסרקים - "משויך למתווה המילואים".
4. כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תזדגו על שלבים.
5. המבחן כולל נספחים, לשימושכם. הסתיעו בהם במידת הצורך.
6. הקפידו על כתוב יד ברור וקריא.
7. הקפידו לרשום בגודל ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
8. כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבلتם. רק הן נבדקות !
9. ניתן לקחת את השאלה כאשר הבחינה מסתיימת.

**בצלחה!**

עמוד 2 מתוך ??

## הבחינה

### שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

#### סעיף א' (10 נקודות)

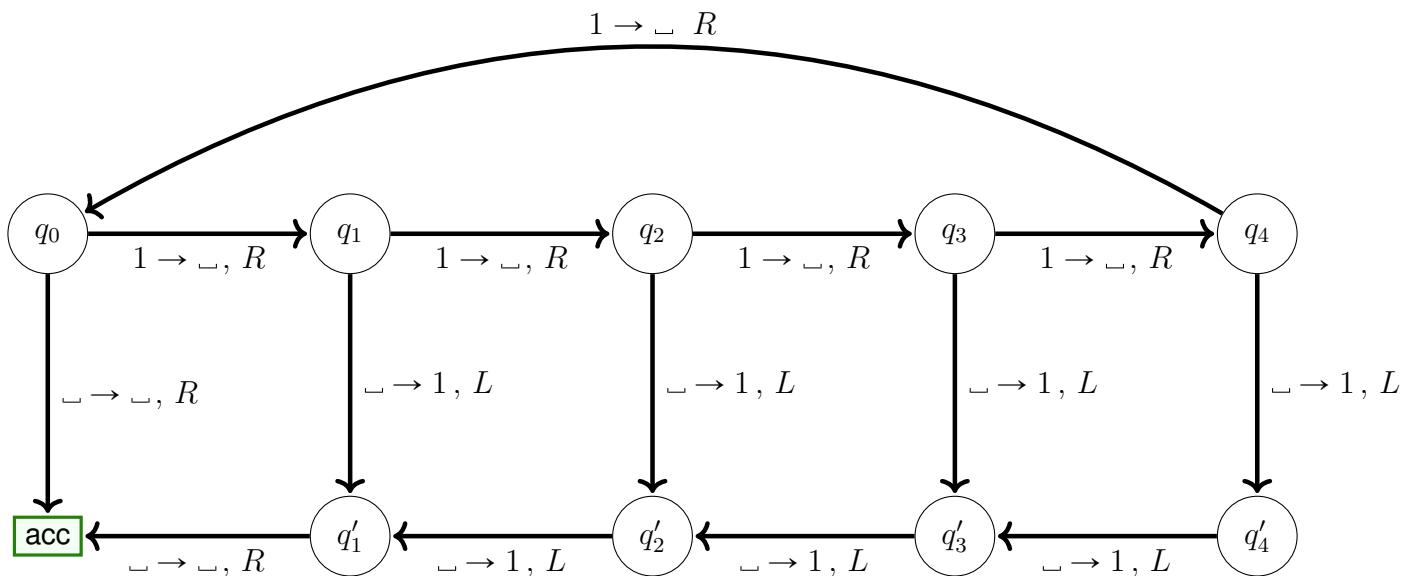
נתונה השפה הבאה:

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#a_w \neq \#b_w\}$$

תארו מכונת טיורינג עם סרט ייחד שמכריעה את השפה בעזרת תרשימים מצבאים בלבד ולא בדרכים אחרות.

#### סעיף ב' (10 נקודות)

בתרשימים הבא, נתונה מכונת טיורינג  $M$ . המכונה מקבלת כקלט מספר בסיס אונרי. בהינתן קלט  ${}^i \text{N}$ , כאשר  $\text{N} \in i$ , מהי הפונקציה  $f$  שהמכונה מחשבת? כל המעברים שאינם מצויינים בתרשימים עוברים למצב דחיה.



### שאלה 2: סגירות של שפות כרייעות (20 נקודות)

תהי  $L$  שפה. הוכחו או הפריכו ע"י דוגמה את כל הטענות הבאות:

עמוד 3 מתר ??

**סעיף א' (10 נקודות)**

אם  $L \in R$  אז גם  $\bar{L}$  היא השפה המשלימה של  $L$ .

**סעיף ב' (10 נקודות)**

אם  $L \in R$  אז גם  $L^*$  היא הוכב-קליני של  $L$ .

 **שאלה 3: אי בריאות (20 נקודות)****סעיף א' (12 נקודות)**

נתונה השפה הבאה:

$$\hat{L} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ סופי}\}$$

הוכיחו כי  $\hat{L} \notin RE$ .

**סעיף ב' (8 נקודות)**

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענה הבאה:

תהיה  $L$  שפה. אם  $L \in RE \setminus R$  וגם  $\bar{L} \notin RE$  אז  $L \in RE$ .

 **שאלה 4: שלמות (20 נקודות)**

לכל אחת מהטענות הבאות, הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

**סעיף א' (5 נקודות)**

אם  $L_{\text{halt}} \notin NP$  אז  $L_{\text{acc}} \notin NP$

**סעיף ב' (5 נקודות)**

קיים אלגוריתם המקבל כקלט נוסחה  $\phi$  מצורפת  $CNF - 3$  מעל המשתנים  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  ומcriיע בזמן פולינומייאלי האם  $\phi$  סיפה.

**סעיף ג' (5 נקודות)**

לכל שתי בעיות  $NP$ - שלמות  $A$  ו-  $B$ , מתקיים  $A \leqslant_P B$ .

**סעיף ד' (5 נקודות)**

תהיה  $L$  שפה. אם  $L \notin RE$  אז  $L \leqslant \bar{L}$  או  $L \in R$ .

## שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

בහינתן גרף  $(V, E) = G$  לא מכoon. אומרים כי הגרף  $G$  הוא  $k$ -צבע אם ניתן לצבוע את הקודקודים השונים ב- $k$  צבעים (או פחות) כך שני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע.  
נגיד את השפטות הבאות:

$$kCOLOR = \{ \langle G \rangle \mid G \text{ גראף לא מכoon } k\text{-צבע} \}$$
$$(k+1)COLOR = \{ \langle G \rangle \mid G \text{ גראף לא מכoon } (k+1)\text{-צבע} \}$$

הוכחו:

$$kCOLOR \leqslant_P (k+1)COLOR .$$

עמוד 5 מתוך ??

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד 77245,84 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il) | חייג: \*טפסת

## **פתרונות**

### **חישוביות וסיבוכיות**

**מועד ג'**

### **פתרון לדוגמא**

ד"ר ירמייהו מילר,

סמסטר ב, תשפ"ה

מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הין פתרונות לדוגמא. ניתן לפתרו חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

עמוד 1 מתוך 7

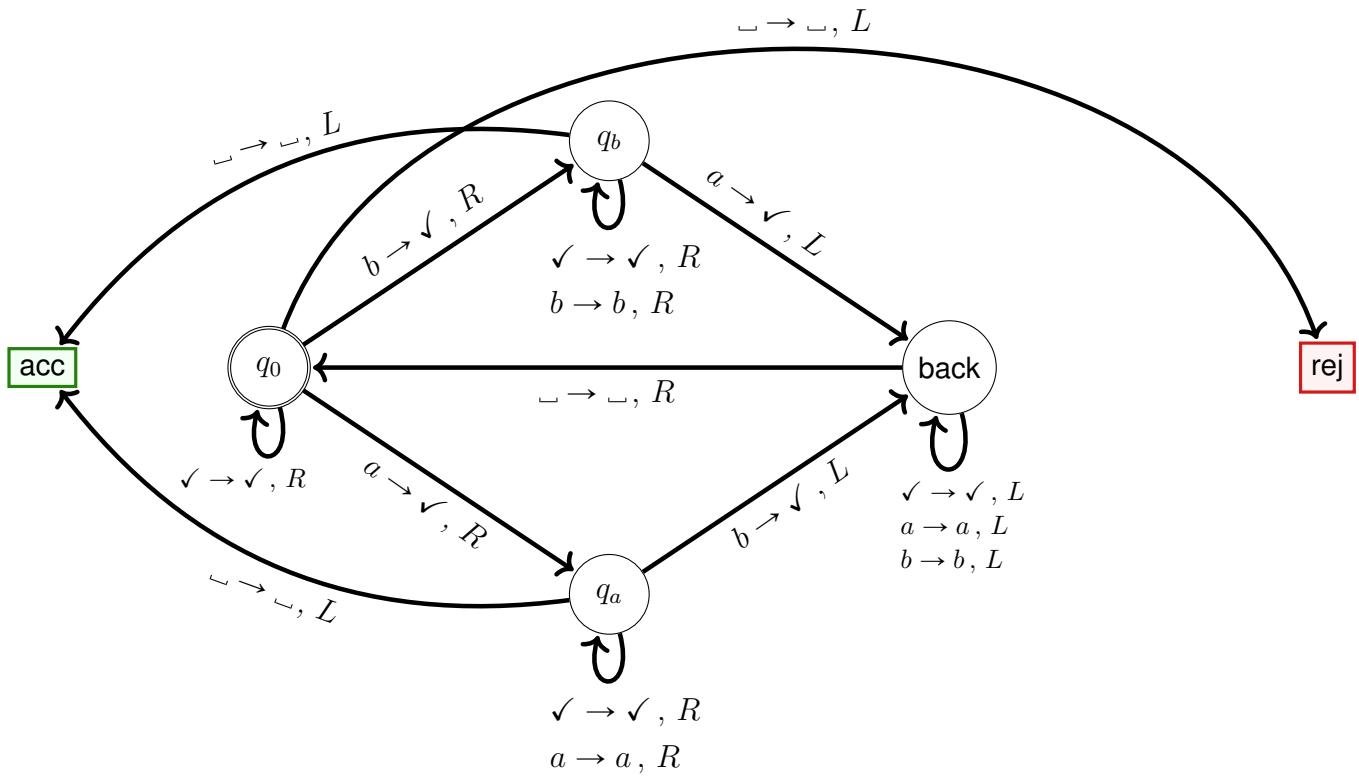
**המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון**

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il) | חייג: \*טפסת

## שאלה 1: מכונות טיריניג (20 נקודות)

### **סעיף א' (10 נקודות)**

כל המעברים שאינם מופיעים בתרשים עוברים ל- $q_{\text{rej}}$ .



## **סעיף ב' (10 נקודות)**

$$f(x) = x \mod 5.$$

## שאלה 2: סגירות של שפות כריעות (20 נקודות)

פתרונות

סעיף א' (10 נקודות)

נוכיח כי

$$L \in R \quad \Rightarrow \quad \bar{L} \in R ,$$

כאר

$$\bar{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\} .$$

נבנה מ"ט  $\bar{M}$  המככירה את  $\bar{L}$ .

**על קלט** =  $\bar{M}$

$\bar{M}$  מרכיב את  $M$  על  $w$ .

- אם  $M$  מקבלת  $\bar{M}$  דוחה.

• אם  $M$  דוחה  $\bar{M} \Leftarrow$  מקבלת.

סעיף ב' (10 נקודות)

**נוכיח כי לכל שפה 7:**

$$L \in R \quad \Rightarrow \quad L^* \in R$$

כאר

$$L^* = \{w = w_1 w_2 \cdots w_k \mid \forall 1 \leq i \leq k, w_i \in L\} \cup \{\varepsilon\}.$$

תהי  $M$  מ"ט המכריעה את  $L$ .

נבנה מ"ט  $M^*$  א"ד המכריעה את  $L^*$ .

תאור הבנייה

**על קלט**  $= M^*$

(1) אם  $w \in M^*$  מקבלת.

. $w = w_1 \cdots w_k$  לאחרת באופן א"ד חלוקה של  $w$  ל-

3) לכל  $1 \leq i \leq k$

$w_i$  מרים את  $M$  על  $M^*$

• אם  $M$  דוחה את  $w_i$  דוחה  $M^*$ .

- אחרית חוזרים לשלב 3).

(4) אם  $M$  קיבלת את כל המחרוזות  $\{w_i\}$  אזי  $*M$  מקבלת.

### שאלה 3: א) כריעות (20 נקודות)

סעיף א' (12 נקודות)

נוכחות  $\hat{L} \notin RE$  מוכיחת רדוקציה מ- $\overline{L_{acc}}$  לכלי נרא רדוקציה.

פונקציית הרדוקציה

$$f(x) = \begin{cases} \langle M_w \rangle & : x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & : x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $\langle M_\emptyset \rangle$  מ"ט הדוחה כל קלט, ו-  $M_w$  היא מ"ט שעל כל קלט  $y$ ,  $M_w$  מתעלמת מ-  $y$  ומריצה את  $M$  על  $w$  ועונה כמוות.

## אבחנה

$$L(M_w) = \begin{cases} \Sigma^* & : w \in L(M) \\ \emptyset & : w \notin L(M) \end{cases}$$

נכונות הבנייה

**נוכיח כי לכל סigma נקי מ- $L_{acc}$**

אם  $x \in \overline{L_{\text{acc}}}$  שני מקרים:

$f(x) \in \hat{L} \iff L(M_\emptyset) \dashv f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle$ .

$f(x) \in \hat{L} \iff L(M_w) = \emptyset$  ולפי האבחנה  $f(x) = \langle M_w \rangle \iff w \notin L(M)$  -1  $x = \langle M, w \rangle$ .2

**אם**  $L(M_w) = \Sigma^*$  **ולפי האבחנה**  $f(x) = \langle M_w \rangle \Leftrightarrow w \in L(M)$  **-1**  $x = \langle M, w \rangle \Leftrightarrow x \notin \overline{L_{\text{acc}}}$  **ואם**  $.f(x) \notin \hat{L} \Leftrightarrow$

הראינו רדוקציה  $\hat{L} \notin RE$  ומכיון ש-  $\overline{L_{acc}} \notin RE$ , משפט הרודוקציה, מתקיים  $\hat{L} \leq \overline{L_{acc}}$

סעיף ב' (8 נקודות)

הטענה נכונה.

נניח כי  $L \in RE$  וגם  $\bar{L} \notin RE$  ונניח בשלילה כי  $\bar{L} \in R$ . אז מכיוון ש-  $R$  סגורה תחת משלים, מתקיים  $\bar{\bar{L}} \in R$  בסתירה לכך ש-  $\bar{L} \notin RE$ .

**שאלה 4:** *NP* - שלמות (20 נקודות)

## פתרונות

### סעיף א' (5 נקודות)

הטענה נכונה. קיימת רדוקציה פולינומיאלית  $L_{\text{acc}} \leqslant_P L_{\text{Halt}}$  ולכן ממשפט הרדוקציה, אם  $NP$  מתקיים  $L_{\text{halt}} \notin NP$ .

### סעיף ב' (5 נקודות)

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

הטענה נכונה. מכיוון ש-  $\phi$  היא מעל המשתנים  $x_5, x_1, x_2, x_3, x_4$ , מספר הרשומות האפשריות הוא  $2^{x_5} = 32$  השומות.

אפשר לעבור על השומות אלו ולבדק האם אחת מהן מספקת את  $\phi$  ולהחזיר תשובה בהתאם. כמובן זמן הוריצה הוא לכל היותר  $O = |\phi| \cdot 32$ , וזה פולינומיאלי בגודל הקלט.

### סעיף ג' (5 נקודות)

הטענה נכונה. מכיוון ש-  $B$  היא  $NP$  שלמה, לכל בעיה  $A' \in NP$ , מתקיים  $A' \leqslant_P B$ .  
מכיוון ש-  $A$  היא  $NP$  שלמה, מתקיים ש-  $A \in NP$ .  
לכן קיימת רדוקציה  $A \leqslant_P B$ .

### סעיף ד' (5 נקודות)

הטענה נכונה.

הטענה היא:

אם  $L \in R \vee L \notin RE$  אז  $L \leqslant \bar{L}$

נניח בשילילה כי:

אם  $L \notin R \wedge L \in RE$  אז  $L \leqslant \bar{L}$

זאת אומרת  $\bar{L} \in R$

$\bar{L} \in R \dashv L \leqslant \bar{L} \Leftarrow$

לכן, לפי משפט הרדוקציה,  $L \in R$ .

זאת סותרת ההנחה ש-  $L \in RE \setminus R$ .

## שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

## **פתרונות**

**פונקציית הרדווקציה:**

בහינת גראף לא מכוון  $(V', E')$  ביחס ל- $G$ , ניצור גראף לא מכוון חדש  $(V, E) = G'$ , הקיים של  $kCOLOR$  ו- $(k+1)COLOR$ .

**בහינתן**  $G = (V, E)$  **כארש:** נבנה הגרף החדש  $G' = (V', E')$

. $u^*$ , קלומר הוספנו קודקוד אחד חדש  $V' = V \cup \{u^*\}$  •

$E'$  • כלומר כל קודקוד בקבוצת הקודקודים  $V$  מחובר לו \*  $u$  בצלע.

נכונות הרדווקציה:

נניח צבע של קודקוד  $V \in u$  (" $c(u)$ ", ונסמן  $k$  צבעים שונים של הקודקודים של  $G$  ב- $\{1, 2, \dots, k\}$ .  
 כלומר  $c(u) \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

באופן דומה, נסמן צבע של קודקוד  $V$   $c(u') \in V$  ע"י, ונסמן  $1 + k$  צבעים שונים של הקודקודים של  $G$  ב- $\{1, 2, \dots, k, k+1\}$ .  
כלומר  $c(u') \in \{1, 2, \dots, k, k+1\}$ .

## נוכיח ש:

$$\langle G \rangle \in k\text{COLOR} \iff \langle G' \rangle \in (k+1)\text{COLOR}.$$

כיף

$\langle G \rangle \in kCOLOR$

$.c(u_1) \neq c(u_2)$  **ו**  $(u_1, u_2) \in E$  **ו**  $, u \in V$  **לכל**  $c(u) \in \{1, 2, \dots, k\}$  **ו**  $\Leftarrow$

כלומר, ניתן לצבעו כל קודקוד ב- $k$  צבעים שונים וכך שני קודקודיים סמוכים אינם צבועים באותו צבע.

$c(u) \neq c(u^*) = k+1$   $\forall u \in V$  מתקיים אם ו רק אם השבילים  $u^*$  ו  $u$  שונים.

$\Leftarrow$  לכל  $V \in \mathcal{V}$  מתקיים שאם  $u'_1, u'_2 \in V$  אז  $c(u'_1) \neq c(u'_2)$

$\Leftarrow$  ניתן לקבע את הקודקודים של  $G$  ב-  $1 + k$  צבעים שר שני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע.

$\langle G' \rangle \in (k+1)COLOR \Leftarrow$

כיף

$\langle G' \rangle \in (k+1)COLOR$

$.c(u'_1) \neq c(u'_2)$  **ו**  $(u'_1, u'_2) \in E'$  **ו**  $u' \in V'$  **לכל**  $c(u') \in \{1, 2, \dots, k+1\}$  **ו**

כלומר, ניתן לקבע כל קודקוד ב- $-1 + k$  צבעים שונים כר' שני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע.

## פתרונות

$\Leftarrow$  מכיוון ש-  $\{u^*\} \cup \{u\}$  מחובר לכל קודקוד  $V \in V'$  ו-  $c(u) = k+1$  אם  $u \in V$ , אך אז בהכרח לכל  $V \in V'$   $c(u) = 1, 2, \dots, k$ .

(אחרת קיימים קודקוד  $V \in u$  הצבוה בצבוע  $k+1$  וקיים וצלע בין  $u$  הצבוע בצבוע  $k+1$  לבין הקודקוד  $V \in u$  הצבוע בצבוע  $k+1$  בסתריה לכך ש-  $G'$  הוא  $k+1$ -צבע).

$\Leftarrow$  מכיוון ש-  $G'$  הוא  $1+k$ -צבע אז בהכרח אין צלע בו- המחבר בין קודקודים בעלי אותו צבע.

$\Leftarrow$   $G = (V, E)$  הוא גרפּ  $k$ -צבע.

$\langle G \rangle \in kCOLOR \Leftarrow$