

חדו"א 1 סמסטר א' תשפד

עבודת בית 7: חקירת פונקציות

שאלה 1

הגדר מהי אסימפטוטה משופעת של פונקציה ומצא את האסימפטוטות המשופעות של הפונקציות הבאות:

(א) $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

(ב) $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$

(ג) $f(x) = x - e^x$

שאלה 2 שרטטו את הפונקציה $f(x) = -(x + 2)^2$.

שאלה 3 שרטטו את הפונקציה $f(x) = x^2(x - 2)^2$.

שאלה 4 שרטטו את הפונקציה $f(x) = \frac{x}{x^2 + 9}$

שאלה 5

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = \frac{x - 1}{(x + 1)^2}$

שאלה 6

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 4}$

שאלה 7

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = x^2 e^{1-x}$

שאלה 8

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = \frac{e^x}{x + 1}$

שאלה 9

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = (x + 2)e^{1/x}$

שאלה 10

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}$

שאלה 11

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

שאלה 12 שרטטו את הגרף של הפונקציה $f(x) = \frac{x^4 - x^3 - 2x^2}{(x - 3)^2}$.

שאלה 13 (סמסטר ב תשע"ח מועד ב שאלה 1)

חקרו באופן מלא את הפונקציה

$$f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$$

(תחום הגדרה, חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וצייר את סקיצת הגרף של הפונקציה.

שאלה 14 (סמסטר א תשע"ח מועד א שאלה 1)

חקרו באופן מלא את הפונקציה

$$f(x) = \frac{(x + 2)^2}{x - 2}$$

(תחום הגדרה, חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וצייר את סקיצת הגרף של הפונקציה.

שאלה 15 (סמסטר א תשע"ט מועד ב שאלה 1) חקור באופן מלא את הפונקציה

$$f(x) = \frac{2 - x^2}{e^x}$$

(תחום הגדרה, חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וצייר את סקיצת הגרף של הפונקציה.

שאלה 16 שרטטו את הפונקציה $f(x) = \frac{x^4}{x^2 + 9}$

שאלה 17 שרטטו את הפונקציה $f(x) = \frac{2 - x}{x - 1}$

שאלה 18 שרטטו את הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ כאשר $a > 0$

שאלה 19 שרטטו את הפונקציה $f(x) = \frac{x^4}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ כאשר $a > 0$

שאלה 20 שרטטו את הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 3a^2}}$ כאשר $a > 0$

שאלה 21 שרטטו את הפונקציה $f(x) = \frac{4}{x^2 - 4a^2}$ כאשר $a > 0$

שאלה 22

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x^2 + 4x}$ (תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וציירו את סקיצת הגרף של הפונקציה.

שאלה 23 שרטטו את הפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ כאשר $a > 0$

שאלה 24

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = \frac{(x+4)^2}{x-3}$ (תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וציירו את סקיצת הגרף של הפונקציה.

שאלה 25 שרטטו את הפונקציה $y = \frac{x^2}{x^2 - a^2}$ כאשר $a > 0$.

שאלה 26 (סמסטר א תש"ף מועד א שאלה 1) חקור באופן מלא את הפונקציה

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$$

(תחום הגדרה, חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וצייר את סקיצת הגרף של הפונקציה.

תשובות

שאלה 1

קו ישר $y = m \cdot x + n$ נקרא אסימפטוטה משופעת של פונקציה $f(x)$ אם המרחק בין גרף הפונקציה לבין הקו $y = m \cdot x + n$ שואף ל-0 כאשר x שואף ל- ∞ או $-\infty$. במידה ש $y = mx + n$ אסימפטוטה משופעת של $f(x)$, אז m ו n ניתנים ע"י הנוסחאות

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$$

(אותו דבר עבור $x \rightarrow -\infty$). אם m, n מספרים סולפיים, אז קיימת אסימפטוטה משופעת.

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad (\text{א})$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1} - 2x) = 0.$$

לכן $y = 2x$ אסימפטוט המשופעת ב- $\pm\infty$.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \quad (\text{ב})$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = 1.$$

לכן $y = x + 1$ אסימפטוט המשופעת ב- $\pm\infty$.

$$f(x) = x - e^x \quad (\text{ג})$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - e^x}{x} = -\infty$$

אין אסימפטוט המשופעת ב- $+\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - e^x}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^x - x) = 0.$$

לכן $y = x$ אסימפטוט המשופעת ב- $-\infty$.

שאלה 2

שלב 1 תחום הגדרה: כל x .

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה- x :

$y = 0$ כאשר $x = -2$ ולכן נקודת חיתוך עם ציר x היא $(-2, 0)$.

נקודת חיתוך עם ציר ה- y :

$y = -4$ כאשר $x = 0$ ולכן נקודת חיתוך עם ציר y היא $(0, -4)$.

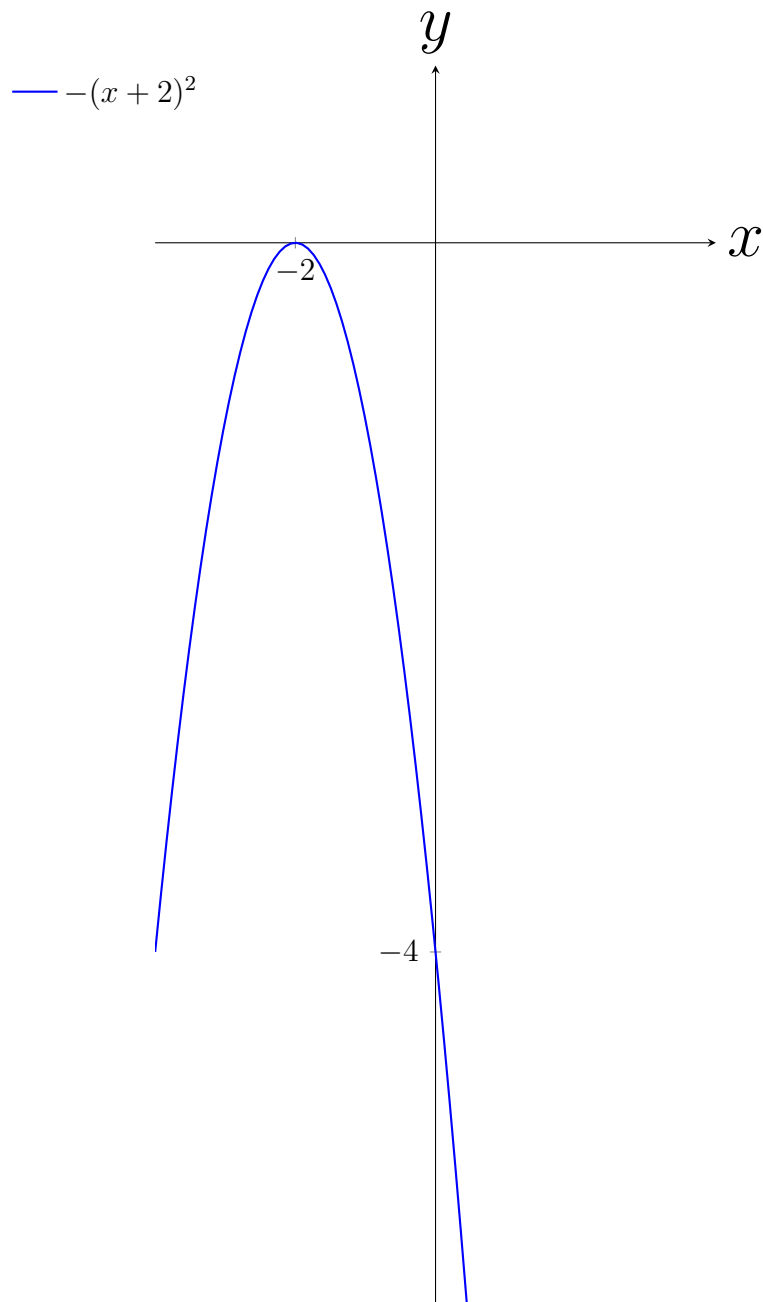
$y \leq 0$ בכל מקום בתחום.

שלב 3 הפונקציה מוגדרת בכל נקודה בתחום.

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \{-(x+2)^2\} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \{-(x+2)^2\} = -\infty.$$

שלב 5



שאלה 3

שלב 1 תחום הגדרה: כל x .

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה- x :

$y = 0$ כאשר $x = 0$ או $x = 2$. ולכן נקודות חיתוך עם ציר ה- x הן $(0, 0)$ ו- $(2, 0)$.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y :

$y = 0$ כאשר $x = 0$ ולכן נקודת חיתוך עם ציר ה- y היא $(0, 0)$.

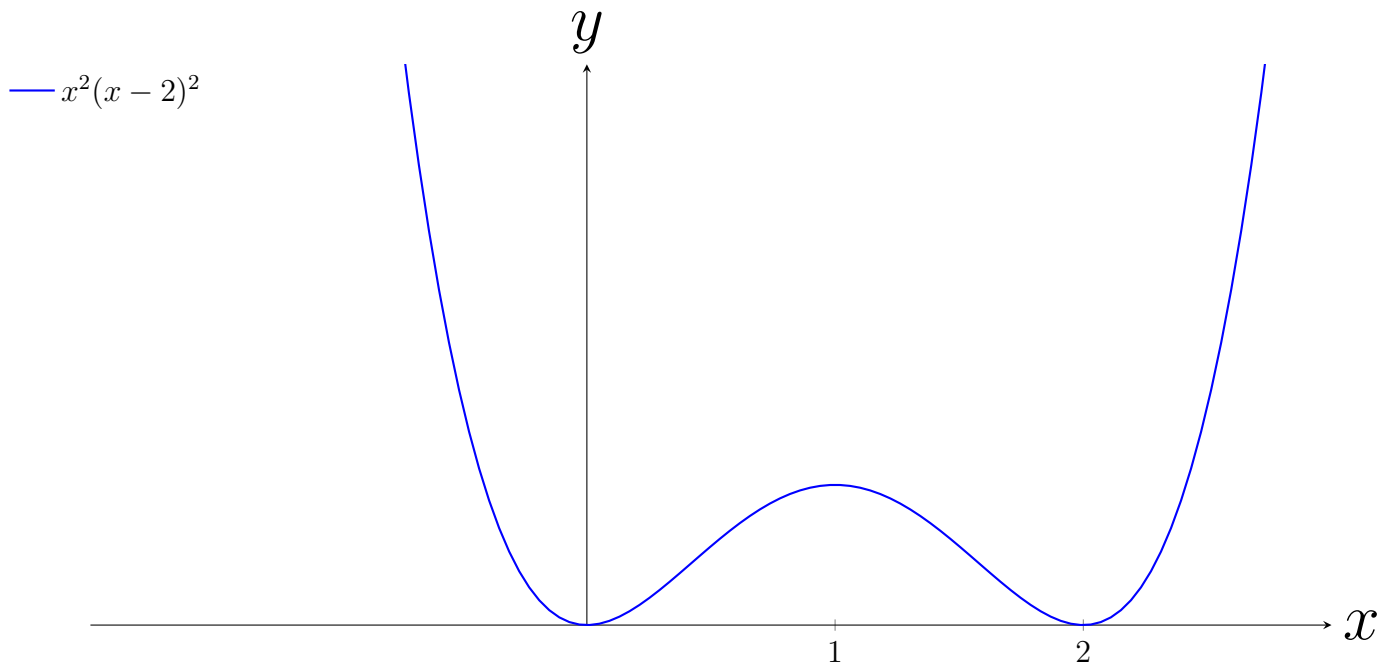
בכל מקום בתחום. $y \geq 0$.

שלב 3 הפונקציה מוגדרת בכל נקודה בתחום.

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \{x^2(x-2)^2\} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \{x^2(x-2)^2\} = +\infty.$$

שלב 5

**שאלה 4**

שלב 1 תחום הגדרה: כל x .

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה- x :

$y = 0$ כאשר $x = 0$. ולכן נקודת חיתוך עם ציר ה- x היא $(0, 0)$.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y :

נציב $x = 0$ בפונקציה ונקבל $y = 0$. לכן נקודת חיתוך עם ציר ה- y היא $(0, 0)$.

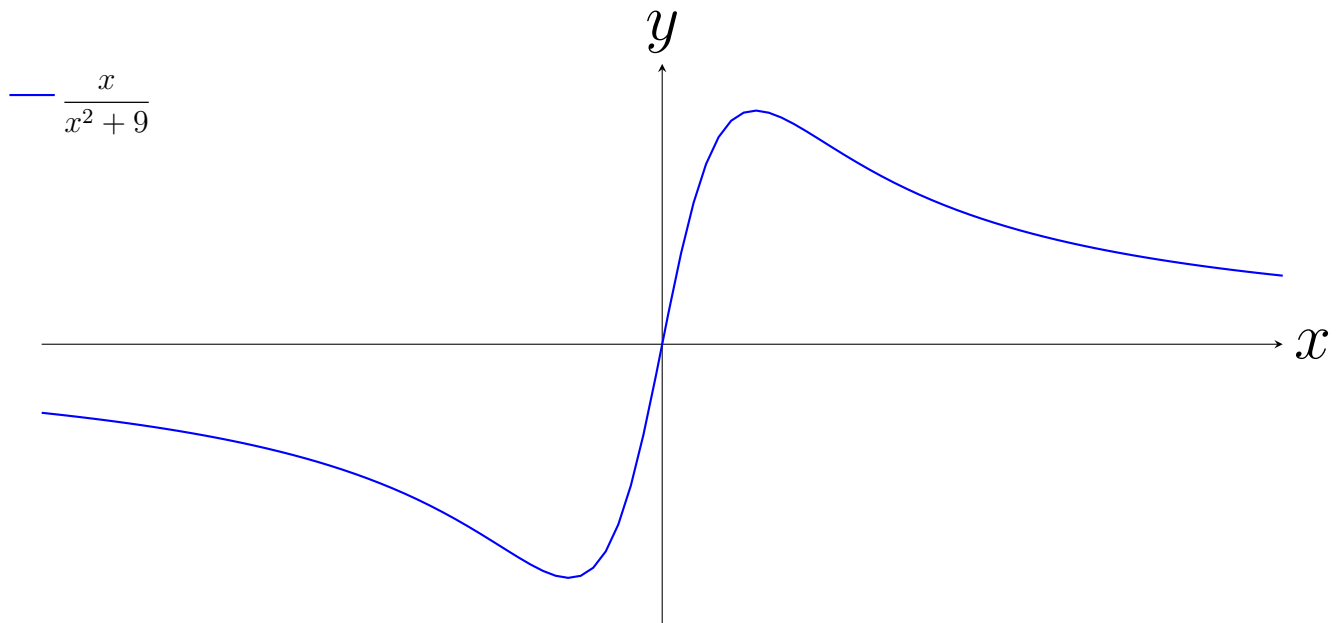
y	x
$y > 0$	$x > 0$
$y < 0$	$x < 0$
$y = 0$	$x = 0$

שלב 3 אינן נקודות בהן הפונקציה לא מוגדרת.

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

שלב 5



שאלה 5

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

שלב 1 תחום הגדרה: $x \neq -1$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0, -1), (1, 0)$.

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f(x)$	-	-	+

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x = -1$

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: $y = 0$ ב $\pm\infty$.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת: אין.

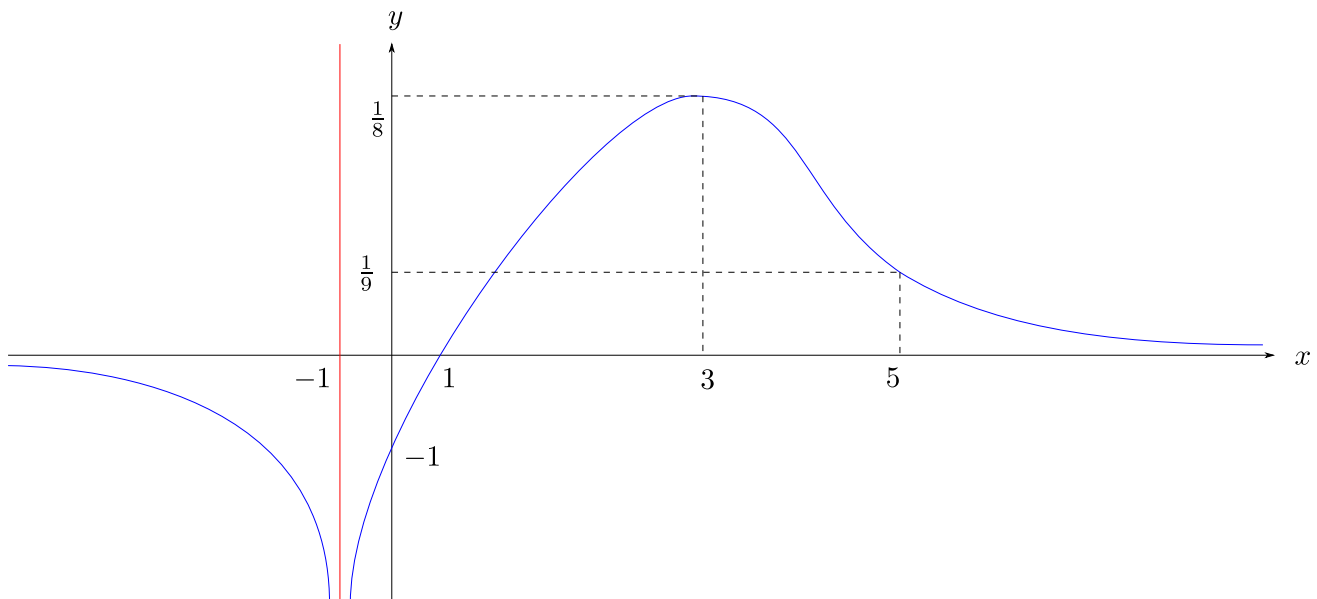
שלב 6 נקודות קריטיות: $f'(x) = \frac{3-x}{(1+x)^3}$. יש נקודת קריטית ב- $\left(3, \frac{1}{8}\right)$.

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$f'(x)$	-	\nexists	+	0	-
$f(x)$	\searrow	לא מוגדר	\nearrow	מקסימום	\searrow

שלב 7 תחומי קמירות: $f''(x) = \frac{2(x-5)}{(x+1)^4}$. נקודות פיתול: $\left(5, \frac{1}{9}\right)$.

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 5$	$x = 5$	$x > 5$
$f''(x)$	-	לא מוגדר	-	0	+
$f(x)$	קמורה \downarrow	לא מוגדר	קמורה \downarrow	נקודת פיתול	קמורה \uparrow

שלב 8 שרטוט:



שאלה 6

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 4}.$$

שלב 1 תחום הגדרה: $x \neq \pm 2$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0, 0)$.

x	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
$f(x)$	-	+	-	+

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x = -2$ ו- $x = 2$.

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: אין.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת:

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = 2,$$

$$n_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m_1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3}{x^2 - 4} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = 0.$$

לכן $y = 2x$ אסימפטוטה משופעת ב- $x = \infty$.

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = 2,$$

$$n_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m_2 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2 - 4} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 2x(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = 0.$$

$y = 2x$ אסימפטוטה משופעת ב- $x = -\infty$.

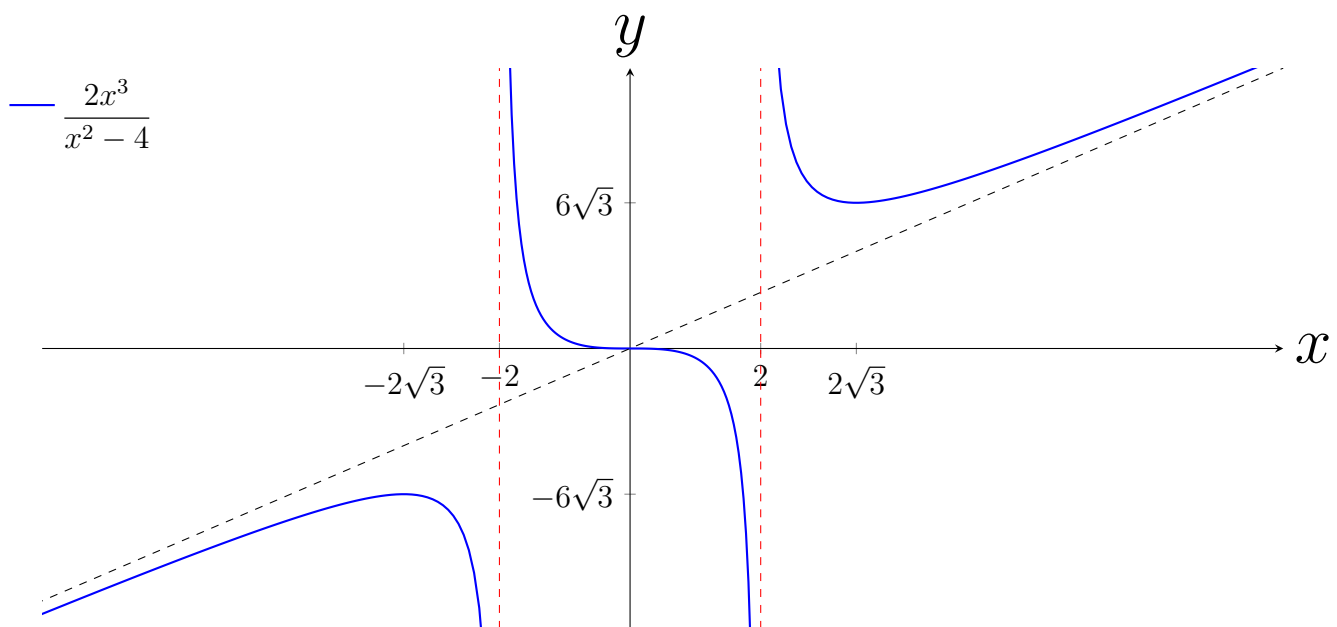
שלב 6 תחומי עליה וירידה: $f'(x) = \frac{2x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$. ישנן נקודות קריטיות ב- $(0, 0)$, $(-2\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ ו- $(2, \sqrt{3}, 6\sqrt{3})$.

x	$< -2\sqrt{3}$	$x = -2\sqrt{3}$	$\in (-2\sqrt{3}, -2)$	$\in (-2, 0)$	$x = 0$	$\in (0, 2)$	$\in (2, 2\sqrt{3})$	$x = 2\sqrt{3}$	$x > 2\sqrt{3}$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	-	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	מקס	\searrow	\searrow	פיתול	\searrow	\searrow	מינימום	\nearrow

שלב 7 תחומי קמירות: $f''(x) = \frac{16x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$ נקודות פיתול ב- $(0, 0)$.

x	$x < -2$	$x \in (-2, 0)$	$x \in (0, 2)$	$x > 2$
$f''(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	קמורה ↓	קמורה ↑	קמורה ↓	קמורה ↑

שלב 8 שרטוט:



שאלה 7

$$f(x) = x^2 e^{1-x}.$$

שלב 1 תחום הגדרה: $x \in (-\infty, \infty)$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0, 0)$.

$$f(x) \geq 0 \text{ לכל } x.$$

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: איו.

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: הישר $y = 0$ אסימפטוטה אופקית ב- $x = +\infty$. ב- $x = -\infty$ אין אסימפטוטה אופקית.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת: אין.

שלב 6 תחומי עליה וירידה: $f'(x) = -e^{1-x}(x-2)x$. ישנו נקודות קריטיות ב- $(0, 0)$ ו- $(2, 4/e)$

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\searrow	מינימום	\nearrow	מקסימום	\searrow

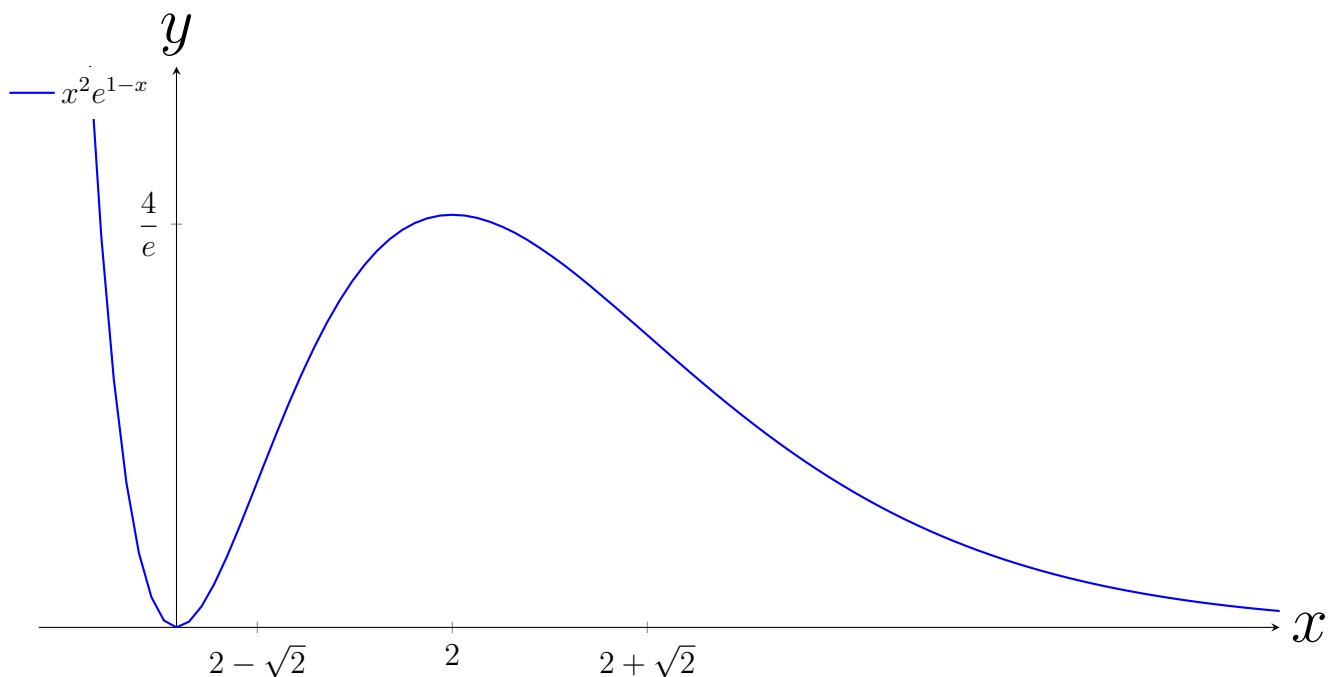
שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x) = e^{1-x}(x^2 - 4x + 2) = e^{1-x}(x - 2 + \sqrt{2})(x - 2 - \sqrt{2})$$

יש נקודת פיתול ב- $x = 2 - \sqrt{2}$ ו- $x = 2 + \sqrt{2}$.

x	$x < 2 - \sqrt{2}$	$x \in (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$	$x > 2 + \sqrt{2}$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	קמורה \uparrow	קמורה \downarrow	קמורה \uparrow

שלב 8 שרטוט:



שאלה 8

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

שלב 1 תחום הגדרה: $x \neq -1$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0, 1)$.

x	$x < -1$	$x > -1$
$f(x)$	-	+

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x = -1$.

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: ב- $x = +\infty$ אין אסימפטוטה אופקית. הישר $y = 0$ אסימפטוטה אופקית ב- $x = -\infty$.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת: אין.

שלב 6 תחומי עליה וירידה: $f'(x) = \frac{e^x x}{(x+1)^2}$. ישנו נקודות קריטיות ב- $(0, 1)$.

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	\searrow	\searrow	מינימום	\nearrow

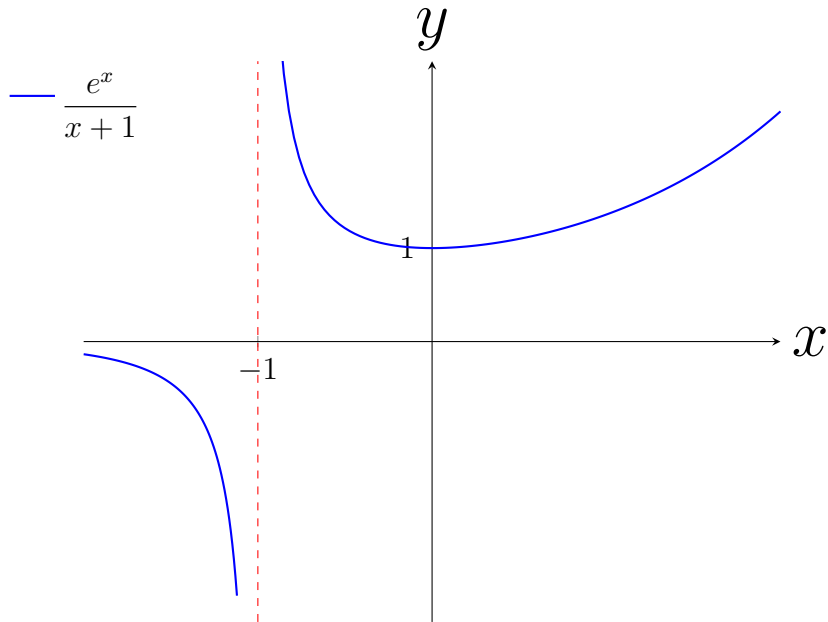
שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{e^x (x^2 + 1)}{(x+1)^3}$$

נקודת פיתול: אין.

x	$x < -1$	$x < -1$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	קמורה \downarrow	קמורה \uparrow

שלב 8 שרטוט:

**שאלה 9**

$$f(x) = (x + 2)e^{1/x}.$$

שלב 1 תחום הגדרה: $x \neq 0$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0, 1)$.

x	$x < -2$	$x > -2$
$f(x)$	–	+

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x = 0$.

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: אין.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת: הישר $y = x + 3$ אסימפטוטה משופעת ב- $x = +\infty$ וב- $x = -\infty$.

שלב 6 תחומי עליה וירידה: $f'(x) = \frac{e^{1/x}(x^2 - x - 2)}{x^2}$. ישנו נקודות קריטיות ב-

$$\left(-1, \frac{1}{e}\right) \text{ ו- } (2, 4\sqrt{e})$$

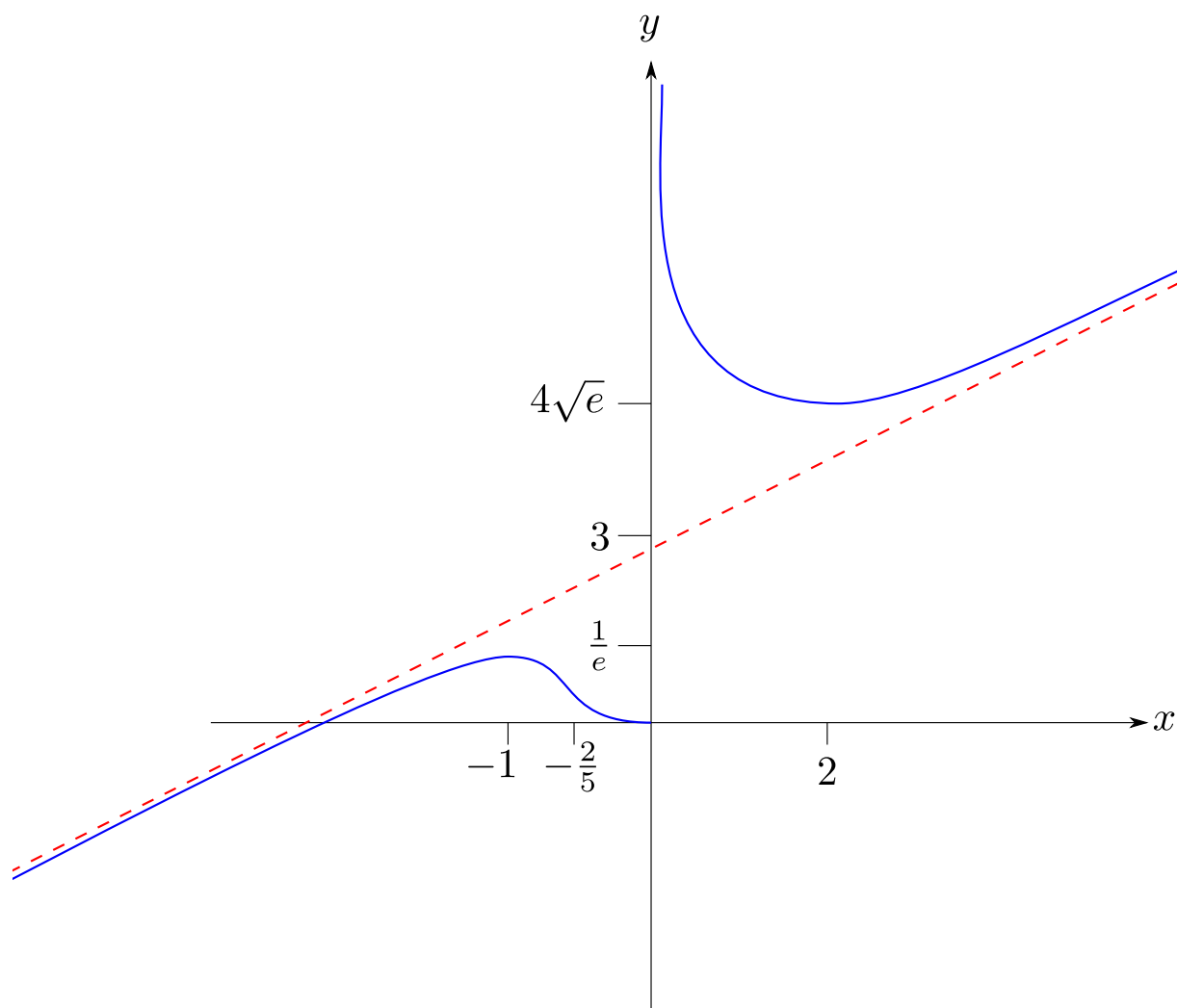
x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	+	0	–	–	0	+
$f(x)$	↗	מקסימום	↘	↘	מינימום	↗

שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{e^{1/x}(5x+2)}{x^4}$$

נקודת פיתול ב- $\left(-\frac{2}{5}, \frac{8}{5e^{5/2}}\right)$ אין.

x	$x < -\frac{2}{5}$	$x = -\frac{2}{5}$	$x > -\frac{2}{5}$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	קמורה ↓	נקודת פיתול	קמורה ↑

שלב 8 שרטוט:

שאלה 10

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}.$$

שלב 1 תחום הגדרה: $(-\infty, -3]$ ו $[3, \infty)$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(-3, 0)$ ו $(3, 0)$.

x	$x < -3$	$-3 < x < 3$	$x > 3$
$f(x)$	$-$	\nexists	$+$

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: אין.

שלב 4 אסימפטוטה אופקית:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

ולפיו הקו $y = 1$ אסימפטוטה אופקית ב $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

ולפיו הקו $y = -1$ אסימפטוטה אופקית ב $-\infty$.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת: אין.

שלב 6 תחומי עליה וירידה: $f'(x) = \frac{9}{x^2\sqrt{x^2-9}}$. אינן נקודות קריטיות.

x	$x < -3$	$-3 < x < 3$	$x > 3$
$f'(x)$	$+$	\nexists	$+$
$f(x)$	\nearrow		\nearrow

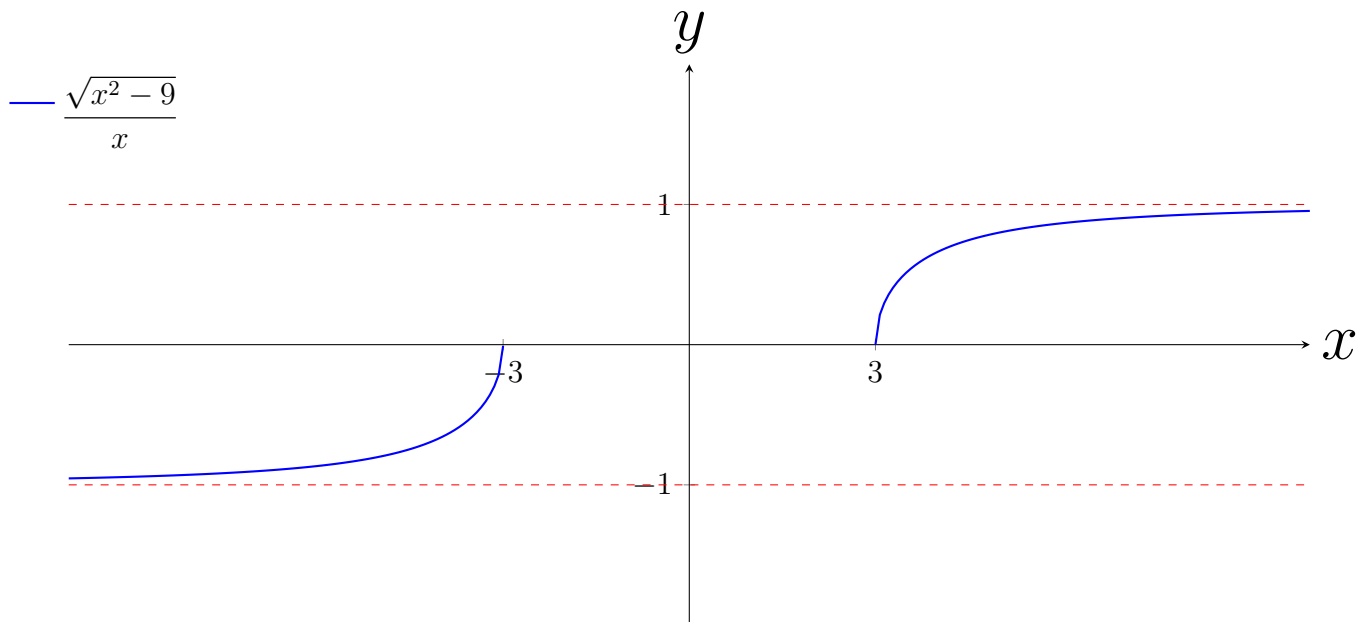
שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x) = -\frac{27(x^2 - 6)}{x^3(x^2 - 9)^{3/2}}$$

אינו נקודות פיתול בתופ הגדרתה של הפונקציה.

x	$x < -3$		$x > 3$
$f''(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	קמורה \uparrow		קמורה \downarrow

שלב 8 שרטוט:



שאלה 11

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

שלב 1 תחום הגדרה: $x > 0$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(1, 0)$.

x	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f(x)$	-	0	+

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x = 0$.

שלב 4 אסימפטוטה אופקית:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

ולפיו הקו $y = 0$ אסימפטוטה אופקית.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת: אין.

שלב 6 תחומי עליה וירידה: $f'(x) = \frac{2 - \log(x)}{2x \cdot \sqrt{x}}$. יש נקודת קריטית ב- $(e^2, \frac{2}{e})$.

x	$0 < x < e^2$	$x = e^2$	$x > e^2$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	\nearrow	מקסימום	\searrow

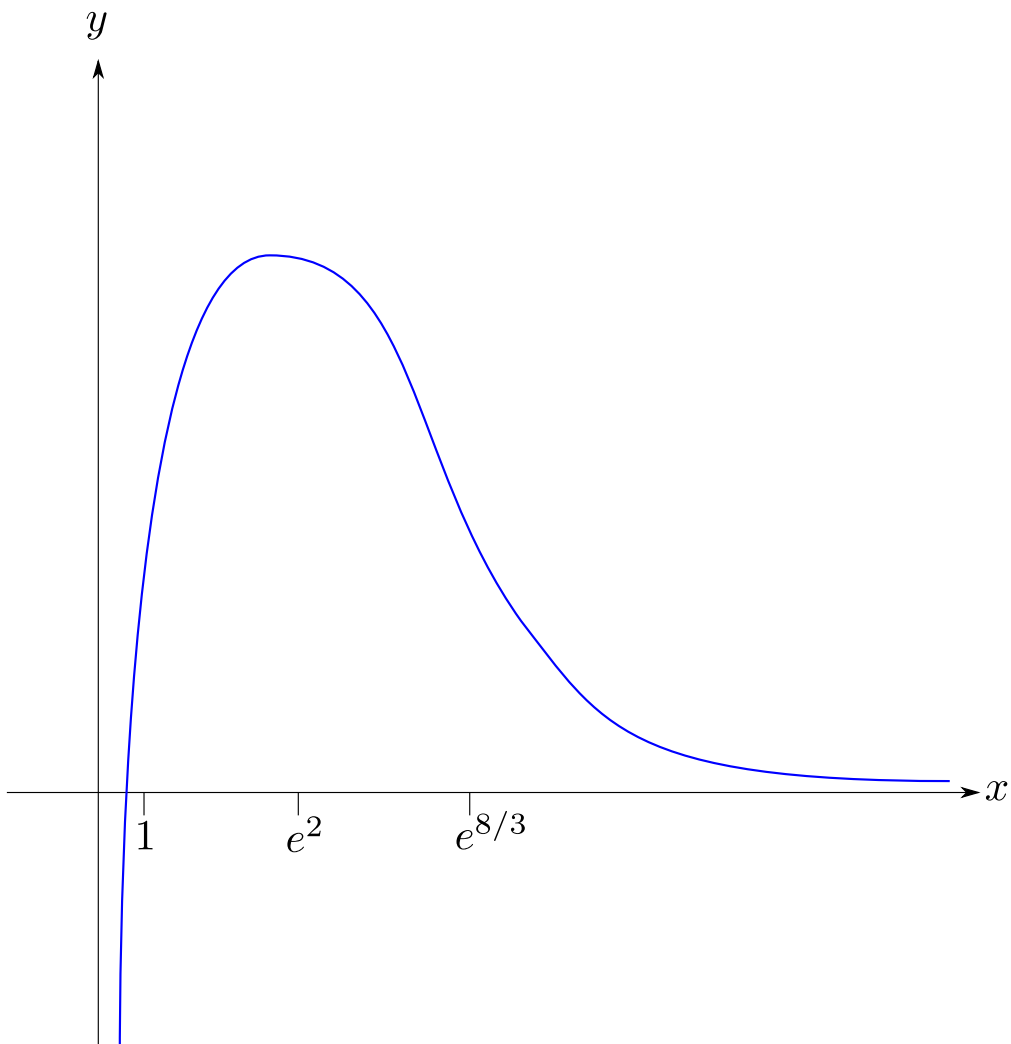
שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{3 \log(x) - 8}{4x^{5/2}}$$

יש נקודת פיתול ב- $(e^{8/3}, \frac{8}{3e^{4/3}})$.

x	$0 < x < e^{8/3}$	$x = e^{8/3}$	$x > e^{8/3}$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	קמורה \downarrow	נקודת פיתול	קמורה \uparrow

שלב 8 שרטוט:



שאלה 12

שלב 1 תחום הגדרה:

$$x \neq 3$$

שלב 2 נקודות חיתוך:

שים לב,

$$f(x) = \frac{x^2(x+1)(x-2)}{(x-3)^3}$$

ולכן קל לראות שהנקודות חיתוך הן $(0,0)$, $(-1,0)$ ו- $(2,0)$.

סימני הפונקציה

y	x
$y < 0$	$x < -1$
$y > 0$	$-1 < x < 0$
$y > 0$	$0 < x < 2$
$y < 0$	$2 < x < 3$
$y > 0$	$x > 3$

שלב 3 אסימפטוטות אנכיות

$$x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty.$$

שלב 4 אסימפטוטות אופקיות

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

שלב 5 אסימפטוטות משופעת

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

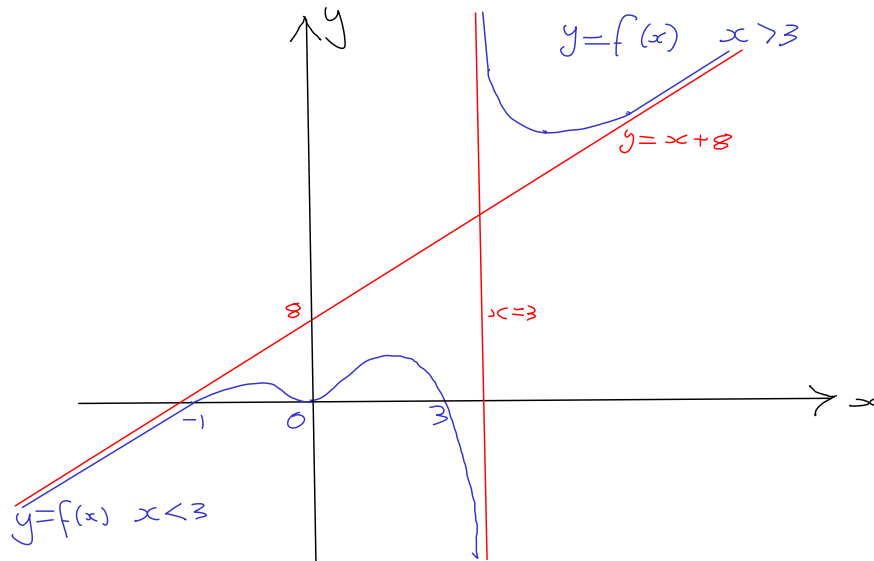
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = 8$$

לכן הישר $y = x + 8$ הוא אסימפטוטה משופעת כאשר $x \rightarrow +\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = 8$$

לכן הישר $y = x + 8$ הוא אסימפטוטה משופעת כאשר $x \rightarrow -\infty$.

**שאלה 13**

שלב 1 תחום הגדרה: $x \neq -1$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0, 0)$.

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x > 0$
$f(x)$	-	+	+

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x = -1$

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: אין.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m \cdot x) = -1.$$

לכן הקו $y = x - 1$ אסימפטוטה משופעת בתהליך כאשר $x \rightarrow \infty$.

ב- $x \rightarrow -\infty$ אותו הדבר.

שלב 6 תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

נקודות קריטיות: $(-2, -4)$ ו- $(0, 0)$.

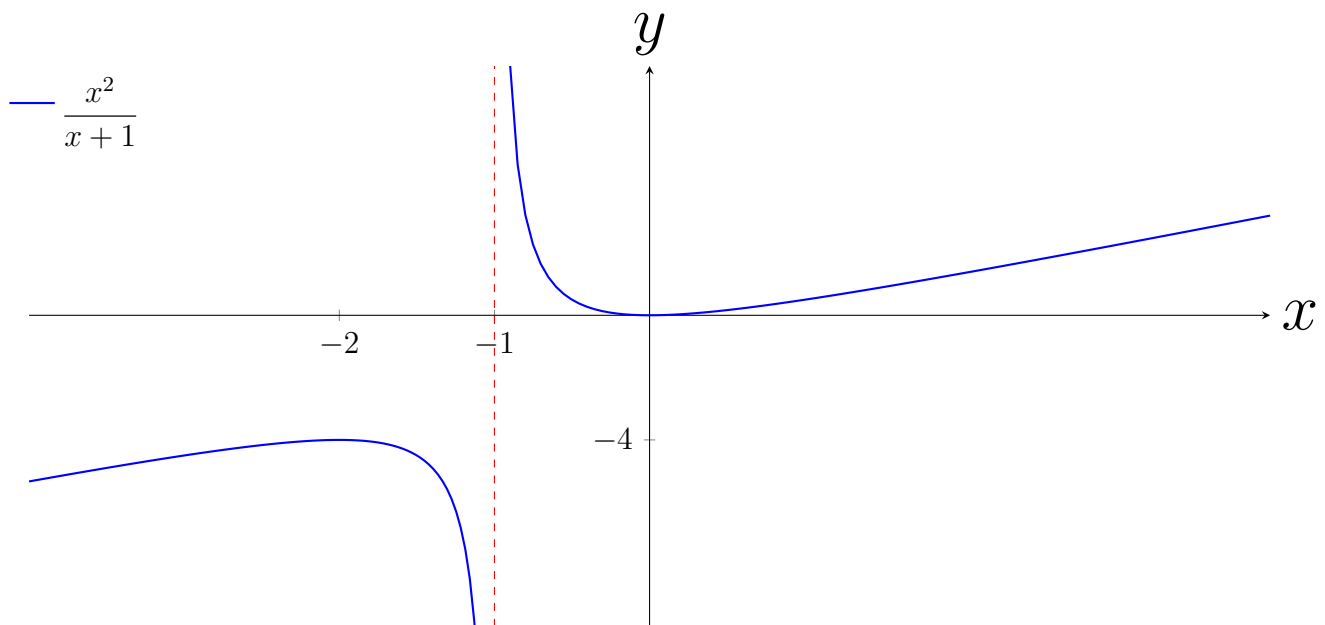
x	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	מקס	\searrow	\searrow	מינימום	\nearrow

שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$$

נקודות פיתול: אין.

x	$x < -1$	$x > -1$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	קמורה \downarrow	קמורה \uparrow

שלב 8 שרטוט:**שאלה 14****שלב 1** תחום הגדרה: $x \neq -2$.**שלב 2** נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(-2, 0)$ ו- $(0, -2)$.

x	$x < -2$	$-2 < x < 2$	$x > 2$
$f(x)$	-	-	+

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x = 2$

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: אין.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m \cdot x) = 6.$$

לכן הקו $y = x + 6$ אסימפטוטה משופעת בתהליך כאשר $x \rightarrow \infty$.

ב- $x \rightarrow -\infty$ אותו הדבר.

שלב 6 תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = \frac{(x-6)(x+2)}{(x-2)^2}$$

נקודות קריטיות: $(-2, 0)$ ו- $(6, 16)$.

x	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < 6$	$x = 6$	$x > 6$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	↗	מקס	↘	↘	מינימום	↗

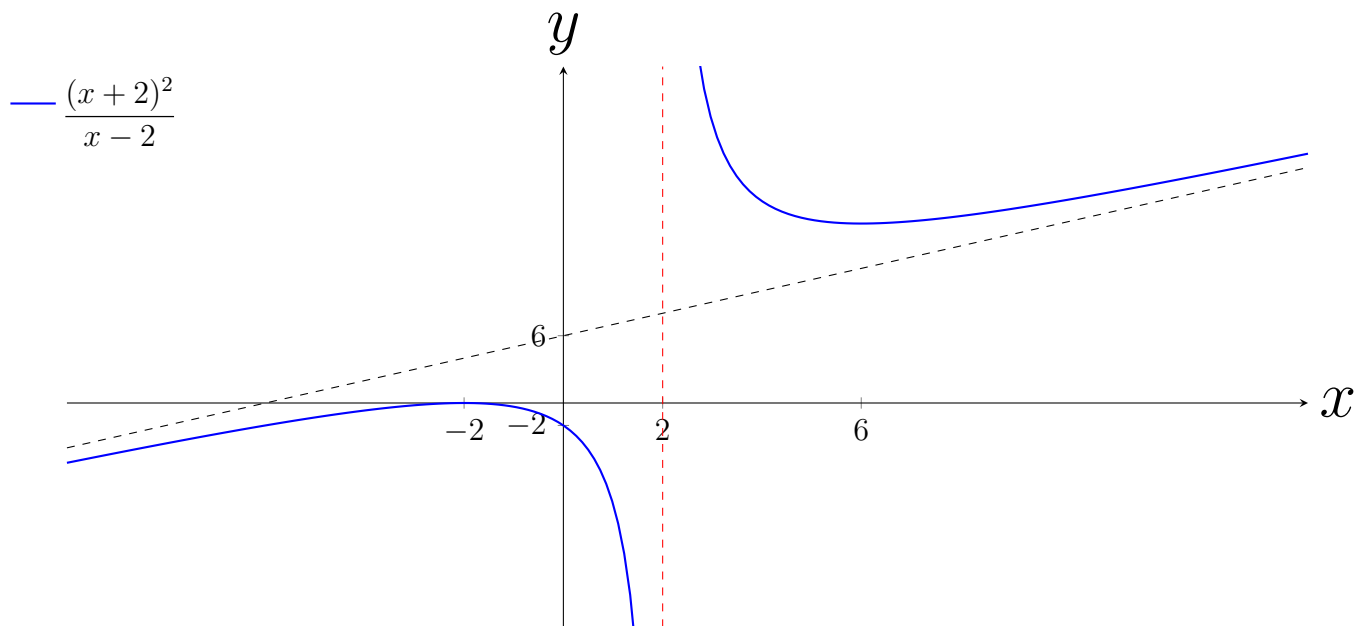
שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{32}{(x-2)^3}$$

נקודות פיתול: אין.

x	$x < 2$	$x > 2$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	קמורה ↓	קמורה ↑

שלב 8 שרטוט:

**שאלה 15****שלב 1** תחום הגדרה: כל x .**שלב 2** נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0, 2), (-\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 0)$.

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x > 0$
$f(x)$	–	+	+

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: אין.**שלב 4** אסימפטוטה אופקית: $y = 0$.**שלב 5** אסימפטוטה משופעת: אין.**שלב 6** תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{e^x}$$

נקודות קריטיות:

$$(1 - \sqrt{3}, 3.04437) = (-0.732051, 3.04437)$$

–

$$(1 + \sqrt{3}, -0.355635) = (2.73205, -0.355635) .$$

x	$x < 1 - \sqrt{3}$	$x = 1 - \sqrt{3}$	$1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$	$x = 1 + \sqrt{3}$	$x > 1 + \sqrt{3}$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	מקס	\searrow	מינימום	\nearrow

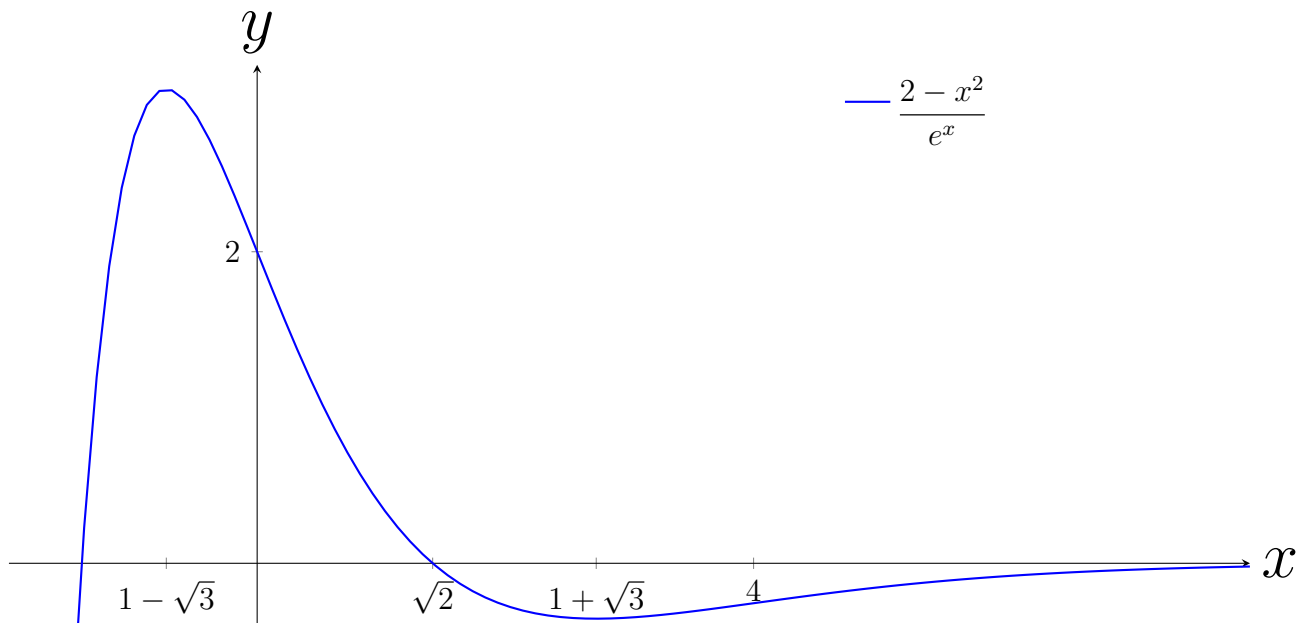
שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x) = -\frac{x(x-4)}{e^x}$$

נקודות פיתול: $(0, 2)$ ו- $(4, -0.256419)$.

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$f''(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	קמורה \downarrow	פיתול	קמורה \uparrow	פיתול	קמורה \downarrow

שלב 8 שרטוט:



שאלה 16

שלב 1 תחום הגדרה: כל x .

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה- x :

$y = 0$ כאשר $x = 0$. ולכן נקודת חיתוך עם ציר x היא $(0, 0)$.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y :

נציב $x = 0$ בפונקציה ונקבל $y = 0$. לכן נקודת חיתוך עם ציר y היא $(0, 0)$.

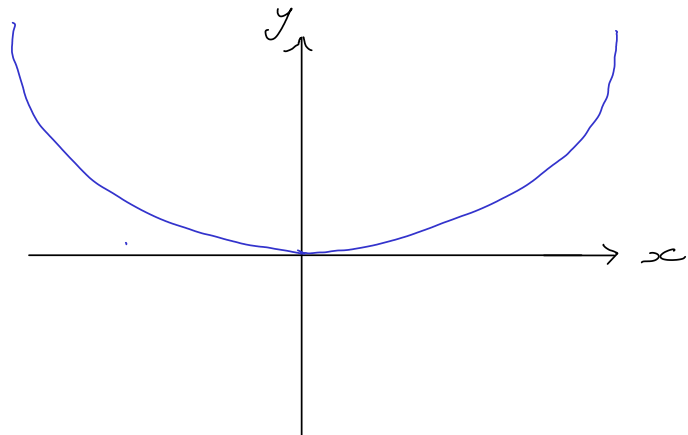
y	x
$y > 0$	$x > 0$
$y > 0$	$x < 0$
$y = 0$	$x = 0$

שלב 3 אינן נקודות בהן הפונקציה לא מוגדרת.

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^2 + 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x^2 + 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty.$$

שלב 5



שאלה 17

שלב 1 תחום הגדרה: כל $x \neq 1$.

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה- x :

$y = 0$ כאשר $x = 2$. ולכן נקודת חיתוך עם ציר x היא $(2, 0)$.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y :

נציב $x = 0$ בפונקציה ונקבל $y = -2$. לכן נקודת חיתוך עם ציר y היא $(0, -2)$.

y	x
$y > 0$	$1 < x < 2$
$y < 0$	$x > 2$
$y < 0$	$x < 1$
$y = 0$	$x = 2$

שלב 3 בנקודה $x = 1$ הפונקציה לא מוגדרת ולכן קיימת אסימפטוטה אנכית ב- $x = 1$.

מצד ימין:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2-x}{x-1} = +\infty .$$

מצד שמאל:

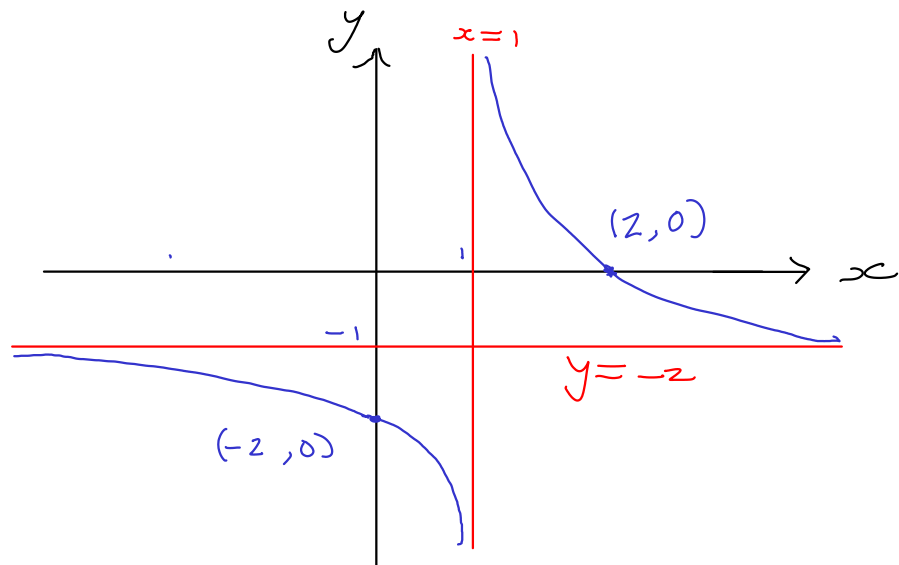
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2-x}{x-1} = -\infty .$$

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x} = -1 , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1 .$$

לכן קיימת אסימפטוטה אופקית ב- $x = -1$.

שלב 5



שאלה 18

שלב 1 תחום הגדרה: $\{x > a \cap x < -a\}$.

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה- x : $(0,0)$.

נקודת חיתוך עם ציר ה- y : אין

y חיובי בכל נקודה בתחום הגדרת הפונקציה.

שלב 3 בקטע $-a \leq x \leq a$ הפונקציה לא מוגדרת ולפי קיימות אסימפטוטות אנכיות בשפות $x = +a$ ו- $x = -a$.

מצד שמאל של $x = -a$,

$$\lim_{x \rightarrow -a^-} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty .$$

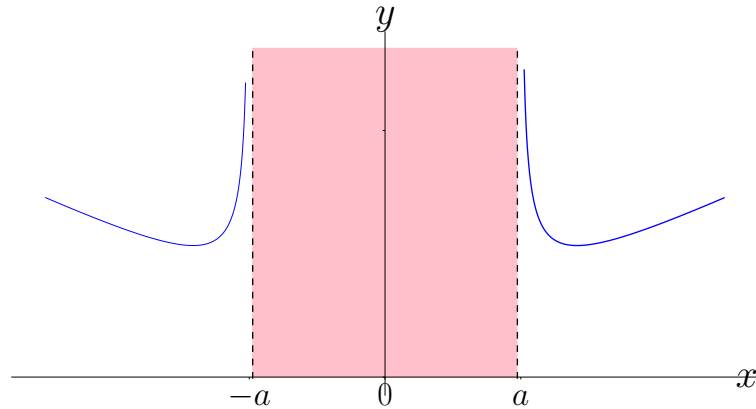
מצד ימין של $x = +a$,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty .$$

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty.$$

שלב 5



שאלה 19

שלב 1 תחום הגדרה: $\{x > a \cap x < -a\}$.

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה- x : $(0, 0)$.

נקודת חיתוך עם ציר ה- y : אין

y חיובי בכל נקודה בתחום הגדרת הפונקציה.

שלב 3 בקטע $-a \leq x \leq a$ הפונקציה לא מוגדרת ולפיו קיימות אסימפטוטות אנכיות בשפות $x = -a$ ו- $x = +a$. מצד שמאל של $x = -a$,

$$\lim_{x \rightarrow -a^-} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty.$$

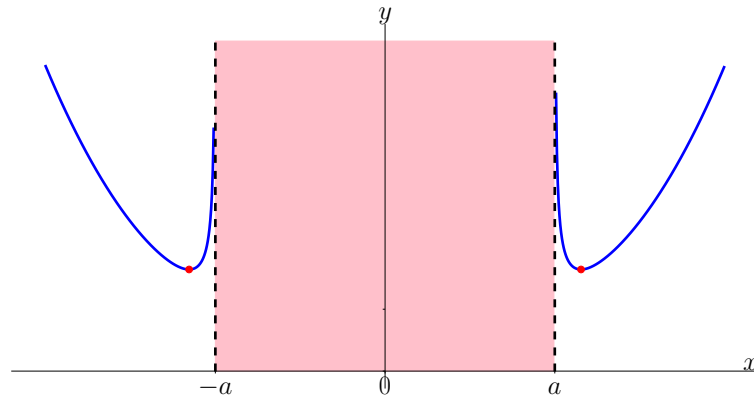
מצד ימין של $x = +a$,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty.$$

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty.$$

שלב 5



שאלה 20

שלב 1 תחום הגדרה: $\{x > \sqrt{a} \cap x < -\sqrt{3a}\}$

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה- x : אין

נקודת חיתוך עם ציר ה- y : אין

$y > 0$ בכל נקודה בתחום הגדרת הפונקציה.

שלב 3 בקטע $-\sqrt{3a} \leq x \leq \sqrt{3a}$ הפונקציה לא מוגדרת ולפיו קיימות אסימפטוטות אנכיות בשפות $x = +\sqrt{3a}$ ו- $x = -\sqrt{3a}$.

מצד שמאל של $x = -\sqrt{3a}$,

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3a}^-} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 3a^2}} = +\infty .$$

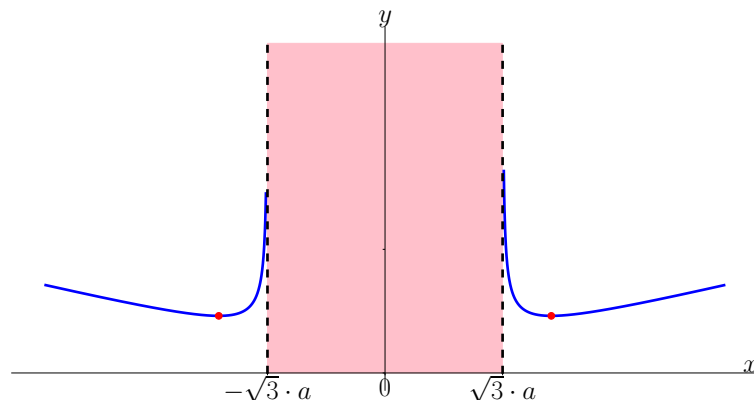
מצד ימין של $x = +\sqrt{a}$,

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3a}^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 3a^2}} = +\infty .$$

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 3a^2}} = +\infty , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 3a^2}} = +\infty .$$

שלב 5



שאלה 21

שלב 1 תחום הגדרה: $\{x \neq 2a \cap x \neq -2a\}$.

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה- x : אין.

נקודת חיתוך עם ציר ה- y : $\left(0, -\frac{1}{a^2}\right)$.

$y > 0$	$x < -2a$
$y < 0$	$-2a < x < 2a$
$y > 0$	$x > 2a$

שלב 3 בנקודות $x = \pm 2a$ הפונקציה לא מוגדרת ולפיו קיימת אסימפטוטות אנכיות בנקודות $x = +2a$ ו- $x = -2a$.

מצד שמאל של $x = -2a$:

$$\lim_{x \rightarrow -2a^-} \frac{4}{x^2 - 4a^2} = \lim_{x \rightarrow -2a^-} \frac{4}{(x+2a)(x-2a)} = \left(\lim_{x \rightarrow -2a^-} \frac{2}{x+2a} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow -2a^-} \frac{2}{x-2a} \right) = +\infty$$

מצד ימין של $x = -2a$:

$$\lim_{x \rightarrow -2a^+} \frac{4}{x^2 - 4a^2} = \lim_{x \rightarrow -2a^+} \frac{4}{(x+2a)(x-2a)} = \left(\lim_{x \rightarrow -2a^+} \frac{2}{x+2a} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow -2a^+} \frac{2}{x-2a} \right) = -\infty$$

מצד שמאל של $x = +2a$:

$$\lim_{x \rightarrow 2a^-} \frac{4}{x^2 - 4a^2} = \lim_{x \rightarrow 2a^-} \frac{4}{(x+2a)(x-2a)} = \left(\lim_{x \rightarrow 2a^-} \frac{2}{x+2a} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 2a^-} \frac{2}{x-2a} \right) = -\infty$$

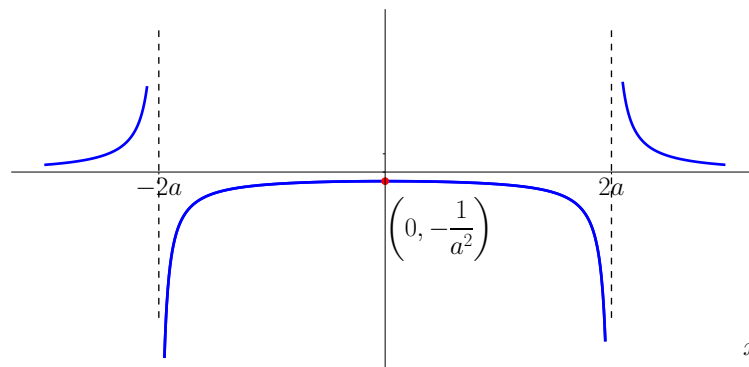
מצד ימין של $x = +2a$:

$$\lim_{x \rightarrow 2a^+} \frac{4}{x^2 - 4a^2} = \lim_{x \rightarrow 2a^+} \frac{4}{(x+2a)(x-2a)} = \left(\lim_{x \rightarrow 2a^+} \frac{2}{x+2a} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 2a^+} \frac{2}{x-2a} \right) = +\infty$$

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty.$$

שלב 5



שאלה 22

שלב 1 תחום הגדרה: $x \neq 0, -4$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(-2, 0)$.

x	$x < -4$	$-4 < x < 0$	$x > 0$
$f(x)$	+	-	+

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x = -4$ ו- $x = 0$.

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: אין.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m \cdot x) = 1.$$

לכן הקו $y = 1$ אסימפטוטה משופעת בתהליך כאשר $x \rightarrow \infty$.

ב- $x \rightarrow -\infty$ אותו הדבר.

שלב 6 תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = -\frac{8(x+2)}{x^2(x+4)^2}$$

נקודות קריטיות: $(-2, 0)$.

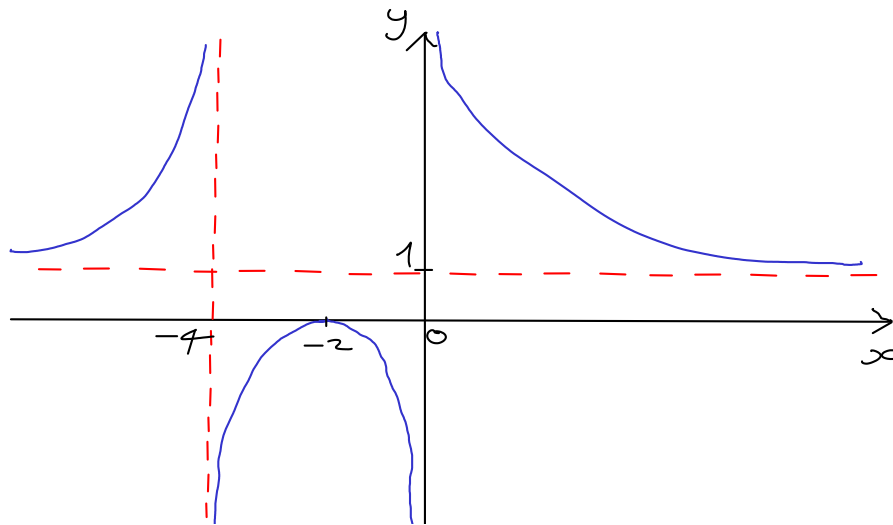
x	$x < -4$	$-4 < x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x > 0$
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$	↗	↗	מקסימום	↘	↘

שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{8(3x^2 + 12x + 16)}{x^3(x+4)^3}$$

נקודות פיתול: אין.

x	$x < -4$	$-4 < x < 0$	$x > 0$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	↑ קמורה	↓ קמורה	↑ קמורה

שלב 8 שרטוט:שאלה 23

שלב 1 תחום הגדרה: $\{x \leq -a \cap x \geq a\}$.

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה- x : $x = \pm a$.

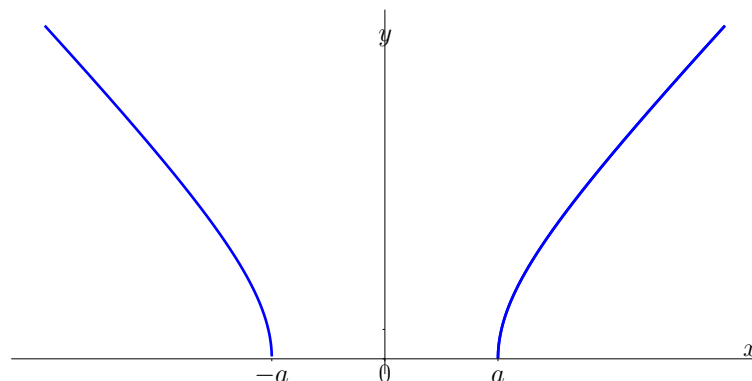
נקודת חיתוך עם ציר ה- y : אין.

$y > 0$	$x < -a$
$y > 0$	$x > a$

שלב 3 בקטע $-a < x < a$ הפונקציה לא מוגדרת, אבל אינן אסימפטוטות בשפות מכיוון שהפונקציה כן מוגדרת בנקודות $x = -a$ ו- $x = +a$.

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - a^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - a^2} = +\infty.$$

שלב 5

שאלה 24

שלב 1 תחום הגדרה: $x \neq 3$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(-4, 0)$ ו- $(0, -\frac{16}{3})$.

x	$x < -4$	$-4 < x < 3$	$x > 3$
$f(x)$	-	-	+

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x = 3$

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: אין.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m \cdot x) = 11.$$

לכן הקו $y = x + 11$ אסימפטוטה משופעת בתהליך כאשר $x \rightarrow \infty$.

ב- $x \rightarrow -\infty$ אותו הדבר.

שלב 6 תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = \frac{(x-10)(x+4)}{(x-3)^2}$$

נקודות קריטיות: $(-4, 0)$ ו- $(10, 28)$.

x	$x < -4$	$x = -4$	$-4 < x < 3$	$3 < x < 10$	$x = 10$	$x > 10$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	↗	מקס	↘	↘	מינימום	↗

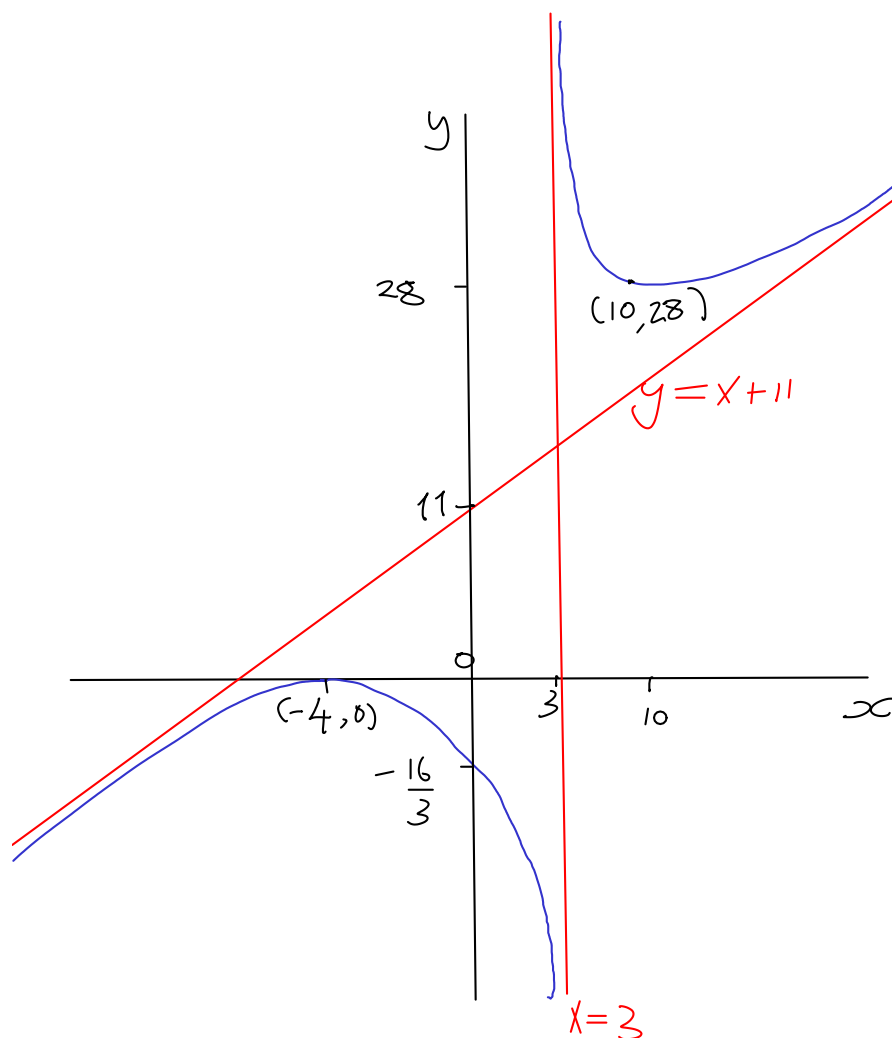
שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{98}{(x-3)^3}$$

נקודות פיתול: אין.

x	$x < 3$	$x > 3$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	↓ קמורה	↑ קמורה

שלב 8 שרטוט:



שאלה 25

שלב 1 תחום הגדרה: $\{x \leq -a \cap x \geq a\}$.

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה- x : $(0, 0)$.

נקודת חיתוך עם ציר ה- y : $(0, 0)$.

$y > 0$	$x < -a$
$y < 0$	$-a < x < a$
$y > 0$	$x > a$

שלב 3 בנקודות $x = \pm a$ הפונקציה לא מוגדרת.

מצד שמאל של $x = -a$:

$$\lim_{x \rightarrow -a^-} \frac{x^2}{x^2 - a^2} = +\infty$$

מצד ימין של $x = -a^+$:

$$\lim_{x \rightarrow -a^+} \frac{x^2}{x^2 - a^2} = -\infty$$

מצד שמאל של $x = +a$:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{x^2}{x^2 - a^2} = -\infty$$

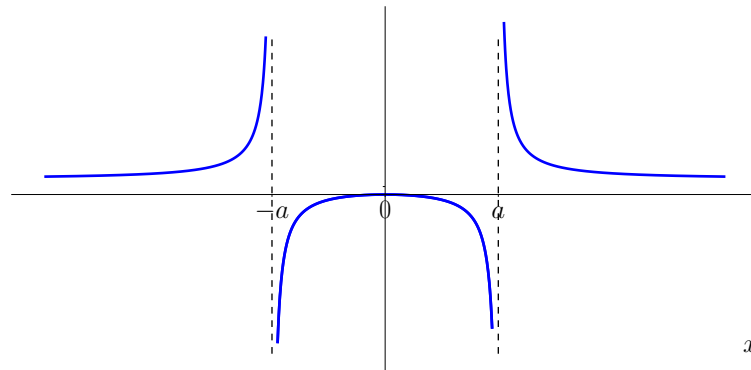
מצד ימין של $x = +a$:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x^2}{x^2 - a^2} = +\infty$$

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty.$$

שלב 5



שאלה 26 שים לב

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} = f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x - 2}$$

שלב 1 תחום הגדרה: $x \neq 2$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0, -\frac{1}{2}), (1, 0)$.

x	$x < 1$	$1 < x < 2$	$x > 2$
$f(x)$	-	-	+

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x = 2$

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: אין.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{x(x-2)} = 1 .$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x-1)^2}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2 - x(x-2)}{x-2} = 0 .$$

לכן $y = x$ אסימפטוטה משופעת ב- $x = \infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^2}{x(x-2)} = 1 .$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(x-1)^2}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^2 - x(x-2)}{x-2} = 0 .$$

$y = x$ אסימפטוטה משופעת ב- $x = -\infty$.

שלב 6 תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$$

נקודות קריטיות:

$(1, 0)$ ו- $(3, 4)$

x	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	↗	מקס	↘	↘	מינימום	↗

שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}$$

נקודות פיתול: אין.

x	$x < 2$	$x > 2$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	קמורה ↓	קמורה ↑

שלב 8 שרטוט:

