חישוביות וסיבוכיות

מועד א'

פתרון לדוגמא

ד"ר יוחאי טוויטו, , ד"ר ירמיהו מילר, .

סמסטר א, תשפ"ה'

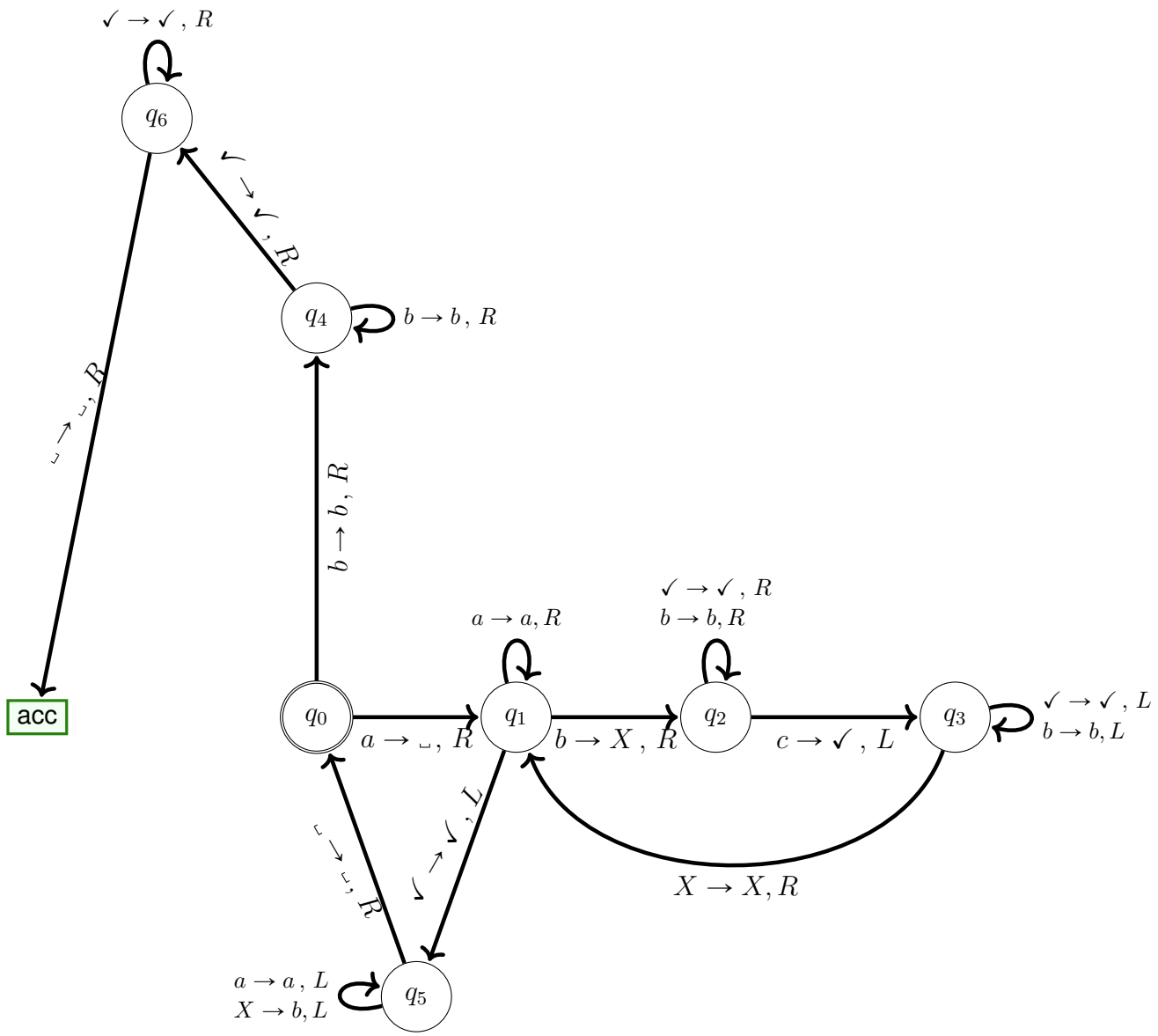
מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הינן פתרונות לדוגמא. ניתן לפתור חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מטמנטם

פתרונות

שאלה 1: מכונת טיורינג 20 נקודות

סעיף א'



המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מהנדס

סעיף ב' הפונקציה שאותה המכונה מחשבת היא הפונקציה:

$$f(x) = x \mod 3 \ .$$

כלומר, המכונה מחשבת את שארית החלוקה ב- 3 של המספר האונרי הנתון כקלט.

סעיף ג' הפונקציה שאותה המכונה מחשבת היא הפונקציה:

$$f\left(1^i\#1^j\right) = 1^{|i-j|} \ .$$

כלומר, המכונה מחשבת את הערך המוחלט של ההפרש בין שני מספרים $1^i, 1^j$, הנתונים בקלט.
הסבר:

$$q_0\ 1\#1 \ \vdash\ q_1\#1 \ \vdash_*\ \#1q_1 \ \vdash\ \#q_21 \ \vdash_*\ q_{\text{back}}\ \sqcup\ \# \ \vdash\ q_0\# \ \vdash\ \text{acc} \ .$$

לכן $f(1\#1) = 0$.

$$q_0\ 11\#1 \ \vdash\ q_1\ 1\#1 \ \vdash_*\ 1\#1q_1 \ \vdash\ 1\#q_21 \ \vdash_*\ q_{\text{back}}\ \sqcup\ 1\# \ \vdash\ q_0\ 1\#$$

$$\vdash\ q1\ \# \ \vdash\ \#q_1\ \sqcup \ \vdash\ q_2\ \#\ \sqcup \ \vdash\ q_4\ \sqcup\ 1 \ \vdash\ \sqcup\ \text{acc}\ 1$$

לכן $f(11\#1) = 1$.

נסתכל על קלט כללי $1^i\#1^j$ כאשר $i \geqslant j$:

$$q_0\ 1^i\#1^j \ \vdash_*\ 1^{i-1}\#q_11^j \ \vdash_*\ 1^{i-1}\#1^jq_1\ \sqcup \ \vdash\ 1^{i-1}\#1^{j-1}q_21 \ \vdash\ 1^{i-1}\#1^{j-2}q_{\text{back}}\ 1\ \sqcup$$

$$\vdash_*\ q_{\text{back}}\ \sqcup\ 1^{i-1}\#1^{j-1} \ \vdash\ q_0\ 1^{i-1}\#1^{j-1}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdash_*\ q_0\ 1^{i-j}\#\sqcup \ \vdash_*\ 1^{i-j-1}\#q_1\sqcup \ \vdash\ 1^{i-j-1}q_2\# \ \vdash\ 1^{i-j-2}q_4\ 11 \ \vdash_*\ q_4\ \sqcup\ 1^{i-j}$$

$$\vdash\ \text{acc}\ 1^{i-j}$$

לכן

$$f(1^i\#1^j) = 1^{i-j}\ , \qquad i \geqslant j\ . \tag{*1}$$

נסתכל על קלט כללי $1^i\#1^j$ כאשר $i < j$:

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מהנדס

$$
\begin{aligned}
q_0\ 1^i\#1^j \ &\vdash_* \ 1^{i-1}\#q_1 1^j \ \vdash_* \ 1^{i-1}\#1^j q_1 \sqcup \ \vdash \ 1^{i-1}\#1^{j-1} q_2 1 \ \vdash \ 1^{i-1}\#1^{j-2} q_{\text{back}}\ 1 \sqcup \\
&\vdash_* \ q_{\text{back}} \sqcup 1^{i-1}\#1^{j-1} \ \vdash \ q_0\ 1^{i-1}\#1^{j-1} \\
&\vdots \\
&\vdash_* \ q_0\ \#1^{j-i} \sqcup \ \vdash \ \text{acc}\ 1^{j-i} \sqcup
\end{aligned}
$$

לכן

$$f(1^i\#1^j) = 1^{j-i}\ , \qquad i < j\ . \tag{*2}$$

המשוואות (*1) ו- (*2) אומרות ש:

$$f(1^i\#1^j) = 1^{|i-j|}\ . \tag{*3}$$

שאלה 2: וריאציות על מכונת טיורינג 20 נקודות

<u>כיוון ראשון: לכל מכונה ממודל OR קיימת מכונה שקולה ממודל TS</u>

תהי $M_{OR} = \left(Q^{OR}, \Sigma^{OR}, \Gamma^{OR}, \delta^{OR}, q_0^{OR}, q_{\text{acc}}^{OR}, q_{\text{rej}}^{OR}\right)$ מכונה ממודל OR.
נבנה מכונה שקולה $M_{TS} = \left(Q^{TS}, \Sigma^{TS}, \Gamma^{TS}, \delta^{TS}, q_0^{TS}, q_{\text{acc}}^{TS}, q_{\text{rej}}^{TS}\right)$ ממודל TS.
כל הרכיבים של המכונה M_{TS} יהיו זהים לרכיבים של המכונה M_{OR} מלבד פונקציית המעברים.
נגדיר את פונקציית המעברים δ^{TS}.

מעברי תנועה

נניח ש δ^{OR} מכילה את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q, \sigma) = (p, \text{move})$$

כאשר:

$$p, q \in Q^{OR}\ , \qquad \sigma \in \Gamma^{OR}\ , \qquad \text{move} \in \{L, R\}\ .$$

אז ב- δ^{TS} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{TS}(q, \sigma) = (p, \sigma, \text{move})$$

מעברי כתיבה

נניח ש δ^{OR} מכילה את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q, \sigma) = (p, \tau)$$

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מהנדס

כאשר:

$$p, q \in Q^{OR} \ , \qquad \sigma, \tau \in \Gamma^{OR} \ .$$

אז ב- δ^{TS} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{TS}(q, \sigma) = (p, \tau, S)$$

<u>כיוון שני: לכל מכונה ממודל TS קיימת מכונה שקולה ממודל OR</u>

תהי $M_{TS} = \left(Q^{TS}, \Sigma^{TS}, \Gamma^{TS}, \delta^{TS}, q_0^{TS}, q_{\text{acc}}^{TS}, q_{\text{rej}}^{TS}\right)$ מכונה ממודל TS.

נבנה מכונה שקולה $M_{OR} = \left(Q^{OR}, \Sigma^{OR}, \Gamma^{OR}, \delta^{OR}, q_0^{OR}, q_{\text{acc}}^{OR}, q_{\text{rej}}^{OR}\right)$ ממודל OR.

במעברים בהן המכונה M_{TS} כותבת אות וגם זזה ימינה או שמאלה ,לא יתכן מעבר שקול יחיד במכונה ממודל OR. לכן נמיר חלק מהמעברים במכונה M_{TS} לשני מעברים עוקבים במכונה M_{OR}. במעבר הראשון נכתוב אות ובמעבר השני נבצע את התזוזה.

לשם כך, נצטרך מצבי ביניים חדשים, שיחברו בין המעברים . לכל מצב q נגדיר שני מצבי ביניים ייחודיים q^L ו- q^R. כלומר:

$$Q^{OR} = Q^{TS} \cup \left\{q^L \;\middle|\; q \in Q^{TS}\right\} \cup \left\{q^R \;\middle|\; q \in Q^{TS}\right\} \ .$$

נגדיר כעת את δ^{OR} תוך שימוש במצבי ביניים.

מצבי הביניים תמיד יבצעו תזוזה שמאלה או ימינה בלבד, לכל אות שבסרט. פורמלית:

$$\forall q \in Q^{TS} \ , \ \sigma \in \Gamma^{TS} : \quad \delta^{OR}\left(q^R, \sigma\right) = (q, R) \ ,$$
$$\forall q \in Q^{TS} \ , \ \sigma \in \Gamma^{TS} : \quad \delta^{OR}\left(q^L, \sigma\right) = (q, L) \ .$$

עבור מעברים בהן מתבצעת כתיבה ותנועה, נגדיר את δ^{OR} תוך שימוש במצבי ביניים.

בהינתן מעבר עם תנועה ימינה:

$$\delta^{TS}(q, \sigma) = (p, \tau, R) \ .$$

כאשר:

$$q, p \in Q^{TS} \ , \qquad \sigma, \tau \in \Gamma^{TS}$$

אז ב- δ^{OR} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q, \sigma) = \left(p^R, \tau\right) \ .$$

באופן דומה, בהינתן מעבר עם תנועה שמאלה:

$$\delta^{TS}(q, \sigma) = (p, \tau, L) \ .$$

כאשר:

$$q, p \in Q^{TS} \ , \qquad \sigma, \tau \in \Gamma^{TS}$$

אז ב- δ^{OR} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q, \sigma) = \left(p^L, \tau\right) \ .$$

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מטמנטם

במעברים בהם המכונה M_{TS} אינה מבצעת תנועה (נשארת במקום) לא נשתמש במצבי הביניים. כלומר, בהינתן מעבר בו המכונה נשארת במקום:

$$\delta^{TS}(q,\sigma) = (p,\tau,S)$$

כאשר:

$$q,p \in Q^{TS}\ , \qquad \sigma,\tau \in \Gamma^{TS}$$

אז ב δ^{OR} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q,\sigma) = (p,\tau)\ .$$

שאלה 3: התזה של צ'רץ' טיורינג 20 נקודות

סעיף א'השפה שהדקדוק G יוצר היא:

$$L(G) = \left\{a^n b^n c^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$$

סעיף ב'

$$L(G) = \left\{w \in \Sigma^* \;\middle|\; \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\right\}$$

כלומר ,שפת כל המילים בהן מספר שווה של אותיות a, אותיות b, ואותיות c.

שאלה 4: אי-כריעות 20 נקודות

<u>נתון</u>: השפה $L_{M_1\cup M_2}$ מוגדרת:

$$L_{M_1\cup M_2} = \left\{\langle M_1, M_2, w\rangle \;\middle|\; w \in L(M_1) \cup L(M_2)\right\}$$

ז"א $L_{M_1\cup M_2}$ השפה שכוללת כל המחרוזות $\langle M_1, M_2, w\rangle$ כאשר w שייך לאחת השפות $L(M_1)$ או $L(M_2)$ לפחות.

<u>צריך להוכיח</u>: קיימת רדוקציה התאמה בין השפה A_{TM} לשפה $L_{M_1\cup M_2}$, כלומר

$$A_{TM} \leqslant L_{M_1\cup M_2}\ .$$

<u>הגדרת הרדוקציה:</u>

בהינתן $\langle M,w\rangle$ קלט של A_{TM} ניצור $\langle M_1, M_2, w\rangle$ קלט של $L_{M_1\cup M_2}$ כך שמתקיים התנאי הבא:

$$\langle M,w\rangle \in A_{TM} \quad \Rightarrow \quad \langle M_1, M_2, w\rangle \in L_{M_1\cup M_2}\ ,$$
$$\langle M,w\rangle \notin A_{TM} \quad \Rightarrow \quad \langle M_1, M_2, w\rangle \notin L_{M_1\cup M_2}\ .$$

נגדיר את פונקציית הרוקציה באופן הבא:

$M_1 =$ "על כל קלט x $M_1 \leftarrow$ rej."

$M_2 =$ "על כל קלט x:

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מטמנטם

- מריצה M על w ועונה כמוה.

נכונות הרדוקציה:

כיוון $\Leftarrow$

אם $\langle M, w\rangle \in A_{TM}$

$\Leftarrow$ $w \in L(M)$

$\Leftarrow$ $w \in L(M_2)$.

$\Leftarrow$ $w \in L(M_2) \cup \varnothing$

$\Leftarrow$ $w \in L(M_2) \cup L(M_1)$

$\Leftarrow$ $\langle M_1, M_2, w\rangle \in L_{M_1 \cup M_2}$.

כיוון $\Rightarrow$

אם $\langle M, w\rangle \notin A_{TM}$

$\Leftarrow$ $w \notin L(M)$.

$\Leftarrow$ $w \notin L(M_2)$.

$\Leftarrow$ $w \notin L(M_2)$ וגם $w \notin L(M_1)$ (כי השפה של M_1 היא $\varnothing$).

$\Leftarrow$ $\langle M_1, M_2, w\rangle \notin L_{M_1 \cup M_2}$.

שאלה 5: סיבוכיות זמן 20 נקודות

פונקצית הרדוקציה:

נגדיר פונקצית הרדוקציה f שבהינתן זוג $\langle G, k\rangle \in IS$, (הקלט של IS), יוצרת $\langle G', k'\rangle \in VC$, (הקלט של VC), אשר מקיימת את התנאי:

$$\langle G, k\rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G', k'\rangle \in VC\ . \qquad (*2)$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מספרים

פתרונות

1) בהינתן הגרף $G=(V,E)$, אז הגרף G' הוא אותו גרף $G=(V,E)$.

2) $k'=|V|-k$.

<u>נכונות הרדוקציה</u>

כעת נוכיח שמתקיים: $\langle G,k\rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in VC$.

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

בהינתן גרף $G=(V,E)$ ושלם k.

נניח כי $\langle G,k\rangle \in IS$.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה S בגודל k לפחות: $|S|\geqslant k$.

$\Leftarrow$ אם $u_1,u_2\in S$ אז $(u_1,u_2)\notin E$.

כלומר, כל שני קדקודים ב- S לא מחוברים בצלע ב- G.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם $(u_1,u_2)\in E$ אז $u_1\notin S$ או $u_2\notin S$.

$\Leftarrow$ אם $(u_1,u_2)\in E$ אז $u_1\in V\backslash S$ או $u_2\in V\backslash S$.

$\Leftarrow$ התת-קבוצה $V\backslash S$ היא כיסוי קודקודים של G.

$|S|\geqslant k$ ו- $|V\backslash S|=|V|-S$ לכן $|V\backslash S|\leqslant |V|-k$.

$\Leftarrow$ $G'=G$ מכיל כיסוי קודקודים U בגודל $k'=\leqslant |V|-k$ לכל היותר.

$\Leftarrow$ $\langle G',k'\rangle \in VC$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

בהינתן גרף G' ושלם k'.

נניח כי $\langle G',k'\rangle \in VC$.

$\Leftarrow$ $G'=(V,E)$ מכיל כיסוי קדקודים U בגודל k' לכל היותר: $|U|\leqslant k'$.

$\Leftarrow$ אם $(u_1,u_2)\in E$ אז $u_1\in U$ או $u_2\in U$.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם $u_1\notin U$ וגם $u_2\notin U$ אז $(u_1,u_2)\notin E$.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם $u_1\in V\backslash U$ וגם $u_2\in V\backslash U$ אז $(u_1,u_2)\notin E$.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מהנדס

$\Leftarrow$ התת-קבוצה $S = V \backslash U$ היא קבוצה בלתי תלויה.

$|S| = |V| - |U|$ ו- $|U| \leqslant k'$ אז $|S| \geqslant |V| - k'$.

$\Leftarrow$ $G' = G$ מכיל קבוצה בלתי תלויה S בגודל $|V| - k' = k$ לפחות.

$\Leftarrow$ $\langle G, k \rangle \in IS$.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מהנדס