המחלקה למדעי המחשב

$26/11/23 12:00 - 29/11/23 12:00$ תשפ"ג

אלגברה 2

מועד ב'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר, ד'ר שי סרוסי.

תשפ"ג סמסטר ק'

השאלון מכיל 12 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

אחר / הערות

- יש לפתור את כל השאלות.
- המשקל של כל שאלה מפורט להלן:
  * שאלה 1: 30 נקודות.
  * שאלה 2: 20 נקודות.
  * שאלה 3: 20 נקודות.
  * שאלה 4: 30 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבירו היטב את מהלך הפתרון. תשובה ללא הסבר (גם נכונה) לא תתקבל.
- אסור לחלוטין לקבל עזרה מסטודנט אחר או מאף אחד.
- עליכם להעלות את הפתרונות שלכם דרך אתר המודל של הקורס אלגברה 2 למדמ"ח לא יאוחר משעה $12:00$ ביום ד' $23-11-29$. פתרונות שהוגשו אחרי המועד הזה לא יתקבלו.
- מותר להשתמש בחומר של הקורס, התרגילים של הקורס והספרים של הקורס בלבד, אבל אסור להשתמש בשום מקורות אחרים.
- אחרי הגשת פתרונות אתם תקבלו הזמנה למבחן קצר בעל פה על הפתרונות שלכם. ייתכן שלא תעבור את המבחן או יורידו נקודות במקרה שאתם לא יכולים להסביר הפתרונות שלכם היטב.
- **סטודנט יהיה זכאי להגיש ערעור / בקשות שונות לגבי הבוחן במשך 5 ימים בלבד מיום קבלת הציון.**

==

שאלה 1

א) (18 נק') תהי $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ מטריצה ניתנת ע"י $A = \begin{pmatrix} 2 & -i & 1 \\ i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$.

1) (12 נק')
האם A לכסינה אוניטרית? אם כן, מצאו Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $A = Q \cdot D \cdot \bar{Q}$.

2) (6 נק')
נתון הפולינום $f(x) \in \mathbb{R}_3[x]$:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16\ .$$

מצאו את המטריצה $f(A)$.

ב) (7 נק')
יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $T : V \to V$ ו- $S : V \to V$ העתקות צמודות לעצמן. הוכיחו ש $S \cdot T$ צמודה לעצמה אם ורק אם S ו- T מתחלפות ($S \cdot T = T \cdot S$).

שאלה 2

א) (10 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. הוכיחו כי $A^{-2} = -\frac{1}{4}\left(A^2 - 5I\right)$

ב) (15 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו את הטענות הבאות:

1) (5 נק')
אם λ ערך עצמי של A אז λ ערך עצמי של A^t.

2) (5 נק')
אם A הפיכה אז $A^{-1} \in \text{span}\left\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\right\}$.

3) (5 נק')
$A^m \in \text{span}\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{m-1}\}$ אם ורק אם קיים פולינום $p(x) \in \mathbb{R}_m[x]$ כך ש- $p(A) = 0$.

שאלה 3

א) (15 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ מטריצה ריבועית נורמלית עם ערכים עצמיים $\lambda = 5$ ו- $\lambda = 1$. נניח כי המרחב העצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 5$ הוא

$$V_{\lambda=5} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

מצאו את המטריצה A.

ב) (5 נק')
תהיינה $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ו- $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ כך ש- B הרמיטית ו- C אוניטרית. אם B ו- C מתחלפות אז המטריצה $B \cdot C$ נורמלית.

ג) (5 נק') יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב ווקטורי V. הוכיחו כי התת-מרחב $\ker T$ הוא T-שמור לכל אופרטור T.

שאלה 4

א) (15 נק') יהי $V = \mathbb{R}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. ונתבונן בתת המרחב

$$U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

1) מצאו בסיס אורתוגנולי ל- U.

2) מצאו בסיס אורתוגנולי ל- $U^{\perp}$.

ב) (10 נק')

1) (5 נק') תהיינה $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ ו- $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ פונקציות במרחב של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[-1,1]$. הוכיחו או הפריכו כי הנוסחה

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f^2(x) g(x)\, dx$$

מגדירה מכפלה פנימית.

2) (5 נק') יהיו $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ו- $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ווקטורים של $\mathbb{C}^2$. הוכיחו או הפריכו כי הנוסחה

$$\langle a, b \rangle = \lambda_1 a_1 b_1 + \lambda_2 a_2 b_2 \ ,$$

כאשר $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ סקלרים, מגדירה מכפלה פנימית.

פתרונות

שאלה 1

א) (18 נק')

1) (12 נק') $\bar{A} = A$ לכן A צמודה לעצמה לכן A נורמלית לכן A לכסינה אוניטרית לפי משפט הלכסון אוניטרית.

נמצא את הפולינום האופייני של A:

$$\begin{aligned}
p_A(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & i & -1 \\ -i & x-2 & -i \\ -1 & i & x-2 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)\left((x-2)^2-1\right) - i\left(-i(x-2)-i\right) - (1+x-2) \\
&= (x-2)\left(x^2-4x+3\right) + (-x+2-1) - (x-1) \\
&= (x-2)(x-3)(x-1) - 2x + 2 \\
&= (x-2)(x-3)(x-1) - 2(x-1) \\
&= (x-1)\left((x-2)(x-3)-2\right) \\
&= (x-1)\left(x^2-5x+6-2\right) \\
&= (x-1)\left(x^2-5x+4\right) \\
&= (x-1)(x-4)(x-1) \\
&= (x-1)^2(x-4)
\end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 4$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 2.

<u>מרחב העצמי ששייך ל- $\lambda = 1$</u>

$$(A-I) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - iR_1} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z) = (i,1,0)y + (-1,0,1), y, z \in \mathbb{R}$.

$$V_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>מרחב העצמי ששייך ל- $\lambda = 4$</u>

$$(A-4I) = \begin{pmatrix} -2 & -i & 1 \\ i & -2 & i \\ 1 & -i & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to 2R_3+R_1]{R_2\to 2R_2+iR_1} \begin{pmatrix} -2 & -i & 1 \\ 0 & -3 & 3i \\ 0 & -3i & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to \frac{-1}{3}R_2} \begin{pmatrix} -2 & -i & 1 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & -3i & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3+3iR_2} \begin{pmatrix} -2 & -i & 1 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+iR_2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to \frac{-1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z)=(1,i,1)z, z\in\mathbb{R}$.

$$V_4 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

נסמן הווקטורים בבסיס של V_1 ב- $\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. ונסמן הווקטור של הבסיס של V_4 ב- $\mathrm{v}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$. נבנה בסיס אורתוגונלי של V_1 ע"י שיטת גרם שמידט:

$$u_1=\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \|u_1\|^2=2 .$$

$$\begin{aligned} u_2 =& \mathrm{v}_2 - \frac{1}{\|u_1\|^2}\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle \cdot u_1 \\ =& \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot i \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

בסה"כ קיבלנו בסיס אורתוגונלי של V_1:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 2 \end{pmatrix} \right\} .$$

כעת נבנה בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{ \hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 2 \end{pmatrix} \right\} .$$

בבסיס של V_4 יש רק ווקטור אחד ופיכך הבסיס כבר אורתוגונלי. נסמן הבסיס האורתוגונלי של V_4 ב-

$$\left\{ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

נבנה בסיס אורתנורמלי:

$$\left\{ \hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

העמודות של המטריצה Q הנדרשת הן הווקטורים בבסיסים האורתונורמליים של המרחבים העצמיים:

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

והמטריצה האלכסונית D הנדרשת היא המטריצה שעל האלכסון הראשי שלה יש את הערכים העצמיים של A באותו סדר שהווקטורים העצמיים מופיעים ב-Q:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2) (6 נק')

$$f(x) = (x-4)^2(x-1) .$$

$$f(A) = Q \cdot f(D) \cdot Q^{-1} = Q \cdot \begin{pmatrix} f(4) & 0 & 0 \\ 0 & f(1) & 0 \\ 0 & 0 & f(1) \end{pmatrix} \cdot \bar{Q} = Q \cdot \begin{pmatrix} f(4) & 0 & 0 \\ 0 & f(1) & 0 \\ 0 & 0 & f(1) \end{pmatrix} \cdot \bar{Q} = \mathbb{0}_{3\times 3} .$$

ב) (7 נק')

נתון כי האופרטורים T ו- S צמודים לעצמם.

נניח כי $S\cdot T$ צמוד לעצמו.

$$\begin{aligned}
&\overline{S\cdot T} = S\cdot T && \text{(לפי ההנחה ש-}ST\text{ צמוד לעצמו)}\\
\Rightarrow\ &\bar{T}\cdot\bar{S} = S\cdot T && \text{(לפי הגדרה של הצמוד)}\\
\Rightarrow\ &T\cdot S = S\cdot T && (T \text{ ו- } S \text{ צמודים לעצמם})\ .
\end{aligned}$$

נניח כי S ו- T מתחלפים.

$$\begin{aligned}
&\overline{TS} = \overline{TS} &&\\
\Rightarrow\ &\overline{TS} = \overline{ST} && (T \text{ ו- } S \text{ מתחלפים})\\
\Rightarrow\ &\overline{TS} = \bar{T}\cdot\bar{S} && \text{(לפי ההגדרה של הצמוד)}\\
\Rightarrow\ &\overline{TS} = T\cdot S && (T \text{ ו- } S \text{ צמודים לעצמם})\ .
\end{aligned}$$

שאלה 2

א) 1) המטריצה משולשית לכן הערכים עצמיים הם האיברים על האלכסון הראשי. לכן הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = (x+1)(x-1)(x+2)(x-2) = (x^2-1)(x^2-4) = x^4 - 5x^2 + 4\ .$$

לפי המשפט קיילי-המילטון, A מאפסת את הפולינום האופייני שלה, כלומר $p_A(A) = 0$ לכן

$$A^4 - 5A^2 + 4I = 0 \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{-1}{4}\left(A^4 - 5A^2\right) = A\cdot\left(\frac{-1}{4}\left(A^3 - 5A\right)\right)$$

לכן

$$A^{-1} = \frac{-1}{4}\left(A^3 - 5A\right)\ .$$

נחשב את צד הימין:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = A\cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 2\\ 0 & 8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

לכן

$$\frac{-1}{4}\left(A^3-5A\right)=\frac{-1}{4}\left[-\begin{pmatrix}1&7&0&2\\0&8&0&0\\0&0&-8&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&5&0&10\\0&10&0&0\\0&0&-10&0\\0&0&0&-5\end{pmatrix}\right]$$

$$=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix}4&-2&0&8\\0&2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0&2\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\ .$$

לכן $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0&2\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.

2) קיבלנו כי $A^{-1}=\frac{-1}{4}\left(A^3-5A\right)$. נכפיל את שני האגפים מצד שמאל ב- A^{-1} ונקבל:

$$A^{-2}=\frac{-1}{4}\left(A^2-5I\right)$$

באחד שלבים הקודמים קיבלנו כי $A^2=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. נציב ונקבל כי

$$A^{-2}=\frac{-1}{4}\left[\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}-5I\right]=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix}-4&3&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{4}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0&0\\0&0&\frac{1}{4}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\ .$$

ב) **1)** נניח כי λ ערך עצמי של מטריצה A. ז"א

$$|\lambda I-A|=0\ .$$

הדטרמיננטה נשמרת ע"י שיחלוף לכן

$$\left|(\lambda I - A)^t\right| = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left|\lambda I - A^t\right| = 0$$

לכן λ שורש של הפולינום האופייני של A^t לכן λ ערך עצמי של A^t.

2) הפולינום האופייני הוא פולינום מתוקן לכן יש לו את הצורה

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + x^n \ .$$

לפי המשפט קיילי-המילטון, A מאפסת את הפולינום האופייני שלה. ז"א

$$\alpha_0 I + \alpha_1 A + \ldots + A^n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_0 I = -\alpha_1 A - \ldots - A^n = A\left((-\alpha_1)I + (-\alpha_2)A + \ldots + (-1)A^{n-1}\right)$$

הקבוע α_0 בהפולינום האופייני שווה ל- $|A|$. A הפיכה (נתון) לכן $|A| \neq 0$ לכן $\alpha_0 \neq 0$ לכן ההופכית α_0^{-1} קיימת. נכפיל ב- α_0^{-1} ונקבל:

$$I = A\left(\left(\frac{-\alpha_1}{\alpha_0}\right)I + \left(\frac{-\alpha_2}{\alpha_0}\right)A + \ldots + \left(\frac{-1}{\alpha_0}\right)A^{n-1}\right)$$

מכאן נקבל כי

$$A^{-1} = \left(\frac{-\alpha_1}{\alpha_0}\right)I + \left(\frac{-\alpha_2}{\alpha_0}\right)A + \ldots + \left(\frac{-1}{\alpha_0}\right)A^{n-1}$$

ולפיכך

$$A^{-1} \in \text{span}\left\{I, A, \cdots, A^{n-1}\right\} \ .$$

3) נניח ש $A^m \in \text{span}\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{m-1}\}$. אז קיימים סקלרים שך ש

$$A^m = \alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_{m-1}A^{m-1}$$

ז"א

$$A^m - \alpha_{m-1}A^{m-1} - \alpha_{m-2}A^{m-2} - \ldots - \alpha_1 A - \alpha_0 I_n = 0$$

לכן A מאפסת את

$$P(x) = x^m - \alpha_{m-1}x^{m-1} - \ldots - \alpha_1 x - \alpha_0 \in \mathbb{F}[x] \ .$$

נניח ש- A מאפסת את הפולינויום

$$Q(x) = \beta_m x^m + \beta_{m-1}x^{m-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0 \in \mathbb{F}[x]$$

כאשר $Q(x) \in \mathbb{R}_m[x]$. כיוון ש הסדר של $Q(x)$ הוא m אז $\beta_m \neq 0$. נעביר אגפים:

$$\beta_m A^m = -\left(\beta_{m-1}A^{m-1} + \ldots + \beta_1 A + \beta_0 I_n\right)$$

נחלק שני האגפים ב β_m:

$$A^m = -\left(\frac{\beta_{m-1}}{\beta_m}A^{m-1} + \ldots + \frac{\beta_1}{\beta_m}A + \frac{\beta_0}{\beta_m}I_n\right)$$

קיבלנו כי $A^m \in \text{span}\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{m-1}\}$.

שאלה 3

א) A נורמלית. לכן, לפי משפט הפירוק הספקטרלי, לכל ווקטור $w\in\mathbb{R}^2$:

$$A\cdot w = 1\cdot P_{V_1}(w)+5\cdot P_{V_5}(w)$$

ולפי נוסחת השלמה:

$$P_{V_1}(w)+P_{V_5}(w)=w \qquad \Rightarrow \qquad P_{V_1}(w)=w-P_{V_5}(w)\ .$$

מכאן נובע כי

$$A\cdot w = w+4\cdot P_{V_5}(w)$$

נבנה את המטריצה A לפי הנוסחה:

$$A=\left(A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

נמצא $A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ע"י משפט הפירוק הספקטרלי:

$$\begin{aligned}A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+4P_{V_5}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+4\cdot\frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+4\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+4P_{V_5}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+4\cdot\frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+4\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\ .\end{aligned}$$

לכן

$$A=\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}$$

ב)

<u>נתון:</u>

B הרמיטית לכן $\bar{B} = B$.
C אוניטרית, לכן $\bar{C} \cdot C = C \cdot \bar{C} = I$.

<u>צריך להוכיח:</u>

$T = B \cdot C = C \cdot B$ נורמלית.

<u>הוכחה:</u>

$$\begin{aligned} T \cdot \bar{T} &= (B \cdot C) \cdot (\bar{C} \cdot \bar{B}) && \text{(הגדרה של הצמודה)} \\ &= B \cdot C \cdot \bar{C} \cdot \bar{B} && (B \text{ ו } C \text{ מתחלפות}) \\ &= B \cdot \bar{B} && (C \text{ אוניטרית}) \\ &= B^2 && (B \text{ צמודה לעצמה}) \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{T} \cdot T &= \overline{(B \cdot C)} \cdot (C \cdot B) \\ &= \bar{C} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot B && \text{(הגדרה של הצמודה)} \\ &= \bar{C} \cdot \bar{B} \cdot B \cdot C && (B \text{ ו } C \text{ מתחלפות}) \\ &= \bar{C} \cdot B \cdot B \cdot C && (B \text{ צמודה לעצמה}) \\ &= \bar{C} \cdot C \cdot B \cdot B && (B \text{ ו } C \text{ מתחלפות}) \\ &= B \cdot B && (C \text{ אוניטרית}) \\ &= B^2 \ . \end{aligned}$$

לכן $T \cdot \bar{T} = \bar{T} \cdot T$ ולכן T נורמלית.

ג) לכל $u \in \ker T$,

$$T(u) = 0 \ .$$

$0 \in \ker T$ לכן $T(u) \in \ker T$ לכל $u \in \ker T$ לכן $\ker T$ הוא תת-מרחב ש T- שמור.

שאלה 4

א) נסמן:

$$U = \text{span}\left\{ \text{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{v}_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

נמצא תחילה בסיס למרחב:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 3 & 9 \\ 1 & -3 & -3 & -9 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & -5 & -6 & -17 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 5R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to 9R_4 + 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 \to -R_2]{R_3 \to \frac{1}{9} R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ז"א רק הווקטורים $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ בת"ל. המימד של U הוא 3 והווקטורים $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ מהווים בסיס של U. נבצע גרם שמידט על הבסיס שמצאנו:

(1 נסמן

$$U = \mathrm{span}\left\{ \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \qquad \|u_1\|^2 = 7 \ .$$

$$\begin{aligned} u_2 =& \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \\ =& \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

נבחור
$\|u_2\|^2 = 19$.

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}u_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2$$
$$= \begin{pmatrix}3\\3\\-3\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{7}\left\langle \begin{pmatrix}3\\3\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{19}\left\langle \begin{pmatrix}3\\3\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-4\\1\end{pmatrix}\right\rangle \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-4\\1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$\|u_3\|^2 = 2$. בסיס אורתוגונלי למרחב U:

$$B_U = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-4\\1\end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

2)

$$U = \mathrm{span}\left\{ \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix}, \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix}3\\3\\-3\\1\end{pmatrix}, \mathrm{v}_4 = \begin{pmatrix}8\\9\\-9\\4\end{pmatrix} \right\}$$

תזכורת:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \in U^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}, u_i \right\rangle = 0 \;, \quad \forall\ 1 \le i \le 3 \;.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -3 & 2 & 0\\ 3 & 3 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -5 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 9 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{9} & 0 \end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x, y, z, w) = \left(1, \frac{-10}{9}, \frac{2}{9}, 1\right) w$$

נבחור $U^\perp = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}9\\-10\\2\\9\end{pmatrix}\right\}$. לפיכך בסיס אורתוגונלי של $U^\perp$ הוא

$$B_{U^\perp} = \left\{\begin{pmatrix}9\\-10\\2\\9\end{pmatrix}\right\}$$

ב) **1)** הנוסחה אינה מגדירה מכפלת פנימית. תכונת לינאריות לא מתקיימת:

$$\langle \alpha f, g\rangle = \int_{-1}^{1} (\alpha f)^2(x) g(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \alpha^2 f^2(x) g(x)\, dx = \alpha^2 \int_{-1}^{1} f^2(x) g(x)\, dx = \alpha^2 \langle f, g\rangle \neq \alpha \langle f, g\rangle \ .$$

2) הנוסחה אינה מגדירה מ"פ. דוגמה נגדית: $a = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$,

$$\begin{aligned}\langle a, b\rangle &= 1\cdot 1\cdot i + 1\cdot 0\cdot 0 = i\ ,\\ \langle b, a\rangle &= 1\cdot i\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 0 = i\ ,\\ \overline{\langle a, b\rangle} &= -\, i\end{aligned}$$

$\langle b, a\rangle \neq \overline{a, b}$.