

חדו"א 1 סמסטר א' תשפד
עבודת בית 6: פולינום מקלורן, כלל לופיטל.

שאלה 1 הסבירו מהו כלל לופיטל וחשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \ln x - 1}{e^x - e} \quad \text{(א)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{e^x}}{x + e^x} \quad \text{(ב)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} \quad \text{(ג)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x} \quad \text{(ד)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{100}}{e^x} \quad \text{(ה)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad \text{(ו)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x \quad \text{(ז)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} \quad \text{(ח)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} \quad \text{(ט)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x)^{\frac{1}{\ln x}} \quad \text{(י)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad \text{(יא)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{(יב)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - \sin \frac{1}{x} - 1 \right) \quad \text{(יג)}$$

שאלה 2

(א) רשמו את פולינום מקלורן מסדר n עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

(1) $y = e^x$

(2) $y = \sin x$

(3) $y = \cos x$

(4) $y = -\ln(1-x)$

(5) $y = \frac{1}{1+x}$

(ב) רשמו פולינום מקלורן מסדר 2 ל- $y(x)$:

(1) $y = e^{2x}$

(2) $y = \sqrt{1+x}$

(3) $y = \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)$

(4) $y = \sqrt[3]{1+x}$

(ג) רשמו פולינום מקלורן מסדר 2 לפונקציה $y(x)$ המוגדרת בצורה סתומה:

$$y^5 + xy + e^x = 33.$$

(ד) רשמו פולינום מקלורן מסדר 2 לפונקציה $y(x)$ המוגדרת בצורה פרמטרית:

$$y = t^2 + 2t + 1, \quad x = te^t.$$

(ה) ידוע שפולינום מקלורן מסדר 3 של $f(x)$ הוא

$$P_3(x) = x - 3x^2 + 2x^3.$$

חשב את

$$f''(0) + f'''(0).$$

שאלה 3

(א) מצאו את נוסחת מקלורן של הפונקציה $f(x) = \ln(1+x)$.

(ב) הוכיחו שלכל $x > 0$ מתקיים

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

שאלה 4 חשבו בעזרת נוסחת מקלורן מתאימה את

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}.$$

שאלה 5

$$x = \ln(t^2 + 1), \quad y = t^3 + 1, \quad t > 0.$$

חשבו $f''(x)$ בנקודה $x = \ln 2$.

שאלה 6

רשמו את פולינום מקלורן מסדר 2 של פונקציה

$$f(x) = \ln |9x + 4|$$

$$P_2(x) = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}x + \underline{\hspace{2cm}}x^2.$$

שאלה 7

רשמו את פולינום מקלורן מסדר 2 של פונקציה $y(x)$ הנתונה בצורה פרמטרית:

$$\left. \begin{aligned} x &= t^3 - 1 \\ y &= \ln(t) + 5t^2 \end{aligned} \right\}.$$

שאלה 8

פתרו את הגבול הבא:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{5x} - 5x - 1}{3x^3 + x^2} \right).$$

שאלה 9

פתרו את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin(2x))}{\ln(\sin(11x))}.$$

שאלה 10

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{x}$$

שאלה 11

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 3^x}{3^x + 4^x}$$

שאלה 12

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right]^{1/x^2}$$

שאלה 13

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan(x)}{1 + \sin(x)} \right)^{\frac{1}{\sin(x)}}$$

שאלה 14

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + \sin(\pi x))^{\frac{1}{\log(x)}}$$

שאלה 15

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x + 1} \right)^{x+1}$$

שאלה 16

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{\cos(4x) - 1}$$

שאלה 17 $\lim_{x \rightarrow 6} (x - 5)^{\frac{x}{x-6}}$

שאלה 18 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{1+x} \right)^{2x}$

שאלה 19 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2(x))^{\frac{1}{\tan^2(x)}}$

שאלה 20 $\lim_{x \rightarrow 1} (6 - 5x)^{\frac{1}{\log(2-x)}}$

שאלה 21 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^{\log(x)}$

שאלה 22 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\cot(x)}$

שאלה 23 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\log(2x^2 + x) - 2 \log(x))$

שאלה 24 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{x})^{\cot(\sqrt{x})}$

שאלה 25 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x^2)^{\frac{3}{1 - \cos(2x)}}$

שאלה 26 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}}$

שאלה 27 $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x})^{\frac{1}{1-x}}$

שאלה 28 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x - \sin(2x)}$

שאלה 29 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x^2}} (1-x)^{\frac{1}{x^2}}$

שאלה 30 להעשרה בלבד לא בסילבוס

הוכח:

הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ קיים אם ורק אם $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$.

תשובות

שאלה 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \ln x - 1}{e^x - e} = \frac{3}{e} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{e^x}}{x + e^x} = 0 \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} = 0 \quad (\text{ג})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x} = 1 \quad (\text{ד})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{100}}{e^x} = 0 \quad (\text{ה})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{2} \quad (\text{ו})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0 \quad (\text{ז})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \quad (\text{ח})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1 \quad (\text{ט})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{1/2} \quad (\text{י})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{1/3} \quad (\text{יא})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = e^2 \quad (\text{יב})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - \sin \frac{1}{x} - 1 \right) = \frac{1}{2} \quad (\text{יג})$$

שאלה 2

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad (\text{1} \quad \text{א})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots + \frac{(-1)^{(n-1)/2} x^n}{n!} + \dots \quad (\text{2})$$

$$\cos x = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots + \frac{(-1)^{n/2} x^n}{n!} + \dots \quad (\text{3})$$

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} \quad (\text{4})$$

$$y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n \quad (5)$$

(1) (ב)

$$P_2(x) = 1 + 2x + 2x^2$$

(2)

$$P_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

(3)

$$P_2(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

(4)

$$P_2(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$$

(ג)

$$y^5 + xy + e^x = 33 \quad (\#)$$

שלב 1 :

נציב $x = 0$:

$$y^5(0) + 0 \cdot y(0) + e^0 = 33$$

$$y^5(0) + 1 = 33$$

$$y^5(0) = 32$$

$$y(0) = \sqrt[5]{32}$$

$$y(0) = 2 .$$

(#1)

שלב 2 :

גוזרים $(\#)$:

$$5y^4y' + (xy)' + e^x = 0$$

$$5y^4y' + y + xy' + e^x = 0$$

(#2)

שלב 3 :

נציב $x = 0$ ב $(\#2)$:

$$5y^4(0)y'(0) + y(0) + 0 \cdot y'(0) + e^0 = 0$$

$$5y^4(0)y'(0) + y(0) + 1 = 0$$

(#2)

נציב $y(0) = 2$ מ (#1) ונקבל:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 2^4 y'(0) + 2 + 1 &= 0 \\ 80y'(0) &= -3 \\ y'(0) &= \frac{-3}{80}. \end{aligned} \quad \text{(#3)}$$

שלב 4 :

גוזרים (#2):

$$\begin{aligned} (5y^4 y')' + y' + (xy')' + (e^x)' &= 0 \\ 20y^3 \cdot y' \cdot y' + 5y^4 \cdot y'' + y' + xy'' + y' + e^x &= 0 \\ 20y^3 \cdot y'^2 + 5y^4 \cdot y'' + 2y' + xy'' + e^x &= 0 \end{aligned} \quad \text{(#4)}$$

שלב 5 :

נציב $x = 0$ ב (#4):

$$\begin{aligned} 20y^3(0) \cdot y'^2(0) + 5y^4(0) \cdot y''(0) + 2y'(0) + xy''(0) + e^0 &= 0 \\ 20y^3(0) \cdot y'^2(0) + 5y^4(0) \cdot y''(0) + 2y'(0) + xy''(0) + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

נציב $y(0) = 2$ ו $y'(0) = -\frac{3}{80}$:

$$\begin{aligned} 20 \cdot 2^3 \cdot \left(-\frac{3}{80}\right)^2 + 5 \cdot 2^4 \cdot y''(0) + 2 \cdot \frac{-3}{80} + 0 \cdot y''(0) + 1 &= 0 \\ \frac{18}{80} + 80 \cdot y''(0) - \frac{6}{80} + 1 &= 0 \\ 80 \cdot y''(0) &= \frac{-23}{20} \\ y''(0) &= \frac{-23}{1600}. \end{aligned} \quad \text{(#5)}$$

נוסחת מקלורן מסדר 2 הוא

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2.$$

נציב (#1), (#3) ו (#5) ונקבל

$$P_2(x) = 2 - \frac{3}{80}x - \frac{23}{3200}x^2$$

(ד)

$$y = t^2 + 2t + 1, \quad x = te^t \quad (*)$$

שלב 1 :

נציב $x = 0$:

$$0 = te^t \Rightarrow t = 0. \quad (*1)$$

שלב 2 :

נציב $x = 0$ ב y

$$y(x = 0) = y(t = 0) = 1. \quad (*2)$$

שלב 3 :

גוזרים $(*)$:

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t} \\ x'_t &= e^t + te^t = (1+t)e^t \\ y'_t &= 2t + 2 = 2(1+t) \\ y'_x &= \frac{2(1+t)}{(1+t)e^t} = \frac{2}{e^t} = 2e^{-t} \end{aligned} \quad (*3)$$

שלב 4 :

נציב $x = 0$ ב $(*3)$:

$$y'(x = 0) = y'(t = 0) = 2 \quad (4*)$$

שלב 5 :

נחשב y''_{xx} :

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)_t}{x'_t}$$

נציב y'_x ו x'_t מ $(*3)$:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)_t}{x'_t}$$

$$y''_{xx} = \frac{(2e^{-t})'_t}{(1+t)e^t} = \frac{-2e^{-t}}{(1+t)e^t} = \frac{-2e^{-2t}}{1+t} \quad (*5)$$

שלב 6 :

$$:t = 0$$

$$y''_{xx}(x=0) = y''_{xx}(t=0) = \frac{-2e^{-0}}{1} = -2 . \quad (*6)$$

שלב 7 :

נוסחת מקלורן מסדר 2 הוא

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 .$$

נציב (*2), (*4) ו (*6) ונקבל

$$P_2(x) = 1 + 2x - x^2$$

(ה) נתון כי פולינום מקלורן מסדר 3 של $f(x)$ הוא $P_3(x) = x - 3x^2 + 2x^3$. ז"א

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x - 3x^2 + 2x^3 .$$

כלומר

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 , \\ f'(0) &= 1 , \\ \frac{f''(0)}{2} &= -3 \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -6 , \\ \frac{f'''(0)}{6} &= 2 \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 12 . \end{aligned}$$

לכן

$$f''(0) + f'''(0) = -6 + 12 = 6$$

שאלה 3

(א)

$f(x) = \ln(1+x)$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \frac{1}{1+x}$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$	$f''(0) = -1$
$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$	$f^{(3)}(0) = 2$
$f^{(4)}(x) = \frac{-3!}{(1+x)^4}$	$f^{(4)}(0) = -3!$
$f^{(5)}(x) = \frac{4!}{(1+x)^5}$	$f^{(5)}(0) = 4!$
\vdots	
$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^n}$	$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\
 &= 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n
 \end{aligned}$$

(ב) צריך להוכיח:

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

הוכחה:

$$P_2(x) = x - \frac{x^2}{2} + R_2(x) ,$$

כאשר

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3 = \frac{1}{3(1+c)^3}x^3 > 0$$

לכן

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + R_2(x) > x - \frac{x^2}{2} . \quad (*)1$$

$$P_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + R_3(x) ,$$

כאשר

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 = \frac{-1}{4(1+c)^4}x^4 < 0$$

לכן

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + R_3(x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} . \quad (*)2$$

לפי (*)1 ו (*)2 נקבל

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} .$$

משל.

שאלה 4 נגדיר

$$f(x) = e^x \sin x - x(1+x) .$$

פולינום מקלורן מסדר 3 הוא

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + R_4(x) .$$

$f(x) = e^x \sin x - x(1+x)$	$f(0) = 0$
$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x - 1 - 2x$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = e^x \sin x + e^x \cos x - e^x \sin x + e^x \cos x - 2 = 2e^x \cos x - 2$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x$	$f'''(0) = 2$

לכן

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + R_4(x) \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 . \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x \right) = \frac{1}{3}.$$

שאלה 5

שלב 1 נחשב הערך של t כאשר $x = \ln 2$

$$\ln 2 = \ln(t^2 + 1) \quad \Rightarrow \quad t^2 + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad t = 1.$$

שלב 2 נחשב $y'(x)$

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$x'(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}, \quad y'(t) = 3t^2.$$

לכן

$$y'(x) = \frac{3t^2}{\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)} = \frac{3t(t^2+1)}{2} = \frac{3t^3+3t}{2} = \frac{3}{2}(t^3+t)$$

שלב 3 נחשב $y''(x)$

$$y''(x) = \frac{(y'(x))'_t}{x'(t)}$$

$$(y'(x))'_t = \frac{3}{2}(3t^2+1).$$

$$y''(x) = \frac{3(3t^2+1)}{2 \cdot 3t^2} = \frac{1(3t^2+1)}{2t^2}.$$

$$y''(x = \ln 2) = y''(t = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 1^2 + 1}{1^2} = 2.$$

שאלה 6

$$f(x) = \ln|9x+4| \quad \Rightarrow \quad f(0) = \ln(4).$$

$$f'(x) = \frac{9}{9x+4} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \frac{9}{4}.$$

$$f''(x) = \frac{-81}{(9x+4)^2} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = \frac{-81}{16}.$$

נוסחת מקלורן היא

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 .$$

נציב ונקבל

$$P_2(x) = \ln(4) + \frac{9x}{4} - \frac{81x^2}{16} .$$

שאלה 7

שלב 1 נחשב את הערך של הפרמטר t עבורו $x = 0$:

$$0 = t^3 - 1 \quad \Rightarrow \quad t^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad t = 1 .$$

שלב 2 נחשב $y'(x)$ לפי הנוסחה $y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t}$:

$$y'_t = \frac{1}{t} + 10t = \frac{1 + 10t^2}{t} , \quad x'_t = 3t^2 .$$

לכן

$$y'(x) = \frac{1 + 10t^2}{3t^3} .$$

שלב 3 נציב $t = 1$:

$$y'(x = 0) = y'(t = 1) = \frac{11}{3} .$$

שלב 4 נחשב $y''(x)$ לפי הנוסחה $y''(x) = \frac{(y'(x))'_t}{x'_t}$:

$$y'(x) = \frac{1 + 10t^2}{3t^3} = \frac{u}{v} , \quad u'_t = 20t , \quad v'_t = 9t^2 ,$$

לכן לפי כלל המנה,

$$\begin{aligned} (y'(x))'_t &= \frac{u'_t v - v'_t u}{v^2} \\ &= \frac{20t \cdot 3t^3 - 9t^2 \cdot (1 + 10t^2)}{9t^6} \\ &= \frac{60t^4 - 9t^2 - 90t^4}{9t^6} \\ &= \frac{-9t^2 - 30t^4}{9t^6} \\ &= \frac{-3t^2(3 + 10t^2)}{9t^6} \\ &= \frac{-(3 + 10t^2)}{3t^4} . \end{aligned}$$

לכן

$$y''(x) = \frac{(y'(x))'_t}{x'_t} = \frac{-(3 + 10t^2)}{3t^4 \cdot 3t^2} = \frac{-(3 + 10t^2)}{9t^6} .$$

שלב 5) נציב $t = 1$:

$$y''(x=0) = y''(t=1) = \frac{-13}{9}.$$

שלב 6)

$$P_2(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 = 5 + \frac{11x}{3} - \frac{13x^2}{9}.$$

שאלה 8

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{5x} - 5x - 1}{3x^3 + x^2} \right) = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\stackrel{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(e^{5x} - 5x - 1)'}{(3x^3 + x^2)'} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5e^{5x} - 5}{9x^2 + 2x} \right)$$

$$= \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\stackrel{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(5e^{5x} - 5)'}{(9x^2 + 2x)'} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{25e^{5x}}{18x + 2} \right)$$

$$= \frac{25}{2}.$$

שאלה 9

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin(2x))}{\ln(\sin(11x))} = \left[\frac{-\infty}{-\infty} \right]$$

$$\stackrel{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2 \cos(2x)}{\sin(2x)}}{\frac{11 \cos(11x)}{\sin(11x)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \tan(11x)}{11 \tan(2x)}$$

$$= \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\stackrel{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cdot 11 \sec(11x)}{11 \cdot 2 \sec(2x)}$$

$$= \frac{\sec(0)}{\sec(0)}$$

$$= 1.$$

שאלה 10

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{x} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2(2x))'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(2x) 2 \cos(2x)}{1} = 4 \sin(0) \cos(0) = 0 .$$

שאלה 11

0

שאלה 12

$\frac{1}{\sqrt{e}}$

שאלה 13

1

שאלה 14

$e^{2-\pi}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + \sin(\pi x))^{\frac{1}{\log(x)}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(x^2 \cdot \left[1 + \frac{\sin(\pi x)}{x^2} \right] \right)^{\frac{1}{\log(x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x^{2/\log x} \left(1 + \frac{\sin(\pi x)}{x^2} \right)^{\frac{1}{\log(x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x^{2/\log x} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{\sin(\pi x)}{x^2} \right)^{\frac{1}{\log(x)}} \end{aligned}$$

הגבול הראשון הוא

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{2/\log x} = \lim_{x \rightarrow 1} (e^{\log x})^{2/\log x} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{2 \log x / \log x} = e^2 .$$

הגבול השני הוא

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{\sin(\pi x)}{x^2} \right)^{1/\log(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\left(1 + \frac{\sin(\pi x)}{x^2} \right)^{x^2/\sin(\pi x)} \right]^{\sin(\pi x)/(x^2 \log(x))}$$

שים לב $\sin \pi x$ מתאפס כאשר $x \rightarrow 1$ ולכן $\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{1/y} = e$, לכן נקבל

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{\sin(\pi x)}{x^2} \right)^{1/\log(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\sin(\pi x)/(x^2 \log(x))} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \sin(\pi x)/(x^2 \log(x))}$$

הגבול $\lim_{x \rightarrow 1} \sin(\pi x)/(x^2 \log(x))$ נמצא ע"י כלל לופיטל:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x^2 \log x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sin \pi x)'_x}{(x^2 \log x)'_x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{x + 2x \log x} = -\pi$$

לכן $\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{\sin(\pi x)}{x^2} \right)^{1/\log(x)} = e^{-\pi}$ סך הכל

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + \sin(\pi x))^{\frac{1}{\log(x)}} = e^{2-\pi}$$

שאלה 15

e

שאלה 16

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\cos(4x) - 1} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2 x)'}{(\cos(4x) - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{-4 \sin(4x)} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \sin x \cos x)'}{(-4 \sin(4x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x}{-16 \cos(4x)} = \frac{2 \cos^2 0 - 2 \sin^2 0}{-16 \cos(0)} = \frac{-2}{16} = \frac{-1}{8}.$$

 e^6 **שאלה 17** e^4 **שאלה 18** $\frac{1}{e}$ **שאלה 19** e^5 **שאלה 20**1 **שאלה 21** e **שאלה 22** $\log(2)$ **שאלה 23** e **שאלה 24** e^3 **שאלה 25**3 **שאלה 26**

שים לב:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} &= \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \cdot \frac{\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1}}{\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2}} \\ &= \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2})(\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1})}{(\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1})(\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1})} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2}} \\ &= \frac{x+2 - (3x-2)}{4x+1 - (5x-1)} \cdot \frac{\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2}} \\ &= \frac{-2x+4}{-x+2} \cdot \frac{\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2}} \\ &= \frac{-2(x-2)}{-(x-2)} \cdot \frac{\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2}} \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2}} \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[2 \cdot \frac{\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[2 \cdot \frac{\sqrt{9} + \sqrt{9}}{\sqrt{4} + \sqrt{4}} \right] \\ &= 3.\end{aligned}$$

שאלה 27 $\frac{1}{\sqrt{e}}$

שאלה 28 -2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x - \sin(2x)} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(2x))'}{(x - \sin(2x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(2x)}{1 - 2 \cos(2x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos(2x)}{\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2 \cos(2x))} = \frac{2 \cos(0)}{(1 - 2 \cos(0))} = -2.$$

שאלה 29 $\frac{1}{e}$
שים לב

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{x^2}} (1-x)^{\frac{1}{x^2}} &= ((1+x)(1-x))^{\frac{1}{x^2}} \\ &= (1-x^2)^{\frac{1}{x^2}}\end{aligned}$$

לכן, אם נגדיר משתנה חדש $y \equiv x^2$ ושים לב כי $y \rightarrow 0$ בתהליך כאשר $x \rightarrow 0$, אז

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x^2}} (1-x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1-x^2)^{\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} (1-y)^{\frac{1}{y}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} (1-y)^{\frac{-1}{-y}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1-y)^{\frac{1}{-y}} \right]^{-1} \\ &= e^{-1} = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

שאלה 30

\Leftarrow

נתון כי $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, אז לפי ההגדרה $\forall \epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon .$$

שים לב

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta &\rightsquigarrow -\delta < x - a < 0 \quad \text{או} \quad 0 < x - a < \delta \\ &\rightsquigarrow a - \delta < x < a \quad \text{או} \quad a < x < a + \delta \\ &\rightsquigarrow x \in (a - \delta, a) \quad \text{או} \quad x \in (a, a + \delta) \end{aligned}$$

כלומר, $\exists \delta > 0, \forall \epsilon$ כך ש-

$$x \in (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \quad (1*)$$

$$x \in (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \quad (2*)$$

אזי, בהינתן ערך מסוים ל- ϵ , ניתן למצוא ערך של δ כך שהתנאים (1*) ו- (2*) מתקיימים. אבל (1*) דווקא התנאי ההכרחי לקיום הגבול $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$, ו- (2*) דווקא התנאי ההכרחי לקיום הגבול $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$.

לכן הוכחנו כי

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad \text{ו-} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L .$$

\Rightarrow

אם $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, אז $\forall \epsilon > 0$ קיים $\delta_1 > 0$ כך ש-

$$x \in (a - \delta_1, a) \quad \Rightarrow \quad |f - L| < \epsilon , \quad (1\#)$$

ו- $\forall \epsilon > 0$ קיים $\delta_2 > 0$ כך ש-

$$x \in (a, a + \delta_2) \quad \Rightarrow \quad |f - L| < \epsilon . \quad (2\#)$$

נגדיר $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ אז

$$\begin{aligned} x \in (a - \delta_1, a) \quad \text{ו-} \quad x \in (a, a + \delta_2) &\rightsquigarrow x \in (a - \delta_1, a + \delta_2) \\ &\rightsquigarrow x \in (a - \delta, a + \delta) \\ &\rightsquigarrow 0 < |x - a| < \delta . \end{aligned} \quad (3\#)$$

לכן על-סמך (3#) והתנאים (1#) ו- (2#) הנתונים, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ כך ש-

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon .$$

אבל זה דווקא התנאי ההכרחי לקיום הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. לכן הוכחנו כי

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad \text{ו-} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L .$$