

## שעור 7

### משחק בייסיאני

#### 7.1 משחק בייסיאני

במשחק עם מידע מלא, כל פונקצית התשלום של כל השחקן היא ידיעה משותפת. בניגוד, במשחק עם מידע לא מלא, יש לפחות שחקן אחד עם אי-ודאות על פונקצית התשלום של לפחות שחקן אחד אחר.

דוגמה נפוצה של משחק אם מידע לא מלא היא מכרז סגור, שבו השחקנים לא יודעים את ההצעות של שאר השחקנים.

##### הגדרה 7.1 משחק בייסיאני

הצורה הנורמלית של משחק בייסיאני  $n$  שחקנים היא

$$G = \{ \{A_1, \dots, A_n\}, \{T_1, \dots, T_n\}, \{p_1, \dots, p_n\}, \{u_1, \dots, u_n\} \}$$

כאשר

- $A_i$  הקבוצת הפעולות של שחקן  $i$ .
- $T_i = (t_i^1, t_i^2, \dots)$  הקבוצות הטיפוסים של שחקן  $i$ .
- $p_i$  מסמן את האמונה של שחקן  $i$  בטיפוסים האפשריים של שאר ה- $n-1$  שחקנים ומוגדר

$$p_i = P(t_{-i}|t_i)$$

$$t_{-i} = (t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n) \text{ כאשר}$$

לפי הרסיניי (1967) התזמון של משחק בייסיאני הוא לפי הסדר הבא:

- (1) צעד גורל בוחר בוקטור טיפוסים  $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$  כאשר  $t_i$  נבחר מהקבוצת טיפוסים האפשריים  $T_i$ .
- (2) שחקן הגורל מגלה  $t_i$  לשחקן  $i$  אבל לא לאף שחקן אחר.
- (3) השחקנים בוחרים בפעולות. שחקן 1 בוחר בפעולה  $a_1$  מקבוצת הפעולות  $A_1$ , שחקן 2 בוחר בפעולה  $a_2$  מקבוצת הפעולות  $A_2$ , וכן הלאה.
- (4) שחקן  $i$  מקבל תשלום

$$u_i(a_1, a_2, \dots, a_n; t_i) .$$

אנחנו מניחים שזה ידיעה משותפת שבשלב 1 של התזמון של משחק בייסיאני, שחקן הגורל בוחר בוקטור טיפוסים  $t = (t_1, \dots, t_n)$  לפי פונקצית ההסתברות  $p(t)$ .  
כאשר שחקן הגורל מגלה את  $t_i$  לשחקן  $i$ , הוא מחשב את האמונה

$$p_i = P(t_{-i}|t_i) = \frac{P(t_{-i} \cap t_i)}{P(t_i)} = \frac{P(t_{-i} \cap t_i)}{\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} P(t_{-i} \cap t_i)}$$

## דוגמה 7.1 ()

אליס (שחקן  $I$  שחקן השורה) ובוב (שחקן  $II$  שחקן העמודה) משחקים משחק שבו פונקצית התשלומים היא אחת משתי פונקציות התשלומים המופיעות למטה. במשחק זה יש לבוב שתי פעולות אפשריות  $a$  ו- $b$  ולאליס יש שתיים או שלוש פעולות אפשריות, כתלות בפונקצית התשלומים שנבחרה.

$G_1$  המשחק הנסתר

		$II$	
		$a$	$b$
$t_1 = \text{buy:}$	$I$		
	$U$	1, 0	0, 2
	$V$	0, 3	1, 0

$G_2$  המשחק הנסתר

		$II$	
		$a$	$b$
$t_1 = \text{sell:}$	$I$		
	$U$	1, 1	1, 0
	$V$	0, 2	1, 1
	$W$	1, 0	0, 2

אליס יודעת את פונקצית התשלומים (ולכן היא בפרט יודעת אם ברשותה שתיים או שלוש פעולות) ובוב יודע רק שפונקציות התשלומים ניתנות או על ידי המירצה  $G_1$  או על ידי המטריצה  $G_2$ . הוא מייחס הסתברות  $p$  לכך שנטריצת התשלומים היא  $G_1$  והסתברות  $1 - p$  לכך שמטריצת התשלומים היא  $G_2$ . תיאור זה ידיעה משותפת בין אליס ובוב.

- הקבוצת בטיפוסים של שחקן  $I$  הן

$$T_1 = (\text{buy}, \text{sell}) , \quad T_2 = (t_2) .$$

לשחקן  $II$  יש רק טיפוס אחד שנסמן  $T_2 = \{t_2\}$ .

- הפעולות האפשריים של  $I$  הן

$$A_1 = (U, V, W)$$

והפעולות האפשריים של  $II$  הן

$$A_2 = (a, b) .$$

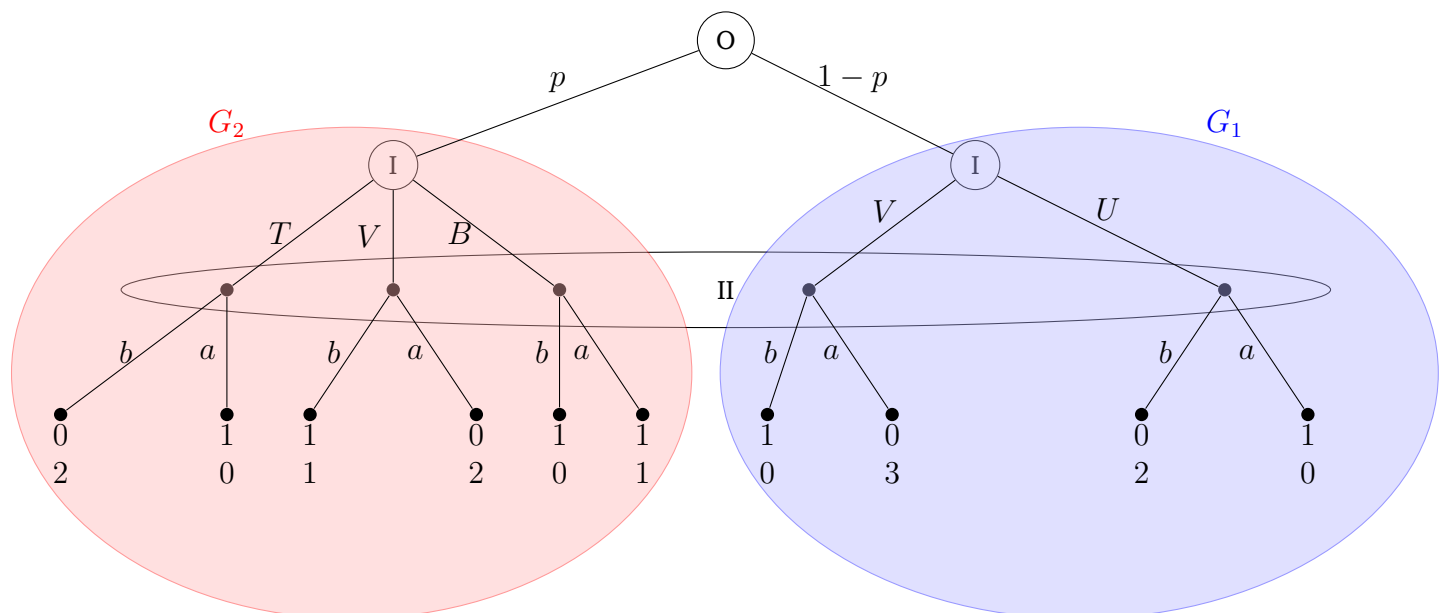
- יש רק אפשרות אחת לאמונה של שחקן  $I$ :

$$p_1 = P(t_2 | t_1 = \text{buy}) = 1$$

יש שתי אפשרויות לאמונה של שחקן  $II$ :

$$p_2 = P(t_1 = \text{buy} | t_2) , \quad p_2 = P(t_1 = \text{sell} | t_2) .$$

נסמן  $P(t_1 = \text{sell} | t_2) = 1 - p$  ו-  $P(t_1 = \text{buy} | t_2) = p$ .



מצב אמונות זה הוא מצב האמונות של השחקנים במשחק בצורה רחבה המופיע לעיל. ברגע שהשחקנים באים לשחק את פעולותיהם. במשחק זה צעד גורל בוחר את  $G_1$  ו-  $G_2$  לפי ההסתברויות  $p$  ו-  $1 - p$  בהתאמה. הבחירה נודעת לאליס אך לא לבוב. בעץ המשחק כל משחק נסתר מוקף באליפסה. אף אחד משני המשחקים הנסתרים אינו תת-משחק מכיוון שישנה קבוצת ידיעה המכילה קדקודים בשניהם.

## הגדרה 7.2 אסטרטגיה במשחק בייסיאני

נתון בייסיאני:

$$G = \{(A_1, \dots, A_n), (T_1, \dots, T_n), (p_1, \dots, p_n), u_1, \dots, u_n\}.$$

אסטרטגיה של שחקן  $i$  היא פונקציה  $s_i(t_i)$  אשר משייכת לכל  $t_i \in T_i$  פעולה  $a_i$  שבוחר שחקן  $i$  מטיפוס  $t_i$  עץ פי האסטרטגיה  $s_i$ .

## דוגמה 7.2 (דילמה השריף)

שריף עומד מול חשוד חמוש. שניהם צריכים להחליט בו זמנית אם לירות בשני או לא.

החשוד יכול להיות מטיפוס "פושע" או מטיפוס "אזרח". לשריף יש רק טיפוס אחד. החשוד יודע את טיפוסו ואת טיפוס השריף, אך השריף אינו יודע את טיפוסו של החשוד. לפיכך, יש מידע לא שלם. לכן המשחק זה הוא משחק בייסיאני.

השריף מעדיף להגן על עצמו ולירות אם החשוד יורה, או לא לירות אם החשוד לא עושה זאת (גם אם החשוד עברייני). החשוד מעדיף לירות אם הוא עברייני, גם אם השריף לא יורה, אבל מעדיף לא לירות אם הוא אזרח, גם אם השריף יורה.

רשמו את המשחק בצורה רחבה ובצורה אסטרטגית.

## פתרון:

נקרא לחשוד שחקן  $I$  ונקרא לשריף שחקן  $II$ . השריף מייחס הסתברות  $p$  לכך שחשוד הוא מטיפוס "פושע" והסתברות  $1 - p$  שהחשוד מטיפוס "אזרח".

שני השחקנים מודעים להסתברות הזו.

משחק זה מוגדר על ידי

$$G = \{N, (A_1, A_2), (T_1, T_2), (p_1, p_2), (u_1, u_2)\}$$

• כאשר קבוצת השחקנים הינה

$$N = \{I, II\} = \{\text{חשוד}, \text{שריף}\}.$$

• קבוצת הפעולות הן

$$A_1 = \{a_1^1, a_1^2\} = \{\text{לא לירות}, \text{לירות}\}, \quad A_2 = \{a_2^1, a_2^2\} = \{\text{לא לירות}, \text{לירות}\}.$$

• הטיפוסים הינם

$$T_{\text{חשוד}} = T_1 = \{t_1^1, t_1^2\} = \{\text{פושע}, \text{אזרח}\}, \quad T_{\text{שריף}} = T_2 = \{t_2\}.$$

• יש שתי אפשרויות לאמונה של שחקן  $II$  (השריף):

$$p_2 = P(t_1 = \text{פושע} | t_2) = p, \quad p_2 = P(t_1 = \text{אזרח} | t_2) = 1 - p.$$

- הפונקציה התשלומים ניתנת בהצורה אסטרטגית למטה:

$t_{\text{חשוד}} = \text{פושע}$		$t_{\text{חשוד}} = \text{אזרח}$	
$I$ חשוד	שריף $II$	shoot	not shoot
	shoot	0, 0	2, -2
$I$ חשוד	not shoot	-2, -1	-1, 1

$t_{\text{חשוד}} = \text{אזרח}$		$t_{\text{חשוד}} = \text{פושע}$	
$I$ חשוד	שריף $II$	shoot	not shoot
	shoot	-3, -1	-1, -2
$I$ חשוד	not shoot	-2, -1	0, 0

האסטרטגיה של שחקן  $I$  (החשוד), לפי התיאור בשאלה, היא

$$s_1(t_1 = \text{פושע}) = \text{לירות}, \quad s_1(t_1 = \text{אזרח}) = \text{לא לירות}.$$

כעת נמצא את השווי משקל הבייסיאני.

אם טיפוסו של החשוד הוא "פושע", האסטרטגיה השולטת של החשוד היא "לירות".

אם טיפוסו של החשוד הוא "אזרח", האסטרטגיה השולטת של החשוד היא "לא לירות".

לאחר סילוק של אסטרטגיות הנשלטות חזק,

אם השריף יורה הוא יקבל תשלום 0 בהסתברות  $p$  ויקבל תשלום -1 בהסתברות  $1-p$ . כלומר תוחלת התשלום של השריף היא  $p-1$ .

אם השריף לא יורה הוא יקבל תשלום -2 בהסתברות  $p$  ויקבל תשלום 0 בהסתברות  $1-p$ . כלומר תוחלת התשלום של השריף היא  $-2p$ .

לפיכך השריף תמיד יורה אם

$$p-1 > -2p \Rightarrow p > \frac{1}{3}.$$

■

### הגדרה 7.3 שווי משקל נאש בייסיאני

נתון משחק בייסיאני:

$$G = \{(A_1, \dots, A_n), (T_1, \dots, T_n), (p_1, \dots, p_n), u_1, \dots, u_n\}.$$

הווקטור אסטרטגיות  $(s_1^*, \dots, s_n^*)$  הוא שווי משקל נאש בייסיאני אם לכל שחקן  $i$  ולכל טיפוס  $t_i \in T_i$ :

$$\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} u_i(s_1^*(t_1), \dots, s_i^*(t_i), \dots, s_n^*(t_n)) P(t_{-i}|t_i) = \max_{a_i \in A_i} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} u_i(s_1^*(t_1), \dots, a_i, \dots, s_n^*(t_n)) P(t_{-i}|t_i)$$

ז"א אף שחקן לא רוצה לשנות את האסטרטגיה שלו (שלה), גם אם השינוי הוא בפעולה אחת בטיפוס אחד.

### הגדרה 7.4 משחק שני שחקנים בייסיאני

הצורה הנורמלית של משחק בייסיאני 2 שחקנים היא

$$G = \{(A_1, A_2), (T_1, T_2), (p_1, p_2), u_1, u_2\}$$

כאשר

- $A_1 = \{a_1, b_1, \dots\}$  קבוצת הפעולות לשחקן 1 ו-  $A_2 = \{a_2, b_2, \dots\}$  קבוצת הפעולות לשחקן 2
- $T_1$  קבוצת ערכים פרטיים של שחקן 1 ו-  $T_2$  קבוצת ערכים פרטיים של שחקן 2.
- $p_1$  מסמן את ההסתברות לפי שחקן 1, שהערך פרטי של שחקן 2 הוא  $t_2$  בידיעה שהערך פרטי שלו

הוא  $t_1$ :

$$p_1 = P(t_2|t_1)$$

וכן  $p_2$  מסמן את ההסתברות לפי שחקן 2, שהערך פרטי של שחקן 1 הוא  $t_1$  בידיעה שהערך פרטי שלו הוא  $t_2$ :

$$p_2 = P(t_1|t_2)$$

•  $u_1$  פונקציית התשלום של שחקן 1 שהיא פונקציה של הפעולות  $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$  והערך הפרטי שלו  $t_1 \in T_1$  שידוע רק לשחקן 1:

$$u_1(a_1, a_2, t_1)$$

וכן  $u_2$  פונקציית התשלום של שחקן 2 שהיא פונקציה של הפעולות  $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$  והערך הפרטי שלו  $t_2 \in T_2$  שידוע רק לשחקן 2:

$$u_2(a_1, a_2, t_2) .$$

### הגדרה 7.5 אסטרטגיה במשחק שני שחקנים בייסיאני

נתון משחק שני שחקנים בייסיאני:

$$G = \{(A_1, A_2), (T_1, T_2), (p_1, p_2), u_1, u_2\} .$$

אסטרטגיה לשחקן 1 היא פונקציה  $s_1(t_1)$  של  $t_1 \in T_1$  כך שלכל  $t_1 \in T_1$  הפונקציה  $s_1(t_1)$  נותנת פעולה  $a_1 \in A_1$

$$s_1 : t_1 \mapsto a_1 .$$

וכן אסטרטגיה של שחקן 2 היא פונקציה  $s_2(t_2)$  של  $t_2 \in T_2$  כך שלכל  $t_2 \in T_2$  הפונקציה  $s_2(t_2)$  נותנת פעולה  $a_2 \in A_2$

$$s_2 : t_2 \mapsto a_2 .$$

### הגדרה 7.6 שיווי משקל נאש בייסיאני

נתון משחק שני שחקנים בייסיאני:

$$G = \{(A_1, A_2), (T_1, T_2), (p_1, p_2), u_1, u_2\} .$$

הווקטור אסטרטגיות  $(s_1^*, s_2^*)$  הוא שיווי משקל נאש בייסיאני אם

$$\sum_{t_2 \in T_2} u_1(s_1^*(t_1), s_2^*(t_2)) P(t_2|t_1) = \max_{a_1 \in A_1} \sum_{t_2 \in T_2} u_1(a_1, s_2^*(t_2)) P(t_2|t_1)$$

$$\sum_{t_1 \in T_1} u_2(s_1^*(t_1), s_2^*(t_2)) P(t_1|t_2) = \max_{a_2 \in A_2} \sum_{t_1 \in T_1} u_2(s_1^*(t_1), a_2) P(t_1|t_2)$$

### דוגמה 7.3 (מלחמת המינים עם ידיעה לא שלמה)

זוג מתכנן בילוי למוצא שבת. האפשרויות העומדות לרשותם הן מסעדה (Restaurant (R) או צפייה במשחק כדורגל, (Football (F). הגבר (Pete (P מעדיף צפייה במשחק הכדורגל בעוד האישה (Camilla (C מעדיפה את המסעדה אך שניהם מעדיפים להיות ביחד גם אם הבילוי המשותף הוא הפחות עדיף בעיניהם.

Camilla מקבלת תשלום  $2 + t_c$  אם שניהם הולכים למסעדה כאשר  $t_c$  ערך פרטי שידוע רק ל-Camilla ולא ל-Pete.

Pete מקבל תשלום  $2 + t_p$  אם שניהם הולכים למשחק כדורגל כאשר  $t_p$  ערך פרטי שידוע רק ל-Pete ולא ל-Camilla.

Pete \ Camilla	Restaurant	Football
	Restaurant	Football
Restaurant	$2 + t_c, 1$	$0, 0$
Football	$0, 0$	$1, 2 + t_p$

הערך הפרטי  $t_C$  מתפלג אחיד בטווח  $[0, x]$  ו  $t_P$  מתפלג אחיד בטווח  $[0, x]$ .  
 $t_P$  ו-  $t_C$  בלתי תלויים.

Camilla משחקת  $R$  אם  $t_C$  גדול מערך מסויים  $\alpha$ , אחרת היא משחקת  $F$ .

Pete משחק  $F$  אם  $t_P$  גדול מערך מסויים  $\beta$ , אחרת הוא משחק  $R$ .

מצאו את הערכים של  $\alpha$  ו-  $\beta$  עבורם הווקטור אסטרטגיות  $(s_1^*, s_2^*) = (R, F)$  שיווי משקל נאש בייסיאני של המשחק.

### פתרון:

C \ P	R	F
	R	F
R	$2 + t_c, 1$	$0, 0$
F	$0, 0$	$1, 2 + t_p$

$$G = \{(A_C, A_P), (T_C, T_P), (p_C, p_P), u_C, u_P\}$$

$t_C$  ו-  $t_P$  מתפלגים אחידה בתחום  $[0, x]$  והם בלתי תלויים, לכן

$$p_C = P(t_C | t_P) = P(t_C), \quad p_P = P(t_P | t_C) = P(t_P).$$

$$A_C = \{\text{Restaurant, Football}\} = \{R, F\}, \quad A_P = \{\text{Restaurant, Football}\} = \{R, F\}.$$

Camilla משחקת  $R$  בהסתברות  $\frac{x - \alpha}{x}$  ומשחקת  $F$  בהסתברות  $\frac{\alpha}{x}$ .

Pete משחק  $F$  בהסתברות  $\frac{x - \beta}{x}$  ומשחק  $R$  בהסתברות  $\frac{\beta}{x}$ .

תשלום ל- Camilla אם היא משחקת  $R$ :

$$u_1(s_1 = R) = \frac{\beta}{x}(2 + t_C) + \left(\frac{x - \beta}{x}\right) \cdot 0 = \frac{\beta}{x}(2 + t_C).$$

תשלום ל- Camilla אם היא משחקת  $F$ :

$$u_1(s_1 = F) = \frac{\beta}{x} \cdot 0 + \left(\frac{x - \beta}{x}\right) \cdot 1 = \frac{1 - \beta}{x}.$$

$$u_1(s_1 = R) \geq u_1(s_1 = F) \Rightarrow \frac{\beta}{x}(2 + t_C) \geq \frac{x - \beta}{x} \Rightarrow t_C \geq \frac{x - \beta}{\beta} - 2 = \frac{x}{\beta} - 3 \stackrel{!}{=} \alpha .$$

תשלום ל-Pete אם הוא משחק  $R$ :

$$u_2(s_2 = R) = \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) \cdot 1 + \frac{\alpha}{x} \cdot 0 = 1 - \frac{\alpha}{x} .$$

תשלום ל-Pete אם הוא משחק  $F$ :

$$u_2(s_2 = F) = \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) \cdot 0 + \frac{\alpha}{x}(2 + t_P) = \frac{\alpha}{x}(2 + t_P) .$$

$$u_2(s_2 = F) \geq u_2(s_2 = R) \Rightarrow \frac{\alpha}{x}(2 + t_P) \geq 1 - \frac{\alpha}{x} \Rightarrow (2 + t_P) \geq \frac{x}{\alpha} - 1 \Rightarrow t_P \geq \frac{x}{\alpha} - 3 \stackrel{!}{=} \beta .$$

הפתרון של המערכת הוא

$$\frac{x}{\left(\frac{x}{\beta} - 3\right)} - 3 = \beta \Rightarrow x - \frac{3x}{\beta} + 9 = x - 3\beta \Rightarrow -\frac{3x}{\beta} + 9 + 3\beta = 0 \Rightarrow -3x + 9\beta + 3\beta^2 = 0$$

$$\Rightarrow \beta^2 + 3\beta - x = 0 \Rightarrow \beta = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2} .$$

$$\text{לכן } \frac{x}{\alpha} - 3 = \beta$$

$$\alpha = \frac{x}{3 + \beta} = \frac{2x}{3 + \sqrt{9 + 4x}} = \frac{2x}{3 + \sqrt{9 + 4x}} \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{9 + 4x}}{3 - \sqrt{9 + 4x}}\right) = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2} = \beta$$

לכן התשובה סופית היא האסטרטגיה  $(s_1^*, s_2^*) = (R, F)$  שיווי משקל אם

$$t_C \geq \alpha = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2} , \quad t_P \geq \beta = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2} .$$

## דוגמה 7.4 (מכרז מחיר ראשון)

במכרז מחיר ראשון שני שחקנים  $i = 1, 2$  מתחרים על קניית מוצר מסוים. שחקן 1 מעריך שהמוצר שווה  $v_1$  ושחקן 2 מעריך כי המוצר שווה  $v_2$ . ז"א אם שחקן  $i$  מנצח ומשלם מחיר  $p$  אז הרווח שלו יהיה  $v_i - p$ . ההערכות של השני שחקנים הם בלתי תלויים ומפולגים אחד בתחום  $[0, 1]$ . השחקן עם ההצעה הגבוה ביותר מנצח ומשלם את מחיר שווה להצעה שלו. השחקן השני לא משלם כלום. במקרה של תיקו מטילים מטבע. השחקנים אדישי סיכון.

## פתרון:

$$G = \{(A_1, A_2), (T_1, T_2), (p_1, p_2), u_1, u_2\}$$

קבוצת הפעולות של שחקן 1 היא ההצעות האפשריות שלו,  $b_1 \in [0, \infty)$  וקבוצת הפעולות של שחקן 2 היא ההצעות האפשריות שלו  $b_2 \in [0, \infty)$

$$A_1 = [0, \infty) , \quad A_2 = [0, \infty) .$$

הקבוצה  $T_1$  של ערכים פרטיים של שחקן 1 היא הקבוצה של ההערכות  $v_1 \in [0, 1]$  של המוצר שלו, וכמו כן  $T_2$  הוא הקבוצה של ההערכות  $v_2 \in [0, 1]$ . לכן

$$T_1 = [0, 1] , \quad T_2 = [0, 1] .$$

השתי ההערכות  $v_1, v_2$  בלתי תלויות לכן  $p_1 = P(v_2 = \beta | v_1 = \alpha) = P(v_2 = \beta) = \beta$  וז"א שחקן 1 מאמין כי הערך של  $v_2$  הוא  $\beta$  בהסתברות  $\beta$  בלי קשר לערך של  $v_1$ . ולהפך,  $p_2 = P(v_1 = \alpha | v_2 = \beta) = P(v_1 = \alpha) = \alpha$  וז"א שחקן 2 מאמין כי הערך של  $v_1$  הוא  $\alpha$  בהסתברות  $\alpha$  בלי קשר לערך של  $v_2$ .

$$u_1(b_1, b_2, v_1, v_2) = \begin{cases} v_1 - b_1 & b_1 > b_2 \\ \frac{v_1 - b_1}{2} & b_1 = b_2 \\ 0 & b_1 < b_2 \end{cases}, \quad u_2(b_1, b_2, v_1, v_2) = \begin{cases} v_2 - b_2 & b_2 > b_1 \\ \frac{v_2 - b_2}{2} & b_2 = b_1 \\ 0 & b_2 < b_1 \end{cases}$$

הווקטור אסטרטגיות  $(b_1^*(v_1), b_2^*(v_2))$  שיווי משקל נאש בייסיאני אם

$$u_1(b_1^*, b_2^*, v_1, v_2) = \max_{b_1} \left[ (v_1 - b_1) P(b_1 > b_2^*(v_2)) + \frac{1}{2} (v_1 - b_1) P(b_1 = b_2^*(v_2)) \right]$$

ו-

$$u_2(b_1^*, b_2^*, v_1, v_2) = \max_{b_2} \left[ (v_2 - b_2) P(b_2 > b_1^*(v_1)) + \frac{1}{2} (v_2 - b_2) P(b_2 = b_1^*(v_1)) \right]$$

אנחנו משערים כי קיים שיווי משקל לינארי:

$$b_1^*(v_1) = a_1 + c_1 v_1, \quad b_2^*(v_2) = a_2 + c_2 v_2.$$

נניח כי שחקן 2 בוחר באסטרטגיה  $b_2^*(v_2) = a_2 + c_2 v_2$ . אז עבור הערך  $v_2$ , תשובה טובה ביותר  $b_1^*$  לשחקן 1 מקיימת

$$\begin{aligned} u_1(b_1^*, b_2^*, v_1, v_2) &= \max_{b_1} \left[ (v_1 - b_1) P(b_1 > a_2 + c_2 v_2) + \frac{1}{2} (v_1 - b_1) P(b_1 = a_2 + c_2 v_2) \right] \\ &= \max_{b_1} (v_1 - b_1) P\left(v_2 < \frac{b_1 - a_2}{c_2}\right) \\ &= \max_{b_1} (v_1 - b_1) \left(\frac{b_1 - a_2}{c_2}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial b_1} \left( \frac{1}{c_2} (v_1 - b_1) (b_1 - a_2) \right) = \frac{v_1 + a_2 - 2b_1}{c_2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow b_1^* = \frac{v_1 + a_2}{2}$$

נניח כי שחקן 1 בוחר באסטרטגיה  $b_1^*(v_1) = a_1 + c_1 v_1$ . אז עבור הערך  $v_1$ , תשובה טובה ביותר  $b_2^*$  לשחקן 2 מקיימת

$$\begin{aligned} u_2(b_1^*, b_2^*, v_1, v_2) &= \max_{b_2} \left[ (v_2 - b_2) P(b_2 > a_1 + c_1 v_1) + \frac{1}{2} (v_2 - b_2) P(b_2 = a_1 + c_1 v_1) \right] \\ &= \max_{b_2} (v_2 - b_2) P\left(v_1 < \frac{b_2 - a_1}{c_1}\right) \\ &= \max_{b_2} (v_2 - b_2) \left(\frac{b_2 - a_1}{c_1}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial b_2} \left( \frac{1}{c_1} (v_2 - b_2) (b_2 - a_1) \right) = \frac{v_2 + a_1 - 2b_2}{c_1} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow b_2^* = \frac{v_2 + a_1}{2}$$

לכן

$$b_1^* = \frac{v_1}{2} + \frac{a_2}{2} = a_1 + c_1 v_1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{a_2}{2},$$



$$b_2^* = \frac{v_2}{2} + \frac{a_1}{2} = a_2 + c_2 v_2 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{a_1}{2}.$$

הפתרון למערכת זה היא

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 0.$$

לפיכך האסטרטגיות של שיווי משקל הן

$$b_1^*(v_1) = \frac{v_1}{2}, \quad b_2^*(v_2) = \frac{v_2}{2}.$$

■

## דוגמה 7.5 (דואפול עם ערכים פרטיים)

שני יצרנים 1 ו-2 מייצרים אותו מוצר ומתרחים על שוק הקונים הפוטנציאליים. היצרנים מחליטים על הכמות שהם ייצרו, וההיצע הכולל קובע את מחיר המוצר, שהוא זהה לשני היצרנים. נסמן ב- $q_1$  וב- $q_2$  את הכמויות שמייצרים היצרנים 1 ו-2 בהתאמה. אזי הכמות הכוללת של המוצרים בשוק הוא  $q_1 + q_2$ . נניח כי המחיר של יחידה שווה ל- $P = a - q_1 - q_2$  כאשר  $a$  פרמטר הביקוש. עלות הייצור של יחידה ליצרן הראשון וליצרן 2 הוא  $c$ . הפרמטר הביקוש  $a$  שווה ל- $a^H$  (ביקוש גבוהה) או  $a^L$  (ביקוש נמוך). הערך של  $a$  ידוע ליצרן הראשון אך אינה ידוע ליצרן השני. כל שיצרן זה יודע הוא שהפרמטר הביקוש שווה ל- $a^L$  בהסתברות  $\theta$  או  $a^H$  בהסתברות  $1 - \theta$ .

מה הם התנאים על  $\theta$ ,  $a_L$ ,  $a_H$  ו- $c$  כך ש- $q_1, q_2$  חיוביים בשיווי משקל.

מהו השיווי משקל נאש הבייסיאני של המשחק?

## פתרון:

כמות של יצרן 1:  $q_1$ . כמות של יצרן 2:  $q_2$ .

מחיר ליחידה אחת של המוצר:  $P = a - q_1 - q_2$ .

עלות ליחידה לשחקן 1 ולשחקן 2:  $c = 1$ .

פרמטר הביקוש לשחקן 1:  $a = a^H$  או  $a = a^L$  והוא ידוע לשחקן 1 ולא לשחקן 2.

עבור שחקן 2:  $a = a^L$  בהסתברות  $\theta$  ו- $a = a^H$  בהסתברות  $1 - \theta$ .

צורה בייסיאנית של המשחק:

$$\bullet N = \{1, 2\}$$

$$\bullet T_2 = \{1\}, T_1 = \{a^L, a^H\}$$

$$\bullet p_{II}(t_1 = a^L | t_2 = 1) = p_{II}(t_1 = a^L) = \theta$$

$$\bullet p_{II}(t_1 = a^H | t_2 = 1) = p_{II}(t_1 = a^H) = 1 - \theta$$

$$\bullet A_2 = \{q_2\}, A_1 = \{q_1^H, q_1^L\}$$

• פורנצית תשלום לשחקן 1:

$$u_1(s_1(t_1), s_2(t_2), t_1)$$

פורנצית תשלום לשחקן 2:

$$u_2(s_1(t_1), s_2(t_2), t_2 = 1)$$

•

$$s_1(t = a^H) = q_1^H, \quad s_2(t_2 = a^L) = q_1^L, \quad s_2(t_2 = 1) = q_2.$$

לשחקן 1, אם  $a = a^H$ :

$$u_1(s_1(t = a^H), s_2(t_2), t_1 = a^H) = u_1(q_1^H, q_2) = q_1^H(a - q_1^H - q_2 - c).$$

לשחקן 1, אם  $a = a^L$ :

$$u_1(s_1(t = a^L), s_2(t_2), t_1 = a^L) = u_1(q_1^L, q_2) = q_1^L(a - q_1^L - q_2 - c).$$

לשחקן 2,  $s_1(t_1 = q^L) = q_1^L$  בהסתברות  $\theta$  ו-  $s_1(t_1 = a^H) = q_1^H$  בהסתברות  $1 - \theta$ .

$$u_2(s_1(t_1), s_2(t_2), t_2 = 1) = u_1(q_1^H, q_1^L, q_2) = q_2(\theta a^L + (1 - \theta)a^H - \theta q_1^L - (1 - \theta)q_1^H - q_2 - c)$$

$$\frac{\partial u_1(q_1^H, q_2)}{\partial q_1^H} = a - c - 2q_1^H - q_2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow q_1^{H*} = \frac{a_H - c - q_2}{2}.$$

$$\frac{\partial u_1(q_1^L, q_2)}{\partial q_1^L} = a - c - 2q_1^L - q_2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow q_1^{L*} = \frac{a_L - c - q_2}{2}.$$

$$\frac{\partial u_2(q_1^L, q_1^H, q_2)}{\partial q_2} = \theta a^L + (1 - \theta)a^H - \theta q_1^L - (1 - \theta)q_1^H - 2q_2 - c \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow q_2^* = \frac{\theta a^L + (1 - \theta)a^H - \theta q_1^L - (1 - \theta)q_1^H + c}{2}.$$

הפתרון למערכת זו הוא

$$\begin{aligned} q_2^* &= \frac{\theta a_H + (1 - \theta)a_L - c}{3} \\ q_1^H &= \frac{(3 - \theta)a_H - (1 - \theta)a_L - 2c}{6} \\ q_1^L &= \frac{(2 + \theta)a_L - \theta a_H - 2c}{6} \end{aligned}$$

התנאים עבורם  $q_2 \geq 0$  הם

$$q_2 \geq 0 \Rightarrow \theta a_H + (1 - \theta)a_L - c \geq 0 \Rightarrow \theta \geq \frac{c - a_L}{a_H - a_L}.$$

$$q_1(a_L) \geq 0 \Rightarrow \frac{(2 + \theta)a_L - \theta a_H - 2c}{6} \geq 0 \Rightarrow \theta \leq \frac{2(c - a_L)}{a_H - a_L}.$$

$$q_1(a_H) \geq 0 \Rightarrow \frac{(3 - \theta)a_H - (1 - \theta)a_L - 2c}{6} \geq 0 \Rightarrow \theta \leq \frac{2c - 3a_H + a_L}{a_H - a_L}.$$