

פרק 5

שפות חסרות הקשר

5.1 הגדרה של מכונת טיריניג אי-דטרמיניסטיבית

הגדרה 5.1 מכונת טיריניג אי-דטרמיניסטיבית

מכונת טיריניג אי-דטרמיניסטיבית (מ"ט א"ד) היא שבעייה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר Q , Σ , Γ , q_0 , q_{acc} , q_{rej} מוגדרים כמו במ"ט דטרמיניסטי (ראו הגדרה 1.2).

Δ היא פונקציה המעבירים

$$\Delta : (Q \setminus \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}) .$$

$$\Delta(q, a) = \{(q_1, a, S) , (q_2, b, L) , \dots\} .$$

כלומר, לכל זוג $q \in Q, a \in \Gamma$ יתכן מספר מעברים אפשריים, 0, 1 או יותר.

- קונפיגורציה של מ"ט א"ד זהה לקונפיגורציה של מ"ט דטרמיניסטיבית.
- לכל קונפיגורציה יתכן מספר קונפיגורציות עוקבות.

- לכל מילה $w \in \Sigma^*$ יתכן מספר ריצות שונות:

* ריצות שמנגיעה ל- q_{acc} .

* ריצות שמנגיעה ל- q_{rej} .

* ריצות שלא עוזרות.

* ריצות שנתקעות.

הגדרה 5.2

מילה $w \in \Sigma$ מתקבלת במ"ט א"ד M אם קיימת לפחות ריצה אחת שמנגעה ל- q_{acc} .

השפה של מ"ט א"ד M היא

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Gamma^* : q_0 w \vdash_* u q_{\text{acc}} v\}$$

כלומר,
 $w \in L(M)$ אם קיימת ריצה אחת שבה M מקבלת את w .

$w \notin L(M)$ אם בכל ריצה של M על w , M דוחה או לא עוזרת, או נתקעת.

הגדרה 5.3 מ"ט א"ד המכריעה שפה L

תהי M מ"ט א"ד.
אומרים כי מ"ט א"ד M מכריעה שפה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $w \in L$ מקבלת את w .
- אם $w \notin L$ דוחה את w .

הגדרה 5.4 מ"ט א"ד המקבלת שפה L

תהי M מ"ט א"ד.
אומרים כי מ"ט א"ד M מקבלת שפה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $w \in L$ מקבלת את w .
- אם $w \notin L$ דוחה את w או M לא עוצרת על w .

דוגמה 5.1

נתונה השפה

$$L = \{1^n \mid n \text{ איינו ראשוני}\}, \quad \Sigma = \{1\}.$$

בנו מ"ט המכריעה את השפה L .**פתרון:**הרעיוןנבנה מ"ט א"ד N המכריעה את L . N תבחר באופן א"ד מספר $1 < t < n$ ותבדוק האם t מחלק את n .

1 סרט 1	$\boxed{_ 1 1 1 1 1 1 1 1 \dots}$
---------	--

2 סרט 2	$\boxed{_ 1 1 1 _ \dots}$
---------	---------------------------------------

תאור הבניה $w = 1^n$ על קלט N :**שלב 1**

- N בוחרת באופן א"ד מספר $1 < t < n$.
- מעתקה את w לסרט 2.
- עוברת על העותק משמאליימין, ובכל תא מחליטה באופן א"ד האם להשאיר את ה- 1 או למחוק אותו ע"י X (לדאוג שהמספר שנבחר הוא לא 1 ולא n).

- בסוף המעבר המספר t שנבחר הוא כמוות ה- 1 -ים שלא נמחקו.

סרט 2	X	X	X							
	—	1	1	1	1	...	1	1	—	...

שלב 2) N בודקת האם t שנבחר מחלק את n .

- אם כן $\Leftarrow N$ מקבלת.
 - אם לא $\Leftarrow N$ דוחה.

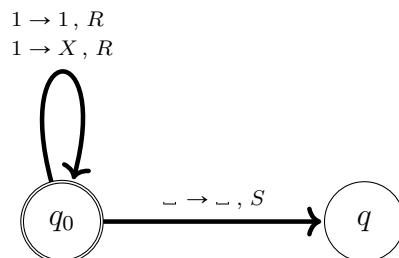
5.2 עץ החישוב של מ"ט א"ד

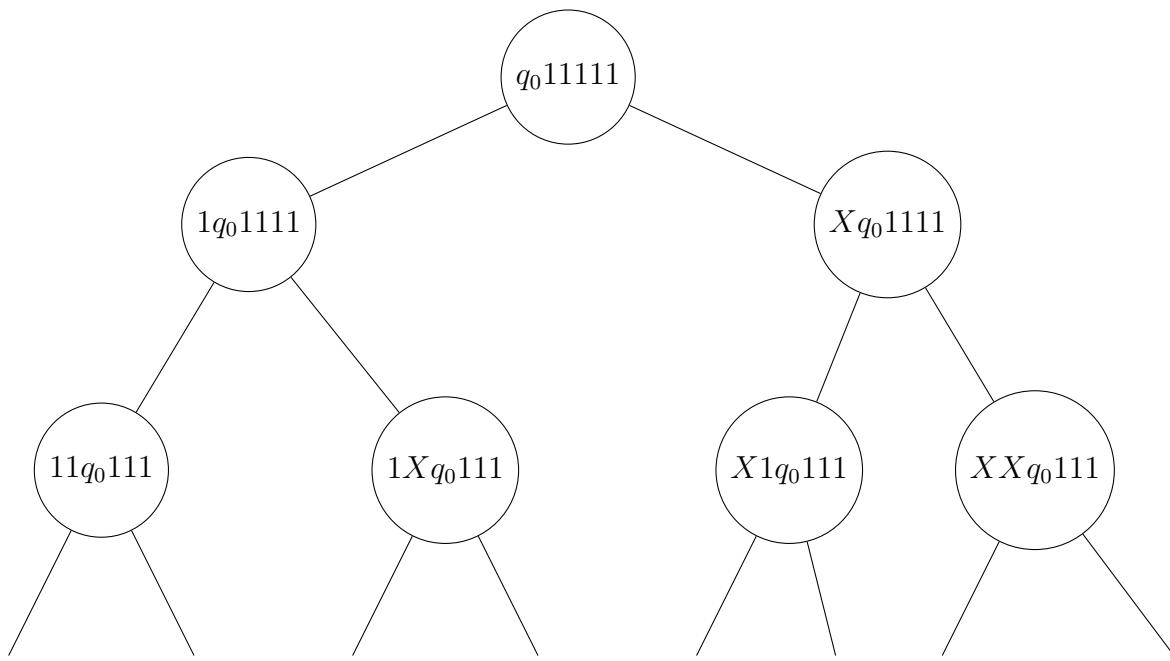
הגדירה 5.5 עץ החישוב של מ"מ"ט א"ד

בhinntn מ"ט א"ד M ומילה $\Sigma \in w$, עז החישוב של M ו- w הוא עז מושרש שבו:

- 1) כל קדקוד בעץ מתאר קונפיגורציה בחישוב של M על w .
 - 2) שורש העץ מתאר את הקונפיגורציה ההתחלתית w_0q .
 - 3) לכל קדקוד v בעץ הבנים של v הם כל הקדקודים הנובעים מהקונפיגורציה המתואמת ע"י v .

5.2 דוגמה





5.3 שיקולות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטיבית

משפט 5.1 **שיקולות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטיבית ב-** RE

לכל מ"ט א"ד N קיימת מ"ט דטרמיניסטיבית D כך ש-

$$L(N) = L(D).$$

כלומר לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם N מקבלת את $w \Leftarrow D$ קיבל את w .
- אם N לא מקבלת את $w \Leftarrow D$ לא קיבל את w .

הוכחה: בהינתן מ"ט א"ד N נבנה מ"ט דטרמיניסטיבית D ונוכיח כי

$$L(N) = L(D).$$

רעיון ההוכחה

בהינתן קלט $w \in \Sigma^*$, D תבצע ריצה של כל החישובים האפשריים של N על w , ואם אחד החישובים מסתיים ב- q_{acc} אז D תעוצר ותקבל.

מכיוון שיתכננו חישובים אינסופיים, לא יוכל לסרוק את עץ החישוב לעומק. במקומות זה נסrox את העץ לרוחב. ככלומר, נבדוק את כל החישובים באורך 1, ולאחר מכן נבדוק את כל החישובים באורך 2, וכן הלאה. אם אחד החישובים הסטיים ב- q_{acc} , אז D תעוצר ותקבל.

תאור הבניה

מכיוון שלכל $q \in Q$ ולכל $\alpha \in \Gamma$

$$\Delta(q, \alpha) \subseteq Q \times \Gamma \times \{L, R, S\} .$$

אז

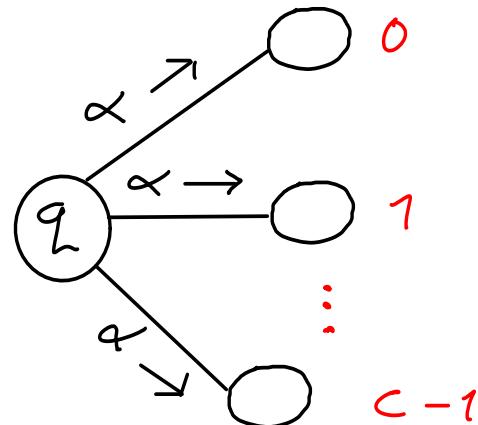
$$|\Delta(q, \alpha)| \leq |Q| \cdot |\Gamma| \cdot |\{L, R, S\}| = 3|Q| \cdot |\Gamma| .$$

נסמן:

$$C = 3|Q| \cdot |\Gamma| .$$

- לכל מצב $q \in Q$ ולכל אות $\alpha \in \Gamma$ נמספר את המעברים ב- $\Delta(q, \alpha)$ שירוטית

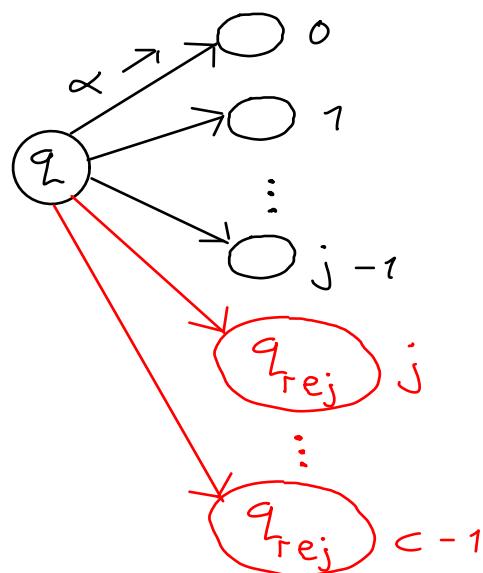
$$\{0, 1, 2, \dots, C - 1\} .$$



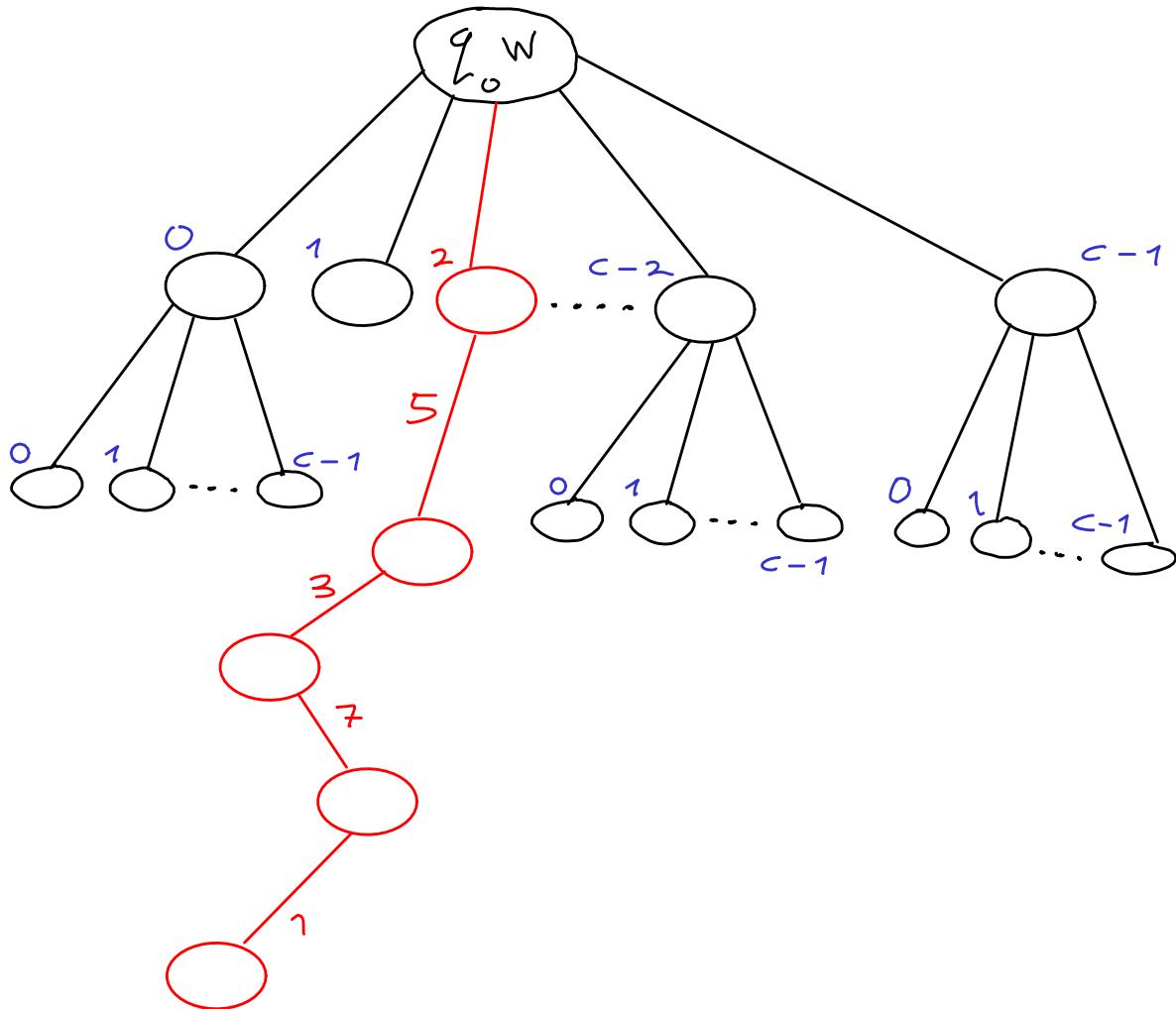
, $|\Delta(q, \alpha)| = j < C$ •

אי לכל $j \leq k \leq C - 1$

. $k = (q_{\text{rej}}, \alpha, S)$ נקבע



- נשים לב כי שינוי זה לא משנה את השפה של N .



קידום לקסיקוגרפי:

0	00	10	...	$(C - 1)0$	000
1	01	11	...	$(C - 1)1$	001
2	02	12	...	$(C - 1)2$	002
\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
$C - 1$	$0(C - 1)$	$1(C - 1)$...	$(C - 1)(C - 1)$	$00(C - 1)$

הבניה של D

D מכילה 3 סרטים:



w על קלט D

(1) מתחילה את המחרוזת בסרט 3 ל-0.

(2) מעתקה את w לסרט 2.

(3) מרים את N על w לפי המחרוזת בסרט 3.

• אם N קיבלה את $w \Leftarrow D$ עוצרת ומקבלת.

• אחרת, D מוחקמת את הסרט 2, מקדמת את המחרוזת בסרט 3 לקסיקוגרפיה וחזרה לשלב 2).

"

