שיעור 7
אי-כריעות

7.1 השפות L_{acc}, L_{halt}, L_{d} לא כריעות

הגדרה 7.1 L_{acc}

$$L_{\text{acc}} = \{\langle M, w\rangle \mid w \in L(M)\} \in RE \backslash R$$

הגדרה 7.2 L_{halt}

$$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w\rangle \mid \text{עוצרת על } w \; M\} \in RE \backslash R$$

הגדרה 7.3 L_{d}

$$L_{\text{d}} = \{\langle M\rangle \mid \langle M\rangle \notin L(M)\} \notin RE$$

משפט 7.1 $L_{\text{acc}} \in RE$

$$L_{\text{acc}} \in RE\ .$$

הוכחה: מכיוון ש- $L(U) = L_{\text{acc}}$, כאשר U המכונת טיורינג האוניברסלית אשר מקבלת את L_{acc}, לכן $L_{\text{acc}} \in RE$. ∎

משפט 7.2 $L_{\text{halt}} \in RE$

$$L_{\text{halt}} \in RE\ .$$

הוכחה: נבנה מ"ט U' שהיא למעשה U פרט למקום שבו U עצרה ודחתה, U' תעצור ותקבל.

נוכיח כי U' מקבלת את L_{halt}:

אם $x \in L_{\text{halt}}$

$\Leftarrow$ $x = \langle M, w\rangle$ ו- M עוצרת על w

$\Leftarrow$ U' עוצרת ומקבלת את x.

אם $L_{\text{halt}} \notin x$ ⇐ שני מקרים:

- $x \neq \langle M,w\rangle$ ⇐ U' דוחה את x.
- $x = \langle M,w\rangle$ ו- M לא עוצרת על w ⇐ U' לא עוצרת על x.

■

משפט 7.3 $L_{\text{d}} \notin RE$

$$L_{\text{d}} \notin RE \ .$$

הוכחה:
נניח בשלילה כי $L_{\text{d}} \in RE$.

⇐ $\exists$ מ"ט M_{d} המקבלת את L_{d}.

⇐ $L(M_{\text{d}}) = L_{\text{d}}$.

נבדוק ריצה של M_d על $\langle M_d\rangle$:

- אם $\langle M_{\text{d}}\rangle \in L(M_{\text{d}})$ ⇐ $\langle M_{\text{d}}\rangle \notin L_{\text{d}}$ ⇐ $L(M_{\text{d}}) \neq L_{\text{d}}$.
- אם $\langle M_{\text{d}}\rangle \notin L(M_{\text{d}})$ ⇐ $\langle M_{\text{d}}\rangle \in L_{\text{d}}$ ⇐ $L(M_{\text{d}}) \neq L_{\text{d}}$.

בשני המקרים קיבלנו סתירה לכך ש- $L(M_{\text{d}}) = L_{\text{d}}$ ולכן $L_{\text{d}} \notin RE$. ■

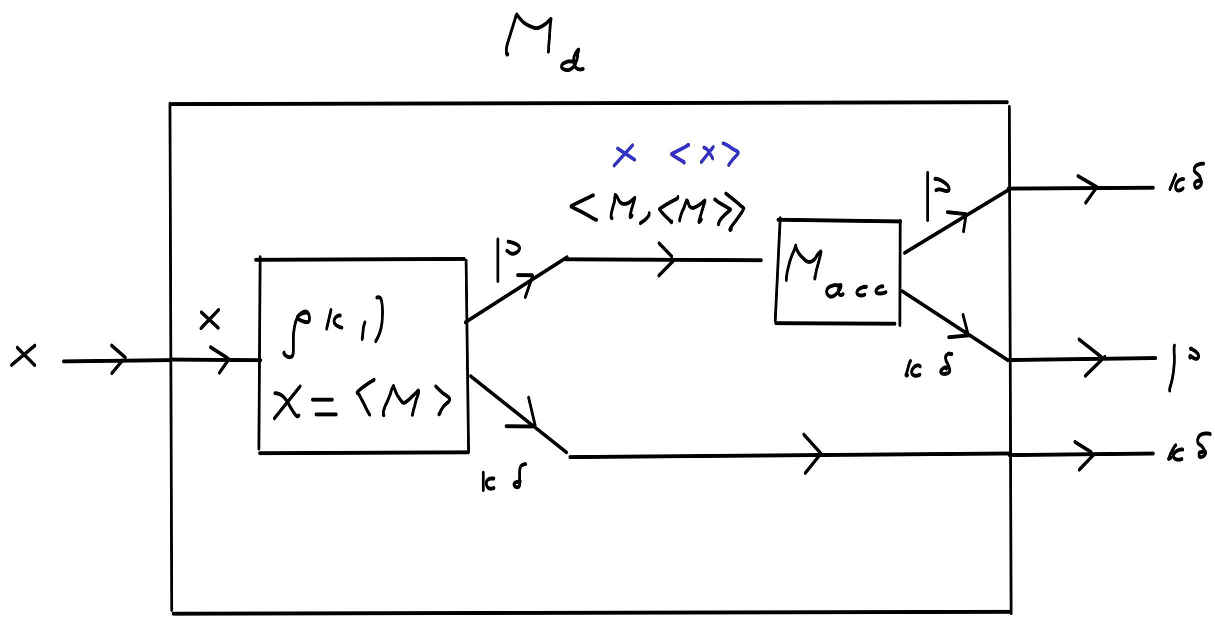
משפט 7.4 L_{acc} לא כריעה

$$L_{\text{acc}} = \left\{\langle M,w\rangle \;\middle|\; w \in L(M)\right\} \notin R \ .$$

הוכחה:
נניח בשלילה כי $L_{\text{acc}} \in R$ ותהי M_{acc} המ"ט המכריעה את L_{acc}.

נשתמש ב- M_{acc} כדי לבנות מ"ט M_{d} המכריעה את L_{d} (בסתירה לכך ש- $L_{\text{d}} \notin RE$ כפי שהוכחנו במשפט 7.3).

$$L_{\text{d}} = \left\{\langle M,w\rangle \;\middle|\; \langle M\rangle \notin L(M)\right\} \ .$$



<u>התאור של $M_{\rm d}$</u>

$M_{\rm d} =$ על קלט x:

1) בודקת האם $x = \langle M\rangle$. אם לא $\Leftarrow$ דוחה.

2) מחשבת את $\langle x\rangle = \langle\langle M\rangle\rangle$.

3) מריצה את $M_{\rm acc}$ על הזוג $\langle M, \langle M\rangle\rangle$:

- אם $M_{\rm acc}$ מקבלת $\Leftarrow$ $M_{\rm d}$ דוחה.
- אם $M_{\rm acc}$ דוחה $\Leftarrow$ $M_{\rm d}$ מקבלת.

כעת נוכיח כי $M_{\rm d}$ מכריעה את $L_{\rm d}$:

אם $x \in L_{\rm d}$

$\Leftarrow$ $x = \langle M\rangle$ ו- $\langle M\rangle \notin L(M)$

$\Leftarrow$ $M_{\rm acc}$ דוחה את הזוג $\langle M, \langle M\rangle\rangle$

$\Leftarrow$ $M_{\rm d}$ מקבלת את x.

אם $x \notin L_{\rm d}$ שני מקרים:

מקרה (1): $x \neq \langle M\rangle$ $\Leftarrow$ $M_{\rm d}$ דוחה את x.

מקרה (2): $x = \langle M\rangle$ ו- $\langle M\rangle \in L(M)$

$\Leftarrow$ $M_{\rm acc}$ מקבלת את זוג $\langle M, \langle M\rangle\rangle$

$\Leftarrow$ $M_{\rm d}$ דוחה את x.

■

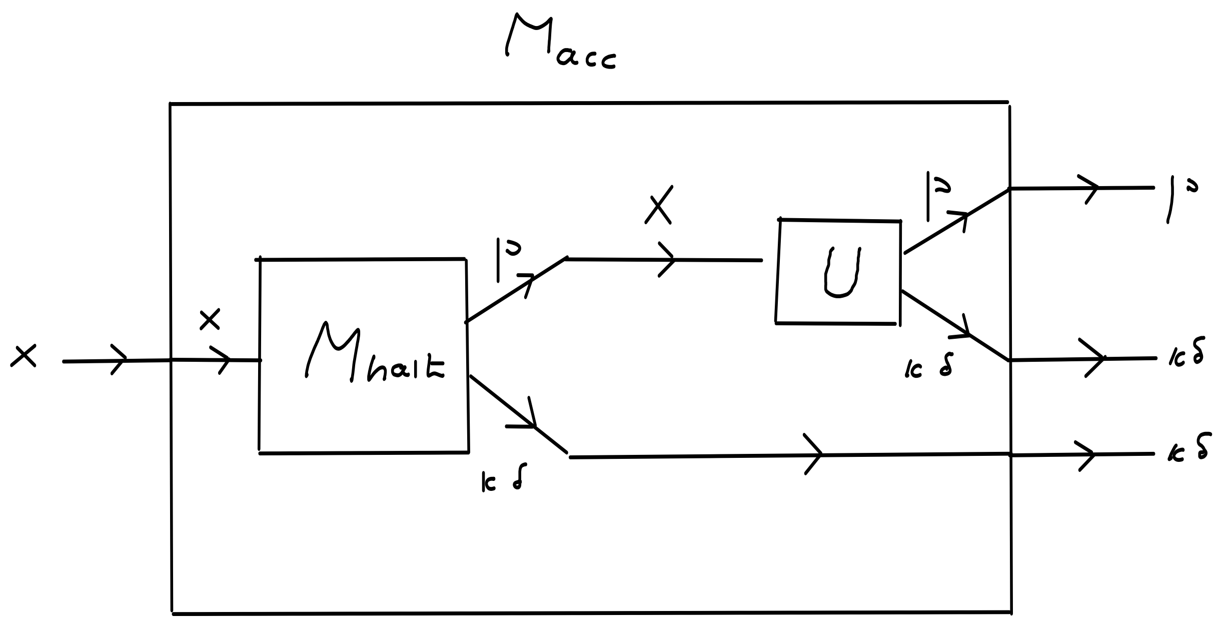
משפט 7.5 L_{halt} לא כריעה

$$L_{\text{halt}} = \left\{\langle M, w\rangle \;\middle|\; \text{עוצרת על } w \text{ } M\right\} \notin R \ .$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי $L_{\text{halt}} \in R$ ותהי M_{halt} מ"ט המכריעה את L_{halt}.

נשתמש ב- M_{halt} כדי לבנות מ"ט M_{acc} המכריעה את L_{acc} (בסתירה לכך ש- $L_{\text{acc}} \notin R$ כפי שהוכחנו במשפט 7.4).



<u>התאור של M_{acc}</u>

$M_{\text{acc}} =$ על קלט x:

(1 מריצה את M_{halt} על x.

- אם M_{halt} דוחה $\Leftarrow$ M_{acc} דוחה.
- אם M_{halt} מקבלת $\Leftarrow$ M_{acc} מריצה את U על x ועונה כמוה.

<u>אבחנה</u>

נוכיח כי M_{acc} מכריעה את L_{acc}:

אם $x \in L_{\text{acc}}$

$\Leftarrow$ $x = \langle M, w\rangle$ ו- $\langle w\rangle \in L(M)$

$\Leftarrow$ M_{halt} מקבלת את x וגם U מקבלת את x

$\Leftarrow$ M_{acc} מקבלת את x.

אם $x\notin L_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

מקרה (1): $x\neq\langle M,w\rangle$

$\Leftarrow$ M_{halt} דוחה את x

$\Leftarrow$ M_{acc} דוחה את x.

מקרה (2): $x=\langle M,w\rangle$ ו- $\langle w\rangle\notin L(M)$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

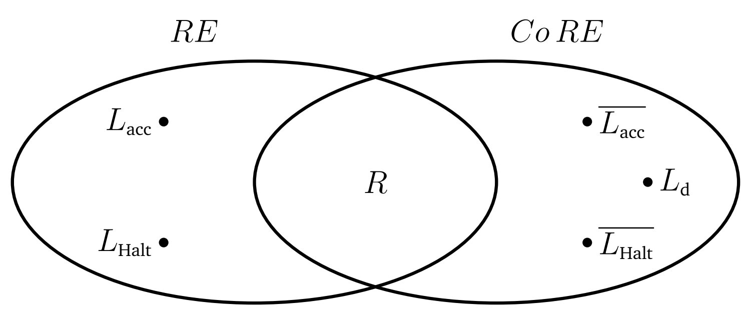
מקרה (א): M לא עוצרת על w $\Leftarrow$ M_{halt} דוחה את x $\Leftarrow$ M_{acc} דוחה את x.

מקרה (ב): M דוחה את w $\Leftarrow$ M_{halt} מקבלת את x אבל U דוחה את x $\Leftarrow$ M_{acc} דוחה את x.

הראנו כי M_{acc} מכריעה את L_{acc} בסתירה לכך ש- $L_{\text{acc}}\notin R$.
לכן $L_{\text{halt}}\notin R$. ■

משפט 7.6

$$\begin{aligned}
L_{\text{acc}}\in RE\backslash R \quad &\Rightarrow \quad \bar{L}_{\text{acc}}\notin RE\ ,\\
L_{\text{halt}}\in RE\backslash R \quad &\Rightarrow \quad \bar{L}_{\text{halt}}\notin RE\ ,\\
L_{\text{d}}\notin RE\backslash R\ .
\end{aligned}$$



7.2 השפה L_E לא כריעה

הגדרה 7.4 השפה L_E

$$L_E=\{\langle M\rangle\mid L(M)=\varnothing\}\ .$$

משפט 7.7 $L_E\notin R$

$$L_E\notin R\ .$$

כלומר L_E לא כריעה.

הוכחה:
נניח בשלילה כי L_E כריעה. אז נבנה מ"ט M_{acc} המכריעה את L_{acc} באופן הבא.

<u>בנייה של M_w</u>

ראשית נגדיר את המ"ט M_w:

$M_w =$ על כל קלט x:

1) אם $x \neq w$ $\Leftarrow$ דוחה.

2) אם $x = w$ אז מריצה M על w ועונה כמוה.

<u>אבחנה</u>

אם $x = w$ ו- M מקבלת את w אז $L(M_w) = \Sigma^*$.

אם $x \neq w$ או אם $x = w$ ו- M דוחה את w אז $L(M_w) = \varnothing$.

<u>בנייה של M_{acc}</u>

נניח כי קיימת מ"ט M_E המכריעה את L_E. אז נבנה מ"ט M_{acc} המכריעה את L_{acc}:

$M_{\text{acc}} =$ על כל קלט x:

1) אם $x \neq \langle M, w\rangle$ $\Leftarrow$ דוחה.

2) אם $x = \langle M, w\rangle$, בעזרת התאור $\langle M, w\rangle$, בונה מ"ט M_w.

3) מריצה M_E על $\langle M_w\rangle$:

4)
- אם M_E מקבלת $\Leftarrow$ דוחה.
- אם M_E דוחה $\Leftarrow$ מקבלת.

<u>נכונות</u>

אם $x \in L_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ $x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \in L(M)$ $\Leftarrow$ $L(M_w) = \Sigma^* \neq \varnothing$ $\Leftarrow$ M_E דוחה $\langle M_w\rangle$ $\Leftarrow$ M_{acc} מקבלת.

אם $x \notin L_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

<u>מקרה 1:</u> $x \neq \langle M, w\rangle$ $\Leftarrow$ $L(M_w) = \varnothing$ $\Leftarrow$ M_E מקבלת $\langle M_w\rangle$ $\Leftarrow$ M_{acc} דוחה.

<u>מקרה 2:</u> $x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \notin L(M)$ $\Leftarrow$ $L(M_w) = \varnothing$ $\Leftarrow$ M_E מקבלת $\langle M_w\rangle$ $\Leftarrow$ M_{acc} דוחה.

לסיכום:
אם L_E כריעה אז אפשר לבנות מ"ט M_{acc} המכריעה את L_{acc} בסתירה לכך ש- $L_{\text{acc}} \notin R$.
לכן $L_E \notin R$. ■

משפט 7.8 $L_E \notin RE$

$$L_E \notin RE$$

הוכחה:
<u>הרעיון</u>

נבנה מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית N המקבלת את

$$\bar{L}_E = \{\langle M\rangle \mid L(M) \neq \varnothing\} \ .$$

$N =$ על קלט x:

1) אם $\langle M\rangle \neq x \Leftarrow$ דוחה.

2) אם $x = \langle M\rangle$ אז N בוחרת מילה $w \in \Sigma^*$ באופן אי-דטרמיניסטית.

3) מריצה M על w.

- אם M מקבלת $\Leftarrow N$ מקבלת.
- אם M דוחה $\Leftarrow N$ דוחה.

<u>הוכחת הנכונות</u>

אם $x \in \bar{L}_E$

$\Leftarrow$ $x = \langle M\rangle$ ו- $L(M) \neq \varnothing$

$\Leftarrow$ קיימת מילה $w \in \Sigma^*$ כך ש- $w \in L(M)$

$\Leftarrow$ $\exists$ ניחוש $w \in \Sigma^*$ כך ש M מקבלת את w

$\Leftarrow$ קיים חישוב של N המקבל את $x = \langle M\rangle$

$\Leftarrow$ $x \in L(N)$.

לכן קיימת מ"ט א"ד N המקבלת את השפה $\bar{L}_E$ לכן $\bar{L}_E \in RE$.

כעת נוכיח כי $L_E \notin RE$.

נניח בשלילה כי $L_E \in RE$. הוכחנו למעלה ש- $\bar{L}_E \in RE$. לכם לפי משפט 6.1, $L_E \in R$.
זו בסתירה לכך ש- $L_E \notin R$.
לכן $L_E \notin RE$.

■

7.3 השפה L_{EQ} לא כריעה

הגדרה 7.5 L_{EQ}

$$L_{EQ} = \{\langle M_1, M_2\rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\}$$

משפט 7.9 $L_{EQ} \notin R$

$$L_{EQ} \notin R$$

השפה L_{EQ} לא כריעה.

הוכחה:

נניח בשלילה כי L_{EQ} כריעה. תהי M_{EQ} מ"ט המכריעה את L_{EQ}. אז נבנה מ"ט M_E המכריעה את L_E באופן הבא.

<u>בנייה של M_E</u>

$M_E =$ על כל קלט x:

1) אם $x \neq \langle M \rangle \Leftarrow$ דוחה.

2) אם $x = \langle M \rangle$, מריצה M_{EQ} על $\langle M, M_{\varnothing} \rangle$ כאשר $M_{\varnothing}$ המ"ט שדוחה כל קלט.

3)
- אם M_{EQ} מקבלת $\Leftarrow$ מקבלת.
- אם M_{EQ} דוחה $\Leftarrow$ דוחה.

<u>נכונות</u>

אם $x \in L_E$

$\Leftarrow$ $x = \langle M \rangle$ ו- $L(M) = \varnothing$

$\Leftarrow$ $L(M) = L\left(M_{\varnothing}\right)$

$\Leftarrow$ $\langle M, M_{\varnothing} \rangle \in L_{EQ}$

$\Leftarrow$ M_{EQ} מקבלת $\langle M, M_{\varnothing} \rangle$

$\Leftarrow$ M_E מקבב.

אם $x \notin L_E$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

<u>מקרה 1:</u> $x \neq \langle M \rangle$ $\Leftarrow$ M_E דוחה.

<u>מקרה 2:</u> $\Leftarrow$ $x = \langle M \rangle$ ו- $L(M) \neq \varnothing$

$\Leftarrow$ $L(M) \neq L\left(M_{\varnothing}\right)$

$\Leftarrow$ $\langle M, M_{\varnothing} \rangle \notin L_{EQ}$

$\Leftarrow$ M_{EQ} דוחה $\langle M, M_{\varnothing} \rangle$

$\Leftarrow$ M_E דוחה.

לסיכום:

אם L_{EQ} כריעה אז אפשר לבנות מ"ט M_E המכריעה את L_E בסתירה למשפט 7.7 האומר ש- $L_E \notin R$.

לכן $L_{EQ} \notin R$. ■

משפט 7.10 $L_{EQ} \notin RE$

$$L_{EQ} \notin RE$$

L_{EQ} לא קבילה.

הוכחה:

נניח בשלילה כי L_{EQ} קבילה. תהי M_{EQ} מ"ט המקבלת את L_{EQ}. אז נבנה מ"ט M_E המקבלת את L_E באופן הבא.

<u>בנייה של M_E</u>

$M_E =$ על כל קלט x:

1) אם $x \neq \langle M \rangle \Leftarrow$ דוחה.

2) אם $x = \langle M \rangle$, מריצה M_{EQ} על $\langle M, M_\varnothing \rangle$ כאשר $M_\varnothing$ המ"ט שדוחה כל קלט.

3) • אם M_{EQ} מקבלת $\Leftarrow$ מקבלת.

<u>נכונות</u>

אם $x \in L_E$

$\Leftarrow$ $x = \langle M \rangle$ ו- $L(M) = \varnothing$

$\Leftarrow$ $L(M) = L\left(M_\varnothing\right)$

$\Leftarrow$ $\langle M, M_\varnothing \rangle \in L_{EQ}$

$\Leftarrow$ M_{EQ} מקבלת $\langle M, M_\varnothing \rangle$

$\Leftarrow$ M_E מקבל.

לסיכום:
אם L_{EQ} קבילה אז אפשר לבנות מ"ט M_E המקבלת את L_E בסתירה למשפט 7.8 האומר ש- $L_E \notin RE$.
לכן $L_{EQ} \notin RE$. ■

משפט 7.11 $\bar{L}_{EQ} \notin RE$

$$\bar{L}_{EQ} \notin RE\ .$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי $\bar{L}_{EQ}$ קבילה. תהי $M_{\bar{EQ}}$ מ"ט המקבלת את $\bar{L}_{EQ}$. אז נבנה מ"ט $M_{\overline{\text{acc}}}$ המקבלת את $\bar{L}_{\text{acc}}$ באופן הבא.

<u>בנייה של M_1</u>

ראשית נגדיר מ"ט M_1 באופן הבא:

$M_1 =$ על קלט x:

1) מריצה M על w ועונה כמוה.

<u>בנייה של $M_{\overline{\text{acc}}}$</u>

$M_{\overline{\text{acc}}} =$ על כל קלט x:

1) אם $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow$ מקבלת.

2) אם $x = \langle M, w\rangle$ אז בונה M_1.

3) מריצה $M_{\overline{EQ}}$ על $\langle M_1, M^*\rangle$ כאשר M^* המ"ט שמקבלת כל קלט.

4) • אם $M_{\overline{EQ}}$ מקבלת $\Leftarrow$ מקבלת.

<u>נכונות</u>

אם $x \in L_{\overline{acc}}$

$\Leftarrow$ M לא מקבלת w

$\Leftarrow$ $L(M_1) = \varnothing$

$\Leftarrow$ $\langle M_1, M^*\rangle \in L_{\overline{EQ}}$

$\Leftarrow$ $M_{\overline{EQ}}$ מקבלת $\langle M_1, M^*\rangle$

$\Leftarrow$ $M_{\overline{acc}}$ מקבל.

לסיכום:
אם $L_{\overline{EQ}}$ קבילה אז אפשר לבנות מ"ט $M_{\overline{acc}}$ המקבלת את $L_{\overline{acc}}$ בסתירה למשפט 7.6 האומר ש- $L_{\overline{acc}} \notin RE$.
לכן $L_{\overline{EQ}} \notin RE$.

■

7.4 סיכום: כריעות וקבילות של שפות

	כריעה	קבילה
L_{acc}	×	✓
$\overline{L_{\text{acc}}}$	×	×
L_{d}	×	×
L_{Halt}	×	✓
$\overline{L_{\text{Halt}}}$	×	×
L_{E}	×	×
$\overline{L_{\text{E}}}$	×	✓
L_{EQ}	×	×
$\overline{L_{\text{EQ}}}$	×	×
L_{REG}	×	×
L_{NOTREG}	×	×