תרגילים 12: סיבוכיות

שאלה 1 הבעיית קליקה מוגדרת באופן הבא:

קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר טבעי k.
פלט: האם G מכיל קליקה בגודל k?

$$CLIQUE=\{\langle G,k\rangle \ \big|\ \text{מכיל קליקה בגודל } k \ G\}\ .$$

הבעיית כיסוי בקדקודים מוגדרת:

קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר טבעי k.
פלט: האם G מכיל כיסוי בקדקודים k?

$$VC=\{\langle G,k\rangle \ \big|\ \text{מכיל כיסוי בקדקודים בגודל } k \ G\}\ .$$

הוכיחו כי קיימת רדוקציה זמן-פולינומיאלית מבעיית $CLIQUE$ לבעיית VC: כלומר

$$CLIQUE\leq_p VC\ .$$

שאלה 2

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$.
תת-קבוצת קודקודים $S\subseteq V$ היא **קבוצת בלתי תלויה** אם התנאי הבא מתקיים:
אם $u_1,u_2\in S$ אז $(u_1,u_2)\notin E$.

תת-קבוצת קודקודים $C\subseteq V$ תקרא **קליקה** אם התנאי הבא מתקיים:
אם $u_1,u_2\in C$ אז $(u_1,u_2)\in E$.

הבעיית IS מוגדרת:

$$IS=\left\{\langle G,k\rangle \ \Big|\ \text{גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ לפחות} \ G\right\}$$

הבעיית $CLIQUE$ מוגדרת:

$$CLIQUE=\left\{\langle G,k\rangle \ \Big|\ \text{גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל } k \text{ לפחות} \ G\right\}$$

הוכיחו כי

$$IS\leq_P CLIQUE\ .$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה IS לשפה $CLIQUE$.
יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 3

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$.
תת-קבוצת קדקודים $S\subseteq V$ היא **קבוצת בלתי תלויה** אם התנאי הבא מתקיים:
אם $u_1,u_2\in S$ אז $(u_1,u_2)\notin E$.

תת-קבוצת קודקודים $U \subseteq V$ היא **כיסוי קודקודים** אם התנאי הבא מתקיים:
אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \in U$ או $u_2 \in U$.
השפה IS מוגדרת:

$$IS = \left\{ \langle G, k \rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ לפחות } G \right\}$$

השפה VC מוגדרת:

$$VC = \left\{ \langle G, k \rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל כיסוי קודקודים בגודל } k \text{ לכל היותר } G \right\}$$

הוכיחו כי

$$IS \leq_P VC \ .$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה IS לשפה VC.
יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 4

בעיית סכום התת קבוצה $SubSetSum$: בהינתן קבוצת מספרים שלמים $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ומספר שלם t, האם קיימת תת קבוצה $Y \subseteq S$ שסכום איבריה הוא בדיוק t.
בעיית סכום התת קבוצה כשפה פורמלית:

$$SubSetSum = \left\{ \langle S, t \rangle \;\middle|\; t = \sum_{y \in Y} Y \text{ -כך ש } Y \subseteq S \text{ שלם וקיימת תת-קבוצה } t \text{ ,קבוצת שלמים } S \right\}$$

בעיית החלוקה ($PARTITION$) מוגדרת באופן הבא:

בהינתן קבוצת מספרים שלמים $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ האם קיימת חלוקה לשתי קבוצות A_1 ו- A_2 כך ש:

- $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
- $A_1 \cup A_2 = A$
- $\sum\limits_{a_i \in A_1} a_i = \sum\limits_{a_i \in A_2} a_i = \frac{1}{2} \sum\limits_{a_i \in A} a_i$

בעיית החלוקה כשפה פורמלית:

$$PARTITION = \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{:קבוצת שלמים וקיימות } A_1, A_2 \subset A \text{ כך ש } A \\ A_1 \cup A_2 = A \text{ וגם } A_1 \cap A_2 = \emptyset \text{ וגם } \sum\limits_{a \in A_1} a = \sum\limits_{a \in A_2} a = \frac{1}{2} \sum\limits_{a \in A} a \end{array} \right\}$$

הוכיחו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה $SubSetSum$ לשפה $PARTITION$. כלומר:

$$SubSetSum \leq_P PARTITION \ .$$

שאלה 5

בהינתן גרף $G = (V, E)$ לא מכוון. אומרים כי G k- צביע אם ניתן לצבוע את הקודקודים שלו ב- k צבעים (או פחות) כך ששני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע.
נגדיר את השפות הבאות:

$$3COLOR = \left\{ \langle G \rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון 3 - צביע } G \right\}$$

$$4COLOR = \left\{ \langle G \rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון 4 - צביע } G \right\}$$

הוכיחו:

$$3COLOR \leq_P 4COLOR \ .$$

שאלה 6 נגדיר את המושג "היפר גרף" באופן הבא: $H = (V, hE)$ כאשר

- V היא קבוצת קודקודים (בדומה לגרף רגיל)
- hE היא קבוצת של היפר-צלעות, כך שכל היפר-צלע מוגדרת ע"י שלושה קודקודים (בניגוד לצלע בגרף "רגיל" המוגדרת ע"י שני קודקודים). לדוגמה: $he_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ היא היפר-צלע.

הגדרה: **היפר כיסוי קודקודים** (hyper vertex cover) בהיפר-גרף הינה קבוצת קודקודים $S \subseteq V$ כך שלגל היפר-צלע $he \in hE$ מתקיים שלפחות אחד משלושת הקודקודים של הצלע שייך ל- S.

כלומר אם $\{u_1, u_2, u_3\} \in hE$ אז $u_1 \in S$ או $u_2 \in S$ או $u_3 \in S$.

נגדיר את השפה hyperVC באופן הבא:

$$\text{hyperVC} = \big\{\langle H, k\rangle \;\big|\; \text{היפר-גרף המכיל היפר כיסוי קודקודים בגודל } k \text{ } H \big\}$$

נגדיר את השפה HS (Hitting Set) באופן הבא:

$$HS = \big\{\langle n, k, A_1, \ldots, A_t\rangle \;\big|\; \text{כל } A_i \in [n] \text{ וקיים } R \subseteq [n] \text{ כך ש- } |R| = k \text{ ולכל } 1 \le i \le t \text{ מתקיים } A_i \cap R \neq \emptyset \big\}$$

כאשר $[n] = \{1, 2, \cdots, n\}$.

הוכיחו כי hyperVC $\le_P HS$.

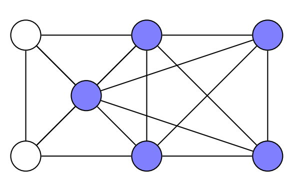
שאלה 7 בעיית $HAMCYCLE$ (מעגל המילטוני) מוגדרת באופן הבא:

בהינתן גרף מכוון $G = (V, E)$, האם G מכיל מעגל שעובר בכל קודקוד בגרף פעם אחת בדיוק?

בעיית $HAMPATH$ (מסלול המילטוני) מוגדרת באופן הבא:
בהינתן גרף מכוון $G = (V, E)$ ושני קודקודים $s, t \in V$, האם G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t?

הוכיחו כי $HAMPATH \le_p HAMCYCLE$.

שאלה 8 בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, קליקה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $C \subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u, \text{v} \in C$ מתקיים $(u, \text{v}) \in E$. התרשים מראה קליקה בגודל $k = 5$:



נגדיר:

$$\frac{1}{2}CLIQUE = \left\{\langle G\rangle \;\middle|\; \text{גרף בעל } n = |V| \text{ קודקודים וקיימת קליקה בגרף בגודל } \frac{n}{2} \;\; G = (V, E) \right\}$$

$$\frac{1}{4}CLIQUE = \left\{\langle G\rangle \;\middle|\; \text{גרף בעל } n = |V| \text{ קודקודים וקיימת קליקה בגרף בגודל } \frac{n}{4} \;\; G = (V, E) \right\}$$

הוכיחו כי קיימת רדוקציה פולינומאלית מבעית $\frac{1}{2}CLIQUE$ לבעיית $\frac{1}{4}CLIQUE$.

כלומר:

$$\frac{1}{2}CLIQUE \leq_P \frac{1}{4}CLIQUE \ .$$

שאלה 9 גרף הוא k צביע (k- colourable) אם ניתן לצבוע את הקודקודים שלו ב- k צבעים (או פחות) כך ששני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע. נגדיר את השפות הבאות:

$$3COLOR = \left\{ \langle G \rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון וגם 3- צביע } G \right\} \ ,$$

$$6COLOR = \left\{ \langle G \rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון וגם 6- צביע } G \right\} \ .$$

הוכיחו: $3COLOR \leq_P 6COLOR$.

שאלה 10 **(10 נקודות)**

הבעיית $SubSetSum$ מוגדרת באופן הבא:

<u>קלט</u>: קבוצת מספרים $S = \{x_1, x_2, \quad \ldots \quad x_n\}$ ומספר t.

<u>פלט</u>: האם קיימת תת-קבוצה של S שסכום איבריה שווה t?

$$SubSetSum = \left\{ \langle S, t \rangle \;\middle|\; \sum_{x \in X} x = t \text{ - קיימת } S \subseteq X \text{ כך ש} \right\}$$

תהי $KNAPSACK$ הבעייה המוגדרת בשאלה 3. הוכיחו את הטענה הבאה:

$$KNAPSACK \leq_P SubSetSum \ .$$

תשובות

<u>שאלה 1</u> בהינתן זוג $\langle G,k\rangle$ הקלט עבור $CLIQUE$, ניצור זוג $\langle G',k'\rangle$, הקלט של VC ע"י פונקצית הרדוקציה

$$\langle G,k\rangle \in CLIQUE \quad \Rightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in VC$$
$$\langle G,k\rangle \in CLIQUE \quad \Leftarrow \quad \langle G',k'\rangle \in VC$$

<u>הגדרת הרדוקציה</u>

- נגדיר את G' להיות הגרף המשלים $\bar{G}(V,\bar{E})$:
$$\bar{E} = \left\{ (u_1,u_2) \;\middle|\; (u_1,u_2) \notin E \right\} \ .$$
- נגדיר $k' = |V| - k$.

<u>נכונות הרדוקציה</u>

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

נניח כי $\langle G,k\rangle \in CLIQUE$.

$\Leftarrow$ G מכיל קליקה C בגודל k.

$\Leftarrow$ לכל $(u_1,u_2)\in\bar{E}$ של $\bar{G}$, מתקיים $(u_1,u_2)\notin E$ ולכן $u_1\notin C$ או $u_2\notin C$.

$\Leftarrow$ לכל שני קודקודים u_1,u_2 ב- $\bar{G}$, $\quad u_1\in V\backslash C$ או $u_2\in V\backslash C$.

$\Leftarrow$ הקובצת קודקודים $V\backslash C$ היא כיסוי בקודקודים של $\bar{G}$ בגודל $k'=|V|-k$.

$\Leftarrow$ $\langle G',k'\rangle \in VC$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

נניח כי $\langle G',k'\rangle \in VC$.

$\Leftarrow$ G' מכיל כיסוי בקדקודים S בגודל $k'=|V|-k$.

$\Leftarrow$ לכל שני קודקודים u_1,u_2 של G', אם $(u_1,u_2)\in\bar{E}$ אז $u_1\in S$ או $u_2\in S$.
השלילה הלוגית של גרירה זו היא: אם $u_1\notin S$ וגם $u_2\notin S$ אז $(u_1,u_2)\notin\bar{E}$.

$\Leftarrow$ אם $u_1\in V\backslash S$ וגם $u_2\in V\backslash S$ אז $(u_1,u_2)\in\bar{E}$.

$\Leftarrow$ הקבוצת קודקודים $V\backslash S$ היא קליקה ב- G בגודל $k=|V|-k'$.

$\Leftarrow$ G מכיל קליקה בגודל k.

שאלה 2

פונקציית הרדוקציה:

אנחנו נגדיר פונקציית הרדוקציה f שבהינתן זוג $\langle G,k\rangle \in IS$ (הקלט של IS), תיצור $\langle G',k'\rangle \in CLIQUE$, (הקלט של $CLIQUE$), כלומר

(1*)
$$f\left(\langle G,k\rangle\right) = \langle G',k'\rangle \ .$$

כך שהתנאי הבא מתקיים:

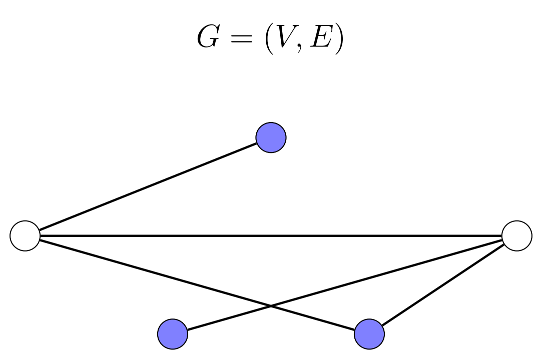
(2*)
$$\langle G,k\rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in CLIQUE \ .$$

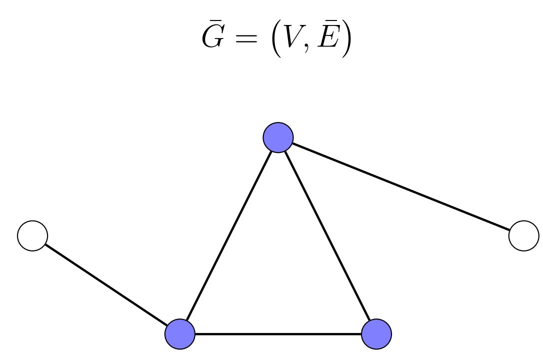
הפונקציית הרדוקציה מוגדרת לפי התנאים הבאים:

1) בהינתן גרף $G=(V,E)$.
אז G' הוא הגרף המשלים $\bar{G}=(V,\bar{E})$, כאשר
$$\bar{E} = \left\{(u_1,u_2) \ \middle|\ (u_1,u_2) \notin E\right\} \ .$$

2) $k'=k$.

כדוגמה: בהינתן הגרף $G=(V,E)$ שמכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל $k=3$. הפונקציית הרדוקציה יוצרת את הגרף $\bar{G}=(V,\bar{E})$ ואת המספר $k'=k=3$, כמתואר בתרשים למטה:





נכונות הרדוקציה

כעת נוכיח שמתקיים: $\langle G',k'\rangle \in CLIQUE \quad \Leftrightarrow \quad \langle G,k\rangle \in IS$.

כיוון $\Leftarrow$

בהינתן גרף $G=(V,E)$ ושלם k.
נניח כי $\langle G,k\rangle \in IS$.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל k לפחות.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה S בגודל k.

$\Leftarrow$ אם $S \in u_1, u_2$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

כלומר, כל שני קדקודים ב- S לא מחוברים בצלע של G.

$\Leftarrow$ אם $S \in u_1, u_2$ אז $(u_1, u_2) \in \bar{E}$.

כלומר, כל שני קדקודים ב- S מחוברים בצלע של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ הקבוצה S היא קליקה בגודל k של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ הקבוצה S היא קליקה בגודל $k' = k$ של $G' = \bar{G}$.

$\Leftarrow$ $\langle G', k' \rangle \in CLIQUE$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

בהינתן גרף G' ושלם k'.

נניח כי $\langle G', k' \rangle \in CLIQUE$.

$\Leftarrow$ $\langle \bar{G}, k \rangle \in CLIQUE$ (כי על פי ההגדרה של הפונקצית הרדוקציה, $G' = \bar{G}$ ו- $k' = k$).

$\Leftarrow$ $\bar{G}$ מכיל קליקה בגודל k לפחות.

$\Leftarrow$ $\bar{G}$ מכיל קליקה C בגודל k.

$\Leftarrow$ אם $u_1 \in C$ וגם $u_2 \in C$ אז $(u_1, u_2) \in \bar{E}$.

כלומר, כל שני קדקודים ב- C מחוברים בצלע של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ אם $u_1 \in C$ וגם $u_2 \in C$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

כלומר, כל שני קדקודים ב- C לא מחוברים בצלע של הגרף G.

$\Leftarrow$ הקבוצה C היא קבוצה בלתי תלוייה בגודל k של G.

$\Leftarrow$ $\langle G, k \rangle \in IS$.

<u>שאלה 3</u>

<u>פונקצית הרדוקציה:</u>

נגדיר פונקצית הרדוקציה f שבהינתן זוג $\langle G, k \rangle \in IS$, (הקלט של IS), יוצרת $\langle G', k' \rangle \in VC$, (הקלט של VC), אשר מקיימת את התנאי:

$$\langle G, k \rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G', k' \rangle \in VC \ . \qquad (*2)$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

1) בהינתן הגרף $G = (V, E)$, אז הגרף G' הוא אותו גרף $G = (V, E)$.

2) $k' = |V| - k$.

נכונות הרדוקציה

כעת נוכיח שמתקיים: $\langle G', k' \rangle \in VC \quad \Leftrightarrow \quad \langle G, k \rangle \in IS$.

כיוון $\Leftarrow$

בהינתן גרף $G = (V, E)$ ושלם k.

נניח כי $\langle G, k \rangle \in IS$.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה S בגודל k לפחות: $|S| \geq k$.

$\Leftarrow$ אם $u_1, u_2 \in S$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

כלומר, כל שני קדקודים ב- S לא מחוברים בצלע ב- G.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \notin S$ או $u_2 \notin S$.

$\Leftarrow$ אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \in V \backslash S$ או $u_2 \in V \backslash S$.

$\Leftarrow$ התת-קבוצה $V \backslash S$ היא כיסוי קודקודים של G.

$|S| \geq k$ ו- $|V \backslash S| = |V| - S$ לכן $|V \backslash S| \leq |V| - k$.

$\Leftarrow$ $G' = G$ מכיל כיסוי קודקודים U בגודל $|V| - k \leq= k'$ לכל היותר.

$\Leftarrow$ $\langle G', k' \rangle \in VC$.

כיוון $\Rightarrow$

בהינתן גרף G' ושלם k'.

נניח כי $\langle G', k' \rangle \in VC$.

$\Leftarrow$ $G' = (V, E)$ מכיל כיסוי קדקודים U בגודל k' לכל היותר: $|U| \leq k'$.

$\Leftarrow$ אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \in U$ או $u_2 \in U$.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם $u_1 \notin U$ וגם $u_2 \notin U$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם $u_1 \in V \backslash U$ וגם $u_2 \in V \backslash U$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

$\Leftarrow$ התת-קבוצה $S=V\backslash U$ היא קבוצה בלתי תלויה.

$|S|=|V|-|U|$ ו- $|U|\leq k'$ אז $|S|\geq |V|-k'$.

$\Leftarrow$ $G'=G$ מכיל קבוצה בלתי תלויה S בגודל $|V|-k'=k$ לפחות.

$\Leftarrow$ $\langle G,k\rangle \in IS$.

שאלה 4

פונקצית הרדוקציה:

נבנה פונקצית הרדוקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ שמוגדרת

$$f\left(\langle S,t\rangle\right)=\langle A\rangle$$

כאשר $\langle S,t\rangle$ קלט של $SubSetSum$ ו- $\langle A\rangle$ קלט של $PARTITION$.

1) יהי $\sigma=\sum\limits_{x\in S}x$.

2) נגדיר את הקבוצה החדשה A על ידי הוספת האיבר $\sigma-2t$ לקבוצה S:

$$A=S\cup\{\sigma-2t\}\ .$$

נכונות:

$\Leftarrow$ כיוון

נניח ש- $\langle S,t\rangle\in$ SubsetSum.

$\Leftarrow$ קיימת תת-קבוצה $S\subseteq Y$ כך ש- $t=\sum\limits_{y\in Y}y$.

$\Leftarrow$ $\sum\limits_{x\in A}x=\sum\limits_{x\in S}x+\sigma-2t=2\sigma-2t$

$\Leftarrow$ אם נגדיר $A_1=Y\cup\{\sigma-2t\}$ ו- $A_2=A\backslash A$ אז

$$\sum_{x\in A_1}x=\sum_{x\in Y}x+\sigma-2t=t+\sigma-2t=\sigma-t$$

וכן

$$\sum_{x\in A_2}x=\sum_{x\in A\backslash A_1}x=\sum_{x\in A}x-\sum_{x\in A_1}x=2\sigma-2t-(\sigma-t)=\sigma-t\ .$$

$\Leftarrow$ $\sum\limits_{x\in A_1}x=\sum\limits_{x\in A_2}x=\frac{1}{2}\sum\limits_{x\in A}x$

וגם $A_1\cap A_2=A_1\cap(A\backslash A_1)=\emptyset$

וגם $A_1\cup A_2=A_1\cup(A\backslash A_1)=A$.

$\Leftarrow$ קיימת חלוקה $A_1, A_2 \subset A$ של A

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle A \rangle \in PARTITION$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

נניח ש- $\langle A \rangle \in \text{Partition}$.

$\Leftarrow$ קיימות תת-קבוצות $A_1, A_2 \subseteq S'$ כך ש:

$$\sum_{x \in A_1} x = \sum_{x \in A_2} x = \frac{1}{2} \sum_{x \in A} x$$

וגם $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap (A \backslash A_1) = \emptyset$

וגם $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A \backslash A_1) = A$.

$\Leftarrow$ לפי הבניית הרדוקציה: $A = \{\sigma - 2t\} \cup S$ כאשר $t \leq \sigma$ שלם ו- S קבוצת שלמים ו- $\sigma = \sum_{x \in S} x$.

$\Leftarrow$ קיימת הקבוצה $S = A \backslash \{\sigma - 2t\}$.

$\Leftarrow$ מכיוון ש: $A = \{\sigma - 2t\} \cup S$ ו- A_1, A_2 מהוות חלוקה של A אז $\{\sigma - 2t\}$ שייך ל- A_1 או A_2.

ללא הגבחת כלליות נניח ש: $\{\sigma - 2t\} \in A_1$

$\Leftarrow$ קיימת הקבוצה $A_1 \backslash \{\sigma - 2t\}$.

$\Leftarrow$ נגדיר הקבוצה:

$$Y = A_1 \backslash \{\sigma - 2t\} \quad \subseteq \quad A \backslash \{\sigma - 2t\} = S \ .$$

$\Leftarrow$

$$\sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in A_1} y - (\sigma - 2t) = \frac{1}{2} \sum_{y \in A} y - (\sigma - 2t) = \frac{1}{2} (2\sigma - 2t) - (\sigma - 2t) = t \ .$$

$\Leftarrow$ קיימת תת- קבוצה $Y \subseteq S$ כך ש: $\sum_{y \in Y} y = t$

$\Leftarrow$ $\langle S, t \rangle \in SubSetSum$.

<u>סיבוכיות זמן:</u>

הפונקצית הרדוקציה f, על קלט $\langle S, t \rangle$ מחזירה את הפלט $\langle A \rangle$ כאשר $A = S \cup \{\sigma - 2t\}$.

לכן, על קלט $\langle S, t \rangle$ הפונקציה f תבצע לכך:

שלב 1) מחשבת את הסכום σ של כל האיברים שבקבוצה S

שלב 2) מחשבת את החיסור $\sigma - 2t$.

שלב 3) בונה את הקבוצה $S \cup \{\sigma - 2t\}$.

נסמן ב- $n = |\langle S, t\rangle|$ אורך הקלט.

- שלב (1) עולה $O(|S|)$ צעדים.
- שלב (2) עולה $O(|S|)$ צעדים.
- שלב (3) עולה n צעדים לכל היותר.

לכן בסה"כ הסיבוכיות זמן של f היא:
$$O(|S|) + O(|S|) + O(n) = O(n) \ .$$

שאלה 5

פונקצית הרדוקציה:

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, הקלט של $3COLOR$, ניצור גרף לא מכוון חדש $G' = (V', E')$, הקלט של $4COLOR$.
בהינתן $G = (V, E)$ נבנה הגרף החדש $G' = (V', E')$ כאשר:

- $V' = V \cup \{u^*\}$, כלומר הוספנו קודקוד אחד חדש u^*.
- $E' = E \cup \left\{(u, u^*) \;\middle|\; u \in V\right\}$. כלומר כל קודקוד בקבוצת הקודקודים V מחובר ל- u^* בצלע.

נכונות הרדוקציה:

נסמן צבע של קודקוד $u \in V$ ע"י $c(u)$, ונסמן 3 צבעים שונים של הקודקודים של G ב- $\{1, 2, 3\}$.
כלומר $c(u) \in \{1, 2, 3\}$.

באופן דומה, נסמן צבע של קודקוד $u' \in V'$ ע"י $c(u')$, ונסמן 4 צבעים שונים של הקודקודים של G' ב- $\{1, 2, 3, 4\}$.
כלומר $c(u') \in \{1, 2, 3, 4\}$.

נוכיח ש:
$$\langle G\rangle \in 3COLOR \quad \Leftrightarrow \quad \langle G'\rangle \in 4COLOR \ .$$

כיוון $\Leftarrow$

נניח כי $\langle G\rangle \in 3COLOR$.

$\Leftarrow$ אם $c(u) \in \{1, 2, 3\}$ לכל $u \in V$, ואם $(u_1, u_2) \in E$ אז $c(u_1) \neq c(u_2)$.
כלומר, ניתן לצבוע כל קודקוד ב-3 צבעים שונים כך שני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע.

$\Leftarrow$ אם $c\left(u^*\right)=4$ אז לכל $u\in V$ מתקיים $c(u)\neq c(u^*)=4$.
הצבע של u^* שונה מהצבעים של כל הקודקודים של V.

$\Leftarrow$ לכל $u_1',u_2'\in V'$ מתקיים שאם $(u_1',u_2')\in E'$ אז $c(u_1')\neq c(u_2')$.

$\Leftarrow$ ניתן לצבוע את הקודקודים של G' ב- 4 צבעים שך ששני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע.

$\Leftarrow$ $\langle G'\rangle\in 4COLOR$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

נניח כי $\langle G'\rangle\in 4COLOR$.

$\Leftarrow$ אם $c(u')\in\{1,2,3,4\}$ לכל $u'\in V'$, ואם $(u_1',u_2')\in E'$ אז $c(u_1')\neq c(u_2')$.
כלומר, ניתן לצבוע כל קודקוד ב-4 צבעים שונים כך שני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע.

$\Leftarrow$ מכיוון ש- $V'=V\cup\{u^*\}$ ו- u^* מחובר לכל קודקוד $u\in V$, אם $c\left(u^*\right)=4$ אז בהכרח לכל $u\in V$ מתקיים $c(u)=1,2,3$.
(אחרת קיים קודקוד $u\in V$ הצבוה בצבע 4 וקיים וצלע בין u^* הצבוע בצבע 4 לבין הקודקוד $u\in V$ הצבוע בצבע 4 בסתירה לכך ש- G' הוא 4-צביע.)

$\Leftarrow$ מכיוון ש- G' הוא 4- צביע אז בהכרח אין צלע ב- $E=\left\{(u_1,u_2)\;\middle|\;u_1,u_2\in V\right\}$ המחבר בין קודקודים בעלי אותו צבע.

$\Leftarrow$ $G=(V,E)$ הוא גרף 3- צביע.

$\Leftarrow$ $\langle G\rangle\in 3COLOR$.

<u>שאלה 6</u>

בהינתן $\langle H,k\rangle$ הקלט של hyperVC, כאשר $H=(V,hE)$ היפרגרף ו- k שלם, ניצור הקלט של HS כך ש- $\langle n,k,A_1,\ldots,A_t\rangle\in HS\Leftrightarrow\langle H,k\rangle\in\text{hyperVC}$, באופן הבא:

- $n=|V(H)|$.
- אם $hE=\{he_1,\ldots,he_m\}$ אז $A_1=he_1,\quad\cdots\quad,A_m=he_m$.

כלומר
$$f\left(\ \langle H,k\rangle\ \right)=\langle\ |V|\ ,\ k\ ,\ he_1\ ,\quad\ldots\quad,\ he_m\rangle\ .$$

<u>נכונות הרדוקציה</u>

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

אם $\langle H,k\rangle\in\text{hyperVC}$

$\Leftarrow$ H מכיל היפר-כיסוי קודקודים $S \subseteq V$ בגודל k.

$\Leftarrow$ אם $he_i = \{u_1, u_2, u_3\} \in hE$ אז $u_1 \in S$ או $u_2 \in S$ או $u_3 \in S$.

כלומר, התת-קבוצה של היפר-כיסוי קודקודים S מכילה לפחות קודקוד אחד מכל צלע.

$\Leftarrow$ אם $he_i \in hE$ אז $he_i \cap S \neq \emptyset$.

כלומר, כיוון שבחרנו את ה- $\{A_i\}$ להיות הקבוצות הצלעות $\{he_i\}$, אזי הקבוצה S "פוגעת" בכל הקבוצות $\{he_i\}$.

$\Leftarrow$ לכל $1 \leq i \leq m$ מצקיים $he_i \subseteq V$ ו- $S \cap he_i \neq \emptyset$ ו- $|S| = k$.

$\Leftarrow$ $\langle |V|, k, he_1, \quad \ldots \quad, he_m \rangle \in HS$

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

אם $\langle |V|, k, he_1, \quad \cdots \quad he_m \rangle \in HS$

$\Leftarrow$ קיימת קבוצה S ש"פוגעת" בכל הקבוצות he_i.

כלומר, קיימת $S \subseteq V$ כך ש- $he_i \cap S \neq \emptyset$ לכל $1 \leq i \leq m$ ו- $|S| = k$.

$\Leftarrow$ אותה קבוצה מהווה היפר כיסוי קודקודים בגודל k של ההיפר גרף $H = (V, hE)$ כאשר $hE = \{he_1, \quad \ldots \quad, he_m\}$.

$\Leftarrow$ $\langle H, k \rangle \in$ hyperVC.

<u>שאלה 7</u>

<u>פונקצית הרדוקציה</u>

בהינתן $\langle G, s, t \rangle$ הקדט של $HAMPATH$, נבנה גרף $\langle G' \rangle$ הקלט של $HAMCYCLE$ בזמן פולינומיאלי ונוכיח כי:

$$\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH \quad \Leftrightarrow \quad \langle G' \rangle \in HAMPATH \ .$$

נבנה את G' באופן הבא:

נוסיף קודקוד חדש x ל- G ושתי צלעות מכוונות חדשות (x, s) ו- (t, x) ונקבל גרף חדש G'.

<u>נכונות הרדוקציה</u>

1. ניתן לחשב את f בזמן קבוע.

2. נוכיח כי $\langle G' \rangle \in HAMPATH \quad \Leftrightarrow \quad \langle G, s, t \rangle \in HAMPATH$.

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

נניח כי $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH$.

- $\Leftarrow$ G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t.
- $\Leftarrow$ אותו מסלול קיים ב- G'.
- $\Leftarrow$ מסלול זה יחד עם הצלעות שהוספנו (x, s) ו- (t, x) מהווה מעגל המילטוני שעובר דרך כל קודקודי הגרף G'.
- $\Leftarrow$ G' מכיל מעגל המילטוני.
- $\Leftarrow$ $\langle G' \rangle \in HAMCYCLE$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

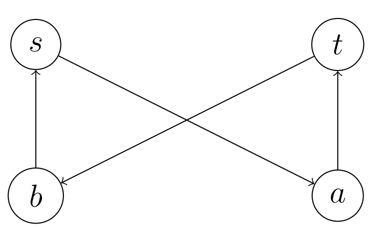
נניח כי $\langle G' \rangle \in HAMCYCLE$

- $\Leftarrow$ G' מכיל מעגל המילטוני C שעובר דרך כל הקודקודים של G'.
- $\Leftarrow$ לפי הבנייה, C בהכרח מכיל את הצלעות החדשות (x, s) ו- (t, x).
- $\Leftarrow$ הורדת x ושתי הצלעות (x, s) ו- (t, x) מ- C מאשירה מסלול המילטוני מ- s ל- t שעובר דרך כל קודקוד ב- G בדיוק פעם אחת.
- $\Leftarrow$ G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t.
- $\Leftarrow$ $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH$.

<u>הערה:</u>

להוסיף צלע (t, s) ל- G לא מספיק.

לדוגמה:



14

הגרף לא מכיל מסלול המילטוני אבל כן מכיל מעגל המילטוני. ואם נוסיף רק צלע (t,s), המעגל עדיין קיים ב- G'.

שאלה 8

בניית הרדוקציה

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$. הפונקציית הרדוקציה היא

$$f(\langle G\rangle)=\langle G'\rangle$$

כאשר:

- $G'=(V',E')$ גרף לא מכוון.
  - עבור הגרף G נסמן $|V|=n$ ו- $|E|=m$.
  - עבור הגרף G' נסמן $|V'|=n'$ ו- $|E'|=m'$.
- $V'=V\cup U$ כאשר U קבוצה של n קודקודים בודדים שלא מחוברים לאף קודקוד.
- $E'=E$.
- לפיכך:

$$n'=|V'|=|V|+|U|=2n\ ,$$

ו-

$$m'=|E'|=|E|=m\ .$$

הוכחת נכונות

הוכחה לכיוון $\Leftarrow$

אם $\langle G\rangle\in\frac{1}{2}CLIQUE$.

$\Leftarrow$ G גרף לא מכוון שמכיל קליקה $C\subset V$ בגודל $\frac{n}{2}$.

$\Leftarrow$ הגרף G' מכיל קליקה בגודל $\frac{n}{2}$.

$\Leftarrow$ הגרף G' מכיל קליקה בגודל $\frac{n'}{4}$.

$\Leftarrow$ $\langle G'\rangle\in\frac{1}{4}CLIQUE$.

הוכחה לכיוון $\Rightarrow$

אם $\langle G\rangle \notin \frac{1}{2}CLIQUE$.

$\Leftarrow$ G גרף לא מכוון ולא קיימת קליקה $C \subset V$ בגודל $\frac{n}{2}$ בגרף G.

$\Leftarrow$ גם לא קיימת קליקיה בגודל $\frac{n}{2}$ בגרף G'.

$\Leftarrow$ לא קיימת קליקיה בגודל $\frac{n'}{4}$ בגרף G'.

$\Leftarrow$ $\langle G'\rangle \notin \frac{1}{4}CLIQUE$.

שאלה 9

שאלה 10