שיעור 3
גבול של פונקציה

משפטים יסודיים של גבולות

3.1 משפט. (גבולות מסוימות)

א) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

ב) $\lim\limits_{x\to\infty}p^x=\begin{cases}0 & (0<p<1)\\ \infty & p>1\end{cases}$

ג) . $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=1\ , \qquad (p>0)$

ד) . $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

דוגמאות לחישוב גבולות

דוגמאות.

דוגמא 1.

$$\lim_{x\to1}(3x^2-2x+7)=3\cdot1^2-2\cdot1+7=8\ .$$

דוגמא 2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}&=\left[\frac{0}{0}\right]\\ &=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}\\ &=\lim_{x\to2}\frac{(x+16)}{(x-4)}\\ &=\lim_{x\to2}\frac{18}{-2}\\ &=-9\ .\end{aligned}$$

דוגמא 3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}&=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}\\ &=\frac{1}{2}\ .\end{aligned}$$

דוגמא 4.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{\sqrt{x^2+3x}+2}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{(x-1)\cdot(\sqrt{x^2+3x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)\cdot(\sqrt{x^2+3x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x+4}{\sqrt{x^2+3x}+2}$$
$$=\frac{5}{4}\ .$$

דוגמא 5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^x+4^x+3^x}{5^x-4^x-2\cdot3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+(\frac{4}{5})^x+(\frac{3}{5})^x}{1-(\frac{4}{5})^x-2\cdot(\frac{3}{5})^x}=\quad1\ .$$

דוגמא 6.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x+4^x+3^x}{5^x-4^x-2\cdot3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{5}{3})^x+(\frac{4}{3})^x+1}{(\frac{5}{3})^x+(\frac{4}{3})^x-2}=\quad-\frac{1}{2}\ .$$

דוגמא 7.

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)^n\right)=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^n$$

גדלים בלתי מוגדרים

.1 $\left[\frac{a}{\infty}\right]=0$ לכל מספר a.

$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ לא מוגדר.

.2 $\left[\frac{a}{0^+}\right]=\infty$, $\quad\left[\frac{a}{0^-}\right]=-\infty$ לכל מספר $a>0$.

$\left[\frac{0}{0}\right]$ לא מוגדר.

$\left[\frac{\infty}{0^+}\right]=\infty$, $\quad\left[\frac{\infty}{0^-}\right]=-\infty$.

.3 $[\infty\cdot\infty]=\infty$, $\quad a\cdot\infty=\infty$ לכל מספר $a>0$.

$[0\cdot\infty]$ לא מוגדר.

.4 $[a+\infty]=\infty$, $\quad[a-\infty]=-\infty$ לכל מספר a.

$[\infty+\infty]=\infty$.

$[\infty-\infty]$ לא מוגדר.

5. $[a^{\infty}]=\infty$, $[a^{-\infty}]=0$ לכל מספר $a>1$.

$[a^{\infty}]=0$, $[a^{-\infty}]=\infty$ לכל מספר $0<a<1$.

$[0^{\infty}]=0$, $[\infty^{\infty}]=\infty$.

1^{∞} לא מוגדר, 0^0 לא מוגדר, ∞^0 לא מוגדר.

דוגמאות.

דוגמא 1.

$$\lim_{x\to\infty}[2^x]^{1/x}=[\infty^0]=\lim_{x\to\infty}2^{x/x}=2^1=2$$

דוגמא 2.

$$\lim_{x\to\infty}[2^x]^{1/\sqrt{x}}=[\infty^0]=\lim_{x\to\infty}[2^{\sqrt{x}}]=2^{\infty}=\infty$$

דוגמא 3.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{1/x}=[0^0]=\frac{1}{2}\ ,$$

דוגמא 4.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{1/\sqrt{x}}=[0^0]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}=0\ .$$

דוגמא 5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\cdot x=[0\cdot\infty]=2$$

דוגמא 6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\cdot x^3=[0\cdot\infty]=\infty$$

לא מוגדר.

דוגמא 7.

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-x)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}x(x-1)=\infty\ .$$

משפטים יסודיים של גבולות

3.2 משפט. (משפטים של גבולות)
אם $\lim f(x)=A$ ו- $\lim f(x)=B$, אז

א)

$$\lim_{x\to a}(cf(x))=c\cdot A$$

כאשר c קבוע.

ב)

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$$

ג)

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$$

ד)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$$

בתנאי $B\neq 0$.

דוגמאות.

1)

$$\lim_{x\to\infty}3\cdot\frac{x^2-2x}{x^2+3x}=3\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{x^2+3x}=3\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x}}=3\cdot\frac{1-\frac{2}{\infty}}{1+\frac{3}{\infty}}=3\cdot\frac{1}{3}=1\ .$$

2)

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(x+4)}{2x^2-8}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(x+4)}{2(x+2)(x-2)}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{2(x-2)}\right)\cdot\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+4}{x+2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{4}=3\ .$$

3)

$$\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{x}{x-1}+\frac{2x}{x-3}\right)=\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{x}{x-1}\right)+\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{2x}{x-3}\right)=\frac{3}{2}+\frac{6}{0^+}=\frac{3}{2}+\infty=\infty\ .$$

4)

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{x^2-16}{x+8}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{(x-4)(x+4)}{x+8}\right)=\frac{\lim_{x\to 4}(x-4)(x+4)}{\lim_{x\to 4}(x+8)}=\frac{0}{12}=0\ .$$

פונקציות רציונליות

3.1 הגדרה: (פונקציה רציונלית שלמה)
פונקציה f המוגדרת ע"י נוסחה מצורה

$$f(x)=a^nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

עם מקדמים $a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ נקראת **פונקציה רציונלית שלמה** או **פולינום** ממעלה n. לעתים פולינום ממעלה n נסמן ב- $P_n(x)$.

דוגמאות.

דוגמא 1) הפונקציה $f(x)=2x^2-3x+4$ היא פולינום מסדר 2.

דוגמא 2) הפונקציה $f(x)=4x^3+5x^2-6x+4$ היא פולינום מסדר 3.

דוגמא 3) הפונקציה $f(x)=x^9-8x^6+4x^3-2x$ היא פולינום מסדר 9.

3.2 הגדרה: (פונקציה רציונלית)
פונקציה $f(x)$ שניתן לרשום בצורה

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\ ,$$

כאשר P_n פולינום ממעלה n, ו- Q_m פולינום ממעלה m, נקראת פונקציה רציונלית.

א) נאמר כי $f(x)$ היא **פונרציה רצינלית אמיתי** אם $m < n$, כלומר אם מעלת הפולינום שבמונה קטנה ממעלת הפולינום שבמכנה.

ב) נאמר כי $f(x)$ היא **פונקציה רצינלית מדומה** אם $m \geq n$, כלומר אם מעלת הפולינום שבמונה גדולה או שווה למעלת הפולינום שבמכנה.

דוגמאות.

דוגמא 1)

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 4}{3x + 4}$$

מעלה של הפולינום במונה הוא 2, מעלה של הפולינום במחנה הוא 1, לכן $f(x)$ היא פונקציה רציונלית מדומה.

דוגמא 2)

$$f(x) = \frac{4x + 5}{3x^3 + x^2 - 4}$$

מעלה של הפולינום במונה הוא 1, מעלה של הפולינום במחנה הוא 4, לכן $f(x)$ היא פונקציה רציונלית אמיתי.

דוגמא 3)

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 4}{3x^5 + 4}$$

מעלה של הפולינום במונה הוא 2, מעלה של הפולינום במחנה הוא 5, לכן $f(x)$ היא פונקציה רציונלית אמיתי.

חקירה חלקית של פונקציה

אלה השלבים הבסיסיים של חקירה מלאה של פונקציה $y = f(x)$.

1. מצא את תחום הגדרת הפונקציה Df

עיין הגדרה **??** לעייל.

2. נקודות חיתוך עם הצירים וסימני הפונקציה

א) מצא נקודות חיתוך עם ציר ה - x ע"י לאפס y למצוא השורשים של המשוואה $f(x) = 0$ (אם קיימים).

ב) מצא נקודות חיתוך עם ציר ה - y ע"י לאפס x ואז הנקודת חיתוך עם ציר y ניתנת ע"י $y = f(0)$ (אם היא קיימת).

ג) ברר סימני הפונקציה בקטעים בין נקודות חיתוך עם ציר ה-x.

3. אסימפטוטות אנכיות וברר התנהגות הפונקציה בסביבתן

בנקודות אי-הגדרה של הפונקציה יהיו אסימפטוטות אנכיות. ברר התנהגות של הפונקציה בצד ימין וצד שמאל של כל אסימפטוטה אנכית וסמן התקרבות אליהן של הגרף $y = f(x)$.

4. אסימפטוטות אופקיות

ברר התנהגות של הפונקציה כאשר $x \to \pm\infty$.

א) אם

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$$

אז הישר $y = a$ הוא **אסימפטוטה אופקית (ימינית)** של $f(x)$.

ב) אם
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$
אז הישר $y = b$ הוא **אסימפטוטה אופקית (שמאלית)** של $f(x)$.

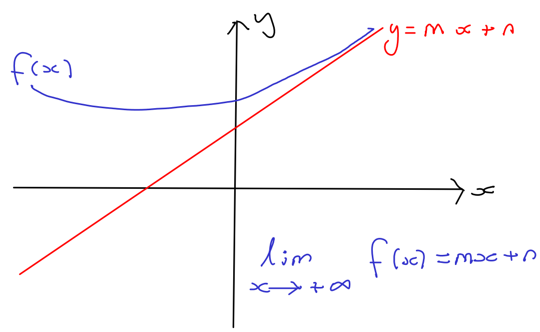
ג) אם גבולות אלה לא קיימים, בודקים: האם קיימת אסימפטוטה המשופעת של $f(x)$?

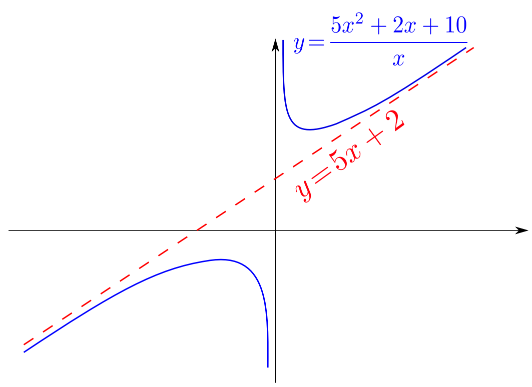
5. <u>אסימפטוטה משופע</u>

קו ישר $y = mx + n$ הוא אסימפטוטה משופעת של פונקציה $f(x)$ אם המרחק בין גרף הפונקציה ובין הקו $y = mx + n$ שואף ל-0 כאשר $x \to +\infty$ או $x \to -\infty$.

אם הגבול $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ שווה למספר סופי (כלומר לא שווה ל- $\pm\infty$ או 0) אז $y = mx + n$ אסימפטוטה משופעת של $f(x)$ כאשר

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \,, \qquad n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) \;.$$





דוגמא.
שרטטו את הגרף של הפונקציה $f(x) = \frac{x^4 - x^3 - 2x^2}{(x-3)^2}$.

פיתרון.

1. <u>תחום הגדרה:</u>
$x \neq 3$.

2. <u>נקודות חיתוך:</u>
שים לב,
$$f(x) = \frac{x^2(x+1)(x-2)}{(x-3)^3}$$
ולכן קל לראות שהנקודות חיתוך הן $(0,0)$, $(-1,0)$ ו- $(2,0)$.

<u>סימני הפונקציה</u>

y	x
$y<0$	$x<-1$
$y>0$	$-1<x<0$
$y>0$	$0<x<2$
$y<0$	$2<x<3$
$y>0$	$x>3$

.3 אסימפטוטות אנכיות

$x=3$.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \ , \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty \ .$$

.4 אסימפטוטות אופקיות

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \ , \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \ .$$

.5 אסימפטוטות משופעת

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

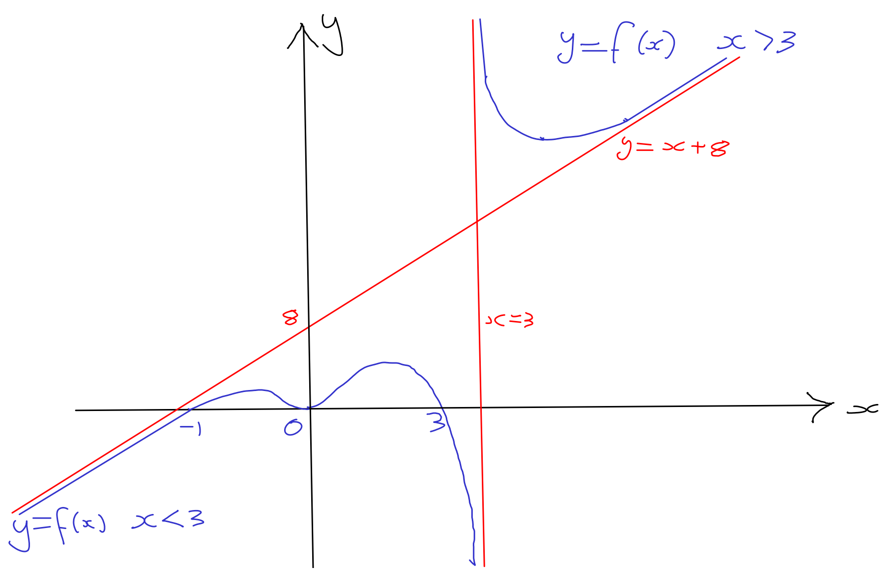
$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = 8$$

לכן הישר $y=x+8$ הוא אסימפטוטה משופעת כאשר $x\to +\infty$.

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to -\infty} (f(x) - mx) = 8$$

לכן הישר $y=x+8$ הוא אסימפטוטה משופעת כאשר $x\to -\infty$.



■

דוגמאות

דוגמא.
צייר סקיצה הגרף של הפונקציה $y=-(x+2)^2$ על סמך ביצוע של שלבים 1-5 של סכימת חקירת הפונקציות.

פיתרון.

שלב 1 תחום הגדרה: כל x.

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה-x:
$y=0$ כאשר $x=-2$ ולכן נקודת חיתוך עם ציר x היא $(-2,0)$.

נקודת חיתוך עם ציר ה-y:
$y=-4$ כאשר $x=0$ ולכן נקודת חיתוך עם ציר y היא $(0,-4)$.

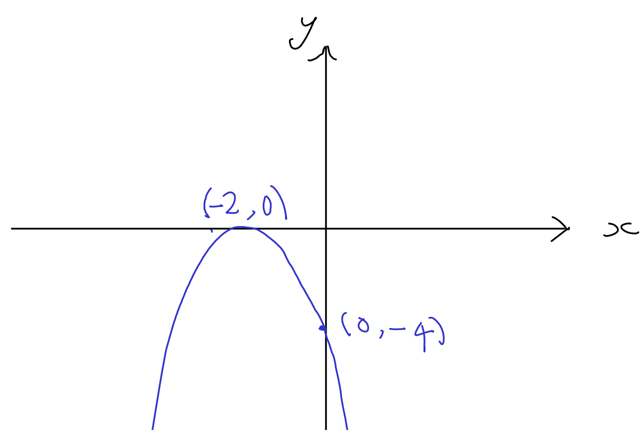
$y\leq 0$ בכל מקום בתחום.

שלב 3 הפונקציה מוגדרת בכל נקודה בתחום.

שלב 4

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{-(x+2)^2\right\}=-\infty\ ,\qquad \lim_{x\to-\infty}\left\{-(x+2)^2\right\}=-\infty\ .$$

שלב 5



■

דוגמא.
צייר סקיצה הגרף של הפונקציה $y=x^2(x-2)^2$ על סמך ביצוע של שלבים 1-5 של סכימת חקירת הפונקציות.

פיתרון.

שלב 1 תחום הגדרה: כל x.

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה-x:

$y=0$ כאשר $x=0$ או $x=2$. ולכן נקודות חיתוך עם ציר ה- x הן $(0,0)$ ו- $(2,0)$.

נקודות חיתוך עם ציר ה-y:

$y=0$ כאשר $x=0$ ולכן נקודת חיתוך עם ציר ה- y היא $(0,0)$.

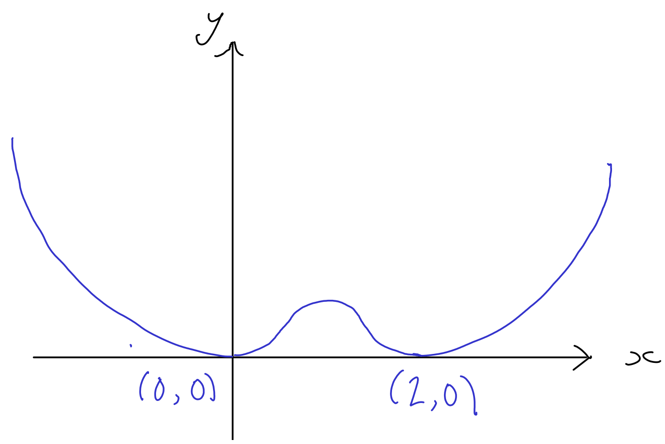
$y\geq 0$ בכל מקום בתחום.

שלב 3 הפונקציה מוגדרת בכל נקודה בתחום.

שלב 4

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{x^2(x-2)^2\right\}=+\infty\ , \qquad \lim_{x\to-\infty}\left\{x^2(x-2)^2\right\}=+\infty\ .$$

שלב 5



■

דוגמא.

צייר סקיצה הגרף של הפונקציה $y=\dfrac{x}{x^2+9}$ על סמך ביצוע של שלבים 1-5 של סכימת חקירת הפונקציות.

פיתרון.

שלב 1 תחום הגדרה: כל x.

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה-x:

$y=0$ כאשר $x=0$. ולכן נקודת חיתוך עם ציר ה-x היא $(0,0)$.

נקודות חיתוך עם ציר ה-y:

נציב $x=0$ בפונקציה ונקבל $y=0$. לכן נקודת חיתוך עם ציר ה-y היא $(0,0)$.

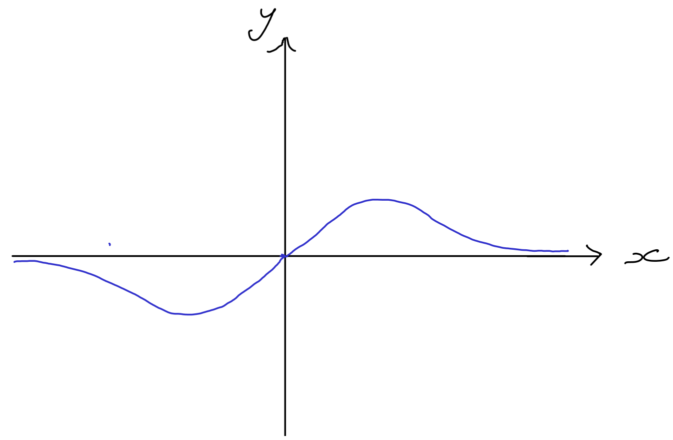
x	y
$x>0$	$y>0$
$x<0$	$y<0$
$x=0$	$y=0$.

שלב 3 אינן נקודות בהן הפונקציה לא מוגדרת.

שלב 4

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+9}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\ ,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+9}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\ .$$

שלב 5



■

דוגמא.
צייר סקיצה הגרף של הפונקציה $y=\dfrac{x^4}{x^2+9}$ על סמך ביצוע של שלבים 1-5 של סכימת חקירת הפונקציות.

פיתרון.

שלב 1 תחום הגדרה: כל x.

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה-x:
$y=0$ כאשר $x=0$. ולכן נקודת חיתוך עם ציר x היא $(0,0)$.

נקודות חיתוך עם ציר ה-y:
נציב $x=0$ בפונקציה ונקבל $y=0$. לכן נקודת חיתוך עם ציר y היא $(0,0)$.

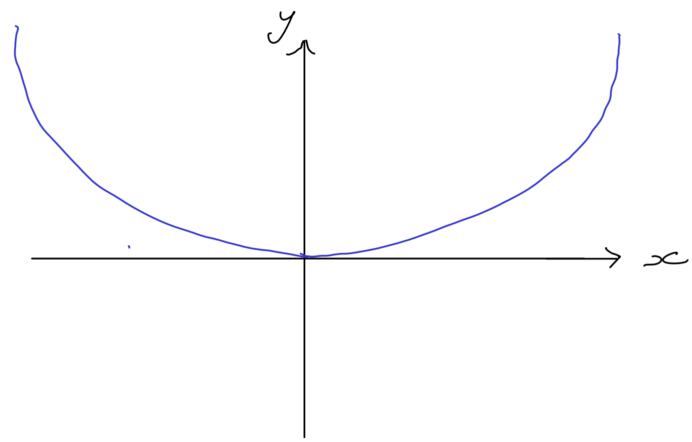
x	y
$x>0$	$y>0$
$x<0$	$y>0$
$x=0$	$y=0$.

שלב 3 אינן נקודות בהן הפונקציה לא מוגדרת.

שלב 4

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^2+9}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty\ ,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{x^2+9}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty\ .$$

שלב 5



■

דוגמא.
צייר סקיצה הגרף של הפונקציה $y=\dfrac{2-x}{x-1}$ על סמך ביצוע של שלבים 1-5 של סכימת חקירת הפונקציות.

פיתרון.

שלב 1 תחום הגדרה: כל $x\neq 1$.

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה-x:
$y=0$ כאשר $x=2$. ולכן נקודת חיתוך עם ציר x היא $(2,0)$.

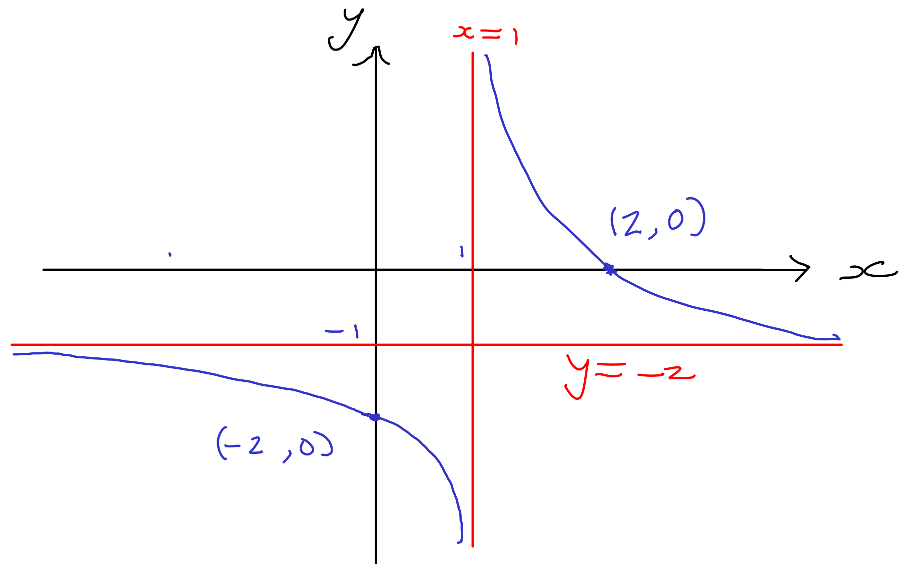
נקודות חיתוך עם ציר ה-y:
נציב $x=0$ בפונקציה ונקבל $y=-2$. לכן נקודת חיתוך עם ציר y היא $(0,-2)$.

x	y
$1<x<2$	$y>0$
$x>2$	$y<0$
$x<1$	$y<0$
$x=2$	$y=0$.

שלב 3 בנקודה $x=1$ הפונקציה לא מוגדרת ולכן קיימת אסימפטוטה אנכית ב- $x=1$.
מצד ימין:
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2-x}{x-1}=+\infty\ .$$
מצד שמאל:
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2-x}{x-1}=-\infty\ .$$

שלב 4
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x}=-1\ ,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{2-x}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-1\ .$$
לכן קיימת אסימפטוטה אופקית ב- $x=-1$.

שלב 5



■

דוגמא.

צייר סקיצה הגרף של הפונקציה $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$ כאשר $a>0$ על סמך ביצוע של שלבים 1-5 של סכימת חקירת הפונקציות.

פיתרון.

שלב 1 תחום הגדרה: $\{x > a \cap x < -a\}$.

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה-x: $(0,0)$.
נקודת חיתוך עם ציר ה-y: אין
y חיובי בכל נקודה בתחום הגדרת הפונקציה.

שלב 3 בקטע $-a \leq x \leq a$ הפונקציה לא מוגדרת ולפיו קיימות אסימפטוטות אנכיות בשפות $x=+a$ ו- $x=-a$.
מצד שמאל של $x=-a$,

$$\lim_{x\to a^-} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}} = +\infty \ .$$

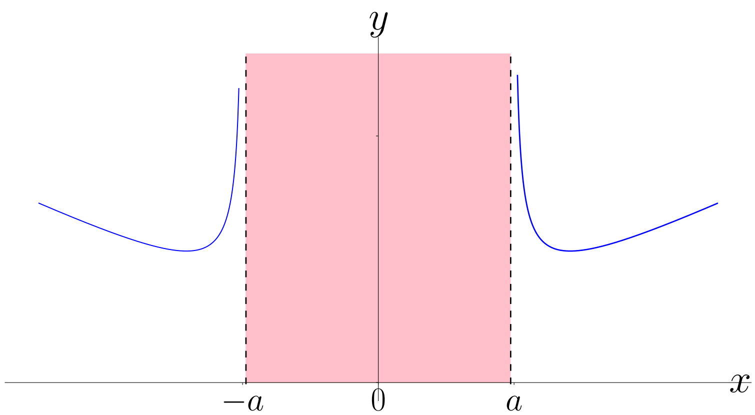
מצד ימין של $x=+a$,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}} = +\infty \ .$$

שלב 4

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}} = +\infty \ , \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}} = +\infty \ .$$

שלב 5



■

דוגמא.

צייר סקיצה הגרף של הפונקציה $y=\dfrac{x^4}{\sqrt{x^2-a^2}}$ כאשר $a>0$ על סמך ביצוע של שלבים 1-5 של סכימת חקירת הפונקציות.

פיתרון.

שלב 1 תחום הגדרה: $\{x>a\cap x<-a\}$.

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה-x: $(0,0)$.

נקודת חיתוך עם ציר ה-y: אין

y חיובי בכל נקודה בתחום הגדרת הפונקציה.

שלב 3 בקטע $-a\leq x\leq a$ הפונקציה לא מוגדרת ולפיו קיימות אסימפטוטות אנכיות בשפות $x=+a$ ו- $x=-a$.

מצד שמאל של $x=-a$,

$$\lim_{x\to -a^-}\frac{x^4}{\sqrt{x^2-a^2}}=+\infty\ .$$

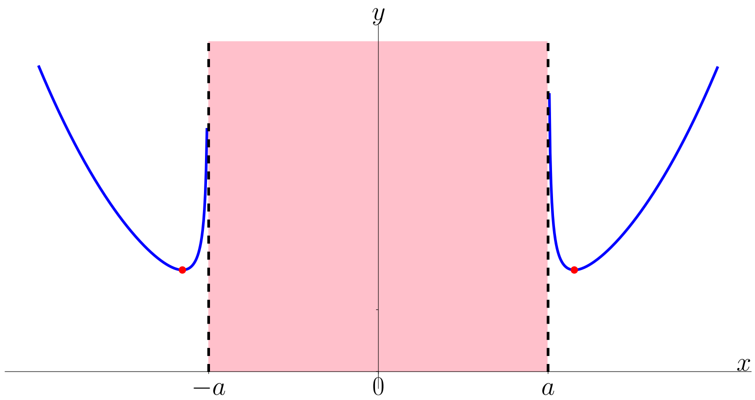
מצד ימין של $x=+a$,

$$\lim_{x\to a^+}\frac{x^4}{\sqrt{x^2-a^2}}=+\infty\ .$$

שלב 4

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^4}{\sqrt{x^2-a^2}}=+\infty\ ,\qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{x^4}{\sqrt{x^2-a^2}}=+\infty\ .$$

שלב 5



■

דוגמא.

צייר סקיצה הגרף של הפונקציה $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-3a^2}}$ כאשר $a>0$ על סמך ביצוע של שלבים 1-5 של סכימת חקירת הפונקציות.

פיתרון.

<u>שלב 1</u> תחום הגדרה: $\left\{x>\sqrt{a}\cap x<-\sqrt{3}a\right\}$

<u>שלב 2</u> <u>נקודת חיתוך עם ציר ה-x:</u> אין

<u>נקודת חיתוך עם ציר ה-y:</u> אין

$y>0$ בכל נקודה בתחום הגדרת הפונקציה.

<u>שלב 3</u> בקטע $-\sqrt{3}a\leq x\leq\sqrt{3}a$ הפונקציה לא מוגדרת ולפיו קיימות אסימפטוטות אנכיות בשפות $x=+\sqrt{3}a$ ו- $x=-\sqrt{3}a$.

מצד שמאל של $x=-\sqrt{3}a$,

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}a^-}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-3a^2}}=+\infty\ .$$

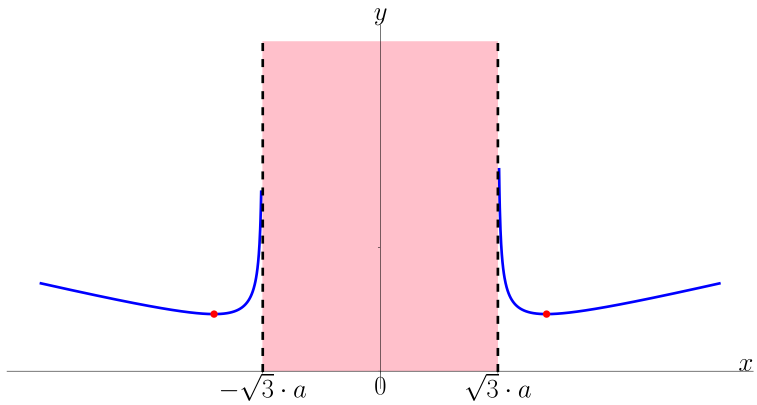
מצד ימין של $x=+\sqrt{a}$,

$$\lim_{x\to\sqrt{3}a^+}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-3a^2}}=+\infty\ .$$

<u>שלב 4</u>

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-3a^2}}=+\infty\ ,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-3a^2}}=+\infty\ .$$

<u>שלב 5</u>



■

דוגמא.

צייר סקיצה הגרף של הפונקציה $y=\dfrac{4}{x^2-4a^2}$ כאשר $a>0$ על סמך ביצוע של שלבים 1-5 של סכימת חקירת הפונקציות.

פיתרון.

שלב 1 תחום הגדרה: $\{x\neq 2a\cap x\neq -2a\}$.

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה-x: אין.

נקודת חיתוך עם ציר ה-y: $\left(0,-\dfrac{1}{a^2}\right)$.

$y>0$	$x<-2a$
$y<0$	$-2a<x<2a$
$y>0$	$x>2a$

שלב 3 בנקודות $x=\pm 2a$ הפונקציה לא מוגדרת ולפיו קיימת אסימפטוטות אנכיות בנקודות $x=+2a$ ו- $x=-2a$.

מצד שמאל של $x=-2a$:

$$\lim_{x\to -2a^-}\frac{4}{x^2-4a^2}=\lim_{x\to -2a^-}\frac{4}{(x+2a)(x-2a)}=\left(\lim_{x\to -2a^-}\frac{2}{x+2a}\right)\cdot\left(\lim_{x\to -2a^-}\frac{2}{x-2a}\right)=+\infty$$

מצד ימין של $x=-2a$:

$$\lim_{x\to -2a^+}\frac{4}{x^2-4a^2}=\lim_{x\to -2a^+}\frac{4}{(x+2a)(x-2a)}=\left(\lim_{x\to -2a^+}\frac{2}{x+2a}\right)\cdot\left(\lim_{x\to -2a^+}\frac{2}{x-2a}\right)=-\infty$$

מצד שמאל של $x=+2a$:

$$\lim_{x\to 2a^-}\frac{4}{x^2-4a^2}=\lim_{x\to 2a^-}\frac{4}{(x+2a)(x-2a)}=\left(\lim_{x\to 2a^-}\frac{2}{x+2a}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 2a^-}\frac{2}{x-2a}\right)=-\infty$$

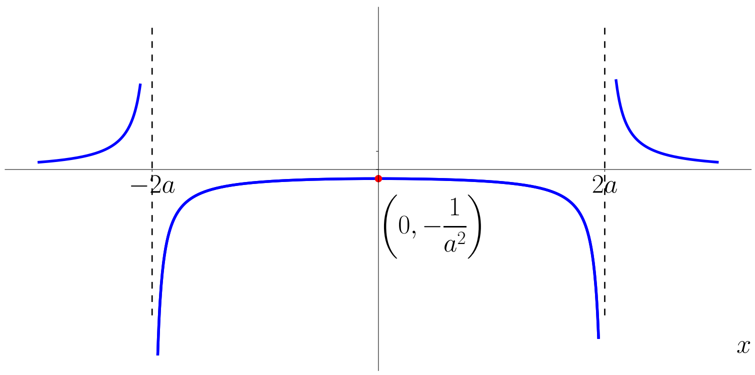
מצד ימין של $x=+2a$:

$$\lim_{x\to 2a^+}\frac{4}{x^2-4a^2}=\lim_{x\to 2a^+}\frac{4}{(x+2a)(x-2a)}=\left(\lim_{x\to 2a^+}\frac{2}{x+2a}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 2a^+}\frac{2}{x-2a}\right)=+\infty$$

<u>שלב 4</u>

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{\sqrt{x^2-a^2}}=+\infty\ ,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{\sqrt{x^2-a^2}}=+\infty\ .$$

<u>שלב 5</u>



■

דוגמא.

צייר סקיצה הגרף של הפונקציה $y=\sqrt{x^2-a^2}$ כאשר $a>0$ על סמך ביצוע של שלבים 1-5 של סכימת חקירת הפונקציות.

פיתרון.

<u>שלב 1</u> תחום הגדרה: $\{x\leq -a\cap x\geq a\}$.

<u>שלב 2</u> <u>נקודת חיתוך עם ציר ה-x:</u> $x=\pm a$.

<u>נקודת חיתוך עם ציר ה-y:</u> אין.

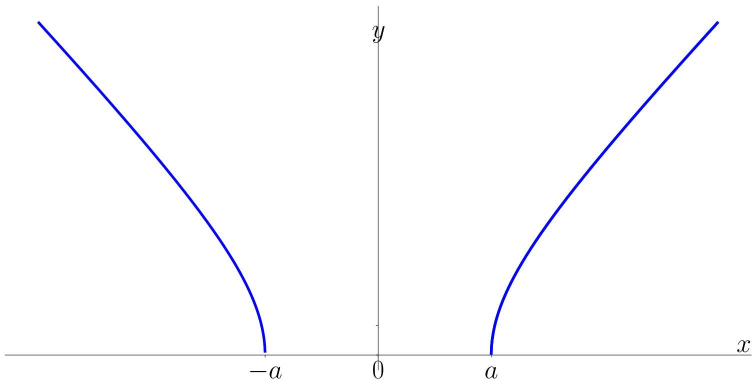
$x<-a$	$y>0$
$x>a$	$y>0$

<u>שלב 3</u> בקטע $-a<x<a$ הפונקציה לא מוגדרת, אבל אינן אסימפטוטות בשפות מכיוון שהפונקציה כן מוגדרת בנקודות $x=+a$ ו- $x=-a$.

<u>שלב 4</u>

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-a^2}=+\infty\ ,\qquad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-a^2}=+\infty\ .$$

<u>שלב 5</u>



■

דוגמא.

צייר סקיצה הגרף של הפונקציה $y=\dfrac{x^2}{x^2-a^2}$ כאשר $a>0$ על סמך ביצוע של שלבים 1-5 של סכימת חקירת הפונקציות.

פיתרון.

<u>שלב 1</u> תחום הגדרה: $\{x\leq -a\cap x\geq a\}$.

<u>שלב 2</u> <u>נקודת חיתוך עם ציר ה-x</u>: $(0,0)$.

<u>נקודת חיתוך עם ציר ה-y</u>: $(0,0)$.

$x<-a$	$y>0$
$-a<x<a$	$y<0$
$x>a$	$y>0$

<u>שלב 3</u> בנקודות $x=\pm a$ הפונקציה לא מוגדרת.

מצד שמאל של $x=-a$:

$$\lim_{x\to -a^-}\frac{x^2}{x^2-a^2}=+\infty$$

מצד ימין של $x=-a^+$:

$$\lim_{x\to -a^+}\frac{x^2}{x^2-a^2}=-\infty$$

מצד שמאל של $x=+a$:

$$\lim_{x\to a^-}\frac{x^2}{x^2-a^2}=-\infty$$

מצד ימין של $x=+a$:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{x^2}{x^2-a^2}=+\infty$$

<u>שלב 4</u>

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}=+\infty\ ,\qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}=+\infty\ .$$