

פרק 1 שפות

1.1 הגדרה היררכית של מכונת טיריניג

הגדירה 2.1 מנגנון ציוריניג (הגדירה היוריסטית)

הקלט והסרט

מכונת טיורינג (מ"ט) קורא קלט.

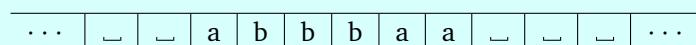
הקלט נמצא על סרט אינסופי.

התווים של הקלט נמצאים במשבצות של הרט.

במכוונת טירינג אנחנו מניחים שהסרט אינסורי לשני הביוונאים.

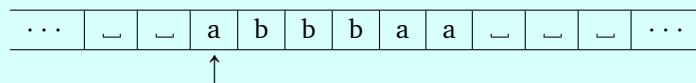
משמעותו של החלטת הקבלת לא כתוב כלום. ומימיו לשונו הקבלתי לא כתוב כלום.

ארכזוני פגניטים שיש לנו הרבה – שונטאג בכל מושבותיו שאינן מושבות קולט, ממשאל לטלט ומיימיין לבלט.



הראש

במצב ההתחלתי הראש בקצתה השמאלי של הקلط.



הראש יכול לזרז ימינה על הסרט וגם שמאלה על הסרט.

הראש יכול לקרוא את התוכן שנמצא במשבצת השרת שבה הוא נמצא.

הראש יכול לכתוב על המשבצת הסרט שבה הוא נמצא. הכתובת נעה תמיד במקומם הראש.

המצבאים

בהתחלת הראש בקצתה השמאלי של הקלט והמ"ט במצב התחלתי g_0 .

הראש קורא את התו במשבצת הראשונה וכותב עלייה לפי הfonוקציית המעברים (שנגידר בהגדירה 1.2). בעת

המ"ט במעמד חדש q_1

הראש קורא את התו במשבצת השניה וכותב עלייה לפיה הפונקציית המעברים ואז המ"ט במצב חדש q_2 .

התהיליך ממשיכך עד שהראש מגיע ל採取 הימני של הקלט, ואז הוא ממשיכך לקרוא ולכתוב על כל משכצת

בכיוון שמאלה, עד שהוא מגע לקרה השמאלי.

במ"ט ניתן לטויל על הקלט שוב ושוב לשני הכוונים.

התהlik מסתיים כאשר המ"ט מגיע לנצח מקלט q_{acc} או מצב דוחה q_{rej} .

דוגמה 1.1

בנייה מכונה טיריניג אשר מקבלת מילה אם היא בשפה

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#a_w = \#b_w\}.$$

ז"א השפה המורכבת מכל המילים עם מספר שווה אותיות a ו b .

תיאור מילולי

- נסrok את הקלט משמאלי לימין ולכל a נחשף $\#$ תואם.
- נניח שראיינו במשבצת הראשונה a , נסמן עליה ✓.
- עכשו נסrok את יתרת הקלט ונחפש אותן $\#$ מתאימה ל a שכבר ראיינו.
 - אם לא מצאנו, המילה לא בשפה.
 - אם מצאנו, נסמן את ה- $\#$ התואם ב- ✓.
- נחזיר לתחלת הקלט ונעשה סריקה נוספת משמאלי לימין.
- במשבצת הראשונה יש ✓ מסיבוב הראשון. הראש פשוט כותב עליה ✓, ככלומר משבצת ראשונה נשארת ללא שינוי.
- הראש a שמאלה למשבצת הבאה. נניח שמצאנו $\#$. נסמן במשבצת ✓.
- נסrok את יתרת הקלט ונחפש אותן a מתאימה ל $\#$ שכבר ראיינו.
 - אם לא מצאנו, המילה לא בשפה.
 - אם מצאנו, נסמן את ה- a התואם ב- ✓.
- בכל משבצת שיש ✓ כותבים עליה ✓ וממשיכים למשבצת הבאה הימני.
- נחזיר לתחלת הקלט ונעשה סריקה נוספת משמאלי לימין.
- חוזרים על התהליך שוב ושוב.
 - אם היה מעבר שבו לא מצאנו אותן תואמות, המילה לא בשפה.
 - אם כולם היו תואמות ועשינו מעבר שבו הגכנו מקרה לסתה, מרוחק לרווח, בלי לראות שום אותן a המילה בשפה.

cut נתאר את המ"ט באמצעות המבנה והפונקציית המעברים.

מבנה המכונה

q_0	המצב ההתחלתי. אליו נחזיר אחרי כל סיבוב התאמת של זוג אותיות.
q_a	מצב שבו ראיינו a ומתחפשים $\#$ תואם.
q_b	מצב שבו ראיינו $\#$ ומתחפשים a תואם.
back	מצב שנשתמש בו כדי לחזור לסתה השמאלי של הקלט ולהתחל את הסריקה הבאה (סיבוב התאמת הבא).
acc	מצב מקבל.
rej	מצב דוחה.

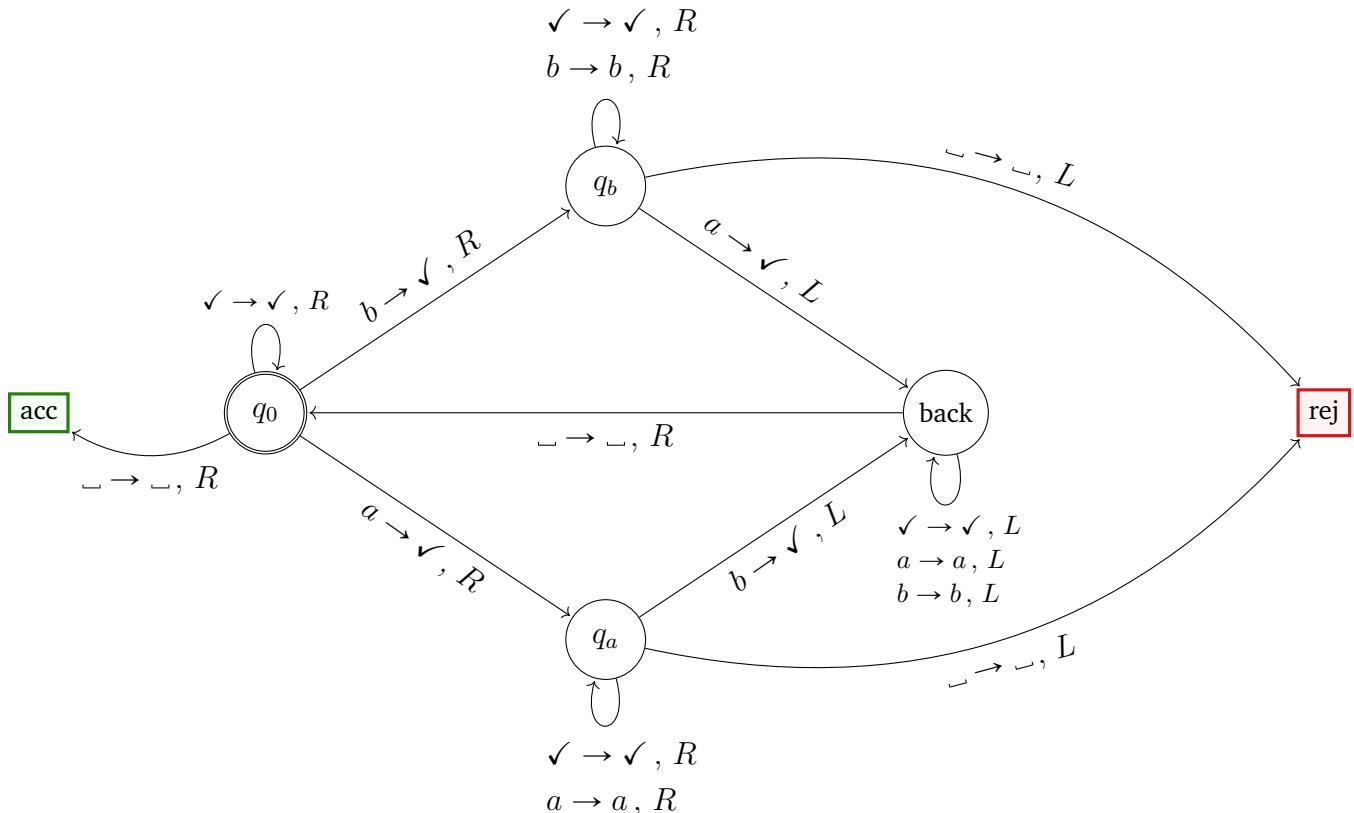
- כאשר המכונה מגיעה למצב acc היא עצרת.

עיצירה במצב acc משמעותה קבלה.

- כאשר המוכנה מגיעה במצב rej היא עוצרת.
עצירה במצב rej משמעותה דחיה.

- רק בשני מצבים אלו המוכנה מפסיק.
בכל מצב אחר המוכנה בהכרח ממשיכה.

תרשים מצבים



- בכל צעד המוכנה מבצעת שתי פעולות:

1. כותבת אותן במקומות הראש

2. זהה צעד אחד שמאלה או צעד אחד ימינה.

- בכל צעד המוכנה יכולה לעבור במצב אחר או להישאר באותו מצב.

דוגמה 1.2

בדקו אם המוכנת טיריניג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה `.abbaaa`.

פתרון:

—	q_0	a	b	b	b	a	a	—
—	✓	q_a	b	b	b	a	a	—
—	back	✓	✓	b	b	a	a	—
back	—	✓	✓	b	b	a	a	—
—	q_0	✓	✓	b	b	a	a	—

[✓	q_0	✓	b	b	a	a	—
[✓	✓	q_0	b	b	a	a	—
[✓	✓	✓	q_b	b	a	a	—
[✓	✓	✓	b	q_b	a	a	—
[✓	✓	✓	back	b	✓	a	—
[✓	✓	back	✓	b	✓	a	—
[✓	back	✓	✓	b	✓	a	—
[back	✓	✓	✓	b	✓	a	—
back	[✓	✓	✓	b	✓	a	—
[q_0	✓	✓	✓	b	✓	a	—
[✓	q_0	✓	✓	b	✓	a	—
[✓	✓	q_0	✓	b	✓	a	—
[✓	✓	✓	q_0	b	✓	a	—
[✓	✓	✓	✓	q_b	✓	a	—
[✓	✓	✓	✓	✓	q_b	a	—
[✓	✓	✓	✓	back	✓	✓	✓
[✓	✓	✓	back	✓	✓	✓	✓
[✓	✓	back	✓	✓	✓	✓	✓
[✓	back	✓	✓	✓	✓	✓	✓
[back	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
back	[✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
[q_0	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
[✓	q_0	✓	✓	✓	✓	✓	✓
[✓	✓	q_0	✓	✓	✓	✓	✓
[✓	✓	✓	q_0	✓	✓	✓	✓
[✓	✓	✓	✓	q_0	✓	✓	✓
[✓	✓	✓	✓	✓	q_0	✓	✓
[✓	✓	✓	✓	✓	✓	q_0	✓
[✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	acc

דוגמה 1.3

בדקו אם המכונה טיירינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה `.aab`.

פתרונות:

[q_0	a	a	b	—
[✓	q_a	a	b	—
[✓	a	q_a	b	—
[✓	back	a	✓	—
[back	✓	a	✓	—
back	[✓	a	✓	—
[q_0	✓	a	✓	—
[✓	q_0	a	✓	—
[✓	✓	q_a	✓	—
[✓	✓	✓	q_a	—
[✓	✓	✓	rej	✓

1.2 הגדרה פורמלית של מכונת טיורינג

הגדרה 1.2 מכונת טיורинг

מכונת טיורינג (מ"ט) היא ש biome

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר:

$\sqcup \notin \Sigma$	Q	קובוצת מצבים סופית ולא ריקה
$\Sigma \subseteq \Gamma, \sqcup \in \Gamma$ ref	Σ	א"ב הקלט
$\delta : (Q \setminus \{q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}\} \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$	Γ	א"ב השרת
	δ	פונקציית המעברים
	q_0	מצב התחלתי
	q_{acc}	מצב מקבל יחיד
	q_{rej}	מצב דוחה יחיד

דוגמה 1.4 (המשך דוגמה 1.1)

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

$$Q = \{q_0, q_a, q_b, \text{back}, q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}\} .$$

$$\Sigma = \{\text{a}, \text{b}\} , \quad \Gamma = \{\text{a}, \text{b}, \sqcup, \checkmark\}$$

$$\begin{aligned} \delta(q_0, \text{a}) &= (q_a, \checkmark, R) , \\ \delta(q_0, \text{b}) &= (q_b, \checkmark, R) , \\ \delta(q_0, \sqcup) &= (q_{\text{acc}}, \sqcup, R) , \\ \delta(q_a, \checkmark) &= (q_a, \checkmark, R) , \\ \delta(q_a, \text{a}) &= (q_a, \text{a}, R) , \\ \delta(q_a, \text{b}) &= (\text{back}, \checkmark, L) , \\ \delta(q_b, \checkmark) &= (q_b, \checkmark, R) , \\ \delta(q_b, \text{b}) &= (q_a, \text{b}, R) , \\ \delta(q_b, \text{a}) &= (\text{back}, \checkmark, L) , \end{aligned}$$

כל יותר לרשום את פונקציית המעברים δ כתבלה:

$\Gamma \backslash Q$	a	b	\sqcup	\checkmark
q_0	(q_a, \checkmark, R)	(q_b, \checkmark, R)	$(q_{\text{acc}}, \sqcup, R)$	(q_0, \checkmark, R)
q_a	(q_a, a, R)	$(\text{back}, \checkmark, L)$	$(q_{\text{rej}}, \sqcup, L)$	(q_a, \checkmark, R)
q_b	$(\text{back}, \checkmark, L)$	(q_b, b, R)	$(q_{\text{rej}}, \sqcup, L)$	(q_b, \checkmark, R)
back	$(\text{back}, \text{a}, L)$	$(\text{back}, \text{b}, L)$	(q_0, \sqcup, R)	$(\text{back}, \checkmark, L)$

הגדלה 1.3 קונפיגורציה

תהי $M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג. **קונפיגורציה** של M הינה מחרוזת

 $uq\sigma v$

כאשרמשמעות:

$$u, v \in \Gamma^*, \quad \sigma \in \Gamma, \quad q \in Q.$$

מצב המכונה,	q
הסימן במקומות הראש	σ
תוכן הסרט משמאל לראש,	u
תוכן הסרט מימין לראש.	v

דוגמה 1.5 (המשך של דוגמה 1.3)

u	q	σ	v
—	q_0	a	a b —
—✓	q_a	a	b —
— ✓ a	q_a	b	—
— ✓	back	a	✓ —
—	back	✓	a ✓ —
—	back	—	✓ a ✓ —
—	q_0	✓	a ✓ —
— ✓	q_0	a	✓ —
— ✓ ✓	q_a	✓	—
— ✓ ✓ ✓	q_a	—	—
— ✓ ✓	rej	✓	—

דוגמה 1.6

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת כל מילה בשפה

$$L = \{a^n \mid n = 2^k, k \in \mathbb{N}\}$$

ז"א מילים בעלי מספר אותיות a אשר חזקה של 2.

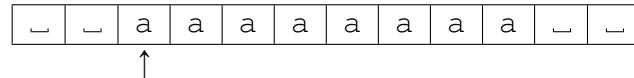
פתרונות:

ראשית נשים לב:

$$\frac{n}{2^k} = 2^k \text{ אם ורק אם } n \text{ ניתן לחלק ב } 2^k \text{ ללא שארית.}$$

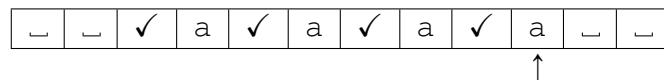
לאור המשפט הזה נבנה אלגוריתם אשר מחלק את מספר האותיות במילה ב- 2 בצורה איטרטיבית. אם אחרי סיבוב מסוים קיבל מספר אי-זוגי גדול מ- 1 אז מספר האותיות a במילה לא יכול להיות חזקה של 2. אם אחרי כל הסבבים לא קיבלנו מספר אי-זוגי גדול מ-1 אז מובטח לנו שיש מספר אותיות a אשר חזקה של 2.

- נתון הקלט



נעבור על סרט הקלט. משמאל לימין.

- מבצעים מחקיה לסירוגין של האות a כלומר אותן אחת נמחק ואות אחת נשאיר וכן הלאה.

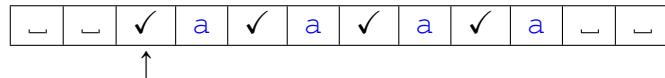


אם אחרי סיבוב הראשון

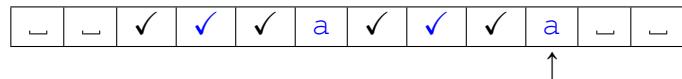
* יש ✓ בתו האחרון \Leftarrow קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 \Leftarrow אין חזקה של 2 אותיות a במילה.

* יש a בתו האחרון \Leftarrow קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ונמשיך לסיבוב הבא.

- הראש חוזר לטו הראשון של הקלט



- בסבב הבא חוזרים על התהיליך של מחיקה לシリוגין של האות a (אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר)

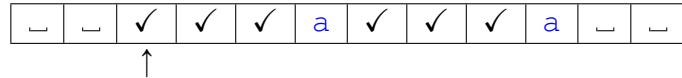


אם אחרי סבב השני

* יש ✓ בטו האחרון \Leftarrow קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 \Leftarrow אין חזקה של 2 אותיות a במילה.

* יש a בטו האחרון \Leftarrow קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ונמשיך לסבב הבא.

- הראש חוזר לטו הראשון של הקלט



- בסבב הבא חוזרים על התהיליך של מחיקה לシリוגין של האות a (אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר)



אם אחרי סבב השלישי

* יש ✓ בטו האחרון \Leftarrow קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 \Leftarrow אין חזקה של 2 אותיות a במילה.

* יש a בטו האחרון \Leftarrow קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ונמשיך לסבב הבא.

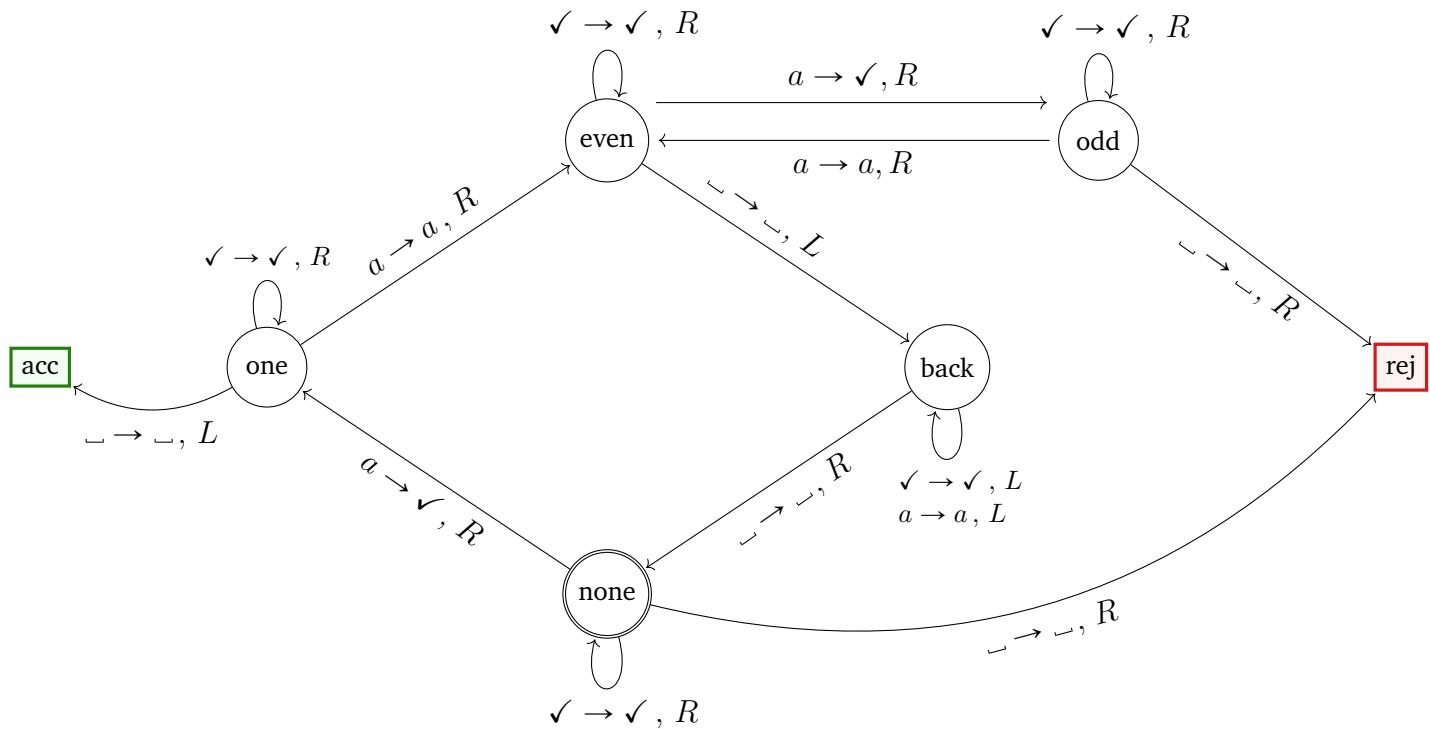
- הראש חוזר לטו הראשון של הקלט.

בסבב האחרון נשאר רק אות a אחת.

לכן לפי המשפט למעלה מובטח לנו כי המילה מורכבת ממספר אותיות a אשר חזקה של 2.



המכונת טיורינכ אשר מקבלת מילים בשפה שעבודת לפי האלגוריתם המתואר לעיל מתואר בתרשים למטה.

**המצבים:**

- מצב none: מצב התחלתי. עדין לא קראנו a בסביב סריקה זה.
- מצב one: קראנו a בודד.
- מצב even: קראנו מספר זוגי של a .
- מצב odd: קראנו מספר אי-זוגי של a .
- מצב back: חזרה של מלאה.

1.7 דוגמה

בדקו אם המילה

aaaa

מתקבלת על ידי המكونת טיריניג בדוגמה 1.6.

פתרון:

—	none	a	a	a	a	—
—	✓	one	a	a	a	—
—	✓	a	even	a	a	—
—	✓	a	✓	odd	a	—
—	✓	a	✓	a	even	—
—	✓	a	✓	back	a	—
—	✓	a	back	✓	a	—
—	✓	back	✓	a	✓	—
—	back	✓	a	✓	a	—
back	—	✓	a	✓	a	—
—	none	✓	a	✓	a	—
—	✓	none	a	✓	a	—

[✓	✓	one	✓	a]
]	✓	✓	✓	one	a]
]	✓	✓	✓	a	even]
]	✓	✓	✓	back	a]
]	✓	✓	back	✓	a]
]	✓	back	✓	✓	a]
back	[✓	✓	✓	a]
]	none	✓	✓	✓	a]
]	✓	none	✓	✓	a]
]	✓	✓	none	✓	a]
]	✓	✓	✓	none	a]
]	✓	✓	✓	✓	one]
]	✓	✓	✓	acc	✓]

u	q	σ	v
[none	a	aaa [
[✓	one	a	aa [
[✓ a	even	a	a [
[✓ a ✓	odd	a	[
[✓ a ✓ a	even	[[
[✓ a ✓	back	a	[
[✓ a	back	✓	a [
[✓	back	a	✓ a [
[back	✓	a ✓ a [
[back	[✓ a ✓ a [
[none	✓	a ✓ a [
[✓	none	a	✓ a [
[✓ ✓	one	✓	a [
[✓ ✓ ✓	one	a	[
[✓ ✓ ✓ a	even	[[
[✓ ✓ ✓	back	a	[
[✓ ✓	back	✓ a	[
[✓	back	✓	✓ a [
[back	✓	✓✓ a [
[none	✓	✓✓ a [
[✓	none	✓	✓ a [
[✓ ✓	none	✓	a [
[✓ ✓ ✓	none	a	[
[✓ ✓ ✓ ✓	one	[[
[✓ ✓ ✓	acc	✓	[

דוגמה 1.8

בדקו אם המילה

aaa

מתבקשת על ידי המכונת טיריניג בדוגמה 1.6.

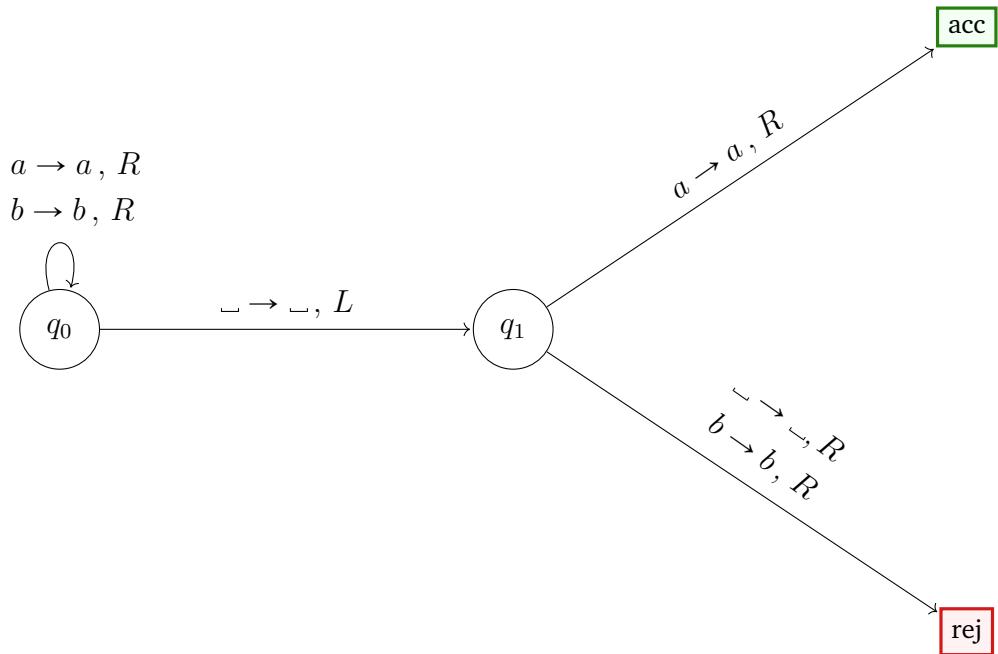
פתרונות:

none	a	a	a	—
✓	one	a	a	—
✓	a	even	a	—
✓	a	✓	odd	—
✓	a	✓	—	rej

u	q	σ	v
—	none	a	aa —
— ✓	one	a	a —
— ✓ a	even	a	—
— ✓ a ✓	odd	—	—
— ✓ a ✓ —	rej	—	—

דוגמה 1.9

מהי שפת המכונה:



פתרונות:

תיאור מילולי:

- במצב הinitialי q_0 :
 - * אם אנחנו רואים a, עוברים למשבצת הבאה לימין הראש.
 - * אם אנחנו רואים b, עוברים למשבצת הבאה לשמאל הראש.

- ממשיכים כך עד שנגיע לטו רוח, ככלומר לסוף המילה, אז עוברים למשבצת לשמאל הראש, ככלומר לטו האחרון של המילה.

* אם אנחנו רואים a, המילה מתתקבלת. (ז"א הטו האחרון הינו a).

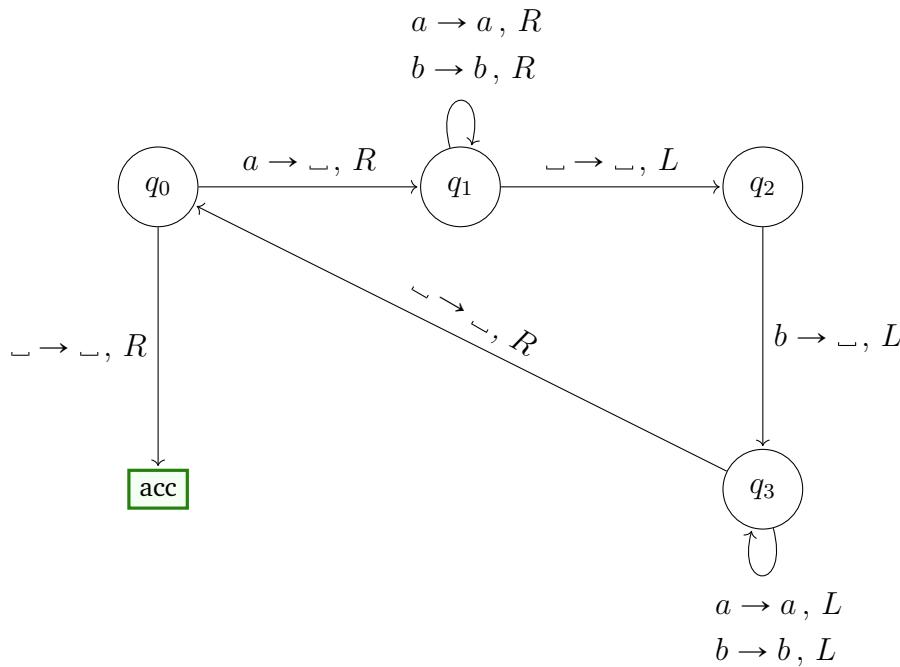
* אם אנחנו רואים b, המילה נדחת. (ז"א הטו האחרון הינו b).

* אם אנחנו רואים טו-רווח המילה נדחתה. (ז"א המילה הינה ריקה).

תשובה סופית: המכונה מקבלת שפת המילים המסתויימות באות a.

דוגמה 1.10

מהי שפת המכונה:

**פתרונות:****תיאור מילולי:**

- ב מצב התחלתי q_0 :
 - * אם אנחנו רואים a , המילה נדחית.
 - * אם אנחנו רואים $_$, המילה מתקבלת.
 - * אם אנחנו רואים b , כתובים עליה $_$ וועברים לשבצת הבאהليمין הראש, והמ"ט עוברת למצב q_1 .
- ב מצב q_1 אנחנו ראיינו a וכתבנו עליה $_$.
 - * אם אנחנו רואים במשבצת הבאה a או $_$, ממשיכים לשבצת הבאה לימין והמ"ט נשארת במצב q_1 .
 - * אם אנחנו רואים $_$ רוח (כלומר הגענו לסוף המילה) הראש זו לשבצת השמאלי, כלומר לאות האחרונה של המילה והמ"ט עוברת למצב q_2 .
- ב מצב q_2 ראיינו a בתו הראשון, כתבנו עליה $_$ והראש קורא התו האחרון.
 - * אם אנחנו רואים a המילה נדחית.
 - * אם אנחנו רואים $_$, המילה נדחית.
 - * אם אנחנו רואים b כתובים עליה $_$ והמ"ט עוברת למצב q_3 .
- ב מצב q_3 קראנו a בתו הראשון ומחקנו אותה, קראנו $_$ ומחקנו אותה.
- הרأس זו משבצת אחת שמאליה עד שיגיע לתו הראשון ומ"ט חוזרת למצב התחלה q_0 .

- המ"ט באופן איטרטיבי, עוברת על הקלט ובכל מעבר:
 - * אם יש **a** בתחילת המילה מוריידה אותה ומחיליפה אותה עם **—**, אחרת המילה נדחית,
 - * אם יש **c** בסופה של המילה מוריידה אותה ומחיליפה אותה עם **—**, אחרת המילה נדחית.
 - אם לאחר מספר מעברים כלו הסרט ריק, המ"ט מקבלת, זה יתקיים לכל מילה ורק למילים בשפה

$$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}.$$

תשובה סופית: המכונה מקבלת שפט המילימ

$$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}.$$

1.11 דוגמה

פתרונות:

μ	q	σ	ν
— —	q_0	a	aaabbbaa —
— — —	q_1	a	aabbbaa —
— — — a	q_1	a	abbbbaa —
— — — aa	q_1	a	bbbbbaa —
— — — aaa	q_1	b	bbbbaa —
— — — aaab	q_1	b	bbbaa —
— — — aaabb	q_1	b	bbaa —
— — — aaabb	q_1	b	— —
— — — aaabbb	q_1	—	— —
— — — aaabbb	q_2	b	— —
— — — aaabb	q_3	b	— — —
— — — aaab	q_3	b	b— — —
— — — aaa	q_3	b	bb— — —
— — — aa	q_3	a	bbb— — —
— — — a	q_3	a	abbb— — —
— — —	q_3	a	aabbba — —
— — —	q_3	—	aaabbba — —
— — —	q_0	a	aabbba — —
— — — —	q_1	a	abbbba — —
— — — — a	q_1	a	bbbba — —
— — — — aa	q_1	b	bbba — —
— — — — aab	q_1	b	bba — —
— — — — aabb	q_1	b	— — —
— — — — aabb	q_1	—	— —
— — — — aabb	q_2	b	— — —
— — — — aab	q_3	b	— — — —
— — — — aa	q_3	b	b— — — —
— — — — a	q_3	a	bb— — — —
— — — —	q_3	a	abb— — — —

— — —	q_3	—	aabb — — —
— — — —	q_0	a	abb — — —
— — — —	q_1	a	bb — — —
— — — — a	q_1	b	b — — —
— — — — ab	q_1	b	— — — —
— — — — abb	q_1	—	— — —
— — — — ab	q_2	b	— — — —
— — — — a	q_3	b	— — — —
— — — —	q_3	a	b — — —
— — — —	q_3	—	ab — — —
— — — —	q_0	a	b — — —
— — — —	q_1	b	— — — —
— — — — b	q_1	—	— — —
— — — —	q_2	b	— — — —
— — — —	q_3	—	— — — —
— — — —	q_0	—	— — — —

הגדרה 1.4 גירירה בצעד אחד

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M . נסמן

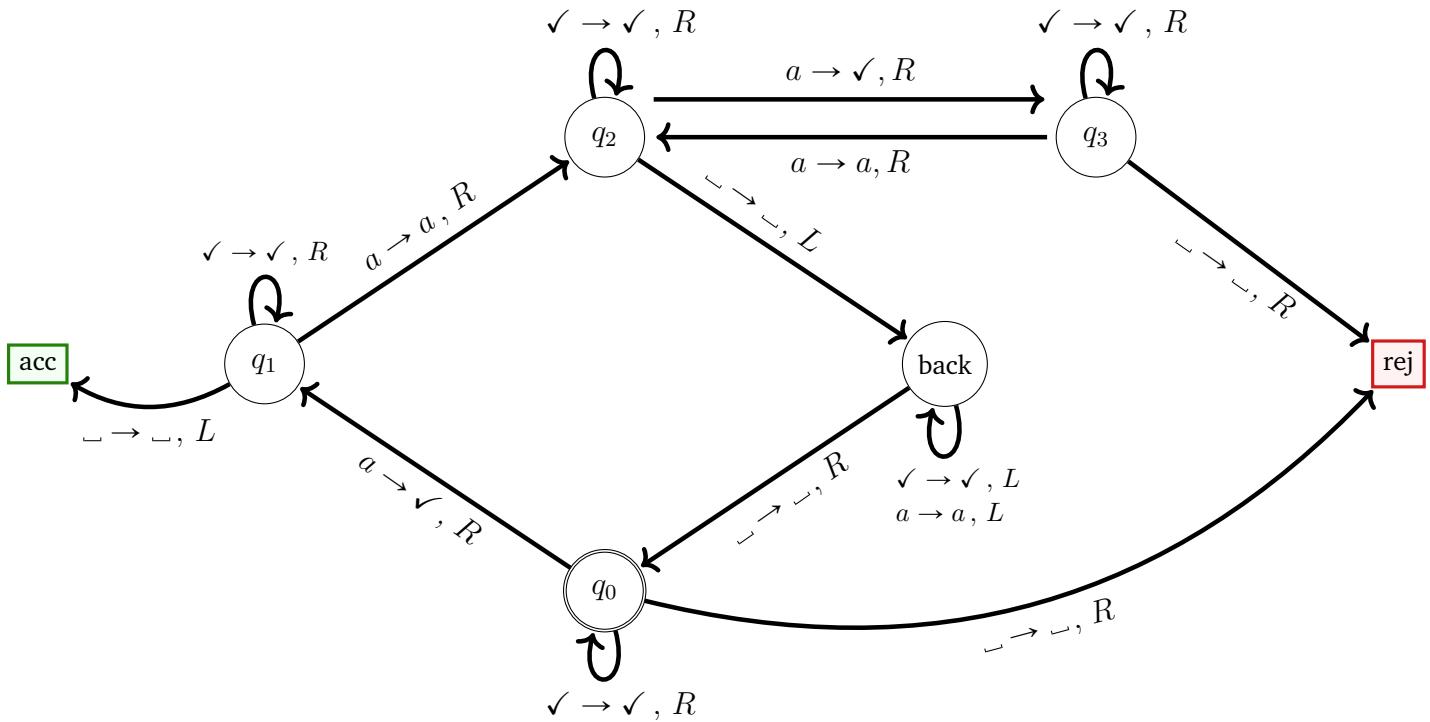
$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם כshנמצאים ב- c_1 עוברים ל- c_2 בצעד בודד.

דוגמה 1.12 (המשך של דוגמה 1.6)

במכונת טיורינג שמתואר בתרשים 1.6 אשר שווה למ"ט בדוגמה 1.6 רק עם סימנוים שונים (מצבים) מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$



הגדרה 1.5 גיריה בכללי

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ותהינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M .
נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם ניתן לעבור מ- c_1 ל- c_2 ב- 0 או יותר צעדים.

דוגמה 1.13 (המשך של דוגמה 1.6)

במכונת טיורינג שמתואר בתרשים 1.6 אשר שווה למ"ט בדוגמה 1.6 רק עם סימנונים שונים למצבים) מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M^* \checkmark \checkmark \checkmark q_4 a$$

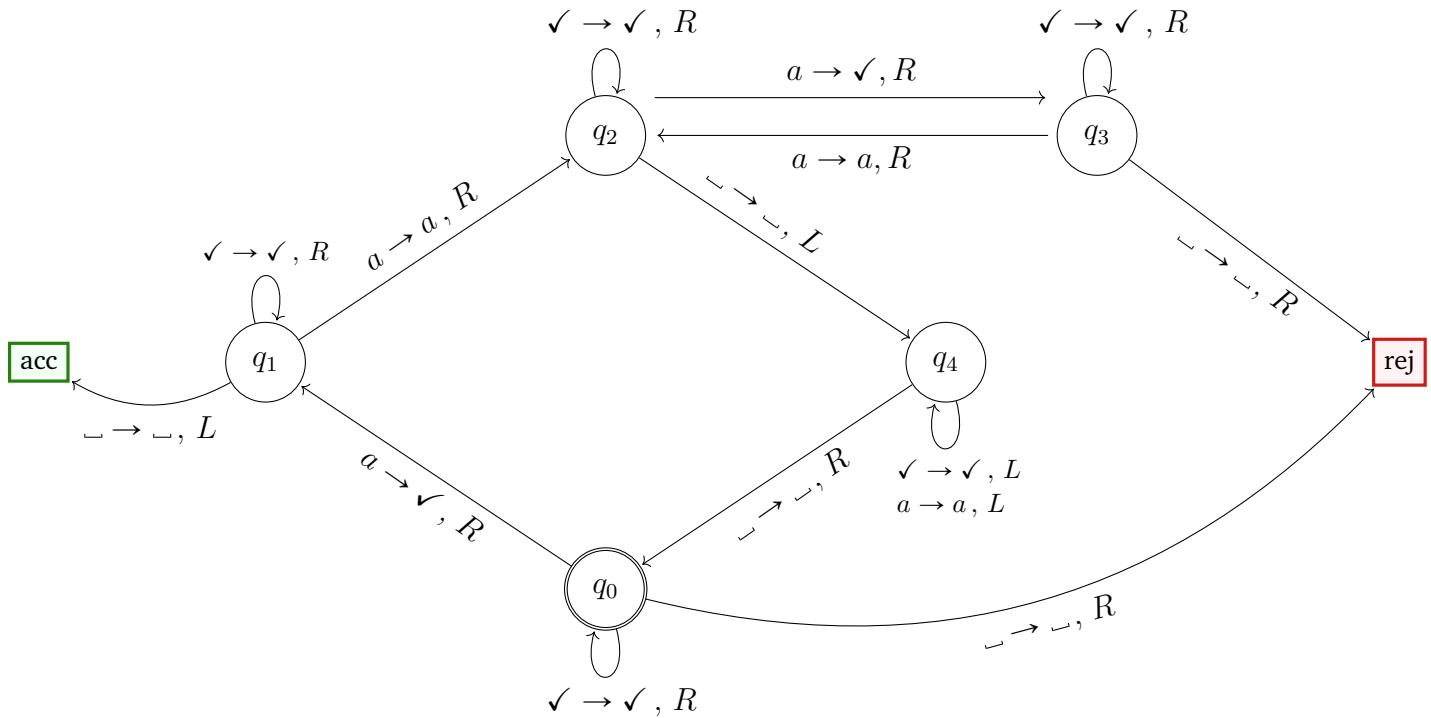
כי

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark q_1 a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark a q_2 _$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark q_4 a .$$



הגדרה 1.6 קבלה ודחיה של מחרוזות

תהי

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

מכונת טיריניג, ו-

$$w \in \Sigma^*$$

מחרוזת. אומרים כי

• **מקבלת את w** אם M

$$q_0 w \vdash_M^* u \ q_{\text{acc}} \sigma v$$

עבור $\Gamma \in \Gamma^*, u \in \Gamma^*, \sigma \in \text{כלשהם}$,• **דוחה את w** אם M

$$q_0 w \vdash_M^* u \ q_{\text{rej}} \sigma v$$

עבור $\Gamma \in \Gamma^*, u \in \Gamma^*, \sigma \in \text{כלשהם}$.

הגדרה 1.7 הכרעה של שפה

תהי

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, q_{\text{rej}})$$

מכונת טיריניג, ו-

$$L \subseteq \Sigma^*$$

שפה. אומרים כי M **מcriעה** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ $w \in L$ מתקיים• M מקבלת את w .• M דוחה את w .

הגדלה 1.8 קבלה של שפה

תהי

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

מכונת טיורינג, ו-

$$L \subseteq \Sigma^*$$

שפה. אומרים כי M **מקבלת** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים

- אם $w \in L$ אז M מקבלת את w .

- אם $w \notin L$ לא מקבלת את w .

במקרה כזה נכתב ש-

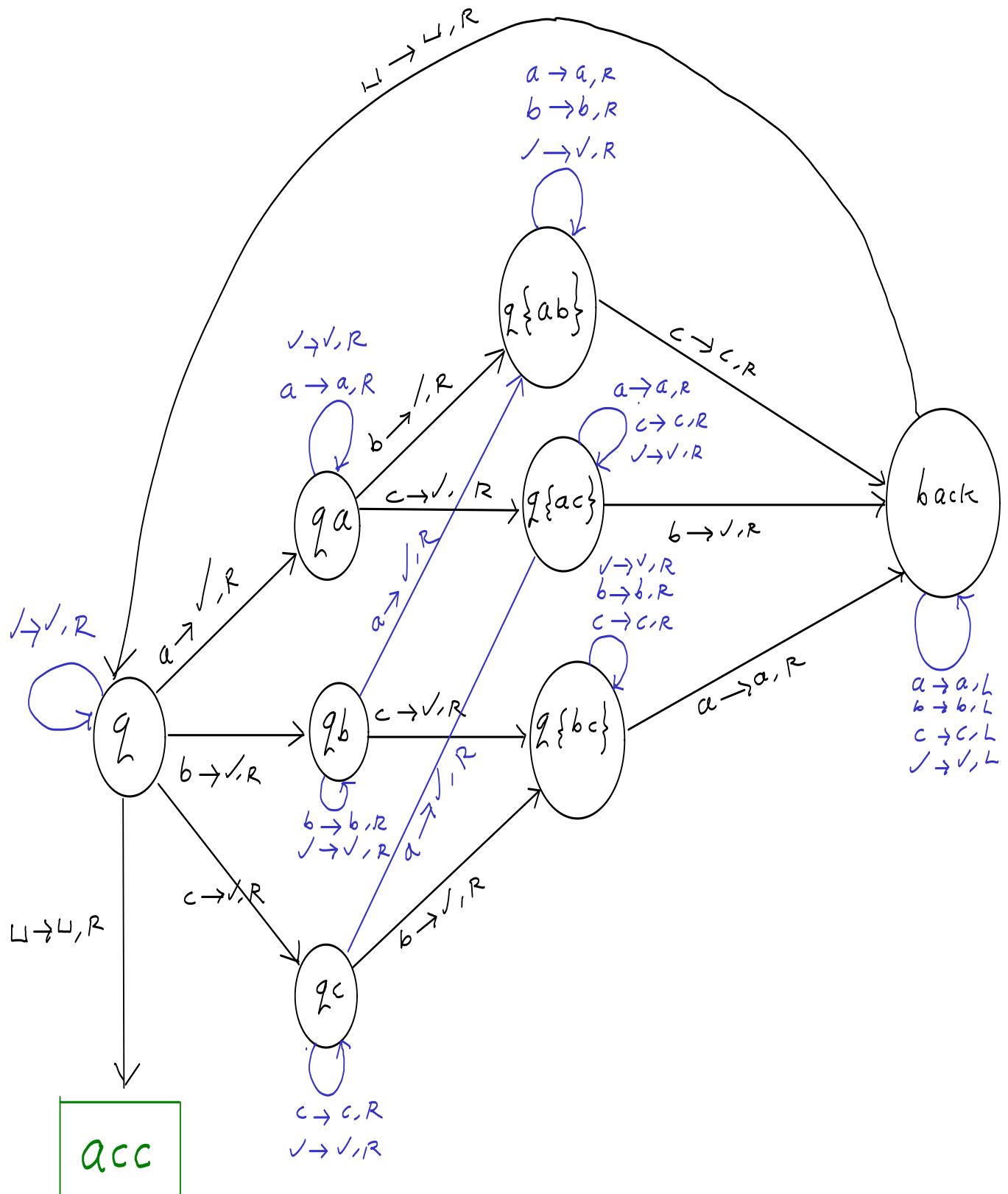
$$L(M) = L .$$

1.3 טבלת המעברים**דוגמה 1.14**

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$L = \left\{ w = \{a, b, c\}^* \mid \#a_w = \#b_w = \#c_w \right\}$$

פתרונות:



מצב	סימן	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזואה	תנאי
$q.S$	σ	$q.(S \cup \{\sigma\})$	✓	R	$\sigma \notin S$	
$q.S$	σ	$q.S$		R	$\sigma \in S$	
$q/\{a, b, c\}$	a, b, c, \checkmark	back		L		
$q.\emptyset$	—	acc		R		
back	a, b, c, \checkmark	back		L		
back	—	$q.\emptyset$		R		

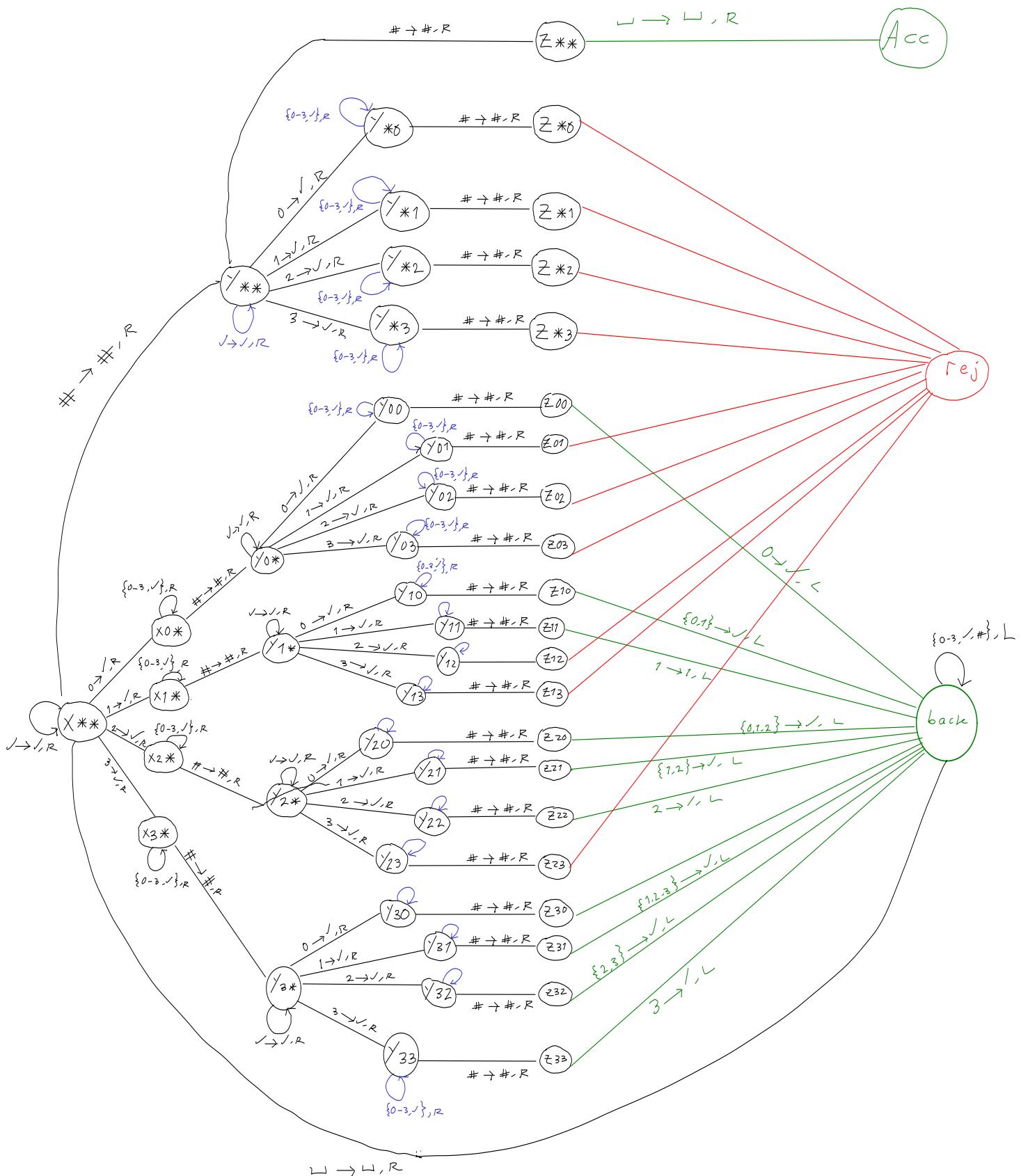
דוגמה 1.15

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$\{x_1 \dots x_k \# y_1 \dots y_k \# z_1 \dots z_k \mid x_i, y_i, z_i \in \{0, \dots, 3\}, \forall i, x_i \geq z_i \geq y_i\}$$

פתרונות:

$$\mathcal{L} = \left\{ X_1 X_2 \# Y_1 Y_2 \# Z_1 Z_2 \mid X_i, Y_i, Z_i \in \{0, 1, 2, 3\} \forall i \quad X_i \geq Z_i \geq Y_i \right\}$$



מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזואה	תנאי
X^{**}	σ	$X\sigma^*$	✓	R	
X^{**}	✓	X^{**}	✓	R	
$X\sigma^*$	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	$X\sigma^*$		R	
$X\tau^*$	#	$Y\tau^*$		R	
$Y\tau^*$	σ	$Y\tau\sigma$		R	
$Y\tau^*$	✓	$Y\tau^*$		R	
$Y\tau\sigma$	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	$Y\tau\sigma$		R	
$Y\tau_1\tau_2$	#	$Z\tau_1\tau_2$		R	
$Z\tau_1\tau_2$	✓	$Z\tau_1\tau_2$		R	
$Z\tau_1\tau_2$	σ	back	✓	L	
Z^{**}	—	acc		R	
back	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	back		L	
back	—	X^{**}		R	

1.4 חישוב פונקציות

הגדלה 1.9 מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה f

תהי $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ ותהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג.
אומרים כי M מחשבת את f אם:

- $\Sigma_2 \subset \Gamma$ ו- $\Sigma = \Sigma_1$
- לכל $w \in \Sigma_1^*$ מתקיים $q_{\text{acc}} f(w) \vdash q_0 w \vdash$.

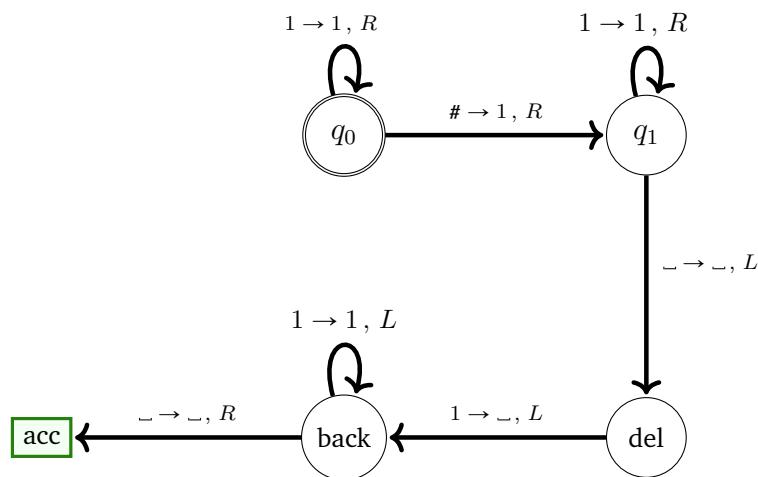
דוגמה 1.16 חיבור אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i \# 1^j$$

ומחזיר את פלט
 1^{i+j} .

פתרונות:

**דוגמה 1.17 כפל אונרי**

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

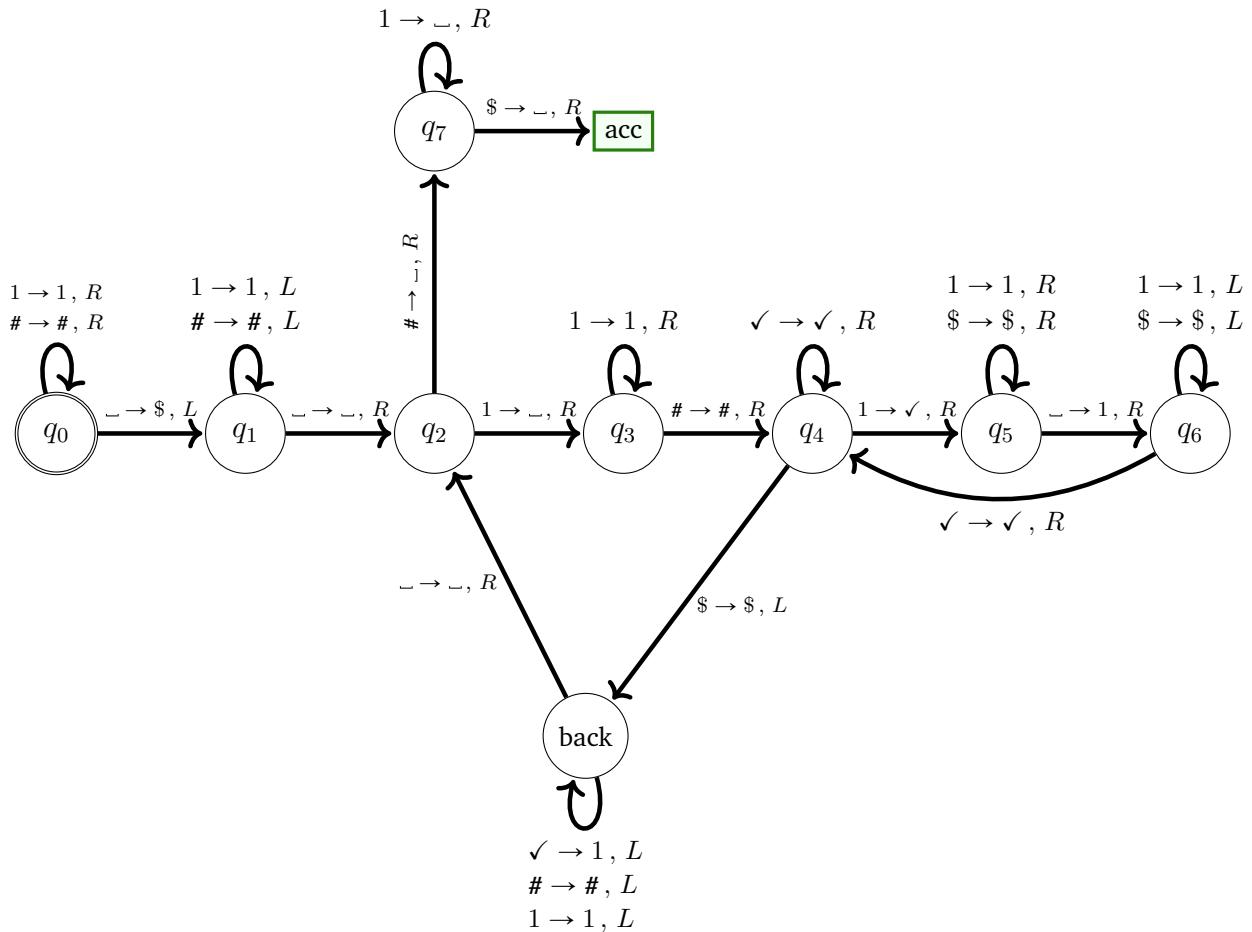
$1^i \# 1^j$

ומחזיריה את פלט

1^{i+j} .

פתרון:

- לדוגמה, נניח שהקלט הוא $2 \cdot 2$.
הקלט הוא $11\#11$.
- נרצה להבדיל בין הקטל לבין הפלט.
לכן בתחילת הריצה, נתקדם ימינה עד סוף הקטל ונוסיף שם את סימן $\$$.
לאחר מכן נחזור לתחילת הקטל.
- על כל אות 1 במילה השמאלית נעתיק את המילה הימנית לאחר סימן $\$$.
- לאחר מכן נשאיר רק את התווים שלאחר סימן $\$$. כמובן, נמחק את כל מה שאינו פלט.



μ	q	σ	ν
$\underline{}\underline{}\#11$	q_0	1	$1\#11\underline{}$
$\underline{}11\#11$	q_1	$\underline{}$	$\underline{}\underline{}$
$\underline{}11\#11$	q_1	$\$$	$\underline{}\underline{}11\#11\$$
$\underline{}\underline{}\underline{}$	q_1	$\underline{}$	$11\#11\$$
$\underline{}\underline{}\underline{}\#$	q_2	1	$1\#11\$$
$\underline{}\underline{}\underline{}\#$	q_2	$\underline{}$	$\#11\$$
$\underline{}\underline{}\underline{}\#$	q_3	1	$1\$$
$\underline{}\underline{}\underline{}\#$	q_4	\checkmark	$\$1\underline{}$
$\underline{}\underline{}\underline{}\#\checkmark$	q_4	1	$\$1\underline{}$
$\underline{}\underline{}\underline{}\#\checkmark$	q_5	$\underline{}$	$\underline{}\underline{}$
$\underline{}\underline{}\underline{}\#\checkmark$	q_5	$\$$	$1\underline{}$
$\underline{}\underline{}\underline{}\#\checkmark$	q_6	$\underline{}$	$\underline{}\underline{}$
$\underline{}\underline{}\underline{}\#\checkmark$	q_6	\checkmark	$1\$1\underline{}$
$\underline{}\underline{}\underline{}\#\checkmark$	q_6	1	$\$1\underline{}$
$\underline{}\underline{}\underline{}\#\checkmark$	q_6	$\underline{}$	$1\underline{}$
$\underline{}\underline{}\underline{}\#\checkmark$	q_5	\checkmark	$\$11\underline{}$
$\underline{}\underline{}\underline{}\#\checkmark$	q_5	1	$1\$1\underline{}$
$\underline{}\underline{}\underline{}\#\checkmark$	q_6	$\underline{}$	$\underline{}\underline{}$
$\underline{}\underline{}\underline{}\#\checkmark$	q_6	$\$$	$11\underline{}$
$\underline{}\underline{}\underline{}\#\checkmark$	q_4	$\underline{}$	$11\underline{}$
$\underline{}\underline{}\underline{}\#\checkmark$	q_4	\checkmark	$\$11\underline{}$
$\underline{}\underline{}\underline{}\#\checkmark$	$back$	$\underline{}$	$\underline{}\underline{}$
$\underline{}\underline{}\underline{}\#\checkmark$	$back$	\checkmark	$\$11\underline{}$
$\underline{}\underline{}\underline{}\#\checkmark$	$back$	$\underline{}$	$1\#11\$11\underline{}$
$\underline{}\underline{}\underline{}\#\checkmark$	q_2	1	$\#11\$11\underline{}$
$\underline{}\underline{}\underline{}\#\checkmark$	q_3	$\#$	$11\$11\underline{}$
$\underline{}\underline{}\underline{}\#\checkmark$	q_4	1	$1\$11\underline{}$

— — #✓	q_5	1	\$11—
— — #✓ 1\$11	q_5	—	—
— — #✓ 1\$111	q_6	—	—
— — #	q_6	✓	1\$111—
— — #✓	q_4	1	\$111—
— — #✓✓	q_5	\$	111—
— — #✓✓ \$111	q_5	—	—
— — #✓✓ \$1111	q_6	—	—
— — #✓	q_4	✓	\$1111
— — #✓✓	q_4	\$	1111
— — #✓	back	✓\$	1111
— —	back	—	#11\$1111
— —	q_2	#	11\$1111
— —	q_7	1	1\$1111
— — — —	q_7	\$	1111
— — — —	acc	1	111