המחלקה למדעי המחשב

$29/11/23 12:00 - 26/11/23 12:00$ תשפ"ג

אלגברה 2

מועד ב'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר, ד'ר שי סרוסי.

תשפ"ג סמסטר ק'

השאלון מכיל 12 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

===

אחר / הערות

- יש לפתור את כל השאלות.
- המשקל של כל שאלה מפורט להלן:
  - שאלה 1: 30 נקודות.
  - שאלה 2: 20 נקודות.
  - שאלה 3: 20 נקודות.
  - שאלה 4: 30 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבירו היטב את מהלך הפתרון. תשובה ללא הסבר (גם נכונה) לא תתקבל.
- אסור לחלוטין לקבל עזרה מסטודנט אחר או מאף אחד.
- עליכם להעלות את הפתרונות שלכם דרך אתר המודל של הקורס אלגברה 2 למדמ"ח לא יאוחר משעה $12:00$ ביום ד' $23-11-29$. פתרונות שהוגשו אחרי המועד הזה לא יתקבלו.
- מותר להשתמש בחומר של הקורס, התרגילים של הקורס והספרים של הקורס בלבד, אבל אסור להשתמש בשום מקורות אחרים.
- אחרי הגשת פתרונות אתם תקבלו הזמנה למבחן קצר בעל פה על הפתרונות שלכם. ייתכן שלא תעבור את המבחן או יורידו נקודות במקרה שאתם לא יכולים להסביר הפתרונות שלכם היטב.
- **סטודנט יהיה זכאי להגיש ערעור / בקשות שונות לגבי הבוחן במשך 5 ימים בלבד מיום קבלת הציון.**

===

שאלה 1 תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ המטיקצה .
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

א) האם A לכסינה? אם כן מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

ב) הוכיחו כי
$$A^{-1} = -2I - 2A^2 + A^3\ .$$

ג) הוכיחו כי
$$A^{-2} = 4I - 2A + 5A^2 - 2A^3\ .$$

שאלה 2 תהי $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ המטריצה
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -33i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3i \\ 33i & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -17i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3i & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -9i \\ 3i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9i & 93 \end{pmatrix}.$$

א) הוכיחו כי A לכסינה אוניטרית.

ב) הוכיחו כי כל הערכים עצמיים של A יהיו ממשיים.

ג) הוכיחו כי קיים ערך עצמי λ של A כך ש- $|\lambda| \neq 1$.

ד) הוכיחו כי כל הערכים עצמיים של A^{100} יהיו ממשיים.

שאלה 3 תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ מטריצה אורתוגונלית ו- $|A| = 1$. נניח כי $\lambda = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ערך עצמי של A.

א) מצאו את כל הערכים עצמיים של A.

ב) נתון כי $A^{100} = aA^2 + bA + cI$. מצאו את הערכים של a, b, c.

שאלה 4 הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k \cdot 2^k} \leq \sqrt{(n^2+n)\cdot(2^n-1)}$.

פתרונות

שאלה 1

$$
\begin{aligned}
p_A(x) =&|xI-A| = \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & x & -1 & -1 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} \\
=&\begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -2 \\ -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} \\
=&-x(x-2)+1-x^2\left(x^2-2x-1\right) \\
=&-x^2+2x+1-x^2\left(x^2-2x-1\right) \\
=&(x^2-2x-1)(-x^2-1) \\
=&(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})(x+i)(x-i)
\end{aligned}
$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 1+\sqrt{2}$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 1-\sqrt{2}$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = i$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = -i$ מריבוי אלגברי 1.

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1-\sqrt{2}$

$$(A-(1-\sqrt{2})I) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & \sqrt{2}-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to(1+\sqrt{2})R_2-R_1} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4\to(-1+\sqrt{2})R_4+R_2]{R_3\to R_3-R_2} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to-\sqrt{2}R_4-(4-\sqrt{2})R_3} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to(1-\sqrt{2})R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1-\sqrt{2} & 2(1-\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{1-\sqrt{2}} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1+\sqrt{2}$</u>

$$
\begin{aligned}
(A-(1+\sqrt{2})I) \quad &= \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2}-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}-1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2\to(1-\sqrt{2})R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}-1 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}-1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[R_4\to(-1-\sqrt{2})R_4+R_2]{R_3\to R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}-1 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}+4 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_4\to\sqrt{R_4}-(4+\sqrt{2})R_3} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}-1 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}-1 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_1\to(1+\sqrt{2})R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1+\sqrt{2} & 2(1+\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}-1 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
V_{1+\sqrt{2}} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}
$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = i$</u>

$$(A-iI) = \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -i & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & 1 \\ 2-i & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2-(2-i)R_1} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & 1 \\ 0 & 2+2i & i & -2+i \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to (2+2i)R_2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2+2i & -2+6i \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to iR_4 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2+2i & -2+6i \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 \to \frac{1}{2}R_2]{R_3 \to iR_3} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1+i & -1+3i \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to iR_2-(-1+3i)R_3} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & 1 \\ 0 & 4i & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2/4i} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$(x,y,z,w) = (\tfrac{1}{2}w + iw - w, \tfrac{-i}{2}w, -iw, w) = (-\tfrac{1}{2}+i, \tfrac{-i}{2}, -i, 1)w, \;\; w \in \mathbb{R}$$

$$V_i = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1+2i \\ -i \\ -2i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=-i$</u>

$$V_{-i}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1-2i\\ i\\ 2i\\ 2\end{pmatrix}\right\}$$

כל הערכים עצמיים שונים לכן A לכסינה.

$$D=\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & i & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}| & | & | & |\\ u_{1+\sqrt{2}} & u_i & u_{-i} & u_{1-\sqrt{2}}\\ | & | & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1 & -1+2i & -1-2i & 1-\sqrt{2}\\ 1 & -i & i & 1\\ 0 & -2i & 2i & 0\\ 0 & 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\ .$$

א) הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x)=\left(x^2+1\right)\left(x^2-2x-1\right)=x^4-2x^3-2x-1\ .$$

לפי משפט קיילי המילטון $p_A(A)=0$ לפיכך

$$A^4-2A^3-2A-I=0\ .$$

נעביר אגפים:

$$I=A^4-2A^3-2A\quad\Rightarrow\quad I=A(A^3-2A^2-2I)\ .$$

מכאן

$$A^{-1}=A^3-2A^2-2I\ .$$

ב) נכפיל מצד שמאל ב- A^{-1}:

$$\begin{aligned}A^{-2}=&A^2-2A-2A^{-1}\\ =&A^2-2A-2A^3+4A^2+4I\\ =&5A^2-2A-2A^3+4I\ .\end{aligned}$$

<u>שאלה 2</u>

<u>שאלה 3</u>

א) בגלל ש- A מטריצה ממשית, ו- $\lambda_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ערך עצמי של A, אז הצמוד $\lambda_2=\bar{\lambda}_1=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ גם ערך עצמי של A. כיוון ש- $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ אז יש ל- A ל-A ערך עצמי שלישי λ_3. המכפלה של כל הערכים עצמיים שווה לדטרמיננטה של A, כלומר $|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3$. לכן

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\cdot\lambda_3=1 \qquad\Rightarrow\qquad \lambda_3=1\ .$$

ב) הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x)=\left(x-\left[\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right]\right)\left(x-\left[\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right]\right)(x-1)=x^3-1\ .$$

לפי משפט קיילי המילטון:

$$p_A(A)=A^3-I=0 \qquad\Rightarrow\qquad A^3=I\ .$$

$$A^{100}=\left(A^3\right)^{33}\cdot A=I^{33}\cdot A=A\ ,$$

לכן $a=0$, $b=1$, $c=0$.

שאלה 4 יהי V המרחב המכפלה פנימית הסטנדרטית מעל הדה $\mathbb{R}$. נגדיר את שני ווקטורים $a,b\in V$:

$$a=\begin{pmatrix}\sqrt{1}\\ \sqrt{2}\\ \sqrt{3}\\ \vdots\\ \sqrt{n}\end{pmatrix}\ ,\qquad b=\begin{pmatrix}2^{1/2}\\ 2^{2/2}\\ 2^{3/2}\\ \vdots\\ 2^{n/2}\end{pmatrix}\ .$$

לפי אי-השוויון קושי שוורץ:

$$|\langle a,b\rangle|=\|a\|\cdot\|b\|\ .$$

$$\langle a,b\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}\sqrt{1}\\ \sqrt{2}\\ \sqrt{3}\\ \vdots\\ \sqrt{n}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2^{1/2}\\ 2^{2/2}\\ 2^{3/2}\\ \vdots\\ 2^{n/2}\end{pmatrix}\right\rangle=2^{1/2}\cdot\sqrt{1}+2^{2/2}\cdot\sqrt{2}+2^{3/2}\cdot\sqrt{3}+\cdots+2^{n/2}\cdot\sqrt{n}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\cdot2^{k/2}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k\cdot2^k}\ .$$

$$\|a\|=\sqrt{\langle a,a\rangle}=\sqrt{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}k}\ .$$

נציב $\sum_{k=1}^{n} = \frac{1}{2}n \cdot (n+1)$ ונקבל

$$\|a\| = \sqrt{\frac{1}{2}n \cdot (n+1)}\ .$$

$$\|b\| = \sqrt{\langle b, b\rangle} = \sqrt{2^{1/2} \cdot 2^{1/2} + 2^{2/2} \cdot 2^{2/2} + 2^{3/2} \cdot 2^{3/2} + \cdots + 2^{n/2} \cdot 2^{n/2}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 2^k}$$

נציב $\sum_{k=1}^{n} 2^k = \frac{2\left(2^n - 1\right)}{2-1} = 2\left(2^n - 1\right)$ ונקבל

$$\|b\| = \sqrt{2\left(2^n - 1\right)}\ .$$

לפיכך לפי אי-השוויון קושי שוורץ:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \cdot 2^{k/2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k \cdot 2^k} \leq \sqrt{\frac{1}{2}n \cdot (n+1)} \cdot \sqrt{2\left(2^n - 1\right)} = \sqrt{\left(n^2 + n\right) \cdot \left(2^n - 1\right)}\ .$$