המחלקה למדעי המחשב

$29/11/23 12:00 - 26/11/23 12:00$ תשפ"ג

אלגברה 2

מועד ב'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר, ד'ר שי סרוסי.

תשפ"ג סמסטר ק'

השאלון מכיל 12 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

אחר / הערות

- יש לפתור את כל השאלות.
- המשקל של כל שאלה מפורט להלן:
  - ∗ שאלה 1: 30 נקודות.
  - ∗ שאלה 2: 20 נקודות.
  - ∗ שאלה 3: 20 נקודות.
  - ∗ שאלה 4: 30 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבירו היטב את מהלך הפתרון. תשובה ללא הסבר (גם נכונה) לא תתקבל.
- אסור לחלוטין לקבל עזרה מסטודנט אחר או מאף אחד.
- עליכם להעלות את הפתרונות שלכם דרך אתר המודל של הקורס אלגברה 2 למדמ"ח לא יאוחר משעה $12:00$ ביום ד' $23-11-29$. פתרונות שהוגשו אחרי המועד הזה לא יתקבלו.
- מותר להשתמש בחומר של הקורס, התרגילים של הקורס והספרים של הקורס בלבד, אבל אסור להשתמש בשום מקורות אחרים.
- אחרי הגשת פתרונות אתם תקבלו הזמנה למבחן קצר בעל פה על הפתרונות שלכם. ייתכן שלא תעבור את המבחן או יורידו נקודות במקרה שאתם לא יכולים להסביר הפתרונות שלכם היטב.
- **סטודנט יהיה זכאי להגיש ערעור / בקשות שונות לגבי הבוחן במשך 5 ימים בלבד מיום קבלת הציון.**

==

שאלה 1 תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

א) האם A הפיכה? אם כן, מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

ב) חשבו את $\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot A^{99}$.

ג) הוכיחו כי

$$A^4 = 15A^3 - 14A^2 \ .$$

שאלה 2 תהי $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ מטריצה נורמלית. נניח כי הערכים עצמיים של A הם

$$\lambda_1 = 1+i \ , \qquad \lambda_2 = -1+i \ , \qquad \lambda_3 = 2 \ , \qquad \lambda_4 = 3 \ ,$$

ונניח כי המרחבים העצמיים הם

$$V_{1+i} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} , \quad V_{-1+i} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} , \quad V_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \ .$$

שימו לב כי המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda_4 = 3$ לא נתון בכוונה. יהי $a \in \mathbb{C}^4$ הווקטור $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

א) מצאו את $A \cdot a$.

ב) מצאו את $A^4 \cdot a$.

ג) מצאו את המטריצה A.

שאלה 3 תהי $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. מצאו צורת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $A = PJP^{-1}$.

שאלה 4 איזו נוסחה מגדירה מכפלה פנימית במרחב של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[-1,1]$?

א) $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g^2(x)\,dx$

ב) $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} 4f(x)g(x)\,dx$

ג) $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\sin x\,dx$

ד) $\langle f,g\rangle = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)x^8\,dx$

פתרונות

שאלה 1

א) נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned}
p_A(x) =&|xI - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -3 & -1 \\ -2 & x-4 & -6 & -1 \\ -3 & -6 & x-9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \\
=&(x-1)\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -3 \\ -2 & x-4 & -6 \\ -3 & -6 & x-9 \end{vmatrix} \\
=&(x-1)(x-1)\begin{vmatrix} x-4 & -6 \\ -6 & x-9 \end{vmatrix} + 2(x-1)\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -3 & x-9 \end{vmatrix} - 3(x-1)\begin{vmatrix} -2 & x-4 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} \\
=&(x-1)^2\left((x-9)(x-4)-36\right) + 2(x-1)\left(-2(x-9)-18\right) - 3(x-1)\left(12+3(x-4)\right) \\
=&(x-1)^2\left(x^2-13x\right) - 4x(x-1) - 9x(x-1) \\
=&(x-1)^2\left(x^2-13x\right) - 13x(x-1) \\
=&x(x-1)^2(x-13) - 13x(x-1) \\
=&x(x-1)\left((x-1)(x-13)-13\right) \\
=&x(x-1)\left(x^2-14x\right) \\
=&x^2(x-1)(x-14) \quad .
\end{aligned}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 0$</u>

$$(A - 0\cdot I) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z,w) = (-2y-3z, y, z, 0) = (-2,1,0,0)y + (-3,0,1,0)z, \ \ y,z \in \mathbb{R}$.

$$V_0=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=14$</u>

$$(A-14\cdot I)=\begin{pmatrix}-13&2&3&1\\2&-10&6&1\\3&6&-5&1\\0&0&0&-13\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to 13R_3+3R_1]{R_2\to 13R_2+2R_1}\begin{pmatrix}-13&2&3&1\\0&-126&84&15\\0&84&-56&16\\0&0&0&-13\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to -\frac{1}{13}R_4}\begin{pmatrix}-13&2&3&1\\0&-126&84&15\\0&21&-14&4\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to 126R_3+21R_2}\begin{pmatrix}-13&2&3&1\\0&-126&84&15\\0&0&0&819\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to 819R_4-R_3}\begin{pmatrix}-13&2&3&1\\0&-126&84&15\\0&0&0&819\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to\frac{1}{819}R_3}\begin{pmatrix}-13&2&3&1\\0&-126&84&15\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-15R_3}\begin{pmatrix}-13&2&3&1\\0&-126&84&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-R_3}\begin{pmatrix}-13&2&3&0\\0&-126&84&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to 28R_1-R_2}\begin{pmatrix}-364&182&0&0\\0&-126&84&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2\to\frac{1}{42}R_2]{R_1\to\frac{1}{182}R_1}\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\0&-3&2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z,w)=(\frac{y}{2},\frac{2}{3}z,z,0)=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,0)z,\ \ z\in\mathbb{R}$

$$V_{14}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}\right\}\ .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=1$</u>

$$(A - \cdot I) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_1]{\substack{R_1 \to \frac{1}{2}R_2 \\ R_2 \to \frac{1}{3}R_3}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & \frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1 \to 2R_1 \\ R_2 \to 6R_2 \\ R_3 \to 3R_3}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 13 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \to 5R_1 - R_3 \\ R_2 \to 5R_2 + R_3}} \begin{pmatrix} 10 & 15 & 17 & 0 \\ 0 & 15 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1 \to 3R_1 - 17R_2 \\ R_2 \to \frac{1}{3}R_2}} \begin{pmatrix} 30 & -210 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{30}R_1} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z,w) = (7y, \frac{-1}{5}z, \frac{-5}{13}w, w) = (\frac{7}{13}w, \frac{1}{13}w, \frac{-5}{13}w, w) = (\frac{7}{13}, \frac{1}{13}, \frac{-5}{13}, 1)w,\ \ w \in \mathbb{R}$

$$V_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -5 \\ 13 \end{pmatrix} \right\} .$$

הריבוי גאומטרי שווה לריבוי אלגברי של כל ערך עצמי לכן A לכסינה.

$$D = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_{14} & u_1 & u_0 & u_0' \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

ב)

$$A^{99} \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A^{99} \cdot 4 \cdot u_0 = 4A^{99} \cdot u_0 = 4 \cdot 0 \cdot u_0 = 0 .$$

ג) הפולינום האופייני הוא

$$(x-14)(x-1)x^2 = x^4 - 15x^3 + 14x^2 \ .$$

לפי משפט קיילי המילטון: $p_A(A) = 0$ לכן

$$A^4 - 15A^3 + 14A^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A^4 = 15A^3 - 14A^2 \ .$$

<u>שאלה 2</u>

א) משפט הפירוק הספקטרלי:

$$A \cdot a = (1+i)P_{V_{1+i}}(a) + (-1+i)P_{V_{-1+i}}(a) + 2P_{V_2}(a) + 3P_{V_3}(a) \ .$$

$$P_{V_3}(a) = a - P_{V_{1+i}}(a) - P_{V_{-1+i}}(a) - P_{V_2}(a)$$

לכן

$$P_{V_{1+i}}(a) = \frac{\langle a, u_{1+i}\rangle}{\|u_{1+i}\|^2} u_{1+i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1\\3\\4\\5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\0\\0\\3 \end{pmatrix} \ .$$

$$P_{V_{-1+i}}(a) = \frac{\langle a, u_{-1+i}\rangle}{\|u_{-1+i}\|^2} u_{-1+i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1\\3\\4\\5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\\0\\0\\2 \end{pmatrix} \ .$$

$$P_{V_2}(a) = \frac{\langle a, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1\\3\\4\\5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\4\\0 \end{pmatrix} \ .$$

$$P_{V_3}(a) = a - P_{V_{1+i}}(a) - P_{V_{-1+i}}(a) - P_{V_2}(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$A \cdot a = (1+i)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1+i)\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+i \\ 9 \\ 8 \\ 1+5i \end{pmatrix}$$

ב)

$$A^4 \cdot a = (1+i)^4\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1+i)^4\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2^4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 3^4\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 243 \\ 64 \\ -20 \end{pmatrix}$$

ג) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot e_1 = (1+i)P_{V_{1+i}}(e_1) + (-1+i)P_{V_{-1+i}}(e_1) + 2P_{V_2}(e_1) + 3P_{V_3}(e_1)$$

$$P_{V_{1+i}}(e_1) = \frac{\langle e_1, u_{1+i}\rangle}{\|u_{1+i}\|^2}u_{1+i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} .$$

$$P_{V_{-1+i}}(e_1) = \frac{\langle e_1, u_{-1+i}\rangle}{\|u_{-1+i}\|^2}u_{-1+i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} .$$

$$P_{V_2}(e_1) = \frac{\langle e_1, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} .$$

$$P_{V_3}(e_1) = e_1 - P_{V_{1+i}}(e_1) - P_{V_{-1+i}}(e_1) - P_{V_2}(e_1) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} .$$

$$A \cdot e_1 = (1+i)\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\\1/2\end{pmatrix} + (-1+i)\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\\-1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$A \cdot e_2 = (1+i)P_{V_{1+i}}(e_2) + (-1+i)P_{V_{-1+i}}(e_2) + 2P_{V_2}(e_2) + 3P_{V_3}(e_2)$$

$$P_{V_{1+i}}(e_2) = \frac{\langle e_2, u_{1+i}\rangle}{\|u_{1+i}\|^2}u_{1+i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} .$$

$$P_{V_{-1+i}}(e_2) = \frac{\langle e_2, u_{-1+i}\rangle}{\|u_{-1+i}\|^2}u_{-1+i} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} .$$

$$P_{V_2}(e_2)=\frac{\langle e_2,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_3}(e_2)=e_1-P_{V_{1+i}}(e_2)-P_{V_{-1+i}}(e_2)-P_{V_2}(e_2)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$A\cdot e_2=\begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$A\cdot e_3=(1+i)P_{V_{1+i}}(e_3)+(-1+i)P_{V_{-1+i}}(e_3)+2P_{V_2}(e_3)+3P_{V_3}(e_3)$$

$$P_{V_{1+i}}(e_3)=\frac{\langle e_3,u_{1+i}\rangle}{\|u_{1+i}\|^2}u_{1+i}=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_{-1+i}}(e_3)=\frac{\langle e_3,u_{-1+i}\rangle}{\|u_{-1+i}\|^2}u_{-1+i}=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_2}(e_3)=\frac{\langle e_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2=\frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_3}(e_3)=e_3-P_{V_{1+i}}(e_3)-P_{V_{-1+i}}(e_3)-P_{V_2}(e_3)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$A\cdot e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$A\cdot e_4=(1+i)P_{V_{1+i}}(e_4)+(-1+i)P_{V_{-1+i}}(e_4)+2P_{V_2}(e_3)+3P_{V_3}(e_4)$$

$$P_{V_{1+i}}(e_4)=\frac{\langle e_4,u_{1+i}\rangle}{\|u_{1+i}\|^2}u_{1+i}=\frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\\1/2\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_{-1+i}}(e_4)=\frac{\langle e_4,u_{-1+i}\rangle}{\|u_{-1+i}\|^2}u_{-1+i}=\frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\0\\0\\1/2\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_2}(e_4)=\frac{\langle e_4,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_3}(e_4)=e_4-P_{V_{1+i}}(e_4)-P_{V_{-1+i}}(e_4)-P_{V_2}(e_4)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$A\cdot e_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\i\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}| & | & | & |\\ Ae_1 & Ae_2 & Ae_3 & Ae_4\\ | & | & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i & 0 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & i\end{pmatrix}$$

<u>שאלה 3</u> נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned}p_A(x)=|xI-A|=&\begin{vmatrix}x & -4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & x & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & x-2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -6 & x & 0\\ -5 & 0 & 0 & 1 & x-2\end{vmatrix}\\
=&x\begin{vmatrix}x & 0 & 0 & 0\\ -3 & x-2 & 0 & 0\\ 0 & -6 & x & 0\\ 0 & 0 & 1 & x-2\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & x-2 & 0 & 0\\ 0 & -6 & x & 0\\ -5 & 0 & 1 & x-2\end{vmatrix}\\
=&x^2\begin{vmatrix}x-2 & 0 & 0\\ -6 & x & 0\\ 0 & 1 & x-2\end{vmatrix}+4\cdot 0\\
=&x^2(x-2)\begin{vmatrix}x & 0\\ 1 & x-2\end{vmatrix}\\
=&x^3(x-2)^2\ .\end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 2.

$\lambda = 0$ מריבוי אלגברי 3.

המרחב עצמי ששייך לערך עצמי 0:

$$V_0 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\5\end{pmatrix}\right\} .$$

המרחב עצמי ששייך לערך עצמי 2:

$$V_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} .$$

האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$x(x-2), \quad x^2(x-2) \ , \quad x^3(x-2) \ , \quad x(x-2)^2 \ , \quad x^2(x-2)^2 \ , \quad x^3(x-2)^2 \ .$$

<u>נבדוק $x(x-2)$</u>

$$A\cdot(A-2I) = \begin{pmatrix}0&4&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&3&2&0&0\\0&0&6&0&0\\5&0&0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&4&0&0&0\\0&-2&0&0&0\\0&3&0&0&0\\0&0&6&0&0\\5&0&0&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-8&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&18&0&0&0\\0&20&6&0&0\end{pmatrix}$$

<u>נבדוק $x^2(x-2)$</u>

$$A^2\cdot(A-2I) = A\cdot\begin{pmatrix}0&-8&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&18&0&0&0\\0&20&6&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&18&12&0&0\end{pmatrix}$$

<u>נבדוק $x^3(x-2)$</u>

$$A^3\cdot(A-2I)=A\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&18&12&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&36&24&0&0\end{pmatrix}$$

<u>נבדוק $x(x-2)^2$</u>

$$\begin{aligned}A\cdot(A-2I)^2&=\begin{pmatrix}0&-8&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&18&0&0&0\\0&20&6&0&0\end{pmatrix}\cdot(A-2I)\\&=\begin{pmatrix}0&-8&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&18&0&0&0\\0&20&6&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&4&0&0&0\\0&-2&0&0&0\\0&3&0&0&0\\0&0&6&-2&0\\5&0&0&1&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&16&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&-36&0&0&0\\0&-22&0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

<u>נבדוק $x^2(x-2)^2$</u>

$$A^2\cdot(A-2I)^2=A\cdot\begin{pmatrix}0&16&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&-36&0&0&0\\0&-22&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן

$$m_A(x)=x^2(x-2)^2\ .$$

לכן הצורת ז'ורדן הינה:

$$J=\begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_2(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

נסמן הווקטור עצמי ששייך לערך עצמי 0:

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\\5\end{pmatrix},\qquad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\5\end{pmatrix}.$$

נחשב ווקטור עצמי מוכלל. נסמו $u_2=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\s\\t\end{pmatrix}$

$$(A-0\cdot I)\,u_2=\alpha\mathrm{v}_1+\beta\mathrm{v}_2$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha-\beta\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 5\beta\\ 5 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5\alpha\end{array}\right)\xrightarrow[R_5\to R_2]{\substack{R_1\to R_5\\ R_2\to R_1}}\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5\alpha\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha-\beta\\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 5\beta\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to 6R_3+8R_4}\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5\alpha\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha-\beta\\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 3(-2\alpha-\beta)\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18(-2\alpha-\beta)+40\beta\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

קיים פתרון אם $18(-2\alpha-\beta)+40\beta=0 \Leftarrow \beta=\frac{18\alpha}{11}$. לכן נקבל

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5\alpha\\ 0 & 4 & 0x & 0 & 0 & -\frac{1}{11}\cdot 40\alpha\\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & -\frac{1}{11}\cdot 120\alpha\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

וקטור מוכלל לא יכול להיות וקטור האפס, אז נבחור את הפרמטר α כך שהפתרון לא יהיה וקטור האפס.

נבחור $\alpha = 11$, ואז הפתרון הוא: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$. נבחור $s = 0, t = 0$ ונקבל

$u_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. נציב $\alpha = 11$, $\beta = 0$ בווקטור עצמי $u_1 = \alpha \mathrm{v}_1 + \beta \mathrm{v}_2$ ונקבל $u_1 = \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 0 \\ 90 \\ 55 \end{pmatrix}$.

עכשיו אנחנו צריכים ווקטור עצמי שלישי אשר בלתי תלוי לינארי ביחס ל- u_1 ו- u_2. נקח $u_3 = \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

נסמן הווקטור עצמי ששייך לערך עצמי 2:

$$u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

נחשב ווקטור עצמי מוכלל. נסמו $u_5 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix}$

$$(A - 2 \cdot I)\, u_5 = u_4$$

פתרון: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix}$. נבחור $t = 0$ ונקבל

$$u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 & 11 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 90 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 55 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

שאלה 4

א) לא מכפלה פנימית. הסבר: נניח כי $f(x) = 1$, $g(x) = \sqrt{3}x$.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 3x^2 dx = 2 .$$

$$\langle f, 2g \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 12x^2 dx = 4 .$$

$\langle f, 2g \rangle \neq 2 \langle f, g \rangle$ לכן הנוסחה לא שומרת על ליניאריות לכן היא לא מכפלה פנימית.

ב) מכפלה פנימית. הסבר:

1. ליניאריות

לכל f, g, h פונקציות שרציפות ב- $[-1, 1]$.

$$\langle f + h, g \rangle = \int_{-1}^{1} 4(f(x)+h(x))g(x)\, dx = \int_{-1}^{1} 4f(x)g(x)\, dx + \int_{-1}^{1} 4h(x)g(x)\, dx = \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle .$$

לכל f, g, h פונקציות שרציפות ב- $[-1, 1]$. ו- α סקלר: $[-1, 1]$.

$$\langle \alpha f, g \rangle = \int_{-1}^{1} 4\alpha f(x)g(x)\, dx = \alpha \int_{-1}^{1} 4f(x)g(x)\, dx = \alpha \langle f, g \rangle .$$

2. סימטריות

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} 4f(x)g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 4g(x)f(x)\,dx = \langle g,f\rangle \ .$$

3. חיוביות

$$\langle f,f\rangle = \int_{-1}^{1} 4f^2(x)\,dx \geq 0 \ ,$$

ו- $\langle f,f\rangle = 0$ אם ורק אם $f(x)=0$.

ג) לא מכפלה פנימית. דוגמה נגדית: $f(x)=(1-x)$,

$$\langle f,f\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-x)^2 \sin x\,dx = 2\cos(1) - 2\sin(1) < 0 \ .$$

כלומר חיוביות לא מתקיימת.

ד) מכפלה פנימית. הסבר:

1. ליניאריות

לכל f,g,h פונקציות שרציפות ב- $[-1,1]$.

$$\langle f+h,g\rangle = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x^8(f(x)+h(x))g(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x^8 f(x)g(x)\,dx + \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x^8 h(x)g(x)\,dx = \langle f,g\rangle + \langle h,g\rangle \ .$$

לכל f,g,h פונקציות שרציפות ב- $[-1,1]$. ו- α סקלר: $[-1,1]$.

$$\langle \alpha f,g\rangle = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x^8 \alpha f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{3}\alpha\int_{-1}^{1} x^8 f(x)g(x)\,dx = \alpha\,\langle f,g\rangle \ .$$

2. סימטריות

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x^8 f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x^8 g(x)f(x)\,dx = \langle g,f\rangle \ .$$

3. חיוביות

$$\langle f,f\rangle = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x^8 f^2(x)\,dx \geq 0 \ ,$$

ו- $\langle f,f\rangle = 0$ אם ורק אם $f(x)=0$.