

תורת המשחקים

תוכן העניינים

1	משחקים בצורה רחבה
2	הגדרת צורה הרחבה של משחק
6	משחקים עם ידיעה שלמה והצורה אסטרטגית
8	משחקים עם ידיעה לא שלמה
11	משחק עם מהלכי גורל
2	משחקים בצורה אסטרטגיית, שליטה ושווי משקל נאש
18	הגדרה של משחק בצורה אסטרטגית
18	סימוניים
20	מושג השליטה
22	הנחות של רציונליות בתורת המשחקים
22	סילוק חוזר
23	שווי משקל נאש
27	משפט השקלות בין אסטרטגיה השולחת חזק יחידה ושווי משקל
3	שווי משקל נאש (המשך)
29	דילמה האסיר
32	תחרות דואפולד על פי Gournot
4	ערך המקסמין וממשחקים סכום אפס
36	ביחסון: מושג המקסמין
39	משפטים: היחס בין שווי משקל ואסטרטגיית מקסמין
41	משחקי שני שחקנים סכום אפס
45	משפט המקסמין
46	משפט השקלות בין שווי משקל לבין אסטרטגיה אופטימלית
5	סטרטגיות מעורבות
49	הגדרה של אסטרטגיות מעורבות
55	שווי משקל נאש ועקרון האדישות
61	דוגמאות
6	מקסמין באסטרטגיות מעורבות
7	משחק בייסיאני
73	משחק בייסיאני

שער 1

משחקים בצורה רחבה

1.1 הגדרת צורה הרחבה של משחק

התיאור הבא טבעי של משחק הוא הצורה הרחבה.

הגדרה 1.1 משחק בצורה רחבה

הצורה הרחבה של משחק ניתנת על ידי הקבוצה

$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_1, V_2, V_3, \dots\}, O, u) ,$$

כאשר

(1) N הוא קבוצה סופית של השחקנים.

(2) V קבוצת הקדקודים של עץ המשחק.
קדקוד מייצג החלטה של שחקן.

(3) E קבוצת הקשתות או הצלעות של עץ המשחק.

כל צלע הולך בין שני קדקודים. צלע מייצג אסטרטגייה של שחקן, אשר נקבעת על ידי החלטתו
משמעותית בקדקוד שמננו הצלע יוצאה.

(4) x_0 הוא הקדקוד של המצב ההתחלתי של המשחק.

(5) V_1 הוא הקבוצה של קדקודים שבהן שחקן 1 מקבל החלטה, V_2 הקבוצת קדקודים בהן שחקן 2
מקבל החלטה, וכן הלאה.

בכללי, V_i הקבוצה קדקודים בהם שחקן i מקבל החלטה ונקראת הקבוצה ידיעת של שחקן i .

(6) O הוא קבוצת התוצאות האפשריות.

התוצאות מצוינות בנקודות סיום (עלים) של עץ המשחק.

(7) u פונקציית התשלומים המתאימה לכל וקטור אסטרטגיות של המשחק תשלום לכל שחקן.

דוגמה 1.1 (משחק התאמת המטבעות)

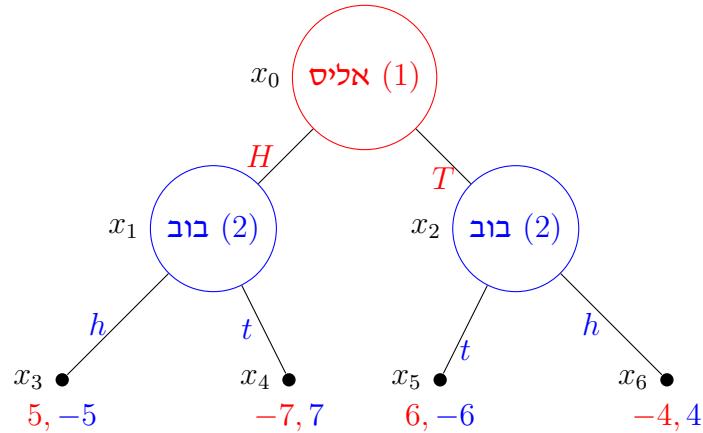
אליס בוחרת אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פל). היא רושמת בחירותה על פתק, חותמת עליו
ומעבירה אותו לשופט. אחר כך בוב בוחר H או T , רושם בחירותו על פתק, חותם עליו ומעביר אותו
לשופט.

- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר h אז בוב משלם לאليس $\text{₪}5$.
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר t אז אליס משלם לבוב $\text{₪}7$.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר h אז בוב משלם לאليس $\text{₪}6$.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר t אז אליס משלם לבוב $\text{₪}4$.

רשמו את המשחק בצורה רחבה.

פתרון:

תהיא אליס שחקן 1 ובוב שחקן 2.



$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_1, V_2\}, O, u)$$

$N = \{\text{בוב, אליס}\} = \{1, 2\}$.

שחקנים:

$V = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

קדוקדים:

$E = \{x_0x_1, x_0x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_5, x_2x_6\}$.

קשותות:

x_0 .

מצב המשחק ההתחלתי:

קדוקדים:

$V_1 = \{x_0(H, T)\}$.

קבוצות ידיעה של שחקן 1:

$V_2 = \{x_1(h, t), x_2(h, t)\}$.

קבוצות ידיעה של שחקן 2:

$O = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

תוצאות אפשריות:

פונקציית התשלומים:

$$u_1(H, h) = 5, \quad u_2(H, h) = -5,$$

$$u_1(H, t) = -7, \quad u_2(H, t) = 7,$$

$$u_1(T, h) = -4, \quad u_2(T, h) = 4,$$

$$u_1(T, t) = 6, \quad u_2(T, t) = -6.$$



הגדלה 1.2 קבוצת אסטרטגיות של שחקן

נתון משחק N -שחקנים.

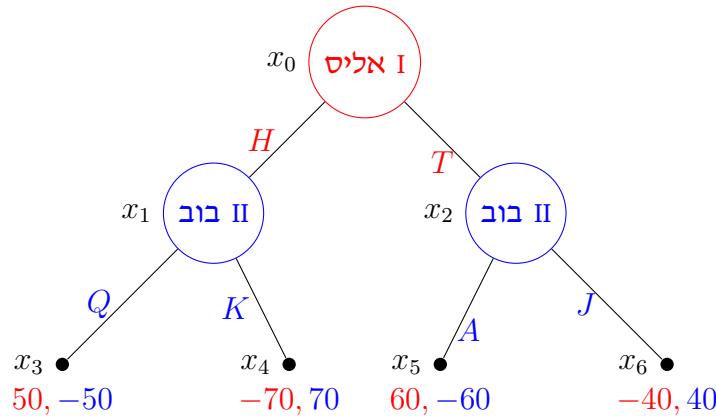
נסמן ב- S_i את הקבוצה של כל האסטרטגיות האפשריות של שחקן i במשחק.

דוגמה 1.2 (מطبع וקלפים)

נתבונן על המשחק הבא:

שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עז) או T (פלוי).
אחר כך, אם אליס בוחרת H אז שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).
אחרת אם אליס בוחרת T בוב בוחר קלף נסיך (J) או קלף אס (A).

- אם אליס בוחרת H ובוב בחר Q אז בוב משלם לאליס ₪50.
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר K אז אליס משלם לבוב ₪70.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר J אז בוב משלם לאליס ₪60.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר A אז אליס משלם לבוב ₪40.



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H, T .
אומרים כי לשחקן I יש **קבוצה ידיעה אחת** שנסמך

$$V_I = \{x_0(H, T)\}$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I = (H, T).$$

לשחקן II יש שני קדקודים x_1, x_2 בהם הוא מקבל החלטה.
אומרים גם כי לשחקן II יש 2 קבוצות ידיעה, x_1, x_2 אשר מייצגות שתי אפשרויות שונות המנובעות מההחלטה הקודמת של שחקן I בקדקוד x_0 .
הקבוצות ידיעה של שחקן II הינה:

$$V_{II} = \{x_1(Q, K), x_2(J, A)\}$$

מכיוון שלשחקן II יש שתי קבוצות ידיעה x_1, x_2 ובכל אחד יש שתי פעולות אפשריות, אז יש לבוב $2 \times 2 = 4$ אסטרטגיות:

$$S_{II} = (Q/J, Q/A, K/J, K/A)$$

מطبع וקלפיים

הגדרה 1.3 וקטור אסטרטגיות של משחק

נתון משחק n -שחקנים.
נניח כי שחקן 1 משחק לפי אסטרטגיה s_1 , שחקן 2 משחק לפי אסטרטגיה s_2, \dots ומשחק n משחק לפי אסטרטגיה s_n .
אז הווקטור אסטרטגיות של המשחק הינו

$$s = (s_1, s_2, \dots, s_n).$$

הגדלה 1.4 פונקציית תשלום

נתון משחק n -שחקנים. פונקציית תשלום $u : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ היא פונקציה אשר מיפוית לכל וקטור אסטרטגיות של השחקן, תשלום לכל שחקן.

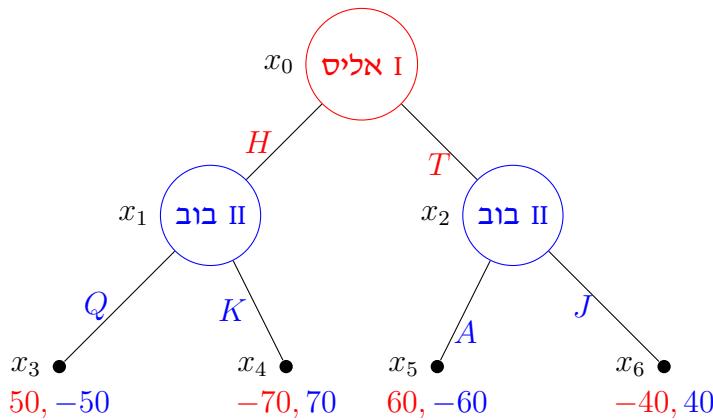
נניח כי שחקן 1 משחק לפי אסטרטגיה s_1 , שחקן 2 משחק לפי אסטרטגיה s_2, \dots ומשחקן n משחק לפי אסטרטגיה s_n . זו הוקטור האסטרטגיות של המשחק הינו $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$.

פונקציית התשלום של המשחק מקבלת את הוקטור אסטרטגיות ומחזירה תשלום לכל שחקן:

$$u(s_1, s_2, \dots, s_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

כאשר u_1 התשלום לשחקן 1, u_2 התשלום לשחקן 2, ..., u_n התשלום לשחקן n .

דוגמה 1.3 (המשך דוגמה 1.2)



- נניח כי אליס משחקת לפי האסטרטגיה $s_I = H/A$ ובוב משחק לפי האסטרטגיה $s_{II} = Q/J$. הוקטור אסטרטגיות של המשחק הוא

$$s = (s_I, s_{II}) = (H, Q/J) .$$

- אם אליס משחקת לפי האסטרטגיה $s_I = H$ ובוב משחק לפי האסטרטגיה $s_{II} = Q/A$. הוקטור אסטרטגיות של המשחק הוא

$$s = (s_I, s_{II}) = (H, Q/A) .$$

- וכן הלאה.

בסה"כ למשחק זה יש 8 וקטורי אסטרטגיות:

$$\begin{aligned}
 (s_I, s_{II}) &= (H, Q/A) , \\
 (s_I, s_{II}) &= (H, Q/J) , \\
 (s_I, s_{II}) &= (H, K/A) , \\
 (s_I, s_{II}) &= (H, K/J) , \\
 (s_I, s_{II}) &= (T, Q/A) , \\
 (s_I, s_{II}) &= (T, Q/J) , \\
 (s_I, s_{II}) &= (T, K/A) , \\
 (s_I, s_{II}) &= (T, K/J) .
 \end{aligned}$$

הfonקציית תשלום של המשחק הינו

$$\begin{aligned} u(H, Q/A) &= (50, -50), \\ u(H, Q/J) &= (50, -50), \\ u(H, K/A) &= (-70, 70), \\ u(H, K/J) &= (-70, 70), \\ u(T, Q/A) &= (60, -60), \\ u(T, Q/J) &= (-40, 40), \\ u(T, K/A) &= (60, -60), \\ u(T, K/J) &= (-40, 40). \end{aligned}$$

1.2 משחקים עם ידיעה שלמה והצורה אסטרטגית

הגדרה 1.5 משחק עם ידיעה שלמה

בכל שלב של המשחק, כל שחקן יודע את כל החלטות של שאר השחקנים לפני אותו שלב, וכך הוא יודע לבדוק אילו פעולות נעשו על ידי כל שאר השחקנים. כתוצאה, כל שחקן, כשמגיע תורו יודע לבדוק באיזה קודקוד בעץ המשחק הוא נמצא.

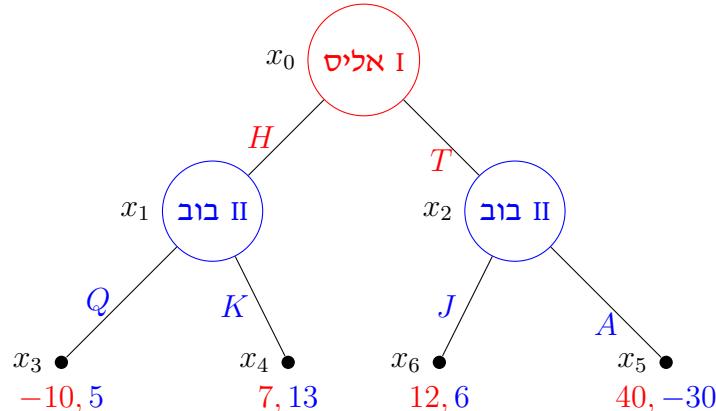
דוגמה 1.4 (משחק מטבע וקלף עם ידיעה שלמה)

נתבונן על המשחק הבא:

שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עז) או T (פל). אחר כך, אם אליס בוחרת H אז שחקן II (bob) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K). אחרת אם אליס בוחרת T בוב בוחר קלף נסיך (J) או קלף אס (A).

- אם אליס בוחרת H ובוב מקבל $\text{₪}5$ ואם מפסידה $\text{₪}10$.
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר K אז אליס מקבלת $\text{₪}7$ ובוב מקבל $\text{₪}13$.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר J אז בוב מקבל $\text{₪}6$ ואם מקבלת $\text{₪}12$.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר A אז אליס מקבלת $\text{₪}40$ ובוב מפסיד $\text{₪}30$.

ניתן לרשום את עץ המשחק **בצורה רחבה אסטרטגית**:



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H, T .
 ז"א לשחקן I יש קבוצה ידיעה אחת:
 $x_0(H, T)$.

לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I = (H, T).$$

לשחקן II יש שני קדקודים x_1, x_2 בהם הוא מקבל החלטה.
 אז לשחקן II יש 2 קבוצות ידיעה,

$$V_{II} = \{x_1(Q, K), x_2(J, A)\}.$$

אשר מייצגות שתי אפשרויות שונות המנובעות מההחלטה הקודמת של שחקן I בקדקוד x_0 .
 מכיוון שלשחקן II יש שתי קבוצות ידיעה x_1, x_2 ובכל אחד יש שתי פעולות אפשריות, אז יש לבוב $2 \times 2 = 4$ אסטרטגיות:

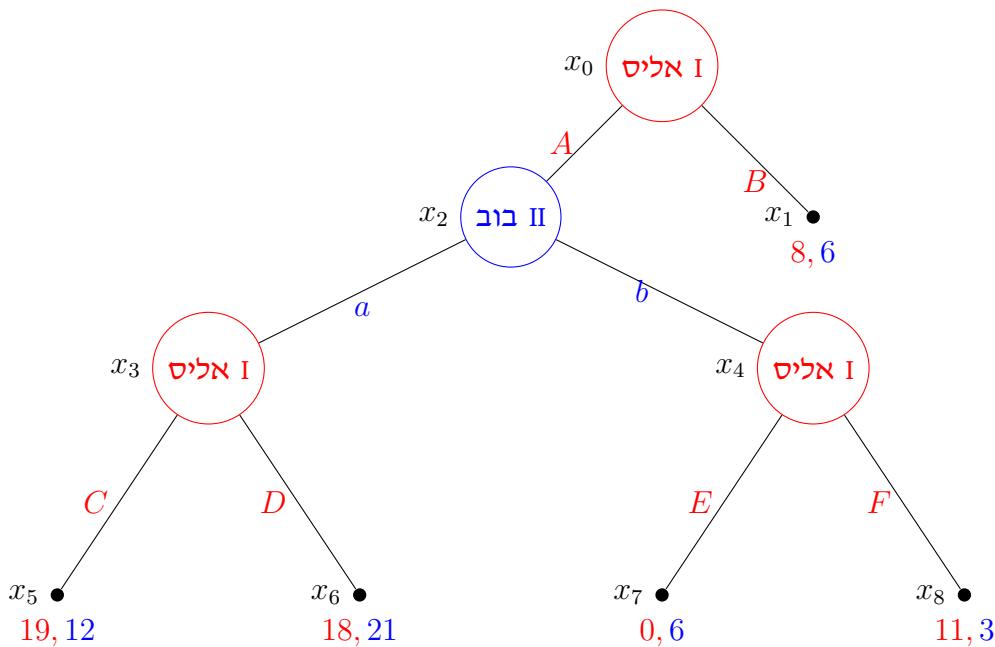
$$S_{II} = (Q/J, Q/A, K/J, K/A)$$

(נהוג לרשום את האסטרטגיות מלמעלה עד למטה ומשמאלו לימונ).
 ניתן לרשום את המשחק **בצורה אסטרטגית**:

I	II	Q/J	Q/A	K/J	K/A
H		-10, 5	-10, 5	7, 13	7, 13
T		12, 6	40, -30	12, 6	40, -30

דוגמה 1.5 ()

נתון המשחק הבא בצורה רחבה. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרונות:

במשחק זה, אליס (שחקן I) פותח עם המהלך הראשון, ולאחר מכן בוב מבצע המהלך השני, ואז אליס מבצע מהלך שלישי.

המשחק הוא משחק עם ידיעה שלמה.

לאليس יש שלוש קבוצות ידיעה:

$$x_0 (A, B), \quad x_3 (C, D), \quad x_4 (E, F).$$

בכל אחד של הקדוקדים האלה לאלייס יש 2 פעולות אפשריות لكن יהיה לה $2 \times 2 = 8$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_I = (A/C/E, A/C/F, A/D/E, A/D/F, B/C/E, B/C/F, B/D/E, B/D/F).$$

לבוב יש קבוצות ידיעה אחת:

$$x_2 (a, b).$$

בקבוצה ידיעה הזאת של בוב יש 2 פעולות אפשריות لكن יהיה לו 2 קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a, b).$$

מכאן הצורך אסטרטגי בלבד של המשחק הינה:

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>A/C/E</i>	19, 12	0, 6	
<i>A/C/F</i>	19, 12	11, 3	
<i>A/D/E</i>	18, 21	0, 6	
<i>A/D/F</i>	18, 21	11, 3	
<i>B/C/E</i>	8, 6	8, 6	
<i>B/C/F</i>	8, 6	8, 6	
<i>B/D/E</i>	8, 6	8, 6	
<i>B/D/F</i>	8, 6	8, 6	



1.3 משחקים עם ידיעה לא שלמה

הגדרה 1.6 משחק עם ידיעה לא שלמה

משחק עם ידיעה לא שלמה הוא משחק בו לפחות שחקן לא יודע את ההחלטה של שחקן אחר בקדוקוד הקודם שמננו יצא צלע לקדוקוד החלטה שלו. כתוצאה, השחקן אשר לו יודע את ההחלטה של שחקן אחר, לא יודע באיזה קדוקוד הוא נמצא בעז המשחק.

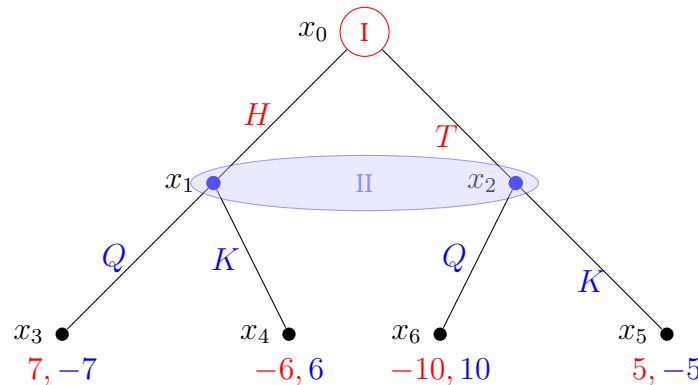
דוגמה 1.6 (משחק מטבע וקלף עם ידיעה לא שלמה)

בשונה לדוגמה הקודמת נتبונן על המשחק הבא שבו שחקן II לא יודע את ההחלטה של שחקן I עד סוף המשחק.

שחקן I (אליס) בוחרת אחד הצדדים של מטבע, H (עז) או T (פל). לאחר מכן, בלי ידיעה של הבחירה של אליס, שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).

- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר Q אז בוב משלם לאלייס $\text{₪}7$.
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר K אז אליס משלם לבוב $\text{₪}6$.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר Q אז אליס משלם לבוב $\text{₪}10$.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר K אז בוב משלם לאלייס $\text{₪}5$.

נרשום את המשחק **בצורה רחבה**:



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H, T .
כלומר לאלייס יש **קבוצת ידיעה אחת**:

$$V_I = \{ x_0(H, T) \} .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I = (H, T) .$$

בניגוד לדוגמה הקודמת, לבוב (שחקן II) יש רק קבוצת ידיעה אחת שמכילה שני קדוקדים.
ז"א לבוב לא ידוע איזה אופציה אליס בחרה, H או T . אז לבוב לא ידוע על איזה קדקוד הוא נמצא, x_1 או x_2 .
בגלל שהוא לא ידוע מה ההחלטה של אליס, הוא בוחר בין רק שתי אפשרויות, בלי ידיעה של ההחלטה של אליס.

לכן אנחנו מסתכלים אל הקדוקדים x_1, x_2 **בקבוצת ידיעה אחת** שמננה יוצאות רק שתי הפעולות:

$$V_{II} = \{ x_1x_2(Q, K) \} .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של בוב הינה

$$S_{II} = (Q, K)$$

נשים לב כי מכל אחד של הקדוקדים x_1 ו- x_2 יוצאות אותן קבוצת הפעולות. אחרת היה ידוע מה ההחלטה של אליס.

כעת נרשום את הצורה האסטרטגית של המשחק:

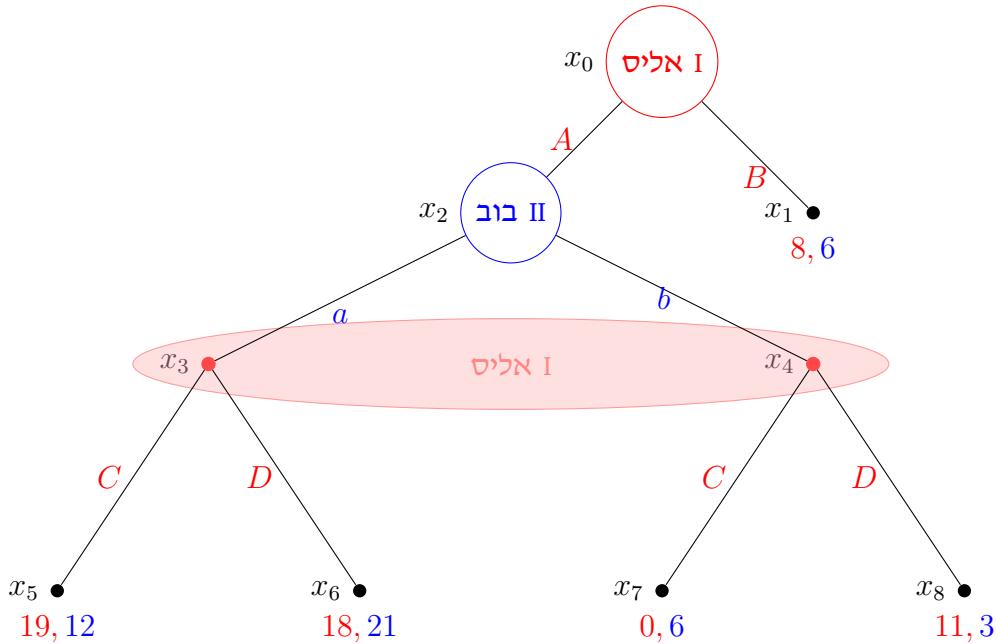
I	II	Q	K
H	$7, -7$	$-6, 6$	
T	$-10, 10$	$5, -5$	

כלל 1.1 פעולות שיוצאות מקבוצת ידיעה ללא ידיעה שלמה

לשחקן יש אותה קבוצה של פעולות אפשריות בכל קדקוד שמסוגל אותה קבוצת ידיעה.

דוגמה 1.7 (משחק עם ידיעה לא שלמה)

נתון המשחק הבא בצורה רחבה. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרונות:

שיםו לב, דומה לדוגמה הקודמת, הקדקודים x_3 ו- x_4 באותה קבוצת ידיעה של אליס בגלל שהיא לא יודעת מה החלטה של בוב בקדקוד x_2 , x_3 . כלומר אליס לא יודעת אם בוב בחר a או b . לכן הפעולות היוצאות מקדקוד x_3 הן אותן פעולות שיוצאות מקדקוד x_4 , בגלל שגם הינו הפעולות אפשריות ב- x_3 ו- x_4 , אז אליס הייתה יודעת איזה פעולה בוב בחר, a או b . כלומר אם לאليس היה הבחירה בין הפעולות E ו- F אז היא הייתה יודעת שהיא נמצאת בקדקוד x_4 בעז המשחק ובוב בחר b . ולהפך, אם הייתה לה בחירה בין הפעולות C ו- D במקום הבחירה בין הפעולות E ו- F אז היא הייתה יודעת שהיא נמצאת ב- x_3 ושבוב בחר a .

לאليس יש שתי קבוצות ידיעה:

$$x_0 \ (A, B) , \quad x_3x_4 \ (C, D) .$$

בכל אחד של הקדקודים האלה לאليس יש 2 פעולות אפשריות ולכן $2 \times 2 = 4$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_I = (A/C , \ A/D , \ B/C , \ B/D) .$$

לבוב יש קבוצות ידיעה אחת:

$$x_2 : \ (a, b) .$$

בקבוצת ידיעה הזאת של בוב יש 2 פעולות אפשריות ולכן לו 2 קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a , \ b) .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד המשחק הינה:

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>A/C</i>	19, 12	0, 6	
<i>A/D</i>	18, 21	11, 3	
<i>B/C</i>	8, 6	8, 6	
<i>B/D</i>	8, 6	8, 6	

■

1.4 משחק עם מהלכי גורל

במשחקים שבהם עסקנו עד כה, המעבר במצב נעשה על ידי אחד השחקנים. מודל זה מתאים למשחקים כגון שחמט וدمקה, אך לא למשחקי קלפים או קובייה (כמו פוקר או שש-בש), שבהם מעבר במצב יכול להיות י对照 היעשות על ידי תהליך מקרי: במקרים קלפים אנחנו טורפים את הקלפים שבΧψή, ובשש-בש אנו מטילים קובייה. ניתן לחשב גם על סיטואציות שבהן המעבר במצב תלוי בגורמים מקרים אחרים, כגון ריגידת אדמה או נפילת הבורסה. מעבר מסווג זה נקרא **מהלך גורל**. ההרחבה של המודל שלנו תעשה על ידי כך שחקן מהקדוקדים בעץ המשחק (V, E, x_0) יסמןו כמהלכי גורל. הצלעות היוצאות מקדוקוד המתאים למהלך גורל מתאימות לתוצאות האפשרויות של הגרלה וליד כל צלע צו נרשמת הסתברות לקבלת התוצאה המתאימה.

הגדרה 1.7 משחק בצורה רחבה עם מהלכי גורל

משחק בצורה רחבה עם מהלכי גורל ניתן ע"י הווקטור

$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_0, V_1, V_2, V_3, \dots\}, O, u, (p_x)_{x \in V_0}),$$

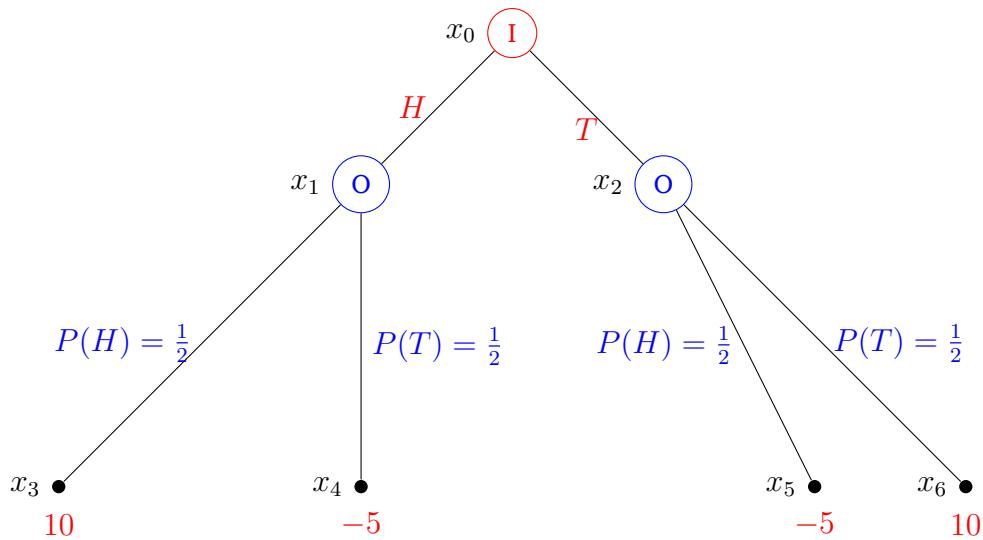
כאשר המשמעות של כל האיברים אותו דבר להגדרה של משחק בצורה רחבה כפי שתנתנו בהגדרה 1.1. הבדל היחיד הוא הקבוצה קדוקודים V_0 , אשר מסמן את הקבוצה של הקדוקודים בהם יש הגרלה על ידי שחקן הגורל.

לכל קדוקוד $V_0 \in x$, אנחנו משייכים הסתברות לכל צלע שיוצאה ממנו.

דוגמה 1.8 (משחק עם מהלך גורל)

שחקן בוחר H ("עץ") או T ("פלוי"). אחרי שהשחקן בוחר, הוא מטיל מטבע. אם המטבע מראה את בחירתו, הוא מנצח ומקבל 10 ₪. אם לא הוא מפסיד 5 ₪. שרטטו את המשחק בצורה רחבה.

פתרונות:



$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_1, V_2\}, O, u)$$

$N = \{I\} = \{1, 2\}$.

שחקנים:

$V = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

קדושים:

$E = \{x_0x_1, x_0x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_5, x_2x_6\}$.

קשותות:

x_0 .

מצב המשחק ההתחלתי:

קדושים:

$V_1 = \{x_0(H, T)\}$.

קבוצות ידיעה של שחקן 1:

$V_0 = \{x_1(P(H) = \frac{1}{2}, P(T) = \frac{1}{2}), x_2(P(H) = \frac{1}{2}, P(T) = \frac{1}{2})\}$.

קבוצות ידיעה של שחקן 2:

$O = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

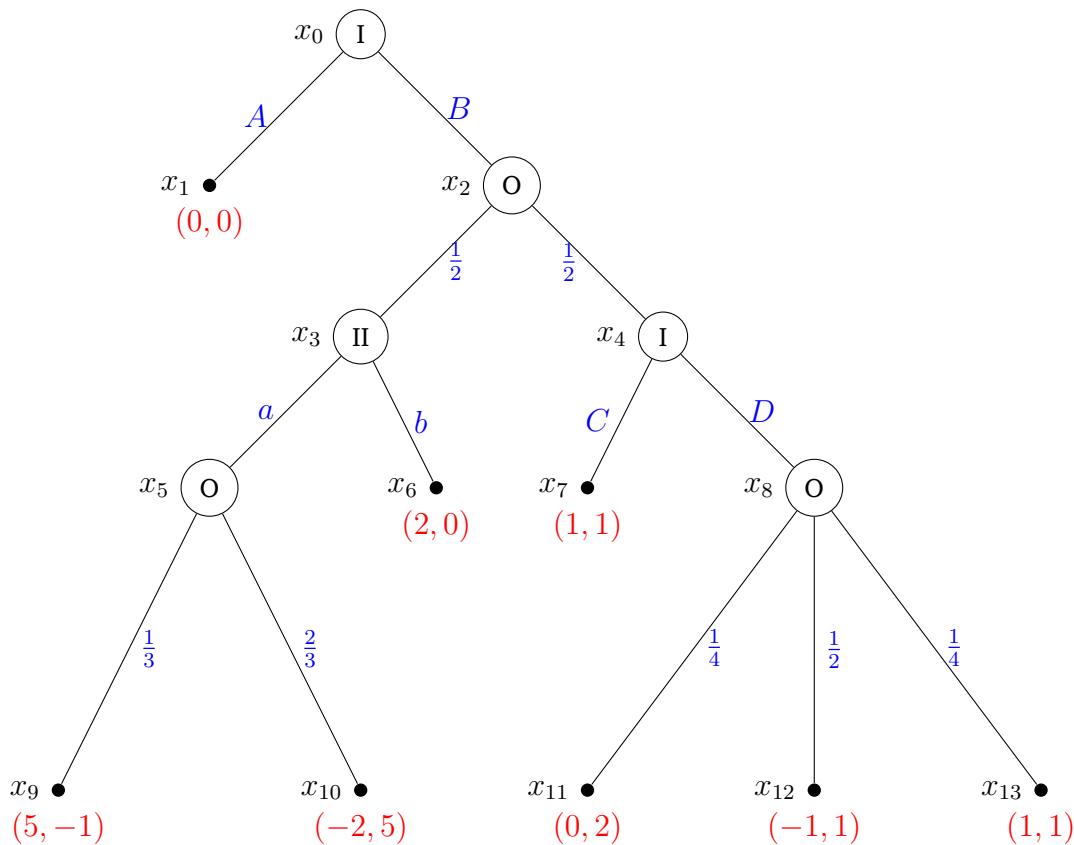
פתרונות אפשריות:

פונקציית התשלומים:

$$u(H) = \frac{1}{2} \cdot (10) + \frac{1}{2}(-5) = \frac{5}{2},$$

$$u(T) = \frac{1}{2} \cdot (-5) + \frac{1}{2} \cdot (10) = \frac{5}{2}.$$



דוגמה 1.9 (אסטרטגיות במשחק עם מהלכי גורל)

קבוצות ידיעה של שחקן I:

$$x_0(A, B), \quad x_4(C, D).$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I = (A/C, A/D, B/C, B/D).$$

קבוצות ידיעה של שחקן II:

$$x_3(a, b).$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן II:

$$S_{II} = (a, b).$$

פונקציית התשלום:

$$u(A/C, a) = (0, 0),$$

$$u(A/D, a) = (0, 0),$$

$$u(B/C, a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(5, -1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(-2, 5) + \frac{1}{2}(1, 1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{6} \right),$$

$$u(B/D, a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(5, -1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(-2, 5) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(0, 2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(-1, 1) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}(1, 1) = \left(-\frac{1}{48}, \frac{33}{16} \right),$$

$$u(A/C, b) = (0, 0),$$

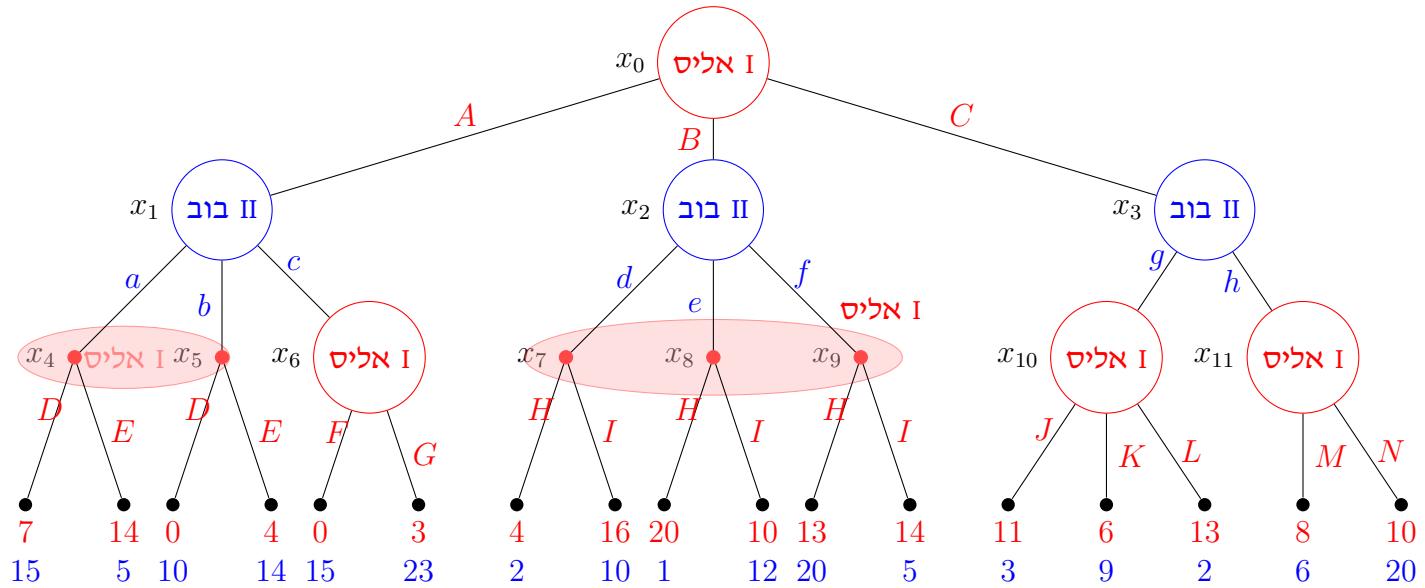
$$u(A/D, b) = (0, 0),$$

$$u(B/C, b) = \frac{1}{2}(2, 0) + \frac{1}{2}(1, 1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

$$u(B/D, b) = \frac{1}{2}(2, 0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(0, 2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(-1, 1) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}(1, 1) = \left(-\frac{11}{16}, \frac{9}{16} \right),$$

דוגמה 1.10 (משחק)

נתון המשחק הבא בצורה רחבה אסטרטגית. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרונות:

המשחק הוא משחק עם ידיעה לא שלמה.

לאليس יש 5 קבוצות ידיעה:

$$x_0 : (A, B, C), \quad x_4x_5 : (D, E), \quad x_6 : (F, G), \quad x_7x_8x_9 : (H, I), \quad x_{10} : (J, K, L), \quad x_{11} : (M, N).$$

לכן יהיו לאليس $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 144$ קבוצות אסטרטגיות.

$$S_I = (A/D/E/F/G/H/J/M, A/D/E/F/G/H/J/N, \dots, C/E/G/I/L/N).$$

לבוב יש 3 קבוצות ידיעה:

$$x_1 : (a, b, c), \quad x_2 : (d, e, f), \quad x_3 : (g, h).$$

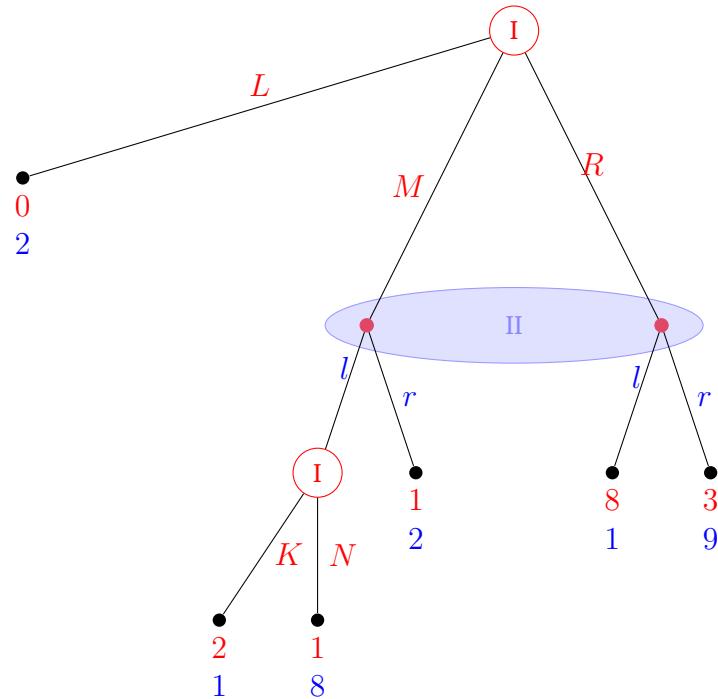
לכן לבוב יהיו: $3 \times 3 \times 2 = 18$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a/d/g, a/d/h, \dots, c/f/h).$$

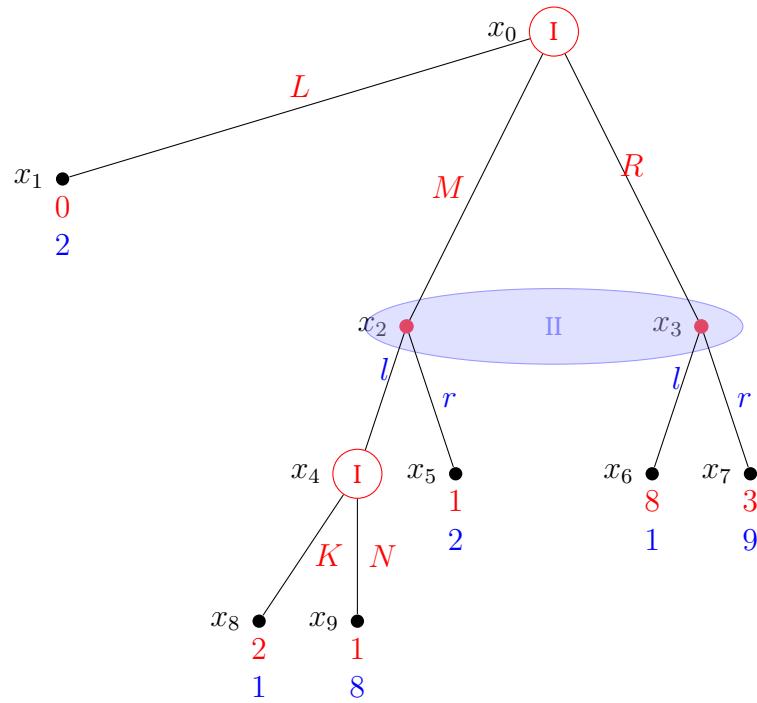
מכאן הצורה אסטרטגית בלבד

דוגמה 1.11 (משחק)

רשמו את המשחק הבא בצורה אסטרטגית.



פתרונות:



קבוצת אסטרטגיות של שחקן 1:

$$S_1 = (L/K, M/K, R/K, L/N, M/N, R/N) .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן 2:

$$S_2 = (l, r) .$$

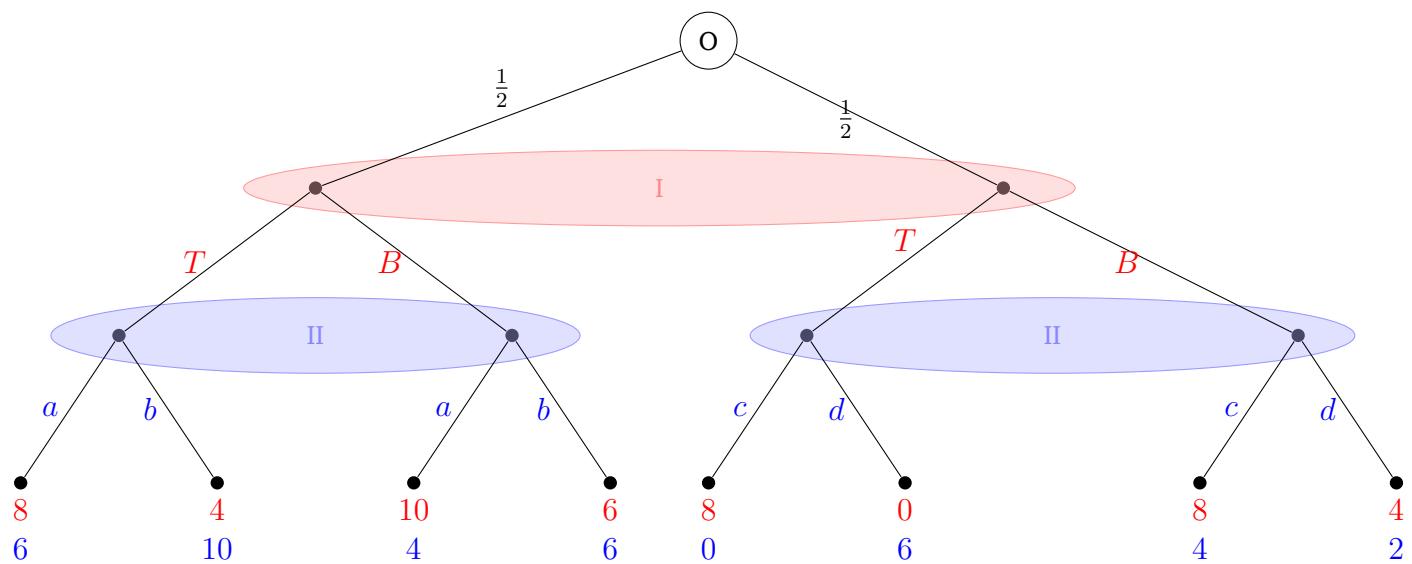
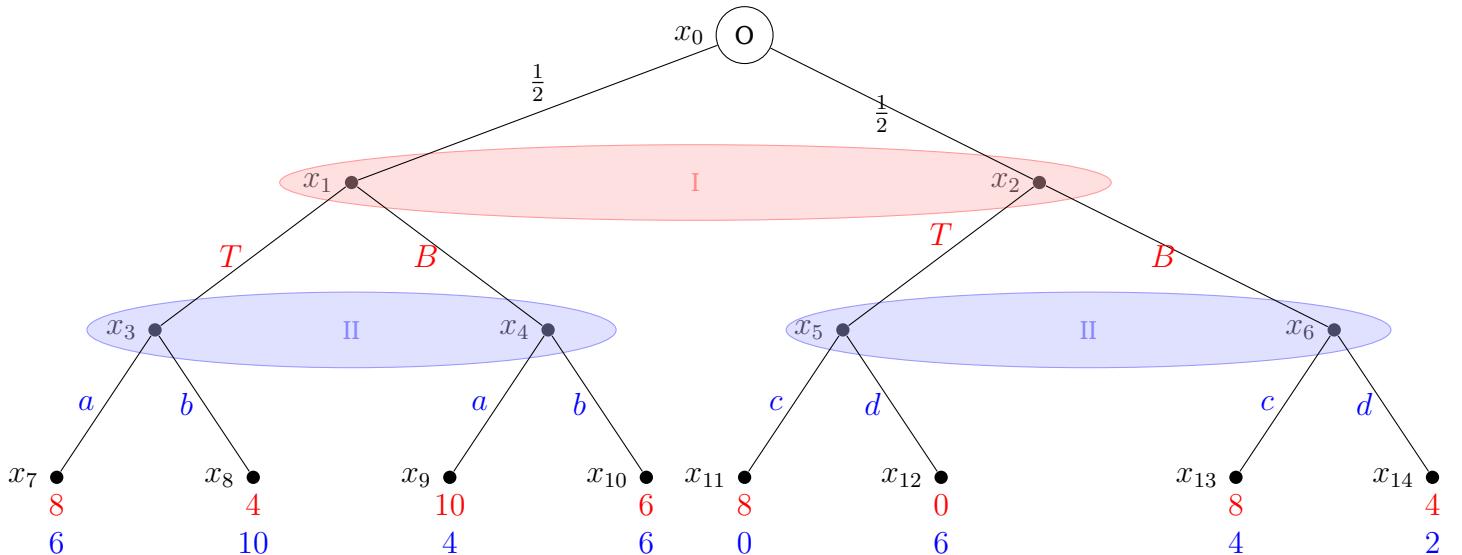
מכאן הצורה אסטרטגית של המשחק היא:

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>l</i>	<i>r</i>
<i>L/K</i>	0, 2	0, 2	
<i>M/K</i>	2, 1	1, 2	
<i>R/K</i>	8, 1	3, 9	
<i>L/N</i>	0, 2	0, 2	
<i>M/N</i>	1, 8	1, 2	
<i>R/N</i>	8, 1	3, 9	

■

דוגמה 1.12 (משחק עם ידיעה לא שלמה עם מהלך גורל)

רשמו את המשחק הבא בצורה אסטרטגית.

**פתרונות:**

קבוצות ידיעה של שחקן I :

$$x_1x_2 : (T, B) .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן I :

$$S_I = (T, B) .$$

קבוצות ידיעה של שחקן II :

$$x_3x_4 : (a, b) , \quad x_5x_6 : (c, d) .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן II :

$$S_{II} = (a/c , a/d , b/c , b/d) .$$

$I \backslash II$	a/c	a/d	b/c	b/d
I	$\frac{1}{2}(8, 6) + \frac{1}{2}(8, 0)$	$\frac{1}{2}(8, 6) + \frac{1}{2}(0, 6)$	$\frac{1}{2}(4, 10) + \frac{1}{2}(8, 0)$	$\frac{1}{2}(4, 10) + \frac{1}{2}(0, 6)$
T	$\frac{1}{2}(10, 4) + \frac{1}{2}(8, 4)$	$\frac{1}{2}(10, 4) + \frac{1}{2}(4, 2)$	$\frac{1}{2}(6, 6) + \frac{1}{2}(8, 4)$	$\frac{1}{2}(6, 6) + \frac{1}{2}(4, 2)$
B				

$I \backslash II$	a/c	a/d	b/c	b/d
I	(4, 3)	(4, 6)	(6, 5)	(2, 8)
T	(9, 6)	(7, 3)	(7, 5)	(5, 4)
B				



שיעור 2

משחקים בצורה אסטרטגית, שליטה ושיווי משקל Nash

2.1 הגדרה של משחק בצורה אסטרטגית

הגדרה 2.1 משחק בצורה אסטרטגית

הצורה אסטרטגית או צורה נורמלית של משחק n -שחקנים היא קבוצה

$$G = (N, (S_1, S_2, \dots, S_n), (u_1, u_2, \dots, u_n))$$

שבה

(1) $N = \{1, 2, \dots, n\}$ היא קבוצת שחקנים סופית.

(2) S_i היא קבוצת האסטרטגיות של שחקן i ($1 \leq i \leq n$)

(3) u_i היא פונקציית התשלום של שחקן i :

$$u_i : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$$

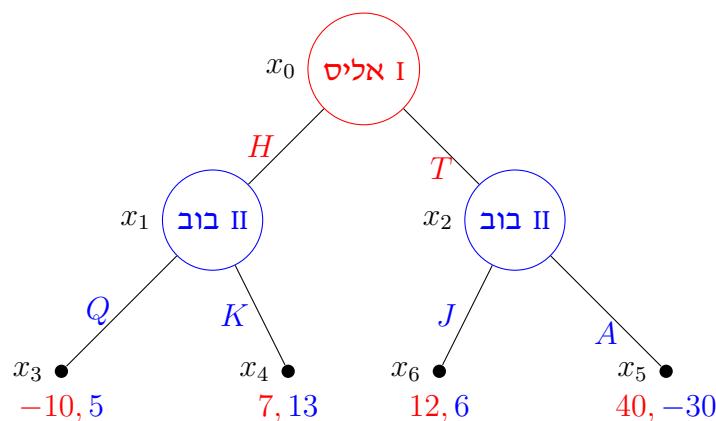
אשר מקבלת וקטור אסטרטגיות של המשחק (s_1, s_2, \dots, s_n) (כאשר $s_i \in S_i$) אסטרטגיה של שחקן i ומחזירה מספר ממשי שווה לתשלום של שחקן i .

דוגמה 2.1 (משחק של מطبع ולקוח משחק)

רשמו את הצורה אסטרטגית של הדוגמה הבאה שנടונה בצורה רחבה (ראו דוגמה 1.4).

פתרון:

ניתן לרשום את עץ המשחק בצורה רחבה אסטרטגית:



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H, T .

ז"א לשחקן I יש קבוצה ידיעה אחת:
 $x_0(H, T)$.

לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה
 $S_I = (H, T)$.

לשחקן II יש שני קדוקדים x_1, x_2 בהם הוא מקבל החלטה.
 אז לשחקן II יש 2 קבוצות ידיעה,

$$V_{II} = \{x_1(Q, K), x_2(J, A)\}.$$

אשר מייצגות שתי אפשרויות שונות המנובעות מההחלטה הקודמת של שחקן I בקדוק x_0 .
 מכיוון שלשחקן II יש שתי קבוצות ידיעה x_1, x_2 ובכל אחד יש שתי פולולות אפשרויות, אז יש לבוב 4 אסטרטגיות:

$$S_{II} = (Q/J, Q/A, K/J, K/A)$$

(נוהג לרשום את האסטרטגיות מלמעלה עד למטה ומשמאלו לימונ).
 ניתן לרשום את המשחק **בצורה אסטרטגית**:

		II	Q/J	Q/A	K/J	K/A	
		I	H	$-10, 5$	$-10, 5$	$7, 13$	$7, 13$
I	T	H	$12, 6$	$40, -30$	$12, 6$	$40, -30$	

מכאן

$$G = (N, (S_I, S_{II}), (u_I, u_{II}))$$

casar הקבוצת שחקנים היא

$$N = \{Bob, Alice\} = \{I, II\},$$

האסטרטגיות של המשחק הן $S = (S_I, S_{II})$, casar הקבוצת אסטרטגיות של שחקן I היא

$$S_I = (H, T)$$

והקבוצת אסטרטגיות של שחקן II היא

$$S_{II} = (Q/J, Q/A, K/J, K/A),$$

והפונקציות תשלוםם הן

$$u_I(H, Q/J) = -10,$$

$$u_I(H, Q/A) = -10,$$

$$u_I(H, K/J) = 7,$$

$$u_I(H, K/A) = 7,$$

$$u_I(T, Q/J) = 12,$$

$$u_I(T, Q/A) = 40,$$

$$u_I(T, K/J) = 12,$$

$$u_I(T, K/A) = 40,$$

$$\begin{aligned}
 u_{II}(H, Q/J) &= 5 , \\
 u_{II}(H, Q/A) &= 5 , \\
 u_{II}(H, K/J) &= 13 , \\
 u_{II}(H, K/A) &= 13 , \\
 u_{II}(T, Q/J) &= 6 , \\
 u_{II}(T, Q/A) &= -30 , \\
 u_{II}(T, K/J) &= 6 , \\
 u_{II}(T, K/A) &= -30 .
 \end{aligned}$$

2.2 סימוני

הגדה 2.2

תהי $N = \{1, \dots, n\}$ קבוצת סופית, ולכל $i \in N$ תהי A_i קבוצה כלשהי.
נסמן ב-

$$A = \bigtimes_{i \in N} A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

את המכפלה הקרטזית של כל הקבוצות A_i .
לכל $i \in N$ נגדיר

$$A_{-i} = \bigtimes_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} A_j = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{i-1} \times A_{i+1} \dots \times A_n$$

את המכפלה הקרטזית של כל הקבוצות A_j למעט הקבוצה A_i .
איבר ב-

$$x_{-i} = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, x_n) .$$

זהו הווקטור ה- i ממדי הנוצר מ- $(a_1, \dots, a_n) \in A$ על ידי השמטה הקואורדינטה i .

2.3 מושג השליטה

הגדה 2.3 אסטרטגיה שלטת חזק במשחק n שחקנים

אסטרטגייה s_i של שחקן i נקראת **שלטת חזק** אם קיימת אסטרטגיה t_i של שחקן i כך שלכל וקטור אסטרטגיות s_{-i} של שאר השחקנים מתקיים

$$u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(t_i, s_{-i}) .$$

במילים אחרות, s_i שלטת חזק ע"י t_i אם מתקיים

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

לכל וקטור אסטרטגיות $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ של שאר השחקנים.
במקרה זה נאמר ש- s_i **שלטת חזק** על ידי t_i , או ש- t_i **שלטת חזק** על s_i .

למה 2.1 אסטרטגיה נשלט חזק במשחק 2 משחקים

לפי הגדרה 2.3, במשחק 2 משחקים, אסטרטגיה s_1 של שחקן 1 נשלט חזק ע"י אסטרטגיה t_1 של שחקן 1 אם

$$u_1(s_1, s_2) < u(t_1, s_2)$$

לכל אסטרטגיה s_2 של שחקן 2.

באותה מידת אסטרטגיה s_2 של שחקן 2 נשלט חזק ע"י אסטרטגיה t_2 של שחקן 2 אם

$$u_1(s_1, s_2) < u(s_1, t_2)$$

לכל אסטרטגיה s_1 של שחקן 1.

דוגמה 2.2 (אסטרטגיות נשלטות חזק)

נתון המשחק הבא בצורה אסטרטגית.

a) מצאו אסטרטגיה הנשלט חזק של שחקן I.

b) מצאו אסטרטגיה הנשלט חזק של שחקן II.

		<i>II</i>	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>R</i>
<i>I</i>					
<i>T</i>	1, 0	1, 2	4, 1		
<i>B</i>	0, 3	0, 1	2, 0		

פתרונות:

(א)

$$0 = u_I(B, L) < u_I(T, L) = 1 ,$$

$$0 = u_I(B, M) < u_I(T, M) = 1 ,$$

$$2 = u_I(B, R) < u_I(T, R) = 4 .$$

לכן אסטרטגיה *B* נשלט חזק על ידי *T*. סימון

$$B \prec T .$$

(ב)

$$1 = u_{II}(T, R) < u_{II}(T, M) = 2 ,$$

$$0 = u_{II}(B, R) < u_{II}(B, M) = 1 .$$

לכן אסטרטגיה *R* נשלט חזק על ידי *M*:

$$R \prec M .$$

2.4 הנחות של רציונליות בתורת המשחקים

משפט 2.1 הנחות של רציונליות בתורת המשחקים

- (1) שחקן רציוני לא ישמש באסטרטגיה נשלחת חזק.
- (2) כל השחקנים במשחק רציונליים.
- (3) העובדה שכל השחקנים רציונליים היא ידיעה משותפת בין כל השחקנים.

2.5 סילוק חוזר

תחת הנחות של המשפט 2.1, ניתן לסלק אסטרטגייה נשלחת חזק, ולהגיע לפתרון של המשחק.

דוגמה 2.3 (סילוק חוזר)

נתון המשחק הבא, מצאו את הפתרון באסטרטגיות שלוטות חזק, והתשלום הסופי של המשחק.

		<i>II</i>	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>R</i>
		<i>I</i>			
		<i>T</i>	1, 0	1, 2	0, 1
<i>B</i>	<i>I</i>	0, 3	0, 1	2, 0	
	<i>II</i>				

פתרונות:

		<i>II</i>	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>R</i>
		<i>I</i>			
		<i>T</i>	1, 0	1, 2	0, 1
<i>B</i>	<i>I</i>	0, 3	0, 1	2, 0	
	<i>II</i>				

		<i>II</i>	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>R</i>
		<i>I</i>			
		<i>T</i>	1, 0	1, 2	0, 1
<i>B</i>	<i>I</i>	0, 3	0, 1	2, 0	
	<i>II</i>				

לכן לפי הכללים של שחקנים רציונליים, שחקן *I* ישמש באסטרטגיה *T*, שחקן *II* ישמש באסטרטגיה *M* והתשלום הסופי יהיה:

$$u_I(T, M) = 1 , \quad u_{II}(T, M) = 2 .$$

■

דוגמה 2.4 (דילמה האסיר)

משחק פשוט מאוד, ויחד עם זאת מארב הרבה בחינות, הוא המשחק הידוע בשם "דילמה האסיר". המשחק מופיע בספרות בצורת הסיפור הבא.

שני עבריינים אליס (שחקן 1) ובוב (שחקן 2) ביצעו פשע חמור ונעצרו. בהעדר כל הוכחות אחרות, הדרך היחידה שבה יכולת המשטרה להשיג הרשות על עבירה זו היא שאחד העצורים (או שניהם) מודה. בביצוע

המעשה. בחקירתם העמידה המשטרתית כל אחד מהעצורים בפני החלטה הבאה:

- אם אליס מלשינה ובוב שותק אליס י יצא חופשי ובוב מקבל 10 שנים מאסר.
- אם בוב מלשין ולאليس שותקת, בוב י יצא חופשי ולאليس מקבלת 10 שנים מאסר.
- אם שניהם שותקים, יש בידי המשטרת ראות להרשותם בעבירות פחותות (למשל, העמתת מס) שMOVEDIL למאסר של שנה אחת לכל אחד.
- אם שניהם מלשינים המשטרת מבקשת להתחשב בשיתוף הפעולה שלהם ולגוזר את עונשם ל-6 שנים מאסר לכל אחד.

רשמו את המשחק בצורה אסטרטגיית ומצאו את הפתרון באסטרטגיות שליטות חזק.

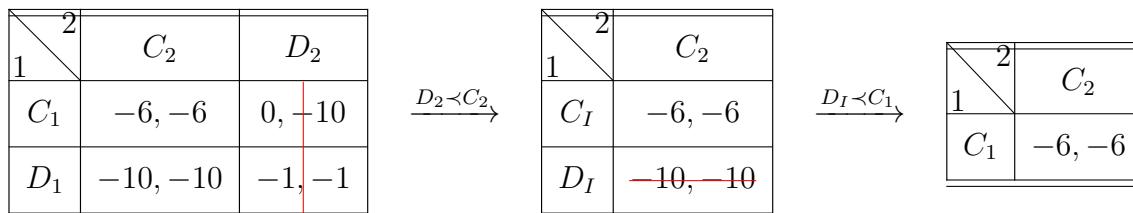
פתרונות:

נסמן:

- C_1 = האסטרטגיה של אליס "מלךינה".
- D_1 = האסטרטגיה של אליס "שותקת".
- C_2 = האסטרטגיה שבוב "מלךין".
- D_2 = האסטרטגיה שבוב "שותק".

המשחק בצורה אסטרטגיית הינו:

	2 בוב אליס 1	C_2	D_2
C_1	-6, -6	0, -10	
D_1	-10, 0	-1, -1	



לכן לפי הכללים של משחקים רצינליים, שחקן I ישתמש באסטרטגיה C_{II} , שחקן 2 ישתמש באסטרטגיה C_{II} והתשלום הסופי יהיה:

$$u_1(C_1, C_2) = -6, \quad u_2(C_1, C_2) = -6.$$



2.6 שיווי משקל נאש

הגדרה 2.4 תשובה טובה ביותר במשחק n שחקנים

נתון משחק n שחקנים. יהיו s_{-i} וקטור אסטרטגיות של השחקנים לא- i . אסטרטגיה s_i של שחקן i נקראת **תשובה טובה ביותר** ל- s_{-i} אם מתקיים

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{t_i \in S_i} u_i(t_i, s_{-i}).$$

במילים אחרות, האסטרטגיה s_i של שחקן i היא תשובה טובה ביותר בתגובה לאסטרטגיות $(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+2}, \dots, s_n)$ של שאר השחקנים אם אסטרטגייה s_i נותנת לשחקן i התשלום המקסימלי מתוך כל האסטרטגיות האחרות S_i של שחקן i :

$$u_i(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n) = \max_{t_i \in S_i} u_i(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \dots, s_n).$$

זהו

למה 2.2 תשובה טובה ביותר במשחק 2 שחקנים

לפי הגדרה 2.4, במשחק 2 שחקנים, אסטרטגיה s_1 של שחקן 1 היא התשובה הטובה ביותר ביותר בתגובה לאסטרטגיה s_2 של שחקן 2 אם מתקיים

$$u_1(s_1, s_2) = \max_{t_1 \in S_1} u_1(t_1, s_2),$$

או במילים אחרות

$$u_1(s_1, s_2) \geq u_1(t_1, s_2) \quad \forall t_1 \in S_1.$$

באותה מידה, אסטרטגיה s_2 של שחקן 2 היא התשובה הטובה ביותר בתגובה לאסטרטגיה s_1 של שחקן 1 אם מתקיים

$$u_2(s_1, s_2) = \max_{t_2 \in S_2} u_2(s_1, t_2),$$

או במילים אחרות

$$u_2(s_1, s_2) \geq u_2(s_1, t_2) \quad \forall t_2 \in S_2.$$

הגדרה 2.5 שוויי משקל נאש

נתון משחק n שחקנים. וקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ נקרא **שוויי משקל נאש** אם לכל שחקן i ולכל אסטרטגיה $s_i \in S_i$ של שחקן i , מתקיים

$$u_i(s^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*).$$

וז"א, אם כל השחקנים משחקים לפי הוקטור אסטרטגיות של השוויי משקל $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$. אם שחקן i בוחר בכל אסטרטגיה אחרת s_i , התשלום שלו (שהה) תמיד יהיה פחות מהתשלום שהוא מקבל ע"י הוקטור אסטרטגיות של השוויי משקל s^* :

$$u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$$

לכל אסטרטגיה s_i של שחקן i .וקטור התשלומים (s^*) נקרא **תשלום שוויי משקל**.

למה 2.3 שוויי משקל נאש במשחק 2 שחקנים

לפי הגדרה 2.5, עבור משחק 2 שחקנים, וקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ הוא שוויי משקל אם מתקיימים:

$$\begin{aligned} u_1(s_1^*, s_2^*) &\geq u_1(s_1, s_2^*) & \forall s_1 \in S_1, \\ u_2(s_1^*, s_2^*) &\geq u_2(s_1^*, s_2) & \forall s_2 \in S_2. \end{aligned}$$

משפט 2.2 שווי משקל הוא תשובה טובה ביותר למשחק כל שחקן

נתון משחק n שחקנים. וקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ הוא **שווי משקל** אם לכל שחקן i האסטרטגיה $s_{-i}^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$ היא תשובה טובה ביותר לו.

הוכחה: תרגיל בית.

דוגמה 2.5 (שווי משקל נאש במשחק 2 שחקנים)

נתון המשחק בצורה אסטרטגית הבא:

		2	x	y	z
		1			
1	a	2, 1	0, 0	1, 2	
1	b	0, 3	2, 2	3, 1	
1	c	1, 1	3, 2	2, 2	

פתרונות:

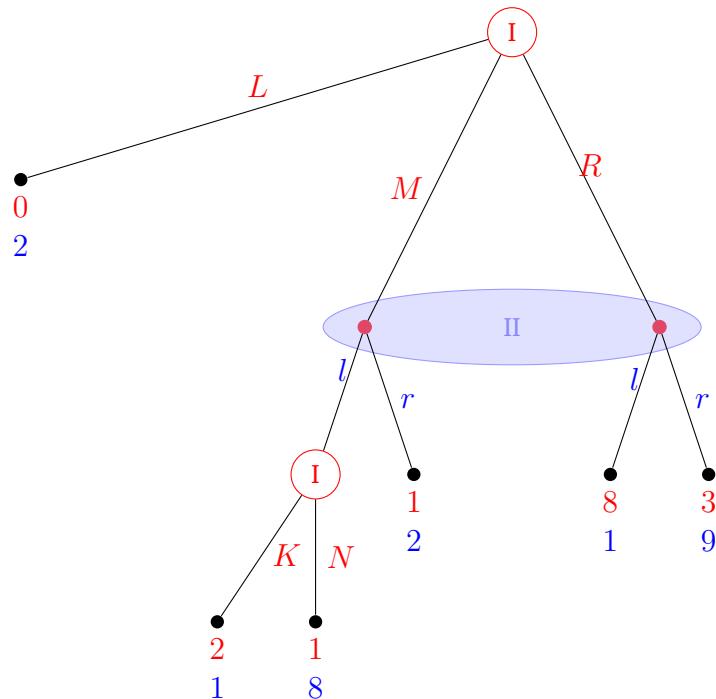
		2	x	y	z
		1			
1	a	2, 1	0, 0	1, 2	
1	b	0, 3	2, 2	3, 1	
1	c	1, 1	3, 2	2, 2	

לכן וקטור אסטרטגיות של שווי משקל נאש הינו

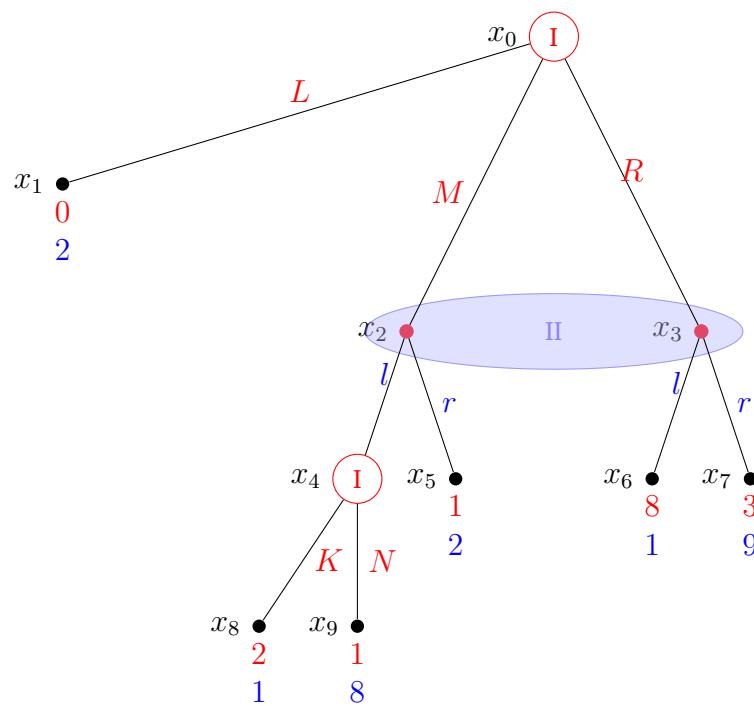
$$(s_1^*, s_2^*) = (c, y) .$$



דוגמה 2.6 (שווי משקל משחק 2 שחקנים)



פתרונות:



קבוצת אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I = (L/K, M/K, R/K, L/N, M/N, R/N) .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן II:

$$S_{II} = (l, r) .$$

מכאן הצורה אסטרטגית של המשחק היא:

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>l</i>	<i>r</i>
<i>L/K</i>	0, 2	0, 2	
<i>M/K</i>	2, 1	1, 2	
<i>R/K</i>	8, 1	3, 9	
<i>L/N</i>	0, 2	0, 2	
<i>M/N</i>	1, 8	1, 2	
<i>R/N</i>	8, 1	3, 9	

נשתמש בשיטה תשובה טוביה ביותר כדי למצוא את השוויי משקל של המשחק:

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>l</i>	<i>r</i>
<i>L/K</i>	0, 2	0, 2	
<i>M/K</i>	2, 1	1, 2	
<i>R/K</i>	8, 1	3, 9	
<i>L/N</i>	0, 2	0, 2	
<i>M/N</i>	1, 8	1, 2	
<i>R/N</i>	8, 1	3, 9	

לכן הוקטור אסטרטגיות

$$(s_1^*, s_2^*) = (R/N, r)$$

שוויי משקל וגם הוקטור אסטרטגיות

$$(s_1^*, s_2^*) = (R/K, r)$$

שוויי משקל.

■

2.7 משפט השקילות בין אסטרטגייה השולטת חזק ייחודית ושוויי משקל

משפט 2.3

אם הוקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ שוויי משקל נASH, אז s^* הוא פתרון באסטרטגיות השולטות חזק.

הוכחה:

משפט זו אומר שאם הוקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ הוא שוויי משקל נASH, אז s^* תישאר לאחר תהליך סילוק חוזר של אסטרטגיות הנשלטות חזק.

נווכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי (s_1^*, \dots, s_n^*) שוויי משקל נASH אבל הוא לא פתרון באסטרטגיות שולטות חזק. אם כן אז תהי s_i^* האסטרטגייה הראשונה שיורדת בתהליך סילוק חוזר.

ז"א קיימת אסטרטגיה $t_i \in S_i$ אשר שלטת חזק ב- s_i^* , כלומר

$$u_i(s_1, \dots, s_i^*, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, t_i, \dots, s_n) . \quad (\#1)$$

לכל s_n , $s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots$ אשר עדין נשארות בתהיליך.

בפרט, מכיוון שהאסטרטגיות $s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*$ עדין נשארות בתהיליך אחרי מהיקת אסטרטגיה s_i^* , אז לפि (#1) מתקיים

$$u_i(s_1^*, \dots, s_i^*, \dots, s_n^*) < u_i(s_1^*, \dots, t_i, \dots, s_n^*) . \quad (\#2)$$

בסתירה לכך ש (s_1^*, \dots, s_n^*) הוא שווי משקל.

משפט 2.4

אם וקטור אסטרטגיות (s_1^*, \dots, s_n^*) הוא פתרון באסטרטגיות שלטות חזק אז s הוא השווי משקל היחיד של המשחק.

הוכחה: נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי (s_1^*, \dots, s_n^*) הוא הווקטור אסטרטגיות היחיד שנשאר אחרי סילוק חזור, אבל הוא לא שווי משקל. אם כן אז בהכרח קיימת אסטרטגיה s_i של שחקן i עבורו

$$u_i(s_1^*, \dots, s_i^*, \dots, s_n^*) < u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) . \quad (*1)$$

האסטרטגיה s_i נמחקה במהלך התהיליך סילוק חזור. לכן בהכרח קיימת אסטרטגיה s'_i אשר שלטת חזק ב- s_i , כלומר

$$u_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s'_i, \dots, s_n) . \quad (*2)$$

לכל אסטרטגיות s_n אשר נשארות בתהיליך סילוק חזור.

בפרט, האסטרטגיות $(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$ נשארות בתהיליך אפילו אחרי שהורדנו s_i^* . לכן, לפि (*2),

$$u_i(s_1^*, \dots, s_i, \dots, s_n^*) < u_i(s_1^*, \dots, s'_i, \dots, s_n^*) . \quad (*3)$$

אם $s'_i = s_i^*$ אז (*3) סותר את (*1).

אם לא אז קיימת אסטרטגיה אחרת s''_i אשר שלטת חזק ב- s'_i . לכן במקום (*2) - (*3) נקבל

$$u_i(s_1, \dots, s'_i, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s''_i, \dots, s_n) . \quad (*2')$$

$$u_i(s_1^*, \dots, s'_i, \dots, s_n^*) < u_i(s_1^*, \dots, s''_i, \dots, s_n^*) . \quad (*3')$$

אם $s''_i = s_i^*$ אז (*3') סותר את (*1). אם לא אז התהיליך ממשיך עד שנגיע לסתירה ל- (*1).



שער 3

שיעור 3 (המשך)

3.1 דילמה האסיר

דוגמה 3.1 (דילמה האסיר)

משחק פשוט מאוד, ויחד עם זאת מהרבה בחינות, הוא המשחק הידוע בשם "דילמה האסיר". המשחק מופיע בספרות בקורס הסיפור הבא.

שני עבריין אליס (שחקן 1) ובוב (שחקן 2) ביצעו פשע חמור ונעצרו. בהעדר כל הוכחות אחרות, הדרך היחידה שבה יכולה המשטרה להציג הרשעה על עבירה זו היא שאחד העצורים (או שניהם) מודעה. בביצוע המעשה. בחקירותם העמידה המשטרה כל אחד מהעצורים בפני החלטה הבאה:

- אם אליס מלשינה ובוב שותק אליס יוצאת חופשי ובוב מקבל 10 שנים מאסר.
- אם בוב מלשין ולאليس שותקת, בוב יוצא חופשי ולאليس מקבלת 10 שנים מאסר.
- אם שניהם שותקים, יש בידי המשטרה ראיות להרשעתם בעבירות פחותות (למשל, העלמת מס) שMOVEDIL למאסר של שנה אחת לכל אחד.
- אם שניהם מלשינים המשטרה מבקשת להתחשב בשיתוף הפעולה שלהם ולגוזר את עונשם ל-6 שנים מאסר לכל אחד.
 - א) רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית.
 - ב) מצאו את הפתרון באסטרטגיות שלוטות חזק.
 - ג) מצאו את השיווי משקל של המשחק.

פתרונות:

א) נסמן:

C_1 = האסטרטגיה של אליס "MLSINA".

D_1 = האסטרטגיה של אליס "SHOTKA".

C_2 = האסטרטגיה שבוב "MLSIN".

D_2 = האסטרטגיה שבוב "SHOTK".

המשחק בצורה אסטרטגית הינו:

		2 בוב	C_2	D_2
1 אליס		C_1	-6, -6	0, -10
		D_1	-10, 0	-1, -1

(ב)

	2	C_2	D_2
1	C_1	-6, -6	0, -10
	D_1	-10, -10	-1, -1

$\xrightarrow{D_2 \prec C_2}$

	2	C_2	
1	C_I	-6, -6	
	D_I	-10, -10	

$\xrightarrow{D_I \prec C_1}$

	2	C_2	
1	C_1	-6, -6	

לכן לפי הכללים של שחקנים רצינליים, שחקן I ישמש באסטרטגייה C_{II} , שחקן II ישמש באסטרטגייה D_I והתשלום הסופי יהיה:

$$u_1(C_1, C_2) = -6, \quad u_2(C_1, C_2) = -6.$$

(ג)

	2	C_2	D_2
1	C_1	<u>-6</u> , <u>-6</u>	0, -10
	D_1	-10, -10	-1, <u>-1</u>

השוווי משקל הוא

$$s^* = (C_1, C_2), \quad u(s^*) = (-6, -6).$$

■

דוגמה 3.2 (מלחמת המינים)

המשחק המשחק הבא נקרא "מלחמת המינים" (battle of the sexes). שמו של המשחק בא מהתיאור הבא. זוג מתכנן בילוי למצאה שבת. האפשרויות העומדות לרשותם הם קונצרט (C) או צפייה במשחק כדורגל (F). הגבר (שחקן I) מעדיף צפייה במשחק הכדורגל, בעוד האישה (שחקן II) מעדיפה את הקונצרט, אך שניהם מעדיפים להיות יחד גם אם הבילוי המשותף הוא הפחות עדיף בעיניהם. המשחק בצורה אסטרטגית מתואר למטה. מצאו את כל שוויי משקל.

	II	C	F
I	C	1, 2	0, 0
	F	0, 0	2, 1

פתרונות:

	II	C	F
I	C	<u>1</u> , <u>2</u>	0, 0
	F	0, 0	<u>2</u> , <u>1</u>

דוגמה 3.3 (משחק תיאום)

המשחק המתואר בטבלה למטה שיקל משפחה של משחקים הנקראים "משחקי תיאום" (coordination games).

	<i>II</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>I</i>			
<i>A</i>	<u>1</u> , <u>1</u>	0, 0	
<i>B</i>	0, 0	<u>3</u> , <u>3</u>	

מצאו את כל שיווי משקל במשחק.

פתרונות:

הווקטור אסטרטגי אשר שיווי משקל הימן: $s^* = (B, b)$ ו- $s^* = (A, a)$.

הגדרה 3.1 תשובה טובה בית

(ההגדרה הזאת היא אותה הגדרה של תשובה טובה ביותר ב- 2.4. אני פשוט כתבתי אותה כאן שוב לנוחות.)

יהי s_{-i} וקטור אסטרטגיות של השחקנים לא- i . אסטרטגיה s_i של שחקן i נקראת **תשובה טובה ביותר** אם s_{-i}

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{t_i \in S_i} u_i(t_i, s_{-i}).$$

הגדרה 3.2 הגדרות שקולות של שיווי משקל

ההגדרות הבאות של שיווי משקל שקולות:

- וקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ נקרא שיווי משקל נאש אם לכל שחקן $i \in N$ ולכל $s_i \in S_i$ מתקיים

$$u_i(s^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*).$$

- וקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ נקרא שיווי משקל נאש אם לכל שחקן $i \in N$ האסטרטגיה s_i^* היא תשובה טובה ביותר ל- s_{-i}^* .

3.2 תחרות דו-אPOL על פי Cournot

דוגמה 3.4 (דו-אPOL)

שני יצרנים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתרחרים על שוק הקונס הפטונציאליים. היצרנים מחליטים סימולטנית על הכמות שהם ייצורו, וההיעול הכלול קובע את מחיר המוצר, שהוא זהה לשני היצרנים. נסמן ב- q_1 וב- q_2 את הכמות של יצרנים 1 ו- 2 בהתאם. אז הכמות הכוללת של מוצרים בשוק היא $q_1 + q_2$. נניח כי המחיר של יחידה שווה ל-

$$2 - q_1 - q_2 .$$

עלות הייצור של יחידה לשחקן הראשון היא $0 > c_1$ ולשחקן השני היא $0 > c_2$. האם קיים שווי משקל במשחק זה, ואם כן, מה הוא?

פתרון:

זהו משחק שני שחקנים (היצרנים 1 ו- 2) שבו קבוצת האסטרטגיות של כל שחקן היא $[0, \infty]$. אם שחקן 1 בוחר באסטרטגיה q_1 ושחקן q_2 בוחר באסטרטגיה q_2 , התשלום לשחקן 1 הוא

$$u_1(q_1, q_2) = q_1(2 - q_1 - q_2) - q_1c_1 = q_1(2 - c_1 - q_1 - q_2) , \quad (*)$$

והתשלום לשחקן 2 הוא

$$u_2(q_1, q_2) = q_2(2 - q_1 - q_2) - q_2c_2 = q_2(2 - c_2 - q_1 - q_2) . \quad (\#)$$

התשובה הטובה ביותר של שחקן 1 לאסטרטגיה q_2 של שחקן 2 הוא ערך q_1 המביא למקסימום את $u_1(q_1, q_2)$: $u_1(q_1, q_2) \rightarrow q_1 \mapsto u_1(q_1, q_2)$.

$$\frac{\partial u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = 0 .$$

על ידי גזירה של אגף ימין של משווה (*) נקבל את התנאי $2 - c_1 - 2q_1 - q_2 = 0$ או

$$q_1 = \frac{2 - c_1 - q_2}{2} . \quad (1*)$$

באוטו אופן, התשובה הטובה ביותר של שחקן 2 לאסטרטגיה q_1 של שחקן 1 היא ערך q_2 שבו הנזרת של $u_2(q_1, q_2)$ ביחס ל- q_2 מותאמת. על ידי גזירה נקבל

$$q_2 = \frac{2 - c_2 - q_1}{2} . \quad (2*)$$

פתרון המשוואות (1*) ו- (2*) נותן

$$q_1^* = \frac{2 - 2c_1 + c_2}{3} , \quad q_2^* = \frac{2 - 2c_2 + c_1}{3} .$$

זה אומנם שווי משקל וזהו שווי משקל היחיד של המשחק. התשלומים של השחקנים בשווי משקל זה הם

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{2 - 2c_1 + c_2}{3} \right)^2 = (q_1^*)^2 , \quad u_2(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{2 - 2c_2 + c_1}{3} \right)^2 = (q_2^*)^2 .$$

כעת נוכיח כי ה策ם אסטרטגיות (q_1^*, q_2^*) מהוות נקודת שווי משקל. יש להוכיח כי q_1^* תשובה טובה ביותר ליותר לשחקן 1 ביחס ל- q_2^* ולהפוך.

$$u(q_1, q_2^*) = q_1(2 - c_1 - q_1 - q_2^*) = -q_1^2 + (2 - c_1 - q_2^*)q_1 .$$

לכן (q_1^*, q_2^*) פולינום מסדר 2 של q_1 , כאשר המקדם של q_1^2 הוא 1. לכן המקסימום המתתקבל הוא

$$q_1 = \frac{(2 - c_1 - q_2^*)}{2} = \frac{\left(2 - c_1 - \frac{2-2c_2+c_1}{3}\right)}{2} = q_1^* .$$

בפרט q_1^* תשובה טובה ביותר של שחקן 2 ביחס ל- q_2^* .

דוגמה 3.5 (דו-אPOL)

שניהם ייצרנים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאליים. יהיו q_1 כמות המוצר שייצרן 1 מייצר ו- q_2 כמות המוצר שייצרן 2 מייצר. הכמות הכוללת של מוצרים בשוק היא

$$Q = q_1 + q_2 .$$

יהי $P(Q)$ המחיר של יחידה של המוצר בשוק:

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & Q < a \\ 0 & Q \geq a \end{cases} .$$

הפרמטר a נקרא **פרמטר הביקוש**. הפרמטר זה מכמת את הביקוש של המוצר בשוק. נניח כי עלות הייצור של יחידה לייצרן 1 ועלות הייצור של יחידה וליצרן 2 נתונות על ידי

$$C_1(q_1) = cq_1 , \quad C_2(q_2) = cq_2 .$$

מצאו את השוויי משקל של המשחק.

פתרונות:

זהו משחק שני שחקנים. נקרא לשחקן 1 אליס ולשחקן 2 בוב. הכמות q_1 אשר אליס בוחרת היא האסטרטגיה שלו. וכמו כן הכמות q_2 אשר בוב בוחר היא האסטרטגיה שלו. $q_1 \in [0, \infty]$, או במלילים אחרות $(\infty, 0]$, ובאותה מידה $q_2 \in [0, \infty]$ מקבל כל ערך בתחום $(\infty, 0]$.

אם שחקן 1 בוחר באסטרטגייה q_1 ושחקן 2 בוחר באסטרטגייה q_2 , התשלום לשחקן 1 הוא

$$u_1(q_1, q_2) = q_1(a - q_1 - q_2) - q_1c = q_1(a - c - q_1 - q_2) ,$$

והתשלום לשחקן 2 הוא

$$u_2(q_1, q_2) = q_2(a - q_1 - q_2) - q_2c = q_2(a - c - q_1 - q_2) .$$

במשחק שני שחקנים ווקטור אסטרטגיות (s_1^*, s_2^*) שוויי משקל אם הווקטור אסטרטגיות (q_1^*, q_2^*) הוא שוויי משקל אם לכל שחקן:

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = \max_{0 \leq q_1 < \infty} u_1(q_1, q_2^*) = \max_{0 \leq q_1 \leq \infty} [q_1(a - c - q_1 - q_2^*)]$$

-1

$$u_2(q_1^*, q_2^*) = \max_{0 \leq q_2 < \infty} u_2(q_1^*, q_2) = \max_{0 \leq q_2 \leq \infty} [q_2(a - c - q_1^* - q_2)] .$$

המקסימום של $u_1(q_1, q_2^*)$ לפי q_1 מתקיים בנקודת שבה הנגזרת מתואפסת:

$$\frac{\partial u_1(q_1, q_2^*)}{\partial q_1} = a - c - 2q_1 - q_2^* \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow q_1^* = \frac{a - c - q_2^*}{2} .$$

ובאותה מידת המקסימום של $u_2(q_1^*, q_2)$ לפि q_2 מתקיים בנקודת הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_2(q_1^*, q_2)}{\partial q_2} = a - c - q_1^* - 2q_2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow q_2^* = \frac{a - c - q_1^*}{2}.$$

לפיכך, אם הצמד כמויות (q_1^*, q_2^*) שווי משקל אז חכמיות חייבות לקיים את התנאים

$$q_1^* = \frac{1}{2}(a - q_2^* - c), \quad q_2^* = \frac{1}{2}(a - q_1^* - c).$$

הפתרון למערכת זו הינו

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a - c}{3}.$$

■

דוגמה 3.6 (דו-אPOL)

שני יצרנים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתרחרים על שוק הקונינס הפוטנציאליים. יהיו q_1 כמות המוצר שיצרן 1 מייצר ו- q_2 כמות המוצר שיצרן 2 מייצר. שחקן 1 בוחר במחיר של המוצר שלו להיות p_1 ליחידה, ושחקןן 2 בוחר במחיר של המוצר שלו להיות p_2 ליחידה. הכמות q_1 שחקן 1 צריך לייצר נקבע על ידי הפונקציה

$$q_1 = a - p_1 + bp_2$$

כאשר $0 < b$ והכמות q_2 שחקן 2 צריך לייצר נקבע על ידי הפונקציה

$$q_2 = a - p_2 + bp_1.$$

מצאו את השוויי משקל של המשחק.

פתרונות:

נניח כי אליס שחקן 1 ובוב שחקן 2. במשחק זה המחירسئلיס בוחרת, p_1 הוא האסטרטגיה שלו והמחיר שבודב בוחר, p_2 הוא האסטרטגיה שלו. הערכות האפשריים של p_1 הם מ- 0 עד ∞ , כלומר $p_1 \in [0, \infty]$ ובאותה מידת $p_2 \in [0, \infty]$.

אם אליס (שחקן 1) בוחרת באסטרטגיה p_1 ובוב (שחקן 2) בוחר באסטרטגיה q_2 , אז אליס מקבלת את התשלום

$$u_1(p_1, p_2) = p_1 q_1 - cq_1 = (p_1 - c)(a - p_1 + bp_2)$$

ובוב מקבל את התשלום

$$u_2(p_1, p_2) = p_2 q_2 - cq_2 = (p_2 - c)(a - p_2 + bp_1)$$

הווקטור אסטרטגיות (p_1^*, p_2^*) שוויי משקל אם התנאים הבאים מתקיימים:

$$u_1(p_1^*, p_2^*) = \max_{0 \leq p_1 < \infty} u_1(p_1, q_2^*) = \max_{0 \leq p_1 < \infty} [(p_1 - c)(a - p_1 + bp_2^*)]$$

-1

$$u_2(p_1^*, p_2^*) = \max_{0 \leq p_2 < \infty} u_2(p_1^*, p_2) = \max_{0 \leq p_2 < \infty} [(p_2 - c)(a - p_2 + bp_1^*)]$$

המקסימום של $u_1(p_1, p_2^*)$ מתקבל בנקודת הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_1(p_1, p_2^*)}{\partial p_1} = a - 2p_1 + bp_2^* + c \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow p_1^* = \frac{a + c + bp_2^*}{2},$$

והמקסימום של $u_2(p_1^*, p_2)$ ביחס p_2 מתקיים בנקודת הנגזרת מותאמת:

$$\frac{\partial u_2(p_1^*, p_2)}{\partial p_2} = a - 2p_2 + bp_1^* + c \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad p_2^* = \frac{a + c + bp_1^*}{2} .$$

לפייכן, אם הוקטוור אסטרטגיות (p_1^*, p_2^*) נקודת שווי משקל של המשחק או המהירים p_1^*, p_2^* חייביםקיימים את התנאים

$$p_1^* = \frac{a + c + bp_2^*}{2} , \quad p_2^* = \frac{a + c + bp_1^*}{2} .$$

הפתרון למערכת זו הינו

$$p_1^* = p_2^* = \frac{a + c}{2 - b} .$$



שער 4

ערך המקסמין ומשחקים סכום אפס

4.1 ביטחון: מושג המקסמין

אליס (שחקן 1) ובוב (שחקן 2) משחקים את המשחק הבא:

		בוב 2	<i>L</i>	<i>R</i>
		אליס 1		
<i>T</i>		2, 1	2, -20	
<i>M</i>		3, 0	-10, 1	
<i>B</i>		-100, 2	3, 3	

נסמן את כל התשובות הטובות ביותר של השחקנים:

		בוב 2	<i>L</i>	<i>R</i>
		אליס 1		
<i>T</i>		2, <u>1</u>	2, -20	
<i>M</i>		<u>3</u> , 0	-10, <u>1</u>	
<i>B</i>		-100, 2	<u>3</u> , <u>3</u>	

מכאן השיווי משקל היחיד במשחק זה הוא $s^* = (B, R)$ עם תשלום. אך בחירות השחקנים של אסטרטגיות אלה מסוכנות!

אליס עשויה להסס מאד לבחור *B*, מחשש שהוא בוב (שחקן 2) יבחר *L* (אם מושום שאין רצונלי אם בטעות). כיוון שהתשלים של (B, L) קטסטרופי בשבייל אליס, יתכן שהיא תשחק אסטרטגייה *T* המבטיח לה תשלים 2 ללא סיכון להפסיד 100.

אם כן בוב חושב שיש סיכוי שאليس תבחר *T* הוא יחשוש מלבחור את אסטרטגייה שיווי המשקל *R* ולהסתכן בתשלום 20.–. לאור זה יתכן בוב ישחק אסטרטגייה *L*.

למעשה, אסטרטגייה *T* של אליס (שחקן 1) מבטיחה התשלום הטובה ביותר ביותר שניתן לקבל מבי "לסמו" על הרציונליות של שחקן 2, ובהנחות הפסימיות ביותר על ההתנהגותו של בוב (שחקן 2).

באופן כללי, נתון משחק שני שחקנים. נניח כי שחקן 1 משחק אסטרטגייה $S_1 \in S_1$. התשלום הנמוך ביותר שהוא עלול לקבל הוא

$$\min_{t_2 \in S_2} u_1(s_1, t_2) .$$

שחקן 1 יכול לבחור באסטרטגייה s_1 הממקסמת ערך זה. כמובן, בלי לסמוק על הרציונליות של שאר השחקנים הוא יכול להבטיח לעצמו

$$y_1 = \max_{s_1 \in S_1} \min_{t_2 \in S_2} u_1(s_1, t_2) .$$

הגודל y_1 נקרא **ערך המקסמין** של שחקן 1 או **רמת הביטחון** של שחקן 1. אסטרטגייה s_1 המבטיח ערך זה נקראת **אסטרטגייה מקסמין**.

דוגמה 4.1 (ערך המקסמין)

מצאו את הערך המקסמין של כל השחקנים במשחק הבא:

1	2	L	R
<i>T</i>	2, 1	2, -20	
<i>M</i>	3, 0	-10, 1	
<i>B</i>	-100, 2	3, 3	

פתרונות:

1	2	L	R	$\min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$
<i>T</i>	2, 1	2, -20	2	
<i>M</i>	3, 0	-10, 1	-10	
<i>B</i>	-100, 2	3, 3	-100	

$$\underline{v}_1 = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) = 2 .$$

1	2	L	R
<i>T</i>	2, 1	2, -20	
<i>M</i>	3, 0	-10, 1	
<i>B</i>	-100, 2	3, 3	
$\min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2)$	0	-20	

$$\underline{v}_2 = \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2) = 0 .$$

ערך המקסמין של שחקן-1 הוא 2, וסטרטגיית המקסמין המבטיחה תשלום זה היא *T*.

ערך המקסמין של שחקן-2 הוא 0, וסטרטגיית המקסמין המבטיחה תשלום זה היא *L*.

נהוג לרשום את התשלומים המינימלים בטבלה אחת:

1	2	L	R	$\min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$
<i>T</i>	2, 1	2, -20	2	
<i>M</i>	3, 0	-10, 1	-10	
<i>B</i>	-100, 2	3, 3	-100	
$\min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2)$	0	-20	$\underline{v}_1 = 2$	$\underline{v}_2 = 0$

בתרשים זה, מימין בכל שורה מופיע התשלום הנמוך ביותר לשחקן 1 אם היא בוחרת באסטרטגייה המתאימה לשורה זו. ומתחתי לכל עמודה מופיע התשלום הנמוך ביותר לשחקן 2, אם הוא בוחר באסטרטגייה המתאימה לעמודה זו. בפינה הימנית תחתונה של התרשים, באדום מופיעים המקסמינים של השחקנים.

משמעותו של שחקן 2 הוא: אם שני השחקנים בוחרים באסטרטגיות המקסימין שלהם, אז הוקטור אסטרטגי של המשחק הוא (T, L) והתשלומים הם $(2, 1)$.
■
 שחקן 2 מקבל תשלום 1, אשר גבואה יותר מהמаксימין שלו ($1 < 2$).
■

דוגמה 4.2 (ערך המקסימין)

נתון משחק עם שני שחקנים בצורה אסטרטגית כמתואר בטבלה.

	2 1	L	R
T	3, 1	0, 4	
B	2, 3	1, 1	

- א) מצאו אסטרטגיה מקסימין של שחקן 1 והרמת הביטחון שלו.
- ב) מצאו אסטרטגיה מקסימין של שחקן 2 והרמת הביטחון שלו.
- ג) מהם התשלומים לשני השחקנים אם שניהם בוחרים באסטרטגיות המקסימין שלהם.

פתרונות:

(א)

	II I	L	R	$\min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$
T	3, 1	0, 4		0
B	2, 3	1, 1		1

$$\underline{u}_1 = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) = 1 .$$

ערך המקסימין של שחקן 1 הוא 1 ואסטרטגיית המקסימין שלו היא B .

(ב)

	2 1	L	R
T	3, 1	0, 4	
B	2, 3	1, 1	
$\min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2)$	1	1	

$$\underline{u}_2 = \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2) = 1 .$$

ערך המקסימין של שחקן 2 הוא 1. גם L וגם R הן אסטרטגיות מינימום.

(ג)

	2 1	L	R	$\min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$
T	3, 1	0, 4		0
B	2, 3	1, 1		1
$\min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2)$	1	1	$\underline{v}_1 = 1$	$\underline{v}_2 = 1$

לכן כאשר שחקן 1 בוחר באסטרטגייה המקסימין שלו, B , וכאשר שחקן 2 בוחר באסטרטגייה המינימין שלו (L או R) התשלום עשוי להיות $u(B, L) = (2, 3)$ או $u(B, R) = (1, 1)$. או (1, 1), עבר (B, R) , בהתאם לאסטרטגיית המקסימין שיבחר שחקן 2.

■

4.2 משפטים: היחס בין שיווי משקל ואסטרטגיית מקסימין

משפט 4.1

במשחק n שחקנים, אם אסטרטגיה s_i^* של שחקן i שולטת (לא בהכרח חזק) על כל שאר האסטרטגיות שלו, אז

א) s_i^* היא אסטרטגיית מקסימין של שחקן i .

ב) s_i^* היא תשובה טובה ביותר של שחקן i לכל וקטור אסטרטגיות של שאר השחקנים.

הוכחה:

א) תהי s_i^* אסטרטגיה ששולטת (לא בהכרח חזק) על כל שאר האסטרטגיות של שחקן i .

תהי $s_i \in S_i$ אסטרטגיה של שחקן i ותהי $t_{-i} \in S_{-i}$ אסטרטגיה של $-i$ כך ש-

$$u_i(s_i^*, t_{-i}) = \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i^*, s_{-i}).$$

אז

$$\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i^*, s_{-i}) = u_i(s_i^*, t_{-i}) \geq u_i(s_i, t_{-i}) \geq \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}).$$

או במילים שקולות: $\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i})$ נ"ז

$$\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i^*, s_{-i}) = \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}) = v_i.$$

לפיכך s_i^* היא אסטרטגיה מקסימין של שחקן i .

ב) s_i^* שולטת חלש על כל שאר האסטרטגיות, אז לכל $s_{-i} \in S_{-i}$ מתקיים

$$u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(s_i^*, s_{-i}).$$

מכאן s_i^* היא תשובה טובה ביותר של שחקן i לכל וקטור אסטרטגיות s_{-i} של שאר השחקנים.

■

משפט 4.2

במשחק n שחקנים, אם לכל שחקן i יש אסטרטגייה s_i^* שליטה (לא בהכרח חזק) על כל שאר האסטרטגיות שלו, אז התנאים הבאים מתקיימים.

א) הווקטור אסטרטגיות (s_1^*, \dots, s_n^*) הוא שווי משקל של המשחק.

ב) לכל שחקן i , s_i^* היא אסטרטגיית מקסימין של שחקן i .

הוכחה:

א) נניח כי (s_1^*, \dots, s_n^*) וקטור אסטרטגיות כך ש- s_i^* שליטה על כל שאר האסטרטגיות של שחקן i . אז לפי המשפט 4.1 (חלק ב') למעלה, s_i^* היא תשובה טובה ביותר של שחקן i לכל ווקטור אסטרטגיות s_{-i} של שאר השחקנים. אז

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$$

לכל שחקן i . לפיכך הווקטור אסטרטגיות (s_1^*, \dots, s_n^*) הוא נקודת שווי משקל.

ב) לפי המשפט 4.1 (חלק א'), s_i^* היא אסטרטגיית מקסימין של שחקן i .

לפיכך הווקטור אסטרטגיות (s_1^*, \dots, s_n^*) הוא ווקטור אסטרטגיות מקסימין.

лемה 4.1

במשחק n שחקנים. אם לכל שחקן i יש אסטרטגייה s_i^* שליטה חזק על כל שאר האסטרטגיות שלו, אז התנאים הבאים מתקיימים:

א) הווקטור אסטרטגיות (s_1^*, \dots, s_n^*) הוא שווי המשקל היחיד של המשחק.

ב) הווקטור אסטרטגיות (s_1^*, \dots, s_n^*) הוא הווקטור אסטרטגיות מקסימין היחיד של המשחק.

הוכחה: תרגיל בית.

משפט 4.3

אם s^* היא שווי משקל אז $\underline{v}_i \leq u_i(s^*) \leq \bar{v}_i$ לכל שחקן i .

הוכחה: לכל אסטרטגיה $s_i \in S_i$

$$u_i(s_i, s_{-i}^*) \geq \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}) .$$

לפי ההגדרה של שווי משקל, $u_i(s^*) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}^*)$. מכאן

$$u_i(s^*) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}^*) \geq \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}) = \underline{v}_i .$$

4.3 משחקים שני שחקנים סכום אפס

הגדרה 4.1 משחק שני שחקנים סכום אפס

משחק שני שחקנים נקרא **משחק סכום אפס** אם לכל זוג אסטרטגיות (s_1, s_2) מתקיים

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0.$$

במילים אחרות, משחק שני שחקנים סכום אפס הוא מערכת סגורה מבחינת התשלומים: כל שחקן אחד מרוויח מהשחקן השני מפסיד.
ברור אך כי שבמשחק כזה האינטרטסטים של שני השחקנים מנוגדים לחלוטים.

דוגמה 4.3 (משחק שני שחקנים סכום אפס)

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס הבא.

	2 1	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>R</i>
<i>T</i>	3, -3	-5, 5	-2, 2	
<i>M</i>	1, -1	4, -4	1, -1	
<i>B</i>	6, -6	-3, 3	-5, 5	

מצאו את האסטרטגיה מקסימין של כל שחקן.

פתרון:

2 1	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>R</i>	$\min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$
<i>T</i>	3, -3	-5, 5	-2, 2	-5
<i>M</i>	1, -1	4, -4	1, -1	1
<i>B</i>	6, -6	-3, 3	-5, 5	-5
$\min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2)$	-6	-4	-1	$\underline{v}_1 = 1$ $\underline{v}_2 = -1$

אסטרטגיות המקסימין: $s^* = (M, R)$



הגדרה 4.2 פונקציית תשלום של משחק שני שחקנים סכום אפס

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס. לכל וקטור אסטרטגיות (s_1, s_2) , פונקציית ההתשלום של המשחק מסומנת (s_1, s_2) ומוגדרת

$$U(s_1, s_2) = u_1(s_1, s_2) = -u_2(s_1, s_2).$$

דוגמה 4.4 (המשך של דוגמה 4.3)

התלא למטרה מראה את פונקציית התשלום של המשחק סכום אפס בדוגמה הקודמת, לכל וקטור אסורוגיות של המשחק.

	2	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>R</i>
1				
<i>T</i>	3	-5	-2	
<i>M</i>	1	4	1	
<i>B</i>	6	-3	-5	

$$U(M, L) = 1 .$$

למשל,

הגדירה 4.3 מטריצת המשחק של משחק שני שחקנים סכום אפס

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס ויהי U פונקציית התשלום של המשחק. תהי S_1 קבוצה סודרת של האסטרטגיות של שחקן 1:

$$S_1 = (s_1^1, s_1^2, \dots, s_1^m)$$

ותהי S_2 קבוצה סודרת של האסטרטגיות של שחקן 2:

$$S_2 = (s_2^1, s_2^2, \dots, s_2^n)$$

המטריצת המשחק היא מטריצה $n \times m$ אשר האיבר ה- i, j , נתון על ידי

$$A_{ij} = U(s_1^i, s_2^j) .$$

דוגמה 4.5 (המץ של דוגמה 4.3)

מטריצת המשחק של המשחק בדוגמה הקודמת הינה

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & -3 & -5 \end{pmatrix} .$$

משפט 4.4 המקסמין והמינימקס של משחק

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס.

ערך המקסמין של שחקן 1 נתון על ידי

$$\underline{v}_1 = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} U(s_1, s_2) .$$

זהה רמת הביטחון של שחקן 1 במשחק: התשלום שהוא יכול להבטיח לעצמו.

הערך המקסמין של שחקן 2 הוא

$$\underline{v}_2 = \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2) = \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} [-U(s_1, s_2)] = \max_{s_2 \in S_2} [-\max_{s_1 \in S_1} U(s_1, s_2)] = -\min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} U(s_1, s_2)$$

נדיר הערך המקסמין של המשחק מסומן \underline{v} ומוגדר

$$\underline{v} = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} U(s_1, s_2) .$$

הערך המינימקס של המשחק מסומן \bar{v} ומוגדר

$$\bar{v} = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} U(s_1, s_2)$$

המשמעות:

שחקן 1 יכול להבטיח שיקבל לפחות \underline{v} .

שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר \bar{v} .

סטרטגיה של שחקן 1 המבטיח את \underline{v} נקראת **סטרטגיה מקסימין**.
סטרטגיה של שחקן 2 המבטיח את \bar{v} נקראת **סטרטגיה מינימקס**.

דוגמה 4.6 (המקסמין ומינימקס של מששס"א)

נתון המשחק סכום אפס הבא בצורה אסטרטגית.

	2 1	L	R
T	3, -3	-2, 2	
B	-1, 1	5, -5	

מצאו את המקסמין, המינימקס האסטרטגיה מקסימין והסטרטגיה מינימקס של המשחק.

פתרון:

הfonקציית התשלום של המשחק היא:

	2 1	L	R
T	3	-2	
B	-1	5	

נחשב את המקסמין והמינימקס על פי הטללא של הפונקציית תשלום:

	2 1	L	R	$\min_{s_2 \in S_2} U$
T	3	-2	-2	-2
B	-1	5	-1	-1
$\max_{s_1 \in S_1} U$	3	5	$\bar{v} = 3$	$\underline{v} = -1$

$$\underline{v} = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} U = -1 ,$$

$$\bar{v} = \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} U = 3 .$$

הסטרטגיה המקסמין של שחקן 1 היא B .

הסטרטגיה המינימקס של שחקן 2 היא L .



דוגמה 4.7 (המקסמין ומינימקס של משש"א)

מצאו את ערך המקסמין, ערך המינימקס, אסטרטגיה מקסמין וסטרטגיה מינימקס של המשחק סכום אפ"ב הבא:

	2	L	R
1			
T	-2	5	
B	3	0	

פתרון:

הfonקציית התשלום כבר נתנו בשאלתנו. נחשב את המקסמין והמינימקס על פי הטבלה של הפונקציית תשלום:

	2	L	R	$\min_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2)$
1				
T	-2	5		-2
B	3	0		0
$\max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2)$	3	5		$\underline{v} = 5$
				$\bar{v} = 5$

ערך המקסמין של המשחק הוא . 0

ערך המינימקס של המשחק הוא . 3

סטרטגיה המקסמין היא: B .

סטרטגיה המינימקס היא: L .

משמעותו:

שחקן 1 אינו יכול להבטיח יותר מ- 0 וסטרטגיה המקסמין היא B .

שחקן 2 אינו יכול להבטיח (шибלים) פחות מ- 3 וסטרטגיה המינימקס היא L .

הגדרה 4.4 ערך המשחק ואסטרטגיות אופטימליות

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס.

אם מתקיים $\bar{v} = \underline{v}$ אז אומרם כי הadol

$$v = \underline{v} = \bar{v}$$

הוא **הערך של המשחק**.

במקרה זה הוקטור אסטרטגיות אשר מבטיח הערך של המשחק נקרא **וקטור אסטרטגיות אופטימלי**.

דוגמה 4.8 (משחק סכום אפס אשר יש לו ערך)

נתון המשחק שני שחקנים סכום אפס הבא.

	2	L	C	R
1				
T	3	-5	-2	
M	1	4	1	
B	6	-3	-5	

נחשב את המקסמין והמינימקס שלו:

2	L	C	R	$\min_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2)$
1				
T	3	-5	-2	-5
M	1	4	1	1
B	6	-3	-5	-5
$\max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2)$	6	4	1	$\underline{v} = 1$
				$\bar{v} = 1$

$$\bar{v} = 1 = \underline{v}$$

לכן הערך המשחק הוא $\underline{v} = 1$.

הוקטור אסטרטגיות האופטימלי הוא :

שחקן 1 יכול להבטיח שיקבל לפחות 1 באמצעות האסטרטגיה האופימלית M .
שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר 1 באמצעות האסטרטגיה האופימלית R .

נשים לב $s = (M, R)$ גם שיווי משקל נאש של המשחק.

4.4 משפט המקסמין

משפט 4.5 משפט המקסמין

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס. יהיו \underline{v} הערך המקסמין ו- \bar{v} הערך המינימקס. אז

$$\underline{v} \leq \bar{v}.$$

הוכחה: תהי A המטריצה של המשחק. אז

$$\underline{v} = \max_i \min_j A_{ij}, \quad \bar{v} = \min_j \max_i A_{ij}.$$

נשים לב כי לכל i , מתקיים $\min_j A_{ij} \leq A_{ij}$.

ולכל j , מתקיים $\max_i A_{ij} \geq A_{ij}$.

מכאן

$$\min_j A_{ij} \leq A_{ij} \leq \max_i A_{ij}$$

ולכן

$$\min_j A_{ij} \leq \max_i A_{ij} \quad (*)$$

נשים לב כי הצד ימין לא תלוי על i . כלומר (*) מתקיימת לכל i . בפרט, ניתן לחת את ה- i אשר מקסם את הצד ימין והרי נקבל

$$\max_i \min_j A_{ij} \leq \max_i A_{ij} \quad (\#)$$

כעת נשים לב כי הצד שמאל לא תלוי על j . כלומר (#) מתקיימת לכל j . בפרט, ניתן לחת את ה- j אשר מזעך את הצד ימין והרי נקבל

$$\max_i \min_j A_{ij} \leq \min_j \max_i A_{ij}$$

מש"ל.

4.5 משפט השקילות בין שווי משקל לבין אסטרטגיה אופטימלית

משפט 4.6

אם משחק שני שחקנים סכום אפס יש ערך v , ואם $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ הן אסטרטגיות אופטימליות לשחקנים, אז s^* הוא שווי משקל עם תשלום $u = (v, -v)$.

הוכחה: אם נניח ש- s_1^* היא אסטרטגיה אופטימלית לשחקן 1 במשחק שערך v או $v < \min_{s_2 \in S_2} u(s_1^*, s_2)$, ולכן

$$u(s_1^*, s_2) \geq v .$$

באותה מידת אם נניח ש- s_2^* היא אסטרטגיה אופטימלית לשחקן 2 במשחק שערך v או $v < \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2^*)$, ולכן

$$u(s_1, s_2^*) \leq v .$$

לסיכום, אם s_1^*, s_2^* אסטרטגיות אופטימליות אז

$$u(s_1^*, s_2) \geq v \quad \forall s_2 \in S_2 , \quad (*1)$$

$$u(s_1, s_2^*) \leq v \quad \forall s_1 \in S_1 . \quad (*2)$$

על ידי הצבת s_2^* במשוואה (*1), נקבל כי $v \geq u(s_1^*, s_2^*)$.

על ידי הצבת s_1^* במשוואה (*2), נקבל כי $v \leq u(s_1^*, s_2^*)$.

לכן

$$v = u(s_1^*, s_2^*) .$$

נציב זאת במשוואות (*1) ו- (*2) ונקבל

$$u(s_1^*, s_2) \geq u(s_1^*, s_2^*) \Rightarrow -u_2(s_1^*, s_2) \geq -u_2(s_1^*, s_2^*) \Rightarrow u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_2(s_1^*, s_2) .$$

- $\forall s_2 \in S_2$

$$u(s_1, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2^*) \Rightarrow u_1(s_1, s_2^*) \leq u_1(s_1^*, s_2^*) \Rightarrow u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*) .$$

$\forall s_1 \in S_1$.

לכן (s_1^*, s_2^*) הוא שווי משקל עם תשלום $(v, -v)$.

משפט 4.7

במשחק שני שחקנים סכום אפס, אם (s_1^*, s_2^*) הוא שווי משקל, אז יש למשחק ערך $v = u(s_1^*, s_2^*)$ והסטרטגיות (s_1^*, s_2^*) הן אסטרטגיות אופטימליות.

הוכחה: מכיוון ש- (s_1^*, s_2^*) הוא שווי משקל, שום שחקן אינו יכול להרוויח על ידי סטייה:

$$u_1(s_1, s_2^*) \leq u_1(s_1^*, s_2^*) \Rightarrow u(s_1, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2^*) \quad \forall s_1 \in S_1 , \quad (\#1)$$

$$u_2(s_1^*, s_2) \leq u_2(s_1^*, s_2^*) \Rightarrow -u_2(s_1^*, s_2) \geq -u_2(s_1^*, s_2^*) \Rightarrow u(s_1^*, s_2) \geq u(s_1^*, s_2^*) \quad \forall s_2 \in S_2 . \quad (\#2)$$

נסמן $v = u(s_1^*, s_2^*)$ ונוכיח כי v אכן ערך המשחק.
ממשוואה (#2) נקבל

$$u(s_1^*, s_2) \geq v \quad \forall s_2 \in S_2 \Rightarrow \min_{s_2 \in S_2} u(s_1^*, s_2) \geq v \Rightarrow \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u(s_1^*, s_2) \geq v \Rightarrow \underline{v} \geq v .$$

ממשוואה (#1) נקבל

$$u(s_1, s_2^*) \leq v \quad \forall s_1 \in S_1 \Rightarrow \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2^*) \leq v \Rightarrow \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2) \leq v \Rightarrow \bar{v} \leq v .$$

מכיוון ש- $\underline{v} \leq \bar{v}$ מתקיים תמיד אזי
 $v \leq \underline{v} \leq \bar{v} \leq v$.

ולפיכך בהכרח

$$\underline{v} = v = \bar{v} .$$

הגדרה 4.5 נקודת אוף

במשחק שני שחקנים סכום אפס, זוג אסטרטגיות (s_1^*, s_2^*) נקרא **נקודת אוף** של הפונקציה $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ אם

$$\begin{aligned} u(s_1^*, s_2^*) &\geq u(s_1, s_2^*) \quad \forall s_1 \in S_1 , \\ u(s_1^*, s_2^*) &\leq u(s_1^*, s_2) \quad \forall s_2 \in S_2 . \end{aligned}$$

במילים אחרות, u הוא המספר הגדל ביותר בעמודה s_2^* והקטן ביותר בשורה s_1^* .

אם אנחנו רושמים את (s_1, s_2) בהצגת מטריצה:

$$A_{ij} = u(s_{1,i}, s_{2,j})$$

אז הזוג אסטרטגיות (s_{i^*}, s_{j^*}) הוא נקודת אוף אם

$$\begin{aligned} A_{i^*j^*} &\geq A_{ij^*} \quad \forall i , \\ A_{i^*j^*} &\leq A_{i^*j} \quad \forall j . \end{aligned}$$

משפט 4.8 יחס בין נקודת אוף וקטור אסטרטגיות

במשחק שני שחקנים סכום אפס. (s_1^*, s_2^*) היא נקודת אוף אם ורק אם

- s_1^* היא אסטרטגיה אופטימלית לשחקן 1,

- s_2^* היא אסטרטגיה אופטימלית לשחקן 2.

במקרה זה (s_1^*, s_2^*) הוא ערך המשחק.

ניסוח חלופי של המשפט:

$$\left. \begin{array}{l} A_{i^*j^*} \geq A_{ij^*} \quad \forall i \\ A_{i^*j^*} \leq A_{i^*j} \quad \forall j \end{array} \right\} \Rightarrow \max_i \min_j A_{ij} = \min_j \max_i A_{ij} = v$$

הוכחה: יהי משחק שני שחקנים סכום אפס. נניח כי (s_1^*, s_2^*) נקודת אוקף:

$$u(s_1^*, s_2^*) \geq u(s_1, s_2^*) \quad \forall s_1 \in S_1 , \quad (1*)$$

$$u(s_1^*, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2) \quad \forall s_2 \in S_2 . \quad (2*)$$

(1*) מתקיים אם ורק אם

$$u(s_1^*, s_2^*) \geq \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2^*) \geq \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2) = \bar{v} .$$

(2*) מתקיים אם ורק אם

$$u(s_1^*, s_2^*) \leq \min_{s_2 \in S_2} u(s_1^*, s_2) \leq \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2) = \underline{v} .$$

לפי משפט המשפט המקסימין 4.5. $\underline{v} \leq \bar{v}$. לכן

$$u(s_1^*, s_2^*) \leq \underline{v} \leq \bar{v} = u(s_1^*, s_2^*) \Rightarrow \underline{v} = \bar{v} = v .$$

■

שיעור 5

סטרטגיות מעורבות

5.1 הגדרה של אסטרטגיות מעורבות

הגדירה 5.1 אסטרטגיות מעורבות

יהי $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ משחק בצורה אסטרטגית שבו קבוצות האסטרטגיות של השחקנים סופיות.

נניח כי $S_1 = (s_1^1, s_1^2, \dots, s_1^n)$ קבוצת אסטרטגיות של שחקן 1, ונניח כי σ_1 היא פונקציית ההסתברות של הקבוצה אסטרטגיות S_1 :

$$\sigma_1 : S_1 \rightarrow [0, 1] .$$

קבוצת אסטרטגיה מעורבת של שחקן 1 מסומן σ ומוגדר להיות הקבוצה

$$\sigma(S_1) = \{\sigma_1(s_1^1), \sigma_1(s_1^2), \dots, \sigma_1(s_1^n)\}$$

כאשר:

$\sigma_1(s_1^1)$ = הסתברות לשחקן 1 לשחק לפי האסטרטגיה s_1^1 , $\sigma_1(s_1^2)$ = הסתברות לשחקן 1 לשחק לפי האסטרטגיה s_1^2 , ... וכן הלא.

באופן כללי, נניח כי $S_i = (s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^m)$ קבוצת אסטרטגיות של שחקן i .

קבוצת אסטרטגיה מעורבת של שחקן i מסומן σ ומוגדר להיות הקבוצה

$$\sigma_i(S_i) = \{\sigma_i(s_i^1), \sigma_i(s_i^2), \dots, \sigma_i(s_i^m)\}$$

כאשר:

$\sigma_i(s_i^1)$ = הסתברות לשחקן i לשחק לפי האסטרטגיה s_i^1 , $\sigma_i(s_i^2)$ = הסתברות לשחקן i לשחק לפי האסטרטגיה s_i^2 , ... וכן הלא.

סימון: ניתן לסמן אסטרטגיה מעורבת עם אותיות גדולות, ולסמן את הסתברויות עצמן עם אותיות קטנות. למשל

$$\sigma(S_1) = \{\sigma(s_1^1), \sigma(s_1^2), \dots, \sigma(s_1^n)\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

ז"א $x_1 = \sigma(s_1^1)$ מסמן את הסתברות לשחקן 1 לשחק לפי אסטרטגיה s_1^1 , ו- $x_2 = \sigma(s_1^2)$ מסמן את הסתברות לשחקן 2 לשחק לפי אסטרטגיה s_1^2 .

לפי תכונת החיובית של פונקציית הסתברות,

$$0 \leq \sigma(s_i) \leq 1 \quad (*)$$

לכל $s_i \in S_i$ ולפי תכונת הנרמול של פונקציית הסתברות, אם σ אסטרטגיה מעורבת של שחקן i אז מתקיים

$$\sigma(s_i^1) + \sigma(s_i^2) + \dots + \sigma(s_i^n) = 1 . \quad (**)$$

תכונות (*1) ו- (*2) אומירות כי הקבוצה σ היא **סימפלקס**.

דוגמה 5.1 (סטרטגיה מעורבת)

דוגמה 1) נניח שקבוצת האסרווגיות הטהורות של שחקן היא 1

$$S_1 = \{A, B, C\} .$$

את האסטרטגיות המעורבות σ שבה הוא בוחר כל אסטרטגיה טהורה בהסתברות $\frac{1}{3}$ נסמן על ידי

$$\begin{aligned}\sigma(S_1) &= \{\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C)\} \\ &= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

דוגמה 2 אם $S_1 = \{H, T\}$ אז אוסף של כל האסטרטגיות המעורבות, X של שחקן 1 מסומן

$$\Sigma_1 = \left\{ \{\sigma_1(H), \sigma_1(T)\} = (x_1 \quad x_2) \mid 0 \leq x_1, x_2 \leq 1, x_1 + x_2 = 1 \right\} .$$

במקרה זה הקבוצה Σ_1 שකולה לקטע ב- \mathbb{R}^2 המחבר את $(0, 1)$ עם $(1, 0)$.

דוגמה 3 אם $S_2 = \{L, M, R\}$, אוסף של כל האסטרטגיות המעורבות Y של שחקן 2 מסומן

$$\Sigma_2 = \left\{ \{\sigma_2(L), \sigma_2(M), \sigma_2(R)\} = (y_1 \quad y_2 \quad y_3) \mid 0 \leq y_1, y_2, y_3 \leq 1, y_1 + y_2 + y_3 = 1 \right\} .$$

במקרה זה Σ_2 שකולה למשולש ב- \mathbb{R}^3 שקדקודיו הם הנקודות $(0, 0, 1)$ ו- $(0, 1, 0)$ ו- $(1, 0, 0)$.

דוגמה 5.2 (וקטור אסטרטגיות מעורב)

נתון המשחק G באסטרטגיות טהורות הנתון למטה:

		<i>II</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>I</i>				
α		1, 1	2, -7	
β		3, -2	5, 6	

נניח כי באסטרטגיות מעורבות שחקן 1 משחק לפי אסטרטגיה A בהסתברות $\frac{1}{3}$ ולפי אסטרטגיה B בהסתברות $\frac{2}{5}$, ושחקן 2 משחק לפי אסטרטגיה α בהסתברות $\frac{3}{5}$ ולפי אסטרטגיה β בהסתברות $\frac{2}{5}$. וקטור האסטרטגיות המעורב של שחקן 1 הוא

$$x = (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

וקטור האסטרטגיות המעורב של שחקן 2 הוא

$$y = (y_1, y_2) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) .$$

המשחק בצורה אסטרטגית מעורבת הינה

		<i>II</i>	$\frac{1}{3}(A)$	$\frac{2}{3}(B)$
<i>I</i>				
$\frac{2}{5}(\alpha)$		1, 1	2, -7	
$\frac{3}{5}(\beta)$		3, -2	5, 6	

שיםו לב X ו- Y הם סימפלקסים, בגלל ש- $x_1 + x_2 = 1$ ו- $y_1 + y_2 = 1$.

דוגמה 5.3 (וקטור אסטרטגיות מעורב)

נתון המשחק G באסטרטגיות טהורות הנטו למטה:

		<i>II</i>	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>R</i>
		<i>I</i>			
<i>t</i>		0, 2	2, -7	3, 2	
<i>m</i>		3, -2	5, 4	2, 9	
<i>b</i>		3, -2	5, 6	7, -8	

נניח כי באסטרטגיות מעורבות שחקן 1 משחק לפי אסטרטגיה L בהסתברות $\frac{1}{7}$, לפि אסטרטגיה C בהסתברות $\frac{2}{7}$, ולפי אסטרטגיה R בהסתברות $\frac{4}{7}$, ושחקן 2 משחק לפי אסטרטגיה t בהסתברות $\frac{1}{9}$, לפি אסטרטגיה m בהסתברות $\frac{5}{9}$, ולפי אסטרטגיה b בהסתברות $\frac{4}{9}$. וקטור האסטרטגיות המעורב של שחקן 1 הוא

$$x = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7} \right)$$

וקטור האסטרטגיות המעורב של שחקן 2 הוא

$$y = (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9} \right).$$

המשחק בצורה אסטרטגית מעורבת הינה

		<i>II</i>	$\frac{1}{7}(L)$	$\frac{2}{7}(C)$	$\frac{4}{7}(R)$
		<i>I</i>			
$\frac{1}{9}(t)$		0, 2	2, -7	3, 2	
$\frac{4}{9}(m)$		3, -2	5, 4	2, 9	
$\frac{5}{9}(b)$		3, -2	5, 6	7, -8	

שימו לב X ו- Y הם סימפלקסים, בגלל ש- $1 = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{7} + \frac{3}{7} + \frac{4}{7}$

הגדה 5.2 ההרחבה של משחק לאסטרטגיות מעורבות

יהי $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ משחק בצורה אסטרטגית. ההרחבה של G לאסטרטגיות מעורבות הוא המשחק

$$\Gamma = (N, (\Sigma_i)_{i \in N}, (U_i)_{i \in N}) \quad (5.1)$$

כאשר:

Σ_i מסמן את האוסף של כל האסורוגיות המעורבות (S_i) של שחקן i , ו- U_i מסמן את פונקציית התשלום של שחקן i אשר מוגדרת

$$U_i(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = \sum_{s_1 \in S_1, \dots, s_N \in S_N} u_i(s_1, \dots, s_N) \sigma_1(s_1) \sigma_2(s_2) \dots \sigma_N(s_N). \quad (5.2)$$

דוגמה 5.4 (פונקציית התשלום של משחק באסטרטגיות מעורבות)נתון המשחק G באסטרטגיות טהורות:

		II	a	b
		α	1, 1	2, -7
		β	3, -2	5, 6

ונתנו הווקטור האסטרטגיות המעורבות של שחקן 1:

$$x = (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

והווקטור אסטרטגיות מעורבות של שחקן 2:

$$y = (y_1, y_2) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right).$$

ההרחבה של המשחק לאסטרטגיות מעורבות הינה

		II	$x_1(a)$	$x_2(b)$		II	$\frac{1}{3}(a)$	$\frac{2}{3}(b)$
		$y_1(\alpha)$	1, 1	2, -7	=	$\frac{2}{5}(\alpha)$	1, 1	2, -7
		$y_2(\beta)$	3, -2	5, 6		$\frac{3}{5}(\beta)$	3, -2	5, 6

פונקציית התשלום של שחקן i היא התוחלת התשלום של שחקן i :

$$U_1(x, y) = 1x_1x_2 + 2x_2y_1 + 3x_1y_2 + 5x_2y_2 = \frac{59}{15}.$$

$$U_2(x, y) = 1x_1x_2 - 7x_2y_1 - 2x_1y_2 + 6x_2y_2 = \frac{4}{15}.$$

ניתן לרשום את פונקציית התשלום במונחי המטריצות התשלומיים של שחקן 1 ו- שחקן 2 בנפרד. המטריצת התשלומיים של המשחק הינה

$$U = \begin{pmatrix} (1, 1) & (2, -7) \\ (3, -2) & (5, 6) \end{pmatrix}$$

ומטריצת התשלומיים של השחקנים הנפרדים הינה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

 A המטריצת התשלומיים של שחקן 1 ו- B המטריצת התשלומיים של שחקן 2. במונחי A ו- B הפונקציות התשלומיים שלהם באסטרטגיות מעורבות הן

$$U_1(x, y) = x^t A y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$U_2(x, y) = x^t B y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

דוגמה 5.5 (וקטור אסטרטגיות מעורב)נתון המשחק G באסטרטגיות טהורות:

		II	L	C	R
		I			
		t	$0, 2$	$2, -7$	$3, 2$
		m	$3, -2$	$5, 4$	$2, 9$
		b	$3, -2$	$5, 6$	$7, -8$

ונתנו וקטור האסטרטגיות המעורבות של שחקן 1:

$$x = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7} \right)$$

ווקטור האסטרטגיות המעורבות של שחקן 2:

$$y = (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9} \right).$$

המשחק בצורה אסטרטגית מעורבת הינה

		II	$x_1(L)$	$x_2(C)$	$x_3(R)$		II	$\frac{1}{7}(L)$	$\frac{2}{7}(C)$	$\frac{4}{7}(R)$	
		I	$y_1(t)$	$0, 2$	$2, -7$	$3, 2$		$\frac{1}{9}(t)$	$0, 2$	$2, -7$	$3, 2$
		$y_2(m)$	$3, -2$	$5, 4$	$2, 9$		$\frac{4}{9}(m)$	$3, -2$	$5, 4$	$2, 9$	
		$y_3(b)$	$3, -2$	$5, 6$	$7, -8$		$\frac{5}{9}(b)$	$3, -2$	$5, 6$	$7, -8$	

פונקציית התשלום של שחקן i היא התוחלת התשלום של שחקן i :

$$U_1(x, y) = 0 \cdot x_1 x_2 + 2x_2 y_1 + 3x_1 y_2 + 3x_3 y_1 + 3x_1 y_2 + 5x_2 y_2 + 2x_3 y_2 + 3x_1 y_3 + 5x_2 y_3 + 7x_3 y_3 = \frac{107}{21}.$$

$$U_2(x, y) = 2x_1 y_1 - 7x_1 y_2 + 2x_1 y_3 - 2x_2 y_1 + 4x_2 y_2 + 9x_2 y_3 - 2x_3 y_1 + 6x_3 y_2 - 8x_3 y_3 = \frac{10}{21}.$$

נition לרשום את פונקציית התשלום במונחי המטריצות התשלומיים של שחקן 1 ו- שחקן 2 בנפרד. המטריצת התשלומיים של המשחק הינה

$$U = \begin{pmatrix} (0, 2) & (2, -7) & (3, 2) \\ (3, -2) & (5, 4) & (2, 9) \\ (3, -2) & (5, 6) & (7, -8) \end{pmatrix}$$

ומטריצת התשלומיים של השחקנים הנפרדים הינה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 2 \\ -2 & 4 & 9 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

 A המטריצת התשלומיים של שחקן 1 ו- B המטריצת התשלומיים של שחקן 2. במונחי A ו- B הפונקציות התשלומיים שלהם באסטרטגיות מעורבות הן

$$U_1(x, y) = x^t A y = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$U_2(x, y) = x^t B y = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 2 & -7 & 2 \\ -2 & 4 & 9 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

5.2 שיווי משקל נאש ועקרון האדישות

הגדרה 5.3 שיווי משקל נאש באסטרטגיות מעורבות

יהי $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ משחק N שחקנים באסטרטגיות טהורות ויהי $\Gamma = (N, (\Sigma_i)_{i \in N}, (U_i)_{i \in N})$ ההכרבה שלו לאסטרטגיות מעורבות. ויהי σ^* השיווי משקל באסטרטגיות מעורבות אם התנאי הבא מתקיים

$$U_i(\sigma^*) \geq U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) . \quad (5.3)$$

משפט 5.1 עקרון האדישות

יהי σ^* שיווי משקל במשחק בצורה אסטרטגית, ותהיינה s_i ו- \hat{s}_i שתי אסטרטגיות טהורות של שחקן i . אם $0 > \sigma_i^*(\hat{s}_i)$ וכן $0 > \sigma_i^*(s_i)$

$$U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = U_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*) \quad (5.4)$$

הוכחה: נניח בsvilleה כי מושוואה (5.4) אינה מתקיימת ובלי הגבלת הכלליות נניח כי

$$U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) > U_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*) . \quad (5.5)$$

תהי σ_i האסטרטגיה של שחקן i המוגדרת באופן הבא:

$$\sigma_i(t_i) \triangleq \begin{cases} \sigma_i^*(t_i) & t_i \notin \{s_i, \hat{s}_i\} , \\ 0 & t_i = \hat{s}_i , \\ \sigma_i^*(s_i) + \sigma_i^*(\hat{s}_i) & t_i = s_i . \end{cases}$$

$$U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) = \sum_{t_i \in S_i} \sigma(t_i) U_i(t_i, \sigma_{-i}^*) \quad (5.6)$$

$$= \sum_{t_i \notin \{s_i, \hat{s}_i\}} \sigma^*(t_i) U_i(t_i, \sigma_{-i}^*) + (\sigma^*(s_i) + \sigma^*(\hat{s}_i)) U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \quad (5.7)$$

$$> \sum_{t_i \notin \{s_i, \hat{s}_i\}} \sigma^*(t_i) U_i(t_i, \sigma_{-i}^*) + \sigma^*(s_i) U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) + \sigma^*(\hat{s}_i) U_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*) \quad (5.8)$$

$$= \sum_{t_i \in S_i} \sigma^*(t_i) U_i(t_i, \sigma_{-i}^*) \quad (5.9)$$

$$= U_i(\sigma^*) . \quad (5.10)$$

קיבלנו כי $U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) > U_i(\sigma^*)$ בסתיו לכך ש- X^* שיווי משקל.

דוגמה 5.6 ()

נתון משחק שני שחקנים (שאינו סכום אפס) בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>L</i>	<i>R</i>
<i>T</i>	1, 8	9, 2	
<i>B</i>	7, 1	2, 5	

מצאו את השוויי משקל באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

<i>I</i>	<i>II</i>	$y(L)$	$(1 - y)(R)$
$x(T)$	1, 8	9, 2	
$(1 - x)(B)$	7, 1	2, 5	

$$U_1(x, y) = (2(1 - x) + 9x)(1 - y) + (7(1 - x) + x)y = -13xy + 7x + 5y + 2 .$$

$$U_2(x, y) = (5(1 - x) + 2x)(1 - y) + (7x + 1)y = 10xy - 3x - 4y + 5 .$$

לפי עקרון האדישות:

$$\begin{aligned} U_1(T, y^*) &= U_1(B, y^*) \\ \Rightarrow U_1(1, y^*) &= U_1(0, y^*) \\ \Rightarrow 9 - 8y^* &= 2 + 5y^* \\ \Rightarrow y^* &= \frac{7}{13} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2(x^*, L) &= U_2(x^*, R) \\ \Rightarrow U_2(x^*, 1) &= U_2(x^*, 0) \\ \Rightarrow 1 + 7x^* &= 5 - 3x^* \\ \Rightarrow x^* &= \frac{2}{5} . \end{aligned}$$

לכן השוויי משקל הוא

$$x^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) , \quad y^* = \left(\frac{7}{13}, \frac{6}{13}\right) .$$

■

דוגמה 5.7 ()

נתון משחק שני שחקנים (שאינו סכום אפס) בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>L</i>	<i>R</i>
<i>T</i>	5, 5	-2, -2	
<i>B</i>	4, 4	3, 3	

מצאו את השוויי משקל באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

	<i>II</i>	$y(L)$	$(1-y)(R)$
<i>I</i>			
$x(T)$	5, 5	-2, -2	
<i>B</i>	4, 4	3, 3	

$$U_1(x, y) = (3(1-x) - 2x)(1-y) + (4(1-x) + 5x)y = 6xy - 5x + y + 3 .$$

$$U_2(x, y) = (3(1-x) - 2x)(1-y) + (4(1-x) + 5x)y = 6xy - 5x + y + 3 .$$

לפי עקרון האדישות:

$$\begin{aligned} U_1(T, y^*) &= U_1(B, y^*) \\ \Rightarrow U_1(1, y^*) &= U_1(0, y^*) \\ \Rightarrow -2 + 7y^* &= 3 + y^* \\ \Rightarrow y^* &= \frac{5}{6} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2(x^*, L) &= U_2(x^*, R) \\ \Rightarrow U_2(x^*, 1) &= U_2(x^*, 0) \\ \Rightarrow 4 + x^* &= 3 - 5x^* \\ \Rightarrow x^* &= -\frac{1}{6} \notin [0, 1] . \end{aligned}$$

אין השיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

משפט 5.2 נוסחאות שיווי משקל למשחק שני-שחקנים ריבועי

יהי $G = (\{1, 2\}, \{S_1, S_2\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני שחקנים ריבועי שבו לכל שחקן יש n אסטרטגיות טהורות.

יהי x^* וקטור אסטרטגיות שיווי משקל של שחקן 1, $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

יהי y^* וקטור אסטרטגיות שיווי משקל של שחקן 2 $y^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה התשלומים של שחקן 1, תהי $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה התשלומים של שחקן 2

ויהו U_1^* ו- U_2^* התשלומי שיווי משקל של שחקן 1 ושחקן 2 בהתאמה.

אז

$$\begin{aligned} x^{*t} &= \frac{e^t B^{-1}}{\langle e, B^{-1}e \rangle} , & U_1^* &= \langle x^*, Ay^* \rangle = \frac{1}{\langle e, A^{-1}e \rangle} \\ y^* &= \frac{A^{-1}e}{\langle e, A^{-1}e \rangle} , & U_2^* &= \langle x^*, By^* \rangle = \frac{1}{\langle e, B^{-1}e \rangle} . \end{aligned}$$

כאשר $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ וקטור של \mathbb{R}^n שבו כל איבר שווה ל-1.

הוכחה:

- לפי עקרון האדישות, אם שחקן 1 משחק לפि האסורוגיה המעורבת x^* של שווי המשקל אז שחקן 2 יהיה אדיש בין האסטרטגיות הטהורות שלו. ז"א

$$x^{*t}B = U_2e^t .$$

לכן

$$x^{*t} = U_2e^t B^{-1} .$$

מכיוון שהסכום של ההסתברויות שווה ל- 1 אז

$$1 = x^{*t}e = U_2e^t B^{-1}e \Rightarrow U_2 = \frac{1}{e^t B^{-1}e} = \frac{1}{\langle e, B^{-1}e \rangle} .$$

על ידי הצבה בביטוי הקודם קיבל

$$x^{*t} = \frac{e^t B^{-1}}{\langle e, B^{-1}e \rangle} .$$

- באותו מידה לפי עקרון האדישות, אם שחקן 2 משחק לפि האסורוגיה המעורבת y^* של שווי המשקל אז שחקן 1 יהיה אדיש בין האסטרטגיות הטהורות שלו. ז"א

$$Ay^* = U_1e .$$

לכן

$$y^* = U_1A^{-1}e .$$

מכיוון שהסכום של ההסתברויות שווה ל- 1 אז

$$1 = e^t y^* = U_1e^t A^{-1}e \Rightarrow U_1 = \frac{1}{e^t A^{-1}e} = \frac{1}{\langle e, A^{-1}e \rangle} .$$

על ידי הצבה בביטוי הקודם קיבל

$$y^* = \frac{A^{-1}e}{\langle e, A^{-1}e \rangle} .$$

$$\begin{aligned} U_1^* &= \langle x^*, Ay^* \rangle = x^{*t}Ay^* \\ &= \frac{e^t B^{-1}AA^{-1}e}{\langle e, A^{-1}e \rangle \langle e, B^{-1}e \rangle} \\ &= \frac{e^t B^{-1}e}{\langle e, A^{-1}e \rangle \langle e, B^{-1}e \rangle} \\ &= \frac{\langle e, B^{-1}e \rangle}{\langle e, A^{-1}e \rangle \langle e, B^{-1}e \rangle} \\ &= \frac{1}{\langle e, A^{-1}e \rangle} . \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} U_2^* &= \langle x^*, By^* \rangle = x^{*t}By^* \\ &= \frac{e^t B^{-1}BA^{-1}e}{\langle e, A^{-1}e \rangle \langle e, B^{-1}e \rangle} \\ &= \frac{e^t A^{-1}e}{\langle e, A^{-1}e \rangle \langle e, B^{-1}e \rangle} \\ &= \frac{\langle e, A^{-1}e \rangle}{\langle e, A^{-1}e \rangle \langle e, B^{-1}e \rangle} \\ &= \frac{1}{\langle e, B^{-1}e \rangle} . \end{aligned}$$

•

דוגמה 5.8 ()

		<i>II</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>I</i>					
α		1, 1	1, 2	2, 1	
β		1, 2	3, 1	0, 1	
γ		2, -1	1, 1	1, 2	

פתרונות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

לכן

$$U_1^* = \frac{1}{\langle e, A^{-1}e \rangle} = \frac{4}{3}.$$

$$U_2^* = \frac{1}{\langle e, B^{-1}e \rangle} = \frac{6}{5}.$$

$$x^* = U_2^* B^{-1} e = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5} \right).$$

$$y^* = U_1^* e^t A^{-1} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right),$$

מסקנה 5.1 נסחאות שיווי משקל למשחק שני-שחקנים סכום-אפס ריבועי

במשחק סכום אפס ריבועי שבו לכל שחקן יש n אסטרטגיות טהורות. אם A המטריצת המשחק איז הווקטורית אסטרטגיות שיווי משקל x^* ו- y^* של שחקן 1 (שחקן השורות) ושחקן 2 (שחקן העמודות), והתשלום שיווי משקל נתונים על ידי

$$x^{*t} = \frac{e^t A^{-1}}{\langle e, A^{-1}e \rangle}, \quad y^* = \frac{A^{-1}e}{\langle e, B^{-1}e \rangle}, \quad U = \langle x^*, A y^* \rangle = \frac{1}{\langle e, A^{-1}e \rangle}.$$

משפט 5.3

יהי $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ משחק בצורה אסטרטגית ו- Γ הרחבה שלו לאסטרטגיות מעורבות. וקטור אסטרטגיות מעורבות σ הוא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות במשחק Γ אם ורק אם לכל שחקן $i \in N$ ולכל אסטרטגיה טהורה $s_i \in S_i$ מתקיים

$$U_i(\sigma^*) \geq U_i(s_i, \sigma_{-i}^*). \quad (5.11)$$

הוכחה: σ^* שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות במשחק Γ איזה

$$U_i(\sigma^*) \geq U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$$

לכל שחקן i ולכל אסטרטגיה מעורבת $\sigma_i \in \Sigma_i$.

כל אסטרטגיה טהורה היא אסטרטגיה מעורבת, איזה

$$U_i(\sigma^*) \geq U_i(s_i, \sigma_{-i}^*)$$

לכל שחקן i ולכל אסטרטגיה טהורה $s_i \in S_i$.

להוכיח הכוון הפוך, נניח כי וקטור האסטרטגיות המעורבות σ^* מקיים את המשוואה (5.11) לכל שחקן $i \in N$ ולכל אסטרטגיה טהורה $s_i \in S_i$. איזה לכל אסטרטגיה מעורבת σ_i של שחקן i :

$$U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \quad (5.12)$$

$$\leq \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) U_i(\sigma^*) \quad (5.13)$$

$$= U_i(\sigma^*) \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = U_i(\sigma^*) , \quad (5.14)$$

כasher השווינו (5.12) נובע לכך ש- U_i היא פונקציה מולטי-LINEARIT והאי-שוויון (5.13) נובע מהאי-שוויון (5.11). בפרט, σ^* הוא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות ב- Γ . ■

מסקנה 5.2

יהי σ^* שיווי משקל במשחק בצורה אסטרטגית, ותהיינה s_i ו- \hat{s}_i שתי אסטרטגיות טהורות של שחקן i .

$$\sigma_i^*(s_i) = 0 \text{ או } U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) < U_i(\sigma^*) \quad (1)$$

$$\sigma_i^*(s_i) = 0 \text{ או } U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) < U_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*) \quad (2)$$

$$U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = U_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*) \text{ או } \sigma_i^*(\hat{s}_i) > 0 \text{ ו- } \sigma_i^*(s_i) > 0 \quad (3)$$

$$\sigma_i^*(s_i) = 0 \text{ או } s_i \text{ נשלtot חזק על ידי } \hat{s}_i \text{ או } 0 \quad (4)$$

הוכחה:

$$(1) \text{ נניח } U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) < U_i(\sigma^*)$$

נניח בשיילה כי $\sigma_i^*(\hat{s}_i) > 0$. לפי עקרתו האדישות לכל אסטרטגיה טהורה \hat{s}_i עבורה 0 מתקיים $U_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*) = U_i(s_i, \sigma_{-i}^*)$

$$\begin{aligned} U_i(\sigma^*) &= \sum_{\hat{s}_i \in S_i} \sigma_i^*(\hat{s}_i) U_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*) \\ &= \sum_{\hat{s}_i \in S_i} \sigma_i^*(\hat{s}_i) U_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*) \\ &\quad \sigma_i^*(\hat{s}_i) > 0 \\ &= \sum_{\hat{s}_i \in S_i} \sigma_i^*(\hat{s}_i) U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \\ &\quad \sigma_i^*(\hat{s}_i) > 0 \\ &= U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \end{aligned}$$

בסתירה לכך ש- $U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) < U_i(\sigma^*)$

(2)

$$\begin{aligned} U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) &< U_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*) \stackrel{\text{נ"ש}}{=} U_i(\sigma^*) \\ \sigma_i^*(s_i) &= 0 \text{ וכן לפי סעיף א' } U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) < U_i(\sigma^*) \end{aligned}$$

(3) עקרון האדישות (משפט 5.1).

(4) נניח כי s_i נשלט חזק על ידי \hat{s}_i . אז

$$u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(\hat{s}_i, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

מכאן

$$\begin{aligned} U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) &= \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_{-i}^*(s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i}) \\ &< \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_{-i}^*(s_{-i}) u_i(\hat{s}_i, s_{-i}) \\ &= U_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*) \end{aligned}$$

נ"א

$$\begin{aligned} U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) &< U_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*) \\ \text{ולכן לפי סעיף ב'} \quad \sigma_i^*(s_i) &= 0 \end{aligned}$$



5.3 דוגמאות

דוגמה 5.9 (מלחמות המינים)

המשחק הבא נקרא "מלחמות המינים". זוג מתכווןobilio לערב שבת. האפשרויות העומדות לרשותם הן קונצרט (C) או צפייה שמשחק כדורגל (F). הגבר מעדייף צפייה במשחק הכדורגל, בעוד האישה מעדייפה את הוקנרט, אך שניהם מעדייפים להיות יחד גם אם הבילוי המשותף הוא הפחות עדיף בעיניהם. מצאו את כל שיווי המשקל של המשחק.

I	II	F	C
F	2, 1	0, 0	
C	0, 0	1, 2	

מצאו את שיווי המשקל של המשחק.

פתרון:

קודם כל נשים לב שיש למשחק שוויי משקל באסטרטגיות טהורות:

I	II	F	C
F	2, 1	0, 0	
C	0, 0	1, 2	

כעת נבדוק אם יש שווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

<i>I</i>	<i>II</i>	
<i>x(F)</i>	$y(F)$	$(1-y)C$
$(1-x)(C)$	$\underline{2}, \underline{1}$	$0, 0$
	$0, 0$	$\underline{1}, \underline{2}$

לפי עקרון האדישות:

$$U_1(F, y^*) = U_1(C, y^*) \Rightarrow 2y^* = (1 - y^*) \Rightarrow y^* = \frac{1}{3} .$$

$$U_2(x^*, F) = U_2(x^*, C) \Rightarrow x^* = 2(1 - x^*) \Rightarrow x^* = \frac{2}{3} .$$

לכן הוקטור אסטרטגיות $\sigma^* = (X^*, Y^*)$ כאשר

$$\sigma_1^* = \left(\frac{2}{3}(F), \frac{1}{3}(C) \right) , \quad \sigma_2^* = \left(\frac{1}{3}(F), \frac{2}{3}(C) \right)$$

הוא שווי משקל באסטרטגיות מעורבות.



דוגמה 5.10 ()

במשחק הבא מצאו את כל שוויי המשקל של המשחק.

<i>I</i>	<i>II</i>	
<i>T</i>	L	R
<i>M</i>	$4, -4$	$-4, 4$
<i>B</i>	$-4, 4$	$4, 3$

פתרונות:

נבדוק אם קיים שווי משקל באסטרטגיות טהורות לפי שיטת תשובות הטובות ביותר:

<i>I</i>	<i>II</i>	
<i>T</i>	$4, -4$	$-4, 4$
<i>M</i>	$-4, 4$	$4, 3$
<i>B</i>	$-4, 2$	$3, 1$

לפיכך לא קיים שווי משקל באסטרטגיות טהורות.

לפי משפט נASH בהכרח קיים שווי משקל באסטרטגיות מעורבות. אסטרטגייה *B* נשלטה על ידי *M* שכן שחקן 1 ישחק לפי אסטרטגיה *B* בהסתברות 0. שכן המשחק באסטרטגיות מעורבות הינו

<i>I</i>	<i>II</i>	
<i>x(T)</i>	$y(L)$	$(1-y)(R)$
$(1-x)(M)$	$4, -4$	$-4, 4$
$0(B)$	$-4, 2$	$3, 1$

לפי עקרון האדישות אם x^* שווי משקל אז שחקן 2 אديש בין האסטרטגייה L לבין האסטרטגייה R :

$$U_2(x^*, L) = U_2(x^*, R) \Rightarrow -4x^* + 4(1 - x^*) = 4x^* + 3(1 - x^*) \Rightarrow -7x^* = -1 \Rightarrow x^* = \frac{1}{7}.$$

לפי עקרון האדישות אם y^* שווי משקל אז 1 אדיש בין האסטרטגייה T לבין האסטרטגייה M :

$$U_1(T, y^*) = U_1(M, y^*) \Rightarrow 4y^* - 4(1 - y^*) = -4y^* + 4(1 - y^*) \Rightarrow 16y^* = 8 \Rightarrow y^* = \frac{1}{2}.$$

לכן $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*) = (\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ שווי משקל של המשחק באסטרטגיות מעורבות כאשר

$$\sigma_1^* = \left(\frac{1}{7}, \frac{6}{7}\right), \quad \sigma_2^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

■

דוגמה 5.11 ()

נתון המשחק הבא.

		<i>II</i>	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>R</i>
		<i>I</i>			
<i>T</i>		0, 0	7, 6	6, 7	
<i>M</i>		6, 7	0, 0	7, 6	
<i>B</i>		7, 6	6, 7	0, 0	

מצאו את כל שוויי המשקל של המשחק.

פתרון:

המטריצת התשלומים של שחקן *I* היא

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 \\ 6 & 0 & 7 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $|A| = 559$

$$A^{-1} = \frac{1}{559} \begin{pmatrix} -42 & 49 & 36 \\ 36 & -42 & 49 \\ 49 & 36 & -42 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{559} \begin{pmatrix} -42 & 36 & 49 \\ 49 & -42 & 36 \\ 36 & 49 & -42 \end{pmatrix}.$$

המטריצת התשלומים של שחקן *II* היא

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 \\ 7 & 0 & 6 \\ 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $|B| = 559$

$$B^{-1} = \frac{1}{559} \begin{pmatrix} -42 & 36 & 49 \\ 49 & -42 & 36 \\ 36 & 49 & -42 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{559} \begin{pmatrix} -42 & 49 & 36 \\ 36 & -42 & 49 \\ 49 & 36 & -42 \end{pmatrix}.$$

מכאן

$$\langle e, A^{-1}e \rangle = \frac{1}{559} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 43 \\ 43 \\ 43 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{129}{559}.$$

לכן התשלום בשוויי משקל לשחקן 1 הוא:

$$U_1^* = \frac{1}{\langle e, A^{-1}e \rangle} = \frac{559}{129}$$

$$\langle e, B^{-1}e \rangle = \frac{1}{559} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 43 \\ 43 \\ 43 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{129}{559} .$$

לכן התשלום בשוויי משקל לשחקן 2 הוא:

$$U_2^* = \frac{1}{\langle e, B^{-1}e \rangle} = \frac{559}{129}$$

$$y^* = \frac{e^t A^{-1}}{\langle e, A^{-1}e \rangle} = \frac{559}{129} \cdot \frac{1}{559} \begin{pmatrix} 43 & 43 & 43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$x^* = \frac{B^{-1}e}{\langle e, B^{-1}e \rangle} = \frac{559}{129} \cdot \frac{1}{559} \begin{pmatrix} 43 \\ 43 \\ 43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$



שיעור 6

מקסמיין באסטרטגיות מעורבות

דוגמה 6.1 (ערך המקסמיין של משחק סכום אפס באסטרטגיות מעורבות)

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס.

		<i>II</i>	<i>L</i>	<i>R</i>
<i>I</i>				
<i>T</i>		4	1	
<i>B</i>		2	3	

א) מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות טהורות.

ב) מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

פתרונות:

(א)

		<i>II</i>	<i>L</i>	<i>R</i>	$\min_{s_2 \in S_2}$
<i>I</i>					
<i>T</i>		4	1		1
<i>B</i>		2	3		2
$\max_{s_1 \in S_1}$		4	3		2, 3

ערך המקסמיין של שחקן 1:

$$\underline{v} = \max_{s_1 \in \{T, B\}} \min_{s_2 \in \{L, R\}} = 2 .$$

ז"א שחקן 1 יכול להבטיח שיקבל לפחות 2 אם הוא ישחק *B*.

ערך המינימקס של שחקן 2:

$$\bar{v} = \min_{s_2 \in \{L, R\}} \max_{s_1 \in \{T, B\}} = 3 .$$

ז"א שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר 3 אם הוא ישחק *R*.

$$\bar{v} = 3 > 2 = \underline{v} .$$

למשחק אין ערך.

ב) כאשר לשחקן 1 יש שתי אסטרטגיות טהורות *T* ו- *B*, נזהה את האסטרטגיה המעורבת

$$[x(T), (1-x)(B)]$$

עם ההסתברות x שבה נבחרת האסטרטגיה הטהורה T .
באופן דומה, כאשר יש לשחקן 2 יש שתי אסטרטגיות טהורות L ו- R , נזהה את האסטרטגיה המעורבת

$$[y(L) , (1-y)(R)]$$

עם ההסתברות y שבה נבחרת האסטרטגיה הטהורה L .

לכל זוג אסטרטגיות מעורבות התשלום ניתן על ידי פונקציית התועלת

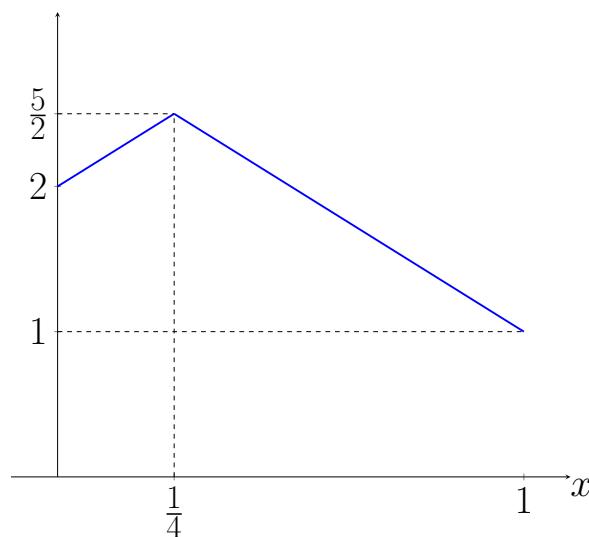
$$U(x, y) = 4xy + 1x(1-y) + 2(1-x)y + 3(1-x)(1-y) = 4xy - 2x - y + 3 .$$

ראשית נחשב לכל $x \in [0, 1]$ את

$$\min_{y \in [0,1]} U(x, y) = \min_{y \in [0,1]} (4xy - 2x - y + 3) = \min_{y \in [0,1]} (y(4x - 1) - 2x + 3)$$

עבור x קבוע זהה לפונקציה לינארית ב- y , ולכן הנקודה שבה המינימום מתקיים נקבעת לפי השיפוע $4x - 1$.
אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה והמינימום מתקיים ב- $y = 0$.
אם השיפוע שלילי הפונקציה יורדת והמינימום מתקיים ב- $y = 1$.
אם השיפוע 0 הפונקציה קבועה וכל הנקודות הן נקודות מינימום. לכן

$$\min_{y \in [0,1]} u(x, y) = \begin{cases} 2x + 2 & x \leq \frac{1}{4} , \\ -2x + 3 & x \geq \frac{1}{4} , \end{cases}$$

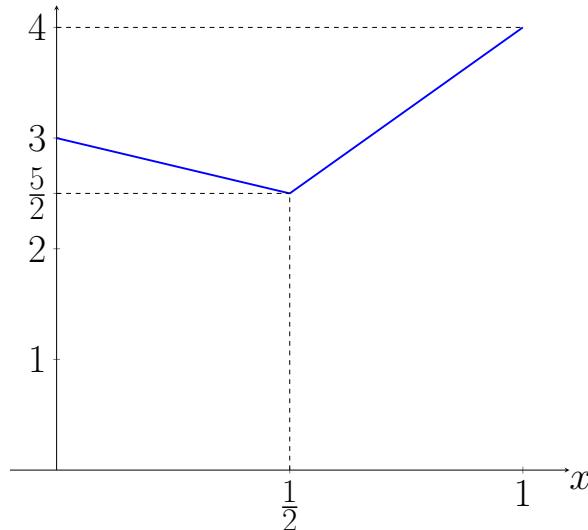


לפונקציה זו של x יש מקסIMUM יחיד ב- $x = \frac{1}{4}$ וערכו $\frac{5}{2}$. לכן

$$\underline{y} = \max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} U(x, y) = \frac{5}{2} .$$

באופן דומה נחשב:

$$\begin{aligned}
 \max_{x \in [0,1]} U(x,y) &= \max_{x \in [0,1]} [4xy - 2x - y + 3] \\
 &= \max_{x \in [0,1]} [x(4y - 2) - y + 3] \\
 &= \begin{cases} -y + 3 & y \leq \frac{1}{2}, \\ 3y + 1 & y \geq \frac{1}{2}, \end{cases}
 \end{aligned}$$



לפונקציה זו של y יש מינימום יחיד ב- $y = \frac{1}{2}$ וערכו $\frac{5}{2}$. לכן

$$\bar{v} = \min_{y \in [0,1]} \max_{x \in [0,1]} U(x,y) = \frac{5}{2}.$$

כלומר, למשחק יש ערך $v = \underline{v} = \bar{v} = \frac{5}{2}$, והסטרטגיות האופטימליות הן $x^* = \frac{1}{4}$ ו- $y^* = \frac{1}{2}$.

מכיוון ש- x^* ו- y^* הן אסטרטגיות האופטימליות היחידות של השחקנים, אז (x^*, y^*) הוא שוויי המשקל נאש היחיד במשחק.



דוגמה 6.2 (מקסימין של משחק שני שחקנים באסטרטגיות מעורבות)

נתון משחק שני שחקנים (שאינו סכום אפס) בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

	<i>II</i>	<i>L</i>	<i>R</i>
<i>I</i>			
<i>T</i>	1, -1	0, 2	
<i>B</i>	0, 1	2, 0	

מצאו התשלומים מקסימין והתשלומים מינימום באסטרטגיות מעורבות.

פתרונות:

ראשית נחשב את התשלום מקסמין של השחקנים.

קבוצות האסטרטגיות של שחקן 1:

$$\Sigma_1 = \{[x(T), (1-x)(B)] , x \in [0, 1]\} .$$

המזוהה עם הקטע $[0, 1]$.

קבוצות האסטרטגיות של שחקן 2:

$$\Sigma_2 \{[y(L), (1-y)(R)] , y \in [0, 1]\} .$$

פונקציית התועלת של שחקן 1:

$$U_1(x, y) = xy + 2(1-x)(1-y) = 3xy - 2x - 2y + 2 .$$

פונקציית התועלת של שחקן 2:

$$U_2(x, y) = -xy + 2x(1-y) + y(1-x) = -4xy + 2x + y .$$

התשלום מקסמין של שחקן 1 הינו:

$$v_1 = \max_{x \in [0, 1]} \min_{y \in [0, 1]} U_1(x, y) .$$

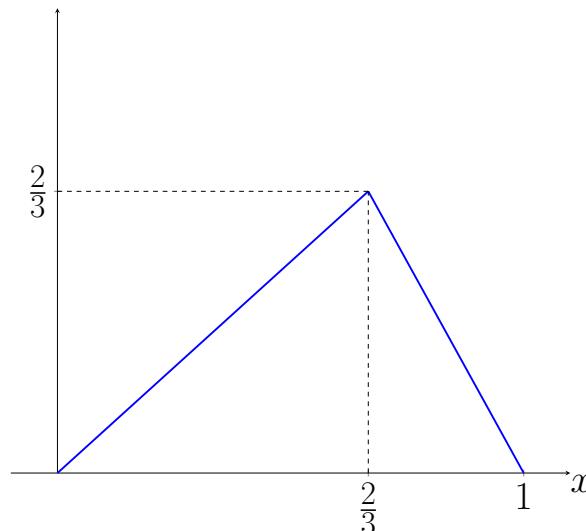
התשלום מקסמין של שחקן 2 הינו:

$$v_2 = \max_{y \in [0, 1]} \min_{x \in [0, 1]} U_2(x, y) .$$

$$\min_{y \in [0, 1]} U_1(x, y) = \min_{y \in [0, 1]} 3xy - 2x - 2y + 2$$

$$= \min_{y \in [0, 1]} y(3x - 2) - 2x + 2$$

$$= \begin{cases} x & x \leq \frac{2}{3} \\ -2x + 2 & x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$



לפונקציה זו יש מקסימום ב- $x = \frac{2}{3}$. לפיכך

$$\underline{v}_1 = \max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} U_1(x, y) = \frac{2}{3}.$$

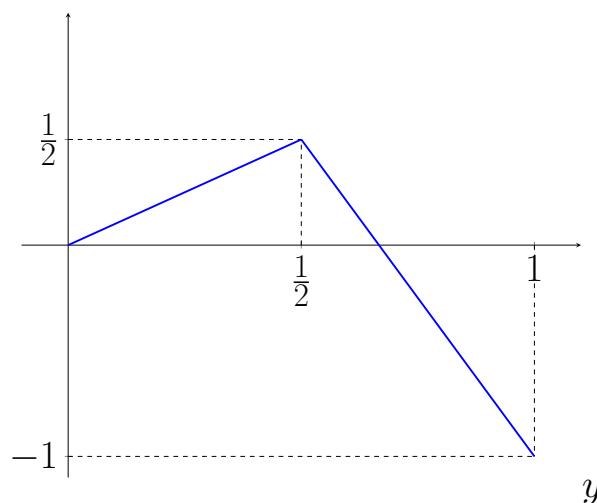
התשלום מаксימין של שחקן 2 הינו:

$$\underline{v}_2 = \max_{y \in [0,1]} \min_{x \in [0,1]} U_2(x, y).$$

$$\min_{x \in [0,1]} U_2(x, y) = \min_{x \in [0,1]} 3xy - 2x - 2y + 2$$

$$= \min_{x \in [0,1]} x(2 - 4y) + y$$

$$= \begin{cases} y & y \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 3y & y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$



לפונקציה זו יש מקסימום ב- $y = \frac{1}{2}$. לפיכך

$$\underline{v}_2 = \max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} U_2(x, y) = \frac{1}{2}.$$

דוגמה 6.3 (ערך אסטרטגי אופטימלית של משחק סכום אפס באסטרטגיות מעורבות)

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

	<i>II</i>	<i>L</i>	<i>R</i>
<i>I</i>			
<i>T</i>	5	0	
<i>B</i>	3	4	

מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

פתרונות:

תחליה נחשב את המקסימין של שחקן 1. אם שחקן 1 משחק את האסטרטגיה המעורבת $[x(T), (1-x)(B)]$ התשלום שלו כפונקציה של x תלוי על האסטרטגיה של שחקן 2:

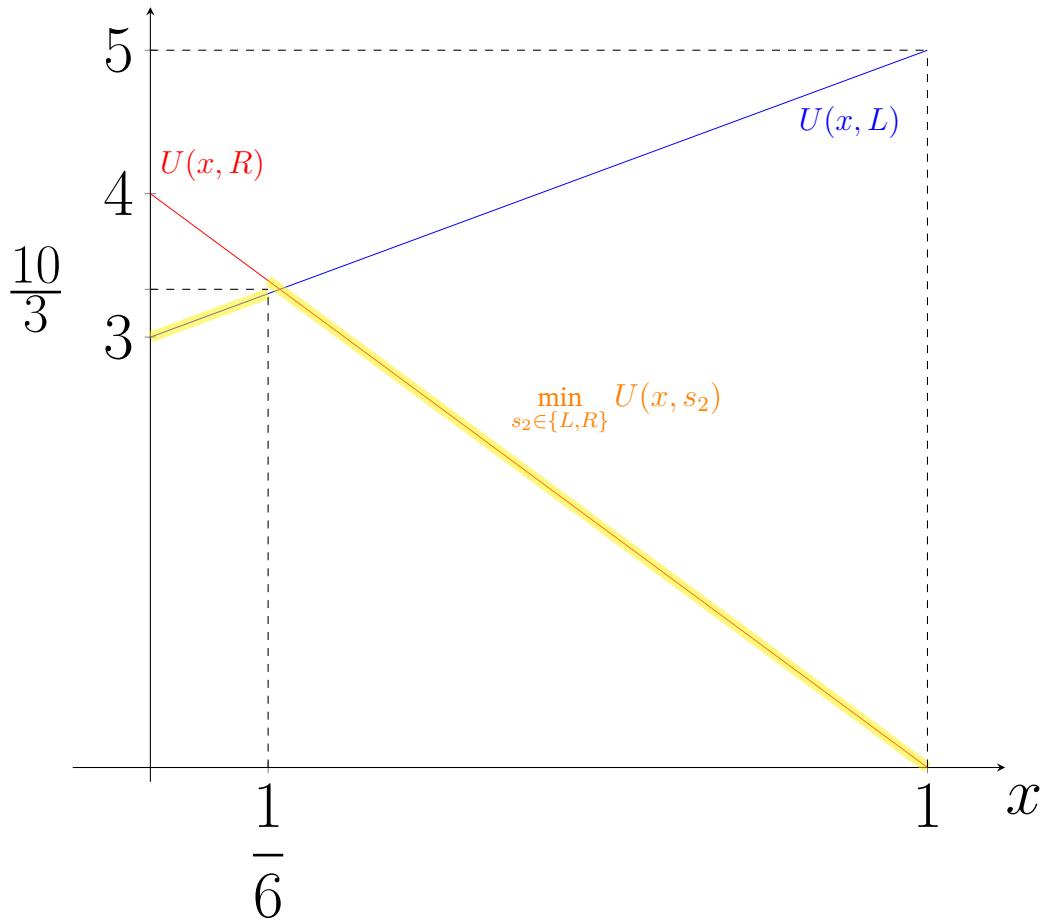
$$U(x, L) = 5x + 3(1-x) = 2x + 3.$$

- אם שחקן 2 משחק L אז

$$U(x, R) = 4(1-x) = -4x + 4.$$

- אם שחקן 2 משחק R אז

הגרף למטה מראה את הגרפים של הפונקציות האלו. הקו של $\min_{s_2 \in \{L,R\}} U(x, s_2)$ מראה את התשלום המינימלי שחקן 1 קיבל אם הוא משחק x . הקו הזה נקרא **מעטפת תחתונה** של התשלומים.



הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות שווה ל- $\max_{x \in [0,1]} \min_{s_2 \in \{L,R\}} U(x, s_2)$, אשר מתקבל בנקודת מקסימום של המעטפת התחתונה. המקסימום מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של שתי הפונקציות, כולם בנקודת

$$2x + 3 = -4x + 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{6}.$$

מכאן האסטרטגיה האופטימלית של שחקן 1 היא $x^* = \left(\frac{1}{6}(T), \frac{5}{6}(B)\right)$. הערך של המשחק שווה לגובה של הנקודה חיתוך: $v = \frac{10}{3}$.

כעת נחשב את המינימקס של שחקן 2. אם שחקן 2 משחק את האסטרטגיה המעורבת $[y(L), (1-y)(R)]$ התשלום שלו כפונקציה של y תלוי על האסטרטגיה של שחקן 1:

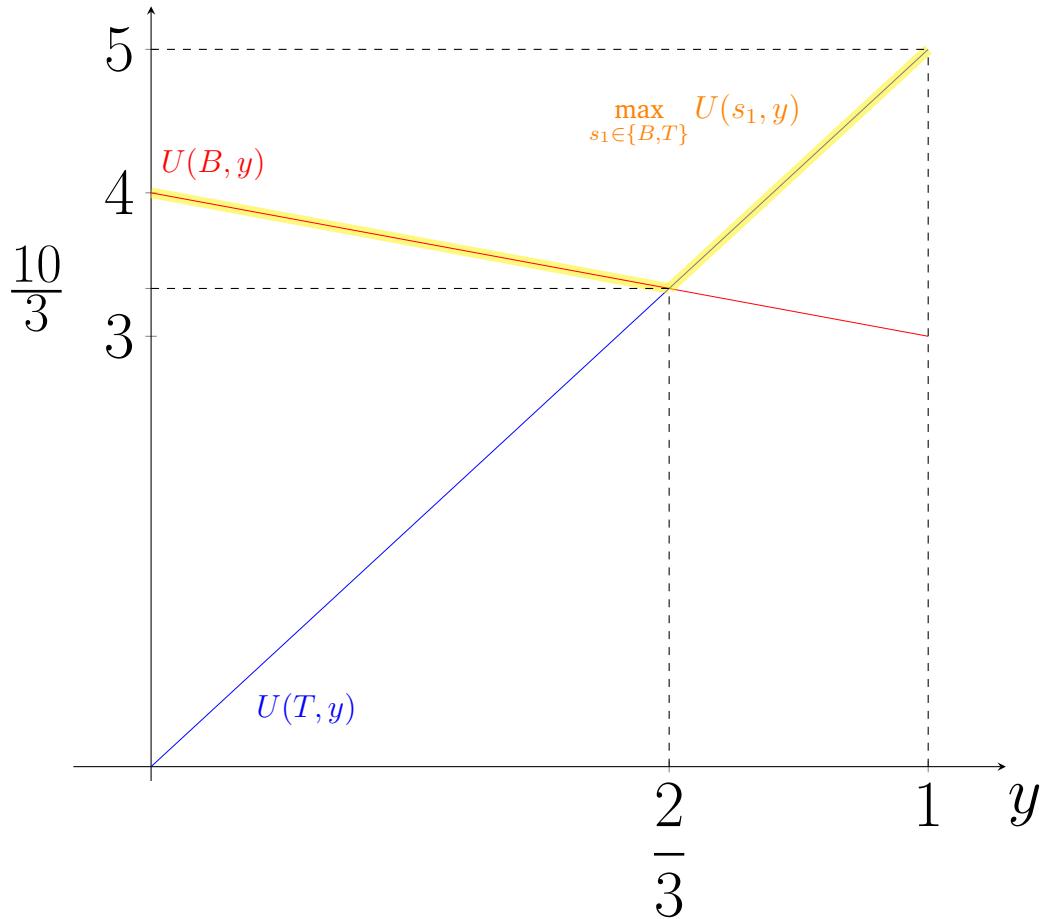
$$U(T, y) = 5y.$$

- אם שחקן 1 משחק T אז

$$U(B, y) = 4 - y.$$

- אם שחקן 1 משחק B אז

הגרף למטה מראה את הגרפים של הפונקציות האלה. הקו של $\max_{s_1 \in \{B,T\}} U(s_1, y)$ מראה את התשלום המקסימלי שחקן 2 קיבל אם הוא משחק y . הקו הזה נקרא **מעטפת עליונה** של התשלומים.



הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות שווה ל- $\min_{y \in [0,1]} \max_{s_1 \in \{B,T\}} U(s_1, y)$, אשר מתקבל בנקודת מינימום של המעטפת העליונה. המינימום מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של שתי הפונקציות, כולם בנקודה

$$5y = 4 - y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}.$$

מכאן האסטרטגיה האופטימלית של שחקן 2 היא $y^* = \left(\frac{2}{3}(L), \frac{1}{3}(R)\right)$. הערך של המשחק שווה לגובה של הנקודה

חיתוך: $v = \frac{10}{3}$

דוגמה 6.4 ()

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

	II	L	M	R
I				
T	2	5	-1	
B	1	-2	5	

מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

פתרונות:

נחשב את המקסימין של שחקן 1. אם שחקן 1 מושך את האסטרטגיה המעורבת $[x(T), (1-x)(B)]$ התשלום שלו כפונקציה של x תלוי על האסטרטגיה של שחקן 2:

$$U(x, L) = 2x + (1-x) = 1 + x.$$

- אם שחקן 2 מושך L אז

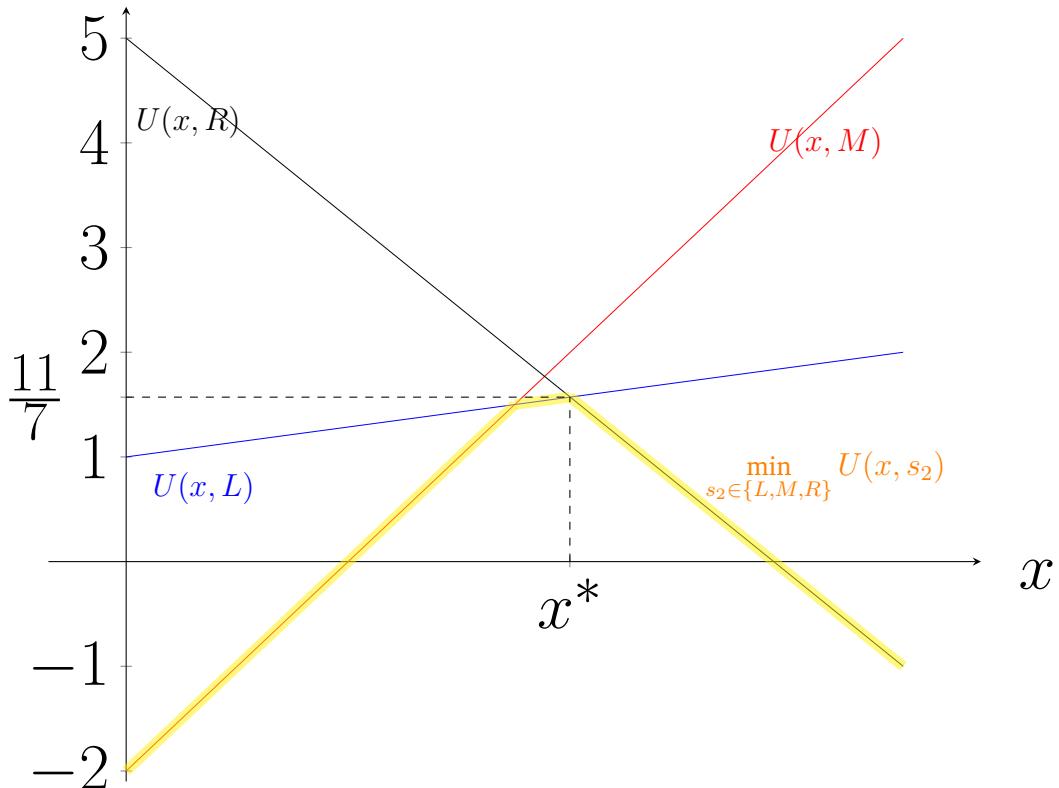
$$U(x, M) = 5x - 2(1-x) = 7x - 2.$$

- אם שחקן 2 מושך M אז

$$U(x, R) = -x + 5(1-x) = -6x + 5.$$

- אם שחקן 2 מושך R אז

התרשים מטהר את הגרפים של שלוש פונקציות אלו.



המקסימום של המעטפת התחתונה מתקיים בנקודת חיתוך של הקווים של $U(x, R)$ ו- $U(x, L)$

$$1 + x \stackrel{!}{=} -6x + 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{7}$$



שיעור 7

משחק בייסיאני

7.1 משחק בייסיאני

במשחק עם מידע מלא, כל פונקציית התשלום של כל השחקן היא ידועה משותפת. בנווגוד, במקרים עם מידע לא מלא, יש לפחות שחקן אחד עם אי-זדאות על פונקציית התשלום של לפחות שחקן אחד אחר.

דוגמה נפוצה של משחק אם מידע לא מלא היא מכרז סגור, שבו השחקנים לא יודעים את ההצעות של שאר השחקנים.

הגדרה 7.1 משחק בייסיאני

הצורה הנורמלית של משחק בייסיאני n שחקנים היא

$$G = \{ \{A_1, \dots, A_n\}, \{T_1, \dots, T_n\}, \{p_1, \dots, p_n\}, \{u_1, \dots, u_n\} \}$$

כאשר

- A_i הקבוצת הפעולות של שחקן i .
- $T_i = (t_i^1, t_i^2, \dots)$ הקבוצות הטיפוסים של שחקן i .
- p_i מסמן את **האמונה** של שחקן i בטיפוסים האפשריים של שאר ה- $1 - n$ שחקנים ומוגדר

$$p_i = P(t_{-i} | t_i)$$

$$\text{כאשר } t_{-i} = (t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n)$$

לפי הרסניני (1967) התזמון של משחק בייסיאני הוא לפי הסדר הבא:

- 1) צעד גורל בוختار טיפוסים $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ כאשר t_i נבחר מהקבוצת טיפוסים האפשריים T_i .
- 2) שחקן הגורל מגלה t_i אבל לא אף שחקן אחר.
- 3) השחקנים בוחרים בפעולות. שחקן 1 בוחר פעולה a_1 מקבוצת הפעולות A_1 , שחקן 2 בוחר פעולה a_2 מקבוצת הפעולות A_2 , וכן הלא.
- 4) שחקן i מקבל תשלום $u_i(a_1, a_2, \dots, a_n; t_i)$.

אנו מניחים שזה ידועה משותפת בשלב 1 של התזמון של משחק בייסיאני, שחקן הגורל בוחר בוختار טיפוסים $(t_1, \dots, t_n) = t$ לפי פונקציית ההסתברות $p(t)$.
כאשר שחקן הגורל מגלה את t_i לשחקן i , הוא מחשב את האמונה

$$p_i = P(t_{-i} | t_i) = \frac{P(t_{-i} \cap t_i)}{P(t_i)} = \frac{P(t_{-i} \cap t_i)}{\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} P(t_{-i} \cap t_i)}$$

דוגמה 7.1 ()

אליס (שחקן I שחקן השורה) ובוב (שחקן II שחקן העמודה) משחקים משחק שבו פונקציית התשלומים היא אחת משתי פונקציות התשלומים המופיעות למטה. במשחק זה יש לבוב שתי סעולות אפשריות a ו- b ולאليس יש שתיים או שלוש פעולות אפשריות, כתלות בפונקציית התשלומים שנבחרה.

השחקן הנפטר G_1		השחקן הנפטר G_2	
$t_1 = \text{buy}:$	II	a	b
	I		
	U	1, 0	0, 2
	V	0, 3	1, 0
$t_1 = \text{sell}:$	II	a	b
	I		
	U	1, 1	1, 0
	V	0, 2	1, 1
W	1, 0	0, 2	

אליס יודעת את פונקציית התשלומים (ולכן היא בפרט יודעת אם ברשותה שתיים או שלוש פעולות) ובוב יודע רק שפונקציות התשלומים ניתנות או על ידי המטריצה G_1 או על ידי המטריצה G_2 . הוא מייחס הסתברות p לכך שמטריצת התשלומים היא G_1 והסתברות $p - 1$ לכך שמטריצת התשלומים היא G_2 . תיאור זה ידועה משותפת בין אליס ובוב.

- הקבוצת בטיפוסים של שחקן I הן

$$T_1 = (\text{buy}, \text{sell}) , \quad T_2 = (t_2) .$$

לשחקן II יש רק טיפוס אחד שנסמך

- הפעולות האפשריים של I הן

$$A_1 = (U, V, W)$$

והפעולות האפשריים של II הן

$$A_2 = (a, b) .$$

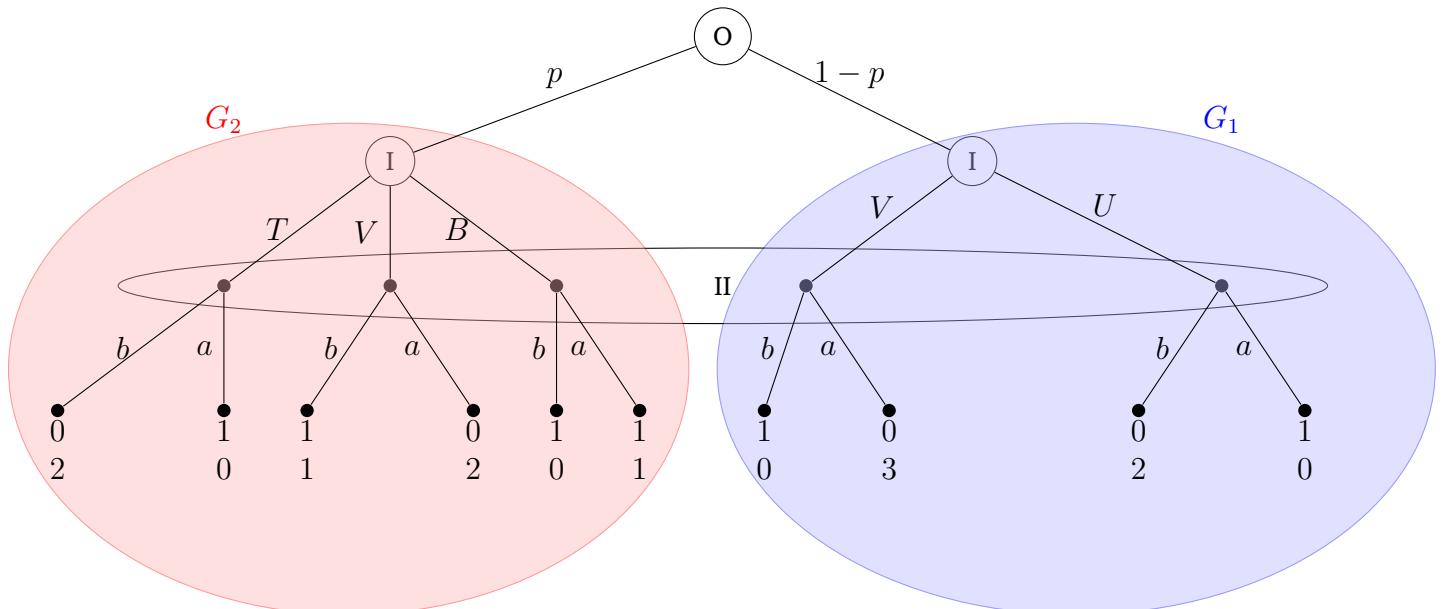
- יש רק אפשרות אחת לאמונה של שחקן I :

$$p_1 = P(t_2|t_1 = \text{buy}) = 1$$

יש שתי אפשרויות לאמונה של שחקן II :

$$p_2 = P(t_1 = \text{buy}|t_2) , \quad p_2 = P(t_1 = \text{sell}|t_2) .$$

$P(t_1 = \text{sell}|t_2) = 1 - p$ ו- $P(t_1 = \text{buy}|t_2) = p$



מצב אמונות זה הוא מצב האמונה של השחקנים במשחק בצורה רחבה המופיע לעיל. ברגע שהשחקנים באים לשחק את פעולותיהם. במשחק זה צעד גורל בוחר את G_1 ו- G_2 לפי הסתברויות p ו- $1 - p$ בהתאם. הבחירה נודעת לאليس אך לא לבוב. בעז המשחק כל משחק נסתר מוקף באלייסה. אף אחד משני המשחקים הנסתורים אינם תט-משחק מכיוון שינוי קבוצת ידיעת המכילה קדוקדים בשניהם.

הגדרה 7.2 אסטרטגיה במשחק בייסיאני

נתון בייסיאני:

$$G = \{(A_1, \dots, A_n), (T_1, \dots, T_n), (p_1, \dots, p_n), u_1, \dots, u_n\} .$$

אסטרטגיה של שחקן i היא פונקציה $s_i(t_i)$ אשר משייכת לכל $t_i \in T_i$ פעולה a_i שבוחר שחקן i מטיפוס t_i ערך פי האסטרטגיה s_i .

דוגמה 7.2 (דילמה השריף)

שריף עומד מול חמוד חמוץ. שניהם צריכים להחליט בו זמנית אם לירוט בשני או לא.

הchodod יכול להיות מטיפוס "פושע" או מטיפוס "ازרח". לשרפּ יש רק טיפוס אחד. החודוד ידע את טיפוסו ואת טיפוס השרפּ, אך השרפּ אינו יודע את טיפוסו של החודוד. לפיכך, יש מידע לא שלם. لكن המשחק זה הוא משחק בייסיאני.

השריף מעדיף להגן על עצמו ולירוט אם החודוד יורה, או לא לירוט אם החודוד לא עשה זאת (גם אם החודוד עבריין). החודוד מעדיף לירוט אם הוא עבריין, גם אם השרפּ לא יורה, אבל מעדיף לא לירוט אם הוא אזרח, גם אם השרפּ יורה.

רשמו את המשחק בצורה רחבה ובצורה אסטרטגית.

פתרונות:

נקרא לחודוד שחקן I ונקרא לשרפּ שחקן II. השרפּ מייחס הסתברות p לכך שchodod הוא מטיפוס "פושע" והסתברות $1 - p$ שchodod מטיפוס "ازרח".

שני השחקנים מודעים להסתברות זו.

משחק זה מוגדר על ידי

$$G = \{N, (A_1, A_2), (T_1, T_2), (p_1, p_2), (u_1, u_2)\}$$

- כאשר קבוצת השחקנים הינה

$$N = \{I, II\} = \{\text{שריף, חודוד}\} .$$

- קבוצת הפעולות הן

$$A_1 = \{a_1^1, a_1^2\} = \{\text{לא לירוט, לירוט}\} , \quad A_2 = \{a_2^1, a_2^2\} = \{\text{לא לירוט, לירוט}\} .$$

- הטיפוסים הינם

$$T_{\text{חוֹדֶד}} = T_1 = \{t_1^1, t_1^2\} = \{\text{ازרח, פשׁוע}\} , \quad T_{\text{שְׁרִיףּ}} = T_2 = \{t_2\} .$$

- יש שתי אפשרויות לאמונה של שחקן II (השריף):

$$p_2 = P(t_1 = \text{פשׁוע} | t_2) = p , \quad p_2 = P(t_1 = \text{ازרח} | t_2) = 1 - p .$$

- ההפונקציית התשלומים ניתנת בהצורה אסטרטגית למטרה:

		פושע = t_1	
שריף II		shoot	not shoot
חשוד I	shoot	0, 0	2, -2
	not shoot	-2, -1	-1, 1

		ازרח = t_2	
שריף II		shoot	not shoot
חשוד I	shoot	-3, -1	-1, -2
	not shoot	-2, -1	0, 0

הסטרטגייה של שחקן I (חשוד), לפי התיאור בשאלה, היא

$$s_1(t_1 = \text{פושע}) = \text{לירות}, \quad s_1(t_1 = \text{פושע}) = \text{פושע}.$$

כעת נמצא את השווי משקל הביסיאני.

אם טיפoso של החשוד הוא "פושע", האסטרטגייה השולטת של החשוד היא "לירות".

אם טיפoso של החשוד הוא "ازרח", האסטרטגייה השולטת של החשוד היא "לא לירות".

לאחר סילוק של אסטרטגיות הנשלטות חזק, אם השrif יורה הוא קיבל תשלום 0 בהסתברות p – 1. כלומר תוחלת התשלום

של השrif היא $1 - p$.

אם השrif לא יורה הוא קיבל תשלום 2 – בהסתברות p ויקבל תשלום 0 בהסתברות p – 1. כלומר תוחלת התשלום

של השrif היא $2p$.

לפיכך השrif תמיד יורה אם

$$p - 1 > -2p \Rightarrow p > \frac{1}{3}.$$

■

הגדרה 7.3 שווי משקל נאש ביסיאני

נתון משחק ביסיאני:

$$G = \{(A_1, \dots, A_n), (T_1, \dots, T_n), (p_1, \dots, p_n), u_1, \dots, u_n\}.$$

: $t_i \in T_i$ הוא שווי משקל נאש ביסיאני אם לכל שחקן i ולכל טיפוס

$$\sum_{t_{-i} \in T_i} u_i(s_1^*(t_1), \dots, s_i^*(t_i), \dots, s_n^*(t_n)) P(t_{-i}|t_i) = \max_{a_i \in A_i} \sum_{t_{-i} \in T_i} u_i(s_1^*(t_1), \dots, a_i, \dots, s_n^*(t_n)) P(t_{-i}|t_i)$$

ז"א אף שחקן לא רוצה לשנות את האסטרטגייה שלו (שלה), גם אם השינוי הוא בפועל אחת בטיפוס אחד.

הגדרה 7.4 משחק שני שחקנים ביסיאני

הצורה הנורמלית של משחק ביסיאני 2 שחקנים היא

$$G = \{(A_1, A_2), (T_1, T_2), (p_1, p_2), u_1, u_2\}$$

כאשר

• $A_1 = \{a_1, b_1, \dots\}$ קבוצות הפעולות לשחקן 1 ו- $A_2 = \{a_2, b_2, \dots\}$ קבוצות הפעולות לשחקן 2

• $T_1 = \{T_1, T_2, \dots\}$ קבוצת ערכיהם פרטיים של שחקן 1 ו- $T_2 = \{T_1, T_2, \dots\}$ קבוצת ערכיהם פרטיים של שחקן 2.

• p_1 מסמן את ההסתברות לפיקחן 1, שהערך פרטיא של שחקן 2 הוא t_2 במידעה שהערך פרטיא של

הו t_1 :

$$p_1 = P(t_2|t_1)$$

וכן p_2 מסמן את ההסתברות לפי שחקן 2, שהערך פרט依 של שחקן 1 הוא t_1 בידיעת שהערך פרט依 שלו הוא t_2 :

$$p_2 = P(t_1|t_2)$$

- u_1 פונקציית התשלום של שחקן 1 שהיא פונקציה של הפעולות $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ והערך הפרט依 שלו $t_1 \in T_1$ שידוע רק לשחקן 1:
 $u_1(a_1, a_2, t_1)$

- u_2 פונקציית התשלום של שחקן 2 שהיא פונקציה של הפעולות $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ והערך הפרט依 שלו $t_2 \in T_2$ שידוע רק לשחקן 2:
 $u_2(a_1, a_2, t_2)$.

הגדרה 7.5 אסטרטגיה במשחק שני שחקנים בייסיאני

נתון משחק שני שחקנים בייסיאני:

$$G = \{(A_1, A_2), (T_1, T_2), (p_1, p_2), u_1, u_2\}.$$

אסטרטגיה לשחקן 1 היא פונקציה $s_1(t_1)$ של $t_1 \in T_1$ כך שלכל $t_1 \in T_1$ הפונקציה $s_1(t_1)$ נותנת פעולה $a_1 \in A_1$
 $s_1 : t_1 \mapsto a_1$.

וכן אסטרטגיה של שחקן 2 היא פונקציה $s_2(t_2)$ של $t_2 \in T_2$ כך שלכל $t_2 \in T_2$ הפונקציה $s_2(t_2)$ נותנת פעולה $a_2 \in A_2$
 $s_2 : t_2 \mapsto a_2$.

הגדרה 7.6 שיווי משקל נאש בייסיאני

נתון משחק שני שחקנים בייסיאני:

$$G = \{(A_1, A_2), (T_1, T_2), (p_1, p_2), u_1, u_2\}.$$

הוקטור אסטרטגיות (s_1^*, s_2^*) הוא שיווי משקל נאש בייסיאני אם

$$\sum_{t_2 \in T_2} u_1(s_1^*(t_1), s_2^*(t_2)) P(t_2|t_1) = \max_{a_1 \in A_1} \sum_{t_2 \in T_2} u_1(a_1, s_2^*(t_2)) P(t_2|t_1)$$

$$\sum_{t_1 \in T_1} u_2(s_1^*(t_1), s_2^*(t_2)) P(t_1|t_2) = \max_{a_2 \in A_2} \sum_{t_1 \in T_1} u_2(s_1^*(t_1), a_2) P(t_1|t_2)$$

דוגמה 7.3 (מלחמת המינים עם ידיעה לא שלמה)

זוג מתכנן בילוי למועדון שבת. האפשרויות העומדות לרשותם הן מסעדה (R) או צפיה במסעדה כדורגל, (F). הגבר (P) מעדיף צפיה במסעדה הכדורגל בעוד האישה (C) מעדיפה את המסעדה אך שניהם מעדיפים להיות ביחד גם אם הבילוי המשותף הוא הפחות עדיף בעיניהם.

אם מקבלת תשלום $t_c + 2$ אם שניהם הולכים למסעדה כאשר t_c ערך פרטי שידוע רק ל- Camilla ולא -Pete.

Pete מקבל תשלום $2 + t_p$ אם שניהם הולכים למשחק כדורגל כאשר t_p ערך פרטי שידוע רק ל- Pete ולא Camilla.

	Pete	Restaurant	Football
Camilla			
Restaurant	$2 + t_c, 1$	0, 0	
Football	0, 0		$1, 2 + t_p$

הערך הפרטי t_C מתפלג אחיד בטווח $[0, x]$ ו- t_P מתפלג אחיד בטווח $[0, x]$.

Camilla משחקת R אם t_C גדול מערך מסוים α , אחרת היא משחקת F .

Pete משחק F אם t_P גדול מערך מסוים β , אחרת הוא משחק R .

מצאו את הערכיהם של α ו- β עבורם הווקטור אסטרטגיות $(s_1^*, s_2^*) = (R, F)$ שיווי משקל נאש בייסיאני של המשחק.

פתרון:

	P	R	F
C			
R	$2 + t_c, 1$	0, 0	
F	0, 0		$1, 2 + t_p$

$$G = \{(A_C, A_P), (T_C, T_P), (p_C, p_P), u_C, u_P\}$$

t_P ו- t_C מתפלגים אחידה בתחום $[0, x]$ והם בלתי תלויים, לכן

$$p_C = P(t_C|t_P) = P(t_C), \quad p_P = P(t_P|t_C) = P(t_P).$$

$$A_C = \{\text{Restaurant, Football}\} = \{R, F\}, \quad A_P = \{\text{Restaurant, Football}\} = \{R, F\}.$$

. $\frac{\alpha}{x}$ משחקת R בהסתברות Camilla

. $\frac{\beta}{x}$ משחק F בהסתברות Pete

תשלום ל- Camilla אם היא משחקת R

$$u_1(s_1 = R) = \frac{\beta}{x} (2 + t_C) + \left(\frac{x - \beta}{x}\right) \cdot 0 = \frac{\beta}{x} (2 + t_C).$$

תשלום ל- Camilla אם היא משחקת F

$$u_1(s_1 = F) = \frac{\beta}{x} \cdot 0 + \left(\frac{x - \beta}{x}\right) \cdot 1 = \frac{1 - \beta}{x}.$$

$$u_1(s_1 = R) \geq u_1(s_1 = F) \Rightarrow \frac{\beta}{x} (2 + t_C) \geq \frac{x - \beta}{x} \Rightarrow t_C \geq \frac{x - \beta}{\beta} - 2 = \frac{x}{\beta} - 3 \stackrel{!}{=} \alpha .$$

תשלום ל- A אם הוא משחק R :

$$u_2(s_2 = R) = \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) \cdot 1 + \frac{\alpha}{x} \cdot 0 = 1 - \frac{\alpha}{x} .$$

תשלום ל- A אם הוא משחק F :

$$u_2(s_2 = F) = \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) \cdot 0 + \frac{\alpha}{x} (2 + t_P) = \frac{\alpha}{x} (2 + t_P) .$$

$$u_2(s_2 = F) \geq u_2(s_2 = R) \Rightarrow \frac{\alpha}{x} (2 + t_P) \geq 1 - \frac{\alpha}{x} \Rightarrow (2 + t_P) \geq \frac{x}{\alpha} - 1 \Rightarrow t_P \geq \frac{x}{\alpha} - 3 \stackrel{!}{=} \beta .$$

הפתרונות של המערכת הוא

$$\frac{x}{\left(\frac{x}{\beta} - 3\right)} - 3 = \beta \Rightarrow x - \frac{3x}{\beta} + 9 = x - 3\beta \Rightarrow -\frac{3x}{\beta} + 9 + 3\beta = 0 \Rightarrow -3x + 9\beta + 3\beta^2 = 0$$

$$\Rightarrow \beta^2 + 3\beta - x = 0 \Rightarrow \beta = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2} .$$

$$\text{לכן } \frac{x}{\alpha} - 3 = \beta$$

$$\alpha = \frac{x}{3 + \beta} = \frac{2x}{3 + \sqrt{9 + 4x}} = \frac{2x}{3 + \sqrt{9 + 4x}} \cdot \frac{(3 - \sqrt{9 + 4x})}{(3 - \sqrt{9 + 4x})} = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2} = \beta$$

לכן התשובה סופית היא האסטרטגיה $(s_1^*, s_2^*) = (R, F)$ שיווי משקל אם

$$t_C \geq \alpha = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2} , \quad t_P \geq \beta = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2} .$$



דוגמה 7.4 (מרכז מחיר ראשון)

במרכז מחיר ראשון שני שחקנים $1, 2 = i$ מתחרים על קניית מוצר מסוים. שחקן 1 מעריך שה מוצר שווה v_1 ושהקן 2 מעריך כי המוצר שווה v_2 . ז"א אם שחקן i מנצח ומשלם מחיר p או הרווח שלו יהיה $p - v_i$. הערכות של השני שחקנים הם בלתי תלויים ומוגבלים אחד באחד בתחום $[0, 1]$. השחקן עם ההצעה הגבוהה ביותר מנצח ומשלם את מחיר שווה להצעה שלו. השחקן השני לא משלם כלום. במקרה של תיקו מטילים מטבע. השחקנים אדישים טיכון.

פתרון:

$$G = \{(A_1, A_2), (T_1, T_2), (p_1, p_2), u_1, u_2\}$$

קובוצת הפעולות של שחקן 1 היא ההצעות האפשרות שלו, $b_1 \in [0, \infty)$, וקובוצת הפעולות של שחקן 2 היא ההצעות האפשרות שלו $b_2 \in [0, \infty)$

$$A_1 = [0, \infty) , \quad A_2 = [0, \infty) .$$

הקובוצה T_1 של ערכיהם פרטיים של שחקן 1 היא הקובוצה של הערכות $v_1 \in [0, 1]$ של המוצר שלו, כמו כן T_2 הוא הקובוצה של הערכות $v_2 \in [0, 1]$.

$$T_1 = [0, 1] , \quad T_2 = [0, 1] .$$

השתי הערכות v_1, v_2 בלתי תלויות לנכון $p_1 = P(v_2 = \beta | v_1 = \alpha) = P(v_2 = \beta) = \beta$ $\text{ז"א שחקן } 1 \text{ מאמין כי}$
 $p_2 = P(v_1 = \alpha | v_2 = \beta) = P(v_1 = \alpha) = \alpha$. ולהפוך, β בנסיבות v_1 קשור לערך של v_2 . $\text{ולחץ, שחקן } 2 \text{ מאמין כי}$
 α בנסיבות v_2 קשור לערך של v_1 .

$$u_1(b_1, b_2, v_1, v_2) = \begin{cases} v_1 - b_1 & b_1 > b_2 \\ \frac{v_1 - b_1}{2} & b_1 = b_2 \\ 0 & b_1 < b_2 \end{cases}, \quad u_2(b_1, b_2, v_1, v_2) = \begin{cases} v_2 - b_2 & b_2 > b_1 \\ \frac{v_2 - b_2}{2} & b_2 = b_1 \\ 0 & b_2 < b_1 \end{cases},$$

הוקטור אסטרטגיות $(b_1^*(v_1), b_2^*(v_2))$ שיווי משקל נאש בייסיאני אם

$$u_1(b_1^*, b_2^*, v_1, v_2) = \max_{b_1} \left[(v_1 - b_1) P(b_1 > b_2^*(v_2)) + \frac{1}{2} (v_1 - b_1) P(b_1 = b_2^*(v_2)) \right]$$

$$u_2(b_1^*, b_2^*, v_1, v_2) = \max_{b_2} \left[(v_2 - b_2) P(b_2 > b_1^*(v_1)) + \frac{1}{2} (v_2 - b_2) P(b_2 = b_1^*(v_1)) \right]$$

אנחנו משערים כי קיים שיווי משקל לינארי:

$$b_1^*(v_1) = a_1 + c_1 v_1, \quad b_2^*(v_2) = a_2 + c_2 v_2.$$

נניח כי שחקן 2 בוחר באסטרטגיה v_2 , אז עבור הערך $b_2^*(v_2) = a_2 + c_2 v_2$, תשובה טובה ביותר לשחקן 1 מקיימת

$$\begin{aligned} u_1(b_1^*, b_2^*, v_1, v_2) &= \max_{b_1} \left[(v_1 - b_1) P(b_1 > a_2 + c_2 v_2) + \frac{1}{2} (v_1 - b_1) P(b_1 = a_2 + c_2 v_2) \right] \\ &= \max_{b_1} (v_1 - b_1) P\left(v_2 < \frac{b_1 - a_2}{c_2}\right) \\ &= \max_{b_1} (v_1 - b_1) \left(\frac{b_1 - a_2}{c_2}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial b_1} \left(\frac{1}{c_2} (v_1 - b_1) (b_1 - a_2) \right) = \frac{v_1 + a_2 - 2b_1}{c_2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow b_1^* = \frac{v_1 + a_2}{2}$$

נניח כי שחקן 1 בוחר באסטרטגיה v_1 , אז עבור הערך $b_1^*(v_1) = a_1 + c_1 v_1$, תשובה טובה ביותר לשחקן 2 מקיימת

$$\begin{aligned} u_2(b_1^*, b_2^*, v_1, v_2) &= \max_{b_2} \left[(v_2 - b_2) P(b_2 > a_1 + c_1 v_1) + \frac{1}{2} (v_2 - b_2) P(b_2 = a_1 + c_1 v_1) \right] \\ &= \max_{b_2} (v_2 - b_2) P\left(v_1 < \frac{b_2 - a_1}{c_1}\right) \\ &= \max_{b_2} (v_2 - b_2) \left(\frac{b_2 - a_1}{c_1}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial b_2} \left(\frac{1}{c_1} (v_2 - b_2) (b_2 - a_1) \right) = \frac{v_2 + a_1 - 2b_2}{c_1} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow b_2^* = \frac{v_2 + a_1}{2}$$

לכן

$$b_1^* = \frac{v_1}{2} + \frac{a_2}{2} = a_1 + c_1 v_1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{a_2}{2},$$

$$b_2^* = \frac{v_2}{2} + \frac{a_1}{2} = a_2 + c_2 v_2 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{a_1}{2}.$$

הפתרון למערכת זה היא

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 0.$$

לפיכך האסטרטגיות של שיווי משקל הן

$$b_1^*(v_1) = \frac{v_1}{2}, \quad b_2^*(v_2) = \frac{v_2}{2}.$$

■

דוגמה 7.5 (דו-אPOL עם ערכיהם פרטיים)

שני יצנים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתרחמים על שוק הקונים הפורטנציאליים. הייצנים מחליטים על הכמות שהם ייצורו, וההיצע הכלול קובע את מחיר המוצר, שהוא זהה לשני הייצנים. נסמן ב- q_1 וב- q_2 את הכמות שמייצרים הייצנים 1 ו- 2 בהתאם. אזי הכמות הכלולות של המוצרים בשוק הוא $q_1 + q_2$. נניח כי המחיר של יחידה שווה ל- $P = a - q_1 - q_2$ כאשר a פרמטר הביקוש. עלות הייצור של יחידה לייצן הראשון וליצן 2 הוא c .

הפרמטר הביקוש a שווה ל- a^H (ביקוש גבוה) או a^L (ביקוש נמוך). הערך של a ידוע לייצן הראשון אך אינה ידוע לייצן השני. כל שיצן זה יודע שהוא שפהפרמטר הביקוש שווה ל- a^L בהסתברות θ או a^H בהסתברות $1 - \theta$.

מה הם התנאים על a_H, a_L, θ ו- c כך ש- הכמות q_1, q_2 חיוביות בשוויי משקל.

מהו השוויי משקל נאש הביסיאני של המשחק?

פתרון:

כמות של יצן 1: q_1 . כמות של יצן 2: q_2 .

מחיר ליחידה אחת של המוצר: $P = a - q_1 - q_2$.

עלות ליחידה לשחקן 1 ולשחקן 2: $c = 1$.

פרמטר הביקוש לשחקן 1: $a = a^L$ או $a = a^H$ והוא ידוע לשחקן 1 ולא לשחקן 2.

עבור שחקן 2: $a = a^L$ בהסתברות θ ו- $a = a^H$ בהסתברות $1 - \theta$.

צורה ביסיאנית של המשחק:

$$N = \{1, 2\} \bullet$$

$$T_2 = \{1\}, T_1 = \{a^L, a^H\} \bullet$$

$$p_{II}(t_1 = a^L | t_2 = 1) = p_{II}(t_1 = a^L) = \theta \bullet$$

$$p_{II}(t_1 = a^H | t_2 = 1) = p_{II}(t_1 = a^H) = 1 - \theta \bullet$$

$$A_2 = \{q_2\}, A_1 = \{q_1^H, q_1^L\} \bullet$$

- פורניצית תשלום לשחקן 1:

$$u_1(s_1(t_1), s_2(t_2), t_1)$$

- פורניצית תשלום לשחקן 2:

$$u_2(s_1(t_1), s_2(t_2), t_2 = 1)$$

•

$$s_1(t = a^H) = q_1^H, \quad s_2(t_2 = a^L) = q_1^L, \quad s_2(t_2 = 1) = q_2.$$

לשחקן 1 אם $a = a^H$

$$u_1(s_1(t = a^H), s_2(t_2), t_1 = a^H) = u_1(q_1^H, q_2) = q_1^H(a - q_1^H - q_2 - c).$$

לשחקן 1 אם $a = a^L$

$$u_1(s_1(t = a^L), s_2(t_2), t_1 = a^L) = u_1(q_1^L, q_2) = q_1^L(a - q_1^L - q_2 - c).$$

לשחקן 2 בהסתברות θ $s_1(t_1 = a^H) = q_1^H$ ו θ $s_1(t_1 = q^L) = q_1^L$

$$u_2(s_1(t_1), s_2(t_2), t_2 = 1) = u_1(q_1^H, q_1^L, q_2) = q_2(\theta a^L + (1 - \theta)a^H - \theta q_1^L - (1 - \theta)q_1^H - q_2 - c)$$

$$\frac{\partial u_1(q_1^H, q_2)}{\partial q_1^H} = a - c - 2q_1^H - q_2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow q_1^{H*} = \frac{a_H - c - q_2}{2}.$$

$$\frac{\partial u_1(q_1^L, q_2)}{\partial q_1^L} = a - c - 2q_1^L - q_2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow q_1^{L*} = \frac{a_L - c - q_2}{2}.$$

$$\frac{\partial u_2(q_1^L, q_1^H, q_2)}{\partial q_2} = \theta a^L + (1 - \theta)a^H - \theta q_1^L - (1 - \theta)q_1^H - 2q_2 - c \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow q_2^* = \frac{\theta a^L + (1 - \theta)a^H - \theta q_1^L - (1 - \theta)q_1^H + c}{2}.$$

פתרונות למערכת זו הוא

$$q_2^* = \frac{\theta a_H + (1 - \theta)a_L - c}{3}$$

$$q_1^H = \frac{(3 - \theta)a_H - (1 - \theta)a_L - 2c}{6}$$

$$q_1^L = \frac{(2 + \theta)a_L - \theta a_H - 2c}{6}$$

התנאים עבורם $q_2 \geq 0$ הם

$$q_2 \geq 0 \Rightarrow \theta a_H + (1 - \theta)a_L - c \geq 0 \Rightarrow \theta \geq \frac{c - a_L}{a_H - a_L}.$$

$$q_1(a_L) \geq 0 \Rightarrow \frac{(2 + \theta)a_L - \theta a_H - 2c}{6} \geq 0 \Rightarrow \theta \leq \frac{2(c - a_L)}{a_H - a_L}.$$

$$q_1(a_H) \geq 0 \Rightarrow \frac{(3 - \theta)a_H - (1 - \theta)a_L - 2c}{6} \geq 0 \Rightarrow \theta \leq \frac{2c - 3a_H + a_L}{a_H - a_L}.$$

