מחלקה למדעי המחשב

09/06/24 כ"ב בניסן תשפ"ד
$09:00 - 12:00$

אלגברה ליניארית 1 למדמ"ח

מועד ג'

מרצים: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר, ד"ר מרינה ברשדסקי.

תשפ"ד סמסטר א'

השאלון מכיל 11 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.
- יש לציין את השאלות שעניתם עליהן בתחילת המחברת.

==

שאלה 1 **(25 נקודות)**

א) (13 נקודות) נתונה המערכת הליניארית

$$\left.\begin{aligned} x+3y+(k-2)z &= 3 \\ kx+(5k-4)y+(k^2-2k+4)z &= 3k+2 \\ -2kx+(-4-4k)y+(-k^2-k+8)z &= -5k-1 \end{aligned}\right\}$$

עבור אילו ערכי הפרמטר k למערכת פתרון יחיד, אינסוף פתרונות ואין פתרון. במקרה של אינסוף פתרונות רשמו את הפתרון הכללי.

ב) (3 נקודות) נתונים הווקטורים במרחב ווקטורי $\mathbb{R}_{\le 2}[x]$:

$$\left\{u_1 = 1+kx-2kx^2 \ , u_2 = 3+(5k-4)x+(-4-4k)x^2 \ , u_3 = k-2+(k^2-2k+4)x+(-k^2-k+8)x^2\right\} .$$

עבור אילו ערכי הפרמטר k הקבוצה $\{u_1,u_2\}$ פורשת $\mathbb{R}_{\le 2}[x]$?

ג) (3 נקודות) עבור אילו ערכי הפרמטר k הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ פורשת $\mathbb{R}_{\le 2}[x]$?

לכל אחד מהקבוצות הבאות הוכיחו או הפריכו שהיא שדה:

ד) (3 נקודות) $F_1=\{a\in\mathbb{R}\}$ שעליה מוגדרות הפעולות חיבור $\oplus$ וכפל $\odot$ לפי הנוסחאות:

$$a\oplus b = a+2b \ , \qquad a\odot b = 2ab \ .$$

ה) (3 נקודות) $F_2=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$ עליה מוגדרות הפעולות חיבור מטריצות וכפל מטריצות.

שאלה 2 **(25 נקודות)** במרחב $\mathbb{R}^{2\times 2}$ נתונים הווקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix},\ u_2=\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix},\ u_3=\begin{pmatrix}-1&8\\1&5\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}a&1\\b&5\end{pmatrix}$$

א) (5 נקודות) עבור אילו ערכי a,b וקטור w שייך לתת מרחב הנפרש על ידי הווקטורים u_1,u_2,u_3?

ב) (5 נקודות) עבור הערכים של a,b שמצאת בסעיף א', רשמו את וקטור w כצירוף לינארי של u_1,u_2,u_3 בשתי דרכים שונות (רשמו שני צירופים שונים).

ג) (4 נקודות) האם הווקטורים u_1,u_2,u_3,w פורשים המרחב $\mathbb{R}^{2\times 2}$? נמקו את תשובתכם.

ד) (5 נקודות) האם הווקטורים u_1,u_2,u_3 תלויים לינארית? אם כן מצאו צירוף לינארי לא טריוויאלי של u_1,u_2,u_3 השווה לווקטור האפס.

ה) (6 נקודות) נניח כי $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3,\mathrm{v}_4$ ווקטורים של $\mathbb{R}^3$. האם ייתכן שהם בלתי תלויים ליניאריית? נמקו את תשובתכם.

שאלה 3 **(25 נקודות)** נתונה מטריצה C במרחב $\mathbb{R}^{3\times 3}$: $C=\begin{pmatrix} a & 9 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a & a \end{pmatrix}$

א) (5 נקודות) לכל ערך של a מצאו את המימד ובסיס של $\text{Nul}(C)$.

ב) (5 נקודות) לכל ערך של a מצאו את המימד ובסיס של $\text{Col}(C)$.

ג) (5 נקודות) נתונה מטריצה $M\in\mathbb{R}^{4\times 8}$. האם יכול להיות ש- $\dim\left(\text{Nul}(M)\right)=3$? נמקו את תשובתכם.

תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

ד) (5 נקודות) אם $AB=A$ ו- $|A|\neq 0$ אז $B=I$.

ה) (5 נקודות) אם קיים ווקטור $u\in\mathbb{R}^n$ $(u\neq\bar{0})$ המקיים $Au=Bu$ אז $A=B$.

שאלה 4 **(25 נקודות)**

א) (7 נקודות) נתונות הקבוצות ווקטורים של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$:

$$B=\left\{1+2x+3x^2\ ,1-x^2\ ,1+2x\right\}\ ,\ C=\left\{2x-x^2\ ,1+x\ ,1+x^2\right\}\quad .$$

הוכיחו כי הקבוצה B בסיס של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ והקבוצה C בסיס של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

ב) (6 נקודות) נתון הווקטור w של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ אשר הווקטור הקואורדינטות שלו על פי בסיס B הינו $[w]_B=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$. מצאו את הווקטור הקואורדינטות של w על פי הבסיס C.

ג) (6 נקודות) נתונה קבוצת ווקטורים $\{b_1,b_2,b_3\}$ של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ אשר בלתי תלויה לינאריית. נתונים הווקטורים w_1,w_2,w_3 של המרחב ווקטורי $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$:

$$w_1=b_1+b_2+b_3\ ,\qquad w_2=b_1-b_2+3b_3\ ,\qquad w_3=b_1+2b_2\ .$$

קבעו אם הווקטורים w_1,w_2,w_3 בלתי תלויים ליניארית.

יהיו u_1,u_2,u_3 ווקטורים שונים של $\mathbb{R}^n$ ($u_1\neq u_2\neq u_3$ ו- $n\geq 3$). הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

ד) (3 נקודות) אם $\{u_1,u_2\}$ בת"ל אז $\{u_1,u_2,u_3\}$ בת"ל.

ה) (3 נקודות) אם $\{u_1,u_2,u_3\}$ בת"ל אז $\{u_1,u_2\}$. בת"ל.

שאלה 5 **(25 נקודות)** תהי $T:\mathbb{R}_{\leq 2}[x]\to\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י:

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=(a-2c)+(a-b-c)x+(a-2c)x^2\ .$$

א) **(5 נקודות)** מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

ב) **(5 נקודות)** מצאו בסיס ומימד לגרעין של T.

ג) **(5 נקודות)** מצאו בסיס ומימד לתמונה של T.

ד) **(5 נקודות)** תהי $A\in\mathbb{R}^{8\times 8}$ מטריצה הפיכה המקיימת $A^7+32A^2=0$. חשבו את $|A|$.

ה) **(5 נקודות)** נתונה הפונקציה $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+1\\y\\x+y\end{pmatrix}\ .$$

הוכיחו או הפריכו כי T העתקה לינארית.

פתרונות

<u>שאלה 1</u> (25 נקודות)

א) (13 נקודות)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & k-2 & 3 \\ k & 5k-4 & (k-2)k+4 & 3k+2 \\ -2k & -4(k+1) & -k^2-k+8 & -5k-1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3+2kR_1]{R_2 \to R_2 - kR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & k-2 & 3 \\ 0 & 2(k-2) & 4 & 2 \\ 0 & 2(k-2) & k^2-5k+8 & k-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & k-2 & 3 \\ 0 & 2(k-2) & 4 & 2 \\ 0 & 0 & k^2-5k+4 & k-3 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & k-2 & 3 \\ 0 & 2(k-2) & 4 & 2 \\ 0 & 0 & (k-4)(k-1) & k-3 \end{array}\right)$$

עבור $\underline{k=2}$ נקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to 2R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש משתנה חופשי ואין שורת סתירה לכן יש אינסוף פתרונות. פתרון הכללי: $(x,y,z) = \left(3-3y, y, \frac{1}{2}\right)$, $y \in \mathbb{R}$.

עבור $\underline{k=4}$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. קיבלנו שורת סתירה ולכן לא קיים פתרון.

עבור $\underline{k=1}$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$. קיבלנו שורת סתירה ולכן לא קיים פתרון.

עבור $k \neq 1,2,4$ אין שורת סתירה ואין משתנה חופשי לכן למערכת פתרון יחיד.

ב) (3 נקודות) $\dim\left(\mathbb{R}_{\leq 2}[x]\right) = 3$ ובקבוצה $\{u_1, u_2\}$ יש רק 2 ווקטורים לכן לכן אין מצב ש $\{u_1, u_2\}$ פורשת $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. ז"א לא קיים ערך של k עבורו הקבוצה $\{u_1, u_2\}$ פורשת $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

ג) (3 נקודות) נרשום $\{u_1, u_2, u_3\}$ כווקטורים על ידי האיזומורפיזם הטבעי:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -2k \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5k-4 \\ -4-4k \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} k-2 \\ k^2-2k+4 \\ -k^2-k+8 \end{pmatrix}$$

נבדוק עבור אילו ערכי k הווקטורים בת"ל. בעזרת סעיף א':

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k-2 \\ k & 5k-4 & (k-2)k+4 \\ -2k & -4(k+1) & -k^2-k+8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & k-2 \\ 0 & 2(k-2) & 4 \\ 0 & 0 & (k-4)(k-1) \end{pmatrix}$$

עבור $k \neq 1,2,4$ כל העמודות מובילות לכן הקבוצה בת"ל לכן הקבוצה פורשת $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

ד) (4 נקודות) F_1 לא שדה. דוגמה נגדית: $a=1, b=2$.

$$1 \oplus 2 = 1+2\cdot 2 = 5\ , \quad 2 \oplus 1 = 2+2\cdot 1 = 4\ , \quad 1 \oplus 2 \neq 2 \oplus 1\ .$$

כלומר חוק החילוף לא מתקיים.

ה) (4 נקודות) F_2 לא שדה. דוגמה נגדית: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

A לא הפיכה לכן לא קיימת A^{-1} כך ש- $A \cdot A^{-1} = I$ כאשר I מטריצה יחידה.

שאלה 2 **(25 נקודות)**

א) (5 נקודות) $\mathbb{R}^{2\times 2} \cong \mathbb{R}^4$ לכן אפשר לעבוד עם הווקטורים ב- $\mathbb{R}^4$:

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\ , \ \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ , \ \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\ , \ \mathrm{v} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{v} = \mathrm{span}\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v} = k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2 + k_3\mathrm{v}_3\ .$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 2 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 3 & 2 & 5 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4\to R_4-3R_1]{\substack{R_2\to R_2-2R_1 \\ R_3\to R_3-R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & -5 & 10 & 1-2a \\ 0 & -1 & 2 & b-a \\ 0 & -4 & 8 & 5-3a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & -1 & 2 & b-a \\ 0 & -5 & 10 & 1-2a \\ 0 & -4 & 8 & 5-3a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4\to R_4-4R_2]{R_3\to R_3-5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & -1 & 2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 3a-5b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-4b+5 \end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון כאשר $\begin{cases} 3a-5b &= -1 \\ a-4b &= -5 \end{cases} \Leftarrow b=2, a=3$.

ב) (5 נקודות) עבור $b=2, a=3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} k_1 &= -3k_3+1 \\ k_2 &= 2k_3+1 \end{cases}$ לכל $k_3 \in \mathbb{R}$. נציב $k_3=1 \Leftarrow k_1=-2, k_2=3$.

$$w = -2u_1 + 3u_2 + u_3\ .$$

נציב $k_3 = 0 \Leftarrow k_1=1, k_2=1$.

$$w = u_1 + u_2\ .$$

ג) (4 נקודות)

u_1, u_2, u_3 תלויים לינארית בגלל שלא כל העמודות מובילות, לכן u_1, u_2, u_3, w תלויים ליניארית. לפיכך u_1, u_2, u_3, w אינם פורשים את $\mathbb{R}^{2\times 2}$. נמתא את הצירוף הלינארי הלא טריוויאלי של u_1, u_2, u_3 ששווה לווקטור האפס:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$(x,y,z) = (-3z, 2z, z),\ \ z \in \mathbb{R}$. נציב $z=1 \Leftarrow x=3, y=2$:

$$-3u_1 + 2u_2 + u_3 = 0\ .$$

ד) (6 נקודות)

שאלה 3 (25 נקודות)

א) (5 נקודות)

$$\begin{pmatrix} a & 9 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a & a \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to aR_3 - R_1]{R_2 \to aR_1 - R_1} \begin{pmatrix} a & 9 & 0 \\ 0 & a^2-9 & a \\ 0 & a^2-9 & a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} a & 9 & 0 \\ 0 & a^2-9 & a \\ 0 & 0 & (a-1)a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 9 & 0 \\ 0 & (a+3)(a-3) & a \\ 0 & 0 & (a-1)a \end{pmatrix}$$

עבור עבור $a=3$ נקבל $\begin{pmatrix}3&9&0\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2} \begin{pmatrix}3&9&0\\0&0&3\\0&0&6\end{pmatrix}$. פתרון הכללי למשוואה הומוגנית:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3y\\y\\0\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\quad y\in\mathbb{R}\ .$$

$B_{\text{Nul}(C)}=\left\{\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\dim\left(\text{Nul}(C)\right)=1$.

עבור $a=-3$ נקבל $\begin{pmatrix}-3&9&0\\0&0&-3\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3+4R_2} \begin{pmatrix}-3&9&0\\0&0&-3\\0&0&12\end{pmatrix}$. פתרון הכללי למשוואה הומוגנית:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3y\\y\\0\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\quad y\in\mathbb{R}\ .$$

$B_{\text{Nul}(C)}=\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\dim\left(\text{Nul}(C)\right)=1$.

עבור $a=1$ נקבל $\begin{pmatrix}8&0&9\\0&-8&1\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to 8R_1+9R_2} \begin{pmatrix}1&9&0\\0&-8&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. פתרון הכללי למשוואה הומוגנית:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{9}{8}z\\\frac{1}{8}z\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{8}z\begin{pmatrix}-9\\1\\8\end{pmatrix}\ ,\quad z\in\mathbb{R}\ .$$

$B_{\text{Nul}(C)}=\left\{\begin{pmatrix}-9\\1\\8\end{pmatrix}\right\}$, $\dim\left(\text{Nul}(C)\right)=1$.

ב) (5 נקודות)

עבור $a=0$, $B_{\text{Col}(C)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\dim\left(\text{Col}(C)\right)=1$.

עבור $a=3$, $B_{\text{Col}(C)}=\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$, $\dim\left(\text{Col}(C)\right)=2$.

עבור $a=-3$, $B_{\text{Col}(C)}=\left\{\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}\right\}$, $\dim\left(\text{Col}(C)\right)=2$.

עבור $a=1$, $B_{\text{Col}(C)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$, $\dim\left(\text{Col}(C)\right)=1$.

עבור $a=-3$ נקבל $\begin{pmatrix}-3&9&0\\0&0&-3\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3+4R_2}\begin{pmatrix}-3&9&0\\0&0&-3\\0&0&12\end{pmatrix}$. פתרון הכללי למשוואה הומוגנית:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3y\\y\\0\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\quad y\in\mathbb{R}\ .$$

$B_{\text{Nul}(C)}=\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\dim\left(\text{Nul}(C)\right)=1$.

עבור $a=1$ נקבל $\begin{pmatrix}8&0&9\\0&-8&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to 8R_1+9R_2}\begin{pmatrix}1&9&0\\0&-8&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. פתרון הכללי למשוואה הומוגנית:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{9}{8}z\\\frac{1}{8}z\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{8}z\begin{pmatrix}-9\\1\\8\end{pmatrix}\ ,\quad z\in\mathbb{R}\ .$$

$B_{\text{Nul}(C)}=\left\{\begin{pmatrix}-9\\1\\8\end{pmatrix}\right\}$, $\dim\left(\text{Nul}(C)\right)=1$.

ג) (5 נקודות) $M\in\mathbb{R}^{4\times 8}$. אם $\dim\left(\text{Nul}(M)\right)=3$ אז $\text{rank}(M)=8-3=5$. ז"א $\dim\left(\text{Row}\left(M\right)\right)=5$. למטריצה M יש 4 שורות אז $\dim\left(\text{Row}\left(M\right)\right)\leq 4$. לכן לא יכול ליהות ש- $\dim\left(\text{Nul}(M)\right)=3$.

ד) (5 נקודות) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=A\ .$$

ה) (5 נקודות) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $u=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$.

$$Au=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ ,\quad Bu=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ .$$

הרי $Au=Bu$ ו- $A\neq B$.

שאלה 4 (25 נקודות)

א) (7 נקודות)

$$b_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\quad,\quad b_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\quad,\quad b_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}| & | & |\\ b_1 & b_2 & b_3\\ | & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & -4 & -3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות לכן b_1,b_2,b_3 בת"ל. $\dim\{b_1,b_2,b_3\}=3=\dim(\mathbb{R}_{\leq 2}[x])$ לכן הקבוצה $\{b_1,b_2,b_3\}$ מהווה בסיס של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

$$c_1=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\quad,\quad c_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad,\quad c_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}| & | & |\\ c_1 & c_2 & c_3\\ | & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to 2R_3+R_1}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות לכן c_1,c_2,c_3 בת"ל. $\dim\{c_1,c_2,c_3\}=3=\dim(\mathbb{R}_{\leq 2}[x])$ לכן הקבוצה $\{c_1,c_2,c_3\}$ מהווה בסיס של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

ב) (6 נקודות) $[w]_C=P_{B\to C}[w]_B$ כאשר $P_{B\to C}$ המטריצה המעבר מבסיס B ל- בסיס C.

$$(C|B)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&1&1\\2&1&0&2&0&2\\-1&0&1&3&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&2&0&2\\0&1&1&1&1&1\\-1&0&1&3&-1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to 2R_3+R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&2&0&2\\0&1&1&1&1&1\\0&1&2&8&-2&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&2&0&2\\0&1&1&1&1&1\\0&0&1&7&-3&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&2&0&2\\0&1&0&-6&4&0\\0&0&1&7&-3&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&8&-4&2\\0&1&0&-6&4&0\\0&0&1&7&-3&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to \frac{1}{2}R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&4&-2&1\\0&1&0&-6&4&0\\0&0&1&7&-3&1\end{array}\right)$$

$$.P_{B\to C}=\begin{pmatrix}4&-2&1\\-6&4&0\\7&-3&1\end{pmatrix}$$

$$[w]_C=P_{B\to C}[w]_B=\begin{pmatrix}4&-2&1\\-6&4&0\\7&-3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}_C \quad .$$

ג) (6 נקודות)

עלינו לבדוק האם $\exists$ צירוף לינארי <u>לא</u> טריוויאלי של w_1,w_2,w_3 אשר נותן את $\bar{0}$ (ווקטור האפס).

$$\begin{aligned}0=&\alpha_1w_1+\alpha_2w_2+\alpha_3w_3\\=&\alpha_1\left(b_1+b_2+b_3\right)+\alpha_2\left(b_1-b_2+3b_3\right)+\alpha_3\left(\right)\\=&(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)b_1+(\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3)b_2+(\alpha_1+3\alpha_2+0\alpha_3)b_3\end{aligned}$$

יש לנו כאן צירוף לינארי של b_1,b_2,b_3 שנותן את 0 מאחר והם בת"ל נקבל את המערכת הבאה:

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3&=0\\\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3&=0\\\alpha_1+3\alpha_2+0\alpha_3&=0\end{aligned}$$

אם למערכת פתרון יחיד אז w_1, w_2, w_3 בת"ל אחרת w_1, w_2, w_3 ת"ל.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

למערכת יש ∞ פתרונות $\Leftarrow$ w_1, w_2, w_3 ת"ל.
נשים לב

$$\frac{3}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2 = w_3 \ .$$

ד) **(3 נקודות)** טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ווקטורים של $\mathbb{R}^3$. הרי $\{u_1, u_2\}$ בת"ל ו- $\{u_1, u_2, u_3\}$ ת"ל.

ה) **(3 נקודות)** טענה נכונה. נוכיח דרך השלילה. נניח כי $\{u_1, u_2, u_3\}$ בת"ל ו- $\{u_1, u_2\}$ ת"ל.
אז מתקיים

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0$$

עם מקדמים לא כולם אפסים, כלומר אחד המקדמים, $\alpha_i \neq 0$.
נוסיף $0 \cdot u_3$ לשני האגפים ונקבל

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + 0 \cdot u_3 = 0$$

הרי קיבלנו צירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 עם מקדמים לא כולם אפסים ששווה לווקטור האפס.
ז"א u_1, u_2, u_3 ת"ל. זאת סותר את ההנחה ש- u_1, u_2, u_3 בת"ל.

שאלה 5 (25 נקודות)

א) **(5 נקודות)** המטריצה המייצגת הסטנדרטית: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

ב) **(5 נקודות)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1+2R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Nul}(A)$:

$$B_{\text{Nul}(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_{\text{Ker}(T)} = \left\{ 2 + 2x + x^2 \right\}$$

$\dim\left(\text{Ker}(T)\right) = 2$.

ג) (5 נקודות)

$$B_{\text{col}(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

$\dim\left(\text{Im}(A)\right) = 2$.

$$B_{\text{Im}(T)} = \left\{ 1 + x + x^2 \ , \ -x \right\} \ .$$

$\dim\left(\text{Im}(T)\right) = 2$.

ד) (5 נקודות)

ה) (5 נקודות)