תרגילים: NP שלמות

שאלה 1 הוכיחו כי לכל 3 בעיות A, B, C, אם $A \leq_P B$ וגם $B \leq_P C$ אזי $A \leq_P C$.

תשובות

שאלה 1 תהי f פונקצית הרדוקציה $A \leq_P B$ שמקיימת $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$ לכל $w \in \Sigma^*$.

תהי g פונקצית הרדוקציה $B \leq_P C$ שמקיימת $w \in B \Leftrightarrow f(w) \in C$ לכל $w \in \Sigma^*$.

נוכיח שקיימת רדוקציה $A \leq_P C$.

<u>פונקצית הרדוקציה h</u>

לכל $w \in \Sigma^*$ נגדיר $h(w) = g\left(f(w)\right)$.

<u>נכונות הרדוקציה</u>

שלב 1. נוכיח כי $w \in A \Leftrightarrow h(w) \in C$.

- אם $w \in A \Leftarrow f(w) \in B \Leftarrow h(w) = g\left(f(w)\right) \in C$.
- אם $w \notin A \Leftarrow f(w) \notin B \Leftarrow h(w) = g\left(f(w)\right) \notin C$.

שלב 2. נוכיח כי h חשיבה בזמן פולינומיאלי:

נסמן ב- p_f את הפולינומם של f.

נסמן ב- p_g את הפולינומם של g.

אזי לכל $w \in \Sigma^*$, זמן החישוב של $h(w)$ חסום על ידי :

$$p_f(|w|) + p_g\left(|f(w)|\right) \leq p_f(|w|) + p_g\left(p_f\left(|w|\right)\right) = p_f\left(|w|\right) + \left(p_f \circ p_f\right)\left(|w|\right)$$

כאשר $p_f \circ p_f$ הוא הרכבה של שני פולינומים. לכן ניתן לחשב את $h(w)$ בזמן פולינומיאלי בגודל $|w|$.