מחלקה למדעי המחשב

א' באלול תשפ"ד 04/09/2024
09 : 00 – 12 : 00

תורת המשחקים

מועד א'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר

תשפ"ד סמסטר ב'

השאלון מכיל 7 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (3 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

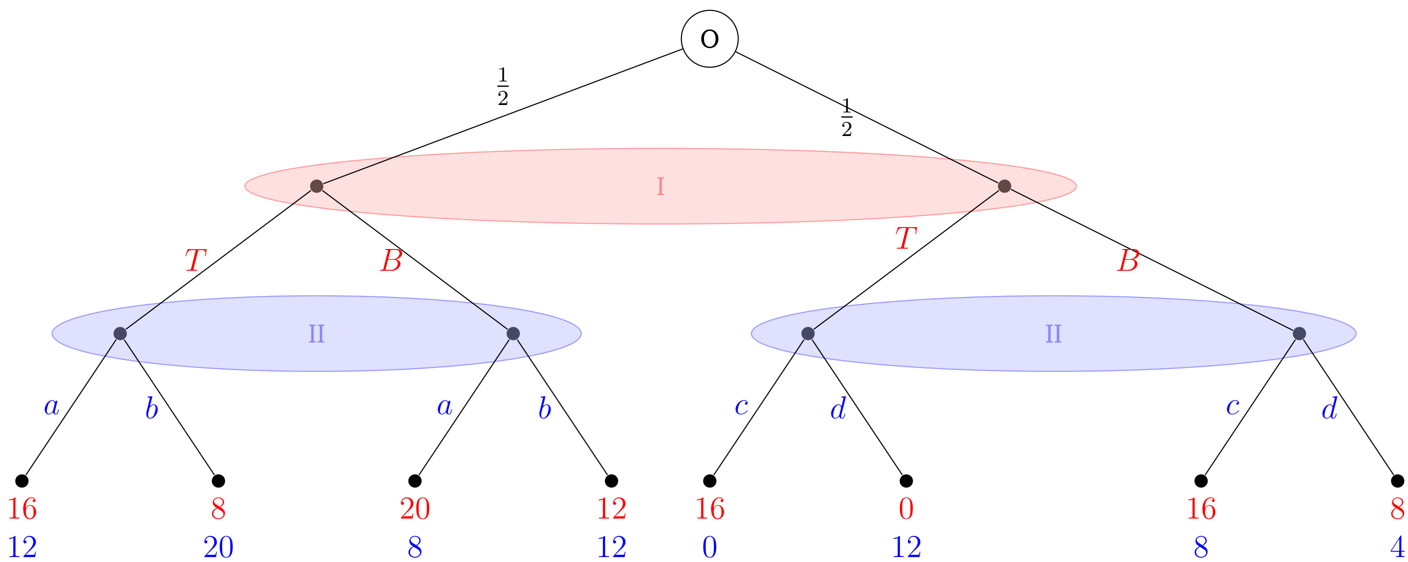
אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.

==

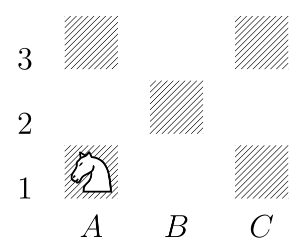
שאלה 1 (25 נקודות)

מצאו את כל שיווי המשקל במשחק הבא:



שאלה 2 (25 נקודות)

א) (15 נקודות) נתון לוח שחמט 3×3 עם פרש במשבצת $A1$. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענה הבאה: לא קיים אף מסלול עבורו הפרש יכול להגיע למשבצת $B2$.



ב) (10 נקודות) נתון משחק שני-שחקנים סכום אפס בצורה אסטרטגית:

I	A
B	I

כאשר $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ו- I המטריצה היחידה מסדר $n \times n$. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענה הבאה: למשחק אין ערך באסטרטגיות טהורות.

שאלה 3 (25 נקודות)

לבוב יש שני ספרים: ספר סיפורים וספר על מתמטיקה. לאליס יש שני ספרים: ספר על כימיה וספר על הנדסת תוכנה. אליס משאילה את אחד הספרים שלה לבוב ובוב משאיל את אחד הספרים שלו לאליס, למשך שבוע.
אם בוב משאיל לאליס הספר סיפורים ואליס משאילה לבוב הספר על כימיה, בוב משלם לאליס 8 ₪.
אם בוב משאיל לאליס הספר על מתמטיקה ואליס משאילה לבוב הספר על כימיה, בוב משלם לאליס 2 ₪.
אם בוב משאיל לאליס הספר סיפורים ואליס משאילה לבוב הספר על הנדסת תוכנה, בוב משלם לאליס 4 ₪.
אם בוב משאיל לאליס הספר על מתמטיקה ואליס משאילה לבוב הספר על הנדסת תוכנה, בוב משלם לאליס 6₪.

א) (5 נקודות)
רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית.

ב) (15 נקודות)
מצאו את הערך של המשחק.

ג) (5 נקודות)
תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה של משחק שני-שחקנים סכום אפס. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית: אם A אלכסונית אז למשחק אין ערך באסטרטגיות טהורות.

שאלה 4 (25 נקודות)

א) (13 נקודות)
שני יצרניים מייצרים אותו מוצר שוקולד ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאלים. היצרנים מחליטים בו-זמנית על הכמות שהם ייצרו. ההיצע הכולל קובע את מחיר המוצר, והוא זהה לשני היצרנים. פרמטר הביקוש ידוע לשני השחקנים ושווה ל- 9. עלות הייצור של יחידה ליצרן הראשון היא 2₪ וליצרן השני היא 3₪. חשבו את שיווי המשקל.

ב) (5 נקודות)
מצאו את הרווח לכל יצרן, אם כל יצרן בוחר באסטרטגיה אופטימלית.

ג) (7 נקודות)
נתון משחק שני שחקנים. הוכיחו: אם כל שחקן משחק באסטרטגית שיווי משקל, התשלום לכל שחקן גדול או שווה לערך המקסמין (maxmin) שלו(ה).

שאלה 5 **(25 נקודות)**

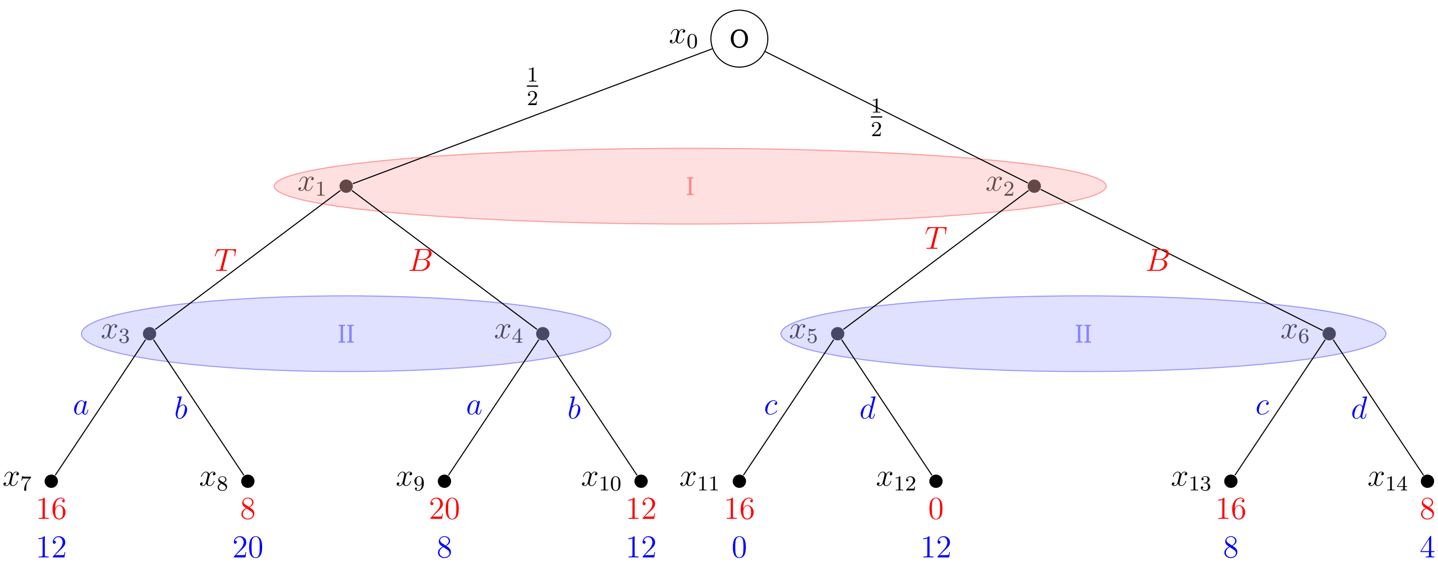
אליס ובוב מוכרים מניות ערך של אותה חברה. הם מחליטים על הכמות שהם מוכרים וההיצע הכולל קובע את המחיר של מניה אחת, שהוא זהה לאליס ולבוב. עלות המכירה של מניה אחת זהה לאליס ולבוב ושווה ל- 5₪ . פרמטר הביקוש a שווה ל: a^H אם הביקוש גבוה או a^L אם הביקוש נמוך, כאשר ₪ $a^H = 7$ ו- ₪ $a^L = 4$. הערך של a ידוע לאליס אך אינו ידוע לבוב. כל שבוב יודע הוא שפרמטר הביקוש שווה ל- a^L בהסתברות $\frac{1}{3}$ ו- a^H בהסתברות $\frac{2}{3}$.

א) **(15 נקודות)** מהו שיווי המשקל?

ב) **(10 נקודות)** מצאו את פונקציות התשלום של אליס ושל בוב, במקרה שהביקוש גבוה ובמקרה שהביקוש נמוך.

פתרונות

שאלה 1 (25 נקודות)



קבוצות אסטרטגיות של שחקן I: $x_1x_2 : \ (T,B)$.

וקטורי אסטרטגיות של שחקן I: $S_I = (T,B)$.

קבוצות אסטרטגיות של שחקן II: $x_3x_4 : \ (a,b) \ , \quad x_5x_6 : \ (c,d)$.

וקטורי אסטרטגיות של שחקן I: $S_{II} = (a/c, a/d, b/c, b/d)$.

I \ II	a/c	a/d	b/c	b/d
T	$\frac{1}{2}(16,12)+\frac{1}{2}(16,0)$	$\frac{1}{2}(16,12)+\frac{1}{2}(0,12)$	$\frac{1}{2}(8,20)+\frac{1}{2}(16,0)$	$\frac{1}{2}(8,20)+\frac{1}{2}(0,12)$
B	$\frac{1}{2}(20,8)+\frac{1}{2}(16,8)$	$\frac{1}{2}(20,8)+\frac{1}{2}(8,4)$	$\frac{1}{2}(12,12)+\frac{1}{2}(16,8)$	$\frac{1}{2}(12,12)+\frac{1}{2}(8,4)$

I \ II	a/c	a/d	b/c	b/d
T	$16,6$	$8,12$	$12,10$	$4,16$
B	$18,8$	$14,6$	$14,10$	$10,8$

$I \backslash II$	a/c	a/d	b/c	b/d
T	$16, 6$	$8, \underline{12}$	$12, 10$	$4, 16$
B	$18, 8$	$14, 6$	$14, \underline{10}$	$10, 8$

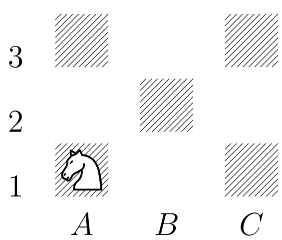
$I \backslash II$	a/c	a/d	b/c	b/d
T	$16, 6$	$8, \underline{12}$	$12, 10$	$4, 16$
B	$\underline{18}, 8$	$\underline{14}, 6$	$\underline{14}, \underline{10}$	$\underline{10}, 8$

שיווי משקל של המשחק: $(s_1^*, s_2^*) = (B, b/c)$.

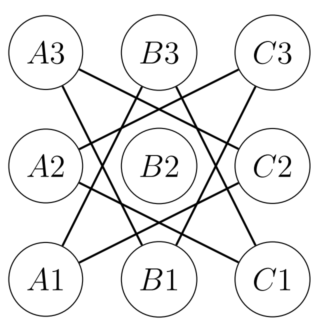
תשלומים עבור האסטרטגיות שיווי משקל: $u_1(s_1^*, s_2^*) = 14, \quad u_2(s_1^*, s_2^*) = 10$.

שאלה 2 (25 נקודות)

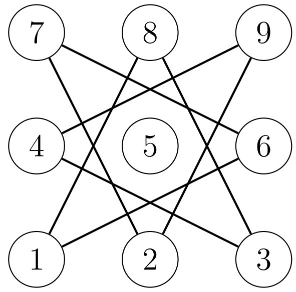
א) בהינתן לוח שחמט 3×3 עם פרש במשבצת התחתונה השמאלית כמתואר בתרשים:



נייצג את הלוח כגרף כך שכל קדקוד מייצג משבצת אחת של הלוח וצלע בין שני קדקודים מייצגת צעד אחד חוקי של הפרש.



לשם פשטות נסמן את הקדקודים $1-9$:



נרשום את המטריצה השכנות של הגרף. שימו לב הגרף לא מכוון וכמו כן המטריצת שכנות לא מכוונת.

$$A=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

הרכיב A_{ij} שווה למספר מסלולים של אורך 1 בין קדקוד i לבין קדקוד j.
שרוה 5 היא שורת אפסים ועמודה 5 היא עמודת אפסים.
ז"א $A_{5i}=0$ לכל $1\leq i\leq 9$ לכן לא קיים צלע מקדקוד 5 לבין אף קדקוד אחר,
וכמו כן $A_{j5}=0$ לכל $1\leq j\leq 9$ לכן לא קיים צלע מקדקוד j לבין קדקוד 5.

מכאן אפשרך להעסיק שלא קיים אפ מסלול של אורך 1 עבורו הפרש יכול להגיע למשבצת 5 $(B2)$.

לכל מטריצה ריבועית $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$, אם שורה r של M שורת אפסים אז שורה r של M^p שורת אפסים לכל $p\geq 1$.
כמו כן אם עמודה c של M עמודת אפסים אז עמודה c של M^p עמודת אפסים לכל $p\geq 1$.

לפי זה שורה 5 של A^p שורת אפסים לכל $p\geq 1$ ועמודה 5 של A^p שורת אפסים לכל $p\geq 1$.

לכן לא קיים אף מסלול של אורך p לכל $p\geq 1$ שעובר דרך המשבצת 5 $(B2)$.

ב) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A=1\in\mathbb{R}^{1\times 1}$, $B=1\in\mathbb{R}^{1\times 1}$.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline I & A \\ \hline B & I \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$I \backslash II$			$\min\limits_{II} u$
	1	1	1
	1	1	1
$\max\limits_{I} u$	1	1	$\underline{\mathrm{v}} = \max\limits_{I} \min\limits_{II} u = 1$; $\bar{\mathrm{v}} = \min\limits_{II} \max\limits_{I} u = 1$

$\underline{\mathrm{v}} = 1 = \bar{\mathrm{v}}$ לכן קיים ערך של המשחק: $\mathrm{v} = 1$.

שאלה 3 (25 נקודות)

א) (5 נקודות)

I (אליס) \ II (בוב)	S (סיפורים)	M (מתמטיקה)
(כימיה) C	8	2
(הנדסת-תוכנה) E	4	6

ב) (15 נקודות)

I (אליס) \ II (בוב)	$y(S)$ (סיפורים)	$(1-y)(M)$ (מתמטיקה)
(כימיה) $x(C)$	8	2
(הנדסת-תוכנה) $(1-x)(E)$	4	6

פונקצית התועלת של המשחק:

$$U(x,y) = 8xy + 2x(1-y) + 4(1-x)y + 6(1-x)(1-y) = 8xy - 4x - 2y + 6 \ .$$

$$U(C,y) = 8y + 2(1-y) = 2 + 6y \ , \qquad U(E,y) = 4y + 6(1-y) = 6 - 2y \ .$$

$$U(x,M) = 2x + 6(1-x) = 6 - 4x \ , \qquad U(x,S) = 8x + 4(1-x) = 4 + 4x \ .$$

כדי למצוא את האסטרטגיה האופטימלית נשתמש בשיטיה הישירה:

$$U(C,y^*) = U(E,y^*) \quad \Rightarrow \quad 2 + 6y^* = 6 - 2y^* \quad \Rightarrow \quad 8y^* = 4 \quad \Rightarrow \quad y^* = \frac{1}{2} \ .$$

$$U(x^*,S)=U(x^*,M) \quad \Rightarrow \quad 4+4y^*=6-4x^* \quad \Rightarrow \quad 8x^*=2 \quad \Rightarrow \quad x^*=\frac{1}{4}\ .$$

לפיכך האסטרטגיה האופטימלית הינה

$$s_1^*=\left(\frac{1}{4}(C)\ ,\ \frac{3}{4}(E)\right)\ , \qquad s_2^*=\left(\frac{1}{2}(S)\ ,\ \frac{1}{2}(M)\right)\ .$$

הערך של המשחק הוא

$$U\left(x=\frac{1}{4},y=\frac{1}{2}\right)=2-2-1+6=5\ .$$

ג) (5 נקודות)

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

$$\underline{\mathrm{v}}=\max_I \min_{II} u=0\ , \qquad \bar{\mathrm{v}}=\min_{II}\max_I u=0\ ,$$

ז"א $\bar{\mathrm{v}}=0=\underline{\mathrm{v}}$ לכן קיים ערך למשחק: $\mathrm{v}=0$.

שאלה 4 (25 נקודות)

א) (13 נקודות)

הפונקצית המחיר היא $P(Q)=a-Q$ כאשר $Q=q_1+q_2$. הרווח לשחקן 1 הוא

$$u_1=(P-c_1)q_1=(a-Q-c_1)q_1=(a-q_1-q_2-c_1)q_1\ ,$$

והרווח לשחקן 2 הוא

$$u_2=(P-c_2)q_2=(a-Q-c_2)q_2=(a-q_1-q_2-c_2)q_2\ .$$

נציב $c_1=2$, $c_2=3$, $a=9$ ונקבל

$$u_1=(9-q_1-q_2-2)q_1=(7-q_1-q_2)q_1\ ,$$

$$u_2=(9-q_1-q_2-3)q_2=(6-q_1-q_2)q_2\ .$$

בנקודת שיווי משקל:

$$(u_1)'_{q_1}=7-2q_1-q_2\overset{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad q_1^*=\frac{7-q_2}{2}\ .$$

בנקודת שיווי משקל:

$$(u_2)'_{q_2} = 6 - 2q_1 - q_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_2^* = \frac{6-q_1}{2} \ .$$

נציב התנאי השני בתנאי הראשון:

$$q_1^* = \frac{7-q_2^*}{2} = \frac{7-\left(\frac{6-q_1^*}{2}\right)}{2} = \frac{\left(\frac{8+q_1^*}{2}\right)}{2} = 2 + \frac{q_1^*}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{3q_1^*}{4} = 2 \quad \Rightarrow \quad q_1^* = \frac{8}{3} \ .$$

נציב זה בביטוי ל- q_2^* ונקבל

$$q_2^* = \frac{6-q_1^*}{2} = \frac{6-\left(\frac{8}{3}\right)}{2} = \frac{\left(\frac{18}{3}\right)-\left(\frac{8}{3}\right)}{2} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \ .$$

לפיכך השיווי המשקל של המשחק הוא

$$(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right) \ .$$

ב) (5 נקודות)

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = \left(9 - \frac{8}{3} - \frac{5}{3} - 2\right)\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{64}{9} \ .$$
$$u_2(q_1^*, q_2^*) = \left(9 - \frac{8}{3} - \frac{5}{3} - 3\right)\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{25}{9} \ .$$

ג) (7 נקודות)

תהי $s^* = (s_1^*.s_2^*)$ השיווי המשקל של המשחק.
ז"א s_1^* האסטרטגיה של השיווי המשקל לשחקן I ו- s_2^* האסטרטגיה של השיווי המשקל לשחקן II.
יהי $\underline{\mathrm{v}}_1$ הערך המקסמין של שחקן I ויהי σ_1 האסטרטגיה המקסמין שלו.
s_1^* אסטרטגיה שיווי משקל של I לכן s_1^* תשובה טובה ביותר של I ביחס לכל אסטרטגיה של שחקו II, לכן

$$u_1\left(s_1^*, s_2\right) \geq u_1\left(\sigma_1, s_2\right)$$

לכל אסטרטגיה $s_2 \in S_2$ של שחקן II. בנוסף, מכיוון ש- σ_1 היא האסטרטגיה המקסמין של שחרן I אז בהכרח, אם I משחק σ_1, אז עבור כל אסטרטגיה s_2 של II, התשלום לשחקן I יהיה גדול או שווה ל הערך המקסמין שלו, כלומר

$$u_1\left(\sigma_1, s_2\right) \geq \underline{\mathrm{v}}_1 \ .$$

לפיכך, השני האי-שוויונים האלה ביחד אומרים כי

$$u_1\left(s_1^*, s_2\right) \geq u_1\left(\sigma_1, s_2\right) \geq \underline{\mathrm{v}}_1 \qquad \Rightarrow \qquad u_1\left(s_1^*, s_2\right) \geq \underline{\mathrm{v}}_1 \ ,$$

ז"א התשלום של שחקן I המתקבל מהאסטרטגיה השיווי משקל גדול או שווה לתשלום המתקבל מהאסטרטגיה המקסמין שלו.

על ידי תהליך דומה נקבל כי

$$u_2\left(s_1, s_2^*\right) \geq \underline{v}_2 \ ,$$

ז"א התשלום של שחקן II המתקבל מהאסטרטגיה השיווי משקל גדול או שווה לתשלום המתקבל מהאסטרטגיה המקסמין שלו.

<u>שאלה 5</u> (25 נקודות)

א) **(15 נקודות)** לשחקן 1, אם $a = a^H$:

$$u_1^H = q_1^H(a^H - q_1^H - q_2 - c) = q_1^H\left(7 - q_1^H - q_2 - 5\right) = q_1^H\left(2 - q_1^H - q_2\right) \ .$$

לשחקן 1, אם $a = a^L$:

$$u_1^L = q_1^L(a^L - q_1^L - q_2 - c) = q_1^L\left(-1 - q_1^L - q_2\right) \ .$$

לשחקן 2:

$a = a^L$ ו- $q_1 = q_1^L$ בהסתברות $\theta = \frac{1}{3}$.

$a = a^H$ ו- $q_1 = q_1^H$ בהסתברות $1 - \theta = \frac{2}{3}$.

$$u_2 = q_2\left(\theta a^L + (1-\theta)a^H - \theta q_1^L - (1-\theta)q_1^H - q_2 - c\right) = \frac{q_2}{3}\left(3 - q_1^L - 2q_1^H - 3q_2\right)$$

$$\left(u_1^H\right)'_{q_1^H} = 2 - 2q_1^H - q_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_1^{H*} = \frac{2 - q_2}{2} \ .$$

$$\left(u_1^L\right)'_{q_1^L} = -1 - 2q_1^L - q_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_1^{L*} = \frac{-1 - q_2}{2} \ .$$

$$\left(u_2\right)'_{q_2} = \frac{1}{3}\left(3 - q_1^L - 2q_1^H - 3q_2\right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_2^* = \frac{1}{6}\left(3 - 2q_1^H - q_1^L\right) \ .$$

הפתרון למערכת זו הוא

$$q_2^* = \frac{3 - q_1^{L*} - 2q_1^{H*}}{6} = \frac{3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}q_2^* - 2 + q_2^*}{6} = \frac{3}{12} + \frac{1}{4}q_2^* \quad \Rightarrow \quad q_2^* = \frac{1}{3} \ .$$

$$q_1^{H*} = \frac{5}{6}$$

$$q_1^{L*} = -\frac{2}{3}$$

ב)   (10 נקודות)

$$u_1^H\left(q_1^{H*},q_2^*\right)=\frac{25}{36}\ , \qquad u_1^L\left(q_1^{L*},q_2^*\right)=\frac{4}{9}\ , \qquad u_2\left(q_1^{L*},q_1^{H*},q_2^*\right)=\frac{1}{9}\ .$$