

חישוביות וסיבוכיות תשפ"ה סמסטר א'

שיעור 2

וריאציות של מכונות טיורינג

תוכן העניינים

2	2.1	הגדרה של מכונת טיורינג שמכריעה את חיתוך השפות $A \cap B$
3	2.2	מודל דו-ממדי
4	2.3	מודל לא דטרמיניסטית
7	2.4	שקילות חישוב של מכונה דטרמיניסטית ולא דטרמיניסטית

משפט 2.1: קיום מכונת טיורינג שמכריעה את חיתוך שפות כריעות

תהינה M^A מ"ט שמכריעה את השפה A ו- M^B מכונת טיורינג שמכריעה את השפה B . אז קיים מכונת טיורינג M^C שמכריעה את הפסה $A \cap C$.

הוכחה: ?



2.1 הגדרה של מכונת טיורינג שמכריעה את חיתוך השפות $A \cap B$

תהי

$$M^A = (Q^A, \Sigma, \Gamma^A, \delta^A, q_0^A, \text{acc}^A, \text{rej}^A)$$

המכונת טיורינג שמכריעה את השפה A ותהי

$$M^B = (Q^B, \Sigma, \Gamma^B, \delta^B, q_0^B, \text{acc}^B, \text{rej}^B)$$

המכונת טיורינג שמכריעה את השפה B .

נגדיר את מכונת טיורינג חדש M^C אשר מכריעה את חיתוך השפות $A \cap B$ באופן הבא:

$$M^C = (Q^C, \Sigma, \Gamma^C, \delta^C, q_0^C, \text{acc}^C, \text{rej}^C) .$$

האלפיבית של הסרט של M^C מוגדר להיות

$$\Gamma^C = \Gamma^A \cup \Gamma^B ,$$

כלומר האלפיבית של M^C מכילה את הא"ב של M^A והא"ב של M^B .

הקבוצת מצבים של M^C מוגדרת להיות

$$Q^C = Q^A \cup Q^B \cup \{q_0^C, q_1^C, \text{acc}^C, \text{rej}^C\}$$

כאן

Q^A היא הקבוצת מצבים של המ"ט M^A ,

Q^B היא הקבוצת מצבים של המ"ט M^B ,

acc^C המצב קבלה של M^C ,

rej^C המצב דחייה של M^C ,

q_0^C ו- q_1^C הם מצבים אשר שייכים ל- M^C אבל לא ל- M^A או ל- M^B . למטה נסביר את הפעולות של M^C בשלבים של הכרעה של $A \cap B$, שמתוארים במשפט 2.1, וספציבי בשלב 1 נסביר את התפקיד של המצבים q_0^C ו- q_1^C .

(שלב 1) העתק את הקלט w של M^A לסרט השני של M^B והחזר את הראש לתחילת הקלט בשני הסרטים.

למטרה זה נשתמש במעברים הבאים:

$$\delta^C(q_0^C, \sigma, _) = (q_0^C, \sigma, R, \sigma, R)$$

במילים, במצב q_0^C , אם הראש של M^A קורא אות σ והראש של M^B קורא $_$, כותבים σ על ה- $_$ בסרט השני של M^B , ושני הראשים זזים ימינה.

כאשר השני ראשים מגיעים לסוף הקלט של M^A , שני הראשים קוראים $_$ ואז M^C מבצעת את המעבר הבא:

$$\delta^C(q_0^C, _, _) = (q_0^C, _, L, _, L)$$

במילים M^C עוברת למצב q_1^C ושני הראשים זזים שמאלה.

כל עוד ש- M^C במצב q_1^C והראשים עדיין לא הכיעו לתחילת הקלט של M^A , היא ממשיכה להזיז את הראשים שמאלה צעד צעד, אשר מתוארת על ידי המעבר הבא:

$$\delta^C(q_1^C, \sigma, \sigma) = (q_0^C, \sigma, L, \sigma, L) .$$

ברגע שהראשים של M^A ו- M^B קוראים $(_, _)$, כלומר תו רווח בסרט של M^A וגם תו רווח בסרט של M^B , ז"א ששני הראשים של M^C מגיעה לתחילת הקלט היא עוברת למצב ההתחלתי של M^A , (שבו M^A מוכן להתחיל לסרוק את הקלט, אשר בשלב 2 של ההכרעה):

$$\delta^C(q_1^C, _, _) = (q_0^A, _, R, _, R) .$$

שלב 2) הרץ את M^A על w בסרט הראשון. אם דחתה אז M^C עוברת ל- rej^C .

כעת אנחנו מריצים את M^A על הסרט הראשון. M^A ועוברת בין המצבים $q \in Q^A$ שלה לפי הפונקצית המעברים שלה, δ^A . בפרט נניח שבמצב $q \in Q^A$, M^A כותבת τ על σ_1 וזזה $m(=L/R)$, ועוברת ממצב q למצב q' . כלומר $\delta^A(q, \sigma_1) = (q', \tau, m)$. אז המעבר המתאים ב- M^C הוא

$$\forall q \in Q^A \quad \delta^C(q, (\sigma_1, \sigma_2)) = (q', \tau, m, \sigma_2, S) .$$

שימו לב: לא שנינו את האות σ_2 על הסרט השני והראש של M^B נשאר במקומו.

היוצא דופן הוא אם M^A דוחה את w אז M^C דוחה את המילה.

לכן

$$\delta^C(\text{rej}^A, (\sigma_1, \sigma_2)) = (\text{rej}^C, \sigma_1, S, \sigma_2, S) .$$

אם M^A קיבלה את המילה אז עוברים לשלב 3.

שלב 3) הרץ את M^B על w בסרט השני.

כעת אנחנו מריצים את M^B על הסרט הראשון. M^B ועוברת בין המצבים $q \in Q^B$ שלה לפי הפונקצית המעברים שלה, δ^B . בפרט נניח שבמצב $q \in Q^B$, M^B כותבת τ על σ_2 וזזה $m(=L/R)$, ועוברת ממצב q למצב q' . כלומר $\delta^B(q, \sigma_2) = (q', \tau, m)$. אז המעבר המתאים ב- M^C הוא

$$\forall q \in Q^B \quad \delta^C(q, (\sigma_1, \sigma_2)) = (q', \sigma_1, S, \tau, m) .$$

שימו לב: לא שנינו את האות σ_1 על הסרט הראשון והראש של M^A נשאר במקומו.

נטפל במקרה ש אם M^B דוחה את המילה אז M^C עוברת ל- rej^C על יד המעבר

$$\delta^C(\text{rej}^B, (\sigma_1, \sigma_2)) = (\text{rej}^C, \sigma_1, S, \sigma_2, S) .$$

לבסוף אם M^B מקבלת את המילה אז M^C עוברת ל- acc^C :

$$\delta^C(\text{acc}^B, (\sigma_1, \sigma_2)) = (\text{acc}^C, \sigma_1, S, \sigma_2, S) .$$

2.2 מודל דו-ממדי

הגדרה 2.1: סרט דו ממדי

בסרט דו ממדי הסרט כמו טבלה אינסופי (כמתואר בתרשים למטה) עם

- אינסוף שורות כלפי מעלה,
- אינסוף עמודות לכיוון ימין.
- הסרט חסום מצד שמאל ומלמטה.
- בתחילת הריצה הקלט מופיע בשורה התחתונה וצמוד לשמאל.
- הראש יכול לזוז ימינה, שמאלה למעלה ולמטה.

הפונקציות המעברים של מכונת טיורינג דו ממדי מוגדר:

$$\delta : (Q \setminus \{\text{acc}, \text{rej}\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, U, D\} .$$

␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
a	b	a	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣

2.3 מודל לא דטרמיניסטית

הגדרה 2.2: מודל לא דטרמיניסטית

תהי M מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית. עבור שפה $w \in \Sigma^*$ אומרים עי

- M מקבלת את w אם קיים חושב של M על w שמגיע למצב acc .
- M דוחה את w אם כל חושב של M על w מגיע למצב rej .

הגדרה 2.3: מודל לא דטרמיניסטית

תהי M מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית.

עבור שפה $w \in \Sigma^*$ אומרים עי

- M מקבלת את w אם קיים חושב של M על w שמגיע למצב acc .
 - M דוחה את w אם כל חושב של M על w מגיע למצב rej .
- עבור שפה $L \subseteq \Sigma^*$ אומרים כי M מגיעה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:
- אם $w \in L$ אז M מקבלת את w .
 - אם $w \notin L$ אז M דוחה את w .
- M מקבלת את L אם לכל $w \in \Sigma^*$, M מקבלת את w אם $w \in L$.

המודל הלא דטרמיניסטי

- בהכרעה לא דטרמיניסטית של שפה
לכל מילה בשפה \exists לפחות חושב אחד שעוצר במצב מקבל.
לכל מילה שאינה בשפה כל החישובים חייבים לעצור במצב דוחה.
- בקבלה לא דטרמיניסטית של שפה
לכל מילה בשפה \exists לפחות חושב אחד שעוצר במצב מקבל.
לכל מילה שאינה בשפה המכונה יכולה לדחות או לא לעצור.

2.1 דוגמה

$$L = \left\{ w \in \{0,1\}^* \mid w = uv, (u\bar{v}) = (u\bar{v})^R \right\}$$

שפת כל המחרוזות שניתן להפוך אותן לפילנדרום ע"י פעולת "משלים לסיפא". למשל: $01101 \in w$ מכיוון

ש-

$$011\overline{01} = 01110 = (01110)^R.$$

 $1010010 \in w$ מכיוון ש-

$$10100\overline{10} = 1010101 = (1010101)^R.$$

בנו מכונת

(א) דטרמיניסטית שמכריעה את שפת כל הפלינדרומים.

(ב) לא דטרמיניסטית שמכריעה את השפה L .

פתרון:

סעיף א)

מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה
q_0	\perp	acc		R
q_0	σ	$q.\sigma$	\perp	R
$q.\sigma$	τ	$q.\sigma$		R
$q.\sigma$	\perp	$p.\sigma$	\perp	L
$p.\sigma$	σ	back	\perp	L
$p.\sigma$	\perp	acc		R
$p.\sigma$	τ	rej		R
back	σ	back		L
back	\perp	q_0	\perp	R

כאשר

$$\tau \neq \sigma, \tau \in \Sigma, \sigma \in \Sigma.$$

זאת מכונה דטרמיניסטית המכריעה את שפת הפלינגרומים.

סעיף ב) לבניית המכונה הלא דטרמיניסטית שמכריעה את L , נוסיף את המעברים החדשים הבאים:

מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה	
\hat{q}_0	0, 1	\hat{q}_0		R	תזוזה ימינה
\hat{q}_0	0, 1, \perp	flip		S	flip למצב אי-דטרמיניסטי מעבר
flip	0	1	flip	R	ביצוע פעולת "משלים לסיפא" החל מהנקודה שנבחרה אי-דטרמיניסטית
flip	1	0	flip	R	ביצוע פעולת "משלים לסיפא" החל מהנקודה שנבחרה אי-דטרמיניסטית
flip	\perp	back	\perp	L	
back	0, 1	back		L	חזרה להתחלה
back	\perp	q_0		R	מעבר למכונה לבדיקת פלינדרום

• אם $w \in L$ אז \exists חישוב שעושה flip בדיוק במיקום הנכון \leftarrow הופך את הסיפא של המילה \leftarrow המכונה pal מקבלת w .

• אם $w \notin L$ אז לא משנה באיזה מיקום במילה עוברים למצב flip לא מקבלים פלינדרום \leftarrow כל חישוב ידיע למצב rej.

- לפיכך המכונה הלא דטרמיניסטית הזו מכריעה את השפה L .

משפט 2.2: סגירות תחת פעולת ה Prefix

תהי L שפה שמתקבלת ע"י מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית.
אזי גם

$$\text{prefix}(L) = \{u \mid \exists v, uv \in L\}$$

מתקבלת ע"י מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית.

הוכחה: תהי M^L מ"ט שמקבלת את L .
נבנה M^P שמקבלת את $\text{prefix}(L)$.

נוסיף באופן אי דטרמיניסטי סיפא v לאחר הקלט u ואז נבדוק אם המילה היא בשפה L .

בפרט, נתונה טבלת המעברים של המכונה M^L שמקבלת את השפה L :

מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה
q_0^L
⋮				

נוסיף את הטבלת המעברים הבאה:

מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה	תיאור מילולי
q_0^P	σ	q_0^P		R	
q_0^P	$_$	add	$_$	S	
add	$_$	add	σ	R	$\forall \sigma \in \Sigma$ מגיעים לסוף המילה ואז מוסיפים אותיות באופן לא דטרמיניסטי.
add	$_$	back	$_$	L	חוזרים להתחלה.
back	σ	back		L	
back	$_$	q_0^L		R	עוברים למכונה M^L ובודקים אם המילה בשפה L .

אם המילה $uv \in L$ $\Leftarrow \exists v \Leftarrow u \in \text{prefix}(L)$ כך ש-
 $\Leftarrow \exists$ חישוב שמנחש לכתוב בדיוק v לאחר u
 $\Leftarrow M^L$ מגיעה למצב acc
 $\Leftarrow M^P$ מגיעה למצב acc.

אם המילה $u \notin \text{prefix}(L)$ \Leftarrow לא משנה איזה v נוסיף, לא נגיע למילה בשפה L .
 \Leftarrow המכונה המקורית M^L לא תקבל את uv
 \Leftarrow המכונה שלנו M^P לא תקבל את u .

שימו לב, M^P מקבלת את השפה $\text{prefix}(L)$.

אבל היא לא מכריעה את $\text{prefix}(L)$.
 בשביל להכריע צריך שכל מילה שלא בשפה $\text{prefix}(L)$ תדחה, אבל \exists חישוב אחד שלא מגיע למצב rej וזה חישוב שלא עוצר, שנשאר במצב add כל הזמן ורק מוסיף אותיות.

2.4 שקילות חישוב של מכונה דטרמיניסטית ולא דטרמיניסטית

משפט 2.3: שקילות בין מ"ט דטרמיניסטית לבין מ"ט לא דטרמיניסטית

לכל מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית \exists מכונה דטרמיניסטית שקולה.

הוכחה:

תהי N מ"ט לא דטרמיניסטית.

נבנה M מ"ט דטרמיניסטית שקולה.

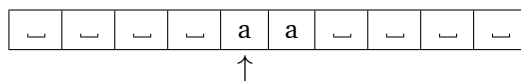
הרעיון הבניה הוא שהמ"ט דטרמיניסטית תנסה את כל החישובים של הטט"לד אחד אחד. אם המט"ד מגלה חישוב שעובר ל- acc אז נקבל. אם היא מגלה שכל החישובים מובילים ל- rej אז נדחה.

2.2 דוגמה

נתונה הטבלת המעברים של מטל"ד

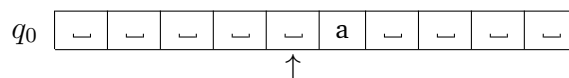
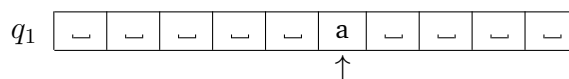
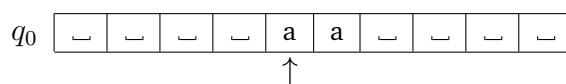
	תזוזה	כתיבה	חדש מצב	סימון	מצב
1	R	a	q_0	a	q_0
2	R	$_$	q_1	a	q_0
3	R	a	q_1	a	q_0
4	L	a	q_0	a	q_0
1	L	$_$	acc	$_$	q_0
1	L	a	q_0	a	q_1
2	R	a	q_1	a	q_1
1	R	a	rej	$_$	q_1
2	L	a	q_1	$_$	q_1

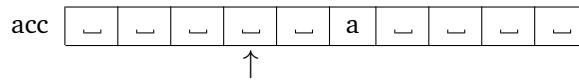
נתון הקלט:



ריצה אפשרית על הקלט הינה

$$_ q_0 a a _ \xrightarrow{2} _ _ q_1 a _ \xrightarrow{1} _ q_0 _ a _ \xrightarrow{1} acc _ _ a _$$

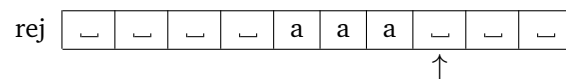
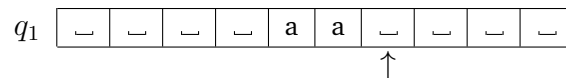
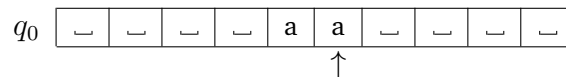
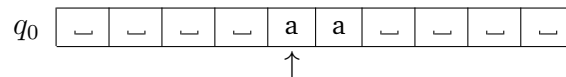




החישוב הגיע למצב מקבל.

ריצה אחרת אפשרית על הקלט הינה

$$_ q_0 a a _ \xrightarrow{1} _ a q_0 a _ \xrightarrow{3} _ a a q_1 _ \xrightarrow{1} _ a a a \text{ rej } _$$



החישוב הגיע למצב דוחה.

בסה"כ \exists סדרת בחירות שמובילה למצב acc
ו- \exists סדרת בחירות שמובילה למצב rej.

מכונת טיורינג היא אי-דטרמיניסטית אם היא קובעת בעצמה את הבחירות שלה כאשר יש מספר אפשרויות לבצע צעד.

כדי להפוך אותה למט"ד אנחנו נקבע את הבחירות והיא לא תבחר בצורה אי-דטרמיניסטית.

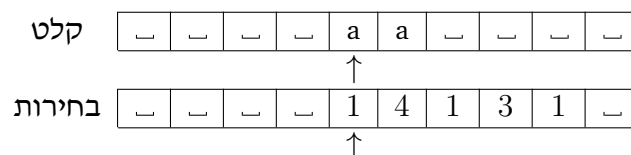
כשלב ביניים להסבר, נעבור למכונה עם 2 סרטים: סרט הקלט וסרט הבחירות.

סרט הבחירות יכלול סדרת מספרים שהיא בחירה ספציפית של מעברים. כך המ"ט לא תהיה יותר אי-דטרמיניסטית.

סרט הבחירות יקבע מה לעשות בכל שלב בחישוב.

המכונה עובדת על סרט הקלט ובכל צעד מבצעת את מה שכתוב על סרט הבחירות.

דוגמה 2.3



	מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה
1	q_0	a	q_0	a	R
2	q_0	a	q_1	␣	R
3	q_0	a	q_1	a	R
4	q_0	a	q_0	a	L
1	q_0	␣	acc	␣	L
1	q_1	a	q_0	a	L
2	q_1	a	q_1	a	R
1	q_1	␣	rej	a	R
2	q_1	␣	q_1	a	L

ההוספה של סרט הבחירות הופכת את המ"ט למט"ד ונקבל את הריצה הבאה על הקלט aa:

$\text{␣ } q_0 \text{ a a ␣ ␣} \xrightarrow{1} \text{␣ a } q_0 \text{ a ␣ ␣} \xrightarrow{4} \text{␣ } q_0 \text{ a a ␣ ␣} \xrightarrow{1} \text{␣ a } q_0 \text{ a ␣ ␣}$
 $\xrightarrow{3} \text{␣ a a } q_1 \text{ ␣ ␣} \xrightarrow{1} \text{␣ a a a rej ␣}$

