שעור 3
ערכים עצמיים ווקטוירם עצמיים

3.1 ערכיים עצמיים, ווקטורים עצמיים של מטריצות

הגדרה 3.1 ערך עצמי ווקטור עצמי של מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$. וקטור $\mathrm{v} \in F^n$ שלא שווה לוקטור האפס ($\mathrm{v} \neq \bar{0}$) יקרא וקטור עצמי של A אם קיים סקלר $\lambda \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$A \cdot \mathrm{v} = \lambda \mathrm{v} \ .$$

λ נקרא ערך עצמי של A ששייך לוקטור עצמי v. המשוואה הזאת נקראת משוואת ערך עצמי של A.

דוגמה 3.1

נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \ ,$$

קבעו אם כל אחד מהוקטורים הבאים, הוא וקטור עצמי של A ומצאו את הערך עצמי המתאים:

(א) $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(ב) $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ג) $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

פתרון:

(א)

$$A \cdot \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 8u_1 .$$

ולכן u_1 הוא הוקטור עצמי של A השייך לערך עצמי

$$\lambda_1 = 8 \ .$$

(ב)

$$A \cdot \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0u_2 .$$

ולכן u_2 הוא הוקטור עצמי של A השייך לערך עצמי

$$\lambda_2 = 0 \ .$$

(ג)

$$A\cdot u_3=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\neq\lambda\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

ולכן u_3 אינו וקטור עצמי של A.

דוגמה 3.2

נתונה מטריצה

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} ,$$

קבעו אם כל אחד מהוקטורים הבאים, הוא וקטור עצמי של A ומצאו את הערך עצמי המתאים:

(א) $u_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

(ב) $u_2=\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$

(ג) $u_3=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

פתרון:

(א)

$$A\cdot u_1=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\10\end{pmatrix}\neq\lambda u_1 .$$

ולכן u_1 אינו וקטור עצמי של A.

(ב)

$$A\cdot u_2=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}=2u_2 .$$

ולכן u_2 הוא הוקטור עצמי של A השייך לערך עצמי

$$\lambda=2\ .$$

(ג)

$$A\cdot u_3=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\8\end{pmatrix}=8\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

ולכן u_3 הוא הוקטור עצמי של A השייך לערך עצמי $\lambda=8$.

דוגמה 3.3

הראו ש $u_1=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$, $u_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ הינם וקטורי עצמיים של המטריצה

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$A\cdot u_1=\begin{pmatrix}5&0\\2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}\quad=2\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$$
$$A\cdot u_2=\begin{pmatrix}5&0\\2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad=0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

לכן u_1 הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda_1=2$ ו u_2 הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda_2=0$.

משפט 3.1

ערך עצמי של מטריצה יכול להיות 0.
וקטור האפס לא יכול להיות וקטור עצמי של מטריצה.

משפט 3.2 המשוואה האופייני של מטריצה

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ויהי v וקטור עצמי של A ששייך לערך עמצי λ. אז לפי הגדרה 3.1,

$$A\cdot\mathrm{v}=\lambda\mathrm{v}\ ,$$

נעביר אגפים:

$$\bar{0}=\lambda\mathrm{v}-A\mathrm{v}\qquad\Rightarrow\qquad\bar{0}=(\lambda I-A)\,\mathrm{v}$$

כאשר I המטריצה היחידה של $\mathbb{F}^{n\times n}$. קיבלנו את המשוואה

$$(\lambda I-A)\,\mathrm{v}=\bar{0}\ .$$

v וקטור עצמי אז הוא לא יכול להיות וקטור האפס. לכן הדטרמיננטה של המטריצה $(\lambda I-A)$ שווה ל- 0. כלומר

$$|\lambda I-A|=0\ .$$

המשוואה הזאת נקראת **משוואת האופייני של** A.

הצד שמאל נקרא **הפולינום האופייני של** A ומסומן $p_A(\lambda)$. כלומר

$$p_A(\lambda)=|\lambda I-A|\ .$$

משפט 3.3 סדר של פולינום האופייני

אם $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, אז הפולינום האופייני $p_A(x)$ של A מסדר n.

משפט 3.4 מרחב עצמי

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ויהי λ ערך עצמי של A. נסמן ב- V_λ הקבוצה של כל הוקטורים עצמיים ששייכים לערך עצמי λ, בתוספת הוקטור האפס.
V_λ תת-מרחב של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 3.5 מרחב עצמי של ערך עצמי λ שווה למרחב האפס של $A-\lambda I$

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, יהי λ ערך עצמי של A ויהי V_λ מרחב העצמי של A. אז

$$V_\lambda=\mathrm{Nul}\,(A-\lambda I)\ .$$

הוכחה: נוכיח כי $V_\lambda \subseteq \text{Nul}\,(A-\lambda I)$.

יהי u וקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי A. ז"א u מקיים את משוואת הערך עצמי:

$$A\cdot u=\lambda u \qquad \Rightarrow \qquad (A-\lambda I)\cdot u=\bar{0}$$

כאשר $\bar{0}\in\mathbb{F}^n$ וקטור האפס. לכן $u\in \text{Nul}(A-\lambda I)$ לכל וקטור $u\in V_\lambda$. לכן

$$V_\lambda \subseteq \text{Nul}\,(A-\lambda I)\ .$$

נוכיח כי $\text{Nul}\,(A-\lambda I)\subseteq V_\lambda$.

יהי $u\in \text{Nul}\,(A-\lambda I)$. ז"א

$$(A-\lambda I)\,u=\bar{0} \qquad \Rightarrow \qquad A\cdot u=\lambda u\ .$$

ז"א u וקטור עצמי של u ששייך לערך עצמי λ. לכן $u\in V_\lambda$ לכל $u\in \text{Nul}\,(A-\lambda I)$. לכן

$$\text{Nul}(A-\lambda I)\subseteq V_\lambda\ .$$

■

הגדרה 3.2 ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי של ערך עצמי של מטריצה

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ויהי u_i ערך עצמי λ_i.

הריבוי אלגברי של λ_i הוא הריבוי של λ_i בפולינום האופייני של A. כלומר אם

$$|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\quad\cdots\quad(\lambda-\lambda_i)^{m_i}\quad\cdots\quad(\lambda-\lambda_l)^{m_l}\ ,$$

אז הריבוי אלגברי של λ_i הוא m_i.

הריבוי גיאומטרי של λ_i הוא המימד של המרחב עצמי שלו. כלומר אם

$$V_{\lambda_i}=\{u_1,\ldots,u_k\}$$

אז ל- λ_i יש k וקטורים עצמיים ואומרים כי הריבוי גיאומטרי של λ_i הוא k.

דוגמה 3.4

מצאו את כל הערכים עצמיים והוקטורים עצמיים של המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\ .$$

פתרון:
נרשום את הפולינום האופייני של המטריצה:

$$|\lambda I-A|=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-3&\lambda-2\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda-1)(\lambda-2)-6=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda^2-3\lambda-4=0$$

או שקול

$$(\lambda-4)(\lambda+1)=0$$

ולכן לפולינום אופייני יש שני פתרונות:

$\lambda=4$

$\lambda=-1$.

נמצא את הוקטורים עצמיים של כל אחד של הערכים עצמיים ע"י למצוא את $\text{Nul}\left(A-\lambda I\right)$.

$\underline{\lambda=4}$

$$\left(A-\lambda I\mid\bar{0}\right)\stackrel{\lambda=4}{=}\left(A-4I\mid\bar{0}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}-3&2&0\\3&-2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}-3&2&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

פתרון: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. נסמן

$$V_4=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}\ .$$

V_4 הוא ה **מרחב עצמי** השייך לערך עצמי $\lambda=4$. נסמן

$$u_1=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\ .$$

u_1 הוא הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=4$.

$\dim(V_4)=1$ לכן הריכוי גיאומטרי של $\lambda=4$, הוא 1.

$\underline{\lambda=-1}$

$$\left(A-\lambda I\mid\bar{0}\right)\stackrel{\lambda=-1}{=}\left(A+I\mid\bar{0}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}2&2&0\\3&3&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

הפתרון הוא: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ נסמן

$$V_{-1}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}\ .$$

V_{-1} הוא המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda=-1$. נסמן

$$u_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

u_2 הוא הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=-1$.

$\dim(V_{-1})=1$ לכן הריכוי גיאומטרי של $\lambda=-1$, הוא 1.

דוגמה 3.5

מצאו את כל הערכים עצמיים והוקטורים עצמיים של המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0&1\\0&2&-1&-1\\-1&-1&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\ .$$

פתרון:
נרשום את הפולינום האופייני של המטריצה:

$$|\lambda I - A| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-1)(\lambda-2)\left((\lambda-2)^2-1\right) = 0 \ .$$

$$\begin{aligned} (\lambda-1)(\lambda-2)\left(\lambda^2-4\lambda+4-1\right) &= 0 \\ (\lambda-1)(\lambda-2)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right) &= 0 \\ (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-1) &= 0 \\ (\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-3) &= 0 \end{aligned}$$

קיימים 3 ערכים עצמיים:
$\lambda=1$ מריבוי אלגברי 2.
$\lambda=2$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda=3$ מריבוי אלגברי 1.

<u>$\lambda=1$</u>

$$(A-\lambda I \mid \bar{0}) \overset{\lambda=1}{=} (A - I \mid \bar{0}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

הפתרון הוא $z,w\in\mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x\\y\\z\\w \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -1\\1\\0\\1 \end{pmatrix}$. המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=1$ הוא

$$V_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\1\\0\\1 \end{pmatrix}\right\}$$

בבסיס של V_1 ישנם שני וקטורים. נסמן

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -1\\1\\0\\1 \end{pmatrix} \ .$$

u_1 ו- u_2 הם הוקטורים עצמיים ששייכים לערך עצמי $\lambda=1$.
כיוון ש $\dim(V_1)=2$, אומרים כי **הריבוי גאומטרי** של הערך עצמי $\lambda=1$, הוא 2.

<u>$\lambda=2$</u>

$$(A-2I\mid\bar{0})=\left(\begin{array}{cccc|c} 0&0&0&1&0\\ 0&0&-1&-1&0\\ -1&-1&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} -1&-1&0&0&0\\ 0&0&-1&-1&0\\ 0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&0\\ 0&0&-1&-1&0\\ 0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right)$$

פתרון: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\ y\in\mathbb{R}.$ המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=2$ הוא

$$V_2=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

בביס של V_2 יש וקטור אחד. נסמן

$$u_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

u_3 הוא הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=2$. כיוון ש $\dim(V_2)=1$, אז אומרים כי הריבוי גאומטרי של הערך עצמי $\lambda=2$, הוא 1.

$\underline{\lambda=3}$

$$(A-3I\mid \bar{0})=\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[R_2\to -R_2]{R_1\to -R_1}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4\to -\frac{1}{2}R_4]{R_3\to R_3+R_1}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_4-2R_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\ z\in\mathbb{R}.$ המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=3$ הוא

$$V_3=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

בבסיס של V_3 יש וקטור אחד:

$$u_4=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\ .$$

u_4 הוא הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=3$. כיוון ש- $\dim(V_3)=1$ אז אומרים כי הריבוי גאומטרי של הערך עצמי $\lambda=3$, הוא 1.

3.2 לכסון של מטריצה

הגדרה 3.3 לכסינות של מרטיצות

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. A תקרא לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית. כלומר אם קיימת מטריצה הפיכה $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ומטריצה אלכסונית $D \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש-

$$D = P^{-1}AP \ .$$

משפט 3.6 לכסינות של מרטיצות

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם הוקטורים עצמיים של A מהווה בסיס של $\mathbb{F}^n$ אז A לכסינה.

נסמן הוקטורים עצמיים ב- $\{u_1,\ldots,u_n\}$ ששייכים לערכים עצמיים $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ בהתאמה (הערכים עצמיים לא בהכרח שונים זה מזה). מכאן נובע ש-

$$D = P^{-1}AP \qquad \Leftrightarrow \qquad A = PDP^{-1}$$

כאשר $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית ו $P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ מטריצה הפיכה.

הוכחה: $A\cdot u_i = \lambda_i u_i$ לכל $1 \leq i \leq n$. לכן

$$\begin{aligned} A\cdot P &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A\cdot u_1 & A\cdot u_2 & \ldots & A\cdot u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \ldots & \lambda_n u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= PD \ . \end{aligned}$$

כלומר $AP = PD$. נתון כי הוקטורים עצמיים מהווים בסיס, אז $\{u_1,\ldots,u_n\}$ ולכן P הפיכה. לכן P^{-1} קיימת ומותר להכפיל מצד שמאל ב- P^{-1}. נקבל

$$A = P^{-1}PD \ .$$

■

משפט 3.7 קריטירון 1 ללכסינות של מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם ל- A יש n ערכים עצמיים **שונים** ב- $\mathbb{F}$, אז A לכסינה.

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 3.8 קריטירון 2 ללכסינות של מטריצה: סכום המימדים של מרחבים העצמיים

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. A לכסינה אם"ם סכום המימדים של המרחבים העצמיים השונים שווה ל- n.

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 3.9 קריטירון 3 ללכסינות של מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם

1. הפולינום האופייני שלה מתפרק למכפלה של גורמים ליניאריים מעל $\mathbb{F}$, לא בהכרח שונים, ו-
2. הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי שווה לריבוי הגיאומטרי שלו,

אז A לכסינה מעל $\mathbb{F}$.

הוכחה: תרגיל בית. ■

3.3 ערכים עצמיים של טרנספורמציות ליניאריות

הגדרה 3.4 אופרטור ליניארי

יהי V מרחב וקטורי. טרנספורציה ליניארי $T : V \to V$ נקראת אופרטור ליניארי.

הגדרה 3.5 אופרטור לכסין

אופרטור ליניארי $T : V \to V$ נקראת לכסין אם קיים בסיס של V כך ש- $[T]_B$ אלכסונית.

ז"א קיים בסיס $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ של V כך ש-

$$T(b_1) = \lambda_1 b_1 \ , \qquad T(b_2) = \lambda_2 b_2, \quad \ldots \quad , T(b_n) = \lambda_n b_n \ .$$

אז

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(לא כל ה- λ בהכרח שונים זה מזה)

הגדרה 3.6 ערך עצמי ווקטור עצמי של אופרטור ליניארי

תהי $T : V \to V$ אופרטור ליניארי ו- λ סקלר. λ נקרא **ערך עצמי** של T אם קיים וקטור $u \neq 0$ כך ש-

$$T(u) = \lambda u \ .$$

u נקרא
וקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ.

משפט 3.10

אופרטור ליניארי $T : V \to V$ לכסינה אם"ם קיים בסיס של V המורכב מוקטורים עצמיים.

הוכחה: $\Rightarrow$

נניח ש T לכסינה. ז"א קיים בסיס $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ כך ש-

$$T(u_1) = \lambda_1 u_1 \ , \qquad T(u_2) = \lambda_2 u_2, \quad \dots \quad , T(u_n) = \lambda_n u_n \ .$$

אז

$$[T]_U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(לא כל ה- λ בהכרח שונים זה מזה).

$\Leftarrow$

נניח שקיים בסיס $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ שמורכב מוקטורים עצמיים. ז"א קיימים סקלרים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ כך ש-

$$T(u_1) = \lambda_1 u_1 \ , \quad \dots \quad , T(u_n) = \lambda_n u_n \ .$$

לכן

$$[T]_U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

אלכסונית. ■

הגדרה 3.7 פולינום האופייני של אופרטור ליניארי

תהי $T : V \to V$ אופרטור ליניארי. נניח ש A המטריצה המייצגת של T לפי בסיס B. אז הפולינום

$$p_T(\lambda) = |\lambda I - A|$$

נקרא הפולינום האופייני של T.

הגדרה 3.8 ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי של ערך עצמי של אופרטור ליניארי

נניח $T : V \to V$ אופרטור ליניארית ו- λ ערך עצמי.

1) הריבוי האלגברי של λ הוא הריבוי של λ בפולינום האופייני.

2) הריבוי הגאומרטי של λ הוא $\dim(V_\lambda)$, כלומר, מספר הוקטורים העצמיים הבת"ל השייכים ל- λ.

דוגמה 3.6

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\3x+2y\end{pmatrix}$$

חפשו את הוקטורים עצמיים של T כך ש- $T(u)=\lambda u$.
האם T לכסינה?

פתרון:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\3x+2y\end{pmatrix}$$

כאשר $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$ המטריצה המייצגת של האופרטור.

פולינום האופייני:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-3&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)-6=\lambda^2-3\lambda-4=(\lambda-4)(\lambda+1)=0\ .$$

ערכים עצמיים:
$\lambda=-1$
$\lambda=4$.

<u>$\lambda=4$</u>

$$(A-4I)=\begin{pmatrix}-3&2\\3&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-3&2\\0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $y,y\in\mathbb{R}$ $\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. לכן המרחב עצמי של $\lambda=4$ הוא $V_4=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$. נסמן הוקטור עצמי שלו ב- $u_1=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

<u>$\lambda=-1$</u>

$$(A+I)=\begin{pmatrix}2&2\\3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $y,y\in\mathbb{R}$ $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. לכן המרחב עצמי של $\lambda=-1$ הוא $V_{-1}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$. נסמן הוקטור עצמי שלו ב- $u_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

u_1,u_2 בת"ל:

$$\begin{pmatrix}u_1&u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1\\0&-5\end{pmatrix}$$

לכן הם מהווים בסיס של $\mathbb{R}^2$. לכן T לכסינה.

$$T(u_1)=4\cdot u_1\ ,\qquad T(u_2)=-1\cdot u_2\ .$$

משפט 3.11

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי לכסיו.
נניח ש- $[T]_B$ המטריצה המייצגת של T לפי בסיס B.
יהיו $u_1,\ldots,u_n$ הוקטורים עצמיים של T לפי בסיס B, ששייכים לערכים עצמיים $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ (הם לא בהכרח שונים זה מזה).
אז

$$[T]_B=PDP^{-1}$$

או באופן שקול

$$P^{-1}[T]_BP=D$$

כאשר $P=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ ו- $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}
[T]_BP =&[T]_B\begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T]_Bu_1 & [T]_Bu_2 & \ldots & [T]_Bu_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1u_1 & \lambda_2u_2 & \ldots & \lambda_nu_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}\\
=&PD\ ,
\end{aligned}$$

כלומר, $[T]_BP=PD$. הוקטורים עצמיים $u_1,\ldots,u_n$ בת"ל, אז P הפיכה לכן P^{-1} קיימת. לכן מותר להכפיל מצד ימין ב- P^{-1}. נקבל: ולכן

$$[T]_B=PDP^{-1}$$

ומכאן נובע כי

$$P^{-1}[T]_BP=D$$

■

משפט 3.12

תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית ו λ_0 ערך עצמי. אם m הריבוי האלגברי ו- k הריבוי הגיאומטרי של λ_0, אז

$$k\leq m\ .$$

במילים: הריבוי הגיאומטרי קטן או שווה לריבוי האלגברי.

הוכחה: נניח ש- λ_0 ערך עצמי מריבוי אלגברי m וריבוי גיאומטרי k.
ז"א קיימים k וקטורים בת"ל $u_1,\ldots,u_k$ ששייכים לערך עצמי λ_0.
נשלים אותו לבסיס של V:

$$B=\{u_1,\ldots,u_k,u_{k+1},\ldots,u_n\}\ .$$

נחשב את המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס B:

$$T(u_1)=\lambda_0 u_1\ ,\quad \ldots\quad ,T(u_k)=\lambda_0 u_k$$

לכן

$$[T]_B=\left(\begin{array}{cccc|c}
\lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & \\
0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & * \\
0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & A' \\
0 & 0 & \cdots & 0 &
\end{array}\right)$$

הפולינום הופייני של A הוא

$$p_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\left|\left(\begin{array}{cccc|c}
\lambda-\lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & \\
0 & \lambda-\lambda_0 & \cdots & 0 & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & * \\
0 & 0 & \cdots & \lambda-\lambda_0 & \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \lambda I-A' \\
0 & 0 & \cdots & 0 &
\end{array}\right)\right|$$

נחשב את הדטרמיננטה דרך העמודה הראשונה:

$$p_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)\cdot\left|\left(\begin{array}{ccc|c}
\lambda-\lambda_0 & \cdots & 0 & \\
\vdots & \ddots & \vdots & * \\
0 & \cdots & \lambda-\lambda_0 & \\
\hline
0 & \cdots & 0 & \\
\vdots & \ddots & \vdots & \lambda I-A' \\
0 & \cdots & 0 &
\end{array}\right)\right|$$

עד שנקבל

$$p_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k\,|\lambda I-A'|=(\lambda-\lambda_0)^k p_{A'}(\lambda)$$

לכן הריבוי האלגברי גדול או שווה ל- k. ■

דוגמה 3.7

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&3\\-1&3&1\end{pmatrix}$$

א מצאו את הערכים העצמיים ומרחבים עצמיים של A.

ב האם A לכסינה? אם כן, רשמו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש

$$D=P^{-1}AP\ .$$

פתרון:

א

$$
\begin{aligned}
|\lambda I-A| = \begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda+1 & -3\\ 1 & -3 & \lambda-1\end{vmatrix} &= (\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda+1 & -3\\ -3 & \lambda-1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0 & 1+\lambda\\ 1 & -3\end{vmatrix}\\
&=(\lambda+1)\left((\lambda+1)(\lambda-1)-9\right)-(0-(1+\lambda))\\
&=(\lambda+1)(\lambda^2-1-9+1)\\
&=(\lambda+1)(\lambda^2-9)\\
&=(\lambda+1)(\lambda+3)(\lambda-3)
\end{aligned}
$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=-1$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=3$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=-3$ מריבוי אלגברי 1.

$\underline{\lambda=-1}$

$$(A+I)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&3\\1&3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&3&2\\0&0&1\\0&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&3&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $y\in\mathbb{R}\quad y,\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda=-1$ הוא

$$V_{-1}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

הווקטור עצמי של $\lambda=-1$ הוא $u_1=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$.

$\dim(V_{-1})=1$ לכן הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי $\lambda=-1$, הוא 1.

$\underline{\lambda=3}$

$$(A-3I)=\begin{pmatrix}-4&0&1\\0&-4&3\\-1&3&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-4&0&1\\0&-4&3\\0&-12&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-4&0&1\\0&-4&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $z\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{z}{4}\\ \frac{3}{4}z\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda = 3$ הוא

$$V_3 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$$

הוקטור עצמי של הערך עצמי $\lambda = 3$ הוא

$$u_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} .$$

$\dim(V_3) = 1$ לכן הריבוי גיאומטרי של הערך עצמי $\lambda = 3$, הוא 1.

$\underline{\lambda = -3}$

$$(A+3I) = \begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&3\\-1&3&4\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&3\\0&6&9\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $z\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}z\\-\frac{3}{2}z\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda = -3$ הוא

$$V_{-3} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}\right\}$$

הוקטור עצמי של הערך עצמי $\lambda = -3$ הוא

$$u_3 = \begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix} .$$

$\dim V_{-3} = 1$ לכן הריבוי גיאומטרי של הערך עצמי $\lambda = -3$, הוא 1.

ב $\dim V_1 + \dim V_3 + \dim V_{-3} = 3$ לכן קיים בסיס של $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} , \quad u_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} , \quad u_3 = \begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix} .$$

ומטריצה A לכסינה:

$$D = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix} , \qquad P = \begin{pmatrix}3&1&-1\\1&3&-3\\0&4&2\end{pmatrix} .$$

דוגמה 3.8

$$A=\begin{pmatrix}5&2&-2\\2&5&-2\\-2&-2&5\end{pmatrix}$$

א מצאו את הערכים העצמיים ומרחבים עצמיים של A.

ב האם A לכסינה? אם כן, רשמו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש

$$D=P^{-1}AP\ .$$

פתרון:

א

$$\begin{aligned}|\lambda I-A|=&\begin{vmatrix}\lambda-5&-2&2\\-2&\lambda-5&2\\2&2&\lambda-5\end{vmatrix}\\
=&(\lambda-5)\begin{vmatrix}\lambda-5&2\\2&\lambda-5\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2&2\\2&\lambda-5\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2&\lambda-5\\2&2\end{vmatrix}\\
=&(\lambda-5)\left((\lambda-5)^2-4\right)+2\left(-2(\lambda-5)-4\right)+2\left(-4-2(\lambda-5)\right)\\
=&(\lambda-5)\left(\lambda^2-10\lambda+21\right)+2\left(-2\lambda+6\right)+2\left(-2\lambda+6\right)\\
=&(\lambda-5)\left(\lambda-7\right)\left(\lambda-3\right)-4\left(\lambda-3\right)-4\left(\lambda-3\right)\\
=&\left(\lambda-3\right)\left((\lambda-5)\left(\lambda-7\right)-8\right)\\
=&\left(\lambda-3\right)\left(\lambda^2-12\lambda+35-8\right)\\
=&\left(\lambda-3\right)\left(\lambda^2-12\lambda+27\right)\\
=&\left(\lambda-3\right)\left(\lambda-9\right)(\lambda-3)\end{aligned}$$

$\lambda=3$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 2.

$\lambda=9$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 1.

$\underline{\lambda=3}$

$$(A-3I)=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&2&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y+z\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda=3$ הוא

$$V_3=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(V_3)=2$ אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי $\lambda=3$, הוא 2.

$\underline{\lambda = 9}$

$$(A-9I) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda = 9$ הוא

$$V_9 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(V_9) = 1$, אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי הוא 1.

ב $\dim\, V_3 = 2$, $\dim\, V_9 = 1$.

$$\text{dim} V_3 + \text{dim} V_9 = 3\ .$$

לכן קיים בסיס של $\mathbb{R}^3$ המורכב מוקטורים עצמיים:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ , \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ , \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\ .$$

ומטריצה A לכסינה:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\ , \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

$$D = P^{-1}AP$$

דוגמה 3.9

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

האם A לכסינה?

פתרון:

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| =& \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -12 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ =&(\lambda-1)\lambda(\lambda-1) = 0\end{aligned}$$

$\lambda = 0$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 1.
$\lambda = 1$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 2.

$\underline{\lambda = 1}$

$$(A-I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda = 1$ הוא

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(V_1) = 1$ אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי $\lambda = 1$ הוא 1.

$\underline{\lambda = 0}$

$$(A-0\cdot I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda = 0$ הוא

$$V_0 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(V_0) = 1$ אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי $\lambda = 0$ הוא 1.
$\dim\, V_1 = 1$, $\dim\, V_0 = 1$.

$$\dim V_1 + \dim V_0 = 2 < \dim(\mathbb{R}^3) \ .$$

לכן לא קיים בסיס של $\mathbb{R}^3$ המורכב מוקטורים עצמיים. לכן A לא לכסינה.

משפט 3.13 קריטירון 1 ללכסינות של אופרטור

יהי V מרחב עצמי מעל $\mathbb{F}$, ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי. נניח ש- $\dim(V)=n$. אם ל- T יש n ערכים עצמיים **שונים** ב- $\mathbb{F}$, אז T לכסינה.

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 3.14 קריטירון 2 ללכסינות של אופרטור: סכום המימדים של מרחבים העצמיים

יהי V מרחב עצמי מעל $\mathbb{F}$, ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי. נניח ש- $\dim(V)=n$. T לכסין אם"ם סכום המימדים של המרחבים העצמיים השונים שווה ל- n.

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 3.15 קריטירון 3 ללכסינות של אופרטור

יהי V מרחב עצמי מעל $\mathbb{F}$, ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי. אם

1. הפולינום האופייני של T מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$, לא בהכרח שונים, ו-
2. הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי שווה לריבוי הגיאומטרי שלו,

אז T לכסין מעל $\mathbb{F}$.

הוכחה: תרגיל בית. ■

דוגמה 3.10

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

1. האם A לכסינה מעל $\mathbb{R}$?
2. האם A לכסינה מעל $\mathbb{C}$?

פתרון:

$$p_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda&-1\\1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1$$

1. $p_A(\lambda)$ לא מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{R}$, לכן A לא לכסינה מעל $\mathbb{R}$.
2.

$$\lambda^2+1=(\lambda-i)(\lambda+i)=0$$

$\lambda=i$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=-i$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 1.

$\underline{\lambda=i}$

$$(A-iI) = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iy \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda = i$ הוא

$$V_i = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(V_i) = 1$ אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי הוא 1.

$\underline{\lambda = -i}$

$$(A+iI) = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iy \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda = -i$ הוא

$$V_{-i} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(V_{-i}) = 1$ אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי הוא 1.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} , \qquad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} , \qquad D = P^{-1}AP \ .$$

משפט 3.16 וקטורים עצמיים ששייכים לערכים עצמיים שונים בת"ל

נתון $T : V \to V$ אופרטור ליניארי. וקטורים עצמיים של T ששייכים לערכים עצמיים שונים הם בת"ל.

הוכחה: <u>נתון:</u>

$T : V \to V$ אופרטוא ליניארי,
$\lambda_1, \ \ldots \ , \lambda_n$ ערכים עצמיים שונים ששייכים לוקטורים עצמיים $u_1, \ \ldots \ , u_n$ של T.

<u>צריך להוכיח:</u>

$u_1, \ \ldots \ , u_n$ בת"ל.

<u>הוכחה:</u>

נוכיח את הטענה ע"י אינדוקציה על n.

<u>שלב הבסיס:</u>

עבור $n = 1$: $u_1 \neq \bar{0}$, לכן הוא בת"ל.

<u>שלב האינדוקציה:</u>

נניח שעבור $n > 1$, n וקטורים עצמיים ששייכים ל n ערכים עצמיים שונים בת"ל. נניח $u_1, \ldots, u_{n+1}$ וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$. נרשום

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1} u_{n+1} = \bar{0} \tag{*}$$

אז

$$\alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \ldots + \alpha_n T(u_n) + \alpha_{n+1} T(u_{n+1}) = \bar{0}$$

$$\alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n u_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} u_{n+1} = \bar{0} \tag{*1}$$

נכפיל (*) ב λ_{n+1}:

$$\alpha_1 \lambda_{n+1} u_1 + \alpha_2 \lambda_{n+1} u_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_{n+1} u_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} u_{n+1} = \bar{0} \tag{*2}$$

נחסיר (*2) מ (*1):

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})u_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{n+1})u_2 + \ldots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{n+1})u_n + \alpha_{n+1}\cancelto{0}{(\lambda_{n+1} - \lambda_{n+1})}u_n = \bar{0}$$

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})u_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{n+1})u_2 + \ldots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{n+1})u_n = \bar{0} \tag{*3}$$

לפי ההנחת האינדוקציה הוקטורים $u_1, \ldots, u_n$ בת"ל. לכן

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1}) = 0 \ , \quad \ldots \quad , \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{n+1}) = 0 \ . \tag{*4}$$

כל הערכים העצמיים שונים זה מזה, כלומר $\lambda_i - \lambda_{n+1} \neq 0$ לכל $i = 1, \ldots, n$. לכן

$$\alpha_1 = 0 \ , \quad \ldots \quad , \alpha_n = 0 \ . \tag{*5}$$

נציב (*5) ב- (*) ונקבל

$$\alpha_1 u_1 = \bar{0}$$

$u_1 \neq 0$ כי הוא וקטור עצמי לכן $\alpha_1 = 0$. לכן (*) מצקיים רק אם כל המקודמים $\alpha_1, \quad \ldots \quad , \alpha_{n+1} = 0$ לכן הוקטורים עצמיים $u_1, \quad \ldots \quad , u_{n+1}$ בת"ל.

■

3.4 שימושים של לכסון מטריצה

משפט 3.17 חזקה של מטריצה הדומה למטריצה אלכסונית

אם A לכסינה, אז קיימת מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D=P^{-1}AP$. לכן

$$A^n=PD^nP^{-1}\ .$$

הוכחה:

נוכיח את הטענה ע"י אינדוקציה.

<u>שלב הבסיס:</u>

עבור $n=1$, $D=P^{-1}AP \Leftarrow A=PDP^{-1}$.

<u>שלב האינדוקציה:</u>

נניש שעבור n מתקיים $A^n=PD^nP^{-1}$. אז

$$A^{n+1}=(PD^nP^{-1})\cdot PDP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$$

■

דוגמה 3.11

נתונה המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

1. מצאו את הערכים עצמיים והמרחבים עצמיים של A.
2. האם A לכסינה? אם כן רשמו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D=P^{-1}AP$.
3. חשבו את A^{1001}.

פתרון:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda&-1\\-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-1)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$$

$\lambda=1$ מריבוי אלגברי 2.
$\lambda=-1$ מריבוי אלגברי 1.
<u>$\lambda=1$</u>

$$(A-I)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+z\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

מרחב עצמי:

$$V_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\underline{\lambda = -1}$

$$(A+I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מרחב עצמי:

$$V_{-1} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim V_1 + \dim V_{-1} = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

לכן A לכסינה.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{1001} = PD^{1001}P^{-1}$$

נמצא את P^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$D^{1001} = \begin{pmatrix} 1^{1001} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{1001} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{1001} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

. לכן

$$A^{1001} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

משפט 3.18

אם u וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי λ, כלומר $A \cdot u = \lambda u$ אז

$$A^n u = \lambda^n u \ .$$

הוכחה: נוכיח את הטענה ע"י אינדוקציה.

<u>שלב הבסיס:</u>

עבור $n=1$, $A\cdot u=\lambda u$ מתקיים כי נתון ש- u וקטור עצמי של A.

<u>שלב האינדוקציה:</u>

נניח שעבור $n>1$, $A^n u=\lambda^n u$. אז

$$A^{n+1}u=A\left(A^n u\right)=A\lambda^n u=\lambda^n Au=\lambda^n\cdot\lambda u=\lambda^{n+1}u\ .$$

■

דוגמה 3.12

$$A=\begin{pmatrix}0&-4&0\\1&-4&0\\1&-2&1\end{pmatrix}.$$

א מצאו את הערך עצמי ווקטור עצמי של A.

ב האם A לכסינה? אם כן רשמו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D=P^{-1}AP$.

ג חשבו את $A^{2023}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

פתרון:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&4&0\\-1&\lambda+4&0\\-1&2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda&4\\-1&\lambda+4\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+4)=(\lambda-1)(\lambda+2)^2=0$$

$\lambda=1$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda=-2$ מריבוי אלגברי 2.
$\underline{\lambda=-2}$

$$(A+2I)=\begin{pmatrix}2&-4&0\\1&-2&0\\1&-2&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&-2&3\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y\\y\\0\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

מרחב עצמי:

$$V_{-2}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$\underline{\lambda=1}$

$$(A-I)=\begin{pmatrix}-1&-4&0\\1&-5&0\\1&-2&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1&-4&0\\0&-9&0\\0&-6&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מרחב עצמי:

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim V_1 + \dim V_{-2} = 1 + 1 = 2 < \dim \mathbb{R}^3$$

לכן A לא לכסינה.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ וקטור עצמי השייך ל $\lambda = -2$, לכן

$$A^{2023} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2)^{2023} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^{2024} \\ -2^{2023} \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.5 משפטים נוספים הקשורים ללכסון של מטריצה

משפט 3.19 דטרמיננטה של מטריצה משולשית שווה למכפלה של איברי האלכסון הראשי

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה משולשית עליונה או משולשית תחתונה. הדטרמיננטה של A שווה למכפלה של האיברים על האלכסון הראשי. כלומר

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} , \qquad |A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \dots a_{nn} \ .$$

הוכחה: אידוקציה על n.

<u>שלב הבסיס:</u>

עבור $n = 1$ הטענה נכונה באופן טריוויאלי.
כלומר נתון $A \in \mathbb{F}^{1\times 1}$. נסמן $A = (a)$ כאשר a האיבר היחיד במטריצה A.

$$|A| = a \ .$$

A מטריצה משולשית, והאיבר היחיד על האלכסון הראשי הוא a. לכן המכפלה של האיברים על האלכסון ראשי פשוט שווה ל- a. לכן $|A|$ שווה למכפלה של האיברים על האלכסון הראשי של A.

<u>שלב האינקודציה:</u>

נניח שהטענה נכונה עבור $n = N$ (הנחת האינדוקציה). נוכיח אותה עבור $n = N + 1$.

תהי $A\in\mathbb{F}^{N\times N}$ מטריצה משולשית עליונה:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,N} & a_{1,N+1}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,N} & a_{2,N+1}\\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,N} & a_{3,N+1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N,N} & a_{N,N+1}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{N+1,N+1} \end{pmatrix}$$

נחשב הדטרמיננטה על השורה האחרונה:

$$|A|=a_{N+1,N+1}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,N}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,N}\\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,N}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N,N} \end{vmatrix}$$

לפי ההנחת האינדוקציה הדטרמיננטה של מטריצה $N\times N$ משולשית עליחונה שווה למכפלה של האיברים על האלכסון הראשי, לכן

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,N}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,N}\\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,N}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N,N} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\dots a_{N,N}\ .$$

לכן

$$|A|=a_{11}\cdot a_{22}\dots a_{N,N}\cdot a_{N+1,N+1}$$

■

משפט 3.20 ערכים העצמיים של מטריצה משולשית

הערכים העצמיים של מטריצה משולשית עליונה (או משולשית תחתונה) הם האיברים הנמצאים על האלכסון הראשי.

הוכחה: תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ משולשית, ויהיו $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ האיברים על האלכסון הראשי. אז

$$\lambda I-A$$

גם מטריצה משולשית והאיברים על האלכסון הראשי הם $\{\lambda-\alpha_1,\lambda-\alpha_2,\dots,\lambda-\alpha_n\}$. הדטרמיננטה של מטריצה משולשית היא המכפלה של האיברים על האלכסון הראשי, לכן לכן

$$|\lambda I-A|=(\lambda-\alpha_1)\cdot(\lambda-\alpha_2)\dots(\lambda-\alpha_n)$$

לכן הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda)=(\lambda-\alpha_1)\cdot(\lambda-\alpha_2)\dots(\lambda-\alpha_n)=0\ .$$

השורשים הם

$$\lambda=\alpha_1,\quad \lambda=\alpha_2,\quad \dots\quad \lambda=\alpha_n\ .$$

ז"א הערכים עצמיים שווים לאיברים על האלכסון הראשי. ■

הגדרה 3.9 הגדרת דמיון בין מטריצות

תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נאמר ש- A ו- B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה $P\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש-

$$B=P^{-1}AP\ .$$

משפט 3.21 פולינום האופייני של מטריצות דומות

אם A ו- B דומות אז יש להן אותו פולינום אופייני, ולכן אותם ערכים עצמיים.

הוכחה:

$$\begin{aligned}f_B(x)&=|xI-B|\\&=\left|xI-P^{-1}AP\right|\\&=\left|P^{-1}xIP-P^{-1}AP\right|\\&=\left|P^{-1}\left(xI-A\right)P\right|\\&=\left|P^{-1}\right|\left|xI-A\right|\left|P\right|\\&=\left|P\right|^{-1}\left|xI-A\right|\left|P\right|\\&=\left|xI-A\right|\left|P\right|^{-1}\left|P\right|\\&=\left|xI-A\right|\\&=f_A(x)\end{aligned}$$

■

משפט 3.22 קיום ווקטור עצמי של אופרטור ליניארית

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית.
קיים לפחות וקטור עצמי אחד של T.

הוכחה: נניח ש- $\dim(V)=n$. יהי $u_1\neq\bar{0}\in V$. הקבוצה

$$\left\{u_1,T\left(u_1\right),T^2\left(u_1\right),\ldots,T^n\left(u_1\right)\right\}$$

תלויה לינארית כי יש בה $n+1$ וקטורים. לכן הצירוף ליניארי הבא מתקיים רק אם אחד המקדמים $a_0,\ldots,a_n$ שונה מאפס:

$$a_0u_1+a_1T\left(u_1\right)+a_2T^2\left(u_1\right)+\ldots+a_nT^n\left(u_1\right)=\bar{0}\ . \qquad (*1)$$

נרשום את זה בצורה

$$\left(a_0+a_1T+a_2T^2+\ldots+a_nT^n\right)u_1=\bar{0}\ .$$

בצד שמאל יש הצבת העתקה בפולינום מסדר n. לפי המשפט היסודי של האלגברה יש לפולינום הזה פירוק לגורמים לינאריים:

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n=c(z-\lambda_1)\ldots(z-\lambda_n)$$

$c\neq0\in\mathbb{C}$, $\lambda_i\in\mathbb{C}$, $1\leq i\leq n$. לכן ניתן לפרק את (*1) כ:

$$a_0u_1+a_1T\left(u_1\right)+a_2T^2\left(u_1\right)+\ldots+a_nT^n\left(u_1\right)=c\left(T-\lambda_1I\right)\ldots\left(T-\lambda_nI\right)u_1=\bar{0}\ . \qquad (*2)$$

$c\neq0\in\mathbb{C}$. אם קיים פתרון $u_1\neq0$ למשוואה הומוגונית ב- (*2) אז בהכרח הדטרמיננטה של המטריצה שמכפילה u_1 שווה לאפס. לפיכך

$$\left|c\left(T-\lambda_1I\right)\ldots\left(T-\lambda_nI\right)\right|=c\left|T-\lambda_1I\right|\ldots\left|T-\lambda_nI\right|=0\ . \qquad (*3)$$

לכן קיים i $(1\leq i\leq n)$ עבורו $\left|T-\lambda_iI\right|=0$ לכן ל- T יש לפחות ערך עצמי אחד.

■