

תרגילים: שפות כריעות ושפות קבילות

שאלה 1 בהינתן השפה L . השפה L^* מוגדרת:

$$L^* = \{\varepsilon\} \cup \{w = w_1 w_2 \cdots w_k \mid \forall 1 \leq i \leq k, w_i \in L\}$$

(א) בהינתן מכונת טיורינג M המקבלת שפה L .
בנו מכונת טיורינג אי דטרמיניסטית M^* המקבלת את השפה L^* .

(ב) בהינתן מכונת טיורינג M המכריעה שפה L .
בנו מכונת טיורינג אי דטרמיניסטית M^* המכריעה את השפה L^* .

שאלה 2 האם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה.

לכל מכונת טיורינג M , אם $L(M) \in CoRE$ אזי $L(M) \in R$.

שאלה 3 האם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה.

אם $L_1 \cap L_2 \in R$ אזי $L_1 \in RE$ או $L_2 \in CoRE$.

תשובות

שאלה 1

(א) תהי M מכונת טיורנג שמזהה את L .
נבנה מכונת טיורנג M^* אי-דטרמיניסטית המקבלת את L^* .

תאור הבנייה

$M^* = \text{על קלט } w$:

1. אם $w = \varepsilon$ אז M^* מקבלת.
 2. אחרת M^* בוחרת באופן אי דטרמיניסטי חלוקה של w ל- $w = w_1, w_2, \dots, w_k$ כאשר $k \in \mathbb{N}^+$.
 3. לכל $1 \leq i \leq k$:
 - M^* מריצה את M על w_i ועונה כמוה.
 - * אם M קיבלה חוזרים לשלב 3.
 4. אם M קיבלה את כל המחרוזות $\{w_i\}$ אזי M^* מקבלת.
- M^* - ניתנת לחישוב - מספר הפירוקים האפשריים ל- w הוא סופי ולכן הניחוש הוא סופי, לפיכך כתיבה על הסרט והרצת M ניתן לחישוב.

הוכחת נכונות: $L^* = L(M^*)$

כיוון \Leftarrow

נניח כי $w \in L(M^*)$

\Leftarrow קיימת חלוקה $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) כך שעבור כל w_i ($1 \leq i \leq k$) M קיבלה.
 \Leftarrow כל $w_i \in L(M)$, בפרט, $L(M) = L$.
 $\Leftarrow w_i \in L$
 $\Leftarrow w = w_1 w_2 \dots w_k \in L^*$
 $\Leftarrow L(M^*) \subseteq L^*$

כיוון \Rightarrow

נניח כי $w \in L^*$

\Leftarrow קיימת חלוקה $w = w_1 w_2 \dots w_k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) כך שכל $w_i \in L$ ($1 \leq i \leq k$)
 $\Leftarrow M^*$ תנחש את הפירוק הזה עבור w
 \Leftarrow המכונה M תקבל כל w_i כזה
 $\Leftarrow M^*$ תקבל את w
 $\Leftarrow w \in L(M^*)$
 $\Leftarrow L^* \subseteq L(M^*)$
 לכן, מאחר ומצאנו ש- $L(M^*) \subseteq L^*$ ו- $L^* \subseteq L(M^*)$ אזי $L(M^*) = L^*$.

(ב)

תהי M מכונת טיורנג שמכריעה את L .
נבנה מכונת טיורנג M^* אי-דטרמיניסטית המכריעה את L^* .

תאור הבנייה

$M^* =$ על קלט w :

1. אם $w = \varepsilon$ אז M^* מקבלת.

2. אחרת M^* בוחרת באופן אי דטרמיניסטי חלוקה של w ל- $w = w_1, w_2, \dots, w_k$ כאשר $k \in \mathbb{N}^+$.

3. לכל $1 \leq i \leq k$:

• M^* מריצה את M על w_i .

* אם M דחתה אז M^* דוחה.

* אחרת אם M קיבלה חוזרים לשלב 3).

4. אם M קיבלה את כל המחרוזות $\{w_i\}$ אזי M^* מקבלת.

M^* - ניתנת לחישוב - מספר הפירוקים האפשריים ל- w הוא סופי ולכן הניחוש הוא סופי, לפיכך כתיבה על הסרט והרצת M ניתן לחישוב.

הוכחת נכונות: $L^* = L(M^*)$

כיוון \Leftarrow

נניח כי $w \in L(M^*)$

\Leftarrow קיימת חלוקה $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) כך שעבור כל w_i ($1 \leq i \leq k$) M קיבלה.

\Leftarrow כל $w_i \in L(M)$, בפרט, $L(M) = L$.

$\Leftarrow w_i \in L$

$\Leftarrow w = w_1 w_2 \dots w_k \in L^*$

$\Leftarrow L(M^*) \subseteq L^*$

כיוון \Rightarrow

נניח כי $w \in L^*$

\Leftarrow קיימת חלוקה $w = w_1 w_2 \dots w_k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) כך שכל $w_i \in L$ ($1 \leq i \leq k$)

$\Leftarrow M^*$ תנחש את הפירוק הזה עבור w

\Leftarrow המכונה M תקבל כל w_i כזה

$\Leftarrow M^*$ תקבל את w

$\Leftarrow w \in L(M^*)$

$\Leftarrow L^* \subseteq L(M^*)$

לכן, מאחר ומצאנו ש- $L(M^*) \subseteq L^*$ ו- $L^* \subseteq L(M^*)$ אזי $L(M^*) = L^*$.

שאלה 2 הטענה נכונה:

לכל לכל מכונת טיורינג מתקיים, לפי ההגדרה: $L(M) \in RE$.
 לכן, אם $L(M) \in CoRE$ אזי
 $L(M) \in RE \cap CoRE = R$.

שאלה 3 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

עבור $L_1 = L_{\Sigma^*} \notin RE$ וגם $L_1 \notin CoRE$,

ו- $L_2 = \overline{L_{\Sigma^*}} \notin CoRE$ וגם $L_2 \notin RE$.

מתקיים $L_1 \cap L_2 = \emptyset \in R$.