

שיעור 10 חיתוך וסכום תת מרחב

הגדרה של חיתוך וסכום של תתי מרחבים

10.1 משפט. (חיתוך של ת"מ)

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} , V_1, V_2 תתי מרחבים של V . אז $V_1 \cap V_2$ היא תת מרחב של V .

הוכחה.

(1) V_1, V_2 תתי מרחבים, לכן $\bar{0} \in V_1$ וגם $\bar{0} \in V_2$. לכן $\bar{0} \in V_1 \cap V_2$.

(2) נניח $v_1, v_2 \in V_1 \cap V_2$ וגם $v_1, v_2 \in V_2$.
 V_1 ת"מ, לכן $v_1 + v_2 \in V_1$.
 V_2 ת"מ, לכן $v_1 + v_2 \in V_2$.
 ז"א $v_1 + v_2 \in V_1 \cap V_2$.

(3) נניח $v \in V_1 \cap V_2$ ו $k \in \mathbb{F}$.
 אז $v \in V_1$ ו $v \in V_2$.
 V_1 ת"מ לכן $k \cdot v \in V_1$.
 V_2 ת"מ לכן $k \cdot v \in V_2$.
 ז"א $k \cdot v \in V_1 \cap V_2$.

■

10.2 דוגמא.

עבור V_1, V_2 תתי מרחבים של מ"ו V מעל שדה \mathbb{F} , האם $V_1 \cup V_2$ בהכרח ת"מ של V ?

פיתרון.

דוגמה נגדית:

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

■ אז $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_2$, אבל $v_1 + v_2 \notin V_1 \cup V_2$.

10.3 משפט. (ת"מ הקטן ביותר)

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} , V_1, V_2 תתי מרחבים של V . אז הקבוצה

$$W = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

היא ת"מ הקטן ביותר שמכיל את V_1 ו V_2 .

ז"א לכל ת"מ W' שמכיל את V_1 ו V_2 , מתקיים $W \subseteq W'$.

הוכחה.

(1) נוכיח ש W ת"מ של V .

א) $\bar{0} \in V_1$ וגם $\bar{0} \in V_2$ לכן

$$\bar{0} = \bar{0} + \bar{0} \in W.$$

ב) נניח $w_1 = u_1 + u_2 \in W$, $w_2 = v_1 + v_2 \in W$

אז $u_1, v_1 \in V_1$ וגם $u_2, v_2 \in V_2$

V_1, V_2 תתי מרחבים.

לכן $u_1 + v_1 \in V_1$ וגם $u_2 + v_2 \in V_2$

מכאן

$$w_1 + w_2 = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \in W.$$

ג) נניח $w = u_1 + u_2 \in W$ ו $k \in \mathbb{F}$. אז $u_1 \in V_1$ ו $u_2 \in V_2$. V_1, V_2 תתי מרחבים, לכן $ku_1 \in V_1$,

$ku_2 \in V_2$ מכאן

$$kw = k(u_1 + u_2) = ku_1 + ku_2 \in W$$

(2) נוכיח כי W התת מרחב הקטן ביותר

ברור כי W מכיל את V_1 ו V_2 כי

$$u = u + \bar{0} \in W, u \in V_1$$

$$\text{וגם לכל } u \in V_2, u = \bar{0} + u \in W.$$

נוכיח ש W הוא ת"מ הקטן ביותר שמכיל את V_1 ו V_2 .

נניח ש W' איזשהו ת"מ שמכיל את V_1 ו V_2 .

נוכיח כי $W \subseteq W'$.

נקח וקטור $w \in W$. אז $w = u_1 + u_2$, כאשר $u_1 \in V_1$, $u_2 \in V_2$.

$$u_1 \in W' \Leftarrow V_1 \subseteq W'$$

$$u_2 \in W' \Leftarrow V_2 \subseteq W'$$

$w = u_1 + u_2 \in W'$ לכן ת"מ, W'

מש"ל.



10.4 הערה.

למרחב W של משפט 10.3 (המשפט הקודם) נקרא הסכום של V_1 ו V_2 ומסומן ב $V_1 + V_2$. ■

10.5 משפט. (סכום של ת"מ שווה לפרישה של האיחוד)

$$V_1 + V_2 = \text{sp}(V_1 \cup V_2).$$

הוכחה.

נוכיח כי $V_1 + V_2 \subseteq \text{sp}(V_1 \cup V_2)$:

$$V_1, V_2 \subseteq \text{sp}(V_1 \cup V_2)$$

לכן, לפי משפט 10.3,

$$V_1 + V_2 \subseteq \text{sp}(V_1 \cup V_2) .$$

$$\text{sp}(V_1 \cup V_2) \subseteq V_1 + V_2 \text{ כי}$$

נניח $w \in \text{sp}(V_1 \cup V_2)$. אז קיימים $u_1, \dots, u_k \in V_1$ ו $v_1, \dots, v_n \in V_2$ וסקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ כך ש

$$w = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n .$$

אז $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k \in V_1$ וגם $\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \in V_2$ לכן $w \in V_1 + V_2$.

הוכחנו כי $V_1 + V_2 \subseteq \text{sp}(V_1 \cup V_2)$ וגם $\text{sp}(V_1 \cup V_2) \subseteq V_1 + V_2$

$$V_1 + V_2 = \text{sp}(V_1 \cup V_2) .$$

■

10.6 דוגמא.

נקח את המ"ו $V = \mathbb{R}^3$. נקח את התתי מרחבים \mathbb{R}^3 : $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ ו $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$.
קווים ישרים ב \mathbb{R}^3 . אז הסכום שלהם הינו

$$V_1 + V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} ,$$

ומהווה את המישור $z = 0$ ב \mathbb{R}^3 .

משפט המימדים של סכום וחיתוך

10.7 משפט. (משפט המימדים)

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} , V_1, V_2 תתי מרחבים של V . אז

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

10.8 הוכחה.

נסמן $\dim(V_1) = k$, $\dim(V_2) = n$, $\dim(V_1 \cap V_2) = m$.

$$V_1 \cap V_2 \subseteq V_1 \text{ לכן } m \leq k$$

$$V_1 \cap V_2 \subseteq V_2 \text{ לכן } m \leq n$$

נבחר בסיס u_1, \dots, u_m של $V_1 \cap V_2$.

נשלים אותו לבסיס של V_1 ונקבל

$$.u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}$$

נשלים אותו גם לבסיס של V_2 :

$$.u_1, \dots, u_m, b_1, \dots, b_{n-m}$$

$$\text{נוכיח כי } V_1 + V_2 = \text{sp}(u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m}).$$

נניח $w = v_1 + v_2 \in V_1 + V_2$ אז

$$v_1 = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} \in V_1,$$

$$v_2 = \alpha'_1 u_1 + \dots + \alpha'_m u_m + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m} \in V_2.$$

אז

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= (\alpha_1 + \alpha'_1) u_1 + \dots + (\alpha_m + \alpha'_m) u_m \\ &\quad + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} \\ &\quad + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m} \end{aligned}$$

ז"א

$$v_1 + v_2 \in \text{sp}(u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m})$$

$$\text{נוכיח את ההכלה ההפוכה, כלומר } \text{sp}(u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m}) \in V_1 + V_2$$

נניח

$$w \in \text{sp}(u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m})$$

אז קיימים סקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_{k-m}, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-m}$ כך ש

$$w = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m}$$

נסמן

$$v_1 = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m}$$

$$v_2 = \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m}$$

אז

$$v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2, \quad w = v_1 + v_2$$

כלומר $w \in V_1 + V_2$.

$$\text{נשאר להוכיח שוקטורים } \{u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m}\} \text{ בת"ל:}$$

נניח:

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m} = \bar{0}. \quad (*1)$$

אז

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} = -\gamma_1 b_1 - \dots - \gamma_{n-m} b_{n-m} := v. \quad (*2)$$

הוקטור באגף השמאל שייך ל V_1 .

הוקטור באגף הימין שייך ל V_2 .

לכן, לפי (*2) $v \in V_1 \cap V_2$. u_1, \dots, u_m בסיס של $V_1 \cap V_2$ (נתון). לכן קיימים סקלרים $\delta_1, \dots, \delta_m$ כך ש

$$v = \delta_1 u_1 + \dots + \delta_m u_m.$$

לכן

$$\begin{aligned} \delta_1 u_1 + \dots + \delta_m u_m + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m} &= \delta_1 u_1 + \dots + \delta_m u_m - (-\gamma_1 b_1 - \dots - \gamma_{n-m} b_{n-m}) \\ &= v - v \\ &= \bar{0}, \end{aligned}$$

ז"א

$$\delta_1 u_1 + \dots + \delta_m u_m + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m} = \bar{0}. \quad (*3)$$

$u_1, \dots, u_m, b_1, \dots, b_{n-m}$ בסיס של V_2 (נתון). לכן הם בת"ל. לכן (*3) מתקיים רק אם

$$\delta_1 = \dots = \delta_m = \gamma_1 = \dots = \gamma_{n-m} = 0. \quad (*4)$$

מכאן מקבלים מ (*1) כי

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} = \bar{0}. \quad (*5)$$

$u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}$ בסיס של V_1 (נתון), לכן הם בת"ל.

לכן (*5) מתקיים רק אם

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \beta_1 = \dots = \beta_{k-m} = 0. \quad (*6)$$

לכן, בגלל שהמקדמים ב (*1) כולם שווים ל 0, כפי שהוכחנו ב (*4) ו (*6), אז הוקטורים

$u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m}$ בת"ל. כלומר הם מהווים בסיס של $V_1 + V_2$.

מכאן

$$\dim(V_1 + V_2) = m + (k - m) + (n - m) = k + n - m = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

מש"ל. ■

10.9 מסקנה. ()

נניח $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ תתי מרחבים ממימד 2, אז $\dim(V_1 \cap V_2) > 0$.

הוכחה.

V_1, V_2 תתי מרחבים של \mathbb{R}^3 , לכן $\dim(V_1 + V_2) \leq 3$. לפי משפט 10.7,

$$4 = \dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) \leq 3 + \dim(V_1 \cap V_2)$$

לכן

$$\dim(V_1 \cap V_2) \geq 4 - 3 = 1.$$

■

כיצד למצוא בסיס ומימד של סכום וחיתוך ת"מ

נניח כי V, U תתי מרחבים של \mathbb{R}^n . ונניח ש

$$\{u_1, \dots, u_k\}$$

בסיס של U ו

$$\{v_1, \dots, v_l\}$$

בסיס של V . כדי למצוא בסיס של $V + W$, נרשום מטריצה Q מסדר $n \times (k + l)$ המורכב מהבסיסים של U ו V :

$$Q = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} | & | & & | & | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_k & v_1 & v_2 & \dots & v_l \\ | & | & & | & | & | & & | \end{array} \right)$$

אז המרחב העמודות של $U + V$ שווה למרחב העמודות של Q :

$$\text{col}(Q) = \text{col}(U + V)$$

ובסיס של $\text{col}(Q)$ שווה גם לבסיס של $U + V$:

$$B(Q) = B(U + V) .$$

בסיס של $U \cap V$ ניתן למצוא ע"י המרחב האפס של Q , $\text{Nul}(Q)$. נניח כי הוקטור x במרחב האפס של Q , כלומר $x \in \text{Nul}(Q) \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$. נניח כי הרכיבים של x הם

$$x = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ b_1 \\ \vdots \\ b_l \end{pmatrix} .$$

כיוון שוקטור x ב $\text{Nul}(Q)$ אז

$$Q \cdot x = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} | & | & & | & | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_k & v_1 & v_2 & \dots & v_l \\ | & | & & | & | & | & & | \end{array} \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ b_1 \\ \vdots \\ b_l \end{pmatrix} = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_l v_l = \bar{0} . \quad (1*)$$

עכשיו נעביר את כל האיברים של הבסיס v_1, \dots, v_l לאגף הימין ונקבל

$$a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = -b_1 v_1 - \dots - b_l v_l . \quad (2*)$$

שימו לב הצירוף לינארי באגף השמאל הוא וקטור של U והצירוף לינארי באגף הימין הוא וקטור של V . נקרא הוקטור הזה y :

$$y := a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = -b_1 v_1 - \dots - b_l v_l . \quad (3*)$$

כך קיבלנו וקטור y השייך גם ל U וגם ל V , או במילים אחרות

$$y \in U \cap V .$$

10.10 דוגמא.

נתונים וקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

נסמן

$$V_1 = \text{sp}(u_1, u_2), \quad V_2 = \text{sp}(u_3, u_4).$$

מצאו בסיס ומימד של V_1 ו V_2 , $V_1 \cap V_2$.

פיתרון.

בסיס של V_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של V_1 :

$$B(V_1) = \{u_1, u_2\}$$

$$\dim(V_1) = 2$$

בסיס של V_2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של V_2 :

$$B(V_2) = \{u_3, u_4\}$$

$$\dim(V_2) = 2$$

$$Q = (u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_2 + R_3 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_3 + R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

העמודות 1, 2, 3 מובילות לכן בסיס של $V_1 + V_2$ הוא

$$B(V_1 + V_2) = \{u_1, u_2, u_3\}$$

$$\dim(V_1 + V_2) = 3 \text{ ו}$$