שעור 5
אסטרטגיות מעורבות

5.1 הגדרה של אסטרטגיות מעורבות

הגדרה 5.1 אסטרטגיות מעורבות

יהי $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ משחק בצורה אסטרטגית שבו קבוצות האסטרטגיות של השחקנים סופיות.

נניח כי $S_1 = \left(s_1^1, s_1^2, \ldots, s_1^n\right)$ קבוצת אסטרטגיות של שחקן 1,
ונניח כי X_1 היא פונקצית ההסתברות של הקבוצת אסטרטגיות S_1:

$$X_1 : S_1 \to [0,1] \ .$$

קבוצת אסטרטגיה מעורבת של שחקן 1 מסומן X_1 ומוגדר להיות הקבוצה

$$X_1(S_1) = \left\{X_1\left(s_1^1\right), X_1\left(s_1^2\right), \ldots, X_1\left(s_1^n\right)\right\}$$

כאשר:

$X_1\left(s_1^1\right) =$ ההסתברות לשחקן 1 לשחק לפי האסטרטגיה s_1^1,
$X_1\left(s_1^2\right) =$ ההסתברות לשחקן 1 לשחק לפי האסטרטגיה s_1^2,
וכן הלא.

באופן כללי, נניח כי $S_i = \left(s_i^1, s_i^2, \ldots, s_i^m\right)$ קבוצת אסטרטגיות של שחקן 1.
קבוצת אסטרטגיה מעורבת של שחקן i מסומן X_i ומוגדר להיות הקבוצה

$$X_i(S_i) = \left\{X_i\left(s_i^1\right), X_i\left(s_i^2\right), \ldots, X_i\left(s_i^m\right)\right\}$$

כאשר:

$X_i\left(s_i^1\right) =$ ההסתברות לשחקן i לשחק לפי האסטרטגיה s_i^1,
$X_i\left(s_i^2\right) =$ ההסתברות לשחקן i לשחק לפי האסטרטגיה s_i^2,
וכן הלא.

סימון: ניתן לסמן אסטרטגיה מעורבת עם אותיות גדולות, ולסמן את ההסתברויות עצמן עם אותיות קטנות. למשל

$$X\left(S_1\right) = \left\{X\left(s_1^1\right), X\left(s_1^2\right), \ldots, X\left(s_1^n\right)\right\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

ז"א $x_1 = X\left(s_1^1\right)$ מסמן את ההסתברות ששחקן 1 ישחק לפי אסטרטגיה s_1^1, ו- $x_2 = X\left(s_1^2\right)$ מסמן את ההסתברות ששחקן 2 ישחק לפי אסטרטגיה s_1^2.

לפי תכונת החיובית של פונקצית הסתברות,

$$0 \le X\left(s_i\right) \le 1 \qquad (*1)$$

לכל $s_i \in S_i$ ולפי תכונת הנרמול של פונקצית הסתברות, אם X אסטרטגיה מעורבת של שחקן i אז מתקיים

$$X\left(s_i^1\right) + X\left(s_i^2\right) + \ldots + X\left(s_i^n\right) = 1 \ . \qquad (*2)$$

תכונות (1*) ו- (2*) אומרות כי הקבוצה X היא **סימפלקס**.

דוגמה 5.1 (אסטרטגיה מעורבת)

דוגמה 1) נניח שקבוצת האסורגיות הטהורות של שחקן היא 1

$$S_1 = \{A, B, C\} \ .$$

את האסטרטגיות המעורבת X שבה הוא בוחר כל אסטרטגיה טהורה בהסתברות $\frac{1}{3}$ נסמן על יד

$$X(S_1) = \{X(A), X(B), X(C)\} = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)$$

דוגמה 2 אם $S_1 = \{H, T\}$, האוסף של כל האסטרטגיות המעורבות, X של שחקן 1 מסומן

$$\Sigma_1 = \left\{ \{X(H), X(T)\} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \ \middle|\ 0 \leq x_1, x_2 \leq 1, x_1 + x_1 = 1 \right\} \ .$$

במקרה זה הקבוצה Σ_1 שקולה לקטע ב- $\mathbb{R}^2$ המחבר את $(1,0)$ עם $(0,1)$.

דוגמה 3 אם $S_2 = \{L, M, R\}$, אוסף של כל האסטרטגיות המעורבות Y של שחקן 2 מסומן

$$\Sigma_2 = \left\{ \{Y(L), Y(M), Y(R)\} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \ \middle|\ 0 \leq y_1, y_2, y_3 \leq 1 \ , \ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \right\} \ .$$

במקרה זה Σ_2 שקולה למשולש ב- $\mathbb{R}^3$ שקדקודיו הם הנקודות $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ו- $(0,0,1)$.

דוגמה 5.2 (וקטור אסטרטגיות מעורב)

נתון המשחק G באסטרטגיות טהורות הנתון למטה:

$I \backslash II$	A	B
α	$1,1$	$2,-7$
β	$3,-2$	$5,6$

נניח כי באסטרטגיות מעורבות שחקן 1 משחק לפי אסטרטגיה A בהסתברות $\dfrac{1}{3}$ ולפי אסטרטגיה B בהסתברות $\dfrac{2}{3}$, ושחקן 2 משחק לפי אסטרטגיה α בהסתברות $\dfrac{2}{5}$ ולפי אסטרטגיה β בהסתברות $\dfrac{3}{5}$. וקטור האסטרגיות המעורב של שחקן 1 הוא

$$X = (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

ווקטור האסטרגיות המעורב של שחקן 2 הוא

$$Y = (y_1, y_2) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) \ .$$

המשחק בצורה אסטרטגית מעורבת הינה

$I \backslash II$	$\frac{1}{3}(A)$	$\frac{2}{3}(B)$
$\frac{2}{5}(\alpha)$	$1,1$	$2,-7$
$\frac{3}{5}(\beta)$	$3,-2$	$5,6$

שימו לב X ו- Y הם סימפלקסים, בגלל ש- $x_1 + x_2 = 1$ ו- $y_1 + y_2 = 1$.

דוגמה 5.3 (וקטור אסטרטגיות מעורב)

נתון המשחק G באסטרטגיות טהורות הנתון למטה:

$I \backslash II$	L	C	R
t	$0,2$	$2,-7$	$3,2$
m	$3,-2$	$5,4$	$2,9$
b	$3,-2$	$5,6$	$7,-8$

נניח כי באסטרטגיות מעורבות שחקן 1 משחק לפי אסטרטגיה L בהסתברות $\frac{1}{7}$, לפי אסטרטגיה C בהסתברות $\frac{2}{7}$, ולפי אסטרטגיה R בהסתברות $\frac{4}{7}$, ושחקן 2 משחק לפי אסטרטגיה t בהסתברות $\frac{1}{9}$, לפי אסטרטגיה m בהסתברות $\frac{4}{9}$, ולפי אסטרטגיה b בהסתברות $\frac{5}{9}$.
וקטור האסטרגיות המעורב של שחקן 1 הוא

$$X=(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{4}{7}\right)$$

ווקטור האסטרגיות המעורב של שחקן 2 הוא

$$Y=(y_1,y_2,y_3)=\left(\frac{1}{9},\frac{4}{9},\frac{5}{9}\right)\ .$$

המשחק בצורה אסטרטגית מעורבת הינה

$I \backslash II$	$\frac{1}{7}\,(L)$	$\frac{2}{7}\,(C)$	$\frac{4}{7}\,(R)$
$\frac{1}{9}\,(t)$	$0,2$	$2,-7$	$3,2$
$\frac{4}{9}\,(m)$	$3,-2$	$5,4$	$2,9$
$\frac{5}{9}\,(b)$	$3,-2$	$5,6$	$7,-8$

שימו לב X ו- Y הם סימפלקסים, בגלל ש- $x_1+x_2+x_3=\frac{1}{7}+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=1$ ו- $y_1+y_2+y_3=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{5}{9}=1$.

הגדרה 5.2 ההרחבה של משחק לאסטרטגיות מעורבות

יהי $G=\left(N,(S_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}\right)$ משחק בצורה אסטרטגית.
ההרחבה של G לאסטרטגיות מעורבות הוא המשחק

$$\Gamma=\left(N,(\Sigma_i)_{i\in N},(U_i)_{i\in N}\right) \tag{5.1}$$

כאשר:
Σ_i מסמן את האוסף של כל האסורוגיות המעורבות $X_i\,(S_i)$ של שחקן i,
ו- U_i מסמן את פונקצית התשלום של שחקן i אשר מוגדרת

$$U_i\,(X_1,\ldots,X_N)=\sum_{s_1\in S_1,\ldots,s_N\in S_N} u_i(s_1,\ldots,s_n)X_1(s_1)X_2(s_2)\ldots X_n(s_n)\ . \tag{5.2}$$

דוגמה 5.4 (פונקצית התשלום של משחק באסטרטגיות מעורבות)

נתון המשחק G באסטרטגיות טהורות:

$I \backslash II$	a	b
α	$1,1$	$2,-7$
β	$3,-2$	$5,6$

ונתון הוקטור האסטרגיות המעורבות של שחקן 1:

$$X=(x_1,x_2)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

והוקטור אסטרטגיות מעורבות של שחקן 2:

$$Y=(y_1,y_2)=\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right) \ .$$

ההרחבה של המשחק לאסטרטגיות מעורבות הינה

$I \backslash II$	$x_1\,(a)$	$x_2\,(b)$
$y_1\,(\alpha)$	$1,1$	$2,-7$
$y_2\,(\beta)$	$3,-2$	$5,6$

$=$

$I \backslash II$	$\frac{1}{3}\,(a)$	$\frac{2}{3}\,(b)$
$\frac{2}{5}\,(\alpha)$	$1,1$	$2,-7$
$\frac{3}{5}\,(\beta)$	$3,-2$	$5,6$

פונקצית התשלום של של שחקן i היא התוחלת התשלום של שחקן i:

$$U_1(X,Y)=1x_1x_2+2x_2y_1+3x_1y_2+5x_2y_2=\frac{59}{15} \ .$$

$$U_2(X,Y)=1x_1x_2-7x_2y_1-2x_1y_2+6x_2y_2=\frac{4}{15} \ .$$

ניתן לרשום את פונקצית התשלום במונחי המטריצות התשלומים של שחקן 1 ו- שחקן 2 בנפרד. המטריצת התשלומים של המשחק הינה

$$U=\begin{pmatrix}(1,1) & (2,-7)\\ (3,-2) & (5,6)\end{pmatrix}$$

והמטריצת התשלומים של השחקנים הנפרדים הינן

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix} \ , \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -7\\ -2 & 6\end{pmatrix} \ .$$

A המטיצת התשלומים של שחקן 1 ו- B המטירצת התשלומים של שחקן 2. במונחי A ו- B הפונקציות התשלומים שלהם באסטרטגיות מעורבות הן

$$U_1(X,Y)=X^tAY=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

$$U_2(X,Y)=X^tBY=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -7\\ -2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

דוגמה 5.5 (וקטור אסטרטגיות מעורב)

נתון המשחק G באסטרטגיות טהורות:

I \ II	L	C	R
t	$0,2$	$2,-7$	$3,2$
m	$3,-2$	$5,4$	$2,9$
b	$3,-2$	$5,6$	$7,-8$

ונתון וקטור האסטרגיות המעורבות של שחקן 1:

$$X = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right)$$

ווקטור האסטרגיות המעורבות של שחקן 2:

$$Y = (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right) \ .$$

המשחק בצורה אסטרטגית מעורבת הינה

I \ II	$x_1\,(L)$	$x_2\,(C)$	$x_3\,(R)$
$y_1\,(t)$	$0,2$	$2,-7$	$3,2$
$y_2\,(m)$	$3,-2$	$5,4$	$2,9$
$y_3\,(b)$	$3,-2$	$5,6$	$7,-8$

$=$

I \ II	$\frac{1}{7}\,(L)$	$\frac{2}{7}\,(C)$	$\frac{4}{7}\,(R)$
$\frac{1}{9}\,(t)$	$0,2$	$2,-7$	$3,2$
$\frac{4}{9}\,(m)$	$3,-2$	$5,4$	$2,9$
$\frac{5}{9}\,(b)$	$3,-2$	$5,6$	$7,-8$

פונקצית התשלום של של שחקן i היא התוחלת התשלום של שחקן i:

$$U_1(X,Y) = 0\cdot x_1x_2 + 2x_2y_1 + 3x_1y_2 + 3x_3y_1 + 3x_1y_2 + 5x_2y_2 + 2x_3y_2 + 3x_1y_3 + 5x_2y_3 + 7x_3y_3 = \frac{107}{21} \ .$$

$$U_2(X,Y) = 2x_1y_1 - 7x_1y_2 + 2x_1y_3 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2 + 9x_2y_3 - 2x_3y_1 + 6x_3y_2 - 8x_3y_3 = \frac{10}{21} \ .$$

ניתן לרשום את פונקצית התשלום במונחי המטריצות התשלומים של שחקן 1 ו- שחקן 2 בנפרד. המטריצת התשלומים של המשחק הינה

$$U = \begin{pmatrix} (0,2) & (2,-7) & (3,2) \\ (3,-2) & (5,4) & (2,9) \\ (3,-2) & (5,6) & (7,-8) \end{pmatrix}$$

והמטריצת התשלומים של השחקנים הנפרדים הינן

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 2 \\ -2 & 4 & 9 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix} \ .$$

A המטיצת התשלומים של שחקן 1 ו- B המטירצת התשלומים של שחקן 2. במונחי A ו- B הפונקציות התשלומים שלהם באסטרטגיות מעורבות הן

$$U_1(X,Y) = X^t AY = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$U_2(X,Y) = X^t BY = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -7 & 2 \\ -2 & 4 & 9 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

5.2 שיווי משקל נאש ועקרון האדישות

הגדרה 5.3 שיווי משקל האש באסטרטגיות מעורבות

יהי $G=\left(N,\left(S_i\right)_{i\in N},\left(u_i\right)_{i\in N}\right)$ משחק בצורה אסטרטגית ויהי $\Gamma=\left(N,\left(\Sigma_i\right)_{i\in N},\left(U_i\right)_{i\in N}\right)$ ההרחבה שלו לאסטרטגיות מעורבות. וקטור אסטרטגיות $\sigma^*=\left(X_1^*,\ldots,X_N^*\right)$ הוא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות אם התנאי הבא מתקיים

$$U_i\left(\sigma^*\right)\geq U_i\left(X_i,\sigma_{-i}^*\right)\ . \tag{5.3}$$

משפט 5.1 עקרון האדישות

יהי σ^* שיווי משקל במשחק בצורה אסטרטגית, ותהיינה s_i ו- $\hat{s}_i$ שתי אסטרטגיות טהורות של שחקן i. אם $\sigma_i^*\left(s_i\right)>0$ וכן $\sigma_i^*\left(\hat{s}_i\right)>0$ אזי

$$U_i\left(s_i,\sigma_{-i}^*\right)=U_i\left(\hat{s}_i,\sigma_{-i}^*\right) \tag{5.4}$$

הוכחה: נניח בשלילה כי משוואה (5.4) אינה מתקיימתף ובלי הגבלת הכלליות נניח כי

$$U_i\left(s_i,\sigma_{-i}^*\right)>U_i\left(\hat{s}_i,\sigma_{-i}^*\right)\ . \tag{5.5}$$

תהי σ_i האסטרטגיה של שחקן i המוגדרת באופן הבא:

$$\sigma_i(t_i)\triangleq\begin{cases}\sigma_i^*\left(t_i\right) & t_i\notin\left\{s_i,\hat{s}_i\right\}\ ,\\ 0 & t_i=\hat{s}_i\ ,\\ \sigma_i^*\left(s_i\right)+\sigma_i^*\left(\hat{s}_i\right) & t_i=s_i\ .\end{cases}$$

$$\begin{aligned}U_i\left(\sigma_i,\sigma_{-i}^*\right)&=\sum_{t_i\in S_i}\sigma\left(t_i\right)U_i\left(t_i,\sigma_{-i}^*\right) &(5.6)\\ &=\sum_{t_i\notin\{s_i,\hat{s}_i\}}\sigma^*\left(t_i\right)U_i\left(t_i,\sigma_{-i}^*\right)+\left(\sigma^*\left(s_i\right)+\sigma^*\left(\hat{s}_i\right)\right)U_i\left(s_i,\sigma_{-i}^*\right) &(5.7)\\ &>\sum_{t_i\notin\{s_i,\hat{s}_i\}}\sigma^*\left(t_i\right)U_i\left(t_i,\sigma_{-i}^*\right)+\sigma^*\left(s_i\right)U_i\left(s_i,\sigma_{-i}^*\right)+\sigma^*\left(\hat{s}_i\right)U_i\left(\hat{s}_i,\sigma_{-i}^*\right) &(5.8)\\ &=\sum_{t_i\in S_i}\sigma^*\left(t_i\right)U_i\left(t_i,\sigma_{-i}^*\right) &(5.9)\\ &=U_i\left(\sigma^*\right)\ . &(5.10)\end{aligned}$$

קיבלנו כי $U_i\left(\sigma_i,\sigma_{-i}^*\right)>U_i\left(\sigma^*\right)$ בסתירה לכך ש- σ^* שיווי משקל. ■

דוגמה 5.6 ()

נתון משחק שני שחקנים (שאינו סכום אפס) בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

I \ II	L	R
T	$1,8$	$9,2$
B	$7,1$	$2,5$

מצאו את השיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

I \ II	$y(L)$	$(1-y)(R)$
$x(T)$	$1,8$	$9,2$
$(1-x)(B)$	$7,1$	$2,5$

$$U_1(x,y) = (2(1-x)+9x)(1-y) + (7(1-x)+x)y = -13xy + 7x + 5y + 2 \ .$$
$$U_2(x,y) = (5(1-x)+2x)(1-y) + (7x+1)y = 10xy - 3x - 4y + 5 \ .$$

לפי עקרון האדישות:

$$\begin{aligned} U_1(T,y^*) &= U_1(B,y^*) \\ \Rightarrow \quad U_1(1,y^*) &= U_1(0,y^*) \\ \Rightarrow \quad 9-8y^* &= 2+5y^* \\ \Rightarrow \quad y^* &= \frac{7}{13} \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2(x^*,L) &= U_2(x^*,R) \\ \Rightarrow \quad U_2(x^*,1) &= U_2(x^*,0) \\ \Rightarrow \quad 1+7x^* &= 5-3x^* \\ \Rightarrow \quad x^* &= \frac{2}{5} \ . \end{aligned}$$

לכן השיווי משקל הוא

$$X^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) \ , \qquad Y^* = \left(\frac{7}{13}, \frac{6}{13}\right) \ .$$

■

דוגמה 5.7 ()

נתון משחק שני שחקנים (שאינו סכום אפס) בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

I \ II	L	R
T	$5,5$	$-2,-2$
B	$4,4$	$3,3$

מצאו את השיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

$I \backslash II$	$y(L)$	$(1-y)(R)$
$x(T)$	$5,5$	$-2,-2$
B	$4,4$	$3,3$

$$U_1(x,y) = (3(1-x)-2x)(1-y) + (4(1-x)+5x)y = 6xy - 5x + y + 3 \ .$$
$$U_2(x,y) = (3(1-x)-2x)(1-y) + (4(1-x)+5x)y = 6xy - 5x + y + 3 \ .$$

לפי עקרון האדישות:

$$\begin{aligned} U_1(T,y^*) &= U_1(B,y^*) \\ \Rightarrow \quad U_1(1,y^*) &= U_1(0,y^*) \\ \Rightarrow \quad -2+7y^* &= 3+y^* \\ \Rightarrow \quad y^* &= \frac{5}{6} \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2(x^*,L) &= U_2(x^*,R) \\ \Rightarrow \quad U_2(x^*,1) &= U_2(x^*,0) \\ \Rightarrow \quad 4+x^* &= 3-5x^* \\ \Rightarrow \quad x^* &= -\frac{1}{6} \notin [0,1] \ . \end{aligned}$$

אין השיווי משקל באסרטגיות מעורבות. ■

משפט 5.2 נוסחאות שיווי משקל למשחק שני-שחקנים ריבועי

יהי $G = (\{1,2\},\{S_1,S_2\},\{u_1,u_2\})$ משחק שני שחקנים ריבועי
שבו לכל שחקן יש n אסטרטגיות טהורות.

יהי $X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ וקטור אסטרטגיות שיווי משקל של שחקן 1,

יהי $Y^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ וקטור אסטרטגיות שיווי משקל של שחקן 2

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצת התשלומים של שחקן 1, תהי $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצת התשלומים של שחקן 2,

ויהו U_1^* ו- U_2^* התשלומי שיווי משקל של שחקן 1 ושחקן 2 בהתאמה.

אזי

$$X^{*t} = \frac{e^t A^{-1}}{\langle e, A^{-1}e\rangle} \ , \qquad U_1^* = \langle X^*, AY^*\rangle = \frac{1}{\langle e, A^{-1}e\rangle}$$
$$Y^* = \frac{B^{-1}e}{\langle e, B^{-1}e\rangle} \ , \qquad U_2^* = \langle X^*, BY^*\rangle = \frac{1}{\langle e, B^{-1}e\rangle} \ .$$

כאשר $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ וקטור של $\mathbb{R}^n$ שבו כל איבר שווה ל- 1.

הוכחה:

- לפי עקרון האדישות,
$$X^{*t}A = u_1 e^t \ .$$
לכן
$$X^{*t} = u_1 e^t A^{-1} \ .$$
מכיוון שהסכום של ההסתברויות שווה ל- 1 אז
$$1 = X^{*t}e = u_1 e^t A^{-1} e \qquad \Rightarrow \qquad u_1 = \frac{1}{e^t A^{-1} e} = \frac{1}{\langle e, A^{-1}e\rangle} \ .$$
על ידי הצבה בביטוי הקודם נקבל
$$X^{*t} = \frac{e^t A^{-1}}{\langle e, A^{-1}e\rangle} \ .$$

- באותה מידה לפי עקרון האדישות,
$$BY^* = u_2 e \ .$$
לכן
$$Y^* = u_2 B^{-1} e \ .$$
מכיוון שהסכום של ההסתברויות שווה ל- 1 אז
$$1 = e^t X^* = u_2 e^t B^{-1} e \qquad \Rightarrow \qquad u_2 = \frac{1}{e^t B^{-1} e} = \frac{1}{\langle e, B^{-1}e\rangle} \ .$$
על ידי הצבה בביטוי הקודם נקבל
$$Y^* = \frac{A^{-1}e}{\langle e, B^{-1}e\rangle} \ .$$

- $$\begin{aligned} U_1^* &= \langle X^*, AY^*\rangle = X^{*t}AY^* \\ &= \frac{e^t A^{-1} A B^{-1} e}{\langle e, A^{-1}e\rangle \langle e, B^{-1}e\rangle} \\ &= \frac{e^t B^{-1} e}{\langle e, A^{-1}e\rangle \langle e, B^{-1}e\rangle} \\ &= \frac{\langle e, B^{-1}e\rangle}{\langle e, A^{-1}e\rangle \langle e, B^{-1}e\rangle} \\ &= \frac{1}{\langle e, A^{-1}e\rangle} \ . \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} U_2^* &= \langle X^*, BY^*\rangle = X^{*t}BY^* \\ &= \frac{e^t A^{-1} B B^{-1} e}{\langle e, A^{-1}e\rangle \langle e, B^{-1}e\rangle} \\ &= \frac{e^t A^{-1} e}{\langle e, A^{-1}e\rangle \langle e, B^{-1}e\rangle} \\ &= \frac{\langle e, A^{-1}e\rangle}{\langle e, A^{-1}e\rangle \langle e, B^{-1}e\rangle} \\ &= \frac{1}{\langle e, B^{-1}e\rangle} \ . \end{aligned}$$

■

דוגמה 5.8 ((

$I \backslash II$	a	b	c
α	$1,1$	$1,2$	$2,1$
β	$1,2$	$3,1$	$0,1$
γ	$2,-1$	$1,1$	$1,2$

פתרון:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&3&0\\2&1&1\end{pmatrix} , \qquad B=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\-1&1&2\end{pmatrix} .$$

$$A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-3&-1&6\\1&3&-2\\5&-1&-2\end{pmatrix} , \qquad B^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1&3&-1\\5&-3&-1\\-3&3&3\end{pmatrix} .$$

לכן

$$U_1^*=\frac{1}{\langle e,A^{-1}e\rangle}=\frac{4}{3} .$$

$$U_2^*=\frac{1}{\langle e,B^{-1}e\rangle}=\frac{6}{5} .$$

$$X^*=U_1^*e^tA^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{pmatrix} ,$$

$$Y^*=U_2^*B^{-1}e=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix} .$$

■

מסקנה 5.1 נוסחאות שיווי משקל למשחק שני-שחקנים סכום-אפס ריבועי

במשחק סכום אפס ריבועי שבו לכל שחקן יש n אסטרטגיות טהורות. אם A המטריצת המשחק אז הווקטורי אסטרטגיות שיווי משקל X^* ו- Y^* של שחקן 1 (שחקן השורות) ושחקן 2 (שחקן העמודות), והתשלום שיווי משקל נתונים על ידי

$$X^{*t}=\frac{e^tA^{-1}}{\langle e,A^{-1}e\rangle} , \qquad Y^*=\frac{B^{-1}e}{\langle e,B^{-1}e\rangle} , \qquad U=\langle X^*,AY^*\rangle=\frac{1}{\langle e,A^{-1}e\rangle} .$$

משפט 5.3

יהי $G=\left(N,(S_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}\right)$ משחק בצורה אסטרטגית ו- Γ ההרחבה שלו לאסטרטגיות מעורבות. וקטור אסטרטגיות מעורבות σ^* הוא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות במשחק Γ אם ורק אם לכל שחקן $i\in N$ ולכל אסטרטגיה טהורה $s_i\in S_i$ מתקיים

$$U_i\left(\sigma^*\right)\geq U_i\left(s_i,\sigma_{-i}^*\right) . \tag{5.11}$$

הוכחה: σ^* שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות במשחק Γ אז

$$U_i\left(\sigma^*\right) \geq U_i\left(X_i, \sigma_{-i}^*\right)$$

לכל שחקן i ולכל אסטרטגיה מעורבת $X_i \in \Sigma_i$.

כל אסטרטגיה טהורה היא אסטרטגיה מעורבת, אז

$$U_i\left(\sigma^*\right) \geq U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right)$$

לכל שחקן i ולכל אסטרטגיה טהורה $s_i \in S_i$.

להוכחת הכיוון ההפוך, נניח כי וקטור האסטרטגיות המעורבות σ^* מקיים את המשוואה (5.11) לכל שחקן $i \in N$ ולכל אסטרטגיה טהורה $s_i \in S_i$.
אזי לכל אסטרטגיה מעורבת σ_i של שחקן i:

$$U_i\left(X_i, \sigma_{-i}^*\right) = \sum_{s_i \in S_i} X_i\left(s_i\right) U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) \tag{5.12}$$

$$\leq \sum_{s_i \in S_i} X_i\left(s_i\right) U_i\left(\sigma^*\right) \tag{5.13}$$

$$= U_i\left(\sigma^*\right) \sum_{s_i \in S_i} X_i\left(s_i\right) = U_i\left(\sigma^*\right) , \tag{5.14}$$

כאשר השוויון (5.12) נובע מכך ש- U_i היא פונקציה מולטי-לינארית והאי-שוויון (5.13) נובע מהאי-שוויון (5.11).
בפרט, σ^* הוא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות ב- Γ. ■

מסקנה 5.2

יהי σ^* שיווי משקל במשחק בצורה אסטרטגית, ותהיינה s_i ו- $\hat{s}_i$ שתי אסטרטגיות טהורות של שחקן i.

1) אם $U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) < U_i\left(\sigma^*\right)$ אז $X_i^*\left(s_i\right) = 0$.

2) אם $U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) < U_i\left(\hat{s}_i, \sigma^*\right)$ אז $X_i^*\left(s_i\right) = 0$.

3) אם $X_i^*\left(s_i\right) > 0$ ו- $X_i^*\left(\hat{s}_i\right) > 0$ אז $U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) = U_i\left(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*\right)$.

4) אם s_i נשלטת חזק על ידי $\hat{s}_i$ אז $X_i^*\left(s_i\right) = 0$.

הוכחה:

1) נניח $U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) < U_i\left(\sigma^*\right)$.
נניח בשלילה כי $X_i^*\left(s_i\right) > 0$. לפי עקרטו האדישות לכל אסטרטגיה טהורה $\hat{s}_i$ עבורה $X_i^*\left(\hat{s}_i\right) > 0$ מתקיים $U_i\left(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*\right) = U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right)$ לכן

$$\begin{aligned}
U_i\left(\sigma^*\right) &= \sum_{\hat{s}_i \in S_i} X_i^*\left(\hat{s}_i\right) U_i\left(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*\right) \\
&= \sum_{\substack{\hat{s}_i \in S_i \\ X_i^*\left(\hat{s}_i\right) > 0}} X_i^*\left(\hat{s}_i\right) U_i\left(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*\right) \\
&= \sum_{\substack{\hat{s}_i \in S_i \\ X_i^*\left(\hat{s}_i\right) > 0}} X_i^*\left(\hat{s}_i\right) U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) \\
&= U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right)
\end{aligned}$$

בסתירה לכך ש- $U_i\left(s_i,\sigma^*_{-i}\right)<U_i\left(\sigma^*\right)$.

2)

$$U_i\left(s_i,\sigma^*_{-i}\right)<U_i\left(\hat{s}_i,\sigma^*_{-i}\right)\overset{\text{אדישות}}{=}U_i\left(\sigma^*\right)$$

ז"א $U_i\left(s_i,\sigma^*_{-i}\right)<U_i\left(\sigma^*\right)$ ולכן לפי סעיף א' $\sigma^*_i\left(s_i\right)=0$.

3) עקרון האדישות (משפט 5.1).

4) נניח כי s_i נשלטת חזק על ידי $\hat{s}_i$. אזי

$$u_i\left(s_i,s_{-i}\right)<u_i\left(\hat{s}_i,s_{-i}\right)\qquad\forall s_{-i}\in S_{-i}\ .$$

מכאן

$$\begin{aligned}U_i\left(s_i,\sigma^*_{-i}\right)&=\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\sigma^*_{-i}u_i\left(s_i,s_{-i}\right)\\&<\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\sigma^*_{-i}u_i\left(\hat{s}_i,s_{-i}\right)\\&=U_i\left(\hat{s}_i,\sigma^*_{-i}\right)\end{aligned}$$

ז"א

$$U_i\left(s_i,\sigma^*_{-i}\right)<U_i\left(\hat{s}_i,\sigma^*_{-i}\right)$$

ולכן לפי סעיף ב' $X^*_i\left(s_i\right)=0$.

■