

שיעור 10 אינטגרלים לא מסויימים

אינטגרלים לא מסויימים

10.1 הגדרה: (פונקציה קדומה)

אם $F'(x) = f(x)$ אז אומרים כי $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$.

דוגמא.

$$(x^2)' = 2x ,$$

לכן $F(x) = x^2$ פונקציה קדומה של $f(x) = 2x$

10.2 משפט. (פונקציה קדומה)

אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$, אז $F(x) + C$ (לכל $C \in \mathbb{R}$ קבוע) היא גם פונקציה קדומה של $f(x)$.

ז"א אם פונקציה קדומה של $f(x)$ קיימת, בהכרח ישנם אינסוף פונקציות קדומות של $f(x)$.

דוגמא.

$$(x^2 + C)' = 2x ,$$

לכן לפונקציה $f(x) = 2x$ יש אינסוף פונקציות קדומות מהצורה $F(x) = x^2 + C$.

10.3 הגדרה: (האינטגרל הלא מסויים)

האוסף של כל הפונקציות הקדומות של $f(x)$, נקרא האינטגרל הלא מסויים של $f(x)$, מסומן $\int f(x)dx$.
ז"א

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \Leftrightarrow \quad (F(x) + C)' = f(x) .$$

dx נקרא הדיפרנציאל של x .

דוגמאות

$$\int 2x dx = x^2 + C \quad (1)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad (2)$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C \quad (3)$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \quad (4)$$

לינאריות של אינטגרל לא מסויים

10.4 הגדרה: (לינאריות של אינטגרל לא מסויים)

נתונות פונקציות $f(x)$, $g(x)$ וסקלר a .

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx \quad (\text{i})$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad (\text{ii})$$

הוכחה.

(i) אם $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$, אז $F'(x) = f(x)$. לפי ולפי משפט ?? (מספר 2),

$$a \cdot f(x) = a \cdot F'(x) = (aF(x))'.$$

נפעיל אינטגרל לא מסויים על שני הצדדים ונקבל

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot F(x) + C.$$



טבלת האינטגרלים חלקית

$$\begin{aligned}
\int x^a dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad (a \neq -1) \\
\int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + C, \\
\int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C, \\
\int e^x dx &= e^x + C, \\
\int \sin x dx &= -\cos x + C, \\
\int \cos x dx &= \sin x + C, \\
\int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C, \\
\int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C, \\
\int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x + C, \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C,
\end{aligned}$$

תרגילים

(1)

$$\begin{aligned}
\int \left(1 + \sqrt[3]{x^2}\right)^2 dx &= \int (1 + 2x^{2/3} + x^{4/3}) dx \\
&= x + 2 \frac{x^{2/3}}{5/3} + \frac{x^{4/3}}{7/3} + C \\
&= x + \frac{6x^{2/3}}{5} + \frac{3x^{4/3}}{7} + C
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} dx &= \int x^{-2/5} dx \\
&= \frac{5}{3} x^{1-2/5} + C \\
&= \frac{5}{3} x^{3/5} + C
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x} dx &= \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx \\
&= x + \ln |x| + C
\end{aligned}$$

החלפת משתנה / אינטגרציה ע"י הצבה

10.5 משפט. (אינטגרציה ע"י הצבה)

נתון אינטגרל מצורה

$$\int f(t(x)) \cdot u'(x) dx$$

כאשר $f(u(x))$ פונקציה של הפונקציה $u(x)$ ו- $u'(x)$ הנגזרת של $u(x)$. אז

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int f(u) du .$$

10.6 דוגמא.

חשב את האינטגרל הלא מסוים

$$\int \sin(2x) dx$$

פיתרון.

$$u = 2x , \quad u'(x) = 2 , \quad \frac{1}{2}u'(x) = 1 .$$

$$\begin{aligned} \int \sin(2x) dx &= \frac{1}{2} \int \sin u \cdot u' dx \\ &= -\frac{1}{2} \cos u + C \\ &= -\frac{1}{2} \cos(2x) + C \end{aligned}$$

■

10.7 דוגמא.

חשב את האינטגרל הלא מסוים

$$\int e^{ax} dx$$

פיתרון.

$$u = ax , \quad u'(x) = a , \quad \frac{1}{a}u'(x) = 1 .$$

$$\begin{aligned} \int e^{ax} dx &= \int e^{u(x)} \cdot \frac{1}{a} \cdot u'(x) dx \\ &= \frac{1}{a} \int e^u du \\ &= \frac{1}{a} e^u + C \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} + C \end{aligned}$$

■

10.8 דוגמא.

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{1}{x^2 + 8} dx$$

פיתרון.

$$u(x) = \frac{x}{\sqrt{8}}, \quad u'(x) = \frac{1}{\sqrt{8}}, \quad \Rightarrow \quad 1 = \sqrt{8} u'(x).$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 8} dx &= \int \frac{1}{8u^2 + 8} \sqrt{8} u'(x) dx \\ &= \sqrt{8} \int \frac{1}{8u^2 + 8} du \\ &= \frac{\sqrt{8}}{8} \int \frac{1}{u^2 + 1} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{8}} \arctan(u) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{8}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right) + C \end{aligned}$$

באופן כללי,

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

■

10.9 דוגמא.

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{1}{5x + 2} dx$$

פיתרון.

$$u(x) = 5x + 2, \quad u'(x) = 5, \quad \frac{1}{5} u'(x) = 1.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{5x + 2} dx &= \int \frac{1}{u(x)} \cdot \frac{u'(x)}{5} dx \\ &= \frac{1}{5} \int \frac{1}{u(x)} du \\ &= \frac{1}{5} \ln|u| + C \\ &= \frac{1}{5} \ln|5x + 2| + C \end{aligned}$$

באופן כללי,

$$\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax + b| + C.$$

■

10.10 דוגמא.

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int (3x - 1)^{24} dx$$

פיתרון.

$$u(x) = 3x - 1, \quad u' = 3, \quad \frac{1}{3}u'(x) = 1$$

$$\begin{aligned} \int (3x - 1)^{24} dx &= \int u^{24} \cdot \frac{u'(x)}{3} dx \\ &= \frac{1}{3} \int u^{24} du \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{25}}{25} + C \\ &= \frac{1}{75} (3x - 1)^{25} + C \end{aligned}$$

■

10.11 דוגמא.

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \tan x dx$$

פיתרון.

$$\begin{aligned} \int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ u = \cos x, \quad u' &= -\sin x. \\ \int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= - \int \frac{1}{u} u'(x) dx \\ &= - \int \frac{1}{u} du \\ &= - \ln |u| + C \\ &= - \ln |\cos x| + C \end{aligned}$$

■

10.12 דוגמא.

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \cot x dx$$

פיתרון.

$$\begin{aligned}\int \cot x \, dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx \\ u(x) &= \sin x, \quad u'(x) = \cos x. \\ \int \cot x \, dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx \\ &= \int \frac{1}{u} u'(x) \, dx \\ &= \int \frac{1}{u} \, du \\ &= \ln |u| + C \\ &= \ln |\sin x| + C\end{aligned}$$

■

10.13 דוגמא.

חשב את האינטגרל הלא מסוים

$$\int x(x+2)^{69} \, dx$$

פיתרון.

$$\begin{aligned}u &= (x+2), \quad u'(x) = 1, \quad x = u - 2 \\ \int x(x+2)^{69} \, dx &= \int (u-2)u^{69} u'(x) \, dx \\ &= \int (u-2)u^{69} \, du \\ &= \int (u^{70} - 2u^{69}) \, du \\ &= \frac{u^{71}}{71} - \frac{2u^{70}}{70} + C \\ &= \frac{(x+2)^{71}}{71} - \frac{(x+2)^{70}}{35} + C\end{aligned}$$

■

10.14 דוגמא.

חשב את האינטגרל הלא מסוים

$$\int \frac{1}{\cot^5 x \cdot \sin^2 x} \, dx$$

פיתרון.

$$u = \cot x, \quad u'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cot^5 x \cdot \sin^2 x} dx &= - \int \frac{1}{u^5} u'(x) dx \\ &= - \int \frac{1}{u^5} du \\ &= - \int u^{-5} du \\ &= - \frac{u^{-4}}{-4} + C \\ &= \frac{1}{4 \cot^4 x} + C\end{aligned}$$

■

10.15 דוגמא.

חשב את האינטגרל הלא מסוים

$$\int \frac{\cos x}{3 + \sin x} dx$$

פיתרון.

$$\begin{aligned}u &= \sin x, & u'(x) &= \cos x. \\ \int \frac{\cos x}{3 + \sin x} dx &= \int \frac{1}{u + 3} u'(x) dx \\ &= \int \frac{1}{u + 3} du \\ &= \ln |u + 3| + C \\ &= \ln |\sin x + 3| + C\end{aligned}$$

■

10.16 דוגמא.

חשב את האינטגרל הלא מסוים

$$\int \frac{1}{e^x + 1} dx$$

פיתרון.

$$\begin{aligned}u &= e^x, & u'(x) &= e^x, & u'(x)e^{-x} &= \frac{1}{u} \cdot u'(x). \\ \int \frac{1}{e^x + 1} dx &= \int \frac{1}{u(u + 1)} u'(x) dx \\ &= \int \frac{1}{u(u + 1)} du \\ &= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u + 1} \right) du \\ &= \ln |u| - \ln |u + 1| + C \\ &= \ln(e^x) - \ln(e^x + 1) + C \\ &= x - \ln(e^x + 1) + C\end{aligned}$$



אינטגרציה בחלקים

10.17 משפט. (אינטגרציה בחלקים)

יהיו $u(x)$ ו- $v(x)$ פונקציות של משתנה x .

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

הוכחה.

לפי כלל הכפל של נגזרות (עיין משפט ?? מספר 3)

$$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow uv' = (uv)' - u'v$$

נפעיל אינטגרל על שני הצדדים:

$$\int uv' dx = \int (uv)' dx - \int u'v dx. \quad (*)$$

לפי משפט 10.5 ניתן לכתוב אגף השמאל של (*) כ

$$\int uv'(x) dx = \int u dv \quad \#1$$

האיבר הראשון באגף הימין של (*) הוא

$$\int (uv)' dx = uv + C \quad \#2$$

לפי משפט 10.5 האיבר השני באגף הימין של (*) הוא

$$\int u'v dx = \int v du \quad \#3$$

נציב (#1), (#2), ו- (#3) לתוך (*) ונקבל

$$\int u dv = uv - \int v du$$

ז"א

$$\int uv' dx = \int (uv)' dx - \int u'v dx$$



10.18 דוגמא.

חשב את האינטגרל

$$\int x \cdot e^x dx$$

פיתרון. $v = e^x \quad u'(x) = 1 \quad v' = e^x \quad u = x$

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C \end{aligned}$$

■

10.19 כלל: (מקרים נפוצים של שימוש באינטגרציה בחלקים)

(1) במקרה

א $\int p(x) \cdot e^{kx} dx$

ב $\int p(x) \cdot \sin(kx) dx$

ג $\int p(x) \cdot \cos(kx) dx$

כאשר $p(x)$ פולינום, מגדירים $u = p(x)$.

(2) במקרה

א $\int p(x) \cdot \arcsin(kx) dx$

ב $\int p(x) \cdot \arccos(kx) dx$

ג $\int p(x) \cdot \arctan(kx) dx$

ד $\int p(x) \cdot \ln |kx| dx$

ה $\int p(x) \cdot \operatorname{arccot}(kx) dx$

כאשר $p(x)$ פולינום, מגדירים $v' = p(x)$.

(3) במקרה

א $\int e^{ax} \cdot \sin(bx) dx$

ב $\int e^{ax} \cdot \cos(bx) dx$

מגדירים $u = e^{ax}$.

דוגמאות

10.20 דוגמא. חשב את האינטגרל

$$\int (2x + 1) e^{3x} dx$$

פיתרון.

$$u = 2x + 1, \quad v' = e^{3x} \quad u' = 2 \quad v = \frac{1}{3} \cdot e^{3x}$$

$$\begin{aligned}\int (2x+1)e^{3x} dx &= \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3} \int e^{3x} dx \\ &= \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C\end{aligned}$$

■

10.21 דוגמא. חשב את האינטגרל

$$\int \ln(x) dx$$

פיתרון.

$$\begin{aligned}u &= \ln(x) , & v' &= dx , & u' &= \frac{1}{x} , & v &= x \\ \int \ln x dx &= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C\end{aligned}$$

■

10.22 דוגמא. חשב את האינטגרל

$$\int \arctan(x) dx$$

פיתרון.

$$\begin{aligned}u &= \arctan(x) , & v' &= 1 , & u' &= \frac{1}{1+x^2} , & v &= x \\ \int \arctan x dx &= x \cdot \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ u &= x^2 + 1 , & u' &= 2x \\ \int \arctan x dx &= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du \\ &= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \ln |u| + C \\ &= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \ln |x^2 + 1| + C\end{aligned}$$

■

10.23 דוגמא. חשב את האינטגרל

$$I = \int x^2 \sin(2x) dx$$

פיתרון.

$$u = x^2, \quad v' = \sin(2x), \quad u' = 2x, \quad v = -\frac{1}{2} \cos(2x)$$

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2}x^2 \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2} \int 2x \cdot \cos(2x) dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2 \cdot \cos(2x) + \int x \cdot \cos(2x) dx \end{aligned}$$

$$u = x, \quad v' = \cos(2x), \quad u' = 1, \quad v = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2}x^2 \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2}x \cdot \sin(2x) - \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2 \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2}x \cdot \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + C \end{aligned}$$

■

10.24 דוגמא. חשב את האינטגרל

$$I = \int e^x \sin x dx$$

פיתרון.

$$u = e^x, \quad v' = \sin(x), \quad u' = e^x, \quad v = -\cos(x)$$

$$I = -e^x \cos x + \int e^x \cdot \cos(x) dx$$

$$u = e^x, \quad v' = \cos(x), \quad u' = e^x, \quad v = \sin(x)$$

$$\begin{aligned} I &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cdot \sin(x) dx \\ &= -e^x \cos x + e^x \sin x - I \end{aligned}$$

לכן

$$2I = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

ז"א

$$I = \frac{1}{2} (-e^x \cos x + e^x \sin x) + C$$

■

10.25 דוגמא. חשב את האינטגרל

$$I = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

פיתרון.

$$u = x, \quad v' = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad u' = 1, \quad v = \tan(x)$$

$$\begin{aligned} I &= x \tan x - \int \tan(x) dx \\ &= x \tan x + \ln |\cos x| + C \end{aligned}$$

■