

שעור 14

סכום ישר

דוגמה 14.1 סכום ישר

נניח ש

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

תת מרחב של \mathbb{R}^3 ו

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

תת מרחב של \mathbb{R}^3 .

אז $\dim(U_1) = \dim(U_2) = 2$.

$$U_1 \cap U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}, \dim(U_1 \cap U_2) = 1.$$

$$U_1 + U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix} \mid y_1, z_1, x_2, z_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_1 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \mid x_2, y_1, z_1 + z_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^3.$$

אז כל וקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U_1 + U_2$ ניתן להציג כסכום של וקטורים של U_1 ו U_2 באינסוף דרכים שונות:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z - z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

לכל $z_0 \in \mathbb{R}$.

דוגמה 14.2

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

U_2, U_1 תת מרחבים של U_2, U_1 .

$$\dim(U_1) = 2, \quad \dim(U_2) = 1.$$

$$U_1 \cap U_2 = \{\bar{0}\},$$

$$U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3,$$

ולכל וקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ יש דרך יחידה להציג אותו כסכום של וקטורים של U_2 ו U_1 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

דוגמה ?? היא דוגמה של סכום ישיר של תת מרחבים.

הגדרה 14.1 סכום ישיר

יהיו U_1 ו U_2 שני תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל שדה \mathbb{F} .
תת מרחב W של מרחב וקטורי V נקרא סכום ישיר של U_1 ו U_2 אם ורק אם מתקיימים:

$$W = U_1 + U_2 \quad (\text{א})$$

(ב) לכל וקטור של W יש הצגה יחידה כסכום של וקטורים ב U_1 וב U_2 .

סימון:

$$W = U_1 \oplus U_2$$

הסכום הישיר של U_2, U_1 .

משפט 14.1

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} , U ו W תת מרחבים של V . אז $V = U \oplus W$ אם ורק אם

$$V = U + W \quad (\text{א})$$

$$U \cap W = \{\bar{0}\} \quad (\text{ב})$$

הוכחה:

(1) נניח כי $V = U \oplus W$. אז לפי הגדרה ??, סכום ישיר $V = U + W$. נשאר להוכיח כי $U \cap W = \{\bar{0}\}$.

נניח $v \in U \cap W$, אז $v \in U$ וגם $v \in W$. לכן אפשר לרשום

$$v = \begin{matrix} \in U \\ v \end{matrix} + \begin{matrix} \in W \\ \bar{0} \end{matrix}$$

וגם

$$v = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}$$

מכיוון שהסכום הוא ישר, יש רק דרך יחידה לרשום את v כסכום של וקטורים של U ו W . לכן $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2) נניח כי $V = U + W$ וגם $U \cap W = \{0\}$.

נוכיח כי $V = U \oplus W$.

לפי הגדרת סכום ישר ??, נשאר להוכיח כי כל וקטור $v \in V$ ניתן להציג בדרך יחידה כסכום של וקטורים של U ו W .

נקח $v \in V$. נניח כי $v = u_1 + w_1$ וגם $v = u_2 + w_2$ כאשר $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$.

אז

$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \Rightarrow u_1 - u_2 = w_2 - w_1$$

(כאשר $u_1 - u_2 \in U$ ו $w_2 - w_1 \in W$). לכן

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}.$$

מכאן, $u_1 - u_2 = 0$ וגם $w_2 - w_1 = 0$.

לכן $u_1 = u_2$ וגם $w_1 = w_2$.

דוגמה 14.3

נסמן

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{F} \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{F} \right\}$$

U קבוצת כל המטריצות הסימטריות מסדר 2×2 ,

W קבוצת כל המטריצות האנטי-סימטריות מסדר 2×2 .
 $\mathbb{F}^{2 \times 2} = U \oplus W$ תת מרחבים של מרחב וקטורי $\mathbb{F}^{2 \times 2}$. הראו כי

הוכחה:

(1) צריך להוכיח: $U \cap W = \{0\}$.

נניח $v \in U \cap W$.

$$v = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ -b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

מכאן, $b_1 = -b_2$ ו $b_1 = b_2$, $c_1 = 0$, $a_1 = 0$.

לכן $b_1 = b_2 = 0$.

א"כ $v = 0$.

(2) נוכיח כי: $\mathbb{F}^{2 \times 2} = U + W$.

לכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{2 \times 2}$. נגדיר מטריצות $B = A + A^t$ ו $C = A - A^t$, אז

$$B = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix} \in U$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} \in W$$

אז

$$A = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C \in U + W.$$

משפט 14.2

נניח ש V מרחב וקטורי ממיד n , U תת מרחב של V ממיד m , אז קיים תת מרחב W ממיד $n - m$ כך ש $V = U \oplus W$.

הוכחה: נבחר בסיס כלשהו של U :

$$u_1, \dots, u_m$$

ונשלים אותו לבסיס של V :

$$u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n$$

אז

$$U = \text{span}(u_1, \dots, u_m)$$

$$V = \text{span}(u_1, \dots, u_n)$$

נגדיר

$$W = \text{span}(u_{m+1}, \dots, u_n)$$

נוכיח כי $V = U \oplus W$.

(1) לכל $v \in V$ קיימים סקלרים $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{F}$ כך ש

$$v = k_1 u_1 + \dots + k_m u_m + k_{m+1} u_{m+1} + \dots + k_n u_n$$

נסמן

$$u = k_1 u_1 + \dots + k_m u_m \in U, \quad w = k_{m+1} u_{m+1} + \dots + k_n u_n \in W.$$

$$V = U + W \Leftarrow v = u + w$$

(2) נוכיח כי: $U \cap W = \{\bar{0}\}$.

נניח $v \in W$ ו $v \in U \Leftarrow v \in U \cap W$

לכן

$$v = k_1 u_1 + \dots + k_m u_m$$

וגם

$$v = k_{m+1}u_{m+1} + \dots + k_n u_n$$

מכאן:

$$k_1 u_1 + \dots + k_m u_m - k_{m+1} u_{m+1} - \dots - k_n u_n = \bar{0} .$$

u_1, \dots, u_n בת"ל לכן

$$k_1 = 0, \dots, k_n = 0 .$$

מכאן מקבלים כי $v = \bar{0}$.

משל.

