המחלקה למדעי המחשב

19/05/24 י"א באייר תשפ"ד
14 : 00 – 17 : 00

חדו"א 1 למדמ"ח

מועד ב'

מרצה: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר, ד"ר מרינה ברשדסקי.

תשפ"ד סמסטר א'

השאלון מכיל עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

===

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דף נוסחאות מצורף לשאלון (עמודים בפורמט $A4$).

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות בלבד מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** בלבד מתוך **שתיים**.

===

שאלות 1 ו- 2 - חובה!

שאלה 1 **(21 נקודות)**

חקרו באופן מלא את הפונקציה

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

א) (3 נק') תחום הגדרה וחיתוך עם הצירים וסימני הפונקציה.

ב) (3 נק') אסימפטוטות.

ג) (3 נק') תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון.

ד) (3 נק') תחומי קמירות ונקודות פיתול.

ה) (5 נק') ציירו את סקיצת הגרף של הפונקציה $f(x)$.

ו) (4 נק') ציירו את סקיצת הגרף של הפונקציה $|f(x)|$.

שאלה 2 **(24 נקודות)**

פתרו את האינטגרלים הבאים. יש לענות על 2 מתוך 3 הסעיפים הבאים:

א) (12 נק') $\int \frac{\ln(1+\ln x)}{x}\,dx \quad (x>1)$

ב) (12 נק') $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^3 x\,dx$

ג) (12 נק') $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x-7}\,dx$

ענו על 3 מתוך 4 השאלות $3-6$

שאלה 3 **(15 נקודות)**

א) (12 נק') חשבו את הפולינום מקלורן עד סדר 2 של הפונקציה $ye^x + xy^2 - (x-2)^2 = 0$.

ב) (3 נק') הוכיחו כי למשוואה $4x^{15} + 2\tan x + e^{2x} = 0$ קיים פתרון אחד והוא יחיד.

שאלה 4 (15 נקודות)

א) (9 נק')
חשבו את השטח של התחום החסום על ידי הקווים $y = \left|\sqrt{x-2}\right|$ ו- $y = x-2$. ציירו את הסקיצה המתאימה.

חשבו את הגבולות הבאים:

ב) (3 נק') $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin(3x)\sin(2x+1)}{1-\cos\left(\sqrt{x}\right)}\right)$

ג) (3 נק') $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\left(e^{1/x}-1\right)\right)$

שאלה 5 (15 נקודות)

א) (8 נק') מצאו את משוואת המשיק ומשוואת הנורמל של הקו

$$\begin{cases} x &= \tan t \\ y &= \sin^2 t \end{cases} \qquad t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

בנקודה עליו שבה $x=1$.

ב) (7 נק') הוכיחו כי למשוואה $e^x = (1+x)^2$ לא קיימים יותר מ-3 פתרונות.

שאלה 6 (15 נקודות)

א) (8 נק') לאילו ערכים אי-שליליים של a יש לפונקציה $\dfrac{x^2+3x}{x+a}$ נקודת אי-רציפות סליקה?

ב) (7 נק') עבור אילו ערכים של הפרמטר n מתכנס האינטגרל $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x+2)^n}\,dx$

ענו על 1 מתוך 2 השאלות $7-8$

שאלה 7 (10 נקודות)

מצאו לאילו ערכי הפרמטר a ($a>0$) השטח החסום ע"י הקווים $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{2a^2}$ יהיה מינימלי וחשבו את השטח המינימלי.

שאלה 8 **(10 נקודות)**

הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \ .$$

פתרונות

שאלה 1

א) תחום הגדרה: $x \neq -1$. נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0,-1)$,$(1,0)$.

x	$x<-1$	$-1<x<1$	$x>1$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

ב) אסימפטוטה אנכית: $x=-1$

אסימפטוטה אופקית: $y=0$ ב $\pm\infty$.

אסימפטוטה משופעת: אין.

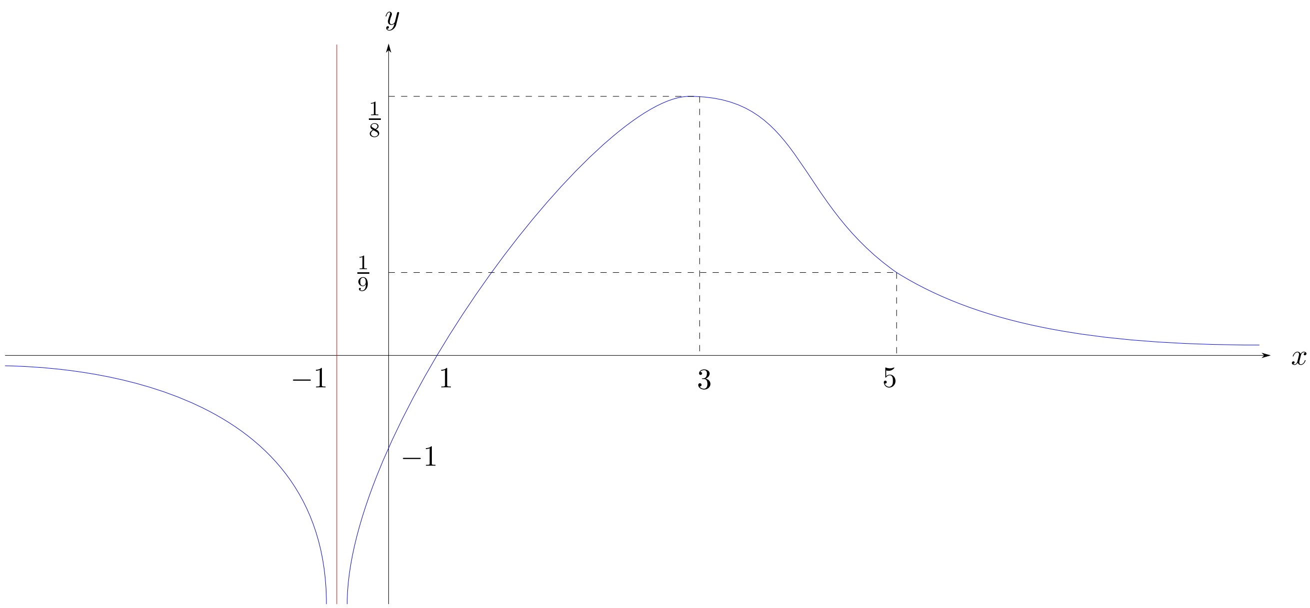
ג) נקודות קריטיות: $f'(x)=\dfrac{3-x}{(1+x)^3}$. יש נקודת קריטית ב- $\left(3,\dfrac{1}{8}\right)$.

x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<3$	$x=3$	$x>3$
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	לא מוגדר	$\nearrow$	מקסימום	$\searrow$

ד) תחומי קמירות: $f''(x)=\dfrac{2(x-5)}{(x+1)^4}$. נקודות פיתול: $\left(5,\dfrac{1}{9}\right)$.

x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<5$	$x=5$	$x>5$
$f''(x)$	$-$	לא מוגדר	$-$	0	$+$
$f(x)$	קמורה $\downarrow$	לא מוגדר	קמורה $\downarrow$	נקודת פיתול	קמורה $\uparrow$

ה) שרטוט:



ו)

שאלה 2

א)

$$\int \frac{\ln(1+\ln x)}{x}\,dx = \int \ln(1+\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

נציב $t = \ln x$: $\quad t' = \frac{1}{x} \quad \Leftarrow$

$$\int \ln(1+t)\cdot t'\,dx = \int \ln(1+t)\;dt = \int 1\cdot\ln(1+t)\;dt\ .$$

נפתור ע"י אינטגרציה בחלקים: $\mathrm{v}' = 1 \;\; u = \ln(1+t) \;\; \mathrm{v} = t \;\; u' = \frac{1}{1+t}$

$$\int u\cdot \mathrm{v}'\,dt = u\mathrm{v} - \int u'\cdot \mathrm{v}\,dt\ .$$

$$\begin{aligned}\int 1\cdot\ln(1+t)\,dt &= t\ln(1+t) - \int \frac{t}{1+t}\,dt\\ &= t\ln(1+t) - \int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\,dt\\ &= t\ln(1+t) - t + \ln(1+t)\\ &= (t+1)\ln(1+t) - t + C\\ &= (\ln x+1)\ln(1+\ln x) - \ln x + C\ .\end{aligned}$$

ב)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^3 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^2 x \cdot \cos x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \left(1 - \sin^2 x\right) \cdot \cos x \, dx$$
$$= \int_0^{\pi/2} \left(\sin^4 x - \sin^6 x\right) \cdot \cos x \, dx$$

נציב $t = \sin x \;\Leftarrow\; t' = \cos x$

$$\int_0^1 \left(t^4 - t^6\right) \cdot t' \, dx = \int_0^1 \left(t^4 - t^6\right) dt = \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35} \ .$$

ג)

$$\int \frac{\sqrt{x+2}}{x-7} \, dx$$

$$.t = \sqrt{x+2} \;\Rightarrow\; t' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{2t}$$

$$\int \frac{t}{t^2-9} \cdot \frac{t'}{t'} dx = \int \frac{t}{t^2-9} \cdot \frac{1}{t'} dt = \int \frac{t}{t^2-9} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2t}\right)} dt$$
$$= 2\int \frac{t^2}{t^2-9} dt = 2\int \left(1 + \frac{9}{(t+3)(t-3)}\right) dt = 2\int \left(1 + \frac{3}{2(t-3)} - \frac{3}{2(t+3)}\right) dt$$
$$= \int \left(2 + \frac{3}{(t-3)} - \frac{3}{(t+3)}\right) dt$$
$$= 2t + 3\ln|t-3| - 3\ln|t+3| + C$$
$$= 2\sqrt{x+2} + 3\ln|\sqrt{x+2} - 3| - 3\ln|\sqrt{x+2} + 3| + C$$

שאלה 3

א) נציב $x = 0$:

$$y(0)e^0 + 0 \cdot y(0)^2 - (0-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y(0) = 4 \ .$$

נגזור:

$$y'e^x + ye^x + y^2 + 2xy^2y' - 2(x-2) = 0$$

נציב $x = 0$ ו- $y(0) = 4$:

$$y'(0)e^0 + y(0)e^0 + y^2(0) + 2 \cdot 0 \cdot y^2(0)y'(0) - 2(-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(0) + 4 + 16 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(0) = -24 \ .$$

$$y''e^x + 2y'e^x + ye^x + 2y \cdot y' + 2y^2y' + 4xy(y')^2 + 2xy^2y'' - 2 = 0$$

נציב $x = 0$ ו- $y(0) = 4$ ו- $y'(0) = -24$:

$$\begin{aligned} y''(0)e^0 + 2y'(0)e^0 + y(0)e^0 + 2y(0)\cdot y'(0) + 2y^2(0)y'(0) + 4\cdot 0y(0)y'(0)^2 + 2\cdot 0y^2(0)y''(0) - 2 =&0 \\ y''(0) - 48 + 4 + 2\cdot 4\cdot(-24)) + 2\cdot 4^2\cdot(-24) - 2 =&0 \\ y''(0) - 430 =&0 \ . \end{aligned}$$

תשובה סופית:

$$P_2(x) = 4 - 24x + 215x^2 \ .$$

ב) נגדיר

$$f(x) = 4x^{15} + 2\tan x + e^{2x} = 0 \ .$$

$f(1) = e^2 + 4 + 2\tan(1) > 0$, $f(-1) = \frac{1}{e^2} - 4 - 2\tan(1) < 0$. לכן לפי משפט ערך הביניים בולנצו קיימת $c \in [-1,1]$ שבה $f(c) = 0$.

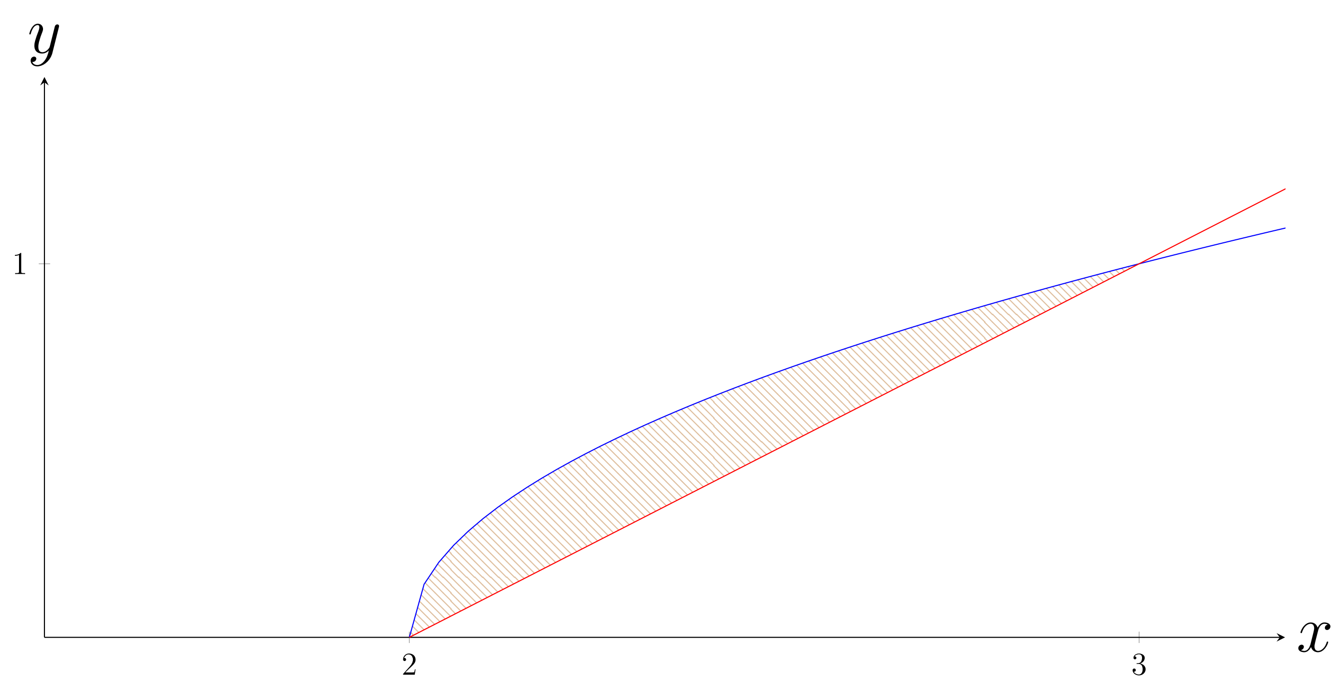
הוכחנו קיום. נוכיח יחידות:

$$f'(x) = 60x^{14} + 2e^{2x} + 2\sec^2(x) \ .$$

$f'(x) > 0$ לכל x $\Leftarrow$ f עולה מונוטונית לכל x $\Leftarrow$ f חח"ע לכן השורש יחיד.

<u>שאלה 4</u>

א)



$$S=\int_2^3 dx\,\left[\sqrt{x-2}-(x-2)\right]=\left[\frac{2}{3}(x-2)^{3/2}-\frac{(x-2)^2}{2}\right]_2^3=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\,.$$

ב) <u>שיטה 1</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(3x)\sin(2x+1)}{1-\cos(\sqrt{x})} &=\frac{0}{0}\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{3\cos(3x)\sin(2x+1)+\sin(3x)2\cos(2x+1)}{\sin(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}\\
&=2\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\left(3\cos(3x)\sin(2x+1)+\sin(3x)2\cos(2x+1)\right)}{\sin(\sqrt{x})}\\
&=2\lim_{x\to 0^+}\left(3\cos(3x)\sin(2x+1)+\sin(3x)2\cos(2x+1)\right)\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sin(\sqrt{x})}\\
&=2\cdot 3\sin(1)\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sin(\sqrt{x})}\\
&=2\cdot 3\sin(1)\cdot\frac{0}{0}\\
&\overset{\text{לופיטל}}{=}6\sin(1)\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\cos(\sqrt{x})}\\
&=6\sin(1)\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\cos(\sqrt{x})}\\
&=6\sin(1)\cdot 1\\
&=6\sin(1)\,.\end{aligned}$$

<u>שיטה 2</u>

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(3x)\sin(2x+1)}{1-\cos(\sqrt{x})}=\lim_{x\to 0^+}\sin(2x+1)\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(3x)}{1-\cos(\sqrt{x})}=\sin(1)\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(3x)}{1-\cos(\sqrt{x})}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(3x)}{1-\cos(\sqrt{x})}=\frac{0}{0}\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{3\cos(3x)}{\sin(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$
$$=2\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}\cdot3\cos(3x)}{\sin(\sqrt{x})}$$
$$=6\lim_{x\to0^+}\cos(3x)\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sin(\sqrt{x})}$$
$$=6\cdot\cos(0)\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sin(\sqrt{x})}$$
$$=6\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sin(\sqrt{x})}$$
$$=6\cdot1$$
$$=6\ .$$

תשובה סופית: $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(3x)\sin(2x+1)}{1-\cos(\sqrt{x})}=6\sin(1)$.

ג)

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}}\right)=\left(\frac{e^{\infty}-1}{\infty}\right)=\frac{\infty}{\infty}$$
$$\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{1/x}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to0^+}e^{1/x}=e^{\infty}=\infty\ .$$

שאלה 5

א)

$$x=1\quad\Rightarrow\quad t=\frac{\pi}{4}\ .$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2\sin t\cos t}{\sec^2 t}=2\sin t\cos^3 t$$

$$y'_x(x=1)=y'_t(t=\pi/4)=\frac{1}{2}\ .$$

$$y(x=1)=y(t=\pi/4)=\frac{1}{2}\ .$$

משוואת המשיק: $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$.

$$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x-1)\quad\Rightarrow\quad y=\frac{x}{2}\ .$$

משוואת הנורמל: $y - y_0 = \frac{-1}{y'(x_0)}(x - x_0)$.

$$y - \frac{1}{2} = -2(x-1) = -2x+2 \quad \Rightarrow \quad y = -2x + \frac{5}{2} \ .$$

ב) נגדיר

$$f(x) = e^x - (1+x)^2 \ .$$

נוכיח כי ל- $f(x)$ יש שלושה שורשים לכל היותר, דרך השלילה.
נניח שיש ל- $f(x)$ ארבעה שורשים.
אם היו ארבעה שורשים אזי לפי רול הנגזרת הראשונה מתאפסת לפחות שלוש פעמים.
שוב לפי משפט רול הנגזרת השנייה תתאפס לפחות פעמיים.
הנגזרת השנייה הינה

$$f''(x) = e^x - 2 \ .$$

ז"א הנגזרת מתאפסת רק פעם אחת, בסתירה לכך שהנגזרת מתאפסת פעמיים. לאור זאת אין ארבעה שורשים.

שאלה 6

א) עבור $a = 0, a = 3$.

ב)

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+2)^n} \overset{n\neq 1}{=} \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{(x+2)^n} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \left[\frac{(x+2)^{-n+1}}{-n+1}\right]_0^b = \frac{2^{-n+1}}{n-1} - \lim_{b\to\infty} \frac{(b+2)^{-n+1}}{n-1} = \begin{cases} \frac{2^{-n+1}}{n-1} & n > 1 \\ \infty & n < 1 \end{cases}$$

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty \frac{1}{x+2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{x+2} = \lim_{b\to\infty} \left[\ln|x+2|\right]_0^b = \infty \ .$$

תשובה: אינטגרל מתכנס אם $n > 1$ ומתבדר אם $n < 1$.

שאלה 7

נסמן ב $S(a)$ (עבור $a > 0$) את הפונקציה המתארת את השטח המבוקש ונחשב את המינימום.

$$S(a) = \int_0^a \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2a^2}\right) = \left[\arctan(x) + \frac{x}{2a^2}\right]_0^a = \arctan(a) + \frac{1}{2a} \ .$$

$$S'(a) = \frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{2a^2} = \frac{a^2-1}{2a^2(1+a^2)} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 1 \ .$$

כיוון ש $a > 0$ אז $a = 1$.
נעשה חקירה:

a	$a<1$	$a>1$
$S'(a)$	$-$	$+$
$S(a)$	$\searrow$	$\nearrow$

מכאן $a=1$ נקודת מינימום.

$$S_{\min}=S(a=1)=\arctan(1)+\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ .$$

שאלה 8

צריך להוכיח:

$$(x>0)\quad \frac{x}{1+x^2}<\arctan x<x$$

הפונקציה $\arctan x$ רציפה וגזירה לכל x ממשי. בפרט $\arctan x$ גזירה ורציפה לכל $x>0$. לכן, לפי משפט לגרנז' קיימת $c\in(0,x)$ כך ש-

$$\frac{\arctan x-\arctan 0}{x-0}=\arctan(c)'=\frac{1}{1+c^2}$$

ז"א

$$\frac{\arctan x}{x}=\frac{1}{1+c^2}\ .$$

מכיוון ש- $0<c<x$ אז

$$0<c<x\qquad\Rightarrow\qquad\frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{1+c^2}<1\ .$$

נציב $\frac{\arctan x}{x}=\frac{1}{1+c^2}$ ונקבל

$$\frac{1}{1+x^2}<\frac{\arctan x}{x}<1\ .$$

מכיוון ש- $x>0$, כאשר נכפיל ב- x נקבל

$$\frac{x}{1+x^2}<\arctan x<x\ .$$