SCE
המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

המחלקה למדעי המחשב

$29/11/23 12:00 - 26/11/23 12:00$ תשפ"ג

אלגברה 2

מועד ב'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר, ד'ר שי סרוסי.

תשפ"ג סמסטר ק'

השאלון מכיל 12 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

===

אחר / הערות

- יש לפתור את כל השאלות.
- המשקל של כל שאלה מפורט להלן:
  * שאלה 1: 30 נקודות.
  * שאלה 2: 20 נקודות.
  * שאלה 3: 20 נקודות.
  * שאלה 4: 30 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבירו היטב את מהלך הפתרון. תשובה ללא הסבר (גם נכונה) לא תתקבל.
- אסור לחלוטין לקבל עזרה מסטודנט אחר או מאף אחד.
- עליכם להעלות את הפתרונות שלכם דרך אתר המודל של הקורס אלגברה 2 למדמ"ח לא יאוחר משעה $12:00$ ביום ד' $23-11-29$. פתרונות שהוגשו אחרי המועד הזה לא יתקבלו.
- מותר להשתמש בחומר של הקורס, התרגילים של הקורס והספרים של הקורס בלבד, אבל אסור להשתמש בשום מקורות אחרים.
- אחרי הגשת פתרונות אתם תקבלו הזמנה למבחן קצר בעל פה על הפתרונות שלכם. ייתכן שלא תעבור את המבחן או יורידו נקודות במקרה שאתם לא יכולים להסביר הפתרונות שלכם היטב.
- **סטודנט יהיה זכאי להגיש ערעור / בקשות שונות לגבי הבוחן במשך 5 ימים בלבד מיום קבלת הציון.**

===

<u>שאלה 1</u> תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

א) האם A לכסינה? אם כן, מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

ב) האם A הפיכה? נמקו את תשובתכם.

ג) יהי $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x + 1$. הוכיחו כי המטריצה $f(A)$ הפיכה.

<u>שאלה 2</u> תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות ריבועיות. נניח כי ל- A ול- B יש אותם ערכים עצמיים $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (לא בהכרח שכולם שונים). נניח גם כי ל- A ו- B יש אותם ווקטורים עצמיים $u_1, \cdots u_n$, כאשר u_i הווקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ_i. הוכיחו שאם הערכים עצמיים $u_1, \cdots u_n$ בלתי תלויים ליניאריים אז $A = B$.

<u>שאלה 3</u> יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל המרחב $\mathbb{R}[x]$ (פולינומים ממשיים) עם המכפלה פנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 dx\, f(x) g(x)$$

לכל $f, g \in \mathbb{R}[x]$.

א) מצאו בסיס אורתוגונלי לתת-מרחב $U \subset V$ שמוגדר

$$U = \text{span}\left\{1 - x, 1 - x^2, 1 + x, 4 + 4x^3\right\} \ .$$

ב) מצאו את ההיטל של הפולינומים הבאים על U:

$$p(x) = 33 - 55x + 123x^2 - 67x^3 \ , \qquad q(x) = x + x^4 \ .$$

<u>שאלה 4</u> תהי $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ מטריצה עם ערכים עצמיים $\lambda = -1$ ו- $\lambda = 3$.
הוכיחו כי לכל n טבעי קיימים סקלרים a_n, b_n כך ש- $A^{n+1} = a_n A + b_n I$, כאשר

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + b_n \ , \quad b_n = \ , \qquad a_1 = 2 \ , \quad b_1 = 3 \ .$$

פתרונות

שאלה 1

א) נחשב את הפולינום האופייני:

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & x+2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & x-3 & x-1 \\ -1 & 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
=&(x-1)\begin{vmatrix} x+2 & -1 & -1 \\ 5 & x-3 & x-1 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & x-3 & x-1 \\ -1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \\
&+ 2\begin{vmatrix} -1 & x+2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & x+2 & -1 \\ -1 & 5 & x-3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=&(x-1)(x+2)\begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} + (x-1)\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} - (x-1)\begin{vmatrix} 5 & x-3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&- 2\begin{vmatrix} x-3 & x-1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & x-1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & x-3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&- 2\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} - 2(x+2)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&- 1\begin{vmatrix} 5 & x-3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (x+2)\begin{vmatrix} -1 & x-3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=&(x+2)\left(x^2-4x+2\right)(x-1) + (5x-4)(x-1) + (x+2)(x-1) \\
&- 2x(x-2) \\
&+ 2(-(5x-4) + (x+2)x - 4) \\
&+ x + 2 - (x+2)(x-2) - 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=&(x-1)(x+2)\left(x^2-4x+2\right) + 2(x-1)(3x-1) - 2x(x-2) \\
&+ 2(x^2-3x) \\
&+ x + 2 - x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=&(x-1)(x+2)\left(x^2-4x+2\right) + 2(x-1)(3x-1) - 2x(x-2) \\
&+ x^2 - 5x + 2 \\
=&x^4 - 3x^3 + x^2 + x \\
=&x(x-1)(x^2-2x-1) \\
=&x(x-1)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

ערכים עצמים:

$\lambda = 0$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 1-\sqrt{2}$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 1+\sqrt{2}$ מריבוי אלגברי 1.

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 0$

$$(A - 0\cdot I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1 \\ R_4-R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{4R_3-7R_2 \\ 4R_3-3R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R-2\to R_2+3R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_0 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1$

$$(A-I) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4-R_1]{R_3-R_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-R_2]{R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4+2R_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2-R_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1-R_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to 2R_1+3R_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z,w) = (-\frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z, w, w) = (-\frac{1}{2}w, \frac{1}{2}w, w, w) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1)w, \ \ w \in \mathbb{R}$

$$V_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1-\sqrt{2}$</u>

$$(A-(1-\sqrt{2})I) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}-3 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & \sqrt{2}+2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\sqrt{2}R_4+R_1]{\substack{-\sqrt{2}R_2+R_1 \\ -\sqrt{2}R_3+R_1}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{2}-2 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 5\sqrt{2}+2 & -2\left(\sqrt{2}+2\right) & 1-\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2}+2 & -\sqrt{2}-2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3\to-3\sqrt{2}R_3+(2+5\sqrt{2})R_2 \\ R_4\to-3\sqrt{2}R_4+(2+5\sqrt{2})R_2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{2}-2 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_4+\sqrt{2}R_3} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{2}-2 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{2}-2 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2-(-\sqrt{2}+1)R_3} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3\sqrt{2} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to-\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+2R_3} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$(x,y,z,w) = (-\sqrt{2}y-\tfrac{3}{\sqrt{2}}w, \tfrac{1}{\sqrt{2}}z, -w, w) = (w-\tfrac{3}{\sqrt{2}}w, \tfrac{-1}{\sqrt{2}}w, -w, w) = (1-\tfrac{3}{\sqrt{2}}1, \tfrac{-1}{\sqrt{2}}, -1, 1)w,\ w \in$$

$\mathbb{R}$

$$V_{1-\sqrt{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}-3 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1+\sqrt{2}$</u>

$$(A-(1+\sqrt{2})I) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2}-3 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 2-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\sqrt{2}R_4+R_1]{\sqrt{2}R_2+R_1 \quad \sqrt{2}R_3+R_1} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3\sqrt{2} & \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 2-5\sqrt{2} & 2\left(\sqrt{2}-2\right) & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 2-\sqrt{2} & \sqrt{2}-2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4\to 3\sqrt{2}R_4+(2-5\sqrt{2})R_2]{R_3\to 3\sqrt{2}R_3+(2-5\sqrt{2})R_2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3\sqrt{2} & \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_4-\sqrt{R}_3} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3\sqrt{2} & \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3\sqrt{2} & \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2-(\sqrt{2}+1)R_3} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3\sqrt{2} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+2R_3} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$(x,y,z,w) = (\sqrt{2}y+\tfrac{3}{\sqrt{2}}w, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}z, -w, w) = (w+\tfrac{3}{\sqrt{2}}w, \tfrac{1}{\sqrt{2}}w, -w, w) = (1+\tfrac{3}{\sqrt{2}}1, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, -1, 1)w, \ w \in$$

$\mathbb{R}$

$$V_{1+\sqrt{2}}=\left\{\begin{pmatrix}\sqrt{2}+3\\1\\-\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\}$$

$$D=\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1-\sqrt{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad P=\begin{pmatrix}|&|&|&|\\u_{1+\sqrt{2}}&u_1&u_{1-\sqrt{2}}&u_0\\|&|&|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\frac{3}{\sqrt{2}}&-1&1-\frac{3}{\sqrt{2}}&-1\\\frac{1}{\sqrt{2}}&1&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\-1&2&-1&0\\1&2&1&1\end{pmatrix}\ .$$

<u>שאלה 2</u> ל- A ו- B יש n ווקטורים עצמיים בלתי-תלויים לינאריים, לכן A ו- B לכסינות. נגדיר

$$P=\begin{pmatrix}|&|&&|&|\\u_1&u_2&\cdots&u_{n-1}&u_n\\|&|&&|&|\end{pmatrix}$$

P הפיכה בגל שהעמודות בת"ל. לכן

$$P^{-1}AP=D\ ,\qquad \text{ו}\qquad P^{-1}BP=D$$

כאשר D מטריצה אלכסונית אשר האיברים על האלכסון הם הערכים עצמיים:

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}$$

מכאן

$$P^{-1}AP=D=P^{-1}BP\ ,$$

לכן $P^{-1}AP=P^{-1}BP$. נכפיל מצד שמאל ב- P ומצד ימין ב- P^{-1} ונקבל $A=B$.

<u>שאלה 3</u>

א) נסמן

$$\mathrm{v}_1=1-x\ ,\quad \mathrm{v}_2=1-x^2,\quad \mathrm{v}_3=1+x,\quad \mathrm{v}_4=4+4x^3\ .$$

$$u_1=\mathrm{v}_1=1-x\ .$$

$$\|u_1\|^2=\int_0^1 dx\,(1-x)^2=\frac{1}{3}\ .$$

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle = \int_0^1 dx\,(1-x)(1-x^2) = \frac{5}{12} \ .$$

$$u_2 = 1 - x^2 - \frac{\left(\frac{5}{12}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)}(1-x) = -\frac{1}{4} + \frac{5x}{4} - x^2 \ .$$

$$\|u_2\|^2 = \int_0^1 dx\,(1-x^2)^2 = \frac{1}{80} \ .$$

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle = \int_0^1 dx\,(1+x)(1-x) = \frac{2}{3} \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle = \int_0^1 dx\,(1+x)\left(-\frac{1}{4} + \frac{5x}{4} - x^2\right) = \frac{1}{12} \ .$$

$$u_3 = 1 + x - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)}(1-x) - \frac{\left(\frac{1}{12}\right)}{\left(\frac{1}{80}\right)}\left(-\frac{1}{4} + \frac{5x}{4} - x^2\right) = \frac{20x^2}{3} - \frac{16x}{3} + \frac{2}{3} \ .$$

$$\|u_3\|^2 = \int_0^1 dx\,\left(\frac{20x^2}{3} - \frac{16x}{3} + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \ .$$

$$u_4 = \mathrm{v}_4 - \frac{\langle \mathrm{v}_4, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_4, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_4, u_3\rangle}{\|u_3\|^2} u_3 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_4, u_1\rangle = \int_0^1 dx\,(1-x)(4+4x^3) = \frac{11}{5} \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_4, u_2\rangle = \int_0^1 dx\,(4+4x^3)\left(-\frac{1}{4} + \frac{5x}{4} - x^2\right) = \frac{1}{4} \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_4, u_3\rangle = \int_0^1 dx\,(4+4x^3)\left(\frac{20x^2}{3} - \frac{16x}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{26}{15} \ .$$

$$u_4 = 4+4x^3 - \frac{\left(\frac{11}{5}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)}(1-x) - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{80}\right)}\left(-\frac{1}{4} + \frac{5x}{4} - x^2\right) - \frac{\left(\frac{26}{15}\right)}{\left(\frac{4}{9}\right)}\left(\frac{20x^2}{3} - \frac{16x}{3} + \frac{2}{3}\right) = 4x^3 - 6x^2 + \frac{12x}{5} - \frac{1}{5} \ .$$

קיבלנו בסיס אורתוגונלי:

$$\left\{ u_1 = 1 - x \ , \quad u_2 = -\frac{1}{4} + \frac{5x}{4} - x^2 \ , \quad u_3 = \frac{20x^2}{3} - \frac{16x}{3} + \frac{2}{3} \ , \quad u_4 = 4x^3 - 6x^2 + \frac{12x}{5} - \frac{1}{5} \ . \right\}$$

ב) $p(x) = \text{span}\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ לכן $P_U(p(x)) = p(x)$.

$$\frac{\langle u_1, q(x)\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 = \frac{3(1-x)}{5}$$

$$\frac{\langle u_2, q(x)\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 = \frac{32}{7}\left(-x^2+\frac{5x}{4}-\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{\langle u_3, q(x)\rangle}{\|u_3\|^2}u_3 = \frac{33}{35}\left(\frac{20x^2}{3}-\frac{16x}{3}+\frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{\langle u_4, q(x)\rangle}{\|u_4\|^2}u_4 = \frac{1}{2}\left(4x^3-6x^2+\frac{12x}{5}-\frac{1}{5}\right)$$

$$P_U(q(x)) = \frac{\langle u_1, q(x)\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 + \frac{\langle u_2, q(x)\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 + \frac{\langle u_3, q(x)\rangle}{\|u_3\|^2}u_3 + \frac{\langle u_4, q(x)\rangle}{\|u_4\|^2}u_4 = 2x^3 - \frac{9x^2}{7} + \frac{9x}{7} - \frac{1}{70} \ .$$

שאלה 4

הפולינום האופייני של A הוא

$$p_A(x) = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3 \ .$$

לפי משפט קיילי-המילטון,

$$A^2 - 2A - 3I = 0 \ .$$

לפיכך

$$A^2 = 2A + 3I \ . \qquad (*)$$

נוכיח את הטענה דרך אינדוקציה.

<u>שלב הבסיס:</u>

לפי משוואה (*):

$$A^2 = a_1 A + b_1 I \ ,$$

כאשר $a_1 = 2$, $b_1 = 3$.

<u>שלב המעבר:</u>

נניח שקיימים סקלרים כך ש- $A^{n+1} = a_n A + b_n I$.
נכפיל ב- A:

$$\begin{aligned} A^{n+2} &= A \cdot A^{n+1} \\ &= A\left(a_n A + b_n I\right) \\ &= a_n A^2 + b_n A \\ &= a_n\left(2A + 3I\right) + b_n A \\ &= (2a_n + b_n)A + 3a_n I \ . \end{aligned}$$

ז"א קיימים סקלרים a_{n+1}, b_{n+1} כך ש-

$$A^{n+2} = a_{n+1}A + b_{n+1}I$$

כאשר

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n \ , \qquad b_{n+1} = 3a_n \ .$$