

עבודה 4: ערכים עצמיים, מרחבים עצמיים, לכסון #2.

**שאלה 1** יהי  $T : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$  אופרטור שמוגדר ע"י

$$T(a + bx) = a + b + 2ax.$$

האם  $T$  לכסין? אם כן מצאו בסיס  $U$  של  $\mathbb{R}_1[x]$  כך ש-  $[T]_U$  מטריצה אלכסונית.

**שאלה 2** יהי  $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  אופרטור שמוגדר ע"י

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a & 2b \\ a+c & 4d \end{pmatrix}.$$

מצאו בסיס  $U$  של  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  כך ש-  $[T]_U$  מטריצה אלכסונית.

**שאלה 3** מצאו את הערכים עצמיים והמרחבים עצמיים של המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$  ותנו את הריבוי אלגברי

והריבוי גאומטרי שלהם.

**שאלה 4** תהי  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . נגדיר

$$A_1 = A - \alpha I$$

כאשר  $\alpha \in \mathbb{F}$  סקלר. הוכיחו כי  $\lambda$  ערך עצמי של  $A$  אם ורק אם  $\lambda - \alpha$  ערך עצמי של  $A_1$ .

**שאלה 5** תהי  $I$  המטריצה היחידה של  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . הוכיחו שקיים ערך עצמי אחד של  $I$  ומצאו את כל הוקטורים עצמיים של  $I$ .

**שאלה 6** הוכיחו או הפריכו: תהיינה  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . אם  $A$  לכסינה ו-  $B$  לכסינה אז  $A + B$  לכסינה.

**שאלה 7** תהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) אם הסכום של האיברים בכל שורה שווה ל-  $s \in \mathbb{R}$  אז  $s$  הוא ערך עצמי של  $A$ .

(ב) אם הסכום של האיברים בכל עמודה שווה ל-  $s \in \mathbb{R}$  אז  $s$  הוא ערך עצמי של  $A$ .

**שאלה 8** תהיינה  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  לכסינה ו-  $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  לכסינה. עבור כל אחד של הטענות הבאות, הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית.

(א)  $A^k$  לכסינה  $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ .

(ב)  $A + I$  לכסינה.

(ג)  $\alpha A$  לכסינה,  $\alpha \in \mathbb{F}$  סקלר.

(ד)  $A \cdot B$  לכסינה.

(ה)  $p(A)$  לכסינה, כאשר  $p(x)$  פולינום.

(ו)  $U^{-1}AU$  לכסינה,  $U \in \mathbb{F}^{n \times n}$  כל מטריצה הפיכה.

(ז)  $A + \alpha I$  הפיכה,  $\alpha \in \mathbb{F}$  סקלר ו-  $I$  המטריצה היחידה של  $\mathbb{F}^{n \times n}$ .

**שאלה 9** הוכיחו: אם  $A$  לכסינה והערכים עצמיים היחידים של  $A$  הם  $\lambda = 1$  ו  $\lambda = -1$ , אז  $A^{-1} = A$ .

**שאלה 10** תהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . הוכיחו: אם  $A$  לכסינה ו-  $\lambda \geq 0$  לכל ערך עצמי  $\lambda$ , אז קיימת  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  כך ש-  
 $A = B^2$ .

**שאלה 11** תהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . נניח כי קיים  $k \geq 1 \in \mathbb{N}$  כך ש-  $A^k = 0$ . מצאו את כל האפשרויות של  $A$  כך ש-  $A$  לכסינה.  
 רמז: לכל  $D$  אלכסונית ו-  $P$  הפיכה:  $(PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$ .

**שאלה 12** תהי  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  מצורה

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

כאשר  $B$  ו-  $C$  מטריצות ריבועיות.

(א) הוכיחו כי  $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)p_C(\lambda)$ .

(ב) אם  $b$  וקטור עצמי של  $B$  ו-  $c$  וקטור עצמי של  $C$ . הוכיחו כי  $\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$  ו-  $\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$  וקטורים עצמיים של  $A$ .

**שאלה 13** תהי  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  לכסינה. נניח כי קיים  $k \geq 1 \in \mathbb{N}$  כך ש-  $A^k = I$  כאשר  $I$  המטריצה היחידה של  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . הוכיחו:

(א)  $A^2 = I$

(ב) אם  $k$  אי-זוגי, אז  $A = I$ .

רמז: אם  $k \geq 1$  מספר טבעי, ה-  $k$  השורשים של אחד (כלומר הפתרונות של  $z^k = 1$ ) הם  $z = e^{2\pi mi/k}$   $m = 0, 1, 2, \dots, k-1$ .

**שאלה 14** נניח ש-  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . נניח ש-  $\lambda \in \mathbb{C}$  ערך עצמי של  $A$  ששייך לוקטור עצמי  $u$ . הוכיחו כי  $\bar{\lambda}$  ערך עצמי של  $A$  ששייך לוקטור עצמי  $\bar{u}$ .

## תשובות

**שאלה 1** נבחר בסיס הסטנדרטי של  $\mathbb{R}_1[x]$ :

$$E = \{1, x\}.$$

מטריצה המייצגת הסטנדרטי של  $T$ :

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

הערכים עצמיים:

$$\lambda_1 = 2 \text{ מריבוי אלגברי 1.}$$

$$\lambda_2 = -1 \text{ מריבוי אלגברי 1.}$$

הוקטורי עצמיים הם:

$$[u_1]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_E = 1 + x, \quad [u_2]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_E = -1 + 2x.$$

קיימים 2 וקטורים עצמיים בת"ל לכן  $T$  לכסין. נבנה את הבסיס

$$U = \{u_1 = 1 + x, \quad u_2 = -1 + 2x\}.$$

המטריצה המייצגת  $[T]_U$  לפי הבסיס  $U$  אלכסונית:

$$[T]_U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## שאלה 2

נבחר בסיס הסטנדרטי של  $\mathbb{R}_1[x]$ :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

מטריצה המייצגת הסטנדרטי של  $T$ :

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

הערכים עצמיים:

$$\lambda_1 = 5 \text{ מריבוי אלגברי 1.}$$

$$\lambda_2 = 4 \text{ מריבוי אלגברי 1.}$$

$$\lambda_3 = 2 \text{ מריבוי אלגברי 1.}$$

$$\lambda_4 = 1 \text{ מריבוי אלגברי 1.}$$

הוקטורי עצמיים הם:

$$\begin{aligned} [u_1]_E &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ [u_2]_E &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ [u_3]_E &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ [u_4]_E &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

קיימים 4 וקטורים עצמיים בת"ל לכן  $T$  לכסין. נבנה את הבסיס

$$U = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

המטריצה המייצגת  $[T]_U$  לפי הבסיס  $U$  אלכסונית:

$$[T]_U = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

### שאלה 3 ערכים עצמיים:

$\lambda_1 = i$  מריבוי אלגברי 1.

$\lambda_2 = 1$  מריבוי אלגברי 1.

המרחב עצמי השייך של  $\lambda = i$  הוא

$$V_i = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(V_i) = 1.$$

המרחב עצמי של  $\lambda = 1$ :

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(V_1) = 1.$$

### שאלה 4 נניח ש $\lambda$ ע"ע של $A$ ששייך לו"ע $u$ :

$$Au = \lambda u.$$

אז

$$(A - \alpha I)u = (\lambda - \alpha)u .$$

ז"א  $\lambda - \alpha$  ערך עצמי של  $A - \alpha I$ .

נניח ש  $\lambda - \alpha$  ע"ע של  $A - \alpha I$  ששייך לו"ע  $w$ :

$$(A - \alpha I)w = (\lambda - \alpha)w .$$

ז"א

$$Aw - \alpha w = \lambda w - \alpha w . \quad (1*)$$

$w \neq \bar{0}$  בי הוא וקטור עצמי, לכן מ  $(1*)$  נובע כי

$$Aw = \lambda w ,$$

ז"א  $\lambda$  ערך עצמי של  $A$ .

## שאלה 5 פולינום אופייני של $I$ :

$$p_I(\lambda) = |\lambda I - I| = |(\lambda - 1) \cdot I| = (\lambda - 1)^n |I| = (\lambda - 1)^n .$$

השורש היחיד הוא  $\lambda = 1$  מריבוי אלגברי  $n$  לכן ל-  $I$  יש ערך עצמי 1.

לכל וקטור ב-  $\mathbb{R}^n$   $u$  אשר לא שווה לוקטור האפס:

$$I \cdot u = 1 \cdot u$$

כלומר כל וקטור ב-  $\mathbb{R}^n$  חוץ מהוקטור האפס הוא וקטור עצמי של  $I$ .

## שאלה 6 טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

$A$  משולשית לכן הערכים עצמיים שווים לאיברי האלכסון:  $\lambda = 2$  ו-  $\lambda = -1$ . הערכים עצמיים ממשיים ושונים לכן  $A$  לכסינה מעל  $\mathbb{R}$ .  $B$  אלכסונית.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הפולינום אופייני של  $A + B$  הוא.  $p_{A+B}(\lambda) = (\lambda - 1)^2$  לכן ל-  $A + B$  יש ערך עצמי אחד:  $\lambda = 1$  מריבוי אלגברי 2. המרחב עצמי הוא:

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim V_1 = 1 < 2$ , כלומר הריבוי גיאומרטי פחות מהריבוי אלגברי, לכן  $A + B$  לא לכסינה.

## שאלה 7

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{נרשום}$$

$$(א) \quad \text{נגדיר } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \text{ אז}$$

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nn} \end{pmatrix}$$

נתון כי סכום האיברים בכל שורה שווה ל- $s$ , כלומר

$$a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} = s, \quad a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n} = s, \quad \dots \quad a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nn} = s.$$

לכן

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ \vdots \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ז"א קיבלנו כי  $Au = su$ . לכן  $u$  וקטור עצמי של  $A$  ששייך לערך עצמי  $s$ .

$$(ב) \quad \text{נגדיר } w = (1 \ 1 \ \dots \ 1) \in \mathbb{F}^{1 \times n} \text{ אז}$$

$$w \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1} \\ a_{12} + a_{22} + \dots + a_{n2} \\ \vdots \\ a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{nn} \end{pmatrix}$$

נתון כי סכום האיברים בכל עמודה שווה ל- $s$ , כלומר

$$a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1} = s, \quad a_{12} + a_{22} + \dots + a_{n2} = s, \quad \dots \quad a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{nn} = s.$$

לכן

$$w \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1} \\ a_{12} + a_{22} + \dots + a_{n2} \\ \vdots \\ a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{nn} \end{pmatrix} = (s \ s \ \dots \ s) = s(1 \ 1 \ \dots \ 1).$$

ז"א קיבלנו כי

$$wA = sw.$$

נשחלף:

$$(wA)^t = s \cdot w^t \quad \Rightarrow \quad A^t \cdot w^t = s \cdot w^t.$$

$$\text{קיבלנו ש-} s \text{ ערך עצמי של } A^t \text{ ששייך לוקטור עצמי } w^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ אם } s \text{ ערך עצמי של } A \text{ אז } s \text{ גם ערך עצמי של } A, \text{ כנדרש.}$$

**שאלה 9**  $A$  לכסינה אז קיימת  $P$  הפיכה ו-  $D$  אלכסונית כך ש-

$$A = PDP^{-1}$$

ובפרט האיברים באלכסון של  $D$  הם הערכים עצמיים של  $A$  ועמודות  $P$  הן הוקטורים עצמיים של  $A$ . הערכים עצמיים היחידים של  $A$  הם 1 ו-1, לכן

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

כאשר  $\lambda_i = \pm 1$ . נקח את ההופכית של  $A$ :

$$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}. \quad (*)$$

ההופכית של מטריצה אלכסונית היא פשוט

$$D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right).$$

$$\frac{1}{\lambda_i} = \lambda_i \text{ לכן } \lambda_i = \pm 1 \text{ ולכן}$$

$$D^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = D.$$

נציב ב- (\*) ונקבל

$$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

**שאלה 10**  $A$  לכסינה, לכן קיימת  $D$  אלכסונית ו-  $P$  הפיכה כך ש-

$$A = PDP^{-1} \quad (1*)$$

בפרט  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  כאשר  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  הערכים עצמיים של  $A$ .  $\lambda_i \geq 0$  לכל  $1 \leq i \leq n$  לכן השורש  $\sqrt{\lambda_i}$  קיים לכל  $1 \leq i \leq n$ , לכן המטריצה  $D' = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$  קיימת, ו-

$$D'^2 = D. \quad (2*)$$

נגדיר

$$B = PD'P^{-1}$$

כאשר  $P$  אותה מטריצה שמופיע ב- (1\*).  $P$  הפיכה ו-  $D'$  אלכסונית, לכן לפי הנוסחה  $(PD'P^{-1})^k = PD'^kP^{-1}$ ,

$$B^2 = PD'^2P^{-1}$$

נציב  $D'^2 = D$  ונקבל

$$B^2 = PDP^{-1} = A.$$

לכן מצאנו  $B = PD'P^{-1}$  כך ש-  $B^2 = A$ .

**שאלה 14**

$$A \cdot u = \lambda u$$

נקח את הצמוד ונקבל

$$\bar{A} \cdot \bar{u} = \bar{\lambda} \bar{u}.$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  אז  $\bar{A} = A$  ונקבל

$$A \cdot \bar{u} = \bar{\lambda} \bar{u}.$$

מש"ל.