

שיעור 2

שדות

2.1 מספרים מרוכבים

הגדרה 2.1 מספר מרוכב

זוג סדור $z = (x, y)$ של מספרים ממשיים נקרא מספר מרוכב.

אם $y = 0$ נקבל זוג $(x, 0)$. נסמן $x = (x, 0)$. נגדיר את הפעולות הבאות בין מספרים מרוכבים:

הגדרה 2.2 פעולות בינאריות של מספרים מרוכבים

נניח $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$. אז

(1) חיבור

$$z_1 \oplus z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

(2) כפל

$$z_1 \odot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

קל לראות:

(1) לכל מספר ממשי $x = (x, 0)$ ולכל מספר מרוכב $z_1 = (x_1, y_1)$ מתקיים

$$x \cdot z_1 = (x \cdot x_1, x \cdot y_1)$$

(2) לכל מספרים ממשיים $(x_1, 0)$ ו- $(x_2, 0)$ מתקיים

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0) = x_1 x_2$$

הגדרה 2.3 i

נסמן

$$i = (0, 1).$$

i היא

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

משפט 2.1 הצגה אלגברית שך מספר מרוכב

נתון שימוש במספר i כל מספר מרוכב $z = (x, y)$ ניתן לרשום

$$z = (x, y) = (x, 0) \oplus (0, y) = (x, 0) \oplus (y, 0) \cdot (0, 1) = x + iy.$$

$x + iy$ נקרא הצגה אלגברית של מספר מרוכב.

ל- x קוראים החלק הממשי של z . מסמנים $x = \operatorname{Re}(z)$.

ל- y קוראים החלק המדומה של z . מסמנים $y = \text{Im}(z)$.

צורת הכתיבה $x + iy$ מאפשרת לחבר ולהכפיל מספרים רוכבים בקלות בהתחשב ב- $i^2 = -1$.

2.1 דוגמה

א

$$(x_1 + iy_1) \odot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 - y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

2.2 דוגמה

$$(3 - 5i) \odot (2 + 3i) = 6 + 9i - 10i + 15 = 21 - i.$$

הגדרה 2.4 הצמוד

המספר הרוכב $x - iy$ נקרא צוד למפר $z = x + iy$. מסנים:

$$\bar{z} = x - iy.$$

משפט 2.2

$$z \odot \bar{z} = x^2 + y^2.$$

המספר הזה נקרא ה **הערך המוחלט** או ה**גודל** של המספר המרוכב z .

2.3 דוגמה

$$\frac{3 + 4i}{1 - i} = \frac{(3 + 4i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{3 + 3i + 4i - 4}{2} = \frac{-1 + 7i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$$

2.4 דוגמה

מצאו את המספר z המקיים את המשוואה

$$\frac{1 - iz}{1 + iz} = -2i.$$

פתרון:

$$1 - iz = -2i(1 + iz) = 2z - 2i \Rightarrow z(2 + i) = 1 + 2i$$

$$z = \frac{1 + 2i}{2 + i} = \frac{(1 + 2i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{2 - i + 4i + 2}{5} = \frac{4 + 3i}{5} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$$

קבוצת המספרים המרוכבים מסומנת ב- \mathbb{C} .

אפשר לראות בקלות ש- \mathbb{C} יחד עם שתי הפעולות שהגדרנו בהגדרה 2.10 מקיימת את כל האקסיומות של שדה, כאשר

$$0 = (0, 0)$$

$$1 = (1, 0)$$

ועבור $z = x + iy \neq 0$,

$$z^{-1} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

2.2 הצגה פולרית של מספרים מרוכבים

הגדרה 2.5 הצגה פולרית

ניתן לרשום מספר מרוכב $z = x + iy$ בהצגה פולרית

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta),$$

כאשר

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

דוגמה 2.5

רשמו את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה פולרית:

$$z_1 = 3 + 4i \quad (1)$$

$$z_2 = -3 + 4i \quad (2)$$

$$z_3 = -3 - 4i \quad (3)$$

$$z_4 = 3 - 4i \quad (4)$$

פתרון:

(1)

$$r = |z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \theta = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 53.1^\circ.$$

(2)

$$r = |z_2| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5, \quad \theta = \arctan\left(\frac{4}{-3}\right) = 180^\circ - \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 126.9^\circ.$$

(3)

$$r = |z_3| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5, \quad \theta = 180^\circ + \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 233.1^\circ.$$

(4)

$$r = |z_4| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5, \quad \theta = 360^\circ - \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 306.9^\circ.$$

משפט 2.3

אם $z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ואם $z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)) , \quad (z_2 \neq 0) .$$

משפט 2.4

אם $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ אז

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) .$$

2.3 \mathbb{Z}_p - קבוצת השאריות בחלוקה ב p

הגדרה 2.6

יהיו a, b מספרים שלמים. אומרים כי b מחלק את a אם קיים מספר שלם q כך ש-

$$a = qb .$$

כלומר $\frac{a}{b}$ שווה למספר שלם q .

הסימון $a \mid b$ אומר כי b מחלק את a .

דוגמה 2.6

(א) $6 \mid 18$ בגלל שקיים מספר שלם $q = 3$ כך ש- $18 = 3q$.

(ב) $42 \nmid 7$ בגלל שקיים מספר שלם $q = 6$ כך ש- $42 = 7q$.

(ג) $8 \nmid 5$ בגלל שלא קיים מספר שלם q כך ש- $8 = 5q$.

הגדרה 2.7 יחס שקילות בין a ל- b

נניח כי $a, b \in \mathbb{Z}$ מספרים שלמים ו- m מספר שלם חיובי. היחס

$$a \equiv b \pmod{m}$$

אומר כי m מחלק את ההפרש $a - b$, כלומר $m \mid a - b$.

בנסוח שקול, $a \equiv b \pmod{m}$ אם קיים שלם q כך ש- $a = b + qm$.

לעיתים אומרים כי " a שקול ל- b מודולו m ".

דוגמה 2.7

הוכיחו כי

(א) $5 \equiv 2 \pmod{3}$

(ב) $43 \equiv 23 \pmod{10}$

(ג) $7 \not\equiv 2 \pmod{4}$

פתרון:

(א)

$$5 - 2 = 3 = 1 \cdot 3 \Rightarrow 3 \mid 5 - 2 \Rightarrow 5 \equiv 2 \pmod{3}.$$

(ב)

$$43 - 23 = 20 = 2 \cdot 10 \Rightarrow 10 \mid 43 - 23 \Rightarrow 43 \equiv 23 \pmod{10}.$$

(ג) $7 - 2 = 5$

לא קיים שלם q כך ש- $7 - 2 = 4q$ לכן $7 - 2 \nmid 4$

$$7 \not\equiv 2 \pmod{4}.$$

הגדרה 2.8 השארית

נתונים מספרים שלמים $a, b \in \mathbb{Z}$, היחס

$$a \% b$$

מציין את השארית בחלוקת a ב- b .

דוגמה 2.8

$$43 \% 10 = 3.$$

$$13 \% 4 = 1.$$

$$8 \% 2 = 0.$$

$$-10 \% 3 = -1.$$

דוגמה 2.9

• השארית של 3 בחילוק ב- 2 היא 1. לכן

$$3 \% 2 = 1.$$

• השארית של 7 בחילוק ב- 4 היא 3. לכן

$$7 \% 4 = 3.$$

• השארית של 11 בחילוק ב- 8 היא 3. לכן

$$11 \% 8 = 3.$$

הגדרה 2.9 \mathbb{Z}_p - קבוצת השארית בחלוקה ב- p

יהי p מספר ראשוני. הקבוצה \mathbb{Z}_p היא הקבוצת

$$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{p-1}\}.$$

הקבוצה מוגדרת לפי התנאים הבאים:

(1) כל איבר $a \in \mathbb{Z}_p$ הוא מספר שלם וחיובי.

(2) לכל מספר שלם n נתאים איבר a ב- \mathbb{Z}_p לפי

$$n \equiv a \pmod{p}.$$

דוגמה 2.10

לקבוצה \mathbb{Z}_3 יש 3 איברים:

$$\{\mathbb{Z}_3 = \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}.$$

$$3 = 0 \pmod{3} \Rightarrow \bar{3} = \bar{0}$$

$$4 = 1 \pmod{3} \Rightarrow \bar{4} = \bar{1}$$

$$5 = 2 \pmod{3} \Rightarrow \bar{5} = \bar{2}$$

$$6 = 0 \pmod{3} \Rightarrow \bar{6} = \bar{0}$$

$$7 = 1 \pmod{3} \Rightarrow \bar{7} = \bar{1}$$

$$8 = 2 \pmod{3} \Rightarrow \bar{8} = \bar{2}$$

$$122 = 2 \pmod{3} \Rightarrow \overline{122} = \bar{2}.$$

וכן הלאה.

הגדרה 2.10 פעולות בינאריות של \mathbb{Z}_p איברי

יהי $p \in \mathbb{N}$ מספר ראשוני ותהי $\mathbb{Z}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}$ קבוצת השאריות בחלוקה ב- p . לכל $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_p$ נגדיר את הפעולות חיבור וכפל כך:

(1) חיבור

$$\bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a+b}$$

(2) כפל

$$\bar{a} \odot \bar{b} = \overline{a \cdot b}.$$

דוגמה 2.11

חשבו ב- \mathbb{Z}_5 את

(א) $\bar{2} \oplus \bar{4}$

(ב) $\bar{3} \odot \bar{3}$

פתרון:

(א) $\bar{2} \oplus \bar{4} = \overline{2+4} = \bar{6} = \bar{1}$

$$\text{ב) } \bar{3} \odot \bar{3} = \overline{3 \cdot 3} = \bar{9} = \bar{4}$$

2.12 דוגמה

חשבו ב- \mathbb{Z}_{11} את

$$\text{א) } \bar{3} \odot \bar{7}$$

$$\text{ב) } \bar{2} \odot \bar{8}$$

פתרון:

$$\text{א) } \bar{3} \odot \bar{7} = \overline{3 \cdot 7} = \overline{21} = \overline{10}$$

$$\text{ב) } \bar{2} \odot \bar{8} = \overline{2 \cdot 8} = \overline{16} = \bar{5}$$

2.13 דוגמה

לוח החיבור של איברים ב- \mathbb{Z}_3 :

\oplus	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

לוח הכפל של איברים ב- \mathbb{Z}_3 :

\odot	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

2.14 דוגמה

לוח החיבור של איברים של \mathbb{Z}_5

\oplus	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

לוח הכפל של איברים של \mathbb{Z}_5

\odot	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

נחזור לממשיים. הנגדי של 7 הוא -7 כי $-7 + 7 = 0$.

ההופכי של 7 הוא 7^{-1} , (או $\frac{1}{7}$) כי $\frac{1}{7} \cdot 7 = 1$.

ושוב ל- \mathbb{Z}_3 , מתקיים $\bar{0} = \bar{1} + \bar{2}$ ולכן $\bar{2}$ הוא הנגדי של $\bar{1}$. כלומר :

$$-\bar{1} = \bar{2}.$$

באופן דומה, $\bar{1}$ הוא הנגדי של $\bar{2}$. כלומר $-\bar{2} = \bar{1}$.

מתקיים $\bar{1} = \bar{2} \cdot \bar{2}$ ולכן $\bar{2}$ הוא ההופכי של $\bar{2}$. כלומר $(\bar{2})^{-1} = \bar{2}$.

משפט 2.5 איבר ההופכי ואיבר הנגדי בקבוצה \mathbb{Z}_p

יהי p מספר ראשוני ותהי \mathbb{Z}_p הקבוצה השאריות בחלוקה ב- p .

(א) איבר הנגדי

לכל איבר $a \in \mathbb{Z}_p$ קיים איבר יחיד $-a \in \mathbb{Z}_p$ כך ש-

$$a \oplus (-a) = \bar{0}.$$

האיבר $-a$ נקרא האיבר הנגדי של a .

(ב) איבר ההופכי

לכל איבר $a \in \mathbb{Z}_p$ שונה מאפס (כלומר $a \neq \bar{0}$) קיים איבר יחיד $a^{-1} \in \mathbb{Z}_p$ כך ש-

$$a \odot a^{-1} = \bar{1}.$$

האיבר a^{-1} נקרא האיבר ההופכי של a .

דוגמה 2.15

מצאו את האיבר הנגדי של $\bar{1}$ ב- \mathbb{Z}_3 .

פתרון:

נשים לב ש-

$$\bar{1} \oplus \bar{2} = \bar{3} = \bar{0}$$

ולכן

$$-\bar{1} = \bar{2}.$$

דוגמה 2.16

מצאו את האיבר הנגדי של $\bar{2}$ ב- \mathbb{Z}_3 .

פתרון:

נשים לב ש-

$$\bar{2} \oplus \bar{1} = \bar{3} = \bar{0}$$

ולכן

$$-\bar{2} = \bar{1}.$$

2.17 דוגמה

מצאו את האיבר הנגדי של $\bar{3}$ ב- \mathbb{Z}_3 .

פתרון:

נשים לב ש-

$$\bar{3} \oplus \bar{0} = \bar{3} = \bar{0}$$

ולכן

$$-\bar{3} = \bar{3}.$$

2.18 דוגמה

איברים הנגדיים של איברים של \mathbb{Z}_3 :

$$-\bar{1} = \bar{2}$$

$$-\bar{2} = \bar{1}$$

$$-\bar{3} = \bar{0}$$

$$-\bar{4} = \bar{2}$$

$$-\bar{5} = \bar{1}$$

$$-\bar{6} = \bar{0}$$

$$-\bar{7} = \bar{2}$$

$$-\bar{8} = \bar{1}$$

$$\vdots$$

$$-\bar{59} = \bar{1}.$$

2.19 דוגמה

מצאו את האיבר ההופכי של $\bar{2}$ ב- \mathbb{Z}_3 .

פתרון:

$$\bar{2} \odot \bar{2} = \bar{4} = \bar{1}$$

לכן $\bar{2}^{-1} = \bar{2}$.

2.20 דוגמה

מצאו את האיבר ההופכי של $\bar{1}$ ב- \mathbb{Z}_3 .

פתרון:

$$\bar{1} \odot \bar{1} = \bar{1}$$

לכן $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$.

דוגמה 2.21

מצאו את האיבר ההופכי של $\bar{3}$ ב- \mathbb{Z}_5 .

פתרון:

$$\bar{3} \odot \bar{2} = \bar{6} = \bar{1}$$

$$\bar{3}^{-1} = \bar{2} \text{ לכן}$$

דוגמה 2.22

חשבו את האיבר ההופכי של כל האיברים הבאים ב- \mathbb{Z}_5

$$\bar{1} \text{ (א)}$$

$$\bar{2} \text{ (ב)}$$

$$\bar{3} \text{ (ג)}$$

$$\bar{4} \text{ (ד)}$$

פתרון:

$$\text{(א)}$$

$$\bar{1} \odot \bar{1} = \bar{1} \Rightarrow \bar{1}^{-1} = \bar{1}$$

$$\text{(ב)}$$

$$\bar{2} \odot \bar{3} = \bar{6} = \bar{1} \Rightarrow \bar{2}^{-1} = \bar{3}$$

$$\text{(ג)}$$

$$\bar{3} \odot \bar{2} = \bar{6} = \bar{1} \Rightarrow \bar{3}^{-1} = \bar{2}$$

$$\text{(ד)}$$

$$\bar{4} \odot \bar{4} = \bar{16} = \bar{1} \Rightarrow \bar{4}^{-1} = \bar{4}$$

דוגמה 2.23

חשבו ב- \mathbb{Z}_{11} :

$$\bar{3} \odot \bar{7} \text{ (א)}$$

$$\bar{2} \odot \bar{8} \text{ (ב)}$$

$$-\bar{3} \text{ (ג)}$$

$$(\bar{3})^{-1} \text{ (ד)}$$

פתרון:

$$\bar{3} \odot \bar{7} = \bar{21} = \bar{10} \text{ (א)}$$

$$(ב) \quad \bar{2} \odot \bar{8} = \overline{16} = \bar{5}$$

$$(ג) \quad \bar{3} \oplus \bar{8} = \overline{11} = \bar{0} \Rightarrow -\bar{3} = \bar{8}$$

$$(ד) \quad \bar{3} \odot \bar{4} = \overline{12} = \bar{1} \Rightarrow (\bar{3})^{-1} = \bar{4}$$

2.4 שדות

הגדרה 2.11 שדה

קבוצה לא ריקה \mathbb{F} , שבה פעולת חיבור \oplus ופעולת כפל \odot מוגדרות על הקבוצה, מסומנת $(\mathbb{F}, \oplus, \odot)$ ונקראת שדה אם התנאים הבאים מתקיימים. לכל איברים $a, b, c \in \mathbb{F}$:

(1) \mathbb{F} סגורה תחת חיבור:

$$a \oplus b \in \mathbb{F}.$$

(2) \mathbb{F} סגורה תחת כפל:

$$a \odot b \in \mathbb{F}.$$

(3) חוק החילוף I:

$$a \oplus b = b \oplus a$$

(4) חוק החילוף II:

$$a \odot b = b \odot a$$

(5) חוק הקיבוץ I:

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c).$$

(6) חוק הקיבוץ II:

$$a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$$

(7) חוק הפילוג:

$$a \odot (b \oplus c) = a \odot b + a \odot c.$$

(8) קיום איבר ניוטרלי:

קיים איבר $0 \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$a \oplus 0 = a.$$

(9) קיום איבר יחיד (האיבר ניוטרל לגבי כפל):

קיים איבר $1 \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$a \odot 1 = a, \quad 1 \odot a = a.$$

(10) קיום איבר נגדי:

לכל $a \in \mathbb{F}$ קיים איבר נגדי $(-a) \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$a \oplus (-a) = 0.$$

(11) קיום איבר הופכי:

לכל $a \in \mathbb{F}$ כך ש $a \neq 0$ קיים איבר $a^{-1} \in \mathbb{F}$ המקיים

$$a \odot a^{-1} = 1, \quad \text{ו} \quad a^{-1} \odot a = 1.$$

דוגמה 2.24

(א) הקבוצה \mathbb{R} של מספרים ממשיים שדה.

(ב) הקבוצה \mathbb{C} של מספרים מרוכבים שדה.

דוגמה 2.25

קבעו אם הקבוצה \mathbb{N} שדה.

פתרון:

\mathbb{N} לא שדה. כדי להראות זאת די למצוא דוגמה נגדית לאחת התכונות:
נבחור $a = 3 \in \mathbb{N}$. לא קיים איבר נגדי שב- \mathbb{N} . הרי

$$-3 + 3 = 0$$

אבל $-3 \notin \mathbb{N}$.

משפט 2.6

יהי $(\mathbb{F}, \oplus, \odot)$ שדה.

(1) עבור $a \in \mathbb{F}$, האיבר הנגדי החיבורי $-a$ הוא יחיד.

(2) עבור $a \in \mathbb{F}$ ($a \neq 0$), האיבר ההפכי הכפלי a^{-1} הוא יחיד.

משפט 2.7

יהי $(\mathbb{F}, \oplus, \odot)$ שדה, יהיו $a, b \in \mathbb{F}$, ויהי 0 האיבר הנייטרלי הכפלי ו-1 האיבר הנגדי החיבורי.

$$(1) \quad a \odot 0 = 0$$

$$(2) \quad a \odot (-1) = -a$$

$$(3) \quad \text{אם } a \odot b = 0 \text{ ו- } a \neq 0 \text{ אז } b = 0.$$

הוכחה: תרגיל בית!



2.5 מערכות ליניאריות מעל \mathbb{C}

דוגמה 2.26

פתרו את המערכת מעל \mathbb{C} .

$$\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 3i \\ 3z_1 + (2-i)z_2 = 4 \end{cases}$$

פתרון:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 1+i & 1-i & 3i \\ 3 & 2-i & 4 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_1 \rightarrow (1-i)R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2i & 3+3i \\ 3 & 2-i & 4 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_2 \rightarrow 2R_2-3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2i & 3+3i \\ 0 & 4+4i & -1-9i \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_2 \rightarrow (4-4i)R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2i & 3+3i \\ 0 & 32 & -40-32i \end{array} \right) & \xrightarrow{R_1 \rightarrow 16R_1+iR_2} \left(\begin{array}{cc|c} 32 & 0 & 80+8i \\ 0 & 32 & -40-32i \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{32}R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} + \frac{1}{4}i \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} - i \end{array} \right) \end{aligned}$$

פתרון:

$$z_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{4}i, \quad z_2 = -\frac{5}{4} - i$$

2.6 מערכות ליניאריות מעל \mathbb{Z}_p

דוגמה 2.27

פתור את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_3 :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= \bar{0} \\ x_1 - x_2 - x_3 &= \bar{0} \\ x_1 + \bar{2}x_2 + x_3 &= \bar{1} \end{aligned}$$

פתרון:

המטריצה המורחבת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & -\bar{1} & -\bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right)$$

נבצע שיטת גאוס:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right) &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{1} & \bar{1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right) \end{aligned}$$

נכפיל את השורה השלישית ב $\bar{2}^{-1} = \bar{2}$:
לכן נבצע את הפעולה הבאה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow \bar{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right)$$

עכשיו נאפס כל איבר מעל ה $\bar{1}$ המוביל בעזרת הפעולות הבאות:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & -\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & -\bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

לכן למערכת יש פתרון יחיד:

$$(x_1, x_2, x_3) = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}) .$$

2.28 דוגמה

פתור את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_5 :

$$x_1 + x_2 + x_3 = \bar{0} ,$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = \bar{1} .$$

פתרון:

המטריצה המורחבת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & -\bar{1} & -\bar{1} & \bar{1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{1} \end{array} \right) .$$

שיטת גאוס:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{1} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{1} \end{array} \right) .$$

נכפיל את השורה השלישית באיבר ההופכי של $\bar{3}$ ב- \mathbb{Z}_5 . נגלה כי

$$\bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{6} = \bar{1} \quad \Rightarrow \quad (\bar{3})^{-1} = \bar{2} ,$$

ולכן

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{1} \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow \bar{2} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right).$$

המערכת המתאימה היא

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{3}, \\ x_2 + x_3 &= \bar{2} \end{aligned}$$

ולכן הפתרון הוא

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{3}, \\ x_2 &= \bar{2} - x_3. \end{aligned}$$

כלומר,

$$(x_1, x_2, x_3) = (\bar{3}, \bar{2} - x_3, x_3), \quad x_3 \in \mathbb{Z}_5$$

נשים לב שלמערכת יש חמישה פתרונות:

$$\begin{aligned} x_3 = \bar{0} &\Rightarrow (\bar{3}, \bar{2}, \bar{0}) && \text{פתרון 1} \\ x_3 = \bar{1} &\Rightarrow (\bar{3}, \bar{1}, \bar{1}) && \text{פתרון 2} \\ x_3 = \bar{2} &\Rightarrow (\bar{3}, \bar{0}, \bar{2}) && \text{פתרון 3} \\ x_3 = \bar{3} &\Rightarrow (\bar{3}, -\bar{1}, \bar{3}) = (\bar{3}, \bar{4}, \bar{3}) && \text{פתרון 4} \\ x_3 = \bar{4} &\Rightarrow (\bar{3}, -\bar{2}, \bar{4}) = (\bar{3}, \bar{3}, \bar{4}) && \text{פתרון 5} \end{aligned}$$

דוגמה 2.29

פתור את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_7 :

$$\begin{aligned} x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{4}x_3 &= \bar{0}, \\ \bar{2}x_1 - \bar{3}x_2 + x_3 &= \bar{0}. \end{aligned}$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{2} & -\bar{3} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{2} \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{7} & \bar{0} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right)$$

המערכת המתאימה הינה

$$x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{4}x_3 = \bar{0}, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_7$$

והפתרון הוא

$$x_1 = -\bar{2}x_2 - \bar{4}x_3 = \bar{5}x_2 + \bar{3}x_3, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_7.$$

כלומר

$$(x_1, x_2, x_3) = (\bar{5}x_2 + \bar{3}x_3, x_2, x_3), \quad x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_7.$$

נשים לב שלמערכת יש $7^2 = 49$ פתרונות.

דוגמה 2.30

תנו דוגמה למערכת ליניארית בעלת 27 פתרונות.

פתרון:

מערכת 1 : המערכת

$$\bar{0}x = \bar{0}.$$

מעל \mathbb{Z}_{27} .

הסבר: זוהי מערכת של משוואה אחת במשתנה אחד, וכל איבר של \mathbb{Z}_{27} מהווה פתרון של המערכת.

מערכת 2 :

$$x + y + z + w = \bar{0}$$

מעל \mathbb{Z}_3 .

הסבר: זוהי מערכת של משוואה אחת בארבעה משתנים. למערכת יש שלושה משתני חופשיים ולכן 3^3 פתרונות.

דוגמה 2.31

פתרו את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_5 :

$$x + \bar{3}y + \bar{2}z = \bar{1},$$

$$\bar{2}x + \bar{4}y + z = \bar{3},$$

$$\bar{3}x + \bar{3}z = \bar{2}.$$

פתרון:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} \end{array} \right) & \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{2} \cdot R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - \bar{3} \cdot R_1}} & \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{2} & -\bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{9} & -\bar{3} & -\bar{1} \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_2 \rightarrow \bar{3}^{-1} R_2 = \bar{2} R_2} & \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \end{array} \right) & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} & \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{2} & \bar{2} \end{array} \right) \\ & = & \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} \end{array} \right) & \xrightarrow{R_3 \rightarrow \bar{3}^{-1} R_3 = \bar{2} R_3} & \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{4} R_3} & \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & -\bar{14} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - \bar{3} R_2 - \bar{2} R_3} & \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{10} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array} \right) \\ & & & & \text{לפיכך } (x_1, x_2, x_3) = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}) \end{aligned}$$

דוגמה 2.32

פתרו את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_5 :

$$x + \bar{4}y + z = \bar{1},$$

$$\bar{3}x + \bar{2}y + \bar{3}z = \bar{2},$$

$$\bar{4}x + y + \bar{4}z = \bar{3}.$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{4} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{3} \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - \bar{4}R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{3}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{10} & \bar{0} & -\bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{15} & \bar{0} & -\bar{1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} \end{array} \right)$$

קיבלנו שורת סתירה לכן למערכת אין פתרון.

דוגמה 2.33

פתרו את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_5 :

$$\bar{2}x + \bar{3}y + \bar{4}z = \bar{1} ,$$

$$x + \bar{2}y + \bar{3}z = \bar{0} ,$$

$$\bar{3}x + \bar{2}z = \bar{1} .$$

פתרון:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right) & \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - \bar{3} \cdot R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{2} \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & -\bar{1} & -\bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{6} & -\bar{7} & \bar{1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{1} \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right) \xrightarrow[= \bar{4} \cdot R_2]{R_2 \rightarrow \bar{4}^{-1} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{12} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - \bar{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & -\bar{1} & -\bar{8} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right) \\ & \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\bar{4}z + \bar{2} = z + \bar{2} \\ y = -\bar{2}z + \bar{4} = \bar{3}z + \bar{4} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

תשובה סופית:

$$(x, y, z) = (z + \bar{2}, \bar{4} + \bar{3}z, z) , z \in \mathbb{Z}_5 .$$

ישנם 5 פתרונות.