מחלקה למדעי המחשב

30/04/24 כ"ב בניסן תשפ"ד
$14:00 - 17:00$

אלגברה ליניארית 1 למדמ"ח

מועד א'

מרצים: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר, ד"ר מרינה ברשדסקי.

תשפ"ד סמסטר א'

השאלון מכיל 11 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

<u>הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה</u>

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

<u>חומר עזר</u>

- דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

<u>אחר / הערות</u> יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.
- יש לציין את השאלות שעניתם עליהן בתחילת המחברת.

==

שאלה 1 (25 נקודות)

במרחב $\mathbb{R}^{2\times2}$ נתונים הווקטורים הבאים:

$$u_1=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\ ,\quad u_2=\begin{pmatrix}1&3\\k-3&2\end{pmatrix}\ ,\quad u_3=\begin{pmatrix}1&k\\1&-2k+8\end{pmatrix}\ ,\quad u_4=\begin{pmatrix}1&1\\k^2-1&k^2-3\end{pmatrix}\ ,$$

א) (7 נקודות) לאילו ערכי הפרמטר k הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ בת"ל?

ב) (7 נקודות) לאילו ערכי הפרמטר k הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ פורשת את $\mathbb{R}^{2\times2}$?

ג) (7 נקודות) תהיינה $A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ונניח כי $A,B,C\neq0$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:
אם $AB=AC$ אז $B=C$.

ד) (4 נקודות) נתונה הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ של וקטורים במרחב וקטורי $\mathbb{R}^3$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:
אם הווקטורים $\{u_1,u_2\}$ בת"ל אז הווקטורים $\{u_1,u_2,u_3\}$ בת"ל.

שאלה 2 (25 נקודות)

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-k-4&2k-k^2\\-2&k+2&6-2k\end{pmatrix}$.

א) (10 נקודות) לכל ערך של k מצאו את המימד והבסיס של $\mathrm{col}(A)$.

ב) (7 נקודות) לכל ערך של k מצאו את המימד של $\mathrm{Nul}(A)$ (אין צורך למצוא את הבסיס).

ג) (4 נקודות) עבור אילו ערכי k למערכת $AX=0$ קיים פתרון לא טריוויאלי? נמקו את תשובתכם.

ד) (4 נקודות) נניח כי $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה. הוכיחו או הפריכו: אם $M^2-2M-3I=0$ אז M הפיכה.

שאלה 3 (25 נקודות)

נתונים ווקטורים ב- $\mathbb{R}^4$:

$$u_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\3\end{pmatrix}\ ,\quad u_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\6\\3\end{pmatrix}\ ,\quad u_3=\begin{pmatrix}1\\0\\4-2a\\a\end{pmatrix}\ ,\quad u_4=\begin{pmatrix}2\\b\\2\\4+b\end{pmatrix}\ .$$

א) (8 נקודות) מצאו את ערכי a עבורם u_3 שייך לפרישה הלינארית של u_1,u_2.

ב) (7 נקודות) עבור כל אחד מערכי a שמצאתם בסעיף א' רשמו את u_3 כצירוף ליניארי של u_1 ו- u_2.

ג) (4 נקודות) מצאו את ערכי a,b עבורם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ היא בסיס של $\mathbb{R}^4$. נמקו את תשובתכם.

ד) (3 נקודות) נניח כי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו: אם A הפיכה אז $|A|\neq 0$.

ה) (3 נקודות) נניח כי $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו: אם AB הפיכה אז A הפיכה.

שאלה 4 (25 נקודות)

א) (10 נקודות) פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{C}$:

$$\left.\begin{aligned} 2iz_1+3z_2 &= 2+i\\ z_1-iz_2 &= 1-i\ .\end{aligned}\right\}$$

ב) (4 נקודות) נתונה המטריצה $\begin{pmatrix}1&1\\a&b\end{pmatrix}$. מהו התנאי על הפרמטרים a,b כדי שהמטריצה תהיה הפיכה.

ג) (4 נקודות) נתון כי $A\in\mathbb{R}^{6\times 6}$ ומתקיים $A^4+A=0$. מצאו את $|A|$.

ד) (4 נקודות) הוכיחו או הפריכו: אם $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ ומתקיים $A^3+A=0$ אז A לא הפיכה.

ה) (3 נקודות) נניח כי $\{u_1,\cdots,u_k\}\in\mathbb{R}^n$ קבוצת ווקטורים בת"ל ונניח ש $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:
אם $\{Au_1,\cdots,Au_k\}$ בת"ל אז גם $\{u_1,\cdots,u_k\}$ בת"ל.

שאלה 5 (25 נקודות)

תהי $T:\mathbb{R}_{\leq 2}[x]\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ העתקה לינארית שמוגדרת

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=\begin{pmatrix}3a+2b & 2a+4b+10c\\ a+2b+5c & 4a+4b+5c\end{pmatrix}$$

א) (7 נקודות) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

ב) (7 נקודות) מצאו את הבסיס והמימד של $\mathrm{Im}(T)$.

ג) (7 נקודות) מצאו את הבסיס והמימד של $\ker(T)$.

ד) (4 נקודות) תהי $T:U\to V$ העתקה ליניארית ונניח כי $\{u_1,\cdots,u_k\}$ קבוצת ווקטורים של מרחב ווקטורי U. הוכיחו או הפריכו:
אם $\{u_1,\cdots,u_k\}$ בת"ל אז גם $\{T(u_1),\cdots,T(u_k)\}$ בת"ל.

פתרונות

שאלה 1

א) נשתמש באיזומורפיזם הטבעי לקבלת הווקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\4\end{pmatrix},\quad u_2=\begin{pmatrix}1\\3\\k-3\\2\end{pmatrix},\quad u_3=\begin{pmatrix}1\\k\\1\\-2k+8\end{pmatrix},\quad u_4=\begin{pmatrix}1\\1\\k^2-1\\k^2-3\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&3&k&1\\1&k-3&1&k^2-1\\4&2&8-2k&k^2-3\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to R_4-4R_1]{\substack{R_2\to R_2-2R_1\\ R_3\to R_3-R_1}}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&k-2&-1\\0&k-4&0&k^2-2\\0&-2&4-2k&k^2-7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4\to R_4+2R_2]{R_3\to R_3-(k-4)R_2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&k-2&-1\\0&0&-(k-4)(k-2)&(k-2)(k+3)\\0&0&0&(k-3)(k+3)\end{pmatrix}$$

ב) הקבוצה בת"ל אס"ם $k\neq 2,4$. (במדורגת המתקבלת יש מוביל בכל עמודה).

ג) עבור $k\neq 2,4,3,-3$ הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ פורשת את $\mathbb{R}^{2\times 2}$. (במדורגת המתקבלת יש מוביל בכל שורה). $C=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

$$AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\quad AC=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

הרי $AB=AC$ אבל $B\neq C$.

ד) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ u_3=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}.$$

הרי $\{u_1,u_2\}$ בת"ל ו- $\{u_1,u_2,u_3\}$ ת"ל בגלל ש- $u_3=2u_1$.

שאלה 2

א)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -k-4 & 2k-k^2 \\ -2 & k+2 & 6-2k \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3+2R_1]{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -k-6 & -k^2+2k-3 \\ 0 & k+6 & 12-2k \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -k-6 & -k^2+2k-3 \\ 0 & 0 & 9-k^2 \end{pmatrix}$$

אם $k=\pm 3$ אז עמודה 1 ועמודה 2 מובילות. לפי זה, עבור $k=3$ בסיס של $\text{col}(A)$ הינו:

$$B_{\text{col}(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -k-4 \\ k+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

ו- $\dim(\text{col}(A))=2$.

עבור $k=-3$ בסיס של $\text{col}(A)$ הינו:

$$B_{\text{col}(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -k-4 \\ k+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

ו- $\dim(\text{col}(A))=2$.

אם $k=-6$ אז עמודה 1 ועמודה 3 מובילות.
עבור $k=-6$ בסיס של $\text{col}(A)$ הינו:

$$B_{\text{col}(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2k-k^2 \\ 6-2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -48 \\ 18 \end{pmatrix} \right\}$$

ו- $\dim(\text{col}(A))=2$.

לכל $k\neq \pm 3, 6$ ל- A יש 3 עמודות מובילות. כך כל העמודות של A מהוות בסיס של $\text{col}(A)$ ולכן $\dim(\text{col}(A))=3$.

ב) משפט הדרגה: $\dim(\text{col}(A))+\dim(\text{nul}(A))=n=3$. לכן

עבור $k=\pm 3$: $\quad \dim(\text{nul}(A))=1 \quad \Rightarrow \quad 2+\dim(\text{nul}(A))=3$

עבור $k=-6$: $\quad \dim(\text{nul}(A))=1 \quad \Rightarrow \quad 2+\dim(\text{nul}(A))=3$

עבור $k\neq \pm 3, -6$: $\quad \dim(\text{nul}(A))=0 \quad \Rightarrow \quad 3+\dim(\text{nul}(A))=3$

ג) נניח כי A מטריצה ריבועית. למערכת $AX=0$ יש פתרון לא טריוויאלי אם $\dim\left(\text{Nul}(A)\right)>0$. לפיכך יש פתרון לא טריוויאלי אם $k=\pm 3$ או אם $k=-6$.

ד) טענה נכונה. הוכחה:

$$M^2-2M-3I=0 \quad\Rightarrow\quad M^2-2M=3I \quad\Rightarrow\quad M(M-2I)=3I \quad\Rightarrow\quad |M||M-2I|=3^n\ .$$

נניח כי M לא הפיכה. ז"א $|M|=0$ ואז נקבל $0=3^n$. סתירה.

שאלה 3

א)

$$u_3=xu_1+yu_2\ .$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 6 & 4-2a \\ 3 & 3 & a \end{array}\right) \xrightarrow[R_4\to 2R_4-3R_1]{\substack{R_2\to 2R_2-R_1 \\ R_3\to R_3+R_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 8 & 5-2a \\ 0 & 0 & 2a-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_2+2R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 3-2a \\ 0 & 0 & 2a-3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4\to R_4+R_3} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 3-2a \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון אם $a=\dfrac{3}{2}$. לכן עבור $a=\dfrac{3}{2}$ הווקטור u_3 שייך לפרישה לינארית של u_1,u_2.

ב)

$$u_3=xu_1+yu_2\ .$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1\to\frac{1}{2}R_2]{R_2\to\frac{-1}{4}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $y=\frac{1}{4}, x=\frac{1}{4}$. לפיכך עבור $a=\frac{3}{2}$ מתקיים:

$$u_3=\frac{1}{4}u_1+\frac{1}{4}u_2\ .$$

ג)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & b \\ -2 & 6 & 4-2a & 2 \\ 3 & 3 & a & b+4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to 2R_4 - 3R_1]{\substack{R_2 \to 2R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 2b-2 \\ 0 & 8 & 5-2a & 4 \\ 0 & 0 & 2a-3 & 2b+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 2b-2 \\ 0 & 0 & 3-2a & 4b \\ 0 & 0 & 2a-3 & 2b+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 2b-2 \\ 0 & 0 & 3-2a & 4b \\ 0 & 0 & 0 & 6b+2 \end{pmatrix}$$

עבור $b \neq -\frac{1}{3}$,$a \neq \frac{3}{2}$, כל העמודות מובילות לכן $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ בת"ל.

$\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ לכן $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ מהווים בסיס של $\mathbb{R}^4$.

ד) טענה נכונה. A הפיכה $\Leftarrow$ קיימת A^{-1} כך ש- $AA^{-1} = I$ $\Leftarrow$ $|AA^{-1}| = |I| = 1$ $\Leftarrow$ $|A||A^{-1}| = 1$ ולכן $|A| \neq 0$.

ה) AB הפיכה לכן $|AB| \neq 0$ לכן $|A||B| \neq 0$ לכן $|A| \neq 0$ ו- $|B| \neq 0$ לכן A הפיכה.

שאלה 4

א)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2i & 3 & 2+i \\ 1 & -i & 1-i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to 2iR_2 - R_1} \begin{pmatrix} 2i & 3 & 2+i \\ 0 & -1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -R_2} \begin{pmatrix} 2i & 3 & 2+i \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{-i}{2} R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3i}{2} & -i + \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + \frac{3i}{2} R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-i \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$$

פתרון: $(z_1, z_2) = (2-i, -i)$.

ב)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - aR_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{vmatrix}$$

עבור $a \neq b$ המטריצה תהיה הפיכה.

ג)

$$A^4 + A = 0 \quad \Rightarrow \quad A^4 = -A \quad \Rightarrow \quad |A^4| = (-1)^6 |A| \quad \Rightarrow \quad |A|^4 = |A|$$

נעביר אגפים:

$$|A|^4 - |A| = 0 \quad \Rightarrow \quad |A|\big(|A| - 1\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad |A| = 0 \quad \text{או} \quad |A| = 1\ .$$

ד)

$$A^3+A=0 \quad\Rightarrow\quad A^3=-A \quad\Rightarrow\quad |A^3|=|-A| \quad\Rightarrow\quad |A|^3=-|A|\ .$$

נניח כי A הפיכה. אז $|A|\neq 0$ ז"א קיים $\frac{1}{|A|}$. אז נקבל

$$|A|^2=-1\ .$$

בסתירה לכך ש- $|A|^2$ חיובי.

ה) טענה נכונה. הסבר:

נניח ש- $\{Au_1,\ldots,Au_k\}$ בת"ל.

הקבוצה בת"ל לכן ווקטור האפס לא בקבוצה $\{Au_1,\ldots,Au_k\}$. לכן $A\neq 0$.

נוכיח ש- $\{u_1,\cdots,u_k\}$ בת"ל דרך השלילה.

נניח כי $\{u_1,\cdots,u_k\}$ ת"ל.

ז"א קיימים סקלרים שלא כולם אפסים כך ש- $t_1u_1+\cdots+t_ku_k=\bar{0}$.

ז"א קיימים סקלרים שלא כולם אפסים כך ש-

$$A(t_1u_1+\cdots+t_ku_k)=A\bar{0} \quad\Rightarrow\quad t_1Au_1+\cdots t_kAu_k=\bar{0}$$

ז"א $\{Au_1,\ldots,Au_k\}$ ת"ל.

בסתירה לכך ש- $\{Au_1,\ldots,Au_k\}$ בת"ל.

<u>שאלה 5</u>

א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית של ההעתקה הינה

$$A=\begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(e_1)]_E & [T(e_2)]_E & [T(e_3)]_E \\ | & | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 10 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

ב)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 10 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to 3R_4-4R_1]{\substack{R_2\to 3R_2-2R_1 \\ R_3\to 3R_3-R_1}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 30 \\ 0 & 4 & 15 \\ 0 & 4 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to 2R_4-R_2]{R_3\to 2R_3-R_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 30 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{col}(A)$ הינו

$$B_{\text{col}(A)}=\left\{\begin{pmatrix}3\\2\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\2\\4\end{pmatrix}.\right\}$$

ו- $\dim(\text{col}(A))=2$. לכן בסיס של $\text{Im}(T)$ הינו

$$B_{\text{Im}(T)}=\left\{\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&4\\2&4\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(\text{Im}(T))=2$.

ג)

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&0&0\\2&4&10&0\\1&2&5&0\\4&4&5&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&0&0\\0&8&30&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&0&0\\0&4&15&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}6&0&-15&0\\0&4&15&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&-5&0\\0&4&15&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

פתרון: $(x,y,z)=\left(\frac{5}{2}z,-\frac{15}{4}z,z\right)$

$$B_{\text{Nul}(A)}=\left\{\begin{pmatrix}10\\-15\\4\end{pmatrix}\right\}$$

$$B_{\text{Ker}(T)}=\left\{10-15x+4x^2\right\}\ .$$

$\dim(\ker(T))=1$.

ד) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

נניח כי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ העתקה לינארית שמוגדרת $T(u)=0$ לכל $u\in\mathbb{R}^2$ (העתקה האפס).

נניח כי הקבוצה $\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\in\mathbb{R}^2$ בת"ל.

הקבוצה $\{T(u_1)=0,T(u_2)=0\}$ ת"ל (כל קבוצת ווקטורים שמכילה ווקטור האפס תלויה ליניארית).