

# שיעור 12

## רדוקציות פולינומיליות

### 12.1 $CLIQUE$ היא $NP$ - שלמה

**משפט 12.1**  $CLIQUE \in NPC$

הבעיית  $CLIQUE$  היא (ראו הגדרה 10.8):

$$CLIQUE = \{ \langle G, k \rangle \mid k \text{ מכיל קליקה בגודל } k \}.$$

$CLIQUE$  היא  $NP$  - שלמה

**הוכחה:**

(1) הוכחנו כי  $CLIQUE \in NP$  במשפט 10.3.

(2) נוכיח כי  $CLIQUE$  היא  $NP$  קשה ע"י רדוקציה  $3SAT \leq_P CLIQUE$ .

פונקציית הרדוקציה

בהינתן נוסחת  $3CNF$   $\phi$  מעל  $n$  משתנים  $x_1, x_2, \dots, x_n$  המכיל  $m$  פסוקיות, ניצור זוג  $\langle G, k \rangle$  ונוכיח כי

$$\langle \phi \rangle \in 3SAT \iff \langle G, k \rangle \in CLIQUE.$$

נבנה את הגרף  $G$  באופן הבא:

הקדקודים של  $G$ :

לכל פסוקית  $C_i$  ב-  $\phi$  המכילה 3 ליטרלים ניצור שלשה  $t_i$  המכילה 3 קודקודים המתאימים לליטרלים של  $C_i$ :

$$x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \longrightarrow \begin{array}{ccc} \textcircled{x_1} & \textcircled{\bar{x}_3} & \textcircled{x_4} \end{array}$$

הצלעות של  $G$ :

נבחר בין כל שני קודקודים פרט לזוגות הבאים:

- זוג קודקודים המתאימים למשתנה ומשללים שלו.
- זוג קודקודים שנמצאים באותה שלושה.

לדוגמה:

$$\phi = \underbrace{\left( \overset{T}{x_1} \vee \overset{T}{\bar{x}_2} \vee x_3 \right)}_{C_1} \wedge \underbrace{\left( \bar{x}_1 \vee \overset{T}{\bar{x}_2} \vee x_3 \right)}_{C_2} \wedge \underbrace{\left( \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \overset{T}{\bar{x}_3} \right)}_{C_3}$$



נקבע  $k = m$ .

נכונות הרדוקציה

(1) ניתן לבנות את  $G$  בזמן פולינומיאלי בגודל  $\phi$ .

(2) נוכיח כי

$$\langle \phi \rangle \in 3SAT \iff \langle G, k \rangle \in CLIQUE.$$

כיוון  $\Leftarrow$

- נניח כי  $\phi$  ספיקה ונסתכל על השמה המספקת את  $\phi$ .
- בכל פסוקית  $C_i$  ב- $\phi$  יש לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך  $T$ .
- נבחר מכל שלשה  $t_i$  בקודקוד אחד המתאים לליטרל שקיבל ערך  $T$  ב- $C_i$  ונוסיף אותו לקליקה.
- מספר הקודקודים שבחרנו שווה  $k$  וכל שניים מהם מחוברים בצלע כי לא בחרנו שני קודקודים מאותה שלשה ולא בחרנו שני קודקודים המתאימים למשתנה ומשלים שלו.
- ולכן  $G$  מכיל קליקה בגודל  $k$ .

כיוון  $\Rightarrow$

- נניח כי  $G$  מכיל קליקה בגודל  $k$  ונסתכל על קליקה כזו.
- לפי הבנייה הקליקה מכילה בדיוק קודקוד אחד מכל שלשה  $t_i$ . ניתן השמה למשתנים של  $\phi$  כך שהליטרל שמתאים לקודקוד שנמצא בקליקה יקבל ערך  $T$ .
- השמה זו אפשרית מכיוון שהקליקה לא מכילה שני קודקודים המתאימים למשתנה ומשלים שלו.

- בנוסף השם  $\phi$  מספקת את  $\phi$  מכיוון שהקליקה מכילה קודקוד מכל שלשה  $t_i$  ולכן הליטרל המתאים לקודקוד בשלשה  $t_i$  קיבל ערך  $T$  ולכן הוא מספק את הפסוקית  $C_i$ .
- לכן  $\phi$  ספיקה.



## 12.2 בעיית הקבוצה הבלתי תלויה

### הגדרה 12.1 קבוצה בלתי תלויה

בהינתן גרף לא מכוון  $G = (V, E)$ , קבוצה בלתי תלויה ב-  $G$  היא תת-קבוצה של קודקודים  $S \subseteq V$  כך שלכל שני קודקודים  $u, v \in S$  מתקיים  $(u, v) \notin E$ .



קבוצה בלתי תלויה בגודל  $k = 3$ :



קבוצה בלתי תלויה בגודל  $k = 3$ :

### הגדרה 12.2 בעיית IS

קלט: גרף לא מכוון  $G = (V, E)$  ומספר  $k$ .  
פלט: האם קיימת קבוצה בלתי תלויה ב-  $G$  בגודל  $k$ ?

$$IS = \{ \langle G, k \rangle \mid k \text{ קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \}$$

### משפט 12.2 $IS \in NPC$

הבעיה IS היא NP - שלמה.

הוכחה:

(1) נוכיח כי  $IS \in NP$

נבנה אלגוריתם אימות  $V$  עבור  $IS$ .  
 $V = \langle \langle G, k \rangle, y \rangle$  על קלט

- בודק האם  $y$  היא קבוצה של  $k$  קודקודים מ-  $G$  השונים זה מזה.
  - אם לא  $\Rightarrow$  דוחה.
- בודק האם כל שני קודקודים מ-  $y$  לא מחוברים בצלע ב-  $G$ .
  - אם כן  $\Rightarrow$  מקבל.

○ אם לא  $\Rightarrow$  דוחה.

(2) נוכיח כי  $CLIQUE \leq_P IS$

פונקציית הרדוקציה:

בהינתן זוג  $\langle G, k \rangle$  הקלט של  $CLIQUE$ , ניצור זוג  $\langle G', k' \rangle$ , הקלט של  $IS$ , ונוכיח כי:

$$\langle G, k \rangle \in CLIQUE \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in IS.$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

(1) נניח שהגרף הוא  $G = (V, E)$ .

אז הגרף  $G'$  הוא הגרף המשלים של  $G = (V, E)$ .

ז"א  $G' = \bar{G} = (V, \bar{E})$  כאשר

$$\bar{E} = \{(u_1, u_2) \mid (u_1, u_2) \notin E\}.$$

(2)  $k' = k$ .

לדוגמה, בהינתן הגרף  $G = (V, E)$  שמכיל קליקה בגודל  $k = 3$ , הפונקציית הרדוקציה  $R$  מחזירה את הגרף  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  ואת המספר  $k' = k = 3$ , כמתואר בתרשים למטה:



נכונות הרדוקציה

(1) ניתן לבנות  $G'$  בזמן פולינומיאלי בגודל  $G$ .

(2) נוכיח כי  $\langle G, k \rangle \in CLIQUE \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in IS$ .

כיוון  $\Leftarrow$

בהינתן גרף  $G = (V, E)$  ושלים  $k$ .

נניח כי  $\langle G, k \rangle \in CLIQUE$ .

$\Leftarrow$   $G$  מכיל קליקה  $S$  בגודל  $k$ .

$\Leftarrow$  אם  $u_1, u_2 \in S$  (אם  $u_1, u_2$  שני קודקודים בקליקה  $S$ ) אזי  $(u_1, u_2) \in E$ .

כלומר, כל שני קודקודים ב- $S$  מחוברים בצלע של  $G$ .

$\Leftarrow$  אם  $u_1, u_2 \in S$  אזי  $(u_1, u_2) \notin \bar{E}$ .

כלומר, כל שני קודקודים ב- $S$  לא מחוברים בצלע של המשלים של הגרף  $\bar{G}$ , דהיינו  $G'$ .

$\Leftarrow$  אותה הקבוצה  $S$  היא קבוצה בלתי תלוייה ב-  $G'$  בגודל  $k' = k$ .

$\Leftarrow G' = \bar{G}(V, \bar{E})$  מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל  $k'$ .

$\Leftarrow \langle G', k \rangle \in IS$

$\Rightarrow$  כיוון

בהינתן גרף  $G'$  ושלים  $k'$ .

נניח כי  $\langle G', k' \rangle \in IS$

$\Leftarrow G'$  מכיל קבוצה בלתי תלוייה  $S$  בגודל  $k'$ .

$\Leftarrow$  אם  $u_1, u_2 \in S$  אזי  $(u_1, u_2) \notin \bar{E}$ .

כלומר, כל שני קדקודים ב-  $S$  לא מחוברים בצלע של  $G'$ .

$\Leftarrow$  אם  $u_1, u_2 \in S$  אזי  $(u_1, u_2) \in E$ .

כלומר, כל שני קדקודים ב-  $S$  מחוברים בצלע של  $G(V, E)$ .

$\Leftarrow$  אותה הקבוצה  $S$  היא קליקה ב-  $G$  בגודל  $k = k'$ .

$\Leftarrow G$  מכיל קליקה בגודל  $k$ .

$\Leftarrow \langle G, k \rangle \in CLIQUE$

■

## 12.3 בעיית הכיסוי בקודקודים

### הגדרה 12.3 כיסוי בקודקודים

בהינתן גרף לא מכוון  $G = (V, E)$ , כיסוי בקודקודים ב-  $G$  הוא תת-קבוצה של קודקודים  $C \subseteq V$  כך שלכל צלע  $u, v \in S$  מתקיים  $u \in C$  או  $v \in C$ .



כיסוי בקדקודים בגודל  $k = 2$ :



כיסוי בקדקודים בגודל  $k = 5$ :



כיסוי בקדקודים בגודל  $k = 5$ :

## 12.4 הבעיה $VC$

### הגדרה 12.4 בעיית $VC$

קלט: גרף לא מכוון  $G = (V, E)$  ומספר  $k$ .  
פלט: האם קיים כיסוי בקודקודים ב- $G$  בגודל  $k$ ?

$$VC = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל כיסוי בקודקודים בגודל } k \}$$

### משפט 12.3 $VC \in NPC$

הבעיה  $VC$  היא  $NP$  - שלמה.

הוכחה:

נוכיח כי  $VC \in NP$

נבנה אלגוריתם אימות  $V$  עבור  $VC$ .  
 $V = \text{על קלט } \langle G, k \rangle, y$ :

• בודק האם כל צלע ב- $G$  מכילה לפחות קצה אחד ב- $y$ .

◦ אם כן  $\Rightarrow$  מקבל.

◦ אם לא  $\Rightarrow$  דוחה.

נוכיח כי  $VC$  היא  $NP$ -קשה ע"י רדוקציה  $IS \leq_P VC$

פונקציית הרדוקציה:

בהינתן זוג  $\langle G, k \rangle$  הקלט של  $IS$ , ניצור זוג  $\langle G', k' \rangle$  הקלט של  $VC$  ונוכיח כי

$$\langle G, k \rangle \in IS \iff \langle G', k' \rangle \in VC.$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

(1) נניח שהגרף הוא  $G = (V, E)$ .

אז הגרף  $G'$  הוא אותו גרף  $G = (V, E)$ .

(2)  $k' = |V| - k$ .

נכונות הרדוקציה

(1) ניתן לבנות  $G'$  בזמן פולינומיאלי בגודל  $G$ .

(2) נוכיח כי  $\langle G, k \rangle \in IS \iff \langle G', k' \rangle \in VC$ .

כיוון  $\Leftarrow$

בהינתן גרף  $G = (V, E)$  ושלם  $k$ .

נניח כי  $\langle G, k \rangle \in IS$

$\Leftarrow G$  מכיל קבוצה בלתי תלוייה  $S$  בגודל  $k$ .  
 $\Leftarrow$  אם  $u_1 \in S$  וגם  $u_2 \in S$  אז  $(u_1, u_2) \notin E$ .  
 כלומר, כל שני קדקודים ב- $S$  **לא מחוברים** בצלע ב- $G$ .  
 $\Leftarrow$  השלילה הלוגית של הגרירה הזאת היא:  
 אם  $(u_1, u_2) \in E$  אז  $u_1 \notin S$  או  $u_2 \notin S$ .  
 $\Leftarrow$  אם  $(u_1, u_2) \in E$  אז  $u_1 \in V \setminus S$  או  $u_2 \in V \setminus S$ .  
 $\Leftarrow V \setminus S$  היא כיסוי קדקודים ב- $G$  בגודל  $k' = |V| - k$ .  
 $\Leftarrow$  הגרף  $G' = G$  מכיל כיסוי קדקודים בגודל  $k'$ .  
 $\Leftarrow \langle G', k' \rangle \in VC$

$\Rightarrow$  כיוון

בהינתן גרף  $G'$  ושלם  $k'$ .  
 נניח כי  $\langle G', k' \rangle \in VC$ .  
 $\Leftarrow G'$  מכיל כיסוי בקדקודים  $C$  בגודל  $k'$ .  
 $\Leftarrow$  אם  $(u_1, u_2) \in E$  אז  $u_1 \in C$  או  $u_2 \in C$ .  
 $\Leftarrow$  השלילה הלוגית של הגרירה הזאת היא:  
 אם  $u_1 \notin C$  וגם  $u_2 \notin C$  אז  $(u_1, u_2) \notin E$ .  
 $\Leftarrow$  אם  $u_1 \in V \setminus C$  וגם  $u_2 \in V \setminus C$  אז  $(u_1, u_2) \notin E$ .  
 $\Leftarrow$  כל שני קדקודים ב- $V \setminus C$  לא מחוברים בצלע ב- $G'$ .  
 $\Leftarrow V \setminus C$  הוא קבוצת בלתי תלוייה ב- $G'$  בגודל  $k = |V| - k'$ .  
 $\Leftarrow$  הגרף  $G = G'$  מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל  $k$ .



## PARTITION 12.5

### הגדרה 12.5 בעיית PARTITION

קלט: קבוצת מספרים שלמים  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .  
 פלט: האם קיימת תת-קבוצה  $Y \subseteq S$  כך ש- $\sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in S \setminus Y} y$ ?

$$PARTITION = \left\{ S \mid \sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in S \setminus Y} y \text{ ש-} Y \subseteq S \text{ קבוצת שלמים, וקיימת תת-קבוצה} \right\}$$

## 12.6 רדוקציות פולינומיאליות

## משפט 12.4 רדוקציות פולינומאליות

$$\begin{aligned}
 SAT &\leq_P 3SAT \\
 3SAT &\leq_P CLIQUE \\
 CLIQUE &\leq_P IS \\
 IS &\leq_P VC \\
 SubSetSum &\leq_P PARTITION \\
 HAMPATH &\leq_P HAMCYCLE
 \end{aligned}$$

12.7 שפות  $NP$  שלמותמשפט 12.5 שפות  $NP$  - שלמות

$SAT$	-NP שלמה.	(משפט קוק לויין)
$3SAT$	-NP שלמה.	
$HAMPATH$	-NP שלמה.	
$CLIQUE$	-NP שלמה.	
$IS$	-NP שלמה.	
$VC$	-NP שלמה.	