חדו"א 1

תוכן העניינים

שיעור 1
קבוצות של מספרים

1.1 קבוצות של מספרים

קבוצה זה אוסף של עצמים. ישנן שתי דרכים להגדרת קבוצה ספציפית.

<u>דרך 1:</u>

לתת רשימה שלמה של איברים. לדוגמה:

$$A = \{1,2,3,4,5\}$$

<u>דרך 2:</u>

לתת תנאי שמאפיין את איברי הקבוצה, בצורה

$$A = \{x | x \text{ תנאי שמאפיין את } \}$$

לגודמה:

$$A = \{x | 2 \leq x \leq 5 \text{ מספר ממשי וגם } x\}$$

אם $A = \{1,3,4,5\}$ אז $1,3,4,5$ שייכים לקבוצה A ומספרים $1 \in A$, $3 \in A$, $4 \in A$, $5 \in A$.

סדר האיברים בקבוצה אינו חשוב, לכן

$$\{1,2,3\} = \{2,1,3\} \ .$$

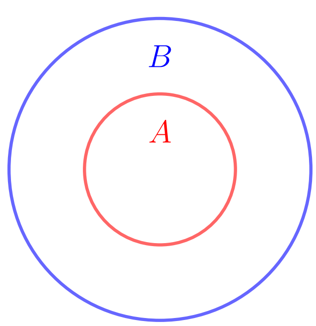
לא משנה כמה פעמים איבר מופיע ברשימה האיברים, ז"א

$$\{1,2,3\} = \{1,2,3,2\} \ .$$

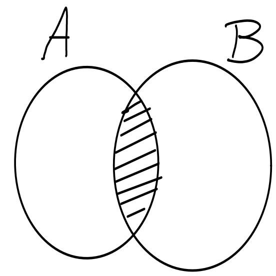
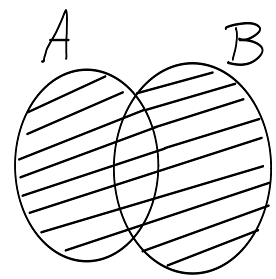
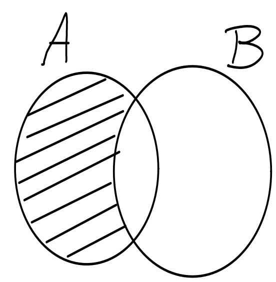
קבוצה ללא איברים מסומנת ב- $\emptyset$. כלומר

$$\emptyset = \{\} \ .$$

אומרים ש- A היא תת קבוצה של B אם כל איבר של A שייך ל- B. מסמנים תת קבוצה בצורה $A \subset B$.



1.2 פעולות בין קבוצות

חיתוך של קבוצות		$A \cap B = \{x \mid x \in A$ וגם $x \in B\}$
איחוד של קבוצות		$A \cup B = \{x \mid x \in A$ או $x \in B\}$
הפרש בין קבוצות		$A - B = \{x \mid x \notin B$ וגם $x \in A\}$

1.3 קבוצות של מספרים

קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

קבוצת המספרים השלמים: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

קבוצת המספרים הרציונלים: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid n \neq 0, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}\}$

שים לב,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \ .$$

המספרים הרציונלים מקיימים את תכונת הצפיפות. ז"א בין כל שני מספרים רציונלים יש מספר רציונלי

אחר. אבל עדיין קיימות הרבה מאוד נקודות על הציר שלא מתאימות לאף מספר רציונלי.

למה 1.1

לא קיים מספר רציונלי שהריבוע שלו שווה ל-2.

הוכחה: נוכיח בדרך השלילה. נניח שקיים מספר רציונלי $\dfrac{m}{n}$ כך ש-

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \ .$$

אפשר להניח ש- $\frac{m}{n}$ שבר מצומצם. אז

$$m^2 = 2n^2 \ ,$$

ז"א m^2, מספר זוגי, ולכן גם m מספר זוגי. כלומר ניתן לבטא m כ $m = 2k$ כאשר $k \in \mathbb{Z}$ (k מספר שלם). אז נקבל

$$m = 2k \qquad \Rightarrow \qquad 4k^2 = 2n^2 \qquad \Rightarrow \qquad n^2 = 2k^2 \ .$$

לכן n^2 זוגי $\Leftarrow$ n זוגי. זאת אומרת m ו- n מספרים זוגיים. לכן אפשר לצמצם את השבר ב- 2. סתירה. כלומר, לא קיים מספר רציונלי שריבועו שווה ל- 2. ■

אחרי שממלאים את כל הציר, מקבלים את קבוצת המספרים הממשיים, $\mathbb{R}$. ז"א

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

1.4 סביבות וקטעים

$\{x \mid a \le x \le b\}$	$=$	$[a,b]$	קטע סגור
$\{x \mid a < x < b\}$	$=$	(a,b)	קטע פתוח
$\{x \mid a \le x < b\}$	$=$	$[a,b)$	קטע חצי פתוח
$\{x \mid a < x \le b\}$	$=$	$(a,b]$	קטע חצי פתוח
$\{x \mid x \ge a\}$	$=$	$[a,\infty)$	קטע חצי פתוח
$\{x \mid x > a\}$	$=$	(a,∞)	קטע פתוח
$\{x \mid x \le b\}$	$=$	$(-\infty,b]$	קטע חצי פתוח
$\{x \mid x < b\}$	$=$	$(-\infty,b)$	קטע פתוח
$\{x \mid -\infty < x < \infty\} = \mathbb{R}$	$=$	$(-\infty,\infty)$	קטע פתוח

הגדרה 1.1 אי-שוויונים

יהיו $a, A \in \mathbb{R}$ מספרים ממשיים. נגדיר את הסימונים הבאים:

- $a < b$ אם ורק אם המספר $b - a$ חיובי.
- $a \leq b$ אם ורק אם המספר $b - a$ חיובי או שווה ל- 0.
- $a > b$ אם ורק אם המספר $a - b$ חיובי.
- $a \geq b$ אם ורק אם המספר $a - b$ חיובי או שווה ל- 0.

למה 1.2 חוק העברה של אי-השוויונים

יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$. אם $a > b$ ו- $b > c$ אז $a > c$.

הוכחה: $a > b$ אז $a - b$ חיובי.

$b > c$ אז $b - c$ חיובי. לכן

$$(a - b) + (b - c) = a - c$$

חיובי,לפיכך

$$a > c \ .$$

■

משפט 1.1

יהיו b, B מספרים ממשיים כך ש- $b < B$.

א) יהי m מספר ממשי.

אם m חיובי אז

$$mb < mB \ .$$

אם m שלילי אז

$$mb > mB \ .$$

ב) לכל מספר ממשי N חיובית שלילי או 0.

$$N + b < N + B$$

ו-

$$N - b > N - B \ .$$

ג) יהיו a, A מספרים ממשיים חיוביים.

אם $a < A$ אז $\frac{1}{a} > \frac{1}{A}$.

אם $\frac{1}{A} < \frac{1}{a}$ אז $A > a$.

הוכחה: * להעשרה בלבד

א) נתון כי $b<B$ ז"א $B-b$ חיובי.

נניח כי m חיובי. המכפלה של שני מספרים חיוביים שווה למספר חיובי, לכן $m\cdot(B-b)$ חיובי. $\Leftarrow$ $mB-mb$ חיובי, לכן
$$mb<mB\ .$$
נניח כי m שלילי. המכפלה של שני מספר חיובי עם מספר שלילי שווה למספר שלילי, לכן $m\cdot(B-b)$ שלילי. $\Leftarrow$ $mB-mb$ שלילי, לכן
$$mb>mB\ .$$

ב) נתון כי $b<B$ ז"א $B-b$ חיובי.

נשים לב כי
$$(N+B)-(N+b)=B-b\ .$$
לפי זה, אם $B-b$ חיובי אז גם $(N+B)-(N+b)$ חיובי.

לפיכך
$$N+b<N+B\ .$$

עבור האי-שוויון השני, נשים לב כי
$$(N-b)-(N-B)=N-b-N+B=-b+B=B-b\ .$$
לפי זה, אם $B-b$ חיובי אז גם $(N-b)-(N-B)$ חיובי.

לפיכך
$$N-b>N-B\ .$$

ג) $a<A$ לכן $A-a$ חיובי.

נתון כי a חיובי ו- A חיובי לכן המכפלה aA חיובי.

נשים לב כי
$$\frac{1}{a}-\frac{1}{A}=\frac{A-a}{Aa}=(A-a)\cdot\frac{1}{Aa}\ .$$
לפי זה, $\frac{1}{a}-\frac{1}{A}$ שווה למכפלה של שני מספרים חיוביים, $A-a$ ו- $\frac{1}{Aa}$, ולכן חיובי.

לפיכך
$$\frac{1}{a}>\frac{1}{A}\ .$$
עבור אי-השוויון השני, אם $\frac{1}{A}<\frac{1}{a}$ אז לפי סעיף א' לכל m חיובי, $m\cdot\frac{1}{a}>m\frac{1}{A}$.

נציב $m=aA$:
$$aA\cdot\frac{1}{a}>aA\frac{1}{A}\quad\Rightarrow\quad A>a\ .$$

■

דוגמה 1.1 *

הוכיחו טת הטענה הבאה ע"י אינדוקציה מתמטית או בכל דרך אחרת:
לכל מספר טבעי $n\geq 2$:
$$3^n>3n+1$$

פתרון:

<u>שלב הבסיס:</u>

עבור $n=2$ הטענה נכונה:
$$3^2 > 3\cdot 2+1 \ .$$

<u>שלב האינדוקציה:</u>

נניח כי עבור $m>2$, $3^m > 3m+1$ (הנחת האינדוקציה). אז
$$3\cdot 3^m > 3\cdot(3m+1) \quad \Rightarrow \quad 3^{m+1} > 9m+3 = 3m+6m+3$$

$m>2$ אז $6m>12$. לפיכך
$$3^{m+1} > 3m+12+3 = 3(m+1)+12 > 3(m+1)+1$$

לכן $3^{m+1} > 3(m+1)+1$.

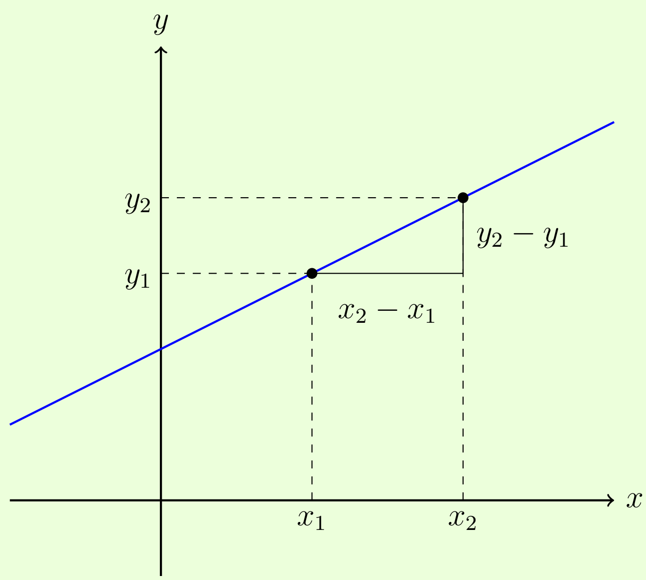
■

שיעור 2
פונקציות אלמנטריות בסיסיות

2.1 קו ישר

כלל 2.1 שיפוע של גרף של קו ישר

בהינתן גרף של קו ישר כמתואר בתרשים.



בכדי למצוא השיפוע, בוחרין כל שתי נקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) והשיפוע ניתן ע"י הנוסחה:

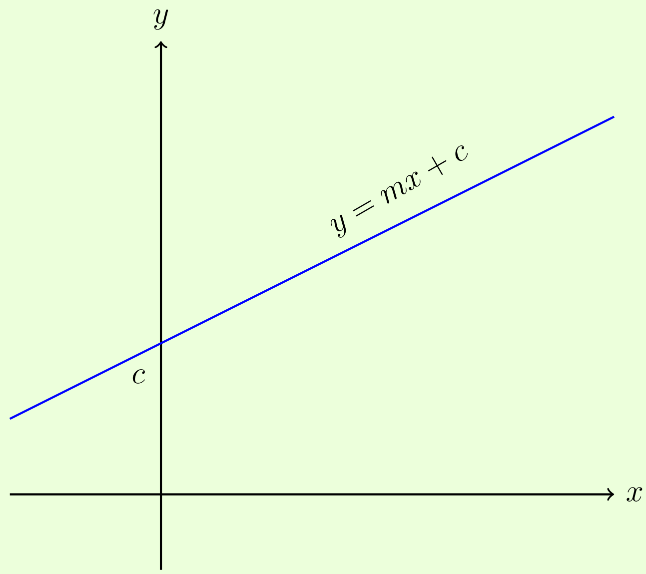
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \ .$$

כלל 2.2 גרף של קו ישר

הפונקציה הניתנת ע"י הנוסחה

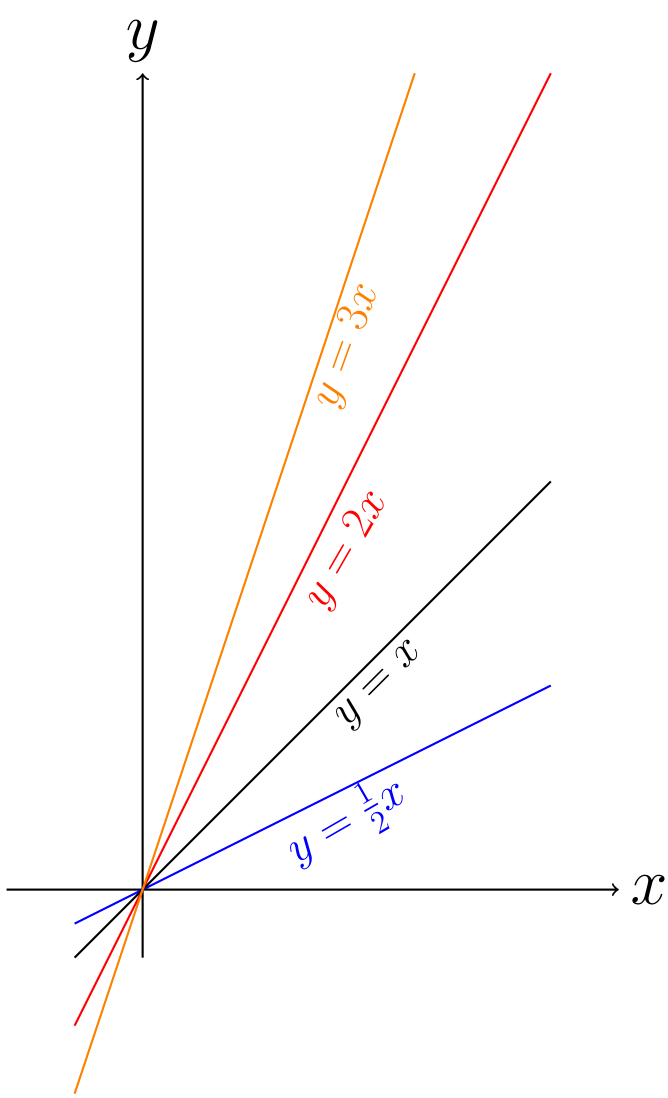
$$y = mx + c$$

הינה קו ישר עם שיפוע m שחותכת את ציר ה- y בנקודה $(0, c)$.

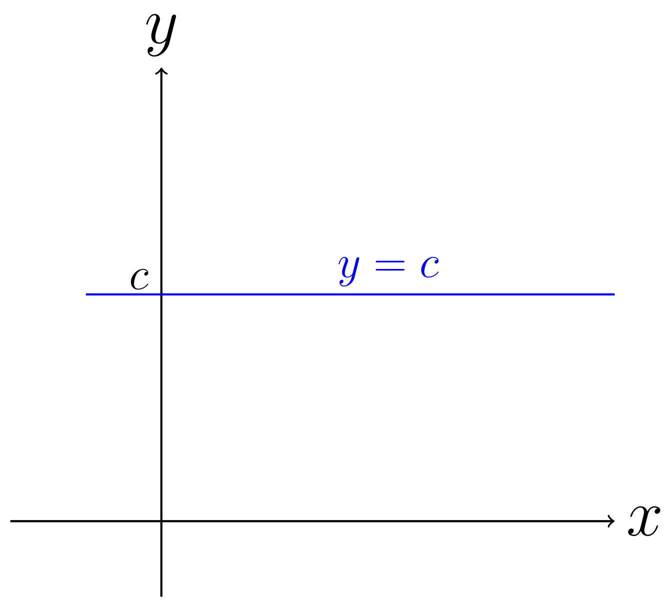


לכן ככל ש- m גדול יותר, השיפוע גבוה יותר (ולהפך).

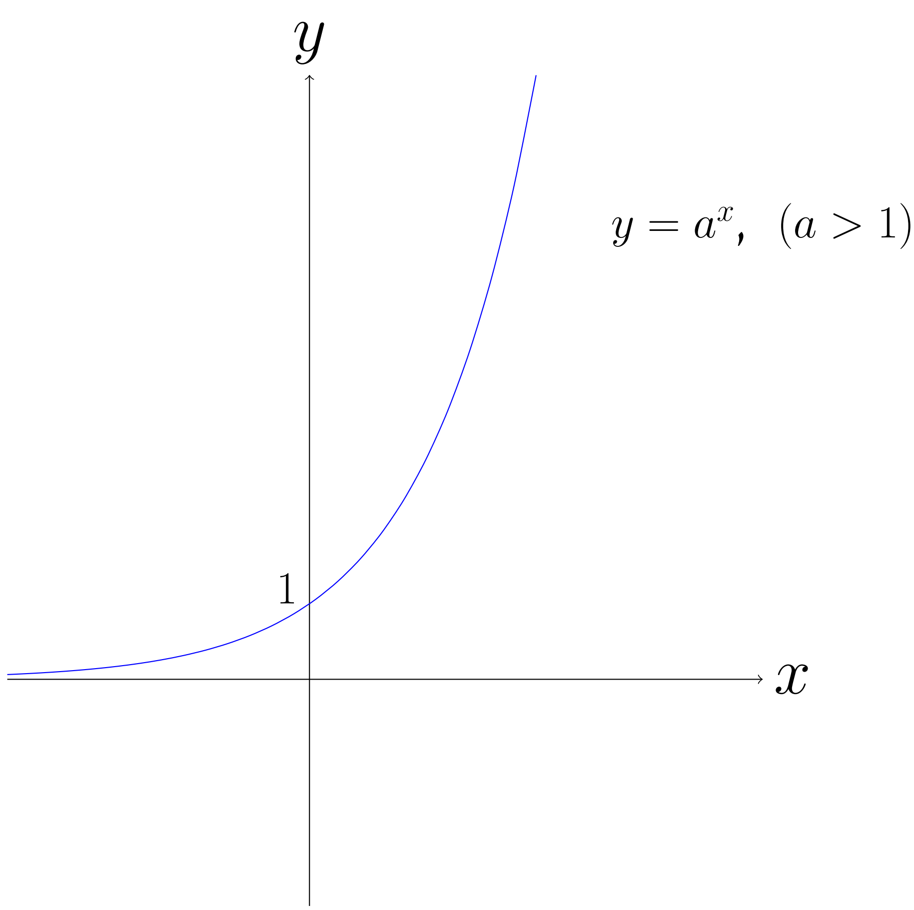
דוגמה 2.1

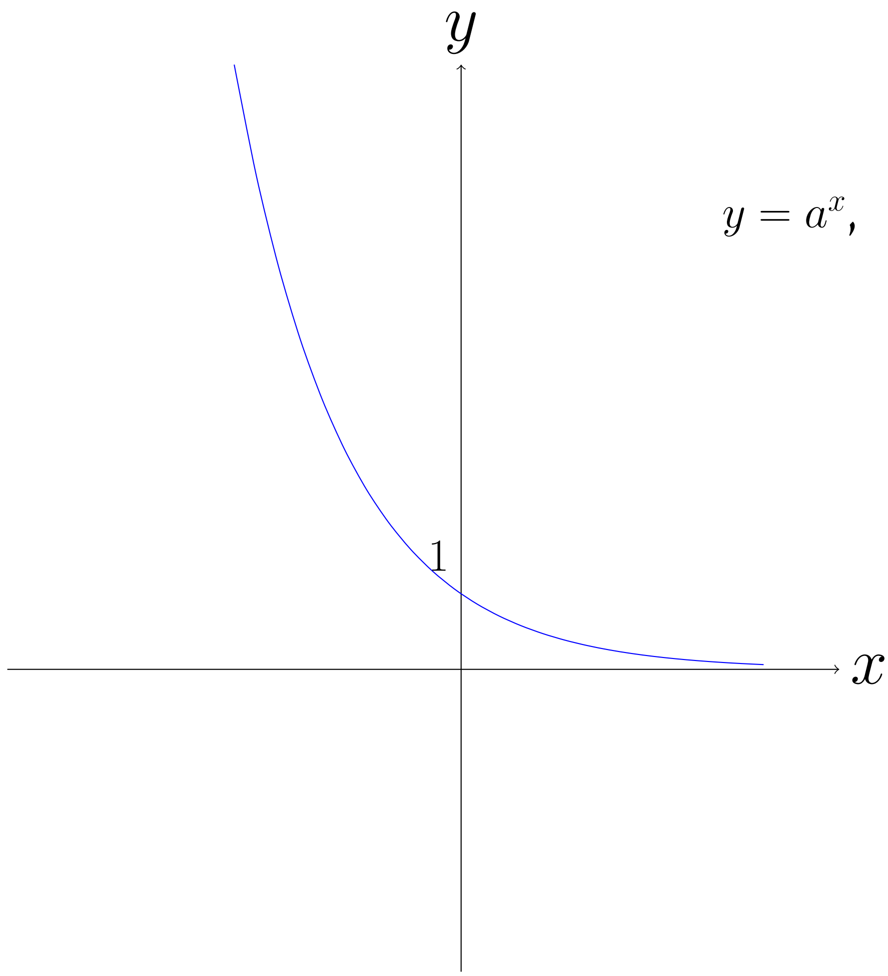


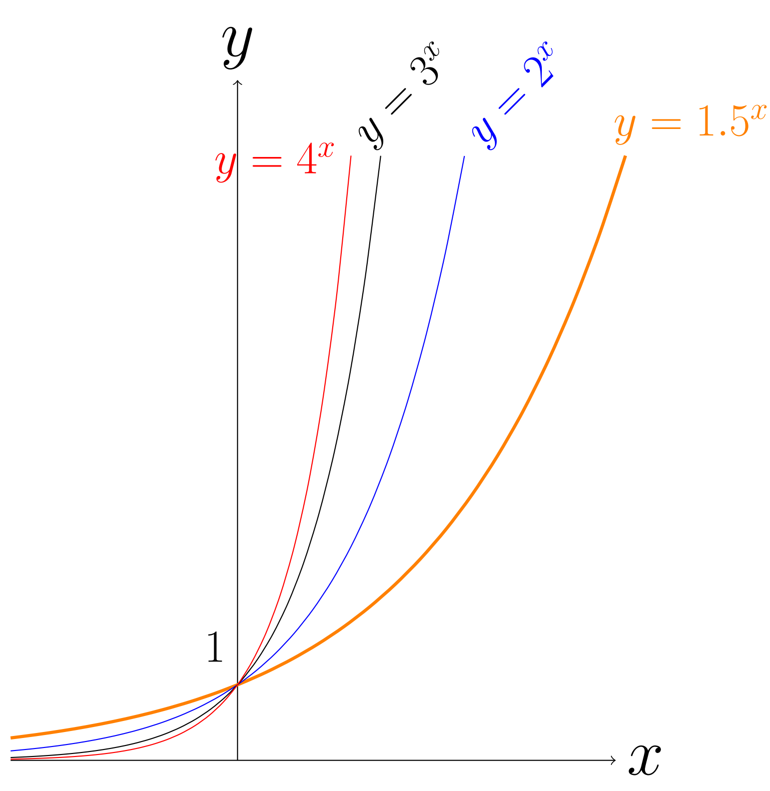
2.2 פונקציה קבועה

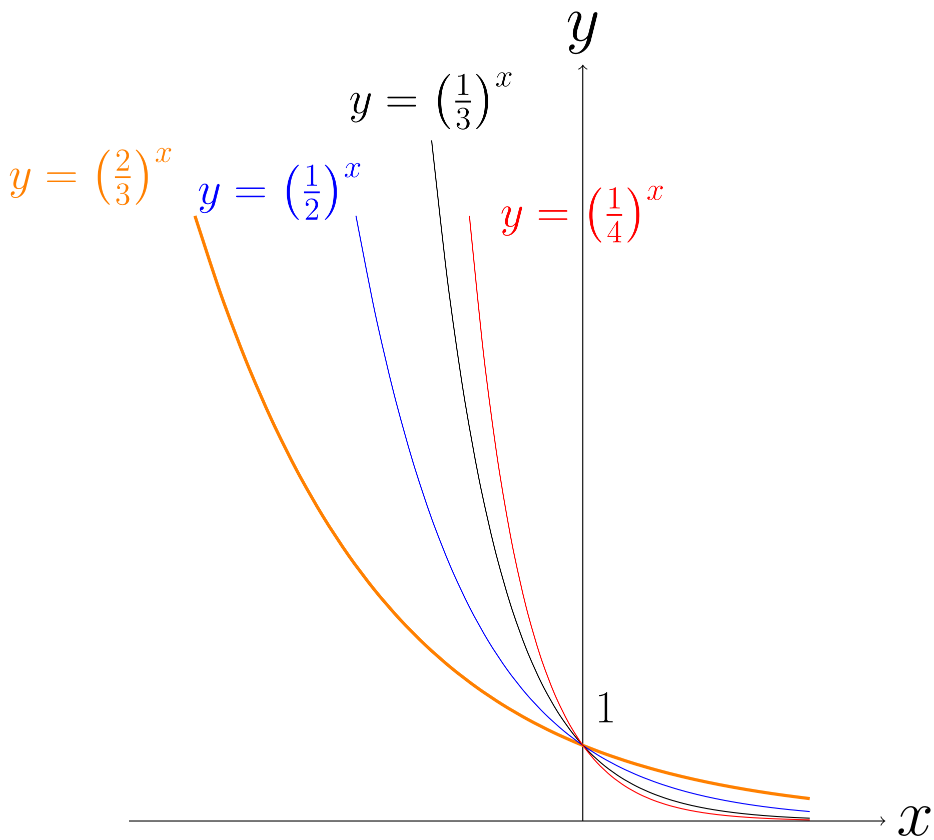


2.3 פונקציה מעריכית

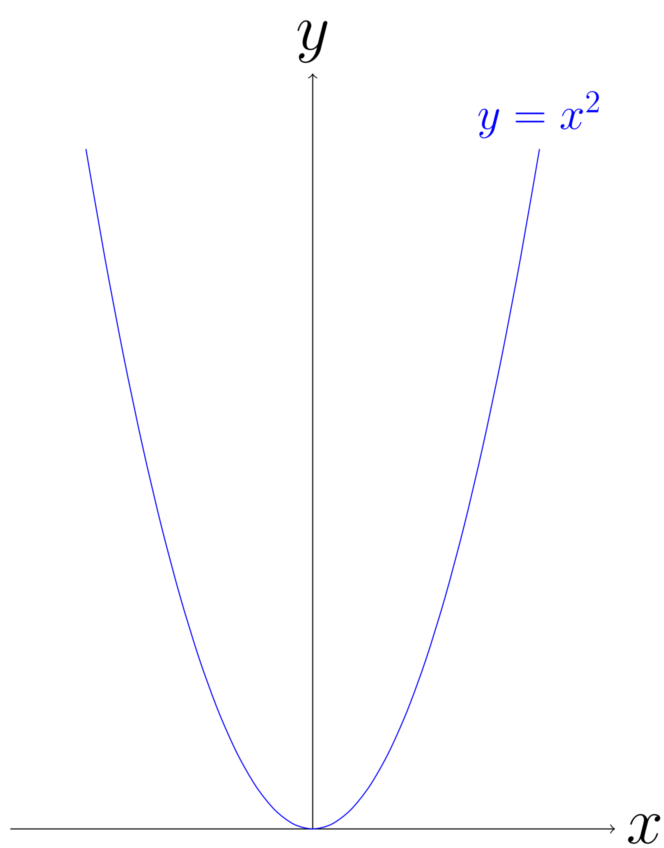


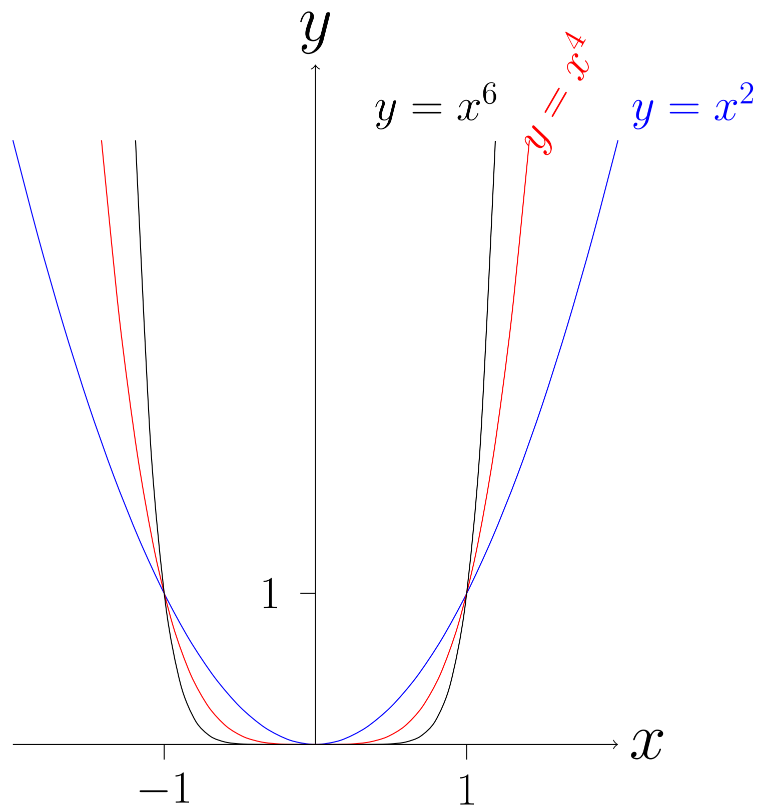

y
$y = a^x, \ (0 < a < 1)$
1
x

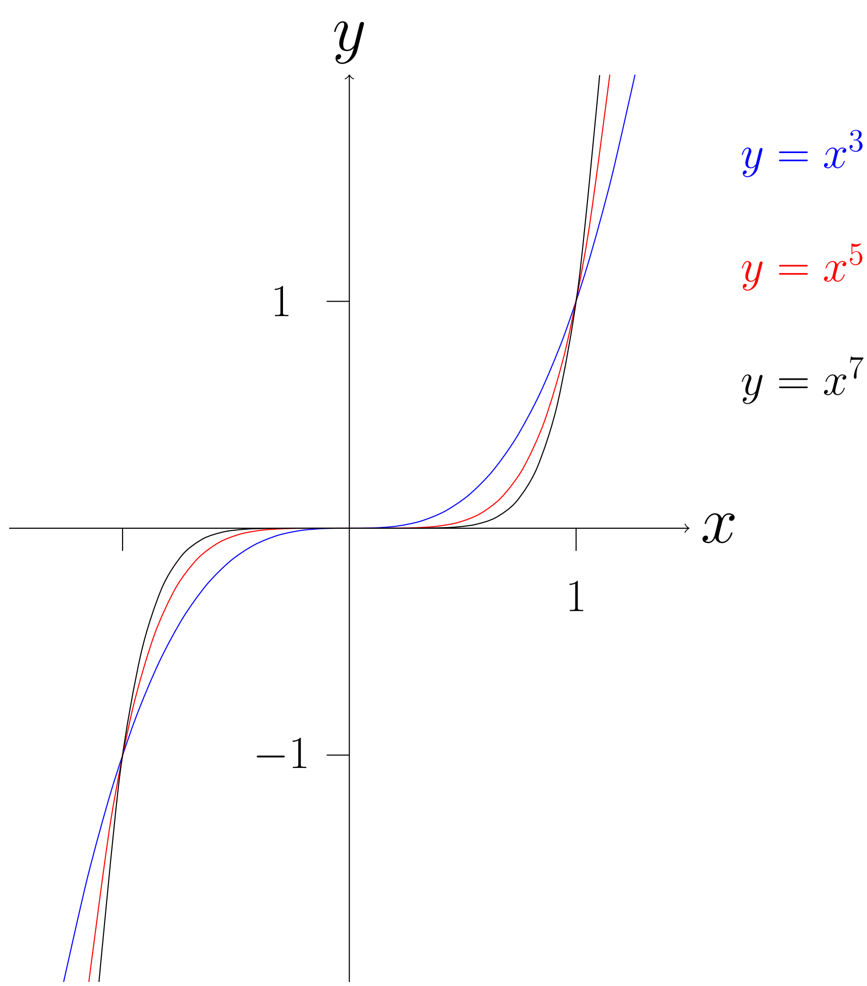

y
$y = 3^x$
$y = 2^x$
$y = 1.5^x$
$y = 4^x$
1
x

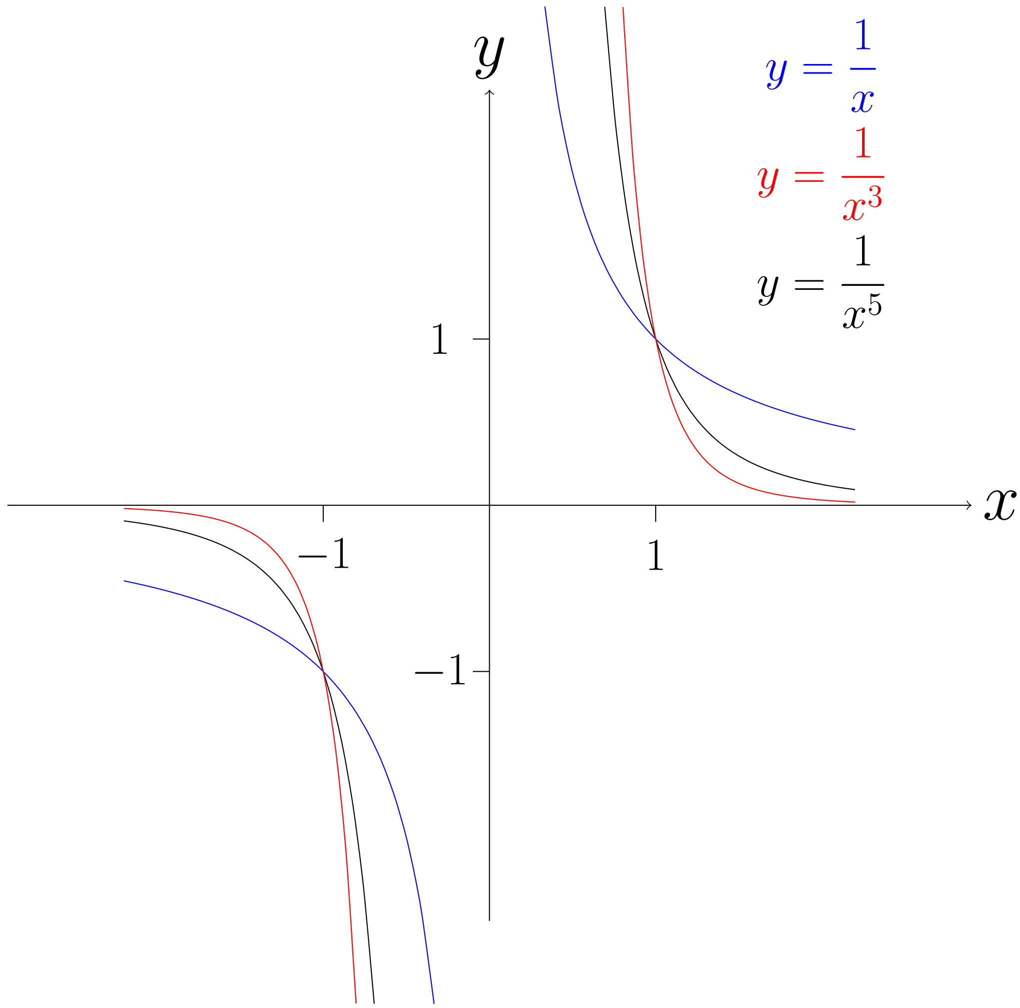


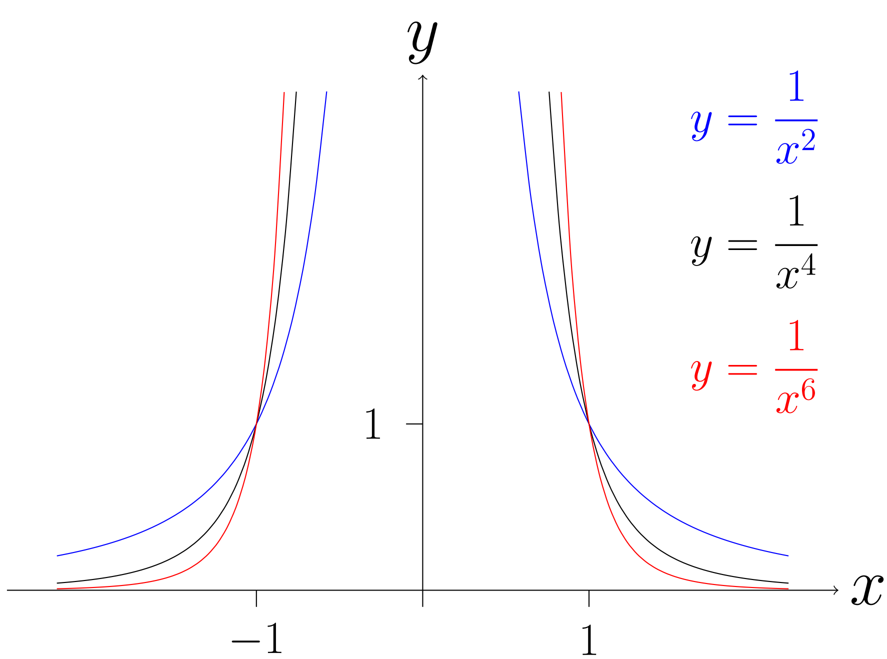
2.4 פונקציה חזקה

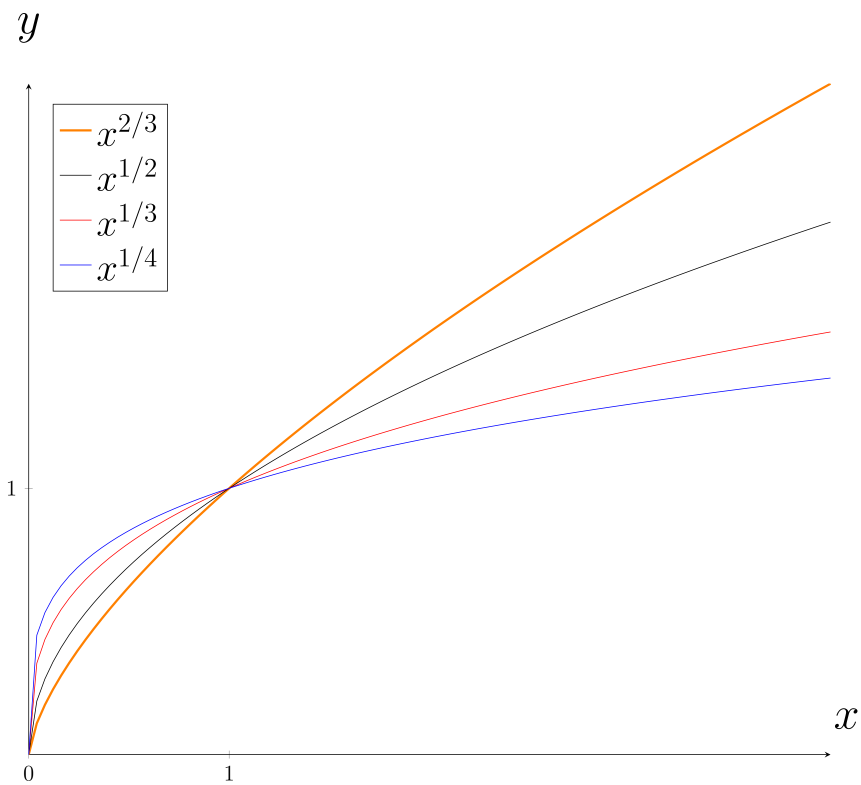



y
x
y = x^6
y = x^4
y = x^2
1
−1
1


y
x
y = x^3
y = x^5
y = x^7
1
1
−1


y
x
1
-1
1
-1
$y = \frac{1}{x}$
$y = \frac{1}{x^3}$
$y = \frac{1}{x^5}$


y
x
1
-1
1
$y = \frac{1}{x^2}$
$y = \frac{1}{x^4}$
$y = \frac{1}{x^6}$



2.5 פונקציה לוגריתמית

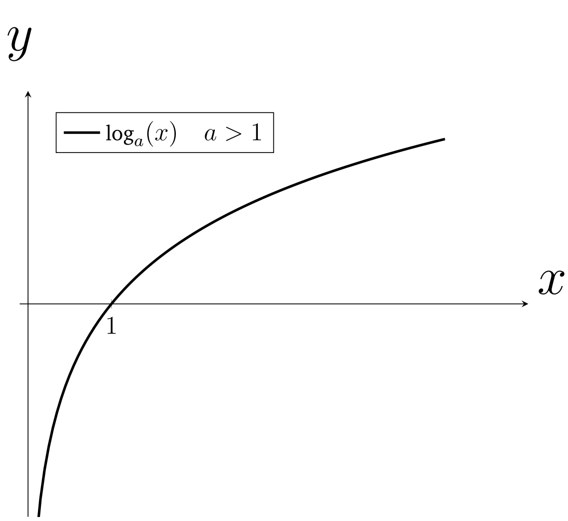
פונקציה לוגריתמית היא פונקציה הפוכה לפונקציה מעריכית. כלומר

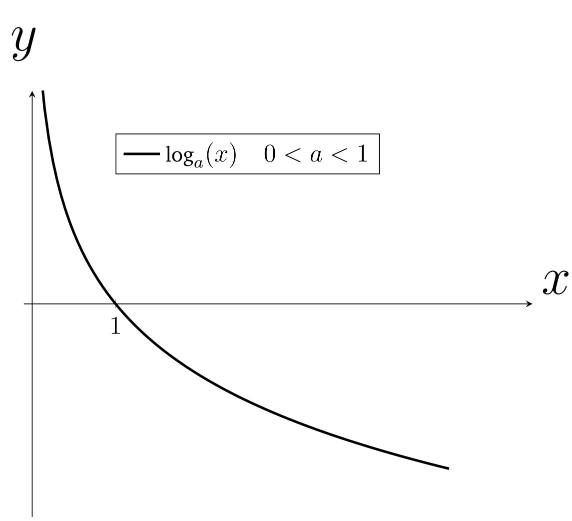
$$y = a^x$$

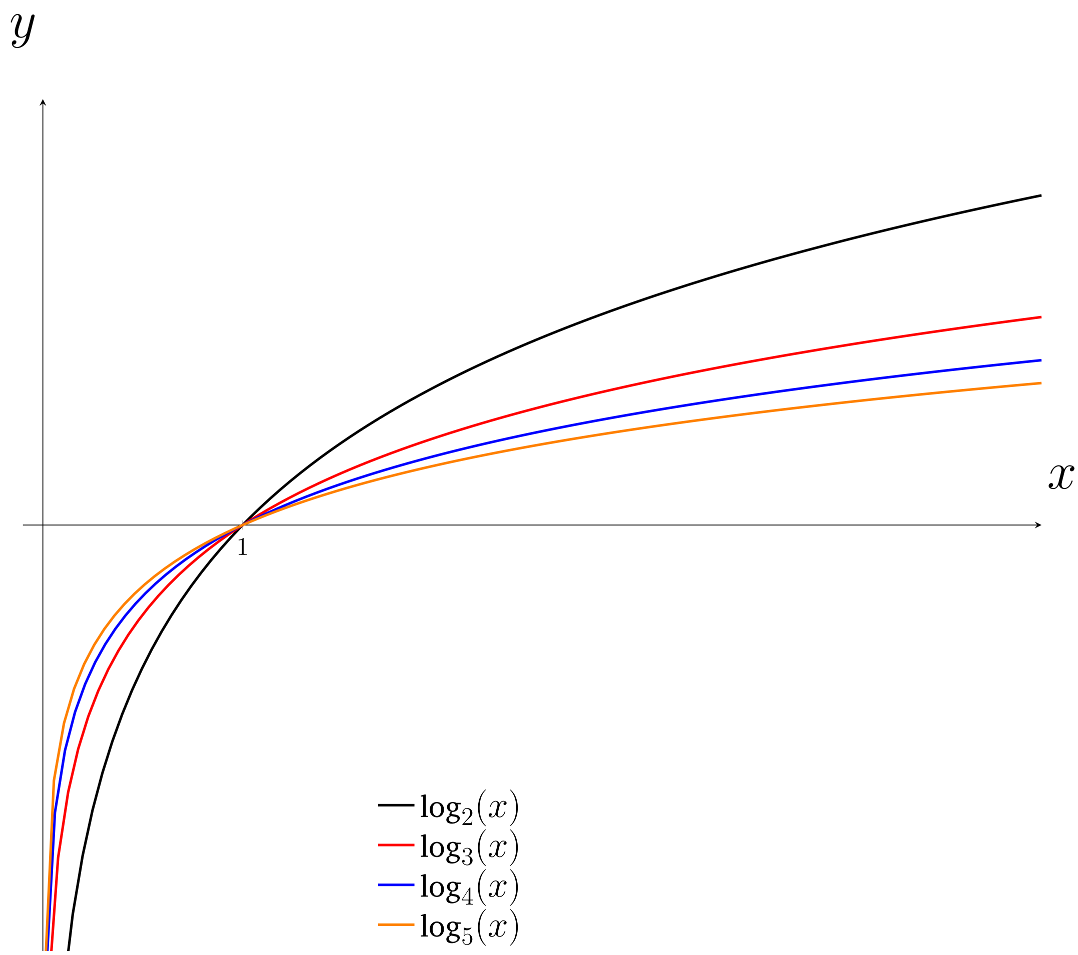
אם ורק אם $x = \log_a y$. מכאן נובע

$$a^{\log_a y} = y \ .$$

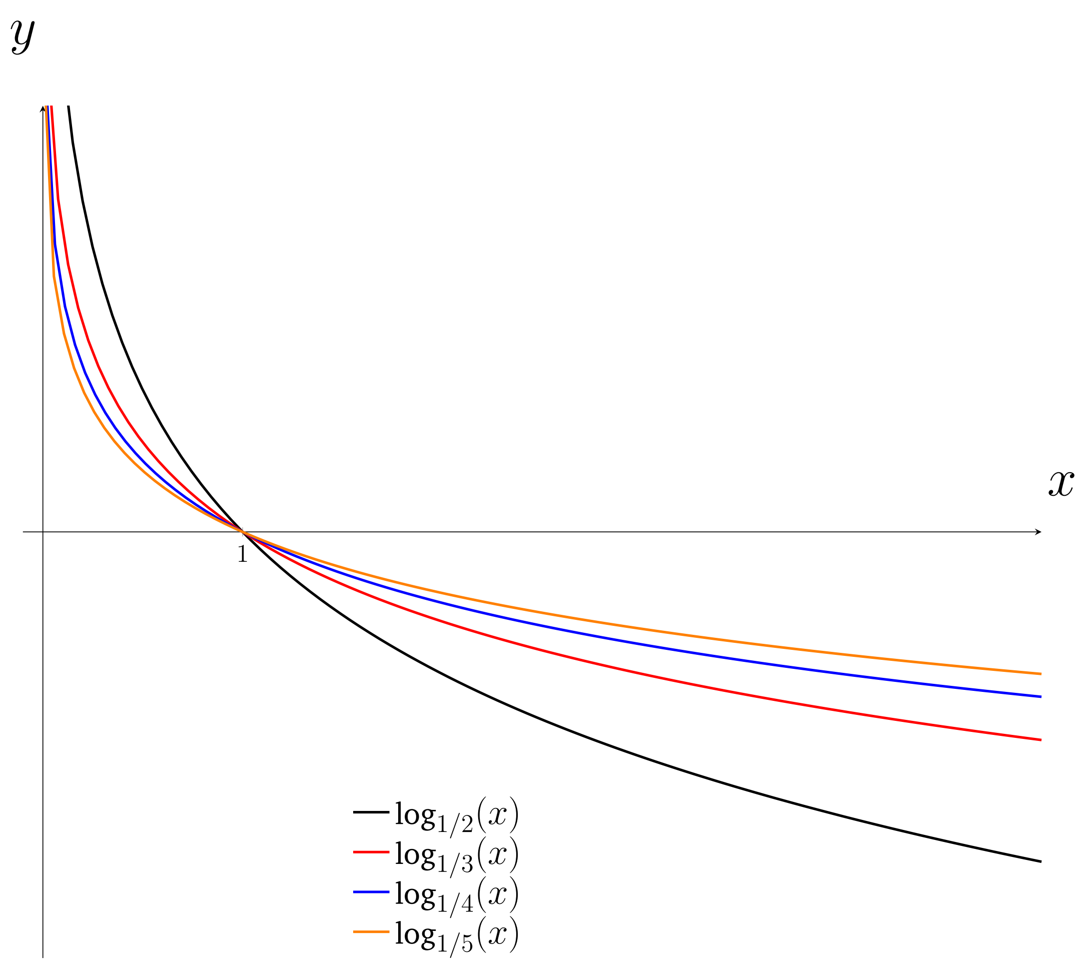
מכיוון שתחום הגדרה של $y = a^x$ הוא $\mathbb{R}$ והתמונה היא $y > 0$, תחום ההגדרה של פונקציה $y = \log_a x$ הוא $x > 0$.
קיימים שני סוגים של גרף לפונקציה $y = \log_a x$:







y
x
1
$\log_2(x)$
$\log_3(x)$
$\log_4(x)$
$\log_5(x)$



y
x
1
$\log_{1/2}(x)$
$\log_{1/3}(x)$
$\log_{1/4}(x)$
$\log_{1/5}(x)$

משפט 2.1 נוסחאות של $\log_a x$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

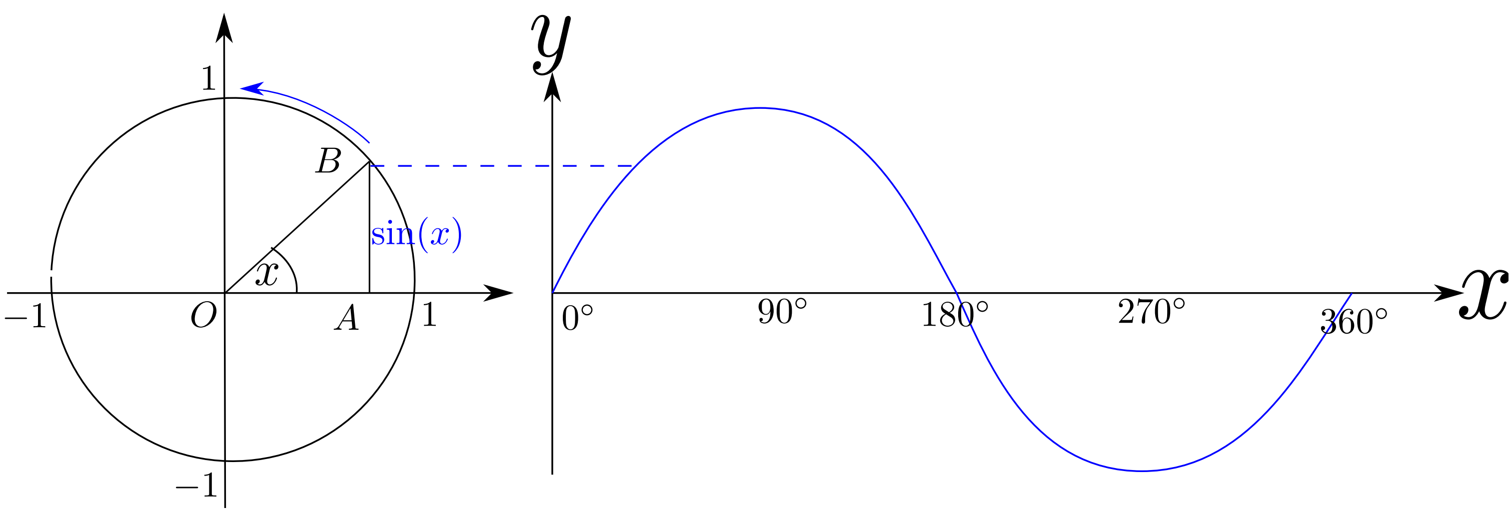
הגדרה 2.1 הלוגריתם הטבעי

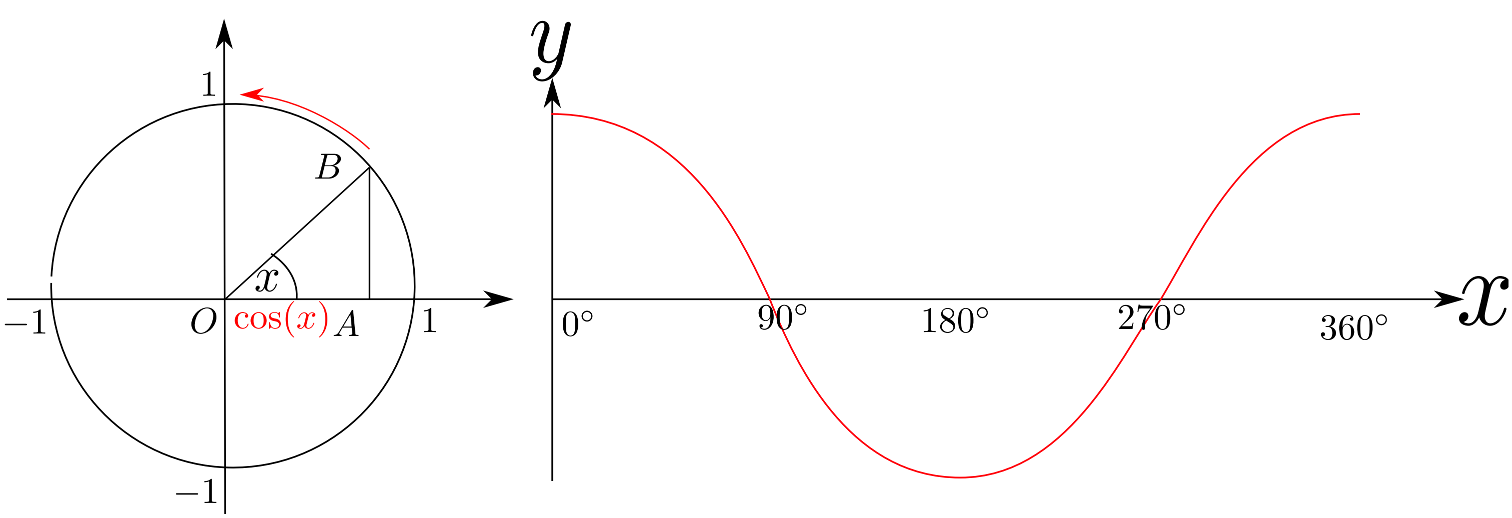
כאשר הבסיס של הלוגריתם הוא e מסמנים $\log_e x = \ln x$.

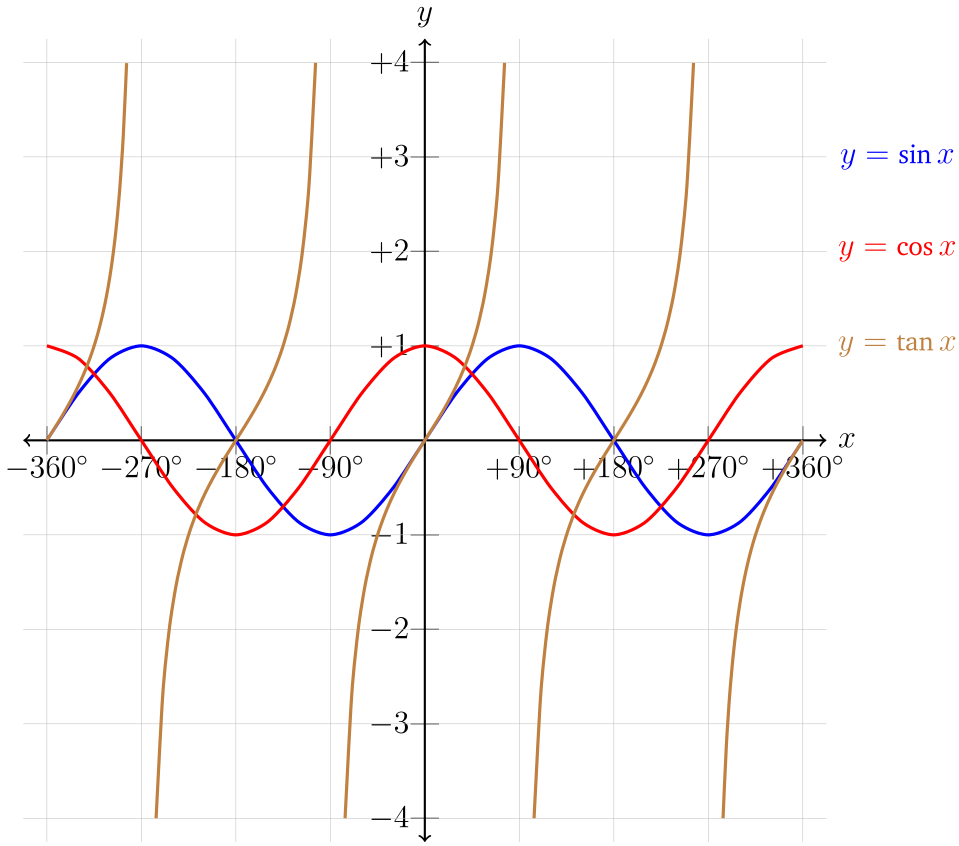
2.6 פונקציה טריגונומטריות

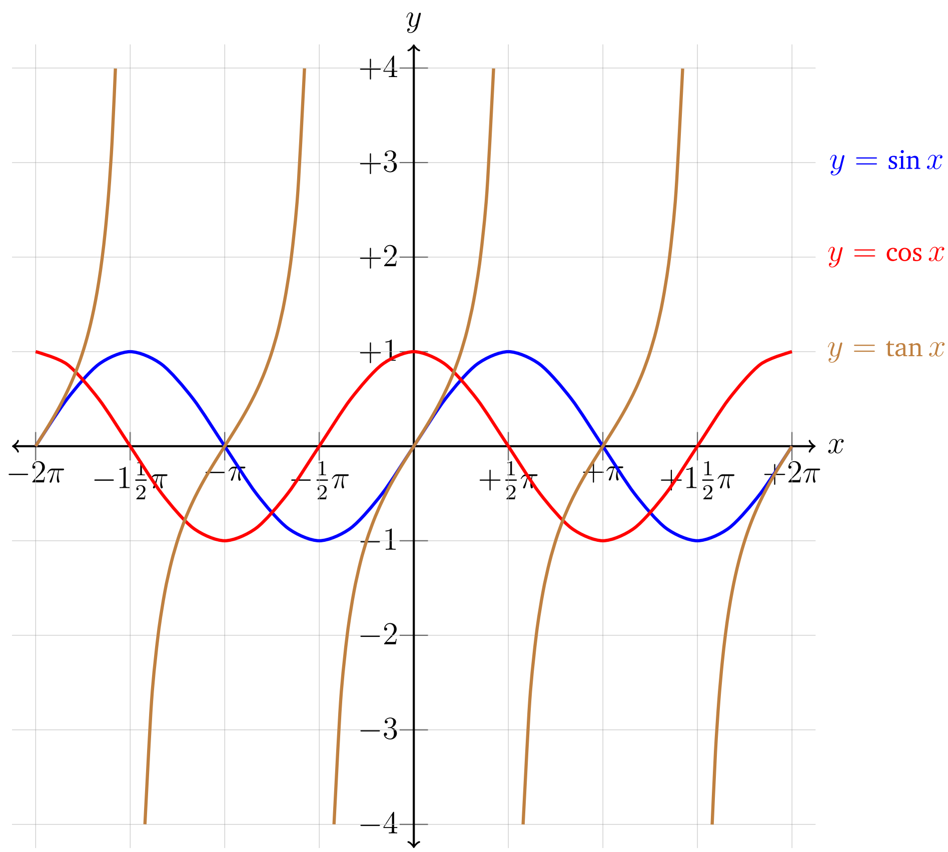
פונקציות הטריגונומטריות מוגדרות ע"י מעגל היחידה:

$$\sin x = AB \ , \qquad \cos x = OA \ , \qquad \tan x = \frac{AB}{OA} = \frac{\sin x}{\cos x} \ , \qquad \cot x = \frac{OA}{AB} = \frac{\cos x}{\sin x} \ .$$

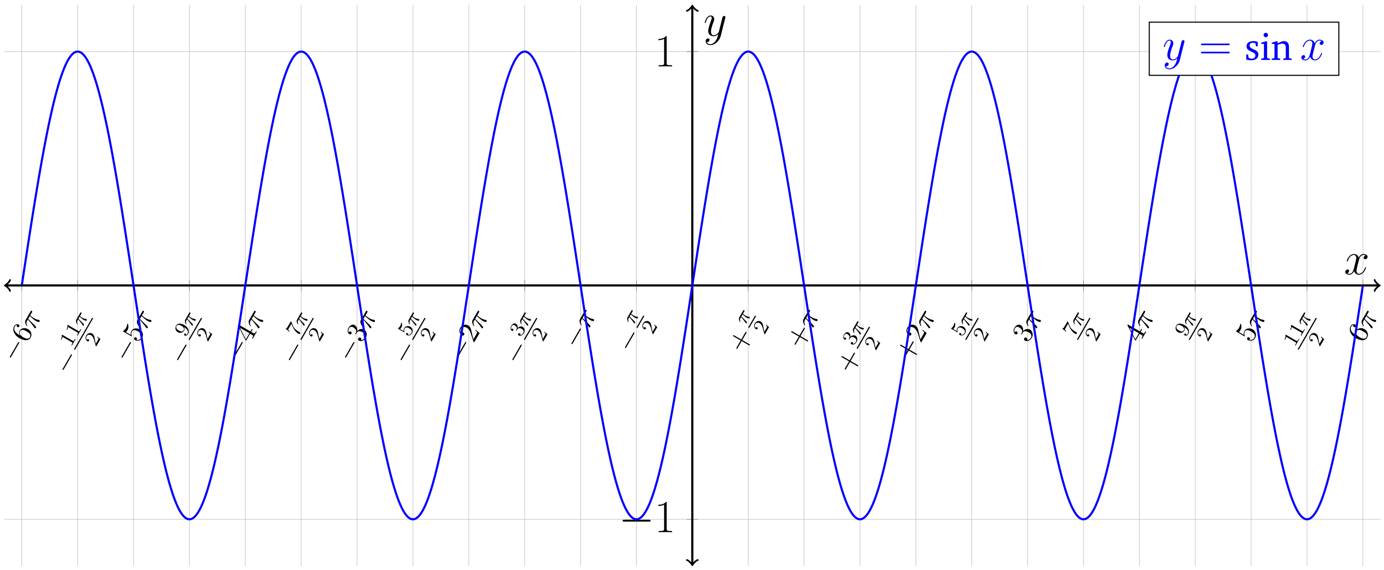





y
x
+4
+3
+2
+1
−1
−2
−3
−4
−360°
−270°
−180°
−90°
+90°
+180°
+270°
+360°
$y = \sin x$
$y = \cos x$
$y = \tan x$


y
x
+4
+3
+2
+1
−1
−2
−3
−4
-2π
$-1\frac{1}{2}\pi$
$-\pi$
$-\frac{1}{2}\pi$
$+\frac{1}{2}\pi$
$+\pi$
$+1\frac{1}{2}\pi$
$+2\pi$
$y = \sin x$
$y = \cos x$
$y = \tan x$

סינוס



כלל 2.3 ערכים חשובים של $\sin x$

ערכים עיקריים:

$$\sin(0) = 0 \ , \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \ , \qquad \sin(\pi) = 0 \ , \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 \ , \qquad \sin(2\pi) = 0 \ .$$

$\sin x$ פונקציה אי-זוגית:

$$\sin(-x) = -\sin(x) \ .$$

$\sin x$ פונקציה מחזורית עם מחזור $T = 2\pi$:

$$\sin(x + 2\pi n) = \sin(x) \ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

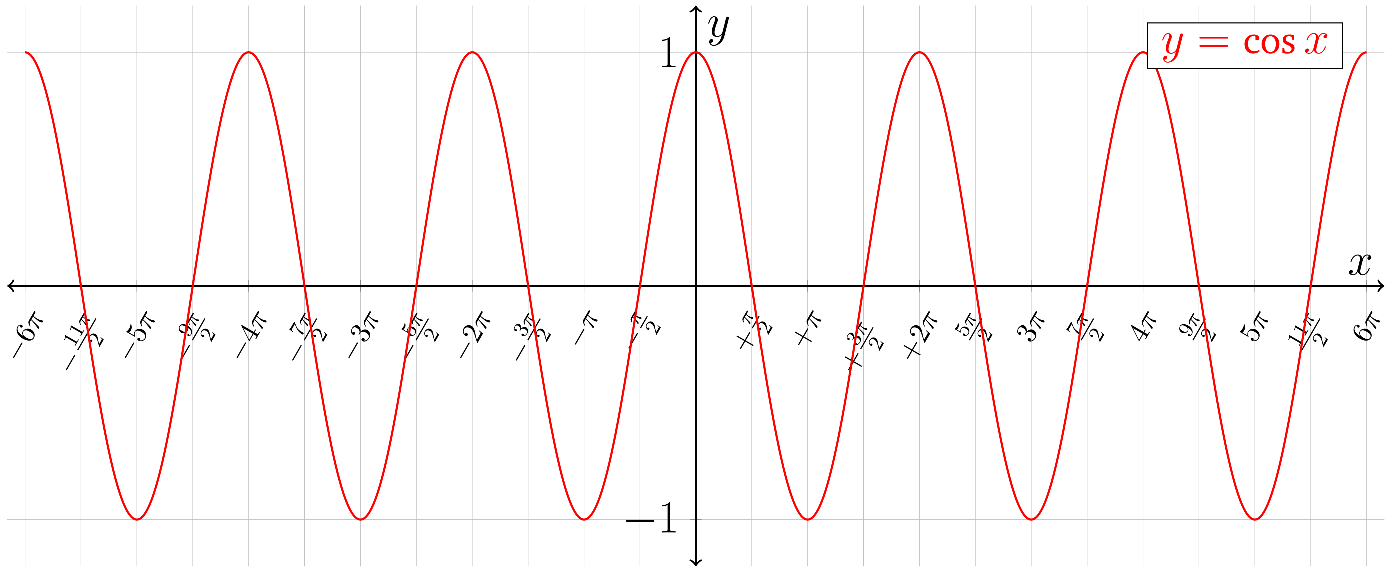
ערכים מחזוריים:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \ , \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1 \ , \quad \sin(n\pi) = 0 \ , \quad \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n \ ,$$

כאשר $n \in \mathbb{Z}$ מספר שלם. ערכים שיקופיים:

$$\sin(\pi - x) = \sin x \ , \qquad \sin(x - \pi) = -\sin x \qquad \sin(x + \pi) = -\sin(x) \ .$$

קוסינוס



כלל 2.4 ערכים חשובים של $\cos x$

ערכים עיקריים:

$$\cos(0) = 1 \ , \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \ , \qquad \cos\left(\pi\right) = -1 \ , \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \ , \qquad \cos(2\pi) = 0 \ .$$

$\cos x$ פונקציה זוגית:

$$\cos(-x) = \cos(x) \ .$$

$\cos x$ פונקציה מחזורית עם מחזור $T = 2\pi$:

$$\cos(x + 2\pi n) = \cos(x) \ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

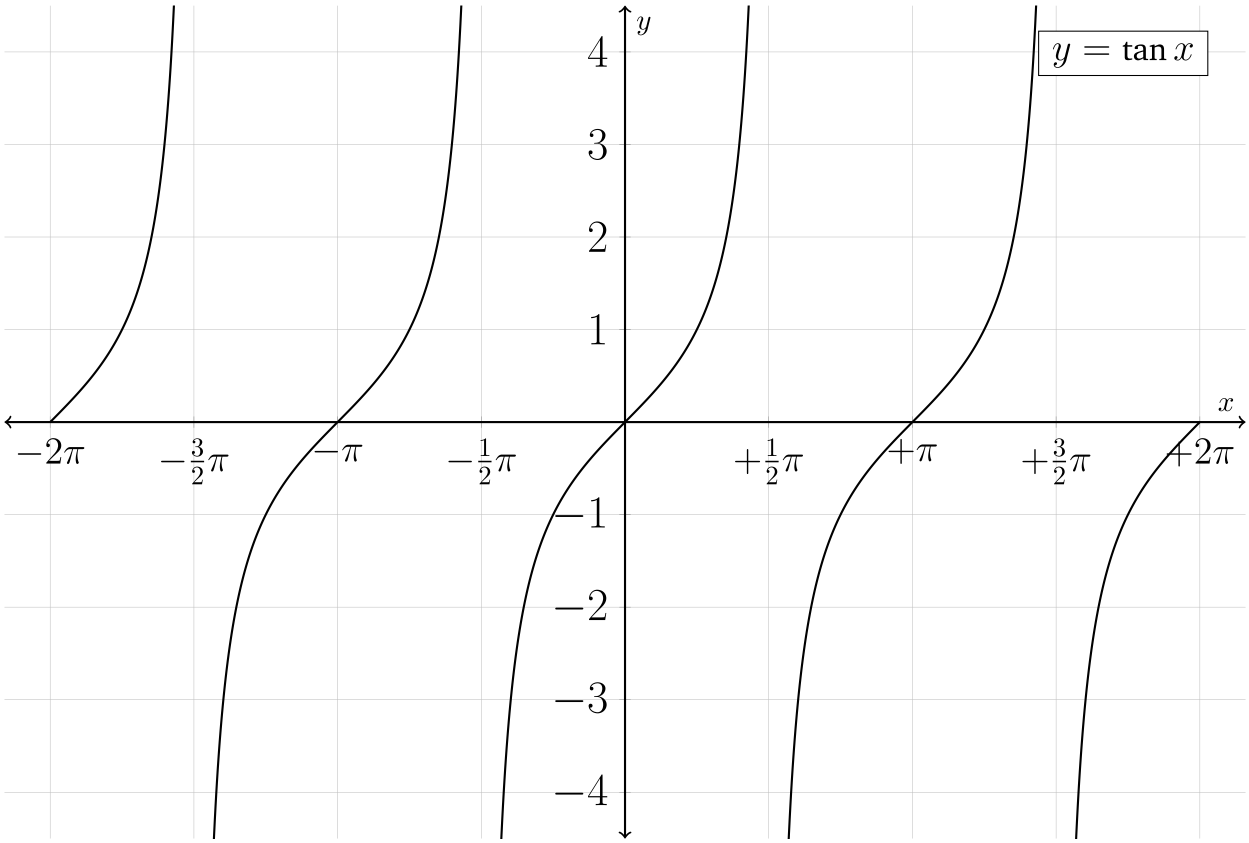
ערכים מחזוריים:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0 \ , \qquad \cos\left(2\pi n\right) = 1 \ , \qquad \cos(\pi + 2\pi n) = -1 \ , \qquad \cos(n\pi) = (-1)^n \ , \qquad n \in \mathbb{Z} \ .$$

ערכים שיקופיים:

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \ , \qquad \cos(x - \pi) = -\cos x \qquad \cos(x + \pi) = -\cos(x) \ .$$

טנגנט



כלל 2.5 ערכים חשבונים של $\tan x$

תחום הגדרה:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \ , \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ .$$

ערכים עיקריים:

$$\tan(0) = 0 \ , \qquad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \ , \qquad \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \ , \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \to \infty \ , \qquad \tan\left(-\frac{\pi}{2}\right) \to -\infty \ .$$

$\tan x$ פונקציה אי-זוגית:

$$\tan(-x) = -\tan(x) \ .$$

$\tan x$ פונקציה מחזורית עם מחזור $T = \pi$:

$$\tan(x + \pi n) = \tan(x) \ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

ערכים מחזוריים:

$$\tan\left(\frac{|n|\pi}{2}\right) \to \infty \ , \qquad \tan\left(-\frac{|n|\pi}{2}\right) \to -\infty \ , \qquad \tan(n\pi) = 0 \ , \qquad n \in \mathbb{Z} \ .$$

ערכים שיקופיים:

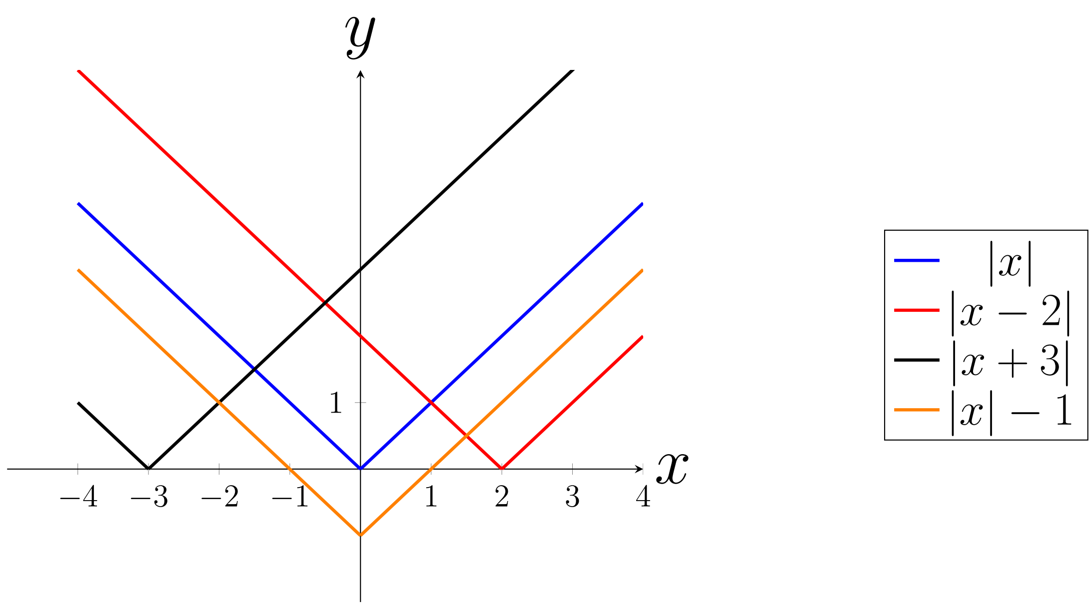
$$\tan(\pi - x) = -\tan x \ , \qquad \tan(x - \pi) = \tan x \qquad \tan(x + \pi) = \tan(x) \ .$$

2.7 פונקצית ערך מוחלט

הגדרה 2.2 פונקצית ערך מוחלט

$$|x| = \begin{cases} x & \text{אם } x \geq 0 \\ -x & \text{אם } x < 0 \ . \end{cases}$$

דוגמה 2.2



2.8 פונקציית מקסימום ופונקציית מינימום

הגדרה 2.3 פונקצית מקסימום

$$\max(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 & \text{אם } x_1 \geq x_2 \\ x_2 & \text{אם } x_2 \geq x_1 \ . \end{cases}$$

לדוגמה,

$$\max(1,2) = 2 \ , \quad \max(3,1) = 3 \ , \quad \max(100,-2) = 100 \ , \quad \max(2.1, 2.05) = 2.1, \quad \max(10,10) = 10 \ .$$

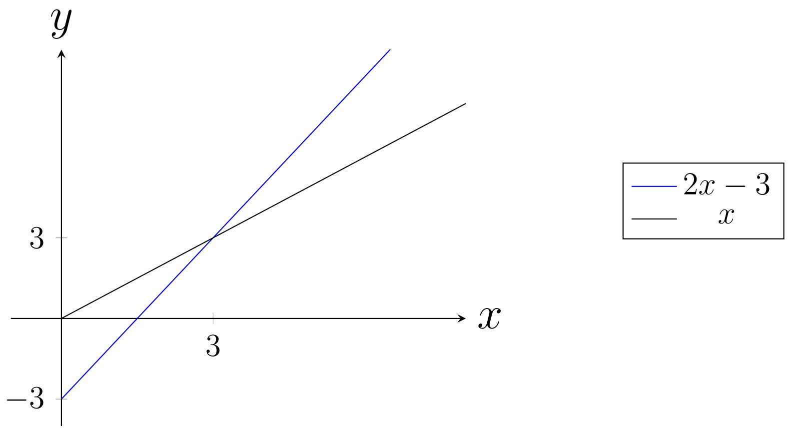
הגדרה 2.4 פונקצית מינימום

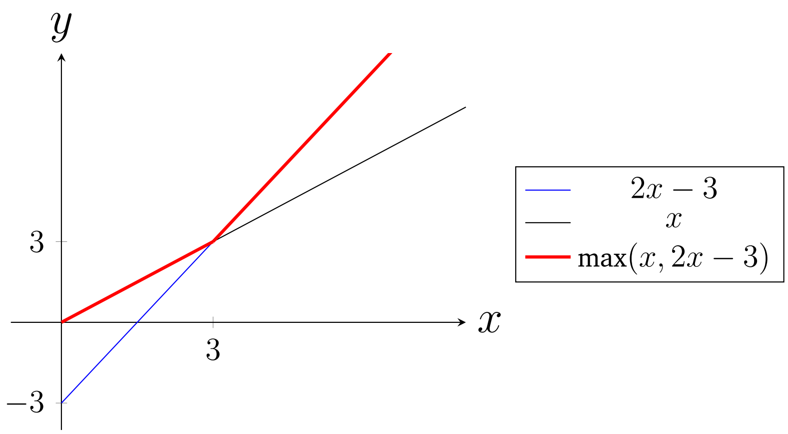
$$\min(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 & \text{אם } x_1 \leq x_2 \\ x_2 & \text{אם } x_2 \leq x_1 \ . \end{cases}$$

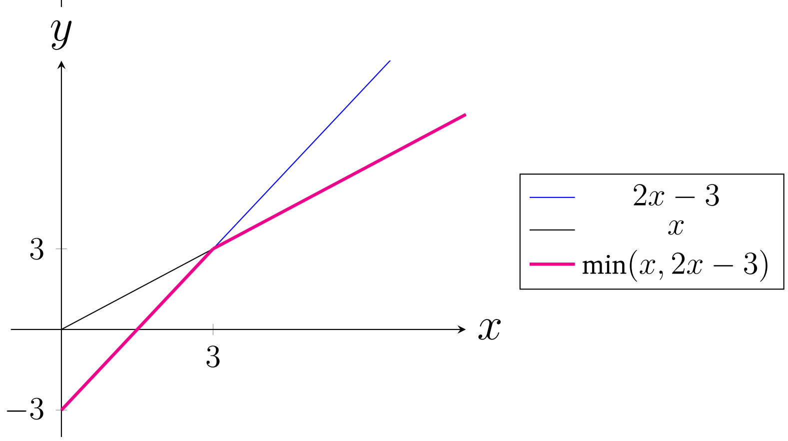
לדוגמה

$$\min(1,2) = 1 \ , \quad \min(3,1) = 1 \ , \quad \min(100,-2) = -2 \ , \quad \min(2.1, 2.05) = 2.05, \quad \min(10,10) = 10 \ .$$

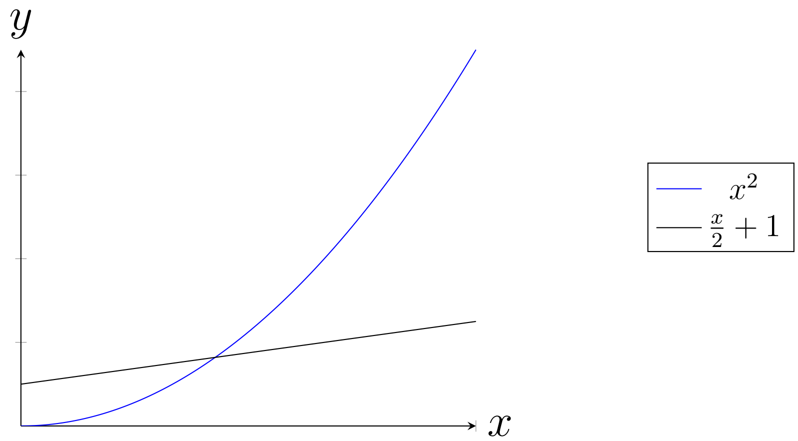
דוגמה 2.3

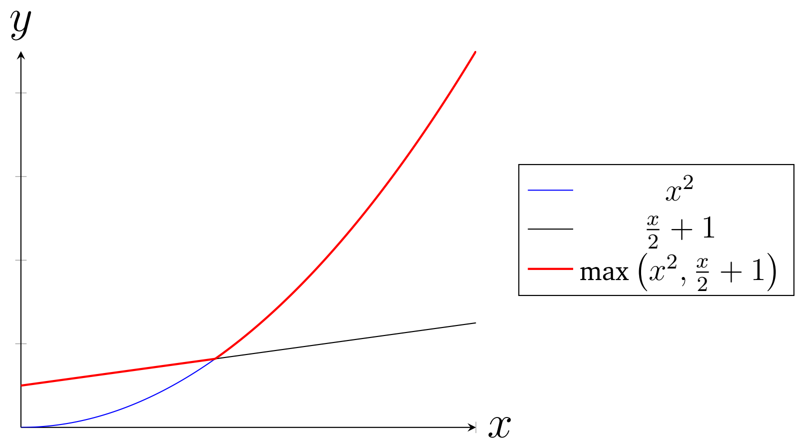


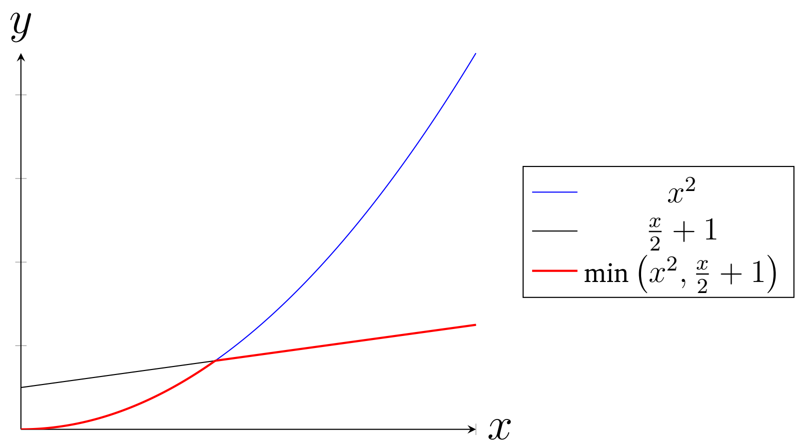




דוגמה 2.4







2.9 פונקציות רציונליות

הגדרה 2.5 פונקציות רציונליות

פונקציה מצורה
$$y(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} ,$$
כאשר $P(x)$ ו- $Q(x)$ פולינונים, נקראת **פונקציה רציונלית**.

נסמן הסדר של $P(x)$ ב- $\deg(P)$, והסדר של $Q(x)$ ב- $\deg(Q)$.

א) אם $\deg(P) < \deg(Q)$ אז אומרים כי $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **פונקצית רציונלית אמיתית**.

ב) אם $\deg(P) \geq \deg(Q)$ אז אומרים כי $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **פונקצית רציונלית לא אמיתית**.

משפט 2.2 תכונות של פונקציה רציונלית

תהי $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ פונקציה רציונלית.

1) אם $\deg(P) > \deg(Q)$, אז $f(x)$ ישאף לאינסוף כאשר x שואף לאינסוף.

2) אם $\deg(P) = \deg(Q)$, אז תהיה אסימפטוטה אופקית ב- $x \to \infty$ וב- $x \to -\infty$.

3) אם $\deg(P) < \deg(Q)$ אז הציר ה- x הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה ב- $x \to \infty$ וב- $x \to -\infty$.

4) במקרה שאין ל- $Q(x)$ שורשים אז הגרף הוא קו רציף.

5) אם יש ל- $Q(x)$ שורשים, תהיה אסימפטוטה אנכית בכל ערך של x השווה לאחד השורשים של Q. המתאימות להשורשים.

דוגמה 2.5

חשבו את $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ כאשר $g(x) = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 1$ ו- $f(x) = x^2 - 4x + 7$.

פתרון:

$$f(x)\overline{)g(x)} \qquad = \qquad x^2-4x+7\overline{)2x^4-3x^3+7x^2-4x+1}$$

<u>שלב 1</u>

$$\begin{array}{r} 2x^2 \\ x^2-4x+7\overline{)2x^4-3x^3+7x^2-4x+1} \end{array}$$

<u>שלב 2</u>

$$\begin{array}{r} 2x^2 \\ x^2-4x+7\overline{)2x^4-3x^3+\ \ 7x^2-4x+1} \\ 2x^4-8x^3+14x^2 \qquad\quad \end{array}$$

<u>שלב 3</u>

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x^2 \\
x^2-4x+7 \big) & \overline{2x^4-3x^3+7x^2-4x+1} \\
 & \underline{2x^4-8x^3+14x^2} \\
 & \qquad 5x^3-7x^2-4x+1
\end{array}
$$

<u>שלב 1'</u>

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x^2+5x \\
x^2-4x+7 \big) & \overline{2x^4-3x^3+7x^2-4x+1} \\
 & \underline{2x^4-8x^3+14x^2} \\
 & \qquad 5x^3-7x^2-4x+1
\end{array}
$$

<u>שלב 2'</u>

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x^2+5x \\
x^2-4x+7 \big) & \overline{2x^4-3x^3+7x^2-4x+1} \\
 & \underline{2x^4-8x^3+14x^2} \\
 & \qquad 5x^3-7x^2-4x+1 \\
 & \qquad 5x^3-20x^2+35x
\end{array}
$$

<u>שלב 3'</u>

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x^2+5x \\
x^2-4x+7 \big) & \overline{2x^4-3x^3+7x^2-4x+1} \\
 & \underline{2x^4-8x^3+14x^2} \\
 & \qquad 5x^3-7x^2-4x+1 \\
 & \qquad \underline{5x^3-20x^2+35x} \\
 & \qquad\qquad 13x^2-39x+1
\end{array}
$$

<u>שלב 1"</u>

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x^2+5x+13 \\
x^2-4x+7 \big) & \overline{2x^4-3x^3+7x^2-4x+1} \\
 & \underline{2x^4-8x^3+14x^2} \\
 & \qquad 5x^3-7x^2-4x+1 \\
 & \qquad \underline{5x^3-20x^2+35x} \\
 & \qquad\qquad 13x^2-39x+1
\end{array}
$$

<u>שלב 2"</u>

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 5x + 13 \\ \hline
x^2-4x+7 & 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 1 \\
 & \underline{2x^4 - 8x^3 + 14x^2} \\
 & 5x^3 - 7x^2 - 4x + 1 \\
 & \underline{5x^3 - 20x^2 + 35x} \\
 & 13x^2 - 39x + 1 \\
 & 13x^2 - 52x + 91
\end{array}
$$

<u>שלב 3"</u>

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 5x + 13 \\ \hline
x^2-4x+7 & 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 1 \\
 & \underline{2x^4 - 8x^3 + 14x^2} \\
 & 5x^3 - 7x^2 - 4x + 1 \\
 & \underline{5x^3 - 20x^2 + 35x} \\
 & 13x^2 - 39x + 1 \\
 & \underline{13x^2 - 52x + 91} \\
 & 13x - 90
\end{array}
$$

<u>שלב 4</u> deg של השארית פחות מ deg של $f(x)$ אז התהליך מסתיים כאן.

<u>שלב 5</u> התשובה המתקבלת היא

$$\frac{g(x)}{f(x)} = 2x^2 + 5x + 13 + \frac{13x-90}{f(x)}\ .$$

■

דוגמה 2.6

מהי השארית לאחר לחלק $g(x) = x^4 - 4x^3 + 5x + 7$ ב- $(x-4)$?

פתרון:
השארית שווה ל- $g(4) = 27$.
שים לב, קל לבדוק כי ע"י חילוק ארוך:

$$\frac{x^4 - 4x^3 + 5x + 7}{x-4} = x^3 + 5 + \frac{27}{x-4}\ ,$$

כלומר השארית היא 27.

■

דוגמה 2.7

פרקו את הפולינום $g(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$ לגורמים ליניאריים.

פתרון:

נבדוק אם כל אחת מהגורמים של האיבר הקבוע, 3, הוא שורש של הפולינום. כלומר נבדוק אם כל אחת מ $1, 3, -1, -3$ הוא שורש. קל לראות כי 3 הוא כן שורש, קרי $g(3) = 3^3 - 3^2 - 5\cdot 3 - 3 = 27 - 9 - 15 - 3 = 0$ ולכן $x-3$ הוא אחת מן הגורמים. ע"י חילוק ארוך נקבל

$$\frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x-3} = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

ולכן

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x-3)(x+1)^2 \ .$$

שים לב, במקרה זה $x=-1$ הוא **שורש מרובה** (ראו הגדרה 2.6). ■

משפט 2.3 גרף של פולינום

יהי $P(x)$ פולינום.

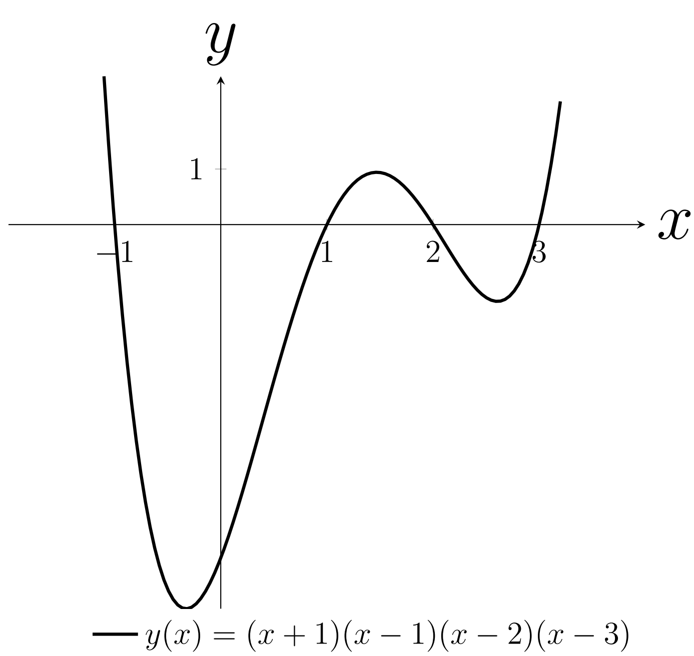
א) בשורש בעל ריבוי אי-זוגי, הגרף חותך את ציר ה- x, והפונקציה $P(x)$ מחליפה סימנה בנקודה זו.

ב) בשורש בעל ריבוי זוגי, הגרף רק משיק לציר ה- x, והפונקציה $P(x)$ לא משנה סימן בנקודה זו.

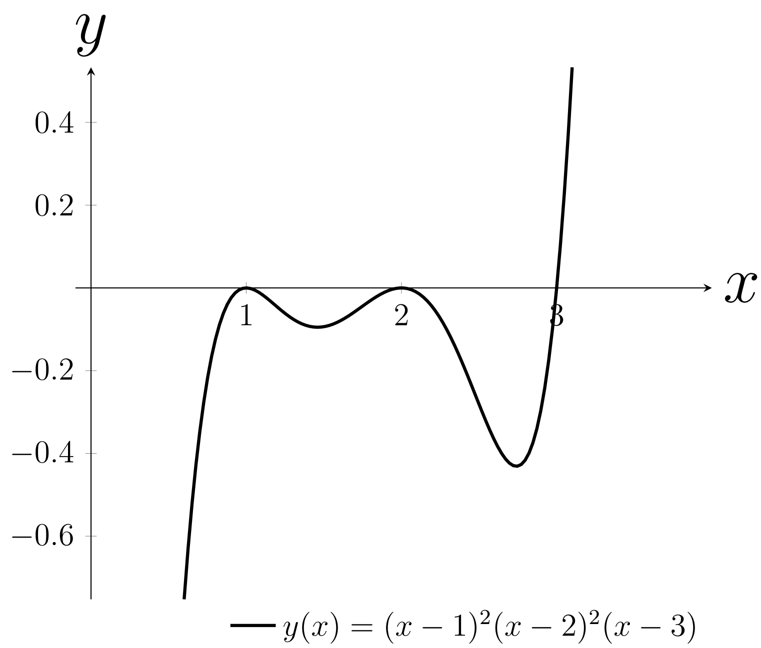
ג) שורש x_i בעל ריבוי m_i זוגי הוא תמיד נקודת קיצון של רב-האיבר.

ד) במידה שריבוי השורש x_i הוא אי-זוגי וגדול מ- 1, גרף של רב-איבר גם חותך וגם משיק את ציר ה- x בנקודה x_i. במקרה זה הנקודה $x = x_i$ היא נקודת **פיתול** של הגרף.

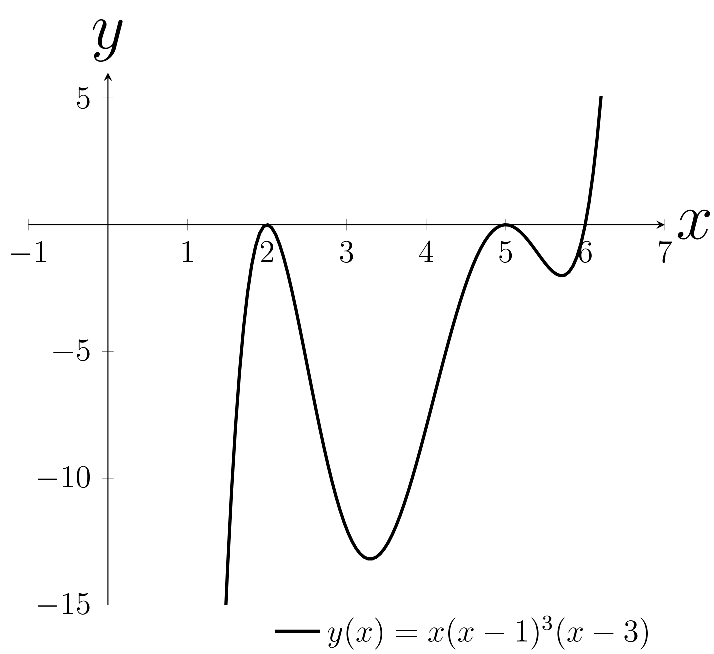
דוגמה 2.8



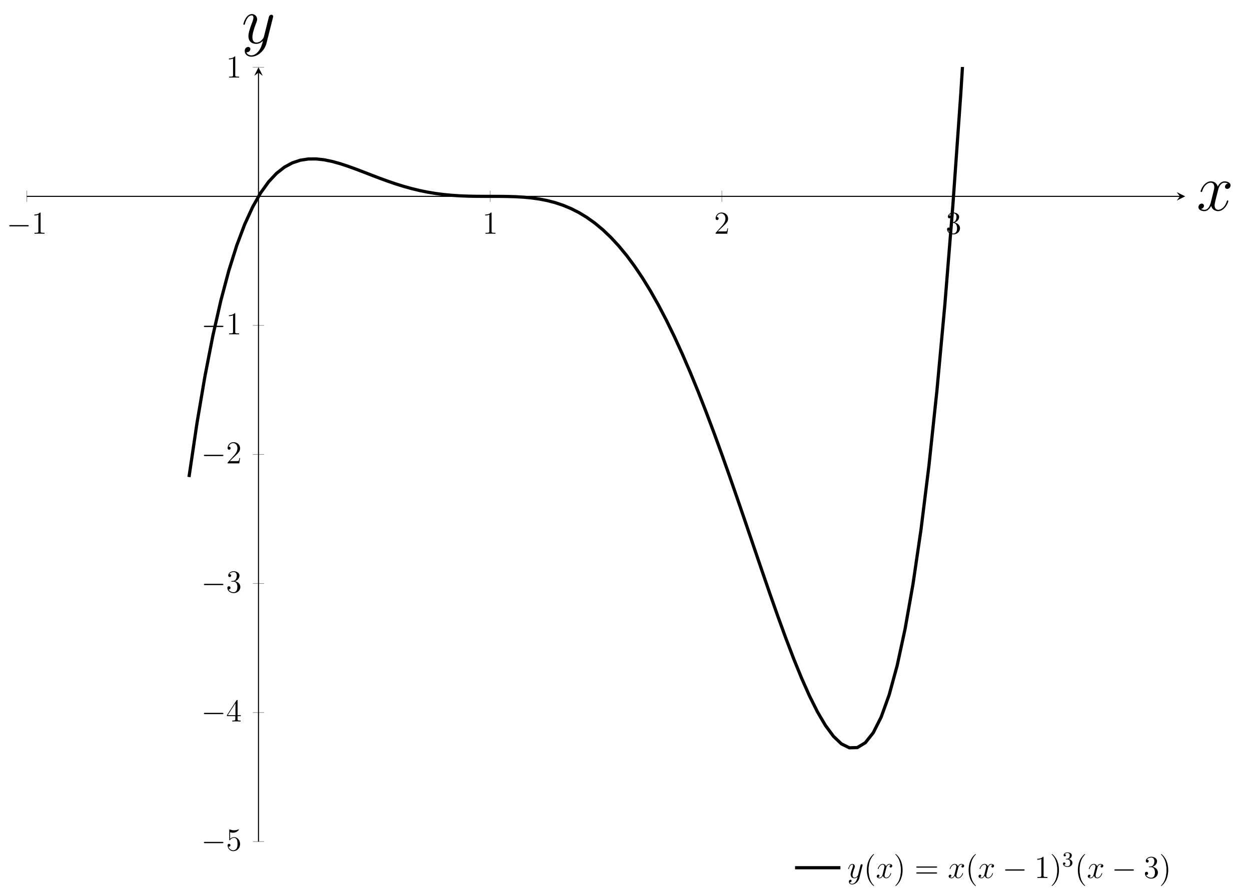
דוגמה 2.9



דוגמה 2.10



דוגמה 2.11



2.10 טרנספורמציות של הגרפים במערכת הצירים

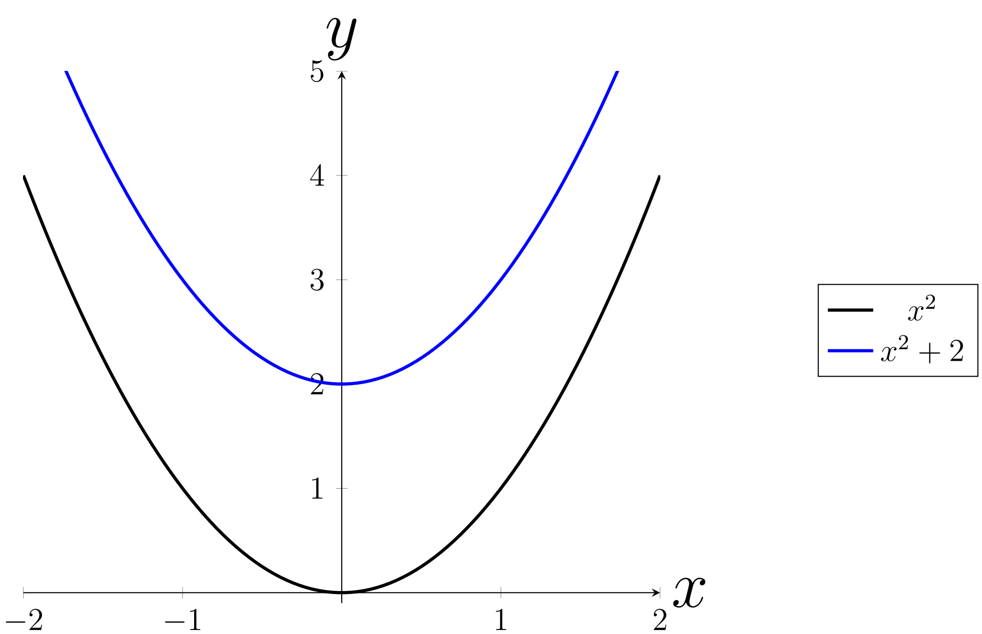
משפט 2.4 טרנספורמציות של הגרפים במערכת הצירים

תהי f פונקציה כלשהי. להלן מתואר מה יקרה עם הגרף $y=f(x)$ תחת הטרנספורמציות הבאות:

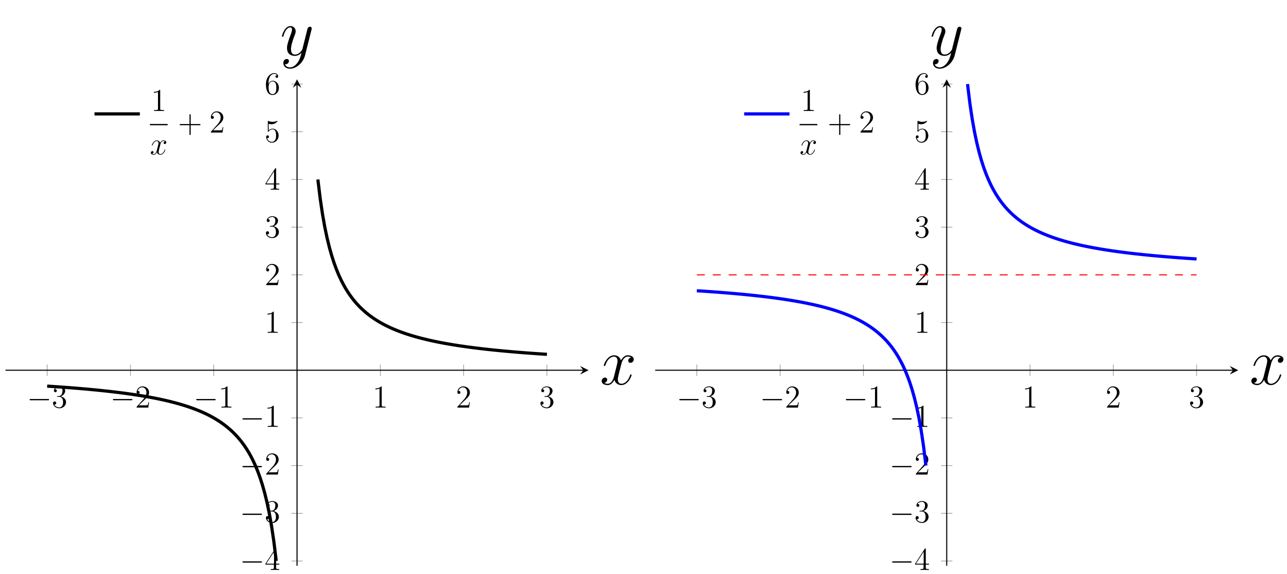
1	$f(x)+a$	הזזת הגרף ב- $\lvert a\rvert$ יחידות למעלה אם $a>0$ או למטה אם $a<0$.
2	$f(x+a)$	הזזת הגרף ב- $\lvert a\rvert$ יחידות שמאלה אם $a>0$ או ימינה אם $a<0$.
3	$-f(x)$	היפוך של הגרף לעומת ציר ה- x (שיקוף הגרף ביחס לציר ה-x).
4	$f(-x)$	היפוך של הגרף לעומת ציר ה- y (שיקוף הגרף ביחס לציר ה-y).
5	$k\cdot f(x)$	$(k>0)$ מתיחה, אם $k>1$, או כיווץ, אם $0<k<1$, של הגרף בכיוון של ציר ה- y.
6	$f(k\cdot x)$	$(k>0)$ כיווץ, אם $k>1$, או מתיחה, אם $0<k<1$, של הגרף בכיוון של ציר ה- x.
7	$\lvert f(x)\rvert$	שיקוף של חלקי הגרף הנמצאים מתחת לציר ה-x לעומת ציר ה- x

החלפת חלק הגרף הנמצא משמאל לציר y בשיקופו של החלק הימין של הגרף לעומת ציר ה- y	$f(\|x\|)$	**8**
החלפת חלק הגרף הנמצא מימין לציר y לשיקוף של החלק השמאלי של הגרף לעומת ציר ה- y	$f(-\|x\|)$	**9**
שיקוף לעומת ישר $y = a$ של חלקי הגרף הנמצאים מתחת לישר זה	$\|f(x) - a\| + a$	**10**
ההחלפת החלק הגרף הנמצא משמאל לישר $x = a$ לשיקוף לעומת ישר זה של חלק הגרף אשר מימין לישר $x = a$	$f(\|x - a\| + a)$	**11**

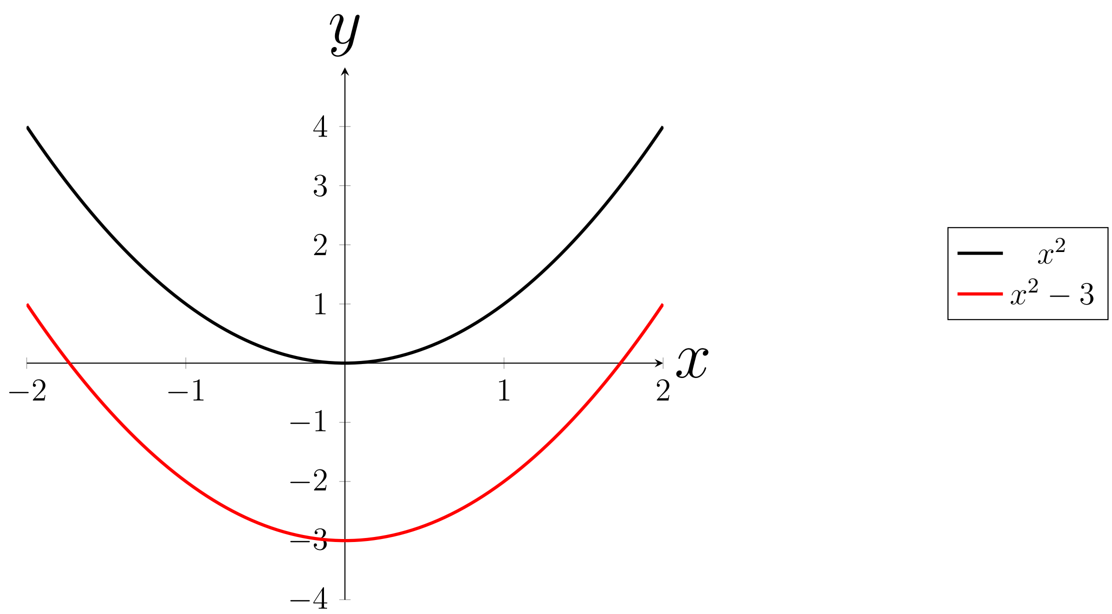
דוגמה 2.12



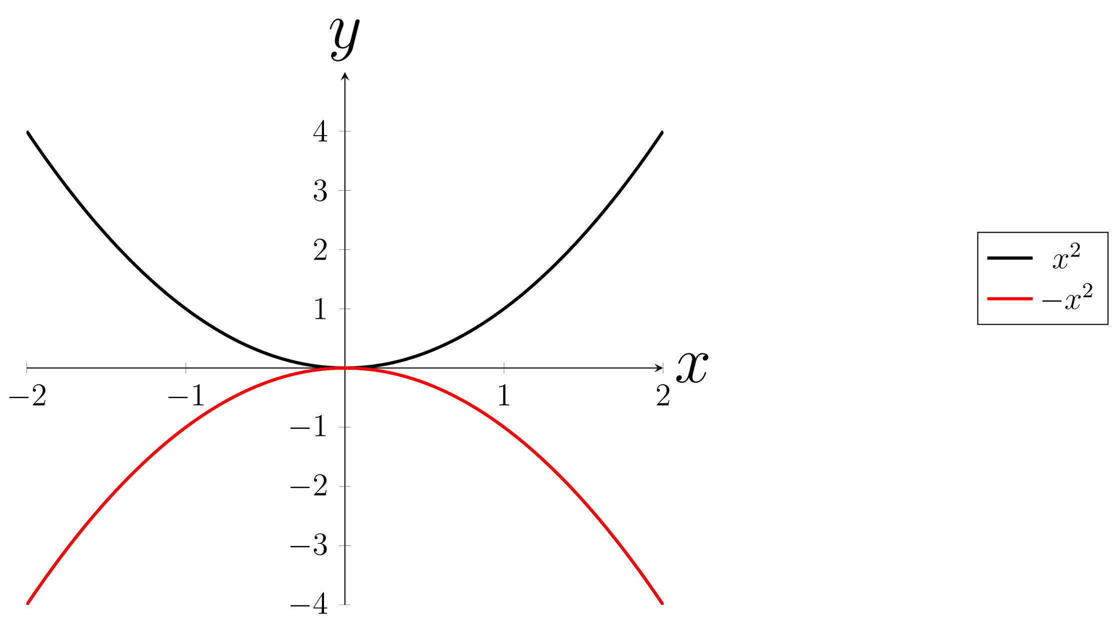
דוגמה 2.13



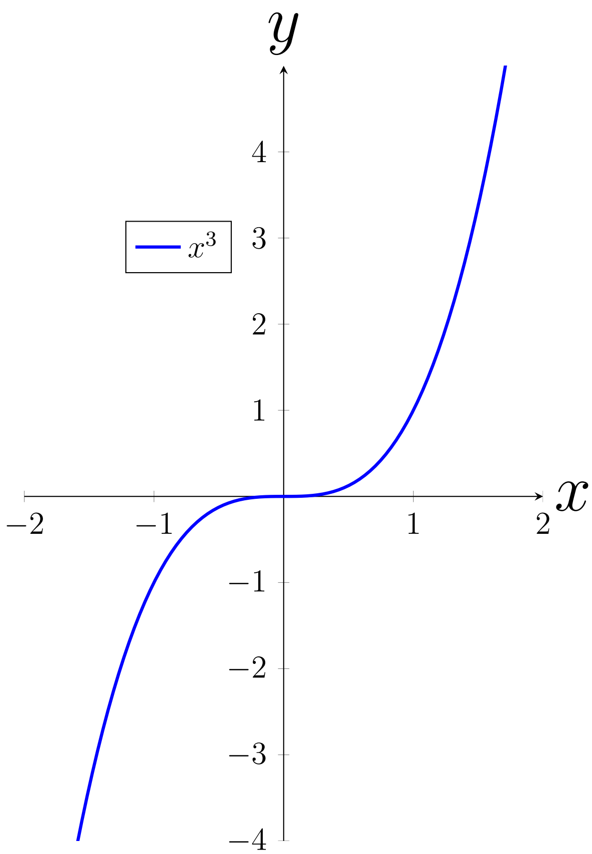
דוגמה 2.14

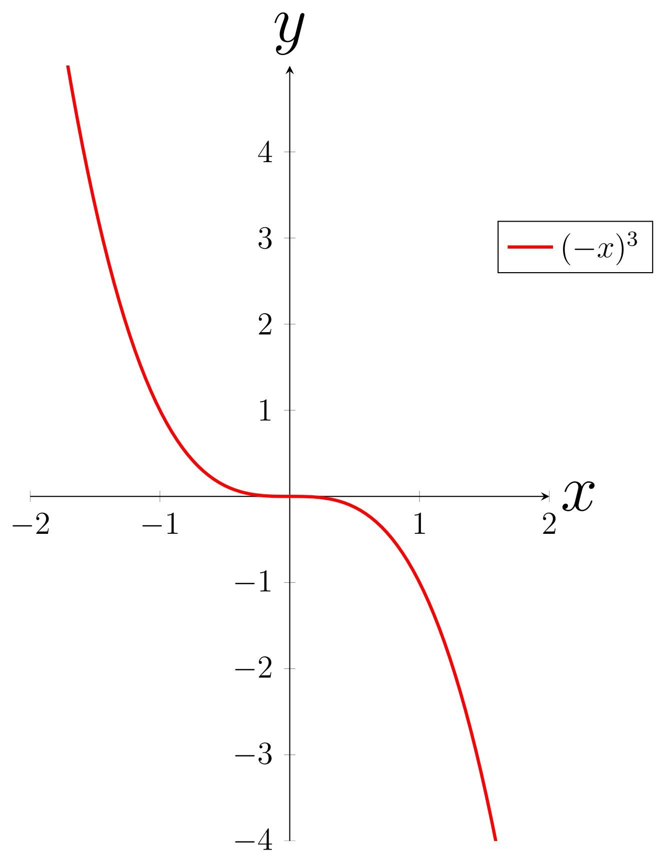


דוגמה 2.15

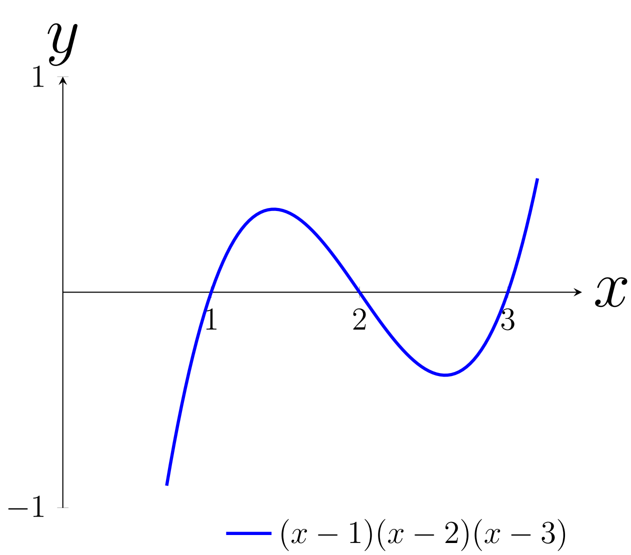


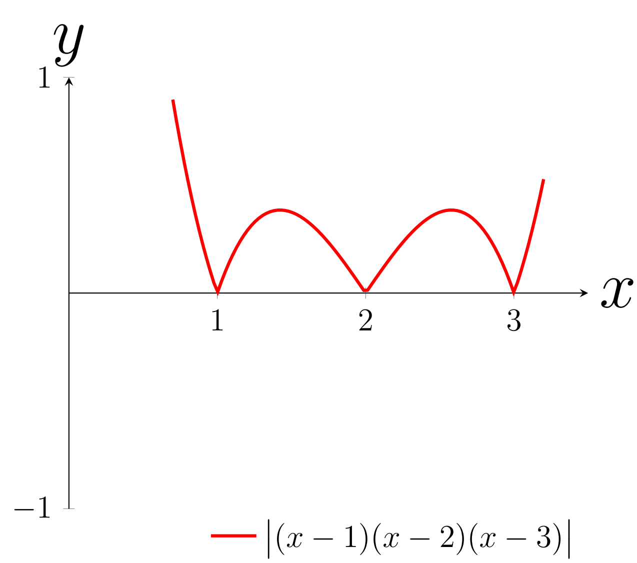
דוגמה 2.16



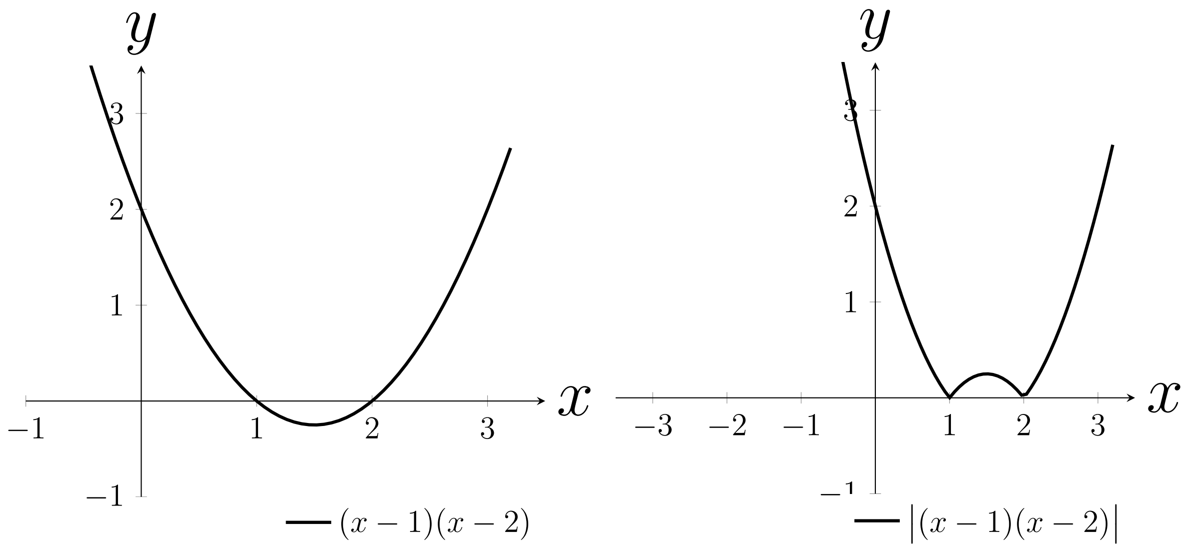


דוגמה 2.17

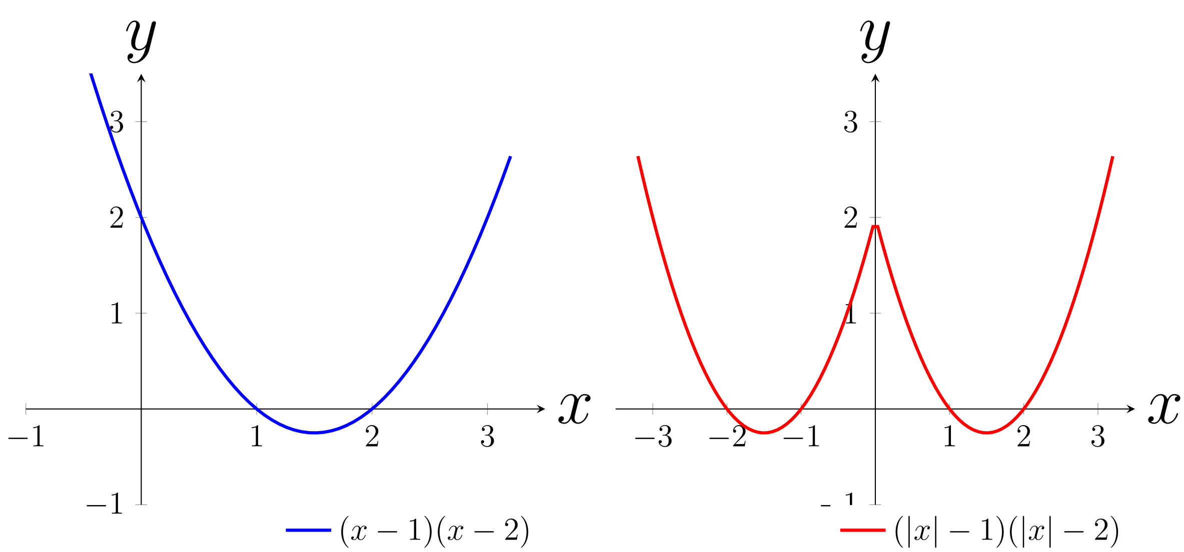




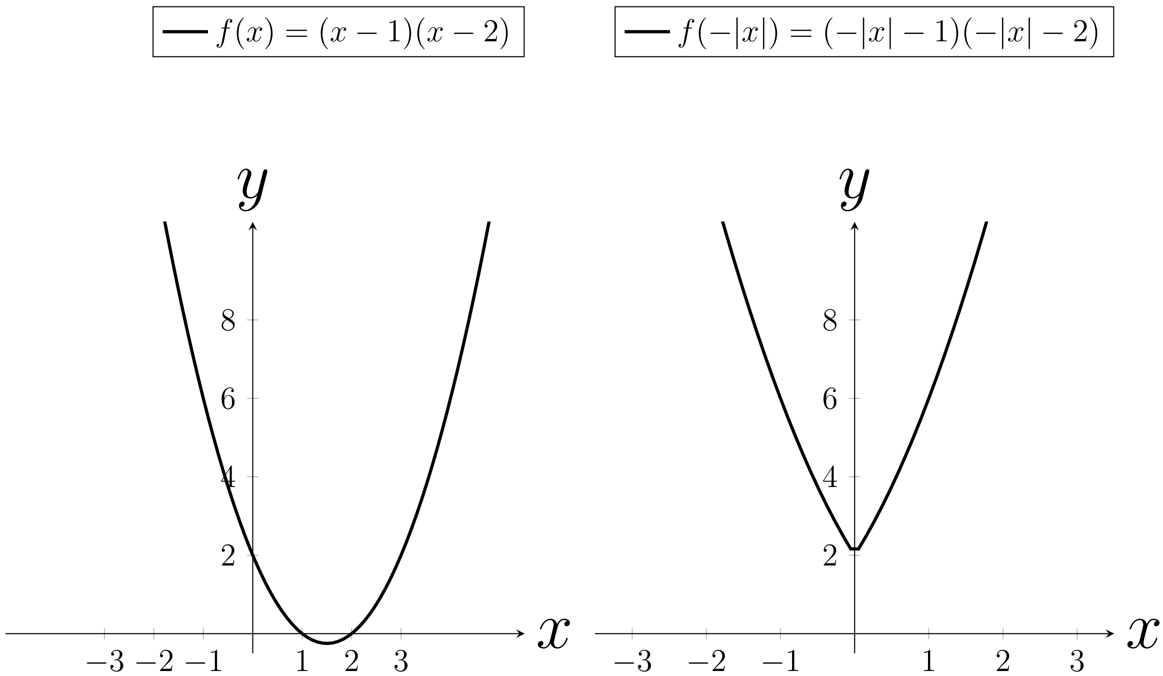
דוגמה 2.18



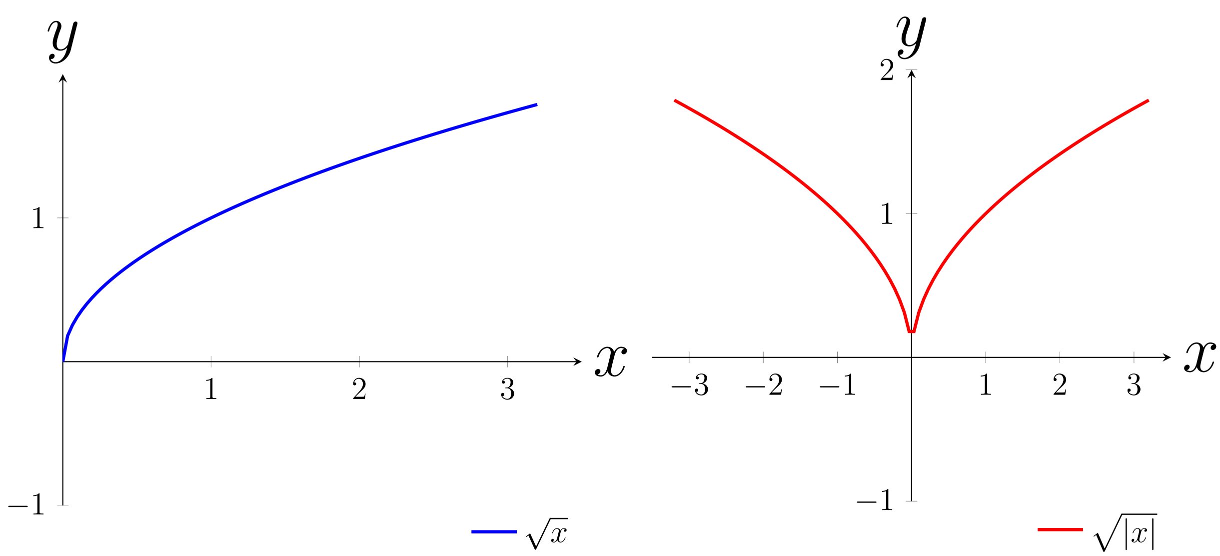
דוגמה 2.19



דוגמה 2.20



דוגמה 2.21



2.11 העשרה*

משפט 2.5 משפט החילוק

יהיו $f(x)$, $g(x)$ פולינומים כך ש- $\deg(f) \leq \deg(g)$. קיימים פולינומים יחידים, $q(x)$, $r(x)$, כך ש-

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x)$$

כאשר $\deg(r) \leq \deg(f)$.

הוכחה:
<u>יחידות</u>

נוכיח יחידות. נניח כי
$$g(x) = q_1(x)f(q) + r_1(x)$$
כאשר $\deg(r_1) < \deg(f)$ ו-
$$g(x) = q_2(x)f(q) + r_2(x)$$
כאשר $\deg(r_2) < \deg(f)$. ניקח את החיסור ונקבל
$$(q_1(x) - q_2(x))\, f(x) = r_2(x) - r_1(x) \ . \qquad (*)$$
$\deg(r_1) < \deg(f)$ ו- $\deg(r_2) < \deg(f)$ לכן $\deg(r_2 - r_1) < \deg(f)$.
לכן, כיוון שלפי (*) $\deg(r_2 - r_1) = \deg\Big((q_1(x) - q_2(x))\, f(x) \Big)$, אז נקבל
$$\deg\Big((q_1(x) - q_2(x))\, f(x) \Big) < \deg(f) \ .$$
זה מתקיים אם ורק אם $q_1(x) - q_2(x)$ פולינום האפס, לכן $q_1(x) = q_2(x)$, ולכן גם $r_1(x) = r_2(x)$.
פחות מ

■

משפט 2.6 משפט השארית

השארית המתקבלת לאחר חילוק של $g(x)$ ב- $(x-k)$ היא $g(k)$ לכל מספר ממשי k.

הוכחה: לפי משפט החילוק, $g(x) = q(x)(x-k) + r(x)$ כאשר $\deg(r) < \deg(x-k)$, כאשר $\deg(x-k) = 1$, לכן $\deg(r) < 1$. ז"א $r(x)$ מספר קבוע שנסמן C. לפיכך
$$g(x) = q(x)(x-k) + C \ .$$
נציב $x = k$ ונקבל $g(k) = C$, לכן
$$g(x) = q(x)(x-k) + g(k) \ .$$

■

משפט 2.7 משפט גורם של פולינום

יהי $f(x)$ פולינום.
$g(k) = 0$ אם ורק אם $(x-k)$ גורם של הפולינום.

הוכחה: לפי משפט השארית,
$$f(x) = q(x)(x-k) + f(k) \ .$$
מכאן $f(k) = 0$ אם"ם קיים פולינום $q(x)$ כך ש- $f(x) = q(x)(x-k)$.
ז"א $f(k) = 0$ אם"ם $(x-k) \mid f(x)$,
ז"א $f(k) = 0$ אם"ם $(x-k)$ גורם של $f(x)$.

■

דוגמה 2.22

נתונה $g(x)=x^n-1$. מצאו אחת הגורמים לינאריים שלה.

פתרון:
נשים לב כי $g(1)=0$ ולכן $x-1$ הוא גורם לינארי של $g(x)$. ע"י חילוק ארוך נקבל

$$\frac{x^n-1}{x-1}=(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^2+x+1\right) \ .$$

■

הגדרה 2.6 ריבוי אלגברי של שורש

יהי $g(x)$ פולינום. נניח כי $g(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים בצורה

$$g(x)=(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}(x-x_3)^{m_3}\ldots \ .$$

אומרים כי הריבוי אלגברי של השורש x_1 הוא m_1, הריבוי אלגברי של השורש x_2 הוא m_2, וכו'.

אם הריבוי אלגברי של שורש של פולינום הוא $m=1$ אז אומרים כי השרוש הוא **שורש פשוט**.

אם הריבוי אלגברי של שורש של פולינום הוא $m>1$ אז אומרים כי השרוש הוא **שורש חוזר**.

משפט 2.8 משפט היסודי של אלגברה (גאוס)

יהי $P(x)$ פולינום מסדר n. אז קיים פירוק מצורה

$$P(x)=a(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\ldots(x-x_k)^{m_k}Q(x)$$

כאשר $Q(x)$ פולינום מסדר m שאין לו שורשים ממשיים, ו- $m_1+m_2+\cdots+m_k+m=n$ ו- $x_1,x_2,\ldots,x_k$ שושרים ממשיים שונים של $P(x)$.

שיעור 3
תכונות של פונקציות

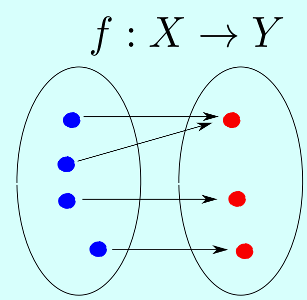
3.1 מושג של פונקציה

הגדרה 3.1 פונקציה

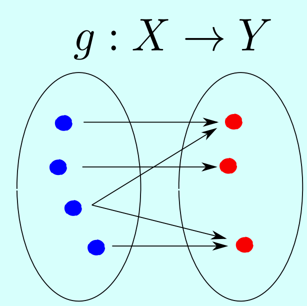
פונקציה מקבוצה X לקבוצה Y שמסומנת ע"י

$$f : X \to Y \ ,$$

היא כלל שמתאימה לכל איבר $x \in X$ איבר יחיד $y \in Y$.



פונקציה



לא פונקציה

הקבוצה X נקראת **תחום ההגדרה** של f.

הקבוצה Y נקראת **הטווח** של f.

הטווח Y אחד מהקבוצות מספרים, $\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

דוגמה 3.1

הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מוגדרת

$$f(x) = 4x \ .$$

הפונקציה f מתאימה לכל איבר $x \in \mathbb{R}$, האיבר היחיד $y = 4x \in \mathbb{R}$.

דוגמה 3.2

הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת

$$f(x)=x^2\ .$$

הפונקציה f מתאימה לכל איבר $x\in\mathbb{R}$, האיבר היחיד $y=x^2\in\mathbb{R}$.

דוגמה 3.3

הפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת

$$f(n)=2n\ .$$

הפונקציה f מתאימה לכל איבר $n\in\mathbb{N}$, האיבר היחיד $2n\in\mathbb{N}$.

דוגמה 3.4

הפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ מוגדרת

$$f(n)=\frac{n}{3}\ .$$

הפונקציה f מתאימה לכל איבר $n\in\mathbb{N}$, האיבר היחיד $\frac{n}{3}\in\mathbb{Q}$.

דוגמה 3.5 פונקציית עצרת

הפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת

$$f(n)=n!\ .$$

לדוגמה

$$f(2)=2!=2\cdot 1=2\ ,\quad f(3)=3!=3\cdot 2\cdot 1=6\ ,\quad f(4)=4!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24\ ,$$

ובאופן כללי

$$n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \ldots\ \cdot 2\cdot 1\ .$$

הפונקציה f מתאימה לכל מספר טבעי $n\in\mathbb{N}$ מססר טבעי יחיד $n!\in\mathbb{N}$.

דוגמה 3.6 פונקציית הרצפה

הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ מוגדרת

$$f(x)=\lfloor x\rfloor\ ,$$

כאשר $\lfloor x\rfloor$ מסמן המספר השלם הקרוב ביותר ל- x וקטן או שווה ל- x. לדוגמה:

$$f\left(\frac{4}{3}\right)=\left\lfloor\frac{4}{3}\right\rfloor=1\ ,\quad f\left(\frac{10}{4}\right)=\left\lfloor\frac{10}{4}\right\rfloor=2\ ,\quad f\left(\frac{37}{7}\right)=\left\lfloor\frac{37}{7}\right\rfloor=5\ .$$

הפונקציה f מתאימה לכל שבר $x\in\mathbb{R}$ מססר השלם יחיד $\lfloor x\rfloor$ ב- $\mathbb{Z}$.

דוגמה 3.7 פונקציית התקרה

הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ מוגדרת

$$f(x)=\lceil x\rceil\ ,$$

כאשר $\lceil x \rceil$ מסמן המספר השלם הקרוב ביותר ל- x וגדול או שווה ל- x. לדוגמה:

$$f(2.79) = \lceil 2.79 \rceil = 3 \ , \quad f(10.01) = \lceil 10.01 \rceil = 11 \ , \quad f(21.23) = \lceil 21.23 \rceil = 22 \ .$$

הפונקציה f מתאימה לכל $x \in \mathbb{R}$ מספר טבעי יחיד $\lceil x \rceil$ ב- $\mathbb{Z}$.

דוגמה 3.8 *

תהי $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ הפונקציה שמוגדרת להיות $f(x) = \sqrt{x}$. האם f פונקציה?

פתרון:
לא. הרי לדוגמה

$$f(4) = \sqrt{4} = \pm 2 \ .$$

כלומר f מתאימה לאיבר $4 \in \mathbb{R}$ שני איברים $+2$ ו- -2. ז"א $f(4)$ לא יחיד.

באותה מידה, לכל $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ לא יחיד כי $\sqrt{x}$ יכול להיות חיובי או שלילי.

■

דוגמה 3.9

תהי $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ הפונקציה שמוגדרת להיות $f(x) = |\sqrt{x}|$. האם f פונקציה?

פתרון:
כן. הרי הערך מוחלט משרת לשמור רק את הערך החיובי בלבד של השורש. כתוצאה מכך $f(x) = |\sqrt{x}|$ יחיד. לדוגמה:

$$f(4) = |\sqrt{4}| = 2 \ , \quad f(9) = |\sqrt{9}| = 3 \ , \quad f(100) = |\sqrt{100}| = 10 \ .$$

לכן f מתאימה לכל $x \in \mathbb{R}$ איבר יחיד $f(x) = |\sqrt{x}| \in \mathbb{R}$.

■

דוגמה 3.10

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הפונקציה שמוגדרת להיות $f(x) = 2x + 3$. הוכיחו כי $f(x)$ יחיד לכל x.

פתרון:
נוכיח דרך השלילה. נניח שלכל $a \in \mathbb{R}$ קיימים שני איברים $y_1 = f(a)$ ו- $y_2 = f(a)$ והם לא שווים: $y_1 \neq y_2$. ז"א

$$y_1 \neq y_2 \quad \Rightarrow \quad 2a + 3 \neq 2a + 3 \quad \Rightarrow \quad 2a \neq 2a \quad \Rightarrow \quad a \neq a \ .$$

הגענו לסתירה. לפיכך $f(a)$ יחיד לכל $a \in \mathbb{R}$. ■

הגדרה 3.2 תחום הגדרה ותמונה של פונקציה

תהי f הפונקציה $f : X \to Y$ מקבוצה X לקבוצה Y.

א) הקבוצה X נקראת **תחום ההגדרה** של f. תחום ההגדרה היא הקבוצה של כל הערכים האפשריים של x אשר ניתנים להציב ב- $f(x)$.

נסמן את תחום ההגדרה ב- $\mathrm{Dom}(f)$.

ז"א $\mathrm{Dom}(f) = X$.

ב) הקבוצה Y נקראת **הטווח** של f. נסמן את הטווח ב- $\mathrm{Rng}(f)$.

ז"א $\mathrm{Rng}(f) = Y$.

ג) **התמונה** של f היא הקבוצה שמכילה את כל הערכים של f.

נסמן את התמונה ב- $\mathrm{Im}(f)$.

התמונה תת-קבוצה של הטווח: $\mathrm{Im}(f) \subseteq Y$.

דוגמה 3.11

מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של הפונקציה $f(x) = x^2$.

פתרון:

שיטה אלגברית

ניתן להציב כל ערך של x ב- $f(x)$, לכן

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

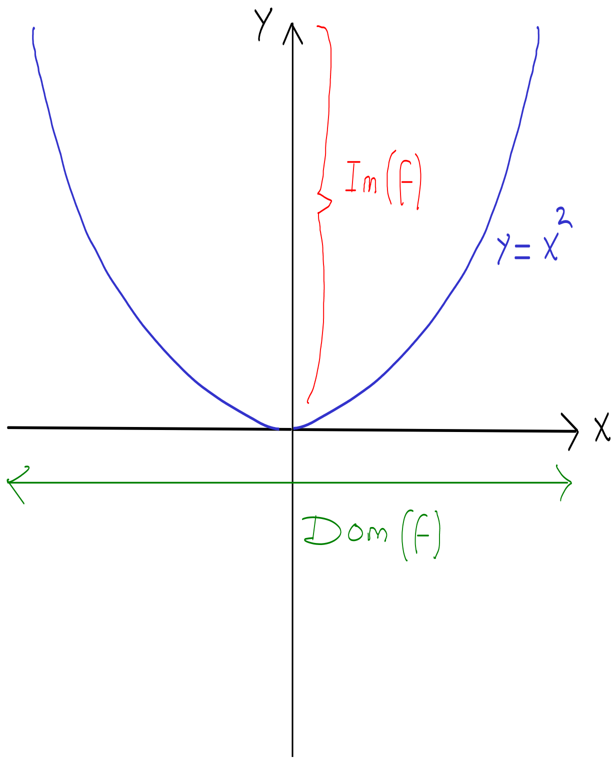
(כל x).

נשים לב כי $x^2 \geq 0$, כלומר x^2 גדול או שווה לאפס במקרה כאשר $x = 0$. לכן $f(x) = x^2 \geq 0$. לפיכך

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \ ,$$

כאשר $\mathbb{R}^+$ מסמן את הקבוצה של מספרים ממשיים הגדולים או שווים ל-0.

שיטה גרפית



הקבוצת ערכי x אשר הגרף עובר היא תחום ההגדרה של הפונקציה. הגרף עובר דרך כל הערכים של x לכן

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \ .$$

הקבוצת ערכי y אשר הגרף עובר היא התמונה של הפונקציה. הגרף עובר דרך הערכים החיובים של y וגם $y = 0$. לכן

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \ .$$

■

דוגמה 3.12

מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של $f(x) = (x+2)^2$.

פתרון:

<u>שיטה אלגברית</u>

ניתן להציב כל ערך של x ב- $f(x)$, לכן

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

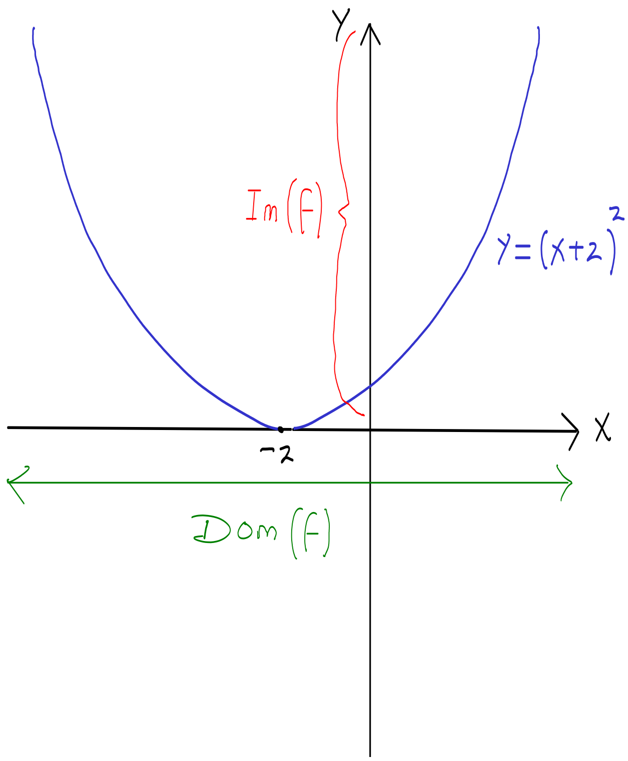
(כל x).

נשים לב כי $(x+2)^2 \geq 0$, לפיכך

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \ ,$$

כאשר

<u>שיטה גרפית</u>



הגרף עובר דרך כל הערכים של x אז

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \ .$$

הגרף עובר דרך הערכים החיובים של y ו- $y = 0$ לכן

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \ .$$

■

כלל 3.1 כמויות הלא מוגדרות

- $\frac{1}{0}$ לא מוגדר.
- $\sqrt{a}$, כאשר $a < 0$, לא מוגדר.

דוגמה 3.13

מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של $f(x) = |\sqrt{x}|$.

פתרון:

<u>שיטה אלגברית</u>

לא ניתן להציב ערכים שליליים של x ב- $f(x)$, לכן

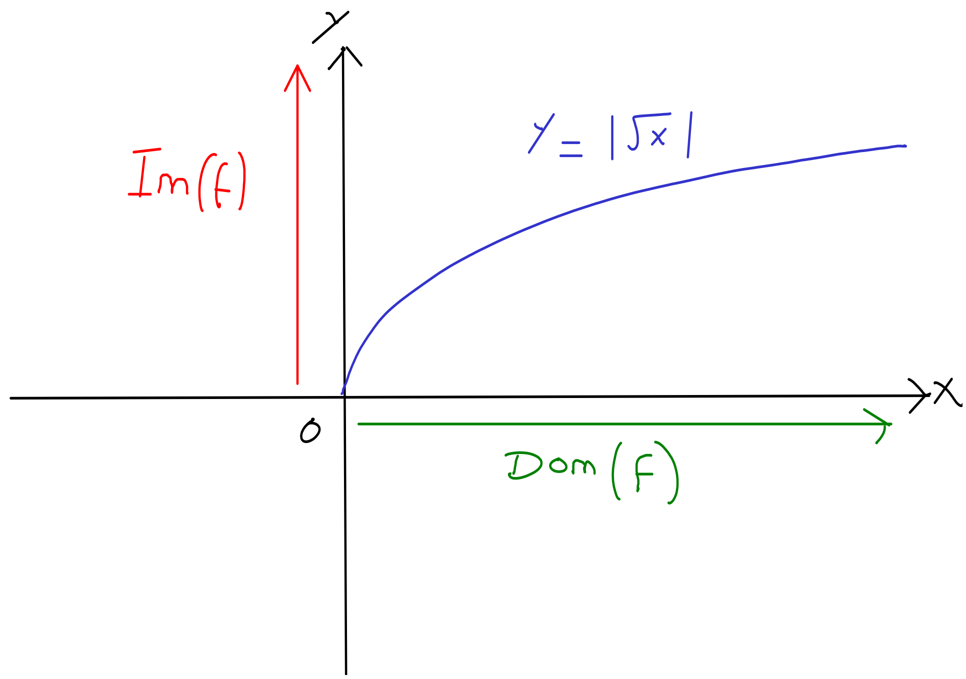
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$$

או $\text{Dom}(f) = \{x \geq 0\}$.

נשים לב כי $|\sqrt{x}|\geq 0$, לפיכך

$$\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^+ \ .$$

<u>שיטה גרפית</u>



הגרף של $f(x)=|\sqrt{x}|$ עובר דרך הערכים החיוביים של x ו- $x=0$ בלבד, לכן

$$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}^+ \ .$$

הגרף עובר דרך הערכים החיוביים של y ו- $y=0$ לפיכך

$$\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^+ \ .$$

■

דוגמה 3.14

מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$.

פתרון:

<u>שיטה אלגברית</u>

אי-אפשר להציב $x=2$ ב- $f(x)$ בגלל שנקבל $\dfrac{1}{0}$ אשר לא מוגדר. $f(x)$ מוגדרת בכל ערך אחר של x, לכן

$$\mathrm{Dom}(f)=\{x\neq 2\}$$

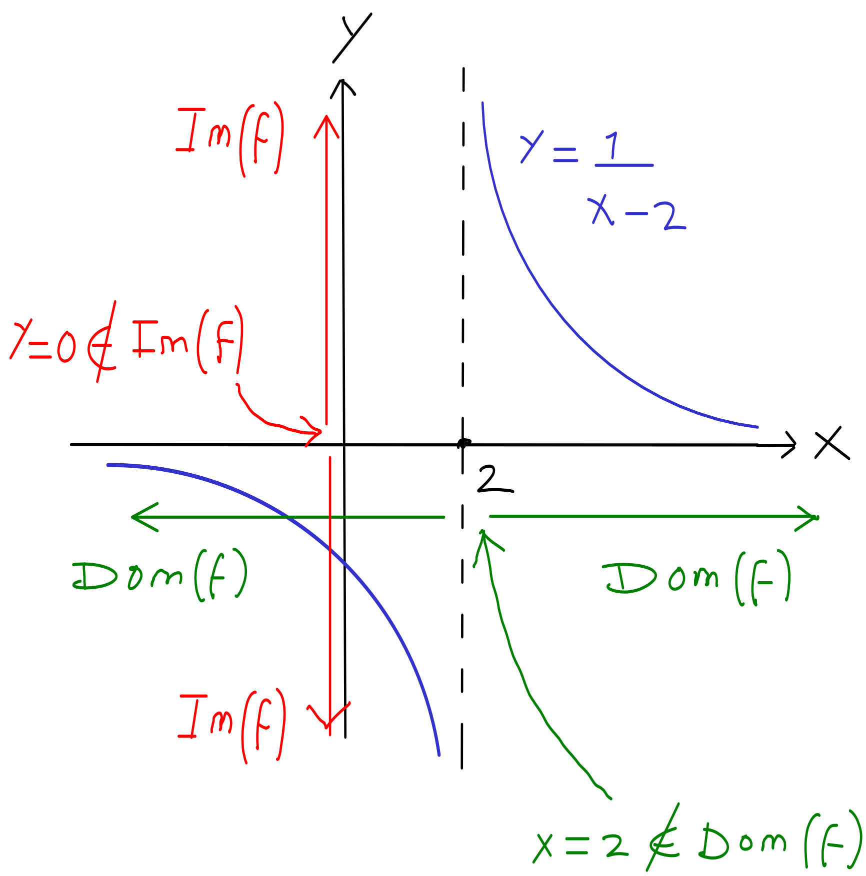
כדי למצוא את התמונה נמצא את הערכים של y עבורם יש פתרון ל- $y=\dfrac{1}{x-2}$. נבודד את x:

$$y=\frac{1}{x-2} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{y}=x-2 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{y}+2 \ .$$

קיים פתרון מלבד בערך $y=0$. לפי זה התמונה הינה

$$\mathrm{Im}(f)=\{y\neq 0\} \ .$$

<u>שיטה גרפית</u>



$f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ עובר דרך כל הערכים של x חוץ מ- $x=2$. לכן

$$\mathrm{Dom}(f)=\{x\neq 2\} \ .$$

הגרף עובר דרך כל הערכים של y מלבד מ- $y=0$. לפיכך

$$\mathrm{Im}(f)=\{y\neq 0\} \ .$$

■

3.2 תכונות של פונקציות

פונקציה חד חד ערכית

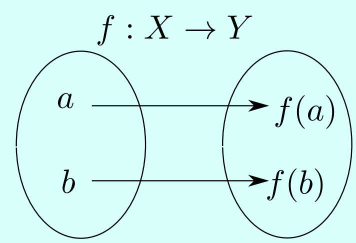
הגדרה 3.3 פונקצית חד חד ערכית

תהי $f:X\to Y$ פונקציה.
אומרים כי f חד חד ערכית אם לכל $a,b\in X$,

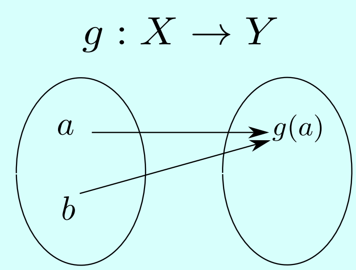
$$a\neq b \qquad \Rightarrow \qquad f(a)\neq f(b)\ ,$$

או, באותה מידה,

$$f(a)=f(b) \qquad \Rightarrow \qquad a=b\ .$$



פונקציה חח"ע

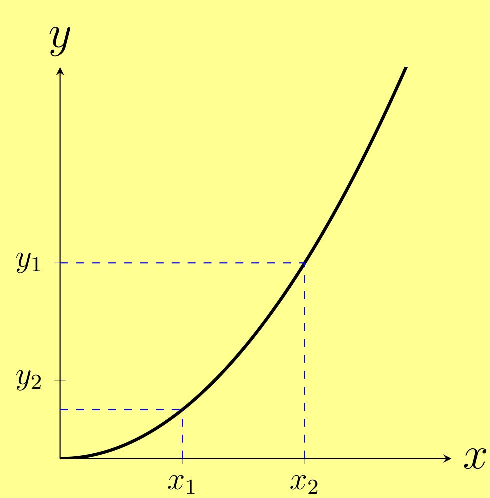


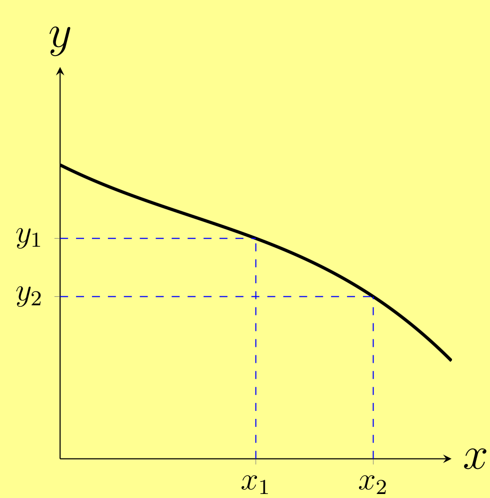
פונקציה לא חח"ע

משפט 3.1 גרף של פונקציה חד חד ערכית

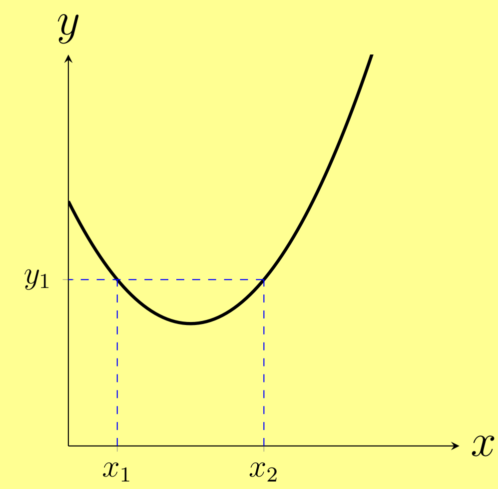
אם $f(x)$ פונקציה חד חד ערכית, אז הגרף של $y=f(x)$ עובר דרך כל ערך של y שבתמונה שלה פעם אחת בלבד.

דוגמשאות של גרפים של פונקציות חד חד ערכיות





דוגמה של גרף של פונקציה לא חד חד ערכית



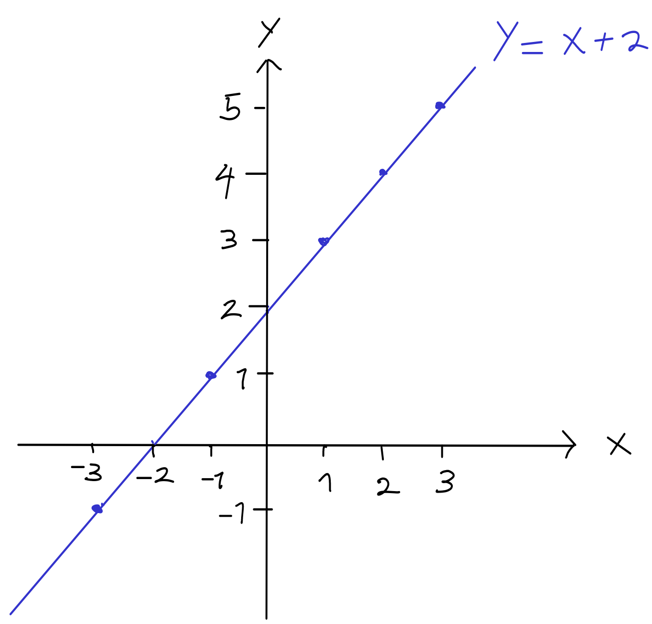
דוגמה 3.15

קבעו אם הפונקציה $f(x) = x + 2$ חד חד ערכית.

פתרון:

<u>שיטה גרפית</u>

נסתכל על הגרף של $f(x) = x + 2$.



הגרף עובר כל ערך של ה- y פעם אחת לכל היותר. לכן הפונקציה חח"ע.

<u>שיטה אלגברית</u>

נוכיח ש- $f(x) = x + 2$ חד חד ערכית דרך השלילה.

נניח כי f לא חח"ע. אז קיימים $a \neq b$ כך ש- $f(a) = f(b)$.

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad a + 2 = b + 2 \quad \Rightarrow \quad a = b$$

בסתירה לכך ש- $a \neq b$. לכן $f(x)$ חד חד ערכית.

■

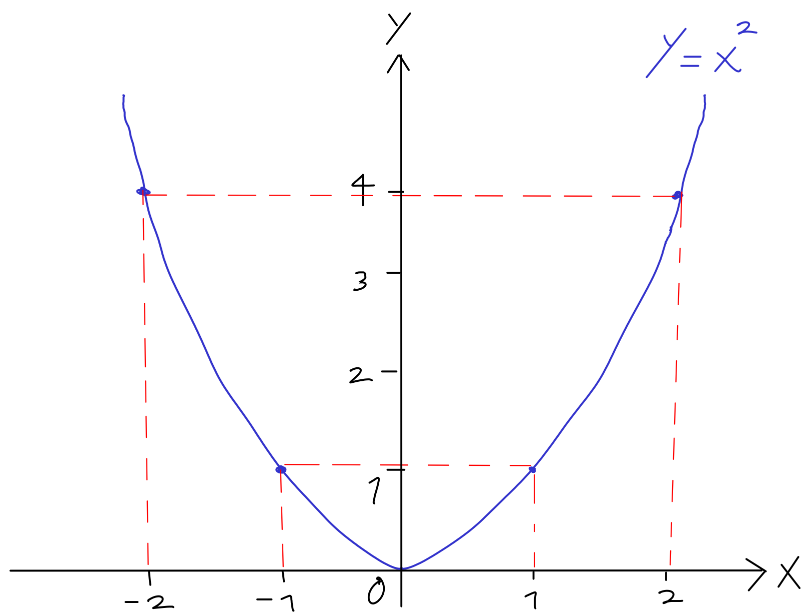
דוגמה 3.16

קבעו אם הפונקציה $f(x) = x^2$ חד חד ערכית.

פתרון:

<u>שיטה גרפית</u>

נסתכל על הגרף של $f(x) = x^2$.



קל לראות שהגרף עובר כל ערך חיובי של y פעמיים. לדוגמה הגרף עובר דרך $y = 4$ פעמיים, ב $x = 2$ וב- $x = -2$. לכן $f(x) = x^2$ לא חד חד ערכית.

במילים אחרות הגרף $y = x^2$ עובר דרך כל ערך של y פעמיים (מלבד $y = 0$).

<u>שיטה אלגברית</u>

$f(x) = x^2$ לא חד חד עאכית. הרי אם נקח $a = 2$ ו- $b = -2$. אז $a \neq b$ אבל $f(a) = f(b) = 4$, בסתירה לכך ש- f חח"ע.

■

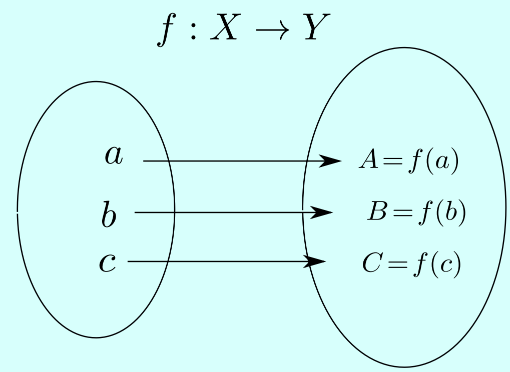
*פונקציה על

הגדרה 3.4 פונקצית על

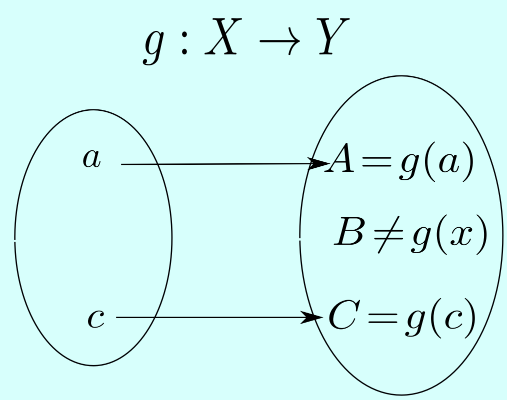
תהי $f : X \to Y$ פונקציה. אומרים כי f פונקציית על Y, אם לכל $y \in Y$ קיים $x \in X$ כך ש-

$$f(x) = y \ .$$

במילים אחרות, $\mathrm{Im}(f) = Y$.



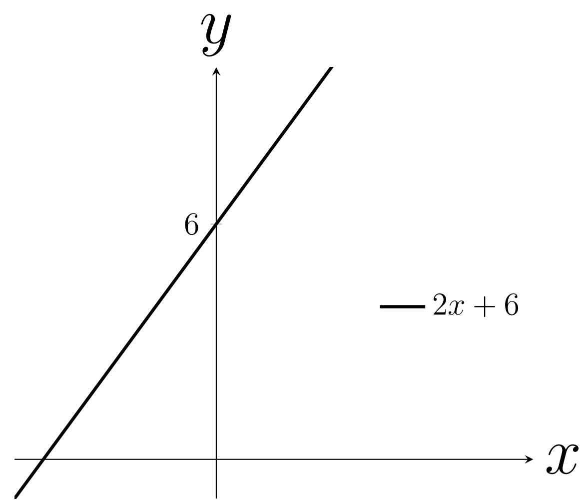
פונקציה על



פונקציה לא על

דוגמה 3.17 *

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הפונקציה שמוגדרת $f(x) = 2x + 6$.

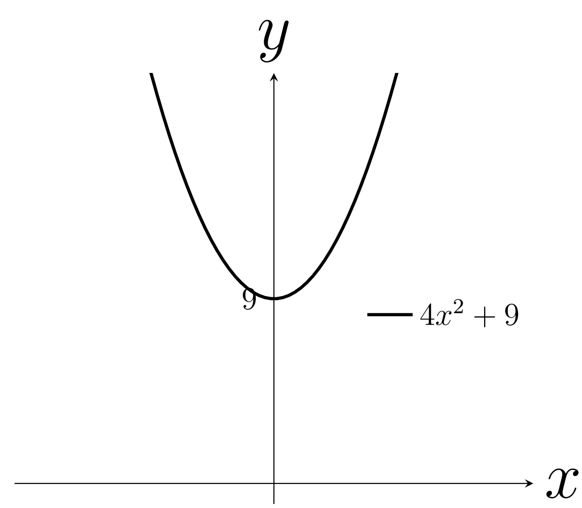


$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \ , \quad \text{Rng}(f) = \mathbb{R} \ , \quad \text{Im}(f) = \mathbb{R} \ .$$

f חד חד ערכית ועל.

דוגמה 3.18 *

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הפונקציה שמוגדרת $f(x) = 4x^2 + 9$.

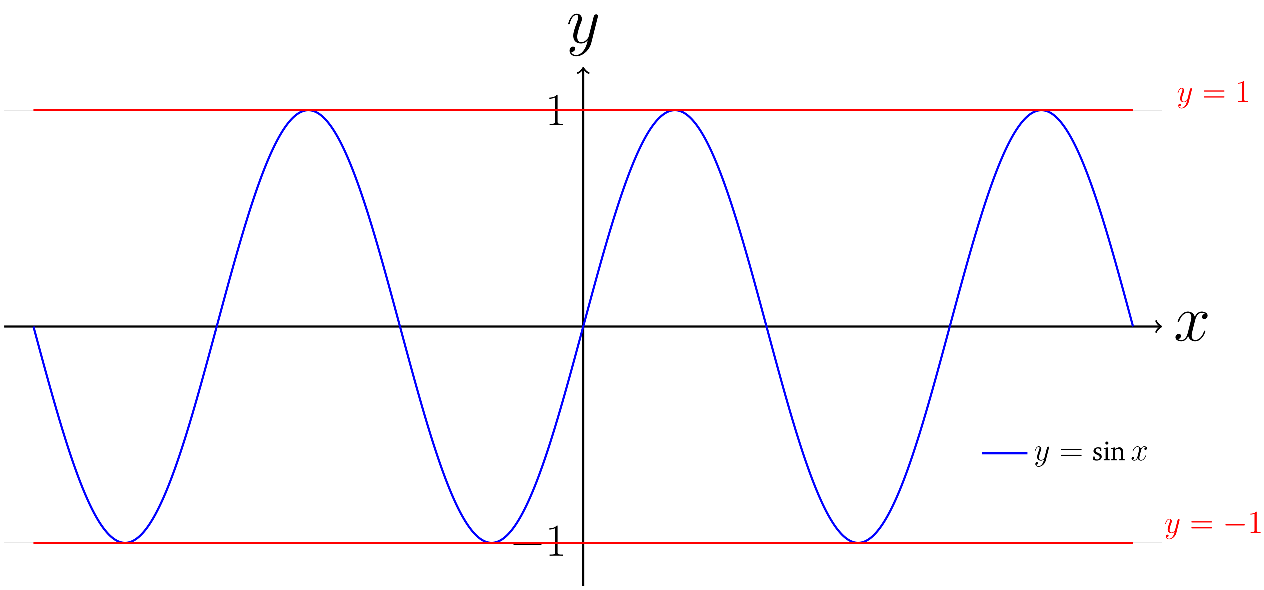


$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \ , \quad \text{Rng}(f) = \mathbb{R} \ , \quad \text{Im}(f) = [9, \infty)$$

f לא חד חד ערכית ולא על.

דוגמה 3.19 *

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הפונקציה שמוגדרת $f(x) = \sin x$.

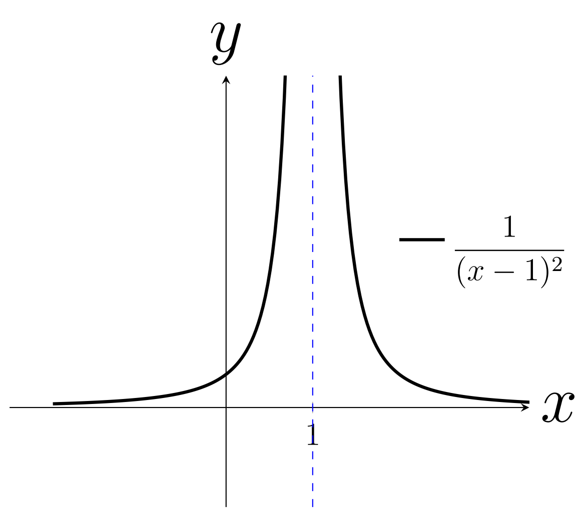


$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}\ , \quad \text{Rng}(f) = \mathbb{R}\ , \quad \text{Im}(f) = [-1,1]$$

f לא חד חד ערכית ולא על.

דוגמה 3.20 *

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הפונקציה שמוגדרת $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$.

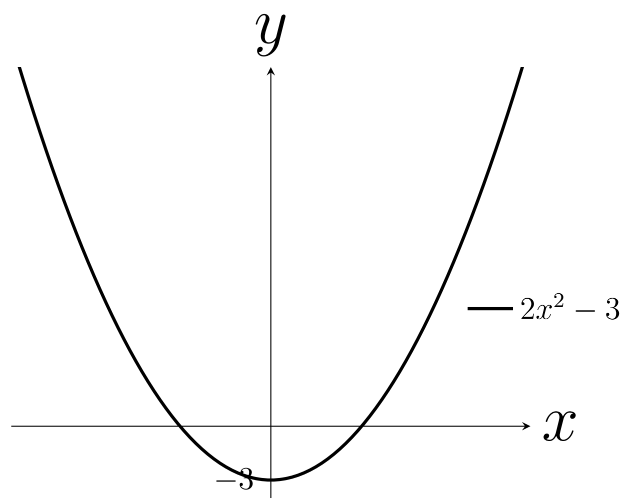


$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \cap x \neq 1\}\ , \quad \text{Rng}(f) = \mathbb{R}\ , \text{Im}(f) = (0,\infty)$$

f לא חד חד ערכית ולא על.

דוגמה 3.21 *

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הפונקציה שמוגדרת $f(x) = 2x^2 - 3$.



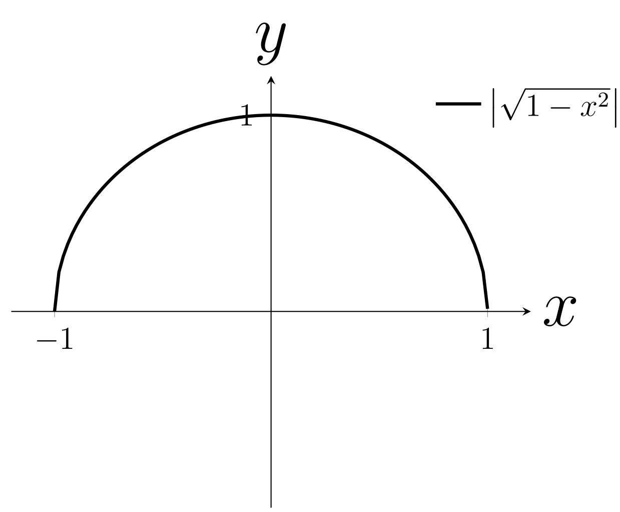
$$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}\ ,\quad \mathrm{Rng}(f)=\mathbb{R}\ ,\quad \mathrm{Im}(f)=[-3,\infty)$$

או בניסוח שקול $\mathrm{Im}(f)=\{y|y\geq -3, y\in\mathbb{R}\}$.
f לא חד חד ערכית ולא על.

דוגמה 3.22 *

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הפונקציה שמוגדרת $f(x)=\left|\sqrt{1-x^2}\right|$.

$$\mathrm{Dom}(f)=[-1,1]\ ,\quad \mathrm{Rng}(f)=\mathbb{R}\ ,\quad \mathrm{Im}(f)=[0,1]\ ,$$



f לא חד חד ערכית ולא על.

זוגיות

הגדרה 3.5 פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית

פונקציה $f(x)$ נקראת זוגית אם לכל $x \in \mathrm{Dom}(f)$ מתקיים:

$$f(-x) = f(x) \ .$$

גרף של פונקציה זוגית סימטרי ביחס לציר ה-y.

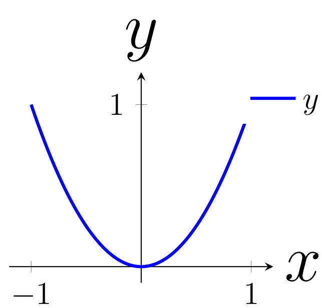
$f(x)$ נקראת אי-זוגית אם לכל $x \in \mathrm{Dom}(f)$ מתקיים:

$$f(-x) = -f(x) \ .$$

דוגמה 3.23

$f(x) = x^2$ זוגית.

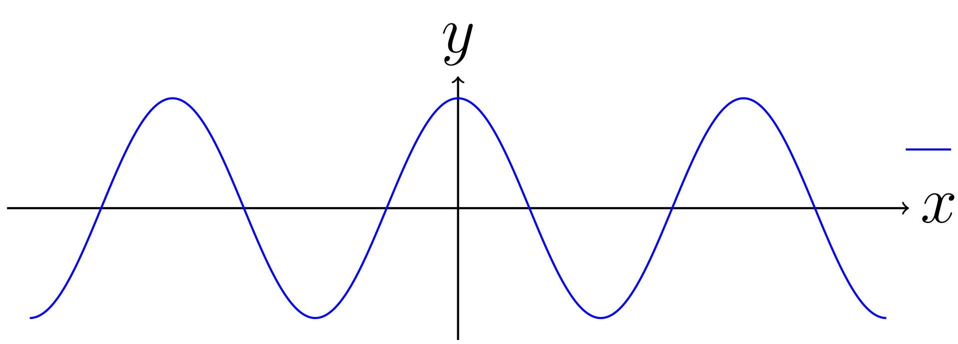
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \ .$$



דוגמה 3.24

$f(x) = \cos x$ זוגית.

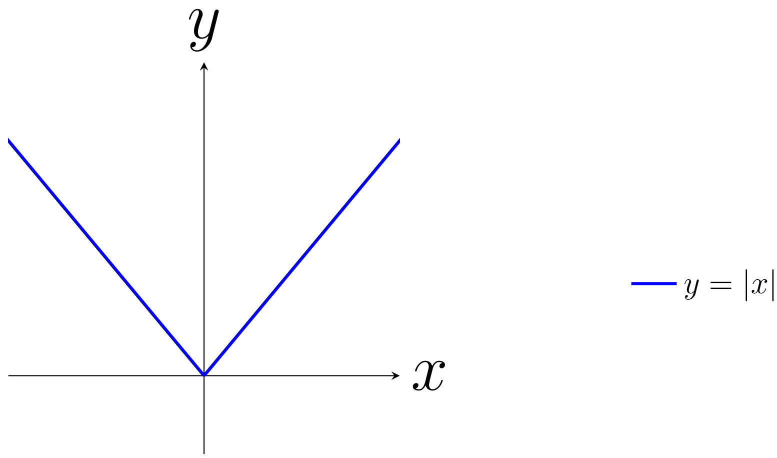
$$f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x) \ .$$



דוגמה 3.25

$f(x) = |x|$ זוגית.

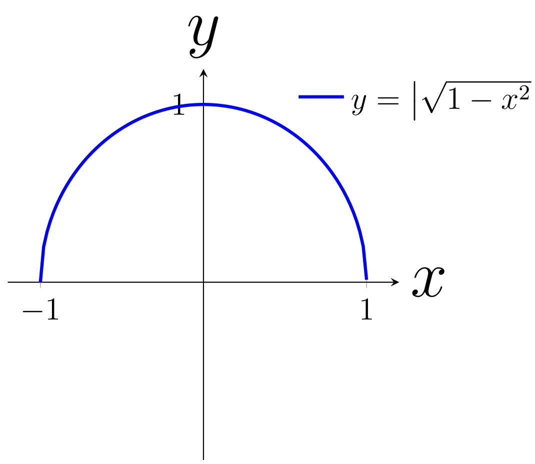
$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x) \ .$$



דוגמה 3.26

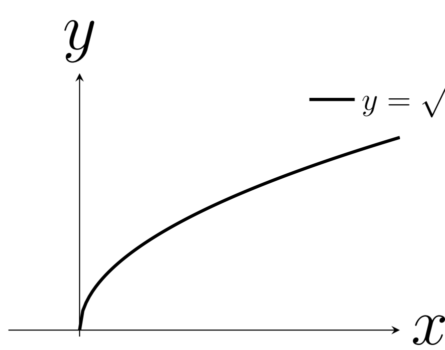
$f(x) = \left|\sqrt{1-x^2}\right|$ זוגית.

$$f(-x) = \left|\sqrt{1-(-x)^2}\right| = \left|\sqrt{1-x^2}\right| = f(x)$$



דוגמה 3.27

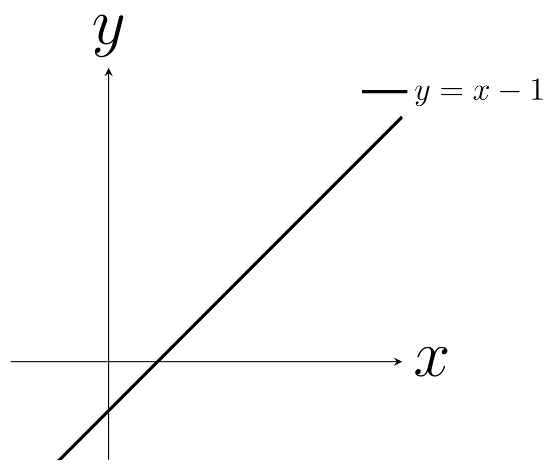
$f(x) = |\sqrt{x}|$ לא פונקציה זוגית או אי-זוגית אלא פונקציה כללית. גית. הרי $f(-x)$ לא מוגדרת.



דוגמה 3.28

$f(x) = x - 1$ פונקציה כללית. הרי

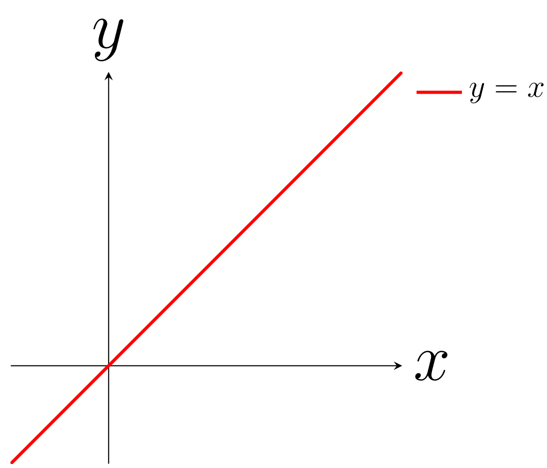
$$f(-x) = -x - 1 \neq f(x), -f(x)\ .$$



דוגמה 3.29

$f(x) = x$ אי זוגית.

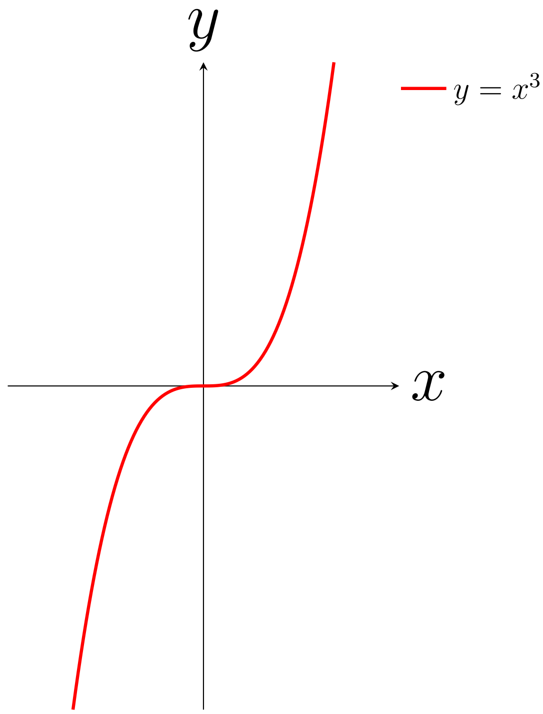
$$f(-x) = -x = -f(x)$$



דוגמה 3.30

$f(x) = x^3$ אי זוגית.

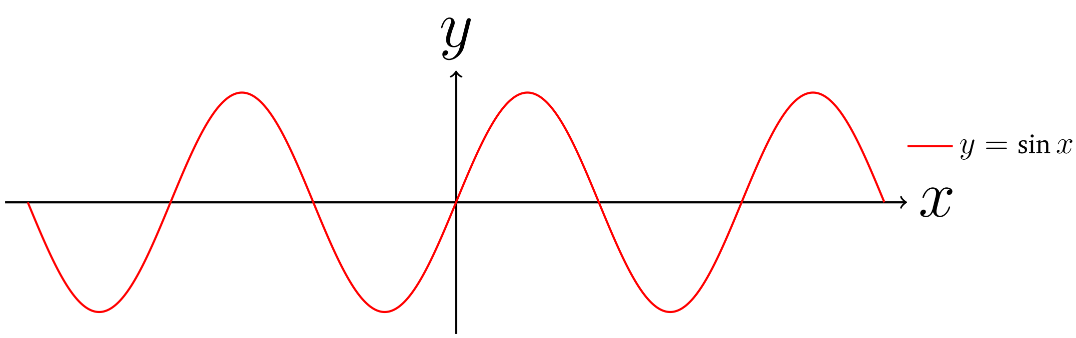
$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)\ .$$



דוגמה 3.31

$f(x) = \sin x$ אי זוגית.

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x) \ .$$



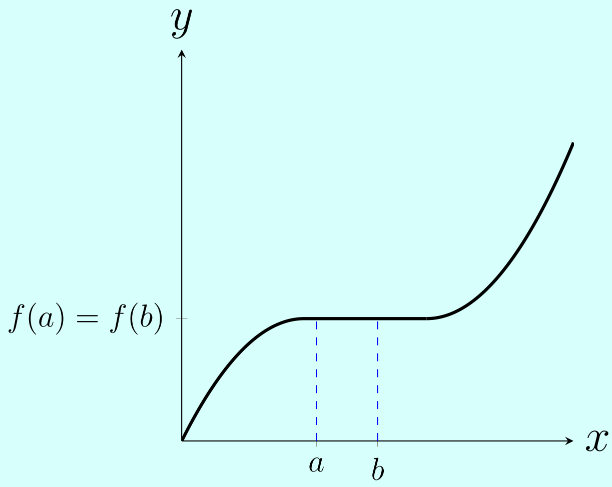
מונוטוניות

הגדרה 3.6 מונוטוניות של פונקציה

תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת בקטע I.

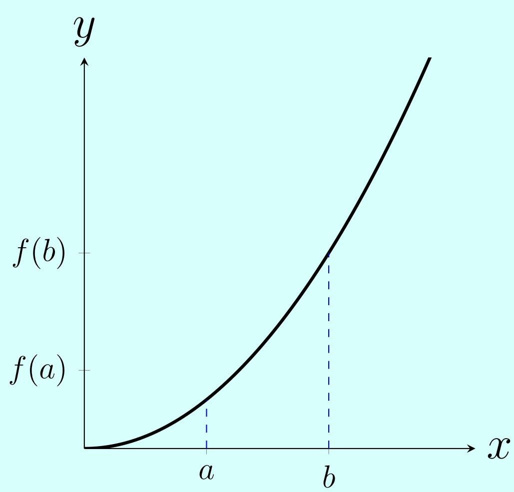
- אומרים כי f עולה מונוטונית אם לכל $a, b \in I$,

$$a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) \leq f(b) \ .$$



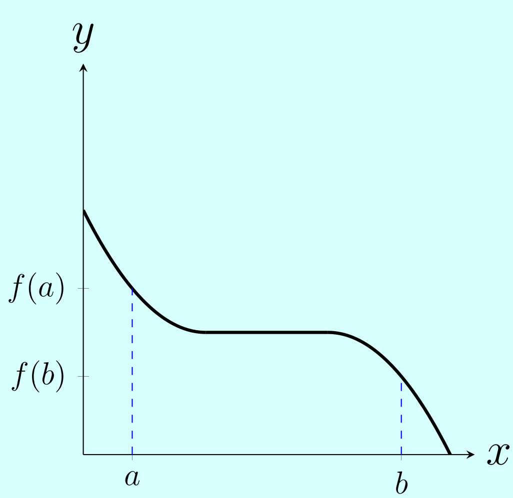
- אומרים כי f עולה מונוטונית ממש אם לכל $a,b \in I$,

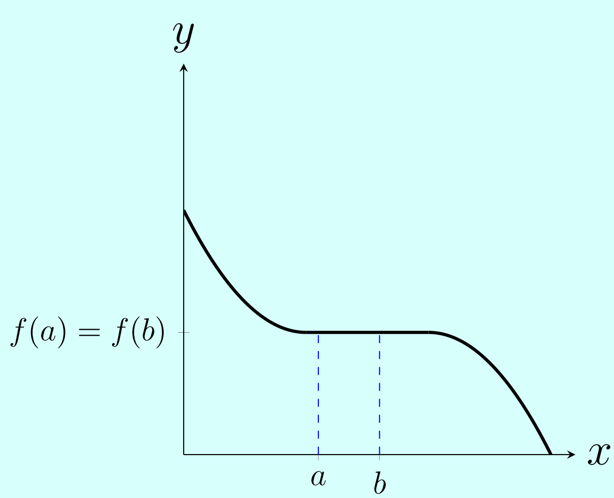
$$a<b \quad \Rightarrow \quad f(a)<f(b)\ .$$



- אומרים כי f יורדת מונוטונית אם לכל $a,b \in I$,

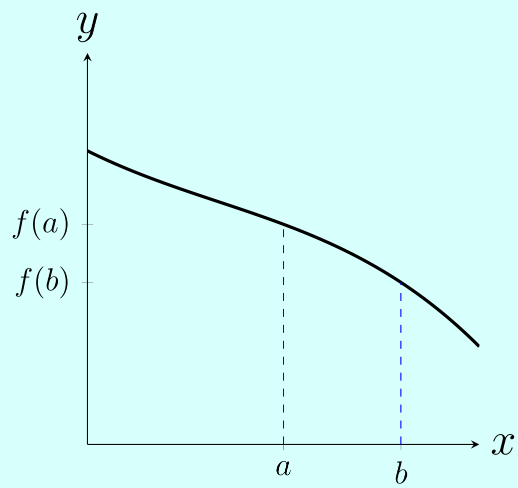
$$a<b \quad \Rightarrow \quad f(a)\geq f(b)\ .$$





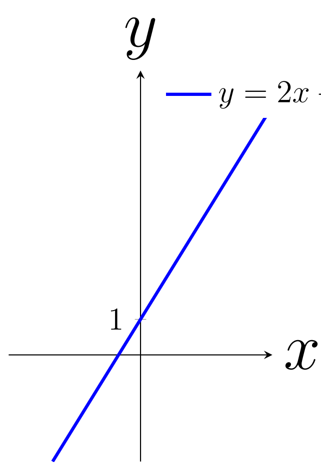
- אומרים כי f יורדת מונוטונית ממש אם לכל $a,b\in I$,

$$a<b \quad\Rightarrow\quad f(a)>f(b)\ .$$



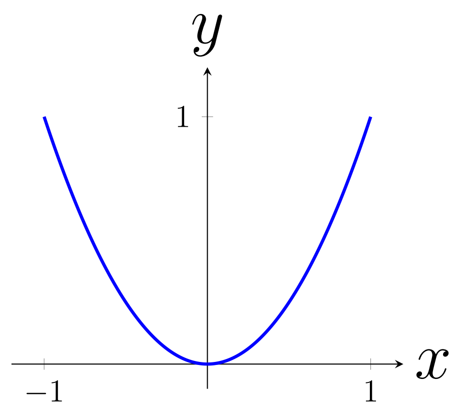
דוגמה 3.32

$f(x)=2x+1$ עולה מונוטונית ממש.



דוגמה 3.33

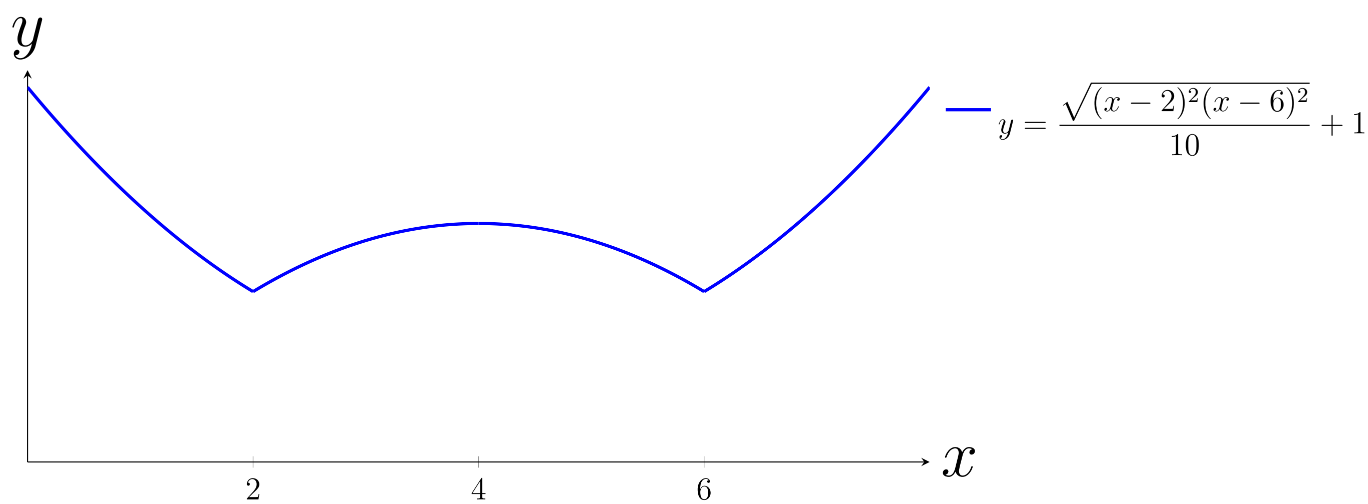
$f(x)=x^2$ עולה בקטע $[0,\infty)$ ויורדת בקטע $(-\infty,0]$.



דוגמה 3.34

הגרף להלן מתאר פונקציה $f(x)$. לפי הגרף,

- $f(x)$ יורדת בתחומים $(-\infty, 2]$ ו- $[4, 6]$.
- $f(x)$ עולה בתחומים $[2, 4]$ ו- $[6, \infty)$.



משפט 3.2 פונקציה מונוטונית אם"ם היא חח"ע

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה.

f עולה ממש או יורדת ממש בטע I אם ורק אם היא חח"ע בקטע I.

*

הוכחה: (להעשרה בלבד!)

נניח ש- f עולה ממש או יורדת ממש בקטע I.

יהיו $a, b \in I$ כך ש- $a \neq b$. יש שתי אפשרויות: $a < b$ או $a > b$.

- אם $a < b$, מכיוון ש- f עולה או ורדת ממש, מתקיים $f(a) < f(b)$ או $f(a) > f(b)$, ז"א $f(a) \neq f(b)$.
- אם $a > b$, מכיוון ש- f עולה או ורדת ממש, מתקיים $f(a) < f(b)$ או $f(a) > f(b)$, ז"א $f(a) \neq f(b)$.

לפי שתי האפשרויות, קיבלנו שאם $a \neq b$ אז $f(a) \neq f(b)$ לכל $a, b \in I$, לכן f חח"ע.

נניח ש- f חח"ע I.

לכל $a \neq b$ מתקיים $f(a) \neq f(b)$.

מכיוון ש- $a \neq b$ אז בהכרח $a < b$ או $a > b$. נניח ש- $a < b$.

מכיוון ש- $f(a) \neq f(b)$ אז בהכרח $f(a) < f(b)$ או $f(a) > f(b)$.

ז"א קיבלנו שאם $a < b$ אז מתקיים ש- $f(a) < f(b)$ או $f(a) > f(b)$.

לפיכך f עולה ממש או f יורדת ממש.

■

חסימות

הגדרה 3.7 פונקציה חסומה

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע I.

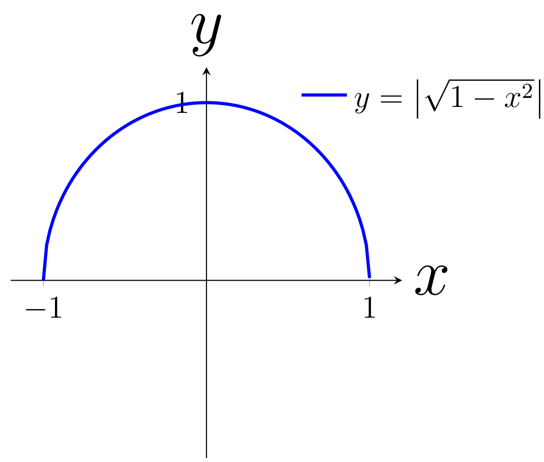
- אומרים כי f **חסומה מלמעלה** אם קיים מספר $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in I$ מתקיים
$$f(x) < M \ .$$
- אומרים כי f **חסומה מלמטה** אם קיים מספר $m \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in I$ מתקיים
$$f(x) > m \ ,$$
- אומרים כי f **חסומה** אם f חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה.

ז"א f חסומה אם קיימים מספרים $m, M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in I$ מתקיים
$$m < f(x) < M \ .$$
אפשר לנסח את התנאי זו גם כך:

f חסומה בקטע I אם קיים $K \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in I$ מתקיים
$$|f(x)| < K \ .$$

דוגמה 3.35

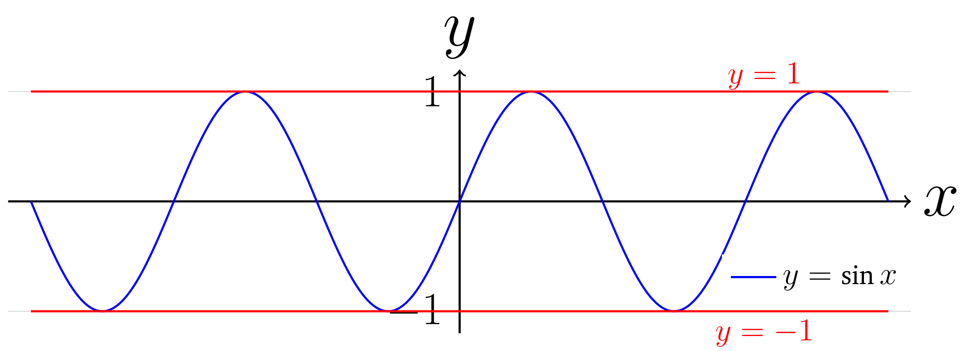
$f(x) = \left|\sqrt{1 - x^2}\right|$ חסומה:
$$0 \leq f(x) \leq 1 \ .$$



דוגמה 3.36

$f(x) = \sin x$ חסומה:

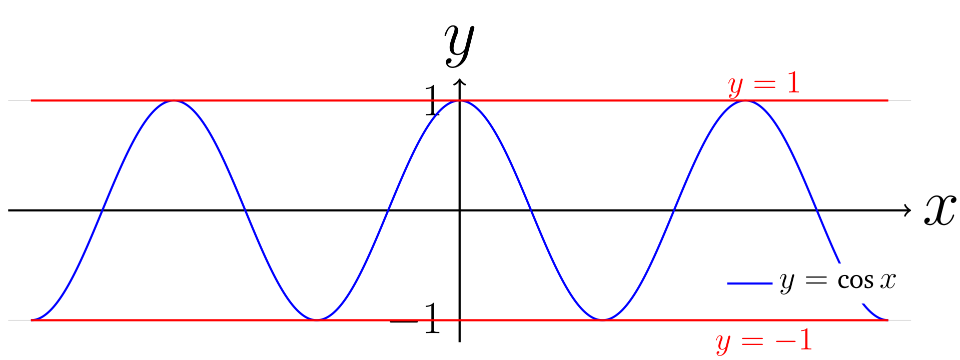
$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \ .$$



דוגמה 3.37

$f(x) = \cos x$ חסומה:

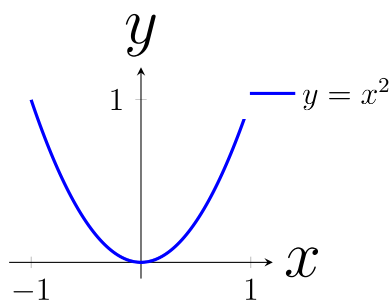
$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \ .$$



דוגמה 3.38

$y = x^2$ חסומה מלמטה אבל לא חסומה מלמעלה:

$$f(x) \geq 0 \ .$$



*מחזוריות

הגדרה 3.8 פונקציה מחזורית

פונקציה $f(x)$ נקראת מחזורית אם קיים מספר $T>0$ כך שלכל $x\in \mathrm{Dom}(f)$ וגם $x\pm T\in \mathrm{Dom}(f)$,

$$f(x+T)=f(x)\ ,\qquad f(x-T)=f(x)\ .$$

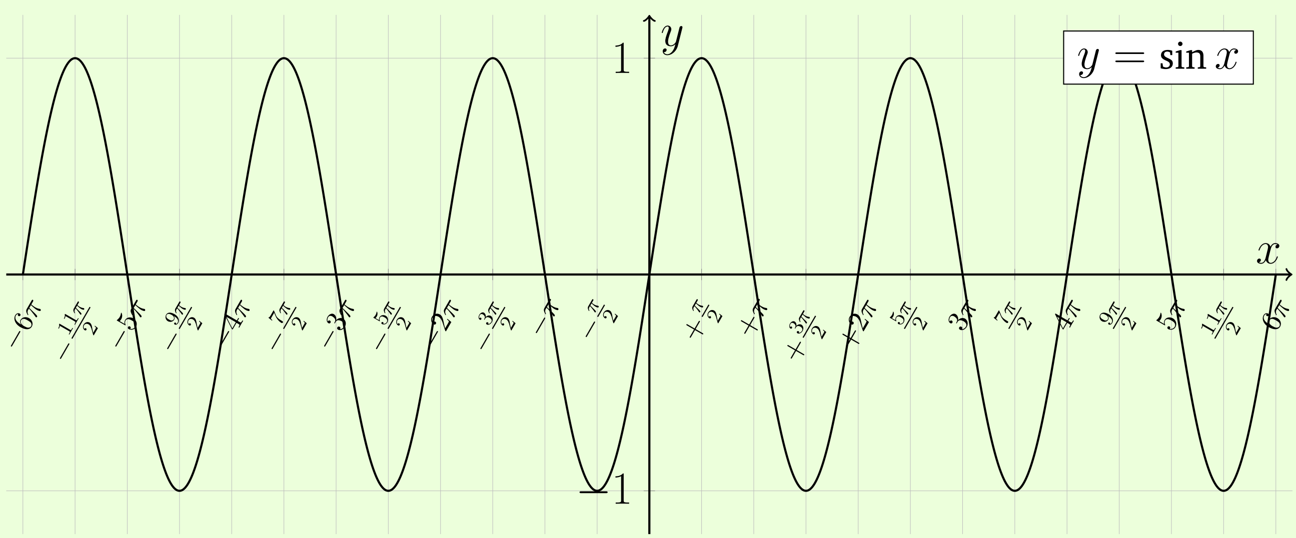
מספר $T>0$ כזה הקטן ביותר נקרא **המחזור** של f.

כלל 3.2 סיכום של המחזורים של הפונקציהות הטריגונומטריות

$f(x)=\sin(x)$ מחזורית עם מחזור 2π:

$$\sin(x+2\pi)=\sin(x)\ ,\qquad \sin(x-2\pi)=\sin(x)\ .$$

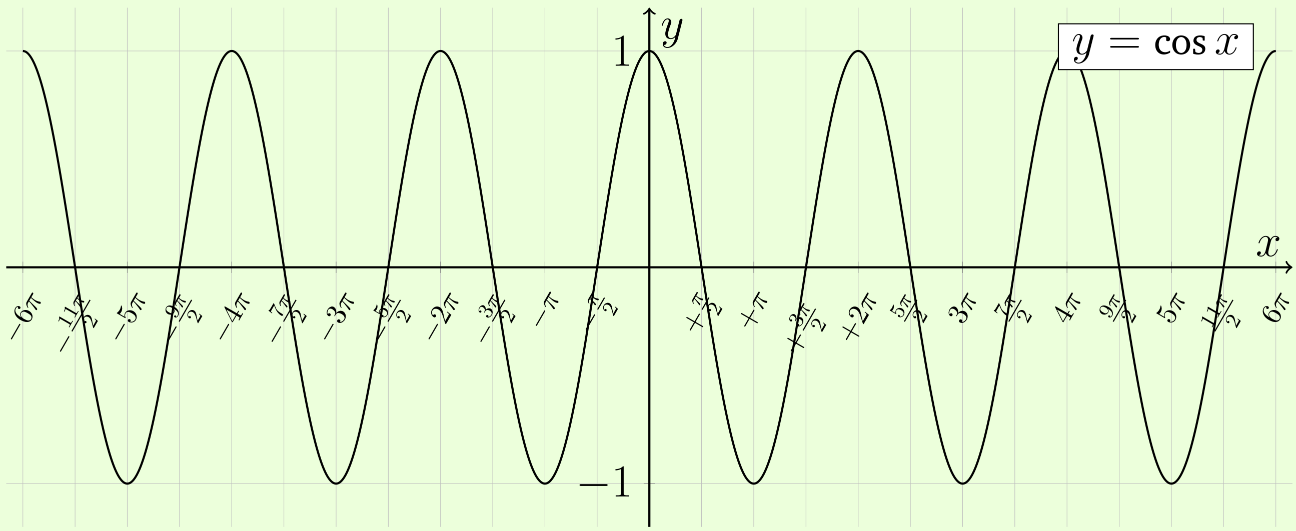
$$\sin(x+2\pi n)=\sin(x)\ ,\quad n\in\mathbb{Z}$$



$f(x)=\cos(x)$ מחזורית עם מחזור 2π:

$$\cos(x+2\pi)=\cos(x)\ ,\qquad \cos(x-2\pi)=\cos(x)\ .$$

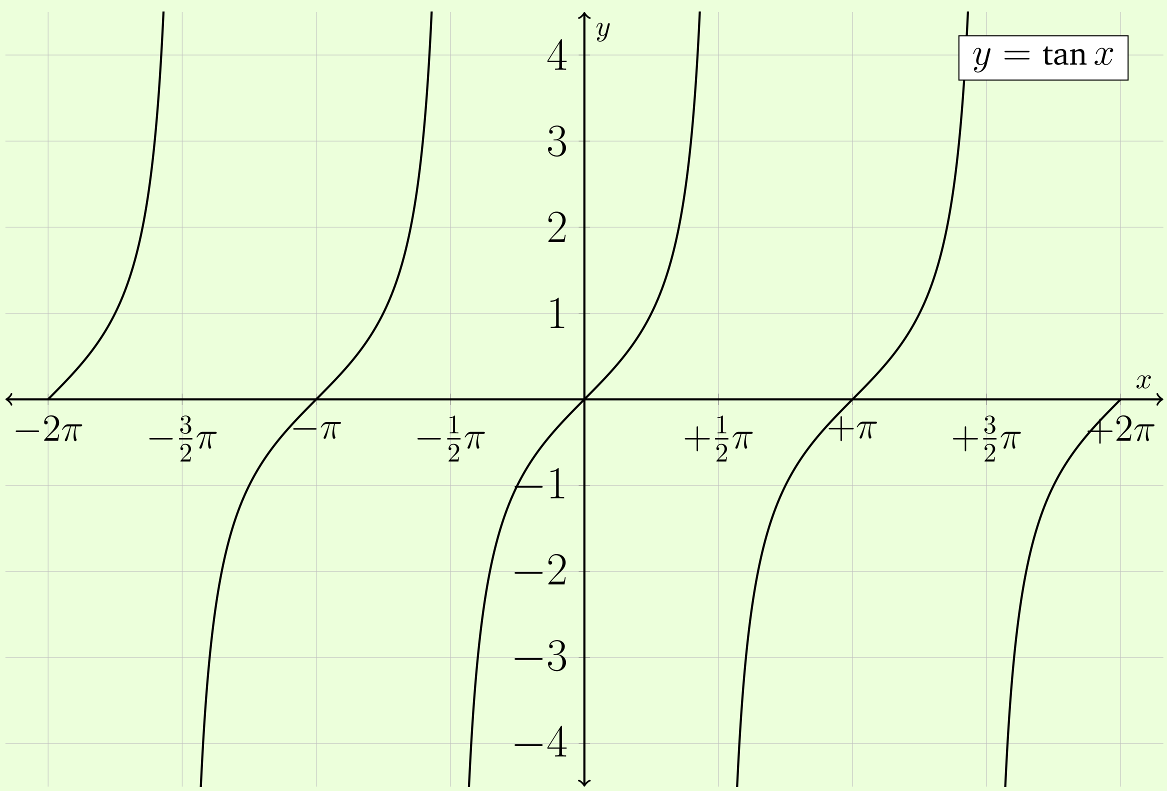
$$\cos(x+2\pi n)=\sin(x)\ ,\quad n\in\mathbb{Z}$$



$f(x) = \tan(x)$ מחזורית עם מחזור π:

$$\tan(x+\pi) = \tan(x) \ , \qquad \tan(x-\pi) = \tan(x) \ .$$

$$\tan(x+\pi n) = \tan(x) \ , \quad n \in \mathbb{Z}$$



$y = \sin x$	$T = 2\pi$
$y = \cos x$	$T = 2\pi$
$y = \tan x$	$T = \pi$
$y = \cot x$	$T = \pi$

דוגמה 3.39

מצאו את המחזור של $f(x)=\sin(2x+3)$.

פתרון:
המחזור של sin הוא 2π. לכן
$$\sin(2x+3)=\sin(2x+3+2\pi)\ .$$
לפי זה
$$f(x)=\sin(2x+3)=\sin(2x+3+2\pi)=\sin\left(2\left(x+\pi\right)+3\right)=f(x+\pi)\ .$$
לפיכך
$T=\pi$.

■

דוגמה 3.40

מצאו את המחזור של $f(x)=\sin(6x+4)$?

פתרון:
המחזור של sin הוא 2π. לכן
$$\sin\left(6x+4\right)=\sin\left(6x+4+2\pi\right)$$
כך ש-
$$f(x)=\sin\left(6x+4\right)=\sin\left(6x+4+2\pi\right)=\sin\left(6\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+4\right)=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\ .$$
לכן $T=\frac{\pi}{3}$.

■

משפט 3.3 מחזור של פונקציה טריגונומטרית עם פקטור והזזה בארגומנט

לכל $k\in\mathbb{R}\neq 0$ ו- $a\in\mathbb{R}$.

- הפונקציה $\sin(kx+a)$ מחזורית עם מחזור $T=\dfrac{2\pi}{k}$.
- הפונקציה $\cos(kx+a)$ מחזורית עם מחזור $T=\dfrac{2\pi}{k}$.
- הפונקציה $\tan(kx+a)$ מחזורית עם מחזור $T=\dfrac{\pi}{k}$.

לכל $k\in\mathbb{R}\neq 0$ ו- $a\in\mathbb{R}$.

- הפונקציה $\sin\left(\frac{x}{k}+a\right)$ מחזורית עם מחזור $T=2k\pi$.
- הפונקציה $\cos\left(\frac{x}{k}+a\right)$ מחזורית עם מחזור $T=2k\pi$.
- הפונקציה $\tan\left(\frac{x}{k}+a\right)$ מחזורית עם מחזור $T=k\pi$.

הוכחה: תרגיל בית!

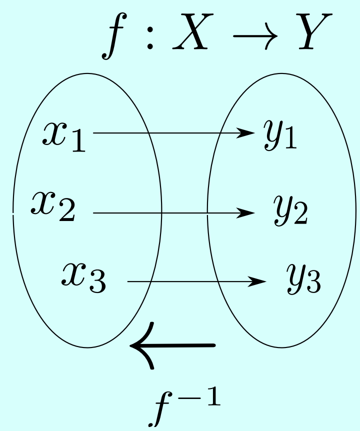
■

3.3 פונקציה הפוכה

הגדרה 3.9 פונקציה הפוכה

נניח ש- $f : X \to Y$ פונקציה.
אם $f(x)$ חד חד ערכית ועל אז ניתן להגדיר הפונקציה ההפוכה, $f^{-1}(x)$ באופן הבא:

$$f(x) = y \qquad \Leftrightarrow \qquad x = f^{-1}(y) \ .$$



$$f^{-1}(y_1) = x_1 \ ,$$
$$f^{-1}(y_2) = x_2 \ ,$$
$$f^{-1}(y_3) = x_3 \ .$$

משפט 3.4

הגרפים של שתי פונקציות הפוכות אחד לשניה סימטריים ביחס לקו $y = x$.

דוגמה 3.41

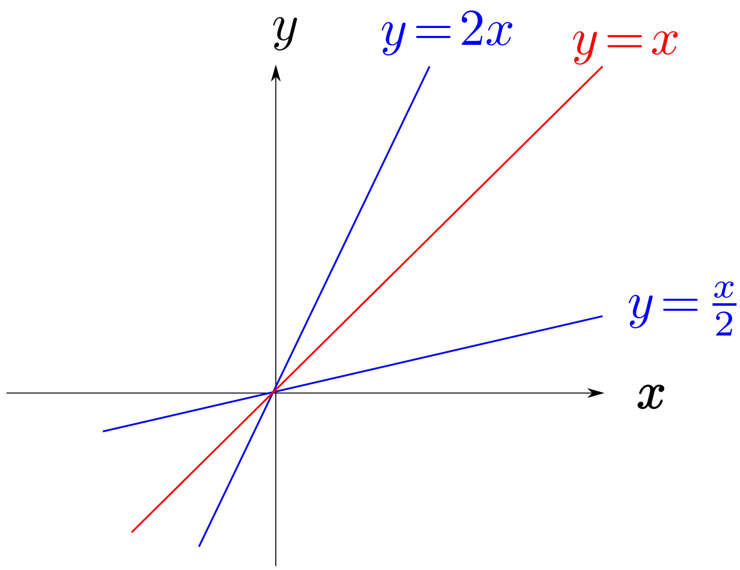
נתונה $f(x) = 2x$. נחשב את הפונקציה ההפוכה:

$$y = 2x \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{y}{2}$$

לכן

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2} \ .$$

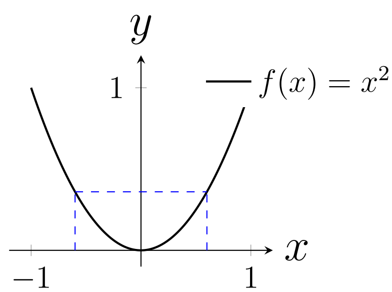
נשרטט את הגרפים שלהם על אותה מערכת צירים:



נשים לב כי הגרפים של $f(x)$ ו- $f^{-1}(x)$ סימטריים ביחס לקו $y=x$.

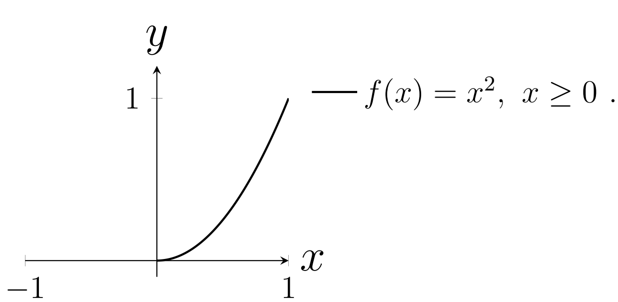
דוגמה 3.42

נתונה הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שמוגדרת $f(x)=x^2$. הפונקציה לא הפיכה בגלל ש- $f(x)$ לא חד חד ערכית, כמתואר בגרף להלן.



דוגמה 3.43

בשונה לדוגמה הקודמת, הפונקציה $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, ז"א הפונקציה שמוגדרת בקטע $[0,\infty)$, היא כן הפיכה מפני שבקטע זו $f(x)$ חד חד ערכית, כמתואר בגרף להלן.

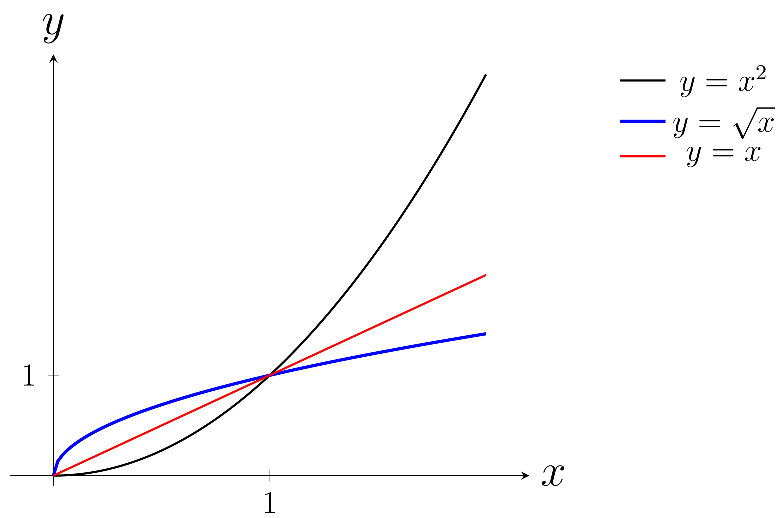


נחשב את הפונקציה ההפוכה:

$$y=x^2 \qquad \Rightarrow \qquad x=\sqrt{y}$$

לכן

$$f^{-1}(x)=\sqrt{x}\ .$$



משפט 3.5 תחום ההגדרה ותמונתה של פונקציה הפוכה

תהי $f(x)$ פונקציה ותהי $f^{-1}(x)$ הפונקציה ההפוכה.

- תחום ההגדרה של הפונקציה ההפוכה שווה לתמונתה של הפונקציה המקורית.
  ז"א $\mathrm{Dom}\left(f^{-1}\right) = \mathrm{Im}\left(f\right)$.
- התמונה של הפונקציה ההפוכה שווה לתחום ההגדרה של הפונקציה המקורית.
  ז"א $\mathrm{Im}\left(f^{-1}\right) = \mathrm{Dom}\left(f\right)$.

דוגמה 3.44

נתונה הפונקציה $f(x) = |\sqrt{x+5}| - 2$.

1) מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של f.

2) מצאו את הפונקציה ההפוכה.

3) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה ההפוכה.

4) מצאו את התמונה של הפונקציה ההפוכה.

5) ציירו את הגרפים שלהם על אותה מערכת צירים.

פתרון:

1) שורש של מספר שלילי לא מוגדר. לפי זה נדרוש ש- $x+5 \geq 0 \Leftarrow x \geq -5$. לפיכך:

$$\mathrm{Dom}(f) = [-5, \infty) \ .$$

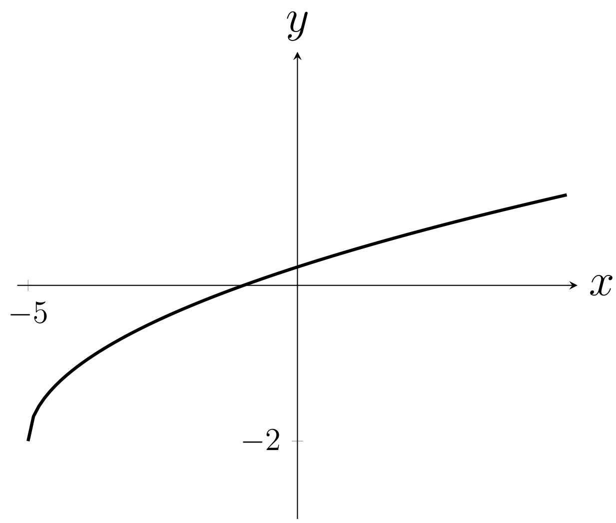
2) <u>שיטה אלגברית</u>

נתבונן על $y = |\sqrt{x+5}| - 2$. נשים לב ש- $|\sqrt{x+5}| \geq 0$ לכן $y \geq -2$ לכן

$$\mathrm{Im}(f) = [-2, \infty) \ .$$

<u>שיטה גרפית</u>

הגרף של $f(x)=\sqrt{x+5}-2$ נראה כך:



הגרף מתחיל ב- $y=-2$ ועובר דרך כל הנקודות מ- $y=-2$ למעלה לכן

$$\mathrm{Im}(f)=[-2,\infty)\ .$$

$$\mathrm{Im}(f)=[-2,\infty)\ .$$

3) נרשום $y=|\sqrt{x+5}|-2$ ונבודד את x:

$$y=|\sqrt{x+5}|-2 \quad\Rightarrow\quad y+2=|\sqrt{x+5}| \quad\Rightarrow\quad (y+2)^2=x+5 \quad\Rightarrow\quad x=(y+2)^2-5$$

לפיכך

$$f^{-1}(x)=(x+2)^2-5\ .$$

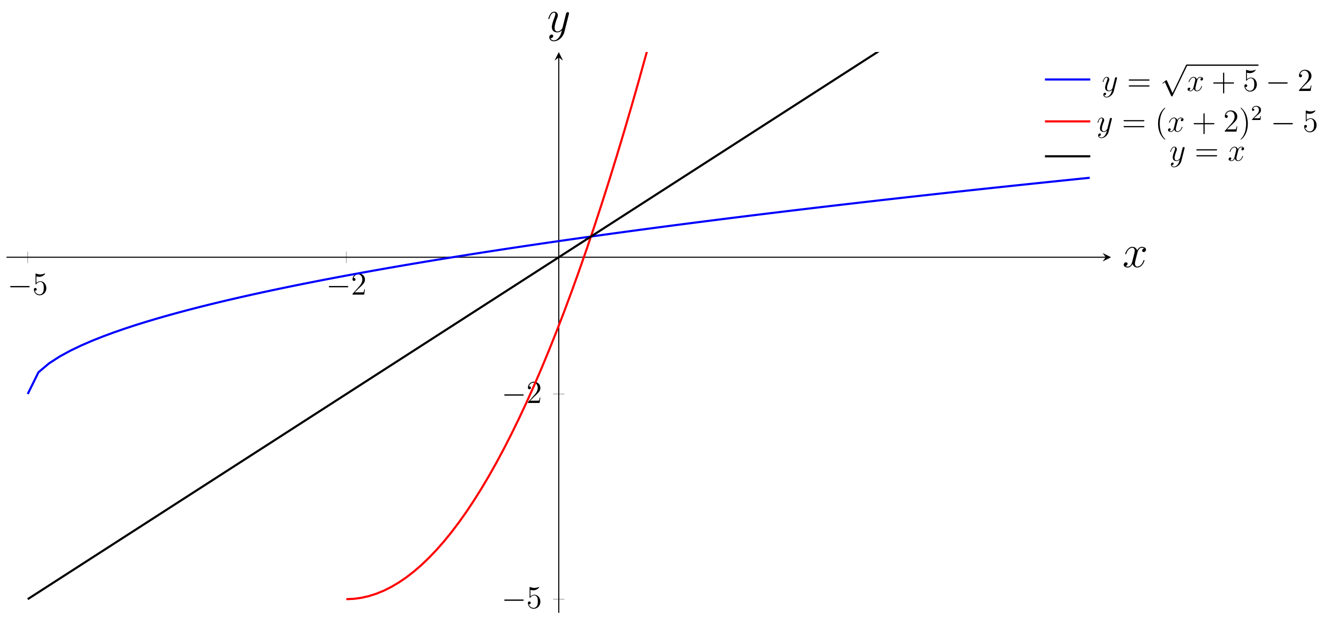
4)

$$\mathrm{Dom}\left(f^{-1}\right)=\mathrm{Im}(f)=[-2,\infty)\ .$$

5)

$$\mathrm{Im}\left(f^{-1}\right)=\mathrm{Dom}(f)=[-5,\infty)\ .$$

6)



■

דוגמה 3.45

נתונה פונקציה $y=\sqrt{x-3}+1$.

1) מצאו את תחום ההגדרה והתמונה שלה.

2) מצאו אץ הפונקציה ההפוכה ואת תחום הגדרתה ותמונתה.

3) ציירו את הגרפים של שתי הפונקציות באותה מערכת צירים.

פתרון:

1) $f(x)=\sqrt{x-3}+1$.

תחום ההגדרה: $\text{Dom}(f)=\{x\geq 3\}$.

תמונתה: $\text{Im}(f)=\{y\geq 1\}$.

2)

$$y=\sqrt{x-3}+1 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x-3}=y-1 \quad\Rightarrow\quad x=(y-1)^2+3$$

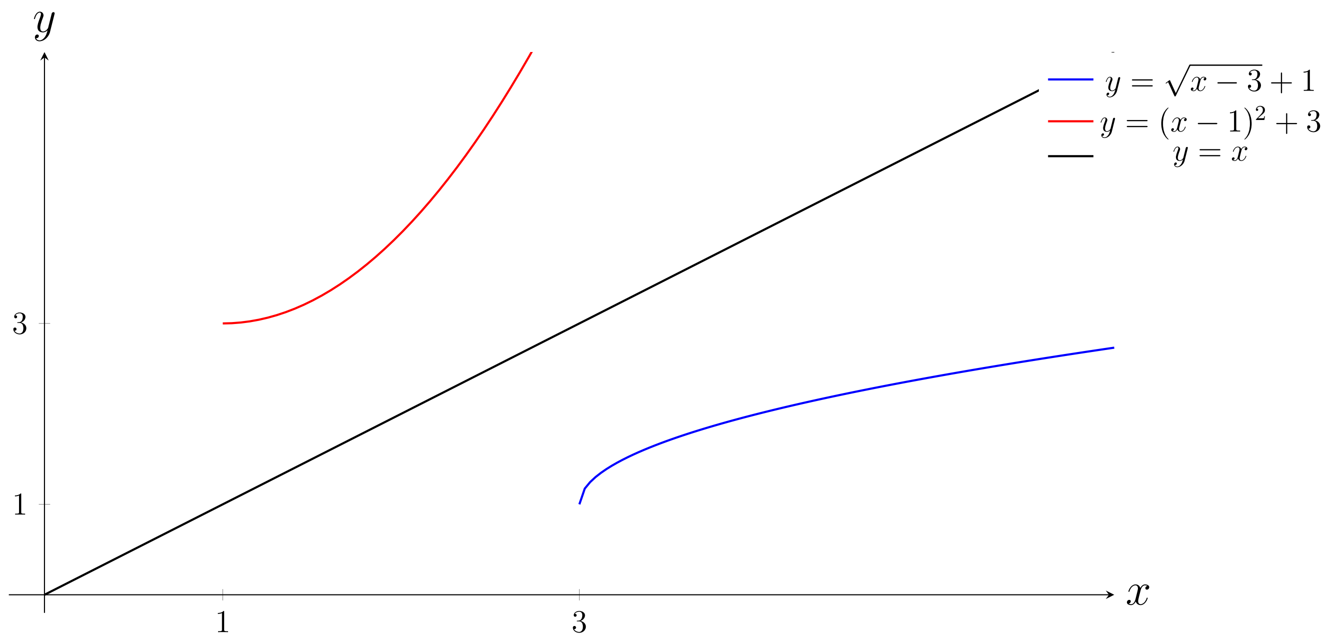
הפונקציה ההפוכה:

$$f^{-1}(x)=(x-1)^2+3\ .$$

תחום ההגדרה: $x\geq 1$.

התמונה: $y\geq 3$.

3)



■

3.4 פונקציה מורכבת

הגדרה 3.10 פונקציה מורכבת

נניח ש $y = f(u)$ ו- $u = g(x)$, אז לפונקציה $y = f(g(x))$ קוראים **פונקציה מורכבת**.

דוגמה 3.46

$$y = \sin(2x)$$

הוא הרכבה של פונקציות $y = \sin u$ ו- $u = 2x$.

דוגמה 3.47

$$y = e^{\sqrt{x}}$$

הוא הרכבה של פונקציות $y = e^u$ ו- $u = \sqrt{x}$.

דוגמה 3.48

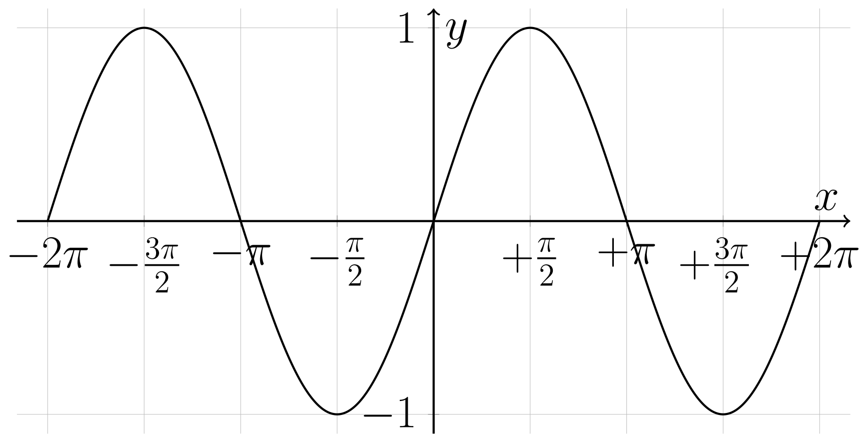
$$y = \frac{1}{(x^2-3)^3}$$

הוא הרכבה של $y = \dfrac{1}{u^3}$ ו- $u = x^2 - 3$.

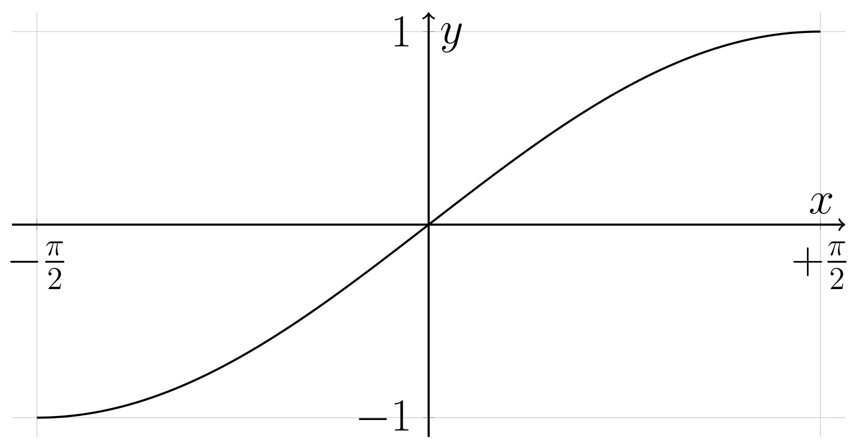
3.5 פונקציות טריגונומטריות הפוכות

arcsin

נתבונן על הפונקציה $f(x) = \sin(x)$ עם תחום ההגדרה $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. לפי הגרף, הפונקציה הזאת לא חד חד ערכית ולכן היא לא הפיכה:



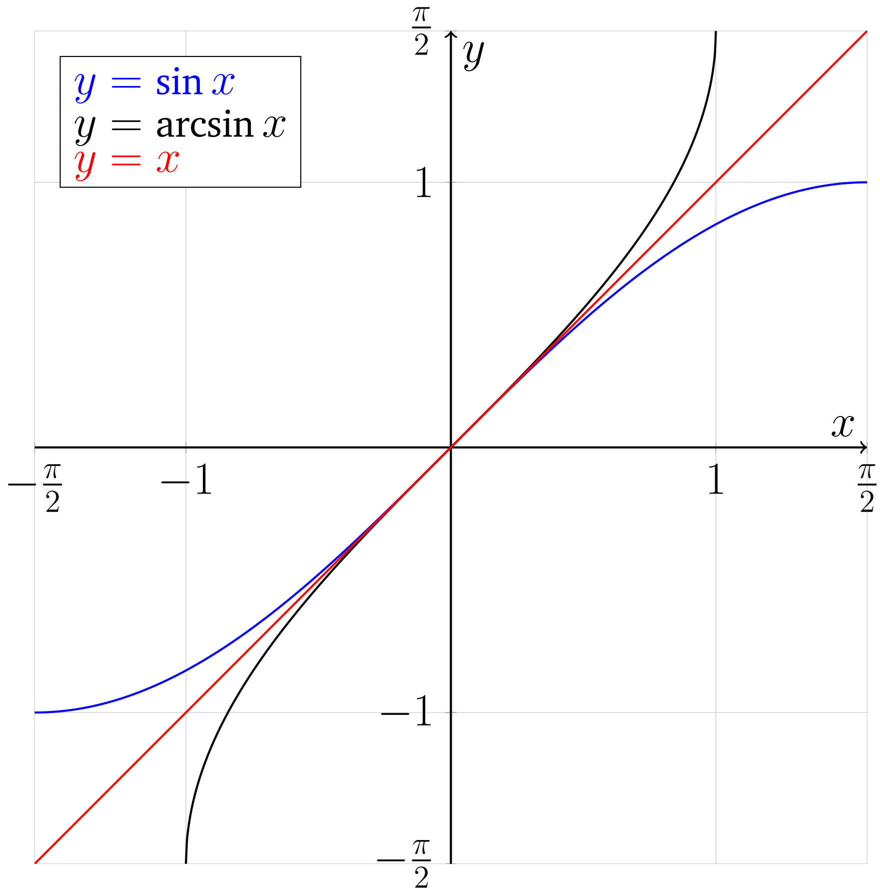
כדי להגדיר את הפונקציה ההפוכה של $\sin x$, עלינו להגביל את תחום ההגדרתה כך שהיא תהיה חד חד ערכית. תהי $f(x) = \sin(x)$ עם תחום ההגדרה $\text{Dom}(f) = [-\pi/2, \pi/2]$. עכשיו הפונקציה חד חד ערכית (כמתואר בגרף) ולכן היא הפיכה:



נקח $y = \sin(x)$ עם תחום ההגדרה $\frac{\pi}{2} \le x \le -\frac{\pi}{2}$. התמונה שלה היא $1 \le y \le -1$.

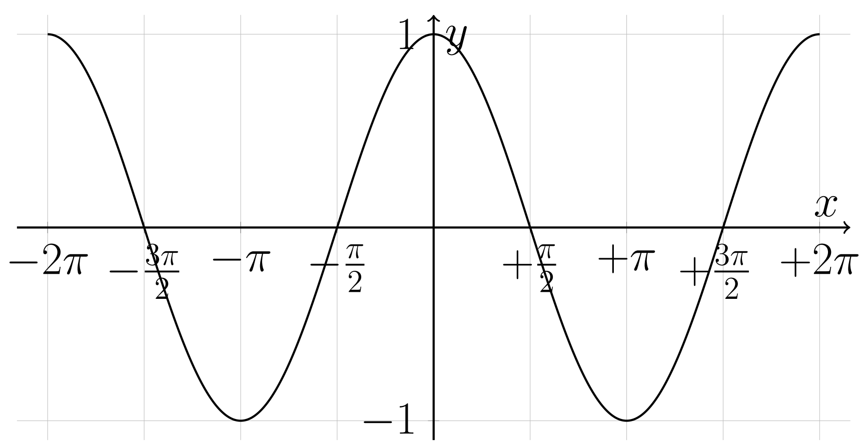
הפונקציה ההפוכה היא $y = \arcsin x$. תחום ההגדרה היא $1 \le x \le -1$ והתמונה היא $\frac{\pi}{2} \le y \le -\frac{\pi}{2}$.

$$
\begin{aligned}
\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) &= -1 &&\Rightarrow & \arcsin(-1) &= -\tfrac{\pi}{2}\\
\sin\left(-\tfrac{\pi}{3}\right) &= -\tfrac{\sqrt{3}}{2} &&\Rightarrow & \arcsin\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) &= -\tfrac{\pi}{3}\\
\sin\left(-\tfrac{\pi}{4}\right) &= -\tfrac{1}{\sqrt{2}} &&\Rightarrow & \arcsin\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) &= -\tfrac{\pi}{4}\\
\sin\left(-\tfrac{\pi}{6}\right) &= -\tfrac{1}{2} &&\Rightarrow & \arcsin\left(-\tfrac{1}{2}\right) &= -\tfrac{\pi}{6}\\
\sin(0) &= 0 &&\Rightarrow & \arcsin(0) &= 0\\
\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) &= \tfrac{1}{2} &&\Rightarrow & \arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \tfrac{\pi}{6}\\
\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} &&\Rightarrow & \arcsin\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \tfrac{\pi}{4}\\
\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} &&\Rightarrow & \arcsin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \tfrac{\pi}{3}\\
\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= 1 &&\Rightarrow & \arcsin(1) &= \tfrac{\pi}{2}\ .
\end{aligned}
$$

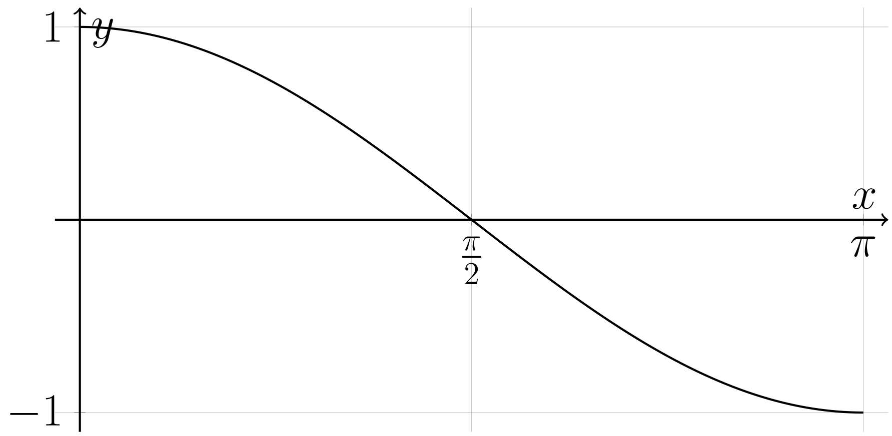


arcos

באותה מידה $\cos(x)$ בתחום ההגדרה $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ לא חד חד ערכית (כמתואר בגרף) ולכן היא לא הפיכה:



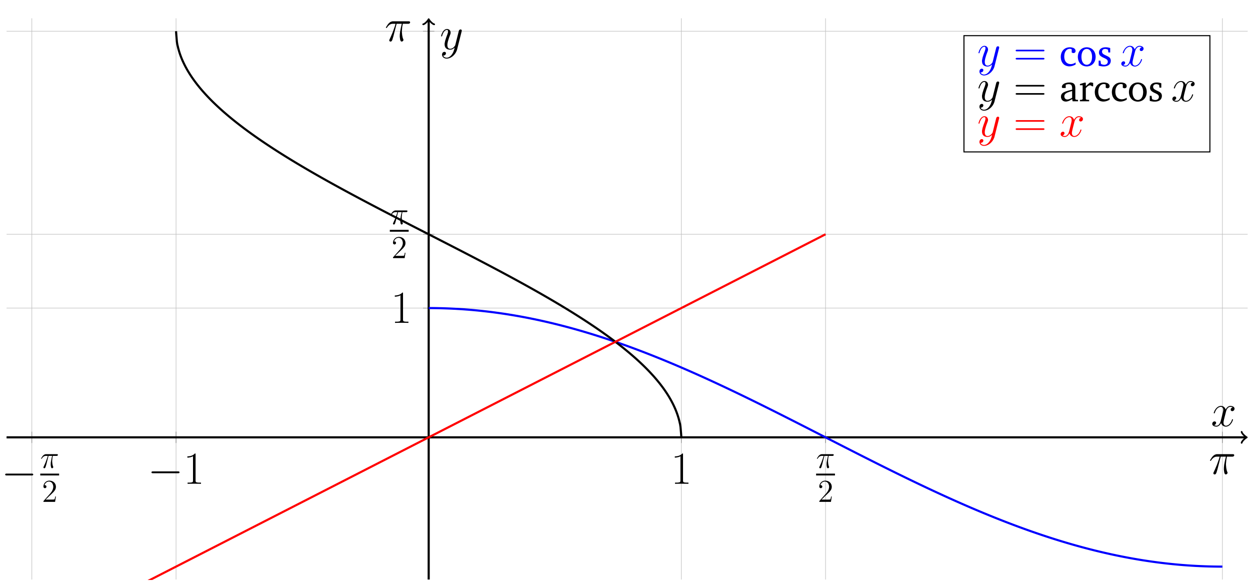
נגדיר את הפונקציה $f(x) = \cos(x)$ בתחום הגדרה $\mathrm{Dom}(f) = [0, \pi]$. עכשיו הפונקציה חד חד ערכית (כמתואר בגרף להלן) ולכן היא הפיכה:



נקח $y=\cos(x)$ עם תחום ההגדרה $0\le x\le \pi$. התמונה שלה היא $-1\le y\le 1$.

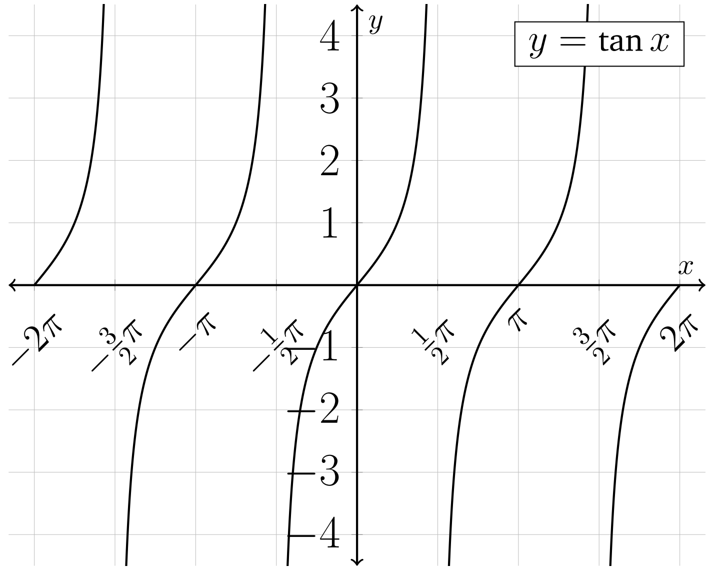
הפונקציה ההפוכה היא $y=\arccos x$. תחום ההגדרה היא $-1\le x\le 1$ והתמונה היא $0\le y\le \pi$.

$$\begin{aligned}
\cos\left(0\right) &= 1 &&\Rightarrow& \arccos\left(1\right) &= 0\\
\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} &&\Rightarrow& \arccos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \tfrac{\pi}{6}\\
\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} &&\Rightarrow& \arccos\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \tfrac{\pi}{4}\\
\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) &= \tfrac{1}{2} &&\Rightarrow& \arccos\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \tfrac{\pi}{3}\\
\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= 0 &&\Rightarrow& \arccos\left(0\right) &= \tfrac{\pi}{2}\\
\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) &= -\tfrac{1}{2} &&\Rightarrow& \arccos\left(-\tfrac{1}{2}\right) &= \tfrac{2\pi}{3}\\
\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right) &= \tfrac{-1}{\sqrt{2}} &&\Rightarrow& \arccos\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \tfrac{3\pi}{4}\\
\cos\left(\tfrac{5\pi}{6}\right) &= -\tfrac{1}{2} &&\Rightarrow& \arccos\left(-\tfrac{1}{2}\right) &= \tfrac{5\pi}{6}\\
\cos\left(\pi\right) &= -1 &&\Rightarrow& \arccos\left(-1\right) &= \pi\ .
\end{aligned}$$

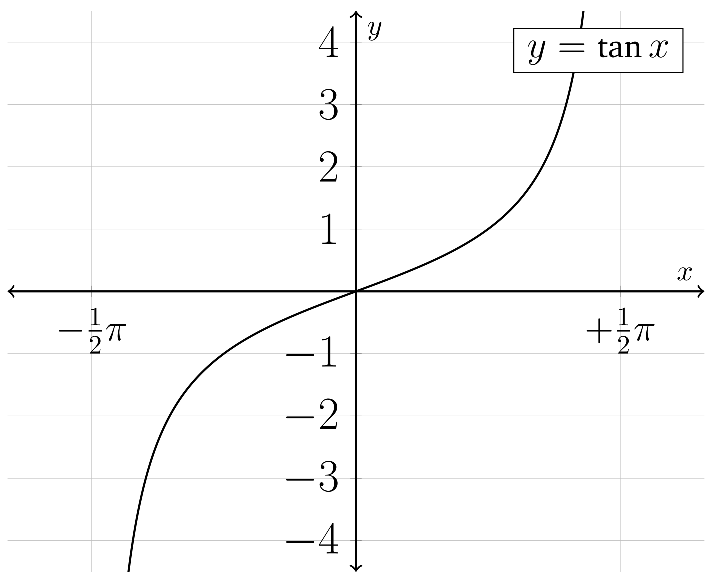


arctan

$\tan(x)$ גם לא חד חד ערכית כפי שרואים בגרף שלה:



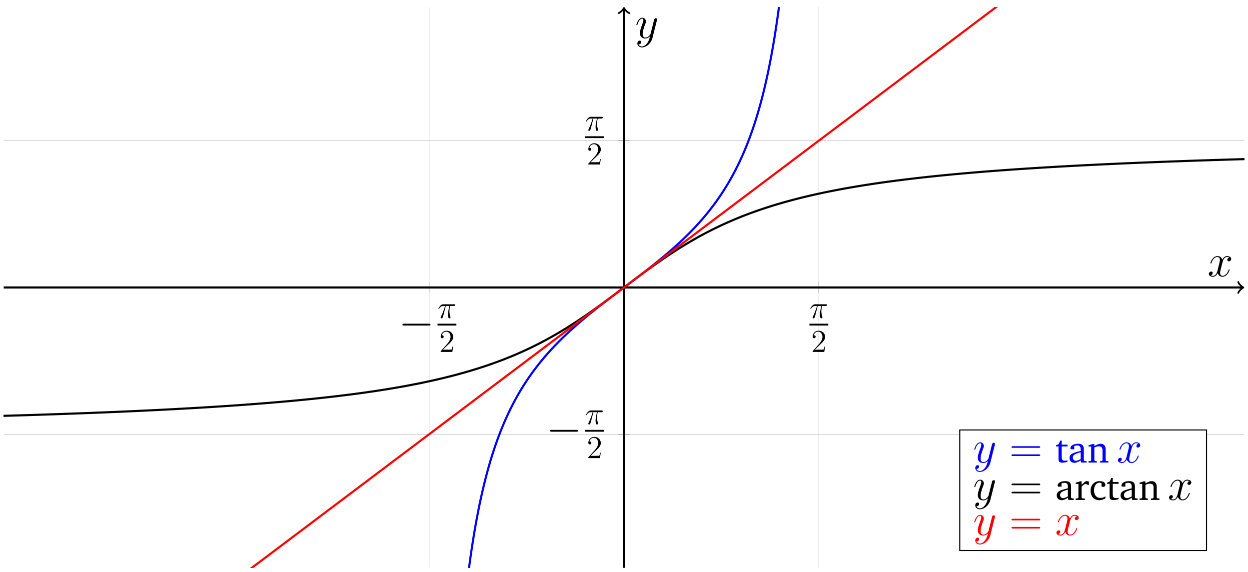
נגדיר פונקציה $y = \tan(x)$ בתחום ההגדרה $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. עכשיו הפונקציה היא חד חד ערכית בתחום זו כמתואר גרף:



לפיכך נקח $y = \tan(x)$ עם תחום ההגדרה $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. התמונתה היא $-\infty \leq y \leq \infty$.

הפונקציה ההפוכה היא $y = \arctan x$. תחום ההגדרה היא $-\infty \leq x \leq \infty$ והתמונה היא $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
\tan\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) &= -\infty && \Rightarrow && \arctan\left(-\infty\right) &&= -\tfrac{\pi}{2}\\
\tan\left(-\tfrac{\pi}{3}\right) &= -\sqrt{3} && \Rightarrow && \arctan\left(-\sqrt{3}\right) &&= -\tfrac{\pi}{3}\\
\tan\left(-\tfrac{\pi}{4}\right) &= -1 && \Rightarrow && \arctan\left(-1\right) &&= -\tfrac{\pi}{4}\\
\tan\left(-\tfrac{\pi}{6}\right) &= -\tfrac{1}{\sqrt{3}} && \Rightarrow && \arctan\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) &&= -\tfrac{\pi}{6}\\
\tan\left(0\right) &= 0 && \Rightarrow && \arctan\left(0\right) &&= 0\\
\tan\left(\tfrac{\pi}{6}\right) &= \tfrac{1}{\sqrt{3}} && \Rightarrow && \arctan\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) &&= \tfrac{\pi}{6}\\
\tan\left(\tfrac{\pi}{4}\right) &= 1 && \Rightarrow && \arctan\left(1\right) &&= \tfrac{\pi}{4}\\
\tan\left(\tfrac{\pi}{3}\right) &= \sqrt{3} && \Rightarrow && \arctan\left(\sqrt{3}\right) &&= \tfrac{\pi}{3}\\
\tan\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= \infty && \Rightarrow && \arctan\left(\infty\right) &&= \tfrac{\pi}{2}\ .
\end{aligned}$$



3.6 תרגילים

דוגמה 3.49

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה. הוכיחו שאם f זוגית ואי-זוגית בקטע I, אז בהכרח f שווה לפונקצית אפס.

פתרון:
לכל $x\in I$, f זוגית, ז"א

$$f(-x)=f(x) \qquad \forall x\in I\ . \tag{\#1}$$

לכל $x\in I$, f אי זוגית, ז"א

$$f(-x)=-f(x) \qquad \forall x\in I\ . \tag{\#2}$$

לפי (#1) ו- (#2), $f(x)=f(-x)$ ו- $f(x)=-f(-x)$, לכן

$$f(x)=-f(x)$$

לכל $x\in I$. אז בהכרח

$$f(x)=0\ .$$

■

דוגמה 3.50

עבור אילו ערכים של הפרמטר a הפונקציה $y(x)=x^6+ax^3-2x^3-2x^2+1$ תהיה זוגית?

פתרון:
אם y זוגית אז $y(-x)=y(x)$.
נרשום $y(x)$ בצורה

$$y=x^6+(a-2)x^3-2x^2+1\ .$$

לפי זה

$$\begin{aligned} y(-x) =& (-x)^6 + (a-2)(-x)^3 - 2(-x)^2 + 1 \\ =& x^6 - (a-2)x^3 - 2x^2 + 1 \ . \end{aligned}$$

לכן $y(-x) = y(x)$ רק אם $a = 2$. ■

דוגמה 3.51

הוכיחו כי הפונקציה e^{-x} יורדת מונוטונית ממש.

פתרון:
תהי $f(x) = e^{-x}$ ויהיו $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$f(a) = e^{-a} = \frac{1}{e^a} \ .$$

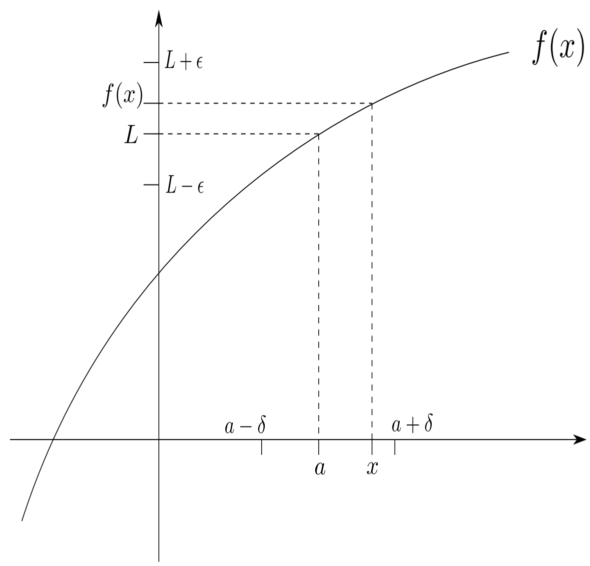
כיוון ש- $a < b$ ו- $e > 1$ אז $e^a < e^b$ ולכן $\frac{1}{e^b} > \frac{1}{e^a}$. לפיכך

$$f(a) = \frac{1}{e^a} > \frac{1}{e^b} = f(b) \ ,$$

ז"א אם $a < b$ אז $f(a) > f(b)$.
יורדת ממש. ■

שיעור 4
גבולות

4.1 גבול של פונקציה



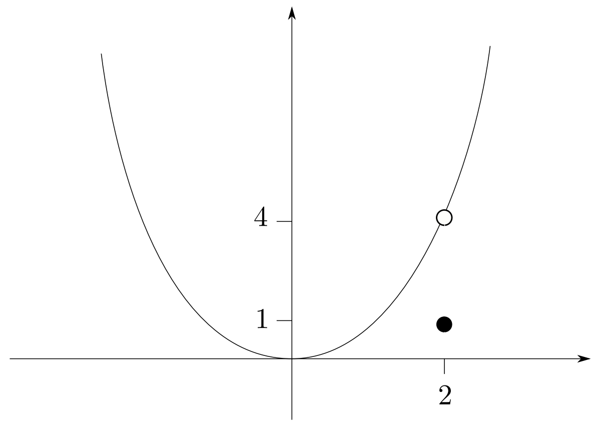
הגדרה 4.1 גבול של פונקציה

אומרים כי $\lim_{x\to a} f(x) = L$ אם לכל סביבה $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ של L קיימת סביבה $(a-\delta, a+\delta)$ של a כך שלכל $x \neq a$ השייך לסביבה של a מתקיים:
$f(x)$ שייך לסביבה של L.

במילים פשוטות, כאשר x מתקרב ל- a, $f(x)$ מתקרב ל- L. עד עכשיו הסתכלנו אל דוגמאות של גבול של פונקציה בנקודה a בה הפונקציה מוגדרת. הכלל הבא יעזור לנו לחשב גבולות של פונקציות בנקודות בהן הפונקציה מוגדרת:

דוגמה 4.1

1. $\lim_{x\to 3}(2x-1) = 5$.
2. $\lim_{x\to a} C = C$.
3. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2\ , \\ 1 & x = 2\ . \end{cases}$.

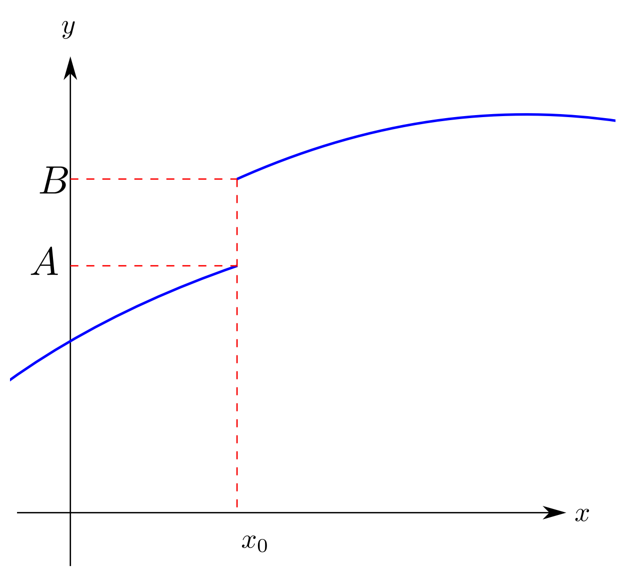


$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \ .$$

.4 $\lim_{x\to 4}(x^2+\sqrt{x}) = 4^2+\sqrt{4} = 18$.

4.2 גבולות חד צדדיים

בהגדרה של גבול של פונקציה $\lim_{x\to a} f(x) = L$ לא משנה איך x שואף ל- a (מצד ימין או מצד שמאול), $f(x)$ מתקרב ל- L. לפעמים, התוצאה תלויה באופן ההתקרבות של x ל- a.



בגרף של הפונקציה לעיל, כאשר x שואף ל- a משמאול, $f(x)$ מתקרב ל- A וכאשר x שואף ל a מימין, $f(x)$ ל B. אנחנו מסמנים את זה כך:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = A \ , \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = B \ .$$

הגדרה 4.2 גבול חד צדדי

גבול מצד שמאול

הגבול משמאול של פונקציה $f(x)$ בנקודה a שווה ל- A אם לכל סביבה של A קיימת סביבה של a כך שלכל $a<x$ מהסביבה של a, גם $f(x)$ שייך לסביבה של A. סימון:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = A \ .$$

גבול מצד ימין

הגבול מימין של פונקציה $f(x)$ בנקודה a שווה ל- B אם לכל סביבה של B קיימת סביבה של a כך שלכל $a>x$ מהסביבה של a, גם $f(x)$ שייך לסביבה של B. סימון:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = B \ .$$

משפט 4.1 קיום של גבול דו-צדדי

הגבול $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ קיים אם ורק אם $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$.

הוכחה: *להעשרה בלבד

הוכחה של "אם"

אם $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ אז לפי הגדרה 4.7, $\forall\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $|x-a|<\delta$ אז $|f(x)-L|<\epsilon$. לכן אם $x\in(a-\delta,a)$ אז $|f-L|<\epsilon$ ולכן

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \ ,$$

ואם $x\in(a,a+\delta)$ אז $|f-L|<\epsilon$ ולכן

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \ .$$

הוכחה של " רק אם"

אם $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, אז

(i) $\forall\epsilon>0$ קיים $\delta_1>0$ כך שאם $0<x-a<\delta_1$ אז $|f-L|<\epsilon$.

(ii) $\forall\epsilon>0$ קיים $\delta_2>0$ כך שאם $-\delta_2<x-a<0$ אז $|f-L|<\epsilon$.

לכן קיים δ_1,δ_2 כך שאם $a-\delta_2<x<a+\delta_1$ אז $|f-L|<\epsilon$.
יהי $\delta:=\min(\delta_1,\delta_2)$. מזה נובע שאם $a-\delta<x<a+\delta$ אז $|f-L|<\epsilon$, ולפיו

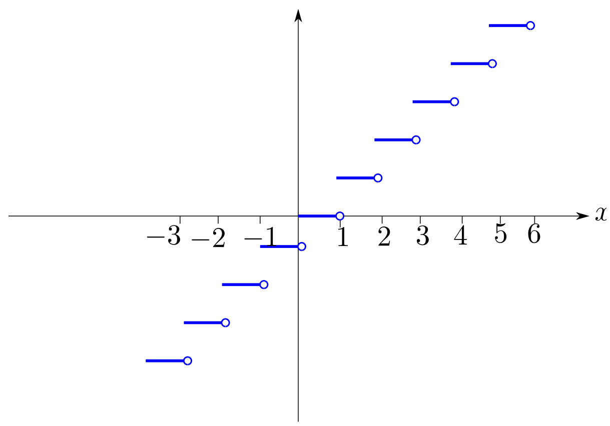
$$\lim_{x\to a} f(x) = L \ .$$

■

דוגמה 4.2

$f(x) = \lfloor x \rfloor$ (פונקציית הריצפה - המספר השלם הקרוב ביותר ל x שלא גדול ממנו.)

$$\lfloor 2.3 \rfloor = 2 \ , \qquad \lfloor 2.8 \rfloor = 2 \ , \qquad \lfloor -2.3 \rfloor = -3 \ .$$



נבדוק אם קיים $\lim\limits_{x\to 2} \lfloor x \rfloor$.

$$\lim_{x\to 2^+} \lfloor x \rfloor = 2 \ , \qquad \lim_{x\to 2^-} \lfloor x \rfloor = 1 \ ,$$

ז"א הגבולות החד צדדיים שונים ולכן לא קיים $\lim\limits_{x\to 2} \lfloor x \rfloor$.

לעומת זאת,

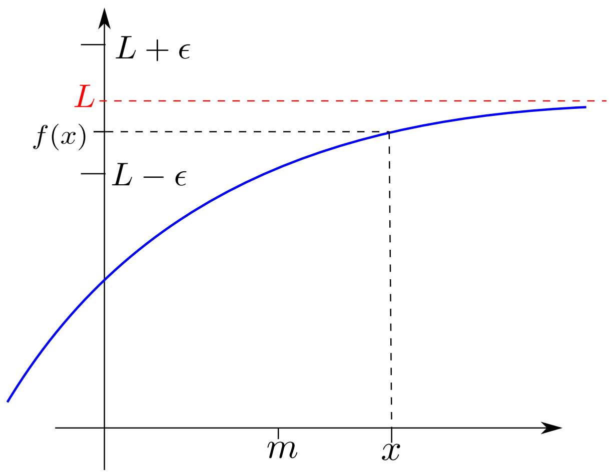
$$\lim_{x\to 2.5} \lfloor x \rfloor = 2$$

כן קיים.

4.3 גבול של פונקציה ב $x \to \infty$

הגדרה 4.3 גבול של פונקציה כאשר $x \to \infty$

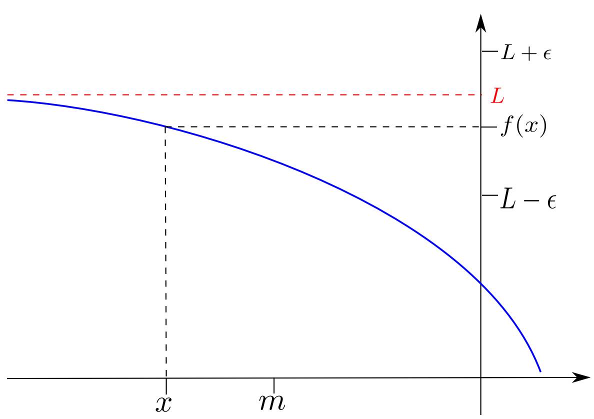
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ אם לכל סביבה של L קיים מספר m כך שלכל $x > m$ מתקיים: $f(x)$ שייך לסביבה של L.



במילים: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ אם לכל סביבה $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ של L קיים מספר m כך שלכל $x > m$ מתקיים: $f(x)$ שייך לסביבה $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ של L.

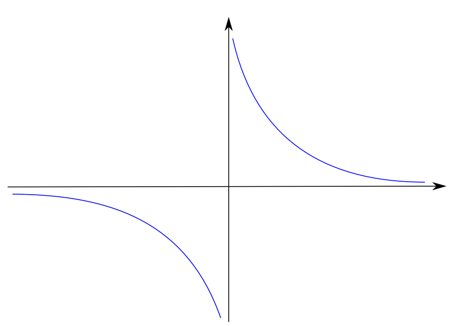
הגדרה 4.4 גבול של פונקציה כאשר $x\to -\infty$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$ אם לכל סביבה של L קיים מספר m כך שלכל $x < m$ מתקיים: $f(x)$ שייך לסביבה של L.



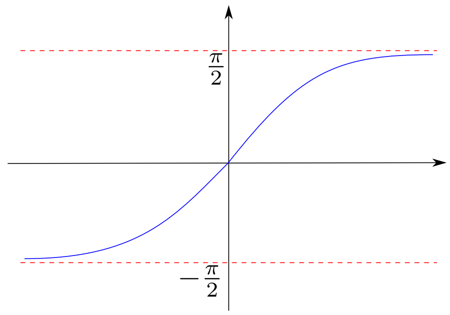
דוגמה 4.3

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \ , \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0^- \ .$$



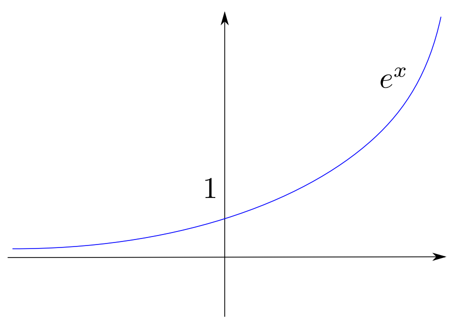
דוגמה 4.4

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \ , \qquad \lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \ .$$



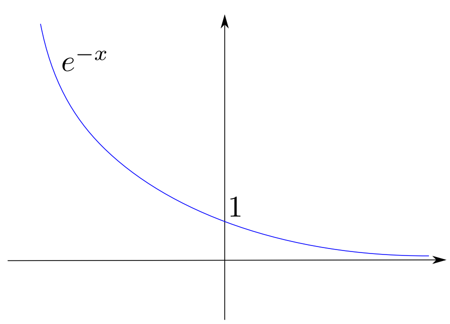
דוגמה 4.5

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \ .$$



דוגמה 4.6

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0 \ .$$



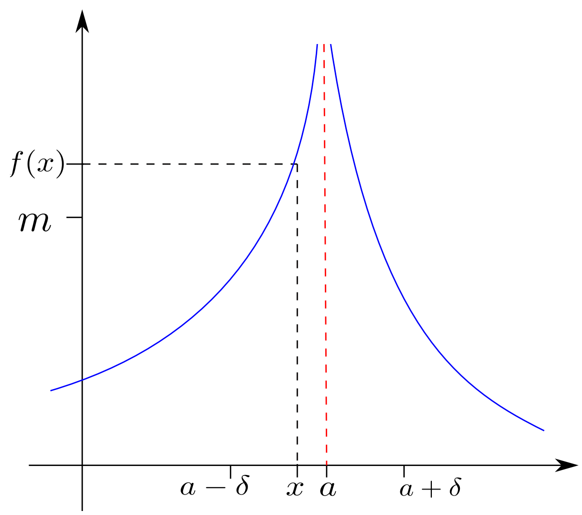
דוגמה 4.7

הגבולות $\lim_{x\to\infty} \cos x$, $\lim_{x\to-\infty} \cos x$, $\lim_{x\to\infty} \sin x$, $\lim_{x\to-\infty} \sin x$ לא קיימים.

4.4 גבול אינסופי בנקודה

הגדרה 4.5 גבול אינסופי של פונקציה בנקודה

$\lim_{x\to a} f(x) \to \infty$ אם לכל m קיימת סביבה של נקודה a, כך שלכל x השייך לסביבה של a, $f(x) > m$.

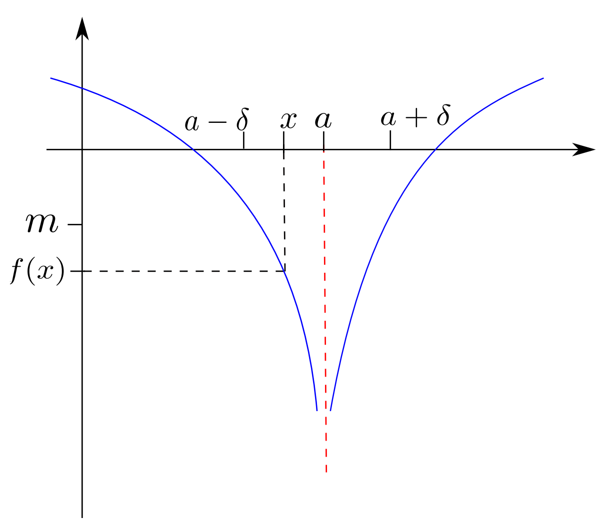


במילים: $\lim_{x\to a} f(x) \to \infty$ אם לכל מספר m קיימת סביבה $(a-\delta, a+\delta)$ של הנקודה a כך שלכל x השייך לסביבה זו, $f(x) > m$.

הגדרה 4.6 גבול מינוס אינסופי של פונקציה בנקודה

$$\lim_{x\to a} f(x) \to -\infty$$

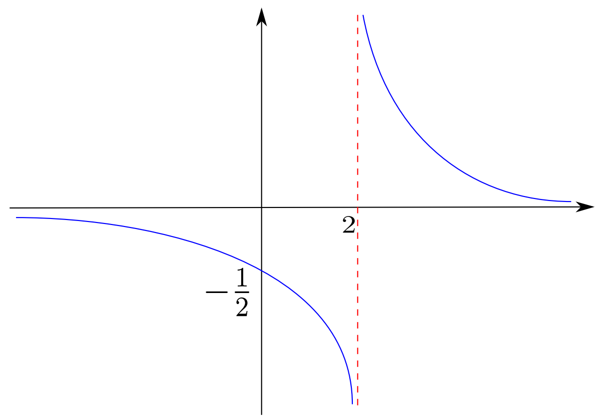
אם לכל m קיימת סביבה של a כך שלכל x השייך לסביבה של a, $f(x) < m$.



במילים: $\lim_{x\to a} f(x) \to -\infty$ אם לכל מספר m קיימת סביבה $(a-\delta, a+\delta)$ של הנקודה a כך שלכל x השייך לסביבה זו, $f(x) < m$.

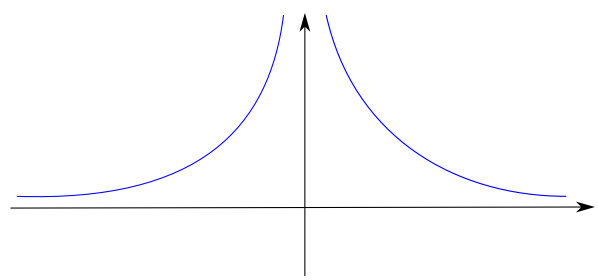
דוגמה 4.8

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x+2} = \infty,$$
$$\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty.$$



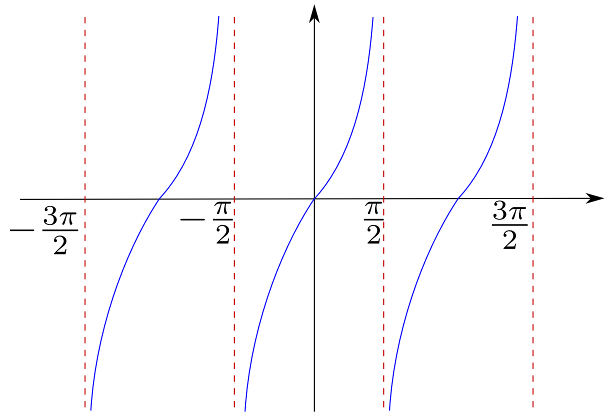
דוגמה 4.9

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty.$$



דוגמה 4.10

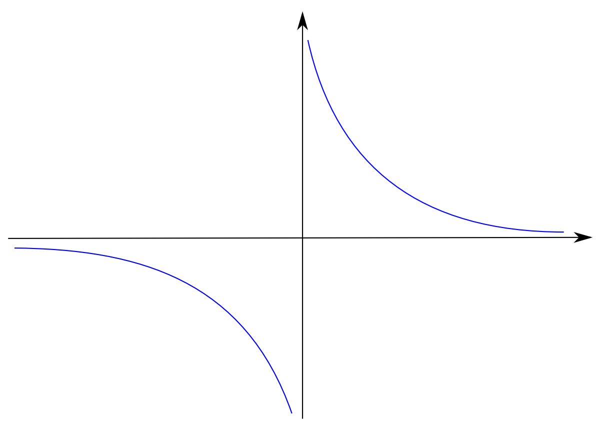
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty,$$
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty.$$



לכן $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x$ לא קיים.

דוגמה 4.11

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}x = -\infty.$$



לכן $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ לא קיים.

4.5 משפטים יסודיים של גבולות

משפט 4.2 כללים של גבולות

כלל 1) <u>גבול של פונקציה קבועה</u>

$$\lim_{x\to a} (c) = c$$

c קבוע.

כלל 2) <u>כללים הקשורים לפעולות חשבון</u>

אם קיימים הגבולות הסופיים $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ו- $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ אז

א) <u>מכפלה בסקלר</u>

$$\lim_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

ב) <u>סכום (הפרש)</u>

$$\lim_{x\to a} \left(f(x)\pm g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

ג) <u>כפל</u>

$$\lim_{x\to a} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

ד) <u>חילוק</u>

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

אם $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$.

כלל 3) <u>גבול של פונקציה מורכבת</u>

$$\lim_{x\to a} f\left(g(x)\right) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

כלל 4) אם בסביבה מסוימת של נקודה a (פרט אולי לנקודה a עצמה) מתקיים $f(x)=g(x)$, אז

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)\ .$$

כלל 5) <u>כלל הסנדוויץ'</u>

אם בסביבה מסוימת של נקודה a (פרט אולי לנקודה a עצמה) מתקיים

$$f(x)\leq h(x)\leq g(x)$$

וקיימים גבולות של פונקצות f ו- g בנקודה a והם שווים אחד לשני, קרי

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = A\ ,$$

אז קיים הגבול של $h(x)$ בנקודה זו ו-

$$\lim_{x\to a} h(x) = A\ .$$

כלל 6) אם $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ אז

$$\lim_{x\to a} \frac{c}{f(x)} = 0\ ,$$

c קבוע.

כלל 7) אם $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ ופונקציה $g(x)$ חסומה בסביבה מסוימת של נקודה a, אז

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0\ .$$

ניסוח אחר של המשפט:

אם $\lim\limits_{x\to a} h(x)=0$ ו $g(x)$ פונקציה חסומה, אז

$$\lim_{x\to a} h(x)\cdot g(x) = 0\ .$$

כלל 8) אם מתקיים $\lim_{x\to a} f(x)=0$ אז מתקיים גם

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=0$$

ולהיפך.

כלל 9) אם $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ ופונקציה $g(x)$ חסומה בסביבה מסוימת של נקודה a, אז

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\infty \ .$$

כלל 10) אם קיים גבול של פונקציה $f(x)$ בנקודה a אז היא חסומה בסביבה מסוימת של נקודה זו.

כלל 11) אם $\lim_{x\to a} f(x)=c>0$, אז קיימת סביבה מסוימת של הנקודה a כך שבה $f(x)>0$.

דוגמה 4.12

$$\lim_{x\to 1}\left[(x-1)^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)}{\frac{1}{(x-1)^2}}\right]=0$$

בגלל ש $\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$ פונקציה חסומה ו $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$.

משפט 4.3 גבולות מסוימים

א) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

ב) $$\lim_{x\to\infty}p^x=\begin{cases}0 & (0<p<1)\\ \infty & p>1\end{cases}$$

ג) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=1 \ , \qquad (p>0) \ .$

ד) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1 \ .$

למה 4.1 גבולות של פונקציות רציונליות

נתונה פונקיה $f(x)$ רציונלית:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

א) אם $\deg(P)<\deg(Q)$ אז $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ ו- $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$.

ב) אם $\deg(P)>\deg(Q)$ אז $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ (הגבול לא מודזר).

ג) אם $\deg(P)=\deg(Q)=n$. נניח ש- $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n}$. אז $\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{a_n}{b_n}$.

דוגמה 4.13

$$\lim_{x\to 1}(3x^2-2x+7)=3\cdot 1^2-2\cdot 1+7=8\ .$$

דוגמה 4.14

חשבו את הגבול: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$

פתרון:
ננסה להציב $x=2$ בתוף הפונקציה:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

אשר לא מוגדר. לכן ננסה לפרק את פולינום לגורמים:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+16)}{(x-4)}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{18}{-2}\right)=-9\ .$$

■

דוגמה 4.15

חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}$.

פתרון:
אם נציב ∞ ב- x נקבל

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

אשר לא מוגדר. נחלק את המונה והמחנה ב- x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{2+\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{4+\frac{2}{\infty}+\frac{5}{\infty}}=\frac{2+0}{4+0}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\ .$$

■

דוגמה 4.16

חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}$.

פתרון:
אם נציב $x=1$ בהפונקציה נקבל

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

אשר לא מוגדר. נכפיל את הפונקציה ב- $\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{\sqrt{x^2+3x}+2}=1$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{\sqrt{x^2+3x}+2}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{(x-1)\cdot(\sqrt{x^2+3x}+2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)\cdot(\sqrt{x^2+3x}+2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x+4}{\sqrt{x^2+3x}+2}\\&=\frac{5}{4}\ .\end{aligned}$$

■

דוגמה 4.17

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^x+4^x+3^x}{5^x-4^x-2\cdot3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+(\frac{4}{5})^x+(\frac{3}{5})^x}{1-(\frac{4}{5})^x-2\cdot(\frac{3}{5})^x}=\ 1\ .$$

דוגמה 4.18

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x+4^x+3^x}{5^x-4^x-2\cdot3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{5}{3})^x+(\frac{4}{3})^x+1}{(\frac{5}{3})^x+(\frac{4}{3})^x-2}=\ -\frac{1}{2}\ .$$

4.6 גדלים בלתי מוגדרים

1. $\left[\frac{a}{\infty}\right]=0$ לכל מספר a.

   $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ לא מוגדר.

2. לכל לכל מספר $a>0$, $\left[\frac{a}{0^+}\right]=\infty$, $\quad\left[\frac{a}{0^-}\right]=-\infty$

   $\left[\frac{0}{0}\right]$ לא מוגדר.

   $\left[\frac{\infty}{0^+}\right]=\infty$, $\quad\left[\frac{\infty}{0^-}\right]=-\infty$.

3. $[\infty\cdot\infty]=\infty$, $\quad a\cdot\infty=\infty$ לכל מספר $a>0$.

   $[0\cdot\infty]$ לא מוגדר.

4. $[a+\infty]=\infty$, $\quad[a-\infty]=-\infty$ לכל מספר a.

   $[\infty+\infty]=\infty$.

   $[\infty-\infty]$ לא מוגדר.

5. $[a^{\infty}]=\infty$, $\qquad [a^{-\infty}]=0$ לכל מספר $a>1$.

$[a^{\infty}]=0$, $\qquad [a^{-\infty}]=\infty$ לכל מספר $0<a<1$.

$[0^{\infty}]=0$, $\qquad [\infty^{\infty}]=\infty$.

1^{∞} לא מוגדר, 0^0 לא מוגדר, ∞^0 לא מוגדר.

דוגמה 4.19

חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2^x\right)^{1/x}$.

פתרון:
אם נציב ∞ ב- x נקבל

$$\lim_{x\to\infty}\left(2^x\right)^{1/x}=[\infty^0]$$

אשר לא מוגדר. נפתח סוגריים בפונקציה:

$$\lim_{x\to\infty}\left(2^x\right)^{1/x}=\lim_{x\to\infty}2^{x/x}=2^1=2\ .$$

■

דוגמה 4.20

חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}[2^x]^{1/\sqrt{x}}$.

פתרון:
אם נציב ∞ ב- x נקבל

$$\lim_{x\to\infty}\left(2^x\right)^{1/\sqrt{x}}=[\infty^0]$$

אשר לא מוגדר. נפתח סוגריים בפונקציה:

$$\lim_{x\to\infty}\left(2^x\right)^{1/\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}2^{\sqrt{x}}=2^{\infty}=\infty\ .$$

■

דוגמה 4.21

חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{1/x}$.

פתרון:
אם נציב ∞ ב- x נקבל

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{1/x}=[0^0]$$

אשר לא מוגדר. נפתח סוגריים:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{1/x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x}}=\frac{1}{2}\ ,$$

■

דוגמה 4.22

חשבו אתצ הגבול $\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{1/\sqrt{x}}$.

פתרון:

אם נציב ∞ בפונקציה נקבל

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{1/\sqrt{x}}=[0^0]$$

אשר לא מוגדר. נפתח סוגריים:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{1/\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}=0\ .$$

■

דוגמה 4.23

חשבו אצ הגבול $\lim_{x\to\infty}(x^2-x)$

פתרון:

אם נציב ∞ ב- x נקבל

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-x)=[\infty-\infty]$$

אשר לא מוגדר.

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-x)=\lim_{x\to\infty}x(x-1)=\infty\ .$$

■

דוגמה 4.24

חשבו את הגבול $\lim_{x\to\infty}\left(\ln(x+2)-\ln x\right)$.

פתרון:

אם נציב ∞ ב- x נקבל

$$\lim_{x\to\infty}\left(\ln(x+2)-\ln x\right)=\infty-\infty$$

אשר לא מוגדר.

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{2}{\infty}\right)=\ln\left(1+0\right)=\ln(1)=0\ .$$

■

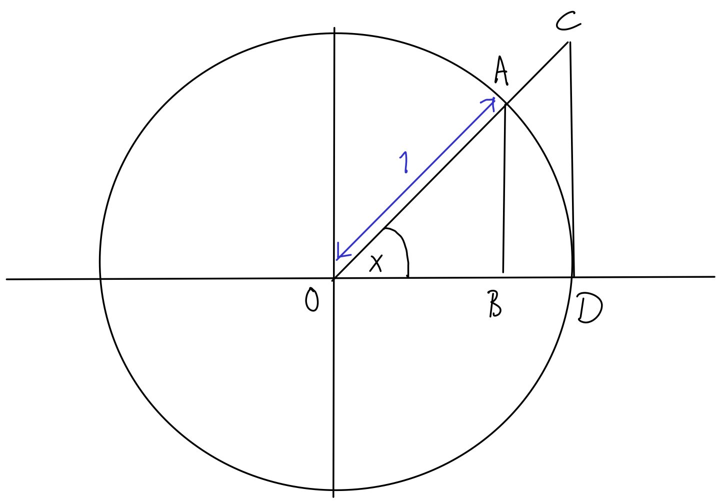
4.7 גבול המופלא הראשון

משפט 4.4

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

הוכחה:

$\underline{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$



$$S_{\Delta OAB}<S_{\Delta OAD}<S_{\Delta OCD}$$
$$S_{\Delta OAB}=\frac{OB\cdot OA}{2}=\frac{\sin x\cdot\cos x}{2}\ ,$$
$$S_{\Delta OAD}=\frac{AD\cdot OA}{2}=\frac{1\cdot 1\cdot x}{2}=\frac{x}{2}\ ,$$
$$S_{\Delta OCD}=\frac{CD\cdot OA}{2}=\frac{1\cdot\tan x}{2}=\frac{\tan x}{2}\ ,$$
$$\frac{\sin x\cdot\cos x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\tan x}{2}$$

שימו לב $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$. נחלק את האי-שוויון ב- $\sin x$:

$$\frac{\cos x}{2}<\frac{x}{2\sin x}<\frac{1}{2\cos x}$$

נכפיל את האי-שוויון ב- 2:

$$\cos x<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

נקח אצ הגבול $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \cos x < \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} < \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \qquad \Rightarrow \qquad 1 < \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} < 1$$

לכן לפי כלל הסנדוויץ'

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \ .$$

■

דוגמה 4.25

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2} \ .$$

דוגמה 4.26

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

דוגמה 4.27

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$$

נרשום $x = \sin t \qquad \Leftrightarrow \qquad t = \arcsin x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = 1$$

דוגמה 4.28

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}$$

נרשום $x = \tan t \qquad \Leftrightarrow \qquad t = \arctan x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\tan t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} \cdot \cos t = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} \cdot \lim_{t\to 0} \cos t = 1$$

דוגמה 4.29

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \ .$$

דוגמה 4.30

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x-\sin 2x}{\sin x+\sin 3x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin 4x}{x}-\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 3x}{x}}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{4\cdot\frac{\sin 4x}{4x}-2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin x}{x}+3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}\right)\\
&=\frac{4-2}{1+3}\\
&=\frac{1}{2}\ .
\end{aligned}$$

דוגמה 4.31

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x+7x^2}{\sin 2x}\right) &=3\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin 2x}\right)+7\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin 2x}\right)\\
&=3\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{2\sin 2x}\right)+7\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot 2x}{2\sin 2x}\right)\\
&=\frac{3}{2}\ .
\end{aligned}$$

דוגמה 4.32

חשבון את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

פתרון:

עבור הדוגמה הזאת אסור להשתמש בגבול המפופלא הראשון. שימו לב ש $\sin x$ פונקציה חסומה, ו- $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. לכן

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\left(\lim_{x\to\infty}\sin x\right)\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)=\left(\lim_{x\to\infty}\sin x\right)\cdot 0=0\ .$$

■

4.8 גבול המופלא השני

משפט 4.5

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\ .$$

הגבול המופלא השני פותר את הגבולות במצב 1^{∞}. נקבל את הצורה האחרת של הגבול ע"י ההצבה $\alpha=\dfrac{1}{x}$. כך נקבל

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e\ .$$

דוגמה 4.33

חשבו את הגבול $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$.

פתרון:

אם נציב ∞ נקבל

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=1^{\infty}$$

אשר לא מוגדר.

נגדיר משתנה חדש: $t=\dfrac{x}{2}$. כאשר $x\to\infty$ גם $t\to\infty$. לפיכך

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{2}=e^{2}\ .$$

■

דוגמה 4.34

חשבו את הגבול $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+2x)^{5/x}$

פתרון:

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{5/x}=1^{\infty}$$

לא מוגדר.

נגדיר $t=2x$ ונשים לב כי כאשר $x\to 0$ גם $t\to 0$. אז ניתן לרשום את הגבול בצורה

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{5/x}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{10}{t}}=\lim_{t\to 0}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{10}=\left(\lim_{t\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{t}}\right)^{10}=e^{10}\ .$$

■

דוגמה 4.35

חשבו את הגבול $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$.

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}=1^{\infty}$$

אשר לא מוגדר.

$$\frac{x}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x} \ .$$

נגדיר $t = \frac{-1}{1+x}$ ונשים לב כי כאשר $x \to \infty$ אז $t \to 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x &= \lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{t}-1}\\
&= \lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}(1+t)^{-1}\\
&= \left[\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-1}\lim_{t\to 0}(1+t)^{-1}\\
&= [e]^{-1}(1+0)^{-1}\\
&= e^{-1} = \frac{1}{e} \ .
\end{aligned}$$

■

דוגמה 4.36

חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2}$.

פתרון:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2} = 1^{\infty}$$

לא מוגדר.
נרשום

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2} &= \lim_{x\to 0}\Big(1+(\cos 2x-1)\Big)^{\frac{1}{\cos 2x-1}\cdot\frac{\cos 2x-1}{x^2}}\\
&= \left[\lim_{x\to 0}\left(1+(\cos 2x-1)\right)^{\frac{1}{\cos 2x-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}} \ .
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2-\sin^2 x-(\cos^2 x+\sin^2 x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{x^2}$$

$$=-2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$=-2\ .$$

לכן

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2}=e^{-2}\ .$$

■

דוגמה 4.37

חשבו את הגבול $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

פתרון:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1^{-\infty}$$

אשר לא מוגדר .

נגדיר $t=\frac{1}{x}$ ונשים לב כי כאשר $x\to\infty$ אז $t\to 0$. נרשום את הגבול בצורה

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=e$$

■

דוגמה 4.38

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-1}{2x^2+5x}\right)^x=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-1}{2x^2+5x}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}=0$$

דוגמה 4.39

חשבו את הגבול $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-1}{x^2+5x}\right)^x$.

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-1}{x^2+5x}\right)^x=1^{\infty}$$

לא מוגדר.

$$\frac{x^2+3x-1}{x^2+5x}=\frac{x^2+5x-2x-1}{x^2+5x}=1+\frac{-2x-1}{x^2+5x}$$

נגדיר $t=\dfrac{-2x-1}{x^2+5x}$. כאשר $x\to\infty$ אז $t\to 0$. נרשום את הגבול בצורה

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-1}{x^2+5x}\right)^x &=\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}\cdot t\cdot x}\\ &=\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{-2x^2-x}{x^2+5x}\right)}\\ &=\left[\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-2x^2-x}{x^2+5x}\right)}\\ &=e^{-2}=\frac{1}{e^2}\ .\end{aligned}$$

■

דוגמה 4.40

לאלו ערכי פרמטר m קיים גבול סופי $\lim\limits_{x\to\infty}\left(m^2+\dfrac{1}{x}\right)^x$

פתרון:

עבור $m=1$ או $m=-1$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\ .$$

עבור $m>1$ או $m<-1$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(m^2+\frac{1}{x}\right)=m^2>1$$

לכן

$$\lim_{x\to\infty}\left(m^2+\frac{1}{x}\right)^x=\infty\ .$$

עבור $-1<m<1$,

$$\lim_{x\to\infty}\left(m^2+\frac{1}{x}\right)=m^2<1$$

לכן

$$\lim_{x\to\infty}\left(m^2+\frac{1}{x}\right)^x=0\ .$$

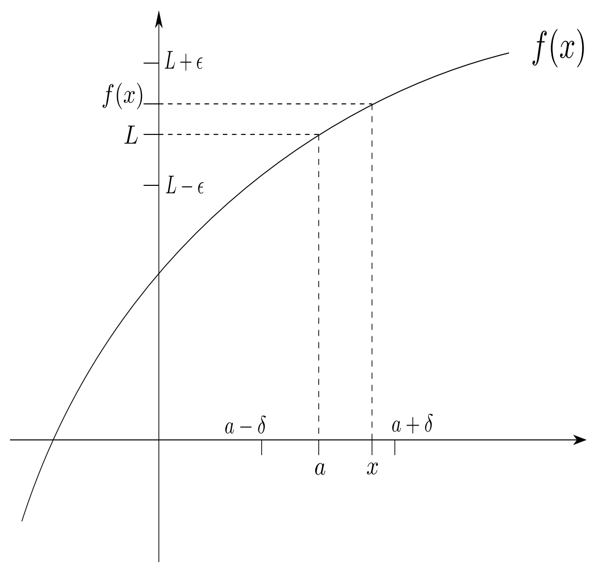
תשובה סופית: הגבול סופי עבור $-1\leq m\leq 1$.

■

4.8 הפרקים הבאים להעשרה בלבד

4.9 * הגדרה של גבול של פונקציה לפי $\epsilon - \delta$

נניח שפונקציה $f(x)$ מוגדרת בכל נקודה $x \neq a$ השייכת לסביבה של a.

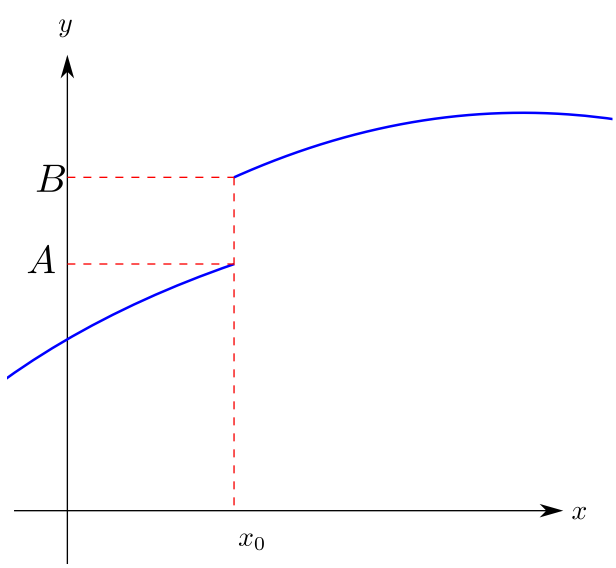


הגדרה 4.7 גבול של פונקציה

אומרים כי $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ אם התנאי הבא מתקיים:
לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש-

$$a-\delta < x < a+\delta \qquad \Rightarrow \qquad L-\epsilon < f(x) < L+\epsilon \ .$$

4.10 * הגדרת גבול חד-צדדי לפי $\epsilon - \delta$



הגדרה 4.8 גבול חד צדדי

גבול מצד שמאול

A נקרא גבול של $f(x)$ בנקודה a **מצד שמאול** אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שהתנאי הבא מתקיים:

$$a - \delta < x < a \qquad \Rightarrow \qquad A - \epsilon < f(x) < A + \epsilon \ .$$

גבול מצד ימין

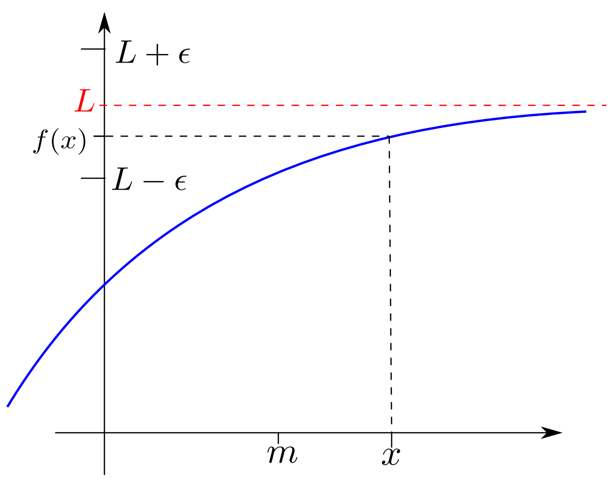
B נקרא גבול של $f(x)$ בנקודה a **מצד ימין** אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שהתנאי הבא מתקיים:

$$a < x < a + \delta \qquad \Rightarrow \qquad B - \epsilon < f(x) < B + \epsilon \ .$$

4.11 * גבול של פונקציה באינסוף לפי $\epsilon - \delta$

הגדרה 4.9

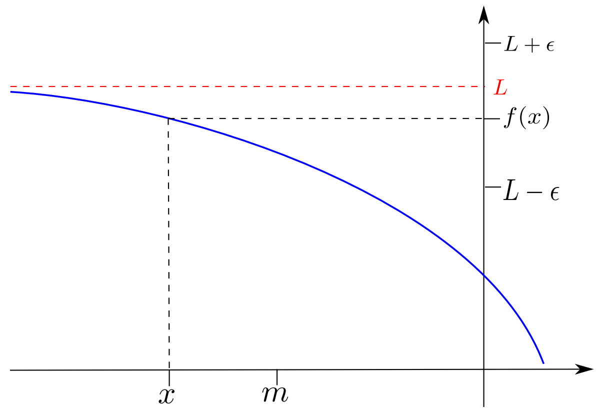
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $m > 0$ כך שאם $x > m$ אז $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$.



4.12 * גבול של פונקציה במינוס אינסוף לפי $\epsilon - \delta$

הגדרה 4.10

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $m > 0$ כך שאם $x < m$ אז $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$.

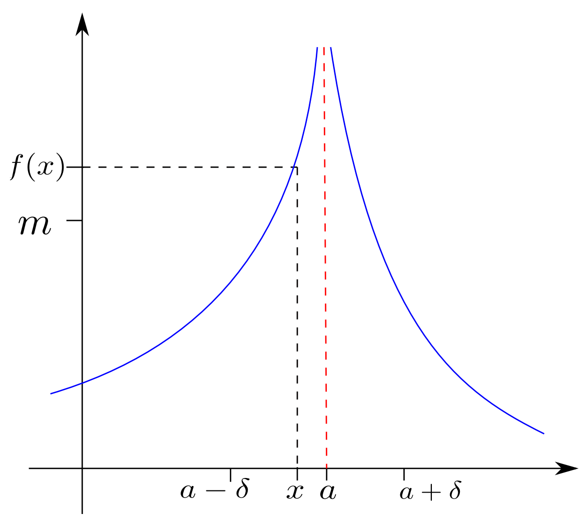


במילים: $\lim_{x\to-\infty} = L$ אם לכל סביבה $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ של L קיים מספר m כך שלכל $x < m$ מתקיים: $f(x)$ שייך לסביבה $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ של L.

4.13 * גבול אינסופי בנקודה לפי $\epsilon - \delta$

הגדרה 4.11 גבול אינסופי של פונקציה בנקודה

$\lim_{x\to a} f(x) \to \infty$ אם לכל m קיים $\delta > 0$ כך שאם $a-\delta < x < a+\delta$ אז $f(x) > m$.

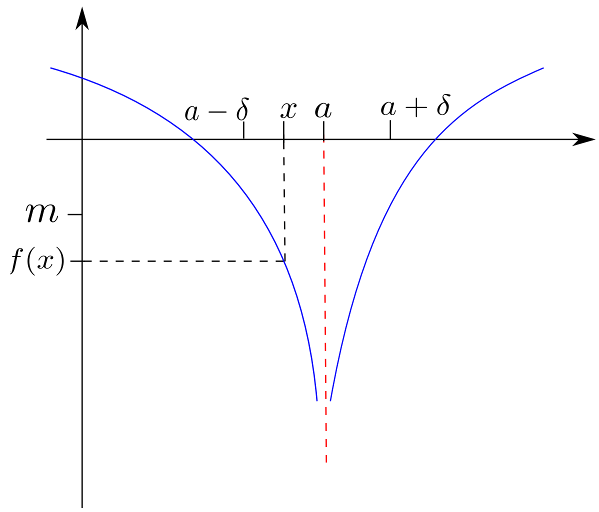


במילים: $\lim_{x\to a} f(x) \to \infty$ אם לכל מספר m קיימת סביבה $(a-\delta, a+\delta)$ של הנקודה a כך שלכל x השייך לסביבה זו, $f(x) > m$.

הגדרה 4.12 גבול מינוס אינסופי של פונקציה בנקודה

$$\lim_{x\to a} f(x) \to -\infty$$

אם לכל m קיים $\delta > 0$ כך שלכל $|x-a| < \delta$ אז $f(x) < m$.

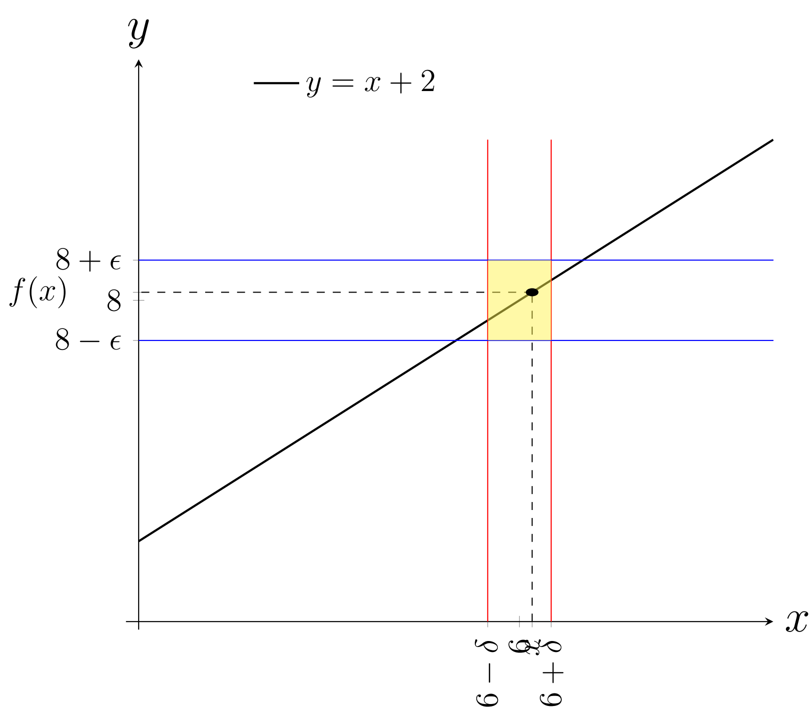


במילים: $\lim\limits_{x\to a} f(x) \to -\infty$ אם לכל מספר m קיימת סביבה $(a-\delta, a+\delta)$ של הנקודה a כך שלכל x השייך לסביבה זו, $f(x) < m$.

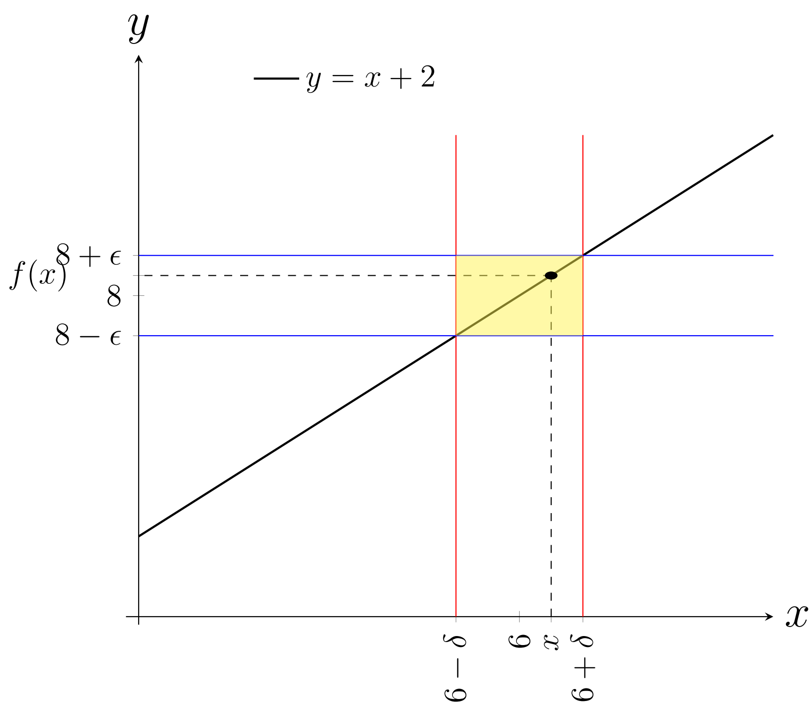
4.14 * הוכחה של קיום גבול

דוגמה 4.41

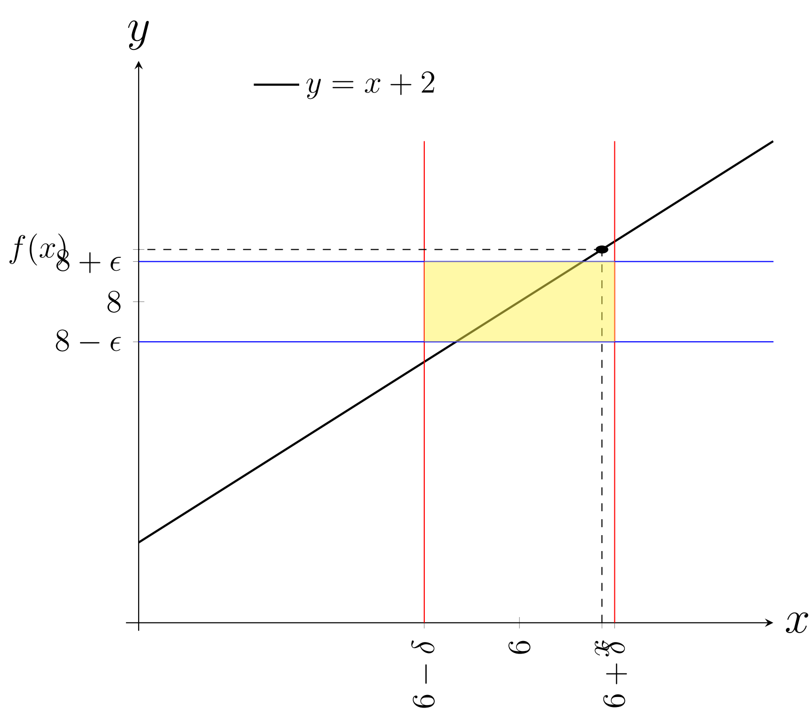
בעזרת ההגדרה של הגבול, עבור הפונקציה $f(x) = x + 2$ נוכיח ש- $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = 8$.
נניח שכבר בחרנו ערך של ϵ ובנינו את הסביבה $(8-\epsilon, 8+\epsilon)$ על ציר ה- y.
עכשיו אנחנו בונים את הסביבה $(6-\delta, 6+\delta)$ על ציר ה- x.
הגבול של $f(x)$ שווה ל- 8 אם אנחנו יכולים למצוא סביבה $(6-\delta, 6+\delta)$ כך שאם x נמצא בתוכה, אז הערך של $f(x)$ יהיה מוכל בסביבה $(8-\epsilon, 8+\epsilon)$.
זאת אומרת, הנקודה על הגרף של $f(x)$ שמתאים לנקודה x תהיה בתוך המלבן הצהוב בתרשים.



לסביבת ϵ שבחרנו, אפשר להרחיב את הסביבת δ, כך שלכל x בסביבה $(6-\delta, 6+\delta)$, הערך המתאים של $f(x)$ עדיין יהיה בתוך הסביבה $(8-\epsilon, 8+\epsilon)$. ז"א הנקודה $f(x)$ על הגרף עדיין תהיה בתוך המלבן הצהוב, כמתואר בתרשים להלן.



האם אפשר להרחיב את הסביבת δ כמה שאנחנו רוצים? לא. הרי, נתונה סביבה $(8-\epsilon, 8+\epsilon)$, אם אנחנו בוחרים δ גדול מדיי של הסביבה $(6-\delta, 6+\delta)$, אז יהיו ערכים של x שבתוכה, כך שהערך המתאים של $f(x)$ לא יהיה בתוך הסביבה $(8-\epsilon, 8+\epsilon)$. ז"א הנקודה $f(x)$ על הגרף תהיה בחוץ למלבן הצהוב, כפי שמשורטט בתרשים להלן.



לפיכך, לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש:

$$6-\delta < x < 6+\delta \qquad \Rightarrow \qquad 8-\epsilon < f(x) < 8+\epsilon\ .$$

ה- δ הזה שקיים, הוא ה- δ המקסימלי כך שהתנאי הזה מתקיים, כפי שהסברנו לעיל.

נוכיח ש- $\lim\limits_{x\to 6} f(x)=8$ ע"י למצוא δ כך שהתנאי לקיום הגבול מתקיים, ע"י השלבים הבאים:

שלב 1. לרשום את התנאי לקיום הגבול:

לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש-

$$6-\delta<x<6+\delta \qquad \Rightarrow \qquad 8-\epsilon<x+2<8+\epsilon\ .$$

שלב 2. לרשום תנאי ה- ϵ בצורת ערך מוחלט

$$8-\epsilon<x+2<8+\epsilon \qquad \Rightarrow \qquad -\epsilon<x-6<\epsilon \qquad \Rightarrow \qquad |x-6|<\epsilon\ .$$

שלב 3. להפוך את התנאי ה- δ לצורה דומה לתנאי ה- ϵ

$$6-\delta<x<6+\delta \qquad \Rightarrow \qquad -\delta<x-6<\delta \qquad \Rightarrow \qquad |x-6|<\delta\ .$$

שלב 4. להציב בתנאי לקיום הגבול

$$|x-6|<\delta \qquad \Rightarrow \qquad |x-6|<\epsilon\ .$$

לכן התנאי מתקיים לכל $\delta<\epsilon$.

דוגמה 4.42

עבור הפונקציה $f(x)=3x-8$, הוכיחו כי

$$\lim_{x\to 10} f(x)=22$$

פתרון:

שלב 1. לרשום את התנאי לקיום הגבול:

לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש-

$$10-\delta<x<10+\delta \qquad \Rightarrow \qquad 22-\epsilon<3x-8<22+\epsilon\ .$$

שלב 2. לרשום תנאי ה- ϵ בצורת ערך מוחלט

$$22-\epsilon<3x-8<22+\epsilon \qquad \Rightarrow \qquad -\epsilon<3x-30<\epsilon \qquad \Rightarrow \qquad |3x-30|<\epsilon\ .$$

שלב 3. להפוך את התנאי ה- δ לצורה דומה לתנאי ה- ϵ

$$10-\delta < x < 10+\delta \qquad \Rightarrow \qquad -\delta < x-10 < \delta \qquad \Rightarrow \qquad -3\delta < 3x-30 < 3\delta \qquad \Rightarrow \qquad |3x-30| < 3\delta \ .$$

שלב 4. להציב בתנאי לקיום הגבול

$$|3x-30| < 3\delta \qquad \Rightarrow \qquad |3x-30| < \epsilon \ .$$

לכן התנאי מתקיים לכל $3\delta < \epsilon$,

ז"א $\delta < \dfrac{\epsilon}{3}$.

■

דוגמה 4.43

עבור הפונקציה $f(x)=x^2$, הוכיחו כי

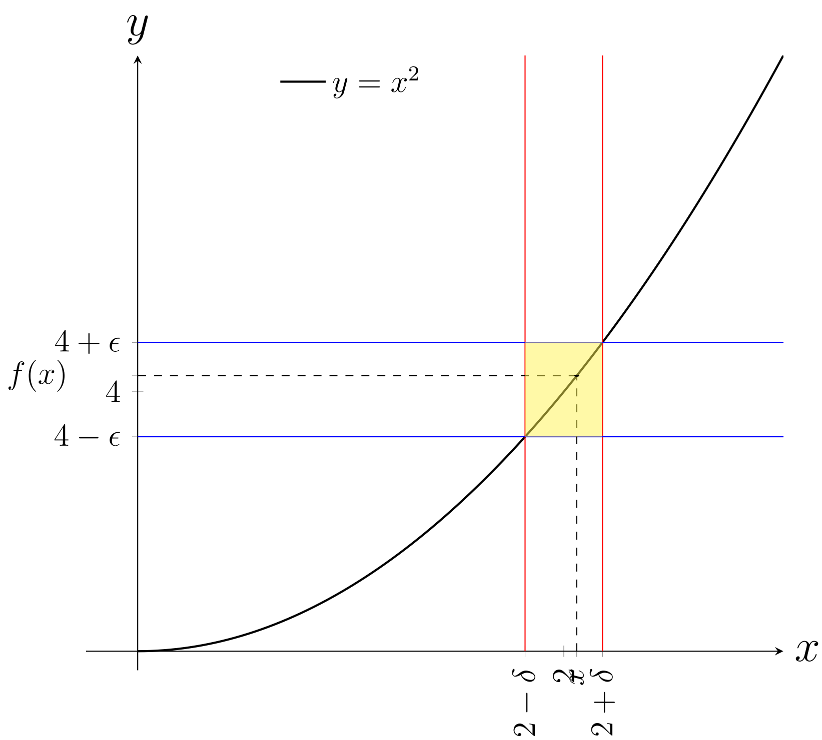
$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \ .$$

פתרון:

באותה מידה של הדומגאות לעיל, ההוכחה של הגבול עניין של למצוא $\delta>0$ כך שלכל $\epsilon>0$ התנאי הבא מתקיים:

$$2-\delta < x < 2+\delta \qquad \Rightarrow \qquad 4-\epsilon < x^2 < 4+\epsilon \ ,$$

זאת אומרת לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם x בסביבה $(2-\delta,2+\delta)$ אז $f(x)$ יהיה בתוב הסביבה $(4-\delta,4+\delta)$ כמתואר בתרשים.



שלב 1. לרשום את התנאי לקיום הגבול:

לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש-

$$2-\delta < x < 2+\delta \qquad \Rightarrow \qquad 4-\epsilon < x^2 < 4+\epsilon \ .$$

שלב 2. לרשום תנאי ה- ϵ בצורת ערך מוחלט

$$4-\epsilon < x^2 < 4+\epsilon \quad \Rightarrow \quad -\epsilon < x^2-4 < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |x^2-4| < \epsilon \ .$$

שלב 3. להפוך את התנאי ה- δ לצורה דומה לתנאי ה- ϵ

$$2-\delta < x < 2+\delta \quad \Rightarrow \quad -\delta < x-2 < \delta \quad \Rightarrow \quad |x-2| < \delta \ .$$

$$2-\delta < x < 2+\delta \quad \Rightarrow \quad 4-\delta < x+2 < 4+\delta \quad \Rightarrow \quad -4-\delta < x+2 < 4+\delta \quad \Rightarrow \quad |x+2| < 4+\delta \ .$$

$$|x^2-4| < \delta(\delta+4)$$

שלב 4. להציב בתנאי לקיום הגבול

$$|x^2-4| < \delta(\delta+4) \quad \Rightarrow \quad |x^2-4| < \epsilon \ .$$

לכן התנאי מתקיים לכל $\delta(\delta+4) < \epsilon$. ז"א

$$\delta^2+4\delta-\epsilon < 0 \quad \Rightarrow \quad (\delta-\delta_-)(\delta-\delta_+) < 0$$

כאשר $\delta_+ = -2+\sqrt{4+\epsilon}$ ו- $\delta_- = -2+\sqrt{4-\epsilon}$.

נשים לב כי $\delta_+ > 0$ ו- $\delta_- < 0$. בנוסף, מההגדרה של קיום גבול, δ חיובי. לכן, האופציה היחידה לפנינו היא

$$0 < \delta < \delta_+ \ .$$

אנחנו הוכחנו שקיים δ עבורו התנאי של קיום הגבול מתקיים, והערך הזה הינו $0 < \delta < \delta_+$.

■

דוגמה 4.44

תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת להיות

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ x+2 & x > 2 \end{cases} \ .$$

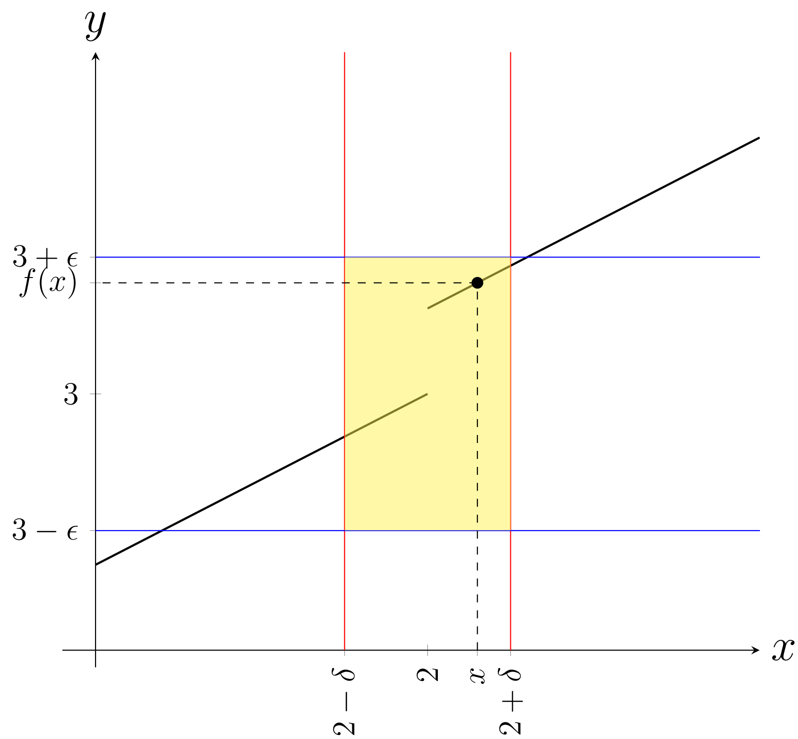
ונוכיח כי המספר $L=3$ לא גבול של $f(x)$ בנקודה $x=2$.

פתרון:

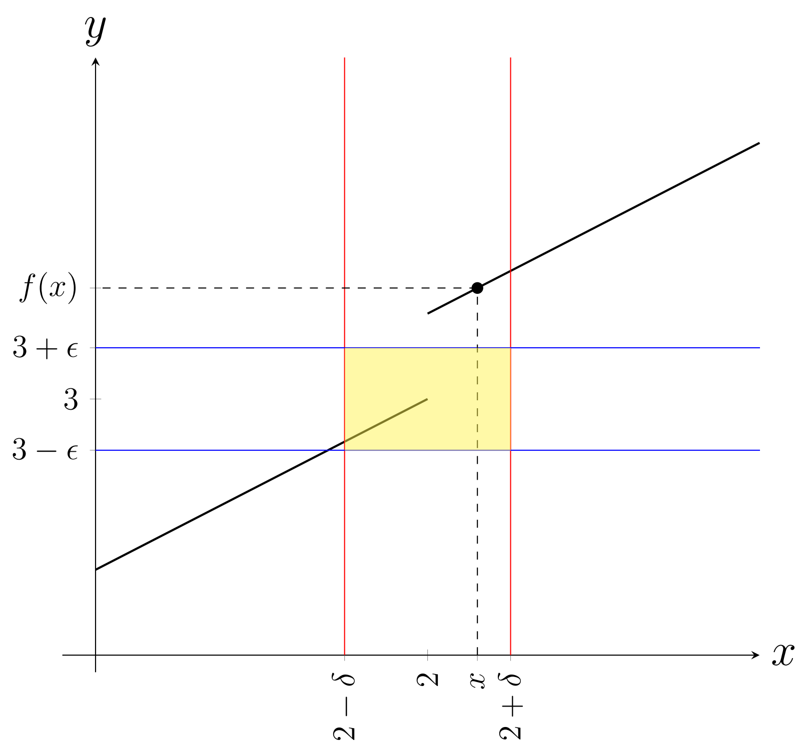
(נראה בהמשך כי הנקודה $x=2$ נקראת נקודת אי-רציפות). נזכיר שאומרים כי $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם

$$-2-\delta < x < 2+\delta \quad \Rightarrow \quad 3-\epsilon < f(x) < 3+\epsilon \ .$$

נניח שנבחור $\epsilon = 1$ או כל ערך של ϵ כך הסביבת ϵ מכיל את השני קווים של הגרף של $f(x)$ בצד שמאות וצד ימין של $x=2$ כמתואר בתרשים להלן. אז אפשר למצוא δ כך שלכל x בסביבה $(2-\delta, 2+\delta)$ אז הערך של $f(x)$ המתאים יהיה בתוך הסביבה $(3-\epsilon, 3+\epsilon)$.



אבל נניח שנבחור $\epsilon = \frac{1}{2}$ למשל כמתואר בעשרים להלן. עכשיו אי-אפשר לבנות סביבה $(2-\delta, 2+\delta)$ כך שלכל x בתוכה, $f(x)$ יהיה בתוך הסביבה $(3-\epsilon, 3+\epsilon)$. ז"א יהיו ערכי x שבסביבה $(2-\delta, 2+\delta)$, בפרט ערכי x בצד ימין של $x=2$, עבורם הנקודה $f(x)$ על הגרף יהיה בחוץ למלבן הצהוב, כמתואר בתרשים להלן.



לכן התנאי לקיום הגבול לא מתקיים, ולכן $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq 3$.

ננסח ההוכחה בצורה פורמלית.
נוכיח שהגבול לא קיים בנקודה $x=2$ דרך השלילה.
נניח ש- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$. אז לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש-

$$2-\delta < x < 2+\delta \qquad \Rightarrow \qquad 3-\epsilon < f(x) < 3+\epsilon \ .$$

נניח ש- $x > 2$. אז $f(x) = x + 2$ ונקבל

$$2 < x < 2 + \delta \qquad \Rightarrow \qquad 3 - \epsilon < x + 2 < 3 + \epsilon \ .$$

נזכיר כי התנאי מתקיים לכל $\epsilon > 0$. נבחור $\epsilon = \frac{1}{2}$ נקלבל

$$2 < x < 2 + \delta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{5}{2} < x + 2 < \frac{7}{2} \ ,$$

ז"א

$$2 < x < 2 + \delta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \ ,$$

בסתירה לכך ש- $x > 2$! לפיכך הגבול לא קיים. ■

דוגמה 4.45

תהי $f(x)$ הפונקציה המוגדרת ע"י

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 3 \ , \\ x + 12 & x > 3 \ . \end{cases}$$

הוכיחו כי המספר $A = 9$ לא גבול של $f(x)$ בנקודה $x = 3$.

פתרון:

תרגיל בית ■

שיעור 5
רציפות בנקודה

הגדרה 5.1 רציפות בנקודה

נניח ש- $f(x)$ פונקציה המוגדרת בנקודה a ובסביבה של a. הפונקציה $f(x)$ נקראת רציפה בנקודה a אם

.1

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) \ ,$$

(כלומר הגבול הדו-צדדי $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ קיים)

.2

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \ .$$

מכיוון ש $\lim\limits_{x\to a} x = a$, מקבלים $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = f\left(\lim\limits_{x\to a} x\right)$, ז"א סימן של lim נכנס לתוך הפונקציה.

דוגמה 5.1

דוגמא 1) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e^1 = e$

דוגמא 2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \ln\left[(1+x)^{1/x}\right] = \ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right] = \ln e = 1$.

משפט 5.1 תכונות של פונקציה רציפה

1) אם פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפות בנקודה a, אז הפונקציות $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ רציפות בנקודה a. הפונקציה $\frac{f}{g}$ רציפה בנקודה a בתנאי $g(a)\neq 0$.

2) נניח ש $y=f(u)$, $u=g(x)$, $g(a)=b$, פונקציה g רציפה בנקודה a ופונקציה f רציפה בנקודה b, אז הפונקציה $y=f(g(x))$ רציפה בנקודה a.

3) כל פונקציה אלמנטרית רציפה בכל נקודה פנימית של תחום הגדרתה.

הגדרה 5.2 אי-רציפות בנקודה

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה a אבל לא בהכרח בנקודה a עצמה.

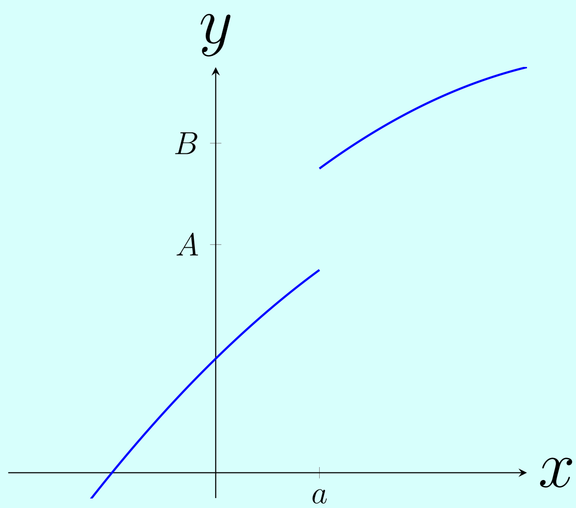
א) אם קיימים הגבולות החד-צדדים הסופיים ו-

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \neq f(a)$$

או ש $f(a)$ לא מוגדר, אומרים כי a היא נקודת אי-רציפות סליקה של $f(x)$.

ב) נקודה a היא נקודת אי-רציפות ממין ראשון של $f(x)$ אם קיימים הגבולות החד-צדדים הסופיים $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = A$, ו- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = B$ אבל $A\neq B$, כלומר

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x) \ .$$



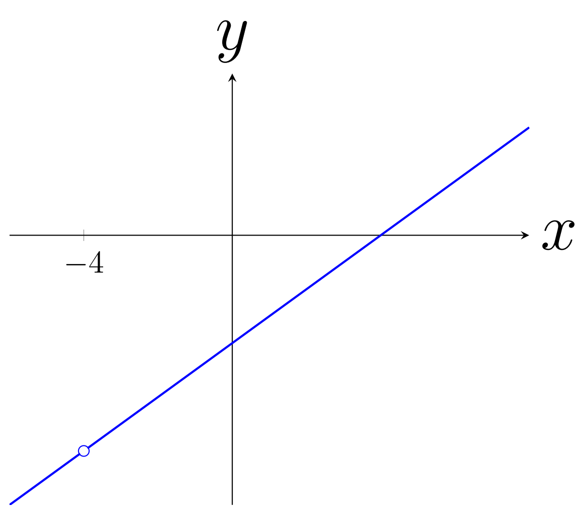
ג) נקודה a נקראת אי רציפות ממין שני של פונקציה $f(x)$ אם לפחות אחד הגבולות החד צדדיים $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ או $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ שווה ל- ∞ או $-\infty$ או לא קיים.

דוגמה 5.2

$f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+4}$ לא מוגדרת בנקודה $x=-4$.

$$\lim_{x\to-4}\frac{x^2-16}{x+4}=\lim_{x\to-4}\frac{(x+4)(x-4)}{x+4}=\lim_{x\to-4}(x-4)=-8$$

הגבול של $f(x)$ קיים בנקודה $x=-4$. לכן $x=-4$ נקודת אי-רציפות סליקה.

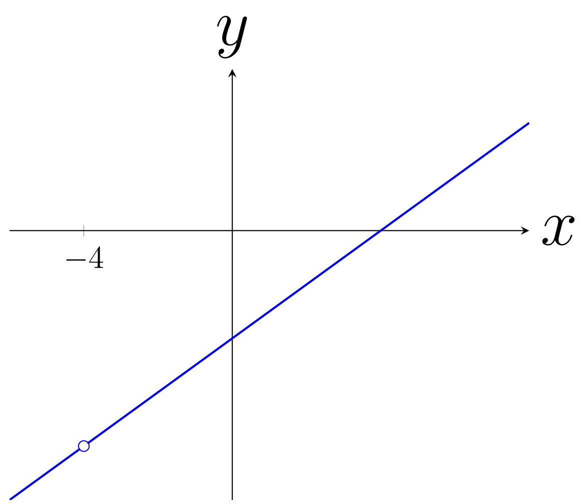


דוגמה 5.3

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\ ,\\ 2 & x=0\ .\end{cases}$.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ ,$$

אבל $f(0)=2$. ז"א $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$ לכן הנקודה $x=0$ נקודת אי-רציפות סליקה.



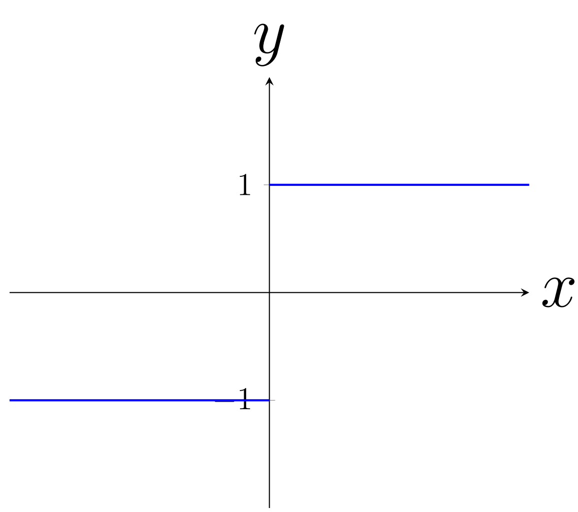
דוגמה 5.4

$$f(x)=\frac{x}{|x|}$$

$x=0$ נקודת אי-רציפות.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1\ ,\qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-x}=-1$$

לכן $x=0$ נקודת אי-רציפות ממין ראשון.



דוגמה 5.5

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & -1<x<2\ ,\\ 2-x & 2\leq x\leq 4\ .\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x-1)=1\ ,\qquad \lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(2-x)=0\ .$$

לכן $x=2$ נקודת אי-רציפות ממין ראשון.

דוגמה 5.6

$$f(x)=\arctan\left(\frac{2}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\arctan\left(\frac{2}{x-1}\right)=-\frac{\pi}{2}\ ,\qquad \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\arctan\left(\frac{2}{x-1}\right)=\frac{\pi}{2}\ .$$

$x=1$ נקודת אי רציפות ממין ראשון.

דוגמה 5.7

$$f(x)=\frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{1}{x-2}=\infty$$

לכן $x=2$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

דוגמה 5.8

$$f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to0^+}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

לא קיים. לכן $x=0$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

דוגמה 5.9

מצאו את נקודות אי הרציפות של הפונרציה הבאה וברר את סוגן:

$$f(x)=\frac{x}{x+3}+2^{-1/x^2}$$

פתרון:
נקודות אי רציפות: $x=0,-3$.

$\underline{x=-3}$

$$\lim_{x\to-3^+}\left(\frac{x}{x+3}+2^{-1/x^2}\right)=\infty$$

$x=-3$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

$\underline{x=0}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x+3}+2^{-1/x^2}\right)=0+0=0$$

$x=0$ נקודת אי-רציפות סליקה. ■

דוגמה 5.10

מצאו את נקודות אי הרציפות של הפונרציה הבאה וברר את סוגן:

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}+\frac{\tan x}{x}$$

פתרון:
נקודות אי רציפות: $x=-1,3,0$, $\frac{\pi}{2}+n\pi$.

$\underline{x=-1}$

$$\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}+\frac{\tan x}{x}\right)=-\infty$$

$x=-1$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

$\underline{x=3}$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}+\frac{\tan x}{x}\right)=\frac{3}{2}+\frac{\tan 3}{3}=0$$

$x=3$ נקודת אי-רציפות סליקה.

$\underline{x=0}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}+\frac{\tan x}{x}\right)=3+1=4$$

$x=0$ נקודת אי-רציפות סליקה.

$\underline{x=\frac{\pi}{2}+n\pi}$

$$\lim_{x\to \left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^-}\left(\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}+\frac{\tan x}{x}\right)=\infty\ .$$

$x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

■

דוגמה 5.11

נתונה פונקציה

$$f(x)=\begin{cases} 2^{-x} & x\leq 1 \\ ax^2 & -1<x\leq 1 \\ \sqrt{x+b} & x>1 \end{cases}$$

עבור אילו ערכי a,b $f(x)$ רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$?

פתרון:

<u>אי-רציפות בנקודה $x=-1$</u>

$$\lim_{x\to -1^-} f = 2^{-(-1)}=2\ ,\qquad \lim_{x\to -1^+} f = a(-1)^2=a\ .$$

לכן f רציפה ב- $x=-1$ אם $a=2$.

<u>אי-רציפות בנקודה $x=1$</u>

$$\lim_{x\to 1^-} f = a1^2=a(=2)\ ,\qquad \lim_{x\to 1^+} f = \sqrt{1+b}\ .$$

לכן f רציפה ב- $x=1$ אם

$$\sqrt{1+b}=2\quad\Rightarrow\quad b=3\ .$$

■

דוגמה 5.12

לאילו ערכי פרמטר a הפונקציה $f(x)=\dfrac{x}{a+\sin x}$ תהיה רציפה לכל x ממשי?

פתרון:

$f(x)$ רציפה לכל x ממשי כאשר $a+\sin x\neq 0$ לכל $x\in\mathbb{R}$. שים לב $-1\leq\sin x\leq 1$ לכן $a+\sin x\neq 0$ עבור $a>1$ ו- $a<-1$.

■

דוגמה 5.13

נתונה פונקציה

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin^2\left(\sqrt{a^2+1}\cdot x\right)}{2x^2} & x<0 \\ b & x=0 \\ x+5 & x>0 \end{cases}$$

א. עבור אילו ערכי a,b $f(x)$ רציפה ב- $x=0$?

ב. עבור אילו ערכי a,b $f(x)$ הנקודה $x=0$ נקודת אי-רציפות ממין ראשון?

ג. עבור אילו ערכי a,b $f(x)$ הנקודה $x=0$ נקודת אי-רציפות סליקה?

פתרון:

א.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2\left(\sqrt{a^2+1}\cdot x\right)}{2x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{a^2+1}{2}\frac{\sin^2\left(\sqrt{a^2+1}\cdot x\right)}{\left(\sqrt{a^2+1}\cdot x\right)^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{a^2+1}{2} \ ,$$

ו-

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+5) = 5 \ ,$$

ו- $f(0)=b$. כדי ש- f תהיה רציפה נדרש כי $\lim\limits_{x\to 0^-} f = \lim\limits_{x\to 0^+} f = f(0)$ וזה מתקיים אם $\frac{a^2+1}{2}=5=b$ או שקול

$$b=5 \ , \qquad a=\pm 3 \ .$$

ב. הגבול $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=5$ קיים לכל $b\in\mathbb{R}$ והגבול $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\frac{a^2+1}{2}$ קיים לכל $b\in\mathbb{R}$. לכן $x=0$ תהיה נקודת אי-רציפות ממין ראשון אם

$$\frac{a^2+1}{2}\neq 5 \qquad \Rightarrow \qquad a\neq \pm 3$$

לכל $b\in\mathbb{R}$.

ג. הגבולות $\lim\limits_{x\to 0^\pm} f$ זהים אם $a=\pm 3$ ו-

$$\lim_{x\to 0^\pm} f \neq f(0)=b$$

אם $b\neq 5$.

■

שיעור 6
רציפות בקטע והגדרת הנגזרת

6.1 רציפות פונקציה בקטע

הגדרה 6.1 רציפות בקטע פתוח

פונקציה $f(x)$ נקראת רציפה בקטע פתוח (a,b) אם f רציפה בכל נקודה $c\in(a,b)$ בקטע. ז"א

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$$

לכל $a<c<b$.

הגדרה 6.2 רציפות בקטע סגור

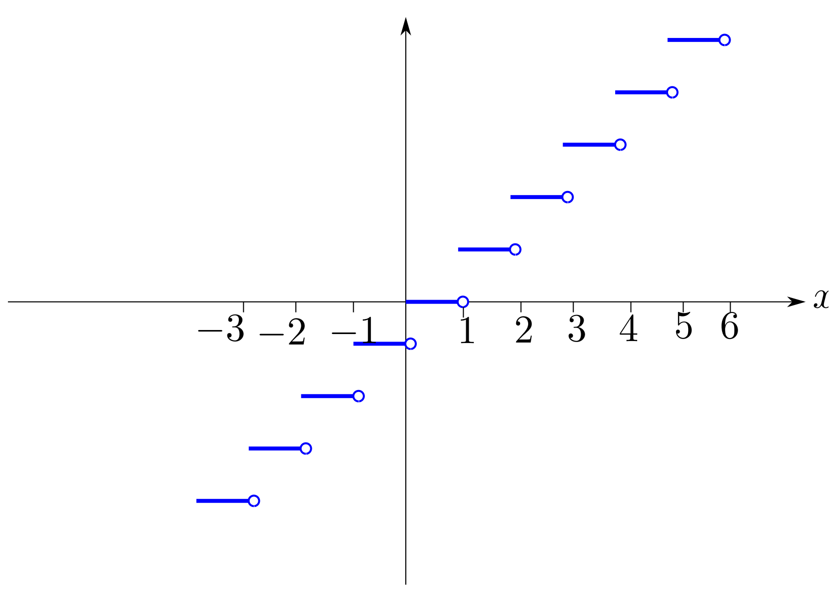
פונקציה $f(x)$ נקראת רציפה בקטע סגור $[a,b]$ אם f רציפה בכל נקודה פנימית הקטע וגם

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \ , \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b) \ .$$

דוגמה 6.1

$f(x)=\lfloor x\rfloor$, פונקצית הרצפה של x (ז"א אומרת המספר השלם הקרוב ביותר ל- x ופחות מ- x). קבע אם $f(x)$ רציפה בקטע $[1,2]$.

פתרון:

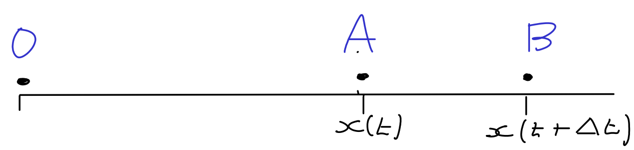


בקטע הפתוח $(1,2)$ $f(x)=1$ - רציפה.

$$\lim_{x\to 1^+}[x]=1\ ,\quad f(1)=1$$
$$\lim_{x\to 2^-}[x]=1\ ,\quad f(2)=2$$

לכן f לא רציפה משמאל בנקודה $x=2$, $f(x)$ רציפה מימין בנקודה $x=1$. אז $f(x)$ לא רציפה בקטע סגור $[1,2]$, אבל f רציפה בקטע $[1,2)$. ■

6.2 משמעות הפיזית של נגזרת



נניח שגוף הנמצא בנקודה $x(t)$ בזמן התחלתי t, נע לנקודה $x(t+\Delta t)$ ומסתיים שם בזמן סופי $t+\Delta t$. המהירות הממוצעת היא

$$\mathrm{v}=\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\ .$$

מכאן המהירות הרגעית בנקודה A היא

$$\mathrm{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\mathrm{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=x'(t)\ .$$

ז"א המשמעות הפיזית של הנגזרת היא מהירות.

הגדרה 6.3 הנגזרת

הנגזרת של פונקציה $f(x)$ בנקודה x תסומן $f'(x)$ ותוגדר

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\ .$$

דוגמה 6.2

$f(x)=c$

$$c'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=0\ .$$

דוגמה 6.3

$f(x)=x$

$$x'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=1\ .$$

דוגמה 6.4

$\underline{f(x) = x^2}$

$$
\begin{aligned}
(x^2)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2\Delta x \cdot x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x \cdot x + \Delta x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (2 \cdot x + \Delta x) \\
&= 2x \ .
\end{aligned}
$$

דוגמה 6.5

$\underline{f(x) = x^n}$

$$
\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^{n-k}\Delta x^k + \cdots + \Delta x^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^{n-k}\Delta x^k + \cdots + \Delta x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^{n-k}\Delta x^{k-1} + \cdots + \Delta x^{n-1} \right) \\
&= nx^{n-1} \ .
\end{aligned}
$$

דוגמה 6.6

$\underline{f(x) = \ln x}$

$$
\begin{aligned}
(\ln x)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\ln\left[\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x}\right]\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x}}\right]\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]\\
&=\frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]\\
&=\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\lim_{\Delta x\to 0}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]\right)\\
&=\frac{1}{x}\cdot\ln(e)\\
&=\frac{1}{x}\ .
\end{aligned}
$$

דוגמה 6.7

$f(x)=\frac{1}{x}$

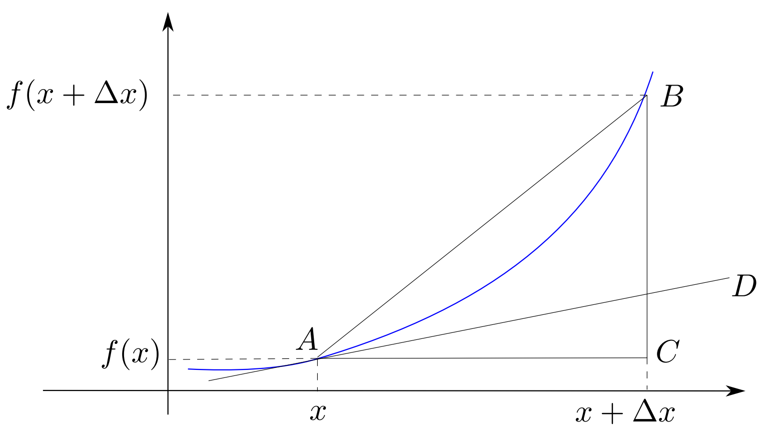
$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{x\cdot(x+\Delta x)\cdot\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x\cdot(x+\Delta x)}\\
&=\frac{-1}{x^2}\ .
\end{aligned}
$$

דוגמה 6.8

$\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}(\sqrt{x})' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\\ &=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ .\end{aligned}$$

6.3 משמעות הגאומטרית של נגזרת



השיפוע של הגרף בנקודה A מוגדרת להיות השיפוע של המשיק לגרף בנקודה A - ז"א השיפוע של הישר AD.
A הנקודה $(x,f(x))$ ו- B הנקודה $(x+\Delta x,f(x+\Delta x))$.
המיתר AB חופף את המשיק AD בגבול כאשר B מתקרב לנקודה A, וזה מתרחש כאשר $\Delta x\to 0$.
לכן, ניתן לחשב את השיפוע של המשיק ע"י השיפוע של הישר AB בגבול כאשר $\Delta x\to 0$.
מכאן נובע כי

$$\text{"שיפוע של המשיק"} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{BC}{AC} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

הצד ימין הוא הנגזרת של $f(x)$ בנקודה A.
ז"א מצאנו כי השיפוע של גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה x - שווה לנגזרת בנקודה זו.

6.4 משוואת המשיק ומשוואת הנורמל

למה 6.1 משיק ונורמל של גרף

משוואת הישר המשיק לקו $y=f(x)$ בנוקדה x_0 היא

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

משוואת הישר הנורמל לקו $y = f(x)$ בנקודה x_0 היא
$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

דוגמה 6.9

$f(x) = x^2$. מצא את משוואת המשיק ומשוואת הנורמל בנקודה $x = 2$.

פתרון:

משוואת המשיק:
$$y - 2^2 = 2 \cdot 2(x - 2) \qquad \Rightarrow \qquad y - 4 = 4(x - 2) \ .$$

ומשוואת הנורמל:
$$y - 2^2 = \frac{-1}{2 \cdot 2}(x - 2) \qquad \Rightarrow \qquad y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2) \ .$$

■

6.5 גזירות

הגדרה 6.4 נגזרת חד-צדדי

תהי f פונקציה. הנגזרת חד-צדדי מצד שמאל של f בנקודה a מוגדרת
$$f'_-(a) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \ .$$
הנגזרת חד-צדדי מצד ימין של f בנקודה a מוגדרת
$$f'_+(a) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \ .$$

הגדרה 6.5 פונקציה גזירה

פונקציה נקראת גזירה בנקודה a אם הגבול $f'(a)$ קיימת (שווה למספר ממשי סופי). כלומר, f גזירה בנקודה a אם הגבול החד-צדדי
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$
קיים.

נובע ממשפט **??** כי פונקציה f גזירה בנקודה a אם הגבולות הנגזרות החד-צדדיות שוות, כלומר אם
$$f'_-(a) = f'_+(a) \ .$$

משפט 6.1 קשר בין גזירות ורציפות

פונקציה $f(x)$ שהיא גזירה בנקודה a רציפה בנקודה זו.

שים לב, $f(x)$ רציפה בנקודה a לא בהכרח גזירה ב- a.

הוכחה:

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}\left[\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\cdot(x-a)\right]=\left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\cdot\left(\lim_{x\to a}(x-a)\right)$$

f גזירה ב a לכן הגבול $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ קיים ושווה לנגזרת $f'(a)$. לכן נקבל

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=f'(a)\cdot\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\cdot 0=0\ .$$

ז"א

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0\qquad\Rightarrow\qquad\lim_{x\to a}f(x)=f(a)\ .$$

ולכן הגבול $\lim_{x\to a}f(x)$ קיים ושווה ל $f(a)$. לכן f רציפה ב a. ■

דוגמה 6.10

.1

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}\ .$$

נבדוק אם $f(x)$ רציפה בנקודה $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^+}|x|=\lim_{x\to 0^+}x=0\ ,\qquad \lim_{x\to 0^-}|x|=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0\ .$$

לכן $f(x)$ רציפה בנקודה $x=0$.

נבדוק אם $f(x)$ גזירה בנקודה $x=0$:

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1\ ,$$
$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1\ .$$

לכן מכיוון ש- $f'_-(0)\neq f'_+(0)$ אז f אינה גזירה ב- $x=0$. ז"א לא קיים משיק בנקודה $x=0$.

.2

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}\ .$$

נבדוק אם $f(x)$ רציפה בנקודה $x=0$. שים לב $\sin(\frac{1}{x})$ חסומה ולפיו

$$\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0\ .$$

שים לב $f(0)=0$ ולכן $f(x)$ רציפה ב- $x=0$.

נבדוק אם $f(x)$ גזירה בנקודה $x=0$:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(0+\Delta x)\sin\left(\frac{1}{0+\Delta x}\right)-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)}{\Delta x}\ .$$

הגבול לא קיים ולכן $f(x)$ אינה גזירה ב- $x=0$.

6.6 כללי הנגזרת

משפט 6.2 כללים יסודיים של נגזרות

1. <u>סכום של פונקציות</u>

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)\ .$$

2. <u>מכפלת פונקציה בסקלר</u>

$$(\alpha f(x))'=\alpha f'(x)\ .$$

3. <u>כלל הכפל</u>

$$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\ .$$

4. <u>כלל המנה</u>

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}\ .$$

5. <u>כלל השרשרת</u>

$$[f\left(g(x)\right)]'=f\left(g\right)'_g\cdot g(x)'_x\ .$$

6.7 דוגמאות

דוגמה 6.11

$$\left[\ln\left(x^4-2x^2+6\right)\right]'=\frac{1}{x^4-2x^2+6}\cdot(4x^3-4x)$$

דוגמה 6.12

$$\left[7^{x^2-4x}\right]'=7^{x^2-4x}\cdot\ln 7\cdot(2x-4)\ .$$

דוגמה 6.13

מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ בנקודה $A(\pi/2,2)$.

פתרון:

$$f'(x) = 8\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \cdot \frac{1}{2} \ .$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -8\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} = -8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = -2 \ .$$

משוואת המשיק:

$$y - 2 = -2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

משוואת הנורמל:

$$y - 2 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

■

6.8 זווית בין קווים עקומים

דוגמה 6.14

מצא את הזווית בין הקווים $y = \frac{x}{2}$ ו- $y = \frac{1}{1+x}$ בנקודת החיתוך שלהם שבה $x > 0$. צייר את הסקיצה המתאימה.

פתרון:

נקודת חיתוך:

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{x+1} \qquad \Rightarrow \qquad x(x+1) = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + x - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1 \ .$$

נקודת חיתוך: $(1, 0.5)$

שיפוע של y_1:

$$y_1 = \frac{x}{2} \ , \qquad y_1' = \frac{1}{2} \ , \qquad y_1'(1) = \frac{1}{2} = m_1 \ .$$

שיפוע של y_2:

$$y_2 = \frac{1}{x+1} \ , \qquad y_2' = \frac{-1}{(x+1)^2} \ , \qquad y_1'(1) = \frac{-1}{4} = m_2 \ .$$

חישוב הזווית בין y_1 ו- y_2:

$$\tan\alpha = \frac{|m_1 - m_2|}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{6}{7}$$

כך ש-

$$\alpha = 40.6^\circ \ .$$

■

6.9 נגזרת של פונקציה סתומה

דוגמה 6.15

נתונה הפונקציה $y(x)$ הניתנת ע"י
$$x^2 + y^2 = 1 \ .$$
מצא את הנגזרת $y'(x)$.

פתרון:
נגזור את אגף השמאל ואגף הימין:
$$2x + 2y \cdot y' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2y \cdot y' = -2x \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{x}{y} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \ .$$
■

דוגמה 6.16

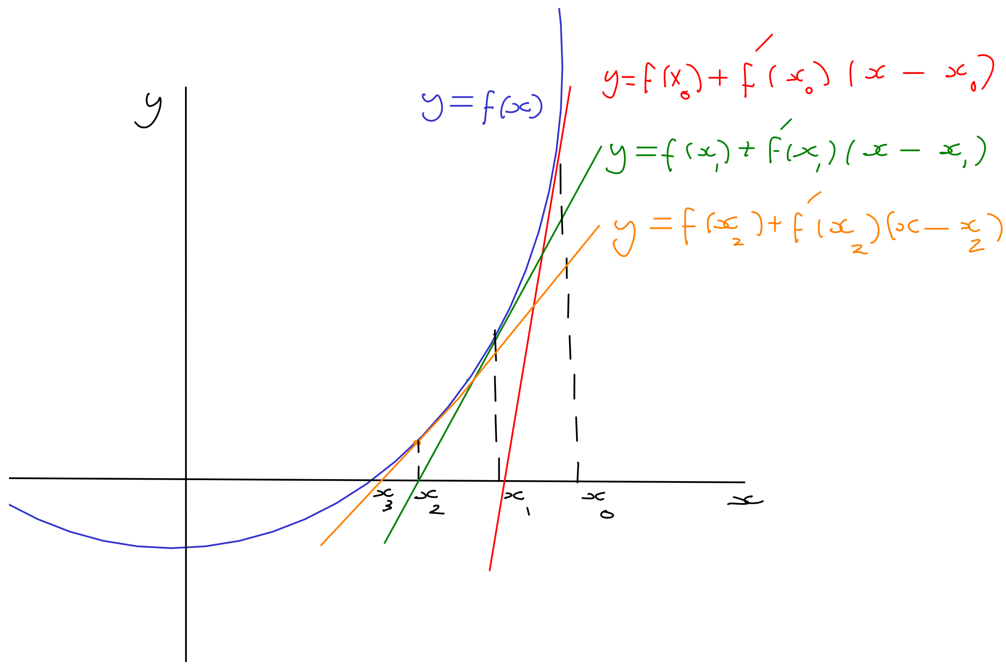
נתונה הפונקציה $y(x)$ הניתנת ע"י
$$e^x - x - y + x \cdot e^y = 0 \ .$$
מצא את משוואת המשיק בנקודה $(0,1)$.

פתרון:
נגזור את אגף השמאל ואגף הימין:
$$e^x - 1 - y' + e^y + x \cdot y' \cdot e^y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e^x - 1 + e^y = y' \left(1 - x \cdot e^y\right) \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{e^x - 1 + e^y}{1 - x \cdot e^y} \ .$$
ולפיו בנקודה $(0,1)$,
$$y' = \frac{1-1+e}{1} = e$$
כך שמשוואת המשיק בנקוזה זו היא
$$y - 1 = e \cdot x \ .$$
■

שיעור 7
נגזרת של פונקציה הפוכה סתומה ופרמטרית, נגזרת מסדר גבוה, שיטת ניוטון

7.1 שיטת המשיקים של ניוטון לפתרון המקורב של משוואות

שוטה זו מבוססת על קירוב הפונקציה $f(x)$ ע"י המשיק $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ בנקודה התחלתית x_0 ומציאת השורש x_1 של משיק זה".



<u>שלב 1</u> נבחור נקודה התחלתית x_0

<u>שלב 2</u> נחשב משוואת המשיק בנקודה x_0:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

<u>שלב 3</u> נמצוא נקודת חיתוך של משיק זו עם ציר ה- x:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

<u>שלב 4</u> נחזור לשלבים 1-3 עם נקודת התחלתית x_1 במקום x_0:

<u>שלב' 1</u> נתחיל עם נקודת התחלתית x_1 הנמצא בשלב הקודם.

<u>שלב' 2</u> נחשב משוואת המשיק בנקודה x_1:

$$y=f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)$$

<u>שלב' 3</u> נמצוא נקודת חיתוך של משיק זו עם ציר ה- x:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

<u>שלב' 4</u> נחזור לשלבים 1-3 עם נקודת התחלתית x_2 במקום x_1:

וכן הלאה...

דוגמה 7.1

מצא את שורש אחד של פונקציה $f(x) = x^2 - x - 13$.

פתרון:
נתחיל עם נקודה התחלתית $x_0 = 10$:

$n = 0$	$x_0 = 10$	$f(x_0) = 85$
$n = 1$	$x_1 = 4.6$	$f(x_1) = 11.56$
$n = 2$	$x_2 = 3.19024$	$f(x_2) = 1.98741$
$n = 3$	$x_3 = 2.82087$	$f(x_3) = 0.136437$
$n = 4$	$x_4 = 2.79148$	$f(x_4) = 0.00086398$

■

7.2 נגזרת של פונקציה סתומה

דוגמה 7.2

מהו משוואת המשיק לקו של הפונקציה $x^2 + y^2 = 1$ $(y \geq 0)$ בנקודה $x = 0.5$.

פתרון:
נגזור את שני הצדדים:

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{x}{y}$$

שים לב

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

, לכן עבור $y \geq 0$ נקבל

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \ .$$

מבאן בנקודה $x = 0.5$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ו- $y' = \frac{-1}{\sqrt{3}}$. לכן משוואת המשיק בנקודה $x = 0.5$ היא

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}(x - \tfrac{1}{2}) \ .$$

■

דוגמה 7.3

נתונה $e^x - x - y + xe^y = 0$ מצא את משוואת המשיק בנקודה $(0,1)$.

פתרון:
נגזור שני הצדדים:
$$e^x - 1 - y' + e^y + xy'e^y = 0 \ .$$
נציב את הנקודה $(0,1)$ ונקבל
$$1 - 1 - y'(0) + e = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y'(0) = e \ .$$
לכן משוואת המשיק היא
$$y = 1 + ex \ .$$
■

דוגמה 7.4

מצאו את משוואת המשיק והנורמל לקו
$$e^x y + \ln(xy+1) = 1$$
בנקודה שבה $x=0$.

פתרון:
נציב $x=0$ לתוך המשוואה:
$$e^0 y + \ln(1) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y = 1 \ .$$
נגזור את שני הצדדים של המשוואה:
$$e^x y + e^x y' + \frac{1}{xy+1} \cdot (y + xy') = 0$$
נציב את הנקודה $(0,1)$:
$$1 + y' + 1 \cdot (1 + 0 \cdot y') = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -2 \ .$$
לכן עבור משוואת המשיק נקבל
$$y = 1 - 2x$$
ועבור משוואת הנורמל נקבל
$$y = 1 + \frac{x}{2} \ .$$
■

דוגמה 7.5

פונקציה $y(x)$ מוגדרת בצורה סתומה ע"י המשוואה
$$xe^{2y} + y\ln x + \sin(2y) = 1 \ .$$
מצאו את הזווית שהמשיק בנקודה $A(1,0)$ יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x.

פתרון:
שים לב, הנגזרת של פונקציה $y(x)$ בנקודה A שווה ל tan של הזווית שהמשיק יוצר עם ציר ה- x. לכן מספיק למצוא את הנגזרת בנקודה זו.

$$e^{2y}+2xy'e^{2y}+y'\ln x+\frac{y}{x}+2\cos(2y)\cdot y'=0\ .$$

נציב את הנקודה $A(1,0)$:

$$1+2y'(1)+y'(1)\ln(1)+\frac{0}{1}+2\cos(2\cdot 0)\cdot y'(1)=0\qquad\Rightarrow\qquad 1+2y'(1)+2y'(1)=0\qquad\Rightarrow\qquad y'(1)=-\frac{1}{4}\ .$$

לכן $\tan\alpha=-\frac{1}{4}$ ולפיו $\alpha=\arctan\left(-\frac{1}{4}\right)=-14.3^\circ$ ■

7.3 נגזרת של פונקציה הפוכה

משפט 7.1 נגזרת של פונקציה הפוכה

נניח ש $y=f^{-1}(x)$ אז $x=f(y)$. כלומר

$$y=f^{-1}(x)\qquad\Leftrightarrow\qquad x=f(y)\ .$$

להיעזר בכלל השרשרת נגזור את שני הצדדים של $x=f(y(x))$

$$x'=f(y)'_y\cdot y(x)'_x\qquad\Rightarrow\qquad 1=f(y)'_y\cdot y(x)'_x\qquad\Rightarrow\qquad y(x)'_x=\frac{1}{f(y)'_y}$$

שים לב $y(x)=f^{-1}(x)$ לפי ההגדרה לעיל אז נקבל היחס

$$f^{-1}(x)'_x=\frac{1}{f(y)'_y}\ .$$

דוגמה 7.6

מהי הנגזרת של $y=\arcsin(x)$.

פתרון:

$$y=\arcsin(x)\qquad\Rightarrow\qquad x=\sin(y)\ .$$

הפונקציה ההפוכה היא $f^{-1}(x)=\arcsin(x)$ והפונקציה f היא $f(y)=\sin y$. לכן לפי הנוסחה,

$$\arcsin(x)'_x=\frac{1}{\sin(y)'_y}=\frac{1}{\cos y}$$

נשתמש זיהוי $\sin^2 y+\cos^2 y=1$ שנובע ל- $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}$ ונקבל

$$\arcsin(x)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

או שקול, מכיוון ש $x=\sin y$,
$$\arcsin(x)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ .$$

■

דוגמה 7.7

מהי הנגזרת של $y=\arctan(x)$.

פתרון:

$$y=\arctan(x) \qquad \Rightarrow \qquad x=\tan(y) \ .$$
הפונקציה ההפוכה היא $f^{-1}(x)=\arctan(x)$ והפונרציה f היא $f(y)=\tan y$. לכן לפי הנוסחה,
$$\arctan(x)'_x = \frac{1}{\tan(y)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$
נשתמש זיהוי $\tan^2 y+1=\frac{1}{\cos^2 y}$ שנובע ל- $\cos^2 y=\frac{1}{\tan^2 y+1}$ ונקבל
$$\arctan(x)'_x = \frac{1}{1+\tan^2 y}$$
או שקול, מכיוון ש $x=\tan y$,
$$\arctan(x)'_x = \frac{1}{1+x^2} \ .$$

■

7.4 משוואת פרמטרית

הגדרה 7.1 פונקציה פרמטרית

פונקציה פרמטרית היא פונקציה הנתונה בצורה
$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$
באמצעות פרמטר t.

דוגמה 7.8

נתונה הפונקציה
$$\begin{cases} x=t^3 \\ y=t^2 \end{cases}$$
הבע אותו בצורה קנונית.

פתרון:

$$y = t^2 = \left(t^3\right)^{2/3} = x^{2/3} \ .$$

■

7.5 נגזרת של פונקציה פרמטרית

משפט 7.2 נגזרת של פונקציה פרמטרית

נתונה פונקציה בצורה פרמטרית

$$y = f(t) \ , \qquad x = g(t) \ .$$

הנגזרת ניתנת ע"י הנוסחה

$$y'_x = \frac{f(t)'_t}{g(t)'_t} \ .$$

הוכחה: נתונה פונקציה בצורה פרמטרית

$$y = f(t) \ , \qquad x = g(t) \ .$$

מכאן

$$t = g^{-1}(x)$$

זאת אומרת ניתן להסתכל אל הפרמטר t כפונקציה של x. ע"י כלל השרשרת,

$$y'_x = f\,(t)'_x = f(t)'_t \cdot t'_x = f(t)'_t \cdot g^{-1}(x)'_x$$

אבל $g^{-1}(x)'_x = \dfrac{1}{g(t)'_t}$ ולכן

$$y'_x = \frac{f(t)'_t}{g(t)'_t} \ .$$

■

דוגמה 7.9

נתונה הפונקציה

$$x = \ln(t+2) \ , \qquad y = t^2 - 3t \ .$$

מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y(x)$ בנקודה שבה $x = 0$.

פתרון:

נציב $x = 0$:

$$\ln(t+2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t+2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad t = -1 \ .$$

נציב את $t = -1$ לתוך הנוסחה של y:

$$y = (-1)^2 - 3(-1) = 4 \ .$$

נגזור את הפונקציה הפרמטרית:

$$x'_t = \frac{1}{t+2} \ , \qquad y'_t = 2t - 3 \ , \qquad \Rightarrow \qquad y'_x = \frac{2t-3}{\left(\frac{1}{t+2}\right)} = (t+2)(2t-3)$$

נציב $t=-1$:

$$y'_x=(1)(-2-3)=-5\ .$$

משוואת המשיק:

$$y=4-5x\ .$$

■

דוגמה 7.10

מצאו את משוואת המשיק והנורמל לגרף הפונקציה $y(x)$ הנתונה ע"י

$$x=(t-2)e^t\ ,\qquad y=t^2+t-1$$

בנקודה שבה $t=0$.

פתרון:
בנקודה $t=0$,

$$x=-2\ ,\qquad y=-1\ .$$

הנגזרת היא

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2t+1}{(t-1)e^t}$$

ובנקודה $t=0$:

$$y'_x(t=0)=-1\ .$$

משוואת המשיק:

$$y=-1-(x+2)\ .$$

משוואת הנורמל:

$$y=-1+(x+2)$$

■

דוגמה 7.11

נתונה הפונקציה

$$x=4\cos t\ ,\qquad y=3\sin t\ .$$

מהי משוואת המשיק בנקודה $(4,3)$.

פתרון:
שים לב שלפי הזהות $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ ניתן לבטא הפונקציה בצורה

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

וזו דווקא הצורה של משוואה של אליפסה.

הנקודה $(2,3\sqrt{3}/2)$ מתאימה לערך $t=\pi/3$.

$$x(t)'_t=-4\sin t\ ,\qquad y(t)'_t=3\cos t\ .$$

בנקודה $t=\pi/3$,

$$x'_t=-2\sqrt{3}\ ,\qquad y'_t=3/2\ ,$$

ולכן לפי הנוסחה

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-\sqrt{3}}{4} \ .$$

משוואת המישק:

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\,(x-2) \ .$$

■

7.6 נגזרת באמצעות לוגריתמים

דוגמה 7.12

מצאו את הנגזרת של הפונקציה

$$y = \frac{(x^2+2)\sqrt[4]{(x-1)^3}e^x}{(x+5)^3}$$

פתרון:

נפעיל $\ln$ על שני הצדדים:

$$\ln y = \ln(x^2+2) + \frac{3}{4}\ln(x-1) + x - 3\ln(x+5)$$

נגזור את שני הצדדים:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}$$

מכאן

$$y' = y\left[\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right]$$

$$y' = \frac{(x^2+2)\sqrt[4]{(x-1)^3}e^x}{(x+5)^3}\left[\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right]$$

■

דוגמה 7.13

מצאו את הנגזרת של

$$y = x^x \ .$$

פתרון:

$$y = x^x \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = \ln x^x = x\ln x \ .$$

נגזור את שני הצדדים:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1 \ .$$

מכאן

$$y' = y\,(\ln x + 1) = x^x\,(\ln x + 1) \ .$$

■

דוגמה 7.14

מצאו את הנגזרת של

$$y=(\sin 2x)^{x^2+1}\ .$$

פתרון:

$$\ln y=(x^2+1)\cdot\ln(\sin 2x)\ .$$

נגזור את שני הצדדים:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=2x\cdot\ln(\sin 2x)+(x^2+1)\cdot\frac{1}{\sin 2x}\cdot 2\cos 2x\ ,$$

מכאן

$$\begin{aligned}
y' =&y\left[2x\cdot\ln(\sin 2x)+(x^2+1)\cdot\frac{1}{\sin 2x}\cdot 2\cos 2x\right]\\
y' =&(x^2+1)\cdot\ln(\sin 2x)\left[2x\cdot\ln(\sin 2x)+(x^2+1)\cdot\frac{2\cos(2x)}{\sin 2x}\right]\\
y' =&(x^2+1)\cdot\ln(\sin 2x)\left[2x\cdot\ln(\sin 2x)+(x^2+1)\cdot 2\tan 2x\right]\ .
\end{aligned}$$

■

7.7 נגזרת מסדר גבוהה

נגזרת ראשונה	$f(x)'$
נגזרת שניה	$f(x)''$ או $f(x)^{(2)}$
נגזרת שלישית	$f(x)'''$ או $f(x)^{(3)}$
נגזרת רביעית	$f(x)^{(4)}$
נגזרת חמישית	$f(x)^{(5)}$
נגזרת ה- n	$f(x)^{(n)}$

דוגמה 7.15

$f(x)$	$\sin x$
$f(x)'$	$\cos x$
$f(x)''$	$-\sin x$
$f(x)^{(3)}$	$-\cos x$
$f(x)^{(4)}$	$\sin x$

7.8 נגזרת מסדר גבוה של פונקציה סתומה

דוגמה 7.16

נתונה הפונקציה $x^2+y^2=1$ מהי הנגזרת השניה של y?

פתרון:
נגזור את שני הצדדים:

$$2x+2yy'=0 \qquad \Rightarrow \qquad y'=-\frac{x}{y} \ .$$

נגזור שוב פעם:

$$2+2y'y'+2yy''=0 \qquad \Rightarrow \qquad y''=\frac{-1-(y')^2}{y}=\frac{-1-\frac{x^2}{y^2}}{y}=-=\frac{x^2+y^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3} \ .$$

■

7.9 נגזרת מסדר גבוה של פונקציה פרמטרית

משפט 7.3 נגזרת מסדר גבוה של פונקציה פרמטרית

נתונה פונקציה פרמטרית

$$y=y(t) \ , \qquad x=x(t) \ .$$

אז הנגזרת השנייה ניתנת ע"י הנוסחה

$$y''_{xx}=\frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} \ .$$

הוכחה: נתונה פונקציה פרמטרית

$$y=y(t) \ , \qquad x=x(t) \ .$$

הנגזרת הראשונה היא

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t} \ .$$

דרך זה נקבל פונקציה פרמטרית חדשה:

$$y'_x=y'_x(t) \ , \qquad x=x(t) \ .$$

נגזור אותה לפי אותו כלל ונקבל

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

$$y''_{xx}=\frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t}=\frac{y''_{tt}}{(x'_t)^2}-\frac{y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3} \ .$$

■

דוגמה 7.17

$$y = \sin t \ , \qquad x = \cos t \ .$$

פתרון:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\cot t \ .$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \ .$$

$$(y'_x)'_t = -(\cot t)'_t = -\frac{1}{\sin^2 t} \ .$$

לכן

$$y''_{xx} = \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \frac{-1}{\sin t} = \frac{1}{\sin^3 t} \ .$$

■

שיעור 8
פולינום מקלורן וטיילור, כלל לופיטל

8.1 נוסחת טיילור ומקלורן

כדי למצוא ערכים של פונקציה מקרבים אותה באמצעות פולינום.

משפט 8.1 משפט טיילור

תהי f פונקציה מוגדרת בסביבה של נקודה a וגזירה לפחות $n+1$ פעמים בנקודה a. אז לכל x בסביבה לנקודה a קיימת נקודה c בין a ל- x כך ש-

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

הנוסחה זו נקראת נוסחת טיילור. האיבר הסופי

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

נקרא השארית. זאת אומרת

$$f(x)=\overbrace{f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}^{n \text{ פולינום טיילור מסדר}}+R_n(x)$$

נוסחת מקלורן היא נוסחת טיילור עבור $a=0$.

משפט 8.2 מקלורן

תהי f פונקציה מוגדרת בסביבה של נקודה 0 וגזירה לפחות $n+1$ פעמים בנקודה 0. אז לכל x בסביבה לנקודה 0 קיימת נקודה c בין 0 ל- x כך ש-

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$

כאשר

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\ .$$

8.2 דוגמאות

דוגמה 8.1

<u>$f(x)=e^x$</u>

נרשום פולינום מקלורן מסדר n:
$$f(0)=e^0=1$$
ו-
$$f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$$
לכן
$$f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=e^0=1\ ,$$
ונקבל
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\ .$$

דוגמה 8.2

<u>$f(x)=\sin x$</u>

נרשום פולינום מקלורן מסדר n:
$$f(0)=\sin(0)=0\ .$$
ו-
$$\begin{aligned}
f'(x)&=\cos x\ , & f'(0)&=\cos(0)=1\ .\\
f''(x)&=-\sin x\ , & f''(0)&=-\sin(0)=0\ .\\
f'''(x)&=-\cos x\ , & f'''(0)&=-\cos(0)=-1\ .\\
f^{(4)}(x)&=\sin x\ , & f^{(4)}(0)&=\sin(0)=0\ .\\
f^{(5)}(x)&=\cos x\ , & f^{(5)}(0)&=\cos(0)=1\ .\\
f^{(6)}(x)&=-\sin x\ , & f^{(6)}(0)&=-\sin(0)=0\ .\\
f^{(7)}(x)&=-\cos x\ , & f^{(7)}(0)&=-\cos(0)=-1\ .
\end{aligned}$$
לכן
$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\ .$$

דוגמה 8.3

<u>$f(x)=\cos x$</u>

נרשום פולינום מקלורן מסדר n:
$$f(0)=\cos(0)=1\ .$$

ו-

$$f'(x) = -\sin x \ , \quad f'(0) = -\sin(0) = 0 \ .$$
$$f''(x) = -\cos x \ , \quad f''(0) = -\cos(0) = -1 \ .$$
$$f^{(3)}(x) = \sin x \ , \quad f^{(3)}(0) = \sin(0) = 0 \ .$$
$$f^{(4)}(x) = \cos x \ , \quad f^{(4)}(0) = \cos(0) = 1 \ .$$
$$f^{(5)}(x) = -\sin x \ , \quad f^{(5)}(0) = -\sin(0) = 0 \ .$$
$$f^{(6)}(x) = -\cos x \ , \quad f^{(6)}(0) = -\cos(0) = -1 \ .$$
$$f^{(7)}(x) = \sin x \ , \quad f^{(7)}(0) = \sin(0) = 0 \ .$$

לכן

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ .$$

דוגמה 8.4

רשמו את פולינום מקלורן מסדר 3 עבור הפונקציה $y = \arctan(x+1)$.

פתרון:

$$f(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \ .$$
$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2+1} \ , \qquad f'(0) = \frac{1}{2} \ .$$
$$f''(x) = \frac{-2(x+1)}{\left((x+1)^2+1\right)^2} \ , \quad f''(0) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \ .$$

.

$$P_2(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} \ .$$

■

דוגמה 8.5

ידוע שפולינום מקלורן מסדר 3 של פונקציה $f(x)$ הוא $x + 2x^2 - x^3$. חשב את $f''(0) \cdot f'''(0)$.

פתרון:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 = x + 2x^2 - x^3 \ .$$

לכן

$$f'(0) = 1 \ , \qquad \frac{f''(0)}{2!} = 2, \qquad \frac{f^{(3)}(0)}{3!} = -1$$

ז"א

$$f''(0) \cdot f'''(0) = 4 \cdot (-6) = -24 \ .$$

■

דוגמה 8.6

רשמו פולינום מקלורן מסדר 2 עבור פונקציה $y(x)$ הנתונה בצורה סתומה:

$$xy + y^3 = \cos(2x) \ .$$

פתרון:

נציב $x = 0$:

$$y(0)^3 = \cos(2 \cdot 0) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y(0) = 1 \ .$$

נגזור את שני הצדדים:

$$y + xy' + 3y^2 \cdot y' = -2\sin(2x)$$

נציב $x = 0$, $y(0) = 1$:

$$1 + 3 \cdot 1^2 \cdot y'(0) = -2\sin(2 \cdot 0) \qquad \Rightarrow \qquad 1 + 3 \cdot y'(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y'(0) = -\frac{1}{3} \ .$$

נגזור את שני הצדדים פעם שניה:

$$y' + y' + xy'' + 6y \cdot (y')^2 + 3y^2 \cdot y'' = -4\cos(2x)$$

נציב $x = 0$, $y(0) = 1$ $y'(0) = -\frac{1}{3}$:

$$-\frac{2}{3} + 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 3y'' = -4 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 3y'' = -4 \qquad \Rightarrow \qquad y'' = -\frac{4}{3} \ .$$

$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{3 \cdot 2!}x^2 = 1 - \frac{x}{3} - \frac{2}{3}x^2$$

■

דוגמה 8.7

רשמו פולינום מקלורן מסדר 2 עבור פונקציה $y(x)$ הנתונה בצורה פרמטרית:

$$x = \ln(t+2) \ , \qquad y = t^2 - 3t \ .$$

פתרון:

$$x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ln(t+2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = -1 \ .$$

לכן

$$y = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) = 4 \ .$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t-3}{\frac{1}{t+2}} = (2t-3)(t+2) = 2t^2 + t - 6 \ .$$

$$y'_x(t=-1) = -5 \ .$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{4t+1}{\frac{1}{t+2}} = (4t+1)(t+2) \ .$$

$$y''_x(t=-1) = -3 \ .$$

לכן

$$P_2(x) - 5 - 5x - \frac{3x^2}{2!} = 4 - 5x - \frac{3x^2}{2} \ .$$

■

8.3 כלל לופיטל

משפט 8.3 כלל לופיטל

יהיו $f(x)$, $g(x)$ פונקציות רציפות וגזירות בסביבה של נקודה a. אם התנאים הבאים מתקיימים:

.1

$$\lim_{x\to a} f(a) = 0 \ , \qquad \lim_{x\to a} g(a) = 0$$

או

$$\lim_{x\to a} f(a) = \pm\infty \ , \qquad \lim_{x\to a} g(a) = \pm\infty$$

.2 $g'(x) \neq 0$ בסביבה של a,

.3 הגבול $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים וסופי,

אז

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

8.4 דוגמאות

דוגמה 8.8

קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x \cdot \ln x}$$

פתרון:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x\cdot \ln x} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)'}{(x\cdot \ln x)'} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{(1+\ln x)} \\ &= \frac{1}{(1+\ln 1)} = \frac{1}{(1+0)} = 1\end{aligned}$$

■

דוגמה 8.9

קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}$$

פתרון:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 6x)'}{(2x^2)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{4x}\ .\end{aligned}$$

<u>דרך 1</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{4x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(6\sin 6x)'}{(4x)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{36\cdot\cos 6x}{4}\\ &= \frac{36\cdot\cos 0}{4}\\ &= \frac{36}{4}\ .\end{aligned}$$

<u>דרך 2</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{4x} &= \lim_{x\to 0}\frac{6}{4}\cdot\frac{6\sin 6x}{6x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{36}{4}\cdot\frac{\sin 6x}{6x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{36}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}\\ &= \frac{36}{4}\ .\end{aligned}$$

■

דוגמה 8.10

קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan 3x}{\tan 5x}$$

פתרון:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan 3x}{\tan 5x} &= \lim_{x\to\pi/2}\frac{(\tan 3x)'}{(\tan 5x)'}\\ &= \lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}}\\ &=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x}\\ &=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{2}(1+\cos 10x)}{\frac{1}{2}(1+\cos 6x)}\\ &=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{(1+\cos 10x)}{(1+\cos 6x)}\\ &=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{(1+\cos 10x)'}{(1+\cos 6x)'}\\ &=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{-10\cdot\sin 10x}{-6\cdot\sin 6x}\\ &=\frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin 10x}{\sin 6x}\\ &=\frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{(\sin 10x)'}{(\sin 6x)'}\\ &=\frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{10\cdot\cos 10x}{6\cdot\cos 6x}\\ &=\frac{25}{9}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos 10x}{\cos 6x}\\ &=\frac{25}{9}\cdot\frac{\cos(5\pi)}{\cos(3\pi)}\\ &=\frac{25}{9}\cdot\frac{-1}{-1}\\ &=\frac{25}{9}\ .\end{aligned}$$

■

דוגמה 8.11

קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x\to 2}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)(2-x)\right]$$

פתרון:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)(2-x)\right] &= \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\cot\left(\frac{\pi}{4}x\right)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{-1}{\frac{\pi}{4}\cdot\frac{-1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)}}\\
&=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}}\\
&=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}}\\
&=\frac{4}{\pi}\ .
\end{aligned}
$$

■

דוגמה 8.12

קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

פתרון:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\cdot\ln x}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\cdot\ln x)'}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1-1/x}{\ln x+(x-1)/x}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(1-1/x)'}{(\ln x+(x-1)/x)'}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{-1/x^2}{1/x+1/x^2}\\
&=\frac{1}{2}\ .
\end{aligned}
$$

■

דוגמה 8.13

קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2}$$

פתרון:

דרך 1

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1+(\cos 2x-1)\right)^{1/(\cos 2x-1)}\right]^{(\cos 2x-1)/x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} e^{(\cos 2x-1)/x^2}$$
$$= e^{\lim_{x\to 0}(\cos 2x-1)/x^2}$$
$$= e^{\lim_{x\to 0}(-2\sin 2x)/2x}$$
$$= e^{-2}\ .$$

דרך 2

תהי $f(x) = (\cos 2x)^{1/x^2}$. אז

$$\ln f(x) = \frac{1}{x^2}\ln\cos(2x)$$

ו-

$$f(x) = e^{\ln f(x)}\ .$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos(2x)}{x^2}}$$
$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(2x)}{2x\cos 2x}}$$
$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{(-2)}{\cos 2x}}$$
$$= e^{-2}\ .$$

■

שיעור 9
תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, קמירות, אסימפטוטות ודוגמאות לחקירה

9.1 תחומי עליה וירידה של פונקציה

משפט 9.1 תנאי הכרחי למונוטוניות

א) נניח שפונקציה $f(x)$ גזירה בקטע (a,b) ועולה ממש בקטע הזה. אז $f'(x)\geq 0$ לכל $x\in(a,b)$.

ב) נניח שפונקציה $f(x)$ גזירה בקטע (a,b) ויורדת ממש בקטע הזה. אז $f'(x)\leq 0$ לכל $x\in(a,b)$.

הוכחה:

א) נניח ש f עולה בקטע (a,b). f גזירה בקטע (a,b) אז לכל $x\in(a,b)$:

$$f'(x)=f'_+(x)=f'_-(x)$$

כאשר

$$f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\ ,\qquad f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

f עולה ממש לכן לכל $\Delta x>0$ מתקיים $f(x+\Delta x)-f(x)>0$.

לכן $f'_+(x)>0$.

באותה מידה, מכיוון ש- f עולה ממש אז לכל $\Delta x<0$ מתקיים $f(x+\Delta x)<f(x)$, כלומר $f(x+\Delta x)-f(x)>0$.

לכן $f'_-(x)>0$. לפיכך

$$f'(x)=f'_+(x)=f'_-(x)\geq 0 \text{ לכל } x\in(a,b).$$

ב) ההוכחה דומה להוכחה של הסעיף הקודם.

■

משפט 9.2 תנאי המספיק למונוטוניות

א) נניח שפונקציה $f(x)$ גזירה בקטע (a,b) לכל $x\in(a,b)$, $f'(x)>0$. אז $f(x)$ עולה מונוטונית בקטע (a,b).

ב) נניח שפונקציה $f(x)$ גזירה בקטע (a,b) לכל $x\in(a,b)$, $f'(x)<0$. אז $f(x)$ יורדת מונוטונית בקטע (a,b).

הוכחה:

א) נניח ש $f'(x) > 0$ לכל $x \in (a,b)$. נקח $x_1 < x_2$ בתוך הקטע. לפי משפט לגרנז' 10.3 קיים c כך ש- $x_1 < c < x_2$ ו-

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \ .$$

לפי הנתון, $f'(c) > 0$, לכן $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftarrow f(x_2) > f(x_1)$. ז"א f עולה מונוטונית בקטע (a,b).

ב) ההוכחה דומה להוכחה של הסעיף הקודם.

■

9.2 תרגילים

דוגמה 9.1

בדקו את תחומי עליה וירידה של פונקציה $f(x) = x^3 - 3x - 4$.

פתרון:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1) \ .$$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

■

דוגמה 9.2

הראו כי למשוואה $2\ln x + x^2 - 5 = 0$ יש שורש ממשי אחד בדיוק.

פתרון:
נגדיר $f(x) = 2\ln x + x^2 - 5$. שים לב

$$f(1) = -4 < 0 \ , \qquad f(2) = 2\ln 2 - 1 > 0 \ .$$

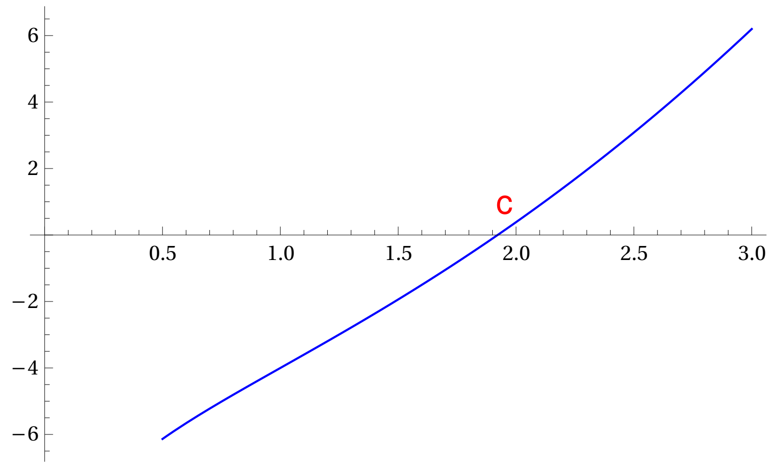
תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא $x > 0$. מכיוון ש $f(x)$ פונקציה אלמנטרית, ומוגדרת בקטע $[1,2]$, אז היא רציפה בקטע זו וגזירה בקטע $(1,2)$. לפי משפט ערך הביניים 10.2 קיים $c \in (1,2)$ כך ש- $f(c) = 0$.

נוכיח שהשורש c הוא יחיד:

שים לב

$$f'(x) = \frac{2}{x} + 2x > 0$$

לכל x בתחום ההגדרה. $f \Leftarrow$ עולה מונוטונית בתחום $(0,\infty) \Leftarrow f$ חח"ע $\Leftarrow$ השורש הוא יחיד.



■

9.3 נקודות קיצון

הגדרה 9.1 נקודת מקסימום

נקודה a נקראת נקודת מקסימום מקומי של פונקציה $f(x)$ אם קיימת סביבה של a כך שלכל $x \neq a$ השייך לסביבה, מתקיים

$$f(x) < f(a) \ .$$

הגדרה 9.2 נקודת מינימום

נקודה a נקראת נקודת מינימום מקומי של פונקציה $f(x)$ אם קיימת סביבה של a כך שלכל $x \neq a$ השייך לסביבה, מתקיים

$$f(x) > f(a) \ .$$

נקודות מקסימום ומינימום נקראות **נקודות קיצון** אן גם **נקודות אקסטרמום.**

משפט 9.3 משפט פרמה (תנאי הכרחי לאקסטרמום)

אם פונקציה $f(x)$ גזירה בסביבה של נקודה a ו- $x=a$ נקודת קיצון של $f(x)$. אז $f'(a)=0$.

המשמעות הגאומטרית: בנקודהת קיצון המשיק מקביל לציר ה- x.

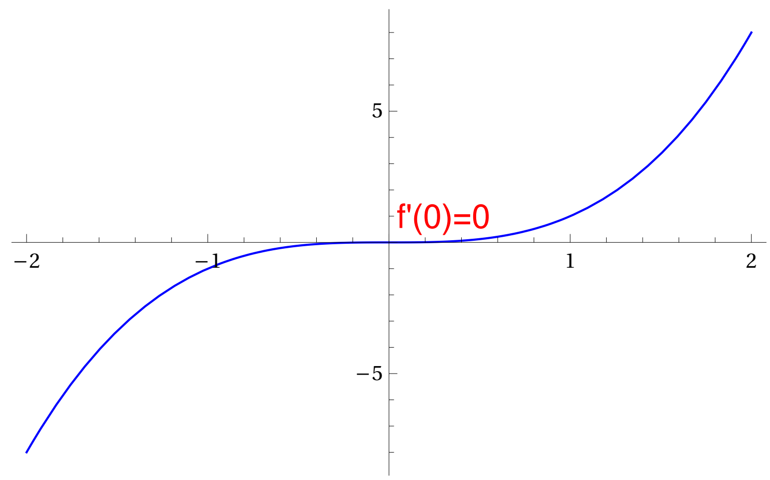
שים לב המשפט ההפוך לא נכון. ז"א אם $f'(x)=0$ אז לא בהכרח a היא נקודת אקסרמום. כמו בדוגמה הבאה:

דוגמה 9.3

$\underline{f(x)=x^3}$

$$f'(x)=3x^2 \ , \qquad \Rightarrow \qquad f'(0)=0$$

אבל $x=0$ לא נקודת קיצון (עיין תרשים להלן)

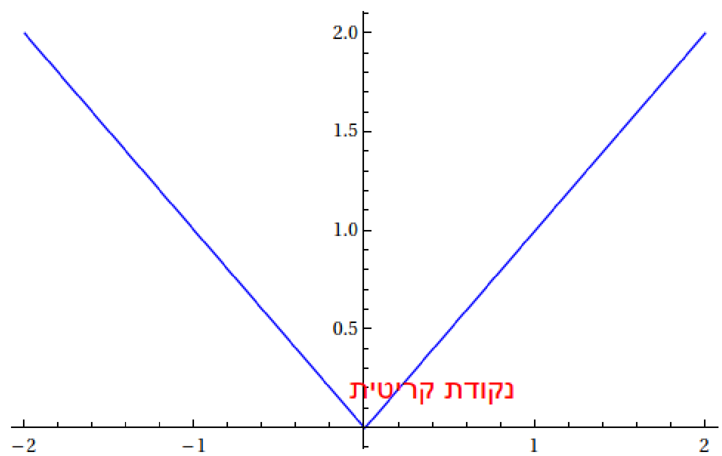


גם קיימות פונקציות שיש להן נקודת קיצון אבל הן לא גזירות בנקודה הזאת. למשל הדוגמה הבאה:

דוגמה 9.4

$f(x) = |x|$

$f'(0)$ לא קיימת אבל הנקודה $x = 0$ נקודת מינימום (עיין תרשים להלן)



למה 9.1 נקודת קריטית

נקודות אקסטרמום של פונקציה יכולות להיות בין הנקודות שבהן הנגזרת שווה ל- 0 או לא קיימת.

נקודות האלה נקראים **נקודות קריטיות** (או **נקודות חשודות לאקסטרמום**).

משפט 9.4 תנאי המספיק לאקסטרמום

נניח שפונקציה $f(x)$ מוגדרת בנקודה a וגזירה בסביבה של a אבל לא בהכרח גזירה ב- a. נניח ש- a היא נקודה חשודה לקיצון. אזי:

(1 אם במעבר דרך הנקודה a משמאל לימין $f'(x)$ משנה את הסימן מ $+$ ל- $-$ אז a נקודת מקסימום מקומי.

(2 אם במעבר דרך הנקודה a משמאל לימין $f'(x)$ משנה את הסימן מ $-$ ל- $+$ אז a נקודת מינימום מקומי.

9.4 תרגילים

דוגמה 9.5

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)=\frac{x}{3}-\sqrt[3]{x^2}$.

פתרון:

$$f'(x)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{1}{3}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[3]{x}-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

הנקודות החשודות לקיצון $x=0,8$.

x	$(-\infty,0)$	$(0,8)$	$(8,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

לכן $(0,f(0))=(0,0)$ נקודת מקסימום מקומי.

$(8,f(8))=(8,-\frac{4}{3})$ נקודת מינימום מקומי. ■

דוגמה 9.6

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x-1}$.

פתרון:

$$f'(x)=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

הנקודות הקריטיות הן $x=-1,1,3$.

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

לכן נקבל:

$x=3$ נק' מינימום מקומי: $f(3)=8$.

$x=-1$ נק' מקסימום מקומי: $f(-1)=0$.

■

9.5 מציאת הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של פונקציה רציפה בקטע סגור

נניח ש- $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$. אז לפי משפט ווירשטרס 10.1, $f(x)$ מקבלת בקטע $[a,b]$ את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר.

הערך הזה יכול להתקבל בנקודה פנימית של הקטע, (אז היא נקודה קריטית של פונקציה $f(x)$) או באחד הקצוות של הקטע. לכן השלבים למציאת הערך הגדול ביותר והקטן ביותר הם:

1. למצוא את כל הנקודות החשודות לאקסרמום השייכות לקטע (a,b).
2. לחשב את הערך של $f(x)$ בכל הנקודות של סעיף הקודם.
3. לחשב את $f(a)$ ו- $f(b)$.
4. מתוך הערכים שחישבנו לבחור את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר.

דוגמה 9.7

מצאו את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של פונקציה

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$$

בקטע $[-2, -\frac{1}{2}]$

פתרון:

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1)$$

לכן $f'(x) = 0$ בנקודות $x = 0, -1$. הנקודה הקריטית השייכת לקטע $[-2, -\frac{1}{2}]$ היא $x = -1$. $f(-1) = 0$.
נוסיף את הקצוות:

$$f(-2) = 17 \ , \qquad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{16} \ .$$

הערך הגדול ביותר היא 17 המתקבל בנקודה $x = -2$.

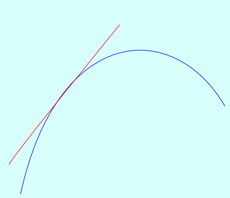
הערך הגדול ביותר היא 0 המתקבל בנקודה $x = -1$.

■

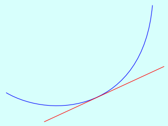
9.6 תחומי קמירות ונקודות פיתול

הגדרה 9.3 פונקציה קמורה

פונקציה $f(x)$ שגזירה בקטע (a,b) נקראת קמורה כלפי מטה אם בכל נקודה $x \in (a,b)$ המשיק לגרף הפונקציה נמצא מעל הגרף.



פונקציה $f(x)$ שגזירה בקטע (a,b) נקראת קמורה
כלפי מעלה אם בכל נקודה $x\in(a,b)$ המשיק לגרף
הפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה



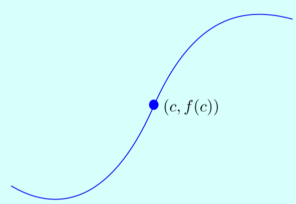
משפט 9.5

אם $f''(x)<0$ לכל $x\in(a,b)$ אז $f(x)$ קמורה כלפי מטה בקטע (a,b).

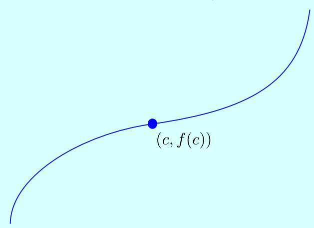
אם $f''(x)>0$ לכל $x\in(a,b)$ אז $f(x)$ קמורה כלפי מעלה בקטע (a,b).

הגדרה 9.4 נקודת פיתול

נקודה בגרף $(c,f(c))$ נקראת נקודת פיתול של הפונקציה אם היא נמצאת בין שני תחומי קמירות שונים.



או



משפט 9.6

אם $f''(c)=0$ או $f''(c)$ לא קיימת ובמעבר דרך נקודה c, $f''(c)$ מחליף סימן, אז הנקודה $(c,f(c))$ היא
נקודת פיתול.

דוגמה 9.8

נתונה הפונקציה

$$f(x)=x^5-x+5$$

מצאו את נקודות פיתול של הפונקציה.

פתרון:

$$f(x)=x^5-x+5\ ,\qquad f'(x)=5x^4-1\ ,\qquad f''(x)=20x^3=0$$

לכן קיימת נקודת פיתול בנקודה $(0,f(0))=(0,5)$.

■

9.7 אסימפטוטה אנכית

הגדרה 9.5 אסימפטוטה אנכית

קו ישר $x=a$ נקרא אסימפטוטה אנכית של פונקציה $f(x)$ אם לפחות אחד הגבולות החד צדדיים $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$
או $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ שווה ל- $+\infty$ או $-\infty$.

דוגמה 9.9

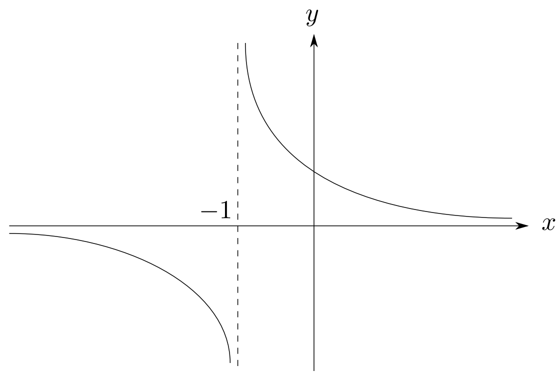
מצאו את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה

$$f(x)=\frac{2}{x+1}$$

פתרון:
שים לב

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{2}{x+1}=+\infty\ ,\qquad \lim_{x\to -1^-}\frac{2}{x+1}=-\infty$$

ולכן ישנה אסימפטוטה אנכית ב- $x=-1$.



■

9.8 אסימפטוטה אופקית

הגדרה 9.6 אסימפטוטה אופקית

קו ישר $y=b$ נקרא אסימפטוטה אופקית של פונקציה $f(x)$ אם $\lim_{x\to\infty}f(x)=b$ או $\lim_{x\to-\infty}f(x)=b$.

דוגמה 9.10

מצאו את האסימפטוטות האופקיות של הפונקציה

$$f(x)=\frac{2}{x+1}$$

פתרון:
שים לב

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x+1}=0\ ,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x+1}=0$$

ולכן $y=0$ אסימפטוטה אופקית ב- $\pm\infty$.

■

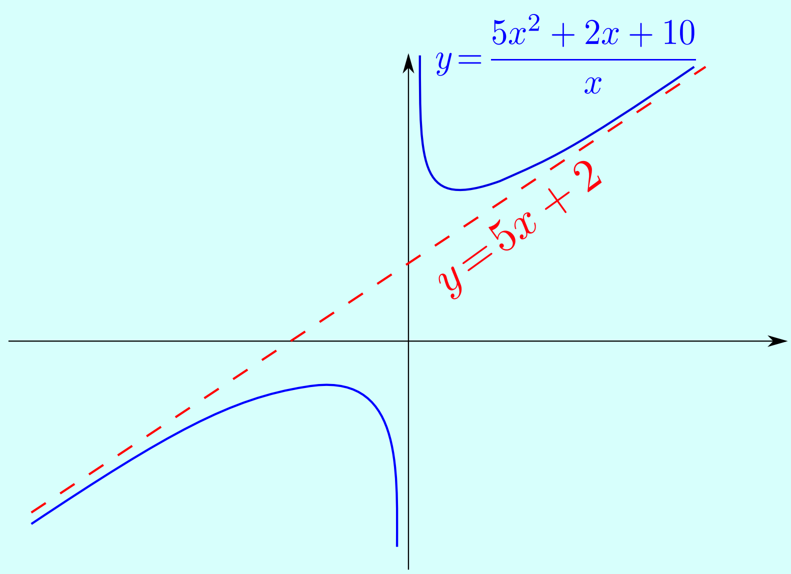
9.9 אסימפטוטה משופעת

הגדרה 9.7 אסימפטוטה משופעת

קו ישר $y = m \cdot x + n$ נקרא אסימפטוטה משופעת של פונקציה $f(x)$ אם המרחק בין גרף הפונקציה לבין הקו $y = m \cdot x + n$ שואף ל- 0 כאשר x שואף ל ∞ או $-\infty$. ז"א

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - (mx+n)\right) = 0 \qquad \text{או} \qquad \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - (mx+n)\right) = 0$$

.



כלל 9.1 נוסחאות למציאת אסימפטוטה משופעת

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \ , \qquad n = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - mx\right]$$

(אותו דבר עבור $x \to -\infty$). אם m, n מספרים סופיים, אז קיימת אסימפטוטה משופעת.

9.10 דוגמאות

דוגמה 9.11

$.f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-2}{x(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-2}{x^2-2x}=1\ .$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-x-2}{x-2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-2-x^2+2x}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x-2}=1\ .$$

לכן הקו $y=x+1$ אסימפטוטה משופעת ב- $+\infty$.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-2}{x(x-2)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-2}{x^2-2x}=1\ .$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-x-2}{x-2}-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-2-x^2+2x}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{x-2}=1\ .$$

לכן הקו $y=x+1$ אסימפטוטה משופעת ב- $-\infty$.

דוגמה 9.12

$.f(x)=x\cdot e^x$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{xe^x}{x}=\lim_{x\to\infty}e^x=\infty\ .$$

לכן אין אסימפטוטה משופעת ב- $+\infty$.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^x=0\ .$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[xe^x-0\cdot x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0\ .$$

לכן הקו $y=0$ אסימפטוטה משופעת (אופקית) ב- $-\infty$.

9.11 חקירה מלאה של פונקציה

כלל 9.2 שלבים לחקירה מלאה של פונקציה

1. תחום הגדרה
2. נקודות חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה
3. התנהגות סביב נקודות אי הגדרה, אסימפטוטות אנכיות.
4. התנהגות באינסוף, אסימפטוטות אופקיות.

5. אסימפטוטות משופעות.
6. תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון
7. תחומי קמירות, נקודות פיתול.
8. גרף הפונקציה.

דוגמה 9.13

חקרו באופן מלא את הפונקציה הבאה (תחום הגדרה, נקודות חיתוך, אסימפטוטות אנכיות אופקיות ומשופעות, תחומי עליה ורידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול), וצייר סקיצת הגרף של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

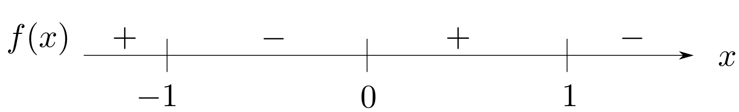
פתרון:

1. תחום הגדרה: $x \neq \pm 1$

2. נקודות חיתוך עם הצירים : $(0,0)$

סימני הפונקציה :

x	$x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$x>1$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$



3. אסימפטוטות אנכיות:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{1-x^2} = \infty \ , \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{1-x^2} = -\infty \ .$$

$x=1$ אסימפטוטה אנכית.

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x}{1-x^2} = \infty \ , \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{1-x^2} = -\infty \ .$$

$x=-1$ אסימפטוטה אנכית.

4. אסימפטוטות אופקיות:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}-1} = 0 \ , \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}-1} = 0 \ .$$

$y=0$ אסימפטוטה אופקית ב- $\pm\infty$.

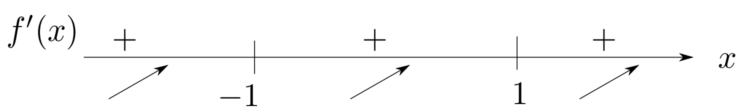
5. אסימפטוטות משופעות: יש אסימפטוטות אופקיות ב- $\pm\infty$ לכן אין אסימפטוטות משופעות.

.6 תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון :

$$f'(x) = \frac{1 - x^2 - x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$$

מכאן $f'(x)$ לא שווה אפס באף נקודה בתחום הגדרה של הפונקציה (אף על פי שהמונה של $f'(x)$ מתאפס ב- $x = \pm 1$, באותן נקודות נמצאת אסימפטוטות אנכיות בגלל שהפונקציה המקורית $f(x)$ לא מוגדרת בהן).

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$



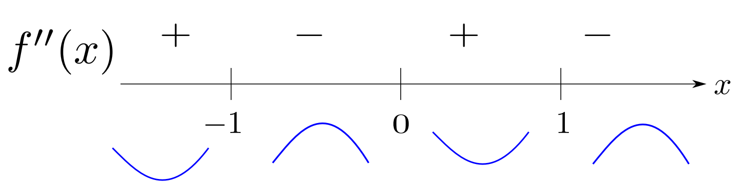
אין נקודת קיצון.

.7 תחומי קמירות, נקודות פיתול:

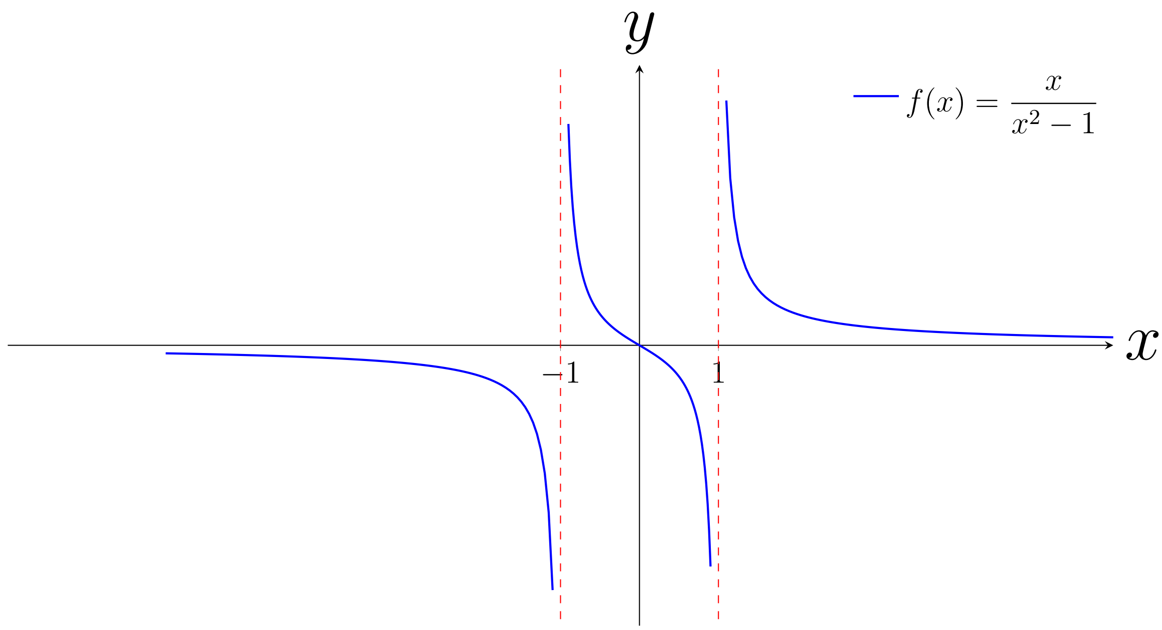
$$\begin{aligned} f''(x) =& \frac{2x(1-x^2)^2 - 2(1-x^2)(-2x)(x^2+1)}{(1-x^2)^4} \\ =& \frac{2x(1-x^2)\left[1 - x^2 + 2(x^2+1)\right]}{(1-x^2)^4} \\ =& \frac{2x(1-x^2)\left[1 - x^2 + 2x^2 + 2)\right]}{(1-x^2)^4} \\ =& \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3} \end{aligned}$$

לכן $f''(x) = 0$ כאשר $x = 0$. הנקודה $(0,0)$ נקודת פיתול.

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$



8. גרף הפונקציה:



■

דוגמה 9.14

חקרו באופן מלא את הפונקציה הבאה (תחום הגדרה, נקודות חיתוך, אסימפטוטות אנכיות אופקיות ומשופעות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול), וצייר סקיצת הגרף של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$$

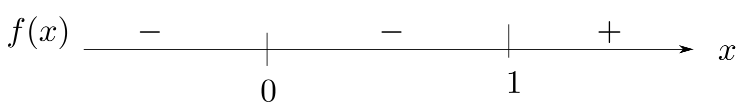
פתרון:

1. תחום הגדרה: $x \neq 0$

2. נקודות חיתוך עם הצירים : $(1,0)$

סימני הפונקציה :

x	$x<0$	$0<x<1$	$x>1$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$



3. אסימפטוטות אנכיות:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-1}{x^2}=-\infty\ ,\qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{x^3-1}{x^2}=+\infty\ .$$

$x=0$ אסימפטוטה אנכית.

4. אסימפטוטות אופקיות:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^2}=\infty\ ,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x^2}=\infty\ .$$

$y=0$ אין אסימפטוטה אופקית ב- $\pm\infty$.

5. אסימפטוטות משופעות:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^3}=1\ ,\qquad n=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^2}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x^2}=0\ .$$

לכן הקו $y=x$ אסימפטוטה משופעת ב- $+\infty$.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x^3}=1\ ,\qquad n=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x^2}-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x^2}=0\ .$$

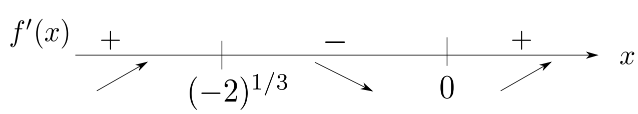
לכן הקו $y=x$ אסימפטוטה משופעת ב- $-\infty$.

6. תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון:

$$f'(x)=\frac{3x^2\cdot x^2-2x(x^3-1)}{x^4}=\frac{x^4+2x}{x^4}=1+\frac{2}{x^3}$$

מכאן $f'(x)=0$ בנקודות $x=0$ ו- $x=(-2)^{1/3}$.

x	$x<(-2)^{1/3}$	$x=(-2)^{1/3}$	$(-2)^{1/3}<x<0$	$x=0$	$x>0$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$	$\nexists$	$\nearrow$

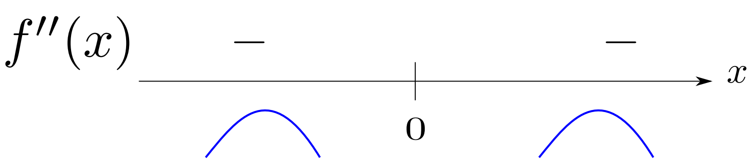


שים לב הפונקציה לא מוגדרת בנקודה $x=0$ ולכן הנקודה $(-2^{1/3}, f(-2^{1/3}))=(-2^{1/3},-1.89)$ נקודת מקסימום.

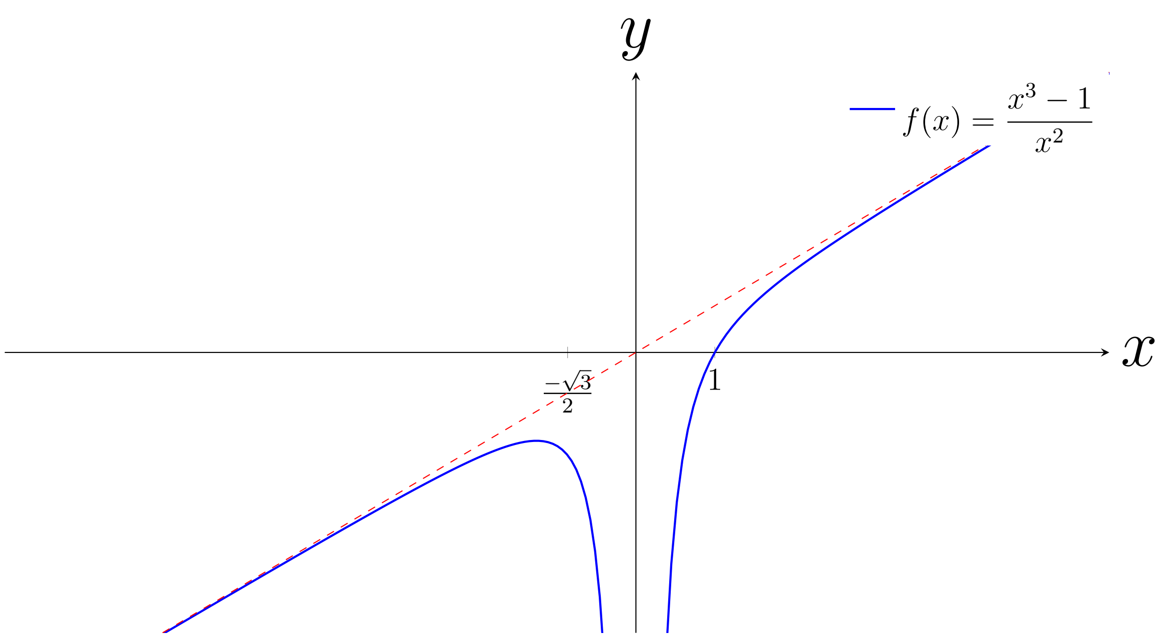
7. תחומי קמירות, נקודות פיתול:

$$f''(x)=\frac{-6}{x^4}<0$$

x	$x<0$	0	$x>0$
$f''(x)$	$-$	0	$-$



.8 גרף הפונקציה:



■

דוגמה 9.15

חקרו באופן מלא את הפונקציה הבאה (תחום הגדרה, נקודות חיתוך, אסימפטוטות אנכיות אופקיות ומשופעות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול), וצייר סקיצת הגרף של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$$

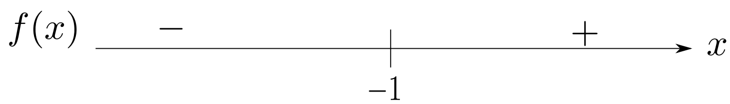
פתרון:

1) תחום הגדרה: $x \neq -1$

2) נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,1)$

סימני הפונקציה:

x	$x<-1$	$x>-1$
$f(x)$	$-$	$+$



3) אסימפטוטות אנכיות:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{e^{2x}}{1+x}=-\infty\ ,\qquad \lim_{x\to -1^+}\frac{e^{2x}}{1+x}=+\infty\ .$$

$x=-1$ אסימפטוטה אנכית.

4) אסימפטוטות אופקיות.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{1+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{1}=\infty\ ,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{1+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^{2x}}{1}=0\ .$$

$y=0$ אין אסימפטוטה אופקית ב- $-\infty$.

5) אסימפטוטות משופעות.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4e^{2x}}{2}=\infty\ .$$

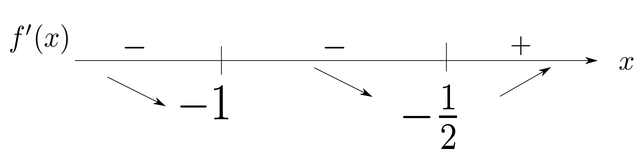
לכן אין אסימפטוטה משופעת ב- $+\infty$.

6) תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(1+x)-e^{2x}\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{e^{2x}(2x+1)}{(1+x)^2}$$

מכאן $f'(x)=0$ בנקודות $x=\frac{-1}{2}$.

x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<\frac{-1}{2}$	$x=\frac{-1}{2}$	$x>\frac{-1}{2}$
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$\frac{2}{e}$	$\nearrow$

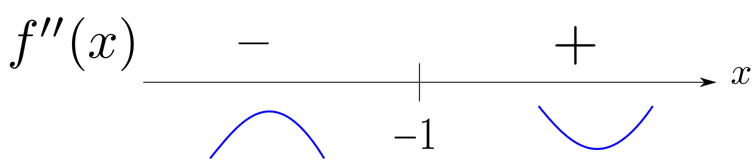


שים לב הפונקציה לא מוגדרת בנקודה $x = -1$ ולכן הנקודה $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2})) = (-\frac{1}{2}, \frac{2}{e}) = (-\frac{1}{2}, 0.74)$ נקודת מינימום.

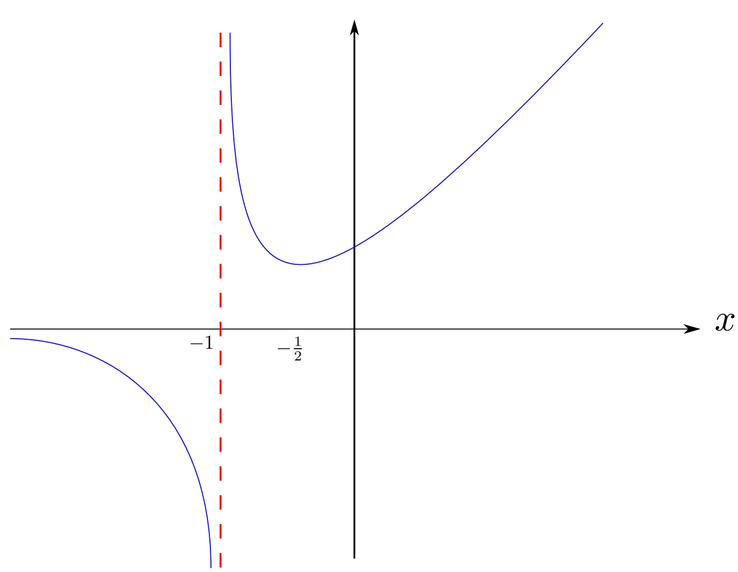
7) תחומי קמירות, נקודות פיתול.

$$\begin{aligned}
f''(x) =& \frac{\left[2e^{2x}(2x+1) + 2e^{2x}\right](1+x)^2 - e^{2x}(2x+1)\cdot 2(1+x)}{(1+x)^4} \\
=& \frac{2e^{2x}(1+x)\left[(2x+2)(1+x) - (2x+1)\right]}{(1+x)^4} \\
=& \frac{2e^{2x}\left[2x^2+2+3x-2x-1\right]}{(1+x)^3} \\
=& \frac{2e^{2x}\left[2x^2+x+1\right]}{(1+x)^3}
\end{aligned}$$

x	$x < -1$	-1	$x > -1$
$f''(x)$	$-$	$\nexists$	$-$



8) גרף הפונקציה.



■

דוגמה 9.16

חקרו באופן מלא את הפונקציה הבאה (תחום הגדרה, נקודות חיתוך, אסימפטוטות אנכיות אופקיות ומשופעות, תחומי עליה ורידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול), וצייר סקיצת הגרף של הפונקציה.

$$f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$$

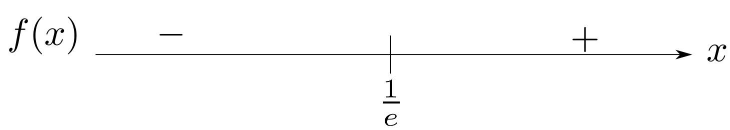
פתרון:

.1 תחום הגדרה: $x>0$

.2 נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,\frac{1}{e})$

סימני הפונקציה

x	$x<\frac{1}{e}$	$x>\frac{1}{e}$
$f(x)$	$-$	$+$



.3 אסימפטוטות אנכיות:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\ln x}{x}=-\frac{\infty}{0^+}=-\infty\ .$$

$x=0$ אסימפטוטה אנכית:

.4 אסימפטוטות אופקיות:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0\ .$$

$y=0$ אסימפטוטה אופקית ב- $+\infty$.

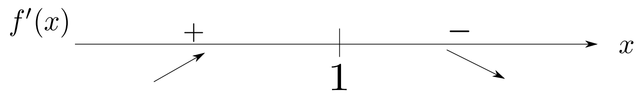
.5 אסימפטוטות משופעות: אין

.6 תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(1+\ln x)}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$$

מכאן $f'(x)=0$ בנקודות $x=1$.

x	$x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$



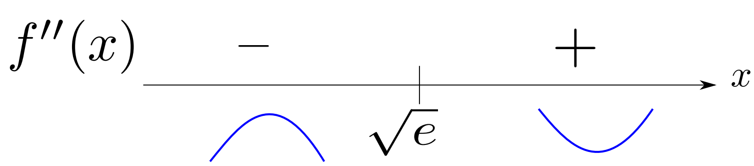
$x=1$ נקודת מקסימום מקומי. $f(1)=1$.

7. תחומי קמירות, נקודות פיתול:.

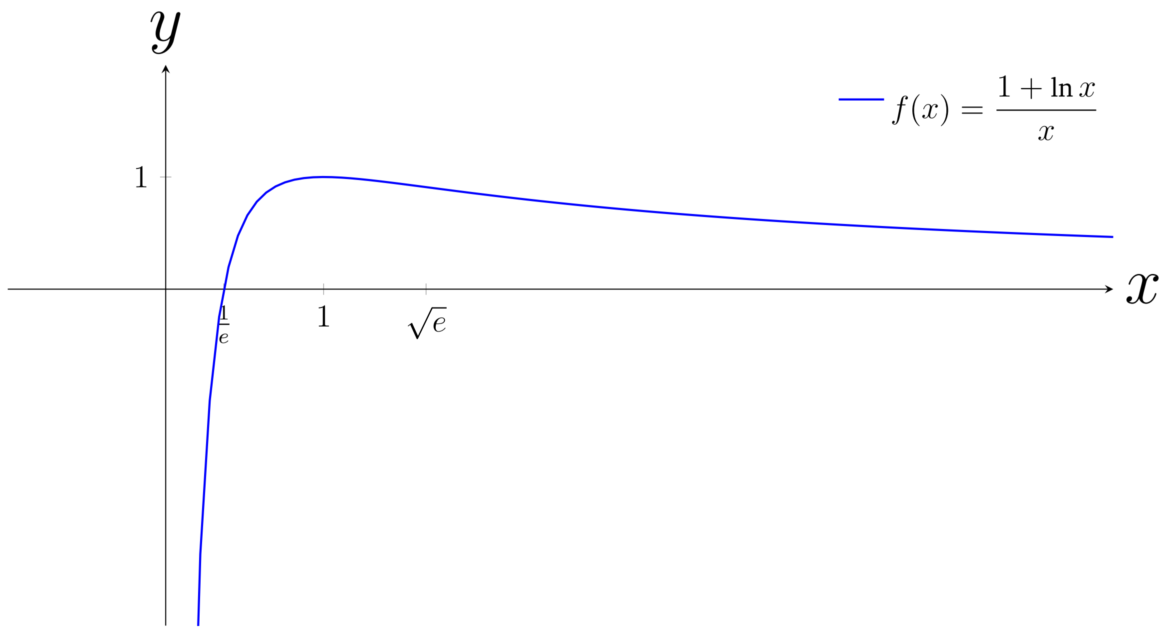
$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2+\ln x\cdot 2x}{x^4}=\frac{2\ln x-1}{x^3}$$

מכאן $f''(x)=0$ בנקודות $x=\sqrt{e}$.

x	$x<-\sqrt{e}$	$x=\sqrt{e}$	$x>\sqrt{e}$
$f''(x)$	$-$	0	$+$



8. גרף הפונקציה:


y
$f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$
1
x
$\frac{1}{e}$
1
$\sqrt{e}$

■

שיעור 10
משפטים יסודיים של פונקציות גזירות

10.1 תרגילים לשימוש בחקרית פונקציה

דוגמה 10.1

הוכיחו שלכל x חיובי מתקיים $4\ln x - 1 < x^4$.

פתרון:
נגדיר
$$f(x) = x^4 - 4\ln x + 1 \ .$$
נוכיח כי $f(x) > 0$ לכל $x > 0$.

שים לבת תחום הגדרתה של f הוא $x > 0$.
$$f'(x) = 4x^3 - \frac{4}{x} \ .$$
נחפש נקודות קריטיות. לכל x בתחום הגדרתה של f ($x > 0$):
$$f'(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 4x^3 - \frac{4}{x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 4(x^4 - 1) = 0 \ ,$$
אזי הנקודה $x = 1$ היא נקודת קריטית. נעשה חקירה:

x	$x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

לכן הנקודה $x = 1$ היא מינימום, ז"א $f(1)$ הוא ערך המינימאלי של הפונקציה. מכיוון ש- $f(1) = 5$ ז"א ערך חיובי, אז $f(x) > 0$ לכל $x > 0$.

■

דוגמה 10.2

מצאו את מספר השורשים הממשיים של המשוואת
$$x^3 - 6x^2 + 9x - 10$$

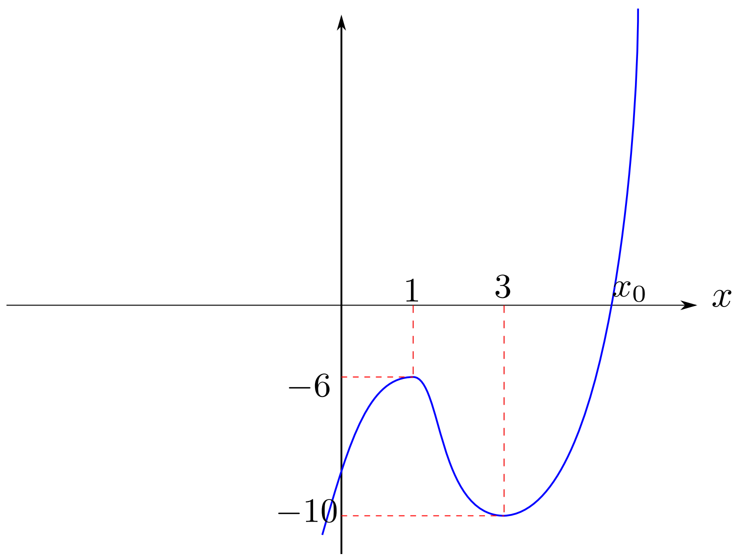
פתרון:
נגדיר $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10$.
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \ .$$
מכאן $f'(x) = 0$ בנקודות $x = 1, 3$.

x	$x<1$	$1<x<3$	$x>3$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$x=3$ נקודה מינימום מקומי $f(3)=-10$

$x=1$ נקודה מקסימום מקומי $f(1)=-6$

לכן יש שורש אחד למשוואה.



■

דוגמה 10.3

הוכיחו כי למשוואת

$$6x^6-6x^4+1=0$$

אין פתרונות ממשיים.

פתרון:

נגדיר $f(x)=6x^6-6x^4+1$.

$f(x)>0$ לכל x.

■

דוגמה 10.4

הוכיחו כי לכל $x\neq 0$ מתקיים

$$\left|\frac{1}{2x}+\arctan x\right|\geq\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ .$$

פתרון:

נגדיר $f(x)=\dfrac{1}{2x}+\arctan x$. התחום ההגדרה של הפונקציה היא $\mathrm{Dom}(f)=\{x\neq 0\}$.

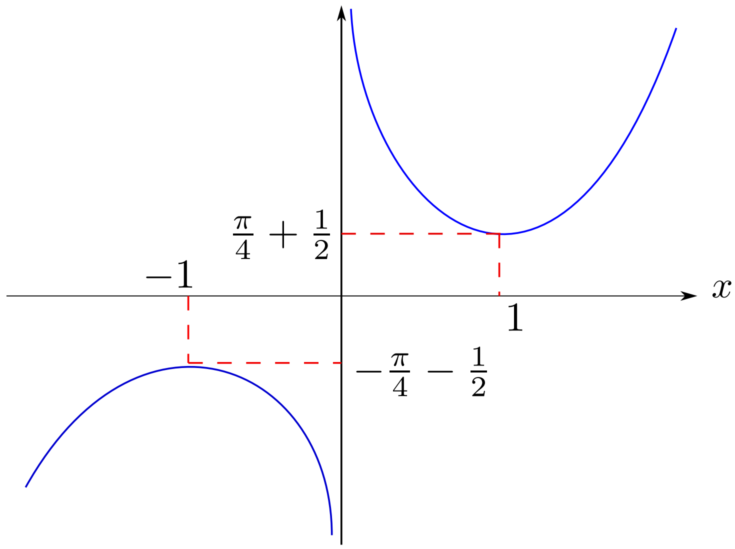
$$f'(x)=-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2-1}{2x^2(x^2+1)}$$

ולפיו $f'(x)=0$ בנקודה $x=\pm 1$.

x	$x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$x>1$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$x=1$ נקודה מינימום מקומי $f(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

$x=-1$ נקודה מקסימום מקומי $f(-1)=-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$



ז"א $f(x)>\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ או $f(x)<-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. לכן

$$\left|\frac{1}{2x}+\arctan x\right| \geq \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ .$$

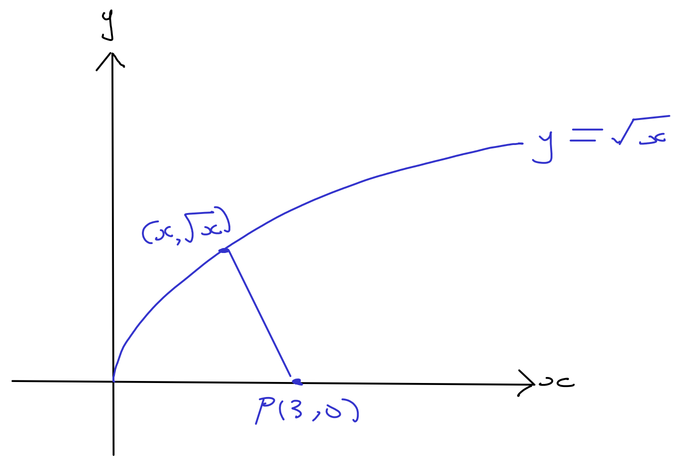
■

10.2 בעיות קיצון

דוגמה 10.5

על הקו $y=\sqrt{x}$ מצא את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $P(3,0)$.

פתרון:



נבחר נקודה שרירותית $(x,\sqrt{x})$ על גרף הפונקציה $y=\sqrt{x}$. נרשום את הנוסחה למרחק בין שתי נקודות $P(3,0)$ ו- $(x,\sqrt{x})$:

$$d=\sqrt{(x-3)^2+(\sqrt{x}-0)^2}=\sqrt{(x-3)^2+x}\ .$$

מכאן

$$d^2=(x-3)^2+x\ .$$

יש למצוא x שעבורו d^2 יקבל ערך מינימלי:

$$\left(d^2\right)'_x=2(x-3)+1=2x-5$$

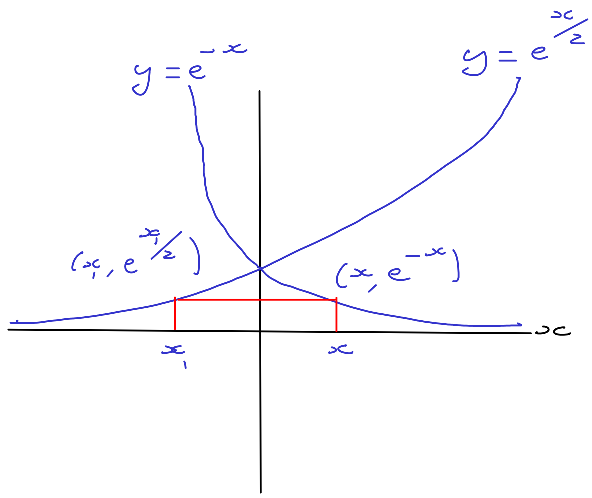
מכאן $\left(d^2\right)'_x=0$ כאשר $x=2.5$.
תשובה סופית: הנקודה הקרובה ביותר היא $(2.5,f(2.5))=(2.5,\sqrt{2.5})$.

■

דוגמה 10.6

בין הגרפים של פונקציה $y=e^{-x}$ ו- $y=e^{x/2}$ וציר ה- x חסום מלבן. מצא את שטח המקסימלי האפשרי של המלבן הזה.

פתרון:



$$e^{x_1/2}=e^{-x} \qquad \Rightarrow \qquad x_1=-2x \ .$$

$$S=(x+|x_1|)e^{-x}=3x\cdot e^{-x} \ .$$

$$S'_x=3e^{-x}-3xe^{-x}=3e^{-x}(1-x) \ .$$

שים לב $S'_x=0$ בנקודה $x=1$. לכן הנקודה $x=1$ מקסימום מקומי.

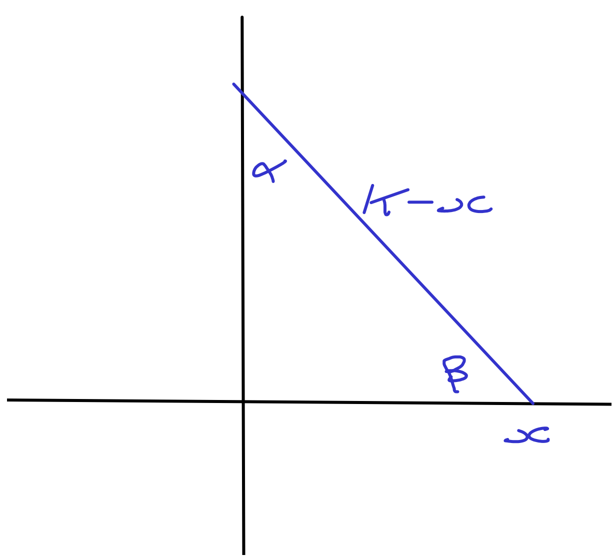
$$S_{\max}=3\cdot 1\cdot e^{-1}=\frac{3}{e} \ .$$

■

דוגמה 10.7

מצא את הזווית של משולש ישר זוויות בעל השטח הגדול ביותר שבו סכום אורכי היתר ואחד הניצבים שווה ל- K.

פתרון:



נסמן את אורכי אחד הניצבים ב-x. אז אורך היתר הוא $k-x$ ואורך הניצב השני הוא

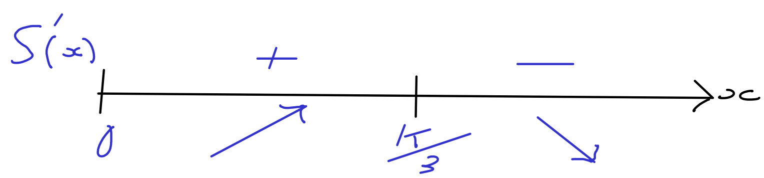
$$\sqrt{(k-x)^2-x^2}=\sqrt{k^2-2kx}$$

אז

$$S=\frac{x\cdot\sqrt{k^2-2kx}}{2}$$

$$\begin{aligned}S'_x=&x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-2k}{2\sqrt{k^2-2kx}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k^2-2kx}\\=&\frac{1}{2}\left[\frac{-kx}{\sqrt{k^2-2kx}}+\sqrt{k^2-2kx}\right]\\=&\frac{1}{2\sqrt{k^2-2kx}}\left(-kx+k^2-2kx\right)\\=&\frac{1}{2\sqrt{k^2-2kx}}k\left(k-3x\right)\end{aligned}$$

$S'_x=0$ כאשר $x=\frac{k}{3}$.



$x=\frac{k}{3}$ נקודת מקסימום.

$$\sin\alpha=\frac{x}{k-x}=\frac{\frac{k}{3}}{k-\frac{k}{3}}=\frac{1}{2}\ ,\qquad\Rightarrow\qquad\alpha=\frac{\pi}{6}\ .$$

הזווית השניה

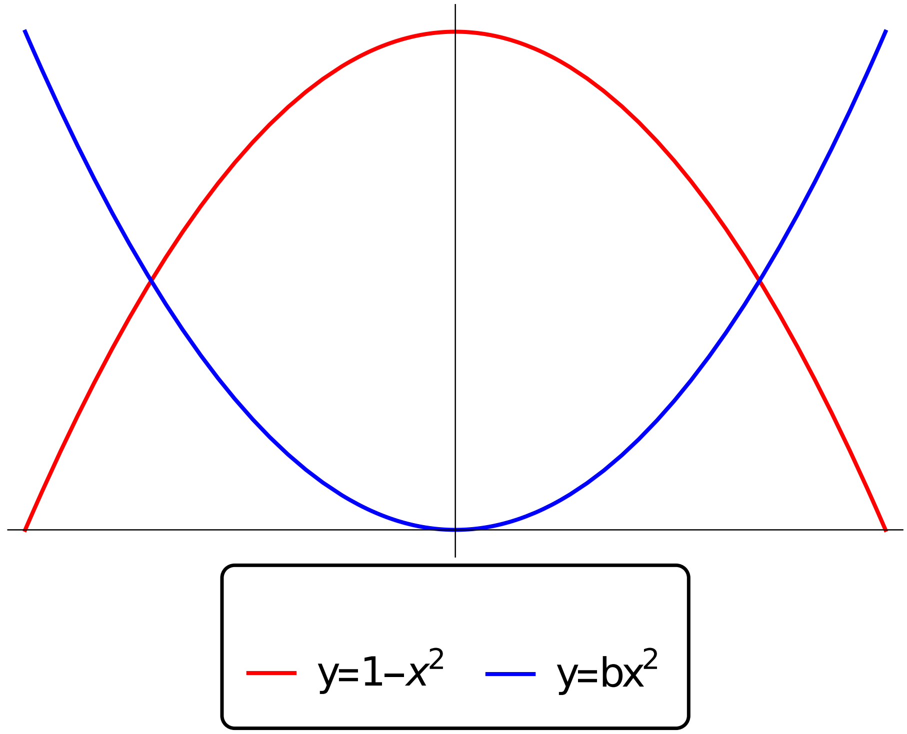
$$\beta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\ .$$

■

דוגמה 10.8

נתונות שתי פונקציות $f(x)=1-x^2$, $g(x)=bx^2$, ($b>0$). הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודות A ו- B. מצא את ערכו של b שעבורו אורך הקטע AO יהיה מינימאלי, כאשר O ראשיתהצירים. צייר ואת הסקיצה המתאימה.

פתרון:



נקודת חיתוך:

$$1-x^2=bx^2 \qquad \Rightarrow \qquad (x,y)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{b+1}}\,,\,\frac{b}{1+b}\right)$$

$$d^2=OA^2=(x_A-x_O)^2+(y_A+y_O)^2=\frac{1}{b+1}+\frac{b^2}{(1+b)^2}$$

$$\left(d^2\right)'_b=\frac{b-1}{(b+1)^3}\ .$$

$$\left(d^2\right)'_b=0 \qquad \Rightarrow \qquad b=1\ .$$

■

דוגמה 10.9 להעשרה בלבד

מצאו לאילו ערכי הפרמטר a השטח החסום ע"י הקווים $x=0$, $y=0$, $y=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{2a^2}$ יהיה מינימלי וחשבו את השטח המינימלי.

פתרון:

נסמן ב $S(a)$ (עבור $a>0$) את הפונקציה המתארת את השטח המבוקש ונחשב את המקסימום.

$$S(a)=\int_0^a\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2a^2}\right)=\left[\arctan(x)+\frac{x}{2a^2}\right]_0^a=\arctan(a)+\frac{1}{2a}\ .$$

$$S'(a)=\frac{1}{1+a^2}-\frac{1}{2a^2}=\frac{a^2-1}{2a^2(1+a^2)}\overset{!}{=}0 \qquad \Rightarrow \qquad a=\pm 1\ .$$

כיוון ש $a>0$ אז $a=1$.

$$S(a=1)=\arctan(1)+\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ .$$

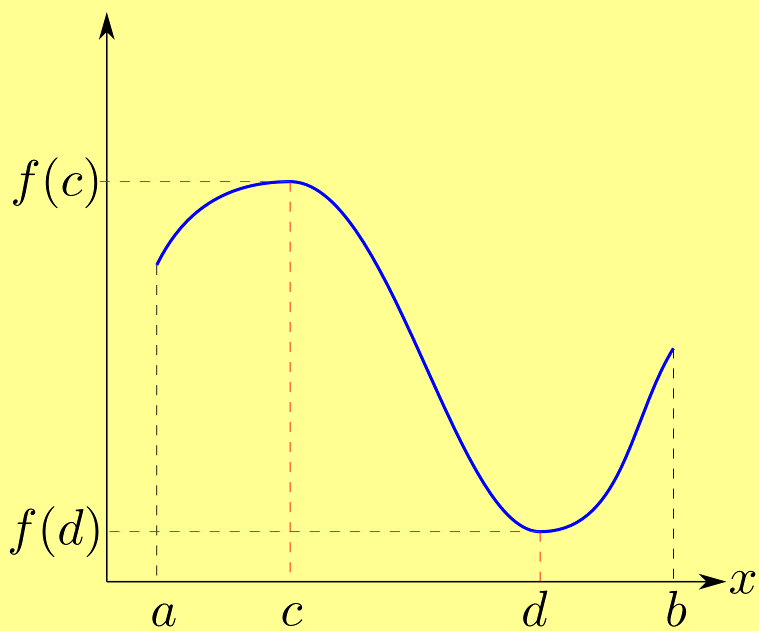
■

10.3 משפטי ויירשטראס: חסימות של פונקציה רציפה בקטע סגור

משפט 10.1 פונקציה רציפה בקטע סגור מקבלת ערכי מינימום ומקסימום (ויירשטראס)

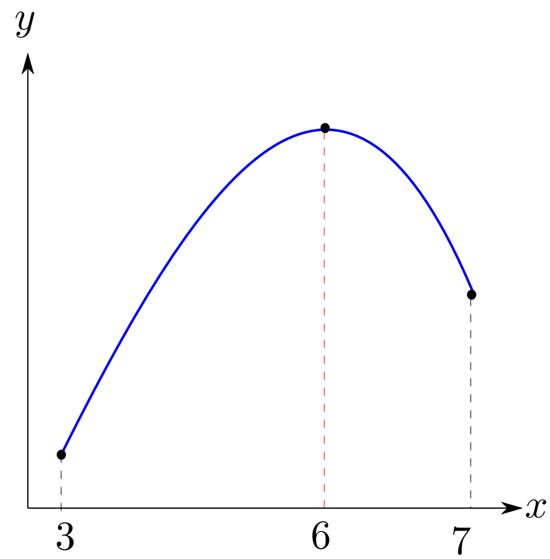
תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$. אז $f(x)$ מקבלת בקטע זו את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר עבור קטע זו. ז"א קיים מספרים c ו- d בקטע $[a,b]$ כך ש

$$f(d) \leq f(x) \leq f(c) \qquad \forall x \in [a,b] \ .$$



דוגמה 10.10

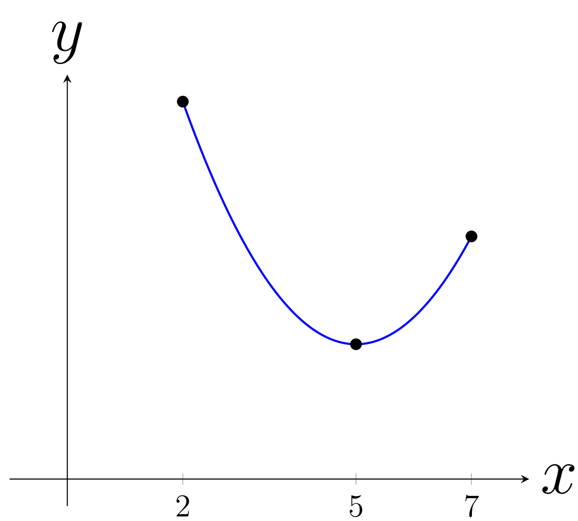
$f(x) = -(x-2)(x-10)$ רציפה בקטע $[3,7]$.



מינימום	$f(3)$
מקסימום	$f(6)$

דוגמה 10.11

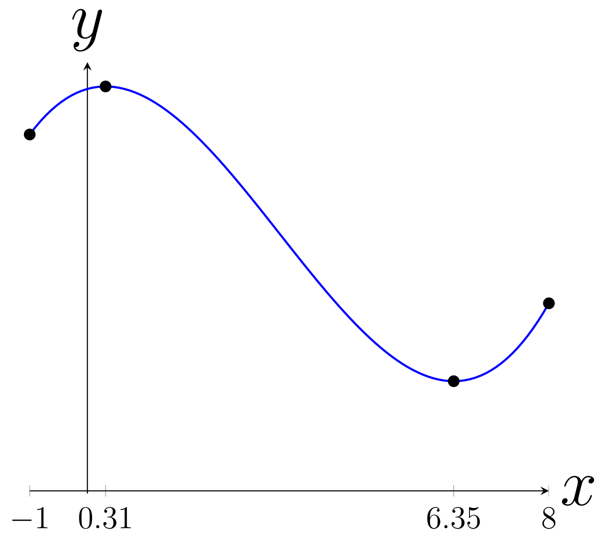
$f(x) = x^2 - 10x + 30$ רציפה בקטע $[2, 7]$.



מינימום	$f(5)$
מקסימום	$f(2)$

דוגמה 10.12

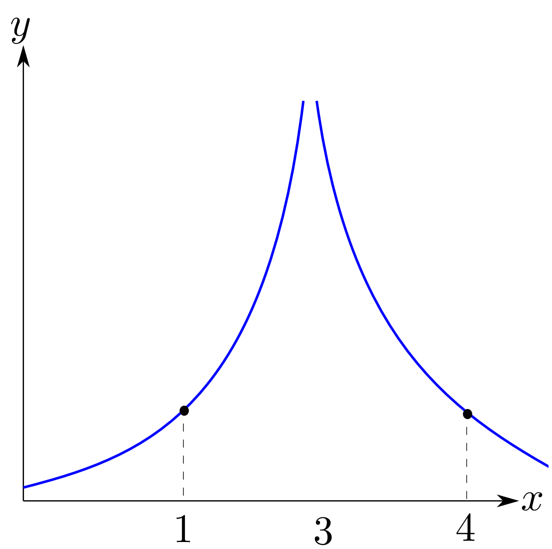
$f(x) = x^3 - 10x^2 + 6x + 150$ רציפה בקטע $[-1, 8]$.



מקסימום	$f(0.31)$
מינימום	$f(6.35)$

דוגמה 10.13

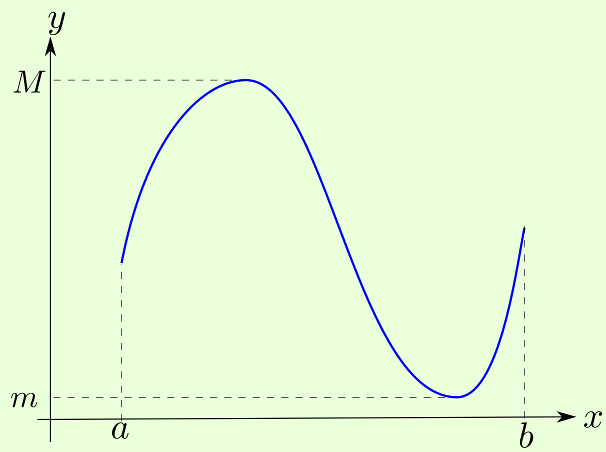
$f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ בקטע $I=[1,4]$. f לא רציפה בקטע I ולכן לא מקבלת ערך מינימום.



למה 10.1 חסימות של פוקציה רציפה בקטע סגור

אם פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$, אז $f(x)$ חסומה בקטע זו. ז"א קיימים מספרים m ו- M כך ש

$$m\leq f(x)\leq M \qquad \forall x\in[a,b] \ .$$



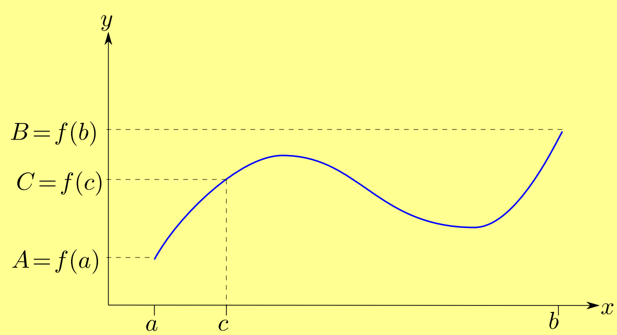
10.4 משפט ערך הביניים של פוקציה

משפט 10.2 משפט ערך הביניים

תהי פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$. נניח ש $f(x)$ מקבלת בקצוות של הקטע ערכים שונים:

$$f(a)=A\ ,\qquad f(b)=B\ ,\qquad A\neq B\ .$$

אז f מקבלת בקטע זו את כל הערכים בין A ו- B.



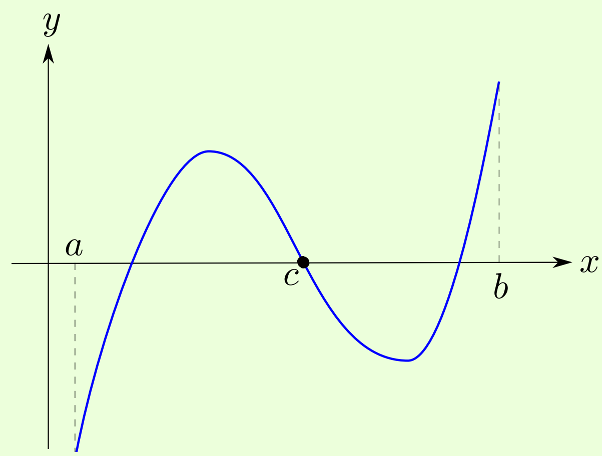
למה 10.2 משפט בולזנו

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$. נניח שבקצוות הקטע, f מקבלת ערכים עם סימנים שונים. כלומר

$$f(a)>0, f(b)<0\ ,\qquad \text{או}\qquad f(a)<0, f(b)>0\ .$$

זאת אומרת $f(a)\cdot f(b)<0$. אז קיימת לפחות נקודה אחד c, בקטע $a<c<b$ שבה

$$f(c)=0\ .$$



דוגמה 10.14

הוכיחו כי למשוואה
$$e^{2x+1}+x^2-5=0$$
יש שורש ממשי אחת ומצא אותו עם דיוק של שתי ספרות.

פתרון:
נגדיר פונקציה
$$f(x)=e^{2x+1}+x^2-5 \ .$$
שים לב
$$f(0)=-5+e<0 \ , \qquad f(1)=-4+e^3>0 \ .$$
מכיוון ש- $f(x)$ פונקציה אלמנטרית ומוגדרת בקטע $[0,1]$, אז f רציפה בקטע זו. $f(0)<0$ ו- $f(1)>0$ לכן לפי משפט בולזנו (משפט 10.2) קיים c בתחום $0<c<1$ כך ש- $f(c)=0$.

■

דוגמה 10.15

הוכיחו כי למשוואה $x^{101}+2x-2=0$ קיים פתרון אחד והוא יחיד.

פתרון:

<u>קיום</u>

נגדיר פונקציה $f(x)=x^{101}+2x-2$. נשים לב כי $f(1)=1$ ו- $f(0)=-2$. לפי משפט ערך הביניים קיימת $c\in[-2,1]$ שבה $f(c)=0$.

<u>יחידות</u>

$$f'(x)=101x^{100}+2 \ .$$
$f'(x)\geq 2$ לכל x ⇐ $f'(x)>0$ לכל x ⇐ f עולה ממש לכל x ⇐ f חד-חד-ערכית לכל x לכן השורש יחיד. ■

10.5 משפט פרמה

משפט 10.3 משפט פרמה

נניח ש- $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה בקטע פתוח (a,b).

אם c נקודת קיצון (מקסימום או מינימום) פנימית של פונקציה $f(x)$ אז

$$f'(c)=0 \ .$$

10.6 משפט רול

משפט 10.4 רול

נניח ש- $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה בקטע פתוח (a,b).

אם $f(a)=f(b)$, אז קיימת לפחות נקודה אחד $c\in(a,b)$ כך ש-

$$f'(c)=0 \ .$$

הוכחה: $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$. לכן לפי משפט וויארטראס (עין משפט 10.1 לעיל) היא מקבלת בקטע הזה את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר. נסמן אותם ב- M ו- m בהתאמה. ישנן 2 אפשרויות.

<u>מצב 1.</u> <u>$m=M$</u>

אם $M=m$ אז $f(x)$ פונקציה קבועה, ולכן $f'(x)=0$ לכל $a<x<b$.

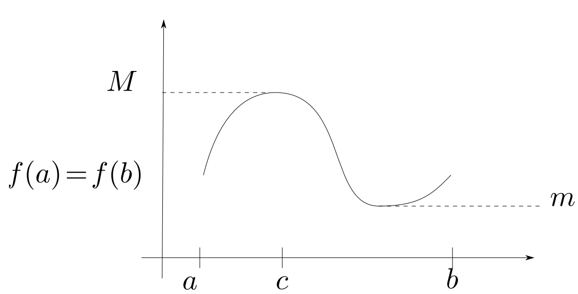
<u>מצב 2.</u> <u>$m<M$</u>

מכיוון ש- $f(a)=f(b)$, אז f מקבלת לפחות אחד הערכים מתוך m ו- M בנקודה c בפנים הקטע הפתוח (a,b).

<u>נניח כי f מקבלת הערך M בפנים הקטע (a,b)</u>

כלומר קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $f(c)=M$. ז"א לכל $x\in(a,b)$, $f(x)\leq f(c)$.

נוכיח כי $f'(c)=0$:



$$f'_-(c) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$$

בגלל ש- $f(c+\Delta x) - f(c) \leq 0$ ו- $\Delta x < 0$.

$$f'_+(c) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$$

בגלל ש- $f(c+\Delta x) - f(c) \leq 0$ ו- $\Delta x > 0$. $f(x)$ גזירה בנקודה c, אז בהכרח $f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c)$.
לכן $f'(c) = 0$.

<u>נניח כי f מקבלת הערך m בפנים הקטע (a,b)</u>

קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש- $f(c) = m$. ז"א לכל $x \in (a,b)$, $f(x) \geq f(c)$.
נוכיח כי $f'(c) = 0$:

$$f'_-(c) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$$

בגלל ש- $f(c+\Delta x) - f(c) \geq 0$ ו- $\Delta x < 0$.

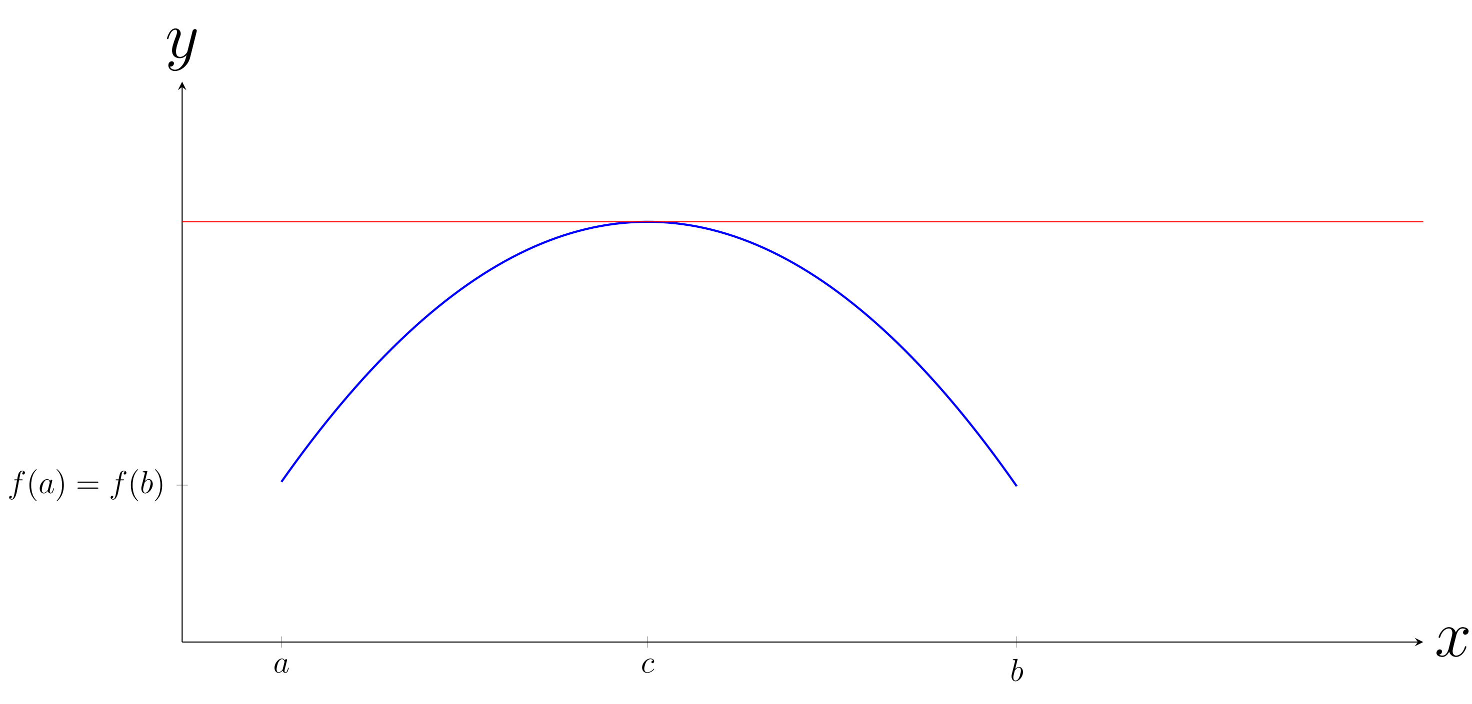
$$f'_+(c) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$$

בגלל ש- $f(c+\Delta x) - f(c) \geq 0$ ו- $\Delta x > 0$. $f(x)$ גזירה בנקודה c, אז בהכרח $f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c)$.
לכן $f'(c) = 0$.

■

10.6 משמעות של משפט רול

בגרף של פונקציה קיימת נקודה c שבה המשיק מקביל לציר ה- x.



10.7 משפט קושי

משפט 10.5 משפט ערך הממוצע המוכלל של קושי

נניח ש- $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות רציפות בקטע סגור $[a,b]$ וגזירות בקטע פתוח (a,b), ו- $g'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$.

אז קיימת לפחות נקודה אחת $c\in(a,b)$ כך ש-

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

או שקול

$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(c)=\big(g(b)-g(a)\big)f'(c) .$$

הוכחה: נגדיר פונקציה $h(x)=f(x)-tg(x)$, כאשר t פרמטר שנבחור כך ש- $h(a)=h(b)$. ז"א

$$h(a)=h(b) \quad\Rightarrow\quad f(a)-tg(a)=f(b)-tg(b) \quad\Rightarrow\quad t\,(g(b)-g(a))=f(b)-f(a) \quad\Rightarrow\quad t=\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)} .$$

f ו- g רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b), לכן גם h רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). לפי משפט רול קיימת $c\in(a,b)$ שבה $h'(c)=0$. לפיכך

$$0=h'(c)=f'(c)-tg'(c)=f'(c)-\left(\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}\right)g'(c) .$$

מכאן

$$f'(c)=\left(\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}\right)g'(c) .$$

■

10.8 משפט לגרנז'

למה 10.3 משפט ערך הממוצע של לגרנז'

לכל פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b), קיימת לפחות נקודה אחת $c\in(a,b)$ כך ש-

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) .$$

הוכחה: נגדיר $g(x)=x$ ונשתמש במשפט קושי 10.5:

קיים c כך ש- $a<c<b$ ו

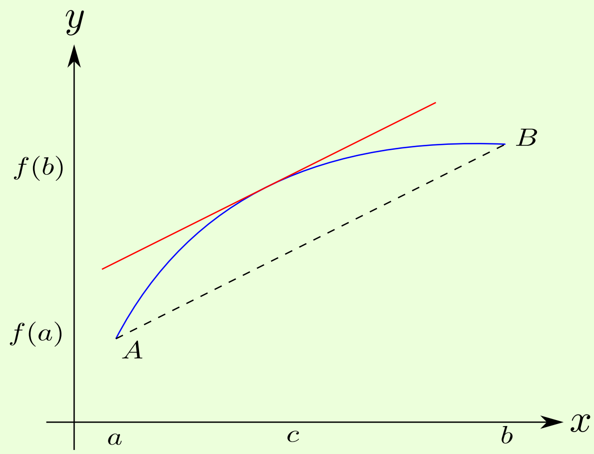
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

שים לב $g(b)=b$, $g(a)=a$, $g'(c)=1$ לכן

$$\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}=f'(c) .$$

■

למה 10.4 המשמעות של משפט לגרנז



הביטוי $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ הוא השיפוע של הקו AB. המשיק בנקודה c מקביל לקו AB.

למה 10.5

אם $f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$ אז $f(x)$ פונקציה קבועה בקטע (a,b).

הוכחה: יהיו

$$a<x_1<x_2<b\ .$$

לפי משפט לגרנז' 10.3 קיים $c\in(x_1,x_2)$ כך ש-

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_2-x_1)\ .$$

לפי הנתון, $f'(c)=0$ לכן $f(x_2)=f(x_1)$ לכל $x_1,x_2\in(a,b)$. ז"א $f(x)$ פונקציה קבועה. ■

למה 10.6

אם $f'(x)=g'(x)$ לכל $x\in(a,b)$ אז קיים c כך ש- $f(x)=g(x)+c$.

הוכחה: תהי

$$h(x)=f(x)-g(x).$$

מכאן

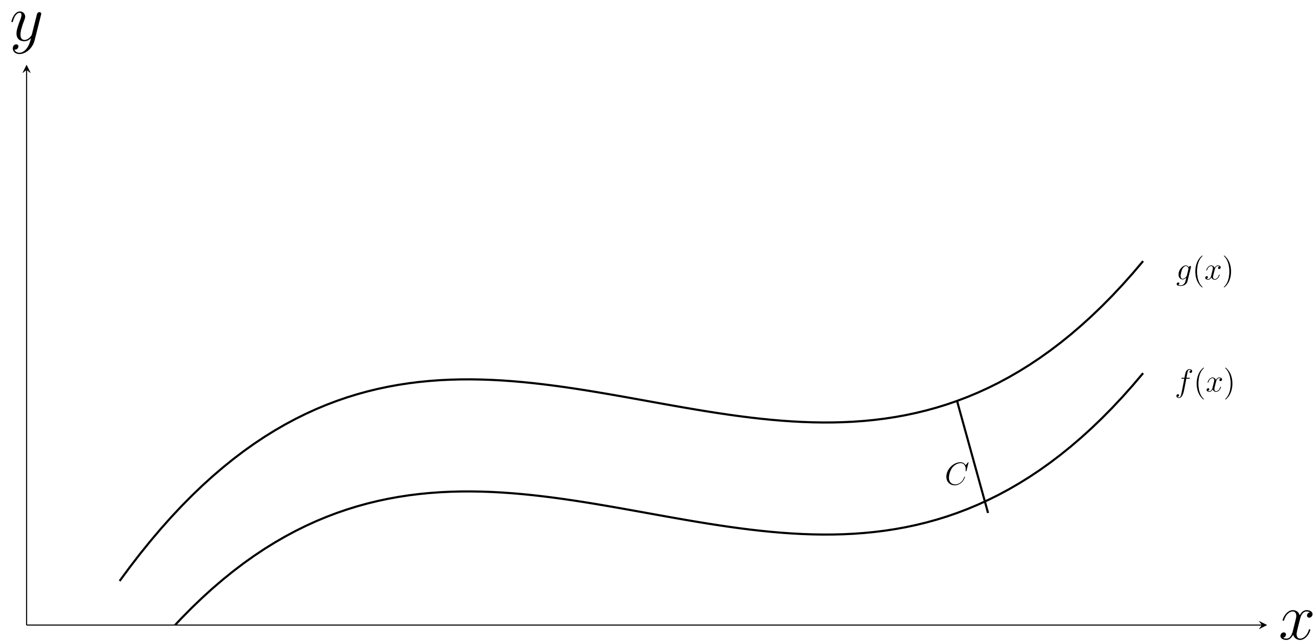
$$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$$

לכל $x\in(a,b)$. לכן לפי למה 10.5 $h(x)$ פונקציה קבועה, ז"א קיים c כך ש $h(x)=c$ לכל $x\in(a,b)$. כלומר

$$f(x)=g(x)+c$$

לכל $x\in(a,b)$.

■



10.9 דוגמאות

דוגמה 10.16

הוכיחו כי $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ לכל $x \in (-1,1)$.

פתרון:
תהי
$$f(x) = \arcsin x + \arccos x \ .$$
אז
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$
לכל $x \in (-1,1)$. לפי למה 10.6, $f(x) = c$ לכל $-1 < x < 1$.

נמצא את c:

נציב $x = 0$ ונקבל
$$f(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

לכן $c = \frac{\pi}{2}$. ■

דוגמה 10.17

הוכיחו שלכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

פתרון:
נציב $f(x) = \sin x$.

שים לב $f(x)$ רציפה בקטע $[y,x]$ וגזירה בקטע (y,x). לכן קיים $c\in(y,x)$ כך ש

$$f(x)-f(y)=f'(c)\cdot(x-y)\ ,$$

כלומר

$$\sin x-\sin y=\cos c\cdot(x-y)\qquad\Rightarrow\qquad|\sin x-\sin y|=|\cos c|\cdot|x-y|\ .$$

אבל $|\cos c|\leq 1$ אז

$$|\sin x-\sin y|=|\cos c|\cdot|x-y|\leq|x-y|\ .$$

■

דוגמה 10.18

הוכיחו כי לכל $x,y\in\mathbb{R}$, $0<x<y$ מתקיים

$$\frac{x-y}{x}<\ln\left(\frac{x}{y}\right)<\frac{x-y}{y}\ .$$

פתרון:
נגדיר $f(x)=\ln x$. שים לב $f(x)$ רציפה בקטע $[x,y]$ וגזירה בקטע (x,y). לכן לפי משפט לגרנז' 10.3, קיים $c\in(x,y)$ כך ש

$$f(y)-f(x)=f'(c)\cdot(y-x)\ .$$

ז"א

$$\ln y-\ln x=\frac{1}{c}\cdot(y-x)\qquad\Rightarrow\qquad\ln x-\ln y=\frac{1}{c}\cdot(x-y)\qquad\Rightarrow\qquad\ln\frac{x}{y}=\frac{x-y}{c}\ .\qquad(\#)$$

שים לב $0<c<y\ \Leftarrow\ \frac{1}{y}<\frac{1}{c}$, לכן

$$\frac{y-x}{y}<\frac{y-x}{c}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{x-y}{y}>\frac{x-y}{c}\ .$$

לכן לפי (#) נקבל

$$\ln\frac{x}{y}<\frac{x-y}{y}\ .$$

שים לב $0<x<c\ \Leftarrow\ \frac{1}{c}<\frac{1}{x}$, לכן

$$\frac{y-x}{c}<\frac{y-x}{x}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{x-y}{c}>\frac{x-y}{x}\ .$$

לכן לפ (#)

$$\ln\frac{x}{y}>\frac{x-y}{x}\ .$$

■

דוגמה 10.19

יהיו $f(x)$, $g(x)$ פונקציות גזירות בקטע (a,b). תהי $c\in(a,b)$

נקודה שבה

$$f(c)=g(c) \qquad \text{(\#1)}$$

ו-

$$f'(x)>g'(x) \qquad \forall x\in(a,b)\ ,\ x<c\ . \qquad \text{(\#2)}$$

הוכיחו כי

$$g(x)>f(x) \qquad \forall x\in(a,b)\ ,\ x<c\ . \qquad \text{(\#3)}$$

פתרון:
יהי $h(x):=f(x)-g(x)$. לפי (#2), $h'(x)>0$ לכל $x\in(a,b)\ ,\ x<c$. אז לפי משפט לגרנז' 10.3, $h(x)$ עולה מונוטונית. לכן

$$h(n)>h(m) \qquad \Leftrightarrow \qquad n>m \qquad \forall m,n<c\ . \qquad \text{(\#4)}$$

אבל $h(c)=0$, לכן

$$h(x)<0 \quad \forall x<c\ . \qquad \text{(\#5)}$$

ומכאן

$$f(x)-g(x)<0 \quad \Rightarrow \quad g(x)>f(x) \quad \forall x<c\ . \qquad \text{(\#6)}$$

■

דוגמה 10.20

יהיו $f(x)$, $g(x)$ פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b) כך ש-

$$f(a)=g(a) \qquad \text{(1*)}$$

אם

$$f'(x)<g'(x) \qquad \forall x\in(a,b)\ , \qquad \text{(2*)}$$

הוכיחו כי

$$f(x)<g(x) \qquad \forall x\in(a,b]\ . \qquad \text{(3*)}$$

פתרון:
יהי $h(x):=f(x)-g(x)$. לפי (1*),

$$h(a)=0\ . \qquad \text{(4*)}$$

לפי (2*),

$$h'(x)<0 \qquad \forall x\in(a,b). \qquad \text{(5*)}$$

לכל $x\in(a,b)\ ,\ x<c$. אז לפי משפט לגרנז' 10.3, $h(x)$ יורדת מונוטונית. לכן

$$h(n)<h(m) \qquad \Leftrightarrow \qquad n>m \qquad \forall m,n<(a,b)\ . \qquad \text{(6*)}$$

אבל לפי (4*) $h(a)=0$, לכן

$$h(x)<0 \quad \forall a<x\leq b\ . \tag{7*}$$

ומכאן

$$f(x)-g(x)<0 \quad \Rightarrow \quad g(x)>f(x) \quad \forall x\in(a,b]\ . \tag{8*}$$

■

דוגמה 10.21

הוכיחו כי למשוואה

$$x^3-7x^2+25x+8=0$$

יש פתרון יחיד.

פתרון:

נגדיר

$$f(x)=x^3-7x^2+25x+8\ .$$

שים לב

$$f(0)=8\ , \qquad f(-1)=-25\ ,$$

אז לפי משפט ערך ביניים 10.2, קיימת לפחות נקודה אחת שבה הפונקציה מקבלת הערך 0. נניח שקיימת יותר מנקודה אחת, a, b, שבהן

$$f(a)=f(b)=0\ .$$

$f(x)$ פולינום ולכן היא רציפה וגזירה בכל x. לכן לפי משפט רול 10.4, קיים נקודה $c\in(a,b)$ כל ש-

$$f'(c)=0. \tag{\#}$$

שים לב,

$$f'(x)=3x^2-14x+25$$

לכן אם (#) מתקיים,

$$3c^2-14c+25=0 \qquad \Rightarrow \qquad c=\frac{7\pm\sqrt{26}i}{3}$$

סתירה. לכן אין יותר מפתרון אחד. ■

דוגמה 10.22

הוכיחו שלכל ערכים ממשיים a ו- b מתקיים

$$|\arctan(2b)-\arctan(2a)|\leq 2\,|b-a|$$

פתרון:

פונקציה $f(x)=\arctan(x)$ היא אלמנטרית ומוגדרת לכל x ממשי. לכן היא רציפה וגזירה לכל x ממשי ולכן מקיימת את תנאיי משפט לגרנז' 10.3 עבור גל קטע $[a,b]$. לכן קיים ערך c מקטע זו כך ש-

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ .$$

מכאן

(**)
$$\frac{|f(b)-f(a)|}{|b-a|}=|f'(c)|$$

שים לב,

$$f'(x)=\frac{2}{1+4x^2}$$

ולכן לפי (**),

$$\frac{|\arctan(2b)-\arctan(2a)|}{|b-a|}=\frac{2}{1+4c^2}\leq 2$$

מש"ל. ■

דוגמה 10.23

תהיי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). ידוע כי

$$f(a)=f(b)=0\ .$$

הראו שקיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש -

$$f(c)+f'(c)=0\ .$$

רמז: הסתכלו על פונקציה $g(x)=e^x f(x)$

פתרון:

<u>נתון:</u>

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b).

$f(a)=f(b)=0$.

<u>צריך להוכיח:</u>

$f(c)+f'(c)=0$.

<u>הוכחה:</u>

נגדיר $g(x)=e^x f(x)$.
$f(x)$ רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b), ו e^x רציפה וגזירה לכל x. לכן $g(x)$ רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b).

$f(a)=f(b)=0$ (נתון) לכן $g(a)=e^a f(a)=0$, $g(b)=e^b f(b)=0$, ז"א

$$g(a)=g(b)=0\ .$$

לפי משפט רול קיימת $c\in(a,b)$ כך ש $g'(c)=0$. ז"א

$$e^c f(c)+e^c f'(c)=0\qquad\Rightarrow\qquad e^c\left(f(c)+f'(c)\right)=0$$

$e^c>0$ לכל c ממשי, לכן $f(c)+f'(c)=0$.

■

שיעור 11
אינטגרלים לא מסויימים

11.1 סכום רימן

הגדרה 11.1 הפרדה

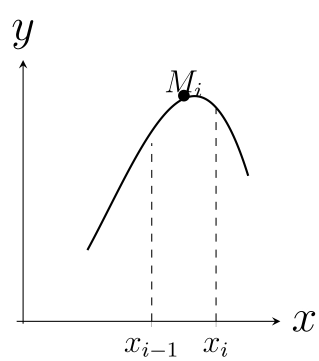
הפרדה של הקטע $[a,b]$ הינה קבוצת נקודות

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{m-1} \leq x_n = b \ .$$

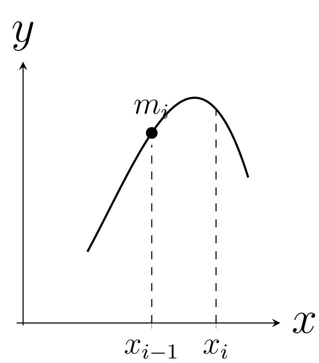
נגדיר $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

הגדרה 11.2

נניח כי $f(x)$ פונקציה חסומה הקטע $[a,b]$. לכל הפרדה P של $[a,b]$. נגדיר $M_i = \max\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

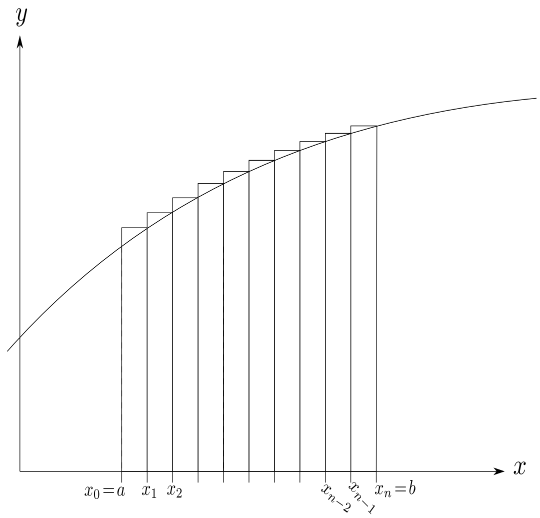


ונגדיר $m_i = \min\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

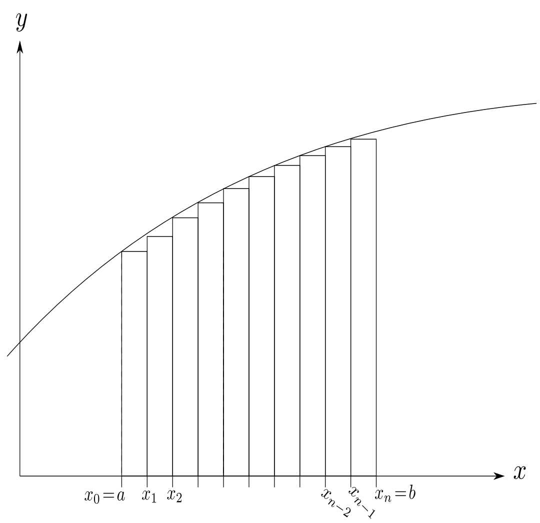


הגדרה 11.3

נניח כי f פונקציה שרציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). נניח כי P הפרדה מסוימת של הקטע $[a,b]$.
נגדיר $U(P,f)=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$. המשמעות הגאומטרי מתואר בגרף להלן.



נגדיר $L(P,f)=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$. המשמעות הגאומטרי מתואר בגרף להלן.



הגדרה 11.4 סכום רימן העליון וסכון רימן התחתון

נניח כי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע $(a.b)$. ה **סכום רימן העליון** מוגדר

$$\int\limits_a^{\bar{b}} f\,dx = \inf_P U(P,f) \ ,$$

וה **סכום רימן התחתון** מוגדר

$$\int\limits_{\bar{a}}^{b} f\,dx = \sup_P L(P,f) \ ,$$

הגדרה 11.5 פונקציה אינטגרבילית

נניח כי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע $(a.b)$. אומרים כי f **אינטגרבילית** בקטע $[a,b]$ אם

$$\int_a^{\bar{b}} f\,dx = \int_{\bar{a}}^{b} f\,dx\ .$$

הגדרה 11.1

נניח כי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע $(a.b)$. **פונקציה הקדומה** F של f מוגדרת לפי

$$f(x) = F'(x)\ .$$

משפט 11.1 המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי I

נניח כי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$. הפונקציה $g(x)$ שמוגדרת

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt\ , \qquad a \le x \le b\ .$$

רציפה בקטע $[a,b]$, גזירה בקטע (a,b), ו-

$$g'(x) = f(x)\ .$$

ז"א $g(x)$ הפונקציה הקדומה של $f(x)$.

הוכחה: נניח ש- $x \in [a,b]$, $\epsilon > 0$, ונבחור $h > 0$ כך ש- $x + h < b$ ו- $0 < h < \delta$. אז

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\int_h^{x+h} f(t)dt\ .$$

f רציפה בנקודה x לכן קיים $\delta > 0$ כך ש-

$$|t-x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(t)-f(x)| < \epsilon\ .$$

בפרט, אם $t \in [x, x+h]$ אז $x \le t \le x+h$ ולכן $0 \le t-x \le h < \delta$, ז"א $|t-x| < \delta$.
לכן נקבל $|f(t)-f(x)| < \epsilon$.

מכאן נובע כי

$$-\epsilon < f(t) - f(x) < \epsilon \quad \Rightarrow \quad f(x) - \epsilon < f(t) < f(x) + \epsilon\ .$$

נפעיל אינטגרל על זה מעל הקטע $[x,x+h]$:

$$\begin{array}{rcccl}
f(x)-\epsilon &<& f(t) &<& f(x)+\epsilon \\
\int_x^{x+h} dt\,(f(x)-\epsilon) &<& \int_x^{x+h} dt\, f(t) &<& \int_x^{x+h} dx\,(f(x)+\epsilon) \\
(f(x)-\epsilon)\int_x^{x+h} dt &<& \int_x^{x+h} dt\, f(t) &<& (f(x)+\epsilon)\int_x^{x+h} dt \\
(f(x)-\epsilon)(x+h-x) &<& \int_x^{x+h} dt\, f(t) &<& (f(x)+\epsilon)(x+h-x) \\
f(x)-\epsilon &<& \frac{1}{h}\int_x^{x+h} dt\, f(t) &<& f(x)+\epsilon \\
f(x)-\epsilon &<& \frac{g(x+h)-g(x)}{h} &<& f(x)+\epsilon \\
-\epsilon &<& \frac{g(x+h)-g(x)}{h}-f(x) &<& \epsilon
\end{array}$$

לפיכך

$$\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h}-f(x)\right|<\epsilon\ .$$

לכן הוכחנו כי

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f(x)\ .$$

באופן דומה ניתן להוכיח כי

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f(x)\ .$$

לכן

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f(x)\ .$$

לפי ההגדרה של נגזרת, מכאן נובע כי

$$g'(x)=f(x)\ .$$

■

משפט 11.2 המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי II

נניח כי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$. אז

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt\ =F(b)-F(a)$$

כאשר $F(x)$ פונקציה הקדומה של $f(x)$.

הוכחה: נניח כי F פונקציה הקדומה של f. נגדיר

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt\ .$$

לפי משפט 11.1, g רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b) ו- $g'(x)=f(x)$ לכל $x\in(a,b)$. כעת נגדיר

$$h(x):=g(x)-F(x)\ .$$

g רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). לפיכך הפוקנציה $h-g$.
רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). בפרט, אם $x\in(a,b)$ אז

$$h'(x)=g'(x)-F'(x)\ .$$

לפי המשפט 11.1, $g'(x)=f(x)$ ו- $F'(x)=f(x)$ לפי ההגדרה של פונקציה הקדומה. לכן $h'(x)=f(x)-f(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$. לכן, מכיוון ש- h רציפה בנקודות a ו- b, אז h פונקציה קבועה ולכן $h(a)=h(b)$.

$$\begin{aligned}
h(b)=&h(a)\\
g(b)-F(b)=&g(a)-F(a)\\
g(b)=&g(a)+F(b)-F(a)\\
\int_a^b f(t)dt=&\int_a^a f(t)dt+F(b)-F(a)\\
\int_a^b f(t)dt=&0+F(b)-F(a)\\
\int_a^b f(t)dt=&F(b)-F(a)
\end{aligned}$$

■

11.2 אינטגרלים לא מסויימים

הגדרה 11.2 פונקציה קדומה

אם $f'(x)=f(x)$ אז אומרים כי $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$.

דוגמה 11.1

$$(x^2)'=2x\ ,$$

לכן $F(x)=x^2$ פונקציה קדומה של $f(x)=2x$

משפט 11.3 פונקציה קדומה

אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$, אז $F(x)+C$ (לכל $C\in\mathbb{R}$ קבוע) היא גם פונקציה קדומה של $f(x)$.

ז"א אם פונקציה קדומה של $f(x)$ קיימת, בהכרח ישנם אינסוף פונקציות קדומות של $f(x)$.

דוגמה 11.2

$$(x^2+C)'=2x \ ,$$

לכן לפונקציה $f(x)=2x$ יש אינסוף פונקציות קדומות מהצורה $F(x)=x^2+C$.

הגדרה 11.3 האינטגרל הלא מסויים

האוסף של כל הפונקציות הקדומות של $f(x)$, נקרא האינטגרל הלא מסויים של $f(x)$, מסומן $\int f(x)dx$. ז"א

$$\int f(x)dx = F(x)+C \qquad \Leftrightarrow \qquad (F(x)+C)'=f(x) \ .$$

dx נקרא הדיפרנציאל של x.

11.3 דוגמאות

דוגמה 11.3

$$\int 2x\,dx = x^2+C$$

דוגמה 11.4

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

דוגמה 11.5

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2}+C$$

דוגמה 11.6

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}+C$$

11.4 ליניאריות של אינטגרל לא מסויים

הגדרה 11.4 ליניאריות של אינטגרל לא מסויים

נתונות פונקציות $f(x)$, $g(x)$ וסקלר a.

(i) $\int a\cdot f(x)\,dx = a\cdot \int f(x)\,dx$.

(ii) $\int \left[f(x)\pm g(x)\right]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

הוכחה:

(i) אם $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$, ז"א $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, אז $F'(x)=f(x)$. לפיו ולפי משפט **??** (מספר 2),

$$a\cdot f(x) = a\cdot F'(x) = (aF(x))' \ .$$

נפעיל אינטגרל לא מסויים על שני הצדדים ונקבל

$$\int a\cdot f(x)\,dx = a\cdot F(x)+C \ .$$

■

11.5 טבלת האינטגרלים חלקית

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}+C \ , \qquad (a\neq -1)$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+C \ ,$$
$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+C \ ,$$
$$\int e^x\,dx = e^x+C \ ,$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x+C \ ,$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x+C \ ,$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x+C \ ,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x+C \ ,$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x+C \ ,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x+C \ ,$$

11.6 תרגילים

דוגמה 11.7

$$\int \left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^2 dx = \int \left(1+2x^{2/3}+x^{4/3}\right) dx$$
$$= x + 2\frac{x^{2/3}}{5/3} + \frac{x^{4/3}}{7/3} + C$$
$$= x + \frac{6x^{2/3}}{5} + \frac{3x^{4/3}}{7} + C$$

דוגמה 11.8

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\, dx = \int x^{-2/5} dx$$
$$= \frac{5}{3} x^{1-2/5} + C$$
$$= \frac{5}{3} x^{3/5} + C$$

דוגמה 11.9

$$\int \frac{x+1}{x}\, dx = \int \left(1+\frac{1}{x}\right) dx$$
$$= x + \ln|x| + C$$

11.7 החלפת משתנה / אינטגרציה ע"י הצבה

משפט 11.4 אינטגרציה ע"י הצבה

נתון אינטגרל מצורה

$$\int f\left(t(x)\right) \cdot u'(x)\, dx$$

כאשר $f\left(u(x)\right)$ פונקציה של הפונקציה $u(x)$ ו- $u'(x)$ הנגזרת של $u(x)$. אז

$$\int f\left(u(x)\right) \cdot u'(x)\, dx = \int f(u)\, du\ .$$

דוגמה 11.10

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \sin(2x) dx$$

פתרון:

$$u = 2x\ , \qquad u'(x) = 2\ , \qquad \frac{1}{2}u'(x) = 1\ .$$

$$\begin{aligned}\int \sin(2x)dx =& \frac{1}{2}\int \sin u \cdot u'\, dx \\ =& -\frac{1}{2}\cos u + C \\ =& -\frac{1}{2}\cos(2x) + C\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.11

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int e^{ax}dx$$

פתרון:

$$u = ax\ , \qquad u'(x) = a\ , \frac{1}{a}u'(x) = 1\ .$$

$$\begin{aligned}\int e^{ax}dx =& \int e^{u(x)} \cdot \frac{1}{a} \cdot u'(x)\, dx \\ =& \frac{1}{a}\int e^u\, du \\ =& \frac{1}{a}e^u + C \\ =& \frac{1}{a}e^{ax} + C\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.12

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{1}{x^2+8}\, dx$$

פתרון:

$$u(x) = \frac{x}{\sqrt{8}}\ , \qquad u'(x) = \frac{1}{\sqrt{8}}\ , \qquad \Rightarrow \qquad 1 = \sqrt{8}\, u'(x).$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+8}\,dx =& \int \frac{1}{8u^2+8}\,\sqrt{8}u'(x)\ ,dx\\ =&\sqrt{8}\int \frac{1}{8u^2+8}\,du\\ =&\frac{\sqrt{8}}{8}\int \frac{1}{u^2+1}\,du\\ =&\frac{1}{\sqrt{8}}\arctan(u)+C\\ =&\frac{1}{\sqrt{8}}\arctan\left(\frac{x}{8}\right)+C\end{aligned}$$

באופן כללי,

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C\ .$$

■

דוגמה 11.13

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{1}{5x+2}\,dx$$

פתרון:

$$u(x)=5x+2\ ,\qquad u'(x)=5\ ,\qquad \frac{1}{5}u'(x)=1\ .$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{5x+2}\,dx =& \int \frac{1}{u(x)}\cdot\frac{u'(x)}{5}\,dx\\ =&\frac{1}{5}\int \frac{1}{u(x)}\,du\\ =&\frac{1}{5}\ln|u|+C\\ =&\frac{1}{5}\ln|5x+2|+C\end{aligned}$$

באופן כללי,

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+C\ .$$

■

דוגמה 11.14

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int (3x-1)^{24}\,dx$$

פתרון:

$$u(x)=3x-1\ ,\qquad u'=3\ ,\qquad \frac{1}{3}u'(x)=1$$

$$
\begin{aligned}
\int (3x-1)^{24}\, dx &= \int u^{24} \cdot \frac{u'(x)}{3}\, dx \\
&= \frac{1}{3} \int u^{24}\, du \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{25}}{25} + C \\
&= \frac{1}{75} (3x-1)^{25} + C
\end{aligned}
$$

■

דוגמה 11.15

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \tan x\, dx$$

פתרון:

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$$

$$u = \cos x\ , \qquad u' = -\sin x\ .$$

$$
\begin{aligned}
\int \tan x\, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx \\
&= -\int \frac{1}{u}\, u'(x) dx \\
&= -\int \frac{1}{u}\, du \\
&= -\ln |u| + C \\
&= -\ln |\cos x| + C
\end{aligned}
$$

■

דוגמה 11.16

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \cot x\, dx$$

פתרון:

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$$

$$u(x) = \sin x\ , \qquad u'(x) = \cos x\ .$$

$$\begin{aligned}\int \cot x\,dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx\\ &= \int \frac{1}{u}\,u'(x)dx\\ &= \int \frac{1}{u}\,du\\ &= \ln|u| + C\\ &= \ln|\sin x| + C\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.17

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int x(x+2)^{69}\,dx$$

פתרון:

$$u = (x+2)\ ,\qquad u'(x) = 1\ ,\qquad x = u-2$$

$$\begin{aligned}\int x(x+2)^{69}\,dx &= \int (u-2)u^{69}\,u'(x)\,dx\\ &= \int (u-2)u^{69}\,du\\ &= \int \left(u^{70} - 2u^{69}\right)\,du\\ &= \frac{u^{71}}{71} - \frac{2u^{70}}{70} + C\\ &= \frac{(x+2)^{71}}{71} - \frac{(x+2)^{70}}{35} + C\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.18

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{1}{\cot^5 x\cdot\sin^2 x}\,dx$$

פתרון:

$$u = \cot x\ ,\qquad u'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cot^5 x \cdot \sin^2 x}\, dx &= -\int \frac{1}{u^5} u'(x)\, dx \\
&= -\int \frac{1}{u^5}\, du \\
&= -\int u^{-5}\, du \\
&= -\frac{u^{-4}}{-4} + C \\
&= \frac{1}{4\cot^4 x} + C
\end{aligned}
$$

■

דוגמה 11.19

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$
\int \frac{\cos x}{3+\sin x}\, dx
$$

פתרון:

$$
u = \sin x \ , \qquad u'(x) = \cos x \ .
$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{3+\sin x}\, dx &= \int \frac{1}{u+3}\, u'(x)\, dx \\
&= \int \frac{1}{u+3}\, du \\
&= \ln|u+3| + C \\
&= \ln|\sin x + 3| + C
\end{aligned}
$$

■

דוגמה 11.20

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$
\int \frac{1}{e^x+1}\, dx
$$

פתרון:

$$
u = e^x \ , \qquad u'(x) = e^x \ , \qquad u'(x)e^{-x} = \frac{1}{u}\cdot u'(x) \ .
$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{e^x+1}\, dx &= \int \frac{1}{u(u+1)}\, u'(x)\, dx \\
&= \int \frac{1}{u(u+1)}\, du \\
&= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du \\
&= \ln|u| - \ln|u+1| + C \\
&= \ln(e^x) - \ln(e^x+1) + C \\
&= x - \ln(e^x+1) + C
\end{aligned}
$$

■

11.8 אינטגרציה בחלקים

משפט 11.5 אינטגרציה בחלקים

יהיו $u(x)$ $\mathrm{v}(x)$ פונקציות של משתנה x.

$$\int u\mathrm{v}'\,dx = u\mathrm{v} - \int u'\mathrm{v}\,dx$$

הוכחה:

לפי כלל הכפל של נגזרות (עיין משפט ?? מספר 3)

$$(u\mathrm{v})' = u'\mathrm{v} + u\mathrm{v}' \qquad \Rightarrow \qquad u\mathrm{v}' = (u\mathrm{v})' - u'\mathrm{v}$$

נפעיל אינטגרל על שני הצדדים:

$$\int u\mathrm{v}'\,dx = \int (u\mathrm{v})'\,dx - \int u'\mathrm{v}\,dx\ . \tag{*}$$

לפי משפט ?? ניתן לכתוב אגף השמאל של (*) כ

$$\int u\mathrm{v}'(x)\,dx = \int u\,d\mathrm{v} \tag{\#1}$$

האיבר הראשון באגף הימין של (*) הוא

$$\int (u\mathrm{v})'dx = u\mathrm{v} + C \tag{\#2}$$

לפי משפט ?? האיבר השני באגף הימין של (*) הוא

$$\int u'\mathrm{v}\,dx = \int \mathrm{v}\,du \tag{\#3}$$

נציב (#1), (#2), ו- (#3) לתוך (*) ונקבל

$$\int u\,d\mathrm{v} = u\mathrm{v} - \int \mathrm{v}\,du$$

ז"א

$$\int u\mathrm{v}'\,dx = \int (u\mathrm{v})'\,dx - \int u'\mathrm{v}\,dx$$

■

דוגמה 11.21

חשב את האינטגרל

$$\int x\cdot e^x\,dx$$

פתרון:

$u=x \quad \mathrm{v}'=e^x \quad u'(x)=1 \quad v=e^x$

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx =& xe^x-\int e^x\,dx\\ =& xe^x-e^x+C\end{aligned}$$

■

למה 11.1 מקרים נפוצים של שימוש באינטגרציה בחלקים

1) במקרה

א $\int p(x)\cdot e^{kx}\,dx$,

ב $\int p(x)\cdot \sin(kx)\,dx$,

ג $\int p(x)\cdot \cos(kx)\,dx$

כאשר $p(x)$ פולינום, מגדירים $u=p(x)$.

2) במקרה

א $\int p(x)\cdot \arcsin(kx)\,dx$,

ב $\int p(x)\cdot \arccos(kx)\,dx$,

ג $\int p(x)\cdot \arctan(kx)\,dx$,

ד $\int p(x)\cdot \ln|kx|\,dx$,

ה $\int p(x)\cdot \mathrm{arccot}(kx)\,dx$,

כאשר $p(x)$ פולינום, מגדירים $\mathrm{v}'=p(x)$.

3) במקרה

א $\int e^{ax}\cdot \sin(bx)\,dx$,

ב $\int e^{ax}\cdot \cos(bx)\,dx$,

מגדירים $u=e^{ax}$.

11.9 דוגמאות

דוגמה 11.22

חשב את האינטגרל

$$\int (2x+1)e^{3x}\,dx$$

פתרון:

$$u = 2x+1\ , \qquad \mathrm{v}' = e^{3x} \qquad u' = 2 \qquad \mathrm{v} = \frac{1}{3}\cdot e^{3x}$$

$$\begin{aligned}\int (2x+1)e^{3x}\,dx =& \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3}\int e^{3x}\,dx \\ =& \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.23

חשב את האינטגרל

$$\int \ln(x)\,dx$$

פתרון:

$$u = \ln(x)\ , \qquad \mathrm{v}' = dx\ , \qquad u' = \frac{1}{x}\ , \qquad \mathrm{v} = x$$

$$\int \ln x\,dx = x\cdot \ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C$$

■

דוגמה 11.24

חשב את האינטגרל

$$\int \arctan(x)\,dx$$

פתרון:

$$u = \arctan(x)\ , \qquad \mathrm{v}' = 1\ , \qquad u' = \frac{1}{1+x^2}\ , \qquad \mathrm{v} = x$$

$$\int \arctan x\,dx = x\cdot\arctan x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$u = x^2+1\ , \qquad u' = 2x$$

$$\begin{aligned}\int \arctan x\,dx =& x\cdot \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du \\ =& x\cdot \arctan x - \frac{1}{2}\int \ln|u| + C \\ =& x\cdot \arctan x - \frac{1}{2}\int \ln|x^2+1| + C\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.25

חשב את האינטגרל

$$I = \int x^2 \sin(2x)\,dx$$

פתרון:

$$u = x^2\ , \qquad \mathrm{v}' = \sin(2x)\ , \qquad u' = 2x\ , \qquad \mathrm{v} = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\begin{aligned}I =& -\frac{1}{2}x^2\cdot\cos(2x) + \frac{1}{2}\int 2x\cdot\cos(2x)\,dx \\ =& -\frac{1}{2}x^2\cdot\cos(2x) + \int x\cdot\cos(2x)\,dx\end{aligned}$$

$$u = x\ , \qquad \mathrm{v}' = \cos(2x)\ , \qquad u' = 1\ , \qquad \mathrm{v} = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

$$\begin{aligned}I =& -\frac{1}{2}x^2\cdot\cos(2x) + \frac{1}{2}x\cdot\sin(2x) - \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,dx \\ =& -\frac{1}{2}x^2\cdot\cos(2x) + \frac{1}{2}x\cdot\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.26

חשב את האינטגרל

$$I = \int e^x \sin x\,dx$$

פתרון:

$$u = e^x\ , \qquad \mathrm{v}' = \sin(x)\ , \qquad u' = e^x\ , \qquad \mathrm{v} = -\cos(x)$$

$$I = -e^x\cos x + \int e^x\cdot\cos(x)\,dx$$

$$u = e^x\ , \qquad \mathrm{v}' = \cos(x)\ , \qquad u' = e^x\ , \qquad \mathrm{v} = \sin(x)$$

$$\begin{aligned}I =& -e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cdot\sin(x)\,dx \\ =& -e^x\cos x + e^x\sin x - I\end{aligned}$$

לכן

$$2I = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

ז"א

$$I = \frac{1}{2}\left(-e^x \cos x + e^x \sin x\right) + C$$

■

דוגמה 11.27

חשב את האינטגרל

$$I = \int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$$

פתרון:

$$u = x \ , \qquad \mathrm{v}' = \frac{1}{\cos^2(x)} \ , \qquad u' = 1 \ , \qquad \mathrm{v} = \tan(x)$$

$$\begin{aligned} I =& x \tan x - \int \tan(x)\, dx \\ =& x \tan x + \ln|\cos x| + C \end{aligned}$$

■

דוגמה 11.28

חשב את האינטגרל

$$I = \int \ln\left(x^2+4\right)\, dx$$

פתרון:

$$u = \ln\left(x^2+4\right) \ , \qquad \mathrm{v}' = 1 \ , \qquad u' = \frac{2x}{x^2+4} \ , \qquad \mathrm{v} = x \ .$$

$$\begin{aligned} I =& x \ln\left(x^2+4\right) - 2\int \frac{x^2}{x^2+4}\, dx \\ =& x \ln\left(x^2+4\right) - 2\int \frac{(x^2+4)-4}{x^2+4}\, dx \\ =& x \ln\left(x^2+4\right) - 2\int \left(1 - \frac{4}{x^2+4}\right)\, dx \\ =& x \ln\left(x^2+4\right) - 2\left(x - 4\cdot\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C \\ =& x \ln\left(x^2+4\right) - 2x + 4\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C \ . \end{aligned}$$

■

שיעור 12
אינטגרלים מסויימים

12.1 אינטגריה של שברים אלגבריים (פונקציות רצינליות)

הגדרה 12.1 פונקציה רציונלית

פונקציה רציונלית (שבר אלגברי) זאת פונקציה מהצורה
$$y=\frac{P(x)}{Q(x)}\ ,$$
כאשר $P(x)$, $Q(x)$ פולינומים.

דוגמה 12.1 פונקציה רציונלית

$f(x)=\dfrac{x^4-5x+9}{x-2}$ פונקציה רציונלית: $P(x)=x^4-5x+9$ $Q(x)=x-2$.

הגדרה 12.2 פונקציה רציונלית אמיתי

שבר אלגברי
$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$
נקרא אמיתי אם
$$\deg(P)<\deg(Q)\ .$$
אם שבר אלגברי לא אמיתי, יש לעשות חילוק פולינומים.

דוגמה 12.2 חילוק פולינומים

חשבו את האינטגרל
$$\int\frac{x^4-5x+9}{x-2}\ .$$

פתרון:
שלב ראשון בחישוב אינטגרל של שבר אלגברי לא אמיתי, להגיע לשבר אלגברי אמיתי ע"י חילוק פולינומים. ע"י חילוק ארוך:
$$\frac{x^4-5x+9}{x-2}=x^3+2x^2+4x+3+\frac{15}{x-2}$$
לכן
$$\int\frac{x^4-5x+9}{x-2}=\int\left(x^3+2x^2+4x+3+\frac{15}{x-2}\right)=\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+2x^2+3x+15\ln|x-2|+C\ .$$
■

יש 4 סוגים של שברים אלגבריים פשוטים:

סוג 1

$$\frac{A}{x-a}$$

סוג 2

$$\frac{A}{(x-a)^n} \ , \qquad n\in\mathbb{N} \ , \quad n\geq 2 \ .$$

סוג 3

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q} \ ,$$

כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.

סוג 4

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} \ , n\in\mathbb{N} \ , \quad n\geq 2$$

כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.

דוגמה 12.3 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-3x+1}$

פתרון:

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+1} = \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$
$$A(x-2)+B(x-1) = 2x+1$$

$$x=2 \quad \Rightarrow \quad B=5$$
$$x=1 \quad \Rightarrow \quad A=-3$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+1}\,dx = \int \left(\frac{-3}{x-1}+\frac{5}{x-2}\right)dx = -3\ln|x-1|+5\ln|x-2|+C \ .$$

■

דוגמה 12.4 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2}$

פתרון:

$$\frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{x-3} \ .$$
$$A(x-3)^2+B(x-2)+C(x-3)(x-2) = x^2+4$$

$$\begin{array}{lll} x=3 & \Rightarrow & B=13 \\ x=2 & \Rightarrow & A=8 \\ x=0 & \Rightarrow & 9A-2B+6C=4 \rightarrow C=-7 \end{array}$$

$$\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2}\,dx = \int \left(\frac{8}{x-2}+\frac{13}{(x-3)^2}-\frac{7}{x-3}\right)dx = 8\ln|x-2|-\frac{13}{x-3}-7\ln|x-3|+C\ .$$

■

דוגמה 12.5 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $\int \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}$

פתרון:

$$\frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\ .$$

$$A(x^2+1)^2+Bx(x^2+1)+(Cx+D)x^2 = x^3+1$$

$$\begin{array}{ll} x^3: & B+C=1 \\ x^2: & A+D=0 \\ x: & B=0 \\ x^0: & A=1 \end{array}$$

לכן

$$D=-1\ ,\qquad C=1\ .$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}dx = \int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx = \int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = -\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|x^2+1|-\arctan(x)+C\ .$$

■

דוגמה 12.6 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $I=\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}$

פתרון:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5}\ .$$

$$A(x^2-2x+5)+(Bx+C)(x-1) = 2x^2-3x-3$$

$$\begin{array}{ll} x^2: & A+B=2 \\ x: & -2A+C-B=-3 \\ x^0: & 5A-C=-3 \end{array}$$

לכן

$$A=-1\ ,\qquad B=3\ ,\qquad C=-2\ .$$

$$I=\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx=\int\left(-\frac{1}{x-1}+\frac{3x-2}{x^2-2x+5}\right)dx=-\ln|x-1|+\int\left(\frac{3x-2}{(x-1)^2+4}\right)dx\ .$$

נגדיר $u=x-1$:

$$\begin{aligned}I&=\ln|x-1|+\int\frac{3(u+1)-2}{u^2+4}du\\&=\ln|x-1|+\int\frac{3(u+1)-2}{u^2+4}du\\&=\ln|x-1|+3\int\frac{u}{u^2+4}du-\int\frac{1}{u^2+4}du\\&=\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|u^2+4|-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u}{2}\right)\\&=\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|(x-1)^2+4|-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)\end{aligned}$$

■

למה 12.1 שלבים באינטגרציה של שברים אלגבריים

שלב 1. לחלק במכנה (חילוק פולינומי) במידה ש $\deg(P)\geq\deg(Q)$.

שלב 2. להציב שבר אלגברי אמיתי כסכום של שברים פשוטים.

שלב 3. לבצע אינטגרציה של כל שבר פשוט.

דוגמה 12.7 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $I=\displaystyle\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx$

פתרון:

ע"י חילוק ארוך:

$$\frac{x^5+2x+4x+4}{x^4+x^3+2x^2}=x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+4\left(\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}\right)$$

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

$$A(x^2+2x+2)+Bx(x^2+2x+2x)+(Cx+D)x^2=x^3+x^2+x+1$$

$$\begin{aligned}x^3:&\quad B+C=1\\x^2:&\quad 2A+2B+D=1\\x:&\quad 2A+2B=1\\x^0:&\quad 2A=1\end{aligned}$$

לכן

$$A=\frac{1}{2}\ ,\qquad B=0\ ,\qquad C=1\ ,\qquad D=\frac{1}{2}\ .$$

$$I=\int\left(x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}\right)dx\int\left(x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{(x+1)^2+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+4\int\frac{x+\frac{1}{2}}{(x+1)^2+1}dx\ .$$

נגדיר $u=x+1$:

$$\begin{aligned}I=&\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+4\int\frac{u-\frac{1}{2}}{u^2+1}du\\=&\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln|u^2+1|-2\arctan(u)+C\\=&\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln|(x+1)^2+1|-2\arctan(x+1)+C\end{aligned}$$

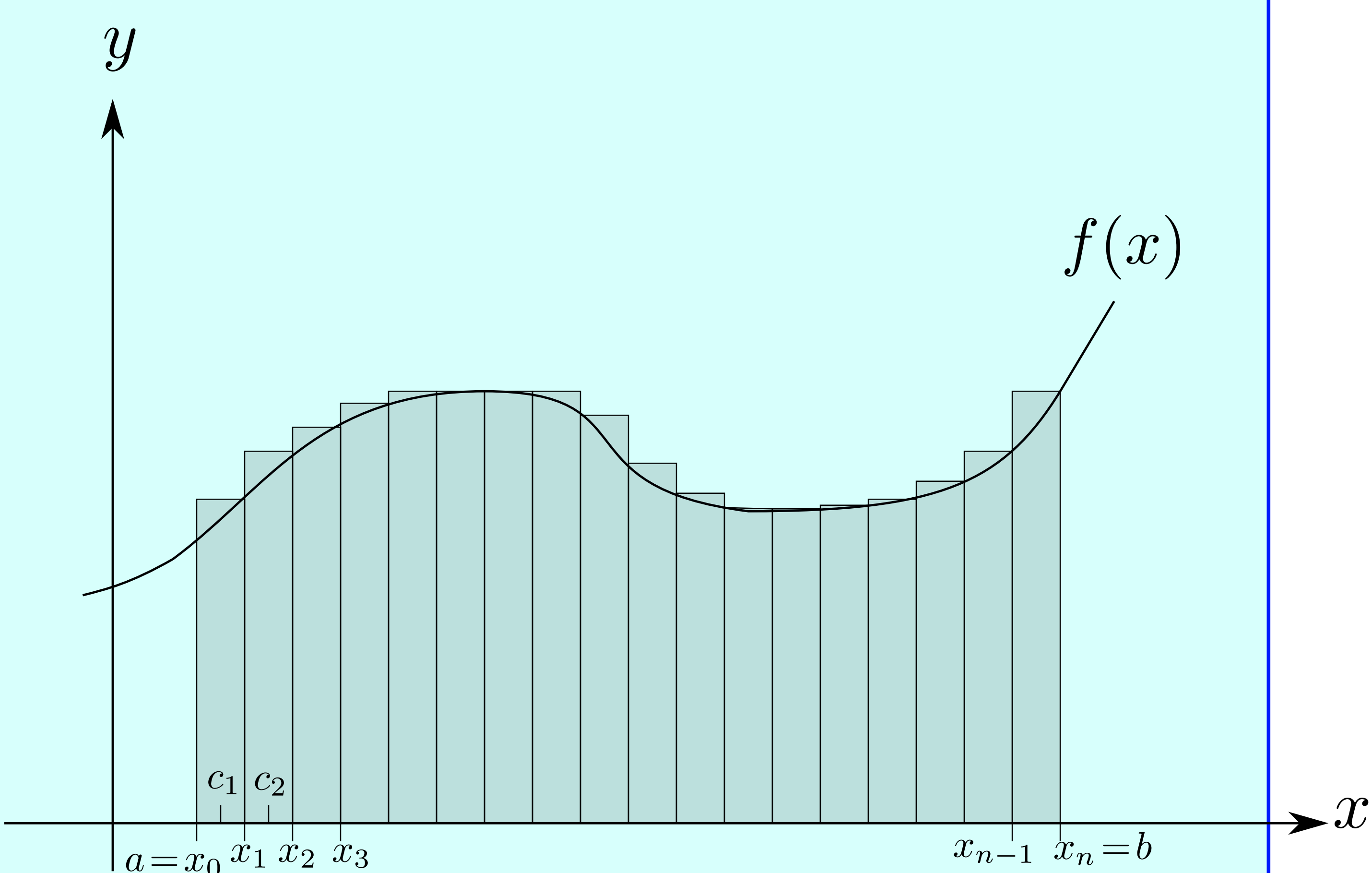
■

12.2 אינטגרל מסוים

הגדרה 12.3 אינטגרל מסוים

נניח שפונקציה $y=f(x)$ מוגדרת בקטע $[a,b]$. נחלק את הקטע $[a,b]$ לקטעים קטנים על ידי נקודות

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\ .$$



מכל קטע $[x_i, x_{i+1}]$ נבחר נקודה c_i באופן שרירותי. נבנה סכום אינטגרלי:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \ .$$

נסמן $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. נפעיל את הגבול כאשר $\max(\Delta x_i) \to 0$. נקבל

$$\lim_{\max(\Delta x_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \ .$$

האגף הימין הוא האינטגרל המסויים של $f(x)$ בקטע $[a, b]$.

משפט 12.1 קיום אינטגרל מסוים

אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$ אז האינטגרל מסויים $\int_a^b f(x)\,dx$ קיים.

משפט 12.2 משמעות הגיאומטרית של אינטגרל מסוים

אם $f(x) \geq 0$ פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$, אז $\int_a^b f(x)\,dx$ שווה לשטח הטרפז העקום החסום ע"י הקווים $y = 0$, $y = f(x)$ מלמעלה ו- $x = a$, $x = b$ בצדדים.

משפט 12.3 נוסחת ניוטון לייבניץ

אם $\int f(x)dx = F(x) + C$ אז $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

דוגמה 12.8

$$\int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - 0 = 9 \ .$$

דוגמה 12.9

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[\arctan(1) - \arctan(-1)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{4} \ .$$

דוגמה 12.10

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \cdot \ln x}\,dx = \left[\ln|\ln x|\right]_e^{e^2} = \left[\ln|\ln e^2 - \ln e|\right] = \left[\ln|2-1|\right] = 0 \ .$$

משפט 12.4 תכונות של אינטגרל מסויים

.1 $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$.

2. $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$.

3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$.

4. $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$ עבור $a < c < b$.

5. $\displaystyle\left(\int_a^x f(t)\, dt\right)'_x = f(x)$.

הוכחה:

.1

.2

.3

.4

.5

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

כאשר $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$. לכן

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = (F(x) - F(a))'_x = F'(x) = f(x) \ .$$

■

דוגמה 12.11

עבור אילו ערכי x לגרף הפונקציה

$$f(x) = \int_0^x e^{-(t+2)^2}$$

יש נקודת פיתול?

פתרון:

$$f'(x) = e^{-(x+2)^2} \ .$$

$$f''(x) = -2(x+2)e^{-(x+2)^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -2 \ .$$

■

דוגמה 12.12 החלפת משתנים באינטגרל מסויים

חשבו את $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

פתרון:
נגדיר

$$u = \ln x \ , \qquad u' = \frac{1}{x} \ , \qquad u(e^2) = 2 \ , \qquad u(1) = 0 \ .$$

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \int_0^2 u^2\,u' dx = \int_0^2 u^2\,du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} \ .$$

■

דוגמה 12.13 החלפת משתנים באינטגרל מסויים

חשבו את $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

פתרון:
נגדיר

$$u = \sqrt{x} \ , \qquad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2u} \ , \qquad u(4) = 2 \ , \qquad u(0) = 0 \ .$$

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx &= \int_0^2 \frac{1}{1+u}\cdot 2u \cdot \frac{1}{2u}\,dx\\ &= \int_0^2 \frac{1}{1+u}\cdot 2u\cdot u'\,dx\\ &= \int_0^2 \frac{2u}{1+u}\,du\\ &= \int_0^2 \left(2-\frac{2}{1+u}\right)\,du\\ &= \left[2u - 2\ln|1+u|\right]_0^2\\ &= 4 - 2\cdot\ln 3 \ .\end{aligned}$$

■

דוגמה 12.14 החלפת משתנים באינטגרל מסויים

חשבו את $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$

פתרון:
נגדיר

$$u = \sqrt{e^x-1} \ , \qquad u' = \frac{1}{2\sqrt{e^x-1}}\cdot e^x = \frac{u^2+1}{2u} \ , \qquad u(\ln 2) = 1 \ , \qquad u(0) = 0 \ .$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx &= \int_0^{\ln 2} u \cdot \frac{u^2+1}{2u} \cdot \frac{2u}{u^2+1}\,dx \\
&= \int_0^{\ln 2} u \cdot \frac{2u}{u^2+1} \cdot u'\,dx \\
&= \int_0^{1} u \cdot \frac{2u}{u^2+1}\,du \\
&= \int_0^{1} \frac{2u^2}{u^2+1}\,du \\
&= \int_0^{1} \left(2 - \frac{2}{u^2+1}\right)\,du \\
&= \left[2u - 2\arctan(u)\right]_0^1 \\
&= 2 - 2\cdot\frac{\pi}{4}\ .
\end{aligned}$$

■

דוגמה 12.15 החלפת משתנים באינטגרל מסויים

חשבו את $\int_{-1}^{2} \sqrt{2-x}\,dx$

פתרון:

נגדיר

$$u=\sqrt{2-x}\ , \qquad u' = \frac{1}{2\sqrt{2-x}}\cdot(-1) = \frac{-1}{2u}\ , \qquad u(2)=0\ , \qquad u(-1)=\sqrt{3}\ .$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} \sqrt{2-x}\,dx &= \int_{-1}^{2} u\cdot(-2u)\cdot\frac{-1}{2u}\,dx \\
&= \int_{-1}^{2} u\cdot(-2u)\cdot u'\,dx \\
&= \int_{\sqrt{3}}^{0} (-2u^2)du \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} 2u^2 du \\
&= \left[\frac{2}{3}u^3\right]_0^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{2}{3}3^{3/2}\ .
\end{aligned}$$

■

למה 12.2 אינטגרציה בחלקים באינטגרל מסויים

$$\int_a^b u\,d\mathrm{v} = [u\mathrm{v}]_a^b - \int_a^b \mathrm{v}du$$

$$\int_a^b u\,\mathrm{v}'\,dx = [u\mathrm{v}]_a^b - \int_a^b \mathrm{v}u'\,dx$$

דוגמה 12.16 אינטגרציה בחלקים באינטגרל מסויים

חשבו את $\displaystyle\int_1^e x \cdot \ln x \, dx$

פתרון:
נגדיר

$$u = \ln x \ , \qquad \mathrm{v}' = x \ , \qquad u' = \frac{1}{x} \ , \qquad \mathrm{v} = \frac{x^2}{2} \ .$$

$$\begin{aligned}\int_1^e x \cdot \ln x \, dx &= \left[\ln x \cdot \frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \left[\ln x \cdot \frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx \\ &= \left[\ln x \cdot \frac{x^2}{2}\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e \\ &= \left[\ln e \cdot \frac{e^2}{2} - \ln 1 \cdot \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right] \ , \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \ .\end{aligned}$$

■

דוגמה 12.17 אינטגרציה בחלקים באינטגרל מסויים

חשבו את $\displaystyle\int_0^\pi x \cdot \sin x \, dx$

פתרון:
נגדיר

$$u = x \ , \qquad \mathrm{v}' = \sin x \ , \qquad u' = 1 \ , \qquad \mathrm{v} = -\cos x .$$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x \cdot \sin x \, dx &= [-x \cdot \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) \, dx \\ &= [-x \cdot \cos x]_0^\pi + [\sin x]_0^\pi \\ &= [-\pi \cdot \cos \pi + 0 \cdot \cos 0] + \sin \pi - \sin 0 \\ &= \pi \ .\end{aligned}$$

■

דוגמה 12.18

חשבו את $\displaystyle\int_{-3}^3 e^{-x^2} \sin x \, dx$

פתרון:

$$\int_{-3}^{3} e^{-x^2} \sin x \, dx = 0$$

בגלל ש- $e^{-x^2} \sin x$ פונקציה אי-זוגית והתחום סימטרי ביחס לראשית הצירים. ■

דוגמה 12.19

עבור אילו ערכי a מתקיים $I = \int_0^2 \min(x,a)\, dx = 1$?

פתרון:

<u>$a \leq 0$</u>:

$$I = \int_0^2 a \, dx = [ax]_0^2 = 2a \neq 1 \ .$$

<u>$a \geq 2$</u>:

$$I = \int_0^2 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2 \neq 1 \ .$$

<u>$1 < a < 2$</u>:

$$I = \int_0^a x \, dx + \int_a^2 a \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a + [ax]_a^2 == \frac{a^2}{2} + 2a - a^2 = -\frac{a^2}{2} + 2a = 1 \ .$$

$$a^2 - 4a + 2 = 0$$

$$a = 2 \pm \sqrt{2}$$

לכן התשובה היא $a = 2 - \sqrt{2}$. ■

דוגמה 12.20

חשבו את $I = \int_0^{2\pi} \cos(\max(x,\pi))\, dx$

פתרון:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos(\max(x,\pi))\, dx &= \int_0^{\pi} \cos(\pi)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \cos(x)\, dx \\ &= [-x]_0^{\pi} + [\sin x]_{\pi}^{2\pi} \\ &= -\pi \ .\end{aligned}$$

■

דוגמה 12.21

חשבו את $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{2+3\sin x}\,dx$

פתרון:
נגדיר

$$\begin{aligned}
& u=2+3\sin x\ , \qquad u'=3\cos x.\\
\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{2+3\sin x}\,dx &= \int_0^{\pi/2}\frac{\frac{u'}{3}}{u}\,dx\\
&= \int_2^5 frac13\cdot\frac{1}{u}\,du\\
&= \left[\frac{1}{3}\ln u\right]_2^5\\
&= \frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}\ .
\end{aligned}$$

■

דוגמה 12.22

חשבו את $I=\int_0^5|2x-4|\,dx$

פתרון:

$$\begin{aligned}
\int_0^5|2x-4|\,dx &= \int_2^5(2x-4)+\int_0^2\big(-(2x-4)\big)\,dx\\
&= \int_2^5(2x-4)+\int_0^2(4-2x)\,dx\\
&= \left[x^2-4x\right]_2^5+\left[4x-x^2\right]_0^2\\
&= [25-20-4+8]+[8-4]\\
&= 13\ .
\end{aligned}$$

■

דוגמה 12.23

מצא את ערכו של t ($t>0$) עבורו האינטגרל $I=\int_0^t(2-te^{-0.5x})\,dx$ היא מקסימאלי. חשבו את הערך המקסימאלי.

פתרון:

$$F(t)=\int_0^t(2-te^{-0.5x})\,dx=\left[2x+2te^{-0.5x}\right]_0^t=2t+2te^{-0.5t}-2t=2te^{-0.5t}\ .$$

$$F'(t)=2e^{-0.5t}\left(1-\frac{t}{2}\right)=0 \qquad\Rightarrow\qquad t=2\ .$$

עבור $t=2$ ל $F(t)$ יש ערך מקסימלי.

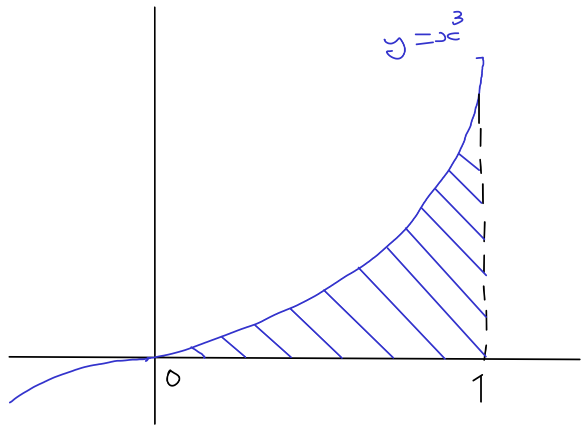
$$F(2)=2\cdot 2\cdot e^{-0.5\cdot 2}=\frac{4}{e}\ .$$

■

דוגמה 12.24 חישוב שטח

מצאו את השטח החסום ע"י גרף הפונקציה $y=x^3$ והישרים $x=1$, $y=0$.

פתרון:



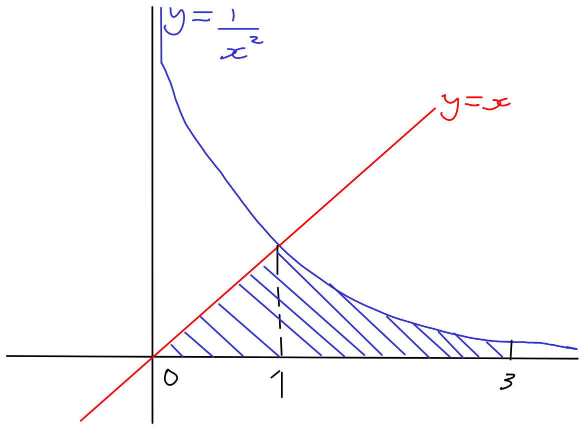
$$S=\int_0^1 x^3\,dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}\ .$$

■

דוגמה 12.25 חישוב שטח

מצאו את השטח החסום ע"י $y=\frac{1}{x^2}$, $y=x$, $x=3$, $y=0$.

פתרון:



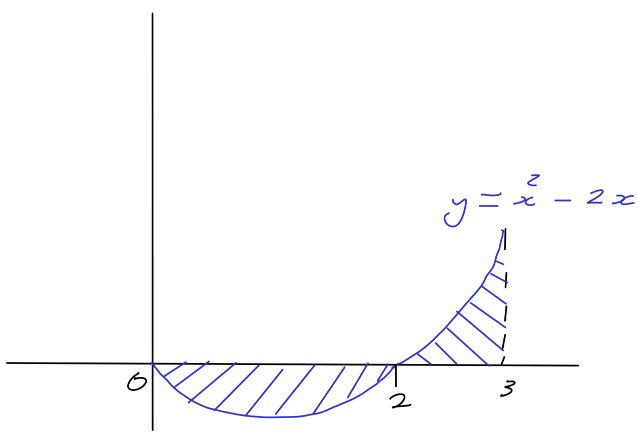
$$S=\int_0^1 x\,dx+\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\left[\frac{1}{x}\right]_1^3=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1=\frac{7}{6}\ .$$

■

דוגמה 12.26 חישוב שטח

מצאו את השטח החסום ע"י $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=3$, $x=0$.

פתרון:



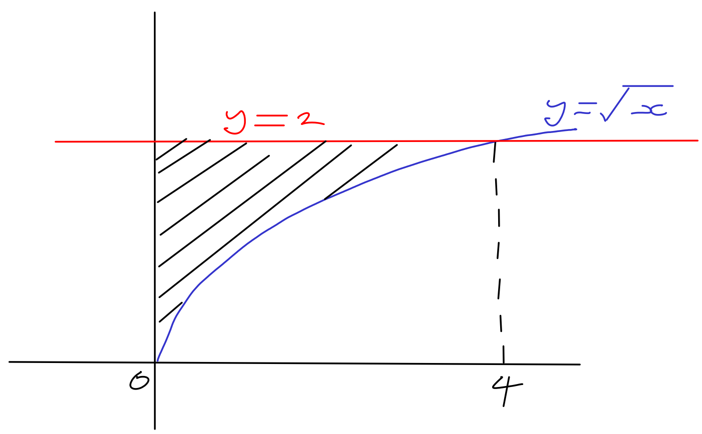
$$
\begin{aligned}
S =& -\int_0^2 \left(x^2-2x\right)\,dx + \int_2^3 \left(x^2-2x\right)\,dx \\
=& -\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3 \\
=& -\left[\frac{2^3}{3}-2^2\right] + \left[\frac{3^3}{3}-3^2-\frac{2^3}{3}+2^2\right] \\
=& -\frac{8}{3}+4+9-9-\frac{8}{3}+4 \\
=& \frac{8}{3} \ .
\end{aligned}
$$

■

דוגמה 12.27 חישוב שטח

מצאו את השטח החסום ע"י $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $y=2$.

פתרון:



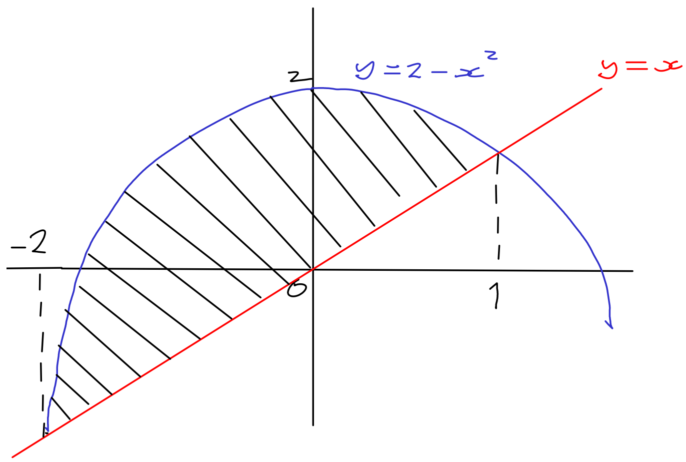
$$
\begin{aligned}
S =& \int_0^4 2\,dx - \int_0^4 \sqrt{x}\,dx \\
=& [2x]_0^4 - \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 \\
=& 8-\frac{2}{3}\cdot 4^{3/2} \\
=& \frac{8}{3} \ .
\end{aligned}
$$

■

דוגמה 12.28 חישוב שטח

מצאו את השטח החסום ע"י $y=x$,$y=2-x^2$.

פתרון:



$$\begin{aligned}S&=\int_{-2}^{1}(2-x^2-x)\,dx\\&=\left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1}\\&=\left[2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right]-\left[-4+\frac{8}{3}-\frac{4}{2}\right]\\&=\frac{9}{2}\ .\end{aligned}$$

■

דוגמה 12.29 חישוב שטח

מצאו את השטח החסום ע"י $y=x^2-2x+2$, המשיק לפרבולה הזאת בנקודה $(3,5)$ וציר ה- y.

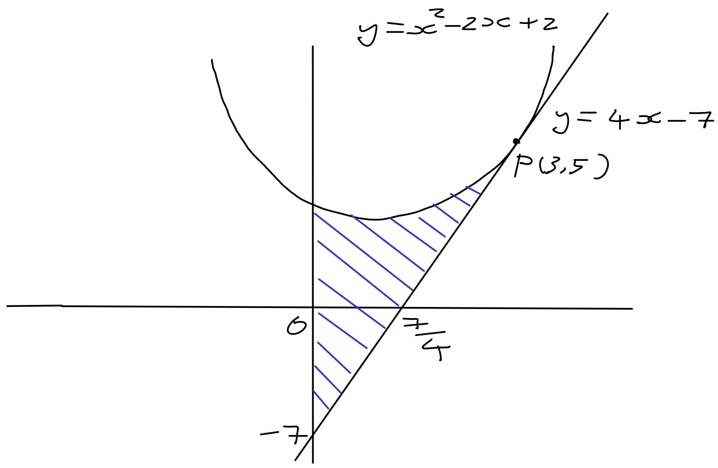
פתרון:

נמצא את משוואת המשיק:

$$y'=2x-2$$
$$y'(3)=4$$

משוואת המשיק:

$$y-5=4(x-3)\qquad\Rightarrow\qquad y=4x-7\ .$$



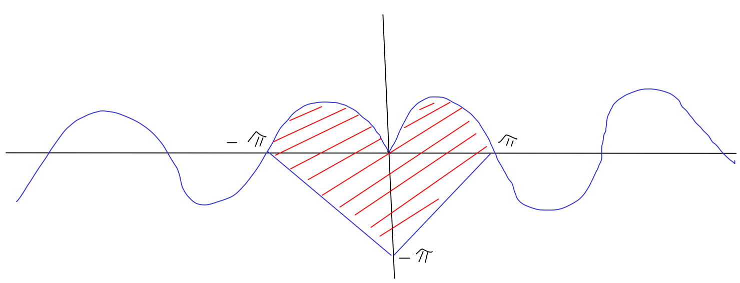
$$\begin{aligned}S &= \int_0^3 \left(\left(x^2-2x+2\right)-(4x-7)\right)\,dx\\ &=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right]_0^3-\left[2x^2-7x\right]_0^3\,dx\\ &=\left[\frac{3^3}{3}-3^2+6\right]-[18-21]\\ &=9\ .\end{aligned}$$

■

דוגמה 12.30 חישוב שטח

מצאו את השטח החסום ע"י $y=\sin|x|$, $y=|x|-\pi$.

פתרון:



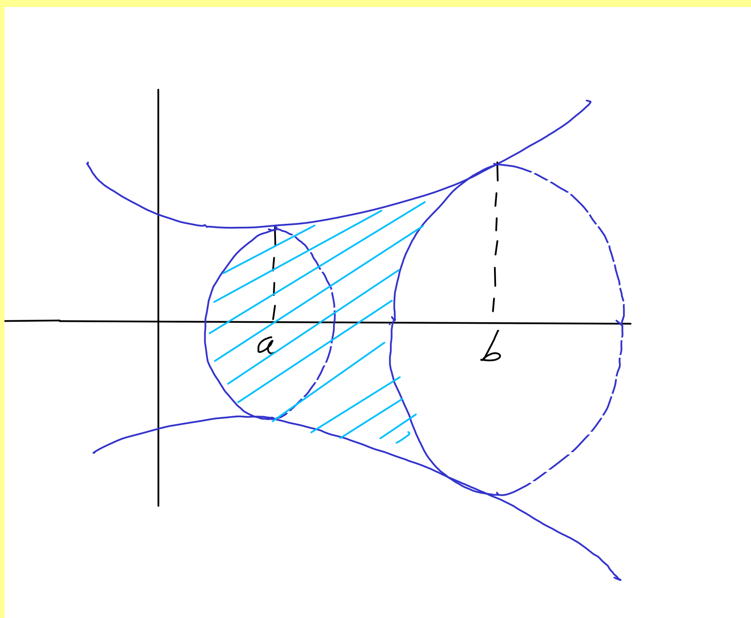
$$\begin{aligned} S =& 2\int_0^{\pi} (\sin x - (x-\pi))\ dx \\ =& 2\left[-\cos x - \frac{x^2}{2} + \pi x\right]_0^{\pi} \\ =& 2\left[1 - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2\right] 0 - 2\left[-1\right] \\ =& 4 + \pi^2\ . \end{aligned}$$

■

משפט 12.5 חישוב נפח גוף סיבוב סביב ציר ה- x

בהינתן גרף של פונקציה $y = f(x)$ בקטע $[a,b]$. הנפח של גוף סיבוב סביב ציר ה- x הוא

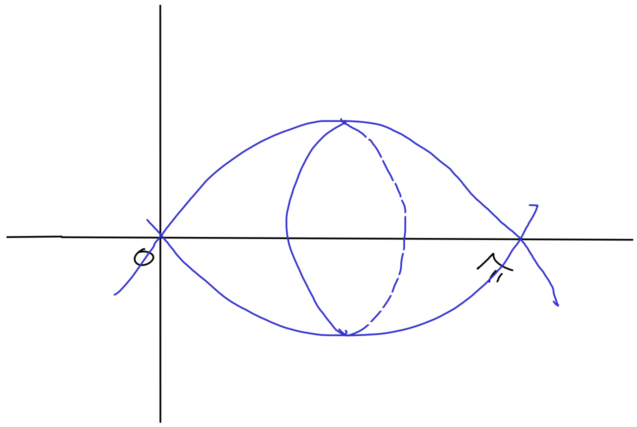
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx\ .$$



דוגמה 12.31 חישוב נפח

מצאו את נפח גוף הסיבוב סביב ציר ה- x של התחום המישורי החסום ע"י $y = \sin x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

פתרון:



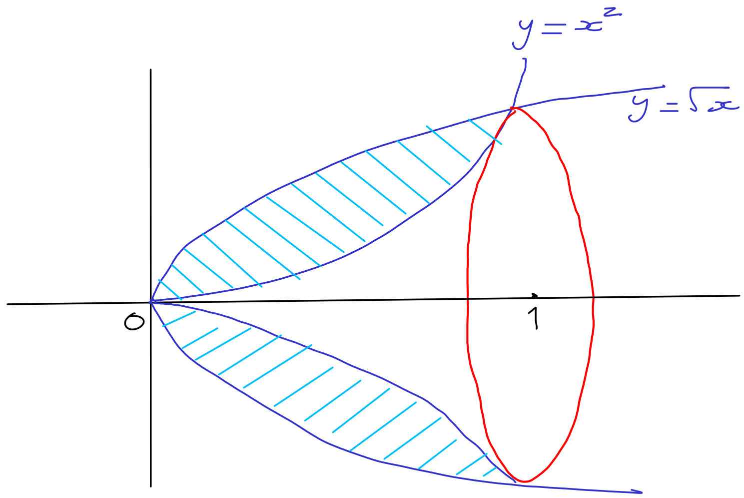
$$
\begin{aligned}
V =& \pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx \\
=& \pi \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx \\
=& \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^\pi \\
=& \frac{\pi^2}{2} \ .
\end{aligned}
$$

■

דוגמה 12.32 חישוב נפח

מצאו את נפח גוף הסיבוב סביב ציר ה- x של התחום החסום ע"י $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

פתרון:



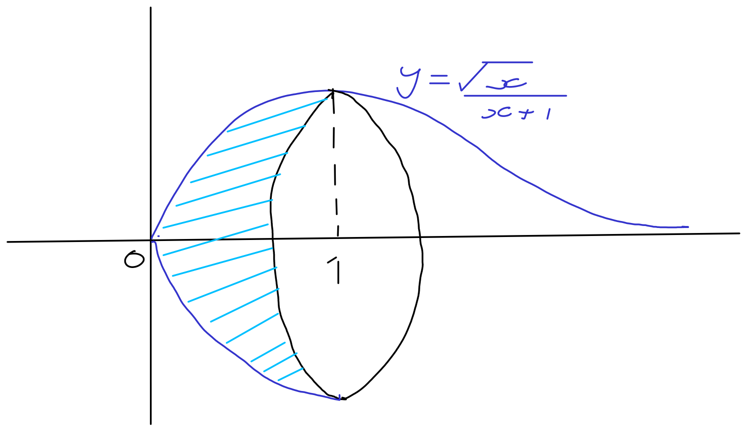
$$\begin{aligned} V =&\pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2\,dx - \pi \int_0^1 x^4\,dx \\ =&\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 \\ =&\pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right] \\ =&\frac{3\pi}{10} \ . \end{aligned}$$

■

דוגמה 12.33 חישוב נפח

חשבו את נפח גוף הסיבוב סביב ציר ה- x של התחום החסום ע"י $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ בתחום $0\leq x\leq 1$.

פתרון:



$$V = \pi \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2}\, dx \ .$$

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A+B(x+1)}{(x+1)^2} \ .$$

$$\begin{aligned} x: &\quad B = 1 \\ x^0: &\quad A + B = 0 \ \Rightarrow \ A = -1. \end{aligned}$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \pi \left[\frac{1}{x+1} + \ln|x+1| \right]_0^1 = \pi \left[\frac{1}{2} + \ln|2| - 1 \right] = \pi \left(\ln|2| - \frac{1}{2} \right) \ .$$

■

שיעור 13
אינטגרציה של פונקציוצת טריגונומטריות ואי רציאונליות

13.1 הצבה אוניברסלית

בהינתן אינטגרל מצורה

$$\int f(\sin x, \cos x)\, dx$$

כאשר f פונקציה רציונלית, לדוגמה

$$\int \frac{2\sin x + 3\cos x + 2}{4\cos^2 x + 3}\, dx$$

קיימת הצבה אוניברסלית:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$\Leftarrow$

$$t' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(1+t^2)\ .$$

ניתו לבטא הפונקציות הטריגונומטריות באמצעות t כפי רשום בטבלה:

$\sin x$	$\frac{2t}{1+t^2}$
$\cos x$	$\frac{1-t^2}{1+t^2}$
$\tan x$	$\frac{2t}{1-t^2}$
t'	$\frac{1}{2}(1+t^2)$

הוכחה של הזהויות (לא צריך לדעת אבל כיף לקרוא)

$$\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)} = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{\left(1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

דוגמה 13.1

חשבו את: $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$

פתרון:

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$t' = \frac{1+t^2}{2}$

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\cdot t'dx &= \int \frac{2}{(1+t^2)\cdot\frac{2t}{1+t^2}}\,dt \\ &= \int \frac{1}{t}\,dt \\ &= \ln|t| + C = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\end{aligned}$$

■

דוגמה 13.2

חשבו את: $\int \frac{1}{3+\sin x+\cos x}\,dx$

פתרון:

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$t' = \frac{1+t^2}{2}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{(1+t^2)} \cdot t' dx &= \int \frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{(1+t^2)} dt \\
&= \int \frac{2}{3+3t^2+2t+1-t^2} dt \\
&= \int \frac{2}{4+2t^2+2t} dt \\
&= \int \frac{1}{2+t^2+t} dt \\
&= \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} dt \\
&= \int \frac{1}{z^2+\frac{7}{4}} dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2z}{\sqrt{7}}\right) + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{7}}\right) + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{7}}\right) + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{7}}\right) + C \ .
\end{aligned}$$

■

דוגמה 13.3

חשבו את: $\int \frac{1}{4\sin x - 3\cos x - 5} dx$

פתרון:

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$t' = \frac{1+t^2}{2}$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4\sin x-3\cos x-5}\,dx &= \int\left(\frac{1}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2}-3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}-5}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,t'\,dx\\ &=\int\left(\frac{2}{8t-3(1-t^2)-5(1+t^2)}\right)dt\\ &=\int\left(\frac{2}{8t-3+3t^2-5-5t^2}\right)dt\\ &=\int\left(\frac{2}{8t-8-2t^2}\right)dt\\ &=\int\left(\frac{-1}{t^2-4t+4}\right)dt\\ &=\int\left(\frac{-1}{(t-2)^2}\right)dt\\ &=\frac{1}{t-2}+C\\ &=\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-2}+C\end{aligned}$$

■

13.2 אינטגרציה של $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$

1) אם $m\in\mathbb{N}$ מספר זוגי, מגדירים $t=\sin x$.

2) אם $n\in\mathbb{N}$ מספר זוגי, מגדירים $t=\cos x$.

3)
- אם $n,m\geq 0\in\mathbb{N}$ זוגיים,
- האינטגרל מצורה $\int\sin^m x\,dx$
- האינטגרל מצורה $\int\cos^m x\,dx$

משתמשים בזהויות טריגונומטריות:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\ ,\qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\ ,\qquad \sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}\ .$$

דוגמה 13.4

חשבו את: $\int\cos^3 x\,dx$

פתרון:

$$\begin{aligned}\int\cos^3 x dx &= \int\cos^2 x\cdot\cos x\,dx\\ &=\int\left(1-\sin^2 x\right)\cos x\,dx\end{aligned}$$

$t=\sin x$ $t'=\cos x$

$$\begin{aligned}\int (1-t^2)t'\,dx =& \int (1-t^2)\,dt\\ =& t-\frac{t^3}{3}+C\\ =& \sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C\end{aligned}$$

■

דוגמה 13.5

חשבו את: $\int \cos^2 x \sin^3 x\,dx$

פתרון:

$t=\cos x$
$t'=-\sin x$

$$\begin{aligned}\int (1-t^2)t^3\,dx =& -\int (1-t^2)t^2\cdot t'\,dx\\ =& -\int (1-t^2)t^2\,dt\\ =& -\int (t^2-t^4)\,dt\\ =& \frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+C\\ =& \frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C\ .\end{aligned}$$

■

דוגמה 13.6

חשבו את: $\int \sin^2 x\,dx$

פתרון:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx =& \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx\\ =& \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C\end{aligned}$$

■

דוגמה 13.7

חשבו את: $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$

פתרון:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx &= \int (\sin x\cos x)^2\ dx\\ &= \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2\ dx\\ &= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\,dx\\ &= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)\ dx\\ &= \frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C\end{aligned}$$

■

13.3 אינטגרציה של פונקציות אי-רציונליות (חיסול שורשים)

בהינתן אינטגרל מצורה

$$\int f(x,\sqrt{a^2-x^2})\ ,\qquad \int f(x,\sqrt{a^2+x^2})\ ,\qquad \int f(x,\sqrt{x^2-a^2})$$

כאשר f פונקציה רציונלית, קיימת הצבה אוניברסלית:

מקרה 1) $\sqrt{a^2-x^2}$

$x=a\cdot\sin t$

מקרה 2) $\sqrt{a^2+x^2}$

$x=a\cdot\tan t$

מקרה 3) $\sqrt{x^2-a^2}$

$x=\dfrac{a}{\sin t}$

דוגמה 13.8

חשבו את: $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$

פתרון:

$$x=2\sin t$$

$$x'_t=2\cos t$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx &= \int \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t}dx \\ &= \int \frac{2\sqrt{1-\sin^2 t}}{4\sin^2 t}dx \\ &= \int \frac{2\cos t}{4\sin^2 t}dx \\ &= \int \frac{2\cos t}{4\sin^2 t}\cdot\left(\frac{2\cos t}{x'_t}\right)dx \\ &= \int \frac{4\cos^2 t}{4\sin^2 t}dt \\ &= \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt \\ &= \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt \\ &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt \\ &= (\cot t - t) + C \\ &= \cot\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C\ .\end{aligned}$$

■

דוגמה 13.9

חשבו את: $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}\,dx$

פתרון:

$x = \frac{1}{\sin t}$

$x'_t = \frac{\cos t}{\sin^2 t}$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}dx &= \int \frac{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}}{\frac{1}{\sin^3 t}}dx \\ &= \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}\,\sin^3 t}{\sin t}dx \\ &= \int \cos t \sin^2 t dx \\ &= \int \cos t \sin^2 t \cdot \left(\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)\frac{1}{x'_t}\,dx \\ &= \int \cos^2 t\,dt \\ &= \int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt \\ &= \frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+C \\ &= \frac{\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}{2}+\frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{2}+C\ .\end{aligned}$$

■

דוגמה 13.10

חשבו את: $\int x\sqrt{x^2+9}\,dx$

פתרון:

$$x=3\tan t\ ,\qquad x'_t=\frac{3}{\cos^2 t}$$

$$\int 3\tan t\cdot\sqrt{9\tan^2 t+9}\,dx = \int 3\tan t\cdot 3\sqrt{\tan^2 t+1}\,dx$$

זהות: $\tan^2 t+1=\frac{1}{\cos^2 t}$

$$\begin{aligned}9\int \tan t\cdot\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}\,dx &= 9\int \tan t\cdot\frac{1}{\cos t}\,dx \\ &= 9\int \tan t\cdot\frac{1}{\cos t}\cdot x'_t\cdot\frac{1}{x'_t}\,dx = \quad 9\int \tan t\cdot\frac{1}{\cos t}\cdot x'_t\,dt \\ &= 9\int \tan t\cdot\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{3}{\cos^2 t}\,dt \\ &= 27\int \tan t\cdot\frac{1}{\cos^3 t}\,dt \\ &= 27\int \frac{\sin t}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos^3 t}\,dt \\ &= 27\int \frac{\sin t}{\cos^4 t}\,dt\end{aligned}$$

$$z = \cos t \qquad z'_t = -\sin t$$

$$\begin{aligned}
27\int \frac{\sin t}{\cos^4 t}\,dt =& 27\int \frac{z'}{z^4}\,dt \\
=& 27\int \frac{1}{z^4}\,dz \\
=& 27\cdot\frac{-1}{3z^3}+C \\
=& \frac{81}{3\cos^3 t}+C \\
=& \frac{81}{3\cos^3\left(\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right)}+C
\end{aligned}$$

■

שיעור 14
אינטגריה של שברים אלגבריים (פונקציות רצינליות)

הגדרה 14.1 פונקציה רציונלית

פונקציה רציונלית (שבר אלגברי) זאת פונקציה מהצורה

$$y=\frac{P(x)}{Q(x)}\ ,$$

כאשר $P(x)$, $Q(x)$ פולינומים.

דוגמה 14.1 פונקציה רציונלית

$f(x)=\dfrac{x^4-5x+9}{x-2}$ פונקציה רציונלית: $P(x)=x^4-5x+9$ $Q(x)=x-2$.

הגדרה 14.2 פונקציה רציונלית אמיתי

שבר אלגברי

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

נקרא אמיתי אם

$$\deg(P)<\deg(Q)\ .$$

אם שבר אלגברי לא אמיתי, יש לעשות חילוק פולינומים.

דוגמה 14.2 חילוק פולינומים

חשבו את האינטגרל

$$\int\frac{x^4-5x+9}{x-2}\ .$$

פתרון:
שלב ראשון בחישוב אינטגרל של שבר אלגברי לא אמיתי, להגיע לשבר אלגברי אמיתי ע"י חילוק פולינומים. ע"י חילוק ארוך:

שלב 1:

$$x-2\overline{\big)\ x^4\quad -5x+9}$$

שלב 2:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & x^3 & & & \\ \cline{2-6}
x-2) & x^4 & & & -5x & +9 \\
 & x^4 & -2x^3 & & & \\ \cline{2-6}
 & & 2x^3 & & -5x & +9
\end{array}
$$

שלב 3:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & x^3 & +2x^2 & & \\ \cline{2-6}
x-2) & x^4 & & & -5x & +9 \\
 & x^4 & -2x^3 & & & \\ \cline{2-6}
 & & 2x^3 & & -5x & +9
\end{array}
$$

שלב 4:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & x^3 & +2x^2 & & \\ \cline{2-6}
x-2) & x^4 & & & -5x & +9 \\
 & x^4 & -2x^3 & & & \\ \cline{2-6}
 & & 2x^3 & & -5x & +9 \\
 & & 2x^3 & -4x^2 & & \\ \cline{2-6}
 & & & 4x^2 & -5x & +9
\end{array}
$$

שלב 5:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & x^3 & +2x^2 & +4x & \\ \cline{2-6}
x-2) & x^4 & & & -5x & +9 \\
 & x^4 & -2x^3 & & & \\ \cline{2-6}
 & & 2x^3 & & -5x & +9 \\
 & & 2x^3 & -10x^2 & & \\ \cline{2-6}
 & & & 4x^2 & -5x & +9 \\
 & & & 4x^2 & -8x & \\ \cline{2-6}
 & & & & 3x & +9
\end{array}
$$

שלב 6:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & & x^3 & +2x^2 & +4x & +3 \\
\cline{2-6}
x-2 & x^4 & & & -5x & +9 \\
 & x^4 & -2x^3 & & & \\
\cline{2-6}
 & & 2x^3 & & -5x & +9 \\
 & & 2x^3 & -10x^2 & & \\
\cline{2-6}
 & & & 4x^2 & -5x & +9 \\
 & & & 4x^2 & -8x & \\
\cline{2-6}
 & & & & 3x & +9 \\
 & & & & 3x & -6 \\
\cline{2-6}
 & & & & & 15
\end{array}
$$

תשובה סופית:

$$\frac{x^4-5x+9}{x-2}=x^3+2x^2+4x+3+\frac{15}{x-2}$$

לכן

$$\int\frac{x^4-5x+9}{x-2}=\int\left(x^3+2x^2+4x+3+\frac{15}{x-2}\right)=\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+2x^2+3x+15\ln|x-2|+C\ .$$

ז"א שלב ראשון בחישוב אינטגרל של שבר אלגברי:

ע"י חילוק ארוך פולינומים להגיע לשבר אלגברי אמיתי. כל שבר אלגברי אמיתי ניתן להציג כסכום של שברים פשוטים. ■

יש 4 סוגים של שברים אלגבריים פשוטים:

שבר אלגברי			שבר פשוט
סוג 1:	$\dfrac{m}{x-a}$		
סוג 2:	$\dfrac{m}{(x-a)^2}$		
	$\dfrac{m}{(x-a)^n}$	$n \in \mathbb{N}\,, \quad n \geq 2$	
סוג 3:	$\dfrac{mx+n}{x^2+px+q}$		כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.
סוג 4:	$\dfrac{mx+b}{(x^2+px+q)^2}$		כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.
	$\dfrac{mx+b}{(x^2+px+q)^n}$	$n \in \mathbb{N}\,, \quad n \geq 2$	כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.

דוגמה 14.3 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-3x+1}$

פתרון:

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+1} = \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$
$$A(x-2)+B(x-1) = 2x+1$$

$$x=2 \quad \Rightarrow \quad B=5$$
$$x=1 \quad \Rightarrow \quad A=-3$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+1}\,dx = \int \left(\frac{-3}{x-1} + \frac{5}{x-2}\right) dx = -3\ln|x-1| + 5\ln|x-2| + C \ .$$

■

דוגמה 14.4 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2}$

פתרון:

$$\frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x-3} \ .$$
$$A(x-3)^2 + B(x-2) + C(x-3)(x-2) = x^2+4$$

$$\begin{aligned} x=3 &\quad\Rightarrow\quad B=13 \\ x=2 &\quad\Rightarrow\quad A=8 \\ x=0 &\quad\Rightarrow\quad 9A-2B+6C=4 \Rightarrow C=-7 \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2}\,dx = \int \left(\frac{8}{x-2} + \frac{13}{(x-3)^2} - \frac{7}{x-3}\right) dx = 8\ln|x-2| - \frac{13}{x-3} - 7\ln|x-3| + C \ .$$

■

דוגמה 14.5 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $\int \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}$

פתרון:

$$\frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \ .$$
$$A(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1) + (Cx+D)x^2 = x^3+1$$

$$\begin{aligned} x^3 : &\quad B+C=1 \\ x^2 : &\quad A+D=0 \\ x : &\quad B=0 \\ x^0 : &\quad A=1 \end{aligned}$$

לכן

$$D=-1 \ , \qquad C=1 \ .$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}\right) dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \arctan(x) + C \ .$$

■

דוגמה 14.6 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $I = \int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}$

פתרון:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5} \ .$$
$$A(x^2-2x+5)+(Bx+C)(x-1) = 2x^2-3x-3$$

$$\begin{array}{ll} x^2: & A+B=2 \\ x: & -2A+C-B=-3 \\ x^0: & 5A-C=-3 \end{array}$$

לכן

$$A=-1 \ , \qquad B=3 \ , \qquad C=-2 \ .$$

$$I = \int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx = \int \left(-\frac{1}{x-1} + \frac{3x-2}{x^2-2x+5}\right) dx = -\ln|x-1| + \int \left(\frac{3x-2}{(x-1)^2+4}\right) dx \ .$$

נגדיר $u=x-1$:

$$\begin{aligned} I &= \ln|x-1| + \int \frac{3(u+1)-2}{u^2+4} du \\ &= \ln|x-1| + \int \frac{3(u+1)-2}{u^2+4} du \\ &= \ln|x-1| + 3\int \frac{u}{u^2+4} du - \int \frac{1}{u^2+4} du \\ &= \ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|u^2+4| - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u}{2}\right) \\ &= \ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|(x-1)^2+4| - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) \end{aligned}$$

■

למה 14.1 שלבים באינטגרציה של שברים אלגבריים

שלב 1. לחלק במכנה (חילוק פולינומי) במידה ש $\deg(P) \geq \deg(Q)$.

שלב 2. להציב שבר אלגברי אמיתי כסכום של שברים פשוטים.

שלב 3. לבצע אינטגרציה של כל שבר פשוט.

דוגמה 14.7 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $I = \int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} dx$

פתרון:

שלב 1:

$$x^4+2x^3+2x^2\overline{\big)\,x^5\ \ +2x^3\ \ +4x+4}$$

שלב 2:

$$\begin{array}{r l}
 & x \\
x^4+2x^3+2x^2 \big) & \overline{x^5\qquad\quad +2x^3\ \ +4x+4} \\
 & \underline{x^5+2x^4+2x^3} \\
 & \quad -2x^4\qquad\quad\ \ +4x+4
\end{array}$$

שלב 3:

$$\begin{array}{r l}
 & x-2 \\
x^4+2x^3+2x^2 \big) & \overline{x^5\qquad\quad +2x^3\qquad\quad +4x+4} \\
 & \underline{x^5+2x^4+2x^3} \\
 & \quad -2x^4\qquad\qquad\quad\ \ +4x+4 \\
 & \quad \underline{-2x^4-4x^3-4x^2} \\
 & \qquad\qquad 4x^3+4x^2+4x+4
\end{array}$$

לכן ע"י חילוק ארוך קיבלנו

$$\frac{x^5+2x+4x+4}{x^4+x^3+2x^2}=x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+4\left(\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}\right)$$

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

$$A(x^2+2x+2)+Bx(x^2+2x+2x)+(Cx+D)x^2=x^3+x^2+x+1$$

$$\begin{array}{ll}
x^3: & B+C=1 \\
x^2: & 2A+2B+D=1 \\
x: & 2A+2B=1 \\
x^0: & 2A=1
\end{array}$$

לכן

$$A=\frac{1}{2}\ ,\qquad B=0\ ,\qquad C=1\ ,\qquad D=\frac{1}{2}\ .$$

$$
\begin{aligned}
I &= \int \left(x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x+2}{x^2+2x+2} \right) dx \\
&= \int \left(x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x+2}{(x+1)^2+1} \right) dx \\
&= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 4 \int \frac{x+\frac{1}{2}}{(x+1)^2+1} dx \ .
\end{aligned}
$$

נגדיר $u = x+1$:

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 4 \int \frac{u-\frac{1}{2}}{u^2+1} du \\
&= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2\ln|u^2+1| - 2\arctan(u) + C \\
&= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2\ln|(x+1)^2+1| - 2\arctan(x+1) + C
\end{aligned}
$$

■

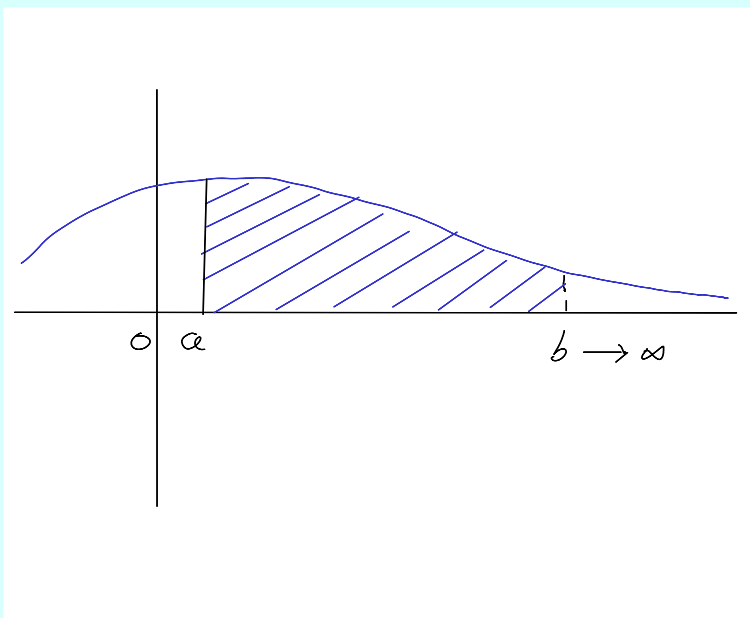
שיעור 15
אינטגרל לא אמיתי והערכת סכומים בעזרת אינטגרל מסוים

15.1 אינטגרל לא אמיתי

הגדרה 15.1 אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

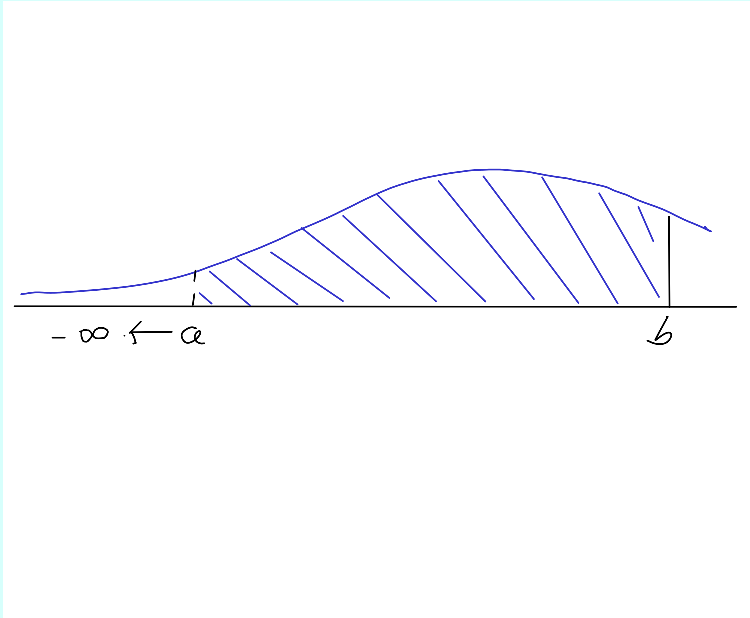
.1 נניח שפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע (a,∞). אז

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$



.2 נניח שפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $(-\infty,b)$. אז

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$



.3

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

לכל $-\infty < c < \infty$.

אם התשובה של האינטגרל הלא אמיתי היא מספר סופי אז אומרים שהאינטגרל מתכנס, אחרת אומרים שהאינטגרל מתבדר.

דוגמה:

אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון חשבו את $I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$.

פתרון:

$$I = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln|b| - \ln|1| = \infty\ .$$

האינטגרל מתבדר. ■

דוגמה:

אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון חשבו את $I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$.

פתרון:

$$I = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-1}{b} + 1\right] = 1\ .$$

האינטגרל מתכנס. ■

דוגמה:

אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון חשבו את $I = \int_{-\infty}^{0} \cos x\,dx$.

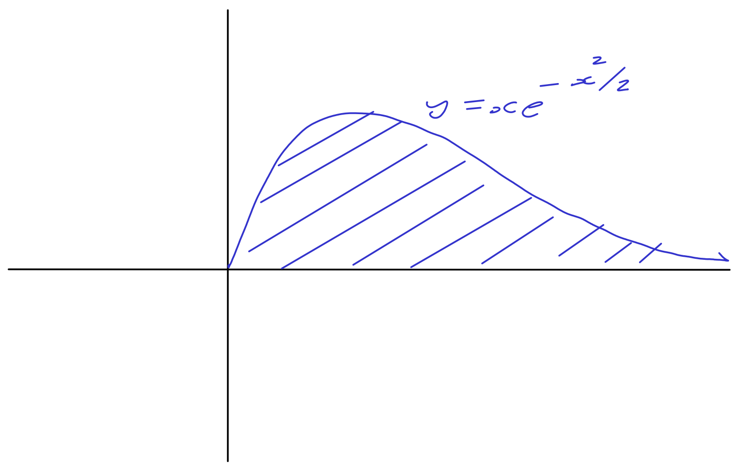
פתרון:

$$I=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\cos x\,dx=\lim_{a\to-\infty}[\sin 0-\sin a]=\lim_{a\to-\infty}\sin(a)$$

לא קיים. האינטגרל לא מתכנס. ■

דוגמה:
אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון חשבו את השטח החסום ע"י $f(x)=xe^{-x^2/2}$, $y=0$ $x\geq 0$.

פתרון:



$$S=\lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x/2}\ .$$

נגדיר

$$u=\frac{x^2}{2}\ ,\qquad u'=x\ .$$

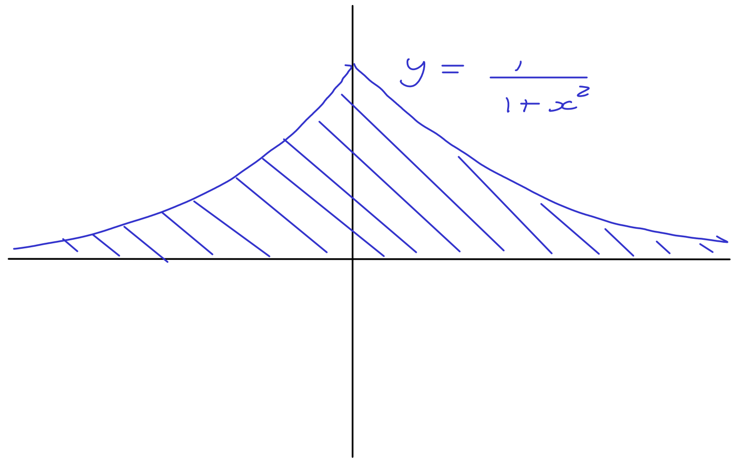
כך

$$\begin{aligned}S=&\lim_{b\to\infty}\int_0^b u'e^{-u}\,dx\\=&\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-u}\,du\\=&\lim_{b\to\infty}\left[-e^{-b}+1\right]\\=&1\ .\end{aligned}$$

האינטגרל מתבדר. ■

דוגמה:
אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון חשבו את השטח החסום ע"י $y=\frac{1}{x^2+1}$, $y=0$ $x\geq 0$.

פתרון:



$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx \\
&= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\, dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{x^2+1}\, dx + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{x^2+1}\, dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} [\arctan 0 - \arctan a] + \lim_{b\to\infty} [\arctan b - \arctan 0] \\
&= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 \\
&= \pi \ .
\end{aligned}
$$

■

משפט 15.1 מבחן השוואה הראשון

נניח שפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפות בקטע $[a,\infty)$ ולכל x השייך לקטע מתקיים

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \ .$$

אז

1. אם $\int_a^{\infty} g(x)\, dx$ מתכנס אז גם $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ מתכנס.
2. אם $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ מתבדר אז גם $\int_a^{\infty} g(x)\, dx$ מתבדר.

דוגמה:

מבחן השוואה הראשון האם מתכנס האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(1+3^x)}\, dx$

פתרון:

נגדיר $f(x)=\frac{1}{x^2(1+3^x)}$, $g(x)=\frac{1}{x^2}$. לכל $x\geq 1$ מתקיים $f(x)\leq g(x)$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=1$$

מתכנס, לכן גם

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2(1+3^x)}dx$$

מתכנס. ■

משפט 15.2 מבחן השוואה השני

נניח שפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפות בקטע $[a,\infty)$, $f(x)>0$, $g(x)>0$, וגם

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$$

כאשר $0<k<\infty$. אז $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ו- $\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתכנסים או מתבדרים בו זמנים.

דוגמה:

מבחן השוואה השני האם האינטגרל $\int_1^\infty \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)\,dx$ מתכנס?

פתרון:

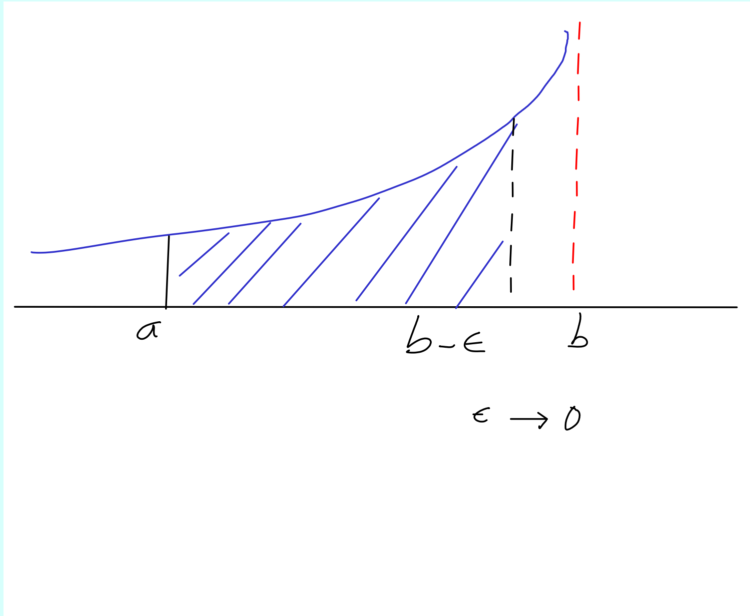
נגדיר $f(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)$, $g(x)=\frac{1}{x^2}$. אז

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}=\ln e=1<\infty$$

$\int_1^\infty g(x)\,dx$ מתכנס, אז גם $\int_1^\infty f(x)\,dx$ מתכנס. ■

הגדרה 15.2 אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

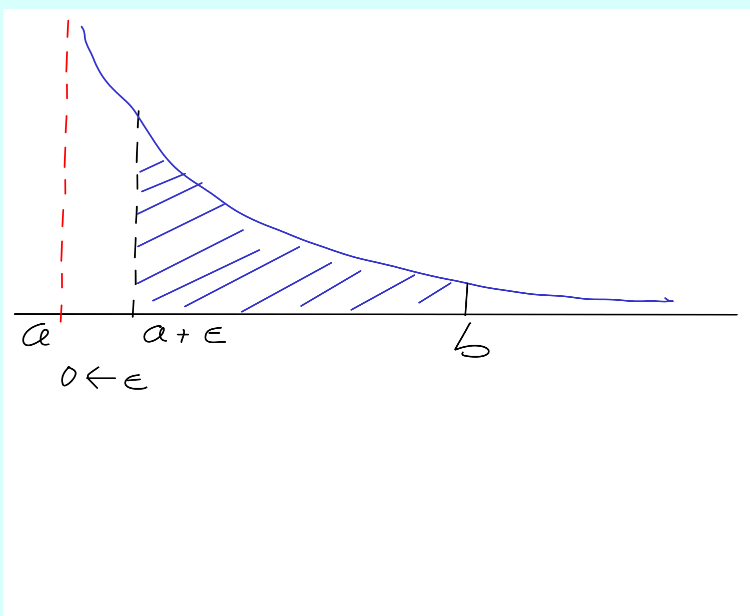
מצב 1. פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ ו- $\lim_{x\to b^-}f(x)=\infty$



אז

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx\ .$$

מצב 2. פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ ו- $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$



אז

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx\ .$$

אם התשובה של האינטגרל הלא אמיתי היא מספר סופי אז אומרים שהאינטגרל מתכנס, אחרת אומרים שהאינטגרל מתבדר.

דוגמה:

אינטגרל לא אמיתי מסוג שני חשבו את האינטגרל $I=\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$

פתרון:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{1}{\epsilon}-1\right] \\ &= \infty \end{aligned}$$

■

דוגמה:

אינטגרל לא אמיתי מסוג שני חשבו את האינטגרל $I=\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

פתרון:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{3-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^{3-\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\arcsin\left(\frac{3-\epsilon}{3}\right)-\arcsin 0\right] \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\arcsin\left(\frac{3-\epsilon}{3}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

■

15.2 הערכת סכומים בעזרת אינטגרל מסוים

משפט 15.3 אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

תהי $f(x)$ פונקציה חיובית, יורדת מונוטונית ורציפה בחצי הישר $x\geq 1$. אזי מתקיים

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{n} f(k) < \int_1^{n+1} f(x)\,dx + f(1)\ .$$

תהי $f(x)$ פונקציה חיובית, עולה מונוטונית ורציפה בחצי הישר $x\geq 0$. אזי מתקיים

$$\int_0^{n} f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{n} f(k) < \int_0^{n} f(x)\,dx + f(n)\ .$$

דוגמה:
הערכת סכומים הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}<2\ .$$

פתרון:
נגדיר

$$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

פונקציה יורדת.

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)<\int_1^{n+1}f(x)\,dx+f(1)=\left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^n+f(1)=-\frac{2}{\sqrt{n}}+2+1=-\frac{2}{\sqrt{n}}+3<3\ .$$

לכן

$$1+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)<3\qquad\Rightarrow\qquad f(2)+f(3)+\ldots+f(n)<2\qquad\Rightarrow\qquad\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}<2\ .$$

■

דוגמה:
הערכת סכומים הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים

$$\frac{n^3}{3}<1^2+2^2+\ldots+n^2<\frac{n^3}{3}+n^2\ .$$

פתרון:
נגדיר

$$f(x)=x^2$$

פונקציה עולה.

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)<\int_0^n f(x)\,dx+f(n)\ .$$

לכן

$$1^2+2^2+\ldots+n^2<\int_0^n x^2dx+n^2=\frac{n^3}{3}+n^2\ . \tag{1*}$$

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)>\int_0^n f(x)\,dx\ .$$

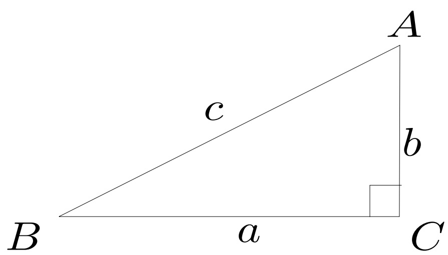
לכן

$$1^2+2^2+3^2\ldots+n^2>\frac{n^3}{3}\ . \tag{2*}$$

■

שיעור א
זהויות של פונקציות טריגונומטריות

א.1 פיתגורס, סינוסת קוסינוס וטנגנט

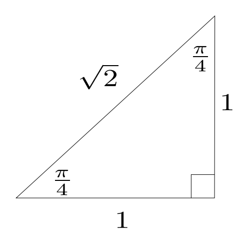


$$\sin(\angle A) = \frac{a}{c}\ , \qquad \cos(\angle A) = \frac{b}{c}\ , \qquad \tan(\angle A) = \frac{a}{b}\ .$$

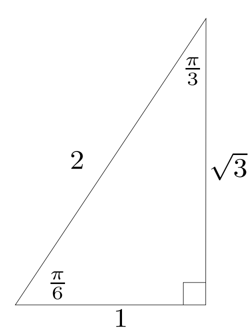
משפט פיתגורס:

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} &&= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 1 &&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$



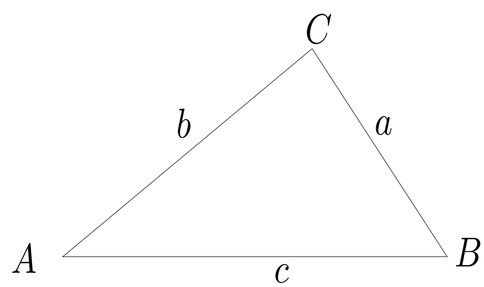
$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2} &&= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} &&= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \sqrt{3} &&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} \\ \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{\sqrt{3}} &&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \end{aligned}$$



2.א משפט הסינוסים ומשפט הקוסינוסים

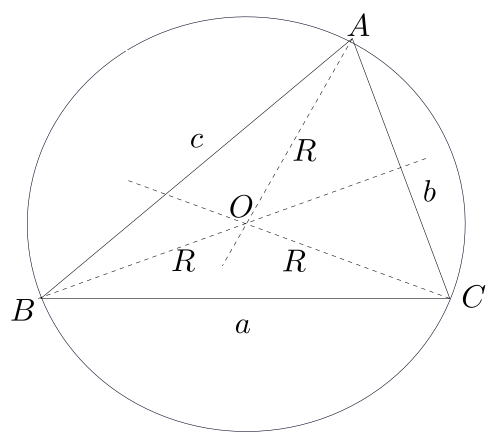
משפט הסינוסים:

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)} \ .$$



משפט הקוסינוסים:

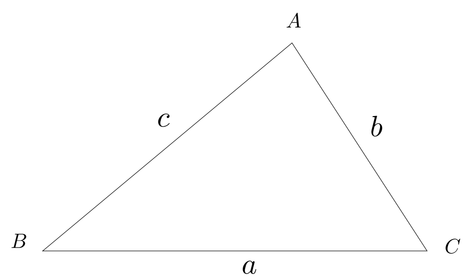
$$\begin{aligned} c^2 =& a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\angle C)) \ , \\ b^2 =& a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\angle B) \ , \\ a^2 =& b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\angle A) \ . \end{aligned}$$



רדיוס של משולש החסום במעגל:

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)} = 2R \ .$$

כאשר R הוא הרדיוס המעגל החוסם את המשולש.

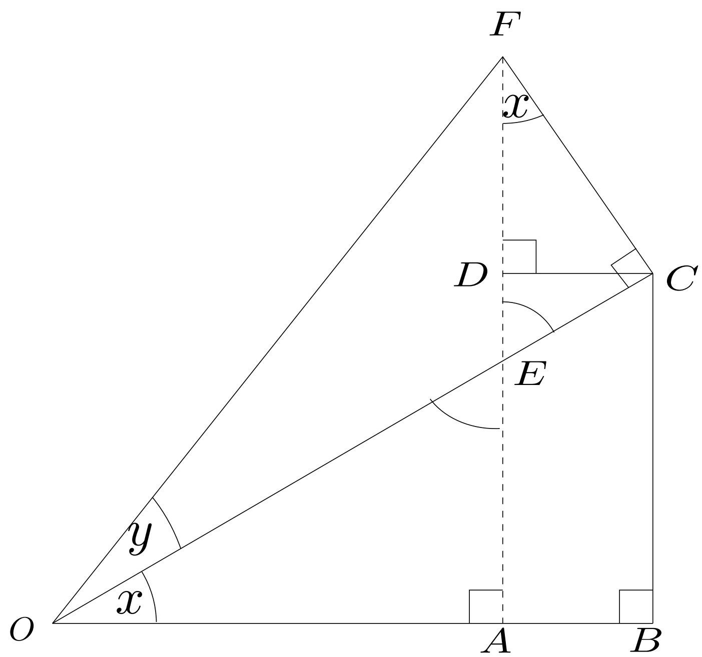


שטח משולש:

$$S_{\Delta\, ABC} = \frac{AC \cdot AB \cdot \sin(\sphericalangle A)}{2} \ .$$

3.א זיהויות טריגונומטריות

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$



משולשים ישרי זוויתים OPQ ו- OQR מכילים את הזוויות x ו- y כמתואר בתרשים. הזווית URQ שווה ל- x.

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \frac{AF}{OF} = \frac{AD+DF}{OF} = \frac{BC+DF}{OF}\\ &= \frac{BC}{OC}\times\frac{OC}{OF}+\frac{DF}{CF}\times\frac{CF}{OF}\\ &= \sin x\cos y+\cos x\sin y\end{aligned}$$

הנוסחה עבור $\cos(x+y)$ ניתנת להוכיח בדרך הדומה:

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \frac{OA}{OF} = \frac{OB-AB}{OF} = \frac{OB-DC}{OF}\\ &= \frac{OB}{OC}\times\frac{OC}{OF}-\frac{DC}{CF}\times\frac{CF}{OF}\\ &= \cos x\cos y-\sin x\sin y\end{aligned}$$

מהנוסחאות האלה נובעות כי

$$\begin{aligned}
\tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} \\
&= \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} \\
&= \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\sin y \cos x}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} \\
&= \frac{\frac{\sin x \cancel{\cos y}}{\cos x \cancel{\cos y}} + \frac{\sin y \cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x} \cos y}}{\frac{\cancel{\cos x \cos y}}{\cancel{\cos x \cos y}} - \frac{\sin x}{\cos x}\frac{\sin y}{\cos y}} \\
&= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}\frac{\sin y}{\cos y}} \\
&= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\
\sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \\
\\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\
\cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \\
\\
\tan(x+y) &= \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} \\
\tan(x-y) &= \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}
\end{aligned}}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x)\\ &= 2\cos^2(x) - 1\\ &= 1 - 2\sin^2(x)\end{aligned}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(x)\right)$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(x)\right)$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \quad = 2\cos^2(x) - 1 \quad = 1 - 2\sin^2(x)$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)) \qquad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$$

$$\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1 \qquad 1+\cot^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x) \qquad \tan^2(x)+1 = \sec^2(x)$$

3.א עוד זיהויות טריגונומטריות*

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\cos(x)\right)$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(x)\right)$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$$

$$\sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)-\sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x)-\cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$2\sin(x)\cos(y) = \sin(x+y)+\sin(x-y)$$

$$2\cos(x)\sin(y) = \sin(x+y)-\sin(x-y)$$

$$2\cos(x)\cos(y) = \cos(x+y)+\cos(x-y)$$

$$-2\sin(x)\sin(y) = \cos(x+y)-\cos(x-y)$$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin(3x) = 3\sin(x)-4\sin^3(x) \qquad \cos(3x) = 4\cos^3(x)-3\cos(x)$$