

# שיעור 11

## מטריצה המעבר מבסיס לבסיס וטנרספורמציות

### משפט 11.1

נניח כי  $v_1, \dots, v_n \in V$  בסיס של מ"ו  $V$  מעל שדה  $\mathbb{F}$ . אז כל ווקטור  $u \in V$  ניתן לרשום כצ"ל יחיד של  $v_1, \dots, v_n$ .

**הוכחה:**  $v_1, \dots, v_n$  בסיס של  $V$ , לכן  $\text{span}(v_1, \dots, v_n) = V$ . מכאן נובע שלכל  $u \in V$ ,  $u \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$ .  
ז"א קיימים סקלרים  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{F}$  כך ש

$$u = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n.$$

נוכיח שהצ"ל הוא יחיד בדרך השלילה:  
נניח שקיים צ"ל אחר:

$$u = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n.$$

אם קיים  $1 \leq i \leq n$  כך ש  $k_i \neq t_i$ . לכן

$$(k_1 - t_1)v_1 + \dots + (k_i - t_i)v_i + \dots + (k_n - t_n)v_n = \bar{0}$$

ו  $k_i - t_i \neq 0$ . ז"א ווקטורים  $v_1, \dots, v_n$  ת"ל. סתירה. ■

### הגדרה 11.1

אם  $v_1, \dots, v_n \in V$  בסיס של מ"ו  $V$  מעל שדה  $\mathbb{F}$  ו  $u \in V$  אז

$$u = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n.$$

לוקטור

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

קוראים ווקטור הקואורדינטות של ווקטור  $u$  לפי בסיס  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ .  
סימון:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

## 11.1 דוגמה

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}, \mathbb{R}^3 \text{ הבסיס הסטנדרטי של } E = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$u = 2e_1 + (-1)e_2 + 10e_3$$

$$[u]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

## 11.2 דוגמה

$$\text{אז } p(x) = 1 + 8x - 5x^2, \mathbb{R}_2[x] \text{ הבסיס הסטנדרטי של } E = \{1, x, x^2\}$$

$$p(x) = 1 \cdot 1 + 8x - 5x^2 = 1e_1 + 8e_2 - 5e_3$$

$$[p(x)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

## 11.3 דוגמה

הראו כי קבוצת הווקטורים

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$.u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ מצאו את } [u]_B \text{ עבור ווקטור}$$

## פתרון:

נבדוק אם  $B$  בת"ל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן  $b_3, b_2, b_1$  בת"ל.

$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ , לכן  $B = \{b_1, b_2, b_3\}$  בסיס של  $\mathbb{R}^3$ .

נמצא את הקואורדינטות של ווקטור  $u$  לפי בסיס  $B$ .

$$u = k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array} \right)$$

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ -9 \end{pmatrix}$$

## 11.4 דוגמה

נתונים שני בסיסים של מרחב  $V$ ,  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  ו  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ . נתון  $[u]_B$ . מהו  $[u]_C$ ?

### פתרון:

נרשום את  $u$  כצ"ל של בסיס  $B$ .

$$u = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n \quad \Rightarrow \quad [u]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

כל ווקטור  $b_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) הוא צ"ך של בסיס  $C$

$$b_1 = b_{11}c_1 + b_{21}c_2 + \dots + b_{n1}c_n$$

$$b_2 = b_{12}c_1 + b_{22}c_2 + \dots + b_{n2}c_n$$

$$\vdots$$

$$b_n = b_{1n}c_1 + b_{2n}c_2 + \dots + b_{nn}c_n$$

מכאן מקבלים

$$\begin{aligned} u &= x_1(b_{11}c_1 + b_{21}c_2 + \dots + b_{n1}c_n) + x_2(b_{12}c_1 + b_{22}c_2 + \dots + b_{n2}c_n) + \dots + x_n(b_{1n}c_1 + b_{2n}c_2 + \dots + b_{nn}c_n) \\ &= (x_1b_{11} + x_2b_{12} + \dots + x_nb_{1n})c_1 + (x_1b_{21} + x_2b_{22} + \dots + x_nb_{2n})c_2 + \dots + (x_1b_{n1} + x_2b_{n2} + \dots + x_nb_{nn})c_n \end{aligned}$$

לפיכך

$$[u]_C = \begin{pmatrix} x_1b_{11} + x_2b_{12} + \dots + x_nb_{1n} \\ x_1b_{21} + x_2b_{22} + \dots + x_nb_{2n} \\ \vdots \\ x_1b_{n1} + x_2b_{n2} + \dots + x_nb_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot [u]_B$$

למטריצה

$$P_{B \rightarrow C} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

קוראים מטריצה המעבר מבסיס  $B$  לבסיס  $C$ . ז"א קיבלנו נוסחה:

$$[u]_C = P_{B \rightarrow C} [u]_B$$

כאשר

$$P_{B \rightarrow C} = ([b_1]_C \dots [b_n]_C)$$

## דוגמה 11.5

נתונים שני בסיסים של  $\mathbb{R}^3$ ,  $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ ,  $C = \{c_1, c_2, c_3\}$  כאשר

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ מצאו את } [u]_C.$$

### פתרון:

נשתמש בנוסחה

$$[u]_C = P_{B \rightarrow C} \cdot [u]_B.$$

כדי למצוא את  $P_{B \rightarrow C}$  צריך לפתור את המערכת:

$$C \cdot X = b_1$$

$$C \cdot X = b_2$$

$$C \cdot X = b_3$$

כאשר מטריצה  $C$  מורכבת מווקטורים  $c_3, c_2, c_1$  העומדים בעמודות.

מכיוון ש  $c_3, c_2, c_1$  בסיס, למערכת  $C \cdot X = b_i$  יש פתרון יחיד, לכן בדירוג ניתן להגיע למטריצה היחידה  $I$ .  
ז"א בתהליך גאוס נגיע למצבים:

$$(C|b_1) \rightarrow \dots \rightarrow (I|P_{B \rightarrow C} \text{ של } (C|b_1))$$

$\vdots$

$$(C|b_n) \rightarrow \dots \rightarrow (I|P_{B \rightarrow C} \text{ של } (C|b_n))$$

מכיוון שבדירוג מבצעים את אותן הפעולות האלמנטריות, אפשר לפתור את כל המעקות בבת אחת!

$$(C|B) \rightarrow \dots \rightarrow (I|P_{B \rightarrow C})$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -7 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$P_{B \rightarrow C} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[u]_C = P_{B \rightarrow C} \cdot [u]_B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix}$$

## דוגמה 11.6

נתון

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$$

שני בסיסים סדורים של  $\mathbb{R}^2$ .מצאו מטריצת מעבר מהבסיס  $B$  לבסיס  $C$ .יהי  $V \in \mathbb{R}^2$  כך ש-  $(V)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . מצאו את  $(V)_C$ .מצאו את מטריצת המעבר מהבסיס  $C$  לבסיס  $B$ .הגדרה 11.2 המרחב של פולינומים מסדר  $n$ 

המרחב של פולינומים מסדר  $n$  יסומן  $\mathbb{R}_n[x]$  או  $P_n[x]$  ויוגדר- הקבוצה של כל הפולינומים מסדר  $n$  לכל היותר:

$$P_n[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

## דוגמה 11.7

$$1 + 2x \in P_1[x], \quad 1 + 5x^2 \notin P_1[x].$$

$$1 + 2x \in P_3[x], \quad 1 + 4x + 3x^2 \in P_3[x], \quad 3 + 8x + 7x^3 \in P_3[x], \quad 6x + 5x^4 \notin P_3[x].$$

$$1 - 3x^4 + 6x^7 \in P_7[x], \quad 1 - 3x^4 + 6x^7 + 6x^8 - x^9 \notin P_7[x].$$

## משפט 11.2 תלות ליניארית של פולינומים

קבוצת פולינומים מסדר  $n$ 

$$S = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \dots\}$$

בת"ל אם"ם קבוצת הווקטורים של המקדמים בת"ל, כלומר אם הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \dots \right\}$$

בת"ל.

אם נגדיר המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & \cdots \\ a_1 & b_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ a_n & b_n & \cdots \end{pmatrix}$$

אז הפולינומים בת"ל אס"ם

$$\det(A^t A) \neq 0.$$

### משפט 11.3 בסיס הסטנדרטי של פולינומים

הקבוצה

$$E = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, \dots, e_{n+1} = x^n\}$$

הינה בסיס של המרחב ווקטורי של פולינומים מסדר  $n$  ונקרא הבסיס הסטנדרטי של  $P_n[x]$ .

### משפט 11.4 הוורונסקיאן

נתון קבוצה

$$F = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$$

של  $n$  פונקציות במרחב  $V$  של כל הפונקציות מעל  $\mathbb{R}$ . נגדיר את הוורונסקיאן

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

אם קיים  $x_0 \in \mathbb{R}$  כך ש-

$$W(x_0) \neq 0$$

אז  $F$  בת"ל.

הוכחה: יהיו

$$F = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$$

קבוצה של  $n$  פונקציות במרחב  $V$  של כל הפונקציות מעל  $\mathbb{R}$ . הקבוצה בת"ל אס"ם הצ"ל

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

לכל  $x \in \mathbb{R}$  מתקיים רק אם  $c_i = 0$  לכל  $i = 1, 2, \dots, n$ . נגזור את הצ"ל  $n - 1$  פעמים כדי לקבל

$$c_1 f_1^{(i)}(x) + c_2 f_2^{(i)}(x) + \dots + c_n f_n^{(i)}(x) = 0$$

לכל  $x \in \mathbb{R}$ . כמשוואה מטריציאלית

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

הדטרמיננטה של המטריצה המקדמים נקראת הוורונסקיאן של הקבוצה  $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$  ומסומן ב  $W(x)$ . לכן אם קיים נקודה  $x_0 \in \mathbb{R}$  כך ש  $W(x_0) \neq 0$  אז המטריצה המקדמים איננה אפס בנקודה  $x_0$  ולכן כל המקדמים  $c_i = 0$ . לכן, אם הוורונסקיאן אינו שווה אפס בנקודה  $x_0 \in \mathbb{R}$ , אז הקבוצה  $F = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$  בת"ל.



## 11.8 דוגמה

עבור המרחב  $P_2[x]$ ,  
מצאו מטריצת מעבר מהבסיס הסדור

$$B = \{b_1 = 1 - 2x + x^2, \quad b_2 = 3 - 5x + 4x^2, \quad b_3 = 2x + 3x^2\}$$

לבסיס הסטנדרטי

$$E = \{e_1 = 1, \quad e_2 = x, \quad e_3 = x^2\}$$

ומצאו את הווקטור  $-1 + 2x$  לפי הבסיס  $B$ .

### פתרון:

נחשב את  $P_{B \rightarrow E}$ :

$$(E|B) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right)$$

וסיימנו.

$$P_{B \rightarrow E} = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{array} \right)$$

$$[u]_B = P_{E \rightarrow B} [u]_E .$$

$$P_{E \rightarrow B} = P_{B \rightarrow E}^{-1}$$

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3R_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -23 & -9 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$P_{E \rightarrow B} = \left( \begin{array}{ccc} -23 & -9 & 6 \\ 8 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad \text{לכן}$$

$$[u]_B = P_{E \rightarrow B} [u]_E = \left( \begin{array}{ccc} -23 & -9 & 6 \\ 8 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

בדיקה:

$$\begin{aligned} 5b_1 - 2b_2 + 1b_3 &= 5(1 - 2x + x^2) - 2(3 - 5x + 4x^2) + 1(2x + 3x^2) \\ &= 5 - 6 - 10x + 10x + 2x + 5x^2 - 8x^2 + 3x^2 \\ &= -1 + 2x . \end{aligned}$$