שיעור 12
רדוקציות פולינומיאליות

12.1 $CLIQUE$ היא NP- שלמה

משפט 12.1 $CLIQUE \in NPC$

הבעיית $CLIQUE$ היא (ראו הגדרה 10.5):

$$CLIQUE = \{\langle G,k\rangle \mid \text{מכיל קליקה בגודל } k \ G\} \ .$$

$CLIQUE$ היא NP- שלמה

הוכחה:

1) הוכחנו כי $CLIQUE \in NP$ במשפט 10.2.

2) נוכיח כי $CLIQUE$ היא NP קשה ע"י רדוקציה $3SAT \leqslant_P CLIQUE$.

פונקצית הרדוקציה

בהינתן נוסחת $3CNF$ ϕ מעל n משתנים $x_1,x_2,\ldots,x_n$ המכיל m פסוקיות, ניצור זוג $\langle G,k\rangle$ ונוכיח כי

$$\langle \phi\rangle \in 3SAT \quad \Leftrightarrow \quad \langle G,k\rangle \in CLIQUE \ .$$

נבנה את הגרף G באופן הבא:

הקדקודים של G:

לכל פסוקית C_i ב- ϕ המכילה 3 ליטרלים ניצור שלשה t_i המכילה 3 קודקודים המתאימים ללחטרלים של C_i:

$$x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \qquad \longrightarrow \qquad x_1 \qquad \bar{x}_3 \qquad x_4$$

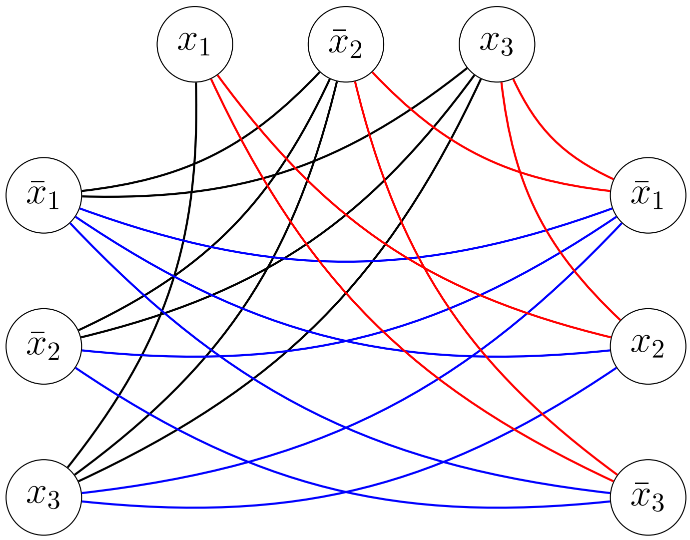
הצלעות של G:

נבחר בין כל שני קודקודים פרט לזוגות הבאים:

- זוג קודקודים המתאימים למשתנה ומשלים שלו.
- זוג קודקודים שנמצאים באותה שלושה.

לדוגמה:

$$\phi = \underbrace{\left(\overset{T}{x_1} \vee \overset{T}{\bar{x}_2} \vee x_3\right)}_{C_1} \wedge \underbrace{\left(\bar{x}_1 \vee \overset{T}{\bar{x}_2} \vee x_3\right)}_{C_2} \wedge \underbrace{\left(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \overset{T}{\bar{x}_3}\right)}_{C_3}$$



נקבע $k = m$.

נכונות הרדוקציה

1) ניתן לבנות את G בזמן פולינומיאלי בגודל ϕ.

2) נוכיח כי

$$\langle \phi \rangle \in 3SAT \quad \Leftrightarrow \quad \langle G, k \rangle \in CLIQUE \ .$$

כיוון $\Leftarrow$

- נניח כי ϕ ספיקה ונסתכל על השמה המספקת את ϕ.
- בכל פסוקית C_i ב- ϕ יש לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך T.
- נבחר מכל שלשה t_i בקודקוד אחד המתאים לליטרל שקיבל ערך T ב- C_i ונוסיף אותו לקליקה.
- מספר הקודקודים שבחרנו שווה k וכל שניים מהם מחוברים בצלע כי לא בחרנו שני קודקודים מאותה שלשה ולא בחרנו שני קודקודים המתאימים למשתנה ומשלים שלו.
- ולכן G מכיל קליקה בגודל k.

כיוון $\Rightarrow$

- נניח כי G מכיל קליקה בגודל k ונסתכל על קליקה כזו.
- לפי הבנייה הקליקה מכילה בדיוק קודקוד אחד מכל שלשה t_i. ניתן השמה למשתנים של ϕ כך שהליטרל שמתאים לקודקוד שנמצא בקליקה יקבל ערך T.
- השמה זו אפשרית מכיוון שהקליקה לא מכילה שני קודקודים המתאימים למשתנה ומשלים שלו.

- בנוסף השמ זו מספקת את ϕ מכיוון שהקליקה מכילה קודקוד מכל שלשה t_i ולכן הליטרל המתאים לקודקוד בשלשה t_i קיבל ערך T ולכן הוא מספק את הפסוקית C_i.
- לכן ϕ ספיקה.

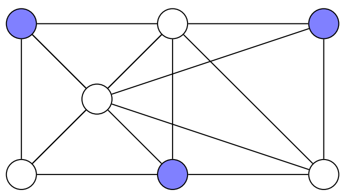
■

12.2 בעיית הקבוצה הבלתי תלויה

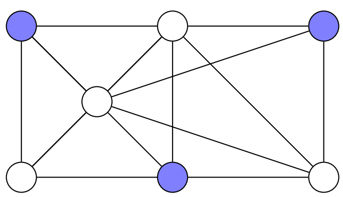
הגדרה 12.1 קבוצה בלתי תלויה

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, קבוצה בלתי תלויה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $S \subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u, \mathrm{v} \in S$ מתקיים $(u, \mathrm{v}) \notin E$.

קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k = 3$:



קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k = 3$:



הגדרה 12.2 בעיית IS

קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר k.
פלט: האם קיימת קבוצה בלתי תלויה ב- G בגודל k?

$$IS = \left\{ \langle G, k \rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ } G \right\}$$

משפט 12.2 $IS \in NPC$

הבעייה IS היא NP - שלמה.

הוכחה:

(1) נוכיח כי $IS \in NP$

נבנה אלגוריתם אימות V עבור IS.
$V =$ על קלט $(\langle G, k \rangle, y)$:

- בודק האם y היא קבוצה של k קודקודים מ- G השונים זה מזה.
  - אם לא $\Rightarrow$ דוחה.
- בודק האם כל שני קודקודים מ- y לא מחוברים בצלע ב- G.
  - אם כן $\Rightarrow$ מקבל.

○ אם לא $\Rightarrow$ דוחה.

(2) נוכיח כי $CLIQUE \leqslant_P IS$

פונקצית הרדוקציה:

בהינתן זוג $\langle G, k\rangle$ הקלט של $CLIQUE$, ניצור זוג $\langle G', k'\rangle$, הקלט של IS, ונוכיח כי:

$$\langle G, k\rangle \in CLIQUE \quad \Leftrightarrow \quad \langle G', k'\rangle \in IS \ .$$

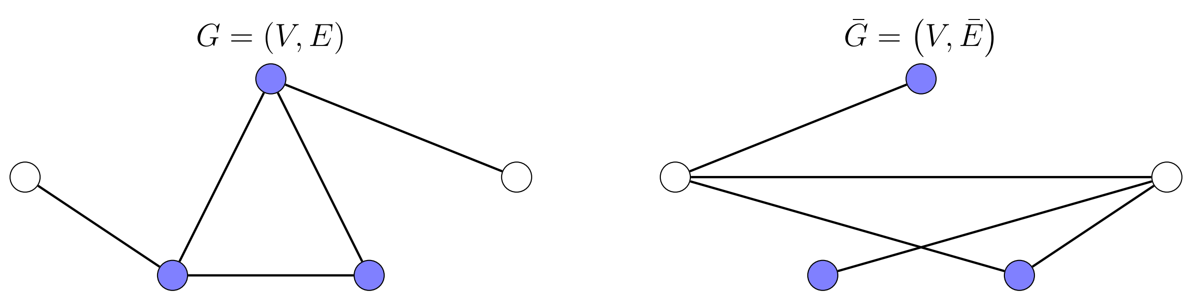
הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

1) נניח שהגרף הוא $G = (V, E)$.
אז הגרף G' הוא הגרף המשלים של $G = (V, E)$.
ז"א $G' = \bar{G} = \left(V, \bar{E}\right)$ כאשר

$$\bar{E} = \left\{(u_1, u_2) \ \middle| \ (u_1, u_2) \notin E\right\} \ .$$

2) $k' = k$.

לדוגמה, בהינתן הגרף $G = (V, E)$ שמכיל קליקה בגודל $k = 3$, הפונקציית הרדוקציה R מחזירה את הגרף $\bar{G} = (V, \bar{E})$ ואת המספר $k' = k = 3$, כמתואר בתרשים למטה:



נכונות הרדוקציה

1) ניתן לבנות G' בזמן פולינומיאלי בגודל G.

2) נוכיח כי . $\langle G, k\rangle \in CLIQUE \quad \Leftrightarrow \quad \langle G', k'\rangle \in IS$

כיוון $\Leftarrow$

בהינתן גרף $G = (V, E)$ ושלם k.
נניח כי $\langle G, k\rangle \in CLIQUE$.

$\Leftarrow$ G מכיל קליקה S בגודל k.

$\Leftarrow$ אם $u_1, u_2 \in S$ (אם u_1, u_2 שני קודקודים בקליקה S) אזי $(u_1, u_2) \in E$.
כלומר, כל שני קדקודים ב- S מחוברים בצלע של G.

$\Leftarrow$ אם $u_1, u_2 \in S$ אזי $(u_1, u_2) \notin \bar{E}$.
כלומר, כל שני קדקודים ב- S לא מחוברים בצלע של המשלים של הגרף $\bar{G}$, דהיינו G'.

$\Leftarrow$ אותה הקבוצה S היא קבוצה בלתי תלוייה ב- G' בגודל $k' = k$.

$\Leftarrow$ $G' = \bar{G}(V, \bar{E})$ מכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל k'.

$\Leftarrow$ $\langle G', k\rangle \in IS$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

בהינתן גרף G' ושלם k'.
נניח כי $\langle G', k'\rangle \in IS$.

$\Leftarrow$ G' מכיל קבוצה בלתי תלוייה S בגודל k'.

$\Leftarrow$ אם $u_1, u_2 \in S$ אזי $(u_1, u_2) \notin \bar{E}$.
כלומר, כל שני קדקודים ב- S לא מחוברים בצלע של G'.

$\Leftarrow$ אם $u_1, u_2 \in S$ אזי $(u_1, u_2) \in E$.
כלומר, כל שני קדקודים ב- S מחוברים בצלע של $G(V, E)$.

$\Leftarrow$ אותה הקבוצה S היא קליקה ב- G בגודל $k = k'$.

$\Leftarrow$ G מכיל קליקה בגודל k.

$\Leftarrow$ $\langle G, k\rangle \in CLIQUE$.

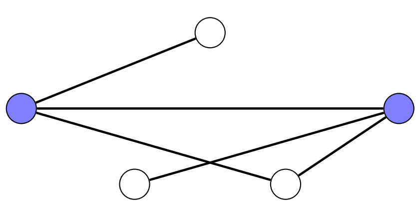
■

12.3 בעיית הכיסוי בקודקודים

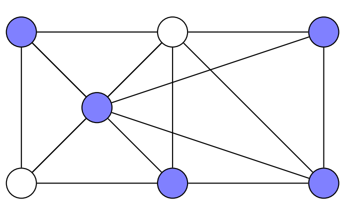
הגדרה 12.3 כיסוי בקודקודים

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, כיסוי בקודקודים ב- G הוא תת-קבוצה של קודקודים $C \subseteq V$ כך שלכל צלע $u, v \in S$ מתקיים $u \in C$ או $v \in C$.

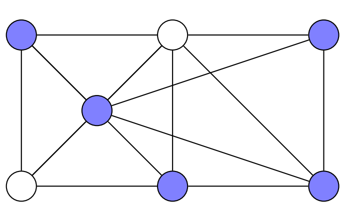
כיסוי בקדקודים בגודל $k = 2$:



כיסוי בקדקודים בגודל $k = 5$:



כיסוי בקדקודים בגודל $k = 5$:



12.4 הבעייה VC

הגדרה 12.4 בעיית VC

קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר k.
פלט: האם קיים כיסוי בקודקודים ב- G בגודל k?

$$VC = \left\{ \langle G,k\rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל כיסוי בקודקודים בגודל } k \;\; G \right\}$$

משפט 12.3 $VC \in NPC$

הבעייה VC היא NP - שלמה.

הוכחה:
נוכיח כי $VC \in NP$

נבנה אלגוריתם אימות V עבור VC.
$V =$ על קלט $(\langle G,k\rangle, y)$:

- בודק האם כל צלע ב- G מכילה לפחות קצה אחד ב- y.
  - אם כן $\Rightarrow$ מקבל.
  - אם לא $\Rightarrow$ דוחה.

נוכיח כי VC היא NP-קשה ע"י רדוקציה $IS \leqslant_P VC$

פונקצית הרדוקציה:

בהינתן זוג $\langle G,k\rangle$ הקלט של IS, ניצור זוג $\langle G',k'\rangle$ הקלט של VC ונוכיח כי

$$\langle G,k\rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in VC \ .$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

(1 נניח שהגרף הוא $G=(V,E)$.
אז הגרף G' הוא אותו גרף $G=(V,E)$.

(2 $k' = |V| - k$.

נכונות הרדוקציה

(1 ניתן לבנות G' בזמן פולינומיאלי בגודל G.

(2 נוכיח כי . $\langle G,k\rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in VC$

כיוון $\Leftarrow$

בהינתן גרף $G=(V,E)$ ושלם k.
נניח כי $\langle G,k\rangle \in IS$.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה S בגודל k.

$\Leftarrow$ אם $u_1 \in S$ וגם $u_2 \in S$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.
כלומר, כל שני קדקודים ב- S לא מחוברים בצלע ב- G.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת היא:
אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \notin S$ או $u_2 \notin S$.

$\Leftarrow$ אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \in V \backslash S$ או $u_2 \in V \backslash S$.

$\Leftarrow$ $V \backslash S$ היא כיסוי קדקודים ב- G בגודל $k' = |V| - k$.

$\Leftarrow$ הגרף $G' = G$ מכיל כיסוי קדקודים בגודל k'.

$\Leftarrow$ $\langle G', k' \rangle \in VC$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

בהינתן גרף G' ושלם k'.
נניח כי $\langle G', k' \rangle \in VC$.

$\Leftarrow$ G' מכיל כיסוי בקדקודים C בגודל k'.

$\Leftarrow$ אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \in C$ או $u_2 \in C$.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת היא:
אם $u_1 \notin C$ וגם $u_2 \notin C$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

$\Leftarrow$ אם $u_1 \in V \backslash C$ וגם $u_2 \in V \backslash C$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- $V \backslash C$ לא מחוברים בצלע ב- G'.

$\Leftarrow$ $V \backslash C$ החא קבוצת בלתי תלוייה ב- G' בגודל $k = |V| - k'$.

$\Leftarrow$ הגרף $G = G'$ מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל k.

■

12.5 $PARTITION$

הגדרה 12.5 בעיית $PARTITION$

<u>קלט:</u> קבוצת מספרים שלמים $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
<u>פלט:</u> האם קיימת תת-קבוצה $Y \subseteq S$ כך ש- $\sum\limits_{y \in S \backslash Y} y = \sum\limits_{y \in Y} y$?

$$PARTITION = \left\{ S \;\middle|\; \text{קבוצת שלמים, וקיימת תת-קבוצה } Y \subseteq S \text{ כך ש- } \sum_{y \in S \backslash Y} y = \sum_{y \in Y} y \right\}$$

12.6 רדוקציות פולינומיאליות

משפט 12.4 רדוקציות פולינומיאליות

$$\begin{aligned} SAT &\leqslant_P 3SAT \\ 3SAT &\leqslant_P CLIQUE \\ CLIQUE &\leqslant_P IS \\ IS &\leqslant_P VC \\ SubSetSum &\leqslant_P PARTITION \\ HAMPATH &\leqslant_P HAMCYCLE \end{aligned}$$

12.7 שפות NP שלמות

משפט 12.5 שפות NP- שלמות

SAT NP- שלמה. (משפט קוק לוין)

$3SAT$ NP- שלמה.

$HAMPATH$ NP- שלמה.

$CLIQUE$ NP- שלמה.

IS NP- שלמה.

VC NP- שלמה.