

שיעור 1

תורת המספרים

1.1 הגדרות בסיסיות

1.1 הגדרה

יהיו a, b מספרים שלמים. אומרים כי b מחלק את a אם קיים מספר שלם q כך ש-

$$a = qb.$$

כלומר $\frac{a}{b}$ שווה למספר שלם q .

הסימון $a \mid b$ אומר כי b מחלק את a .

1.1 דוגמה

א) $3 \mid 6$ בגלל שקיים מספר שלם $q = 2$ כך ש- $6 = 3q$.

ב) $7 \mid 42$ בגלל שקיים מספר שלם $q = 6$ כך ש- $42 = 7q$.

ג) $5 \nmid 8$ בגלל שלא קיים מספר שלם q כך ש- $8 = 5q$.

1.2 הגדרה יחס שקילות בין a ל- b

נניח כי $a, b \in \mathbb{Z}$ מספרים שלמים ו- m מספר שלם חיובי. היחס

$$a \equiv b \pmod{m}$$

אומר כי m מחלק את ההפרש $a - b$, כלומר $m \mid a - b$.

בנסוח שקול, $a \equiv b \pmod{m}$ אם קיים שלם q כך ש- $a = qm + b$.

לעתים אומרים כי " a שקול ל- b מודולו m ".

1.2 דוגמה

הוכיחו כי

$$5 \equiv 2 \pmod{3} \quad \text{א)}$$

$$43 \equiv 23 \pmod{10} \quad \text{ב)}$$

$$7 \not\equiv 2 \pmod{4} \quad \text{ג)}$$

פתרון:

(א)

$$5 - 2 = 3 = 1 \cdot 3 \Rightarrow 3 \mid 5 - 2 \Rightarrow 5 \equiv 2 \pmod{3}.$$

(ב)

$$43 - 23 = 20 = 2 \cdot 10 \Rightarrow 10 \mid 43 - 23 \Rightarrow 43 \equiv 23 \pmod{10}.$$

$$(ג) \quad 7 - 2 = 5$$

לא קיים שלם q כך ש- $7 - 2 = 4q$ לכן $7 - 2 \nmid 4$

$$7 \not\equiv 2 \pmod{4}.$$

הגדרה 1.3 השארית

נתונים מספרים שלמים $a, b \in \mathbb{Z}$, היחס

$$a \% b$$

מציין את השארית בחלוקת a ב- b .

דוגמה 1.3

$$43 \% 10 = 3.$$

$$13 \% 4 = 1.$$

$$8 \% 2 = 0.$$

$$-10 \% 3 = -1.$$

משפט 1.1 משפט החילוק של אוקלידס

יהיו a, b מספרים שלמים $b \neq 0$. קיימים מספרים שלמים q, r יחידים כך ש-

$$a = qb + r$$

כאשר $0 \leq r < |b|$.

• b נקרא ה מודולו,

• q נקראת המנה

• ואילו r נקרא השארית.

שימו לב: $r = a \% b$.

דוגמה 1.4

עבור המספרים $a = 46, b = 8$ מצאו את הפירוק האוקלידי $a = bq + r$.

פתרון:

עבור $b = 8$ ו- $a = 46$ מתקיים

$$46 = 8 \cdot 5 + 6 \Rightarrow q = 5, r = 6.$$

1.5 דוגמה

עבור $b = 8$ ו- $a = -46$ מתקיים

$$-46 = 8 \cdot (-6) + 2 \Rightarrow q = -6, r = 2.$$

משפט 1.2 נוסחת השארית

נתונים $a, b > 0$ מספר שלמים.

$$(א) \quad a \% b = a - b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$$

$$(ב) \quad (-a) \% b = b - (a \% b) = b \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil - a$$

הוכחה:

(א) לפי משפט החילוק של אוקלידס 1.1, קיימים שלמים q, r כך ש-

$$a = qb + r \quad (*)1$$

כאשר $0 \leq r < b$ ו- $r = a \% b$. נחלק ב- b ונקבל

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} \quad (*)2$$

נשים לב כי $0 < \frac{r}{b} < 1$, לכן לפי (*)2

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = q.$$

נציב זה ב- (*)1 ונקבל

$$a = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor b + r \Rightarrow r = a - b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor. \quad (*)3$$

(ב) לפי משפט החילוק של אוקלידס 1.1, קיימים שלמים q', r' כך ש-

$$-a = q'b + r'$$

כאשר $r' = (-a) \% b$ מכאן

$$a = -q'b - r' = -q'b - b + b - r' = -(q' + 1)b + (b - r'). \quad (*)4$$

נשים לב כי $b - r' \geq 0$. אבל לפי (*)1 $a = qb + r$ כאשר $r = a \% b$ יחיד. לכן

$$r = b - r' \Rightarrow r' = b - r \stackrel{(*)3}{=} b - a + b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = b - \left(a - b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \right) = b - (a \% b). \quad (*)5$$

לכן $r' = (-a) \% b = b - (a \% b)$

הזהות השני מנובע מ- (*)5:

$$r = b - r' \Rightarrow r' = b - r \stackrel{(*)3}{=} b - a + b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor - a + \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil.$$

לכן $r' = (-a) \% b = -a + \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil$

דוגמה 1.6

מצאו את $101 \% 7$.

פתרון:

$$b = 7, a = 101$$

$$101 \% 7 = 101 - 7 \left\lfloor \frac{101}{7} \right\rfloor = 101 - 7(14) = 3.$$

דוגמה 1.7

מצאו את $-101 \% 7$.

פתרון:

$b = 7, -a = -101$. נשתמש בנוסחה $(-a) \% b = b - (a \% m)$. מדוגמה הקודמת: $(101 \% 7) = 3$ לפיכך

$$(-101) \% 7 = 7 - (101 \% 7) = 7 - 3 = 4.$$

הגדרה 1.4 המחלק המשותף הגדול ביותר gcd

נתונים שני מספרים שלמים $a, b > 0$. המחלק המשותף הגדול ביותר של a ו- b מסומן $\gcd(a, b)$ (greatest common divisor) ומוגדר להיות המספר שלם הגדול ביותר שמחלק גם a וגם b .

דוגמה 1.8

$$\gcd(2, 6) = 2,$$

$$\gcd(3, 6) = 3,$$

$$\gcd(24, 5) = 1,$$

$$\gcd(20, 10) = 10,$$

$$\gcd(14, 12) = 2,$$

$$\gcd(8, 12) = 4.$$

הגדרה 1.5 כפולה משותפת קטנה ביותר

נתונים שני מספרים שלמים $a, b > 0$. הכפולה המשותפת הקטנה ביותר מסומן $\text{lcm}(a, b)$ (lowest common multiple) ומוגדר להיות המספר השלם החיובי הקטן ביותר ש- a ו- b מחלקים אותו.

דוגמה 1.9

$$\text{lcm}(6, 21) = 42 ,$$

$$\text{lcm}(3, 6) = 6 ,$$

$$\text{lcm}(24, 5) = 120 ,$$

$$\text{lcm}(20, 10) = 20 ,$$

$$\text{lcm}(14, 12) = 84 ,$$

$$\text{lcm}(8, 12) = 24 .$$

הגדרה 1.6 מספרים זרים

נניח כי $a \geq 1$ ו- $b \geq 2$ מספרים שלמים. אומרים כי a ו- b מספרים זרים אם

$$\gcd(a, b) = 1 .$$

במילים פשוטות, שני מספרים שלמים נקראים מספרים זרים אם המחלק המשותף המקסימלי שלהם הוא 1, כלומר, אין אף מספר גדול מאחת שמחלק את שניהם.

משפט 1.3 משפט הפירוק לראשוניים

המשפט היסודי של האריתמטיקה או משפט הפירוק לראשוניים קובע כי כל מספר טבעי ניתן לרשום כמכפלה יחידה של מספרים ראשוניים. ז"א, יהי $a \in \mathbb{N}$ כל מספר טבעי. אז

$$a = p_1^{e_1} \times p_2^{e_2} \times \cdots \times p_n^{e_n} .$$

כאשר p_1, \dots, p_n מספרים ראשוניים ו- $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{N}$, והפירוק הזה יחיד.

דוגמה 1.10

$$60 = 2^2 \times 3^2 \times 5 ,$$

דוגמה 1.11

$$98 = 2^1 \times 7^2 .$$

הגדרה 1.7 פונקציית אוילר

יהי m מספר שלם.

הפונקציית אוילר מסומנת ב- $\phi(m)$ ומוגדרת להיות השלמים שקטנים ממש מ- m וזרים ביחס ל- m .

$$\phi(m) := \{a \in \mathbb{N} \mid \gcd(a, m) = 1, a < m\} .$$

דוגמה 1.12

מכיוון ש- $26 = 2 \times 13$, הערכים של a עבורם $\gcd(a, 26) = 1$ הם
 $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25\}$.

ז"א יש בדיוק 12 ערכים של a עבורם $\gcd(a, 26) = 1$.

$$\phi(26) = 12.$$

משפט 1.4 הפירוק לראשוניים של פונקציית אוילר

נתון מספר טבעי m . נניח כי הפירוק למספרים ראשוניים שלו הוא

$$m = \prod_{i=1}^n p_i^{e_i},$$

כאשר p_i מספרים ראשוניים שונים ו- $e_i > 0$ מספרים שלמים ו- $1 \leq i \leq n$. אז

$$\phi(m) = \prod_{i=1}^n (p_i^{e_i} - p_i^{e_i-1}).$$

דוגמה 1.13

מצאו את $\phi(60)$.

פתרון:

$$60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \text{ לכן}$$

$$\phi(60) = (2^2 - 2^1) (3^1 - 3^0) (5^1 - 5^0) = (2)(2)(4) = 16.$$

משפט 1.5 שיטה לחישוב gcd

נתונים השלמים a, b כך שהפירוק לראשוניים שלהם הם:

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}, \quad b = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_n^{f_n}$$

וללא הגבלה כלליות נניח כי $k \leq n$. אז ה- \gcd נתון על ידי

$$\gcd(a, b) = p_1^{\min(e_1, f_1)} p_2^{\min(e_2, f_2)} \dots p_k^{\min(e_k, f_k)}$$

הוכחה:

דוגמה 1.14

מצאו את $\gcd(19200, 320)$.

פתרון:

$$19200 = 2^8 3^1 5^2, \quad 320 = 2^6 5^1 = 2^6 3^0 5^1.$$

$$\gcd(19200, 320) = 2^{\min(8,6)} 3^{\min(1,0)} 5^{\min(2,1)} = 2^6 3^0 5^1 = 320.$$

דוגמה 1.15

מצאו את $\gcd(154, 36)$.

פתרון:

$$154 = 2^1 7^1 11^1, \quad 36 = 2^2 3^2.$$

ז"א

$$154 = 2^1 3^0 7^1 11^1, \quad 36 = 2^2 3^2 7^0 11^0.$$

$$\gcd(154, 36) = 2^{\min(1,2)} 3^{\min(0,2)} 7^{\min(1,0)} 11^{\min(1,0)} = 2^1 3^0 7^0 11^0 = 2.$$

משפט 1.6 שיטה לחישוב lcm

נתונים השלמים a, b כך שהפירוק לראשוניים שלהם הם:

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}, \quad b = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_n^{f_n}$$

וללא הגבלה כלליות נניח כי $k \leq n$. אז ה- lcm נתון על ידי

$$\text{lcm}(a, b) = p_1^{\max(e_1, f_1)} p_2^{\max(e_2, f_2)} \dots p_k^{\max(e_k, f_k)}$$

הוכחה:

משפט 1.7

$$\gcd(a, b) \text{lcm}(a, b) = ab.$$

הוכחה:

$$\min(a, b) + \max(a, b) = a + b.$$

1.2 האלגוריתם של אוקליד

משפט 1.8 האלגוריתם של אוקליד

יהיו a, b משפרים שלמים חיוביים ($a, b \in \mathbb{Z}, a > 0, b > 0$). קיים אלגוריתם אשר נותן את $d = \gcd(a, b)$. האלגוריתם הינו מתואר להלן. נגדיר

$$r_0 = a, \quad r_1 = b.$$

לפי משפט החילוק 1.1 קיימים שלמים q_1 ו- $0 \leq r_2 < |b|$ עבורם $a = bq_1 + r_2$ כלומר

$$r_0 = r_1q_1 + r_2.$$

באותה מידה, לפי משפט החילוק קיימים שלמים q_2 ו- $0 \leq r_3 < |r_2|$ עבורם

$$r_1 = r_2q_2 + r_3.$$

התהליך ממשיך עד שנקבל $r_{n+1} = 0$ בשלב ה- n -ית.

$$0 \leq r_2 < |b| \quad a = bq_1 + r_2 \quad \text{שלב } k=1$$

$$0 \leq r_3 < |r_2| \quad b = r_2q_2 + r_3 \quad \text{שלב } k=2$$

$$0 \leq r_4 < |r_3| \quad r_2 = r_3q_3 + r_4 \quad \text{שלב } k=3$$

\vdots

$$0 \leq r_n < |r_{n-1}| \quad r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n \quad \text{שלב } k=n-1$$

$$r_{n+1} = 0 \quad r_{n-1} = r_nq_n \quad \text{שלב } k=n$$

התהליך מסתיים בשלב ה- n -ית אם $r_{n+1} = 0$ ואז

$$r_n = \gcd(a, b).$$

דוגמה 1.16

מצאו את ה- $\gcd(1071, 462)$.

פתרון:

$$a = 1071, b = 462$$

נגדיר $r_0 = a = 1071$ ו- $r_1 = b = 462$.

נבצע את האלגוריתם $r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1}$ עד השלב ה- n -ית שבו $r_{n+1} = 0$.

| שלב | | q_k | r_{k+1} |
|-------|----------------------------|-----------|-------------|
| $k=1$ | $1071 = 2 \cdot 462 + 147$ | $q_1 = 2$ | $r_2 = 147$ |
| $k=2$ | $462 = 3 \cdot 147 + 21$ | $q_2 = 3$ | $r_3 = 21$ |
| $k=3$ | $147 = 7 \cdot 21 + 0$ | $q_3 = 7$ | $r_4 = 0$ |

לפיכך $\gcd(1071, 462) = r_3 = 21$.

דוגמה 1.17

מצאו את $\gcd(26, 11)$.

פתרון:

$$a = 26, b = 11$$

נגדיר $r_0 = a = 26$ ו- $r_1 = b = 11$.

נבצע את האלגוריתם $r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1}$ עד השלב ה- n -ית שבו $r_{n+1} = 0$.

| שלב | | q_k | r_{k+1} |
|---------|-----------------------|-----------|-----------|
| $k = 1$ | $26 = 2 \cdot 11 + 4$ | $q_1 = 2$ | $r_2 = 4$ |
| $k = 2$ | $11 = 2 \cdot 4 + 3$ | $q_2 = 2$ | $r_3 = 3$ |
| $k = 3$ | $4 = 1 \cdot 3 + 1$ | $q_3 = 1$ | $r_4 = 1$ |
| $k = 4$ | $3 = 3 \cdot 1 + 0$ | $q_4 = 3$ | $r_5 = 0$ |

לכן $\gcd(26, 11) = r_4 = 1$.

משפט 1.9 משפט בזו (Bezout's identity)

יהיו a, b שלמים ויהי $d = \gcd(a, b)$. קיימים שלמים s, t כך שניתן לרשום ה- $\gcd(a, b)$ כצירוף לינארי של a ו- b :

$$sa + tb = d.$$

משפט 1.10 האלגוריתם של אוקליד המוכלל (שיטה 1)

יהיו a, b שלמים חיוביים. קיים אלגוריתם אשר נותן שלמים s, t עבורם

$$d = sa + tb$$

כאשר $d = \gcd(a, b)$, כמפורט להלן.

מגדירים את הפרמטרים ההתחלתיים:

$$\begin{aligned} r_0 &= a, & r_1 &= b, \\ s_0 &= 1, & s_1 &= 0, \\ t_0 &= 0, & t_1 &= 1. \end{aligned}$$

אז מבצעים את השלבים הבאים:

| | | | | |
|----------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|----------|
| $(0 \leq r_2 < r_1)$ | $t_2 = t_0 - q_1 t_1$ | $s_2 = s_0 - q_1 s_1$ | $r_2 = r_0 - q_1 r_1$ | שלב 1: |
| $(0 \leq r_3 < r_2)$ | $t_3 = t_1 - q_2 t_2$ | $s_3 = s_1 - q_2 s_2$ | $r_3 = r_1 - q_2 r_2$ | שלב 2: |
| | | | | \vdots |
| $(0 \leq r_{k+1} < r_k)$ | $t_{k+1} = t_{k-1} - q_k t_k$ | $s_{k+1} = s_{k-1} - q_k s_k$ | $r_{k+1} = r_{k-1} - q_k r_k$ | שלב k: |
| | | | | \vdots |
| $(0 \leq r_n < r_{n-1})$ | $t_n = t_{n-2} - q_{n-1} t_{n-1}$ | $s_n = s_{n-2} - q_{n-1} s_{n-1}$ | $r_n = r_{n-2} - q_{n-1} r_{n-1}$ | שלב n-1: |
| | | | $r_{n+1} = 0$ | שלב n: |

$$d = \gcd(a, b) = r_n, \quad s = s_n, \quad t = t_n.$$

דוגמה 1.18 (אלגוריתם איוקליד המוכלל)

מצאו את $d = \gcd(240, 46)$ ומצאו שלמים s, t עבורם $d = 240s + 46t$.

פתרון:

פתרון לדוגמה 1.18 עם השיטה במשפט 1.10 של האלגוריתם איוקליד המוכלל

$$a = 240, b = 46$$

$$\begin{aligned} r_0 &= a = 240, & r_1 &= b = 46, \\ s_0 &= 1, & s_1 &= 0, \\ t_0 &= 0, & t_1 &= 1. \end{aligned}$$

| | | | | |
|-----------|-----------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|----------|
| $q_1 = 5$ | $t_2 = 0 - 5 \cdot 1 = -5$ | $s_2 = 1 - 5 \cdot 0 = 1$ | $r_2 = 240 - 5 \cdot 46 = 10$ | שלב k=1: |
| $q_2 = 4$ | $t_3 = 1 - 4 \cdot (-5) = 21$ | $s_3 = 0 - 4 \cdot 1 = -4$ | $r_3 = 46 - 4 \cdot 10 = 6$ | שלב k=2: |
| $q_3 = 1$ | $t_4 = -5 - 1 \cdot (21) = -26$ | $s_4 = 1 - 1 \cdot (-4) = 5$ | $r_4 = 10 - 1 \cdot 6 = 4$ | שלב k=3: |
| $q_4 = 1$ | $t_5 = 21 - 1 \cdot (-26) = 47$ | $s_5 = -4 - 1 \cdot 5 = -9$ | $r_5 = 6 - 1 \cdot 4 = 2$ | שלב k=4: |
| $q_5 = 2$ | $t_6 = -26 - 2 \cdot (47) = -120$ | $s_6 = 5 - 2 \cdot (-9) = 23$ | $r_6 = 4 - 2 \cdot 2 = 0$ | שלב k=5: |

$$\gcd(a, b) = r_5 = 2, \quad s = s_5 = -9, \quad t = t_5 = 47.$$

$$ta + sb = -9(240) + 47(46) = 2.$$

יש שיטה נוספת למציאת המקדמים s, t במשפט בזו. נתאר אותה על ידי הדוגמה הקודמת.

פתרון לדוגמה 1.18 עם השיטה השניה של האלגוריתם איוקליד המוכלל

לשיטה הזאת יש 2 שלבים. בשלב הראשון מבצעים האלגוריתם של אוקליד במשפט 1.8.

$$\boxed{240} = 5 \cdot \boxed{46} + \boxed{10} \quad (*0)$$

$$\boxed{46} = 4 \cdot \boxed{10} + \boxed{6} \quad (*1)$$

$$\boxed{10} = 1 \cdot \boxed{6} + \boxed{4} \quad (*2)$$

$$\boxed{6} = 1 \cdot \boxed{4} + \boxed{2} \quad (*3)$$

$$\boxed{4} = 2 \cdot \boxed{2} + 0 \quad (*4)$$

$$d = \gcd(240, 46) = 2$$

בשלב השני רושמים 2 כצירוף לינארי של 240 ו- 46 באמצעות המשוואות למעלה:

$$\boxed{2} = \boxed{6} - 1 \cdot \boxed{4} \quad \text{לפי } (*3)$$

$$= \boxed{6} - 1 \cdot (\boxed{10} - 1 \cdot \boxed{6}) \quad \text{לפי } (*2)$$

$$= 2 \cdot \boxed{6} - 1 \cdot \boxed{10}$$

$$= 2 \cdot (\boxed{46} - 4 \cdot \boxed{10}) - 1 \cdot \boxed{10} \quad \text{לפי } (*1)$$

$$= 2 \cdot \boxed{46} - 9 \cdot \boxed{10}$$

$$= 2 \cdot \boxed{46} - 9 \cdot (\boxed{240} - 5 \cdot \boxed{46}) \quad \text{לפי } (*0)$$

$$= 47 \cdot \boxed{46} - 9 \cdot \boxed{240}.$$

דוגמה 1.19 (אלגוריתם איוקליד המוכלל)

מצאו את $d = \gcd(326, 78)$ ומצאו שלמים s, t עבורם $d = 326s + 78t$.

פתרון:

פתרון לדוגמה 1.19 עם השיטה במשפט 1.10 של האלגוריתם איוקליד המוכלל

$$a = 326, b = 78$$

$$r_0 = a = 326, \quad r_1 = b = 78,$$

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 0,$$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 1.$$

| | | | | |
|-----------|---------------------------------|------------------------------|-------------------------------|-------------|
| $q_1 = 4$ | $t_2 = 0 - 4 \cdot 1 = -4$ | $s_2 = 1 - 4 \cdot 0 = 1$ | $r_2 = 326 - 4 \cdot 78 = 14$ | שלב $k = 1$ |
| $q_2 = 5$ | $t_3 = 1 - 5 \cdot (-4) = 21$ | $s_3 = 0 - 5 \cdot 1 = -5$ | $r_3 = 78 - 5 \cdot 14 = 8$ | שלב $k = 2$ |
| $q_3 = 1$ | $t_4 = -4 - 1 \cdot (21) = -25$ | $s_4 = 1 - 1 \cdot (-5) = 6$ | $r_4 = 14 - 1 \cdot 8 = 6$ | שלב $k = 3$ |
| $q_4 = 1$ | $t_5 = 21 - 1 \cdot (-25) = 46$ | $s_5 = -5 - 1 \cdot 6 = -11$ | $r_5 = 8 - 1 \cdot 6 = 2$ | שלב $k = 4$ |
| $q_5 = 3$ | | | $r_6 = 6 - 3 \cdot 2 = 0$ | שלב $k = 5$ |

$$\gcd(a, b) = r_5 = 2, \quad s = s_5 = -11, \quad t = t_5 = 46.$$

$$sa + tb = -11(326) + 46(78) = 2.$$

יש שיטה נוספת למציאת המקדמים s, t במשפט בזו. נתאר אותה על ידי הדוגמה הקודמת.

פתרון לדוגמה 1.19 עם השיטה השניה של האלגוריתם איוקליד המוכלל

לשיטה הזאת יש 2 שלבים. בשלב הראשון מבצעים האלגוריתם של אוקליד במשפט 1.8.

$$\boxed{326} = 4 \cdot \boxed{78} + \boxed{14} \quad (*)0$$

$$\boxed{78} = 5 \cdot \boxed{14} + \boxed{8} \quad (*)1$$

$$\boxed{14} = 1 \cdot \boxed{8} + \boxed{6} \quad (*)2$$

$$\boxed{8} = 1 \cdot \boxed{6} + \boxed{2} \quad (*)3$$

$$\boxed{4} = 3 \cdot \boxed{2} + 0 \quad (*)4$$

$$d = \gcd(326, 78) = 2 \quad \text{לכן}$$

בשלב השני רושמים 2 כצירוף לינארי של 326 ו-78 באמצעות המשוואות למעלה:

$$\boxed{2} = \boxed{8} - 1 \cdot \boxed{6} \quad \text{לפי } (*)3$$

$$= \boxed{8} - 1 \cdot (\boxed{14} - 1 \cdot \boxed{8}) \quad \text{לפי } (*)2$$

$$= 2 \cdot \boxed{8} - 1 \cdot \boxed{14}$$

$$= 2 \cdot (\boxed{78} - 5 \cdot \boxed{14}) - 1 \cdot \boxed{14} \quad \text{לפי } (*)1$$

$$= 2 \cdot \boxed{78} - 11 \cdot \boxed{14}$$

$$= 2 \cdot \boxed{78} - 11 \cdot (\boxed{326} - 4 \cdot \boxed{78}) \quad \text{לפי } (*)0$$

$$= 46 \cdot \boxed{78} - 11 \cdot \boxed{326}.$$

1.3 משפטים של מספרים ראשוניים

משפט 1.11 קיימים אינסוף מספרים ראשוניים

קיימים אינסוף מספרים ראשוניים.

הוכחה: נוכיח הטענה דרך השלילה.

נניח כי $\{p_1, \dots, p_n\}$ הוא הקבוצה של כל הראשוניים שקיימים וקבוצה זו נוצרת סופי.

נגדיר השלם $M = (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n) + 1$.

לפי משפט הפירוק לראשוניים (ראו משפט 1.3 למעלה או משפט 1.12 למטה) M הוא מספר ראשוני או שווה למכפלה של ראשוניים.

M לא מספר ראשוני בגלל ש- $M > p_i$ לכל $1 \leq i \leq n$.
גם לא קיים מספק ראשוני p_i אשר מחלק את M . הרי

$$M \% p_i = 1 \Rightarrow p_i \nmid M.$$

הגענו לסתירה של המשפט הפירוק לראשוניים, לכן קיימים אינסוף מספרים ראשוניים.

משפט 1.12 משפט הפירוק לראשוניים

(ראו משפט 1.3) לכל מספר שלם n קיימים שלמים e_i וראשוניים p_i כך ש-

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$$

הוכחה: אינדוקציה.

משפט 1.13 נוסחה לפונקצית אוילר

(ראו משפט 1.4) לכל מספר שלם n בעל פירוק לראשוניים

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$$

פונקציית אוילר ניתנת על ידי

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^k (p_i^{e_i} - p_i^{e_i-1}) = (p_1^{e_1} - p_1^{e_1-1}) (p_2^{e_2} - p_2^{e_2-1}) \cdots (p_k^{e_k} - p_k^{e_k-1})$$

דוגמה 1.20

חשבו את $\phi(24)$

פתרון:

$$24 = 2^3 3^1.$$

לכן

$$\phi(24) = (2^3 - 2^2)(3^1 - 3^0) = (8 - 4)(3 - 1) = 8.$$

■

משפט 1.14

אם p מספר ראשוני אז

$$\phi(p) = p - 1.$$

הוכחה: תרגיל בית.

משפט 1.15

אם p מספר ראשוני אז

$$\phi(p^n) = p^n - p^{n-1}.$$

הוכחה: תרגיל בית.

משפט 1.16

אם s, t שלמים זרים (כלומר $\gcd(s, t) = 1$) אז

$$\phi(s \cdot t) = \phi(s) \cdot \phi(t) .$$

הוכחה: תרגיל בית.

משפט 1.17

אם p ו- q מספרים ראשוניים שונים אז

$$\phi(p \cdot q) = (p - 1)(q - 1) .$$

הוכחה: תרגיל בית.

משפט 1.18 המשפט הקטן של פרמה

אם p מספר ראשוני ו- $a \in \mathbb{Z}_p$ אז התנאים הבאים מתקיימים:

$$1. \quad a^p \equiv a \pmod{p}$$

$$2. \quad a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$3. \quad a^{-1} \equiv a^{p-2} \pmod{p}$$

הוכחה:

טענה 1. נוכיח באינדוקציה.

בסיס:

עבור $a = 0$ הטענה $0^p \equiv 0 \pmod{p}$ מתקיימת.

מעבר:

נניח כי הטענה מתקיימת עבור a .

$$(a + 1)^p = a^p + pa^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2}a^{p-2} + \dots + pa + 1 \equiv a^p + 1 \pmod{p}$$

ההנחת האינדוקציה אומרת ש- $a^p \equiv a \pmod{p}$ לכן

$$(a + 1)^p \pmod{p} \equiv a^p + 1 \pmod{p} \equiv (a + 1) \pmod{p}$$

כנדרש.

טענה 2. $\gcd(a, p) = 1$ לפיכך קיים איבר הופכי $a^{-1} \in \mathbb{Z}_p$. נכפיל ב- a^{-1} אשר הוכחנו בסעיף הקודם:

$$a^{-1}a^p \equiv a^{-1} \cdot a \pmod{p} \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} .$$

טענה 3.

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Leftrightarrow 1 \equiv a^{p-1} \pmod{p} \Rightarrow a^{-1} \equiv a^{p-2} \pmod{p} .$$

משפט 1.19 משפט אוילר

אם a, n שלמים ו- $\gcd(a, n) = 1$ אז

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

משפט 1.20

אם a, n שלמים ו- $\gcd(a, n) = 1$ אז

$$a^{-1} \equiv a^{\phi(n)-1} \pmod{n}.$$

דוגמה 1.21

חשבו את האיבר ההופכי ל-5 ב- \mathbb{Z}_{11} .

פתרון:

לפי משפט פרמט 1.18:

$$5^{-1} = 5^{11-2} \pmod{11} = 5^9 \pmod{11}.$$

לפי הנוסחת לשארית ?? :

$$5^9 \% 11 = 5^9 - 11 \left\lfloor \frac{5^9}{11} \right\rfloor = 9$$

לכן $5^{-1} \in \mathbb{Z}_{11} = 9$.



1.4 משפט השאריות הסיני

משפט 1.21 משפט השאריות הסיני

יהיו m_1, m_2, \dots, m_r שלמים אשר זרים בזוגות ויהיו a_1, a_2, \dots, a_r שלמים. למערכת של יחסים שקילות

$$x = a_1 \pmod{m_1},$$

$$x = a_2 \pmod{m_2},$$

\vdots

$$x = a_r \pmod{m_r},$$

קיים פתרון יחיד מודולו $M = m_1 m_2 \dots m_r$ שניתן על ידי

$$x = \sum_{i=1}^r a_i M_i y_i \pmod{M}$$

כאשר $M_i = \frac{M}{m_i}$ ו- $y_i = M_i^{-1} \pmod{m_i}$ לכל $1 \leq i \leq r$.

דוגמה 1.22

היעזרו במשפט השאריות הסיני כדי לפתור את המערכת

$$x = 22 \pmod{101},$$

$$x = 104 \pmod{113}.$$

פתרון:

$$a_1 = 22, \quad a_2 = 104, \quad m_1 = 101, \quad m_2 = 113.$$

$$M = m_1 m_2 = 11413, \quad M_1 = \frac{M}{m_1} = 113, \quad M_2 = \frac{M}{m_2} = 101.$$

בעזרת הקוד-פיתון modularinverse.py

$$y_1 = M_1^{-1} \bmod m_1 = 113^{-1} \bmod 101 = 59$$

$$x = 22 \cdot \left(\frac{101 \cdot 113}{101} \right).$$

-1

$$y_2 = M_2^{-1} \bmod m_2 = 101^{-1} \bmod 113 = 47$$

$$\begin{aligned} x &= a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 \bmod M \\ &= 22 \cdot 113 \cdot 59 + 104 \cdot 111 \cdot 47 \bmod 11413 \\ &= 640362 \bmod 11413 \\ &= 1234. \end{aligned}$$

