

## שיעור 4

### מכונת טיריניג אי-דטרמיניסטיבית

#### 4.1 הגדרה של מכונת טיריניג אי-דטרמיניסטיבית

##### הגדרה 4.1 מכונת טיריניג אי-דטרמיניסטיבית

מכונת טיריניג אי-דטרמיניסטיבית (מ"ט א"ד) היא שביעיה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר  $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}$  מוגדרים כמו במ"ט דטרמיניסטי (ראו הגדרה 1.2).

$\Delta$  היא פונקציה המעבירים

$$\Delta : (Q \setminus \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}) .$$

$$\Delta(q, a) = \{(q_1, a, S), (q_2, b, L), \dots\} .$$

כלומר, לכל זוג  $q \in Q, a \in \Gamma$  יתכן מספר מעברים אפשריים, 0, 1 או יותר.

- קונפיגורציה של מ"ט א"ד זהה לקונפיגורציה של מ"ט דטרמיניסטיבית.
- לכל קונפיגורציה יתכן מספר קונפיגורציות עוקבות.

- לכל מילה  $w \in \Sigma^*$  יתכן מספר ריצות שונות:

\* ריצות שמנגיעה ל-  $q_{\text{acc}}$ .

\* ריצות שמנגיעה ל-  $q_{\text{rej}}$ .

\* ריצות שלא עוזרות.

\* ריצות שנתקעות.

##### הגדרה 4.2

מילה  $w \in \Sigma^*$  מתקבלת במ"ט א"ד  $M$  אם קיימת לפחות ריצה אחת שמנגעה ל-  $q_{\text{acc}}$ .

השפה של מ"ט א"ד  $M$  היא

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Gamma^* : q_0 w \vdash_* u q_{\text{acc}} v\}$$

כלומר,  
 $w \in L(M)$  אם קיימת ריצה אחת שבה  $M$  מקבלת את  $w$ .

$w \notin L(M)$  אם בכל ריצה של  $M$  על  $w$ ,  $M$  דוחה או לא עוזרת, או נתקעת.

**הגדרה 4.3 מ"ט א"ד המכריעה שפה  $L$** 

תהי  $M$  מ"ט א"ד.  
אומרים כי מ"ט א"ד  $M$  מכריעה שפה  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$ :

- אם  $w \in L \Leftarrow w$  מקבלת את  $w$ .
- אם  $w \notin L \Leftarrow w$  דוחה את  $w$ .

**הגדרה 4.4 מ"ט א"ד המקבלת שפה  $L$** 

תהי  $M$  מ"ט א"ד.  
אומרים כי מ"ט א"ד  $M$  מקבלת שפה  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$ :

- אם  $w \in L \Leftarrow w$  מקבלת את  $w$ .
- אם  $w \notin L \Leftarrow w$  דוחה את  $w$  או  $M$  לא עוצרת על  $w$ .

**דוגמה 4.1**

נתונה השפה

$$L = \{1^n \mid n \text{ איינו ראשוני}\}, \quad \Sigma = \{1\}.$$

בנו מ"ט המכריעה את השפה  $L$ .**פתרון:**הרעיוןنبנה מ"ט א"ד  $N$  המכריעה את  $L$ . $N$  תבחר באופן א"ד מספר  $n < t < n$  ותבדוק האם  $t$  מחלק את  $n$ .

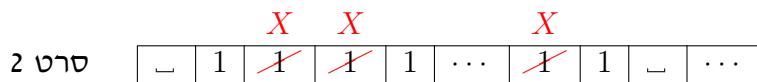
1 סרט 1	$\boxed{\_   1   1   1   1   1   1   1   1   \dots}$	$n$
---------	--	-----

2 סרט 2	$\boxed{\_   1   1   1   \_   \dots}$	$t$
---------	---------------------------------------	-----

תאור הבניה $w = 1^n$  על קלט  $:w = 1^n$ **שלב 1)**

- $N$  בוחרת באופן א"ד מספר  $n < t < n$ .
- מעתקה את  $w$  לסרט 2.
- עוברת על העותק משמאליימין, ובכל תא מחליטה באופן א"ד האם להשאיר את ה- 1 או למחוק אותו ע"י  $X$  (לדאוג שהמספר שנבחר הוא לא 1 ולא  $n$ ).

- בסוף המעבר המספר  $t$  שנבחר הוא כמוות ה- 1 -ים שלא נמחקו.



שלב 2)  $N$  בודקת האם  $t$  שנבחר מחלק את  $n$ .

- אם כן  $\Leftarrow N$  מקבלת.
- אם לא  $\Leftarrow N$  דוחה.

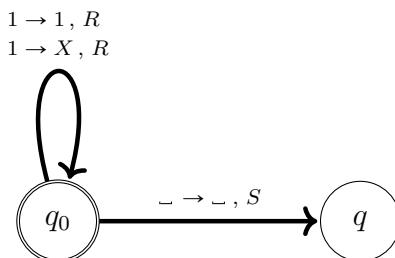
## 4.2 עץ חישוב של מ"ט א"ד

### הגדרה 4.5 עץ חישוב של מ"ט א"ד

בהתנון מ"ט א"ד  $M$  ומילה  $w \in \Sigma^*$ , עץ חישוב של  $M$  ו-  $w$  הוא עץ מושרש שבו:

- 1) כל קדקוד בעץ מתאר קונפיגורציה בחישוב של  $M$  על  $w$ .
- 2) שורש העץ מתאר את הקונפיגורציה ההתחלתית  $w_0$ .
- 3) לכל קדקוד  $v$  בעץ הבנים של  $v$  הם כל הקדקודים הנובעים מהקונפיגורציה המתוארת ע"י  $v$ .

### דוגמה 4.2





### **4.3 שיקילות בין מכונת טירינג אי-טרמיניניסטיית למכונת טירינג דטרמיניניסטיית**

#### **משפט 4.1 שיקולות בין מ"ט א-דטרמיניסטי למ"ט דטרמיניסטי ב-*RE***

לכל מכונת טיריניג אי-דטרמיניסטיבית  $N$  קיימת מכונת טיריניג דטרמיניסטיבית  $D$  כך ש-

$$L(N) = L(D) \ .$$

כלומר לכל  $w \in \Sigma^*$ :

- אם  $N$  מקבלת את  $w$   $\Leftarrow D$  מקבל את  $w$ .
  - אם  $N$  לא מקבלת את  $w$   $\Leftarrow$  לא מקבל את  $w$ .

**הובחה:** בהינתן מכונת טוירינג אי-דטרמיניניסטית  $N$  נבנה מכונת טוירינג דטרמיניניסטית  $D$  ונוכיח כי

$$L(N) = L(D) \ .$$

רעיון הוכחה

בהתנition קלט  $\Sigma^*$ ,  $w \in \Sigma^*$ ,  $D$  תבע ריצה של כל החישובים האפשריים של  $N$  על  $w$ , ואם אחד החישובים מסתois ב-  $D$  תעורר ותתקבל.

מכיוון שיתכנו חישובים אינסופיים, לא יוכל לסרוק את עץ החישוב לעומק. במקום זה נסrok את העץ לרוחב. ככלומר, נבדוק את כל החישובים באורך 1, ולאחר מכן נבדוק את כל החישובים באורך 2, וכן הלאה. אם אחד החישובים הסטיים ב- $D$  תעוצר ותתקבל.

תאור הבניה

מכיון שלכל  $q \in Q$  ולכל  $\alpha \in \Gamma$  :

$$\Delta(q, \alpha) \subseteq Q \times \Gamma \times \{L, R, S\} .$$

אז

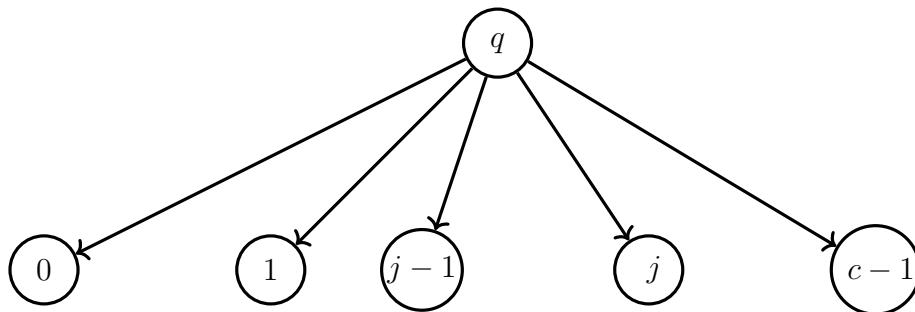
$$|\Delta(q, \alpha)| \leq |Q| \cdot |\Gamma| \cdot |\{L, R, S\}| = 3|Q| \cdot |\Gamma| .$$

נסמן:

$$C = 3|Q| \cdot |\Gamma| .$$

- לכל מצב  $q \in Q$  ולכל אות  $\alpha \in \Gamma$  נמספר את המעברים ב-  $\Delta(q, \alpha)$  שירוטית

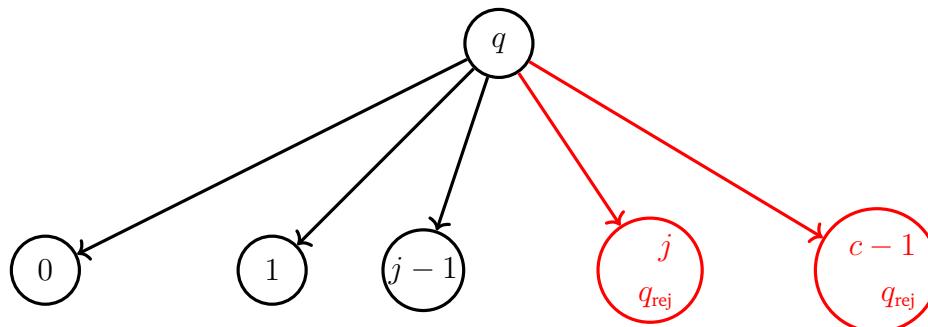
$$\{0, 1, 2, \dots, C - 1\} .$$



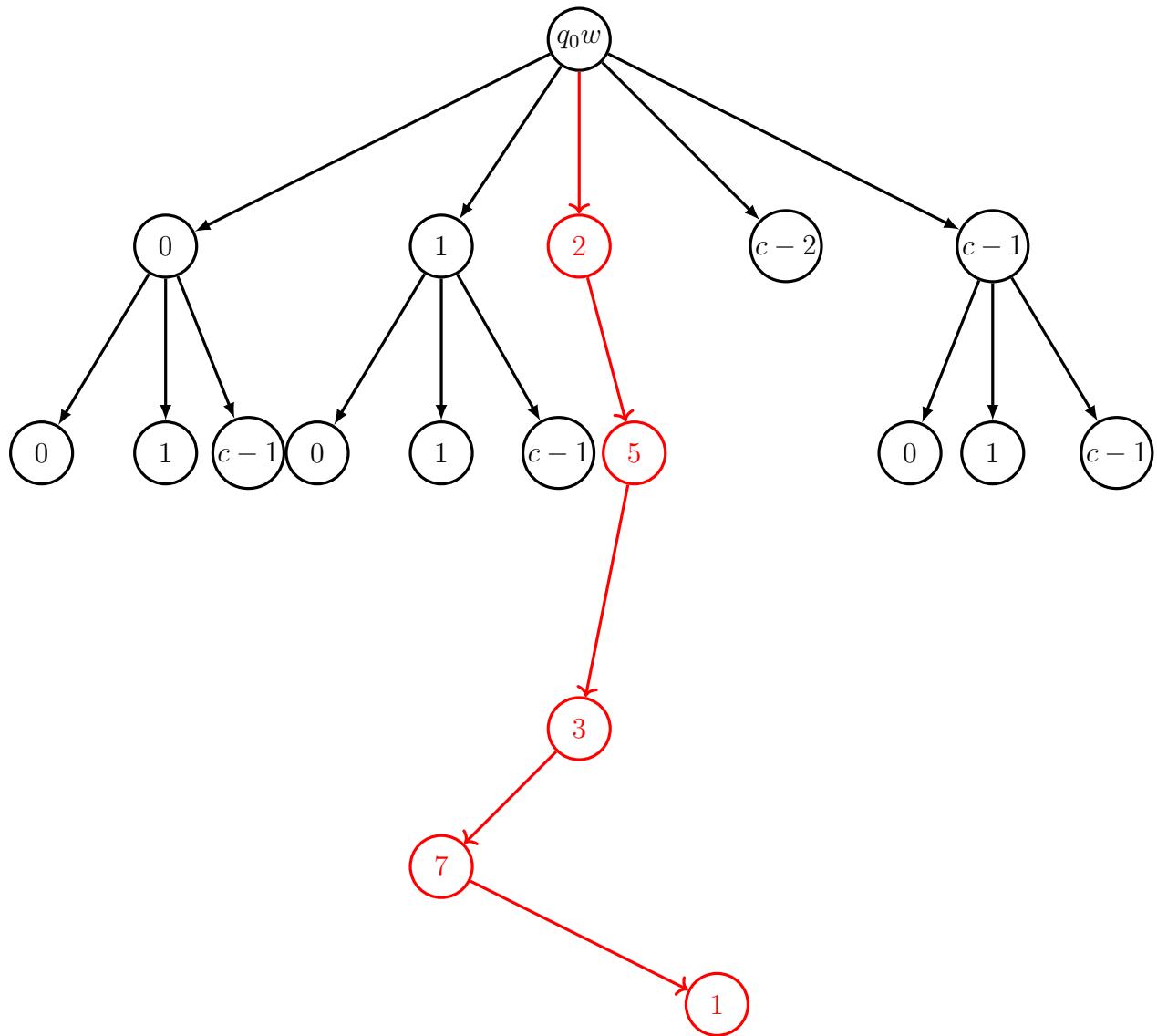
$$, |\Delta(q, \alpha)| = j < C \text{ וא}$$

אי לכל  $j \leq k \leq C - 1$

.  $k = (q_{\text{rej}}, \alpha, S)$  קבוע



- נשים לב כי שינוי זה לא משנה את השפה של  $N$ .



קידום לקסיקוגרפי:

0	00	10	...	$(C - 1)0$	000
1	01	11	...	$(C - 1)1$	001
2	02	12	...	$(C - 1)2$	002
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
$C - 1$	$0(C - 1)$	$1(C - 1)$	...	$(C - 1)(C - 1)$	$00(C - 1)$

הבנייה של  $D$

$D$  מכילה 3 סרטים:



$w$  על קלט  $D$

(1) מתחילה את המחרוזת בסרט 3 ל-0.

(2) מעתקה את  $w$  לסרט 2.

(3) מרים את  $N$  על  $w$  לפי המחרוזת בסרט 3.

• אם  $N$  קיבלה את  $w \Leftarrow D$  עוצרת ומקבלת.

• אחרת  $D$  מוחק את סרט 2, מקדמת את המחרוזת בסרט 3 לקסיקוגרפיה וחזרת לשלב 2)

