עבודה 2: ערכים עצמיים, מרחבים עצמיים, לכסון #2.

שאלה 1 יהי $T:\mathbb{R}_1[x]\to\mathbb{R}_1[x]$ אופרטור שמוגדר ע"י

$$T\left(a+bx\right)=a+b+2ax\ .$$

האם T לכסין? אם כן מצאו בסיס U של $\mathbb{R}_1[x]$ כך ש- $[T]_U$ מטריצה אלכסונית.

שאלה 2 יהי $T:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2}$ אופרטור שמוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5a & 2b\\ a+c & 4d\end{pmatrix}\ .$$

מצאו בסיס U של $\mathbb{R}^{2\times2}$ כך ש- $[T]_U$ מטריצה אלכסונית.

שאלה 3 מצאו את הערכים עצמיים והמרחבים עצמיים של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$ ותנו את הריבוי אלגברי והריבוי גאומטרי שלהם.

שאלה 4 תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נגדיר

$$A_1=A-\alpha I$$

כאשר $\alpha\in\mathbb{F}$ סקלר. הוכיחו כי λ ערך עצמי של A אס"ם $\lambda-\alpha$ ערך עצמי של A_1.

שאלה 5 תהי I המטריצה היחידה של $\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו שקיים ערך עצמי אחד של I ומצאו את כל הוקטורים עצמיים של I.

שאלה 6 הוכיחו או הפריכו: תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. אם A לכסינה ו- B לכסינה אז $A+B$ לכסינה.

שאלה 7 תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו את הטענות הבאות:

א) אם הסכום של האיברים בכל שורה שווה ל- $s\in\mathbb{R}$ אז s הוא ערך עצמי של A.

ב) אם הסכום של האיברים בכל עמודה שווה ל- $s\in\mathbb{R}$ אז s הוא ערך עצמי של A.

שאלה 8 תהיינה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה ו- $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה. עבור כל אחד של הטענות הבאות, הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית.

א) A^k לכסינה $k\in\mathbb{N}$, $k\geq1$.

ב) $A+I$ לכסינה.

ג) αA לכסינה, $\alpha\in\mathbb{F}$ סקלר.

ד) $A\cdot B$ לכסינה.

ה) $p(A)$ לכסינה, כאשר $p(x)$ פולינום.

ו) $U^{-1}AU$ לכסינה, $U \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כל מטריצה הפיכה.

ז) $A + \alpha I$ הפיכה, $\alpha \in \mathbb{F}$ סקלר ו- I המטריצה היחידה של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

שאלה 9 הוכיחו: אם A לכסינה והערכים עצמיים היחידים של A הם $\lambda = 1$ ו $\lambda = -1$, אז $A^{-1} = A$.

שאלה 10 תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו: אם A לכסינה ו- $\lambda \geq 0$ לכל ערך עצמי λ, אז קיימת $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש- $A = B^2$.

שאלה 11 תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. נניח כי קיים $k \geq 1 \in \mathbb{N}$ כך ש- $A^k = 0$. מצאו את כל האפשרויות של A כך ש- A לכסינה.
רמז: לכל D אלכסונית ו- P הפיכה: $(PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$.

שאלה 12 תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מצורה

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

כאשר B ו- C מטריצות ריבועיות.

א) הוכיחו כי $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)p_C(\lambda)$.

ב) אם b וקטור עצמי של B ו- c וקטור עצמי של C. הוכיחו כי $\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$ וקטורים עצמיים של A.

שאלה 13 תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ לכסינה. נניח כי קיים $k \geq 1 \in \mathbb{N}$ כך ש- $A^k = I$ כאשר I המטריצה היחידה של $\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו:

א) $A^2 = I$.

ב) אם k אי-זוגי, אז $A = I$.

רמז: אם $k \geq 1$ מספר טבעי, ה- k השורשים של אחד (כלומר הפתרונות של $z^k = 1$) הם $z = e^{2\pi mi/k}$ $m = 0, 1, 2, \ldots, k-1$.

שאלה 14 נניח ש- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. נניח ש- $\lambda \in \mathbb{C}$ ערך עצמי של A ששייך לוקטור עצמי u. הוכיחו כי $\bar{\lambda}$ ערך עצמי של A ששייך לוקטור עצמי $\bar{u}$.

תשובות

שאלה 1 נבחור בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_1[x]$:

$$E=\{1,x\}\ .$$

מטריצה המייצגת הסטנדרטי של T:

$$[T]_E=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}$$

הערכים עצמיים:

$\lambda_1=2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda_2=-1$ מריבוי אלגברי 1.

הוקטורי עצמיים הם:

$$[u_1]_E=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_E=1+x\ ,\qquad [u_2]_E=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}_E=-1+2x\ .$$

קיימים 2 וקטורים עצמיים בת"ל לכן T לכסין. נבנה את הבסיס

$$U=\{u_1=1+x,\qquad u_2=-1+2x\}\ .$$

המטריצה המייצגת $[T]_U$ לפי הבסיס U אלכסונית:

$$[T]_U=\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}\ .$$

שאלה 2

נבחור בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_1[x]$:

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}\ .$$

מטריצה המייצגת הסטנדרטי של T:

$$[T]_E=\begin{pmatrix}5&0&1&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}$$

הערכים עצמיים:

$\lambda_1=5$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda_2=4$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda_3=2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda_4=1$ מריבוי אלגברי 1.

הוקטורי עצמיים הם:

$$[u_1]_E = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}_E \qquad = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$[u_2]_E = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}_E \qquad = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \ ,$$

$$[u_3]_E = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}_E \qquad = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \ ,$$

$$[u_4]_E = \begin{pmatrix}-1\\0\\4\\0\end{pmatrix}_E \qquad = \begin{pmatrix}-1&0\\4&0\end{pmatrix} \ .$$

קיימים 4 וקטורים עצמיים בת"ל לכן T לכסין. נבנה את הבסיס

$$U = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \ , u_2 = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \ , u_3 = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \ , u_4 = \begin{pmatrix}-1&0\\4&0\end{pmatrix} \right\} \ .$$

המטריצה המייצגת $[T]_U$ לפי הבסיס U אלכסונית:

$$[T]_U = \begin{pmatrix}5&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix} \ .$$

<u>שאלה 3</u> ערכים עצמיים:

$\lambda_1 = i$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda_2 = 1$ מריבוי אלגברי 1.

המרחב עצמי השייך של $\lambda = i$ הוא

$$V_i = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\} \ , \qquad \dim(V_i) = 1 \ .$$

המרחב עצמי של $\lambda = 1$:

$$V_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\} \ , \qquad \dim(V_1) = 1 \ .$$

<u>שאלה 4</u> נניח ש λ ע"ע של A ששייך לו"ע u:

$$Au = \lambda u \ .$$

אז
$$(A-\alpha I)u=(\lambda-\alpha)u \ .$$
ז"א $\lambda-\alpha$ ערך עצמי של $A-\alpha I$.

נניח ש $\lambda-\alpha$ ע"ע של $A-\alpha I$ ששייך לו"ע w:
$$(A-\alpha I)w=(\lambda-\alpha)w \ .$$
ז"א
$$Aw-\alpha w=\lambda w-\alpha w \ . \tag{1*}$$
$w\neq\bar{0}$ בי הוא וקטור עצמי, לכן מ (1*) נובע כי
$$Aw=\lambda w \ ,$$
ז"א λ ערך עצמי של A.

שאלה 5 פולינום אופפיני של I:
$$p_I(\lambda)=|\lambda I-I|=|(\lambda-1)\cdot I|=(\lambda-1)^n|I|=(\lambda-1)^n \ .$$
השורש היחיד הוא $\lambda=1$ מריבוי אלגברי n לכן ל- I יש ערך עצמי 1.

לכל וקטור ב- $u\in\mathbb{R}^n$ אשר לא שווה לוקטור האפס:
$$I\cdot u=1\cdot u$$
כלומר כל וקטור ב- $\mathbb{R}^n$ חוץ מהוקטור האפס הוא וקטור עצמי של I.

שאלה 6 טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:
$$A=\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\end{pmatrix} \ , \qquad B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix} \ .$$
A משולשית לכן הערכים עצמיים שווים לאיברי האלכסון: $\lambda=2$ ו- $\lambda=-1$. הערכים עצמיים ממשיים ושונים לכן A לכסינה מעל $\mathbb{R}$. B אלכסונית.
$$A+B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$
הפולינום אופייני של $A+B$ הוא. $p_{A+B}(\lambda)=(\lambda-1)^2$ לכן ל- $A+B$ יש ערך עצמי אחד: $\lambda=1$ מריבוי אלגברי 2. המרחב עצמי הוא:
$$V_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$$
$\dim V_1=1<2$, כלומר הריבוי גיאומרטי פחות מהריבוי אלגברי, לכן $A+B$ לא לכסינה.

שאלה 7

נרשום $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{nn}\end{pmatrix}$.

א) נגדיר $u=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n$. אז

$$A\cdot u=\begin{pmatrix}a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{1n}\\a_{21}+a_{22}+\ldots+a_{2n}\\\vdots\\a_{n1}+a_{n2}+\ldots+a_{nn}\end{pmatrix}$$

נתון כי סכום האיברים בכל שורה שווה ל-s, כלומר

$$a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{1n}=s\ ,\qquad a_{21}+a_{22}+\ldots+a_{2n}=s\ ,\qquad \cdots\qquad a_{n1}+a_{n2}+\ldots+a_{nn}=s\ .$$

לכן

$$A\cdot u=\begin{pmatrix}a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{1n}\\a_{21}+a_{22}+\ldots+a_{2n}\\\vdots\\a_{n1}+a_{n2}+\ldots+a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\s\\\vdots\\s\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\ .$$

ז"א קיבלנו כי $Au=su$. לכן u וקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי s.

ב) נגדיר $w=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{1\times n}$. אז

$$w\cdot A=\begin{pmatrix}a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{n1}\\a_{12}+a_{22}+\ldots+a_{n2}\\\vdots\\a_{1n}+a_{2n}+\ldots+a_{nn}\end{pmatrix}$$

נתון כי סכום האיברים בכל עמודה שווה ל-s, כלומר

$$a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{n1}=s\ ,\qquad a_{12}+a_{22}+\ldots+a_{n2}=s\ ,\qquad \cdots\qquad a_{1n}+a_{2n}+\ldots+a_{nn}=s\ .$$

לכן

$$w\cdot A=\begin{pmatrix}a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{n1}\\a_{12}+a_{22}+\ldots+a_{n2}\\\vdots\\a_{1n}+a_{2n}+\ldots+a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s&s&\cdots&s\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\ .$$

ז"א קיבלנו כי

$$wA=sw\ .$$

נשחלף:

$$(wA)^t=s\cdot w^t\qquad\Rightarrow\qquad A^t\cdot w^t=s\cdot w^t\ .$$

קיבלנו ש- s ערך עצמי של A^t ששייך לוקטור עצמי $w^t=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$. אם s ערך עצמי של A אז s גם ערך עצמי של A, כנדרש.

<u>שאלה 9</u> A לכסינה אז קיימת P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש-

$$A = PDP^{-1}$$

ובפרט האיברים באלכסון של D הם הערכים עצמיים של A ועמודות P הן הוקטורים עצמיים של A. הערכים עצמיים היחידים של A הם 1 ו- -1, לכן

$$D = \text{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right)$$

כאשר $\lambda_i = \pm 1$. נקח את ההופכית של A:

(*) $$A^{-1} = \left(PDP^{-1}\right)^{-1} = PD^{-1}P^{-1} \ .$$

ההופכית של מטריצה אלכסונית היא פשוט

$$D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n}\right) \ .$$

$\lambda_i = \pm 1$ לכן $\frac{1}{\lambda_i} = \lambda_i$ ולכן

$$D^{-1} = \text{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right) = D \ .$$

נציב ב- (*) ונקבל

$$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = PDP^{-1} = A \ .$$

<u>שאלה 10</u> A לכסינה, לכן קיימת D אלכסונית ו- P הפיכה כך ש-

(1*) $$A = PDP^{-1}$$

בפרט $D = \text{diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$ כאשר $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ הערכים עצמיים של A.
$\lambda_i \geq 0$ לכל $n \geq i \geq 1$ לכן השורש $\sqrt{\lambda_i}$ קיים לכל $n \geq i \geq 1$, לכן המטריצה $D' = \text{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)$ קיימת, ו-

(2*) $$D'^2 = D \ .$$

נגדיר

$$B = PD'P^{-1}$$

כאשר P אותה מטריצה שמופיע ב- (1*). P הפיכה ו- D' אלכסונית, לכן לפי הנוסחה $\left(PD'P^{-1}\right)^k = PD'^kP^{-1}$,

$$B^2 = PD'^2P^{-1}$$

נציב $D'^2 = D$ ונקבל

$$B^2 = PDP^{-1} = A \ .$$

לכן מצאנו $B = PD'P^{-1}$ כך ש- $B^2 = A$.

<u>שאלה 14</u>

$$A \cdot u = \lambda u$$

נקח את הצמוד ונקבל

$$\bar{A} \cdot \bar{u} = \bar{\lambda}\bar{u} \ .$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אז $\bar{A} = A$ ונקבל

$$A \cdot \bar{u} = \bar{\lambda}\bar{u} \ .$$

מש"ל.