

## חדו"א 2

מועד א' טור ב'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר, ד"ר אבנר סגל

תשפ"ג סמסטר ב'

השאלון מכיל עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

**בהצלחה!**

### הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

### חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס ( עמודים בפורמט A4), מצורפים לשאלון.

### אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לענות על שאלות 1-4.

**שאלה 1 (25 נקודות)** הסדרה  $a_n$  נתונה על ידי נוסחת הנסיגה הבאה

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right), \quad a_1 = 3.$$

(א) (10 נק') הוכיחו כי לכל  $n$  מתקיים  $a_n \geq 1$ .  
 רמז: לכל  $x, y \geq 0$  מתקיים  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ .

(ב) (10 נק') הוכיחו כי הסדרה  $a_n$  מונוטונית יורדת.

(ג) (5 נק') הוכיחו כי הסדרה  $a_n$  מתכנסת וחשבו את גבולה.

**שאלה 2 (25 נקודות)**

(א) (10 נק') הוכיחו או הפריכו באמצעות דוגמא נגדית את הטענה הבאה:

אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ו-  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  טורים מתבדרים, אז  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n)$  טור מתבדר.

(ב) (15 נק') מצאו את תחום ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2 3^{2n}}$$

וקבעו באילו נקודות בתחום ההתכנסות הוא מתכנס בהחלט.

**שאלה 3 (25 נקודות)**

(א) (7 נק') חשבו את שטח המשולש  $ABC$  ואת נפח הפירמידה  $ABCD$  כאשר

$$A(2, 1, 2), B(1, 1, 1), C(0, 2, 1), D(3, -1, -1).$$

(ב) (18 נק') רשמו את משוואת המישור העובר דרך הנקודה  $P(3, 1, 2)$  ומאונך לשני המישורים

$$2x + y - z = 4, \quad x - 2y + z = 1.$$

**שאלה 4 (25 נקודות)** מצאו את ההיטל של הנקודה  $P(-1, 2, 1)$  על המישור  $x - 2y + 2z = 4$ , ובנוסף חשבו את

המרחק בין הנקודה למישור ואת השיקוף של  $P$  ביחס למישור.

## פתרונות

### שאלה 1 (25 נקודות)

(א) (10 נק') נוכיח את הטענה באינדוקציה.  
בסיס: עבור  $n = 1$  מתקיים

$$a_1 = 3 \geq 1.$$

בסיס: נניח כי  $a_n \geq 1$ . אם כן, מתקיים (לפי אי-השוויון ברמז) כי

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right) \geq \sqrt{a_n \frac{1}{a_n}} = 1$$

(ב) (10 נק') מכיוון ש-  $a_n \geq 1$  לכל  $n$ , מתקיים כי

$$\frac{1}{a_n} \leq 1 \leq a_n \Rightarrow a_n + \frac{1}{a_n} \leq 2a_n \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right) \leq a_n$$

כנדרש.

(ג) (5 נק') מהסעיפים הקודמים,  $a_n$  סדרה מונוטונית יורדת ומתקיים כי  $1 \leq a_n \leq 3$  לכל  $n$ . כלומר, הסדרה חסומה ומונוטונית ולכן מתכנסת. נסמן

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$$

ומכאן שמתקיים

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \left( L + \frac{1}{L} \right)$$

כלומר,

$$2L^2 = L^2 + 1 \Rightarrow L^2 = 1 \Rightarrow L = \pm 1.$$

מכיוון שהסדרה  $a_n$  היא סדרה חיובית, הגבול שלה הוא בהכרח אי-שלילי. מכאן  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

### שאלה 2 (25 נקודות)

(א) (10 נק') הטענה אינה נכונה, כדוגמא נגדית, נתבונן בטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

כלומר, נבחר  $a_n = b_n = \frac{1}{n}$ . הטור הזה מתבדר (זהו הטור ההרמוני). אך מצד שני, הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

שהוא הטור 2-ההרמוני הוא טור מתכנס.

**(ב) (15 נק')** תחילה, נציב  $z = x + 1$  ונקבל את טור החזקות

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 3^{2n}}$$

ונחשבת רדיוס ההתכנסות של טור זה באמצעות נוסחת קושי

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 3^{2n}} = 9 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = 9.$$

עלכן, הטור מתכנס (בהחלט) בקטע  $-9 < z < 9$ . כעת, נבדוק את התכנסות הטור בקצוות הקטע. אם נציב  $z = 9$  בטור נקבל את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n^2 3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

וזהו טור חיובי מתכנס.

מצד שני, לאחר הצבה של  $z = -9$  נקבל את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-9)^n}{n^2 3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

שהוא טור מתכנס בהחלט (על פי המקרה הקודם).

לסיכום, הטור המקורי מתכנס בהחלט בקטע  $-9 \leq x + 1 \leq 9$ , שהוא הקטע  $-10 \leq x \leq 8$ , ומתבדר מחוצה לו.

### שאלה 3 (25 נקודות)

**(א) (7 נק')** שטח המשולש נתון על ידי

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |(-1, 0, -1) \times (-2, 1, -1)| = \frac{1}{2} |(1, 1, -1)| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ונפח הפירמידה נתון על ידי

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}| = \frac{1}{6} |(1, 1, -1) \cdot (1, -2, -3)| = \frac{1}{3}.$$

**(ב) (18 נק')** בכדי שהמישור יהיה מאונך לשני המישורים הנתונים, הנורמל שלו צריך להיות מאונך לוקטורים  $(1, -2, 1)$  ו-  $(2, 1, -1)$  (הנורמלים של המישורים הנתונים בשאלה). על כן, ניתן לבחור את הנורמל של המישור להיות

$$\vec{n} = (2, 1, -1) \times (1, -2, 1) = (-1, -3, -5) .$$

עלכן, משוואת המישור נתונה על ידי

$$-1 \cdot (x - 3) - 3 \cdot (y - 1) - 5 \cdot (z - 2) = 0 \Rightarrow x + 3y + 5z - 16 = 0 .$$

**שאלה 4 (25 נקודות)** ההיטל של  $P$  על המישור זה נקודת החיתוך בין המישור לבין אנך לו העובר דרך  $P$ . וקטור הכיוון של אנך זה הוא הנורמל למישור  $\vec{n} = (1, -2, 2)$  ולכן האנך דרך  $P$  נתון על ידי ההצגה הפרמטרית

$$M(t) = (-1 + t, 2 - 2t, 1 + 2t) .$$

ונקודת החיתוך שלו עם המישור נתונה על ידי

$$(-1+t) - 2(2-2t) + 2(1+2t) = 4 \Rightarrow 9t = 7 \Rightarrow t = \frac{7}{9} \Rightarrow M\left(t = \frac{7}{9}\right) = Q\left(\frac{-2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{23}{9}\right) .$$

המרחק של  $P$  מהמישור נתון על ידי  $|\vec{PQ}|$  או על ידי הנוסחה

$$d = \frac{|-1 - 4 + 2 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{7}{3} .$$

אתהשיקוף ניתן למצוא על ידי הצבה של  $2t = \frac{14}{9}$  בהצגה הפרמטרית של הישר

$$M\left(\frac{14}{9}\right) = P_*\left(\frac{5}{9}, \frac{-10}{9}, \frac{37}{9}\right) .$$