תרגילים 2: מקסמין ודואפול

שאלה 1 מצאו את כל וקטורי האסטרטגיות הרציונליים במשחק הבא:

I \ II	L	R
H	$2,3$	$1,5$
T	$0,0$	$4,1$

שאלה 2 הוכיחו כי לא קיים פתרון באסטרטגיות השולטות חזק יחיד במשחק הבא:

I \ II	A	B
c	$4,8$	$5,10$
d	$6,20$	$3,7$

שאלה 3 כיצד תמליצו לשחקנים לשחק במשחק הבא, אם השחקנים לא בהכרח רציונליים?

I \ II	A	B	C	D
α	$2,13$	$4,8$	$6,5$	$8,2$
β	$6,4$	$2,3$	$3,8$	$8,4$
γ	$0,9$	$7,7$	$2,7$	$14,8$
δ	$4,0$	$0,4$	$4,6$	$6,0$

שאלה 4 במשחק הבא שהוא משחק שני שחקנים סכום אפס, ודאו כי הווקטור אסטרטגיות המקסמין של המשחק הוא גם שיווי המשקל של המשחק.

I \ II	A	B	C
α	$30,-30$	$-50,50$	$-20,20$
β	$10,-10$	$40,-40$	$10,-10$
γ	$60,-60$	$-30,30$	$-50,50$

שאלה 5 מצאו את כל וקטורי האסטרטגיות הרציונליים במשחקים הבאים:

א)

I \ II	L	R
T	$9,5$	$5,3$
B	$8,6$	$8,4$

ב)

I \ II	a	b	c	d
T	$6,2$	$5,3$	$7,6$	$2,8$
B	$8,5$	$6,9$	$4,6$	$4,7$

ג)

I \ II	a	b	c	d
T	$-1,-20$	$-7,-7$	$-1,2$	$-5,8$
M	$27,20$	$13,-2$	$21,2$	$13,-1$
B	$-5,20$	$-3,5$	$7,-1$	$3,-4$

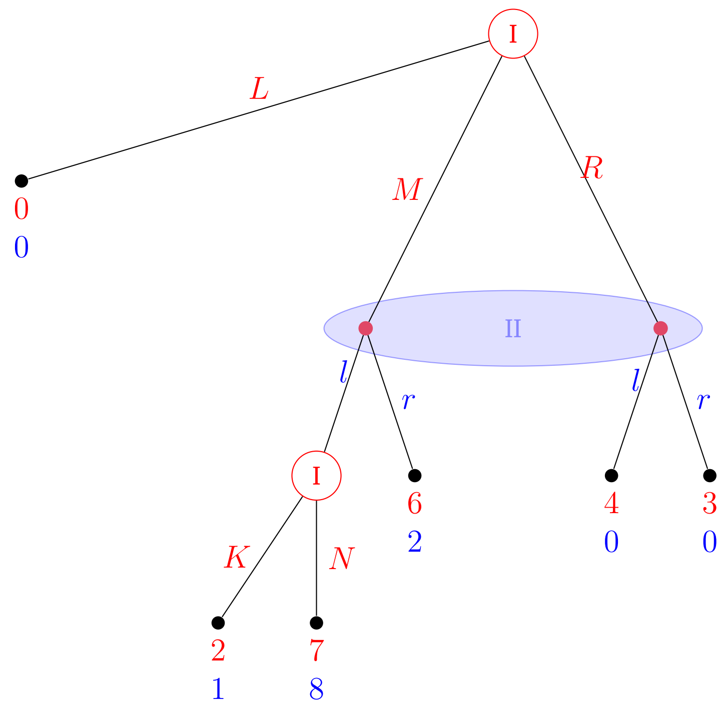
ד)

I \ II	a	b	c	d
α	$3,7$	$0,13$	$4,5$	$5,3$
β	$5,3$	$4,8$	$4,3$	$3,7$
γ	$4,5$	$3,7$	$4,5$	$5,3$
δ	$4,-1$	$2,5$	$1,2$	$3,2$

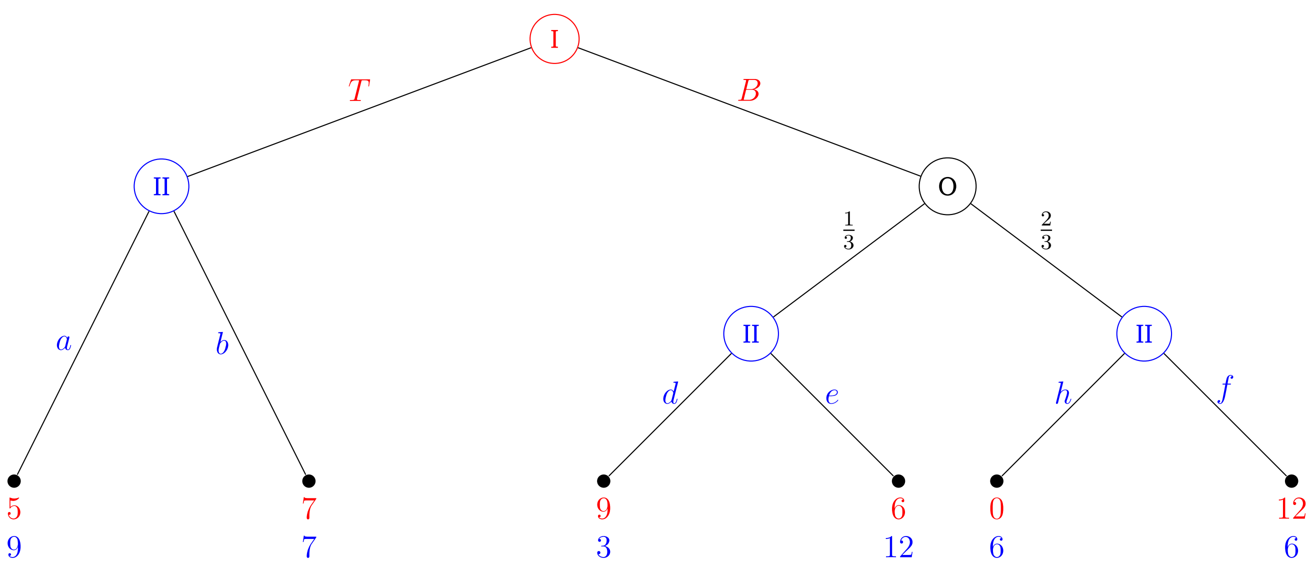
שאלה 6

מצאו את שיווי המשקל במשחק הבאים:

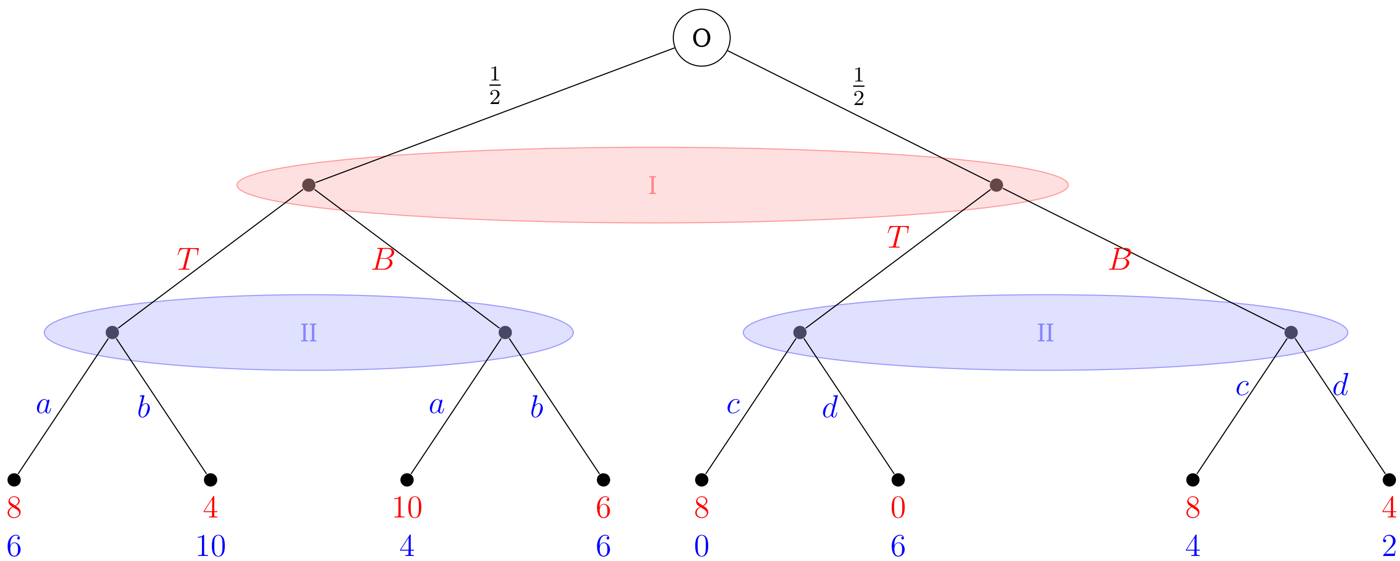
א)


I
L
M
R
0
0
II
l
r
l
r
I
6
2
4
0
3
0
K
N
2
1
7
8

ב)


I
T
B
II
O
1/3
2/3
a
b
II
II
d
e
h
f
5
9
7
7
9
3
6
12
0
6
12
6

ג)



שאלה 7 לכל אחד מהמשחקים הבאים, מצאו לשחקן I אסטרטגיה מקסמין ולשחקן II אסטרטגיה מינמקס.

א)

$I \backslash II$	a	b	c	d
α	8	4	8	4
β	2	5	3	8
γ	6	1	4	5

ב)

$I \backslash II$	a	b	c	d
α	6	4	2	1
β	5	3	3	0
γ	1	0	5	4
δ	2	-3	2	3

ג)

$I \backslash II$	a	b	c	d
α	3	6	5	5
β	5	5	5	5
γ	5	3	5	6
δ	6	5	5	3

שאלה 8 יהי $G((1,\dots,N),(s_1,\dots,s_i),(u_1,\dots,u_N))$ משחק N שחקנים.

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית.:
אם s^* שיווי משקל של המשחק אז לכל שחקן $i \in N$ האסטרטגיה s_i^* לא נשלטת על ידי אף אסטרטגיה אחרת.

שאלה 9 הערך של משחק שני שחקנים סכום אפס הנתון על ידי מטריצה A הוא 0. האם בהכרח הערך של משחק שני השחקנים סכום אפס הנתון על ידיד המטריצה $-A$ הוא 0? אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

שאלה 10 תהיינה A ו- B שתי קבוצות סופיות, ותהי $u: A \times B \to \mathbb{R}$ פונקציה כלשהי. הוכיחו כי

$$\max_{a\in A}\min_{b\in B} u(a,b) \le \min_{b\in B}\max_{a\in A} u(a,b)\ .$$

שאלה 11 האם הערך בכל אחד מהמשחקים הבאים קיים? אם כן, מה הוא ומה הן כל האסטרטגיות האופטימליות לכל אחד מהשחקנים. כרגיל, שחקן I הוא שחקן השורה ושחקן II הוא שחקן העמודה.

א)

$I \backslash II$	a	b	c
A	1	2	3
B	4	3	0

ב)

$I \backslash II$	a	b
A	2	2
B	1	3

ג)

II \ I	a	b
A	3	0
B	2	2
C	0	3

ד)

II \ I	a	b	c	d
A	$\frac{7}{2}$	3	4	12
B	7	5	6	13
C	4	2	3	0

שאלה 12 למשחק הבא, מצאו לשחקן I אסטרטגיה מקסמין ולשחקן II אסטרטגיה מינמקס. האם יש למשחק ערך?

II \ I	a	b	c	d
α	16	8	16	8
β	4	10	6	16
γ	12	2	8	10

שאלה 13 למשחק הבא, מצאו לשחקן I אסטרטגיה מקסמין ולשחקן II אסטרטגיה מינמקס. האם יש למשחק ערך?

II \ I	a	b	c	d
α	18	12	6	3
β	15	9	9	0
γ	3	0	15	12
δ	6	-9	6	9

שאלה 14 למשחק הבא, מצאו לשחקן I אסטרטגיה מקסמין ולשחקן II אסטרטגיה מינמקס. האם יש למשחק ערך?

I \ II	a	b	c	d
α	15	30	25	25
β	25	25	25	25
γ	25	15	25	30
δ	30	25	25	15

שאלה 15 תהיינה A ו- B שתי מטריצות עם תשלומים חיוביים (בעלות ממדים סופיים).

I \ II		
	A	0
	0	B

הוכיחו כי למשחק לא קיים ערך.

שאלה 16 נתון משחק קורנוט עם n שחקנים. יהי q_i כמות המוצר הנוצר על יד שחקן i, ויהי $Q = q_1 + \ldots + q_n$ כמות הכוללת בשוק. יהי

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & Q < a \\ 0 & Q \geq a \end{cases} .$$

נניח כי העלות לשחקן i לייצר כמות q_i היא $C_i(q_i) = cq_i$ כאשר $c < a$.

א) מצאו את שיווי המשקל של המשחק.

ב) מה קורה אם $n \to \infty$?

שאלה 17 נתון משחק דואפול עם פונקצית המחיר

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & Q < a \\ 0 & Q \geq a \end{cases} .$$

נניח ש פונקציות העלות של השחקנים לא סימטריות:

$$C_1(q_1) = c_1 q_1 \ , \qquad C_2(q_2) = c_2 q_2 \ .$$

א) חשבו את שיווי המשקל נאש אם $0 < c_i < \frac{a}{2}$ לכל שחקן.

ב) כיצד התשובה משתנה אם $c_1 < c_2 < a$ ו- $2c_2 > a + c_1$?

פתרונות

<u>שאלה 1</u> לפי ההנחות של שחקנים רציונליים, שחקן רציונלי לא ישחק אסטרטגיה שנשלטת. אם קיים שיווי משקל יחיד הוא פתרון באסטרטגיות השולטות חזק. אז נחפש שיווי המשקל של המשחק.

$I \backslash II$	L	R
H	$2,3$	$1,5$
T	$0,0$	$4,1$

שיווי משקל: $s^*=(T,R)$.
קיים שיווי משקל יחיד $\Leftarrow$ s^* הוא פתרון באסטרטגיות שולטות חזק.
שחקנים רציונליים משחקים רק אסטרטגיות ששולטות חזק לכן s^* הוא ווקטור האסטרטגיות הרציונלי היחיד של המשחק.

<u>שאלה 2</u> קיים פתרון באסטרטגיות השולטות חזק אם ורק אם קיים שיווי משקל יחיד.
נבדוק את השיווי משקל של המשחק.

$I \backslash II$	A	B
c	$4,8$	$5,10$
d	$6,20$	$3,7$

שיווי משקל: $s^*=(d,A)$ ו- $s^*=(c,B)$.
יש שני שיווי משקל.
ז"א לא קיים שיווי משקל יחיד $\Leftarrow$ לא קיים פתרון באסטרטגיות השולטות חזק יחיד.

<u>שאלה 3</u> אם השחקנים לא רציונליים אז מומלץ גם לשחקן 1 וגם לשחקן 2 לשחק לפי האסטרטגיה המקסמין שלהם.

$I \backslash II$	A	B	C	D	$\min\limits_{s_2\in S_2} u_1$
α	$2,13$	$4,8$	$6,5$	$8,2$	2
β	$6,4$	$2,3$	$3,8$	$8,4$	2
γ	$0,9$	$7,7$	$2,7$	$14,8$	0
δ	$4,0$	$0,4$	$4,6$	$6,0$	0
$\min\limits_{s_1\in S_1} u_2$	0	3	5	0	$\underline{v}_1=2$ \ $\underline{v}_2=5$

התשלום המקסמין של שחקן 1 הוא

$$\underline{v}_1=\max_{s_1\in S_1}\min_{s_2\in S_2} u_1=2\ .$$

לכן האסטרטגיה המקסמין של שחקן 1 היא α או β.

התשלום המקסמין של שחקן 2 הוא

$$\underline{\mathrm{v}}_2 = \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} u_2 = 5 \ .$$

לכן האסטרטגיה המקסמין של שחקן 1 היא C.

לכן מומלץ לשחקן 1 לשחק לפי אסטרטגיה α או β ומומלץ לשחקן 2 לשחק לפי אסטרטגיה C.

<u>שאלה 4</u> נחשב את שיווי המשקל של המשחק לפי שיטת התשובות הטובות ביותר:

$I \backslash II$	A	B	C
α	$30,-30$	$-50,50$	$-20,20$
β	$10,-10$	$40,-40$	$10,-10$
γ	$60,-60$	$-30,30$	$-50,50$

שיווי המשקל הוא

$$s^* = (\beta, C) \ .$$

$I \backslash II$	A	B	C	$\min\limits_{s_2\in S_2} u_1$
α	$30,-30$	$-50,50$	$-20,20$	-50
β	$10,-10$	$40,-40$	$10,-10$	10
γ	$60,-60$	$-30,30$	$-50,50$	-60
$\min\limits_{s_1\in S_1} u_2$	-60	-40	-10	$\underline{\mathrm{v}}_1 = 10$ / $\underline{\mathrm{v}}_2 = -10$

וקטור האסטרטגיות המקסמין של המשחק הוא (β, C).

<u>שאלה 5</u>

א)

$I \backslash II$	L	R
T	$9,5$	$5,3$
B	$8,6$	$8,4$

$\xrightarrow{R \prec L}$

$I \backslash II$	L
T	$9,5$
B	$\cancel{8,6}$

$\xrightarrow{B \prec T}$

$I \backslash II$	L
T	$9,5$

פתרון באסטרטגיות שולטות חזק: TL.

ב)

I \ II	a	b	c	d
T	$6,2$	$5,3$	$7,6$	$2,8$
B	$8,5$	$6,9$	$4,6$	$4,7$

$\xrightarrow{\substack{c\prec d\\ a\prec d}}$

I \ II	b	d
T	~~$5,3$~~	~~$2,8$~~
B	$6,9$	$4,7$

$\xrightarrow{T\prec B}$

I \ II	b	d
B	$6,9$	~~$4,7$~~

$\xrightarrow{d\prec b}$

I \ II	b
B	$6,9$

פתרון באסטרטגיות שולטות חזק: Bb.

ג)

I \ II	a	b	c	d
T	$-1,20$	$-7,-7$	$-1,2$	$-5,8$
M	$27,20$	$13,-2$	$21,2$	$13,-1$
B	$-5,20$	$-3,5$	$7,-1$	$3,-4$

$\xrightarrow{\substack{b\prec a\\ c\prec a\\ d\prec a}}$

I \ II	a
T	~~$-1,20$~~
M	$27,20$
B	~~$-5,20$~~

$\xrightarrow{\substack{T\prec M\\ B\prec M}}$

I \ II	a
M	$27,20$

פתרון באסטרטגיות שולטות חזק: Ma.

ד)

I \ II	a	b	c	d
α	$3,7$	$0,13$	$4,5$	$5,3$
β	$5,3$	$4,8$	$4,3$	$3,7$
γ	$4,5$	$3,7$	$4,5$	$5,3$
δ	$4,-1$	$2,5$	$1,2$	$3,2$

$\xrightarrow{\substack{c\prec b\\ d\prec b\\ a\prec b}}$

I \ II	b
α	~~$0,13$~~
β	$4,8$
γ	~~$3,7$~~
δ	~~$2,5$~~

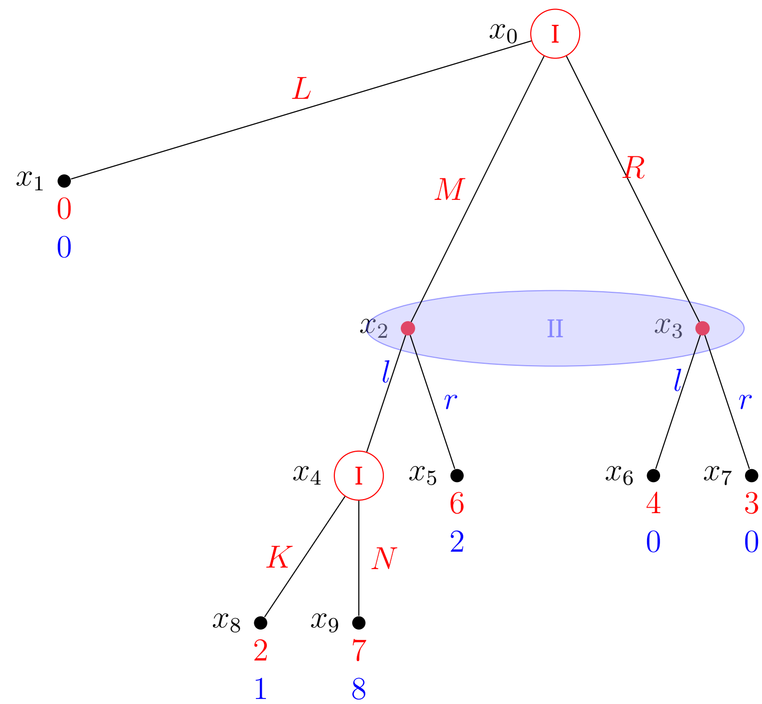
$\xrightarrow{\alpha\preceq\gamma}$

I \ II	b
β	$4,8$

פתרון באסטרטגיות שולטות חלש: βb.

שאלה 6

א)



קבוצות ידיעה של שחקן I:

$$x_0 : (L, M, R) \ , \qquad x_4 : (K, N) \ .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I = (L/K, M/K, R/K, L/N, M/N, R/N) \ .$$

קבוצות ידיעה של שחקן II:

$$x_2 x_3 : (l, r) \ .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן II:

$$S_{II} = (l, r) \ .$$

צורה אסטרטגית של המשחק:

I \ II	l	r
L/K	$0,0$	$0,0$
M/K	$2,1$	$6,2$
R/K	$4,0$	$3,0$
L/N	$0,0$	$0,0$
M/N	$7,8$	$6,2$
R/N	$4,0$	$3,0$

נחשב את התשובות הטובות ביותר של שחקן I לכל אסטרטגיה של שחקן II :

$I \backslash II$	l	r
L/K	$0,0$	$0,0$
M/K	$2,1$	$6,2$
R/K	$4,0$	$3,0$
L/N	$0,0$	$0,0$
M/N	$7,8$	$6,2$
R/N	$4,0$	$3,0$

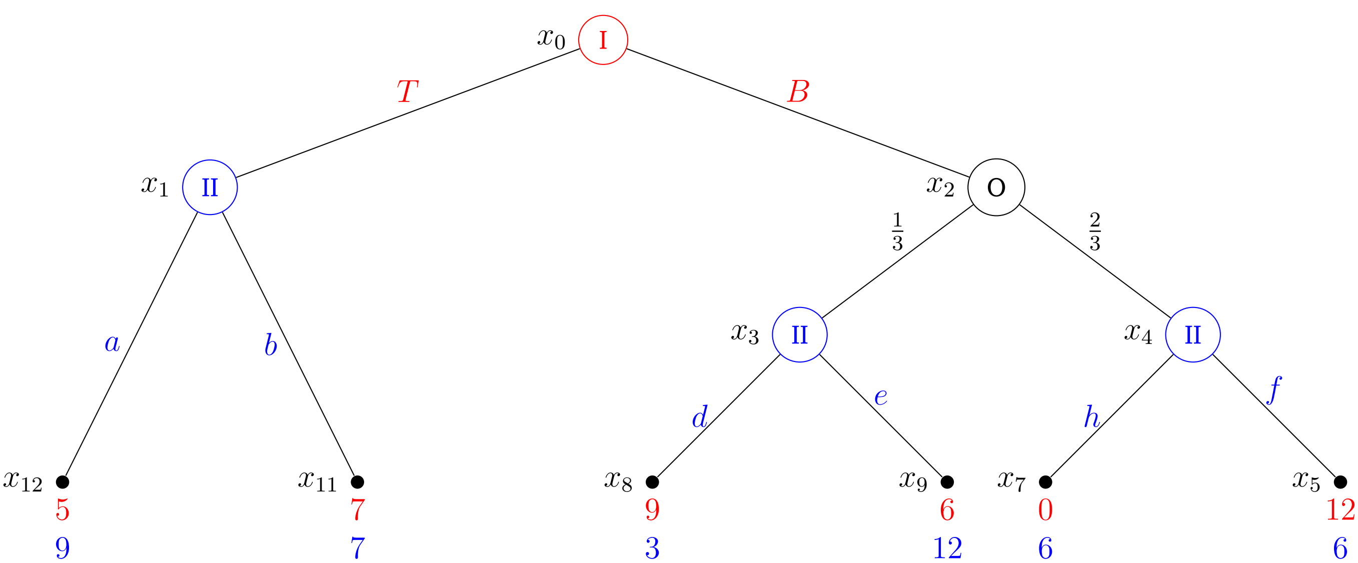
נחשב את התשובות הטובות ביותר של שחקן II לכל אסטרטגיה של שחקן I :

$I \backslash II$	l	r
L/K	$0,0$	$0,0$
M/K	$2,1$	$6,2$
R/K	$4,0$	$3,0$
L/N	$0,0$	$0,0$
M/N	$7,8$	$6,2$
R/N	$4,0$	$3,0$

לכן שיווי המשקל נאש של המשחק הם

$$s^* = (M/N, l) \ , \qquad s^* = (M/K, r) \ .$$

ב)



קבוצות ידיעה של שחקן I:

$$x_0 : (T,B)\ .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I = (T,B)\ .$$

קבוצות ידיעה של שחקן II:

$$x_1 : (a,b)\ , \qquad x_3 : (d,e)\ , \qquad x_4 : (h,f)\ .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן II:

$$S_{II} = (a/d/h\ ,\ a/d/f\ ,\ a/e/h\ ,\ a/e/f\ ,\ b/d/h\ ,\ b/d/f\ ,\ b/e/h\ ,\ b/e/f)\ .$$

$I \backslash II$	$a/d/h$	$a/d/f$	$a/e/h$	$a/e/f$
T	$5,9$	$5,9$	$5,9$	$5,9$
B	$\frac{1}{3}(9,3)+\frac{2}{3}(0,6)$	$\frac{1}{3}(9,3)+\frac{2}{3}(12,6)$	$\frac{1}{3}(6,12)+\frac{2}{3}(0,6)$	$\frac{1}{3}(6,12)+\frac{2}{3}(12,6)$

$I \backslash II$	$b/d/h$	$b/d/f$	$b/e/h$	$b/e/f$
T	$7,7$	$7,7$	$7,7$	$7,7$
B	$\frac{1}{3}(9,3)+\frac{2}{3}(0,6)$	$\frac{1}{3}(9,3)+\frac{2}{3}(12,6)$	$\frac{1}{3}(6,12)+\frac{2}{3}(0,6)$	$\frac{1}{3}(6,12)+\frac{2}{3}(12,6)$

$I \backslash II$	$a/d/h$	$a/d/f$	$a/e/h$	$a/e/f$	$b/d/h$	$b/d/f$	$b/e/h$	$b/e/f$
T	$5,9$	$5,9$	$5,9$	$5,9$	$7,7$	$7,7$	$7,7$	$7,7$
B	$3,5$	$11,5$	$2,8$	$10,8$	$3,5$	$11,5$	$2,8$	$10,8$

נחשב את התשובות הטובות ביותר של שחקן I לכל אסטרטגיה של שחקן II:

$I \backslash II$	$a/d/h$	$a/d/f$	$a/e/h$	$a/e/f$	$b/d/h$	$b/d/f$	$b/e/h$	$b/e/f$
T	$5,9$	$5,9$	$5,9$	$5,9$	$7,7$	$7,7$	$7,7$	$7,7$
B	$3,5$	$11,5$	$2,8$	$10,8$	$3,5$	$11,5$	$2,8$	$10,8$

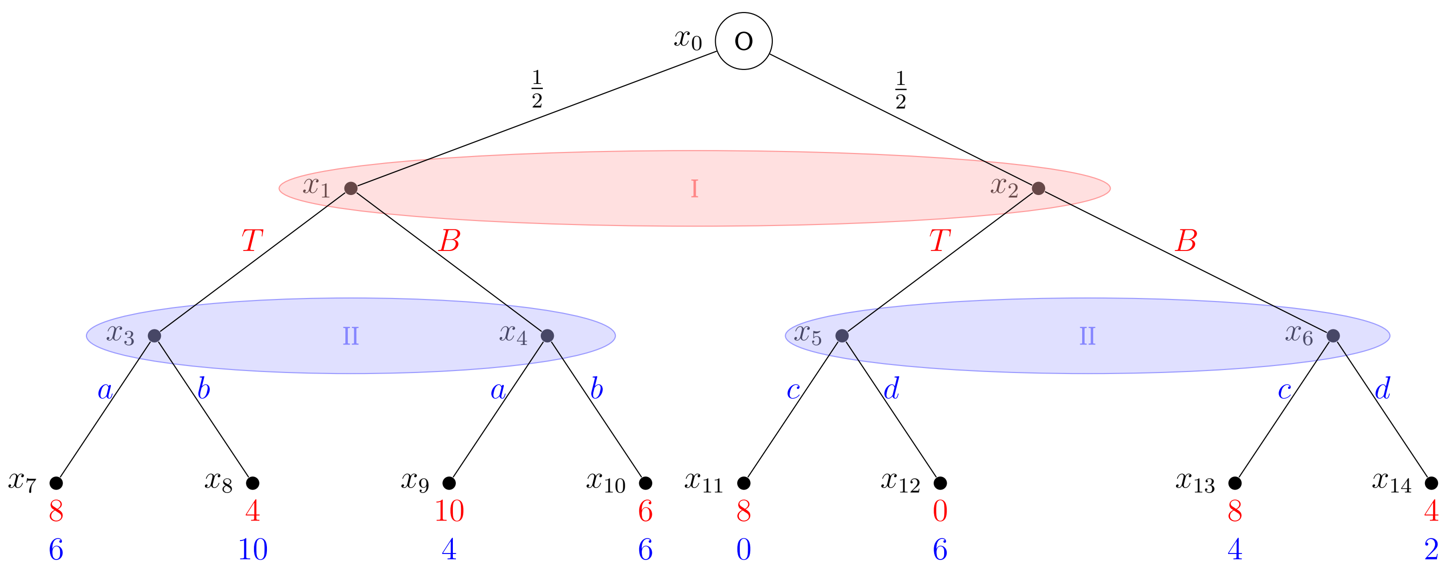
נחשב את התשובות הטובות ביותר של שחקן II לכל אסטרטגיה של שחקן I:

$I \backslash II$	$a/d/h$	$a/d/f$	$a/e/h$	$a/e/f$	$b/d/h$	$b/d/f$	$b/e/h$	$b/e/f$
T	$5,9$	$5,9$	$5,9$	$5,9$	$7,7$	$7,7$	$7,7$	$7,7$
B	$3,5$	$11,5$	$2,8$	$10,8$	$3,5$	$11,5$	$2,8$	$10,8$

לכן שיווי המשקל נאש של המשחק הם:

$$s^* = (T, a/d/h)\ , \qquad s^* = (T, a/e/h)\ , \qquad s^* = (B, a/e/f)\ , \qquad s^* = (B, b/e/f)\ .$$

ג)



קבוצות ידיעה של שחקן I:

$$x_1x_2 : (T, B)\ .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I = (T, B)\ .$$

קבוצות ידיעה של שחקן II:

$$x_3x_4 : (a, b)\ , \qquad x_5x_6 : (c, d)\ .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן II:

$$S_{II} = (a/c\ ,\ a/d\ ,\ b/c\ ,\ b/d)\ .$$

I \ II	a/c	a/d	b/c	b/d
T	$\frac{1}{2}(8,6)+\frac{1}{2}(8,0)$	$\frac{1}{2}(8,6)+\frac{1}{2}(0,6)$	$\frac{1}{2}(4,10)+\frac{1}{2}(8,0)$	$\frac{1}{2}(4,10)+\frac{1}{2}(0,6)$
B	$\frac{1}{2}(10,4)+\frac{1}{2}(8,4)$	$\frac{1}{2}(10,4)+\frac{1}{2}(4,2)$	$\frac{1}{2}(6,6)+\frac{1}{2}(8,4)$	$\frac{1}{2}(6,6)+\frac{1}{2}(4,2)$

I \ II	a/c	a/d	b/c	b/d
T	$(4,3)$	$(4,6)$	$(6,5)$	$(2,8)$
B	$(9,6)$	$(7,3)$	$(7,5)$	$(5,4)$

נחשב את התשובות הטובות ביותר של שחקן I לכל אסטרטגיה של שחקן II:

$I \backslash II$	a/c	a/d	b/c	b/d
T	$(4,3)$	$(4,6)$	$(6,5)$	$(2,8)$
B	$(9,6)$	$(9,3)$	$(9,5)$	$(5,4)$

נחשב את התשובות הטובות ביותר של שחקן II לכל אסטרטגיה של שחקן I:

$I \backslash II$	a/c	a/d	b/c	b/d
T	$(4,3)$	$(4,6)$	$(6,5)$	$(2,8)$
B	$(9,6)$	$(9,3)$	$(9,5)$	$(5,4)$

לכן שיווי המשקל נאש היחיד של המשחק הוא

$$s^* = (B, a/c) \ .$$

שאלה 7

א)

$I \backslash II$	a	b	c	d	$\min_{s_2\in S_2} u$
α	8	4	8	4	4
β	2	5	3	8	2
γ	6	1	4	5	1
$\max_{s_1\in S_2} u$	6	1	4	5	$\underline{v}=4$ / $\overline{v}=1$

אסטרטגיה מקסמין: α. אסטרטגיה מינמקס: b.

ב)

$I \backslash II$	a	b	c	d	$\min_{s_2\in S_2} u$
α	6	4	2	1	1
β	5	3	3	0	0
γ	1	0	5	4	0
δ	2	-3	2	3	-3
$\max_{s_1\in S_1} u$	6	4	5	4	$\underline{v}=1$ / $\overline{v}=4$

אסטרטגיה מקסמין: α. אסטרטגיה מינמקס: b או d.

ג)

$I \backslash II$	a	b	c	d	$\min\limits_{s_2\in S_2} u$
α	6	4	2	1	1
β	5	3	3	0	0
γ	1	0	5	4	0
δ	2	-3	2	3	-3
$\max\limits_{s_1\in S_1} u$	6	4	5	1	$\underline{\mathrm{v}} = 1$, $\overline{\mathrm{v}} = 1$

אסטרטגיה מקסמין: α. אסטרטגיה מינמקס: d.

ד)

$I \backslash II$	a	b	c	d	$\min\limits_{s_2\in S_2} u$
α	3	6	5	5	3
β	5	5	5	5	5
γ	5	3	5	6	3
δ	6	5	5	3	3
$\max\limits_{s_1\in S_1} u$	6	6	5	6	$\underline{\mathrm{v}} = 5$, $\overline{\mathrm{v}} = 5$

<u>שאלה 8</u> הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$I \backslash II$	a	b	c
A	$0,1$	$0,1$	$1,1$
B	$0,2$	$2,0$	$1,0$
C	$2,0$	$1,1$	$1,0$

נסמן את התשובות הטובות ביותר של כל השחקנים:

$I \backslash II$	a	b	c
A	$0,\underline{1}$	$0,\underline{1}$	$\underline{1},\underline{1}$
B	$0,\underline{2}$	$\underline{2},0$	$\underline{1},0$
C	$\underline{2},0$	$1,\underline{1}$	$\underline{1},0$

הווקטור אסטרטגיות (A,c) הוא שיווי המשקל היחיד של המשחק.

אך A נשלטת חזק על ידי C, ו- c נשלטת חזק על ידי a.

שאלה 9 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

תהי A מטירצה 2×2 של המשחק שני שחקנים סכום אפס הבא:

$I \backslash II$	L	R	$\min u$
T	0	1	0
B	0	2	0
$\max u$	0	2	

המשחק של המטריצה $-A$ הינו

$I \backslash II$	L	R	$\min u$
T	0	-1	-1
B	0	-2	-2
$\max u$	0	-1	

הערך של המשחק של המטריצה A הוא 0 בעוד הערך של המשחק של $-A$ הוא -1.

שאלה 10 נשים לב כי לפי ההגדרה של הערך המינימלי של קבוצה מתקיים

$$\min_{b'\in B} u\left(a,b'\right) \leq u\left(a,b\right) \qquad \forall b\in B,\ \forall a\in A\ .$$

ולפי ההגדרה של הערך המקסימלי של פונקציה מתקיים

$$u\left(a,b\right) \leq \max_{a'\in A} u\left(a',b'\right) \qquad \forall b\in B,\ \forall a\in A\ .$$

מכאן

$$\min_{b'\in B} u\left(a,b'\right) \leq u\left(a,b\right) \leq \max_{a'\in A} u\left(a',b'\right)\ .$$

ולכן

$$\min_{b'\in B} u\left(a,b'\right) \leq \max_{a'\in A} u\left(a',b'\right) \qquad (*)$$

נשים לב כי הצד ימין לא תלוי על a. ז"א משוואה (*) מתקיימת לכל a. בפרט, ניתן לקחת את ה- a אשר ממקסם את הצד ימין והרי נקבל

$$\max_{a'\in A}\min_{b'\in B} u\left(a',b'\right) \leq \max_{a'\in A} u\left(a',b'\right) \qquad (\#)$$

כעת נשים לב כי הצד שמאל לא תלוי על b. ז"א משוואה (#) מתקיימת לכל b. בפרט, ניתן לקחת את ה- b אשר ממזער את הצד ימין והרי נקבל

$$\max_{a'\in A}\min_{b'\in B} u\left(a',b'\right) \leq \min_{b'\in B}\max_{a'\in A} u\left(a',b'\right)$$

מש"ל.

שאלה 11

א)

$I \backslash II$	a	b	c	$\min u$
A	1	2	3	1
B	4	3	0	0
$\max u$	4	3	3	

$3 = \bar{\mathrm{v}} \neq \underline{\mathrm{v}} = 1$ לכן למשחק אין ערך.

ב)

$I \backslash II$	a	b	$\min u$
A	2	2	2
B	1	3	1
$\max u$	2	3	

$\bar{\mathrm{v}} = 2 = \underline{\mathrm{v}}$ לכן הערך של המשחק הוא $\mathrm{v} = 2$. האסטרטגיה האופטימלית לשחקן I היא A. האסטרטגיה האופטימלית לשחקן II היא a.

ג)

$I \backslash II$	a	b	$\min u$
A	3	0	0
B	2	2	2
C	0	3	0
$\max u$	3	3	

$3 = \bar{\mathrm{v}} \neq \underline{\mathrm{v}} = 2$ לכן למשחק אין ערך.

ד)

$I \backslash II$	a	b	c	d	$\min u$
A	$\frac{7}{2}$	3	4	12	3
B	7	5	6	13	5
C	4	2	3	0	0
$\max u$	7	5	6	13	

$\bar{v} = 5 = \underline{v}$ לכן הערך של המשחק הוא 5. האסטרטגיה האופטימלית של שחקן I היא B. האסטרטגיה האופטימלית של שחקן II היא b.

שאלה 12

א)

$I \backslash II$	a	b	c	d	$\min\limits_{s_2 \in S_2} u$
α	16	8	16	8	8
β	4	10	6	16	4
γ	12	2	8	10	2
$\max\limits_{s_1 \in S_1} u$	16	10	16	16	$\underline{v} = 8$, $\bar{v} = 10$

$$\underline{v} = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u = 8 \ , \qquad \bar{v} = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u = 10 \ .$$

אסטרטגיה מקסמין של שחקן I היא α.
אסטרטגיה מינמקס של שחקן II היא b.

$10 = \bar{v} \neq \underline{v} = 8$ לכן למשחק אין ערך.

שאלה 13

$I \backslash II$	a	b	c	d	$\min\limits_{s_2 \in S_2} u$
α	18	12	6	3	3
β	15	9	9	0	0
γ	3	0	15	12	0
δ	6	-9	6	9	-9
$\max\limits_{s_1 \in S_1} u$	18	12	15	12	$\underline{v} = 3$, $\bar{v} = 12$

$$\underline{\mathrm{v}} = \max_{s_1\in S_1} \min_{s_2\in S_2} u = 3 \ , \qquad \bar{\mathrm{v}} = \min_{s_2\in S_2} \max_{s_1\in S_1} u = 12 \ .$$

אסטרטגיה מקסמין של שחקן I היא α.
אסטרטגיה מינמקס של שחקן II היא b או d.

$3 = \underline{\mathrm{v}} \neq \bar{\mathrm{v}} = 12$ לכן למשחק אין ערך.

שאלה 14

$I \backslash II$	a	b	c	d	$\min_{s_2\in S_2} u$
α	15	30	25	25	15
β	25	25	25	25	25
γ	25	15	25	30	15
δ	30	25	25	15	15
$\max_{s_1\in S_1} u$	30	30	25	30	$\underline{\mathrm{v}} = 25$ / $\bar{\mathrm{v}} = 25$

$$\underline{\mathrm{v}} = \max_{s_1\in S_1} \min_{s_2\in S_2} u = 25 \ , \qquad \bar{\mathrm{v}} = \min_{s_2\in S_2} \max_{s_1\in S_1} u = 25 \ .$$

אסטרטגיה מקסמין של שחקן I היא β.
אסטרטגיה מינמקס של שחקן II היא c.

$\underline{\mathrm{v}} = 25 = \bar{\mathrm{v}}$ לכן למשחק יש ערך 25.

שאלה 15

תהיינה A ו- B מטריצות בעלות תשלומים חיוביים. אזי עבור

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline A & 0 \\ \hline 0 & B \\ \hline \end{array} \ .$$

מתקיים $T_{ij} \geq 0$.

בכל עמודה יש לפחות אפס אחד, לכן

$$\underline{\mathrm{v}} = \max_i \min_j T_{ij} = \max_i 0 = 0 \ .$$

מצד שני מכיוון ש- A ו- B מטריצות חיוביות, אזי קיים לפחות איבר חיובי אחד בכל שורה. לפיכך

$$\bar{\mathrm{v}} = \min_j \max_i T_{ij} > 0 \ .$$

לכן $\underline{\mathrm{v}} = 0 < \bar{\mathrm{v}}$ ז"א $\underline{\mathrm{v}} \neq \bar{\mathrm{v}}$ ולכן למשחק אין ערך.

שאלה 16 הרווח לשחקן i נתון עלי ידי פונקציית התשלום

$$\begin{aligned} u_i(q_1,\ldots,q_i,\ldots,q_n) =& P(Q)q_i - C_i = (P(Q)-c)\,q_i \\ =& (a-Q-c)\,q_i \\ =& (a-q_1-q_2-\ldots-q_i-\ldots-q_n-c)\,q_i \end{aligned}$$

הווקטור אסטרטגיות $(q_1^*,\ldots,q_i^*,\ldots,q_n^*)$ יהיה שיווי המשקל אם s_i^* תשובה טובה ביותר לשחקן i לכל $1\leq i\leq n$. כלומר אם

$$u_i\left(q_1^*,\ldots,q_i^*,\ldots,q_n^*\right) = \max_{0\leq q_i\leq\infty} u_i\left(q_1^*,\ldots,q_i,\ldots,q_n^*\right) \ .$$

התשלום u_i מקבל ערך מקסימלי בנקודה שבה $(u_i)'_{q_i}=0$.

$$\begin{aligned} (u_i)'_{q_i} =& (a-q_1-\ldots-q_i-\ldots-q_n-c)-q_i \\ =& a-q_1-\ldots-2q_i-\ldots-q_n-c \\ \stackrel{!}{=}& 0 \\ \Rightarrow \quad a-c =& q_1+\ldots+2q_i^*+\ldots+q_n \end{aligned}$$

לכל $q\leq i\leq n$. מכיוון שאנחנו נקבל אותה משוואה לכל i, אז בהכרח הערכים של ה- q_i זהים ושווים ל-

$$q_1^*=q_2^*=\ldots=q_i^*=\ldots=q_n^* \ .$$

נציב זה במשוואה הקודם ואז נקבל

$$(n+1)q_i^* = a-c \qquad \Rightarrow \qquad q_i^* = \frac{a-c}{n+1} \ .$$

שאלה 17 פונקצית המחיר:

$$P(Q)=a-Q \ ,$$

כאשר $Q=q_1+q_2$. הרווח לשחקן 1 הוא

$$u_1=(P-c_1)q_1=(a-Q-c_1)q_1=(a-q_1-q_2-c_1)q_1 \ ,$$

והרווח לשחקן 2 הוא

$$u_2=(P-c_2)q_2=(a-Q-c_2)q_2=(a-q_1-q_2-c_2)q_2 \ .$$

בנקודת שיווי משקל:

$$(u_1)'_{q_1}=(a-c_1-q_1-q_2)-q_1=a-c_1-2q_1-q_2\stackrel{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad q_1^*=\frac{a-c_1-q_2}{2} \ .$$

בנקודת שיווי משקל:

$$(u_2)'_{q_1}=(a-c_2-q_1-q_2)-q_2=a-c_2-2q_1-q_2\stackrel{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad q_2^*=\frac{a-c_2-q_1}{2} \ .$$

נציב התנאי השני בתנאי הראשון:

$$q_1^* = \frac{a-c_1-q_2}{2} = q_1^* = \frac{a-c_1-\left(\frac{a-c_2-q_1}{2}\right)}{2} = \frac{a}{4} - \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4} + \frac{q_1^*}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{3q_1^*}{4} = \frac{a}{4} - \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4} = \frac{a-2c_1+c_2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad q_1^* = \frac{a-2c_1+c_2}{3} \ .$$

נציב זה בביטוי ל- q_2^* ונקבל

$$q_2^* = \frac{a-2c_2+c_1}{3} \ .$$

$$2c_2 > a+c_1 \quad \Rightarrow \quad a-2c_2+c_1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a-2c_2+c_1}{3} < 0 \ .$$

לכן בהכרח $q_2 = 0$ בגלל כמות לא יכולה להיות שלילית.