שיעור 5
מישורים במרחב תלת ממדי

5.1 הגדרה ומשוואת המישור במרחב

מישור הוא משטח דו-ממדי שטוח במרחב xyz.

הגדרה 5.1 משוואת המישור

המשוואה המתארת מישור בכללי במרחב xyz הינה

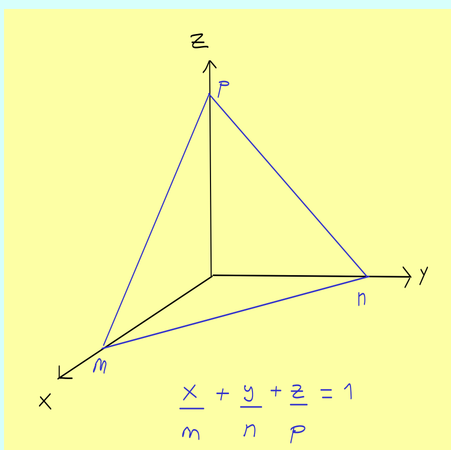
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

כאשר לפחות אחד המקדמים A, B, C אינו אפס.

ניתן לרשום משוואת המישור בצורה

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1 \ .$$

בצורה הזאת המספרים m, n, p הם הנקודות חיתוך של המישור עם הצירי x, y, z בהתאמה כמתואר בשרטוט.



מישור מוגדר ע"י שלוש נקודות שבהן הוא עובר, בתנאי ששלושת הנקודות לא על אותו ישר (כלומר לא קולינאריות).

דוגמה 5.1

מצאו את משוואת המישור העובר דרך הנקודות $P(2, 0, 4)$, $Q(1, 1, 1)$, $R(0, 0, 6)$.

פתרון:

נציב את הנקודות במשוואת המישור $Ax+By+Cz+D=0$:

$$\begin{cases} 2A+4C+D &= 0 \\ A+B+C+D &= 0 \\ 6C+D &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D &= -6C \\ 2A+4C-6C &= 0 \\ A+B+C-6C &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D &= -6C \\ A &= C \\ A+B &= 5C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D &= -6C \\ A &= C \\ B &= 4C \end{cases}$$

$$Cx+4Cy+Cz-6C=0 \qquad \Rightarrow \qquad x+4y+z-6=0\ .$$

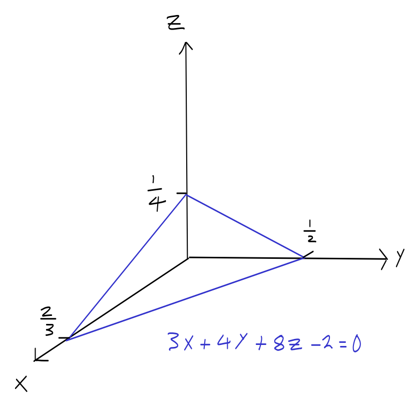
דוגמה 5.2

שרטטו את המישור $3x+4y+8z-2=0$.

פתרון:

נרשום את משוואת המישור בצורה קנונית.

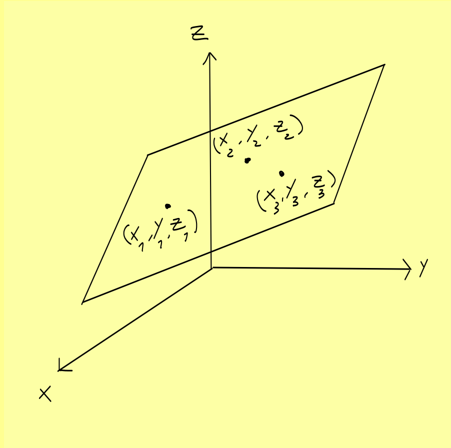
$$3x+4y+8z-2=0 \quad \Rightarrow \quad 3x+4y+8z=2 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}x+2y+4z=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\frac{2}{3}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}+\frac{z}{\frac{1}{4}}=1$$



משפט 5.1 משוואת המישור העובר דרך שלוש נקודות

משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנתונות (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) ו- (x_3,y_3,z_3) ניתן לרשום בצורה:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0\ .$$



דוגמה 5.3

מצאו את משאוות המישור העובר דרך הנקודות $(1,1,1)$, $(1,2,2)$, $(2,3,4)$ ושרטטו אותו.

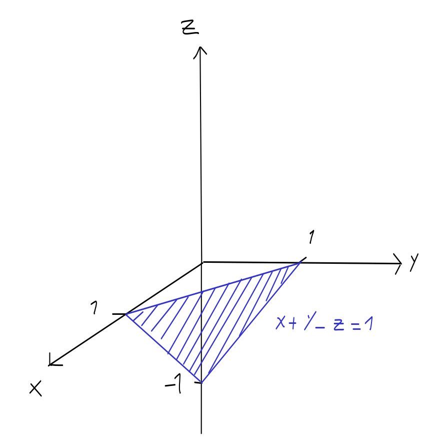
פתרון:

$$(x_1,y_1,z_1)=(1,1,1)\ ,\quad (x_2,y_2,z_2)=(1,2,2)\ ,\quad (x_3,y_3,z_3)=(2,3,4)\ .$$

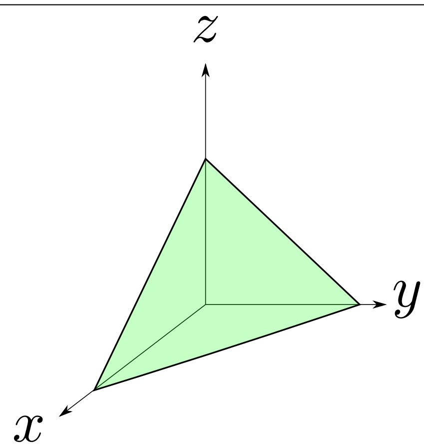
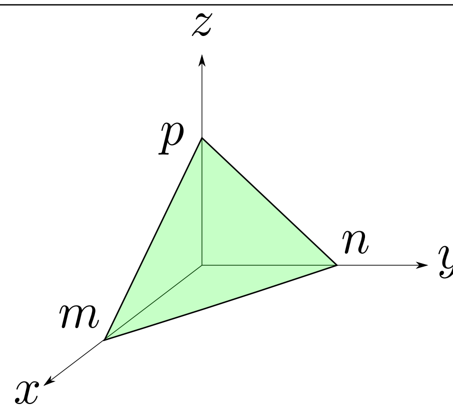
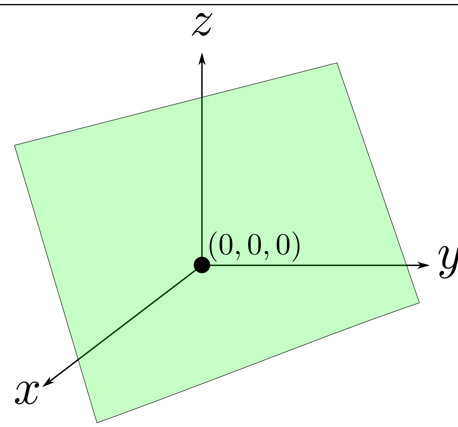
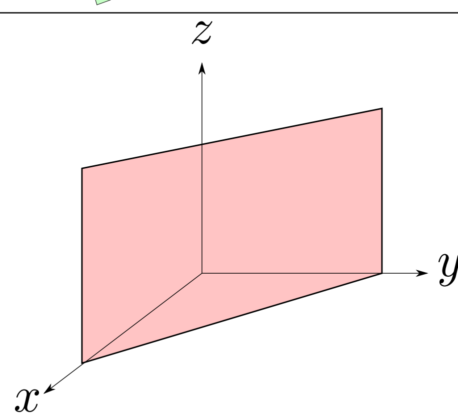
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0\ .$$

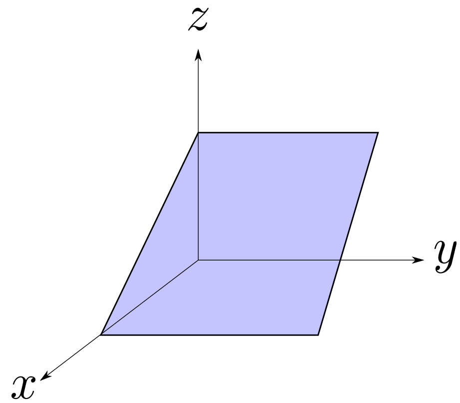
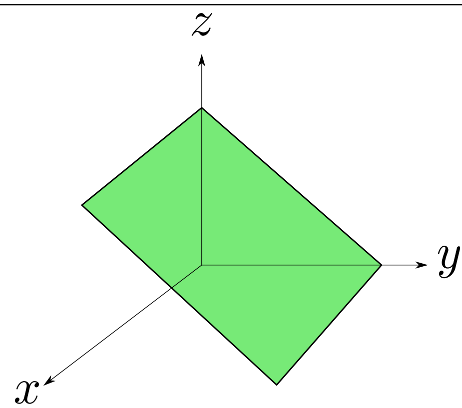
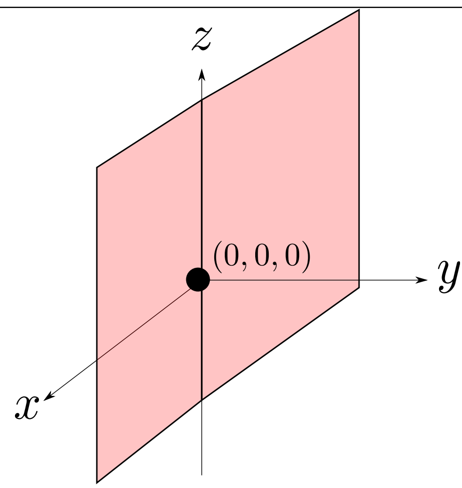
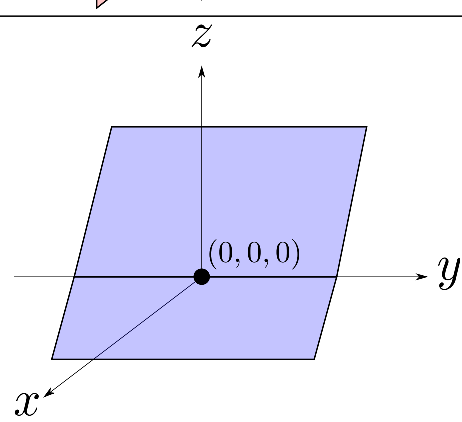
$$x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=0$$

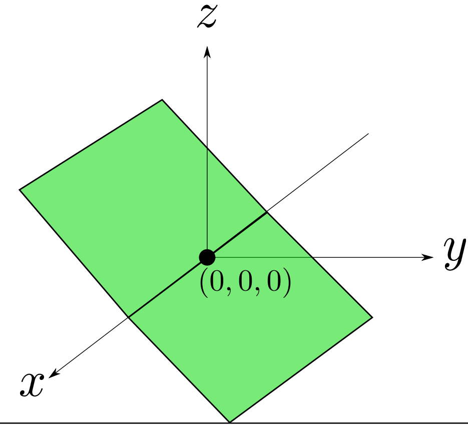
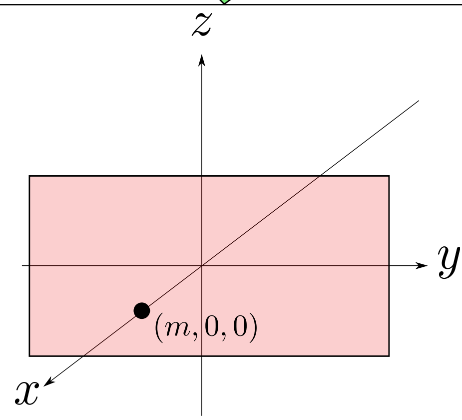
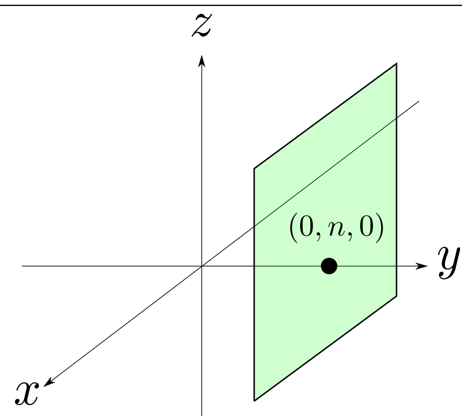
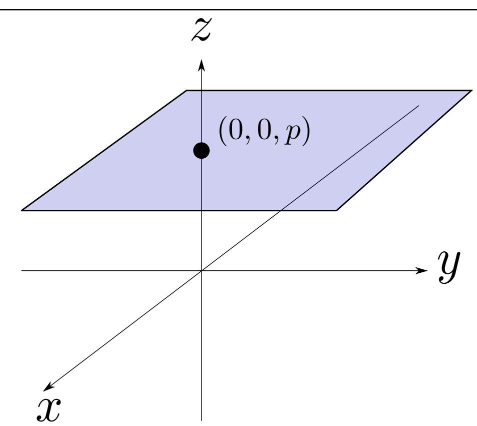
$$x+y-z-1=0$$



5.2 מצבים מיוחדים של מישורים במערכת צירים xyz

$Ax+By+Cz+D=1$		$A,B,C,D\neq 0$. המישור לא עובר את הראשית הצירים.
$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$		$m,n,p\neq 0$. המישור לא עובר את הראשית הצירים. אין הבדל איכותי בתרשים הזה והתרשים לעיל. השני ביטוים האלה מציגים אותו מישור.
$Ax+By+Cz=0$		המישור עובר דרך הראשית הצירים. המישור חותך את כל אחד של הצירים בנקודה $(0,0,0)$.
$Ax+By+D=0$		$A,B,D\neq 0$. משתנה ה- z לא משתתף במשוואת המישור. המישור לא חותך את ציר ה-z ולא עובר דרך הראשית הצירים.

$Ax + Cz + D = 0$		$A, C, D \neq 0$. משתנה ה- y לא משתתף במשוואת המישור. המישור לא חותך את ציר ה-y ולא עובר דרך הראשית הצירים.
$By + Cz + D = 0$		$B, C, D \neq 0$. משתנה ה- x לא משתתף במשוואת המישור. המישור לא חותך את ציר ה-x ולא עובר דרך הראשית הצירים.
$Ax + By = 0$		$A, B \neq 0$. משתנה ה- z לא משתתף במשוואת המישור. המישור עובר דרך הראשית הצירים. המישור מכיל את ציר ה-z.
$Ax + Cz = 0$		$A, C \neq 0$. משתנה ה- y לא משתתף במשוואת המישור. המישור עובר דרך הראשית הצירים. המישור מכיל את ציר ה-y.

$By+Cz=0$		$B,C\neq 0$. משתנה ה- x לא משתתף במשוואת המישור. המישור עובר דרך הראשית הצירים. המישור מכיל את ציר ה-x.
$Ax+D=0 \Leftrightarrow x=m$		$A,D\neq 0$. משתני y ו- z לא משתתפים במשוואת המישור. המישור חותך את ציר ה-x ב- $x=m$. המישור מקביל למישור yz.
$By+D=0 \Leftrightarrow y=n$		$B,D\neq 0$. משתני x ו- z לא משתתפים במשוואת המישור. המישור חותך את ציר ה-x ב- $y=n$. המישור מקביל למישור xz.
$Cz+D=0 \Leftrightarrow z=p$		$C,D\neq 0$. משתני x ו- y לא משתתפים במשוואת המישור. המישור חותך את ציר ה-x ב- $z=p$. המישור מקביל למישור xy.

משפט 5.2 שטח משולש במישור xy

שטחו S של המשולש אשר קדקודיו הם בנקודות (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) הוא

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$

משפט 5.3 מרחק מנקודה למישור

המרחק d מהנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ למישור $Ax+By+Cz+D=0$ הוא

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

משפט 5.4 נפח הפירמידה המשולשת במרחב xyz

הנפח V של הפירמידה המשולשת אשר קדקודיה הם בנקודות (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3), (x_4,y_4,z_4), הוא

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}$$

5.3 דוגמאות

דוגמה 5.4

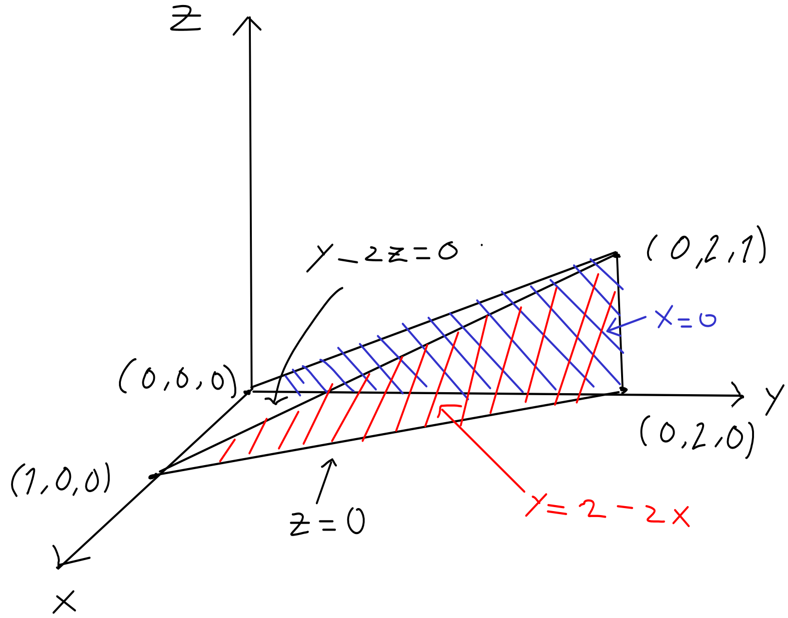
שרטטו את המישור המוגבל ע"י המישורים

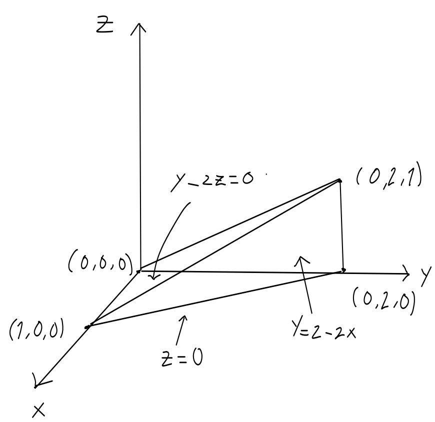
$$x=0\ ,\quad z=0\ ,\quad y-2z=0\ ,\quad y=2-2x\ .$$

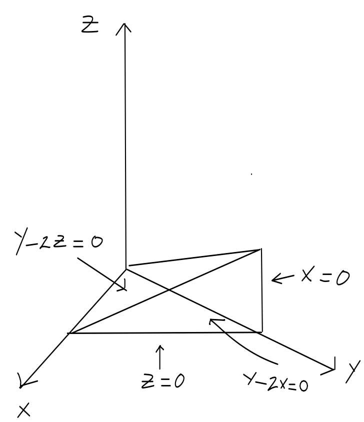
פתרון:
חיתוך בין שלושה מישורין יצא נקודה. אלו הן הקודקודים של הגוף:

$$\begin{cases} x &=0\\ z &=0\\ y-2x &=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad (0,2,0)\qquad\qquad \begin{cases} x &=0\\ z &=0\\ y-2z &=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad (0,0,0)$$

$$\begin{cases} z &=0\\ y-2z &=0\\ y &=2-2x\end{cases}\quad\Rightarrow\quad (1,0,0)\qquad\qquad \begin{cases} x &=0\\ y-2z &=0\\ y &=2-2x\end{cases}\quad\Rightarrow\quad (0,2,1)$$







דוגמה 5.5

שרטטו את הגוף במרחב xyz המוגבל ע"י המישורים

$$x=0\ ,\quad y=0\ ,\quad z=0\ ,\quad x+y=2\ ,\quad z=y+1\ .$$

פתרון:

- המישור $x+y=2$ מקביל לציר ה- z.
- המישור $z=y+1$ מקביל לציר ה- x.
- המישור $x=0$ הוא המישור yz.
- המישור $y=0$ הוא המישור xz.
- המישור $z=0$ הוא המישור xy.

נחפש את החיתוך של המישור $x+y=2$ עם המישור $x=0$:

$$x=0 \quad \to \quad y=2 \quad (0,2,z)\ .$$

נחפש את החיתוך של המישור $x+y=2$ עם המישור $y=0$:

$$y=0 \quad \to \quad x=2 \quad (2,0,z)\ .$$

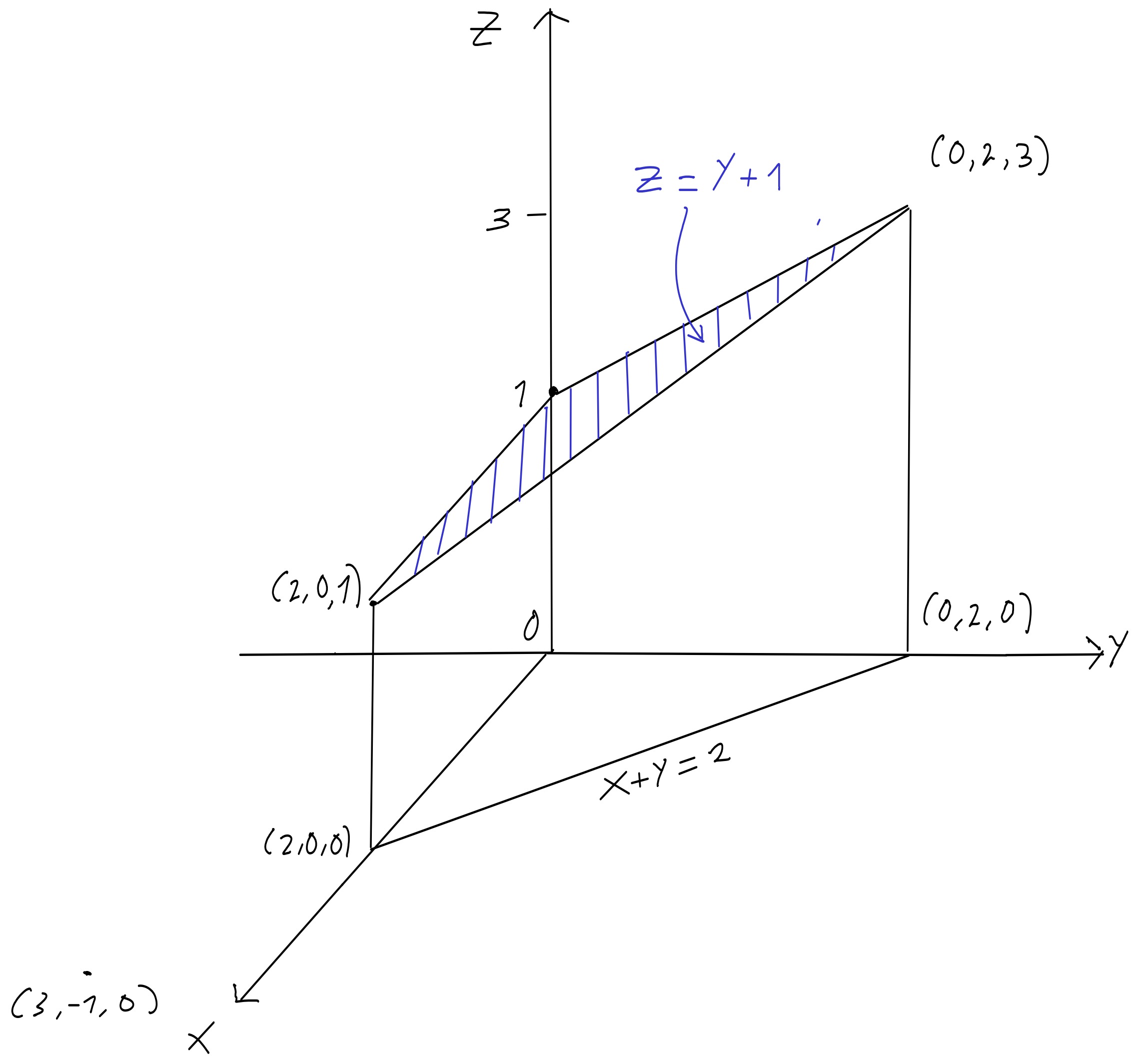
$$\left\{\begin{array}{rl} x+y & =2 \\ z & =y+1 \\ x & =0 \end{array}\right. \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} y & =2 \\ z & =3 \end{array}\right. \Rightarrow \quad (0,2,3)$$

$$\left\{\begin{array}{rl} x+y & =2 \\ z & =y+1 \\ y & =0 \end{array}\right. \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} z & =1 \\ x & =2 \end{array}\right. \Rightarrow \quad (2,0,1)$$

$$\left\{\begin{array}{rl} x+y & =2 \\ z & =y+1 \\ z & =0 \end{array}\right. \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} y & =-1 \\ x & =3 \end{array}\right. \Rightarrow \quad (3,0,-1)$$

$$\left\{\begin{array}{rl} z & =y+1 \\ y & =0 \end{array}\right. \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} z & =1 \end{array}\right. \Rightarrow \quad (x,0,1)$$

$$\left\{\begin{array}{rl} z & =y+1 \\ z & =0 \end{array}\right. \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} y & =-1 \end{array}\right. \Rightarrow \quad (x,-1,0)$$



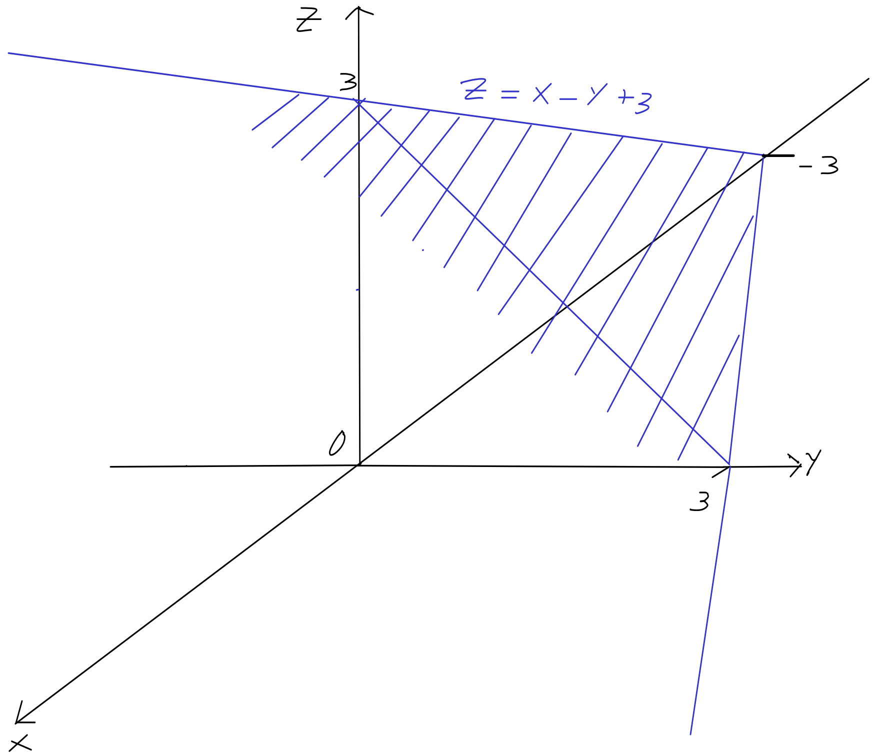
דוגמה 5.6

ציירו את הגוף המוגבל על ידי המישורים $z = x - y + 3$, $y = x$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

פתרון:

- המישור $z = 0$ הוא המישור xy.
- המישור $y = 0$ הוא המישור xz.
- המישור $x = 1$ מקביל למישור yz.
- המישור $y = x$ הוא המישור $x - y = 0$, מקביל לציר ה- z.
-

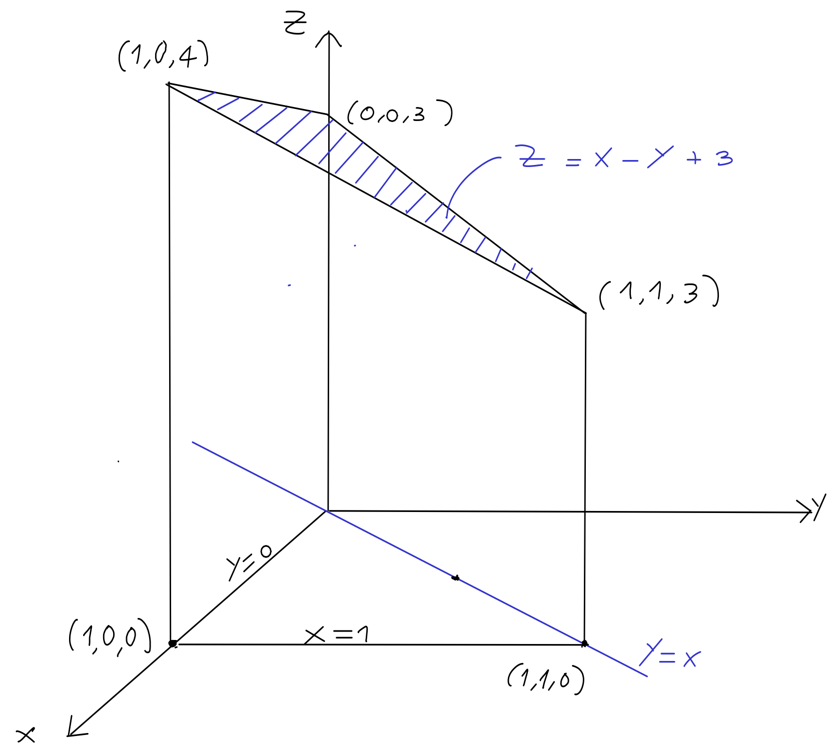
$$z = x - y + 3 \quad \Rightarrow \quad x - y - z = -3 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{-3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} \ .$$



$$\begin{cases} z &= x-y+3 \\ y &= 0 \\ x &= 1 \end{cases} \Rightarrow \qquad z=4$$

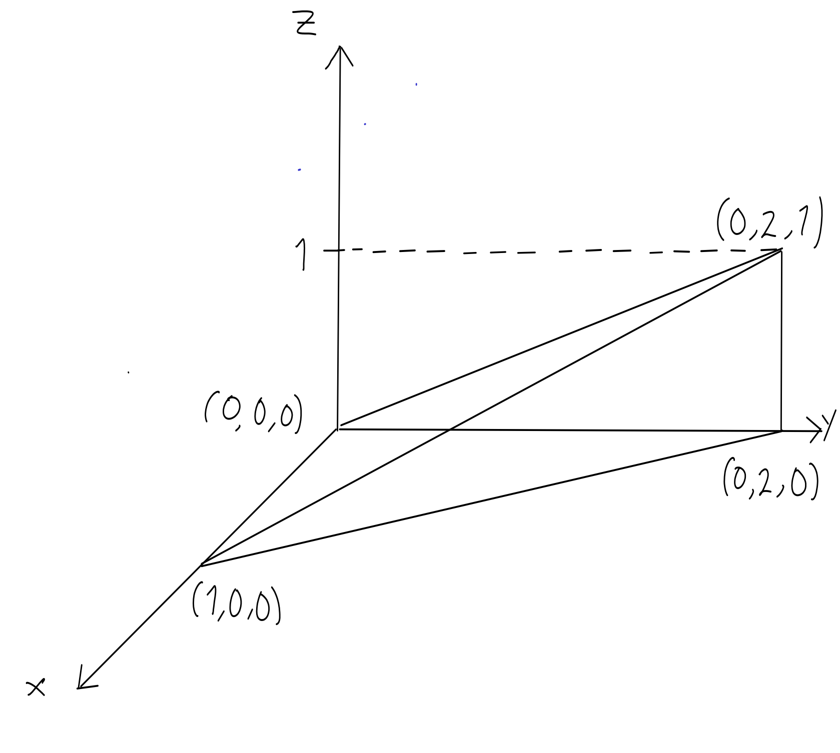
$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= x \\ z &= x-y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y &= 1 \\ z &= 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= x \\ z &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= 0 \end{cases}$$



דוגמה 5.7

מהן משוואות המישורים המגבילים את הגוף הבא:



פתרון:

יש לצורה הזאת ארבע פאות:

- מישור xy:
$$z=0\ .$$
מישור yz:
$$x=0\ .$$
- המישור שמכיל את $(0,0,0)$, $(0,2,1)$, $(1,0,0)$:
$$Ax+By+Cz+D=0\ .$$
נציב את הנקודה $(0,0,0)$ ונקבל $D=0$.
נציב את הנקודה $(1,0,0)$ ונקבל $A+D=0 \Leftarrow A=0$.
נציב את הנקודה $(0,2,1)$ ונקבל $2B+C=0 \Leftarrow C=-2B$. נבחור $B=1$, $\Leftarrow C=-2$. לכן משוואת המישור היא
$$y-2z=0$$
- המישור שמכיל את $(1,0,0)$, $(0,2,1)$, $(0,2,0)$:
$$Ax+By+Cz+D=0\ .$$

$$\left.\begin{array}{ccc}(0,2,1) & \Rightarrow & 2B+C+D=0\\ (0,2,0) & \Rightarrow & 2B+D=0\\ (1,0,0) & \Rightarrow & A+D=0\end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{array}{c}D=-A\\ A=2B\\ C=-2B-D=-A+A=0\end{array}\right\}$$
נבחר $B=1 \Leftarrow A=2 \Leftarrow D=-2$. לכן משוואת המישור היא
$$2x+y-2=0$$

משפט 5.5 משוואת המישור במרחב

משוואת המישור המאונך לוקטור $n=(A,B,C)$ העובר דרך הנקודה $M=(x_0,y_0,z_0)$ היא
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\ .$$
אם נשווה למשוואה $Ax+By+Cz+D=0$ נקבל ש- $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

n נקרא הנורמל למישור.

הוכחה: עבור הנקודה $P=(x,y,z)$ במישור מתקיים כי
$$n\cdot\overline{MP}=0$$
בגלל ש n מאונך למישור ו- $\overline{MP}$ מוכל מקביל למישור.
$$\Rightarrow \qquad A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0\ .$$
■

דוגמה 5.8

משוואת המישור המאונך לוקטור $n=(1,2,0)$ העובר דרך הנקודה $M=(-1,2,0)$ היא

$$1\cdot(x+1)+2\cdot(y-2)+3\cdot(z-0)=0 \qquad \Rightarrow \qquad x+2y+3z-3=0\ .$$

דוגמה 5.9

מצאו את משוואת המישור העובר דרך הנקודות $A=(1,2,3)$, $B=(1,1,1)$, $C=(-1,2,0)$.

פתרון:
הוקטור $n=\overline{AB}\times\overline{AC}$ מאונך למישור.

$$n=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & -1 & -2\\ -2 & 0 & -3\end{vmatrix}=(3,4,-2)\ .$$

לכן המישור נתון ע"י המשוואה:

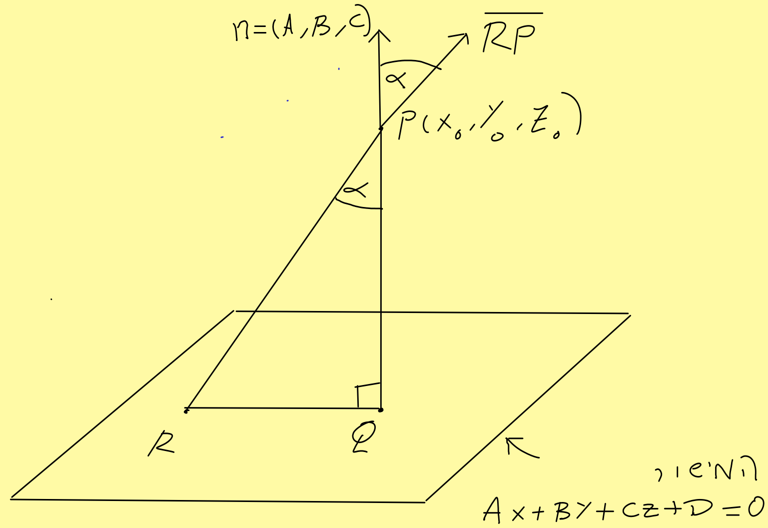
$$3(x-1)+4(y-2)-2(z-3)=0 \qquad \Rightarrow \qquad 3x+4y-2z-5=0\ .$$

משפט 5.6 מרחק מנקודה למישור

המרחק d מהנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ למישור $Ax+By+Cz+D=0$ הוא

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ .$$

הנקודה הקרובה ביותר במישור ל- P היא הנקודה שדרכה עובר ניצב למישור שעובר דרך P.



הוכחה: נסמן ב- Q את הנקודה על המישור שהיא הקרובה ביותר ל- P. ממשפט פיתגורס, $\overline{QP}$ מאונך למישור. נקח כל נקודה אחרת R במישור. PQR יוצרות משולש ישר זווית, כך ש- PR היתר ו- PQ קטע קצר מ- PR.

עבור נקודה כלשהי $R(x_1,y_1,z_1)$ על המישור, נסמן ב- α את הזווית בין $\overline{RP}$ ל- n.

$$\begin{aligned}|\overline{QP}| &= |\overline{RP}|\cos\alpha \\ &= \frac{|\overline{RP}|\cdot|n|\cdot\cos\alpha}{|n|} \\ &= \frac{\overline{RP}\cdot n}{|n|} \\ &= \frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ &= \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\end{aligned}$$

■

דוגמה 5.10

מצאו את המרחק בין $(1,-1,2)$ למישור $2x+y-z+3=0$ ומצאו את הנקודה במישור הקרובה ביותר ל $(1,-1,2)$.

פתרון:

המרחק הוא

$$d=\frac{|2\cdot1+1\cdot(-1)-1\cdot2+3|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt6}=\sqrt{\frac{2}{3}}\ .$$

הנורמל למישור הוא $(2,1,-1)$. כדי למצוא את הנקודה הקרובה ביותא על המישור, נרכיב את משוואת הישר המקביל לוקטור n שעובר דרך הנקודה $(1,-1,2)$:

$$(x+2t,y+t,z-t)=(1,-1,2)\qquad\Rightarrow\qquad\left.\begin{aligned}x&=1-2t\\ y&=-1-t\\ z&=2+t\end{aligned}\right\}$$

הנקודה (x,y,z) נמצא במישור לכן נציב אותה למשוואת המישור:

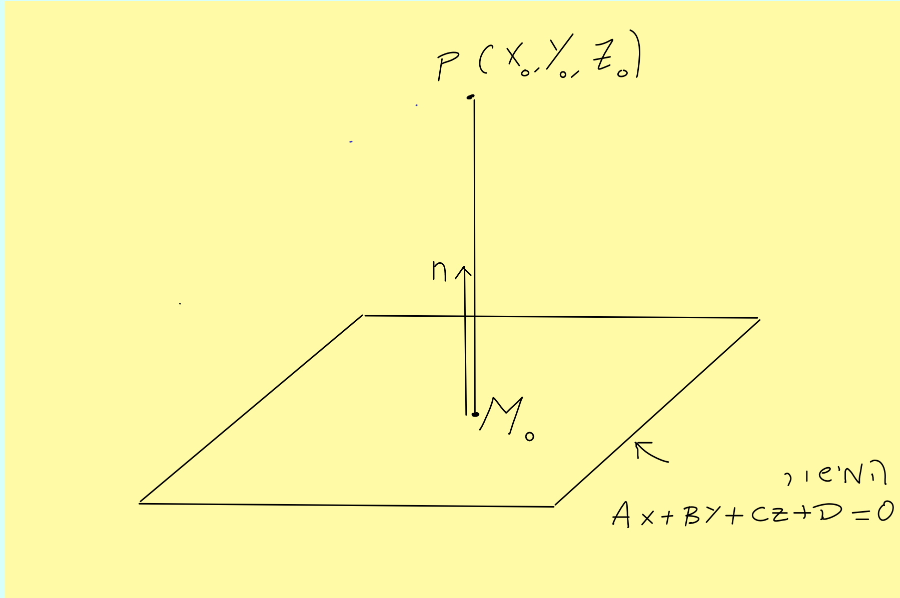
$$2x+y-z+3=0\quad\Rightarrow\quad2(1-2t)+(-1-t)-(2+t)+3=0\quad\Rightarrow\quad2-6t=0\quad\Rightarrow\quad t=\frac{1}{3}\ .$$

לכן הנקודה היא

$$(x,y,z)=\left(1-2\cdot\frac{1}{3},-1-\frac{1}{3},2+\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)\ .$$

הגדרה 5.2 היטל של נקודה על מישור

ההיטל של נקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ על מישור $Ax+By+Cz+D=0$ היא הנקודה על המישור הקרובה ביותר ל- P. כלומר, נקודה M_0 כך ש- $\overline{M_0P}$ מקביל לנורמל n למישור.



דוגמה 5.11

מצאו את ההיטל של הנקודה $P(2,-3,4)$ על המישור $x+2y+2z=13$.

פתרון:

הנורמל למישור הוא

$$n=(1,2,2)\ .$$

משוואת הישר הנרמל למישור העובר דרך הנקוה P היא

$$M(t)=(2,-3,4)+t(1,2,2)=(2+t,-3+2t,4+2t)\ .$$

נציב את $M(t)$ במשוואת המישור:

$$1\cdot(2+t)+2\cdot(-3+2t)+2\cdot(4+2t)=13 \quad\Rightarrow\quad 9t+4=13 \quad\Rightarrow\quad 9t=9 \quad\Rightarrow\quad t_0=1\ .$$

לכן הנקודה M_0 היא

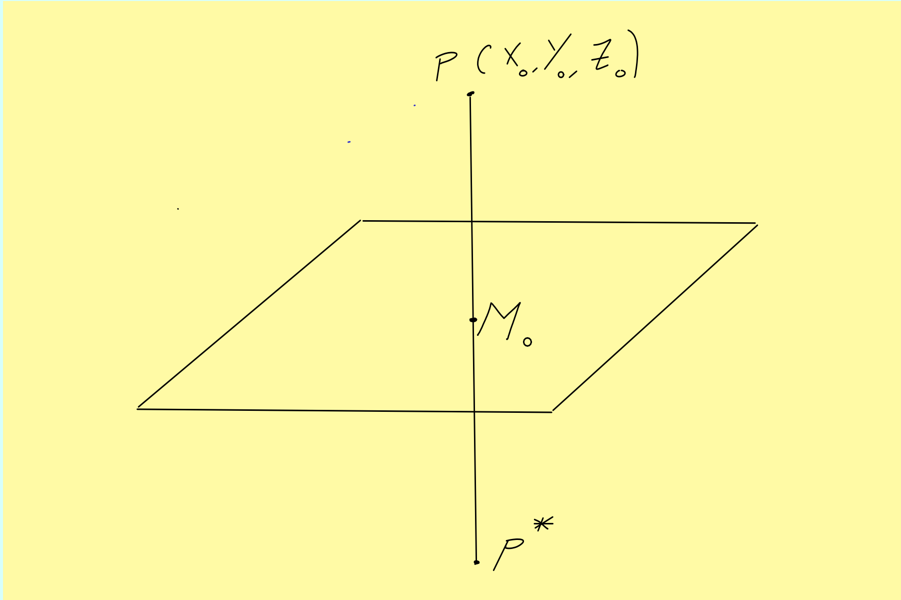
$$M(t_0=1)=(3,-1,6)\ .$$

הגדרה 5.3 השיקוף של נקודה ביחס מישור

השיקוף P^* של נקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ ביחס למישור מוגדר להיות

$$P^*=P-2\overline{M_0P}\ ,$$

כאשר M_0 ההיטל של P על המישור.



שיטה אחרת ויותר קלה:

אם נרשום את הישר העובר את הנקודה P וההיטל שלו במישור בצורה

$$M(t) = P + t \cdot \bar{n}$$

כשאר $\bar{n}$ הנורמל של המישור. נניח ש- t_0 הוא הערך של הפרמטר t בנקודת ההיטל, M_0 של P ביחס למישור. אז השיקוף של P ביחס למישור זו ניתן ע"י

$$P^* = M(2t_0) = P + 2t_0\bar{n} \ .$$

דוגמה 5.12

מצאו את השיקוף של הנקודה $P(2, -3, 4)$ ביחס למישור $x + 2y + 2z = 13$.

פתרון:

שיטה 1

מדוגמה הקודמת ההיטל הוא $M_0 = (3, -1, 6)$.

$$\overline{M_0P} = (-1, -2, -2)$$

לכן

$$P^* = P - 2(-1, -2, -2) = (2, -3, 4) - (-2, -4, -4) = (4, 1, 8) \ .$$

שיטה 2

מהדוגמה הקודמת הערך של הפרמטר של הישר על הנקודה של ההיטל הוא $t_0 = 1$. לכן השיקוף נמצא בנוקודה

$$P^* = M(2t_0) = M(2) = P + 2\bar{n} = (2, -3, 4) + 2(1, 2, 2) = (4, 1, 8) \ .$$

5.4 מצבים הדדיים בין שני מישורים

בהינתן שני מישורים $\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1 &= 0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$ ניתן להגדיר להם שלושה מצבים הדדיים: נחתכים, מתלכדים או מקבילים.

1) המישורים נחתכים אם הוקטורים (A_1,B_1,C_1) ו- (A_2,B_2,C_2) לא מקבילים. במצב זה החיתוך בין המישורים הוא קו ישר.

לדוגמה, נתונים שני מישורים $\left.\begin{aligned} 2x-3y+z+1 &= 0 \\ x-z+3 &= 0 \end{aligned}\right\}$. המישורים נחתכים בגלל ש- $(1,0,-1)\nparallel(2,-3,1)$.

2) המישורים מקבילים אם אין להם נקודה משותפת. כלומר אין פתרון למערכת במצב זה. הוקטור (A_1,B_1,C_1) מקביל לוקטור (A_2,B_2,C_2) אבל $\frac{D_2}{A_2}\neq\frac{D_1}{A_1}$ (ניתן להחליף ב- B או C).

לדוגמה, נתונים המישורים $\left.\begin{aligned} 2x-3y+z+1 &= 0 \\ 6x-9y+3z+2 &= 0 \end{aligned}\right\}$. $(6,-9,3)\parallel(2,-3,1)$ אבל $\frac{D_2}{A_2}\neq\frac{D_1}{A_1}$. לכן המישורים מקבילים.

3) המישורים מתלכדים אם כל הנקודות שלהם משותפות במצב זה, הוקטורים (A_1,B_1,C_1) ו- (A_2,B_2,C_2) מקבילים. מספיק שיש רק נקודה אחת משותפת שכן מישור נקבע ע"י נקודה ווקטור ניצבו.

לדוגמה, נתונים שני מישורים $\left.\begin{aligned} 2x-3y+z+1 &= 0 \\ -4x+6y-2z-2 &= 0 \end{aligned}\right\}$. המישורים מתלכדים בגלל ש- $(-4,6,-2)\parallel(2,-3,1)$ והנקודה $(0,0,-1)$ נקודה משותפת.

5.5 משפטים נוספים

משפט 5.7 שטח משולש במישור xy

שטחו S של המשולש אשר קדקודיו הם בנקודות (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) הוא

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

משפט 5.8 מרחק מנקודה למישור

המרחק d מהנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ למישור $Ax+By+Cz+D=0$ הוא

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

משפט 5.9 נפח הפירמידה המשולשת במרחב xyz

הנפח V של הפירמידה המשולשת אשר קדקודיה הם בנקודות (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4), הוא

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$