שיעור 3
כפל מטריצות וייצוג מערכת באמצעות AX=b

מושג של מטריצה

דוגמא.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 23 & 45 & 2 \\ 12 & 34 & 67 & 87 & 55 \\ 22 & 33 & 66 & 89 & 19 \end{pmatrix}$$

הרכיב במקום ה- $(3,4)$ הוא 89. נסמן

$$(A)_{34} = 89$$

הרכיב במקום ה- $(1,5)$ הוא 2. נסמן

$$(A)_{15} = 2$$

הרכיב במקום ה- $(2,3)$ הוא 67. נסמן

$$(A)_{23} = 67$$

■

3.1 הגדרה: (רכיב של מטריצה) תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. את הרכיב במקום ה- (i,j) (כלומר האיבר ה- i ועמודה j) נסמן כ- A_{ij}.

סוגים שונים של מטריצות

3.2 הגדרה: (מטריצה ריבועית) מטריצה ריבועית היא מטריצה שמספר שורותיה = מספר עמודותיה. נסמן

$$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \qquad \text{או} A \in M_n(\mathbb{R})$$

הגדרה: (מטריצה אלכסונית) מטריצה ריבועית שכל רכיביה שאינם על האלכסון הראשי הם אפס, תקרא מטריצה אלכסונית.

הגדרה: (מטריצה האפס) מטריצה שכל רכיביה הם אפס, תקרא מטריצת האפס.

חיבור מטריצות וכפל מטריצה בסקלר

דוגמא. (חיבור מטריצות)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 11 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+8 & 5+9 \\ 3+11 & 4+5 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 14 \\ 14 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

■

חיבור שתי מטריצות אשר מספר שורות ומספר עמודותי שונים אי חוקי, לדוגמה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

דוגמא. (כפל מטריצה בסקלר)

$$7 \odot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cdot 1 & 7\cdot 2 \\ 7\cdot 3 & 7\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \end{pmatrix}$$

■

3.3 הגדרה: (שוויון מטריצות) יהיו $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. נאמר ש $A = B$ אם לכל $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ מתקיים

$$A_{ij} = B_{ij} \ .$$

3.4 הגדרה: (חיבור מטריצות) יהיו $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. הסכום

$$A \oplus B$$

יוגדר כך ש-

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$$

כאשר $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, כלומר חיבור הרכיבים המתאימים.

3.5 הגדרה: (כפל מטריצה בסקלר) יהיו $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ו- $\alpha \in \mathbb{R}$. כפל מטריצה A בסקלר α יסומן ב

$$\alpha \odot A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

ויוגדר כך ש-

$$(\alpha \odot A)_{ij} = \alpha \cdot A_{ij}$$

כאשר $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, כלומר הכפלה של כל אחד מאיברי המטריצה ב- α.

3.6 הגדרה: (מטריצה הנגדי) בהינתן מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ המטריצה הנגדי תסומן ב- $-A$ ותוגדר

$$-A \equiv (-1) \odot A \ ,$$

כלומר הכפלת של המטריצה A בהסקלר -1.

3.7 הגדרה: (חיסור מטריצות) בהינתן מטריצה $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ החיסור המסומן ב- $A - B$ יוגדר

$$A - B \equiv A \oplus (-B) \ ,$$

כלומר החיבור (לפי הגדרה 3.4) של המטריצה A והמטריצה הנגדי $-B$ (לפי הגדרה 3.6).

3.8 משפט: יהיו $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ו- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. אזי:

1. חוק החילוף של חיבור מטריצות: $A + B = B + A$.
2. חוק הקיבוץ של חיבור מטריצות: $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + 0 = A$.
4. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
5. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
6. $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$.

הוכחה מיידית מההגדרות.

מטריצה משוחלפת

3.9 הגדרה: (מטריצה משוחלפת) בהינתן מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ בגודל $m \times n$, המשוחלפת של A, תסומן A^t, היא מטריצה בגודל $n \times m$ כך שלכל $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, מתקיים

$$A^t_{ji} = A_{ij}$$

דוגמא. (מטריצה משוחלפת) נתונה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ מצאו את המשוחלפת שלה, כלומר A^t.

פיתרון.

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

■

3.10 הגדרה: (מטריצה משוחלפת) עבור $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, מגדירים את A^t, המטריצה המשוחלפת של A, להיות מטריצה בגודל $n \times m$ כך שהעמודה ה- i של A^t היא השורה של A. "החלפת שורות ועמודות".

3.11 משפט: תהיינה A, B מטריצה כך שהסכומים והמכפלות מוגדרים ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. מתקיים:

1. $$\left(A^t\right)^t = A$$
2. $$(A+B)^t = A^t + B^t$$
3. $$(\alpha A)^t = \alpha A^t$$
4. $$(AB)^t = B^t A^t$$

שימו לב, הסדר השתנה.

כפל מטריצה בוקטור

דוגמא. (כפל מטריצה בוקטור)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 \\ 7 \cdot 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \cdot 2 \\ 8 \cdot 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \cdot 3 \\ 9 \cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 3 \\ 7 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 50 \\ 122 \end{pmatrix}$$

3.1 הגדרה: (מכפלה של מטריצה בוקטור)

יהיו $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ו- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. נגדיר

$$Ax = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots x_na_n \ .$$

שימו לב שמתקבל וקטור השייך ל- $\mathbb{R}^m$. שימו לב שניתן לכפול רק כאשר כמות העמודות של המטריצה שווה לכמות הרכיבים של הוקטור.

דוגמא. (מכפלה של מטריצה בוקטור) יהיו $\nu_1 \ , \ \nu_2 \ , \ \nu_3 \in \mathbb{R}^8$. הציגו את $5\nu_1 - 4\nu_2 + 8\nu_3$ בצורה של "מטריצה כפול וקטור".

פיתרון.

$$\begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = 5\nu_1 - 4\nu_2 + 8\nu_3 \ .$$

שימו לב $\begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \in M_{8\times 3}(\mathbb{R})$ ■

דוגמא. בהינתן המערכת לינארית

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 =& 12 \ , \\ 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 =& 11 \end{aligned}$$

ניתן לייצג אותה בצורה

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$$

ובצורה של משוואה מטריציאלית:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix} \ ,$$

או

$$AX = b$$

כאשר $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ו- $b = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$.

כפל מטריצות

דוגמא. (כפל מטריצות)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 3}}_{A} \odot \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \underbrace{21}_{b_1} & \underbrace{22}_{b_2} & \underbrace{23}_{b_3} & \underbrace{24}_{b_4} \end{pmatrix}_{3\times 4} = \begin{pmatrix} A\cdot b_1 & A\cdot b_2 & A\cdot b_3 & A\cdot b_4 \end{pmatrix}$$

כאשר

$$A\cdot b_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}11\\5\\21\end{pmatrix}_{3\times1}=\begin{pmatrix}1\cdot11+2\cdot5+3\cdot21\\0\cdot11+7\cdot5+8\cdot21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}84\\203\end{pmatrix}$$

$$A\cdot b_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}12\\6\\22\end{pmatrix}_{3\times1}=\begin{pmatrix}1\cdot12+2\cdot6+3\cdot22\\0\cdot12+7\cdot6+8\cdot22\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}90\\218\end{pmatrix}$$

$$A\cdot b_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}13\\7\\23\end{pmatrix}_{3\times1}=\begin{pmatrix}1\cdot13+2\cdot7+3\cdot23\\0\cdot13+7\cdot7+8\cdot23\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}96\\233\end{pmatrix}$$

$$A\cdot b_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}14\\8\\24\end{pmatrix}_{3\times1}=\begin{pmatrix}1\cdot14+2\cdot8+3\cdot24\\0\cdot14+7\cdot8+8\cdot24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}102\\248\end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}11&12&13&14\\5&6&7&8\\21&22&23&24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}84&90&96&102\\203&218&233&248\end{pmatrix}$$

3.2 הגדרה: (כפל מטריצות) תהיינה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B\in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ כך ש- $B=\begin{pmatrix}b_1&b_2&\dots&b_k\end{pmatrix}$ (שימו לב שמספר העמודות של A שווה למספר השורות של B) אזי

$$A\odot B=\begin{pmatrix}A\cdot b_1&A\cdot b_2&\dots&A\cdot b_k\end{pmatrix}.$$

על מנת לחשב את הרכיב במקום ה- (i,j) ב- $A\odot B$ למעשה כופלים שורה i של A בעמודה j של B.
שימו לב שכל עמודה של $A\odot B$ היא צרוף לינארי של עמודות A.

דוגמא. כפל מטריצות

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0&1\cdot2+0\cdot7&1\cdot3+0\cdot8\\0\cdot1+1\cdot0&0\cdot2+1\cdot7&0\cdot3+1\cdot8\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}$$

■

דוגמא. כפל מטריצות

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+3\cdot0&1\cdot0+2\cdot1+3\cdot0&1\cdot0+2\cdot0+3\cdot1\\0\cdot1+7\cdot0+8\cdot0&0\cdot0+7\cdot1+8\cdot0&0\cdot0+7\cdot0+8\cdot1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}$$

■

3.3 משפט: תהיינה A, B, C מטריצות כך שהסכומים והמכפלות מוגדרים ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. אזי

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
3. $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$
4. $\alpha(A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$
5. אם $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ו- I_n מטריצת היחידה בגודל $n \times n$ ו- I_m מטריצת היחידה בגודל $m \times m$ אז

$$I_m A = A = A I_n \ .$$

דוגמא. (כפל מטריצה אינה קומוטטיבית)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 27 \end{pmatrix}$$

אבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 22 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

בגלל שאם $AB = BA$ אז לא בהכרח מתקיים. התכונה הזו נגזרת מן החוק הקובע כי **מכפלה של מטריצות אינה קומוטטיבית** ■

3.4 משפט. (מכפלה של מטריצות אינה קומוטטיבית)
בהינתן מכפלה של שתי מטריצות, סדר כתיבת המטריצות משפיע על התוצאה סופית, כלומר

$$AB \neq BA \quad \Leftrightarrow \quad AB - BA \neq 0 \ .$$

כך מכפלה של מטריצות אינה קומוטטיבית.

דוגמא.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

בגלל שאם $AB = 0$ אז לא בהכרח מתקיים כי $A = 0$ או $B = 0$. ■

דוגמא.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

ו-

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בגלל שאם $AB = BC$ ו- $A \neq 0$ אז לא בהכרח מתקיים כי $B = C$. ■

הדוגמאות אלו דוגמאות של החוקים הבאים:

3.5 משפט: עבור מטריצות A, B, C, לא בהכרח מתקיימים היחסים הבאים:

(א) $AB = BA$
(ב) אם $AB = 0$ אז $A = 0$ או $B = 0$.
(ג) אם $AB = AC$ ו- $A \neq 0$ אז $B = C$.

3.6 הגדרה: (העלאה מטריצה בחזקה)
תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $k \in \mathbb{N}$. נגדיר

$$A^k = \overbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}^{k \text{ פעמים}}$$

אם $A \neq 0$, ונגדיר

$$A^0 = I_n \ .$$

מטריצות הפיכות

דוגמא. בהינתן המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ מהי המטריצה שתסומן ב- A^{-1} כך ש

$$A \cdot A^{-1} = I_{2\times 2}$$

או כך ש-

$$A^{-1} \cdot A = I_{2\times 2}$$

פיתרון. המטריצה A^{-1} נקראת ההופכית של A. התשובה היא

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

■

3.7 הגדרה: (מטריצה הפיכה)
מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ תקרא הפיכה אם קיימת $B \in M_n(\mathbb{R})$ כך ש

$$AB = BA = I$$

כאשר I המטריצת יחידה ב- $M_n(\mathbb{R})$. המטריצה B תקרא ההופכית של A.

3.8 משפט. (ההופכית של מטריצה יחידה)
אם קיימת הופכית ל- A אז היא יחידה. נסמן אותה ב- A^{-1}.

הוכחה.

נניח ש- B, C הופכיות של A. מתקיים:

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B \ .$$

■

משפט. (ייחידיות של פתרון למערכת לינארית)
אם $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אז לכל $b \in \mathbb{R}^n$ למשוואה $AX = b$ יש פיתרון יחיד והוא $A^{-1}b$.

הוכחה.
יהי $b \in \mathbb{R}^n$. קל לראות ש- $A^{-1}b$ הוא פתרון של המשוואה, שכן

$$A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = Ib = b \ .$$

נוכיח יחידות:
יהי $u \in \mathbb{R}^n$ פתרון, אזי

$$Au = b.$$

נכפול את שני האגפים משמאל ב- A^{-1} ונקבל

$$\begin{aligned} A^{-1}(Au) &= A^{-1}b \ , \\ \Rightarrow \quad (A^{-1}A)u &= A^{-1}b \ , \\ \Rightarrow \quad Iu &= A^{-1}b \ , \\ \Rightarrow \quad u &= A^{-1}b \ , \end{aligned}$$

■

דוגמא. פתרו את המערכת

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \ , \\ 3x_1 + 4x_2 &= 2 \ . \end{aligned}$$

פיתרון. ניתן לייצג את המערכת בצורה

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b}$$

נזכיר ש- $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. נכפול את שני אגפי המשוואה ב- A^{-1} משמאל. נקבל

$$X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} \ .$$

קל לבדוק שאכן $\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ מהווה פתרון של המשוואה. אכן,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

■

3.9 משפט:

יהיו $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ו- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ וקטור משתנים, ו- $b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$.
למשוואה המטריציאלית $AX = b$ יש אותה קבוצת פתרונות כמו למשוואה הוקטורית

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = b$$

ואותה קבוצת פתרונות כמו למערכת הלינארית שהמטריצה המורחבת שלה היא

$$(A|b) \ .$$

3.10 משפט:
תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

(א) אם A הפיכה אז A^{-1} הפיכה ומתקיים $(A^{-1})^{-1} = A$.
(ב) אם A ו- B הפיכות אז AB הפיכה ומתקיים $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
(ג) אם A הפיכה אז A^t הפיכה ומתקיים $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

הוכחה.

(א)

$$AA^{-1} = I, \qquad A^{-1}A = I \ .$$

(ב)

$$(AB)^{-1}B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \ .$$

■

כיצד למצוא ההופכית

דוגמא. (הופכית של מטריצה)
בהינתן $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ מהי ההופכית?

פיתרון.
ניתן לכתוב ההופכית בצורה $A^{-1} = \begin{pmatrix} Y & Z \end{pmatrix}$ כאשר Y ו- Z הם וקטורים מעל $\mathbb{R}_2$, כלומר

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \ , \qquad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \ ,$$

כך ש

$$A \begin{pmatrix} Y & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

$$\Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} AY & AZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נפתור

$$AY = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

נפתור

$$AZ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

אפשר לפתור יחד:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

■

3.11 משפט:
תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$.

A שקולות שורות ל I $\Leftrightarrow$ A הפיכה .

במקרה זה כל סדרה של פעולות שורה אלמנטריות המעבירות את A ל- I תעביר את I ל- A^{-1}.

טכנית, על מנת למצוא הופכית של A, מתבוננים במטריצה $(A|I)$ ומדרגים את A לקבלת I. מבצעים את אותן פעולות בו זמנית על I עד לקבלת $(I|A^{-1})$.

דוגמא. (מבחן תש"פ 1,1)
תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם A הפיכה וגם B הפיכה אז $A+B$ איננה הפיכה.

(ב) אם A הפיכה וגם B הפיכה אז $A+B$ הפיכה.

פיתרון.

(א) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A = I$, $B = I$ שתיהן הפיכות אבל $A + B = 2I$ הפיכה.

(ב) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A = I$, $B = -I$ שתיהן הפיכות אבל $A + B = 0$ איננה הפיכה.

■