שעור 7
העתקות צמודות לעצמן

7.1 הגדרה של אופרטור הצמוד

משפט 7.1 וקטור בבסיס אורתונורמי

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ ויהי $u \in V$ וקטור של V.
אם $\{b_1, \quad \ldots \quad ,b_n\}$ בסיס אורתנורמלי אז

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, b_i \rangle \, b_i \qquad (*1)$$

הוכחה: כל וקטור u ניתן לרשום כצרוף ליניארי של וקטורים של בסיס. לכן נרשום u כצרוף ליניארי של הוקטורים של הבסיס האורתונורמלי הנתון:

$$u = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \qquad (\#)$$

כאשר $\alpha_i \in \mathbb{C}$ סקלרים. כעת נקח את המכפלה הפנימית של u עם הוקטור b_j:

$$\langle u, b_j \rangle \quad = \quad \langle \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n \ , \ b_j \rangle \quad = \quad \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \ , \ b_j \right\rangle$$

המכפלה הפנימית ליניארית (כלומר למכפלה פנימית יש תכונות הליניאריות $\langle u + \mathrm{v}, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle \mathrm{v}, w \rangle$ ולכל בסקלר α: $\langle \alpha u, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle$) לכן ניתן לרשום הביטוי הזה בצורה

$$\langle u, b_j \rangle \quad = \quad \alpha_1 \langle b_1, b_j \rangle + \cdots + \alpha_n \langle b_n \ , \ b_j \rangle \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle b_i \ , \ b_j \rangle$$

מכיוון שהבסיס אורתונורמלי, אז מתקיים $\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$. לכן כל האיברים בהסכום הזה שווים ל-0 פרט לאיבר $i = j$. לכן

$$\langle u, b_j \rangle = \alpha_j \ .$$

נציב $\alpha_j = \langle u, b_j \rangle$ במשוואה (#) ונקבל

$$u = \sum_{j=1}^{n} \langle u, b_i \rangle \, b_i \ .$$

■

מסקנה 7.1

דרך שקולה לרשום משוואה (1*) עבור וקטור u בבסיס אורתונורמלי $\{b_1, \cdots, b_n\}$ היא:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \langle u, b_1\rangle \\ \langle u, b_2\rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_i\rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_n\rangle \end{pmatrix}_B \ . \tag{*2}$$

משפט 7.2 מטריצה המייצגת של אופרטור על פי בסיס אורתונורמלי

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V. אם $\{b_1, \cdots, b_n\}$ בסיס אורתונורמלי אז המטריצה המייצגת של T על פי בסיס B, מסומן $[T]$, היא

$$[T] = \begin{pmatrix} \langle T(b_1), b_1\rangle & \langle T(b_2), b_1\rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_1\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_1\rangle \\ \langle T(b_1), b_2\rangle & \langle T(b_2), b_2\rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_2\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_2\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_i\rangle & \langle T(b_2), b_i\rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_i\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_i\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_n\rangle & \langle T(b_2), b_n\rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_n\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_n\rangle \end{pmatrix} ,$$

כלומר האיבר ה- ij של $[T]$ הוא

$$[T]_{ij} = \langle T(b_j), b_i\rangle \ . \tag{3*}$$

הוכחה: המטריצה המייצגת של האופרטור T על פי הבסיס $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ נתונה על ידי הנוסחה

$$[T] = \begin{pmatrix} | & | & & | & & | \\ [T(b_1)]_B & [T(b_2)]_B & \cdots & [T(b_j)]_B & \cdots & [T(b_n)]_B \\ | & | & & | & & | \end{pmatrix}$$

כל עמודה של המטריצה היא וקטור $T(b_j)$ ($1 \leq j \leq n$) על פי הבסיס האורתונורמלי B. אפשר לרשום כל עמודה כמו משוואה (2*) אך עם הוקטור $T(b_j)$ במקום הוקטור u:

$$[T(b_j)]_B = \begin{pmatrix} \langle T(b_j), b_1\rangle \\ \langle T(b_j), b_2\rangle \\ \vdots \\ \langle T(b_j), b_i\rangle \\ \vdots \\ \langle T(b_j), b_n\rangle \end{pmatrix} , \qquad 1 \leq j \leq n \ .$$

אחרי הצבה של הביטוי הזה בכל עמודה של $[T]$, לכל $1 \leq j \leq n$ בהתאמה, נקבל

$$[T] = \begin{pmatrix} \langle T(b_1), b_1 \rangle & \langle T(b_2), b_1 \rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_1 \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_1 \rangle \\ \langle T(b_1), b_2 \rangle & \langle T(b_2), b_2 \rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_2 \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_i \rangle & \langle T(b_2), b_i \rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_i \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_i \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_n \rangle & \langle T(b_2), b_n \rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_n \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_n \rangle \end{pmatrix} ,$$

מכאן הרכיב הכללי בשורה ה- i בעמודה j הוא

$$[T]_{ij} = \langle T(b_j), b_i \rangle \ .$$

■

הגדרה 7.1 אופרטור הצמוד

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V. האופרטור הצמוד מוגדר כך שלכל וקטורים $u, w \in V$ מתקיים

$$\langle T(u), w \rangle = \langle u, \bar{T}(w) \rangle \tag{*4}$$

משפט 7.3

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V. אם $\bar{T}$ הצמוד של T אז לכל וקטורים $u, w \in V$ מתקיים

$$\langle \bar{T}(u), w \rangle = \langle u, T(w) \rangle \tag{*5}$$

הוכחה:

$$\langle \bar{T}(u), w \rangle \overset{\text{תכונת הרמיטיות}}{=} \overline{\langle w, \bar{T}(u) \rangle} \overset{\text{הגדרת הצמוד}}{=} \overline{\langle T(w), u \rangle} \overset{\text{תכונת הרמיטיות}}{=} \langle u, T(w) \rangle$$

■

משפט 7.4 נוסחה של אופרטור ואופטור הצמוד על פי בסיס אורתונורמלי

אם $T : V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V, u וקטור של V ו- $\{b_1, \cdots, b_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V, אז

$$T(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(u), b_i \rangle \, b_i \ , \tag{6*}$$

$$\bar{T}(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u, \ T(b_i) \rangle \, b_i \ . \tag{7*}$$

הוכחה:

<u>הוחכה של (6*):</u>

במקום u במשוואה (1*) מציבים $T(u)$ ונקבל משוואה (6*).

<u>הוחכה של (7*):</u>

במשוואה (6*) במקום האופרטור $T(u)$ מציבים האופרטור הצמוד $\bar{T}(u)$ ואז נשתמש במשוואה (5*):

$$\bar{T}(u) \overset{(6*)}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle \bar{T}(u), b_i \rangle \, b_i \overset{(*5)}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle u, T(b_i) \rangle \, b_i \ .$$

■

דוגמה 7.1

יהי $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ האורפטור המוגדר

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x-y \end{pmatrix} \ .$$

מצאו את $\bar{T}$.

פתרון:

$$T(e_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad T(e_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

נסמן וקטור כללי של $\mathbb{R}^2$ $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\langle \mathrm{v}, T(e_1) \rangle = x+y \ , \qquad \langle \mathrm{v}, T(e_2) \rangle = -x-y \ ,$$

לכן

$$\begin{aligned} \bar{T}(\mathrm{v}) &= \sum_{i=1}^{2} \langle \mathrm{v}, T(e_i) \rangle \, e_i = \langle \mathrm{v}, T(e_1) \rangle \, e_1 + \langle \mathrm{v}, T(e_2) \rangle \, e_2 \\ &= (x+y)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-x-y)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x+y \\ -x-y \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

דוגמה 7.2

יהי $T:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ אופרטור המוגדר

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 3 & 2+3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix+y \\ 3x+(2+3i)y \end{pmatrix} \ .$$

מצאו את $\bar{T}$.

פתרון:

$$T(e_1)=T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i\\3\end{pmatrix}\ ,\quad T(e_2)=T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2+3i\end{pmatrix}$$

נסמן וקטור כללי של $\mathbb{C}^2$

$\mathrm{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ כלשהו. לפי הנוסחה של המכפלה הפנימית הסטנדרטית:

$$\langle \mathrm{v},T(e_1)\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\3\end{pmatrix}\right\rangle=-ix+3y\ ,\qquad \langle \mathrm{v},T(e_2)\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2+3i\end{pmatrix}\right\rangle=x+(2-3i)y\ ,$$

לכן

$$\begin{aligned}\bar{T}(\mathrm{v})&=\sum_{i=1}^{2}\langle \mathrm{v},T(e_i)\rangle\,e_i\\&=\langle \mathrm{v},T(e_1)\rangle\,e_1+\langle \mathrm{v},T(e_2)\rangle\,e_2\\&=(-ix+3y)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+(x+(2-3i)y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-ix+3y\\x+(2-3i)y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

דוגמה 7.3

תהי V המרחב המכפלה פנימית $\mathbb{R}_2[x]$ עם המכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$$

לכל $f(x),g(x)\in\mathbb{R}_2[x]$.

יהי $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ אופרטור המוגדר

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=3b+(a+c)x+(a+b+2c)x^2\ .$$

מצאו את $\bar{T}$.

פתרון:

בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$ הינו $E=\{e_1=1,\ e_2=x,\ e_3=x^2\}$. לכן

$$T(e_1)=T(1)=x+x^2\ ,\quad T(e_2)=T(x)=3+x^2\ ,\quad T(e_3)=T(x^2)=x+2x^2\ .$$

נסמן וקטור כללי של $\mathbb{R}_2[x]$: $\mathrm{v}=a+bx+cx^2$. לפי הנוסחה הנתונה בשביל המכפלה הפנימית:

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{v},(T(e_1)\rangle&=\langle a+bx+cx^2,x+x^2\rangle\\&=\int_0^1\left(x+x^2\right)\left(a+bx+cx^2\right)dx\\&=\int_0^1\left(ax+ax^2+bx^2+bx^3+cx^3+cx^4\right)dx\\&=\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{4}+\frac{c}{5}\\&=\frac{5a}{6}+\frac{7b}{12}+\frac{9c}{20}\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{v}, (T(e_2)\rangle &= \langle a+bx+cx^2, 3+x^2\rangle \\ &= \int_0^1 \left(3+x^2\right)\left(a+bx+cx^2\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(3a+ax^2+3b+bx^3+3c+cx^4\right) dx \\ &= 3a+\frac{a}{3}+3b+\frac{b}{4}+3c+\frac{c}{5} \\ &= \frac{10a}{3}+\frac{13b}{4}+\frac{16c}{5} \ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{v}, (T(e_3)\rangle &= \langle a+bx+cx^2, x+2x^2\rangle \\ &= \int_0^1 \left(x+2x^2\right)\left(a+bx+cx^2\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(ax+2ax^2+bx^2+2bx^3+cx^3+2cx^4\right) dx \\ &= \frac{a}{2}+\frac{2a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}+\frac{2c}{5} \\ &= \frac{7a}{6}+\frac{5b}{6}+\frac{13c}{20} \ .\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\bar{T}(\mathrm{v}) &= \sum_{i=1}^{3} \langle \mathrm{v}, T(e_i))\rangle \, e_i \\ &= \langle \mathrm{v}, T(e_1)\rangle \, e_1 + \langle \mathrm{v}, T(e_2)\rangle \, e_2 + \langle \mathrm{v}, T(e_3)\rangle \, e_3 \\ &= \left(\frac{5a}{6}+\frac{7b}{12}+\frac{9c}{20}\right) e_1 + \left(\frac{10a}{3}+\frac{13b}{4}+\frac{16c}{5}\right) e_2 + \left(\frac{7a}{6}+\frac{5b}{6}+\frac{13c}{20}\right) \\ &= \left(\frac{5a}{6}+\frac{7b}{12}+\frac{9c}{20}\right) + \left(\frac{10a}{3}+\frac{13b}{4}+\frac{16c}{5}\right) x + \left(\frac{7a}{6}+\frac{5b}{6}+\frac{13c}{20}\right) x^2\end{aligned}$$

משפט 7.5 מטריצה המייצגת של אופרטור הצמוד

יהי $T: V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V.
אם $[T]$ המטריצה המייצגת של T אז המטריצה המייצגת של הצמוד $\bar{T}$ היא $\overline{[T]}$.
כלומר:

$$[\bar{T}] = \overline{[T]} \ . \qquad (8*)$$

הוכחה: ממשוואה (3*) האיבר ה- ij של המטריצה המייצגת של T הוא $[T]_{ij} = \langle T(b_j), b_i\rangle$. במקום T נציב $\bar{T}$ ונקבל

$$[\bar{T}]_{ij} \overset{(3*)}{=} \langle \bar{T}(b_j), b_i\rangle \overset{(*5)}{=} \langle b_j, T(b_i)\rangle \overset{\text{תכונת הרמטיות}}{=} \overline{\langle T(b_i), b_j\rangle} = \overline{[T]_{ji}}$$

קיבלנו ש- $\overline{[T]_{ji}} = [\bar{T}]_{ij}$ (שימו לב לסדר הפוך של האינדקסים).
במילים: האיבר ה- ij של $[\bar{T}]$ שווה לצמוד של האיבר של ji של $[T]$.
לכן $[\bar{T}]$ שווה להמשוחלפת של המטריצה של הצמודים של האיברים של $[T]$. כלומר:

$$[\bar{T}] = \overline{[T]} \ .$$

■

7.2 אופרטור צמוד לעצמו

הגדרה 7.2 העתקה צמודה לעצמה

העתקה ליניארית
$$T:V\to V$$
במרחב מכפלה פנימית נקראת העתקה צמודה לעצמה אם
$$\bar{T}=T\ ,$$
כלומר לכל u,v,
$$\langle T(u),\mathrm{v}\rangle=\langle u,T(\mathrm{v})\rangle\ .$$

- העתקה צמודה לעצמה במרחב אוקלידי $(\mathbb{F}=\mathbb{R})$ נקראת גם העתקה סימטרית.
- במרחב אוניטרי, $(\mathbb{F}=\mathbb{C})$ היא נקראת גם העתקה הרמיטית.

הגדרה 7.3 מטריצה צמודה לעצמה

מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ $(\mathbb{F}=\mathbb{R}$ או $\mathbb{F}=\mathbb{C}$) נקראת מטריצה צמודה לעצמה אם
$$A=\bar{A}\ .$$

- כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ מטריצה כזו נקראת סימטרית.
- כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ מטריצה כזו נקראת הרמיטית.

משפט 7.6 העתקה צמודה לעצמה אם"ם המטריצה המייצגת צמודה לעצמה

יהי V במרחב מכפלה פנימית. העתקה $T:V\to V$ צמודה לעצמה אם"ם המטריצה המייצגת של T בבסיס אורתונורמלי כלשהו של V היא צמודה לעצמה.

דוגמה 7.4

נניח ש- $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ נעתקב במרחב $\mathbb{R}^n$ עם מכפלה פנימית הסטנדרטית שמוגדרת ע"י
$$T(u)=A\cdot u\ .$$
הוכיחו כי T צמודה לעצמה אם"ם A סימטרית.

פתרון:

המטריצה המייצגת של ההעתקה היא $[T]_E=A$. T צמודה לעצמה אם"ם המטריצה המייצגת צמודה לעצמה, כלומר אם $\bar{A}=A$. המטריצה A ממשית, אז $\bar{A}=A^t$. לכן T צמודה לעצמה אם"ם $A=A^t$.

דוגמה 7.5

נניח ש- $T:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ נעתקב במרחב $\mathbb{C}^n$ עם מכפלה פנימית הסטנדרטית שמוגדרת ע"י
$$T(u)=A\cdot u\ .$$

הוכיחו כי T צמודה לעצמה אס"ם A הרמיטית.

פתרון:
המטריצה המייצגת של ההעתקה היא $[T]_E = A$. T צמודה לעצמה אס"ם המטריצה המייצגת צמודה לעצמה, כלוסר אם $\bar{A} = A$, כלומר אם A הרמיטית. לכן T צמודה לעצמה אס"ם A הרמיטית.

דוגמה 7.6

הוכיחו כי ההעתקה הזהות $I_V : V \to V$ צמודה לעצמה.

פתרון:
המטריצה המייצגת של ההעתקה הזהות היא המטריצה היחידה I. I צמודה לעצמה בגלל ש- $\bar{I} = I$ לכן ההתקה הזהות I_V צמודה לעצמה.

דוגמה 7.7

הוכיחו כי ההעתקה האפס $0_V : V \to V$ צמודה לעצמה.

פתרון:
המטריצה המייצגת של ההעתקה הזהות היא המטריצה האפס $0_{n\times n}$. $0_{n\times n}$ צמודה לעצמה בגלל ש- $\bar{0}_{n\times n} = 0_{n\times n}$. לכן ההתקה האפס 0_V צמודה לעצמה.

דוגמה 7.8

הוכיחו כי ההעתקה סקלרית $S_\alpha : V \to V$ שמוגדרת ע"י $S_\alpha(\mathrm{v}) = \alpha \cdot \mathrm{v}$ צמודה לעצמה אס"ם $\overline{\alpha I} = \alpha I$.

פתרון:
המטריצה המייצגת של

$$[S_\alpha] = \alpha I \ .$$

המטירצה המייצגת צמודה לעצמה אס"ם

$$\bar{\alpha}\bar{I} = \alpha I$$

כלומר אם $\bar{\alpha} = \alpha$.

דוגמה 7.9

במרחב $\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, נתון בסיס

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

נתון ההעתקה לינארית $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ עם הטריצה המייצגת $[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. האם T סימטרית?

פתרון:
שיטה 1

נבחר בסיס אורתונורמלי:

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\ .$$

אז $e_1=-b_2$, $e_2=b_1+b_2$.
לכן

$$[T(b_1)]_B=0\cdot b_1-b_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad [T(b_2)]_B=0\cdot b_1+b_2=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

לכן

$$T(e_1)=-T(b_2)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=e_1+0\cdot e_2\ .$$

$$T(e_2)=T(b_1)+T(b_2)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0\cdot e_1+0\cdot e_2\ .$$

לכן

$$[T]_E=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

מטריצה סימטרית, לכן T העתקה סימטרית.

שיטה 2

$$[T]_B=P_{E\to B}[T]_E P^{-1}_{E\to B}$$

$$\left(\ B\ \middle|\ E\ \right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&0\\1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&1\\0&1&-1&1\end{array}\right)$$

לכן $P_{E\to B}=\left(\begin{array}{cc}0&1\\-1&1\end{array}\right)$. נמצא $P^{-1}_{E\to B}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}0&1&1&0\\-1&1&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}-1&1&0&1\\0&1&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&0&-1\\0&1&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-1\\0&1&1&0\end{array}\right)$$

לכן $P^{-1}_{E\to B}=\left(\begin{array}{cc}1&-1\\1&0\end{array}\right)$.

$$[T]_B=P_{E\to B}[T]_E P^{-1}_{E\to B}\qquad\Leftrightarrow\qquad \begin{aligned}[T]_E=P^{-1}_{E\to B}[T]_B P_{E\to B}&=\left(\begin{array}{cc}1&-1\\1&0\end{array}\right)\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix}\left(\begin{array}{cc}0&1\\-1&1\end{array}\right)\\&=\left(\begin{array}{cc}1&-1\\1&0\end{array}\right)\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

דוגמה 7.10

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

א) אם T ו- S העתקות צמודות לעצמן אז $T+S$ צמודה לעצמה.

ב) אם $T\neq 0$ צמודה לעצמה ו- αT צמודה לעצמה, אז α הוא סקלר ממשי.

ג) אם $T\neq 0$ צמודה לעצמה ו $\alpha=\bar{\alpha}\neq 0$ אז αT צמודה לעצמה.

ד) אם T_1 ו- T_2 צמודות לעצמן אז $T_1\cdot T_2$ צמודה לעצמה.

ה) אם T_1 ו- T_2 צמודות לעצמן ו- T_1 ו- T_2 מתחלפות (ז"א $T_1T_2=T_2T_1$), אז $T_1\cdot T_2$ צמודה לעצמה.

ו) אם T_1 ו- T_2 צמודות לעצמן ו- $T_1\cdot T_2$ צמודה לעצמה, אז T_1 ו- T_2 מתחלפות (ז"א $T_1T_2=T_2T_1$).

ז) אם T צמודה לעצמה, אז T^2 צמודה לעצמה.

פתרון:

א) טענה נכונה. הוכחה:

$$\overline{T+S}=\bar{T}+\bar{S}=T+S\ .$$

ב) αT צמודה לעצמה (נתון) לכן

$$\overline{\alpha T}=\bar{\alpha}\bar{T}=\alpha T\ .$$

T צמודה לעצמה (נתון) לכן $\bar{T}=T$. נציב ונקבל

$$\bar{\alpha}T=\alpha T\qquad\Rightarrow\qquad(\bar{\alpha}-\alpha)T=0\ .$$

$T\neq 0$ (נתון) לכן $\bar{\alpha}-\alpha=0$ לכן $\bar{\alpha}=\alpha$.

ג) טענה נכונה. הוכחה:

T צמודה לעצמה (נתון) לכן

$$\overline{\alpha T}=\bar{\alpha}\bar{T}=\bar{\alpha}T\ .$$

$\bar{\alpha}=\alpha$ (נתון). נציב ונקבל

$$\overline{\alpha T}=\alpha T\ .$$

ד) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$T_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\ ,\qquad [T_1]_E=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$T_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\ ,\qquad [T_2]_E=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$$

T_1 ו- T_2 העתקות סימטריות אבל

$$[T_1\cdot T_2]_E=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

לא סימטרית, לכן $T_1\cdot T_2$ אינה צמודה לעצמה.

ה) טענה נכונה. הוכחה:

נניח $T_1 : V \to V$, $T_2 : V \to V$, העתקות צמודות לעצמן. נניח כי $T_1 \cdot T_2$ העתקה צמודה לעצמה ונניח כי

$$T_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1 \ .$$

אז

$$\overline{T_1 \cdot T_2} = \bar{T}_2 \cdot \bar{T}_1 = T_2 \cdot T_1 = T_1 \cdot T_2 \ .$$

לכן $T_1 \cdot T_2$ צמודה לעצמה.

ו) טענה נכונה. הוכחה:

נניח $T_1 : V \to V$, $T_2 : V \to V$, העתקות צמודות לעצמן ונניח כי $T_1 \cdot T_2$ העתקה צמודה לעצמה. אז

$$\overline{T_1 \cdot T_2} = T_1 \cdot T_2 \ .$$

מצד שני,

$$\overline{T_1 \cdot T_2} = \bar{T}_2 \cdot \bar{T}_1 = T_2 \cdot T_1 \ .$$

לכן

$$T_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1 \ .$$

ז) טענה נכונה. הוכחה:

$$\overline{(TT)} = \bar{T} \cdot \bar{T} = T \cdot T \ .$$

דוגמה 7.11

יהי V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית. תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית. הוכיחו כי $\bar{T} \cdot T$ ו- $T \cdot \bar{T}$ העתקה צמודה לעצמה.

פתרון:

$$\overline{T \cdot \bar{T}} = \bar{\bar{T}} \cdot \bar{T} = T \cdot \bar{T} \ .$$

לכן $T \cdot \bar{T}$ העתקה צמודה לעצמה.
מאותה מידה:

$$\overline{\bar{T} \cdot T} = \bar{T} \cdot \bar{\bar{T}} = \bar{T} \cdot T \ .$$

לכן $\bar{T} \cdot T$ העתקה צמודה לעצמה.

הגדרה 7.4 העתקה אנטי-סימטרית

תהי העתקה לינארית

$$T : V \to V$$

במרחב אוקלידי V. במצב

$$\bar{T} = -T$$

אז T נקראת **אנטי-סימטרית**.

הגדרה 7.5 העתקה אנטי-הרמיטית

תהי העתקה לינארית
$$T : V \to V$$
במרחב אוניטרי V. במצב
$$\bar{T} = -T$$
אז T נקראת **אנטי-הרמיטית**.

כל מספר מרוכב $z = x + iy$ הוא סכום של מספר ממשי x ומספר מדומה iy. בדומה לכך, כל העתקה לינארית T היא סכום של שתי העתקות, שאחת מהן צמודה לעצמה והשני אנטי-סימטרית או אנטי-הרמיטית. נוכיח את הטענה הזאת במשפט הבא.

משפט 7.7

תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית כלשהי.
T היא סכום של שתי העתקות, שאחת מהן צמודה לעצמה והשני אנטי-סימטרית או אנטי-הרמיטית.

הוכחה: נניח $T : V \to V$ העתקה לינארית. נתבונן בהעתקות
$$T_1 = \frac{1}{2}\left(T + \bar{T}\right) \ , \qquad T_2 = \frac{1}{2}\left(T - \bar{T}\right) \ .$$
אז
$$T = T_1 + T_2 \ .$$
$$\bar{T}_1 = \frac{1}{2}\left(\overline{T + \bar{T}}\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{T} + \bar{\bar{T}}\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{T} + T\right) = T_1 \ .$$
ז"א T_1 צמודה לעצמה.
$$\bar{T}_2 = \frac{1}{2}\left(\overline{T - \bar{T}}\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{T} - \bar{\bar{T}}\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{T} - T\right) = -\frac{1}{2}\left(T - \bar{T}\right) = -T_2 \ .$$
ז"א T_2 אנטי-הרמיטית.

■

משפט 7.8

(1 תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית כלשהי המקיימת
$$\langle T(u), \mathrm{v}\rangle = 0$$
לכל $u, \mathrm{v} \in V$. אז $T = 0$.

(2 אם $T : V \to V$ העתקה צמודה לעצמה המקיימת
$$\langle T(u), u\rangle = 0$$
לכל $u \in V$. אז $T = 0$.

הוכחה:

1)

$$\langle T(u), \mathrm{v}\rangle = 0$$

לכל $u, \mathrm{v} \in V$. נבחר $\mathrm{v} = T(u)$. אז

$$\langle T(u), T(u)\rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T(u) = 0$$

לכל $u \in V$. לכן $T = 0$.

2) לפי הנתון לכל $u, \mathrm{v} \in V$,

$$\langle T(u+\mathrm{v}), u+\mathrm{v}\rangle = 0 \ , \qquad \langle T(\mathrm{v}), \mathrm{v}\rangle = 0 \ , \qquad \langle T(u), u\rangle = 0 \ .$$

מצד שני,

$$\begin{aligned}\langle T(u+\mathrm{v}), u+\mathrm{v}\rangle &= \langle T(u), u\rangle + \langle T(u), \mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}), u\rangle + \langle T(\mathrm{v}), \mathrm{v}\rangle \\ 0 &= 0 + \langle T(u), \mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}), u\rangle + 0 \\ 0 &= \langle T(u), \mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}), u\rangle\end{aligned}$$

לכן לכל $u, \mathrm{v} \in V$,

$$\langle T(u), \mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}), u\rangle = 0$$

א) במקרה של מרחב אוקלידי (ז"א $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) נקבל

$$\begin{aligned}\langle T(u), \mathrm{v}\rangle &= \langle u, T(\mathrm{v})\rangle \quad (\text{כי } T \text{ צמודה לעצמה}) \\ &= \langle T(\mathrm{v}), u\rangle \quad (\text{לפי הסימטריות של מכפלה פנימית במרחב אוקלידי})\end{aligned}$$

לכן

$$\langle T(u), \mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}), u\rangle = 2\langle T(u), \mathrm{v}\rangle = 0$$

לכן $\langle T(u), \mathrm{v}\rangle = 0$ לכל $u, \mathrm{v} \in V$. לכן לפי סעיף (1), $T = 0$.

ב) במקרה של מרחב אוניטרי (ז"א $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) נציב בשוויון שקיבלנו קודם iu במקום u:

$$\langle T(iu), \mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}), iu\rangle = 0$$

לכן

$$i\langle T(u), \mathrm{v}\rangle - i\langle T(\mathrm{v}), u\rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \langle T(u), \mathrm{v}\rangle - \langle T(\mathrm{v}), u\rangle = 0$$

וגם

$$\langle T(u), \mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}), u\rangle = 0$$

נחבר את שני השוויונים ונקבל:

$$2\langle T(u), \mathrm{v}\rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T = 0$$

■

7.3 העתקות אוניטריות

נשים לב שעבור מספר מרוכב z,

$$|z| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z \cdot \bar{z} = 1 \ .$$

נגדיר מושג דומה עבור העתקות לינאירות.

הגדרה 7.6 העתקה אוניטרית

$T:V\to V$ במרחב מכפלה פנימית V נוצר סופית, נקראת העתקה אוניטרית אם

$$T\cdot\bar{T}=\bar{T}\cdot T=I$$

כאשר I העתקה הזהות.

העתקה אוניטרית במרחב אוקלידי (כלומר כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$) נקראת גם העתקה אורתוגונלית.

1) התנאי $I=\bar{T}\cdot T=T\cdot\bar{T}$ פירושו ש- T הפיכה ו- $T^{-1}=\bar{T}$.

2) אם V מרחב נוצר סופית ו- S,T העתקות ליניאריות מ- V ל- S אז השוויון $I=S\cdot T$ גורר את השוויון $I=T\cdot S$. ז"א כדי לוודא ש- T אוניטרית מספיק לבדוק רק אחד השוויונות $I=T\cdot\bar{T}$ או $\bar{T}\cdot T=I$.

דוגמה 7.12

נניח כי V מרחב מכפלה פנימית של $\mathbb{C}^1$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית

$$\langle z,w\rangle=z\cdot\bar{w}\ .$$

תהי $T:\mathbb{C}^1\to\mathbb{C}^1$ העתקה שמוגדרת $T(z)=\alpha\cdot z$ כאשר $\alpha\in\mathbb{C}$. הוכיחו:

א אם T אוניטרית אז $\alpha\bar{\alpha}=1$.

ב אם T אוניטרית אז $\|T(z)\|=\|z\|$ לכל $z\in\mathbb{C}^1$.

ג אם T אוניטרית אז $\langle T(z),T(w)\rangle=\langle z,w\rangle$ לכל $z,w\in\mathbb{C}^1$.

פתרון:

א $T(z)=\alpha z$ אז

$$\bar{T}(z)=\bar{\alpha}z\ .$$

מכאן

$$\left(\bar{T}T\right)(z)=\bar{T}\left(T(z)\right)=\bar{T}\left(\alpha z\right)=\bar{\alpha}\cdot\alpha z\ .$$

לכן $\bar{T}\cdot T=I$ אם"ם $\bar{\alpha}\cdot\alpha=1$.

ז"א הערך המוחלט של α שווה ל- 1.

ב נחשב את $\|T(z)\|$.

$$\|T(z)\|^2=\langle T(z),T(z)\rangle=\langle\alpha z,\alpha z\rangle=\alpha\cdot\bar{\alpha}\left\langle z,z\right\rangle=\langle z,z\rangle=\|z\|^2\ .$$

כלומר $\|T(z)\|=\|z\|$.

ג לכל $z,w\in\mathbb{C}^1$

$$\langle T(z),T(w)\rangle=\langle\alpha z,\alpha w\rangle=\alpha\cdot\bar{\alpha}\left\langle z,w\right\rangle=\langle z,w\rangle\ \ ,$$

כלומר $\langle T(z),T(w)\rangle=\langle z,w\rangle$.

בדוגמה הקודמת מצאנו כי העתקה שומרת על הנורמה ועל המכפלה הפנימית של וקטורים.

התכונות האלה (שמירה על נורמה ועל מכפלה פנימית) מתקיימות לכל העתקה אוניטרית.

כל אחת מהתכונות האלה שקולה לכך שהעתקה תהיה אוניטרית.

משפט 7.9

עבור העתקה ליניארית $T : V \to V$ במרחב מכפלה פנימית נוצר סופית, התנאים הבאים שקולים:

(1) T העתקה אוניטרית.

(2) לכל u, v

$$\langle T(u), T(\mathrm{v})\rangle = \langle u, \mathrm{v}\rangle \ .$$

(3) לכל $u \in V$,

$$\|T(u)\| = \|u\|$$

הוכחה: $\underline{(1) \Rightarrow (2)}$

נניח ש- T אוניטרית. נבחר $u, \mathrm{v} \in V$. אז

$$\langle T(u), T(\mathrm{v})\rangle = \langle u, \bar{T} \cdot T(\mathrm{v})\rangle = \langle u, I(\mathrm{v})\rangle = \langle u, \mathrm{v}\rangle \ .$$

$\underline{(2) \Rightarrow (3)}$

נתון שלכל u, v, $\langle T(u), T(\mathrm{v})\rangle = \langle u, \mathrm{v}\rangle$. בפרט:

$$\|T(u)\|^2 = \langle T(u), T(u)\rangle = \langle u, u\rangle = \|u\|^2 \ .$$

$\underline{(3) \Rightarrow (1)}$

$$\begin{aligned} 0 =& \|T(u)\|^2 - \|u\|^2 \\ &= \langle T(u), T(u)\rangle - \langle u, u\rangle \\ &= \langle \bar{T} \cdot T(u), u\rangle - \langle u, u\rangle \end{aligned}$$

לכן

$$\langle \bar{T} \cdot T(u), u\rangle = \langle u, u\rangle$$

לכן $\bar{T} \cdot T = I$.

■

משפט 7.10

עבור העתקה ליניארית T התנאי שלכל $u \in V$,

$$\|T(u)\| = \|u\|$$

שקול לתנאי שלכל $u, \mathrm{v} \in V$

$$\|T(u) - T(\mathrm{v})\| = \|u - \mathrm{v}\| \ .$$

הוכחה:

1) נניח $\|T(u)\| = \|u\|$ לכל $u \in V$. נקח $u, \mathrm{v} \in V$. אז

$$\|T(u) - T(\mathrm{v})\| = \|u - \mathrm{v}\| \qquad \Rightarrow \qquad \|T(u - \mathrm{v})\| = \|u - \mathrm{v}\| .$$

2) נניח $\|T(u) - T(\mathrm{v})\| = \|u - \mathrm{v}\|$ לכל $u, \mathrm{v} \in V$. נגדיר $\mathrm{v} = 0$. אז

$$\|T(u) - T(0)\| = \|T(u)\| = \|u - 0\| = \|u\| .$$

■

הפירוש הגאומטרי של השוויון $\|T(u) - T(\mathrm{v})\| = \|u - \mathrm{v}\|$ הוא שהמרחק בין וקטורים שווה למרחק בין תמונותיהם. מהמשפט נובע כי העתקה אוניטרית שומרת על מרחקים.

נראה במשפט הבא אפיון נוסף של העתקות אוניטריות.

משפט 7.11

יהי V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית, ותהי $T : V \to V$ העתקה ליניארית.

א) אם T העתקה אוניטרית, ואם $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V, אז גם $\{T(b_1), \ldots, T(b_n)\}$ בסיס אורתונורמלי.

ב) אם קיים בסיס אורתונורמלי של V שהעתקה T מעתיקה לבסיס אורתונורמלי, אז T אוניטרית.

הוכחה:

א)

$$\langle T(b_i), T(b_j) \rangle = \langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \ , \\ 1 & i = j \ . \end{cases}$$

לכן $\{T(b_1), \ldots, T(b_n)\}$ בסיס אורתונורמלי.

ב) נניח ש- $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ ו- $B' = \{T(b_1), \ldots, T(b_n)\}$ בסיסים אורתונורמליים. לכל $u, \mathrm{v} \in V$,

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \ , \qquad \mathrm{v} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i \ .$$

אז

$$\langle u, \mathrm{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{\beta}_i \ .$$

$$\langle T(u), T(\mathrm{v}) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(b_i), \sum_{i=1}^{n} \beta_i T(b_i) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{\beta}_i$$

ז"א $\langle T(u), T(\mathrm{v}) \rangle = \langle u, \mathrm{v} \rangle$. לכן T העתקה אוניטרית.

■

7.4 מטריצות מייצגות של העתקות אוניטירות

נניח $T:V\to V$ העתקה אוניטרית, B בסיס אורתונורמלי. נסמן $[T]_B=A$. אז $[\bar{T}]_B=\bar{A}$. לכן

$$[T\bar{T}]_B=[T]_B\cdot[\bar{T}]_B=A\cdot\bar{A}=I$$

וגם

$$[\bar{T}T]_B=[\bar{T}]_B\cdot[T]_B=\bar{A}\cdot A=I$$

הגדרה 7.7

תהי A מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$. ל-A קוראים מטריצה אוניטרית אם

$$A\cdot\bar{A}=\bar{A}\cdot A=I$$

(תנאי שקול $A^{-1}=\bar{A}$.)

אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ למטריצה אוניטרית קוראים מטריצה אורתוגונלית, ז"א כאשר

$$A\cdot A^t=A^t\cdot A=I\ ,$$

או, באופן שקול:

$$A^{-1}=A^t\ .$$

דוגמה 7.13

$$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\ ,\qquad T(\mathrm{v})=A\cdot\mathrm{v}$$

כאשר $A=[T]_E$. אם A אורתוגונלית, אז $A\cdot A^t=I$. לכן

$$|A|\cdot|A^t|=|A|^2=1$$

לכן

$$|A|=\pm1\ .$$

בנוסף, אם A אורתוגונלית, אז

$$A^{-1}=A^t\ .$$

נסמן

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

<u>המקרה $|A|=1$.</u>

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}=A^t=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\ .$$

לכן $c=-b$, $a=d$. כלומר

$$A=A_1=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$$

כאשר $a^2+b^2=1$.

<u>המקרה $|A|=-1$.</u>

במקרה של $|A|=-1$ נקבל

$$A^{-1}=-\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} ,$$

לכן $b=c$, $d=-a$. כלומר

$$A=A_2=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

כאשר $a^2+b^2=1$.

מהשוויון הזה, $a^2+b^2=1$, נובע שקיימת זווית יחידה ϕ ($0\leq\phi<2\pi$) כך ש:

$$b=\sin\phi \ , \qquad a=\cos\phi \ .$$

לכן ניתן לרשום:

$$A_1=\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$A_2=\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

מצאנו צורה של כל המטריצות האורתוגונליות ב $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

המשמעות הגאומטרית של העתקה $u\to A_i u$ היא הסיבוב של המישור בזווית ϕ נגד הכיוון השעון. נשים לב כי

$$A_2=\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

כלומר

$$A_2=A_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ היא המטריצה הסטנדרטית של העתקה השיקוף של המישור ביחס לציר ה- x. לכן פירושה הגאומטרית של A^{-1} הוא שיקוף המישור ביחס לציר ה- x, ולאחר מכן סיבוב בזווית ϕ נגד כיוון השעון.

נרשום את צנאי האוניטריות של מטריצה A בעזרת קואורדינטות.

משפט 7.12

1) אם A מטריצה אוניטרית מסדר n מעל שדה $\mathbb{F}$, אז גם שורותיה וגם עמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{F}^n$.

2) אם שורות (או עמודות) של מטריצה ריבועית מסדר n מעל $\mathbb{F}$ מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ ביחס מכפלה הפנימית הסטנדרטית אז המטריצה אוניטרית.

הוכחה: נסמן

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} , \qquad \bar{A}=\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \cdots & \bar{a}_{n1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} .$$

1) נניח ש A אוניטרית. אז $A\cdot\bar{A}=I$ וגם $\bar{A}\cdot A=I$. אז האיבר (i,j) של המטריצה $A\cdot\bar{A}$ הוא:

$$\left(A\bar{A}\right)_{ij}=\begin{pmatrix}a_{i1} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\bar{a}_{j1}\\ \vdots\\ \bar{a}_{jn}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\bar{a}_{jk}$$

לכן מטריצה A אוניטרית כאשר

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\bar{a}_{jk}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

הביטוי $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\bar{a}_{jk}$ הוא המכפלה פנימית ב- $\mathbb{F}^n$ של השורה ה- i והשורה ה- j של מטריצה A. לכן, אם A אוניטרית, אז שורות A הן בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$.

באופן דומה, האיבר ה- (i,j) של המטריצה $\bar{A}A$:

$$\left(\bar{A}A\right)_{ij}=\begin{pmatrix}\bar{a}_{1i} & \cdots & \bar{a}_{ni}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_{ki}a_{kj}$$

זאת המכפלה הפנימית הסטנדרטית של עמודות מטריצה A.

המכפלה הזאת שווה ל- 1 עבור $i=j$ ושווה ל- 0 עבור $i\neq j$.

לכן עמודות A מהוות בסיס אורתונורמלי של A.

2) נניח ששורות מטריצה A מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$. אז האיבר (i,j) של $A\cdot\bar{A}$:

$$\left(A\bar{A}\right)_{ij}=\begin{pmatrix}a_{i1} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\bar{a}_{j1}\\ \vdots\\ \bar{a}_{jn}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\bar{a}_{jk}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\ .$$

ז"א $A\bar{A}=I \Leftarrow A$ אוניטרית.

נניח כעת, שעמודות A מהוות בסיס אורתונורמלי. אז

$$\left(\bar{A}A\right)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_{ki}a_{kj}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\ .$$

ז"א $\bar{A}\cdot A=I \Leftarrow A$ אוניטרית.

■

משפט 7.13

עבור העתקה לינארית $T:V\to V$ (כאשר V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית) התנאים הבאים שקולים זה לזה:

א) T אוניטרית, ז"א

$$\bar{T}\cdot T=T\cdot\bar{T}=1$$

ב) לכל $u,\mathrm{v}\in V$:

$$\langle T(u),T(\mathrm{v})\rangle=\langle u,\mathrm{v}\rangle\ .$$

ג) לכל $u\in V$:
$$\|T(u)\| = \|u\|.$$

ד) לכל $u,\mathrm{v}\in V$:
$$\|T(u)-T(\mathrm{v})\| = \|u-\mathrm{v}\|\ .$$

ה) T מעבירה בסיס אורתונורמלי כלשהו של V לבסיס אורתונורמלי .

ו) המטריצה המייצגת של T לפי בסיס אורתונורמלי מסוים של V היא אוניטרית.

דוגמה 7.14

עבור אילו ערכים של α המטריצה הנתונה היא אורתוגונלית? אוניטרית?

א) $A=\begin{pmatrix}\alpha & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \alpha\end{pmatrix}$

ב) $A=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

פתרון:

א)
$$A=\begin{pmatrix}\alpha & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \alpha\end{pmatrix}\ ,\qquad \bar{A}=A=\begin{pmatrix}\bar{\alpha} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \bar{\alpha}\end{pmatrix}$$
$$A\cdot\bar{A}=\begin{pmatrix}\alpha\bar{\alpha}+\frac{1}{4} & \frac{1}{2}(\bar{\alpha}-\alpha)\\ \frac{1}{2}(\alpha-\bar{\alpha}) & \alpha\bar{\alpha}+\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|\alpha|^2+\frac{1}{4} & \frac{1}{2}(\bar{\alpha}-\alpha)\\ \frac{1}{2}(\alpha-\bar{\alpha}) & |\alpha|^2+\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$
לכן $\alpha=\bar{\alpha}\in\mathbb{R}$, $|\alpha|^2+\frac{1}{4}=1$, לכן $|\alpha|^2=\frac{3}{4}$, $\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. ז"א המטריצה אורתוגונלית עבור $\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ב) המכפלה הפנימית של העמודות שווה ל- 1 לכן העמודות לא מהוות בסיס אורתונורמלי. לכן A לא אורתוגונלית ולא אוניטרית.

דוגמה 7.15

א) יהי $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ וקטור יחידה כלשהו ב- $\mathbb{F}^n$ (המכפלה הפנימית היא סטנדרטית). הוכיחו כי קיימת מטריצה אוניטרית שהעמודה הראשונה שלה היא $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$.

ב) מצאו מטריצה אוניטרית מסדר 3, שהעמודה הראשונה שלה היא $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\\ -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

פתרון:

א) נשלים את הוקטור הנתון לבסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ ונשים אותם בעמודות המטריצה. המטריצה המתקבלת אוניטרית.

ב) $\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ וקטור יחידה כי

$$\langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_1 \rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \ .$$

נשלים את v_1 לבסיס כלשהו של $\mathbb{C}^3$:

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

נבנה בסיס אורתונורמלי (נשתמש בתהליך גרם-שמידט):

$$u_1 = \mathrm{v}_1 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2, u_1 \rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \ .$$

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}i \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}i \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_1 \rangle = -\frac{1}{2} \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_2 \rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \ .$$

$$\|u_2\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \ .$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}i \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\|u_3\|^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \ .$$

בסיס אורתנורמלי:

$$\hat{u}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\\ -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\ ,\qquad \hat{u}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}i\\ \frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}i\end{pmatrix}\ ,\qquad \hat{u}_3=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\ ,$$

לכן מטריצה $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ אוניטרית.

דוגמה 7.16

נתבונן בשלושת התנאים הבאים על העתקה $T:V\to V$.

א) T אוניטרית.

ב) T צמודה לעצמה.

ג) $T^2=I$.

הוכיחו כי קיום כל שני תנאים מאלה שרשומים גורר קיום התנאי השלישי.

פתרון:

נוכיח: (א) ו- (ב) $\Leftarrow$ (ג)

נתון: T אוניטרית וצמודה לעצמה. אז

$$\begin{aligned}T^2 =&T\cdot T\\ =&\bar{T}\cdot T && (\text{צמודה לעצמה } T)\\ =&I && (\text{כי } T \text{ אוניטרית})\end{aligned}$$

נוכיח: (ב) ו- (ג) $\Leftarrow$ (א)

נניח: T צמודה לעצמה ו- $T^2=I$.
צריך להוכיח: T אוניטרית.

$$\begin{aligned}\bar{T}\cdot T =&T\cdot T && (\text{צמודה לעצמה } T)\\ =&I && (\text{לפי הנתון})\end{aligned}$$

לכן T אוניטרית.

נוכיח: (ג) ו- (א) $\Leftarrow$ (ב)

נניח: T אוניטרית ו- $T^2=I$.
צריך להוכיח: T צמודה לעצמה.

$$\bar{T}\cdot T=I \quad\Rightarrow\quad \bar{T}\cdot T^2=T$$

לכן נקבל $T^2=I$

$$\bar{T}=T\ .$$

דוגמה 7.17

א) הוכיחו כי מכפלת העתקות אוניטריות היא העתקה אוניטרית.

ב) תהי T העתקה אוניטרית. מתי αT היא העתקה לינארית?

ג) האם סכום העתקות אוניטריות היא העתקה אוניטרית?

ד) תהי T העתקה אוניטרית. הוכיחו כי $\bar{T}$ ו- T^{-1} אוניטריות.

פתרון:

א) נניח כי T_1, T_2 העתקות אוניטריות.

אז
$$(T_1T_2) \cdot \overline{(T_1T_2)} = T_1 \left(T_2\bar{T}_2\right) \bar{T}_1 = T_1\bar{T}_1 = I \ .$$

ב)
$$(\alpha T)\left(\overline{\alpha T}\right) = \alpha T \cdot \bar{\alpha}\bar{T} = \alpha\bar{\alpha} T \cdot \bar{T} = \alpha\bar{\alpha} = 1$$

אם"ם $|\alpha|^2 = 1$.

ג) דוגמה נגדית: נקח T העתקה אוניטרית. אז לפי סעיף (ב), גם $-T$ אוניטרית. אבל $T + (-T) = 0$ לא אוניטרית.

ד) T אוניטרית (נתון) לכן
$$T \cdot \bar{T} = \bar{T} \cdot T = I$$

נקח את הצמודה של $\bar{T} \cdot T = I$:
$$\overline{\bar{T} \cdot T} = \bar{I} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{T} \cdot \bar{\bar{T}} = \bar{T} \cdot T = I \ .$$

לכן $\bar{T}$ אוניטרית.

T אוניטרית, לכן
$$\bar{T} \cdot T = I \qquad \Rightarrow \qquad T^{-1} = \bar{T} \ .$$