עבודה עצמית 4

שאלה 1

חשבו את המטריצה ההפוכה של A ובדקו כי מתקיים $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

א) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

ב) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$

ג)

ד) $A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

ה) $A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 0 \\ -5 & 9 & 1 \\ -4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

ו) פתרו את המערכת $\left.\begin{aligned} -5x+8y &= 1 \\ -5x+9y+z &= 2 \\ -4x+7y+2z &= 3 \end{aligned}\right\}$ בעזרת סעיף ד.

שאלה 2

פתרו את המשוואות המטריציאליות הבאות:

א)

$$A \cdot X = B \ , \qquad A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} -13 & -9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ב)

$$A \cdot X = B \ , \qquad A = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} -11 & 5 & -15 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ג)

$$A \cdot X = B \ , \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

ד)

$$X \cdot A = B \ , \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} -9 & 9 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

ה)

$$A \cdot X \cdot B = C \ , \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \ , \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 12 \end{pmatrix}$$

שאלה 3

נתונות המטריצות:

$$A=\begin{pmatrix}5 & -4\\ -8 & 6\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\ .$$

פתרו את המשוואות הבאות:

א) $AX=C$

ב) $XB=C$

ג) $AXB=C$

שאלה 4

נתונה מטריצות $A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש- A ו- C הפיכות. נתון ש- $BC=C(2A-3X)A$ כאשר $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$. מצאו את X.

שאלה 5

עבור אילו ערכים של הפרמטר k המטריצה $\begin{pmatrix}0 & 4-k & 3\\ 3+k & 0 & 2\\ 0 & 4 & -k\end{pmatrix}$ הפיכה?

שאלה 6

מצאו את המטריצה A המקיימת $(2I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

שאלה 7

תהי $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ המקיימת

$$A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}\ ,\qquad A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\ ,\qquad A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\ .$$

מצאו את A.

שאלה 8

תהיינה $A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצות הפיכות. מצאו את ההופכית של $7B^{-1}CA^{-1}B^2$.

שאלה 9

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 6\\ 3 & 6 & 10\end{pmatrix}$

א) מצאו את A^{-1}.

ב) מצאו $X\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ כך ש- $AXA+A=A^2$.

שאלה 10

תהיינה $A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו:

א) אם A הפיכה ו- $BA = CA$ אז $B = C$.

ב) אם $AB = AC$ אז $B = C$.

ג) אם $AB = 0$ אז A ו- B אינן הפיכות.

ד) אם $AB = 0$ ו- $A \neq 0$ אז B איננה הפיכה.

ה) אם AB הפיכה אז A ו- B הפיכות.

ו) אם A הפיכה אז AB הפיכה.

ז) אם A הפיכה ו- B הפיכה אז $A + B$ הפיכה.

ח) אם A הפיכה ו- B לא הפיכה אז $A + B$ לא הפיכה.

ט) תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ויהי $f(x) = 2x^4 - x^2 + 3x - 2$ פולינום כך ש- $f(A) = 0$. אזי A הפיכה.

י) אם A הפיכה אז $A + A^t$ הפיכה.

שאלה 11 הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:
תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם A הפיכה ו- $A + B$ הפיכה אז

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(A + B)^{-1} \ .$$

שאלה 12 תהי $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. אומרים כי A מטריצה סטוקסטית אם הסכום של האיברים בכל עמודה שווה 1.
הוכיחו כי המכפלה של כל שתי מטריצות סטוקסטיות שווה למטריצה סטוקסטית.

שאלה 13 נניח ש- $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה המקדמים, ו- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$ ווקטור המשתנים של המערכת

הוכיחו: אם A הפיכה אז הפתרון היחיד למערכת $AX = 0$ הוא $X = 0$ (ווקטור האפס).

פתרונות

שאלה 1

א)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{-1}{7} \cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to -R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-4}{7} & \frac{-1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

ב)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 2 & 1 & 0 \\ -9 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3 \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to -\frac{1}{3} \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{-2}{3} \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$$

ג)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to 4 \cdot R_1 + 5 \cdot R_3]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -25 & -7 & 4 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to 7 \cdot R_3 + 25 \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2 \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -7 & -49 & -70 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{7} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 5 \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & -3 & -4 & -35 & -50 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + 3 \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 5 & 40 & 55 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{5} \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 8 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 11 \\ -1 & -7 & -10 \\ 3 & 25 & 35 \end{pmatrix}$$

ד) $A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 0 \\ -5 & 9 & 1 \\ -4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to 4\cdot R_1 - 5\cdot R_3]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -10 & 4 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 3\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to 7\cdot R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -6 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to 7R_1 - 8R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -35 & 0 & 0 & 55 & -80 & 40 \\ 0 & 7 & 0 & -6 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{5}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -7 & 0 & 0 & 11 & -16 & 8 \\ 0 & 7 & 0 & -6 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2 \to \frac{1}{7}\cdot R_2 \\ R_3 \to \frac{-1}{7}\cdot R_3}]{R_1 \to \frac{-1}{7}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-11}{7} & \frac{16}{7} & \frac{-8}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-6}{7} & \frac{10}{7} & \frac{-5}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{5}{7} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-11}{7} & \frac{16}{7} & \frac{-8}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{10}{7} & \frac{-5}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -11 & 16 & -8 \\ -6 & 10 & -5 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

ה) פתרו את המערכת $\left\{ \begin{array}{rl} -5x + 8y & = 1 \\ -5x + 9y + z & = 2 \\ -4x + 7y + 2z & = 3 \end{array} \right.$ בעזרת סעיף ד.

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-11}{7} & \frac{16}{7} & \frac{-8}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{10}{7} & \frac{-5}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ \frac{8}{7} \end{pmatrix} .$$

$$x = -\frac{3}{7} , \qquad y = -\frac{1}{7} , \qquad z = \frac{8}{7} .$$

שאלה 2

א)

$$A\cdot X=B\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}6&-1\\-1&0\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}-13&-9\\2&1\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B\ ,\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&-6\end{pmatrix}\ .$$

לכן

$$X=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-13&-9\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1\\1&3\end{pmatrix}\ .$$

ב)

$$A\cdot X=B\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}-6&-1\\1&0\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}-11&5&-15\\2&-1&3\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B\ ,\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-6\end{pmatrix}\ .$$

לכן

$$X=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-11&5&-15\\2&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-1&1&-3\end{pmatrix}\ .$$

ג)

$$A\cdot X=B\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\2&0&3\\1&1&3\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}0&-2\\-4&4\\-3&4\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B\ ,\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-4&6\\3&-5&7\\-2&3&-4\end{pmatrix}\ .$$

לכן

$$X=\begin{pmatrix}3&-4&6\\3&-5&7\\-2&3&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-2\\-4&4\\-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2\\-1&2\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

ד)

$$X\cdot A=B\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}2&-5&0\\-3&-6&1\\4&4&-1\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}-9&9&1\\1&-3&0\end{pmatrix}$$

$$X=B\cdot A^{-1}\ ,\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&5&5\\-1&2&2\\-12&28&27\end{pmatrix}\ .$$

לכן

$$X=\begin{pmatrix}-9&9&1\\1&-3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&5&5\\-1&2&2\\-12&28&27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&1&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}\ .$$

ה)

$$A\cdot X\cdot B=C\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}2&-3\\-2&4\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}-3&6\\-2&5\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}7&-4\\-12&12\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}\ .$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&\frac{3}{2}\\1&1\end{pmatrix}\ ,\qquad B^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}&2\\-\frac{2}{3}&1\end{pmatrix}\ .$$

$$X=\begin{pmatrix}2&\frac{3}{2}\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&-4\\-12&12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}&2\\-\frac{2}{3}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\3&-2\end{pmatrix}\ .$$

שאלה 3

$$A=\begin{pmatrix}5&-4\\-8&6\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\ .$$

פתרו את המשוואות הבאות:

א)

$$AX=C\qquad\Rightarrow\qquad X=A^{-1}\cdot C$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-3&-2\\-4&-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot C=\begin{pmatrix}-5&5\\-\frac{13}{2}&\frac{13}{2}\end{pmatrix}\ .$$

ב)

$$XB=C\qquad\Rightarrow\qquad X=C\cdot B^{-1}$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2\\-4&3\end{pmatrix}$$

$$X=C\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}7&-5\\7&-5\end{pmatrix}\ .$$

ג)

$$AXB=C\qquad\Rightarrow\qquad X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}-35&25\\-\frac{91}{2}&\frac{65}{2}\end{pmatrix}\ .$$

שאלה 4

$$BC=C(2A-3X)A\ \Rightarrow\ C^{-1}BC=(2A-3X)A\ \Rightarrow\ C^{-1}BCA^{-1}=2A-3X$$

$$\Rightarrow\ C^{-1}BCA^{-1}-2A=-3X\ \Rightarrow\ X=-\tfrac{1}{3}\left(C^{-1}BCA^{-1}-2A\right)\ .$$

<u>שאלה 5</u> תהי $A=\begin{pmatrix}0&4-k&3\\3+k&0&2\\0&4&-k\end{pmatrix}$.

$$\det(A)=-(k-6)(k+2)(k+3)\ .$$

$|A|\neq 0$ אם $k\neq 6,-2,-3$. לכן המטריצה הפיכה לכל $k\neq 6,-2,-3$.

<u>שאלה 6</u>

$$\begin{aligned}(2I-A)^{-1}&=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\\2I-A&=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}\\A&=2I-\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}\\A&=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&3\end{pmatrix}\ .\end{aligned}$$

<u>שאלה 7</u> נגדיר את המטריצות

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&0&1\\2&3&1\end{pmatrix}\ .$$

אז

$$A\cdot B=C\ ,\qquad A=C\cdot B^{-1}\ .$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\ .$$

לכן

$$A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&0&1\\2&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}\ .$$

<u>שאלה 8</u> תהי $X=(7B^{-1}CA^{-1}B^2)^{-1}$. אז

$$\begin{aligned}X\cdot 7B^{-1}CA^{-1}B^2&=I\\X\cdot B^{-1}CA^{-1}B^2&=\frac{1}{7}\cdot I\\X\cdot B^{-1}CA^{-1}&=\frac{1}{7}B^{-2}\\X\cdot B^{-1}C&=\frac{1}{7}B^{-2}\cdot A\\X\cdot B^{-1}&=\frac{1}{7}B^{-2}\cdot A\cdot C^{-1}\\X&=\frac{1}{7}B^{-2}\cdot A\cdot C^{-1}\cdot B\ .\end{aligned}$$

שאלה 9 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&6\\3&6&10\end{pmatrix}$

א) $A^{-1}=\begin{pmatrix}14&-2&-3\\-2&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}$.

ב)

$$AXA+A=A^2 \qquad \Rightarrow \qquad AX+I=A \qquad \Rightarrow \qquad X=A^{-1}\cdot(A-I)=I-A^{-1}$$

לכן

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}14&-2&-3\\-2&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13&2&3\\2&0&0\\3&0&0\end{pmatrix}$$

שאלה 10

א) <u>אם A הפיכה ו- $BA=CA$ אז $B=C$.</u>

טענה נכונה. הוכחה:

A הפיכה לכן קיימת A^{-1}. נכפיל מצד ימין ב- A^{-1}:

$$B\cdot A\cdot A^{-1}=C\cdot A\cdot A^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad B=C\ .$$

ב) <u>אם $AB=AC$ אז $B=C$.</u>

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ , \qquad B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\ , \qquad C=\begin{pmatrix}5&1\\8&7\end{pmatrix}\ .$$

$AB=AC=0$, $B\neq C$.

ג) <u>אם $AB=0$ אז A ו- B אינן הפיכות.</u>

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ , \qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ .$$

$A\cdot B=0$ ו- B הפיכה.

ד) <u>אם $AB=0$ ו- $A\neq 0$ אז B איננה הפיכה.</u>

טענה נכונה. הוכחה:
נוכיח בדרך השלילה. נניח ש- $A\cdot B=0$ ו- $A\neq 0$ ו- B הפיכה.

אז קיימת B^{-1}. נכפיל את $AB=0$ מצד ימין ב- B^{-1}:

$$A\cdot B\cdot B^{-1}=0\cdot B^{-1} \quad\Rightarrow\quad A\cdot I=0 \quad\Rightarrow\quad A=0\ ,$$

בסתירה דכך ש- $A\neq 0$.

ה) אם AB הפיכה אז A ו- B הפיכות.

טענה נכונה. הוכחה:
AB הפיכה $\Leftarrow |AB|\neq 0 \Leftarrow |A|\cdot|B|\neq 0 \Leftarrow |A|\neq 0$ וגם $|B|\neq 0$. לפיכך A הפיכה וגם B הפיכה.

ו) אם A הפיכה אז AB הפיכה.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

A הפיכה אבל AB לא הפיכה.

ז) אם A הפיכה ו- B הפיכה אז $A+B$ הפיכה.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+I_{2\times2}\ ,\qquad B=-I\ ,\qquad A+B=I_{2\times2}-I_{2\times2}=0_{2\times2}\ .$$

$|A|=|I|=1$,

$|B|=|-I|=(-1)^2|I|=1$,

$|A+B|=0$.

ז"א A הפיכה, B הפיכה, $A+B$ לא הפיכה.

ח) אם A הפיכה ו- B לא הפיכה אז $A+B$ לא הפיכה.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad A+B=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\ .$$

$|A|=1$, $|B|=0$, $|A+B|=2$.
ז"א A הפיכה, B לא הפיכה, $A+B$ הפיכה.

ט) תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ויהי $f(x)=2x^4-x^2+3x-2$ פולינום כך ש- $f(A)=0$. אזי A הפיכה.

טענה נכונה. הוכחה:
לפי הנתון,

$$f(A)=2A^4-A^2+3A-2I=0 \quad\Rightarrow\quad A\cdot(2A^3-A+3)=2I \quad\Rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{2}\left(2A^3-A+3I\right)$$

ז"א A^{-1} קיימת לכן A הפיכה.

י) אם A הפיכה אז $A+A^t$ הפיכה.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad A^t=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\ ,\qquad A+A^t=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\ .$$

$|A|=1 \Leftarrow$ A הפיכה.
$|A+A^t|=0 \Leftarrow$ $A+A^t$ לא הפיכה.

שאלה 11 הטענה נכונה. הוכחה:

נכפיל מצד ימין ב- $A+B$:

$$(A+B)^{-1}(A+B)=A^{-1}(A+B)-A^{-1}B(A+B)^{-1}(A+B)=I_{n\times n}+A^{-1}B-A^{-1}BI_{n\times n}=I_{n\times n}\ .$$

שאלה 12

$$A_1=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}\ ,\qquad A_2=\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}\ .$$

$$A_1A_2=\begin{pmatrix}a_1a_2+b_1c_2&a_1b_2+b_1d_2\\c_1a_2+d_1c_2&c_1b_2+d_1d_2\end{pmatrix}$$

$$a_1a_2+b_1c_2+c_1a_2+d_1c_2=a_2(a_1+c_1)+c_2(b_1+d_1)=a_2+c_2=1\ ,$$

$$a_1b_2+b_1d_2+c_1b_2+d_1d_2=b_2(a_1+c_1)+d_2(b_1+d_1)=b_2+d_2=1\ .$$

שאלה 13 נוכיח דרך השלילה. נניח ש A הפיכה ו קיים פתרון $X\neq 0$.
A הפיכה אז A^{-1} קיימת.

$$AX=0\quad\Rightarrow\quad A^{-1}AX=A^{-1}\cdot 0\quad\Rightarrow\quad IX=0\quad\Rightarrow\quad X=0$$

בסתירה לכך ש- $X\neq 0$.