

# חישוביות וסיבוכיות תשפ"ה סמסטר א'

## שיעור 5

### מכונות טיורינג לא דטרמיניסטיות

#### תוכן העניינים

1	5.1 מודל לא דטרמיניסטיות
4	5.2 שקילות חישוב של מכונה דטרמיניסטית ולא דטרמיניסטית

#### 5.1 מודל לא דטרמיניסטיות

##### הגדרה 5.1: מודל לא דטרמיניסטיות

תהי  $M$  מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית. עבור שפה  $w \in \Sigma^*$  אומרים עי

- $M$  מקבלת את  $w$  אם קיים חושב של  $M$  על  $w$  שמגיע למצב .acc
- $M$  דוחה את  $w$  אם כל חישוב של  $M$  על  $w$  מגיע למצב .rej

##### הגדרה 5.2: מודל לא דטרמיניסטיות

תהי  $M$  מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית.

עבור שפה  $w \in \Sigma^*$  אומרים עי

- $M$  מקבלת את  $w$  אם קיים חושב של  $M$  על  $w$  שמגיע למצב .acc
  - $M$  דוחה את  $w$  אם כל חישוב של  $M$  על  $w$  מגיע למצב .rej
- עבור שפה  $L \subseteq \Sigma^*$  אומרים כי  $M$  מגריעה את  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$ :
- אם  $w \in L$  אז  $M$  מקבלת את  $w$ .
  - אם  $w \notin L$  אז  $M$  דוחה את  $w$ .
- $M$  מקבלת את  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$ ,  $M$  מקבלת את  $w$  אם  $w \in L$ .

הבמודל הלא דטרמיניסטי

- בהכרעה לא דטרמיניסטית של שפה

לכל מילה בשפה  $\exists$  לפחות חישוב אחד שעוצר במצב מקבל.  
לכל מילה שאינה בשפה כל החישובים חייבים לעצור במצב דוחה.

- בקבלה לא דטרמיניסטית של שפה  
לכל מילה בשפה  $\exists$  לפחות חישוב אחד שעוצר במצב מקבל.  
לכל מילה שאינה בשפה המכונה יכולה לדחות או לא לעצור.

## דוגמה 5.1

$$L = \left\{ w \in \{0,1\}^* \mid w = uv, (u\bar{v}) = (u\bar{v})^R \right\}$$

שפת כל המחרוזות שניתן להפוך אותן לפילנדרום ע"י פעולת "משלים לסיפא". למשל:  $01101 \in w$  מכיוון ש-

$$0110\bar{1} = 01110 = (01110)^R.$$

$1010010 \in w$  מכיוון ש-

$$10100\bar{1}0 = 1010101 = (1010101)^R.$$

בנו מכונת

(א) דטרמיניסטית שמכריעה את שפת כל הפלינדרומים.

(ב) לא דטרמיניסטית שמכריעה את השפה  $L$ .

## פתרון:

(סעיף א)

מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה
$q_0$	$\sqcup$	acc		$R$
$q_0$	$\sigma$	$q.\sigma$	$\sqcup$	$R$
$q.\sigma$	$\tau$	$q.\sigma$		$R$
$q.\sigma$	$\sqcup$	$p.\sigma$	$\sqcup$	$L$
$p.\sigma$	$\sigma$	back	$\sqcup$	$L$
$p.\sigma$	$\sqcup$	acc		$R$
$p.\sigma$	$\tau$	rej		$R$
back	$\sigma$	back		$L$
back	$\sqcup$	$q_0$	$\sqcup$	$R$

כאשר

$$\tau \neq \sigma, \tau \in \Sigma, \sigma \in \Sigma.$$

זאת מכונה דטרמיניסטית המכריעה את שפת הפלינגרומים.

(סעיף ב) לבניית המכונה הלא דטרמיניסטית שמכריעה את  $L$ , נוסיף את המעברים החדשים הבאים:

מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה	
$\hat{q}_0$	0, 1	$\hat{q}_0$		$R$	תזוזה ימינה
$\hat{q}_0$	0, 1, $\_$	flip		$S$	flip למצב אי-דטרמיניסטי מעבר
flip	0	1	flip	$R$	ביצוע פעולת "משלים לסיפא" החל מהנקודה שנבחרה אי-דטרמיניסטית
flip	1	0	flip	$R$	ביצוע פעולת "משלים לסיפא" החל מהנקודה שנבחרה אי-דטרמיניסטית
flip	$\_$	back	$\_$	$L$	
back	0, 1	back		$L$	חזרה להתחלה
back	$\_$	$q_0$		$R$	מעבר למכונה לבדיקת פלינדרום

- אם  $w \in L$  אז  $\exists$  חישוב שעושה flip בדיוק במיקום הנכון  $\leftarrow$  הופך את הסיפא של המילה  $\leftarrow$  המכונה pal מקבלת  $w$ .
- אם  $w \notin L$  אז לא משנה באיזה מיקום במילה עוברים למצב flip לא מקבלים פלינדרום  $\leftarrow$  כל חישוב ידיע למצב rej.
- לפיכך המכונה הלא דטרמיניסטית הזו מכריעה את השפה  $L$ .

#### משפט 5.1: סגירות תחת פעולת ה Prefix

תהי  $L$  שפה שמתקבלת ע"י מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית. אזי גם

$$\text{prefix}(L) = \{u \mid \exists v, uv \in L\}$$

מתקבלת ע"י מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית.

**הוכחה:** תהי  $M^L$  מ"ט שמקבלת את  $L$ .  
נבנה  $M^P$  שמקבלת את  $\text{prefix}(L)$ .

נוסיף באופן אי דטרמיניסטי סיפא  $v$  לאחר הקלט  $u$  ואז נבדוק אם המילה היא בשפה  $L$ .

בפרט, נתונה טבלת המעברים של המכונה  $M^L$  שמקבלת את השפה  $L$ :

תזוזה	כתיבה	חדש מצב	סימון	מצב
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$q_0^L$
$\vdots$				

נוסיף את הטבלת המעברים הבאה:

תיאור מילולי	תזוזה	כתיבה	חדש מצב	סימון	מצב
	$R$		$q_0^p$	$\sigma$	$q_0^p$
	$S$	$\_$	add	$\_$	$q_0^p$
$\forall \sigma \in \Sigma$ מגיעים לסוף המילה ואז מוסיפים אותיות באופן לא דטרמיניסטי.	$R$	$\sigma$	add	$\_$	add
חוזרים להתחלה.	$L$	$\_$	back	$\_$	add
	$L$		back	$\sigma$	back
עוברים למכונה $M^L$ ובודקים אם המילה בשפה $L$ .	$R$		$q_0^L$	$\_$	back

אם המילה  $uv \in L$  אז  $\exists v \Leftarrow u \in \text{prefix}(L)$  כך ש-  
 $\Leftarrow \exists$  חישוב שמנחש לכתוב בדיוק  $v$  לאחר  $u$   
 $\Leftarrow M^L$  מגיעה למצב acc  
 $\Leftarrow M^p$  מגיעה למצב acc.

אם המילה  $u \notin \text{prefix}(L)$  אז לא משנה איזה  $v$  נוסף, לא נגיע למילה בשפה  $L$ .  
 $\Leftarrow$  המכונה המקורית  $M^L$  לא תקבל את  $uv$   
 $\Leftarrow$  המכונה שלנו  $M^p$  לא תקבל את  $u$ .

שימו לב,  $M^p$  מקבלת את השפה  $\text{prefix}(L)$ .

אבל היא לא מכריעה את  $\text{prefix}(L)$ .  
 בשביל להכריע צריך שכל מילה שלא בשפה  $\text{prefix}(L)$  תדחה, אבל  $\exists$  חישוב אחד שלא מגיע למצב rej וזה חישוב שלא עוצר, שנשאר במצב add כל הזמן ורק מוסיף אותיות.

## 5.2 שקילות חישוב של מכונה דטרמיניסטית ולא דטרמיניסטית

משפט 5.2: שקילות בין מ"ט דטרמיניסטית לבין מ"ט לא דטרמיניסטית

לכל מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית  $\exists$  מכונה דטרמיניסטית שקולה.

הוכחה:

תהי  $N$  מ"ט לא דטרמיניסטית.

נבנה  $M$  מ"ט דטרמיניסטית שקולה.

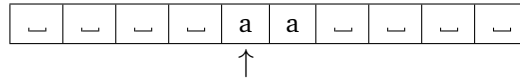
הרעיון הבניה הוא שהמ"ט דטרמיניסטית תנסה את כל החישובים של הט"לד אחד אחד.  
 אם המט"ד מגלה חישוב שעובר ל- acc אז נקבל.  
 אם היא מגלה שכל החישובים מובילים ל- rej אז נדחה.

## דוגמה 5.2

נתונה הטבלת המעברים של מט"ד

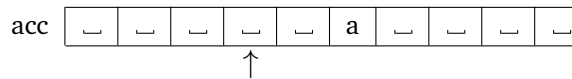
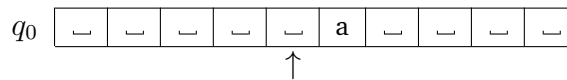
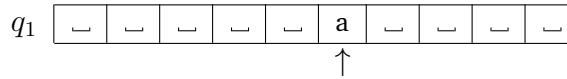
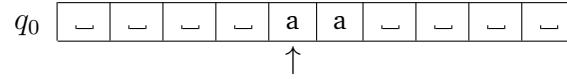
	תזוזה	כתיבה	חדש מצב	סימון	מצב
1	$R$	a	$q_0$	a	$q_0$
2	$R$	␣	$q_1$	a	$q_0$
3	$R$	a	$q_1$	a	$q_0$
4	$L$	a	$q_0$	a	$q_0$
1	$L$	␣	acc	␣	$q_0$
1	$L$	a	$q_0$	a	$q_1$
2	$R$	a	$q_1$	a	$q_1$
1	$R$	a	rej	␣	$q_1$
2	$L$	a	$q_1$	␣	$q_1$

נתון הקלט:



ריצה אפשרית על הקלט הינה

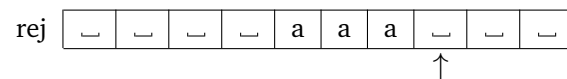
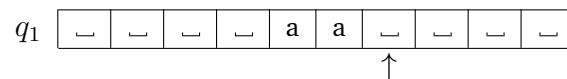
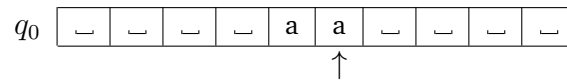
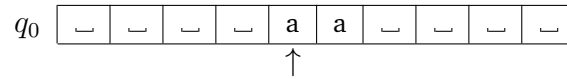
$$\_ q_0 a a \_ \xrightarrow{2} \_ \_ q_1 a \_ \xrightarrow{1} \_ q_0 \_ a \_ \xrightarrow{1} acc \_ \_ a \_$$



החישוב הגיע למצב מקבל.

ריצה אחרת אפשרית על הקלט הינה

$$\_ q_0 a a \_ \xrightarrow{1} \_ a q_0 a \_ \xrightarrow{3} \_ a a q_1 \_ \xrightarrow{1} \_ a a a rej \_$$



החישוב הגיע למצב דוחה.

בסה"כ  $\exists$  סדרת בחירות שמובילה למצב acc  
ו-  $\exists$  סדרת בחירות שמובילה למצב rej.

מכונת טיורינג היא אי-דטרמיניסטית אם היא קובעת בעצמה את הבחירות שלה כאשר יש מספר אפשרויות לבצע צעד.

כדי להפוך אותה למט"ד אנחנו נקבע את הבחירות והיא לא תבחר בצורה אי-דטרמיניסטית.

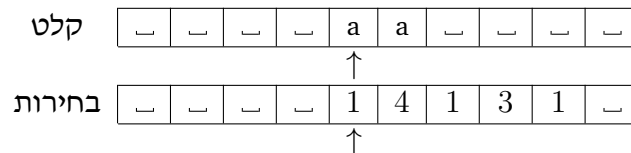
כשלב ביניים להסבר, נעבור למכונה עם 2 סרטים: סרט הקלט וסרט הבחירות.

סרט הבחירות יכלול סדרת מספרים שהיא בחירה ספציפית של מעברים. כך המ"ט לא תהיה יותר אי-דטרמיניסטית.

סרט הבחירות יקבע מה לעשות בכל שלב בחישוב.

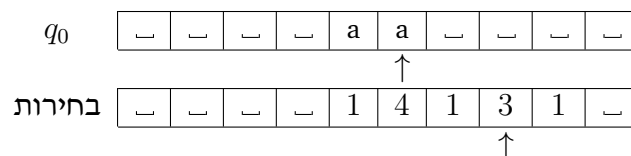
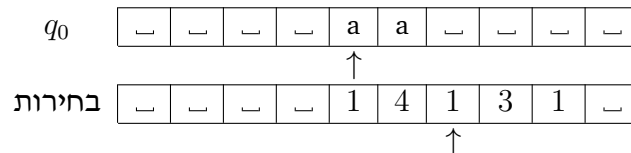
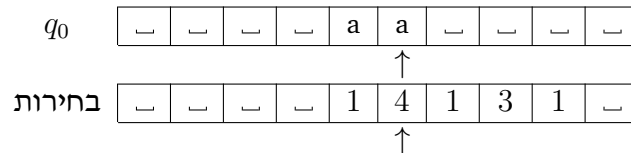
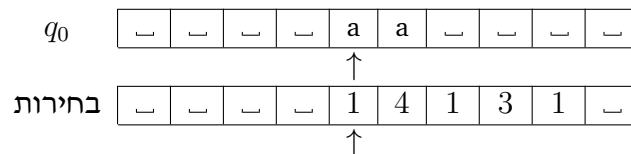
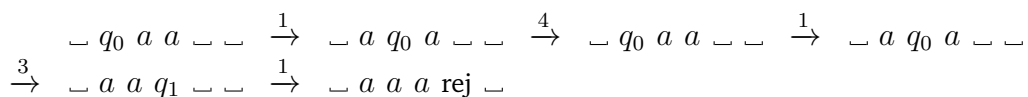
המכונה עובדת על סרט הקלט ובכל צעד מבצעת את מה שכתוב על סרט הבחירות.

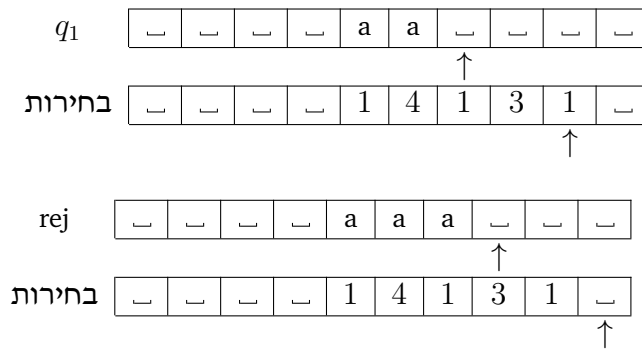
### דוגמה 5.3



	מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה
1	$q_0$	a	$q_0$	a	R
2	$q_0$	a	$q_1$	␣	R
3	$q_0$	a	$q_1$	a	R
4	$q_0$	a	$q_0$	a	L
1	$q_0$	␣	acc	␣	L
1	$q_1$	a	$q_0$	a	L
2	$q_1$	a	$q_1$	a	R
1	$q_1$	␣	rej	a	R
2	$q_1$	␣	$q_1$	a	L

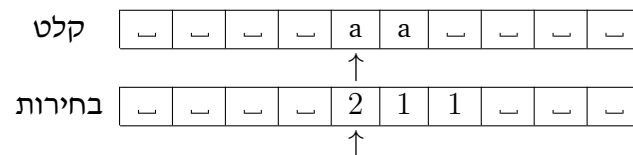
ההוספה של סרט הבחירות הופכת את המ"ט למט"ד ונקבל את הריצה הבאה על הקלט aa:





החישוב הסתיים במצב דחייה.

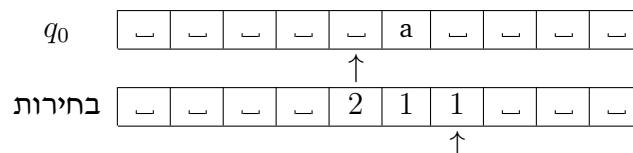
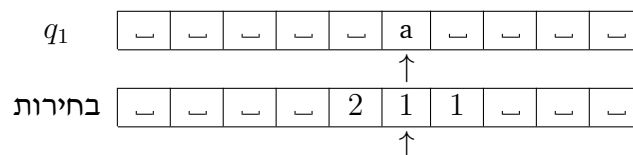
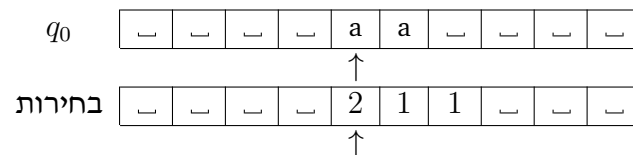
## 5.4 דוגמה

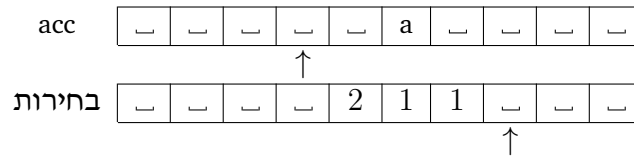


	מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה
1	$q_0$	a	$q_0$	a	$R$
2	$q_0$	a	$q_1$	␣	$R$
3	$q_0$	a	$q_1$	a	$R$
4	$q_0$	a	$q_0$	a	$L$
1	$q_0$	␣	acc	␣	$L$
1	$q_1$	a	$q_0$	a	$L$
2	$q_1$	a	$q_1$	a	$R$
1	$q_1$	␣	rej	a	$R$
2	$q_1$	␣	$q_1$	a	$L$

ההוספה של סרט הבחירות הופכת את המ"ט למט"ד ונקבל את הריצה הבאה על הקלט aa:

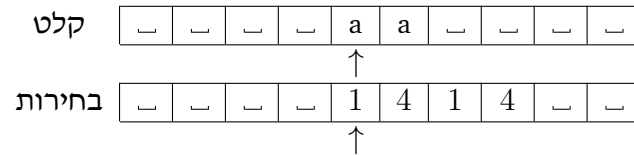
$$\_ q_0 \ a \ a \ \_ \xrightarrow{2} \_ \_ q_1 \ a \ \_ \xrightarrow{1} \_ q_0 \ \_ a \ \_ \xrightarrow{1} \text{acc} \ \_ \_ a \ \_ \_$$





החישוב הסתיים במצב קבלה.

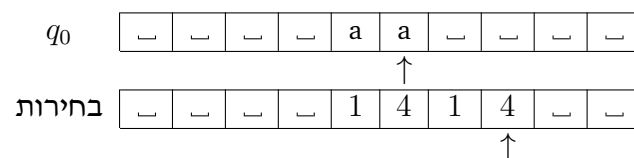
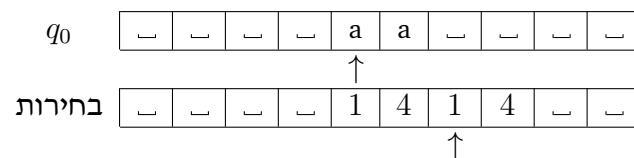
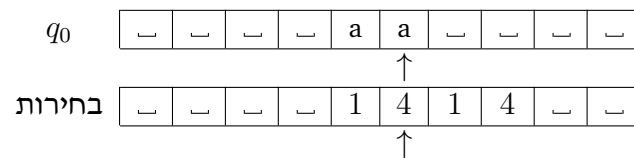
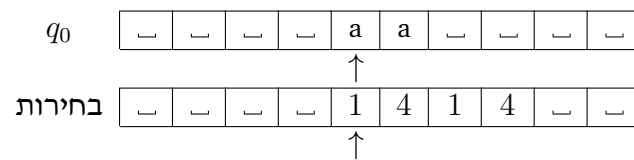
## 5.5 דוגמה



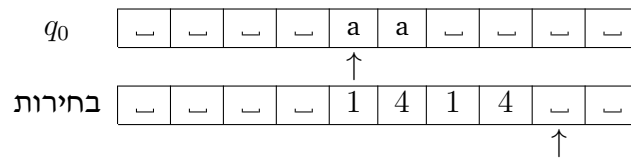
	מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה
1	$q_0$	a	$q_0$	a	$R$
2	$q_0$	a	$q_1$	␣	$R$
3	$q_0$	a	$q_1$	a	$R$
4	$q_0$	a	$q_0$	a	$L$
1	$q_0$	␣	acc	␣	$L$
1	$q_1$	a	$q_0$	a	$L$
2	$q_1$	a	$q_1$	a	$R$
1	$q_1$	␣	rej	a	$R$
2	$q_1$	␣	$q_1$	a	$L$

ההוספה של סרט הבחירות הופכת את המ"ט למט"ד ונקבל את הריצה הבאה על הקלט aa:

$$\_ q_0 a a \_ \xrightarrow{2} \_ q_1 a \_ \xrightarrow{1} \_ q_0 \_ a \_ \xrightarrow{1} acc \_ \_ a \_ \_$$







החישוב הסתייסבלי להגיע למצב עצירה.

### כיצד תעבוד המכונה הדטרמיניסטית?

הסדרה בסרט הבחירות קובעת את סדרת הבחירות לביצוע בסרט הראשון. המכונה הזו היא מכונה דטרמיניסטית. בסרט הבחירות התנועה היא תמיד ימינה, כי מדובר בבחירות שעושים בזו אחר זו בכל צעד וצעד. בסרט הקלט התזוזה יכולה להיות לכל כיוון.

הרעיון הוא שהמכונה תייצר את כל סדרות הבחירות האפשריות. לכל סדרת בחירות, המכונה תריץ את החישוב כפי שראינו. כך המכונה תמשיך עד שתמצא חישוב שמגיע למצב קבלה. אם תמצא כזה היא תעבור לקבלה. ואם לא, אז המכונה תמשיך לחפש, עוד חישוב ועוד חישוב. למכונה יהיה סרט נוסף שיקרא כספת הקלט. הוא ישמור גרסא מקורית של הקלט. את הקלט נעתיק בכל סבב מכספת הקלט (הסרט העליון) לסרט העבודה (הסרט האמצעי).

במט"ד:

סבב ריצה = סדרת בחירות אחת

בתהליך:

בכספת כתובה המילה.

כותבים "1" בסרט הבחירות (זאת סדרת הבחירות הראשונה).

מעתיקים את הקלט לסרט העבודה.

מפעילים את המכונה על הסרט העבודה לפי הסדרת הבחירות המופיעות בסרט הבחירות.

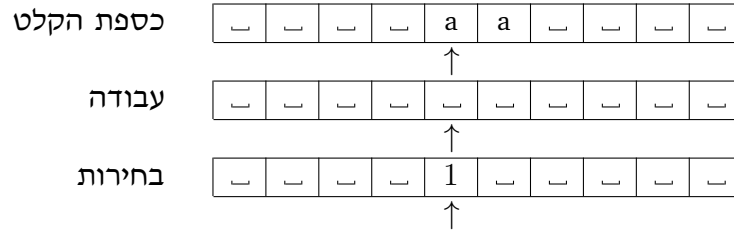
אם נגיע למצב קבלה של  $N$  אז  $M$  עוברת למצב קבלה.

אם לא נגיע למצב קבלה ב- $N$  (כלומר מגיעים לדחייה אן לא נגיע למצב עצירה בכלל) אז נעלה את המספר של הסדרת הבחירות ב-1 וחוזרים על התהליך הזה שוב.

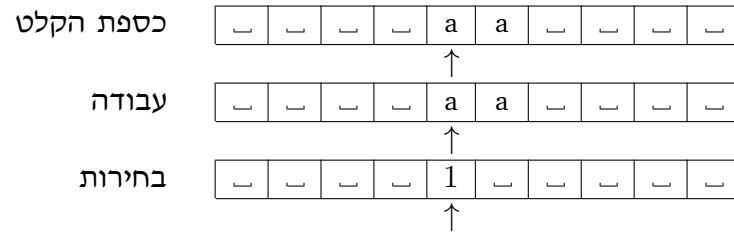
## דוגמה 5.6

סבב 1

סדרת הבחירות = 1.

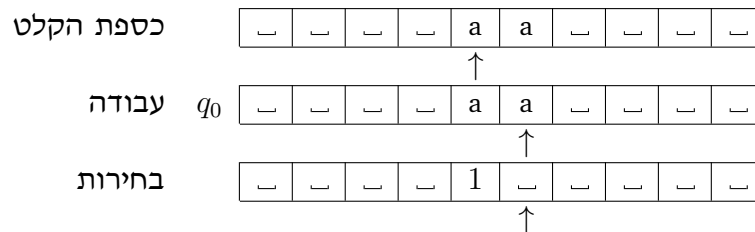
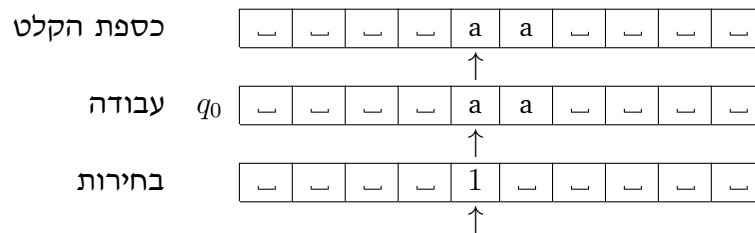


מעתיקים סרט הכספת לסרט העבודה:



ריצה של סדרת הבחירות על סרט העבודה:

	מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה
1	$q_0$	a	$q_0$	a	$R$
2	$q_0$	a	$q_1$	␣	$R$
3	$q_0$	a	$q_1$	a	$R$
4	$q_0$	a	$q_0$	a	$L$
1	$q_0$	␣	acc	␣	$L$
1	$q_1$	a	$q_0$	a	$L$
2	$q_1$	a	$q_1$	a	$R$
1	$q_1$	␣	rej	a	$R$
2	$q_1$	␣	$q_1$	a	$L$



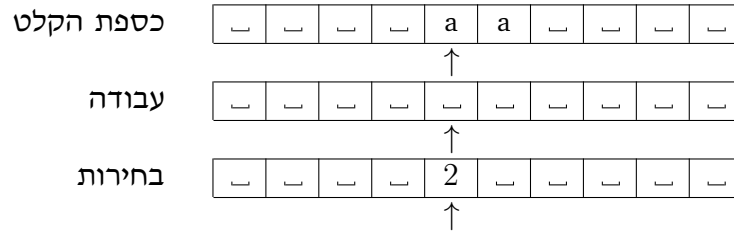
כאשר מגיעים לרווח בסרט הבחירות מסתיים סבב הריצה לפי סדרת הבחירות הנוכחית.

במקרה הזה לא הגענו לא לקבלה ולא לדחיה.

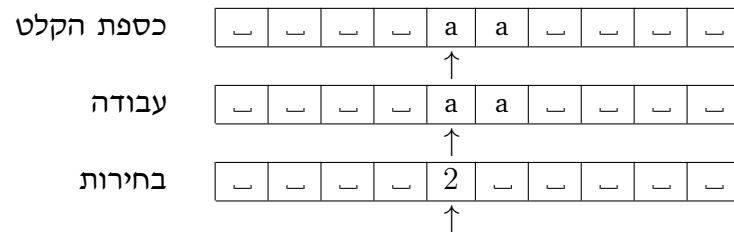
נעבור לבדוק את סדרת הבחירות הבאה.

סבב 2

סדרת הבחירות = 2.

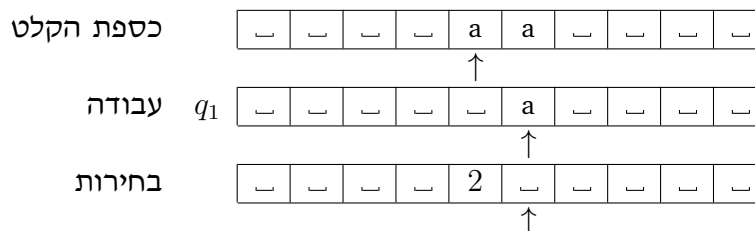
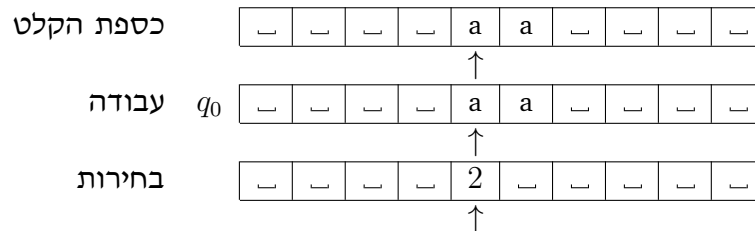


מעתיקים סרט הכספת לסרט העבודה:



ריצה של סדרת הבחירות על סרט העבודה:

	מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה
1	$q_0$	a	$q_0$	a	R
2	$q_0$	a	$q_1$	␣	R
3	$q_0$	a	$q_1$	a	R
4	$q_0$	a	$q_0$	a	L
1	$q_0$	␣	acc	␣	L
1	$q_1$	a	$q_0$	a	L
2	$q_1$	a	$q_1$	a	R
1	$q_1$	␣	rej	a	R
2	$q_1$	␣	$q_1$	a	L

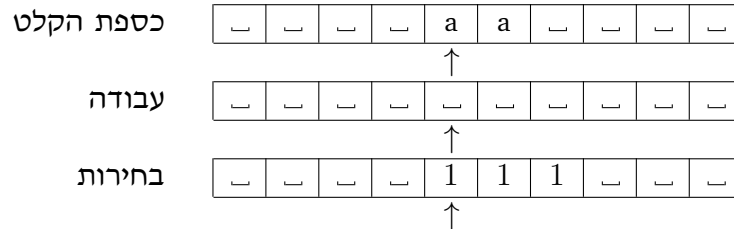


לא הגענו לא לקבלה ולא לדחיה, לכן נעבור לבדוק את סדרת הבחירות הבאה.

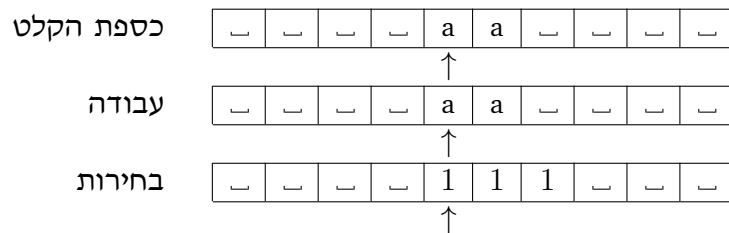
⋮

סבב 21)

סדרת הבחירות = 111.

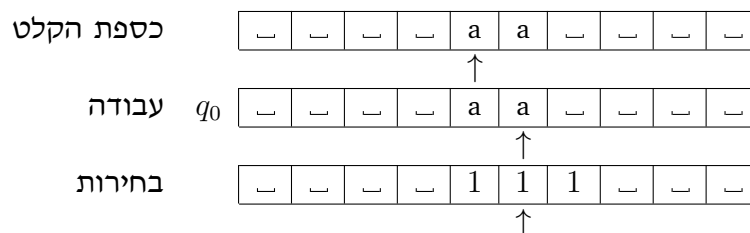
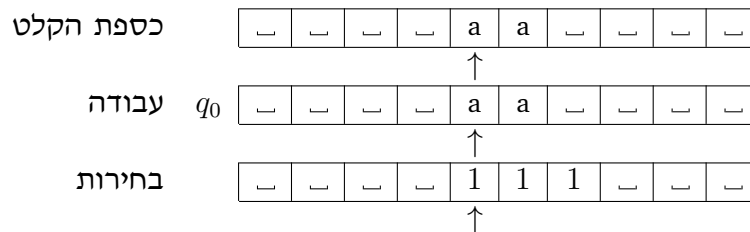


מעתיקים סרט הכספת לסרט העבודה:



ריצה של סדרת הבחירות על סרט העבודה:

	מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה
1	$q_0$	a	$q_0$	a	R
2	$q_0$	a	$q_1$	␣	R
3	$q_0$	a	$q_1$	a	R
4	$q_0$	a	$q_0$	a	L
1	$q_0$	␣	acc	␣	L
1	$q_1$	a	$q_0$	a	L
2	$q_1$	a	$q_1$	a	R
1	$q_1$	␣	rej	a	R
2	$q_1$	␣	$q_1$	a	L





המכונה  $N$  הגיעה למצב  $acc^N$  לכן המכונה  $M$  עוברת למצב  $acc^M$  והתהליך מתסתיים.

### הגדרה 5.3: שקילות חישובית של מטל"ט למט"ד

המכונה  $M$  תייצר את כל הסדרות. את הסדרות נייצר בסדר המנייה

- 1 •
- 2 •
- 3 •
- 4 •
- 11 •
- 12 •
- 13 •
- 14 •
- 21 •
- 22 •
- ⋮ •
- 111 •
- 112 •
- ⋮ •

הסדר הוא לפי אורך הסדרה ובכל אורך בסדר לקסיקוגרפי.  
סדר זה נקרא סדר המניה.  
תיאור מילולי של המכונה:

(1) כתבו 1 בסרט בחירות.

(2) העתיקו קלט מסרט כספת הקלט לסרט עבודה.

(3) הריצו את המכונה  $N$  על סרט עבודה לפי הסדרה שבסרט בחיורת. בכל צעד בדקו:

- אם המכונה  $N$  הגיעה למצב  $\text{acc}^N$  עבור למצב  $\text{acc}^M$ .
- אם הבחירה לא אפשרית, עברו לשלב 4.

(4) מחקו תוכן הסרט עבודה.

(5) בסרט הבחירות כתבו המחרוזת הבאה לפי סדר המניה.

(6) חזרו לשלב 2.