אלגברה לינארית סמסטר סתו 2022-23
עבודה עצמית 5

שאלות

שאלה 1 נסמן $S=\{(1,2,3),(4,5,6),(11,16,21)\}$.

א) האם S פורשת את $\mathbb{R}^3$?

ב) האם $(6,9,12)\in \operatorname{sp}(S)$? אם כן, הצג אותו כצרוף לינארי של הוקטורים ב- S. האם יש יותר מדרך אחת להציגו כצרוף לינארי של הוקטורים ב- S?

שאלה 2 תן דוגמא לשתי קבוצות S, T כך ש- $T\subseteq S$ ומתקיים:

א) T פורשת את $\mathbb{R}^4$ ו- S לא פורשת את $\mathbb{R}^4$.

ב) T לא פורשת את $\mathbb{R}^4$ ו- S לא פורשת את $\mathbb{R}^4$.

ג) T פורשת את $\mathbb{R}^4$ ו- S פורשת את $\mathbb{R}^4$.

שאלה 3 תהיינה $Y\subseteq X$ קבוצות של וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$. הוכח או הפרך:

א) אם Y פורשת את $\mathbb{R}^n$ אז X פורשת את $\mathbb{R}^n$.

ב) אם $0\in X$ אז X פורשת את $\mathbb{R}^n$.

ג) אם $0\in X$ אז X לא פורשת את $\mathbb{R}^n$.

ד) אם X פורשת את $\mathbb{R}^n$ אז Y פורשת את $\mathbb{R}^n$.

ה) אם מספר הוקטורים ב- X גדול מ- n אז X פורשת את $\mathbb{R}^n$

ו) אם קיים $v\in Y$ כך ש- $v\notin X$ אז $\operatorname{sp}(Y)\neq \operatorname{sp}(X)$.

שאלה 4 נתונים הוקטורים $u_3=\begin{pmatrix}2\\a\\a+1\end{pmatrix}\ ,\ u_2=\begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix}\ ,\ u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

א) מצא לאילו ערכי a מתקיים $u_3 \in \mathrm{sp}\{u_1, u_2\}$. עבור ערך a הקטן שמצאת, הצג את u_3 כצרוף לינארי של u_1, u_2.

ב) מצא לאילו ערכי a הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ פורשת את $\mathbb{R}^3$.

שאלה 5 תהי $A \in M_{3\times n}(\mathbb{R})$. הוכח או הפרך:

א) אם למערכת $AX = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$ קיים פתרון אז למערכת $AX = \begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}$ קיים פתרון.

ב) אם למערכת $AX = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$ קיים פתרון יחיד אז למערכת $AX = \begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}$ קיים פתרון יחיד.

ג) אם $n = 3$ ולמערכת $AX = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$ קיים פתרון יחיד אז למערכת $AX = \begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}$ קיים פתרון יחיד.

ד) אם למערכת $AX = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ קיים פתרון אז למערכת $AX = \begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}$ קיים פתרון.

ה) יהיו $c, d \in \mathbb{R}^n$. אם למערכת $AX = c$ קיים פתרון ולמערכת $AX = d$ קיים פתרון, אז למערכת $AX = c + d$ קיים פתרון.

שאלה 6 נסמן $p_1(x) = x + 1$, $p_2(x) = -x + 3$, $g(x) = 3x + 11$. האם $g(x) \in \mathrm{sp}\{p_1(x), p_2(x)\}$? אם כן, הצגו אותו כצ"ל שלהם.

שאלה 7 נסמן $p_1(x) = x^2 + 2x + 1$, $p_2(x) = x^2 - x + 1$, $p_3(x) = x^2 + x - 1$, $g(x) = x^2 + 6$. הצגו את $g(x)$ כצ"ל של $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$. האם יש יותר מדרך אחת?

שאלה 8 נסמן $u = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}$. האם $u \in \mathrm{sp}\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}\right\}$? אם כן, הצגו את u כצ"ל של הוקטורים הנ"ל.

שאלה 9 לאילו ערכי m מתקיים

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\0 & -1\end{pmatrix} \in \mathrm{sp}\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & m\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & m\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}m & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}?$$

פתרונות

שאלה 1

א) נבדוק אם S בת"ל:

$$\begin{pmatrix}1&4&11\\2&5&16\\3&6&21\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&4&11\\0&-3&-6\\0&-6&12\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\begin{pmatrix}1&4&11\\0&-3&-6\\0&0&0\end{pmatrix}$$

יש עמודה לא מובילה, לכן הוקטורים ת"ל.

$$\dim(\mathrm{sp}(S))=2<\dim(\mathbb{R}^3)$$

לכן S לא פורשת את $\mathbb{R}^3$.

■

ב) נסמן $\mathrm{v}_1=(1,2,3)$, $\mathrm{v}_2=(4,5,6)$, $\mathrm{v}_3=(11,16,21)$, $u=(6,9,12)$. נבדוק אם

$$u=k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&11&6\\2&5&16&9\\3&6&21&12\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&11&6\\0&-3&-6&-3\\0&-6&-12&-6\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&11&6\\0&-3&-6&-3\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{3}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&11&6\\0&1&2&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1-4R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&2\\0&1&2&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$k_1=2-3k_3$, $k_2=1-2k_3$, $k_3\in\mathbb{R}$. יש ∞ פתרונות למערכת, לכן יש ∞ דרכים להציג את u כצירוף לינארי של v_1, v_2, v_3. נציב $k_3=1 \Leftarrow k_1=-1$ $k_2=-1$

$$-\mathrm{v}_1-\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3=u$$

■

שאלה 2

א) $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $T=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $S\subseteq T$. S לא פורשת את $\mathbb{R}^4$, T פורשת את $\mathbb{R}^4$ כי T הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^4$.

■

ב) $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $T=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $S\subseteq T$. S ו T לא פורשות את $\mathbb{R}^4$.

■

ג) $T=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $S=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

■

שאלה 3

א) <u>$Y\subseteq X$ ו- Y פורשת $\mathbb{R}^n \Leftarrow X$ פורשת $\mathbb{R}^n$.</u>

דוגמה נגדית:

$$X=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}\ ,\qquad\qquad ,\ ,\ Y=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$X,Y\in\mathbb{R}^2$. Y פורשת את $\mathbb{R}^2$, X לא פורשת את $\mathbb{R}^2$.

■

ב) <u>$X\ni 0 \Leftarrow X$ פורשת את $\mathbb{R}^n$.</u>

דוגמה נגדית:

$$X=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^2$$

X לא פורשת את $\mathbb{R}^2$.

■

ג) <u>$X\ni 0 \Leftarrow X$ לא פורשת את $\mathbb{R}^n$.</u>

דוגמה נגדית:

$$X=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

X פורשת את $\mathbb{R}^2$.

■

ד) <u>X פורשת את $\mathbb{R}^n \Leftarrow Y$ פורשת את $\mathbb{R}^n$.</u>

נתון: $X\subseteq Y$, $\mathrm{sp}(X)=\mathbb{R}^n$.

צ"ל: $\mathrm{sp}(Y)=\mathbb{R}^n$.

הוכחה:
נקח $\mathrm{v}\in\mathbb{R}^n$. אז $\mathrm{v}\in\mathrm{sp}(X)$. לכן קיימים $u_1,\ldots,u_m\in\mathbb{R}^n$ כך ש

$$\mathrm{v}=k_1u_1+\ldots+k_mu_m\ .$$

$X\subseteq Y$, לכן $u_1,\ldots,u_m\in Y$, $\Leftarrow$ $\mathrm{v}\in\mathrm{sp}(Y)$.

■

ה) <u>מספר הוקטורים ב- X גדול מ- n $\Leftarrow$ X פורשת את $\mathbb{R}^n$</u>

דוגמה נגדית:

$$X=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right\}\ .$$

X אינה פורשת את $\mathbb{R}^2$.

■

ו) <u>קיים $\mathrm{v}\in Y$ כך ש- $\mathrm{v}\notin X$ $\Leftarrow$ $\mathrm{sp}(Y)\neq\mathrm{sp}(X)$.</u>

דוגמה נגדית:

$$X=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\ ,\qquad Y=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathrm{sp}(Y)=\mathrm{sp}(X)=\mathbb{R}^2\ .$$

■

<u>שאלה 4</u> $u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\ ,\ u_2=\begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix}\ ,\ u_3=\begin{pmatrix}2\\a\\a+1\end{pmatrix}$ $u_3\in\mathrm{sp}(u_1,u_2)$ $\Leftarrow$

$$u_3=k_1u_1+k_2u_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&2\\1&2&a\\1&a&a+1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&1&2\\0&1&a-2\\0&a-1&a-1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&1&2\\0&1&a-2\\0&0&-(a-1)(a-3)\end{array}\right)$$

יש פתרון אם $a=1,3$.
לכן $u_3\in\mathrm{sp}(u_1,u_2)$ עבור $a=1$ ו $a=3$.
<u>$a=1$</u>

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&0&3\\0&1&-1\\0&0&0\end{array}\right)$$

$k_1=3,k_2=-1$ $\Leftarrow$

$$u_3=3u_1-u_2\ .$$

<u>$a=3$</u>

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$k_2 = -k_3, k_1 = k_3$

עבור $a \neq 1,3$ הוקטורים u_1, u_2, u_3 בת"ל, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 \Leftarrow u_1, u_2, u_3$ בסיס של $\mathbb{R}^3$.

לכן $\mathbb{R}^3 = \text{sp}(u_1, u_2, u_3)$.

■

שאלה 5

$A \in M_{3\times n}(\mathbb{R})$, נסמן את העמודות $u_1, \ldots, u_n$. אז $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^3$.

א) טענה: למערכת $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ יש פתרון, ז"א וקטור $\text{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \in \text{sp}(u_1, \ldots, u_n)$.

דוגמה נגדית: $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\text{v} \in \text{sp}(u_1, u_2)$ וקטור $\text{v}' = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \notin \text{sp}(u_1, u_2)$

ב) דוגמה נגדית: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$. $\text{v} \in \text{sp}(u_1, u_2)$ כי $u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \text{v}$. u_2,u_1 בת"ל, לכן למערכת $AX = \text{v}$ יש פתרון יחיד.

נבדוק אם למערכת $AX = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ יש פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

אין פתרון למערכת.

ג) $n = 3$. למערכת $AX = \text{v}$ יש פתרון יחיד, לכן הוקטורים u_1, u_2, u_3 בת"ל. לכן, u_1, u_2, u_3 מהווים בסיס של $\mathbb{R}^3 \Leftarrow$ למערכת $AX = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ יש פתרון יחיד.

ד) <u>דוגמה נגדית:</u>

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;.$$

למערכת $AX = 0$ יש פתרון, למערכת $AX = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ אין פתרון.

ה) נסמם ב v_1 פתרון של המערכת $AX = c$, וב v_2 פתרון של המערכת $AX = d$.
ז"א

$$A\text{v}_1 = c \;, \qquad A\text{v}_2 = d \;.$$

לכן

$$A(\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2)=A\mathrm{v}_1+A\mathrm{v}_2=c+d\ .$$

שאלה 6 $p_1(x)=x+1$, $p_2(x)=-x+3$, $g(x)=3x+11$.

$$g(x)=k_1p_1(x)+k_2p_2(x)$$

$$k_1(x+1)+k_2(-x+3)=3x+11$$

$$(k_1+3k_2)+(k_1-k_2)x=3x+11$$

$$\left.\begin{array}{rl} k_1+3k_2 & =11 \\ k_1-k_2 & =3 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 11 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 11 \\ 0 & -4 & -8 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$k_1=5\ ,\quad k_2=2\ .$$

$$5p_1(x)+2p_2(x)=g(x)\ .$$

■

שאלה 7 $p_1(x)=x^2+2x+1$, $p_2(x)=x^2-x+1$, $p_3(x)=x^2+x-1$, $g(x)=x^2+6$.

$$k_1p_1(x)+k_2p_2(x)+k_3p_3(x)=g(x)$$

$$k_1(x^2+2x+1)+k_2(x^2-x+1)+k_3(x^2+x-1)=x^2+6$$

$$(k_1+k_2+k_3)x^2+(2k_1-k_2+k_3)x+(k_1+k_2-k_3)=x^2+6$$

$$\left.\begin{array}{rl} k_1+k_2+k_3 & =1 \\ 2k_1-k_2+k_3 & =0 \\ k_1+k_2-k_3 & =6 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to 2R_2-R_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to 2R_1+R_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & -6 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1+R_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \end{array}\right)$$

פתרון יחיד:

$$(k_1,k_2,k_3)=\left(2,\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$$

$$g(x)=2p_1(x)+\frac{3}{2}p_2(x)-\frac{5}{2}p_3(x)$$

■

שאלה 8 נסמן $u_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$, $u_2=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$, $u_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $u=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}$.

$$u=\text{sp}(u_1,u_2,u_3)\ ,\qquad u=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}\ .$$

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=u$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\1&1&0&1\\1&0&1&-1\\0&1&2&2\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&-1&0&0\\0&-2&1&-2\\0&1&2&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4\to R_4+R_2]{R_3\to R_3-2R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&-1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&2&2\end{array}\right)\xrightarrow[R_4\to R_4-2R_3]{R_2\to -R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&0&6\end{array}\right)$$

אין פתרון למערכת, לכן $u\notin\text{sp}(u_1,u_2,u_3)$.

■

שאלה 9

$$u\in\text{sp}\left(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3\right)$$

$$\begin{pmatrix}2&-1\\0&-1\end{pmatrix}\in\text{sp}\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&m\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&m&2\\1&m&1&-1\\0&0&0&0\\m&1&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[R_4\to R_4-mR_1]{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&m&2\\0&m-1&1-m&-3\\0&0&0&0\\0&1-m^2&1&-1-2m\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4\leftrightarrow R_2+R_4}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&m&2\\0&m-1&1-m&-3\\0&0&0&0\\0&0&-m^2-m+2&-2m-4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&m&2\\0&m-1&1-m&-3\\0&0&-m^2-m+2&-2m-4\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

עבור $m=1$ למערכת אין פתרון, לכן $u \notin \mathrm{sp}\left(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\right)$.

עבור $m \neq 1$ למערכת יש פתרון, לכן $u \in \mathrm{sp}\left(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\right)$.

$\blacksquare$