שיעור 7
רדוקציה

7.1 מ"ט המחשבת את פונקציה

הגדרה 7.1 מ"ט המחשבת פונקציה

בהינתן פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ אומרים כי מ"ט M מחשבת את f אם לכל $x \in \Sigma^*$:

- M מגיעה ל- q_{acc} בסוף החישוב של $f(x)$ וגם
- על סרט הפלט של M רשום $f(x)$.

הערה 7.1

מ"ט שמחשבת פונקציה עוצרת תמיד.

הגדרה 7.2 מ"ט המחשבת פונקציה

בהינתן פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ אומרים כי f חישבה אם קיימת מ"ט המחשבת את f.

דוגמה 7.1

$$f_1(x) = xx \ . \tag{7.1}$$

$f_1(x)$ חשיבה.

דוגמה 7.2

$$f_2(x) = \begin{cases} x & \text{זוגי} |x| \\ xx & \text{אי-זוגי} |x| \end{cases} \ . \tag{7.2}$$

$f_2(x)$ חשיבה.

דוגמה 7.3

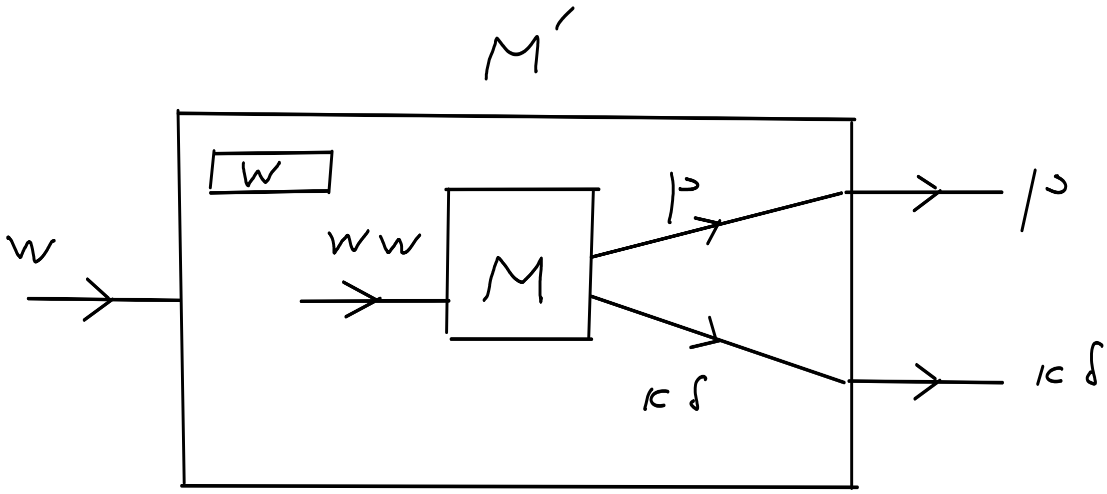
$$f_3(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M \rangle \\ \langle M^* \rangle & x \neq \langle M \rangle \end{cases} \ . \tag{7.3}$$

כאשר

- M^* מ"ט שמקבלת כל קלט.

- M' מ"ט המקבלת את השפה

$$L(M') = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; ww \in L(M) \right\}.$$



$f_3(x)$ חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שבודקת האם $x = \langle M \rangle$. אם לא, מחזירה קידוד קבוע $\langle M^* \rangle$. ואם כן, מחזירה קידוד $\langle M' \rangle$ ע"י הוספת מעברים המשכפלים את הקלט בתחילת הקידוד $\langle M \rangle$.

דוגמה 7.4

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & x = \langle M \rangle \wedge \langle M \rangle \in L(M) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \tag{7.4}$$

$f_4(x)$ לא חשיבה כי ייתכנו קלטים $x = \langle M \rangle$ ו- M לא עוצרת על $\langle M \rangle$.

7.2 רדוקציות

הגדרה 7.3 רדוקציות

בהינתן שתי שפות $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ אומרים כי L_1 ניתנת לרדוקציה ל- L_2, ומסמנים

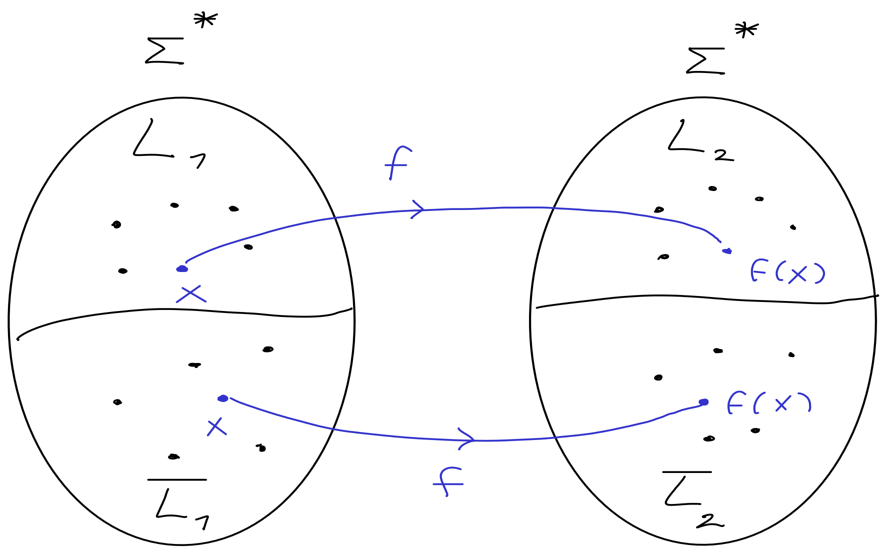
$$L_1 \leqslant L_2 \ ,$$

אם $\exists$ פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ המקיימת:

(1 f חשיבה

(2 לכל $x \in \Sigma^*$:

$$x \in L_1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_2 \ .$$



דוגמה 7.5

נתונות השפות

$$L_1 = \left\{ x \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \text{זוגי } |x| \right\} ,$$
$$L_2 = \left\{ x \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \text{אי-זוגי } |x| \right\} .$$

הוכיחו כי

$$L_1 \leqslant L_2 \ .$$

פתרון:

נגדיר את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{זוגי } |x|, \\ 10 & \text{אי-זוגי } |x| \end{cases}$$

<u>הוכחת הנכונות:</u>

$x \in L_1 \Leftarrow |x|$ זוגי $\Leftarrow f(x) = 1 \Leftarrow |f(x)|$ אי-זוגי $f(x) \in L_2$.

$x \notin L_1 \Leftarrow |x|$ אי-זוגי $\Leftarrow f(x) = 10 \Leftarrow |f(x)|$ זוגי $f(x) \notin L_2$.

משפט 7.1 משפט הרדוקציה

לכל שתי שפות $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, אם קיימת רדוקציה

$$L_1 \leqslant L_2$$

אזי התנאים הבאים מתקיימים:

(1) $L_1 \in R \Leftarrow L_2 \in R$

(2) $L_1 \in RE \Leftarrow L_2 \in RE$

(3) $L_1 \notin R \Rightarrow L_2 \notin R$

(4) $L_1 \notin RE \Rightarrow L_2 \notin RE$

הוכחה: מכיוון ש-

$$L_1 \leqslant L_2$$

קיימת פונקציה f חשיבה המקיימת:

$$x \in L_1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_2$$

לכל $x \in \Sigma^*$.

תהי M_f מ"ט המחשבת את f.

(1) נוכיח $L_1 \in R \Leftarrow L_2 \in R$

תהי M_2 מ"ט המכריעה את L_2.

נבנה מ"ט M_1 המכריעה את L_1.

התאור של M_1

$M_1 =$ על קלט x:

1. מחשבת את $f(x)$ בעזרת M_f.
2. מריצה את M_2 על $f(x)$ ועונה כמוה.

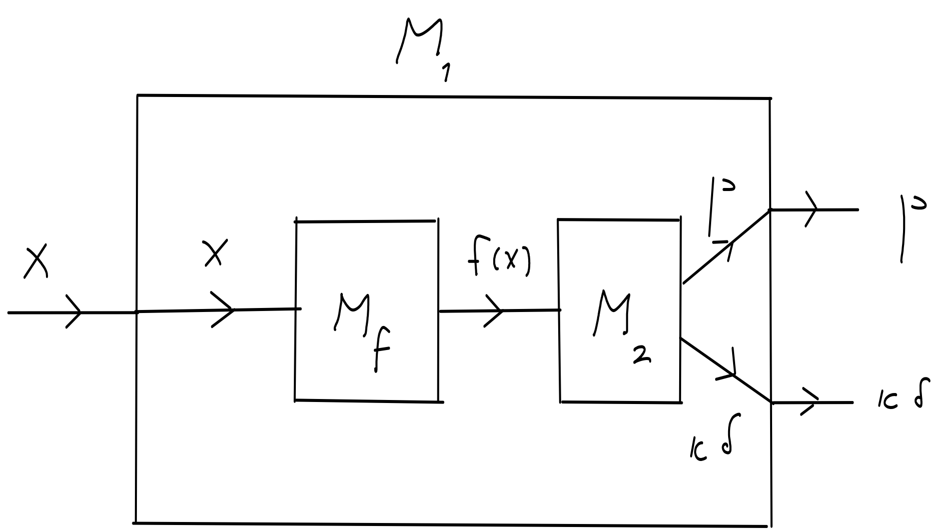
נוכיח כי M_1 מכריעה את L_1.

- אם $x \in L_1 \Leftarrow f(x) \in L_2 \Leftarrow M_2$ מקבלת את $f(x) \Leftarrow M_1$ מקבלת את x.
- אם $x \notin L_1 \Leftarrow f(x) \notin L_2 \Leftarrow M_2$ דוחה את $f(x) \Leftarrow M_1$ דוחה את x.

(2) נוכיח $L_1 \in RE \Leftarrow L_2 \in RE$

תהי M_2 מ"ט המקבלת את L_2.

נבנה מ"ט M_1 המקבלת את L_1.



התאור של M_1

$M_1 =$ על קלט x:

1. מחשבת את $f(x)$ בעזרת M_f.
2. מריצה את M_2 על $f(x)$ ועונה כמוה.

נוכיח כי M_1 מקבלת את L_1:

- אם $x \in L_1$ $\Leftarrow$ $f(x) \in L_2$ $\Leftarrow$ M_2 מקבלת את $f(x)$ $\Leftarrow$ M_1 מקבלת את x.
- אם $x \notin L_1$ $\Leftarrow$ $f(x) \notin L_2$ $\Leftarrow$ M_2 לא מקבלת את $f(x)$ $\Leftarrow$ M_1 לא מקבלת את x.

(3)

(4)

■

כלל 7.1

- אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי $L \in RE$, בוחרים שפה אחרת $L' \in RE$ ומראים שקיימת רדוקציה
$$L \leqslant L' \ .$$
לדודמה:
$$L \leqslant L_{\text{acc}}$$
(כנ"ל לגבי R)
- אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי $L \notin RE$ בוחרים שפה אחרת $L' \notin RE$ ומראים שקיימת רדוקציה
$$L' \leqslant L \ .$$
לדוגמה
$$L_{\text{d}} \leqslant L$$
(כנ"ל לגבי R).

דוגמה 7.6

נתונות השפות $L_{\text{acc}} = \left\{\langle M, w\rangle \ \middle|\ w \in L(M)\right\}$ ו- $L_{\text{halt}} = \left\{\langle M, w\rangle \ \middle|\ M \text{ עוצרת על } w\right\}$.
הוכיחו כי $L_{\text{acc}} \notin R$ ע"י רדוקציה $L_{\text{acc}} \leqslant L_{\text{halt}}$.

פתרון:

נבנה פונקציה f חשיבה ומקיימת
$$x \in L_{\text{acc}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_{\text{halt}} \ .$$

M מקבלת את w $\Leftarrow$ M' תעצור על w'.
M דוחה את w $\Leftarrow$ M' לא תעצור על w'.
M לא עוצרת את w $\Leftarrow$ M' לא תעצור על w'.

$$f(x) = \begin{cases} \langle M', w\rangle & : x = \langle M, w\rangle \\ \langle M_{\text{loop}}, \varepsilon\rangle & : x \neq \langle M, w\rangle \end{cases}$$

כאשר

- M_{loop} מ"ט שלא עוצרת על אף קלט.
- M' מ"ט המתנהגת כמו M פרט למקומות בהם M עצרה ודחתה, M' תיכנס ללולאה אינסופית.

נכונות הרדוקציה

f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x = \langle M, w\rangle$.

אם לא, תחזיר קידוד קבוע $\langle M_{\text{loop}}, w\rangle$

ואם כן, תחזיר קידוד $\langle M', w\rangle$ ע"י ביצוע שינויים לוקלים בקידוד של M.

נוכיח כי $f(x) \in L_{\text{halt}} \quad \Leftrightarrow \quad x \in L_{\text{acc}}$.

אם $x \in L_{\text{acc}}$:

$\Leftarrow$ $x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \in L(M)$

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M', w\rangle$ ו- M' עוצרת ומקבלת את w

$\Leftarrow$ $f(x) \in L_{\text{halt}}$.

אם $x \notin L_{\text{acc}}$ אז שני מקרים:

מקרה 1:

$x \neq \langle M, w\rangle$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M_{\text{loop}}, \varepsilon\rangle$ ו- M_{loop} לא עוצרת על ε $\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\text{halt}}$.

מקרה 2:

$x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \notin L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M', w\rangle$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

מקרה א: M לא עוצרת על w $\Leftarrow$ M' לא עוצרת על w $\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\text{halt}}$.

מקרה ב: M דוחה את w $\Leftarrow$ M' לא עוצרת על w $\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\text{halt}}$.

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $L_{\text{acc}} \leqslant L_{\text{halt}}$. ומכיוון ש- $L_{\text{acc}} \notin R$ (משפט 6.4) אז ממשט הרדוקציה 7.1, מתקיים $L_{\text{halt}} \notin R$.

דוגמה 7.7

נתונה השפה

$$L_{\Sigma*} = \{\langle M\rangle \mid L(M) = \Sigma^*\}$$

ונתונה השפה

$$\bar{L}_{\Sigma*} = \{\langle M\rangle \mid L(M) \neq \Sigma^*\} \cup \{x \neq \langle M\rangle\} \ .$$

הוכיחו כי:

א) $L_{\Sigma*} \notin RE$

ב) $L_{\Sigma*} \notin R$

ג) $\bar{L}_{\Sigma*} \notin RE$

פתרון:

נוכיח כי $L_{\Sigma*} \notin R$ ע"י רדוקציה

$$L_{\text{acc}} \leqslant L_{\Sigma*} \ .$$

נבנה פונקציה חשיבה f המקיימת

$$x \in L_{\text{acc}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_{\Sigma*} \ .$$

$$\begin{array}{ccc} L(M') = \Sigma^* & \Leftarrow & w \in L(M) \\ L(M') \neq \Sigma^* & \Leftarrow & w \notin L(M) \end{array}$$

$$f(x) = \begin{cases} \langle M'\rangle & : x = \langle M, w\rangle \\ \langle M_\varnothing\rangle & : x \neq \langle M, w\rangle \end{cases}$$

כאשר

- $M_\varnothing$ מ"ט שדוחה כל קלט.
- M' היא מ"ט שעל כל קלט x, מתעלמת מ- x ומריצה את M על w ועונה כמוה.

<u>אבחנה:</u>

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & : w \in L(M) \\ \varnothing & : w \notin L(M) \end{cases}$$

<u>נכונות הרדוקציה:</u>

f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x = \langle M, w\rangle$.

אם לא תחזיר קידוד קבוע $\langle M_\varnothing\rangle$.

אם כן, תחזיר קידוד $\langle M'\rangle$ ע"י הוספת קוג ל- M שמוחק את הקלט מהסרט וכותב w במקומו.

נוכיח כי

$$x \in L_{\text{acc}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_{\Sigma*}$$

אם $x \in L_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ $x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \in L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M'\rangle$ ולפי האבחנה $L(M') = \Sigma^*$ $\Leftarrow$ $f(x) \in L_{\Sigma^*}$.

אם $x \in L_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

מקרה 1): $x \neq \langle M, w\rangle$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M_{\varnothing}\rangle$ ו- $L(M_{\varnothing}) = \varnothing$ $\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\Sigma^*}$.

מקרה 2): $x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \notin L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M'\rangle$ ולפי האבחנה $L(M') = \varnothing$ $\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\Sigma^*}$.

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $L_{\text{acc}} \leqslant L_{\Sigma^*}$. ומכיוון ש- $L_{\text{acc}} \notin R$ (משפט 6.4) אז ממשט הרדוקציה 7.1, מתקיים $L_{\Sigma^*} \notin R$.

דוגמה 7.8

נתונה השפה

$$L_{\text{d}} = \{\langle M\rangle \mid \langle M\rangle \notin L(M)\}$$

ונתונה השפה

$$\bar{L}_{\text{acc}} = \{\langle M, w\rangle \mid w \notin L(M)\} \cup \{x \neq \langle M, w\rangle\} \ .$$

הוכיחו כי
$\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$ ע"י רדוקציה

$$L_{\text{d}} \leqslant \bar{L}_{\text{acc}} \ .$$

פתרון:
נבנה פונקציה חשיבה f המקיימת

$$x \in L_{\text{d}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_{\text{acc}} \ .$$

$$w' \notin L(M') \quad \Leftarrow \quad \langle M\rangle \notin L(M)$$
$$w' \in L(M') \quad \Leftarrow \quad \langle M\rangle \in L(M)$$

$$f(x) = \begin{cases} \langle M, \langle M\rangle\rangle & : x = \langle M\rangle \\ \langle M^*, \varepsilon\rangle & : x \neq \langle M\rangle \end{cases}$$

כאשר M^* המ"ט שמקבלת כל קלט.

נכונות הרדוקציה:

f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x = \langle M, w\rangle$.

אם לא תחזיר קידוד קבוע $\langle M^*, \varepsilon\rangle$.

אם כן, תחשב $\langle M, \langle M\rangle\rangle$.

נוכיח כי

$$x \in L_{\text{d}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in \bar{L}_{\text{acc}}$$

אם $x \in L_{\text{d}}$ $\Leftarrow$ $x = \langle M\rangle$ ו- $\langle M\rangle \notin L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x) = \langle M, \langle M\rangle\rangle$ ו- $\langle M\rangle \notin L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x) \in \bar{L}_{\text{acc}}$.

אם $x \notin L_{\text{d}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

מקרה 1): $x \neq \langle M,w\rangle \quad \Leftarrow \quad f(x)=\langle M^*,\varepsilon\rangle$ ו- $\varepsilon\in L(M^*) \quad \Leftarrow \quad f(x)\notin \bar{L}_{\text{acc}}$.

מקרה 2): $x=\langle M,w\rangle$ ו- $\langle M\rangle\in L(M) \quad \Leftarrow \quad f(x)=\langle M,\langle M\rangle\rangle$ ו- $\langle M\rangle\in L(M) \quad \Leftarrow \quad f(x)\notin \bar{L}_{\text{acc}}$.

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $L_{\text{d}} \leqslant \bar{L}_{\text{acc}}$, ומכיוון ש- $L_{\text{d}}\notin RE$ (משפט 6.3) אז ממשט הרדוקציה 7.1, מתקיים $\bar{L}_{\text{acc}}\notin RE$.

משפט 7.2 משפט הרדוקציה בין שפות משלימות

אם קיימת רדוקציה $L_1\leqslant L_2$, אדי קיימת רדוקציה $\bar{L}_1\leqslant \bar{L}_2$.

הוכחה:

אם $\exists$ רדוקציה

$$L_1\leqslant L_2$$

אזי $\exists$ פונקציה חשיבה f המקיימת

$$x\in L_1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)\in L_2$$

ולכן עבור אותה פונקציה f היא גם חשיבה וגם מקיימת

$$x\in \bar{L}_1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)\in \bar{L}_2$$

ולכן

$$\bar{L}_1\leqslant \bar{L}_2 \ .$$

■

7.3 דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה בין שפות משלימות (משפט 7.2)

דוגמה 7.9

הוכחנו בדוגמה 7.7 רדוקציה

$$L_{\text{acc}}\leqslant L_{\Sigma^*} \ .$$

לכן לפי משפט 7.2 קיימת רדוקציה

$$\bar{L}_{\text{acc}}\leqslant \bar{L}_{\Sigma^*} \ .$$

מכיוון ש- $\bar{L}_{\text{acc}}\notin RE$, אזי ממשט הרדוקציה 7.1 מתקיים $\bar{L}_{\Sigma^*}\notin RE$.

דוגמה 7.10

הוכחנו בדוגמה 7.8 רדוקציה

$$L_{\text{d}}\leqslant \bar{L}_{\text{acc}} \ .$$

לכן לפי משפט 7.2 קיימת רדוקציה

$$\bar{L}_{\text{d}}\leqslant L_{\text{acc}} \ .$$

מכיוון ש- $L_{\text{acc}}\in RE$, אזי ממשט הרדוקציה 7.1 מתקיים $\bar{L}_{\text{d}}\in RE$.

7.4 דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה (משפט 7.1)