שיעור 2
מודלים חישובים שקולית

הגדרה 2.1 מודל חישובי

מודל חישובי הוא אוסף של מכונות טיורינג שעבורן מוגדרים המושגים של הכרעה וקבלה של שפות.

הגדרה 2.2 מודלים שקולים חישובית

יהיו A ו- B מודלים חישוביים. אומרים כי A ו- B שקולים אם לכל שפה L התנאים הבאים מתקיימים:

1) קיימת מ"ט במודל A שמכריעה את L אס"ם קיימת מ"ט במודל B שמכריעה את L.

2) קיימת מ"ט במודל A שמקבלת את L אס"ם קיימת מ"ט במודל B שמקבלת את L.

דוגמה 2.1

נסמן ב-T את מודל מכונת הטיורינג הבסיסי.
במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לשני הכיוונים. בתחילת החישוב הראש נמצא בתחילת הקלט.

נסמן ב-O את מודל מכונת הטיורינג עם סרט ימינה בלבד.
במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן לה ישאר במקום, באותה המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לכיוון אחד בלבד - ימינה. בתחילת החישוב, הקלט ממוקם בקצה השמאלי של הסרט והראש נמצאת בתחילת הקלט. החישוב מתנהל כמו במכונה במודל T, למעט כאשר הראש נמצא במשבצת השמאלית ביותר בסרט וצריך לזוז שמאלה– במקרה כזה הראש נשאר במקום ולא זז.

הוכיחו כי המודל T והמודל O שקולים חישובית.

פתרון:
יש להוכיח ש:

- לכל מ"ט במודל O קיימת מ"ט שקולה במודל T.
- לכל מ"ט במודל T קיימת מ"ט שקולה במודל O.

<u>כיוון ראשון</u>

נוכיח כי לכל מ"ט במודל O קיימת מ"ט שקולה במודל T. כלומר:

נתונה $M^O = \left(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O\right)$ במודל O.

נבנה $M^T = \left(Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T\right)$ שקולה במודל T.

- רכיבי המ"ט M^T זהים לאלו של המ"ט M^O, מלבד מהתכונה שהראש של M^O לעולם לא זז מעבר לקצה השמאל של הקלט.
- נעבוד רק עם צד ימין של הסרט האינסופי של M^T ואז M^T תהיה שקולה ל- M^O.

- כדי לדאוג שהראש של המכונה הדו-כיוונית M^T לא זז מעבר לקצה השמאל של הקלט, נוסיף מצבים חדשים וגם מעברים חדשים לפונקצית המעברים של M^T, שמבטיחים שהראש של M^T לא זז מעבר לקצה השמול של הקלט, באופן הבא.
- בתחילת כל חישוב, המכונה M^T מסמנת את המשבצת מצד שמאל וליד המשבצת הראשונה של הקלט בסימן מיוחד $\$$.
- נגדיר את הפונקצית המעברים של M^T כך שכל פעם שהראש מגיע למשבצת המסומנת $\$$, הראש חוזר ימינה למשבצת הראשונה של הקלט, כמפורט בטבלת המעברים למטה.

לכן, המכונה M^T השקולה למכונה M^O היא

$$M^T = \left(Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, q_{\text{acc}}^T, q_{\text{rej}}^T\right) \ ,$$

כאשר

$$Q^T = Q^O \cup \{q_0^T, q_\$\} \ , \qquad \Sigma^T = \Sigma^O \ , \qquad \Gamma^T = \Gamma^O \cup \{\$\} \ , \qquad q_{\text{acc}}^T = q_{\text{acc}}^O \ , \qquad q_{\text{rej}}^T = q_{\text{rej}}^O$$

והפונקצית המעברים מתוארת בטבלה למטה.

מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
q_0^T	σ	$q_\$$	$\circlearrowleft$	L	
$q_\$$	$\sqcup$	q_0^O	$\$$	R	
q	$\$$	q	$\$$	R	$\forall q \in Q^O$

הוכחנו את הכיוון הראשון:
ראינו מכונה דו -כיוונית השקולה למכונה חד -כיוונית.

כעת נוכיח את הטענה בכיוון הראשון:
נראה מכונה חד -כיוונית השקולה למכונה דו -כיוונית.

<u>כיוון שני</u>

נוכיח כי לכל מ"ט במודל T קיימת מ"ט שקולה במודל O. כלומר:

נתונה $M^T = \left(Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T\right)$ במודל T.

נבנה $M^O = \left(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O\right)$ שקולה במודל O.

- נסמן "קו המפריד" על הסרט של המכונה הדו-כיוונית M^T.

$\cdots$	$\sqcup$	a	b	b	b	c	c	a	b	$\sqcup$	$\cdots$

- נסמן את המשבצת הראשונה של הסרט של המכונה החד-כיוונית M^O עם $\$$.
- כל שאר המשבצות של הסרט של M^O נחלק לשני חצאים: חצי העליון U וחצי התחתון D.
- תוכן הסרט של המכונה הדו־כיוונית M^T נכתב על סרטה של המכונה החד־כיוונית M^O כך:
  - * החלק של הסרט שמצד שמאל של קו המפריד נכתב בשורה העליונה של סרט M^O בכיוון הפוך (מימין לשמאל).

* החלק של הסרט שמצד ימין של קו המפריד נכתב בשורה התחתונה של סרט M^O בכיוון הרגיל (משמאל לימין).

\$	b	b	a	␣	␣	␣	␣	$\cdots$
	b	c	c	a	b	␣	␣	$\cdots$

- * תזוזה ימינה של M^T **מצד ימין של קו המפריד** $\Leftarrow$ תזוזה ימינה בשורה התחתונה של M^O.
  * תזוזה ימינה של M^T **מצד שמאל של קו המפריד** $\Leftarrow$ תזוזה שמאלה בשורה העליונה של M^O.

תזוזה ימינה ב- M^T:

␣	a $\rightarrow$	b $\rightarrow$	‖ b $\rightarrow$	b $\rightarrow$	c $\rightarrow$	c $\rightarrow$	a $\rightarrow$	␣ $\rightarrow$

תזוזה שקולה ב-M^O:

\$	$\leftarrow$ b	$\leftarrow$ b	$\leftarrow$ a	␣	␣	␣	␣
	b $\rightarrow$	c $\rightarrow$	c $\rightarrow$	a $\rightarrow$	b $\rightarrow$	␣ $\rightarrow$	␣

* תזוזה שמאלה של M^T **מצד ימין של קו המפריד** $\Leftarrow$ תזוזה שמאלה בשורה התחתונה של M^O.
* תזוזה שמאלה של M^T **מצד שמאל של קו המפריד** $\Leftarrow$ תזוזה ימינה בשורה העליונה של M^O.

תזוזה שמאלה ב-M^T:

␣	a $\leftarrow$	b $\leftarrow$	‖ b $\leftarrow$	b $\leftarrow$	c $\leftarrow$	c $\leftarrow$	a $\leftarrow$	␣ $\leftarrow$

תזוזה שקולה ב-M^O:

\$	$\rightarrow$ b	$\rightarrow$ b	$\rightarrow$ a	␣	␣	␣	␣
	b $\leftarrow$	c $\leftarrow$	c $\leftarrow$	a $\leftarrow$	b $\leftarrow$	␣ $\leftarrow$	␣

לכן, המכונה M^O השקולה למכונה M^T היא

$$M^O = \left(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, q_{\text{acc}}^O, q_{\text{rej}}^O\right) \ ,$$

נסביר את כל הרכיבים של M^O:

- לכל מצב $q \in Q^T$ נגדיר q_U ו- q_D של Q^O, כדי להבחין בין המצבים שבהם הראש נמצא בחלק העליון לבין המצבים שבהם הראש נמצא בחלק התחתון של הסרט.
- $\Sigma^O = \Sigma^T$.
- $\Gamma^O \subseteq \left(\Gamma^T \times \Gamma^T\right) \cup \{\$\}$.
- $q_{\text{acc}}^O = q_{\text{acc}}^T$.
- $q_{\text{rej}}^O = q_{\text{rej}}^T$.
- הפונקצית המעברים δ^O מתוארת בטבלת המעברים למטה. בטבלה, הסימנים $\tau, \sigma, \pi \in \Gamma^T$ מסמנים כל תו שבאלפבית Γ^T:

מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
אתחול					
q_0^O	τ	q_τ	$\$$	R	$\tau \in \Sigma \cup \{\sqcup\}$ $\sigma \in \Sigma$
q_σ	τ	q_τ	$\sqcup$ σ	R	
$q.\sqcup$	$\sqcup$	back	$\sqcup$ $\sqcup$	L	
q_{back}	$\sqcup$ τ	q_{back}	$\circlearrowleft$	L	
q_{back}	$\$$	$q_0^T.D$	$\circlearrowleft$	R	
תזוזה מקורית שמאלה					
q_D	π σ	p_D	π τ	L	תזוזה שמאלה: $(q,\sigma) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,L)$
q_U	σ π	p_U	τ π	R	
q_D	$\sqcup$	p_D	$\sqcup$ τ	L	תזוזה שמאלה: $(q,\sqcup) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,L)$
q_U	$\sqcup$	p_U	τ $\sqcup$	R	
תזוזה מקורית ימינה					
q_D	π σ	p_D	π τ	R	תזוזה ימינה: $(q,\sigma) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,R)$
q_U	σ π	p_U	τ π	L	
q_D	$\sqcup$	p_D	$\sqcup$ τ	R	תזוזה ימינה: $(q,\sqcup) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,R)$
q_U	$\sqcup$	p_U	τ $\sqcup$	L	
פגיעה בקצה					
q_D	$\$$	q_U	$\circlearrowleft$	R	
q_U	$\$$	q_D	$\circlearrowleft$	R	
כל השאר עוברים ל-rej					