שיעור 3
תכונות של פונקציות

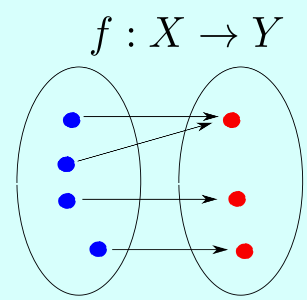
3.1 מושג של פונקציה

הגדרה 3.1 פונקציה

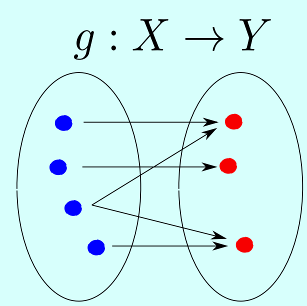
פונקציה מקבוצה X לקבוצה Y שמסומנת ע"י

$$f : X \to Y \ ,$$

היא כלל שמתאימה לכל איבר $x \in X$ איבר יחיד $y \in Y$.



פונקציה



לא פונקציה

הקבוצה X נקראת **תחום ההגדרה** של f.

הקבוצה Y נקראת **הטווח** של f.

הטווח Y אחד מהקבוצות מספרים, $\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

דוגמה 3.1

הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מוגדרת

$$f(x) = 4x \ .$$

הפונקציה f מתאימה לכל איבר $x \in \mathbb{R}$, האיבר היחיד $y = 4x \in \mathbb{R}$.

דוגמה 3.2

הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת

$$f(x)=x^2\ .$$

הפונקציה f מתאימה לכל איבר $x\in\mathbb{R}$, האיבר היחיד $y=x^2\in\mathbb{R}$.

דוגמה 3.3

הפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת

$$f(n)=2n\ .$$

הפונקציה f מתאימה לכל איבר $n\in\mathbb{N}$, האיבר היחיד $2n\in\mathbb{N}$.

דוגמה 3.4

הפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ מוגדרת

$$f(n)=\frac{n}{3}\ .$$

הפונקציה f מתאימה לכל איבר $n\in\mathbb{N}$, האיבר היחיד $\frac{n}{3}\in\mathbb{Q}$.

דוגמה 3.5 פונקציית עצרת

הפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת

$$f(n)=n!\ .$$

לדוגמה

$$f(2)=2!=2\cdot 1=2\ ,\quad f(3)=3!=3\cdot 2\cdot 1=6\ ,\quad f(4)=4!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24\ ,$$

ובאופן כללי

$$n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \ldots\ \cdot 2\cdot 1\ .$$

הפונקציה f מתאימה לכל מספר טבעי $n\in\mathbb{N}$ מססר טבעי יחיד $n!\in\mathbb{N}$.

דוגמה 3.6 פונקציית הרצפה

הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ מוגדרת

$$f(x)=\lfloor x\rfloor\ ,$$

כאשר $\lfloor x\rfloor$ מסמן המספר השלם הקרוב ביותר ל- x וקטן או שווה ל- x. לדוגמה:

$$f\left(\frac{4}{3}\right)=\left\lfloor\frac{4}{3}\right\rfloor=1\ ,\quad f\left(\frac{10}{4}\right)=\left\lfloor\frac{10}{4}\right\rfloor=2\ ,\quad f\left(\frac{37}{7}\right)=\left\lfloor\frac{37}{7}\right\rfloor=5\ .$$

הפונקציה f מתאימה לכל שבר $x\in\mathbb{R}$ מססר השלם יחיד $\lfloor x\rfloor$ ב- $\mathbb{Z}$.

דוגמה 3.7 פונקציית התקרה

הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ מוגדרת

$$f(x)=\lceil x\rceil\ ,$$

כאשר $\lceil x\rceil$ מסמן המספר השלפ הקרוב ביותר ל- x וגדול או שווה ל- x. לדוגמה:

$$f(2.79)=\lceil 2.79\rceil=3\ ,\quad f(10.01)=\lceil 10.01\rceil=11\ ,\quad f(21.23)=\lceil 21.23\rceil=22\ .$$

הפונקציה f מתאימה לכל $x\in\mathbb{R}$ מספר טבעי יחיד $\lceil x\rceil$ ב- $\mathbb{Z}$.

דוגמה 3.8 *

תהי $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ הפונקציה שמוגדרת להיות $f(x)=\sqrt{x}$. האם f פונקציה?

פתרון:
לא. הרי לדוגמה

$$f(4)=\sqrt{4}=\pm 2\ .$$

כלומר f מתאימה לאיבר $4\in\mathbb{R}$ שני איברים $+2$ ו- -2. ז"א $f(4)$ לא יחיד.

באותה מידה, לכל $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$ לא יחיד כי $\sqrt{x}$ יכול להיות חיובי או שלילי.

■

דוגמה 3.9

תהי $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ הפונקציה שמוגדרת להיות $f(x)=|\sqrt{x}|$. האם f פונקציה?

פתרון:
כן. הרי הערך מוחלט משרת לשמור רק את הערך החיובי בלבד של השורש. כתוצאה מכך $f(x)=|\sqrt{x}|$ יחיד. לדוגמה:

$$f(4)=|\sqrt{4}|=2\ ,\quad f(9)=|\sqrt{9}|=3\ ,\quad f(100)=|\sqrt{100}|=10\ .$$

לכן f מתאימה לכל $x\in\mathbb{R}$ איבר יחיד $f(x)=|\sqrt{x}|\in\mathbb{R}$.

■

דוגמה 3.10

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הפונקציה שמוגדרת להיות $f(x)=2x+3$. הוכיחו כי $f(x)$ יחיד לכל x.

פתרון:
נוכיח דרך השלילה. נניח שלכל $a\in\mathbb{R}$ קיימים שני איברים $y_1=f(a)$ ו- $y_2=f(a)$ והם לא שווים: $y_1\neq y_2$. ז"א

$$y_1\neq y_2\quad\Rightarrow\quad 2a+3\neq 2a+3\quad\Rightarrow\quad 2a\neq 2a\quad\Rightarrow\quad a\neq a\ .$$

הגענו לסתירה. לפיכך $f(a)$ יחיד לכל $a\in\mathbb{R}$.

■

הגדרה 3.2 תחום הגדרה ותמונה של פונקציה

תהי f הפונקציה $f:X\to Y$ מקבוצה X לקבוצה Y.

א) הקבוצה X נקראת **תחום ההגדרה** של f. תחום ההגדרה היא הקבוצה של כל הערכים האפשריים של x אשר ניתנים להציב ב- $f(x)$.

נסמן את תחום ההגדרה ב- $\text{Dom}(f)$.

ז"א $\mathrm{Dom}(f)=X$.

ב) הקבוצה Y נקראת **הטווח** של f. נסמן את הטווח ב- $\mathrm{Rng}(f)$.

ז"א $\mathrm{Rng}(f)=Y$.

ג) **התמונה** של f היא הקבוצה שמכילה את כל הערכים של f.

נסמן את התמונה ב- $\mathrm{Im}(f)$.

התמונה תת-קבוצה של הטווח: $\mathrm{Im}(f)\subseteq Y$.

דוגמה 3.11

מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של הפונקציה $f(x)=x^2$.

פתרון:

שיטה אלגברית

ניתן להציב כל ערך של x ב- $f(x)$, לכן

$$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$$

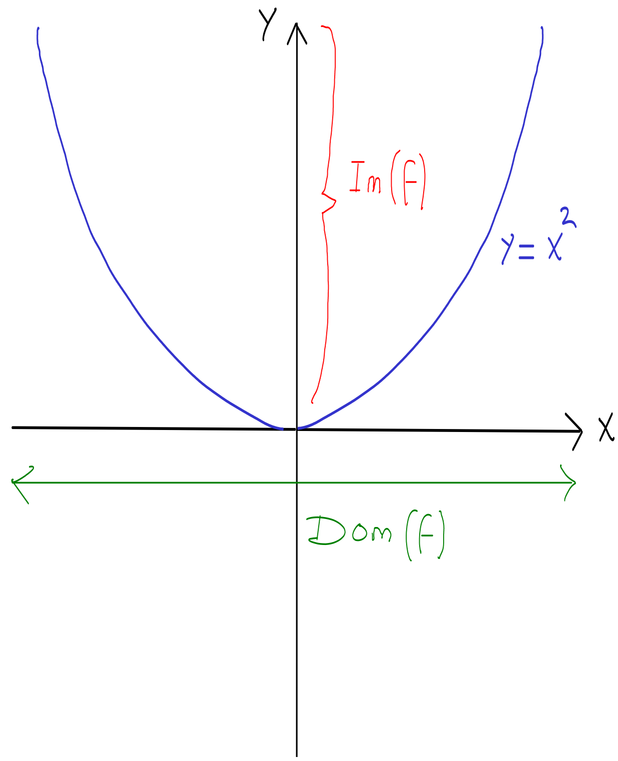
(כל x).

נשים לב כי $x^2\geq 0$, כלומר x^2 גדול או שווה לאפס במקרה כאשר $x=0$. לכן $f(x)=x^2\geq 0$. לפיכך

$$\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^+\ ,$$

כאשר $\mathbb{R}^+$ מסמן את הקבוצה של מספרים ממשיים הגדולים או שווים ל-0.

שיטה גרפית



הקבוצת ערכי x אשר הגרף עובר היא תחום ההגדרה של הפונקציה. הגרף עובר דרך כל הערכים של x לכן

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \ .$$

הקבוצת ערכי y אשר הגרף עובר היא התמונה של הפונקציה. הגרף עובר דרך הערכים החיובים של y וגם $y = 0$. לכן

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \ .$$

■

דוגמה 3.12

מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של $f(x) = (x+2)^2$.

פתרון:

<u>שיטה אלגברית</u>

ניתן להציב כל ערך של x ב- $f(x)$, לכן

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

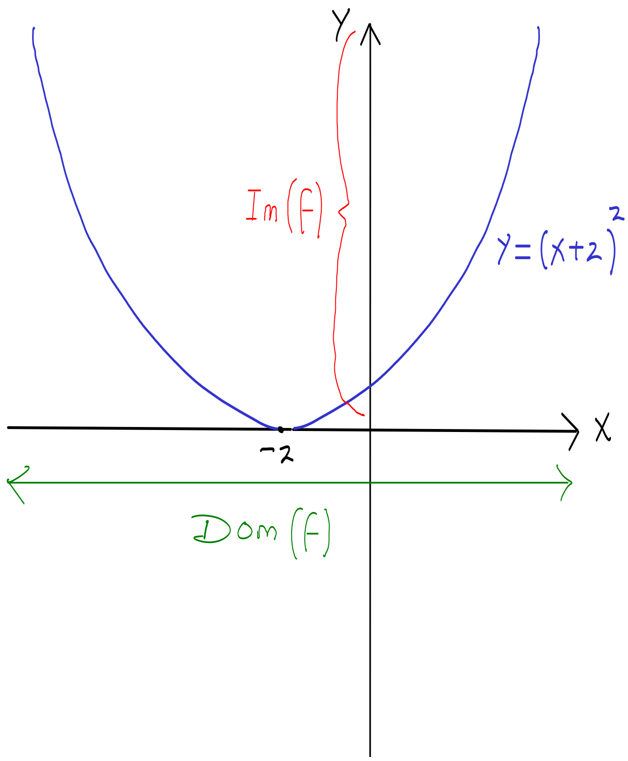
(כל x).

נשים לב כי $(x+2)^2 \geq 0$, לפיכך

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \ ,$$

כאשר

<u>שיטה גרפית</u>



הגרף עובר דרך כל הערכים של x אז

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \ .$$

הגרף עובר דרך הערכים החיובים של y ו- $y=0$ לכן

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \ .$$

■

כלל 3.1 כמויות הלא מוגדרות

- $\frac{1}{0}$ לא מוגדר.
- $\sqrt{a}$, כאשר $a<0$, לא מוגדר.

דוגמה 3.13

מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של $f(x) = |\sqrt{x}|$.

פתרון:

<u>שיטה אלגברית</u>

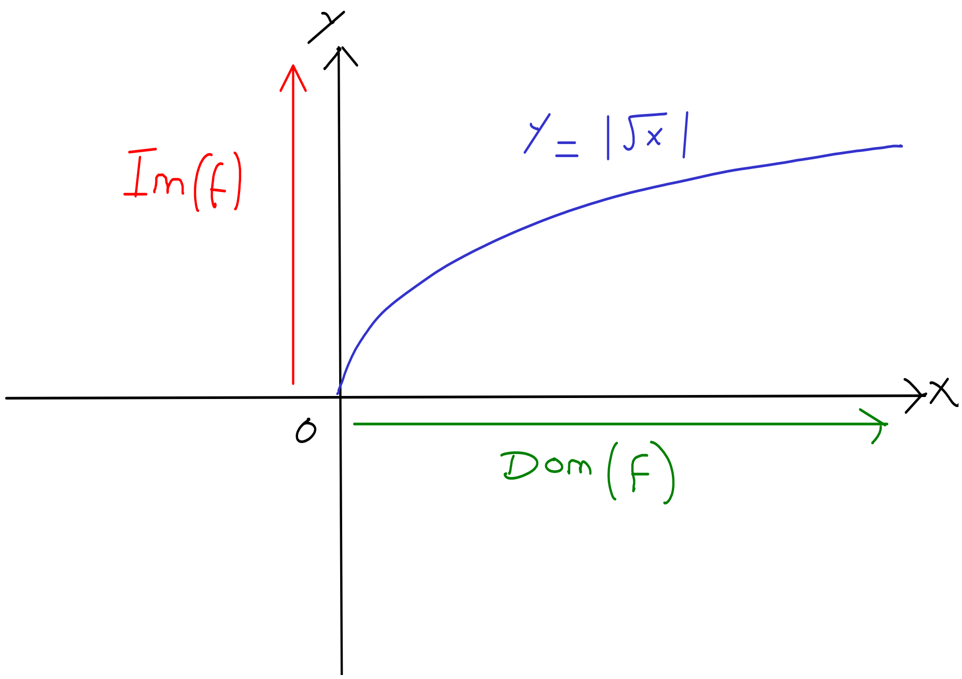
לא ניתן להציב ערכים שליליים של x ב- $f(x)$, לכן

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$$

או $\text{Dom}(f) = \{x \geq 0\}$.

נשים לב כי $|\sqrt{x}| \geq 0$, לפיכך
$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \ .$$

<u>שיטה גרפית</u>



הגרף של $f(x) = |\sqrt{x}|$ עובר דרך הערכים החיוביים של x ו- $x = 0$ בלבד, לכן
$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^+ \ .$$
הגרף עובר דרך הערכים החיוביים של y ו- $y = 0$ לפיכך
$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \ .$$

■

דוגמה 3.14

מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

פתרון:

<u>שיטה אלגברית</u>

אי-אפשר להציב $x = 2$ ב- $f(x)$ בגלל שנקבל $\frac{1}{0}$ אשר לא מוגדר. $f(x)$ מוגדרת בכל ערך אחר של x, לכן
$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \neq 2\}$$

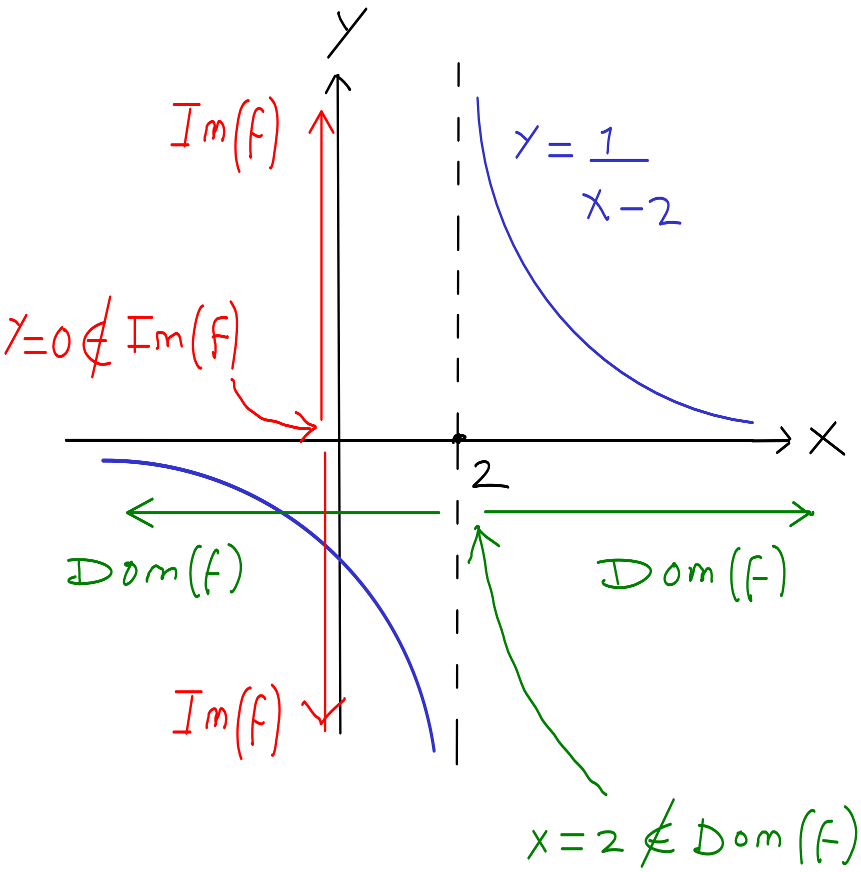
כדי למצוא את התמונה נמצא את הערכים של y עבורם יש פתרון ל- $y = \dfrac{1}{x-2}$. נבודד את x:

$$y = \frac{1}{x-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} = x-2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{y} + 2 \ .$$

קיים פתרון מלבד בערך $y=0$. לפי זה התמונה הינה

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \neq 0\} \ .$$

<u>שיטה גרפית</u>



$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ עובר דרך כל הערכים של x חוץ מ- $x=2$. לכן

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \neq 2\} \ .$$

הגרף עובר דרך כל הערכים של y מלבד מ- $y=0$. לפיכך

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \neq 0\} \ .$$

■

3.2 תכונות של פונקציות

פונקציה חד חד ערכית

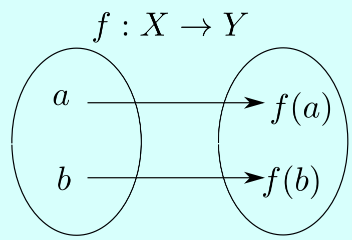
הגדרה 3.3 פונקצית חד חד ערכית

תהי $f:X\to Y$ פונקציה.
אומרים כי f חד חד ערכית אם לכל $a,b\in X$,

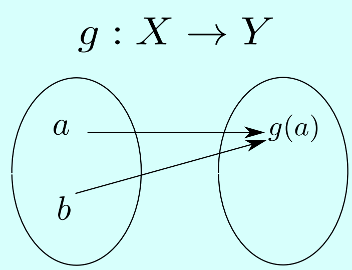
$$a\neq b \qquad \Rightarrow \qquad f(a)\neq f(b)\ ,$$

או, באותה מידה,

$$f(a)=f(b) \qquad \Rightarrow \qquad a=b\ .$$



פונקציה חח"ע

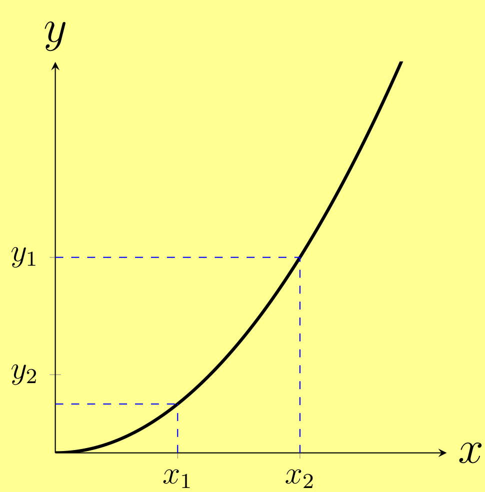


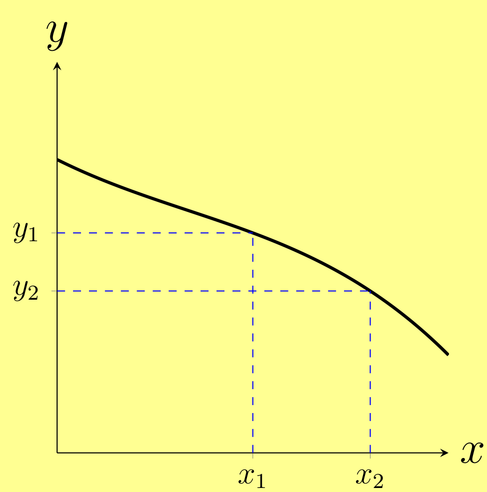
פונקציה לא חח"ע

משפט 3.1 גרף של פונקציה חד חד ערכית

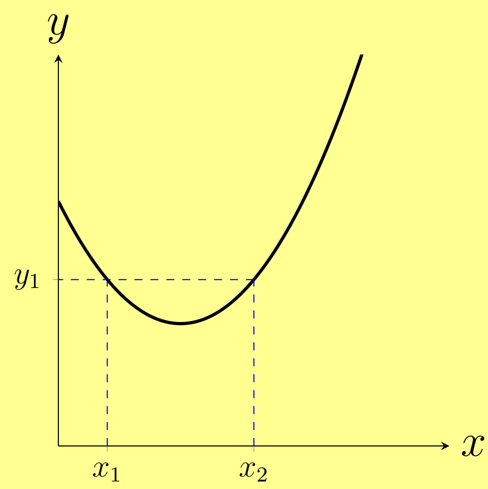
אם $f(x)$ פונקציה חד חד ערכית, אז הגרף של $y=f(x)$ עובר דרך כל ערך של y שבתמונה שלה פעם אחת בלבד.

<u>דוגמשאות של גרפים של פונקציות חד חד ערכיות</u>





<u>דוגמה של גרף של פונקציה לא חד חד ערכית</u>



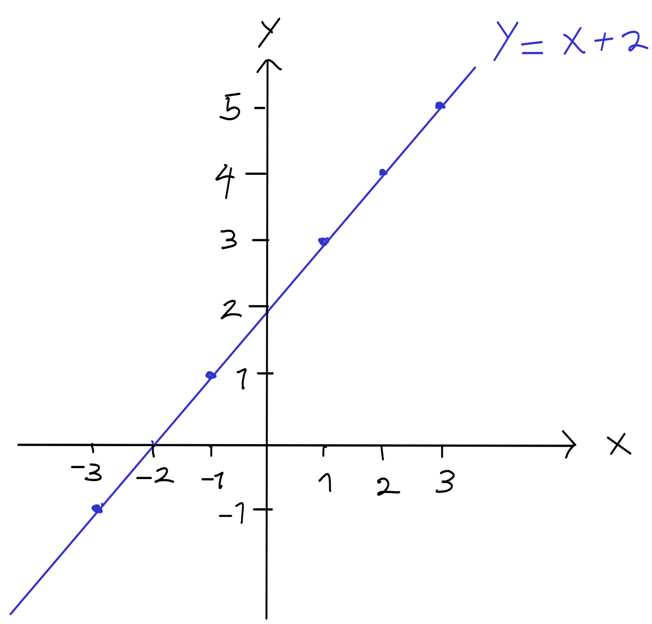
דוגמה 3.15

קבעו אם הפונקציה $f(x) = x + 2$ חד חד ערכית.

פתרון:

<u>שיטה גרפית</u>

נסתכל על הגרף של $f(x) = x + 2$.



הגרף עובר כל ערך של ה- y פעם אחת לכל היותר. לכן הפונקציה חח"ע.

<u>שיטה אלגברית</u>

נוכיח ש- $f(x) = x + 2$ חד חד ערכית דרך השלילה.

נניח כי f לא חח"ע. אז קיימים $a \neq b$ כך ש- $f(a) = f(b)$.

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad a+2 = b+2 \quad \Rightarrow \quad a = b$$

בסתירה לכך ש- $a \neq b$. לכן $f(x)$ חד חד ערכית.

■

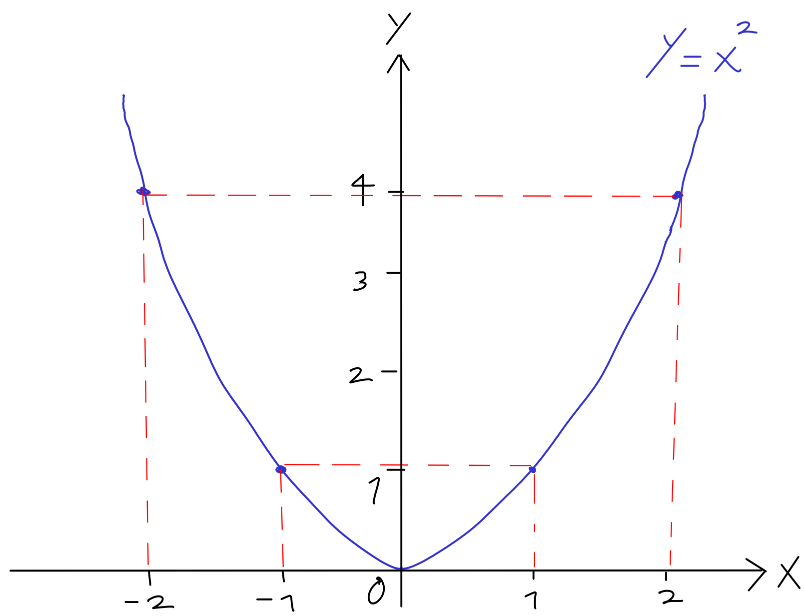
דוגמה 3.16

קבעו אם הפונקציה $f(x) = x^2$ חד חד ערכית.

פתרון:

<u>שיטה גרפית</u>

נסתכל על הגרף של $f(x) = x^2$.



קל לראות שהגרף עובר כל ערך חיובי של y פעמיים. לדוגמה הגרף עובר דרך $y = 4$ פעמיים, ב $x = 2$ וב- $x = -2$. לכן $f(x) = x^2$ לא חד חד ערכית.

במילים אחרות הגרף $y = x^2$ עובר דרך כל ערך של y פעמיים (מלבד $y = 0$).

<u>שיטה אלגברית</u>

$f(x) = x^2$ לא חד חד עאכית. הרי אם נקח $a = 2$ ו- $b = -2$. אז $a \neq b$ אבל $f(a) = f(b) = 4$, בסתירה לכך ש- f חח"ע.

■

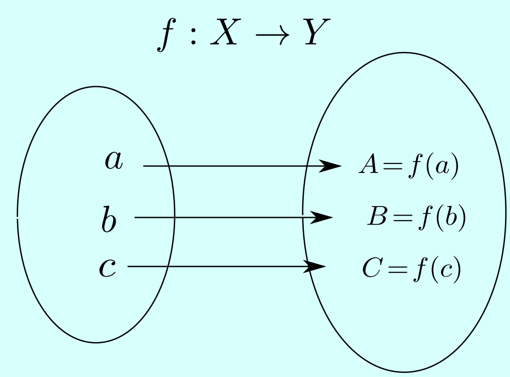
*פונקציה על

הגדרה 3.4 פונקצית על

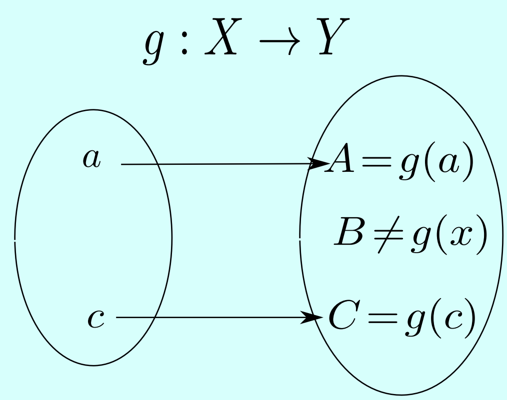
תהי $f:X\to Y$ פונקציה. אומרים כי f פונקציית על Y, אם לכל $y\in Y$ קיים $x\in X$ כך ש-

$$f(x)=y\ .$$

במילים אחרות, $\mathrm{Im}(f)=Y$.



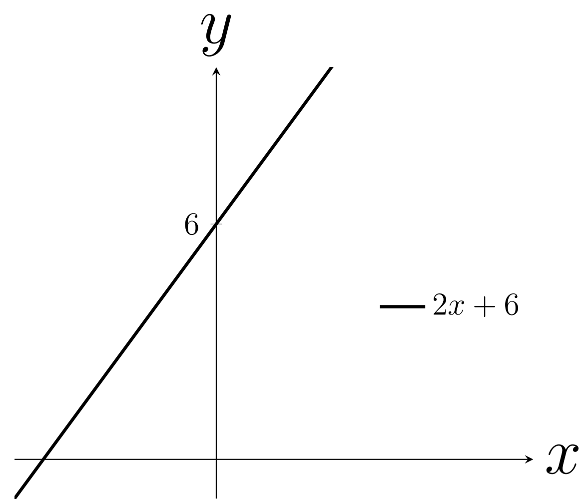
פונקציה על



פונקציה לא על

דוגמה 3.17 *

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הפונקציה שמוגדרת $f(x)=2x+6$.

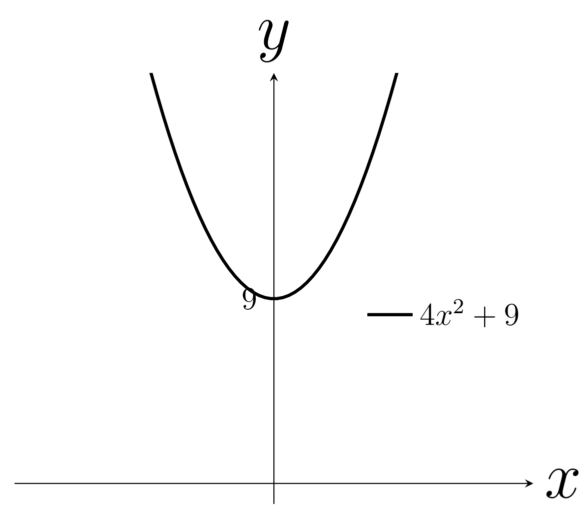


$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \ , \quad \mathrm{Rng}(f) = \mathbb{R} \ , \quad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \ .$$

f חד חד ערכית ועל.

דוגמה 3.18 *

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הפונקציה שמוגדרת $f(x) = 4x^2 + 9$.

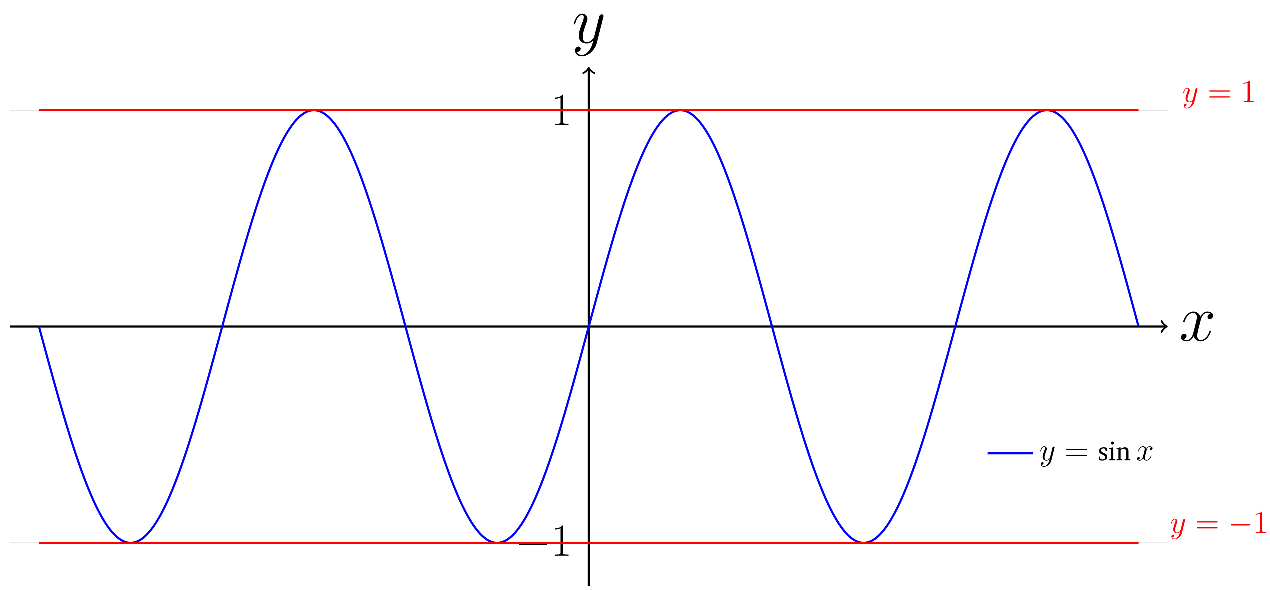


$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \ , \quad \mathrm{Rng}(f) = \mathbb{R} \ , \quad \mathrm{Im}(f) = [9, \infty)$$

f לא חד חד ערכית ולא על.

דוגמה 3.19 *

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הפונקציה שמוגדרת $f(x) = \sin x$.

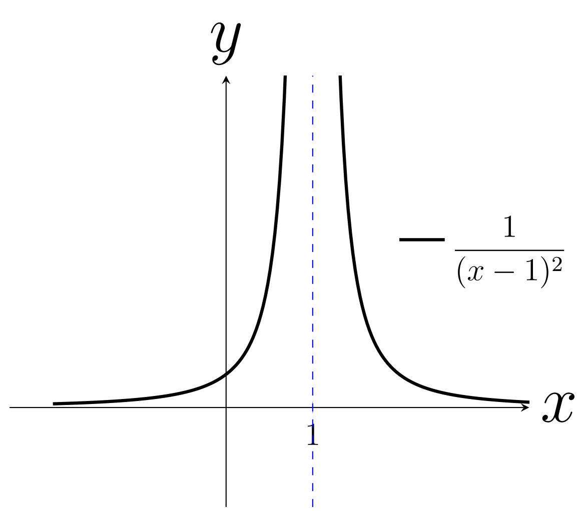


$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}\ ,\quad \text{Rng}(f) = \mathbb{R}\ ,\quad \text{Im}(f) = [-1, 1]$$

f לא חד חד ערכית ולא על.

דוגמה 3.20 *

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הפונקציה שמוגדרת $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$.

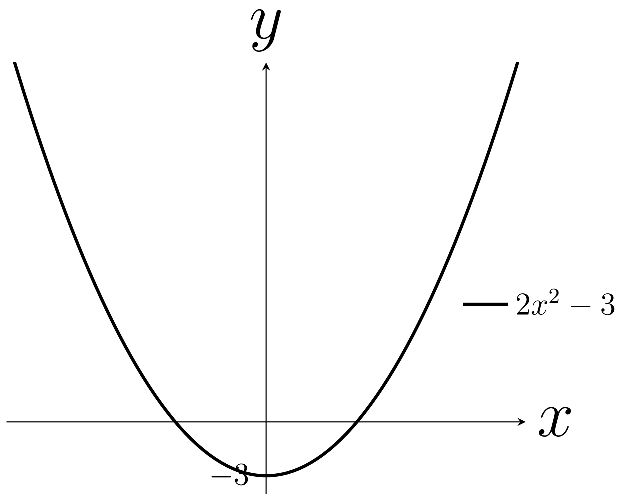


$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \cap x \neq 1\}\ ,\quad \text{Rng}(f) = \mathbb{R}\ , \text{Im}(f) = (0, \infty)$$

f לא חד חד ערכית ולא על.

דוגמה 3.21 *

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הפונקציה שמוגדרת $f(x) = 2x^2 - 3$.



$$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}\ ,\quad \mathrm{Rng}(f)=\mathbb{R}\ ,\quad \mathrm{Im}(f)=[-3,\infty)$$

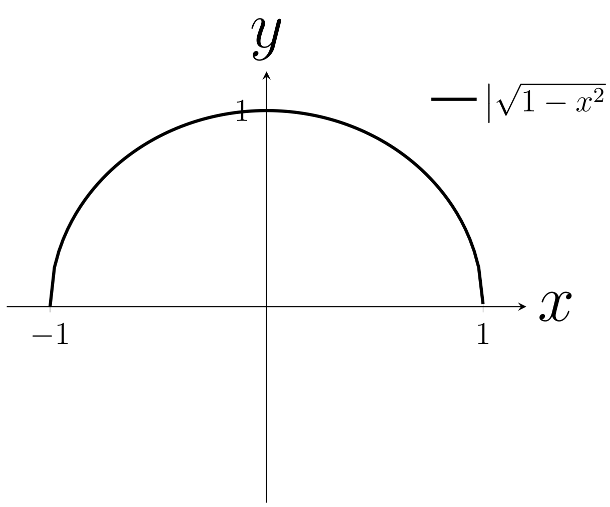
או בניסוח שקול $\mathrm{Im}(f)=\{y|y\geq -3, y\in\mathbb{R}\}$.

f לא חד חד ערכית ולא על.

דוגמה 3.22 *

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הפונקציה שמוגדרת $f(x)=\left|\sqrt{1-x^2}\right|$.

$$\mathrm{Dom}(f)=[-1,1]\ ,\quad \mathrm{Rng}(f)=\mathbb{R}\ ,\quad \mathrm{Im}(f)=[0,1]\ ,$$



f לא חד חד ערכית ולא על.

זוגיות

הגדרה 3.5 פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית

פונקציה $f(x)$ נקראת זוגית אם לכל $x\in \mathrm{Dom}(f)$ מתקיים:

$$f(-x)=f(x)\ .$$

גרף של פונקציה זוגית סימטרי ביחס לציר ה-y.

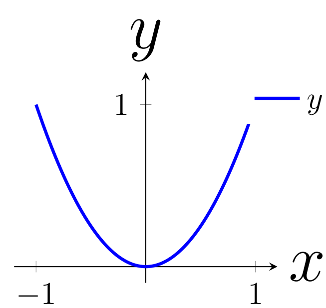
$f(x)$ נקראת אי-זוגית אם לכל $x\in \mathrm{Dom}(f)$ מתקיים:

$$f(-x)=-f(x)\ .$$

דוגמה 3.23

$f(x)=x^2$ זוגית.

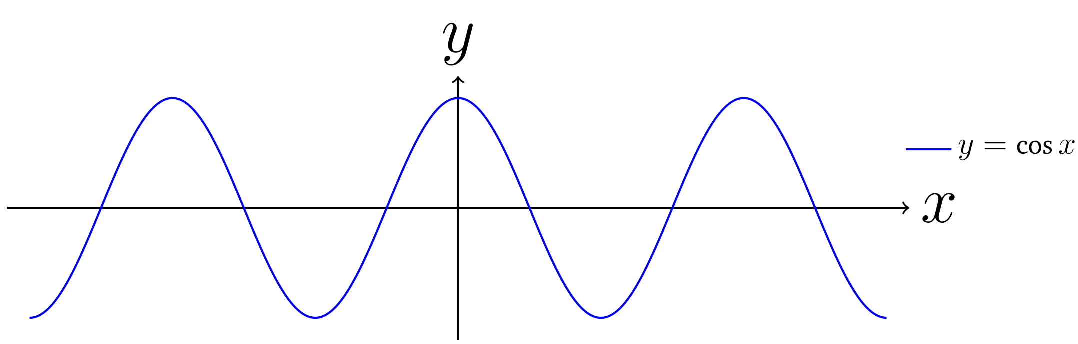
$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)\ .$$



דוגמה 3.24

$f(x)=\cos x$ זוגית.

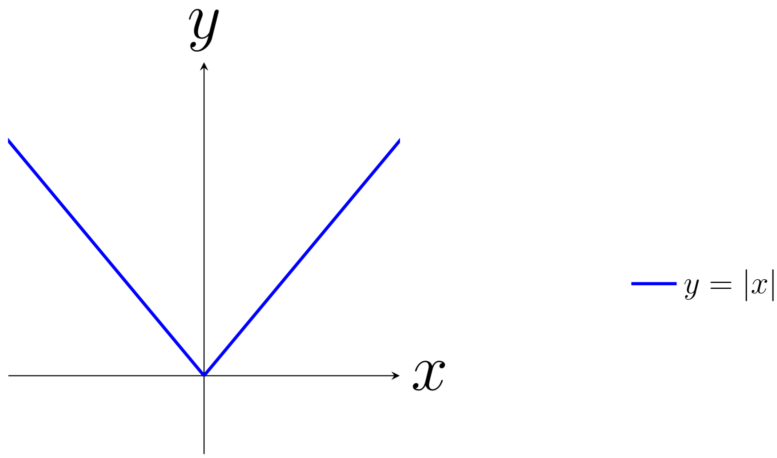
$$f(-x)=\cos(-x)=\cos(x)=f(x)\ .$$



דוגמה 3.25

$f(x)=|x|$ זוגית.

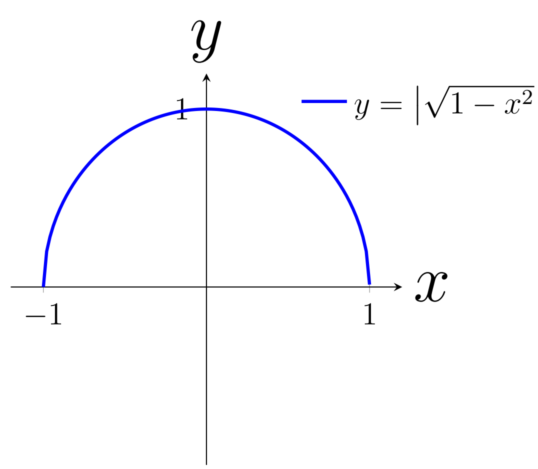
$$f(-x)=|-x|=|x|=f(x)\ .$$



דוגמה 3.26

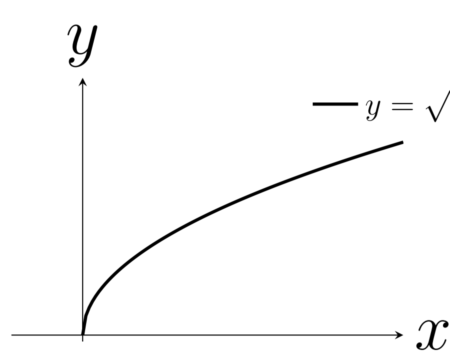
$f(x) = \left|\sqrt{1-x^2}\right|$ זוגית.

$$f(-x) = \left|\sqrt{1-(-x)^2}\right| = \left|\sqrt{1-x^2}\right| = f(x)$$



דוגמה 3.27

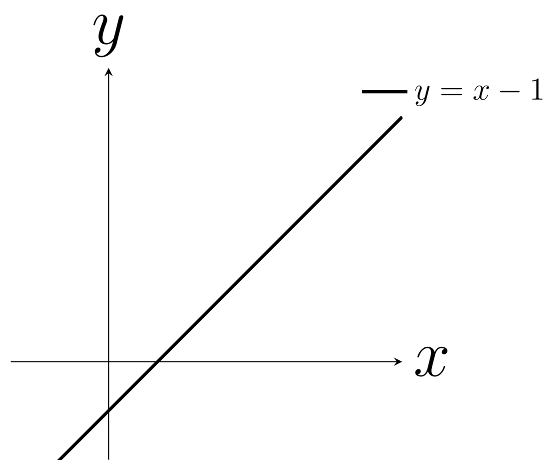
$f(x) = |\sqrt{x}|$ לא פונקציה זוגית או אי-זוגית אלא פונקציה כללית. גית. הרי $f(-x)$ לא מוגדרת.



דוגמה 3.28

$f(x) = x - 1$ פונקציה כללית. הרי

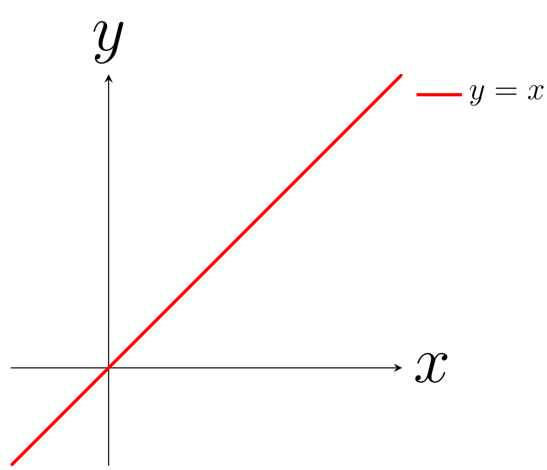
$$f(-x) = -x - 1 \neq f(x), -f(x) \ .$$



דוגמה 3.29

$f(x) = x$ אי זוגית.

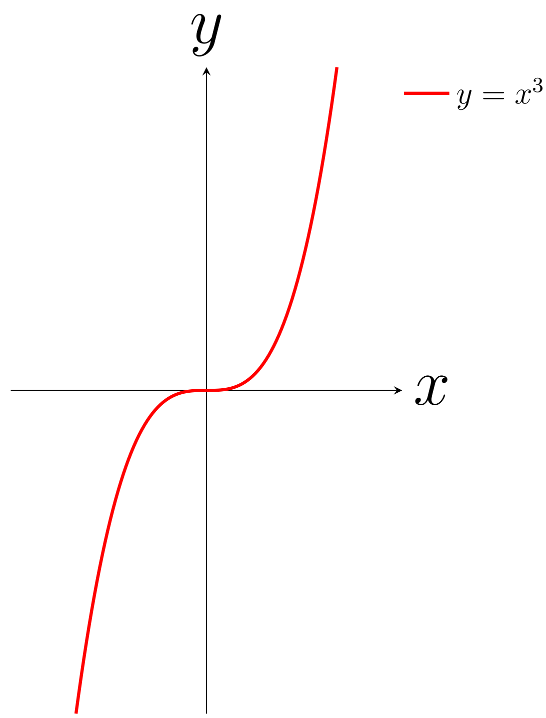
$$f(-x) = -x = -f(x)$$



דוגמה 3.30

$f(x) = x^3$ אי זוגית.

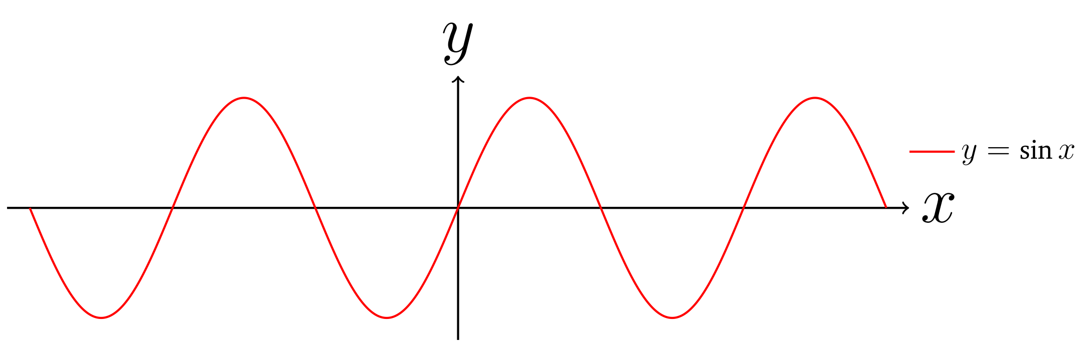
$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \ .$$



דוגמה 3.31

$f(x) = \sin x$ אי זוגית.

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x) \ .$$



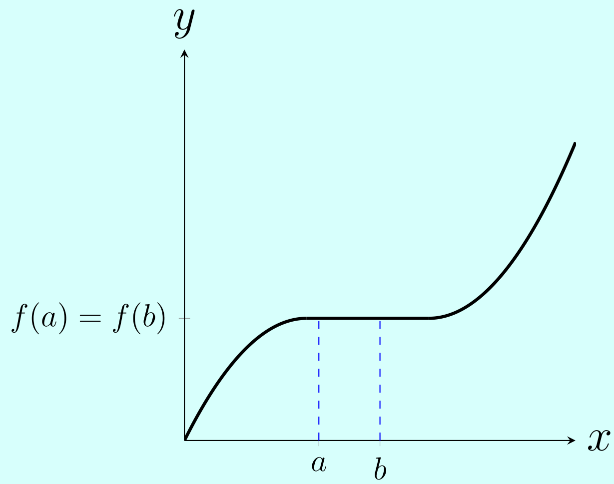
מונוטוניות

הגדרה 3.6 מונוטוניות של פונקציה

תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת בקטע I.

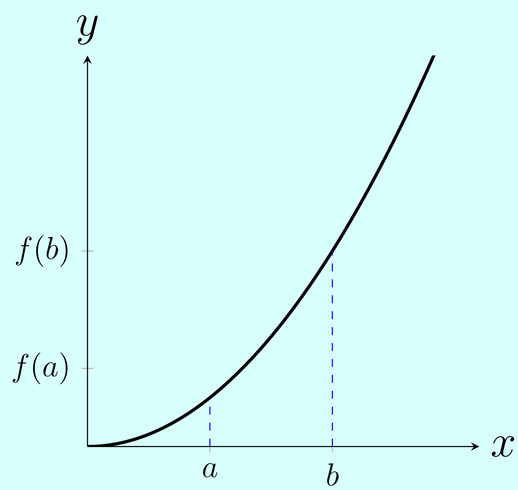
- אומרים כי f עולה מונוטונית אם לכל $a, b \in I$,

$$a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) \leq f(b) \ .$$



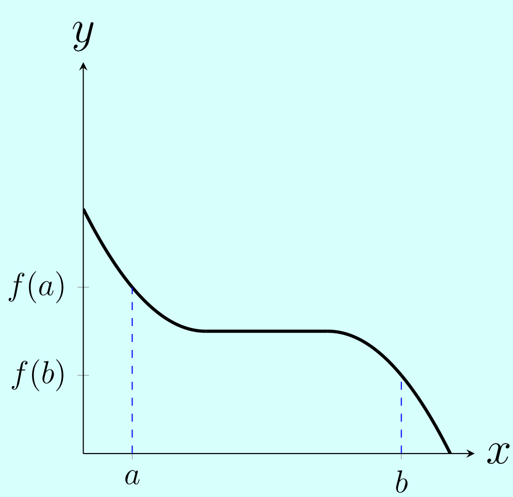
- אומרים כי f עולה מונוטונית ממש אם לכל $a,b \in I$,

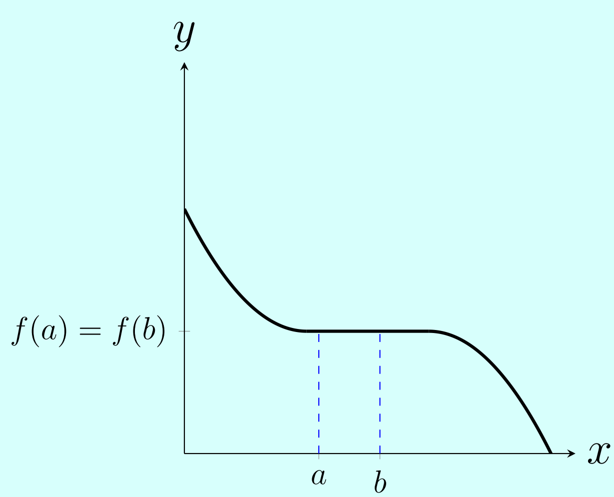
$$a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) < f(b) \ .$$



- אומרים כי f יורדת מונוטונית אם לכל $a,b \in I$,

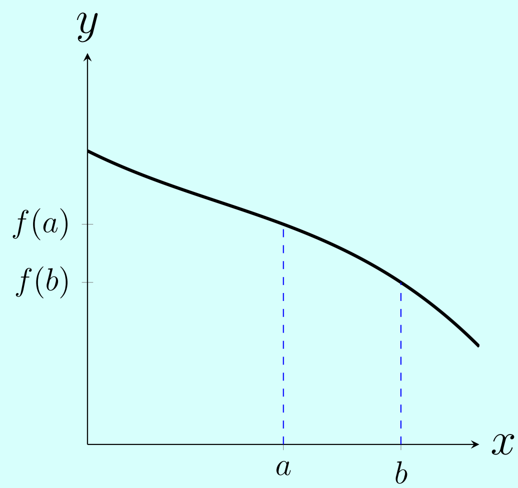
$$a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) \geq f(b) \ .$$





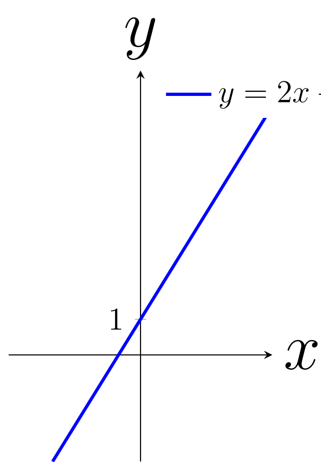
- אומרים כי f יורדת מונוטונית ממש אם לכל $a,b\in I$,

$$a<b \quad \Rightarrow \quad f(a)>f(b)\ .$$



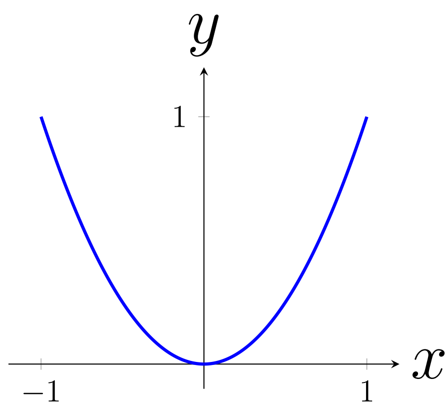
דוגמה 3.32

$f(x)=2x+1$ עולה מונוטונית ממש.



דוגמה 3.33

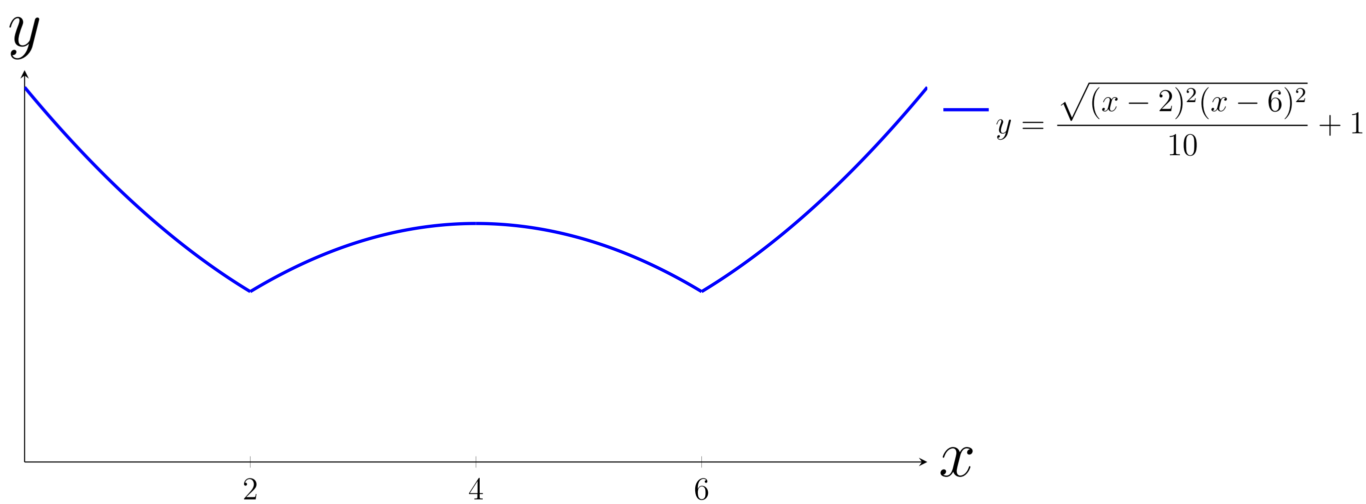
$f(x)=x^2$ עולה בקטע $[0,\infty)$ ויורדת בקטע $(-\infty,0]$.



דוגמה 3.34

הגרף להלן מתאר פונקציה $f(x)$. לפי הגרף,

- $f(x)$ יורדת בתחומים $(-\infty, 2]$ ו- $[4, 6]$.
- $f(x)$ עולה בתחומים $[2, 4]$ ו- $[6, \infty)$.



משפט 3.2 פונקציה מונוטונית אם"ם היא חח"ע

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה.

f עולה ממש או יורדת ממש בטע I אם ורק אם היא חח"ע בקטע I.

*

הוכחה: (להעשרה בלבד!)
נניח ש- f עולה ממש או יורדת ממש בקטע I.

יהיו $a, b \in I$ כך ש- $a \neq b$. יש שתי אפשרויות: $a < b$ או $a > b$.

- אם $a < b$, מכיוון ש- f עולה או ורדת ממש, מתקיים $f(a) < f(b)$ או $f(a) > f(b)$, ז"א $f(a) \neq f(b)$.
- אם $a > b$, מכיוון ש- f עולה או ורדת ממש, מתקיים $f(a) < f(b)$ או $f(a) > f(b)$, ז"א $f(a) \neq f(b)$.

לפי שתי האפשרויות, קיבלנו שאם $a \neq b$ אז $f(a) \neq f(b)$ לכל $a, b \in I$, לכן f חח"ע.

נניח ש- f חח"ע I.

לכל $a \neq b$ מתקיים $f(a) \neq f(b)$.

מכיוון ש- $a \neq b$ אז בהכרח $a < b$ או $a > b$. נניח ש- $a < b$.

מכיוון ש- $f(a) \neq f(b)$ אז בהכרח $f(a) < f(b)$ או $f(a) > f(b)$.

ז"א קיבלנו שאם $a < b$ אז מתקיים ש- $f(a) < f(b)$ או $f(a) > f(b)$.

לפיכך f עולה ממש או f יורדת ממש.

■

חסימות

הגדרה 3.7 פונקציה חסומה

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע I.

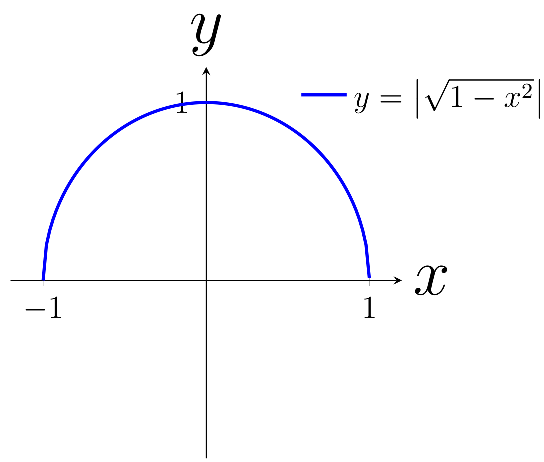
- אומרים כי f **חסומה מלמעלה** אם קיים מספר $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in I$ מתקיים
$$f(x) < M \ .$$
- אומרים כי f **חסומה מלמטה** אם קיים מספר $m \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in I$ מתקיים
$$f(x) > m \ ,$$
- אומרים כי f **חסומה** אם f חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה.

ז"א f חסומה אם קיימים מספרים $m, M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in I$ מתקיים
$$m < f(x) < M \ .$$
אפשר לנסח את התנאי זו גם כך:

f חסומה בקטע I אם קיים $K \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in I$ מתקיים
$$|f(x)| < K \ .$$

דוגמה 3.35

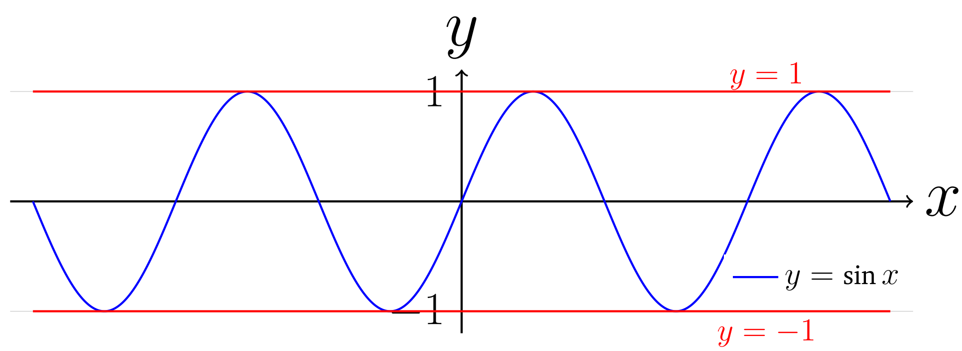
$f(x) = \left|\sqrt{1-x^2}\right|$ חסומה:
$$0 \leq f(x) \leq 1 \ .$$



דוגמה 3.36

$f(x) = \sin x$ חסומה:

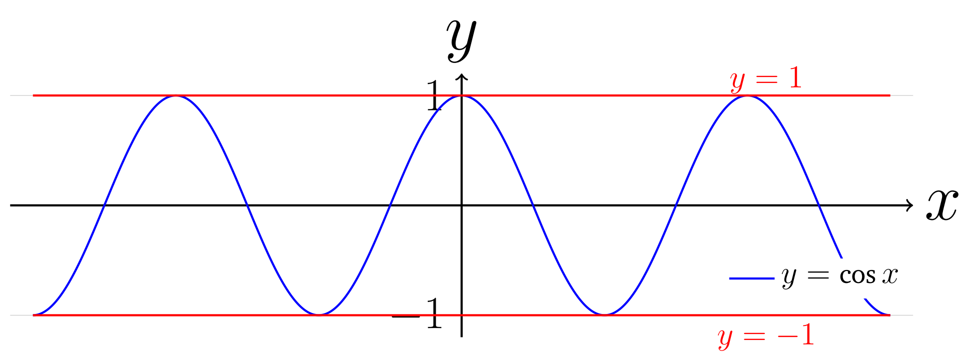
$$-1 \le \sin(x) \le 1 \ .$$



דוגמה 3.37

$f(x) = \cos x$ חסומה:

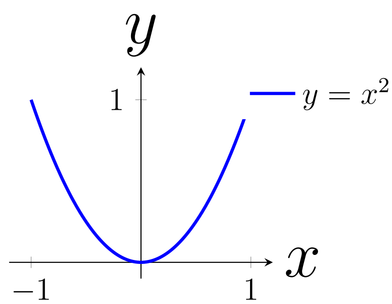
$$-1 \le \cos(x) \le 1 \ .$$



דוגמה 3.38

$y = x^2$ חסומה מלמטה אבל לא חסומה מלמעלה:

$$f(x) \ge 0 \ .$$



*מחזוריות

הגדרה 3.8 פונקציה מחזורית

פונקציה $f(x)$ נקראת מחזורית אם קיים מספר $T>0$ כך שלכל $x\in \text{Dom}(f)$ וגם $x\pm T\in \text{Dom}(f)$,

$$f(x+T)=f(x)\ , \qquad f(x-T)=f(x)\ .$$

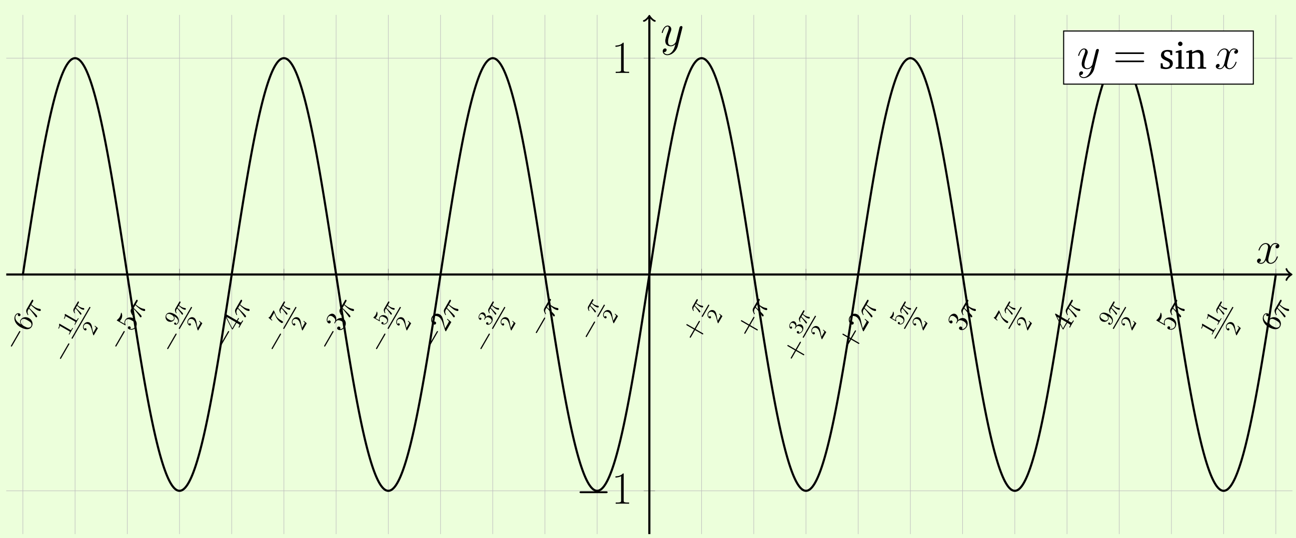
מספר $T>0$ כזה הקטן ביותר נקרא **המחזור** של f.

כלל 3.2 סיכום של המחזורים של הפונקציהות הטריגונומטריות

$f(x)=\sin(x)$ מחזורית עם מחזור 2π:

$$\sin(x+2\pi)=\sin(x)\ , \qquad \sin(x-2\pi)=\sin(x)\ .$$

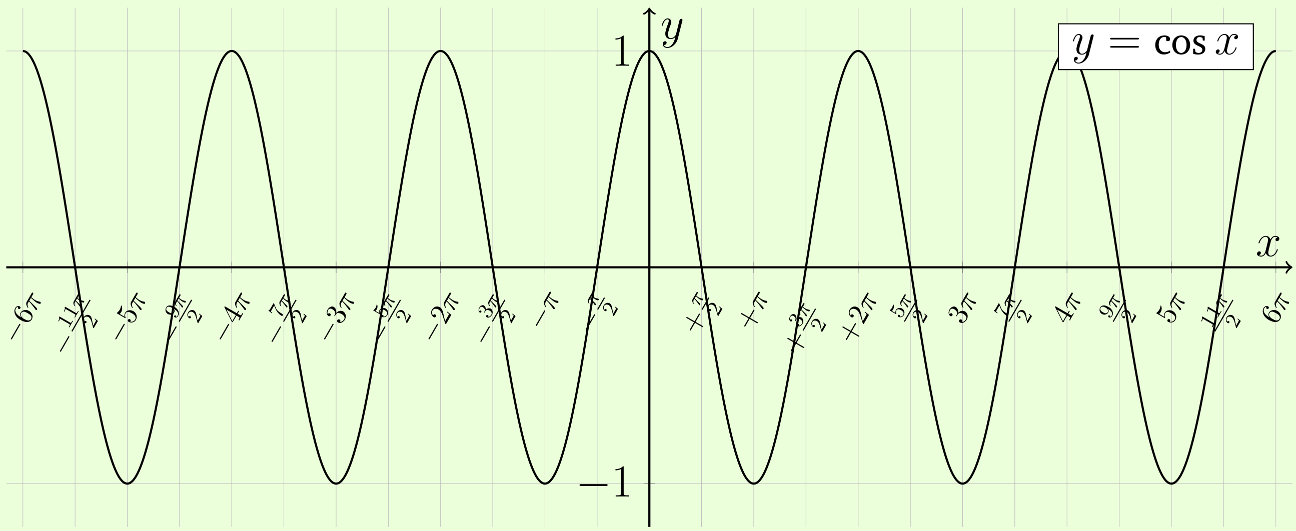
$$\sin(x+2\pi n)=\sin(x)\ , \quad n\in\mathbb{Z}$$



$f(x)=\cos(x)$ מחזורית עם מחזור 2π:

$$\cos(x+2\pi)=\cos(x)\ , \qquad \cos(x-2\pi)=\cos(x)\ .$$

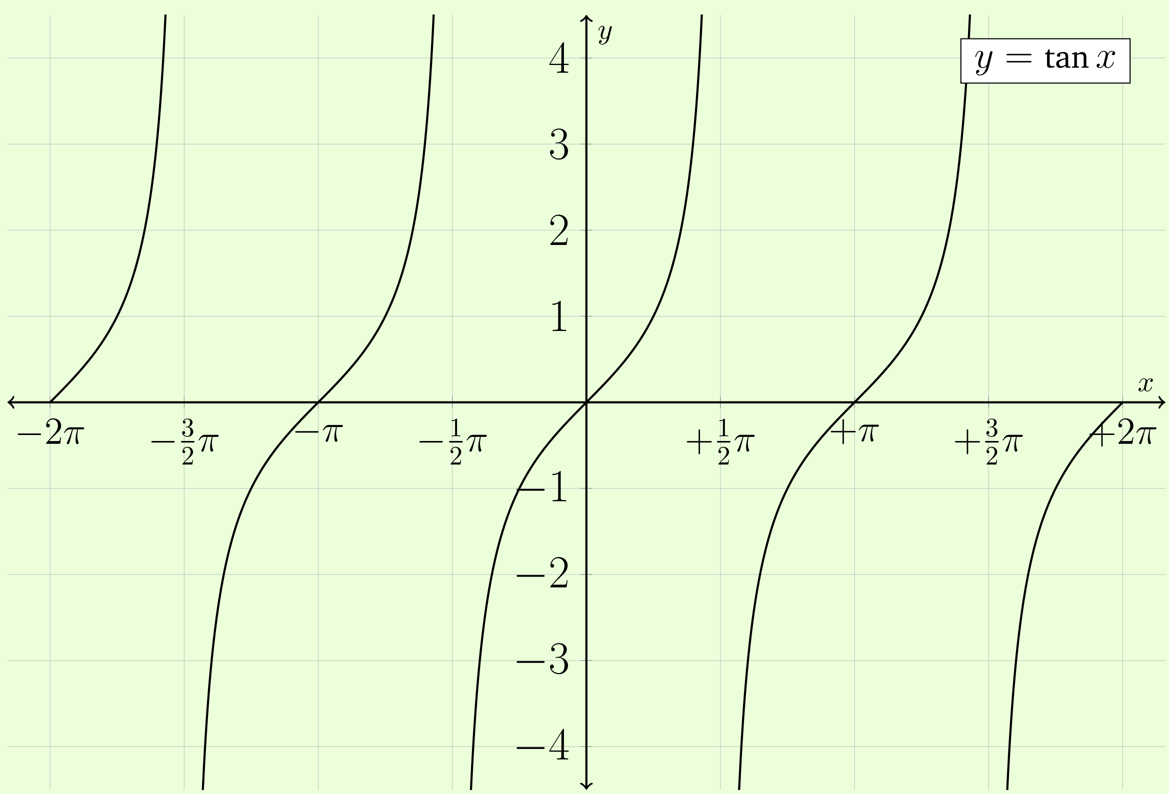
$$\cos(x+2\pi n)=\sin(x)\ , \quad n\in\mathbb{Z}$$



$f(x)=\tan(x)$ מחזורית עם מחזור π:

$$\tan(x+\pi)=\tan(x)\ , \qquad \tan(x-\pi)=\tan(x)\ .$$

$$\tan(x+\pi n)=\tan(x)\ , \quad n\in\mathbb{Z}$$



$y=\sin x$	$T=2\pi$
$y=\cos x$	$T=2\pi$
$y=\tan x$	$T=\pi$
$y=\cot x$	$T=\pi$

דוגמה 3.39

מצאו את המחזור של $f(x)=\sin(2x+3)$.

פתרון:
המחזור של sin הוא 2π. לכן

$$\sin(2x+3)=\sin(2x+3+2\pi)\ .$$

לפי זה

$$f(x)=\sin(2x+3)=\sin(2x+3+2\pi)=\sin\left(2\left(x+\pi\right)+3\right)=f(x+\pi)\ .$$

לפיכך
$T=\pi$.

■

דוגמה 3.40

מצאו את המחזור של $f(x)=\sin(6x+4)$?

פתרון:
המחזור של sin הוא 2π. לכן

$$\sin\left(6x+4\right)=\sin\left(6x+4+2\pi\right)$$

כך ש-

$$f(x)=\sin\left(6x+4\right)=\sin\left(6x+4+2\pi\right)=\sin\left(6\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+4\right)=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\ .$$

לכן $T=\frac{\pi}{3}$. ■

משפט 3.3 מחזור של פונקציה טריגונומטרית עם פקטור והזזה בארגומנט

לכל $k\in\mathbb{R}\neq 0$ ו- $a\in\mathbb{R}$.

- הפונקציה $\sin(kx+a)$ מחזורית עם מחזור $T=\dfrac{2\pi}{k}$.
- הפונקציה $\cos(kx+a)$ מחזורית עם מחזור $T=\dfrac{2\pi}{k}$.
- הפונקציה $\tan(kx+a)$ מחזורית עם מחזור $T=\dfrac{\pi}{k}$.

לכל $k\in\mathbb{R}\neq 0$ ו- $a\in\mathbb{R}$.

- הפונקציה $\sin\left(\frac{x}{k}+a\right)$ מחזורית עם מחזור $T=2k\pi$.
- הפונקציה $\cos\left(\frac{x}{k}+a\right)$ מחזורית עם מחזור $T=2k\pi$.
- הפונקציה $\tan\left(\frac{x}{k}+a\right)$ מחזורית עם מחזור $T=k\pi$.

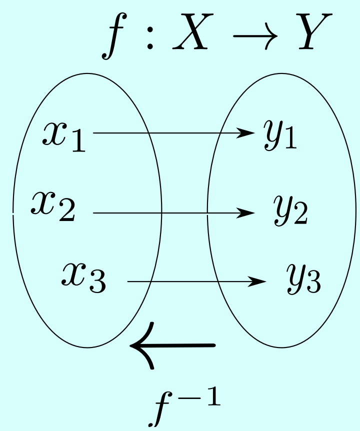
הוכחה: תרגיל בית! ■

3.3 פונקציה הפוכה

הגדרה 3.9 פונקציה הפוכה

נניח ש- $f : X \to Y$ פונקציה.
אם $f(x)$ חד חד ערכית ועל אז ניתן להגדיר הפונקציה ההפוכה, $f^{-1}(x)$ באופן הבא:

$$f(x) = y \qquad \Leftrightarrow \qquad x = f^{-1}(y) \ .$$



$$f^{-1}(y_1) = x_1 \ ,$$
$$f^{-1}(y_2) = x_2 \ ,$$
$$f^{-1}(y_3) = x_3 \ .$$

משפט 3.4

הגרפים של שתי פונקציות הפוכות אחד לשניה סימטריים ביחס לקו $y = x$.

דוגמה 3.41

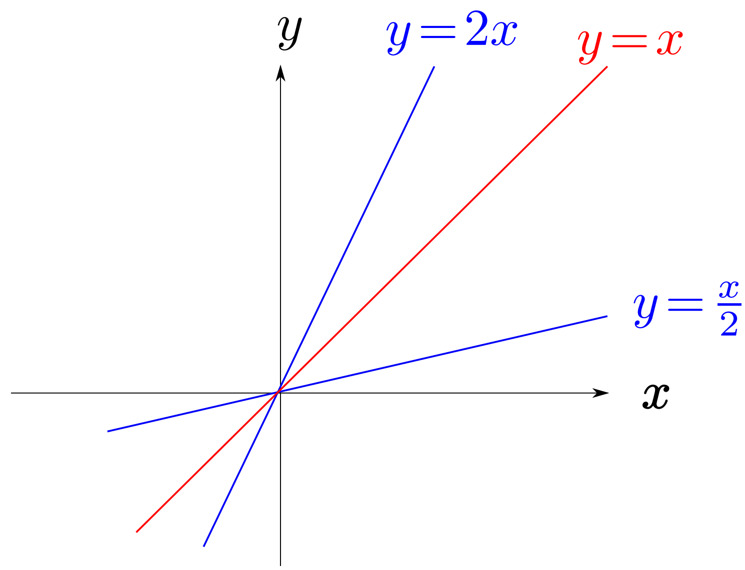
נתונה $f(x) = 2x$. נחשב את הפונקציה ההפוכה:

$$y = 2x \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{y}{2}$$

לכן

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2} \ .$$

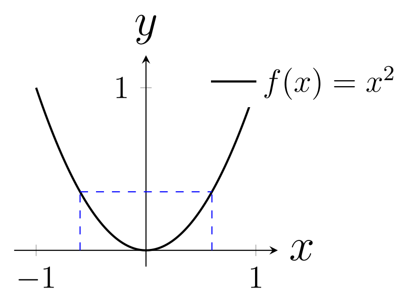
נשרטט את הגרפים שלהם על אותה מערכת צירים:



נשים לב כי הגרפים של $f(x)$ ו- $f^{-1}(x)$ סימטריים ביחס לקו $y=x$.

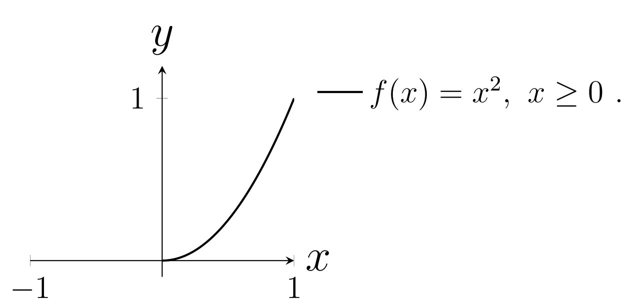
דוגמה 3.42

נתונה הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שמוגדרת $f(x)=x^2$. הפונקציה לא הפיכה בגלל ש- $f(x)$ לא חד חד ערכית, כמתואר בגרף להלן.



דוגמה 3.43

בשונה לדוגמה הקודמת, הפונקציה $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, ז"א הפונקציה שמוגדרת בקטע $[0,\infty)$, היא כן הפיכה מפני שבקטע זו $f(x)$ חד חד ערכית, כמתואר בגרף להלן.

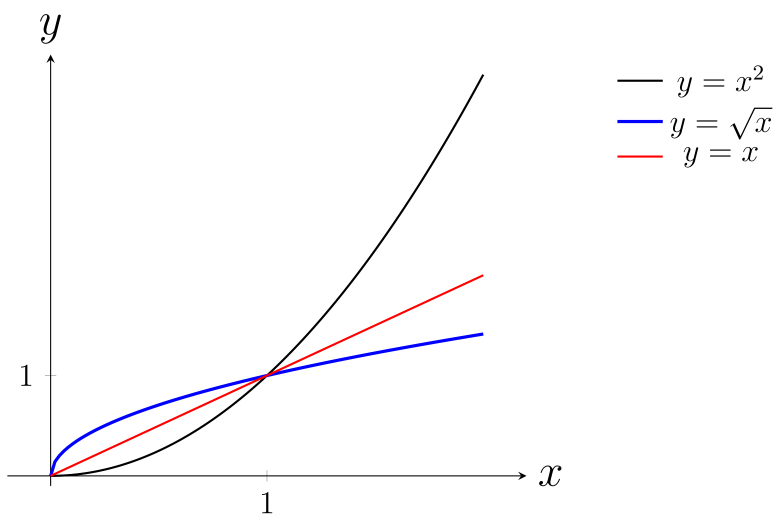


נחשב את הפונקציה ההפוכה:

$$y=x^2 \qquad \Rightarrow \qquad x=\sqrt{y}$$

לכן

$$f^{-1}(x)=\sqrt{x}\ .$$



משפט 3.5 תחום ההגדרה ותמונתה של פונקציה הפוכה

תהי $f(x)$ פונקציה ותהי $f^{-1}(x)$ הפונקציה ההפוכה.

- תחום ההגדרה של הפונקציה ההפוכה שווה לתמונתה של הפונקציה המקורית.
  ז"א $\text{Dom}\left(f^{-1}\right) = \text{Im}\left(f\right)$.
- התמונה של הפונקציה ההפוכה שווה לתחום ההגדרה של הפונקציה המקורית.
  ז"א $\text{Im}\left(f^{-1}\right) = \text{Dom}\left(f\right)$.

דוגמה 3.44

נתונה הפונקציה $f(x) = |\sqrt{x+5}| - 2$.

1) מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של f.

2) מצאו את הפונקציה ההפוכה.

3) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה ההפוכה.

4) מצאו את התמונה של הפונקציה ההפוכה.

5) ציירו את הגרפים שלהם על אותה מערכת צירים.

פתרון:

1) שורש של מספר שלילי לא מוגדר. לפי זה נדרוש ש- $x+5 \geq 0$ $\Leftarrow$ $x \geq -5$. לפיכך:

$$\text{Dom}(f) = [-5, \infty) \ .$$

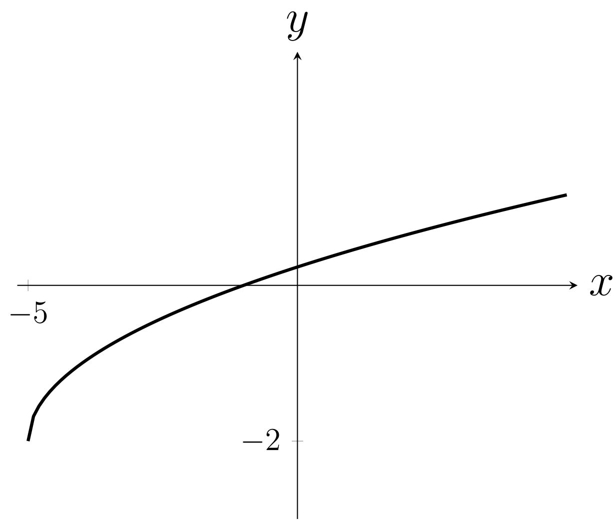
2) <u>שיטה אלגברית</u>

נתבונן על $y = |\sqrt{x+5}| - 2$. נשים לב ש- $|\sqrt{x+5}| \geq 0$ לכן $y \geq -2$ לכן

$$\text{Im}(f) = [-2, \infty) \ .$$

<u>שיטה גרפית</u>

הגרף של $f(x)=\sqrt{x+5}-2$ נראה כך:



הגרף מתחיל ב- $y=-2$ ועובר דרך כל הנקודות מ- $y=-2$ למעלה לכן

$$\mathrm{Im}(f)=[-2,\infty)\ .$$

$$\mathrm{Im}(f)=[-2,\infty)\ .$$

(3 נרשום $y=|\sqrt{x+5}|-2$ ונבודד את x:

$$y=|\sqrt{x+5}|-2 \quad\Rightarrow\quad y+2=|\sqrt{x+5}| \quad\Rightarrow\quad (y+2)^2=x+5 \quad\Rightarrow\quad x=(y+2)^2-5$$

לפיכך

$$f^{-1}(x)=(x+2)^2-5\ .$$

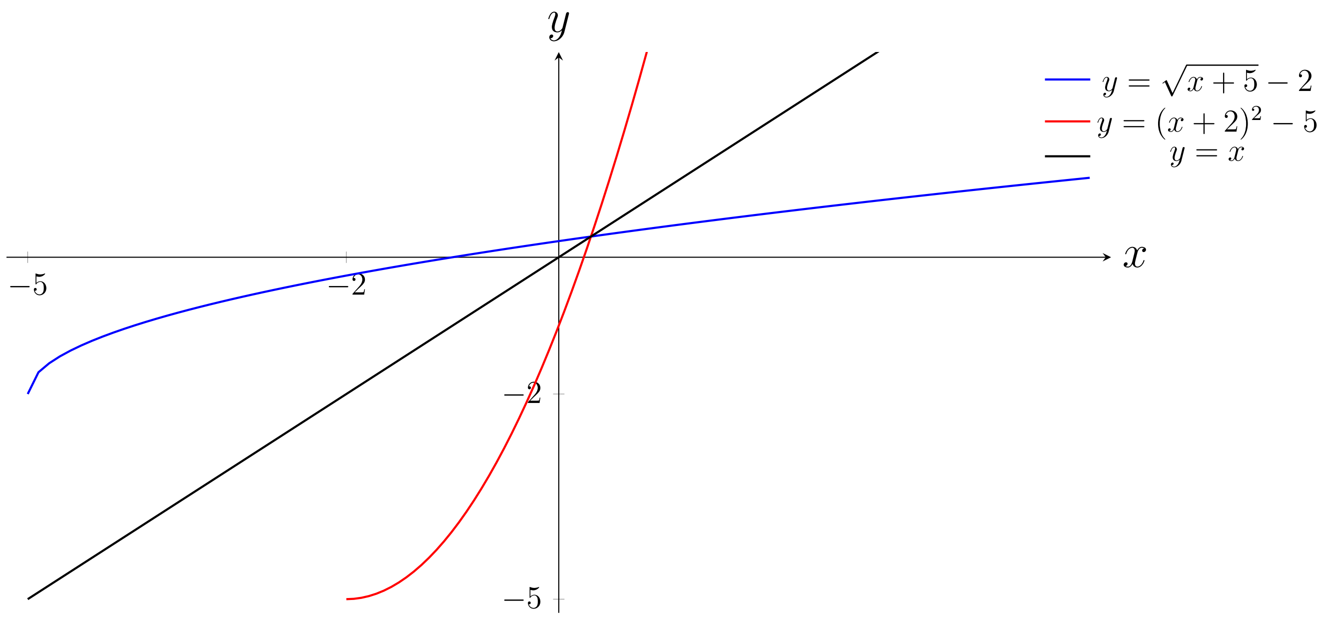
(4

$$\mathrm{Dom}\left(f^{-1}\right)=\mathrm{Im}(f)=[-2,\infty)\ .$$

(5

$$\mathrm{Im}\left(f^{-1}\right)=\mathrm{Dom}(f)=[-5,\infty)\ .$$

(6



$\blacksquare$

דוגמה 3.45

נתונה פונקציה $y=\sqrt{x-3}+1$.

(1 מצאו את תחום ההגדרה והתמונה שלה.

(2 מצאו אץ הפונקציה ההפוכה ואת תחום הגדרתה ותמונתה.

(3 ציירו את הגרפים של שתי הפונקציות באותה מערכת צירים.

פתרון:

(1 $f(x)=\sqrt{x-3}+1$.

תחום ההגדרה: $\text{Dom}(f)=\{x\geq 3\}$.

תמונתה: $\text{Im}(f)=\{y\geq 1\}$.

(2

$$y=\sqrt{x-3}+1 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x-3}=y-1 \quad\Rightarrow\quad x=(y-1)^2+3$$

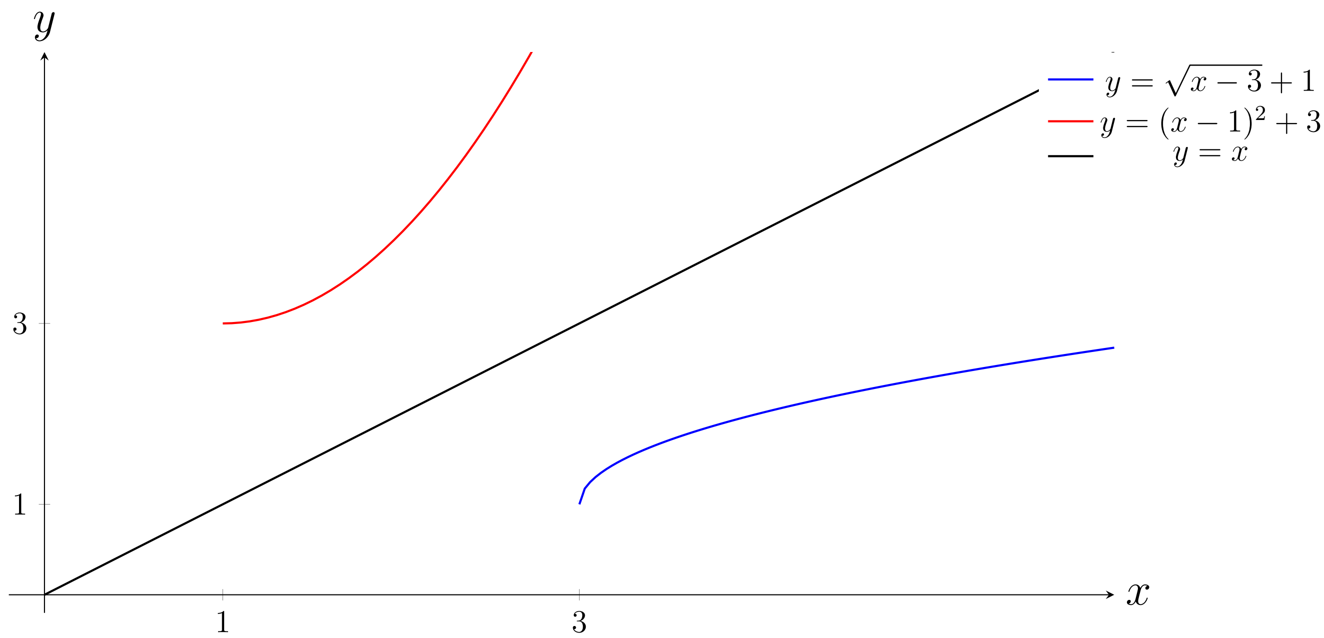
הפונקציה ההפוכה:

$$f^{-1}(x)=(x-1)^2+3\ .$$

תחום ההגדרה: $x\geq 1$.

התמונה: $y\geq 3$.

(3



■

3.4 פונקציה מורכבת

הגדרה 3.10 פונקציה מורכבת

נניח ש $y = f(u)$ ו- $u = g(x)$, אז לפונקציה $y = f(g(x))$ קוראים **פונקציה מורכבת**.

דוגמה 3.46

$$y = \sin(2x)$$

הוא הרכבה של פונקציות $y = \sin u$ ו- $u = 2x$.

דוגמה 3.47

$$y = e^{\sqrt{x}}$$

הוא הרכבה של פונקציות $y = e^u$ ו- $u = \sqrt{x}$.

דוגמה 3.48

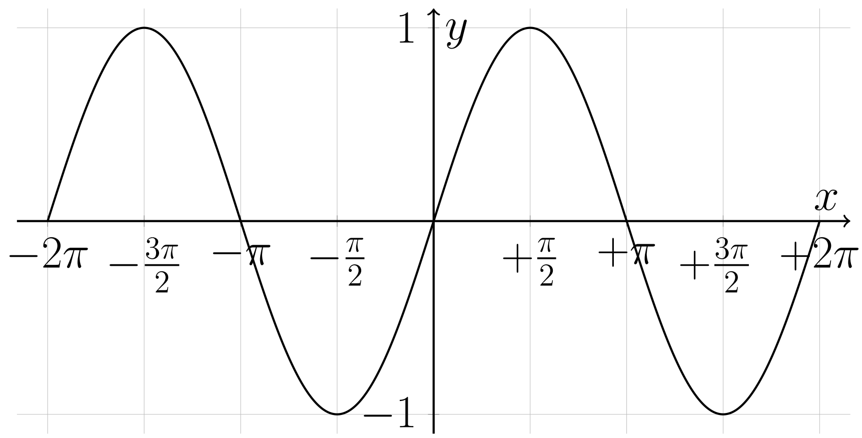
$$y = \frac{1}{(x^2-3)^3}$$

הוא הרכבה של $y = \frac{1}{u^3}$ ו- $u = x^2 - 3$.

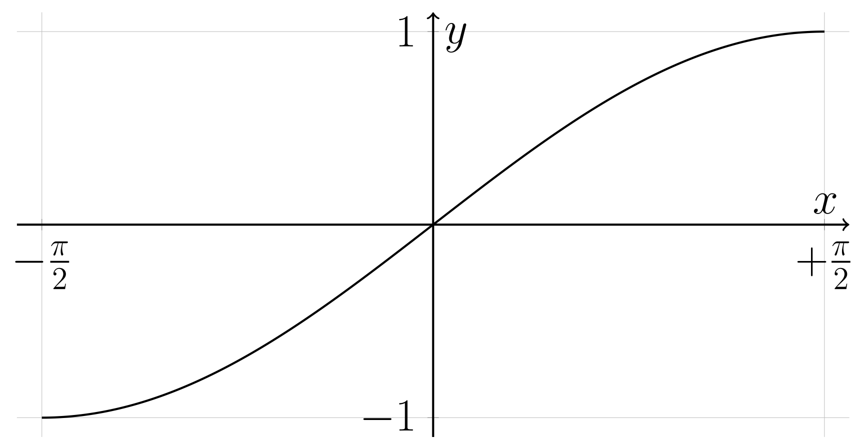
3.5 פונקציות טריגונומטריות הפוכות

arcsin

נתבונן על הפונקציה $f(x) = \sin(x)$ עם תחום ההגדרה $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. לפי הגרף, הפונקציה הזאת לא חד חד ערכית ולכן היא לא הפיכה:



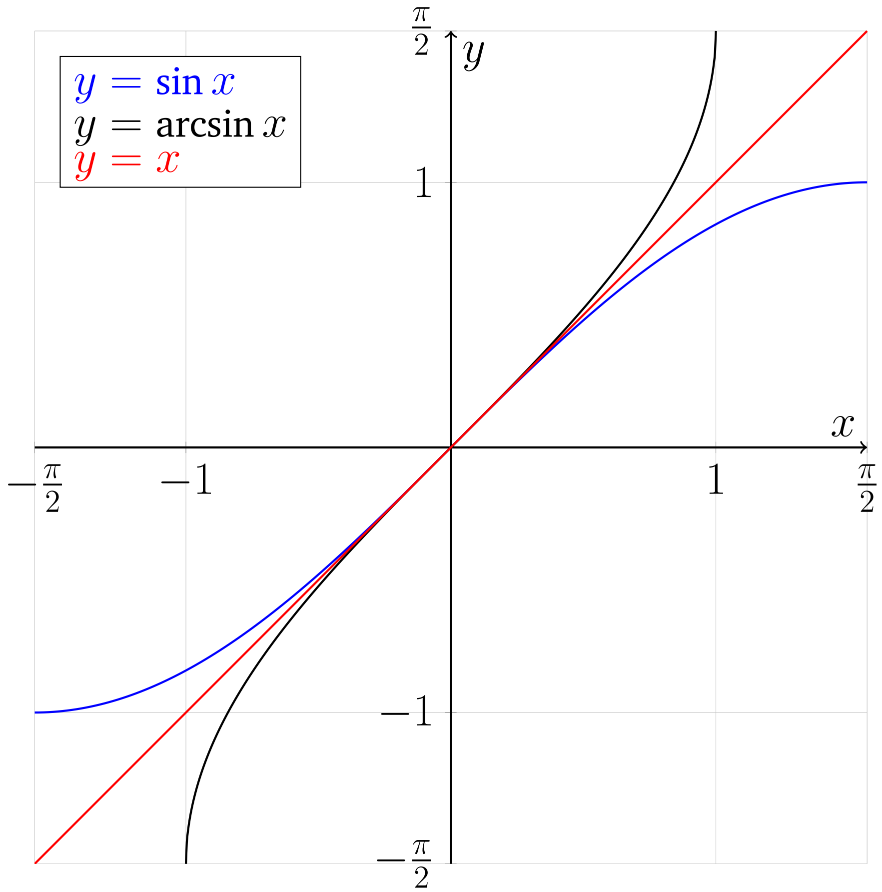
כדי להגדיר את הפונקציה ההפוכה של $\sin x$, עלינו להגביל את תחום ההגדרתה כך שהיא תהיה חד חד ערכית. תהי $f(x) = \sin(x)$ עם תחום ההגדרה $\text{Dom}(f) = [-\pi/2, \pi/2]$. עכשיו הפונקציה חד חד ערכית (כמתואר בגרף) ולכן היא הפיכה:



נקח $y = \sin(x)$ עם תחום ההגדרה $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. התמונה שלה היא $-1 \leq y \leq 1$.

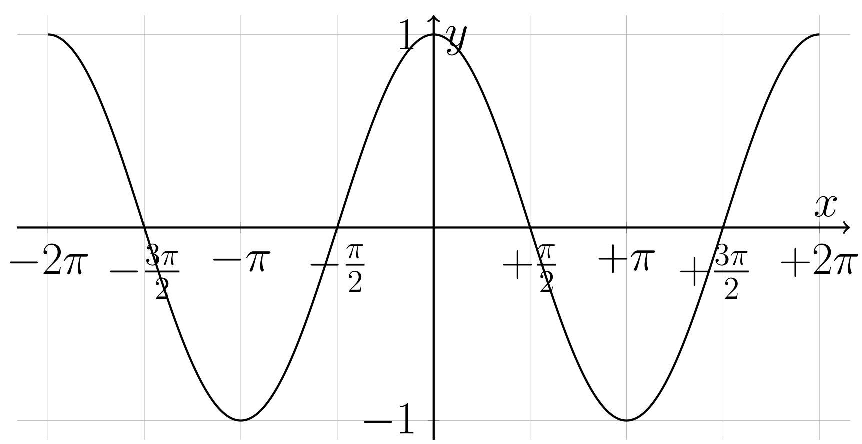
הפונקציה ההפוכה היא $y = \arcsin x$. תחום ההגדרה היא $-1 \leq x \leq 1$ והתמונה היא $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) &= -1 && \Rightarrow && \arcsin\left(-1\right) &= -\tfrac{\pi}{2}\\
\sin\left(-\tfrac{\pi}{3}\right) &= -\tfrac{\sqrt{3}}{2} && \Rightarrow && \arcsin\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) &= -\tfrac{\pi}{3}\\
\sin\left(-\tfrac{\pi}{4}\right) &= -\tfrac{1}{\sqrt{2}} && \Rightarrow && \arcsin\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) &= -\tfrac{\pi}{4}\\
\sin\left(-\tfrac{\pi}{6}\right) &= -\tfrac{1}{2} && \Rightarrow && \arcsin\left(-\tfrac{1}{2}\right) &= -\tfrac{\pi}{6}\\
\sin\left(0\right) &= 0 && \Rightarrow && \arcsin\left(0\right) &= 0\\
\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) &= \tfrac{1}{2} && \Rightarrow && \arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \tfrac{\pi}{6}\\
\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} && \Rightarrow && \arcsin\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \tfrac{\pi}{4}\\
\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} && \Rightarrow && \arcsin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \tfrac{\pi}{3}\\
\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= 1 && \Rightarrow && \arcsin\left(1\right) &= \tfrac{\pi}{2}\ .
\end{aligned}$$

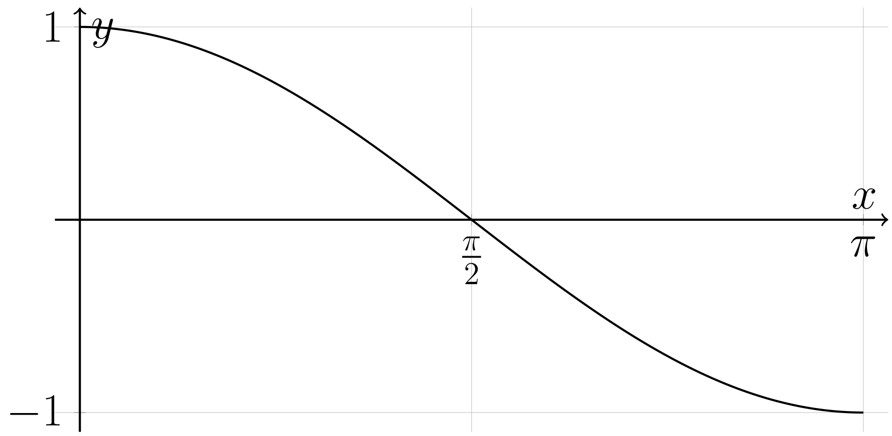


arcos

באותה מידה $\cos(x)$ בתחום ההגדרה $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ לא חד חד ערכית (כמתואר בגרף) ולכן היא לא הפיכה:



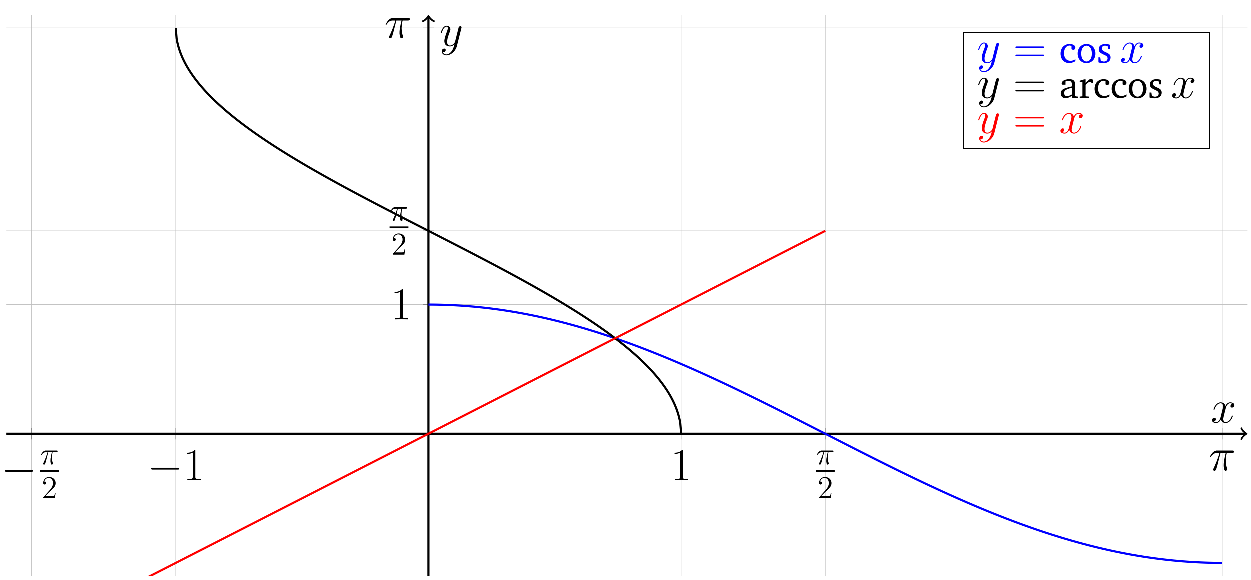
נגדיר את הפונקציה $f(x) = \cos(x)$ בתחום הגדרה $\mathrm{Dom}(f) = [0, \pi]$. עכשיו הפונקציה חד חד ערכית (כמתואר בגרף להלן) ולכן היא הפיכה:



נקח $y=\cos(x)$ עם תחום ההגדרה $0\le x\le \pi$. התמונה שלה היא $-1\le y\le 1$.

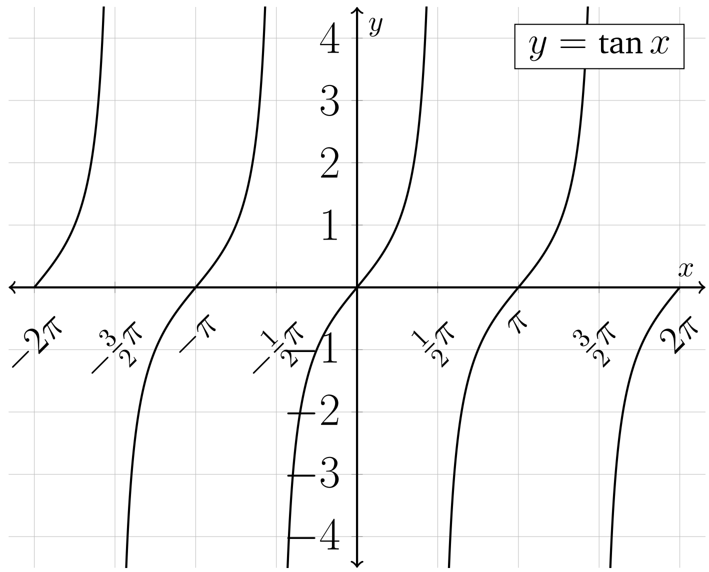
הפונקציה ההפוכה היא $y=\arccos x$. תחום ההגדרה היא $-1\le x\le 1$ והתמונה היא $0\le y\le \pi$.

$$\begin{aligned}
\cos(0) &= 1 &\Rightarrow\quad \arccos(1) &= 0\\
\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} &\Rightarrow\quad \arccos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \tfrac{\pi}{6}\\
\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} &\Rightarrow\quad \arccos\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \tfrac{\pi}{4}\\
\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) &= \tfrac{1}{2} &\Rightarrow\quad \arccos\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \tfrac{\pi}{3}\\
\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= 0 &\Rightarrow\quad \arccos(0) &= \tfrac{\pi}{2}\\
\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) &= -\tfrac{1}{2} &\Rightarrow\quad \arccos\left(-\tfrac{1}{2}\right) &= \tfrac{2\pi}{3}\\
\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right) &= \tfrac{-1}{\sqrt{2}} &\Rightarrow\quad \arccos\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \tfrac{3\pi}{4}\\
\cos\left(\tfrac{5\pi}{6}\right) &= -\tfrac{1}{2} &\Rightarrow\quad \arccos\left(-\tfrac{1}{2}\right) &= \tfrac{5\pi}{6}\\
\cos(\pi) &= -1 &\Rightarrow\quad \arccos(-1) &= \pi\ .
\end{aligned}$$

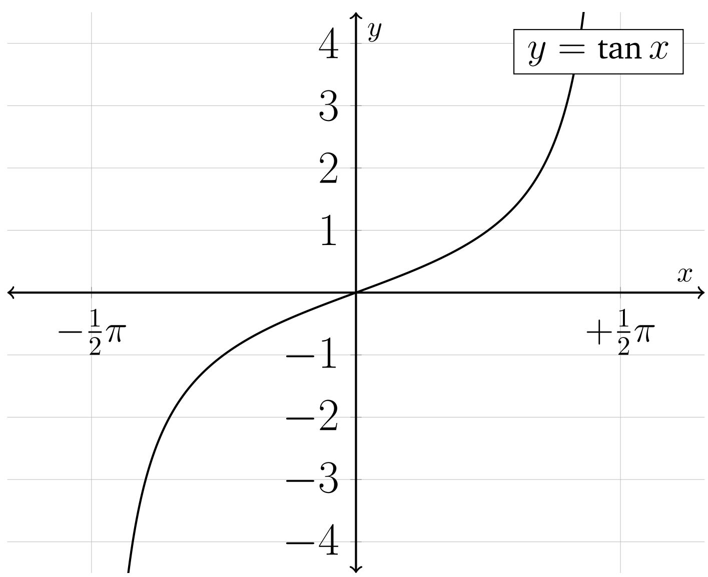


arctan

$\tan(x)$ גם לא חד חד ערכית כפי שרואים בגרף שלה:



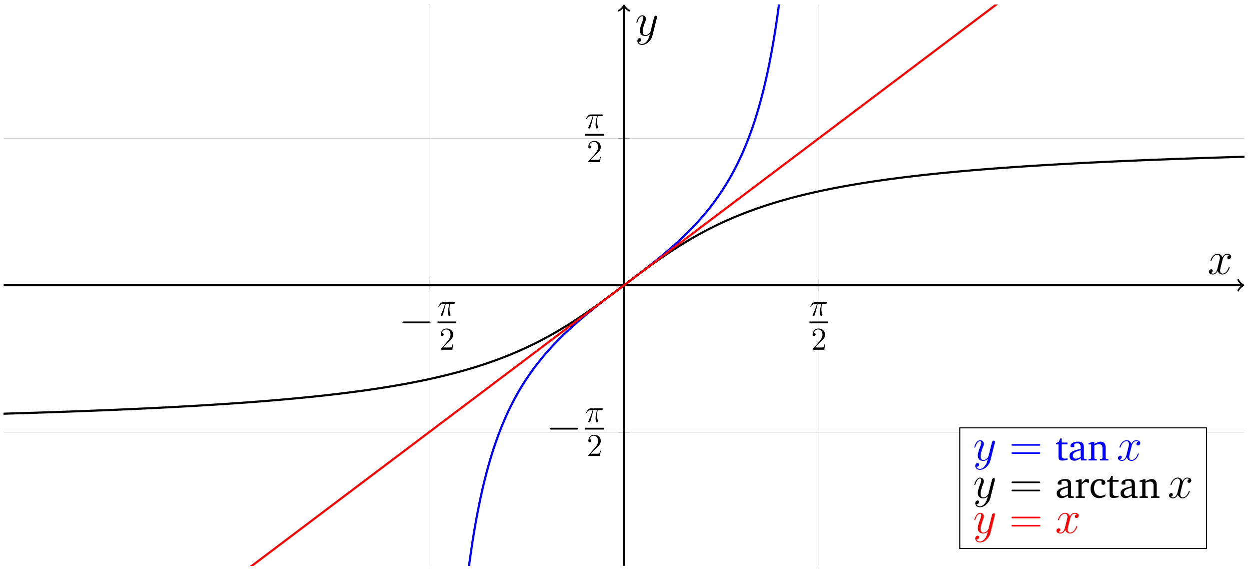
נגדיר פונקציה $y=\tan(x)$ בתחום ההגדרה $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$. עכשיו הפונקציה היא חד חד ערכית בתחום זו כמתואר גרף:



לפיכך נקח $y=\tan(x)$ עם תחום ההגדרה $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$. התמונתה היא $-\infty\leq y\leq\infty$.

הפונקציה ההפוכה היא $y=\arctan x$. תחום ההגדרה היא $-\infty\leq x\leq\infty$ והתמונה היא $-\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
\tan\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) &= -\infty &&\Rightarrow& \arctan\left(-\infty\right) &= -\tfrac{\pi}{2}\\
\tan\left(-\tfrac{\pi}{3}\right) &= -\sqrt{3} &&\Rightarrow& \arctan\left(-\sqrt{3}\right) &= -\tfrac{\pi}{3}\\
\tan\left(-\tfrac{\pi}{4}\right) &= -1 &&\Rightarrow& \arctan\left(-1\right) &= -\tfrac{\pi}{4}\\
\tan\left(-\tfrac{\pi}{6}\right) &= -\tfrac{1}{\sqrt{3}} &&\Rightarrow& \arctan\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) &= -\tfrac{\pi}{6}\\
\tan\left(0\right) &= 0 &&\Rightarrow& \arctan\left(0\right) &= 0\\
\tan\left(\tfrac{\pi}{6}\right) &= \tfrac{1}{\sqrt{3}} &&\Rightarrow& \arctan\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \tfrac{\pi}{6}\\
\tan\left(\tfrac{\pi}{4}\right) &= 1 &&\Rightarrow& \arctan\left(1\right) &= \tfrac{\pi}{4}\\
\tan\left(\tfrac{\pi}{3}\right) &= \sqrt{3} &&\Rightarrow& \arctan\left(\sqrt{3}\right) &= \tfrac{\pi}{3}\\
\tan\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= \infty &&\Rightarrow& \arctan\left(\infty\right) &= \tfrac{\pi}{2}\;.
\end{aligned}$$



3.6 תרגילים

דוגמה 3.49

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. הוכיחו שאם f זוגית ואי-זוגית בקטע I, אז בהכרח f שווה לפונקצית אפס.

פתרון:
לכל $x \in I$, f זוגית, ז"א

$$f(-x) = f(x) \qquad \forall x \in I \ . \tag{\#1}$$

לכל $x \in I$, f אי זוגית, ז"א

$$f(-x) = -f(x) \qquad \forall x \in I \ . \tag{\#2}$$

לפי (#1) ו- (#2), $f(x) = f(-x)$ ו- $f(x) = -f(-x)$, לכן

$$f(x) = -f(x)$$

לכל $x \in I$. אז בהכרח

$$f(x) = 0 \ .$$

■

דוגמה 3.50

עבור אילו ערכים של הפרמטר a הפונקציה $y(x) = x^6 + ax^3 - 2x^3 - 2x^2 + 1$ תהיה זוגית?

פתרון:
אם y זוגית אז $y(-x) = y(x)$.
נרשום $y(x)$ בצורה

$$y = x^6 + (a-2)x^3 - 2x^2 + 1 \ .$$

לפי זה
$$\begin{aligned} y(-x) =& (-x)^6 + (a-2)(-x)^3 - 2(-x)^2 + 1 \\ =& x^6 - (a-2)x^3 - 2x^2 + 1 \ . \end{aligned}$$

לכן $y(-x) = y(x)$ רק אם $a = 2$. ■

דוגמה 3.51

הוכיחו כי הפונקציה e^{-x} יורדת מונוטונית ממש.

פתרון:
תהי $f(x) = e^{-x}$ ויהיו $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$f(a) = e^{-a} = \frac{1}{e^a} \ .$$

כיוון ש- $a < b$ ו- $e > 1$ אז $e^a < e^b$ ולכן $\frac{1}{e^b} > \frac{1}{e^a}$. לפיכך

$$f(a) = \frac{1}{e^a} > \frac{1}{e^b} = f(b) \ ,$$

ז"א אם $a < b$ אז $f(a) > f(b)$.
יורדת ממש. ■