1

2 דוגמא. בהטלת מטבע ניקח את המאורע $A = \{2\}$ ו $B = \overline{\{1,6\}}$. ברור ש־ $P(A) = \frac{1}{6}$. אבל, אם B מתממש ותוצאת ההטלה איננה 1 או 6 הסיכוי לקבל את התוצאה 2 משתנה. אינטואיציה שלנו מרמזת כי הסיכוי המעודכן יהיה רבע, משיקולי סימטריה בין התוצאות הנותרות. נבחן זאת לפי ההגדרה.

$$P(\{2\}|B) = \frac{P(\{2\} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(2)}{\frac{4}{6}} = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{4}{6}\right)} = \frac{1}{4},$$

כפי שחזינו.

3 דוגמא. בדוגמא הבאה נגדיר את המאורע $A = \{1,2,5,6\}$. ברור ש $P(A) = P(B) = \frac{4}{6}$. לאחר קבלת המידע שהתוצאה איננה 1 או 6 נבחין כי

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(2,5)}{\frac{4}{6}} = \frac{\left(\frac{2}{6}\right)}{\left(\frac{4}{6}\right)} = \frac{1}{2}.$$

זאת אומרת שההסתברות של מאורע A ירדה מ$\frac{2}{3}$ ל $\frac{1}{2}$.

4 דוגמא. בפונטי־פאנדי יש

- 45% גברים,
- 30% מעשנים, ו־
- 15% הם גברים מעשנים.

נבחר אדם באקראי. בהנחה ונבחר גבר,

1. מה הסיכוי שהוא מעשן?
2. מה הסיכוי שאינו מעשן?
3. כיצד התשובות תשתננה בהנחה ונבחרה אישה?

פיתרון. נסמן ב־ A את המאורע שנבחר גבר וב־ B את המאורע שהאדם שנבחר מעשן. באופן כללי, ההסתברויות של A ו־ B הן $P(A) = 0.45$ ו־ $P(B) = 0.3$.

1. נחשב את P שהאדם הנבחר מעשן, תחת ההנחה שמדובר בגבר.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.15}{0.45} = \frac{1}{3}.$$

זאת אומרת, שיעור המעשנים באוכלוסיית הגברים גבוה מן הממוצע באוכלוסייה הכוללת.

2. בכדי לבחון את P שאינו מעשן נוכל להשתמש בכלל המשלים, (הסתברות מותנה מקיימת את כל כללי פונקצית ההסתברות). לכן,

$$P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A) = \frac{2}{3}.$$

כנדרש.

3. נשים לב שמדובר בהתנייה שונה ולכן מדובר במרחב שונה לחלוטין. לא ניתן להמיר את התוצאות הקודמות בגלל ששינוי ההתנייה משנה את כל הנחות הבסיס של החישוב. בהתאם לזאת, נצטרך לבצע את החישובים הקודמים בשנית, וכעת נתנה על $\bar{A}$. נשים לב כי

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$$

והאיחוד הוא איחוד זר (של מאורעות זרים). לכן נקבל

$$P(B|\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(B \cap A)}{P(\bar{A})} = \frac{0.3 - 0.15}{0.55} \approx 0.27.$$

המעשנות נמוך יותר משיעור המעשנים באוכלוסיה. כמו כן,

■

5 דוגמא. בכד 10 כדורים הממסופרים מ־1 עד 10 .שולפים 4 ללא החזרה.

1. מה הסיכוי שהכדור עם המספר 7 בחוץ?
2. ידוע ש־9 בחוץ, מה הסיכוי שגם 7 בחוץ?
3. ידוע שאין מספר קטן מ־4 בחוץ, מה הסיכוי ש־7 בחוץ?
4. מה הסיכוי ש־7 לא בחוץ אם ידוע שאין מספר קטן מ־4 בחוץ?

פיתרון. ישנם 10 כדורים ומוציאים 4 ללא החזרה ולכן מרחב המדגם מורכב מכל האפשרויות לבחור 4 כדורים מתוך 10 , סה"כ

$$|\Omega| = \binom{10}{4}.$$

1. נגדיר את המאורע ־ "הכדור עם המספר 7 הינו אחד מהכדורים שהוצאו" בתור A.מאחר ומדובר במרחב מדגם שווה הסתברות, אזי

$$P(A) = \frac{1.\binom{9}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{9!6!4!}{10!6!3!} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \ .$$

2. נסמן ב־ B את המאורע המציין כי הכדור עם המספר 9 הינו אחד מהכדורים שהוצאו.

$$\begin{aligned} P(A|B) = & \frac{P(A\cap B)}{P(B)} & = \frac{\left(\frac{1.\binom{8}{2}}{\binom{10}{4}}\right)}{\left(\frac{1.\binom{9}{3}}{\binom{10}{4}}\right)} \\ = & \frac{\binom{8}{2}}{\binom{9}{3}} & = \frac{8!6!3!}{9!6!2!} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

האם היינו יכולים לדעת זאת מראש? כן! האינטואיציה היא מאוד פשוטה. נתון שהכדור עם המספר 9 יצא כבר ולכן נותרו 3 כדורים 1 שצריך להוציא מתוך 9 נותרים, הסיכוי ש־7 הוא אחד מהם הוא בדיוק $\frac{1}{3}$) ע"ב אותו רעיון של סידור בשורה שראינו קודם לכן)

3. נגדיר מאורע C ־ כל המספרים שהוצאו גדולים או שווים ל־4 .

$$\begin{aligned} P(A|C) = & \frac{P(A\cap C)}{P(C)} & = \frac{\frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{4}}}{\frac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}}} \\ = & \frac{\binom{6}{3}}{\binom{7}{4}} & = \frac{6!4!3!}{7!3!3!} = \frac{4}{7} \ . \end{aligned}$$

4. אנו נדרשים לחשב את ההסתברות $P(\bar{A}|C)$. נזכר כי הסתברות מותנה מקיימת את כל הכללים של הסתברות ולכן

$$P(\bar{A}^c|C) = 1 - P(A|C) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7} \ .$$

■

6 דוגמא. בכד כדור שחור אחד וכדור לבן אחד. שולפים כדור באקראי. לאחר שמוציאים כדור באקראי מחזירים אותו יחד עם עוד כדור אחד נוסף בעל אותו הצבע. מוציאים סה"כ 5 כדורים. מה P שכולם שחורים?

פיתרון. נגדיר את המאורעות B_i $i = 1, \dots, 5$ כמאורעות בהם הכדור ה־ i הוא שחור. נשתמש בחוק הכפל [עיין משוואה (**??**)]:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{5} B_i\right) =& P(B_1)P(B_2|B1)P(B_3|B1 \cap B2) \dots P\left(B_5 | \bigcap_{i=1}^{4} B_i\right) \\ =& \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \\ =& \frac{1}{6} \ . \end{aligned}$$

■

7 דוגמא. (פוליגרף) של שימוש בפוליגרף. פוליגרף, מור לבחון האם אנשים הם דוברי אמת או שקר. הבעיה עם מכונת הפוליגרף היא שאיננה מדוייקת דיה, ולכן יש סיכוי מסויים לשקר ולא להיתפס ולהיפך. אנו יודעים כי אדם המשקר נתפס בשקר בסיכוי 80% ואדם הדובר אמת מזוהה כדובר אמת בסיכוי 90% (שימו לב שכל הנתונים הם למעשה הסתברויות מותנות!). הנחת העובדה כי 70% מן האנשים שמגיעים לבדיקת פוליגרף משקרים. מהי ההסתברות שאדם מקרי בבדיקה יימצא כדובר אמת?

פיתרון. נגדיר את המאורעות הבאים.

- T_1: אדם דובר אמת, L_1: אדם דובר שקר, T_2: אדם מוזהה כדובר אמת (על ידי הפוליגרף), L_2 אדם מזוהה כדובר שקר.

הנתונים בשאלה הם

$$P(T_2|T_1) = 0.9, \quad P(L_2|L_1) = 0.8, \quad P(L_1) = 0.7 \ .$$

אנחנו מעוניינים לחשב את ההסתברות שאדם יימצא דובר אמת, קרי $P(T_2)$. האיור לעיל מציג את הבעיה הנתונה כעץ הסתברויות. נעבור על הענפים המתאימים שנגמרים בתוצאה הרצויה בה האדם נמצא דובר אמת, T_2, ונחשב את ההסתברות של כל ענף בפני עצמו. תחילה,

$$P(T_2) = P(T_2 \cap T_1) + P(T_2 \cap L_1) \ .$$

לפי הסתברות מותנה משוואה [עיין נוסחא (**??**)]

$$P(T_1 \cap T_2) = P(T_1)P(T_1|T_1) = 0.3 \times 0.9 = 0.27 \ .$$

נבצע חישוב דומה עבור המחובר השני ונקבל

$$P(T_2 \cap L_1) = P(L_1)P(T_2|L_1) = 0.7 \times 0.2 = 0.14 \ .$$

כעת נסכום את צמד התוצאות יחד ונקבל

$$P(T_2) = P(T_2|T_1)P(T_1) + P(T_2|L_1)P(L_1) = 0.9 \times 0.3 + 0.2 \times 0.7 = 0.41 \ .$$

שימו לב כי הסיכוי שאדם יוכרז כדובר אמת הוא 41% בלבד! ■

8 דוגמא. כעת ננסה לחשב את ההסתברות שאדם מקרי דובר אמת, תחת ההנחה שהוא נמצא דובר אמת:

$$P(T_1|T_2).$$

הנתונים בשאלה מוצגים בתצורה של 'אם האדם עשה כך וכך, אז זה הסיכוי שהוא יוכרז כך וכך', אלו יחסי הסיבה־תוצאה בניסוי בפועל. אבל השאלה הנתונה הופכת את הסדר. השאלה מעוניינת לקבוע את הסיכוי שאדם דיבר אמת (סיבה) בהינתן הוא נמצא דובר אמת (תוצאה). במקרים הללו חוק בייס הוא יעיל במיוחד. אכן,

$$P(T_1|T_2) = \frac{P(T_2|T_1)P(T_1)}{P(T_2)} = \frac{0.8.0.3}{0.41} \approx 0.59 \ .$$

9 דוגמא. הרכב הסטודנטים בתואר ראשון הוא כדלקמן:

- 50% מהסטודנטים הם בשנה א' לתואר,
- 30% מהסטודנטים הם בשנה ב' לתואר,
- 20% מהסטודנטים הם בשנה ג' לתואר.

בנוסף, מצבם המשפחתי של הסטודנטים הנ"ל הוא:

- 20% מהסטודנטים שנמצאים בשנה א' ־ נשואים,
- 30% מהסטודנטים שנמצאים בשנה ב' ־ נשואים,
- 40% מהסטודנטים שנמצאים בשנה ג' ־ נשואים.

ענו על השאלות הבאות.

1. בהנחה שפגשנו באקראי את אלון, סטודנט מתואר ראשון, מה הסיכוי שהוא נשוי?
2. מסתבר שאלון אכן נשוי, מה הסיכוי שהוא משנה ג'?
3. פגשנו סטודנט אחר, בן, גם כן מתואר ראשון ומסתבר שהוא איננו נשוי, מה הסיכוי שהוא משנה ג'?

פיתרון. בשאלה זו נשתמש בעיקר בנוסחת ההסתברות השלמה וחוק בייז.

1. נסמן ב־ M את המאורע בו הסטודנט נשוי וב־ I ו II ן III את המאורעות בהם הסטודנט הוא בשנה א',ב' ו־ג' לתואר בהתאמה.

$$\begin{aligned} P(M) =&P(M|I)P(I) + P(M|II)P(II) + P(M|III)P(III) \\ =& \frac{2}{10}.\frac{5}{10} + \frac{3}{10}.\frac{3}{10} + \frac{4}{10}.\frac{2}{10} = 0.27\ . \end{aligned}$$

2. נשתמש בחוק בייז מסיבה פשוטה ־ נתוני השאלה מציגים הסתברויות להיות נשוי בהתאם לשנת הלימוד, אבל ההתנייה ההפוכה לא נתונה. לכן,

$$P(III|M) = \frac{P(M|III)P(III)}{P(M)} = \frac{0.4.0.2}{0.27} = \frac{0.08}{0.27} \approx 0.296\ .$$

3. נחשב באופן דומה לחישוב קודם, אלא שהפעם ההתנייה היא על מאורע שונה.

$$P(III|\bar{M}) = \frac{P(\bar{M}|III)P(III)}{P(\bar{M})} = \frac{0.6.0.2}{1-0.27} = \frac{0.12}{0.73} \approx 0.164\ .$$

■

10 דוגמא. בספרייה ישנם 10 ספרי הסתברות. 5 ספרים הכוללים פתרונות ו־5 ללא פתרונות. הספרנית איבדה ספר אחד מתוך ה־10 (כלשהו). אלון מגיע לקחת ספר, מקבל ספר מתוך התשעה הנותרים באקראי ומחזיר לאחר יומיים. לאחר שבועיים מגיע בן ולוקח גם כן ספר 1 מתוך ה־9 ומחזיר לאחר יומיים. נגדיר את המאורעות A־ הספר של אלון כלל פתרונות, ו־B ־ הספר של בן כלל פתרונות. האם A ו־B תלויים?

פיתרון. לכאורה, אין סיבה שתהיה תלות. מצד אחד, אלון לקח ספר והחזיר לאחר יומיים. שבועיים לאחר מכן, אחרי שאלון החזיר כבר את הספר, מגיע בן ולוקח ספר כלשהו, לכן למה שתהיה תלות?! אבל במקרה זה אכן המאורעות תלויים. נראה זאת בעזרת חישוב ישיר. נגדיר C ־ הספר שאבד כלל פתרונות. משיקולי סימטריה, $P(A) = P(B)$ ולכן נחשב רק אחד מהם.

$$\begin{aligned} P(A) =&P(A|C)P(C) + P(A|\bar{C})P(\bar{C}) \\ =&\frac{4}{9}.\frac{1}{2} + \frac{5}{9}.\frac{1}{2} \\ &1 \end{aligned}$$

על כן נקבל ש־ $P(A).P(B) = \frac{1}{4}$. מצד שני,

$$\begin{aligned} P(A\cap B) =& P(A\cap B|C)P(C) + P(A\cap B|\bar{C})P(\bar{C}) \\ =& \left(\frac{4}{9}\right)^2 .\frac{1}{2} + \left(\frac{5}{9}\right)^2 .\frac{1}{2} \\ \approx& 0.253 \neq P(A).P(B), \end{aligned}$$

לכן המאורעות תלויים. ההסבר הוא פשוט יחסית, ניקח את הסיטואציה למצב קיצון ונניח שבין אלון ובן היו מגיעים עוד 1000 איש ומבצעים את הניסוי, והיינו שמים לב שרק $\frac{4}{9}$ מתוכם קיבלו ספר עם פתרונות. במצב כזה היינו חושבים שככל הנראה אבד ספר עם פתרונות ■