עבודה 2: מכפלה פנימית, אורתוגונליות, תהליך גרם שמידט

שאלה 1 הוכיחו או הפריכו: הפונקציות הבאות מגדירות מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^2$:

א) $$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$$

ב) $$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3y_1y_2$$

שאלה 2 בדקו האם הפונקציות הבאות מגדירות מכפלה פנימית על $R_{\leq 2}[x]$.

א) $$\langle f(x), g(x) \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1)$$

ב) $$\langle f(x), g(x) \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2)$$

שאלה 3 יהי

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס אורתונורמלי של R^3. חשבו את

א) $$\left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ב) $$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

שאלה 4 יהי

$$W = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} .$$

מצאו את $W^\perp$ כאשר

א) המרחב הוא הממ"פ ביחס להמכפלה הפנימית הסטדנרטית של $\mathbb{R}^3$.

ב) המרחב הוא הממ"פ ביחס המכפלה הפנימית שמצאתם בשאלה 3.

שאלה 5 נתבונן ב- $\mathbb{R}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטדנרטית. ונניח כי

$$U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\-2\\1\\1 \end{pmatrix} \right\} .$$

א) מצאו בסיס אורתוגונלי ל W.

ב) מצאו את ההיהטל האורתוגנולי של $\begin{pmatrix} 1\\5\\1\\1 \end{pmatrix}$ (בתת המרחב W).

שאלה 6 יהי $V=\mathbb{R}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. ונתבונן בתת המרחב

$$U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\2\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\3\\-3\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\3\\-3\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8\\9\\-9\\4 \end{pmatrix} \right\}$$

א) מצאו בסיס אורתוגנולי ל- U.

ב) מצאו בסיס אורתוגנולי ל- $U^\perp$.

שאלה 7 יהי V מרחב מכפלה פנימית ממשי. וידוע כי $B=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ הינו בסיס של V כך שהמכפלה הפנימית בין כל שני אברי בסיס נתונה באמצעות הטבלה הבאה:

$\langle,\rangle$	α_1	α_2	α_3	α_4
α_1	2	-1	0	0
α_2	-1	2	-1	-1
α_3	0	-1	2	0
α_4	0	-1	0	2

נסמן ב- $W=\text{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$.

א) מצאו בסיס אורתוגונלי ל W.

ב) מצאו את $W^\perp$.

שאלה 8 יהי $V=R_{\leq 2}[x]$ מרחב מכפלה פנימית עם המכפלה הפנימית הבאה:

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx\ .$$

ונתבונן בתת המרחב הבא: $W=\text{span}\{1,x\}$.

א) מצאו בסיס אורתוגונלי ל W.

ב) השלימו את הבסיס האורתוגונלי שמצאתם בסעיף א לבסיס אורתוגונלי למרחב V.

ג) נסמן ב־ $P_W : V \to V$ את אופרטור ההטלה האורתוגנלית על W. נניח ש־ B הוא הבסיס הסדור שמצאתם בסעיף ב של V כך שאברי הבסיס B_W הם האברים הראשונים. מצאו את $[P_W]_B^B$.

שאלה 9 יהי V מרחב מכפלה פנימית. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א) יהיו $u, \mathrm{v} \in V$ כך שמתקיים
$$\|\mathrm{v} + u\|^2 = \|\mathrm{v}\|^2 + \|u\|^2 \ .$$
אז $u \perp \mathrm{v}$.

ב) יהיו $u, \mathrm{v} \in V$ כך שמתקיים $u \perp \mathrm{v}$. אז
$$\|\mathrm{v} + u\|^2 = \|\mathrm{v}\|^2 + \|u\|^2 \ .$$

ג) יהיו $U, W \subset V$ אז מתקיים
$$(U \cap W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp \ .$$

ד) יהיו $U, W \subset V$ אז מתקיים
$$(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp \ .$$

ה) יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי המקיים $\langle T(\mathrm{v}), \mathrm{v}\rangle = 0$ לכל $\mathrm{v} \in V$ אז $T = 0$.

ו) יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי המקיים $\langle T(\mathrm{v}), w\rangle = 0$ לכל $\mathrm{v}, w \in V$ אז $T = 0$.

שאלה 10

א) מצאו $a, b \in \mathbb{R}$ עבורם $\displaystyle\int_0^1 \big((x^2 - 2x + 1) - (ax + b)\big)^2 \, dx$ מינימלי.

ב) מצאו $a, b \in \mathbb{R}$ עבורם
$$(1-a)^2 + (1-2b)^2 + (1-(a+b))^2 + (1-(a+2b))^2$$
יהיה מינימלי.

ג) מצאו $a, b \in \mathbb{R}$ עבורם $(1-(a+b))^2 + (1-3b)^2 + (1-(a+2b))^2 + (1-(-a+b))^2$ מינימלי.

שאלה 11 נניח כי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו שאם $T : V \to V$ העתקה צמודה לעצמה אז כל ערך עצמי של T ממשי.

שאלה 12 נניח כי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו שאם $T:V\to V$ העתקה אנטי הרמיטית אז כל ערך עצמי של T מדומה.

שאלה 13 נניח כי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו שאם $T:V\to V$ העתקה אוניטרית אז הערך מוחלט של כל ערך עצמי של T שווה ל- 1.

שאלה 14 נניח כי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ ותהי $T:V\to V$ העתקה. הוכיחו כי אם u ווקטור עצמי של העתקות T ו- $\bar{T}$ עם ערכים עצמיים λ ו- μ אז $\lambda=\bar{\mu}$.

שאלה 15

נתון מרחב ווקטורי $\mathbb{R}_3[x]$ עם מכפלה פנימית אינטגרלית בקטע $[-1,1]$:

$$\langle f(x),g(x)\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)\cdot g(x)\ .$$

א) מצאו בסיס אורתוגונלי למרחב $V=\operatorname{span}\left\{1-3x,x,5x^3+8\right\}$.

ב) מצאו את ההיטל האורתוגונלי של כל אחד מהווקטורים:

$$w_1=38-16x+24x^3\ ,\qquad w_2=3x^2+5x^3\ ,$$

תשובות

שאלה 1

א) כן, זוהי מכפלה פנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^2$.

ב) לא נכון. דוגמה נגדית:

$$\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) \cdot 1 + 2 \cdot (-3) \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 9 - 6 - 6 + 3 = 0$$

$\langle u, u \rangle = 0$ רק אם $u = \bar{0}$, ו- $\bar{0} \neq \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. לכן היא לא מכפלה פנימית.

שאלה 2

א) הפונקציה $\langle f(x), g(x) \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1)$ אינה מכפלה פנימית. דוגמה נגדית:

$$f(x) = x(x-1) \ , \quad g(x) = x(x-1) \ ,$$

$$\langle f(x), g(x) \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 \ ,$$

$\langle f(x), f(x) \rangle = 0$ רק אם $f(x) = 0$ לכל x (פונקציה האפס) ו- $x(x-1) \neq 0$ לכל x. לכן היא לא מכפלה פנימית.

ב) $\langle f(x), g(x) \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2)$ מכפלה פנימית. הוכחה:

לכל $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, ולכל סקלר $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים התנאים הבאים:

1)

$$\begin{aligned}
\langle f(x) + h(x), g(x) \rangle &= \sum_{i=0}^{2} (f(i) + h(i)) \cdot g(i) \\
&= \sum_{i=0}^{2} f(i) \cdot g(i) + \sum_{i=0}^{2} h(i) \cdot g(i) \\
&= \langle f(x), g(x) \rangle + \langle h(x), g(x) \rangle \ .
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\langle \alpha \cdot f(x), g(x) \rangle &= \sum_{i=0}^{2} (\alpha \cdot f(i)) \cdot g(i) \\
&= \alpha \cdot \sum_{i=0}^{2} f(i) \cdot g(i) \\
&= \alpha \cdot \langle f(x), g(x) \rangle \ .
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\langle f(x), g(x)\rangle &= \sum_{i=0}^{2} f(i)\cdot g(i)\\ &= \sum_{i=0}^{2} g(i)\cdot f(i)\\ &= \langle g(x), f(x)\rangle\end{aligned}$$

4)

$$\langle f(x), f(x)\rangle = \sum_{i=0}^{2} f(i)\cdot f(i) = \sum_{i=0}^{2} (f(i))^2 \geq 0$$

לכל x. לכן $\langle f(x), f(x)\rangle \geq 0$ לכל x.

$$\langle f(x), f(x)\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{2} (f(i))^2 = 0$$

$f(x)=0$ עבור $x=0,1,2$. ז"א ל- $f(x)$ יש שלושה שורשים. $f(x)\in\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ פולינום ממעלה 2 ולכן ל- $f(x)$ יש 2 שורשים לכל היותר. לכן $f(x)=0$.

<u>שאלה 3</u>

א) נסמן

$$B=\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, u_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, u_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

נרשום $\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}$ לפי בסיס B.

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}| & | & |\\ u_1 & u_2 & u_3\\ | & | & |\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 5\\ 1 & 0 & 1 & 4\\ 1 & 1 & -1 & 3\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 5\\ 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -2 & -2\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\to \quad \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

פתרון: $k_1=3, k_2=1, k_3=1$.

$$\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}_E=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}_B \ .$$

נרשום $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ לפי בסיס B.

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}|&|&|\\u_1&u_2&u_3\\|&|&|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\1&0&1&0\\1&1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&-1&0&-2\\0&0&-2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{array}\right)$$

$$\to\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{array}\right)$$

פתרון: $k_1=-1,k_2=2,k_3=1$.

$$\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}_E=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}_B\ .$$

לכן

$$\left\langle\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle=3\cdot(-1)+1\cdot2+1\cdot1=0\ .$$

ב)

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}|&|&|\\u_1&u_2&u_3\\|&|&|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x\\1&0&1&y\\1&1&-1&z\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x\\0&-1&0&y-x\\0&0&-2&z-x\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x\\0&1&0&x-y\\0&0&1&\frac{x-z}{2}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&y\\0&1&0&x-y\\0&0&1&\frac{x-z}{2}\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{1}{2}(2y+z-x)\\0&1&0&x-y\\0&0&1&\frac{1}{2}(x-z)\end{array}\right)$$

לכן

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_E=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(2y+z-x)\\x-y\\\frac{1}{2}(x-z)\end{pmatrix}_B$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{3} \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{3} \beta_j u_j \right\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \alpha_i \bar{\beta}_j \langle u_i, u_j \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \alpha_i \bar{\beta}_j \delta_{ij}$$
$$= \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \bar{\beta}_i$$
$$= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3$$

לכן

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}(2y_1 - x_1 + z_1) \cdot \frac{1}{2}(2y_2 - x_2 + z_2) + (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + \frac{1}{2}(x_1 - z_1) \cdot \frac{1}{2}(x_2 - z_2)$$

שאלה 4

א)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W^\perp \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \text{ו-} \quad \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{rl} -x + y + z & = 0 \\ x + 2y + 2z & = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $(x, y, z) = (0, -z, z) = z(0, -1, 1)$. לכן

$$W^\perp = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ב)

שאלה 5 נסמן

א)

$$U=\text{span}\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},u_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\ .$$

$$\mathrm{v}_1=u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\quad,\qquad \|\mathrm{v}_1\|^2=3\ .$$

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_2=&u_2-\frac{\langle u_2,\mathrm{v}_1\rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\mathrm{v}_1\\ =&\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\\ =&\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

נבחור $\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}$. $\|\mathrm{v}_2\|^2=6$.

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_3=&u_3-\frac{\langle u_3,\mathrm{v}_1\rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\mathrm{v}_1-\frac{\langle u_3,\mathrm{v}_2\rangle}{\|\mathrm{v}_2\|^2}\mathrm{v}_2\\ =&\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\left\langle\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{6}\left\langle\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

בסיס אורתוגונלי למרחב U:

$$B=\left\{\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix},\mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ב) $\begin{pmatrix}1\\5\\1\\1\end{pmatrix} \in U$ ולכן ההיטל שלו זה הוא עצמו:

$$P_U\begin{pmatrix}1\\5\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\1\\1\end{pmatrix} \ .$$

■

שאלה 6

נסמן

$$U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\9\\-9\\4\end{pmatrix}\right\}$$

נמצא תחילה בסיס למרחב:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 8\\ 2 & 3 & 3 & 8\\ 1 & -3 & -3 & -9\\ 1 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

נבצע גרם שמידט על הבסיס שמצאנו:

א) נסמן

$$U = \text{span}\left\{u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix}3\\3\\-3\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathrm{v}_1 = u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix} \ , \qquad \|\mathrm{v}_1\|^2 = 7 \ .$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{v}_2 =& u_2 - \frac{\langle u_2, \mathrm{v}_1\rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\mathrm{v}_1\\
=& \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{7}\left\langle \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}\\
=& \begin{pmatrix}1\\1\\-4\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

נבחור

$\|\mathrm{v}_2\|^2 = 19$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{v}_3 =& u_3 - \frac{\langle u_3, \mathrm{v}_1\rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\mathrm{v}_1 - \frac{\langle u_3, \mathrm{v}_2\rangle}{\|\mathrm{v}_2\|^2}\mathrm{v}_2\\
=& \begin{pmatrix}3\\3\\-3\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{7}\left\langle \begin{pmatrix}3\\3\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{19}\left\langle \begin{pmatrix}3\\3\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-4\\1\end{pmatrix}\right\rangle \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-4\\1\end{pmatrix}\\
=& \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\|\mathrm{v}_3\|^2 = 2$. בסיס אורתוגונלי למרחב U:

$$B_U = \left\{ \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-4\\1\end{pmatrix}, \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

ב)

$$U = \mathrm{span}\left\{ u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix}3\\3\\-3\\1\end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix}8\\9\\-9\\4\end{pmatrix} \right\}$$

תזכורת:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \in U^{\perp} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}, u_i \right\rangle = 0 \ , \quad \forall\ 1 \leq i \leq 3 \ .$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{9} & 0 \end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x,y,z,w) = \left(1, \frac{-10}{9}, \frac{2}{9}, 1\right) w$$

לכן

$$U^{\perp} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

לכן בסיס אורתוגונלי של $U^{\perp}$ הוא

$$B_{U^{\perp}} = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

■

שאלה 7

$\langle,\rangle$	α_1	α_2	α_3	α_4
α_1	2	-1	0	0
α_2	-1	2	-1	-1
α_3	0	-1	2	0
α_4	0	-1	0	2

$W = \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

א) נפעיל גרם שמידט על $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

$$\mathrm{v}_1 = \alpha_1 \ .$$

$\|v_1\|^2 = 2$

$$\begin{aligned} v_2 =& \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \alpha_1\rangle}{2}\alpha_1 = \alpha_2 - \frac{2}{2}\alpha_1 \\ =& \alpha_2 - \alpha_1 \end{aligned}$$

נבחור

$$\|v_2\|^2 = \langle \alpha_2-\alpha_1, \alpha_2-\alpha_1\rangle = \langle \alpha_2,\alpha_2\rangle - \langle \alpha_1,\alpha_2\rangle - \langle \alpha_2,\alpha_1\rangle - \langle \alpha_1,\alpha_1\rangle = 2-(-1)-(-1)+2 = 6\ .$$

$$\begin{aligned} v_3 =& \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle \alpha_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, \alpha_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle \alpha_3, \alpha_2-\alpha_1\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = \alpha_3 - \frac{0}{2}\alpha_1 - \frac{(-1-0)}{6}(\alpha_2-\alpha_1) \\ =& \alpha_3 + \frac{1}{6}(\alpha_2-\alpha_1) \\ =& \alpha_3 + \frac{1}{6}\alpha_2 - \frac{1}{6}\alpha_1\ . \end{aligned}$$

לכן בסיס אורתוגונלי של
W:

$$B_W = \left\{\alpha_1, \alpha_2-\alpha_1, \alpha_3 + \frac{1}{6}\alpha_2 - \frac{1}{6}\alpha_1\right\}$$

ב)

$$v = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 \in W^{\perp}$$

לכן

$$\langle v, \alpha_1\rangle = \langle v, \alpha_2\rangle = \langle v, \alpha_3\rangle = 0\ .$$

$$\begin{aligned} \langle v, \alpha_1\rangle =& k_1\cdot\langle \alpha_1,\alpha_1\rangle + k_2\cdot\langle \alpha_2,\alpha_1\rangle + k_3\cdot\langle \alpha_3,\alpha_1\rangle + k_4\cdot\langle \alpha_4,\alpha_1\rangle \quad &= 2k_1 - k_2 \\ \langle v, \alpha_2\rangle =& k_1\cdot\langle \alpha_1,\alpha_2\rangle + k_2\cdot\langle \alpha_2,\alpha_2\rangle + k_3\cdot\langle \alpha_3,\alpha_2\rangle + k_4\cdot\langle \alpha_4,\alpha_2\rangle \quad &= -k_1 + 2k_2 - k_3 - k_4 \\ \langle v, \alpha_3\rangle =& k_1\cdot\langle \alpha_1,\alpha_3\rangle + k_2\cdot\langle \alpha_2,\alpha_3\rangle + k_3\cdot\langle \alpha_3,\alpha_3\rangle + k_4\cdot\langle \alpha_4,\alpha_3\rangle \quad &= 0\cdot k_1 - k_2 + 2k_3 + 0\cdot k_4\ . \end{aligned}$$

לכן, נבנה אז המערכת ההומוגנית:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(k_1,k_2,k_3,k_4) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1\right) k_4$ לכן

$$W^{\perp} = \text{span}\left\{\frac{1}{2}\cdot\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1}{2}\cdot\alpha_3 + \alpha_4\right\} = \text{span}\left\{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4\right\}$$

$\blacksquare$

שאלה 8

$V=R_{\leq 2}[x]$ מרחב מכפלה פנימית:

$$\langle f(x),g(x)\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\ .$$

נסמן

$$W=\text{span}\left\{u_1=1,u_2=x\right\}\ .$$

א) נמצא בסיס אורתוגונלי ל W.

$$\text{v}_1=u_1=1\ .$$

$\|\text{v}_1\|^2=1$

$$\begin{aligned}\text{v}_2=&u_2-\frac{\langle u_2,\text{v}_1\rangle}{\|\text{v}_1\|^2}\text{v}_1\\ =&x-\frac{\langle x,1\rangle}{1}\cdot 1\\ =&x-\langle x,1\rangle\ .\end{aligned}$$

$$\langle x,1\rangle=\int_0^1 dx\,1\cdot x=\int_0^1 dx\,x=\int_0^1 dx\,x=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

לכן

$$\text{v}_2=x-\frac{1}{2}\ .$$

לכן נקבל הבסיס האורתונורמלי

$$B=\left\{\text{v}_1=1,\text{v}_2=\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$\|\text{v}_1\|^2=1$ ו-

$$\|\text{v}_2\|^2=\langle\text{v}_2,\text{v}_2\rangle=\int_0^1 dx\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\ .$$

לכן נקבל הבסיס האורתונורמלי

$$\hat{B}=\left\{1,\sqrt{12}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

ב) נמצא בסיס אורתוגונלי של $W^{\perp}$. נסמן $p(x)=a+bx+cx^2$.

$$p(x)\in W^{\perp} \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle p(x),1\rangle=0\ ,\ \langle p(x),x\rangle=0\ .$$

$$\langle a+bx+cx^2,1\rangle=\int_0^1 dx\,\left(a+bx+cx^2\right)=a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}$$

$$\langle a+bx+cx^2,x\rangle=\int_0^1 dx\,x\cdot\left(a+bx+cx^2\right)=\int_0^1 dx\,\left(ax+bx^2+cx^3\right)=\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{4}$$

$$\left.\begin{array}{ll} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3} & =0 \\ \frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{4} & \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{ll} 6a+3b+2c & =0 \\ 6a+4b+3c & =0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $(a,b,c)=\left(\frac{1}{6},-1,1\right)c=\frac{1}{6}(1,-6,6)c$ לכן

$$B_{W^{\perp}}=\left\{1-6x+6x^2\right\}$$

ג) לכל $w\in W$:

$$P_W(w)=w\ .$$

לכל $w^{\perp}\in W^{\perp}$:

$$P_W(w^{\perp})=0\ .$$

לכן

$$[P_W]_B^B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

■

שאלה 9

א) יהיו $u,\mathrm{v}\in V$.

$$\|\mathrm{v}+u\|^2=\|\mathrm{v}\|^2+\|u\|^2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{v}\perp u\ .$$

לא נכון. דוגמה נגדית:

$V=\mathbb{C}^2$ עם המ"פ הסטנדרטית.

$$u=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}=\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad \Rightarrow \qquad u+\mathrm{v}=\begin{pmatrix}1+i\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$\|u\|^2=\|\mathrm{v}\|^2=1\ ,\qquad \|u+\mathrm{v}\|^2=2\ .$$

$\mathrm{v}\not\perp u$, אך $\|u\|^2+\|\mathrm{v}\|^2=\|u+\mathrm{v}\|^2$.

ב) $u,\mathrm{v}\in V$ אז

$$\mathrm{v}\perp u \qquad \Rightarrow \qquad \|\mathrm{v}+u\|^2=\|\mathrm{v}\|^2+\|u\|^2 \ .$$

טענה נכונה: זה בדיוק משפט פיתגורס.

ג) $U,W\subset V$

$$(U\cap W)^{\perp}=U^{\perp}\cap W^{\perp} \ .$$

לא נכון. דוגמה נגדית:

$V=\mathbb{R}^3$ עם מ"פ סטנדרטית.

$$U=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \ ,\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \ , \qquad W=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \ ,\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$U^{\perp}=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \ , \qquad W^{\perp}=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$U^{\perp}\cap W^{\perp}=\{\bar{0}\}$$

$$(U\cap W)^{\perp}=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}^{\perp}=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \ ,\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$(U\cap W)^{\perp}\neq U^{\perp}\cap W^{\perp}$.

ד) $U,W\subset V$.

$$(U+W)^{\perp}=U^{\perp}\cap W^{\perp} \ .$$

טעניה נכונה.

נוכיח $(U+W)^{\perp}\subseteq U^{\perp}\cap W^{\perp}$.

נניח ש- $\mathrm{v}^{\perp}\in(W+U)^{\perp}$. אז לכל $\mathrm{v}\in W+U$, מתקיים $\langle \mathrm{v},\mathrm{v}^{\perp}\rangle=0$.
נשים לב:

$$W\subseteq U+W \ , \qquad U\subseteq U+W \ .$$

לכן לכל $w\in W$, מתקיים $\langle w,\mathrm{v}^{\perp}\rangle=0$, לכן

$$\mathrm{v}^{\perp}\in W^{\perp} \ ,$$

ולכל $u\in U$, מתקיים $\langle u,\mathrm{v}^{\perp}\rangle=0$, לכן

$$\mathrm{v}^{\perp}\in U^{\perp} \ .$$

לכן $\mathrm{v}^{\perp}\in U^{\perp}\cap W^{\perp}$.

נוכיח $(U+W)^{\perp}\subseteq U^{\perp}\cap W^{\perp}$.

נניח ש- $\mathrm{v}^{\perp} \in U^{\perp} \cap W^{\perp}$. אז $\mathrm{v}^{\perp} \in U^{\perp}$ וגם $\mathrm{v}^{\perp} \in W^{\perp}$. לכן לכל $u \in U$,

$$\langle \mathrm{v}^{\perp}, u \rangle = 0$$

ולכל $w \in W$,

$$\langle \mathrm{v}^{\perp}, w \rangle = 0 \ .$$

לכן לכל $u \in U$ ו- $w \in W$,

$$\langle \mathrm{v}^{\perp}, u + w \rangle = 0$$

לכן לכל $\mathrm{v} \in U + W$,

$$\langle \mathrm{v}^{\perp}, \mathrm{v} \rangle = 0 \ ,$$

לכן $\mathrm{v}^{\perp} \in (U+W)^{\perp}$.

ה) יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי המקיים $\langle T(\mathrm{v}), \mathrm{v} \rangle = 0$ לכל $\mathrm{v} \in V$ אז $T = 0$.

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

תהי $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ העתקה הסיבוב של 90° ותהי $\langle , \rangle$ המ"פ הסטנדרטית של $\mathbb{R}^2$.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \ .$$

לכל $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, מתקיים

$$\left\langle T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

אבל $T \neq 0$.

ו) יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי המקיים $\langle T(\mathrm{v}), w \rangle = 0$ לכל $\mathrm{v}, w \in V$ אז $T = 0$.

הטענה נכונה. הוכחה:

יהי $u \in \mathrm{Im}\ T$. נוכיח כי $u = \bar{0}$:

נניח ש- $u \in \mathrm{Im}\ T$.
אז קיים $\mathrm{v} \in V$ כך ש- $T(\mathrm{v}) = u$.
$\langle T(\mathrm{v}), u \rangle = 0$ נתון, לכן

$$0 = \langle T(\mathrm{v}), u \rangle = \langle u, u \rangle = \|u\|^2 \qquad \Rightarrow \qquad u = \bar{0}$$

לפי התכונה של מ"פ.

שאלה 10

א)

$$\int_0^1 \left((x^2-2x+1)-(ax+b)\right)^2 dx = \|x^2-2x+1-(ax+b)\|^2$$

לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.
נחפש את הווקטור הקרוב ביותר של x^2-2x+1 בתת המרחב

$$W = \text{span}\{1,x\} \ .$$

נחפש בסיס אורתוגונלי ל W:

$$u_1 = \int_0^1 1\,dx = 1 \ ,$$

$\|u_1\|^2 = 1$.

$$u_2 = x - \frac{\langle x,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 = x - \int_0^1 x\,dx = x - \frac{1}{2} \ .$$

$$\|u_2\|^2 = \int_0^1 dx \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} \ .$$

מצאנו בסיס אורתוגונלי ל- W:

$$B_W = \left\{1, -\frac{1}{2}+x\right\} \ .$$

$$\begin{aligned}
P_W(x^2-2x+1) &= \langle x^2-2x+1,1\rangle + 12\left\langle x^2-2x+1, x-\frac{1}{2}\right\rangle\left(-\frac{1}{2}+x\right)\\
&= \int_0^1 1\cdot(x^2-2x+1)x + 12\left[\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x^2-2x+1)\right]\left(-\frac{1}{2}+x\right)\\
&= \frac{1}{3}+12\cdot\left(\frac{-1}{12}\right)\left(-\frac{1}{2}+x\right)\\
&= \frac{1}{3}+(-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}+x\right)\\
&= \frac{5}{6}-x \ .
\end{aligned}$$

לכן $a=-1, b=\frac{5}{6}$.

ב)

$$(1-a)^2+(1-2b)^2+(1-(a+b))^2+(1-(a+2b))^2 = \left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a\\2b\\a+b\\a+2b\end{pmatrix}\right\|^2$$

לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^4$. נחפש את הווקטור הקרוב ביותר של $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ בתת המרחב

$$W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\2\end{pmatrix}\right\} \ .$$

נחפש בסיס אורתוגונלי ל W:

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \ ,$$

$\|u_1\|^2 = 3$.

$$u_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle}{3} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{3}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix} \ .$$

מצאנו בסיס אורתוגונלי ל- W:

$$B_W = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$P_W\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle}{6}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

ז"א $\begin{pmatrix}a\\b\\a+b\\a+2b\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, לכן

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{1}{3} \ .$$

ג)

$$(1-(a+b))^2+(1-3b)^2+(1-(a+2b))^2+(1-(-a+b))^2=\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a+b\\3b\\a+2b\\-1+b\end{pmatrix}\right\|^2$$

לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^4$. נחפש את הווקטור הקרוב ביותר של $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ בתת המרחב

$$W=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}\right\}\ .$$

נחפש בסיס אורתוגונלי ל W:

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\ ,$$

$\|u_1\|^2=3$.

$$u_2=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\9\\4\\5\end{pmatrix}\ .$$

מצאנו בסיס אורתוגונלי ל- W:

$$B_W=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\9\\4\\5\end{pmatrix}\right\}$$

$$P_W\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}+\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\9\\4\\5\end{pmatrix}\right\rangle}{123}\begin{pmatrix}1\\9\\4\\5\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}+\frac{19}{123}\begin{pmatrix}1\\9\\4\\5\end{pmatrix}$$

לכן

$$a=\frac{1}{3}\left(1-\frac{9\cdot 19}{123}\cdot\frac{19}{123}\right)\ ,\qquad b=\frac{1}{3}\cdot\frac{9\cdot 19}{123}\ .$$

$\blacksquare$

שאלה 11 נניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי u. ז"א $T(u) = \lambda u$. אז

$$\begin{aligned} \langle T(u), u\rangle &= \langle \lambda u, u\rangle && (u \text{ וקטור עצמי של } T) \\ &= \lambda \langle u, u\rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית}) \end{aligned} .$$

מצד שני

$$\begin{aligned} \langle T(u), u\rangle &= \langle u, \bar{T}(u)\rangle && (\text{הגדרה של העתקה צמודה}) \\ &= \langle u, T(u)\rangle && (T \text{ צמודה לעצמה}) \\ &= \langle u, \lambda u\rangle && (u \text{ וקטור עצמי של } T) \\ &= \bar{\lambda} \langle u, u\rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית}) \end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda \langle u, u\rangle = \bar{\lambda} \langle u, u\rangle \quad \Rightarrow \quad (\lambda - \bar{\lambda}) \langle u, u\rangle = 0 \ .$$

u וקטור עצמי $\Leftarrow u \neq 0 \Leftarrow \langle u, u\rangle \neq 0 \Leftarrow (\lambda - \bar{\lambda}) = 0 \Leftarrow \lambda = \bar{\lambda}$.

שאלה 12 נניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי u. ז"א $T(u) = \lambda u$. אז

$$\begin{aligned} \langle T(u), u\rangle &= \langle \lambda u, u\rangle && (u \text{ וקטור עצמי של } T) \\ &= \lambda \langle u, u\rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית}) \end{aligned} .$$

מצד שני

$$\begin{aligned} \langle T(u), u\rangle &= \langle u, \bar{T}(u)\rangle && (\text{הגדרה של העתקה צמודה}) \\ &= \langle u, -T(u)\rangle && (T \text{ אנטי-הרמיטית}) \\ &= - \langle u, T(u)\rangle && \\ &= - \langle u, \lambda u\rangle && (u \text{ וקטור עצמי של } T) \\ &= - \bar{\lambda} \langle u, u\rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית}) \end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda \langle u, u\rangle = -\bar{\lambda} \langle u, u\rangle \quad \Rightarrow \quad (\lambda + \bar{\lambda}) \langle u, u\rangle = 0 \ .$$

u וקטור עצמי $\Leftarrow u \neq 0 \Leftarrow \langle u, u\rangle \neq 0 \Leftarrow (\lambda + \bar{\lambda}) = 0 \Leftarrow \lambda = -\bar{\lambda}$.

שאלה 13

נניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי u. ז"א $T(u) = \lambda u$. אז

$$\begin{aligned} \langle T(u), T(u)\rangle &= \langle \lambda u, \lambda u\rangle && (u \text{ וקטור עצמי של } T) \\ &= \lambda \langle u, \lambda u\rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית}) \\ &= \lambda\bar{\lambda} \langle u, \lambda u\rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית}) \end{aligned} .$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(u),T(u)\rangle &= \langle u,\bar{T}T(u)\rangle && \text{(הגדרה של העתקה צמודה)}\\ &= \langle u,I(u)\rangle && \text{(}T\text{ אוניטרית)}\\ &= \langle u,u\rangle\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\bar{\lambda}\,\langle u,u\rangle = \langle u,u\rangle \quad\Rightarrow\quad (\lambda\cdot\bar{\lambda}-1)\,\langle u,u\rangle = 0\ .$$

u ווקטור עצמי $\Leftarrow u\neq 0 \Leftarrow \langle u,u\rangle\neq 0 \Leftarrow (\lambda\cdot\bar{\lambda}-1)=0 \Leftarrow \lambda\bar{\lambda}=1 \Leftarrow |\lambda|^2=1$.

<u>שאלה 14</u> נניח כי

$$T(u)=\lambda u\ ,\qquad \bar{T}(u)=\mu\,u\ .$$

אז

$$\begin{aligned}\langle T(u),u\rangle &= \langle \lambda u,u\rangle && \text{(}u\text{ ווקטור עצמי של }T\text{)}\\ &=\lambda\,\langle u,u\rangle && \text{(לפי הליניאריות של מכפלה פנימית)}\ .\end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(u),u\rangle &= \langle u,\bar{T}(u)\rangle && \text{(הגדרה של העתקה הצמודה)}\\ &= \langle u,\mu\,u\rangle && \text{(}u\text{ ווקטור עצמי של }\bar{T}\text{)}\\ &=\bar{\mu}\,\langle u,u\rangle && \text{(לפי הליניאריות החלקית של מכפלה פנימית)}\ .\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\,\langle u,u\rangle=\bar{\mu}\,\langle u,u\rangle \qquad\Rightarrow\qquad \lambda\,\langle u,u\rangle-\bar{\mu}\,\langle u,u\rangle=0 \qquad\Rightarrow\qquad (\lambda-\bar{\mu})\,\langle u,u\rangle=0$$

u ווקטור עצמי $\Leftarrow u\neq\bar{0} \Leftarrow \langle u,u\rangle\neq 0 \Leftarrow \lambda-\bar{\mu}=0 \Leftarrow \bar{\mu}=\lambda$.

<u>שאלה 15</u>

א) נסמן

$$\mathrm{v}_1=1-3x,\quad \mathrm{v}_2=x\ ,\quad \mathrm{v}_3=5x^3+8\ .$$

$$u_1=\mathrm{v}_1=1-3x\ .$$

$$u_2=\mathrm{v}_2-\frac{\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1$$

$$\|u_1\|^2=\int_{-1}^{1}dx\,(1-3x)^2=\left[\frac{(1-3x)^3}{-9}\right]_{-1}^{1}=\frac{(-2)^3-4^3}{-9}=\frac{-72}{-9}=8\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle=\int_{-1}^{1}dx\,x(1-3x)=\int_{-1}^{1}dx\,\left(x-3x^2\right)=\left[\frac{x^2}{2}-x^3\right]_{-1}^{1}=-2\ .$$

לכן

$$u_2=\frac{x+1}{4}\ .$$

$$u_3=\mathrm{v}_3-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} dx \, \left(5x^3+8\right)(1-3x) = \int_{-1}^{1} dx \, \left(5x^3-15x^4+8-24x\right) = \left[\frac{5x^4}{4}-3x^5+8x-12x^2\right]_{-1}^{1} = 10 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle = \int_{-1}^{1} dx \, \frac{1}{4}(x+1)\left(5x^3+8\right) = \int_{-1}^{1} dx \, \left(\frac{5x^4}{4}+\frac{5x^3}{4}+2x+2\right) = \left[\frac{x^5}{4}+\frac{5x^4}{16}+x^2+2x\right]_{-1}^{1} = \frac{9}{2} \ .$$

$$\|u_2\|^2 = \int_{-1}^{1} dx \, \left(\frac{x+1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\int_{-1}^{1} dx \, (x+1)^2 = \frac{1}{16}\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{6} \ .$$

לכן

$$\begin{aligned} u_3 =& 5x^3+8-\frac{10}{8}(1-3x)-\frac{\left(\frac{9}{2}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)}\cdot\left(\frac{x+1}{4}\right) \\ =& 5x^3+8-\frac{5}{4}+\frac{15x}{4}-\frac{27}{4}\cdot(x+1) \\ =& 5x^3+8-\frac{32}{4}-\frac{12x}{4} \\ =& 5x^3+8-8-3x \\ =& 5x^3-3x \ . \end{aligned}$$

בסיס אורתונוגונלי:

$$U = \left\{ u_1 = 1-3x, \quad u_2 = \frac{x+1}{4} \ , \quad u_3 = 5x^3-3x \right\} \ .$$

ב) $w_1 \in U$ לכן

$$P_U(w_1) = w_1 \ .$$

$$P_U(w_2) = \frac{\langle w_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 + \frac{\langle w_2, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 + \frac{\langle w_2, u_3\rangle}{\|u_3\|^2}u_3$$

$$\langle w_2, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} dx \, \left(5x^3+3x^2\right)(1-3x) = \int_{-1}^{1} dx \, \left(-15x^4-4x^3+3x^2\right) = \left[-3x^5-x^4+x^3\right]_{-1}^{1} = -4 \ .$$

$$\langle w_2, u_2\rangle = \int_{-1}^{1} dx \, \frac{1}{4}(x+1)\left(5x^3+3x^2\right) = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} dx \, \left(5x^4+8x^3+3x^2\right) = \frac{1}{4}\left[x^5+2x^4+x^3\right]_{-1}^{1} = 1 \ .$$

$$\begin{aligned}
\langle w_2, u_3 \rangle &= \int_{-1}^{1} dx \ \left(5x^3 - 3x\right)\left(5x^3 + 3x^2\right) \\
&= \int_{-1}^{1} dx \ \left(25x^6 + 15x^5 - 15x^4 - 9x^3\right) \\
&= \left[\frac{25x^7}{7} + \frac{5x^6}{2} - 3x^5 - \frac{9x^4}{4}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{25}{7} + \frac{5}{2} - 3 - \frac{9}{4} - \left(\frac{25\cdot(-1)}{7} + \frac{5}{2} - 3\cdot(-1) - \frac{9}{4}\right) \\
&= \frac{25}{7} + \frac{25}{7} - 3 - 3 \\
&= \frac{50}{7} - 6 \\
&= \frac{50-42}{7} \\
&= \frac{8}{7} \ .
\end{aligned}$$

$$\|u_3\|^2 = \int_{-1}^{1} dx \ \left(5x^3 - 3x\right)^2 = \int_{-1}^{1} dx \left(25x^6 - 30x^4 + 9x^2\right) = \left[\frac{25x^7}{7} - 6x^5 + 3x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{7} \ .$$

$$\begin{aligned}
P_U(w_2) &= \frac{-4}{8}(1-3x) + \frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)}\left(\frac{x+1}{4}\right) + \frac{\left(\frac{8}{7}\right)}{\left(\frac{8}{7}\right)}\left(5x^3 - 3x\right) \\
&= \frac{-1}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{6}{4}(x+1) + 5x^3 - 3x \\
&= \frac{-1}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{3}{2} + 5x^3 - 3x \\
&= 1 + 3x + 5x^3 - 3x \\
&= 1 + 5x^3 \ .
\end{aligned}$$