

שיעור 2

משחקים בצורה אסטרטגית, שליטה ושיווי משקל Nash

2.1 הגדרה של משחק בצורה אסטרטגית

הגדרה 2.1 משחק בצורה אסטרטגית

הצורה אסטרטגית או צורה נורמלית של משחק n -שחקנים היא קבוצה

$$G = (N, (S_1, S_2, \dots, S_n), (u_1, u_2, \dots, u_n))$$

שבה

(1) $N = \{1, 2, \dots, n\}$ היא קבוצת שחקנים סופית.

(2) S_i היא קבוצת האסטרטגיות של שחקן i ($1 \leq i \leq n$)

(3) u_i היא פונקציית התשלום של שחקן i :

$$u_i : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$$

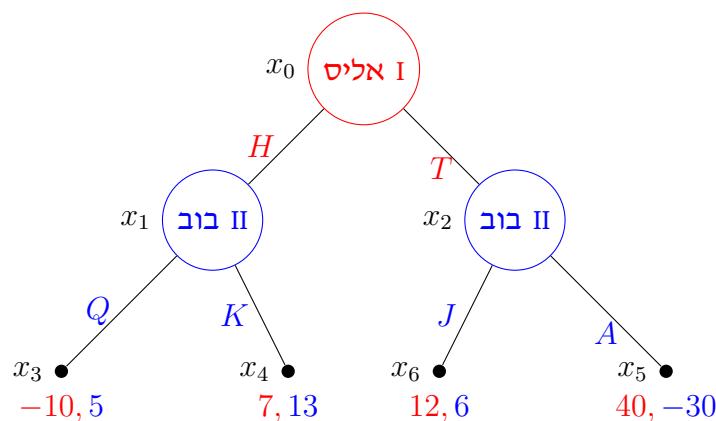
אשר מקבלת וקטור אסטרטגיות של המשחק (s_1, s_2, \dots, s_n) (כאשר $s_i \in S_i$) אסטרטגיה של שחקן i ומחזירה מספר ממשי שווה לתשלום של שחקן i .

דוגמה 2.1 (משחק של מطبع ולקוח משחק)

רשמו את הצורה אסטרטגית של הדוגמה הבאה שנടונה בצורה רחבה (ראו דוגמה 1.4).

פתרון:

ניתן לרשום את עץ המשחק בצורה רחבה אסטרטגית:



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H, T .

ז"א לשחקן I יש קבוצה ידיעה אחת:

$$x_0(H, T) .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה
 $S_I = (H, T) .$

לשחקן II יש שני קדוקדים x_1, x_2 בהם הוא מקבל החלטה.
 אז לשחקן II יש 2 קבוצות ידיעה,

$$V_{II} = \{x_1(Q, K) , x_2(J, A)\} .$$

אשר מייצגות שתי אפשרויות שונות המנובעות מההחלטה הקודמת של שחקן I בקדוק x_0 .
 מכיוון שלשחקן II יש שתי קבוצות ידיעה x_1, x_2 ובכל אחד יש שתי פולולות אפשרויות, אז יש לבוב 4 אסטרטגיות:

$$S_{II} = (Q/J , Q/A , K/J , K/A)$$

(נוהג לרשום את האסטרטגיות מלמעלה עד למטה ומשמאלו לימונ).
 ניתן לרשום את המשחק **בצורה אסטרטגית**:

		II	Q/J	Q/A	K/J	K/A	
		I	H	$-10, 5$	$-10, 5$	$7, 13$	$7, 13$
I	T	H	$12, 6$	$40, -30$	$12, 6$	$40, -30$	

מכאן

$$G = (N, (S_I, S_{II}), (u_I, u_{II}))$$

casar הקבוצת שחקנים היא

$$N = \{ \text{בוב, אליס} \} = \{ I, II \} ,$$

האסטרטגיות של המשחק הן $S = (S_I, S_{II})$, אשר הקבוצת אסטרטגיות של שחקן I היא

$$S_I = (H, T)$$

והקבוצת אסטרטגיות של שחקן II היא

$$S_{II} = (Q/J, Q/A, K/J, K/A) ,$$

והפונקציות תשלומים הן

$$u_I(H, Q/J) = -10 ,$$

$$u_I(H, Q/A) = -10 ,$$

$$u_I(H, K/J) = 7 ,$$

$$u_I(H, K/A) = 7 ,$$

$$u_I(T, Q/J) = 12 ,$$

$$u_I(T, Q/A) = 40 ,$$

$$u_I(T, K/J) = 12 ,$$

$$u_I(T, K/A) = 40 ,$$

$$\begin{aligned}
 u_{II}(H, Q/J) &= 5 , \\
 u_{II}(H, Q/A) &= 5 , \\
 u_{II}(H, K/J) &= 13 , \\
 u_{II}(H, K/A) &= 13 , \\
 u_{II}(T, Q/J) &= 6 , \\
 u_{II}(T, Q/A) &= -30 , \\
 u_{II}(T, K/J) &= 6 , \\
 u_{II}(T, K/A) &= -30 .
 \end{aligned}$$

2.2 סימוני

הגדה 2.2

תהי $N = \{1, \dots, n\}$ קבוצת סופית, ולכל $i \in N$ תהי A_i קבוצה כלשהי.
נסמן ב-

$$A = \bigtimes_{i \in N} A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

את המכפלה הקרטזית של כל הקבוצות A_i .
לכל $i \in N$ נגדיר

$$A_{-i} = \bigtimes_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} A_j = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{i-1} \times A_{i+1} \dots \times A_n$$

את המכפלה הקרטזית של כל הקבוצות A_j למעט הקבוצה A_i .
איבר ב-

$$x_{-i} = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, x_n) .$$

זהו הווקטור ה- i ממדי הנוצר מ- $(a_1, \dots, a_n) \in A$ על ידי השמטה הקואורדינטה i .

2.3 מושג השליטה

הגדה 2.3 אסטרטגיה שלטת חזק במשחק n שחקנים

אסטרטגייה s_i של שחקן i נקראת **שלטת חזק** אם קיימת אסטרטגיה t_i של שחקן i כך שלכל וקטור אסטרטגיות s_{-i} של שאר השחקנים מתקיים

$$u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(t_i, s_{-i}) .$$

במילים אחרות, s_i שלטת חזק ע"י t_i אם מתקיים

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

לכל וקטור אסטרטגיות $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ של שאר השחקנים.
במקרה זה נאמר ש- s_i **שלטת חזק** על ידי t_i , או ש- t_i **שלטת חזק** על s_i .

лемה 2.1 אסטרטגיה נשלטת חזק במשחק 2 שחקנים

לפי הגדרה 2.3, במשחק 2 שחקנים, אסטרטגיה s_1 של שחקן 1 נשלטת חזק ע"י אסטרטגיה t_1 של שחקן 2 אם

$$u_1(s_1, s_2) < u(t_1, s_2)$$

לכל אסטרטגיה s_2 של שחקן 2.

באותה מידה אסטרטגיה s_2 של שחקן 2 נשלטת חזק ע"י אסטרטגיה t_2 של שחקן 2 אם

$$u_1(s_1, s_2) < u(s_1, t_2)$$

לכל אסטרטגיה s_1 של שחקן 1.

דוגמה 2.2 (אסטרטגיות נשלטות חזק)

נתון המשחק הבא בצורה אסטרטגית.

a) מצאו אסטרטגיה הנשלטת חזק של שחקן I.

b) מצאו אסטרטגיה הנשלטת חזק של שחקן II.

	II	L	M	R
I				
T	1, 0	1, 2	4, 1	
B	0, 3	0, 1	2, 0	

פתרונות:

(א)

$$0 = u_I(B, L) < u_I(T, L) = 1 ,$$

$$0 = u_I(B, M) < u_I(T, M) = 1 ,$$

$$2 = u_I(B, R) < u_I(T, R) = 4 .$$

לכן אסטרטגיה B נשלטת חזק על ידי T . סימון

$$B \prec T .$$

(ב)

$$1 = u_{II}(T, R) < u_{II}(T, M) = 2 ,$$

$$0 = u_{II}(B, R) < u_{II}(B, M) = 1 .$$

לכן אסטרטגיה R נשלטת חזק על ידי M :
 $R \prec M .$

2.4 הנחות של רציונליות בתורת המשחקים

משפט 2.1 הנחות של רציונליות בתורת המשחקים

- (1) שחקן רציוני לא ישמש באסטרטגיה נשלחת חזק.
- (2) כל השחקנים במשחק רציונליים.
- (3) העובדה שכל השחקנים רציונליים היא ידיעה משותפת בין כל השחקנים.

2.5 סילוק חוזר

תחת הנחות של המשפט 2.1, ניתן לסלק אסטרטגייה נשלחת חזק, ולהגיע לפתרון של המשחק.

דוגמה 2.3 (סילוק חוזר)

נתון המשחק הבא, מצאו את הפתרון באסטרטגיות שלוטות חזק, והתשלום הסופי של המשחק.

		<i>II</i>	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>R</i>
		<i>I</i>			
<i>T</i>	<i>T</i>	1, 0	1, 2	0, 1	
	<i>B</i>	0, 3	0, 1	2, 0	

פתרונות:

		<i>II</i>	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>R</i>
		<i>I</i>			
<i>T</i>	<i>T</i>	1, 0	1, 2	0, 1	
	<i>B</i>	0, 3	0, 1	2, 0	

		<i>II</i>	<i>L</i>	<i>M</i>	
		<i>I</i>			
<i>T</i>	<i>T</i>	1, 0	1, 2		
	<i>B</i>	0, 3	0, 1	2, 0	

לכן לפי הכללים של שחקנים רציונליים, שחקן *I* ישמש באסטרטגיה *T*, שחקן *II* ישמש באסטרטגיה *M* והתשלום הסופי יהיה:

$$u_I(T, M) = 1 , \quad u_{II}(T, M) = 2 .$$



דוגמה 2.4 (דילמה האסיר)

משחק פשוט מאוד, ויחד עם זאת מתרבה בחינות, הוא המשחק הידוע בשם "דילמה האסיר". המשחק מופיע בספרות בצורת הסיפור הבא.

שני עבריינים אליס (שחקן 1) ובוב (שחקן 2) ביצעו פשע חמור ונעצרו. בהעדר כל הוכחות אחרות, הדרך היחידה שבה יכולת המשטרה להשיג הרשות על עבירה זו היא שאחד העצורים (או שניהם) מודה. בביצוע

המעשה. בחקירתם העמידה המשטרתית כל אחד מהעצורים בפני החלטה הבאה:

- אם אליס מלשינה ובוב שותק אליס י יצא חופשי ובוב מקבל 10 שנים מאסר.
- אם בוב מלשין ולאليس שותקת, בוב י יצא חופשי ולאليس מקבלת 10 שנים מאסר.
- אם שניהם שותקים, יש בידי המשטרת ראות להרשותם בעבירות פחותות (למשל, העמתת מס) שMOVEDIL למאסר של שנה אחת לכל אחד.
- אם שניהם מלשינים המשטרת מבקשת להתחשב בשיתוף הפעולה שלהם ולגוזר את עונשם ל-6 שנים מאסר לכל אחד.

רשמו את המשחק בצורה אסטרטגיית ומצאו את הפתרון באסטרטגיות שליטות חזק.

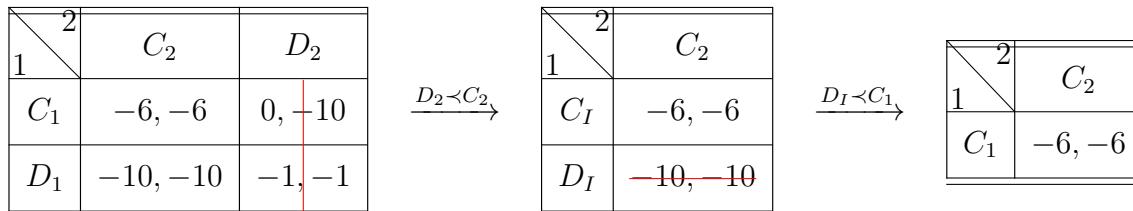
פתרונות:

נסמן:

- C_1 = האסטרטגיה של אליס "מלךינה".
- D_1 = האסטרטגיה של אליס "שותקת".
- C_2 = האסטרטגיה שבוב "מלךין".
- D_2 = האסטרטגיה שבוב "שותק".

המשחק בצורה אסטרטגיית הינו:

	2 בוב אליס 1	C_2	D_2
C_1	-6, -6	0, -10	
D_1	-10, 0	-1, -1	



לכן לפי הכללים של משחקים רצינליים, שחקן I ישתמש באסטרטגיה C_{II} , שחקן 2 ישתמש באסטרטגיה C_{II} והתשלום הסופי יהיה:

$$u_1(C_1, C_2) = -6, \quad u_2(C_1, C_2) = -6.$$



2.6 שיווי משקל נאש

הגדרה 2.4 תשובה טובה ביותר במשחק n שחקנים

נתון משחק n שחקנים. יהיו s_{-i} וקטור אסטרטגיות של השחקנים לא- i . אסטרטגיה s_i של שחקן i נקראת תשובה טובה ביותר ל- s_{-i} אם מתקיים

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{t_i \in S_i} u_i(t_i, s_{-i}).$$

במילים אחרות, האסטרטגיה s_i של שחקן i היא תשובה טובה ביותר בתגובה לאסטרטגיות $(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+2}, \dots, s_n)$ של שאר השחקנים אם אסטרטגייה s_i נותנת לשחקן i התשלום המקסימלי מתוך כל האסטרטגיות האחרות S_i של שחקן i :

$$u_i(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n) = \max_{t_i \in S_i} u_i(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \dots, s_n).$$

זהו

למה 2.2 תשובה טובה ביותר במשחק 2 שחקנים

לפי הגדרה 2.4, במשחק 2 שחקנים, אסטרטגיה s_1 של שחקן 1 היא התשובה הטובה ביותר ביותר בתגובה לאסטרטגיה s_2 של שחקן 2 אם מתקיים

$$u_1(s_1, s_2) = \max_{t_1 \in S_1} u_1(t_1, s_2),$$

או במילים אחרות

$$u_1(s_1, s_2) \geq u_1(t_1, s_2) \quad \forall t_1 \in S_1.$$

באותה מידה, אסטרטגיה s_2 של שחקן 2 היא התשובה הטובה ביותר בתגובה לאסטרטגיה s_1 של שחקן 1 אם מתקיים

$$u_2(s_1, s_2) = \max_{t_2 \in S_2} u_2(s_1, t_2),$$

או במילים אחרות

$$u_2(s_1, s_2) \geq u_2(s_1, t_2) \quad \forall t_2 \in S_2.$$

הגדרה 2.5 שוויי משקל נאש

נתון משחק n שחקנים. וקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ נקרא **שוויי משקל נאש** אם לכל שחקן i ולכל אסטרטגיה $s_i \in S_i$ של שחקן i , מתקיים

$$u_i(s^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*).$$

וז"א, אם כל השחקנים משחקים לפי הוקטור אסטרטגיות של השוויי משקל $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$. אם שחקן i בוחר בכל אסטרטגיה אחרת s_i , התשלום שלו (שהה) תמיד יהיה פחות מהתשלום שהוא מקבל ע"י הוקטור אסטרטגיות של השוויי משקל s^* :

$$u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$$

לכל אסטרטגיה s_i של שחקן i .וקטור התשלומים (s^*) נקרא **תשלום שוויי משקל**.

למה 2.3 שוויי משקל נאש במשחק 2 שחקנים

לפי הגדרה 2.5, עבור משחק 2 שחקנים, וקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ הוא שוויי משקל אם מתקיימים:

$$\begin{aligned} u_1(s_1^*, s_2^*) &\geq u_1(s_1, s_2^*) & \forall s_1 \in S_1, \\ u_2(s_1^*, s_2^*) &\geq u_2(s_1^*, s_2) & \forall s_2 \in S_2. \end{aligned}$$

משפט 2.2 שווי משקל הוא תשובה טובה ביותר למשחק כל שחקן

נתון משחק n שחקנים. וקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ הוא **שווי משקל** אם לכל שחקן i האסטרטגיה $s_{-i}^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$ היא תשובה טובה ביותר לו.

הוכחה: תרגיל בית.

דוגמה 2.5 (שווי משקל נאש במשחק 2 שחקנים)

נתון המשחק בצורה אסטרטגית הבא:

		2	x	y	z
		1			
1	a	2, 1	0, 0	1, 2	
1	b	0, 3	2, 2	3, 1	
1	c	1, 1	3, 2	2, 2	

פתרונות:

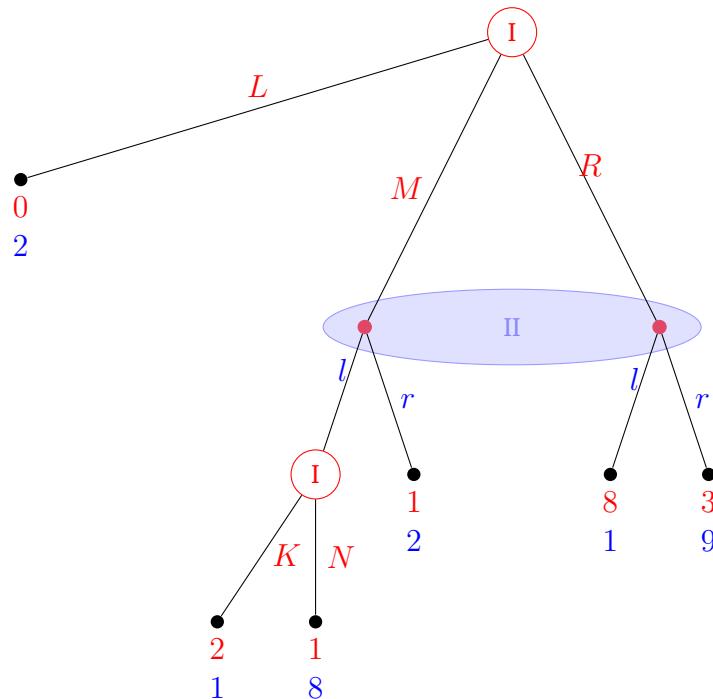
		2	x	y	z
		1			
1	a	2, 1	0, 0	1, 2	
1	b	0, 3	2, 2	3, 1	
1	c	1, 1	3, 2	2, 2	

לכן וקטור אסטרטגיות של שווי משקל נאש הינו

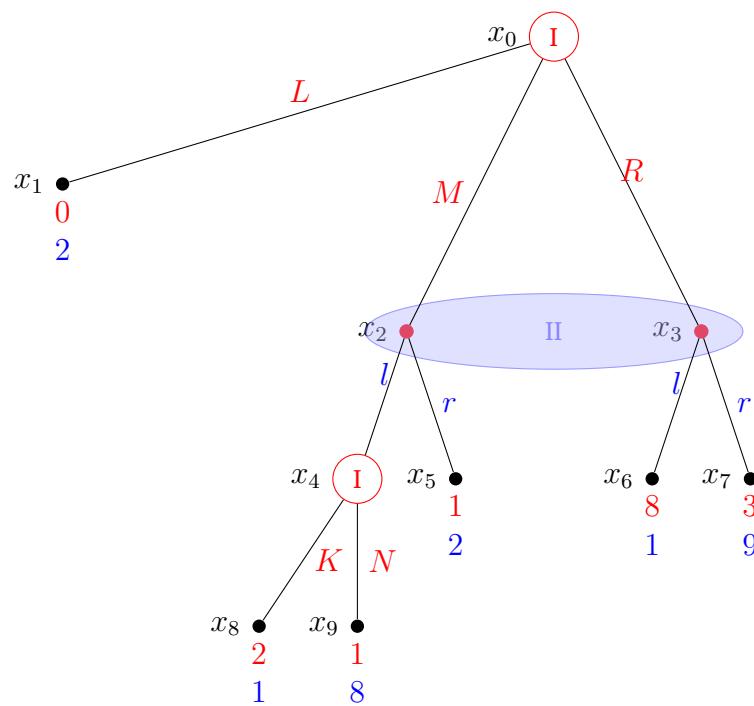
$$(s_1^*, s_2^*) = (c, y) .$$



דוגמה 2.6 (שווי משקל משחק 2 שחקנים)



פתרונות:



קבוצת אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I = (L/K, M/K, R/K, L/N, M/N, R/N) .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן II:

$$S_{II} = (l, r) .$$

מכאן הצורה אסטרטגית של המשחק היא:

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>l</i>	<i>r</i>
<i>L/K</i>	0, 2	0, 2	
<i>M/K</i>	2, 1	1, 2	
<i>R/K</i>	8, 1	3, 9	
<i>L/N</i>	0, 2	0, 2	
<i>M/N</i>	1, 8	1, 2	
<i>R/N</i>	8, 1	3, 9	

נשתמש בשיטה תשובה טוביה ביותר כדי למצוא את השוויי משקל של המשחק:

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>l</i>	<i>r</i>
<i>L/K</i>	0, 2	0, 2	
<i>M/K</i>	2, 1	1, 2	
<i>R/K</i>	8, 1	3, 9	
<i>L/N</i>	0, 2	0, 2	
<i>M/N</i>	1, 8	1, 2	
<i>R/N</i>	8, 1	3, 9	

לכן הוקטור אסטרטגיות

$$(s_1^*, s_2^*) = (R/N, r)$$

שוויי משקל וגם הוקטור אסטרטגיות

$$(s_1^*, s_2^*) = (R/K, r)$$

שוויי משקל.

■

2.7 משפט השקילות בין אסטרטגייה השולטת חזק ייחודית ושוויי משקל

משפט 2.3

אם הוקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ שוויי משקל נASH, אז s^* הוא פתרון באסטרטגיות השולטות חזק.

הוכחה:

משפט זו אומר שאם הוקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ הוא שוויי משקל נASH, אז s^* תישאר לאחר תהליך סילוק חוזר של אסטרטגיות הנשלטות חזק.

נווכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי (s_1^*, \dots, s_n^*) שוויי משקל נASH אבל הוא לא פתרון באסטרטגיות שולטות חזק. אם כן אז תהי s_i^* האסטרטגייה הראשונה שיורדת בתהליך סילוק חוזר.

ז"א קיימת אסטרטגיה $t_i \in S_i$ אשר שלטת חזק ב- s_i^* , כלומר

$$u_i(s_1, \dots, s_i^*, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, t_i, \dots, s_n) . \quad (\#1)$$

לכל s_n , $s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots$ אשר עדין נשארות בתהיליך.

בפרט, מכיוון שהאסטרטגיות $s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*$ עדין נשארות בתהיליך אחרי מהיקת אסטרטגיה s_i^* , אז לפि (#1) מתקיים

$$u_i(s_1^*, \dots, s_i^*, \dots, s_n^*) < u_i(s_1^*, \dots, t_i, \dots, s_n^*) . \quad (\#2)$$

בסתירה לכך ש (s_1^*, \dots, s_n^*) הוא שווי משקל.

משפט 2.4

אם וקטור אסטרטגיות (s_1^*, \dots, s_n^*) הוא פתרון באסטרטגיות שלטות חזק אז s הוא השווי משקל היחיד של המשחק.

הוכחה: נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי (s_1^*, \dots, s_n^*) הוא הווקטור אסטרטגיות היחיד שנשאר אחרי סילוק חזור, אבל הוא לא שווי משקל. אם כן אז בהכרח קיימת אסטרטגיה s_i של שחקן i עבורו

$$u_i(s_1^*, \dots, s_i^*, \dots, s_n^*) < u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) . \quad (*1)$$

האסטרטגיה s_i נמחקה במהלך התהיליך סילוק חזור.
לכן בהכרח קיימת אסטרטגיה s'_i אשר שלטת חזק ב- s_i , כלומר

$$u_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s'_i, \dots, s_n) . \quad (*2)$$

לכל אסטרטגיות s_n אשר נשארות בתהיליך סילוק חזור.

בפרט, האסטרטגיות $(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$ נשארות בתהיליך אפילו אחרי שהורדנו s_i^* .
לכן, לפि (*2),

$$u_i(s_1^*, \dots, s_i, \dots, s_n^*) < u_i(s_1^*, \dots, s'_i, \dots, s_n^*) . \quad (*3)$$

אם $s'_i = s_i^*$ אז (*3) סותר את (*1).

אם לא אז קיימת אסטרטגיה אחרת s''_i אשר שלטת חזק ב- s'_i .
לכן במקום (*2) ו- (*3) נקבל

$$u_i(s_1, \dots, s'_i, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s''_i, \dots, s_n) . \quad (*2')$$

$$u_i(s_1^*, \dots, s'_i, \dots, s_n^*) < u_i(s_1^*, \dots, s''_i, \dots, s_n^*) . \quad (*3')$$

אם $s''_i = s_i^*$ אז (*3') סותר את (*1). אם לא אז התהיליך ממשיך עד שנגיע לסתירה ל- (*1).

