

## שיעור 13

# סיבוכיות מקום ושלמות ב PSPACE

## 13.1 הגדרה של סיבוכיות מקום

### הגדרה 13.1 סיבוכיות מקום של מכונת טיורינג

הסיבוכיות מקום של מ"ט  $M$  על קלט  $w$  היא פונקציה  $f(|w|)$  השווה למספר התאי סרט לכל היותר של המכונה  $M$  שבהם נעשה שימוש בחישוב של  $M$  על  $w$ .

### הגדרה 13.2 המחלקה $SPACE(f(n))$

מחלקת  $SPACE(f(n))$  היא אוסף כל השפות  $L$  עבורן קיימת מכונת טיורינג דטרמיניסטית  $M$  שמכריעה אותה כך ש:

על כל קלט  $w$  באורך  $n = |w|$ , המכונה  $M$  משתמשת לכל היותר  $O(f(n))$  תאי סרט.

.  $\{ \exists \text{ מ"ט } M \text{ שמכריעה } L \text{ ומשתמשת לכל היותר ב- } O(f(n)) \text{ תאי סרט.} \mid L \in SPACE(f(n)) \}$

### דוגמה 13.1

נראה כי ניתן לפתור את הבעיה  $SAT$  ע"י אלגוריתם שהוא רץ במקום ליניארי. כלומר:

$$SAT \in SPACE(n).$$

תהי  $\phi$  נוסחה בוליאנית כלשהי. נסמן  $n = |\phi|$  ונסמן ב-  $m$  את מספר המשתנים ב-  $\phi$ . נגדיר מכונה  $M$  שפועלת כך:

$$M = \text{על כל קלט } \langle \phi \rangle$$

(1)  $M$  רושמת את המחרוזת  $\langle \phi \rangle$  על סרט הקלט.

(2) לכל השמה  $a_1, a_2, \dots, a_m$  (כאשר  $a_i \in \{0, 1\}$  הוא הערך הנוכחי של  $x_i$ ):

(א)  $M$  רושמת את מחרוזת של ההשמה  $a_1 a_2 \dots a_m$  על סרט העבודה.

(ב)  $M$  מחשבת את הערך של  $\phi$  עבור ההשמה הנוכחית  $a_1, \dots, a_m$  ע"י סריקה של הקלט  $\langle \phi \rangle$  שרשום על סרט הקלט.

(ג) אם מתקבל  $\phi(a_1, \dots, a_m) = 1$  אז  $M$  מקבלת.

(3) אם עבור כל ההשמות התקבל  $\phi(a_1, \dots, a_m) = 0$  אז  $M$  דוחה.

מכאן אנחנו רואים כי המכונה  $M_1$  רצה במקום ליניארי. בפרט:

•  $M$  שומרת על סרט העבודה את ההשמה  $a_1 \dots a_m$  וזה נדרש  $O(m)$  תאים.

• המספר המשתנים,  $m$  הוא  $n$  לכל היותר.

• לכן  $M$  רצה במקום  $O(n)$ .

לפיכך:

$$SAT \in SPACE(n).$$

### הגדרה 13.3 המחלקה $NSPACE(f(n))$

מחלקת  $NSPACE(f(n))$  היא אוסף כל השפות  $L$  עבורן קיימת מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית  $N$  שמכריעה אותה כך ש:  
על כל קלט  $w$  באורך  $n = |w|$  המכונה  $N$  משתמשת לכל היותר  $O(f(n))$  תאי סרט מתוך כל המסלולי חישוב של  $N$ .

$$NSPACE(f(n)) = \{L \mid \exists \text{ מכריעה } N \text{ ומשתמשת לכל היותר ב- } O(f(n)) \text{ תאי סרט.}\}$$

### דוגמה 13.2

תהי  $ALL_{NFA}$  השפה הבאה:

$$ALL_{NFA} = \{\langle A \rangle \mid L(A) = \Sigma^* \text{ עבורו } NFA \text{ הוא } A\}.$$

הוכיחו כי  $ALL_{NFA} \in NSPACE(n)$ .

### פתרון:

הפתרון מתבוסס על זה שזה פשוט יותר לבנות אלגוריתם המכריע את השפה המשלימה:

$$\overline{ALL_{NFA}} = \{\langle A \rangle \mid w \in \Sigma^* \text{ עבורה } A \text{ דוחה } w\}.$$

נשתמש במשפט מרכזי כדי לבנות אלגוריתם שמכריע את  $\overline{ALL_{NFA}}$ :

### משפט 13.1

אם  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  הוא  $NFA$  וקיים מילה  $w$  שנדחה ע"י  $M$  אז האורך המילה  $|w| \leq 2^q$  כאשר  $q = |Q|$  הוא המספר המצבים של  $M$ , וקיימים אינסוף מלים שנדחות ע"י  $M$ .

לפני שנתאר את האלגוריתם עצמו, נגדיר סימון שנשתמש בו בבניית האלגוריתם. נניח ש-  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  היא מכונת  $NFA$  כלשהי. תהי  $P(Q)$  הקבוצת החזקה של  $Q$ . עבור כל  $NFA$  הפונקציה המעברים היא מהצורה

$$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow P(Q).$$

בהינתן מילה  $w = a_1 a_2 \dots a_n$  כאשר  $a_i \in \Sigma$  הוא התו ה-  $i$  של המילה,  $1 \leq i \leq n$ . נגדיר את הסדרה הבאה:

$$S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$$

כאשר

$$S_0 \triangleq \{q_0\}, \quad S_{i+1} \triangleq \delta(S_i, a_i),$$

כאשר  $S_i \in P(Q)$  לכל  $0 \leq i \leq n$ .

### בניית האלגוריתם

נבנה אלגוריתם לא-דטרמיניסטי,  $N$  המכריע את  $\overline{ALL_{NFA}}$  באופן הבא:

$N =$  "על כל קלט  $x$ :

(1) בודקת אם  $x = \langle M \rangle$ , כאשר  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  היא מכונת  $NFA$ .

• אם לא  $N \Leftarrow$  תדחה.

(2) יהי  $q = |Q|$  מספר המצבים של  $M$ . נגדיר  $S_0 = \{q_0\}$ .

(3)  $N$  מבצעת את הלולאה הבאה:

לכל  $0 \leq i \leq 2^q - 1$

(א) בוחרת באופן אי-דטרמיניסטי תו קלט  $a_i \in \Sigma$ .

(ב) מחשבת

$$S_{i+1} = \delta(S_i, a_i).$$

(ג) אם  $N \Leftarrow S_{i+1} \cap F \neq \emptyset$  תדחה.

בפועל  $N$  בודקת את התנאי הזה ע"י לסמן את כל המצבים שב-  $S_{i+1}$ . אם אחד מהמצבים המסומנים הוא מצב קבלה אז  $N$  תדחה.

(4) אם בסיום הלולאה לא היה מצב-קבלה באף אחת מן הקבוצות  $S_i$  אז  $N$  תקבל. "

אם  $x \in \overline{ALL_{NFA}}$

$\Leftarrow \langle A \rangle = x$ , כאשר  $A$  היא מכונת  $NFA$ . וקיימת מילה  $w \in \Sigma^*$  כך ש-  $A$  תדחה.

$\Leftarrow$  קיימת מילה  $w'$  באורך לכל היותר  $2^q$  ש-  $A$  תדחה.

$\Leftarrow$  קיימת ריצה של  $N$  שבה  $N$  בוחרת את התווים של  $w'$  בלולאה.

$\Leftarrow$  במהלך הריצה של  $A$  על  $w'$ , אין מצב קבלה באף אחת מן הקבוצות  $S_i$ .

$\Leftarrow N$  לא דחתה עד סוף הלולאה.

$\Leftarrow$  בסופה  $N$  תקבל.

אם  $x \notin \overline{ALL_{NFA}}$  אז שני מקרים:

(מקרה 1)  $N \Leftarrow x \neq \langle A \rangle$  תדחה בשלב 1.

(מקרה 2)  $x = \langle A \rangle$  ו-  $L(A) = \Sigma^*$

$\Leftarrow$  לכל מילה  $w \in \Sigma^*$ , קיים שלב שבו  $A$  נמצא במצב קבלה.

$\Leftarrow$  בכל ריצה של  $N$ , קיימת איטרציה  $i$  עבורה  $S_i \cap F \neq \emptyset$ .

$\Leftarrow$  באיטרציה זו  $N$  תדחה.

$\Leftarrow$  בכל ריצה  $N$  תדחה.

$\Leftarrow N$  דוחה את  $x$ .

### סיבוכיות מקום

• נסמן ב-  $n = |\langle M \rangle|$  את אורך הקלט, וב-  $q = |Q|$  את מספר המצבים של ה-  $NFA$ .

• כל מצב וכל מעבר של  $M$  מופיעים בקידוד, מתקיים  $q = O(n)$ .

• במהלך כל ריצה,  $N$  שומרת רק את המידע הבא:

- \* הקבוצה הנוכחית  $S_i \subseteq Q$  של מצבים אפשריים. לפועל  $N$  שומרת  $S_i$  בוקטור ביטים באורך  $q$  לכל היותר.
- \* מונה של האיטרציות הלולאה עד  $2^q$ , המאוחסן בייצוג בינארי ודורש  $O(q)$  ביטים.
- \* תו קלט אחד הנבחר באופן אי-דטרמיניסטי בכל איטרציה, ומשתני עזר לחישוב  $S_{i+1}$ , הדורשים מקום קבוע או לינארי ב- $q$ .

לפיכך סיבוכיות המקום הכוללת של  $N$  היא

$$O(q) = O(n) .$$

לפיכך האלגוריתם  $N$  פועל במקום לינארי.

שימו לב:  $N$  לינארי במקום אף על פי שזמן הריצה שלו עלול להיות אקספוננציאלי.

## 13.2 משפט סביץ'

### הגדרה 13.4 CANYIELD

בהינתן מכונת טיורנג אי-דטרמיניסטית  $N$ , מספר טבעי חיובי  $t$ , ושתי קונפיגורציות  $c_1, c_2$  של  $N$  (ראו את ההגדרה של קונפיגורציה בהגדרה 1.3). האלגוריתם  $CANYIELD$  הוא אלגוריתם דטרמיניסטי הבודק אם ניתן לעבור מ- $c_1$  ל- $c_2$  על ידי לכל היותר  $t$  צעדי חישוב של  $N$ . התאור פסאודוקוד של  $CANYIELD$  הוא כדלקמן:

$CANYIELD = \text{על קלט } \langle N, c_1, c_2, t \rangle$ :

(1) רושם את  $c_1, c_2$  ו- $t$  על מחסנית.

(2) בודק אם  $N$  היא מכונת טיורנג,  $c_1, c_2$  קונפיגורציות ו- $t$  מספר טבעי חיובי.

• אם לא אז הוא דוחה.

(3) אם  $t = 1$ :

• אם  $c_1 = c_2$  אז הוא מקבל.

• אחרת אם  $c_1 \vdash_N c_2$  (אם אפשר לעבור מ- $c_1$  ל- $c_2$  בצעד אחד [ראו הגדרה 1.4]) מקבל.

• אחרת הוא דוחה.

(4) אם  $t > 1$ , לכל קונפיגורציה  $c_k$  של הרצה של  $N$  על  $w$  אשר משתמשת במקום  $f(n)$

(כאשר  $w$  היא המילה הנקראת של הקונפיגורציה  $c_k$ ):

(5) מריץ  $CANYIELD \left( N, c_1, c_k, \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor \right)$

כאשר  $\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$  הוא השלם הכי הקרוב ל- $\frac{t}{2}$  וקטן מ- או שווה ל- $\frac{t}{2}$ .

(6) מריץ  $CANYIELD \left( N, c_k, c_2, \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor \right)$

כאשר  $\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$  הוא השלם הכי הקרוב ל- $\frac{t}{2}$  וגדול מ- או שווה ל- $\frac{t}{2}$ .

(7) אם שתי ההרצות בשלבי (4) ו- (5) הסתיימו בקבלה  $\Leftarrow$  מקבל.

(8) אחרת אם לא התקבלה תשובת קבלה  $\Leftarrow$  דוחה.

## משפט 13.2 משפט סביץ'

לכל פונקציה  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , אם  $f(n) \geq n$  אז

$$NSPACE(f(n)) \subseteq SPACE(f^2(n)).$$

הוכחה:

הריעון של ההוכחה:

תהי  $N$  מ"ט אי-דטרמיניסטית שמכריעה את השפה  $A$  במקום  $O(f(n))$ , כאשר  $n$  אורך הקלט  $w$  של  $N$ .  
נבנה מכונת טיורינג דטרמיניסטית,  $M$  שמכריעה את  $A$  במקום  $O(f^2(n))$ .  
כלומר, בהינתן  $N \in NSPACE(f(n))$  המכריעה שפה  $A$ , נבנה  $M \in SPACE(f^2(n))$  המכריעה  $A$ .  
כלומר, אנחנו נראה שלכל  $N \in NSPACE(f(n))$  קיימת  $M \in SPACE(f^2(n))$ .  
באופן הזה אנחנו נוכיח כי

$$NSPACE(f(n)) \subseteq SPACE(f^2(n)).$$

בניית המכונה:

תהי  $N$  מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית שמכריעה השפה  $A$ .  
תהי  $w$  מחרוזת שהיא הקלט של  $N$ .  
בהינתן שתי קונפיגורציות  $c_1, c_2$  של  $N$  ומספר טבעי חיובי  $t$ .

• אם ניתן לעבור מ- $c_1$  ל- $c_2$  בכלל היותר  $t$  צעדים  $\Leftrightarrow CANYIELD(N, c_1, c_2, t)$  מקבל.

• אחרת  $\Leftrightarrow CANYIELD(N, c_1, c_2, t)$  דוחה.

נגדיר מכונת טיורינג דטרמיניסטית  $M$  שמסמלצת את המכונה האי-דטרמיניסטית  $N$  באופן הבא.

ראשית נסמן ב- $n$  את אורך הקלט  $w$  של  $N$ .

תהי  $c_0$  הקונפיגורציה ההתחלתית.

נתקן את  $N$  כך שלאחר כל ריצה הראש חוזר לקצה השמאל של תוכן הסרט ו- $N$  עוברת לקונפיגורציה  $c_{acc}$ .

נגדיר  $d$  כך ש- $2^{df(n)}$  הוא חסם עליון של מספר הקונפיגורציות שקיימות בריצות של  $N$  שדורשות  $O(f(n))$  מקום.

המכונת טיורינג הדטרמיניסטית  $M$  תוגדר כך:

$$M = \text{"על קלט } w$$

(1) מריצה  $CANYIELD$  על הקלט  $\langle N, c_0, c_{acc}, 2^{df(n)} \rangle$  ועונה כמוהו.

הוכחת הנכונות:

נניח  $w \in L(N)$  ו- $N \in NSPACE(f(n))$ .

$\Leftarrow$  לפי ההגדרה של  $d$ , ל- $N$  יש  $2^{df(n)}$  לכל היותר.

$\Leftarrow$  קיים מסלול חישוב  $N$  על  $w$  מ- $c_0$  ל- $c_{acc}$ .

$\Leftarrow$  האלגוריתם  $CANYIELD$  על הקלט  $\langle N, c_0, c_{acc}, 2^{df(n)} \rangle$  יקבל.

$M$  יקבל  $w$ .  $\Leftarrow$

נניח  $w \notin L(N)$  ו-  $N \in NSPACE(f(n))$ .

$\Leftarrow$  לפי ההגדרה של  $d$ , ל-  $N$  יש  $2^{df(n)}$  לכל היותר.

$\Leftarrow$  לא קיים מסלול חישוב של  $N$  על  $w$  מ-  $c_0$  ל-  $c_{acc}$ .

$\Leftarrow$  האלגוריתם  $CANYIELD$  על הקלט  $\langle N, c_0, c_{acc}, 2^{df(n)} \rangle$  ידחה.

$\Leftarrow M$  ידחה  $w$ .

### סיבוכיות מקום:

- כל פעם ש-  $CANYIELD$  מפעיל את עצמו באופן רקורסיבי, הוא רושם את  $c_2, c_1$  ו-  $t$  על מחסנית, כך שניתן יהיה לשחזר אותם לאחר הקריאה הרקורסיבית הבאה.
- בגלל ש-  $N \in NSPACE(f(n))$  אזי הכתיבה של  $c_2, c_1$  ו-  $t$  על המחסנית דורשת  $O(f(n))$  מקום.
- בכל שלב של הרקורסיה, האלגוריתם  $CANYIELD$  מחלק את  $t$  ב- 2.
- הערך ההתחלתי של  $t$  הוא  $2^{df(n)}$  לכן העומק של הרקורסיה הוא  $O(\log_2(2^{df(n)})) = O(f(n))$ .
- לכן המכום הכולל ש-  $M$  דורש הוא  $O(f^2(n))$ .

לפיכך

$$M \in SPACE(f^2(n)) .$$

לסיכום: הוכחנו שבהינתן מכונת אי-דטרמיניסטית  $N$  כלשהי שמכריעה שפה  $A$  כלשהי עבודה

$$N \in NSPACE(f(n)) ,$$

קיימת מכונת טיורינג דטרמיניסטית  $M$  שמכריעה  $A$  במקום  $O(f^2(n))$ , כלומר:

$$M \in SPACE(f^2(n)) .$$

לפיכך:

$$NSPACE(f(n)) \subseteq SPACE(f^2(n)) .$$



## 13.3 המחלקה PSPACE

ההגדרה הבאה היא האנלוג של ההגדרה 10.2 של אלגוריתם זמן פולינומיאלי.

### הגדרה 13.5 אלגוריתם מקום פולינומיאלי

אומרים כי אלגוריתם  $A$  מכריע בעייה במקום פולינומיאלי אם קיים קבוע  $c > 0$  כך שהמקום הריצה של  $A$  על קלט  $w$  חסום ע"י  $O(|w|^c)$ .

התזה של צרף' טיורינג אומר שאם קיים אלגוריתם המכריע בעייה במקום פולינומיאלי, אזי קיימת מכונת טיורינג דטרמיניסטית המכריעה את השפה השקולה לבעייה זו במקום פולינומיאלי.

. אלגוריתם מכריע  $\equiv$  מכונת טיורינג דטרמיניסטית

**הגדרה 13.6 המחלקה  $PSPACE$** 

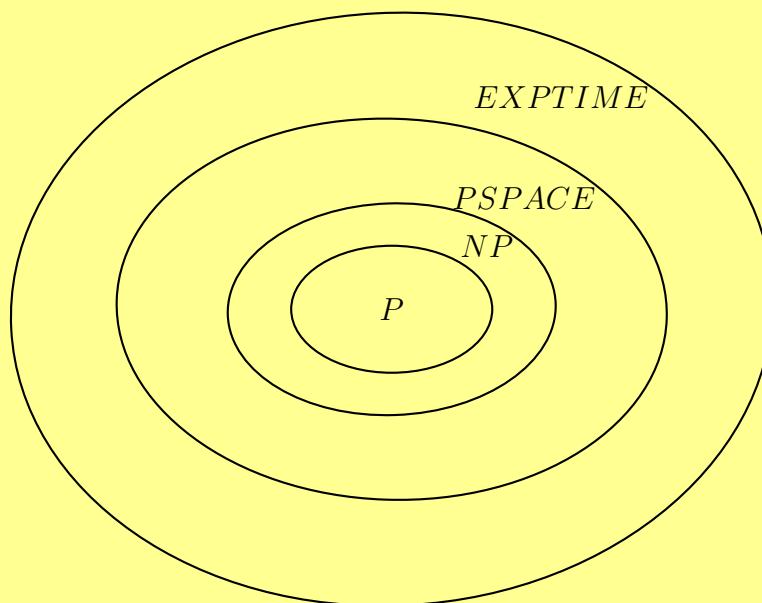
המחלקה  $PSPACE$  היא אוסף כל הבעיות (השפות) שקיים עבורן אלגוריתם (מכונת טיורנג) דטרמיניסטי המכריע אותן במקום פולינומיאלי.

**הגדרה 13.7 המחלקה  $NPSPACE$** 

$NPSPACE$  היא אוסף כל הבעיות (השפות) שקיים עבורן אלגוריתם (מכונת טיורנג) אי-דטרמיניסטי המכריע אותן במקום פולינומיאלי.

**משפט 13.3**

$$P \subseteq NP \subseteq PSPACE \subseteq EXPTIME .$$

**13.4 שלמות ב-  $PSPACE$** **הגדרה 13.8  $PSPACE$  קשה**

בעייה  $B$  נקראת  $PSPACE$  קשה אם לכל בעייה  $A \in PSPACE$  קיימת רדוקציה זמן פולינומיאלית מ- $A$  ל- $B$ . כלומר:  $A \leq_p B$ .

**הגדרה 13.9  $PSPACE$  שלמות**

בעייה  $B$  נקראת  $PSPACE$  שלמה אם השני התנאים הבאים מתקיימים:

$$B \in PSPACE \quad (1)$$

(2) לכל בעייה  $A \in PSPACE$  קיימת רדוקציה זמן פולינומיאלית מ- $A$  ל- $B$ . כלומר:  $A \leq_p B$ .

## 13.5 נוסחאות בוליאניות עם כמתים

בפרקים 11 ו-12 הגדרנו נוסחה בוליאנית כביטוי מתמטי שבנוי מהמרכיבים הבאים:

- משתנים בולינאיים, שמקבלים את הערכים 0 ו-1 (לעתים מסומנים  $F$  ו- $T$ ).
- אופרטורים בולינאיים עיקריים

וגם	$\wedge$
או	$\vee$
לא	$\neg$

כעת נכליל את ההגדרה הזו לסוג היותר מורחב של נוסחה בולינאנית: נוסחה בולינאנית עם כמתים.

### הגדרה 13.10 נוסחת בוליאנית עם כמתים - $QBF$

בנוסחת בוליאנית עם כמתים מופיעה אחת מהשני כמתים העיקריים:

$\forall$	"לכל" (נקרא גם "כמת כולל")
$\exists$	"קיים" (נקרא גם "כמת ישי")

### דוגמה 13.3 דוגמאות של נוסחאות בוליאניות עם כמתים

בדוגמאות הבאות  $x, y$  הם משתנים בולינאיים. כלומר  $x, y \in \{0, 1\}$ .

(1)

$$\phi = \forall x \exists y [(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})]$$

בדוגמה זו  $\phi = 1$ .

(2)

$$\phi = \forall x [x \vee \bar{x}] \rightarrow \phi = 1$$

(3)

$$\phi = \exists x (x \wedge \bar{x}) \rightarrow \phi = 0$$

### הגדרה 13.11 $TQBF$

$\langle \phi \rangle$  בשפה  $TQBF$  אם  $\phi$  נוסחת בוליאנית עם כמתים והנוסחה מעורכת לאמת.

$$TQBF = \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ נוסחת בוליאנית עם כמתים ו-} \phi = 1 \}$$

### הערה 13.1

בניגוד ל- $SAT$  עבורה השאלה היא האם קיימת הצבת אמת, ב- $TQBF$  לכל נוסחה יש ערך אמת או שקר יחיד, מכיוון שאין משתנים חופשיים.



## משפט 13.4

$$SAT \subseteq TQBF .$$

הוכחה: תרגיל בית.

**13.6 המחלקה L**

**13.7 המחלקה NL**

**13.8 שלמות ב- NL**

**13.9 שיוויון NL ו- coNL**