מחלקה למדעי המחשב

10/02/25 י"ב בשבט תשפ"ה
09 : 00 – 12 : 00

# אלגברה לינארית 1 למדמ"ח

## מועד א'

מרצים: ד'ר זהבה צבי, ד'ר מרינה ברשדסקי, ד'ר ירמיהו מילר.

תשפ"ה סמסטר א'

**השאלון מכיל 11 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).**

**בהצלחה!**

==========================================

**הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה**

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

**חומר עזר**

- דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

**אחר / הערות** יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.
- יש לציין את השאלות שעניתם עליהן בתחילת המחברת.

==========================================

## שאלה 1 (25 נקודות)

תהי $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&1&5\\-1&-2&-5\end{pmatrix}$. נגדיר

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a+b\\-b\\a-b\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}\quad,\qquad U=\left\{\mathrm{v}\in\mathbb{R}^3\middle| A\mathrm{v}=-\mathrm{v}\right\}\ .$$

**א) (7 נק')** הוכיחו כי $U,W$ תתי מרחבים של $\mathbb{R}^3$.

**ב) (7 נק')** מצאו בסיס ומימד של $U,W$.

**ג) (7 נק')** מצאו בסיסים ומימדים ל- $U+W$ ול- $U\cap W$.

**ד) (4 נק')** יהי $\mathbb{F}$ שדה יהיו $U,V$ מרחבים וקטורים מעל $\mathbb{F}$.
תהי $T:U\to V$ העתקה לינארית. $\{u_1,u_2,\dots,u_k\}$ קבוצת וקטורים ב $U$. הוכיחו או הפריכו:
אם הקבוצה $\{T(u_1),T(u_2),\dots,T(u_k)\}$ בלתי תלויה לינארית אז הקבוצה $\{u_1,u_2,\dots,u_k\}$ בלתי תלויה לינארית. (אין קשר לסעיפים קודמים).

## שאלה 2 (25 נקודות)

יהי $a\in\mathbb{R}$ פרמטר. נתבונן במטריצה

$$A=\begin{pmatrix}-a&a+2&2a\\2a+1&-a-2&-a^2-3a+6\\a&-a-2&a^2-2a-4\end{pmatrix}$$

**א) (7 נק')** מצאו את כל ערכי הפרמטר $a$ שעבורם המטריצה אינה הפיכה.

**ב) (7 נק')** עבור $a=-1$ מצאו בסיס ומימד של $\mathrm{col}(A)$ ול- $\mathrm{Nul}(A)$.

**ג) (6 נק')** עבור $a=-1$ מצאו בסיס ומימד של $\mathrm{col}(A)\cap\mathrm{Nul}(A)$.

**ד) (5 נק')**
יהי $\mathbb{F}$ שדה. תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך שלכל מטריצה $0\neq B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים $AB\neq 0$.
הוכיחו כי $A$ הפיכה. (אין קשר לסעיפים קודמים).

### שאלה 3 (25 נקודות)

**א) (7 נק')** במרחב $\mathbb{R}_3[x]$ נתונים וקטורים

$$u_1 = 1+2x+x^2+3x^3 \ , \quad u_2 = 2-x+x^2+2x^3 \ , \quad u_3 = -1+8x+x^2+5x^3 \ , \quad w = a+x+bx^2+5x^3 \ .$$

עבור אילו ערכי $a, b$ הוקטור $w$ שייך לתת המרחב הנפרש על ידי הוקטורים $u_1, u_2, u_3$?

**ב) (7 נק')** עבור הערכים של $a, b$ שמצאתם בסעיף א', בטאו את הוקטור $w$ כצירוף לינארי של $u_1, u_2, u_3$.

**ג) (5 נק')** האם הוקטורים $u_1, u_2, u_3, w$ פורשים את המרחב $\mathbb{R}_3[x]$? נמקו את תשובתכם.

**ד) (3 נק')** הוכיחו או הפריכו:
לכל $A \in \mathbb{R}^{5\times3}$ קיים $b \in \mathbb{R}^5$ כך שלמשוואה $AX = b$ אין פתרון.
(אין קשר לסעיפים קודמים).

**ה) (3 נק')** תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה הפיכה ויהי $b \in \mathbb{R}^n$. הוכיחו או הפריכו:
למערכת $Ax = b$ יש יותר מפתרון אחד.
(אין קשר לסעיפים קודמים).

### שאלה 4 (25 נקודות)

**א) (8 נק')** פתרו את המערכת הליניארית הבאה מעל $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} 2ix + (4-2i)y + 4z = 6-4i \ , \\ 2x + (-2-4i)y + (1-2i)z = 1-i \ , \\ (1+i)x + (1-3i)y + (3+i)z = 7+3i \ . \end{cases}$$

**ב) (7 נק')** קבעו לאילו ערכים של $a$ הוקטורים הבאים תלויים ליניארית מעל $\mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a+1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix} .$$

**ג) (5 נק')** יהי $\mathbb{F}$ שדה. תהיינה מטריצות $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$. הוכיחו או הפריכו:
אם ב- $A$ יש שורת אפסים אז $\dim(\mathrm{col}(A)) < n$. (אין קשר לסעיפים קודמים).

**ד) (5 נק')** תהיינה מטריצות $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו:
אם $AB = B$ ו- $B \neq 0$ אז $A$ מטריצה היחידה. (אין קשר לסעיפים קודמים).

**שאלה 5 (25 נקודות)**

נתונה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ המוגדרת ע"י:

$$T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=\begin{pmatrix} a+3b+4c-3d & b+3c-2d \\ a+c & 3a+7b+6c-5d \end{pmatrix}$$

לכל $a+bx+cx^2+dx^3\in\mathbb{R}_3[x]$.

**א) (5 נק')** מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של $T$.

**ב) (5 נק')** האם $T$ על? האם $T$ חד-חד ערכית? נמקו תשובתכם.

**ג) (5 נק')** מצאו בסיס ואת המימד של $\mathrm{Im}T$ ותנו דוגמה לאיבר בתמונה של $T$ פרט מאיברי הבסיס.

**ד) (5 נק')** מצאו בסיס ואת המימד של $\mathrm{Ker}T$. תנו דוגמה לאיבר בגרעין של $T$ פרט איברי הבסיס.

**ה) (5 נק')** מצאו את כל הוקטורים $a+bx+cx^2+dx^3\in\mathbb{R}_3[x]$ כך ש-

$$T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

# פתרונות

## שאלה 1

**א)** נוכיח כי $U$ תת-מרחב:

שיטה 1

$$U=\left\{\mathrm{v}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; A\mathrm{v}=-\mathrm{v}\right\} \quad\Rightarrow\quad U=\left\{\mathrm{v}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; A\mathrm{v}+\mathrm{v}=0\right\} \quad\Rightarrow\quad U=\left\{\mathrm{v}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; (A+I)\mathrm{v}=0\right\}$$

ז"א $U=\mathrm{Nul}(A+I)$. מרחב האפס של כל מרטיצה היא תת-מרחב לכן $U$ תת-מרחב.

שיטה 2

נבדוק שכל ה-3 תנאים של תת-מרחב מתקיימים:

**1)** יהיו $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\in\mathbb{R}^3$ שני וקטורים שונים אשר שייכים ל- $U$.
ז"א $A\mathrm{v}_1=-\mathrm{v}_1$ וגם $A\mathrm{v}_2=-\mathrm{v}_2$ לכן

$$A\left(\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\right)=-\left(\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\right)$$

לכן $\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\in U$.

**2)** יהי $\mathrm{v}_1\in\mathbb{R}^3$ וקטור ששייך ל- $U$ ו- $\alpha\in\mathbb{R}$ סקלר.
ז"א

$$A\mathrm{v}_1=-\mathrm{v}_1 \quad\Rightarrow\quad \alpha A\mathrm{v}_1=-\alpha\mathrm{v}_1 \quad\Rightarrow\quad A\left(\alpha\mathrm{v}_1\right)=-\alpha\mathrm{v}_1$$

לכן $\alpha\mathrm{v}_1\in U$.

**3)** יהי $0$ וקטור האפס של $\mathbb{R}^3$.

$$A\cdot 0=-0$$

לכן $0\in U$.

נוכיח כי $W$ תת-מרחב:

שיטה 1

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a+b\\-b\\a-b\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\} \quad\Rightarrow\quad W=\left\{a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

ז"א $W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

כל פרישה היא תת-מרחב לכן $W$ תת-מרחב.

<u>שיטה 2</u>

נבדוק שכל ה-3 תנאים של תת-מרחב מתקיימים:

**1)** יהיו $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ שני וקטורים שונים אשר שייכים ל- $U$.

ז"א $\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}a_1+b_1\\-b_1\\a_1-b_1\end{pmatrix}$ כאשר $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ וגם $\mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}a_2+b_2\\-b_2\\a_2-b_2\end{pmatrix}$ כאשר $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ לכן

$$\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}a_1+a_2+b_1+b_2\\-b_1-b_2\\a_1+a_2-b_1-b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b\\-b\\a-b\end{pmatrix},$$

כאשר $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$ לכן $\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \in W$.

**2)** יהי $\mathrm{v}_1 \in \mathbb{R}^3$ וקטור ששייך ל- $W$ ו- $\alpha \in \mathbb{R}$ סקלר.

ז"א

$$\alpha\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}\alpha a_1+\alpha b_1\\-\alpha b_1\\\alpha a_1-\alpha b_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b\\-b\\a-b\end{pmatrix},$$

כאשר $a = \alpha a_1$, $b = \alpha b_1$. לכן $\alpha\mathrm{v}_1 \in U$.

**3)** יהי $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ וקטור האפס של $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b\\-b\\a-b\end{pmatrix}$$

כאשר $a = 0$, $b = 0$. לכן $0 \in W$.

**ב)** נמצא בסיס אל $U = \text{Nul}(A+I)$:

$$(A+I) = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&2&5\\-1&-2&-4\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix}-1&-2&-4\\1&2&5\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix}1&2&5\\-1&-2&-4\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\rightarrow R_2+R_1} \begin{pmatrix}1&2&5\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\rightarrow R_1-5R_2} \begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן $U = \text{Nul}(A+I) = \text{span}\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ו- $\dim(U) = 1$.

$$W = \text{span}\left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

בנסוף הוקטורים $w_1, w_2$ בת"ל ולכן מהווים בסיס ולכן $\dim(W) = 2$.

**ג)** <u>בסיס של $U+W$</u>

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & w_1 & w_2 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$U + W = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ו- $\dim(U+W) = 2$.

<u>בסיס של $U \cap W$</u>

$$\text{Nul}\begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & w_1 & w_2 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

לכן הוקטור $w_1 + w_1 = \text{v} = u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ מהווה הבסיס של $U \cap W$:

$$U \cap W = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ו- $\dim(U \cap W) = 1$.

**ד)** הטעה נכונה. נוכיח דרך השלילה.

נניח כי $\{T(u_1),\dots,T(u_k)\}$ בת"ל ו- $\{u_1,\dots,u_k\}$ ת"ל.
ז"א קיימים סקלרים לא כולם אפסים כך ש-

$$\alpha_1 u_1+\ldots+\alpha_k u_k=0\ .$$

ז"א קיים $\alpha_i\neq 0$ $(1\leq i\leq k)$ כך ש-

$$\alpha_1 u_1+\ldots+\alpha_i u_i+\ldots+\alpha_k u_k=0\ .$$

נפעיל ההעתקה הלינארית $T$ על הצד שמאל והצד ימין ונקבל

$$T\left(\alpha_1 u_1+\ldots+\alpha_i u_i+\ldots+\alpha_k u_k\right)=T(0)\ .$$

$T$ העתקב לינארית לכן $T\left(\alpha_1 u_1+\ldots+\alpha_k u_k\right)=\alpha_1 T(u_1)+\ldots+\alpha_k T(u_k)$ וגם $T(0)=0$ לכן

$$\alpha_1 T\left(u_1\right)+\ldots+\alpha_i T\left(u_i\right)+\ldots+\alpha_k T\left(u_k\right)=0\ .$$

$\alpha_i\neq 0$ לכן $\{T(u_1),\dots,T(u_k)\}$ תלויה ליניארית, בסתירה לכך ש- $\{T(u_1),\dots,T(u_k)\}$ בלתי תלויה לינארית.

## שאלה 2

**א)**

$$\begin{pmatrix}-a & a+2 & 2a\\ 2a+1 & -a-2 & -a^2-3a+6\\ a & -a-2 & a^2-2a-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2\to R_2+2R_1]{R_3\to R_3+R_1}\begin{pmatrix}-a & a+2 & 2a\\ 1 & a+2 & -a^2+a+6\\ 0 & 0 & a^2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a & a+2 & 2a\\ 1 & a+2 & -(a-3)(a+2)\\ 0 & 0 & a^2-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_1}\begin{pmatrix}1 & a+2 & -(a-3)(a+2)\\ -a & a+2 & 2a\\ 0 & 0 & a^2-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2+aR_1}\begin{pmatrix}1 & a+2 & -(a-3)(a+2)\\ 0 & (a+1)(a+2) & 2a-a(a-3)(a+2)\\ 0 & 0 & a^2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a+2 & -(a-3)(a+2)\\ 0 & (a+1)(a+2) & -a(a^2-a-8)\\ 0 & 0 & a^2-4\end{pmatrix}$$

נסמן המטריצה המדורגת $B$.

- אם $a=2,-2$ תהיה שורת אפסים ב- $B \Leftarrow |B|=0 \Leftarrow |A|=0 \Leftarrow A$ לא הפיכה.
- אם $a=-2,-1$ אז תהיה עמודה לא מובילה ב- $B \Leftarrow$ העמודות של $B$ תלויים ליניארית $B \Leftarrow |B|=0 \Leftarrow |A|=0 \Leftarrow A$ לא הפיכה.

לסיכום $A$ אינה הפיכה עבור $a=-1,-2,2$.

**ב)** אם $a=-1$ אז

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 8 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מכאן

$$\text{col}(A) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

ו-

$$\text{Nul}(A) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

**ג)** נמצא את $\text{Nul}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מכאן בסיס של $\text{Nul}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ לא קיים
ולכן בסיס של $\text{col}(A) \cap \text{Nul}(A)$ לא קיים
לכן $\dim\left(\text{col}(A) \cap \text{Nul}(A)\right) = 0$.

**ד)**

## שאלה 3

**א)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & a \\ 2 & -1 & 8 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & b \\ 3 & 2 & 5 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-3R_1]{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & a \\ 0 & -5 & 10 & | & 1-2a \\ 0 & -1 & 2 & | & b-a \\ 0 & -4 & 8 & | & 5-3a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & a \\ 0 & -1 & 2 & | & b-a \\ 0 & -5 & 10 & | & 1-2a \\ 0 & -4 & 8 & | & 5-3a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & a \\ 0 & 1 & -2 & | & a-b \\ 0 & -5 & 10 & | & 1-2a \\ 0 & -4 & 8 & | & 5-3a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4+4R_2]{R_3 \to R_3+5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & a \\ 0 & 1 & -2 & | & a-b \\ 0 & 0 & 0 & | & 1-5b+3a \\ 0 & 0 & 0 & | & 5+a-4b \end{pmatrix}$$

לכל $1-5b+3a=0$, $5+a-4b=0$ יש פתרון
$w$ צירוף ליניארי של $u_1, u_2, u_3$.

ז"א לכל $a=3$, $b=2$ יש פתרון ואז $w$ צירוף ליניארי של $u_1, u_2, u_3$.
נציב $a=3$, $b=2$:

**ב)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & a \\ 0 & 1 & -2 & | & a-b \\ 0 & 0 & 0 & | & 1-5b+3a \\ 0 & 0 & 0 & | & 5+a-4b \end{pmatrix} \xrightarrow{a=3,b=2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

הפתרון למערכת זו היא

$$\begin{pmatrix} 1-3t \\ 1+2t \\ t \end{pmatrix} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

לכן

$$(1-3t)u_1 + (1+2t)u_2 + tu_3 = w$$

לכל $t \in \mathbb{R}$. למשל אם נציב $t=0$:

$$u_1 + u_2 = w$$

למשל אם נציב $t=1$:

$$-2u_1 + 3u_2 + u_3 = w$$

**ג)** $\dim\{u_1, u_2, u_3, w\} = 2$ ו- $\dim \mathbb{R}_3[x] = 4$ לכן לא אפשרי שוקטורים $\{u_1, u_2, u_3, w\}$ פורשים $\mathbb{R}_3[x]$.

**ד)** טענה נכונה.
אם $A \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ אז ל-$A$ יש $5$ שורות ו- $3$ עמודות.
לכן במדורגת יש לכל היותר $3$ עמודות מובילות ולכן $2$ שורות האחרונות הן שורות אפסים.
לכן קיים וקטור $b \in \mathbb{R}^5$ שאיננו צירוף ליניארי של העמודות של $A$, (כי תיתכן שורת סתירה).

**ה)** הטעה לא נכונה.
נניח בשלילה כי יש שני פתרונות $x_1 \neq x_2$. אז

$$Ax_1 = b \qquad Mx_2 = b$$

ז"א

$$Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0 \ .$$

מכאו

$$A\left(x_1 - x_2\right) = 0 \ .$$

$A$ הפכיה לכן קיימת $A^{-1}$ כך ש-

$$A^{-1}M\left(x_1 - x_2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad I(x_1 - x_2) = 0x_1 - x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

בסתירה לכך ש- $x_1 \neq x_2$ לכן קיים רק פתרון יחיד.

## שאלה 4

**א)**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2i & 4-2i & 4 & 6-4i \\ 2 & -2-4i & 1-2i & 1-i \\ 1+i & 1-3i & 3+i & 7+3i \end{array}\right) \xrightarrow[(1-i)R_3+iR_1]{R_2+iR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2i & 4-2i & 4 & 6-4i \\ 0 & 0 & 1+2i & 5+5i \\ 0 & 1-i & 4+2i & 14+2i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2i & 4-2i & 4 & 6-4i \\ 0 & 1-i & 4+2i & 14+2i \\ 0 & 0 & 1+2i & 5+5i \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2\to(1+i)R_2 \\ R_3\to(1-2i)R_3}]{R_1\to-\frac{i}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1-2i & -2i & -2-3i \\ 0 & 2 & 2+6i & 12+16i \\ 0 & 0 & 5 & 15-5i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to\frac{1}{5}R_3]{R_2\to\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1-2i & -2i & -2-3i \\ 0 & 1 & 1+3i & 6+8i \\ 0 & 0 & 1 & 3-i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-(1+3i)R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1-2i & -2i & -2-3i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3-i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+(1+2i)R)2+2iR_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3-i \end{array}\right)$$

**ב)**

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\a&0&1\\0&a+1&a-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-aR_1}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-a&1\\0&a+1&a-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to aR_3+(a+1)R_2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-a&1\\0&0&a^2+1\end{pmatrix}$$

אם $a=0,i,-i$ תהיה עמודה אחת לא מובילה ולכן הווקטורים יהיו תלויים ליניארית.

**ג)** הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$A\in\mathbb{R}^{3\times2}$. מספר העמודות $n=2$. הרי $n \not< \dim\left(\text{col}(A)\right)$ וב- $A$ יש שורת אפסים.

**ד)** טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$.

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=B$$

הרי $B\neq0$, $AB\neq0$ אבל $A\neq I$.

## שאלה 5

**א)**
$$A=\begin{pmatrix}1&3&4&-3\\0&1&3&-2\\1&0&1&0\\3&7&6&-5\end{pmatrix}$$

**ב)** נדרג את $A$:

$$\begin{pmatrix}1&3&4&-3\\0&1&3&-2\\1&0&1&0\\3&7&6&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4-3R_1]{R_3-R_1}\begin{pmatrix}1&3&4&-3\\0&1&3&-2\\0&-3&-3&3\\0&-2&-6&4\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4+2R_2]{R_3+3R_2}\begin{pmatrix}1&3&4&-3\\0&1&3&-2\\0&0&6&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לא כל השורות מובילות לכן $T$ לא "על".
לא כל העמודות מובילות לכן $T$ לא "חד-חד-ערכית".

**ג)**

$$\text{col}(A)=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\0\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\3\\1\\6\end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim \mathrm{Im}(T) = 3$.

**ד)** נמצא את $\mathrm{Nul}(A)$:
נדרג את $A$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 6 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{דירוג}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{3} R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to 2R_2 - 3R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to 2R_1 - 3R_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} .$$

לכן

$$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{span} \left\{ -1 + x + x^2 + 2x^3 \right\} .$$

$\dim \ker(T) = 1$.

**ה)** יש לפתור את המערכת

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 6 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4-3R_1]{R_3-R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4\to R_4+2R_2]{R_3\to R_3+3R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to\frac{1}{3}R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to 2R_2-3R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to 2R_1-3R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} d + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$