'

שעור 9
משחק בייסיאני

9.1 עקרון האדישות

משפט 9.1 עקרון האדישות במשחק שני שחקנים

יהי σ^* שיווי משקל במשחק בצורה אסטרטגית.

- תהיינה s_1 ו- $\hat{s}_1$ שתי אסטרטגיות טהורות של שחקן 1. אם $\sigma_1^*(s_1) > 0$ וכן $\sigma_1^*(\hat{s}_1) > 0$ אזי
$$U_1(s_1, \sigma_2^*) = U_1(\hat{s}_1, \sigma_2^*) \ .$$
- תהיינה s_2 ו- $\hat{s}_2$ שתי אסטרטגיות טהורות של שחקן 2. אם $\sigma_2^*(s_2) > 0$ וכן $\sigma_2^*(\hat{s}_2) > 0$ אזי
$$U_2(\sigma_1^*, s_2) = U_2(\sigma_1^*, \hat{s}_2) \ .$$

משפט 9.2 *עקרון האדישות במשחק n שחקנים

יהי σ^* שיווי משקל במשחק בצורה אסטרטגית ותהיינה s_i ו- $\hat{s}_i$ שתי אסטרטגיות טהורות של שחקן i. אם $\sigma_i^*(s_i) > 0$ וכן $\sigma_i^*(\hat{s}_i) > 0$ אזי
$$U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = U_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*) \ .$$

דוגמה 9.1 ()

נתון המשחק הבא בצורה אסטרטגית.

I \ II	L	R
T	$1,-1$	$0,2$
B	$0,1$	$2,0$

מצאו כל שיווי משקל של המשחק.

פתרון:

נבדוק שיווי משקל באסטרטגיות טהורות:

I \ II	L	R
T	$\underline{1},-1$	$0,\underline{2}$
B	$0,\underline{1}$	$\underline{2},0$

ז"א אין נקודת שיווי משקל באסטרטגיות טהורות. לכן בהכרח קיימת נקודת שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

<u>שיטה 1</u>

קבוצות האסטרטגיות של שחקן 1: $S_1=\{[x(T),(1-x)(B)]\ ,\ x\in[0,1]\}$.
המזוהה עם הקטע $[0,1]$.

קבוצות האסטרטגיות של שחקן 2: $S_2=\{[y(L),(1-y)(R)]\ ,\ y\in[0,1]\}$
המזוהה עם הקטע $[0,1]$.

פונקצית התועלת של שחקן 1: $U_1(x,y)=xy+2(1-x)(1-y) = 3xy-2x-2y+2.$

פונקצית התועלת של שחקן 2: $U_2(x,y)=-xy+2x(1-y)+y(1-x)=-4xy+2x+y.$

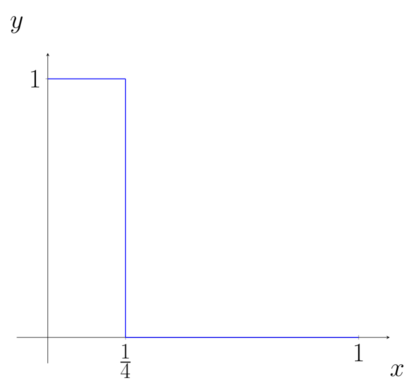
נסמן תשובה טובה ביותר של שחקן 2 לאסטרטגיה x של שחקן 1 כ:

$$\sigma_2(x)=\underset{y\in[0,1]}{\operatorname{argmax}}\,U_2(x,y)=\{y\in[0,1],U_2(x,y)\geq U_2(x,z)\forall z\in[0,1]\}$$

ז"א $\sigma_2(x)$ הוא אוסף של כל הערכים של y עבורם ל- $U_2(x,y)$ יש מקסימום. נרשום $U_2(x,y)$ כפונקציה לינארית של y:

$$U_2(x,y)=y(1-4x)+2x\ .$$

אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה והמקסימום מתקבל ב- $y=1$.
אם השיפוע שלילי הפונקציה יורדת והמקסימום מתקבל ב- $y=0$.
אם השיפוע 0 הפונקציה קבועה וכל הנקודות הן נקודות מקסימום והסימן של השיפוע משתנה ב- $x=\frac{1}{4}$.



נסמן תשובה טובה ביותר של שחקן 1 לאסטרטגיה y של שחקן 2 כ:

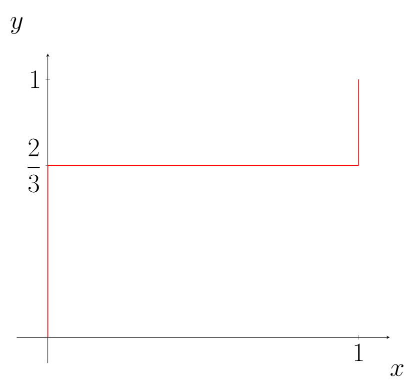
$$\sigma_1(y)=\underset{x\in[0,1]}{\operatorname{argmax}}\,U_1(x,y)=\left\{x\in[0,1]\,\middle|\,U_1(x,y)\geq U_1(x,z)\forall z\in[0,1]\right\}$$

ז"א $\sigma_1(y)$ הוא אוסף של כל הערכים של x עבורם ל- $U_1(x,y)$ יש מקסימום.

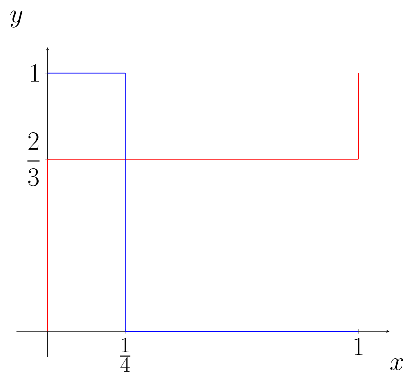
נרשום את $U_1(x,y)$ כפונקציה ליניארית של x:

$$U_1(x,y)=x(3y-2)-2y+2\ .$$

אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה והמקסימום מתקבל ב- $x=1$.
אם השיפוע שלילי הפונקציה יורדת והמקסימום מתקבל ב- $x=0$.
אם השיפוע 0 הפונקציה קבועה וכל הנקודות הן נקודות מקסימום והסימן של השיפוע משתנה ב- $y=\frac{2}{3}$.



צמד אסטרטגיות (x^*,y^*) נקודת שיווי משקל אם ורק אם $x^*\in\sigma_1(y^*)$ ו- $y^*\in\sigma_2(x^*)$, כלומר אם ורק אם הנקודה (x^*,y^*) תהיה על שני הגרפים של $\sigma_2(x)$ ו- $\sigma_1(y)$. הנקודה היחידה שמקיימת את תנאי זה היא $\left(x^*=\frac{1}{4},y^*=\frac{2}{3}\right)$.



לכן השיווי משקל היחיד של המשחק הוא $\left(x^*=\frac{1}{4},y^*=\frac{2}{3}\right)$ והתשלומים לשחקנים 1 ו- 2 של השיווי משקל הם

$$U_1(x^*,y^*)=\frac{2}{3}\ ,\qquad U_2(x^*,y^*)=\frac{1}{2}\ .$$

<u>שיטה 2</u>

לכל שתי זוג אסטרטגיות מעורבות (x,y) מתקיים

$$U_1(T,y)=y\ ,\quad U_1(B,y)=2(1-y)\ ,\quad U_2(x,L)=1-2x\ ,\quad U_2(x,R)=2x\ .$$

מעקרון האדישות, בשיווי משקל בהכרח שחקן 1 אדיש בין T ל- B, ושחקן 2 אדיש בין L ו- R. כלומר, אם (x^*,y^*) שיווי המשקל אזי

- שחקן 1 אדיש בין T ל- B:

$$U_1(T,y^*)=U_1(B,y^*)\quad\Rightarrow\quad y^*=2(1-y^*)\quad\Rightarrow\quad y^*=\frac{2}{3}\ .$$

- שחקן 2 אדיש בין L ל- R:

$$U_2(x^*,L)=U_2(x^*,R)\quad\Rightarrow\quad 1-2x^*=2x^*\quad\Rightarrow\quad x^*=\frac{1}{4}$$

וקיבלנו אמנם את שיווי משקל שמצאנו קודם.

■

9.2 תחרות דואפול על פי קורנוט

דוגמה 9.2 ()

שני יצרניים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאלים. יהי q_1 כמות המוצר שיצרן 1 מייצר ו- q_2 כמות המוצר שיצרן 2 מייצר. הכמות הכוללת של מוצרים בשוק היא

$$Q=q_1+q_2\ .$$

יהי $P(Q)$ המחיר של יחידה של המוצר בשוק:

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & Q < a \\ 0 & Q \geq a \end{cases} \ .$$

(a פרמטר שמכמת ביקוש למוצר בשוק שנקרא **פרמטר הביקוש**.) נניח כי עלות הייצור של יחידה ליצרן 1 ועלות הייור של יחידה וליצרן 2 נתונות על ידי

$$C_1(q_1) = cq_1 \ , \qquad C_2(q_2) = cq_2 \ .$$

מצאו את השיווי משקל של המשחק.

פתרון:

זהו משחק שני שחקנים (היצרנים 1 ו- 2). האסטרטגיות של שחקן 1 הן הכמויות q_1 שהוא בוחר לייצר, אשר קבוצה רציפה של ערכים חיוביים, ובאותה מידה האסטרטגיות לשחקן 2 הן הקבוצה הרציפה של כמויות q_2. לכן קבוצת האטסטרגיות של כל שחקן היא $[0,\infty)$.

אם שחקן 1 בוחר באסטרטגיה q_1 ושחקן 2 בוחר באסטרטגיה q_2, התשלום לשחקן 1 הוא

$$u_1(q_1,q_2) = q_1(a - q_1 - q_2) - q_1 c = q_1(a - c - q_1 - q_2) \ ,$$

והתשלום לשחקן 2 הוא

$$u_2(q_1,q_2) = q_2(a - q_1 - q_2) - q_1 c = q_2(a - c - q_1 - q_2) \ .$$

במשחק שני שחקנים ווקטור אסטרטגיות (s_1^*, s_2^*) שיווי משקל אם

$$\begin{aligned} u_1(s_1^*, s_2^*) &\geq u_1(s_1, s_2^*) \qquad \forall s_1 \in S_1 \ , \\ u_2(s_1^*, s_2^*) &\geq u_2(s_1^*, s_2) \qquad \forall s_2 \in S_2 \ . \end{aligned}$$

ז"א s_1^* הנקודה שבה

$$u_1(s_1^*, s_2^*) = \max_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_2^*) \ ,$$

ו- s_2^* הנקודה שבה

$$u_2(s_1^*, s_2^*) = \max_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) \ .$$

במודל של קורנוט, תנאי זה הוא כי הווקטור אסטרטגיות (q_1^*, q_2^*) שיווי משקל אם לכל שחקן:

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = \max_{0 \leq q_1 \leq \infty} u_1(q_1, q_2^*) = \max_{0 \leq q_1 \leq \infty} \left[q_1 \left(a - c - q_1 - q_2^* \right) \right]$$

ו-

$$u_2(q_1^*, q_2^*) = \max_{0 \leq q_2 \leq \infty} u_1(q_1^*, q_2) = \max_{0 \leq q_2 \leq \infty} \left[q_2 \left(a - c - q_1^* - q_2 \right) \right] \ .$$

המקסימום של $u_1(q_1, q_2^*)$ לפי q_1 מתקבל בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_1(q_1, q_2^*)}{\partial q_1} = a - c - 2q_1 - q_2^* \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_1^* = \frac{a - c - q_2^*}{2} \ .$$

ובאותה מידה המקסימום של $u_2(q_1^*, q_2)$ לפי q_2 מתקבל בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_2(q_1^*, q_2)}{\partial q_2} = a - c - q_1^* - 2q_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_2^* = \frac{a - c - q_1^*}{2} \ .$$

לפיכך, אם הצמד כמויות (q_1^*,q_2^*) שיווי משקל אז הכמויות חייבות לקיים את התנאים

$$q_1^* = \frac{1}{2}(a-q_2^*-c) \ , \qquad q_2^* = \frac{1}{2}(a-q_1^*-c) \ .$$

הפתרון למערכת זו הינו

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3} \ .$$

■

דוגמה 9.3 ()

שני יצרניים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאלים. יהי q_1 כמות המוצר שיצרן 1 מייצר ו- q_2 כמות המוצר שיצרן 2 מייצר. שחקן 1 בוחר המחיר של המוצר שלו להיות p_1 ליחידה, ושחקן 2 בוחר המחיר של המוצר שלו להיות p_2 ליחידה. הכמות q_1 ששחקן 1 צריך לייצר נקבע על ידי הפונקציה

$$q_1 = a - p_1 + bp_2$$

כאשר $b>0$ והכמות q_2 ששחקן 2 צריך לייצר נקבע על ידי הפונקציה

$$q_2 = a - p_2 + bp_1 \ .$$

מצאו את השיווי משקל של המשחק.

פתרון:
האסטרטגיות של שחקן 1 הן המחירים p_1 שהוא בוחר, אשר מהווה קבוצה רציפה של ערכים חיוביים, ובאותה מידה האסטרטגיות לשחקן 2 הן הקבוצה הרציפה של מחירים p_2. לכן קבוצת האסטרגיות של כל שחקן היא $[0,\infty)$.

אם שחקן 1 בוחר באסטרטגיה p_1 ושחקן 2 בוחר באסטרטגיה q_2, התשלום לשחקן 1 הוא

$$u_1(p_1,p_2) = p_1q_1 - cq_1 = (p_1-c)(a-p_1+bp_2)$$

והתשלום לשחקן 2 הוא

$$u_2(p_1,p_2) = p_2q_2 - cq_2 = (p_2-c)(a-p_2+bp_1)$$

הווקטור אסטרטגיות (p_1^*,p_2^*) שיווי משקל אם לכל שחקן:

$$u_1(p_1^*,p_2^*) = \max_{0\le p_1\le\infty} u_1(p_1,q_2^*) = \max_{0\le p_1\le\infty} [(p_1-c)(a-p_1+bp_2^*)]$$

ו-

$$u_2(p_1^*,p_2^*) = \max_{0\le p_2\le\infty} u_1(p_1^*,p_2) = \max_{0\le p_2\le\infty} [(p_2-c)(a-p_2+bp_1^*)]$$

המקסימום של $u_1(p_1,p_2^*)$ לפי p_1 מתקבל בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_1(p_1,p_2^*)}{\partial p_1} = a - 2p_1 + bp_2^* + c \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad p_1^* = \frac{a+c+bp_2^*}{2} \ ,$$

והמקסימום של $u_2(p_1^*,p_2)$ לפי p_2 מתקבל בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_2(p_1^*,p_2)}{\partial p_2} = a - 2p_2 + bp_1^* + c \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad p_2^* = \frac{a+c+bp_1^*}{2} \ .$$

לפיכך, אם הצמד כמויות (p_1^*, p_2^*) שיווי משקל אז הכמויות חייבות לקיים את התנאים
$$p_1^* = \frac{a+c+bp_2^*}{2} \ , \qquad p_2^* = \frac{a+c+bp_1^*}{2} \ .$$
הפתרון למערכת זו הינו
$$p_1^* = p_2^* = \frac{a+c}{2-b} \ .$$
■

9.3 משחק בייסיאני

הגדרה 9.1 משחק שני שחקנים בייסיאני

הצורה הנורמלית של משחק בייסיאני 2 שחקנים היא
$$G = \{(A_1, A_2)\, ,\ (T_1, T_2)\, ,\ (p_1, p_2)\, ,\ u_1, u_2\}$$
כאשר

- $A_1 = \{a_1, b_1, \ldots\}$ קבוצת הפעולות לשחקן 1 ו- $A_2 = \{a_2, b_2, \ldots\}$ קבוצת הפעולות לשחקן 2
- T_1 קבוצת ערכים פרטיים של שחקן 1 ו- T_2 קבוצת ערכים פרטיים של שחקן 2.
- p_1 מסמן את ההסתברות לפי שחקן 1, שהערך פרטי של שחקן 2 הוא t_2 בידיעה שהערך פרטי שלו הוא t_1:
$$p_1 = P\left(t_2 | t_1\right)$$
וכן p_2 מסמן את ההסתברות לפי שחקן 2, שהערך פרטי של שחקן 1 הוא t_1 בידיעה שהערך פרטי שלו הוא t_2:
$$p_2 = P\left(t_1 | t_2\right)$$
- u_1 פונקציית התשלום של שחקן 1 שהיא פונקציה של הפעולות $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ והערך הפרטי שלו $t_1 \in T_1$ שידוע רק לשחקן 1:
$$u_1(a_1, a_2, t_1)$$
וכן u_2 פונקציית התשלום של שחקן 2 שהיא פונקציה של הפעולות $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ והערך הפרטי שלו $t_2 \in T_2$ שידוע רק לשחקן 2:
$$u_2(a_1, a_2, t_2) \ .$$

הגדרה 9.2 אסטרטגיה במשחק שני שחקנים בייסיאני

נתון משחק שני שחקנים בייסיאני:
$$G = \{(A_1, A_2)\, ,\ (T_1, T_2)\, ,\ (p_1, p_2)\, ,\ u_1, u_2\} \ .$$
אסטרטגיה לשחקן 1 היא פונקציה $s_1(t_1)$ של $t_1 \in T_1$ כך שלכל $t_1 \in T_1$ הפונקציה $s_1(t_1)$ נותנת פעולה $a_1 \in A_1$
$$s_1 : t_1 \mapsto a_1 \ .$$
וכן אסטרטגיה של שחקן 2 היא פונקציה $s_2(t_2)$ של $t_2 \in T_2$ כך שלכל $t_2 \in T_2$ הפונקציה $s_2(t_2)$ נותנת פעולה $a_2 \in A_2$
$$s_2 : t_2 \mapsto a_2 \ .$$

הגדרה 9.3 שיווי משקל נאש בייסיאני

נתון משחק שני שחקנים בייסיאני:

$$G = \{(A_1, A_2)\ ,\ (T_1, T_2)\ ,\ (p_1, p_2)\ ,\ u_1, u_2\}\ .$$

הווקטור אסטרטגיות (s_1^*, s_2^*) הוא שיווי משקל נאש בייסיאני אם

$$\sum_{t_2 \in T_2} u_1\left(s_1^*(t_1), s_2^*(t_2)\right) P(t_2|t_1) = \max_{a_1 \in A_1} \sum_{t_2 \in T_2} u_1\left(a_1, s_2^*(t_2)\right) P(t_2|t_1)$$

$$\sum_{t_1 \in T_1} u_2\left(s_1^*(t_1), s_2^*(t_2)\right) P(t_1|t_2) = \max_{a_2 \in A_2} \sum_{t_1 \in T_1} u_2\left(s_1^*(t_1), a_2\right) P(t_1|t_2)$$

דוגמה 9.4 (מלחמת המינים עם ידיעה לא שלמה)

זוג מתכנן בילוי למוצא שבת. האפשרויות העומדות לרשותם הן מסעדה (Restaurant (R) או צפייה במשחק כדורגל, (Football (F). הגבר Pete (P) מעדיף צפייה במשחק הכדורגל בעוד האישה Camilla (C) מעדיפה את המסעדה אך שניהם מעדיפים להיות ביחד גם אם הבילוי המשותף הוא הפחות עדיף בעיניהם.

Camilla מקבלת תשלום $2 + t_c$ אם שניהם הולכים למסעדה כאשר t_c ערך פרטי שידוע רק ל- Camilla ולא ל- Pete.

Pete מקבל תשלום $2 + t_p$ אם שניהם הולכים למשחק כדורגל כאשר t_p ערך פרטי שידוע רק ל- Pete ולא ל- Camilla.

Camilla \ Pete	Restaurant	Football
Restaurant	$2 + t_c, 1$	$0, 0$
Football	$0, 0$	$1, 2 + t_p$

הערך הפרטי t_C מתפלג אחיד בטווח $[0, x]$ ו t_P מתפלג אחיד בטווח $[0, x]$.
t_P ו- t_C בלתי תלויים.

Camilla משחקת R אם t_C גדול מערך מסויים α, אחרת היא משחקת F.

Pete משחק F אם t_P גדול מערך מסויים β, אחרת הוא משחק R.

מצאו את הערכים של α ו- β עבור הווקטור אסטרטגיות $(s_1^*, s_2^*) = (R, F)$ שיווי משקל נאש בייסיאני של המשחק.

פתרון:

C \ P	R	F
R	$2 + t_c, 1$	$0, 0$
F	$0, 0$	$1, 2 + t_p$

$$G=\{(A_C,A_P),(T_C,T_P),(p_C,p_P),u_C,u_P\}$$

t_C ו- t_P מתפלגים אחידה בתחום $[0,x]$ והם בלתי תלויים, לכן

$$p_C=P(t_C|t_P)=P(t_C)\ ,\qquad p_P=P(t_P|t_C)=P(t_P)\ .$$

$$A_C=\{\text{Restaurant},\text{Football}\}=\{R,F\}\ ,\qquad A_P=\{\text{Restaurant},\text{Football}\}=\{R,F\}\ .$$

Camilla משחקת R בהסתברות $\frac{x-\alpha}{x}$ ומשחקת F בהסתברות $\frac{\alpha}{x}$.

Pete משחק F בהסתברות $\frac{x-\beta}{x}$ ומשחק R בהסתברות $\frac{\beta}{x}$.

תשלום ל- Camilla אם היא משחקת R:

$$u_1(s_1=R)=\frac{\beta}{x}(2+t_C)+\left(\frac{x-\beta}{x}\right)\cdot 0=\frac{\beta}{x}(2+t_C)\ .$$

תשלום ל- Camilla אם היא משחקת F:

$$u_1(s_1=F)=\frac{\beta}{x}\cdot 0+\left(\frac{x-\beta}{x}\right)\cdot 1=\frac{1-\beta}{x}\ .$$

$$u_1(s_1=R)\geq u_1(s_1=F)\quad\Rightarrow\quad\frac{\beta}{x}(2+t_C)\geq\frac{x-\beta}{x}\quad\Rightarrow\quad t_C\geq\frac{x-\beta}{\beta}-2=\frac{x}{\beta}-3\stackrel{!}{=}\alpha\ .$$

תשלום ל- Pete אם הוא משחק R:

$$u_2(s_2=R)=\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)\cdot 1+\frac{\alpha}{x}\cdot 0=1-\frac{\alpha}{x}\ .$$

תשלום ל- Pete אם הוא משחק F:

$$u_2(s_2=F)=\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)\cdot 0+\frac{\alpha}{x}(2+t_P)=\frac{\alpha}{x}(2+t_P)\ .$$

$$u_2(s_2=F)\geq u_2(s_2=R)\quad\Rightarrow\quad\frac{\alpha}{x}(2+t_P)\geq 1-\frac{\alpha}{x}\quad\Rightarrow\quad(2+t_P)\geq\frac{x}{\alpha}-1\quad\Rightarrow\quad t_P\geq\frac{x}{\alpha}-3\stackrel{!}{=}\beta\ .$$

הפתרון של המערכת הוא

$$\frac{x}{\left(\frac{x}{\beta}-3\right)}-3=\beta\quad\Rightarrow\quad x-\frac{3x}{\beta}+9=x-3\beta\quad\Rightarrow\quad-\frac{3x}{\beta}+9+3\beta=0\quad\Rightarrow\quad-3x+9\beta+3\beta^2=0$$

$$\Rightarrow\quad\beta^2+3\beta-x=0\quad\Rightarrow\quad\beta=\frac{-3+\sqrt{9+4x}}{2}\ .$$

לכן $\frac{x}{\alpha}-3=\beta$

$$\alpha=\frac{x}{3+\beta}=\frac{2x}{3+\sqrt{9+4x}}=\frac{2x}{3+\sqrt{9+4x}}\cdot\left(\frac{3-\sqrt{9+4x}}{3-\sqrt{9+4x}}\right)=\frac{-3+\sqrt{9+4x}}{2}=\beta$$

לכן התשובה סופית היא האסטרטגיה $(s_1^*,s_2^*)=(R,F)$ שיווי משקל אם

$$t_C\geq\alpha=\frac{-3+\sqrt{9+4x}}{2}\ ,\qquad t_P\geq\beta=\frac{-3+\sqrt{9+4x}}{2}\ .$$

■

דוגמה 9.5 (מכרז מחיר ראשון)

במכרז מחיר ראשון שני שחקנים $i=1,2$ מתחרים על קניית מוצר מסוים. שחקן 1 מעריך שהמוצר שווה v_1 ושחקן 2 מעריך כי המוצר שווה v_2. ז"א אם שחקן i מנצח ומשלם מחיר p אז הרווח שלו יהיה v_i-p. ההערכות של השני שחקנים הם בלתי תלויים ומפולגים אחיד בתחום $[0,1]$. השחקן עם ההצעה הגבוה ביותר מנצח ומשלם את מחיר שווה להצעה שלו. השחקן השני לא משלם כלום. במקרה של תיקו מטילים מטבע. השחקנים אדישי סיכון.

פתרון:

$$G=\{(A_1,A_2),(T_1,T_2),(p_1,p_2),u_1,u_2\}$$

קבוצת הפעולות של שחקן 1 היא ההצעות האפשריות שלו, $b_1\in[0,\infty)$ וקבוצת הפעולות של שחקן 2 היא ההצעות האפשריות שלו $b_2\in[0,\infty)$

$$A_1=[0,\infty)\ ,\qquad A_2=[0,\infty)\ .$$

הקבוצה T_1 של ערכים פרטיים של שחרן 1 היא הקבוצה של ההערכות $\mathrm{v}_1\in[0,1]$ של המוצר שלו, וכמו כן T_2 הוא הקבוצה של ההערכות $\mathrm{v}_2\in[0,1]$. לכן

$$T_1=[0,1]\ ,\qquad T_2=[0,1]\ .$$

השתי ההערכות $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2$ בלתי תלויות לכן $p_1=P(\mathrm{v}_2=\beta|\mathrm{v}_1=\alpha)=P(\mathrm{v}_2=\beta)=\beta$ ז"א שחקן 1 מאמין כי הערך של v_2 הוא β בהסתברות β בלי קשר לערך של v_1. ולהפך, $p_2=P(\mathrm{v}_1=\alpha|\mathrm{v}_2=\beta)=P(\mathrm{v}_1=\alpha)=\alpha$ ז"א שחקן 2 מאמין כי הערך של v_1 הוא α בהסתברות α בלי קשר לערך של v_2.

$$u_1(b_1,b_2,\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2)=\begin{cases}\mathrm{v}_1-b_1 & b_1>b_2\\ \dfrac{\mathrm{v}_1-b_1}{2} & b_1=b_2\\ 0 & b_1<b_2\end{cases}\ ,\qquad u_2(b_1,b_2,\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2)=\begin{cases}\mathrm{v}_2-b_2 & b_2>b_1\\ \dfrac{\mathrm{v}_2-b_2}{2} & b_2=b_1\\ 0 & b_2<b_1\end{cases}\ ,$$

הווקטור אסטרטגיות $\left(b_1^*(\mathrm{v}_1),b_2^*(\mathrm{v}_2)\right)$ שיווי משקל נאש בייסיאני אם

$$u_1\left(b_1^*,b_2^*,\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\right)=\max_{b_1}\left[\left(\mathrm{v}_1-b_1\right)P\left(b_1>b_2^*(\mathrm{v}_2)\right)+\frac{1}{2}\left(\mathrm{v}_1-b_1\right)P\left(b_1=b_2^*(\mathrm{v}_2)\right)\right]$$

ו-

$$u_2\left(b_1^*,b_2^*,\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\right)=\max_{b_2}\left[\left(\mathrm{v}_2-b_2\right)P\left(b_2>b_1^*(\mathrm{v}_1)\right)+\frac{1}{2}\left(\mathrm{v}_2-b_2\right)P\left(b_2=b_1^*(\mathrm{v}_1)\right)\right]$$

אנחנו משערים כי קיים שיווי משקל לינארי:

$$b_1^*(\mathrm{v}_1)=a_1+c_1\mathrm{v}_1\ ,\qquad b_2^*(\mathrm{v}_2)=a_2+c_2\mathrm{v}_2\ .$$

נניח כי שחקן 2 בוחר באסטרטגיה $b_2^*(\mathrm{v}_2)=a_2+c_2\mathrm{v}_2$. אז עבור הערך v_2, תשובה טובה ביותר b_1^* לשחקן 1 מקיימת

$$\begin{aligned}u_1\left(b_1^*,b_2^*,\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\right)&=\max_{b_1}\left[\left(\mathrm{v}_1-b_1\right)P\left(b_1>a_2+c_2\mathrm{v}_2\right)+\frac{1}{2}\left(\mathrm{v}_1-b_1\right)\cancelto{0}{P\left(b_1=a_2+c_2\mathrm{v}_2\right)}\right]\\&=\max_{b_1}\left(\mathrm{v}_1-b_1\right)P\left(\mathrm{v}_2<\frac{b_1-a_2}{c_2}\right)\\&=\max_{b_1}\left(\mathrm{v}_1-b_1\right)\left(\frac{b_1-a_2}{c_2}\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial b_1}\left(\frac{1}{c_2}\left(\mathrm{v}_1-b_1\right)\left(b_1-a_2\right)\right)=\frac{\mathrm{v}_1+a_2-2b_1}{c_2}\stackrel{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad b_1^*=\frac{\mathrm{v}_1+a_2}{2}$$

נניח כי שחקן 1 בוחר באסטרטגיה $b_1^*(\mathrm{v}_1)=a_1+c_1\mathrm{v}_1$. אז עבור הערך v_1, תשובה טובה ביותר b_2^* לשחקן 2 מקיימת

$$\begin{aligned}u_2\left(b_1^*,b_2^*,\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\right)&=\max_{b_2}\left[\left(\mathrm{v}_2-b_2\right)P\left(b_2>a_1+c_1\mathrm{v}_1\right)+\frac{1}{2}\left(\mathrm{v}_2-b_2\right)\cancelto{0}{P\left(b_2=a_1+c_1\mathrm{v}_1\right)}\right]\\&=\max_{b_2}\left(\mathrm{v}_2-b_2\right)P\left(\mathrm{v}_1<\frac{b_2-a_1}{c_1}\right)\\&=\max_{b_2}\left(\mathrm{v}_2-b_2\right)\left(\frac{b_2-a_1}{c_1}\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial b_2}\left(\frac{1}{c_1}\left(\mathrm{v}_2-b_2\right)\left(b_2-a_1\right)\right)=\frac{\mathrm{v}_2+a_1-2b_2}{c_1}\stackrel{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad b_2^*=\frac{\mathrm{v}_2+a_1}{2}$$

לכן

$$b_1^*=\frac{\mathrm{v}_1}{2}+\frac{a_2}{2}=a_1+c_1\mathrm{v}_1 \quad\Rightarrow\quad c_1=\frac{1}{2}\ ,\quad a_1=\frac{a_2}{2}\ ,$$

$$b_2^*=\frac{\mathrm{v}_2}{2}+\frac{a_1}{2}=a_2+c_2\mathrm{v}_2 \quad\Rightarrow\quad c_2=\frac{1}{2}\ ,\quad a_2=\frac{a_1}{2}\ .$$

הפתרון למערכת זה היא

$$c_1=\frac{1}{2},\quad a_1=0\ ,\quad c_2=\frac{1}{2}\ ,\quad a_2=0\ .$$

לפיכך האסטרטגיות של שיווי משקל הן

$$b_1^*(\mathrm{v}_1)=\frac{\mathrm{v}_1}{2}\ ,\qquad b_2^*(\mathrm{v}_2)=\frac{\mathrm{v}_2}{2}\ .$$

■

דוגמה 9.6 (דואפול עם ערכים פרטיים)

שני יצרנים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתרחים על שוק הקונים הפוטנציאלים. היצרנים מחליטים על הכמות שהם ייצרו, וההיצע הכולל קובע את מחיר המוצר, שהוא זהה לשני היצרנים. נסמן ב- q_1 וב- q_2 את הכמויות שמיצרים היצרנים 1 ו- 2 בהתאמה. אזי הכמות הכוללת של המוצרים בשוק הוא q_1+q_2. נניח כי המחיר של יחידה שווה ל- $P=a-q_1-q_2$ כאשר a פרמטר הביקוש. עלות הייצור של יחידה ליצרן הראשון וליצרן 2 הוא c.
הפרמטר הביקוש a שווה ל- a^H (ביקוש גבוהה) או a^L (ביקוש נמוך). הערך של a ידוע ליצרן הראשון אך אינה ידוע ליצרן השני. כל שיצרן זה יודע הוא שהפרמטר הביקוש שווה ל- a^L בהסתברות θ או a^H בהסתברות $1-\theta$.

מה הם התנאים על a_H, a_L, θ ו- c כך ש- הכמויות q_1,q_2 חיוביים בשיווי משקל.

מהו השיווי משקל נאש הבייסיאני של המשחק?

פתרון:

כמות של יצרן 1: q_1. כמות של יצרן 2: q_2.

מחיר ליחידה אחת של המוצר: $P=a-q_1-q_2$.

עלות ליחידה לשחקן 1 ולשחקן 2: $c=1$.

פרמטר הביקוש לשחקן 1: $a=a^H$ או $a=a^L$ והוא ידוע לשחקו 1 ולא לשחקן 2.

עבור שחקן 2: $a=a^L$ בהסתברות θ ו- $a=a^H$ בהסתברות $1-\theta$.

צורה בייסיאנית של המשחק:

- $N=\{1,2\}$.
- $T_1=\{a^L,a^H\}$, $T_2=\{1\}$.
- $p_{II}\left(t_1=a^L|t_2=1\right)=p_{II}\left(t_1=a^L\right)=\theta$.
- $p_{II}\left(t_1=a^H|t_2=1\right)=p_{II}\left(t_1=a^H\right)=1-\theta$.
- $A_1=\{q_1^H,q_1^L\}$, $A_2=\{q_2\}$.
- פורנצית תשלום לשחקן 1:
$$u_1\left(s_1(t_1),s_2(t_2),t_1\right)$$
פורנצית תשלום לשחקן 2:
$$u_2\left(s_1(t_1),s_2(t_2),t_2=1\right)$$
- $$s_1(t=a^H)=q_1^H\ ,\qquad s_2(t_2=a^L)=q_1^L\ ,\qquad s_2(t_2=1)=q_2\ .$$

לשחקן 1, אם $a=a^H$:
$$u_1(s_1(t=a^H),s_2(t_2),t_1=a^H)=u_1(q_1^H,q_2)=q_1^H(a-q_1^H-q_2-c)\ .$$

לשחקן 1, אם $a=a^L$:
$$u_1(s_1(t=a^L),s_2(t_2),t_1=a^L)=u_1(q_1^L,q_2)=q_1^L(a-q_1^L-q_2-c)\ .$$

לשחקן 2, $s_1(t_1=q^L)=q_1^L$ בהסתברות θ ו- $s_1(t_1=a^H)=q_1^H$ בהסתברות $1-\theta$.
$$u_2\left(s_1(t_1),s_2(t_2),t_2=1\right)=u_1\left(q_1^H,q_1^L,q_2\right)=q_2\left(\theta a^L+(1-\theta)a^H-\theta q_1^L-(1-\theta)q_1^H-q_2-c\right)$$

$$\frac{\partial u_1\left(q_1^H,q_2\right)}{\partial q_1^H}=a-c-2q_1^H-q_2\stackrel{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad {q_1^H}^*=\frac{a_H-c-q_2}{2}\ .$$
$$\frac{\partial u_1\left(q_1^L,q_2\right)}{\partial q_1^L}=a-c-2q_1^L-q_2\stackrel{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad {q_1^L}^*=\frac{a_L-c-q_2}{2}\ .$$
$$\frac{\partial u_2\left(q_1^L,q_1^H,q_2\right)}{\partial q_2}=\theta a^L+(1-\theta)a^H-\theta q_1^L-(1-\theta)q_1^H-2q_2-c\stackrel{!}{=}0$$
$$\Rightarrow\quad q_2^*=\frac{\theta a^L+(1-\theta)a^H-\theta q_1^L-(1-\theta)q_1^H+c}{2}\ .$$

הפתרון למערכת זו הוא

$$\begin{aligned} q_2^* &= \frac{\theta a_H + (1-\theta)a_L - c}{3} \\ q_1^H &= \frac{(3-\theta)a_H - (1-\theta)a_L - 2c}{6} \\ q_1^L &= \frac{(2+\theta)a_L - \theta a_H - 2c}{6} \end{aligned}$$

התנאים עבורם $q_2 \geq 0$ הם

$$q_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \theta a_H + (1-\theta)a_L - c \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \theta \geq \frac{c - a_L}{a_H - a_L} \ .$$

$$q_1(a_L) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(2+\theta)a_L - \theta a_H - 2c}{6} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \theta \leq \frac{2(c - a_L)}{a_H - a_L} \ .$$

$$q_1(a_H) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(3-\theta)a_H - (1-\theta)a_L - 2c}{6} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \theta \leq \frac{2c - 3a_H + a_L}{a_H - a_L} \ .$$

■