

## **פתרונות**

### **חישוביות וסיבוכיות**

**מועד ב'**

### **פתרון לדוגמא**

ד"ר יוחאי טויטו, ד"ר ירמייהו מילר.

סמסטר א, תשפ"ה'

מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הין פתרונות לדוגמא. ניתן לפתרו חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

עמוד 1 מתוך 10

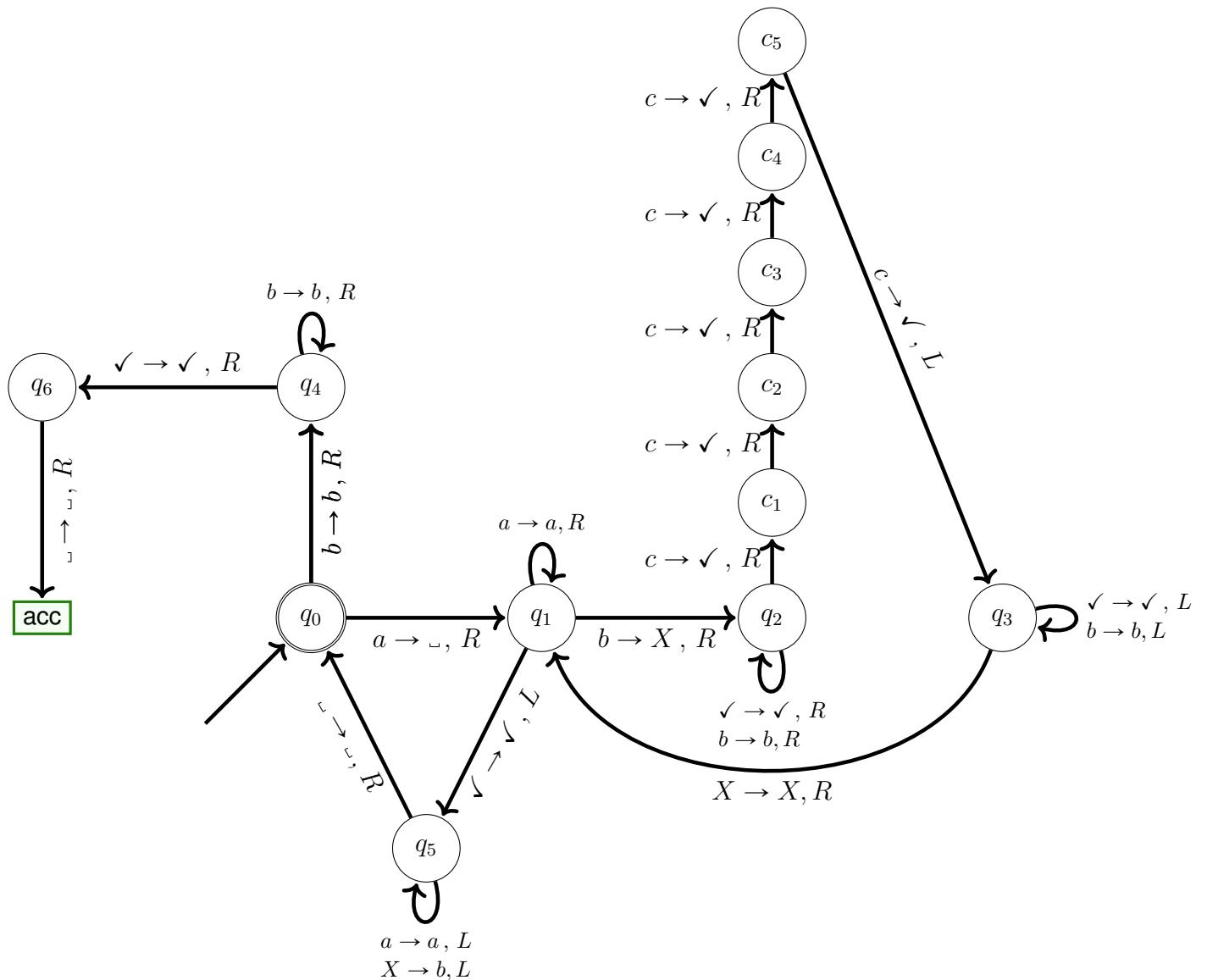
**המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון**

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד 7 בוטינסקי 84 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il) | חייג: \*טפסת

## שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

### סעיף א' (10 נקודות)

כל מעברים לא מופיעים בתרשים, עוברים למצוב rej.



עמוד 2 מתוך 10

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

המפוס באר שבע ביאליק פינת בל 84100 | המפוס אשדוד 7 בוטינסקי, 84 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il) | חייג: \*

## פתרונות

### סעיף ב' (10 נקודות)

$$\sigma \in \{0, \dots, 9\} , \quad \tau \in \{0, \dots, 9, *\} .$$

מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזזה	תנאי
$X.*.*$	$\sigma$	$X.\sigma.*$	✓	$R$	
$X.*.*$	✓	$X.*.*$	∅	$R$	
$X.\sigma.*$	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	$X.\sigma.*$	∅	$R$	
$X.\tau.*$	#	$Y.\tau.*$	∅	$R$	
$Y.\tau.*$	$\sigma$	$Y.\tau.\sigma$	✓	$R$	
$Y.\tau.*$	✓	$Y.\tau.*$	∅	$R$	
$Y.\tau.\sigma$	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	$Y.\tau.\sigma$	∅	$R$	
$Y.\tau_1.\tau_2$	#	$Z.\tau_1.\tau_2$	∅	$R$	
$Z.\tau_1.\tau_2$	✓	$Z.\tau_1.\tau_2$	∅	$R$	
$Z.\tau_1.\tau_2$	$\sigma$	back	✓	$L$	$\sigma \neq \tau_1 \wedge \sigma \neq 2\tau_2 \wedge \sigma \geq \tau_1 + \tau_2$
$Z.*.*$	—	acc	∅	$R$	
back	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	back	∅	$L$	
back	—	$X.*.*$	∅	$R$	

כל שאר המעברים עוברים ל  $re$ .

### שאלה 2: וריאציות על מכונות טיורינג (20 נקודות)

#### כיוון ראשון

עמוד 3 מתוך 10

**המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון**

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בל 84100 | קמפוס אשדוד צבティנסקי 84 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il) | ח揖ג: \*טפסת

## פתרונות

תהי

$$M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O) ,$$

במודל O החד כיווני. נבנה מכונה

$$M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T) ,$$

שકולה במודל הדו כיווני T.

רכיבי המ"ט  $M^T$  זהים לאלו של המ"ט  $M^O$ , מלבד מהתמונה שהראש של  $M^O$  לא זו מעבר לקצה השמאלי של הקלט.

לכן כדי ש-  $M^T$  תהיה שколה ל-  $M^O$  יש להוסיף מעברים לפונקציית המעברים של  $M^T$  כדי שהראש של  $M^T$  לא זו מעבר לקצה השמאלי של הקלט.

הרעיון הוא לסמן את המשבצת שמאלי לתחילת הקלט עם סימן מיוחד \$, ועוד להוסיף מעברים לפונקציית המעברים של  $M^T$  שmbטחים שאם הראש נמצא למשבצת שמוסמנת \$ אז הוא מיד חוזר ו-  $M^T$  חוזרת למצב ההתחלתי של המ"ט  $M^O$ . זה מתבצע על ידי הוספת השורות האלו למטה לטבלת המעברים של  $M^T$ :

תנאי	תזהה	כתובת	מצב חדש	סימון	מצב
$q_0^T$	$\sigma$	$q_{\$}$	$\emptyset$	$L$	
$q_{\$}$	-	$q_0^O$	\$	$R$	
$q$	\$	$q$	\$	$R$	$\forall q \in Q^O$

$$Q^T = Q^O \cup \{q_0^T, q_{\$}\} , \quad \Sigma^T = \Sigma^O , \quad \Gamma^T = \Gamma^O \cup \{ \$ \} , \quad \text{acc}^T = \text{acc}^O , \quad \text{rej}^T = \text{rej}^O .$$

### כיוון שני

תהי

$$M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T) ,$$

במודל T הדו כיווני. נבנה

$$M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O) ,$$

במודל O החד כיווני.

נתאר סימולציה של הוכנה החד-כיוונית במודל הדו-כיוונית.

הרעיון הוא לסמן קו על הסרט במשבצת באמצע הקלט, ואז לקלפל את הסרט בקו זהה. באופן זהה נקבל סרט עם קצה שמאלי ואינסוף ימינה. במשבצות של הסרט החדש המקלפל יש שני תווים, אחד למעלה ( $U$ ) ואחד למטה ( $D$ ), מלבד מנוקדות הקיפול שבו יש משבצת אחת שמוסמנת \$.

באופן זהה אפשר לסמלץ את המכונה  $M^O$  במכונה  $M^T$  על ידי הוספת המעברים הבאים לטבלת המעברים של  $M^T$ : לכל  $\Gamma^T, \sigma, \pi \in \Sigma^T$ :

עמוד 4 מתוך 10

## פתרונות

תנאי	תזזה	כתיבה	מצב חדש	סימן	מצב
תזזה שמאליה: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$	$\pi$	$p.D$	$\pi$	$\tau$	$q.D$
	$\sigma$				
תזזה שמאליה: $(q, \sqcup) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$	$\sigma$	$p.U$	$\tau$	$\pi$	$q.U$
	$\pi$				
תזזה ימינה: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$	$\sqcup$	$p.D$	$\sqcup$	$\tau$	$q.D$
תזזה ימינה: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$	$\sqcup$	$p.U$	$\tau$	$\sqcup$	$q.U$
תזזה ימינה: $(q, \sqcup) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$	$\sqcup$	$p.D$	$\sqcup$	$\tau$	$q.D$
תזזה ימינה: $(q, \sqcup) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$	$\sqcup$	$p.U$	$\tau$	$\sqcup$	$q.U$
תזזה שמאלה:	$\emptyset$	$q.U$	$\emptyset$	$R$	$q.D$
תזזה ימינה:	$\emptyset$	$q.D$	$\emptyset$	$R$	$q.U$
<b>אתחול</b>					
$q_0^O$	$\tau$	$q.\tau$	$\emptyset$	$R$	$\tau \in \Sigma \cup \{\sqcup\}$ $\sigma \in \Sigma$
$q.\sigma$	$\tau$	$q.\tau$	$\sqcup$	$R$	
$q.\sqcup$	$\sqcup$	back	$\sqcup$	$L$	
back	$\sqcup$	back	$\emptyset$	$L$	
back	$\emptyset$	$q_0^T.D$	$\emptyset$	$R$	
<b>סיום</b>					
$acc^T.D$	הכל	$acc^O$			
$acc^T.U$	הכל	$acc^O$			
$rej^T.D$	הכל	$rej^O$			
$rej^T.U$	הכל	$rej^O$			
<b>כל השאר עובריסל-זע</b>					

עמוד 5 מתוך 10

**המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון**

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בל 84100 | קמפוס אשדוד צ'טוטינסקי 84 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il) | ח揖ג: \*

$$\Gamma^O \supseteq (\Gamma^T \times \Gamma^T) \cup \{ \$ \} .$$

### **שאלה 3: התזה של צ'רץ'-טיירינג (20 נקודות)**

#### **סעיף א' (10 נקודות)**

$$S \rightarrow \$Ca\# \rightarrow \$aaC\# \rightarrow \$aaE \rightarrow \$aEa \rightarrow \$Eaa \rightarrow aa$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \$Ca\# \rightarrow \$aaC\# \rightarrow \$aaD\# \rightarrow \$aDa\# \rightarrow \$Daa\# \rightarrow \$Caa\# \\ &\rightarrow \$aaCa\# \rightarrow \$aaaaC\# \rightarrow \$aaaaE \rightarrow \$aaaEa \rightarrow \$aaEaa \rightarrow \$aEaaa \rightarrow \$Eaaaa \\ &\rightarrow aaaa \end{aligned}$$

באמצעות אינדוקציה על  $k$  ניתן להוכיח כי

$$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid w = \varepsilon \vee (w = a^{2^n}, n \in \mathbb{N}) \} .$$

#### **סעיף ב' (10 נקודות)**

$$S \rightarrow aBC \rightarrow abC \rightarrow abc$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSBC \rightarrow aaBCBC \rightarrow aaBHBC \rightarrow aaBBCC \rightarrow aabBCC \rightarrow aabbCC \\ &\rightarrow aabbcC \rightarrow aabbcc . \end{aligned}$$

אפשר להוכיח, ע"י אינדוקציה על  $n$ , כי

$$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid w = a^n b^n c^n, n \in \mathbb{N}^+ \} .$$

### **שאלה 4: אי כריעות (20 נקודות)**

עמוד 6 מתוך 10

**המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון**

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד 7 בוטינסקי 84 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il) | חייג: \*טפסת

## פתרונות

### סעיף א' (10 נקודות)

נבנה מ"ט א-דטרמיניסטי  $M_{L_{\geq 3}}$  המכrlעה את  $L_{\geq 3}$ .

התיאור הבא הוא תיאור של תוכנית א-דטרמיניסטי של המוכנת טירינג  $.M_{L_{\geq 3}}$

**על קלט  $x$ :**

1.  $M_{L_{\geq 3}}$  בודקת האם הקלט  $x$  הוא מכונת טירינג.

אם לא אז  $M_{L_{\geq 3}}$  דוחה.

2.  $M_{L_{\geq 3}}$  בוחרת באופן א-דטרמיניטי 3 מילימ  $w_1, w_2, w_3$ .

- מרים את  $M$  על  $w_1$ .

- \* אם  $M$  דוחה  $\Leftarrow M_{L_{\geq 3}}$  דוחה.

- מרים את  $M$  על  $w_2$ .

- \* אם  $M$  דוחה  $\Leftarrow M_{L_{\geq 3}}$  דוחה.

- מרים את  $M$  על  $w_3$  ועונה כמוות.

נכונות.

$$|L(M)| \geq 3 \dashv x = \langle M \rangle \Leftarrow x \in L_{\geq 3}$$

$$\Leftarrow \exists 3 \text{ מילימ } w_1, w_2, w_3 \text{ המתקבלים ב- } M.$$

$$\Leftarrow \exists \text{ ריצה של } M_{L_{\geq 3}} \text{ בה תבחר את } w_1, w_2, w_3 \text{ ותריץ עליהם את } M \text{ ותקבל}$$

$$\text{מקבלת את } x.$$

$$\Leftarrow x \notin L_{\geq 3} \text{ שני מקדים:}$$

$$\text{מצב 1. } \langle M \rangle \Leftarrow x \neq \langle M \rangle \text{ דוחה את } L.$$

$$\text{מצב 2. } |L(M)| < 3 \dashv x = \langle M \rangle$$

$$\Leftarrow \text{ לכל 3 מילימ שונות } w_1, w_2, w_3 \text{ לפחות אחת מהן לא מקבלת ב- } M.$$

$$\Leftarrow \text{ בכל ריצה של } M_{L_{\geq 3}} \text{ בה היא תבחר 3 מילימ } w_1, w_2, w_3 \text{ השונות זו מזו, ולפחות אחת הריצות}$$

$$\text{של } M \text{ על מילימ אלו תדחה או לא תעוצר}$$

$$\Leftarrow \text{ בכל ריצה של } M_{L_{\geq 3}} \text{ על } x, M_{L_{\geq 3}} \text{ תדחה או לא תעוצר}$$

$$\Leftarrow \text{ לא מקבלת את } x.$$

### סעיף ב' (10 נקודות)

נבנה רדוקציה מ-  $A_{TM}$

הfonקציית הרדוקציה היא:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

## פתרונות

כאשר  $M$  היא מ"ט הדוחה כל קלט ו-  $M'$  היא מ"ט שעלה כל קלט  $x$  מריצה את  $M$  ועונה כמוות.

**אבחנה**

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

כוננות הרדוקציה

**נניח ש-**  $x \in A_{TM}$

- . $w \in L(M)$  -**1**  $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$
- . $f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow$
- . $L(M') = \Sigma^* \Leftarrow$
- . $|L(M')| = \infty \Leftarrow$
- . $f(x) \in L_{\geq 3} \Leftarrow$

**נניח ש-**  $x \notin A_{TM}$   
או יש שני מקרים:

**מצב 1:**  $x \neq \langle M, w \rangle$

- . $|L(M_\emptyset)| = 0$  -**1**  $f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \Leftarrow$
- . $f(x) \notin L_{\geq 3} \Leftarrow$

**מצב 2:**  $x \in \langle M, w \rangle$

- . $f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow$
- . $L(M') = \emptyset \Leftarrow$
- . $|L(M')| = 0 \Leftarrow$
- . $f(x) \notin L_{\geq 3} \Leftarrow$

## שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

**סעיף א' (8 נקודות)**

בנייה פונקציית הרדוקציה  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  שמוגדרת

$$f(\langle S, t \rangle) = \langle A \rangle$$

כאשר  $\langle A \rangle$  קלט של  $SUBSETSUM$  ו-  $\langle S, t \rangle$  קלט של  $PARTITION$

עמוד 8 מתוך 10

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד צבוטינסקי 84 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il) | חייג: \*

## **פתרונות**

$$\sigma = \sum_{x \in S} x \text{ י'נ' } (1)$$

2) נגדיר את הקבוצה החדשה  $A$  על ידי הוספת האיבר  $2t - \sigma$  לקבוצת  $S$ :

$$A = S \cup \{\sigma - 2t\}.$$

### **סעיף ב' (6 נקודות)**

כין

**בנייה ש-**  $\langle S, t \rangle \in SUBSETSUM$

$\leftarrow \text{קיימת תת-קבוצה } S \subseteq Y \text{ כך ש-} y$

$$\sum_{x \in A} x = \sum_{x \in S} x + \sigma - 2t = 2\sigma - 2t \Leftarrow$$

$\Leftarrow$  אם נגדיר  $A_2 = A \setminus A - 1 A_1 = Y \cup \{\sigma - 2t\}$

$$\sum_{x \in A_1} x = \sum_{x \in Y} x + \sigma - 2t = t + \sigma - 2t = \sigma - t$$

121

$$\sum_{x \in A_2} x = \sum_{x \in A \setminus A_1} x = \sum_{x \in A} x - \sum_{x \in A_1} x = 2\sigma - 2t - (\sigma - t) = \sigma - t .$$

$$\sum_{x \in A_1} x = \sum_{x \in A_2} x = \frac{1}{2} \sum_{x \in A} x \Leftarrow$$

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap (A \setminus A_1) = \emptyset \quad \blacksquare$$

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A \setminus A_1) = A$$

**קיימת חלוקה של**  $A$  **של**  $A_1, A_2 \subset A$   $\Leftarrow$

$.f(x) = \langle A \rangle \in PARTITION \Leftarrow$

כ'יל ⇒

**נניח ש-**  $\langle A \rangle \in PARTITION$

$\Leftarrow$  קיימות תת-קבוצות  $A_1, A_2 \subseteq S'$  כך ש:

$$\sum_{x \in A_1} x = \sum_{x \in A_2} x = \frac{1}{2} \sum_{x \in A} x$$

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap (A \setminus A_1) = \emptyset$$

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A \setminus A_1) = A$$

## פתרונות

$$\begin{aligned}
 & \sigma = \sum_{x \in S} x \leq t \text{ כאשר } A = \{\sigma - 2t\} \cup S \text{ קבוצת שלמים ו-} \\
 & \quad .S = A \setminus \{\sigma - 2t\} \Leftarrow \text{קיימת הקבוצה} \\
 & \text{מכיוון ש: } S \cup \{x\} \text{ מהוות חלוקה של } A \text{ אז } A_1, A_2 \text{ או } A_1 \text{ או } A_2 \\
 & \quad \text{ללא הגבתת כלויות נניח ש: } \{\sigma - 2t\} \in A_1 \\
 & \quad .A_1 \setminus \{\sigma - 2t\} \Leftarrow \text{קיימת הקבוצה} \\
 & \quad \text{נגדיר הקבוצה:} \\
 & Y = A_1 \setminus \{\sigma - 2t\} \subseteq A \setminus \{\sigma - 2t\} = S . \\
 & \sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in A_1} y - (\sigma - 2t) = \frac{1}{2} \sum_{y \in A} y - (\sigma - 2t) = \frac{1}{2} (2\sigma - 2t) - (\sigma - 2t) = t . \\
 & \sum_{y \in Y} y = t \text{vr ש: } Y \subseteq S \Leftarrow \text{קיימת תת-קבוצה } S \text{vr ש: } \\
 & \quad .\langle S, t \rangle \in SUBSETSUM \Leftarrow
 \end{aligned}$$

### סעיף ג' (6 נקודות)

הfonkzit הurdokzit  $f$ , על קלט  $\langle S, t \rangle$  מחרירה את הפלט  $\langle A \rangle$  כאשר  $\{ \sigma - 2t \} \cup S = A$

לכן, על קלט  $\langle S, t \rangle$  הfonkzit  $f$  תבצע לכך:

**שלב 1** מחשבת את הסכום  $\sigma$  של כל האיברים שבקבוצה  $S$

**שלב 2** מחשבת את החישור  $2t - \sigma$ .

**שלב 3** בונה את הקבוצה  $\{ \sigma - 2t \} \cup S$ .

נסמן ב-  $n = |\langle S, t \rangle|$  אורך הקלט.

- **שלב (1)** עולה  $O(|S|)$  צעדים.

- **שלב (2)** עולה  $O(|S|)$  צעדים.

- **שלב (3)** עולה  $n$  צעדים לכל היוטר.

לכן בסה"כ הסיבוכיות זמן של  $f$  היא:

$$O(|S|) + O(|S|) + O(n) = O(n) .$$