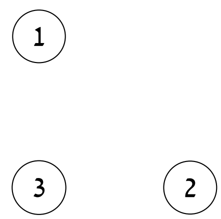
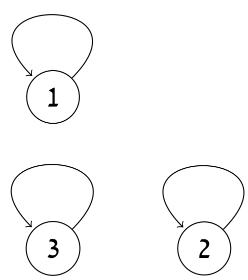
עבודה עצמית 4

שאלה 1

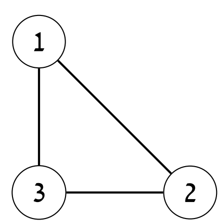
א) מצאו את מספר מסלולים שונים של אורך n (n שלם) בין קדקוד 1 לבין קדקוד 3.



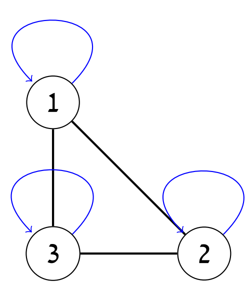
ב) מצאו את מספר המסלולים של אורך n (n שלם) בין קדקוד 2 לבין קדקוד 3.



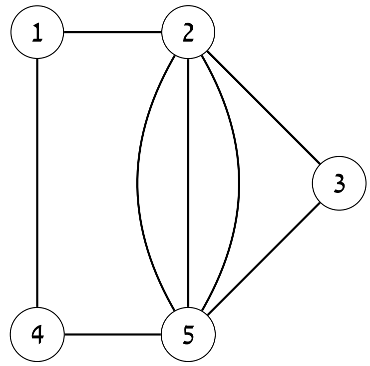
ג) מצאו את מספר המסלולים של אורך 4 בין קדקוד 1 לבין קדקוד 2.



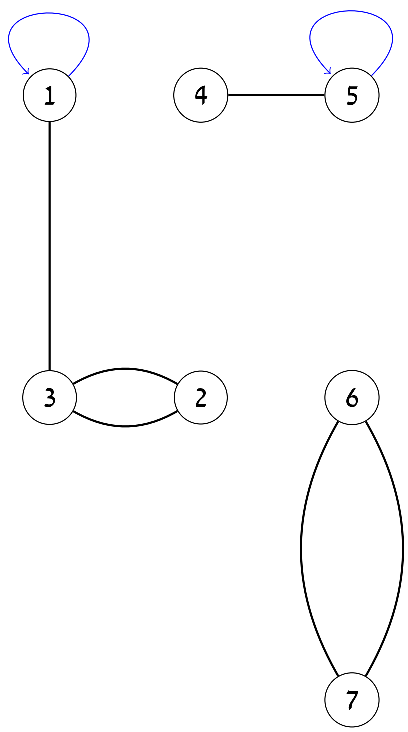
ד) עבור הגרף הבא הוכיחו כי בין כל זוג קדקודים קיים אותו מספר מסלולים של אורך n (n שלם).



ה) מצאו את מספר המשלולים של אורך 3 בין קדקוד 2 לבין קדקוד 3.

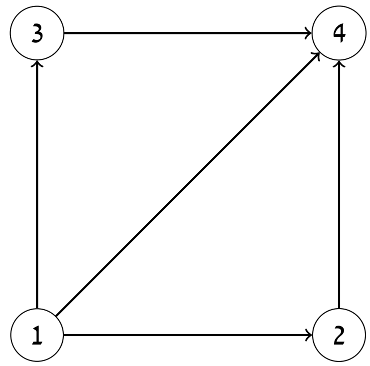


ו) מצאו את מספר המשלולים של אורך 3 בין קדקוד 2 לבין קדקוד 3.

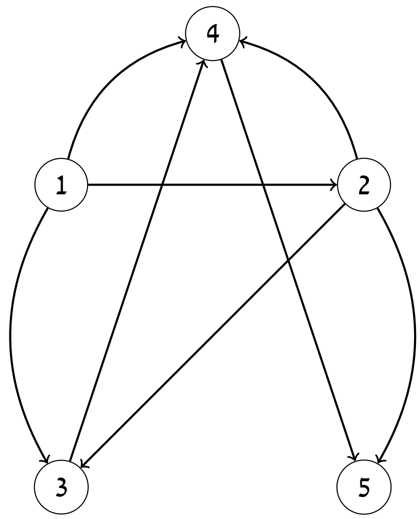


שאלה 2

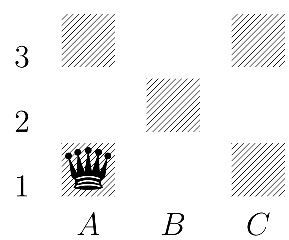
א) עבור הגרף המכוון הבא מצאו את מספבר המסלולים הכולל בין קדקוד 1 לבין קדקוד 4.



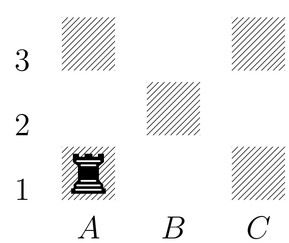
ב) עבור הגרף המכוון הבא מצאו את מספבר המסלולים הכולל בין קדקוד 1 לבין קדקוד 5.



שאלה 3 מלכה מונחת על המשבצת $A1$ כמתואר למטה. המלכה יכולה לעבור ימינה, למעלה, או בכיוון אלכסוני למעלה וימינה. מצאו את מספר המסלולים האפשריים הכולל שקיימים ממשבצת $A1$ למשבצת $B3$.



שאלה 4 צריח מונחת על המשבצת $A1$ כמתואר למטה. הצריח יכול לנוע ימינה או למעלה כמה מספר משבצות שהוא רוצה. מצאו את מספר המסלולים האפשריים הכולל שקיימים ממשבצת $B2$ למשבצת $C3$.



פתרונות

שאלה 1

א) מטריצה שכנות $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

לכן $(A^n)_{13} = 0$ לכן לא קיים מסלול של אורך n לכל n שלם בין קדקוד 1 לבין קדקוד 3.

ב) מטריצה שכנות $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

לכן $(A^n)_{23} = 0$ לכן לא קיים מסלול של אורך n לכל n שלם בין קדקוד 1 לבין קדקוד 3.

ג) מטריצה שכנות $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$(A^4)_{12} = 5$. לכן קיימים 5 מסלולים שונים בין קדקוד 1 לבין קדקוד 2.

ד) מטרצה שכנות $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. על ידי אינדוקציה אפשר להוכיח כי

$$A^n = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(באופן כללי אם M מטריצה $k \times k$ ו- $M_{ij} = 1$ לכל $1 \leq i, j \leq k$ כלומר כל איבר של M שווה ל- 1 אז $M^n = k^{n-1} M$). לכן מספר המסלולים שונים בין כל שתי נקודות בגרף של אורך n הוא 3^{n-1}.

ה) מטריצה שכנות
$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&1\\1&0&1&3&0\\0&1&0&1&0\\0&3&1&0&1\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$
$$\begin{pmatrix}0&15&4&1&6\\15&6&12&40&1\\4&12&6&12&4\\1&40&12&6&15\\6&1&4&15&0\end{pmatrix}.$$
$(A^3)_{23}=12$ לכן קיימים 12 מסלולים שונים בין קדקדוד 2 לבין קדקוד 3.

ו) מטריצה שכנות
$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0&0\\1&2&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&2\\0&0&0&0&0&2&0\end{pmatrix}.$$
$$A^3=\begin{pmatrix}3&2&6&0&0&0&0\\2&0&10&0&0&0&0\\6&10&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&2&0&0\\0&0&0&2&3&0&0\\0&0&0&0&0&0&8\\0&0&0&0&0&8&0\end{pmatrix}.$$
$(A^3)_{23}=10$ לכן קיימים 10 מסלולים שונים בין קדקדוד 2 לבין קדקוד 3.

שאלה 2

א) מטריצה שכנות:
$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$
$$I_{4\times4}-A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$
$I-A$ מטריצה משולשית לכן הדטרמיננטה שווה למכפלה של האיברים על האלכסון:
$$|I-A|=1\ .$$
המספר המסלולים הכולל בין קדקוד 1 לבין קדקוד 4 שווה ל- $(I-A)^{-1}_{1,4}$ כלומר האיבר ה- $(1,4)$ של ההופכית של $I-A$. נשתמש בנוסחה
$$M^{-1}_{ij}=\frac{C_{ji}}{|M|}$$

כאשר C_{ji} הקופקטור של האיבר j,i של המטירצה M (שימו לב הסדר של האינדקסים נהפכו). לכן

$$(I-A)^{-1}_{1,4}=\frac{C_{4,1}}{|I-A|}=\frac{C_{4,1}}{1}$$

כאשר $C_{4,1}$ הקופקטור ה- $(4,1)$ של המטירצה $I-A$, אשר מתקבל על ידי למחוק את הושרה והעמודה של האיבר $(4,1)$ ולחשב את הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת, ולהכפיל ב- $(-1)^{4+1}=-1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{41}=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=3\ .$$

לכן

$$(I-A)^{-1}_{1,4}=\frac{C_{4,1}}{|I-A|}=\frac{3}{1}=3$$

ולכן קיימים 3 מסלולים שונים הכולל בין קדקוד 1 לבין קדקוד 4 של הגרף.

ב) מטריצה שכנות

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_{5\times 5}-A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

$I-A$ מטריצה משולשית לכן הדטרמיננטה שווה למכפלה של האיברים על האלכסון:

$$|I-A|=1\ .$$

המספר המסלולים הכולל בין קדקוד 1 לבין קדקוד 4 שווה ל- $(I-A)^{-1}_{1,5}$ כלומר האיבר ה- $(1,5)$ של ההופכית של $I-A$. נשתמש בנוסחה

$$M^{-1}_{ij}=\frac{C_{ji}}{|M|}$$

כאשר C_{ji} הקופקטור של האיבר j,i של המטירצה M (שימו לב הסדר של האינדקסים נהפכו). לכן

$$(I-A)^{-1}_{1,5}=\frac{C_{5,1}}{|I-A|}=\frac{C_{5,1}}{1}$$

כאשר $C_{5,1}$ הקופקטור ה- $(5,1)$ של המטירצה $I-A$, אשר מתקבל על ידי למחוק את הושרה והעמודה של האיבר $(5,1)$ ולחשב את הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת, ולהכפיל ב- $(-1)^{4+1}=-1$:

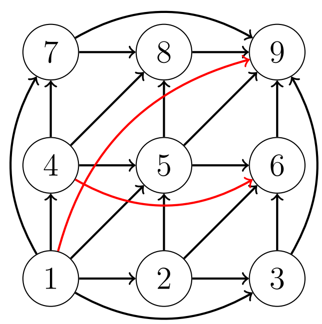
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{51}=(-1)^{5+1}\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=5\ .$$

לכן

$$(I-A)^{-1}_{1,5} = \frac{C_{5,1}}{|I-A|} = \frac{5}{1} = 5$$

ולכן קיימים 5 מסלולים שונים הכולל בין קדקוד 1 לבין קדקוד 5 של הגרף.

שאלה 3



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

$$I-A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

המטריצה משולשית לכן הדטרמיננטה שווה למכפלה של האיברים על האלכסון:

$$|I-A| = 1 \ .$$

המספר המסלולים הכולל בין קדקוד 1 לבין קדקוד 8 שווה ל- $(I-A)^{-1}_{1,8}$ כלומר האיבר ה- $(1,8)$ של ההופכית של $I-A$. נשתמש בנוסחה

$$M^{-1}_{ij} = \frac{C_{ji}}{|M|}$$

כאשר C_{ji} הקופקטור של האיבר j,i של המטירצה M (שימו לב הסדר של האינדקסים נהפכו). לכן

$$(I-A)^{-1}_{1,8} = \frac{C_{8,1}}{|I-A|} = \frac{C_{5,1}}{1}$$

כאשר $C_{8,1}$ הקופקטור ה- $(8,1)$ של המטירצה $I-A$, אשר מתקבל על ידי למחוק את הושרה והעמודה של האיבר $(8,1)$ ולחשב את הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת, ולהכפיל ב- $(-1)^{8+1} = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

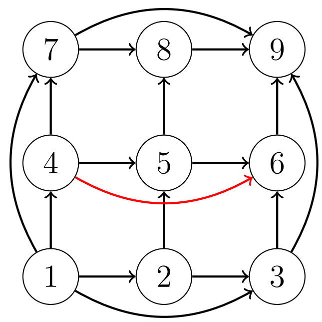
$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad C_{81} =& (-1)^{8+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
=& - \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
=& - \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
=& (-1) \left(-1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right) \\
=& 5
\end{aligned}$$

לכן

$$(I-A)^{-1}_{1,8}=\frac{C_{8,1}}{|I-A|}=\frac{5}{1}=5$$

ולכן קיימים 5 מסלולים שונים הכולל בין קדקוד 1 לבין קדקוד 8 של הגרף, ז"א קיימים 5 מסלולים שוים בין משבצת $A1$ לבין משבצת $B3$.

שאלה 4



$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$I-A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1&0&0&-1&0&0\\0&1&-1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&-1&0&0&-1\\0&0&0&1&-1&-1&-1&0&0\\0&0&0&0&1&-1&0&-1&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&-1\\0&0&0&0&0&0&1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

המטריצה משולשית לכן הדטרמיננטה שווה למכפלה של האיברים על האלכסון:

$$|I-A|=1\ .$$

המספר המסלולים הכולל בין קדקוד 4 לבין קדקוד 9 שווה ל- $(I-A)^{-1}_{4,9}$ כלומר האיבר ה- $(4,9)$ של ההופכית של $I-A$. נשתמש בנוסחה

$$M^{-1}_{ij}=\frac{C_{ji}}{|M|}$$

כאשר C_{ji} הקופקטור של האיבר j,i של המטירצה M (שימו לב הסדר של האינדקסים נהפכו). לכן

$$(I-A)^{-1}_{4,9}=\frac{C_{4,9}}{|I-A|}=\frac{C_{9,4}}{1}$$

כאשר $C_{9,4}$ הקופקטור ה- $(9,4)$ של המטירצה $I-A$, אשר מתקבל על ידי למחוק את הושרה והעמודה של האיבר $(9,4)$ ולחשב את הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת, ולהכפיל ב- $(-1)^{9+4}=-1$:

$$\begin{pmatrix}
1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1\\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad C_{94}=(-1)^{9+4}\begin{vmatrix}
1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1\\
0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{vmatrix}$$
$$=5$$

לכן

$$(I-A)^{-1}_{4,9}=\frac{C_{9,4}}{|I-A|}=\frac{5}{1}=5$$

ולכן קיימים 5 מסלולים שונים הכולל בין קדקוד 4 לבין קדקוד 9 של הגרף, ז"א קיימים 5 מסלולים שוים בין משבצת $B2$ לבין משבצת $C3$.