

עבודה 10: לכסון אוניטרי

שאלה 1 לכל מטריצה נתונה A מצאו מטריצה אוניטרית Q ומטריצה אלכסונית D כך ש- $D = Q^{-1}AQ$.

(א) $A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix}$

(ב) $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2+3i & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2-3i \end{pmatrix}$

(ג) $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$

(ד) $A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & 4 \\ -2 & 19 & -2 \\ 4 & -2 & 22 \end{pmatrix}$

שאלה 2 תהי $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 4 & -33i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3i \\ 33i & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -17i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3i & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -9i \\ 3i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9i & 93 \end{pmatrix}$

(א) הוכיחו כי A לכסינה אוניטרית.

(ב) הוכיחו כי כל הערכים עצמיים של A יהיו ממשיים.

(ג) הוכיחו כי קיים ערך עצמי λ של A כך ש- $|\lambda| \neq 1$.

(ד) הוכיחו כי כל הערכים עצמיים של A^{100} יהיו ממשיים.

שאלה 3 תהי $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{3} & i \end{pmatrix}$

(א) ללא חישוב ישר, הוכיחו כי A לכסינה אוניטרית.

(ב) ללא חישוב ישר, הוכיחו כי לא כולם הערכים העצמיים של A ממשיים.

(ג) מצאו Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $A = QDQ^{-1}$.

שאלה 4 תהי $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -i & 0 & 0 \\ i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & i \\ 0 & 0 & -i & 4 \end{pmatrix}$$

(א) ללא חישוב ישר, הוכיחו כי A לכסינה אוניטרית.

(ב) הוכיחו כי כל הערכים עצמיים של A ממשיים.

(ג) מצאו Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $A = QDQ^{-1}$.

שאלה 5 תהי $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -33i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3i \\ 33i & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -17i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3i & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -9i \\ 3i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9i & 93 \end{pmatrix}$$

(א) הוכיחו כי A לכסינה אוניטרית.

(ב) הוכיחו כי כל הערכים עצמיים של A יהיו ממשיים.

(ג) הוכיחו כי קיים ערך עצמי λ של A כך ש- $|\lambda| \neq 1$.

(ד) הוכיחו כי כל הערכים עצמיים של A^{100} יהיו ממשיים.

תשובות

שאלה 1

(א)

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \lambda - (1+i) & -1 \\ 1 & \lambda - (1-i) \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{3} (\lambda^2 - (1-i)\lambda - (1+i)\lambda + 2 + 1) \\ &= \frac{1}{3} (\lambda^2 - 2\lambda + 3) \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$$\lambda = \frac{1 - \sqrt{2}i}{\sqrt{3}} \text{ ו } \lambda = \frac{1 + \sqrt{2}i}{\sqrt{3}}$$

מרחבים עצמיים:

$$V_{(1+\sqrt{2}i)/2} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -i(\sqrt{2}+1) \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_{(1-\sqrt{2}i)/2} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} i(\sqrt{2}-1) \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}+4}} \\ \frac{i(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{i(-\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2\sqrt{2}+4}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

(ב)

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2+3i & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2-3i \end{pmatrix}.$$

ערכים עצמיים:

$$\lambda = \frac{1}{2} (1 - i\sqrt{3}) \text{ ו } \lambda = \frac{1}{2} (1 + i\sqrt{3})$$

מרחבים עצמיים:

$$V_{(1+\sqrt{3}i)/2} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} i(\sqrt{3}+2) \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_{(1-\sqrt{3}i)/2} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} i(\sqrt{3}-2) \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i\sqrt{\sqrt{3}+2} & \frac{i(\sqrt{3}-2)}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} \\ \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{3}+2}} & \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}) \end{pmatrix}.$$

(ג)

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}.$$

ערכים עצמיים:

$$\lambda = -i \text{ ו } \lambda = i$$

מרחבים עצמיים:

$$V_i = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -i(\sqrt{2}+1) \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_{-i} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} i(\sqrt{2}-1) \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{i(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2(\sqrt{2}+2)}} & \frac{i(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{2}+2)}} & \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & 4 \\ -2 & 19 & -2 \\ 4 & -2 & 22 \end{pmatrix}$$

(ד)

ערכים עצמיים:

$\lambda = 27$ מריבוי אלגברי 1
 $\lambda = 18$ מריבוי אלגברי 2.

מרחבים עצמיים:

$$V_{27} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_{18} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס אורתונורמלי:

$$U_{27} = \text{span} \left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad U_{18} = \text{span} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

■

שאלה 2

(א)

(ב)

(ג)

(ד)

שאלה 3

(א)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{3} & i \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5i & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} & -i \end{pmatrix}.$$

$$\bar{A} \cdot A = \begin{pmatrix} 12 & 22\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 22\sqrt{2} & 89 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 37 & -12i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 12i\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \bar{A} = \begin{pmatrix} 12 & 22\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 22\sqrt{2} & 89 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 37 & -12i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 12i\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix},$$

לכן $\bar{A} \cdot A = A \cdot \bar{A}$ לכן A נורמלית לכן A לכסינה אוניטרית.

- (ב) $\bar{A} \neq A$ לכן A לא צמודה לעצמה, אבל A נורמלית. הערכים עצמיים של מטריצה נורמלית ממשיים אם ורק אם המטריצה צמודה לעצמה. A לא צמודה לעצמה לפיכך לא כל הערכים עצמיים יהיו ממשיים.

(ג)

$$\begin{aligned} p_A(x) &= |xI - A| = \begin{vmatrix} x-2 & -2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -2\sqrt{2} & x-9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-5i & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} & x-i \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & x-9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-5i & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & x-i \end{vmatrix} \\ &= ((x-2)(x-9) - 8) ((x-5i)(x-i) + 12) \\ &= (x^2 - 11x + 10) (x^2 - 6ix + 7) \\ &= (x-10)(x-1)(x-7i)(x+i) \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

- 1. $\lambda = 10$ מריבוי אלגברי 1.
- 1. $\lambda = 7i$ מריבוי אלגברי 1.
- 1. $\lambda = -i$ מריבוי אלגברי 1.
- 1. $\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 10

$$\begin{aligned} (A - 10I) &= \begin{pmatrix} -8 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10+5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{3} & -10+i \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_4 \rightarrow (-10+5i)R_4 + 2\sqrt{3}R_3} \begin{pmatrix} -8 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10+5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 107-60i \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} -8 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10+5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ V_{10} &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $7i$

$$V_{7i} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{3}i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $-i$

$$V_{-i} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 1

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_{10} & u_{7i} & u_{-i} & u_1 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -i\sqrt{3} & \frac{i}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

שאלה 4

(א)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -i & 0 & 0 \\ i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & i \\ 0 & 0 & -i & 4 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -i & 0 & 0 \\ i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & i \\ 0 & 0 & -i & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{A} = A$$

לכן A צמודה לעצמה ולכן A נורמלית לכן A לכסינה אוניטרית.

(ב)

הערכים עצמיים של מטריצה נורמלית ממשיים אם ורק אם המטריצה צמודה לעצמה. A צמודה לעצמה לפיכך כל הערכים עצמיים יהיו ממשיים.

(ג)

ערכים עצמיים:

1. $\lambda = 5$ מריבוי אלגברי 1.

2. $\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 2.

1. $\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 5

$$V_5 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 3

$$V_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 1

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_5 & u_3 & u'_3 & u_1 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ i & -i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

שאלה 5