

פתרונות

חישוביות וסיבוכיות

מבחן לדוגמה 1

פתרון לדוגמא

ד"ר יוחאי טוויטו, , .

סמסטר א, תשפ"ה

מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הינן פתרונות לדוגמא. ניתן לפתור חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

עמוד 1 מתוך 10

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245,84 | www.sce.ac.il | חייג: ☎ **מפוזר**

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

(20 נקודות)

סעיף א' (15 נק')

שיטה 1

$$\sigma \in \{0, \dots, 9\}, \quad \tau \in \{0, \dots, 9, *\}.$$

פתרונות

מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
X^{**}	σ	$X\sigma^*$	\checkmark	R	
X^{**}	\checkmark	X^{**}	Ω	R	
$X\sigma^*$	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	$X\sigma^*$	Ω	R	
$X\tau^*$	$\#$	$Y\tau^*$	Ω	R	
$Y\tau^*$	σ	$Y\tau\sigma$	\checkmark	R	
$Y\tau^*$	\checkmark	$Y\tau^*$	Ω	R	
$Y\tau\sigma$	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	$Y\tau\sigma$	Ω	R	
$Y\tau_1\tau_2$	$\#$	$Z\tau_1\tau_2$	Ω	R	
$Z\tau_1\tau_2$	\checkmark	$Z\tau_1\tau_2$	Ω	R	
$Z\tau_1\tau_2$	σ	back	\checkmark	L	$\sigma \geq \tau_1 + \tau_2 \wedge \sigma \neq \tau_1 \wedge \tau_1 \neq * \wedge \tau_2 \neq *$
Z^{**}	\perp	acc	Ω	R	
back	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	back	Ω	L	
back	\perp	X^{**}	Ω	R	

פתרונות

שיטה 2

$$\sigma_i \in \{0, \dots, 9\} \ (1 \leq i \leq 3), \quad \tau \in \{0, \dots, 9, *\}.$$

מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
$X **$	σ_1	$X\sigma_1*$	✓	R	
$X **$	✓	$X **$	↻	R	
$X\sigma_1*$	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	$X\sigma_1*$	↻	R	
$X\tau*$	#	$Y\tau*$	↻	R	
$Y\sigma_1*$	σ_2	$Y\sigma_1\sigma_2$	✓	R	$\sigma_1 + \sigma_2 \leq 9$
$Y\tau*$	✓	$Y\tau*$	↻	R	
$Y\sigma_1\sigma_2$	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	$Y\sigma_1\sigma_2$	↻	R	$\sigma_1 + \sigma_2 \leq 9$
$Y\sigma_1\sigma_2$	#	$Z\sigma_1\sigma_2$	↻	R	$\sigma_1 + \sigma_2 \leq 9$
$Y **$	#	$Z **$	↻	R	
$Z\sigma_1\sigma_2$	✓	$Z\sigma_1\sigma_2$	↻	R	
$Z\sigma_1\sigma_2$	σ_3	back	✓	L	$\sigma_3 \geq \sigma_1 + \sigma_2 \wedge \sigma_3 \neq \sigma_1$
$Z **$	⌊	acc	↻	R	
back	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	back	↻	L	
back	⌊	$X **$	↻	R	

סעיף ב' (5 נק')

שאלה 2: וריאציות על מכונות טיורינג (20 נקודות)

עמוד 4 מתוך 10

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245,84 | חייג: 08-9400700 | www.sce.ac.il

פתרונות

(20 נקודות)

טענה:

המודל TS שקול למודל T .

הוכחה:

נוכיח כי:

\exists מ"ט במודל T אם \exists מ"ט שקולה במודל TS .

כיוון \Leftarrow

תהי

$$M_T = (Q_T, \Sigma_T, \Gamma_T, \delta_T, q_{0T}, \text{acc}_T, \text{rej}_T)$$

מ"ט ממודל T . נבנה מ"ט שקולה

$$M_{TS} = (Q_{TS}, \Sigma_{TS}, \Gamma_{TS}, \delta_{TS}, q_{0TS}, \text{acc}_{TS}, \text{rej}_{TS})$$

של המודל TS .

הפונקציית המעברים של M_T זהה לפונקציית המעברים של M_{TS} :

$$\forall q \in Q_T, \quad \delta_{TS}(q, \sigma) = \delta_T(q, \sigma, m), \quad m \in \{L, R\}.$$

כיוון \Rightarrow

תהי

$$M_{TS} = (Q_{TS}, \Sigma_{TS}, \Gamma_{TS}, \delta_{TS}, q_{0TS}, \text{acc}_{TS}, \text{rej}_{TS})$$

מ"ט ממודל TS . נבנה מ"ט שקולה

$$M_T = (Q_T, \Sigma_T, \Gamma_T, \delta_T, q_{0T}, \text{acc}_T, \text{rej}_T)$$

של המודל T .

הפונקציית המעברים של המודל TS זהה לפונקציית המעברים במודל T , מלבד התוספה התזוזה S , כאשר S מייצגת את המעבר שבו הראש לא זז.

ז"א הפונקציית המעברים של M_{TS} במצב שהראש זז ימינה או שמאלה זהה לפונקציית המעברים של M_T :

$$\begin{aligned} \delta_{TS}(q_1, \sigma) = \delta_{TS}(q_2, \tau, L) &\Rightarrow \delta_T(q_1, \sigma) = \delta_T(q_2, \tau, L), \\ \delta_{TS}(q_1, \sigma) = \delta_{TS}(q_2, \tau, R) &\Rightarrow \delta_T(q_1, \sigma) = \delta_T(q_2, \tau, R). \end{aligned}$$

עלינו לדמות את התזוזה S במכונה M_T .

עמוד 5 מתוך 10

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245, 84 | חייג: 08-9888888 | www.sce.ac.il

פתרונות

לשם כך, לכל מעבר

$$\delta_{TS}(q_1, \sigma) = (q_2, \tau, S)$$

של המ"ט M_{TS} נגדיר את המעבר הבא של המ"ט M_T :

$$\delta_T(q_1, \sigma) = (q_{1L}, \tau, R), \quad \delta_T(q_{1L}, \sigma) = (q_2, \sigma, L). \quad (*)$$

המעבר הזה במכונה M_T מדמה את מעבר שבו הראש נשאר במקום וכותב τ על σ .
לכן הקבוצת המצבים Q_{TS} של M_{TS} זהה לקבוצת המצבים Q_T של M_T מלבד המעבר (*):

$$Q_T = Q_{TS} \cup \{q_{iL} \mid q_i \in Q_{TS}\}.$$

שאלה 3: התזה של צ'רץ'-טיורינג (20 נקודות)

(20 נקודות)

השפה שעבורה עלינו למצוא דקדוק כללי היא

$$L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

הדקדוק הכללי הוא

$$G = (V, \Sigma, R, S)$$

כאשר

• V הקבוצת המשתנים:

$$V = \{A, B, [,], X, S\}.$$

• Σ הקבוצת הטרמינילים:

$$\Sigma = \{a\}$$

• R הקבוצת הכללים שמפורטים למטה.

• S המשתנה ההתחלתי

הכללים של הדקדוק הינם:

$$S \rightarrow [X], \quad (1)$$

$$X \rightarrow AXB, \quad (2)$$

$$X \rightarrow \varepsilon, \quad (3)$$

$$AB \rightarrow BaA, \quad (4)$$

$$Aa \rightarrow aA, \quad (5)$$

$$A] \rightarrow], \quad (6)$$

$$[B \rightarrow [, \quad (7)$$

$$[a \rightarrow a[, \quad (8)$$

$$[] \rightarrow \varepsilon. \quad (9)$$

פתרונות

הסבר של הכללים:

כללים	הסבר
(1) - (3)	יוצרים מילים מצורה $[A^n B^n]$
(4)	אות A עובר את אות B בכיוון הימין ויוצר אות a כל פעם. כתוצאה, לכל אות B אנחנו יוצרים n אותיות a . מכיון שיש n אותיות B אז בסה"כ אנחנו ניצור $n^2 = n \times n$ אותיות של a בסה"כ.
(5)	אות A עובר את אות a בכיוון הימין.
(6)	משתנה A מתעלם כאשר הוא מגיע לאות $] בסוף המילה.$
(7)	$[$ עובר את כל אות B בכיוון הימין ומאפס אות B כל פעם.
(8)	$[$ עובר את כל אות a בכיוון הימין.
(8)	$[]$ מתפטר.

שאלה 4: אי-כריעות (20 נקודות)

נתון
השפה $2MORE$ מוגדרת:

$$2MORE = \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid |L(M_1)| = |L(M_2)| + 2 \}.$$

במילים, $2MORE$ היא השפה שכוללת כל זוגות של מחרוזות של מכונות טיורינג $\langle M_1, M_2 \rangle$ כך שבשפה של M_1 יש בדיוק שתי מילים יותר מהשפה של M_2 .

הרעיון של ההוכחה
קיימת רדוקציה משפה E לשפה $2MORE$:

$$E \leq 2MORE,$$

כאשר $E = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset \}$. לפי משפט הרדוקציה:

• E לא כריעה $\Leftarrow 2MORE$ לא כריעה.

• E לא קבילה $\Leftarrow 2MORE$ לא קבילה.

עמוד 7 מתוך 10

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245, 84 | חייג: 08-9888888 | www.sce.ac.il

פתרונות

הרדוקציה

נבנה פונקציה הרדוקציה באופן הבא. בהינתן $\langle M \rangle$ קלט של E ניצור $\langle M_1, M_2 \rangle$ קלט של $2MORE$ כך שמתקיים:

$$\begin{aligned}\langle M \rangle \in E &\Rightarrow \langle M_1, M_2 \rangle \in 2MORE, \\ \langle M \rangle \notin E &\Rightarrow \langle M_1, M_2 \rangle \notin 2MORE.\end{aligned}$$

נגדיר את המכונות טיורינג M_1 ו- M_2 באופן הבא:

" M_1 על כל קלט x :"

(1 אם $(x == "a") \vee (x == "b")$ אז $acc \leftarrow M_1$.

(2 אחרת $rej \leftarrow M_1$."

" M_2 על כל קלט x :"

• מריצה את המכונה M על הקלט x ועונה כמוה.

נכונות הרדוקציה

אם $\langle M \rangle \in E$

$$L(M_2) = \emptyset \text{ ו- } L(M_1) = \{a, b\} \Leftarrow$$

$$|L(M_2)| = 0 \text{ ו- } |L(M_1)| = 2 \Leftarrow$$

$$|L(M_1)| = |L(M_2)| + 2 \Leftarrow$$

$$\langle M_1, M_2 \rangle \in 2MORE \Leftarrow$$

אם $\langle M \rangle \notin E$

$$L(M_2) \neq \emptyset \text{ ו- } L(M_1) = \{a, b\} \Leftarrow$$

$$|L(M_2)| > 0 \text{ ו- } |L(M_1)| = 2 \Leftarrow$$

$$|L(M_1)| < |L(M_2)| + 2 \Leftarrow$$

$$\langle M_1, M_2 \rangle \notin 2MORE \Leftarrow$$

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

פתרונות

פונקציית הרדוקציה:

אנחנו נגדיר פונקציית הרדוקציה f שבהינתן זוג $\langle G, k \rangle \in IS$ (הקלט של IS), תיצור $\langle G', k' \rangle \in CLIQUE$ (הקלט של $CLIQUE$), כלומר

$$f(\langle G, k \rangle) = \langle G', k' \rangle. \quad (*)1$$

כך שהתנאי הבא מתקיים:

$$\langle G, k \rangle \in IS \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in CLIQUE. \quad (*)2$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת לפי התנאים הבאים:

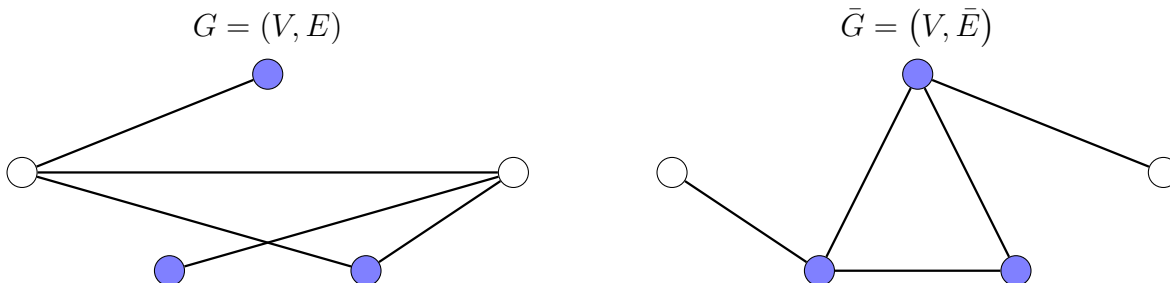
(1) בהינתן גרף $G = (V, E)$

אז $G' = (V, \bar{E})$ הוא הגרף המשלים, כאשר

$$\bar{E} = \{(u_1, u_2) \mid (u_1, u_2) \notin E\}.$$

(2) $k' = k$

כדוגמה: בהינתן הגרף $G = (V, E)$ שמכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל $k = 3$. הפונקציית הרדוקציה יוצרת את הגרף $\bar{G} = (V, \bar{E})$ ואת המספר $k' = k = 3$, כמתואר בתרשים למטה:



נכונות הרדוקציה

כעת נוכיח שמתקיים: $\langle G, k \rangle \in IS \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in CLIQUE$

כיוון \Leftarrow

בהינתן גרף $G = (V, E)$ ושלם k .

נניח כי $\langle G, k \rangle \in IS$.

$\Leftarrow G$ מכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל k לפחות.

פתרונות

G מכיל קבוצה בלתי תלוייה S בגודל k . \Leftarrow

\Leftarrow אם $u_1, u_2 \in S$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

כלומר, כל שני קדקודים ב- S **לא מחוברים** בצלע של G .

\Leftarrow אם $u_1, u_2 \in S$ אז $(u_1, u_2) \in \bar{E}$.

כלומר, כל שני קדקודים ב- S **מחוברים** בצלע של \bar{G} .

\Leftarrow הקבוצה S היא קליקה בגודל k של \bar{G} .

\Leftarrow הקבוצה S היא קליקה בגודל $k' = k$ של $G' = \bar{G}$.

$\Leftarrow \langle G', k' \rangle \in CLIQUE$

\Rightarrow כיוון

בהינתן גרף G' ושלם k' .

נניח כי $\langle G', k' \rangle \in CLIQUE$

$\Leftarrow \langle \bar{G}, k \rangle \in CLIQUE$ (כי על פי ההגדרה של הפונקציה הרדוקציה, $G' = \bar{G}$ ו- $k' = k$).

$\Leftarrow \bar{G}$ מכיל קליקה בגודל k לפחות.

$\Leftarrow \bar{G}$ מכיל קליקה C בגודל k .

\Leftarrow אם $u_1 \in C$ וגם $u_2 \in C$ אז $(u_1, u_2) \in \bar{E}$.

כלומר, כל שני קדקודים ב- C **מחוברים** בצלע של \bar{G} .

\Leftarrow אם $u_1 \in C$ וגם $u_2 \in C$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

כלומר, כל שני קדקודים ב- C **לא מחוברים** בצלע של הגרף G .

\Leftarrow הקבוצה C היא קבוצה בלתי תלוייה בגודל k של G .

$\Leftarrow \langle G, k \rangle \in IS$