

## חדו"א 2

מועד ב'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר,

תשפ"ג סמסטר ב'

השאלון מכיל עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

**בהצלחה!**

### הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

### חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס ( עמודים בפורמט A4), מצורפים לשאלון.

### אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות בלבד מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** בלבד מתוך **שתיים**.

### שאלות 1-2 חובה

### שאלה 1 (20 נק')

נתונה הפונקציה

$$f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2 - 5x - y + 7$$

(א) (10 נק') מצאו את נקודות המקסימום והמינימום המקומי של הפונקציה  $f(x, y)$ .

(ב) (10 נק') מצאו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימאלי אותם מקבלת הפונקציה  $f(x, y)$  בתחום החסום על ידי הקווים  $x = 0, y = 1, x + y = 3$ .

## שאלה 2 (22 נק')

(א) (10 נק') מצאו את תחום ההתכנסות של טור החזקות

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{4^n n \ln(n)}$$

וקבעו האם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר בנקודה  $x = -2$ .

(ב) (12 נק') סרטטו את תחום האינטגרציה, החליפו את סדר האינטגרציה וחשבו:

$$\int_0^1 dy \int_{2y-1}^y y dx$$

## יש לפתור 3 שאלות מבין השאלות 3-6

## שאלה 3 (16 נק')

נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = e^{xy} - z^2$  והנקודה  $M(2, 1, e)$ .

(א) (12 נק') מצאו את משוואת המישור המשיק למשטח הרמה של  $f(x, y, z)$  העובר דרך הנקודה  $M$ .

(ב) (4 נק') מצאו נקודה  $P(x, y, z)$  לאורך הישר

$$\begin{cases} \frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{1} \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\frac{df}{dMP}(M) = 0$$

שעבורה מתקיים

## שאלה 4 (16 נק')

(א) (12 נק') קבעו את המצב ההדדי בין המישור המשיק בנקודה  $P(1, 1, 0)$  למשטח

$$x^2y + xyz - 2y^2z + xz^2 + 2x + 3y + z = 6$$

לבין הישר

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$$

אם המישור והישר מקבילים, חשבו את המרחק ביניהם ואם הם נחתכים, מצאו את נקודת החיתוך.

## המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

**(ב) (4 נק') הוכיחו או הפריכו באמצעות דוגמא נגדית: אם  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  חסומה וחיובית אז  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת.**

## שאלה 5 (16 נק')

**(א) (10 נק') בהינתן הנקודות**

$$A(1, 0, 1), B(1, 2, -1), C(0, 1, -1), D(k^2, k-2, k)$$

מצאו את הערך  $k$  עבורו הנקודה  $D$  תהיה הקרובה ביותר למישור  $ABC$  וחשבו את נפח הפירמידה  $ABCD$ .

**(ב) (6 נק') הוכיחו כי אם לסדרה  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  קיים גבול, אז הוא יחיד.**

## שאלה 6 (16 נק')

נתון התחום המישורי

$$D : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ -x \leq y \leq \sqrt{3}x \end{cases}$$

**(א) (10 נק') סרטטו את התחום  $D$  וחשבו את השטח שלו.**

**(ב) (6 נק') חשבו את מסת התחום בסעיף א' בהינתן צפיפות המסה  $\mu(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .**

## יש לפתור שאלה 1 מבין השאלות 7-8

## שאלה 7 (10 נק')

נתונות הנקודות  $A(-1, 2, 4)$  ו- $B(2, 1, 1)$ . מצאו את הנקודה על מישור  $xz$  ששכום מרחקיה מהנקודות  $A$  ו- $B$  הוא מינימאלי.

## שאלה 8 (10 נק')

סדרה נתונה על ידי נוסחאת נסיגה (רקורסיה)

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{4a_n}{a_n + 2} \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

הראו כי לכל  $n$  מתקיים  $0 < a_n < 2$  וכי הסדרה  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  היא סדרה עולה. הסיקו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

## פתרונות

### שאלה 1

א) תחילה, נמצא את הנקודות הקריטיות של הפונקציה

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x + 3y - 5 \\ 3x - 2y - 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

זו מערכת לינארית של שתי משוואות בשני נעלמים כאשר הדטרמיננטה של מטריצת המקדמים היא

$$\text{ולכן קיים למערכת פתרון יחיד} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$$

$$x = 1, y = 1$$

כלומר, מתקבלות הנקודה הקריטית הבאה

$$P_1(1, 1)$$

בכדי לסווג את הנקודות הקריטיות, נחשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני ונשתמש במבחן הנגזרת השנייה

$$f''_{xx} = 2, f''_{yy} = -2, f''_{xy} = f''_{yx} = 3$$

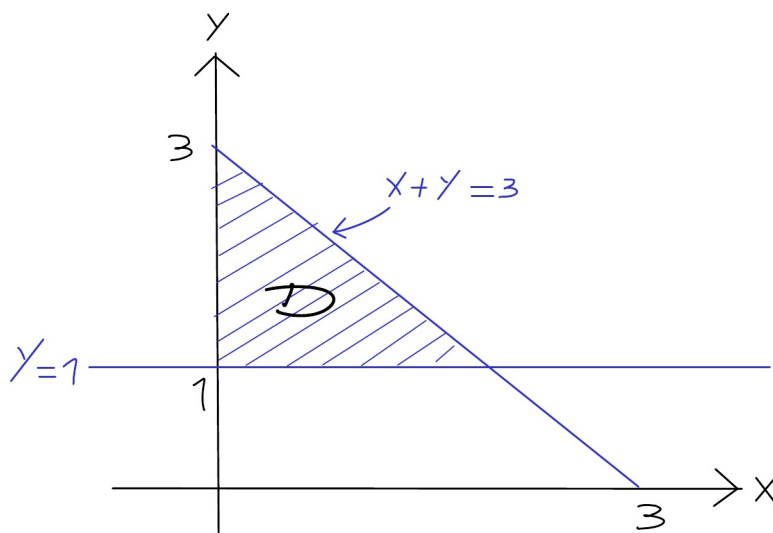
ולכן

$$\Delta(P_1) = 2 \cdot (-2) - 3^2 = -13 < 0$$

ולכן, הנקודה  $P_1$  היא נקודת אוכף.

ב) תחילה, נשים לב שהתחום בשאלה הוא המשולש שקודקודיו הם

$$P_2(0, 1), P_3(0, 3), P_4(2, 1)$$



ונשים לב שהנקודה  $P_1$  נמצאת בתוך התחום. כעת, נבדוק האם ישנן נקודות קריטיות בתנאי לאורך הצלעות של המשולש

• הישר האנכי נתון על ידי

$$\begin{cases} x = 0 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

ועל ידי הצבה של  $x = 0$  בפונקציה נקבל

$$g_1(y) = f(0, y) = -y^2 - y + 7$$

שהנקודה הקריטית שלה מתקבלת כאשר

$$g'_1(y) = -2y - 1 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

שזו נקודה הנמצאת מחוץ לתחום.

• הישר האופקי נתון על ידי

$$\begin{cases} y = 1 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

ועל ידי הצבה של  $y = 1$  בפונקציה נקבל

$$g_2(x) = f(x, 1) = x^2 - 2x + 5$$

שהנקודה הקריטית שלה מתקבלת כאשר

$$g'_2(x) = 2x - 2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 1$$

כלומר, נקודה קריטית מתקבלת בנקודה  $P_1(1, 1)$ .

**המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון**

• הישר האלכסוני נתון על ידי

$$\begin{cases} y = 3 - x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ועל ידי הצבה של  $x = 0$  בפונקציה נקבל

$$g_3(x) = f(x, 3-x) = x^2 + 3x(3-x) - (3-x)^2 - 5x - (3-x) + 7 = -3x^2 + 11x - 5$$

שהנקודה הקריטיות שלה מתקבלות כאשר

$$g'_3(x) = -6x + 11 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{11}{6}$$

הנמצאת מחוץ לתחום.

כאשר נציב את כל הנקודות הקריטיות שהתקבלו ואת הקודקודים של המשולש, נקבל את הערכים הבאים

$$\begin{aligned} f(P_1) &= 4 \\ f(P_2) &= g_1(1) = 5 \\ f(P_3) &= g_1(3) = -5 \\ f(P_4) &= g_2(2) = 5 \end{aligned}$$

לכן, המקסימום של הפונקציה בתחום הוא  $f(P_2) = f(P_4) = 5$  והמינימום הוא  $f(P_3) = -5$ .

## שאלה 2

א) נציב, תחילה,  $z = x - 2$  ונקבל את הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{4^n n \ln(n)}$$

אשר רדיוס ההתכנסות שלו נתון על ידי

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (4^n n \ln(n)) = 4$$

כלומר, הטור מתכנס בהחלט עבור  $|z| < 4$  ומתבדר עבור  $|z| > 4$ . כעת נבדוק את התכנסות הטור בקצוות הקטע. אם נציב את הערך  $z = 4$  נקבל את הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{4^n n \ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$$

שהוא טור מתבדר לפי מבחן האינטגרל שכן

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln(x)} &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_2^B \frac{dx}{x \ln(x)} \\ \left\{ \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right\} &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^{\ln B} \frac{dt}{t} \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} (\ln |t|) \Big|_{t=\ln 2}^{\ln B} \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} (\ln \ln B - \ln \ln 2) = \infty\end{aligned}$$

מצד שני, אם, נציב  $z = -4$  נקבל את הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-4)^n}{4^n n \ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n)}$$

שהוא טור מתכנס, לפי מבחן לייבניץ (פירוט בהמשך), ומכאן שהטור מתכנס בתנאי עבור  $z = -4$  (שכן טור הערכים המוחלטים מתבדר לפי המקרה  $z = 4$ ).

שימו לב: בדיקת ההתכנסות לפי מבחן לייבניץ מוכיחה התכנסות אבל לא התכנסות בתנאי, את זו ניתן להסיק רק מכך שהטור מתכנס אבל לא מתכנס בהחלט.

כעת, נבצע בדיקת התכנסות לטור עבור  $z = -4$ . בכדי להראות כי הטור מתכנס לפי מבחן לייבניץ, מספיק לשים לב כי הסדרה  $a_n = \frac{1}{n \ln(n)}$  היא סדרה

• חיובית, לפי הגדרה.

• יורדת, שכן הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$  פונקציה יורדת שכן בתחום  $(2, \infty)$  מתקיים כי

$$f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2} < 0$$

• שואפת ל-0.

אם כן, תחום ההתכנסות הוא  $-4 \leq z < 4$  מההצבה של  $z = x - 2$  נקבל  $-4 \leq x - 2 < 4$ , כלומר תחום ההתכנסות של הטור הוא הקטע  $-2 \leq x < 6$  כאשר ההתכנסות היא בהחלט עבור  $-2 < x < 6$  וההתכנסות ב- $x = -2$  היא בתנאי.

**(ב) נרשום**

$$I = \int_0^1 dy \int_{2y-1}^y y dx = \iint_D y dx dy$$

כאשר התחום  $D$  נתון על ידי

$$D = \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 \\ 2y-1 \leq x \leq y \end{array} \right\} = \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq \frac{x+1}{2} \end{array} \right\} \cup \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq \frac{x+1}{2} \end{array} \right\}$$

**המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון**

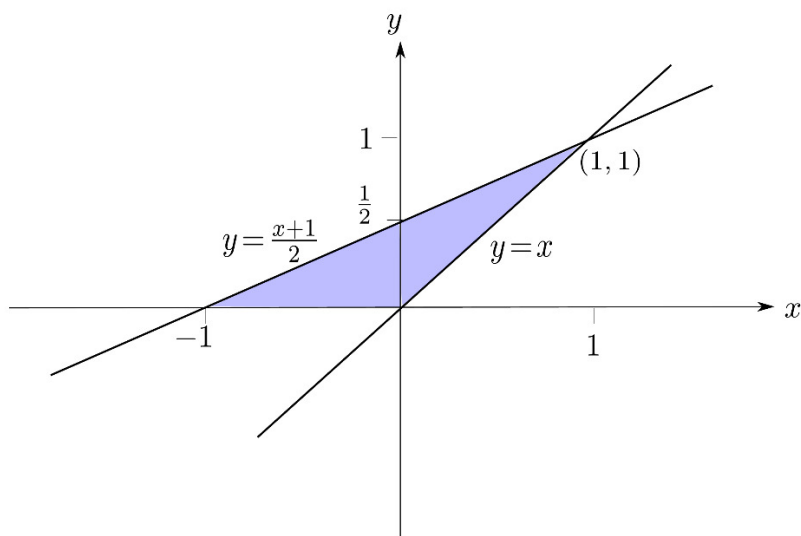
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245,84 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il) | חייג: \*מפחמחמ

ולכן,

$$I = \iint_D y dx dy = \int_{-1}^0 dx \int_0^{\frac{x+1}{2}} y dy + \int_0^1 dx \int_x^{\frac{x+1}{2}} y dy$$

בכדי לחשב את האינטגרל, ניעזר דווקא בצורה המקורית שלו

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy \int_{2y-1}^y y dx \\ &= \int_0^1 y [y - (2y - 1)] dy \\ &= \int_0^1 (-y^2 + y) dy \\ &= \left( -\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$



### שאלה 3

א) נחשב, תחילה, את הגרדיאנט של הפונקציה בנקודה

$$\begin{aligned} \nabla f &= \begin{pmatrix} ye^{xy} \\ xe^{xy} \\ -2z \end{pmatrix} \\ \nabla f(M) &= \begin{pmatrix} e^2 \\ 2e^2 \\ -2e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון



ולכן, נורמל למישור המשיק יהיה נתון על ידי הוקטור  $\vec{N} = (e, 2e, -2)$  ומכאן שניתן לרשום את משוואת המישור המשיק כך

$$\begin{aligned} e(x-2) + 2e(y-1) - 2(z-e) &= 0 \\ \Rightarrow ex + 2ey - 2z - 2e &= 0 \end{aligned}$$

הנקודות  $P$  שעבורן  $\frac{df}{dM\vec{P}}(M) = 0$  מהוות, למעשה, את המישור המשיק למשטח הרמה מסעיף 1. על כן, למעשה, התבקשנו למצוא את נקודת החיתוך בין הישר והמישור. נמצא, תחילה, הצגה פרמטרית לישר

$$\begin{cases} x(t) = 1 - 3t \\ y(t) = 1 + t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

ונציב אותה במשוואת המישור

$$e(1-3t) + 2e(1+t) - 2(0) - 2e = 0 \Rightarrow t = 1$$

כלומר, נקודת החיתוך היא  $P(-2, 2, 0)$ .

## שאלה 4

א) תחילה, נבדוק שהנקודה  $P(1, 1, 0)$  אכן נמצאת על משטח הרמה 6 של הפונקציה

$$F(x, y, z) = x^2y + xyz - 2y^2z + xz^2 + 2x + 3y + z$$

על ידי הצבה

$$F(P) = 1 + 0 - 0 + 0 + 2 + 3 + 0 = 6$$

כעת נחשב את הנורמל למשטח על ידי כך שנחשב את הגרדיאנט של  $F$  בנקודה

$$\begin{aligned} \nabla F &= \begin{pmatrix} 2xy + yz + z^2 + 2 \\ x^2 + xz - 4yz + 3 \\ xy - 2y^2 + 2xz + 1 \end{pmatrix} \\ \nabla F(P) &= (4, 4, 0) \end{aligned}$$

ולכן ניתן לבחור את הוקטור הנורמל למישור המשיק  $F(x, y, z) = 6$  להיות  $\vec{N} = (1, 1, 0)$  ואת משוואת המישור להיות

$$1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) + 0 \cdot (z-0) = 0 \Rightarrow x + y - 2 = 0$$

מצד שני, וקטור הכיוון של הישר נתון על ידי  $\vec{a} = (1, 2, 1)$ . מכיוון ש-

$$\vec{N} \cdot \vec{a} = (1, 1, 0) \cdot (1, 2, 1) = 3 \neq 0$$

**המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון**

נובע שהישר נחתך עם המישור. בכדי לחשב את נקודת החיתוך, נרשום הצגה פרמטרית של הישר

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 3 \\ z = t + 2 \end{cases}$$

ונציב זאת במשוואת המישור

$$(t + 2) + (2t + 3) - 2 = 0 \Rightarrow t = -1$$

כלומר, נקודת החיתוך היא

$$Q(1, 1, 1)$$

**ב)** הטענה לא נכונה. דוגמא נגדית

$$a_n = 2 + (-1)^n$$

שהיא סדרה חסומה וחיובית, שכן

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 2k + 1 \\ 3 & n = 2k \end{cases}$$

ולכן,  $a_n \geq 1$  לכל  $n$  וגם  $1 \leq a_n \leq 3$ . מצד שני, הסדרה לא ממתכנסת שכן אחרת הסדרה  $a_n - 2 = (-1)^n$  היתה מתכנסת בניגוד לכך שראינו בכיתה כי זו סדרה מתבדרת.

## שאלה 5

**א)** נחשב תחילה את משוואת המישור  $ABC$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (0, 2, -2) \times (-1, 1, -2) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2, 2, 2)$$

ולכן ניתן לבחור את הוקטור  $\vec{N} = (1, -1, -1)$  להיות הנורמל למישור  $ABC$ . מכאן שאת משוואת המישור ניתן לרשום בצורה

$$1 \cdot (x - 1) - 1 \cdot (y - 0) - 1 \cdot (z - 1) = 0 \Rightarrow x - y - z = 0$$

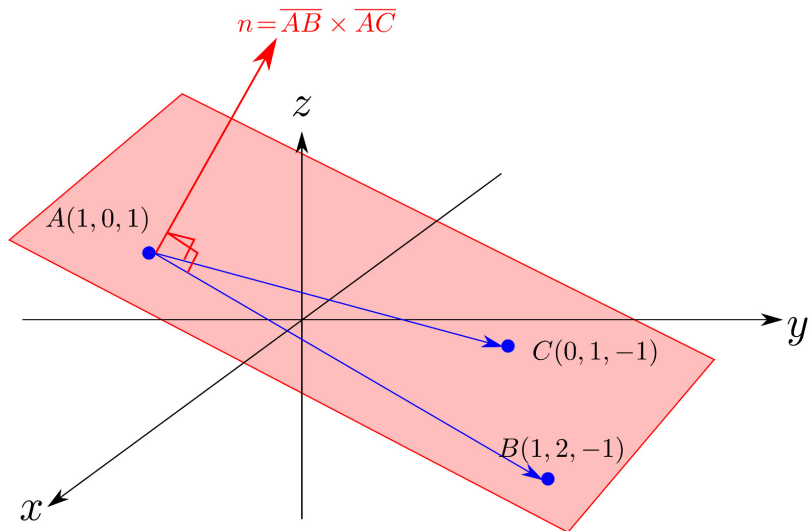
לכן, את המרחק של הנקודה  $D$  מהמישור ניתן לחשב על ידי

$$d = \frac{|(k^2) - (k - 2) - (k)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{|k^2 - 2k + 2|}{\sqrt{3}} = \frac{(k - 1)^2 + 1}{\sqrt{3}} > 0$$

**המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון**

המרחק המינימאלי מתקבל עבור  $k = 1$  בנקודה  $D(1, -1, 1)$ . נפח הפירמידה עבור ערך זה של  $D$  הוא

$$V = \frac{1}{6} \left| (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} \right| = \frac{1}{6} |(-2, 2, 2) \cdot (0, -1, 0)| = \frac{1}{3}$$



**ב)** נניח שקיימים לסדרה  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  שני גבולות  $K$  ו- $L$  וניקח

$$\varepsilon = \frac{|K - L|}{3}$$

נניח כי  $K \neq L$ , אז  $\varepsilon > 0$ . מהגדרת הגבול, קיים  $N$  כך שלכל  $n > N$  מתקיים  $|a_n - K| < \varepsilon$  וגם קיים  $M$  כך שלכל  $n > M$  מתקיים  $|a_n - L| < \varepsilon$ . לכן, עבור  $n > \max\{M, N\}$  (ויש אינסוף כאלה) מתקיים

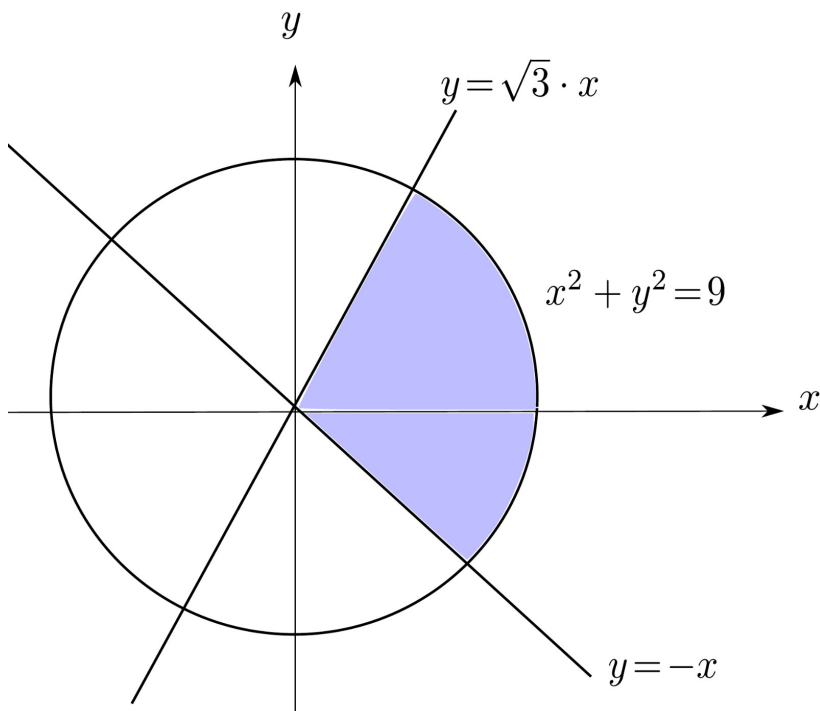
$$|K - L| = |(K - a_n) - (L - a_n)| \leq |K - a_n| + |L - a_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \frac{2|K - L|}{3}$$

כלומר,  $|K - L| < \frac{2}{3}|K - L|$  וזאת בסתירה לכך ש- $|K - L| > 0$ .

## שאלה 6

**א)** בקואורדינטות קוטביות

$$D : \begin{cases} \rho \leq 3 \\ -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}$$



שכן את אי-השיוויון השני ניתן לרשום מחדש כך

$$-\rho \cos \varphi \leq \rho \sin \varphi \leq \sqrt{3} \rho \cos \varphi \Rightarrow -1 \leq \tan \varphi \leq \sqrt{3}$$

ולכן שטח התחום נתון על ידי

$$S_D = \iint_D dx dy = \iint_D \rho d\rho d\varphi = \int_0^3 \rho d\rho \int_{-\pi/4}^{\pi/3} d\varphi = \frac{9}{2} \frac{7}{12} \pi = \frac{21\pi}{8}$$

**ב)** את מסת התחום ניתן לחשב באמצעות

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\ &= \iint_D \frac{\rho \cos \varphi}{\rho} \rho d\rho d\varphi \\ &= \int_0^3 \rho d\rho \int_{-\pi/4}^{\pi/3} \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{9}{2} \left( \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{9(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{4} \end{aligned}$$

## שאלה 7

מישור  $xz$  נתון על ידי המשוואה  $y = 0$ , נשים לב ששתי הנקודות  $A$  ו- $B$  אינן על המישור ושתיהן נמצאות "מימין" למישור (כן ערך ה- $y$  של שתיהן חיובי). נשים לב גם שאם  $B^* (2, -1, 1)$  היא השיקוף של  $B$  ביחס למישור  $xz$ , אז לכל נקודה  $P(x, y, z)$  על המישור מתקיים שהמרחק  $d(P, B) = d(P, B^*)$ . כלומר, ניתן לנסח את הבעיה מחדש כך: מצאו את הנקודה על מישור  $xz$  שסכום מרחקיה מהנקודות  $A$  ו- $B^*$  הוא מינימאלי. מצד שני, אם  $P$  היא נקודת החיתוך של הקטע  $AB^*$  עם מישור  $xz$  אז

$$d(P, A) + d(P, B^*) = d(A, B^*)$$

ולכל נקודה אחרת על המישור,  $Q$ , מתקבל משולש  $AB^*Q$  במרחב ומאי-שיוויון המשולש מתקיים

$$d(A, B^*) \leq d(Q, A) + d(Q, B^*)$$

כלומר, הנקודה המבוקשת  $P$  היא נקודת החיתוך בין הקטע  $AB^*$  לבין מישור  $xz$ . אם נרשום הצגה פרמטרית של הישר נקבל

$$M(t) = A + t\overrightarrow{AB^*} = (-1, 2, 4) + t(3, -3, -3) = (-1 + 3t, 2 - 3t, 4 - 3t)$$

ומהצבה במשוואת המישור נקבל

$$2 - 3t = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$$

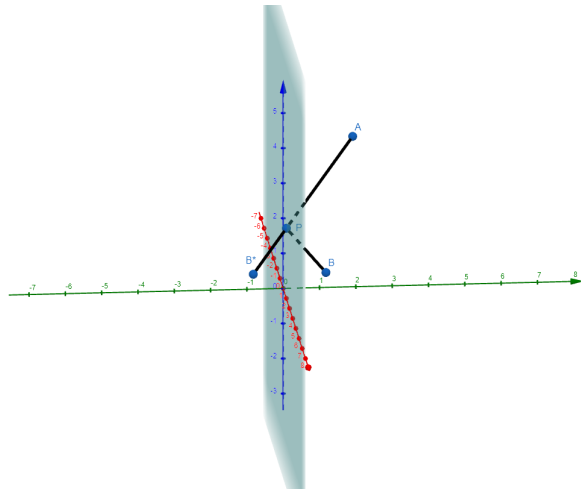
ולכן נקודת החיתוך היא

$$P = M\left(\frac{2}{3}\right) = (1, 0, 2)$$

ומתקיים

$$\begin{aligned} d(P, A) + d(P, B^*) &= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-2)^2} + \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \\ &= 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \\ &= \sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = d(A, B^*) \end{aligned}$$

כנדרש.



## שאלה 8

את הטענה הראשונה נוכיח באינדוקציה.

מקרה בסיס - עבור  $n = 1$  מתקיים  $0 < a_1 = 1 < 2$ .

מעבר - נניח כי  $0 < a_n < 2$ . אם כן, ברור כי  $a_{n+1} = \frac{4a_n}{a_n+2} > 0$  אך גם

$$a_{n+1} < 2 \Leftrightarrow \frac{4a_n}{a_n+2} < 2$$

$$\Leftrightarrow 4a_n < 2a_n + 4$$

$$\Leftrightarrow 2a_n < 4$$

$$\Leftrightarrow a_n < 2$$

כנדרש.

בנוסף, קל לבדוק כי הסדרה עולה שכן לכל  $n$  מתקיים

$$a_{n+1} = \frac{4a_n}{a_n+2} > \frac{4a_n}{2+2} = a_n$$

אם כן, הסדרה עולה וחסומה ולכן מתכנסת. נסמן את גבולה ב- $L$  (כלומר,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ) ונחשב אותו

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4a_n}{a_n+2} = \frac{4L}{L+2}$$

ומכאן

$$L = \frac{4L}{L+2} \Rightarrow L^2 - 2L = 0 \Rightarrow L = 0, 2$$

מכיוון ש- $0 < a_n < a_{n+1} < 2$  לכל  $n$ , נובע כי בהכרח

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$