עבודה 2:
מכפלה פנימית, אורתוגונליות, תהליך גרם שמידט

שאלה 1 הוכיחו או הפריכו: הפונקציות הבאות מגדירות מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^2$:

א) $$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$$

ב) $$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3y_1y_2$$

שאלה 2 בדקו האם הפונקציות הבאות מגדירות מכפלה פנימית על $R_{\leq 2}[x]$.

א) $$\langle f(x), g(x) \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1)$$

ב) $$\langle f(x), g(x) \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2)$$

שאלה 3 יהי

$$B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^3$.

נתונים הוקטורים הבאים $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B$ ו- $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$, כאשר הקואורדינטות של הוקטורים הם לפי הבסיס האורתנורמלי B. חשבו את $\langle u, w \rangle$ כאשר המכפלה הפנימית היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^3$.

שאלה 4 יהי

$$W = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} .$$

מצאו את $W^{\perp}$ כאשר

א) המרחב הוא המרחב המכפלה הפנימית ביחס להמכפלה הפנימית הסטדנרטית של $\mathbb{R}^3$.

ב) המרחב הוא המרחב המכפלה הפנימית ביחס המכפלה הפנימית שמצאתם בשאלה 3.

שאלה 5 נתבונן ב־ $\mathbb{R}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטדנרטית. ונניח כי

$$U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

א) מצאו בסיס אורתוגונלי ל W.

ב) מצאו את ההיהטל האורתוגנולי של $\begin{pmatrix}1\\5\\1\\1\end{pmatrix}$ (בתת המרחב W).

שאלה 6 יהי $V=\mathbb{R}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. ונתבונן בתת המרחב

$$U=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\\-3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\9\\-9\\4\end{pmatrix}\right\}$$

א) מצאו בסיס אורתוגנולי ל- U.

ב) מצאו בסיס אורתוגנולי ל- $U^{\perp}$.

שאלה 7 יהי V מרחב מכפלה פנימית ממשי. וידוע כי $B=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ הינו בסיס של V כך שהמכפלה הפנימית בין כל שני אברי בסיס נתונה באמצעות הטבלה הבאה:

$\langle,\rangle$	α_1	α_2	α_3	α_4
α_1	2	-1	0	0
α_2	-1	2	-1	-1
α_3	0	-1	2	0
α_4	0	-1	0	2

נסמן ב- $W=\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$.

א) מצאו בסיס אורתוגונלי ל W.

ב) מצאו את $W^{\perp}$.

שאלה 8 יהי $V=R_{\leq 2}[x]$ מרחב מכפלה פנימית עם המכפלה הפנימית הבאה:

$$\langle f(x),g(x)\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\ .$$

ונתבונן בתת המרחב הבא: $W=\operatorname{span}\{1,x\}$.

א) מצאו בסיס אורתוגונלי ל W.

ב) השלימו את הבסיס האורתוגונלי שמצאתם בסעיף א לבסיס אורתוגונלי למרחב V.

ג) נסמן ב־ $P_W : V \to V$ את אופרטור ההטלה האורתוגנלית על W. נניח ש־ B הוא הבסיס הסדור שמצאתם בסעיף ב של V כך שאברי הבסיס B_W הם האברים הראשונים. מצאו את $[P_W]_B^B$.

שאלה 9 יהי V מרחב מכפלה פנימית. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א) יהיו $u,\mathrm{v} \in V$ כך שמתקיים

$$\|\mathrm{v}+u\|^2 = \|\mathrm{v}\|^2 + \|u\|^2 \ .$$

אז $u \perp \mathrm{v}$.

ב) יהיו $u,\mathrm{v} \in V$ כך שמתקיים $u \perp \mathrm{v}$. אז

$$\|\mathrm{v}+u\|^2 = \|\mathrm{v}\|^2 + \|u\|^2 \ .$$

ג) יהיו $U,W \subset V$ אז מתקיים

$$(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp} \ .$$

ד) יהיו $U,W \subset V$ אז מתקיים

$$(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp} \ .$$

ה) יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי המקיים $\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle = 0$ לכל $\mathrm{v} \in V$ אז $T=0$.

ו) יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי המקיים $\langle T(\mathrm{v}),w\rangle = 0$ לכל $\mathrm{v},w \in V$ אז $T=0$.

שאלה 10

א) מצאו $a,b \in \mathbb{R}$ עבורם $\int_0^1 \big((x^2-2x+1)-(ax+b)\big)^2\,dx$ מינימלי.

ב) מצאו $a,b \in \mathbb{R}$ עבורם

$$(1-a)^2 + (1-2b)^2 + (1-(a+b))^2 + (1-(a+2b))^2$$

יהיה מינימלי.

ג) מצאו $a,b \in \mathbb{R}$ עבורם $(1-(a+b))^2 + (1-3b)^2 + (1-(a+2b))^2 + (1-(-a+b))^2$ מינימלי.

שאלה 11 נניח כי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו שאם $T : V \to V$ העתקה צמודה לעצמה אז כל ערך עצמי של T ממשי.

שאלה 12 נניח כי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו שאם $T : V \to V$ העתקה אנטי הרמיטית אז כל ערך עצמי של T מדומה.

שאלה 13 נניח כי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו שאם $T:V\to V$ העתקה אוניטרית אז הערך מוחלט של כל ערך עצמי של T שווה ל- 1.

שאלה 14 נניח כי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ ותהי $T:V\to V$ העתקה. הוכיחו כי אם u ווקטור עצמי של העתקות T ו- $\bar{T}$ עם ערכים עצמיים λ ו- μ אז $\lambda=\bar{\mu}$.

שאלה 15

נתון מרחב ווקטורי $\mathbb{R}_3[x]$ עם מכפלה פנימית אינטגרלית בקטע $[-1,1]$:

$$\langle f(x),g(x)\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)\cdot g(x)\ .$$

א) מצאו בסיס אורתוגונלי למרחב $V=\text{span}\left\{1-3x,x,5x^3+8\right\}$.

ב) מצאו את ההיטל האורתוגונלי של כל אחד מהווקטורים:

$$w_1=38-16x+24x^3\ ,\qquad w_2=3x^2+5x^3\ ,$$

תשובות

שאלה 1

א) כן, זוהי מכפלה פנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^2$.

ב) לא נכון. דוגמה נגדית:

$$\left\langle \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} \right\rangle = (-3)^2 + 2\cdot(-3)\cdot 1 + 2\cdot(-3)\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1 = 9-6-6+3 = 0$$

$\langle u,u\rangle = 0$ רק אם $u=\bar{0}$, ו- $\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} \neq \bar{0}$. לכן היא לא מכפלה פנימית.

שאלה 2

א) הפונקציה $\langle f(x), g(x)\rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1)$ אינה מכפלה פנימית. דוגמה נגדית:

$$f(x) = x(x-1)\ , \quad g(x) = x(x-1)\ ,$$

$$\langle f(x), g(x)\rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0\ ,$$

$\langle f(x), f(x)\rangle = 0$ רק אם $f(x)=0$ לכל x (פונקציה האפס) ו- $x(x-1)\neq 0$ לכל x. לכן היא לא מכפלה פנימית.

ב) $\langle f(x), g(x)\rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2)$ מכפלה פנימית. הוכחה:

לכל $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, ולכל סקלר $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים התנאים הבאים:

1)

$$\begin{aligned}\langle f(x)+h(x), g(x)\rangle &= \sum_{i=0}^{2} \left(f(i)+h(i)\right)\cdot g(i)\\ &= \sum_{i=0}^{2} f(i)\cdot g(i) + \sum_{i=0}^{2} h(i)\cdot g(i)\\ &= \langle f(x), g(x)\rangle + \langle h(x), g(x)\rangle\ .\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\langle \alpha\cdot f(x), g(x)\rangle &= \sum_{i=0}^{2} \left(\alpha\cdot f(i)\right)\cdot g(i)\\ &= \alpha\cdot\sum_{i=0}^{2} f(i)\cdot g(i)\\ &= \alpha\cdot\langle f(x), g(x)\rangle\ .\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\langle f(x), g(x)\rangle &= \sum_{i=0}^{2} f(i)\cdot g(i)\\ &= \sum_{i=0}^{2} g(i)\cdot f(i)\\ &= \langle g(x), f(x)\rangle\end{aligned}$$

4)

$$\langle f(x), f(x)\rangle = \sum_{i=0}^{2} f(i)\cdot f(i) = \sum_{i=0}^{2} (f(i))^2 \geq 0$$

לכל x. לכן $\langle f(x), f(x)\rangle \geq 0$ לכל x.

$$\langle f(x), f(x)\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{2} (f(i))^2 = 0$$

$f(x)=0$ עבור $x=0,1,2$. ז"א ל- $f(x)$ יש שלושה שורשים. $f(x)\in\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ פולינום ממעלה 2 ולכן ל- $f(x)$ יש 2 שורשים לכל היותר. לכן $f(x)=0$.

<u>שאלה 3</u> ראשית נרשום את הוקטורים u,w כצרוף ליניארי של הוקטורים של הבסיס:

$$u = 3b_1 + b_2 + b_3, \quad w = -b_1 + 2b_2 + b_3\ .$$

הבסיס הוא אורתונורמלי. ז"א

$$\langle b_i, b_j\rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

מכאן

$$\langle u, w\rangle = \langle 3b_1 + b_2 + b_3, -b_1 + 2b_2 + b_3\rangle = -3\langle b_1, b_1\rangle + 2\langle b_2, b_2\rangle + \langle b_3, b_3\rangle = -3+2+1 = 0\ .$$

<u>שאלה 4</u>

א)

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in W^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle = 0 \quad \text{ו-} \quad \left\langle \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}\right\rangle = 0$$

$$W^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{array}{rl} -x+y+z &= 0\\ x+2y+2z &= 0\end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 3 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

פתרון: $(x,y,z)=(0,-z,z)=z(0,-1,1)$. לכן

$$W^{\perp}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ב)

<u>שאלה 5</u> נסמן

א)

$$U=\text{span}\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},u_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\} .$$

$$\mathrm{v}_1=u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} ,\qquad \|\mathrm{v}_1\|^2=3 .$$

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_2=&u_2-\frac{\langle u_2,\mathrm{v}_1\rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\mathrm{v}_1\\ =&\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\\ =&\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

נבחור $\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}$. $\|\mathrm{v}_2\|^2=6$.

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_3=&u_3-\frac{\langle u_3,\mathrm{v}_1\rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\mathrm{v}_1-\frac{\langle u_3,\mathrm{v}_2\rangle}{\|\mathrm{v}_2\|^2}\mathrm{v}_2\\ =&\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\left\langle\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{6}\left\langle\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

בסיס אורתוגונלי למרחב U:

$$B=\left\{\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix},\mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ב) $\begin{pmatrix}1\\5\\1\\1\end{pmatrix}\in U$ ולכן ההיטל שלו זה הוא עצמו:

$$P_U\begin{pmatrix}1\\5\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\1\\1\end{pmatrix}\ .$$

שאלה 6 נסמן

$$U=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\\-3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\9\\-9\\4\end{pmatrix}\right\}$$

נמצא תחילה בסיס למרחב:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&8\\2&3&3&8\\1&-3&-3&-9\\1&2&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

נבצע גרם שמידט על הבסיס שמצאנו:

א) נסמן

$$U=\mathrm{span}\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix},u_3=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathrm{v}_1=u_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad \|\mathrm{v}_1\|^2=7\ .$$

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_2 =&u_2 - \frac{\langle u_2,\mathrm{v}_1\rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\mathrm{v}_1\\ =&\begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{7}\left\langle \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}1\\1\\-4\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

נבחור

$\|\mathrm{v}_2\|^2=19$.

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_3 =&u_3 - \frac{\langle u_3,\mathrm{v}_1\rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\mathrm{v}_1 - \frac{\langle u_3,\mathrm{v}_2\rangle}{\|\mathrm{v}_2\|^2}\mathrm{v}_2\\ =&\begin{pmatrix}3\\3\\-3\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{7}\left\langle \begin{pmatrix}3\\3\\-3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{19}\left\langle \begin{pmatrix}3\\3\\-3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-4\\1\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-4\\1\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\|\mathrm{v}_3\|^2=2$. בסיס אורתוגונלי למרחב U:

$$B_U=\left\{\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix},\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-4\\1\end{pmatrix},\mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

ב)

$$U=\mathrm{span}\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix},u_3=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\\1\end{pmatrix},u_4=\begin{pmatrix}8\\9\\-9\\4\end{pmatrix}\right\}$$

תזכורת:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in U^{\perp}\qquad\Leftrightarrow\qquad\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},u_i\right\rangle=0\ ,\quad\forall\ 1\le i\le 3\ .$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{9} & 0 \end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x,y,z,w) = \left(1, \frac{-10}{9}, \frac{2}{9}, 1\right) w$$

לכן

$$U^{\perp} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}\right\}$$

לכן בסיס אורתוגונלי של $U^{\perp}$ הוא

$$B_{U^{\perp}} = \left\{\begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}\right\}$$

שאלה 7

$\langle,\rangle$	α_1	α_2	α_3	α_4
α_1	2	-1	0	0
α_2	-1	2	-1	-1
α_3	0	-1	2	0
α_4	0	-1	0	2

$W = \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

א) נפעיל גרם שמידט על $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

$$\mathrm{v}_1 = \alpha_1 \ .$$

$$\|\mathrm{v}_1\|^2 = 2$$

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_2 =& \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \mathrm{v}_1\rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\mathrm{v}_1 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \alpha_1\rangle}{2}\alpha_1 = \alpha_2 - \frac{2}{2}\alpha_1 \\ =& \alpha_2 - \alpha_1 \end{aligned}$$

נבחור

$$\|\mathrm{v}_2\|^2 = \langle \alpha_2-\alpha_1, \alpha_2-\alpha_1\rangle = \langle \alpha_2,\alpha_2\rangle - \langle \alpha_1,\alpha_2\rangle - \langle \alpha_2,\alpha_1\rangle - \langle \alpha_1,\alpha_1\rangle = 2-(-1)-(-1)+2 = 6 \ .$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{v}_3 =& \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, \mathrm{v}_1\rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\mathrm{v}_1 - \frac{\langle \alpha_3, \mathrm{v}_2\rangle}{\|\mathrm{v}_2\|^2}\mathrm{v}_2 = \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, \alpha_1\rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\mathrm{v}_1 - \frac{\langle \alpha_3, \alpha_2-\alpha_1\rangle}{\|\mathrm{v}_2\|^2}\mathrm{v}_2 = \alpha_3 - \frac{0}{2}\alpha_1 - \frac{(-1-0)}{6}(\alpha_2-\alpha_1)\\
=& \alpha_3 + \frac{1}{6}(\alpha_2-\alpha_1)\\
=& \alpha_3 + \frac{1}{6}\alpha_2 - \frac{1}{6}\alpha_1 \ .
\end{aligned}$$

לכן בסיס אורתוגונלי של W:

$$B_W = \left\{\alpha_1, \alpha_2-\alpha_1, \alpha_3+\frac{1}{6}\alpha_2-\frac{1}{6}\alpha_1\right\}$$

ב)

$$\mathrm{v} = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 \in W^{\perp}$$

לכן

$$\langle \mathrm{v},\alpha_1\rangle = \langle \mathrm{v},\alpha_2\rangle = \langle \mathrm{v},\alpha_3\rangle = 0 \ .$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{v},\alpha_1\rangle =& k_1\cdot\langle \alpha_1,\alpha_1\rangle + k_2\cdot\langle \alpha_2,\alpha_1\rangle + k_3\cdot\langle \alpha_3,\alpha_1\rangle + k_4\cdot\langle \alpha_4,\alpha_1\rangle &&= 2k_1-k_2\\
\langle \mathrm{v},\alpha_2\rangle =& k_1\cdot\langle \alpha_1,\alpha_2\rangle + k_2\cdot\langle \alpha_2,\alpha_2\rangle + k_3\cdot\langle \alpha_3,\alpha_2\rangle + k_4\cdot\langle \alpha_4,\alpha_2\rangle &&= -k_1+2k_2-k_3-k_4\\
\langle \mathrm{v},\alpha_3\rangle =& k_1\cdot\langle \alpha_1,\alpha_3\rangle + k_2\cdot\langle \alpha_2,\alpha_3\rangle + k_3\cdot\langle \alpha_3,\alpha_3\rangle + k_4\cdot\langle \alpha_4,\alpha_3\rangle &&= 0\cdot k_1-k_2+2k_3+0\cdot k_4 \ .
\end{aligned}$$

לכן, נבנה אז המערכת ההומוגנית:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 2 & 0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 3 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -3 & 2 & 2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 2\end{pmatrix}$$

פתרון: $(k_1,k_2,k_3,k_4) = \left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},1\right)k_4$ לכן

$$W^{\perp} = \mathrm{span}\left\{\frac{1}{2}\cdot\alpha_1+\alpha_2+\frac{1}{2}\cdot\alpha_3+\alpha_4\right\} = \mathrm{span}\left\{\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4\right\}$$

שאלה 8

$V=R_{\leq 2}[x]$ מרחב מכפלה פנימית:

$$\langle f(x),g(x)\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\ .$$

נסמן

$$W=\text{span}\left\{u_1=1,u_2=x\right\}\ .$$

א) נמצא בסיס אורתוגונלי ל W.

$$\mathrm{v}_1=u_1=1\ .$$

$\|\mathrm{v}_1\|^2=1$

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_2=&u_2-\frac{\langle u_2,\mathrm{v}_1\rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\mathrm{v}_1\\ =&x-\frac{\langle x,1\rangle}{1}\cdot 1\\ =&x-\langle x,1\rangle\ .\end{aligned}$$

$$\langle x,1\rangle=\int_0^1 dx\,1\cdot x=\int_0^1 dx\,x=\int_0^1 dx\,x=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

לכן

$$\mathrm{v}_2=x-\frac{1}{2}\ .$$

לכן נקבל הבסיס האורתונורמלי

$$B=\left\{\mathrm{v}_1=1,\mathrm{v}_2=\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$\|\mathrm{v}_1\|^2=1$ ו-

$$\|\mathrm{v}_2\|^2=\langle\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_2\rangle=\int_0^1 dx\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\ .$$

לכן נקבל הבסיס האורתונורמלי

$$\hat{B}=\left\{1,\sqrt{12}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

ב) נמצא בסיס אורתוגונלי של $W^{\perp}$. נסמן $p(x)=a+bx+cx^2$.

$$p(x)\in W^{\perp}\qquad\Leftrightarrow\qquad\langle p(x),1\rangle=0\ ,\ \langle p(x),x\rangle=0\ .$$

$$\langle a+bx+cx^2,1\rangle=\int_0^1 dx\ \left(a+bx+cx^2\right)=a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}$$

$$\langle a+bx+cx^2,x\rangle=\int_0^1 dx\,x\cdot\left(a+bx+cx^2\right)=\int_0^1 dx\,\left(ax+bx^2+cx^3\right)=\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{4}$$

$$\left.\begin{aligned} a+\tfrac{b}{2}+\tfrac{c}{3}&=0\\ \tfrac{a}{2}+\tfrac{b}{3}+\tfrac{c}{4}& \end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned} 6a+3b+2c&=0\\ 6a+4b+3c&=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6&3&2&0\\ 6&4&3&0\end{array}\right)\ \to\ \left(\begin{array}{ccc|c} 6&3&2&0\\ 0&1&1&0\end{array}\right)$$

פתרון: $(a,b,c)=\left(\frac{1}{6},-1,1\right)c=\frac{1}{6}(1,-6,6)c$ לכן

$$B_{W^\perp}=\left\{1-6x+6x^2\right\}$$

ג) לכל $w\in W$:

$$P_W(w)=w\ .$$

לכל $w^\perp\in W^\perp$:

$$P_W(w^\perp)=0\ .$$

לכן

$$[P_W]_B^B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ .$$

שאלה 9

א) יהיו $u,\mathrm{v}\in V$.

$$\|\mathrm{v}+u\|^2=\|\mathrm{v}\|^2+\|u\|^2\qquad\Rightarrow\qquad \mathrm{v}\perp u\ .$$

לא נכון. דוגמה נגדית:

$V=\mathbb{C}^2$ עם המ"פ הסטנדרטית.

$$u=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}=\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad\Rightarrow\qquad u+\mathrm{v}=\begin{pmatrix}1+i\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$\|u\|^2=\|\mathrm{v}\|^2=1\ ,\qquad \|u+\mathrm{v}\|^2=2\ .$$

$\mathrm{v}\not\perp u$, אך $\|u\|^2+\|\mathrm{v}\|^2=\|u+\mathrm{v}\|^2$.

ב) $u,\mathrm{v}\in V$ אז

$$\mathrm{v}\perp u\qquad\Rightarrow\qquad \|\mathrm{v}+u\|^2=\|\mathrm{v}\|^2+\|u\|^2\ .$$

טענה נכונה: זה בדיוק משפט פיתגורס.

ג) $U,W\subset V$

$$(U\cap W)^{\perp}=U^{\perp}\cap W^{\perp}\ .$$

לא נכון. דוגמה נגדית:

$V=\mathbb{R}^3$ עם מ"פ סטנדרטית.

$$U=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\ ,\qquad W=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$U^{\perp}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\ ,\qquad W^{\perp}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$U^{\perp}\cap W^{\perp}=\{\bar{0}\}$$

$$(U\cap W)^{\perp}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}^{\perp}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$(U\cap W)^{\perp}\neq U^{\perp}\cap W^{\perp}$.

ד) $U,W\subset V$.

$$(U+W)^{\perp}=U^{\perp}\cap W^{\perp}\ .$$

טעניה נכונה.

<u>נוכיח $(U+W)^{\perp}\subseteq U^{\perp}\cap W^{\perp}$.</u>

נניח ש- $\mathrm{v}^{\perp}\in(W+U)^{\perp}$. אז לכל $\mathrm{v}\in W+U$, מתקיים $\langle \mathrm{v},\mathrm{v}^{\perp}\rangle=0$.
נשים לב:

$$W\subseteq U+W\ ,\qquad U\subseteq U+W\ .$$

לכן לכל $w\in W$, מתקיים $\langle w,\mathrm{v}^{\perp}\rangle=0$, לכן

$$\mathrm{v}^{\perp}\in W^{\perp}\ ,$$

ולכל $u\in U$, מתקיים $\langle u,\mathrm{v}^{\perp}\rangle=0$, לכן

$$\mathrm{v}^{\perp}\in U^{\perp}\ .$$

לכן $\mathrm{v}^{\perp}\in U^{\perp}\cap W^{\perp}$.

<u>נוכיח $(U+W)^{\perp}\subseteq U^{\perp}\cap W^{\perp}$.</u>

נניח ש- $\mathrm{v}^{\perp}\in U^{\perp}\cap W^{\perp}$. אז $\mathrm{v}^{\perp}\in U^{\perp}$ וגם $\mathrm{v}^{\perp}\in W^{\perp}$. לכן לכל $u\in U$,

$$\langle \mathrm{v}^{\perp},u\rangle=0$$

ולכל $w\in W$,

$$\langle \mathrm{v}^{\perp},w\rangle=0\ .$$

לכן לכל $u\in U$ ו- $w\in W$,

$$\langle \mathrm{v}^{\perp},u+w\rangle=0$$

לכן לכל $\mathrm{v}\in U+W$,

$$\langle \mathrm{v}^{\perp},\mathrm{v}\rangle=0\ ,$$

לכן $\mathrm{v}^{\perp}\in (U+W)^{\perp}$.

ה) יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי המקיים $\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle=0$ לכל $\mathrm{v}\in V$ אז $T=0$.

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

תהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ העתקה הסיבוב של 90° ותהי $\langle,\rangle$ המ"פ הסטנדרטית של $\mathbb{R}^2$.

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}\ .$$

לכל $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, מתקיים

$$\left\langle T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle=0$$

אבל $T\neq 0$.

ו) יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי המקיים $\langle T(\mathrm{v}),w\rangle=0$ לכל $\mathrm{v},w\in V$ אז $T=0$.

הטענה נכונה. הוכחה:

יהי $u\in \mathrm{Im}\ T$. נוכיח כי $u=\bar{0}$:

נניח ש- $u\in \mathrm{Im}\ T$.
אז קיים $\mathrm{v}\in V$ כך ש- $T(\mathrm{v})=u$.
$\langle T(\mathrm{v}),u\rangle=0$ נתון, לכן

$$0=\langle T(\mathrm{v}),u\rangle=\langle u,u\rangle=\|u\|^2\qquad\Rightarrow\qquad u=\bar{0}$$

לפי התכונה של מ"פ.

שאלה 10

א)

$$\int_0^1\left(\left(x^2-2x+1\right)-(ax+b)\right)^2dx=\|x^2-2x+1-(ax+b)\|^2$$

לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.
נחפש את הווקטור הקרוב ביותר של x^2-2x+1 בתת המרחב

$$W=\mathrm{span}\left\{1,x\right\}\ .$$

נחפש בסיס אורתוגונלי ל W:

$$u_1 = \int_0^1 1\, dx = 1 \ ,$$

$\|u_1\|^2 = 1$.

$$u_2 = x - \frac{\langle x, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = x - \int_0^1 x\, dx = x - \frac{1}{2} \ .$$

$$\|u_2\|^2 = \int_0^1 dx \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} \ .$$

מצאנו בסיס אורתוגונלי ל- W:

$$B_W = \left\{1, -\frac{1}{2} + x\right\} \ .$$

$$\begin{aligned} P_W(x^2-2x+1) &= \langle x^2-2x+1, 1\rangle + 12\left\langle x^2-2x+1, x - \frac{1}{2}\right\rangle \left(-\frac{1}{2}+x\right) \\ &= \int_0^1 1\cdot(x^2-2x+1)x + 12\left[\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x^2-2x+1)\right]\left(-\frac{1}{2}+x\right) \\ &= \frac{1}{3} + 12\cdot\left(\frac{-1}{12}\right)\left(-\frac{1}{2}+x\right) \\ &= \frac{1}{3} + (-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}+x\right) \\ &= \frac{5}{6} - x \ . \end{aligned}$$

לכן $a=-1, b=\frac{5}{6}$.

ב)

$$(1-a)^2 + (1-2b)^2 + (1-(a+b))^2 + (1-(a+2b))^2 = \left\| \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a\\2b\\a+b\\a+2b\end{pmatrix} \right\|^2$$

לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^4$. נחפש את הווקטור הקרוב ביותר של $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ בתת המרחב

$$W = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\2\end{pmatrix} \right\} \ .$$

נחפש בסיס אורתוגונלי ל W:

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \ ,$$

$\|u_1\|^2 = 3$.

$$u_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle}{3} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{3}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix} \ .$$

מצאנו בסיס אורתוגונלי ל- W:

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$P_W\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle}{6}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

ז"א $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\a+b\\a+2b\end{pmatrix}$, לכן

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{1}{3} \ .$$

ג)

$$(1-(a+b))^2 + (1-3b)^2 + (1-(a+2b))^2 + (1-(-a+b))^2 = \left\| \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a+b\\3b\\a+2b\\-1+b\end{pmatrix} \right\|^2$$

לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^4$. נחפש את הווקטור הקרוב ביותר של $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ בתת המרחב

$$W = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix} , \begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix} \right\} \ .$$

נחפש בסיס אורתוגונלי ל W:

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \ ,$$

$\|u_1\|^2 = 3$.

$$u_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix} , \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle}{3} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix}1\\9\\4\\5\end{pmatrix} \ .$$

מצאנו בסיס אורתוגונלי ל- W:

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix} , \begin{pmatrix}1\\9\\4\\5\end{pmatrix} \right\}$$

$$P_W \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} , \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle}{3} \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} , \begin{pmatrix}1\\9\\4\\5\end{pmatrix} \right\rangle}{123} \begin{pmatrix}1\\9\\4\\5\end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{19}{123} \begin{pmatrix}1\\9\\4\\5\end{pmatrix}$$

לכן

$$a = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{9\cdot 19}{123} \cdot \frac{19}{123}\right) \ , \qquad b = \frac{1}{3} \cdot \frac{9 \cdot 19}{123} \ .$$

שאלה 11 נניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי u. ז"א $T(u) = \lambda u$. אז

$$\begin{aligned} \langle T(u), u\rangle &= \langle \lambda u, u\rangle && (\text{וקטור עצמי של } T \ u) \\ &= \lambda \langle u, u\rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית}) \end{aligned} \ .$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(u),u\rangle &= \langle u,\bar{T}(u)\rangle && \text{(הגדרה של העתקה צמודה)}\\ &= \langle u,T(u)\rangle && (T \text{ צמודה לעצמה})\\ &= \langle u,\lambda u\rangle && (u \text{ ווקטור עצמי של } T)\\ &=\bar{\lambda}\langle u,u\rangle && \text{(לינאריות חלקית של מכפלה פנימית)}\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\langle u,u\rangle = \bar{\lambda}\langle u,u\rangle \quad\Rightarrow\quad (\lambda-\bar{\lambda})\langle u,u\rangle = 0\ .$$

u ווקטור עצמי $\Leftarrow u\neq 0 \Leftarrow \langle u,u\rangle \neq 0 \Leftarrow (\lambda-\bar{\lambda})=0 \Leftarrow \lambda=\bar{\lambda}$.

<u>שאלה 12</u> נניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי u. ז"א $T(u)=\lambda u$. אז

$$\begin{aligned}\langle T(u),u\rangle &= \langle \lambda u,u\rangle && (u \text{ ווקטור עצמי של } T)\\ &=\lambda\langle u,u\rangle && \text{(לינאריות של מכפלה פנימית)}\end{aligned}\ .$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(u),u\rangle &= \langle u,\bar{T}(u)\rangle && \text{(הגדרה של העתקה צמודה)}\\ &= \langle u,-T(u)\rangle && (T \text{ אנטי-הרמיטית})\\ &= -\langle u,T(u)\rangle &&\\ &= -\langle u,\lambda u\rangle && (u \text{ ווקטור עצמי של } T)\\ &= -\bar{\lambda}\langle u,u\rangle && \text{(לינאריות חלקית של מכפלה פנימית)}\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\langle u,u\rangle = -\bar{\lambda}\langle u,u\rangle \quad\Rightarrow\quad (\lambda+\bar{\lambda})\langle u,u\rangle = 0\ .$$

u ווקטור עצמי $\Leftarrow u\neq 0 \Leftarrow \langle u,u\rangle \neq 0 \Leftarrow (\lambda+\bar{\lambda})=0 \Leftarrow \lambda=-\bar{\lambda}$.

<u>שאלה 13</u>

נניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי u. ז"א $T(u)=\lambda u$. אז

$$\begin{aligned}\langle T(u),T(u)\rangle &= \langle \lambda u,\lambda u\rangle && (u \text{ ווקטור עצמי של } T)\\ &=\lambda\langle u,\lambda u\rangle && \text{(לינאריות של מכפלה פנימית)}\\ &=\lambda\bar{\lambda}\langle u,\lambda u\rangle && \text{(לינאריות חלקית של מכפלה פנימית)}\end{aligned}\ .$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(u),T(u)\rangle &= \langle u,\bar{T}T(u)\rangle && \text{(הגדרה של העתקה צמודה)}\\ &= \langle u,I(u)\rangle && (T \text{ אוניטרית})\\ &= \langle u,u\rangle &&\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\bar{\lambda}\langle u,u\rangle = \langle u,u\rangle \quad\Rightarrow\quad (\lambda\cdot\bar{\lambda}-1)\langle u,u\rangle = 0\ .$$

u ווקטור עצמי $\Leftarrow u\neq 0 \Leftarrow \langle u,u\rangle \neq 0 \Leftarrow (\lambda\cdot\bar{\lambda}-1)=0 \Leftarrow \lambda\bar{\lambda}=1 \Leftarrow |\lambda|^2=1$.

שאלה 14 נניח כי

$$T(u)=\lambda u\ ,\qquad \bar{T}(u)=\mu\, u\ .$$

אז

$$\begin{aligned}\langle T(u),u\rangle &= \langle \lambda u,u\rangle && (\text{וקטור עצמי של } T \text{ } u)\\ &=\lambda \langle u,u\rangle && (\text{לפי הליניאריות של מכפלה פנימית})\ .\end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(u),u\rangle &= \langle u,\bar{T}(u)\rangle && (\text{הגדרה של העתקה הצמודה})\\ &= \langle u,\mu\, u\rangle && (\text{וקטור עצמי של } \bar{T} \text{ } u)\\ &=\bar{\mu}\,\langle u,\, u\rangle && (\text{לפי הליניאריות החלקית של מכפלה פנימית})\ .\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\langle u,u\rangle=\bar{\mu}\langle u,u\rangle \qquad\Rightarrow\qquad \lambda\langle u,u\rangle-\bar{\mu}\langle u,u\rangle=0 \qquad\Rightarrow\qquad (\lambda-\bar{\mu})\langle u,u\rangle=0$$

u וקטור עצמי $\Leftarrow u\neq\bar{0}\Leftarrow \langle u,u\rangle\neq 0\Leftarrow \lambda-\bar{\mu}=0\Leftarrow \bar{\mu}=\lambda$.

שאלה 15

א) נסמן

$$\mathrm{v}_1=1-3x,\quad \mathrm{v}_2=x\ ,\quad \mathrm{v}_3=5x^3+8\ .$$

$$u_1=\mathrm{v}_1=1-3x\ .$$

$$u_2=\mathrm{v}_2-\frac{\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1$$

$$\|u_1\|^2=\int_{-1}^{1}dx\,(1-3x)^2=\left[\frac{(1-3x)^3}{-9}\right]_{-1}^{1}=\frac{(-2)^3-4^3}{-9}=\frac{-72}{-9}=8\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle=\int_{-1}^{1}dx\,x(1-3x)=\int_{-1}^{1}dx\,\left(x-3x^2\right)=\left[\frac{x^2}{2}-x^3\right]_{-1}^{1}=-2\ .$$

לכן

$$u_2=\frac{x+1}{4}\ .$$

$$u_3=\mathrm{v}_3-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2$$

$$\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle=\int_{-1}^{1}dx\,\left(5x^3+8\right)(1-3x)=\int_{-1}^{1}dx\,\left(5x^3-15x^4+8-24x\right)=\left[\frac{5x^4}{4}-3x^5+8x-12x^2\right]_{-1}^{1}=10\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle=\int_{-1}^{1}dx\,\frac{1}{4}(x+1)\left(5x^3+8\right)=\int_{-1}^{1}dx\,\left(\frac{5x^4}{4}+\frac{5x^3}{4}+2x+2\right)=\left[\frac{x^5}{4}+\frac{5x^4}{16}+x^2+2x\right]_{-1}^{1}=\frac{9}{2}\ .$$

$$\|u_2\|^2=\int_{-1}^{1}dx\,\left(\frac{x+1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}\int_{-1}^{1}dx\,(x+1)^2=\frac{1}{16}\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{6}\ .$$

לכן

$$\begin{aligned}u_3=&5x^3+8-\frac{10}{8}(1-3x)-\frac{\left(\frac{9}{2}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)}\cdot\left(\frac{x+1}{4}\right)\\=&5x^3+8-\frac{5}{4}+\frac{15x}{4}-\frac{27}{4}\cdot(x+1)\\=&5x^3+8-\frac{32}{4}-\frac{12x}{4}\\=&5x^3+8-8-3x\\=&5x^3-3x\ .\end{aligned}$$

בסיס אורתונוגונלי:

$$U=\left\{u_1=1-3x,\quad u_2=\frac{x+1}{4}\ ,\quad u_3=5x^3-3x\right\}\ .$$

ב) $w_1\in U$ לכן

$$P_U(w_1)=w_1\ .$$

$$P_U(w_2)=\frac{\langle w_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1+\frac{\langle w_2,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2+\frac{\langle w_2,u_3\rangle}{\|u_3\|^2}u_3$$

$$\langle w_2,u_1\rangle=\int_{-1}^{1}dx\ \left(5x^3+3x^2\right)(1-3x)=\int_{-1}^{1}dx\ \left(-15x^4-4x^3+3x^2\right)=\left[-3x^5-x^4+x^3\right]_{-1}^{1}=-4\ .$$

$$\langle w_2,u_2\rangle=\int_{-1}^{1}dx\ \frac{1}{4}(x+1)\left(5x^3+3x^2\right)=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}dx\ \left(5x^4+8x^3+3x^2\right)=\frac{1}{4}\left[x^5+2x^4+x^3\right]_{-1}^{1}=1\ .$$

$$\begin{aligned}\langle w_2,u_3\rangle&=\int_{-1}^{1}dx\ \left(5x^3-3x\right)\left(5x^3+3x^2\right)\\&=\int_{-1}^{1}dx\ \left(25x^6+15x^5-15x^4-9x^3\right)\\&=\left[\frac{25x^7}{7}+\frac{5x^6}{2}-3x^5-\frac{9x^4}{4}\right]_{-1}^{1}\\&=\frac{25}{7}+\frac{5}{2}-3-\frac{9}{4}-\left(\frac{25\cdot(-1)}{7}+\frac{5}{2}-3\cdot(-1)-\frac{9}{4}\right)\\&=\frac{25}{7}+\frac{25}{7}-3-3\\&=\frac{50}{7}-6\\&=\frac{50-42}{7}\\&=\frac{8}{7}\ .\end{aligned}$$

$$\|u_3\|^2 = \int_{-1}^{1} dx \, \left(5x^3 - 3x\right)^2 = \int_{-1}^{1} dx \left(25x^6 - 30x^4 + 9x^2\right) = \left[\frac{25x^7}{7} - 6x^5 + 3x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{7} \ .$$

$$\begin{aligned}
P_U(w_2) =& \frac{-4}{8}(1-3x) + \frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)}\left(\frac{x+1}{4}\right) + \frac{\left(\frac{8}{7}\right)}{\left(\frac{8}{7}\right)}\left(5x^3 - 3x\right) \\
=& \frac{-1}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{6}{4}(x+1) + 5x^3 - 3x \\
=& \frac{-1}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{3}{2} + 5x^3 - 3x \\
=& 1 + 3x + 5x^3 - 3x \\
=& 1 + 5x^3 \ .
\end{aligned}$$