המחלקה למדעי המחשב

ג' באב תשפ"ה 28/07/2025
09 : 00 − 12 : 00

אלגברה לינארית 2 למדמ"ח

מועד ב'

מרצים: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר .

תשפ"ה סמסטר ב'

השאלון מכיל 6 עמודים (כולל עמוד זה).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (3 עמודים בפורמט $A4$) מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- יש לרשום בראש המחברת איזה שאלות לבדוק.

==

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *

שאלה 1 25 נקודות

א) (5 נק') נתונה קבוצה של וקטורים $\{1, 2+3x, x-x^2\}$ במרחב הוקטורי $\mathbb{R}_2[x]$ עם המכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$:

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

מצאו בסיס אורתונורמלי של הקבוצה.

תהיינה $A, B \in \mathbb{F}$ מטריצות ריבועיות. יהי $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A ויהי $m_B(x)$ הפולינום המינימלי של B. בנוסף יהי $p_A(x)$ הפולינום האופייני של A ו- $p_B(x)$ הפולינום האופייני של B.

ב) (5 נק') הוכיחו או הפריכו: אם A ו- B דומות אז $m_A(x) = m_B(x)$.

ג) (5 נק') הוכיחו או הפריכו: אם $m_A(x) = m_B(x)$ אז A ו- B דומות.

ד) (5 נק') הוכיחו או הפריכו: אם $m_A(x) = p_A(x)$ אז A לכסינה.

ה) (5 נק') הוכיחו או הפריכו: אם A לכסינה אז $m_A(x) = p_A(x)$.

שאלה 2

א) (6 נק') תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה הרמיטית. הוכיחו כי כל הערכים העצמיים של A הם ממשיים.

ב) (6 נק') הוכיחו או הפריכו: אם $\lambda \neq 0$ ערך עצמי של $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ($\mathbb{F}$ שדה) אז λ^2 הוא ערך עצמי של AA^t.

ג) (7 נק') הוכיחו או הפריכו: אם $\mathbb{F}$ שדה ומטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה בעלת פולינום אופייני $p_A(x)$ ומטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ המקיימת $p_A(B) = 0$ אז B לכסינה.

ד) (6 נק') הוכיחו או הפריכו: כל שתי מטריצות $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ($\mathbb{F}$ שדה) הפיכות הן דומות זו לזו.

שאלה 3 תהי $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ המטריצה הבאה: $A = \begin{pmatrix} 5i & -1 & i \\ 1 & 5i & 1 \\ i & -1 & 5i \end{pmatrix}$.

א) (17 נק') האם A לכסינה אוניטרית? במקרה ו- A לכסינה אוניטרית, מצאו מטריצה אוניטרית Q ומטריצה אלכסונית D כך ש- $Q^*AQ = D$. נמקו היטב את תשובתכם.

ב) (8 נק') מצאו מטריצה $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ המקיימת:
$|C| = |I+C| = |I-C|$.

שאלה 4 תהי מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך שהפולינום האופייני שלה אינו מתפרק לגורמים ליניאריים מעל $\mathbb{R}$.

א) (6 נק') הוכיחו או הפריכו: A לכסינה מעל $\mathbb{C}$ עבור $n=2$.

ב) (6 נק') הוכיחו או הפריכו: A לכסינה מעל $\mathbb{C}$ עבור $n=4$.

ג) (7 נק') תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו: אם A^2 נורמלית אז A נורמלית.

ד) (6 נק') הוכיחו או הפריכו: אם מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מקיימת $(A-3I)(A+2I)=0$ אז קיים $u \neq 0 \in \mathbb{F}^n$ כך ש- $Au=3u$.

שאלה 5 נגדיר העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ ע"י

$$T\left(a+bx+cx^2\right) = (-3a+4b+c)+(-2a+2b)x+(2a-3b-c)x^2 \ .$$

א) (3 נק') מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית.

ב) (5 נק') האם המטריצה A שמצאתם לכסינה? במידה וכן, מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D שך ש- $P^{-1}AP=D$. במידה ולא, מצאו צורת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP=J$.

נתונה $A,B \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ מטריצות עם פולינומים מינימליים

$$m_A(t)=t^2-3t \ , \qquad m_B(t)=t^2-6t+9 \ .$$

ג) (7 נק') רשמו את כל צורות ז'ורדן האפשריות עבור A ו- B.

ד) (5 נק') כיצד תשתנה התשובה לסעיף א' אם נתון, בנוסף, שהריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 3 הוא 3? וכיצד תשתנה התשובה אם נתון שהריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 3 הוא 4?

ה) (5 נק') האם ייתכן שהמטריצה A סימטרית? האם ייתכן שהמטריצה B סימטרית? נמקו את תשובתכם.

מרחב אוקלידי: מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$.

מרחב אוניטרי: מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$.

הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי V מעל $\mathbb{R}$:
לכל $u,\mathrm{v},w\in V$ ולכל סקלר $\lambda\in\mathbb{R}$:

1) <u>סימטריות:</u> $\langle u,\mathrm{v}\rangle=\langle \mathrm{v},u\rangle$

2) <u>ליניאריות:</u> $\langle u+\mathrm{v},w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle \mathrm{v},w\rangle$

$\langle \lambda u,\mathrm{v}\rangle=\lambda\langle u,\mathrm{v}\rangle$

3) <u>חיוביות:</u> $\langle u,u\rangle\geq 0.$

$\langle u,u\rangle=0 \quad \Leftrightarrow \quad u=0$

הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי V מעל $\mathbb{C}$:
לכל $u,\mathrm{v},w\in V$ ולכל סקלר $\lambda\in\mathbb{C}$:

1) <u>הרמיטיות:</u> $\langle u,\mathrm{v}\rangle=\overline{\langle \mathrm{v},u\rangle}$

2) <u>ליניאריות:</u> $\langle u+\mathrm{v},w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle \mathrm{v},w\rangle$

$\langle \lambda u,\mathrm{v}\rangle=\lambda\langle u,\mathrm{v}\rangle$

3) <u>חיוביות:</u> $\langle u,u\rangle\geq 0$

$\langle u,u\rangle=0 \quad \Leftrightarrow \quad u=0$

אי-שוויון קושי שוורץ: $|\langle u,\mathrm{v}\rangle|\leq \|u\|\cdot\|\mathrm{v}\|$

אי-שוויון המשולש: $\|u+\mathrm{v}\|\leq\|u\|+\|\mathrm{v}\|$

היטל אורתוגונלי של ווקטור v על תת מרחב בעל בסיס אורתוגונלי $u_1,\dots,u_n$:

$$P_U(\mathrm{v})=\frac{\langle \mathrm{v},u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1+\frac{\langle \mathrm{v},u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2+\cdots+\frac{\langle \mathrm{v},u_n\rangle}{\|u_n\|^2}u_n\ .$$

תהליך גרם שמידט לבניית בסיס אורתוגונלי:

$$\begin{aligned}
u_1 &=\mathrm{v}_1\ ,\\
u_2 &=\mathrm{v}_2-\frac{\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1\\
u_3 &=\mathrm{v}_3-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2\\
&\vdots\\
u_n &=\mathrm{v}_n-\frac{\langle \mathrm{v}_n,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{\langle \mathrm{v}_n,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2-\ldots-\frac{\langle \mathrm{v}_n,u_{n-1}\rangle}{\|u_{n-1}\|^2}u_{n-1}\ .
\end{aligned}$$

$\lambda \in \mathbb{F}$ **ערך עצמי** ו- $u \in \mathbb{F}^n$ **ווקטור עצמי** ($u \neq 0$) של מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ אם: $Au = \lambda u$

$\lambda \in \mathbb{F}$ **ערך עצמי** ו- $u \in V$ **ווקטור עצמי** ($u \neq 0$) של אופרטור $T: V \to V$ אם: $T(u) = \lambda u$

פולינום אופייני של מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$: $p_A(\lambda) = |\lambda I - A|$

מרחב עצמי של מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ששייך לערך עצמי λ הוא כל וקטור $u \in \mathbb{F}^n$ כאשר $u \neq 0$ כך ש: $Au = \lambda u$.

מרחב עצמי של אופרטור $T: V \to V$ ששייך לערך עצמי λ הוא כל וקטור $u \in \mathbb{V}$ כאשר $u \neq 0$ כך ש: $T(u) = \lambda u$.

בסיס אורתונורמלי:

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. בסיס אורתונורמלי, מסומן $\{b_1, \ldots, b_n\}$, מקיים את התנאי

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} , \qquad 1 \leq i, j \leq n \ .$$

כל וקטור $u \in V$ ניתן לרשום בבסיס אורתונורמלי:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, b_i \rangle \, b_i$$

סימון חלופי:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \langle u, b_1 \rangle \\ \langle u, b_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_i \rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_n \rangle \end{pmatrix}_B$$

יהי $T: V \to V$ אופרטור. המצרטיצה המייצגת על פי בסיס B היא

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \langle T(b_1), b_1 \rangle & \langle T(b_2), b_1 \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_1 \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_1 \rangle \\ \langle T(b_1), b_2 \rangle & \langle T(b_2), b_2 \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_2 \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_i \rangle & \langle T(b_2), b_i \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_i \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_i \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_n \rangle & \langle T(b_2), b_n \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_n \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_n \rangle \end{pmatrix} .$$

כלומר האיבר ה- ij של המטריצה המייצגת של T על פי הבסיס B היא . $[T]_{ij} = \langle T(b_j), b_i \rangle$

ההגדרה של אופרטור הצמוד:

אם $T:V\to V$ אופרטור, ו- $u,w\in V$ שני וקטורים כלשהם של V, אזי האופרטור הצמוד של T מוגדר כך שמתקיים

(*1)
$$\langle T(u),w\rangle = \langle u,T^*(w)\rangle \ .$$

מההגדרה (*1) נובע:

(*2)
$$\langle T^*(u),w\rangle = \langle u,T(w)\rangle$$

נוסחה ל- $T(u)$ ו- $T^*(u)$ במונחי בסיס אורתונורמלי $\{b_1,\cdots,b_n\}$:

(*3)
$$T(u)=\sum_{i=1}^{n}\langle T(u),b_i\rangle\, b_i$$

(*4)
$$T^*(u)=\sum_{i=1}^{n}\langle u,T(b_i)\rangle\, b_i$$

משפט:

(*5)
$$T^{**}=T$$

משפט: המטריצה המייצגת של אופרטור צמוד T^* נתונה ע"י

(*6)
$$[T^*]=[T]^*$$

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית.

A הרמיטית:	$A=A^*$
A אנטי-הרמיטית:	$A^*=-A$
A אוניטרית:	$AA^*=I=A^*A$
A אורתוגונלית :	$AA^t=I=A^tA$
A נורמלית:	$AA^*=A^*A$

יהי $T:V\to V$ אופרטור מעל מרחב וקטורי V. נסמן המטריצה המייצגת $A=[T]$.

T צמוד לעצמו:	$A=A^*$	$\Leftrightarrow$	$T=T^*$
T אנטי-הרמיטי:	$A^*=-A$	$\Leftrightarrow$	$T^*=-T$
T אוניטרי:	$AA^*=I=A^*A$	$\Leftrightarrow$	$TT^*=I_V=T^*T$
T נורמלי:	$AA^*=A^*A$	$\Leftrightarrow$	$TT^*=T^*T$

מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה Q אוניטרית ומטריצה D אלכסונית כך ש:

$$A=QDQ^* \quad\Leftrightarrow\quad D=Q^*AQ \ .$$

מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אורתוגונלית אם קיימת מטריצה P אורתוגונלית ומטריצה D אלכסונית כך ש:

$$A=PDP^t \quad\Leftrightarrow\quad D=P^tAP \ .$$

פתרונות

שאלה 1

א) (5 נק') נסמן:

$$\mathrm{v}_1 = 1 \ , \quad \mathrm{v}_2 = 2 + 3x \ , \quad \mathrm{v}_3 = x - x^2$$

<u>האלגוריתם של גרם-שמידט:</u>

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = 1 \ .$$

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2, u_1 \rangle = \int_0^1 (2 + 3x) \, dx = \frac{7}{2} \ .$$

$$\|u_1\|^2 = \langle u_1, u_1 \rangle = \int_0^1 (1) \, dx = 1 \ .$$

לכן

$$u_2 = 2 + 3x - \frac{7}{2} = -\frac{3}{2} + 3x \ .$$

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_1 \rangle = \int_0^1 (x - x^2) \, dx = \frac{1}{6} \ .$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{v}_3, u_2 \rangle &= \int_0^1 (x - x^2) \left(-\frac{3}{2} + 3x \right) \, dx \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{3}{2} x + 3x^2 + \frac{3}{2} x^2 - 3x^3 \right) \, dx \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{3}{2} x + \frac{9}{2} x^2 - 3x^3 \right) \, dx \\
&= -\frac{3}{4} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 =& x - x^2 - \frac{1}{6} - \frac{0}{\|u_2\|^2}\left(-\frac{3}{2}+3x\right) \\ =& x - x^2 - \frac{1}{6} \ . \end{aligned}$$

ב) (5 נק')

שיטה 1

הטענה נכונה.

שיטה 2

אם A ו- B דונמות אז קיימת מטריצה P הפכיה כך ש- $B = P^{-1}AP \quad \Leftrightarrow \quad A = PBP^{-1}$.
לכל מטריצות A, B דומות ולכל פולינום $f(x)$, מתקיים $f(A) = Pf(B)P^{-1}$ וגם $f(B) = P^{-1}f(A)P$.
מכאן, אם $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A ו- $m_B(x)$ הפולינום המינימלי של B אזי

$$m_A(B) = Pm_B(B)P^{-1} = 0 \ , \qquad m_B(A) = Pm_A(A)P^{-1} = 0 \ ,$$

כלומר

$$m_A(B) = 0 \ , \qquad \text{ו-} \qquad m_B(A) = 0 \ .$$

כדי להראות ש- $m_A(x) = m_B(x)$ ראשית נראה כי $\deg(m_A(x)) = \deg(m_B(x))$ באופן הבא:

- נניח ש- $\deg(m_A(x)) < \deg(m_B(x))$.
  בגלל ש- $m_A(B) = 0$ אז B מאפסת פולינום מדרגה נמוכה יותר מהדרגה של m_B.
  זאת בסתירה לכך ש- $m_B(x)$ הוא הפולינום המינימלי של B.
- נניח ש- $\deg(m_A(x)) > \deg(m_B(x))$.
  בגלל ש- $m_B(A) = 0$ אז A מאפסת פולינום מדרגה נמוכה יותר מהדרגה של m_A.
  זאת בסתירה לכך ש- $m_A(x)$ הוא הפולינום המינימלי של A.

לכן $\deg(m_A(x)) \not< \deg(m_B(x))$ וגם $\deg(m_A(x)) \not> \deg(m_B(x))$ לכן בהכרח:

$$\deg(m_A(x)) = \deg(m_B(x))$$

כעת נוכיח שהפולינומים $m_A(x)$ ו- $m_B(x)$ הם זהים.
נניח ש: $\deg(m_A(x)) = \deg(m_B(x)) = k$. אזי

$$\left.\begin{array}{rl} m_A(x) = & \alpha_0 + \alpha_1 x + \quad \cdots \quad \alpha_{k-1}x^{k-1} + x^k \ , \\ m_B(x) = & \beta_0 + \beta_1 x + \quad \cdots \quad \beta_{k-1}x^{k-1} + x^k \ . \end{array}\right\}$$

נוכיח כי המקדמים זהים: $\alpha_i = \beta_i$. יהי $q(x)$ הפולינום הבא:

$$q(x) = m_A(x) - m_B(x) = (\alpha_0 - \beta_0) + (\alpha_1 - \beta_1)x + \quad \cdots \quad (\alpha_{k-1} - \beta_{k-1})x^{k-1} \ .$$

עבור $q(x)$:

$$q(A) = m_A(A) - m_B(A) = 0 \ , \qquad \text{וגם} \qquad q(B) = m_A(B) - m_B(B) = 0 \ .$$

נניח בשלילה כי $m_A(x) \neq m_B(x)$. אזי קיימים מקדמים עבורם $\alpha_i \neq \beta_i$.
לכן:
A מאפסת את הפולינום $q(x)$ אשר מדרגה נמוכה יותר מהדרגה של $m_A(x)$, סתירה! ו-
B מאפסת את הפולינום $q(x)$ אשר מדרגה נמוכה יותר מהדרגה של $m_B(x)$. סתירה!

לכן $m_A(x) = m_B(x)$. כנדרש.

ג) הטענה לא נכונה.
דוגמה נגדית:

$$A = J_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ , \qquad B = J_2(2) \oplus J_1(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

A ו- B הן צורות ז'ורדן.
לכן הפולינומים המינימליים שלהן הם:

$$m_A(x) = (x-2)^3 \ , \qquad m_B(x) = (x-2)^3 \ ,$$

ז"א $m_A(x) = m_B(x)$.

עבור הערך עצמי $\lambda = 2$, ל- A יש בלוק אחד, ועבור הערך עצמי $\lambda = 2$, ל- B יש שני בלוקים. לכן

$$\left.\begin{aligned} \text{geo}_A(\lambda=2) &= 1 \\ \text{geo}_B(\lambda=2) &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{geo}_A(\lambda=2) \neq \text{geo}_B(\lambda=2) \ ,$$

כלומר הריבוי הגאומטרי של $\lambda = 2$ של המטריצה A לא שווה להריבוי הגאומטרי של $\lambda = 2$ של המטריצה B לכן הן לא דומות.

ד) הטענה לא נכונה.
דוגמה נגדית:

תהי $A = \mathbb{R}^{n \times n}$ המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

A היא הבלוק ז'ורדן $J_2(2)$.
הפולינום המינימלי הוא

$$m_A(x) = (x-2)^2 \ ,$$

והפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = (x-2)^2 \ .$$

לכן $m_A(x) = p_A(x)$ אבל A לא לכסינה כי היא בלוק ז'ורדן, וכל בלוק ז'ורדן לא לכסין.

ה) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:
תהי $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ המטריצה הבאה:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$
A מטריצה היחידה של $\mathbb{R}^{2\times2}$. בפרט A אלכסונית ולכן לכסינה.
אבל הפולינום המינימלי הוא
$$m_A(x) = x - 1$$
והפולינום האופייני הוא
$$p_A(x) = (x-1)^2 \ .$$
ז"א מצאנו דוגמה עבורה A לכסינה אבל $p_A(x) \neq m_A(x)$.

שאלה 2

א) (6 נק') יהי u וקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ.
$$\begin{aligned} \langle Au, u\rangle &= \langle \lambda u, u\rangle \\ &= \lambda \langle u, u\rangle \ . \end{aligned}$$
מצד שני:
$$\begin{aligned} \langle Au, u\rangle &= \langle u, A^* u\rangle \\ &= \langle u, Au\rangle \\ &= \lambda \langle u, \lambda u\rangle \\ &= \overline{\lambda} \langle u, \ u\rangle \ . \end{aligned}$$
נשווה ביניהם:
$$\lambda \langle u, u\rangle = \overline{\lambda} \langle u, u\rangle \quad \Rightarrow \quad (\lambda - \overline{\lambda}) \langle u, u\rangle = 0$$
u וקטור עצמי $\Leftarrow u \neq 0 \Leftarrow \langle u, u\rangle \neq 0 \Leftarrow \lambda = \overline{\lambda} \Leftarrow \lambda$ ממשי.

ב) (6 נק')
הטענה לא נכונה.

דוגמה נגדית:
תהי A המטריצה הבאה:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$
הערכים העצמיים של A הם $\lambda = 0$ ו- $\lambda = 1$.
כעת נחשב את AA^t:
$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$
הערכים העצמיים של AA^t הם 0 ו- 2. לפיכך $\lambda = 1$ הוא ערך עצמי של A אבל $\lambda^2 = 1$ אינו ערך עצמי של AA^t.

ג) (7 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\ .$$

A לכסינה והפולינום האופייני של A הוא $p_A(x)=(x-1)^2$.

$$p_A(B)=(B-I)^2=0$$

אבל B בלוק ז'ורדן ולכן היא לא לכסינה.

ד) (6 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ ו- $B=\begin{pmatrix}3&0\\0&4\end{pmatrix}$.

A הפיכה מסיבה ש- $|A|=2\neq 0$.

B הפיכה מסיבה ש- $|B|=12\neq 0$.

מצד שני הדטרמיננטות שלהן לא שוות: $|A|\neq|B|$, ולכן הן לא דומות.

שאלה 3

א) (17 נק')

$$A=\begin{pmatrix}5i&-1&i\\1&5i&1\\i&-1&5i\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A^*=\begin{pmatrix}-5i&1&-i\\-1&-5i&-1\\-i&1&-5i\end{pmatrix}\ .$$

מכאן

$$AA^*=\begin{pmatrix}27&11i&-9\\-i&27&-11i\\-11&11i&27\end{pmatrix}=A^*A\ .$$

A נורמלית לכן לכסינה אוניטרית.

$$\begin{aligned}
p_A(x)=&|xI-A|=\begin{vmatrix}x-5i&1&-i\\-1&x-5i&-1\\-i&1&x-5i\end{vmatrix}\\
=&(x-5i)\begin{vmatrix}x-5i&-1\\1&x-5i\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-1&-1\\-i&x-5i\end{vmatrix}-i\begin{vmatrix}-1&x-5i\\-i&1\end{vmatrix}\\
\\
=&(x-5i)\left[(x-5i)(x-5i)+1\right]-\left[-x+5i-i\right]-i\left[-1-i(x-5i)\right]\\
=&(x-5i)\left[x^2-10i-24\right]+(x-4i)-i\left(-4-ix\right)\\
=&(x-5i)\left(x-6i\right)\left(x-4i\right)+x-4i+x-4i\\
=&\left(x-4i\right)\left[\left(x-5i\right)\left(x-6i\right)+2\right]\\
=&\left(x-4i\right)\left[x^2-11i-28\right]\\
=&\left(x-4i\right)\left(x-4i\right)\left(x-7i\right)\\
=&\left(x-4i\right)^2\left(x-7i\right)\ .
\end{aligned}$$

לכן הפולינום האופייני של A הוא

$$p_A(x) = (x-4i)^2(x-7i) \ .$$

הערכים העצמיים הם:
$\lambda = 4i$, $\mathrm{alg}(4i) = 2$,
$\lambda = 7i$, $\mathrm{alg}(7i) = 1$.

<u>ריבוי גיאומטרי של $\lambda = 4i$</u>:

$$\mathrm{Nul}(A-4iI) \ = \ \begin{pmatrix} -2i & -1 & i \\ 1 & -2i & 1 \\ i & -1 & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to iR_2-R_1} \begin{pmatrix} i & -1 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z) = (-iy-z,y,z) = (-i,1,0)+(-1,0,1)$.

$$V_{4i} = \mathrm{span}\left\{ \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>ריבוי גיאומטרי של $\lambda = 7i$</u>:

$$\mathrm{Nul}(A-7iI) \ = \ \begin{pmatrix} -2i & -1 & i \\ 1 & -2i & 1 \\ i & -1 & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to 2R_3+R_1]{R_2\to 2iR_2+R_1} \begin{pmatrix} -2i & -1 & i \\ 0 & 3 & 3i \\ 0 & -3 & -3i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2} \begin{pmatrix} -2i & -1 & i \\ 0 & 3 & 3i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to \frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} -2i & -1 & i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2} \begin{pmatrix} -2i & 0 & 2i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to \frac{i}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z) = (z,-iz,z) = (1,-i,1)z$.

$$V_{7i} = \mathrm{span}\left\{ \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נבנה בסיס אורתונורמלי ע"י התהליך גרם שמידט:

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-i}{2}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

v_3 אורתוגונלי ביחס ל- u_1 ו- u_2 מסיבה שהוקטור עצמי v_3 והוקטורים העצמיים u_1 ו- u_2 שייכים לערכים העצמיים שונים. לכן קיבלנו בסיס אורתוגונלי:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \ , \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

הבסיס האורתונורמלי הוא

$$\left\{ \hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \frac{1}{\sqrt{6}} u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \ , \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

לכן $A = QDQ^*$ כאשר

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{-i}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

ב) (8 נק') $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

שאלה 4

א) (6 נק') הטענה נכונה.

לכל $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ הפולינום האופייני הוא $p_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A)x + |A|^2$.
A ממישת אזי $\mathrm{tr}(A)$ ממשית ו- $|A|$ ממשית. ז"א כל המקדמים בפולינום האופייני הם ממשיים.
כל פולינום עם מקדמים ממשיים מתפרק לגורמים לינאריים עם שורשים מרוכבים:

$$p_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$$

כאשר $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ו- $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, כאשר $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. הפולינום האופייני אינו מתפרק לגורמים ליניאריים מעל $\mathbb{R}$ אז $\beta \neq 0 \Leftarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \Leftarrow$ ל- A יש 2 ערכים עצמיים שונים מעל $\mathbb{C} \Leftarrow A$ לכסינה מעל $\mathbb{C}$.

ב) (6 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = \left(x^2+1\right)^2 = (x+i)^2(x-i)^2\ .$$

ז"א $p_A(x)$ אינו מתפרק לגורמים ליניאריים מעל $\mathbb{R}$.
הצורת ז'ורדן של A היא $J = J_2(-i) \oplus J_2(i)$ לכן A לא לכסינה מעל $\mathbb{C}$.

ג) (7 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$A^2 = 0$ כלומר A^2 היא המטירצת האפס לכן A^2 נורמלית באופן טריוויאלי.

מצד שני

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^* = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^*A$$

ד) (6 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I\ .$$

ברור ש- $A+2I=0$ לכן $(A-3I)(A+2I)=0$ אבל הערכים העצמיים של A הם 2 עם ריבוי אלגברי 2. לכן 3 לא ערך עצמי של A לכן לא קיים וקטור $u \neq 0$ עבורו $Au = 3u$.

שאלה 5

א) (3 נק')

$$[T] = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

ב) (5 נק') הפולינום האופייני הוא $p_T(x) = x(x+1)^2$. הערכים העצמיים הם:

$\lambda = 0$, $\text{alg}(0) = 1$.
$\lambda = -1$, $\text{alg}(0) = 2$.

<u>וקטור עצמי של $\lambda = 0$</u>

$$\text{Nul}\left([T]-0\cdot I\right) = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to 3R_3+2R_1]{R_2\to 3R_2-2R_1} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to 2R_3-R_2} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-4R_2} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to -\frac{1}{3}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$\text{Nul}\left([T]-0\cdot I\right) = \text{span}\left\{ u_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

לכן

$$V_0 = \text{Ker}\left(T-0\cdot I\right) = \text{span}\left\{ w_0 = -1-x+x^2 \right\} .$$

<u>וקטור עצמי של $\lambda=-1$</u>

$$\text{Nul}\left([T]-(-1)\cdot I\right) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3+R_1]{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1+4R_2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2\to -R_2]{R_1\to -R_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$\text{Nul}\left([T]+I\right) = \text{span}\left\{ u_{-1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} .$$

לכן

$$V_{-1} = \text{Ker}\left(T+I\right) = \text{span}\left\{ w_{-1} = -3-2x+2x^2 \right\} .$$

$\dim\left(\text{Ker}\left(T+I\right)\right) = 1 < \text{alg}(-1)$ לכן T לא לכסין.

<u>וקטור עצמי מוכלל של $\lambda=-1$</u>

נסמן הוקטור עצמי מוכלל של $\lambda = -1$ כ- $u'_{-1} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ונפתור את המשוואה:

$$(A+I)u'_1 = u_1$$

המטריצה המורחבת היא $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right)$. נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 4R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \to -R_2]{R_1 \to -R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $(x,y,z) = \left(-\frac{3}{2}z - \frac{1}{2}, -z-1, z\right) = \left(-\frac{3}{2}, -1, 1\right) z + \left(-\frac{1}{2}, -1, 0\right)$, $z \in \mathbb{R}$. נציב $z = 0$ ואז נקבל תשובה

$$u'_{-1} = \left(-\frac{1}{2}, -1, 0\right) \ .$$

$$[T] = PJP^{-1} \ , \quad P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_0 & u_{-1} & u'_{-1} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

ג) (7 נק')

לפי הפולינום המינימלי $m_A(t) = t(t-3)$:

- הערכים העצמיים של A הם 0 ו- 3
- הפולינום המינימלי מתפרק לגורמים ליניאריים שונים לכן A לכסינה ולכן הצורות ז'ורדן של A האפשריות הן

$$J_A = \begin{pmatrix} 3 &&&&& \\ & 0 &&&& \\ && 0 &&& \\ &&& 0 && \\ &&&& 0 & \\ &&&&& 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 3 &&&&& \\ & 3 &&&& \\ && 0 &&& \\ &&& 0 && \\ &&&& 0 & \\ &&&&& 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 3 &&&&& \\ & 3 &&&& \\ && 3 &&& \\ &&& 0 && \\ &&&& 0 & \\ &&&&& 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 &&&&& \\ & 3 &&&& \\ && 3 &&& \\ &&& 3 && \\ &&&& 0 & \\ &&&&& 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 3 &&&&& \\ & 3 &&&& \\ && 3 &&& \\ &&& 3 && \\ &&&& 3 & \\ &&&&& 0 \end{pmatrix} .$$

לפי הפולינום המינימלי $m_B(t) = (t-3)^2$:

- הערך העצמי היחיד הוא 3.
- הגודל של הבלוק ז'ורדן הכי גדול הוא 2 לכל היותר.

לכן הצורות ז'ורדן האפשריות הן:

$$J_B = \begin{pmatrix} J_2(3) && \\ & J_2(3) & \\ && J_2(3) \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} J_2(3) &&& \\ & J_2(3) && \\ && 3 & \\ &&& 3 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} J_2(3) &&&& \\ & 3 &&& \\ && 3 && \\ &&& 3 & \\ &&&& 3 \end{pmatrix} .$$

ד) (5 נק') אם נתון שהריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 3 הוא 3, אזי:

$$J_A = \begin{pmatrix} 3 &&&&& \\ & 3 &&&& \\ && 3 &&& \\ &&& 0 && \\ &&&& 0 & \\ &&&&& 0 \end{pmatrix} , \qquad J_B = \begin{pmatrix} J_2(3) && \\ & J_2(3) & \\ && J_2(3) \end{pmatrix}$$

אם נתון שהריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 3 הוא 4, אזי:

$$J_A = \begin{pmatrix} 3 &&&&& \\ & 3 &&&& \\ && 3 &&& \\ &&& 3 && \\ &&&& 0 & \\ &&&&& 0 \end{pmatrix} , \qquad J_B = \begin{pmatrix} J_2(3) &&& \\ & J_2(3) && \\ && 3 & \\ &&& 3 \end{pmatrix}$$

ה) (5 נק')
ראשית נזכיר כי כל מטריצה ממשית היא סימטרית אם ורק אם היא לכסינה אורתוגונלית.

הפולינום המינימלי של A מתפרק לגורמים ליניאריים שונים $\Leftarrow$ A לכסינה $\Leftarrow$ ייתכן כי A סימטרית.

הפולינום המינימלי של B לא מתפרק לגורמים ליניאריים שונים $\Leftarrow$ B אינה לכסינה $\Leftarrow$ B לא סימטרית.