תרגילים 12: סיבוכיות

שאלה 1 הבעיית קליקה מוגדרת באופן הבא:

קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר טבעי k.
פלט: האם G מכיל קליקה בגודל k?

$$CLIQUE = \{\langle G,k\rangle \;\big|\; \text{מכיל קליקה בגודל } k \ G\}\ .$$

הבעיית כיסוי בקדקודים מוגדרת:

קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר טבעי k.
פלט: האם G מכיל כיסוי בקדקודים k?

$$VC = \{\langle G,k\rangle \;\big|\; \text{מכיל כיסוי בקדקודים בגודל } k \ G\}\ .$$

הוכיחו כי קיימת רדוקציה זמן-פולינומיאלית מבעיית $CLIQUE$ לבעיית VC: כלומר

$$CLIQUE \leq_p VC\ .$$

שאלה 2

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$.
תת-קבוצת קודקודים $S\subseteq V$ היא **קבוצת בלתי תלויה** אם התנאי הבא מתקיים:
אם $u_1,u_2\in S$ אז $(u_1,u_2)\notin E$.

תת-קבוצת קודקודים $C\subseteq V$ תקרא **קליקה** אם התנאי הבא מתקיים:
אם $u_1,u_2\in C$ אז $(u_1,u_2)\in E$.

הבעיית IS מוגדרת:

$$IS = \left\{\langle G,k\rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ לפחות } G\right\}$$

הבעיית $CLIQUE$ מוגדרת:

$$CLIQUE = \left\{\langle G,k\rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל } k \text{ לפחות } G\right\}$$

הוכיחו כי

$$IS \leq_P CLIQUE\ .$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה IS לשפה $CLIQUE$.
יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 3

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$.
תת-קבוצת קדקודים $S\subseteq V$ היא **קבוצת בלתי תלויה** אם התנאי הבא מתקיים:
אם $u_1,u_2\in S$ אז $(u_1,u_2)\notin E$.

תת-קבוצת קודקודים $U \subseteq V$ היא **כיסוי קודקודים** אם התנאי הבא מתקיים:
אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \in U$ או $u_2 \in U$.
השפה IS מוגדרת:

$$IS = \left\{ \langle G, k \rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ לפחות } G \right\}$$

השפה VC מוגדרת:

$$VC = \left\{ \langle G, k \rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל כיסוי קודקודים בגודל } k \text{ לכל היותר } G \right\}$$

הוכיחו כי

$$IS \leq_P VC \ .$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה IS לשפה VC.
יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 4

בעיית $PARTITION$ מוגדרת באופן הבא:

קלט: קבוצת מספרים $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
פלט: האם קיימת חלוקה של S לשתי קבוצות S_1, S_2 כך ש-

- $S_1 \cap S_2 = \emptyset$
- $S_1 \cup S_2 = S$
- $\sum_{x_i \in S_1} x_i = \sum_{x_i \in S_2} x_i = \frac{1}{2} \sum_{x_i \in S} x_i$.

$$PARTITION = \left\{ \langle S \rangle \;\middle|\; \text{קבוצת שלמים, וקיימת תת-קבוצה } S \; Y \subseteq S \text{ כך ש- } \sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in S \setminus Y} y \right\}$$

בעיית $SubSetSum$ מוגדרת באופן הבא:

קלט: קבוצת מספרים $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ומספר t.
פלט: האם קיימת תת-קבוצה של S שסכום איבריה t?

$$SubSetSum = \left\{ \langle S, t \rangle \;\middle|\; \text{קבוצת שלמים, } S \; t \text{ שלם וקיימת תת-קבוצה } Y \subseteq S \text{ כך ש- } t = \sum_{y \in Y} Y \right\}$$

הוכיחו כי $SubSetSum \leq_P PARTITION$.

שאלה 5 בהינתן גרף $G = (V, E)$ לא מכוון. אומרים כי G k- צביע אם ניתן לצבוע את הקודקודים שלו ב-k צבעים (או פחות) כך ששני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע.
נגדיר את השפות הבאות:

$$3COLOR = \left\{ \langle G \rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון 3 - צביע } G \right\}$$
$$4COLOR = \left\{ \langle G \rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון 4 - צביע } G \right\}$$

הוכיחו:

$$3COLOR \leq_P 4COLOR \ .$$

שאלה 6 נגדיר את המושג "היפר גרף" באופן הבא: $H = (V, hE)$ כאשר

- V היא קבוצת קודקודים (בדומה לגרף רגיל)
- hE היא קבוצת של היפר-צלעות, כך שכל היפר-צלע מוגדרת ע"י שלושה קודקודים (בניגוד לצלע בגרף "רגיל" המוגדרת ע"י שני קודקודים). לדוגמה: $he_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ היא היפר-צלע.

הגדרה: **היפר כיסוי קודקודים** (hyper vertex cover) בהיפר-גרף הינה קבוצת קודקודים $S \subseteq V$ כך שלגל היפר-צלע $he \in hE$ מתקיים שלפחות אחד משלושת הקודקודים של הצלע שייך ל- S.

כלומר אם $\{u_1, u_2, u_3\} \in hE$ אז $u_1 \in S$ או $u_2 \in S$ או $u_3 \in S$.

נגדיר את השפה hyperVC באופן הבא:

$$\text{hyperVC} = \Big\{ \langle H, k \rangle \;\Big|\; \text{היפר-גרף המכיל היפר כיסוי קודקודים בגודל } k \;\; H \Big\}$$

נגדיר את השפה HS (Hitting Set) באופן הבא:

$$HS = \Big\{ \langle n, k, A_1, \ldots, A_t \rangle \;\Big|\; \text{כל } A_i \in [n] \text{ וקיים } R \subseteq [n] \text{ כך ש- } |R| = k \text{ ולכל } 1 \le i \le t \text{ מתקיים } A_i \cap R \neq \emptyset \Big\}$$

כאשר $[n] = \{1, 2, \cdots, n\}$.

הוכיחו כי $HS \le_P$ hyperVC.

שאלה 7 בעיית $HAMCYCLE$ (מעגל המילטוני) מוגדרת באופן הבא:

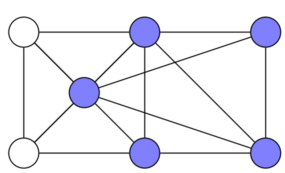
בהינתן גרף מכוון $G = (V, E)$, האם G מכיל מעגל שעובר בכל קודקוד בגרף פעם אחת בדיוק?

בעיית $HAMPATH$ (מסלול המילטוני) מוגדרת באופן הבא:

בהינתן גרף מכוון $G = (V, E)$ ושני קודקודים $s, t \in V$, האם G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t?

הוכיחו כי $HAMPATH \le_p HAMCYCLE$.

שאלה 8 בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, קליקה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $C \subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u, \mathrm{v} \in C$ מתקיים $(u, \mathrm{v}) \in E$. התרשים מראה קליקה בגודל $k = 5$:



נגדיר:

$$\frac{1}{2}CLIQUE = \Big\{ \langle G \rangle \;\Big|\; \text{גרף בעל } n = |V| \text{ קודקודים וקיימת קליקה בגרף בגודל } \frac{n}{2} \;\; G = (V, E) \Big\}$$

$$\frac{1}{4}CLIQUE = \Big\{ \langle G \rangle \;\Big|\; \text{גרף בעל } n = |V| \text{ קודקודים וקיימת קליקה בגרף בגודל } \frac{n}{4} \;\; G = (V, E) \Big\}$$

הוכיחו כי קיימת רדוקציה פולינומאלית מבעית $\frac{1}{2}CLIQUE$ לבעיית $\frac{1}{4}CLIQUE$.

3

כלומר:

$$\frac{1}{2}CLIQUE \leq_P \frac{1}{4}CLIQUE \ .$$

שאלה 9 גרף הוא k צביע (k- colourable) אם ניתן לצבוע את הקודקודים שלו ב- k צבעים (או פחות) כך ששני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע. נגדיר את השפות הבאות:

$$3COLOR = \left\{ \langle G \rangle \ \middle| \ \text{גרף לא מכוון וגם 3- צביע } G \right\} \ ,$$

$$6COLOR = \left\{ \langle G \rangle \ \middle| \ \text{גרף לא מכוון וגם 6- צביע } G \right\} \ .$$

הוכיחו: $3COLOR \leq_P 6COLOR$.

שאלה 10 **(10 נקודות)**

הבעיית $SubSetSum$ מוגדרת באופן הבא:

קלט: קבוצת מספרים $S = \{x_1, x_2, \quad \ldots \quad x_n\}$ ומספר t.

פלט: האם קיימת תת-קבוצה של S שסכום איבריה שווה t?

$$SubSetSum = \left\{ \langle S, t \rangle \ \middle| \ \text{קיימת } S \subseteq X \text{ כך ש- } \sum_{x \in X} x = t \right\}$$

תהי $KNAPSACK$ הבעייה המוגדרת בשאלה 3. הוכיחו את הטענה הבאה:

$$KNAPSACK \leq_P SubSetSum \ .$$

תשובות

<u>שאלה 1</u> בהינתן זוג $\langle G,k\rangle$ הקלט עבור $CLIQUE$, ניצור זוג $\langle G',k'\rangle$, הקלט של VC ע"י פונקצית הרדוקציה

$$\langle G,k\rangle \in CLIQUE \quad \Rightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in VC$$
$$\langle G,k\rangle \in CLIQUE \quad \Leftarrow \quad \langle G',k'\rangle \in VC$$

<u>הגדרת הרדוקציה</u>

- נגדיר את G' להיות הגרף המשלים $\bar{G}(V,\bar{E})$:
$$\bar{E} = \left\{(u_1,u_2) \;\middle|\; (u_1,u_2)\notin E\right\} \ .$$
- נגדיר $k'=|V|-k$.

<u>נכונות הרדוקציה</u>

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

נניח כי $\langle G,k\rangle \in CLIQUE$.

$\Leftarrow$ G מכיל קליקה C בגודל k.

$\Leftarrow$ לכל $(u_1,u_2)\in\bar{E}$ של $\bar{G}$, מתקיים $(u_1,u_2)\notin E$ ולכן $u_1\notin C$ או $u_2\notin C$.

$\Leftarrow$ לכל שני קודקודים u_1,u_2 ב- $\bar{G}$, $u_1\in V\backslash C$ או $u_2\in V\backslash C$.

$\Leftarrow$ הקובצת קודקודים $V\backslash C$ היא כיסוי בקודקודים של $\bar{G}$ בגודל $k'=|V|-k$.

$\Leftarrow$ $\langle G',k'\rangle\in VC$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

נניח כי $\langle G',k'\rangle\in VC$.

$\Leftarrow$ G' מכיל כיסוי בקדקודים S בגודל $k'=|V|-k$.

$\Leftarrow$ לכל שני קודקודים u_1,u_2 של G', אם $(u_1,u_2)\in\bar{E}$ אז $u_1\in S$ או $u_2\in S$.
השלילה הלוגית של גרירה זו היא: אם $u_1\notin S$ וגם $u_2\notin S$ אז $(u_1,u_2)\notin\bar{E}$.

$\Leftarrow$ אם $u_1\in V\backslash S$ וגם $u_2\in V\backslash S$ אז $(u_1,u_2)\in\bar{E}$.

$\Leftarrow$ הקבוצת קודקודים $V\backslash S$ היא קליקה ב- G בגודל $k=|V|-k'$.

$\Leftarrow$ G מכיל קליקה בגודל k.

שאלה 2

פונקצית הרדוקציה:

אנחנו נגדיר פונקצית הרדוקציה f שבהינתן זוג $\langle G,k\rangle \in IS$ (הקלט של IS), תיצור $\langle G',k'\rangle \in CLIQUE$, (הקלט של $CLIQUE$), כלומר

(*1) $$f\left(\langle G,k\rangle\right) = \langle G',k'\rangle \ .$$

כך שהתנאי הבא מתקיים:

(*2) $$\langle G,k\rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in CLIQUE \ .$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת לפי התנאים הבאים:

1) בהינתן גרף $G=(V,E)$.

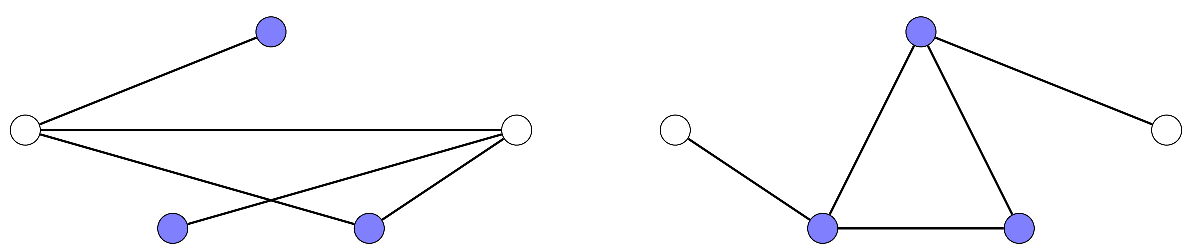
אז G' הוא הגרף המשלים $\bar{G}=(V,\bar{E})$, כאשר

$$\bar{E} = \left\{ (u_1,u_2) \;\middle|\; (u_1,u_2) \notin E \right\} \ .$$

2) $k'=k$.

כדוגמה: בהינתן הגרף $G=(V,E)$ שמכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k=3$. הפונקציית הרדוקציה יוצרת את הגרף $\bar{G}=(V,\bar{E})$ ואת המספר $k'=k=3$, כמתואר בתרשים למטה:

$G=(V,E)$ $\qquad\qquad$ $\bar{G}=\left(V,\bar{E}\right)$



נכונות הרדוקציה

כעת נוכיח שמתקיים: $\langle G',k'\rangle \in CLIQUE \quad \Leftrightarrow \quad \langle G,k\rangle \in IS$.

כיוון $\Leftarrow$

בהינתן גרף $G=(V,E)$ ושלם k.

נניח כי $\langle G,k\rangle \in IS$.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל k לפחות.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה S בגודל k.

$\Leftarrow$ אם $u_1,u_2\in S$ אז $(u_1,u_2)\notin E$.
כלומר, כל שני קדקודים ב- S לא מחוברים בצלע של G.

$\Leftarrow$ אם $u_1,u_2\in S$ אז $(u_1,u_2)\in \bar{E}$.
כלומר, כל שני קדקודים ב- S מחוברים בצלע של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ הקבוצה S היא קליקה בגודל k של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ הקבוצה S היא קליקה בגודל $k'=k$ של $G'=\bar{G}$.

$\Leftarrow$ $\langle G',k'\rangle\in CLIQUE$.

כיוון $\Rightarrow$

בהינתן גרף G' ושלם k'.
נניח כי $\langle G',k'\rangle\in CLIQUE$.

$\Leftarrow$ $\langle \bar{G},k\rangle\in CLIQUE$ (כי על פי ההגדרה של הפונקצית הרדוקציה, $G'=\bar{G}$ ו- $k'=k$).

$\Leftarrow$ $\bar{G}$ מכיל קליקה בגודל k לפחות.

$\Leftarrow$ $\bar{G}$ מכיל קליקה C בגודל k.

$\Leftarrow$ אם $u_1\in C$ וגם $u_2\in C$ אז $(u_1,u_2)\in \bar{E}$.
כלומר, כל שני קדקודים ב- C מחוברים בצלע של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ אם $u_1\in C$ וגם $u_2\in C$ אז $(u_1,u_2)\notin E$.
כלומר, כל שני קדקודים ב- C לא מחוברים בצלע של הגרף G.

$\Leftarrow$ הקבוצה C היא קבוצה בלתי תלוייה בגודל k של G.

$\Leftarrow$ $\langle G,k\rangle\in IS$.

שאלה 3

פונקצית הרדוקציה:

נגדיר פונקצית הרדוקציה f שבהינתן זוג $\langle G,k\rangle\in IS$, (הקלט של IS), יוצרת $\langle G',k'\rangle\in VC$, (הקלט של VC), אשר מקיימת את התנאי:

(*2) $$\langle G,k\rangle\in IS \quad\Leftrightarrow\quad \langle G',k'\rangle\in VC\ .$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

1) בהינתן הגרף $G=(V,E)$, אז הגרף G' הוא אותו גרף $G=(V,E)$.

(2 $k' = |V| - k$.

<u>נכונות הרדוקציה</u>

כעת נוכיח שמתקיים: $\langle G', k' \rangle \in VC \quad \Leftrightarrow \quad \langle G, k \rangle \in IS$.

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

בהינתן גרף $G = (V, E)$ ושלם k.

נניח כי $\langle G, k \rangle \in IS$.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה S בגודל k לפחות: $|S| \geq k$.

$\Leftarrow$ אם $u_1, u_2 \in S$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

כלומר, כל שני קדקודים ב- S לא מחוברים בצלע ב- G.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \notin S$ או $u_2 \notin S$.

$\Leftarrow$ אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \in V \backslash S$ או $u_2 \in V \backslash S$.

$\Leftarrow$ התת-קבוצה $V \backslash S$ היא כיסוי קודקודים של G.

$|S| \geq k$ ו- $|V \backslash S| = |V| - S$ לכן $|V \backslash S| \leq |V| - k$.

$\Leftarrow$ $G' = G$ מכיל כיסוי קודקודים U בגודל $k' =\leq |V| - k$ לכל היותר.

$\Leftarrow$ $\langle G', k' \rangle \in VC$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

בהינתן גרף G' ושלם k'.

נניח כי $\langle G', k' \rangle \in VC$.

$\Leftarrow$ $G' = (V, E)$ מכיל כיסוי קדקודים U בגודל k' לכל היותר: $|U| \leq k'$.

$\Leftarrow$ אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \in U$ או $u_2 \in U$.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם $u_1 \notin U$ וגם $u_2 \notin U$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם $u_1 \in V \backslash U$ וגם $u_2 \in V \backslash U$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

$\Leftarrow$ התת-קבוצה $S=V\backslash U$ היא קבוצה בלתי תלויה.

$|S|=|V|-|U|$ ו- $|U|\leq k'$ אז $|S|\geq |V|-k'$.

$\Leftarrow$ $G'=G$ מכיל קבוצה בלתי תלויה S בגודל $|V|-k'=k$ לפחות.

$\Leftarrow$ $\langle G,k\rangle \in IS$.

שאלה 4

פונקצית הרדוקציה:

בהינתן $\langle S,t\rangle$, קלט של $SubSetSum$, ניצור $\langle S'\rangle$, קלט של $PARTITION$, באופן הבא: Partition.

1) יהי $s=\sum\limits_{x\in S} x$.

2) נגדיר את הקבוצה החדשה S' על ידי הוספת האיבר $s-2t$ לקבוצה S:

$$S'=S\cup\{s-2t\}\ .$$

נוכיח כי $\langle S'\rangle \in PARTITION \quad \Leftrightarrow \quad \langle S,t\rangle \in SubSetSum$.

כיוון $\Leftarrow$

נניח ש- $\langle S,t\rangle \in SubSetSum$.

$\Leftarrow$ קיימת תת-קבוצה $S\subseteq Y$ כך ש- $t=\sum\limits_{y\in Y} y$.

לכן:

$$\begin{aligned}\sum_{y\in(Y\cup\{s-2t\})} y &= |Y|+s-2t\\ &= t+s-2t\\ &= s-t\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{y\in S'\backslash(Y\cup\{s-2t\})} y &= |S'|-(|Y|+s-2t)\\ &= |S'|-|Y|-s+2t\\ &= |S|+s-2t-|Y|-s+2t\\ &= |S|-|Y|\\ &= s-t\ .\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ התת-קבוצה $Y\cup\{s-2t\}$ והתת-קבוצה $S'\backslash\big(Y\cup\{s-2t\}\big)$ מהוות חלקוה של הקבוצה S'.

$\Leftarrow$ $\langle S'\rangle \in PARTITION$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

נניח ש- $\langle S' \rangle \in PARTITION$.

$\Leftarrow$ קיימות תת-קבוצות $S'_1, S'_2 \subseteq S'$ כך שמתקיים

(1*) $S'_1 \cup S'_2 = S'$

ו-

(2*) $$\sum_{x \in S'_1} x = \sum_{x \in S'_2} x \ .$$

הקבוצה S קשור לקבוצה S' על ידי היחס $S' = S \cup \{s - 2t\}$.

לכן

(3*) $S'_1 \cup S'_2 = S \cup \{s - 2t\}$

ללא הגבלת כלליות אנחנו נגדיר את התת-קבוצה $S_1 \subseteq S$ של הקבוצה S להיות

$$S_1 = S'_1 \cup \{s - 2t\} \ ,$$

ואנחנו נגדיר את התת-קבוצה $S_2 \subseteq S$ של הקבוצה S להיות

$$S_2 = S'_2 \ .$$

נובע ממשוואה (3*) ש:

(4*) $$S_1 \cup S_2 = S'_1 \cup S'_2 + \{s - 2t\} = S \cup \{s - 2t\} \qquad \Rightarrow \qquad S_1 \cup S_2 = S \ .$$

$\Leftarrow$ ניתן לרשום משוואה (2*) בצורה הבאה:

(5*) $$\sum_{x \in (S_1 \cup \{s-2t\})} x = \sum_{x \in S_2} x \ .$$

ניתן לפצל את הסכום בצד השמאול של המשווה (5*), באופן הבא:

(6*) $$\sum_{x \in S_1} x + s - 2t = \sum_{x \in S_2} x \ .$$

נוסיף את הסכום $\sum\limits_{x \in S_1} x$ לשני האגפים של משוואה של (6*) ונקבל

(7*) $$\sum_{x \in S_1} x + \sum_{x \in S_1} x + s - 2t = \sum_{x \in S_2} x + \sum_{x \in S_1} x \ .$$

הסכום בצד הימין של משוואה (7*) הוא הסכום $\sum\limits_{x \in (S_1 \cup S_2)} x$.

בנוסף, לפי המשוואה (4*), $S_1 \cup S_2 = S$ לכן $\sum\limits_{x \in S} x = \sum\limits_{x \in (S_1 \cup S_2)} x$.

לכן הסכום בצד הימין של משוואה (7*) הוא $\sum\limits_{x \in S} x$, שהוא הסכום של כל האיברים של S.

אנחנו מסמנים את הסכום הזה כ- $\sum_{x\in S} x = s$. לכן ניתן לרשום את משוואה (7*) בצורה הבאה:

$$\sum_{x\in S_1} x + \sum_{x\in S_1} x + s - 2t = s \ . \qquad (8*)$$

אפשר לבטל s בצד שמאול ובצד ימין ולהעביר את ה- $2t$ לצד ימין ולקבל את המשוואה:

$$\sum_{x\in S_1} x + \sum_{x\in S_1} x = 2t \ , \qquad (9*)$$

זאת אומרת

$$2\sum_{x\in S_1} x = 2t \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{x\in S_1} x = t \ . \qquad (10*)$$

$\Leftarrow$ קיימת תת קבוצה $S_1 \subseteq S$ של S שמקיימת את התנאי $\sum_{x\in S_1} x = t$.

$\Leftarrow$ $\langle S,t\rangle \in SubSetSum$.

שאלה 5

פונקצית הרדוקציה:

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$, הקלט של $3COLOR$, ניצור גרף לא מכוון חדש $G'=(V',E')$, הקלט של $4COLOR$.

בהינתן $G=(V,E)$ נבנה הגרף החדש $G'=(V',E')$ כאשר:

- $V' = V \cup \{u^*\}$, כלומר הוספנו קודקוד אחד חדש u^*.
- $E' = E \cup \big\{(u,u^*) \ \big| \ u \in V\big\}$. כלומר כל קודקוד בקבוצת הקודקודים V מחובר ל- u^* בצלע.

נכונות הרדוקציה:

נסמן צבע של קודקוד $u\in V$ ע"י $c(u)$, ונסמן 3 צבעים שונים של הקודקודים של G ב- $\{1,2,3\}$.
כלומר $c(u) \in \{1,2,3\}$.

באופן דומה, נסמן צבע של קודקוד $u'\in V'$ ע"י $c(u')$, ונסמן 4 צבעים שונים של הקודקודים של G' ב- $\{1,2,3,4\}$.
כלומר $c(u') \in \{1,2,3,4\}$.

נוכיח ש:

$$\langle G\rangle \in 3COLOR \quad \Leftrightarrow \quad \langle G'\rangle \in 4COLOR \ .$$

כיוון $\Leftarrow$

נניח כי $\langle G\rangle \in 3COLOR$.

$\Leftarrow$ אם $c(u)\in\{1,2,3\}$ לכל $u\in V$, ואם $(u_1,u_2)\in E$ אז $c(u_1)\neq c(u_2)$.
כלומר, ניתן לצבוע כל קודקוד ב-3 צבעים שונים כך שני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע.

$\Leftarrow$ אם $c\left(u^*\right)=4$ אז לכל $u \in V$ מתקיים $c(u) \neq c(u^*)=4$.
הצבע של u^* שונה מהצבעים של כל הקודקודים של V.

$\Leftarrow$ לכל $u_1', u_2' \in V'$ מתקיים שאם $(u_1', u_2') \in E'$ אז $c(u_1') \neq c(u_2')$.

$\Leftarrow$ ניתן לצבוע את הקודקודים של G' ב- 4 צבעים שך ששני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע.

$\Leftarrow$ $\langle G' \rangle \in 4COLOR$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

נניח כי $\langle G' \rangle \in 4COLOR$.

$\Leftarrow$ אם $c(u') \in \{1,2,3,4\}$ לכל $u' \in V'$, ואם $(u_1', u_2') \in E'$ אז $c(u_1') \neq c(u_2')$.
כלומר, ניתן לצבוע כל קודקוד ב-4 צבעים שונים כך שני קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע.

$\Leftarrow$ מכיוון ש- $V' = V \cup \{u^*\}$ ו- u^* מחובר לכל קודקוד $u \in V$, אם $c\left(u^*\right)=4$ אז בהכרח לכל $u \in V$ מתקיים $c(u)=1,2,3$.
(אחרת קיים קודקוד $u \in V$ הצבוה בצבע 4 וקיים וצלע בין u^* הצבוע בצבע 4 לבין הקודקוד $u \in V$ הצבוע בצבע 4 בסתירה לכך ש- G' הוא 4-צביע.)

$\Leftarrow$ מכיוון ש- G' הוא 4- צביע אז בהכרח אין צלע ב- $E=\left\{(u_1,u_2) \;\middle|\; u_1,u_2 \in V\right\}$ המחבר בין קודקודים בעלי אותו צבע.

$\Leftarrow$ $G=(V,E)$ הוא גרף 3- צביע.

$\Leftarrow$ $\langle G \rangle \in 3COLOR$.

<u>שאלה 6</u>

בהינתן $\langle H,k \rangle$ הקלט של hyperVC, כאשר $H=(V,hE)$ היפרגרף ו- k שלם, ניצור הקלט של $\langle n,k,A_1,\ldots,A_t \rangle$ HS כך ש- $\langle n,k,A_1,\ldots,A_t \rangle \in HS \Leftrightarrow \langle H,k \rangle \in \text{hyperVC}$, באופן הבא:

- $n=|V(H)|$.
- אם $hE=\{he_1,\ldots,he_m\}$ אז $A_1=he_1, \quad \cdots \quad , A_m=he_m$.

כלומר

$$f\left(\ \langle H,k \rangle\ \right) = \langle\ |V|\ ,\ k\ ,\ he_1\ ,\quad \ldots \quad ,\ he_m \rangle\ .$$

<u>נכונות הרדוקציה</u>

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

אם $\langle H,k \rangle \in \text{hyperVC}$

$\Leftarrow$ H מכיל היפר-כיסוי קודקודים $S \subseteq V$ בגודל k.

$\Leftarrow$ אם $he_i = \{u_1, u_2, u_3\} \in hE$ אז $u_1 \in S$ או $u_2 \in S$ או $u_3 \in S$.
כלומר, התת-קבוצה של היפר-כיסוי קודקודים S מכילה לפחות קודקוד אחד מכל צלע.

$\Leftarrow$ אם $he_i \in hE$ אז $he_i \cap S \neq \emptyset$.
כלומר, כיוון שבחרנו את ה- $\{A_i\}$ להיות הקבוצות הצלעות $\{he_i\}$, אזי הקבוצה S "פוגעת" בכל הקבוצות $\{he_i\}$.

$\Leftarrow$ לכל $1 \leq i \leq m$ מצקיים $he_i \subseteq V$ ו- $S \cap he_i \neq \emptyset$ ו- $|S| = k$.

$\Leftarrow$ $\langle |V|, k, he_1, \quad \ldots \quad, he_m \rangle \in HS$

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

אם $\langle |V|, k, he_1, \quad \cdots \quad he_m \rangle \in HS$

$\Leftarrow$ קיימת קבוצה S ש"פוגעת" בכל הקבוצות he_i.
כלומר, קיימת $S \subseteq V$ כך ש- $he_i \cap S \neq \emptyset$ לכל $1 \leq i \leq m$ ו- $|S| = k$.

$\Leftarrow$ אותה קבוצה מהווה היפר כיסוי קודקודים בגודל k של ההיפר גרף $H = (V, hE)$ כאשר $hE = \{he_1, \quad \ldots \quad, he_m\}$.

$\Leftarrow$ $\langle H, k \rangle \in \text{hyperVC}$.

<u>שאלה 7</u>

<u>פונקצית הרדוקציה</u>

בהינתן $\langle G, s, t \rangle$ הקדט של $HAMPATH$, נבנה גרף $\langle G' \rangle$ הקלט של $HAMCYCLE$ בזמן פולינומיאלי ונוכיח כי:

$$\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH \quad \Leftrightarrow \quad \langle G' \rangle \in HAMPATH\ .$$

נבנה את G' באופן הבא:

נוסיף קודקוד חדש x ל- G ושתי צלעות מכוונות חדשות (x, s) ו- (t, x) ונקבל גרף חדש G'.

<u>נכונות הרדוקציה</u>

1. ניתן לחשב את f בזמן קבוע.

2. נוכיח כי $\langle G' \rangle \in HAMPATH \quad \Leftrightarrow \quad \langle G, s, t \rangle \in HAMPATH$.

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

נניח כי $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH$.

$\Leftarrow$ G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t.

$\Leftarrow$ אותו מסלול קיים ב- G'.

$\Leftarrow$ מסלול זה יחד עם הצלעות שהוספנו (x,s) ו- (t,x) מהווה מעגל המילטוני שעובר דרך כל קודקודי הגרף G'.

$\Leftarrow$ G' מכיל מעגל המילטוני.

$\Leftarrow$ $\langle G' \rangle \in HAMCYCLE$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

נניח כי $\langle G' \rangle \in HAMCYCLE$

$\Leftarrow$ G' מכיל מעגל המילטוני C שעובר דרך כל הקודקודים של G'.

$\Leftarrow$ לפי הבנייה, C בהכרח מכיל את הצלעות החדשות (x,s) ו- (t,x).

$\Leftarrow$ הורדת x ושתי הצלעות (x,s) ו- (t,x) מ- C מאשירה מסלול המילטוני מ- s ל- t שעובר דרך כל קודקוד ב- G בדיוק פעם אחת.

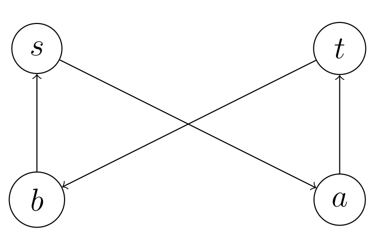
$\Leftarrow$ G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t.

$\Leftarrow$ $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH$.

<u>הערה:</u>

להוסיף צלע (t,s) ל- G לא מספיק.

לדוגמה:



14

הגרף לא מכיל מסלול המילטוני אבל כן מכיל מעגל המילטוני. ואם נוסיף רק צלע (t,s), המעגל עדיין קיים ב- G'.

שאלה 8

בניית הרדוקציה

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$. הפונקציית הרדוקציה היא
$$f(\langle G\rangle)=\langle G'\rangle$$

כאשר:

- $G'=(V',E')$ גרף לא מכוון.
  - עבור הגרף G נסמן $n=|V|$ ו- $m=|E|$.
  - עבור הגרף G' נסמן $n'=|V'|$ ו- $m'=|E'|$.
- $V'=V\cup U$ כאשר U קבוצה של n קודקודים בודדים שלא מחוברים לאף קודקוד.
- $E'=E$.
- לפיכך:
$$n'=|V'|=|V|+|U|=2n\ ,$$
ו-
$$m'=|E'|=|E|=m\ .$$

הוכחת נכונות

הוכחה לכיוון $\Leftarrow$

אם $\langle G\rangle\in\frac{1}{2}CLIQUE$.

$\Leftarrow$ G גרף לא מכוון שמכיל קליקה $C\subset V$ בגודל $\frac{n}{2}$.

$\Leftarrow$ הגרף G' מכיל קליקה בגודל $\frac{n}{2}$.

$\Leftarrow$ הגרף G' מכיל קליקה בגודל $\frac{n'}{4}$.

$\Leftarrow$ $\langle G'\rangle\in\frac{1}{4}CLIQUE$.

הוכחה לכיוון $\Rightarrow$

אם $\langle G\rangle \notin \frac{1}{2}CLIQUE$.

$\Leftarrow$ G גרף לא מכוון ולא קיימת קליקה $C \subset V$ בגודל $\frac{n}{2}$ בגרף G.

$\Leftarrow$ גם לא קיימת קליקיה בגודל $\frac{n}{2}$ בגרף G'.

$\Leftarrow$ לא קיימת קליקיה בגודל $\frac{n'}{4}$ בגרף G'.

$\Leftarrow$ $\langle G'\rangle \notin \frac{1}{4}CLIQUE$.

שאלה 9

שאלה 10