

שיעור 10

המחלקה P והמחלקה NP

10.1 המחלקה P

הגדרה 10.1 בעיית הכרעה

בעיית הכרעה מוגדרת באופן הבא:

"בhinatan קלט כלשהו, האם הקלט מקיים תנאי מסוימים ? "

דוגמה 10.1 דוגמה של בעיית הכרעה

לדוגמה, בהינתן מספר n , האם n ראשוני?

משפט 10.1 שקיים בין בעיה לשפה

כל בעיה הכרעה ניתן לתאר כשפה שוקולה:

. בעיה הכרעה \equiv שפה

דוגמה 10.2

לדוגמה, הבעיה הכרעה הבאה:

"בhinatan מספר n , האם n ראשוני? "

ניתנת לרשום כשפה הבאה:

$$L_{\text{prime}} = \{ \langle n \rangle \mid n \text{ ראשוני} \} .$$

הגדרה 10.2 אלגוריתם זמן פולינומייאלי

אומרים כי אלגוריתם A מכרייע בעיה בזמן פולינומייאלי אם קיימים קבוע c וזמן הריצה של A על קלט w חסום ע"י $O(|w|^c)$.

התזה של צרצ' טיורינג אומר שאם קיימים אלגוריתם המכרייע בעיה בזמן פולינומייאלי, אז קיימת מכונת טיורינג דטרמיניסטיבית המכרייע את השפה השוקולה בעיה או בזמן פולינומייאלי.

. אלגוריתם מכרייע \equiv מכונת טיורינג דטרמיניסטיבית

הגדרה 10.3 המחלקה P

המחלקה P היא אוסף כל הבעיה (השפות) שקיימים עבורן אלגוריתם (מכונת טיורינג דטרמיניסטיבית) המכרייע אותן בזמן פולינומייאלי.

10.2 דוגמאות לבעיות ב- P

(1)

$$PATH = \{\langle G, s, t \rangle \mid \text{גרף } G \text{ מכון המכיל מסלול מ- } s \text{ ל- } t\} \in P$$

(2)

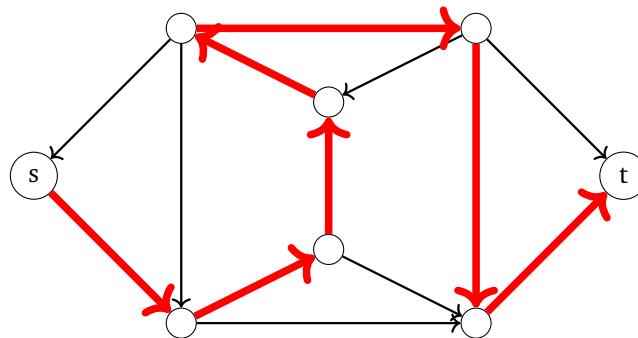
$$RELPRIME = \{\langle x, y \rangle \mid x \text{ ו- } y \text{ זרים}\} \in P$$

10.3 בעיית המסלול המילטוני $HAMPATH$

הגדירה 10.4 $HAMPATH$

בاهינתן גרף מכון $G = (V, E)$ ושני קודקודים $s, t \in V$. מסלול המילטוני מ- s ל- t ב- G הוא מסלול מ- s ל- t שעובר דרך כל קודקוד בגרף בדיקת פעם אחת.

לדוגמה:



הגדירה 10.5 בעיית $HAMPATH$

קלט: גраф מכון $G = (V, E)$ ושני קודקודים $s, t \in V$.

פלט: האם G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t ?

$$HAMPATH = \{\langle G, s, t \rangle \mid \text{האם } G \text{ מכון המכיל מסלול המילטוני מ- } s \text{ ל- } t ?\}$$

נשאל שאלת: האם $HAMPATH \in P$?

לא ידוע האם קיים אלגוריתם המכריע את $HAMPATH$ בזמן פולינומיAli (שאלת פתוחה).

- בהינתן קלט $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH$, האם $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH$?

• נעה על שאלת אחרת:

בהתאם קלט $\langle G, s, t \rangle$, ומחרוזת y , האם $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH$?

- ניתן לבדוק האם y היא מסלול המילטוני מ- s ל- t ב- G בזמן פולינומיAli ולענות בהתאם.
- במקרה זה, אומרם כי $HAMPATH$ ניתנת לאימות בזמן פולינומיAli.

10.4 אלגוריתם אimotoת

הגדרה 10.6 אלגוריתם אimotoת

אלגוריתם אimotoת עבור בעיה A הוא אלגוריתם V כך שלכל קלט $\Sigma^* \in w$ מתקיים:

$w \in A$ אם ורק אם קיימת מהירות (עדות) y באורך פולינומיAli ב- $|w|$ כך ש- V מקבל את הזוג (w, y) כולם:

- אם $w \in A$ קיים y כך ש: $V(w, y) = T$ \Leftarrow
- אם $w \notin A$ לכל y מתקיים $V(w, y) = F$ \Leftarrow

הערה 10.1

זמן ריצה של אלגוריתום אimotoת נמדד ביחס לגודל הקלט $|w|$.

אלגוריתם אimotoת פולינומיAli אם הוא רץ בזמן פולינומיAli.

10.5 המחלוקת NP

הגדרה 10.7 המחלוקת NP

החלוקת NP היא אוסף כל הבעיות שקיים עבורן אלגוריתם אimotoת פולינומיAli.

משפט 10.2 $HAMPATH \in NP$

בעיית המסלול ההAMILTONI: $HAMPATH$

קלט: גראף מכוכון $G = (V, E)$ ושני קודקודים $s, t \in V$.

פלט: האם G מכיל מסלול המילוטוני מ- s ל- t ?

$$HAMPATH = \{ \langle G, s, t \rangle \mid G \text{ גראף מכוכון המכיל מסלול המילוטוני מ- } s \text{ ל- } t \}$$

הוכחה: הוכחנו כי $HAMPATH \in NP$

הוכחה: נבנה אלגוריתם אimotoת V עבור $HAMPATH$.

: על קלט $\langle G, s, t \rangle, y$:

1) בודק האם y היא סדרה של

$$u_1, u_2, \dots, u_n$$

השונים זה מזה.

- אם לא \Leftarrow דוחה.

2) בודק האם $u_n = t$ ו- $u_1 = s$.

- אם לא \Leftarrow דוחה.

(3) בודק שכל הצלעות (u_i, u_{i+1} $1 \leq i \leq n$) קיימות ב- G .

- אם כן \Leftarrow מקבל.
- אם לא \Leftarrow דוחה.

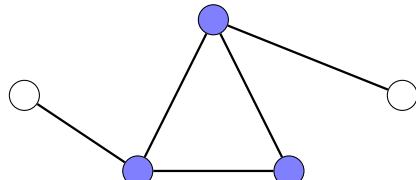
נכונות

- זמן הריצה של האלגוריתם הוא פולינומילי בגודל הקלט.
- אם G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t \Leftarrow עבור y שהוא קידוד של מסלול זה, V יקבל את הזוג $(\langle G, s, t \rangle, y)$.
- אם G לא מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t \Leftarrow לכל y , האלגוריתם ידחה את הזוג $(\langle G, s, t \rangle, y)$.

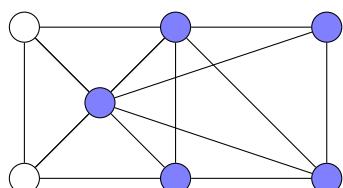
■

הגדרה 10.8 קליקה

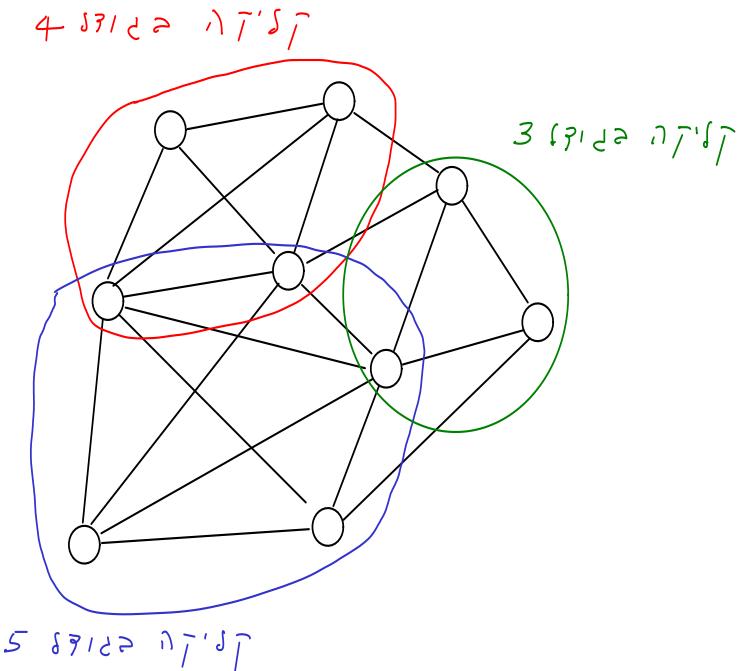
בහינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, קליקה ב- G היא תת-קובוצה של קודקודים $C \subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u, v \in C$ מתקיים $(u, v) \notin E$.



קליקה בגודל 3



קליקה בגודל 5

**הגדרה 10.9 בעיית הקליקה**

קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר k .

פלט: האם G קליקה בגודל k ?

$$\text{CLIQUE} = \left\{ \langle G, k \rangle \mid \begin{array}{l} G \text{ גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל } k \\ \text{או } G \text{ אינו מכיל קליקה בגודל } k \end{array} \right\}$$

משפט 10.3 $\text{CLIQUE} \in NP$

$$\text{CLIQUE} \in NP.$$

הוכחה: נבנה אלגוריתם אimotoת V עבור CLIQUE .

:($\langle G, k \rangle, y$) על קלט V

1) בודק האם y היא קבוצה של k קודקודים שונים מ- G .

- אם לא \Leftarrow דוחה.

2) בודק האם כל שני קודקודים מ- y מחוברים בצלע ב- G .

- אם כן \Leftarrow מקבל.
- אם לא \Leftarrow דוחה.

הגדרה 10.10 בעיית SubSetSum

קלט: קבוצת מספרים $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ומספר t .

פלט: האם קיימת תת-קבוצה של S שסכום איבריה שווה t ?

$$\text{SubSetSum} = \left\{ \langle S, t \rangle \mid \sum_{x \in Y} x = t \text{ כך ש } Y \subseteq S \text{ קיימת} \right\}$$

משפט 10.4 $\text{SubSetSum} \in NP$

$\text{SubSetSum} \in NP$.

הוכחה: נבנה אלגוריתם אimotoות V עבור SubSetSum .

V על קלט $(\langle S, t \rangle, y)$:

1) בודק האם y היא תת-קבוצה של S .

- אם לא \Leftarrow דוחה.

2) בודק האם סכום המספרים ב- y שווה t .

- אם לא \Leftarrow דוחה.

- אחרת \Leftarrow מקבל.

10.6 הקשר בין NP למוכנות טיריניג א-דטרמיניסטיבית

NP=Non-deterministic polynomial-time.

משפט 10.5

לכל בעיה A :

אם ורק אם קיימת מוכנות טיריניג א-דטרמיניסטיבית המכ裏עה את A בזמן פולינומילי.

דוגמה 10.3

نبנה מוכנות טיריניג א-דטרמיניסטיבית M המכ裏עה את $CLIQUE$ בזמן פולינומילי.

$\langle G, k \rangle$ על קלט $= M$:

- בוחרת באופן א-דטרמיניסטי קבוצה y של k קודקודים מ- G .

- בודקת האם כל שני קודקודים מ- y מחוברים בצלע ב- G .

- * אם כן \Leftarrow מקבלת.

- * אחרת \Leftarrow דוחה.

אלגוריתם אimotoות \equiv מ"ט א"ד.

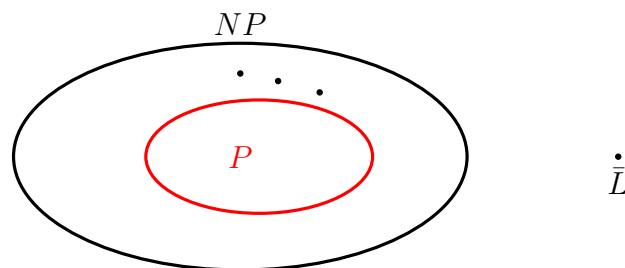
10.7 הקשר בין המחלקה P ו- NP

P = כל הבעיות שניתן להכריע בזמן פולינומיאלי.

NP = כל הבעיות שניתן לאמת בזמן פולינומיאלי.

משפט 10.6

$$P \subseteq NP .$$



שאלה פתוחה: האם $?P = NP$

משפט 10.7

P סגורה תחת משלים.

הוכחה: אם $\bar{A} \in P$ אז גם $A \in P$.

הגדרה 10.11

$$Co\,NP = \{A \mid \bar{A} \in NP .\}$$

לדוגמה:

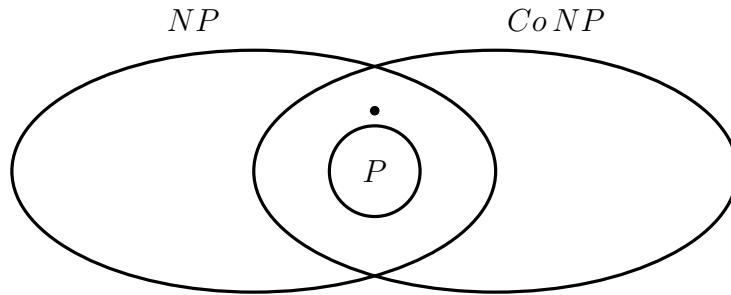
$$\overline{HAMPATH} \in Co\,NP .$$

$$\overline{CLIQUE} \in Co\,NP .$$

שאלה פתוחה: האם $?NP = Co\,NP$

משפט 10.8

$$P \subseteq NP \cap Co\,NP .$$



שאלה פתוחה: האם $?P = NP \cap Co\,NP$

נדון בשאלה המרכזית: האם $?P = NP$

הגדרה 10.12 פונקציה פולינומיאלית

בاهינתן פונקציה $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, אומרים כי f חסיבה בזמן פולינומיאלי אם קיים אלגוריתם (מ"ט דטרמיניסטי) המחשב את f בזמן פולינומיאלי.

הגדרה 10.13 רדוקציה פולינומיאלית

בاهינתן שתי בעיות A ו- B . אומרים כי A ניתנת לרדוקציה פולינומיאלית ל- B , ומסומנים $B \leqslant_P A$, אם קיימת פונקציה $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ המקיים:

(1) f חסיבה בזמן פולינומיאלי

(2) לכל $w \in \Sigma^*$:

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B .$$

משפט 10.9 משפט הרדוקציה

לכל שתי בעיות A ו- B , אם $A \leqslant_P B$ אז

(1) אם $A \in P$ אז $B \in P$.

(2) אם $A \in NP$ אז $B \in NP$.

מסקנה מ- (1) ו- (2):

(3) אם $B \notin P$ אז $A \notin P$.

(4) אם $B \notin NP$ אז $A \notin NP$.

הוכחה: מכיוון שקיימת רדוקציה D של A ל- B , קיימת פונקציה f חסיבה בזמן פולינומיאלי המקיים, לכל $w \in \Sigma^*$,

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B .$$

יהי M_f האלגוריתם שמחשבת את f בזמן פולינומיאלי.

(1) נוכח כי אם $B \in P$ אז $A \in P$.

יהי M_B האלגוריתם שמכרע עת B בזמן פולינומיאלי. נבנה אלגוריתם M_A המכרע את A בזמן פולינומיאלי.

התאור של M_A

= על כל קלט w :

1. מחשב את $f(w)$ ע"י M_f .

2. מרים את M_B על $f(w)$ ועונה כמותה.

נוכח כי M_A מכרע את A בזמן פולינומיאלי:

- אם $w \in A$ מתקבל $f(w) \in B$ מתקבל $M_B \Leftarrow f(w) \in B \Leftarrow w \in A$ מתקבל $M_A \Leftarrow f(w) \in B \Leftarrow w \in A$.
- אם $w \notin A$ מתקבל $f(w) \notin B$ מתקבל $M_B \Leftarrow f(w) \notin B \Leftarrow w \notin A$ מתקבל $M_A \Leftarrow f(w) \notin B \Leftarrow w \notin A$.

נוכח כי זמן הריצה של M_A הוא פולינומי בגודל הקלט $|w|$ בזמן פולינומיאלי:

- נסמן ב- P_f את הפולינום של M_f .
- נסמן ב- P_B את הפולינום של M_B .

זמן הריצה של M_A על קלט w שווה

$$P_f(|w|) + P_B(|f(w)|)$$

מכיוו ש- $|f(w)| \leq P_f(|w|)$, הזמן הריצה של M_A על w חסום ע"י

$$P_f(|w|) + P_B(P_f(|w|)) = P_f(|w|) + (P_B \circ P_f)(|w|)$$

כאשר $P_B \circ P_f$ מסמן את ההרכבה של שני פולינומים. לכן M_A רץ בזמן פולינומייאלי בגודל $|w|$.

