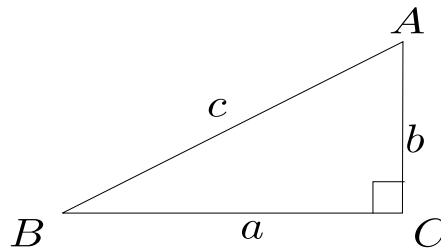


שיעור א

זהויות של פונקציות טריגונומטריות

1.א פיתגורס, סינוס וטנגנט

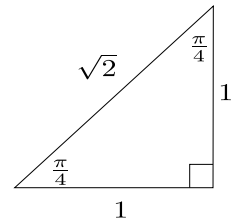


$$\sin(\angle A) = \frac{a}{c}, \quad \cos(\angle A) = \frac{b}{c}, \quad \tan(\angle A) = \frac{a}{b}.$$

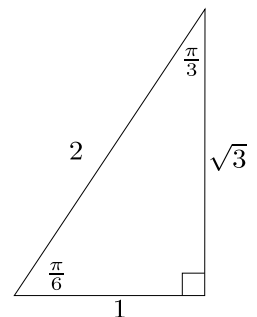
משפט פיתגורס:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Leftrightarrow \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 1 = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \sqrt{3} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} \\ \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \end{aligned}$$



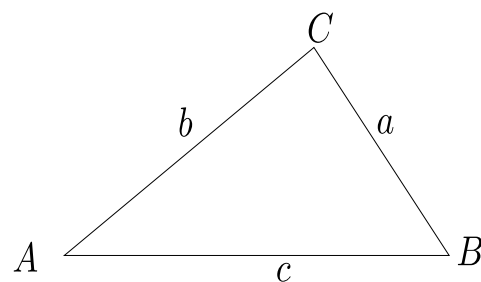
א.2 משפט הסינוסים ומשפט הקוסינוסים

משפט הסינוסים:

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)} .$$

משפט הקוסינוסים:

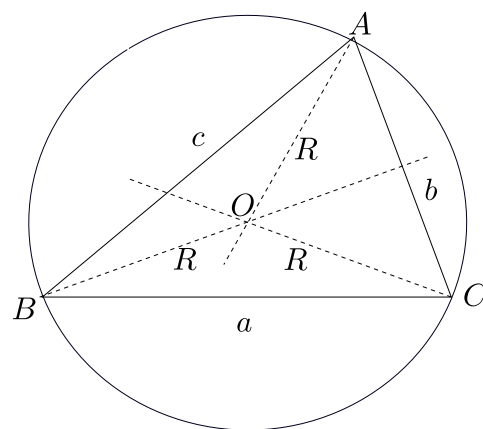
$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\angle C) , \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\angle B) , \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\angle A) . \end{aligned}$$



רדיוס של משולש החוסם במעגל:

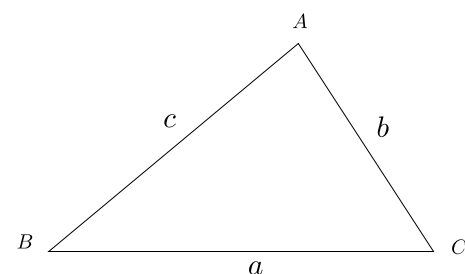
$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)} = 2R .$$

כאשר R הוא הרדיוס המעגל החוסם את המשולש.



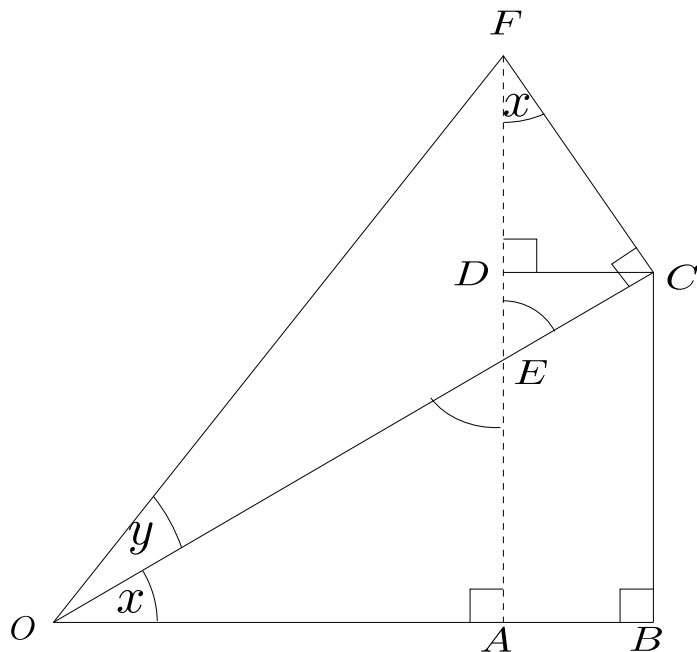
שטח משולש:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot AB \cdot \sin(\angle A)}{2} .$$



א.3 זיהויות טריגונומטריות

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$



משולשים ישרי זוויתים OPQ ו- OQR מכילים את הזוויות x ו- y כמתואר בתרשים. הזווית URQ שווה ל-

x .

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \frac{AF}{OF} = \frac{AD+DF}{OF} = \frac{BC+DF}{OF} \\ &= \frac{BC}{OC} \times \frac{OC}{OF} + \frac{DF}{CF} \times \frac{CF}{OF} \\ &= \sin x \cos y + \cos x \sin y\end{aligned}$$

הנוסחה עבור $\cos(x+y)$ ניתנת להוכיח בדרך הדומה:

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \frac{OA}{OF} = \frac{OB-AB}{OF} = \frac{OB-DC}{OF} \\ &= \frac{OB}{OC} \times \frac{OC}{OF} - \frac{DC}{CF} \times \frac{CF}{OF} \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y\end{aligned}$$

מהנוסחאות האלה נובעות כי

$$\begin{aligned}
\tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} \\
&= \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} \\
&= \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\sin y \cos x}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} \\
&= \frac{\frac{\sin x \cancel{\cos y}}{\cancel{\cos x} \cancel{\cos y}} + \frac{\sin y \cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x} \cos y}}{\frac{\cancel{\cos x} \cancel{\cos y}}{\cancel{\cos x} \cancel{\cos y}} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} \\
&= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} \\
&= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}
\end{aligned}$$

$$\sin(x+y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

$$\sin(x-y) = \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$\cos(x-y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y)$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \tan(y)}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 2 \cos^2(x) - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2(x)\end{aligned}$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(x))$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos(x))$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x)$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \quad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad 1 + \cot^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x) \quad \tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$

א.3 עוד זיהויות טריגונומטריות*

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(x))$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos(x))$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$2 \sin(x) \cos(y) = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$

$$2 \cos(x) \sin(y) = \sin(x+y) - \sin(x-y)$$

$$2 \cos(x) \cos(y) = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

$$-2 \sin(x) \sin(y) = \cos(x+y) - \cos(x-y)$$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin(3x) = 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x) \quad \cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$$