# שעור 9
# מימד ובסיס

## 9.1 בסיס של מרחב ווקטורי

**הגדרה 9.1 בסיס**

קבוצת ווקטורים $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n \in V$ נקראת בסיס של $V$ אם היא מקיימת:

1) $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ בלתי תלוים לינארית.

2) $\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)=V$.

**דוגמה 9.1**

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\ ,\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\ ,\quad \ldots,e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\ .$$

בסיס של $\mathbb{F}^n$ (בסיס הסטנדרטי).

**הוכחה:**

1) צ"ל $e_1,\ldots,e_n$ בת"ל.

$$k_1e_1+k_2e_2+\ldots+k_ne_n=\bar{0}$$

$$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\ldots+k_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad k_1=0,k_2=0,\quad k_n=0\ .$$

לכן $e_1,\ldots,e_n$ בת"ל.

2) צ"ל כי $\mathrm{span}(e_1,\ldots,e_n)=\mathbb{F}^n$.

נקח ווקטור שרירותי $\mathbb{F}^n \ni \mathrm{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. צ"ל $\mathrm{v} = \mathrm{span}(e_1, \ldots, e_n)$.

$$k_1 e_1 + \ldots k_n e_n = \mathrm{v}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad k_1 = x_1, k_2 = x_2, \quad \ldots, \quad k_n = x_n \ .$$

■

## דוגמה 9.2

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \ldots, \quad E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad .$$

בסיס של $\mathbb{F}^{2\times 3}$ (הבסיס הסטנדרטי).

**הוכחה:**

**1)** נוכיח כי $E_1, \ldots, E_6$ בת"ל.

$$k_1 E_1 + k_2 E_2 + \ldots + k_6 E_6 = \bar{0}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots + k_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad k_1 = 0, k_2 = 0, \quad k_6 = 0 \ .$$

לכן $E_1, \ldots, E_6$ בת"ל.

**2)** נוכיח כי $\mathrm{span}(E_1, \ldots, E_6) = \mathbb{F}^{2\times 3}$.

לכל ווקטור $\mathbb{F}^{2\times 3} \ni \mathrm{v} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$,

$$\mathrm{v} = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 + eE_5 + fE_6 \ .$$

ז"א

$\mathrm{v} \in \mathrm{span}(E_1, \ldots, E_6)$.

■

### דוגמה 9.3

וקטורים
$$e_1=1\ ,\quad e_2=x\ ,\quad \ldots\ ,\quad e_n=x^n$$
מהווים בסיס (הבסיס הסטנדרטי) של המרחב $\mathbb{F}_n[x]$.

**הוכחה:**

**1)** צ"ל $1,x,\ldots,x^n$ בת"ל.
$$k_1\cdot 1+k_2x+\ldots+k_nx^n=\bar{0}=0\cdot 1+0\cdot x+\ldots+0\cdot x^n$$
לכל $x$ כאשר
$$k_1=0,k_2=0,\quad \ldots,\quad k_n=0\ .$$
לכן $1,x,\ldots,x^n$ בת"ל.

**2)** נוכיח כי $\text{span}(1,x,\ldots,x^n)=\mathbb{F}_n[x]$.

לכל $p(x)=a_1+a_2x+\ldots+a_nx^n\in\mathbb{F}_n[x]$ מתקיים
$$p(x)=a_1e_1+a_2e_2+\ldots+a_ne_n$$
ז"א $p(x)=\text{span}(e_1,\ldots,e_n)$.

■

### דוגמה 9.4

בדקו כי הווקטורים
$$\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}\ ,\qquad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\ .$$
מהווה בסיס של $\mathbb{R}^3$.

**פתרון:**

**1)** צ"ל $u_1,u_2,u_3$ בת"ל.
$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=\bar{0}$$
זאת מערכת משוואות הומוגניות:
$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&2&0\\0&1&1&0\\5&1&4&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3+5R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&2&0\\0&1&1&0\\0&6&14&0\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_3\to R_3-6R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&2&0\\0&1&1&0\\0&0&8&0\end{array}\right)$$
למערכת יש פתרון יחיד: $k_1=0,k_2=0,k_3=0$

לכן $u_1,u_2,u_3$ בת"ל.

**2)** צ"ל $\text{span}(u_1,u_2,u_3)=\mathbb{R}^3$.

נקח $\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ $\text{v}=$. צ"ל $\text{v}=\text{span}(u_1,u_2,u_3)$.

<u>דרך 1:</u>

$$xu_1+yu_2+zu_3=\text{v}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & a\\ 0 & 1 & 1 & b\\ 5 & 1 & 4 & c\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3+5R_1}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & a\\ 0 & 1 & 1 & b\\ 0 & 6 & 14 & 5a+c\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-6R_2}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 5a+c-6b\end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון, לכן $\text{v}\in\text{span}(u_1,u_2,u_3)$.

<u>דרך 2:</u>

למערכת $A\cdot X=0$ יש פתרון יחיד, לכן מטריצה $A$ הפיכה. מכאן נובע שלכל $\text{v}\in\mathbb{R}^3$, למערכת $A\cdot X=\text{v}$ יש פתרון יחיד, ז"א $\text{v}\in\text{span}(u_1,u_2,u_3)$.

**משפט 9.1**

אם במרחב וקטורי $V$ יש בסיס סופי, אז לכל בסיס של $V$ יש את אותו מספר הווקטורים.

**הגדרה 9.2**

נניח ש $V$ מרחב וקטורי. למספר הווקטורים בבסיס של $V$ קוראים המימד של $V$.
המימד של מרחב וקטורי יסומן
$\dim(V)$ .

### דוגמה 9.5

$$\begin{aligned}\dim(\mathbb{F}^n)&=n\\ \dim(\mathbb{F}^n[x])&=n+1\\ \dim(\mathbb{F}^{m\times n})&=m\cdot n\ .\end{aligned}$$

**משפט 9.2 מימד ובסיס של קבוצת וקטורים**

נניח כי $V$ מרחב וקטורי, $\dim(V)=n$. אז

**1)** כל $n+1$ ווקטורים של $V$ הם תלוים לינארית.

**2)** כל קבוצה של $n$ ווקטורים בלתי תלויה לינארית, היא בסיס של $V$.

**3)** כל קבוצה של ווקטורים שהיא בלתי תלויה לינארית , ניתן להשלים לבסיס של $V$.

### דוגמה 9.6

הוכיחו שהווקטורים

$$u_1 = 1 + x + x^2 \ , \qquad u_2 = 2x + 3x^2 \ , \qquad u_3 = -3x - 4x^2$$

מהווים בסיס של מרחב $\mathbb{R}_2[x]$.

**פתרון:**

נוכיח כי $u_1, u_2, u_3$ בת"ל.

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \bar{0}$$

$$k_1(1 + x + x^2) + k_2(2x + 3x^2) + k_3 - 3x - 4x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

$$k_1(k_1 + 2k_2 - 3k_3)x + (k_1 + 3k_2 - 4k_3)x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

$$\left.\begin{array}{rl} k_1 & = 0 \\ k_1 + 2k_2 - 3k_3 & = 0 \\ k_1 + 3k_2 - 4k_3 & = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad k_1 = 0 \ , k_2 = 0, k_3 = 0$$

לכן $u_1, u_2, u_3$ בת"ל.

$\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$, לכן שלושה ווקטורים בת"ל מהווים בסיס של $\dim(\mathbb{R}_2[x])$.

## 9.2 מציאת בסיס ומימד של תת מרחב

**הגדרה 9.3 עמודה מובילה ושורה מובילה**

נניח כי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ותהי $B$ המטריצה המדורגת המתקבלת מ- $A$.

**(1** אומרים כי עמודה ה- $i$ של $A$ **עמודה מובילה** אם בעמודה ה- $i$ של $B$ יש איבר מוביל.

**(2** אומרים כי שורהה ה- $i$ של $A$ **שורה מובילה** אם בשורה ה- $i$ של $B$ יש איבר מוביל.

**משפט 9.3 עמודות מובילות מהוות בסיס של תת-מרחב**

נניח כי $S = \{u_1, \ldots, u_k\} \in \mathbb{F}^n$ קבוצת ווקטורים של מרחב ווקטורי $\mathbb{F}^n$.

נגדיר $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_k \\ | & | & & | \end{pmatrix}$.

**(1** כל העמודות של $A$ עמודות מובילות אם ורק אם הקבוצת ווקטורים $S$ בת"ל.

**(2** העמודות המובילות של $A$ מהווים בסיס של $S$.

**(3** מספר עמודות מובילות ב- $A$ שווה למימד של $S$.

**הוכחה: (להעשרה בלבד)**

נרשום

$$x_1 u_1 + \cdots + x_k u_k = \bar{0} \qquad \textbf{(*1)}$$

כאשר $x_1,\cdots,x_k\in\mathbb{F}$ סקלרים. ונגדיר $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_k\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^k$. נניח ש- $B$ המטריצה המדורגת המתקבלת מ- $A$.

**1)** נניח כי $S$ בת"ל.

$\Leftarrow$ אז $x_1=x_2=\cdots=x_k=0$.

$\Leftarrow$ למערכת $AX=0$ יש פתרון יחיד: $X=0$.

$\Leftarrow$ יש איבר מוביל בכל עמודה של $B$.

$\Leftarrow$ כל העמודות של $A$ מובילות.

נניח שכל העמודות של $A$ מובילות.

$\Leftarrow$ יש איבר מוביל בכל עמודה של $B$.

$\Leftarrow$ הפתרון היחיד הינו $X=0$.

$\Leftarrow$ עבור הסקלרים ב- (1*) נקבל $x_1=\cdots=x_k=0$ $\Leftarrow$ $S$ בת"ל.

**2)** קבוצת העמודות המובילות של $A$ תהיה בסיס של $S$ אם **(א)** היא בת"ל ו **(ב)** היא פורשת $S$.

**א)** תהי $A'$ המטריצה המתקבלת מהעמודות המובילות של $A$. לפי (1) כל העמודות של $A'$ בת"ל.

**ב)** נניח שמתוך ה $k$ וקטורים של $S$ יש $p$ וקטורים בת"ל: $\{u_1,\ldots,u_p\}$.
לכן, אפשר לרשום כל ווקטור של $S$ כצירוף ליניארי של הווקטרים $\{u_1,\ldots,u_p\}$.
לכן $S$ נפרש ע"י הווקטורים $\{u_1,\ldots,u_p\}$.
נרשום $A=\begin{pmatrix}| & & | & | & & |\\ u_1 & \cdots & u_p & u_{p+1} & \cdots & u_k\\ | & & | & | & & |\end{pmatrix}$.
הווקטורים $u_1,\cdots,u_p$ בת"ל לכן ה- $p$ עמודות הראשונות של $A$ מובילות.
(אין יותר מ-$p$ עמודות מובילות כי אז יהיו יותר מ- $p$ ווקטורין בת"ל ונגיע לסתירה).
לפיכך העמודות המובילות פורשות $S$.

**3)** לפי (2) העמודות המובילות של $A$ מהווה בסיס של $S$.

מימד שווה למספר ווקטורים בבסיס.

לפיכך המימד שווה למספר עמודות המובילות ב- $A$.

■

### דוגמה 9.7

מצאו בסיס ומימד של הקבוצה $S=\text{span}\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3\}$ כאשר

**1)**

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\ .$$

**2)**

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\ .$$

**פתרון:**

**1)**

$$A=\begin{pmatrix}| & | & |\\ \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3\\ | & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן $\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3\}$ בסיס של $S$.

$\dim(S)=3$.

**2)**

$$A=\begin{pmatrix}| & | & |\\ \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3\\ | & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

עמודות $1$ ו- $2$ מובילות. לכן הווקטורים $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2$ מהווים בסיס של $S$.

$\dim(S)=2$.

## דוגמה 9.8

מצאו בסיס ואת המימד של תת מרחב הנפרש ע"י הווקטורים

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -4 & 2\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 5\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -5 & 7\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_4=\begin{pmatrix}1 & -7\\ -5 & 1\end{pmatrix}\ .$$

בטאו את וקטור $u=\begin{pmatrix}4 & -14\\ -13 & 11\end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של הבסיס שמצאתם.

**פתרון:**

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+k_3\mathrm{v}_3+k_4\mathrm{v}_4=\bar{0}$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ -5 & 1 & -4 & -7\\ -4 & -1 & -5 & -5\\ 2 & 5 & 7 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2+5R_1\\ R_3\to R_3+4R_1\\ R_4\to R_4-2R_1}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 6 & 6 & -2\\ 0 & 3 & 3 & -1\\ 0 & 3 & 3 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

עמודות $1$ ו- $2$ מובילות, לפיכך הווקטורים $\mathrm{v}_1$, $\mathrm{v}_2$ מהווים בסיס של $S$.
$\dim(S)=2$.
נרשום $u$ כצירוף ליניארי של הבסיס המתקבל:

$$u=x\mathrm{v}_1+y\mathrm{v}_2\ .$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ -5 & 1 & 14\\ -4 & -1 & -13\\ 2 & 5 & 11\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2+5R_1\\ R_3\to R_3+4R_1\\ R_4\to R_4-2R_1}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 0 & 6 & 6\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$k_1=3,k_2=1 \Leftarrow$

$$u=3\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\ .$$

### דוגמה 9.9

במרחב $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ נתונים ווקטורים

$$p_1(x) = 2 - x + x^2 \ , \quad p_2(x) = 2x - 3x^2 + x^3 \ , \quad p_3(x) = 1 - x^2 \ , \quad p_4(x) = 3x - 6x^2 + x^3 \ .$$

**א)** בדקו אם הווקטורים $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ תלוים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם ששווה לווקטור האפס.

**ב)** מצאו בסיס ואת המימד של תת מרחב הנפרש ע"י הווקטורים $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$.

**ג)** בטאו כל ווקטור מתוך $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ כצירוף לינרי של הבסיס המצאתם בסעיף ב'.

**פתרון:**

**א)** נרשום את הווקטורים לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$, $E = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3\}$:

$$p_1(x) = 2e_1 - e_2 + e_3 + 0e_4 \quad = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_E \ ,$$

$$p_2(x) = 0e_1 + 2e_2 - 3e_3 + e_4 \quad = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}_E \ ,$$

$$p_3(x) = 1e_1 + 0e_2 - e_3 + 0e_4 \quad = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_E \ ,$$

$$p_4(x) = 0e_1 + 3e_2 - 6e_3 + e_4 \quad = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}_E \ .$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לא כל העמודות מובילות, לכן $p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x)$ ת"ל.

נרשום את הצירוף הליניארי

$$k_1p_1+k_2p_2+k_3p_3+k_4p_4=\bar{0}\ .$$

לפי המדורגת שמצאנו הפתרון הינו

$$k_1=k_4\ ,\quad k_2=-k_4\ ,\quad k_3=-2k_4\ ,\qquad k_4\in\mathbb{R}\ .$$

נציב $k_4=1$ $\Leftarrow$

$$k_1=1\ ,\quad k_2=-1\ ,\quad k_3=-2\ .$$

$$p_1-p_2-2p_3+p_4=\bar{0}$$

**ב)**

$$\dim(\text{span}\{p_1,p_2,p_3,p_4\}=\text{מספר העמודות המובילות}=3\ .$$

העמודות 1, 2 ו- 3 מובילות לפיכך הווקטורים $p_1,p_2,p_3$ מהווים בסיס.

**ג)**

$$\begin{aligned}p_1&=1\cdot p_1+0\cdot p_2+0\cdot p_3\\ p_2&=0\cdot p_1+1\cdot p_2+0\cdot p_3\\ p_3&=0\cdot p_1+0\cdot p_2+1\cdot p_3\\ p_4&=-p_1+p_2+2\cdot p_3\ .\end{aligned}$$

**משפט 9.4**

יהי $U\subset V$ תת מרחב של המרחב ווקטורי $V$. נניח כי $\dim(U)=m$ ותהי $B=\{u_1,\cdots,u_m\}$ קבוצה של $m$ ווקטורים.

$B$ בת"ל אם ורק אם $B$ פורשת את $U$.

**הוכחה:**

נניח כי $B$ בת"ל ו- $B$ לא פורשת את $U$.
אז ניתן להשלים $B$ לבסיס של $U$, בסתירה לכך ש- $\dim(U)=m$.

נניח כי $B$ פורשת את $U$ אבל $B$ לא בת"ל.
אז ניתן להקטין את $B$ לבסיס של פחות מ-$m$ ווקטורים בסתירה לכך ש- $\dim(U)=m$.

■