

תרגילים 11: NP שלמות

שאלה 1 האם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שකולה לבעה פתוחה.

$$\text{עבור שני בעיות } A \text{ ו- } B, \text{ נגידר את הבעיה } .C = \{ww \mid w \in A \wedge w \notin B\} \text{ אם } C \in NP \text{ אז } B \in NP \text{ וגם } A \in NP$$

שאלה 2 הוכיחו כי לכל 3 בעיות A, B, C אזי $A \leq_P B \leq_P C$ ו גם $A \leq_P C$, אם $A \in NP$

שאלה 3 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לשאלה פתוחה:

$$\text{קיים שפה רגולית } L \text{ כך ש- } L \in NP \setminus P$$

שאלה 4 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לשאלה פתוחה:

$$\text{אם } NP \text{ אזי } L_{\text{halt}} \notin NP$$

שאלה 5 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעה פתוחה.

. $A \leq_P B$ אם B היא בעיה NP -קשה, אזי קיימת רדוקציה

תשובות

שאלה 1 הטענה שcola לבעה פתוחה:

נבחר $B = SAT \in NP$, $A = \Sigma^* \in NP$
נגדיר את הבעה

$$C' = A \setminus B = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin SAT\} = \overline{SAT}.$$

נראה כי אם $C \in NP$ אז $C' \leq_P C$ רדוקציה
פונקציית הרדוקציה: $w \in \Sigma^*$ לכל $f(w) = ww$.

ניתן להראות כי

$$w \in C' \Leftrightarrow f(w) \in C.$$

ולכן לפי משפט הרדוקציה, אם $C' = \overline{SAT} \in NP$ אז שאלה פתוחה.

שאלה 2 תהי f פונקציית הרדוקציה $B \leq_P A$ שמיימת $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$ לכל $w \in \Sigma^*$.

תהי g פונקציית הרדוקציה $B \leq_P C$ שמיימת $w \in B \Leftrightarrow f(w) \in C$ לכל $w \in \Sigma^*$.

nocich שמיימת רדוקציה $A \leq_P C$

פונקציית הרדוקציה h

לכל $w \in \Sigma^*$ נגדיר $h(w) = g(f(w))$

נכונות הרדוקציה

שלב 1. nocich כי $h(w) \in C$:

- . $h(w) = g(f(w)) \in C \Leftarrow f(w) \in B \Leftarrow w \in A$ •
- . $h(w) = g(f(w)) \notin C \Leftarrow f(w) \notin B \Leftarrow w \notin A$ •

שלב 2. nocich כי h חסיבה בזמן פולינומיAli:

נסמן ב- p_f את הפולינום של f .

נסמן ב- p_g את הפולינום של g .

אז לכל $w \in \Sigma^*$, זמן החישוב של $h(w)$ חסום על ידי :

$$p_f(|w|) + p_g(|f(w)|) \leq p_f(|w|) + p_g(p_f(|w|)) = p_f(|w|) + (p_f \circ p_f)(|w|)$$

כאשר p_f הוא הרכבה של שני פולינומים. לכן ניתן לחשב את $h(w)$ בזמן פולינומיAli בגודל $|w|$.

שאלה 3 הטענה לא נכונה.

לכל שפה רגולרית קיים אוטומט סופי ולכן שייכת ל- P .

שאלה 4 הטענה נכונה.

קמיימת רדוקציה פולינומיAli $L_{\text{halt}} \notin NP$ ולכן ממשפט הרדוקציה אם $L_{\text{acc}} \leq_P L_{\text{halt}}$ מתקיים

שאלה 5 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: A בעיה NP קשה עבורה $A \notin NP$ ו- B היא שפה שלמה. נניח בשליליה כי $B \leq_P A$. משפט הרדוקציה, מכיוון ש- $B \in NP$ (כי B היא NP שלמה) מתקיים ש- $A \in NP$ וזה סתירה לבחירה של A .