1 דוגמא. 3 כדורים של 3 צבעים שונים נתונים ל3 תלמידים בכיתה בת 25 תלמידים. אם כל תלמיד מקבל כדור אחד, כמה אפשרויות ישנן לחלק את הכדורים?

פיתרון. בשל העובדה הכדורים באים ב3 צבעים שונים, אז ניתן להבחים בין הכדורים. על כן הבעיה זו בעיה של מדגם סדור ללא החזרה, ובמיוחד עם חשבות לסדר. אז התשובה היא ניתן על ידי הנוסחא (**??**):

$$ {}_{25}P_3 = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = 25.24.23\ . $$

■

2 דוגמא. 3 כדורים של אותו צבע נתונים ל3 תלמידים בכיתה בת 25 תלמידים. אם כל תלמיד מקבל כדור אחד, כמה אפשרויות ישנן לחלק את הכדורים?

פיתרון. עכשיו לא ניתן להבחים בין הכדורים. על כן הבעיה זו בעיה של מדגם סדור ללא החזרה, ללא חשבות לסדר. אז התשובה היא ניתן על ידי הנוסחא (**??**):

$$ {}_{25}C_3 = \frac{25!}{(25-3)!3!} = \frac{25!}{22!3!} = \frac{25.24.23}{6} = 25.4.23 = 2300\ . $$

■

3 דוגמא. מרכיבים באקראי מילה בת 4 תווים מן האותיות א' עד ו'. חשבו את ההסתברויות של המאורעות הבאים.

1. מאורע A: א' מופיע פעם אחת לפחות,
2. מאורע B: א' מופיע בדיוק פעם אחת,
3. מאורע C: אין אות שחוזרת בסיסמא.

פיתרון. לכל תו יש 6 אפשרויות ולכן

$$ |\Omega| = 6^4. $$

1. $\bar{A} =$ אות א' לא נבחרה כלל. זאת אומרת כל אפשרויות מורכבת אך ורק מן התווים ב' - ו'.

$$ \Rightarrow \qquad P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{5^4}{6^4}. $$

2. $B_i =$ מאורע ש א' מופיע במקום i ($i = 1, \dots, 4$).

$$ \Rightarrow \qquad B = \bigcup_{i=1}^{4} B_i, $$

והאיחוד הוא על פני מאורעות זרים. על כן

$$ \begin{aligned} P(B) =& P\left(\bigcup_{i=1}^{4} B_i\right) = \sum_{i=1}^{4} P(B_i). \\ P(B_i) =& \frac{5^3}{6^4}. \\ \therefore \qquad P(B) =& \sum_{i=1}^{4} P(B_i) = \frac{4(5^3)}{6^4}. \end{aligned} $$

3. • לתו הראשון יש 6 אפשרויות,

- לתו שלישי יש 4 אפשרויות,
- לתו רביעי יש 3 אפשרויות,

$$\therefore \qquad P = \frac{6.5.4.3}{6^4} = \frac{6!}{6^4(6-4)!} \ .$$

■

4 דוגמא. כמה אפשרויות יש לסדר 6 מטבעות של ₪1 , 7 מטבעות של ₪5, 8 מטבעות של ₪10 ?

פיתרון. זו היא בעיה של כמה אפשרויות ישנן לסדר 21 דברים בו יש תת קבוצות של 8 דברים של אותו סוג, 7 דברים של אותו הסוג, ... על כן התשובה ניתנת על ידי הנוסחא (**??**):

$$\frac{21!}{6!7!8!} = 349,188,840.$$

■

5 דוגמא. כמה דרכים יש לשים 7 אנשים ב 2 חדרים בת 2 מיטות וחדר אחד בת 3 מיטות?

פיתרון. הביעה זו היא בעיה למצוא את המספר הדרכים לסדר קבוצה של 7 אנשים להפרדה המורכב מתת קבוצות של 2, 2 ו 3, והתשובה ניתנת על ידי הנוסחא (**??**):

$$\frac{7!}{2!2!3!} = \frac{7.6.5.4}{2.2} = 210 \ .$$

■

6 דוגמא. בכיתה n סטודנטים. מהי ההסתברות שיש לפחות זוג אחד של סטודנטים עם אותו תאריך יום הולדת (מבלי להתייחס לשנת הלידה)?

פיתרון. גודל מרחב המדגם שלנו הוא 365^n משום שלכל סטודנט יש 365 ימים אפשריים ליום הולדת וישנם n סטודנטים. נסמן ב A המאורע בו לפחות זוג אחד של סטודנטים נולד באותו היום, ונבחן את המאורע המשלים $\bar{A}$. המאורע בו לכל הסטודנטים ימי הולדת שונים. זו דוגמה של מדגם **סדור** וללא החזרה, ולפי זה עם העזרה של **??** נמצא ש מספר האפשרויות במאורע $\bar{A}$ הוא

$$|\bar{A}| = {}_{365}C_n = \frac{365!}{(365-n)!} \ .$$

מכאן נקבל ש

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|} = 1 - \frac{365!}{(365-n)!365^n} \ .$$

התוצאה המפתיעה היא שעבור $n = 23$ ההסתברות גדולה מ 50% (0.507 בקירוב) ועבור $n = 60$ סטודנטים ההסתברות היא 0.994.

■