שיעור 1
שדות

1.1 מספרים מרוכבים

הגדרה 1.1 מספר מרוכב

זוג סדור $z=(x,y)$ של מספרים ממשיים נקרא מספר מרוכב.

אם $y=0$ נקבל זוג $(x,0)$. נסמן $x=(x,0)$. נגדיר את הפעולות הבאות בין מספרים מרוכבים:

הגדרה 1.2 פעולות ביناריות של מספרים מרוכבים

נניח $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)$. אז

1) **חיבור**

$$z_1 \oplus z_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2)$$

2) **כפל**

$$z_1 \odot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

קל לראות:

1) לכל מספר ממשי $x=(x,0)$ ולכל מספר מרוכב $z_1=(x_1,y_1)$ מתקיים

$$x \cdot z_1 = (x \cdot x_1, x \cdot y_1)$$

2) לכל מספרים ממשיים $(x_1,0)$ ו- $(x_2,0)$ מתקיים

$$(x_1,0)\cdot(x_2,0) = (x_1x_2,0) = x_1x_2$$

הגדרה 1.3 i

נסמן

$$i=(0,1)\ .$$

i היא

$$i^2 = i\cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1\ ,\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0) = -1\ .$$

משפט 1.1 הצגה אלגברית שך מספר מרוכב

תוך שימוש במספר i כל מספר מרוכב $z=(x,y)$ ניתן לרשום

$$z=(x,y)=(x,0)\oplus(0,y)=(x,0)\oplus(y,0)\cdot(0,1)=x+iy\ .$$

$x+iy$ נקרא הצגה אלגברית של מספר מרוכב.

ל- x קוראים החלק הממשי של z. מסמנים $x=\mathrm{Re}(z)$.

ל- y קוראים החלק המדומה של z. מסמנים $y=\mathrm{Im}(z)$.

צורת הכתיבה $x+iy$ מאפשרת לחבר ולהכפיל מספרים רוכבים בקלות בהתחשב ב- $i^2=-1$.

דוגמה 1.1

א

$$(x_1+iy_1)\odot(x_2+iy_2)=x_1x_2+ix_1y_2+iy_1x_2-y_1y_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)\ .$$

דוגמה 1.2

$$(3-5i)\odot(2+3i)=6+9i-10i+15=21-i\ .$$

הגדרה 1.4 הצמוד

המספר הרוכב $x-iy$ נקרא צוד למפר $z=x+iy$. מסנים:

$$\bar{z}=x-iy\ .$$

משפט 1.2

$$z\odot\bar{z}=x^2+y^2\ .$$

המספר הזה נקרא ה **הערך המוחלט** או **הגודל** של המספר מספר המרוכב z.

דוגמה 1.3

$$\frac{3+4i}{1-i}=\frac{(3+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3+3i+4u-4}{2}=\frac{-1+7i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i$$

דוגמה 1.4

מצאו את המספר z המקיים את המשוואה

$$\frac{1-iz}{1+iz}=-2i\ .$$

פתרון:

$$1-iz=-2i(1+iz)=2z-2i\quad\Rightarrow\quad z(2+i)=1+2i$$

$$z=\frac{1+2i}{2+i}=\frac{(1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-i+4i+2}{5}=\frac{4+3i}{5}=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$$

קבוצת המספרים המרוכבים מסומנת ב- $\mathbb{C}$.

אפשר לראות בקלות ש- $\mathbb{C}$ יחד עם שתי הפעולות שהגדרנו בהגדרה 1.10 מקיימת את כל האקסיומות של שדה, כאשר

$$0=(0,0)$$

$$1 = (1,0)$$

ועבור $z = x + iy \neq 0$,

$$z^{-1} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2+y^2} \ .$$

1.2 הצגה פולרית של מספרים מרוכבים

הגדרה 1.5 הצגה פולרית

ניתן לרשום מספר מרוכב $z = x + iy$ **בהצגה פולרית**

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \ ,$$

כאשר

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = |z| \ , \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \ .$$

דוגמה 1.5

רשמו את המספרים המרוכבים הבאים בהצכה פולרית:

1) $z_1 = 3 + 4i$

2) $z_2 = -3 + 4i$

3) $z_3 = -3 - 4i$

4) $z_4 = 3 - 4i$

פתרון:

1)

$$r = |z_1| = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \ , \qquad \theta = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 53.1^\circ \ .$$

2)

$$r = |z_2| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5 \ , \qquad \theta = \arctan\left(\frac{4}{-3}\right) = 180^\circ - \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 126.9^\circ \ .$$

3)

$$r = |z_3| = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = 5 \ , \qquad \theta = 180^\circ + \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 233.1^\circ \ .$$

4)

$$r = |z_4| = \sqrt{(3)^2+(-4)^2} = 5 \ , \qquad \theta = 360^\circ - \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 306.9^\circ \ .$$

משפט 1.3

אם $z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$ ואם $z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$ אז

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos\left(\theta_1+\theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right) \ .$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\right)\ , \qquad (z_2\neq 0)\ .$$

משפט 1.4

אם $z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$ אז
$$z^n = r^n\left(\cos\left(n\theta\right)+i\sin\left(n\theta\right)\right)\ .$$

1.3 $\mathbb{Z}_p$ - קבוצת השאריות בחלוקה ב p

הגדרה 1.6

יהיו a,b מספרים שלמים. אומרים כי b מחלק את a אם קיים מספר שלם q כך ש-
$$a=qb\ .$$
כלומר $\frac{a}{b}$ שווה למספר שלם q.

הסימון $a\mid b$ אומר כי b מחלק את a.

דוגמה 1.6

א) $6\mid 3$ בגלל שקיים מספר שלם $q=2$ כך ש- $6=3q$.

ב) $42\mid 7$ בגלל שקיים מספר שלם $q=6$ כך ש- $42=7q$.

ג) $8\nmid 5$ בגלל שלא קיים מספר שלם q כך ש- $8=5q$.

הגדרה 1.7 יחס שקילות בין a ל- b

נניח כי $a,b\in\mathbb{Z}$ מספרים שלמים ו- m מספר שלם חיובי. היחס
$$a\equiv b \mod m$$
אומר כי m מחלק את ההפרש $a-b$, כלומר $m|a-b$.

בנסוח שקול, $a\equiv b \mod m$ אם קיים שלם q כך ש- $a=qm+b$.

לעתים אומרים כי "a שקול ל- b מודולו m".

דוגמה 1.7

הוכיחו כי

א) $5\equiv 2 \mod 3$

ב) $43\equiv 23 \mod 10$

ג) $7\not\equiv 2 \mod 4$

פתרון:

א)

$$5-2=3=1\cdot 3 \quad\Rightarrow\quad 3\mid 5-2 \quad\Rightarrow\quad 5\equiv 2 \mod 3\ .$$

ב)

$$43-23=20=2\cdot 10 \quad\Rightarrow\quad 10\mid 43-23 \quad\Rightarrow\quad 43\equiv 23 \mod 10\ .$$

ג) $7-2=5$.

לא קיים שלם q כך ש- $7-2=4q$ לכן $4\nmid 7-2$ לכן

$$7\not\equiv 2 \mod 4\ .$$

הגדרה 1.8 השארית

נתונים מספרים שלמים $a,b\in\mathbb{Z}$, היחס

$$a \ \% \ b$$

מציין את השארית בחלוקת a ב- b.

דוגמה 1.8

$$43\ \%\ 10=3\ .$$
$$13\ \%\ 4=1\ .$$
$$8\ \%\ 2=0\ .$$

$$-10\ \%\ 3=-1\ .$$

דוגמה 1.9

- השארית של 3 בחילוק ב- 2 היא 1. לכן

$$3\ \%\ 2=1\ .$$

- השארית של 7 בחילוק ב- 4 היא 3. לכן

$$7\ \%\ 4=3\ .$$

- השארית של 11 בחילוק ב- 8 היא 3. לכן

$$11\ \%\ 8=3\ .$$

הגדרה 1.9 $\mathbb{Z}_p$ - קבוצת השארית בחלוקה ב-p

יהי p מספר ראשוני. הקבוצה $\mathbb{Z}_p$ היא הקבוצת

$$\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\ldots,\overline{p-1}\}\ .$$

הקבוצה מוגדרת לפי התנאים הבאים:

(1) כל איבר $a\in\mathbb{Z}_p$ הוא מספר שלם וחיובי.

(2) לכל מספר שלם n נתאים איבר a ב- $\mathbb{Z}_p$ לפי

$$n\equiv a \mod p\ .$$

דוגמה 1.10

לקבוצה $\mathbb{Z}_3$ יש 3 איברים:

$$\{\mathbb{Z}_3=\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}\ .$$

$$\begin{aligned}
3&=0 \mod 3\Rightarrow & \bar{3}&=\bar{0}\\
4&=1 \mod 3\Rightarrow & \bar{4}&=\bar{1}\\
5&=2 \mod 3\Rightarrow & \bar{5}&=\bar{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6&=0 \mod 3\Rightarrow & \bar{6}&=\bar{0}\\
7&=1 \mod 3\Rightarrow & \bar{7}&=\bar{1}\\
8&=2 \mod 3\Rightarrow & \bar{8}&=\bar{2}
\end{aligned}$$

$$122=2 \mod 3\Rightarrow \overline{122}=\bar{2}\ .$$

וכן הלאה.

הגדרה 1.10 פעולות בינאריות של $\mathbb{Z}_p$ איברי

יהי $p\in\mathbb{N}$ מספר ראשוני ותהי $\mathbb{Z}_p=\{\bar{0},\bar{1},\ldots,\overline{p-1}\}$, קבוצת השאריות בחלוקה ב- p. לכל $\bar{a},\bar{b}\in\mathbb{Z}_p$ נגדיר את הפעולות חיבור וכפל כך:

(1) __חיבור__

$$\bar{a}\oplus\bar{b}=\overline{a+b}$$

(2) __כפל__

$$\bar{a}\odot\bar{b}=\overline{a\cdot b}\ .$$

דוגמה 1.11

חשבון ב- $\mathbb{Z}_5$ את

א) $\bar{2}\oplus\bar{4}$.

ב) $\bar{3}\odot\bar{3}$.

פתרון:

א) $\bar{2}\oplus\bar{4}=\overline{2+4}=\bar{6}=\bar{1}$.

ב) $\bar{4} = \bar{9} = \overline{3 \cdot 3} = \bar{3} \odot \bar{3}$.

דוגמה 1.12

חשבו ב- $\mathbb{Z}_{11}$ את

א) $\bar{7} \odot \bar{3}$.

ב) $\bar{8} \odot \bar{2}$.

פתרון:

א) $\overline{10} = \overline{21} = \overline{3 \cdot 7} = \bar{7} \odot \bar{3}$.

ב) $\bar{5} = \overline{16} = \bar{8} \cdot \bar{2}$.

דוגמה 1.13

לוח החיבור של איברים ב- $\mathbb{Z}_3$:

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

לוח הכפל של איברים ב- $\mathbb{Z}_3$:

$\odot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

דוגמה 1.14

לוח החיבור של איברים של $\mathbb{Z}_5$

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

לוח הכפל של איברים של $\mathbb{Z}_5$

$\odot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

נחזור לממשיים. הנגדי של 7 הוא -7 כי $0 = 7 + 7-$.

ההופכי של 7 הוא 7^{-1}, (או $\frac{1}{7}$) כי $\frac{1}{7}\cdot 7=1$.

ושוב ל- $\mathbb{Z}_3$, מתקיים $\bar{2}+\bar{1}=\bar{0}$ ולכן $\bar{2}$ הוא הנגדי של $\bar{1}$. כלומר :

$$-\bar{1}=\bar{2}\ .$$

באופן דומה, $\bar{1}$ הוא הנגדי של $\bar{2}$. כלומר $-\bar{2}=\bar{1}$.

מתקיים $\bar{2}\cdot\bar{2}=\bar{1}$ ולכן $\bar{2}$ הוא ההופכי של $\bar{2}$. כלומר $(\bar{2})^{-1}=\bar{2}$.

משפט 1.5 איבר ההופכי ואיבר הנגדי בקבוצה $\mathbb{Z}_p$

יהי p מספר ראשוני ותהי $\mathbb{Z}_p$ הקבוצה השאריות בחלוקה ב- p.

א) <u>איבר הנגדי</u>

לכל איבר $a\in\mathbb{Z}_p$ קיים איבר יחיד $-a\in\mathbb{Z}_p$ כך ש-

$$a\oplus(-a)=\bar{0}\ .$$

האיבר $-a$ נקרא האיבר הנגדי של a.

ב) <u>איבר ההופכי</u>

לכל איבר $a\in\mathbb{Z}_p$ שונה מאפס (כלומר $a\neq\bar{0}$) קיים איבר יחיד $a^{-1}\in\mathbb{Z}_p$ כך ש-

$$a\odot a^{-1}=\bar{1}\ .$$

האיבר a^{-1} נקרא האיבר ההופכי של a.

דוגמה 1.15

מצאו את האיבר הנגדי של $\bar{1}$ ב- $\mathbb{Z}_3$.

פתרון:

נשים לב ש-

$$\bar{1}\oplus\bar{2}=\bar{3}=\bar{0}$$

ולכן

$$-\bar{1}=\bar{2}\ .$$

דוגמה 1.16

מצאו את האיבר הנגדי של $\bar{2}$ ב- $\mathbb{Z}_3$.

פתרון:

נשים לב ש-

$$\bar{2}\oplus\bar{1}=\bar{3}=\bar{0}$$

ולכן

$$-\bar{2}=\bar{1}\ .$$

דוגמה 1.17

מצאו את האיבר הנגדי של $\bar{3}$ ב- $\mathbb{Z}_3$.

פתרון:

נשים לב ש-

$$\bar{3} \oplus \bar{0} = \bar{3} = \bar{0}$$

ולכן

$$-\bar{3} = \bar{3} \ .$$

דוגמה 1.18

איברים הנגדיים של איברים של $\mathbb{Z}_3$:

$$\begin{aligned} -\bar{1} &= \bar{2} \\ -\bar{2} &= \bar{1} \\ \\ -\bar{3} &= \bar{0} \\ -\bar{4} &= \bar{2} \\ -\bar{5} &= \bar{1} \\ \\ -\bar{6} &= \bar{0} \\ -\bar{7} &= \bar{2} \\ -\bar{8} &= \bar{1} \\ &\vdots \\ -\bar{59} &= \bar{1} \ . \end{aligned}$$

דוגמה 1.19

מצאו את האיבר ההופכי של $\bar{2}$ ב- $\mathbb{Z}_3$.

פתרון:

$$\bar{2} \odot \bar{2} = \bar{4} = \bar{1}$$

לכן $\bar{2}^{-1} = \bar{2}$.

דוגמה 1.20

מצאו את האיבר ההופכי של $\bar{1}$ ב- $\mathbb{Z}_3$.

פתרון:

$$\bar{1} \odot \bar{1} = \bar{1}$$

לכן $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$.

דוגמה 1.21

מצאו את האיבר ההופכי של $\bar{3}$ ב- $\mathbb{Z}_5$.

פתרון:

$$\bar{3} \odot \bar{2} = \bar{6} = \bar{1}$$

לכן $\bar{3}^{-1} = \bar{2}$.

דוגמה 1.22

חשבו את האיבר ההופכי של כל האיברים הבאים ב- $\mathbb{Z}_5$

(א) $\bar{1}$

(ב) $\bar{2}$

(ג) $\bar{3}$

(ד) $\bar{4}$

פתרון:

(א)

$$\bar{1} \odot \bar{1} = \bar{1} \quad \Rightarrow \quad \bar{1}^{-1} = \bar{1}$$

(ב)

$$\bar{2} \odot \bar{3} = \bar{6} = \bar{1} \quad \Rightarrow \quad 2^{-1} = \bar{1}$$

(ג)

$$\bar{3} \odot \bar{2} = \bar{6} = \bar{1} \quad \Rightarrow \quad \bar{3}^{-1} = \bar{1}$$

(ד)

$$\bar{4} \odot \bar{4} = \overline{16} = \bar{1} \quad \Rightarrow \quad \bar{4}^{-1} = \bar{1}$$

דוגמה 1.23

חשבו ב- $\mathbb{Z}_{11}$:

(א) $\bar{3} \odot \bar{7}$

(ב) $\bar{2} \odot \bar{8}$

(ג) $-\bar{3}$

(ד) $(\bar{3})^{-1}$

פתרון:

(א) $\bar{3} \odot \bar{7} = \overline{21} = \overline{10}$

(ב) $\bar{2} \odot \bar{8} = \overline{16} = \bar{5}$

(ג) $-\bar{3} = \bar{8}$. $\bar{3} \oplus \bar{8} = \overline{11} = \bar{0} \quad \Rightarrow$

(ד) $(\bar{3})^{-1} = \bar{4}$. $\bar{3} \odot \bar{4} = \overline{12} = \bar{1} \quad \Rightarrow$

1.4 שדות

הגדרה 1.11 שדה

קבוצה לא ריקה $\mathbb{F}$, שבה פעולת חיבור $\oplus$ ופעולת כפל $\odot$ מוגדרות על הקבוצה, מסומנת $(\mathbb{F}, \oplus, \odot)$ ונקראת שדה אם התנאים הבאים מתקיימים. לכל איברים $a, b, c \in \mathbb{F}$:

(1 $\mathbb{F}$ סגורה תחת חיבור:
$$a \oplus b \in \mathbb{F} \ .$$

(2 $\mathbb{F}$ סגורה תחת כפל:
$$a \odot b \in \mathbb{F} \ .$$

(3 חוק החילוף I:
$$a \oplus b = b \oplus a$$

(4 חוק החילוף II:
$$a \odot b = b \odot a$$

(5 חוק הקיבוץ I:
$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \ .$$

(6 חוק הקיבוץ II:
$$a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$$

(7 חוק הפילוג:
$$a \odot (b \oplus c) = a \odot b + a \odot c \ .$$

(8 קיום איבר ניוטרלי:

קיים איבר $0 \in \mathbb{F}$ כך ש-
$$a \oplus 0 = a \ .$$

(9 קיום איבר יחיד (האיבר ניוטרל לגבי כפל):

קיים איבר $1 \in \mathbb{F}$ כך ש-
$$1 \odot a = a \ . \qquad \text{ו} \qquad a \odot 1 = a \ ,$$

(10 קיום איבר נגדי:

לכל $a \in \mathbb{F}$ קיים איבר נגדי $(-a) \in \mathbb{F}$ כך ש-
$$a \oplus (-a) = 0 \ .$$

11) קיום איבר הופכי:
לכל $a \in \mathbb{F}$ כך ש $a \neq 0$ קיים איבר $a^{-1} \in \mathbb{F}$ המקיים

$$a \odot a^{-1} = 1 \ , \qquad \text{ו} \qquad a^{-1} \odot a = 1 \ .$$

דוגמה 1.24

א) הקבוצה $\mathbb{R}$ של מספרים ממשיים שדה.

ב) הקבוצה $\mathbb{C}$ של מספרים מרובכים שדה.

דוגמה 1.25

קבעו אם הקבוצה $\mathbb{N}$ שדה.

פתרון:
$\mathbb{N}$ לא שדה. כדי להראות זאת די למצוא דוגמה נגדית לאחת התכונות.:
נבחור $a = 3 \in \mathbb{N}$. לא קיים איבר נגדי שב- $\mathbb{N}$. הרי

$$-3 + 3 = 0$$

אבל $-3 \notin \mathbb{N}$.

משפט 1.6

יהי $(\mathbb{F}, \oplus, \odot)$ שדה.

1) עבור $a \in \mathbb{F}$, האיבר הנגדי החיבורי $-a$ הוא יחיד.

2) עבור $a \in \mathbb{F}$ $(a \neq 0)$, האיבר ההפכי הכפלי a^{-1} הוא יחיד.

משפט 1.7

יהי $(\mathbb{F}, \oplus, \odot)$ שדה, יהיו $a, b \in \mathbb{F}$, ויהיו 0 האיבר הניוטרלי הכפלי ו- -1 האיבר הנגדי החיבורי.

1) $a \odot 0 = 0$

2) $a \odot (-1) = -a$

3) אם $a \odot b = 0$ ו- $a \neq 0$ אז $b = 0$.

הוכחה: תרגיל בית!

■

1.5 מערכות ליניאריות מעל $\mathbb{C}$

דוגמה 1.26

פתרו את המערכת $\begin{cases}(1+i)z_1+(1-i)z_2=&3i\\ 3z_1+(2-i)z_2=&4\ .\end{cases}$ מעל $\mathbb{C}$.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+i & 1-i & 3i \\ 3 & 2-i & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to(1-i)R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2i & 3+3i \\ 3 & 2-i & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to 2R_2-3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2i & 3+3i \\ 0 & 4+4i & -1-9i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to(4-4i)R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2i & 3+3i \\ 0 & 32 & -40-32i \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to 16R_1+iR_2} \left(\begin{array}{cc|c} 32 & 0 & 80+8i \\ 0 & 32 & -40-32i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{32}R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2}+\frac{1}{4}i \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4}-i \end{array}\right)$$

פתרון:

$$z_1=\frac{5}{2}+\frac{1}{4}i\ , \qquad z_2=-\frac{5}{4}-i$$

1.6 מערכות ליניאריות מעל $\mathbb{Z}_p$

דוגמה 1.27

פתור את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_3$:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3=&\bar{0}\\ x_1-x_2-x_3=&\bar{0}\\ x_1+\bar{2}x_2+x_3=&\bar{1} \end{aligned}$$

פתרון:

המטריצה המורחבת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & -\bar{1} & -\bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \end{array}\right)$$

נבצע שיטת גאוס:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{1}&\bar{2}&\bar{2}&\bar{0}\\ \bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{1}\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{1}\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{0}&-\bar{1}&\bar{1}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{2}&\bar{1}\end{array}\right)$$

נכפיל את השורה השלישית ב $\bar{2}=\bar{2}^{-1}$:
לכן נבצע את הפעולה הבאה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{2}&\bar{1}\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to\bar{2}R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\end{array}\right)$$

עכשיו נאפס כל איבר מעל ה $\bar{1}$ המוביל בעזרת הפעולות הבאות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&-\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}&-\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\end{array}\right)$$

לכן למערכת יש פתרון יחיד:
$$(x_1,x_2,x_3)=(\bar{0},\bar{1},\bar{2})\ .$$

דוגמה 1.28

פתור את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$:
$$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3&=\bar{0}\ ,\\ x_1-x_2-x_3&=\bar{1}\ .\end{aligned}$$

פתרון:

המטריצה המורחבת היא
$$\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{1}&-\bar{1}&-\bar{1}&\bar{1}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{1}&\bar{4}&\bar{4}&\bar{1}\end{array}\right)\ .$$

שיטת גאוס:
$$\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{1}&\bar{4}&\bar{4}&\bar{1}\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{3}&\bar{3}&\bar{1}\end{array}\right)\ .$$

נכפיל את השורה השלישית באיבר ההופכי של $\bar{3}$ ב- $\mathbb{Z}_5$. נגלה כי
$$\bar{3}\cdot\bar{2}=\bar{6}=\bar{1}\quad\Rightarrow\quad(\bar{3})^{-1}=\bar{2}\ ,$$

ולכן

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to\bar{2}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) .$$

המערכת המתאימה היא

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{3} \ , \\ x_2 + x_3 &= \bar{2} \end{aligned}$$

ולכן הפתרון הוא

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{3} \ , \\ x_2 &= \bar{2} - x_3 \ . \end{aligned}$$

כלומר,

$$(x_1,x_2,x_3) = (\bar{3},\bar{2}-x_3,x_3) \ , \qquad x_3 \in \mathbb{Z}_5$$

נשים לב שלמערכת יש חמישה פתרונות:

פתרון 1: $x_3=\bar{0} \ \Rightarrow \ (\bar{3},\bar{2},\bar{0})$

פתרון 2: $x_3=\bar{1} \ \Rightarrow \ (\bar{3},\bar{1},\bar{1})$

פתרון 3: $x_3=\bar{2} \ \Rightarrow \ (\bar{3},\bar{0},\bar{2})$

פתרון 4: $x_3=\bar{3} \ \Rightarrow \ (\bar{3},-\bar{1},\bar{3}) = (\bar{3},\bar{4},\bar{3})$

פתרון 5: $x_3=\bar{4} \ \Rightarrow \ (\bar{3},-\bar{2},\bar{4}) = (\bar{3},\bar{3},\bar{3})$

דוגמה 1.29

פתור את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{aligned} x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{4}x_3 &= \bar{0} \ , \\ \bar{2}x_1 - \bar{3}x_2 + x_3 &= \bar{0} \ . \end{aligned}$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{2} & -\bar{3} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-\bar{2}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{7} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

המערכת המתאימה הינה

$$x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{4}x_3 = \bar{0} \ , \qquad x_2,x_3 \in \mathbb{Z}_7$$

והפתרון הוא

$$x_1 = -\bar{2}x_2 - \bar{4}x_3 = \bar{5}x_2 + \bar{3}x_3 \ , \qquad x_2,x_3 \in \mathbb{Z}_7 \ .$$

כלומר

$$(x_1,x_2,x_3) = (\bar{5}x_2+\bar{3}x_3,x_2,x_3) \ , \qquad x_2,x_3 \in \mathbb{Z}_7 \ .$$

נשים לב שלמערכת יש $7^2=49$ פתרונות.

דוגמה 1.30

תנו דוגמה למערכת לינארית בעלת 27 פתרונות.

פתרון:

מערכת 1 : המערכת

$$\bar{0}x = \bar{0}\ .$$

מעל $\mathbb{Z}_{27}$.

<u>הסבר:</u> זוהי מערכת של משוואה אחת במשתנה אחד, וכל איבר של $\mathbb{Z}_{27}$ מהווה פתרון של המערכת.

מערכת 2 :

$$x + y + z + w = \bar{0}$$

מעל $\mathbb{Z}_3$.

<u>הסבר:</u> זוהי מערכת של משוואה אחת בארבעה משתנים. למערכת יש שלושה משתני חופשיים ולכן 3^3 פתרונות.

דוגמה 1.31

פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} x + \bar{3}y + \bar{2}z =& \bar{1}\ , \\ \bar{2}x + \bar{4}y + z =& \bar{3}\ , \\ \bar{3}x + \bar{3}z =& \bar{2}\ . \end{aligned}$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - \bar{3}\cdot R_1]{R_2 \to \bar{R}_2 - \bar{2}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{2} & -\bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{9} & -\bar{3} & -\bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \bar{3}^{-1} R_2 = \bar{2} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{2} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to \bar{3}^{-1} R_3 = \bar{2} R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - \bar{4} R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & -\bar{1}4 \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - \bar{3} R_2 - \bar{2} R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\overline{10} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array}\right)$$

לפיכך $(x_1, x_2, x_3) = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{4})$.

דוגמה 1.32

פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} x + \bar{4}y + z =& \bar{1}\ , \\ \bar{3}x + \bar{2}y + \bar{3}z =& \bar{2}\ , \\ \bar{4}x + y + \bar{4}z =& \bar{3}\ . \end{aligned}$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{4} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-\bar{4}R_1]{R_2\to R_2-\bar{3}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\overline{10} & \bar{0} & -\bar{1} \\ \bar{0} & -\overline{15} & \bar{0} & -\bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה לכן למערכת אין פתרון.

דוגמה 1.33

פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} \bar{2}x + \bar{3}y + \bar{4}z &= \bar{1}\ , \\ x + \bar{2}y + \bar{3}z &= \bar{0}\ , \\ \bar{3}x + \bar{2}z &= \bar{1}\ . \end{aligned}$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-\bar{3}\cdot R_1]{R_2\to R_2-\bar{2}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & -\bar{1} & -\bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{6} & -\bar{7} & \bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right) \xrightarrow[=\bar{4}\cdot R_2]{R_2\to\bar{4}^{-1}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \overline{12} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\bar{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & -\bar{1} & -\bar{8} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{lll} x & = -\bar{4}z + \bar{2} & = z + \bar{2} \\ y & = -\bar{2}z + \bar{4} & = \bar{3}z + \bar{4} \end{array}\right\}$$

תשובה סופית:

$$(x,y,z) = (z+\bar{2}, \bar{4}+\bar{3}z, z) \qquad , z \in \mathbb{Z}_5\ .$$

ישנם 5 פתרונות.