חדו"א 1 סמסטר א' תשפד
עבודת בית 6: פולינום מקלורן, כלל לופיטל.

שאלה 1 הסבירו מהו כלל לופיטל וחשבו את הגבולות הבאים:

א) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+\ln x-1}{e^x-e}$$

ב) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{e^x}}{x+e^x}$$

ג) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}$$

ד) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$$

ה) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{100}}{e^x}$$

ו) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

ז) $$\lim_{x\to 0^+}x^2\ln x$$

ח) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}$$

ט) $$\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$$

י) $$\lim_{x\to\infty}(2x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

יא) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

יב) $$\lim_{x\to 0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$$

יג) $$\lim_{x\to\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-\sin\frac{1}{x}-1\right)$$

שאלה 2

א) רשמו את פולינום מקלורן מסדר n עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

1) $y = e^x$

2) $y = \sin x$

3) $y = \cos x$

4) $y = -\ln(1-x)$

5) $y = \frac{1}{1+x}$.

ב) רשמו פולינום מקלורן מסדר 2 ל- $y(x)$:

1) $y = e^{2x}$

2) $y = \sqrt{1+x}$

3) $y = \ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$

4) $y = \sqrt[3]{1+x}$.

ג) רשמו פולינום מקלורן מסדר 2 לפונקציה $y(x)$ המוגדרת בצורה סתומה:

$$y^5 + xy + e^x = 33\ .$$

ד) רשמו פולינום מקלורן מסדר 2 לפונקציה $y(x)$ המוגדרת בצורה פרמטרית:

$$y = t^2 + 2t + 1\ , \qquad x = te^t\ .$$

ה) ידוע שפולינום מקלורן מסדר 3 של $f(x)$ הוא

$$P_3(x) = x - 3x^2 + 2x^3\ .$$

חשב את

$$f''(0) + f'''(0).$$

שאלה 3

א) מצאו את נוסחת מקלורן של הפונקציה $f(x) = \ln(1+x)$.

ב) הוכיחו שלכל $x > 0$ מתקיים

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

שאלה 4 חשבו בעזרת נוסחת מקלורן מתאימה את

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}\ .$$

שאלה 5

$$x = \ln(t^2+1)\ , \qquad y = t^3+1\ , \qquad t>0\ .$$

חשבו $f''(x)$ בנקודה $x=\ln 2$.

שאלה 6 רשמו את פולינום מקלורן מסדר 2 של פונקציה

$$f(x) = \ln|9x+4|$$

$$P_2(x) = \_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_ x + \_\_\_\_\_\_\_ x^2\ .$$

שאלה 7 רשמו את פולינום מקלורן מסדר 2 של פונקציה $y(x)$ הנתונה בצורה פרמטרית:

$$\left.\begin{aligned} x &= t^3-1 \\ y &= \ln(t)+5t^2 \end{aligned}\right\}\ .$$

שאלה 8 פתרו את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{5x}-5x-1}{3x^3+x^2}\right)\ .$$

שאלה 9 פתרו את הגבול

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin(2x))}{\ln(\sin(11x))}\ .$$

שאלה 10 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(2x)}{x}$

שאלה 11 $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+3^x}{3^x+4^x}$

שאלה 12 $\lim_{x\to 0}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]^{1/x^2}$

שאלה 13 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan(x)}{1+\sin(x)}\right)^{\frac{1}{\sin(x)}}$

שאלה 14 $\lim_{x\to 1}\left(x^2+\sin(\pi x)\right)^{\frac{1}{\log(x)}}$

שאלה 15 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

שאלה 16 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{\cos(4x)-1}$

שאלה 17 $\lim_{x\to 6}(x-5)^{\frac{x}{x-6}}$

שאלה 18 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{2x}$

שאלה 19 $\lim_{x\to 0}\left(1-\sin^2(x)\right)^{\frac{1}{\tan^2(x)}}$

שאלה 20 $\lim_{x\to 1}(6-5x)^{\frac{1}{\log(2-x)}}$

שאלה 21 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^{\log(x)}$

שאלה 22 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\cot(x)}$

שאלה 23 $\lim_{x\to\infty}\left(\log\left(2x^2+x\right)-2\log(x)\right)$

שאלה 24 $\lim_{x\to 0}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\cot\left(\sqrt{x}\right)}$

שאלה 25 $\lim_{x\to 0}\left(1+2x^2\right)^{\frac{3}{1-\cos(2x)}}$

שאלה 26 $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$

שאלה 27 $\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{1-x}}$

שאלה 28 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x-\sin(2x)}$

שאלה 29 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x^2}}(1-x)^{\frac{1}{x^2}}$

שאלה 30 **להעשרה בלבד לא בסילבוס**

הוכח:

הגבול $\lim_{x\to a} f(x)=L$ קיים אם ורק אם $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=L$.

תשובות

שאלה 1

א) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+\ln x-1}{e^x-e} = \frac{3}{e}$

ב) $\lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{e^x}}{x+e^x} = 0$

ג) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} = 0$

ד) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x} = 1$

ה) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{100}}{e^x} = 0$

ו) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}$

ז) $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = 0$

ח) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

ט) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$

י) $\lim_{x\to\infty} (2x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{1/2}$

יא) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{1/3}$

יב) $\lim_{x\to 0} (x+e^x)^{\frac{1}{x}} = e^2$

יג) $\lim_{x\to 0} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - \sin\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{1}{2}$

שאלה 2

א) 1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$

2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + \frac{(-1)^{(n-1)/2} x^n}{n!} + \ldots$

3) $\cos x = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + \frac{(-1)^{n/2} x^n}{n!} + \ldots$

4) $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n}$

5) $.y = \dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n$

ב) 1)

$$P_2(x) = 1 + 2x + 2x^2$$

2)

$$P_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

3)

$$P_2(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

4)

$$P_2(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$$

ג)

$$y^5 + xy + e^x = 33 \qquad (\#)$$

<u>שלב 1</u> :

נציב $x = 0$:

$$\begin{aligned} y^5(0) + 0 \cdot y(0) + e^0 &= 33 \\ y^5(0) + 1 &= 33 \\ y^5(0) &= 32 \\ y(0) &= \sqrt[5]{32} \\ y(0) &= 2\ . \end{aligned} \qquad (\#1)$$

<u>שלב 2</u> :

גוזרים (#):

$$\begin{aligned} 5y^4y' + (xy)' + e^x &= 0 \\ 5y^4y' + y + xy' + e^x &= 0 \end{aligned} \qquad (\#2)$$

<u>שלב 3</u> :

נציב $x = 0$ ב (#2):

$$\begin{aligned} 5y^4(0)y'(0) + y(0) + 0 \cdot y'(0) + e^0 &= 0 \\ 5y^4(0)y'(0) + y(0) + 1 &= 0 \end{aligned} \qquad (\#2)$$

נציב $y(0)=2$ מ (#1) ונקבל:

$$\begin{aligned}5\cdot 2^4 y'(0)+2+1 =&0\\ 80y'(0)=&-3\\ y'(0)=&\frac{-3}{80}\ .\end{aligned} \tag{\#3}$$

<u>שלב 4</u> :

גוזרים (#2):

$$\begin{aligned}(5y^4y')'+y'+(xy')'+(e^x)' =&0\\ 20y^3\cdot y'\cdot y'+5y^4\cdot y''+y'+xy''+y'+e^x =&0\\ 20y^3\cdot y'^2+5y^4\cdot y''+2y'+xy''+e^x =&0\end{aligned} \tag{\#4}$$

<u>שלב 5</u> :

נציב $x=0$ ב (#4):

$$\begin{aligned}20y^3(0)\cdot y'^2(0)+5y^4(0)\cdot y''(0)+2y'(0)+xy''(0)+e^0 =&0\\ 20y^3(0)\cdot y'^2(0)+5y^4(0)\cdot y''(0)+2y'(0)+xy''(0)+1 =&0\end{aligned} \tag{1}$$

נציב $y(0)=2$ ו $:y'(0)=-\frac{3}{80}$

$$\begin{aligned}20\cdot 2^3\cdot\left(-\frac{3}{80}\right)^2+5\cdot 2^4\cdot y''(0)+2\cdot\frac{-3}{80}+0\cdot y''(0)+1 =&0\\ \frac{18}{80}+80\cdot y''(0)-\frac{6}{80}+1 =&0\\ 80\cdot y''(0)=&\frac{-23}{20}\\ \cdot y''(0)=&\frac{-23}{1600}\ .\end{aligned} \tag{\#5}$$

נוסחת מקלורן מסדר 2 הוא

$$P_2(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2\ .$$

נציב (#1), (#3) ו (#5) ונקבל

$$P_2(x)=2-\frac{3}{80}x-\frac{23}{3200}x^2$$

ד)

(*) $$y = t^2 + 2t + 1 \ , \qquad x = te^t$$

<u>שלב 1</u> :

נציב $x = 0$:

(*1) $$0 = te^t \qquad \Rightarrow \qquad t = 0 \ .$$

<u>שלב 2</u> :

נציב $x = 0$ ב y

(*2) $$y(x = 0) = y(t = 0) = 1 \ .$$

<u>שלב 3</u> :

גוזרים (*):

$$\begin{aligned} y'_x =& \frac{y'_t}{x'_t} \\ x'_t =& e^t + te^t = (1+t)e^t \\ y'_t =& 2t + 2 = 2(1+t) \\ y'_x =& \frac{2(1+t)}{(1+t)e^t} = \frac{2}{e^t} = 2e^{-t} \end{aligned} \qquad (*3)$$

<u>שלב 4</u> :

נציב $x = 0$ ב (*3):

(4*) $$y'(x = 0) = y'(t = 0) = 2$$

<u>שלב 5</u> :

נחשב ${y''}_{xx}$:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)_t}{x'_t}$$

נציב y'_x ו x'_t מ (*3):

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)_t}{x'_t}$$

$$y''_{xx} = \frac{(2e^{-t})'_t}{(1+t)e^t} = \frac{-2e^{-t}}{(1+t)e^t} = \frac{-2e^{-2t}}{1+t} \qquad (*5)$$

<u>שלב 6</u> :

$t=0$:

$$y''_{xx}(x=0) = y''_{xx}(t=0) = \frac{-2e^{-0}}{1} = -2 \ . \qquad (*6)$$

<u>שלב 7</u> :

נוסחת מקלורן מסדר 2 הוא

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \ .$$

נציב (*2), (*4) ו (*6) ונקבל

$$P_2(x) = 1 + 2x - x^2$$

ה) נתון כי פולינום מקלורן מסדר 3 של $f(x)$ הוא $P_3(x) = x - 3x^2 + 2x^3$. ז"א

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x - 3x^2 + 2x^3 \ .$$

כלומר

$$f(0) = 0 \ ,$$
$$f'(0) = 1 \ ,$$
$$\frac{f''(0)}{2} = -3 \qquad \Rightarrow \qquad f''(0) = -6 \ ,$$
$$\frac{f'''(0)}{6} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad f'''(0) = 12 \ .$$

לכן

$$f''(0) + f'''(0) = -6 + 12 = 6$$

<u>שאלה 3</u>

א)

$f(x) = \ln(1+x)$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$	$f''(0) = -1$
$f^{(3)}(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$	$f^{(3)}(0) = 2$
$f^{(4)}(x) = \dfrac{-3!}{(1+x)^4}$	$f^{(4)}(0) = -3!$
$f^{(5)}(x) = \dfrac{4!}{(1+x)^5}$	$f^{(5)}(0) = 4!$
$\vdots$	
$f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^n}$	$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

$$\begin{aligned} P_n(x) =& f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \ldots + + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ =& 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \end{aligned}$$

ב) <u>צריך להוכיח:</u>

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

<u>הוכחה:</u>

$$P_2(x) = x - \frac{x^2}{2} + R_2(x)\ ,$$

כאשר

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3 = \frac{1}{3(1+c)^3}x^3 > 0$$

לכן

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + R_2(x) > x - \frac{x^2}{2} \ . \qquad (*1)$$

$$P_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + R_3(x) \ ,$$

כאשר

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 = \frac{-1}{4(1+c)^4}x^4 < 0$$

לכן

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + R_3(x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ . \qquad (*2)$$

לפי (*1) ו (*2) נקבל

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ .$$

משל.

<u>שאלה 4</u> נגדיר

$$f(x) = e^x \sin x - x(1+x) \ .$$

פולינום מקלורן מסדר 3 הוא

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + R_4(x) \ .$$

$f(x) = e^x \sin x - x(1+x)$	$f(0) = 0$
$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x - 1 - 2x$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = e^x \sin x + e^x \cos x - e^x \sin x + e^x \cos x - 2 = 2e^x \cos x - 2$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x$	$f'''(0) = 2$

לכן

$$\begin{aligned} f(x) =& f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + R_4(x) \\ =& \frac{1}{3}x^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 \ . \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}+\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x\right)=\frac{1}{3}\ .$$

שאלה 5

שלב 1) נחשב הערך של t כאשר $x=\ln 2$:

$$\ln 2=\ln(t^2+1)\qquad\Rightarrow\qquad t^2+1=2\qquad\Rightarrow\qquad t^2=1\qquad\Rightarrow\qquad t=1\ .$$

שלב 2) נחשב $y'(x)$:

$$y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$x'(t)=\frac{2t}{t^2+1}\ ,\qquad y'(t)=3t^2\ .$$

לכן

$$y'(x)=\frac{3t^2}{\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)}=\frac{3t(t^2+1)}{2}=\frac{3t^3+3t}{2}=\frac{3}{2}\left(t^3+t\right)$$

שלב 3) נחשב $y''(x)$:

$$y''(x)=\frac{(y'(x))'_t}{x'(t)}$$

$$(y'(x))'_t=\frac{3}{2}\left(3t^2+1\right)\ .$$

$$y''(x)=\frac{3}{2}\frac{\left(3t^2+1\right)}{3t^2}=\frac{1}{2}\frac{\left(3t^2+1\right)}{t^2}\ .$$

$$y''(x=\ln 2)=y''(t=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot 1^2+1}{1^2}=2\ .$$

שאלה 6

$$f(x)=\ln|9x+4|\qquad\Rightarrow\qquad f(0)=\ln(4)\ .$$

$$f'(x)=\frac{9}{9x+4}\qquad\Rightarrow\qquad f'(0)=\frac{9}{4}\ .$$

$$f''(x)=\frac{-81}{(9x+4)^2}\qquad\Rightarrow\qquad f'(0)=\frac{-81}{16}\ .$$

נוסחת מקלורן היא

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \ .$$

נציב ונקבל

$$P_2(x) = \ln(4) + \frac{9x}{4} - \frac{81x^2}{16} \ .$$

שאלה 7

שלב 1) נחשב את הערך של הפרמטר t עבורו $x=0$:

$$0 = t^3 - 1 \qquad \Rightarrow \qquad t^3 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad t = 1 \ .$$

שלב 2) נחשב $y'(x)$ לפי הנוסחה $y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t}$:

$$y'_t = \frac{1}{t} + 10t = \frac{1+10t^2}{t} \ , \qquad x'_t = 3t^2 \ .$$

לכן

$$y'(x) = \frac{1+10t^2}{3t^3} \ .$$

שלב 3) נציב $t=1$:

$$y'(x=0) = y'(t=1) = \frac{11}{3} \ .$$

שלב 4) נחשב $y''(x)$ לפי הנוסחה $y''(x) = \frac{(y'(x))'_t}{x'_t}$:

$$y'(x) = \frac{1+10t^2}{3t^3} = \frac{u}{\mathrm{v}} \ , \qquad u'_t = 20t \ , \quad \mathrm{v}'_t = 9t^2 \ ,$$

לכן לפי כלל המנה,

$$\begin{aligned}
(y'(x))'_t &= \frac{u'_t \mathrm{v} - \mathrm{v}'_t u}{\mathrm{v}^2} \\
&= \frac{20t \cdot 3t^3 - 9t^2 \cdot (1+10t^2)}{9t^6} \\
&= \frac{60t^4 - 9t^2 - 90t^4}{9t^6} \\
&= \frac{-9t^2 - 30t^4}{9t^6} \\
&= \frac{-3t^2(3+10t^2)}{9t^6} \\
&= \frac{-(3+10t^2)}{3t^4} \ .
\end{aligned}$$

לכן

$$y''(x) = \frac{(y'(x))'_t}{x'_t} = \frac{-(3+10t^2)}{3t^4 \cdot 3t^2} = \frac{-(3+10t^2)}{9t^6} \ .$$

שלב 5) נציב $t=1$:

$$y''(x=0)=y''(t=1)=\frac{-13}{9}\ .$$

שלב 6)

$$P_2(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2}x^2=5+\frac{11x}{3}-\frac{13x^2}{9}\ .$$

שאלה 8

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{5x}-5x-1}{3x^3+x^2}\right)&=\left[\frac{0}{0}\right]\\ &\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^{5x}-5x-1)'}{(3x^3+x^2)'}\right)\\ &=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5e^{5x}-5}{9x^2+2x}\right)\\ &=\left[\frac{0}{0}\right]\\ &\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{(5e^{5x}-5)'}{(9x^2+2x)'}\right)\\ &=\lim_{x\to 0}\left(\frac{25e^{5x}}{18x+2}\right)\\ &=\frac{25}{2}\ .\end{aligned}$$

שאלה 9

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin(2x))}{\ln(\sin(11x))}&=\left[\frac{-\infty}{-\infty}\right]\\ &\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)}}{\frac{11\cos(11x)}{\sin(11x)}}\\ &=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\tan(11x)}{11\tan(2x)}\\ &=\left[\frac{0}{0}\right]\\ &\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{2\cdot 11\sec(11x)}{11\cdot 2\sec(2x)}\\ &=\frac{\sec(0)}{\sec(0)}\\ &=1\ .\end{aligned}$$

שאלה 10

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(2x)}{x}=\frac{0}{0}\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2(2x))'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(2x)2\cos(2x)}{1}=4\sin(0)\cos(0)=0\ .$$

שאלה 11 0

שאלה 12 $\frac{1}{\sqrt{e}}$

שאלה 13 1

שאלה 14 $e^{2-\pi}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(x^2+\sin(\pi x)\right)^{\frac{1}{\log(x)}}&=\lim_{x\to 1}\left(x^2\cdot\left[1+\frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right]\right)^{\frac{1}{\log(x)}}\\&=\lim_{x\to 1}x^{2/\log x}\left(1+\frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right)^{\frac{1}{\log(x)}}\\&=\lim_{x\to 1}x^{2/\log x}\cdot\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right)^{\frac{1}{\log(x)}}\end{aligned}$$

הגבול הראשון הוא

$$\lim_{x\to 1}x^{2/\log x}=\lim_{x\to 1}\left(e^{\log x}\right)^{2/\log x}=\lim_{x\to 1}e^{2\log x/\log x}=e^2\ .$$

הגבול השני הוא

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right)^{1/\log(x)}=\lim_{x\to 1}\left[\left(1+\frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right)^{x^2/\sin(\pi x)}\right]^{\sin(\pi x)/(x^2\log(x))}$$

שים לב $\sin\pi x$ מתאפס כאשר $x\to 1$ ולכן $\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right)^{x^2/\sin(\pi x)}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}=e$, לכן נקבל

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right)^{1/\log(x)}=\lim_{x\to 1}e^{\sin(\pi x)/(x^2\log(x))}=e^{\lim_{x\to 1}\sin(\pi x)/(x^2\log(x))}$$

הגבול $\lim_{x\to 1}\sin(\pi x)/(x^2\log(x))$ נמצא ע"י כלל לופיטל:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x^2\log x}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sin\pi x)'_x}{(x^2\log x)'_x}=\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos\pi x}{x+2x\log x}=-\pi$$

לכן $\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right)^{1/\log(x)}=e^{-\pi}$ סך הכל

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+\sin(\pi x)\right)^{\frac{1}{\log(x)}}=e^{2-\pi}$$

שאלה 15 e

שאלה 16

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\cos(4x)-1}=\frac{0}{0}\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x)'}{(\cos(4x)-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{-4\sin(4x)}=\frac{0}{0}$$

$$\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(2\sin x\cos x)'}{(-4\sin(4x))'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2 x-2\sin^2 x}{-16\cos(4x)}=\frac{2\cos^2 0-2\sin^2 0}{-16\cos(0)}=\frac{-2}{16}=\frac{-1}{8}\ .$$

שאלה 17 e^6

שאלה 18 e^4

שאלה 19 $\frac{1}{e}$

שאלה 20 e^5

שאלה 21 1

שאלה 22 e

שאלה 23 $\log(2)$

שאלה 24 e

שאלה 25 e^3

שאלה 26 3

שים לב:

$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}\right)\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}\right)}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}$$

$$=\frac{x+2-(3x-2)}{4x+1-(5x-1)}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}$$

$$=\frac{-2x+4}{-x+2}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}$$

$$=\frac{-2(x-2)}{-(x-2)}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}$$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}$$

ולכן

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}=\lim_{x\to2}\left[2\cdot\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to2}\left[2\cdot\frac{\sqrt{9}+\sqrt{9}}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}\right]$$

$$=3\ .$$

שאלה 27 $\frac{1}{\sqrt{e}}$

שאלה 28 -2

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{x-\sin(2x)}=\frac{0}{0}\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to0}\frac{(\sin(2x))'}{(x-\sin(2x))'}=\lim_{x\to0}\frac{2\cos(2x)}{1-2\cos(2x)}=\frac{\lim\limits_{x\to0}2\cos(2x)}{\lim\limits_{x\to0}(1-2\cos(2x))}=\frac{2\cos(0)}{(1-2\cos(0))}=-2\ .$$

שאלה 29 $\frac{1}{e}$

שים לב

$$(1+x)^{\frac{1}{x^2}}(1-x)^{\frac{1}{x^2}}=((1+x)(1-x))^{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

לכן, אם נגדיר משתנה חדש $y\equiv x^2$ ושים לב כי $y\to0$ בתהליך כאשר $x\to0$, אז

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x^2}}(1-x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{y\to0}(1-y)^{\frac{1}{y}}$$

$$=\lim_{y\to0}(1-y)^{\frac{-1}{-y}}$$

$$=\lim_{y\to0}\left[(1-y)^{\frac{1}{-y}}\right]^{-1}$$

$$=e^{-1}=\frac{1}{e}\ .$$

שאלה 30

$\Leftarrow$

נתון כי $\lim_{x\to a} f(x) = L$, אז לפי ההגדרה $\forall\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם

$$|x-a| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon \ .$$

שים לב

$$\begin{aligned} 0 < |x-a| < \delta \qquad &\rightsquigarrow \qquad 0 < x-a < \delta \quad \text{או} \quad -\delta < x-a < 0 \\ &\rightsquigarrow \qquad a < x < a+\delta \quad \text{או} \quad a-\delta < x < a \\ &\rightsquigarrow \qquad x \in (a, a+\delta) \quad \text{או} \quad x \in (a-\delta, a) \end{aligned}$$

כלומר, $\forall\epsilon$, $\exists\delta > 0$ כך ש-

$$x \in (a-\delta, a) \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon \tag{1*}$$

$$x \in (a, a+\delta) \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon \tag{2*}$$

אזי, בהינתן ערך מסוים ל- ϵ, ניתן למצוא ערך של δ כך שהתנאים (1*) ן- (2*) מתקיימים. אבל (1*) דווקא התנאי ההכרחי לקיום הגבול $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$, ו- (2*) דווקא התנאי ההכרחי לקיום הגבול $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$,

לכן הוכחנו כי

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = L \quad \text{ו-} \lim_{x\to a^+} f(x) = L \ .$$

$\underline{\Rightarrow}$

אם $\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$, אז $\forall\epsilon > 0$ קיים $\delta_1 > 0$ כך ש-

$$x \in (a-\delta_1, a) \qquad \Rightarrow \qquad |f - L| < \epsilon \ , \tag{\#1}$$

ו- $\forall\epsilon > 0$ קיים $\delta_2 > 0$ כך ש-

$$x \in (a, a+\delta_2) \qquad \Rightarrow \qquad |f - L| < \epsilon \ . \tag{\#2}$$

נגדיר $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$. אז

$$\begin{aligned} x \in (a-\delta_1, a+\delta_2) \qquad &\rightsquigarrow \quad x \in (a, a+\delta_2) \quad \text{ו-} \quad x \in (a-\delta_1, a) \\ x \in (a-\delta, a+\delta) \qquad &\rightsquigarrow \\ 0 < |x-a| < \delta \ . \qquad &\rightsquigarrow \end{aligned} \tag{\#3}$$

לכן על-סמך (#3) והתנאים (#1) ו- (#2) הנתונים, $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ כך ש-

$$0 < |x-a| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon \ .$$

אבל זה דווקא התנאי ההכרחי לקיום הגבול $\lim_{x\to a} f(x) = L$. לכן הוכחנו כי

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \quad \text{ו-} \lim_{x\to a^+} f(x) = L \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to a} f(x) = L \ .$$