

**אלגברה לינארית 2 למדמ"ח**

מועד ב'

מרצים: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר .

תשפ"ה סמסטר ב'

השאלון מכיל 6 עמודים (כולל עמוד זה).

**בהצלחה!****הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה**

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

**חומר עזר**

- דפי נוסחאות של הקורס ( 3 עמודים בפורמט A4 ) מצורפים לשאלון.

**אחר / הערות** יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- יש לרשום בראש המחברת איזה שאלות לבדוק.

## שאלה 1 25 נקודות

(א 5 נק') נתונה קבוצה של וקטורים  $\{1, 2 + 3x, x - x^2\}$  במרחב הוקטורי  $\mathbb{R}_2[x]$  עם המכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע  $[0, 1]$ :

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$$

מצאו בסיס אורתונורמלי של הקבוצה.

תהינה  $A, B \in \mathbb{F}$  מטריצות ריבועיות. יהי  $m_A(x)$  הפולינום המינימלי של  $A$  ויהי  $m_B(x)$  הפולינום המינימלי של  $B$ . בנוסף יהי  $p_A(x)$  הפולינום האופייני של  $A$  ו-  $p_B(x)$  הפולינום האופייני של  $B$ .

(ב 5 נק') הוכיחו או הפריכו: אם  $A$  ו-  $B$  דומות אז  $m_A(x) = m_B(x)$ .

(ג 5 נק') הוכיחו או הפריכו: אם  $m_A(x) = m_B(x)$  אז  $A$  ו-  $B$  דומות.

(ד 5 נק') הוכיחו או הפריכו: אם  $m_A(x) = p_A(x)$  אז  $A$  לכסינה.

(ה 5 נק') הוכיחו או הפריכו: אם  $A$  לכסינה אז  $m_A(x) = p_A(x)$ .

## שאלה 2

(א 6 נק') תהי  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  מטריצה הרמיטית. הוכיחו כי כל הערכים העצמיים של  $A$  הם ממשיים.

(ב 6 נק') הוכיחו או הפריכו: אם  $\lambda \neq 0$  ערך עצמי של  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  ( $\mathbb{F}$  שדה) אז  $\lambda^2$  הוא ערך עצמי של  $AA^t$ .

(ג 7 נק') הוכיחו או הפריכו: אם  $\mathbb{F}$  שדה ומטריצה  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  לכסינה בעלת פולינום אופייני  $p_A(x)$  ומטריצה  $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  המקיימת  $p_A(B) = 0$  אז  $B$  לכסינה.

(ד 6 נק') הוכיחו או הפריכו: כל שתי מטריצות  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  ( $\mathbb{F}$  שדה) הפיכות הן דומות זו לזו.

**שאלה 3** תהי  $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$  המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 5i & -1 & i \\ 1 & 5i & 1 \\ i & -1 & 5i \end{pmatrix}$$

(א 17 נק') האם  $A$  לכסינה אוניטרית? במקרה ו-  $A$  לכסינה אוניטרית, מצאו מטריצה אוניטרית  $Q$  ומטריצה אלכסונית  $D$  כך ש-  $Q^*AQ = D$ . נמקו היטב את תשובתכם.

(ב 8 נק') מצאו מטריצה  $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  המקיימת:  
 $|C| = |I + C| = |I - C|$

**שאלה 4** תהי מטריצה  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  כך שהפולינום האופייני שלה אינו מתפרק לגורמים ליניאריים מעל  $\mathbb{R}$ .

(א) (6 נק') הוכיחו או הפריכו:  $A$  לכסינה מעל  $\mathbb{C}$  עבור  $n = 2$ .

(ב) (6 נק') הוכיחו או הפריכו:  $A$  לכסינה מעל  $\mathbb{C}$  עבור  $n = 4$ .

(ג) (7 נק') תהי  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . הוכיחו או הפריכו: אם  $A^2$  נורמלית אז  $A$  נורמלית.

(ד) (6 נק') הוכיחו או הפריכו: אם מטריצה  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  מקיימת  $(A - 3I)(A + 2I) = 0$  אז קיים  $u \neq 0 \in \mathbb{F}^n$  כך ש-  $Au = 3u$ .

**שאלה 5** נגדיר העתקה ליניארית  $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  ע"י

$$T(a + bx + cx^2) = (-3a + 4b + c) + (-2a + 2b)x + (2a - 3b - c)x^2.$$

(א) (3 נק') מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית.

(ב) (5 נק') האם המטריצה  $A$  שמצאתם לכסינה? במידה וכן, מצאו מטריצה הפיכה  $P$  ומטריצה אלכסונית  $D$  כך ש-  $P^{-1}AP = D$ . במידה ולא, מצאו צורת ז'ורדן  $J$  ומטריצה הפיכה  $P$  כך ש-  $P^{-1}AP = J$ .

נתונה  $A, B \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  מטריצות עם פולינומים מינימליים

$$m_A(t) = t^2 - 3t, \quad m_B(t) = t^2 - 6t + 9.$$

(ג) (7 נק') רשמו את כל צורות ז'ורדן האפשריות עבור  $A$  ו-  $B$ .

(ד) (5 נק') כיצד תשתנה התשובה לסעיף א' אם נתון, בנוסף, שהריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 3 הוא 3? וכיצד תשתנה התשובה אם נתון שהריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 3 הוא 4?

(ה) (5 נק') האם ייתכן שהמטריצה  $A$  סימטרית? האם ייתכן שהמטריצה  $B$  סימטרית? נמקו את תשובתכם.

**מרחב אוקלידי:** מרחב מכפלה פנימית מעל  $\mathbb{R}$ .

**מרחב אוניטרי:** מרחב מכפלה פנימית מעל  $\mathbb{C}$ .

**הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי  $V$  מעל  $\mathbb{R}$ :**  
לכל  $u, v, w \in V$  ולכל  $\lambda \in \mathbb{R}$  סקלר

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \text{(1) סימטריות:}$$

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad \text{(2) ליניאריות:}$$

$$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

$$\langle u, u \rangle \geq 0. \quad \text{(3) חיוביות:}$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

**הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי  $V$  מעל  $\mathbb{C}$ :**  
לכל  $u, v, w \in V$  ולכל  $\lambda \in \mathbb{C}$  סקלר

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} \quad \text{(1) הרמיטיות:}$$

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad \text{(2) ליניאריות:}$$

$$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

$$\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \text{(3) חיוביות:}$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

אי-שוויון קושי שוורץ:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

אי-שוויון המשולש:

היטל אורתוגונלי של וקטור  $v$  על תת מרחב בעל בסיס אורתוגונלי  $u_1, \dots, u_n$ :

$$P_U(v) = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 + \dots + \frac{\langle v, u_n \rangle}{\|u_n\|^2} u_n.$$

תהליך גרם שמידט לבניית בסיס אורתוגונלי:

$$u_1 = v_1,$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

$\vdots$

$$u_n = v_n - \frac{\langle v_n, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_n, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \dots - \frac{\langle v_n, u_{n-1} \rangle}{\|u_{n-1}\|^2} u_{n-1}.$$

$\lambda \in \mathbb{F}$  ערך עצמי ו-  $u \in \mathbb{F}^n$  ווקטור עצמי ( $u \neq 0$ ) של מטריצה  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  אם:  $Au = \lambda u$

$\lambda \in \mathbb{F}$  ערך עצמי ו-  $u \in V$  ווקטור עצמי ( $u \neq 0$ ) של אופרטור  $T : V \rightarrow V$  אם:  $T(u) = \lambda u$

פולינום אופייני של מטריצה ריבועית  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ :  $p_A(\lambda) = |\lambda I - A|$

מרחב עצמי של מטריצה ריבועית  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  ששייך לערך עצמי  $\lambda$  הוא כל וקטור  $u \in \mathbb{F}^n$  כאשר  $u \neq 0$  כך ש:  $Au = \lambda u$ .

מרחב עצמי של אופרטור  $T : V \rightarrow V$  ששייך לערך עצמי  $\lambda$  הוא כל וקטור  $u \in V$  כאשר  $u \neq 0$  כך ש:  $T(u) = \lambda u$ .

### בסיס אורתונורמלי:

יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית מעל  $\mathbb{C}$ . בסיס אורתונורמלי, מסומן  $\{b_1, \dots, b_n\}$ , מקיים את התנאי

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

כל וקטור  $u \in V$  ניתן לרשום בבסיס אורתונורמלי:

$$u = \sum_{i=1}^n \langle u, b_i \rangle b_i$$

סימון חלופי:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \langle u, b_1 \rangle \\ \langle u, b_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_i \rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_n \rangle \end{pmatrix}_B$$

יהי  $T : V \rightarrow V$  אופרטור. המצטרפה המייצגת על פי בסיס  $B$  היא

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \langle T(b_1), b_1 \rangle & \langle T(b_2), b_1 \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_1 \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_1 \rangle \\ \langle T(b_1), b_2 \rangle & \langle T(b_2), b_2 \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_2 \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_i \rangle & \langle T(b_2), b_i \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_i \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_i \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_n \rangle & \langle T(b_2), b_n \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_n \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_n \rangle \end{pmatrix}.$$

כלומר האיבר ה-  $ij$  של המטריצה המייצגת של  $T$  על פי הבסיס  $B$  היא  $[T]_{ij} = \langle T(b_j), b_i \rangle$ .

## ההגדרה של אופרטור הצמוד:

אם  $T : V \rightarrow V$  אופרטור, ו-  $u, w \in V$  שני וקטורים כלשהם של  $V$ , אזי האופרטור הצמוד של  $T$  מוגדר כך שמתקיים

$$\langle T(u), w \rangle = \langle u, T^*(w) \rangle. \quad (*)1$$

מההגדרה (\*)1 נובע:

$$\langle T^*(u), w \rangle = \langle u, T(w) \rangle \quad (*)2$$

נוסחה ל-  $T(u)$  ו-  $T^*(u)$  במונחי בסיס אורתונורמלי  $\{b_1, \dots, b_n\}$ :

$$T(u) = \sum_{i=1}^n \langle T(u), b_i \rangle b_i \quad (*)3$$

$$T^*(u) = \sum_{i=1}^n \langle u, T(b_i) \rangle b_i \quad (*)4$$

משפט:

$$T^{**} = T \quad (*)5$$

משפט: המטריצה המייצגת של אופרטור צמוד  $T^*$  נתונה ע"י

$$[T^*] = [T]^* \quad (*)6$$

תהי  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  מטריצה ריבועית.

|                   |                   |
|-------------------|-------------------|
| $A = A^*$         | $A$ הרמיטית:      |
| $A^* = -A$        | $A$ אנטי-הרמיטית: |
| $AA^* = I = A^*A$ | $A$ אוניטרית:     |
| $AA^t = I = A^tA$ | $A$ אורתוגונלית:  |
| $AA^* = A^*A$     | $A$ נורמלית:      |

יהי  $T : V \rightarrow V$  אופרטור מעל מרחב וקטורי  $V$ . נסמן המטריצה המייצגת  $A = [T]$ .

|                     |                   |                   |                  |
|---------------------|-------------------|-------------------|------------------|
| $T = T^*$           | $\Leftrightarrow$ | $A = A^*$         | $T$ צמוד לעצמו:  |
| $T^* = -T$          | $\Leftrightarrow$ | $A^* = -A$        | $T$ אנטי-הרמיטי: |
| $TT^* = I_V = T^*T$ | $\Leftrightarrow$ | $AA^* = I = A^*A$ | $T$ אוניטרי:     |
| $TT^* = T^*T$       | $\Leftrightarrow$ | $AA^* = A^*A$     | $T$ נורמלי:      |

מטריצה  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה  $Q$  אוניטרית ומטריצה  $D$  אלכסונית כך ש:

$$A = QDQ^* \Leftrightarrow D = Q^*AQ.$$

מטריצה  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  לכסינה אורתוגונלית אם קיימת מטריצה  $P$  אורתוגונלית ומטריצה  $D$  אלכסונית כך ש:

$$A = PDP^t \Leftrightarrow D = P^tAP.$$

## פתרונות

שאלה 1

(א) (5 נק') נסמן:

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 2 + 3x, \quad v_3 = x - x^2$$

האלגוריתם של גרס-שמידט:

$$u_1 = v_1 = 1.$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = .$$

$$\langle v_2, u_1 \rangle = \int_0^1 (2 + 3x) dx = \frac{7}{2}.$$

$$\|u_1\|^2 = \langle u_1, u_1 \rangle = \int_0^1 (1) dx = 1.$$

לכן

$$u_2 = 2 + 3x - \frac{7}{2} = -\frac{3}{2} + 3x.$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2.$$

$$\langle v_3, u_1 \rangle = \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}.$$

$$\begin{aligned} \langle v_3, u_2 \rangle &= \int_0^1 (x - x^2) \left( -\frac{3}{2} + 3x \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( -\frac{3}{2}x + 3x^2 + \frac{3}{2}x^2 - 3x^3 \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}x^2 - 3x^3 \right) dx \\ &= -\frac{3}{4} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$u_3 = x - x^2 - \frac{1}{6} - \frac{0}{\|u_2\|^2} \left( -\frac{3}{2} + 3x \right) \\ = x - x^2 - \frac{1}{6} .$$

(ב) (5 נק') הטענה נכונה.

הוכחה:

אם  $A$  ו- $B$  דונמות אז קיימת מטריצה  $P$  הפכיה כך ש- $B = P^{-1}AP$   $\Leftrightarrow A = PBP^{-1}$ .  
 לכל מטריצות  $A, B$  דומות ולכל פולינום  $f(x)$ , מתקיים  $f(A) = Pf(B)P^{-1}$  וגם  $f(B) = P^{-1}f(A)P$ .  
 מכאן, אם  $m_A(x)$  הפולינוס המינימלי של  $A$  ו- $m_B(x)$  הפולינוס המינימלי של  $B$  אזי

$$m_A(B) = Pm_B(B)P^{-1} = 0, \quad m_B(A) = Pm_B(A)P^{-1} = 0,$$

כלומר

$$m_A(B) = 0, \quad m_B(A) = 0.$$

כדי להראות ש- $m_A(x) = m_B(x)$  ראשית נראה כי  $\deg(m_A(x)) = \deg(m_B(x))$  באופן הבא:

• נניח ש- $\deg(m_A(x)) < \deg(m_B(x))$ .

בגלל ש- $m_A(B) = 0$  אז  $B$  מאפסת פולינוס מדרגה נמוכה יותר מהדרגה של  $m_B$ .

זאת בסתירה לכך ש- $m_B(x)$  הוא הפולינוס המינימלי של  $B$ .

• נניח ש- $\deg(m_A(x)) > \deg(m_B(x))$ .

בגלל ש- $m_B(A) = 0$  אז  $A$  מאפסת פולינוס מדרגה נמוכה יותר מהדרגה של  $m_A$ .

זאת בסתירה לכך ש- $m_A(x)$  הוא הפולינוס המינימלי של  $A$ .

לכן  $\deg(m_B(x)) \not< \deg(m_A(x))$  וגם  $\deg(m_B(x)) \not> \deg(m_A(x))$ .  
 לכן בהכרח, אם  $A$  ו- $B$  דומות אז

$$\deg(m_A(x)) = \deg(m_B(x))$$

כעת נוכיח שהפולינומים  $m_A(x)$  ו- $m_B(x)$  הם זהים. ראשית אנחנו רושמים את  $m_A(x)$  ו- $m_B(x)$  כך שהם מאותה דרגה:  $\deg(m_A(x)) = \deg(m_B(x))$  ושניהם פולינומים מתוקנים:

$$\left. \begin{aligned} m_A(x) &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{k-1} x^{k-1} + x^k, \\ m_B(x) &= \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_{k-1} x^{k-1} + x^k. \end{aligned} \right\}$$

יהי  $q(x)$  הפולינוס הבא:

$$q(x) = m_A(x) - m_B(x) = (\alpha_0 - \beta_0) + (\alpha_1 - \beta_1)x + \cdots + (\alpha_{k-1} - \beta_{k-1})x^{k-1}.$$

עבור  $q(x)$ :

$$q(A) = m_A(A) - m_B(A) = 0, \quad \text{וגם} \quad q(B) = m_A(B) - m_B(B) = 0.$$



נניח בשלילה כי  $m_A(x) \neq m_B(x)$ . אזי קיימים מקדמים עבורם  $\alpha_i \neq \beta_i$ .  
לכן:

$A$  מאפסת את הפולינום  $q(x)$  אשר מדרגה נמוכה יותר מהדרגה של  $m_A(x)$ , סתירה! ו-  
 $B$  מאפסת את הפולינום  $q(x)$  אשר מדרגה נמוכה יותר מהדרגה של  $m_B(x)$ , סתירה!

לכן  $m_A(x) = m_B(x)$ . כנדרש.

(ג) הטענה לא נכונה.  
דוגמה נגדית:

$$A = J_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = J_2(2) \oplus J_1(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$A$  ו- $B$  הן צורות ז'ורדן.  
לכן הפולינומים המינימליים שלהן הם:

$$m_A(x) = (x - 2)^3, \quad m_B(x) = (x - 2)^3,$$

$$m_A(x) = m_B(x) \text{ ז"א}$$

עבור הערך עצמי  $\lambda = 2$ , ל- $A$  יש בלוק אחד, ועבור הערך עצמי  $\lambda = 2$ , ל- $B$  יש שני בלוקים. לכן

$$\left. \begin{array}{l} \text{geo}_A(\lambda = 2) = 1 \\ \text{geo}_B(\lambda = 2) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{geo}_A(\lambda = 2) \neq \text{geo}_B(\lambda = 2),$$

כלומר הריבוי הגאומטרי של  $\lambda = 2$  של המטריצה  $A$  לא שווה להריבוי הגאומטרי של  $\lambda = 2$  של המטריצה  $B$  לכן הן לא דומות.

(ד) הטענה לא נכונה.  
דוגמה נגדית:

תהי  $A = \mathbb{R}^{n \times n}$  המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$A$  היא הבלוק ז'ורדן  $J_2(2)$ .  
הפולינום המינימלי הוא

$$m_A(x) = (x - 2)^2,$$

והפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = (x - 2)^2.$$

לכן  $m_A(x) = p_A(x)$  אבל  $A$  לא לכסינה כי היא בלוק ז'ורדן, וכל בלוק ז'ורדן לא לכסין.

(ה) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:  
תהי  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A$  מטריצה היחידה של  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ . בפרט  $A$  אלכסונית ולכן לכסינה. אבל הפולינום המינימלי הוא

$$m_A(x) = x - 1$$

והפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = (x - 1)^2.$$

ז"א מצאנו דוגמה עבורה  $A$  לכסינה אבל  $p_A(x) \neq m_A(x)$ .

## שאלה 2

(א) (6 נק') יהי  $u$  וקטור עצמי של  $A$  ששייך לערך עצמי  $\lambda$ .

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle &= \langle \lambda u, u \rangle \\ &= \lambda \langle u, u \rangle. \end{aligned}$$

מצד שני:

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle &= \langle u, A^* u \rangle \\ &= \langle u, Au \rangle \\ &= \lambda \langle u, \lambda u \rangle \\ &= \bar{\lambda} \langle u, u \rangle. \end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda \langle u, u \rangle = \bar{\lambda} \langle u, u \rangle \Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda}) \langle u, u \rangle = 0$$

$u$  וקטור עצמי  $u \neq 0 \Leftrightarrow \langle u, u \rangle \neq 0 \Leftrightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Leftrightarrow \lambda$  ממשי.

(ב) (6 נק')

הטענה לא נכונה.

דוגמה נגדית:

תהי  $A$  המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

הערכים העצמיים של  $A$  הם  $\lambda = 0$  ו- $\lambda = 1$ .

כעת נחשב את  $AA^t$ :

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

הערכים העצמיים של  $AA^t$  הם 0 ו-2. לפיכך  $\lambda = 1$  הוא ערך עצמי של  $A$  אבל  $\lambda^2 = 1$  אינו ערך עצמי של  $AA^t$ .

(ג) (7 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

 $A$  לכסינה והפולינום האופייני של  $A$  הוא  $p_A(x) = (x-1)^2$ .

$$p_A(B) = (B - I)^2 = 0$$

אבל  $B$  בלוק ז'ורדן ולכן היא לא לכסינה.

$$(ד) (6 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  ו-  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ .$$

 $A$  הפיכה מסיבה ש-  $|A| = 2 \neq 0$ . $B$  הפיכה מסיבה ש-  $|B| = 12 \neq 0$ .מצד שני הדטרמיננטות שלהן לא שוות:  $|A| \neq |B|$ , ולכן הן לא דומות.

### שאלה 3

(א) (17 נק')

$$A = \begin{pmatrix} 5i & -1 & i \\ 1 & 5i & 1 \\ i & -1 & 5i \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} -5i & 1 & -i \\ -1 & -5i & -1 \\ -i & 1 & -5i \end{pmatrix}.$$

מכאן

$$AA^* = \begin{pmatrix} 27 & 11i & -9 \\ -i & 27 & -11i \\ -11 & 11i & 27 \end{pmatrix} = A^*A.$$

 $A$  נורמלית לכן לכסינה אוניטרית.

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x - 5i & 1 & -i \\ -1 & x - 5i & -1 \\ -i & 1 & x - 5i \end{vmatrix}$$

$$= (x - 5i) \begin{vmatrix} x - 5i & -1 \\ 1 & x - 5i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -i & x - 5i \end{vmatrix} - i \begin{vmatrix} -1 & x - 5i \\ -i & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x - 5i) [(x - 5i)(x - 5i) + 1] - [-x + 5i - i] - i [-1 - i(x - 5i)]$$

$$= (x - 5i) [x^2 - 10i - 24] + (x - 4i) - i(-4 - ix)$$

$$= (x - 5i)(x - 6i)(x - 4i) + x - 4i + x - 4i$$

$$= (x - 4i) [(x - 5i)(x - 6i) + 2]$$

$$= (x - 4i) [x^2 - 11i - 28]$$

$$= (x - 4i)(x - 4i)(x - 7i)$$

$$= (x - 4i)^2 (x - 7i).$$

לכן הפולינום האופייני של  $A$  הוא

$$p_A(x) = (x - 4i)^2(x - 7i) .$$

הערכים העצמיים הם:

$$\text{alg}(4i) = 2, \lambda = 4i$$

$$\text{alg}(7i) = 1, \lambda = 7i$$

ריבוי גיאומטרי של  $\lambda = 4i$ :

$$\text{Nul}(A - 4iI) = \begin{pmatrix} -2i & -1 & i \\ 1 & -2i & 1 \\ i & -1 & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \rightarrow R_3 - R_1}]{R_2 \rightarrow iR_2 - R_1} \begin{pmatrix} i & -1 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{פתרון: } (x, y, z) = (-iy - z, y, z) = (-i, 1, 0) + (-1, 0, 1)$$

$$V_{4i} = \text{span} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ריבוי גיאומטרי של  $\lambda = 7i$ :

$$\begin{aligned} \text{Nul}(A - 7iI) &= \begin{pmatrix} -2i & -1 & i \\ 1 & -2i & 1 \\ i & -1 & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \rightarrow 2R_3 + R_1}]{R_2 \rightarrow 2iR_2 + R_1} \begin{pmatrix} -2i & -1 & i \\ 0 & 3 & 3i \\ 0 & -3 & -3i \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} -2i & -1 & i \\ 0 & 3 & 3i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} -2i & -1 & i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_2} \begin{pmatrix} -2i & 0 & 2i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{i}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{פתרון: } (x, y, z) = (z, -iz, z) = (1, -i, 1)z$$

$$V_{7i} = \text{span} \left\{ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נבנה בסיס אורתונורמלי ע"י התהליך גרם שמידט:

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$v_3$  אורתוגונלי ביחס ל-  $u_1$  ו-  $u_2$  מסיבה שהוקטור עצמי  $v_3$  והוקטורים העצמיים  $u_1$  ו-  $u_2$  שייכים לערכים העצמיים שונים. לכן קיבלנו בסיס אורתוגונלי:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

הבסיס האורתונורמלי הוא

$$\left\{ \hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}} u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

לכן  $A = QDQ^*$  כאשר

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{-i}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ב } 8 \text{ נק'})$$

## שאלה 4

(א) (6 נק') הטענה נכונה.

לכל  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  הפולינום האופייני הוא  $p_A(x) = x^2 - \text{tr}(A)x + |A|^2$ .  $A$  ממשת אזי  $\text{tr}(A)$  ממשת ו-  $|A|$  ממשת. ז"א כל המקדמים בפולינום האופייני הם ממשיים. כל פולינום עם מקדמים ממשיים מתפרק לגורמים לינאריים עם שורשים מרוכבים:

$$p_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$$

כאשר  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  ו-  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , כאשר  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . הפולינום האופייני אינו מתפרק לגורמים לינאריים מעל  $\mathbb{R}$  אז  $\beta \neq 0 \Leftarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \Leftarrow A$  יש 2 ערכים עצמיים שונים מעל  $\mathbb{C}$  לכסינה מעל  $\mathbb{C}$ .

(ב) (6 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = (x^2 + 1)^2 = (x + i)^2(x - i)^2.$$

ז"א  $p_A(x)$  אינו מתפרק לגורמים ליניאריים מעל  $\mathbb{R}$ .  
הצורת ז'ורדן של  $A$  היא  $J = J_2(-i) \oplus J_2(i)$  לכן  $A$  לא לכסינה מעל  $\mathbb{C}$ .

(ג) (7 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$A^2 = 0$  כלומר  $A^2$  היא המטריצת האפס לכן  $A^2$  נורמלית באופן טריוויאלי.

מצד שני

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^*A$$

(ד) (6 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I.$$

ברור ש-  $A + 2I = 0$  לכן  $(A - 3I)(A + 2I) = 0$  אבל הערכים העצמיים של  $A$  הם 2 עם ריבוי אלגברי 2. לכן 3 לא ערך עצמי של  $A$  לכן לא קיים וקטור  $u \neq 0$  עבורו  $Au = 3u$ .

## שאלה 5

(א) (3 נק')

$$[T] = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

(ב) (5 נק') הפולינום האופייני הוא  $p_T(x) = x(x + 1)^2$ . הערכים העצמיים הם:

$$\text{alg}(0) = 1, \lambda = 0$$

$$\text{alg}(0) = 2, \lambda = -1$$

וקטור עצמי של  $\lambda = 0$

$$\begin{aligned}
\text{Nul}([T] - 0 \cdot I) &= \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \rightarrow 3R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow 3R_3 + 2R_1}]{\substack{R_2 \rightarrow 3R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow 3R_3 + 2R_1}} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_3 \rightarrow 2R_3 - R_2} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 4R_2} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow -\frac{1}{3}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

לכן

$$\text{Nul}([T] - 0 \cdot I) = \text{span} \left\{ u_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

לכן

$$V_0 = \text{Ker}(T - 0 \cdot I) = \text{span} \{ w_0 = -1 - x + x^2 \}.$$

וקטור עצמי של  $\lambda = -1$ 

$$\begin{aligned}
\text{Nul}([T] - (-1) \cdot I) &= \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1}]{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1}} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 4R_2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[\substack{R_1 \rightarrow -R_1 \\ R_2 \rightarrow -R_2}]{\substack{R_1 \rightarrow -R_1 \\ R_2 \rightarrow -R_2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

לכן

$$\text{Nul}([T] + I) = \text{span} \left\{ u_{-1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

לכן

$$V_{-1} = \text{Ker}(T + I) = \text{span} \{ w_{-1} = -3 - 2x + 2x^2 \}.$$

 $\dim(\text{Ker}(T + I)) = 1 < \text{alg}(-1)$  לכן  $T$  לא לכסיין.
וקטור עצמי מוכלל של  $\lambda = -1$

נסמן הוקטור עצמי מוכלל של  $\lambda = -1$  כ-  $u'_{-1} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  ונפתור את המשוואה:

$$(A + I)u'_1 = u_1$$

המטריצה המורחבת היא  $\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \end{array} \right)$  . נדרג:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \end{array} \right) & \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 4R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow -R_1 \\ R_2 \rightarrow -R_2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

פתרון:  $(x, y, z) = (-\frac{3}{2}z - \frac{1}{2}, -z - 1, z) = (-\frac{3}{2}, -1, 1)z + (-\frac{1}{2}, -1, 0)$  . נציב  $z = 0$  ואז נקבל תשובה

$$u'_{-1} = (-\frac{1}{2}, -1, 0) .$$

$$[T] = PJP^{-1} , \quad P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_0 & u_{-1} & u'_{-1} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} , \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

(ג) (7 נק')

לפי הפולינום המינימלי  $m_A(t) = t(t - 3)$ :

• הערכים העצמיים של  $A$  הם 0 ו-3

• הפולינום המינימלי מתפרק לגורמים ליניאריים שונים לכן  $A$  לכסינה ולכן הצורות ז'ורדן של  $A$  האפשריות הן



$$J_A = \begin{pmatrix} 3 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}.$$

לפי הפולינום המינימלי  $m_B(t) = (t - 3)^2$

- הערך העצמי היחיד הוא 3.
  - הגודל של הבלוק ז'ורדן הכי גדול הוא 2 לכל היותר.
- לכן הצורות ז'ורדן האפשריות הן:

$$J_B = \begin{pmatrix} J_2(3) & & & \\ & J_2(3) & & \\ & & J_2(3) & \\ & & & J_2(3) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} J_2(3) & & & \\ & J_2(3) & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} J_2(3) & & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

ד) (5 נק')

ה) (5 נק')