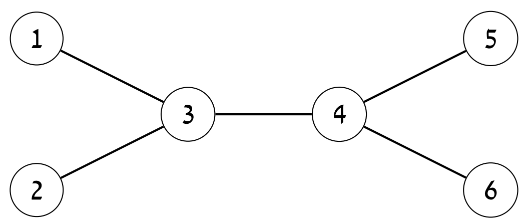
שעור 4
גרפים של משחקים, מטריצה שכנות ושחמט

4.1 גרפים

הגדרה 4.1 מטריצה שכנות

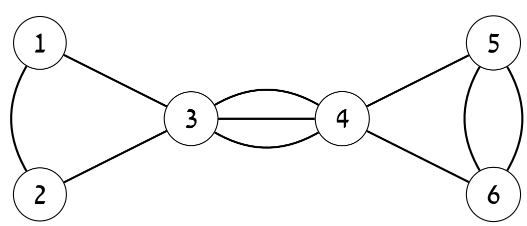
נתון גרף בעל n קדקודים
$$\mathrm{v}_1,\ \mathrm{v}_2,\ \ldots,\ \mathrm{v}_n\ .$$
המטריצה שכנות של הגרף מוגדרת להיות מטריצה מסדר $n\times n$ כאשר האיבר ה- (i,j) שווה למספר צלעות בין קדקוד i וקדקוד j.

דוגמה 4.1 ()



$$A=\begin{array}{c} \\ \mathrm{v}_1\\ \mathrm{v}_2\\ \mathrm{v}_3\\ \mathrm{v}_4\\ \mathrm{v}_5\\ \mathrm{v}_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3 & \mathrm{v}_4 & \mathrm{v}_5 & \mathrm{v}_6 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}\end{array}$$

דוגמה 4.2 ()



$$A=\begin{array}{c} \\ \mathrm{v}_1\\ \mathrm{v}_2\\ \mathrm{v}_3\\ \mathrm{v}_4\\ \mathrm{v}_5\\ \mathrm{v}_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3 & \mathrm{v}_4 & \mathrm{v}_5 & \mathrm{v}_6 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0&1&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&3&0&0\\ 0&0&3&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&2\\ 0&0&0&1&2&0 \end{pmatrix}\end{array}$$

משפט 4.1 מטריצה שכנות בחזקה

נתון דרך בעל n קדקודים
$$\mathrm{v}_1,\ \mathrm{v}_2,\ \ldots,\ \mathrm{v}_n\ .$$
נניח כי A היא מטריצה השכנות של הגרף.

מספר מהלכים שקיימים בין קדקוד i לבין קדקוד j בעלי אורך k ניתן ע"י הרכיב i,j של המטריצה A^k.

ז"א
$$\left(A^k\right)_{ij} = \text{מספר מהלכים מאורך } k \text{ בין } \mathrm{v}_i \text{ לבין } \mathrm{v}_j .$$

דוגמה 4.3 ()

בקו רכבת יש 3 תחנות, חיפה, תל אביב, וירושלים. בין כל שתי תחנות יש רכבת בכל כיוון.

שירה עולה לרכבת בחיפה. בכל תחנה בה הרכבת עוצרת, היא קונה חפיסת שוקולד.

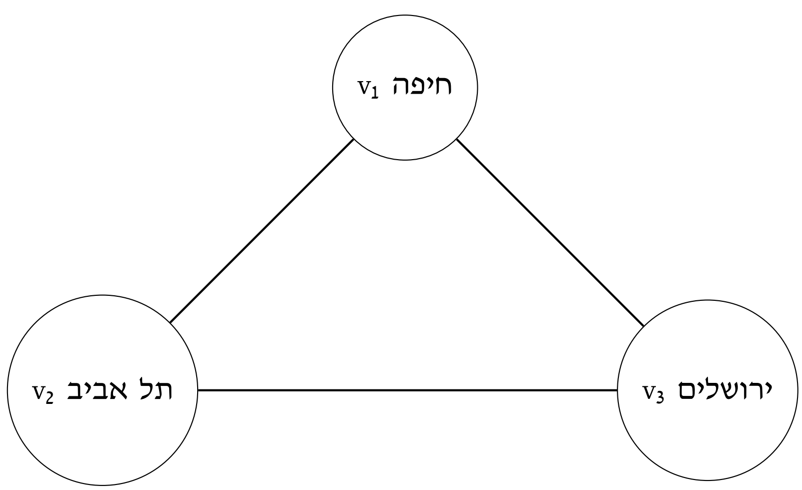
א) כמה מסלולים אפשריים יש כך שהיא תחזור לתחנת חיפה עם 2 חפיסות שוקולד? רשמו את המסלולים.

ב) כמה מסלולים אפשריים יש כך שהיא תחזור לתחנת חיפה עם 3 חפיסות שוקולד? רשמו את המסלולים.

ג) כמה מסלולים אפשריים יש כך שהיא תחזור לתחנת חיפה עם 6 חפיסות שוקולד?

פתרון:
נשרטט את הקו כגרף עם שלוש קדקודים.

א)



מטריצה שכנות של הגרף היא
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$
השאלה היא כמה מהלכים יש מחיפה לחיפה עבורם היא תגיע לחיפה עם שתי חפיסות שוקולד.

במילים אחרות, כמה מהלכים מקדקוד v_1 לקדקוד v_1, יש בעלי אורך 2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \left(A^2\right)_{11} = 2$$

לכן יש 2 מסלולים מ v_1 ל- v_1 של אורך 2:

$$\mathrm{v}_1 \to \mathrm{v}_2 \to \mathrm{v}_1 \ , \qquad \mathrm{v}_1 \to \mathrm{v}_3 \to \mathrm{v}_1 \ .$$

ב)

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \left(A^3\right)_{11} = 2$$

לכן יש 2 מסלולים מ v_1 ל- v_1 של אורך 3:

$$\mathrm{v}_1 \to \mathrm{v}_2 \to \mathrm{v}_3 \to \mathrm{v}_1 \ , \qquad \mathrm{v}_1 \to \mathrm{v}_3 \to \mathrm{v}_2 \to \mathrm{v}_1 \ .$$

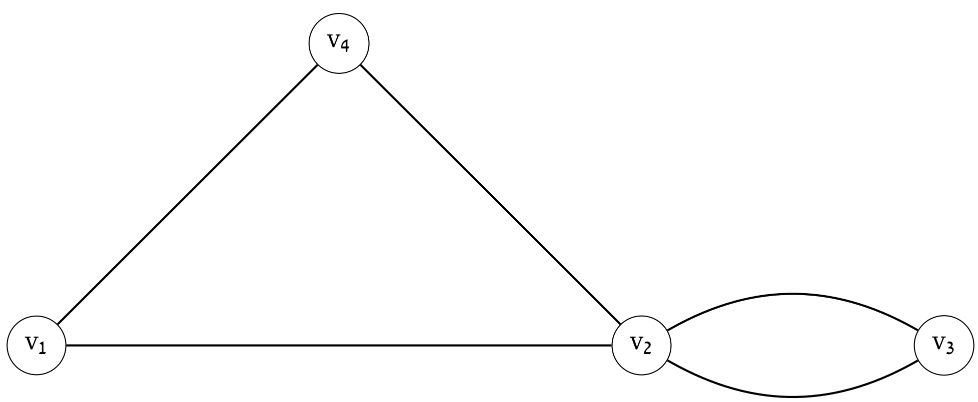
ג)

$$A^6 = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix}$$

לכן יש 22 מסלולים מ v_1 ל- v_1 של אורך 6:

■

דוגמה 4.4 ()



א) מצאו את המטריצה שכנות של הגרף.

ב) מצאו את המטריצה אשר נותנת את כל המהלכים בנות אורך 3.

ג) כמה מהלכים בנות אורך 3 קיימים בין הקדקוד 2 לבין הקדקוד 3.

פתרון:

סעיף א)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

סעיף ב) מטריצה שכנות של הגרף הינה

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&2&1\\0&2&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&2&1\\0&2&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&2&1\\1&6&0&1\\2&0&4&2\\1&1&2&2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&2&1\\0&2&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2&1\\1&6&0&1\\2&0&4&2\\1&1&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&7&2&3\\7&2&12&7\\2&12&0&2\\3&7&2&2\end{pmatrix}$$

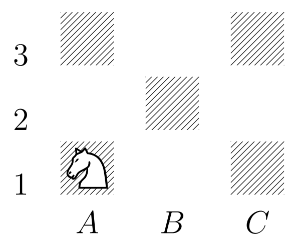
סעיף ג)

$$\left(A^2\right)_{23}=12$$

לכן קיימים 12 מהלכים בין קדקוד 2 לבין קדקוד 3 בנות אורך 12.

■

דוגמה 4.5 (הבעיה של הפרשים)



א) מצאו את האורך המינימלי של מהלך הנדרש כדי שהפרש יחזור למשבצת ההתחלתית $A1$.

ב) הוכיחו כי לא קיים מהלך בת אורך אי-זוגי ממשבצת $A1$ למשבצת $C3$.

ג) כמה מהלכים קיימים בנות אורך 8 מ- $A1$ ל- $B3$?

רמז: לכל $k>0\in\mathbb{Z}$ אי-זוגי,

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}0&b&0&b&0&a&0&a&0\\b&0&b&0&0&0&a&0&a\\0&b&0&a&0&b&0&a&0\\b&0&a&0&0&0&b&0&a\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\a&0&b&0&0&0&a&0&b\\0&a&0&b&0&a&0&b&0\\a&0&a&0&0&0&b&0&b\\0&a&0&a&0&b&0&b&0\end{pmatrix}.$$

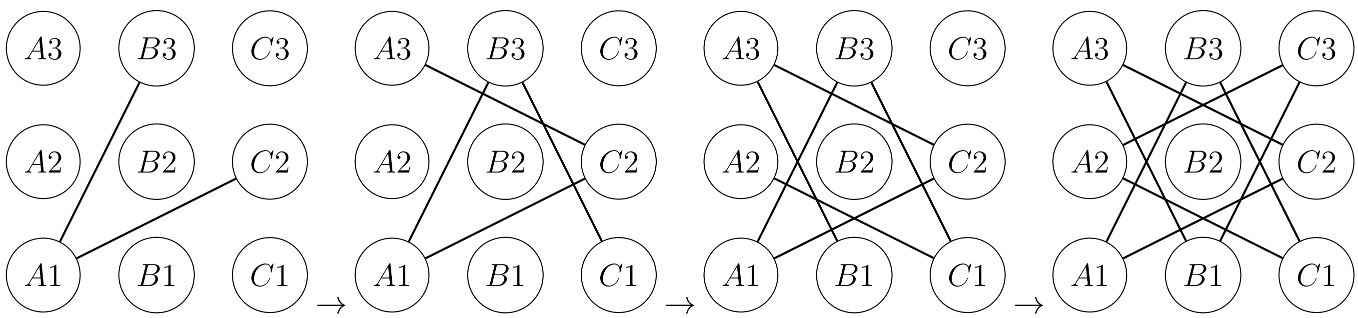
$$a=2^{\frac{k-3}{2}}+2^{k-2}\ ,\quad b=2^{k-2}-2^{\frac{k-3}{2}}\ .$$

לכל $k > 0 \in \mathbb{Z}$ זוגי:

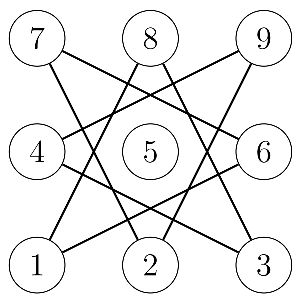
$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} d&0&e&0&0&0&e&0&c\\ 0&d&0&e&0&e&0&c&0\\ e&0&d&0&0&0&c&0&e\\ 0&e&0&d&0&c&0&e&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&e&0&c&0&d&0&e&0\\ e&0&c&0&0&0&d&0&e\\ 0&c&0&e&0&e&0&d&0\\ c&0&e&0&0&0&e&0&d \end{pmatrix}$$

$$c = 2^{k-2} - 2^{\frac{k}{2}-1} \ , \quad d = 2^{\frac{k}{2}-1} + 2^{k-2} \ , \quad e = 2^{k-2} \ .$$

פתרון:



נרשום את הגרף עם הקדקודים ממוספרים עם מספרים רגילים:



המטריצה שכנות הינה

$$A = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \ .$$

סעיף א) לכל k אי-זוגי $\left(A^k\right)_{11} = 0$ לכן לא קיים מהלך בת אורך אי-זוגי בין $A1$ לבין $A1$.

אם $k = 2$ אז $\left(A^2\right)_{11} = [c]_{k=2} = 2^{2-2} - 2^{\frac{2}{2}-1} = 0$ לכן לא קיים מהלך בת אורך 2 בין $A1$ לבין $A1$.

אם $k = 4$ אז $\left(A^4\right)_{11} = [c]_{k=2} = 2^{4-2} - 2^{\frac{4}{2}-1} = 2$ לכן קיימים 2 מהלכים שונים בנות אורך 4 בין $A1$ לבין $A1$.

לכן האורך המינימלי של המהלך בין $A1$ לבין $A1$ הוא 4.

סעיף ב לכל $k>0$ אי-זוגי לפי הנוסחה לעיל $\left(A^k\right)_{19}=0$.

סעיף ג

$$\left(A^7\right)_{18}=[a]_{k=7}=2^{\frac{7-3}{2}}+2^{7-2}=4+32=36\ .$$

■

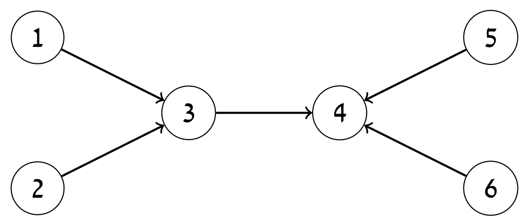
הגדרה 4.2 מטריצה שכנות המכוונת

נתון גרף מכוון בעל n קדקודים

$$\mathrm{v}_1,\ \mathrm{v}_2,\ \ldots,\ \mathrm{v}_n\ .$$

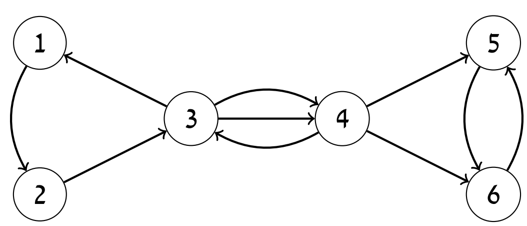
המטריצה שכנות המכוונת של הגרף מוגדרת להיות מטריצה מסדר $n\times n$ כאשר האיבר ה- (i,j) שווה למספר צלעות אשר יוצאים מקדקוד i ונכנסים לקדקוד j.

דוגמה 4.6 ()



$$A=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc}\mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3 & \mathrm{v}_4 & \mathrm{v}_5 & \mathrm{v}_6\end{array} \\
\begin{array}{c}\mathrm{v}_1\\ \mathrm{v}_2\\ \mathrm{v}_3\\ \mathrm{v}_4\\ \mathrm{v}_5\\ \mathrm{v}_6\end{array} & \begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}
\end{array}$$

דוגמה 4.7 ()



$$A=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc}\mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3 & \mathrm{v}_4 & \mathrm{v}_5 & \mathrm{v}_6\end{array} \\
\begin{array}{c}\mathrm{v}_1\\ \mathrm{v}_2\\ \mathrm{v}_3\\ \mathrm{v}_4\\ \mathrm{v}_5\\ \mathrm{v}_6\end{array} & \begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\1&0&0&2&0&0\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}
\end{array}$$

4.2 מספר המהלכים הכולל ונוסחת קיילי להפוך מטריצה

משפט 4.2 מספר המהלכים הכולל בגרף במכוון

נתון גרף מכוון $G = (V,E)$ בת n קדקודים.
נניח כי המטריצה שכנות המכוונת של הגרף היא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
והמספר המהלכים הכולל בין קדקוד i לבין קדקוד j ($1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n$) הוא

$$\sum_{k=0}^{n} A^k = (I-A)^{-1}$$

כאשר I המטריצה היחידה מסדר $n\times n$.

הגדרה 4.3 המטריצה של קופקטורים

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

הקופקטור ה- (i,j) של A מוגדר להיות הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת מ-A ע"י מחיקת שורה i ועמודה j, כפול $(-1)^{i+j}$.

המטריצה של קופקטורים של המטריצה A מוגדרת

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

כאשר C_{ij} הקופקטור ה- (i,j) של A.

הגדרה 4.4 המטריצה המצורפת

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. המטריצה המצורפת של A היא מטריצה מסדר $n\times n$ שמסומנת $\mathrm{adj}(A)$ ומוגדרת

$$\mathrm{adj}(A) = C^t$$

כאשר C המטריצה של קופקטורים של A.

משפט 4.3 נוסחת קיילי המילטון

נניח כי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. אם A הפיכה, כלומר אם $|A| \neq 0$ אז המטריצה ההופכית נתונה ע"י נוסחת קיילי המילטון:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)\ ,$$

כאשר $\mathrm{adj}(A)$ המטריצה המצורפת של A.

דוגמה 4.8 ()

נתונה $A=\begin{pmatrix}1&3&4\\2&4&3\\1&5&0\end{pmatrix}$ חשבו את A^{-1}.

פתרון:

$$\begin{pmatrix}4&3&1\\3&4&2\\0&5&1\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4&3\\5&0\end{vmatrix}=15\ .$$

$$\begin{pmatrix}4&3&1\\3&4&2\\0&5&1\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&3\\1&0\end{vmatrix}=3\ .$$

$$\begin{pmatrix}4&3&1\\3&4&2\\0&5&1\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&4\\1&5\end{vmatrix}=6\ .$$

$$\begin{pmatrix}4&3&1\\3&4&2\\0&5&1\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3&4\\5&0\end{vmatrix}=20\ .$$

$$\begin{pmatrix}4&3&1\\3&4&2\\0&5&1\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&4\\1&0\end{vmatrix}=-4\ .$$

$$\begin{pmatrix}4&3&1\\3&4&2\\0&5&1\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&3\\1&5\end{vmatrix}=-2\ .$$

$$\begin{pmatrix}4&3&1\\3&4&2\\0&5&1\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3&4\\4&3\end{vmatrix}=-7\ .$$

$$\begin{pmatrix}4&3&1\\3&4&2\\0&5&1\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&4\\2&3\end{vmatrix}=5\ .$$

$$\begin{pmatrix}4&3&1\\3&4&2\\0&5&1\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix}=-2\ .$$

$$C=\begin{pmatrix}-15&3&6\\20&-4&-2\\-7&5&-2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{adj}(A)=\begin{pmatrix}-15&20&-7\\3&-4&5\\6&-2&-2\end{pmatrix}\ .$$

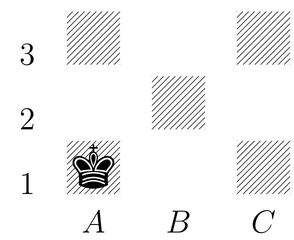
$$|A|=1\cdot(-15)+3\cdot 3+4\cdot 6=18\ .$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}-15&20&-7\\3&-4&5\\6&-2&-2\end{pmatrix}\ .$$

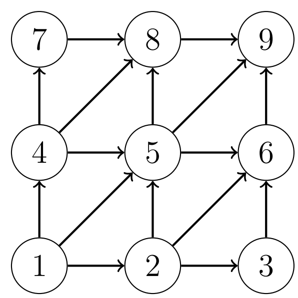
■

דוגמה 4.9 ()

מלך שחור מונח על המשבצת $A1$ כמתואר למטה. המלך יכול לעבור שמאלה משבצת אחת, ימינה משבצת אחת, למעלה משבצת אחת, בכיוון אלכסוני (משבצת אחת למעלה ומשבצת אחת ימינה). מצאו את מספר המהלכים הכולל שקיימים ממשבצת $A1$ למשבצת $C3$.



פתרון:



$$A = \begin{pmatrix} 0&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} .$$

$$I-A = \begin{pmatrix} 1&-1&0&-1&-1&0&0&0&0\\ 0&1&-1&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&1&0&-1&-1&0&0&0\\ 0&0&0&1&-1&0&-1&-1&0\\ 0&0&0&0&1&-1&0&-1&-1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1&-1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} .$$

המטריצה משולשית לכן הדטרמיננטה שווה למכפלה של האיברים על האלכסון:

$$|I-A| = 1 \ .$$

הקופקטור של האיבר $9,1$ הינו

$$C_{91} = 13 \ .$$

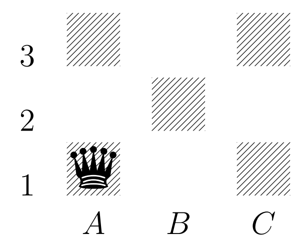
לכן האיבר ה- $(1,9)$ של המטריצה ההופכית הוא

$$\left((I-A)^{-1}\right)_{19} = \frac{1}{|I-A|}\operatorname{adj}(I-A)_{19} = \frac{1}{|I-A|}C_{91} = 13 \ .$$

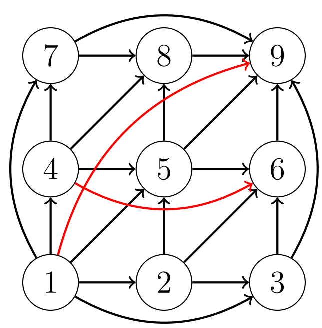
לכן בסה"כ יש למלך 13 מסלולים ממשבצת $A1$ למשבצת $C3$. ■

דוגמה 4.10 ()

מלכה מונחת על המשבצת $A1$ כמתואר למטה. המלכה יכולה לעבור ימינה, למעלה, או בכיוון אלכסוני למעלה וימינה. מצאו את מספר המהלכים הכולל שקיימים ממשבצת $A1$ למשבצת $B3$.



פתרון:



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

$$I-A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

המטריצה משולשית לכן הדטרמיננטה שווה למכפלה של האיברים על האלכסון:

$$|I-A|=1 .$$

הקופקטור של האיבר $8,1$ הינו

$$C_{81}=7 .$$

לכן האיבר ה- $(1,8)$ של המטריצה ההופכית הוא

$$\left((I-A)^{-1}\right)_{18}=\frac{1}{|I-A|}\text{adj}(I-A)_{18}=\frac{1}{|I-A|}C_{81}=7 .$$

לכן בסה"כ יש למלכה 7 מסלולים ממשבצת $A1$ למשבצת $B3$.

■

4.3 *פונקציה יוצרת

הגדרה 4.5 פונקציה יוצרת

נתון גרף $G=(V,E)$ בעל n קדקודים. ונניח כי A המטריצה שכנות של הגרף. פונקציה היוצרת של הרכיב i,j מוגדרת להיות

$$f_{ij}(x)=(I-xA)^{-1}_{ij}=\frac{\text{adj}(I-xA)_{ij}}{|I-xA|}$$

משפט 4.4

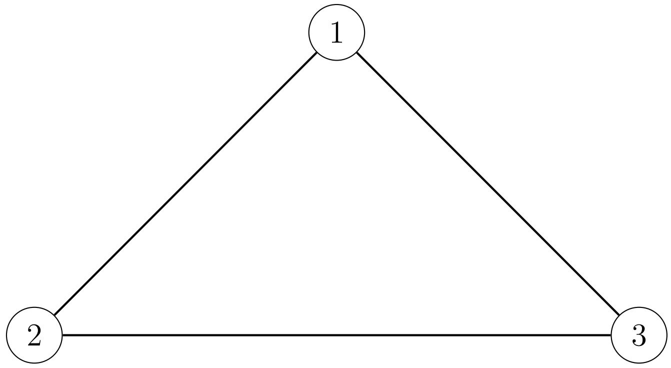
נתון גרף $G=(V,E)$ בעל n קדקודים. ונניח כי A המטריצה שכנות של הגרף.

$$\left(A^k\right)_{ij}=\frac{1}{k!}f^{(k)}_{ij}(0)$$

כאשר $f^{(k)}_{ij}(0)$ הנגזרת ה- k של הפונקציה היוצרת של הרכיב i,j ב- $x=0$.

דוגמה 4.11 ()

נתון הגרף הבא:



רשמו את המטריצה שכנות ומצאו את מספר המהלכים בין לקדקוד 3 לבין קדקוד 1 של אורך 10.

פתרון:

המטריצה שכנות של הגרף היא

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

מכאן

$$I-xA=\begin{pmatrix} 1 & -x & -x \\ -x & 1 & -x \\ -x & -x & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\mathrm{adj}(I-xA)_{31}=x^2+x$$

ו-

$$|I-xA|=-2x^3-3x^2+1 \ .$$

לכן הפונקציה יוצרת היא

$$\begin{aligned} f_{31}(x)=&\frac{\mathrm{adj}(I-xA)_{31}}{|I-xA|}=\frac{x^2+x}{-2x^3-3x^2+1}\\ =&-\frac{x^2+x}{(x+1)^2(2x-1)}\\ =&-\frac{1}{3(2x-1)}-\frac{1}{3(x+1)}\\ =&-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{x+1}\right) \ . \end{aligned}$$

לפיכך

$$f_{31}^{(10)}(x)=-\frac{10!}{3}\left(\frac{2^{10}(-1)^{10}}{(2x-1)^{11}}+\frac{(-1)^{10}}{(x+1)^{11}}\right)=-\frac{10!}{3}\left(\frac{1024}{(2x-1)^{11}}+\frac{1}{(x+1)^{11}}\right)$$

לכן

$$f_{31}^{(10)}(0)=-\frac{10!}{3}\left(\frac{1024}{(-1)^{11}}+1\right)=\frac{10!(1023)}{3} \ .$$

לפיכך

$$\left(A^{10}\right)_{31}=\frac{1}{10!}f_{31}^{(10)}(0)=\frac{1023}{3}=341 \ .$$

■