חישוביות וסיבוכיות

תוכן העניינים

שיעור 1
מכונות טיורינג

1.1 הגדרה היוריסטית של מכונת טיורינג

הגדרה 1.1 מכונת טיורינג (הגדרה היוריסטית)

הקלט והסרט

מכונת טיורינג (מ"ט) קורא קלט.
הקלט נמצא על סרט אינסופי.
התווים של הקלט נמצאים במשבצות של הסרט.
במכונת טיורינג אנחנו מניחים שהסרט אינסופי לשני הכיוונים.
משמאל לתחילת הקלט לא כתוב כלום, ומימין לסוף הקלט לא כתוב כלום.
אנחנו מניחים שיש תו הרווח ␣ שנמצא בכל משבצות שאינן משבצות קלט, משמאל לקלט ומימין לקלט.

⋯	␣	␣	a	b	b	b	a	a	␣	␣	␣	⋯

הראש

במצב ההתחלתי הראש בקצה השמאלי של הקלט.

⋯	␣	␣	a	b	b	b	a	a	␣	␣	␣	⋯
			↑									

הראש יכול לזוז ימינה על הסרט וגם שמאלה על הסרט.
הראש יכול לקרוא את התוכן שנמצא במשבצת הסרט שבה הוא נמצא.
הראש יכול לכתוב על המשבצת הסרט שבה הוא נמצא. הכתיבה נעשית תמיד במיקום הראש.

המצבים

בהתחלה הראש בקצה השמאלי של הקלט והמ"ט במצב התחלתי q_0.
הראש קורא את התו במשבצת הראשונה וכותב עליה לפי הפונקציית המעברים (שנגדיר בהגדרה 1.2). כעת המ"ט במצב חדש q_1.
הראש קורא את התו במשבצת השניה וכותב עליה לפי הפונקציית המעברים ואז המ"ט במצב חדש q_2.
התהליך ממשיך עד שהראש מגיע לקצה הימיני של הקלט, ואז הוא ממשיך לקרוא ולכתוב על כל משבצת בכיוון שמאלה, עד שהוא מגיע לקצה השמאלי.
במ"ט ניתן לטייל על הקלט שוב ושוב לשני הכיוונים.
התהליך מסתיים כאשר המ"ט מגיע למצב מקבל q_{acc} או מצב דוחה q_{rej}.

1.1 דוגמה

נבנה מכונת טיורינג אשר מקבלת מילה אם היא בשפה

$$L = \left\{ w \in \{a,b\}^* \middle| \#a_w = \#b_w \right\} \ .$$

ז"א השפה המורכבת מכל המילים עם מספר שווה אותיות a ו b.

<u>תיאור מילולי</u>

- נסרוק את הקלט משמאל לימין ולכל a נחשף b תואם.
- נניח שראינו במשבצת הראשונה a, נסמן עליה ✓.
- עכשיו נסרוק את יתרת הקלט ונחפש אות b מתאימה ל a שכבר ראינו.
  - אם לא מצאנו ,המילה לא בשפה.
  - אם מצאנו ,נסמן את ה- b התואם ב- ✓.
- נחזור לתחילת הקלט ונעשה סריקה נוספת משמאל לימין.
- במשבצת הראשונה יש ✓ מסיבוב הראשון. הראש פשוט כותב עליה ✓, כלומר משבצת ראשונה נשארת ללא שינוי.
- הראש זז שמאלה למשבצת הבאה. נניח שמצאנו b. נסמן במשבצת ✓.
- נסרוק את יתרת הקלט ונחפש אות a מתאימה ל b שכבר ראינו.
  - אם לא מצאנו ,המילה לא בשפה.
  - אם מצאנו ,נסמן את ה- a התואם ב- ✓.
  - בכל משבצת שיש ✓ כותבים עליה ✓ וממשיכים למשבצת הבאה הימני.
- נחזור לתחילת הקלט ונעשה סריקה נוספת משמאל לימין.
- חוזרים על התהליך שוב ושוב.
  - אם היה מעבר שבו לא מצאנו אות תואמת, המילה לא בשפה.
  - אם כולן היו תואמות ועשינו מעבר שבו הגכנו מקצה לקצה, מרווח לרווח, בלי לראות שום אות, אז המילה בשפה.

כעת נתאר את המ"ט באמצעות המצבי המכונה והפונקציית המעברים.

<u>מצבי המכונה</u>

q_0	המצב ההתחלתי. אליו נחזור אחרי כל סבב התאמה של זוג אותיות.
q_a	מצב שבו ראינו a ומחפשים b תואם.
q_b	מצב שבו ראינו b ומחפשים a תואם.
back	מצב שנשתמש בו כדי לחזור לקצה השמאלי של הקלט ולהתחיל את הסריקה הבאה (סבב ההתאמה הבא).
acc	מצב מקבל.
rej	מצב דוחה.

- כאשר המכונה מגיעה למצב acc היא עוצרת.

  עצירה במצב acc משמעותה קבלה.

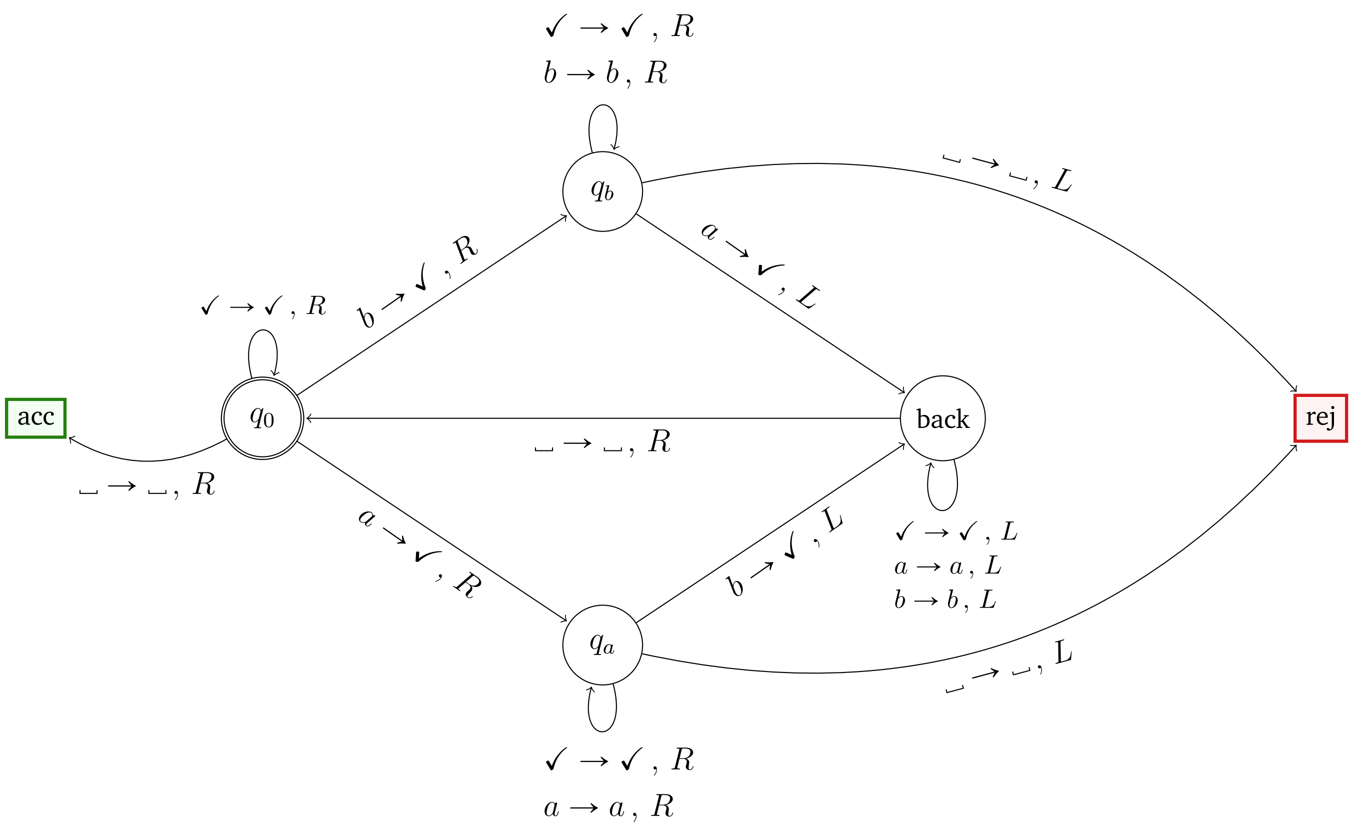
- כאשר המכונה מגיעה למצב rej היא עוצרת.

  עצירה במצב rej משמעותה דחייה.

- רק בשני מצבים אלו המכונה מפסיקה.

  בכל מצב אחר המכונה בהכרח ממשיכה.

<u>**תרשים מצבים**</u>



- בכל צעד המכונה מבצעת שתי פעולות:
  1. כותבת אות במיקום הראש
  2. זזה צעד אחד שמאלה או צעד אחד ימינה.
- בכל צעד המכונה יכולה לעבור למצב אחר או להישאר באותו מצב.

דוגמה 1.2

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה abbbaa.

פתרון:

␣	q_0	a	b	b	b	a	a	␣
␣	✓	q_a	b	b	b	a	a	␣
␣	back	✓	✓	b	b	a	a	␣
back	␣	✓	✓	b	b	a	a	␣
␣	q_0	✓	✓	b	b	a	a	␣

$\sqcup$	✓	q_0	✓	b	b	a	a	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	✓	q_0	b	b	a	a	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	✓	✓	q_b	b	a	a	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	✓	✓	b	q_b	a	a	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	✓	✓	back	b	✓	a	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	✓	back	✓	b	✓	a	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	back	✓	✓	b	✓	a	$\sqcup$
$\sqcup$	back	✓	✓	✓	b	✓	a	$\sqcup$
back	$\sqcup$	✓	✓	✓	b	✓	a	$\sqcup$
$\sqcup$	q_0	✓	✓	✓	b	✓	a	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	q_0	✓	✓	b	✓	a	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	✓	q_0	✓	b	✓	a	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	✓	✓	q_0	b	✓	a	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	✓	✓	✓	q_b	✓	a	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	✓	✓	✓	✓	q_b	a	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	✓	✓	✓	back	✓	✓	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	✓	✓	back	✓	✓	✓	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	✓	back	✓	✓	✓	✓	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	back	✓	✓	✓	✓	✓	$\sqcup$
$\sqcup$	back	✓	✓	✓	✓	✓	✓	$\sqcup$
back	$\sqcup$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	$\sqcup$
$\sqcup$	q_0	✓	✓	✓	✓	✓	✓	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	q_0	✓	✓	✓	✓	✓	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	✓	q_0	✓	✓	✓	✓	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	✓	✓	q_0	✓	✓	✓	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	✓	✓	✓	q_0	✓	✓	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	✓	✓	✓	✓	q_0	✓	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	q_0	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	$\sqcup$	acc

דוגמה 1.3

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה aab.

פתרון:

$\sqcup$	q_0	a	a	b	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	q_a	a	b	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	a	q_a	b	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	back	a	✓	$\sqcup$
$\sqcup$	back	✓	a	✓	$\sqcup$
back	$\sqcup$	✓	a	✓	$\sqcup$
$\sqcup$	q_0	✓	a	✓	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	q_0	a	✓	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	✓	q_a	✓	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	✓	✓	q_a	$\sqcup$
$\sqcup$	✓	✓	rej	✓	$\sqcup$

1.2 הגדרה פורמלית של מכונת טיורינג

הגדרה 1.2 מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעיה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$$

כאשר:

Q	קבוצת מצבים סופיות	
Σ	א"ב קלט סופי	$\sqcup \notin \Sigma$
Γ	א"ב סרט סופי	$\Sigma \subseteq \Gamma\,,\ \sqcup \in \Gamma$ ref
δ	פונקציית המעברים	$\delta : (Q \backslash \{\text{rej}, \text{acc}\} \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$
q_0	מצב התחלתי	
acc	מצב מקבל	
rej	מצב דוחה	

דוגמה 1.4 (המשך דוגמה 1.1)

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$$

$$Q = \{q_0, q_a, q_b, \text{back}, \text{rej}, \text{acc}\}\ .$$

$$\Sigma = \{\texttt{a},\texttt{b}\}\ , \qquad \Gamma = \{\texttt{a},\texttt{b},\sqcup,\checkmark\}$$

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, \texttt{a}) &= (q_a, \checkmark, R)\ ,\\
\delta(q_0, \texttt{b}) &= (q_b, \checkmark, R)\ ,\\
\delta(q_0, \sqcup) &= (\text{acc}, \sqcup, R)\ ,\\
\delta(q_a, \checkmark) &= (q_a, \checkmark, R)\ ,\\
\delta(q_a, \texttt{a}) &= (q_a, \texttt{a}, R)\ ,\\
\delta(q_a, \texttt{b}) &= (\text{back}, \checkmark, L)\ ,\\
\delta(q_b, \checkmark) &= (q_b, \checkmark, R)\ ,\\
\delta(q_b, \texttt{b}) &= (q_a, \texttt{b}, R)\ ,\\
\delta(q_b, \texttt{a}) &= (\text{back}, \checkmark, L)\ ,
\end{aligned}$$

קל יותר לרשום את פונקציית המעבירים δ כטבלה:

$Q \backslash \Gamma$	a	b	$\sqcup$	$\checkmark$
q_0	$(q_a, \checkmark, R)$	$(q_b, \checkmark, R)$	$(\text{acc}, \sqcup, R)$	$(q_0, \checkmark, R)$
q_a	$(q_a, \texttt{a}, R)$	$(\text{back}, \checkmark, L)$	$(\text{rej}, \sqcup, L)$	$(q_a, \checkmark, R)$
q_b	$(\text{back}, \checkmark, L)$	$(q_b, \texttt{b}, R)$	$(\text{rej}, \sqcup, L)$	$(q_b, \checkmark, R)$
back	$(\text{back}, \texttt{a}, L)$	$(\text{back}, \texttt{b}, L)$	$(q_0, \sqcup, R)$	$(\text{back}, \checkmark, L)$

הגדרה 1.3 קונפיגורציה

תהי $M=(Q,q_0,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,\text{acc},\text{rej})$ מכונת טיורינג.
קונפיגורציה של M הינה מחרוזת

$$\mu q\sigma\nu$$

כאשר משמעות:

$$\mu,\nu\in\Gamma^*\ ,\qquad \sigma\in\Gamma\ ,\qquad q\in Q\ .$$

q מצב המכונה,
σ הסימון במיקום הראש
μ תוכן הסרט משמאל לראש,
ν תוכן הסרט מימין לראש.

דוגמה 1.5 (המשך של דוגמה 1.3)

μ	q	σ	ν
␣	q_0	a	a b ␣
␣✓	q_a	a	b ␣
␣ ✓ a	q_a	b	␣
␣ ✓	back	a	✓ ␣
␣	back	✓	a ✓ ␣
␣	back	␣	✓ a ✓ ␣
␣	q_0	✓	a ✓ ␣
␣ ✓	q_0	a	✓ ␣
␣ ✓ ✓	q_a	✓	␣
␣ ✓ ✓ ✓	q_a	␣	␣
␣ ✓ ✓	rej	✓	␣

דוגמה 1.6

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת כל מילה בשפה

$$L = \{a^n \,|\, n = 2^k \;,\; k \in \mathbb{N}\}$$

ז"א מילים בעלי מספר אותיות a אשר חזקה של 2.

פתרון:

ראשית נשים לב:

$n = 2^k$ אם ורק אם אנחנו מקבלים 1 אחרי חילוק של n ב- 2 בדיוק k פעמים, כלומר $\frac{n}{2^k} = 1$.

לאור המשפט הזה נבנה אלגוריתם אשר מחלק את מספר האותיות במילה ב- 2 בצורה איטרטיבית. אם אחרי סבב מסויים נקבל מספר אי-זוגי גדול מ- 1 אז מספר האותיות a במילה לא יכול להיות חזקה של 2. אם אחרי כל הסבבים לא קיבלנו מספר אי-זוגי גדול מ-1 אז מובטח לנו שיש מספר אותיות a אשר חזקה של 2.

- נתון הקלט

␣	␣	a	a	a	a	a	a	a	a	␣	␣
		↑									

נעבר על סרט הקלט. משמאל לימין.

- מבצעים מחקיה לסירוגין של האות a כלומר אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר וכן הלאה.

␣	␣	✓	a	✓	a	✓	a	✓	a	␣	␣
									↑		

אם אחרי סבב הראשון

* יש ✓ בתו האחרון ⇐ קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ⇐ אין חזקה של 2 אותיות a במילה.
* יש a בתו האחרון ⇐ קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ונמשיך לסבב הבא.

- הראש חוזר לתו הראשון של הקלט

$\sqcup$	$\sqcup$	✓	a	✓	a	✓	a	✓	a	$\sqcup$	$\sqcup$
		↑									

- בסבב הבא חוזרים על התהליך של מחיקה לסירוגין של האות a (אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר)

$\sqcup$	$\sqcup$	✓	✓	✓	a	✓	✓	✓	a	$\sqcup$	$\sqcup$
									↑		

אם אחרי סבב השני

* יש ✓ בתו האחרון $\Leftarrow$ קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 $\Leftarrow$ אין חזקה של 2 אותיות a במילה.
* יש a בתו האחרון $\Leftarrow$ קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ונמשיך לסבב הבא.

- הראש חוזר לתו הראשון של הקלט

$\sqcup$	$\sqcup$	✓	✓	✓	a	✓	✓	✓	a	$\sqcup$	$\sqcup$
		↑									

- בסבב הבא חוזרים על התהליך של מחיקה לסירוגין של האות a (אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר)

$\sqcup$	$\sqcup$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	a	$\sqcup$	$\sqcup$
									↑		

אם אחרי סבב השלישי

* יש ✓ בתו האחרון $\Leftarrow$ קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 $\Leftarrow$ אין חזקה של 2 אותיות a במילה.
* יש a בתו האחרון $\Leftarrow$ קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ונמשיך לסבב הבא.

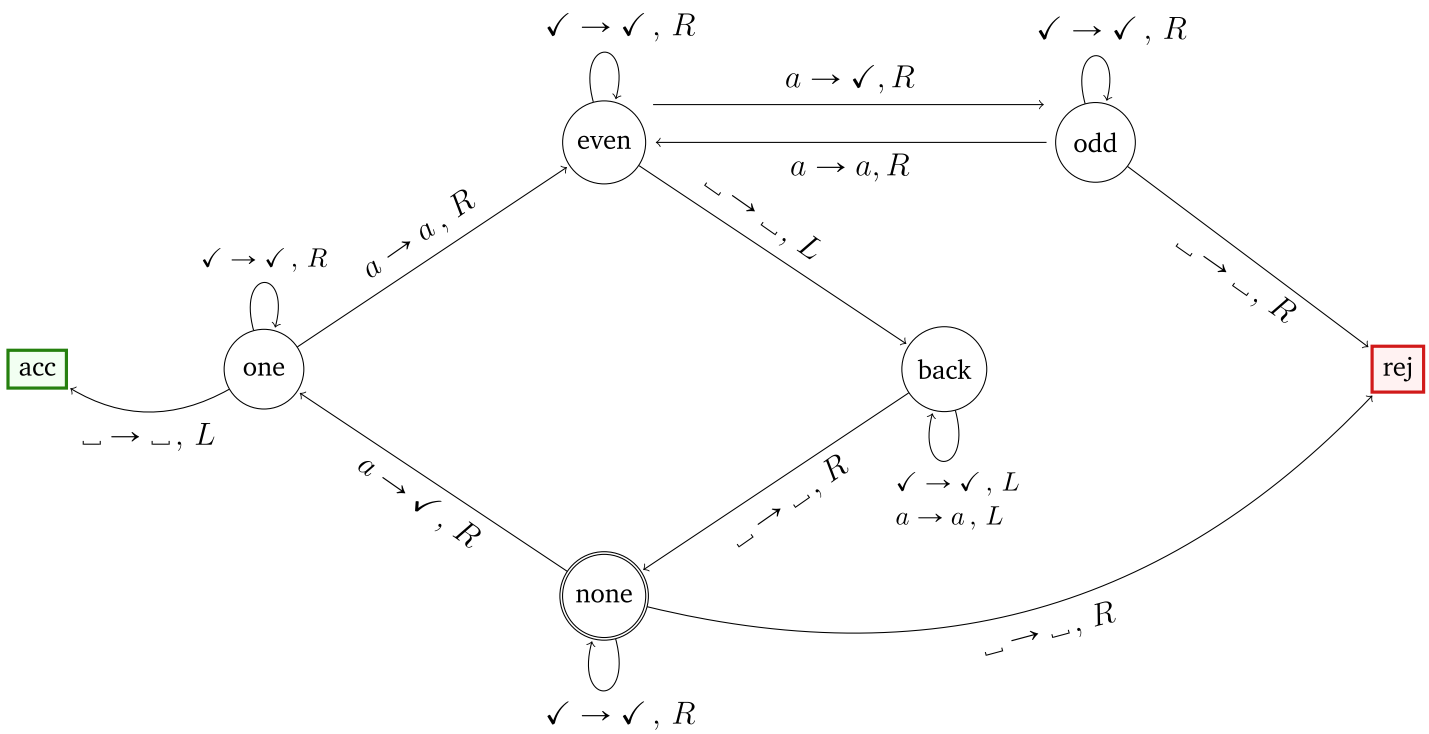
- הראש חוזר לתו הראשון של הקלט.

בסבב האחרון נשאר רק אות a אחת.

לכן לפי המשפט למעלה מובטח לנו כי המילה מורכבת ממספר אותיות a אשר חזקה של 2.

$\sqcup$	$\sqcup$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	a	$\sqcup$	$\sqcup$
		↑									

המכונת טיורינג אשר מקבלת מילים בשפה שעובדת לפי האלגוריתם המתואר למעלה מתואר בתרשים למטה.



המצבים:

מצב none: מצב התחלתי. עדיין לא קראנו a בסבב סריקה זה.
מצב one: קראנו a בודד.
מצב even: קראנו מספר זוגי של a .
מצב odd: קראנו מספר אי-זוגי של a .
מצב back: חזרה שלמאלה.

דוגמה 1.7

בדקו אם המילה

aaaa

מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.6.

פתרון:

␣	none	a	a	a	a	␣
␣	✓	one	a	a	a	␣
␣	✓	a	even	a	a	␣
␣	✓	a	✓	odd	a	␣
␣	✓	a	✓	a	even	␣
␣	✓	a	✓	back	a	␣
␣	✓	a	back	✓	a	␣
␣	✓	back	a	✓	a	␣
␣	back	✓	a	✓	a	␣
back	␣	✓	a	✓	a	␣
␣	none	✓	a	✓	a	␣
␣	✓	none	a	✓	a	␣

␣	✓	✓	one	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	one	a	␣
␣	✓	✓	✓	a	even	␣
␣	✓	✓	✓	back	a	␣
␣	✓	✓	back	✓	a	␣
␣	✓	back	✓	✓	a	␣
␣	back	✓	✓	✓	a	␣
back	␣	✓	✓	✓	a	␣
␣	none	✓	✓	✓	a	␣
␣	✓	none	✓	✓	a	␣
␣	✓	✓	none	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	none	a	␣
␣	✓	✓	✓	✓	one	␣
␣	✓	✓	✓	acc	✓	␣

μ	q	σ	ν
␣	none	a	aaa ␣
␣ ✓	one	a	aa ␣
␣ ✓ a	even	a	a ␣
␣ ✓ a ✓	odd	a	␣
␣ ✓ a ✓ a	even	␣	␣
␣ ✓ a ✓	back	a	␣
␣ ✓ a	back	✓	a ␣
␣ ✓	back	a	✓ a ␣
␣	back	✓	a ✓ a ␣
␣	back	␣	✓ a ✓ a ␣
␣	none	✓	a ✓ a ␣
␣✓	none	a	✓ a ␣
␣✓✓	one	✓	a ␣
␣✓✓✓	one	a	␣
␣✓✓✓ a	even	␣	␣
␣✓✓✓	back	a	␣
␣✓✓	back	✓ a	␣
␣✓	back	✓	✓ a ␣
␣	back	✓	✓✓ a ␣
␣	back	␣	✓✓✓ a ␣
␣	none	✓	✓✓ a ␣
␣✓	none	✓	✓ a ␣
␣✓✓	none	✓	a ␣
␣✓✓✓	none	a	␣
␣✓✓✓✓	one	␣	␣
␣✓✓✓	acc	✓	␣

דוגמה 1.8

בדקו אם המילה

aaa

מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.6.

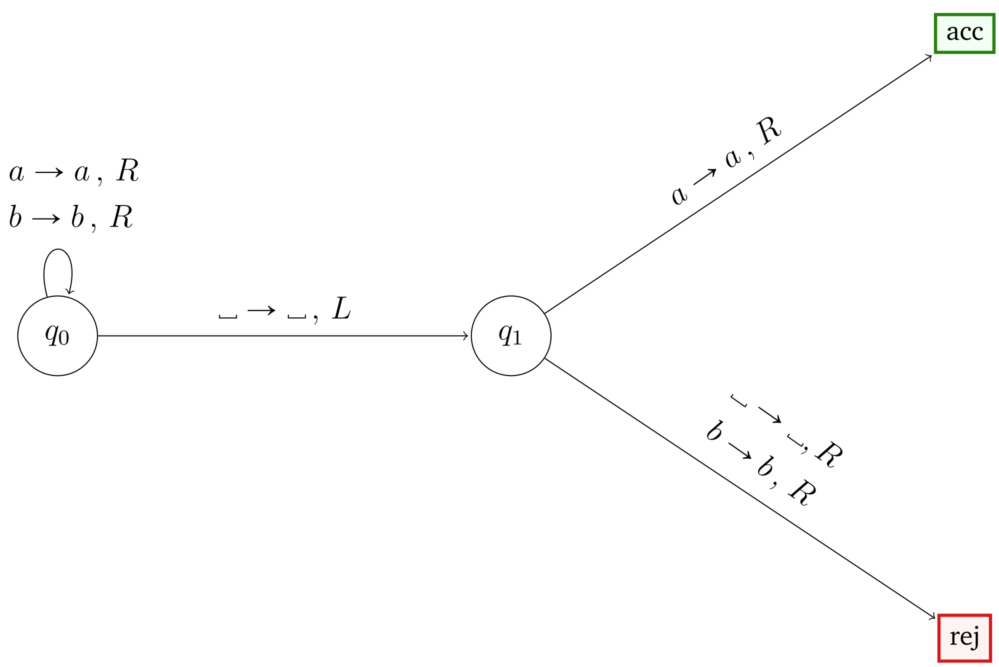
פתרון:

␣	none	a	a	a	␣
␣	✓	one	a	a	␣
␣	✓	a	even	a	␣
␣	✓	a	✓	odd	␣
␣	✓	a	✓	␣	rej

μ	q	σ	ν
␣	none	a	aa ␣
␣ ✓	one	a	a ␣
␣ ✓ a	even	a	␣
␣ ✓ a ✓	odd	␣	␣
␣ ✓ a ✓ ␣	rej	␣	␣

דוגמה 1.9

מהי שפת המכונה:



פתרון:

תיאור מילולי:

- במצב התחלתי q_0:
  * אם אנחנו רואים a, עוברים למשבצת הבאה לימין הראש.
  * אם אנחנו רואים b, עוברים למשבצת הבהאה לשמאל הראש.

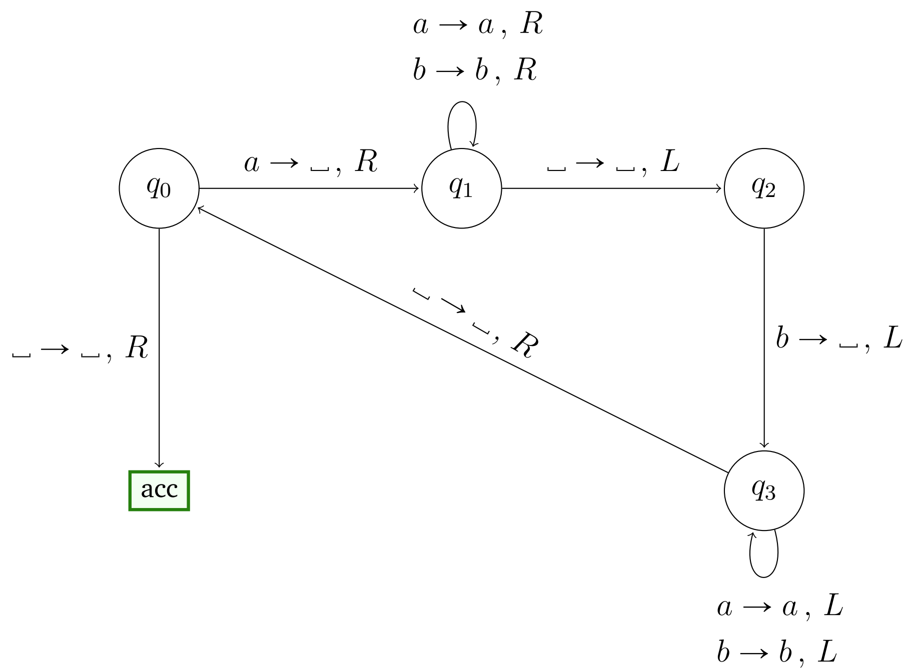
- ממשיכים כך עד שנגיע לתו רווח, כלומר לסוף המילה, ואז עוברים למשבצת לשמאל הראש, כלומר לתו האחרון של המילה.

  * אם אנחנו רואים a, המילה מתקבלת. (ז"א התו האחרון הינו a.)
  * אם אנחנו רואים b, המילה נדחית. (ז"א התו האחרון הינו b.)
  * אם אנחנו רואים תו-רווח המילה נדחית. (ז"א המילה הינה ריקה.)

תשובה סופית: המכונה מקבלת שפת המילים המסתיימות באות a.

דוגמה 1.10

מהי שפת המכונה:



פתרון:

תיאור מילולי:

- במצב התחלתי q_0:
  - אם אנחנו רואים b, המילה נדחית.
  - אם אנחנו רואים $\sqcup$, המילה מתקבלת.
  - אם אנחנו רואים a, כותבים עליה $\sqcup$ ועוברים למשבצת הבאה לימין הראש, והמ״ט עוברת למצס q_1.
- במצב q_1 אנחנו ראינו a וכתבנו עליה $\sqcup$.
  - אם אנחנו רואים במשבצת הבאה a או b, ממשיכים למשבצת הבאה לימין והמ״ט נשארת במצב q_1.
  - אם אנחנו רואים תו רווח (כלומר הגענו לסוף המילה) הראש זז למשבצת השמאלי, כלומר לאות האחרונה של המילה והמ״ט עוברת למצב q_2.
- במצב q_2 ראינו a בתו הראשון, כתבנו עליה $\sqcup$ והראש קורא התו האחרון.
  - אם אנחנו רואים a המילה נדחית.
  - אם אנחנו רואים $\sqcup$, המילה נדחית.
  - אם אנחנו רואים b כותבים עליה $\sqcup$ והמ״ט עוברת למצב q_3.
- במצב q_3 קראנו a בתו הראשון ומחקנו אותה, קראנו b ומחקנו אותה.
- הראש זז משבצת אחת שמאלה עד שיגיע לתו הרשאון ומ״ט חוזרת למצב התחלת q_0.

- המ"ט באופן איטרטיבי, עוברת על הקלט ובכל מעבר:
  - אם יש a בתחילת המילה מורידה אותה ומחליפה אותה עם ␣, אחרת המילה נדחית,
  - אם יש b בסופה של המילה מורידה אותה ומחליפה אותה עם ␣, אחרת המילה נדחית.
- אם לאחר מספר מעברים כאלו הסרט ריק, המ"ט מקבלת, וזה יתקיים לכל מילה ורק למילים בשפה

$$\left\{a^n b^n \middle| n \geqslant 0\right\} .$$

תשובה סופית: המכונה מקבלת שפת המילים

$$\left\{a^n b^n \middle| n \geqslant 0\right\} .$$

דוגמה 1.11

פתרון:

μ	q	σ	ν
␣␣	q_0	a	aaabbbb␣␣
␣␣␣	q_1	a	aabbbb␣␣
␣␣␣a	q_1	a	abbbb␣␣
␣␣␣aa	q_1	a	bbbb␣␣
␣␣␣aaa	q_1	b	bbb␣␣
␣␣␣aaab	q_1	b	bb␣␣
␣␣␣aaabb	q_1	b	b␣␣
␣␣␣aaabbb	q_1	b	␣␣
␣␣␣aaabbbb	q_1	␣	␣
␣␣␣aaabbb	q_2	b	␣␣
␣␣␣aaabb	q_3	b	␣␣␣
␣␣␣aaab	q_3	b	b␣␣␣
␣␣␣aaa	q_3	b	bb␣␣␣
␣␣␣aa	q_3	a	bbb␣␣␣
␣␣␣a	q_3	a	abbb␣␣␣
␣␣␣	q_3	a	aabbb␣␣␣
␣␣	q_3	␣	aaabbb␣␣␣
␣␣␣	q_0	a	aabbb␣␣␣
␣␣␣␣	q_1	a	abbb␣␣␣
␣␣␣␣a	q_1	a	bbb␣␣␣
␣␣␣␣aa	q_1	b	bb␣␣␣
␣␣␣␣aab	q_1	b	b␣␣␣
␣␣␣␣aabb	q_1	b	␣␣␣
␣␣␣␣aabbb	q_1	␣	␣␣
␣␣␣␣aabb	q_2	b	␣␣␣
␣␣␣␣aab	q_3	b	␣␣␣␣
␣␣␣␣aa	q_3	b	b␣␣␣␣
␣␣␣␣a	q_3	a	bb␣␣␣␣
␣␣␣␣	q_3	a	abb␣␣␣␣

␣ ␣ ␣	q_3	␣	aabb␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣	q_0	a	abb␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_1	a	bb␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ a	q_1	b	b␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ab	q_1	b	␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ abb	q_1	␣	␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ab	q_2	b	␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ a	q_3	b	␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_3	a	b␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣	q_3	␣	ab␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_0	a	b␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_1	b	␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣ b	q_1	␣	␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_2	b	␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_3	␣	␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_0	␣	␣ ␣ ␣ ␣ ␣

הגדרה 1.4 גרירה בצעד אחד

תהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,\mathrm{acc},\mathrm{rej})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M. נסמן

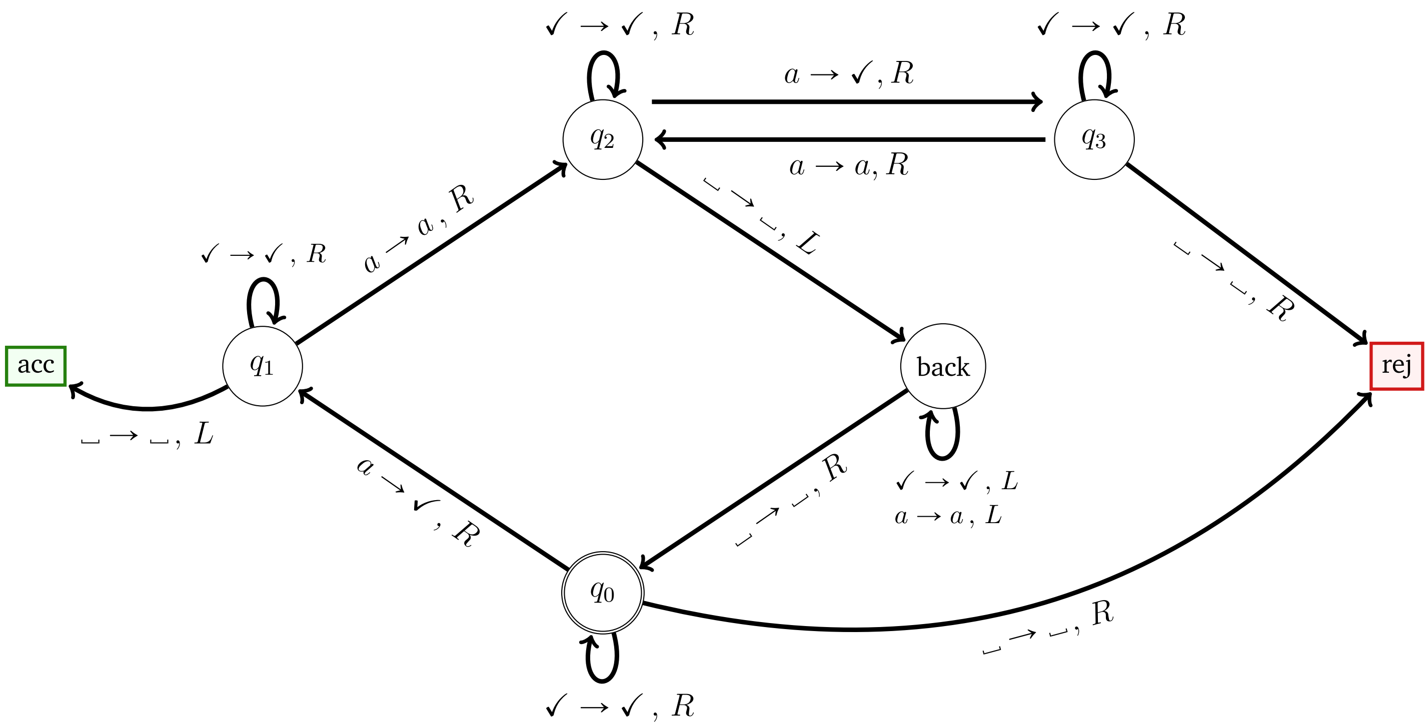
$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם כשנמצאים ב- c_1 עוברים ל- c_2 בצעד בודד.

דוגמה 1.12 (המשך של דוגמה 1.6)

במכונת טיורינג שמתואר בתרשים דמטה (אשר שווה למ"ט בדוגמה 1.6 רק עם סימנוים שונים למצבים) מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \ \vdash_M \ \checkmark\checkmark q_1 \checkmark a$$



הגדרה 1.5 גרירה בכללי

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M. נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם ניתן לעבור מ- c_1 ל- c_2 ב- 0 או יותר צעדים.

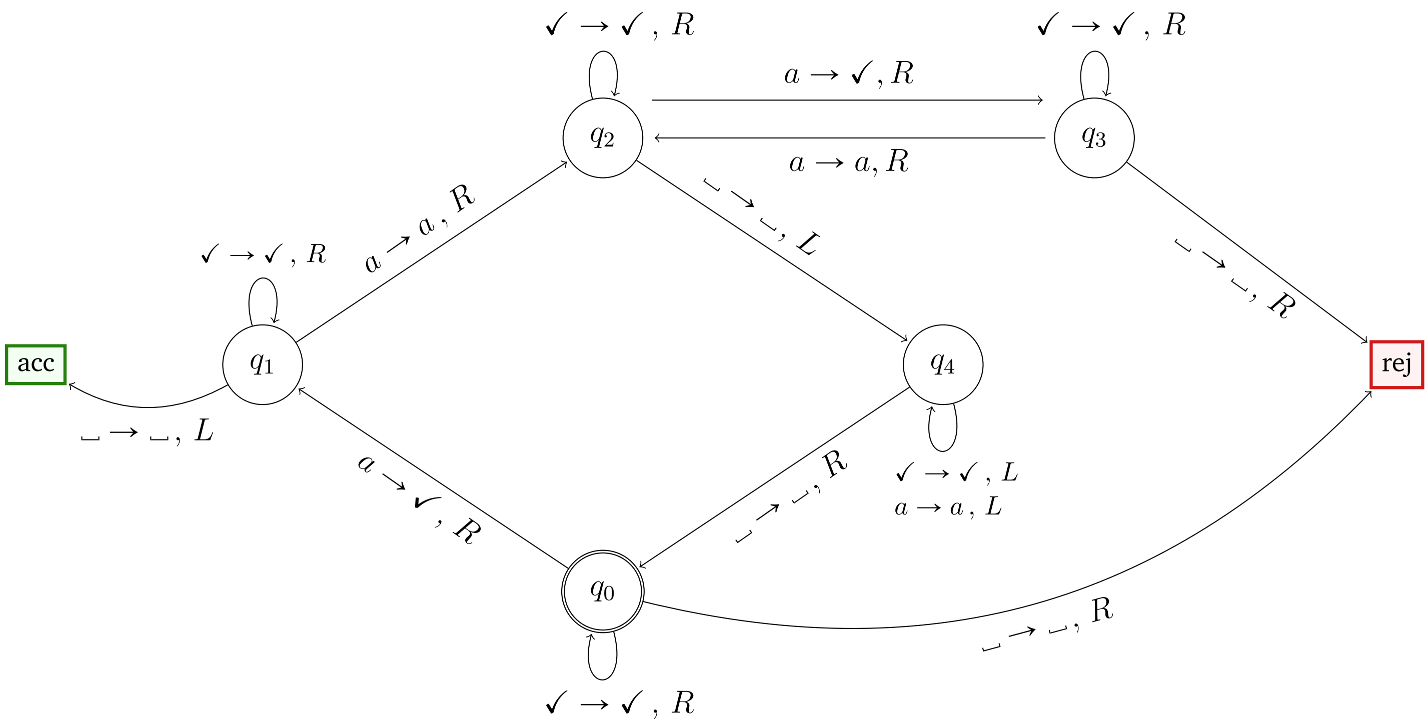
דוגמה 1.13 (המשך של דוגמה 1.6)

במכונת טיורינג שמתואר בתרשים דמטה (אשר שווה למ"ט בדוגמה 1.6 רק עם סימנים שונים למצבים) מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \ \vdash_M^* \ \checkmark\checkmark\checkmark q_4 a$$

כי

$$\begin{aligned} \checkmark q_0 a \checkmark a \ &\vdash_M \checkmark\checkmark q_1 \checkmark a \\ &\vdash_M \checkmark\checkmark\checkmark q_1 a \\ &\vdash_M \checkmark\checkmark\checkmark a q_2 \sqcup \\ &\vdash_M \checkmark\checkmark\checkmark q_4 a \ . \end{aligned}$$



הגדרה 1.6 קבלה ודחייה של מחרוזת

תהי

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$$

מכונת טיורינג, ו-

$$w \in \Sigma^*$$

מחרוזת. אומרים כי

- M **מקבלת** את w אם
$$q_0 w \vdash_M^* u \; \text{acc} \, \sigma \, \text{v}$$
עבור $\text{v}, u \in \Gamma^*, \sigma \in \Gamma$ כלשהם,
- M **דוחה** את w אם
$$q_0 w \vdash_M^* u \; \text{rej} \; \sigma \; \text{v}$$
עבור $\text{v}, u \in \Gamma^*, \sigma \in \Gamma$ כלשהם.

הגדרה 1.7 הכרעה של שפה

תהי

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$$

מכונת טיורינג, ו-

$$L \subseteq \Sigma^*$$

שפה. אומרים כי M **מכריעה** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים

- $w \in L \Leftarrow M$ מקבלת את w.
- $w \notin L \Leftarrow M$ דוחה את w.

הגדרה 1.8 קבלה של שפה

תהי
$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}\,,\ \text{rej})$$
מכונת טיורינג, ו-
$$L \subseteq \Sigma^*$$
שפה. אומרים כי M **מקבלת** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים

- אם L $w \in$ אז M מקבלת את w.
- אם L $w \notin$ אז M לא מקבלת את w.

במקרה כזה נכתוב ש-
$$L(M) = L\ .$$

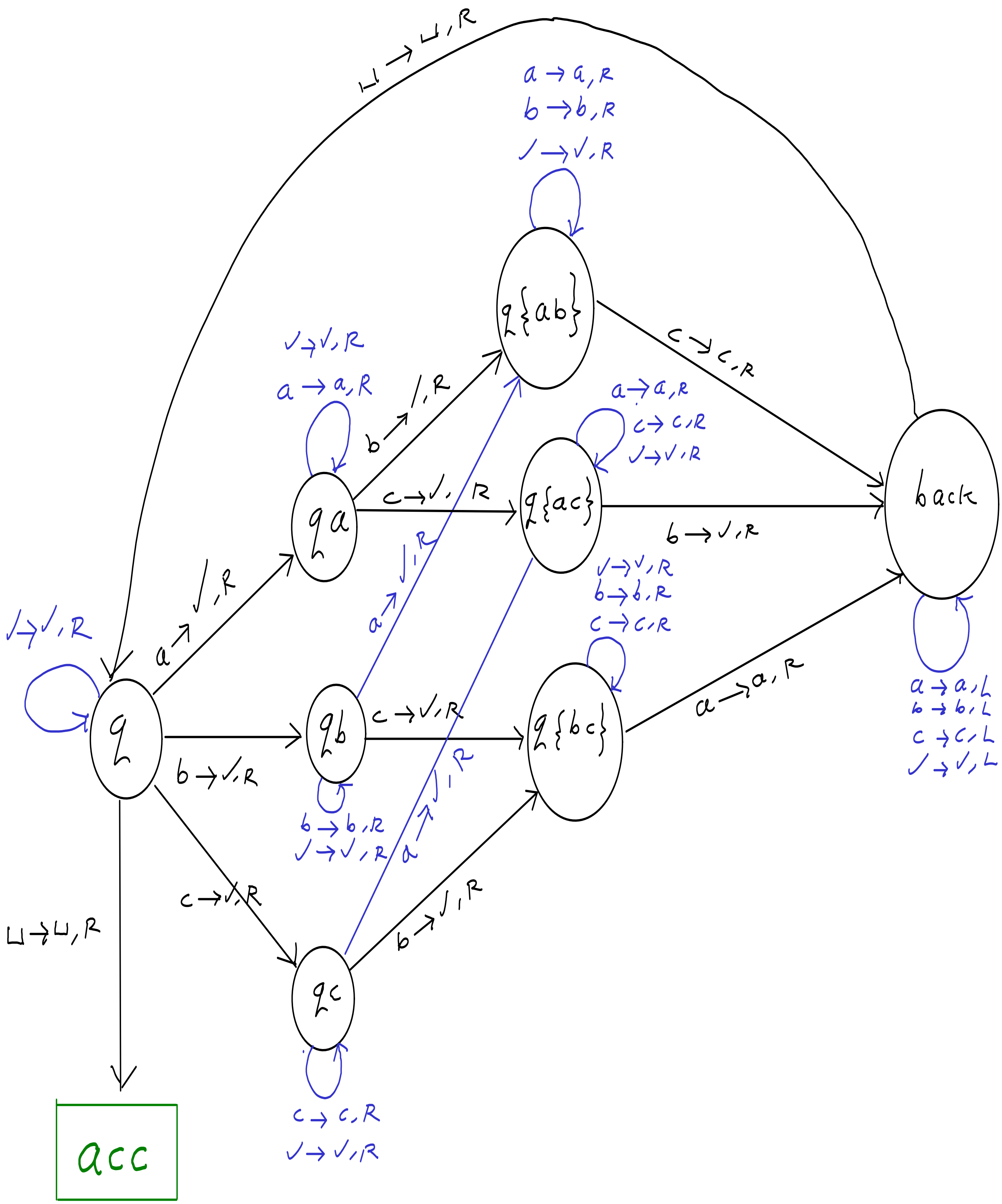
1.3 טבלת המעברים

דוגמה 1.14

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$L = \left\{ w = \{a,b,c\}^* \middle| \#a_w = \#b_w = \#c_w \right\}$$

פתרון:


q
qa
qb
qc
q{ab}
q{ac}
q{bc}
back
acc
a → √, R
b → √, R
c → √, R
⊔ → ⊔, R
√ → √, R
a → a, R
c → c, R
b → b, R
a → a, L
b → b, L
c → c, L
√ → √, L

מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
$q.S$	σ	$q.\left(S \cup \{\sigma\}\right)$	✓	R	$\sigma \notin S$
$q.S$	σ	$q.S$		R	$\sigma \in S$
$q/\{a,b,c\}$	$a, b, c, \checkmark$	back		L	
$q.\varnothing$	$\sqcup$	acc		R	
back	$a, b, c, \checkmark$	back		L	
back	$\sqcup$	$q.\varnothing$		R	

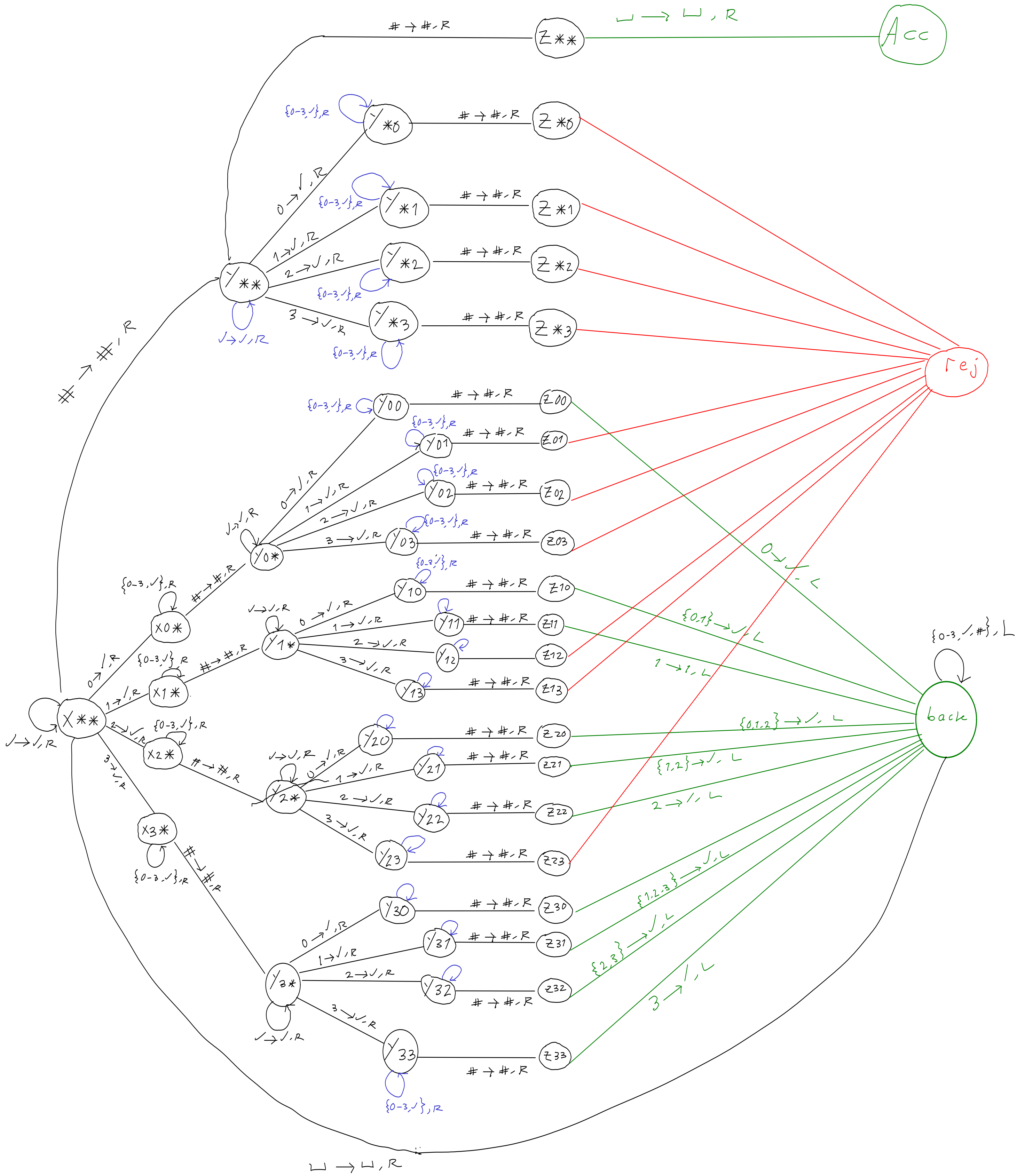
דוגמה 1.15

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$\left\{x_1 \dots x_k \# y_1 \dots y_k \# z_1 \dots z_k \;\middle|\; x_i, y_i, z_i \in \{0, \dots, 3\}\ ,\ \forall i, x_i \geqslant z_i \geqslant y_i\right\}$$

פתרון:

$$L=\{x_1x_2\#y_1y_2\#z_1z_2 \mid x_i,y_i,z_i\in\{0,1,2,3\}\ \forall i\ x_i\geq z_i\geq y_i\}$$



מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
$X**$	σ	$X\sigma*$	$\checkmark$	R	
$X**$	$\checkmark$	$X**$	$\checkmark$	R	
$X\sigma*$	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	$X\sigma*$		R	
$X\tau*$	#	$Y\tau*$		R	
$Y\tau*$	σ	$Y\tau\sigma$		R	
$Y\tau*$	$\checkmark$	$Y\tau*$		R	
$Y\tau\sigma$	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	$Y\tau\sigma$		R	
$Y\tau_1\tau_2$	#	$Z\tau_1\tau_2$		R	
$Z\tau_1\tau_2$	$\checkmark$	$Z\tau_1\tau_2$		R	
$Z\tau_1\tau_2$	σ	back	$\checkmark$	L	
$Z**$	$\llcorner\!\lrcorner$	acc		R	
back	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	back		L	
back	$\llcorner\!\lrcorner$	$X**$		R	

1.4 חישוב פונקציות

הגדרה 1.9 מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה f

תהי $f:\Sigma_1^*\to\Sigma_2^*$ ותהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,\text{acc},\text{rej})$ מכונת טיורינג.
אומרים כי M מחשבת את f אם:

- $\Sigma_1=\Sigma$ ו- $\Sigma_2\subset\Gamma$.
- לכל $w\in\Sigma_1^*$ מתקיים $q_0w\vdash \text{acc}f(w)$.

דוגמה 1.16 חיבור אונרי

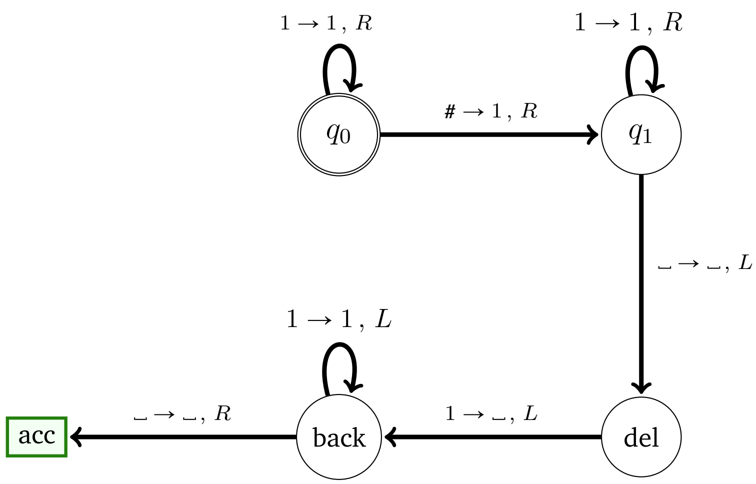
בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i\#1^j$$

ומחזירה את פלט

$$1^{i+j}\ .$$

פתרון:



דוגמה 1.17 כפל אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

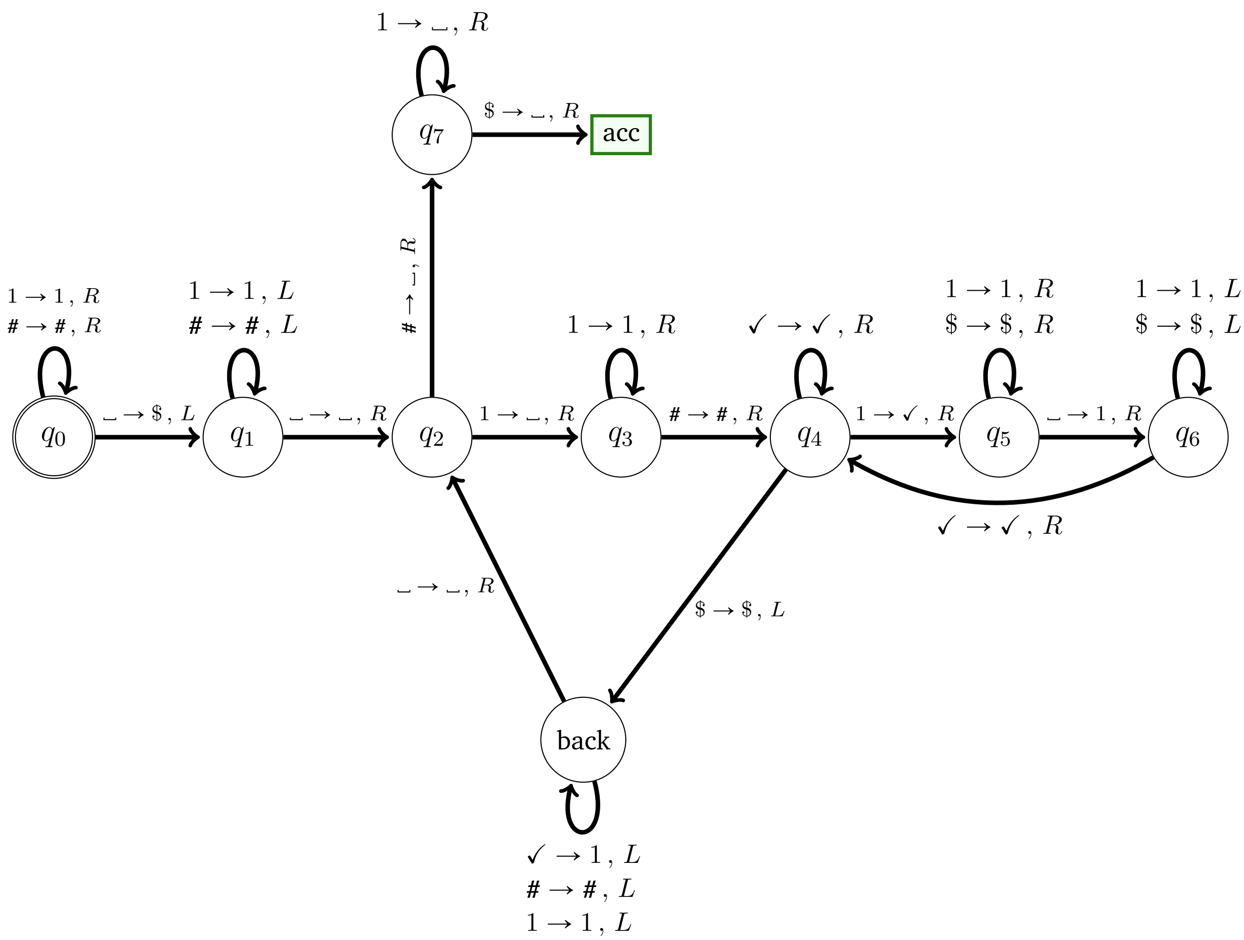
$$1^i\#1^j$$

ומחזירה את פלט

$$1^{i\cdot j}\ .$$

פתרון:

- לדוגמה, נניח שהקלט הוא 2 כפול 2.
  הקלט הוא 11#11.
- נרצה להבדיל בין הקלט לבין הפלט.
  לכן בתחילת הריצה, נתקדם ימינה עד סוף הקלט ונוסיף שם את התו $.
  לאחר מכן נחזור לתחילת הקלט.
- על כל אות 1 במילה השמאלית נעתיק את המילה הימינית לאחר סימן ה- $.
- לאחר מכן נשאיר רק את התווים שלאחר סימן ה $. כלומר, נמחק את כל מה שאינו פלט.



μ	q	σ	ν
$\sqcup$	q_0	1	$1\#11\sqcup$
$\sqcup 11\#11$	q_1	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup 11\#11$	q_1	$\$$	$\sqcup$
$\sqcup$	q_1	$\sqcup$	$11\#11\$$
$\sqcup$	q_2	1	$1\#11\$$
$\sqcup\,\sqcup$	q_3	1	$\#11\$$
$\sqcup\,\sqcup 1\#$	q_4	1	$1\$$
$\sqcup\,\sqcup 1\#\checkmark$	q_5	1	$\$$
$\sqcup\,\sqcup 1\#\checkmark 1\$$	q_5	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup\,\sqcup 1\#\checkmark 1\$1$	q_6	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup\,\sqcup 1\#$	q_6	$\checkmark$	$1\$1\ \sqcup$
$\sqcup\,\sqcup 1\#\checkmark$	q_4	1	$\$1\ \sqcup$
$\sqcup\,\sqcup 1\#\checkmark\checkmark$	q_5	$\$$	$1\ \sqcup$
$\sqcup\,\sqcup 1\#\checkmark\checkmark\$1$	q_5	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup\,\sqcup 1\#\checkmark\checkmark\$11$	q_6	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup\,\sqcup 1\#\checkmark$	q_6	$\checkmark$	$\$11\sqcup$
$\sqcup\,\sqcup 1\#\checkmark\checkmark$	q_4	$\$$	$11\sqcup$
$\sqcup\,\sqcup 1\#\checkmark$	back	$\checkmark$	$\$11\sqcup$
$\sqcup$	back	$\sqcup$	$1\#11\$11\sqcup$
$\sqcup\,\sqcup$	q_2	1	$\#11\$11\sqcup$
$\sqcup\,\sqcup\,\sqcup$	q_3	$\#$	$11\$11\sqcup$
$\sqcup\,\sqcup\,\sqcup\#$	q_4	1	$1\$11\sqcup$

␣␣␣#✓	q_5	1	$11␣
␣␣␣#✓1$11	q_5	␣	␣
␣␣␣#✓1$111	q_6	␣	␣
␣␣␣#	q_6	✓	1$111␣
␣␣␣#✓	q_4	1	$111␣
␣␣␣#✓✓	q_5	$	111␣
␣␣␣#✓✓$111	q_5	␣	␣
␣␣␣#✓✓$1111	q_6	␣	␣
␣␣␣#✓	q_4	✓	$1111
␣␣␣#✓✓	q_4	$	1111
␣␣␣#✓	back	✓$	1111
␣␣	back	␣	#11$1111
␣␣␣	q_2	#	11$1111
␣␣␣␣	q_7	1	1$1111
␣␣␣␣␣␣	q_7	$	1111
␣␣␣␣␣␣␣	acc	1	111

שיעור 2
מודלים חישובים שקולית

הגדרה 2.1 מודל חישובי

מודל חישובי הוא אוסף של מכונות טיורינג שעבורם מוגדרים המושגים של הכרעה וקבלה של שפות.

הגדרה 2.2 מודלים שקולים חישובית

יהיו A ו- B מודלים חישוביים. אומרים כי A ו- B שקולים אם לכל שפה L התנאים הבאים מתקיימים:

1) קיימת מ"ט במודל A שמכריעה את L אם"ם קיימת מ"ט במודל B שמכריעה את L.

2) קיימת מ"ט במודל A שמקבלת את L אם"ם קיימת מ"ט במודל B שמקבלת את L.

דוגמה 2.1

נסמן ב-T את מודל מכונת הטיורינג הבסיסי.
במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לשני הכיוונים. ב תחילת החישוב הראש נמצא בתחילת הקלט.

נסמן ב-O את מודל מכונת הטיורינג עם סרט ימינה בלבד.
במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן לה ישאר במקום, באותה המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לכיוון אחד בלבד - ימינה. בתחילת החישוב, הקלט ממוקם בקצה השמאלי של הסרט והראש נמצאת בתחילת הקלט. החישוב מתנהל כמו במכונה במודל, T למעט כאשר הראש נמצא במשבצת השמאלית ביותר בסרט וצריך לזוז ש מאלה– במקרה כזה הראש נשאר במקום ולא זז.

הוכיחו כי המודל T והמודל O שקולים חישובית.

פתרון:
יש להוכיח ש:

- לכל מ"ט במודל O קיימת מ"ט שקולה במודל T.
- לכל מ"ט במודל T קיימת מ"ט שקולה במודל O.

<u>כיוון ראשון</u>

נוכיח כי לכל מ"ט במודל O קיימת מ"ט שקולה במודל T. כלומר:

נתונה $M^O = \left(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O\right)$ במודל O.

נבנה , $M^T = \left(Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T\right)$ שקולה במודל T.

נעבוד רק עם צד ימין של הסרט האינסופי של M^T ואז M^T תהיה שקולה ל- M^O.

רכיבי המ"ט M^T זהים לאלו של המ"ט M^O, מלבד מהתכונה שהראש של M^O לא זז מעבר לקצה השמאולי של הקלט.

לכן כדי ש- M^T תהיה שקולה ל- M^O נוסיף מעברים לפונקצית המעברים של M^T כדי שהראש של M^T לא זז מעבר לקצה השמאולי של הקלט.

הרעיון הוא לסמן את המשבצת שמשמאול לתחילת הקלט עם סימן מיוחד \$, ואז להוסיף מעברים לפונקצית המעברים של M^T שמבטיחים שאם הראש נמצא למשבצת שמסומנת \$ אז הוא מיד חוזר ו- M^T חוזרת למצב ההתחתי של המ"ט M^O. זה מתבצע על ידי הוספת השורות הבאות לטבלת המעברים של M^T:

תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון	מצב
	L	$\circlearrowleft$	$q_\$$	σ	q_0^T
	R	$\$$	q_0^O	$\sqcup$	$q_\$$
$\forall q \in Q^O$	R	$\$$	q	$\$$	q

$$Q^T = Q^O \cup \{q_0^T, q_\$\}\ , \qquad \Sigma^T = \Sigma^O\ , \qquad \Gamma^T = \Gamma^O \cup \{\$\}\ , \qquad \text{acc}^T = \text{acc}^O\ , \qquad \text{rej}^T = \text{rej}^O\ .$$

<u>כיוון שני</u>

נוכיח כי לכל מ"ט במודל T קיימת מ"ט שקולה במודל O. כלומר:

נתונה $M^T = \left(Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T\right)$ במודל T.

נבנה $M^O = \left(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O\right)$ שקולה במודל O.

הרעיון הוא לסמן קו על הסרט במשבת באמצע הקלט, ואז לקפל את הסרט בקו הזה. באופן הזה נקבל סרט עם קצה שמאולי ואינסופי ימינה. במשבצות של הסרט החדש המקופל יש שני תווים, אחד למעלה (U) ואחד למטה (D), מלבד מנקודת הקיפול שבו יש משבצת אחת שמסומנת \$.

באופן הזה אפשר לסמלץ את המכונה M^T במכונה M^O על ידי הוספת המעברים הבאים לטבלת המעברים של M^T. לכל $\tau, \sigma, \pi \in \Gamma^T$:

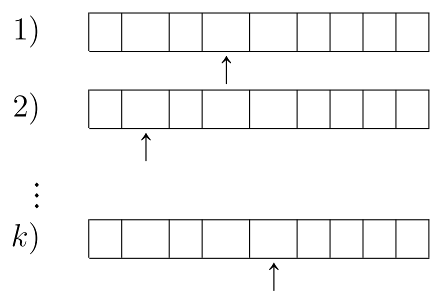
תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון	מצב
תזוזה שמאלה: $(q,\sigma)\xrightarrow{M^T}(p,\tau,L)$	L	π τ	$p.D$	π σ	$q.D$
	R	τ π	$p.U$	σ π	$q.U$
תזוזה שמאלה: $(q,\sqcup)\xrightarrow{M^T}(p,\tau,L)$	L	$\sqcup$ τ	$p.D$	$\sqcup$	$q.D$
	R	τ $\sqcup$	$p.U$	$\sqcup$	$q.U$
תזוזה ימינה: $(q,\sigma)\xrightarrow{M^T}(p,\tau,R)$	R	π τ	$p.D$	π σ	$q.D$
	L	τ π	$p.U$	σ π	$q.U$
תזוזה ימינה: $(q,\sqcup)\xrightarrow{M^T}(p,\tau,R)$	R	$\sqcup$ τ	$p.D$	$\sqcup$	$q.D$
	L	τ $\sqcup$	$p.U$	$\sqcup$	$q.U$
	R	$\circlearrowleft$	$q.U$	$\$$	$q.D$
	R	$\circlearrowleft$	$q.D$	$\$$	$q.U$
אתחול					
$\tau\in\Sigma\cup\{\sqcup\}$ $\sigma\in\Sigma$	R	$\$$	$q.\tau$	τ	q_0^O
	R	$\sqcup$ σ	$q.\tau$	τ	$q.\sigma$
	L	$\sqcup$ $\sqcup$	back	$\sqcup$	$q.\sqcup$
	L	$\circlearrowleft$	back	$\sqcup$ τ	back
	R	$\circlearrowleft$	$q_0^T.D$	$\$$	back
סיום					
			acc^O	הכל	$\text{acc}^T.D$
			acc^O	הכל	$\text{acc}^T.U$
			rej^O	הכל	$\text{rej}^T.D$
			rej^O	הכל	$\text{rej}^T.U$
כל השאר עוברים ל-rej					

$$\Gamma^O \supseteq \left(\Gamma^T \times \Gamma^T\right) \cup \{\$\}\ .$$

שיעור 3
מכונות טיורינג מרובת סרטים

3.1 מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה היוריסטית

מכונת טיורינג מרובת סרטים (מטמ"ס) היא הכללה של מ"ט עם סרט יחיד. ההבדל הוא שלמטמ"ס ישנו מספר סופי של סרטים, נניח $k > 1$ סרטים.



- לכל סרט יש ראש שלו.
- בתחילת העבודה הקלט w כתוב בתחילת הסרט הראשון וכל שאר הסרטים ריקים. הראשים בכל סרט מצביעים על התא הראשון בסרט, והמכונה נמצאת במצב התחלתי q_0.
- בכל צעד חישוב, לפי המצב הנוכחי ול- k התווים שמתחת ל- k הראשים, המכונה מחליטה לאיזה מצב לעבור, מה לכתוב מתחת לכל אחד מ-k הראשים ולאן להזיז את הראש בכל אחד מ-k סרטים.
- הראשים של הסרטים יכולים לזוז באופן בלתי-תלוי בהתאם לפונקצית המעברים של המטמ"ס.

3.2 מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה פורמלית

הגדרה 3.1 מכונט טיורינג מרובת סרטים

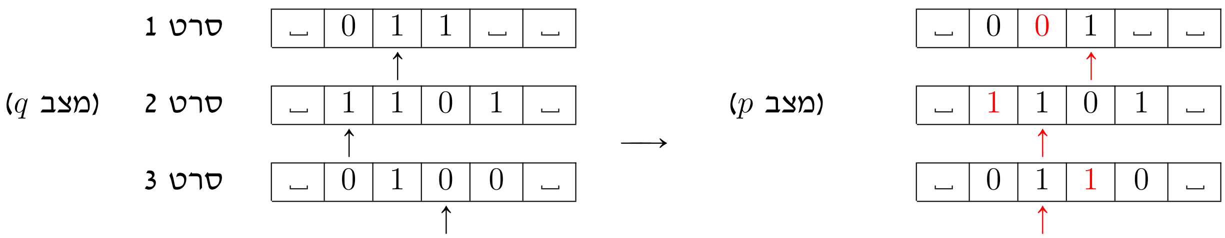
מכונת טיורינג מרובת סרטים היא שביעייה:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר Q, Σ, Γ, q_0, q_{acc},q_{rej} מוגדרים כמו מ"ט עם סרט יחיד (ראו הגדרה 1.2).
ההבדל היחיד בין מ"ט עם סרט יחיד לבין מטב"ס הוא הפונקצית המעברים. עבור מטמ"ס הפונקצית המעברים היא מצורה הבאה:

$$\delta_k : (Q \backslash \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$$

דוגמה 3.1



$$\delta_k\left(q,\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\left(p,\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\\L\end{pmatrix}\right) .$$

3.3 קונפיגורציה של מטמ"ס

הכללה של קונפיגורציה של מ"ט עם סרט יחיד:

$$\begin{pmatrix}u_1 q\ \mathrm{v}_1\\ u_2 q\ \mathrm{v}_2\\ \vdots\\ u_k q\ \mathrm{v}_k\end{pmatrix}$$

דוגמה 3.2

בנו מטמ"ס שמכריעה את השפה:

$$L_{w^R}=\left\{w=\{a,b\}^*\ \middle|\ w=w^R\ .\right\}$$

כלומר שפת הפלינדרומים.

פתרון:

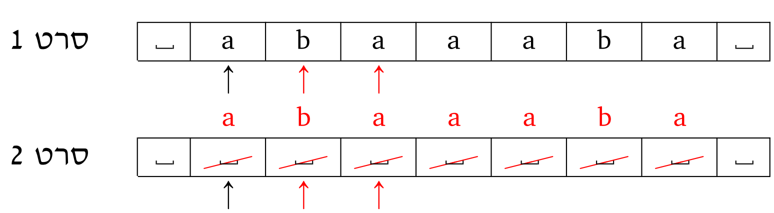
נבנה מ"ט עם שני סרטים:

<u>תאור המכונה:</u>

נסמן M_2 המ"ט עם 2 סרטים שמכריעה את השפה L_{w^R}.

$M_2 =$ על הקלט w:

(1) מעתיקה את w לסרט 2.



(2) מזיזה את הראש בסרט 1 לתו הראשון ב- w ואת הראש בסרט 2 לתו האחרון ב- w.

(3) משווה בין התווים שמתחת לראשים:

- אם התו שמתחת לראש בסרט 1 הוא $\sqcup$ $\Leftarrow$ acc.
- אם התווים שמתחת לראשים שונים $\Leftarrow$ rej.
- אחרת מזיזה את הראש בסרט 1 ימינה ואת הראש בסרט 2 שמאלה, וחוזרת לשלב (3).

הפונקצית המעברים של M_2 היא:

$$\delta\left(q_0, \begin{pmatrix} a \\ \sqcup \end{pmatrix}\right) = \left(q_0, \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}\right) \ ,$$
$$\delta\left(q_0, \begin{pmatrix} b \\ \sqcup \end{pmatrix}\right) = \left(q_0, \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}\right) \ ,$$
$$\delta\left(q_0, \begin{pmatrix} \sqcup \\ \sqcup \end{pmatrix}\right) = \left(q_{\text{back}}, \begin{pmatrix} \sqcup \\ \sqcup \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ L \end{pmatrix}\right) \ .$$

נשים לב כי הסיבוכיות זמן של המכונה עם שני סרטים, M_2 היא $O(|w|)$, כאשר w האורך של המילה.

כעת נבנה מ"ט עם סרט יחיד שמכריעה את השפה L_{W^R}.

<u>תאור המכונה:</u>

נסמן M_1 המכונה עם סרט יחיד שמכריעה את השפה L_{w^R}.

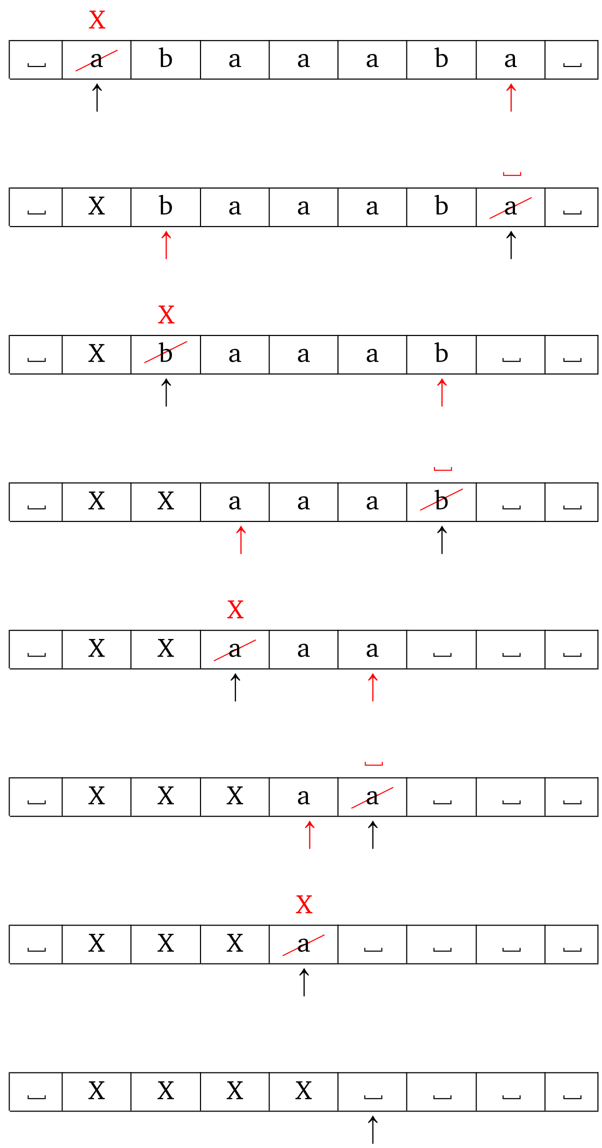
$M_1 =$ על הקלט w:

(1) אם התו שמתחת לראש הוא $\sqcup$ אז $M_1 \leftarrow$ acc.

(2) זוכרת את התו שמתחת לראש ומוחקת אותו ע"י X.

(3) מזיזה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאול ל- $\sqcup$.

- אם התו שמתחת לראש הוא X $\Leftarrow$ acc.
- אם התו שונה מהתו שזכרנו $\Leftarrow$ rej.
- מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י $\sqcup$, מזיזה את הראש שמאולה עד התו הראשון מימין ל- X וחוזרת לשלב (1).



3.4 שקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

מ"ט עם סרט יחיד היא מקרה פרטי של מטמ"ס.

משפט 3.1 שקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

לכל מטמ"ס M קיימת מ"ט עם סרט יחיד M' השקולה ל- M.

כלומר, לכל קלט $w \in \Sigma^*$:

- אם M מקבלת את w $\Leftarrow$ M' מקבלת את w.
- אם M דוחה את w $\Leftarrow$ M' דוחה את w.
- אם M לא עוצרת על w $\Leftarrow$ M' עוצרת על w.

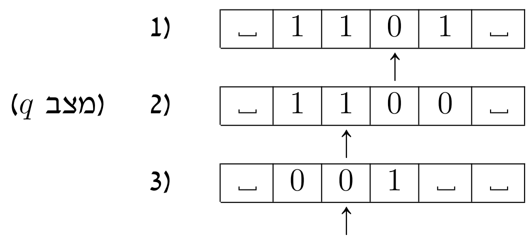
הוכחה:

בהינתן מטמ"ס $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ עם k סרטים, נבנה מ"ט עם סרט יחיד $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', q_{\text{acc}}', q_{\text{rej}}')$ השקולה ל- M באופן הבא:

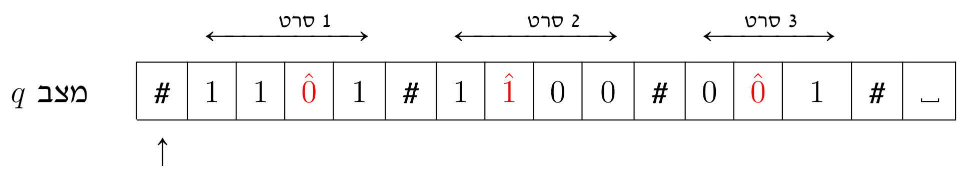
<u>רעיון הבנייה:</u>

בהינתן קלט $w \in \Sigma^*$, M' תבצע "סימולציה" של ריצה M על w.

<u>ב- M</u>



<u>ב- M'</u>



- M' תשמור את התוכן של k הסרטים של M על הסרט, רק שהתוכן של סרט i יופיע בין $\#_i$ ל- $\#_{i+1}$.
- M' תשמור את המיקום של הראשים של M ע"י הכפלת הא"ב Γ.

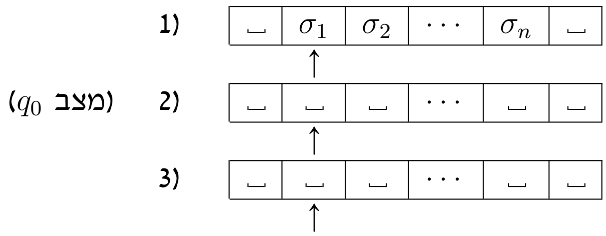
  כלומר, לכל אות $\alpha \in \Gamma$, M' תשמור שתי אותיות α ו- $\hat{\alpha}$ ב- Γ', כך ש- $\hat{\alpha}$ תסמן את התו שמתחת לראש בכל סרט.
- בכל צעד חישוב, M' סורקת את הסרט שלה משמאל לימין כדי ללמוד מהם התווים שמתחת לראשים (התווים שמסומנים ב- $\hat{\alpha}$).
- M' משתמשת בפונקצית המעברים δ_k של M כדי לחשב את המעבר הבא.
- M' סורקת את הסרט שלה משמאל לימין כדי לעדכן את הסרטים ואת המיקום הראשים בהם.

<u>תאור הבנייה של M':</u>

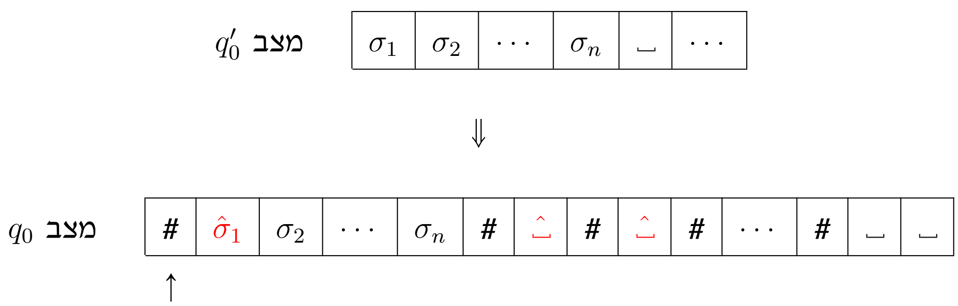
1) <u>שלב האיתחול</u>

בהינתן קלט $w = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$, M' מאתחלת את הקונפיגורציה ההתחלתית של M על הסרט שלה.

<u>ב- M</u>

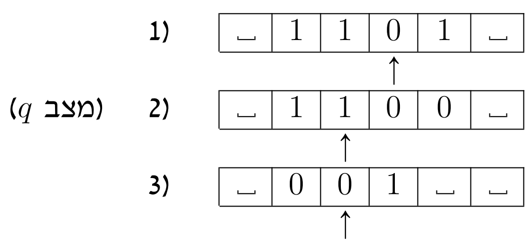


<u>ב- M'</u>

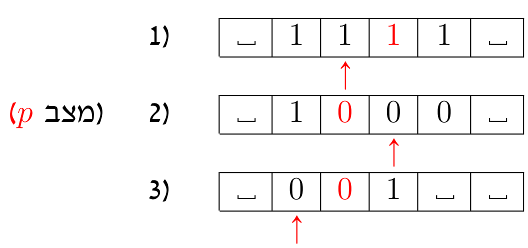


2) <u>תאור צעד חישוב של M</u>

<u>ב- M</u>



$$\delta_k\left(q,\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\left(p,\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}L\\R\\L\end{pmatrix}\right)$$



<u>ב- M'</u>

מצב q	#	1	1	$\hat{0}$	1	#	1	$\hat{1}$	0	0	#	0	$\hat{0}$	1	#	$\sqcup$
	$\uparrow$															

$$\Downarrow$$

מצב p	#	1	$\hat{1}$	1	1	#	1	0	$\hat{0}$	0	#	$\hat{0}$	0	1	#	$\sqcup$
	$\uparrow$															

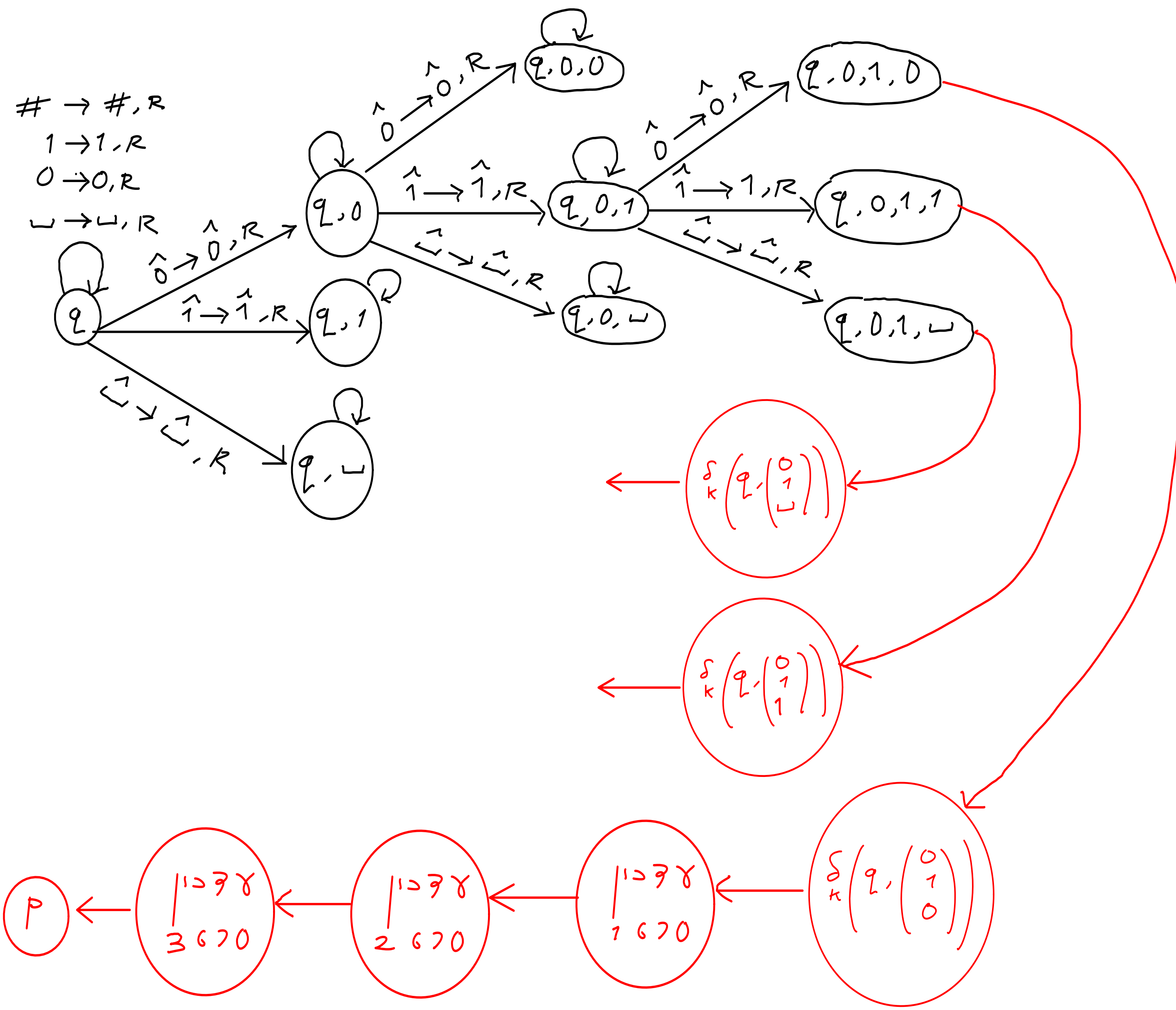
- <u>איסוף מידע</u>
- M' סורקת את הסרט שלה משמאל לימין ומזהה את התווים שמסומנים ב- $\hat{\alpha}$.
  מידע זה ניתן לשמור במצבים. לדוגמה:

$$q\ ,\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\ .$$

זה אפשרי מכיוון שמספר המצבים הנדרש הוא סופי:

$$|Q|\times|\Gamma|^k\ .$$

מצב q	#	1	1	$\hat{0}$	1	#	1	$\hat{1}$	0	0	#	0	$\hat{0}$	1	#	$\sqcup$
	$\uparrow$															



מצב p

#	1	$\hat{1}$	1	1	#	1	0	$\hat{0}$	0	#	$\hat{0}$	0	1	#	$\sqcup$

↑

- <u>עדכון הסרטים</u>

M' סורקת את הסרט שלה פעם נוספת כדי לפעול על פי פונקצית המעברים, כלומר, לעדכן את התאים שמתחת לראשים ולעדכן את מיקום הראשים.

■

שיעור 4
מכונת טיורינג אי דטרמיניסטיתם

4.1 הגדרה של מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

הגדרה 4.1 מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית (מ"ט א"ד) היא שביעייה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}$ מוגדרים כמו במ"ט דטרמיניסטי.

Δ היא פונקצית המעברים

$$\Delta : (Q \backslash \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma \to P\left(Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}\right) \ .$$

$$\Delta(q, a) = \{(q_1, a, S) \ , \ (q_2, b, L) \ , \ \ldots\} \ .$$

כלומר, לכל זוג $q \in Q, \alpha \in \Gamma$ ייתכן מספר מעברים אפשריים, 0, 1 או יותר.

- קונפיגורציה של מ"ט א"ד זהה לקונפיגורציה של מ"ט דטרמיניסטית.
- לכל קונפיגורציה ייתכן מספר קונפיגורציות עוקבות.
- לכל מילה $w \in \Sigma^*$ חחתכן מססר ריצות שונות:
  * ריצות שמגיעות ל- q_{acc}.
  * ריצות שמגיעות ל- q_{rej}.
  * ריצות שלא עוצרות.
  * ריצות שנתקעות.

הגדרה 4.2

מילה $w \in \Sigma^*$ מתקבלת במ"ט א"ד M אם קיימת לפחות ריצה אחת שמגיעה ל- q_{acc}.

השפה של מ"ט א"ד M היא

$$L(M) = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \exists u, \mathrm{v} \in \Gamma^* \ : \ q_0 w \vdash_* \ u \ q_{\text{acc}} \ \mathrm{v} \right\}$$

כלומר,

$w \in L(M)$ אם קיימת ריצה אחת שבה M מקבלת את w.

$w \notin L(M)$ אם בכל ריצה של M על w, M דוחה או לא עוצרת, או נתקעת.

הגדרה 4.3 מ"ט א"ד המכריעה שפה L

תהי M מ"ט א"ד.
אומרים כי מ"ט א"ד M מכריעה שפה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $w \in L \Leftarrow M$ מקבלת את w.
- אם $w \notin L \Leftarrow M$ דוחה את w.

הגדרה 4.4 מ"ט א"ד המקבלת שפה L

תהי M מ"ט א"ד.
אומרים כי מ"ט א"ד M מקבלת שפה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $w \in L \Leftarrow M$ מקבלת את w.
- אם $w \notin L \Leftarrow M$ דוחה את w או M לא עוצרת על w.

דוגמה 4.1

נתונה השפה

$$L = \left\{1^n \;\middle|\; n \text{ אינו ראשוני} \right\} \ , \qquad \Sigma = \{1\} \ .$$

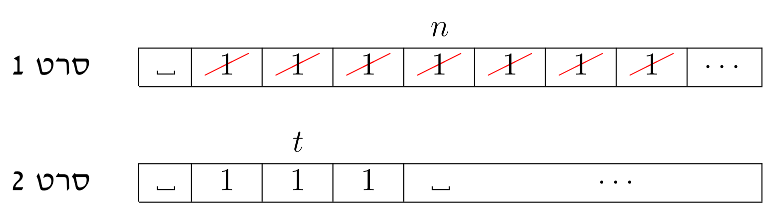
בנו מ"ט המכריעה את השפה L.

פתרון:

<u>הרעיון</u>

נבנה מ"ט א"ד N המכריעה את L.

N תבחר באופן א"ד מספר $1 < t < n$ ותבדוק האם t מחלק את n.



<u>תאור הבניה</u>

$N =$ על קלט $w = 1^n$:

שלב 1)

- N בוחרת באופן א"ד מספר $1 < t < n$.
- מעתיקה את w לסרט 2.
- עוברת על העותק משמאל לימין, ובכל תא מחליטה באופן א"ד האם להשאיר את ה- 1 או למחוק אותו ע"י X (לדאוג שהמספר שנבחר הוא לא 1 ולא n).

- בסוף המעבר המספר t שנבחר הוא כמות ה- 1 -ים שלא נמחקו.

סרט 1

␣	1	1	1	1	$\cdots$	1	1	␣	$\cdots$

סרט 2

		X	X			X			
␣	1	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	1	$\cdots$	$\cancel{1}$	1	␣	$\cdots$

שלב 2) N בודקת האם t שנבחר מחלק את n.

- אם כן $\Leftarrow$ N מקבלת.
- אם לא $\Leftarrow$ N דוחה.

4.2 עץ החישוב של מ"ט א"ד

הגדרה 4.5 עץ החישוב של מ""ט א"ד

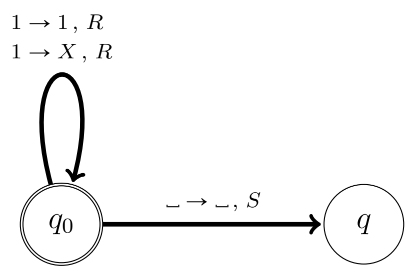
בהינתן מ"ט א"ד M ומילה $w \in \Sigma^*$, עץ החישוב של M ו- w הוא עץ מושרש שבו:

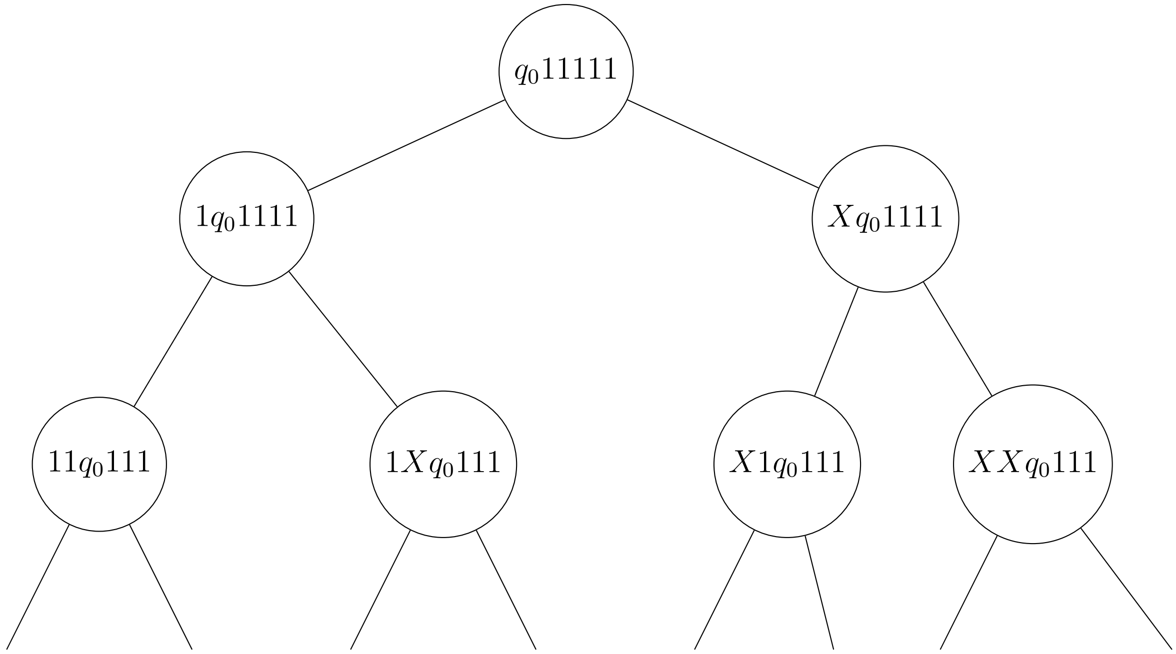
1) כל קדקוד בעץ מתאר קונפיגורציה בחישוב של M על w.

2) שורש העץ מתאר את הקונפיגורציה ההתחלתית $q_0 w$.

3) לכל קדקוד v בעץ הבנים של v הם כל הקדקודים הנובעים מהקונפיגורציה המתוארת ע"י v.

דוגמה 4.2





4.3 שקילות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטית

משפט 4.1 שקילות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטית ב- RE

לכל מ"ט א"ד N קיימת מ"ט דטרמיניסטית D כך ש-

$$L(N) = L(D) .$$

כלומר לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם N מקבלת את w $\Leftarrow$ D תקבל את w.
- אם N לא מקבלת את w $\Leftarrow$ D לא תקבל את w.

הוכחה: בהינתן מ"ט א"ד N נבנה מ"ט דטרמיניסטית D ונוכיח כי

$$L(N) = L(D) .$$

<u>רעיון ההוכחה</u>

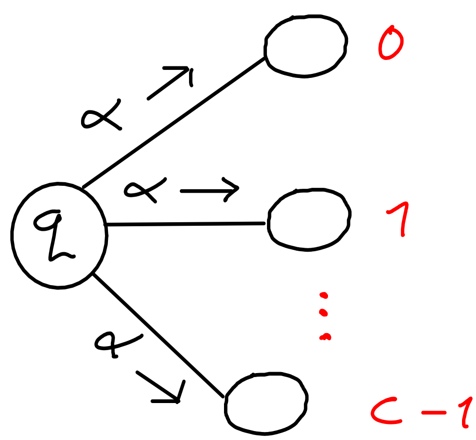
בהינתן קלט $w \in \Sigma^*$, D תבצע ריצה של כל החישובים האפשריים של N על w, ואם אחד החישובים מסתיים ב- q_{acc} אז D תעצור ותקבל.

מכיוון שייתכנו חישובים אינסופיים, לא נוכל לסרוק את עץ החישוב לעומק. במקום זה נסרוק את העץ לרוחב. כלומר, נבדוק את כל החישובים באורך 1, ואחרי זה נבדוק את כל החישובים באורך 2, וכן הלאה. אם אחד החישובים הסתיים ב- q_{acc}, אזי D תעצור ותקבל.

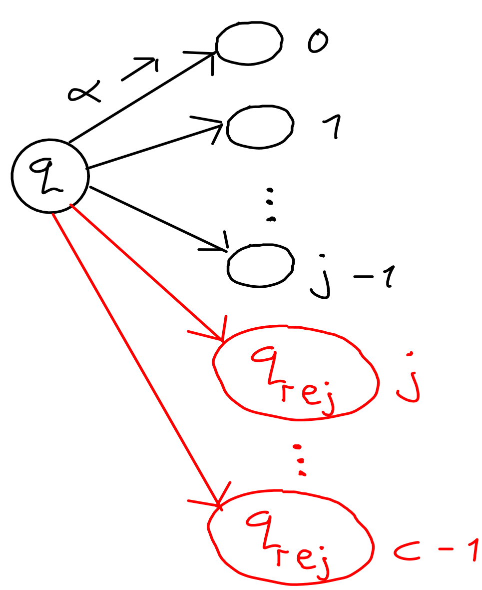
<u>תאור הבניה</u>

מכיוון שלכל $q \in Q$ ולכל $\alpha \in \Gamma$:
$$\Delta(q,\alpha) \subseteq Q \times \Gamma \times \{L,R,S\} \ .$$
אזי
$$|\Delta(q,\alpha)| \leqslant |Q| \cdot |\Gamma| \cdot |\{L,R,S\}| = 3|Q| \cdot |\Gamma| \ .$$
נסמן:
$$C = 3|Q| \cdot |\Gamma| \ .$$

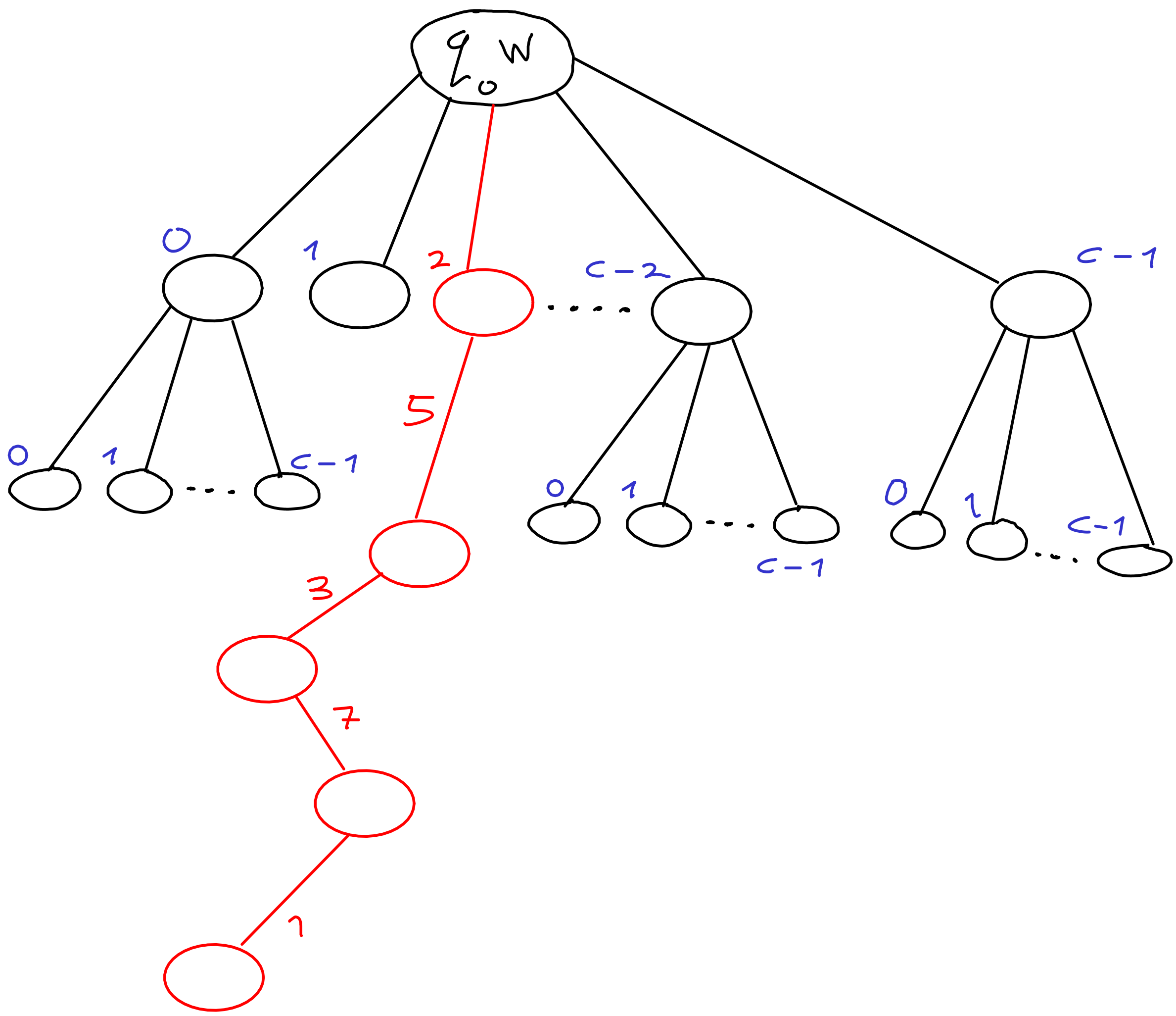
- לכל מצב $q \in Q$ ולכל אות $\alpha \in \Gamma$ נמספר את המעברים ב- $\Delta(q,\alpha)$ שרירותית
$$\{0,1,2,\cdots,C-1\} \ .$$



- אם $|\Delta(q,\alpha) = j < C$,
אזי לכל $j \leqslant k \leqslant C-1$
נקבע $k = (q_{\text{rej}},\alpha,S)$.



- נשים לב כי שינוי זה לא משנה את השפה של N.



קידום לקסיקוגרפי:

$$
\begin{array}{lllllll}
0 & 00 & 10 & \cdots & (C-1)0 & 000 & \\
1 & 01 & 11 & \cdots & (C-1)1 & 001 & \\
2 & 02 & 12 & \cdots & (C-1)2 & 002 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \\
C-1 & 0(C-1) & 1(C-1) & \cdots & (C-1)(C-1) & 00(C-1) &
\end{array}
$$

הבניה של D

D מכילה 3 סרטים:

					n				
סרט 1	␣	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cdots$

			t			
סרט 2	␣	1	1	1	␣	$\cdots$

סרט 3	␣	1	1	1	␣	$\cdots$

$D=$ " על קלט w:

1) מאתחלת את המחרוזת בסרט 3 ל- 0.

2) מעתיקה את w לסרט 2.

3) מריצה את N על w לפי המחרוזת בסרט 3.

- אם N קיבלה את $w \Leftarrow D$ עוצרת ומקבלת.
- אחרת, D מוחקת את סרט 2, מקדמת את המחרוזת בסרט 3 לקסיקוגרפית וחוזרת לשלב 2).

"

■

שיעור 5
תכונות סגירות של R ו- RE

5.1 הגדרה של השפות R ו- RE

הגדרה 5.1 R

אוסף השפות הכריעות מסומן R ומוגדר

$$R = \{L \subseteq \Sigma^* \ : \ \text{קיימת מ"ט המכריעה את } L\} \ .$$

הגדרה 5.2 RE

אוסף השפות הקבילות מסומן R ומוגדר

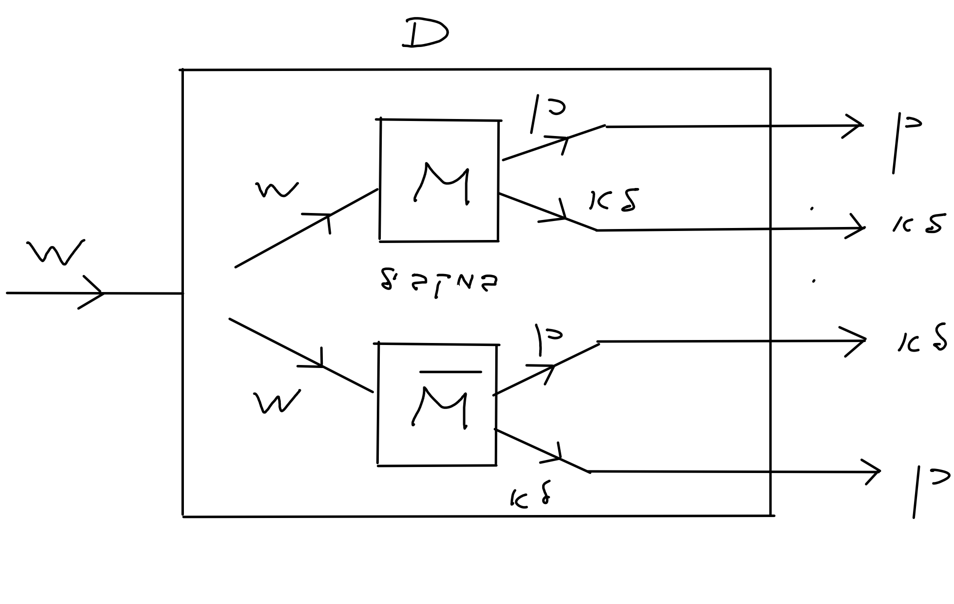
$$RE = \{L \subseteq \Sigma^* \ : \ \text{קיימת מ"ט המקבלת את } L\} \ .$$

למה 5.1

אם $L \in RE$ וגם $\bar{L} \in RE$ אזי $L \in R$.

הוכחה: תהי M מ"ט המקבלת את L ותהי $\bar{M}$ מ"ט המקבלת את $\bar{L}$.

נבנה מ"ט D המכריעה את L.



$D =$ על קלט w:

1) D מעתיקה את w לסרט נוסף.

2) מריצה במקביל את M על w ואת $\bar{M}$ על העותק של w.

- אם M מקבלת $\Leftarrow$ D מקבלת.
- אם $\bar{M}$ מקבלת $\Leftarrow$ D דוחה.
- אם M דוחה $\Leftarrow$ D דוחה.
- אם $\bar{M}$ דוחה $\Leftarrow$ D מקבלת.

נוכיח כי D מכריעה את L.

אם $w \in L$

$\Leftarrow$ $w \in L(M)$

$\Leftarrow$ (M מקבלת את w) או ($\bar{M}$ דוחה את w)

$\Leftarrow$ D עוצרת ומקבלת את w.

אם $w \notin L$

$\Leftarrow$ $w \in \bar{L}$

$\Leftarrow$ $w \in L\left(\bar{M}\right)$

$\Leftarrow$ ($\bar{M}$ מקבלת את w) או (M דוחה את w)

$\Leftarrow$ D עוצרת ודוחה את w.

■

משפט 5.1 סגירות של השפות הכריעות

השפות הכריעות R סגורות תחת:

1) איחוד

2) חיתוך

3) משלים

4) שרשור

5) סגור קלין

משפט 5.2 סגירות של השפות הקבילות

השפות הכריעות R סגורות תחת:

1) איחוד

2) חיתוך

3) שרשור

4) סגור קלין

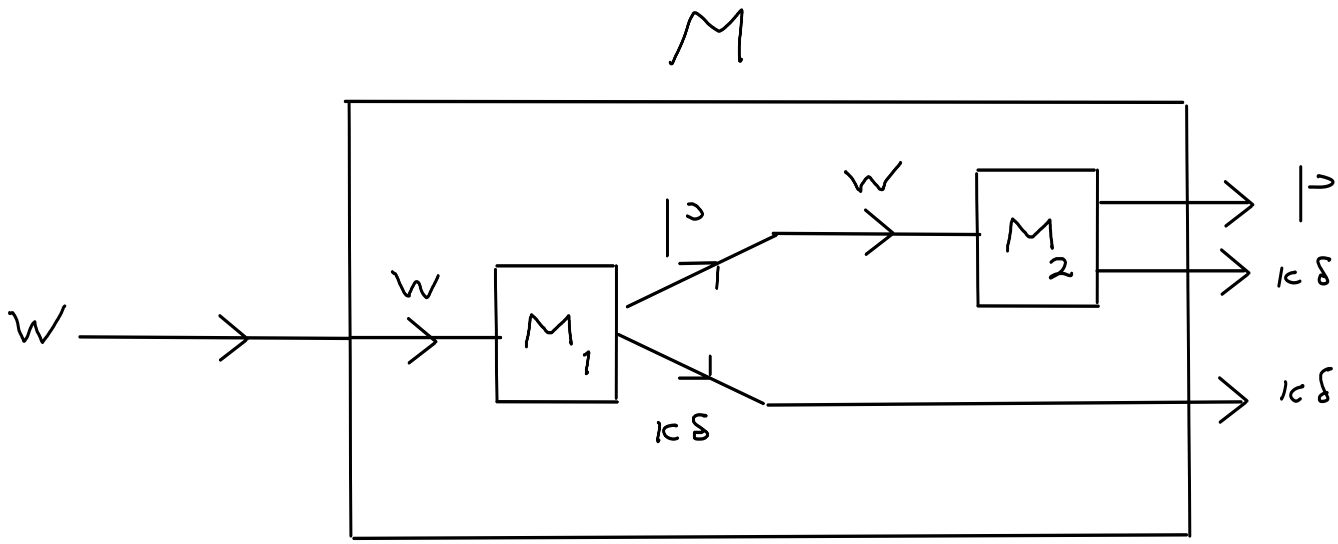
הוכחה:

1) חיתוך:

(א) R סגורה תחת חיתוך

נוכיח כי לכל שתי שפות $L_1, L_2 \in R$ מתקיים $L_1 \cap L_2 \in R$.

תהי M_1 ו- M_2 מ"ט המכריעות את L_1 ו- L_2 בהתאמה. נבנה מ"ט M המכריעה את $L_1 \cap L_2$.



תאור הבנייה

$M =$ על קלט w:

1) M מעתיקה את w לסרט נוסף.
2) M מריצה את M_1 על w.
- אם M_1 דוחה $\Leftarrow$ M דוחה.
- אחרת M מריצה את M_2 על העותק של w ועונה כמוה.

נכונות:

נוכיח כי M מכריעה את $L_1 \cap L_2$.

אם $w \in L_1 \cap L_2$

$\Leftarrow$ $w \in L_1$ וגם $w \in L_2$

$\Leftarrow$ M_1 מקבלת את w וגם M_2 מקבלת את w

$\Leftarrow$ M מקבלת את w.

אם $w \notin L_1 \cap L_2$

$\Leftarrow$ $w \notin L_1$ או $w \notin L_2$

$\Leftarrow$ M_1 דוחה את w או M_2 דוחה את w

$\Leftarrow$ M דוחה את w.

(ב) RE <u>סגורה תחת חיתוך</u>

נוכיח כי לכל שתי שפות $L_1, L_2 \in RE$ מתקיים $L_1 \cap L_2 \in RE$.

תהיינה M_1 ו- M_2 שתי מכונות טיורינג המקבלות את L_1 ו- L_2 בהתאמה.
נבנה מ"ט M המקבלת את $L_1 \cap L_2$ באותו אופן כמו **(א)**.

2) איחוד:

(א) R <u>סגורה תחת איחוד</u>

נוכיח כי לדל שתי שפות $L_1, L_2 \in R$ מתקיים $L_1 \cup L_2 \in R$.

תהיינה M_1 מ"ט המכריעה את L_1 ו- M_2 מ"ט המכריעה את L_2.
נבנה מ"ט M המכריעה את $L_1 \cup L_2$.

<u>תאור הבנייה</u>

$M =$ על קלט w:

1) M מעתיקה את w לסרט נוסף.
2) M מריצה את M_1 על w.
- אם M_1 מקבלת $\Leftarrow$ M מקבלת.
- אחרת, M מריצה את M_2 על העותק של w ועונה כמוה.

(ב) RE <u>סגורה תחת איחוד</u>

נוכיח כי לכל שתי שפות $L_1, L_2 \in RE$ מתקיים $L_1 \cup L_2 \in RE$.
תהיינה M_1 מ"ט המקבלת את L_1 ו- M_2 מ"ט המקבלת את L_2.
נבנה מ"ט א"ד M המקבלת את $L_1 \cup L_2$.

<u>תאור הבנייה</u>

$M =$ על קלט w:

1) M בוחרת באופן א"ד $i \in \{1,2\}$.
2) M מריצה את M_i על w ועונה כמוה.

3) שרשור:

(א) R <u>סגורה תחת שרשור</u>

נוכיח כי לכל שתי שפות $L_1, L_2 \in R$ מתקיים $L_1 \cdot L_2 \in R$ כאשר

$$L_1 \cdot L_2 = \left\{ w = w_1 w_2 \;\middle|\; w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2 \right\} .$$

תהיינה M_1 מ"ט המכריעה את L_1 ו- M_2 מ"ט המכריעה את L_2.
נבנה מ"ט א"ד M המכריעה את $L_1 \cdot L_2$.

<u>תאור הבנייה</u>

$M =$ על קלט w:

1) M בוחרת באופן א"ד חלוקה של w ל- $w = w_1 w_2$.
2) M מריצה את M_1 על w_1.
- אם M_1 דוחה $\Leftarrow M$ דוחה.
- אחרת, M מריצה את M_2 על w_2 ועונה כמוה.

(ב) RE סגורה תחת שרשור

RE סגורה תחת שרשור באותו אופן כמו ב- **(א)**

4) קליני $*$

א) R סגורה תחת $*$ קליני

נוכיח כי לכל שפה L:

$$L \in R \quad \Rightarrow \quad L^* R$$

כאשר

$$L^* = \left\{ w = w_1 w_2 \cdots w_k \;\middle|\; \forall 1 \leqslant i \leqslant k \ , \ w_i \in L \right\} \ .$$

תהי M מ"ט המכריעה את L.
נבנה מ"ט M^* א"ד המכריעה את L^*.

תאור הבנייה

$M^* =$ על קלט w:

1) אם $w = \varepsilon$ אז M^* מקבלת.
2) אחרת M^* בוחרת באופן א"ד חלוקה של w ל- $w = w_1 \cdots w_k$.
3) לכל $1 \leqslant i \leqslant k$:

M^* מריצה את M על w_i.

- אם M דוחה את $w_i \Leftarrow M^*$ דוחה.
- אחרת חוזרים לשלב 3).

4) אם M קיבלה את כל המחרוזות $\{w_i\}$ אזי M^* מקבלת.

ב) RE סגורה תחת $*$ קליני

5) משלים

א) R סגורה תחת המשלים

נוכיח כי

$$L \in R \quad \Rightarrow \quad \bar{L} \in R \ ,$$

כאשר

$$\bar{L} = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; w \notin L \right\} \ .$$

תהי M מ"ט המכריעה את L.
נבנה מ"ט $\bar{M}$ המכריעה את $\bar{L}$.

$\bar{M} =$ על קלט w:

(1) $\bar{M}$ מריצה את M על w.

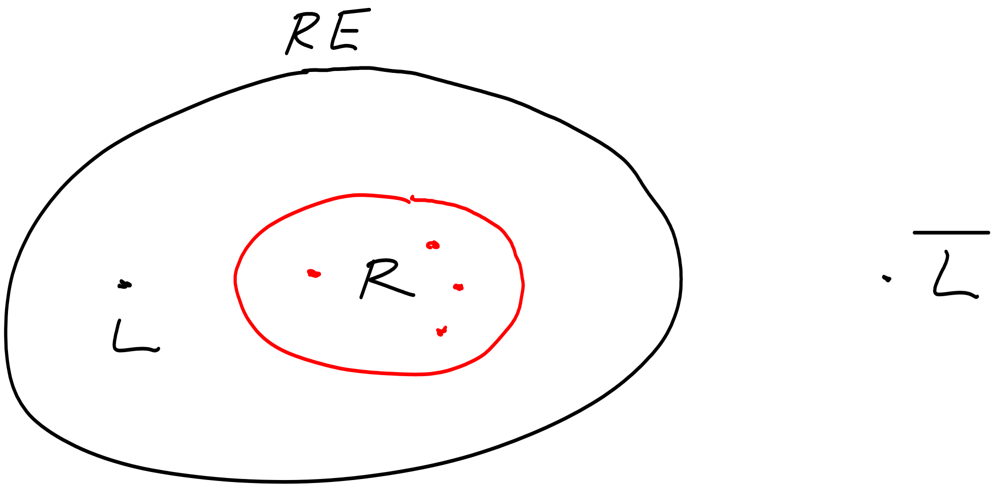
- אם M מקבלת $\Leftarrow$ $\bar{M}$ דוחה.
- אם M דוחה $\Leftarrow$ $\bar{M}$ מקבלת.

ב) <u>RE **אינה סגורה תחת המשלים**</u>

■

משפט 5.3 RE אינה סגורה תחת המשלים

$$L \in RE \backslash R \quad \Rightarrow \quad \bar{L} \notin RE \ .$$



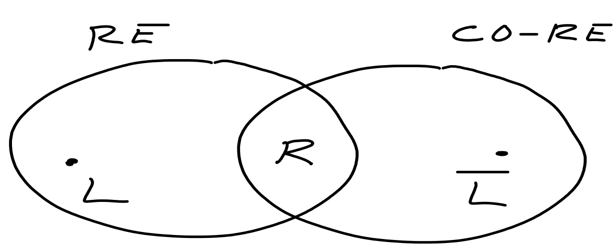
הוכחה:
נניח כי $L \in RE \backslash R$ ונניח בשלילה כי $\bar{L} \in RE$.

אזי לפי טענת עזר (למה 5.1), $L \in R$ וזו סתירה.

■

הגדרה 5.3 $Co\,RE$

$$Co\,RE = \left\{ L \subseteq \Sigma^* \mid \bar{L} \in RE \right\} \ .$$



<u>אבחנה</u>

לפי למה 5.1:

$$RE \cap Co\,RE = R \ .$$

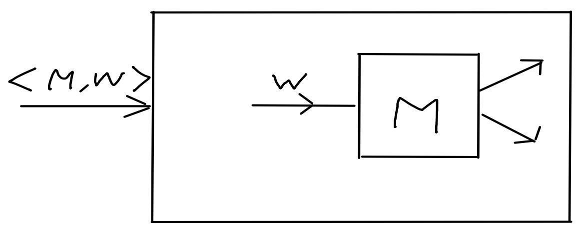
5.2 קידוד של מ"ט דטרמיניסטית

הגדרה 5.4 קידוד של מ"ט

בהינתן קבוצה O של עצמים מופשטים (לשמל מכונת טיורינג, תוכנית מחשב, גרף).
הקידוד של O, מסומן $\langle O\rangle$, הוא מיפוי של O אל מחרוזת מעל אלפבית סופי שיש בו לפחות שני סימנים.

במידה ויש רב עצמים $O_1,\dots,O_k$ נסמן את הקידוד שלהם $\langle O_1,O_2,\dots,O_k\rangle$.

5.3 מ"ט אוניברסלית U



מ"ט אוניברסלית U מקבלת כקלט זוג, קידוד של מ"ט $\langle M\rangle$ וקידוד של מילה $\langle w\rangle$, ומבצעת סימוציה של ריצה של M על w ועונה בהתאם.

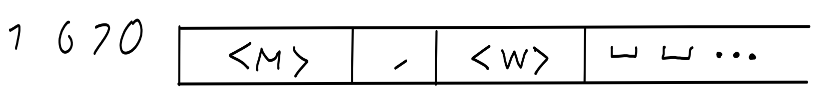
<u>תאור הפעולה של U</u>

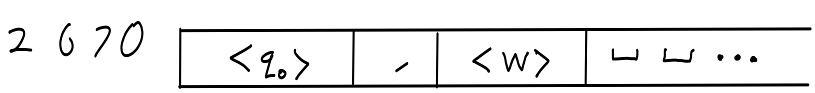
$U =$ על קלט x:

(1) בודקת האם x הוא קידוד של מ"ט $\langle M\rangle$ וקידוד של מילה $\langle w\rangle$.

- אם לא $\Leftarrow$ דוחה.

(2) מבצעת סימולציה של M על w:





- רושמת את הקונפיגורציה ההתחלתית q_0w על סרט 2.
- מחשבת את הקונפיגורציה הבאה בעזרת טבלת המעברים.
- בסוף כל מעבר בין שתי קונפיגורציות, U בודקת האם המצב הנוכחי הוא q_{acc}.
  * אם כן U עוצרת ומקבלת.

* אחרת U בודקת האם המצב הוא q_{rej}.
* אם כן U עוצרת ודוחה.
* אחרת U ממשיכה לקונפיגורציה הבאה.

<u>מהי השפה של U?</u>

לכל x:

(1) אם $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow$ U דוחה את x.

(2) אם $x = \langle M, w \rangle$:

- אם M מקבלת $w \Leftarrow$ U מקבלת את x.
- אם M דוחה את $w \Leftarrow$ U דוחה את x.
- אם M לא עוצרת על $w \Leftarrow$ U לא עוצרת על x.

$$L(U) = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} \ .$$

הגדרה 5.5 L_{acc}

$$L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} \in RE \backslash R$$

הגדרה 5.6 L_{halt}

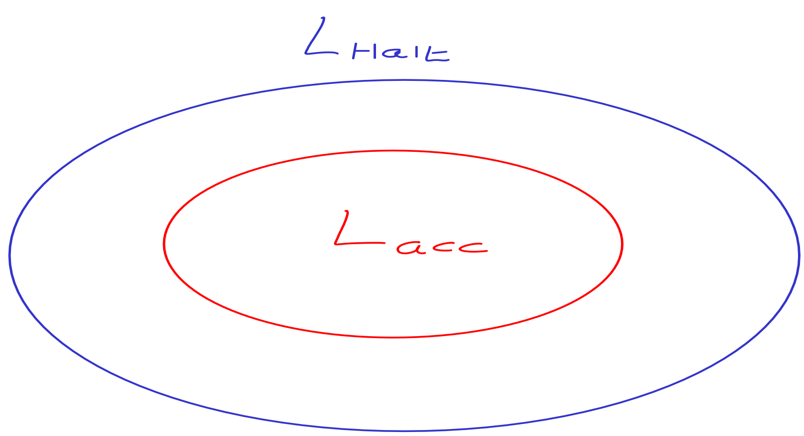
$$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ עוצרת על } w\} \in RE \backslash R$$

הגדרה 5.7 L_{d}

$$L_{\text{d}} = \{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M)\} \notin RE$$

<u>אבחנה:</u>

$$L_{\text{acc}} \subseteq L_{\text{halt}} \ .$$



משפט 5.4

$$L_{\text{acc}} \in RE \ .$$

הוכחה: מכיוון ש- $L(U) = L_{\text{acc}}$, U מקבלת את L_{acc} ולכן $L_{\text{acc}} \in RE$. ■

משפט 5.5

$$L_{\text{halt}} \in RE \ .$$

הוכחה: נבנה מ"ט U' שהיא למעשה U פרט למקום שבו U עצרה ודחתה, U' תעצור ותקבל.

נוכיח כי U' מקבלת את L_{halt}:

אם $x \in L_{\text{halt}}$

$\Leftarrow$ $x = \langle M, w \rangle$ ו- M עוצרת על w

$\Leftarrow$ U' עוצרת ומקבלת את x.

אם $x \notin L_{\text{halt}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

- $x \neq \langle M, w \rangle$ $\Leftarrow$ U' דוחה את x.
- $x = \langle M, w \rangle$ ו- M לא עוצרת על w $\Leftarrow$ U' לא עוצרת על x.

■

שיעור 6
אי-כריעות משפט הרדוקציה

הגדרה 6.1 L_{acc}

$$L_{\text{acc}} = \{\langle M, w\rangle \mid w \in L(M)\} \in RE \backslash R$$

הגדרה 6.2 L_{halt}

$$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w\rangle \mid \text{עוצרת על } w \; M\} \in RE \backslash R$$

הגדרה 6.3 L_{d}

$$L_{\text{d}} = \{\langle M\rangle \mid \langle M\rangle \notin L(M)\} \notin RE$$

משפט 6.1 $L_{\text{acc}} \in RE$

$L_{\text{acc}} \in RE$.

הוכחה: מכיוון ש- $L(U) = L_{\text{acc}}$, כאשר U המכונת טיורינג האוניברסלית אשר מקבלת את L_{acc}, לכן $L_{\text{acc}} \in RE$. ■

משפט 6.2 $L_{\text{halt}} \in RE$

$L_{\text{halt}} \in RE$.

הוכחה: נבנה מ"ט U' שהיא למעשה U פרט למקום שבו U עצרה ודחתה, U' תעצור ותקבל.

נוכיח כי U' מקבלת את L_{halt}:

אם $x \in L_{\text{halt}}$

$\Leftarrow$ $x = \langle M, w\rangle$ ו- M עוצרת על w

$\Leftarrow$ U' עוצרת ומקבלת את x.

אם $x \notin L_{\text{halt}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

- $x \neq \langle M, w\rangle$ $\Leftarrow$ U' דוחה את x.
- $x = \langle M, w\rangle$ ו- M לא עוצרת על w $\Leftarrow$ U' לא עוצרת על x.

■

משפט 6.3 $L_{\mathrm{d}} \notin RE$

$$L_{\mathrm{d}} \notin RE\ .$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי $L_{\mathrm{d}} \in RE$.

$\Leftarrow$ $\exists$ מ"ט M_{d} המקבלת את L_{d}.

$\Leftarrow$ $L(M_{\mathrm{d}}) = L_{\mathrm{d}}$.

נבדוק ריצה של M_d על $\langle M_d \rangle$:

- אם $\langle M_{\mathrm{d}} \rangle \in L(M_{\mathrm{d}})$ $\Leftarrow$ $\langle M_{\mathrm{d}} \rangle \notin L_{\mathrm{d}}$ $\Leftarrow$ $L(M_{\mathrm{d}}) \neq L_{\mathrm{d}}$.
- אם $\langle M_{\mathrm{d}} \rangle \notin L(M_{\mathrm{d}})$ $\Leftarrow$ $\langle M_{\mathrm{d}} \rangle \in L_{\mathrm{d}}$ $\Leftarrow$ $L(M_{\mathrm{d}}) \neq L_{\mathrm{d}}$.

בשני המקרים קיבלנו סתירה לכך ש- $L(M_{\mathrm{d}}) = L_{\mathrm{d}}$ ולכן $L_{\mathrm{d}} \notin RE$. ■

משפט 6.4 L_{acc} לא כריעה

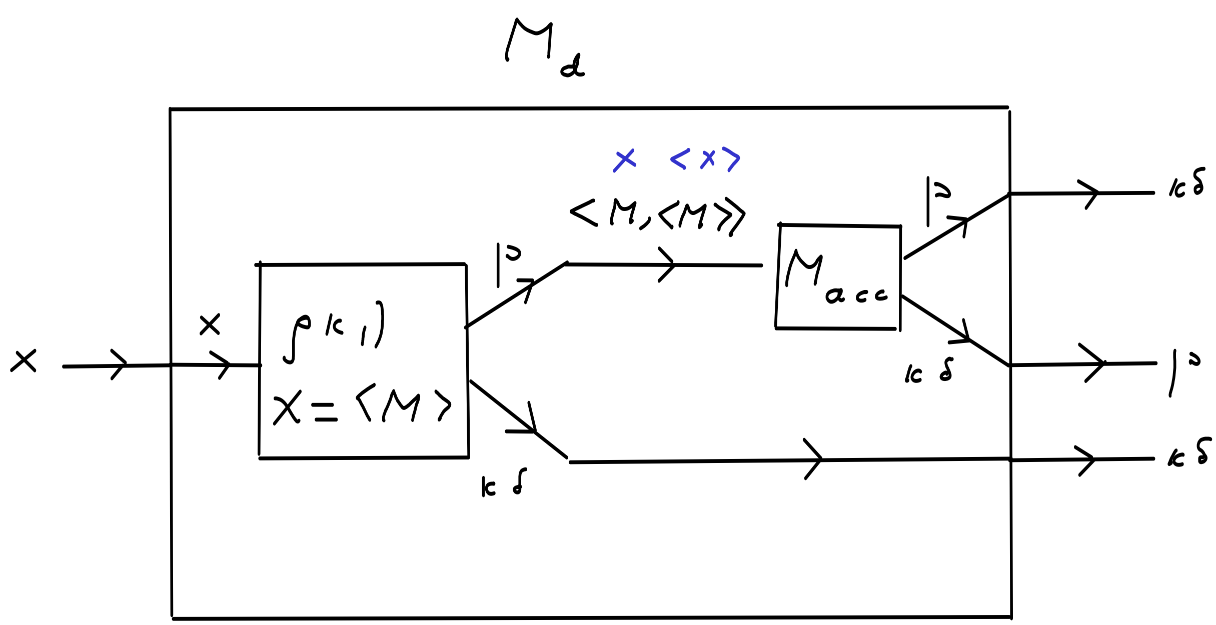
$$L_{\mathrm{acc}} = \left\{ \langle M, w \rangle \;\middle|\; w \in L(M) \right\} \notin R\ .$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי $L_{\mathrm{acc}} \in R$ ותהי M_{acc} המ"ט המכריעה את L_{acc}.

נשתמש ב- M_{acc} כדי לבנות מ"ט M_{d} המכריעה את L_{d} (בסתירה לכך ש- $L_{\mathrm{d}} \notin RE$ כפי שהוכחנו במשפט 6.3).

$$L_{\mathrm{d}} = \left\{ \langle M, w \rangle \;\middle|\; \langle M \rangle \notin L(M) \right\}\ .$$



התאור של M_{d}

$M_{\text{d}} =$ על קלט x:

1) בודקת האם $x = \langle M \rangle$. אם לא $\Leftarrow$ דוחה.

2) מחשבת את $\langle x \rangle = \langle \langle M \rangle \rangle$.

3) מריצה את M_{acc} על הזוג $\langle M, \langle M \rangle \rangle$:

- אם M_{acc} מקבלת $\Leftarrow$ M_{d} דוחה.
- אם M_{acc} דוחה $\Leftarrow$ M_{d} מקבלת.

כעת נוכיח כי M_{d} מכריעה את L_{d}:

אם $x \in L_{\text{d}}$

$\Leftarrow$ $x = \langle M \rangle$ ו- $\langle M \rangle \notin L(M)$

$\Leftarrow$ M_{acc} דוחה את הזוג $\langle M, \langle M \rangle \rangle$

$\Leftarrow$ M_{d} מקבלת את x.

אם $x \notin L_{\text{d}}$ שני מקרים:

מקרה (1): $x \neq \langle M \rangle$ $\Leftarrow$ M_{d} דוחה את x.

מקרה (2): $x = \langle M \rangle$ ו- $\langle M \rangle \in L(M)$

$\Leftarrow$ M_{acc} מקבלת את זוג $\langle M, \langle M \rangle \rangle$

$\Leftarrow$ M_{d} דוחה את x.

■

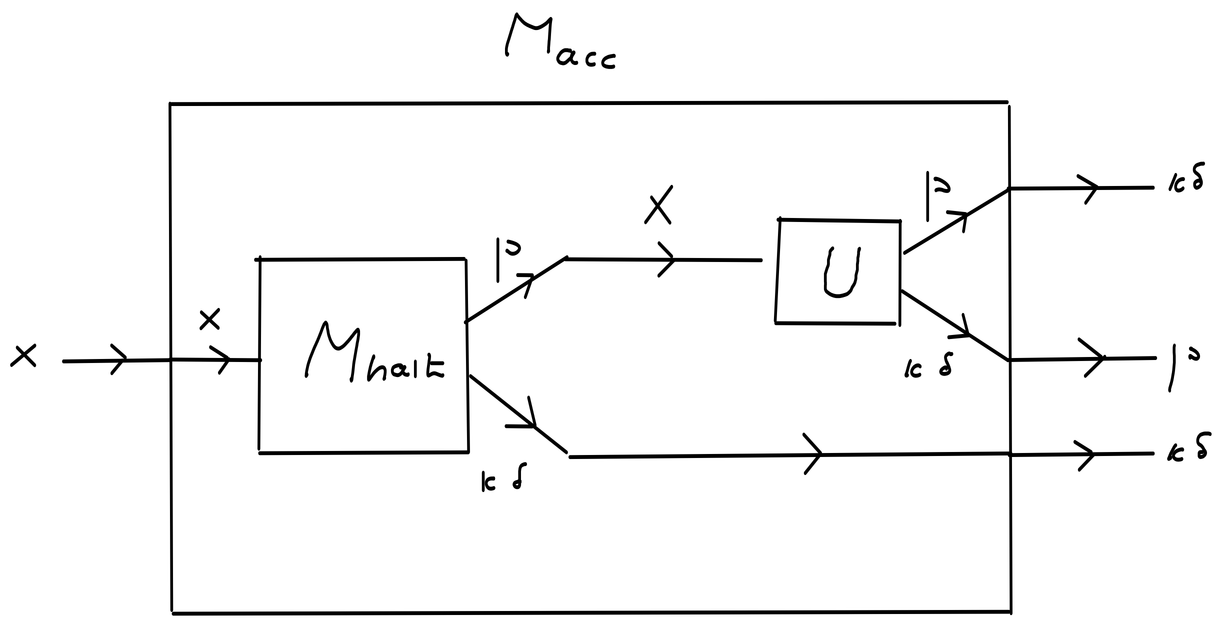
משפט 6.5 L_{halt} לא כריעה

$$L_{\text{halt}} = \left\{ \langle M, w \rangle \;\middle|\; M \text{ עוצרת על } w \right\} \notin R \ .$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי $L_{\text{halt}} \in R$ ותהי M_{halt} מ"ט המכריעה את L_{halt}.

נשתמש ב- M_{halt} כדי לבנות מ"ט M_{acc} המכריעה את L_{acc} (בסתירה לכך ש- $L_{\text{acc}} \notin R$ כפי שהוכחנו במשפט 6.4).



<u>התאור של M_{acc}</u>

$M_{\text{acc}} =$ על קלט x:

1) מריצה את M_{acc} על x.

- אם M_{halt} דוחה $\Leftarrow$ M_{acc} דוחה.
- אם M_{halt} מקבלת $\Leftarrow$ M_{acc} מריצה את U על x ועונה כמוה.

<u>אבחנה</u>

נוכיח כי M_{acc} מכריעה את L_{acc}:

אם $x \in L_{\text{acc}}$

$\Leftarrow$ $x = \langle M, w\rangle$ ו- $\langle w\rangle \in L(M)$

$\Leftarrow$ M_{halt} מקבלת את x וגם U מקבלת את x

$\Leftarrow$ M_{acc} מקבלת את x.

אם $x \notin L_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

מקרה (1): $x \neq \langle M, w\rangle$

$\Leftarrow$ M_{halt} דוחה את x

$\Leftarrow$ M_{acc} דוחה את x.

מקרה (2): $x = \langle M, w\rangle$ ו- $\langle w\rangle \notin L(M)$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

מקרה (א): M לא עוצרת על w $\Leftarrow$ M_{halt} דוחה את x $\Leftarrow$ M_{acc} דוחה את x.

מקרה (ב): M דוחה את w $\Leftarrow$ M_{halt} מקבלת את x אבל U דוחה את x $\Leftarrow$ M_{acc} דוחה את x.

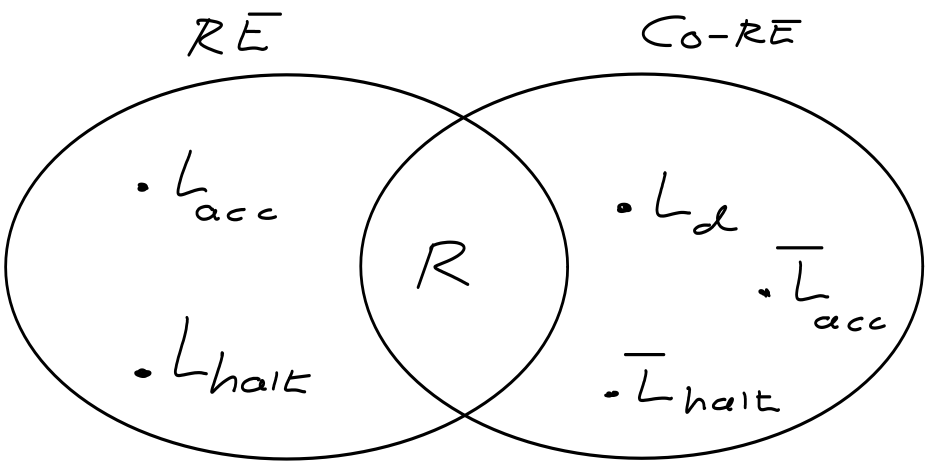
הראנו כי M_{acc} מכריעה את L_{acc} בסתירה לכך ש- $L_{\text{acc}} \notin R$.

לכן $L_{\text{halt}} \notin R$.

■

משפט 6.6

$$\begin{aligned} L_{\text{acc}} \in RE \backslash R \quad &\Rightarrow \quad \bar{L}_{\text{acc}} \notin RE \ , \\ L_{\text{halt}} \in RE \backslash R \quad &\Rightarrow \quad \bar{L}_{\text{halt}} \notin RE \ , \\ L_{\text{d}} \notin RE \backslash R \ . \end{aligned}$$



6.1 מ"ט המחשבת את פונקציה

הגדרה 6.4 מ"ט המחשבת פונקציה

בהינתן פונקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ אומרים כי מ"ט M מחשבת את f אם לכל $x\in\Sigma^*$:

- M מגיעה ל- q_{acc} בסוף החישוב של $f(x)$ וגם
- על סרט הפלט של M רשום $f(x)$.

הערה 6.1

מ"ט שמחשבת פונקציה עוצרת תמיד.

הגדרה 6.5 מ"ט המחשבת פונקציה

בהינתן פונקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ אומרים כי f חישבה אם קיימת מ"ט המחשבת את f.

דוגמה 6.1

$$f_1(x) = xx \ . \tag{6.1}$$

$f_1(x)$ חשיבה.

דוגמה 6.2

$$f_2(x) = \begin{cases} x & \text{זוגי} |x| \\ xx & \text{אי-זוגי} |x| \end{cases} . \tag{6.2}$$

$f_2(x)$ חשיבה.

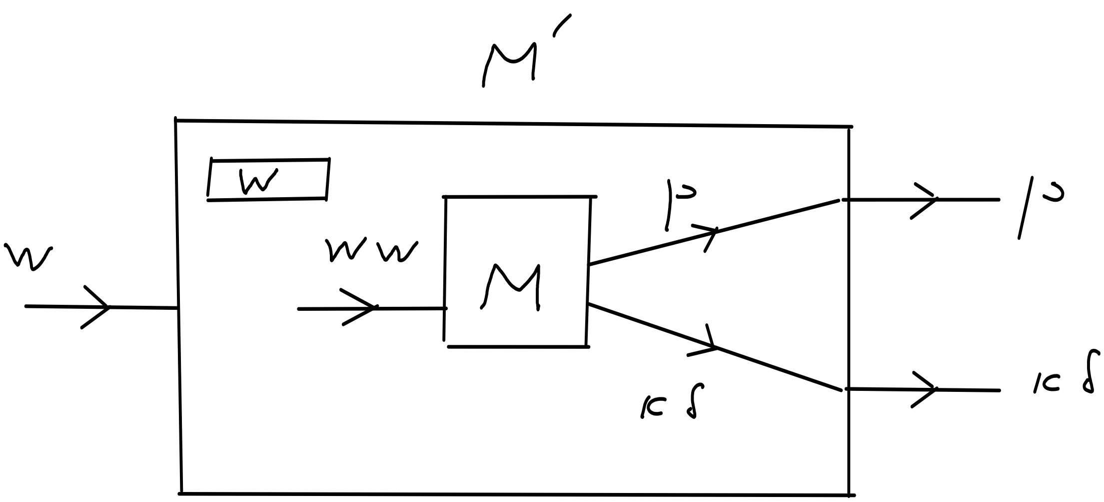
דוגמה 6.3

$$f_3(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M \rangle \\ \langle M^* \rangle & x \neq \langle M \rangle \end{cases} . \tag{6.3}$$

כאשר

- M^* מ"ט שמקבלת כל קלט.
- M' מ"ט המקבלת את השפה

$$L(M') = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; ww \in L(M)\ . \right\}$$



$f_3(x)$ חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שבודקת האם $x = \langle M \rangle$. אם לא, מחזירה קידוד קבוע $\langle M^* \rangle$. ואם כן, מחזירה קידוד $\langle M' \rangle$ ע"י הוספת מעברים המשכפלים את הקלט בתחילת הקידוד $\langle M \rangle$.

דוגמה 6.4

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & x = \langle M \rangle \wedge \langle M \rangle \in L(M) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \tag{6.4}$$

$f_4(x)$ לא חשיבה כי ייתכנו קלטים $x = \langle M \rangle$ ו- M לא עוצרת על $\langle M \rangle$.

6.2 רדוקציות

הגדרה 6.6 רדוקציות

בהינתן שתי שפות $L_1,L_2\subseteq\Sigma^*$ אומרים כי L_1 ניתנת לרדוקציה ל- L_2, ומסמנים

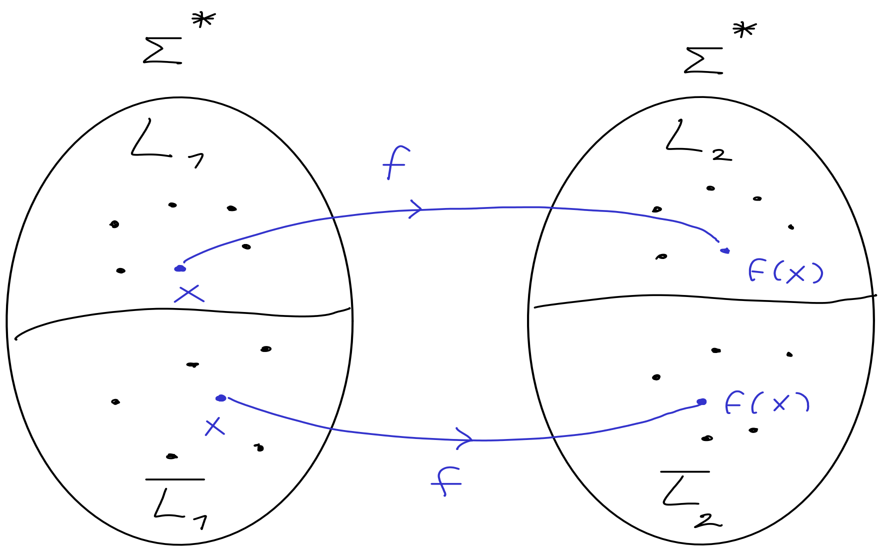
$$L_1\leqslant L_2\ ,$$

אם $\exists$ פונקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ המקיימת:

(1 f חשיבה

(2 לכל $x\in\Sigma^*$:

$$x\in L_1\quad\Leftrightarrow\quad f(x)\in L_2\ .$$



דוגמה 6.5

נתונות השפות

$$L_1=\left\{x\in\{0,1\}^*\ \middle|\ |x|\ \text{זוגי}\right\}\ ,$$
$$L_2=\left\{x\in\{0,1\}^*\ \middle|\ |x|\ \text{אי-זוגי}\right\}\ .$$

הוכיחו כי

$$L_1\leqslant L_2\ .$$

פתרון:

נגדיר את הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|\ \text{זוגי},\\ 10 & |x|\ \text{אי-זוגי}\end{cases}$$

<u>הוכחת הנכונות:</u>

$x\in L_1 \Leftarrow |x|$ זוגי $\Leftarrow f(x)=1 \Leftarrow |f(x)|$ אי-זוגי $f(x)\in L_2$.

$x \notin L_1 \Leftarrow |x|$ אי-זוגי $\Leftarrow f(x) = 10 \Leftarrow |f(x)|$ זוגי $f(x) \notin L_2$.

משפט 6.7 משפט הרדוקציה

לכל שתי שפות $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, אם קיימת רדוקציה

$$L_1 \leqslant L_2$$

אזי התנאים הבאים מתקיימים:

(1) $L_2 \in R \Rightarrow L_1 \in R$

(2) $L_2 \in RE \Rightarrow L_1 \in RE$

(3) $L_1 \notin R \Rightarrow L_2 \notin R$

(4) $L_1 \notin RE \Rightarrow L_2 \notin RE$

הוכחה: מכיוון ש-

$$L_1 \leqslant L_2$$

קיימת פונקציה f חשיבה המקיימת:

$$x \in L_1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_2$$

לכל $x \in \Sigma^*$.

תהי M_f מ"ט המחשבת את f.

(1) נוכיח $L_2 \in R \Rightarrow L_1 \in R$

תהי M_2 מ"ט המכריעה את L_2.

נבנה מ"ט M_1 המכריעה את L_1.

התאור של M_1

$M_1 =$ על קלט x:

1. מחשבת את $f(x)$ בעזרת M_f.
2. מריצה את M_2 על $f(x)$ ועונה כמוה.

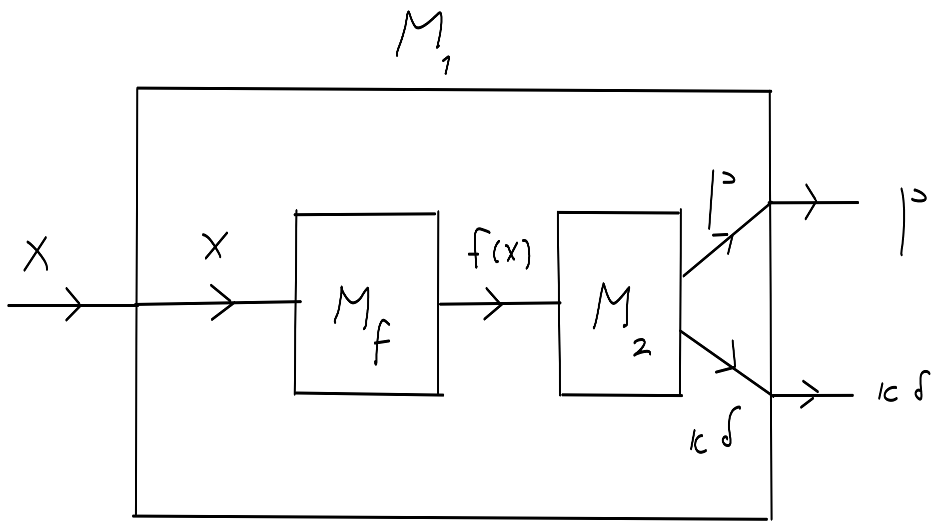
נוכיח כי M_1 מכריעה את L_1.

- אם $x \in L_1 \Leftarrow f(x) \in L_2 \Leftarrow M_2$ מקבלת את $f(x) \Leftarrow M_1$ מקבלת את x.
- אם $x \notin L_1 \Leftarrow f(x) \notin L_2 \Leftarrow M_2$ דוחה את $f(x) \Leftarrow M_1$ דוחה את x.

(2) נוכיח $L_2 \in RE \Rightarrow L_1 \in RE$

תהי M_2 מ"ט המקבלת את L_2.

נבנה מ"ט M_1 המקבלת את L_1.



<u>התאור של M_1</u>

$M_1 =$ על קלט x:

1. מחשבת את $f(x)$ בעזרת M_f.
2. מריצה את M_2 על $f(x)$ ועונה כמוה.

נוכיח כי M_1 מקבלת את L_1:

- אם $x \in L_1 \Rightarrow f(x) \in L_2 \Rightarrow M_2$ מקבלת את $f(x) \Rightarrow M_1$ מקבלת את x.
- אם $x \notin L_1 \Rightarrow f(x) \notin L_2 \Rightarrow M_2$ לא מקבלת את $f(x) \Rightarrow M_1$ לא מקבלת את x.

(2)

■

כלל 6.1

- אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי $L \in RE$, בוחרים שפה אחרת $L' \in RE$ ומראים שקיימת רדוקציה

$$L \leqslant L' \ .$$

לדוגמה:

$$L \leqslant L_{\text{acc}}$$

(כנ"ל לגבי R)

- אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי $L \notin RE$ בוחרים שפה אחרת $L' \notin RE$ ומראים שקיימת רדוקציה

$$L' \leqslant L \ .$$

לדוגמה

$$L_{\mathrm{d}} \leqslant L$$

(כנ"ל לגבי R).