

שיעור 10

שונות

10.1 לכסון אורתוגונית

הגדרה 10.1 מטריצה לכסינה אורתוגונית

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ לכסינה אורתוגונית אן קיימת מטריצה אורתוגונית U ומטריצה אלכסונית D כך ש-

$$A = UDU^{-1} = UDU^t.$$

הגדרה 10.2 מטריצה סימטרית

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ נקראת מטריצה סימטרית אם

$$A = A^t.$$

משפט 10.1 מטריצה לכסינה אורתוגונית היא סימטרית

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ שלכסינה אורתוגונית היא בהכרח מטריצה סימטרית.

הוכחה: נניח כי A לכסינה אורתוגונית.

ז"א קיימת D אלכסונית ו- U אורתוגונית כך ש-

$$A = UDU^{-1} = UDU^t.$$

לפיכך

$$A^t = (UDU^t)^t = (U^t)^t D^t U^t = UDU^t = A.$$

■

משפט 10.2 תנאי מספיק למטריצה סימטרית

מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ היא מטריצה סימטרית אם ורק אם

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$, כאשר $(,)$ המכפלה הפנימית הסטנדרטית של \mathbb{R}^n .

הוכחה: נניח כי A סימטרית. אזי

$$(Ax, y) = (Ax)^t y = x^t A^t y = (x, A^t y) = (x, Ay)$$

נניח כי $(Ax, y) = (x, Ay)$. נרשום

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

כאשר $a_i \in \mathbb{R}^n$ העמודות של המטריצה A .

$$(Ae_i, e_j) = (a_i, e_j) = A_{ji} = A \text{ של } (j, i) \text{ רכיב}$$

$$(e_i, Ae_j) = (e_i, a_j) = A_{ij} = A \text{ של } (i, j) \text{ רכיב}$$

לכן

$$(Ae_i, e_j) = (e_i, Ae_j) \Rightarrow A_{ji} = A_{ij} \Rightarrow A^t = A.$$

ז"א A סימטרית.

כלל 10.1 תכונות של מספרים מרוכבים

- כל מספר $z \in \mathbb{C}$ ניתן לרשום בצורה $z = a + ib$ כאשר $a, b \in \mathbb{R}$.
- $i^2 = -1$.
- נתון מספר מרוכב $z \in \mathbb{C}$ מצורה $z = a + ib$. נגדיר הצמוד של z לפי $\bar{z} = a - ib$.
- $z \in \mathbb{R}$ אם ורק אם $\bar{z} = z$.
- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
- נתון $z \in \mathbb{C}$. הערך מוחלט של z מסומן $|z|$ ומוגדר $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.
- לכל $z, w \in \mathbb{C}$ מתקיים $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.

משפט 10.3 הערכים עצמיים של מטריצה סימטרית ממשיים

אם $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ סימטרית אז כל הערכים עצמיים של A ממשיים.

הוכחה: לפי משפט הפירוק הפרימרי, ל- A יש ערכים עצמיים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (לא בהכרח שונים).

לכל $u = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, הסקלר $a = \bar{u}Au$ ממשי:

$$\begin{aligned} a &= (u^*)^t Au = (u^*)^t A^t u \quad (A \text{ סימטרית}) \\ &= (Au^*)^t u = u^t (Au^*) \quad (10.2 \text{ משפט}) \\ &= u^t A^* u^* \quad (A \text{ ממשי}) \\ &= a^*. \end{aligned}$$

נניח כי $u = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ ווקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ_i . אזי

$$\bar{u}Az = \bar{u}\lambda_i u = \lambda_i \bar{u}u = \lambda_i (\bar{u}, u) = \lambda_i (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)$$

u ווקטור עצמי $u \neq 0 \Leftrightarrow \exists z_k \neq 0 \Leftrightarrow (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2) \neq 0$.
בנוסף $(|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)$ ממשי, ו- $\bar{u}Az$ ממשי. לכן λ_i בהכרח ממשי.

משפט 10.4 מטריצה ממשית לכסינה אורתוגונלית אם"ס היא סימטרית

נתונה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה ממשית. A לכסינה אורתוגונלית אם ורק אם היא סימטרית.

הוכחה: נניח כי A לכסינה אורתוגונלית.
ז"א קיימת D אלכסונית ו- U אורתוגונלית כך ש-

$$A = UDU^{-1} = UDU^t.$$

אזי

$$A^t = (UDU^t)^t = (U^t)^t D^t U^t = UDU^t = A.$$

נניח כי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ סימטרית. נוכיח באמצעות אינדוקציה על n כי היא לכסינה אורתוגונלית.

שלב הבסיס

עבור $A \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$, כלומר $A = a$ כאשר $a \in \mathbb{R}$ סקלר.

$$A = a = UDU^t$$

כאשר $U = (1) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ אורתוגונלית ו- $D = (a) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ אלכסונית.

שלב האינדוקציה

נניח כי כל מטריצה סימטרית מסדר $(n-1) \times (n-1)$ לכסינה אורתוגונלית (ההנחת האינדוקציה).

לכל מטריצה קיימת לפחות ווקטור עצמי אחד.

לכן נניח כי v_1 ווקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ_1 ונניח כי $\|v_1\| = 1$.
 A סימטרית לכן $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ (משפט 10.3).
נשלים $\{v_1\}$ לבסיס של \mathbb{R}^n :

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

נבצע התהליך של גרם שמידט כדי להמיר בסיס זה לבסיס אורתוגונלי של \mathbb{R}^n :

$$B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\},$$

כאשר $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2 - \frac{(v_2, u_1)}{\|u_1\|^2} u_1$ וכן הלאה.
נגדיר

$$P = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ u_1 & u_2 & & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

נשים לב כי P היא המטריצה המעבר מבסיס הסטנדרטי לבסיס B .
 $P^{-1} = P^t$ אורתוגונלי לכן

נתבונן על המטריצה $P^{-1}AP = P^tAP$. נשים לב כי היא סימטרית

$$(P^tAP)^t = P^tA^t(P^t)^t = P^tA^tP = P^tAP.$$

והעמודה הראשונה הינה

$$P^{-1}APe_1 = P^{-1}Au_1 = P^{-1}\lambda_1u_1 = \lambda_1P^{-1}u_1 = \lambda_1[u_1]_B = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

לפיכך $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ כאשר 0 בלוק עם $n-1$ אפסים ו- B מטריצה סימטרית מסדר $(n-1) \times (n-1)$.

לפי ההנחת האינדוקציה B לכסינה אורתוגונלית. ז"א קיימת $U' \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ אורתוגונלית ו- $D' \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ אלכסונית כך ש- $B = U'D'U'^{-1} = U'D'U'^t$.

לכן

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U'D'U'^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U'^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U' \end{pmatrix}^{-1}$$

נכפיל מצד שמאל ב- P ומצד ימין ב- P^{-1} :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U' \end{pmatrix}^{-1} P^{-1}$$

$$\text{נגדיר } U = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U' \end{pmatrix} \text{ ו- } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix} \text{ ז"א}$$

$$A = UDU^{-1}.$$

נשים לב כי U אורתוגונלית ו- D אלכסונית. לפיכך A לכסינה אורתוגונלית.



10.2 שילוש לכיסון של מטריצה לפי פולינום מינימלי

הגדרה 10.3 צמצום של העתקה

נתון מרחב ווקטורי V ונתונה אופרטור $T: V \rightarrow V$. נניח כי $W \subset V$ תת-מרחב T -שמור של V . נניח כי $v \in V$ ווקטור של V .

נגדיר קבוצת פולינומים $S_T(v, W)$ כך שכל פולינום $g \in S_T(v, W)$ מקיים את התנאי

$$g(T)v \in W.$$

הקבוצה $S_T(v, W)$ תקרא המנחה T .

הגדרה 10.4

נתון $S_T(v, W)$. הפולינום המתוקן של דרגה הקטנה ביותר ב- $S_T(v, W)$ נקרא מנחה- T מינימלי.

משפט 10.5

נניח כי T conductor של v ונניח כי g המנחה- T מינימלי.

$$f \in S_T(v, W) \Leftrightarrow g \mid f.$$

הוכחה: נניח כי $f \in S_T(v, W)$. נוכיח כי $g \mid f$ דרך השלילה. ז"א נניח כי $g \nmid f$. לפי כלל אוקליד,

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) - q(x)g(x) = r(x).$$

כאשר $\deg(r) < \deg(g) \leq \deg(f)$.

נניח כי $f, g \in S_T(v, W)$ לכן $f(T)v \in W$ ו- $g(T)v \in W$. לכן גם $q(T)g(T)v \in W$ בגלל ש- W תת-מרחב T שמור. לפיכך $r(T)v \in W$ אך $\deg(r) < \deg(g)$, בסתירה לכך ש- g הפולינום של דרגה קטנה ביותר המקיים $g(T)v \in W$.

נניח כי $f \mid g$.
 $f(T)v = q(T)g(T)v \Leftarrow f(x) = q(x)g(x) \Leftarrow$
 $g(T)v \in W$ לכן $q(T)g(T)v \in W$ בגלל ש- W תת-מרחב T -שמור.
 לכן $f(T)v \in W$.

משפט 10.6

נניח כי T -conductor $S_T(v, W)$. נניח כי g המנחה- T מינימלי ו- m_T הפולינום המינימלי של T . אז $g \mid m_T$.

הוכחה: נוכיח כי $g \mid m_T$ דרך השלילה.
 נניח כי $g \nmid m_T$. לפי כלל אוקליד:

$$m_T(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

$$\deg(r) < \deg(g) \leq \deg(m_T)$$

$$0 = m_T(T) = g(T)q(T) + r(T) = 0 + r(T) \Rightarrow r(T) = 0$$

בסתירה לכך כי $m_T(T)$ הפולינום המינימלי.

משפט 10.7

$$m_T \in S_T(v, W)$$

הוכחה: נניח כי $g(x)$ המנחה- T מינימלי. לפי משפט 10.6, $g \mid m_T$.
 לכן לפי משפט 10.5, $m_T \in S_T(v, W)$.

משפט 10.8

נניח כי V מרחב ווקטורי $T : V \rightarrow V$ אופרטור. נניח כי $W \subset V$ תת מרחב T שמור. קיים $\alpha \in V \notin W$ כך ש-

$$(T - \lambda)\alpha \in W$$

כאשר λ ערך עצמי של T .

הוכחה:

נוכיח כי המנחה- T המינימלי של α ל- W הוא פולינום לינארי.

נניח כי β כל ווקטור שב- V אבל לא ב- W , כלומר $\beta \in V \notin W$. יהי g המנחה- T המינימלי של β ל- W .
 משפט 10.6 $g \mid m_T \Leftarrow g(x) = (x - \lambda_i)h(x) \Leftarrow$ כאשר λ_i ערך עצמי של T ו- $h(x)$ פולינום.

g הפולינום של דרגה קטנה ביותר כך ש- $g(T)\beta \in W$ לכן $\alpha = h(T)\beta \notin W$.

לכן

$$(T - \lambda_i I)\alpha = (T - \lambda_i)h(T)\beta = g(T)\beta \in W$$

בגלל ש- $g(T)$ המנחה- T המינימלי של β .

משפט 10.9

T לכסינה אם ורק אם m_T מתפרק לגורמים לינאריים שונים:

$$m_T(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n).$$

הוכחה: נניח כי $m_T(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$.

נניח כי $W = \text{span}\{u_1, \dots, u_k\}$ כאשר u_1, \dots, u_k הווקטורים עצמיים של T , ו- $W \neq V$. לפי משפט 10.8 קיים $\alpha \notin W$ וערך עצמי λ_i של T כך שהווקטור $\beta = (T - \lambda_i I)\alpha \in W$.

מכיוון ש- $\beta \in W$ אז $\beta = u_1 + \dots + u_k$, כאשר $Tu_i = \lambda_i u_i$ לכל $1 \leq i \leq k$.

לכן

$$h(T)\beta = h(\lambda_1)u_1 + \dots + h(\lambda_k)u_k \in W. \quad (*)$$

לכל פולינום h .

$$m_T(x)\beta = (x - \lambda_i)q(x) \quad (**)$$

כאשר $q(x)$ פולינום.

לפי ממשט השארית,

$$q(x) = (x - \lambda_i)h(x) + q(\lambda_i) \quad (***)$$

כאשר $q(x)$ פולינום. לכן

$$q(T)\alpha - q(\lambda_i)\alpha = h(T)(T - \lambda_i I)\alpha = h(T)\beta \quad (****)$$

לפי (*), $h(T)\beta \in W$.

מכיוון ש-

$$0 = m_T(T)\alpha = (T - \lambda_i)q(T)\alpha,$$

כלומר $q(T)\alpha$ ווקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי λ_i , אז $q(T)\alpha \in W$.

לכן לפי (****), $q(\lambda_i)\alpha \in W$.

אבל $\alpha \notin W$, לכן $q(\lambda_i) = 0$.

אז לפי (**), לא כל השורשים של m_T שונים. סתירה!

משפט 10.10

T ניתנת לשילוש אם ורק אם m_T מתפרק לגורמים לינאריים (לא בהכרח שונים):

$$m_T(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \cdots (x - \lambda_k)^{r_k} .$$

הוכחה: נניח כי $m_T(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \cdots (x - \lambda_k)^{r_k}$ אנחנו רוצים למצוא בסיס β_1, \dots, β_n כך ש-

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

נדרוש כי

$$T(\beta_i) = a_{1i}\beta_1 + \cdots + a_{ii}\beta_i .$$

ז"א $T(\beta_i) \in \{\beta_1, \dots, \beta_i\}$

יהי $W = \{0\} \subset V$

לפי משפט 10.8 $\exists \alpha \in V \setminus \{0\}$ כך ש- $(T - \lambda_1)\alpha \in \{0\}$ ז"א

$$(T - \lambda_1 I)\alpha = 0 \Rightarrow T\alpha = \lambda_1 \alpha ,$$

ז"א α ווקטור עצמי של T .

$$[T(\beta_1)]_{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ נבחר } \beta_1 = \alpha \text{ אז}$$

יהי $W_1 = \{\beta_1\} \subset V$. נשים לב כי W_1 תת מרחב T שמור.

לפי משפט 10.8 $\exists \alpha \in V \setminus W_1$ כך ש- $(T - \lambda_2)\alpha \in W_1$ ז"א

$$(T - \lambda_2 I)\alpha = k\beta_1 \Rightarrow T(\alpha) = k\beta_1 + \lambda_2 \alpha ,$$

נבחר $\beta_2 = \alpha$ אז $T(\beta_2) = k\beta_1 + \lambda_2 \beta_2$

שימו לב, $\beta_2 \notin W_1$ ו- $\beta_1 \in W_1$ לכן $\{\beta_1, \beta_2\}$ בלתי תלויים לינארית.

$$[T(\beta_2)]_{\beta} = \begin{pmatrix} k \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

נמשיך עם התהליך הזה:

יהי $W_i = \{\beta_1, \dots, \beta_i\} \subset V$. נשים לב כי W_i תת מרחב T שמור.

לפי משפט 10.8 $\exists \alpha \in V \setminus W_i$ כך ש- $(T - \lambda_j)\alpha \in W_i$ ז"א

$$(T - \lambda_j I)\alpha = c_1\beta_1 + \cdots + c_i\beta_i \Rightarrow T(\alpha) = c_1\beta_1 + \cdots + c_i\beta_i + \lambda_j \alpha .$$

שימו לב, $\alpha \notin W_i$ לכן α בלתי תלוי לינאריית מ- $\{\beta_1, \dots, \beta_i\}$.

נבחר $\beta_{i+1} = \alpha$

$$.[T(\beta_{i+1})]_{\beta} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \lambda_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

נניח כי T ניתנת לשילוש.

\Leftarrow קיים בסיס עבורו המטריצה המייצגת $[T]$ לכסין.

\Leftarrow הפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים (לא בהכרח שונים).

$m \Leftarrow m \mid p$ מתפרק לגורמים לינאריים (לא בהכרח שונים).

