

# שיעור 1

## תורת המספרים

### 1.1 משפט החילוק של אוקלידס

#### הגדרה 1.1 מספר שלם שמחלק מספר שלם אחר

יהיו  $a, b$  מספרים שלמים. אומרים כי " $b$  מחלק את  $a$ " אם קיים מספר שלם  $q$  כך ש-

$$a = qb.$$

כלומר  $\frac{a}{b}$  שווה למספר שלם  $q$ .

הסימון  $b \mid a$  אומר כי " $b$  מחלק את  $a$ ".

#### דוגמה 1.1

(א)  $3 \mid 6$  בגלל שקיים מספר שלם  $q = 2$  כך ש-  $6 = 3q$ .

(ב)  $7 \mid 42$  בגלל שקיים מספר שלם  $q = 6$  כך ש-  $42 = 7q$ .

(ג)  $5 \nmid 8$  בגלל שלא קיים מספר שלם  $q$  כך ש-  $8 = 5q$ .

#### משפט 1.1 תכונות של חילוק שלמים

יהיו  $a, b, d$  שלמים.

(1) אם  $d \mid a$  ו-  $d \mid b$  אזי  $d \mid (a + b)$ .

(2) יהיו  $x, y$  שלמים. אם  $d \mid a$  ו-  $d \mid b$  אזי  $d \mid (xa + yb)$ .

(3) אם  $a \mid b$  ו-  $a \mid a$  אזי  $a = \pm b$ .

הוכחה:

(1)

$$\left. \begin{array}{l} d \mid a \Rightarrow a = a'd \\ d \mid b \Rightarrow b = b'd \end{array} \right\} \Rightarrow a \pm b = d(a' \pm b') \Rightarrow d \mid (a + b).$$

(2)

$$\left. \begin{array}{l} d \mid a \Rightarrow a = a'd \\ d \mid b \Rightarrow b = b'd \end{array} \right\} \Rightarrow ax + by = d(a'x + b'y) \Rightarrow d \mid (ax + by).$$

(3)

$$\left. \begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow b = ca \\ b \mid a \Rightarrow a = c'b \end{array} \right\} \Rightarrow b = ca = cc'b \Rightarrow cc' = 1.$$

$c$  ו- $c'$  הם שלמים לכן  $cc' = 1$  אם ורק אם  $c = 1 = c'$  או  $c = -1 = c'$ . לפיכך

$$b = \pm a.$$

## הגדרה 1.2 השארית

יהיו  $a, b > 0$  שלמים. השארית של  $a$  בחלוקה ב- $b$  מסומנת  $a \bmod b$  ומוגדרת

$$a \bmod b = a - b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor.$$

סימון חלופי לשארית בחלוקת  $a$  ב- $b$ :  $a \% b$ .

**הערה:** השארית מוגדרת באופן חד משמעי עובר שלמים חיוביים בלבד!

## דוגמה 1.2

$$43 \bmod 10 = 43 - 10 \cdot \left\lfloor \frac{43}{10} \right\rfloor = 43 - 10(4) = 3,$$

$$13 \bmod 4 = 13 - 4 \cdot \left\lfloor \frac{13}{4} \right\rfloor = 13 - 4(3) = 1,$$

$$8 \bmod 2 = 8 - 2 \cdot \left\lfloor \frac{8}{2} \right\rfloor = 8 - 2(4) = 0.$$

## משפט 1.2 משפט החילוק של אוקלידס

יהיו  $a, b$  מספרים שלמים. אם  $b \neq 0$  ו- $a \geq b$  אז קיימים מספרים שלמים  $q, r$  יחודיים כך ש-

$$a = qb + r \quad (1.1)$$

כאשר  $0 \leq r < |b|$ . השלם  $q$  נקרא **המנה** של  $a$  בחלוקה ב- $b$  ו- $r$  נקרא **השארית** של  $a$  בחלוקה ב- $b$ . המשוואה (1.1) נקרא **הפירוק מנה-שארית** של השלמים  $a$  ו- $b$ .

ההוכחה עצמה היא לא חלק של הקורס.

## דוגמה 1.3

יהיו  $a = 46, b = 8$ . המנה והשארית הם  $q = 5, r = 6$  והפירוק מנה-שארית הוא

$$46 = 5(8) + 6.$$

## דוגמה 1.4

יהיו  $a = -46, b = 8$ . המנה והשארית הם  $q = -6, r = 2$  והפירוק מהנ-שארית הוא

$$-46 = (-6)(8) + 2.$$

### משפט 1.3 שיטה מעשית לחישוב הפירוק מנה-שארית

יהיו  $a, b$  שלמים (עם  $b \neq 0$ ). אזי המנה  $q$  והשארית  $r$  במשפט החילוק של אוקלידס ניתנים כך:

$$(1) \text{ אם } a > 0, b > 0 \text{ אז } q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \text{ ו- } r = a \bmod b$$

$$(2) \text{ אם } a > 0, b < 0 \text{ אז } q = -\left\lfloor \frac{a}{|b|} \right\rfloor \text{ ו- } r = a \bmod |b|$$

$$(3) \text{ אם } a < 0, b > 0 \text{ אז } q = -\left\lfloor \frac{|a|}{b} \right\rfloor - 1 \text{ ו- } r = b - |a| \bmod b$$

$$(4) \text{ אם } a < 0, b < 0 \text{ אז } q = \left\lfloor \frac{|a|}{|b|} \right\rfloor + 1 \text{ ו- } r = |b| - |a| \bmod |b|$$

**הוכחה:** נוכיח בכל אחד מארבעת המקרים.

**מצב (1)** נניח  $a > 0, b > 0$ . לפי משפט החילוק של אוקלידס קיימים שלמים  $q, r$  כך ש-

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < b. \quad (*)$$

נחלק ב- $b$ :

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}.$$

מכיוון ש- $0 \leq r < b$ , מתקיים  $0 \leq \frac{r}{b} < 1$ , ולכן

$$q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor.$$

הצבה חזרה ב- $(*)$  נותנת

$$r = a - b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = a \bmod b.$$

**מצב (2)** נניח  $a > 0, b < 0$ . לפי משפט החילוק של אוקלידס עבור הלשמים  $a, |b|$  קיימים שלמים  $\bar{q}, \bar{r}$  כך ש:

$$a = \bar{q}|b| + \bar{r}, \quad 0 \leq \bar{r} < |b|.$$

$$\text{מהמקרה הראשון: } \bar{q} = \left\lfloor \frac{a}{|b|} \right\rfloor \text{ ו- } \bar{r} = a \bmod |b|. \text{ נציב } |b| = -b$$

$$a = \bar{q}(-b) + \bar{r} \Rightarrow a = -\bar{q}b + \bar{r}. \quad (\#)$$

מצד שני ממשפט החילוק עבור השלמים  $a, b$  (כלומר  $b$  בלי הערך מוחלט) קיימים שלמים  $q, r$  כך ש:

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

השוואה של משוואה  $(\#)$  ל- $a = qb + r$  נותנת

$$q = -\bar{q} = -\left\lfloor \frac{a}{|b|} \right\rfloor, \quad r = \bar{r} = a \bmod |b|.$$

**מצב 3** נניח  $a < 0, b > 0$ . ממשפט החילוק עבור השלמים  $b, |a|$  קיימים שלמים  $\bar{q}, \bar{r}$  כך ש:

$$|a| = \bar{q}b + \bar{r}, \quad 0 \leq \bar{r} < b.$$

מהמקרה הראשון:

$$\bar{q} = \left\lfloor \frac{|a|}{b} \right\rfloor, \quad \bar{r} = |a| \bmod b.$$

נציב  $|a| = -a$ :

$$-a = \bar{q}b + \bar{r} \Rightarrow a = -\bar{q}b - \bar{r}.$$

כעת השארית  $-\bar{r}$  שלילית, ואינה עומדת בתנאי  $0 \leq r < b$ . לכן נוסיף ונחסר מנה אחת שלמה  $b$ :

$$a = -\bar{q}b - \bar{r} = -(\bar{q} + 1)b + (b - \bar{r}). \quad (**)$$

כך קיבלנו את הצורה הנדרשת. מצד שני עבור השלמים  $b, a$  (כלומר  $a$  בלי הערך מוחלט) ממשפט החילוק קיימים שלמים  $q, r$  עבורם

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < b.$$

השוואה של זה עם משוואה (\*\*) נותנת:

$$q = -\left\lfloor \frac{|a|}{b} \right\rfloor - 1, \quad r = b - |a| \bmod b.$$

**מצב 4** נניח  $a < 0, b < 0$ . לפי ממשפט החילוק עבור  $|a|, |b|$  קיימים שלמים  $\bar{q}, \bar{r}$  כך ש:

$$|a| = \bar{q}|b| + \bar{r}, \quad 0 \leq \bar{r} < |b|.$$

מ-(1) נקבל

$$\bar{q} = \left\lfloor \frac{|a|}{|b|} \right\rfloor, \quad \bar{r} = |a| \bmod |b|.$$

נציב  $|a| = -a, |b| = -b$ :

$$-a = -\bar{q}b + \bar{r} \Rightarrow a = \bar{q}b - \bar{r}.$$

כמו קודם נוסיף ונחסר  $|b|$  כדי להפוך את השארית לחיובית:

$$a = \bar{q}b - |b| + |b| - \bar{r}$$

$$\Rightarrow a = \bar{q}b + b + |b| - \bar{r}$$

$$\Rightarrow a = (\bar{q} + 1)b + |b| - \bar{r}. \quad (***)$$

מצד שני ממשפט החילוק עבור השלמים  $b, a$  (לא הערכים מוחלטים שלהם) קיימים שלמים  $q, r$  עבורם:

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

השוואה של  $a = qb + r$  למשוואה (\*\*\*) נותנת:

$$q = \bar{q} + 1 = \left\lfloor \frac{|a|}{|b|} \right\rfloor + 1, \quad r = |b| - \bar{r} = |b| - |a| \bmod |b|.$$

לסיכום, מתקבלת הטבלה הבאה:

מצב	סימן $a$	סימן $b$	מנה $q$	שארית $r$
1	+	+	$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$	$a \bmod b$
2	+	-	$-\left\lfloor \frac{a}{ b } \right\rfloor$	$a \bmod  b $
3	-	+	$-\left\lfloor \frac{ a }{b} \right\rfloor - 1$	$b -  a  \bmod b$
4	-	-	$\left\lfloor \frac{ a }{ b } \right\rfloor + 1$	$ b  -  a  \bmod  b $

## דוגמה 1.5

מצאו את הפירוק מנה-שארית של השלמים הבאים:

א)  $a = 46, b = 8$

ב)  $a = -46, b = 8$

ג)  $a = 101, b = -7$

ד)  $a = -151, b = -12$

## פתרון:

א) במקרה זה  $a > 0, b > 0$  אז

$$q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{46}{8} \right\rfloor = 5, \quad r = a \bmod b = a - b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = 46 - 8 \left\lfloor \frac{46}{8} \right\rfloor = 6,$$

לכן:

$$46 = (5)(8) + 6.$$

ב) במקרה זה  $a < 0, b > 0$  אז

$$q = -\left\lfloor \frac{|a|}{b} \right\rfloor - 1 = -\left\lfloor \frac{46}{8} \right\rfloor - 1 = -6$$

-1

$$r = b - |a| \bmod b$$

$$= b - \left( |a| - b \left\lfloor \frac{|a|}{b} \right\rfloor \right)$$

$$= 8 - \left( 46 - 8 \left\lfloor \frac{46}{8} \right\rfloor \right)$$

$$= 8 - (46 - 8(5))$$

$$= 2.$$

לכן:

$$-46 = (-6)(8) + 2.$$

(ג) במקרה זה  $a > 0, b < 0$  אז

$$q = - \left\lfloor \frac{a}{|b|} \right\rfloor = - \left\lfloor \frac{101}{7} \right\rfloor = -14 .$$

-ו

$$r = a \bmod |b| = a - |b| \left\lfloor \frac{a}{|b|} \right\rfloor = 101 - 7 \left\lfloor \frac{101}{7} \right\rfloor = 101 - 7(14) = 3 .$$

לכן:

$$101 = (-14)(-7) + 3 .$$

(ד) במקרה זה  $a < 0, b < 0$  אז

$$q = \left\lfloor \frac{|a|}{|b|} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{151}{12} \right\rfloor + 1 = 12 + 1 = 13 .$$

-ו

$$\begin{aligned} r &= |b| - |a| \bmod |b| \\ &= |b| - \left( |a| - |b| \left\lfloor \frac{|a|}{|b|} \right\rfloor \right) \\ &= 12 - \left( 151 - 12 \left\lfloor \frac{151}{12} \right\rfloor \right) \\ &= 12 - (151 - 12(12)) \\ &= 12 - 7 \\ &= 5 . \end{aligned}$$

לכן:

$$-151 = (13)(-12) + 5 .$$



## 1.2 מספרים ראשוניים

### הגדרה 1.3 מספר ראשוני

מספר ראשוני הוא מספר שלם וחיובי  $p \geq 2$  עבורו המחלקים היחידים שלו הם 1 ו- $p$  בלבד. ז"א  $p$  ראשוני אם התנאי הבא מתקיים:

$$a \mid p \iff a = 1 \vee p .$$

### משפט 1.4 משפט הפירוק לראשוניים

כל מספר טבעי  $a \geq 2$  הוא מספר ראשוני או שווה למכפלה של מספרים ראשוניים. ז"א לכל מספר טבעי  $a \geq 2$  קיימים טבעיים  $e_1, \dots, e_n$  עבורם

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n}$$

כאשר  $p_1, \dots, p_n$  מספרים ראשוניים.

## 1.6 דוגמה

הפירוק לראשוניים של 60 הוא:

$$60 = 2^2 \times 3^2 \times 5 ,$$

## 1.7 דוגמה

הפירוק לראשוניים של 98 הוא:

$$98 = 2^1 \times 7^2 .$$

### הוכחה:

• נניח בשלילה שהטענה לא נכונה. אזי קיים לפחות מספר טבעי אחד שלא ראשוני וגם לא שווה למכפלה של ראשוניים.

• יהי  $m \geq 2$  הטבעי הקטן ביותר שלא מקיים הטענה זו. (הוא הדוגמה הנגדית הקטנה ביותר).

• אזי  $m$  לא ראשוני וגם לא שווה למכפלת ראשוניים.

• לכן  $m$  פריק, ז"א קיימים טבעיים  $2 \leq a < m$ ,  $2 \leq b < m$  כך ש:

$$m = ab .$$

•  $m$  הוא הטבעי הקטן ביותר מסוג זה שמפריך את הטענה בעוד  $a, b$  הם קטנים ממש מ- $m$  אז  $a$  ו- $b$  בהכרח מקיימים את הטענה: ז"א  $a$  הוא או ראשוני או שווה למכפלת ראשוניים, ואותו דבר עבור  $b$ .

• לכן קיימים טבעיים  $e_1, \dots, e_n$  עבורם

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n}$$

כאשר  $p_1, \dots, p_n$  מספרים ראשוניים וקיימים טבעיים  $f_1, \dots, f_n$  עבורם

$$b = q_1^{f_1} q_2^{f_2} \dots q_n^{f_n}$$

כאשר  $q_1, \dots, q_n$  מספרים ראשוניים.

• מכאן

$$m = ab = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n} q_1^{f_1} q_2^{f_2} \dots q_n^{f_n} .$$

לכן  $m$  שווה למכפלה של מספרים ראשוניים, בסתירה לכך ש- $m$  לא שווה למכפלה של ראשוניים!



## משפט 1.5 קיימים אינסוף מספרים ראשוניים

קיימים אינסוף מספרים ראשוניים.

**הוכחה:** נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  הוא הקבוצה של כל הראשוניים שקיימים וקבוצה זו נוצרת סופי.

נגדיר השלם  $m = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ .

לפי משפט הפירוק לראשוניים (ראו משפט 1.4)  $m$  הוא ראשוני או שווה למכפלה של ראשוניים.

לפי ההנחה ההתחלתית שלנו, אין מצב ש- $m$  יכול להיות מספר ראשוני בגלל ש- $m$  גדול ממש מכל הראשוניים

בקבוצת כל ראשוניים  $P$ . כלומר,  $m > p_i$  לכל  $1 \leq i \leq n$ .

גם לא קיים מספק ראשוני  $p_i$  אשר מחלק את  $m$ . הרי

$$m \pmod{p_i} = 1 \Rightarrow p_i \nmid m .$$

הגענו לסתירה להמשפט הפירוק לראשוניים. לכן קיימים אינסוף מספרים ראשוניים.



## 1.3 המחלק המשותף הגדול ביותר

### הגדרה 1.4 המחלק המשותף הגדול ביותר (gcd).

יהיו  $a, b$  שלמים. המחלק המשותף הגדול ביותר של  $a$  ו- $b$  מסומן  $\gcd(a, b)$  ומוגדר להיות השלם החיובי הגדול ביותר שמחלק גם  $a$  וגם  $b$ .

הסימון  $\gcd$  מנובע מהשם אנגלית "greatest common divisor".

### דוגמה 1.8

$$\gcd(2, 6) = 2 ,$$

$$\gcd(3, 6) = 3 ,$$

$$\gcd(24, 5) = 1 ,$$

$$\gcd(20, 10) = 10 ,$$

$$\gcd(14, 12) = 2 ,$$

$$\gcd(8, 12) = 4 .$$

### הגדרה 1.5 כפולה המשותפת הקטנה ביותר

יהיו  $a, b$  שלמים. הכפולה המשותפת הקטנה ביותר מסומנת  $\text{lcm}(a, b)$  ומוגדרת להיות השלם החיובי הקטן ביותר עבורו גם  $a$  וגם  $b$  מחלקים אותו.

הסימון  $\text{lcm}$  מנובע מהשם אנגלית "lowest common multiple".

### דוגמה 1.9

$$\text{lcm}(6, 21) = 42 ,$$

$$\text{lcm}(3, 6) = 6 ,$$

$$\text{lcm}(24, 5) = 120 ,$$

$$\text{lcm}(20, 10) = 20 ,$$

$$\text{lcm}(14, 12) = 84 ,$$

$$\text{lcm}(8, 12) = 24 .$$



## הגדרה 1.6 מספרים זרים

יהיו  $a, b$  שלמים. אומרים כי  $a$  ו- $b$  מספרים זרים אם

$$\gcd(a, b) = 1.$$

כלומר, אין אף מספר גדול מאחד שמחלק את שניהם.

## משפט 1.6 שיטת פירוק לראשוניים לחישוב gcd

יהיו  $a, b$  שלמים חיוביים כך שהפירוק לראשוניים שלהם הם:

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n}, \quad b = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_n^{f_n}$$

אז ה-  $\gcd(a, b)$  הינו

$$\gcd(a, b) = p_1^{\min(e_1, f_1)} p_2^{\min(e_2, f_2)} \dots p_k^{\min(e_n, f_n)}.$$

**הוכחה:** נסמן  $d = p_1^{\min(e_1, f_1)} p_2^{\min(e_2, f_2)} \dots p_n^{\min(e_n, f_n)}$ . ראשית נראה כי  $d \mid a$  וגם  $d \mid b$ .

$$\begin{aligned} a &= p_1^{e_1} \dots p_i^{e_i} \dots p_n^{e_n} \\ &= (p_1^{e_1 - \min(e_1, f_1)} \dots p_i^{e_i - \min(e_i, f_i)} \dots p_n^{e_n - \min(e_n, f_n)}) (p_1^{\min(e_1, f_1)} \dots p_i^{\min(e_i, f_i)} \dots p_n^{\min(e_n, f_n)}) \\ &= qd \end{aligned}$$

כאשר  $q = p_1^{e_1 - \min(e_1, f_1)} \dots p_i^{e_i - \min(e_i, f_i)} \dots p_n^{e_n - \min(e_n, f_n)}$ . החזקה  $e_i - \min(e_i, f_i) \geq 0$  אז  $q$  הוא מספר שלם. אזי  $d \mid a$ .

באופן דומה אפשר להוכיח שגם  $d \mid b$ .

הוכחנו כי  $d$  הוא מחלק משותף של  $a$  ו- $b$ . כעת נראה כי  $d$  הוא המחלק המשותף הגדול ביותר.

נניח בשלילה שקיים  $c$  שלם כך ש-  $c \mid a$  ו-  $c \mid b$  ו-  $c > d$ . כלומר נניח שקיים מחלק משותף  $c$  של  $a$  ושל  $b$  שגדול יותר מ- $d$ . מכיוון ש-  $c \mid a$  ו-  $c \mid b$  אז בפירוק לראשוניים של  $c$  מופיע רק אותם ראשוניים  $\{p_1, \dots, p_n\}$  שמופיעים בפירוקים של  $a$  ושל  $b$ . לכן יש לנו:

$$c = p_1^{g_1} \dots p_i^{g_i} \dots p_n^{g_n}.$$

מכיוון ש-  $c \mid a$  אז  $g_i \leq e_i$  לכל  $i$ , ומכיוון ש-  $c \mid b$  אז  $g_i \leq f_i$  לכל  $i$ . לכן

$$g_i \leq \min(e_i, f_i) \quad \text{לכל } i.$$

לפיכך

$$c = p_1^{g_1} \dots p_i^{g_i} \dots p_n^{g_n} \leq p_1^{\min(e_1, f_1)} \dots p_i^{\min(e_i, f_i)} \dots p_n^{\min(e_n, f_n)} = d$$

ז"א  $c \leq d$  בסתירה לכך ש-  $c > d$ .

## דוגמה 1.10

מצאו את  $\gcd(19200, 320)$ .

הפירוקים לראשוניים של 19200 ושל 320 הם

$$19200 = 2^8 3^1 5^2, \quad 320 = 2^6 5^1 = 2^6 3^0 5^1.$$

לכן

$$\gcd(19200, 320) = 2^{\min(8,6)} 3^{\min(1,0)} 5^{\min(2,1)} = 2^6 3^0 5^1 = 320.$$



### דוגמה 1.11

מצאו את  $\gcd(154, 36)$ .

### פתרון:

הפירוקים לראשוניים של 154 ושל 36 הם

$$154 = 2^1 7^1 11^1, \quad 36 = 2^2 3^2.$$

נרשום את 154 ו-36 כמכפלות של אותם ראשוניים על ידי הוספת חזקות של 0:

$$154 = 2^1 3^0 7^1 11^1, \quad 36 = 2^2 3^2 7^0 11^0.$$

$$\gcd(154, 36) = 2^{\min(1,2)} 3^{\min(0,2)} 7^{\min(1,0)} 11^{\min(1,0)} = 2^1 3^0 7^0 11^0 = 2.$$



### משפט 1.7 gcd של מספרים ראשוניים

יהיו  $p, q$  שני מספרים ראשוניים שונים ( $p \neq q$ ). מתקיים

$$\gcd(p, q) = 1.$$

### הוכחה:

שיטה 1: הוכחה ישירה

$p$  הוא ראשוני אז הפירוק לראשוניים שלו הוא

$$p = p^1 q^0.$$

$q$  הוא ראשוני אז הפירוק לראשוניים שלו הוא

$$q = p^0 q^1.$$

לפי משפט 1.6,

$$\gcd(p, q) = p^{\min(1,0)} q^{\min(0,1)} = p^0 q^0 = 1.$$

שיטה 2: הוכחה בשלילה

יהי  $d = \gcd(p, q)$  ונניח כי  $q < p$ . אז נמצא בטווח של שלמים האפשריים  $1 \leq d \leq q$  נניח בשלילה כי  $d > 1$ .

מכיוון ש- $d$  מחלק משותף של  $p$  ושל  $q$  אז  $d \mid p$  וגם  $d \mid q$ .

$q$  הוא ראשוני אז  $d \mid q$  רק אם  $d = q$ . לכן אם גם  $d \mid p$  אז זה גורר ל- $q \mid p$ , בסתירה לכך ש- $p$  ראשוני.



## משפט 1.8 שיטת פירוק לראשוניים לחישוב lcm

יהיו  $a, b$  שלמים חיוביים כך שהפירוק לראשוניים שלהם הם:

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n}, \quad b = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_n^{f_n}.$$

ה-  $\text{lcm}(a, b)$  נתונה על ידי הנוסחה

$$\text{lcm}(a, b) = p_1^{\max(e_1, f_1)} p_2^{\max(e_2, f_2)} \dots p_n^{\max(e_n, f_n)}$$

**הוכחה:** נסמן  $D = p_1^{\max(e_1, f_1)} p_2^{\max(e_2, f_2)} \dots p_n^{\max(e_n, f_n)}$ . ראשית נראה כי  $a \mid D$  וגם  $b \mid D$ .

$$\begin{aligned} D &= p_1^{\max(e_1, f_1)} p_2^{\max(e_2, f_2)} \dots p_n^{\max(e_n, f_n)} \\ &= (p_1^{\max(e_1, f_1) - e_1} \dots p_i^{\max(e_i, f_i) - e_i} \dots p_n^{\max(e_n, f_n) - e_n}) (p_1^{e_1} \dots p_i^{e_i} \dots p_n^{e_n}) \\ &= qa \end{aligned}$$

כאשר  $q = p_1^{\max(e_1, f_1) - e_1} \dots p_i^{\max(e_i, f_i) - e_i} \dots p_n^{\max(e_n, f_n) - e_n}$ . החזיקה  $\max(e_i, f_i) - e_i \geq 0$  אז  $q$  הוא מספר שלם. אזי  $a \mid D$ .

באופן דומה אפשר להוכיח שגם  $b \mid D$ .

הוכחנו כי  $D$  הוא כפולה של  $a$  ושל  $b$ . כעת נראה כי  $D$  הוא הכפולה של  $a$  ושל  $b$  הקטנה ביותר.

נניח בשלילה שקיים  $C$  שלם כך ש-  $a \mid C$  ו-  $b \mid C$  ו-  $C < D$ . כלומר נניח שקיים  $C$  אשר כפולה של  $a$  ושל  $b$  שקונה יותר מ-  $D$ . מכיוון ש-  $a \mid C$  ו-  $b \mid C$  אז כל הראשוניים בקבוצה  $\{p_1, \dots, p_n\}$  אשר בפירוקים של  $a$  ושל  $b$  חייבים להופיע גם בפירוק לראשוניים של  $C$ . לכן יש לנו:

$$C = p_1^{g_1} \dots p_i^{g_i} \dots p_n^{g_n} \dots$$

מכיוון ש-  $a \mid C$  אז  $e_i \leq g_i$  לכל  $i$ , ומכיוון ש-  $b \mid C$  אז  $f_i \leq g_i$  לכל  $i$ . לכן

$$\max(e_i, f_i) \leq g_i \quad \text{לכל } i.$$

לפיכך

$$C = p_1^{g_1} \dots p_i^{g_i} \dots p_n^{g_n} \geq p_1^{\max(e_1, f_1)} \dots p_i^{\max(e_i, f_i)} \dots p_n^{\max(e_n, f_n)} = D$$

ז"א  $C \geq D$  בסתירה לכך ש-  $C < D$ . ■

## משפט 1.9

יהיו  $a, b$  שלמים חיוביים. אזי

$$\gcd(a, b) \text{lcm}(a, b) = ab.$$

**הוכחה:** יהיו הירוקים לראשוניים של  $a$  ושל  $b$ :

$$a = p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n}, \quad b = p_1^{f_1} \dots p_n^{f_n}.$$

אזי ממשפט 1.6 וממשפט 1.8:

$$\begin{aligned} \gcd(a, b) \operatorname{lcm}(a, b) &= p_1^{\min(e_1, f_1)} \dots p_n^{\min(e_n, f_n)} p_1^{\max(e_1, f_1)} \dots p_n^{\max(e_n, f_n)} \\ &= p_1^{\min(e_1, f_1) + \max(e_1, f_1)} \dots p_n^{\min(e_n, f_n) + \max(e_n, f_n)} \\ &= p_1^{e_1 + f_1} \dots p_n^{e_n + f_n} \\ &= p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n} p_1^{f_1} \dots p_n^{f_n} \\ &= ab, \end{aligned}$$

כאשר נעזרנו בהזהות

$$\min(e, f) + \max(e, f) = e + f.$$

## 1.4 האלגוריתם של אוקלידס

### משפט 1.10 האלגוריתם של אוקלידס

יהיו  $a, b$  מספרים שלמים חיוביים. קיים אלגוריתם אשר נותן את  $d = \gcd(a, b)$  כדלקמן. ראשית מתחילים  $r_0$  ו- $r_1$ :

$$r_0 = a, \quad r_1 = b.$$

אם  $r_1 = b \neq 0$  אז מתחילים את הלולאה. בשלב  $i = 1$  מחשבים את  $q_1$  ו- $r_2$  כך:

$$q_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor, \quad r_2 = r_0 - q_1 r_1 = r_0 - \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor r_1.$$

אם  $r_2 \neq 0$  ממשיכים לשלב  $i = 2$  שבו מחשבים את  $q_2$  ו- $r_3$  כך:

$$q_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor, \quad r_3 = r_1 - q_2 r_2 = r_1 - \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor r_2.$$

התהליך ממשיך עד שנקבל  $r_{n+1} = 0$  בשלב ה- $n$ . כל השלבים של התהליך הם כדלקמן:

$$\begin{array}{lll} q_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor & r_2 = r_0 - q_1 r_1 = r_0 - \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor r_1 & \text{שלב } i = 1 \\ q_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor & r_3 = r_1 - q_2 r_2 = r_1 - \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor r_2 & \text{שלב } i = 2 \\ q_3 = \left\lfloor \frac{r_2}{r_3} \right\rfloor & r_4 = r_2 - q_3 r_3 = r_2 - \left\lfloor \frac{r_2}{r_3} \right\rfloor r_3 & \text{שלב } i = 3 \\ & & \vdots \\ q_{n-1} = \left\lfloor \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} \right\rfloor & r_n = r_{n-2} - q_{n-1} r_{n-1} = r_{n-2} - \left\lfloor \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} \right\rfloor r_{n-1} & \text{שלב } i = n-1 \\ q_n = \left\lfloor \frac{r_{n-1}}{r_n} \right\rfloor & r_{n+1} = 0 & \text{שלב } i = n \end{array}$$

התהליך מסתיים בשלב ה- $n$  אם  $r_{n+1} = 0$  ואז הפלט של האלגוריתם הוא  $r_n = \gcd(a, b)$ .

למטה רשום ייצוג פסאודו-קוד של האלגוריתם של אוקלידס:

**Algorithm 1** האלגוריתם של אוקלידס

---

```

1: Input: Integers  $a, b$  .
2:  $r_0 \leftarrow a$ 
3:  $r_1 \leftarrow b$ 
4:  $n \leftarrow 1$ 
5: while  $r_n \neq 0$  do
6:    $q_n \leftarrow \left\lfloor \frac{r_{n-1}}{r_n} \right\rfloor$ 
7:    $r_{n+1} \leftarrow r_{n-1} - q_n r_n$ 
8:    $n \leftarrow n + 1$ 
9: end while
10:  $n \leftarrow n - 1$ 
11: Output:  $r_n = \gcd(a, b)$ 

```

---

**דוגמה 1.12**מצאו את ה-  $\gcd(1071, 462)$ .**פתרון:** $a = 1071, b = 462$ נאתחל  $r_0 = a = 1071$  ו-  $r_1 = b = 462$  נבצע את האלגוריתם של אוקלידס:

$r_i$	$q_i$	שלב
$r_2 = r_0 - q_1 r_1$ $= 1071 - (2)(462) = 147$	$q_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1071}{462} \right\rfloor = 2$	$i = 1$
$r_3 = r_1 - q_2 r_2$ $= 462 - (3)(147) = 21$	$q_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{462}{147} \right\rfloor = 3$	$i = 2$
$r_4 = r_2 - q_3 r_3$ $= 147 - (7)(21) = 0$	$q_3 = \left\lfloor \frac{r_2}{r_3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{147}{21} \right\rfloor = 7$	$i = 3$

לפיכך  $\gcd(1071, 462) = r_3 = 21$ .**דוגמה 1.13**מצאו את  $\gcd(26, 11)$ .**פתרון:** $a = 26, b = 11$ נאתחל  $r_0 = a = 26$  ו-  $r_1 = b = 11$  נבצע את האלגוריתם של אוקלידס:

שלב	$q_i$	$r_i$
$i = 1$	$q_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{26}{11} \right\rfloor = 2$	$r_2 = r_0 - q_1 r_1 = 26 - (2)(11) = 4$
$i = 2$	$q_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{11}{4} \right\rfloor = 2$	$r_3 = r_1 - q_2 r_2 = 11 - (2)(4) = 3$
$i = 3$	$q_3 = \left\lfloor \frac{r_2}{r_3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 1$	$r_4 = r_2 - q_3 r_3 = 4 - (1)(3) = 1$
$i = 5$	$q_4 = \left\lfloor \frac{r_3}{r_4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3}{1} \right\rfloor = 3$	$r_5 = r_3 - q_4 r_4 = 3 - (3)(1) = 0$

לפיכך  $\gcd(26, 11) = r_4 = 1$ .

■

### משפט 1.11 משפט בזו (Bezout's identity)

יהיו  $a, b$ . קיימים שלמים  $s, t, d$  עבורם

$$sa + tb = d, \quad (1.2)$$

כאשר  $d = \gcd(a, b)$ . משוואה (1.2) נראת הפירוק אוקלידס של  $a$  ו- $b$ .

### משפט 1.12 האלגוריתם המוכלל של אוקלידס

יהיו  $a, b$  שלמים חיוביים. קיים אלגוריתם אשר נותן שלמים  $s, t, d$  עבורם

$$d = sa + tb$$

כאשר  $d = \gcd(a, b)$ , כדלקמן. ראשית מאתחלים:

$$r_0 = a, \quad r_1 = b, \quad s_0 = 1, \quad s_1 = 0, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 1.$$

אם  $r_1 = b \neq 0$  אז מבצעים האיטרציה הראשונה של הלולאה. בשלב  $i = 1$  מחשבים את  $q_1, r_2, s_2, t_2$  כך:

$$q_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor, \quad r_2 = r_0 - q_1 r_1, \quad s_2 = s_0 - q_1 s_1, \quad t_2 = t_0 - q_1 t_1.$$

אם  $r_2 \neq 0$  אז עוברים לאיטרציה  $i = 2$  שבה מחשבים את  $q_2, r_3, s_3, t_3$  כך:

$$q_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor, \quad r_3 = r_1 - q_2 r_2, \quad s_3 = s_1 - q_2 s_2, \quad t_3 = t_1 - q_2 t_2.$$

התהליך ממשיך עד השלב ה- $n$  שבו מקבלים  $r_{n+1}$ , ואז פולטים  $d = r_n = \gcd(a, b), s = s_n, t = t_n$ . כל השלבים של האלגוריתם הם כדלקמן:

$q_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor$	$r_2 = r_0 - q_1 r_1$	$s_2 = s_0 - q_1 s_1$	$t_2 = t_0 - q_1 t_1$	שלב 1:
$q_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor$	$r_3 = r_1 - q_2 r_2$	$s_3 = s_1 - q_2 s_2$	$t_3 = t_1 - q_2 t_2$	שלב 2:
				⋮
$q_i = \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor$	$r_{i+1} = r_{i-1} - q_i r_i$	$s_{i+1} = s_{i-1} - q_i s_i$	$t_{i+1} = t_{i-1} - q_i t_i$	שלב i:
				⋮
$q_{n-1} = \left\lfloor \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} \right\rfloor$	$r_n = r_{n-2} - q_{n-1} r_{n-1}$	$s_n = s_{n-2} - q_{n-1} s_{n-1}$	$t_n = t_{n-2} - q_{n-1} t_{n-1}$	שלב n-1:
$q_n = \left\lfloor \frac{r_{n-1}}{r_n} \right\rfloor$	$r_{n+1} = r_{n-1} - q_n r_n$	$s_{n+1} = s_{n-1} - q_n s_n$	$t_{n+1} = t_{n-1} - q_n t_n$	שלב n:

$$d = \gcd(a, b) = r_n, \quad s = s_n, \quad t = t_n.$$

למטה רשום ייצוג פסאודו-קוד של האלגוריתם:

#### Algorithm 2 אוקלידס של המוכלל האלגוריתם

1: **Input:** Integers  $a, b$ .

2:  $r_0 \leftarrow a$

3:  $r_1 \leftarrow b$

4:  $s_0 \leftarrow 1$

5:  $s_1 \leftarrow 0$

6:  $t_0 \leftarrow 0$

7:  $t_1 \leftarrow 1$

8:  $n \leftarrow 1$

9: **while**  $r_n \neq 0$  **do**

10:  $q_n \leftarrow \left\lfloor \frac{r_{n-1}}{r_n} \right\rfloor$

11:  $r_{n+1} \leftarrow r_{n-1} - q_n r_n$

12:  $s_{n+1} \leftarrow s_{n-1} - q_n s_n$

13:  $t_{n+1} \leftarrow t_{n-1} - q_n t_n$

14:  $n \leftarrow n + 1$

15: **end while**

16:  $n \leftarrow n - 1$

17: **Output:**  $r_n, s_n, t_n$

$\triangleright d = r_n = \gcd(a, b)$  and  $d = sa + tb$  where  $s = s_n, t = t_n$ .

#### דוגמה 1.14 (אלגוריתם המוכלל של אוקלידס)

מצאו את  $d = \gcd(240, 46)$  ומצאו שלמים  $s, t$  עבורם  $d = 240s + 46t$ .

פתרון:

מאתחלים:

$$\begin{aligned} r_0 &= a = 240, & r_1 &= b = 46, \\ s_0 &= 1, & s_1 &= 0, \\ t_0 &= 0, & t_1 &= 1. \end{aligned}$$

$q_1 = \left\lfloor \frac{240}{46} \right\rfloor = 5$	$r_2 = 240 - 5 \cdot 46 = 10$	$s_2 = 1 - 5 \cdot 0 = 1$	$t_2 = 0 - 5 \cdot 1 = -5$	שלב $i = 1$
$q_2 = \left\lfloor \frac{46}{10} \right\rfloor = 4$	$r_3 = 46 - 4 \cdot 10 = 6$	$s_3 = 0 - 4 \cdot 1 = -4$	$t_3 = 1 - 4 \cdot (-5) = 21$	שלב $i = 2$
$q_3 = \left\lfloor \frac{10}{6} \right\rfloor = 1$	$r_4 = 10 - 1 \cdot 6 = 4$	$s_4 = 1 - 1 \cdot (-4) = 5$	$t_4 = -5 - 1 \cdot (21) = -26$	שלב $i = 3$
$q_4 = \left\lfloor \frac{6}{4} \right\rfloor = 1$	$r_5 = 6 - 1 \cdot 4 = 2$	$s_5 = -4 - 1 \cdot 5 = -9$	$t_5 = 21 - 1 \cdot (-26) = 47$	שלב $i = 4$
$q_5 = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor = 2$	$r_6 = 4 - 2 \cdot 2 = 0$	$s_6 = 5 - 2 \cdot (-9) = 23$	$t_6 = -26 - 2 \cdot (47) = -120$	שלב $i = 5$

$$\gcd(a, b) = r_5 = 2, \quad s = s_5 = -9, \quad t = t_5 = 47.$$

$$sa + tb = -9(240) + 47(46) = 2.$$

■

**דוגמה 1.15 (אלגוריתם המוכלל של איוקלידס)**

מצאו את  $d = \gcd(326, 78)$  ומצאו שלמים  $s, t$  עבורם  $d = 326s + 78t$ .

**פתרון:**

מאתחלים:

$$\begin{aligned} r_0 &= a = 326, & r_1 &= b = 78, \\ s_0 &= 1, & s_1 &= 0, \\ t_0 &= 0, & t_1 &= 1. \end{aligned}$$

$q_1 = \left\lfloor \frac{326}{78} \right\rfloor = 4$	$r_2 = 326 - 4 \cdot 78 = 14$	$s_2 = 1 - 4 \cdot 0 = 1$	$t_2 = 0 - 4 \cdot 1 = -4$	שלב $i = 1$
$q_2 = \left\lfloor \frac{78}{14} \right\rfloor = 5$	$r_3 = 78 - 5 \cdot 14 = 8$	$s_3 = 0 - 5 \cdot 1 = -5$	$t_3 = 1 - 5 \cdot (-4) = 21$	שלב $i = 2$
$q_3 = \left\lfloor \frac{14}{8} \right\rfloor = 1$	$r_4 = 14 - 1 \cdot 8 = 6$	$s_4 = 1 - 1 \cdot (-5) = 6$	$t_4 = -4 - 1 \cdot (21) = -25$	שלב $i = 3$
$q_4 = \left\lfloor \frac{8}{6} \right\rfloor = 1$	$r_5 = 8 - 1 \cdot 6 = 2$	$s_5 = -5 - 1 \cdot 6 = -11$	$t_5 = 21 - 1 \cdot (-25) = 46$	שלב $i = 4$
$q_5 = \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor = 3$	$r_6 = 6 - 3 \cdot 2 = 0$			שלב $i = 5$



$$\gcd(a, b) = r_5 = 2, \quad s = s_5 = -11, \quad t = t_5 = 46.$$

$$sa + tb = -11(326) + 46(78) = 2.$$

## 1.5 יחס השקילות המודולרית

### הגדרה 1.7 שקילות מודולרית

יהיו  $a, b, n$  שלמים ( $n \neq 0$ ). היחס:

$$a \equiv b \pmod{n}$$

אומר כי " $n$  מחלק את ההפרש  $a - b$ ".  
כלומר:

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \text{אם ורק אם} \quad n \mid a - b.$$

### דוגמה 1.16

הוכיחו כי

$$5 \equiv 2 \pmod{3} \quad (\text{א})$$

$$43 \equiv 23 \pmod{10} \quad (\text{ב})$$

$$7 \not\equiv 2 \pmod{4} \quad (\text{ג})$$

פתרון:

(א)

$$5 - 2 = 3 = 1 \cdot 3 \Rightarrow 3 \mid 5 - 2 \Rightarrow 5 \equiv 2 \pmod{3}.$$

(ב)

$$43 - 23 = 20 = 2 \cdot 10 \Rightarrow 10 \mid 43 - 23 \Rightarrow 43 \equiv 23 \pmod{10}.$$

$$7 - 2 = 5 \quad (\text{ג})$$

לא קיים שלם  $q$  כך ש-  $7 - 2 = 4q$  לכן  $7 - 2 \not\equiv 4$

$$7 \not\equiv 2 \pmod{4}.$$

ההגדרה 1.7 של שקילות מודולרית בין שלמים גוררת למשפט הבא באופן טבעי:

### משפט 1.13

יהיו  $a, b, r$  שלמים,  $b \neq 0$ .

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \text{אם ורק אם} \quad n \mid a - b \quad \text{אם ורק אם} \quad \text{קיים שלם } q \text{ עבורו } a = qn + b.$$

הוכחה:

הגרירה הראשונה  $a \equiv r \pmod{b} \Leftrightarrow b \mid a - r$  נובעת ישר מההגדרה 1.7 של יחס שקילות. נראה את הגרירה השנייה:

$$a \equiv b \pmod{n} \iff a - b = qn \iff a = qn + b$$

### משפט 1.14 תכונות של יחס השקילות המודולרית

יהיו  $a, b$  שלמים ו-  $n \neq 0$  שלם.

(1) רפלקסיבי:  $a \equiv a \pmod{n}$ .

(2) סימטרי:  $a \equiv b \pmod{n}$  אם ורק אם  $b \equiv a \pmod{n}$ .

(3) טרנזיטיבי: אם  $a \equiv b \pmod{n}$  וכן  $b \equiv c \pmod{n}$  אזי  $a \equiv c \pmod{n}$ .

הוכחה:

(1) רפלקסיבי:

לכל שלם  $n \neq 0$  מתקיים  $n \mid a - a$ , או במילים אחרות  $a = 0 \cdot n + a$ , לכן  $a \equiv a \pmod{n}$ .

(2) סימטרי:

נניח ש-  $a \equiv b \pmod{n}$ . אזי קיים שלם  $q$  עבורו

$$a = qn + b \iff b = (-q)n + a$$

ז"א קיים שלם  $\bar{q} = -q$  עבורו  $b = \bar{q}n + a$  לכן  $b \equiv a \pmod{n}$ .

(3) טרנזיטיבי: נניח ש-  $a \equiv b \pmod{n}$  וכן  $b \equiv c \pmod{n}$ .

$$\left. \begin{array}{l} a = qn + b \\ b = \bar{q}n + c \end{array} \right\} \Rightarrow a = qn + \bar{q}n + c = (q + \bar{q})n + c$$

ז"א קיים שלם  $Q = q + \bar{q}$  עבורו  $a = Qn + c$  לכן  $a \equiv c \pmod{n}$ .

### משפט 1.15 הקשר בין יחס שקילות מודולרית והשארית

יהיו  $a, b, n > 0$  שלמים.

$$a \equiv b \pmod{n} \iff a \bmod n = b \bmod n$$

הוכחה:

כיוון  $\Leftarrow$

נניח ש-  $a \equiv b \pmod{n}$ . אזי קיים שלם  $Q$  כך ש:

$$a = qn + b.$$

לפי משפט החילוק של אוקלידס,

$$b = \bar{q}n = r_1, \quad r_1 = b \bmod n.$$

לכן

$$a = (q + \bar{q})n + r_1 = Qn + r_1$$

כאשר  $Q = q + \bar{q}$  שלם ו-  $0 \leq r_1 < b$  הוא השארית  $r_1 = b \bmod n$ . מכאן נובע ש:

$$a \bmod n = a - n \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor = Qn + r_1 - Qn = r_1$$

$$a \bmod n = r_1 = \bmod n$$

כיוון  $\Rightarrow$

נניח ש-  $a \bmod n = b \bmod n$ . אזי

$$a - n \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor = b - n \left\lfloor \frac{b}{n} \right\rfloor \Rightarrow a = \left( \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b}{n} \right\rfloor \right) n + b \Rightarrow a = qn + b$$

כלומר קיים שלם  $q = \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b}{n} \right\rfloor$  עבורו  $a = qn + b$  ולכן  $a \equiv b \pmod{n}$ . ■

### משפט 1.16 חיבור וכפל של שלמים השקולים מודולריים

יהיו  $a, b, c, d$  שלמים ו-  $n \neq 0$  שלם.

**(1) חיבור:**

אם  $a \equiv b \pmod{n}$  וכן  $c \equiv d \pmod{n}$  אזי  $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ .

**(2) כפל:**

אם  $a \equiv b \pmod{n}$  וכן  $c \equiv d \pmod{n}$  אזי  $ac \equiv bd \pmod{n}$ .

**הוכחה:**

**(1) חיבוריות:**

אם  $a \equiv b \pmod{n}$  אזי קיים שלם  $q$  עבורו  $a = qn + b$  וכן אם  $c \equiv d \pmod{n}$  אזי קיים שלם  $q$  עבורו  $c = \bar{q}n + d$  לפיכך

$$a + c = (q + \bar{q})n + b + d \Rightarrow a + c = Qn + (b + d),$$

כאשר  $Q = q + \bar{q}$ . הוכחנו שקיים שלם  $Q$  עבורו  $a + c = Qn + b + d$  לכן  $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ .

**(2) כפל:**

אם  $a \equiv b \pmod{n}$  אזי קיים שלם  $q$  עבורו  $a = qn + b$  וכן אם  $c \equiv d \pmod{n}$  אזי קיים שלם  $q$  עבורו  $c = \bar{q}n + d$  לפיכך

$$ac = (qn + b)(\bar{q}n + d) \Rightarrow ac = (q\bar{q}n + dq + b\bar{q})n + bd \Rightarrow ac = Qn + bd,$$

כאשר  $Q = (q\bar{q}n + dq + b\bar{q})$ . הוכחנו שקיים שלם  $Q$  עבורו  $ac = Qn + bd$  לכן  $ac \equiv bd \pmod{n}$ .