תרגילים 7: אי-כריעות

שאלה 1 נתונה השפה הבאה: $L = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; |L(M)| \geq 3 \right\}$. כלומר L מכילה קידודים של מכונות שמקבלות לפחות 3 מילים שונות. הוכיחו כי $L \notin R$ ע"י רדוקציה מ- L_{acc}.

שאלה 2 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה:

לכל שלוש שפות L_1, L_2, L_3 אם $L_1 \leq L_2$ וגם $L_1 \leq L_3$ אזי $L_1 \leq (L_2 \cap L_3)$.

תשובות

שאלה 1

פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר $M_\emptyset$ היא מ"ט הדוחה כל קלט ו- M' היא מ"ט שעל כל קלט y, מתעלמת מ- y ומריצה את M על w ועונה כמוה.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

נכונות הרדוקציה:

נוכיח כי

$$x \in L_{\text{acc}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_{\geq 3} \ .$$

אם $x \in L_{\text{acc}} \quad \Rightarrow \quad x = \langle M, w \rangle$ ו- $w \in L(M) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \langle M' \rangle$ ולפי האבחנה $L(M') = \Sigma^*$ ולכן $|L(M')| = \infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \in L_{\geq 3}$.

אם $x \notin L_{\text{acc}} \quad \Rightarrow$ שני מקרים:

מקרה 1: $x \neq \langle M, w \rangle \quad \Rightarrow \quad f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \quad \Rightarrow \quad |L(M_\emptyset)| = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \notin L_{\geq 3}$.

מקרה 2: $x \neq \langle M, w \rangle$ ו- $w \notin L(M) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \langle M' \rangle$ ולפי האבחנה $L(M') = \emptyset \quad \Rightarrow \quad |L(M')| = 0$
$\Rightarrow f(x) \notin L_{\geq 3}$.

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $L_{\text{acc}} \leq L_{\geq 3}$ ולכן ממשפט הרדוקציה, מכיוון ש- $L_{\text{acc}} \notin R$, מתקיים $L_{\geq 3} \notin R$.

שאלה 2

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$L_1 = L_{\text{halt}} \ , \qquad L_2 = L_{\text{acc}} \ , \qquad L_3 = \overline{L_{\text{acc}}} \ .$$

מתקיים $L_{\text{halt}} \leq L_{\text{acc}}$ לכן $L_1 \leq L_2$.

בנוסף $L_{\text{halt}} \leq \overline{L_{\text{acc}}}$ לכן $L_1 \leq L_3$.

מצד שני: $L_2 \cap L_3 = \emptyset$ ולכן $L_1 \nleq L_3$ (אחרת $L_{\text{halt}} \leq \emptyset$ ומכיוון ש- $\emptyset \in R$ אזי $L_{\text{halt}} \in R$ בסתירה לכך ש- $L_{\text{halt}} \notin R$).