שיעור 9
אינטגרלים לא מסויימים

אינטגרלים לא מסויימים

9.1 הגדרה: (פונקציה קדומה)
אם $F'(x)=f(x)$ אז אומרים כי $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$.

דוגמא.

$$(x^2)'=2x\ ,$$

לכן $F(x)=x^2$ פונקציה קדומה של $f(x)=2x$

9.2 משפט. (פונקציה קדומה)
אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$, אז $F(x)+C$ (לכל $C\in\mathbb{R}$ קבוע) היא גם פונקציה קדומה של $f(x)$.

ז"א אם פונקציה קדומה של $f(x)$ קיימת, בהכרח ישנם אינסוף פונקציות קדומות של $f(x)$.

דוגמא.

$$(x^2+C)'=2x\ ,$$

לכן לפונקציה $f(x)=2x$ יש אינסוף פונקציות קדומות מהצורה $F(x)=x^2+C$.

9.3 הגדרה: (האינטגרל הלא מסויים)
האוסף של כל הפונקציות הקדומות של $f(x)$, נקרא האינטגרל הלא מסויים של $f(x)$, מסומן $\displaystyle\int f(x)dx$.
ז"א

$$\int f(x)dx=F(x)+C \qquad \Leftrightarrow \qquad (F(x)+C)'=f(x)\ .$$

dx נקרא הדיפרנציאל של x.

דוגמאות

1) $\displaystyle\int 2x\,dx=x^2+C$

2) $\displaystyle\int \cos x\,dx=\sin x+C$

3) $\displaystyle\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C$

4) $\displaystyle\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C$

ליניאריות של אינטגרל לא מסויים

9.4 הגדרה: (ליניאריות של אינטגרל לא מסויים)

נתונות פונקציות $f(x)$, $g(x)$ וסקלר a.

(i) $\int a\cdot f(x)\,dx = a\cdot \int f(x)\,dx$.

(ii) $\int \left[f(x)\pm g(x)\right]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

הוכחה.

(i) אם $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$, ז"א $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, אז $F'(x)=f(x)$. לפיו ולפי משפט **??** (מספר 2),

$$a\cdot f(x) = a\cdot F'(x) = (aF(x))' \ .$$

נפעיל אינטגרל לא מסויים על שני הצדדים ונקבל

$$\int a\cdot f(x)\,dx = a\cdot F(x)+C \ .$$

■

טבלת האינטגרלים חלקית

$$
\begin{aligned}
\int x^a \, dx =& \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \ , \qquad (a \neq -1) \\
\int \frac{1}{x} \, dx =& \ln|x| + C \ , \\
\int a^x \, dx =& \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \\
\int e^x \, dx =& e^x + C \ , \\
\int \sin x \, dx =& -\cos x + C \ , \\
\int \cos x \, dx =& \sin x + C \ , \\
\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx =& \tan x + C \ , \\
\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx =& -\cot x + C \ , \\
\int \frac{1}{1+x^2} \, dx =& \arctan x + C \ , \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =& \arcsin x + C \ ,
\end{aligned}
$$

תרגילים

1)

$$
\begin{aligned}
\int \left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^2 dx =& \int \left(1 + 2x^{2/3} + x^{4/3}\right) dx \\
=& x + 2\frac{x^{2/3}}{5/3} + \frac{x^{4/3}}{7/3} + C \\
=& x + \frac{6x^{2/3}}{5} + \frac{3x^{4/3}}{7} + C
\end{aligned}
$$

2)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} \, dx =& \int x^{-2/5} dx \\
=& \frac{5}{3} x^{1-2/5} + C \\
=& \frac{5}{3} x^{3/5} + C
\end{aligned}
$$

3)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x} \, dx =& \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx \\
=& x + \ln|x| + C
\end{aligned}
$$

החלפת משתנה / אינטגרציה ע"י הצבה

9.5 משפט. (אינטגרציה ע"י הצבה)

נתון אינטגרל מצורה

$$\int f(t(x)) \cdot u'(x)\, dx$$

כאשר $f(u(x))$ פונקציה של הפונקציה $u(x)$ ו- $u'(x)$ הנגזרת של $u(x)$. אז

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = \int f(u)\, du \ .$$

9.6 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \sin(2x) dx$$

פיתרון.

$$u = 2x \ , \qquad u'(x) = 2 \ , \qquad \frac{1}{2}u'(x) = 1 \ .$$

$$\begin{aligned}\int \sin(2x) dx =& \frac{1}{2}\int \sin u \cdot u'\, dx \\ =& -\frac{1}{2}\cos u + C \\ =& -\frac{1}{2}\cos(2x) + C\end{aligned}$$

■

9.7 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int e^{ax} dx$$

פיתרון.

$$u = ax \ , \qquad u'(x) = a \ , \frac{1}{a}u'(x) = 1 \ .$$

$$\begin{aligned}\int e^{ax} dx =& \int e^{u(x)} \cdot \frac{1}{a} \cdot u'(x)\, dx \\ =& \frac{1}{a}\int e^u\, du \\ =& \frac{1}{a}e^u + C \\ =& \frac{1}{a}e^{ax} + C\end{aligned}$$

■

9.8 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{1}{x^2+8}\,dx$$

פיתרון.

$$u(x)=\frac{x}{\sqrt{8}}\ , \qquad u'(x)=\frac{1}{\sqrt{8}}\ , \qquad \Rightarrow \qquad 1=\sqrt{8}\,u'(x).$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+8}\,dx =& \int \frac{1}{8u^2+8}\,\sqrt{8}u'(x)\ ,dx\\ =&\sqrt{8}\int \frac{1}{8u^2+8}\,du\\ =&\frac{\sqrt{8}}{8}\int \frac{1}{u^2+1}\,du\\ =&\frac{1}{\sqrt{8}}\arctan(u)+C\\ =&\frac{1}{\sqrt{8}}\arctan\left(\frac{x}{8}\right)+C\end{aligned}$$

באופן כללי,

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C\ .$$

■

9.9 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{1}{5x+2}\,dx$$

פיתרון.

$$u(x)=5x+2\ , \qquad u'(x)=5\ , \qquad \frac{1}{5}u'(x)=1\ .$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{5x+2}\,dx =& \int \frac{1}{u(x)}\cdot\frac{u'(x)}{5}\,dx\\ =&\frac{1}{5}\int \frac{1}{u(x)}\,du\\ =&\frac{1}{5}\ln|u|+C\\ =&\frac{1}{5}\ln|5x+2|+C\end{aligned}$$

באופן כללי,

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C\ .$$

■

9.10 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int (3x-1)^{24}\ dx$$

פיתרון.

$$u(x)=3x-1\ , \qquad u'=3\ , \qquad \frac{1}{3}u'(x)=1$$

$$\begin{aligned}\int (3x-1)^{24}\ dx =& \int u^{24}\cdot\frac{u'(x)}{3}\,dx\\ =&\frac{1}{3}\int u^{24}\,du\\ =&\frac{1}{3}\cdot\frac{u^{25}}{25}+C\\ =&\frac{1}{75}\,(3x-1)^{25}+C\end{aligned}$$

■

9.11 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \tan x\,dx$$

פיתרון.

$$\int \tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$u=\cos x\ , \qquad u'=-\sin x\ .$$

$$\begin{aligned}\int \tan x\,dx =& \int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx\\ =&-\int\frac{1}{u}\,u'(x)dx\\ =&-\int\frac{1}{u}\,du\\ =&-\ln|u|+C\\ =&-\ln|\cos x|+C\end{aligned}$$

■

9.12 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \cot x\,dx$$

פיתרון.

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$u(x) = \sin x\ , \qquad u'(x) = \cos x\ .$$

$$\begin{aligned}\int \cot x\,dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \\ &= \int \frac{1}{u}\,u'(x)dx \\ &= \int \frac{1}{u}\,du \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|\sin x| + C\end{aligned}$$

■

9.13 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int x(x+2)^{69}\,dx$$

פיתרון.

$$u = (x+2)\ , \qquad u'(x) = 1\ , \qquad x = u-2$$

$$\begin{aligned}\int x(x+2)^{69}\,dx &= \int (u-2)u^{69}\,u'(x)\,dx \\ &= \int (u-2)u^{69}\,du \\ &= \int \left(u^{70} - 2u^{69}\right)\,du \\ &= \frac{u^{71}}{71} - \frac{2u^{70}}{70} + C \\ &= \frac{(x+2)^{71}}{71} - \frac{(x+2)^{70}}{35} + C\end{aligned}$$

■

9.14 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{1}{\cot^5 x \cdot \sin^2 x}\,dx$$

פיתרון.

$$u = \cot x\ , \qquad u'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cot^5 x \cdot \sin^2 x}\, dx &= -\int \frac{1}{u^5} u'(x)\, dx \\ &= -\int \frac{1}{u^5}\, du \\ &= -\int u^{-5}\, du \\ &= -\frac{u^{-4}}{-4} + C \\ &= \frac{1}{4\cot^4 x} + C\end{aligned}$$

■

9.15 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{\cos x}{3+\sin x}\, dx$$

פיתרון.

$$u = \sin x \ , \qquad u'(x) = \cos x \ .$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{3+\sin x}\, dx &= \int \frac{1}{u+3}\, u'(x)\, dx \\ &= \int \frac{1}{u+3}\, du \\ &= \ln|u+3| + C \\ &= \ln|\sin x + 3| + C\end{aligned}$$

■

9.16 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{1}{e^x+1}\, dx$$

פיתרון.

$$u = e^x \ , \qquad u'(x) = e^x \ , \qquad u'(x)e^{-x} = \frac{1}{u} \cdot u'(x) \ .$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^x+1}\, dx &= \int \frac{1}{u(u+1)}\, u'(x)\, dx \\ &= \int \frac{1}{u(u+1)}\, du \\ &= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du \\ &= \ln|u| - \ln|u+1| + C \\ &= \ln(e^x) - \ln(e^x+1) + C \\ &= x - \ln(e^x+1) + C\end{aligned}$$

■

אינטגרציה בחלקים

9.17 משפט. (אינטגרציה בחלקים)
יהיו $u(x)$ $\mathrm{v}(x)$ פונקציות של משתנה x.

$$\int u\mathrm{v}'\,dx = u\mathrm{v} - \int u'\mathrm{v}\,dx$$

הוכחה.
לפי כלל הכפל של נגזרות (עיין משפט **??** מספר 3)

$$(u\mathrm{v})' = u'\mathrm{v} + u\mathrm{v}' \qquad \Rightarrow \qquad u\mathrm{v}' = (u\mathrm{v})' - u'\mathrm{v}$$

נפעיל אינטגרל על שני הצדדים:

$$\int u\mathrm{v}'\,dx = \int (u\mathrm{v})'\,dx - \int u'\mathrm{v}\,dx\ . \tag{*}$$

לפי משפט 9.5 ניתן לכתוב אגף השמאל של (*) כ

$$\int u\mathrm{v}'(x)\,dx = \int u\,d\mathrm{v} \tag{\#1}$$

האיבר הראשון באגף הימין של (*) הוא

$$\int (u\mathrm{v})'dx = u\mathrm{v} + C \tag{\#2}$$

לפי משפט 9.5 האיבר השני באגף הימין של (*) הוא

$$\int u'\mathrm{v}\,dx = \int \mathrm{v}\,du \tag{\#3}$$

נציב (#1), (#2), ו- (#3) לתוך (*) ונקבל

$$\int u\,d\mathrm{v} = u\mathrm{v} - \int \mathrm{v}\,du$$

ז"א

$$\int u\mathrm{v}'\,dx = \int (u\mathrm{v})'\,dx - \int u'\mathrm{v}\,dx$$

■

9.18 דוגמא.
חשב את האינטגרל

$$\int x \cdot e^x\,dx$$

פיתרון. $u = x$ $\mathrm{v}' = e^x$ $u'(x) = 1$ $v = e^x$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

■

9.19 כלל: (מקרים נפוצים של שימוש באינטגרציה בחלקים)

1) במקרה

א $\int p(x)\cdot e^{kx}\,dx$,

ב $\int p(x)\cdot \sin(kx)\,dx$,

ג $\int p(x)\cdot \cos(kx)\,dx$

כאשר $p(x)$ פולינום, מגדירים $u = p(x)$.

2) במקרה

א $\int p(x)\cdot \arcsin(kx)\,dx$,

ב $\int p(x)\cdot \arccos(kx)\,dx$,

ג $\int p(x)\cdot \arctan(kx)\,dx$,

ד $\int p(x)\cdot \ln|kx|\,dx$,

ה $\int p(x)\cdot \mathrm{arccot}(kx)\,dx$,

כאשר $p(x)$ פולינום, מגדירים $\mathrm{v}' = p(x)$.

3) במקרה

א $\int e^{ax}\cdot \sin(bx)\,dx$,

ב $\int e^{ax}\cdot \cos(bx)\,dx$,

מגדירים $u = e^{ax}$.

דוגמאות

9.20 דוגמא. חשב את האינטגרל

$$\int (2x+1)e^{3x}\,dx$$

פיתרון.

$$u = 2x+1\ , \qquad \mathrm{v}' = e^{3x} \qquad u' = 2 \qquad \mathrm{v} = \frac{1}{3}\cdot e^{3x}$$

$$\int (2x+1)e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3}\int e^{3x}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C$$

■

9.21 דוגמא. חשב את האינטגרל

$$\int \ln(x)\,dx$$

פיתרון.

$$u = \ln(x)\ , \qquad \mathrm{v}' = dx\ , \qquad u' = \frac{1}{x}\ , \qquad \mathrm{v} = x$$

$$\int \ln x\,dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C$$

■

9.22 דוגמא. חשב את האינטגרל

$$\int \arctan(x)\,dx$$

פיתרון.

$$u = \arctan(x)\ , \qquad \mathrm{v}' = 1\ , \qquad u' = \frac{1}{1+x^2}\ , \qquad \mathrm{v} = x$$

$$\int \arctan x\,dx = x \cdot \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$u = x^2+1\ , \qquad u' = 2x$$

$$\int \arctan x\,dx = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$$
$$= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\int \ln|u| + C$$
$$= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\int \ln|x^2+1| + C$$

■

9.23 דוגמא. חשב את האינטגרל

$$I = \int x^2 \sin(2x)\,dx$$

פיתרון.

$$u=x^2\ ,\qquad v'=\sin(2x)\ ,\qquad u'=2x\ ,\qquad v=-\frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\begin{aligned} I&=-\frac{1}{2}x^2\cdot\cos(2x)+\frac{1}{2}\int 2x\cdot\cos(2x)\,dx\\ &=-\frac{1}{2}x^2\cdot\cos(2x)+\int x\cdot\cos(2x)\,dx \end{aligned}$$

$$u=x\ ,\qquad v'=\cos(2x)\ ,\qquad u'=1\ ,\qquad v=\frac{1}{2}\sin(2x)$$

$$\begin{aligned} I&=-\frac{1}{2}x^2\cdot\cos(2x)+\frac{1}{2}x\cdot\sin(2x)-\frac{1}{2}\int\sin(2x)\,dx\\ &=-\frac{1}{2}x^2\cdot\cos(2x)+\frac{1}{2}x\cdot\sin(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)+C \end{aligned}$$

■

9.24 דוגמא. חשב את האינטגרל

$$I=\int e^x\sin x\,dx$$

פיתרון.

$$u=e^x\ ,\qquad v'=\sin(x)\ ,\qquad u'=e^x\ ,\qquad v=-\cos(x)$$

$$I=-e^x\cos x+\int e^x\cdot\cos(x)\,dx$$

$$u=e^x\ ,\qquad v'=\cos(x)\ ,\qquad u'=e^x\ ,\qquad v=\sin(x)$$

$$\begin{aligned} I&=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cdot\sin(x)\,dx\\ &=-e^x\cos x+e^x\sin x-I \end{aligned}$$

לכן

$$2I=-e^x\cos x+e^x\sin x$$

ז"א

$$I=\frac{1}{2}\left(-e^x\cos x+e^x\sin x\right)+C$$

■

9.25 דוגמא. חשב את האינטגרל

$$I=\int\frac{x}{\cos^2 x}\,dx$$

פיתרון.

$$u=x\ ,\qquad v'=\frac{1}{\cos^2(x)}\ ,\qquad u'=1\ ,\qquad v=\tan(x)$$

$$\begin{aligned} I=&x\tan x-\int\tan(x)\,dx\\ =&x\tan x+\ln|\cos x|+C \end{aligned}$$

■