

# שעור 1

## משחקים בצורה רחבה

### 1.1 הגדרת צורה הרחבה של משחק

התיאור הכי טבעי של משחק הוא הצורה הרחבה.

#### הגדרה 1.1 משחק בצורה רחבה

הצורה רחבה של משחק ניתנת על ידי הקבוצה

$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_1, V_2, V_3, \dots\}, O, u)$$

כאשר

(1)  $N$  הוא קבוצה סופית של השחקנים.

(2)  $V$  קבוצת הקדקודים של עץ המשחק.  
קדקוד מייצג החלטה של שחקן.

(3)  $E$  קבוצת הקשתות או הצלעות של עץ המשחק.

כל צלע הולך בין שני קדקודים. צלע מייצג אסטרטגיה של שחקן, אשר נקבעת על ידי ההחלטות שמסומנות בקדקוד שממנו הצלע יוצא.

(4)  $x_0$  הוא הקדקוד של המצב ההתחלתי של המשחק.

(5)  $V_1$  הוא הקבוצה של קדקודים שבהן שחקן 1 מקבל החלטה,  $V_2$  הקבוצת קדקודים בהן שחקן 2 מקבל החלטה, וכן הלאה.

בכללי,  $V_i$  הקבוצה קדקודים בהם שחקן  $i$  מקבל החלטה ונקראת הקבוצת ידיעה של שחקן  $i$ .

(6)  $O$  הוא קבוצת התוצאות האפשריות.

התוצאות מצויינות ב נקודות סיום (עלים) של עץ המשחק.

(7)  $u$  פונקציית התשלום המתאימה לכל ווקטור אסטרטגיות של המשחק תשלום לכל שחקן.

#### דוגמה 1.1 (משחק התאמת המטבעות)

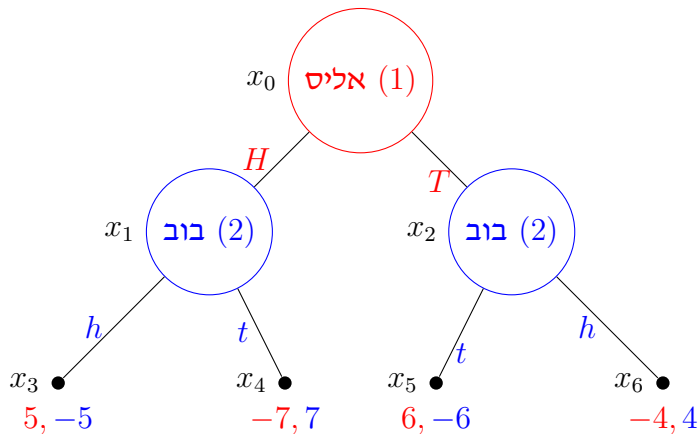
אליס בוחרת אחד הצדדים של מטבע,  $H$  (עץ) או  $T$  (פלי). היא רושמת בחירותה על פתק, חותמת עליו ומעבירה אותו לשופט. אחר כך בוב בוחר  $H$  או  $T$ , רושם בחירותו על פתק, חותם עליו ומעביר אותו לשופט.

- אם אליס בוחרת  $H$  ובוב בוחר  $h$  אז בוב משלם לאליס 5.
- אם אליס בוחרת  $H$  ובוב בוחר  $t$  אז אליס משלמת לבוב 7.
- אם אליס בוחרת  $T$  ובוב בוחר  $h$  אז בוב משלם לאליס 6.
- אם אליס בוחרת  $T$  ובוב בוחר  $t$  אז אליס משלמת לבוב 4.

רשמו את המשחק בצורה רחבה.

## פתרון:

תהי אליס שחקן 1 ובוב שחקן 2.



$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_1, V_2\}, O, u)$$

$$N = \{\text{אליס}, \text{בוב}\} = \{1, 2\}.$$

$$V = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}.$$

$$E = \{x_0x_1, x_0x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_5, x_2x_6\}.$$

$$x_0.$$

$$V_1 = \{x_0(H, T)\}.$$

$$V_2 = \{x_1(h, t), x_2(h, t)\}.$$

$$O = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}.$$

שחקנים:

קדקודים:

קשתות:

מצב המשחק ההתחלתי:

קדקודים:

קבוצות ידיעה של שחקן 1:

קבוצת ידיעה של שחקן 2:

תוצאות אפשריות:

פונקציית התשלום:

$$\begin{aligned} u_1(H, h) &= 5, & u_2(H, h) &= -5, \\ u_1(H, t) &= -7, & u_2(H, t) &= 7, \\ u_1(T, h) &= -4, & u_2(T, h) &= 4, \\ u_1(T, t) &= 6, & u_2(T, t) &= -6. \end{aligned}$$

## הגדרה 1.2 קבוצת אסטרטגיות של שחקן

נתון משחק  $N$ -שחקנים.

נסמן ב-  $S_i$  את הקבוצה של כל האסטרטגיות האפשריות של שחקן  $i$  במשחק.

## דוגמה 1.2 (מטבע וקלפים)

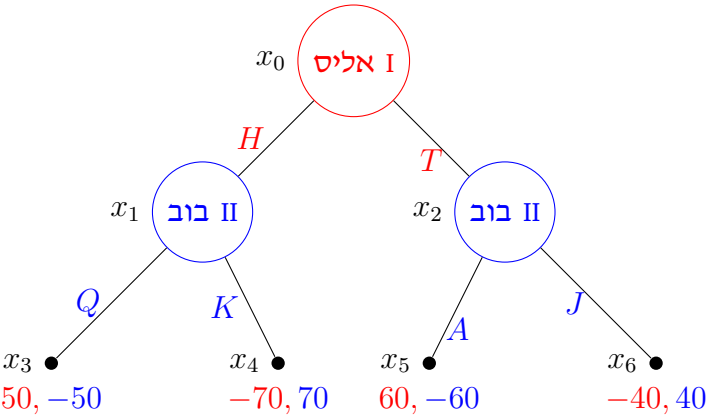
נתבונן על המשחק הבא:

שחקן  $I$  (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע,  $H$  (עץ) או  $T$  (פלי).  
אחר כך, אם אליס בוחרת  $H$  אז שחקן  $II$  (בוב) בוחר קלף מלכה ( $Q$ ) או קלף מלך ( $K$ ).  
אחרת אם אליס בוחרת  $T$  בוב בוחר קלף נסיך ( $J$ ) או קלף אס ( $A$ ).

• אם אליס בוחרת  $H$  ובוב בחר  $Q$  אז בוב משלם לאליס ₪50.

• אם אליס בוחרת  $H$  ובוב בחר  $K$  אז אליס משלם לבוב ₪70.

- אם אליס בוחרת  $T$  ובוב בוחר  $J$  אז בוב משלם לאליס 40.
- אם אליס בוחרת  $T$  ובוב בוחר  $A$  אז אליס משלם לבוב 60.



לשחקן  $I$  יש קדקוד אחד  $x_0$  בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות  $H, T$ .  
אומרים כי לשחקן  $I$  יש **קבוצה ידיעה אחת** שנסמן

$$V_I = \{ x_0(H, T) \}$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן  $I$  הינה

$$S_I = (H, T) .$$

לשחקן  $II$  יש שני קדקודים  $x_1, x_2$  בהם הוא מקבל החלטה.  
אומרים גם כי לשחקן  $II$  יש 2 קבוצות ידיעה,  $x_1, x_2$  אשר מייצגות שתי אפשרויות שונות המנובעות מההחלטה הקודמת של שחקן  $I$  בקדקוד  $x_0$ .  
הקבוצות ידיעה של שחקן  $II$  הינן:

$$V_{II} = \{ x_1(Q, K) , x_2(J, A) \}$$

מכיוון שלשחקן  $II$  יש שתי קבוצות ידיעה  $x_1, x_2$  ובכל אחד יש שתי פעולות אפשריות, אז יש לבוב  $2 \times 2 = 4$  אסטרטגיות:

$$S_{II} = (Q/J , Q/A , K/J , K/A)$$

מטבע וקלפים

### הגדרה 1.3 ווקטור אסטרטגיות של משחק

נתון משחק  $n$ -שחקנים.  
נניח כי שחקן 1 משחק לפי אסטרטגיה  $s_1$ , שחקן 2 משחק לפי אסטרטגיה  $s_2$ , ... ושחקן  $n$  משחק לפי אסטרטגיה  $s_n$ .  
אז הווקטור אסטרטגיות של המשחק הינו

$$s = (s_1, s_2, \dots, s_n) .$$

## הגדרה 1.4 פונקצית תשלום

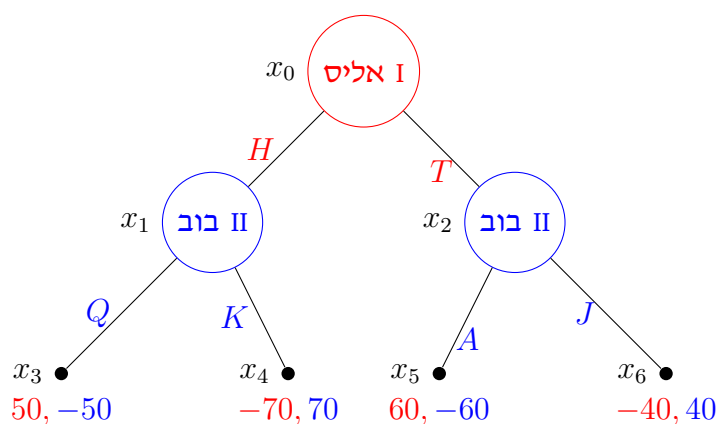
נתון משחק  $n$ -שחקנים. פונקצית תשלום  $u : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$  היא פונקציה אשר משייכת לכל ווקטור אסטרטגיות של המשחק, תשלום לכל שחקן.

נניח כי שחקן 1 משחק לפי אסטרטגיה  $s_1$ , שחקן 2 משחק לפי אסטרטגיה  $s_2$ , ... ושחקן  $n$  משחק לפי אסטרטגיה  $s_n$ . ז"א הווקטור האסטרטגיות של המשחק הינו  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ . פונקצית התשלום של המשחק מקבלת את הווקטור אסטרטגיות ומחזירה תשלום לכל שחקן:

$$u(s_1, s_2, \dots, s_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

כאשר  $u_1$  התשלום לשחקן 1,  $u_2$  התשלום לשחקן 2, ... ו- $u_n$  התשלום לשחקן  $n$ .

## דוגמה 1.3 (המשך של דוגמה 1.2)



- נניח כי אלים משחקת לפי האסטרטגיה  $s_I = H$  ובוב משחק לפי האסטרטגיה  $s_{II} = Q/A$ . הווקטור אסטרטגיות של המשחק הוא

$$s = (s_I, s_{II}) = (H, Q/A) .$$

- אם אלים משחקת לפי האסטרטגיה  $s_I = H$  ובוב משחק לפי האסטרטגיה  $s_{II} = Q/J$ . הווקטור אסטרטגיות של המשחק הוא

$$s = (s_I, s_{II}) = (H, Q/J) .$$

- וכן הלאה.

בסה"כ למשחק הזה יש 8 ווקטורי אסטרטגיות:

$$(s_I, s_{II}) = (H, Q/A) ,$$

$$(s_I, s_{II}) = (H, Q/J) ,$$

$$(s_I, s_{II}) = (H, K/A) ,$$

$$(s_I, s_{II}) = (H, K/J) ,$$

$$(s_I, s_{II}) = (T, Q/A) ,$$

$$(s_I, s_{II}) = (T, Q/J) ,$$

$$(s_I, s_{II}) = (T, K/A) ,$$

$$(s_I, s_{II}) = (T, K/J) .$$

הפונקציות תשלום של המשחק הינו

$$\begin{aligned} u(H, Q/A) &= (50, -50) , \\ u(H, Q/J) &= (50, -50) , \\ u(H, K/A) &= (-70, 70) , \\ u(H, K/J) &= (-70, 70) , \\ u(T, Q/A) &= (60, -60) , \\ u(T, Q/J) &= (-40, 40) , \\ u(T, K/A) &= (60, -60) , \\ u(T, K/J) &= (-40, 40) . \end{aligned}$$

## 1.2 משחקים עם ידיעה שלמה והצורה אסטרטגית

### הגדרה 1.5 משחק עם ידיעה שלמה

בכל שלב של המשחק, כל שחקן יודע את כל ההחלטות של שאר השחקנים לפני אותו שלב, ולכן הוא יודע בדיוק אילו פעולות נעשו על ידי כל שאר השחקנים. כתוצאה, כל שחקן, כשמגיע תורו יודע בדיוק באיזה קודקוד בעץ המשחק הוא נמצא.

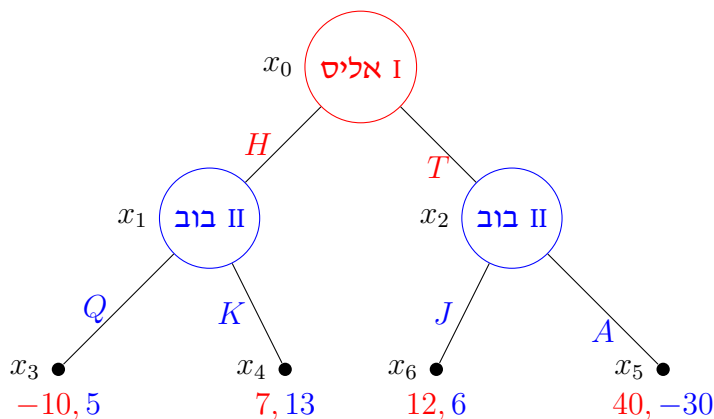
### דוגמה 1.4 (משחק מטבע וקלף עם ידיעה שלמה)

נתבונן על המשחק הבא:

שחקן  $I$  (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע,  $H$  (עץ) או  $T$  (פלי).  
אחר כך, אם אליס בוחרת  $H$  אז שחקן  $II$  (בוב) בוחר קלף מלכה ( $Q$ ) או קלף מלך ( $K$ ).  
אחרת אם אליס בוחרת  $T$  בוב בוחר קלף נסיך ( $J$ ) או קלף אס ( $A$ ).

- אם אליס בוחרת  $H$  ובוב בוחר  $Q$  אז בוב מקבל ₪5 ואליס מפסידה ₪10
- אם אליס בוחרת  $H$  ובוב בוחר  $K$  אז אליס מקבלת ₪7 ובוב מקבל ₪13
- אם אליס בוחרת  $T$  ובוב בוחר  $J$  אז בוב מקבל ₪6 ואליס מקבלת ₪12
- אם אליס בוחרת  $T$  ובוב בוחר  $A$  אז אליס מקבלת ₪40 ובוב מפסיד ₪30

ניתן לרשום את עץ המשחק בצורה רחבה אסטרטגית:



לשחקן  $I$  יש קדקוד אחד  $x_0$  בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות  $H, T$ .  
ז"א לשחקן  $I$  יש **קבוצה ידיעה אחת**:

$$x_0(H, T) .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן  $I$  הינה

$$S_I = (H, T) .$$

לשחקן  $II$  יש שני קדקודים  $x_1, x_2$  בהם הוא מקבל החלטה.  
אז לשחקן  $II$  יש 2 קבוצות ידיעה,

$$V_{II} = \{x_1(Q, K) , x_2(J, A) \} .$$

אשר מייצגות שתי אפשרויות שונות המנובעות מההחלטה הקודמת של שחקן  $I$  בקדקוד  $x_0$ .  
מכיוון שלשחקן  $II$  יש שתי קבוצות ידיעה  $x_1, x_2$  ובכל אחד יש שתי פעולות אפשריות, אז יש לבוב 4  
 $2 \times 2 = 4$  אסטרטגיות:

$$S_{II} = (Q/J , Q/A , K/J , K/A)$$

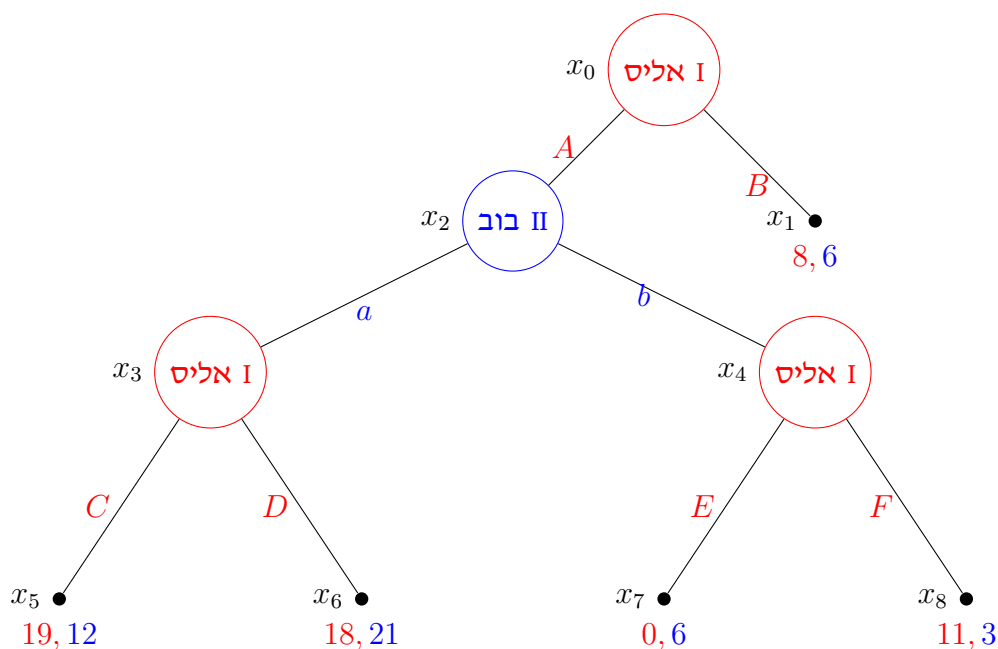
(נהוג לרשום את האסטרטגיות מלמעלה עד למטה ומשמאל לימין).

ניתן לרשום את המשחק **בצורה אסטרטגית**:

$I \backslash II$		$II$			
		$Q/J$	$Q/A$	$K/J$	$K/A$
$H$	$I$	-10, 5	-10, 5	7, 13	7, 13
		12, 6	40, -30	12, 6	40, -30
$T$	$I$				

## דוגמה 1.5 ()

נתון המשחק הבא בצורה רחבה. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



במשחק הזה, אליס (שחקן  $I$ ) פותח עם המהלך הראשון, ואחר כך בוב מבצע המהלך השני, ואז אליס מבצע מהלך שוב.

המשחק הוא משחק עם ידיעה שלמה.

לאליס יש שלוש קבוצות ידיעה:

$$x_0(A, B), \quad x_3(C, D), \quad x_4(E, F).$$

בכל אחד של הקדקודים האלה לאליס יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לה  $2 \times 2 \times 2 = 8$  קבוצות אסטרטגיות:

$$S_I = (A/C/E, A/C/F, A/D/E, A/D/F, B/C/E, B/C/F, B/D/E, B/D/F).$$

לבוב יש קבוצות ידיעה אחת:

$$x_2(a, b).$$

בקבוצת ידיעה הזאת של בוב יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לו 2 קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a, b).$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

$I \backslash II$	$a$	$b$
$A/C/E$	19, 12	0, 6
$A/C/F$	19, 12	11, 3
$A/D/E$	18, 21	0, 6
$A/D/F$	18, 21	11, 3
$B/C/E$	8, 6	8, 6
$B/C/F$	8, 6	8, 6
$B/D/E$	8, 6	8, 6
$B/D/F$	8, 6	8, 6



### 1.3 משחקים עם ידיעה לא שלמה

#### הגדרה 1.6 משחק עם ידיעה לא שלמה

משחק עם ידיעה לא שלמה הוא משחק בו לפחות שחקן לא יודע את ההחלטה של שחקן אחר בקדקוד הקודם שממנו יוצא צלע לקדקוד החלטה שלו. כתוצאה, השחקן אשר לו יודע את ההחלטה של שחקן אחר, לא יודע באיזה קדקוד הוא נמצא בעץ המשחק.

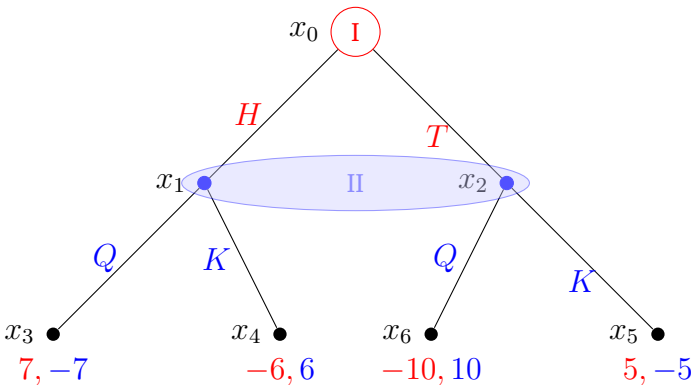
#### דוגמה 1.6 (משחק מטבע וקלף עם ידיעה לא שלמה)

בשונה לדוגמה הקודמת נתבונן על המשחק הבא עבורו שחקן  $II$  לא יודע את ההחלטה של שחקן  $I$  עד סוף המשחק.

שחקן  $I$  (אליס) בוחרת אחד הצדדים של מטבע,  $H$  (עץ) או  $T$  (פלי).  
אחר כך, **בלי ידיעה של הבחירה של אליס**, שחקן  $II$  (בוב) בוחר קלף מלכה ( $Q$ ) או קלף מלך ( $K$ ).

- אם אליס בוחרת  $H$  ובוב בוחר  $Q$  אז בוב משלם לאליס 7.  $\blacksquare$
- אם אליס בוחרת  $H$  ובוב בוחר  $K$  אז אליס משלם לבוב 6.  $\blacksquare$
- אם אליס בוחרת  $T$  ובוב בוחר  $Q$  אז אליס משלם לבוב 10.  $\blacksquare$
- אם אליס בוחרת  $T$  ובוב בוחר  $K$  אז בוב משלם לאליס 5.  $\blacksquare$

נרשום את המשחק בצורה רחבה:



לשחקן  $I$  יש קדקוד אחד  $x_0$  בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות  $H, T$ .  
כלומר לאליס יש **קבוצה ידיעה אחת**:

$$V_I = \{ x_0(H, T) \} .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן  $I$  הינה

$$S_I = (H, T) .$$

בניגוד לדוגמה הקודמת, לבוב (שחקן  $II$ ) יש רק קבוצת ידיעה אחת שמכילה שני קדקודים.  
ז"א בוב לא יודע איזה אופציה אליס בחרה,  $H$  או  $T$ . אז בוב לא יודע על איזה קדקוד הוא נמצא,  $x_1$  או  $x_2$ .  
בגלל שהוא לא יודע מה ההחלטה של אליס, הוא בוחר בין רק שתי אפשרויות, בלי ידיעה של ההחלטה של אליס.

לכן אנחנו מסתכלים אל הקדקודים  $x_1x_2$  **כקבוצת ידיעה אחת** שממנה יוצאות רק שתי הפעולות:

$$V_{II} = \{ x_1x_2(Q, K) \} .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של בוב הינה

$$S_{II} = (Q , K)$$

נשים לב כי מכל אחד של הקדקודים  $x_1$  ו-  $x_2$  יוצאות אותן קבוצת פעולות. אחרת בוב היה יודע מה ההחלטה של אליס.

כעת נרשום את הצורה האסטרטגית של המשחק:

$I \backslash II$	$Q$	$K$
	$H$	$T$
$H$	7, -7	-6, 6
$T$	-10, 10	5, -5

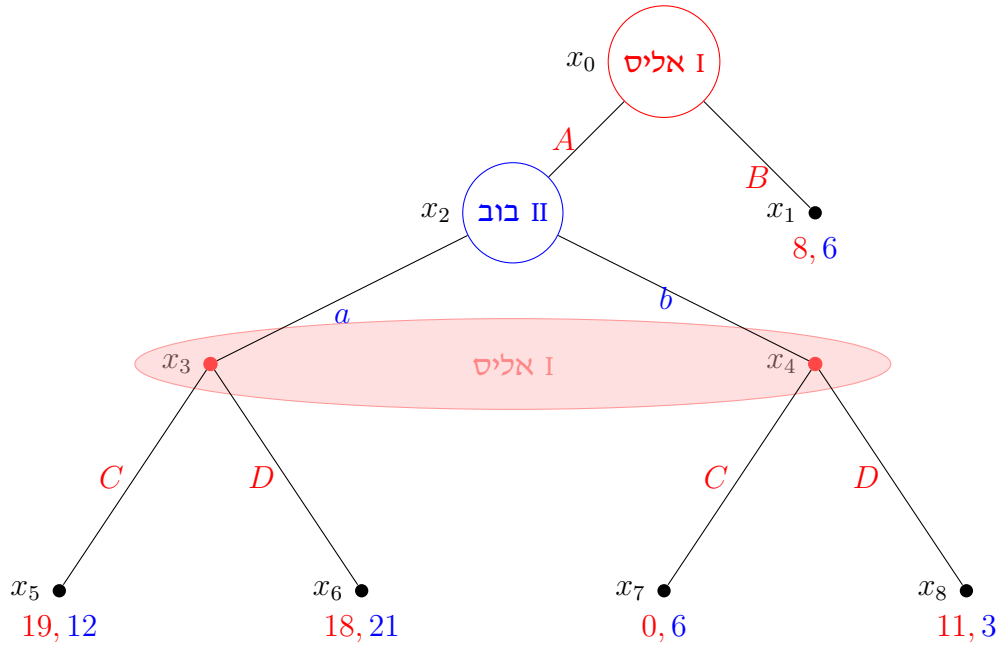


## כלל 1.1 פעולות שיוצאות מקבוצת ידיעה ללא ידיעה שלמה

לשחקן יש אותה קבוצה של פעולות אפשריות בכל קדקוד שמוכל אותה קבוצת ידיעה.

### דוגמה 1.7 (משחק עם ידיעה לא שלמה)

נתון המשחק הבא בצורה רחבה. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



### פתרון:

שימו לב, דומה לדוגמה הקודמת, הקדקודים  $x_3$  ו- $x_4$  באותה קבוצת ידיעה של אליס בגלל שהיא לא ידועת מה ההחלטה של בוב בקדקוד  $x_2$ , כלומר אליס לא יודעת אם בוב בחר  $a$  או  $b$ . לכן הפעולות היוצאות מקדקוד  $x_3$  הן אותן פעולות שיוצאות מקדקוד  $x_4$ , בגלל שאם היו פעולות אפשריות שונות היוצאות ב- $x_3$  ו- $x_4$ , אז אליס היתה יודעת איזה פעולה בוב בחר,  $a$  או  $b$ . כלומר אם לאליס יש החלטה בין הפעולות  $E$  ו- $F$  אז היא היתה יודעת שהיא נמצאת בקדקוד  $x_4$  בעץ המשחק ובוב בחר  $b$ . ולהפך, אם היתה לה בחירה בין הפעולות  $C$  ו- $D$  במקום הבחירה בין הפעולות  $E$  ו- $F$  אז היא היתה יודעת שהיא נמצאת ב- $x_3$  ושוב בחר  $a$ .

לעליס יש שתי קבוצות ידיעה:

$$x_0 (A, B), \quad x_3 x_4 (C, D).$$

בכל אחד של הקדקודים האלה לעליס יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לה  $2 \times 2 = 4$  קבוצות אסטרטגיות:

$$S_I = (A/C, A/D, B/C, B/D).$$

לבוב יש קבוצת ידיעה אחת:

$$x_2 : (a, b).$$

בקבוצת ידיעה הזאת של בוב יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לו 2 קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a, b).$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

$I \backslash II$	$a$	$b$
$A/C$	19, 12	0, 6
$A/D$	18, 21	11, 3
$B/C$	8, 6	8, 6
$B/D$	8, 6	8, 6

■

## 1.4 משחק עם מהלכי גורל

במשחקים שבהם עסקנו עד כה, המעבר ממצב למצב נעשה על ידי אחד השחקנים. מודל כזה מתאים למשחקים כגון שחמט ודמקה, אך לא למשחקי קלפים או קוביה (כמו פוקר או שש-בש), שבהם מעבר ממצב למצב יכול להיעשות על ידי תהליך מקרי: במשחקי קלפים אנחנו טורפים את הקלפים שבחפיסה, ובשש-בש אנו מטילים קוביה. ניתן לחשוב גם על סיטואציות שבהן המעבר ממצב למצב תלוי בגורמים מקריים אחרים, כגון ירידת גשם, רעידת אדמה או נפילת הבורסה. מעבר מסוג זה נקרא **מהלך גורל**. ההרחבה של המודל שלנו תיעשה על ידי כך שחלק מהקדקודים בעץ המשחק  $(V, E, x_0)$  יסומנו כמהלכי גורל. הצלעות היוצאות מקדקוד המתאים למהלך גורל מתאימות לתוצאות האפשריות של ההגרלה וליד כל צלע כזו נרשמת ההסתברות לקבלת התוצאה המתאימה.

### הגדרה 1.7 משחק בצורה רחבה עם מהלכי גורל

משחק בצורה רחבה עם מהלכי גורל ניתן ע"י הווקטור

$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_0, V_1, V_2, V_3, \dots\}, O, u, (p_x)_{x \in V_0}) ,$$

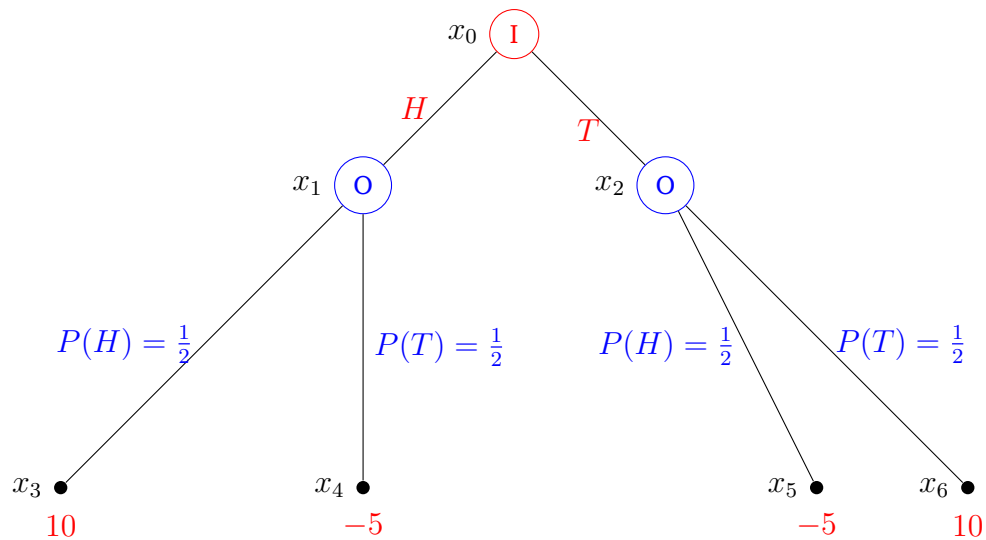
כאשר המשמעות של כל האיברים אותו דבר להגדרה של משחק בצורה רחבה כפי שנתון בהגדרה 1.1. ההבדל היחיד הוא הקבוצת קדקודים  $V_0$ , אשר מסמן את הקבוצה של הקדקודים בהם יש הגרלה על ידי שחקן הגורל.

לכל קדקוד  $x \in V_0$ , אנחנו משייכים הסתברות לכל צלע שיוצא ממנו.

### דוגמה 1.8 (משחק עם מהלך גורל)

שחקן בוחר  $H$  ("עץ") או  $T$  ("פלי"). אחרי שהשחקן בוחר, הוא מטיל מטבע. אם המטבע מראה את בחירתו, הוא מנצח ומקבל ₪ 10. אם לא הוא מפסיד ₪ 5. שרטוט את המשחק בצורה רחבה.

**פתרון:**



$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_1, V_2\}, O, u) .$$

$$N = \{I\} = \{1, 2\}.$$

$$V = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}.$$

$$E = \{x_0x_1, x_0x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_5, x_2x_6\}.$$

$$x_0.$$

$$V_1 = \{x_0(H, T)\}.$$

$$V_0 = \left\{ x_1 \left( P(H) = \frac{1}{2}, P(T) = \frac{1}{2} \right), x_2 \left( P(H) = \frac{1}{2}, P(T) = \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

$$O = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}.$$

שחקנים:

קדקודים:

קשתות:

מצב המשחק ההתחלתי:

קדקודים:

קבוצות ידיעה של שחקן 1:

קבוצת ידיעה של שחקן 2:

תוצאות אפשריות:

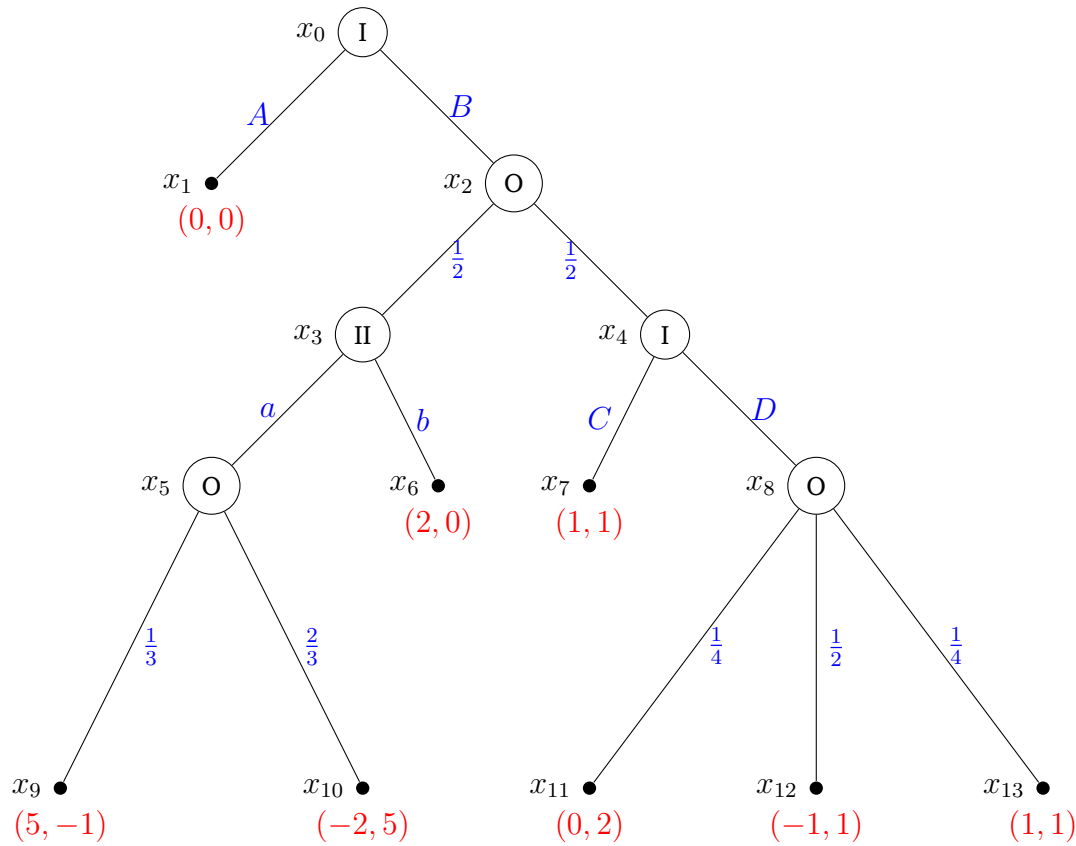
פונקציית התשלום:

$$u(H) = \frac{1}{2} \cdot (10) + \frac{1}{2} \cdot (-5) = \frac{5}{2},$$

$$u(T) = \frac{1}{2} \cdot (-5) + \frac{1}{2} \cdot (10) = \frac{5}{2}.$$



## דוגמה 1.9 (אסטרטגיות במשחק עם מהלכי גורל)



קבוצות ידיעה של שחקן  $I$ :

$$x_0(A, B) , \quad x_4(C, D) .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן  $I$ :

$$S_I = (A/C , A/D , B/C , B/D) .$$

קבוצות ידיעה של שחקן  $II$ :

$$x_3(a, b) .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן  $I$ :

$$S_{II} = (a , b) .$$

פונקציית התשלום:

$$u(A/C, a) = (0, 0) ,$$

$$u(A/D, a) = (0, 0) ,$$

$$u(B/C, a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(5, -1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(-2, 5) + \frac{1}{2}(1, 1) = \left( \frac{2}{3}, \frac{7}{6} \right) ,$$

$$u(B/D, a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(5, -1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(-2, 5) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(0, 2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(-1, 1) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}(1, 1) = \left( -\frac{1}{48}, \frac{33}{16} \right) ,$$

$$u(A/C, b) = (0, 0) ,$$

$$u(A/D, b) = (0, 0) ,$$

$$u(B/C, b) = \frac{1}{2}(2, 0) + \frac{1}{2}(1, 1) = \left( \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) ,$$

$$u(B/D, b) = \frac{1}{2}(2, 0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(0, 2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(-1, 1) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}(1, 1) = \left( -\frac{11}{16}, \frac{9}{16} \right) ,$$