חדו"א 1
סמסטר א' תשפ"ד
עבודה עצמית 1

שאלות שמסומנות עם * מיועדת להעשרה בלבד ולא על הסילבוס.

שאלה 1

נתונה הפונקציה

$$\text{sgn}x = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

א) בנו את גרף הפונקציה

ב) הוכיחו כי $|x| = x \cdot \text{sgn}x$.

שאלה 2

נגדיר פונקציה $y = f(x)$ ($x \geq 0$) כמות המספרים הראשונים הקטנים או שווים ל- x. בנה את גרף הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 20$.

שאלה 3

שרטטו את הגרפים של הפונקציות הבאות:

א)
$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & x < 2 \\ -(x-3)^2 & x \geq 2 \end{cases}$$

ב)
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2x^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

ג)
$$h(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ \cos x & x \geq 0 \end{cases}$$

ד)
$$i(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ -x + 2 & x > 0 \end{cases}$$

שאלה 4

נתונה פונקציה $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$. מצאו את

א) $\dfrac{1}{f(x)}$,

ב) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$,

ג) $f(x)+1$,

ד) $f(x+1)$,

ה) $f(-x)$,

ו) $f(0)$.

שאלה 5

א) הגדר את הפונקציות

1) $\max(x,y)$,

2) $\min(x,y)$,

3) $|x|$.

ב) פתרו את המשוואות

1) $|x| < 1$,

2) $|x| > 1$,

3) $0 < |x-2| < 3$,

4) $|x-3| < 2$.

ג) הוכיחו כי

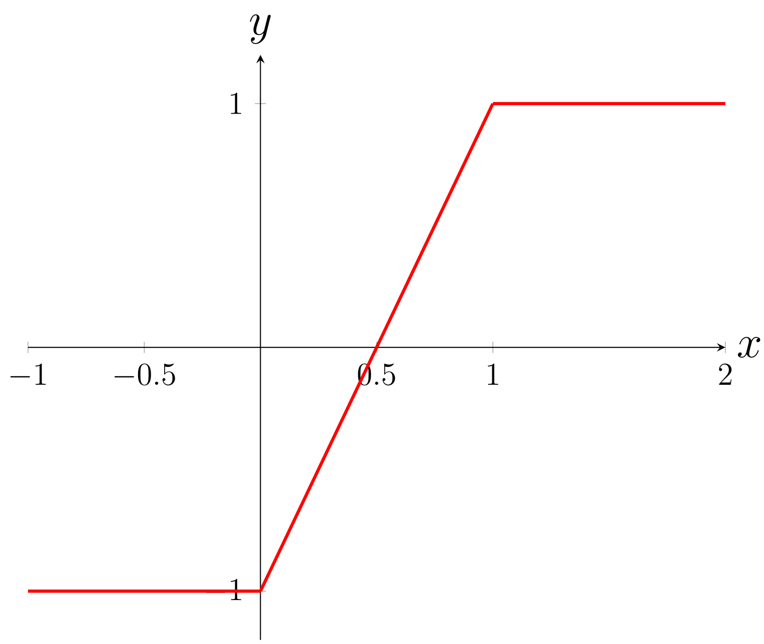
$$\max(x,y) + \min(x,y) = x + y$$

ד) הוכיחו כי

$$\max(x,y) - \min(x,y) = |x-y|$$

ה) הבעו את $\max(x,y)$ ו- $\min(x,y)$ בעזרת הפונקציה ערך מוחלט.

שאלה 6 באיור נתון גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בקטע $[-1,2]$.



ציירו את הגרפים של הפונקציות

א) $f(x+1)$

ב) $f(x-1)$

ג) $f(x)+1$

ד) $f(x)-1$

ה) $f(-x)$

ו) $-f(x)$

ז) $f(2x)$

ח) $f\left(\frac{x}{2}\right)$

ט) $\frac{f(x)}{2}$

י) $f(|x|)$

יא) $|f(x)|$

יב) $f(\max(x,0))$

יג) $f(\min(x,0))$

יד) $\max(f(x),0)$

שאלה 7 נתונה הפונקציה $f(x)=x^2$. שרטטו הפונקציות הבאות:

א) $f(x)$

ב) $f(x+2)$

ג) $f(x)+4$

ד) $f(x+3)$

ה) $f(|x|+3)$

ו) $f(x+3)+4$

ז) $f(x)+8$

ח) $f(x-5)$

ט) $f(|x|-5)$

י) $f(x-5)+8$

יא) $f(-x)$

יב) $-f(x)$

שאלה 8 נתונה הפונקציה $f(x)=x^3$. שרטטו הפונקציות הבאות:

א) $f(x)$

ב) $|f(x)|$

ג) $f(x+2)$

ד) $|f(x+2)|$

ה) $f(x-3)$

ו) $f(x+3)$

ז) $f(|x|+3)$

ח) $f(x+3)+4$

ט) $f(x)+8$

י) $f(x-5)$

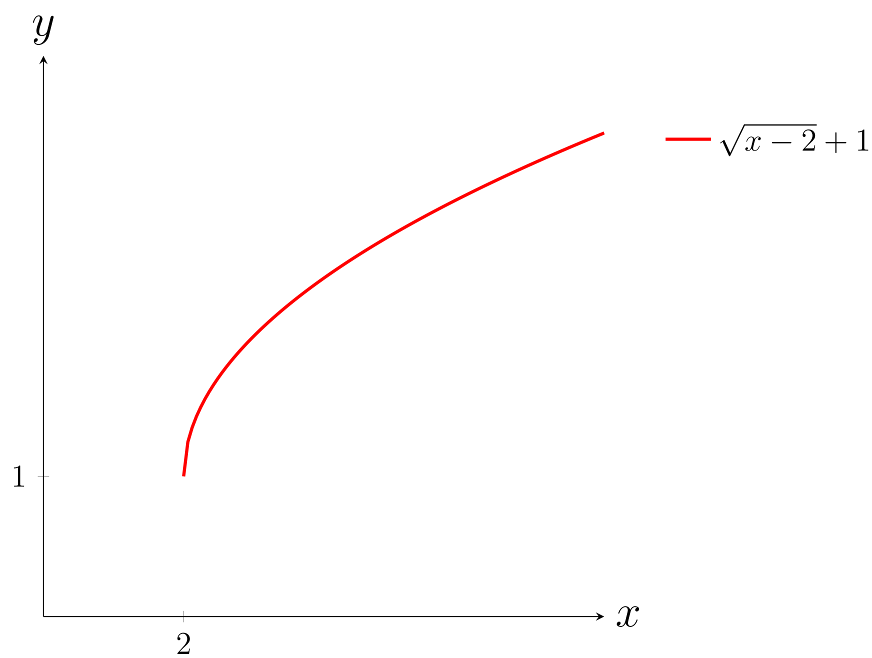
יא) $f(|x|-5)$

יב) $f(x-5)+8$

יג) $f(-x)$

יד) $-f(x)$

שאלה 9 באיור נתון גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{x-2}+1$ המוגדרת בקטע $[2,\infty)$.



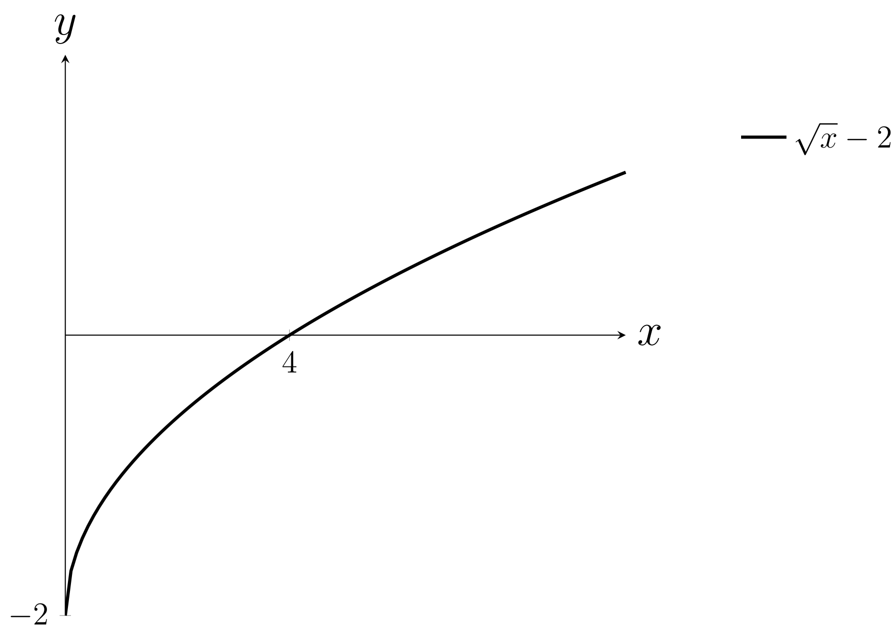
ציירו את הגרפים של הפונקציות

א) $f(x-2)$

ב) $f(x+2)$

ג) $f(x)-1$

שאלה 10 באיור נתון גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}-2$ המוגדרת בקטע $[0,\infty)$.



ציירו את הגרפים של הפונקציות

א) $f(-x)$

ב) $f(|x|)$

ג) $|f(x)|$

ד) $-|f(x)|$

ה) $f(-|x|)$

שאלה 11 * הוכיחו את הטענות הבאות ע"י אינדוקציה מתמטית או בכל דרך אחרת:

א) $2^n \geq n^2$ לכל $n \geq 4$.

ב) $2^n > 2n+1$ לכל מספר טבעי $n \geq 3$.

ג) $3^n > 3n+1$ לכל מספר טבעי $n \geq 2$.

ד) $(1+a)^n \geq 1+na$ לכל מספר טבעי n ולכל מססר ממשי $a \geq -1$.

ה) $2^n > n^3$ לכל מספר טבעי $n \geq 10$.

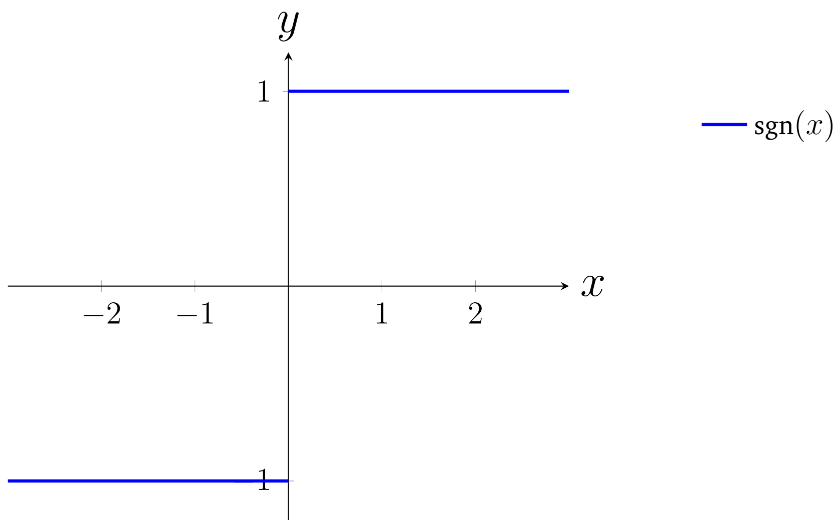
ו) $2^n > n^4$ לכל מספר טבעי $n \geq 17$.

שאלה 12 * הוכיחו כי לכל x ממשי וחיובי, מתקיים $\frac{x+1}{x} > 1$.

פתרונות

שאלה 1

א)



ב) בתחום $x > 0$, נשים לב כי $|x| = x$ ו- $\operatorname{sgn}(x) = 1$, לכן $\operatorname{sgn}(x) \cdot x = 1 \cdot x = x$. לפיכך

$$|x| = x = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$$

כשאר $x > 0$.

בתחום $x < 0$, נשים לב כי $|x| = -x$ ו- $\operatorname{sgn}(x) = -1$, לכן $\operatorname{sgn}(x) \cdot x = -1 \cdot x = -x$. לפיכך

$$|x| = -x = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$$

כשאר $x < 0$.

ב- $x = 0$, $\operatorname{sgn}(x) \cdot x = 0 = |x|$. בסה"כ

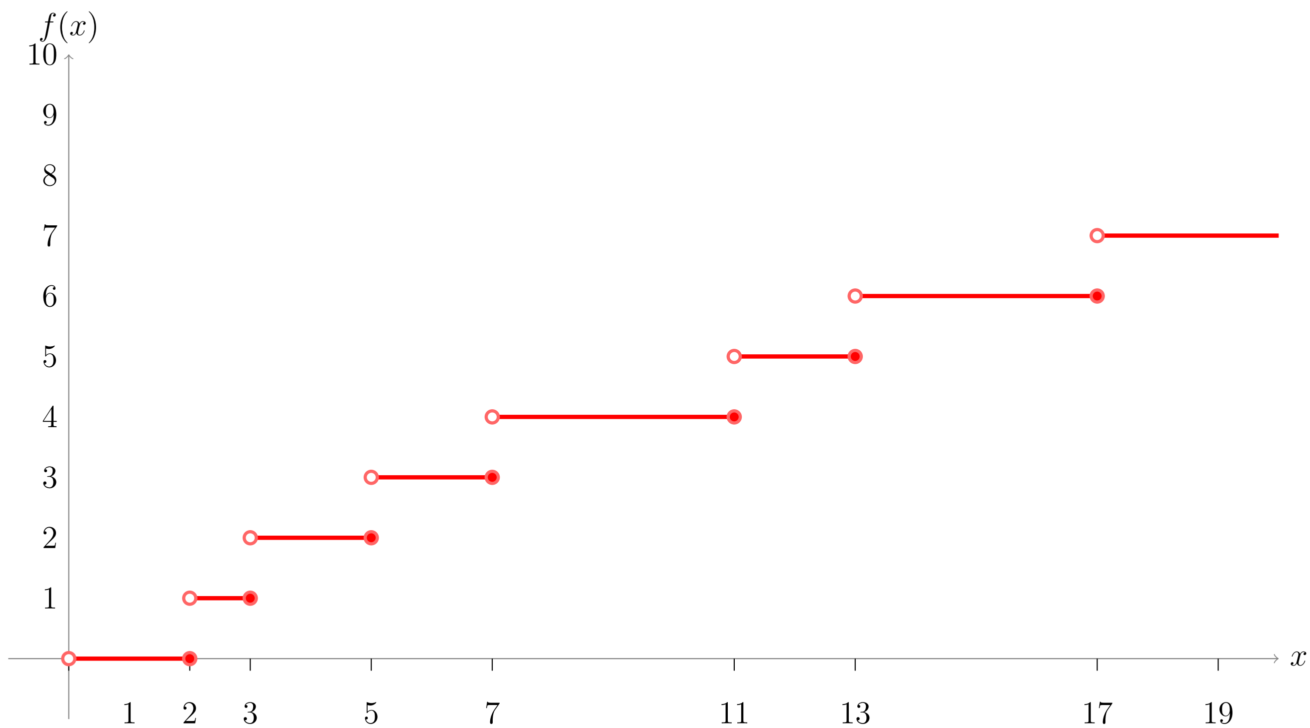
$$|x| = \operatorname{sgn}(x) \cdot x$$

לכל x.

שאלה 2

מספר ראשוני הוא מספר גדול מ- 1 שמתחלק בעצמו או שמתחלק ב- 1 בלבד.

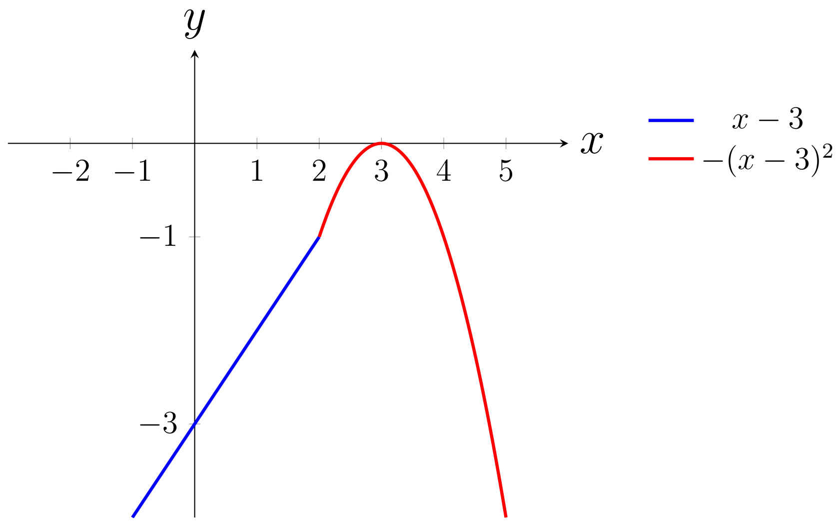
x	$f(x)$	מספרים ראשוניים קטן או שווה ל-x
$x=0$	0	$\{\}$
$x<1$	0	$\{\}$
$x=1$	0	$\{\}$
$x\leq 2$	1	$\{2\}$
$x\leq 3$	2	$\{2,3\}$
$x\leq 4$	2	$\{2,3\}$
$x\leq 5$	3	$\{2,3,5\}$
$x\leq 7$	4	$\{2,3,5,7\}$
$x\leq 11$	5	$\{2,3,5,7,11\}$
$x\leq 13$	6	$\{2,3,5,7,11,13\}$
$x\leq 17$	7	$\{2,3,5,7,11,13,17\}$
$x\leq 19$	6	$\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$



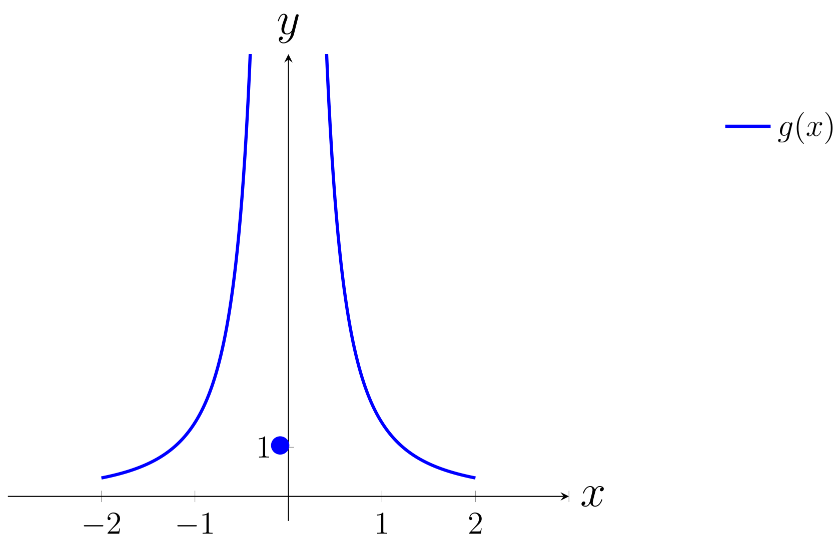
שאלה 3

א)

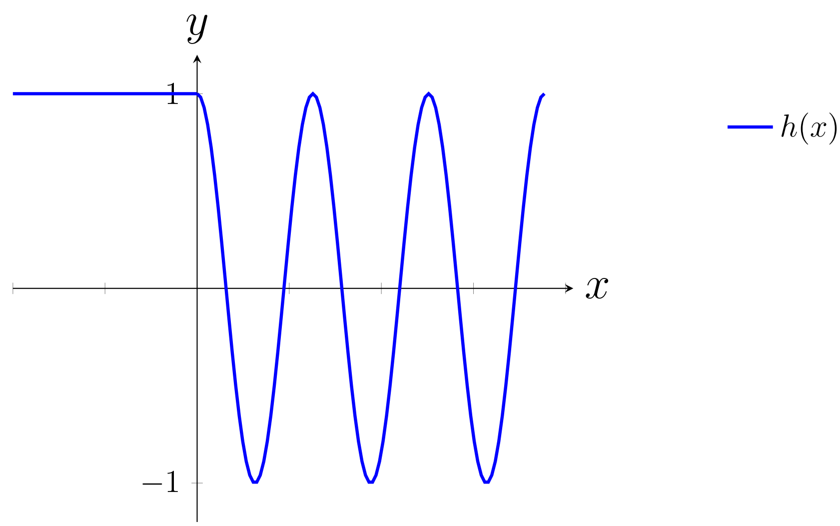
$$f(x)=\begin{cases} x-3 & x<2 \\ -(x-3)^2 & x\geq 2 \end{cases}$$



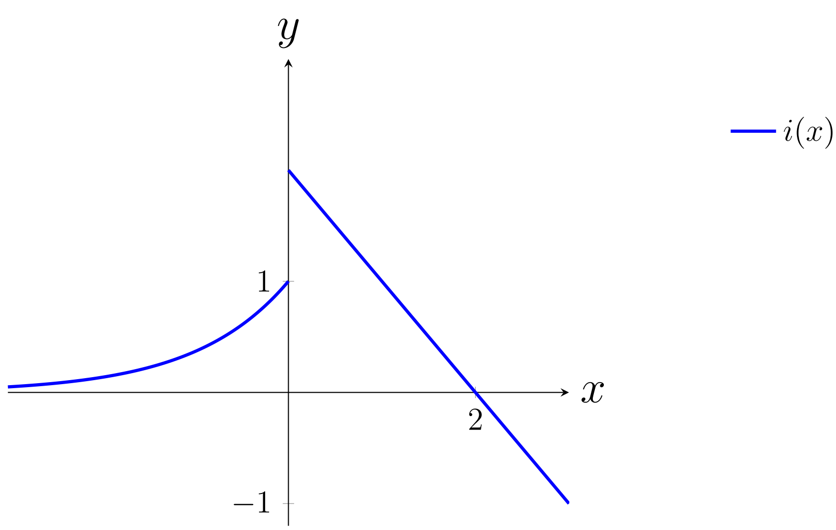
ב) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2x^2} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$



ג) $h(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ \cos x & x\geq 0\end{cases}$



ד) $$i(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ -x+2 & x > 0 \end{cases}$$



שאלה 4

א) $$\frac{1}{f(x)} = \frac{1+x}{1-x}$$

ב) $$f\left(\tfrac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x+1}$$

ג) $$f(x)+1 = \frac{2}{x+1}$$

ד) $$f(x+1) = \frac{1-(x+1)}{1+x+1} = \frac{-x}{2+x}$$

ה) $$f(-x) = \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{f(x)}$$

ו) $f(0) = 1$

שאלה 5

א) 1)

$$\max(x,y) = \begin{cases} x & x \geq y \\ y & y \geq x \end{cases} .$$

2)

$$\min(x,y) = \begin{cases} y & x \geq y \\ x & y \geq x \end{cases} .$$

ב) 1)

$$|x| < 1 \qquad \Rightarrow \qquad -1 < x < 1$$

2)

$$|x| > 1 \qquad \Rightarrow \qquad \{x < -1\} \cup \{x > 1\}$$

3) $0 < |x-2| < 3$.
ז"א $0 < x-2 < 3$ או $-3 < x-2 < 0$.
ז"א $2 < x < 5$ או $-1 < x < 2$.
ז"א

$$\{-1 < x < 2\} \cup \{2 < x < 5\} .$$

ג) מצב 1: $x = y$

$$\max(x,y) = x = y,$$
$$\min(x,y) = x = y,$$

לכן

$$\max(x,y) + \min(x,y) = x + y .$$

מצב 2: $x > y$

$$\max(x,y) = x,$$
$$\min(x,y) = y,$$

לכן

$$\max(x,y) + \min(x,y) = x + y .$$

מצב 3: $x < y$

$$\max(x,y) = y,$$
$$\min(x,y) = x,$$

לכן

$$\max(x,y) + \min(x,y) = y + x = x + y\ .$$

ד) <u>מצב 1: $x = y$</u>

$$\max(x,y) = x = y,$$
$$\min(x,y) = x = y,$$

$$\max(x,y) - \min(x,y) = x - x = 0,$$

וגם $|x-y| = 0$, לפיכך

$$\max(x,y) - \min(x,y) = |x-y|\ .$$

<u>מצב 2: $x > y$</u>

$$\max(x,y) = x,$$
$$\min(x,y) = y,$$

לכן

$$\max(x,y) - \min(x,y) = x - y\ ,$$

וגם $|x-y| = x - y$, לפיכך

$$\max(x,y) - \min(x,y) = |x-y|\ .$$

<u>מצב 3: $x < y$</u>

$$\max(x,y) = y,$$
$$\min(x,y) = x,$$

לכן

$$\max(x,y) - \min(x,y) = y - x\ ,$$

וגם $|x-y| = y - x$, לפיכך

$$\max(x,y) - \min(x,y) = |x-y|\ .$$

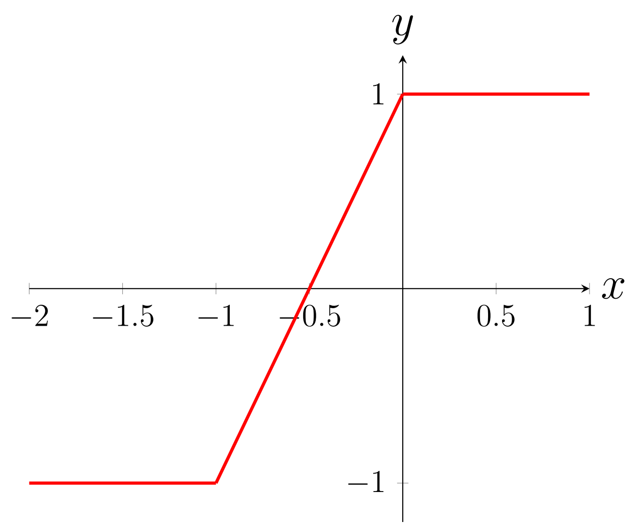
ה)

$$\max(x,y) = \frac{1}{2}\left(\max(x,y) + \min(x,y)\right) + \frac{1}{2}\left(\max(x,y) - \min(x,y)\right) = \frac{1}{2}\left(x+y\right) + \frac{1}{2}|x-y|$$

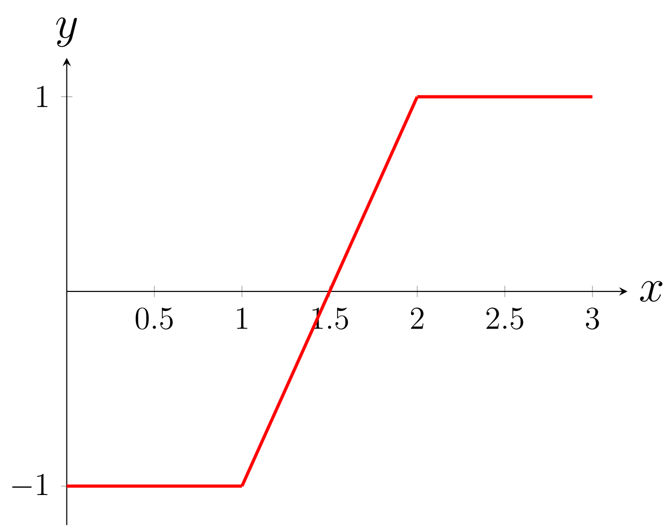
$$\min(x,y) = \frac{1}{2}\left(\max(x,y) + \min(x,y)\right) - \frac{1}{2}\left(\max(x,y) - \min(x,y)\right) = \frac{1}{2}\left(x+y\right) - \frac{1}{2}|x-y|$$

שאלה 6

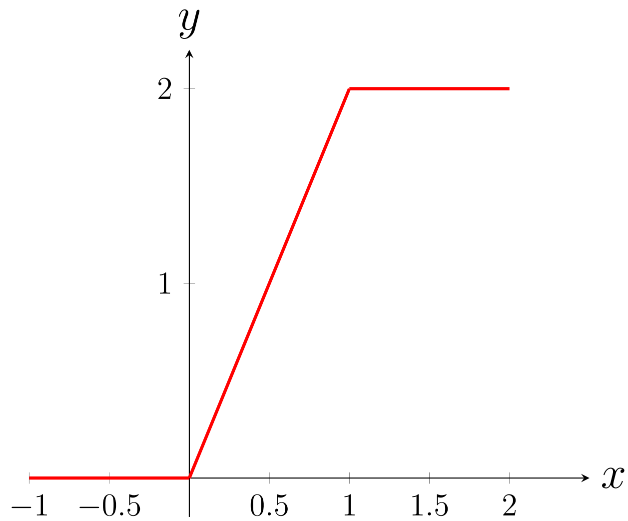
א) $\underline{f(x+1)}$



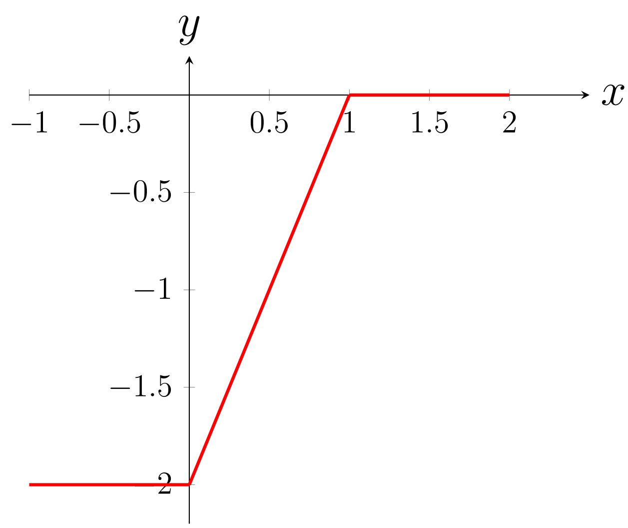
ב) $\underline{f(x-1)}$



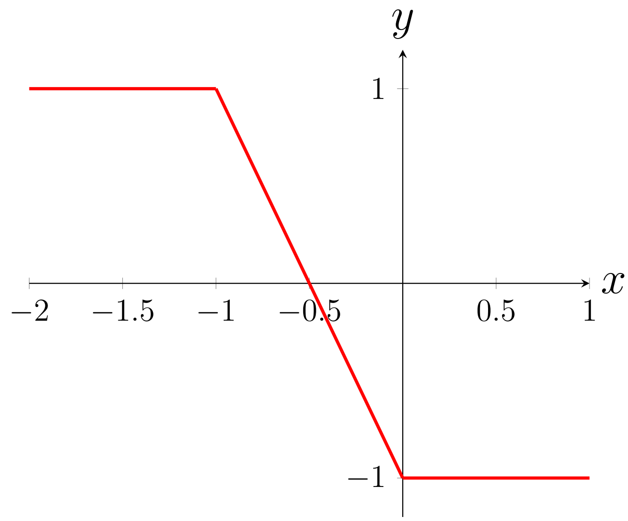
ג) $\underline{f(x)+1}$



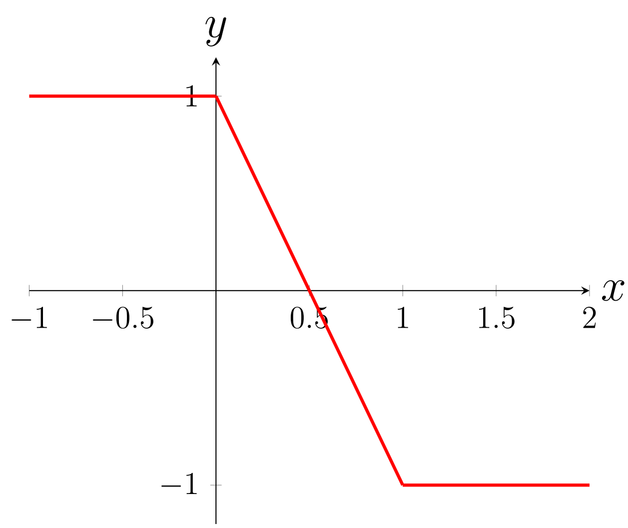
ד) $\underline{f(x) - 1}$



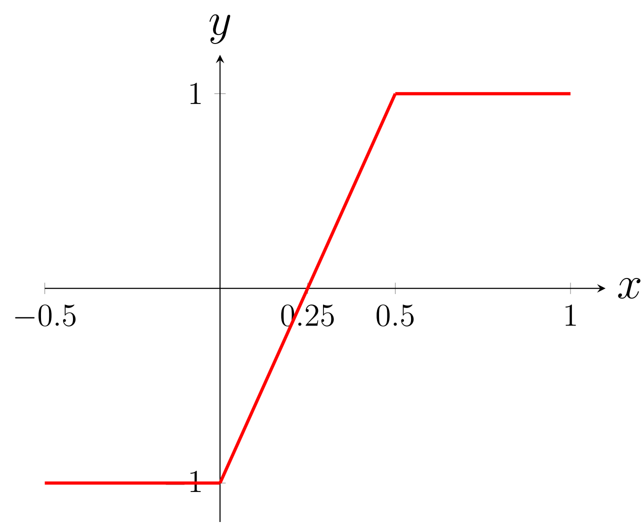
ה) $\underline{f(-x)}$



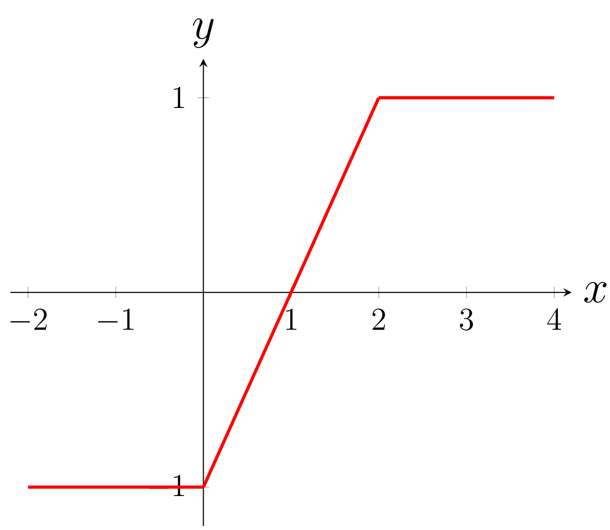
۱) $\underline{-f(x)}$



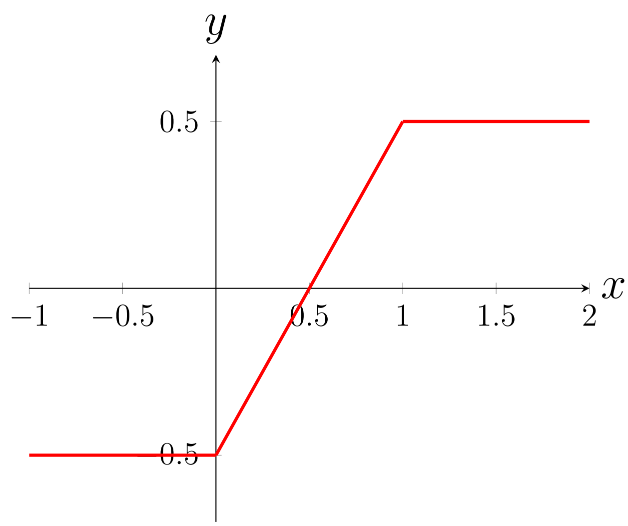
۲) $\underline{f(2x)}$



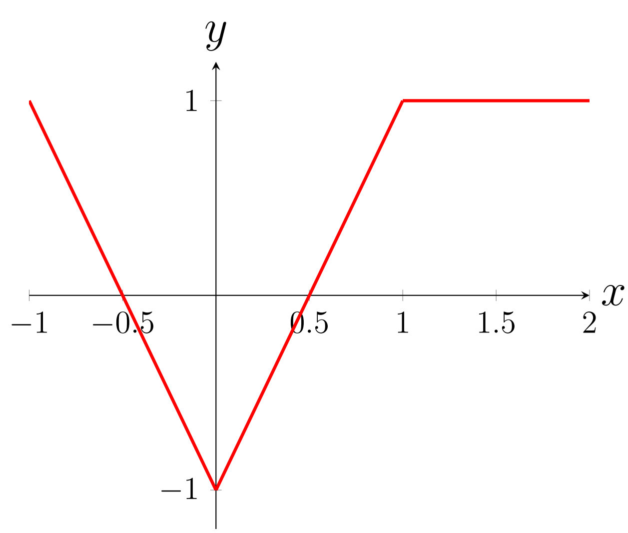
ח) $f\left(\frac{x}{2}\right)$



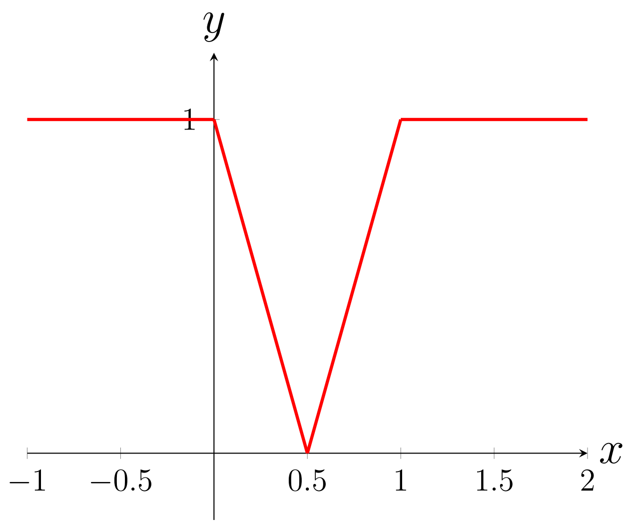
ט) $\frac{f(x)}{2}$



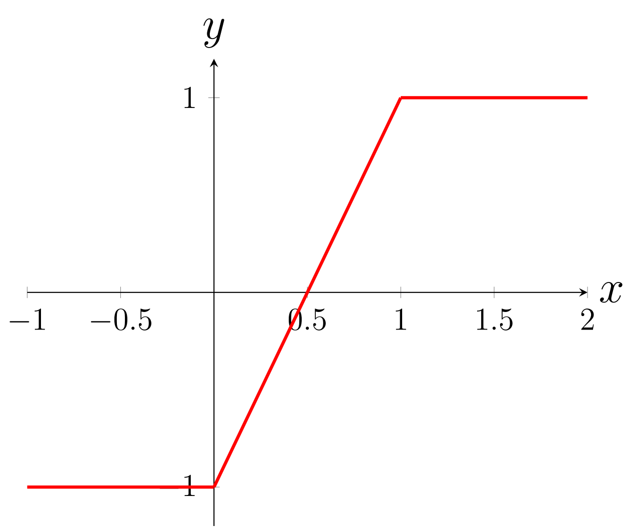
י) $\underline{f(|x|)}$



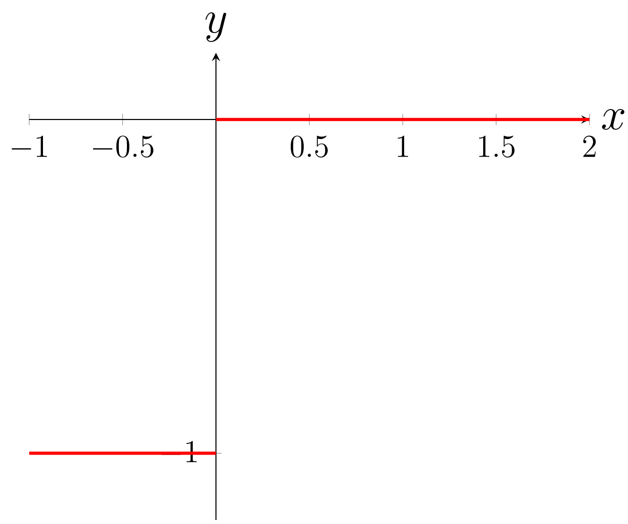
יא) $\underline{|f(x)|}$



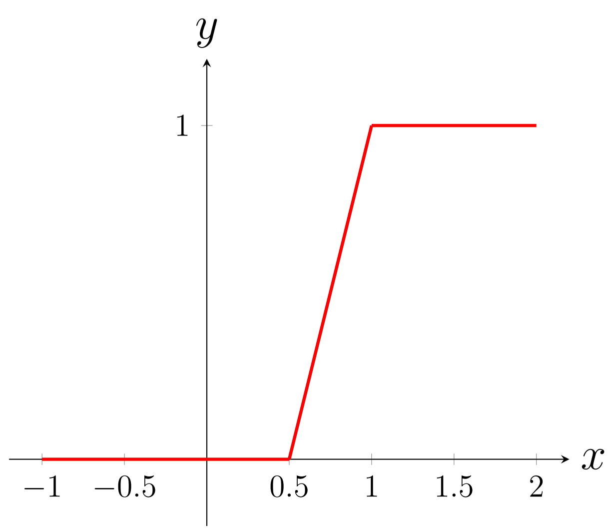
יב) $\underline{f(\max(x,0))}$



יג) $\underline{f(\min(x,0))}$

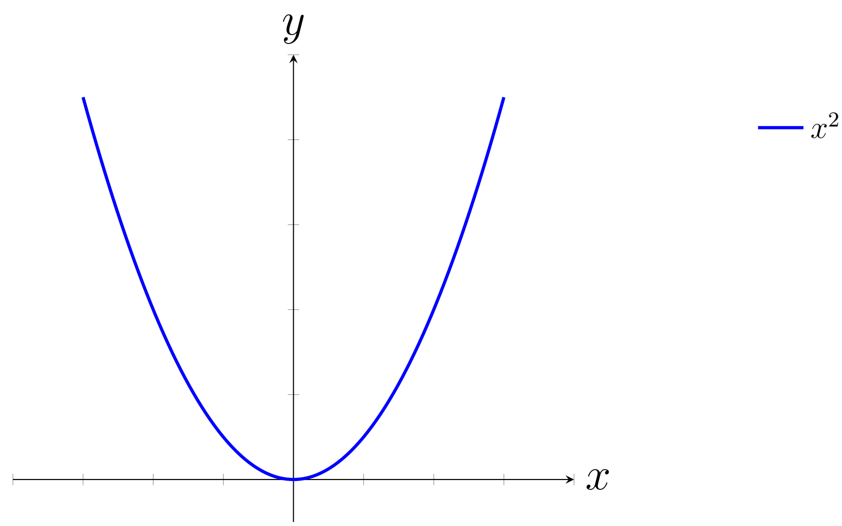


יד) $\underline{\max(f(x),0)}$

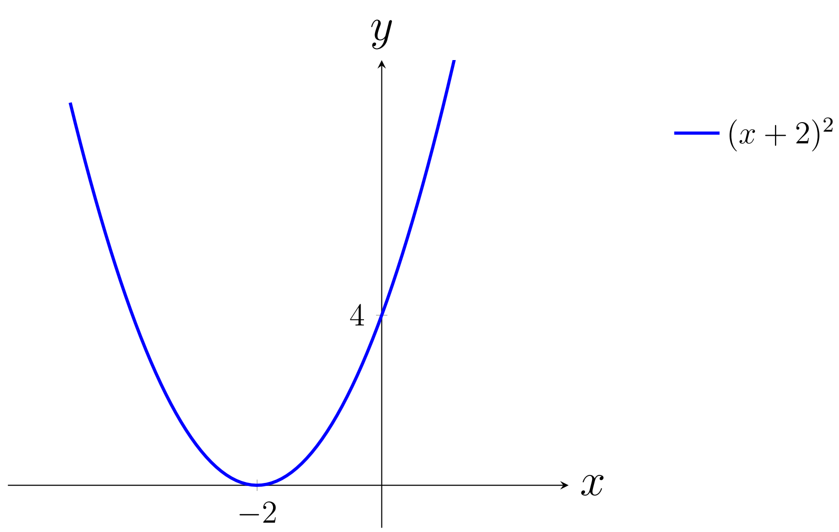


<u>שאלה 7</u>

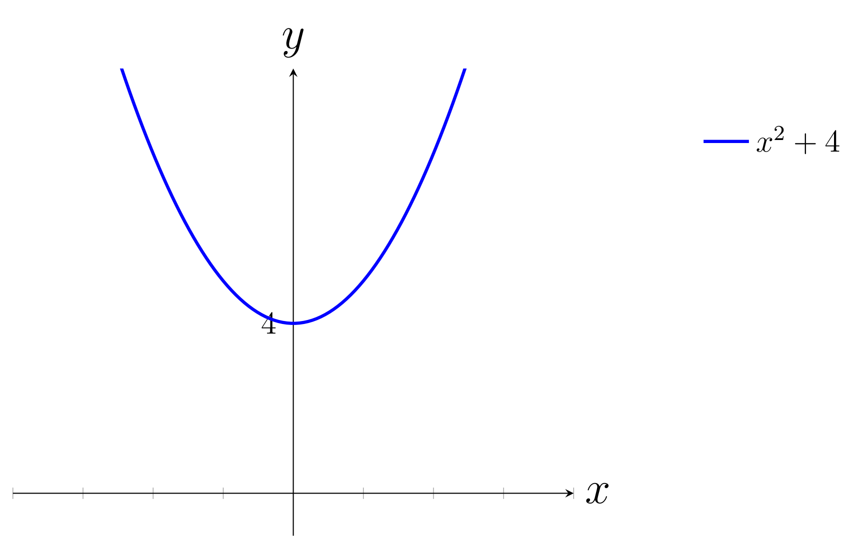
א)



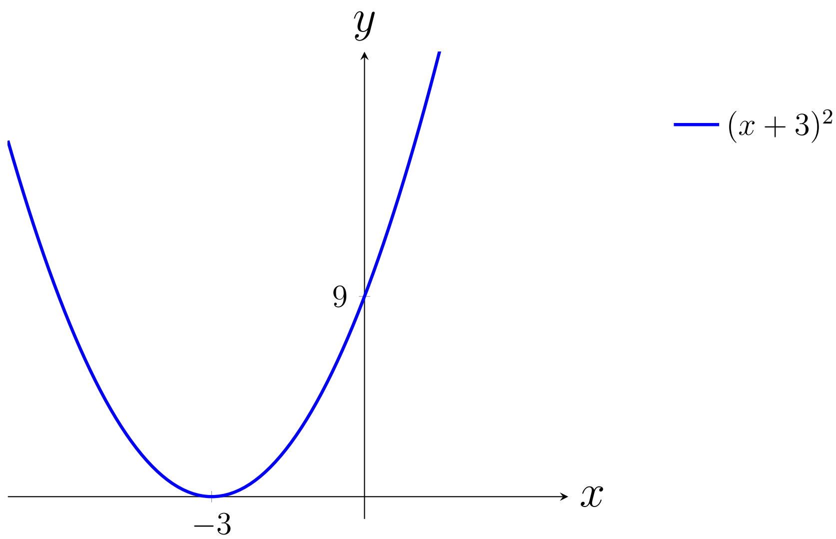
ב)



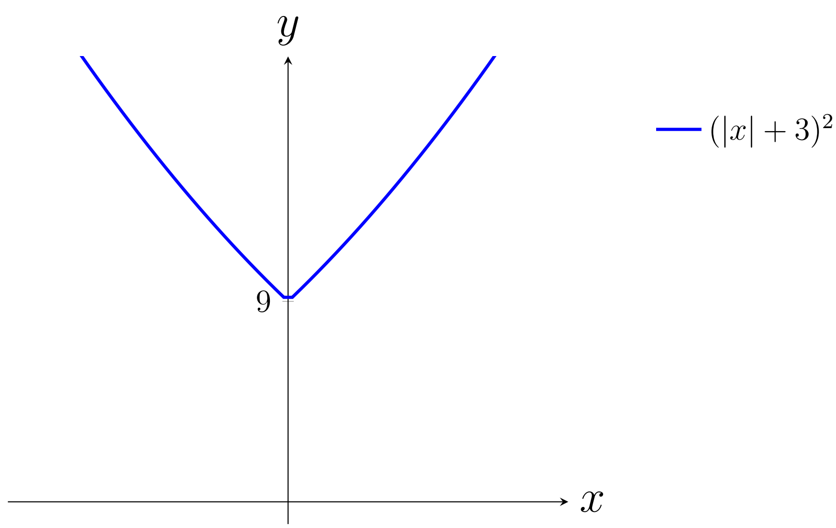
ג)



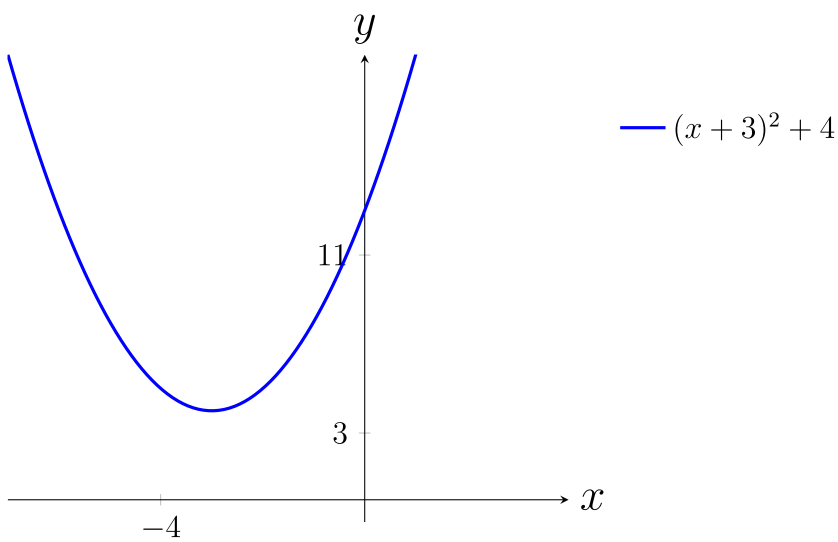
ד)



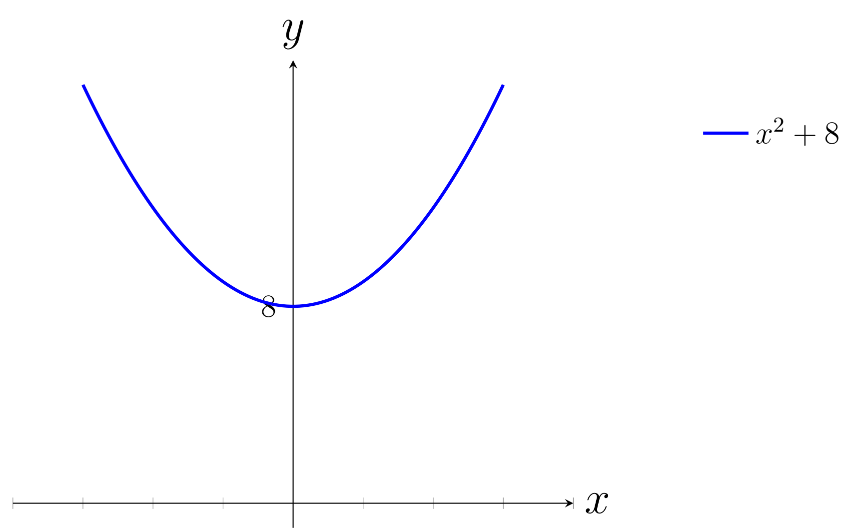
ה)



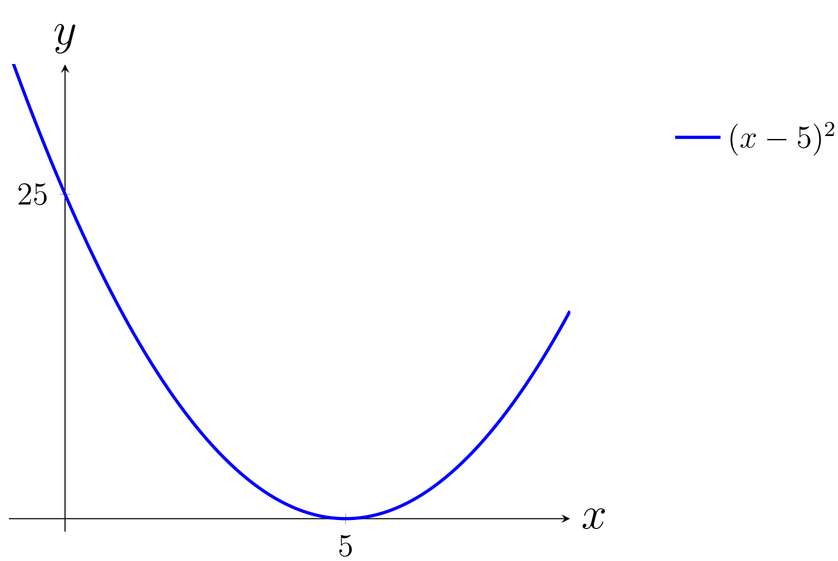
ו)



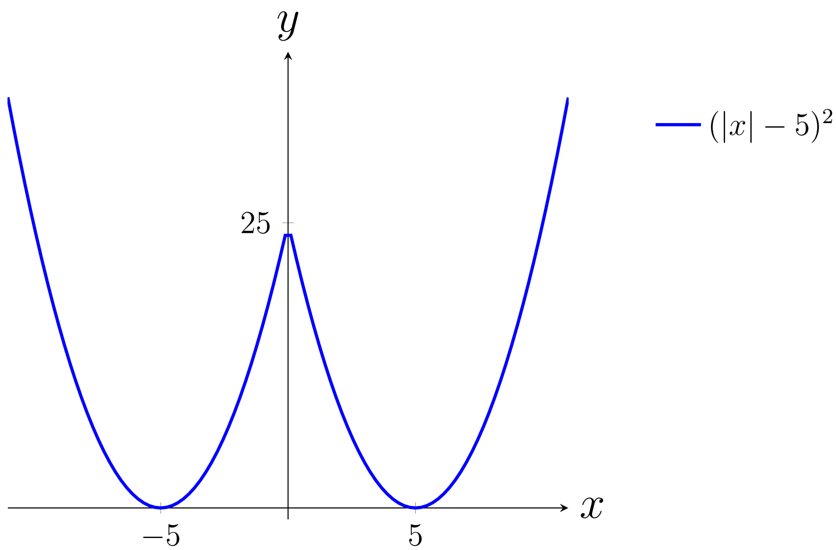
ז)



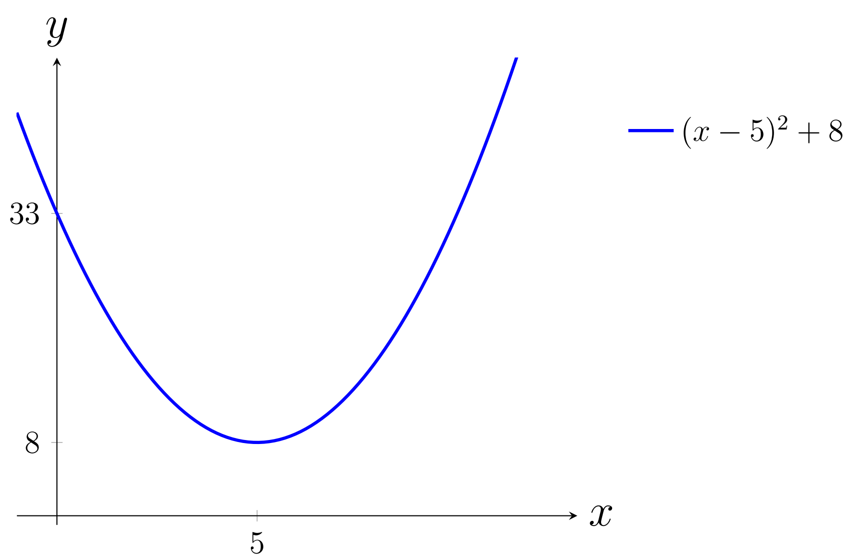
ח)



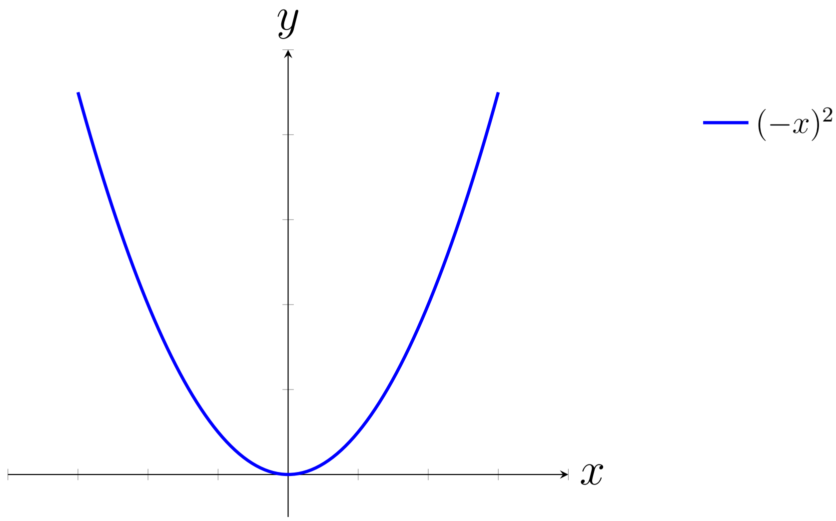
ט)



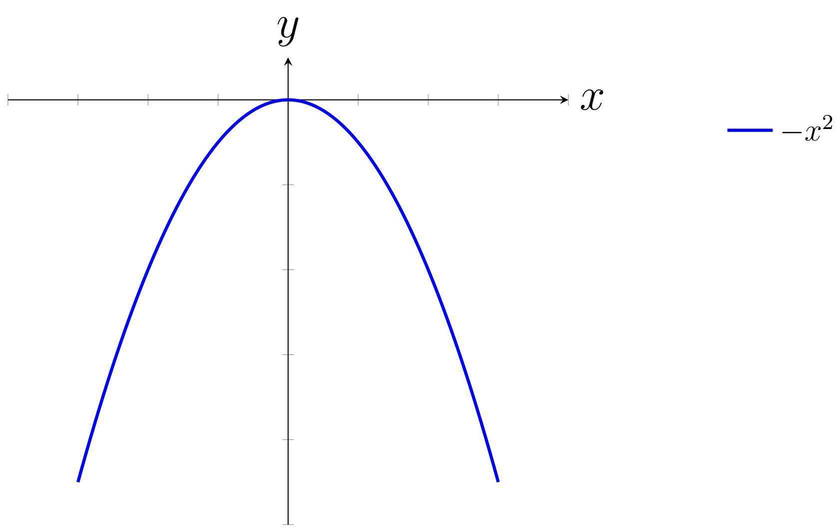
י)



יא)

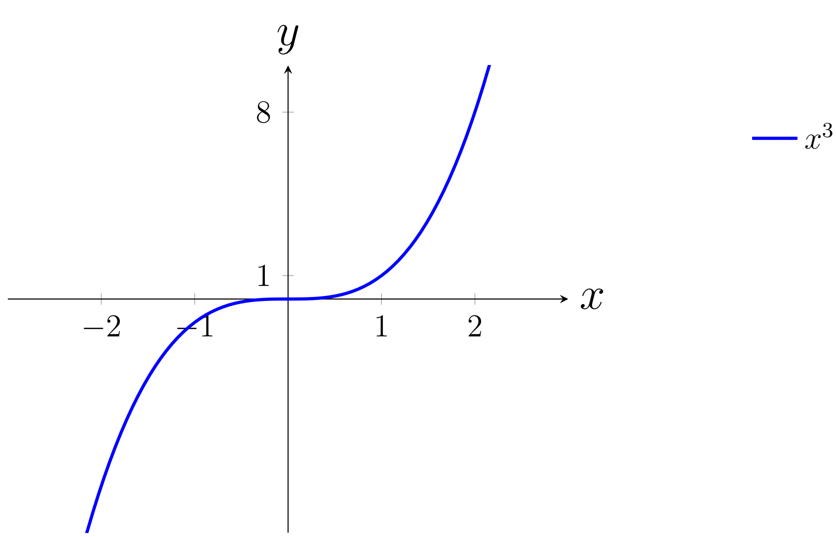


יב)

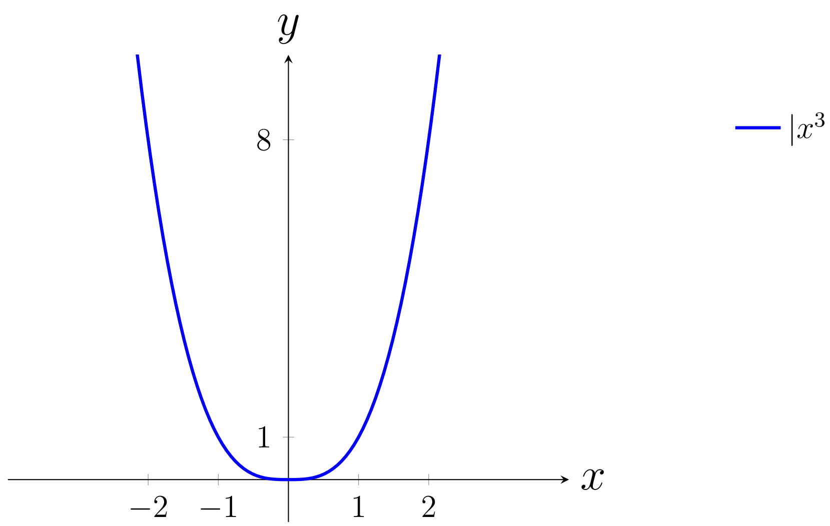


<u>**שאלה 8**</u>

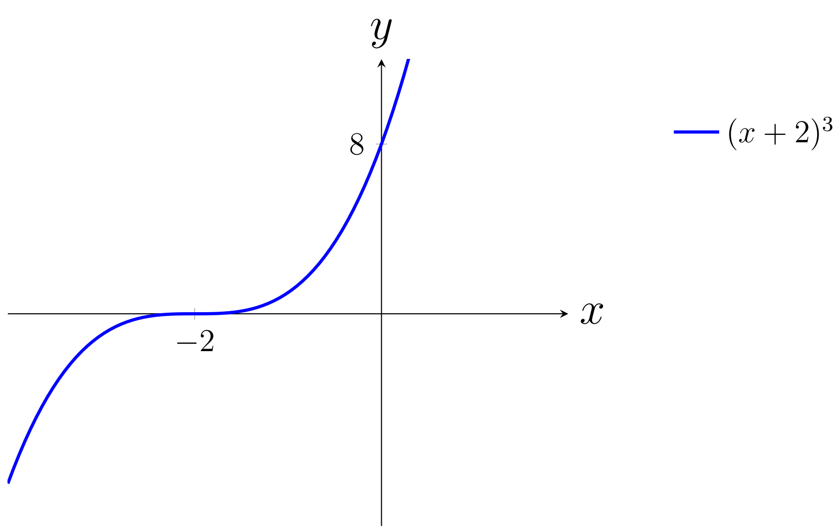
א)



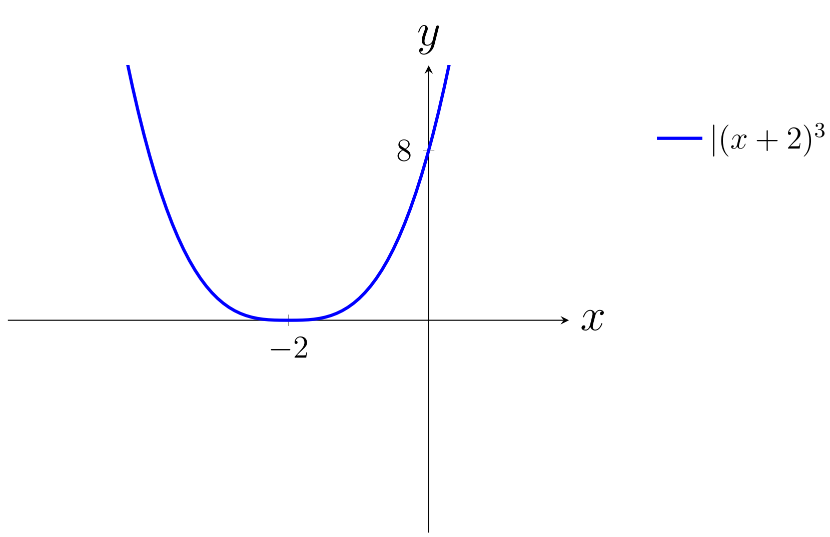
ב)



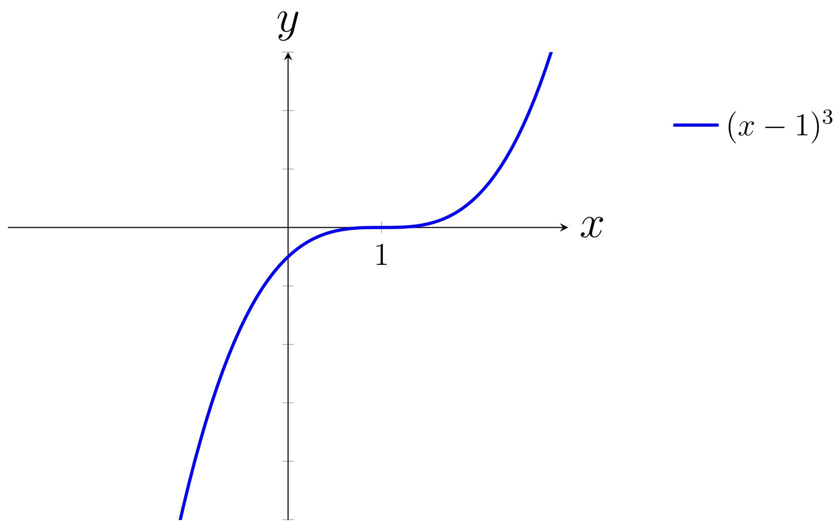
ג)



ד)

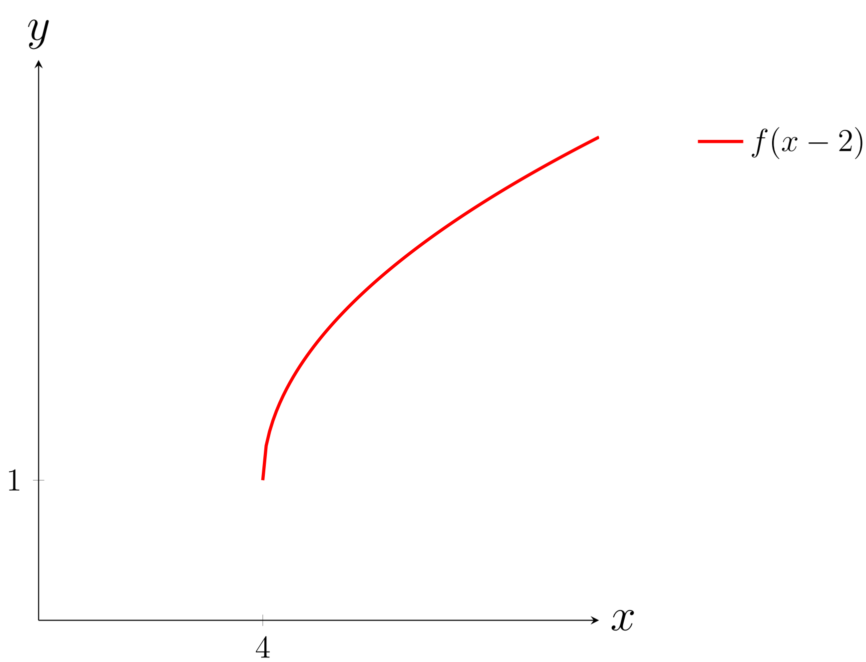


ה)

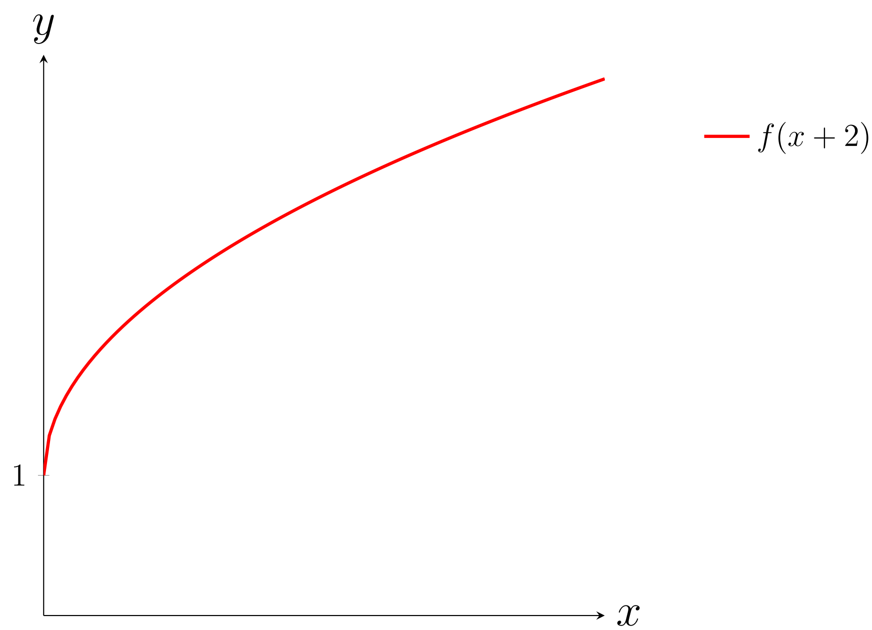


<u>שאלה 9</u>

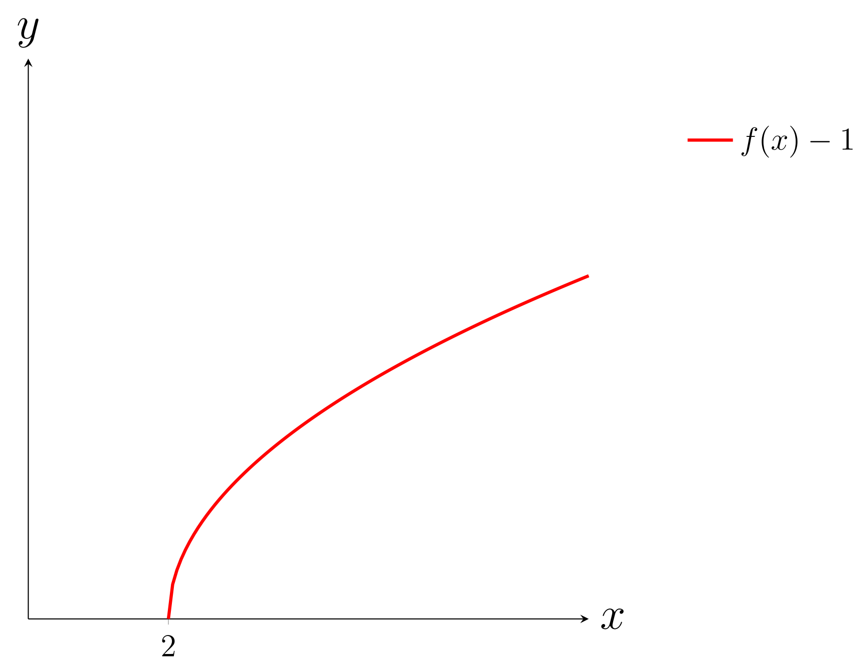
א)



ב)

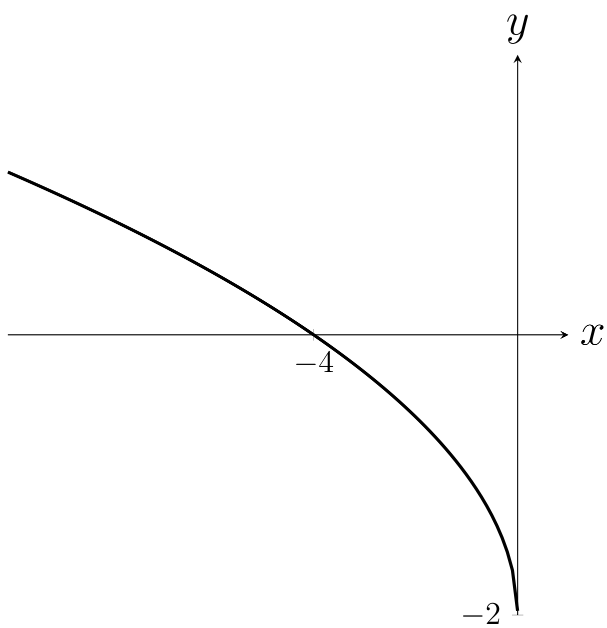


ג)

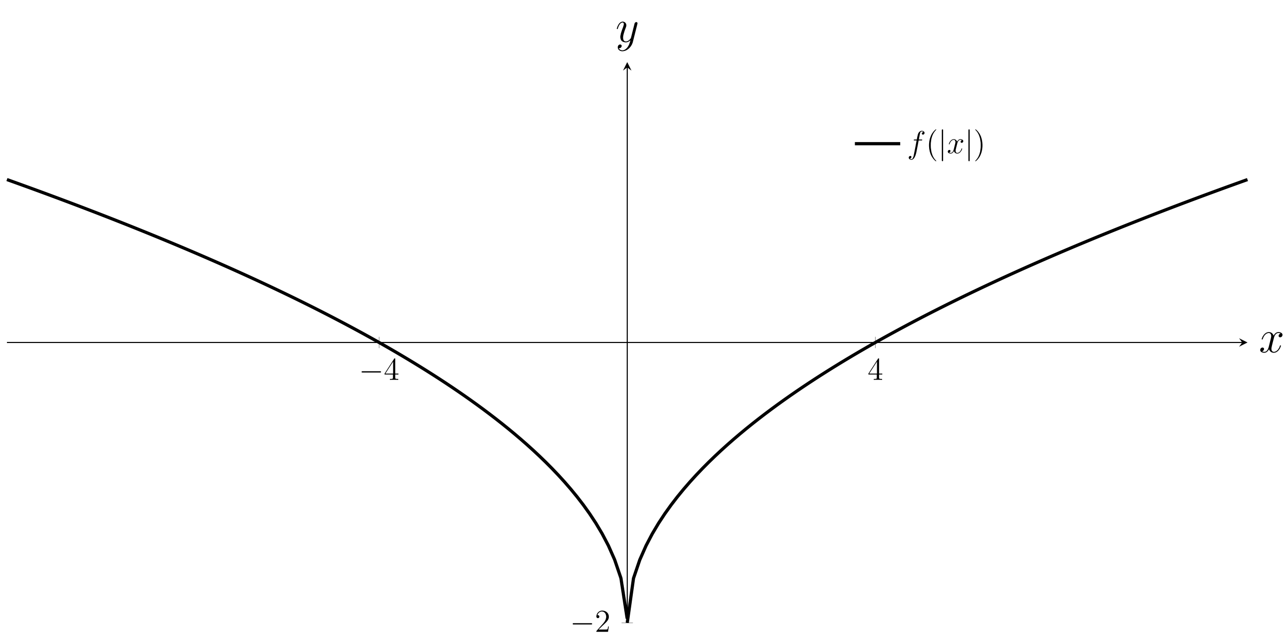


<u>שאלה 10</u>

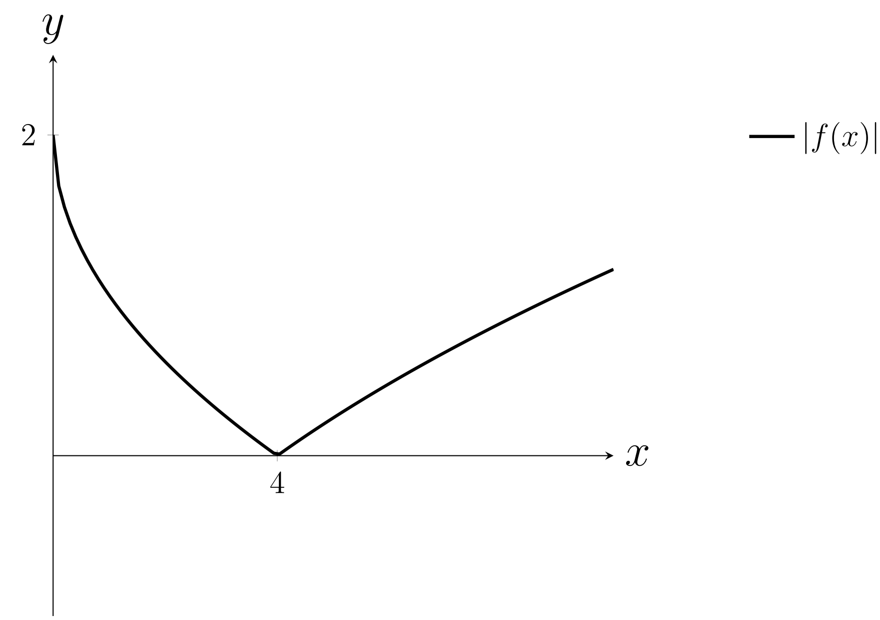
א)



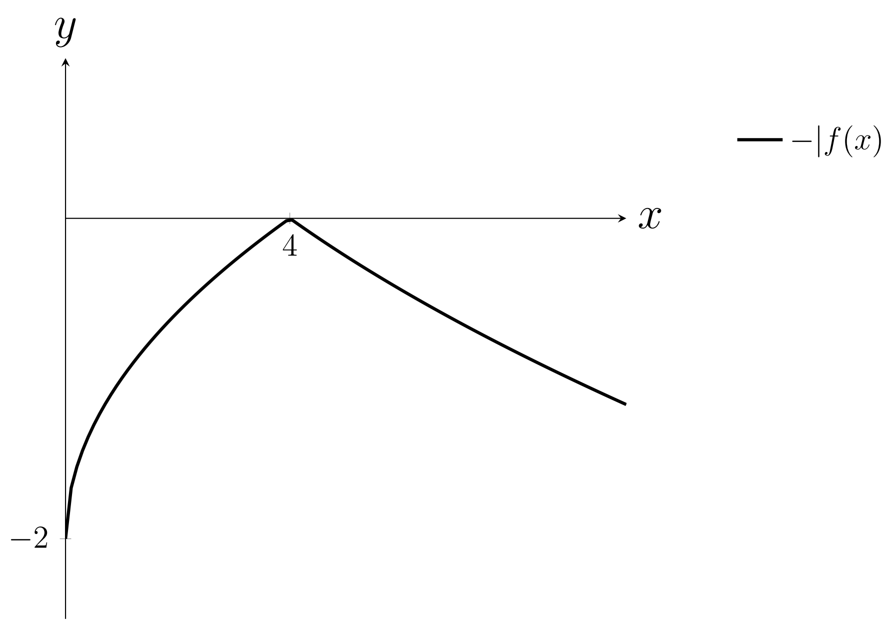
ב)



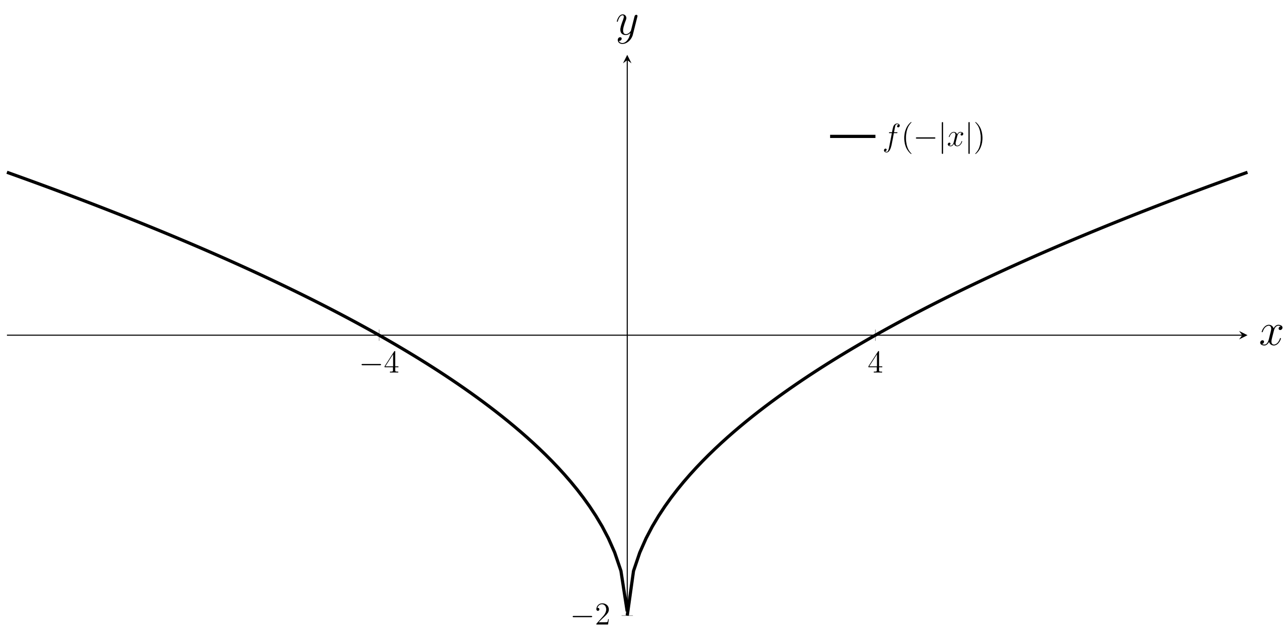
ג)



ד)



ה)



שאלה 11

א) <u>שלב הבסיס:</u>

עבור $n = 4$, נשים לב כי $2^4 = 16$ ו- $4^2 = 16$ לכן $2^4 = 4^2$. מתקיים.

<u>שלב האינדוקציה</u>

נניח כי $2^m > m^2$ כאשר $m > 4$ שלם. נוכיח כי $2^{m+1} > (m+1)^2$. הרי

$$2^{m+1} = 2 \cdot 2^m$$

לפי ההנחת האינדוקציה, $2^m > m^2$. לפיכך

$$2^{m+1} > 2 \cdot m^2 = m^2 + m^2 \ .$$

מכיוון ש- $m > 5$ אז

$$\begin{aligned} 2^{m+1} &> m^2 + 5 \cdot m \\ &= m^2 + 2 \cdot m + 3 \cdot m \\ &> m^2 + 2m + 3 \cdot 5 \\ &= m^2 + 2m + 15 \\ &> m^2 + 2m + 1 \\ &= (m+1)^2 \ . \end{aligned}$$

ז"א $2^{m+1} > (m+1)^4$. לכן הוכחנו ע"י אינדוקציה כי $2^m > m^4$ לכל $m \geq 17$.

ב) <u>שלב הבסיס:</u>

עבור $n = 3$,

$$2^3 > 2 \cdot 3 + 1$$

מתקיים.

שלב האינדוקציה :

נניח שעבור $m>3$ טבעי $2^m>2m+1$. נוכיח כי $2^{m+1}>2(m+1)+1$:

$$2^{m+1}=2\cdot 2^m>2\cdot(2m+1)=4m+2$$

לפי ההנחת האינדוקציה. מכיוון ש- $m>3$ אז

$$\begin{aligned}2^{m+1} &>4m+2\\ &=2m+2m+2\\ &>2m+2\cdot 3+2\\ &=2m+7\\ &=2(m+1)+5\\ &>2(m+1)+1\ .\end{aligned}$$

ז"א $2^{m+1}>2(m+1)+1$. הוכחנו ע"י אינדוקציה כי $2^m>2m+1$.

ג) שלב הבסיס:

עבור $n=2$,

$$3^2>3\cdot 2+1$$

מתקיים.

שלב האינדוקציה :

נניח שעבור $m>2$ טבעי $3^m>3m+1$. נוכיח כי $3^{m+1}>3(m+1)+1$:

$$3^{m+1}=3\cdot 3^m>3\cdot(3m+1)=9m+3$$

לפי ההנחת האינדוקציה. מכיוון ש- $m>2$ אז

$$\begin{aligned}3^{m+1} &>9m+3\\ &=3m+6m+3\\ &>3m+3\cdot 6+3\\ &=3m+19\\ &=3(m+1)+16\\ &>3(m+1)+1\ .\end{aligned}$$

ז"א $3^{m+1}>3(m+1)+1$. הוכחנו ע"י אינדוקציה כי $3^m>3m+1$.

ד) שלב הבסיס:

עבור $n=1$, לכל $a\geq -1$ ממשי מתקיים

$$(1+a)^1=1+a\ .$$

שלב האינדוקציה:

נניח כי עבור $a \geq -1$ ממשי ו- $m > 1$ טבעי מתקיים

$$(1+a)^m \geq 1 + ma \ .$$

נוכיח כי $(1+a)^{m+1} > 1 + (m+1)a$. הרי

(*1)
$$(1+a)^{m+1} = (1+a) \cdot (1+a)^m \ .$$

נשים לב, מכיוון ש- $a \geq -1$ אז $(1+a) \geq 0$. לכן, בגלל ש- $(1+a)^m > 1+ma$ לפי ההנחת האינדוקציה, אז גם $(1+a) \cdot (1+a)^m > (1+a) \cdot (1+ma)$. לכן נובע מ- **(*1)** כי

(*2)
$$(1+a)^{m+1} > (1+a) \cdot (1+ma) = 1 + a + ma + ma^2 = 1 + (m+1)a + ma^2 \ .$$

נשים לב, $a^2 \geq 0$ ו- $m > 1$ לכן $ma^2 > 0$. לפיכך נובע מ- **(*2)** כי

$$(1+a)^{m+1} > 1 + (m+1)a \ .$$

לכן, הוכחנו ע"י אינדוקציה כי $(1+a)^m > 1 + ma$ לכל $a \geq 1$ ולכל m טבעי.

ה) שלב הבסיס:

עבור $n = 10$, הרי $2^{10} > 10^3$ מתקיים.

שלב האינדוקציה

נניח כי $2^m > m^3$ כאשר $m > 10$ שלם. נוכיח כי $2^{m+1} > (m+1)^3$. הרי

$$2^{m+1} = 2 \cdot 2^m$$

לפי ההנחת האינדוקציה, $2^m > m^3$. לפיכך

$$2^{m+1} > 2 \cdot m^3 = m^3 + m^3 \ .$$

מכיוון ש- $m > 10$ אז

$$\begin{aligned}
2^{m+1} &> m^3 + 10 \cdot m^2 \\
&= m^3 + 3 \cdot m^2 + 7 \cdot m^2 \\
&> m^3 + 3m^2 + 7 \cdot 10 \cdot m \\
&= m^3 + 3m^2 + 70 \cdot m \\
&= m^3 + 3m^2 + 3m + 67m \\
&> m^3 + 3m^2 + 3m + 67 \cdot 10 \\
&= m^3 + 3m^2 + 3m + 670 \\
&> m^3 + 3m^2 + 3m + 1 \\
&= (m+1)^3 \ .
\end{aligned}$$

ז"א $2^{m+1} > (m+1)^3$. לכן הוכחנו ע"י אינדוקציה כי $2^m > m^3$ לכל $m \geq 10$.

ו) <u>שלב הבסיס:</u>

עבור $n = 17$, נשים לב כי $2^{17} = 131072$ ו- $17^4 = 83521$ לכן $2^{17} > 17^4$. מתקיים.

<u>שלב האינדוקציה</u>

נניח כי $2^m > m^4$ כאשר $m > 17$ שלם. נוכיח כי $2^{m+1} > (m+1)^3$. הרי

$$2^{m+1} = 2 \cdot 2^m$$

לפי ההנחת האינדוקציה, $2^m > m^4$. לפיכך

$$2^{m+1} > 2 \cdot m^4 = m^4 + m^4 \ .$$

מכיוון ש- $m > 17$ אז

$$\begin{aligned}
2^{m+1} &> m^4 + 17 \cdot m^3 \\
&= m^4 + 4 \cdot m^3 + 13 \cdot m^3 \\
&> m^4 + 4m^3 + 13 \cdot 17 \cdot m^2 \\
&= m^4 + 4m^3 + 221 \cdot m^3 \\
&> m^4 + 4m^3 + 221 \cdot 17m^2 \\
&= m^4 + 4m^3 + 3757m^2 \\
&= m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 3751m^2 \\
&> m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 3751 \cdot 17m \\
&= m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 63869m \\
&= m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 63865m \\
&> m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 63865 \cdot 17 \\
&= m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1 \\
&= (m+1)^4 \ .
\end{aligned}$$

ז"א $2^{m+1} > (m+1)^4$. לכן הוכחנו ע"י אינדוקציה כי $2^m > m^4$ לכל $m \geq 17$.

שאלה 12

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \ .$$

מכיוון ש- $x > 0$ אז גם $\frac{1}{x} > 0$. לכן

$$1 + \frac{1}{x} > 1 + 0 \qquad \Rightarrow \qquad 1 + \frac{1}{x} > 1 \ .$$

נציב $\frac{1+x}{x} = 1 + \frac{1}{x}$ ונקבל

$$\frac{1+x}{x} > 1 \ .$$