משפט 1:

יהי $G=\left(\left(1,\ldots,n\right),\left(S_{1},\ldots,S_{n}\right),\left(u_{1},\ldots,u_{n}\right)\right)$ משחק n שחקנים בצורה אסטרטגיות.
אם הווקטור אסטרטגיות $s^{*}=\left(s_{1}^{*},\ldots,s_{n}^{*}\right)$ שיווי משקל נאש, אז s^{*} הוא פתרון באסטרטגיות השולטות חזק.

הוכחה:
משפט זו אומר שאם הווקטור אסטרטגיות $s^{*}=\left(s_{1}^{*},\ldots,s_{n}^{*}\right)$ הוא שיווי משקל נאש, אז s^{*} תישאר לאחר תהליך סילוק חוזר של אסטרטגיות הנשלטות חזק.

נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי $\left(s_{1}^{*},\ldots,s_{n}^{*}\right)$ שיווי משקל נאש אבל הוא לא פתרון באסטרטגיות שולטות חזק.
אם כן אז תהי s_{i}^{*} האסטרטגיה הראשונה שיורדת בתהליך סילוק חוזר.
ז"א קיימת אסטרטגיה $t_{i}\in S_{i}$ אשר שולטת חזק ב- s_{i}^{*}, כלומר

$$u_{i}\left(s_{1},\ldots,s_{i}^{*},\ldots,s_{n}\right)<u_{i}\left(s_{1},\ldots,t_{i},\ldots,s_{n}\right)\quad . \tag{\#1}$$

לכל $s_{1},\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_{n}$ אשר עדיין נשארות בתהליך.

בפרט, מכיוון שהאסטרטגיות $s_{1}^{*},\ldots,s_{i-1}^{*},s_{i+1}^{*},\ldots,s_{n}^{*}$ עדיין נשארות בתהליך אחרי מחיקת אסטרטגיה s_{i}^{*}, אז לפי (#1) מתקיים

$$u_{i}\left(s_{1}^{*},\ldots,s_{i}^{*},\ldots,s_{n}^{*}\right)<u_{i}\left(s_{1}^{*},\ldots,t_{i},\ldots,s_{n}^{*}\right)\quad . \tag{\#2}$$

בסתירה לכך ש $s^{*}=\left(s_{1}^{*},\ldots,s_{n}^{*}\right)$ הוא שיווי משקל. ■

משפט 2:

משחק שני שחקנים נקרא משחק סימטרי אם לשני השחקנים אותה קבוצת אסטרטגיות $S_{1}=S_{2}$ ופונקצית התשלומים מתקיימים $u_{1}(s_{1},s_{2})=u_{2}(s_{2},s_{1})$ לכל $s_{1},s_{2}\in S_{1}$.
הוכיחו שקבוצת שיווי המשקל במשחק סימטרי היא קבוצת סימטרי, כלומר אם $\left(s_{1}=s_{1}^{*},s_{2}=s_{2}^{*}\right)$ היא שיווי משקל, אז גם $\left(s_{1}=s_{2}^{*},s_{2}=s_{1}^{*}\right)$ הוא שיווי משקל.

הוכחה: יהיה G משחק שני שחקנים סימטרי. יהי הוקטור אסטרטגיות $\left(s_{1}^{*},s_{2}^{*}\right)$ שווי משקל ב- G. אז

$$u_{1}\left(s_{1}^{*},s_{2}^{*}\right)=\max_{s_{1}\in S_{1}}\left(s_{1},s_{2}^{*}\right)$$

ו-

$$u_{1}\left(s_{1}^{*},s_{2}^{*}\right)=\max_{s_{2}\in S_{2}}\left(s_{1}^{*},s_{2}\right)\ .$$

לפי הסימטריות של המשחק:

$$u_{2}\left(s_{2}^{*},s_{1}^{*}\right)\overset{\text{סימטריות}}{=}u_{1}\left(s_{1}^{*},s_{2}^{*}\right)\overset{\text{הגדרת שווי משקל}}{=}\max_{s_{1}\in S_{1}}u_{1}\left(s_{1},s_{2}^{*}\right)\overset{\text{סימטריות}}{=}\max_{s_{1}\in S_{1}}u_{2}\left(s_{2}^{*},s_{1}\right)\overset{\text{סימטריות}}{=}\max_{s\in S_{2}}u_{2}\left(s_{2}^{*},s\right)$$

ו-

$$u_{1}\left(s_{2}^{*},s_{1}^{*}\right)\overset{\text{סימטריות}}{=}u_{2}\left(s_{1}^{*},s_{2}^{*}\right)\overset{\text{הגדרת שווי משקל}}{=}\max_{s_{2}\in S_{2}}u_{2}\left(s_{1}^{*},s_{2}\right)\overset{\text{סימטריות}}{=}\max_{s_{2}\in S_{2}}u_{1}\left(s_{2},s_{1}^{*}\right)\overset{\text{סימטריות}}{=}\max_{s\in S_{1}}u_{1}\left(s,s_{1}^{*}\right)\ .$$

לכן

$$u_1\left(s_2^*, s_1^*\right) = \max_{s\in S_1} u_1\left(s, s_1^*\right) \ ,$$
$$u_2\left(s_2^*, s_1^*\right) = \max_{s\in S_2} u_2\left(s_2^*, s\right)$$

ולכן $\left(s_2^*, s_1^*\right)$ ■

משפט 3: המקסמין והמינמקס של משחק

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס.

ערך המקסמין של שחקן 1 נתון על ידי

$$\underline{\mathrm{v}}_1 = \max_{s_1\in S_1} \min_{s_2\in S_2} u_1(s_1, s_2) = \max_{s_1\in S_1} \min_{s_2\in S_2} U(s_1, s_2) \ .$$

זוהי רמת הביטחון של שחקן 1 במשחק: התשלום שהוא יכול להבטיח לעצמו.

הערך המקסמין של שחקן 2 הוא

$$\underline{\mathrm{v}}_2 = \max_{s_2\in S_2} \min_{s_1\in S_1} u_2(s_1, s_2) = \max_{s_2\in S_2} \min_{s_1\in S_1} \left[-U(s_1, s_2)\right] = \max_{s_2\in S_2} \left[-\max_{s_1\in S_1} U(s_1, s_2)\right] = -\min_{s_2\in S_2} \max_{s_1\in S_1} U(s_1, s_2)$$

נגדיר הערך המקסמין של המשחק מסומן $\underline{\mathrm{v}}$ ומוגדר

$$\underline{\mathrm{v}} = \max_{s_1\in S_1} \min_{s_2\in S_2} U(s_1, s_2) \ .$$

הערך המינמקס של המשחק מסומן $\bar{\mathrm{v}}$ ומוגדר

$$\bar{\mathrm{v}} = \min_{s_2\in S_2} \max_{s_1\in S_1} U(s_1, s_2)$$

המשמעות:
שחקן 1 יכול להבטיח שיקבל לפחות $\underline{\mathrm{v}}$.
שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר $\bar{\mathrm{v}}$.

אסטרטגיה של שחקן 1 המבטיחה את $\underline{\mathrm{v}}$ נקראת **אסטרטגיה מקסמין**.
אסטרטגיה של שחקן 2 המבטיחה את $\bar{\mathrm{v}}$ נקראת **אסטרטגיה מינמקס**.

משפט 4: היחס בין אסטרטגיות שולטות והמקסמין

במשחק n שחקנים, אם אסטרטגיה s_i^* של שחקן i שולטת (לא בהכרח חזק) על כל שאר האסטרטגיות שלו, אז

א) s_i^* היא אסטרטגית מקסמין של שחקן i.

ב) s_i^* היא תשובה טובה ביותר של שחקן i לכל ווקטור אסטרטגיות של שאר השחקנים.

הוכחה: *

א) תהי s_i^* אסטרטגיה ששולטת (לא בהכרח חזק) על כל שאר האסטרטגיות של שחקן i.

תהי $s_i \in S_i$ אסטרטגיה של שחקן i ותהי $t_{-i} \in S_{-i}$ אסטרטגיה של $-i$ כך ש-

$$u_i\left(s_i^*, t_{-i}\right) = \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i^*, s_{-i}\right) \ .$$

אז

$$\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i^*, s_{-i}\right) = u_i\left(s_i^*, t_{-i}\right) \geq u_i\left(s_i, t_{-i}\right) \geq \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i, s_{-i}\right) \ .$$

ז"א $\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i^*, s_{-i}\right) \geq \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i, s_{-i}\right)$ או במילים שקולות:

$$\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i^*, s_{-i}\right) = \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i, s_{-i}\right) = \underline{\mathrm{v}}_i \ .$$

לפיכך s_i^* היא אסטרטגיה מקסמין של שחקן i.

ב) s_i^* שולטת חלש על כל שאר האסטרטגיות, אז לכל $s_{-i} \in S_{-i}$ מתקיים

$$u_i\left(s_i, s_{-i}\right) \leq u_i\left(s_i^*, s_{-i}\right) \ .$$

מכאן s_i^* היא תשובה טובה ביותר של שחקן i לכל ווקטור אסטרטגיות s_{-i} של שאר השחקנים.

■

משפט 5: היחס בין אסטרטגיות השולטות חזק ושיווי משקל

במשחק n שחקנים, אם לכל שחקן i יש אסטרטגיה s_i^* ששולטת (לא בהכרח חזק) על כל שאר האסטרטגיות שלו, אז התנאים הבאים מתקיימים.

א) הווקטור אסטרטגיות $\left(s_1^*, \cdots, s_n^*\right)$ הוא שיווי משקל של המשחק.

ב) לכל שחקן i, s_i^* היא אסטרטגית מקסמין של שחקן i.

הוכחה: *

א) נניח כי $\left(s_1^*, \cdots, s_n^*\right)$ ווקטור אסטרטגיות כך ש- s_i^* שולטת על כל שאר האסטרטגיות של שחקן i.

אז לפי משפט 4 (חלק ב') למעלה, s_i^* היא תשובה טובה ביותר של שחקן i לכל ווקטור אסטרטגיות s_{-i} של שאר השחקנים. ז"א

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$$

לכל שחקן i. לפיכך הווקטור אסטרטגיות $s^* = \left(s_1^*, \cdots, s_n^*\right)$ הוא נקודת שיווי משקל.

ב) לפי משפט 4 (חלק א'), s_i^* היא אסטרטגית מקסמין של שחקן i.

לפיכך הווקטור אסטרטגיות $s^* = \left(s_1^*, \cdots, s_n^*\right)$ הוא ווקטור אסטרטגיות מקסמין.

■

משפט 6: משפט המקסמין

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס. יהי $\underline{\mathrm{v}}$ הערך המקסמין ו- $\bar{\mathrm{v}}$ הערך המינמקס. אזי

$$\underline{\mathrm{v}} \leq \bar{\mathrm{v}} \ .$$

הוכחה: תהי A המטריצה של המשחק. אז

$$\underline{\mathrm{v}} = \max_i \min_j A_{ij} \ , \qquad \bar{\mathrm{v}} = \min_j \max_i A_{ij} \ .$$

נשים לב כי לכל i, מתקיים $\min_j A_{ij} \leq A_{ij}$,

ולכל j, מתקיים $\max_i A_{ij} \geq A_{ij}$.

מכאן

$$\min_j A_{ij} \leq A_{ij} \leq \max_i A_{ij}$$

ולכן

$$\min_j A_{ij} \leq \max_i A_{ij} \qquad (*)$$

נשים לב כי הצד ימין לא תלוי על i. ז"א משוואה (*) מתקיימת לכל i. בפרט, ניתן לקחת את ה- i אשר ממקסס את הצד ימין והרי נקבל

$$\max_i \min_j A_{ij} \leq \max_i A_{ij} \qquad (\#)$$

כעת נשים לב כי הצד שמאל לא תלוי על j. ז"א משוואה (#) מתקיימת לכל j. בפרט, ניתן לקחת את ה- j אשר ממזער את הצד ימין והרי נקבל

$$\max_i \min_j A_{ij} \leq \min_j \max_i A_{ij}$$

מש"ל. ■

משפט 7:

אם למשחק שני שחקנים סכום אפס יש ערך v, ואם $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ הן אסטרטגיות אופטימליות לשחקנים, אזי $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ הוא שיווי משקל עם תשלום $u = (\mathrm{v}, -\mathrm{v},)$.

הוכחה: *

אם נניח ש- s_1^* היא אסטרטגיה אופטימלית לשחקן 1 במשחק שערכו v אז $\min_{s_2 \in S_2} u(s_1^*, s_2) = \mathrm{v}$, ולכן לכל $s_2 \in S_2$ מתקיים

$$u(s_1^*, s_2) \geq \mathrm{v} \ .$$

באותה מידה אם נניח ש- s_2^* היא אסטרטגיה אופטימלית לשחקן 2 במשחק שערכו v אז $\max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2^*) = \mathrm{v}$, ולכן לכל $s_1 \in S_1$ מתקיים

$$u(s_1, s_2^*) \leq \mathrm{v} \ .$$

לסיכום, אם s_1^*, s_2^* אסטרטגיות אופטימליות אז

(*1) $\forall s_2 \in S_2$, $u(s_1^*, s_2) \geq \mathrm{v}$

(*2) $\forall s_1 \in S_1$. $u(s_1, s_2^*) \leq \mathrm{v}$

על ידי הצבת s_2^* במשוואה (*1), נקבל כי $u(s_1^*, s_2^*) \geq \mathrm{v}$.
על ידי הצבת s_1^* במשוואה (*2), נקבל כי $u(s_1^*, s_2^*) \leq \mathrm{v}$.
לכן

$$\mathrm{v} = u(s_1^*, s_2^*) \ .$$

נציב זאת במשוואות (*1) ו- (*2) ונקבל

$$u(s_1^*, s_2) \geq u(s_1^*, s_2^*) \quad \Rightarrow \quad -u_2(s_1^*, s_2) \geq -u_2(s_1^*, s_2^*) \quad \Rightarrow \quad u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_2(s_1^*, s_2) \ .$$

$\forall s_2 \in S_2$ ו-

$$u(s_1, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2^*) \quad \Rightarrow \quad u_1(s_1, s_2^*) \leq u_1(s_1^*, s_2^*) \quad \Rightarrow \quad u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*) \ .$$

$\forall s_1 \in S_1$.
לכן (s_1^*, s_2^*) הוא שיווי משקל עם תשלום $(\mathrm{v}, -\mathrm{v})$. ■

משפט 8:

במשחק שני שחקנים סכום אפס, אם $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ הוא שיווי משקל, אזי יש למשחק ערך $\mathrm{v} = u(s_1^*, s_2^*)$, והאסטרטגיות $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ הן אסטרטגיות אופטימליות.

הוכחה: *

מכיוון ש- (s_1^*, s_2^*) הוא שיווי משקל, שום שחקן אינו יכול להרוויח על ידי סטייה:

(#1) $u_1(s_1, s_2^*) \leq u_1(s_1^*, s_2^*) \quad \Rightarrow \quad u(s_1, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2^*) \quad \forall s_1 \in S_1$,

(#2) $u_2(s_1^*, s_2) \leq u_2(s_1^*, s_2^*) \quad \Rightarrow \quad -u_2(s_1^*, s_2) \geq -u_2(s_1^*, s_2^*) \quad \Rightarrow \quad u(s_1^*, s_2) \geq u(s_1^*, s_2^*) \quad \forall s_2 \in S_2$.

נסמן $\mathrm{v} = u(s_1^*, s_2^*)$ ונוכיח כי v אמנם ערך המשחק.
ממשוואה (#2) נקבל

$$u(s_1^*, s_2) \geq \mathrm{v} \quad \forall s_2 \in S_2 \quad \Rightarrow \quad \min_{s_2 \in S_2} u(s_1^*, s_2) \geq \mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u(s_1^*, s_2) \geq \mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathrm{v}} \geq \mathrm{v} \ .$$

ממשוואה (#1) נקבל

$$u(s_1, s_2^*) \leq \mathrm{v} \quad \forall s_1 \in S_1 \quad \Rightarrow \quad \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2^*) \leq \mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2) \leq \mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathrm{v}} \leq \mathrm{v} \ .$$

מכיוון ש- $\underline{\mathrm{v}} \leq \bar{\mathrm{v}}$ מתקיים תמיד אזי

$$\mathrm{v} \leq \underline{\mathrm{v}} \leq \bar{\mathrm{v}} \leq \mathrm{v} \ .$$

ולפיכך בהכרח

$$\underline{\mathrm{v}} = \mathrm{v} = \bar{\mathrm{v}} \ .$$

■

משפט 9: תשלום שיווי משקל גדול מ- או שווה להמקסמין

אם s^* היא שיווי משקל אז $u_i\left(s^*\right) \geq \underline{\mathrm{v}_i}$ לכל שחקן i.

הוכחה: לכל אסטרטגיה $s_i \in S_i$,

$$u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right) \geq \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i, s_{-i}\right) \ .$$

לפי ההגדרה של שיווי משקל, $u_i\left(s^*\right)=\max_{s_i \in S_i} u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right)$. מכאן

$$u_i\left(s^*\right)=\max_{s_i \in S_i} u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right) \geq \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i, s_{-i}\right)=\underline{\mathrm{v}}_i \ .$$

■

משפט 10: נוסחאות שיווי משקל למשחק שני-שחקנים ריבועי

יהי $G=(\{1,2\},\{S_1,S_2\},\{u_1,u_2\})$ משחק שני שחקנים ריבועי
שבו לכל שחקן יש n אסטרטגיות טהורות.

יהי $x^*=\begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ וקטור אסטרטגיות שיווי משקל של שחקן 1,

יהי $y^*=\begin{pmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ וקטור אסטרטגיות שיווי משקל של שחקן 2

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצת התשלומים של שחקן 1, תהי $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצת התשלומים של שחקן 2,

ויהו U_1^* ו- U_2^* התשלומי שיווי משקל של שחקן 1 ושחקן 2 בהתאמה.

אזי

$$x^{*t}=\frac{e^t B^{-1}}{\langle e, B^{-1}e\rangle} \ , \qquad U_1^*=\langle x^*, Ay^*\rangle=\frac{1}{\langle e, A^{-1}e\rangle}$$
$$y^*=\frac{A^{-1}e}{\langle e, A^{-1}e\rangle} \ , \qquad U_2^*=\langle x^*, By^*\rangle=\frac{1}{\langle e, B^{-1}e\rangle} \ .$$

כאשר $\in \mathbb{R}^n$ $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ וקטור של $\mathbb{R}^n$ שבו כל איבר שווה ל- 1.

הוכחה:

- לפי עקרון האדישות, אם שחקן 1 משחק לפי האסורוגיה המעורבת x^* של שיווי המשקל אזי שחקו 2 יהיה אדיש בין האסטרטגיות הטהורות שלו. ז"א

$$x^{*t}B = U_2^* e^t \ .$$

לכן

$$x^{*t} = U_2^* e^t B^{-1} \ .$$

מכיוון שהסכום של ההסתברויות שווה ל- 1 אז

$$1 = x^{*t}e = U_2^* e^t B^{-1} e \qquad \Rightarrow \qquad U_2^* = \frac{1}{e^t B^{-1} e} = \frac{1}{\langle e, B^{-1}e \rangle} \ .$$

על ידי הצבה בביטוי הקודם נקבל

$$x^{*t} = \frac{e^t B^{-1}}{\langle e, B^{-1}e \rangle} \ .$$

- באותה מידה לפי עקרון האדישות, אם שחקן 2 משחק לפי האסורוגיה המעורבת y^* של שיווי המשקל אזי שחקו 1 יהיה אדיש בין האסטרטגיות הטהורות שלו. ז"א

$$Ay^* = U_1^* e \ .$$

לכן

$$y^* = U_1^* A^{-1} e \ .$$

מכיוון שהסכום של ההסתברויות שווה ל- 1 אז

$$1 = e^t y^* = U_1^* e^t A^{-1} e \qquad \Rightarrow \qquad U_1^* = \frac{1}{e^t A^{-1} e} = \frac{1}{\langle e, A^{-1}e \rangle} \ .$$

על ידי הצבה בביטוי הקודם נקבל

$$y^* = \frac{A^{-1}e}{\langle e, A^{-1}e \rangle} \ .$$

■

משפט 11:

תהיינה A ו- B שתי מטריצות חיוביות (בעלות ממדים סופיים).

$I \backslash II$		
	A	0
	0	B

למשחק זה לא קיים ערך.

הוכחה: תהיינה A ו- B מטריצות בעלות תשלומים חיוביים. אזי עבור

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline A & 0 \\ \hline 0 & B \\ \hline \end{array} \; .$$

מתקיים $T_{ij} \geq 0$.

בכל שורה יש לפחות אפס אחד, לכן

$$\underline{\mathrm{v}} = \max_i \min_j T_{ij} = \max_i 0 = 0 \; .$$

מצד שני מכיוון ש- A ו- B מטריצות חיוביות, אזי קיים לפחות איבר חיובי אחד בכל עמודה. לפיכך

$$\bar{\mathrm{v}} = \min_j \max_i T_{ij} > 0 \; .$$

לכן $\underline{\mathrm{v}} = 0 < \bar{\mathrm{v}}$ ז"א $\underline{\mathrm{v}} \neq \bar{\mathrm{v}}$ ולכן למשחק אין ערך. ■

משפט 12:

במשחק שני שחקנים סכום אפס בעחלת מטירצת תשלומים בגודל 2×2:

$I \backslash II$	L	R
T	a	b
B	c	d

אם לאף שחקן אין אסטרטגיות אופטימליות טהורות אז

$$\min(a, d) > \max(b, c)$$

או

$$\min\left(b,c\right) > \max\left(a,d\right) \quad .$$

הוכחה:

<u>מצב 1</u>

נניח כי $a > c$, $a > b$.

$b < d \Leftarrow a > c$ (אחרת B נשלטת ע"י T).

$c < d \Leftarrow a > b$ (אחרת R נשלטת ע"י L).

$I \backslash II$	L	R	$\min\limits_{s_2 \in S_2} U$
T	a	b	b
B	c	d	c
$\max\limits_{s_1} U$	a	d	$\underline{\mathrm{v}} = \max(b,c)$ $\bar{\mathrm{v}} = \min(a,d)$

למשחק אין ערך $\Leftarrow \bar{\mathrm{v}} > \underline{\mathrm{v}} \Leftarrow$

$$\max(b,c) < \min(a,d) \quad . \tag{\#1}$$

<u>מצב 2</u>

נניח כי $a > c$, $a < b$.

$b < d \Leftarrow a > c$ (אחרת B נשלטת ע"י T).

$c > d \Leftarrow a < b$ (אחרת L נשלטת ע"י R).

$I \backslash II$	L	R	$\min\limits_{s_2 \in S_2} U$
T	a	b	a
B	c	d	d
$\max\limits_{s_1} U$	a	d	$\underline{\mathrm{v}} = \max(a,d)$ $\bar{\mathrm{v}} = \min(a,d)$

למשחק אין ערך $\Leftarrow$ $\underline{\mathrm{v}} < \bar{\mathrm{v}}$ $\Leftarrow$

(#2)
$$\max(a,d) < \min(a,d)\ .$$

הגענו לסתירה לכן לא ייתכן ש- $a > c$ ו- $a < b$.

<u>מצב 3</u>

נניח כי $a < c$, $a > b$.

$a < c \Leftarrow b > d$ (אחרת T נשלטת ע"י B).

$a > b \Leftarrow c < d$ (אחרת R נשלטת ע"י L).

$I \backslash II$	L	R	$\min\limits_{s_2 \in S_2} U$
T	a	b	b
B	c	d	c
$\max\limits_{s_1} U$	c	b	$\underline{\mathrm{v}} = \max(b,c)$ $\bar{\mathrm{v}} = \min(a,d)$

למשחק אין ערך $\Leftarrow$ $\underline{\mathrm{v}} < \bar{\mathrm{v}}$ $\Leftarrow$

(#3)
$$\max(b,c) < \min(b,c)\ .$$

הגענו לסתירה לכן לא ייתכן ש- $a < c$ ו- $a > b$.

<u>מצב 4</u>

נניח כי $a<c$,$a<b$.

$a<c \Leftarrow b>d$ (אחרת T נשלטת ע"י B).

$a<b \Leftarrow c>d$ (אחרת L נשלטת ע"י R).

$I \backslash II$	L	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} U$
T	a	b	a
B	c	d	d
$\max\limits_{s_1} U$	b	c	$\underline{\mathrm{v}}=\max(a,d)$ / $\bar{\mathrm{v}}=\min(b,c)$

למשחק אין ערך $\Leftarrow \underline{\mathrm{v}}<\bar{\mathrm{v}} \Leftarrow$

$$\max(a,d)<\min(b,c)\ . \tag{\#4}$$

לכן, לפי (#1) ו- (#4) לא יהיה ערך למשחק אם

$$\max(a,d)>\min(b,c)$$

או

$$\max(a,d)<\min(b,c)\ .$$

האסורוגיות האופטימליות הן אסטרטגיות מעורבות:

$$\sigma_1^*=(x(T),(1-x)(B))\ ,\qquad \sigma_2^*=(y(L),(1-y)(R))\ .$$

לפי עקרון האדישות:

$$\begin{aligned} ax+c(1-x) &= bx+d(1-x)\ ,\\ ay+b(1-y) &= cy+d(1-y)\ . \end{aligned}$$

מכאן

$$x=\frac{d-c}{a-b+d-c}\ ,\qquad y=\frac{d-b}{a-c+d-b}\ ,$$

והערך הינו

$$\mathrm{v}=\frac{ad-bc}{a-b+d-c}\ .$$

■