אלגברה ליניארית 1
סמסטר א' תשפ"ד
תרגילים: מערכות משוואות עם פרמטר

פתרו את המערכות הבאות:

שאלה 1 נתונה המערכת הלינארית הבאה:

$$\begin{aligned} x-3z &= 0 \\ x+y+kz &= 0 \\ 2x+ky+(2k^2+6k-16)z &= -2k^3+10k^2+82k-90 \end{aligned}$$

עבור אילו ערכי הפרמטר k למערכת:

א) פתרון יחיד

ב) אין פתרון

ג) אינסוף פתרונות?
במקרה של אינסוף פתרונות רשום את הפתרון הכללי.

שאלה 2 נתונה המערכת הלינארית הבאה מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x+y &= -3 \\ x+ky &= -3 \\ x+y+2kz &= 1 \end{aligned}$$

א) מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין פתרון.

ב) מצאו את הערכים של k עבורם למערכת יש פתרון יחיד.

ג) מצאו את הערכים של k עבורם למערכת יש אינסוף פתרונות. לכל אחד מערכי k שמצאות, רשמו את הפתרון הכללי.

שאלה 3 נתונה המערכת

$$\begin{aligned} x+3y+z &= 3 \\ (k-1)x+(k+1)y-z &= 4k-2 \\ kx+3ky-3z &= 4k+3 \end{aligned}$$

מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין פתרון, יש פתרון יחיד, יש אינסוף פתרונות. במקרה של אינסוף פתרונות רשמו את הפתרון הכללי.

פתרונות

שאלה 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 2 & k & 2k^2+6k-16 & -2k^3+10k^2+82k-90 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & k+3 & 0 \\ 0 & k & 2k^2+6k-10 & -2k^3+10k^2+82k-90 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-kR_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & k+3 & 0 \\ 0 & 0 & k^2+3k-10 & -2k^3+10k^2+82k-90 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & k+3 & 0 \\ 0 & 0 & (k+5)(k-2) & -2k^3+10k^2+82k-90 \end{array}\right)$$

עבור $k=2$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 98 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה ולכן אין פתרון.

עבור $k=-5$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש משתנה חופשי אבל אין שורת סתירה ולכן יהיו אינסוף פתרונות. הפתרון הכללי:

$$(x,y,z)=(3z,2z,z)\ , \qquad z\in\mathbb{R}\ .$$

עבור $k=-3$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -192 \end{array}\right)$$

אין משתנה חופשי ואין שורת סתירה ולכן למערכת יש פתרון יחיד.

עבור $k\neq -3,2,-5$, כלומר לכל שאר ערכים של k, אין משתנה חופשי ואין שרות סתירה לכן יהיה למערכת פתרון יחיד.

לסיכום:

א) $k=2$ אין אף פתרון.

ב) $k=-5$ יש ∞ פתרונות.

ג) עבור $k\neq 2,-5$ למערכת יש פתרון יחיד.

שאלה 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & k & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2k & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k & 4 \end{array}\right)$$

א) אם $k=0$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$.
קיבלנו שורה סתירה ואז אין פתרון.

אם $k=1$ אז נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to \frac{1}{2}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש משתנה חופשי ואין שורת סתירה לכן למערכת יהיו אינסוף פתרונות:

$$(x,y,z)=(-3-y,y,2)\ , \qquad y\in\mathbb{R}\ .$$

ג) אם $k\neq 0,1$ אין משתנה חופדשי ואז יהיה פתרון יחיד.

ד) אם $k=1$ יהיו אינסוף פתרונות מצורה

$$(x,y,z)=(-3-y,y,2), \qquad y\in\mathbb{R}\ .$$

שאלה 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ k-1 & k+1 & -1 & 4k-2 \\ k & 3k & -3 & 4k+3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-kR_1]{R_2\to R_2-(k-1)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -2(k-2) & -k & k+1 \\ 0 & 0 & -k-3 & k+3 \end{array}\right)$$

$\underline{k=-3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש משתנה חופשי ואין שורת סתירה לכן יהיו ∞ פתרונות.

$$\left.\begin{aligned} x+3y+z &= 3 \\ 10y+3z &= -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= -3y-z+3 \\ 10y &= -3z-2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= -3y-z+3 \\ y &= \tfrac{-3}{10}z-\tfrac{2}{10} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{9}{10}z+\tfrac{6}{10}-z+3 \\ y &= \tfrac{-3}{10}z-\tfrac{2}{10} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \tfrac{-1}{10}z+\tfrac{18}{5} \\ y &= \tfrac{-3}{10}z-\tfrac{2}{10} \end{aligned}\right\}.$$

$\underline{k=2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to 2R_3-5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

שורת סתירה: אין פתרון.

$\underline{k=0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to 3R_1+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 9 & 0 & 12 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to 4R_1-9R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 0 & 0 & 39 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

פתרון יחיד:

$$(x,y,z)=\left(\frac{13}{4},\frac{1}{4},-1\right)$$

$\underline{k=-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to 2R_1-R_2-2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$(x,y,z)=\left(4,\frac{1}{6},-1\right)$$