תוכן העניינים

1 מכונות טיורינג

הגדרה 1: מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעיה $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ כאשר:

Q	קבוצת מצבים סופית ולא ריקה	
Σ	א"ב הקלט סופי	$\_ \notin \Sigma$
Γ	א"ב הסרט סופי	$\Sigma \cup \{\_\} \subseteq \Gamma$
δ	פונקציית המעברים	$\delta : (Q \backslash \{q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}\} \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$
q_0	מצב התחלתי.	
q_{acc}	מצב מקבל יחיד.	
q_{rej}	מצב דוחה יחיד.	

הגדרה 2: קונפיגורציה

בהינתן מכונת טיורינג M ומילה $w \in \Sigma^*$. **קונפיגורציה** בריצה של M על w היא שלושה (u, q, v) (או $uq\text{v}$ לשם קיצור) כאשר:

- $u \in \Sigma^*$: המילה מתחילת הסרט עד (לא כולל) התו שמתחת לראש.
- $\text{v} \in \Sigma^*$: המילה שמתחילה מהתו שמתחת לראש ועד (לא כולל) ה- $\_$ הראשון.

הגדרה 3: גרירה בצעד אחד

תהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{\text{acc}},q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M. נסמן

$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם כשנמצאים ב- c_1 עוברים ל- c_2 בצעד בודד.

הגדרה 4: גרירה בכללי

תהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{\text{acc}},q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M. נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם ניתן לעבור מ- c_1 ל- c_2 ב- 0 או יותר צעדים.

הגדרה 5: קבלה ודחייה של מילה

תהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{\text{acc}}\,,\,q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $w\in\Sigma^*$ מחרוזת. אומרים כי

- M **מקבלת** את w אם $q_0w \vdash_M^* u\ q_{\text{acc}}\,\mathrm{v}$
- M **דוחה** את w אם $q_0w \vdash_M^* u\ q_{\text{rej}}\,\mathrm{v}$

עבור $\mathrm{v},u\in\Gamma^*$ כלשהם.

הגדרה 6: הכרעה של שפה

תהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,\text{acc}\,,q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L\subseteq\Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מכריעה** את L אם לכל $w\in\Sigma^*$ מתקיים

- $w\in L \Leftarrow M$ מקבלת את w.
- $w\notin L \Leftarrow M$ דוחה את w.

הגדרה 7: קבלה של שפה

תהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{\text{acc}}\,,\,q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L\subseteq\Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מקבלת** את L אם לכל $w\in\Sigma^*$ מתקיים

- אם $L \ni w$ אז M מקבלת את w.
- אם $L \not\ni w$ אז M לא מקבלת את w.

במקרה כזה נכתוב ש- $L(M)=L$.

הגדרה 8: מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה f

תהי $f:\Sigma_1^*\to\Sigma_2^*$ ותהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{\text{acc}},q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג. אומרים כי M מחשבת את f אם:

- $\Sigma=\Sigma_1$ ו- $\Sigma_2\subset\Gamma$.
- לכל $w\in\Sigma_1^*$ מתקיים $q_0w\vdash q_{\text{acc}}f(w)$.

הגדרה 9: מודלים שקולים חישובית

יהיו A ו- B מודלים חישוביים. אומרים כי A ו- B שקולים אם לכל שפה L מתקיימים:

1) קיימת מ"ט במודל A שמכריעה את L אם"ם קיימת מ"ט במודל B שמכריעה את L.

2) קיימת מ"ט במודל A שמקבלת את L אם"ם קיימת מ"ט במודל B שמקבלת את L.

הגדרה 10: מכונט טיורינג מרובת סרטים

מכונת טיורינג מרובת סרטים היא שביעייה:

$$M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta_k,q_0,q_{\text{acc}},q_{\text{rej}})$$

כאשר Q, Σ, Γ, q_0, q_{acc},q_{rej} מוגדרים כמו מ"ט עם סרט יחיד (ראו הגדרה 1).
ההבדל היחיד בין מ"ט עם סרט יחיד לבין מטב"ס הוא הפונקצית המעברים. עבור מטמ"ס הפונקצית המעברים היא מצורה הבאה:

$$\delta_k:(Q\backslash\{q_{\text{acc}},q_{\text{rej}}\})\times\Gamma^k\to Q\times\Gamma^k\times\{L,R,S\}^k$$

הקונפיגורציה של מכונת טיורנג מרובת סרטים מסומנת $(u_1q\ \mathrm{v}_1\ ,\ u_2q\ \mathrm{v}_2\ ,\ \ldots\ ,\ u_kq\ \mathrm{v}_k\ .)$

משפט 1: שקילות בין מ"ט מרובת סרטים למ"ט עם סרט יחיד

לכל מטמ"ס M קיימת מ"ט עם סרט יחיד M' השקולה ל- M.
כלומר, לכל קלט $w\in\Sigma^*$:

- אם M מקבלת את w $\Leftarrow$ M' מקבלת את w.
- אם M דוחה את w $\Leftarrow$ M' דוחה את w.
- אם M לא עוצרת על w $\Leftarrow$ M' לא עוצרת על w.

הגדרה 11: מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית (מ"ט א"ד) היא שביעייה

$$M=(Q,\Sigma,\Gamma,\Delta,q_0,q_{\text{acc}},q_{\text{rej}})$$

כאשר $Q,\Sigma,\Gamma,q_0,q_{\text{acc}},q_{\text{rej}}$ מוגדרים כמו במ"ט דטרמיניסטי (ראו הגדרה 1).
Δ היא פונקצית המעברים

$$\Delta:(Q\backslash\{q_{\text{acc}},q_{\text{rej}}\})\times\Gamma\to P\left(Q\times\Gamma\times\{L,R,S\}\right)\ .$$

$$\Delta(q,a)=\{(q_1,a,S)\ ,\ (q_2,b,L)\ ,\ \ldots\}\ .$$

כלומר, לכל זוג $q \in Q, \alpha \in \Gamma$ ייתכן מספר מעברים אפשריים, 0, 1 או יותר.

- קונפיגורציה של מ"ט א"ד זהה לקונפיגורציה של מ"ט דטרמיניסטית.
- לכל קונפיגורציה ייתכן מספר קונפיגורציות עוקבות.
- לכל מילה $w \in \Sigma^*$ ייתכן מספר ריצות שונות:
  - ריצות שמגיעות ל- q_{acc}.
  - ריצות שמגיעות ל- q_{rej}.
  - ריצות שלא עוצרות.
  - ריצות שנתקעות.

הגדרה 12: קבלה ודחייה של מילה ושפה של מכונט טיורינג אי דטרמיניסטית

מילה $w \in \Sigma^*$ מתקבלת במ"ט א"ד M אם קיימת לפחות ריצה אחת שמגיעה ל- q_{acc}. השפה של מ"ט א"ד M היא

$$L(M) = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \exists u, \text{v} \in \Gamma^* \;:\; q_0 w \vdash_* \; u \; q_{\text{acc}} \; \text{v} \right\}$$

כלומר:

- $w \in L(M)$ אם קיימת ריצה אחת שבה M מקבלת את w.
- $w \notin L(M)$ אם בכל ריצה של M על w, M דוחה או לא עוצרת, או נתקעת.

הגדרה 13: מ"ט אי דטרמיניסטית המכריעה שפה L

אומרים כי מ"ט אי דטרמיניסטית M מכריעה שפה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $w \in L \Leftarrow M$ מקבלת את w.
- אם $w \notin L \Leftarrow M$ דוחה את w.

הגדרה 14: מ"ט א"ד המקבלת שפה L

אומרים כי מ"ט אי דטרמיניסטית M מקבלת שפה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $w \in L \Leftarrow M$ מקבלת את w.
- אם $w \notin L \Leftarrow M$ דוחה את w או M לא עוצרת על w.

משפט 2: שקילות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטית ב- RE

לכל מ"ט א"ד N קיימת מ"ט דטרמיניסטית D כך ש-

$$L(N) = L(D) \ .$$

כלומר לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם N מקבלת את w $\Leftarrow$ D תקבל את w.

- אם N לא מקבלת את w $\Leftarrow$ D לא תקבל את w.

2 המחלקות החישוביות R, RE ו- $Co\,RE$ ותכונותן

הגדרה 15:

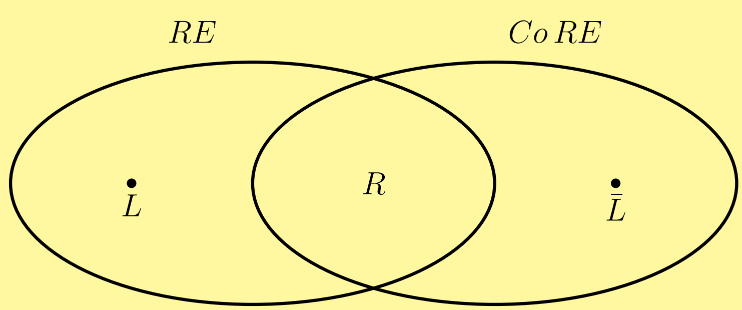
- אוסף השפות הכריעות מסומן R ומוגדר $R = \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ קיימת מ"ט המכריעה את }\}$.
- אוסף השפות הקבילות מסומן R ומוגדר $RE = \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ קיימת מ"ט המקבלת את }\}$.
- אוסף השפות שהמשלימה שלהן קבילה מסומן R ומוגדר $Co\,RE = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \bar{L} \in RE\}$.

משפט 3: סגירות של השפות הכריעות והשפות הקבילות

- R סגורה תחת: **1)** איחוד **2)** חיתוך **3)** שרשור **4)** סגור קלין **5)** משלים.
- RE סגורה תחת: **1)** איחוד **2)** חיתוך **3)** שרשור **4)** סגור קלין.

משפט 4: תכונות של השפות החישוביות

1. אם $L \in RE$ וגם $\bar{L} \in RE$ אזי $L \in R$.
2. אם $L \in RE \backslash R$ אזי $\bar{L} \notin RE$ (כי $\bar{L} \in Co\,RE \backslash R$).
3. $RE \cap Co\,RE = R$.



הגדרה 16: מכונת טיורינג אוניברסלית

מ"ט אוניברסלית U מקבלת כקלט זוג, קידוד של מ"ט $\langle M \rangle$ וקידוד של מילה $\langle w \rangle$, ומבצעת סימולציה של ריצה של M על w ועונה בהתאם.

$$L(U) = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} \ .$$

3 אי-כריעות

משפט 5: סיווג שפות ידועות - חישוביות

	כריעה	קבילה
L_{acc}	$\times$	$\checkmark$
$\overline{L_{\text{acc}}}$	$\times$	$\times$
L_{d}	$\times$	$\times$
L_{Halt}	$\times$	$\checkmark$
$\overline{L_{\text{Halt}}}$	$\times$	$\times$
L_{E}	$\times$	$\times$
$\overline{L_{\text{E}}}$	$\times$	$\checkmark$
L_{EQ}	$\times$	$\times$
$\overline{L_{\text{EQ}}}$	$\times$	$\times$
L_{REG}	$\times$	$\times$
L_{NOTREG}	$\times$	$\times$

$L_{\text{acc}} = \{\langle M, w\rangle \,|w \in L(M)\}$ $\quad \in RE\backslash R$

$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w\rangle \,|$ עוצרת על w $M\}$ $\quad \in RE\backslash R$

$L_M = \{\langle M\rangle \,||\, \langle M\rangle$ המקבלת את M $\}$ $\quad \in RE\backslash R$

$L_{\text{d}} = \{\langle M\rangle \,|\, \langle M\rangle \notin L(M)\}$ $\quad \in Co\,RE\backslash R$

$L_E = \{\langle M\rangle \,|L(M) = \emptyset\}$ $\quad \in Co\,RE\backslash R$

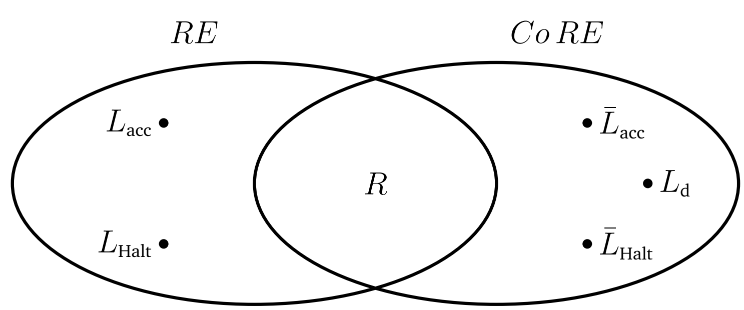
$L_{EQ} = \{\langle M_1, M_2\rangle \,|L(M_1) = L(M_2)\}$ $\quad \notin RE\backslash R, \notin Co\,RE\backslash R$

$L_{REG} = \{\langle M\rangle \,|$ רגולרית $L(M)\}$ $\quad \notin RE\backslash R, \notin Co\,RE\backslash R$

$L_{NOTREG} = \{\langle M\rangle \,|$ לא רגולרית $L(M)\}$ $\quad \notin RE\backslash R, \notin Co\,RE\backslash R$

משפט 6:

$$
\begin{aligned}
L_{\text{acc}} \in RE\backslash R \quad &\Rightarrow \quad \bar{L}_{\text{acc}} \notin RE\ , \\
L_{\text{halt}} \in RE\backslash R \quad &\Rightarrow \quad \bar{L}_{\text{halt}} \notin RE\ , \\
L_{\text{d}} \notin RE\backslash R\ .
\end{aligned}
$$



4 רדוקציות

הגדרה 17: מ"ט המחשבת פונקציה

בהינתן פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ אומרים כי מ"ט M מחשבת את f אם לכל $x \in \Sigma^*$:

- M מגיעה ל- q_{acc} בסוף החישוב של $f(x)$ וגם

- על סרט הפלט של M רשום $f(x)$.

הגדרה 18: מ"ט המחשבת פונקציה

בהינתן פונקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ אומרים כי f חשיבה אם קיימת מ"ט המחשבת את f.

הגדרה 19: רדוקציה

בהינתן שתי שפות $L_1,L_2\subseteq\Sigma^*$ אומרים כי L_1 ניתנת לרדוקציה ל- L_2, ומסמנים

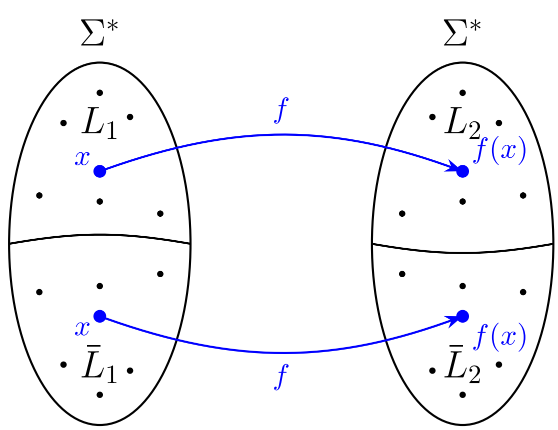
$$L_1\leq L_2\ ,$$

אם קיימת פונקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ המקיימת:

(1 f חשיבה

(2 לכל $x\in\Sigma^*$:

$$x\in L_1\quad\Leftrightarrow\quad f(x)\in L_2\ .$$



משפט 7: משפט הרדוקציה

לכל שתי שפות $L_1,L_2\subseteq\Sigma^*$, אם קיימת רדוקציה $L_1\leq L_2$ אזי

$$\begin{aligned}
L_1\in R &\quad\Leftarrow\quad L_2\in R\\
L_1\in RE &\quad\Leftarrow\quad L_2\in RE\\
L_1\in Co\,RE &\quad\Leftarrow\quad L_2\in Co\,RE\\
L_1\notin R &\quad\Rightarrow\quad L_2\notin R\\
L_1\notin RE &\quad\Rightarrow\quad L_2\notin RE\\
L_1\notin Co\,RE &\quad\Leftarrow\quad L_2\notin Co\,RE
\end{aligned}$$

משפט 8: תכונות של רדוקציה

- לכל שפה L מתקיים: $L\leq L$.

- אם $L_1 \le L_2$ אזי $\bar{L}_1 \le \bar{L}_2$.
- אם $L_1 \le L_2$ וגם $L_2 \le L_3$ אזי $L_1 \le L_3$.
- לכל $L \in R$ ולכל L' שאינה $\Sigma^*, \emptyset$ מתקיים $L \le L'$.

משפט 9: משפט רייס

עבור כל תכונה S של שפות שאינה טריויאלית מתקיים: $L_S \notin R$

- תכונה S לא טריויאלית היא קבוצה של שפות ב RE כך ש $S \neq RE$ וגם $S \neq \emptyset$.
- $L_S = \{\langle M \rangle \mid L(M) = S\}$.

5 סיבוכיות

משפט 10:

לכל מ"ט מרובת סרטים M הרצה בזמן $f(n)$, קיימת מ"ט סרט יחיד M' השקולה ל- M ורצה בזמן $O\left(f^2(n)\right)$.

משפט 11:

לכל מ"ט א"ד N הרצה בזמן $f(n)$, קיימת מ"ט דטרמיניסטית D השקולה ל- N ורצה בזמן $2^{(f(n))}$.

הגדרה 20: אלגוריתם אימות

אלגוריתם אימות עבור בעייה A הוא אלגוריתם V כך שלכל קלט $w \in \Sigma^*$ מתקיים:
$w \in A$ אם ורק אם קיימת מילה y באורך פולינומיאלי ב- $|w|$ כך ש- V מקבל את הזוג (w, y). כלומר:

- אם $w \in A$ $\Leftarrow$ קיים $y \in \Sigma^*$ כך ש- $V(w, y) = T$.
- אם $w \notin A$ $\Leftarrow$ לכל $y \in \Sigma^*$ מתקיים $V(w, y) = F$.

הגדרה 21:

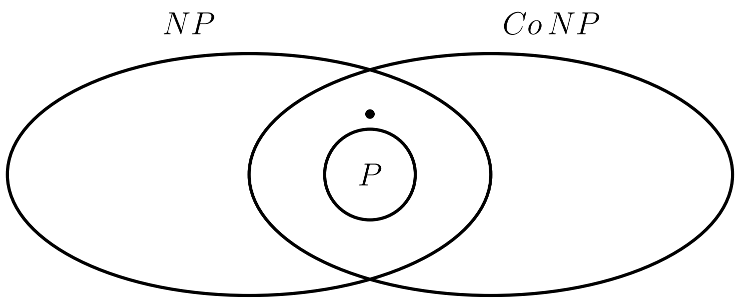
- $P =$ קבוצת כל השפות שיש להן מ"ט דטרמיניסטית המכריעה אותן בזמן פולינומי.
- $NP =$ קבוצת כל השפות שיש להן אלגוריתם אימות המאמת אותן בזמן פולינומי.

הגדרה שקולה:

- $NP =$ קבוצת כל השפות שיש להן מ"ט אי-דטרמיניסטית המכריעה אותן בזמן פולינומי.
- $CoNP =$ קבוצת כל השפות שהמשלימה שלהן שייכת ל- NP $\quad CoNP = \left\{A \mid \bar{A} \in NP\ .\right\}$.

משפט 12: תכונות של P ו- NP

- $P \subseteq NP$.
- P סגורה תחת משלים: אם $A \in P$ אזי גם $\bar{A} \in P$.
- $P \subseteq NP \cap CoNP$.



6 רדוקציה פולינומיאלית

הגדרה 22: פונקציה פולינומיאלית

בהינתן פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$. אומרים כי f חשיבה בזמן פולינומיאלי אם קיים אלגוריתם (מ"ט דטרמיניסטית) המחשב את f בזמן פולינומיאלי.

הגדרה 23: רדוקציה פולינומיאלית

בהינתן שתי הבעיות A ו- B. אומרים כי A ניתנת לרדוקציה פולינומיאלית ל- B, ומסמנים $A \leq_P B$, אם קיימת פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ המקיימת:

1) f חשיבה בזמן פולינומיאלי

2) לכל $w \in \Sigma^*$:

$$w \in A \quad \Leftrightarrow \quad f(w) \in B \ .$$

משפט 13: משפט הרדוקציה

לכל שתי בעיות A ו- B, אם $A \leq_P B$ אזי

$$\begin{aligned} A \in P \quad &\Leftarrow \quad B \in P \\ A \in NP \quad &\Leftarrow \quad B \in NP \\ A \notin P \quad &\Rightarrow \quad B \notin P \\ A \notin NP \quad &\Rightarrow \quad B \notin NP \end{aligned}$$

7 NP שלמות

הגדרה 24: NP **- קשה (NP-hard)**

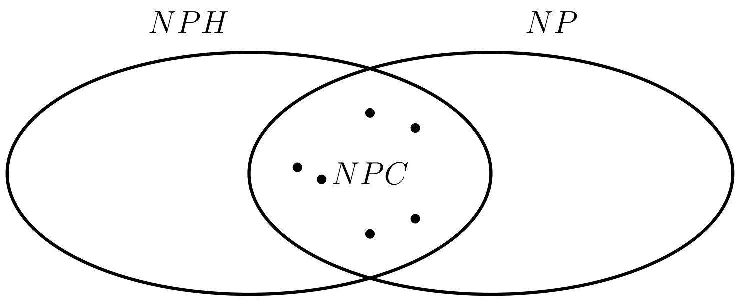
בעייה B נקראת NP קשה אם לכל בעייה $A \in NP$ קיימת רדוקציה $A \leq_P B$.

הגדרה 25: NP**- שלמה (NP-complete)**

בעייה B נקראת NP שלמה אם

1) $B \in NP$

2) לכל בעייה $A \in NP$ קיימת רדוקציה $A \leq_p B$.



משפט 14: **תכונות של רדוקציה פולינומיאלית**

- אם קיימת שפה $B \in NPC$ (NP שלמה) וגם $B \in P$ אזי $P = NP$.
- אם $A \leq_P B$ אזי $\bar{A} \leq_P \bar{B}$.
- אם $A \leq_p B$ וגם $B \leq_p C$ אזי $A \leq_p C$.
- לכל $A \in P$ ולכל B שאינה $\emptyset, \Sigma^*$ מתקיים $A \leq_P B$.

משפט 15:

תהי B בעייה NP- שלמה. אזי לכל בעייה $C \in NP$, אם $B \leq_p C$ אזי גם C היא NP שלמה.

8 בעיית הספיקות (SAT)

הגדרה 26: **נוסחת** CNF

נוסחת CNF, ϕ היא נוסחה בוליאנית מעל n משתנים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ המכילה m פסוקיות $C_1, C_2, \ldots, C_m$,
כאשר כל פסוקית מכילה אוסף של ליטרלים ($x_i \backslash \bar{x}_i$) המחוברים ע"י OR ($\vee$) בוליאני והפסוקיות מחוברות

ע"י AND ($\wedge$) בוליאני. לדוגמה:

$$\phi = \left(\overset{C_1}{x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4 \vee \bar{x}_7}\right) \wedge \left(\overset{C_2}{x_3 \vee x_5 \vee \bar{x}_8}\right) \wedge \quad \cdots$$

הגדרה 27: נוסחת $3CNF$

נוסחת $3CNF$, ϕ היא נוסחה CNF שבה בכל פסקוית יש בדיוק שלוש ליטרלים. לדוגמה:

$$\phi = \left(\overset{C_1}{x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4}\right) \wedge \left(\overset{C_2}{x_3 \vee x_5 \vee \bar{x}_8}\right) \wedge \quad \cdots$$

הגדרה 28: נוסחת CNF **ספיקה**

נוסחת CNF, ϕ היא ספיקה אם קימת השמה למשתנים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ע"י $T\backslash F$ כך ש- ϕ מקבלת ערך T, כלומר בכל פסוקית ישנו לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך T.

הגדרה 29: בעיית SAT

קלט: נוסחת CNF, ϕ.
פלט: האם ϕ ספיקה?

$$SAT = \left\{\langle\phi\rangle \;\middle|\; \text{ספיקה } CNF \text{ נוסחת } \phi\right\}$$

הגדרה 30: בעיית $3SAT$

קלט: נוסחת $3CNF$ ϕ.
פלט: האם ϕ ספיקה?

$$3SAT = \left\{\langle\phi\rangle \;\middle|\; \text{ספיקה } 3CNF \text{ נוסחת } \phi\right\}$$

משפט 16:

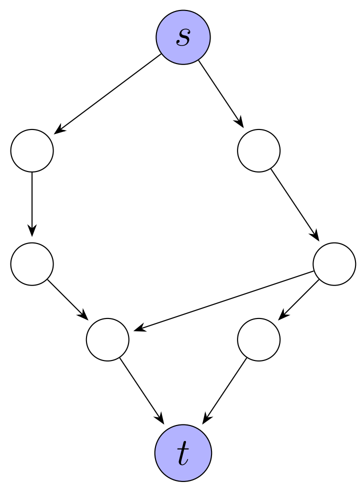
- $SAT \in NP$.
- **משפט קוק לוין:** $SAT \in NPC$.
- $3SAT \in NPC$.
- $SAT \in P \Leftrightarrow P = NP$.

9 סיווג שפות ידיועות - סיבוכיות

הגדרה 31: בעיית מסלול $PATH$

קלט: גרף מכוון G ושני קודקודים s ו- t.
פלט: האם G מכיל מסלול מקודקוד s לקודדוק t.

$$PATH = \left\{ \langle G,s,t\rangle \;\middle|\; \text{גרף מכוון המכיל מסלול מ-} s \text{ ל-} t \;\; G \right\}$$



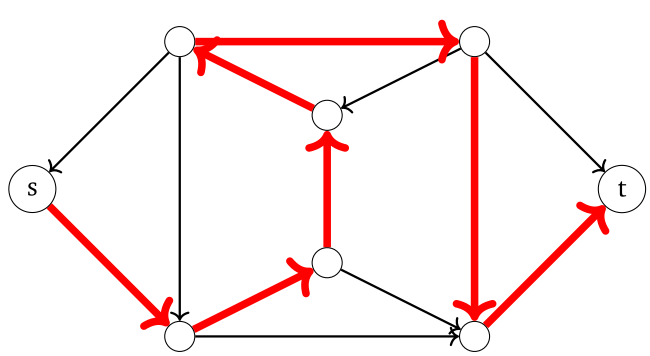
הגדרה 32: בעיית $RELPRIME$

קלט: שני מספרים x ו- y.
פלט: האם x ו- y זרים?

$$RELPRIME = \left\{ \langle x,y\rangle \;\middle|\; \gcd(x,y)=1 \right\} \ .$$

הגדרה 33: מסלול המילטוני

בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$ ושני קודקודים $s,t\in V$. מסלול המילטוני מ- s ל- t הוא מסלול מ- s ל- t שעובר דרך כל קודקוד ב-G בדיוק פעם אחת.



הגדרה 34: בעיית מסלול המילטוני - $HAMPATH$

קלט: גרף מכוון $G=(V,E)$ ושני קודקודים $s,t\in V$.
פלט: האם G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t?

$$HAMPATH=\{\langle G,s,t\rangle \mid \text{גרף מכוון המכיל מסלול המילטוני מ- } s \text{ ל- } t\text{?} \ G\}$$

הגדרה 35: מעגל המילטוני

בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$.
מעגל המילטוני הוא מסלול מעגלי שעובר כל קודקוד ב- G בדיוק פעם אחת.

הגדרה 36: בעיית מעגל המילטוני - $HAMCYCLE$

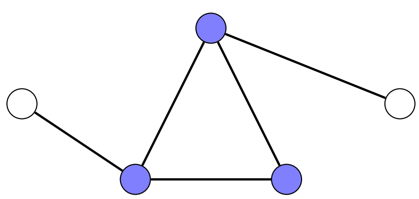
קלט: גרף מכוון $G=(V,E)$.
פלט: האם G מכיל מעגל המילטוני?

$$HAMCYCLE=\{\langle G\rangle \mid \text{גרף מכוון המכיל מעגל המילטוני.} \ G\}$$

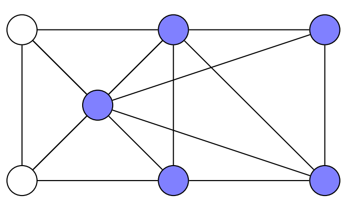
הגדרה 37: קליקה

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$.
קליקה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $C\subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u,\mathrm{v}\in C$ מתקיים $(u,\mathrm{v})\in E$.

קליקה בגודל $k=3$:



קליקה בגודל $k=5$:



הגדרה 38: בעיית הקליקה - $CLIQUE$

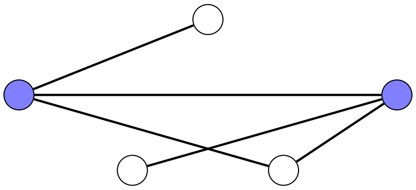
קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר k.
פלט: האם G קליקה בגודל k?

$$CLIQUE=\{\langle G,k\rangle \mid \text{גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל } k \ G\}$$

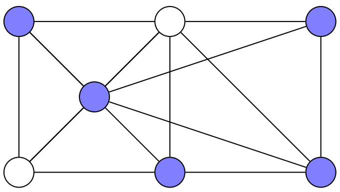
הגדרה 39: כיסוי בקודקודים

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$, כיסוי בקודקודים ב- G הוא תת-קבוצה של קודקודים $C\subseteq V$ כך שלכל צלע $u,\mathrm{v}\in S$ מתקיים $u\in C$ או $\mathrm{v}\in C$.

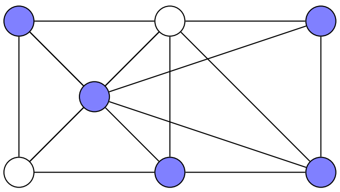
כיסוי בקדקודים בגודל $k=2$:



כיסוי בקדקודים בגודל $k=5$:



כיסוי בקדקודים בגודל $k=5$:



הגדרה 40: בעיית VC

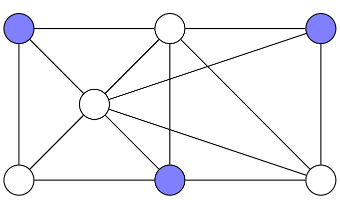
קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר k.
פלט: האם קיים כיסוי בקודקודים ב- G בגודל k?

$$VC=\left\{\langle G,k\rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל כיסוי בקודקודים בגודל } k \text{ } G\right\}$$

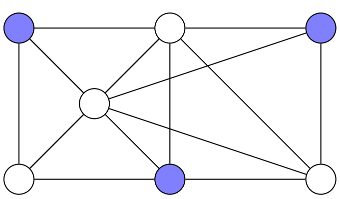
הגדרה 41: קבוצה בלתי תלויה

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$, קבוצה בלתי תלויה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $S\subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u,\mathrm{v}\in S$ מתקיים $(u,\mathrm{v})\notin E$.

קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k=3$:



קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k=3$:



הגדרה 42: בעיית IS

קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר k.
פלט: האם קיימת קבוצה בלתי תלויה ב- G בגודל k?

$$IS=\left\{\langle G,k\rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ } G\right\}$$

הגדרה 43: בעיית $PARTITION$

קלט: קבוצת מספרים שלמים $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
פלט: האם קיימת תת-קבוצה $Y \subseteq S$ כך ש- $\sum_{y \in S \setminus Y} y = \sum_{y \in Y} y$?

$$PARTITION = \left\{ S \;\middle|\; \text{קבוצת שלמים, וקיימת תת-קבוצה } S\text{ } Y \subseteq S \text{ כך ש- } \sum_{y \in S \setminus Y} y = \sum_{y \in Y} y \right\}$$

הגדרה 44: בעיית $SubSetSum$

קלט: קבוצת מספרים $S = \{x_1, x_2, \quad \ldots \quad x_n\}$ ומספר t.
פלט: האם קיימת תת-קבוצה של S שסכום איבריה שווה t?

$$SubSetSum = \left\{ \langle S, t \rangle \;\middle|\; \text{קיימת } Y \subseteq S \text{ כך ש- } \sum_{x \in Y} x = t \right\}$$

משפט 17:

$PATH = \{\langle G, s, t\rangle \mid \text{גרף מכוון המכיל מסלול מ- } s \text{ ל- } t\ \ G \}$	$\in P$
$RELPRIME = \{\langle x, y\rangle \mid \gcd(x, y) = 1\}$	$\in P$
$SAT = \{\langle \phi \rangle \mid \phi \text{ היא נוסחת } CNF \text{ ספיקה} \}$	$\in NP, \in NPC$
$3SAT = \{\langle \phi \rangle \mid \phi \text{ היא נוסחת } 3CNF \text{ ספיקה} \}$	$\in NP, \in NPC$
$IS = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל } k \}$	$\in NP, \in NPC$
$CLIQUE = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל } k \}$	$\in NP, \in NPC$
$VC = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל כיסוי בקודקודים בגודל } k \}$	$\in NP, \in NPC$
$HAMPATH = \{\langle G, s, t\rangle \mid G \text{ גרף מכוון המכיל מסלול המילטוני מ- } s \text{ ל- } t \}$	$\in NP, \in NPC$
$HAMCYCLE = \{\langle G\rangle \mid G \text{ גרף מכוון המכיל מעגל המילטוני} \}$	$\in NP$
$SubSetSum = \left\{\langle S, t\rangle \mid \text{קיימת } Y \subseteq S \text{ כך ש- } \sum_{x \in Y} x = t \right\}$	$\in NP$
$\overline{HAMPATH}$	$\in CoNP$
$\overline{CLIQUE}$	$\in CoNP$

משפט 18: בעיות פתוחות בתורת הסיבוכיות

- האם $P = NP$?
- האם $CoNP = NP$?
- האם $CoNP \cap NP = P$?

10 רדוקציות זמן פולינומיאליות

משפט 19: רדוקציות פולינומיאליות

$$
\begin{aligned}
SAT &\leq_P 3SAT \\
3SAT &\leq_P CLIQUE \\
CLIQUE &\leq_P IS \\
IS &\leq_P VC \\
SubSetSum &\leq_P PARTITION \\
HAMPATH &\leq_P HAMCYCLE
\end{aligned}
$$