

תרגילים 7: אי-כרייעות

שאלה 1 נתונה השפה הבאה: $L = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| \geq 3\}$. כלומר L מכילה קידודים של מכונות שמקבלות לפחות 3 מילימ שונות. הוכיחו כי $R \notin L_{\text{acc}}$ ע"י רדוקציה מ-

שאלה 2 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעה פתוחה:
לכל שלוש שפות $L_1 \leq (L_2 \cap L_3)$ אם $L_1 \leq L_2$ וגם $L_1 \leq L_3$ אז L_1, L_2, L_3

שאלה 3 נגדיר את השפה $L = \{\langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in (L(M_1) \cup L(M_2))\}$

a) הוכיחו כי $L \in RE$.

b) הוכיחו ע"י רדוקציה כי $L \notin R$.

שאלה 4 הוכיחו כי השפה $\overline{L_{\text{acc}}} \setminus \overline{L_{\text{halt}}} \in RE$

תשובות

שאלה 1

פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M_\emptyset היא מ"ט הדזונה כל קלט ו- M' היא מ"ט שעלה כל קלט y , מתעלמת מ- y ומוריצה את M על w ועונה כמוות.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

נכונות הרדוקציה:

נכיה כי

$$x \in L_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{\geq 3} .$$

אם $L(M') = \Sigma^*$ ו $f(x) = \langle M' \rangle$ ולפי האבחנה $w \in L(M)$ ו- $x = \langle M, w \rangle \iff x \in L_{\text{acc}}$
 $.f(x) \in L_{\geq 3} \iff |L(M')| = \infty$

אם שני מקרים: $\iff x \notin L_{\text{acc}}$

מקרה 1: $.f(x) \notin L_{\geq 3} \iff |L(M_\emptyset)| = 0 \iff f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle$

מקרה 2: $|L(M')| = 0 \iff L(M') = \emptyset$ ו $f(x) = \langle M' \rangle \iff w \notin L(M)$ ו- $x \neq \langle M, w \rangle \iff .f(x) \notin L_{\geq 3} \iff$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה, מכיוון ש- R , $L_{\text{acc}} \leq L_{\geq 3}$ ו- $L_{\geq 3} \notin R$ ממשפט הרדוקציה, מכיון ש- L_{acc} מתקיים

שאלה 2

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$L_1 = L_{\text{halt}} , \quad L_2 = L_{\text{acc}} , \quad L_3 = \overline{L_{\text{acc}}} .$$

מתקיים $.L_1 \leq L_2$ שכן $L_{\text{halt}} \leq L_{\text{acc}}$

בנוסף $.L_1 \leq L_3$ שכן $L_{\text{halt}} \leq \overline{L_{\text{acc}}}$

מצד שני: $L_{\text{halt}} \in R$ ו- $\emptyset \in R$ ומכיוון ש- $L_{\text{halt}} \leq \emptyset$ (אחרת $L_1 \not\leq L_3$) $L_1 \not\leq L_3 = \emptyset$ בסתייה לכך ש- $(.L_{\text{halt}} \notin R$

שאלה 3

א) נבנה מ"ט M^* שמקבלת את L .

$$:\langle M_1, M_2, w \rangle = M^*$$

- מריצה M_1 על w . אם M_1 מקבלת או M^* מקבלת.
- אחרת M^* מריצה M_2 על w . אם M_2 מקבלת או M^* מקבלת.

נכונות:

- אם L מקבלת M_1 ⇔ $\langle M_1, M_2, w \rangle \in L$ ⇔ M_1 מקבלת w או M_2 מקבלת w ⇔ M^* מקבלת w .
- לכן קיימת מ"ט M^* שמקבלת כל מהרוצות L .
- לכן $L \in RE$.

(ב) נתון: השפה $L_{M_1 \cup M_2}$ מוגדרת:

$$L_{M_1 \cup M_2} = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \cup L(M_2) \}$$

ז"א $L(M_2)$ השפה שכוללת כל המהרווצות $\langle M_1, M_2, w \rangle$ כאשר w שייך לאחת השפות (M_1 או M_2) $L(M_1)$ או $L(M_2)$.

צריך להוכיח: קיימת רדוקציה התאמה בין השפה $L_{M_1 \cup M_2}$ לשפה L_{acc} , כלומר

$$L_{acc} \leq L_{M_1 \cup M_2}.$$

הגדרת הרדוקציה:

בהתנתק $\langle M, w \rangle$ קלט של L_{acc} ניצור $\langle M_1, M_2, w \rangle$ קלט של $L_{M_1 \cup M_2}$ כך שמתקיים התנאי הבא:

$$\begin{aligned} \langle M, w \rangle \in L_{acc} &\Rightarrow \langle M_1, M_2, w \rangle \in L_{M_1 \cup M_2}, \\ \langle M, w \rangle \notin L_{acc} &\Rightarrow \langle M_1, M_2, w \rangle \notin L_{M_1 \cup M_2}. \end{aligned}$$

נדיר את פונקציית הרוקציה באופן הבא:

$$\text{"על כל קלט } x = M_1 \text{ ". rej} \leftarrow M_1$$

• מריצה M על w ועונה כמוות.

נכונות הרדוקציה:כיוון ⇐

$$\begin{aligned} \langle M, w \rangle \in L_{acc} \text{ אם } \\ w \in L(M) \Leftarrow \\ .w \in L(M_2) \Leftarrow \\ w \in L(M_2) \cup \emptyset \Leftarrow \\ w \in L(M_2) \cup L(M_1) \Leftarrow \\ .\langle M_1, M_2, w \rangle \in L_{M_1 \cup M_2} \Leftarrow \\ \text{כיוון } \Rightarrow \end{aligned}$$

אם $\langle M, w \rangle \notin L_{acc}$

$$\begin{aligned}
 & .w \notin L(M) \Leftarrow \\
 & .w \notin L(M_2) \Leftarrow \\
 & .(\emptyset \notin L(M_1) \text{ כי השפה של } M_1 \text{ היא } \emptyset) \text{ וגם } w \notin L(M_2) \Leftarrow \\
 & .\langle M_1, M_2, w \rangle \notin L_{M_1 \cup M_2} \Leftarrow
 \end{aligned}$$

שאלה 4

M עוצרת על w ודוחה את M^* שמקבלת את השפה.
 $\overline{L_{\text{acc}}} \setminus \overline{L_{\text{halt}}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in M\}$
 $:\langle M, w \rangle \in M^*$ "על כל קלט

1) בודקת האם $x = \langle M, w \rangle$

- אם לא \Leftarrow דוחה.

2) מריצה M על w .

- אם M מקבלת M^* דוחה.
- אם M דוחה M^* מקבלת.

M^* מקבלת בדיקת הזוגות $\langle M, w \rangle$ עבורם M עוצרת ודוחה את w .

$$\overline{L_{\text{acc}}} \setminus \overline{L_{\text{halt}}} \in RE \Leftarrow$$