

## אלגברה ליניארית 1 למדמ"ח

מועד א'

מרצים: דר' מרינה ברשדסקי, מר' אמיר גוריון.

תשפ"ד סמסטר ב'

השאלון מכיל 11 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

**בהצלחה!**

### הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

### חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט A4), מצורפים לשאלון.

### אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.
- יש לציין את השאלות שעניתם עליהן בתחילת המחברת.

**בהצלחה!**

**הוראות מיוחדות : יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.**

סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה. הסבר היטב את מהלך הפתרון.

תשובה ללא הסבר ( גם נכונה ) לא תתקבל.

השאלון מכיל 12 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות ).

**חומר עזר:** מחשבון, דפי הנוסחאות המצורפים לשאלון המבחן.

**הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה**

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

## שאלה 1. ( 25 נקודות )

א' (4 נק') הוכיחו או הפריכו: אם  $A$  היפיחה אז  $A^T$  לא הפיחה.

ב' (21 נק') פתרו בשיטת גאוס את המערכת הבאה:  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ , כאשר

$$A = \begin{pmatrix} a & 2a & 3a \\ 2a & 2a+1 & 3a+1 \\ a & 2a-1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4a \\ 4a+1 \\ 2-a \end{pmatrix}$$

1. (5 נק') דרגו מטריצה מורחבת וצינו ערכים מובילים שלה.

2. (4 נק') יש לציין עבור איזה ערך של  $a$  למערכת יש פתרון יחיד. נמקו היטב.

3. (4 נק') במקרה של אינסוף פתרונות מצאו את הפתרון הכללי.

4. (4 נק') עבור איזה ערך של  $a$  אין פתרון? נמקו היטב.

5. (4 נק') עבור מקרים ב, ג. מצאו בסיס ומימד למרחבים וקטורים הבאים:

$$\text{Col}A, \text{Row}A, \text{Nul}A$$

## שאלה 2. ( 25 נקודות )

א' (8 נק') יהיו  $x \in M_{n \times 1}$ ,  $b \in M_{m \times 1}$ ,  $A \in M_{m \times n}$ ,  $b \neq 0$

1. (4 נק') מצאו מקרה בו אין פתרון למערכת  $Ax = b$  אבל יש פתרון יחיד למערכת ההומוגנית המתאימה  $Ax = 0$ .

2. (4 נק') מצאו מקרה בו אין פתרון למערכת  $Ax = b$ , אבל יש אינסוף פתרונות למערכת ההומוגנית המתאימה  $Ax = 0$ .

ב' (17 נק') במרחב ווקטורי  $C^3$  נתונים וקטורים:

$$v_1 = (1+i, i, 1-i)$$

$$v_2 = (1-i, 1, -1-i)$$

$$v_3 = (3+2i, -1+2i, 2-i)$$

1. (6 נק') האם הווקטורי  $v_1, v_2, v_3$  תלויים ליניארית? נמקו את תשובתך.

2. (7 נק') האם אחד הווקטורים מתוך  $v_1, v_2, v_3$  ניתן להציג כצירוף ליניארי של שאר הווקטורים? אם כן – רשום צירוף אחד כזה

3. (4 נק') מצא בסיס ואת המימד של  $\text{span}(v_1, v_2, v_3)$

### שאלה 3. ( 25 נקודות )

א' ( 8 נק' ) נתונות שתי מטריצות  $A, B \in M_{3 \times 3}$ , כך שמטריצה  $A$  הפיכה ומתקיים:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

הוכיחו: במטריצה  $B$  ישנה עמודת אפסים. האם המטריצה  $B$  הפיכה? נמקו.

ב' ( 8 נק' ) נתונות קבוצות הווקטורים :

$$V = \{(a+b, b, a-b) | a, b \in R \subseteq R^3$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+1 \end{pmatrix} | a, b \in R \right\} \subseteq M_{2 \times 2}$$

האם  $V$  תת-מרחב וקטורי של  $R^3$ ? האם  $W$  תת-מרחב וקטורי של  $M_{2 \times 2}$ ?

ג' ( 9 נק' ) פתור משוואה מעל שדה  $Z_3$   $x^2 - x + 1 = 0$

### שאלה 4. ( 25 נקודות )

א' ( 3 נק' ) הוכיחו או הפריכו: אם למערכת  $ABX = 0$  יש אינסוף פתרונות, אזי למערכת  $BX = 0$  יש אינסוף פתרונות.

ב' ( 22 נק' ) נתונה העתקה הליניארית  $T : R^3 \rightarrow R^3$

$$T(x, y, z) = (x, x - 2y, 3z)$$

1. ( 2 נק' ) מצאו את המטריצה  $A$  מייצגת העתקה  $T : R^3 \rightarrow R^3$

2. ( 3 נק' ) מצאו בסיס של  $ImT$

3. ( 3 נק' ) מצאו בסיס של  $KerT$

4. ( 3 נק' ) האם העתקה ח.ח.ע. ועל? נמקו.

5. ( 3 נק' ) מצאו את המטריצה  $[T]_B$  המייצגת אותה בבסיס  $B = (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$

6. ( 3 נק' ) מצאו  $[Tu]_B$ , כאשר  $u = (-2, 1, 1)$

7. ( 3 נק' ) מצאו  $u$  תוך שימוש במטריצת מעבר בסיס המתאימה.

8. ( 2 נק' ) חשבו את תמונתו  $Tu$  של וקטור  $u$ .

**שאלה 5. ( 25 נקודות )**

א' ( 6 נק' ) נתון שתי קבוצות

$$V_1 = \{v_1, v_2\}, \quad V_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$$

הוכיחו או הפריכו:

1. ( 3 נק' ) אם  $V_1$  בת"ל אזי  $V_2$  בת"ל

2. ( 3 נק' ) אם  $V_2$  בת"ל אזי  $V_1$  בת"ל

ב' ( 19 נק' ) מצאו את משוואת הפולינומים שעוברות דרך נקודות שעבורם סכום ריבועי המרחקים מהנקודות

$$A(2, 1), B(0, 4), C(-1, 2)$$

מינימלי. פתרו מערכת משוואות או דרך מטריצה הפוכה או לפי קרמר.

1. ( 9 נק' ) כאשר הפולינום הוא פרבולה

$$y = ax^2 + bx + c$$

2. ( 10 נק' ) כאשר הפולינום הוא ישר

$$y = ax + b$$