מרחב אוקלידי: מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$.

מרחב אוניטרי: מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$.

הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי V מעל $\mathbb{R}$:
לכל $u, \mathrm{v}, w \in V$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{R}$:

1) <u>סימטריות:</u> $\langle u, \mathrm{v} \rangle = \langle \mathrm{v}, u \rangle$

2) <u>ליניאריות:</u> $\langle u, \mathrm{v} + w \rangle = \langle u, \mathrm{v} \rangle + \langle u, w \rangle$

$\langle \lambda u, \mathrm{v} \rangle = \lambda \langle u, \mathrm{v} \rangle$

3) <u>חיוביות:</u> $\langle u, u \rangle \geq 0.$

$\langle u, u \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$

הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי V מעל $\mathbb{C}$:
לכל $u, \mathrm{v}, w \in V$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{C}$:

1) <u>הרמיטיות:</u> $\langle u, \mathrm{v} \rangle = \overline{\langle \mathrm{v}, u \rangle}$

2) <u>ליניאריות:</u> $\langle u, \mathrm{v} + w \rangle = \langle u, \mathrm{v} \rangle + \langle u, w \rangle$

$\langle \lambda u, \mathrm{v} \rangle = \lambda \langle u, \mathrm{v} \rangle$

3) <u>חיוביות:</u> $\langle u, u \rangle \geq 0$

$\langle u, u \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$

אי-שוויון קושי שוורץ: $| \langle u, \mathrm{v} \rangle | \leq \|u\| \cdot \|\mathrm{v}\|$

אי-שוויון המשולש: $\|u+\mathrm{v}\| \leq \|u\| + \|\mathrm{v}\|$

היטל אורתוגונלי של ווקטור v על תת מרחב בעל בסיס אורתוגונלי $u_1, \ldots, u_n$:

$$P_U(\mathrm{v}) = \frac{\langle \mathrm{v}, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle \mathrm{v}, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 + \cdots + \frac{\langle \mathrm{v}, u_n \rangle}{\|u_n\|^2} u_n \ .$$

תהליך גרם שמידט לבניית בסיס אורתוגונלי:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \mathrm{v}_1 \ , \\
u_2 &= \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \\
u_3 &= \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \\
&\vdots \\
u_n &= \mathrm{v}_n - \frac{\langle \mathrm{v}_n, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_n, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \ldots - \frac{\langle \mathrm{v}_n, u_{n-1} \rangle}{\|u_{n-1}\|^2} u_{n-1} \ .
\end{aligned}$$

$\lambda \in \mathbb{F}$ **ערך עצמי** ו- $u \in \mathbb{F}^n$ **ווקטור עצמי** ($u \neq 0$) של מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ אם: $Au = \lambda u$

פולינום אופייני של מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$:
$p_A(\lambda) = |\lambda I - A|$

נוסחה להעתקה צמודה: $\bar{T}(\mathrm{v}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle T(w_i), \mathrm{v}\rangle} w_i$

לכל $\mathrm{v} \in V$ כאשר $w_1, \cdots, w_n$ בסיס אורתונורמלי של מרחב V.

העתקה צמודה לעצמה: $\bar{T} = T$

העתקה סימטרית: העתקה צמודה לעצמה מעל $\mathbb{R}$.

העתקה הרמיטית: העתקה צמודה לעצמה מעל $\mathbb{C}$.

העתקה אוניטרית: $\bar{T} \cdot T = T \cdot \bar{T} = I$

העתקה אורתוגונלית: העתקה אוניטרית מעל $\mathbb{R}$.

העתקה נורמלית: $\bar{T} \cdot T = T \cdot \bar{T}$