

תרגילים 8: רדוקציות

שאלה 1 נתונה השפה הבאה:

$$L_{\geq 3} = \{ \langle M \rangle \mid |L(M)| \geq 3 \}$$

$L_{\geq 3}$ מכילה קידודים של מכונות טיריניג שמקבלות לפחות 3 מילים שוות. הוכיחו כי $\bar{L}_{\geq 3} \notin R$ ע"י רדוקציה מ- L_{acc} .

שאלה 2 נתונה השפה הבאה:

$$L = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2) \} .$$

הוכיחו כי $\bar{L} \notin RE$ ע"י רדוקציה מ- \bar{L}_{acc} .

שאלה 3 תהי L השפה

$$L_{1a} = \{ \langle M \rangle \mid \text{מקבלת בדיקת מילה אחת המתחילה ב- } a \text{ מילוי } M \}$$

a) מצאו פונקציית רדוקציה מ- L_{1a} ל- \bar{L}_{acc} .

b) הוכיחו כי $L_{1a} \notin RE$.

c) הוכיחו כי $L_{1a} \notin R$.

שאלה 4 תהי L השפה

$$L_{\geq 1a} = \{ \langle M \rangle \mid \text{מקבלת לפחות מילה אחת המתחילה ב- } a \text{ מילוי } M \}$$

a) מצאו פונקציית רדוקציה מ- $L_{\geq 1a}$ ל- L_{acc} .

b) הוכיחו כי $L_{\geq 1a} \notin R$.

שאלה 5 תהי L השפה

$$L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} = \{ \langle M_1, M_2, M_3 \rangle \mid L(M_1) \subset L(M_2) \subset L(M_3) \}$$

a) מצאו פונקציית רדוקציה מ- $L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3}$ ל- \bar{L}_{acc} .

b) הוכיחו כי $L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} \notin R$.

c) הוכיחו כי $L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} \notin RE$.

שאלה 6 תהי L_ε השפה הבאה:

$$L_\varepsilon = \{ \langle M \rangle \mid \text{מילת הריקה } \varepsilon \text{ עוצרת על } M \}$$

a) האם L_ε כריעה?

b) האם L_ε קבילה?

שאלה 7 נתונה השפה הבאה:

$$L = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \varepsilon \} .$$

הוכחו כי $L \notin R$ ע"י רדוקציה מ- L_{acc} .

שאלה 8 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעה פתוחה.

לכל שפה $R \in L$ כך ש- $\Sigma^* \neq L \neq \emptyset$, קיימת רדוקציה $\bar{L} \leq L$.

תשובות

שאלה 1

פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M_\emptyset היא מ"ט שדועה כל קלט ו- M' היא מ"ט שעל כל קלט y , מתעלמת מ- y ומריצה את M על w ועונה כמוות.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

נכונות הרדוקציה:

נוכיח כי

$$x \in L_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{\geq 3} .$$

אם $L(M') = \Sigma^*$ ולפי האבחנה $f(x) = \langle M' \rangle \iff w \in L(M)$ ו- $x = \langle M, w \rangle \iff x \in L_{\text{acc}}$ ולכן $f(x) \in L_{\geq 3} \iff |L(M')| = \infty$

אם שני מקרים: $\iff x \notin L_{\text{acc}}$

מקרה 1: $f(x) \notin L_{\geq 3} \iff |L(M_\emptyset)| = 0 \iff f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle$

מקרה 2: $|L(M')| = 0 \iff L(M') = \emptyset$ ולפי האבחנה $f(x) = \langle M' \rangle \iff w \notin L(M)$ ו- $x \neq \langle M, w \rangle \iff f(x) \notin L_{\geq 3} \iff$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $L_{\geq 3} \notin R$, $L_{\text{acc}} \notin R$ ולכן ממשפט הרדוקציה, מכיוון ש- R מתקיים $L_{\text{acc}} \leq L_{\geq 3}$.

שאלה 2

פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M^*, M, w \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

M^* מ"ט שמקבלת כל קלט •

M_\emptyset מ"ט שדועה כל קלט. •

נכונות הרדוקציה:

ראשתי, f חסיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x = \langle M, w \rangle$. אם לא, תחזיר קידוד קבוע $\langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle$. אם כן, תחזיר קידוד $\langle M^*, M, w \rangle$.

נוכיח כי

$$x \in \bar{L}_{\text{acc}} \iff f(x) \in L .$$

אם $x \in \bar{L}_{\text{acc}}$ שני מקרים:

מקרה 1: $f(x) \in L \iff \varepsilon \notin L(M_\emptyset) \wedge \varepsilon \in L(M^*) \wedge f(x) = \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle$

מקרה 2: $w \notin L(M) \wedge w \in L(M^*) \wedge f(x) = \langle M^*, M, w \rangle \iff w \notin L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \iff f(x) \in L$

$w \notin L(M) \wedge w \in L(M^*) \wedge f(x) = \langle M^*, M, w \rangle \iff w \in L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \iff x \notin \bar{L}_{\text{acc}}$ ואם $f(x) \notin L \iff$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $\bar{L}_{\text{acc}} \leq L$, וכיון ש- $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$ מושפט הרדוקציה מתקיים

שאלה 3

a) פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \{ab''\} & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M' המ"ט הבאה:

$M' = M$ על כל קלט y :

1) אם $y = "ab"$ מקבלת.

2) אחרת מריצה M על w ועונה כמוות.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \{ab\} & w \notin L(M) \end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

אם $x \in \bar{L}_{\text{acc}}$ שני מקרים:

מקרה 1: $f(x) \in L_{1a} \iff f(x) = \{ab''\} \iff x \neq \langle M, w \rangle$

מקרה 2: $f(x) \in L_{1a} \iff L(M') = \{ab''\}$ לפי האבחנה $\iff w \notin L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle$

$L(M') = \Sigma^*$ $f(x) = \langle M' \rangle$ ולפי האבחנה $\iff w \in L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \iff x \notin \bar{L}_{\text{acc}}$ ואם $\langle M' \rangle \notin L_{1a} \iff a$ מכילה יותר ממילה אחת המתחילה ב- a $L(M') \iff f(x) \notin L_{1a} \iff$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{1a}$

b) מכיוון ש- $L_{1a} \notin RE$ מושפט הרדוקציה מתקיים

ג) מכיוון ש- $L_{1a} \notin R$ מושפט הרדוקציה מתקיים

שאלה 4

(א)

פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M_\emptyset היא מ"ט שדועה כל קלט ו- M' המ"ט הבא:על כל קלט $y: M' =$ אם $y \neq "ab"$ דועה.אחרת מריצה M על w ועונה כמוות.

אבחןה:

$$L(M') = \begin{cases} \{"ab"\} & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

$$L(M') = \{"ab"\} \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M' \rangle \iff w \in L(M) \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle \iff x \in L_{\text{acc}} \text{ אם } .f(x) \in L_{\geq 1a} \iff \langle M' \rangle \in L_{\geq 1a} \iff$$

אם שני מקרים:

$$\frac{L(M_\emptyset) = \emptyset \text{ ו- } f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle \text{ מקרה 1}}{.f(x) \notin L_{\geq 1a} \iff L(M_\emptyset) \notin L_{\geq 1a} \iff \text{לא מכילה מילה המתחילה ב- } a \text{ ל- } L(M_\emptyset)} \iff$$

$$\frac{\text{מקרה 2}}{L(M_\emptyset) \notin L_{1a} \text{ ו- } L(M') = \emptyset \text{ לפי האבחנה} \iff w \notin L(M) \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle \iff .f(x) \notin L_{1a}}$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה

. $L_{\text{acc}} \subseteq L_{\geq 1a}$

(ב)

מכיוון ש- $L_{\text{acc}} \notin R$ ממשפט הרדוקציה מתקיים **שאלה 5**

(א)

פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M_\emptyset, M', M^* \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset, M_{\text{even}}, M^* \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

• M_\emptyset היא מ"ט שדועה כל קלט,• M^* היא מ"ט שמקבלת כל קלט,• $|x| \bmod 2 = 0$ מ"ט שמקבלת רק מילים $x \in \Sigma^*$ עבורן 0

• המ"ט הבא:

על כל קלט y : $M' = M'$

1) אם $|y|$ אי-זוגי \Leftarrow מקבלת.

2) אחרת מרים M על w ועונה כמוותה.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \{y : |y| \bmod 2 = 0\} & w \notin L(M) \end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

אם שני מקרים: $\Leftarrow x \in \bar{L}_{\text{acc}}$

מקרה 1:

$$\begin{aligned} x \neq \langle M, w \rangle \\ L(M_\emptyset) \subset L(M_{\text{even}}) \subset L(M^*) \text{ ו } f(x) = \langle M_\emptyset, M_{\text{even}}, M^* \rangle \Leftarrow \\ .f(x) \in L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} \Leftarrow \end{aligned}$$

מקרה 2:

$$\begin{aligned} w \notin L(M) \text{ ו } x = \langle M, w \rangle \\ L(M') = \{y : |y| \bmod 2 = 0\} \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow \\ L(M_\emptyset) \subset L(M') \subset L(M^*) \Leftarrow \\ .f(x) \in L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} \Leftarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \notin \bar{L}_{\text{acc}} \text{ אם} \\ w \in L(M) \text{ ו } x = \langle M, w \rangle \Leftarrow \\ L(M') = \Sigma^* \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M_\emptyset, M', M^* \rangle \Leftarrow \\ L(M') \not\subset L(M^*) \Leftarrow \\ .f(x) \notin L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} \Leftarrow \\ \text{לסיכום, הוכחנו רדוקציה} \quad \bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} \end{aligned}$$

ב) מכיוון ש- R ממשפט הרדוקציה מתקיים $\bar{L}_{\text{acc}} \notin R$

ג) מכיוון ש- RE ממשפט הרדוקציה מתקיים $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$

שאלה 6 נבנה רדוקציה מ- L_ϵ ל- L_{acc}

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\text{loop}} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M_{loop} מ"ט שלא עוצרת על אף קלט ו- M' המ"ט הבאה:

$=$ על כל קלט y :

1) מריצה M על ϵ .

2) אם M מקבלת M' מקבלת.

3) אם M דוחה M' מקבלת.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & \epsilon \text{ עוצרת על } M \\ \emptyset & \epsilon \text{ לא עוצרת על } M \end{cases}$$

הוכת הנכונות:

$$\langle M' \rangle \in L_{\text{acc}} \iff L(M') = \Sigma^* \iff \epsilon \text{ עוצרת על } M \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle \iff x \in L_\epsilon$$

$f(x) \in L_{\text{acc}} \iff f(x) = \langle M_{\text{loop}} \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle \iff x \notin L_\epsilon$

מקרה 1: $f(x) \notin L_{\text{acc}} \iff f(x) = \langle M_{\text{loop}} \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle$

מקרה 2: $L(M') = \emptyset \iff \epsilon \text{ לא עוצרת על } M \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle \iff \langle M' \rangle \notin L_{\text{acc}}$

שאלה 7 פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M_\emptyset מכונה טיריניג שדוחה כל קלט.
 $=$ על קלט y :

• שומרת את y על סרט נוסף.

• מריצה את M על w .

○ אם M דוחה M' דוחה.

○ אם M מקבלת M' בודקת האם $y = \epsilon$

* אם כן, מקבלת.

* אם לא, דוחה.

אבחנה

$$L(M') = \begin{cases} \{\varepsilon\} & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}.$$

nocnoot_hrdokzih

(1) חישיבה כי ניתן לבנות מכונת טיורינג שבודקת האם $\langle M, w \rangle = x$. אם לא, מחזירה קידוד קבוע של $\langle M_\emptyset \rangle$. אם כן, מחזירה קידוד של M' ע"י הוספת קוד שמעתיק את y לסדרט נספ' ומבצע השווה בין y ל- ε .

$$(2) \text{ נראה כי } w \in L_{\text{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L$$

$$x \in L_{\text{acc}} \text{ אם}$$

$$\begin{aligned} w \in L(M) \text{ ו } x = \langle M, w \rangle \Leftrightarrow \\ L(M') = \{\varepsilon\} \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M' \rangle \Leftrightarrow \\ f(x) \in L \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\text{אם שני מקרים: } x \notin L_{\text{acc}}$$

$$f(x) \notin L \Leftrightarrow L(M_\emptyset) = \emptyset \text{ ו } f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \Leftrightarrow x \neq \langle M, w \rangle \bullet$$

$$f(x) \notin L \Leftrightarrow L(M') = \emptyset \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M' \rangle \Leftrightarrow w \notin L(M) \text{ ו } x = \langle M, w \rangle \bullet$$

$$\text{הראינו רדוקציה } L \notin R \text{ ומכיון ש-} L_{\text{acc}} \notin R, \text{ ממשפט הרדוקציה מתקיים,}$$

שאלה 8 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

נניח בשלילה כי $L \leq \bar{L}$. אז $\bar{L} \leq L$. ממשפט הרדוקציה, מכיון ש- $\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{\text{acc}}$, $\bar{L}_{\text{acc}} \in RE$ או $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$, בסתירה לכך ש- $L_{\text{acc}} \in RE$.