חישוביות וסיבוכיות

מועד ב'

ד"ר יוחאי טוויטו, ד"ר ירמיהו מילר .

סמסטר א, תשפ"ו'

מספר העמוד הנוכחי ומספר העמודים הכולל בשאלון מופיעים בתחתית כל עמוד. בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות

שאלוני בחינה

☑ לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.

☐ לשאלון הבחינה יש לצרף כריכה בלבד.

☐ יש להחזיר את השאלון ביחד עם המחברת/כריכה.

שימוש במחשבונים

☐ ניתן להשתמש במחשבון.

☑ לא ניתן להשתמש במחשבון.

חומר עזר

☑ לא ניתן להשתמש בחומר עזר כלל.

☐ ניתן להשתמש בחומר עזר/דף נוסחאות, כמפורט:

☐ הבחינה עם חומר פתוח ⍰ מותר להשתמש בכל חומר עזר מודפס או כתוב.

הנחיות

נא קראו בעיון את ההנחיות הבאות בטרם תתחילו לפתור את הבחינה. מומלץ לקרוא בקצרה את כלל השאלות לפני שמתחילים לפתור את הבחינה. ניתן לענות על השאלות בכל סדר שתרצו.

1. המבחן כולל 5 שאלות. יש לענות על כולן.
2. שאלות הבחינה שוות משקל - כל שאלה 20 נקודות.
3. כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תדלגו על שלבים.
4. המבחן כולל נספחים, לשימושכם. הסתייעו בהם במידת הצורך.
5. הקפידו על כתב יד ברור וקריא.
6. הקפידו לרשום בגדול ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
7. כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבלתם. רק הן נבדקות !
8. ניתן לקחת את השאלון כאשר הבחינה מסתיימת.

בהצלחה!

הבחינה

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

בנו מכונת טיורינג סטנדרטית (כלומר, במודל הבסיסי) שמחשבת את **הפונקציה** $f(n,m) = n \cdot m$.

המכונה מקבלת **כקלט** שני מספרים טבעיים בבסיס אונרי, מופרדים ע"י האות #. כלומר, בצורה הבאה: $1^n\#1^m$, כאשר $n,m \in \mathbb{N}$. על המכונה לחשב את הפונקציה המכפלה $n \cdot m$.

בדומה לקלט, על **הפלט** להיות גם בבסיס אונרי. בתום החישוב, על הסרט לכלול את מילת הפלט בלבד, ועל ראש המכונה להיות בתחילת מילת הפלט.

בסעיף זה באפשרותכם **לתאר את המכונה** באחת מבין הדרכים הבאות, לבחירתכם: או בצורה גרפית בעזרת תרשים/דיאגרמת מצבים, או בעזרת טבלת מעברים.

תזכורת: $\mathbb{N}$ היא קבוצת הטבעיים כולל אפס.

שאלה 2: וריאציות על מכונות טיורינג (20 נקודות)

נגדיר מודל מכונת טיורינג חדש שנקרא לו OR. במודל זה, הראש יכול לבצע בכל מעבר רק פעולה אחת:

1. או לזוז על הסרט (ימינה או שמאלה).
2. או לכתוב במיקום הנוכחי בסרט, ללא תנועה ימינה או שמאלה.

כלומר פונקציית המעברים במודל זה מוגדרת כך:

$$\delta : (Q \times \Gamma) \to (Q \times (\Gamma \cup \{L, R\})) \ ,$$

כאשר המשמעות של פעולת האיחוד היא שבמעבר נתון, אפשר או לכתוב או לזוז שמאלה/ימינה, אך לא גם וגם. מלבד ההבדל בפונקציית המעברים, מודל OR זהה למודל הבסיסי של מכונת טיורינג.

נגדיר מודל מכונת טיורינג חדש שנקרא לו TS. במודל זה, בכל מעבר, מלבד האפשרות לזוז שמאלה או ימינה, הראש יכול גם להישאר במקום (באותה המשבצת בסרט). כלומר פונקציית המעברים במודל זה מוגדרת כך:

$$\delta : (Q \times \Gamma) \to (Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}) \ ,$$

כאשר המשמעות של S היא הישארות במקום (stay). מלבד ההבדל בפונקציית המעברים, מודל TS זהה למודל הבסיסי של מכונת טיורינג.

הוכיחו כי המודל OR והמודל TS שקולים חישובית.

שאלה 3: התזה של צ'רץ' טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

נתון האלפבית $\Sigma = \{a, b\}$ ונתונה השפה המוגדרת מעל Σ:

$$L = \left\{ a^{2^n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^+ \right\} \ .$$

בנו דקדוק $G = (V, \Sigma, R, S)$ היוצר את השפה L.

תארו את הדקדוק באופן מלא. כלומר, תארו באופן מלא את כל ארבעת רכיבי הדקדוק.

סעיף ב' (10 נקודות)

נתון האלפבית $\Sigma = \{a, b\}$ ונתונה השפה המוגדרת מעל Σ:

$$L = \left\{ a^n b^n c^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \ .$$

בנו דקדוק $G = (V, \Sigma, R, S)$ היוצר את השפה L.

תארו את הדקדוק באופן מלא. כלומר, תארו באופן מלא את כל ארבעת רכיבי הדקדוק.

שאלה 4: אי-כריעות (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

תהי L השפה הבאה:

$$L = \left\{ \langle M_1, M_2, M_3 \rangle \;\middle|\; L(M_1) = L(M_2) = L(M_3) \text{ מכונות טיורנג עבורן } M_1, M_2, M_3 \right\} \ .$$

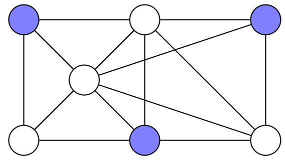
הוכיחו כי $L \notin R$.

סעיף ב' (10 נקודות)

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: $\overline{L_{\text{acc}}} \backslash L_{\text{halt}} \in RE$.

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, קבוצה בלתי תלויה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $S \subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u, v \in S$ מתקיים $(u, v) \notin E$. התרשים מראה דוגמה של קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k = 3$:



הבעיית IS מוגדרת באופן הבא:
קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר k.
פלט: האם קיימת קבוצה בלתי תלויה ב- G בגודל k?

$$IS = \left\{ \langle G,k\rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ } G \right\}$$

הבעיית $3SAT$ מוגדרת באופן הבא:

$$3SAT = \left\{ \langle \phi\rangle \;\middle|\; \text{נוסחה בוליאנית } 3CNF \text{ ספיקה } \phi \right\} .$$

הוכיחו כי קיימת רדוקציה פולינומיאלית מ- $3SAT$ ל- IS, כלומר:

$$3SAT \leqslant IS .$$

חישוביות וסיבוכיות

מועד ב'

פתרון לדוגמא

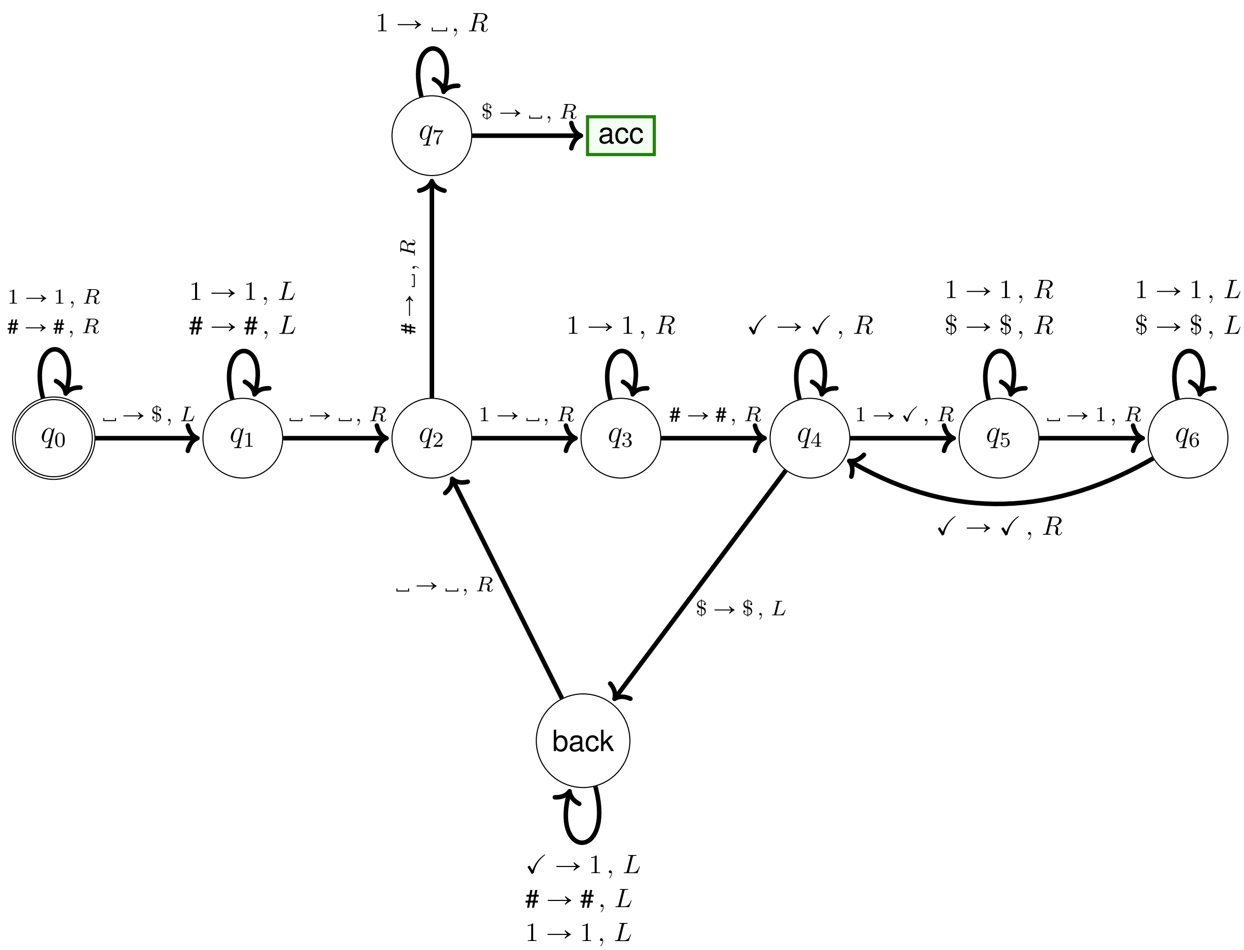
ד"ר יוחאי טוויטו , ד"ר ירמיהו מילר .

סמסטר א, תשפ"ו'

מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הינן פתרונות לדוגמא. ניתן לפתור חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

פתרונות

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)



שאלה 2: וריאציות על מכונות טיורינג (20 נקודות)

כיוון ראשון: לכל מכונה ממודל OR קיימת מכונה שקולה ממודל TS

תהי $M_{OR} = \left(Q^{OR}, \Sigma^{OR}, \Gamma^{OR}, \delta^{OR}, q_0^{OR}, q_{\text{acc}}^{OR}, q_{\text{rej}}^{OR}\right)$ מכונה ממודל OR.
נבנה מכונה שקולה $M_{TS} = \left(Q^{TS}, \Sigma^{TS}, \Gamma^{TS}, \delta^{TS}, q_0^{TS}, q_{\text{acc}}^{TS}, q_{\text{rej}}^{TS}\right)$ ממודל TS.
כל הרכיבים של המכונה M_{TS} יהיו זהים לרכיבים של המכונה M_{OR} מלבד פונקציית המעברים.

פתרונות

נגדיר את פונקציית המעברים δ^{TS}.

מעברי תנועה

נניח ש δ^{OR} מכילה את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q,\sigma) = (p, \text{move})$$

כאשר:

$$p,q \in Q^{OR}\ , \qquad \sigma \in \Gamma^{OR}\ , \qquad \text{move} \in \{L,R\}\ .$$

אז ב- δ^{TS} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{TS}(q,\sigma) = (p,\sigma,\text{move})$$

מעברי כתיבה

נניח ש δ^{OR} מכילה את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q,\sigma) = (p,\tau)$$

כאשר:

$$p,q \in Q^{OR}\ , \qquad \sigma,\tau \in \Gamma^{OR}\ .$$

אז ב- δ^{TS} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{TS}(q,\sigma) = (p,\tau,S)$$

כיוון שני: לכל מכונה ממודל TS קיימת מכונה שקולה ממודל OR

תהי $M_{TS} = \left(Q^{TS},\Sigma^{TS},\Gamma^{TS},\delta^{TS},q_0^{TS},q_{\text{acc}}^{TS},q_{\text{rej}}^{TS}\right)$ מכונה ממודל TS.

נבנה מכונה שקולה $M_{OR} = \left(Q^{OR},\Sigma^{OR},\Gamma^{OR},\delta^{OR},q_0^{OR},q_{\text{acc}}^{OR},q_{\text{rej}}^{OR}\right)$ ממודל OR.

במעברים בהן המכונה M_{TS} כותבת אות וגם זזה ימינה או שמאלה, לא יתכן מעבר שקול יחיד במכונה ממודל OR. לכן נמיר חלק מהמעברים במכונה M_{TS} לשני מעברים עוקבים במכונה M_{OR}. במעבר הראשון נכתוב אות ובמעבר השני נבצע את התזוזה.

לשם כך, נצטרך מצבי ביניים חדשים, שיחברו בין המעברים . לכל מצב q נגדיר שני מצבי ביניים ייחודיים q^L ו- q^R. כלומר:

$$Q^{OR} = Q^{TS} \cup \left\{q^L \mid q \in Q^{TS}\right\} \cup \left\{q^R \mid q \in Q^{TS}\right\}\ .$$

נגדיר כעת את δ^{OR} תוך שימוש במצבי ביניים.

מצבי הביניים תמיד יבצעו תזוזה שמאלה או ימינה בלבד, לכל אות שבסרט. פורמלית:

$$\begin{aligned}
\forall q \in Q^{TS}\ ,\ \sigma \in \Gamma^{TS}: &\quad \delta^{OR}\left(q^R,\sigma\right) = (q,R)\ ,\\
\forall q \in Q^{TS}\ ,\ \sigma \in \Gamma^{TS}: &\quad \delta^{OR}\left(q^L,\sigma\right) = (q,L)\ .
\end{aligned}$$

עבור מעברים בהן מתבצעת כתיבה ותנועה, נגדיר את δ^{OR} תוך שימוש במצבי ביניים.

בהינתן מעבר עם תנועה ימינה:

$$\delta^{TS}(q,\sigma) = (p,\tau,R) \ .$$

כאשר:

$$q,p \in Q^{TS} \ , \qquad \sigma,\tau \in \Gamma^{TS}$$

אז ב- δ^{OR} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q,\sigma) = \left(p^R,\tau\right) \ .$$

באופן דומה, בהינתן מעבר עם תנועה שמאלה:

$$\delta^{TS}(q,\sigma) = (p,\tau,L) \ .$$

כאשר:

$$q,p \in Q^{TS} \ , \qquad \sigma,\tau \in \Gamma^{TS}$$

אז ב- δ^{OR} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q,\sigma) = \left(p^L,\tau\right) \ .$$

במעברים בהם המכונה M_{TS} אינה מבצעת תנועה (נשארת במקום) לא נשתמש במצבי הביניים. כלומר, בהינתן מעבר בו המכונה נשארת במקום:

$$\delta^{TS}(q,\sigma) = (p,\tau,S)$$

כאשר:

$$q,p \in Q^{TS} \ , \qquad \sigma,\tau \in \Gamma^{TS}$$

אז ב δ^{OR} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q,\sigma) = (p,\tau) \ .$$

שאלה 3: התזה של צ'רץ' טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

להלן כללי היצירה.

$$\begin{aligned} S &\to [S] \ , \\ S &\to a \ , \\ [a &\to aa[\ , \\ [] &\to \varepsilon \ . \end{aligned}$$

סעיף ב' (10 נקודות)

להלן כללי היצירה.

$$\begin{aligned} S &\to S'] \;, \\ S' &\to aS'bC \mid \varepsilon \;, \\ Cb &\to bC \;, \\ C] &\to]c \;, \\ ] &\to \varepsilon \;. \end{aligned}$$

שאלה 4: אי-כריעות (20 נקודות)

סעיף א' נראה שקיימת רדוקציה משפה $L_{EQ} = \{\langle M, M'\rangle \mid L(M) = L(M')\}$ **לשפה** L. **מכיוון ש-** $L_{EQ} \notin R$ אז ממשט הרדוקיצה $L \notin R$.

<u>בניית הרדוקציה</u>

$$f(x) = \begin{cases} \langle M, M', M'\rangle & : x = \langle M, M'\rangle \;, \\ \langle M_\varnothing, M_\varnothing, M^*\rangle & : x \neq \langle M, M'\rangle \;, \end{cases}$$

כאשר $M_\varnothing$ המכונת טיורינג הדוחה כל קלט ו- M^* המכונת טיורינג המקבלת כל קלט.

<u>הוכחת נכונות</u>

<u>הוכחה לכיוון $\Leftarrow$</u>

אם $x \in L_{EQ}$

$\Leftarrow$ $x = \langle M, M'\rangle$ **ו-** $L(M) = L(M')$.

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M, M', M'\rangle$ **וגם** $L(M) = L(M') = L(M')$.

$\Leftarrow$ $\langle M, M', M'\rangle \in L$.

$\Leftarrow$ $f(x) \in L$.

<u>הוכחה לכיוון $\Rightarrow$</u>

אם

אם $x \in L_{EQ}$ **אז שני מקרים:**

מקרה 1) $x \neq \langle M, M'\rangle$

$\Leftarrow f(x)=\langle M_\varnothing, M_\varnothing, M^*\rangle$ ו- $L(M_\varnothing)=\varnothing$ ו- $L(M^*)=\Sigma^*$.

$\Leftarrow L(M_\varnothing)\neq L(M^*)=\Sigma^*$.

$\Leftarrow \langle M_\varnothing, M_\varnothing, M^*\rangle \notin L$

$\Leftarrow f(x)\notin L$.

מקרה 2) $x=\langle M, M'\rangle$ ו- $L(M)\neq L(M')$.

$\Leftarrow f(x)=\langle M, M', M'\rangle$ **וגם** $L(M)\neq L(M')$.

$\Leftarrow \langle M, M', M'\rangle \notin L$.

$\Leftarrow f(x)\notin L$.

הוכחנו כי

$$x\in L_{EQ} \iff f(x)\in L$$

לכן $L_{EQ}\leqslant L$.

$L_{EQ}\notin R$ **אז ממשפט הרדוקציה** $L\notin R$.

סעיף ב' ראשית נשים לב שאם $x\in \overline{L_{\text{acc}}}\backslash L_{\text{halt}}$ אז שני מקרים:

1) $x\neq\langle M,w\rangle$,

2) $x=\langle M,w\rangle$ **וגם** $w\notin L(M)$ **וגם** M **לא עוצרת על** w.

לכן:

$$\overline{L_{\text{acc}}}\backslash L_{\text{halt}}=\overline{L_{\text{halt}}}\ .$$

מכיוון ש: $\overline{L_{\text{Halt}}}\notin RE$ **אז גם** $\overline{L_{\text{acc}}}\backslash L_{\text{Halt}}\notin RE$.

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

<u>בניית הרדוקציה</u>

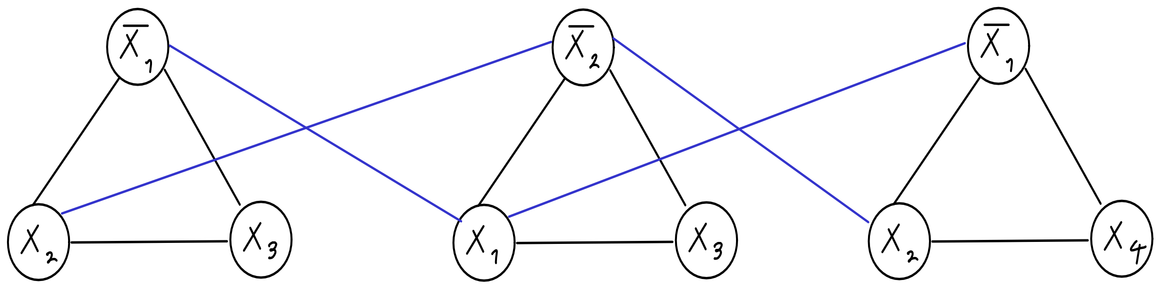
$$f(\langle\phi\rangle)=\langle G,k\rangle\ ,$$

כאשר:

- לכל ליטרל בנוסחה ϕ ניצור קודקוד מתאים בגרף G.
- לכל פסוקית C_i של ϕ נגדיר שלושה של קודקודים t_i, כאשר הקודקודים ב- t_i מתאימים לליטרלים של הספוקית C_i.
- לכל זוג קודקודים של אותה שלושה מחוברים ניצור צלע המחברת ביניהם.
- עבור כל זוג של משתנה ומשלימו בשלושות שונות ניצור צלע המחברת ביניהם.
- נגידר $k=$ מספר הפסוקיות בנוסחה ϕ.

פתרונות

לדוגמה, אם $\phi = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4)$, נוסחת בוליאנית $3CNF$ בעל $k = 3$ פסוקיות, אז הפונקצית הרדוקציה פולטת את הזוג $\langle G, k = 3 \rangle$ כאשר G הוא הגרף המתואר בתרשים למטה.



<u>הוכחת הנכונות</u>

<u>כיוון ⇐</u>

נניח $\langle \phi \rangle \in 3SAT$.

⇐ ϕ נוסחה בוליאנית $3CNF$ וקיימת השמה X שמספקת את ϕ.

⇐ אם $\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \quad \cdots \quad \wedge C_k$ וגם X השמה מספקת של ϕ, אז הפסוקית C_i מכילה לפחות ליטרל אחד שמקבל את הערך אמת 1.

⇐ קיימת קבוצה של k קודקודים ממשולשים שונים, כל אחד של משתנה עם ערך אמת 1, שאינם מחוברים זה לזה.

(הסבר: כל קודקוד בקבוצה זו שייך לליטרל עם ערך אמת 1. נניח בשלילה שיש זוג קודקודים בקבוצה זו שמחוברים. אז יש שני קודקודים ממשולשים שונים של זוג משתנים שאינם משתנים משלימים, בסתירה לכך שקודקודים ממושלשים שונים מחוברים רק אם הם שייכים למשתנים משלימים.)

⇐ G מכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל k.

⇐ $\langle G, k \rangle \in IS$.

<u>כיוון ⇒</u>

אם $\langle G, k \rangle \in IS$.

פתרונות

⇐ קיימת קבוצה בלתי תלויה S ב- G בגודל k.

⇐ ב- S יש בדיוק קודקוד אחד מכל משולש, בגלל שבגרף כל קודקודים מאותה משולש מחוברים (לפי ההגדרה של הרדוקציה).

⇐ ב- S אין משתנים משלימים, בגלל שבין כל זוג משתנים משלימים יש צלע.

⇐ ניתן לתת השמה לכל משתנה ב- S ערך אמת 1.

⇐ בכל משולש יש לפחות משתנה אחד עם ערך אמת 1.

⇐ בכל פסוקית של ϕ יש לפחות ליטרל אחד עם ערך אמת 1.

⇐ קיימת השמה מספקת ל- ϕ.

⇐ $\langle\phi\rangle \in 3SAT$.

סיבוכיות זמן

הפונקצית הרדוקציה מקבלת כקלט נוסחה בוליאנית ϕ עם k פסוקיות ופולטת גרף המורכב מ- k גרפי K_3, אחד לכל פסוקית של ϕ.