

## חישוביות וסיבוכיות

### מועד א'

ד"ר יוחאי טוויטו, ד"ר ירמיהו מילר, סמסטר א, תשפ"ה.

מספר העמוד הנוכחי ומספר העמודים הכולל בשאלון מופיעים בתחתית כל עמוד. בהצלחה!

#### הנחיות למדור בחינות

#### שאלוני בחינה

- ☒ לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ☐ לשאלון הבחינה יש לצרף כריכה בלבד.
- ☐ יש להחזיר את השאלון ביחד עם המחברת/כריכה.

#### שימוש במחשבוני

- ☐ ניתן להשתמש במחשבון.
- ☒ לא ניתן להשתמש במחשבון.

#### חומר עזר

- ☒ לא ניתן להשתמש בחומר עזר כלל.
- ☐ ניתן להשתמש בחומר עזר/דף נוסחאות, כמפורט:
- ☐ הבחינה עם חומר פתוח ☑ מותר להשתמש בכל חומר עזר מודפס או כתוב.

עמוד 1 מתוך 6

## הנחיות

נא קראו בעיון את ההנחיות הבאות בטרם תתחילו לפתור את הבחינה. מומלץ לקרוא בקצרה את כלל השאלות לפני שמתחילים לפתור את הבחינה. ניתן לענות על השאלות בכל סדר שתרצו.

1. המבחן כולל 5 שאלות. יש לענות על כולן.
  2. שאלות הבחינה שוות משקל - כל שאלה 20 נקודות.
  3. כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תדלגו על שלבים.
  4. המבחן כולל נספחים, לשימושכם. הסתייעו בהם במידת הצורך.
  5. הקפידו על כתב יד ברור וקריא.
  6. הקפידו לרשום בגדול ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
  7. כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבלתם. רק הן נבדקות!
  8. ניתן לקחת את השאלון כאשר הבחינה מסתיימת.
- בהצלחה!**

## הבחינה

### שאלה 1: מכונת טיורינג 20 נקודות

#### סעיף א' 10 נקודות

נתון אלפבית הקלט  $\Sigma = \{a, b, c\}$  ונתונה השפה הבאה:

$$L = \{a^i b^j c^{i+j} \mid i, j \in \mathbb{N}^+\}$$

תארו מכונת טיורינג סטנדרטית (כלומר, במודל הבסיסי) שמכריעה את השפה.

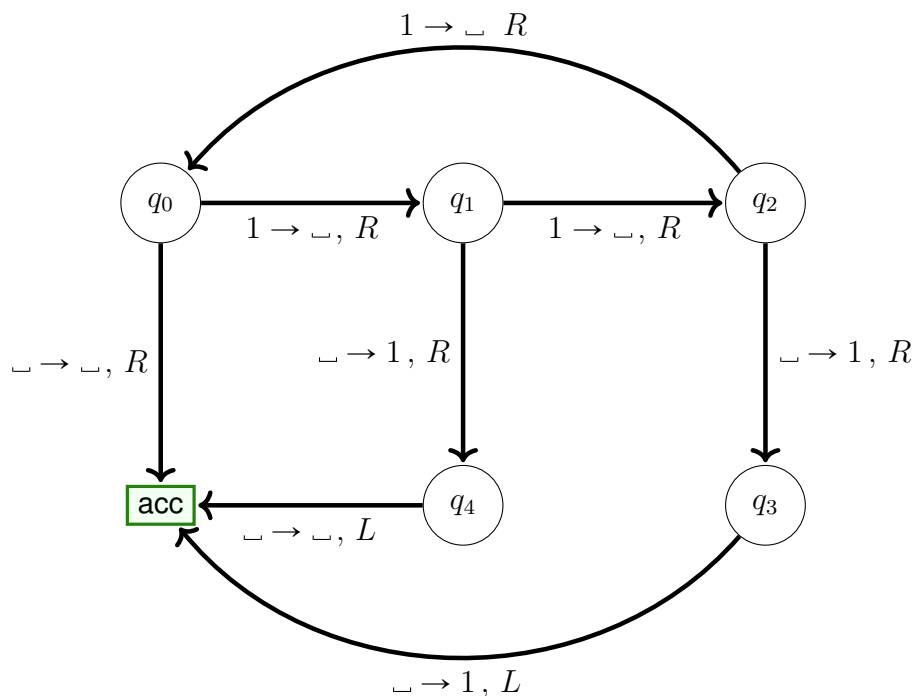
בסעיף זה עליכם לתאר את המכונה בצורה גרפית בעזרת תרשים /דיאגרמת מצבים בלבד, ולא בדרכים אחרות. כלומר, לא בעזרת טבלת מעברים, לא בעזרת פסאודו-קוד, וכיוצא באלו.

תזכורת:  $\mathbb{N}^+$  היא קבוצת הטבעיים החיוביים (כלומר, ללא המספר אפס).

#### סעיף ב' 5 נקודות

נתון אלפבית הקלט  $\Sigma = \{1\}$ . בתרשים הבא, נתונה מכונת טיורינג  $M$ . המכונה מקבלת כקלט מספר בבסיס אוני.

מהי הפונקציה  $f$  שהמכונה מחשבת? כיתבו את הפונקציה בצורה פורמלית, ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של הפונקציה.

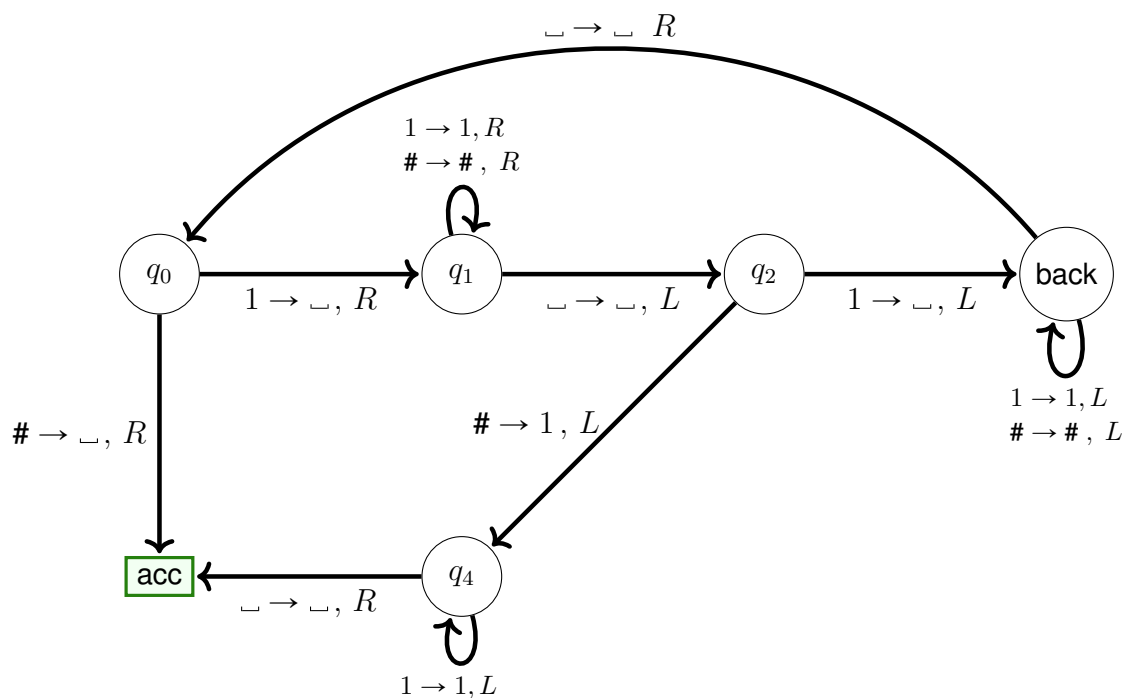


עמוד 3 מתוך 6

### סעיף ג' 5 נקודות

בתרשים הבא, נתונה מכונת טיורינג  $M$ . המכונה מקבלת כקלט שני מספרים בבסיס אונרי, מופרדים ע"י האות #.

בהינתן קלט מהצורה  $1^i \# 1^j$ , כאשר  $i, j \in \mathbb{N}$ , מהי הפונקציה  $f$  שהמכונה מחשבת? כיתבו את הפונקציה בצורה פורמלית, ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של הפונקציה.



### שאלה 2: וריאציות על מכונת טיורינג 20 נקודות

נגדיר מודל מכונת טיורינג חדש שנקרא לו  $OR$ . במודל זה, הראש יכול לבצע בכל מעבר רק פעולה אחת:

1. או לזוז על הסרט (ימינה או שמאלה).

2. או לכתוב במיקום הנוכחי בסרט, ללא תנועה ימינה או שמאלה.

כלומר פונקציית המעברים במודל זה מוגדרת כך:

$$\delta : (Q \times \Gamma) \rightarrow (Q \times (\Gamma \cup \{L, R\})),$$

כאשר המשמעות של פעולת האיחוד היא שבמעבר נתון, אפשר או לכתוב או לזוז שמאלה/ימינה, אך לאגם וגם. מלבד ההבדל בפונקציית המעברים, מודל  $OR$  זהה למודל הבסיסי של מכונת טיורינג.

נגדיר מודל מכונת טיורינג חדש שנקרא לו  $TS$ . במודל זה, בכל מעבר, מלבד האפשרות לזוז שמאלה אוימינה, הראש יכול גם להישאר במקום (באותה המשבצת בסרט). כלומר פונקציית המעברים במודל זהמוגדרת כך:

$$\delta : (Q \times \Gamma) \rightarrow (Q \times (\Gamma \cup \{L, R, S\})) ,$$

כאשר המשמעות של  $S$  היא הישארות במקום (stay). מלבד ההבדל בפונקציית המעברים, מודל  $TS$  זהה למודל הבסיסי של מכונת טיורינג.

הוכיחו כי המודל  $OR$  והמודל  $TS$  שקולים חישובית.

### שאלה 3: התזה של צ'רץ' טיורינג 20 נקודות

#### סעיף א' 10 נקודות

נתון הדקדוק הבא. מהי השפה שהדקדוק יוצר? כלומר, מהי  $L(G)$ ? כיתבו את השפה בצורה פורמלית, ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של השפה.

$$G = (V, \Sigma, R, S)$$

$$V = \{S, B\}$$

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

$$R = \{$$

$$S \rightarrow aBSc$$

$$S \rightarrow \varepsilon$$

$$Ba \rightarrow aB$$

$$Bc \rightarrow bc$$

$$Bb \rightarrow bb$$

$$\}$$

#### סעיף ב' 10 נקודות

נתון הדקדוק הבא. מהי השפה שהדקדוק יוצר? כלומר, מהי  $L(G)$ ? כיתבו את השפה בצורה פורמלית,

ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של השפה.

$$G = (V, \Sigma, R, S)$$

$$V = \{S, B\}$$

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

$$R = \{$$

$$S \rightarrow ABCS$$

$$S \rightarrow \varepsilon$$

$$AB \rightarrow BA$$

$$BC \rightarrow CB$$

$$AC \rightarrow CA$$

$$BA \rightarrow AB$$

$$CA \rightarrow AC$$

$$CB \rightarrow BC$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow b$$

$$C \rightarrow c$$

$\}$

#### שאלה 4: אי-כריעות 20 נקודות

הוכיחו שהשפה הבאה אינה כריעה. כתבו הוכח המלא הומפורטת. אל תדלגו על שלבים. בשאלה זו ניתן להניח כי  $M_1, M_2$  הן מכונות טיורינג.

$$L_{M_1 \cup M_2} = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \cup L(M_2) \}$$

#### שאלה 5: סיבוכיות זמן 20 נקודות

בהינתן גרף לא מכוון  $G = (V, E)$ . קבוצת קדקודים  $U \subseteq V$  תקרא קבוצת בלתי תלויה אם לכל זוג קדקודים  $u_1, u_2$  ב- $U$  מתקיים ש- $(u_1, u_2) \notin E$ .

בהינתן גרף לא מכוון  $G = (V, E)$ . קבוצת קדקודים  $U \subseteq V$  תקרא כיסוי קדקודים ב- $G$  אם לכל צלע  $(u_1, u_2) \in E$ , מתקיים ש- $u_1 \in U \vee u_2 \in U$ . נתבונן בשפות הפורמליות הבאות:

$$IS = \{ \langle G, k \rangle \mid \text{גרף } G \text{ לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ לפחות.} \}$$

$$VC = \{ \langle G, k \rangle \mid \text{גרף } G \text{ לא מכוון המכיל כיסוי קדקודים בגודל } k \text{ לכל היותר.} \}$$

הוכיחו כי

$$IS \leq_P VC.$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה  $IS$  לשפה  $VC$ . יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

## תוכן העניינים

8	1 מכונות טיורינג
9	2 וריאציות של מכונות טיורינג
10	3 התזה של צ'רץ'-טיורינג
14	4 אי-כריעות
18	5 סיבוכיות זמן
21	6 נוסחאות נוספות

## 1 מכונות טיורינג

## הגדרה 1: מכונת טיורינג

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$ . מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעה	
$Q$	קבוצת מצבים סופיות
$\Sigma$	א"ב קלט סופי
$\Gamma$	א"ב סרט סופי
$\delta : (Q \setminus \{\text{rej}, \text{acc}\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$	פונקציית המעברים
$q_0$	מצב התחלתי
acc	מצב מקבל
rej	מצב דוחה

## הגדרה 2: קונפיגורציה

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$  מכונת טיורינג.

קונפיגורציה של  $M$  הינה מחרוזת

$$uq\sigma v, \quad u, v \in \Gamma^*, \sigma \in \Gamma, q \in Q.$$

## משמעות:

$q$	מצב המכונה,
$\sigma$	הסימון במיקום הראש
$u$	תוכן הסרט משמאל לראש,
$v$	תוכן הסרט מימין לראש.

## הגדרה 3: גרירה

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$  מכונת טיורינג, ותהי  $c_1$  ו- $c_2$  קונפיגורציות של  $M$ .  
נסמן

$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים,  $c_1$  גורר את  $c_2$ ) אם כשנמצאים ב- $c_1$  עוברים ל- $c_2$  בצעד בודד.

## נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

אם ניתן לעבור מ- $c_1$  ל- $c_2$  ב-0 או יותר צעדים.

## הגדרה 4: קבלה ודחייה של מחרוזת

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$  מכונת טיורינג, ו- $w \in \Sigma^*$  מחרוזת.  
נאמר כי:



- $M$  מקבלת את  $w$  אם  $q_0 w \vdash_M^* u \text{ acc } \sigma v$
  - $M$  דוחה את  $w$  אם  $q_0 w \vdash_M^* u \text{ rej } \sigma v$
- כאשר  $v, u \in \Gamma^*, \sigma \in \Gamma$  כלשהם.

**הגדרה 5: הכרעה של שפה**

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$  מכונת טיורינג, ו-  $L \subseteq \Sigma^*$  שפה. נאמר כי  $M$  מכריעה את  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$  מתקיים

- $M \Leftarrow w \in L$  מקבלת את  $w$ .
- $M \Leftarrow w \notin L$  דוחה את  $w$ .

**הגדרה 6: קבלה של שפה**

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$  מכונת טיורינג, ו-  $L \subseteq \Sigma^*$  שפה. נאמר כי  $M$  מקבלת את  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$  מתקיים

- אם  $w \in L$  אז  $M$  מקבלת את  $w$ .
- אם  $w \notin L$  אז  $M$  לא מקבלת את  $w$ .

במקרה כזה נכתוב ש-  $L(M) = L$ .

**הגדרה 7: חישוב פונקציות**

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$  מכונת טיורינג ותהי  $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ . נאמר כי  $M$  מחשבת את  $f$  אם:

- $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma_2 \subset \Gamma$
- לכל  $w \in \Sigma_1^*$  מתקיים  $q_0 w \vdash_M^* \text{acc } f(w)$ .

**2 וריאציות של מכונות טיורינג****הגדרה 8: מודל חישוב**

מודל חישובי = אוסף של מכונות שעבורם מוגדרים המושגים של הכרעה וקבלה של שפות.

**הגדרה 9: מודלים שקולים חישובית**

יהיו  $A, B$  מודלים חישוביים. נאמר כי  $A$  ו-  $B$  שקולים אם לכל שפה  $L$ :

- קיימת מכונה במודל  $A$  שמכריעה את  $L$  אם"ס קיימת מכונה כזו במודל  $B$ .
- קיימת מכונה במודל  $A$  שמקבלת את  $L$  אם"ס קיימת מכונה כזו במודל  $B$ .

**הגדרה 10: מכונות שקולות חישוביות**

שתי מכונות הן שקולות חישוביות אם הן מקבלות ודוחות בדיוק את אותן המילים.

**משפט 1: מכונת טיורינג עם סרט ימינה בלבד**

מודל מ"ט סם סרט אינסופי לכיוון אחד בלבד (מודל O) שקול למודל אינסופי בשני הכיוונים (מודל T). כלומר, לכל שפה  $L$ :

- יש מ"ט ממודל O שמקבלת את  $L$  אם"ם יש מ"ט במודל T שמקבלת את  $L$ .
- יש מ"ט ממודל O שמכריעה את  $L$  אם"ם יש מ"ט במודל T שמכריעה את  $L$ .

**משפט 2: מכונת טיורינג מרובת סרטים**

במכונת טיורינג מרובת סרטים:

- יתכנו מספר סרטים.

מספר הסרטים סופי וקבוע מראש בזמן בניית המ"ט, ואינו תלוי בקלט או במהלך החישוב.

- לכל סרט יש ראש נפרד.
- הפעילות (תנועה וכתיבה) בכל סרט נעשית בנפרד.
- בפרט, הראשים יכולים לזוז בכיוונים שונים בסרטים שונים.
- ישנו בקר מרכזי יחיד, שקובע את הפעילות בכל אחד מהסרטים, על סמך המידע שמתקבל מכל הסרטים.
- לכן, תוכן סרט אחד יכול להשפיע על הפעילות בשאר הסרטים.
- בתחילת החישוב, הקלט נמצא בסרט הראשון ושאר הסרטים ריקים.

**משפט 3:**

לכל  $k$ , המודל של מ"ט עם  $k$  סרטים שקול חישובי למודל של מ"ט עם סרט אחד.

**משפט 4:**

קבלה ודחייה של מחרוזות:

עבור מ"ט לא דטרמיניסטית  $N$  ומחרוזת  $w$ :

- $N$  מקבלת את  $w$  אם קיים חישוב של  $N$  על  $w$  שמגיע למצב מקבל.
- $N$  דוחה את  $w$  אם כל החישובים של  $N$  על  $w$  עוצרים במצב דוחה.

הכרעה וקבלה של שפות:

עבור מ"ט לא דטרמיניסטית  $N$  ושפה  $L$ :

- $N$  מכריעה את  $L$  אם  $N$  מקבלת אף כל המילים ב-  $L$  ודוחה את כל המילים שאינן ב-  $L$ .
- $N$  מקבלת את  $L$  אם  $N$  מקבלת אף כל המילים ב-  $L$  ולא מקבלת את כל המילים שאינן ב-  $L$ .

**משפט 5:**

לכל מ"ט לא דטרמיניסטית קיימת מ"ט דטרמיניסטית שקולה.

**3 התזה של צ'רץ'-טיורינג**

שמות נרדפים לשפות כריעות ושפות קבילות

Acceptable languages	שפות קבילות	Decideable languages	שפות כריעות
recognizable languages	שפות ניתנות לזיהוי	Recursive languages	שפות רקורסיביות
Semi-deidable languages	שפות כריעות למחצה		
Partially-deidable languages			
Recursively enumerable languages	שפות הניתנות למנייה רקורסיביות		

**משפט 7: סגירות שפות קבילות**

- איחוד
- חיתוך
- שרשור
- סגור קליין

**משפט 6: סגירות שפות כריעות**

השפות הכריעות סגורות תחת:

- איחוד
- חיתוך
- משלים
- שרשור
- סגור קליין

**משפט 8: היחס בין הכרעה לקבלה**

אם שפה הינה כריעה אז היא קבילה.

אם שפה והמשלים שלה קבילות אז היא כריעה.

**הגדרה 11: שפת סימפל**משתנים

- טבעיים:  $i, j, k, \dots$

מקבלים כערך מספר טבעי.

- מערכים:  $A[], B[], C[], \dots$  בכל תא ערך מתוך א"ב  $\Gamma$  אין סופיים.

- אתחול: הקלט נמצא בתאים הראשונים של  $A[]$ .

כל שאר המשתנים מאותחלים ל-0.

פעולות

- השמה בקבוע:

 $i=3, B[i]="\#"$ 

- השמה בין משתנים:

 $i=k, A[k]=B[i]$ 

- פעולות חשבון:

 $x = y + z, x = y - z, x = y \cdot z$ תנאים

- $B[i] == A[j]$

- (מערכים).

- $x \geq y$

- (משתנים טבעיים).

כל משתנה מופיע רק פעם אחת בכל פעולה או תנאי.

#### זרימה

- סדרה פקודות ממוספרות.

- goto: מותנה ולא מותנה.

- stop עצירה עם ערך חזרה.

```

1 one = 1
2 zero = 0
3 B[zero] = "0"
4 i=0
5 j=i
6 if A[i] == B[zero] goto 9
7 i=j + one
8 goto 3
9 C[one] = A[j]
10 if C[one] == A[zero] goto 12
11 stop(0)
12 stop(1)
```

#### הגדרה 12: קבלה ודחייה של מחרוזת בשפה SIMPLE

עבור קלט

w ותוכנית

P בשפת SIMPLE. נאמר כי

- P מקבלת את w אם הריצה של P על w עוצרת עם ערך חזרה 1.
- P דוחה את w אם הריצה של P על w עוצרת עם ערך חזרה 0.

#### הגדרה 13: הכרעה וקבלה של שפות

עבור שפה L ותוכנית P בשפת SIMPLE. נאמר כי

- P מכריעה את L אם היא מקבלת את המילים שב-L ודוחה את אלה שלא ב-L.
- P מקבלת את L אם היא מקבלת את כל ורק המילים ב-L.

#### משפט 9:

המודלים של מכונת טיורינג ותוכניות SIMPLE שקולים.

**משפט 10: מ"ט ותוכניות מחשב**

מ"ט חזקה לפחות כמו תוכנית משחב.  
 כל תוכנית מחשב ניתנת למימוש במ"ט.  
 לכן, כל שפה שהינה כריעה ע"י מחשב היא כס כריעה ע"י מ"ט.  
 וכמו כן, שפה שהינה קבילה ע"י מחשב היא גם קבילה ע"י מ"ט.

**הגדרה 14: דקדוקים כלליים**

בדקדוק כללי, בצד שמאל של כלל יצירה יכולה להופיעה מחרוזת (לא ריקה) כלשהי.  
 פורמלית, כלל יצירה בדקדוק כללי הוא מהצורה

$$\gamma \rightarrow u$$

כאשר  $u \in (V \cup \Sigma)^*$ ,  $\gamma \in (V \cup \Sigma)^+$ .

**משפט 11:**

תהי  $L$  שפה.  $L$  קבילה אם"ם קיים דקדוק כללי  $G$  כך ש-  $L(G) = L$ .

משפחת שפות	דקדוק	מודל חישובי
קבילות	כללי	מכונת טיורינג
חסרות הקשר	חסר הקשר	אוטומט מחסנית
רגולריות	רגולרי	אוטומט סופי

**משפט 12:**

כל שפה חסרת הקשר הינה כריעה.

**משפט 13: התזה של צ'רץ' טיורינג**

התזה של צ'רץ' טיורינג מודל מ"ט מגלם את המושג האבסטרקטי של "אלגוריתם".  
 כלומר, כל אלגוריתם שניתן לתיאור כתהליך מכניסטי שבו:  
 • התהליך מתבצע כסדרה של צעדים.  
 • כל צעד מצריך כמות סופית של "עבודה".  
 ניתן גם לתיאור כמ"ט.  
 בפרט, אין מודל מכניסטי / אוטומטי יותר ממ"ט.

## 4 אי-כריעות

## הגדרה 15: השפה ATM

$$ATM = \{(P, w) \mid P(w) = 1\}.$$

השפה ATM כוללת את כל הזוגות של מחרוזות  $P, w$  כך ש:

- $P$  היא קוד (תקין) של תוכנית.
- $w$  מחרוזת.
- מתקיים שאם מריצים את התוכנית  $P$  על הקלט  $w$  אז התוכנית עוצרת עם ערך חזרה 1.

## הגדרה חלופית:

$$A_{TM} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ מקבלת את } M\}$$

השפה  $A_{TM}$  כוללת את כל הזוגות של מחרוזות  $\langle M, w \rangle$  של כל מכונת טיורינג  $M$  וכל קלט  $w$  כך ש- $M$  מקבלת את  $w$ .

## סיכום 1: התוכנה U

התוכנה  $U$  היא תוכנה שמקבלת כקלט זוג מחרוזות  $P, w$  ופועלת כך:

- $U$  מחזירה את ערך החזרה שהתקבל מהריצה של  $P$  על  $w$ .
  - מריצה את התוכנה  $P$  על קלט  $w$  (במקרה שבו  $P$  אינה תוכנית מחשב תקינה אז  $U$  מחזירה ערך 0).
  - נשים לב שאם  $P$  לא עוצרת על  $w$  אז גם  $U$  לא עוצרת על הזוג  $P, w$ .
- התוכנה  $U$  פועלת באופן דומה לאופן שבה מערכת ההפעלה מפעילה תוכנות אחרות.

התוכנה  $U$  נקראת גם "תוכנה אוניברסלית" (או, בעולם מכונות טיורינג: "מכונת טיורינג אוניברסלית") כיוון שהיא תוכנה אחת שמדמה כל תוכנה אחרת.

$U$  היא תוכנית שמקבלת את  $ATM$ . כלומר:

$$L(U) = ATM.$$

מסקנה:  $ATM$  קבילה.

## שיטת ההוכחה:

אם שפה הינה קבילה אבל לא כריעה, אז המשלים שלה בהכרח אינה קבילה. לכן, בשביל להוכיח ששפה אינה קבילה, די להוכיח שהשפה לא כריעה, והמשלים שלה כן קבילה.

## הגדרה 16: השפה HALT

$$HALT = \{(P, w) \mid P(w) \downarrow\}.$$

השפה HALT כוללת את כל הזוגות של מחרוזות  $P, w$  כך ש:

- $P$  היא קוד (תקין) של תוכנית.
- $w$  מחרוזת.
- מתקיים שאם מריצים את התוכנית  $P$  על הקלט  $w$  אז התוכנית עוצרת (הסימון  $\downarrow$  מסמן עצירה).

בעיית העצירה קבילה אבל לא כריעה.  
כיוון שכך, המשלים שלה לא כריעה ולא קבילה.

#### הגדרה חלופית:

$$HALT_{TM} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \text{ מכונת טיורינג שעוצרת על } w \}$$

השפה  $HALT_{TM}$  כוללת את כל הזוגות של מחרוזות  $\langle M, w \rangle$  של כל מכונת טיורינג  $M$  וכל קלט  $w$  כך ש- $M$  עוצרת על  $w$ .

#### הגדרה 17: השפה E

$$E = \{ P \mid L(P) = \emptyset \}$$

השפה  $E$  כוללת את כל המחרוזות  $P$  כך ש-

- $P$  היא קוד (תקין) של תוכנית.
- השפה של  $P$  ריקה.

כלומר, לכל קלט  $w$ , הריצה של  $P$  על  $w$  לא מחזירה 1.

#### הגדרה חלופית:

$$E_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset \}$$

השפה  $E_{TM}$  כוללת את כל מחרוזות  $\langle M \rangle$  של כל מכונת טיורינג  $M$  כך ש- $M$  לא מקבלת אף מילה. במילים אחרות, השפה של  $M$  ריקה:  $L(M) = \emptyset$ .

#### הגדרה 18: השפה EQ

$$EQ = \{ (P_1, P_2) \mid L(P_1) = L(P_2) \} .$$

השפה  $EQ$  כוללת את כל זוגות המחרוזות  $P_1, P_2$  כך ש:

- $P_1, P_2$  הינן קודים (תרינים) של תוכניות.
- השפות של  $P_1, P_2$  זהות.

כלומר,  $P_1, P_2$  מקבלות בדיוק את אותן המילים.

#### הגדרה חלופית:

$$EQ_{TM} = \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2) \}$$

השפה  $EQ_{TM}$  כוללת את כל זוגות של מכונות טיורינג  $\langle M_1, M_2 \rangle$  שמקבלות בדיוק אותן המילים. במילים אחרות, השפות של  $M_1$  ו- $M_2$  זהות:  $L(M_1) = L(M_2)$ .

קבילה	כריעה	
✓	×	$ATM$
×	×	$\overline{ATM}$
✓	×	$HALT$
×	×	$\overline{HALT}$
×	×	$E$
✓	×	$\overline{E}$
×	×	$EQ$
×	×	$\overline{EQ}$

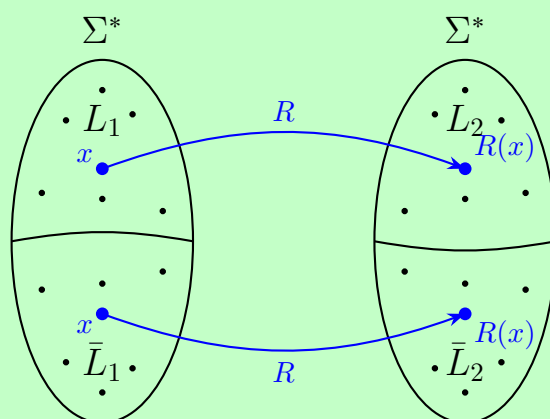
## הגדרה 19: הרדוקציה

רדוקציית התאמה (many to one reduction) מקבוצה  $L_1 \subseteq \Omega_1$  לקבוצה  $L_2 \subseteq \Omega_2$  הינה פונקציה

$$R : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$$

כך שלכל  $x \in \Omega_1$  מתקיים:

$$x \in L_1 \Leftrightarrow R(x) \in L_2 .$$



סימון:  $L_1 \leq_m L_2$  ריימת רדוקציה התאמה ניתנת לחישוב מ-  $L_1$  ל-  $L_2$ .



## משפט 14: משפט הרדוקציה

טענה:

אם:

- $L_2$  כריעה
- $L_1 \leq L_2$
- אז  $L_1$  כריעה.

מסקנה:

אם:

- $L_1$  לא כריעה
- $L_1 \leq L_2$
- אז  $L_2$  לא כריעה.

טענה:

אם:

- $L_2$  קבילה
- $L_1 \leq L_2$
- אז  $L_1$  קבילה.

מסקנה:

אם:

- $L_1$  לא קבילה
- $L_1 \leq L_2$
- אז  $L_2$  לא קבילה.

מתכון להוכחה ששפה  $L_2$  לא כריעה:

1. בחר שפה  $L_1$  לא כריעה.
2. מצא רדוקציית התאמה ניתנת לחישוב מ-  $L_1$  ל-  $L_2$ .

מתכון להוכחה ששפה  $L_2$  לא קבילה:

1. בחר שפה  $L_1$  לא קבילה.
2. מצא רדוקציית התאמה ניתנת לחישוב מ-  $L_1$  ל-  $L_2$ .

## משפט 15: תכונות של רדוקציות

$A$	$\leq_m$	$B$
כריעה	$\Leftarrow$	כריעה
לא כריעה	$\Rightarrow$	לא כריעה

$A$	$\leq_m$	$B$
קבילה	$\Leftarrow$	קבילה
לא קבילה	$\Rightarrow$	לא קבילה

משפט 16: לכל שפה קיימת רדוקציה ל-  $A_{TM}$ מכל שפה כריעה  $A$  קיימת רדוקציה חישובית ל-  $A_{TM}$ .

כלומר

$$A \leq_m A_{TM}.$$

**משפט 17: רדוקציה משפות כריעות**

מכל שפה כריעה קיימת רדוקציה חשיבה לכל שפה אחרת שאינה  $\emptyset$  או  $\Sigma^*$ .

**הגדרה 20:**

$$NOTREG = \{P \mid L(P) \text{ לא רגולרית}\}.$$

השפה NOT-REG כוללת את כל המחרוזות  $P$  כך ש:

- $P$  הינה קוד (תקין) של תוכנית.
- השפה של  $P$  לא רגולרית.

**הגדרה חלופית:**

$$NOTREG_{TM} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית}\}.$$

השפה  $NOTREG_{TM}$  כוללת את כל המחרוזות  $\langle M \rangle$  של מ"ט  $M$  כך שהפשה של  $M$  לא רגולרית.

**משפט 18: השפה  $NOT - REG$  אינה קבילה.**

השפה  $NOT - REG$  אינה קבילה.

**5 סיבוכיות זמן****הגדרה 21: זמן הריצה**

זמן הריצה של מכונת טיורינג  $M$  על קלט  $w$  הוא מספר צעדי החישוב ש-  $M$  מבצעת על  $w$ .

**הגדרה 22: סיבוכיות זמן ריצה**

תהי  $M$  מ"ט דטרמיניסטית אשר עוצרת על כל קלט. הזמן הריצה או הסיבוכיות זמן של  $M$  היא פונקציה  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , כאשר  $f(n)$  המספר צעדי חישוב המקסימלי ש-  $M$  מבצעת על קלט  $w$  של אורך  $n$ .

אם  $f(n)$  זמן הריצה של  $M$ , אומרים כי  $M$  רץ בזמן  $f(n)$  וש-  $M$  היא  $f(n)$  זמן מכונת טיורינג

**הגדרה 23: מחלקה של סיבוכיות זמן**

המחלקת הסיבוכיות זמן מסומנת  $TIME(t(n))$  ומוגדרת להיות אוסף של כל השפות אשר ניתנות להכרעה על ידי מכונת טיורינג בזמן  $O(t(n))$ .

**משפט 19:**

הגדרת זמן הריצה שנתנו היא תלויה במודל של מכונת הטיורינג שאיתו אנחנו עובדים.

**משפט 20:**

תהי  $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  פונקציה  $t(n)$ .  
אם מתקיים

$$t(n) \geq n$$

אז לכל מכונת טיורינג  $O(t(n))$  רב-סרטי קיימת מ"ט  $O(t^2(n))$  עם סרט אחד.

**הגדרה 24: זמן הריצה של מ"ט לא דטרמיניסטית**

תהי  $N$  מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית.

הזמן הריצה של  $N$  מוגדרת להיות הפונקציה  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  כאשר  $f(n)$  הוא המספר הצעדים המקסימלי אשר  $N$  מתוך כל הענפים של החישוב שלה על קלט של אורך  $n$ .

**משפט 21:**

תהי  $t(n)$  פונקציה המקיימת  $t(n) \geq n$ . כל מ"ט  $O(t(n))$  לא דטרמיניסטית  $N$  סרט אחד, שקולה למכונת טיורינג  $2^{O(t(n))}$  דטרמיניסטית סרט אחד.

**הגדרה 25: מכונת טיורינג פולינומית**

מכונת טיורינג  $M$  תיקרא **פולינומית** או **יעילה** אם קיים  $c \in \mathbb{N}$  כך ש-  $M$  פועלת בסיבוכיות זמן ריצה  $O(n^c)$ .

**הגדרה 26: המחלקה  $P$** 

המחלקה  $P$  היא אוסף השפות שקיימת מכונת טיורינג פולינומיאלית  $M$  המכריעה אותן. כלומר:

$$P = \bigcup_k \text{TIME}(n^k).$$

**הגדרה 27: אלגוריתם אימות**

**אלגוריתם אימות** של שפה  $A$  הוא אלגוריתם  $V$  כך ש-:

$$A = \{w \mid \langle w, c \rangle \text{ מקבל על פי } V\}$$

במילים, **אלגוריתם אימות** הוא אלגוריתם  $V$  אשר מאמת כי הקלט  $w$  שייך לשפה  $A$  על פי התנאי  $c$ , שנקרא **אישור** (certification).

אנחנו מגדירים את זמן הריצה של  $V$  על פי האורך של  $w$ . לכן **אלגוריתם אימות זמן-פולינומיאלי** רץ בזמן פולינומיאלי  $O(n^k)$  כאשר  $n$  האורך של  $w$ .

**הגדרה 28: מחלקת הסיבוכיות  $NP$** 

• המחלקה  $NP$  היא מחלקת השפות שניתן לאמתן באמצעות אלגוריתם זמן-פולינומיאלי.

הגדרה חלופית למחלקה  $NP$  הינה:

• המחלקה  $NP$  היא מחלקת השפות שניתן להכרעה באמצעות מ"ט אי-דטרמיניסטית זמן-פולינומיאלית.

למטה במשפט 22.

**משפט 22:**  $A \in NP$  אם ורק אם  $A$  ניתנת לאימות ע"י  $N_{TM}$  שפה  $A$  כלשהי שייכת למחלקה  $NP$  אם ורק אם  $A$  ניתנת להכרעה על ידי מכונות טיורינג אי-דטרמיניסטיות זמן-פולינומיאלית.

**הגדרה 29:** פונקציה הניתנת לחישוב זמן-פולינומיאלי פונקציה  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  ניתנת לחישוב זמן-פולינומיאלי אם קיימת מ"ט זמן-פולינומיאלית  $M$ , עבורה על הקלט  $w$ ,  $M$  עוצרת עם  $f(w)$  על הסרט שלה.

**הגדרה 30:** פונקציה שניתנת לרדוקציה זמן-פולינומיאלית השפה  $A$  ניתנת לרדוקציה זמן-פולינומיאלית לשפה  $B$ , שנסמן  $A \leq_P B$ , אם קיימת פונקציה שנתנת לחישוב זמן-פולינומיאלית  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  כך שלכל

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B.$$

הפונקציה  $f$  נקראת **הרדוקציה זמן-פולינומיאלית** של  $A$  ל- $B$ .

**משפט 23:** אם  $A \leq_P B$  ו- $B \in P$  אז  $A \in P$   
אם  $A \leq_P B$  ו- $A \in P$  אז  $B \in P$ .

**משפט 24:** 3-SAT ניתנת לרדוקציה זמן-פולינומיאלית ל-CLIQUE בהביית 3-SAT ניתנת לרדוקציה זמן-פולינומיאלית לבעיית CLIQUE:  
 $3SAT \leq_P CLIQUE$ .

**מסקנה 1:**  $3SAT \in P \Rightarrow CLIQUE \in P$   
לפי משפט 23 ומשפט 24:

אם  $CLIQUE \in P$  אז  $3SAT \in P$ .

**הגדרה 31:** NP-שלמות שפה  $B$  היא NP-שלמה או שלמה ב-NP (NP-complete) אם היא מקיימת את השני התנאים הבאים:  
(1)  $B \in NP$  וגם  
(2)  $A \leq_P B$  עבור כל  $A \in NP$ .  
במילים פשוטות: כל  $A$  ב-NP ניתנת לרדוקציה זמן-פולינומיאלית ל- $B$ .

**הגדרה 32:** NP קשה אם שפה  $B$  מקיימת את תכונה (2) אולם לא בהכרח את תכונה (1) בהגדרה 31 אז אומרים כי  $B$  NP-קשה או שלמה ב-NP (NP-hard).

**משפט 25:**

אם  $B \in NP$  - שלמה ו-  $B \in P$  אז  $P = NP$ .

**משפט 26:** אסוציאטיביות של  $NP$  שלמות

אם השני תנאים הבאים מתקיימים:

(1)  $B$  היא שפה  $NP$  - שלמה.

(2) קיימת  $C \in NP$  עבורה  $B \leq_p C$ .

אז  $C$  שפה  $NP$  - שלמה.

**משפט 27:** משפט קוק לוין

הבעיית  $SAT$  היא  $NP$  - שלמה.

**משפט 28:** 3-SAT היא  $NP$  שלמה.

3-SAT היא  $NP$  שלמה.

**6 נוסחאות נוספות****הגדרה 33:** הבעיית הספיקות  $SAT$ 

$$SAT = \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ היא נוסחה בוליאנית ספיקה} \}$$

במילים, בעיית  $SAT$  שואלת את השאלה: בהינתן נוסחה שמכילה רק קשרים  $\wedge, \vee, \neg$  ("גם", "או" ו"לא"), האם קיימת השמה של ערכי אמת למשתנים כך שהנוסחה  $\phi$  תקבל ערך אמת? אם קיימת השמה כזו אז נאמר כי הנוסחה  $\phi$  ספיקה.

**הגדרה 34:** הבעיית 3-SAT

$$3SAT = \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ היא נוסחת בוליאנית בצורה 3CNF ספיקה} \}$$

במילים,  $3SAT$  היא הבעיית  $SAT$  שמוגדר בהגדרה 33 במקרה הנוסחה שהנוסחה היא בצורה 3CNF. דוגמה של נוסחה בצורה 3CNF היא:

$$(x_1 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$$

**הגדרה 35:** הבעיית PATH

בהינתן גרף מכון  $G = (V, E)$ .

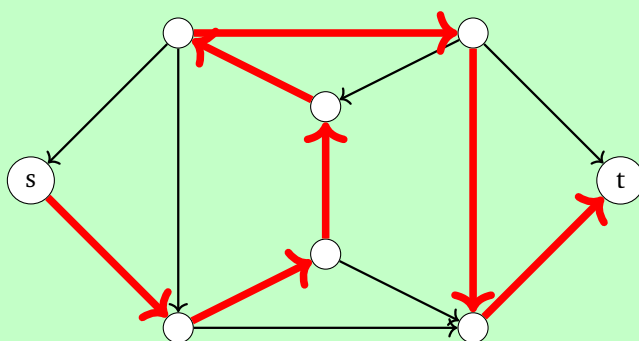
הבעיית PATH שואלת את השאלה הבאה: בהינתן גרף מכון  $G = (V, E)$ , וקדקודים  $s$  ו-  $t$ . האם הגרף  $G$  מסלול בין קדקוד  $s$  לבין קדקוד  $t$ .

$$PATH = \{ \langle G, s, t \rangle \mid t \text{ ל- } s \text{ מ- } G \text{ גרף מכון שמכיל מסלול מכון מ- } s \text{ ל- } t \}.$$

**הגדרה 36: מסלול המילטוני**נתון גרף מכוון  $G = (V, E)$ .מסלול המילטוני מקדקוד  $s$  לקדקוד  $t$  הוא מסלול אשר עובר דרך כל קדקוד בדיוק פעם אחת.**הגדרה 37: הבעיית מסלול המילטוני HAMPATH**בהינתן גרף מכוון  $G = (V, E)$  וקדקודים  $s$  ו- $t$ .הבעיית המסלול ההמילטוני שואלת את השאלה: האם קיים מסלול המילטוני מקדקוד  $s$  לקדקוד  $t$ ?

$$HAMPATH = \{ \langle G, s, t \rangle \mid \text{גרף } G \text{ מכיל מסלול המילטוני מ- } s \text{ ל- } t \}$$

התרשים למטה מראה דוגמה של מסלול המילטוני בגרף מכוון.

**הגדרה 38:**בהינתן שלמים  $x, y$ .הבעייה RELPRIME שואלת את השאלה: האם  $x, y$  זרים.

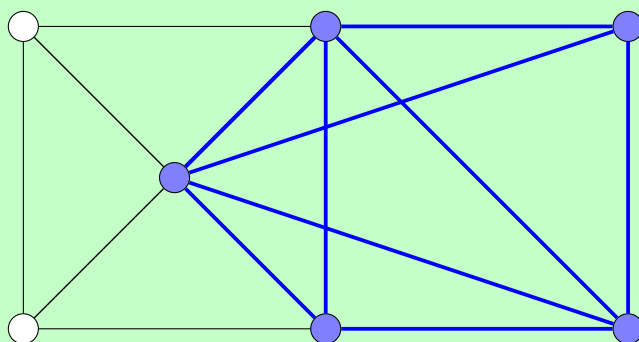
$$RELPRIME = \{ \{x, y\} \in \mathbb{N} \mid \gcd(x, y) = 1 \}$$

**הגדרה 39: קליקה**

נתון גרף לא מכוון.

- קליקה בגרף לא מכוון הוא תת-גרף שבו כל זוג קדקודים קשורים על ידי קשת.
- $k$ -קליקה היא קליקה שבו יש בדיוק  $k$  קדקודים.

התרשים למטה מראה דוגמה של 5-קליקה.



**הגדרה 40: בעיית הקליקה**

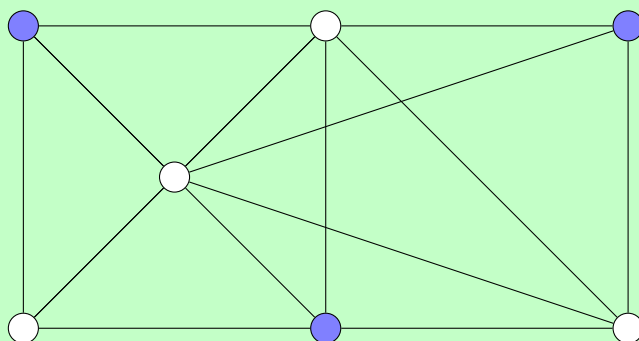
נתון גרף לא מכוון  $G = (V, E)$ . בעיית הליקה שואלת את השאלה: האם הגרף  $G$  מכיל קליקה בגודל  $k$ . בשפה פרומלית:

$$CLQ = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון שמכיל קליקה בגודל } k \text{ לפחות.} \}$$

**הגדרה 41: קבוצה בלתי תלויה**

נתון גרף לא מכוון  $G = (V, E)$ . קבוצה בלתי תלויה ב- $G$  היא תת-קבוצה של קדקודים  $S \subseteq V$  כך שלכל שני קדקודים  $u_1, u_2 \in S$  מתקיים  $(u_1, u_2) \notin E$ . ש-

התרשים למטה מראה דוגמה של גרף לא מכוון  $G$  שמכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל 3.

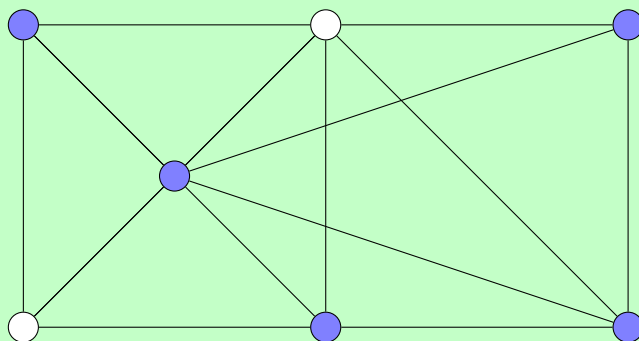
**הגדרה 42: בעיית בקבוצה הבלתי תלויה (Independent Set)**

בהינתן גרף לא מכוון  $G = (V, E)$  ומספר טבעי  $k$ . הבעיית  $IS$  שואלת את השאלה: האם קיימת קבוצה בלתי תלויה ב- $G$  בגודל  $k$  לפחות. בשפה פורמלית:

$$IS = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ מכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ לפחות.} \}$$

**הגדרה 43: כיסוי קדקודים**

בהינתן גרף לא מכוון  $G = (V, E)$ . כיסוי קדקודים ב- $G$  הוא תת-קבוצה של קדקודים  $C \subseteq V$  כך שלכל צלע  $(u_1, u_2) \in E$  מתקיים  $u_1 \in C$  או  $u_2 \in C$ . הגרף למטה מכיל כיסוי קדקודים בגודל 5.



#### הגדרה 44: הבעיית כיסוי קדקודים (Vertex Cover (VC)

בהינתן גרף לא מכוון  $G = (V, E)$  ומספר טבעי  $k$ .

הבעיית כיסוי קדקודים שואלת את השאלה הבאה:

האם קיים כיסוי בקדקודים ב-  $G$  בגודל  $k$ ?

בשפה פורמלית:

$$VC = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ מכיל כיסוי בקדקודים בגודל } k \}.$$

#### משפט 29: שפות NP-שלמות

SAT	-NP שלמה.	(משפט קוק לוינ)
3SAT	-NP שלמה.	
HAMPATH	-NP שלמה.	
CLIQUE	-NP שלמה.	
INDEPENDENT-SET	-NP שלמה.	
VERTEX-COVER	-NP שלמה.	



## פתרונות

### חישוביות וסיבוכיות

מועד א'

### פתרון לדוגמא

ד"ר יוחאי טוויטו, ד"ר ירמיהו מילר, .

סמסטר א, תשפ"ה

מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הינן פתרונות לדוגמא. ניתן לפתור חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

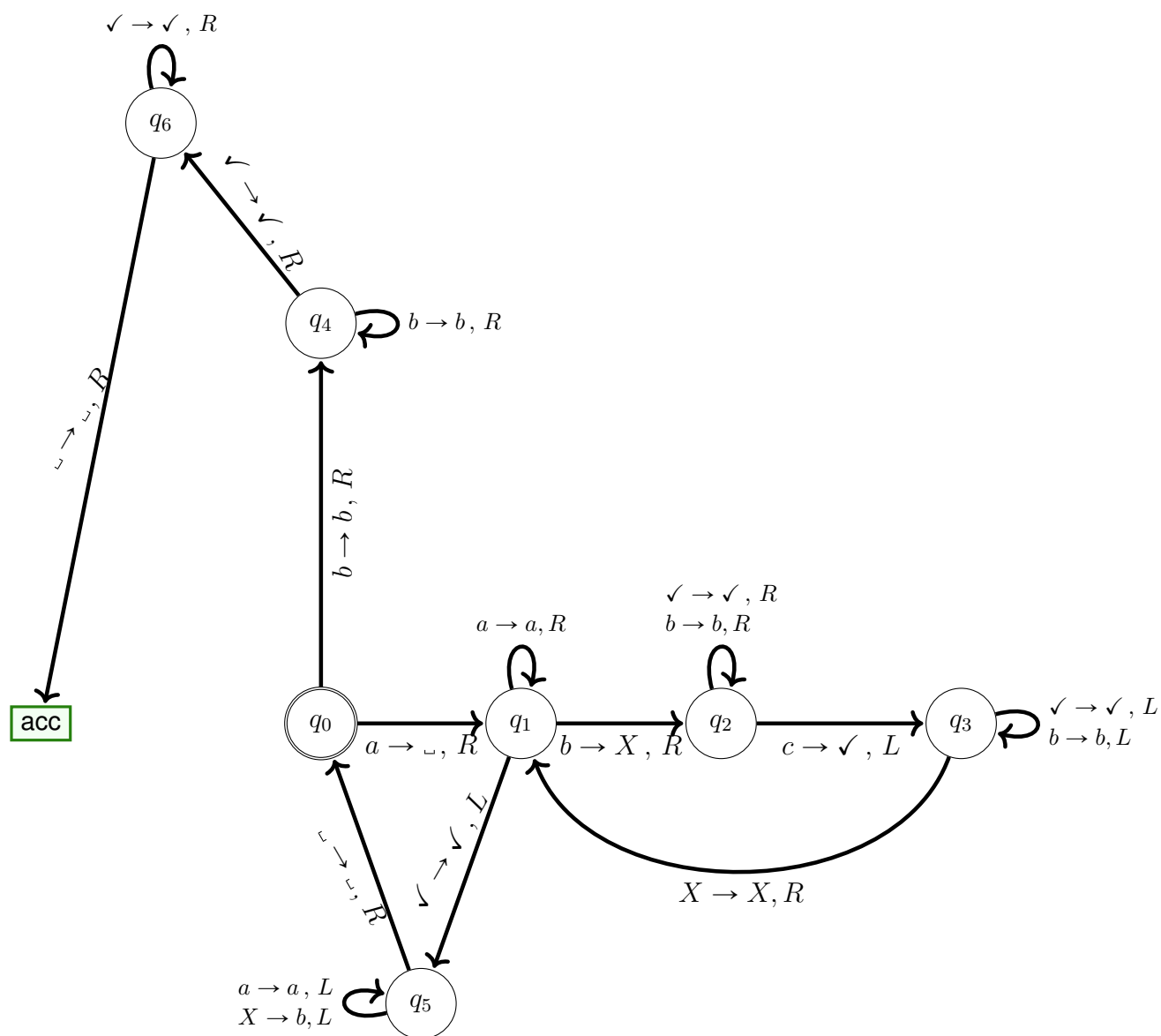
עמוד 1 מתוך 7

**המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון**

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245,84 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il) | חייג: ☎ 052-5353535

## שאלה 1: מכונת טיורינג 20 נקודות

סעיף א'



עמוד 2 מתוך 7

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245,84 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il) | חייג: 08-9400700

## פתרונות

**סעיף ב'** הפונקציה שאותה המכונה מחשבת היא הפונקציה:

$$f(x) = x \mod 3.$$

כלומר, המכונה מחשבת את שארית החלוקה ב-3 של המספר האונרי הנתון כקלט.

**סעיף ג'** הפונקציה שאותה המכונה מחשבת היא הפונקציה:

$$f(1^i \# 1^j) = 1^{|i-j|}.$$

כלומר, המכונה מחשבת את הערך המוחלט של ההפרש בין שני מספרים  $1^i, 1^j$ , הנתונים בקלט. הסבר:

$$q_0 \ 1 \# 1 \vdash q_1 \# 1 \vdash_* \# 1 q_1 \vdash \# q_2 1 \vdash_* q_{back} \sqcup \# \vdash q_0 \# \vdash acc.$$

לכן  $f(1 \# 1) = 0$ .

$$q_0 \ 11 \# 1 \vdash q_1 \ 1 \# 1 \vdash_* 1 \# 1 q_1 \vdash 1 \# q_2 1 \vdash_* q_{back} \sqcup 1 \# \vdash q_0 \ 1 \#$$

$$\vdash q_1 \# \vdash \# q_1 \sqcup \vdash q_2 \# \sqcup \vdash q_4 \sqcup 1 \vdash \sqcup acc \ 1$$

לכן  $f(11 \# 1) = 1$ .

נסתכל על קלט כללי  $1^i \# 1^j$  כאשר  $i \geq j$

$$q_0 \ 1^i \# 1^j \vdash_* 1^{i-1} \# q_1 1^j \vdash_* 1^{i-1} \# 1^j q_1 \sqcup \vdash 1^{i-1} \# 1^{j-1} q_2 1 \vdash 1^{i-1} \# 1^{j-2} q_{back} 1 \sqcup$$

$$\vdash_* q_{back} \sqcup 1^{i-1} \# 1^{j-1} \vdash q_0 \ 1^{i-1} \# 1^{j-1}$$

⋮

$$\vdash_* q_0 \ 1^{i-j} \# \sqcup \vdash_* 1^{i-j-1} \# q_1 \sqcup \vdash 1^{i-j-1} q_2 \# \vdash 1^{i-j-2} q_4 11 \vdash_* q_4 \sqcup 1^{i-j}$$

$$\vdash acc \ 1^{i-j}$$

לכן

$$f(1^i \# 1^j) = 1^{i-j}, \quad i \geq j. \quad (*)$$

נסתכל על קלט כללי  $1^i \# 1^j$  כאשר  $i < j$

## פתרונות

$$\begin{aligned}
 q_0 1^i \# 1^j &\vdash_* 1^{i-1} \# q_1 1^j && \vdash_* 1^{i-1} \# 1^j q_1 \sqsubset && \vdash 1^{i-1} \# 1^{j-1} q_2 1 && \vdash 1^{i-1} \# 1^{j-2} q_{\text{back}} 1 \sqsubset \\
 &\vdash_* q_{\text{back}} \sqsubset 1^{i-1} \# 1^{j-1} && \vdash q_0 1^{i-1} \# 1^{j-1} \\
 &\vdots \\
 &\vdash_* q_0 \# 1^{j-i} \sqsubset && \vdash \text{acc } 1^{j-i} \sqsubset
 \end{aligned}$$

לכן

$$f(1^i \# 1^j) = 1^{j-i}, \quad i < j. \quad (*)2$$

המשוואות (\*)1 ו- (\*)2 אומרות ש:

$$f(1^i \# 1^j) = 1^{|i-j|}. \quad (*)3$$

**שאלה 2: וריאציות על מכונת טיורינג 20 נקודות**

**שאלה 3: התזה של צ'רץ' טיורינג 20 נקודות**

**שאלה 4: אי-כריעות 20 נקודות**

נתון: השפה  $L_{M_1 \cup M_2}$  מוגדרת:

$$L_{M_1 \cup M_2} = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \cup L(M_2) \}$$

ז"א  $L_{M_1 \cup M_2}$  השפה שכוללת כל המחרוזות  $\langle M_1, M_2, w \rangle$  כאשר  $w$  שייך לאחת השפות  $L(M_1)$  או  $L(M_2)$  לפחות.

צריך להוכיח: קיימת רדוקציה התאמה בין השפה  $A_{TM}$  לשפה  $L_{M_1 \cup M_2}$ , כלומר

$$A_{TM} \leq L_{M_1 \cup M_2}.$$

הגדרת הרדוקציה:

עמוד 4 מתוך 7

**המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון**

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245, 84 | חייג: 08-9400700 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il)

## פתרונות

בהינתן  $\langle M, w \rangle$  קלט של  $A_{TM}$  ניצור  $\langle M_1, M_2, w \rangle$  קלט של  $L_{M_1 \cup M_2}$  כך שמתקיים התנאי הבא:

$$\begin{aligned}\langle M, w \rangle \in A_{TM} &\Rightarrow \langle M_1, M_2, w \rangle \in L_{M_1 \cup M_2}, \\ \langle M, w \rangle \notin A_{TM} &\Rightarrow \langle M_1, M_2, w \rangle \notin L_{M_1 \cup M_2}.\end{aligned}$$

נגדיר את פונקציית הרוקציה באופן הבא:

$$M_1 = \text{"על כל קלט } x \leftarrow M_1 \text{ rej."}$$

$$M_2 = \text{"על כל קלט } x$$

• מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוה.

נכונות הרדוקציה:

כיוון  $\Leftarrow$

אם  $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$

$$w \in L(M) \Leftarrow$$

$$w \in L(M_2) \Leftarrow$$

$$w \in L(M_2) \cup \emptyset \Leftarrow$$

$$w \in L(M_2) \cup L(M_1) \Leftarrow$$

$$\langle M_1, M_2, w \rangle \in L_{M_1 \cup M_2} \Leftarrow$$

כיוון  $\Rightarrow$

אם  $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$

$$w \notin L(M) \Leftarrow$$

$$w \notin L(M_2) \Leftarrow$$

$$w \notin L(M_2) \text{ וגם } w \notin L(M_1) \text{ (כי השפה של } M_1 \text{ היא } \emptyset).$$

$$\langle M_1, M_2, w \rangle \notin L_{M_1 \cup M_2} \Leftarrow$$

**שאלה 5: סיבוכיות זמן 20 נקודות**

עמוד 5 מתוך 7

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245, 84 | חייג: 052-77245 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il)

## פתרונות

### פונקציית הרדוקציה:

נגדיר פונקציית הרדוקציה  $f$  שבהינתן זוג  $\langle G, k \rangle \in IS$ , (הקלט של  $IS$ ), יוצרת  $\langle G', k' \rangle \in VC$ , (הקלט של  $VC$ ), אשר מקיימת את התנאי:

$$\langle G, k \rangle \in IS \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in VC. \quad (*)2$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

1) בהינתן הגרף  $G = (V, E)$ , אז הגרף  $G'$  הוא אותו גרף  $G = (V, E)$ .

$$k' = |V| - k \quad (2)$$

### נכונות הרדוקציה

כעת נוכיח שמתקיים:  $\langle G, k \rangle \in IS \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in VC$

כיוון  $\Leftarrow$

בהינתן גרף  $G = (V, E)$  ושלם  $k$ .

נניח כי  $\langle G, k \rangle \in IS$

$\Leftarrow G$  מכיל קבוצה בלתי תלויה  $S$  בגודל  $k$  לפחות:  $|S| \geq k$ .

$\Leftarrow$  אם  $u_1, u_2 \in S$  אז  $(u_1, u_2) \notin E$ .

כלומר, כל שני קודקודים ב- $S$  לא מחוברים בצלע ב- $G$ .

$\Leftarrow$  השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם  $(u_1, u_2) \in E$  אז  $u_1 \notin S$  או  $u_2 \notin S$ .

$\Leftarrow$  אם  $(u_1, u_2) \in E$  אז  $u_1 \in V \setminus S$  או  $u_2 \in V \setminus S$ .

$\Leftarrow$  התת-קבוצה  $V \setminus S$  היא כיסוי קודקודים של  $G$ .

$|S| \geq k$  ו- $|V \setminus S| = |V| - |S|$  לכן  $|V \setminus S| \leq |V| - k$ .

$\Leftarrow G' = G$  מכיל כיסוי קודקודים  $U$  בגודל  $|V| - k \leq k'$  לכל היותר.

$\Leftarrow \langle G', k' \rangle \in VC$

כיוון  $\Rightarrow$

בהינתן גרף  $G'$  ושלם  $k'$ .

נניח כי  $\langle G', k' \rangle \in VC$

## פתרונות

$G' = (V, E)$  מכיל כיסוי קדקודים  $U$  בגודל  $k'$  לכל היותר:  $|U| \leq k'$ .  $\Leftarrow$

$\Leftarrow$  אם  $(u_1, u_2) \in E$  אז  $u_1 \in U$  או  $u_2 \in U$ .

$\Leftarrow$  השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם  $u_1 \notin U$  וגם  $u_2 \notin U$  אז  $(u_1, u_2) \notin E$ .

$\Leftarrow$  השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם  $u_1 \in V \setminus U$  וגם  $u_2 \in V \setminus U$  אז  $(u_1, u_2) \notin E$ .

$\Leftarrow$  התת-קבוצה  $S = V \setminus U$  היא קבוצה בלתי תלויה.

$|S| = |V| - |U|$  ו-  $|U| \leq k'$  אז  $|S| \geq |V| - k'$ .

$G' = G$  מכיל קבוצה בלתי תלויה  $S$  בגודל  $k' = k$  לפחות.  $\Leftarrow$

$\Leftarrow \langle G, k \rangle \in IS$