

שיעור 6

תת מרחב

הגדרה 6.1 תת מרחב

נניח כי V מרחב ווקטורי מעל שדה, \mathbb{F} .

תת קבוצה W של V נקראת תת מרחב (ת"מ) של V אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

$$(1) \quad \bar{0} \in W$$

$$(2) \quad \text{לכל } u, v \in W,$$

$$u + v \in W.$$

$$(3) \quad \text{לכל } u \in W \text{ ולכל } \alpha \in \mathbb{F} \text{ מתקיים}$$

$$\alpha \cdot u \in W.$$

דוגמה 6.1

נגדיר $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, W \subseteq \mathbb{R}^2$. האם W תת מרחב של \mathbb{R}^2 ?

פתרון:

לא. דוגמה נגדית:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \notin W.$$

לכן W לא תת מרחב של \mathbb{R}^2 .

דוגמה 6.2

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{R} \right\}.$$

$W \subseteq \mathbb{R}^2$. האם W תת מרחב של \mathbb{R}^2 ?

פתרון:

$$(1) \quad \text{לכל } u = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \in W, v = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \in W,$$

$$u + v = \begin{pmatrix} k+t \\ 2(k+t) \end{pmatrix} \in W,$$

(2) לכל $u = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \in W$, ולכל סקלר $t \in \mathbb{R}$,

$$tu = \begin{pmatrix} tk \\ 2(tk) \end{pmatrix} \in W,$$

(3)

$$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \in W.$$

לכן השלושה התנאים של תת מרחב בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W תת מרחב של \mathbb{R}^2 .

דוגמה 6.3

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+2 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

האם W תת מרחב של \mathbb{R}^2 ?

פתרון:

$$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W \text{ לכן } W \text{ לא תת מרחב של } \mathbb{R}^2.$$

דוגמה 6.4

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x \geq 0, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

האם W תת מרחב של \mathbb{R}^2 ?

פתרון:

לא. דוגמה נגדית:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in W, \quad (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \notin W.$$

דוגמה 6.5

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 - y^2 = 0 \right\}.$$

האם W תת מרחב של \mathbb{R}^2 ?

פתרון:

לא. דוגמה נגדית:

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in W, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \in W, \quad u + v = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \notin W.$$

דוגמה 6.6

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right\}.$$

האם W תת מרחב של \mathbb{R}^3 ?

פתרון:

כן:

$$(1) \text{ צריך להוכיח כי } \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$$

$$\begin{cases} 0 - 2 \cdot 0 + 0 = 0 \\ 0 - 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{0} \in W.$$

$$(2) \text{ נניח } u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \text{ וז"א מתקיים } \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}. \text{ נקח סקלר } k. \text{ צריך להוכיח: } ku \in W.$$

$$ku = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} kx - 2ky + kz = k(x - 2y + z) = 0 \\ ky - kz = k(y - z) = 0 \end{cases}$$

לכן $ku \in W$.

$$(3) \text{ נקח } u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in W, v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in W \text{ וז"א מתקיים}$$

$$\begin{cases} x_2 - 2y_2 + z_2 = 0 \\ y_2 - z_2 = 0 \end{cases} \text{ וגם } \begin{cases} x_1 - 2y_1 + z_1 = 0 \\ y_1 - z_1 = 0 \end{cases}$$

אז

$$u + v = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}.$$

נבדוק אם $u + v \in W$.

$$(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 - 2y_1 + z_1) + (x_2 - 2y_2 + z_2) = 0,$$

$$(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = (y_1 - z_1) + (y_2 - z_2) = 0,$$

לכן $u + v \in W$. לכן השלושה התנאים של תת מרחב בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W תת מרחב של \mathbb{R}^3 .

דוגמה 6.7

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + b + c = d \right\}.$$

האם W תת מרחב של $\mathbb{F}^{2 \times 2}$?

פתרון:

(1)

$$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

$$.0 + 0 + 0 = 0$$

(2) נקח

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W .$$

ז"א מתקיים $a + b + c = d$. נקח סקלר k . אז

$$ku = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} \in W .$$

$$.ku \in W \text{ לכן } ka + kb + kc = k(a + b + c) = kd$$

(3)

$$u = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in W , \quad v = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in W .$$

$$.u + v \in W \text{ צריך להוכיח}$$

$$.a_1 + b_1 + c_1 = d_1 \Leftarrow u \in W$$

$$.a_2 + b_2 + c_2 = d_2 \Leftarrow v \in W$$

$$u + v = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

$$.u + v \in W \text{ ז"א } (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) = (a_1 + b_1 + c_1) + (a_2 + b_2 + c_2) = d_1 + d_2$$

לכן השלושה התנאים של תת מרחב בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W תת מרחב של $\mathbb{F}^{2 \times 2}$.

דוגמה 6.8

תהי

$$W = \{p(x) \mid \deg(p(x)) = 2, p(x) \in \mathbb{F}[x]\}$$

קבוצת כל הפולינומים במעלה 2 בדיוק עם מקדמים מתוך שדה \mathbb{F} . קבעו אם W תת מרחב של $\mathbb{F}[x]$.

פתרון:

W לא תת מרחב של $\mathbb{F}[x]$. הסבר:

$$.\bar{0} \notin W$$

דוגמה 6.9

נסמן

$$\mathbb{F}_2[x] = \{p(x) \in \mathbb{F}[x] \mid \deg(p(x)) \leq 2\}$$

קבוצת כל הפולינומים של $\mathbb{F}[x]$ מסדר 2 לכל היותר.

$\mathbb{F}_2[x]$ תת מרחב של $\mathbb{F}[x]$.

דוגמה 6.10

$$W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid f(3) = 0\}$$

$W \subseteq F(\mathbb{R})$. קבעו האם W תת מרחב של $F(\mathbb{R})$.

פתרון:

(1) האיבר $\bar{0}$ הינו הפונקציה $f(x) = 0$. לכן $\bar{0}(3) = 0$ ולכן $\bar{0} \in W$.

(2) אם $f \in W$ ו- $k \in \mathbb{R}$, אז $f(3) = 0$ לכן

$$(kf)(3) = k(f(3)) = k \cdot 0 = 0.$$

ז"א $kf \in W$.

(3) נניח $f, g \in W$, ז"א $f(3) = 0$, $g(3) = 0$. אז

$$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = 0 + 0 = 0,$$

כלומר $f+g \in W$.

לכן השלושה התנאים של תת מרחב בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W תת מרחב של $F(\mathbb{R})$.

דוגמה 6.11

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 3x + y - z = 1 \\ 2x + 5y = 0 \\ -x + 10y - z = 5 \end{array} \right\}$$

קבעו האם W תת מרחב של \mathbb{R}^3 .

פתרון:

$\bar{0} \notin W$, לכן W לא תת מרחב של \mathbb{R}^3 .

משפט 6.1 מרחב האפס הוא תת מרחב

לכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, אוסף הפתרונות של מערכת הומוגנית $A \cdot X = 0$ הוא תת מרחב של \mathbb{F}^n .

הוכחה: נסמן

$$\text{Nul}(A) = \{X \mid A \cdot X = 0, X \in \mathbb{F}^n\}$$

נוכיח כי $\text{Nul}(A)$ תת מרחב של \mathbb{F}^n ע"י להוכיח כי כל השלושה תנאים של תת מרחב מתקיימים עבור $\text{Nul}(A)$.

(1) צריך להוכיח $\bar{0} \in \text{Nul}(A)$, כאשר $\bar{0}$ מטריצה האפס.

$$A \cdot \bar{0} = 0,$$

לכן $\bar{0} \in \text{Nul}(A)$.

(2) נניח $u, v \in \text{Nul}(A)$. צריך להוכיח $u + v \in \text{Nul}(A)$.

$$A \cdot u = 0 \Leftrightarrow u \in \text{Nul}(A)$$

$$A \cdot v = 0 \Leftrightarrow v \in \text{Nul}(A)$$

לכן

$$A(u + v) = Au + Av = 0 + 0 = 0 \Rightarrow u + v \in \text{Nul}(A)$$

(3) נקח $u \in \text{Nul}(A)$ וסקלר $k \in \mathbb{F}$. צריך להוכיח $ku \in \text{Nul}(A)$.

$$A \cdot u = 0 \Leftrightarrow u \in \text{Nul}(A)$$

$$A(ku) = k(Au) = k \cdot 0 = 0 \Rightarrow ku \in \text{Nul}(A).$$

מש"ל.

