המחלקה למדעי המחשב

17/04/24 ט' בניסן תשפ"ד
09 : 00 – 12 : 00

חדו"א 1 למדמ"ח

מועד א'

מרצה: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר, ד"ר מרינה ברשדסקי.

תשפ"ד סמסטר א'

השאלון מכיל 9 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

===

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דף נוסחאות מצורף לשאלון (5 עמודים בפורמט $A4$).

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות בלבד מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** בלבד מתוך **שתיים**.

===

שאלות 1 **ו-** 2 **- חובה!**

שאלה 1 (21 נקודות)

חקרו באופן מלא את הפונקציה

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$$

א) (3 נק') תחום הגדרה וחיתוך עם הצירים וסימני הפונקציה.

ב) (3 נק') אסימפטוטות.

ג) (3 נק') תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון.

ד) (3 נק') תחומי קמירות ונקודות פיתול.

ה) (5 נק') ציירו את סקיצת הגרף של הפונקציה $f(x)$.

ו) (4 נק') ציירו את סקיצת הגרף של הפונקציה $|f(x)|$.

שאלה 2 (24 נקודות)

פתרו את האינטגרלים הבאים. יש לענות על 2 מתוך 3 הסעיפים הבאים:

א) (12 נק') $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+5x+6}dx$

ב) (12 נק') $\displaystyle\int \frac{1}{5+8\sin x+3\cos x}dx$

ג) (12 נק') $\displaystyle\int_0^1 3x^2\sqrt{e^{2x^3}\,x^6}\,dx$

ענו על 3 **מתוך** 4 **השאלות** 3 – 6

שאלה 3 **(15 נקודות)**

א) (10 נק')
רשמו את פולינום מקלורן מסדר 2 של פונקציה $y(x)$ הנתונה בצורה פרמטרית:

$$\begin{cases} x &= t^3 - 1 \\ y &= \ln(t) + 5t^2 \end{cases} . \qquad t > 0 \ .$$

ב) (5 נק') הוכיחו כי למשוואה $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x = 1$ קיים פתרון אחד ויחיד.

שאלה 4 **(15 נקודות)** לגרף הפונקציה $y = \ln x$ מעבירים משיק בנקודה $x = e$.

א) (4 נק')
חשבו את משוואת המשיק.

ב) (5 נק')
חשבו את השטח של התחום החסום בין גרף הפונקציה, המשיק וציר ה- x. ציירו סקיצה מתאימה.

ג) (6 נק') חשבו את הגבול $\lim_{x\to 1^+} (\ln x \cdot \ln(x-1))$.

שאלה 5 **(15 נקודות)**

א) (8 נק') נתונה הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 3a + bx^2 + \dfrac{3c+12}{x^8} & x < 0 \\ b & x = 0 \\ a^2 e^x + 2 + \dfrac{\sin^2(2x)}{7x} & x > 0 \end{cases}$$

מהם התנאים על a, b, c כדי שהפונקציה תהיה רציפה בנקודה $x = 0$?

ב) (7 נק') נתונה הפונקציה המוגדרת בצורה סתומה:

$$2x^3 y - 5xy^2 + y = 3$$

מצאו את משוואת המשיק בנקודה $x = 0$.

שאלה 6 <u>**(15 נקודות)**</u>

א) <u>**(6 נק')**</u> לאילו ערכי הפרמטר a הפונקציה $\cos(a-x)+\ln(2-ax^2)$ תהיה רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$.

ב) <u>**(9 נק')**</u>
תהי $f(x)$ פונקציה גזירה עבור כל x ממשי. נניח ש- $|f'(x)|\le 2$ לכל $x\in\mathbb{R}$ וכן $f(1)=8$. הוכיחו כי מתקיים $6\le f(2)\le 10$.

ענו על 1 **מתוך** 2 **השאלות** $7-8$

שאלה 7 <u>**(10 נקודות)**</u>

קו ישר עם שיפוע שלילי עובר דרך הנקודה $(2,4)$ חותך את ציר ה- x בחלקו החיובי וחותך את ציר ה- y בחלקו החיובי. מצאו את השטח המינימלי של התחום החסום על ידי הישר, ציר ה- x וציר ה- y.

שאלה 8 <u>**(10 נקודות)**</u>

הוכיחו את האי-שוויון הבא לכל $0<a<b<\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{b-a}{\cos^2 a}<\tan(b)-\tan(a)<\frac{b-a}{\cos^2 b}\ .$$

פתרונות

שאלה 1

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}\ .$$

א) (3 נק') תחום הגדרה: $x\neq\pm2$. נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0,0)$.

x	$x<-2$	$-2<x<0$	$0<x<2$	$x>2$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

ב) (3 נק') אסימפטוטה אנכית: $x=-2$ ו- $x=2$.
אסימפטוטה אופקית: אין.

אסימפטוטה משופעת:

$$m_1=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-4x}=1\ ,$$
$$n_1=\lim_{x\to\infty}(f(x)-m_1\cdot x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x(x^2-4)}{x^2-4}=0\ .$$

לכן $y=x$ אסימפטוטה משופעת ב- $x=\infty$.

$$m_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3-4x}=1\ ,$$
$$n_2=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-m_2\cdot x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x(x^2-4)}{x^2-4}=0\ .$$

$y=x$ אסימפטוטה משופעת ב- $x=-\infty$.

ג) (3 נק') תחומי עליה וירידה:

$f'(x)=\dfrac{x^2\left(x^2-12\right)}{\left(x^2-4\right)^2}$. ישנן נקודות קריטיות ב- $(0,0)$, $(-2\sqrt{3},-3\sqrt{3})$ ו- $(2,\sqrt{3},3\sqrt{3})$.

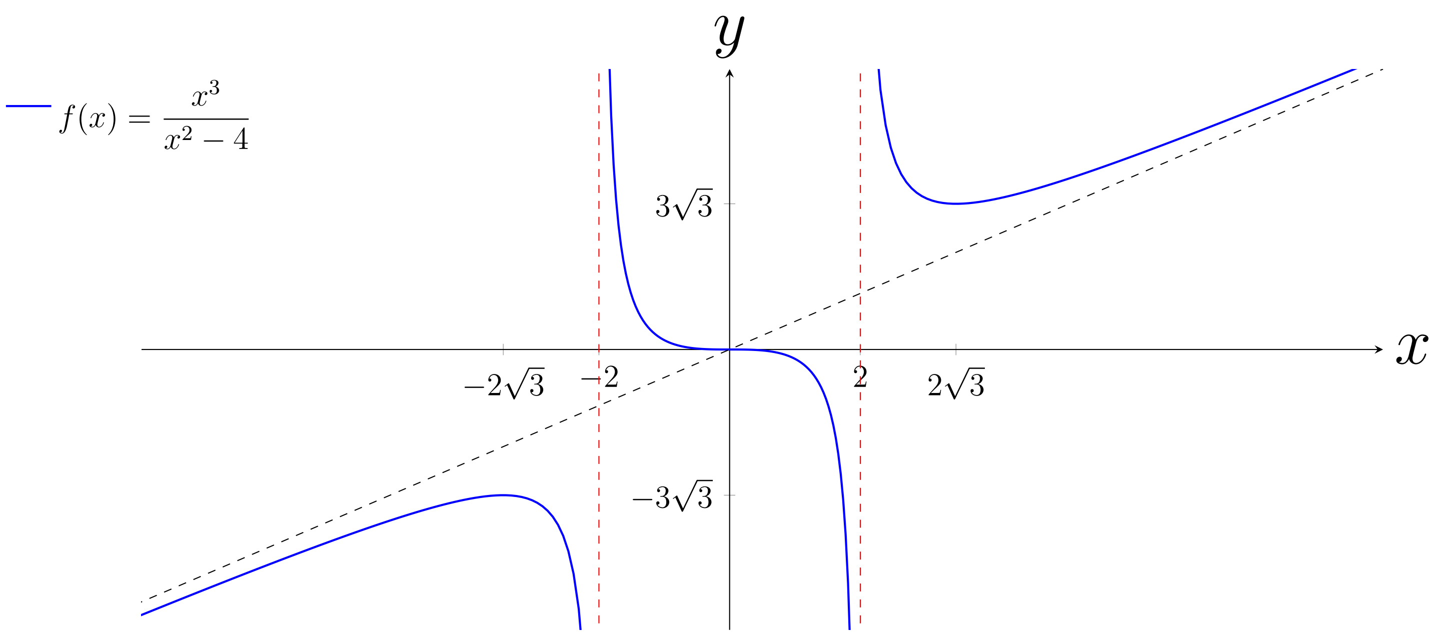
x	$x<-2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}<x<-2$	$-2<x<0$	0	$0<x<2$	$2<x<2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$x>2\sqrt{3}$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	מקס	$\searrow$	$\searrow$	פיתול	$\searrow$	$\searrow$	מינימום	$\nearrow$

ד) (3 נק') תחומי קמירות:

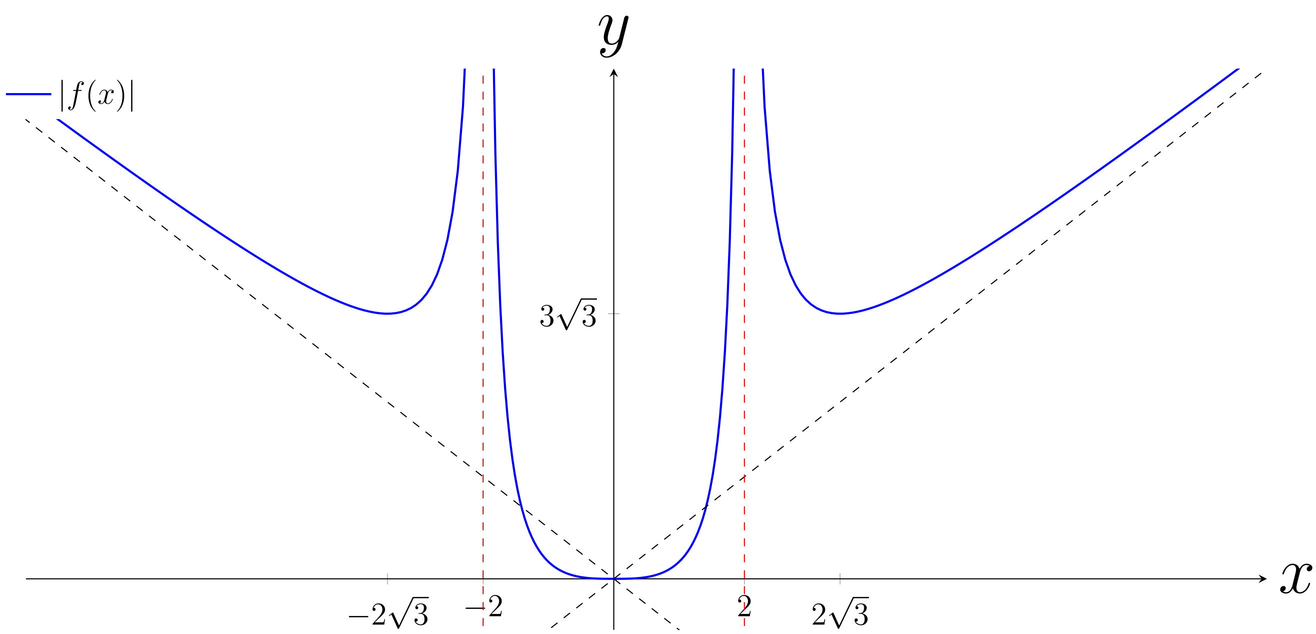
$f''(x)=\dfrac{8x\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3}$ נקודות פיתול ב- $(0,0)$.

x	$x<-2$	$-2<x<0$	$0<x<2$	$x>2$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	קמורה $\downarrow$	קמורה $\uparrow$	קמורה $\downarrow$	קמורה $\uparrow$

ה) (5 נק') שרטוט:



ו) (4 נק')



<u>שאלה 2</u>

א)

$$\frac{x+1}{x^2+5x+6}=\frac{x+1}{(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+3)(x+2)}=\frac{(A+B)x+3A+2B}{(x+3)(x+2)}\ .$$

$$A+B=1\quad\Rightarrow\quad B=1-A\ ,3A+2B=1\quad\Rightarrow\quad 3A+2-2A=1\quad\Rightarrow\quad A=-1\ ,B=2\ .$$

לפיכך $\frac{x+1}{x^2+5x+6}=\frac{-1}{x+2}+\frac{2}{x+3}$.

$$\int dx\,\frac{x+1}{x^2+5x+6}=\int dx\left(\frac{-1}{x+2}+\frac{2}{x+3}\right)=-\ln|x+2|+2\ln|x+3|+C\ .$$

ב) $\int\frac{1}{5+4\sin x+3\cos x}dx$.

$$t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)\ ,\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\ ,\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,t'=\frac{1}{2}(1+t^2)\ .$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{5+8\sin x+3\cos x}dx &= \int \frac{1}{5+\frac{16t}{1+t^2}+\frac{3(1-t^2)}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}t'\,dx\\
&= \int \frac{2}{5(1+t^2)+16t+3-3t^2}\,dt\\
&= \int \frac{2}{8+16t+2t^2}\,dt\\
&= \int \frac{1}{t^2+8t+4}\,dt\\
&= \int \frac{1}{\left(t-2\sqrt{3}+4\right)\left(t+2\sqrt{3}+4\right)}\,dt\\
&= \int \left(-\frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\left(t+2\sqrt{3}+4\right)}+\frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\left(t-2\sqrt{3}+4\right)}\right)dt\\
&= -\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|t+2\sqrt{3}+4\right|+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|t-2\sqrt{3}+4\right|+C\\
&= -\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\tan(\frac{x}{2})+2\sqrt{3}+4\right|+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\tan(\frac{x}{2})-2\sqrt{3}+4\right|+C
\end{aligned}$$

ג) $\int_0^1 dx\, 3x^2\sqrt{e^{2x^3}\,x^6}$.

$t=x^3$, $t'=3x^2$.

$$\int_0^1 dx\, 3x^2\sqrt{e^{2x^3}\,x^6}=\int_0^1 dx\, t'\sqrt{e^{2t}\,t^2}=\int_0^1 dt\,\sqrt{e^{2t}\,t^2}=\int_0^1 dt\, e^t\, t$$

$u=t$, $\mathrm{v}'=e^t$, $u'=1$, $\mathrm{v}=e^t$.

$$\int_0^1 dt\, u\mathrm{v}'=[u\mathrm{v}]_0^1-\int_0^1 u\mathrm{v}\,dt=\left[te^t\right]_0^1-\int_0^1 e^t=\left[te^t\right]_0^1-\left[e^t\right]_0^1=e-0-e+1=1\ .$$

שאלה 3

א)

שלב 1) נחשב את הערך של הפרמטר t עבורו $x=0$:

$$0=t^3-1 \qquad\Rightarrow\qquad t^3=1 \qquad\Rightarrow\qquad t=1\ .$$

שלב 2) נחשב $y'(x)$ לפי הנוסחה $y'(x)=\frac{y'_t}{x'_t}$:

$$y'_t=\frac{1}{t}+10t=\frac{1+10t^2}{t}\ , \qquad x'_t=3t^2\ .$$

לכן

$$y'(x)=\frac{1+10t^2}{3t^3}\ .$$

שלב 3) נציב $t=1$:

$$y'(x=0)=y'(t=1)=\frac{11}{3}\ .$$

שלב 4) נחשב $y''(x)$ לפי הנוסחה $y''(x)=\frac{(y'(x))'_t}{x'_t}$:

$$y'(x)=\frac{1+10t^2}{3t^3}=\frac{1}{3t^3}+\frac{10}{3t}.$$

$$(y'(x))'_t=-\frac{1}{t^4}-\frac{10}{3t^2}$$

$$y''(x)=\frac{(y'(x))'_t}{x'_t}=\frac{-\frac{1}{t^4}-\frac{10}{3t^2}}{3t^2}=-\frac{1}{3t^6}-\frac{10}{9t^4}$$

שלב 5) נציב $t=1$:

$$y''(x=0)=y''(t=1)=\frac{-13}{9}\ .$$

שלב 6)

$$P_2(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2}x^2=5+\frac{11x}{3}-\frac{13x^2}{18}\ .$$

ב) נגדיר

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-1\ .$$

$f(1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1-1=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}<0$. $f(0)=\frac{0}{3}-\frac{0}{2}+0+1>0$. לכן לפי משפט ערך הביניים קיימת $c\in[0,1]$ שבה $f(c)=0$.

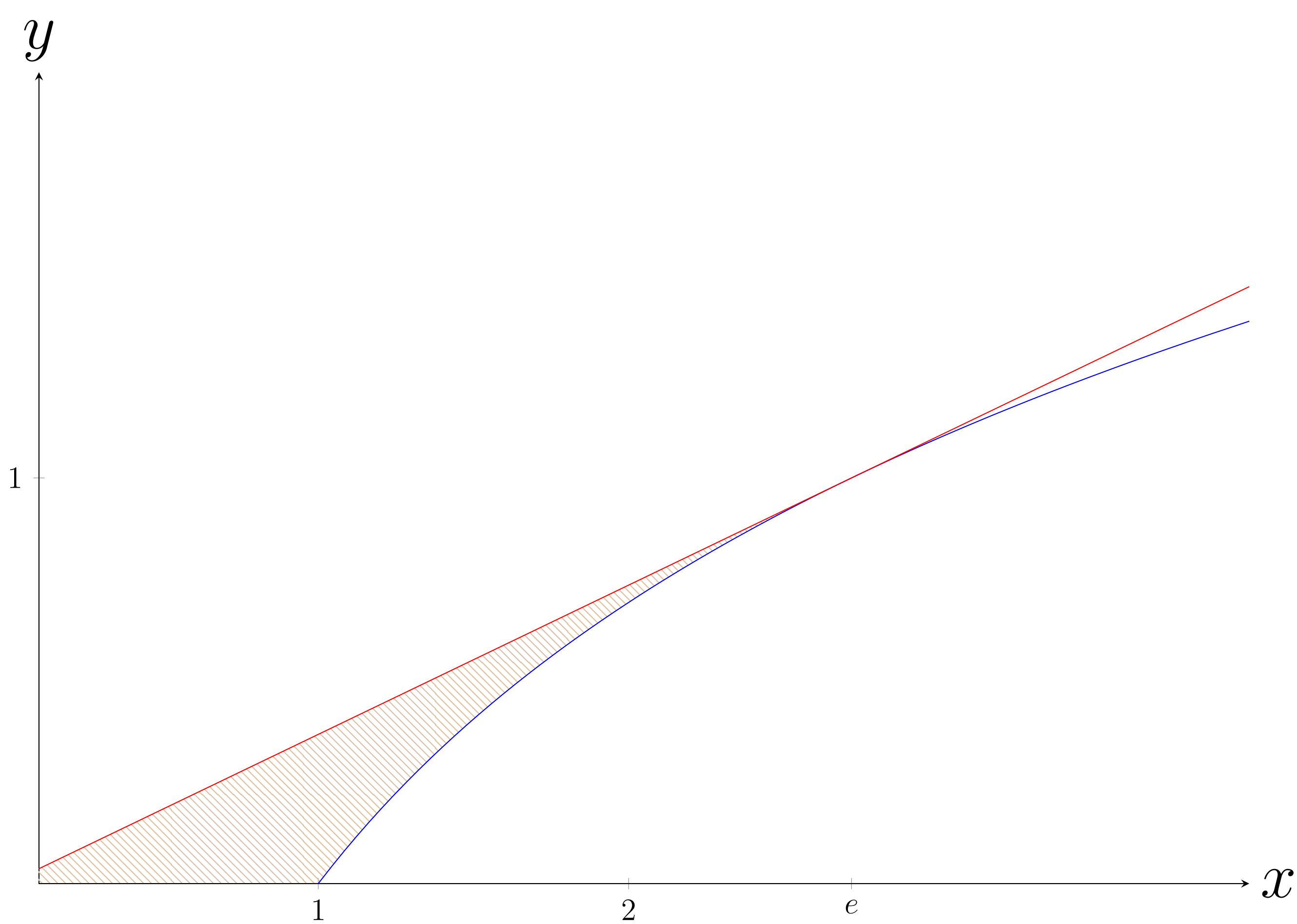
הוכחנו קיום. נוכיח יחידות:

$$f'(x)=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ .$$

$f'(x)>0$ לכל x $\Leftarrow$ f עולה מונוטונית לכל x $\Leftarrow$ f חח"ע לכן השורש יחיד.

שאלה 4

א)



$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 dx\,\frac{x}{e} + \int_1^e \left[\frac{x}{e} - \ln x\right] \\
&= \left[\frac{x^2}{2e}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2e} - x\ln x + x\right]_1^e \\
&= \frac{1}{2e} + \left[\frac{e^2}{2e} - e\ln e + e - \frac{1}{2e} + 1\ln(1) - 1\right] \\
&= \frac{1}{2e} + \frac{e}{2} - e + e - \frac{1}{2e} - 1 \\
&= \frac{e}{2} - 1\ .
\end{aligned}
$$

ב)

$$\lim_{x\to1^+}\left(\ln x\cdot\ln(x-1)\right)=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{\ln(x-1)}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)}\right)=\frac{\infty}{\infty}$$
$$\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to1^+}\left(\frac{\left(\frac{1}{x-1}\right)}{\left(\frac{-1}{x(\ln x)^2}\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{-x\left(\ln x\right)^2}{x-1}\right)=\frac{0}{0}$$
$$\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to1^+}\left(\frac{-\left(\ln x\right)^2-2\ln x}{1}\right)$$
$$=-\lim_{x\to1^+}\left(\left(\ln x\right)^2+2\ln x\right)$$
$$=-\left(\ln 1\right)^2-2\ln(1)$$
$$=0\ .$$

<u>שאלה 5</u>

א) $f(x)$ רציפה בנקודה x_0 אם f מוגדרת ב- x_0 ומתקיים

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\ .$$

כמו כן, $\lim_{x\to x_0}f(x)$ קיים $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)$. מכאן, שהפונקציה מוגדרת בצורה שונה כאשר $x<0$ וכאשר $x>0$, נחשב את הגבולות החד-צדדיים בנקודה $x=0$:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(3a+bx^2+\frac{3c+12}{x^8}\right)$$
$$\overset{\text{אריתמטיקה של גבולות}}{=}3a+\lim_{x\to0^-}bx^2+\lim_{x\to0^-}\frac{3c+12}{x^8}$$
$$\overset{\text{אריתמטיקה של גבולות}}{=}=3a+0+\frac{3c+12}{0^+}$$

בכדי שהגבול $\lim_{x\to0^-}$ יהיה סופי נדרוש $3c+12=0 \Leftarrow c=-4$. אחרת נקבל $\frac{3c+12}{0^+}=\pm\infty$ והגבול אינו קיים.

<u>סיכום ביניים</u>

עבור $c=-4$ נקבל

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=3a+0+0=3a\ .$$

כעת נחשב:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) \overset{f \text{ הגדרת}}{=} \lim_{x\to0^+}\left(a^2e^x+2+\frac{\sin^2(2x)}{7x}\right)$$
$$\overset{\text{אריתמטיקה של גבולות}}{=} 2+\lim_{x\to0^+} a^2e^x+\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2(2x)}{7x}$$
$$=2+a^2+\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2(2x)}{7x}$$
$$=2+a^2+0$$
$$=2+a^2\ .$$

לבסוף, כדי שהפונקציה תהיה רציפה בנקודה $x=0$ נדרוש:

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)=f(0)=b\ .$$

לפיכך

$$a^2+2=3a \quad\Rightarrow\quad a^2-3a+2=0 \quad\Rightarrow\quad a_1=2, a_2=2\ .$$

אם $a=1$ אז $b=3a=3$. אם $a=2$ אז $b=3a=6$.

תשובה סופית לסעיף א': $a=1, b=3, c=-4$ או $a=2, b=6, c=-4$.

ב) נציב את הערכים של a,b,c שקיבלנו בסעיף א' ונקבל שתי אפשרויות עבור הפונקציה $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} 3+3x^2 & x<0 \\ 3 & x=0 \\ e^x+2+\dfrac{\sin^2(2x)}{7x} & x>0 \end{cases}$$

או

$$f(x)=\begin{cases} 6+6x^2 & x<0 \\ 6 & x=0 \\ 4e^x+2+\dfrac{\sin^2(2x)}{7x} & x>0 \end{cases}$$

בשני המקרים עבור $x>0$ נקבל פולינום $\Leftarrow$ פונקציה רציפה. עבור $x>0$ נקבל סכום של פונקציות אלמנטריות: e^x' פונקציה קבועה 2 ומנה של פונקציות אלמנטריות $\frac{\sin^2(2x)}{7x}$ עם מכנה שונה מאפס בתחום $x>0$. ולכן גם זו פונקציה רציפה. כמו כן בסעיף א' הראנו כי הפונקציה רציפה בנקודה $x=0$ ובסה"כ $f(x)$ רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$.

ג) נציב $x=0$:

$$2\cdot0^3y(0)-5\cdot0y(0)^2+y(0)=3 \quad\Rightarrow\quad y(0)=3\ .$$

נגזור:

$$6x^2y+2x^3y'-5y^2-10xyy'+y'=0\ .$$

נציב $x=0$ ו- $y(0)=3$:

$$-5\cdot 3^2+y'(0)=0 \quad\Rightarrow\quad y'(0)=45\ .$$

משוואת המשיק בנקודה $(0,3)$:

$$y-y_0=y_0'(x-x_0) \quad\Rightarrow\quad y-3=45(x-0) \quad\Rightarrow\quad y=45x+3\ .$$

ד) משוואת הנורמל בנקודה $(0,3)$:

$$y-y_0=\frac{-1}{y_0'}(x-x_0) \quad\Rightarrow\quad y-3=\frac{-1}{45}(x-0) \quad\Rightarrow\quad y=-\frac{x}{45}+3 \quad\Rightarrow\quad x+45y=135\ .$$

שאלה 6

א) $\cos(a-x)$ רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$.

$\ln(2-ax^2)$ רציפה לכל x אם $2-ax^2>0$.

ז"א

$$2-ax^2>0 \quad\Rightarrow\quad ax^2<2$$

נניח כי $a>0$. הביטוי ax^2 מתאר פרבולה מעל ציר ה-x. כך $ax^2\not<2$ לכל x. ז"א התנאי $ax^2<2$ לכל x לא מתקיים

אם $a<0$ אז הביטוי ax^2 מתאר פרבולה מתחת ציר ה-x. כך $ax^2\le 0<2$ לכל x. ז"א התנאי $ax^2<2$ לכל x מתקיים

אם $a=0$ אז $ax^2<2$ מתקיים.

לכן התשובה הסופית היא $a\le 0$.

ב)

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f'(c)\le 2 \quad\Rightarrow\quad f(2)\le f(1)+2 \quad\Rightarrow\quad f(2)\le 10\ .$$

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f'(c)\ge -2 \quad\Rightarrow\quad f(2)-f(1)\ge -2 \quad\Rightarrow\quad f(2)\ge f(1)-2=6\ .$$

לפיכך

$$6\le f(2)\le 10$$

שאלה 7 נניח כי השיפוע של הקו הינו t. נשים לב כי $t<0$. משוואת הישר הינה

$$y-4=t(x-2) \quad \Rightarrow \quad y=tx+4-2t\ .$$

הישר חותך את הצירים בנקודות $\left(2-\frac{4}{t},0\right)$ ו- $(0,4-2t)$.
שטח התחום החסום

$$S(t)=\left(2-\frac{4}{t}\right)\cdot(4-2t)=16-4t-\frac{16}{t}\ .$$

$$S'(t)=-4+\frac{16}{t^2}\overset{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad t=-2$$

(נשים לב כי $t<0$). נעשה חקירה:

t	$t<-2$	$t>-2$
$S'(t)$	$-$	$+$
$S(t)$	$\searrow$	$\nearrow$

$t_{\min}=-2$. $S_{\min}=S(t=-2)=16$.

שאלה 8

צריך להוכיח:

$$\frac{b-a}{\cos^2 b}<\tan(b)-\tan(a)<\frac{b-a}{\cos^2 a}\ \left(0<a<b<\frac{\pi}{2}\right).$$

$\tan(x)$ רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b) לכל $0<a<b<\pi/2$. לכן לפי משפט לגרנז' קיימת $c\in[a,b]$ כך ש- $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ ז"א

$$\tan(b)-\tan(a)=(b-a)\frac{1}{\cos^2 c}\ .$$

שים לב $0<a<c<b<\frac{\pi}{2}$ והפונקציה $\cos x$ מונוטומית $\downarrow$ ממש בקטע זו, ולכן

$$\cos a>\cos c>\cos b\ .$$

$\cos x$ חיובי בקטע $[0,\pi/2]$ אז

$$\cos^2 a>\cos^2 c>\cos^2 b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\cos^2 a}<\frac{1}{\cos^2 c}<\frac{1}{\cos^2 b}\ .$$

לכן נקבל

$$\frac{b-a}{\cos^2 a}<\tan(b)-\tan(a)=\frac{b-a}{\cos^2 b}\ .$$