

שיעור 12

משוואות דיפרנציאליות

12.1 הגדרת משוואה דיפרנציאלית

הגדרה 12.1 משוואה דיפרנציאלית רגילה

משוואה

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$$

שקושרת בין משתנה בלתי תלוי x לבין פונקציה $y = y(x)$ ונגזרות של $y(x)$ לפי x , תיקרא משוואה דיפרנציאלית רגילה (מד"ר או מישדיף).

12.1 דוגמה

$$y' = 0 \quad (1)$$

$$y = 2x \quad (2)$$

$$y' = 2xe^{x^2} \quad (3)$$

$$y''' + 5y'' \sin x - 17y + \tan x = 0 \quad (4)$$

$$6y'' - 9y' = x^7 \quad (5)$$

(6) אפשר גם בדיפרנציאל:

$$x \cos x dx + (x - 7y)dy = 0$$

זה שקול למשוואה

$$x \cos x + (x - 7y)y' = 0$$

שכן

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

למה זה מעניין? בכל מקום שכן ניתן לתאר השתנות דינמית בזמן של מערכת בעזרת קצב שינוי של הגודל הנמדד, ניתן לתאר אותה בעזרת משוואה דיפרנציאלית. למשל: משתמשים במשידיף בתחומות כמו: פחזקה, ביולוגיה, כימיה הנדסה, שונות, גרפיקה, ועוד.

הגדרה 12.2 פתרון משווא דיפרנציאלית רגילה

פתרון של מד"ר

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

בקטע (a, b) זו פונקציה גזירה n פעמים ב- (a, b) המקיימת את המשוואה. כלומר, לאחר הצבה שלה, המשוואה הופכת לזהות לכל x בקטע.

דוגמה 12.2 ה

וכיחו כי הפונקציה

$$y = e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + x \right) e^x$$

מהווה פתרון למד"ר:

$$y'' - 3y' + 2y = xe^x .$$

פתרון:

בכדי להציב את הפונקציה במשוואה, נגזור אותה פעמיים:

$$y' = 2e^{2x} - (x+1)e^x - \left(\frac{x^2}{2} + x \right) e^x = 2e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 1 \right) e^x ,$$

$$y'' = 4e^{2x} - (x+2)e^x - \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 1 \right) e^x = 4e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + 3x + 3 \right) e^x ,$$

$$\underbrace{\left[4e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + 3x + 3 \right) e^x \right]}_{y''} - 3 \underbrace{\left[2e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 1 \right) e^x \right]}_{y'} + 2 \underbrace{\left[e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + x \right) e^x \right]}_y = xe^x$$

כנדרש.

12.2 מד"ר מסדר ראשון

הגדרה 12.3 משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר ראשון

אם ניתן להציג את המשוואה בצורה

$$y' = f(x, y)$$

אז המשוואה נקראת משוואה הפתוחה לגבי הנגזרת. משוואה כזו ניתן גם להציג בצורה

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 .$$

דוגמה 12.3

(1)

$$(2x + y)dx + (x^2 + y)dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' + \frac{2x + y}{x^2 + y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = -\frac{2x + y}{x^2 + y} .$$

(2)

$$(7x + 3y)dx + 7x^2dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' + \frac{7x + 3y}{7x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = -\frac{7x + 3y}{7x^2} .$$

דוגמה 12.4 פ

תרו את המד"ר

$$y' = 2x .$$

פתרון:

$$y' = 2x \Rightarrow y(x) = \int 2x dx = x^2 + C .$$

כלומר, יש למשוואה אינסוף פתרונות.

הגדרה 12.4 פתרון כללי למשוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר ראשון

פתרון כללי למד"ר מסדר ראשון הוא פונקציה גזירה $y = \phi(x, C)$ כאשר C הוא פרמטר כך שלכל פתרון של המשוואה (פרט אולי למקרים "מיוחדים") מתקבל ב- $\phi(x, C)$ ע"י הצבה של ערך כלשהו ב- C .

דוגמה 12.5

$$y' = 2x$$

$$\phi(x, C) = x^2 + C$$

הוא פתרון כללי.

הגדרה 12.5 פתרון כללי

פתרון המתקבל מהפתרון הכללי ע"י הצבה של ערך בפרמטר C נקרא פתרון פרטי.

דוגמה 12.6

$y = x^2 + 7$ הוא פתרון פרטי של המשוואה $y' = 2x$ ביחס לפתרון הכללי $\phi(x, C) = x^2 + C$.

הגדרה 12.6 פתרון פרטי

מד"ר מסדר ראשון יחד עם תנאי התחלה

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

נקראת בעית קושי.

דוגמה 12.7

נפתור את בעית קושי

$$\begin{cases} y' = 2x \\ y(1) = 8 \end{cases}$$

פתרון:

הפתרון הכללי שמצאנו למשוואה הוא

$$\phi(x, C) = x^2 + C .$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$y(1) = 8 \Rightarrow 1^2 + C = 8 \Rightarrow C = 7 .$$

ולכן מתקבל הפתרון הפרטי

$$y(x) = x^2 + 7 .$$

12.8 דוגמה

נתונה המד"ר

$$y' - 4(y - 1)^{3/4}$$

(1) מצאו פתרון אחד.

(2) הוכיחו שמשפחות הפונקציות $y(x, C) = (x + C)^4 + 1$ מהווה פתרון כללי למשוואה.

(3) האם קיים קבוע C שעבורו הפתרון $y = 1$ מתקבל מהפתרון הכללי $y = (x + C)^4 + 1$ כפתרון פרטי?

פתרון:

(1) $y = 1$ הינו פתרון למשוואה שכן $y' = 0$ ואז

$$0 - 4(1 - 1)^{3/4} = 0 .$$

(2) אם נגזור את הפונקציה $y(x, C)$ נקבל $y' = 4(x + C)^3$ ואם נציב את y במשוואה נקבל

$$4(x + C)^3 - 4((x + C)^4 + 1 - 1)^{3/4} = 4(x + C)^3 - 4(x + C)^3 = 0$$

ואכן קיבלנו זהות.

למעשה, אין לנו את הכלים להראות שזה אכן פתרון כללי. הוכיחו שמשפחות הפונקציות $y(x, C) = (x + C)^4 + 1$ מהווה פתרון כללי למשוואה.

(3) לא. שכן אז $(x + C)^4 + 1 = 1 \Leftrightarrow x + C = 0$ לכל x , וזה לא יכול להיות.

הגדרה 12.7 פתרון מיוחד

פתרון של מד"ר שאינו מתקבל מהפתרון הכללי כפתרון פרטי עבור ערך כלשהו של הפרמטר C נקרא פתרון מיוחד.

12.9 דוגמה

עבור הדוגמה הקודמת, $y = 1$ פתרון מיוחד.

12.3 משוואה דיפרציאלית הניתנת להפרדת משתנים

הגדרה 12.8 משוואה דיפרציאלית הניתנת להפרדת משתנים

מד"ר הניתנת להפרדת משתנים הינה משוואה מצורה

$$y' = f(x)g(y)$$

או באופן שקול

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$$

משפט 12.1 כיצד לפתור משוואה דיפרציאלית הניתנת להפרדת משתנים

נתונה מד"ר הניתנת להפרדת משתנים הינה משוואה מצורה

$$y' = f(x)g(y)$$

אז

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

דוגמה 12.10

פתרו את המשוואה $y' = 2xy$

פתרון:

$$\int \frac{1}{y} y' dx = \int 2x dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 2x dx$$

$$\ln |y| + C_1 = x^2 + C_2$$

$$\ln |y| = x^2 + (C_2 - C_1)$$

אין טעם בשני קבועים אינטגרציה כאן. נרשום

$$\ln |y| = x^2 + C_3$$

$$|y(x)| = e^{x^2 + C_3}$$

$$|y(x)| = e^{x^2} \cdot e^{C_3}$$

נרשום $C_4 = e^{C_3}$ ואז

$$|y(x)| = C_4 e^{x^2}$$

מלכתחילה, $C_4 > 0$ ואם נרצה להוריד את הערך המוחלט נקבל

$$y(x) = \pm C_4 e^{x^2},$$

אבל ייתר נוח לרשום

$$y(x) = C_4 e^{x^2}$$

כאשר מאפשרים ל- C_4 להיות גם שלילי.

במקרה ש $C_4 = 0$, נקבל $y(x) = 0$. זהו גם כן פתרון. לכן,

$$y(x) = C \cdot e^{x^2}$$

הוא פתרון למשוואה לכל ערך של C .

דוגמה 12.11

העזרו בשיטת הפרדת משתנים בכדי לפתור את המשוואה

$$y' - 4(y - 1)^{3/4} = 0$$

והשוו לפתרונות שכבר ראינו קודם.

פתרון:

$$\int \frac{1}{4(y-1)^{3/4}} y' dx = \int 1 dx$$

$$(y-1)^{1/4} = x + C$$

לכן קיבלנו $y = (x + C)^4 + 1$ פתרון כללי
 $y = 1$ פתרון מיוחד.