עבודה עצמית 8 משטחים במרחב

שאלה 1

א) נתון המשטח

$$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{2}+\frac{(z-4)^2}{4}=1\ .$$

מצאו את משוואת המישור המשיק למשטח בנקודה $A(4,3,4)$ ומצאו את הזווית בין מישור זה לבין ציר ה- z.

ב) מצאו את משוואת המשיק למשטח בנקודה $B(4,3,4)$.

שאלה 2 מצאו את משוואת המישור המשיק למשטח $\ln(xy-z)=0$ בנקודה $P(2,2,3)$ והראו כי הוא נחתך עם ציר ה - y.

שאלה 3 מצאו את משוואת הספירה החסומה על ידי הפירמידה

$$x\geq 0\ ,\qquad y\leq 0\ ,\qquad 0\leq z\leq 8-2x+2y\ .$$

כך שהספירה משיקה לכל פאותיה של הפירמידה.

שאלה 4

מצאוות המרחק המינימאלי בין המשטחים

$$z=x^2+y^2\ ,\qquad x^2+y^2+(z-9)^2=1\ .$$

שאלה 5

א) נתונה המשטחז

$$225x^2+900x+144y^2-288y+400z^2+800z-2156=0\ .$$

שרטטו את המשטח.

ב) מצאו את הנקודות הקרובות ביותר על המשטח הזה למישור $x=20$, ומצאו את המרחק ביניהן.

שאלה 6 נתון המשטח

$$x^2+y^2+z^2+37=4x+10y+6z$$

והישר שעובר דרך הנקודות $R(8,0,0)$, $S(0,0,8)$. מצאו את הנקודה על הישר הקרובה ביותר למשטח וחשבו את המרחק ביניהם.

פתרונות

שאלה 1

א) המשטח הוא אליפסויד. נרשום מחדש את המשוואה בצורה

$$(x-2)^2+2(y-3)^2+(z-4)^2=4\ .$$

ונסמן

$$f(x,y,z)=(x-2)^2+2(y-3)^2+(z-4)^2\ .$$

האליפסואידהוא משטח הרמה $f(x,y,z)=4$. וקטור נורמלי למישור המשיק בנקודה A נתון ע"י

$$\bar{n}=\nabla f(A)\ .$$

משוואת המישור המשיק למשטח $f(x,y,z)=c$ בנקודה $A(x_0,y_0,z_0)$ היא

$$f'_x(A)(x-x_0)+f'_y(A)(y-y_0)+f'_z(A)(z-z_0)=0\ .$$

$$\nabla f=(f'_x,f'_y,f'_z)=(2(x-2)\ ,\ 4(y-3)\ ,\ 2(z-4))\qquad\Rightarrow\quad\nabla f(A)=(f'_x(A),f'_y(A),f'_z(A))=(2,4,-2)\ .$$

עלכן, משוואת המישור המשיק למשטח בנקודה A היא

$$2x+4y-2z=16\ .$$

הוקטור k הוא וקטור כיוון של ציר ה- z ולכן, סינוס הזווית בין המישור המשיק למשטח בנקודה A ובין ציר ה- z נתון ע"י

$$\sin\alpha=\frac{n\cdot k}{|n|\,|k|}=\frac{|(2,4,-2)\cdot(0,0,1)|}{|(2,4,-2)||(0,0,1)|}=\frac{2}{\sqrt{24}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\ .$$

ב) בעזרתהחישובים בסעיף א', נקבל שהנורמל למישור המשיק בנקודה B הוא

$$n=\nabla f(B)=(4,0,0)\ .$$

ולכן,משוואת המישור המשיק בנקודה זו היא

$$x=4\ .$$

שאלה 2

הנקודה $P(2,2,3)$ אכן נמצאת על המשטח $\ln(xy-z)=0$ כיוון שמתקיים

$$\ln\big((2)(2)-(3)\big)=\ln(4-3)=\ln(1)=0$$

המשטח הוא משטח רמה של הפונקציה $f(x,y,z)=\ln(xy-z)$. מקדמי משוואת המישור המשיק נתונים על ידי הקואורדינטות של הגרדיאנט של f בנקודה. לכן נחשב את הנגזרות החלקיות של f בנקודה P:

$$f'_x(x,y,z)=\frac{y}{xy-z}\Rightarrow f'_x(P)=\frac{(2)}{(2)(2)-(3)}=2$$
$$f'_y(x,y,z)=\frac{x}{xy-z}\Rightarrow f'_y(P)=\frac{(2)}{(2)(2)-(3)}=2$$
$$f'_z(x,y,z)=\frac{-1}{xy-z}\Rightarrow f'_z(P)=\frac{-1}{(2)(2)-(3)}=-1$$

נציב בנוסחא למשוואת מישור המשיק למשטח רמה בנקודה P ונקבל:

$$\begin{aligned} & f'_x(P)(x-2)+f'_y(P)(y-2)+f'_z(P)(z-3)=0 \\ \Rightarrow\quad & 2(x-2)+2(y-2)-1(z-3)=0 \\ \Rightarrow\quad & 2x-4+2y-4-z+3=0 \\ \Rightarrow\quad & 2x+2y-z-5=0 \end{aligned}$$

יש מספר דרכים להראות שהמישור הנ"ל נחתך עם ציר y:

- נציב $x=0, z=0$ במשוואת המישור, ונקבל $y=\frac{5}{2}$, כך שנקודת החיתוך בין המישור לציר y היא הנקודה $(0,\frac{5}{2},0)$.
- וקטור כיוון של ציר ה-y הוא $\hat{j}=(0,1,0)$. הווקטור $\bar{n}=(2,2,-1)$ הוא נורמל למישור. נחשב

$$\hat{j}\cdot\bar{n}=(0,1,0)\cdot(2,2,-1)=2\neq 0$$

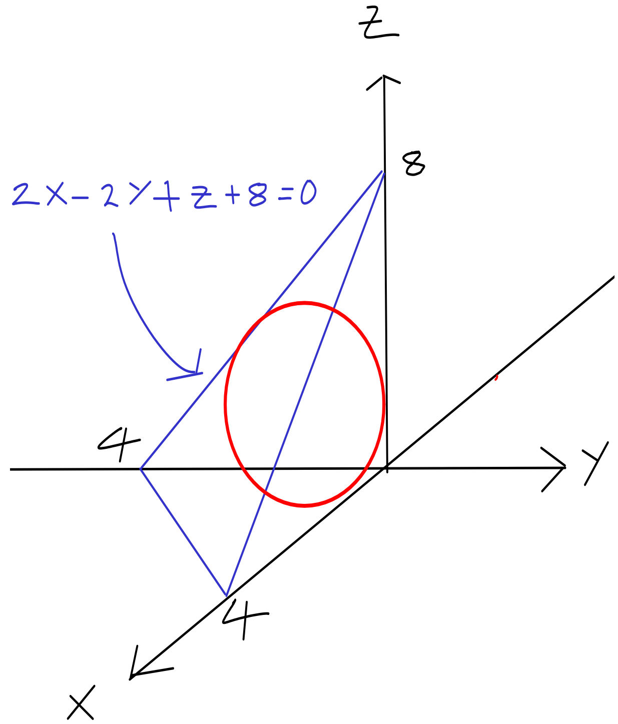
לכן הוקטורים $\hat{j},\bar{n}$ לא מאונכים זה לזה, מה שאומר שציר y לא מקביל למישור או מוכל בו ולכן נחתך איתו.

- אילו המישור היה מקביל לציר y (או מכיל אותו) אז המשתנה y לא היה מופיע במשוואת המישור. מכיוון שהמקדם של y במשוואה הוא $B=2\neq 0$, על כן, המישור נחתך עם הישר.

שאלה 3

משוואת ספירה בעלת רדיוס R שמרכזה בנקודה (a,b,c) היא

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$



כדי שכל אחד משלושת המישורים $x=0, y=0, z=0$ ישיק לספירה וגם יגביל אותה בכיוון הנכון, כלומר כך שהספירה תהיה מוכלת בפרמידה (טטראדר),
מרכז הספירה צריך להתקבל בנקודה $(R,-R,R)$. לכן, משוואת הספירה היא מהצורה

$$(x-R)^2+(y+R)^2+(z-R)^2=R^2$$

כדי שהספירה תשיק גם למישור $2x-2y+z-8=0$, נדרוש שהמרחק ממרכז הספירה למישור זה יהיה גם כן שווה לרדיוס R, כלומר:

$$R=d(R,-R,R)=\frac{|(2)(R)+(-2)(-R)+(1)(R)+(-8)|}{\sqrt{(2)^2+(-2)^2+(1)^2}}=\frac{|5R-8|}{3}$$

ולכן

$$3R=|5R-8|$$

כלומר $R=1$ או $R=4$. אבל הנקודה $(4,-4,4)$ לא מוכלת בפרמידה שכן אינה מקיימת את אי השיוויון $z\leq 8-2x+2y$ לכן הערך הנכון הוא $R=1$, ומשוואת הספירה היא:

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=1$$

שאלה 4

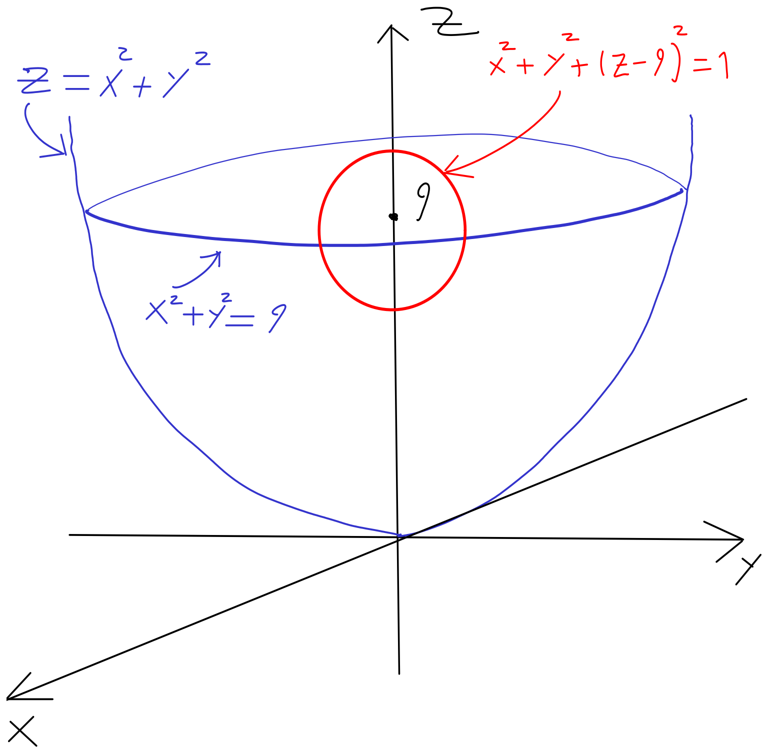
המשטח

$$z=x^2+y^2$$

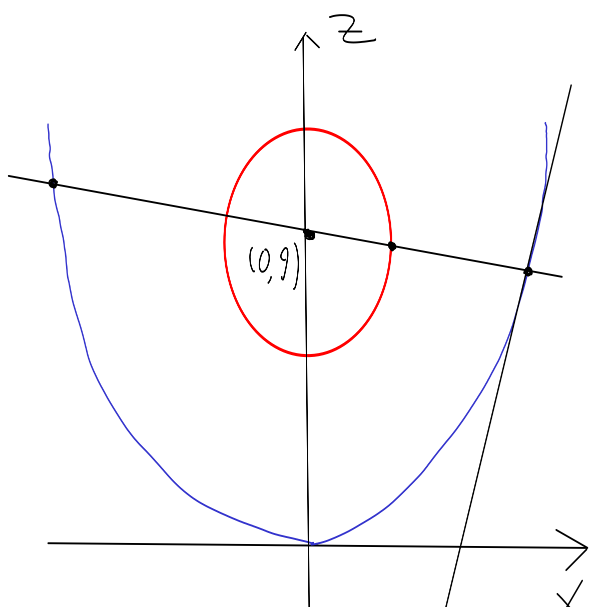
הוא פרבולואיד אליפטי (מעגלי). המשטח

$$x^2+y^2+(z-9)^2=1$$

הוא ספירה ברדיוס 1 סביב $(0,0,9)$.



אף אחד מהמשטחים המעורבים בשאלה איננו משטח גלילי, ניתן להפוך את הבעיה לבעיה דו-מימדית על ידי כך שנשים לב ששני המשטחים הם גופי סיבוב סביב ציר ה-z ולכן ניתן למצוא את המרחק במישור xz ומכאן לקבל את המרחק במרחב בעזרת סימטריה סביב ציר ה-z. כלומר, נתבונן במרחק בין המעגל והפרבולה בסרטוט הבא:



ריבוע המרחק בין הנקודה $(x,z)=(x,x^2)$ על הפרבולה לבין מרכז המעגל $(0,9)$ נתון על ידי

$$d(x)=(x-0)^2+(x^2-9)^2=x^4-17x^2+81$$

$$d'(x) = 4x^3 - 36x = x(4x^2 - 34) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \pm\sqrt{\frac{17}{2}}$$

קל לראות שהנקודה $x = 0$ היא נקודת מקסימום מקומי של המרחק בעוד הנקודות $x = \pm\sqrt{\frac{17}{2}}$ הן נקודות מינימום (מוחלט) של המרחק. לכן, המרחק בין המעגל לפרבולה הוא כמו המרחק בין הנקודה $\left(\pm\sqrt{\frac{17}{2}}, \frac{17}{2}\right)$ לבין מרכז המעגל בחיסור רדיוס המעגל, כלומר

$$D = \sqrt{\left(\frac{17}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{17}{2} - 9\right)^2} - 1 = \sqrt{\frac{35}{4}} - 1$$

כעת נחזור למודל התלת-ממדי. הנקודות הקרובות ביותר על הפרבולה לספירה הן מהצורה $\left(x, y, \frac{17}{2}\right)$ כאשר

$$x^2 + y^2 = z = \frac{17}{2}$$

והמרחק בין הפרבולואיד והספירה הוא $D = \sqrt{\frac{35}{4}} - 1$. שהוא מעט פחות מהמרחק ביניהם בגובה קו המשווה של הספירה (והרבה פחות מהמרחק לנקודה הנמוכה ביותר בפרבולואיד).

שאלה 5

א) נכתוב את המשוואה בצורה קנונית:

$$225x^2+900x+144y^2-288y+400z^2+800z-2156=0$$

$$\Rightarrow\quad 225x^2+900x+144y^2-288y+400z^2+800z=2156$$

$$225\left(x^2+\frac{900}{225}x\right)+144\left(y^2-\frac{288}{144}y\right)+400\left(z^2+\frac{800}{400}z\right)=2156$$

$$225\left(x^2+\frac{15\cdot 60}{15\cdot 15}x\right)+144\left(y^2-\frac{144\cdot 2}{144}y\right)+400\left(z^2+\frac{400\cdot 2}{400}z\right)=2156$$

$$225\left(x^2+\frac{60}{15}x\right)+144\left(y^2-2y\right)+400\left(z^2+2z\right)=2156$$

$$225\left(x^2+4x\right)+144\left(y^2-2y\right)+400\left(z^2+2z\right)=2156$$

$$225\left((x+2)^2-4\right)+144\left((y-1)^2-1\right)+400\left((z+1)^2-1\right)=2156$$

$$225\left(x+2\right)^2-4\cdot 225+144\left(y-1\right)^2-144+400\left(z+1\right)^2-400=2156$$

$$225\left(x+2\right)^2+144\left(y-1\right)^2+400\left(z+1\right)^2-4\cdot 225-144-400=2156$$

$$225\left(x+2\right)^2+144\left(y-1\right)^2+400\left(z+1\right)^2-1444=2156$$

$$225\left(x+2\right)^2+144\left(y-1\right)^2+400\left(z+1\right)^2=2156+1444$$

$$225\left(x+2\right)^2+144\left(y-1\right)^2+400\left(z+1\right)^2=3600$$

$$\frac{225\left(x+2\right)^2+144\left(y-1\right)^2+400\left(z+1\right)^2}{3600}=1$$

$$\frac{225}{3600}\cdot(x+2)^2+\frac{144}{3600}\cdot(y-1)^2+\frac{400}{3600}\cdot(z+1)^2=1$$

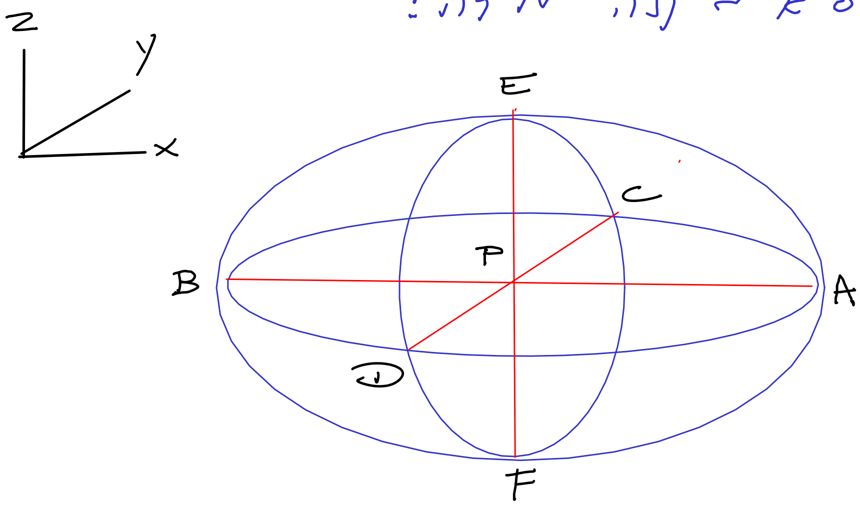
$$\frac{1}{16}\cdot(x+2)^2+\frac{1}{25}\cdot(y-1)^2+\frac{1}{9}\cdot(z+1)^2=1$$

$$\frac{(x+2)^2}{4^2}+\frac{(y-1)^2}{5^2}+\frac{(z+1)^2}{3^2}=1$$

אליפסויד אשר מרכזו נמצאו בנקודה

$$P(-2,1,-1)$$

לא בקנה מידה!



$AP = BP = 4, \quad CP = DP = 5 \quad EP = FP = 3$

$P = (-2,1,-1)$

$A = P + (4,0,0) = (2,1,-1)$

$B = P - (4,0,0) = (-6,1,-1)$

$C = P + (0,5,0) = (-2,6,-1)$

$D = P - (0,5,0) = (-2,-4,-1)$

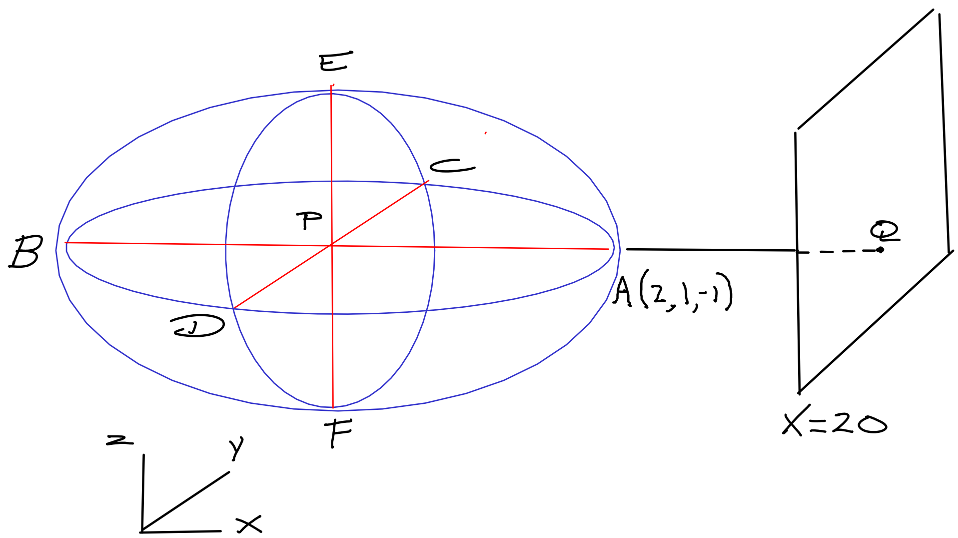
$E = P + (0,0,3) = (-2,1,2)$

$F = P - (0,0,3) = (-2,1,-4)$

ב)

שיטה 1

הנקודה הקרובה ביותר למישור $x = 20$ הינה $A(2,1,-1)$ (עיין התרשים)



$$d = 20 - x_A$$
$$= 20 - 2$$
$$= 18 .$$

לכן המרחק בין A לנקודה Q על המישור הקרובה ביותר לאליפסויד הוא

$$d = 20 - 2 = 18 \ .$$

שיטה 2

בנקודה על המשטח הקרובה ביותר למישור, הנורמל מקביל לנורמל של המישור.

וקטור הנורמל למישור $x = 20$ הינו
$$\bar{n} = (1,0,0)\ ,$$
כלומר, מקביל לכיוון ה- x.

שים לב, משוואת המשטח היא
$$f(x,y,z) = \frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{25} + \frac{(z+1)^2}{9} - 1 = 0\ .$$
הוקטור הנורמל למשטח בנקודה x,y,z ניתן ע"י הגראדיאנט:
$$\nabla f = \left(f'_x, f'_y, f'_z\right) = \left(\frac{2(x+2)}{16}, \frac{2\cdot(y-1)}{25}, \frac{2\cdot(z+1)}{9}\right)$$
הנקודה על המשטח הקרובה ביותר למישור היא הנקודה שבה הנורמל מקביל לנורמל של המישור, כך ש-
$$\nabla f = t\cdot \bar{n} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{2(x+2)}{16}, \frac{2\cdot(y-1)}{25}, \frac{2\cdot(z+1)}{9}\right) = t\cdot(1,0,0)$$
כך שמקבלים את משוואת הישר בין הנקודה על המשטח הרובה ביותר למישור בצורה:
$$\begin{cases} \dfrac{2(x+2)}{16} = t \\ \dfrac{2\cdot(y-1)}{25} = 0 \\ \dfrac{2\cdot(z+1)}{9} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x+4 = 16t \\ y-1 = 0 \\ z+1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 8t-4 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$
בכדי למצוא את הנקודה בה הישר חותך את המשטח (שנסמן ב- Q_1) נציב את משוואת הישר למשוואת המשטח:
$$\begin{aligned} \frac{(8t-4+2)^2}{16} + \frac{(1-1)^2}{25} + \frac{(-1+1)^2}{9} - 1 &= 0 \\ \frac{(8t-2)^2}{16} + \frac{(0)^2}{25} + \frac{(0)^2}{9} - 1 &= 0 \\ \frac{(8t-2)^2}{16} - 1 &= 0 \\ \frac{(8t-2)^2}{16} &= 1 \\ (8t-2)^2 &= 16 \\ 8t-2 &= \sqrt{16} \\ 8t-2 &= \pm 4 \\ 8t &= \pm 4 + 2 \\ t &= \frac{3}{4} \text{ או } -\frac{1}{4}\ . \end{aligned}$$
עכשיו נציב את הערך של t הזה לתוך משוואת הישר כדי למצוא את Q_1:
$$Q_1 = (8t-4, 1, -1) = (2,1,-1) \text{ או } (-6,1,-1)$$

אחד מהם הינה הנקודה על המשטח הקרובה ביותר למישור. הישר חותך את המישור בנקודה

$$Q_2 = (20, 1, -1)$$

ולכן המרחק בין המשטח למישור הינו

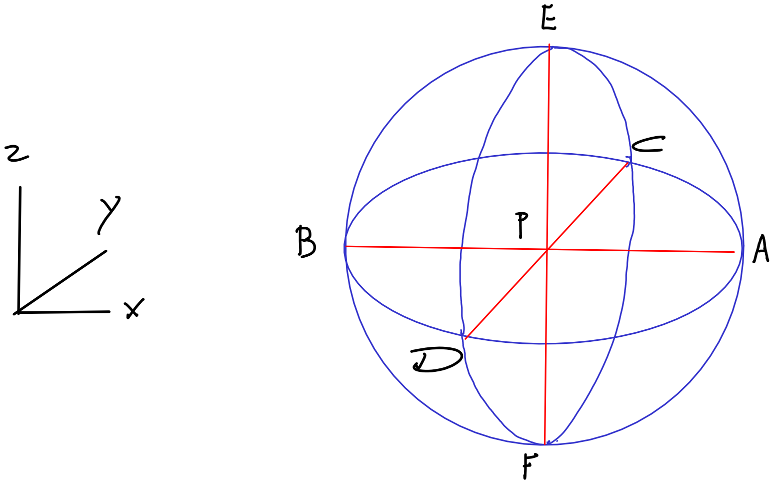
$$d = |\overline{Q_1 Q_2}| = \sqrt{(20-2)^2 + (1-1)^2 + (-1-(-1))^2} = \sqrt{(18)^2} = 18\ .$$

<u>שאלה 6</u> נכתוב את המשוואה בצורה קנונית:

$$\begin{aligned}
& x^2 + y^2 + z^2 + 37 && = 4x + 10y + 6z \\
\Rightarrow \quad & x^2 + y^2 + z^2 + 37 - 4x - 10y - 6z && = 0 \\
& x^2 - 4x + y^2 - 10y + z^2 - 6z + 37 && = 0 \\
& (x-2)^2 - 4 + (y-5)^2 - 25 + (z-3)^2 - 9 + 37 && = 0 \\
& (x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 - 1 && = 0 \\
& (x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 && = 1
\end{aligned}$$

כדור מרדיוס 1 אשר מרכזו נמצאו בנקודה

$$P(2, 5, 3)$$



$AP = BP = 1 \qquad CP = DP = 1 \qquad EP = FP = 1.$

$P = (2, 5, 3)$

$A = P + (1, 0, 0) = (3, 5, 3)$

$B = P - (1, 0, 0) = (1, 5, 3)$

$C = P + (0, 1, 0) = (2, 6, 3)$

$D = P - (0, 1, 0) = (2, 4, 3)$

$E = P + (0, 0, 1) = (2, 5, 4)$

$F = P - (0, 0, 1) = (2, 5, 2)$

וקטור הכיוון של הישר בין הנקודות R ו- S הינו

$$\bar{a} = (0-8, 0-0, 8-0) = (-8, 0, 8)$$

או שקול

$$\bar{a} = (-1, 0, 1)\ .$$

לכן משוואת הישר העובר דרך נקודות R ו- S היא

$$\ell_1 : \qquad (x,y,z) = (8,0,0) + t(-1,0,1) \ .$$

שים לב, אם המשטח הוא משטח של כדור, הנקודה על הישר הקרובה ביותר למשטח הוא אותה הנקודה על הישר הקרובה ביותר למרכז כדור $P(2,5,3)$. המרחק (בירבוע) בין נקודה על הישר $(x,y,z) = (8-t,0,t)$ ובין הנקודה $P(2,5,3)$ הוא

$$\begin{aligned} d^2 =& (8-t-2)^2 + (0-5)^2 + (t-3)^2 \\ =& (6-t)^2 + 5^2 + (t-3)^2 \\ =& 36 - 12t + t^2 + 25 + t^2 - 6t + 9 \\ =& 70 - 18t + 2t^2 \ . \end{aligned}$$

נמצאו את הערך של הפרמטר t על הישר המתאים לנקודה על הישר הקרובה ביותר ל P ע"י לעשות את d^2 מינימום. נקח את הנגזרת של d^2 לפי t ואז נאפס אותה כדי למצוא את המינימום:

$$\left(d^2\right)' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -18 + 4t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{9}{2} \ .$$

נציב את הערך הזה לתוך משוואת הישר ונמצאו את הנקודה:

$$Q = \left(8 - \frac{9}{2}, 0, \frac{9}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 0, \frac{9}{2}\right) \ .$$

המרחק בין הנקודה Q על הישר והנקודה P במרכז הכדור הוא

$$|PQ| = \sqrt{\left(\frac{7}{2}-2\right)^2 + (0-5)^2 + \left(\frac{9}{2}-3\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{100}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{118}{4}} = 5.43139$$

ולכן המרחק d בין Q למשטח של הכדור הוא $|PQ|$ פחות הרדיוס של הכדור (1). לכן התשובה הסופית היא

$$d = 5.43139 - 1 = 4.43139 \ .$$