שיעור 6
רציפות בקטע והגדרת הנגזרת

6.1 רציפות פונקציה בקטע

הגדרה 6.1 רציפות בקטע פתוח

פונקציה $f(x)$ נקראת רציפה בקטע פתוח (a,b) אם f רציפה בכל נקודה $c\in(a,b)$ בקטע. ז"א

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$$

לכל $a<c<b$.

הגדרה 6.2 רציפות בקטע סגור

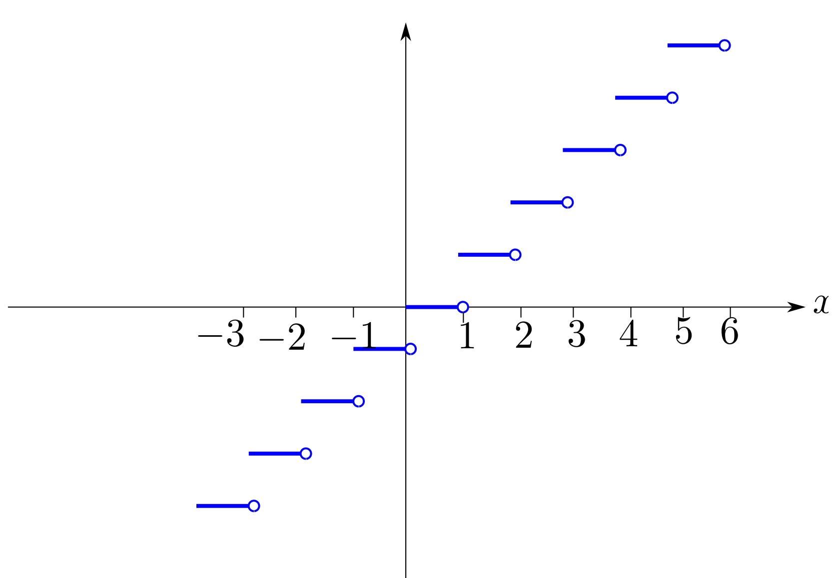
פונקציה $f(x)$ נקראת רציפה בקטע סגור $[a,b]$ אם f רציפה בכל נקודה פנימית הקטע וגם

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \ , \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b) \ .$$

דוגמה 6.1

$f(x)=\lfloor x\rfloor$, פונקצית הרצפה של x (ז"א אומרת המספר השלם הקרוב ביותר ל- x ופחות מ- x). קבע אם $f(x)$ רציפה בקטע $[1,2]$.

פתרון:

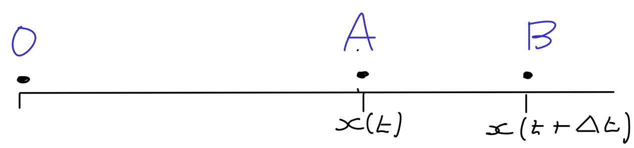


בקטע הפתוח $(1,2)$ $f(x)=1$ - רציפה.

$$\lim_{x\to 1^+}[x]=1\ ,\quad f(1)=1$$
$$\lim_{x\to 2^-}[x]=1\ ,\quad f(2)=2$$

לכן f לא רציפה משמאל בנקודה $x=2$, $f(x)$ רציפה מימין בנקודה $x=1$. אז $f(x)$ לא רציפה בקטע סגור $[1,2]$, אבל f רציפה בקטע $[1,2)$. ■

6.2 משמעות הפיזית של נגזרת



נניח שגוף הנמצא בנקודה $x(t)$ בזמן התחלתי t, נע לנקודה $x(t+\Delta t)$ ומסתיים שם בזמן סופי $t+\Delta t$. המהירות הממוצעת היא

$$\mathrm{v}=\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\ .$$

מכאן המהירות הרגעית בנקודה A היא

$$\mathrm{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\mathrm{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=x'(t)\ .$$

ז"א המשמעות הפיזית של הנגזרת היא מהירות.

הגדרה 6.3 הנגזרת

הנגזרת של פונקציה $f(x)$ בנקודה x תסומן $f'(x)$ ותוגדר

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\ .$$

דוגמה 6.2

$\underline{f(x)=c}$

$$c'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=0\ .$$

דוגמה 6.3

$\underline{f(x)=x}$

$$x' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x} = 1 \ .$$

דוגמה 6.4

$\underline{f(x)=x^2}$

$$\begin{aligned}(x^2)' =& \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}\\ =& \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x^2+2\Delta x\cdot x+\Delta x^2-x^2}{\Delta x}\\ =& \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\Delta x\cdot x+\Delta x^2}{\Delta x}\\ =& \lim_{\Delta x\to 0} (2\cdot x+\Delta x)\\ =& 2x \ .\end{aligned}$$

דוגמה 6.5

$\underline{f(x)=x^n}$

$$\begin{aligned}(x^n)' =& \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}\\ =& \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2+\cdots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^{n-k}\Delta x^k+\cdots+\Delta x^n-x^n}{\Delta x}\\ =& \lim_{\Delta x\to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2+\cdots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^{n-k}\Delta x^k+\cdots+\Delta x^n}{\Delta x}\\ =& \lim_{\Delta x\to 0} \left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x+\cdots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^{n-k}\Delta x^{k-1}+\cdots+\Delta x^{n-1}\right)\\ =& nx^{n-1} \ .\end{aligned}$$

דוגמה 6.6

$\underline{f(x)=\ln x}$

$$\begin{aligned}
(\ln x)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \ln\left[\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x}\right]\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \ln\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x}}\right]\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{x}\ln\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]\\
&=\frac{1}{x}\cdot \lim_{\Delta x\to 0} \ln\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]\\
&=\frac{1}{x}\cdot \ln\left(\lim_{\Delta x\to 0}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]\right)\\
&=\frac{1}{x}\cdot\ln(e)\\
&=\frac{1}{x}\ .
\end{aligned}$$

דוגמה 6.7

$f(x)=\frac{1}{x}$

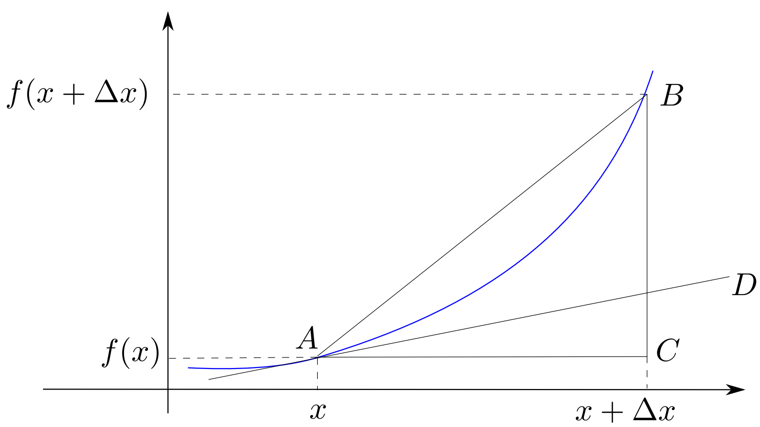
$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{x\cdot(x+\Delta x)\cdot\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x\cdot(x+\Delta x)}\\
&=\frac{-1}{x^2}\ .
\end{aligned}$$

דוגמה 6.8

$\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\ .\end{aligned}$$

6.3 משמעות הגאומטרית של נגזרת



השיפוע של הגרף בנקודה A מוגדרת להיות השיפוע של המשיק לגרף בנקודה A - ז"א השיפוע של הישר AD.
הנקודה A $(x,f(x))$ ו- B הנקודה $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$.
המיתר AB חופף את המשיק AD בגבול כאשר B מתקרב לנקודה A, וזה מתרחש כאשר $\Delta x\to 0$.
לכן, ניתן לחשב את השיפוע של המשיק ע"י השיפוע של הישר AB בגבול כאשר $\Delta x\to 0$.
מכאן נובע כי

$$\text{"שיפוע של המשיק"} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{BC}{AC} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

הצד ימין הוא הנגזרת של $f(x)$ בנקודה A.
ז"א מצאנו כי השיפוע של גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה x - שווה לנגזרת בנקודה זו.

6.4 משוואת המשיק ומשוואת הנורמל

למה 6.1 משיק ונורמל של גרף

משוואת הישר המשיק לקו $y=f(x)$ בנקודה x_0 היא

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

משוואת הישר הנורמל לקו $y=f(x)$ בנקודה x_0 היא

$$y-y_0=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

דוגמה 6.9

$f(x)=x^2$. מצא את משוואת המשיק ומשוואת הנורמל בנקודה $x=2$.

פתרון:

משוואת המשיק:

$$y-2^2=2\cdot 2(x-2) \qquad \Rightarrow \qquad y-4=4(x-2)\ .$$

ומשוואת הנורמל:

$$y-2^2=\frac{-1}{2\cdot 2}(x-2) \qquad \Rightarrow \qquad y-4=-\frac{1}{4}(x-2)\ .$$

■

6.5 גזירות

הגדרה 6.4 נגזרת חד-צדדי

תהי f פונקציה. הנגזרת חד-צדדי מצד שמאל של f בנקודה a מוגדרת

$$f'_-(a)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\ .$$

הנגזרת חד-צדדי מצד ימין של f בנקודה a מוגדרת

$$f'_+(a)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\ .$$

הגדרה 6.5 פונקציה גזירה

פונקציה נקראת גזירה בנקודה a אם הגבול $f'(a)$ קיימת (שווה למספר ממשי סופי). כלומר, f גזירה בנקודה a אם הגבול החד-צדדי

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

קיים.

נובע ממשפט **??** כי פונקציה f גזירה בנקודה a אם הגבולות הנגזרות החד-צדדיות שוות, כלומר אם

$$f'_-(a)=f'_+(a)\ .$$

משפט 6.1 קשר בין גזירות ורציפות

פונקציה $f(x)$ שהיא גזירה בנקודה a רציפה בנקודה זו.

שים לב, $f(x)$ רציפה בנקודה a לא בהכרח גזירה ב- a.

הוכחה:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-f(a)\right)=\lim_{x\to a}\left[\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\cdot(x-a)\right]=\left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\cdot\left(\lim_{x\to a}(x-a)\right)$$

f גזירה ב a לכן הגבול $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ קיים ושווה לנגזרת $f'(a)$. לכן נקבל

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-f(a)\right)=f'(a)\cdot\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\cdot 0=0\ .$$

ז"א

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-f(a)\right)=0\qquad\Rightarrow\qquad\lim_{x\to a}f(x)=f(a)\ .$$

ולכן הגבול $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ קיים ושווה ל $f(a)$. לכן f רציפה ב a. ■

דוגמה 6.10

.1

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}\ .$$

נבדוק אם $f(x)$ רציפה בנקודה $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^+}|x|=\lim_{x\to 0^+}x=0\ ,\qquad\lim_{x\to 0^-}|x|=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0\ .$$

לכן $f(x)$ רציפה בנקודה $x=0$.

נבדוק אם $f(x)$ גזירה בנקודה $x=0$:

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}\quad=-1\ ,$$
$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}\quad=1\ .$$

לכן מכיוון ש- $f'_-(0)\neq f'_+(0)$ אז f אינה גזירה ב- $x=0$. ז"א לא קיים משיק בנקודה $x=0$.

.2

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}\ .$$

נבדוק אם $f(x)$ רציפה בנקודה $x=0$. שים לב $\sin(\frac{1}{x})$ חסומה ולפיו

$$\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0\ .$$

שים לב $f(0)=0$ ולכן $f(x)$ רציפה ב- $x=0$.

נבדוק אם $f(x)$ גזירה בנקודה $x=0$:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(0+\Delta x)\sin\left(\frac{1}{0+\Delta x}\right)-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)}{\Delta x}\ .$$

הגבול לא קיים ולכן $f(x)$ אינה גזירה ב- $x=0$.

6.6 כללי הנגזרת

משפט 6.2 כללים יסודיים של נגזרות

1. סכום של פונקציות
$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)\ .$$
2. מכפלת פונקציה בסקלר
$$(\alpha f(x))'=\alpha f'(x)\ .$$
3. כלל הכפל
$$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\ .$$
4. כלל המנה
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}\ .$$
5. כלל השרשרת
$$[f\left(g(x)\right)]'=f\left(g\right)'_g\cdot g(x)'_x\ .$$

6.7 דוגמאות

דוגמה 6.11

$$\left[\ln\left(x^4-2x^2+6\right)\right]'=\frac{1}{x^4-2x^2+6}\cdot(4x^3-4x)$$

דוגמה 6.12

$$\left[7^{x^2-4x}\right]'=7^{x^2-4x}\cdot\ln 7\cdot(2x-4)\ .$$

דוגמה 6.13

מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ בנקודה $A(\pi/2,2)$.

פתרון:

$$f'(x)=8\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{2}\ .$$
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-8\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}=-8\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=-2\ .$$

משוואת המשיק:

$$y-2=-2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

משוואת הנורמל:

$$y-2=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

■

6.8 זווית בין קווים עקומים

דוגמה 6.14

מצא את הזווית בין הקווים $y=\frac{x}{2}$ ו- $y=\frac{1}{1+x}$ בנקודת החיתוך שלהם שבה $x>0$. צייר את הסקיצה המתאימה.

פתרון:

נקודת חיתוך:

$$\frac{x}{2}=\frac{1}{x+1}\qquad\Rightarrow\qquad x(x+1)=2\qquad\Rightarrow\qquad x^2+x-2=0\qquad\Rightarrow\qquad x=1\ .$$

נקודת חיתוך: $(1,0.5)$

שיפוע של y_1:

$$y_1=\frac{x}{2}\ ,\qquad y_1'=\frac{1}{2}\ ,\qquad y_1'(1)=\frac{1}{2}=m_1\ .$$

שיפוע של y_2:

$$y_2=\frac{1}{\ldots}\ ,\qquad y_2'=\frac{-1}{(\ldots)^2}\ ,\qquad y_1'(1)=\frac{-1}{\ldots}=m_2\ .$$

<u>חישוב הזווית בין y_1 ו- y_2:</u>

$$\tan\alpha = \frac{|m_1 - m_2|}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{6}{7}$$

כך ש-

$$\alpha = 40.6^\circ \ .$$

■

6.9 נגזרת של פונקציה סתומה

דוגמה 6.15

נתונה הפונקציה $y(x)$ הניתנת ע"י

$$x^2 + y^2 = 1 \ .$$

מצא את הנגזרת $y'(x)$.

פתרון:

נגזור את אגף השמאך ואגף הימין:

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2y \cdot y' = -2x \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{x}{y} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \ .$$

■

דוגמה 6.16

נתונה הפונקציה $y(x)$ הניתנת ע"י

$$e^x - x - y + x \cdot e^y = 0 \ .$$

מצא את משוואת המשיק בנקודה $(0,1)$.

פתרון:

נגזור את אגף השמאך ואגף הימין:

$$e^x - 1 - y' + e^y + x \cdot y' \cdot e^y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e^x - 1 + e^y = y'\left(1 - x \cdot e^y\right) \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{e^x - 1 + e^y}{1 - x \cdot e^y} \ .$$

ולפיו בנקודה $(0,1)$,

$$y' = \frac{1 - 1 + e}{1} = e$$

כך שמשוואת המשיק בנקוזה זו היא

$$y - 1 = e \cdot x \ .$$

■