היחידה למתמטיקה

$5/7/2022$ ו' בתמוז תשפ"ב
$09:00-12:00$

חדו"א 2

מועד א'

מרצים: ד'ר ירמיהו מילר, ד'ר אבנר סגל

תשפ"ב סמסטר ב'

השאלון מכיל עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (עמודים בפורמט $A4$),מצורפים לשאלון.

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות בלבד מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** בלבד מתוך **שתיים**.

==

<u>שאלות 1-2 חובה</u>

שאלה 1 **(20 נקודות)**

נתונה הפונקציה $f(x,y) = xy + x^2 + 2y^2 + 7y$.

א) (10 נקודות) מצאו את הנקודות הקריטיות של הפונקציה ובררו את סוגן.

ב) (10 נקודות) מצאו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימאלי אותם מקבלת הפונקציה בתחום הסגור החסום ע"י הקווים $x-y-4=0$,$y=0$,$x=0$.

שאלה 2 **(22 נקודות)**

א) (10 נקודות) מצאו את תחום ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{n \cdot 4^n} \ .$$

בנקודה $x=7$ קבעו האם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

ב) (12 נקודות) סרטטו את תחום האינטגרציה, החליפו את סדר האינטגרציה וחשבו:

$$\int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} y^2 \, dy \ .$$

שאלה 3 **(16 נקודות)**

א) (12 נקודות) מצאו את הערכים של הפרמטרים a ו- b עבורם ה מישור $x - 2ay + z + 2 = 0$ מקביל לישר

$$\frac{x+b}{-7a} = \frac{y-b}{a-1} = \frac{z-4}{a-2} \ .$$

כדשהמרחק בין הישר והמישור הוא $\sqrt{6}$ יחידות.

ב) (4 נקודות) בררו את התכנסות הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2n^2+3n+1}$$

שאלה 4 **(16 נקודות)**

א) (12 נקודות) מצאו את משוואת המישור המשיק למשטח

$$\ln(xy-z)=0\ .$$

בנקודה $P(2,2,3)$ והראוכי הוא נחתך עם ציר ה- y.

ב) (4 נקודות) בהינתן הפונקציה $u(x,y,z)=\ln(xy-z)$ והנקודה $P(2,2,3)$ הראו כי לכל וקטור יחידה $\hat{a}$ מתקיים

$$-3\le\frac{du}{d\hat{a}}(P)\le 3\ .$$

שאלה 5 (16 נקודות)

נתון הגוף הסגור D החסום ע"י המשטחים

$$x^2+y^2=4\ ,\quad z=0\ ,\quad z=4-x\ .$$

א) (10 נקודות) חשבו את מסת הגוף D, בהינתן צפיפות מסה $\rho(x,y,z)=z$.

ב) (6 נקודות) סרטטו את הגוף D וחשבו את הנפח שלו.

שאלה 6 (16 נקודות)

א) (12 נקודות) חשבו את האינטגרל המסילתי $\oint\limits_L (x-y)^2dx+2xy\,dy$ כאשר L הוא המצולע המחבר בין הקודקודים $A(2,0),B(2,2),C(0,2)$ בכיוון החיובי.

ב) (4 נקודות) הגדירו מהו טור מתכנס בתנאי ותנו דוגמא לטור כזה.

שאלה 7 10 נקודות

מצאואת משוואת הספירה החסומה על ידי הפ ירמידה

$$x\ge 0\ ,\quad y\le 0\ ,\quad 0\le z\le 8-2x+2y$$

כך שהספירה משיקה לכל פאות יהשל הפ ירמידה.

שאלה 8 10 נקודות מצאואת המרחק המינימאלי בין המשטחים

$$z=x^2+y^2\ ,\quad x^2+y^2+(z-9)^2=1\ .$$

פתרונות

שאלה 1

א) הנקודות הקריטיות (חשודות לקיצון) של הפונקציה f הן הנקודות P שעבורן

$$\nabla f(P) = 0.$$

לכן נחשב נגזרות חלקיות:

$$f'_x(x,y) = y + 2x \qquad f'_y(x,y) = x + 4y + 7$$

ונשווה אותן לאפס:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y + 2x = 0 \\ x + 4y + 7 = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (1,-2)$$

לכן הנקודה הקריטית היחידה של f היא $P_1(1,-2)$. נחשב את $\Delta(P_1)$:

$$f''_{xx}(x,y) = 2 \qquad f''_{yy}(x,y) = 4 \qquad f''_{xy}(x,y) = 1$$

ולכן

$$\Delta(P_1) = f''_{xx}(P_1)f''_{yy}(P_1) - \left(f''_{xy}(P_1)\right)^2 = (2)(4) - (1)^2 = 7 > 0$$

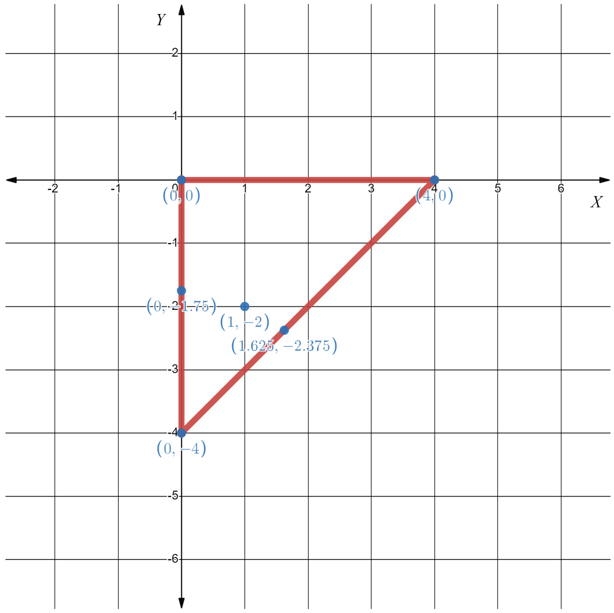
מכאן רואים שהנקודה P_1 היא נקודת קיצון מקומי. מכיוון שמתקיים

$$f''_{xx}(P_1) = 2 > 0$$

זוהי נקודת מינימום מקומי.

ב) התחום (המישורי) הנתון הוא המשולש המוגבל על ידי שלושת הצלעות הבאות:

$$\begin{cases} y = 0, & 0 \le x \le 4 \\ x = 0, & -4 \le y \le 0 \\ y = x - 4, & 0 \le x \le 4 \end{cases}$$



רשימת הנקודות החשודות כנקודות קיצון מוחלטות של f בתחום מורכבת מ: נקודות קריטיות בפנים התחום, הקודקודים של התחום, ונקודות קריטיות בתנאי על הצלעות של התחום.

- בפנים של התחום: נשים לב לעובדה שנקודת הקיצון המקומי $P_1 = (1, -2)$ שמצאנו בסעיף (א) אכן נמצאת בתוך התחום מכיוון שהיא מקיימת את האי-שיוונים

$$0 \leq x \leq 4, \quad x - 4 \leq y \leq 0$$

ולכן נכניס אותה לרשימה.

- הקודקודים של התחום הם:

$$P_2(0,0), \quad P_3(4,0), \quad P_4(0,-4)$$

ונכניס את כולם לרשימה.

- נחקור את הצלע

$$y = 0, \quad 0 \leq x \leq 4$$

נציב את משוואת הצלע $y = 0$ בתוך הנוסחה של הפונקציה המקורית f, ונקבל:

$$f(x,0) = x(0) + x^2 + 2(0)^2 + 7(0) = x^2$$

כך ש f הופכת להיות פונקציה של משתנה x בלבד. נגזור אותה לפי x ונקבל:

$$f'(x) = 2x$$

נחפש נקודות חשודות לקיצון על הצלע הזאת על ידי השוואת הנגזרת לאפס:

$$f'(x) = 0 \iff 2x = 0 \iff x = 0$$

מקבלים רק את הנקודה $(0,0)$, שהיא הנקודה P_2 שכבר הכנסנו לרשימה בגלל היותה אחד מהקודקודים.

□ נחקור את הצלע

$$x=0,\quad -4\leq y\leq 0$$

נציב את משוואת הצלע $x=0$ בתוך הנוסחה של הפונקציה המקורית f, ונקבל:

$$f(0,y)=(0)y+(0)^2+2y^2+7y=2y^2+7y$$

כך ש f הופכת להיות פונקציה של משתנה y בלבד. נגזור אותה לפי y ונקבל:

$$f'(y)=4y+7$$

נחפש נקודות חשודות לקיצון על הצלע הזאת על ידי השוואת הנגזרת לאפס:

$$f'(y)=0 \iff 4y+7=0 \iff y=-\frac{7}{4}$$

נשים לב שמתקיים $0 \leq -\frac{7}{4} \leq -4$ ולכן הנקודה $P_5(0,-\frac{7}{4})$ אכן נמצאת על הצלע הזאת, ונכניס אותה לרשימה.

□ נחקור את הצלע

$$y=x-4,\quad 0\leq x\leq 4$$

נציב את משוואת הצלע $y=x-4$ בתוך הנוסחה של הפונקציה המקורית f, ונקבל:

$$\begin{aligned}f(x,x-4)&=x(x-4)+x^2+2(x-4)^2+7(x-4)\\&=x^2-4x+x^2+2x^2-16x+32+7x-28\\&=4x^2-13x+4\end{aligned}$$

כך ש f הופכת להיות פונקציה של משתנה x בלבד. נגזור אותה לפי x ונקבל:

$$f'(x)=8x-13$$

נחפש נקודות חשודות לקיצון על הצלע הזאת על ידי השוואת הנגזרת לאפס:

$$f'(x)=0 \iff 8x-13=0 \iff x=\frac{13}{8}$$

נשים לב שמתקיים $4 \leq \frac{13}{8} \leq 0$ ולכן הנקודה המתאימה אכן נמצאת על הצלע הזאת. נחפש את הערך של y המתאים לפי משוואת הצלע:

$$y=x-4=\frac{13}{8}-4=\frac{13}{8}-\frac{32}{8}=-\frac{19}{8}$$

ונכניס את הנקודה $P_6(\frac{13}{8},-\frac{19}{8})$ לרשימה.

לבסוף, נחשב את הערך של f עבור כל הנקודות שמצאנו:

	(x,y)	$f(x,y)$
P_1	$(1,-2)$	-7
P_2	$(0,0)$	0
P_3	$(4,0)$	16
P_4	$(0,-4)$	4
P_5	$(0,-\frac{7}{4})$	$-\frac{49}{8}$
P_6	$(\frac{13}{8},-\frac{19}{8})$	$-\frac{105}{16}$

לסיכום,

- הערך הגדול ביותר הוא 16 (שמתקבל בנקודה $P_3(4,0)$).
- הערך הקטן ביותר הוא -7 (שמתקבל בנקודה $P_1(1,-2)$).

שאלה 2

א) נציב $t=x-3$ ונקבל טור חזקות מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ עבור $a_n=\frac{(-1)^n}{n4^n}$. נחשב את רדיוס ההתכנסות בעזרת נוסחת קושי:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n4^n}\right|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n4^n}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n4^n}=4\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=4\cdot 1=4$$

לחילופין, ניתן להיעזר במבחן דלמבר:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{n4^n}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n4^n}}{\frac{1}{(n+1)4^{n+1}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)4^{n+1}}{n4^n}=4\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=4\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=4\cdot 1=4$$

בכל מקרה רואים שרדיוס ההתכנסות הוא $R=4$.
מכיוון ש-$R=4$, הטור מתכנס עבור $-4<t<4$. כלומר, עבור $-1<x<7$ מכיוון ש- $t=x-3$.
נבדוק את התכנסות הטור בקצוות הקטע:

- עבור $x=-1$, נקבל הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1-3)^n}{n4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-4)^n}{n4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

זהו הטור ההרמוני, שמתבדר. כלומר, $x=-1$ לא נמצא בתחום ההתכנסות של טור החזקות הנתון.

- עבור $x=7$, מתקבל הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(7-3)^n}{n4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(4)^n}{n4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

זהו טור מחליף סימן. אפשר נשים לב כי:

* הטור אינו מתכנס בהחלט שכן טור הערכים המוחלטים הוא הטור ההרמוני (ועל כן מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

לכן הטור (עבור $x=7$) אינו מתכנס בהחלט.

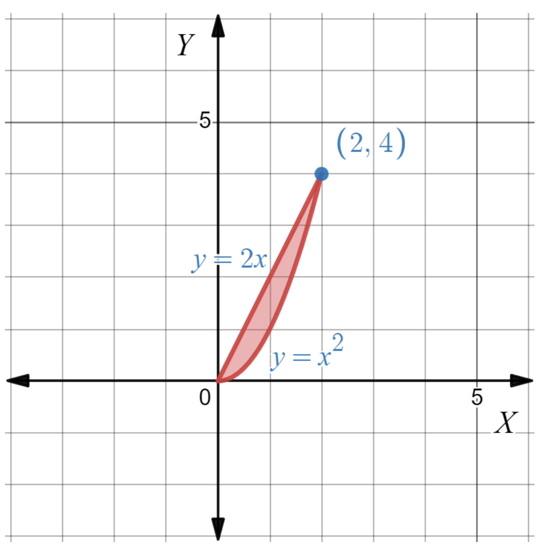
* הטור עצמו מתכנס שכן הוא מקיים את מבחן לייבניץ. כדי לבדוק זאת, נרשום אותו תחילה בצורה $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$, כאשר $b_n=\frac{1}{n}$, ונבדוק את שלושת התנאים של מבחן לייבניץ:
  # $b_n=\frac{1}{n}>0$;
  # $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$;
  # $\{b_n\}=\{\frac{1}{n}\}$ היא סדרה מונוטונית יורדת. למשל כי הנגזרת של הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ היא פונקציה יורדת בתחום $(0,\infty)$ מכיוון ש-$f'(x)=\frac{1}{x^2}<0$.

לכן על פי מבחן לייבניץ, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס. כלומר, $x=7$ נמצא בתחום ההתכנסות של טור החזקות הנתון.

לסיכום, תחום ההתכנסות של טור החזקות הוא הקטע החצי-פתוח וחצי-סגור $(-1,7]$, כלומר $-1<x\leq 7$, ועבור $x=7$, הטור מתכנס בתנאי.

ב) תחום האינטגרציה הוא:

$$0\leq x\leq 2$$
$$x^2\leq y\leq 2x$$



ניתן לרשום את התחום גם על ידי האי-שיוויונים הבאים:

$$0 \le y \le 4$$
$$\frac{y}{2} \le x \le \sqrt{y}$$

ולכן, לאחר החלפת סדר האינטגרציה מתקבל האינטגרל

$$\int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} y^2 dy = \int_0^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} y^2 dx$$

אפשר לחשב את האינטגרל בכל אחד מהסדרים. בחישוב על פי הסדר המקורי נקבל:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} y^2 dy &= \int_0^2 dx \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=2x} \\
&= \int_0^2 dx \left[\frac{(2x)^3}{3} - \frac{(x^2)^3}{3}\right] \\
&= \frac{1}{3}\int_0^2 \left[8x^3 - x^6\right] dx \\
&= \frac{1}{3}\left[2x^4 - \frac{x^7}{7}\right]_{x=0}^{x=2} \\
&= \frac{1}{3}\left[\left(2(2)^4 - \frac{(2)^7}{7}\right) - \left(2(0)^4 - \frac{(0)^7}{7}\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\left(32 - \frac{128}{7}\right) - 0\right] \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{224}{7} - \frac{128}{7}\right) \\
&= \frac{96}{21} = \frac{32}{7}
\end{aligned}$$

לחילופין, בחישוב לאחר החלפת סדר האינטגרציה:

$$\begin{aligned}
\int_0^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} y^2 dx &= \int_0^4 dy \left[y^2 x\right]_{x=\frac{y}{2}}^{x=\sqrt{y}} \\
&= \int_0^4 dy \left[y^2(\sqrt{y}) - y^2\left(\frac{y}{2}\right)\right] \\
&= \int_0^4 \left[y^{5/2} - \frac{y^3}{2}\right] dy \\
&= \left[\frac{y^{7/2}}{7/2} - \frac{y^4}{4\cdot 2}\right]_{y=0}^{y=4} \\
&= \left(\frac{(4)^{7/2}}{7/2} - \frac{(4)^4}{4\cdot 2}\right) - \left(\frac{(0)^{7/2}}{7/2} - \frac{(0)^4}{4\cdot 2}\right) \\
&= \left(\frac{256}{7} - 32\right) - 0 \\
&= \frac{256}{7} - \frac{224}{7} = \frac{32}{7}
\end{aligned}$$

שאלה 3

א) משוואת המישור הנתון היא

$$x - 2ay + z + 2 = 0$$

ולכן הווקטור $\bar{N} = (1, -2a, 1)$ נורמלי למישור זה.

משוואת הישר הנתון היא

$$\frac{x+b}{-7a} = \frac{y-b}{a-1} = \frac{z-4}{a-2}$$

מכאן שהישר עובר דרך נקודה $(-b, b, 4)$ והוקטור $\bar{c} = (-7a, a-1, a-2)$ הוא וקטור כיוון שלו.
כדי שהמישור והישר יהיו מקבילים, נדרוש שווקטור הכיוון של הישר יהיה מאונך לווקטור הנורמל של המישור. כלומר, נדרוש

$$\begin{aligned}
0 = \bar{N}\cdot\bar{c} &= (-7a, a-1, a-2)\cdot(1, -2a, 1) \\
&= (-7a)(1) + (a-1)(-2a) + (a-2)(1) \\
&= -7a - 2a^2 + 2a + a - 2 \\
&= -2a^2 - 4a - 2 \\
&= -2(a+1)^2
\end{aligned}$$

ולכן $a = -1$. כלומר, משוואת המישור היא

$$x + 2y + z + 2 = 0$$

המרחק בין ישר למישור הוא המרחק בין נקודה כלשהי על הישר למישור. לכן, כדי למצוא את הערך של b, נחשב את המרחק בין הנקודה $(-b, b, 4)$ (שהיא נמצאת על הישר) לבין המישור בעזרת נוסחת מרחק בין נקודה למישור ונדרוש שהמרחק הזה יהיה שווה ל $\sqrt{6}$:

$$\sqrt{6} = D = \frac{|(1)(-b) + (2)(b) + (1)(4) + (2)|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (1)^2}} = \frac{|b+6|}{\sqrt{6}}$$

ולכן

$$|b+6| = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 6$$

כלומר, $b = 0$ או $b = -12$.

ב) הטור הוא $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ עבור $a_n = \frac{(-1)^n n^2}{2n^2+3n+1}$. נחשב

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n n^2}{2n^2+3n+1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+3n+1} \cdot \frac{1/n^2}{1/n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

לכן הטור לא מקיים את התנאי ההכרחי להתכנסות טורים (במילים אחרות, הטור מקיים את התנאי המספיק להתבדרות טורים) ולכן הטור מתבדר.

שאלה 4

א) הנקודה $P(2,2,3)$ אכן נמצאת על המשטח $\ln(xy - z) = 0$ כיוון שמתקיים

$$\ln\big((2)(2) - (3)\big) = \ln(4-3) = \ln(1) = 0$$

המשטח הוא משטח רמה של הפונקציה $u(x,y,z) = \ln(xy - z)$. מקדמי משוואת המישור המשיק נתונים על ידי הקואורדינטות של הגרדיאנט של u בנקודה. לכן נחשב את הנגזרות החלקיות של u בנקודה P:

$$\begin{aligned}
u'_x(x,y,z) &= \frac{y}{xy-z} &\implies u'_x(P) &= \frac{(2)}{(2)(2)-(3)} = 2 \\
u'_y(x,y,z) &= \frac{x}{xy-z} &\implies u'_y(P) &= \frac{(2)}{(2)(2)-(3)} = 2 \\
u'_z(x,y,z) &= \frac{-1}{xy-z} &\implies u'_z(P) &= \frac{-1}{(2)(2)-(3)} = -1
\end{aligned}$$

נציב בנוסחא למשוואת מישור המשיק למשטח רמה בנקודה P ונקבל:

$$\begin{aligned}
u'_x(P)(x-2) + u'_y(P)(y-2) + u'_z(P)(z-3) &= 0 \\
\Rightarrow 2(x-2) + 2(y-2) - 1(z-3) &= 0 \\
\Rightarrow 2x - 4 + 2y - 4 - z + 3 &= 0 \\
\Rightarrow 2x + 2y - z - 5 &= 0
\end{aligned}$$

יש מספר דרכים להראות שהמישור הנ"ל נחתך עם ציר y:

- נציב $x=0, z=0$ במשוואת המישור, ונקבל $y=\frac{5}{2}$, כך שנקודת החיתוך בין המישור לציר y היא הנקודה $(0,\frac{5}{2},0)$.
- וקטור כיוון של ציר ה-y הוא $\hat{\jmath}=(0,1,0)$. הווקטור $\bar{n}=(2,2,-1)$ הוא נורמל למישור. נחשב

$$\hat{\jmath}\cdot\bar{n}=(0,1,0)\cdot(2,2,-1)=2\neq 0$$

לכן הוקטורים $\hat{\jmath},\bar{n}$ לא מאונכים זה לזה, מה שאומר שציר y לא מקביל למישור או מוכל בו ולכן נחתך איתו.

- אילו המישור היה מקביל לציר y (או מכיל אותו) אז המשתנה y לא היה מופיע במשוואת המישור. מכיוון שהמקדם של y במשוואה הוא $B=2\neq 0$, על כן, המישור נחתך עם הישר.

ב) לפי הנגזרות החלקיות שחישבנו בסעיף (א), ניתן לומר שהגרדיאנט של u בנקודה P הוא

$$\nabla u(P)=\big(u'_x(P),u'_y(P),u'_z(P)\big)=(2,2,-1)$$

ולכן

$$|\nabla u(P)|=|(2,2,-1)|=\sqrt{(2)^2+(2)^2+(-1)^2}=3$$

הערך הגדול ביותר של נגזרת כיוונית (ביחס לוקטור יחידה) בנקודה נתונה הוא האורך של הגרדיאנט, והערך הקטן ביותר של נגזרת כיוונית בנקודה נתונה הוא מינוס האורך של הגרדיאנט. כלומר,עבור כל וקטור יחידה $\hat{a}$ במרחב, מתקיים

$$-3\leq\frac{du}{d\hat{a}}(P)\leq 3$$

לחילופין, עבור וקטור יחידה $\hat{a}$ הנמצא בזווית θ יחסית ל- $\nabla u(P)$, מתקיים

$$\frac{du}{d\hat{a}}(P)=\hat{a}\cdot\nabla u(P)=|\hat{a}|\,|\nabla u(P)|\cos\theta=3\cos\theta$$

מכיוון ש- $-1\leq\cos\theta\leq 1$ מתקבל ש-

$$-3\leq\frac{du}{d\hat{a}}(P)\leq 3$$

שאלה 5

א)
- המשטח $x^2+y^2=4$ הוא גליל מעגלי בעל רדיוס 2 שציר הסימטריה/הציר המרכזי שלו הוא ציר z עצמו.
- המשטח $z=0$ הוא מישור xy.
- המשטח $z=4-x$ הוא מישור משופע שמקביל לציר y.

התחום הוא הגוף מרחבי (תלת-מימדי) הבא:

$$D=\left\{(x,y,z)\middle|\begin{array}{l}x^2+y^2\leq 4\\ 0\leq z\leq 4-x\end{array}\right\}$$

ההיטל של התחום D על המישור xy הוא העיגול:

$$D' = \left\{(x,y)\middle| x^2+y^2 \le 4\right\}$$

ובמעבר לקואורדינטות קוטביות, העיגול הזה הוא:

$$D' = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\middle|_{0\le\theta\le 2\pi}^{0\le r\le 2}\right\}$$

לכן, המסה של הגוף היא:

$$\begin{aligned}
M &= \iiint\limits_D \rho(x,y,z)dxdydz \\
&= \iint\limits_{D'} dxdy \int_0^{4-x} zdz \\
&= \iint\limits_{D'} dxdy \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=4-x} \\
&= \iint\limits_{D'} dxdy \left[\frac{(4-x)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\iint\limits_{D'} (4-x)^2 dxdy \\
&= \frac{1}{2}\iint\limits_{D'} (16-8x+x^2) dxdy \\
&= \frac{1}{2}\iint\limits_{D'} \left(16-8r\cos\theta+(r\cos\theta)^2\right) rdrd\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 r\ dr \int_0^{2\pi} (16-8r\cos\theta+r^2\cos^2\theta)\ d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 (32\pi r+\pi r^3)\ dr \\
&= \frac{1}{2}\left(16\pi r^2+\frac{\pi}{4}r^4\right|_0^2 = 34\pi
\end{aligned}$$

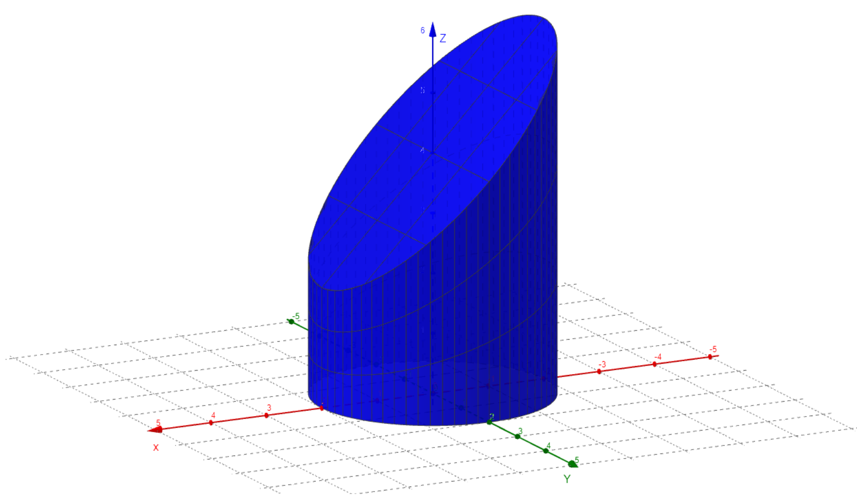
מכיוון ש-

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\ d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\ d\theta = \left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right|_0^{2\pi} = \pi$$

לחילופין, לאחר המעבר לקואורדינטות קוטביות, ניתן לחשב את אינטגרל בצורה הבאה

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1}{2}\iint_{D'}\left(16-8r\cos\theta+(r\cos\theta)^2\right)r\,dr\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\left(16-8r\cos\theta+(r\cos\theta)^2\right)r\,dr \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(16r-8r^2\cos\theta+r^3\cos^2\theta)dr \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\left[\frac{16r^2}{2}-\frac{8r^3\cos\theta}{3}+\frac{r^4\cos^2\theta}{4}\right]_{r=0}^{r=2} \\
&= \int_0^{2\pi}\left[16-\frac{32\cos\theta}{3}+2\cos^2\theta\right]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[16-\frac{32\cos\theta}{3}+(1+\cos(2\theta))\right]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[17-\frac{32\cos\theta}{3}+\cos(2\theta)\right]d\theta \\
&= \left[17\theta-\frac{32\sin\theta}{3}+\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\
&= (34\pi-0+0)-(0-0+0)=34\pi
\end{aligned}$$

ב) הגוף D נתון על ידי הסרטוט הבא:



אפשר לחשב נפח של גוף על ידי חישוב של אינטגרל משולש של הפונקציה הקבועה 1 מעל התחום שהוא הגוף המרחבי, כדלהלן. לחילופין, אפשר לחשב את הנפח על ידי אינטגרל כפול של הקצוות לפי z מעל התחום שהוא ההיטל של הגוף על המישור xy, ואז מתחילים את החישוב בשורה שמסומנת $(*)$.

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_D dxdydz \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 4} dxdy \int_0^{4-x} dz \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 4} dxdy\, [z]_{z=0}^{z=4-x} \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 4} dxdy\, [(4-x)-(0)] \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 4} (4-x)dxdy && (*) \\
&= \iint_{\substack{0\le r\le 2\\ 0\le\theta\le 2\pi}} (4-r\cos\theta) r dr d\theta \\
&= \int_0^2 rdr \int_0^{2\pi} (4-r\cos\theta)d\theta \\
&= \int_0^2 rdr\, [4\theta - r\sin\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\
&= \int_0^2 rdr\, \Big[\big(4(2\pi)-r\sin(2\pi)\big)-\big(4(0)-r\sin(0)\big)\Big] \\
&= 8\pi \int_0^2 rdr \\
&= 8\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=2} \\
&= 8\pi \left[\frac{(2)^2}{2}-\frac{(0)^2}{2}\right] \\
&= 16\pi
\end{aligned}
$$

בנוסף, ניתן היה לחשב את הנפח בצורה גיאומטרית ללא אינטגרלים. המישור החותך את הגליל חותך אותו בין גובה $z=2$ לגובה $z=6$. על כן, נפח הצורה הזו שווה לנפח גליל שרדיוסו 2 וגובהו 4 (הממוצע בין 2 ל-6). כלומר:

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$$

שאלה 6

א) מדובר באינטגרל קווי מסוג שני לאורך מסלול סגור L בכיוון החיובי, לכן ניתן להשתמש בנוסחת גרין:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

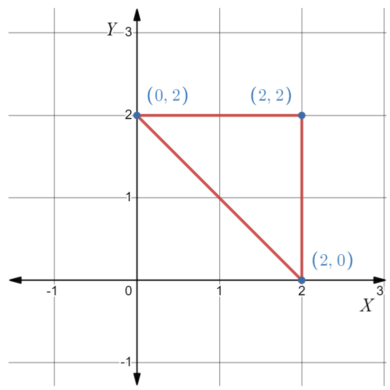
כאשר D הוא התחום החסום על ידי המסלול L.

הפונקציות P ו-Q והנגרות החלקיות הרלוונטיות שלהן נתונות על ידי:

$$P(x,y) = (x-y)^2 \implies \frac{\partial P}{\partial y} = 2(x-y)(-1) = -2x+2y$$

$$Q(x,y) = 2xy \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$$

בעוד התחום D הוא המשולש בעל הקודקודים $A(2,0), B(2,2), C(0,2)$,



שניתן לתאר על ידי האי-שיוויונים הבאים:

$$0 \le x \le 2$$
$$2-x \le y \le 2$$

לכן האינטגרל נתון על ידי:

$$\oint_L (x-y)^2 dx + 2xydy = \int_0^2 dx \int_{2-x}^2 \big(2y - (-2x+2y)\big) dy$$

$$= \int_0^2 dx \int_{2-x}^2 2xdy$$

$$= \int_0^2 2xdx \int_{2-x}^2 dy$$

$$= \int_0^2 2xdx [y]_{y=2-x}^{y=2}$$

$$= \int_0^2 2x^2 dx$$

$$= \frac{2x^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=2} = \frac{16}{3}$$

ב) טור מתכנס בתנאי הוא טור שמתכנס אבל לא מתכנס בהחלט. לדוגמה:

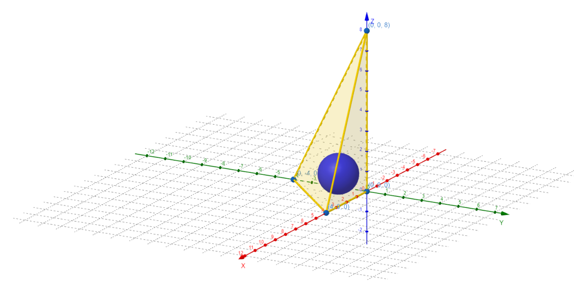
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

(זהו הטור שכבר נתקלנו בו בפתרון של שאלה 2(ב))
כמובן, יש דוגמאות נוספות רבות.

שאלה 7

משוואת ספירה בעלת רדיוס R שמרכזה בנקודה (a,b,c) היא

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$



כדי שכל אחד משלושת המישורים $x=0, y=0, z=0$ ישיק לספירה וגם יגביל אותה בכיוון הנכון, כלומר כך שהספירה תהיה מוכלת בפרמידה (טטראדר), מרכז הספירה צריך להתקבל בנקודה $(R,-R,R)$. לכן, משוואת הספירה היא מהצורה

$$(x-R)^2+(y+R)^2+(z-R)^2=R^2$$

כדי שהספירה תשיק גם למישור $2x-2y+z-8=0$, נדרוש שהמרחק ממרכז הספירה למישור זה יהיה גם כן שווה לרדיוס R, כלומר:

$$R=d(R,-R,R)=\frac{|(2)(R)+(-2)(-R)+(1)(R)+(-8)|}{\sqrt{(2)^2+(-2)^2+(1)^2}}=\frac{|5R-8|}{3}$$

ולכן

$$3R=|5R-8|$$

כלומר $R=1$ או $R=4$. אבל הנקודה $(4,-4,4)$ לא מוכלת בפרמידה שכן אינה מקיימת את אי השיוויון $z\le 8-2x+2y$ לכן הערך הנכון הוא $R=1$, ומשוואת הספירה היא:

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=1$$

שאלה 8

- המשטח

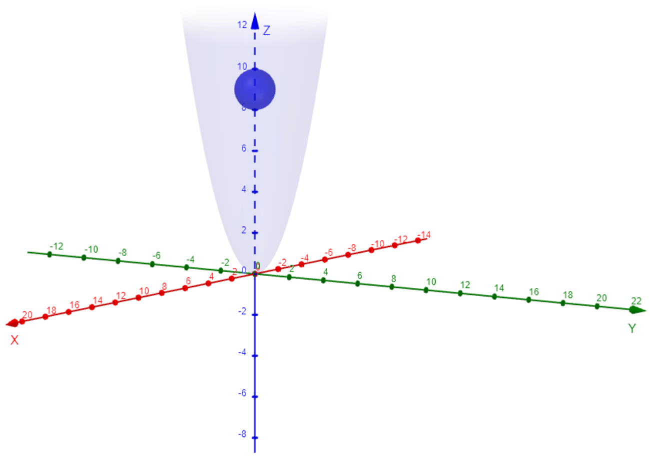
$$z = x^2 + y^2$$

הוא פרבולואיד אליפטי (מעגלי).

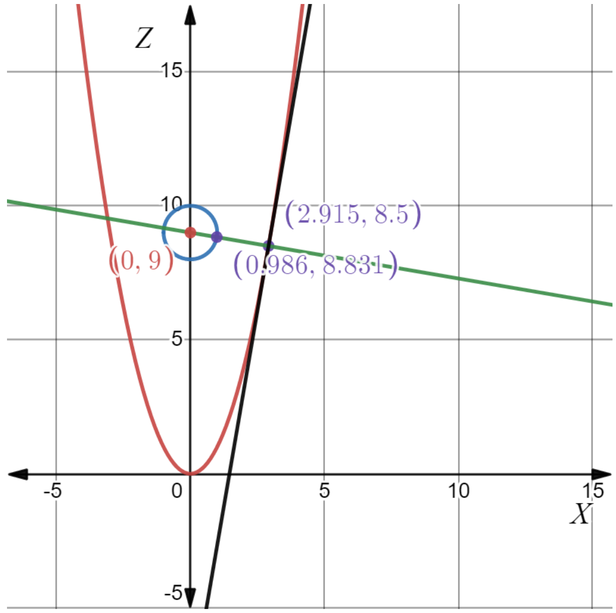
- המשטח

$$x^2 + y^2 + (z-9)^2 = 1$$

הוא ספירה ברדיוס 1 סביב $(0,0,9)$.



שיטה 1 לפתרון: אמנם אף אחד מהמשטחים המעורבים בשאלה איננו משטח גלילי, ניתן להפוך את הבעיה לבעיה דו-מימדית על ידי כך שנשים לב ששני המשטחים הם גופי סיבוב סביב ציר ה-z ולכן ניתן למצוא את המרחק במישור xz ומכאן לקבל את המרחק במרחב בעזרת סימטריה סביב ציר ה-z. כלומר, נתבונן במרחק בין המעגל והפרבולה בסרטוט הבא:



ריבוע המרחק בין הנקודה $(x,z)=(x,x^2)$ על הפרבולה לבין מרכז המעגל $(0,9)$ נתון על ידי

$$d(x)=(x-0)^2+(x^2-9)^2=x^4-17x^2+81$$

$$d'(x)=4x^3-36x=x(4x^2-34)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0,\pm\sqrt{\frac{17}{2}}$$

קל לראות שהנקודה $x=0$ היא נקודת מקסימום מקומי של המרחק בעוד הנקודות $x=\pm\sqrt{\frac{17}{2}}$ הן נקודות מינימום (מוחלט) של המרחק. לכן, המרחק בין המעגל לפרבולה הוא כמו המרחק בין הנקודה $\left(\pm\sqrt{\frac{17}{2}},\frac{17}{2}\right)$ לבין מרכז המעגל בחיסור רדיוס המעגל, כלומר

$$D=\sqrt{\left(\frac{17}{2}-0\right)^2+\left(\frac{17}{2}-9\right)^2}-1=\sqrt{\frac{35}{4}}-1$$

כעת נחזור למודל התלת-ממדי. הנקודות הקרובות ביותר על הפרבולה לספירה הן מהצורה $\left(x,y,\frac{17}{2}\right)$ כאשר

$$x^2+y^2=z=\frac{17}{2}$$

והמרחק בין הפרבולואיד והספירה הוא $D=\sqrt{\frac{35}{4}}-1$. שהוא מעט פחות מהמרחק ביניהם בגובה קו המשווה של הספירה (והרבה פחות מהמרחק לנקודה הנמוכה ביותר בפרבולואיד).

שיטה 2 לפתרון: ניתן לחפש את הנקודה (למעשה נקודות) על הפרבולואיד שהן הקרובות ביותר לספירה על ידי כך שנמצא את הנקודות שקרובות ביותר למרכז הספירה. כלומר, נחפש נקודות שבהן הנורמל לפרבולואיד מקביל לוקטור המצביע מהן למרכז הספירה. מכיוון שהנורמל לפרבולואיד בנקודה $(x,y,z)=(x,y,x^2+y^2)$ נתון על ידי הנוסחא של וקטור נורמלי למשטח רמה, ניתן לרשום אותו כך

$$\bar{N}(x,y)=(2x,2y,-1)$$

בעוד הוקטור המצביע מהנקודה על הפרבולואיד למרכז הספירה $(0,0,9)$ נתון על ידי

$$\bar{a} = (x, y, x^2 + y^2 - 9)$$

כדי שהם יהיו מקבילים, יש לפתור את המשוואה $\bar{N} = \lambda \bar{a}, \ \lambda \neq 0$ ישנן מספר דרכים לפתור את המשוואה הזו, שניתן לרשום אותה גם כמערכת:

$$\begin{cases} 2x = 2x\lambda \\ 2y = 2y\lambda \\ 2(z-9) = -\lambda \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

- אם $x \neq 0$ או $y \neq 0$ אז $\lambda = 1$ ולכן $z = \frac{17}{2}$. בנקודה זו, המרחק למרכז הספירה הוא

$$D = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + \left(\frac{17}{2} - 9\right)^2} = \sqrt{z + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{35}{4}}$$

- אם $x = 0$ וגם $y = 0$ אז $z = 0$ ולכן המרחק למרכז הספירה במקרה זה הוא $D = 9$.

קל לראות שהנקודות שעבורן $\lambda = 1$ הן הקרובות ביותר (בעוד הנקודה האחרת שנמצאה רחוקה יותר) ומכאן הפתרון הוא כמו בשיטה הקודמת.

שיטה 3 לפתרון: דרך זו היא וואריאציה על הדרך הקודמת. ניתן לחשב את המרחק בין הפרבולואיד והספירה הוא בעזרת שיטת כופלי לגרנז'. במקום למצוא מינימום של המרחק, ניתן לחפש מינימום לריבוע המרחק ממרכז הספירה:

$$d_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z-9)^2$$

כלומר, נגדיר את פונקצית לגרנז'

$$L(x, y, z, \lambda) = \left(x^2 + y^2 + (z-9)^2\right) - \lambda \left(x^2 + y^2 - z\right)$$

מהתנאי $\nabla L = \bar{0}$ מתקבלת מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} 2x = 2x\lambda \\ 2y = 2y\lambda \\ 2(z-9) = -\lambda \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

מנקודה זו, הפתרון דומה לפתרון הקודם.