

עבודת בית 1: מכפלות פנימיות

שאלה 1 האם הנוסחה $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 + y_2$ מגדירה מכפלה פנימית ב- \mathbb{R}^2 ?

שאלה 2 האם הנוסחה $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1$ מגדירה מכפלה פנימית ב- \mathbb{R}^2 ?

שאלה 3 יהיו $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. הוכיחו שהנוסחה

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + 2u_1 v_2 + 2u_2 v_1 + u_2 v_2$$

מגדירה מכפלה פנימית ב- \mathbb{R}^2 .

שאלה 4 במרחב $\mathbb{R}^{n \times n}$ נגדיר $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$ לכל $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(א) הוכיחו כי הנוסחה מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^{n \times n}$.

(ב) חשבו את הזווית בין המטריצות $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ ביחס המכפלה הפנימית הנ"ל.

שאלה 5 יהיו $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. האם הנוסחאות הבאות מגדירות מכפלות פנימיות ב- \mathbb{R}^2 ?

(א) $\langle u, v \rangle = v^t A u$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(ב) $\langle u, v \rangle = 4u_1 v_1 + u_2 v_1 + u_1 v_2 + 4u_2 v_2$.

שאלה 6 יהי V ממ"פ ויהיו $v, v' \in V$ כך ש- $v \neq v'$. הוכיחו כי תמיד קיים וקטור $w \in V$ המקיים

$$\langle v, w \rangle \neq \langle v', w \rangle.$$

שאלה 7 יהי V ממ"פ ויהיו $u, v \in V$ וקטורים המקיימים:

$$\|u\| = 3, \quad \|u + v\| = 4, \quad \|u - v\| = 6.$$

מצאו את $\|v\|$.

שאלה 8 הוכיחו או הפריכו: יהיו u_1, u_2 וקטורים במרחב מכפלה פנימית ממשי המקיימים:

$$\|u_1\| = \|u_2\| = 2, \quad \langle u_1, u_2 \rangle = 1.$$

אזי מתקיים:

$$\|u_1 - 2u_2\| = 4.$$

שאלה 9 יהי V מרחב מכפלה פנימית ממשי. הוכיחו כי עבור כל $u, v \in V$ מתקיימת הזהות הפולרית

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2).$$

שאלה 10 הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k \cdot 2^k} \leq \sqrt{(n^2 + n) \cdot (2^n - 1)}.$$

שאלה 11 בעזרת אי-שוויון קושי-שוורץ הוכיחו כי

$$(a \cos \theta + b \sin \theta)^2 \leq a^2 + b^2$$

לכל $a, b, \theta \in \mathbb{R}$.

שאלה 12 עבור אילו ערכי $k \in \mathbb{R}$, הוקטורים $u = \begin{pmatrix} k \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} k \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ הם אורתוגונליים?

שאלה 13 נתונים 2 הוקטורים ב- \mathbb{R}^4 עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית:

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(א) בדקו כי הוקטורים אורתוגונליים.

(ב) נרמלו את שני הוקטורים.

(ג) ודאו כי מתקיים השוויון שלמדנו בהרצאה:

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

שאלה 14 במרחב מכפלה פנימית $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ עם המכפלה פנימית הסטנדרטית $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$ לכל $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

(א) הראו כי הקבוצה

$$\left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מהווה מערכת אורתונורמלית ב- $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ביחס למכפלה הפנימית הנ"ל.

(ב) חשבו את הנורמה של $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

שאלה 15 במרחב של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[0, 1]$ עם המכפלה פנימית האינטגרלי הסטנדרטית שמוגדרת

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx .$$

חשבו את הזווית בין $f(x) = x$ ו- $g(x) = \sqrt{x}$.

שאלה 16 חשבו את ההיטל של $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ על $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

שאלה 17 חשבו את ההיטל של $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ על $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

שאלה 18 תהי $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ קבוצה אורתוגונלית של ווקטורים במרחב מכפלה פנימית. הוכיחו כי מתקיים

$$\|u_1 + u_2 + \dots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \dots + \|u_n\|^2 .$$

תשובות

שאלה 1 לא. הסבר: נסמן $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ אז

$$\langle \alpha \cdot u, v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \alpha x_1 + y_2 ,$$

$$\alpha \langle u, v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \alpha (x_1 + y_2) ,$$

לכן

$$\langle \alpha \cdot u, v \rangle \neq \alpha \langle u, v \rangle .$$

שאלה 2 הפונקציה לא מכפלה פנימית. דוגמה נגדית:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-2) = -4 \neq 0 .$$

שאלה 3

(1)

(2) סימטריות:

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + 2u_1 v_2 + 2u_2 v_1 + u_2 v_2 = (u_1 + u_2)(v_1 + v_2) = (v_1 + v_2)(u_1 + u_2) = \langle v, u \rangle .$$

(3) לינטאריות:

שאלה 6

$$\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4\operatorname{Re} \langle u, v \rangle .$$

נציב

שאלה 7

$$\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4\operatorname{Re} \langle u, v \rangle .$$

$$\text{נציב } \|u + v\| = 4 \text{ ו- } \|u - v\| = 6 :$$

$$16 - 36 = 4\operatorname{Re} \langle u, v \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle u, v \rangle = -\frac{4}{20} = -\frac{1}{5} .$$

ז"א

$$16 = \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle u, v \rangle = 9 + \|v\|^2 - \frac{2}{5} .$$

לכן

$$\|v\|^2 = 7 + \frac{2}{5} = \frac{37}{5} .$$

שאלה 9

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle - \|u\|^2 - \|v\|^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle \\ &= 2 \langle u, v \rangle + 2 \langle v, u \rangle\end{aligned}$$

המרחב ממשי לכן $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle} = \langle u, v \rangle$. נציב ונקבל:

$$\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4 \langle u, v \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle u, v \rangle = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) .$$

מש"ל.

שאלה 10

יהי V המרחב המכפלה פנימית הסטנדרטית מעל הדה \mathbb{R} . נגדיר את שני וקטורים $a, b \in V$:

$$a = \begin{pmatrix} \sqrt{1} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \vdots \\ \sqrt{n} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2^{1/2} \\ 2^{2/2} \\ 2^{3/2} \\ \vdots \\ 2^{n/2} \end{pmatrix} .$$

לפי אי-השוויון קושי שוורץ:

$$|\langle a, b \rangle| = \|a\| \cdot \|b\| .$$

$$\langle a, b \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{1} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \vdots \\ \sqrt{n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2^{1/2} \\ 2^{2/2} \\ 2^{3/2} \\ \vdots \\ 2^{n/2} \end{pmatrix} \right\rangle = 2^{1/2} \cdot \sqrt{1} + 2^{2/2} \cdot \sqrt{2} + 2^{3/2} \cdot \sqrt{3} + \dots + 2^{n/2} \cdot \sqrt{n} = \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \cdot 2^{k/2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{k \cdot 2^k} .$$

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle} = \sqrt{\sqrt{1} \cdot \sqrt{1} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} = \sqrt{\sum_{k=1}^n k} .$$

$$\text{נציב } \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n \cdot (n+1) \text{ ונקבל}$$

$$\|a\| = \sqrt{\frac{1}{2} n \cdot (n+1)} .$$

$$\|b\| = \sqrt{\langle b, b \rangle} = \sqrt{2^{1/2} \cdot 2^{1/2} + 2^{2/2} \cdot 2^{2/2} + 2^{3/2} \cdot 2^{3/2} + \dots + 2^{n/2} \cdot 2^{n/2}} = \sqrt{\sum_{k=1}^n 2^k}$$

$$\text{נציב } \sum_{k=1}^n 2^k = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2(2^n - 1) \text{ ונקבל}$$

$$\|b\| = \sqrt{2(2^n - 1)} .$$

לפיכך לפי אי-השוויון קושי שזורץ:

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \cdot 2^{k/2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{k \cdot 2^k} \leq \sqrt{\frac{1}{2} n \cdot (n+1)} \cdot \sqrt{2(2^n - 1)} = \sqrt{(n^2 + n) \cdot (2^n - 1)}.$$

שאלה 16

$$v_0 = P_v(u) = \frac{\langle v, u \rangle}{\|v\|^2} v = \frac{1}{14} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{7}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

בדיקה:

$$u - v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

$$\langle u - v_0, v_0 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0.$$

שאלה 17

$$u_0 = P_u(v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} u = \frac{1}{4} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{7}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

בדיקה:

$$v - u_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{7}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -3/4 \\ -7/4 \\ 9/4 \end{pmatrix}.$$

$$\langle v - u_0, u_0 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1/4 \\ -3/4 \\ -7/4 \\ 9/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7/4 \\ 7/4 \\ 7/4 \\ 7/4 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{7}{16} - \frac{21}{16} - \frac{49}{16} + \frac{63}{16} = 0.$$

שאלה 18 נוכיח לפי אינדוקציה. עבור $n = 2$:

$$\|u_1 + u_2\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle u_1, u_2 \rangle \stackrel{0}{=} \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2.$$

נניח שהטענה נכונה עבור $n = N$. נוכיח אותה עבור $n = N + 1$. נגדיר $v = u_1 + u_2 + \dots + u_N$. לפי משפט פיתגורס:

$$\|v + u_{N+1}\|^2 = \|v\|^2 + \|u_{N+1}\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle v, u_{N+1} \rangle.$$

כל הווקטורים אורתוגונליים זה לזה לכך

$$\langle v, u_{N+1} \rangle = \langle u_1, u_{N+1} \rangle + \langle u_2, u_{N+1} \rangle + \dots + \langle u_N, u_{N+1} \rangle = 0 + 0 + \dots + 0 = 0.$$

נציב ונקבל כי

$$\|v + u_{N+1}\|^2 = \|v\|^2 + \|u_{N+1}\|^2 .$$

לפי ההנחת האינדוקציה

$$\|v\|^2 = \|u_1 + \dots + u_N\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \dots + \|u_N\|^2 ,$$

לכן

$$\|u_1 + \dots + u_N + u_{N+1}\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \dots + \|u_N\|^2 + \|u_{N+1}\|^2 .$$

מש"ל.