

שיעור 8

רדוקציה

8.1 טבלה של רדוקציות

טבלה של רדוקציות

רדוקציה	עמוד
$L_{\text{HALT}} \leq L_{\text{acc}}$	דוגמה 8.6 עמוד 84
$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{\text{NOTREG}}$	דוגמה 8.11 עמוד 88
$L_{\text{acc}} \leq L_{\text{NOTREG}}$	דוגמה 8.12 עמוד 89
$L_{\text{HALT}} \leq L_{\text{NOTREG}}$	דוגמה 8.13 עמוד 90
$L_{\text{acc}} \leq L_{\text{REG}}$	דוגמה 8.15 עמוד 92
$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{\text{REG}}$	דוגמה 8.14 עמוד 91
$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \cap M_2}$ כאשר $L_{M_1 \cap M_2} = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2) \}$	דוגמה 8.16 עמוד 93
$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \subset M_2}$ כאשר $L_{M_1 \subset M_2} = \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) \subset L(M_2) \}$	דוגמה 8.17 עמוד 93

8.2 מכונת טיורינג המחשבת את פונקציה

הגדרה 8.1 מכונת טיורינג המחשבת פונקציה

בהינתן פונקציה $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ אומרים כי מ"ט M מחשבת את f אם לכל $x \in \Sigma^*$:

- M מגיעה ל- q_{acc} בסוף החישוב של $f(x)$ וגם
- על סרט הפלט של M רשום $f(x)$.

הערה 8.1

מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה עוצרת תמיד.

הגדרה 8.2 פונקציה חשיבה

בהינתן פונקציה $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ אומרים כי f חשיבה אם קיימת מכונת טיורינג המחשבת את f .

8.1 דוגמה

$$f_1(x) = xx \quad (8.1)$$

$f_1(x)$ חשיבה.

8.2 דוגמה

$$f_2(x) = \begin{cases} x & |x| \text{ זוגי} \\ xx & |x| \text{ אי-זוגי} \end{cases} \quad (8.2)$$

$f_2(x)$ חשיבה.

8.3 דוגמה

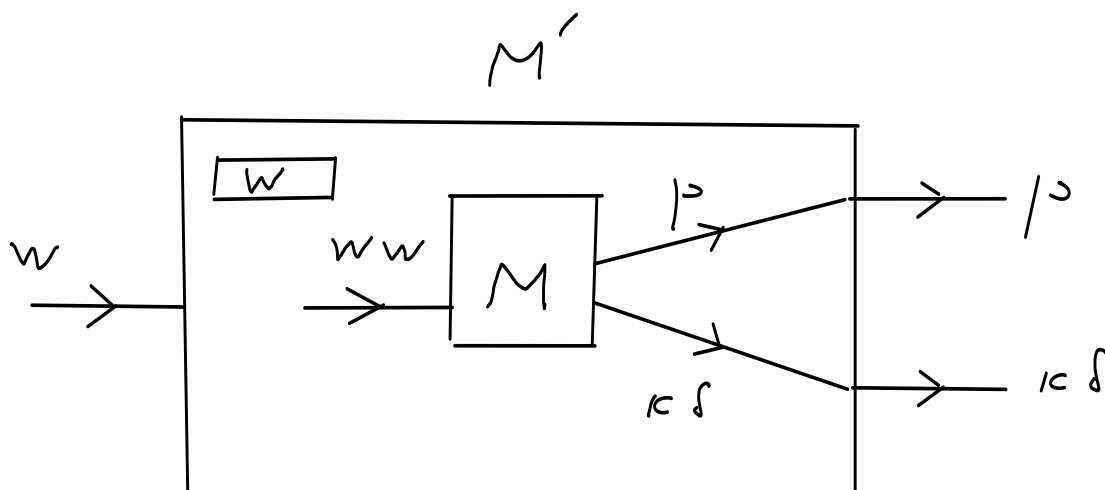
$$f_3(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M \rangle \\ \langle M^* \rangle & x \neq \langle M \rangle \end{cases} \quad (8.3)$$

כאשר

• M^* מ"ט שמקבלת כל קלט.

• M' מ"ט המקבלת את השפה

$$L(M') = \{w \in \Sigma^* \mid ww \in L(M)\}$$



$f_3(x)$ חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שבודקת האם $x = \langle M \rangle$. אם לא, מחזירה קידוד קבוע $\langle M^* \rangle$. ואם כן, מחזירה קידוד $\langle M' \rangle$ ע"י הוספת מעברים המשכפלים את הקלט בתחילת הקידוד $\langle M \rangle$.

8.4 דוגמה

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & x = \langle M \rangle \wedge \langle M \rangle \in L(M) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad (8.4)$$

$f_4(x)$ לא חשיבה כי ייתכנו קלטים $x = \langle M \rangle$ ו- M לא עוצרת על $\langle M \rangle$.

8.3 רדוקציות

הגדרה 8.3 רדוקציות

בהינתן שתי שפות $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ אומרים כי L_1 ניתנת לרדוקציה ל- L_2 , ומסמנים

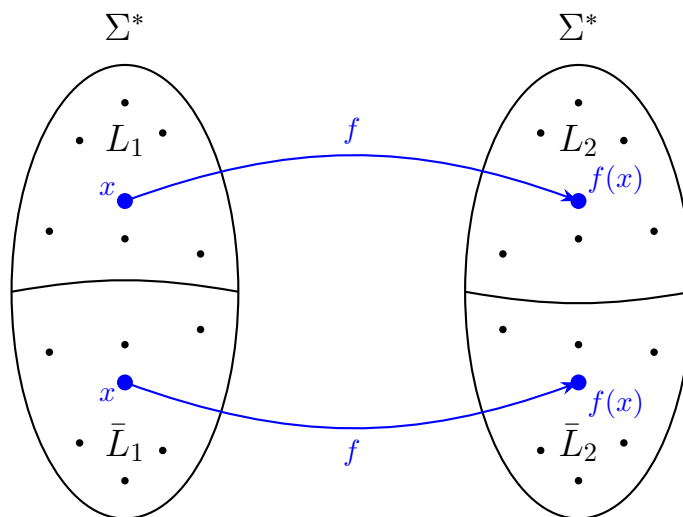
$$L_1 \leqslant L_2 ,$$

אם \exists פונקציה $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ המקיימת:

(1) f חשיבה

(2) לכל $x \in \Sigma^*$:

$$x \in L_1 \iff f(x) \in L_2 .$$



8.5 דוגמה

נתונות השפות

$$L_1 = \{x \in \{0,1\}^* \mid |x| \text{ זוגי} \} ,$$

$$L_2 = \{x \in \{0,1\}^* \mid |x| \text{ אי-זוגי} \} .$$

הוכיחו כי

$$L_1 \leqslant L_2 .$$

פתרון:

נגדיר את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \text{ זוגי} \\ 10 & |x| \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

$$f(x) \in L_2 \Leftarrow |f(x)| \text{ אי-זוגי} \Leftarrow f(x) = 1 \Leftarrow |x| \text{ זוגי} \Leftarrow x \in L_1$$

$$f(x) \notin L_2 \Leftarrow |f(x)| \text{ זוגי} \Leftarrow f(x) = 10 \Leftarrow |x| \text{ אי-זוגי} \Leftarrow x \notin L_1$$

משפט 8.1 משפט הרדוקציהלכל שתי שפות $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, אם קיימת רדוקציה

$$L_1 \leq L_2$$

אזי התנאים הבאים מתקיימים:

$$L_1 \in R \Leftarrow L_2 \in R \quad (1)$$

$$L_1 \in RE \Leftarrow L_2 \in RE \quad (2)$$

$$L_1 \notin R \Rightarrow L_2 \notin R \quad (3)$$

$$L_1 \notin RE \Rightarrow L_2 \notin RE \quad (4)$$

הוכחה: מכיוון ש-

$$L_1 \leq L_2$$

קיימת פונקציה f חשיבה המקיימת:

$$x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$$

לכל $x \in \Sigma^*$.תהי M_f מ"ט המחשבת את f .

$$(1) \quad \underline{L_1 \in R \Leftarrow L_2 \in R} \quad \text{נוכיח}$$

תהי M_2 מ"ט המכריעה את L_2 .נבנה מ"ט M_1 המכריעה את L_1 .התאור של M_1

$$M_1 = \text{על קלט } x:$$

1. מחשבת את $f(x)$ בעזרת M_f .2. מריצה את M_2 על $f(x)$ ועונה כמוה.נוכיח כי M_1 מכריעה את L_1 .

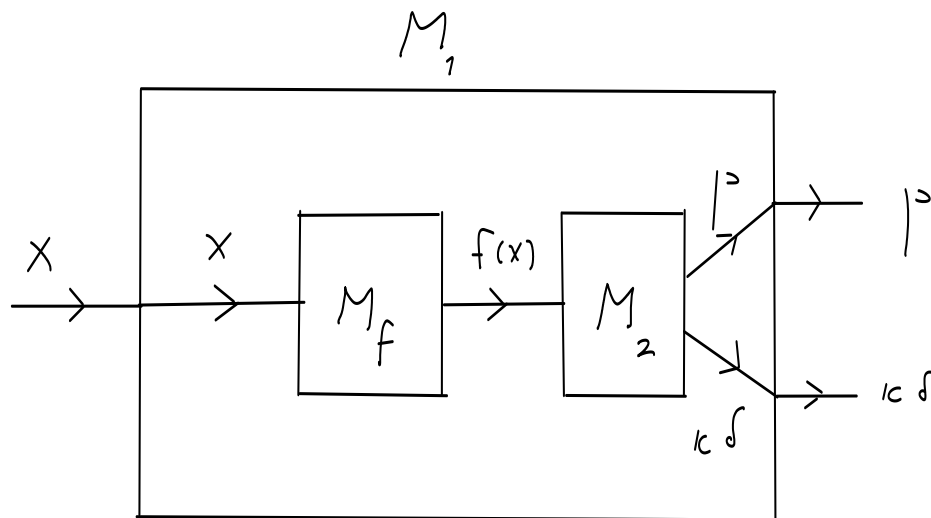
$$\bullet \quad \text{אם } x \in L_1 \Leftarrow f(x) \in L_2 \Leftarrow M_2 \text{ מקבלת את } f(x) \Leftarrow M_1 \text{ מקבלת את } x.$$

• אם $x \notin L_1 \Leftrightarrow f(x) \notin L_2 \Leftrightarrow M_2$ דוחה את $f(x) \Leftrightarrow M_1$ דוחה את x .

(2) נוכיח $L_1 \in RE \Leftrightarrow L_2 \in RE$

תהי M_2 מ"ט המקבלת את L_2 .

נבנה מ"ט M_1 המקבלת את L_1 .



התאור של M_1

$M_1 =$ על קלט x :

1. מחשבת את $f(x)$ בעזרת M_f .

2. מריצה את M_2 על $f(x)$ ועונה כמוה.

נוכיח כי M_1 מקבלת את L_1 :

• אם $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2 \Leftrightarrow M_2$ מקבלת את $f(x) \Leftrightarrow M_1$ מקבלת את x .

• אם $x \notin L_1 \Leftrightarrow f(x) \notin L_2 \Leftrightarrow M_2$ לא מקבלת את $f(x) \Leftrightarrow M_1$ לא מקבלת את x .

(3)

(4)

כלל 8.1

• אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי $L \in RE$, בוחרים שפה אחרת $L' \in RE$ ומראים שקיימת רדוקציה

$$L \leq L'.$$

לדוגמה:

$$L \leq L_{\text{acc}}$$

(כנ"ל לגבי R)

- אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי $L \notin RE$ בוחרים שפה אחרת $L' \notin RE$ ומראים שקיימת רדוקציה

$$L' \leq L.$$

לדוגמה

$$L_d \leq L$$

(כנ"ל לגבי R).

8.6 דוגמה

נתונות השפות $L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\}$ ו- $L_{\text{halt}} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ עוצרת על } w\}$.
הוכיחו כי $L_{\text{acc}} \notin R$ ע"י רדוקציה $L_{\text{acc}} \leq L_{\text{halt}}$.

פתרון:

נבנה פונקציה f חשיבה ומקיימת

$$x \in L_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{\text{halt}}.$$

$$M \text{ מקבלת את } w \iff M' \text{ תעצור על } w'.$$

$$M \text{ דוחה את } w \iff M' \text{ לא תעצור על } w'.$$

$$M \text{ לא עוצרת את } w \iff M' \text{ לא תעצור על } w'.$$

$$f(x) = \begin{cases} \langle M', w \rangle & : x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\text{loop}}, \varepsilon \rangle & : x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- M_{loop} מ"ט שלא עוצרת על אף קלט.

- M' מ"ט המתנהגת כמו M פרט למקומות בהם M עצרה ודחתה, M' תיכנס ללולאה אינסופית.

נכונות הרדוקציה

f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x = \langle M, w \rangle$.

אם לא, תחזיר קידוד קבוע $\langle M_{\text{loop}}, w \rangle$

ואם כן, תחזיר קידוד $\langle M', w \rangle$ ע"י ביצוע שינויים לוקלים בקידוד של M .

$$x \in L_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{\text{halt}}$$

אם $x \in L_{\text{acc}}$

$$w \in L(M) \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$$

$$f(x) = \langle M', w \rangle \Leftarrow \text{עוצרת ומקבלת את } w \text{ ו- } M'$$

$$f(x) \in L_{\text{halt}} \Leftarrow$$

אם $x \notin L_{\text{acc}}$ אז שני מקרים:

מקרה 1:

$$f(x) \notin L_{\text{halt}} \Leftarrow f(x) = \langle M_{\text{loop}}, \varepsilon \rangle \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$$

מקרה 2:

$$f(x) = \langle M', w \rangle \Leftarrow x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } w \notin L(M) \text{ שני מקרים:}$$

$$f(x) \notin L_{\text{halt}} \Leftarrow M' \text{ לא עוצרת על } w \Leftarrow M \text{ לא עוצרת על } w \text{ מקרה א:}$$

$$f(x) \notin L_{\text{halt}} \Leftarrow M' \text{ לא עוצרת על } w \Leftarrow M \text{ דוחה את } w \text{ מקרה ב:}$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $L_{\text{acc}} \leq L_{\text{halt}}$. ומכיוון ש- $L_{\text{acc}} \notin R$ (משפט 7.4) אז ממשט הרדוקציה 8.1, מתקיים $L_{\text{halt}} \notin R$.

8.7 דוגמה

נתונה השפה

$$L_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^* \}$$

ונתונה השפה

$$\bar{L}_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \neq \Sigma^* \} \cup \{ x \neq \langle M \rangle \} .$$

הוכיחו כי:

$$L_{\Sigma^*} \notin R$$

פתרון:

נוכיח כי $L_{\Sigma^*} \notin R$ ע"י רדוקציה

$$L_{\text{acc}} \leq L_{\Sigma^*} .$$

נבנה פונקציה חשיבה f המקיימת

$$x \in L_{\text{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L_{\Sigma^*} .$$

$$L(M') = \Sigma^* \Leftarrow w \in L(M)$$

$$L(M') \neq \Sigma^* \Leftarrow w \notin L(M)$$

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & : x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\emptyset} \rangle & : x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

• M_{\emptyset} מ"ט שדוחה כל קלט.

• M' היא מ"ט שעל כל קלט x , מתעלמת מ- x ומריצה את M על w ועונה כמוה.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & : w \in L(M) \\ \emptyset & : w \notin L(M) \end{cases}$$

נכונות הרדוקציה:

f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x = \langle M, w \rangle$.

אם לא תחזיר קידוד קבוע $\langle M_\emptyset \rangle$.

אם כן, תחזיר קידוד $\langle M' \rangle$ ע"י הוספת קוג ל- M שמוחק את הקלט מהסרט וכותב w במקומו.

נוכיח כי

$$x \in L_{\text{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L_{\Sigma^*}$$

$$\Leftrightarrow L(M') = \Sigma^* \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M' \rangle \Leftrightarrow w \in L(M) \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{אם } x \in L_{\text{acc}} \\ f(x) \in L_{\Sigma^*} \end{matrix}$$

$$\text{אם } x \in L_{\text{acc}} \Leftrightarrow \text{שני מקרים:}$$

$$\text{מקרה 1: } f(x) \notin L_{\Sigma^*} \Leftrightarrow L(M_\emptyset) = \emptyset \text{ ו- } f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \Leftrightarrow x \neq \langle M, w \rangle$$

$$\text{מקרה 2: } f(x) \notin L_{\Sigma^*} \Leftrightarrow L(M') = \emptyset \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M' \rangle \Leftrightarrow w \notin L(M) \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $L_{\text{acc}} \leq L_{\Sigma^*}$. ומכיוון ש- $L_{\text{acc}} \notin R$ (משפט 7.4) אז ממשט הרדוקציה 8.1, מתקיים $L_{\Sigma^*} \notin R$.

8.8 דוגמה

נתונה השפה

$$L_d = \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \}$$

ונתונה השפה

$$\bar{L}_{\text{acc}} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \notin L(M) \} \cup \{ x \neq \langle M, w \rangle \} .$$

הוכיחו כי

$$\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE \text{ ע"י רדוקציה}$$

$$L_d \leq \bar{L}_{\text{acc}} .$$

פתרון:

נבנה פונקציה חשיבה f המקיימת

$$x \in L_d \Leftrightarrow f(x) \in L_{\text{acc}} .$$

$$w' \notin L(M') \Leftrightarrow \langle M \rangle \notin L(M)$$

$$w' \in L(M') \Leftrightarrow \langle M \rangle \in L(M)$$

$$f(x) = \begin{cases} \langle M, \langle M \rangle \rangle & : x = \langle M \rangle \\ \langle M^*, \varepsilon \rangle & : x \neq \langle M \rangle \end{cases}$$

כאשר M^* המ"ט שמקבלת כל קלט.

נכונות הרדוקציה:

f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x = \langle M, w \rangle$

אם לא תחזיר קידוד קבוע $\langle M^*, \varepsilon \rangle$.

אם כן, תחשב $\langle M, \langle M \rangle \rangle$.

נוכיח כי

$$\begin{aligned} x \in L_d &\Leftrightarrow f(x) \in \bar{L}_{acc} \\ \Leftrightarrow \langle M \rangle \notin L(M) \text{ ו- } f(x) = \langle M, \langle M \rangle \rangle &\Leftrightarrow \langle M \rangle \notin L(M) \text{ ו- } x = \langle M \rangle \Leftrightarrow \begin{aligned} &x \in L_d \text{ אם } \\ &f(x) \in \bar{L}_{acc} \end{aligned} \end{aligned}$$

אם $x \notin L_d$ שני מקרים:

$$\text{מקרה 1: } f(x) \notin \bar{L}_{acc} \Leftrightarrow \varepsilon \in L(M^*) \text{ ו- } f(x) = \langle M^*, \varepsilon \rangle \Leftrightarrow x \neq \langle M \rangle$$

$$\text{מקרה 2: } f(x) \notin \bar{L}_{acc} \Leftrightarrow \langle M \rangle \in L(M) \text{ ו- } f(x) = \langle M, \langle M \rangle \rangle \Leftrightarrow \langle M \rangle \in L(M) \text{ ו- } x = \langle M \rangle$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $L_d \leq \bar{L}_{acc}$, ומכיוון ש- $L_d \notin RE$ (משפט 7.3) אז ממשט הרדוקציה 8.1, מתקיים $\bar{L}_{acc} \notin RE$.

משפט 8.2 משפט הרדוקציה בין שפות משלימות

אם קיימת רדוקציה $L_1 \leq L_2$, אזי קיימת רדוקציה $\bar{L}_1 \leq \bar{L}_2$.

הוכחה:

אם \exists רדוקציה

$$L_1 \leq L_2$$

אזי \exists פונקציה חשיבה f המקיימת

$$x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$$

ולכן עבור אותה פונקציה f היא גם חשיבה וגם מקיימת

$$x \in \bar{L}_1 \Leftrightarrow f(x) \in \bar{L}_2$$

ולכן

$$\bar{L}_1 \leq \bar{L}_2 .$$

8.4 דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה בין שפות משלימות (משפט 8.2)

8.9 דוגמה

הוכחנו בדוגמה 8.7 רדוקציה

$$L_{acc} \leq L_{\Sigma^*}.$$

לכן לפי משפט 8.2 קיימת רדוקציה

$$\bar{L}_{acc} \leq \bar{L}_{\Sigma^*}.$$

מכיוון ש- $\bar{L}_{acc} \notin RE$, אזי ממשפט הרדוקציה 8.1 מתקיים $\bar{L}_{\Sigma^*} \notin RE$.

8.10 דוגמה

הוכחנו בדוגמה 8.8 רדוקציה

$$L_d \leq \bar{L}_{acc}.$$

לכן לפי משפט 8.2 קיימת רדוקציה

$$\bar{L}_d \leq L_{acc}.$$

מכיוון ש- $L_{acc} \in RE$, אזי ממשפט הרדוקציה 8.1 מתקיים $\bar{L}_d \in RE$.

8.5 דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה (משפט 8.1)

8.11 דוגמה

$$\bar{L}_{acc} \leq L_{NOTREG}$$

תהי L_{NOTREG} השפה

$$L_{NOTREG} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית} \}.$$

הוכיחו כי השפה L_{NOTREG} לא כריעה על ידי רדוקציה מ- \bar{L}_{acc} .

פתרון:

השפה \bar{L}_{acc} מוגדרת

$$\bar{L}_{acc} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \text{ לא מקבלת } M \} \cup \{ x \neq \langle M, w \rangle \}.$$

והשפה L_{NOTREG} מוגדרת

$$L_{NOTREG} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית} \}.$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ w' \in PAL & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M' מ"ט הבאה:

$$M' = \text{על כל קלט } y:$$

(1) אם $y \in PAL \Leftarrow$ מקבלת.

(2) אחרת מריצה M על w ועונה כמוה.

הוכחת נכונות הרדוקציה

אם $x \in \bar{L}_{acc}$ \Leftarrow שני מקרים:

מקרה 1: $x = \langle M, w \rangle$

$\Leftarrow M$ לא מקבלת w

$\Leftarrow L(M') \in PAL$

$\Leftarrow \langle M' \rangle \in PAL$

$\Leftarrow f(x) \in PAL$

$\Leftarrow f(x) \in L_{NOTREG}$

מקרה 2: $x \neq \langle M, w \rangle$ $\Leftarrow f(x) \in PAL \Leftarrow f(x) \in L_{NOTREG}$

אם $x \notin \bar{L}_{acc}$ $\Leftarrow M$ מקבלת w $\Leftarrow L(M') = \Sigma^*$ $\Leftarrow f(x) \in \Sigma^*$ $\Leftarrow f(x) \in L_{NOTREG}$

לכן הוכחנו כי $x \in \bar{L}_{acc} \Leftrightarrow f(x) \in NOTERG$, ז"א $f(x)$ היא רדוקציה מ- L_{acc} ל- L_{NOTREG} .

השפה \bar{L}_{acc} לא כריעה. לפיכך, לפי משפט הרדוקציה גם L_{NOTREG} לא כריעה.

8.12 דוגמה $L_{acc} \leq L_{NOTREG}$

תהי L_{NOTREG} השפה

$$L_{NOTREG} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית} \}.$$

הוכיחו כי השפה L_{NOTREG} לא כריעה על ידי רדוקציה מ- L_{acc} .

פתרון:

השפה L_{acc} מוגדרת

$$L_{acc} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ מקבלת } w \}.$$

והשפה L_{NOTREG} מוגדרת

$$L_{NOTREG} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית} \}.$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\emptyset} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M' מ"ט הבאה:

$M' =$ על כל קלט y :

(1) M' מריצה M על w .

(2) אם M דוחה \Leftarrow דוחה.

• אם M מקבלת $\Leftarrow M'$ בודקת אם y פלינדרום.

* אם כן \Leftarrow מקבלת.

* אם לא \Leftarrow דוחה.

הוכחת נכונות הרדוקציה

אם $x \in L_{acc}$ $\Leftarrow M$ מקבלת w $\Leftarrow L(M') = PAL$ $\Leftarrow f(x) \in PAL$ $\Leftarrow f(x) \in L_{NOTREG}$.

$x \notin L_{acc}$ \Leftarrow שני מקרים.

מקרה 1: $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow f(x) = \langle M_\emptyset \rangle$ ו- $L(M_\emptyset) = \emptyset \Leftarrow \langle M_\emptyset \rangle \notin L_{NOTREG}$ $\Leftarrow f(x) \notin L_{NOTREG}$.

מקרה 2: $x = \langle M, w \rangle$ ו- M לא מקבלת w $\Leftarrow L(M') = \emptyset \Leftarrow \langle M' \rangle \notin L_{NOTREG}$ $\Leftarrow f(x) \notin L_{NOTREG}$.

8.13 דוגמה $L_{HALT} \leq L_{NOTREG}$

תהי L_{NOTREG} השפה

$$L_{NOTREG} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית} \}.$$

הוכיחו כי השפה L_{NOTREG} לא כריעה על ידי רדוקציה מ- L_{HALT} .

פתרון:

השפה L_{HALT} מוגדרת

$$L_{HALT} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ עוצרת על } w \}.$$

והשפה L_{NOTREG} מוגדרת

$$L_{NOTREG} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית} \}.$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}.$$

כאשר M' מ"ט הבאה:

$M' =$ על כל קלט y :

(1) M' מריצה M על w .

(2) אם M דוחה \Leftarrow דוחה.

• אם M מקבלת \Leftarrow ממשיכה לשלב (3).

(3) M' בודקת אם $y \in PAL$.

• אם כן \Leftarrow מקבלת.

• אם לא \Leftarrow דוחה.

הוכחת הנכונות

$$L(M') \in L_{\text{NOTREG}} \iff L(M') \in PAL \iff x \in L_{\text{HALT}}$$

$$\text{שני מקרים:} \iff x \notin L_{\text{HALT}}$$

$$\langle M_\emptyset \rangle \notin L_{\text{NOTREG}} \iff L(M_\emptyset) = \emptyset \text{ ו- } f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle \quad \text{מקרה 1:} \\ f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} \iff$$

$$\langle M_\emptyset \rangle \notin L_{\text{NOTREG}} \iff L(M_\emptyset) = \emptyset \iff x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } M \text{ לא עוצרת על } w \\ f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} \iff \quad \text{מקרה 2:}$$

דוגמה 8.14 $\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{\text{REG}}$ תהי L_{REG} השפה

$$L_{\text{REG}} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ רגולרית} \}.$$

הוכיחו כי השפה L_{REG} לא כריעה על ידי רדוקציה מ- \bar{L}_{acc} .**פתרון:**השפה \bar{L}_{acc} מוגדרת

$$\bar{L}_{\text{acc}} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ לא מקבלת } w \} \cup \{ x \mid x \neq \langle M, w \rangle \}.$$

והשפה L_{REG} מוגדרת

$$L_{\text{REG}} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ רגולרית} \}.$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M_\emptyset המ"ט שדוחה כל קלט ו- M' מ"ט הבאה:

$$M' = \text{על כל קלט } y:$$

(1) מריצה M על w .(2) • אם M דוחה \Leftarrow דוחה.• אם M מקבלת \Leftarrow בודקת אם y פלינדרום:• אם כן \Leftarrow מקבלת.• אם לא \Leftarrow דוחה.אבחנה

$$L(M') = \begin{cases} PAL & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

הוכחת נכונות הרדוקציה

אם $x \in \bar{L}_{acc}$ שני מקרים: \Leftarrow

מקרה 1: $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow f(x) = \langle M_{\emptyset} \rangle \Leftarrow L(M_{\emptyset}) = \emptyset \Leftarrow \langle M_{\emptyset} \rangle \in L_{REG} \Leftarrow f(x) \in L_{REG}$

מקרה 2: $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow x \notin L(M) \Leftarrow f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow L(M') = \emptyset$ ולפי האבחנה $\langle M_{\emptyset} \rangle \in L_{REG} \Leftarrow f(x) \in L_{REG}$

אם $x \notin \bar{L}_{acc} \Leftarrow w \in L(M) \Leftarrow f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow L(M') \in PAL$ ולפי האבחנה $f(x) \in PAL \Leftarrow f(x) \notin L_{REG}$

8.15 דוגמה $L_{acc} \leq L_{REG}$

תהי L_{REG} השפה

$$L_{REG} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ רגולרית} \}.$$

הוכיחו כי השפה L_{REG} לא כריעה על ידי רדוקציה מ- L_{acc} .

פתרון:

השפה L_{acc} מוגדרת

$$L_{acc} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ מקבלת } w \}.$$

והשפה L_{REG} מוגדרת

$$L_{REG} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ רגולרית} \}.$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{PAL} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M_{PAL} המ"ט שמכריעה את השפה של פלינדרומים, ו- M' מ"ט הבאה:

$$M' = \text{על כל קלט } y:$$

(1) M' בודקת אם y פלינדרום:

- אם כן \Leftarrow מקבלת.
- אם לא מריצה M על w ועונה כמזה.

הוכחת נכונות הרדוקציה

אם $x \in L_{acc} \Leftarrow M \text{ מקבלת } w \Leftarrow L(M') = \Sigma^* \Leftarrow f(x) \in REG$

$x \notin L_{acc} \Leftarrow$ שני מקרים:

מקרה 1: $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow f(x) = \langle M_{PAL} \rangle \Leftarrow L(M_{PAL}) = PAL \Leftarrow \langle M_{PAL} \rangle \notin L_{REG}$

מקרה 2: $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow M \text{ לא מקבלת } w \Leftarrow L(M') = PAL \Leftarrow \langle M' \rangle \notin L_{REG}$

דוגמה 8.16 $\bar{L}_{acc} \leq L_{M_1 \neg M_2}$

נתונה השפה הבאה:

$$L = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2) \} .$$

הוכיחו כי $L \notin RE$ ע"י רדוקציה מ- \bar{L}_{acc} .**פתרון:**פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M^*, M, w \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

• M^* היא מ"ט שמקבלת כל קלט• M_\emptyset היא מ"ט שדוחה כל קלט.נכונת הרדוקציה:

ראשית, f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x = \langle M, w \rangle$. אם לא, תחזיר קידוד קבוע $\langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle$ ואם כן, תחזיר קידוד $\langle M^*, M, w \rangle$.

נוכיח כי

$$x \in \bar{L}_{acc} \iff f(x) \in L_{M_1 \neg M_2} .$$

אם $x \in \bar{L}_{acc}$ שני מקרים:

$$f(x) \in L_{M_1 \neg M_2} \iff x \neq \langle M, w \rangle \iff f(x) = \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle \iff \varepsilon \notin L(M_\emptyset) \text{ ו- } \varepsilon \in L(M^*) \iff x \notin \bar{L}_{acc} .$$

$$f(x) \in L_{M_1 \neg M_2} \iff x = \langle M, w \rangle \iff x \in L(M) \text{ ו- } w \notin L(M) \iff f(x) = \langle M^*, M, w \rangle \iff w \in L(M^*) \text{ ו- } w \notin L(M) \iff x \notin \bar{L}_{acc} .$$

$$\text{אם } x \notin \bar{L}_{acc} \iff x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } w \in L(M) \iff f(x) = \langle M^*, M, w \rangle \iff w \in L(M^*) \text{ ו- } w \in L(M) \iff f(x) \in L_{M_1 \neg M_2} .$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $\bar{L}_{acc} \leq L_{M_1 \neg M_2}$, ומכיוון ש- $\bar{L}_{acc} \notin RE$ ממשפט הרדוקציה מתקיים $L_{M_1 \neg M_2} \notin RE$.

דוגמה 8.17 $L_{acc} \leq L_{M_1 \subset M_2}$

נתונה השפה הבאה:

$$L = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2) \} .$$

הוכיחו כי $L \notin RE$ ע"י רדוקציה מ- L_{acc} .**פתרון:**פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M_\emptyset, M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset, M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- M_\emptyset היא מ"ט שדוחה כל קלט.
- M' היא מ"ט שעל קלט y מתעלמת מ- y ומריצה M על w ועונה כמוה.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}.$$

נכונת הרדוקציה:

ראשית, f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x = \langle M, w \rangle$. אם לא, תחזיר קידוד קבוע $\langle M_\emptyset, M_\emptyset \rangle$ ואם כן, תחזיר קידוד $\langle M^*, M' \rangle$, כאשר M_\emptyset היא קידוד קבוע ו- M' נוצר ע"י הוספת קוד ל- $\langle M \rangle$ המוחק את הקלט y ורושם w במקומו.

נוכיח כי

$$x \in L_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{M_1 \subset M_2}.$$

$$L(M') = \Sigma^* \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M_\emptyset, M' \rangle \iff x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } w \in L(M) \iff x \in L_{\text{acc}} \\ f(x) \in L_{M_1 \subset M_2} \iff L(M_\emptyset) \subset L(M') \iff$$

$$x \notin L_{\text{acc}} \iff \text{שני מקרים:}$$

$$\text{מקרה 1: } x \neq \langle M, w \rangle \iff f(x) = \langle M_\emptyset, M_\emptyset \rangle \text{ ו- } L(M_\emptyset) = L(M_\emptyset) \iff f(x) \notin L_{M_1 \subset M_2}.$$

$$\text{מקרה 2: } x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } w \notin L(M) \iff f(x) = \langle M_\emptyset, M' \rangle \text{ ולפי האבחנה } L(M') = \emptyset \\ L(M') = L(M_\emptyset) \iff f(x) \notin L_{M_1 \subset M_2}.$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $L_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \subset M_2}$, ומכיוון ש- $L_{\text{acc}} \notin R$ ממשפט הרדוקציה מתקיים $L_{M_1 \subset M_2} \notin R$.