# חישוביות וסיבוכיות

# טבלה של רדוקציות

עמוד	רדוקציה
דוגמה 7.6 עמוד 71	$L_{ ext{HALT}} \leqslant L_{ ext{acc}}$
75 עמוד 75	$ar{L}_{ m acc} \leqslant L_{ m NOTREG}$
76 דוגמה 7.12 עמוד	$L_{ m acc} \leqslant L_{ m NOTREG}$
77 דוגמה 7.13 עמוד	$L_{ ext{HALT}} \leqslant L_{ ext{NOTREG}}$
79 דוגמה 7.15 עמוד	$L_{ m acc} \leqslant L_{ m REG}$
78 דוגמה 7.14 עמוד	$ar{L}_{ m acc} \leqslant L_{ m REG}$
דוגמה 7.16 עמוד 80	$ar{L}_{ m acc}\leqslant L_{M_1 eg M_2}$ כאשר
	$.L_{M_1 \neg M_2} = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \land w \notin L(M_2) \}$
דוגמה 7.17 עמוד 80	$\bar{L}_{\mathrm{acc}} \leqslant L_{M_1 \subset M_2}$
	כאשר . $L_{M_1 \subset M_2} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L\left(M_1\right) \subset L\left(M_2\right)\}$

# תוכן העניינים

5	בובווו טיוו ינג	T
3	הגדרה היוריסטית של מכונת טיורינג	
7	הגדרה פורמלית של מכונת טיורינג	
20	טבלת המעברים	
24	חישוב פונקציות	
28	מודלים חישובים שקולית	2
31	מכונות טיורינג מרובת סרטים	3
31	מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה היוריסטית	
31	מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה פורמלית	
32		
34		
40	מכונת טיורינג אי דטרמיניסטיתם	4
40	הגדרה של מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית	
42		
43	שקילות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטית	

### חישוביות וסיבוכיות

דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה (משפט 7.1).  82 מבוא לסיבוכיות  הגדרה של סיבוכיות של סיט סרט יחיד ומטמ"ס יחס בין הסיבוכיות של מ"ט דטרמיניסטית ומ"ט א"ד  המחלקה PATH בעיית PATH בעיית RELPRIME	47	RE -ו $R$	5 תכונות סגירות
56 מ"ט אוניברסלית מ"ט אי-בריעות הפפות בשבת ל <sub>ו</sub>	47	Rל השפות $R$ ו- $RE$ -ו	הגדרה ש
56 מ"ט אוניברסלית מ"ט אי-בריעות הפפות בשבת ל <sub>ו</sub>	53		קידוד של
$L_{d}$ , $L_{balt}$ , $L_{bac}$ , $L_{bac}$ , $L_{bac}$ , $L_{bac}$ השפות השפות $L_{E}$ לא כריעות השפות $L_{E}$ לא כריעות השפות $L_{E}$ לא כריעות השפות $L_{E}$ לא כריעות השפות של מעפט בלה של רדוקציות המחשבת את פונקציה (משפט בלה ביינו משלימות (משפט בלה ביינו משלימות של משפט הרדוקציה (משפט בלה ביינו משלימות (משפט בלה ביינו משלימות של משפט הרדוקציה (משפט בלה ביינו משלים ביינו של משפט הרדוקציה (משפט בלה ביינו משלים ביינו של משפט הרדוקציה (משפט בלה בלה ביינו של משפט הרדוקציה (משפט בלה בלה בלה של סיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס היחיד ביינו של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס בלה בעיית המחלקה $P$ בעיית המחלקה לה המהילטוני הבלח בלה בלח בעיית המחלקה לה המהילטוני הבלח בלח בלח בע"ת המחלקה לה בלח	53		
השפה $L_E$ לא כריעה הפים השפה $L_E$ לא כריעה הפים השפה $L_E$ לא כריעה הפים השפה $L_E$ לא כריעה השפה $L_E$ לא כריעה היא ביי ביי ביי ביי ביי ביי ביי ביי ביי ב	56		6 אי-כריעות
השפה $L_E$ לא כריעה הפים השפה $L_E$ לא כריעה הפים השפה $L_E$ לא כריעה הפים השפה $L_E$ לא כריעה השפה $L_E$ לא כריעה היא ביי ביי ביי ביי ביי ביי ביי ביי ביי ב	56	$L_{ m d}$ , $L_{ m halt}$ , $L_{ m ac}$ , the contraction of the contraction of the contraction , the contraction of the contr	השפות ב
7 רדוקציה לכל הדוקציה באיר של המחשבת את פונקציה באיר של המחשבת את פונקציה באיר של משפט הרדוקציה בין שפות משלימות (משפט 7.2)  75 רדוקציות באימוש של משפט הרדוקציה בין שפות משלימות (משפט 7.3)  76 מבוא לסיבוכיות באימוש של משפט הרדוקציה (משפט 7.1)  77 מבוא לסיבוכיות באימוש של משפט הרדוקציה (משפט 7.1)  78 מבוא לסיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס  79 מבחלקה P המחלקה P א המחלקה P א המחלקה P המחלקה P המחלקה P המחלקה P המחלקה P המחלקה P א לגוריתם אימות בעיית המסלול ההמילטוני HAMPATH בעיית המסלול ההמילטוני P המחלקה P א לגוריתם אימות בעיות P המחלקה P א המחלקה P ווא אלגוריתם אימות בעיית המסלול ההמילטוני P המחלקה P ווא למיט א"ד המחלקה P ווא רביע המחלקה P ווואת של מחלקה P ווא רביע המחלקה P ווא רביע המחלץ המחלץ המחלץ המחלץ חודר P ווא רביע המחלץ המחלץ המחלץ המחלץ המחלץ המחלץ המחלץ המחלץ ה	60		
<ul> <li>סבלה של רדוקציות.</li> <li>הוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה בין שפות משלימות (משפט 7.2).</li> <li>דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה (משפט 7.1).</li> <li>מבוא לסיבוכיות בשימוש של משפט הרדוקציה (משפט 7.1).</li> <li>מבוא לסיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס.</li> <li>הגדרה של סיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס.</li> <li>יחס בין הסיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס.</li> <li>המחלקה P המחלקה P בעיית ELPRIM.</li> <li>בעיית ELPRIM.</li> <li>המחלקה P המחלקה P חבר בעיית בשל המילטוני HAMPATH.</li> <li>המחלקה P המחלקה P חבר בעיית המסלול ההמילטוני HAMPATH.</li> <li>המחלקה P המחלקה P חבר בעיית המסלול ההמילטוני HAMPATH.</li> <li>המחלקה P המחלקה P חבר בעיית המסלול ההמילטוני P המחלקה P המחלקה P המחלקה P והמחלקה P והמחלקה P ושלמות.</li> <li>המחלקות P חבר בין המחלקה P ו- P NP מייד ול חבר בעיית הספיקות.</li> <li>המחלקות P ו- NP שלמות.</li> <li>המחלקות P ו- NP שלמות.</li> <li>המחלקות P ו- NP שלמות.</li> <li>בעיית הספיקות הוא בעיית הספיקות ווא בעיית הספיקות של SAT בעיית הספיקות של SAT בעיית בSAT בעיית באבעית באבעית בסיב בעיית באבעית באבעיית באבעית באבעית באבעית באבעית בעיית באבעית באבעית בציב ב</li></ul>	62	$L_{j}$ לא כריעה $L_{j}$	$_{{ m E}Q}$ השפה
<ul> <li>מ"ט המחשבת את פונקציה (88 הדוקציות (270 המחשבת את פונקציה בין שפות משלימות (משפט 7.2)</li> <li>דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה בין שפות משלימות (משפט 7.3)</li> <li>דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה (משפט 7.3)</li> <li>מבוא לסיבוכיות (82 מבוא לסיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס מיס בין הסיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס מחלקה ה המחלקה ה המחלקה ה המחלקה מו"ט א"ד (170 מביית המסלול ההמילטוני הב"ס מודוגמאות לבעיות ב"ס מודי מודוגמאות לבעיות ב"ס מודי מודוגמאות מודוגמאות ב"ס מודי מודוגמאות מודוגמאות מודוגמאות מודוגמאות מודוגמאות של "ס מודוגמאות של "ס מודוגמאות של "ס מודוגמאות של "משפט קוק לוין" בעיית האמד מודוגמאות של "מצאד" בעיית מאמד מודוגמאות בעיית מאמד מודוגמאות ב"מצאד" בעיית מאמד מודוגמאות ב"מצאד" בעיית מאמד מודוגמאות של "מצאד" בעיית מאמד מאמד מודוגמאות של "מצאד" בעיית מאמד מודוגמאות ב"מצאד" בעיית מאמד מודוגמאות ב"מצאד" בעיית מאמד מודוגמאות ב"מצאד" ב"מצאד בעיית מאמד מודוגמאות ב"מצאד מודוגמ</li></ul>	66		7 רדוקציה
<ul> <li>מ"ט המחשבת את פונקציה (88 הדוקציות (270 המחשבת את פונקציה בין שפות משלימות (משפט 7.2)</li> <li>דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה בין שפות משלימות (משפט 7.3)</li> <li>דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה (משפט 7.3)</li> <li>מבוא לסיבוכיות (82 מבוא לסיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס מיס בין הסיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס מחלקה ה המחלקה ה המחלקה ה המחלקה מו"ט א"ד (170 מביית המסלול ההמילטוני הב"ס מודוגמאות לבעיות ב"ס מודי מודוגמאות לבעיות ב"ס מודי מודוגמאות מודוגמאות ב"ס מודי מודוגמאות מודוגמאות מודוגמאות מודוגמאות מודוגמאות של "ס מודוגמאות של "ס מודוגמאות של "ס מודוגמאות של "משפט קוק לוין" בעיית האמד מודוגמאות של "מצאד" בעיית מאמד מודוגמאות בעיית מאמד מודוגמאות ב"מצאד" בעיית מאמד מודוגמאות ב"מצאד" בעיית מאמד מודוגמאות של "מצאד" בעיית מאמד מאמד מודוגמאות של "מצאד" בעיית מאמד מודוגמאות ב"מצאד" בעיית מאמד מודוגמאות ב"מצאד" בעיית מאמד מודוגמאות ב"מצאד" ב"מצאד בעיית מאמד מודוגמאות ב"מצאד מודוגמ</li></ul>	66		טבלה של
הרוקציות השימוש של משפט הרדוקציה בין שפות משלימות (משפט (7.7)	66		
75 דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה בין שפות משלימות (משפט 2.7)  82 מבוא לסיבוכיות  83 מבוא לסיבוכיות  84 הגדרה של סיבוכיות  85 יחס בין הסיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס  86 יחס בין הסיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס  87 יחס בין הסיבוכיות של מ"ט דו מטמ"ס  88 המחלקה P  89 בעיית המחלקה P  90 בעיית המסלול ההמילטוני P  91 המחלקה P  92 המחלקה P  93 המחלקה P  94 בעיית המסלול ההמילטוני HAMPATH  95 המחלקה P  96 המחלקה P  97 המחלקה P  98 המחלקה P  99 בעיית המסלול ההמילטוני HAMPATH  99 המחלקה P  100 המחלקה P  100 החלקה P  100 החלקה P  100 השפט קודן פוין האומות הספיקות  100 השפט קודן פוין האומות הספיקות הספיקות  100 השפט קודן פוין האומות האומות בעיית הספיקות הספיקות הספיקות האומות בעיית הספיקות בעיית בעיית הספיקות בעיית בעיית הספיקות בעיית בעיית בעיית הספיקות בעיית בעיים בעיית בעיית בעיית בעיית בעיית בעיים בעי	68		
א מבוא לסיבוכיות משפט הרדוקציה (משפט 1.7.) מבוא לסיבוכיות מבוא לסיבוכיות משפט (7.1 מבוא לסיבוכיות מבורה של סיבוכיות מדרה של סיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס מיחס בין הסיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס מיחס בין הסיבוכיות של מ"ט דטרמיניסטית ומ"ט א"ד מחלקה מיחס בין הסיבוכיות של מ"ט דטרמיניסטית ומ"ט א"ד מחלקה מיחס מדר מבעיית המחלקה מיחס מדר מבעיית מחלקה מיחס מדר מבעיית המסלול ההמילטוני המחלקה מיחס מדר בין מוחס מדר מדר מדר מוחס מדר מדר מדר מוחס מדר מדר מוחס מדר מדר מוחס מדר מדר מוחס מדר	75		
אור היינות של סיבוכיות של מ"נט חרט יחיד ומטמ"ס מיחס בין הסיבוכיות של מ"נט חרט יחיד ומטמ"ס מיחס בין הסיבוכיות של מ"ט דטרמיניסטית ומ"ט א"ד מחלקה P המחלקה P בעיית P המחלקה P בעיית P המחלקה P המחלקה P RELPRIME מבעיית P המחלקה P RELPRIME מבעיית במחלקה P המחלקה P המחלקה P המחלקה P בעיית המסלול ההמילטוני HAMPATH בעיית המסלול ההמילטוני HAMPATH אלגוריתם אימות מחלקה P המחלקה P המחלקה P המחלקה P המחלקה P המחלקה P המחלקה P ו P אלגוריתם אימות מששר בין P מ"ט א"ד מחקשר בין מחלקה P ו P אלגוריתם המחלקות P ו P אלגור P המחלקות P ו P אלגור P המחלקות P ו P אלגור P ו P שלמות משפט קוק לוין בעיית הספיקות בעיית הפיקות משפט קוק לוין בעיית בא משפט קוק לוין משפט קוק לוין משפט קוק לוין מאלגור מאלגו	75		
אור היד היד של סיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס מיחס בין הסיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס מיחס בין הסיבוכיות של מ"ט דטרמיניסטית ומ"ט א"ד מחלקה P המחלקה P בעיית PTH מיחס בין הסיבוכיות של מ"ט דטרמיניסטית ומ"ט א"ד פעיית PTTH מיחס מיחס מיחס מיחס מיחס מיחס מיחס מיחס	82		8 מבוא לסיבוכיוח
84יחס בין הסיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס85יחס בין הסיבוכיות של מ"ט דטרמיניסטית ומ"ט א"ד87המחלקה Pבעיית PATHPATH89RELPRIME20בעיית And Apha P30המחלקה P31המחלקה P40המחלקה P50המחלקה P51המחלקה P52המחלקה P53המחלקה P64המחלקה P65המחלקה P66הקשר בין חל מ"ט א"ד70המחלקות P70המחלקות P70המחלקות P70המחלקות PPC70בעיית הספיקות70בעיית הספיקות70בעיית הספיקות70משפט קוק לוין70בעיית הספיקות70בעיית הספיקות70בעית הספיקות70בעית הספיקות70בעית הספיקות70בעית הספיקות70בעית הספיקות70בעית הספיקות71בעית הספיקות71בעית הספיקו			הגדרה ש
85יחס בין הסיבוכיות של מ"ט דטרמיניסטית ומ"ט א"ד87המחלקה Pבעיית PATHבעיית PATH89RELPRIME20בעיית P30המחלקה P21המחלקה P32בעיית המסלול ההמילטוני HAMPATH33בעיית המסלול ההמילטוני HAMPATH34המחלקה P35המחלקה P36המחלקה P37הקשר בין PM למ"ט א"ד38NP39NP400NP401NP402NP403בעיית הספיקות404בעיית הספיקות405בעיית הספיקות406NPH407בעיית הספיקות408בעיית הספיקות409בעיית הספיקות400בעיית הספיקות401בעיית הספיקות402בעיית הספיקות403בעיית הספיקות404בעיית הספיקות405בעיית הספיקות406בעיית הספיקות407בעיית הספיקות408בעיית הספיקות409בעיית הספיקות409			
87המחלקה חP88בעיית PATHבעיית89RELPRIMEבעיית92NPארב60המחלקה חבעית92המחלקה חבעית93המחלול ההמילטוני HAMPATHבעית94המחלקה חאלגוריתם אימות95המחלקה חארב96הקשר בין חמשלת100המחלקות חארב101המחלקות חארב102בעיית הספיקותבעיית הספיקות103בעיית הספיקותבעיית הספיקות104בעיית הספיקותבעיית הספיקות105בעיית הספיקותבעיית הספיקות106בעיית הספיקותבעיית הספיקות107בעיית הספיקותבעיית הספיקות108בעיית הספיקותבעיית הספיקות109בעיית הספיקותבעיית הספיקות100בעיית הספיקותבעיית הספיקות101בעיית הספיקותבעיית הספיקות102בעיית הספיקותבעיית הספיקות103בעיית הספיקותבעיית הספיקות104בעיית הספיקותבעיית הספיקות			
87בעיית EQATH89RELPRIME20NP המחלקה P והמחלקה P והמחלקה P92Render P והמחלקה P94P המחלקה P95Equit neadth for a few found it96HAMPATH97HAMPATH98NP המחלקה P100NP Honghar100NP Honghar101NP Honghar102Equit neadth103NP Honghar104SAT105SAT106SAT107Contain met ASA108SAT109SAT100SAT101SAT102SAT103SAT104SAT105SAT106SAT107SAT108SAT109SAT100SAT101SAT102SAT103SAT104SAT105SAT106SAT107SAT108SAT109SAT100SAT101SAT102SAT103SAT104SAT105SAT106SAT107SAT108SAT109SAT109SAT109SAT109SAT109SAT109SAT109SAT109SAT1			
89 RELPRIME בעיית בעיית P המחלקה P בעיית המסלול ההמילטוני HAMPATH בעיית המסלול ההמילטוני HAMPATH המחלקה P המחלקות P המחלק			
92המחלקה P והמחלקה P המחלקה ה P92המחלקה P74דוגמאות לבעיות ב- P95בעיית המסלול ההמילטוני HAMPATH96אלגוריתם אימות97המחלקה P98הקשר בין PM למ"ט א"ד100NP - IP100NP - IP101המחלקות NPC102בעיית הספיקות103בעיית הספיקות104בעיית הספיקות105בעיית הספיקות106אורסאות של SAT107בעיית הספיקות של SAT108בעיית אל SAT109גרסאות של SAT109בעיית SAT109גרסאות של SAT109בעיית SAT100בעיית SAT101בעיית SAT1023SAT			
92	•	2.222.40	
92P - בעיות במסלול ההמילטוני בעיית המסלול ההמילטוני המסלול ההמילטוני בעיית המסלול ההמילטוני בעיית המסלול ההמילטוני בעיית אימות93NP אלגוריתם אימות95המחלקה NP למ"ט א"ד98NP - P למ"ט א"ד100NP שלמות100NPH ו NPC בעיית הספיקות101בעיית הספיקות102בעיית של SAT103משפט קוק לוין104גרסאות של SAT105גרסאות של SAT106בעיית הלSAT107גרסאות של SAT108גרסאות של SAT109בעיית SAT109גרסאות של SAT100גרסאות של SAT	92	חלקה NP	9 המחלקה P והמ
92HAMPATH אלגוריתם בעיית המסלול ההמילטוני93אלגוריתם אימות94NPהמחלקה NPהקשר בין NP למ"ט א"ד98NP - IP קו המחלקה P ו- NP חשלמות100NPH - INPCהמחלקות NPCבעיית הספיקות101בעיית הספיקותבעיית הספיקותבעיית האביקות102משפט קוק לויןגרסאות של SATגרסאות של SATבעיית אל SATבעיית אל SAT102גרסאות של SATבעיית אל SATבעיית אל SATבעיית אל SATבעיית אל SAT	92		המחלקה
<ul> <li>93 אלגוריתם אימות</li> <li>93 המחלקה NP המחלקה NP המחלקה NP למ"ט א"ד</li> <li>94 איד הקשר בין המחלקה P ו- P איד הקשר בין המחלקה P ו- NP אלמות</li> <li>100 אלמות</li> <li>100 המחלקות NP ו- NPC המחלקות הספיקות הספיקות</li> <li>101 בעיית הספיקות</li> <li>102 משפט קוק לוין</li> <li>103 גרסאות של SAT המאות של SAT בעיית אל SAT בעיית הספיקות של SAT בעיית SAT בעי</li></ul>	92	Pלבעיות ב- $P$	דוגמאות
<ul> <li>93 אלגוריתם אימות</li> <li>93 המחלקה NP המחלקה NP המחלקה NP למ"ט א"ד</li> <li>94 איד הקשר בין המחלקה P ו- P איד הקשר בין המחלקה P ו- NP אלמות</li> <li>100 אלמות</li> <li>100 המחלקות NP ו- NPC המחלקות הספיקות הספיקות</li> <li>101 בעיית הספיקות</li> <li>102 משפט קוק לוין</li> <li>103 גרסאות של SAT המאות של SAT בעיית אל SAT בעיית הספיקות של SAT בעיית SAT בעי</li></ul>	92	סלול ההמילטוני HAMPATH סלול ההמילטוני	בעיית המ
97 הקשר בין אר למ"ט א"ד הקשר בין אר למ"ט א"ד הקשר בין המחלקה אר ו- אר הקשר בין המחלקה ארף ו- אר הקשר בין המחלקה ארף וויד המחלקות אר המשלקות אר המשיקות המשיקות המשיקות אר המשיקות המשפט קוק לוין האר	93		
98 אות בין המחלקה P ו- P הקשר בין המחלקה P ו- P הקשר בין המחלקה P ו- P אלמות NP עלמות NP ו- NPC המחלקות NPC בעיית הספיקות בעיית הספיקות SAT בעיית הספיקון בעיית המפט קוק לוין גרסאות של אנד בעיית אלמות של אנד אנד בעיית אלמות של אנד בעיית אלמות א	93		המחלקה
98 אות בין המחלקה P ו- P הקשר בין המחלקה P ו- P הקשר בין המחלקה P ו- P אלמות NP עלמות NP ו- NPC המחלקות NPC בעיית הספיקות בעיית הספיקות SAT בעיית הספיקון בעיית המפט קוק לוין גרסאות של אנד בעיית אלמות של אנד אנד בעיית אלמות של אנד בעיית אלמות א	97		•
100	98		,
בעיית הספיקות בעיית הספיקות SAT בעיית בעיית SAT בעיית SAT משפט קוק לוין משפט קוק לוין kSAT גרסאות של בעיית 3SAT בעיית 3SAT בעיית	100		NP 10 שלמות
בעיית הספיקות בעיית הספיקות SAT בעיית בעיית SAT בעיית SAT משפט קוק לוין משפט קוק לוין kSAT גרסאות של בעיית 3SAT בעיית 3SAT בעיית	100	o	המחלקות
בעיית SAT בעיית 102 משפט קוק לוין			
102 משפט קוק לוין $kSAT$ גרסאות של $3SAT$ בעיית		·	
kSAT גרסאות של $3SAT$ בעיית			
בעיית $3SAT$ בעיית		, .	•

# שיעור 1 מכונות טיורינג

# 1.1 הגדרה היוריסטית של מכונת טיורינג

### הגדרה 1.1 מכונת טיורינג (הגדרה היוריסטית)

### הקלט והסרט

מכונת טיורינג (מ"ט) קורא קלט.

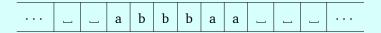
הקלט נמצא על סרט אינסופי.

התווים של הקלט נמצאים במשבצות של הסרט.

במכונת טיורינג אנחנו מניחים שהסרט אינסופי לשני הכיוונים.

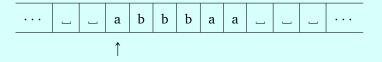
משמאל לתחילת הקלט לא כתוב כלום, ומימין לסוף הקלט לא כתוב כלום.

אנחנו מניחים שיש תו הרווח \_ שנמצא בכל משבצות שאינן משבצות קלט, משמאל לקלט ומימין לקלט.



#### הראש

במצב ההתחלתי הראש בקצה השמאלי של הקלט.



הראש יכול לזוז ימינה על הסרט וגם שמאלה על הסרט.

הראש יכול לקרוא את התוכן שנמצא במשבצת הסרט שבה הוא נמצא.

הראש יכול לכתוב על המשבצת הסרט שבה הוא נמצא. הכתיבה נעשית תמיד במיקום הראש.

#### המצבים

 $q_0$  בהתחלה הראש בקצה השמאלי של הקלט והמ"ט במצב התחלתי

הראש קורא את התו במשבצת הראשונה וכותב עליה לפי הפונקציית המעברים (שנגדיר בהגדרה 1.2). כעת המ"ט במצב חדש  $q_1$ 

 $q_2$  חדש קורא את התו במשבצת השניה וכותב עליה לפי הפונקציית המעברים ואז המ"ט במצב חדש התהליך ממשיך עד שהראש מגיע לקצה הימיני של הקלט, ואז הוא ממשיך לקרוא ולכתוב על כל משבצת בכיוון שמאלה, עד שהוא מגיע לקצה השמאלי.

במ"ט ניתן לטייל על הקלט שוב ושוב לשני הכיוונים.

 $q_{
m rej}$  או מצב דוחה מגיע למצב מקבל מסתיים כאשר המ"ט מגיע מגיע מגיע

נבנה מכונת טיורינג אשר מקבלת מילה אם היא בשפה

$$L = \{w \in \{a, b\}^* | \#a_w = \#b_w\}$$
.

b ו a אותיות שווה אותיות מספר עם מכל המילים מכל המורכבת מכל המילים אווה אותיות אווים וויש

### תיאור מילולי

- . נסרוק את הקלט משמאל לימין ולכל a נחשפ b נסרוק את הקלט
  - .√ נסמן עליה, a נניח שראינו במשבצת הראשונה .
- שכבר ראינו. a שכבר מתאימה ל b מתאימה ל שכבר ראינו.
  - אם לא מצאנו ,המילה לא בשפה.
  - $\sqrt{\phantom{a}}$ אם מצאנו ,נסמן את ה- b התואם ב-  $\sqrt{\phantom{a}}$
  - נחזור לתחילת הקלט ונעשה סריקה נוספת משמאל לימין.
- במשבצת הראשונה יש √ מסיבוב הראשון. הראש פשוט כותב עליה √, כלומר משבצת ראשונה נשארת ללא שינוי.
  - $\checkmark$  נסמן במשבצת הבאה. נניח שמצאנו b. ניח שמאלה למשבצת הבאה. ניח שמאלה למשבצת הבאה
    - נסרוק את יתרת הקלט ונחפש אות a מתאימה ל
      - אם לא מצאנו ,המילה לא בשפה.
      - $\sqrt{\ }$  אם מצאנו ,נסמן את ה- a התואם ב- -
  - . בכל משבצת שיש  $\sqrt{}$  כותבים עליה  $\sqrt{}$  וממשיכים למשבצת הבאה הימני.
    - נחזור לתחילת הקלט ונעשה סריקה נוספת משמאל לימין.
      - חוזרים על התהליך שוב ושוב.
    - אם היה מעבר שבו לא מצאנו אות תואמת, המילה לא בשפה.
- אם כולן היו תואמות ועשינו מעבר שבו הגכנו מקצה לקצה, מרווח לרווח, בלי לראות שום אות,אז המילה בשפה.

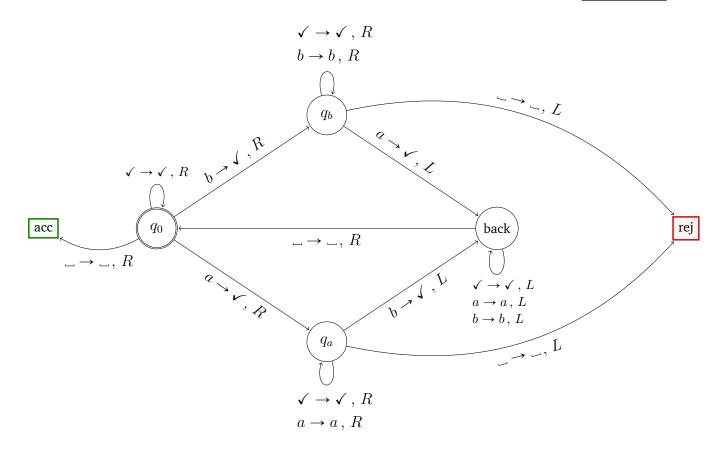
כעת נתאר את המ"ט באמצעות המצבי המכונה והפונקציית המעברים.

### מצבי המכונה

$q_0$	המצב ההתחלתי. אליו נחזור אחרי כל סבב התאמה של זוג אותיות.
$q_a$	מצב שבו ראינו a ומחפשים b מצב שבו ראינו
$q_b$	מצב שבו ראינו b מצב שבו ראינו
back	מצב שנשתמש בו כדי לחזור לקצה השמאלי של הקלט ולהתחיל את הסריקה הבאה (סבב ההתאמה הבא).
acc	מצב מקבל.
rej	מצב דוחה.

- כאשר המכונה מגיעה למצב acc כאשר המכונה מגיעה עוצרת. עצירה במצב acc עצירה במצב
- ראטר המכונה מגיעה למצב rej היא עוצרת.עצירה במצב rej משמעותה דחייה.
  - רק בשני מצבים אלו המכונה מפסיקה.
     בכל מצב אחר המכונה בהכרח ממשיכה.

### תרשים מצבים



- בכל צעד המכונה מבצעת שתי פעולות:
  - 1. כותבת אות במיקום הראש
- .2 זזה צעד אחד שמאלה או צעד אחד ימינה.
- . בכל צעד המכונה יכולה לעבור למצב אחר או להישאר באותו מצב.

### דוגמה 1.2

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה abbbaa.

b

b

b

a a

а

а

back √ √ b

back	_	$\checkmark$	$\checkmark$	b	b	а	a	_
_	$q_0$	$\checkmark$	$\checkmark$	b	b	a	а	_
_	$\checkmark$	$q_0$	$\checkmark$	b	b	а	а	_
_	$\checkmark$	$\checkmark$	$q_0$	b	b	а	а	_
_	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$q_b$	b	а	a	_
_	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	b	$q_b$	а	а	
_	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	back	b	$\checkmark$	a	_
	$\checkmark$	$\checkmark$	back	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	_
_	$\checkmark$	back	$\checkmark$	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	_
_	back	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	_
back	_	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	_
_	$q_0$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	b	$\checkmark$	а	_
	$\checkmark$	$q_0$	$\checkmark$	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	_
_	$\checkmark$	$\checkmark$	$q_0$	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	_
_	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$q_0$	b	$\checkmark$	a	_
_	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$q_b$	$\checkmark$	a	_
	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$q_b$	a	_
_	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	back	$\checkmark$	$\checkmark$	_
_	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	back	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	_
_	$\checkmark$	$\checkmark$	back	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	
_	$\checkmark$	back	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	_
_	back	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	_
back		$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	_
_	$q_0$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	
_	$\checkmark$	$q_0$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	_
_	$\checkmark$	$\checkmark$	$q_0$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	_
_	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$q_0$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	_
_	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$q_0$	$\checkmark$	$\checkmark$	_
_	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$q_0$	$\checkmark$	_
_	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$q_0$	
	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	u	acc

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה aab.

### פתרון:

# 1.2 הגדרה פורמלית של מכונת טיורינג

## הגדרה 1.2 מכונת טיורינג מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעיה $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$ :כאשר קבוצת מצבים סופיות Q $\_ \notin \Sigma$ $\sum$ א"ב קלט סופי $\Sigma \subseteq \Gamma$ , $\subseteq \Gamma$ ref Γ א"ב סרט סופי $\delta:(Q\backslash\{\mathrm{rej},\mathrm{acc}\} imes\Gamma o Q imes\Gamma imes\{L,R\}$ פונקציית המעברים מצב התחלתי $q_0$ מצב מקבל acc מצב דוחה rej

### דוגמה 1.4 (המשך דוגמה 1.1)

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, acc, rej)$$

$$Q = \{q_0, q_a, q_b, \text{back}, \text{rej}, \text{acc}\}$$
.

$$\Sigma = \{a,b\}, \qquad \Gamma = \{a,b,\bot,\checkmark\}$$

$$\delta\left(q_{0},\mathsf{a}\right)=\left(q_{a},\checkmark,R\right)$$
 ,

$$\delta(q_0, b) = (q_b, \checkmark, R) ,$$

$$\delta\left(q_{0},\bot\right)=\left(\operatorname{acc},\bot,R\right)\ ,$$

$$\delta\left(q_a,\checkmark\right) = \left(q_a,\checkmark,R\right) ,$$

$$\delta\left(q_{a},\mathsf{a}\right)=\left(q_{a},\mathsf{a},R\right)\ ,$$

$$\delta\left(q_a,\mathbf{b}\right) = (\mathrm{back},\checkmark,L) \ ,$$

$$\delta\left(q_b,\checkmark\right) = \left(q_b,\checkmark,R\right) ,$$

$$\delta(q_b, b) = (q_a, b, R) ,$$

$$\delta(q_b, \mathbf{a}) = (\text{back}, \checkmark, L)$$
,

כטבלה:  $\delta$  כטבלה את פונקציית המעבירים

$\Gamma$ $Q$	а	b		<b>√</b>
$q_0$	$(q_a, \checkmark, R)$	$(q_b, \checkmark, R)$	$(acc, \_, R)$	$(q_0, \checkmark, R)$
$q_a$	$(q_a, a, R)$	$(\mathrm{back},\checkmark,L)$	$(\mathrm{rej}, \_, L)$	$(q_a, \checkmark, R)$
$q_b$	$(\mathrm{back},\checkmark,L)$	$(q_b, b, R)$	$(\mathrm{rej}, \_, L)$	$(q_b, \checkmark, R)$
back	(back, a, L)	(back, b, L)	$(q_0, \bot, R)$	$(\mathrm{back},\checkmark,L)$

## הגדרה 1.3 קונפיגורציה

. מכונת טיורינג מכונת  $M=(Q,q_0,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,\mathrm{acc},\mathrm{rej})$ 

קונפיגורציה של M הינה מחרוזת

 $\mu q \sigma \nu$ 

:כאשר משמעות

$$\mu, \nu \in \Gamma^*$$
,  $\sigma \in \Gamma$ ,  $q \in Q$ .

- מצב המכונה,
- הסימון במיקום הראש  $\sigma$
- תוכן הסרט משמאל לראש,  $\mu$ 
  - תוכן הסרט מימין לראש. u

### דוגמה 1.5 (המשך של דוגמה 1.3)

μ	q	σ	ν
	$q_0$	a	ab_
_√	$q_a$	a	b _
_ <b>√</b> a	$q_a$	b	_
_ ✓	back	a	✓ _
_	back	✓	a <b>√</b> _
_	back	_	✓ a ✓ _
_	$q_0$	✓	a <b>√</b> _
_ ✓	$q_0$	a	✓ _
_ ✓ ✓	$q_a$	✓	_
_ ✓ ✓ ✓	$q_a$	_	_
_ ✓ ✓	rej	✓	_

### דוגמה 1.6

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת כל מילה בשפה

$$L = \{a^n \mid n = 2^k , k \in \mathbb{N}\}$$

2 אשר חזקה של a אותיות מספר בעלי מספר ז"א מילים בעלי

## פתרון:

ראשית נשים לב:

 $rac{n}{2^k}=1$  אם ורק אם אנחנו מקבלים 1 אחרי חילוק של  $n=2^k$  אחרי מקבלים אנחנו מקבלים  $n=2^k$ 

לאור המשפט הזה נבנה אלגוריתם אשר מחלק את מספר האותיות במילה ב- 2 בצורה איטרטיבית. אם אחרי סבב מסויים נקבל מספר אי-זוגי גדול מ- 1 אז מספר האותיות a במילה לא יכול להיות חזקה של 2. אם אחרי כל הסבבים לא קיבלנו מספר אי-זוגי גדול מ-1 אז מובטח לנו שיש מספר אותיות a אשר חזקה של 2.

• נתון הקלט



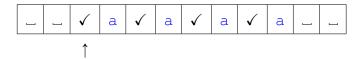
נעבר על סרט הקלט. משמאל לימין.

• מבצעים מחקיה לסירוגין של האות a כלומר אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר וכן הלאה.

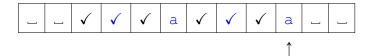


### אם אחרי סבב הראשון

- 2 אין חזקה ב- 2 אין חזקה של ב- אין אותיות האחרון אין מספר אי-זוגי של אותיות האחרון  $\checkmark$  של אין אין אותיות בעולה.
  - . אחרי חילוק ב- 2 ונמשיך לסבב הבא a אחרי אוגי של אותיות  $\pm$  פיבלנו מספר  $\pm$  אחרי איש  $\pm$ 
    - הראש חוזר לתו הראשון של הקלט



(אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר) a בסבב הבא חוזרים על התהליך של מחיקה לסירוגין של האות



#### אם אחרי סבב השני

- 2 אין חזקה ב- בתו האחרון האחרון אין חזקה של אותיות מספר אי-זוגי של אין מספר  $\star$  אין אין האחרון אותיות אותיות מספר אי-זוגי מספר איותיות במילה.
  - . ונמשיך לסבב הבא. 2 ונמשיך לסבב הבא. a יש a אחרי זוגי של מספר אוגי של האחרון a
    - הראש חוזר לתו הראשון של הקלט



בסבב הבא חוזרים על התהליך של מחיקה לסירוגין של האות a (אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר)



### אם אחרי סבב השלישי

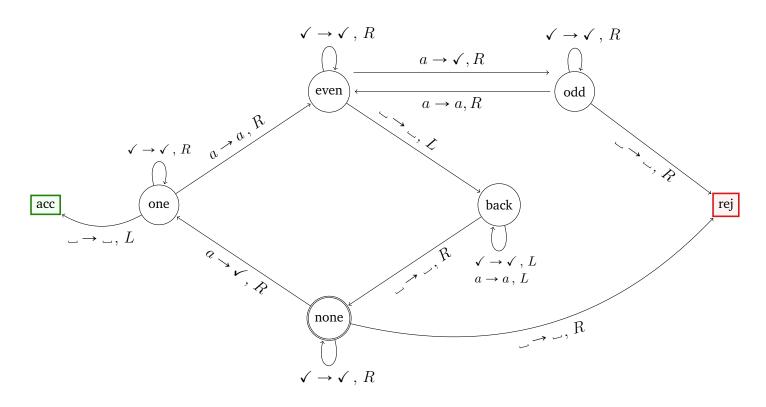
- 2 אין חזקה ב- 2 אין חזקה של ב אי-זוגי של אותיות אחרי חילוק ב- 4 אין חזקה של \* אותיות ב אירון של היבלנו מספר אי-זוגי של אותיות ב במילה.
  - . אחרי חילוק ב- 2 ונמשיך לסבב הבא a אותיות a אותיות אחרון  $\Rightarrow$  קיבלנו מספר אוגי של \*
    - הראש חוזר לתו הראשון של הקלט.

בסבב האחרון נשאר רק אות a אחת.

.2 אשר חזקה של a אותיות a אותיות מספר אותיות a אשר חזקה של



המכונת טיורינכ אשר מקבלת מילים בשפה שעובדת לפי האלגוריתם המתואר למעלה מתואר בתרשים למטה.



### המצבים:

מצב none: מצב התחלתי. עדיין לא קראנו a בסבב סריקה זה.

מצב one: קראנו a בודד.

. a קראנו מספר זוגי של even מצב

. a קראנו מספר אי-זוגי של odd:

מצב back: חזרה שלמאלה.

### דוגמה 1.7

בדקו אם המילה

aaaa

מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.6.

none	a	а	а	а	
 $\checkmark$	one	а	а	а	_

J	$\checkmark$	а	even	а	а	_
J	$\checkmark$	a	$\checkmark$	odd	а	J
_	$\checkmark$	a	$\checkmark$	a	even	L
_	$\checkmark$	a	$\checkmark$	back	a	_
J	$\checkmark$	а	back	$\checkmark$	a	
J	$\checkmark$	back	а	$\checkmark$	а	
J	back	$\checkmark$	а	$\checkmark$	а	L
back		$\checkmark$	а	$\checkmark$	a	_
J	none	$\checkmark$	а	$\checkmark$	a	L
J	$\checkmark$	none	а	$\checkmark$	a	L
J	$\checkmark$	$\checkmark$	one	$\checkmark$	а	
u	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	one	а	
u	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	a	even	_
	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	a back	even a	] ]
	✓ ✓ ✓	✓ ✓ ✓	√ √ back			] ] ]
]	✓ ✓ ✓	√ √ √ back	✓ ✓ back ✓	back	a	] ] ] ]
	✓ ✓ ✓ ✓ ✓ back	✓ ✓ ✓ back ✓		back	a a	
i i i i i i i i i i i i i i i i i i i	✓ ✓ ✓ ✓ back			back	a a a	
i i i i i i i i i i i i i i i i i i i	✓ ✓ ✓ ✓ back — none			back	a a a	
Land the state of	u			back	а а а а	
	u	√ √ √		back	a a a a a	
	u	√ √ √ none	<ul><li>✓</li><li>✓</li><li>✓</li><li>✓</li></ul>	back	a a a a a	
)	u	√ √ √ none	<ul><li>✓</li><li>✓</li><li>✓</li><li>✓</li><li>✓</li><li>none</li></ul>	back	a a a a a a	

$\mu$	q	σ	ν
]	none	a	aaa _
_ ✓	one	a	aa 🗅
_ <b>√</b> a	even	a	а 🗕
_ <b>√</b> a <b>√</b>	odd	a	
_√a√a	even	_	_
_ <b>√</b> a <b>√</b>	back	a	
_ <b>√</b> a	back	✓	a _

_ ✓	back	a	<b>√</b> a _
	back	✓	а√а∟
	back	_	√a√a∟
_	none	✓	а√а∟
	none	a	√ a _
_ ✓ ✓	one	✓	a _
_	one	a	
_√ <b>√</b> √ a	even	_	
_	back	a	_
_ ✓ ✓	back	√ a	
	back	✓	√ a _
	back	✓	<b>√√</b> a _
_	back	_	<b>√√√</b> a _
_	none	✓	<b>√</b> √ a _
	none	✓	√ a _
_ ✓ ✓	none	✓	a _
_	none	a	
_	one	_	_
_	acc	✓	

בדקו אם המילה

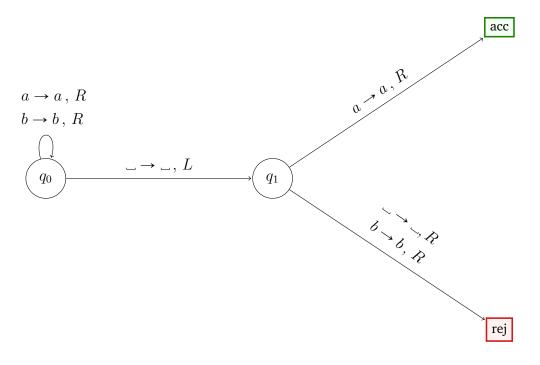
aaa

מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.6.

_	none	a	а	a	
_	$\checkmark$	one	а	a	_
_	$\checkmark$	a	even	a	J
_	$\checkmark$	a	$\checkmark$	odd	J
_	$\checkmark$	a	$\checkmark$	_	rej

$\mu$	q	σ	ν
_	none	a	aa _
_ ✓	one	a	а _
_ <b>√</b> a	even	a	_
_ <b>√</b> a <b>√</b>	odd	_	_
_ <b>√</b> a <b>√</b> _	rej	u	]

מהי שפת המכונה:



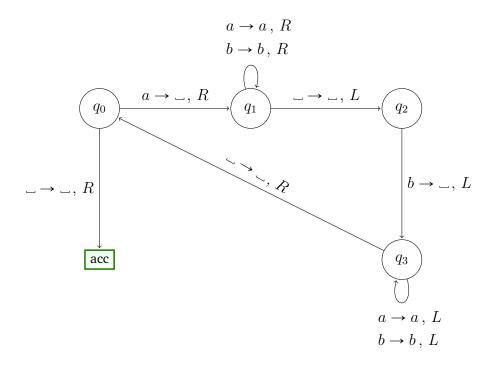
### פתרון:

### תיאור מילולי:

- $:q_0$  במצב התחלתי  $\bullet$
- .a עוברים למשבצת הבאה לימין הראש.
- אם אנחנו רואים b, עוברים למשבצת הבהאה לשמאל הראש. \*
- ממשיכים כך עד שנגיע לתו רווח, כלומר לסוף המילה, ואז עוברים למשבצת לשמאל הראש, כלומר לתו האחרון של המילה.
  - (.a אם אנחנו רואים a, המילה מתקבלת. (ז"א התו האחרון הינו \*
    - אם אנחנו רואים d, המילה נדחית. (ז"א התו האחרון הינו d.) \*
  - \* אם אנחנו רואים תו-רווח המילה נדחית. (ז"א המילה הינה ריקה.)

תשובה סופית: המכונה מקבלת שפת המילים המסתיימות באות a.

מהי שפת המכונה:



### פתרון:

### תיאור מילולי:

- $:q_0$  במצב התחלתי  $\bullet$
- \* אם אנחנו רואים b, המילה נדחית.
- \* אם אנחנו רואים \_, המילה מתקבלת.
- - oxdot במצב  $q_1$  אנחנו ראינו a וכתבנו עליה •
- $q_1$  אם אנחנו רואים במשבצת הבאה או ל, ממשיכים למשבצת הבאה או המ"ט נשארת \*
- אם אנחנו רואים תו רווח (כלומר הגענו לסוף המילה) הראש זז למשבצת השמאלי, כלומר לאות lpha האחרונה של המילה והמ"ט עוברת למצב  $q_2$ 
  - . בתו האחרון, כתבנו עליה  $\_$  והראש קורא התו a בתו האחרון. a
    - אם אנחנו רואים a המילה נדחית. \*
    - \* אם אנחנו רואים \_, המילה נדחית.
    - $.q_3$  כותבים עליה  $\_$  והמ"ט עוברת למצב \*
    - . במצב  $q_3$  קראנו b ומחקנו אותה, קראנו a בתו הראשון ומחקנו אותה a
  - $q_0$  הראש  $\eta$ ז משבצת אחת שמאלה עד שיגיע לתו הרשאון ומ"ט חוזרת למצב התחלת ullet

- המ"ט באופן איטרטיבי, עוברת על הקלט ובכל מעבר:
- , אחרת המילה המילה אותה ומחליפה אותה שם  $_{-}$ , אחרת המילה מורידה אותה אותה  $_{-}$
- . אחרת המילה של המילה מורידה אותה ומחליפה אותה של בסופה של המילה  ${\tt tb}$
- אם לאחר מספר מעברים כאלו הסרט ריק, המ"ט מקבלת, וזה יתקיים לכל מילה ורק למילים בשפה

$$\left\{a^n b^n \middle| n \geqslant 0\right\} .$$

תשובה סופית: המכונה מקבלת שפת המילים

$$\left\{a^n b^n \middle| n \geqslant 0\right\} .$$

### דוגמה 1.11

$\mu$	q	$\sigma$	ν
	$q_0$	a	aaabbbb
	$q_1$	a	aabbbb
a	$q_1$	a	abbbb
aa	$q_1$	a	bbbb
aaa	$q_1$	Ъ	bbb
aaab	$q_1$	Ъ	bb
aaabb	$q_1$	Ъ	b
aaabbb	$q_1$	Ъ	
aaabbbb	$q_1$		_
aaabbb	$q_2$	Ъ	
aaabb	$q_3$	Ъ	
aaab	$q_3$	Ъ	b
aaa	$q_3$	Ъ	bb_
aa	$q_3$	a	bbb
a	$q_3$	a	abbb
	$q_3$	a	aabbb
<b>ـــــــــ</b>	$q_3$		aaabbb
	$q_0$	a	aabbb
	$q_1$	a	abbb

		ı	I
a	$q_1$	a	bbb
aa	$q_1$	Ъ	bb
aab	$q_1$	Ъ	Ъ
aabb	$q_1$	Ъ	
aabbb	$q_1$		
aabb	$q_2$	Ъ	
aab	$q_3$	Ъ	
aa	$q_3$	ь	b
a	$q_3$	a	bb_
	$q_3$	a	abb
	$q_3$		aabb
	$q_0$	a	abb
	$q_1$	a	bb
a	$q_1$	ь	b
ab	$q_1$	Ъ	
abb	$q_1$	_	
ab	$q_2$	Ъ	
a	$q_3$	Ъ	
	$q_3$	a	b
	$q_3$	_	ab
	$q_0$	a	b
	$q_1$	ь	
b	$q_1$		
	$q_2$	Ъ	
	$q_3$		
	$q_0$		

# הגדרה 1.4 גרירה בצעד אחד

M של קונפיגורציות פינה  $c_1$  ו- היינה מיורינג, מכונת מכונת  $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,\mathrm{acc},\mathrm{rej})$  נסמן

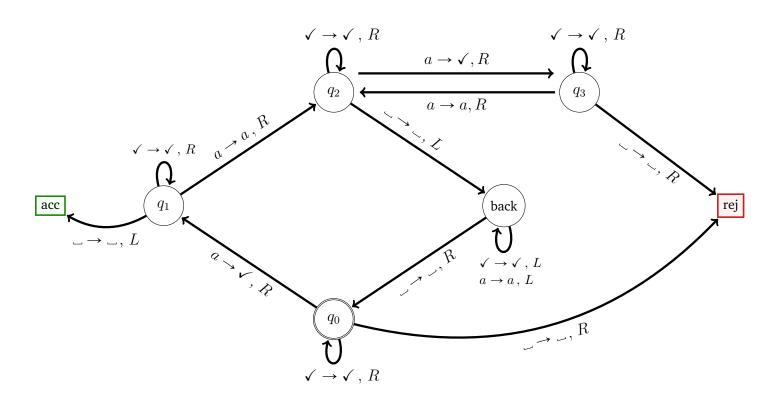
 $c_1 \vdash_M c_2$ 

. בצעד בודד.  $c_2$  ל- עוברים ב-  $c_1$  אם כשנמצאים אם ( $c_2$  את גורר גורר את במילים,

### דוגמה 1.12 (המשך של דוגמה 1.6)

במכונת טיורינג שמתואר בתרשים דמטה (אשר שווה למ"ט בדוגמה 1.6 רק עם סימנוים שונים למצבים) מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$



## הגדרה 1.5 גרירה בכללי

M מכונת טיורינג, ותהיינה  $c_2$  ו- מכונת טיורינג, מכונת  $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,\mathrm{acc},\mathrm{rej})$  נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

. אם יותר צעדים  $c_1$  ב-  $c_2$  ב-  $c_2$  אם ניתן לעבור מ-  $c_2$  ב-  $c_2$  או יותר צעדים (במילים, גורר את

### דוגמה 1.13 (המשך של דוגמה 1.6)

במכונת טיורינג שמתואר בתרשים דמטה (אשר שווה למ"ט בדוגמה 1.6 רק עם סימנוים שונים למצבים) מתקיים

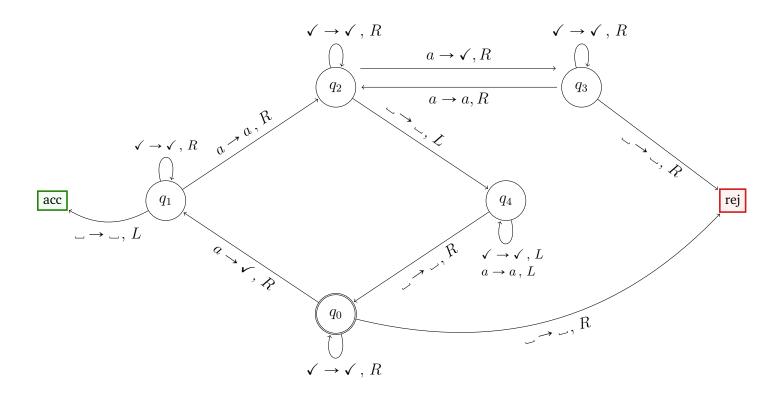
$$\sqrt{q_0}a\sqrt{a}$$
  $\vdash_M^* \sqrt{\sqrt{q_4}a}$ 

$$\sqrt{q_0}a\sqrt{a} \vdash_M \sqrt{\sqrt{q_1}\sqrt{a}}$$

$$\vdash_M \sqrt{\sqrt{\sqrt{q_1}a}}$$

$$\vdash_M \sqrt{\sqrt{\sqrt{q_4}a}}$$

$$\vdash_M \sqrt{\sqrt{\sqrt{q_4}a}}$$
.



# הגדרה 1.6 קבלה ודחייה של מחרוזת

תהי

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \operatorname{acc}, \operatorname{rej})$$

מכונת טיורינג, ו-

$$w \in \Sigma^*$$

מחרוזת. אומרים כי

מקבלת את w אם M

$$q_0w \vdash_M^* u \ \mathrm{acc} \, \sigma \, \mathrm{v}$$

עבור  $v,u\in\Gamma^*,\sigma\in\Gamma$  כלשהם,

אם w אם M •

$$q_0w \vdash_M^* u$$
 rej  $\sigma$  v

. עבור  $\mathbf{v},u\in\Gamma^*,\sigma\in\Gamma$  כלשהם

## הגדרה 1.7 הכרעה של שפה

תהי

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \operatorname{acc}, \operatorname{rej})$$

מכונת טיורינג, ו-

$$L\subseteq \Sigma^*$$

שפה. אומרים כי M מכריעה את אם לכל  $w \in \Sigma^*$  מתקיים

- w את מקבלת את  $M \Leftarrow w \in L$ 
  - w את דוחה את  $M \Leftarrow w \notin L$

# הגדרה 1.8 קבלה של שפה

תהי

$$M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,\mathrm{acc}\,,\,\mathrm{rej})$$

מכונת טיורינג, ו-

$$L \subseteq \Sigma^*$$

שפה. אומרים כי M מקבלת את אם לכל  $w \in \Sigma^*$  מתקיים

- w אז M מקבלת את  $w \in L$  אז  $w \in L$
- w אז M לא מקבלת את  $w \notin L$  אם •

במקרה כזה נכתוב ש-

$$L(M) = L$$
.

# 1.3 טבלת המעברים

## דוגמה 1.14

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$L = \{w = \{a, b, c\}^* | \#a_w = \#b_w = \#c_w\}$$



מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
q.S	σ	$q.(S \cup \{\sigma\})$	✓	R	$\sigma \notin S$
q.S	σ	q.S		R	$\sigma \in S$
$q/\{a,b,c\}$	$a,b,c,\checkmark$	back		L	
$q.\varnothing$		acc		R	
back	$a,b,c,\checkmark$	back		L	
back		$q.\varnothing$		R	

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$\{x_1 \dots x_k \# y_1 \dots y_k \# z_1 \dots z_k \mid x_i, y_i, z_i \in \{0, \dots, 3\}, \forall i, x_i \geqslant z_i \geqslant y_i\}$$

L={X, X, # Y, Y # = = | X, 1/2, =, e {0,1,2,3} Vi X2=, 2/3}



מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
X * *	σ	$X\sigma*$	<b>√</b>	R	
X * *	✓	X * *	<b>√</b>	R	
$X\sigma*$	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	$X\sigma*$		R	
$X\tau *$	#	$Y\tau *$		R	
$Y\tau *$	σ	$Y\tau\sigma$		R	
$Y\tau *$	✓	$Y\tau *$		R	
$Y\tau\sigma$	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	$Y\tau\sigma$		R	
$Y \tau_1 \tau_2$	#	$Z au_1 au_2$		R	
$Z\tau_1\tau_2$	✓	$Z\tau_1\tau_2$		R	
$Z\tau_1\tau_2$	σ	back	<b>√</b>	L	
Z * *	J	acc		R	
back	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	back		L	
back	J	X * *		R	

# 1.4 חישוב פונקציות

# f מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה f

מכונת טיורינג.  $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,\mathrm{acc},\mathrm{rej})$  ותהי ותהי ו $f:\Sigma_1^*\to\Sigma_2^*$  אומרים כי M מחשבת את אם:

- $\Sigma_2 \subset \Gamma$  -1  $\Sigma = \Sigma_1$  •
- $.q_0w \vdash \mathrm{acc}f(w)$  מתקיים  $w \in \Sigma_1^*$  לכל

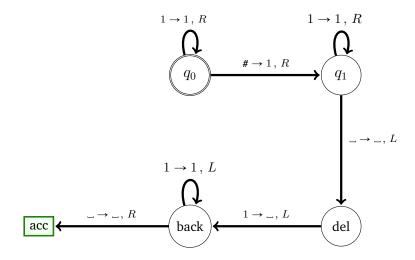
### דוגמה 1.16 חיבור אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

 $1^{i}$ # $1^{j}$ 

ומחזירה את פלט

 $1^{i+j}$  .



### דוגמה 1.17 כפל אונרי

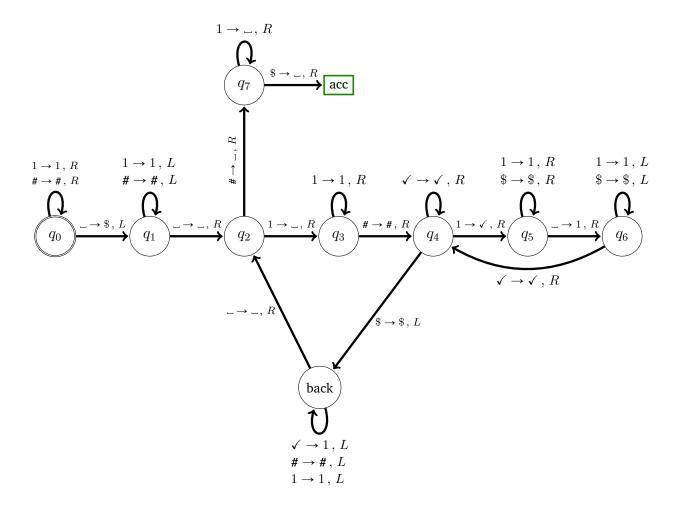
בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

 $1^{i}#1^{j}$ 

ומחזירה את פלט

 $1^{i\cdot j}$  .

- .2 לדוגמה, נניח שהקלט הוא 2 כפול הקלט הוא 11#11.
- נרצה להבדיל בין הקלט לבין הפלט. לכן בתחילת הריצה, נתקדם ימינה עד סוף הקלט ונוסיף שם את התו \$. לאחר מכן נחזור לתחילת הקלט.
- .\$ על כל אות במילה השמאלית נעתיק את המילה הימינית לאחר סימן ה-
- לאחר מכן נשאיר רק את התווים שלאחר סימן ה \$. כלומר, נמחק את כל מה שאינו פלט.



$\mu$	q	$\sigma$	ν
	$q_0$	1	1#11_
_11#11	$q_1$	L	J
_11#11	$q_1$	\$	J
_	$q_1$	_	11#11\$
_	$q_2$	1	1#11\$
	$q_3$	1	#11\$
1 <b>#</b>	$q_4$	1	1\$
1 <b>#√</b>	$q_5$	1	\$
1 <b>#√</b> 1\$	$q_5$	_	_
1 <b>#√</b> 1\$1	$q_6$		
1#	$q_6$	✓	1\$1 _
1 <b>#</b> √	$q_4$	1	\$1 _
1#√√	$q_5$	\$	1 _
1 <b>#√√</b> \$1	$q_5$	J	_
1 <b>#</b> √√\$11	$q_6$	J	

1#✓	$q_6$	$\checkmark$	\$11_
1#√✓	$q_4$	\$	11_
1#√	back	✓	\$11_
	back	]	1#11\$11_
	$q_2$	1	#11\$11_
	$q_3$	#	11\$11_
#	$q_4$	1	1\$11_
_ <i>#√</i>	$q_5$	1	\$11_
<b>_#</b> √1\$11	$q_5$	]	J
<b>_#√</b> 1\$111	$q_6$	]	J
#	$q_6$	✓	1\$111_
#√	$q_4$	1	\$111_
#√ √	$q_5$	\$	111_
<b>_# √</b> \$111	$q_5$	]	]
<b>_# \</b> \$1111	$q_6$	]	J
#√	$q_4$	✓	\$1111
#√√	$q_4$	\$	1111
_ <i>#√</i>	back	√\$	1111
	back	]	#11\$1111
	$q_2$	#	11\$1111
	$q_7$	1	1\$1111
	$q_7$	\$	1111
	acc	1	111

# שיעור 2 מודלים חישובים שקולית

### הגדרה 2.1 מודל חישובי

מודל חישובי הוא אוסף של מכונות טיורינג שעבורם מוגדרים המושגים של הכרעה וקבלה של שפות.

### הגדרה 2.2 מודלים שקולים חישובית

יהיו A ו- B שקולים אם לכל שפה L התנאים הבאים מתקיימים: B ו- A אומרים כי A ו- A

- A שמכריעה את שמכריעה מ"ט במודל B שמכריעה את אם"ם קיימת מ"ט במודל A
- A שמקבלת את B אם"ם קיימת מ"ט במודל B שמקבלת את אם"ם קיימת מ"ט במודל B

### דוגמה 2.1

### נסמן ב-T את מודל מכונת הטיורינג הבסיסי.

במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת בסרט. במודל זה ,הסרט הוא אינסופי לשני הכיוונים. ב תחילת החישוב הראש נמצא בתחילת הקלט.

### נסמן ב-O את מודל מכונת הטיורינג עם סרט ימינה בלבד.

במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן לה ישאר במקום, באותה המשבצת בסרט. במודל זה הסרט הוא אינסופי לכיוון אחד בלבד - ימינה. בתחילת החישוב, הקלט ממוקם בקצה השמאלי של הסרט והראש נמצאת בתחילת הקלט. החישוב מתנהל כמו במכונה במודל, T למעט כאשר הראש נמצא במשבצת השמאלית ביותר בסרט וצריך לזוז ש מאלה– במקרה כזה הראש נשאר במקום ולא זז.

הוכיחו כי המודל T והמודל O שקולים חישובית.

### פתרון:

יש להוכיח ש:

- T לכל מ"ט במודל O קיימת מ"ט שקולה במודל  $\bullet$
- O לכל מ"ט במודל T קיימת מ"ט שקולה במודל  $\bullet$

### כיוון ראשון

Tנוכיח כי לכל מ"ט במודל O קיימת מ"ט שקולה במודל

$$.O$$
במודל  $M^O = \left(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \mathrm{acc}^O, \mathrm{rej}^O\right)$ נתונה

$$M^T = \left(Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \operatorname{acc}^T, \operatorname{rej}^T
ight) \; ,$$
 גבנה

 $M^{O}$  -ל תהיה שקולה אינסופי של  $M^{T}$  ואז ואז אינסופי של הסרט האינסופי עם צד ימין של הסרט האינסופי

רכיבי המ"ט  $M^{O}$  לא זז מעבר לקצה השמאולי של , $M^{O}$  מלבד מהתכונה שהראש של  $M^{O}$  לא זז מעבר לקצה השמאולי של הקלט.

לכן כדי ש-  $M^T$  כדי שהראש של  $M^O$  נוסיף מעברים לפונקצית המעברים של  $M^T$  כדי שהראש של לא מעבר לקצה השמאולי של הקלט.

הרעיון הוא לסמן את המשבצת שמשמאול לתחילת הקלט עם סימן מיוחד \$, ואז להוסיף מעברים לפונקצית המעברים של  $M^T$  - שמבטיחים שאם הראש נמצא למשבצת שמסומנת \$ אז הוא מיד חוזר ו $M^T$  חוזרת למצב ההתחתי של המ"ט  $M^C$ . זה מתבצע על ידי הוספת השורות הבאות לטבלת המעברים של  $M^C$ :

מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
$q_0^T$	$\sigma$	$q_\$$	Ω	L	
$q_{\$}$	]	$q_0^O$	\$	R	
q	\$	q	\$	R	$\forall q \in Q^O$

$$Q^T=Q^O\cup\{q_0^T,q_\$\}\ , \qquad \Sigma^T=\Sigma^O\ , \qquad \Gamma^T=\Gamma^O\cup\{\$\}\ , \qquad \mathrm{acc}^T=\mathrm{acc}^O\ , \qquad \mathrm{rej}^T=\mathrm{rej}^O\ .$$
 כיוון שני

נוכיח כי לכל מ"ט במודל T קיימת מ"ט שקולה במודל O. כלומר:

$$M^T = \left(Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \operatorname{acc}^T, \operatorname{rej}^T \right)$$
 נתונה

$$.O$$
 שקולה במודל  $M^O = \left(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q^O_0, \mathrm{acc}^O, \mathrm{rej}^O\right)$ נבנה

הרעיון הוא לסמן קו על הסרט במשבת באמצע הקלט, ואז לקפל את הסרט בקו הזה. באופן הזה נקבל סרט עם הרעיון הוא לסמן קו על הסרט במשבצות של הסרט החדש המקופל יש שני תווים, אחד למעלה (U) ואחד למטה קצה שמאולי ואינסופי ימינה. במשבצות של הסרט החדש שמסומנת (D), מלבד מנקודת הקיפול שבו יש משבצת אחת שמסומנת (D).

באופן המעברים הבאים לטבלת על ידי הוספת מעברים  $M^O$  במכונה אפשר לסמלץ את אפשר לסמלץ על ידי הוספת במכונה  $M^C$  במכונה ידי לכל  $\pi,\sigma,\pi\in\Gamma^T$  לכל  $M^T$ 

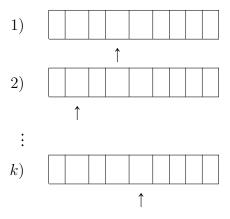
מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי	
~ D	$\pi$	D	$\pi$	Т	תזוזה שמאלה:	
q.D	$\sigma$	p.D	$\tau$	L	$(q,\sigma) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,L)$	
a II	$\sigma$	m II	au	R		
q.U	$\pi$	p.U	$\pi$	$\prod_{i=1}^{n}$		
q.D		p.D		L	תזוזה שמאלה:	
4.15		<i>p.D</i>	au	L	$(q, \_) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$	
q.U		p.U	$\tau$	R		
1		*				
q.D	$\pi$	p.D	$\pi$	R	תזוזה ימינה: $M^T$	
_	σ	-	$\tau$		$(q,\sigma) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,R)$	
q.U	$\sigma$	p.U	$\tau$	L		
	$\pi$	_	$\pi$			
q.D		p.D		R	תזוזה ימינה: $M^T$	
			$\tau$		$(q, \_) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$	
q.U	J	p.U	$\tau$	L		
a D	\$	a II		R		
q.D	\$	q.U	Ω Ω	R		
q.U	Φ	q.D	אתחול	$I\iota$		
_					$\tau \in \Sigma \cup \{\bot\}$	
$q_0^O$	$\tau$	q. au	\$	R	$\sigma \in \Sigma$	
a a	-	a.T		R		
$q.\sigma$	au	q. au	$\sigma$	11		
a		back		L		
q	]	Dack		L		
back		back	Ω	L		
buck	$\tau$		4/			
back	\$	$q_0^T.D$	Ω	R		
סיום						
$acc^T.D$	הכל	$\operatorname{acc}^O$				
$\operatorname{acc}^T.U$	הכל	$\operatorname{acc}^O$				
$\mathrm{rej}^T.D$	הכל	${\sf rej}^O$				
$\mathrm{rej}^T.U$	הכל	$rej^O$				
	rej-כל השאר עובריםל					

$$\Gamma^O \supseteq \left(\Gamma^T \times \Gamma^T\right) \cup \{\$\}$$
 .

# שיעור 3 מכונות טיורינג מרובת סרטים

# 3.1 מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה היוריסטית

מכונת טיורינג מרובת סרטים (מטמ"ס) היא הכללה של מ"ט עם סרט יחיד. ההבדל הוא שלמטמ"ס ישנו מספר סופי של סרטים, נניח k>1 סרטים.



- לכל סרט יש ראש שלו.
- בתחילת העבודה הקלט w כתוב בתחילת הסרט הראשון וכל שאר הסרטים ריקים. הראשים בכל סרט פצביעים על התא הראשון בסרט, והמכונה נמצאת במצב התחלתי  $q_0$
- בכל צעד חישוב, לפי המצב הנוכחי ול- k התווים שמתחת ל- k הראשים, המכונה מחליטה לאיזה מצב בכל צעד חישוב, לפבור, מה לכתוב מתחת לכל אחד מ-k הראשים ולאן להזיז את הראש בכל אחד מ-k סרטים.
  - הראשים של הסרטים יכולים לזוז באופן בלתי-תלוי בהתאם לפונקצית המעברים של המטמ"ס.

# 3.2 מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה פורמלית

### הגדרה 3.1 מכונט טיורינג מרובת סרטים

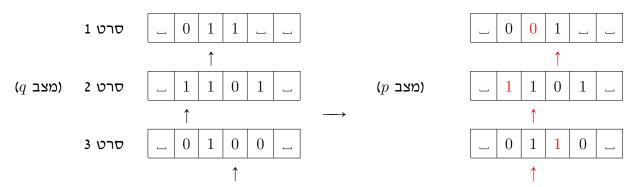
מכונת טיורינג מרובת סרטים היא שביעייה:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{\rm acc}, q_{\rm rei})$$

כאשר Q, Q, Q, Q, Q, Q מוגדרים כמו מ"ט עם סרט יחיד (ראו הגדרה 1.2). ההבדל היחיד בין מ"ט עם סרט יחיד לבין מטב"ס הוא הפונקצית המעברים. עבור מטמ"ס הפונקצית המעברים היא מצורה הבאה:

$$\delta_k : (Q \setminus \{q_{\rm acc}, q_{\rm rei}\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$$

### דוגמה 3.1



$$\delta_k \begin{pmatrix} q, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \\ L \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

# 3.3 קונפיגורציה של מטמ"ס

הכללה של קונפיגורציה של מ"ט עם סרט יחיד:

$$\begin{pmatrix} u_1 q & \mathbf{v}_1 \\ u_2 q & \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ u_k q & \mathbf{v}_k \end{pmatrix}$$

### דוגמה 3.2

בנו מטמ"ס שמכריעה את השפה:

$$L_{w^R} = \{ w = \{a, b\}^* \mid w = w^R . \}$$

כלומר שפת הפלינדרומים.

### פתרון:

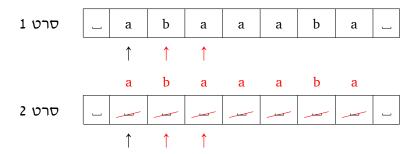
נבנה מ"ט עם שני סרטים:

### תאור המכונה:

 $L_{w^R}$  השפה את שמכריעה שמכר 2 עם המ"ט מסמן נסמן נסמן

:w על הקלט  $=M_2$ 

2 מעתיקה את w לסרט (1)



- w בסרט w לתו האחרון ב- w ואת הראש בסרט w לתו האחרון ב- w
  - (3) משווה בין התווים שמתחת לראשים:
  - $\mathrm{acc} \Leftarrow \bot$  אם התו שמתחת לראש בסרט 1
    - .rej  $\Leftarrow$  אם התווים שמתחת לראשים שונים •
- ullet אחרת מזיזה את הראש בסרט 1 ימינה ואת הראש בסרט 2 שמאלה, וחוזרת לשלב (3).

היא:  $M_2$  היא המעברים של

$$\delta \left( q_0, \begin{pmatrix} a \\ - \end{pmatrix} \right) = \left( q_0, \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix} \right) ,$$

$$\delta \left( q_0, \begin{pmatrix} b \\ - \end{pmatrix} \right) = \left( q_0, \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix} \right) ,$$

$$\delta \left( q_0, \begin{pmatrix} - \\ - \end{pmatrix} \right) = \left( q_{\text{back}}, \begin{pmatrix} - \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ L \end{pmatrix} \right) .$$

. נשים לב כי הסיבוכיות זמן של המכונה עם שני סרטים,  $M_2$  היא O(|w|), כאשר w האורך של המילה

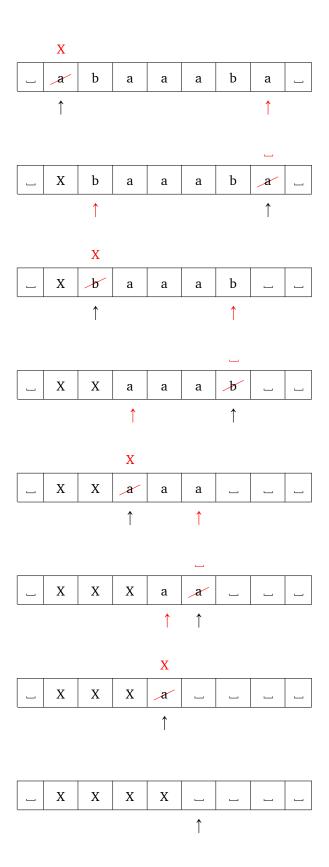
 $.L_{W^R}$  כעת נבנה מ"ט עם סרט יחיד שמכריעה את כעת נבנה מ

### תאור המכונה:

 $L_{w^R}$  נסמן  $M_1$  המכונה עם סרט יחיד שמכריעה את השפה

:w על הקלט  $=M_1$ 

- $acc \leftarrow M_1$  אם התו שמתחת לראש הוא (1)
- X זוכרת את התו שמתחת לראש ומוחקת אותו ע"י גוכרת (2)
- $_{-}$  מזיזה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאול ל-
  - .acc  $\Leftarrow X$  אם התו שמתחת לראש
    - $.rej \Leftarrow$  אם התו שונה מהתו שזכרנו •
- חוזרת את התו שמתחת לראש ע"י  $_-$ , מזיזה את הראש שמאולה עד התו הראשון מימין ל-  $_-$  וחוזרת לשלב (1).



# 3.4 שקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

מ"ט עם סרט יחיד היא מקרה פרטי של מטמ"ס.

## משפט 3.1 שקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

M -לכל מטמ"ס M קיימת מ"ט עם סרט יחיד M השקולה ל

 $:w\in\Sigma^*$  כלומר, לכל קלט

- w אם  $M' \leftarrow w$  מקבלת את  $M' \leftarrow w$  אם M
  - w אם  $M' \Leftarrow w$  דוחה את  $M' \bullet w$
  - $M' \leftarrow w$  אם M לא עוצרת על  $M' \leftarrow w$  אם M

#### הוכחה:

 $M' = \left(Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', q_{
m acc}', q_{
m rej}'
ight)$  בהינתן מטמ"ס  $M = \left(Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{
m acc}, q_{
m rej}
ight)$  עם  $M = \left(Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{
m acc}, q_{
m rej}
ight)$  בהינתן מטמ"ס  $M = \left(Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{
m acc}, q_{
m rej}
ight)$  בהינתן מטמ"ס  $M = \left(Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{
m acc}, q_{
m rej}
ight)$  בהינתן מטמ"ס  $M = \left(Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{
m acc}, q_{
m rej}
ight)$  בהינתן מטמ"ס  $M = \left(Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{
m acc}, q_{
m rej}
ight)$  השקולה ל-

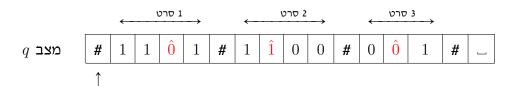
### :רעיון הבנייה

wעל Mעל היצה של ריצה "סימולציה" תבצע M'על אין,  $w \in \Sigma^*$ 

## <u>M - 2</u>

# <u>M' -⊐</u>

בכל סרט.



- .# $_{i+1}$  -ל  $_i$  יופיע איז יופיע וופיע א על הסרט, רק שהתוכן איז הסרטים א וופיע א הסרטים א M'
- $\Gamma$ תשמור את המיקום של הראשים של Mע"י הכפלת הא"ב Mתשמור את המיקום של הראשים של  $\hat{\alpha}$ יב ב-  $\hat{\alpha}$ יב התושמור שתי התושמת התוM'י,  $\alpha\in\Gamma$ אות לכל כלומר, לכל אות התוM'י, משמור שתי אותיות התושמור שתי התושמור כלומר, לכל אות התושמור שתי אותיות התושמור שתי אותיות התושמור שתי התושמור שתי התושמור שתי התושמור שתי התושמור שתי אותיות התושמור שתי התושמור התושמור שתי התושמור שתי התושמור שתי התושמור שתי התושמור שתי התושמור התושמ

- בכל צעד חישוב, M' סורקת את הסרט שלה משמאל לימין כדי ללמוד מהם התווים שמתחת לראשים (התווים שמסומנים ב-  $\hat{\alpha}$ ).
  - . בא. את המעבר לחשב את כדי לחשב אל  $\delta_k$  המעברים בפונקצית משתמשת M'
  - בהם. מיקום הראשים בהם ואת הסרטים את לימין כדי לעדכן לימין משמאל לימין שלה את סורקת את סורקת M'

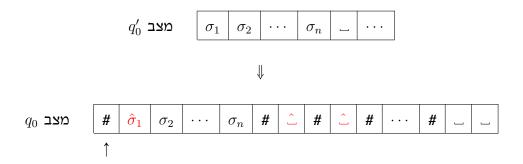
### $\underline{M'}$ אור הבנייה של

### שלב האיתחול (1

. בהינתן קלט M' של הסרט אל מאתחלת את הקונפיגורציה מאתחלת של M' אל הסרט שלה של בהינתן קלט

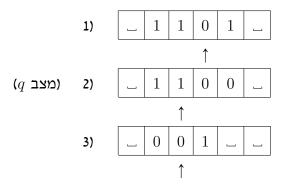
# <u>М -д</u>

# <u>M' -⊐</u>

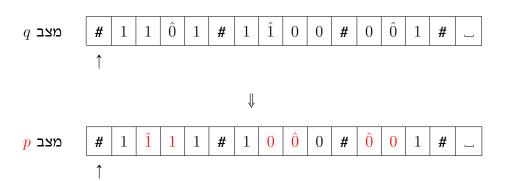


### M תאור צעד חישוב של (2

## <u>М-д</u>



#### M' -=



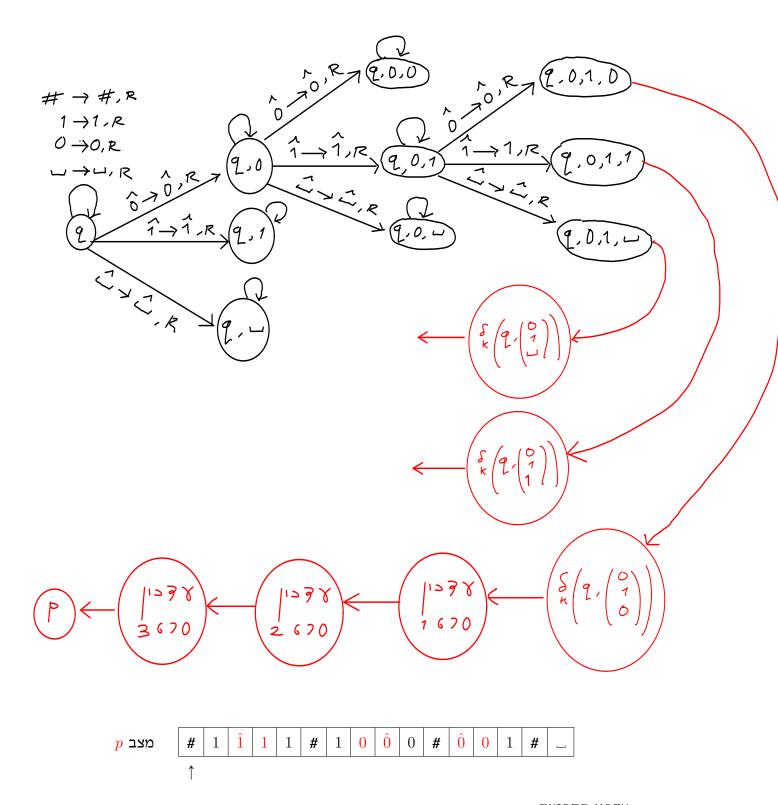
- איסוף מידע •
- . $\hat{\alpha}$  -ם סורקת את הסרט שלה משמאל לימין ומזהה את התווים שמסומנים ב- M' מידע זה ניתן לשמור במצבים. לדוגמה:

$$q$$
,  $\begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix}$ 

זה אפשרי מכיוון שמספר המצבים הנדרש הוא סופי:

$$|Q| \times |\Gamma|^k$$
.

q מצב # 1 1  $\hat{0}$  1 # 1  $\hat{1}$  0 0 # 0  $\hat{0}$  1 # ...



### עדכון הסרטים •

את הסרט שלה פעם נוספת כדי לפעול על פי פונקצית המעברים, כלומר, לעדכן את  $M^\prime$ התאים שמתחת לראשים ולעדכן את מיקום הראשים.

## שיעור 4 מכונת טיורינג אי דטרמיניסטיתם

## 4.1 הגדרה של מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

#### הגדרה 4.1 מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית (מ"ט א"ד) היא שביעייה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, q_{\rm acc}, q_{\rm rej})$$

. כאשר במ"ט דטרמיניסטי $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{
m acc}, q_{
m rej}$  מוגדרים כמו

היא פונקצית המעברים  $\Delta$ 

$$\Delta: (Q \setminus \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma \to P(Q \times \Gamma \times \{L, R, S\})$$
.

$$\Delta(q, a) = \{(q_1, a, S), (q_2, b, L), \ldots\}$$
.

. כלומר, לכל זוג  $q\in Q, \alpha\in \Gamma$  או יותר קלומר, לכל זוג ייתכן מספר מעברים אפשריים, או יותר

- קונפיגורציה של מ"ט א"ד זהה לקונפיגורציה של מ"ט דטרמיניסטית.
  - לכל קונפיגורציה ייתכן מספר קונפיגורציות עוקבות.
    - יונות שונות מסםר חחתכן  $w \in \Sigma^*$  לכל מילה
      - $.q_{
        m acc}$  -ריצות שמגיעות ל\*
      - $.q_{
        m rei}$  -ריצות שמגיעות ל\*
        - \* ריצות שלא עוצרות.
          - \* ריצות שנתקעות.

#### הגדרה 4.2

 $q_{
m acc}$  -אם מתקבלת אחת אחת לפחות לפחות א"ד אם א"ד שם מילה  $w\in \Sigma^*$  מילה

השפה של מ"ט א"ד M היא

$$L(M) = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Gamma^* : q_0 w \vdash_* u q_{acc} v \}$$

כלומר,

.wאת מקבלת שבה אחת ריצה היימת  $w \in L(M)$ 

. או נתקעת, או אם או דוחה או על Mעל של ריצה בכל אם  $w\notin L(M)$ 

## L הגדרה 4.3 מ"ט א"ד המכריעה שפה

.תהי M מ"ט א"ד

 $w \in \Sigma^*$  אומרים כי מ"ט א"ד M מכריעה שפה L אומרים כי מ

- w אם  $M \Leftarrow w \in L$  אם
  - w אם  $M \Leftarrow w \notin L$  אם •

### L מ"ט א"ד המקבלת שפה הגדרה 4.4 מ"ט

.תהיMמ"ט א"ד

 $w \in \Sigma^*$  אם לכל שפה L אם מקבלת מקב א"ד אם מיט א"ד אומרים כי מ"ט א"ד

- w אם  $M \Leftarrow w \in L$  אם •
- w או M לא עוצרת על  $M \leftarrow w \notin L$  אם  $M \leftarrow w \notin L$  אם •

#### דוגמה 4.1

נתונה השפה

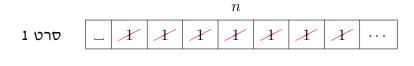
$$L = \left\{ 1^n \mid$$
 אינו ראשוני  $n \right\} \;, \qquad \Sigma = \left\{ 1 
ight\} \;.$ 

### פתרון:

הרעיון

L אמכריעה את המכריעה את נבנה מ"ט א"ד

n את מחלק האם האם ותבדוק ותבדוק מספר א"ד מספר א תבחר תבחר או תבחר א תבחר או או תבחר או תבחר או מ



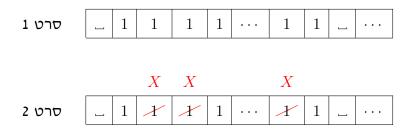
#### תאור הבניה

$$w=1^n$$
 על קלט  $N$ 

#### שלב 1)

1 < t < n בוחרת באופן א"ד מספר א בוחרת אופן א

- 2 מעתיקה את w לסרט  $\bullet$
- עוברת על העותק משמאל לימין, ובכל תא מחליטה באופן א"ד האם להשאיר את ה- 1 או למחוק אותו ע"י X (לדאוג שהמספר שנבחר הוא לא 1 ולא n).
  - . בסוף המעבר המספר t שנבחר הוא כמות ה- t -ים שלא נמחקו.



n את מחלק שנבחר שלב N בודקת האם t בודקת את

- .אם כן אם מקבלת  $N \Leftarrow 0$
- . אם לא  $N \Leftarrow N$  דוחה  $\bullet$

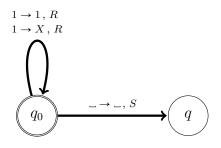
## 4.2 עץ החישוב של מ"ט א"ד

## הגדרה 4.5 עץ החישוב של מ""ט א"ד

יבושרש עץ מושרש ו- w ו- w ו- w ומילה w ומילה w ומילה w ומילה w ומילה ומילה ומילה שבו

- w על M על בחישוב על מתאר קונפיגורציה בחישוב על ניס כל (1
  - $q_0w$  שורש העץ מתאר את הקונפיגורציה ההתחלתית (2
- v ע"י בעץ הבנים של א הם כל הקדקודים הנובעים מהקונפיגורציה המתוארת ע"י ס.

#### דוגמה 4.2





## 4.3 שקילות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטית

#### RE -משפט 4.1 שקילות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטית ב

-לכל מ"ט א"ד N קיימת מ"ט דטרמיניסטית לכל מ

$$L(N) = L(D)$$
.

 $:w\in\Sigma^*$  כלומר לכל

- w אם  $N \leftarrow w$  מקבלת את אם  $N \leftarrow w$
- w אם N לא תקבל את  $D \Leftarrow w$  אם N לא מקבלת את •

הוכחה: בהינתן מ"ט א"ד N נבנה מ"ט דטרמיניסטית הונכיח כי

$$L(N) = L(D)$$
.

#### רעיון ההוכחה

בהינתן קלט  $N \in \Sigma^*$  על תבצע ריצה של כל החישובים האפשריים של א תבצע תבצע ריצה של כל החישובים האפשריים ב- א תעצור ותקבל. מסתיים ב-  $q_{\mathrm{acc}}$ 

מכיוון שייתכנו חישובים אינסופיים, לא נוכל לסרוק את עץ החישוב לעומק. במקום זה נסרוק את העץ מכיוון שייתכנו חישובים אינסופיים, לא נוכל לסרוק זה נבדוק את כל החישובים באורך 2, וכן הלאה. לרוחב. כלומר, נבדוק את כל החישובים באורך 2, ומעצור ותקבל. 2 עצור ותקבל.

#### תאור הבניה

 $: \alpha \in \Gamma$  ולכל ולכל שלכל מכיוון שלכל

$$\Delta(q,\alpha) \subseteq Q \times \Gamma \times \{L,R,S\} \ .$$

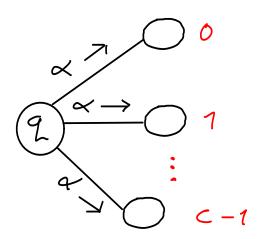
אזי

$$|\Delta(q,\alpha)| \leqslant |Q| \cdot |\Gamma| \cdot |\{L,R,S\}| = 3|Q| \cdot |\Gamma| \ .$$

נסמן:

$$C = 3|Q| \cdot |\Gamma| .$$

שרירותית  $\Delta(q,\alpha)$  -- ברים את מספר  $\alpha\in\Gamma$  אות לכל  $q\in Q$  שרירותית לכל •  $\{0,1,2,\cdots,C-1\}\;.$ 



, $|\Delta(q, lpha) = j < C$  אם  $j \leqslant k \leqslant C - 1$  אזי לכל  $k = (q_{
m rej}, lpha, S)$  נקבע



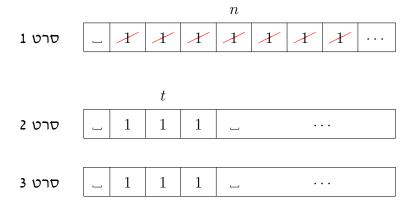
N נשים לב כי שינוי זה לא משנה את השפה של  $\bullet$ 



#### קידום לקסיקוגרפי:

#### D הבניה של

#### 3 מכילה מכילה D



## :w על קלט " =D

- 0 -3 מאתחלת את המחרוזת בסרט 3 ל
  - 2 מעתיקה את w לסרט (2
- 3 על w על על את מחרוזת מריצה על מריצה את את מריצה מריצה את מריצה את N
- את המחרוזת בסרט 3 לקסיקוגרפית מקדמת את מקדמת את סרט 2, מקדמת את אחרת,  $\boldsymbol{0}$

# שיעור 5 RE רכונות סגירות של

## RE -ו R ו- 5.1

### R 5.1 הגדרה

אוסף השפות הכריעות מסומן R ומוגדר

 $R = \{L \subseteq \Sigma^* : L$  את המכריעה המכריעה מ"ט קיימת מ"ט המכריעה את

## RE 5.2 הגדרה

אוסף השפות הקבילות מסומן R ומוגדר

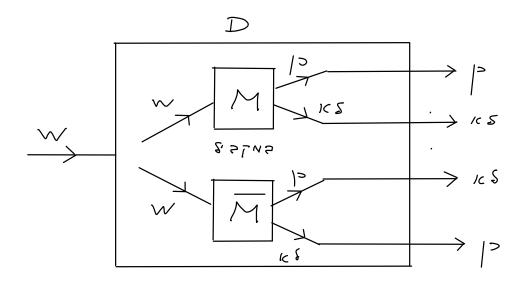
 $RE = \{L \subseteq \Sigma^* \ : \ L$  את המקבלת מ"ט המקבלת  $\}$  .

#### למה 5.1

 $L \in R$  אזי  $\bar{L} \in RE$  אם  $L \in RE$ 

 $ar{L}$  את מ"ט המקבלת את מ"ט המקבלת את מ"ט המקבלת את הוכחה:

L את המכריעה את D נבנה מ"ט



:w על קלט =D

. מעתיקה את w לסרט נוסף D (1

w על העותק על העותק על את M על את M על העותק של (2

- מקבלת.  $D \Leftarrow M$  מקבלת.
  - . אם  $\bar{M}$  מקבלת  $D \Leftarrow \bar{M}$  אם ס
    - . אם M דוחה  $D \Leftarrow$
  - . אם  $\bar{M}$  דוחה  $D \Leftarrow \bar{M}$  מקבלת.

L גוכיח כי D מכריעה את

 $w \in L$  אם

- $w \in L(M) \Leftarrow$
- (w את הוחה  $\bar{M}$ ) או (w את מקבלת M)  $\Leftarrow$ 
  - w עוצרת ומקבלת את  $D \Leftarrow$

 $w \notin L$  אם

- $w \in \bar{L} \Leftarrow$
- $w \in L(\bar{M}) \Leftarrow$
- (w את דוחה M) או (w מקבלת את  $\bar{M}) \Leftarrow$ 
  - w עוצרת ודוחה את  $D \Leftarrow$

#### משפט 5.1 סגירות של השפות הכריעות

השפות הכריעות R סגורות תחת:

- איחוד (1
- 2) חיתוך
- משלים (3
- שרשור (4
- סגור קלין (5

### משפט 5.2 סגירות של השפות הקבילות

השפות הכריעות R סגורות תחת:

- איחוד (1
- 2) חיתוך
- שרשור (3
- סגור קלין (4

הוכחה:

#### :חיתוך (1

#### איתוך תחת חיתוך R (א)

 $L_1 \cap L_2 \in R$  מתקיים ביי מתקיים לכל שתי שפות נוכיח כי לכל אתי



#### תאור הבנייה

:w על קלט =M

- . מעתיקה את w לסרט נוסף M (1
  - .w על  $M_1$  מריצה את (2
- . דוחה  $M \Leftarrow$  דוחה  $M_1$  אם •
- . ועונה של של אע העותק על את מריצה את מריצה M מריצה את  $\bullet$

#### <u>נכונות:</u>

 $L_1\cap L_2$  את מכריעה M נוכיח כי

 $w \in L_1 \cap L_2$  אם

 $w \in L_2$  וגם  $w \in L_1 \Leftarrow$ 

w את מקבלת מקבלת את מקבלת מקבלת את מקבלת את מקבלת את אוגס  $M_1 \Leftarrow$ 

w מקבלת את  $M \Leftarrow$ 

 $w \notin L_1 \cap L_2$  אם

 $w \notin L_2$  או  $w \notin L_1 \Leftarrow$ 

w דוחה את או  $M_2$  או m דוחה את  $M_1 \Leftarrow m$ 

.w דוחה את  $M \Leftarrow$ 

#### סגורה תחת חיתוך RE (ב)

 $L_1 \cap L_2 \in RE$  מתקיים  $L_1, L_2 \in RE$  נוכיח כי לכל שתי שפות

תהיינה  $L_1$  ו-  $L_2$  שתי מכונות טיורינג המקבלות את  $M_2$  ו-  $M_1$  בהתאמה. נבנה מ"ט M המקבלת את  $L_1 \cap L_2$  את המקבלת את M

#### :איחוד:

#### סגורה תחת איחוד R (א)

 $L_1 \cup L_2 \in R$  מתקיים  $L_1, L_2 \in R$  נוכיח כי לדל שתי שפות

 $L_2$  את מ"ט המכריעה את  $M_2$  -ו ווא המכריעה את מ"ט המכריעה את המינה  $M_1$  המכריעה את גבנה מ"ט M

#### <u>תאור הבנייה</u>

:w על קלט =M

- . מעתיקה את לסרט נוסף M (1
  - .w על  $M_1$  מריצה את (2
- . אם  $M \Leftarrow M$  מקבלת  $M_1$  אם  $M_1$
- . מריצה של של העותק על את מריצה את מריצה את M מריצה אחרת,  $\bullet$

#### ב) איחוד RE (ב)

 $L_1 \cup L_2 \in RE$  מתקיים  $L_1, L_2 \in RE$  נוכיח כי לכל שתי שפות  $M_1$  ו-  $M_2$  מ"ט המקבלת את מ"ט המקבלת את  $M_1$  נבנה מ"ט א"ד  $M_1$  המקבלת את  $M_2$  המקבלת את לבנה מ"ט א"ד

#### תאור הבנייה

:w על קלט =M

- $.i \in \{1,2\}$  בוחרת באופן א"ד M (1
- . על w ועונה כמוה M (2

#### :שרשור (3

#### א) א סגורה תחת שרשורR (א)

נוכיח כי לכל שתי שפות  $L_1, L_2 \in R$  מתקיים  $L_1, L_2 \in R$  כאשר

$$L_1 \cdot L_2 = \{ w = w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \land w_2 \in L_2 \}$$
.

 $L_2$  את מ"ט המכריעה את המכריעה את מ"ט המכריעה את מ"ט א"ד  $L_1 \cdot L_2$  את המכריעה את א"ד א"ד א המכריעה את גבנה מ"ט א"ד א

#### תאור הבנייה

:w על קלט =M

- $w=w_1w_2$  ל- w בוחרת באופן א"ד חלוקה של M (1
  - $.w_1$  על  $M_1$  את מריצה M (2
  - . דוחה  $M \Leftarrow$  דוחה  $M_1$  אם •
- . אחרת, M מריצה את  $M_2$  על  $M_2$  ועונה כמוה M

#### סגורה תחת שרשור RE (ב)

(א) -סגורה תחת שרשור באותו אופן כמו בRE

#### 4) \* קליני

#### א) א סגורה תחת st קליני R

 $:\!\!L$  נוכיח כי לכל שפה

$$L \in R \implies L^*R$$

כאשר

$$L^* = \{ w = w_1 w_2 \cdots w_k \mid \forall 1 \le i \le k , w_i \in L \}$$
.

 $L^st$  א"ד המכריעה את מ"ט  $M^st$  גבנה מ"ט

#### תאור הבנייה

:w על קלט  $=M^*$ 

- . אס w=arepsilon אז  $M^*$  מקבלת (1
- $w=w_1\cdots w_k$  בוחרת באופן א"ד חלוקה של ל-  $M^*$  בוחרת באופן א
  - $:1\leqslant i\leqslant k$  לכל (3

 $.w_i$  על M מריצה את  $M^*$ 

- . דוחה  $M^* \Leftarrow w_i$  דוחה M דוחה אם
  - אחרת חוזרים לשלב 3).
- . אוי  $M^*$  אזי  $M^*$  מקבלת $\{w_i\}$  אוי כל המחרוזות M

#### ב) אבורה תחת st קליני RE

#### 5) משלים

#### א) $\,R\,$ סגורה תחת המשלים

נוכיח כי

$$L \in R \implies \bar{L} \in R$$
,

כאשר

$$\bar{L} = \left\{ w \in \Sigma^* \mid w \notin L \right\} .$$

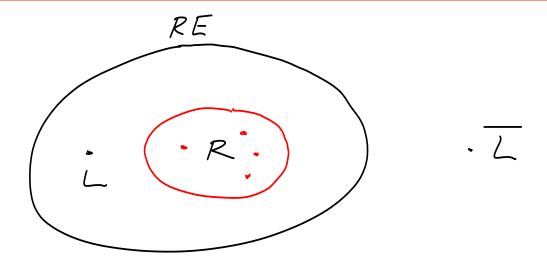
 $ar{L}$  גבנה מ"ט  $ar{M}$  המכריעה את

$$:w$$
 על קלט  $=\bar{M}$ 

- .w על M על מריצה את  $ar{M}$  (1)
- אם M מקבלת  $\bar{M} \leftarrow M$  דוחה.
- אם  $\bar{M} \Leftarrow \bar{M}$  מקבלת.
  - ב) אינה סגורה תחת המשלים RE

## משפט 5.3 אינה סגורה תחת המשלים RE

 $L \in RE \backslash R \implies \bar{L} \notin RE$ .



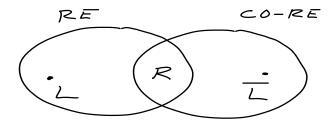
#### הוכחה:

 $ar{L} \in RE$  נניח כי ונניח ונניח ונניח ונניח ונניח ונניח ונניח ו

. אזי לפי טענת עזר (למה 5.1), אזי לפי טענת אזי למה אזי אזי לפי טענת אזי לפי

## $Co\,RE$ 5.3 הגדרה

$$CoRE = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \bar{L} \in RE\}$$
.



#### אבחנה

לפי למה 5.1:

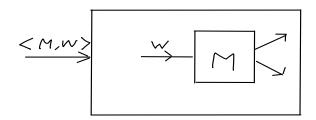
## 5.2 קידוד של מ"ט דטרמיניסטית

## הגדרה 5.4 קידוד של מ"ט

בהינתן קבוצה O של עצמים מופשטים (לשמל מכונת טיורינג, תוכנית מחשב, גרף). הקידוד של O, מסומן  $\langle O \rangle$ , הוא מיפוי של O אל מחרוזת מעל אלפבית סופי שיש בו לפחות שני סימנים.

 $\langle O_1, O_2, \dots, O_k 
angle$  במידה ויש רב עצמים  $O_1, \dots, O_k$  נסמן את הקידוד שלהם

## U מ"ט אוניברסלית 5.3



מ"ט אוניברסלית  $\langle w \rangle$  מקבלת מקלט זוג, קידוד של מ"ט מ"ט מ"ט אוניברסלית מקבלת מקבלת כקלט זוג, קידוד של מ"ט מ"ט אוניברסלית על מקבלת מקבלת מ"ט מ"ט אוניברסלית w ועונה בהתאם.

#### U תאור הפעולה של

:x על קלט =U

- $\langle w \rangle$  הוא מילה על וקידוד של מ"ט הוא קידוד של מילה (1) בודקת האם x
  - אם לא ⇒ דוחה.
  - :w על M על מבצעת סימולציה של

- $q_0w$  על סרט  $q_0w$  רושמת את הקונפיגורציה ההתחלתית
- מחשבת את הקונפיגורציה הבאה בעזרת טבלת המעברים.
- $q_{
  m acc}$  הוא המצב הנוכחי הוא בסוף כל מעבר בין שתי קונפיגורציות, U
  - . אם כן U עוצרת ומקבלת  $\ast$

- $.q_{
  m rej}$  האם המצב הוא בודקת אחרת \*
  - . אם כן U עוצרת ודוחה.
- . אחרת U ממשיכה לקונפיגורציה הבאה  $\star$

#### $\underline{\phantom{a}}$ מהי השפה של $\underline{U}$ ?

#### :x לכל

- $u \leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$  אם (1)
  - $x = \langle M, w \rangle$  אם (2)
- $u \leftarrow w$  מקבלת את  $U \leftarrow w$  מקבלת את •
- x אם M דוחה את עw = u דוחה את M
- x אם  $U \Leftarrow w$  לא עוצרת על  $M \bullet$

$$L(U) = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} .$$

## $L_{ m acc}$ 5.5 הגדרה

$$L_{\text{acc}} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} \in RE \backslash R$$

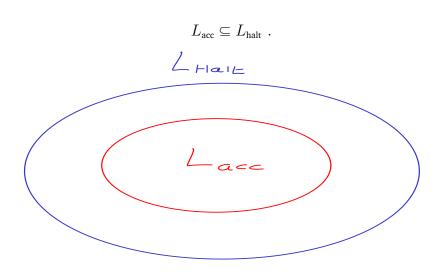
## $L_{ m halt}$ 5.6 הגדרה

$$L_{ ext{halt}} = ig\{\langle M, w 
angle \mid w$$
 עוצרת על א  $Mig\} \in RE ackslash R$ 

## $L_{ m d}$ 5.7 הגדרה

$$L_{d} = \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \} \notin RE$$

#### <u>אבחנה:</u>



5.4 משפט

 $L_{\rm acc} \in RE$ .

 $L_{
m acc} \in RE$  ולכן  $L_{
m acc}$  את מקבלת את ג $L(U) = L_{
m acc}$  ולכן

5.5 משפט

 $L_{\text{halt}} \in RE$  .

. תעצור ותקבל. U' שהיא למעשה U' פרט למקום שבו U עצרה ודחתה, U' תעצור ותקבל.

 $:\!\!L_{\mathrm{halt}}$  את מקבלת U' נוכיח כי

 $x \in L_{\mathsf{halt}}$  אם

w ו- M עוצרת על  $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$ 

.x את ומקבלת עוצרת  $U' \Leftarrow$ 

:שני מקרים  $x \notin L_{\mathsf{halt}}$  אם

- .x את דוחה  $U' \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$  •
- x א עוצרת על  $U' \Leftarrow w$  אוצרת על M -ו  $x = \langle M, w \rangle$

## שיעור 6 אי-כריעות

## לא כריעות $L_{ m d}$ , $L_{ m halt}$ , $L_{ m acc}$ השפות 6.1

 $L_{
m acc}$  6.1 הגדרה

 $L_{\text{acc}} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} \in RE \backslash R$ 

 $L_{
m halt}$  6.2 הגדרה

 $L_{ ext{halt}} = \{\langle M, w 
angle \mid w \;$ עוצרת על א $M \} \in RE \backslash R$ 

 $L_{
m d}$  6.3 הגדרה

 $L_{d} = \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \} \notin RE$ 

 $L_{
m acc} \in RE$  6.1 משפט

 $L_{\rm acc} \in RE$  .

 $L_{
m acc}\in$  לכן לכן , $L_{
m acc}$  את מכיוון ש- מכיוון ש- , $L(U)=L_{
m acc}$  , לכן מכיוון ש- הוכחה: מכיוון ש- .RE

 $L_{
m halt} \in RE$  6.2 משפט

 $L_{\text{halt}} \in RE$ .

. תעצור ותקבל עצרה ודחתה, U' שהיא למעשה שבו U פרט למקום שבו U עצרה ודחתה, U' שהיא למעשה למעשה שבו ותקבל.

 $:\!L_{
m halt}$  את מקבלת U' נוכיח כי

 $x \in L_{\mathrm{halt}}$  אם

w עוצרת על הי ו-  $x=\langle M,w \rangle \Leftarrow$ 

x עוצרת ומקבלת את  $U' \Leftarrow$ 

אם מקרים:  $x \notin L_{\text{halt}}$  אם

- .x את דוחה  $U' \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$
- x א עוצרת על  $U' \Leftarrow w$  אוצרת על M -ו  $x = \langle M, w \rangle$

## $L_{ m d} otin RE$ 6.3 משפט

 $L_{\rm d} \notin RE$  .

#### הוכחה:

 $.L_{ extsf{d}} \in RE$  נניח בשלילה כי

 $.L_{ ext{d}}$  מ"ט  $M_{ ext{d}}$  המקבלת את  $\exists \ \Leftarrow$ 

$$L(M_d) = L_d \Leftarrow$$

 $:\!\!\langle M_d 
angle$ על איל על פבדוק ריצה של

$$L(M_{
m d}) 
eq L_{
m d} \quad \Leftarrow \quad \langle M_{
m d} 
angle 
eq L_{
m d} \quad \Leftarrow \quad \langle M_{
m d} 
angle 
eq L(M_{
m d})$$
 אם •

$$L(M_{\mathrm{d}}) 
eq L_{\mathrm{d}} \quad \Longleftarrow \quad \langle M_{\mathrm{d}} \rangle \in L_{\mathrm{d}} \quad \Longleftarrow \quad \langle M_{\mathrm{d}} \rangle \notin L(M_{\mathrm{d}})$$
 אם •

 $L_{
m d} \notin RE$  ולכן וולכן  $L(M_{
m d}) = L_{
m d}$  שירה שתירה פשני המקרים קיבלנו

## משפט 6.4 לא כריעה $L_{ m acc}$

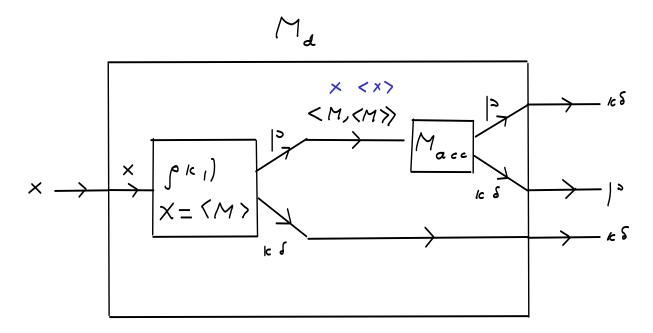
$$L_{\mathrm{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} \notin R$$
.

#### הוכחה:

 $L_{
m acc}$  את המכריעה המ"ט המכריעה ותהי ותהי  $L_{
m acc} \in R$  נניח בשלילה כי

.(6.3 כפי שהוכחנו במשפט בי לכך ש-  $L_{
m d}$  לבסתירה מ"ט  $M_{
m d}$  המכריעה את לבנות מ"ט  $M_{
m d}$  כפי שהוכחנו במשפט אונ

$$L_{\mathsf{d}} = \{ \langle M, w \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \}$$
.



### $M_{ m d}$ התאור של

:x על קלט  $=M_{\mathrm{d}}$ 

. דוחה. 
$$\langle M \rangle$$
 דוחה. בודקת האם  $\langle x = \langle M \rangle$ 

$$\langle x \rangle = \langle \langle M \rangle \rangle$$
 מחשבת מחשבת (2

$$:\langle M,\langle M
angle
angle$$
 על הזוג  $M_{
m acc}$  את מריצה (3

. אם 
$$M_{
m acc}$$
 אם  $M_{
m acc}$  אם •

. אם 
$$M_{
m d} \Leftarrow M_{
m acc}$$
 אם  $M_{
m acc}$ 

 $:\!L_{
m d}$  את מכריעה את מכריעה אל

 $x \in L_{\mathrm{d}}$  אם

$$\langle M \rangle \not\in L(M) \text{ -1 } x = \langle M \rangle \Leftarrow$$

$$\langle M, \langle M 
angle 
angle$$
 דוחה את הזוג  $M_{
m acc} \Leftarrow$ 

.x מקבלת את  $M_{
m d}$ 

:שני מקרים  $x \notin L_{\mathrm{d}}$  אם

x את את דוחה את  $M_{
m d} \quad \Leftarrow \quad x 
eq \langle M \rangle$  דוחה את

$$\langle M 
angle \in L(M)$$
 -1  $x = \langle M 
angle$  :(2) מקרה

$$\langle M, \langle M 
angle 
angle$$
 מקבלת את אוג  $M_{
m acc} \Leftarrow$ 

.x דוחה את  $M_{
m d}$ 

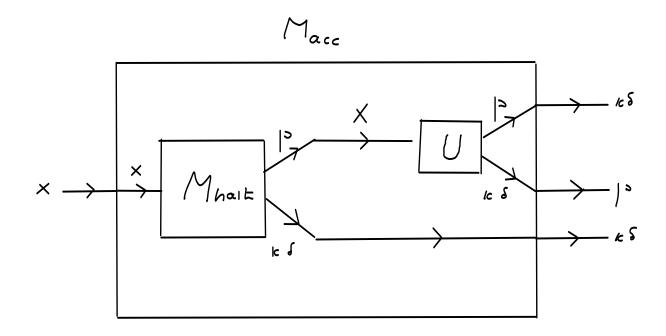
## משפט 6.5 לא כריעה $L_{ m halt}$

$$L_{ ext{halt}} = ig\{\langle M, w 
angle \mid w$$
 עוצרת על  $M ig\} 
otin R$  .

#### הוכחה:

 $L_{
m halt}$  את מ"ט המכריעה את נניח בשלילה כי  $L_{
m halt} \in R$  ותהי

. (המפט במשפט שהוכחנו במשפט בי לבנות ע"ט ביי לבנות את המכריעה את המכריעה  $M_{
m acc}$  כפי שהוכחנו במשפט  $M_{
m halt}$ 



## $M_{ m acc}$ של התאור של

:x על קלט  $=M_{\mathrm{acc}}$ 

- .x על  $M_{
  m acc}$  מריצה את (1
- דוחה.  $M_{
  m acc} \Leftarrow T$  דוחה אם  $M_{
  m halt}$
- . מריצה על U את מריצה  $M_{\mathrm{acc}} \Leftarrow m$ ועונה מקבלת  $\bullet$

#### <u>אבחנה</u>

 $:\!\!L_{
m acc}$  את מכריעה  $M_{
m acc}$ 

 $x \in L_{\mathrm{acc}}$  אם

$$\langle w \rangle \in L(M)$$
 -1  $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$ 

x את מקבלת את מקבלת מקבלת את  $M_{\mathrm{halt}} \Leftarrow$ 

.x מקבלת את מקבלת  $M_{\mathrm{acc}} \Leftarrow$ 

אם מקרים:  $x \notin L_{\mathrm{acc}}$  אם

 $x \neq \langle M, w \rangle$  :(1) מקרה

x דוחה את  $M_{\mathrm{halt}} \Leftarrow$ 

.x דוחה את  $M_{\mathrm{acc}} \leftarrow$ 

"מקרים: שני מקרים: - עני מקרים:  $x=\langle M,w \rangle$  שני מקרים:

x את אחת דוחה את את דוחה את את אוצרת על אוצרת על אוצרת את אוצרת את מקרה (א): M

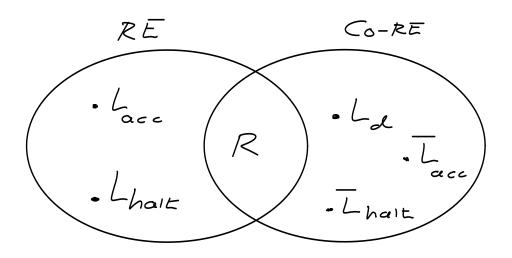
 $M_{\mathrm{acc}} \leftarrow x$  דוחה את  $M_{\mathrm{acc}} \leftarrow x$  דוחה את אבל  $M_{\mathrm{halt}} \leftarrow w$  אבל דוחה את מקרה (ב):

 $L_{
m acc} \notin R$  -ם בסתירה לכך ש-  $L_{
m acc}$  מכריעה את מכריעה  $M_{
m acc}$ 

 $.L_{\mathsf{halt}} \notin R$  לכן

### משפט 6.6

$$\begin{array}{ccc} L_{\rm acc} \in RE \backslash R & \Rightarrow & \bar{L}_{\rm acc} \notin RE \ , \\ L_{\rm halt} \in RE \backslash R & \Rightarrow & \bar{L}_{\rm halt} \notin RE \ , \\ L_{\rm d} \notin RE \backslash R \ . \end{array}$$



## לא כריעה $L_E$ השפה 6.2

 $L_E$  השפה 6.4

$$L_E = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset \}$$
.

## $L_E otin R$ משפט

 $L_E \notin R$ .

.כלומר  $L_E$  לא כריעה

#### הוכחה:

. באופן באופן באר את המכריעה  $M_{
m acc}$  מ"ט בינה מ"ט כריעה. אז באופן הבא נניח בשלילה כי

#### $M_w$ בנייה של

 $:M_w$  ראשית נגדיר את המ"ט

x על כל קלט  $=M_w$ 

- . אם  $x \neq w$  אם (1
- על w ועונה כמוה. M אז מריצה x=w אם (2

#### אבחנה

 $L(M_w) = \Sigma^*$  אם M -ו x = w אם M

 $L(M_w)=arnothing$  אז w אז m דוחה את m או  $x\neq w$  אם  $x\neq w$ 

#### $M_{ m acc}$ בנייה של

 $:L_{
m acc}$  את המכריעה את המכריעה מ"ט אז נבנה מ"ט המכריעה את המכריעה את המכריעה את מ"ט אוניח כי קיימת מ

:x על כל קלט  $=M_{\mathrm{acc}}$ 

- דוחה.  $\langle M,w \rangle$  אם (1
- $M_w$  בונה מ"ט,  $\langle M,w \rangle$  אם געזרת בעזרת גע $x=\langle M,w \rangle$  אם (2
  - $:\!\!\langle M_w
    angle$ על  $M_E$  מריצה (3
  - אם  $M_E$  אם אם (4
  - אם  $M_E$  אם  $M_E$  אם •

#### <u>נכונות</u>

 $\langle M_w \rangle$  דוחה  $M_E \Leftarrow L(M_w) = \Sigma^* \neq \varnothing \Leftarrow w \in L(M)$  -ו  $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow x \in L_{\mathrm{acc}}$  אם  $M_{\mathrm{acc}} \Leftarrow M_{\mathrm{acc}}$ 

אם אפני מקרים:  $x \notin L_{\mathrm{acc}}$  אם

. דוחה  $M_{
m acc} \ \Leftarrow \ \langle M_w \rangle$  מקבלת  $M_E \ \Leftarrow \ L(M_w) = arnothing \ \Leftrightarrow \ x 
eq \langle M, w 
angle$  בחחה.

. דוחה.  $M_{
m acc} \Leftarrow \langle M_w \rangle$  מקבלת  $M_E \Leftarrow L(M_w) = arnothing \Leftrightarrow w \notin L(M)$  דוחה.  $x = \langle M, w \rangle$ 

#### לסיכום:

 $L_{
m acc} \notin R$  -ש בסתירה לכך בסתירה את המכריעה  $M_{
m acc}$  מ"ט אפשר לבנות כריעה אז אפשר לבנות המכריעה  $L_E \notin R$ לכן לכן  $L_E \notin R$ 

### $L_E otin RE$ 6.8 משפט

### $L_E \notin RE$

#### הוכחה:

#### הרעיון

נבנה מ"ט א"ד N המקבלת את

$$\bar{L}_E = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \neq \emptyset \}$$

:x על קלט =N

- . אם  $\langle M \rangle$  אם (1
- . באופן א"ד.  $w \in \Sigma^*$  אז N בוחרת אי"ד. אם ער גא אם אם ער אז אי
  - .w על M מריצה (3
  - אם M מקבלת M מקבלת.
    - . אם M דוחה  $N \Leftarrow$

#### הוכחת הנכונות

 $x\in \bar{L}_E$  אם

$$L(M) \neq \emptyset$$
 -1  $x = \langle M \rangle \Leftarrow$ 

- $w \in L(M)$  -פיימת מילה  $w \in \Sigma^*$  כך ש
- wאת מקבלת מקבל ע $w \in \Sigma^*$ ניחוש  $\exists \ \Leftarrow$
- $x = \langle M \rangle$  את המקל של של + קיים חישוב של +
  - $.x \in L(N) \Leftarrow$

 $ar{L}_E \in RE$  לכן קיימת מ"ט א"ד N המקבלת את השפה לכן קיימת

 $.L_{E} 
otin RE$  כעת נוכיח כי

 $L_E\in R$  ,5.1 לכם לפי משפט.  $\bar{L}_E\in RE$  - הוכחנו למעלה ש.  $L_E\in RE$  הוכחנו למעלה.  $L_E\notin R$  או בסתירה לכך ש-  $L_E\notin R$ 

## לא כריעה $L_{EQ}$ השפה 6.3

## $L_{EQ}$ 6.5 הגדרה

$$L_{EQ} = \left\{ \left\langle M_1, M_2 \right\rangle \mid L\left(M_1\right) = L\left(M_2\right) \right\}$$

## $L_{EQ} otin R$ משפט 6.9 משפט

#### $L_{EQ} \notin R$

.השפה  $L_{EQ}$  לא כריעה

#### הוכחה:

נניח בשלילה כי  $M_E$  כריעה את מ"ט המכריעה את מ"ט המכריעה את  $M_{EQ}$  המכריעה את כייעה. תהי  $L_{EQ}$  באופן הבא.

### $M_E$ בנייה של

$$:x$$
 על כל קלט  $=M_E$ 

. אם 
$$\langle M \rangle$$
 אם (1

. כל קלט שדוחה אם 
$$M_{arnothing}$$
 כאשר על  $\langle M, M_{arnothing} 
angle$  על על אם  $M_{EQ}$  מריצה , $x=\langle M 
angle$  אם על

. אם 
$$M_{EQ}$$
 מקבלת  $\bullet$  (3

. אם 
$$M_{EQ}$$
 דוחה  $+$ 

#### נכונות

$$x \in L_E$$
 אם

$$L(M) = \emptyset$$
 -1  $x = \langle M \rangle \Leftarrow$ 

$$L(M) = L\left(M_{\varnothing}\right) \; \Leftarrow \;$$

$$\langle M, M_{\varnothing} \rangle \in L_{EQ} \Leftarrow$$

$$\langle M, M_{\varnothing} 
angle$$
 מקבלת  $M_{EQ} \Leftarrow$ 

.מקבל 
$$M_E \Leftarrow$$

אם אם 
$$x \notin L_E$$
 אם

דוחה. 
$$M_E \leftarrow x \neq \langle M \rangle$$
 דוחה.

$$L(M) 
eq \emptyset$$
 -ו  $x = \langle M \rangle \iff$  נים מקרה 2:

$$L(M) \neq L\left(M_{\varnothing}\right) \; \Leftarrow \;$$

$$\langle M, M_{\varnothing} \rangle \notin L_{EQ} \Leftarrow$$

$$\langle M, M_{\varnothing} 
angle$$
 דוחה  $M_{EQ} \Leftarrow$ 

. דוחה 
$$M_E \Leftarrow$$

#### לסיכום:

 $L_E \notin R$  -שומר ש- 6.7 בסתירה למשפט המכריעה את המכריעה  $M_E$  מ"ט מ"ט לבנות כריעה אז  $L_{EQ}$  לכן  $L_{EQ} \notin R$ לכן לבנות המכריעה לבנות מ"ט המכריעה לבנות המכריעה לבנות המכריעה לבנות המכריעה לבנות המכריעה לבנות המכריעה המכריעה לבנות המכריעה המכריעה

## $L_{EQ} otin RE$ 6.10 משפט

### $L_{EQ} \notin RE$

לא קבילה.  $L_{EQ}$ 

#### הוכחה:

נניח בשלילה כי  $M_E$  קבילה. תהי  $M_{EQ}$  מ"ט המקבלת את מ"ט  $M_{EQ}$  אז נבנה מ"ט קבילה. תהי  $M_{EQ}$  קבילה. תהי  $M_{EQ}$  המקבלת את באופן הבא.

#### $M_E$ בנייה של

x על כל קלט  $=M_E$ 

- דוחה.  $\langle M \rangle$  אם (1
- על קלט. איז המ"ט אדוחה  $M_{m{\varnothing}}$  כאשר  $M_{m{\varnothing}}$  על אדוחה כל קלט.  $x=\langle M 
  angle$  אם  $x=\langle M 
  angle$ 
  - מקבלת  $\leftarrow$  מקבלת  $M_{EQ}$  (3

#### נכונות

 $x \in L_E$  אם

$$L(M) = \varnothing$$
 -1  $x = \langle M \rangle \Leftarrow$ 

$$L(M) = L\left(M_{\varnothing}\right) \Leftarrow$$

$$\langle M, M_{\varnothing} \rangle \in L_{EQ} \Leftarrow$$

$$\langle M, M_{\varnothing} 
angle$$
 מקבלת  $M_{EQ} \Leftarrow$ 

.מקבל מקבל 
$$M_E \Leftarrow$$

#### לסיכום:

 $L_E 
otin RE$  אם  $L_{EQ}$  קבילה אז אפשר לבנות מ"ט  $M_E$  המקבלת את בסתירה למשפט 6.8 האומר ש $L_{EQ} 
otin RE$  לכן

## $ar{L}_{EQ} otin RE$ 6.11 משפט

$$\bar{L}_{EQ} \notin RE$$
.

#### הוכחה:

 $ar{L}_{
m acc}$  את המקבלת מ"ט  $M_{ar{acc}}$  אז נבנה מ"ט בשלילה כי המקבלת מ"ט המקבלת מ"ט המקבלת מ"ט המקבלת המקבלת בשלילה כי באופן הבא.

## $M_1$ בנייה של

ראשית נגדיר מ"ט  $M_1$  באופן הבא:

$$x$$
 על קלט  $= M_1$ 

. על w ועונה כמוה M מריצה (1

## $M_{\overline{ m acc}}$ בנייה של

x על כל קלט  $=M_{\overline{\mathrm{acc}}}$ 

. אם 
$$\langle M,w \rangle$$
 אם (1

$$M_1$$
 אז בונה  $x=\langle M,w 
angle$  (2

. כל קלט שמקבלת המ"ט המ"ט על 
$$\langle M_1, M^* 
angle$$
 על  $M_{\overline{EQ}}$  מריצה (3

. אם 
$$M_{\overline{EQ}}$$
 מקבלת  $ullet$  מקבלת.

#### נכונות

 $x \in L_{\overline{\mathrm{acc}}}$  אם

$$w$$
 לא מקבלת  $M \Leftarrow$ 

$$L(M_1) = \emptyset \Leftarrow$$

$$\langle M_1, M^* \rangle \in L_{\overline{EQ}} \Leftarrow$$

$$\langle M_1, M^* 
angle$$
 מקבלת  $M_{\overline{EQ}} \Leftarrow$ 

.מקבל מקבל 
$$M_{\overline{\mathrm{acc}}} \Leftarrow$$

#### לסיכום:

 $L_{\overline{acc}} \notin RE$  -שם 6.6 בסתירה למשפט  $L_{\overline{acc}}$  את המקבלת את המקבלת מ"ט  $M_{\overline{acc}}$  האומר ש $L_{\overline{EQ}} \notin RE$  לכן  $L_{\overline{EQ}} \notin RE$ 

## שיעור *7* רדוקציה

## 7.1 טבלה של רדוקציות

## טבלה של רדוקציות

עמוד	רדוקציה
דוגמה 7.6 עמוד 71	$L_{ ext{HALT}} \leqslant L_{ ext{acc}}$
75 עמוד 75	$ar{L}_{ m acc} \leqslant L_{ m NOTREG}$
76 דוגמה 7.12 עמוד	$L_{ m acc} \leqslant L_{ m NOTREG}$
77 דוגמה 7.13 עמוד	$L_{ ext{HALT}} \leqslant L_{ ext{NOTREG}}$
79 דוגמה 7.15 עמוד	$L_{ m acc} \leqslant L_{ m REG}$
78 דוגמה 7.14 עמוד	$ar{L}_{ m acc} \leqslant L_{ m REG}$
7.16 דוגמה	$ar{L}_{ m acc} \leqslant L_{M_1  eg M_2}$ כאשר
	$L_{M_1 \neg M_2} = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \land w \notin L(M_2) \}$
דוגמה 7.17 עמוד 80	$\bar{L}_{\mathrm{acc}} \leqslant L_{M_1 \subset M_2}$
	כאשר . $L_{M_1 \subset M_2} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L\left(M_1\right) \subset L\left(M_2\right)\}$

## 7.2 מ"ט המחשבת את פונקציה

#### הגדרה 7.1 מ"ט המחשבת פונקציה

 $x \in \Sigma^*$  אם לכל את מחשבת מ"ט מ"ט  $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$  אם לכל בהינתן בהינתן בהינתן אומרים אומרים אומרים אומרים בהינתן

- וגם f(x) או בסוף בסוף בסוף בסוף ל- מגיעה ל-  $q_{
  m acc}$ 
  - f(x) רשום M רשום •

#### 7.1 הערה

מ"ט שמחשבת פונקציה עוצרת תמיד.

#### הגדרה 7.2 מ"ט המחשבת פונקציה

f את המחשבת מ"ט קיימת היים כי אומרים כי  $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$  המחשבת בהינתן בהינתן בהינתן היים לי

#### דוגמה 7.1

$$f_1(x) = xx . (7.1)$$

. חשיבה  $f_1(x)$ 

#### דוגמה 7.2

$$f_2(x) = \begin{cases} x & |x| \text{ in } \\ xx & |x| \text{ in } \end{cases}$$
 (7.2)

.חשיבה  $f_2(x)$ 

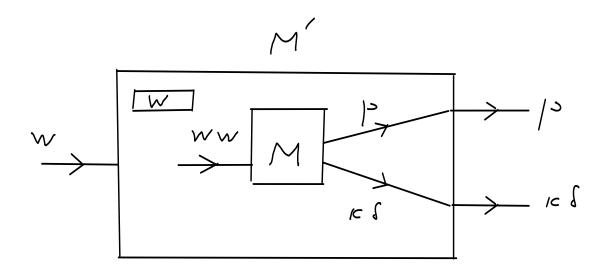
### דוגמה 7.3

$$f_3(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M \rangle \\ \langle M^* \rangle & x \neq \langle M \rangle \end{cases}$$
 (7.3)

כאשר

- .ט שמקבלת כל קלט  $M^*$
- מ"ט המקבלת את השפה M' ullet

$$L(M') = \left\{ w \in \Sigma^* \mid ww \in L(M) \right. .$$



ואם כן,  $\langle M^* \rangle$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שבודקת האם  $x=\langle M \rangle$  אם אם שבודקת מ"ט שבודקת האם  $f_3(x)$  מחזירה קידוד  $\langle M \rangle$  ע"י הוספת מעברים המשכפלים את הקלט בתחילת הקידוד  $\langle M' \rangle$  ע"י הוספת

#### דוגמה 7.4

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & x = \langle M \rangle \land \langle M \rangle \in L(M) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$
 (7.4)

 $\langle M \rangle$  לא עוצרת על M -ו  $x = \langle M \rangle$  לא ייתכנו קלטים כי ייתכנו לא  $f_4(x)$ 

## 7.3 רדוקציות

## הגדרה 7.3 רדוקציות

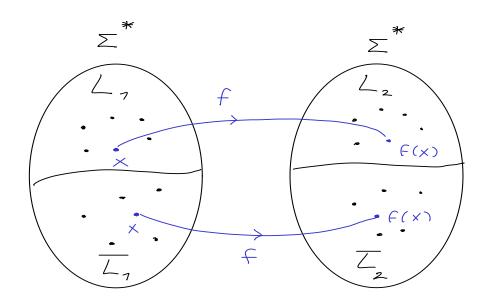
בהינתן שתי שפות  $L_1,L_2\subseteq \Sigma^*$  אומרים כי גיתנת לרדוקציה ל- ומסמנים בהינתן בהינתן ל

$$L_1 \leqslant L_2$$
,

:המקיימת  $f:\Sigma^* o\Sigma^*$  המקיימת  $\exists$ 

- חשיבה f (1
- $x \in \Sigma^*$  לכל (2

$$x \in L_1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_2 \ .$$



#### דוגמה 7.5

נתונות השפות

$$L_1 = \left\{ x \in \{0,1\}^* \mid \mathsf{ink'} \mid x \mid \right\} \; ,$$
  $L_2 = \left\{ x \in \{0,1\}^* \mid \mathsf{ink'} \mid x \mid \right\} \; .$ 

הוכיחו כי

#### פתרון:

נגדיר את הפונקציה

$$f(x) = egin{cases} 1 & \text{iik} & |x|, \ 10 & \text{iik} & |x| \end{cases}$$

#### הוכחת הנכונות:

$$f(x) \in L_2$$
 אי-אגי  $|f(x)| \Leftarrow f(x) = 1 \Leftarrow x$ אני  $|x| \Leftarrow x \in L_1$ 

$$f(x) \notin L_2$$
 אני  $|f(x)| \Leftarrow f(x) = 10 \Leftarrow x$  אי-אוגי  $|x| \Leftarrow x \notin L_1$ 

#### משפט 7.1 משפט הרדוקציה

לכל שתי שפות  $\Sigma^* = L_1, L_2 \subseteq \Sigma$ , אם קיימת רדוקציה

$$L_1 \leqslant L_2$$

אזי התנאים הבאים מתקיימים:

$$L_1 \in R \quad \Leftarrow \quad L_2 \in R \quad \text{(1)}$$

$$L_1 \in RE \iff L_2 \in RE$$
 (2)

$$L_1 \notin R \quad \Rightarrow \quad L_2 \notin R \quad \quad \text{(3)}$$

$$L_1 \notin RE \implies L_2 \notin RE$$
 (4)

הוכחה: מכיוון ש-

$$L_1 \leqslant L_2$$

:קיימת פונקציה f חשיבה המקיימת

$$x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$$

 $x \in \Sigma^*$  לכל

f מ"ט המחשבת את  $M_f$ 

$$L_1 \in R \Leftarrow L_2 \in R$$
 נוכיח (1)

 $.L_2$  את מכריעה את מ"ט  $M_2$  תהי  $.L_1$  את המכריעה את  $M_1$  נבנה מ"ט המכריעה את

 $M_1$  התאור של

$$x$$
 על קלט  $= M_1$ 

 $M_f$  בעזרת f(x) את מחשבת . 1

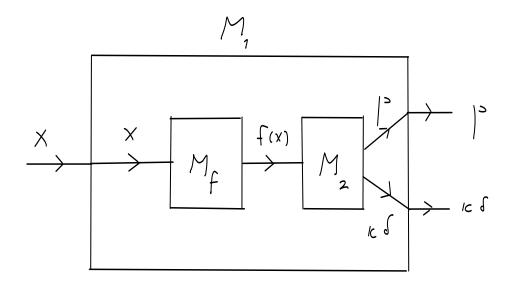
. מריצה את f(x) על  $M_2$  את מריצה . 2

 $.L_1$  את מכריעה  $M_1$  נוכיח כי

- x את מקבלת את מקבלת את מקבלת את  $M_2 \leftarrow f(x) \in L_2 \leftarrow x \in L_1$  אם
  - x את את  $M_1 \quad \Leftarrow \quad f(x)$  אם  $M_2 \quad \Leftarrow \quad f(x) \notin L_2 \quad \Leftarrow \quad x \notin L_1$  אם •

## $L_1 \in RE \Leftarrow L_2 \in RE$ נוכיח (2)

 $.L_2$  את המקבלת מ"ט  $M_2$  תהי  $.L_1$  את המקבלת את המקבלת את נבנה מ"ט



## $M_1$ התאור של

:x על קלט  $=M_1$ 

- $M_f$  בעזרת f(x) את מחשבת .1
- . מריצה את f(x) על  $M_2$  את מריצה .2

 $:\!L_1$  את מקבלת את נוכיח כי

- $M_1$   $\iff$   $M_2$  אם  $M_2$   $\iff$   $M_2$   $\iff$   $M_3$   $\iff$   $M_4$   $\iff$   $M_4$
- x את אם אם לא מקבלת את לא מקבלת את לא  $M_2 \quad \Leftarrow \quad f(x) \notin L_2 \quad \Leftarrow \quad x \notin L_1$  אם •

(3)

(4)

### כלל 7.1

אם רדוקציה שקיימת כי שפה להוכיח בי אחרת שפה בוחרים אבה לשהי בלשהי שקיימת רדוקציה שפה אחרת להוכיח כי שפה כלשהי רדוקציה  $L' \in RE$ 

$$L \leqslant L'$$
.

לדודמה:

$$L \leqslant L_{\rm acc}$$

(R') (כנ"ל לגבי

אם רדוקציה שקיימת פי שפה להוכיח שפה אחרת בוחרים שפה בוחרים שקיימת רדוקציה שקיימת רוצים להוכיח לי שפה לשהי בוחרים שפה אחרת  $L'\notin RE$ 

$$L' \leqslant L$$
.

לדוגמה

$$L_{\rm d} \leqslant L$$

(R')וכנ"ל לגבי

#### דוגמה 7.6

$$L_{
m halt}=ig\{\langle M,w
angle\ \mid\ w$$
 נתונות השפות  $M\}$  ו-  $L_{
m acc}=ig\{\langle M,w
angle\ \mid\ w\in L(M)\}$  ע"י רדוקציה בוכיחו כי $L_{
m acc}
otin L_{
m halt}$  בוכיחו כי

### פתרון:

נבנה פונקציה f חשיבה ומקיימת

$$x \in L_{\mathrm{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L_{\mathrm{halt}}$$
.

w' את תעצור על  $M' \Leftarrow w$  מקבלת את מקבלת M

w' את תעצור על  $M' \leftarrow w$  את את M

w' לא תעצור על  $M' \leftarrow w$  את אוצרת אל M

$$f(x) = \begin{cases} \langle M', w \rangle & : x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\text{loop}}, \varepsilon \rangle & : x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- .ט שלא עוצרת על מ"ט מ"ט שלא עוצרת אף קלט.  $M_{
  m loop}$
- . עצרה תיכנס ללולאה אינסופית. M' בהם M עצרה ודחתה, M' פרט למקומות פרט למקומות מ"ט מ"ט מ"ט מ"ט מ"ט מייט לאולאה אינסופית.

#### נכונות הרדוקציה

 $x = \langle M, w 
angle$  האם האם מ"ט שתבדוק לבנות לבנות ל

 $\langle M_{
m loop}, w 
angle$ אם לא, תחזיר קידוד קבוע

Mשל בקידוד לוקלים שינויים עניי עניי עניי אינו ל $\langle M',w\rangle$  דוד קידוד ואם ואם ואם ואם

$$x \in L_{\mathrm{acc}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_{\mathrm{halt}}$$
 נוכיח כי

 $x \in L_{\mathrm{acc}}$  אם

$$w \in L(M)$$
 -1  $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$ 

$$w$$
 את ומקבלת אוצרת  $M'$  -ו  $f(x) = \langle M', w \rangle \Leftarrow$ 

$$f(x) \in L_{\text{halt}} \Leftarrow$$

אם אני מקרים:  $x \notin L_{\mathrm{acc}}$ 

#### מקרה 1:

$$f(x) 
otin L_{
m halt} \quad \Leftarrow \quad arepsilon$$
 לא עוצרת על  $M_{
m loop}$  ו-  $f(x) = \langle M_{
m loop}, arepsilon 
angle \quad \Leftarrow \quad x 
otin \langle M, w 
angle$ 

#### :2 מקרה

שני מקרים: 
$$\Leftarrow f(x) = \langle M', w \rangle \quad \Leftarrow \quad w \notin L(M)$$
 -1  $x = \langle M, w \rangle$ 

$$f(x) 
otin L_{ ext{halt}} \quad \Leftarrow \quad w$$
 לא עוצרת על  $M' \quad \Leftarrow \quad w$  לא עוצרת על  $M$ 

$$f(x) 
otin L_{ ext{halt}} \quad \Leftarrow \quad w$$
 לא עוצרת על  $M' \quad \Leftarrow \quad w$  דוחה את מקרה ב:

לסיכום, הוכחנו רדוקציה 7.1, ומכיוון ש- במ $L_{\rm acc}\notin R$ יש וומכיוון ש- גו $L_{\rm acc}\leqslant L_{\rm halt}$  הדוקציה רדוקציה ווכחנו . $L_{\rm halt}\notin R$ 

#### דוגמה 7.7

נתונה השפה

$$L_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^* \}$$

ונתונה השפה

$$\bar{L}_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \neq \Sigma^* \} \cup \{ x \neq \langle M \rangle \} .$$

הוכיחו כי:

$$L_{\Sigma^*} \notin RE$$
 (x

$$L_{\Sigma^*} \notin R$$
 (2

$$ar{L}_{\Sigma^*} 
otin RE$$
 ()

#### פתרון:

נוכיח כי 
$$L_{\Sigma^*} \notin R$$
 ע"י רדוקציה

$$L_{\rm acc} \leqslant L_{\Sigma^*}$$
.

נבנה פונקציה חשיבה f המקיימת

$$x \in L_{\mathrm{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L_{\Sigma^*}$$
.

$$L(M') = \Sigma^* \iff w \in L(M)$$

$$L(M') \neq \Sigma^* \iff w \notin L(M)$$

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & : x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\varnothing} \rangle & : x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- מ"ט שדוחה כל קלט.  $M_{\varnothing}$
- . ועונה על על M על את ומריצה את M היא מ"ט שעל כל קלט x, מתעלמת מx מתעלמת של M'

#### אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & : w \in L(M) \\ \varnothing & : w \notin L(M) \end{cases}$$

### נכונות הרדוקציה:

 $x=\langle M,w
angle$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם f

 $\langle M_{\varnothing} \rangle$  אם לא תחזיר קידוד קבוע

. אם כן, תחזיר קידוד  $\langle M' 
angle$  הוספת קוג ל- M שמוחק את הקלט מהסרט וכותב ע"י הוספת אם כן, תחזיר קידוד

נוכיח כי

$$x \in L_{\mathrm{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L_{\Sigma^*}$$

$$x\in L_{
m acc}$$
 אם  $f(x)=\Sigma^*$  ולפי האבחנה  $f(x)=\langle M'
angle$   $w\in L(M)$  -1  $x=\langle M,w
angle$   $x\in L_{
m acc}$  אם  $f(x)=\langle M'
angle$   $x\in L(M)$  -1  $x=\langle M,w
angle$   $x\in L_{
m acc}$  אם  $f(x)\in L_{\Sigma^*}$ 

אם מקרים:  $\Leftarrow x \in L_{\mathrm{acc}}$ 

$$f(x) 
otin L_{\Sigma^*} \quad \Leftarrow \quad L\left(M_{\varnothing}
ight) = arnothing f(x) = \left\langle M_{\varnothing} 
ight
angle \quad \Leftarrow \quad x 
otin \langle M, w 
angle \quad : define L(M_{\varnothing}) = \langle M_{\varnothing} 
angle$$
מקרה נ

$$f(x) 
otin L_{\Sigma^*} \quad \Leftarrow \quad L\left(M'
ight) = arnothing$$
 ולפי האבחנה  $f(x) = \langle M'
angle \quad \Leftarrow \quad w 
otin L(M) = \langle M, w
angle$  מקרה 2):

לסיכום, הוכחנו רדוקציה 7.1. ומכיוון ש-  $L_{
m acc} \notin R$  (משפט 6.4) אז ממשט הרדוקציה . $L_{
m acc} \leqslant L_{\Sigma^*}$  מתקיים . $L_{\Sigma^*} \notin R$ 

### דוגמה 7.8

נתונה השפה

$$L_{d} = \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \}$$

ונתונה השפה

$$\bar{L}_{\mathrm{acc}} = \left\{ \langle M, w \rangle \ \left| w \notin L(M) \right\} \cup \left\{ x \neq \langle M, w \rangle \right\} \right. .$$

הוכיחו כי

ע"י רדוקציה  $ar{L}_{
m acc} 
otin RE$ 

$$L_{\rm d} \leqslant \bar{L}_{\rm acc}$$
 .

נבנה פונקציה חשיבה f המקיימת

$$x \in L_{\mathsf{d}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_{\mathsf{acc}} \ .$$

$$w' \notin L(M') \iff \langle M \rangle \notin L(M)$$
  
 $w' \in L(M') \iff \langle M \rangle \in L(M)$ 

$$f(x) = \begin{cases} \langle M, \langle M \rangle \rangle & : x = \langle M \rangle \\ \langle M^*, \varepsilon \rangle & : x \neq \langle M \rangle \end{cases}$$

.כאשר  $M^*$  המ"ט שמקבלת כל קלט

### נכונות הרדוקציה:

 $x = \langle M, w \rangle$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם f

 $\langle M^*, arepsilon 
angle$ אם לא תחזיר קידוד קבוע

 $\langle M,\langle M \rangle 
angle$ אם כן, תחשב

נוכיח כי

$$x\in L_{\mathrm{d}}$$
  $\Leftrightarrow$   $f(x)\in ar{L}_{\mathrm{acc}}$   $\iff$   $\langle M
angle\notin L(M)$  -1  $f(x)=\langle M,\langle M
angle
angle$   $\iff$   $\langle M
angle\notin L(M)$  -1  $x=\langle M
angle$   $\iff$   $x\in L_{\mathrm{d}}$  and  $f(x)\in ar{L}_{\mathrm{acc}}$ 

אם אפני מקרים:  $x \notin L_{\mathrm{d}}$  אם

$$f(x) 
otin ar{L}_{
m acc} \quad \Leftarrow \quad arepsilon \in L\left(M^*
ight)$$
 -ו  $f(x) = \langle M^*, arepsilon 
angle \quad \Leftarrow \quad x 
otin \langle M 
angle \quad :$ מקרה ב

$$f(x) 
otin ar{L}_{
m acc} \quad \Leftarrow \quad \langle M 
angle \in L(M)$$
 -ו  $f(x) = \langle M, \langle M 
angle 
angle \quad \Leftarrow \quad \langle M 
angle \in L(M)$  -ו  $x = \langle M 
angle \quad \Leftrightarrow \quad \langle M 
angle \in L(M)$  מקרה 2):

לסיכום, הוכחנו רדוקציה 7.1, ומכיוון ש-  $L_{
m d} \notin RE$  (משפט 6.3) אז ממשט הרדוקציה 1, ומכיוון ש-  $L_{
m d} \notin RE$  לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $\bar{L}_{
m acc} \notin RE$ 

# משפט 7.2 משפט הרדוקציה בין שפות משלימות

 $ar{L}_1\leqslantar{L}_2$  אדי קיימת רדוקציה,  $L_1\leqslant L_2$  אדי קיימת רדוקציה

### הוכחה:

אם ∃ רדוקציה

$$L_1 \leqslant L_2$$

אזי $\exists$  פונקציה חשיבה f המקיימת

$$x \in L_1 \iff f(x) \in L_2$$

ולכן עבור אותה פונקציה f היא גם חשיבה וגם מקיימת

$$x \in \bar{L}_1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in \bar{L}_2$$

ולכן

$$\bar{L}_1 \leqslant \bar{L}_2$$
.

# 7.4 דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה בין שפות משלימות (משפט 7.2)

### דוגמה 7.9

הוכחנו בדוגמה 7.7 רדוקציה

 $L_{\rm acc} \leqslant L_{\Sigma^*}$  .

לכן לפי משפט 7.2 קיימת רדוקציה

 $\bar{L}_{\rm acc} \leqslant \bar{L}_{\Sigma^*}$  .

 $ar{L}_{\Sigma^*} 
otin RE$  מכיוון ש- 7.1 ממשט היז ממשט האזי ממשט , $ar{L}_{
m acc} 
otin RE$  מכיוון ש

### דוגמה 7.10

הוכחנו בדוגמה 7.8 רדוקציה

 $L_{\rm d} \leqslant \bar{L}_{\rm acc}$ .

לכן לפי משפט 7.2 קיימת רדוקציה

 $\bar{L}_{\rm d} \leqslant L_{\rm acc}$ .

 $ar{L}_{ extsf{d}} \in RE$  מכיוון ש- 7.1 ממשט האי ממשט הרדוקציה לאזי ממשט , $L_{ extsf{acc}} \in RE$ 

# 7.5 דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה (משפט 7.5)

 $ar{L}_{
m acc} \leqslant L_{
m NOTREG}$  7.11 דוגמה

תהי  $L_{ ext{NOTREG}}$  השפה

 $L_{ ext{NOTREG}} = \left\{ \langle M \rangle \ \middle| \ \text{ גולרית} \ L(M) 
ight\} \ .$ 

 $ar{L}_{
m acc}$  -ם כי השפה לידי על לא כריעה לא בריעה מר הוכיחו כי השפה הוכיחו

## פתרון:

השפה  $ar{L}_{
m acc}$  מוגדרת

 $ar{L}_{
m acc} = ig\{ \langle M, w 
angle \ | \ w$  לא מקבלת  $M ig\} \cup \{ x 
eq \langle M, w 
angle \}$  .

והשפה  $L_{ ext{NOTREG}}$  מוגדרת

 $L_{ ext{NOTREG}} = \left\{ \langle M 
angle \; \middle| \; n$ לא רגולרית  $L(M) 
ight\}$  .

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ w' \in PAL & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

:כאשר M' מ"ט הבאה

y על כל קלט =M'

. אם  $y \in PAL$  אם (1

. על w ועונה כמוה M אחרת מריצה M

### הוכחת נכונות הרדוקציה

אם שני מקרים: 
$$x \in \bar{L}_{\mathrm{acc}}$$

$$x = \langle M, w \rangle$$
 :1 מקרה

$$w$$
 לא מקבלת  $M \Leftarrow$ 

$$L\left( M^{\prime}\right) \in PAL \Leftarrow$$

$$\langle M' \rangle \in PAL \Leftarrow$$

$$f(x) \in PAL \Leftarrow$$

$$f(x) \in L_{\text{NOTREG}} \Leftarrow$$

$$f(x) \in L_{\text{NOTREG}} \Leftarrow f(x) \in PAL \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$$
 בקרה 2:

$$f(x) \in L_{ ext{NOTREG}} \quad \Leftarrow \quad f(x) \in \Sigma^* \quad \Leftarrow \quad L\left(M'
ight) = \Sigma^* \quad \Leftarrow \quad w$$
 מקבלת אם  $M \quad \Leftarrow \quad x \notin \bar{L}_{ ext{acc}}$ 

 $L_{ ext{NOTREG}}$  ל-כן הוכחנו כי  $L_{ ext{acc}}$  ל-ג $L_{ ext{acc}}$  היא רדוקציה מ-f(x) ז"א א"ג,  $x\in ar{L}_{ ext{acc}}\Leftrightarrow f(x)\in NOTERG$ 

. לא כריעה. לפיכך, לפי משפט הרדוקציה לא  $\bar{L}_{
m acc}$  לא לא כריעה. לפיכך, לפי משפט הרדוקציה לא ל

$$L_{
m acc} \leqslant L_{
m NOTREG}$$
 7.12 דוגמה

תהי  $L_{ ext{NOTREG}}$  השפה

$$L_{ ext{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid \mathsf{L}(M)\}$$
 .

 $.L_{
m acc}$  -ם ידי רדוקציה על א כריעה לא בריעה תוכיחו כי השפה הוכיחו לא בריעה לא ל

# פתרון:

השפה  $L_{
m acc}$  מוגדרת

$$L_{
m acc} = \left\{ \langle M, w 
angle \; \middle| \; w$$
 מקבלת  $M 
ight\}$  .

והשפה  $L_{ ext{NOTREG}}$  מוגדרת

$$L_{\text{NOTREG}} = \big\{ \langle M \rangle \ \big| \ \text{therefore} \ L(M) \big\}$$
 .

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\varnothing} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

:כאשר M' מ"ט הבאה

$$y$$
 על כל קלט  $=M'$ 

- .w על M מריצה M' (1
- . אם M דוחה  $\Rightarrow$  דוחה  $\bullet$

- . בודקת אם y פלינדרום  $M' \Leftarrow M$  מקבלת  $M \bullet$ 
  - \* אם כן  $\Rightarrow$  מקבלת.
    - \* אם לא  $\Rightarrow$  דוחה.

### הוכחת נכונות הרדוקציה

$$f(x) \in L_{ ext{NOTREG}} \quad \Leftarrow \quad f(x) \in PAL \quad \Leftarrow \quad L\left(M'\right) = PAL \quad \Leftarrow \quad w$$
 מקבלת  $M \quad \Leftarrow \quad x \in L_{ ext{acc}}$ 

שני מקרים.  $\Leftarrow x \notin L_{\mathrm{acc}}$ 

$$\langle M_\varnothing \rangle \notin L_{\mathrm{NOTREG}} \quad \Leftarrow \quad L\left(M_\varnothing\right) = \varnothing \text{ -1 } f(x) = \langle M_\varnothing \rangle \quad \Leftarrow \quad x \neq \langle M, w \rangle \quad \underline{:} \underline{ \text{1 } f(x) \notin L_{\mathrm{NOTREG}}} \quad \Leftarrow \quad \underline{ \text{2.5}}$$

$$\langle M' 
angle \notin L_{ ext{NOTREG}} \quad \Leftarrow \quad L\left(M'
ight) = \varnothing \quad \Leftarrow \quad w$$
 א מקבלת  $M \cdot H = \langle M, w 
angle \quad : \underline{f(x) \notin L_{ ext{NOTREG}}} \quad \Leftarrow \quad \underline{f(x) \notin L_{ ext{NOTREG}}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{f(x) \ker L_{ ext{NOTREG}}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{f(x) \ker L_{ ext{NOTREG}}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{f(x) \ker L_{ ext{NOTREG}}} \quad \Leftrightarrow \quad$ 

# $L_{ ext{HALT}} \leqslant L_{ ext{NOTREG}}$ 7.13 דוגמה

תהי  $L_{ ext{NOTREG}}$  השפה

$$L_{ ext{NOTREG}} = \left\{ \left\langle M 
ight
angle \; \middle| \; \; h$$
 לא רגולרית  $L(M) 
ight\}$  .

 $L_{
m HALT}$  -הוכיחו כי השפה לא כריעה על לא  $L_{
m NOTREG}$  הוכיחו כי השפה

# פתרון:

השפה  $L_{\mathrm{HALT}}$  מוגדרת

$$L_{ ext{HALT}} = \left\{ \langle M, w 
angle \mid w \;$$
עוצרת על  $M 
ight\} \; .$ 

מוגדרת  $L_{ ext{NOTREG}}$  מוגדרת

$$L_{ ext{NOTREG}} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \}$$
 .

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\varnothing} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}.$$

:כאשר M' מ"ט הבאה

y על כל קלט =M'

- .w על M מריצה M' (1
- אם M דוחה  $\Rightarrow$  דוחה. (2
- אם M מקבלת שלב 3).  $\bullet$ 
  - $y \in PAL$  בודקת אם M' (3
    - $\bullet$  אם כן  $\Rightarrow$  מקבלת.
      - אם לא ⇒ דוחה.

### הוכחת הנכונות

$$.L\left( M^{\prime}\right) \in L_{ ext{NOTREG}} \quad \Leftarrow \quad L\left( M^{\prime}\right) \in PAL \quad \Leftarrow \quad x \in L_{ ext{HALT}}$$

:שני מקרים  $\Leftarrow x \notin L_{\text{HALT}}$ 

$$\langle M_\varnothing \rangle \notin L_{\mathrm{NOTREG}} \quad \Leftarrow \quad L\left(M_\varnothing\right) = \varnothing \text{ -1 } f(x) = \langle M_\varnothing \rangle \quad \Leftarrow \quad x \neq \langle M, w \rangle \quad \underline{:1} \text{ agree } f(x) \notin L_{\mathrm{NOTREG}} \quad \Leftarrow \quad \underline{} f(x) \notin L_{\mathrm{NOTREG}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{:1} \text{ agree } f(x) \notin L_{\mathrm{NOTREG}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{} f(x)$$

$$\langle M_\varnothing 
angle 
otin L_{ ext{NOTREG}} \quad \Leftarrow \quad L\left(M_\varnothing 
ight) = \varnothing \quad \Leftarrow \quad w$$
 א עוצרת על ש $M$  - ו-  $x = \langle M, w 
angle \quad \underline{:}$  מקרה ביי  $f(x) 
otin L_{ ext{NOTREG}} \quad \Leftarrow \quad \underline{:}$ 

$$ar{L}_{
m acc} \leqslant L_{
m REG}$$
 7.14 דוגמה

תהי  $L_{ ext{REG}}$  השפה

$$L_{ ext{REG}} = \left\{ \left\langle M \right
angle \; \middle| \; n$$
רגולרית  $L(M) \right\}$  .

.  $ar{L}_{
m acc}$  -מ כריעה על ידי בדוקציה מ- הוכיחו כי השפה לא לא בריעה על לא

### פתרון:

השפה  $ar{L}_{
m acc}$  מוגדרת

$$ar{L}_{
m acc} = ig\{ \langle M, w 
angle \mid w$$
 לא מקבלת  $M ig\} \cup \{ x \mid x 
eq \langle M, w 
angle \}$  .

והשפה  $L_{ exttt{REG}}$  מוגדרת

$$L_{ ext{REG}} = \{ \langle M \rangle \mid \text{ רגולרית } L(M) \}$$
 .

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\varnothing} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

:כאשר מ"ט מ"ט הבאה כל קלט אדוחה מ"ט הבאה מאכר מ"ט המ"ט אדוחה כל המ"ט באה

y על כל קלט =M'

- .w על M מריצה (1
- אם M דוחה  $\Rightarrow$  דוחה. (2
- אם M מקבלת  $\Rightarrow$  בודקת אם y פלינדרום:
  - אם כן  $\Rightarrow$  מקבלת.
  - אם לא ⇒ דוחה.

### <u>אבחנה</u>

$$L(M') = \begin{cases} PAL & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

אם מקרים:  $x \in \bar{L}_{\mathrm{acc}}$  אם

$$f(x) \in L_{\mathrm{REG}} \quad \Leftarrow \quad \langle M_{\varnothing} \rangle \in L_{\mathrm{REG}} \quad \Leftarrow \quad L\left(M_{\varnothing}\right) = \varnothing$$
 ר-  $f(x) = \langle M_{\varnothing} \rangle \quad \Leftarrow \quad x \neq \langle M, w \rangle$  בקרה ב-

$$\langle M_\varnothing 
angle \in L_{\mathrm{REG}} \quad \Leftarrow \quad L\left(M'
ight) = \varnothing$$
 ולפי האבחנה  $f(x) = \langle M' 
angle \quad \Leftarrow \quad x \notin L(M)$  - ו $x = \langle M, w 
angle \quad 2$  מקרה  $f(x) \in L_{\mathrm{REG}} \Leftarrow \quad f(x) \in L_{\mathrm{REG}}$ 

$$f(x) \in PAL \quad \Leftarrow \quad L\left(M'\right) \in PAL \quad \text{ idea in a part } f(x) = \left\langle M'\right\rangle \quad \Leftarrow \quad w \in L\left(M\right) \quad \Leftarrow \quad x \notin \bar{L}_{\mathrm{acc}} \text{ and } f(x) \notin L_{\mathrm{REG}} \Leftarrow 1$$

# $L_{ m acc} \leqslant L_{ m REG}$ 7.15 דוגמה

תהי  $L_{ exttt{REG}}$  השפה

$$L_{ ext{REG}} = \{ \langle M \rangle \mid \text{ רגולרית } L(M) \}$$
 .

 $.L_{
m acc}$  -הוכיחו כי השפה לא כריעה על בריעה לא  $L_{
m REG}$ 

### פתרון:

השפה  $L_{
m acc}$  מוגדרת

$$L_{
m acc} = \left\{ \langle M, w 
angle \; \middle| \; w$$
 מקבלת  $M 
ight\} \; .$ 

והשפה  $L_{ ext{REG}}$  מוגדרת

$$L_{ ext{REG}} = \{ \langle M \rangle \mid \text{ רגולרית } L(M) \}$$
 .

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{PAL} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

:כאשר את המ"ט שמכריעה את השפה אל מ"ט ממכריעה את המ"ט שמכריעה  $M_{PAL}$ 

y על כל קלט =M'

:פלינדרום y בודקת בודקת M' (1

- אם כן  $\Rightarrow$  מקבלת.
- . אם לא מריצה M על w ועונה כמוה  $\bullet$

### הוכחת נכונות הרדוקציה

$$f(x) \in REG \quad \Leftarrow \quad L\left(M'
ight) = \Sigma^* \quad \Leftarrow \quad w$$
 מקבלת  $M \quad \Leftarrow \quad x \in L_{\mathrm{acc}}$  אם

:שני מקרים  $\Leftarrow x \notin L_{\mathrm{acc}}$ 

$$\langle M_{PAL} 
angle 
otin L_{\text{REG}} \quad \Leftarrow \quad L\left(M_{PAL}\right) = PAL$$
 -ו  $f(x) = \langle M_{PAL} 
angle \quad \Leftarrow \quad x \neq \langle M, w 
angle \quad \underline{:}$  מקרה  $f(x) \notin L_{\text{REG}} \quad \Leftarrow \quad f(x) \notin L_{\text{REG}}$ 

$$\langle M' 
angle \notin L_{\mathrm{REG}} \quad \Leftarrow \quad L\left(M' 
ight) = PAL \quad \Leftarrow \quad w$$
 א מקרה ב:  $x = \langle M, w 
angle \quad x = \langle M, w 
a$ 

$$ar{L}_{
m acc}\leqslant L_{M_1
eg M_2}$$
 7.16 דוגמה

נתונה השפה הבאה:

$$L = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \land w \notin L(M_2) \}.$$

 $ar{L}_{
m acc}$  -הוכיחו כי L 
otin RE ע"י רדוקציה מ

### פתרון:

פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M^*, M, w \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M^*, M_{\varnothing}, \varepsilon \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- היא מ"ט שמקבלת כל קלט  $M^*$
- . היא מ"ט שדוחה כל קלט  $M_{\varnothing}$

נכונת הרדוקציה:

 $\langle M^*, M_\varnothing, \varepsilon \rangle$  אם לא, תחזיר קידוד קבוע מ"ט שתבדוק האם  $x = \langle M, w \rangle$  אם לא, מ"ט שתבדוק מ"ט שתבדוק האם האט מיט אם לא, תחזיר קידוד קבוע מ"ט שתבדוק האט כן, תחזיר קידוד  $\langle M^*, M, w \rangle$ .

נוכיח כי

$$x \in \bar{L}_{\mathrm{acc}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_{M_1 \neg M_2} .$$

אם  $x\in ar{L}_{
m acc}$  שני מקרים:

$$f(x) \in \quad \Leftarrow \quad \varepsilon \notin L\left(M_{\varnothing}
ight)$$
 -ו  $\varepsilon \in L\left(M^{*}
ight)$  ו-  $f(x) = \left\langle M^{*}, M_{\varnothing}, \varepsilon 
ight
angle \quad \Leftarrow \quad x \neq \left\langle M, w 
ight
angle \quad . ar{L}_{M_{1} \neg M_{2}}$ 

$$w \notin L\left(M
ight)$$
 -1  $w \in L\left(M^*
ight)$  -1  $f(x) = \langle M^*, M, w \rangle \quad \Leftarrow \quad w \notin L(M)$  -1  $x = \langle M, w \rangle$  :  $\underline{c}$  מקרה  $\underline{c}$   $\underline{c}$ 

$$w\notin L\left(M
ight)$$
 -1  $w\in L\left(M^*
ight)$  -1  $f(x)=\left\langle M^*,M,w
ight
angle$   $\Leftrightarrow$   $w\in L(M)$  -1  $x=\left\langle M,w
ight
angle$   $\Leftrightarrow$   $x\notin \bar{L}_{\mathrm{acc}}$   $f(x)\notin L_{M_1\lnot M_2}$   $\Leftrightarrow$   $f(x)\notin L_{M_1\lnot M_2}$ 

 $L_{M_1 op M_2} \notin RE$  ממשפט הרדוקציה מתקיים, הוכחנו  $ar{L}_{
m acc} \notin RE$  ממשפט, ומכיוון ש $ar{L}_{
m acc} \notin RE$  לסיכום, הוכחנו רדוקציה

$$L_{
m acc}\leqslant L_{M_1\subset M_2}$$
 7.17 דוגמה

נתונה השפה הבאה:

$$L = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \land w \notin L(M_2) \}.$$

 $.L_{
m acc}$  -ם ע"י רדוקציה מ $L \notin RE$  הוכיחו

### פתרון:

פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M_{\varnothing}, M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\varnothing}, M_{\varnothing} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- . היא מ"ט שדוחה כל קלט.  $M_{\varnothing}$
- . ועונה על על w על M ומריצה y מתעלמת y מתעלמת שעל קלט y ועונה כמוה. M'

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \varnothing & w \notin L(M) \end{cases}.$$

### נכונת הרדוקציה:

ראשית, f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם  $x=\langle M,w\rangle$  אם אם לא, תחזיר קידוד קבוע  $M_\varnothing$  ואם כן, תחזיר קידוד ל $M_\varnothing$ , כאשר  $M_\varnothing$  המוחק את הקלט  $M^*$ , נוצר ע"י הוספת קוד ל $M^*$ , מוחק את הקלט M ורושם M במקומו.

נוכיח כי

$$x \in L_{\mathrm{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L_{M_1 \subset M_2}$$
.

$$L\left(M'
ight)=\Sigma^*$$
 אם  $f(x)=\left\langle M_\varnothing,M'
ight
angle$   $\Leftrightarrow$   $w\in L(M)$  -1  $x=\left\langle M,w
ight
angle$   $\Leftrightarrow$   $x\in L_{\mathrm{acc}}$  אם  $f(x)\in L_{M_1\subset M_2}$   $\Leftrightarrow$   $L\left(M_\varnothing
ight)\subset L\left(M'
ight)$ 

שני מקרים:  $x \notin L_{\mathrm{acc}}$ 

$$f(x) 
otin L_{M_1 \subset M_2} \quad \Leftarrow \quad L\left(M_{\varnothing}\right) = L\left(M_{\varnothing}\right) ag{1.5} f(x) = \left\langle M_{\varnothing}, M_{\varnothing} 
ight
angle \quad \Leftarrow \quad x 
otin \left\langle M, w 
ight
angle \quad :1$$
 מקרה ב

$$L\left(M'
ight)=\varnothing$$
 ולפי האבחנה  $f(x)=\langle M_\varnothing,M'
angle \iff w\notin L(M)$  - ו $f(x)\notin L_{M_1\subset M_2}$  ב $f(x)\notin L_{M_1\subset M_2}$  ולפי האבחנה  $f(x)\notin L_{M_1\subset M_2}$  ב $f(x)\notin L_{M_1\subset M_2}$  ולפי האבחנה  $f(x)\in \mathcal{L}(M')$ 

 $.L_{M_1\subset M_2}
otin R$  ממשפט הרדוקציה מתקיים, ומכיוון ש- גומכיוון ש- גומרים, ומכיוון הדוקציה ומכינו רדוקציה ומכיוון ש- גומכיוון ש-

# שיעור 8 מבוא לסיבוכיות

# 8.1 הגדרה של סיבוכיות

## 8.1 הערה

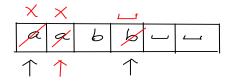
 $f\left(|w|
ight)$  על קלט w, נמדד ביחס לגודל הקלט M על מ"ט אמן ריצה של מ"ט M

# הגדרה 8.1

נאמר כי ניתן להכריע שפה L בזמן f(n), אם קיימת מ"ט M המכריעה את בזמן  $u \in \Sigma^*$  נאמר ע"י שפה f(|w|), אם קיימת של u על u חסום ע"י ולכן הריצה של u

### דוגמה 8.1

 $L = \left\{ a^n b^n \mid n \geqslant 0 
ight\}$  נבנה מ"ט M המכריעה השפה



### :M התאור של

:w על קלט

- אם התו שמתחת לראש הוא = מקבלת. (1)
  - בוחה. b אם התו שמתחת לראש הוא (2)
  - X''מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י (3)
- .\_ ל- מזיזה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאל ל-
  - . דוחה  $\Leftarrow X$  או a או התו התו  $\bullet$
- X מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י  $_{-}$ , מזיזה את הראש שמאלה עד התו הראשון מימין ל $_{-}$  וחוזרת ל- (1).

### זמן הריצה

- איטרציות.  $\frac{|w|}{2}$
- . צעדים  $O\left(|w|\right)$  צעדים בכל איטרציה מבצעים •

$$\frac{|w|}{2} \cdot O\left(|w|\right) = O\left(|w|^2\right) \ .$$

### הגדרה 8.2 זמן הריצה

אמו הריצה של מ"ט M על קלט w היא פונקציה  $f\left(|w|\right)$  השווה למספר הצעדים הנדרש בחישוב של M על מ"ט M על היא פונקציה w .

## 8.2 הערה

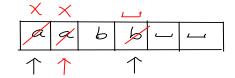
.|w| מ"ט נמדד ביחס לגודל הקלט ומן הריצה של

# הגדרה 8.3

אמן את כך שלכל L אם המכריעה M המf(n) אם בזמן בזמן בזמן להכריעה אומרים כי ניתן להכריעה שפה בזמן f(|w|) און להכריעה של שלכל של הריצה של M על חסום ע"י חסום ע"י ווע

### דוגמה 8.2

 $L = \left\{ a^n b^n \mid n \geqslant 0 
ight\}$  נבנה מ"ט M עם סרט יחיד שמכריעה את מ"כריעה את מ"ט



# :M התאור של

:w על קלט

- אם התו שמתחת לראש הוא = מקבלת.
  - בוחה. b אם התו שמתחת לראש הוא (2)
  - X מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י (3)
- .\_ ל- מזיזה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאל ל-
  - . דוחה  $\Leftarrow X$  או a התו הוא  $\bullet$
- X מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י ב, מזיזה את הראש שמאלה עד התו הראשון מימין ל $\bullet$  וחוזרת ל- (1).

### זמן הריצה

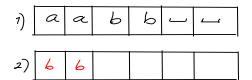
- . איטרציות  $\frac{|w|}{2}$  איטרציות M
- $O\left(|w|
  ight)$  איטרציה וזה חסרט את סורקת חסרס סורקת סורקת
  - ע"י חסום M אכן הריצה של סה"כ זמן הריצה של

$$\frac{|w|}{2} \cdot O(|w|) = O(|w|^2) .$$

O(|w|) :(3-5) שלבים

#### דוגמה 8.3

 $L = \left\{ a^n b^n \mid n \geqslant 0 
ight\}$  נבנה מ"ט מרובת סרטים M' שמכריעה את נבנה



## :M' התאור של

:w על קלט

$$. \underbrace{O(|w|)}$$
 מעתיקה את ה-  $b$  -ים לסרט 2 (ותוך כדי בודקת האם  $w$  מהצורה (1)

$$O\left(|w|\right)$$
 מזיזה את הראשים לתחילת הסרטים.

. אם שני הראשען מצביעים על 
$$\leftarrow$$
 מקבלת.

. אם אחד הראשים מצביע על 
$$_{-}$$
 והשני לא  $\Leftrightarrow$  לא.

זמן הריצה

 $O\left(|w|
ight)$  הוא M' אמן הריצה של

# 8.2 יחס בין הסיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס

### משפט 8.1

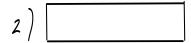
לכל מ"ט מרובת סרטים M הרצה בזמן f(n) קיימת מ"ט סרט יחיד 'M השקולה ל- M ורצה בזמן . $O\left(f^2(n)\right)$ 

### הוכחה:

בהינתן מ"ט מרובת סרטים M, הרצה בזמן f(n), נבנה מ"ט עם סרט יחיד M באותו אופן כמו בהוכחת השקילות בהינתן מ"ט מרובת סרטים M.

כלומר, M' שומרת את התוכן של k סרטים של M על הסרט היחיד שלה (עם הפרדה ע"י #), ובכל צעד חישוב, מלומר, M' סורקת את הסרט שלה כדי לזהות שת האותיות שמתחת לראשים (שמסומנות ב- k) ואחרי זה, משתמשת k סורקת את הסרט שלה כדי לזהות שת הסרטים ואת מיקום בפונקצית המעברים של k, וסורקת את הסרט פעם נוספת כדי לעדכן את התוכן בכל אחד מהסרטים.





•



כמה לוקח ל- M' לסרוק את הסרט שלה? מכיוון שהסרט של M' מכיל את התוכן של M הסרטים של M', והגודל של כל אחד מהסרטים של M' חסום ע"י M', גודל הסרט של M', גודל הסרט של M'

$$k \cdot f(n) = O(f(n)) .$$

. על הקלט M' אישוב בריצה של איז על וזה עלות אל היא  $O\left(f(n)\right)$  היא לסרט שלה אל הסריקה של הסריקה של איז היא וזה עלות של היא

ע"י חסום M' אמן היצרה של ,f(n) חסום ע"י מכיוון ש-

$$f(n) \cdot O(f(n)) = O(f^2(n))$$
.

# 8.3 יחס בין הסיבוכיות של מ"ט דטרמיניסטית ומ"ט א"ד

# הגדרה 8.4

בחישוב הצעדים מ"ט א"ד M, זמן הריצה של M על קלט M, היא פונקציה  $f\left(|w|\right)$  השווה למספר הצעדים בחישוב המקסימלי של M על א"ד M על על M

### משפט 8.2

 $(2^{(f(n))}$  ורצה בזמן א"ד א הרצה השקולה ל-, קיימת מ"ט דטרמיניסטית קיימת א"ד א הרצה בזמן א קיימת מ"ט א

#### הוכחה:

.4.1 בהינתן מ"ט א"ד N הרצה בזמן f(n) מ"ט דטרמיניסטית באותו אופן כמו בהוכחת השקילות במשפט

כלומר, בהינתן קלט p, תסרו' את עץ החישוב של p ו- p לרוחב ותקבל כל אחד החישובים של p המסתיים ב- p.

:n בהינתן קלט w באורך

- f(n) על על חסום ע"י אחישוב של N על החישוב ע"י ullet
- w ו- N ו- N מסםר החישובים בעץ החישוב של D מסםר החישובים של D
  - מכיוון שמספר הבנים של כל קודקוד בעץ החישוב חסום ע"י

$$C = 3|Q| \cdot |\Gamma|$$

מספר הקודקודים בעץ החישוב חסום ע"י

$$C^0 + C^2 + \dots + C^{f(n)} \le C^{f(n)+1} = C \cdot C^{f(n)}$$
.

י"ט חסום D אמן הריצה של

$$f(n) \cdot C \cdot C^{f(n)} \leqslant C^{f(n)} \cdot C^{f(n)} = C^{2f(n)} = \left(C^2\right)^{f(n)} = 2^{C' \cdot f(n)} = 2^{O(f(n))} \ .$$

נתייחס כאן לשני החסמים הבאים:

- . תכטר c>0 עבטר  $n^c$  מהצורה חסם פולינומיאלי הוא חסם (1
- . תסם אקספוננציאלי הוא חסם מהצורה  $2^{n^c}$  עבור (2

### הגדרה 8.5 בעיית הכרעה

בעיית הכרעה מוגדרת באופן הבא:

"בהינתן קלט כלשהו, האם הקלט מקיים תנאי מסויםם"

### דוגמה 8.4

בהינתן מספר n, האם n ראשוני?

כל בעיית הכרעה ניתן לתאר כפשה שקולה:

$$L_{ exttt{prime}} = \{\langle n \rangle \mid ext{ ראשוני } n \}$$
 .

### משפט 8.3

שפה  $\equiv$  בעיית הכרעה .

# הגדרה 8.6 אלגוריתם זמן פולינומיאלי

על A אומרים עי אלגוריתם א מכריעה בעייה בזמן פולינומיאלי אם קיים קבוע מכריעה בעייה בימן אומרים עי אלגוריתם  $O\left(|w|^c\right)$  כל קלט ע"י חסום ע"י חסום ע"י מכריעה בימן פולינומיאלי אם כל קלט

## משפט 8.4 התזה של צירץ' (Church Thesis)

אם קיים אלגוריתם המכריע בעייה בזמן פולינומיאלי, אז קיימת מ"ט דטרמיניסטית המכריעה את השפה השקולה לבעייה זו בזמן פולינומיאלי.

. מכונת טיורינג = אלגוריתם מכריעה

# P המחלקה 8.4

# P המחלקה 8.7

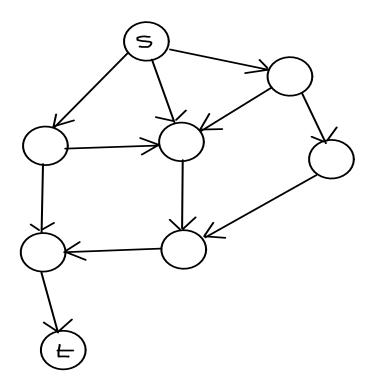
אוסף כל הבעיות (השפות) שקיים עבורן אלגוריתם (מכונת טיורינג דטרמיניסטית) המכריע אותן בזמן פולינומיאלי.

### דוגמה 8.5

$$L = \left\{ a^n b^n \mid n \geqslant 0 \right\} \in P .$$

# PATH בעיית 8.5

# דוגמה 8.6 בעיית המסלול בגרף מכוון



 $s,t\in V$  ושני קודקודים G=(V,E) קלט: גרף מכוון

t -ל s -ה G -ב מסלול ב- מים האם פלט:

 $PATH = \left\{ \left\langle G, s, t \right\rangle \ \middle| \ t$  ל- s מ- G ב- gקיים מסלול ב-

### 8.5 משפט

### $PATH \in P$ .

.PATH נבנה אלגוריתם A עבור הבעייה נבנה אלגוריתם

 $:\langle G,s,t\rangle$  על קלט =A

- .s צובע את (1
- :פעמים |V|-1 פעמים (2
- $:(u,\mathbf{v})\in E$  לכל צלע •
- v אם צבוע v צבוע את v
  - t אם t צבוע t החזיר "כן".
    - ."לא" החזיר  $\Leftrightarrow$  אחרת  $\Leftrightarrow$

.|V| פולינומיאלי במספר הקודקודים  $O\left(|V|\cdot|E|
ight)$  הוא האלגוריתם הוא

 $|\langle G \rangle|$  האם זה פולינומיאלי בגודל הקלט

 $^\circ G$  איך נקודד את

- $V=\{1,2,3, \quad \cdots \quad ,n\}$  ר- |V|=n נניח כי
- -ע כך  $n \times n$  בגודל בגודל M כך שי מטריצה נניח כי הצלעות נתונות ע"י

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in E \\ 0 & (i,j) \notin E \end{cases}.$$

- נניך כי מספרים מקודדים בבסיס ביניארי.
- כלומר  $n^2 + n \log_2 n$  שווה של G כלומר הקידוד של •

$$|\langle G \rangle| = \Omega(|V|^2) \quad \Rightarrow \quad |V| = O(|\langle G \rangle|).$$

 $|\langle G 
angle$  במודל בגודל בגודל פולינומיאלי בימן ירוץ ירוץ אלגוריתם פולינומיאלי במספר הקודקודים ולכן כל אלגוריתם הרץ בזמן פולינומיאלי במספר הקודקודים

ולכן A רץ בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט.

# RELPRIME בעיית 8.6

# (Relatively prime) מספרים זרים 8.8 מספרים זרים

.1 שווה ,gcd(x,y) ארים מספרים ביותר, משותף המחלק המשותף אחלק ארים אם זרים ארים אווה x,y

# הגדרה 8.9 בעיית RELPRIME

y -ו x קלט: שני מספרים

y -ו x זרים?

$$RELPRIME = \big\{ \langle x, y \rangle \ \big| \ \gcd(x, y) = 1 \big\} \ .$$

### משפט 8.8

# $RELPRIME \in P$ .

. נבנה אלגוריתם A המכריע את פולינומיאלי. נבנה אלגוריתם A

האלגוריתם מבוסס על העובדה ש-

$$\gcd(x,y) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle x,y \rangle \in RELPRIME \ .$$

ולכן נשתמש באלגוריתם האוקלידי לחישוב gcd:

$$\gcd(x,y) = \begin{cases} x & y = 0\\ \gcd(y,x \mod y) & y \neq 0 \end{cases}.$$

x=qy+r א"א  $x=x \mod y$  נסמן s,t נסמן s,t בין שלמים אזי קיימים שלמים מון s,t בין אזי  $t=x \mod y$  אזי קיימים שלמים אזי לכן

$$s(qy+r)+ty=d \implies sr+(t+sq)y=d \implies \gcd(x,y)=d=\gcd(y,r)$$
.

לדוגמה:

$$\gcd(18,32)=\gcd(32,18)=\gcd(18,14)=\gcd(14,4)=\gcd(4,2)=\gcd(2,0)=2\ .$$

# האלגוריתם האוקלידי:

y -וx על קלט

- $y \neq 0$  כל עוד (1)
- $x \mod y \to x \bullet$
- $\operatorname{swap}(x,y)$  .(y -ו x וכלומר מחליפים בין
  - $\boldsymbol{x}$  מחזירים את (2)

## :RELPRIME המכריע האלגוריתם A

 $:\langle x,y\rangle$  על קלט =A

- y -ו x את האלגוריתם האוקלידי על (1)
- אם האלגורים האוקלידי החזיר = 1 מקבל.
  - אחרת  $\Rightarrow$  דוחה.

נכונות האלגוריתם נובעת מנכונות האלגוריתם האוקלדי.

נוכיח כי A רץ בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט.

:טענת עזר

 $x \mod y < \frac{x}{2}$  אם x > y אם

:הוכחה

יש שתי אפשרויות:

אזי  $y\leqslant \frac{x}{2}$  אזי •

 $x \mod y < y \leqslant \frac{x}{2}$ .

 $\frac{x}{2} < y < x$  - נניח ש

 $x=y+(x \mod y)$  ולכן q<2 אז בהכרח  $x=qy+(x \mod y)$  אז בהכרח  $x=qy+(x \mod y)$  מכיוון ש- $x=qy+(x \mod y)$  ולכן

לפיכד

$$x \mod y = x - y < \frac{x}{2} \ .$$

. לפי טענת העזר, אחרי כל איטרציה x קטן בלפחות חצי

. מכיוון שבכל איטרציה מחליפים בין x ו- y, אחרי כל שתי איטרציות גם איטרציה מחליפים בלפחות אוי.

.0ל- שווים y או לפחות איטרציות  $\log_2 x + \log_2 y$  לאחר ולכן ולכן

Aהאלגוריתם אלגוריתם האיטרציות וזה בדיוק ,<br/>log $_2 \, x + \log_2 y$ חסום אוקלידי האיטרציות באלגוריתם אלגוריתם ע"י

ולכן A רץ בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט.

ולכן

 $RELPRIME \in P$ .

# שיעור 9 חמחלקה P המחלקה P

# P המחלקה $oldsymbol{9.1}$

• המחלקה P היא אוסף כל הבעיות שקיים עבורן אלגוריתם המכריע אותן בזמן פולינומיאלי.

אלגוריתם מכריע
$$\equiv$$
 מ"ט דטרמיניסטית , בעיית הכרעה $\equiv$  שפה ,

w על כל קלט A על כך שזמן הריצה על קיים קבוע קבוע פולינומיאלי פולינומיאלי אם מכריע בעייה בזמן פולינומיאלי אם אלגוריתם  $O\left(|w|^c\right)$  על כל קלט סיים ע"י

# P -דוגמאות לבעיות ב- 9.2

 $PATH = \{\langle G, s, t \rangle \mid t$ ל- לs המכיל מסלול המכיל מכוןן המכיל  $G \in P$ 

 $RELPRIME = \{\langle x,y 
angle \mid$  זרים y -1 x  $\} \in P$ 

# 9.3 בעיית המסלול ההמילטוני HAMPATH

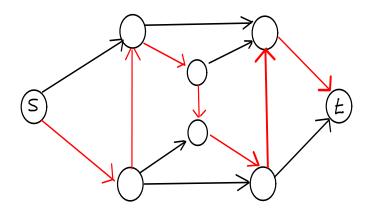
### HAMPATH 9.1 הגדרה

בהינתן גרף מכוון G=(V,E) ושני קודקודים s ב- מסלול המילטוני מ- מסלול ב- G=(V,E) ושני קודקודים ל- מסלול מ- מסלול ב- מסלול ב

לדוגמה:

(1

(2



### הגדרה 9.2 בעיית HAMPATH

 $s,t\in V$  ושני קודקודים G=(V,E) קלט: גרף מכוון

t - פלט: האם t מכיל מסלול המילטוני מ- מכיל פלט:

 $HAMPATH = \{\langle G, s, t \rangle \mid \ ?t$  ל- s ל- s מסלול המכיל מסלול המילטוני מ- s ל- s

 $HAMPATH \in P$  נשאל שאלה: האם

לא ידוע האם קיים אלגוריתם המכריע את HAMPATH בזמן פולינומיאלי (שאלה פתוחה).

- $\langle G,s,t \rangle \in HAMPATH$  בהינתן קלט  $\langle G,s,t \rangle$  האם
  - :ענה על שאלה אחרת

 $\langle G,s,t \rangle \in HAMPATH$  בהינתן קלט  $\langle G,s,t \rangle$  ומחרוזת  $\langle G,s,t \rangle$ 

- . היא מסלול המילטוני מ- s ל- t ב- בזמן פולינומיאלי ולענות בהתאם יתן לבדוק האם y היא
  - ניתנת לאימות בזמן פולינומיאלי. HAMPATH ניתנת לאימות בזמן פולינומיאלי.

# 9.4 אלגוריתם אימות

### הגדרה 9.3 אלגוריתם אימות

אלגוריתם  $w \in \Sigma^*$  סלכל קלט עבור אלגוריתם אלגוריתם N הוא הוא הוא בעייה עבור אימות אימות אלגוריתם אלגוריתם אימות א

(w,y) אם ורק אם קיימת מחרוזת (עדות) y באורך פולינומיאלי ב- |w| כך ש- V מקבל את הזוג  $w\in A$  כלומר:

- $\exists y : V(w,y) = T \quad \Leftarrow \quad w \in A$  אם •
- $\forall y : V(w,y) = F \iff w \notin A$  אם •

### 9.1 הערה

- |w| אמן ריצה של אלגוריתום אימות נמדד ביחס לגודל הקלט.
- אלגוריתם אימות פולינומיאלי אם הוא רץ בזמן פולינומיאלי.

# 9.5 המחלקה NP

### הגדרה 9.4 המחלקה NP

המחלקה NP היא אוסף כל הבעיות שקיים עבורן אלגוריתם אימות פולינומיאלי.

# $HAMPATH \in NP$ 9.1 משפט

:HAMPATH בעיית המסלול ההמילטוני

 $s,t\in V$  ושני קודקודים G=(V,E) קלט: גרף מכוון

t -ל s -מכיל מסלול המילטוני מ-s ל-

 $HAMPATH = \big\{ \langle G, s, t \rangle \; \middle| \; : t \; \cdot s \; r$ גרף מכוון המכיל מסלול המילטוני מ-  $G \; \big\}$ 

 $.HAMPATH \in NP$  הוכיחו כי

.HAMPATH נבנה אלגוריתם אימות V עבור

$$:(\left\langle G,s,t\right
angle ,y)$$
 על קלט  $V$ 

בודק האם y היא סדרה של (1)

 $u_1, u_2, \ldots u_n$ 

השונים זה מזה.

- אם לא  $\Rightarrow$  דוחה.
- $u_n=t$  ו-  $u_1=s$  בודק האם (2
  - אם לא ⇒ דוחה.
- G -ם קיימות ( $1 \le i \le n$  (לכל ( $u_i, u_{i+1}$ ) קיימות ב- (3
  - אם כן ⇒ מקבל.
  - אם לא ⇒ דוחה.

#### נכונות

- זמן הריצה של האלגוריתם הוא פולינומיאלי בגודל הקלט.
- עבור y שהוא קידוד  $G \Leftarrow (G,s,t) \in HAMPATH$  אם שהוא קידוד  $G \Leftarrow (G,s,t) \in HAMPATH$  של מסלול זה, V יקבל את הזוג של מסלול זה, עיקבל את אוג

### $HAMPATH \in NP$ 9.2 משפט

בעיית המסלול ההמילטוני HAMPATH:

 $s,t\in V$  ושני קודקודים G=(V,E) קלט: גרף מכוון

t -ל s -מכיל מסלול המילטוני מ-s ל-

 $HAMPATH = ig\{ \langle G, s, t 
angle \mid \ ?t$  ל- s המילטוני מסלול המילטוני מסלול המילטוני מG

### $.HAMPATH \in NP$ הוכיחו כי

.HAMPATH נבנה אלגוריתם אימות V עבור אלגוריתם נבנה אלגוריתם אימות יוב

$$:(\langle G,s,t\rangle,y)$$
 על קלט  $=V$ 

בודק האם y היא סדרה של (1

$$u_1, u_2, \ldots u_n$$

השונים זה מזה.

- אם לא ⇒ דוחה.
- $u_n=t$  ו- ו $u_1=s$  בודק האם (2
  - אם לא ⇒ דוחה.
- G -ם קיימות ב $i\leqslant n$  (לכל  $(u_i,u_{i+1})$  קיימות ב(3)
  - $\bullet$  אם כן  $\Rightarrow$  מקבל.
  - אם לא ⇒ דוחה.

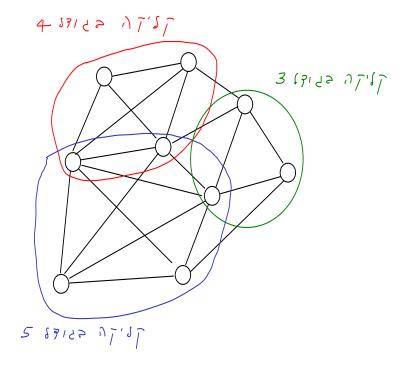
### נכונות

- זמן הריצה של האלגוריתם הוא פולינומיאלי בגודל הקלט.
- עבור y שהוא קידוד  $G \Leftarrow (G,s,t) \in HAMPATH$  שהוא קידוד של מסלול זה,  $G \Leftrightarrow (G,s,t) \in HAMPATH$  של מסלול זה,  $G \Leftrightarrow (G,s,t) \in HAMPATH$  של מסלול זה,  $G \Leftrightarrow (G,s,t) \in HAMPATH$
- לא מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- ל- ל- לא מכיל מסלול המילטוני מ- G לא לכל G לא לכל G לכל G לכל G לכל G ידחה את הזוג G לכל G לכל G לא מכיל מסלול המילטוני מ- G לכל G לכל G האלגוריתם ידחה את הזוג לכל G

# הגדרה 9.5 קליקה

בהינתן גרף לא מכוון G=(V,E), קליקה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים  $C\subseteq V$  כך שלכל שני קודקודים  $u,\mathbf{v}\in C$  מתקיים  $u,\mathbf{v}\in C$ 

לדוגמה:



# הגדרה 9.6 בעיית הקליקה

k ומספר G=(V,E) ומספר

?k פלט: האם G קליקה בגודל

 $CLIQUE = \{\langle G, k \rangle \mid k$  גרף גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל G

# CLIQUE $\in NP$ 9.3 משפט

 $CLIQUE \in NP$ .

.CLIQUE נבנה אלגוריתם אימות V עבור אלגוריתם:

 $:\!(\left\langle G,k\right
angle ,y)$  על קלט V

G -ם פונים שונים א קודקודים שונים מ- בודק האם g

אם לא  $\Rightarrow$  דוחה.

.G -בודק האם כל שני קודקודים מ- ע מחוברים בצלע ב- (2

אם כן ⇒ מקבל.

• אם לא ⇒ דוחה.

### הגדרה 9.7 בעיית

.t ומספר ומספר  $S=\{x_1,x_2,\ldots x_n\}$  ומספרים קלט:

t שווה איבריה שווה איבריה שלט: האם קיימת תת-קבוצה של

$$SubSetSum = \left\{ \langle S, t \rangle \; \left| \; \; \sum_{x \in Y} x = t \; ext{-} \mathsf{v} \; \; Y \subseteq S \; \; \mathsf{g} \; \; \right\} \right\}$$

# $SubSetSum \in NP$ 9.4 משפט

 $SubSetSum \in NP$ .

.SubSetSum עבור V עבור אלגוריתם אימות נבנה אלגוריתם

$$:(\left\langle S,t\right\rangle ,y)$$
 על קלט  $V$ 

- S בודק האם y היא תת-קבוצה של (1
  - אם לא ⇒ דוחה.
- t שווה t בודק האם סכום המספרים ב- (2
  - אם לא ⇒ דוחה.
  - $\bullet$  אחרת  $\Rightarrow$  מקבל.

# א"ד NP הקשר בין 9.6

NP=Non-deterministic polynomial-time.

### משפט 9.5

A לכל בעייה

אם ורק אם פולינומיאלי. א"ד המכרעיה עת  $A \in NP$ 

### דוגמה 9.1

. נבנה מ"ט א"ד M המכריעה את בCLIQUE המכריעה M

$$:\langle G,k\rangle$$
 על קלט  $=M$ 

- G -ם בוחרת באופן א"ד קבוצה y של y קודקודים מ-
- .G -בצלע ב- מחוברים שני קודקודים פ- בצלע ב-
  - \* אם כן  $\Rightarrow$  מקבלת.
    - \* אחרת  $\Rightarrow$  דוחה.

x''אלגוריתם אימות x''מ"ט א"ד.

# NP -1 P הקשר בין המחלקה 9.7

. כל הבעיות שניתן להכריע פולינומיאלי. P

. כל הבעיות שניתן שניתן שניתן פולינומיאלי. כל הבעיות כל NP

### משפט 9.6

 $P \subseteq NP$ .

P = NP שאלה פתוחה: האם

### 9.7 משפט

סגורה תחת משלים. P

 $ar{A} \in P$  הוכחה: אם  $A \in P$  אזי גם

# CoNP 9.8 הגדרה

 $CoNP = \{ A \mid \bar{A} \in NP . \}$ 

לדוגמה:

 $\overline{HAMPATH} \in CoNP$ .

 $\overline{CLIQUE} \in Co\,NP\ .$ 

NP = CoNP שאלה פתוחה: האם

### משפט 9.8

 $P \subseteq NP \cap CoNP$ .

 $P = NP \cap CoNP$  שאלה פתוחה: האם

P = NP נדון בשאלה המרכזית: האם

### הגדרה 9.9 פונקציה פולינומיאלית

בהינתן פונקציה  $\Sigma^* \to \Sigma^*$ , אומרים כי f חשיבה בזמן פולינומיאלי אם קיים אלגוריתן (מ"ט בהינתן פונקציה בזמן בזמן פולינויאלי.

## הגדרה 9.10 רדוקציה פולינומיאלית

בהינתן שתי הבעיות B ו- B. אומרים כי A ניתנת לרדוקציה פולינומיאלית ל- B, ומסמנים  $A \leqslant_P B$ , אם היימת פונקציה  $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$  המקיימת:

- חשיבה בזמן פולינומיאלי f (1
  - $:w\in\Sigma^*$  לכל (2

 $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$ .

### משפט 9.9 משפט הרדוקציה

לכל שתי בעיות  $A \in B$ , אם  $A \leq B$  אזי

- $A \in P$  אזי  $B \in P$  אם (1
- $A \in NP$  אזי  $B \in NP$  אם (2
  - מסקנה מ- (1) ו- (2):
  - $.B \notin P$  אזי  $A \notin P$  אס (3
- $.B \notin NP$  אזי  $A \notin NP$  אם (4

 $w \in \Sigma^*$  קיימת, לכל המקיימת, פנקציה f חשיבה בזמן פולנומיאלי המקיימת, לכל  $A \leqslant_P B$ , קיימת

$$w \in A \iff f(w) \in B$$
.

יהי פולינומיאלי. שמחשבת את האלגוריתם שמחשבת  $M_f$  יהי

 $A \in P$  נוכיח כי אם  $B \in P$  גוכיח נוכיח (1)

. בזמן פולינומיאי. את את המכריע את המכריע עת B בזמן פולינומיאלי. נבנה אלגוריתם שמכריע עת פולינומיאי. זהי

# $M_A$ התאור של

:w על כל קלט  $=M_A$ 

- $M_f$  ע"י f(w) ע"י מחשב את
- . מריץ את  $M_B$  על f(w) ועונה כמוה.

נוכיח כי  $M_A$  מכריע את A בזמן פולינומיאלי:

- $M_A \Leftarrow f(w)$  מקבל את מקבל את מקבל את  $M_B \Leftarrow f(w) \in B \Leftarrow w \in A$
- $M_A \leftarrow f(w)$  דוחה את את דוחה את  $M_B \leftarrow f(w) \notin B \leftarrow w \notin A$  אם •

נוכיח כי זמן הריצה של  $M_A$  הוא פולינומיאי בגודל הקלט ושל וולינומיאלי:

- $M_f$  את הפולינום של  $P_f$  נסמן ב-
- $M_B$  את הפולינום של  $P_B$  נסמן ב

אמן הריצה של  $M_A$  שווה אמן הריצה של

$$P_f(|w|) + P_B(|f(w)|)$$

על א חסום ע"י או הריצה של א $M_A$  מכיוו ש- או הריצה ווי $f(w)|\leqslant P_f\left(|w|
ight)$ 

$$P_{f}\left(\left|w\right|\right)+P_{B}\left(P_{f}\left(\left|w\right|\right)\right)=P_{f}\left(\left|w\right|\right)+\left(P_{B}\circ P_{f}\right)\left(\left|w\right|\right)$$

.|w| את ההרכבה של שני פולינומים. לכן  $M_A$  רץ בזמן פולינומיאלי בגודל בגודל רכבה את מסמן את מסמן את

# שיעור 10 NP שלמות

# NPH -ו NPC המחלקות 10.1

### NP-hard 10.1 הגדרה

 $A \leqslant_P B$  קיימת רדוקציה  $A \in NP$  קיימת לכל בעייה אם לכל קשה אח לכל נקראת לכל בעייה או

## NP-complete 10.2 הגדרה

בעייה B נקראת אם אם

- $B \in NP$  (1
- $A\leqslant_p B$  קיימת רדוקציה  $A\in NP$  לכל בעייה

## משפט 10.1

P=NP אזי  $B\in P$  שלמה אם  $B\in NP$  אזי

#### הוכחה:

- $P \subseteq NP$  -ש- הוכחנו כבר ש
  - $.NP \subseteq P$  נוכיח כי

 $A \in P$  ממשפט הרדוקציה מתקיים,  $B \in P$  ומכיוון ש- א קיימת בוקציה מתקיים ומכיוון ש- א קיימת בעייה

# מסקנה 10.1

 $ar{A}\leqslant_Par{B}$  אט  $A\leqslant_P B$  אט

# משפט 2.01

 $A\leqslant_p C$  אזי  $B\leqslant_p C$  אם  $A\leqslant_p B$  אם

#### הוכחה:

משפט 10.3

. שלמה. אזי לכל היא  $P \leqslant_p C$  אם אם אוי לכל בעייה לכל היא לכל אזי לכל אזי לכל בעייה P

 $B\leqslant_p C$  - שלמה, מכיוון ש-  $A\leqslant_p B$  היא  $A\leqslant_p B$  קיימת רדוקציה א קיימת פלל בעייה  $A\in NP$  היא  $A\leqslant_p C$  מכיוון ש-  $A\leqslant_p C$  מהטרנזטיביות מתקיים  $A\leqslant_p C$  לכל בעייה  $A\in NP$  ולכן  $A\leqslant_p C$  שלמה.

# 10.2 בעיית הספיקות

# 10.3 הגדרה

נוסחת היא נוסחה בוליאנית מעל n משתנים  $x_1,x_2,\ldots,x_n$  המכילה  $\phi$  CNF היא נוסחה בוליאנית מעל  $\phi$  כאשר כל פסוקית מכילה אוסף של ליטרלים ( $x_iackslash x_i$ ) המחוברים ע"י בוליאני והפסוקיות מחוברים ע"י בוליאני. ( $\wedge$ ) בוליאני.

לדוגמה

$$\phi = \begin{pmatrix} C_1 \\ x_1 \lor \bar{x}_2 \lor x_4 \lor \bar{x}_7 \end{pmatrix} \land \begin{pmatrix} C_2 \\ x_3 \lor x_5 \lor \bar{x}_8 \end{pmatrix} \land \cdots$$

## הגדרה 10.4 נוסחת CNF ספיקה

ערך  $T \setminus F$  כך ש-  $\phi$  מקבלת ערך ע"י איז ע"י  $T \setminus F$  כך ערך לוסחת נוסחת השמה למשתנים השמה למשתנים ליטרל אחד שקיבל ערך  $\sigma$ .

# SAT בעיית 10.3

### הגדרה 10.5 בעיית

<u>קלט:</u>

 $.\phi$  CNF נוסחת

<u>פלט:</u>

?האם  $\phi$  ספיקה

 $SAT = \{\langle \phi 
angle \mid$  ספיקה CNF נוסחת  $\phi \}$ 

# $SAT \in NP$ 10.4 משפט

 $SAT \in NP$ .

SAT עבור V עבור אימות V

 $:(\left\langle \phi\right\rangle ,y)$  על קלט V

- $x_1, x_2, \dots, x_n$  בודק האם y היא בודק (1
  - אם לא ⇒ דוחה.
  - $\phi$  בודק האם השמה זו מספקת את  $\phi$ .

- אם כן  $\Rightarrow$  מקבל.
- אם לא ⇒ דוחה.

# 10.4 משפט קוק לוין

# משפט 10.5 (1973)משפט קוק לוין

הבעיית SAT היא NP הבעיית

### רעיון ההוכחה:

 $A \leqslant_p SAT$  , $A \in NP$  לכל

 $:w\in\Sigma^*$  לכל

$$w \in A \iff f(w) \in SAT$$
,

 $.f(w) = \langle \phi_w \rangle$  כאן

# מסקנה 10.2

$$P = NP \Leftrightarrow SAT \in P$$
.

# kSAT גרסאות של 10.5

ישנן לכל היותר k ליטרלים בכל פסוקית:

 $.1SAT \in P \bullet$ 

 $\phi = x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge \cdots$ 

 $.2SAT \in P \bullet$ 

$$\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge \cdots$$

. שלמה - NP היא 3SAT

# 3SAT בעיית 10.6

# הגדרה 10.6 בעיית 3-SAT

<u>קלט:</u>

 $.\phi$  3-CNF נוסחת

פלט:

האם  $\phi$  ספיקה?

 $3SAT = \{\langle \phi \rangle \mid$  ספיקה 3-CNF נוסחת  $\phi \}$ 

## משפט NP היא 3-SAT 10.6 משפט

. שלמה NP שלמה 3-SAT

#### הוכחה:

יש לקיים את השני תנאים הבאים:

 $.3SAT \in NP$  (1

ניתן לבנות אלגוריתם אימות עבור  $SAT \in NP$  דומה לאלגוריתם האימות עבור SAT שבנינו בהוכחה של המשפט קוק-לוין 10.5 למעלה.

קשה ע"י רדוקציה NP היא 3SAT (2

$$SAT \leqslant_{p} 3SAT$$
.

ואז בגלל ש-  $SAT\in NP$  היא אז לפי משפט קוק-לוין 10.5) ומכיוון ש-  $SAT\in SAT$  אז לפי משפט אז בגלל ש-  $SAT\in SAT$  היא אז לפי משפט האסימפטוטית 10.2 גם  $SAT\in SAT$  שלמה.

 $SAT \leqslant_p 3SAT$  קיום פונקצית הרדוקציה

.3SAT ל- SAT ל- כעת נבנה את פונקציה הרדוקציה מ-

. בזמן פולינומיאלי באורה CNF ראשית נציין כי כל נוסחה בוליאנית  $\phi$  ניתנת לרשום בצורה

נוכיח (3SAT הקלט של הקלט (הקלט של אינומיאלי נוסחת (בנה בזמן בולינומיאלי של אינוס של הקלט של אינוסחת (הקלט של אינוסחת שמתקיים שמתקיים

$$\langle \phi' \rangle \in 3SAT \iff \langle \phi \rangle \in SAT$$
.

לכל פסוקיות כך שכל פסוקית ב- C' ליטרלים, ניצור אוסף C' ב-  $\phi$  של פסוקיות כך שכל פסוקית ב- C' תכיל פסוקית ב- C' המכילה יותר מ- C הבאה של C:

$$C = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5$$

 $:\phi'$  -באה ב- C' הפסוקית ניצור את הפסוקית

$$C' = (x_1 \lor x_2 \lor y_1) \land (\bar{y}_1 \lor x_3 \lor y_2) \land (\bar{y}_2 \lor \bar{x}_4 \lor \bar{x}_5) .$$

באופן כללי, לכל פסוקית שבו כל המכיל k>3 המכיל המכיל  $C=a_1\vee a_2\vee\ldots\vee a_k$  של פסוקיות שבו כל באופן כללי, לכל פסוקית ע"י הוספת א מכילה k>3 משתנים השתנים המכילה 3 ליטרלים, ע"י הוספת החספת א משתנים באופן מכילה 3 ליטרלים, ע"י הוספת א מכילה 3 ליטרלים, ע"י

$$C' = (a_1 \lor a_2 \lor y_1) \land (\bar{y}_1 \lor a_3 \lor y_2) \land \ldots \land (\bar{y}_{i-2} \lor a_i \lor y_{i-1}) \land \ldots \land (\bar{y}_{k-3} \lor a_{k-1} \lor a_k) .$$

נניח ל- הוא הליטרל הראשון ששווה ל-  $C=(a_1\vee a_2\vee\ldots\vee a_k)$  בפרט, עבור כל פסוקית

- $j,1\leqslant j\leqslant i-2$  לכל לכל  $y_j=1$  נשים •
- $i-1\leqslant j\leqslant k-3$  לכל  $y_j=0$  ונשים •

סיימנו להגדיר את הפונקציה הרדוקציה.

כעת נוכיח כי הפונקציה הזאת מקיימת את התנאי ההכרחי

$$\langle \phi' \rangle \in 3SAT \Leftrightarrow \langle \phi \rangle \in SAT$$
.

### :⇒ כיוון

 $\phi$  את המספקת השמה השמה Xותהי ל $\langle \phi \rangle \in SAT$  נניח כי נניח השמה ל $\langle \phi \rangle$ השמה השמה מחימת השמה נוכיח שקיימת השמה את ל

- X -בכל פסוקית של  $\phi$ , עבור הליטרלים  $a_1,a_2,\ldots,a_k$  ניתן אותם ערכים כמו ב-
- ערך שקיבל אחד ליטרל ליטרל פחות ר $C=(a_1\vee a_2\vee\ldots\vee a_k)$  בכל פסוקית את מספקת אX -ש מכיוון ש- מכיוון מיטרל פחות בכל פחות אז על פי ההגדרה של פונקצית הרודקציה: .1
  - $1 \le j \le i-2$  לכל  $y_i = 1$  ,  $y_i = 1$
  - $i-1\leqslant j\leqslant k-3$  לכל  $y_j=0$  ונשים \*

באופן הזה אנחנו ניצור אוסף  $C^\prime$  של פבוקיות עם המבנה הבא:

$$\begin{pmatrix}
a_1 \lor a_2 \lor y_1
\end{pmatrix} \land \begin{pmatrix}
0 & 1 \\
\bar{y}_1 \lor a_2 \lor y_2
\end{pmatrix} \land \dots \land \begin{pmatrix}
0 & 1 \\
\bar{y}_{i-3} \lor a_{i-1} \lor y_{i-2}
\end{pmatrix} \land \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 \\
\bar{y}_{i-2} \lor a_i \lor y_{i-1}
\end{pmatrix} \land \begin{pmatrix}
1 \\
\bar{y}_{i-1} \lor a_{i+1} \lor y_i
\end{pmatrix}$$

$$\land \dots \dots \land \begin{pmatrix}
1 \\
\bar{y}_{k-3} \lor a_{k-1} \lor a_k
\end{pmatrix}$$

 $\langle \phi' \rangle \in 3SAT$  ולכן השמה זו מספקת את ולכן

### :⇒ כיוון

 $\phi'$  את המספקת השמה השמה או נניח כי לניח ל $\langle \phi' \rangle \in 3SAT$  נניח כי נוכיח שקיימת השמה או המספקת השמה לוכיח שקיימת השמה או המספקת את

 $C=(a_1\vee a_2\vee\ldots\vee a_k)$  נסתכל על פסוקית נסתכל על השמה X השמה שלא קיימת השמה אז בהכרח נניח בשלילה שלא היימת השמה א

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$$

 $1 \leqslant j \leqslant k-3$  לכל  $y_j=1$ , לפי זה, באוסף פסוקיות שנקבל על פי ההגדרה של פונקצית הרדוקציה,  $y_1=y_2=\ldots=y_{k-3}=0$  כלומר מתקיים  $y_1=y_2=\ldots=y_{k-3}=0$ 

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_1 \lor a_2 \lor y_1 \end{pmatrix} \land \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \bar{y}_1 \lor a_3 \lor y_2 \end{pmatrix} \land \dots \land \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \bar{y}_{i-2} \lor a_i \lor y_{i-1} \end{pmatrix} \land \dots \land \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{y}_{k-3} \lor a_{k-1} \lor a_k \end{pmatrix}$$

... אינה מסופקת.  $\left( \bar{y}_{k-3} \lor a_{k-1} \lor a_k \right)$ אינה מסופקת. C' אינה מסופקת, בסתירה לכך ש- X'

 $.\langle\phi
angle\in SAT$  ולכן

 $.SAT \leqslant 3SAT$  הוכחנו שקיימת הרדוקציה

כעת נוכיח כי הרדוקציה הזו היא זמן פולינומיאלית.

#### סיבוכיות

החישוב של הפונקציה מתבצע בזמן פולינומיאלי. ספציפי, אם האורך של הנוסחה  $\phi$  הוא  $n=|\phi|$  אז הרודקציה החישוב של הפונקציה מתבצע בזמן פולינומיאלי. ספציפי, אם האורך של הנוסחה O(n).

# \*ווכחת משפט קוק לוין

## משפט 10.7 משפט קוק לוין

הבעיית SAT היא

#### הוכחה:

חשיפה מלאה: ההוכחה הבאה מתבססת על ההוכחה שנתונה בהספר של Sipser.

על פי הגדרה 10.2 יש להוכיח ששני התנאים הבאים מתקיימים:

 $.SAT \in NP$  :1 תנאי

 $A \in NP$  לכל  $A \leqslant_p SAT$  :2 תנאי

 $SAT \in NP$  באשית נוכיח כי

כדי להוכיח כי SAT שייכת ל- NP, נוכיח כי אישור המורכב מהשמה מספקת עבור נוסחת קלט  $\phi$  ניתן לאימות בזמן פולינומיאלי.

. נניח כי n ליטרלים.  $\phi$  כלומר ב-  $\phi$  מופיעים n ליטרלים.

היותר. משתני בוליאניים לכל היותר. n

- אלגוריתם האימות מחליף כל משתנה בנוסחה בערך המתאים לו על פי ההשמה.  $O\left(n\right).$ 
  - אחר כך האלגוריתם מחשב את ערכו של הביטוי:
  - . נניח כי הנוסחה  $\phi$  מכילה k דורות של סוגריים בתוך סוגריים.
  - \* החישוב מתחיל עם החישובים של הביטויים בתוך הסוגריים הכי בפנים.
- יש n סוגריים הכי-בפנים לכל היותר, וכל אחד של הסוגריים האלה מכיל n ליטרלים לכל היותר. א יש סוגריים הזה הוא  $O\left(n^2\right)$ .
  - $O\left(kn^2
    ight)$  איש א דורות של סוגריים לכן החישוב כולו א דורות \*
    - בסה"כ הסיבוכיות זמן הריצה היא

$$O(n) + O(kn^2) = O(n^2)$$

לפיכך אישור של השמה כלשהי מתבצע בזמן פולינומיאלי.

. אם ערכו של הביטוי הוא 1 הנוסחה ספיקה.

 $A\leqslant_p SAT$  כי עכשיו נוכיח כי  $SAT\in NP$  הוכחנו כי

תהי N מ"ט אי-דטרמיניסטית זמן-פולינומיאלית שמכריעה שפה A כלשהי בזמן  $O\left(n^k\right)$  עבור k טבעי. התרשים למטה מראה טבלה של קונפיגורציות של N. ברשימה הבאה רשומות ההגדרות של הטבלה:

- N של מסלול אחד של מסוים בשלב מסוים של תוכן הסרט של ullet
  - בשורה הראשונה יש את הקונפיגורציה ההתחלתית.
  - n אנחנו מניחים כי האורך של המילה, כלומר אורך הקלט הוא  $w_1, \ldots, w_n$  מסמנים את התווים של הקלט.

- N בתא הראשון בכל שורה יש M, ואחר כך רשומה הקונפיגורציה של בסוף הקונפיגורציה בכל שורה יש .
- אחרי ה- # בקצה הימין של המילה, בכל תא יש תו רווח עד הסוף של השורה.
  - התווי רווח לפני המשבצת הראשונה של הקונפיגורציה לא מופיעים בטבלה.
    - . תאים של כל שורה הוא בדיוק  $n^k$  תאים  $\bullet$
    - בטבלה יש בדיוק  $n^k$  שורות לסיבה הבאה: •
    - .המכונת טיורינג מבצעת  $n^k$  צעדים לכל היותר -
      - . בכל צעד המ"ט עוברת לקונפיגורציה חדשה.
        - בכל שורה רשומה קונפיגורציה.
    - . בסה"כ יש  $n^k$  שורות עבור ה-  $n^k$  קונפיגוריות שונות האפשריות.

#	$q_0$	$w_1$	$w_2$	 $w_n$	_		#
#	$q_0$						#
#	$q_0$						#
#							#

אנחנו אומרים כי טבלה שלהי היא  $\,$  טבלה המקבלת אם באחת השורות יש קונפיגורציה אשר N מקבלת אותה.

SAT -כלשהי A משפה f משפה מון-פולינומיאלית הרדוקציה את הרדוקציה בעזרת הטבלה נתאר את

הפונקצית הרדוקציה

מקבלת קלט w ומחזירה נוסחה  $\phi=f(w)$ , אשר לפי ההגדרה של פונקצית הרדוקציה, עומדת בתנאי הבא:

$$w \in A \qquad \Leftrightarrow \qquad f(w) \in SAT \ .$$

נגדיר N האלפיבית של הסרט המצבים ו-  $\Gamma$  האלפיבית הסרט של

$$C = Q \cup \Gamma \cup \{\#\} \ .$$

 $\cdot C$  איבר כלשהו של s

 $1\leqslant i,j\leqslant n^k$  לכל  $x_{i,j,s}$  לכל משתנה בוליאני נגדיר הקונפיגורציות הקונפיגורציות של הטבלת העבור כל מוגדר על פי התנאי מוגדר על פי התנאי

$$x_{iis} = 1$$

אז a או הטבלה מופיע התו ה.  $s\in C$  אם בתא ה- ij אל הטבלה מופיע התו

$$x_{2,5,a} = 1$$

בעוד

$$x_{2.5,b} = 0$$
.

 $\phi$  במובן הזה, התכנים של כל התאים של הטבלה מסומנים על ידי המשתנים של

N עכשיו נבנה נוסחה  $\phi$  על סמך התנאי שהשמה מספקת של  $\phi$  תהיה מתאימה לטבלה המקבלת של גדיר

$$\phi = \phi_{\text{cell}} \wedge \phi_{\text{start}} \wedge \phi_{\text{move}} \wedge \phi_{\text{acc}} . \tag{10.1}$$

. אחד אחד אחד למטה ו-  $\phi_{
m move}$  ,  $\phi_{
m start}$  ,  $\phi_{
m cell}$  אחד אחד למטה אנחנו נסביר את כל הנוסחאות

### $\phi_{ m cell}$ הנוסחה ullet

כפי שמצויין לעיל, אם המשתנה  $x_{i,j,s}$  "דולק", כלומר אם  $x_{i,j,s}$ , זאת אומרת שיש סימן  $x_{i,j,s}$  בתא ה-ij הטבלה. אנחנו רוצים להבטיח שהשמה כלשהי בנוסחה אשר מתאימה לקונפיגורציה של הטבלה, מדליקה בדיוק משתנה אחד לכל תא של הטבלה. למטרה זו נגדיר  $\phi_{\rm cell}$  כך:

$$\phi_{\text{cell}} = \bigwedge_{1 \leqslant i, j \leqslant n^k} \left[ \left( \bigvee_{s \in C} x_{i,j,s} \right) \land \left( \bigwedge_{\substack{s,t \in C \\ s \neq t}} \left( \overline{x}_{i,j,s} \lor \overline{x}_{i,j,t} \right) \right) \right]$$
 (10.2)

- . דולק. משתנה אחד הטבלה, שלכל תא שלכל מבטיח מבטיח מבטים, מבטיח מרובעים מרובעים,  $x_{i,j,s}$  מבטיח אחד איבר הראשון בסוגריים מרובעים  $\ast$
- . האיבר השני לכל היותר אחד לכל מבטיח שעבור אחד אחד לכל היותר האיבר אחד לכל היותר אחד א מבטיח  $\bigwedge_{\substack{s,t\in C\\s\neq t}} (\overline{x}_{i,j,s} \vee \overline{x}_{i,j,t})$

לפיכך כל השמה מספקת עומדת בתנאי שיהיה בדיוק סימן אחד, s, בכל תא של הטבלה.

### $\phi_{ extsf{start}}$ הנוסחה ullet

w נוסחה שבטיחה ששורה הראשונה של הטבלה היא הקונפיגורציה ההתחלתית של N על הקלט  $\phi_{ extst{start}}$ 

$$\phi_{\text{start}} = x_{1,1,\#} \wedge x_{1,2,q_0} \wedge x_{1,3,w_1} \wedge x_{1,4,w_2} \\ \wedge \dots \wedge \\ x_{1,n+2,w_n} \wedge x_{1,n+3,\_} \wedge \dots \wedge x_{1,n^k-1,\_} \wedge x_{1,n^k,\#}$$
(10.3)

### $\phi_{ m acc}$ הנוסחה ullet

. הנוסחה אשר המ"ט אותה שקיימת טבלה קונפיגורציה אשר המ"ט  $\phi_{\rm acc}$  הנוסחה הנוסחה שקיימת

 $x_{i,j,q_{
m acc}}$  מבטיחה שהסימן מופיע בתא אחד של הטבלה דרך התנאי שלפחות אחד המשתנים בפרט בפרט דולק:

$$\phi_{\text{acc}} = \bigvee_{1 \le i, j \le n^k} x_{i,j,q_{\text{acc}}} \tag{10.4}$$

## $\phi_{ m move}$ הנוסחה •

."שורה חוקית" מבטיחה שכל שורה של הטבלה היא שורה חוקית הנוסחה  $\phi_{
m move}$ 

כלומר בכל שורה, הקונפיגורציה היא כך שאפשר להגיע אליה על ידי תזוזה חוקית של N מהקונפיגורציה כלומר בכל שורה, הקונפיגורציה האחת למעלה.

N תזוזה חוקית בין כל שתי קונפיגורציות נקבעת על ידי הפונקצית המעברים של המ"ט

בשפה פורמלית, אם  $c_i$  הקונפיגורציה של שורה i, ו-  $c_{i+1}$  הקונפיגורציה של השורה i+1 אחת למטה, אז בשפה פורמלית, אם  $1\leqslant i\leqslant n^k-1$  מבטיחה כי לכל  $\phi_{\mathrm{move}}$ 

$$c_i \vdash_N c_{i+1}$$
.

במונחי הטבלה, אפשר להגדיר תזוזה חוקית בין כל שתי שורות על ידי תת-טבלה מסדר 2 imes 3 שמכילה נתאים מתאימים של שתי שורות שכנות.

מכאן ואילך אנחנו נקרא לתת-טבלה כזאת "חלון".

למטה יש דוגמאות של חלונות חוקיים:



החלונות האלה למטה הם דוגמאות לחלונות לא חוקיים:

a	b	а	а	$q_1$	b	b	$q_1$	b
a	а	а	$q_1$	a	а	$q_2$	b	$q_2$

הנוסחה קובעת שכל חלון של הטבלה חוקי. בפרט, כל חלון מכיל 6 תאים. לכן קובעת שהתכנים הנוסחה  $\phi_{\mathrm{move}}$  קובעת של ה-6 תאים של כל חלון מהווה חלון חוקי. ז"א

$$\phi_{ ext{move}} = \bigwedge_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n^k \ 1 \leqslant j \leqslant n^k}} ($$
חלון ה-  $i,j$  חוקי (10.5)

אנחנו מציבים בטקסט " חלון ה- i,j חוקי " את הנוסחה הבאה, כאשר  $a_1,\dots,a_6$  מסמנים את התכנים של ה-6 תאים של כל חלון:

$$\bigvee_{\substack{\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}\\ \text{notine}}} (x_{i,j-1,a_1} \wedge x_{i,j,a_2} \wedge x_{i,j+1,a_3} \wedge x_{i+1,j-1,a_4} \wedge x_{i+1,j,a_5} \wedge x_{i+1,j+1,a_6})$$
 (10.6)

עד כה הוכחנו שקיים רדוקציה מכל שפה  $A \in NP$  ל-. SAT ל-. כעת נוכיח כי הרדוקציה זו חישובית בזמן-פולינומיאלי.

. תאים  $n^{2k}$  מכילה אי<br/>מ $n^k \times n^k$ מסדר מסדר אים של הטבלה אים הטבלה איז מסדר חיא

 $\phi_{\text{move}}$ ,  $\phi_{\text{acc}}$ ,  $\phi_{\text{start}}$ ,  $\phi_{\text{cell}}$  ונחשב את הסיבוכיות של כל הנוסחאות

 $\phi_{
m cell}$  הנוסחה ullet

הנוסחה (10.2) של מכילה  $\phi_{\rm cell}$  מכילה מכילה  $\phi_{\rm cell}$  של  $\phi_{\rm cell}=O\left(n^{2k}\right)$  .

 $\phi_{ ext{start}}$  הנוסחה ullet

הנוסחה (10.3) של מכילה בדיוק  $\phi_{
m start}$  מכילה של  $\phi_{
m start} = O\left(n^k\right) \; .$ 

 $\phi_{
m acc}$  הנוסחה ullet

הנוסחה לכן ליטרלים. לכן מכילה בדיוק  $\phi_{\rm acc}$  של (10.4) הנוסחה  $\phi_{\rm acc} = O\left(n^k\right) \; .$ 

 $\phi_{
m move}$  הנוסחה ullet

ליטרלים. לכן 6 מכילה  $n^{2k}$  מכילה  $\phi_{
m move}$  של (10.6,10.5) הנוסחה  $\phi_{
m move} = O\left(n^{2k}\right) \ .$ 

לכן בסה"כ

 $\phi = O\left(n^{2k}\right) + O\left(n^{k}\right) + O\left(n^{k}\right) + O\left(n^{2k}\right) = O\left(n^{2k}\right).$ 

.SAT -ל-  $A \in NP$  שפה מכל מכל פולינומיאלי הישובית חישוביה רדוקציה לפיכך לפיכ