

# שיעור 1

## מכונות טיורינג

### 1.1 הגדרה של מכונת טיורינג

#### הגדרה 1.1 מכונת טיורינג (הגדרה היוריסטית)

##### הקלט והסרט

- מכונת טיורינג (מ"ט) קורא קלט.
- הקלט עצמו נמצא על סרט אינסופי מחולק למשבצות.
- כל תו של הקלט כתוב במשבצת אחת של הסרט.
- במכונת טיורינג אנחנו מניחים שהסרט אינסופי לשני הכיוונים.
- \* משמאל לתחילת הקלט יש רצף אינסופי של תווי רווח " ".
- \* מימין לסוף הקלט יש רצף אינסופי של תווי רווח " ".

|     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| ... | ␣ | ␣ | a | b | b | b | a | a | ␣ | ␣ | ␣ | ... |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|

##### הראש

- במצב ההתחלתי הראש בקצה השמאלי של הקלט.

|     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| ... | ␣ | ␣ | a | b | b | b | a | a | ␣ | ␣ | ␣ | ... |
|     |   |   | ↑ |   |   |   |   |   |   |   |   |     |

- הראש יכול לזוז ימינה על הסרט וגם שמאלה על הסרט.
- הראש קורא את התוכן של המשבצת שבה הוא נמצא.
- הראש יכול לכתוב על משבצת, אבל רק על המשבצת שבה הראש נמצא.

##### תאור העבודה של המכונה

- בתחילת הריצה, הקלט כתוב התחילת הסרט כאשר מימינו נמצא רצף אינסופי של תווי ␣ -ים.
- הראש מצביע על התא הראשון בסרט והמכונה נמצאת במצב התחלתי  $q_0$ .

|       |     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |
|-------|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| $q_0$ | ... | ␣ | ␣ | a | b | b | b | a | a | ␣ | ␣ | ␣ | ... |
|       |     |   |   | ↑ |   |   |   |   |   |   |   |   |     |

- בכל צעד חישוב, בהתאם למצב הנוכחי ולאות שמתחת לראש (התו הנקרא), המכונה מחליטה:
  - \* לאיזה מצב לעבור
  - \* מה לכתוב מתחת לראש (התו הנכתב)
  - \* לאן להזיז את הראש (תא אחד ימינה, או תא אחד שמאלה, או להישאר במקום).
- למכונה ישנם שני מצבים מיוחדים:
  - \*  $q_{acc}$ : אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל-  $q_{acc}$  היא עוברת ומקבלת.
  - \*  $q_{rej}$ : אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל-  $q_{rej}$  היא עוברת ודוחה.
  - \* אם המכונה לא מגיעה ל-  $q_{acc}$  או  $q_{rej}$  היא תמשיך לרוץ לנצח.

## הגדרה 1.2 מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$$

כאשר:

|           |                            |
|-----------|----------------------------|
| $Q$       | קבוצת מצבים סופית ולא ריקה |
| $\Sigma$  | אלפבית הקלט                |
| $\Gamma$  | אלפבית הסרט                |
| $\delta$  | פונקציית המעברים           |
| $q_0$     | מצב התחלתי                 |
| $q_{acc}$ | מצב מקבל יחיד              |
| $q_{rej}$ | מצב דוחה יחיד              |

$$\_ \notin \Sigma$$

$$\Sigma \subseteq \Gamma, \_ \in \Gamma$$

$$\delta : (Q \setminus \{q_{rej}, q_{acc}\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$$

## 1.1 דוגמה

נבנה מכונת טיורינג אשר מקבלת מילה אם היא בשפה

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#a_w = \#b_w\}.$$

ז"א השפת כל המילים עם מספר שווה אותיות  $a$  ו  $b$ . הפאודו-קוד של המכונה, כדלקמן.פסאודו-קוד

- (1) סורקים את הקלט משמאל לימין.
  - אם לא מצאנו  $a$  וגם לא מצאנו  $b \Leftarrow$  מקבלת.
  - אם האות הראשונה שהראש מצא היא  $a$ , כותבים עליו  $\checkmark$ , ועוברים לשלב (2).
  - אם האות הראשונה שהראש מצא היא  $b$ , כותבים עליו  $\checkmark$ , ועוברים לשלב (3).
- (2) ממשיכים לזוז ימינה עד שנמצא  $b$  תואם.
  - אם לא מצאנו  $b \Leftarrow$  דוחה.
  - אם מצאנו  $b$  כותבים עליו  $\checkmark$ , חוזרים לתחילת הקלט וחוזרים לשלב (1).
- (3) ממשיכים לזוז ימינה עד שנמצא  $a$  תואם.
  - אם לא מצאנו  $a \Leftarrow$  דוחה.
  - אם מצאנו  $a$  כותבים עליו  $\checkmark$ , חוזרים לתחילת הקלט וחוזרים לשלב (1).

כעת נתן הגדרה פורמלית של המכונת טיורינג שמבצעת את האלגוריתם הזה.

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$$

כאשר  $Q$  הקבוצת המצבנים הבאה:

$$Q = \{q_0, q_a, q_b, q_{back}, q_{rej}, q_{acc}\}.$$

המשמעותם של כל המצבים נרשמים בטבלה למטה:

|            |  |
|------------|--|
| $q_0$      | המצב ההתחלתי. אליו נחזור אחרי כל סבב התאמה של זוג אותיות.                            |
| $q_a$      | מצב שבו ראינו $a$ ומחפשים $b$ תואם.  |
| $q_b$      | מצב שבו ראינו $b$ ומחפשים $a$ תואם.  |
| $q_{back}$ | מצב שנשתמש בו כדי לחזור לקצה השמאלי של הקלט ולהתחיל את הסריקה הבאה (סבב ההתאמה הבא). |
| $q_{acc}$  | מצב מקבל.  |
| $q_{rej}$  | מצב דוחה.  |

האלפבית של הקלט,  $\Sigma$ , והלפבית של הסרט,  $\Gamma$ , הינן:

$$\Sigma = \{a, b\}, \quad \Gamma = \{a, b, \sqcup, \checkmark\}.$$

הפונקציות המעבריים  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$  היא מוגדרת כדלקמן.

$$\delta(q_0, a) = (q_a, \checkmark, R),$$

$$\delta(q_0, b) = (q_b, \checkmark, R),$$

$$\delta(q_0, \sqcup) = (q_{acc}, \sqcup, R),$$

$$\delta(q_a, \checkmark) = (q_a, \checkmark, R),$$

$$\delta(q_a, a) = (q_a, a, R),$$

$$\delta(q_a, b) = (q_{back}, \checkmark, L),$$

$$\delta(q_b, \checkmark) = (q_b, \checkmark, R),$$

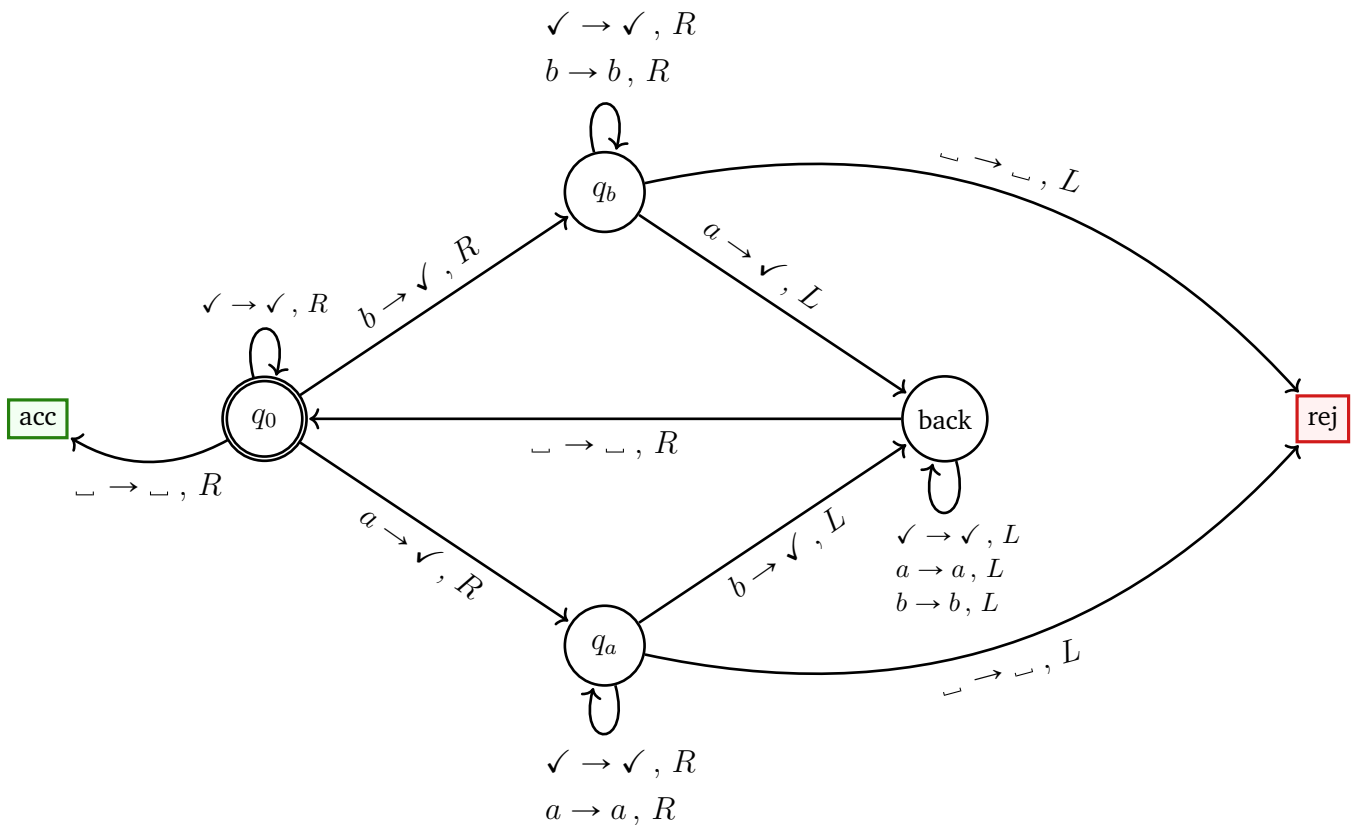
$$\delta(q_b, b) = (q_a, b, R),$$

$$\delta(q_b, a) = (q_{back}, \checkmark, L).$$

לעתים קל יותר לרשום את פונקציית המעבריים  $\delta$  כטבלה:

| $Q \backslash \Gamma$ | a                           | b                           | $\sqcup$               | $\checkmark$                |
|-----------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------|-----------------------------|
| $q_0$                 | $(q_a, \checkmark, R)$      | $(q_b, \checkmark, R)$      | $(q_{acc}, \sqcup, R)$ | $(q_0, \checkmark, R)$      |
| $q_a$                 | $(q_a, a, R)$               | $(q_{back}, \checkmark, L)$ | $(q_{rej}, \sqcup, L)$ | $(q_a, \checkmark, R)$      |
| $q_b$                 | $(q_{back}, \checkmark, L)$ | $(q_b, b, R)$               | $(q_{rej}, \sqcup, L)$ | $(q_b, \checkmark, R)$      |
| $q_{back}$            | $(q_{back}, a, L)$          | $(q_{back}, b, L)$          | $(q_0, \sqcup, R)$     | $(q_{back}, \checkmark, L)$ |

### תרשים מצבים



## 1.2 דוגמה

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה .aab

**פתרון:**

|            |            |            |       |       |   |
|------------|------------|------------|-------|-------|---|
| ⌊          | $q_0$      | a          | a     | b     | ⌊ |
| ⌊          | ✓          | $q_a$      | a     | b     | ⌊ |
| ⌊          | ✓          | a          | $q_a$ | b     | ⌊ |
| ⌊          | ✓          | $q_{back}$ | a     | ✓     | ⌊ |
| ⌊          | $q_{back}$ | ✓          | a     | ✓     | ⌊ |
| $q_{back}$ | ⌊          | ✓          | a     | ✓     | ⌊ |
| ⌊          | $q_0$      | ✓          | a     | ✓     | ⌊ |
| ⌊          | ✓          | $q_0$      | a     | ✓     | ⌊ |
| ⌊          | ✓          | ✓          | $q_a$ | ✓     | ⌊ |
| ⌊          | ✓          | ✓          | ✓     | $q_a$ | ⌊ |
| ⌊          | ✓          | ✓          | rej   | ✓     | ⌊ |

## 1.3 דוגמה

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה .abbbbaa

**פתרון:**

|            |            |            |            |            |            |       |   |   |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|-------|---|---|
| ⌊          | $q_0$      | a          | b          | b          | b          | a     | a | ⌊ |
| ⌊          | ✓          | $q_a$      | b          | b          | b          | a     | a | ⌊ |
| ⌊          | $q_{back}$ | ✓          | ✓          | b          | b          | a     | a | ⌊ |
| $q_{back}$ | ⌊          | ✓          | ✓          | b          | b          | a     | a | ⌊ |
| ⌊          | $q_0$      | ✓          | ✓          | b          | b          | a     | a | ⌊ |
| ⌊          | ✓          | $q_0$      | ✓          | b          | b          | a     | a | ⌊ |
| ⌊          | ✓          | ✓          | $q_0$      | b          | b          | a     | a | ⌊ |
| ⌊          | ✓          | ✓          | ✓          | $q_b$      | b          | a     | a | ⌊ |
| ⌊          | ✓          | ✓          | ✓          | b          | $q_b$      | a     | a | ⌊ |
| ⌊          | ✓          | ✓          | ✓          | $q_{back}$ | b          | ✓     | a | ⌊ |
| ⌊          | ✓          | ✓          | $q_{back}$ | ✓          | b          | ✓     | a | ⌊ |
| ⌊          | ✓          | $q_{back}$ | ✓          | ✓          | b          | ✓     | a | ⌊ |
| $q_{back}$ | ⌊          | ✓          | ✓          | ✓          | b          | ✓     | a | ⌊ |
| ⌊          | $q_0$      | ✓          | ✓          | ✓          | b          | ✓     | a | ⌊ |
| ⌊          | ✓          | $q_0$      | ✓          | ✓          | b          | ✓     | a | ⌊ |
| ⌊          | ✓          | ✓          | $q_0$      | ✓          | b          | ✓     | a | ⌊ |
| ⌊          | ✓          | ✓          | ✓          | $q_0$      | b          | ✓     | a | ⌊ |
| ⌊          | ✓          | ✓          | ✓          | ✓          | $q_b$      | ✓     | a | ⌊ |
| ⌊          | ✓          | ✓          | ✓          | ✓          | ✓          | $q_b$ | a | ⌊ |
| ⌊          | ✓          | ✓          | ✓          | ✓          | $q_{back}$ | ✓     | ✓ | ⌊ |
| ⌊          | ✓          | ✓          | ✓          | $q_{back}$ | ✓          | ✓     | ✓ | ⌊ |

|            |            |            |            |       |       |       |       |           |
|------------|------------|------------|------------|-------|-------|-------|-------|-----------|
| ⊥          | ✓          | ✓          | $q_{back}$ | ✓     | ✓     | ✓     | ✓     | ⊥         |
| ⊥          | ✓          | $q_{back}$ | ✓          | ✓     | ✓     | ✓     | ✓     | ⊥         |
| ⊥          | $q_{back}$ | ✓          | ✓          | ✓     | ✓     | ✓     | ✓     | ⊥         |
| $q_{back}$ | ⊥          | ✓          | ✓          | ✓     | ✓     | ✓     | ✓     | ⊥         |
| ⊥          | $q_0$      | ✓          | ✓          | ✓     | ✓     | ✓     | ✓     | ⊥         |
| ⊥          | ✓          | $q_0$      | ✓          | ✓     | ✓     | ✓     | ✓     | ⊥         |
| ⊥          | ✓          | ✓          | $q_0$      | ✓     | ✓     | ✓     | ✓     | ⊥         |
| ⊥          | ✓          | ✓          | ✓          | $q_0$ | ✓     | ✓     | ✓     | ⊥         |
| ⊥          | ✓          | ✓          | ✓          | ✓     | $q_0$ | ✓     | ✓     | ⊥         |
| ⊥          | ✓          | ✓          | ✓          | ✓     | ✓     | $q_0$ | ✓     | ⊥         |
| ⊥          | ✓          | ✓          | ✓          | ✓     | ✓     | ✓     | $q_0$ | ⊥         |
| ⊥          | ✓          | ✓          | ✓          | ✓     | ✓     | ✓     | ⊥     | $q_{acc}$ |

### הגדרה 1.3 קונפיגורציה

תהי  $M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$  מכונת טיורינג. קונפיגורציה של  $M$  הינה מחרוזת

$$uq\sigma v$$

כאשר משמעות:

$$u, v \in \Gamma^*, \quad \sigma \in \Gamma, \quad q \in Q.$$

$q$  מצב המכונה,  
 $\sigma$  הסימון במיקום הראש  
 $u$  תוכן הסרט משמאל לראש,  
 $v$  תוכן הסרט מימין לראש.

### דוגמה 1.4 (המשך של דוגמה 1.2)

| $u$     | $q$        | $\sigma$ | $v$     |
|---------|------------|----------|---------|
| ⊥       | $q_0$      | a        | a b ⊥   |
| ⊥ ✓     | $q_a$      | a        | b ⊥     |
| ⊥ ✓ a   | $q_a$      | b        | ⊥       |
| ⊥ ✓     | $q_{back}$ | a        | ✓ ⊥     |
| ⊥       | $q_{back}$ | ✓        | a ✓ ⊥   |
| ⊥       | $q_{back}$ | ⊥        | ✓ a ✓ ⊥ |
| ⊥       | $q_0$      | ✓        | a ✓ ⊥   |
| ⊥ ✓     | $q_0$      | a        | ✓ ⊥     |
| ⊥ ✓ ✓   | $q_a$      | ✓        | ⊥       |
| ⊥ ✓ ✓ ✓ | $q_a$      | ⊥        | ⊥       |
| ⊥ ✓ ✓   | $q_{rej}$  | ✓        | ⊥       |

### דוגמה 1.5

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת כל מילה בשפה

$$L = \{a^n \mid n = 2^k, k \in \mathbb{N}\}$$

ז"א מילים בעלי מספר אותיות  $a$  אשר חזקה של 2.

## פתרון:

ראשית נשים לב למשפט הבא:

## משפט 1.1

מספר שלם  $n$  שווה לחזקה אי-שלילית של 2, כלומר  $n = 2^k$  ( $k \geq 0$ ) אם ורק אם קיים שלם  $m$  עבורו חילוק של  $n$  ב-2 בדיוק  $m$  פעמים נותן 1.

הוכחה:

כיוון  $\Leftarrow$ 

אם  $n = 2^k$  ( $k \geq 0$ ) אז  $\frac{n}{2^k} = 1$ .

כיוון  $\Rightarrow$ 

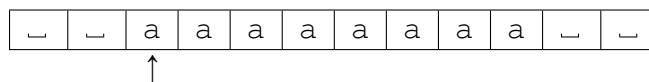
■ אם קיים  $m \geq 0$  עבורו  $\frac{n}{2^m} = 1$  אז  $n = 2^m$  ולכן  $n$  שווה לחזקה אי-שלילית של 2.

לאור המשפט הזה נבנה אלגוריתם אשר מחלק את מספר האותיות במילה ב-2 שוב ושוב בצורה איטרטיבית.

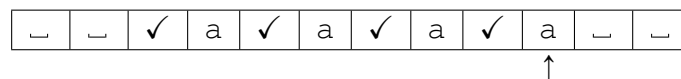
- אם אחרי סיבוב מסויים נקבל מספר אי-זוגי שונה מ-1, אז אין מצב שמספר האותיות  $a$  הוא חזקה של 2.
- בצד שני אם אחרי סיבוב כלשהו נקבל בדיוק  $a$  אחת הנשארת, ז"א אחרי מספר מסוים של חילוקים של המספר אותיות  $a$  קיבלנו 1, אזי מובטח לנו שהמספר של אותיות  $a$  הוא שווה לחזקה של 2.

כעת נסביר כיצד המכונת טיורינג מבצעת את השיטה הזאת בפועל כדלקמן.

(1) במצב ההתחלתי יש מחרוזת של רצף אותיות  $a$  כתובה על הסרט והראש נמצא מתחת האות הראשונה.



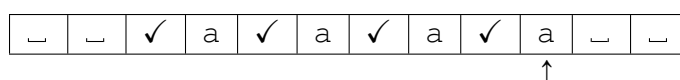
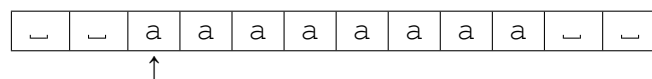
(2) עוברים על הקלט משמאל לימין ומבצעים מחיקה לסירוגין של האות  $a$ . כלומר, אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר וכן הלאה, עד שמגיעים לקצה הימין של המילה.



(3) אחרי שהראש הגיע לסוף המילה:

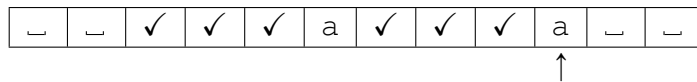
- אם מצאנו אות  $a$  אחת בדיוק  $\Leftarrow$  המכונה תקבל.
- אם כתוב ✓ בתו האחרון  $\Leftarrow$  המכונה תדחה.
- אחרת, אם כתוב  $a$  בתו האחרון הראש חוזר לתחילת המחרוזת וחוזרים לשלב (2).

כדוגמה של מילה המתקבלת על ידי האלגוריתם, למטה רשומות האיטרציות של האלגוריתם הזה על המילה  $w = aaaaaaaaaa$  (8 אותיות  $a$ ). במצב ההתחלתי הסרט נראה כדלקמן.



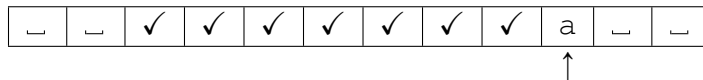
(איטרציה 1) לבסוף האיטרציה  $i = 1$  הסרט נראה כך:

התו האחרון  $a$  אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.



**איטרציה 2** בסוף האיטרציה  $i = 2$  הסרט נראה כך:

התו הראשון הוא  $a$  אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

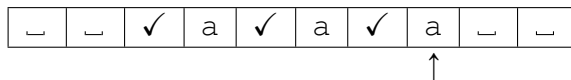
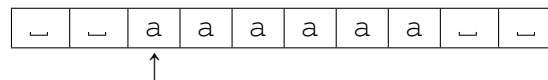


**איטרציה 3** לאחר האיטרציה  $i = 3$  הסרט נראה כך:

התו האחרון הוא  $a$  אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

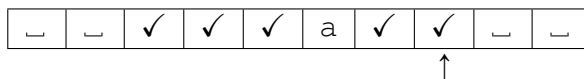
**איטרציה 4** באיטרציה  $i = 4$  יש אות  $a$  אחת בדיוק אז המכונה מקבלת.

כדוגמה של מילה הלא המתקבלת על ידי האלגוריתם, למטה רשומות האיטרציות של האלגוריתם הזה על המילה  $w = aaaaaa$  (6 אותיות  $a$ ).  
במצב ההתחלתי הסרט נראה כדלקמן.



**איטרציה 1** לבסוף האיטרציה  $i = 1$  הסרט נראה כך:

התו האחרון  $a$  אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.



**איטרציה 2** בסוף האיטרציה  $i = 2$  הסרט נראה כך:

התו הראשון הוא ✓ אז דוחה.

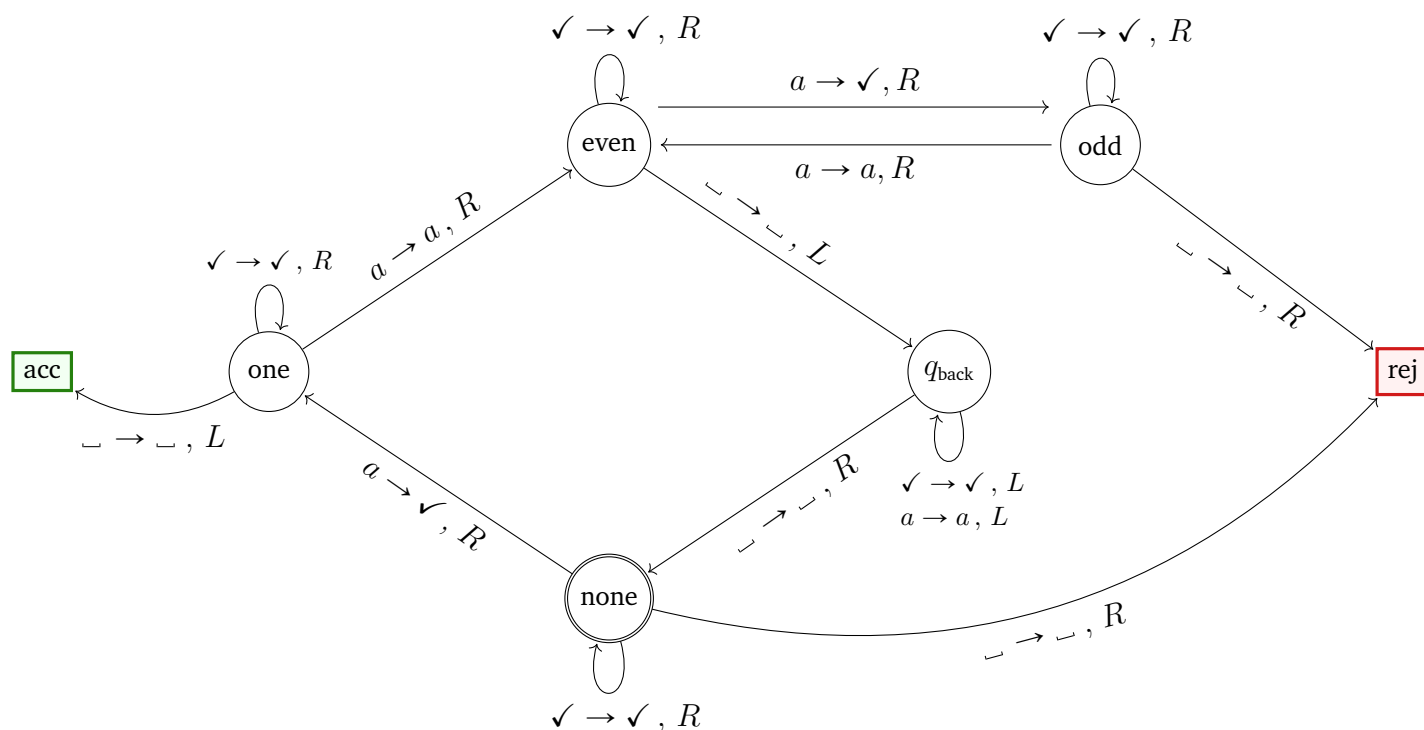
כעת נתן הגדרה פורמלית של המכונת טיורנג שמקבלת השפה הזאת:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej}) ,$$

כאשר  $\Sigma = \{a\}$ ,  $\Gamma = \{a, \_, \checkmark\}$ , והקבוצת המצבים היא  $Q = \{q_0, \text{one}, \text{even}, \text{odd}, q_{acc}, q_{rej}\}$  כאשר המשמעותם הם מפורטים למטה:

|                  |   |
|------------------|---|
| מצב none:        | מצב התחלתי. עדיין לא קראנו $a$ בסבב סריקה זה. |
| מצב one:         | קראנו $a$ בודד.                               |
| מצב even:        | קראנו מספר זוגי של $a$ .                      |
| מצב odd:         | קראנו מספר אי-זוגי של $a$ .                   |
| מצב $q_{back}$ : | חזרה שלמאלה.                                  |
| מצבים למטה:      |   |

הפונקציות המעברים מתוארות על ידי התרשים



## דוגמה 1.6

בדקו אם המילה aaaa מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.5.

פתרון:

|      |      |      |      |      |      |  |
|------|------|------|------|------|------|--|
|      | none | a    | a    | a    | a    |  |
|      | ✓    | one  | a    | a    | a    |  |
|      | ✓    | a    | even | a    | a    |  |
|      | ✓    | a    | ✓    | odd  | a    |  |
|      | ✓    | a    | ✓    | a    | even |  |
|      | ✓    | a    | ✓    | back | a    |  |
|      | ✓    | a    | back | ✓    | a    |  |
|      | ✓    | back | a    | ✓    | a    |  |
|      | back | ✓    | a    | ✓    | a    |  |
| back |      | ✓    | a    | ✓    | a    |  |
|      | none | ✓    | a    | ✓    | a    |  |
|      | ✓    | none | a    | ✓    | a    |  |
|      | ✓    | ✓    | one  | ✓    | a    |  |
|      | ✓    | ✓    | ✓    | one  | a    |  |
|      | ✓    | ✓    | ✓    | a    | even |  |
|      | ✓    | ✓    | ✓    | back | a    |  |
|      | ✓    | ✓    | back | ✓    | a    |  |
|      | ✓    | back | ✓    | ✓    | a    |  |
|      | back | ✓    | ✓    | ✓    | a    |  |
| back |      | ✓    | ✓    | ✓    | a    |  |
|      | none | ✓    | ✓    | ✓    | a    |  |
|      | ✓    | none | ✓    | ✓    | a    |  |
|      | ✓    | ✓    | none | ✓    | a    |  |



|   |   |   |   |      |     |   |
|---|---|---|---|------|-----|---|
| ⊥ | ✓ | ✓ | ✓ | none | a   | ⊥ |
| ⊥ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓    | one | ⊥ |
| ⊥ | ✓ | ✓ | ✓ | acc  | ✓   | ⊥ |

| $u$       | $q$  | $\sigma$ | $v$       |
|-----------|------|----------|-----------|
| ⊥         | none | a        | aaa ⊥     |
| ⊥ ✓       | one  | a        | aa ⊥      |
| ⊥ ✓ a     | even | a        | a ⊥       |
| ⊥ ✓ a ✓   | odd  | a        | ⊥         |
| ⊥ ✓ a ✓ a | even | ⊥        | ⊥         |
| ⊥ ✓ a ✓   | back | a        | ⊥         |
| ⊥ ✓ a     | back | ✓        | a ⊥       |
| ⊥ ✓       | back | a        | ✓ a ⊥     |
| ⊥         | back | ✓        | a ✓ a ⊥   |
| ⊥         | back | ⊥        | ✓ a ✓ a ⊥ |
| ⊥         | none | ✓        | a ✓ a ⊥   |
| ⊥ ✓       | none | a        | ✓ a ⊥     |
| ⊥ ✓ ✓     | one  | ✓        | a ⊥       |
| ⊥ ✓ ✓ ✓   | one  | a        | ⊥         |
| ⊥ ✓ ✓ ✓ a | even | ⊥        | ⊥         |
| ⊥ ✓ ✓ ✓   | back | a        | ⊥         |
| ⊥ ✓ ✓     | back | ✓ a      | ⊥         |
| ⊥ ✓       | back | ✓        | ✓ a ⊥     |
| ⊥         | back | ✓        | ✓ ✓ a ⊥   |
| ⊥         | back | ⊥        | ✓ ✓ ✓ a ⊥ |
| ⊥         | none | ✓        | ✓ ✓ a ⊥   |
| ⊥ ✓       | none | ✓        | ✓ a ⊥     |
| ⊥ ✓ ✓     | none | ✓        | a ⊥       |
| ⊥ ✓ ✓ ✓   | none | a        | ⊥         |
| ⊥ ✓ ✓ ✓ ✓ | one  | ⊥        | ⊥         |
| ⊥ ✓ ✓ ✓ ✓ | acc  | ✓        | ⊥         |

## דוגמה 1.7

בדקו אם המילה aaa מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.5.

פתרון:

|   |      |     |      |     |     |
|---|------|-----|------|-----|-----|
| ⊥ | none | a   | a    | a   | ⊥   |
| ⊥ | ✓    | one | a    | a   | ⊥   |
| ⊥ | ✓    | a   | even | a   | ⊥   |
| ⊥ | ✓    | a   | ✓    | odd | ⊥   |
| ⊥ | ✓    | a   | ✓    | ⊥   | rej |

| $u$ | $q$  | $\sigma$ | $v$  |
|-----|------|----------|------|
| ⊥   | none | a        | aa ⊥ |

|      |   |   |      |      |      |      |
|------|---|---|------|------|------|------|
| $\_$ | ✓ |   | one  | a    | a    | $\_$ |
| $\_$ | ✓ | a | even | a    | $\_$ |      |
| $\_$ | ✓ | a | odd  | $\_$ | $\_$ |      |
| $\_$ | ✓ | a | rej  | $\_$ | $\_$ |      |

## דוגמה 1.8

מהי השפה של המכונה למטה:



## פתרון:

(1) סורקים את הקלט משמאל לימין.

- אם התו הנקרא  $a$  או  $b$  עוברים לתו ימינה הבא וחוזרים לשלב (1).
- אם התו הנקרא  $\_$  אז הגענו לסוף הקלט, ועוברים לשלב (2).

(2) עוברים שמאלה לתו הארון של המילה.

- אם התו הנקרא  $a \Leftarrow$  מקבל.
- אחרת דוחה.

לכן המכונה מקבלת שפת המילים המסתיימות באות  $a$ .

## דוגמה 1.9

מהי השפה של המכונה למטה:



## פתרון:

## (1) במצב ההתחלתי:

- אם התו הנקרא  $\_$  מקבל.
- אם התו הנקרא  $a$  מורידים אותו על ידי  $\_$  ועוברים לשלב (2).
- אחרת  $\Leftarrow$  דוחה.

## (2) עוברים ימינה עד שמגיעים לסוף המילה.

- אם התו האחרון הוא  $b$ , מורידים אותו על ידי  $\_$ , חוזרים לתחילת המילה וחוזרים לשלב (1).
- אחרת דוחה.

בכל איטרציה המכונה מורידה תו  $a$  בתחילת המילה וחוזרת ומורידה תו  $b$  תואם בסוף המילה. בכל איטרציה אם המכונה לא מוצאת  $b$  תואם בסוף המילה היא דוחה המילה. אחרת אם המכונה לא דחתה המילה וכל האותיות נמחקות אז המילה מתקבלת. לכן המכונה מקבלת שפת המילים

$$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}.$$

## הגדרה 1.4 גרירה בצעד אחד

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$  מכונת טיורינג, ותהייה  $c_1$  ו- $c_2$  קונפיגורציות של  $M$ .  
נסמן

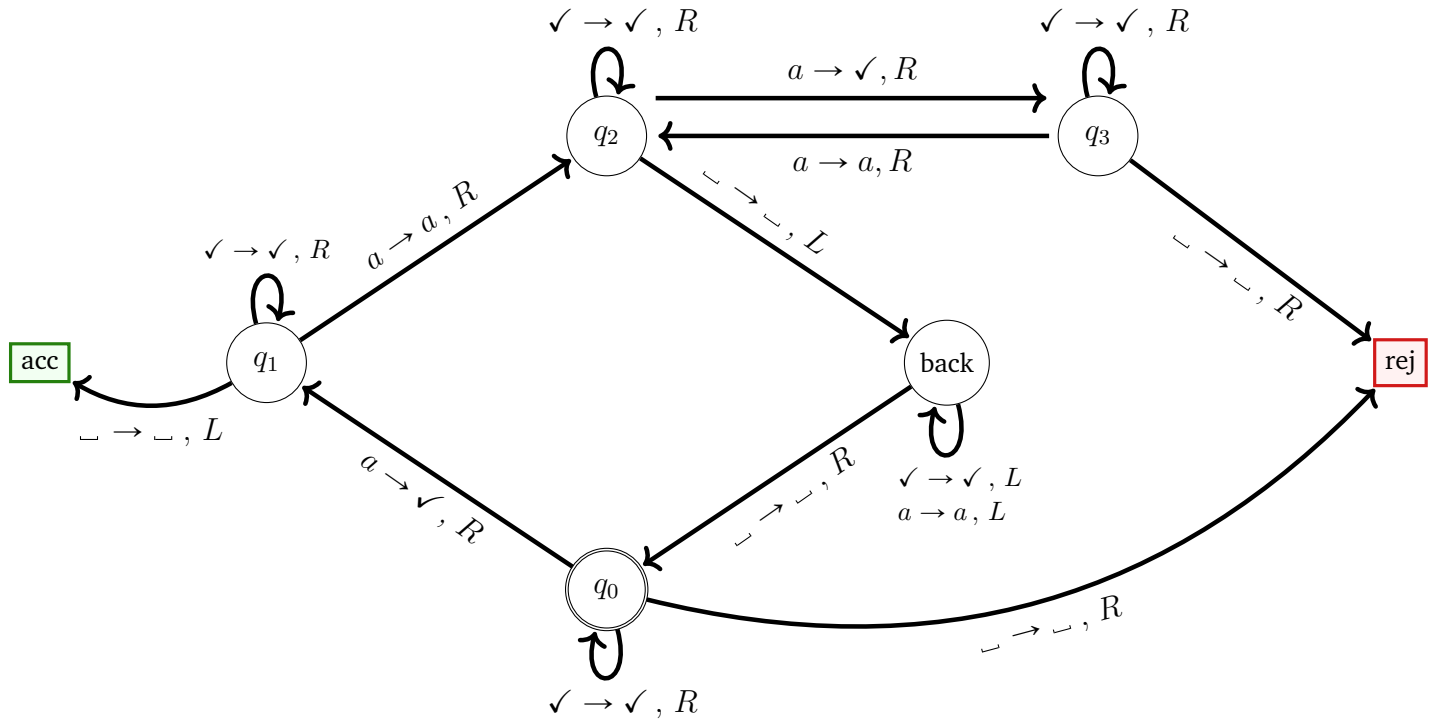
$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים,  $c_1$  גורר את  $c_2$ ) אם כשנמצאים ב- $c_1$  עוברים ל- $c_2$  בצעד בודד.

## דוגמה 1.10 (המשך של דוגמה 1.5)

עבור המכונת טיורינג שמתוארת בתרשים למטה מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$



## הגדרה 1.5 גרירה בכללי

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$  מכונת טיורינג, ותהי  $c_1$  ו- $c_2$  קונפיגורציות של  $M$ .  
נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

אם ניתן לעבור מ- $c_1$  ל- $c_2$  ב-0 או יותר צעדים.

## דוגמה 1.11 (המשך של דוגמה 1.5)

עבור המכונת טיורינג שמתוארת בתרשים למטה מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M^* \checkmark \checkmark \checkmark q_4 a$$

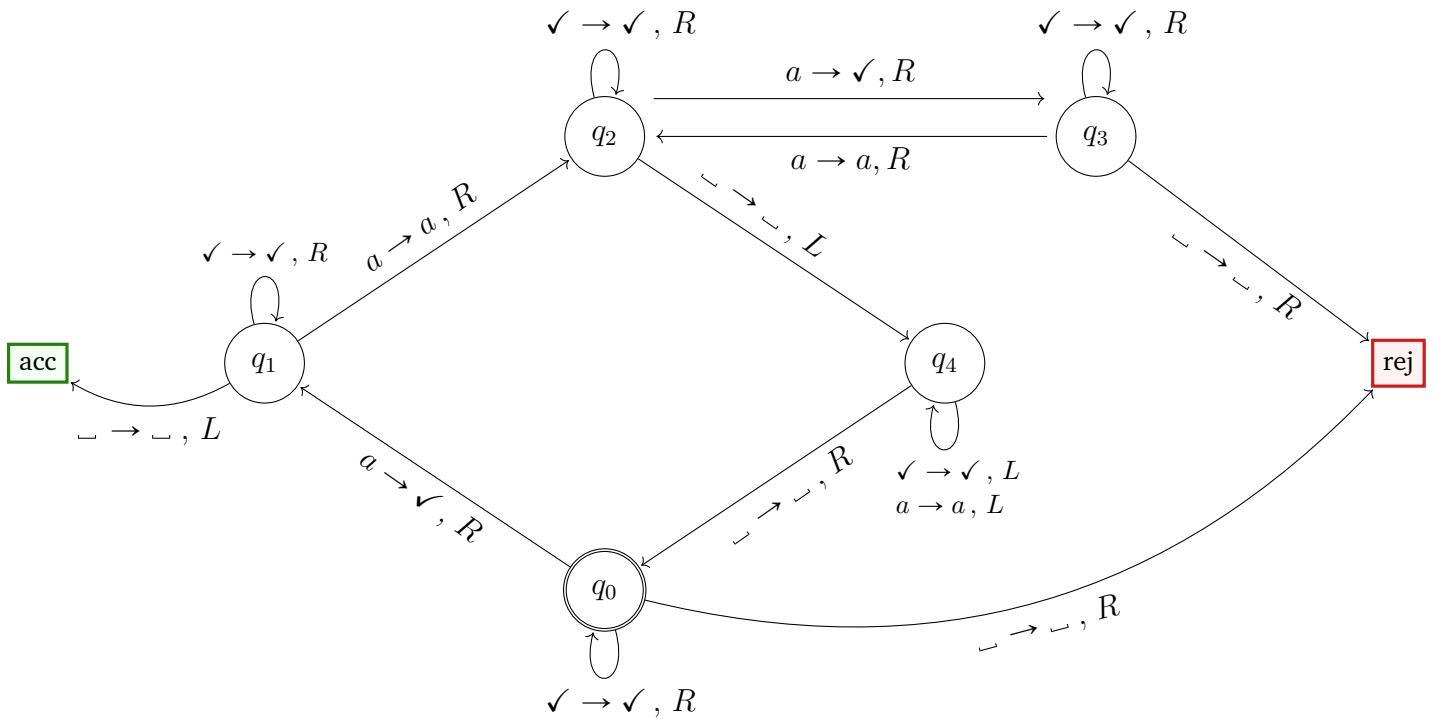
בגלל ש:

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark \checkmark q_1 a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark \checkmark a q_2 \_$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark \checkmark q_4 a .$$



### הגדרה 1.6 קבלה ודחייה של מחרוזת

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$  מכונת טיורינג, ו-  $w \in \Sigma^*$  מחרוזת. אומרים כי:

•  $M$  מקבלת את  $w$  אם

$$q_0 w \vdash_M^* u q_{\text{acc}} \sigma v$$

כאשר  $u, v \in \Gamma^*$ ,  $\sigma \in \Gamma$  כלשהם.

•  $M$  דוחה את  $w$  אם

$$q_0 w \vdash_M^* u q_{\text{rej}} \sigma v$$

כאשר  $u, v \in \Gamma^*$ ,  $\sigma \in \Gamma$  כלשהם.

### הגדרה 1.7 הכרעה של שפה

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, q_{\text{rej}})$  מכונת טיורינג, ו-  $L \subseteq \Sigma^*$  שפה. אומרים כי  $M$  מכריעה את  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$  מתקיים:

•  $M \Leftarrow w \in L$  מקבלת את  $w$ .

•  $M \Leftarrow w \notin L$  דוחה את  $w$ .

### הגדרה 1.8 קבלה של שפה

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$  מכונת טיורינג, ו-  $L \subseteq \Sigma^*$  שפה. אומרים כי  $M$  מקבלת את  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$  מתקיים:

• אם  $w \in L$  אז  $M$  מקבלת את  $w$ .

• אם  $w \notin L$  אז  $M$  לא מקבלת את  $w$ .

במקרה כזה כאשר  $M$  מקבלת את השפה  $L$ , נכתוב ש-

$$L(M) = L.$$

## 1.2 טבלת המעברים

### 1.12 דוגמה

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$L = \{w = \{a, b, c\}^* \mid \#a_w = \#b_w = \#c_w\}$$

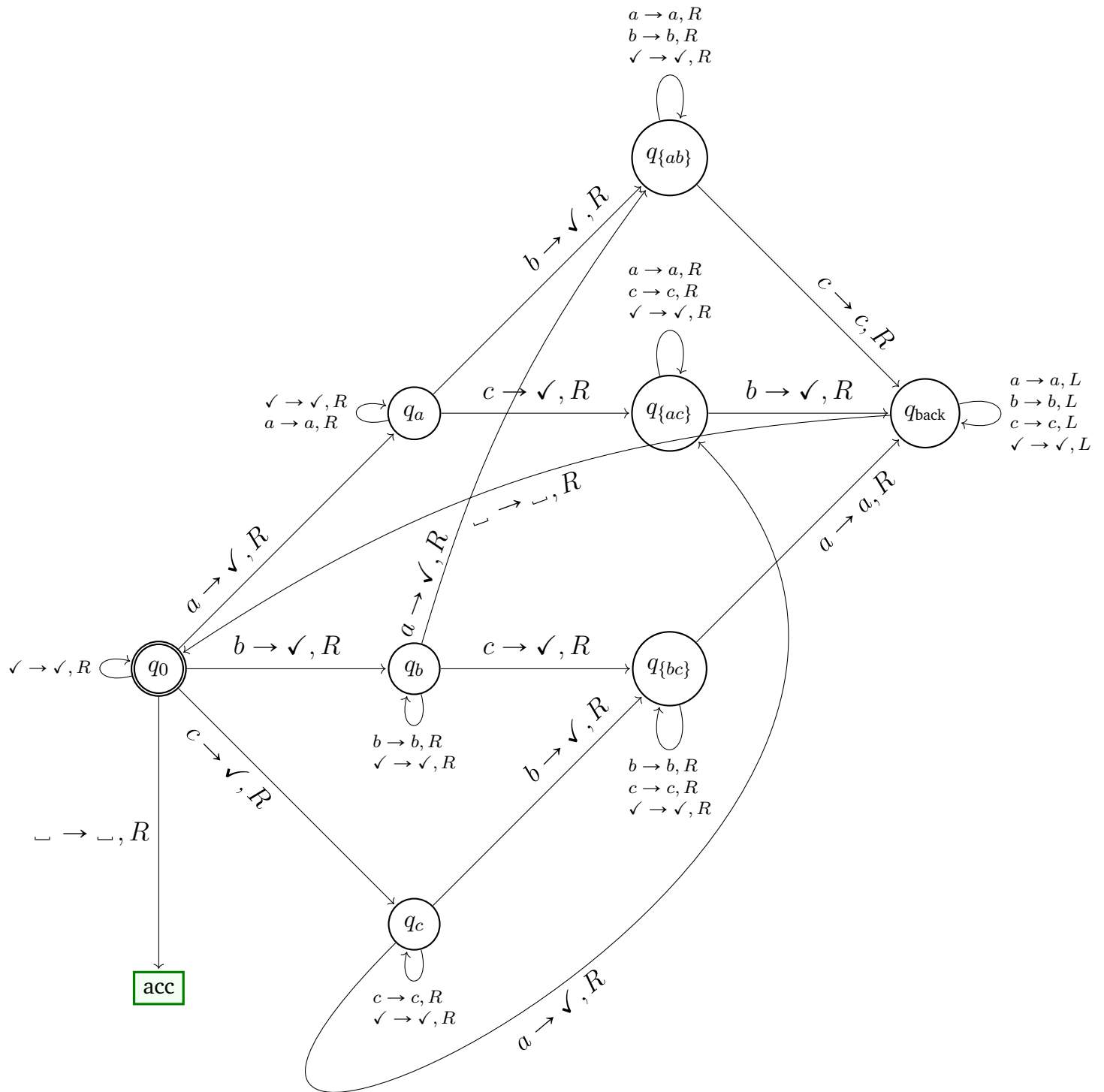
#### פתרון:

נתאר את המכונה על ידי הטבלת המעברים של המכונה. הסימן  $S$  מסמן כל זוג אותיות שונות מהקבוצה  $\{a, b, c\}$  ללא חשיבות לסדר. כלומר:

$$S = \{a, b\}, \quad S = \{b, c\}, \quad S = \{a, c\}.$$

| מצי               | סימון בסרט            | מצב חדש            | כתיבה    | תזוזה | תנאי   |
|-------------------|-----------------------|--------------------|----------|-------|--|
| $q_0$             | $\sigma$              | $q.\sigma$         | ✓        | $R$   | $\sigma \in \{a, b, c\}$                               |
| $q.\sigma$        | $\sigma$              | $q.\sigma$         | ↻        | $R$   | $\sigma \in \{a, b, c\}$                               |
| $q.\sigma$        | $\tau$                | $q.\{\sigma\tau\}$ | ✓        | $R$   | $\sigma, \tau \in \{a, b, c\} \wedge \sigma \neq \tau$ |
| $q.S$             | $\sigma$              | $q.S$              | $\sigma$ | $R$   | $\sigma \in S$   |
| $qS$              | $\sigma$              | $q_{\text{back}}$  | ✓        | $L$   | $\sigma \notin S$                                      |
| $q_{\text{back}}$ | $a, b, c, \checkmark$ | $q_{\text{back}}$  | ↻        | $L$   |  |
| $q_0$             | ␣                     | $q_{\text{acc}}$   | ↻        | $R$   |  |
| $q_{\text{back}}$ | $a, b, c, \checkmark$ | $q_{\text{back}}$  | ↻        | $L$   |  |
| $q_{\text{back}}$ | ␣                     | $q_0$              | ↻        | $R$   |  |

כעת נתאר את המכונה על ידי תרשים המצבים של המכונה:



## דוגמה 1.13

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$\{x_1 \dots x_k \# y_1 \dots y_k \# z_1 \dots z_k \mid x_i, y_i, z_i \in \{0, 1, 2\}, \forall i, x_i \geq z_i \geq y_i\}$$

פתרון:

| מצב               | סימון בסרט            | מצב חדש           | כתיבה        | תזוזה | תנאי                             |
|-------------------|-----------------------|-------------------|--------------|-------|----------------------------------|
| $X **$            | $\sigma$              | $X\sigma*$        | $\checkmark$ | $R$   |                                  |
| $X **$            | $\checkmark$          | $X **$            | $\checkmark$ | $R$   |                                  |
| $X\sigma*$        | $0, 1, 2, \checkmark$ | $X\sigma*$        | $\Omega$     | $R$   |                                  |
| $X\tau*$          | $\#$                  | $Y\tau*$          | $\Omega$     | $R$   |                                  |
| $Y\tau*$          | $\sigma$              | $Y\tau\sigma$     | $\Omega$     | $R$   |                                  |
| $Y\tau*$          | $\checkmark$          | $Y\tau*$          | $\Omega$     | $R$   |                                  |
| $Y\tau\sigma$     | $0, 1, 2, \checkmark$ | $Y\tau\sigma$     | $\Omega$     | $R$   |                                  |
| $Y\tau_1\tau_2$   | $\#$                  | $Z\tau_1\tau_2$   | $\Omega$     | $R$   |                                  |
| $Z\tau_1\tau_2$   | $\checkmark$          | $Z\tau_1\tau_2$   | $\Omega$     | $R$   |                                  |
| $Z\tau_1\tau_2$   | $\sigma$              | $q_{\text{back}}$ | $\checkmark$ | $L$   |                                  |
| $Z **$            | $\sqsubset$           | $q_{\text{acc}}$  | $\Omega$     | $R$   | $\tau_1 \geq \sigma \geq \tau_2$ |
| $q_{\text{back}}$ | $0, 1, 2, \checkmark$ | $q_{\text{back}}$ | $\Omega$     | $L$   |                                  |
| $q_{\text{back}}$ | $\sqsubset$           | $X **$            | $\Omega$     | $R$   |                                  |





## 1.3 חישוב פונקציות

### הגדרה 1.9 מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה $f$

תהי  $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$  ותהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$  מכונת טיורינג. אומרים כי  $M$  מחשבת את  $f$  אם:

- $\Sigma_2 \subset \Gamma$  ו-  $\Sigma = \Sigma_1$ .
- לכל  $w \in \Sigma_1^*$  מתקיים  $q_0 w \vdash q_{acc} f(w)$ .

### דוגמה 1.14 חיבור אונרי

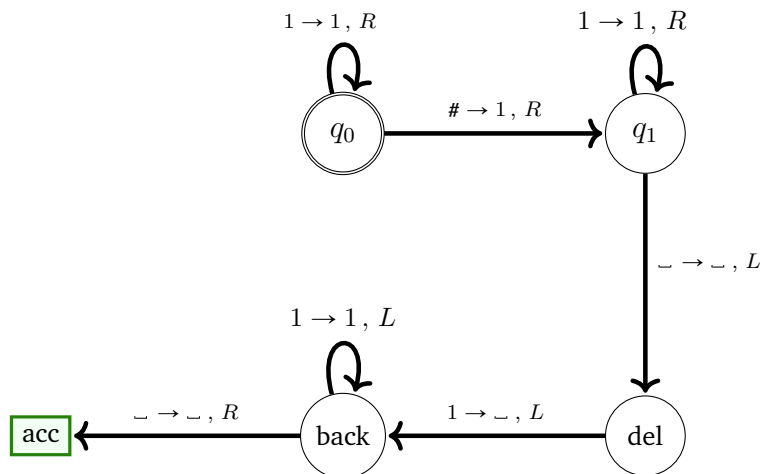
בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i \# 1^j$$

ומחזירה את פלט

$$1^{i+j}.$$

פתרון:



### דוגמה 1.15 כפל אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i \# 1^j$$

ומחזירה את פלט

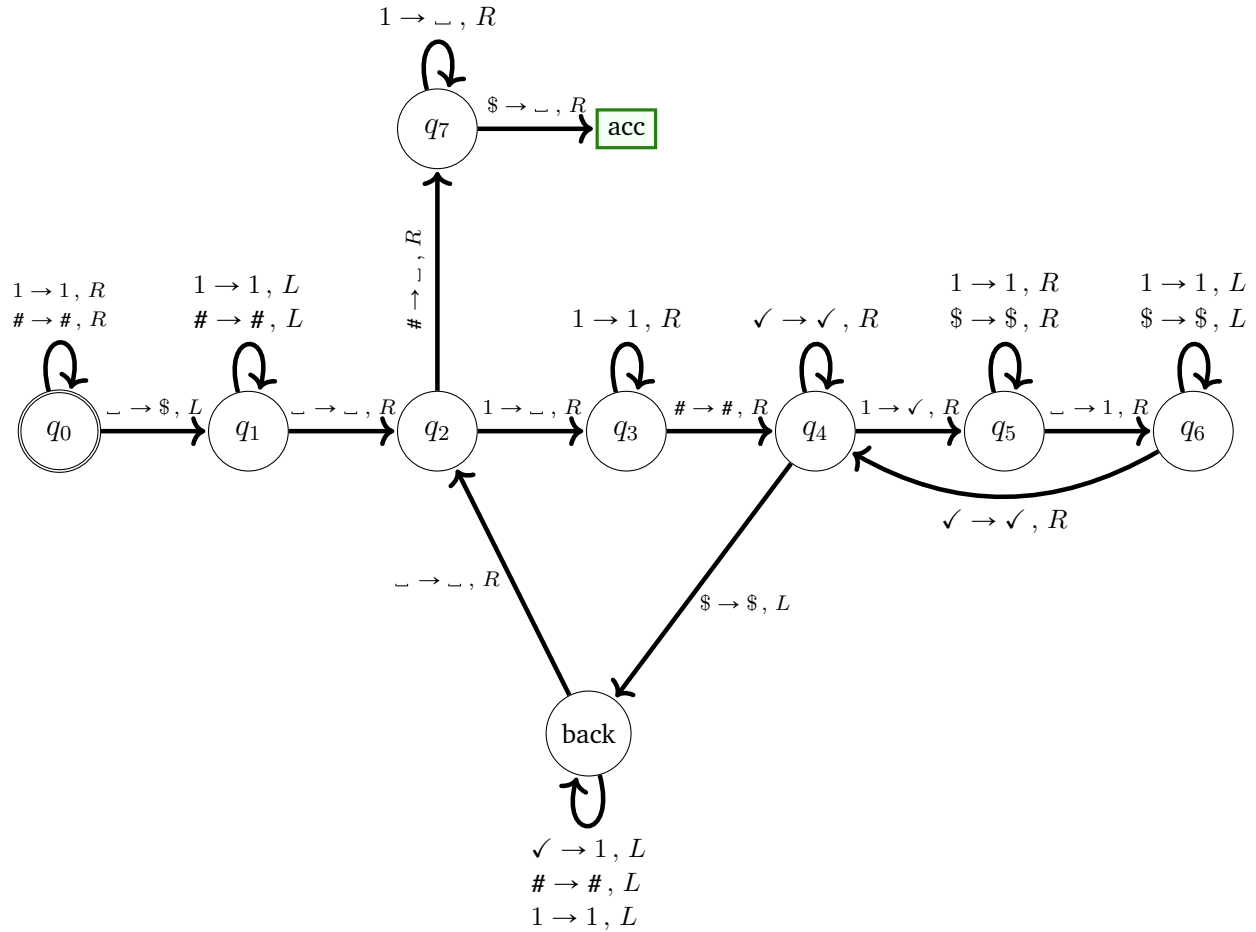
$$1^{i \cdot j}.$$

פתרון:

- לדוגמה, נניח שהקלט הוא 2 כפול 2.

הקלט הוא 11#11.

- נרצה להבדיל בין הקלט לבין הפלט.  
לכן בתחילת הריצה, נתקדם ימינה עד סוף הקלט ונוסיף שם את התו \$.  
לאחר מכן נחזור לתחילת הקלט.
- על כל אות 1 במילה השמאלית נעתיק את המילה הימינית לאחר סימן ה- \$.
- לאחר מכן נשאיר רק את התווים שלאחר סימן ה- \$. כלומר, נמחק את כל מה שאינו פלט.



| $\mu$                              | $q$   | $\sigma$     | $\nu$      |
|------------------------------------|-------|--------------|------------|
| $\_$                               | $q_0$ | 1            | $1\#11\_$  |
| $\_11\#11$                         | $q_1$ | $\_$         | $\_$       |
| $\_11\#11$                         | $q_1$ | \$           | $\_$       |
| $\_$                               | $q_1$ | $\_$         | $11\#11\$$ |
| $\_$                               | $q_2$ | 1            | $1\#11\$$  |
| $\_ \_$                            | $q_3$ | 1            | $\#11\$$   |
| $\_ \_1\#$                         | $q_4$ | 1            | $1\$$      |
| $\_ \_1\#\checkmark$               | $q_5$ | 1            | $\$$       |
| $\_ \_1\#\checkmark1\$$            | $q_5$ | $\_$         | $\_$       |
| $\_ \_1\#\checkmark1\$1$           | $q_6$ | $\_$         | $\_$       |
| $\_ \_1\#$                         | $q_6$ | $\checkmark$ | $1\$1 \_$  |
| $\_ \_1\#\checkmark$               | $q_4$ | 1            | $\$1 \_$   |
| $\_ \_1\#\checkmark\checkmark$     | $q_5$ | \$           | $1 \_$     |
| $\_ \_1\#\checkmark\checkmark\$1$  | $q_5$ | $\_$         | $\_$       |
| $\_ \_1\#\checkmark\checkmark\$11$ | $q_6$ | $\_$         | $\_$       |

|                     |       |     |           |
|---------------------|-------|-----|-----------|
| _  _  1#✓           | $q_6$ | ✓   | \$11_     |
| _  _  1#✓✓          | $q_4$ | \$  | 11_       |
| _  _  1#✓           | back  | ✓   | \$11_     |
| _                   | back  | _   | 1#11\$11_ |
| _  _                | $q_2$ | 1   | #11\$11_  |
| _  _  _             | $q_3$ | #   | 11\$11_   |
| _  _  _  #          | $q_4$ | 1   | 1\$11_    |
| _  _  _  #✓         | $q_5$ | 1   | \$11_     |
| _  _  _  #✓1\$11    | $q_5$ | _   | _         |
| _  _  _  #✓1\$111   | $q_6$ | _   | _         |
| _  _  _  #          | $q_6$ | ✓   | 1\$111_   |
| _  _  _  #✓         | $q_4$ | 1   | \$111_    |
| _  _  _  #✓✓        | $q_5$ | \$  | 111_      |
| _  _  _  #✓✓\$111   | $q_5$ | _   | _         |
| _  _  _  #✓✓\$1111  | $q_6$ | _   | _         |
| _  _  _  #✓         | $q_4$ | ✓   | \$1111    |
| _  _  _  #✓✓        | $q_4$ | \$  | 1111      |
| _  _  _  #✓         | back  | ✓\$ | 1111      |
| _  _  _             | back  | _   | #11\$1111 |
| _  _  _  _          | $q_2$ | #   | 11\$1111  |
| _  _  _  _  _       | $q_7$ | 1   | 1\$1111   |
| _  _  _  _  _  _    | $q_7$ | \$  | 1111      |
| _  _  _  _  _  _  _ | acc   | 1   | 111       |