

שיעור 2

בסיסים אורתוגונליים

2.1 בסיסים אורתוגונליים

הגדרה 2.1 קבוצת ווקטורים אורתוגונלית

נתון המרחב מכפלה פנימית V ונתונה הקבוצה של ווקטורים

$$\{u_1, u_2, \dots, u_k\}.$$

הקבוצה נקראת **אורתוגונלית** אם כל שני ווקטורים שלה אורתוגונליים. כלומר:

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0, \quad i \neq j.$$

הגדרה 2.2 קבוצת ווקטורים ואורתונורמלית

נתון המרחב מכפלה פנימית V ונתונה הקבוצה של ווקטורים

$$\{u_1, u_2, \dots, u_k\}.$$

הקבוצה נקראת **אורתונורמלית** אם:

(א) כל שני ווקטורים שלה אורתוגונליים, כלומר

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0, \quad i \neq j,$$

(ב) כל ווקטור הוא ווקטור יחידה, כלומר

$$\|u_i\| = 1.$$

דוגמה 2.1

נתון הבסיס הסטנדרטי $\{e_1, \dots, e_n\}$ של \mathbb{R}^n עם המכפלה הסקלרית. בדקו אם הקבוצה אורתונורמלית.

פתרון:

תזכורת: נתונים שני ווקטורים $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ המכפלה הסקלרית מוגדרת

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

נרשום את הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^n :

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(א)

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases},$$

כלומר כל שני ווקטורים אורתוגונליים.

(ב)

$$\|e_i\| = \sqrt{(e_i, e_i)} = 1,$$

כלומר כל ווקטור בקבוצה הוא ווקטור יחידה.

לכן הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^n הוא קבוצה אורתונורמלית.

דוגמה 2.2

נתונה הקבוצה

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 3+i \\ 4+3i \\ 5i \end{pmatrix} \right\}$$

של ווקטורים ב- \mathbb{C}^3 עם המ"פ הסטנדרטית.

(א) הוכיחו שהקבוצה אורתוגונלית.

(ב) מצאו את הקבוצה האורתונורמלית המתאימה לקבוצה זו.

פתרון:

(א)

$$\langle u_1, u_2 \rangle = (1+i)\bar{i} - 1 \cdot 1 + 1(-\bar{i}) = (1+i)(-i) - 1 + 1(i) = -i + 1 - 1 + i = 0 \Rightarrow u_1 \perp u_2.$$

$$\langle u_1, u_3 \rangle = (1+i)(3-i) - 1(4-3i) + 1(-5i) = 4 + 2i - 4 + 3i - 5i = 0 \Rightarrow u_1 \perp u_3.$$

$$\langle u_2, u_3 \rangle = i(3-i) + 1(4-3i) - i(-5i) = 1 + 3i + 4 - 3i - 5 = 0 \Rightarrow u_2 \perp u_3.$$

לכן הקבוצה אורתוגונלית.

(ב)

$$\|u_1\|^2 = \langle u_1, u_1 \rangle = (1+i)(1-i) + (-1)(-1) + 1 \cdot 1 = 4$$

$$\|u_2\|^2 = \langle u_2, u_2 \rangle = i(-i) + 1 \cdot 1 + (-i) \cdot i = 3.$$

$$\|u_3\|^2 = \langle u_3, u_3 \rangle = (3+i)(3-i) + (4+3i)(4-3i) + 5i(-5i) = 10 + 25 + 25 = 60.$$

לכן קבוצת הווקטורים

$$\left\{ \frac{1}{2}u_1, \frac{1}{\sqrt{3}}u_2, \frac{1}{\sqrt{60}}u_3 \right\}$$

היא קבוצה אורתונורמלית.

משפט 2.1 קבוצת אורתוגונלית בת"ל

קבוצת אורתוגונלית במרחב מכפלה פנימית שלא מכילה את וקטור האפס היא בלתי תלויה לינארית.

הוכחה: תהי $\{u_1, \dots, u_k\}$ קבוצה אורתוגונלית. נניח ש

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k = 0.$$

אז לכל $1 \leq j \leq k$

$$\left\langle \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i, u_j \right\rangle = \langle 0, u_j \rangle = 0.$$

מצד שני

$$\left\langle \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i, u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle u_i, u_j \rangle.$$

הקבוצה אורתוגונלית, אז $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ אם $i \neq j$, לכן בהסכום לעיל כל האיברים מתאפסים חוץ מהאיבר של $i = j$. לכן נקבל

$$\left\langle \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i, u_j \right\rangle = \alpha_j \langle u_j, u_j \rangle.$$

לכן

$$\alpha_j \langle u_j, u_j \rangle = 0.$$

$u_j \neq 0$ (נתון), אז $\langle u_j, u_j \rangle \neq 0$.
לכן בהכרח

$$\alpha_j = 0$$

לכל $1 \leq j \leq k$.

■

משפט 2.2 קבוצת אורתוגונלית היא בסיס

נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית כך ש $\dim(V) = n$.

כל קבוצה אורתוגונלית של n ווקטורים ב- V מהווה בסיס של V .

הוכחה: נניח ש V מרחב מכפלה פנימית, $\dim(V) = n$.

נניח ש $U = \{u_1, \dots, u_n\} \in V$ קבוצה אורתוגונלית.

כל קבוצה אורתוגונלית היא בת"ל, לכן הקבוצה בת"ל.

בקבוצה יש n ווקטורים, לכן $\dim(U) = \dim(V)$.

לכן הקבוצה מהווה בסיס של V .

■

הגדרה 2.3 בסיס אורתוגונלי ובסיס אורתונורמלי

• בסיס של V המורכב מווקטורים אורתונורמליים נקרא **בסיס אורתונורמלי**.

• בסיס של V המורכב מווקטורים אורתונורמליים נקרא **בסיס אורתונורמלי**.

דוגמה 2.3

עבור כל אחד של הקבוצות ווקטורים הבאות של \mathbb{R}^3 עם מ"פ סטנדרטית. בדקו אם הקבוצה היא בסיס אורתוגונלי, ובסיס אורתונורמלי.

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{א)}$$

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{ב)}$$

פתרון:

$$\langle u_1, u_2 \rangle = 1 \neq 0 \quad \text{א)}$$

לכן הקבוצה לא אורתוגונלית.

ב)

$$\langle u_1, u_2 \rangle = 0$$

$$\langle u_1, u_3 \rangle = 0$$

$$\langle u_2, u_3 \rangle = 0$$

לכן הקבוצה אורתוגונלית, ולכן הקבוצה בת"ל ולכן הקבוצה בסיס של \mathbb{R}^3 .

$$\|u_1\| = \sqrt{1+4+4} = 3, \quad \|u_2\| = \sqrt{2}, \quad \|u_3\| = \sqrt{18}.$$

לכן הקבוצה לא בסיס אורתונורמלי.

נבנה בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{ \frac{1}{3}u_1, \frac{1}{\sqrt{2}}u_2, \frac{1}{\sqrt{18}}u_3 \right\}$$

דוגמה 2.4

במרחב \mathbb{C}^4 עם מ"פ סטנדרטית, נתונה קבוצת ווקטורים הבאה:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2}i \\ \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i \end{pmatrix} \right\}$$

בדקו אם הקבוצה אורתוגונלית ואורתונורמלית.

פתרון:

$$\langle u_1, u_2 \rangle = 0 + \frac{1}{2} \left(\frac{-i}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2}i \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right) \cdot 0 = \frac{-i}{\sqrt{2}} \neq 0$$

לכן הקבוצה אינה אורתוגונלית.

דוגמה 2.5

קבעו אם הקבוצות הבאות אורתוגונליות ואורתונורמליות במרחב $\mathbb{R}_3[x]$ עם מ"פ האינטגרלית בקטע $[0, 1]$:

(א) $\{1, x, x^2\}$

(ב) $\{1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x + \frac{1}{6}\}$

פתרון:

(א)

$$u_1 = 1, \quad u_2 = x, \quad u_3 = x^2.$$

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \int_0^1 1 \cdot x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \neq 0$$

לכן B_1 קבוצה לא אורתוגונלית.

(ב)

$$u_1 = 1, \quad u_2 = x - \frac{1}{2}, \quad u_3 = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \int_0^1 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right]_0^1 = 0$$

$$\langle u_1, u_3 \rangle = \int_0^1 1 \cdot \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} \right]_0^1 = 0$$

$$\begin{aligned} \langle u_2, u_3 \rangle &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right) dx = \int_0^1 \left(x^3 - x^2 + \frac{x}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{12} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{2x}{3} - \frac{1}{12} \right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = 0 \end{aligned}$$

לכן הקבוצה אורתוגונלית.

$$\|u_1\|^2 = \langle u_1, u_1 \rangle = \int_0^1 1 \cdot 1 \, dx = [x]_0^1 = 1$$

$$\|u_2\|^2 = \langle u_2, u_2 \rangle = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

$$\begin{aligned}
 \|u_3\|^2 &= \langle u_3, u_3 \rangle \\
 &= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right)^2 dx \\
 &= \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{x^2}{3} + x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{36} \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{4x^2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{1}{36} \right) dx \\
 &= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^3}{9} - \frac{x^2}{6} + \frac{x}{36} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} \\
 &= \frac{36}{180} - \frac{90}{180} + \frac{80}{180} - \frac{30}{180} + \frac{5}{180} \\
 &= \frac{1}{180} .
 \end{aligned}$$

לסיכום:

$$\|u_1\| = 1, \quad \|u_2\| = \frac{1}{12}, \quad \|u_3\| = \frac{1}{180} .$$

לכן הקבוצה אינה אורתונורמלית.

נבנה קבוצה אורתונורמלית:

$$\{u_1, \sqrt{12} \cdot u_2, \sqrt{180} \cdot u_3\} .$$

2.6 דוגמה

נתונה הקבוצה

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

במרחב $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ עם מ"פ הסטנדרטית. בדקו אם הקבוצה אורתוגונלית ואורתונורמלית.

פתרון:

$$\langle A_1, A_2 \rangle = \text{tr} (A_2^t \cdot A_1) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0 .$$

$$\langle A_1, A_3 \rangle = \text{tr} (A_3^t \cdot A_1) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = 1 + 3 - 4 = 0 .$$

$$\langle A_2, A_3 \rangle = \text{tr} (A_3^t \cdot A_2) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0 .$$

לכן הקבוצה אורתוגונלית.

$$\|A_1\|^2 = \langle A_1, A_1 \rangle = \text{tr}(A_1^t \cdot A_1) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix} = 20 .$$

$$\|A_2\|^2 = \langle A_2, A_2 \rangle = \text{tr}(A_2^t \cdot A_2) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -0 & 0 \end{pmatrix} = 4 + 4 = 8 .$$

$$\|A_3\|^2 = \langle A_3, A_3 \rangle = \text{tr}(A_3^t \cdot A_3) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 6 .$$

לכן הקבוצה לא אורתונורמלית. אבל הקבוצה הבאה

$$\left\{ \frac{1}{\|A_1\|} A_1, \frac{1}{\|A_2\|} A_2, \frac{1}{\|A_3\|} A_3 \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{20}} A_1, \frac{1}{\sqrt{8}} A_2, \frac{1}{\sqrt{6}} A_3 \right\}$$

כן קבוצה אורתונורמלית.

קודם הגדרנו מושג של היטל אורתוגונלי של וקטור על תת מרחב. ניסחנו משפט שטוען את הדבר הבא:

אם V מרחב מכפלה פנימית, $U \subseteq V$ תת מרחב נוצר סופית, אז לכל וקטור $v \in V$ קיים וקטור יחיד $u_0 \in U$ כך ש-

$$(v - u_0) \perp U .$$

לוקטור u_0 קוראים ההיטל של v על U , אבל לא הוכחנו את קיומו.

נוכיח בהתחלה את קיומו של היטל בתנאי שלתת מרחב U קיים בסיס אורתונורמלי.

הגדרה 2.4 הגדרת ההיטל האורתוגונלי

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית ונניח ש $U \subseteq V$ תת מרחב נוצר סופית של V . נניח ש

$$\{u_1, \dots, u_k\}$$

בסיס אורתוגונלי של U . אז לכל וקטור $v \in V$, ההיטל האורתוגונלי של v מסומן ב- $P_U(v)$ ומוגדר

$$P_U(v) = \sum_{i=1}^k \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i .$$

האופרטור P_U נקרא **אופרטור ההטלה האורתוגונלי על U** .

משפט 2.3 משפט ההיטל האורתוגונלי

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית, ו- $U \subseteq V$ תת מרחב נוצר סופית של V . נסמן את ההיטל האורתוגונלי של כל וקטור $v \in V$ על U ב- $P_U(v)$. הווקטור

$$v - P_U(v)$$

אורתוגונלי לכל וקטור ב- U .

כלומר

$$\langle v - P_U(v), u \rangle = 0$$

לכל $v \in V$ ולכל $u \in U$.
נסמן את האורתוגונליות של הווקטור $v - P_U(v)$ ביחס לתת מרחב U כך:

$$(v - P_U(v)) \perp U.$$

הוכחה: לפי הגדרת היטל אורתוגונלי, צריך להוכיח שווקטור

$$(v - P_U(v)) \perp U.$$

נניח ש $\{u_1, \dots, u_k\}$ בסיס אורתוגונלי של U . לכל $1 \leq j \leq k$,

$$\begin{aligned} \langle v - P_U(v), u_j \rangle &= \left\langle v - \sum_{i=1}^k \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i, u_j \right\rangle \\ &= \langle v, u_j \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^k \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i, u_j \right\rangle \\ &= \langle v, u_j \rangle - \sum_{i=1}^k \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} \cdot \langle u_i, u_j \rangle \\ &= \langle v, u_j \rangle - \sum_{i=1}^k \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} \langle u_i, u_j \rangle \delta_{ij} \\ &= \langle v, u_j \rangle - \frac{\langle v, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} \langle u_j, u_j \rangle \\ &= \langle v, u_j \rangle - \frac{\langle v, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} \cdot \|u_j\|^2 \\ &= \langle v, u_j \rangle - \langle v, u_j \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

הוכחנו ש $(v - P_U(v)) \perp U$.

■

2.2 אופרטור הטלה האורתוגונלי

משפט 2.4 תכונות של אופרטור הטלה האורתוגונלי

נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ו- $U \subset V$ תת-מרחב של V .
נסמן את המשלים האורתוגונלי של U ב- U^\perp .

אופרטור ההטלה האורתוגונלי P_U מקיים את התכונות הבאות:

(1) P_U העתקה ליניארית.

(2) לכל $u \in U$ מתקיים $P_U(u) = u$, ולכל $w \in U^\perp$ מתקיים $P_U(w) = 0$.

$$\text{Im}(P_U) = U \text{ וגם } \text{Ker}(P_U) = U^\perp \quad (3)$$

$$V = U \oplus U^\perp \quad (4)$$

$$P_U \circ P_U = P_U \quad (5)$$

$$(6) \text{ לכל } v \in V \text{ מתקיים כי}$$

$$(v - P_U(v)) \in U^\perp$$

הוכחה:

$$(1) \quad P_U \text{ העתקה ליניארית.}$$

$$\text{לכל } v_1, v_2 \in V$$

$$\begin{aligned} P_U(v_1 + v_2) &= \sum_{i=1}^k \frac{\langle v_1 + v_2, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{(v_1, u_i) + (v_2, u_i)}{\|u_i\|^2} u_i \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{\langle v_1, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i + \sum_{i=1}^k \frac{\langle v_2, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\ &= P_U(v_1) + P_U(v_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_U(\alpha v) &= \sum_{i=1}^k \frac{\langle \alpha v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{\alpha \langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^k \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\ &= \alpha P_U(v) \end{aligned}$$

לכן P_U אופרטור ליניארי.

$$(2) \quad \text{נניח ש- } \{u_1, \dots, u_k\} \text{ בסיס של } U. \text{ אז לכל } u \in U \text{ קיימים סקלרים } \alpha_1, \dots, \alpha_k \text{ כך ש}$$

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k \text{ אז}$$

$$P_U(u) = \sum_{i=1}^k \alpha_i P_U(u_i)$$

$$\text{לכל } 1 \leq j \leq k,$$

$$\begin{aligned} P_U(u_j) &= \sum_{i=1}^k \frac{\langle u_j, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\ &= \frac{\langle u_j, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} u_j \\ &= u_j. \end{aligned}$$

לכן

$$P_U(u) = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i = u .$$

לכל $w \in U^\perp$ מתקיים $\langle w, u_i \rangle = 0$ לכל $1 \leq i \leq k$. לכן

$$P_U(w) = \sum_{i=1}^k \frac{\langle w, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i = 0$$

(3) לכל $a \in U$, לפי תנאי 2 $a = P_U(a) \in \text{Im}(P_U)$, לכן $U \subseteq \text{Im}(P_U)$.

לפי ההגדרה של ההיטל אם $\{u_1, \dots, u_k\}$ בסיס אורתוגונלי של U , אז לכל ווקטור $a \in V$,

$$P_U(a) = \sum_{i=1}^k \frac{\langle a, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i$$

לכן $P_U(a) \in \text{span}\{u_1, \dots, u_k\}$ לכן $P_U(a) \in U$ לכל $a \in V$. לכן $\text{Im}(P_U) \subseteq U$.

לכן $\text{Im}(P_U) = U$.

בסעיף 2 הוכחנו כי $U^\perp \subseteq \ker(P_U)$.

נוכיח כי $\ker(P_U) \subseteq U^\perp$.

נניח ש $v \in \ker(P_U)$. אז

$$P_U(v) = \sum_{i=1}^k \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i = 0$$

מכיוון ש- $\{u_1, \dots, u_k\}$ בת"ל אז בהכרח $\langle v, u_i \rangle = 0$ לכל $1 \leq i \leq k$. לכן $v \in U^\perp$.

(4) $\dim(V) = \dim(\ker P_U) + \dim(\text{Im} P_U)$ לכן

$$\dim(V) = \dim(U^\perp) + \dim(U)$$

מכאן נובע כי

$$U \cap U^\perp = \{0\} .$$

(5) לכל $v \in V$,

$$P_U(v) = u \in U .$$

לכן

$$(P_U \circ P_U)(v) = P_U(P_U(v)) = P_U(u) = u ,$$

כלומר

$$P_U \circ P_U = P_U .$$

(6) הוכחנו במשפט 2.3 כי

$$(v - P_U(v)) \perp U$$

לכן

$$v - P_U(v) \in U^\perp .$$

משפט 2.5 הפיכות האורתוגונלי

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית ו- $U \subset V$ תת מרחב של V . אז

$$V = U \oplus U^\perp \quad (\text{א})$$

$$(U^\perp)^\perp = U \quad (\text{ב})$$

הוכחה:

$$V = U \oplus U^\perp \quad (\text{א}) \quad \text{הוכחנו במשפט 2.4.}$$

(ב)

$$(1) \quad \text{נוכיח כי } U \subseteq (U^\perp)^\perp.$$

$$\text{נקח } u \in U$$

$$\text{צ"ל } u \in (U^\perp)^\perp.$$

$$\text{לכל } v \in U^\perp, \langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow u \in (U^\perp)^\perp.$$

$$(2) \quad \text{צ"ל } (U^\perp)^\perp \subseteq U.$$

$$\text{נקח } v \in (U^\perp)^\perp. \text{ לפי סעיף א' קיימים } u \in U, w \in U^\perp \text{ כך ש}$$

$$v = u + w.$$

$$\text{נשים לב כי } \langle u, w \rangle = 0.$$

$$\langle v, w \rangle = \langle u + w, w \rangle$$

$$= \langle u, w \rangle + \langle w, w \rangle$$

$$= \langle w, w \rangle$$

$$\text{מכיוון ש } v \in (U^\perp)^\perp \text{ ו- } w \in U^\perp, \text{ אז נקבל כי } \langle v, w \rangle = 0. \text{ לכן } \langle w, w \rangle = 0 \text{ ולכן } w = 0.$$

$$\text{לכן } v = u \in U.$$

$$\text{הוכחנו כי } (U^\perp)^\perp = U.$$



2.3 תהליך גרם שמידט

משפט 2.6 תהליך גרם שמידט

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית ו- $U \subset V$ תת-מרחב של V . נניח שהקבוצה

$$\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

היא בסיס של U . נסמן בסיס אורתוגונלי של U כך:

$$\{u_1, u_2, \dots, u_k\}.$$

ניתן למצוא את כל הווקטורים בבסיס האורתוגונלי, באמצעות התהליך גרס שמידט:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 \\ u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} \cdot u_2 \\ &\vdots \\ u_k &= v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} \cdot u_i \\ &\vdots \end{aligned}$$

דוגמה 2.7

$V = \mathbb{R}^4$ עם מכפלה פנימית סטנדרטית.

$$U = \text{span} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מצאו בסיס אורתוגונלי ל- U .

פתרון:

נגדיר $u_1 = v_1$. $V_1 = \text{span}(u_1)$.

$$v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ אפשר לבחור}$$

$$V_2 = \text{span} \{u_1, u_2\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\begin{aligned} v_3 - P_{V_2}(v_3) &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} \cdot u_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

נגדיר $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ בסיס אורתוגונלי:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נבנה בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{12}} u_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{-3}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix} \right\}$$

2.8 דוגמה

במרחב $\mathbb{R}_2[x]$ עם מכפלה פנימית אינטגרלית בקטע $[0, 1]$. נתון הבסיס סטנדרטית

$$\{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2\}.$$

מצאו בסיס אורתוגונלי.

פתרון:

$$u_1 = e_1 = 1, V_1 = \text{span}(1)$$

$$u_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = x - \frac{1}{2}$$

$$\langle e_2, u_1 \rangle = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, \quad \|u_1\|^2 = \int_0^1 1^2 dx = 1.$$

$$V_2 = \text{span} \left(1, x - \frac{1}{2} \right).$$

$$u_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle e_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

$$\langle e_3, u_1 \rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, \quad \langle e_3, u_2 \rangle = \int_0^1 x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

$$\|u_2\|^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

לכן

$$u_3 = x^2 - \frac{1}{3} - u_2 = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

בסיס אורתוגונלי:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = x - \frac{1}{2}, \quad u_3 = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

נמצא בסיס אורתונורמלי:

$$\|u_1\|^2 = 1, \quad \|u_2\|^2 = \frac{1}{12},$$

$$\begin{aligned} \|u_3\|^2 &= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right) dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{4}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{36}x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{180}. \end{aligned}$$

בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{u_1, \sqrt{12}u_2, \sqrt{180}u_3\right\}.$$

2.9 דוגמה

מצאו בסיס אורתונורמלי למרחב $U = \text{span}(1, x, x^2)$ ביחס למכפלה פנימית אינטגרלית בקטע $[-1, 1]$.

פתרון:

נסמן $v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2$.

$$u_1 = 1, \quad u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\langle v_2, u_1 \rangle = \int_{-1}^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 = 0.$$

לכן

$$u_2 = x.$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2.$$

$$\|u_1\|^2 = \int_{-1}^1 1 dx = [x]_{-1}^1 = 2.$$

$$\langle v_3, u_1 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} .$$

$$\langle v_3, u_2 \rangle = 0 .$$

$$\|u_2\|^2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} .$$

לכן

$$u_3 = x^2 - \frac{1}{3} .$$

בסיס אורתוגונלי:

$$u_1 = 1 , \quad u_2 = x , \quad u_3 = x^2 - \frac{1}{3} .$$

נחפש בסיס אורתונורמלי:

$$\|u_1\|^2 = 2 , \quad \|u_2\|^2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} .$$

$$\begin{aligned} \|u_3\|^2 &= \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{8}{45} . \end{aligned}$$

בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} , \quad \sqrt{\frac{3}{2}}x , \quad \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) \right\} .$$

2.10 דוגמה

$$U = \text{span} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix} , v_2 = \begin{pmatrix} 2+2i \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

מצאו בסיס אורתונורמלי למרחב

הסטנדרטית ב- \mathbb{C}^3 .

פתרון:

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix} .$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\langle v_2, u_1 \rangle = (2+2i) \cdot 2 + 0 + 8 = 12 + 4i$$

$$\|u_1\|^2 = 12.$$

$$\|u_2\|^2 = \frac{16}{9} + \frac{4}{9} + 4 + 4 + \frac{4}{9} = \frac{32}{3}.$$

לכן

$$u_2 = \begin{pmatrix} 2+2i \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \left(1 + \frac{1}{3}i\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4i}{3} \\ \frac{2}{3} - 2i \\ 2 - \frac{2}{3}i \end{pmatrix}$$

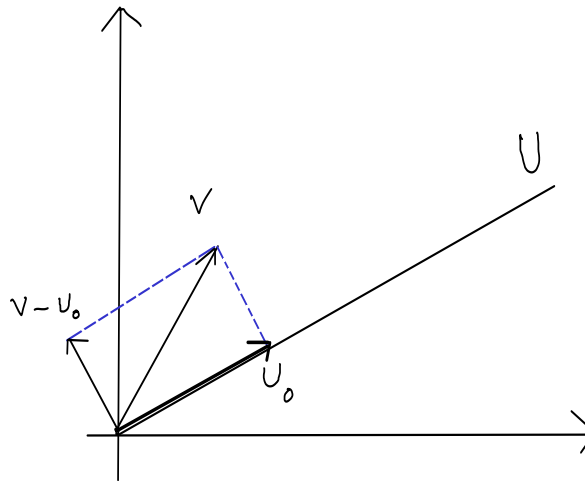
בסיס אורתונורמלי:

$$\frac{1}{\sqrt{12}}u_1, \quad \sqrt{\frac{3}{32}}u_2.$$

2.4 *העשרה: משמעות גיאומטרית של ההיטל

יהי U ישר במישור, ותהי v נקודה כלשהי במישור שאינה על U . בגיאומטריה מוכיחים כי אפשר להוריד אנך מ- v על U , ואורך אנך זה הוא המרחק הקצר ביותר בין הנקודה v לנקודה כלשהי בישר. מרחק זה נקרא גם המרחק בין v ל- U . קיים טענה דומה גם במרחב מכפלה פנימית.

נגדיר כעת אנך מוקטור v לתת-מרחב U . צריך למצוא וקטור $u_0 \in U$ המקיים $(v - u_0) \perp U$.



יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $U \subset V$ תת-מרחב נוצר סופית של V . יהי $v \in V$ שאינו שייך ל- U , כלומר $v \notin U$.

(א) נגדיר את ההיטל האורתוגונלי של וקטור v על תת מרחב U ע"י התנאי הבא:

$$(v - u_0) \perp U.$$

(ב) המרחק בין v ל- U מוגדר להיות $d(v, u_0)$, כלומר המרחק בין v להיטל של v על U .

2.5 * העשרה: משפט קיום בסיס אורתוגונלי

משפט 2.7 קיום בסיס אורתוגונלי

לכל מרחב מכפלה פנימית V ממימד סופי קיים בסיס אורתוגונלי.

הוכחה: נניח

$$\{v_1, \dots, v_n\}$$

בסיס של V . נגדיר סדרת מרחבים ווקטורים

$$V_1 = \text{span}(v_1) \subset V_2 = \text{span}(v_1, v_2) \subset \dots \subset V_n = \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = V$$

לכל $1 \leq i \leq n$

נגדיר

$$u_i = v_i - P_{V_{i-1}}(v_i) .$$

נוכיח באינדוקציה כי u_1, u_2, \dots, u_n בסיס אורתוגונלי.

עבור $i = 1$ הקבוצה $\{u_1\}$ בסיס אורתוגונלי של V_1 .

נניח שעבור i , קבוצת הווקטורים $\{u_1, \dots, u_i\}$ אורתוגונלית.

נוכיח כי $u_{i+1} \perp u_j$ לכל $1 \leq j \leq i$, כאשר $u_{i+1} = v_{i+1} - P_{V_i}(v_{i+1})$.

הוכחנו במשפט 2.3 כי

$$(v_{i+1} - P_{V_i}(v_{i+1})) \perp V_i .$$

