

24/09/24 כ"א באלול תשפ"ד
09 : 00 – 12 : 00

חדו"א 1 למדמ"ח

מועד ב'

מרצה: ד"ר זהבה צבי

תשפ"ד סמסטר ב'

השאלון מכיל 8 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דף נוסחאות מצורף לשאלון (5 עמודים בפורמט A4).

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות בלבד מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** בלבד מתוך **שניים**.

שאלות 1 ו-2 - חובה!

שאלה 1 (21 נקודות)

א (16 נק') חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$ לפי הסעיפים הבאים: , תחום הגדרה , נקודות חיתוך עם הצירים , סימני הפונקציה , זוגיות , אסימפטוטות , תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון , תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה ונקודות פיתול. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ב (5 נק') שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $|f(x)|$.

שאלה 2 (24 נקודות) חשבו את האינטגרלים הבאים:

א (8 נק') $\int \frac{x^4 - x^3 + x^2 + x + 2}{(x^2 - 1)(x - 1)} dx$

ב (8 נק') $\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx$

ג (8 נק') קבעו האם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{dx}{\ln(e^x - 1)}$ מתכנס או מתבדר. נמקו את תשובתכם.

ענו על 3 מתוך 4 השאלות 3 – 6

שאלה 3 (15 נקודות) חשבו את הגבולות הבאים:

א (5 נק') $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin(e^x)}{x^2 + 1}$

ב (5 נק') $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \tan(3x)}{x^3 - x^2}$

ג (5 נק') $\lim_{x \rightarrow e} (\ln x)^{\frac{1}{x-e}}$

שאלה 4 (15 נקודות) אין קשר בין הסעיפים בשאלה זו.

(א) (10 נק') תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[0, 1]$ ומקיימת $f(1) > 1$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

(1) (5 נק') אם $f(0) < 1$ אז קיימת נקודה $c \in [0, 1]$ כך ש- $f(c) = c$.

(2) (5 נק') אם $f(0) < 0$ אז קיימת נקודה $c \in [0, 1]$ כך ש- $f(c) = c$.

(ב) (5 נק') תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) ונניח כי $f'(x) \neq 1$ לכל $x \in (a, b)$. הוכיחו שלמשוואה $f(x) = x$ יש לכל היותר פתרון אחד בקטע $[a, b]$.

שאלה 5 (15 נקודות)

(א) (5 נק') כמה פתרונות יש למשוואה $e^x(2 - x) = e$? הוכיחו את תשובתכם.

(ב) (10 נק') תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בנקודה $x_0 \in \mathbb{R}$ ונסתכל על הפונקציה $g(x) = f(|x|)$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

(1) (5 נק') הפונקציה $g(x)$ גזירה ב- x_0 .

(2) (5 נק') אם $x_0 \neq 0$ אז $g(x)$ גזירה ב- x_0 .

שאלה 6 (15 נקודות)

(א) (8 נק') ישר ששיפועו 2 משיק לגרף הפונקציה $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$. חשבו את השטח הכלוא בין הגרף הפונקציה, המשיק וציר ה- x .

(ב) (7 נק') תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ומקיימת לכל $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) < x$. כמו כן נתון כי $f(0) = 0$. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $f(x) < \frac{x^2}{2}$.

ענו על 1 מתוך 2 השאלות 7 – 8

שאלה 7 (10 נקודות) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה ב- \mathbb{R} . הוכיחו שלמשוואה $f(x) = 0$ יש בדיוק שני פתרונות. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית: למשוואה $f'(x) = 0$ יש בדיוק פתרון אחד.

שאלה 8 (10 נקודות) קבעו האם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1 + e^{-x}}{x} dx$ מתכנס או מתבדר. הוכיחו את תשובתכם.