**1 דוגמא. (מאורע)** נתון המרחב המדגם $\Omega = \{HH, TH, HT, TT\}$ של תוצאות של זריקת מטבע פעמיים ברצף, המאורע של לקבל $H$ לפחות פעם אחת הוא $A = \{HH, TH, HT\}$. דרך פורמלי לבטא זה הוא

$$A \subset \Omega.$$

**פיתרון.** ■

**2 דוגמא. (לוגיקה)** אם הניסוי הוא הטלת קוביה ומאורע $A = \{6\}$ מציין את התוצאה 6 בעוד מאורע $B = \{4, 5, 6\}$ מציין שהתוצאה גדולה או שווה ל 4, אז ברגע ש $A$ מתרחש גם $B$ מתרחש, ו

$$A \subseteq B.$$

נשים לב כי $A = B$ זה מקרי פרטי של הכלה, כי כל איברי $A$ נמצאים ב-$B$ ולהפך:

$$A \subseteq B \quad \text{ו} \quad B \subseteq A \quad \Leftrightarrow A = B.$$

**פיתרון.** ■

**3 דוגמא. (לוגיקה)** אם $R$ הוא המאורע שקלף אדום נלקח מחבילת רגילה של 52 קלפים, ואם $\Omega$ הוא המרחב המדגם המורכב מהחבילה של כל הקלפים. לכן המשלים המאורע $R'$ הוא המאורע כי הקלף הנלקח מהחבילה אינו אדום, אלא קלף שחור.

**4 דוגמא. (לוגיקה)** נתון המרחב המדגם

$$\Omega = \{\text{f}, \text{G}, \text{in}, \text{YouTube}\}$$

והתת קבוצה

$$A = \{\text{G}, \text{in}, \text{YouTube}\}.$$

הקבוצה המשלימה של $A$ היא

$$A' = \{\text{f}\}.$$

**פיתרון.** ■

**5 דוגמא. (חיתוך)** החיתוך בין המאורעות

$$A = \{\text{ן}, \text{ו}, \text{ל}, \text{ק}, \text{ש}, \text{א}\} \quad \text{ו} \quad B = \{\text{ם}, \text{י}, \text{ל}, \text{ש}, \text{ו}, \text{ר}, \text{י}\}$$

הוא

$$A \cap B = \{\text{ו}, \text{ל}, \text{ש}\}.$$

**פיתרון.** ■

**6 דוגמא. (חיתוך)** החיתוך בין המאורעות

$$A = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\} \quad \text{ו} \quad B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

הוא

$$A \cap B = \{2\}.$$

**פיתרון.** ■

**7 דוגמא. (קבוצה הריקה)** אם $O$ הוא הקבוצה המורכב מן המספרים האי זוגיים מ1 עד 10 ו$E$ הקבוצה המורכב מהמספרים הזוגיים מ0 עד 10, כלומר

$$E = \{2,4,6,8,10\} \qquad O = \{1,3,5,7,9\},$$

לכן קל לראות שהמאורעות האלה הם מאורעות זרים זה לזה בגלל

$$E \cap O = \phi.$$

**פיתרון.** ■

**8 דוגמא. (האיחוד)** אם

$$A = \{a,b,c\} \quad \text{ו} \quad \{b,c,d,e\}$$

אזי

$$A \cup B = \{a,b,c,d,e\}.$$

**פיתרון.** ■

**9 דוגמא. (האיחוד)** אם

$$M = \{x \mid 3 < x < 9\} \quad \text{ו} \quad N = \{y \mid 5 < y < 12\}$$

אזי

$$M \cup N = \{z \mid 3 < z < 12\}.$$

**פיתרון.** ■

**10 דוגמא.** אם $A = \{1,2\}$ ו $B = \{1,3,6\}$,

$$A/B = \{2\}$$

**פיתרון.** ■

**11 דוגמא.** בן מטיל קוביה הוגנת.

1. רשמו את מרחב המדגם
2. רשמו את המאורעות הבאים:
   (א) $A$ התוצאות קטנה מ 4 ,
   (ב) $B$ התוצאות גדולה או שווה ל 3,
   (ג) $C$ התוצאות זוגית,
   (ד) $D$ התוצאות אי זוגית,
3. האם $A \in 4$? האם $B \in 3$?
4. רשמו מפורשות את המאורעות הבאים:
   (א) $A \cap B$,
   (ב) $A \cup B$,
   (ג) $C \cap B$,
   (ד) $(A \cap B) \cup C$.

**פיתרון.** 1. $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.
2. (א) $A = \{1,2,3\}$.
   (ב) $B = \{3,4,5,6\}$.

(ד) $D=\{1,3,5\}$.

3. $A \notin 4$ לא.
$3 \in B$ כן.

4. (א) $A\cap B=\{3\}$,
(ב) $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$,
(ג) $C\cap B=\{3,4,6\}$,
(ד) $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cap C)=\{1,2,3\}\cap\{4,6\}=\phi$.

■

**דוגמא.** ניקח את קבוצת הסטודנטים הנמצאים בכיתה ונגדיר את המאורעות הבאים:

- הסטודנטים שאוהבים חתולים $= C$,
- הסטודנטים שאוהבים כלבים $= D$,
- הסטודנטים שאוהבים דגים $= F$.

רשמו את המאורעות הבאים:

1. $A_1$ - הסטודנטים שאוהבים לפחות חיה אחת.
2. $A_2$ - הסטודנטים שלא אוהבים אף חיה.
3. $A_3$ - הסטודנטים שאוהבים רק חתולים.
4. $A_4$ - הסטודנטים שאוהבים את כל החיות.
5. $A_5$ - הסטודנטים שאוהבים בעל חיים אחד בלבד.
6. $A_6$ - הסטודנטים שאוהבים לפחות 2 בעלי חיים.

**פיתרון.** 1. $A_1=C\cup D\cup F$.

2. $A_2=\bar{A}_1=\bar{C}\cap\bar{D}\cap\bar{F}$.
3. $A_3=C\cap\bar{D}\cap\bar{F}=(C/D)/F$.
4. $A_4=C\cap D\cap F$.
5. $A_5=(C\cap\bar{D}\cap\bar{F})\cup(\bar{C}\cap D\cap\bar{F})\cup(\bar{C}\cap\bar{D}\cap F)$.
6. $A_6=(C\cap D)\cup(D\cap F)\cup(C\cap F)$.

■

12 **דוגמא.** מהו הסיכוי שבהטלת כפולה של מטבע הוגן נקבל לפחות $H$ אחת?

**פיתרון.** המרחב המדגם לניסוי הזה הוא

$$S=\{HH,HT,TH,TT\}.$$

נניח שהמטבע הוגן. לכן לכל אחת מהתוצאות האלה יש סיכוי שווה. נסמן את ההסתברות של כל תוצאה ב $\omega$. אזי

$$4\omega=1 \qquad \Rightarrow \omega=\frac{1}{4}.$$

נסמן את המאורע שנקבל לפחות $H$ אחת ב- $A$.

$$A=\{HH,HT,TH\},$$
$$P(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

■

**דוגמא.** קוביה משוקלת באופן כך שיש סיכוי לזרוק מספר זוגי פי שתיים מהסיכוי לזרוק מספר אי זוגי. נסמן

**פיתרון.** המרחב המדגם הוא

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} .$$

נותנים הסתברות של $w$ לכל מספר אי-זוגי והסתברות $2w$ לכל מספר זוגי. הסכום של ההסתברויות שווה ל $1$. לכן

$$3(2w) + 3w = 6w + 3w = 9w = 1. \qquad \Rightarrow \qquad w = \frac{1}{9}.$$

למאורע $E$ יש את האיברים

$$E = \{1, 2, 3\} .$$

אזי

$$P(E) = w + 2w + w = 4w = \frac{4}{9}.$$

■

**דוגמא.** אם $A$ זו המאורע לזרוק מספר זוגי ו $B$ המאורע לזרוק מספר אשר מתחלק ב-3. חפשו $P(A \cap B)$ ו $P(A \cup B)$.

**פיתרון.**

$$A = \{2, 4, 6\} , \qquad B = \{3, 6\} .$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\} .$$

$$A \cap B = \{6\} .$$

לכל מספר זוגי יש הסתברות של $w = \frac{2}{9}$ ולכל מספר אי-זוגי יש הסתברות של $w = \frac{1}{9}$. אזי

$$P(A \cup B) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{9}.$$

■

**13 דוגמא.** רשמו את המרחב מדגם והמאורעות המצויינים בהמשך במונחי תורת הקבוצות:

1. הוצאה של כדור מתוך כד בו יש 2 כדורים לבנים, וכדור שחור. $A$- הוצא כדור שחור.
2. הוצאה של כדור מתוך כד בו יש 2 כדורים לבנים הממוספרים ב $1, 2$ וכדור שחור. $A$- הוצא כדור לבן.
3. הוצאה עם החזרה של 2 כדורים מתוך כד בו יש 2 כדורים לבנים, ו-$1$ שחור. $A$- הכדור השני שהוצא איננו לבן.
4. הוצאה ללא החזרה של כדור מתוך כד בו יש 2 כדורים לבנים, ו-$1$ שחור. $A$- הכדור השני שהוצא הוא לבן.

**פיתרון.** 1. מרחב המדגם בהוצאה של כדור מתוך כד בו יש 2 כדורים לבנים, וכדור שחור.

$$\Omega = \{w, b\} .$$

המאורע נתון על ידי

2. מרחב המדגם בהוצאה של כדור מתוך כד בו יש 2 כדורים לבנים הממוספרים ב $1,2$ וכדור שחור הוא

$$\Omega = \{w_1, w_2, b\}$$
$$A = \{w_1, w_2\}.$$

.3

$$\Omega = \{(w,w),(w,b),(b,w),(b,b)\}$$
$$A = \{(w,b),(b,b)\}.$$

.4

$$\Omega = \{(w,w),(w,b),(b,w)\}$$
$$A = \{(w,w),(b,w)\}.$$

■

**14 דוגמא. ()** נתון מרחב המדגם

$$\Omega = \{1,2,\ldots,10\}$$

ונתון ההסתברויות

$$P(i) = ci^2 \qquad \forall\ i \in S,$$

כאשר $c$ הוא קבוע כלשהו. מצאו את ערכו של $c$ וחשבו את ההסתברויות של תוצאות הניסוי תתחלק ב- $3$.

**פיתרון.** נוכל למצוא את הקבוע $c$ מתנאי הנרמול. בפרט אנחנו יודעים שסכום ההסתברויות חייב להיות $1$. לכן

$$1 = \sum_{i=1}^{10} P(i) = \sum_{i=1}^{10} c\ i^2 = \frac{c(10)(21)(11)}{6} = 385c.$$

מכאן נובע ש

$$c = \frac{1}{385}.$$

המאורע המבקש בשאלה (תוצאות הניסוי מתחלקת ב- $3$ ) הוא

$$A = \{3,6,9\}$$

מחיבוריות נקבל

$$P(A) = P(3) + P(6) + P(9) = \frac{3^2+6^2+9^2}{385} = \frac{126}{385}.$$

■

**15 דוגמא.** בניסוי הטלת קוביה הוגנת נגדיר המאורעות

$$A = \{1,2,3\} \qquad B = \{2,3,4\}.$$

אזי

$$P(A \cap B) = P(\{2,3\}) = \frac{2}{6},$$

$$P(A) = \frac{3}{6}, \qquad P(B) = \frac{3}{6}.$$

$$P(A \cup B) = P(\{1,2,3,4\}) = \frac{4}{6},$$

**פיתרון.** ■

**16 דוגמא.** בניסוי הטלת שתי קוביות הוגנות, מהי ההסתברות לזרוק 7 או 11?

**פיתרון.** נסמן ב- $A$ המאורע לזרוק 7 ונסמן ב- $B$ המאורע לזרוק 11. זריקת 7 מתרחש ב 6 מתוך 36 של הנקודות במרחב מדגם. 11 מתרחש ב 2 מתוך 36 של הנקודות במרחב מדגם. מכיוון שלכל הנקודות יש סכוי שווה, אזי

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \qquad P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

המאורעות $A$ ו-$B$ זרים, (אי-אפשר לזרוק 7 באותו זמן של לזרוק 11). לכן,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{2}{9}.$$

■

**17 דוגמא.** בהצגה לכבוד פורים מככבים אסתר, מרדכי והמן הרשע. לכל אחד מכוכבי ההצגה יש שחקן מחליף למקרה של היעדרות. אסתר נעדרת ב- 40% מההופעות, מרדכי ב 50% מההופעות והמן ב 35% מההופעות. ידוע שכל שניים מהכוכבים נעדרים יחדיו ב 15% מההופעות וכולם ביחד נעדרים ב 5% מההופעות. חשבו את ההסתברות שבהצגה אליה קניתם כרטיסים לא יהיה אף שחקן מחליף.

**פיתרון.** נסמן:

$$\begin{aligned} A &= \text{אסתר נעדרת} \\ B &= \text{מרדכי נעדר} \\ C &= \text{המן נעדר} \end{aligned}$$

נתון כי

$$\begin{aligned} P(A) =& 0.4, \\ P(B) =& 0.5, \\ P(C) =& 0.35, \\ P(A \cap B) =& P(B \cap C) = P(C \cap A) = 0.15, P(A \cap B \cap C) = 0.05. \end{aligned}$$

המאורע שלא יהיה אף שחקן הוא $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$.

**חוקי דה מורגן**

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} =& \bar{A} \cap \bar{B}, \\ \overline{A \cap B} =& \bar{A} \cup \bar{B}, \\ \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} =& \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i, \\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} =& \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i. \end{aligned}$$

לפי חוקי דה מורגן

$$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{A \cup B \cup C}.$$

לכן

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$$

לפי (**??**),

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)=&P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)\\=&0.4+0.5+0.35-0.15-0.15-0.15+0.05\\=&0.85.\end{aligned}$$

לכן

$$P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C})=1-0.85=0.15.$$

■

**18 דוגמא.** בסקר שנערך בעיר מסוימת נמצא ש־ $60\%$ מהתושבים מגדלים כלב. בנוסף, $30\%$ מהתושבים מגדלים חתולים ו־ $15\%$ מגדלים גם כלב וגם חתול. חחפשו את ההסתברות שתושב מקרי

1. מגדל לפחות בעל חיים אחד
2. לא מגדל 2 בעלי חיים
3. מגדל כלב, אך לא חתול
4. מגדל חתול, אך לא כלב.

**פיתרון.**

$$\begin{aligned}C=&\text{המאורע של בעלי כלבים,}\\D=&\text{המאורע של בעלי חתולים.}\end{aligned}$$

.1

$$\begin{aligned}P(C\cup D)=&P(C)+P(D)-P(C\cap D)\\=&0.6+0.3-0.15\\=&0.75.\end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned}P(\overline{C\cap D})=&1-P(C\cap D)\\=&1-0.15\\=&0.85.\end{aligned}$$

.3 יש צורך להשתמש בהחוקים

$$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap\bar{A}),\tag{0.1}$$
$$P(B\cap\bar{A})=P(B)-P(B\cap A).\tag{0.2}$$

אזי

$$\begin{aligned}P(C\cap\bar{D})=&P(C)-P(C\cap D)\\=&0.6-0.15\\=&0.45.\end{aligned}$$

.4

$$\begin{aligned}P(\bar{C}\cap D)=&P(D)-P(C\cap D)\\=&0.3-0.15\\=&0.15.\end{aligned}$$

■

**19 דוגמא. (מרחב מדגם אחיד)** לדוגמא לניסוי הטלת קוביה הוגנת יש מרחב מדגם $\Omega$ כאשר $\Omega=\{1,\ldots,6\}$ ומתקיים כי $P(\omega\in\Omega)=\frac{1}{6}$. על כן $\Omega$ הוא מרחב מדגם אחיד.

**20 דוגמא. (מרחב מדגם לא סימטרי)** בכד נמצא 12 כדורים: שחור אחת, לבן 2, כחול 3, אדום 4 וירוק-5. המרחב מדגם הוא

$$\Omega = \{bk, w, r, bl, g\}.$$

ומתקיים כי

$$P(bk) = \frac{1}{12}, \quad P(w) = \frac{2}{12}, \quad P(r) = \frac{3}{12}, \quad P(bl) = \frac{4}{12}, \quad P(g) = \frac{5}{12}.$$

על כן $\Omega$ הוא מרחב מדגם אי-סימטרי.

**פיתרון.** ■

**21 דוגמא.** לוקחים 3 אותיות שונות מתוך ה 6 אותיות $(a, b, c, d, e, f)$. הצירופים האפשריים מפורטים להלן:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $r1$ | $(a,b,c)$ | $(a,c,b)$ | $(b,a,c)$ | $(b,c,a)$ | $(c,a,b)$ | $(c,b,a)$ |
| $r2$ | $(a,b,d)$ | $(a,d,b)$ | $(b,a,d)$ | $(b,d,a)$ | $(d,a,b)$ | $(d,b,a)$ |
| $r3$ | $(a,b,e)$ | $(a,e,b)$ | $(b,a,e)$ | $(b,e,a)$ | $(e,a,b)$ | $(e,b,a)$ |
| $r4$ | $(a,b,f)$ | $(a,f,b)$ | $(b,a,f)$ | $(b,f,a)$ | $(f,a,b)$ | $(f,b,a)$ |
| $r5$ | $(a,c,d)$ | $(a,d,c)$ | $(c,a,d)$ | $(c,d,a)$ | $(d,a,c)$ | $(d,c,a)$ |
| $r6$ | $(a,c,e)$ | $(a,e,c)$ | $(c,a,e)$ | $(c,e,a)$ | $(e,a,c)$ | $(e,c,a)$ |
| $r7$ | $(a,c,f)$ | $(a,f,c)$ | $(c,a,f)$ | $(c,f,a)$ | $(f,a,c)$ | $(f,c,a)$ |
| $r8$ | $(a,d,e)$ | $(a,e,d)$ | $(d,a,e)$ | $(d,e,a)$ | $(e,a,d)$ | $(e,d,a)$ |
| $r9$ | $(a,d,f)$ | $(a,f,d)$ | $(d,a,f)$ | $(d,f,a)$ | $(f,a,d)$ | $(f,d,a)$ |
| $r10$ | $(a,e,f)$ | $(a,f,e)$ | $(e,a,f)$ | $(e,f,a)$ | $(f,a,e)$ | $(f,e,a)$ |
| $r11$ | $(b,c,d)$ | $(b,d,c)$ | $(c,b,d)$ | $(c,d,b)$ | $(d,b,c)$ | $(d,c,b)$ |
| $r12$ | $(b,c,e)$ | $(b,e,c)$ | $(c,b,e)$ | $(c,e,b)$ | $(e,b,c)$ | $(e,c,b)$ |
| $r13$ | $(b,c,f)$ | $(b,f,c)$ | $(c,b,f)$ | $(c,f,b)$ | $(f,b,c)$ | $(f,c,b)$ |
| $r14$ | $(b,d,e)$ | $(b,e,d)$ | $(d,b,e)$ | $(d,e,b)$ | $(e,b,d)$ | $(e,d,b)$ |
| $r15$ | $(b,d,f)$ | $(b,f,d)$ | $(d,b,f)$ | $(d,f,b)$ | $(f,b,d)$ | $(f,d,b)$ |
| $r16$ | $(b,e,f)$ | $(b,f,e)$ | $(e,b,f)$ | $(e,f,b)$ | $(f,b,e)$ | $(f,e,b)$ |
| $r17$ | $(c,d,e)$ | $(c,e,d)$ | $(d,c,e)$ | $(d,e,c)$ | $(e,c,d)$ | $(e,d,c)$ |
| $r18$ | $(c,d,f)$ | $(c,f,d)$ | $(d,c,f)$ | $(d,f,c)$ | $(f,c,d)$ | $(f,d,c)$ |
| $r19$ | $(c,e,f)$ | $(c,f,e)$ | $(e,c,f)$ | $(e,f,c)$ | $(f,c,e)$ | $(f,e,c)$ |
| $r20$ | $(d,e,f)$ | $(d,f,e)$ | $(e,d,f)$ | $(e,f,d)$ | $(f,d,e)$ | $(f,e,d)$ |

באף סדרה שום תוו לא יכול להופיע יותר מפעם אחת (זו דווקא התכונה של ללא החזרה). ישנן 120 אפשרויות עבור המדגם סדור:

$$\begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 6 & 5 & 4 \end{array} = 6.5.4 = \frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1} = \frac{6!}{(6-3)!} = {}_6C_3. \tag{\#1}$$

שימו לב שכל סדרה שבאותה שורה כוללת אותם שלושה תווים, אך הם מופיעים בסדרים שונים. בנגוד לרשימה

לעיל, הרשימה להלן מופיע את כל האפשרויות אך ללא חשיבות לסדר:

$$\begin{array}{ll}
r1 & (a,b,c)\\
r2 & (a,b,d)\\
r3 & (a,b,e)\\
r4 & (a,b,f)\\
r5 & (a,c,d)\\
r6 & (a,c,e)\\
r7 & (a,c,f)\\
r8 & (a,d,e)\\
r9 & (a,d,f)\\
r10 & (a,e,f)\\
r11 & (b,c,d)\\
r12 & (b,c,e)\\
r13 & (b,c,f)\\
r14 & (b,d,e)\\
r15 & (b,d,f)\\
r16 & (b,e,f)\\
r17 & (c,d,e)\\
r18 & (c,d,f)\\
r19 & (c,e,f)\\
r20 & (d,e,f)
\end{array}$$

(לדוגמה, בשורה $r2$ כל סדרה כוללת רק התווים $(a,b,d)$ בצירופים שונים.) בכל שורה ישנן $3!$ סדרות בנות אותם תווים:

$$\begin{array}{ccc}
\square & \square & \square\\
\uparrow & \uparrow & \uparrow\\
3 & 2 & 1
\end{array}$$

לכן, כדי לחשב את המספר הדרכים לסדר 6 תווים שונים ב 3 מקומות אך ללא חשיבות לסדר (או במילים אחרות האורך של המדגם לא סדור ללא החזרה) יש צורך לחלק את המספר (#1) בהמספר של צירופים של אותם שלושה תווים בכל שורה (אשר הוא דווקא $3!$). דרך זה מקבלים

$$\frac{6!}{(6-3)!3!} = {}_6P_3\ . \qquad \text{(\#2)}$$

**22 דוגמא.** כיתה עם 30 סטודנטים צריכים לבחור ועד של 3 סטודנטים. יתר התלמידים שלא נבחרו לועד יעסקו בפעילות אקדמית אחרת. כמה אפשרויות שונות יש לבחירת ועד? כמה אפשרויות שונות יש לבחירת התלמידים שיעסקו בפעילות אקדמית אחרת?

**פיתרון.**

$$\binom{30}{3} = \frac{30!}{3!27!}, \qquad \binom{30}{27} = \frac{30!}{27!3!}.$$

■

**23 דוגמא. (מדגם לא סדור עם החזרה)** כמה צירופים יש בסה"כ, של קבוצות של שתי מספרים $(1,1)$ $(4,3)$ , ... ,$(1,2)$ עד $(6,6)$, מניסוי של לזרוק שתי קוביות, כאשר $(1,2)$ ו $(2,1)$ נחשבים כאותה תוצאות, זאת אומרת ללא חשיבות לסדר?

**פיתרון.** האפשרויות הן מפורטות להלן:

$$\begin{array}{llllll}
(1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\
\cancel{(2,1)}, & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\
\cancel{(3,1)}, & \cancel{(3,2)}, & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\
\cancel{(4,1)}, & \cancel{(4,2)}, & \cancel{(4,3)}, & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\
\cancel{(5,1)}, & \cancel{(5,2)}, & \cancel{(5,3)}, & \cancel{(5,4)}, & (5,5), & (5,6), \\
\cancel{(6,1)}, & \cancel{(6,2)}, & \cancel{(6,3)}, & \cancel{(6,4)}, & \cancel{(6,5)}, & (6,6).
\end{array}$$

זו בעיה של מדגם לא סדור עם החזרה ויש צורך להשתמש בהנוסחא (**??**) כאשר $n=6$ ו $r=2$:

$$\frac{6^{[2]}}{2!}=\frac{(6+2-1)!}{(6-1)!2!}=\frac{7!}{5!2!}=21\ .$$

■

**24 דוגמא.** בבית ספר ובו 7 מורים מלמדים המורים 5 ימים בשבוע. כל מורה בחר מקרית יום בו לא יעבוד (א־ו). חשבו את ההסתברויות הבאות:

1. המורה לאנגלית והמורה למתמטיקה לא יהיו חופשיים באותו יום,
2. כל המורים בחרו ביום ו' כיום החופשי שלהם,
3. אף מורה לא בחר את יום ו' כיום החופשי שלו,
4. כל יום בשבוע נבחר כיום חופשי של לפחות אחד המורים.

**פיתרון.** לכל מורה יש 6 אפשרויות לבחירת היום החופשי שלו לכן כמות הצירופים הכוללת היא

$$|\Omega|=6^7.$$

1. למורה לאנגלית יש 6 אפשרויות לבחור את היום החופשי שלו. לאחר מכן, למורה למתמטיקה יש 5 אפשרויות עבור היום החופשי 6. סה"כ $6.5=30$ אפשרויות. לכל המורים האחרים יש $6^5$ אפשרויות. על כן צריך לכפול ב- $6^5$ לתת $30.6^5$. לכן

$$P=\frac{30.6^5}{6^7}=\frac{5}{6}.$$

2. יש רק דרך אחד לייצר המאורע הדרוש, לכן

$$P=\frac{1}{6^7}.$$

3. לכל מורה יש רק 5 אפשרויות. לכן כמות הצירופים הוא $5^7$. לכן

$$P=\frac{5^7}{\ldots}=\left(\frac{5}{\ldots}\right)^7$$

4. במאורע המבוקש חייב להיות 2 מורים שיבחרו את אותו היום ורק הם. יש $\binom{7}{2}$ אדרכים לבחור המורים מתוך 7. לאחר שבחרנו אותם יש 6 פריטים: (5 מורים ועוד זוג מוים) שצריכים לסדר בשורה. (כל מקום הוא היום החופשי) ולכך יש $6!$ אפשרויות. לכן ההסתברות תהיה

$$P = \frac{6!\binom{7}{2}}{6^7}.$$

■

**25 דוגמא.** מרכיבים באקראי מילה בת 4 תווים מן האותיות א' עד ו'. חשבו את ההסתברויות של המאורעות הבאים.

1. מאורע $A$: א' מופיע פעם אחת לפחות,
2. מאורע $B$: א' מופיע בדיוק פעם אחת,
3. מאורע $C$: אין אות שחוזרת בסיסמא.

**פיתרון.** לכל תו יש 6 אפשרויות ולכן

$$|\Omega| = 6^4.$$

1. $\bar{A} =$ אות א' לא נבחרה כלל. זאת אומרת כל אפשרויות מורכבת אך ורק מן התווים ב' - ו'.

$$\Rightarrow \qquad P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{5^4}{6^4}.$$

2. $B_i =$ מאורע ש א' מופיע במקום $i$ ($i = 1, \ldots, 4$).

$$\Rightarrow \qquad B = \bigcup_{i=1}^{4} B_i,$$

והאיחוד הוא על פני מאורעות זרים. על כן

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{4} B_i\right) = \sum_{i=1}^{4} P(B_i).$$
$$P(B_i) = \frac{5^3}{6^4}.$$
$$\therefore \qquad P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(B_i) = \frac{4(5^3)}{6^4}.$$

3. 
- לתו הראשון יש 6 אפשרויות,
- לתו שני יש 5 אפשרויות,
- לתו שלישי יש 4 אפשרויות,
- לתו רביעי יש 3 אפשרויות,

$$\therefore \qquad P = \frac{6.5.4.3}{6^4} = \frac{6!}{6^4(6-4)!}\ .$$

■

**26 דוגמא.** במחלקה לכלכלה 25 חברי סגל - 9 דוקטורים ו־16 פרופסורים. בוחרים באקראי ועדת הוראה בת 4

1. בועדה יש 2 דוקטורים ו־2 פרופסורים,
2. בועדה יש לפחות 3 פרופסורים,
3. בועדה יש לפחות דוקטור אחד ולפחות פרופסור אחד.

**פיתרון.**

$$|\Omega| = \binom{25}{4}.$$

1. $$P(A) = \frac{\binom{9}{2}\binom{16}{2}}{\binom{25}{4}}$$
2. $$P(B) = \frac{\binom{9}{1}\binom{16}{3}+\binom{9}{0}\binom{16}{4}}{\binom{25}{4}}$$
3. $$\begin{aligned} P(C) =& 1-P(\bar{C}) \\ P(\bar{C}) =& \frac{\binom{9}{4}}{\binom{25}{4}}+\frac{\binom{16}{4}}{\binom{25}{4}}. \end{aligned}$$

■

**27 דוגמא.** בכיתה $n$ סטודנטים. מהי ההסתברות שיש לפחות זוג אחד של סטודנטים עם אותו תאריך יום הולדת (מבלי להתייחס לשנת הלידה)?

**פיתרון.** גודל מרחב המדגם שלנו הוא $365^n$ משום שלכל סטודנט יש 365 ימים אפשריים ליום הולדת וישנם $n$ סטודנטים. נסמן ב $A$ המאורע בו לפחות זוג אחד של סטודנטים נולד באותו היום, ונבחן את המאורע המשלים $\bar{A}$. המאורע בו לכל הסטודנטים ימי הולדת שונים. זו דוגמה של מדגם **סדור** וללא החזרה, ולפי זה עם העזרה של **??** נמצא ש מספר האפשרויות במאורע $\bar{A}$ הוא

$$|\bar{A}| = {}_{365}C_n = \frac{365!}{(365-n)!}.$$

מכאן נקבל ש

$$P(A) = 1-P(A) = 1-\frac{|\bar{A}|}{|\Omega|} = 1-\frac{365!}{(365-n)!365^n}.$$

התוצאה המפתיעה היא שעבור $n=23$ ההסתברות גדולה מ 50% (0.507 בקירוב) ועבור $n=60$ סטודנטים ההסתברות היא 0.994.

■

**28 דוגמא.** כמה אפשרויות יש לסדר 6 מטבעות של ₪1 , 7 מטבעות של ₪5, 8 מטבעות של ₪10 ?

**פיתרון.**

$$\binom{21}{6,7,8} = \frac{21!}{6!7!8!} = 349,188,840.$$

■

**29 דוגמא.** 3 כדורים של 3 צבעים שונים נתונים ל3 תלמידים בכיתה בת 25 תלמידים. אם כל תלמיד מקבל כדור אחד, כמה אפשרויות ישנן לחלק את הכדורים?

**פיתרון.** בשל העובדה הכדורים באים ב3 צבעים שונים, אז ניתן להבחים בין הכדורים. על כן הבעיה זו בעיה של מדגם סדור ללא החזרה, ובמיוחד עם חשבות לסדר. אז התשובה היא ניתן על ידי הנוסחא (**??**):

$$ {}_{25}P_3 = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = 25.24.23\ . $$

■

**30 דוגמא.** 3 כדורים של אותו צבע נתונים ל3 תלמידים בכיתה בת 25 תלמידים. אם כל תלמיד מקבל כדור אחד, כמה אפשרויות ישנן לחלק את הכדורים?

**פיתרון.** עכשיו לא ניתן להבחים בין הכדורים. על כן הבעיה זו בעיה של מדגם סדור ללא החזרה, ללא חשבות לסדר. אז התשובה היא ניתן על ידי הנוסחא (**??**):

$$ {}_{25}C_3 = \frac{25!}{(25-3)!3!} = \frac{25!}{22!3!} = \frac{25.24.23}{6} = 25.4.23 = 2300\ . $$

■

**31 דוגמא.** מרכיבים באקראי מילה בת $4$ תווים מן האותיות א' עד ו'. חשבו את ההסתברויות של המאורעות הבאים.

1. מאורע $A$: א' מופיע פעם אחת לפחות,
2. מאורע $B$: א' מופיע בדיוק פעם אחת,
3. מאורע $C$: אין אות שחוזרת בסיסמא.

**פיתרון.** לכל תו יש $6$ אפשרויות ולכן

$$ |\Omega| = 6^4. $$

1. $\bar{A} =$ אות א' לא נבחרה כלל. זאת אומרת כל אפשרויות מורכבת אך ורק מן התווים ב' - ו'.

$$ \Rightarrow \qquad P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{5^4}{6^4}. $$

2. $B_i =$ מאורע ש א' מופיע במקום $i$ $(i = 1, \ldots, 4)$.

$$ \Rightarrow \qquad B = \bigcup_{i=1}^{4} B_i, $$

והאיחוד הוא על פני מאורעות זרים. על כן

$$ P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{4} B_i\right) = \sum_{i=1}^{4} P(B_i). $$

$$ P(B_i) = \frac{5^3}{6^4}. $$

$$ \therefore \qquad P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(B_i) = \frac{4(5^3)}{6^4}. $$

3. • לתו הראשון יש $6$ אפשרויות,

- לתו שלישי יש 4 אפשרויות,
- לתו רביעי יש 3 אפשרויות,

$$\therefore \qquad P = \frac{6.5.4.3}{6^4} = \frac{6!}{6^4(6-4)!} \ .$$

■

**32 דוגמא.** כמה אפשרויות יש לסדר 6 מטבעות של ₪1 , 7 מטבעות של ₪5, 8 מטבעות של ₪10 ?

**פיתרון.** זו היא בעיה של כמה אפשרויות ישנן לסדר 21 דברים בו יש תת קבוצות של 8 דברים של אותו סוג, 7 דברים של אותו הסוג, ... על כן התשובה ניתנת על ידי הנוסחא (**??**):

$$\frac{21!}{6!7!8!} = 349,188,840.$$

■

**33 דוגמא.** כמה דרכים יש לשים 7 אנשים ב 2 חדרים בת 2 מיטות וחדר אחד בת 3 מיטות?

**פיתרון.** הביעה זו היא בעיה למצוא את המספר הדרכים לסדר קבוצה של 7 אנשים להפרדה המורכב מתת קבוצות של 2, 2 ו 3, והתשובה ניתנת על ידי הנוסחא (**??**):

$$\frac{7!}{2!2!3!} = \frac{7.6.5.4}{2.2} = 210 \ .$$

■

**34 דוגמא.** בכיתה $n$ סטודנטים. מהי ההסתברות שיש לפחות זוג אחד של סטודנטים עם אותו תאריך יום הולדת (מבלי להתייחס לשנת הלידה)?

**פיתרון.** גודל מרחב המדגם שלנו הוא $365^n$ משום שלכל סטודנט יש 365 ימים אפשריים ליום הולדת וישנם $n$ סטודנטים. נסמן ב $A$ המאורע בו לפחות זוג אחד של סטודנטים נולד באותו היום, ונבחן את המאורע המשלים $\bar{A}$. המאורע בו לכל הסטודנטים ימי הולדת שונים. זו דוגמה של מדגם **סדור** וללא החזרה, ולפי זה עם העזרה של **??** נמצא ש מספר האפשרויות במאורע $\bar{A}$ הוא

$$|\bar{A}| = {}_{365}C_n = \frac{365!}{(365-n)!} \ .$$

מכאן נקבל ש

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|} = 1 - \frac{365!}{(365-n)!365^n} \ .$$

התוצאה המפתיעה היא שעבור $n = 23$ ההסתברות גדולה מ 50% (0.507 בקירוב) ועבור $n = 60$ סטודנטים ההסתברות היא 0.994.

■

**35**

**36 דוגמא.** בהטלת מטבע ניקח את המאורע $A = \{2\}$ ו $B = \overline{\{1,6\}}$. ברור ש- $P(A) = \frac{1}{6}$. אבל, אם $B$ מתממש ותוצאת ההטלה איננה 1 או 6 הסיכוי לקבל את התוצאה 2 משתנה. אינטואיציה שלנו מרמזת כי הסיכוי המעודכן יהיה רבע, משיקולי סימטריה בין התוצאות הנותרות. נבחן זאת לפי ההגדרה.

$$P(\{2\}|B) = \frac{P(\{2\} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(2)}{\frac{4}{6}} = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{4}{6}\right)} = \frac{1}{4},$$

**37 דוגמא.** בדוגמא הבאה נגדיר את המאורע $A = \{1,2,5,6\}$. ברור ש $P(A) = P(B) = \frac{4}{6}$. לאחר קבלת המידע שהתוצאה איננה 1 או 6 נבחין כי

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(2,5)}{\frac{4}{6}} = \frac{\left(\frac{2}{6}\right)}{\left(\frac{4}{6}\right)} = \frac{1}{2}.$$

זאת אומרת שההסתברות של מאורע $A$ ירדה מ $\frac{2}{3}$ ל $\frac{1}{2}$.

**38 דוגמא.** בפונטי־פאנדי יש

- $45\%$ גברים,
- $30\%$ מעשנים, ו־
- $15\%$ הם גברים מעשנים.

נבחר אדם באקראי. בהנחה ונבחר גבר,

1. מה הסיכוי שהוא מעשן?
2. מה הסיכוי שאינו מעשן?
3. כיצד התשובות תשתננה בהנחה ונבחרה אישה?

**פיתרון.** נסמן ב־ $A$ את המאורע שנבחר גבר וב־ $B$ את המאורע שהאדם שנבחר מעשן. באופן כללי, ההסתברויות של $A$ ו־ $B$ הן $P(A) = 0.45$ ו־ $P(B) = 0.3$.

1. נחשב את $P$ שהאדם הנבחר מעשן, תחת ההנחה שמדובר בגבר.

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0.15}{0.45} = \frac{1}{3}.$$

זאת אומרת, שיעור המעשנים באוכלוסיית הגברים גבוה מן הממוצע באוכלוסייה הכוללת.

2. בכדי לבחון את $P$ שאינו מעשן נוכל להשתמש בכלל המשלים, (הסתברות מותנה מקיימת את כל כללי פונקצית ההסתברות). לכן,

$$P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A) = \frac{2}{3}.$$

כנדרש.

3. נשים לב שמדובר בהתנייה שונה ולכן מדובר במרחב שונה לחלוטין. לא ניתן להמיר את התוצאות הקודמות בגלל ששינוי ההתנייה משנה את כל הנחות הבסיס של החישוב. בהתאם לזאת, נצטרך לבצע את החישובים הקודמים בשנית, וכעת נתנה על $\bar{A}$. נשים לב כי

$$B = (B\cap A)\cup(B\cap\bar{A})$$

והאיחוד הוא איחוד זר (של מאורעות זרים). לכן נקבל

$$P(B|\bar{A}) = \frac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(B\cap A)}{P(\bar{A})} = \frac{0.3-0.15}{0.55} \approx 0.27.$$

המעשנות נמוך יותר משיעור המעשנים באוכלוסיה. כמו כן,

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = 1 - P(B|\cap A)1 - \frac{0.3-0.15}{0.55} \approx 0.73.$$

■

**39 דוגמא.** בכד 10 כדורים הממוספרים מ־1 עד 10 .שולפים 4 ללא החזרה.

1. מה הסיכוי שהכדור עם המספר 7 בחוץ?

3. ידוע שאין מספר קטן מ־4 בחוץ, מה הסיכוי ש־7 בחוץ?
4. מה הסיכוי ש־7 לא בחוץ אם ידוע שאין מספר קטן מ־4 בחוץ?

**פיתרון.** ישנם 10 כדורים ומוציאים 4 ללא החזרה ולכן מרחב המדגם מורכב מכל האפשרויות לבחור 4 כדורים מתוך 10 , סה"כ

$$|\Omega| = \binom{10}{4}.$$

1. נגדיר את המאורע ־ "הכדור עם המספר 7 הינו אחד מהכדורים שהוצאו" בתור $A$. מאחר ומדובר במרחב מדגם שווה הסתברות, אזי

$$P(A) = \frac{1.\binom{9}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{9!6!4!}{10!6!3!} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}\ .$$

2. נסמן ב־ $B$ את המאורע המציין כי הכדור עם המספר 9 הינו אחד מהכדורים שהוצאו.

$$\begin{aligned} P(A|B) =& \frac{P(A\cap B)}{P(B)} & = \frac{\left(\frac{1.\binom{8}{2}}{\binom{10}{4}}\right)}{\left(\frac{1.\binom{9}{3}}{\binom{10}{4}}\right)} \\ =& \frac{\binom{8}{2}}{\binom{9}{3}} & = \frac{8!6!3!}{9!6!2!} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

האם היינו יכולים לדעת זאת מראש? כן! האינטואיציה היא מאוד פשוטה. נתון שהכדור עם המספר 9 יצא כבר ולכן נותרו 3 כדורים 1 שצריך להוציא מתוך 9 נותרים, הסיכוי ש־7 הוא אחד מהם הוא בדיוק $\frac{1}{3}$ ) ע"ב אותו רעיון של סידור בשורה שראינו קודם לכן)

3. נגדיר מאורע $C$ ־ כל המספרים שהוצאו גדולים או שווים ל־4 .

$$\begin{aligned} P(A|C) =& \frac{P(A\cap C)}{P(C)} & = \frac{\frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{4}}}{\frac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}}} \\ =& \frac{\binom{6}{3}}{\binom{7}{4}} & = \frac{6!4!3!}{7!3!3!} = \frac{4}{7}\ . \end{aligned}$$

4. אנו נדרשים לחשב את ההסתברות $P(\bar{A}|C)$. נזכר כי הסתברות מותנה מקיימת את כל הכללים של הסתברות ולכן

$$P(\bar{A}^c|C) = 1 - P(A|C) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}\ .$$

■

**40 דוגמא.** בכד כדור שחור אחד וכדור לבן אחד. שולפים כדור באקראי. לאחר שמוציאים כדור באקראי מחזירים אותו יחד עם עוד כדור אחד נוסף בעל אותו הצבע. מוציאים סה"כ 5 כדורים. מה $P$ שכולם שחורים?

**פיתרון.** נגדיר את המאורעות $B_i$ $i = 1, \ldots, 5$ כמאורעות בהם הכדור ה־ $i$ הוא שחור. נשתמש בחוק הכפל [עיין משוואה (**??**)]:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{5} B_i\right) =& P(B_1)P(B_2|B1)P(B_3|B1\cap B2)\ldots P\left(B_5|\bigcap_{i=1}^{4} B_i\right) \\ =& \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{4}{5}.\frac{5}{6} \\ =& \frac{1}{6}\ . \end{aligned}$$

**41 דוגמא. (פוליגרף )** של שימוש בפוליגרף. פוליגרף, מור לבחון האם אנשים הם דוברי אמת או שקר. הבעיה עם מכונת הפוליגרף היא שאיננה מדוייקת דיה, ולכן יש סיכוי מסויים לשקר ולא להיתפס ולהיפך. אנו יודעים כי אדם המשקר נתפס בשקר בסיכוי 80% ואדם הדובר אמת מזוהה כדובר אמת בסיכוי 90% (שימו לב שכל הנתונים הם למעשה הסתברויות מותנות!). הנחת העובדה כי 70% מן האנשים שמגיעים לבדיקת פוליגרף משקרים. מהי ההסתברות שאדם מקרי בבדיקה יימצא כדובר אמת?

**פיתרון.** נגדיר את המאורעות הבאים.

- $T_1$: אדם דובר אמת, $L_1$: אדם דובר שקר, $T_2$: אדם מוזהה כדובר אמת (על ידי הפוליגרף), $L_2$ אדם מזוהה כדובר שקר.

הנתונים בשאלה הם
$$P(T_2|T_1) = 0.9, \quad P(L_2|L_1) = 0.8, \quad P(L_1) = 0.7\ .$$

אנחנו מעוניינים לחשב את ההסתברות שאדם יימצא דובר אמת, קרי $P(T_2)$. האיור לעיל מציג את הבעיה הנתונה כעץ הסתברויות. נעבור על הענפים המתאימים שנגמרים בתוצאה הרצויה בה האדם נמצא דובר אמת, $T_2$, ונחשב את ההסתברות של כל ענף בפני עצמו. תחילה,

$$P(T_2) = P(T_2 \cap T_1) + P(T_2 \cap L_1)\ .$$

לפי הסתברות מותנה משוואה [עיין נוסחא (**??**)]

$$P(T_1 \cap T_2) = P(T_1)P(T_1|T_1) = 0.3 \times 0.9 = 0.27\ .$$

נבצע חישוב דומה עבור המחובר השני ונקבל

$$P(T_2 \cap L_1) = P(L_1)P(T_2|L_1) = 0.7 \times 0.2 = 0.14\ .$$

כעת נסכום את צמד התוצאות יחד ונקבל

$$P(T_2) = P(T_2|T_1)P(T_1) + P(T_2|L_1)P(L_1) = 0.9 \times 0.3 + 0.2 \times 0.7 = 0.41\ .$$

שימו לב כי הסיכוי שאדם יוכרז כדובר אמת הוא 41% בלבד! ■

**42 דוגמא.** כעת ננסה לחשב את ההסתברות שאדם מקרי דובר אמת, תחת ההנחה שהוא נמצא דובר אמת:

$$P(T_1|T_2).$$

הנתונים בשאלה מוצגים בתצורה של 'אם האדם עשה כך וכך, אז זה הסיכוי שהוא יוכרז כך וכך', אלו יחסי הסיבה־תוצאה בניסוי בפועל. אבל השאלה הנתונה הופכת את הסדר. השאלה מעוניינת לקבוע את הסיכוי שאדם דיבר אמת (סיבה) בהינתן הוא נמצא דובר אמת (תוצאה). במקרים הללו חוק בייס הוא יעיל במיוחד. אכן,

$$P(T_1|T_2) = \frac{P(T_2|T_1)P(T_1)}{P(T_2)} = \frac{0.8.0.3}{0.41} \approx 0.59\ .$$

זאת אומרת, אדם שנמצא דובר אמת אכן אמר אמת בהסתברות 0.59 בלבד !

**43 דוגמא.** הרכב הסטודנטים בתואר ראשון הוא כדלקמן:

- 50% מהסטודנטים הם בשנה א' לתואר,
- 30% מהסטודנטים הם בשנה ב' לתואר,
- 20% מהסטודנטים הם בשנה ג' לתואר.

בנוסף, מצבם המשפחתי של הסטודנטים הנ"ל הוא:

- 20% מהסטודנטים שנמצאים בשנה א' ־ נשואים,

- $40\%$ מהסטודנטים שנמצאים בשנה ג' ־ נשואים.

ענו על השאלות הבאות.

1. בהנחה שפגשנו באקראי את אלון, סטודנט מתואר ראשון, מה הסיכוי שהוא נשוי?
2. מסתבר שאלון אכן נשוי, מה הסיכוי שהוא משנה ג'?
3. פגשנו סטודנט אחר, בן, גם כן מתואר ראשון ומסתבר שהוא איננו נשוי, מה הסיכוי שהוא משנה ג'?

**פיתרון.** בשאלה זו נשתמש בעיקר בנוסחת ההסתברות השלמה וחוק בייז.

1. נסמן ב־ $M$ את המאורע בו הסטודנט נשוי וב־ $I$ ו $II$ ו $III$ את המאורעות בהם הסטודנט הוא בשנה א',ב' ו־ג' לתואר בהתאמה.

$$\begin{aligned}P(M) =&P(M|I)P(I) + P(M|II)P(II) + P(M|III)P(III)\\ =&\frac{2}{10}.\frac{5}{10} + \frac{3}{10}.\frac{3}{10} + \frac{4}{10}.\frac{2}{10} = 0.27\ .\end{aligned}$$

2. נשתמש בחוק בייז מסיבה פשוטה ־ נתוני השאלה מציגים הסתברויות להיות נשוי בהתאם לשנת הלימוד, אבל ההתנייה ההפוכה לא נתונה. לכן,

$$P(III|M) = \frac{P(M|III)P(III)}{P(M)} = \frac{0.4.0.2}{0.27} = \frac{0.08}{0.27} \approx 0.296\ .$$

3. נחשב באופן דומה לחישוב קודם, אלא שהפעם ההתנייה היא על מאורע שונה.

$$P(III|\bar{M}) = \frac{P(\bar{M}|III)P(III)}{P(\bar{M})} = \frac{0.6.0.2}{1-0.27} = \frac{0.12}{0.73} \approx 0.164\ .$$

■

**44 דוגמא.** בספרייה ישנם 10 ספרי הסתברות. 5 ספרים הכוללים פתרונות ו־5 ללא פתרונות. הספרנית איבדה ספר אחד מתוך ה־10 (כלשהו). אלון מגיע לקחת ספר, מקבל ספר מתוך התשעה הנותרים באקראי ומחזיר לאחר יומיים. לאחר שבועיים מגיע בן ולוקח גם כן ספר 1 מתוך ה־9 ומחזיר לאחר יומיים. נגדיר את המאורעות $A$־ הספר של אלון כלל פתרונות, ו־$B$ ־ הספר של בן כלל פתרונות. האם $A$ ו־$B$ תלויים?

**פיתרון.** לכאורה, אין סיבה שתהיה תלות. מצד אחד, אלון לקח ספר והחזיר לאחר יומיים. שבועיים לאחר מכן, אחרי שאלון החזיר כבר את הספר, מגיע בן ולוקח ספר כלשהו, לכן למה שתהיה תלות?! אבל במקרה זה אכן המאורעות תלויים. נראה זאת בעזרת חישוב ישיר. נגדיר $C$ ־ הספר שאבד כלל פתרונות. משיקולי סימטריה, $P(A) = P(B)$ ולכן נחשב רק אחד מהם.

$$\begin{aligned}P(A) =&P(A|C)P(C) + P(A|\bar{C})P(\bar{C})\\ =&\frac{4}{9}.\frac{1}{2} + \frac{5}{9}.\frac{1}{2}\\ =&\frac{1}{2},\end{aligned}$$

על כן נקבל ש־ $P(A).P(B) = \frac{1}{4}$. מצד שני,

$$\begin{aligned}P(A\cap B) =&P(A\cap B|C)P(C) + P(A\cap B|\bar{C})P(\bar{C})\\ =&\left(\frac{4}{9}\right)^2.\frac{1}{2} + \left(\frac{5}{9}\right)^2.\frac{1}{2}\\ \approx&0.253 \neq P(A).P(B),\end{aligned}$$

לכן המאורעות תלויים. ההסבר הוא פשוט יחסית, ניקח את הסיטואציה למצב קיצון ונניח שבין אלון ובן היו מגיעים עוד 1000 איש ומבצעים את הניסוי, והיינו שמים לב שרק $\frac{4}{9}$ מתוכם קיבלו ספר עם פתרונות. במצב

**45 דוגמא. (שליפת קלפים ברצף)** שולפים שלוש קלפים אחד אחרי השני ללא החזרה מחבילת קלפים תקינה. מהי ההסתברות שקלף הראשון הוא red ace, קלף השני הוא 10 או jack , וקלף שלישי הוא יותר גדול מ $3$ ופחות מ $7$.

**פיתרון.** השאלה היא, מהי ההסתברות של המאורע $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ כאשר

- $A_1 =$ המאורע של הקלף הראשון הוא red ace,
- $A_2 =$ המאורע ש קלף השני הוא או 10 או jack,
- $A_3 =$ המאורע ש קלף שלישי הוא יותר גדול מ $3$ ופחות מ $7$.

$$P(A_1) = \frac{2}{52}, \quad P(A_2|A_1) = \frac{8}{51}, \quad P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{12}{50} \ ,$$

לכן לפי נוסחת ההסתברות ההשלמה,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{8}{5525} \ .$$

■

**46 דוגמא. (כדים של כדורים בנות צבעים שונים)** בכד יש 4 כדורים לבנים, ו-3 כדורים שחורים. בכד שני 3 כדורים לבנים ו 5 כדורים שחורים. כדור אחד הוצא מכד ראשון ומונח בכד שני ללא לבדוק את הצבע שלו. מהי ההסתברות אשר כדור אשר הוצא מהכד שני הוא שחור?

**פיתרון.** נגדיר את המאורעות הבאים:

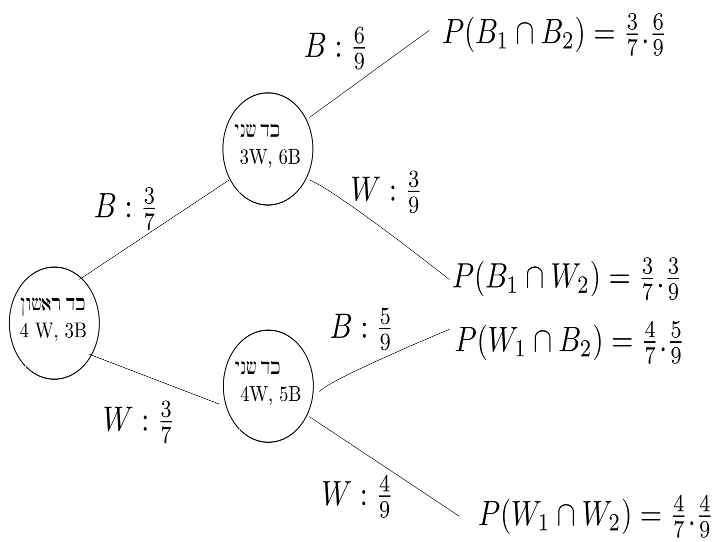
- $B_1 =$ כדור שחור הוצא מכד ראשון
- $B_2 =$ כדור שחור הוצא מכד שני
- $W_1 =$ כדור לבן הוצא מכד ראשון

השאלה היא מהי ההסתברות של האיחוד המאורעות $B_1 \cap B_2$ ו $W_1 \cap B_2$, כלומר

$$(B_1 \cap B_2) \cup (W_1 \cap B_2) \ ,$$

לקחת בחשבון שהם מאורעות זרים:

$$(B_1 \cap B_2) \cap (W_1 \cap B_2) = \phi \ .$$




**איור 1:** עץ הסתברות עבור דוגמה לעיל

$$\begin{aligned}P\left((B_1 \cap B_2) \cup (W_1 \cap B_2)\right) =& P(B_1 \cap B_2) + P(W_1 \cap B_2)\\ =& P(B_1)P(B_2|B_1) + P(W_1)P(B_2|W_1)\\ =& \frac{3}{7}.\frac{6}{9} + \frac{4}{7}.\frac{5}{9}\\ =& \frac{38}{63} \ .\end{aligned}$$

■

**47 דוגמא.** הרכב הסטודנטים בתואר ראשון הוא כדלקמן:

- 50% מהסטודנטים הם בשנה א' לתואר,
- 30% מהסטודנטים הם בשנה ב' לתואר,

בנוסף, מצבם המשפחתי של הסטודנטים הנ"ל הוא:

- $20\%$ מהסטודנטים שנמצאים בשנה א' - נשואים,
- $30\%$ מהסטודנטים שנמצאים בשנה ב' - נשואים,
- $40\%$ מהסטודנטים שנמצאים בשנה ג' - נשואים.

ענו על השאלות הבאות.

1. בהנחה שפגשנו באקראי את אלון, סטודנט מתואר ראשון, מה הסיכוי שהוא נשוי?
2. מסתבר שאלון אכן נשוי, מה הסיכוי שהוא משנה ג'?
3. פגשנו סטודנט אחר, בן, גם כן מתואר ראשון ומסתבר שהוא איננו נשוי, מה הסיכוי שהוא משנה ג'?

**פיתרון.** בשאלה זו נשתמש בעיקר בנוסחת ההסתברות השלמה וחוק בייז.

1. נסמן ב- $M$ את המאורע בו הסטודנט נשוי וב- $I$ ו $II$ ן $III$ את המאורעות בהם הסטודנט הוא בשנה א',ב' ו-ג' לתואר בהתאמה.

$$P(M) =P(M|I)P(I) + P(M|II)P(II) + P(M|III)P(III)$$
$$= \frac{2}{10}.\frac{5}{10} + \frac{3}{10}.\frac{3}{10} + \frac{4}{10}.\frac{2}{10} = 0.27\ .$$

2. נשתמש בחוק בייז מסיבה פשוטה - נתוני השאלה מציגים הסתברויות להיות נשוי בהתאם לשנת הלימוד, אבל ההתנייה ההפוכה לא נתונה. לכן,

$$P(III|M) = \frac{P(M|III)P(III)}{P(M)} = \frac{0.4.0.2}{0.27} = \frac{0.08}{0.27} \approx 0.296\ .$$

3. נחשב באופן דומה לחישוב קודם, אלא שהפעם ההתנייה היא על מאורע שונה.

$$P(III|\bar{M}) = \frac{P(\bar{M}|III)P(III)}{P(\bar{M})} = \frac{0.6.0.2}{1-0.27} = \frac{0.12}{0.73} \approx 0.164\ .$$

■

**48 דוגמא.** בספרייה ישנם 10 ספרי הסתברות. 5 ספרים הכוללים פתרונות ו-5 ללא פתרונות. הספרנית איבדה ספר אחד מתוך ה-10 (כלשהו). אלון מגיע לקחת ספר, מקבל ספר מתוך התשעה הנותרים באקראי ומחזיר לאחר יומיים. לאחר שבועיים מגיע בן ולוקח גם כן ספר 1 מתוך ה-9 ומחזיר לאחר יומיים. נגדיר את המאורעות $A$- הספר של אלון כלל פתרונות, ו-$B$ - הספר של בן כלל פתרונות. האם $A$ ו-$B$ תלויים?

**פיתרון.** לכאורה, אין סיבה שתהיה תלות. מצד אחד, אלון לקח ספר והחזיר לאחר יומיים. שבועיים לאחר מכן, אחרי שאלון החזיר כבר את הספר, מגיע בן ולוקח ספר כלשהו, לכן למה שתהיה תלות?! אבל במקרה זה אכן המאורעות תלויים. נראה זאת בעזרת חישוב ישיר. נגדיר $C$ - הספר שאבד כלל פתרונות. משיקולי סימטריה, $P(A) = P(B)$ ולכן נחשב רק אחד מהם.

$$P(A) =P(A|C)P(C) + P(A|\bar{C})P(\bar{C})$$
$$=\frac{4}{9}.\frac{1}{2} + \frac{5}{9}.\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2},$$

על כן נקבל ש- $P(A).P(B) = \frac{1}{4}$. מצד שני,

$$P(A\cap B) =P(A\cap B|C)P(C) + P(A\cap B|\bar{C})P(\bar{C})$$
$$= \left(\frac{4}{9}\right)^2.\frac{1}{2} + \left(\frac{5}{9}\right)^2.\frac{1}{2}$$

לכן המאורעות תלויים. ההסבר הוא פשוט יחסית, ניקח את הסיטואציה למצב קיצון ונניח שבין אלון ובן היו מגיעים עוד 1000 איש ומבצעים את הניסוי, והיינו שמים לב שרק $\frac{4}{9}$ מתוכם קיבלו ספר עם פתרונות. במצב כזה היינו חושבים שככל הנראה אבד ספר עם פתרונות ■

49 **דוגמא. (הכד של פוליה)** בכד 5 כדורים שחורים ו־3 לבנים. בכל הוצאה של כדור מהכד, מחזירים אותו חזרה יחד עם 4 נוספים מאותו הצבע.

1. מה ההסתברות שהכדור הראשון שנוציא יהיה שחור?
2. מה ההסתברות שהכדור השני שנוציא יהיה שחור?
3. מה ההסתברות שהכדור ה־100 שנוציא יהיה שחור?

**פיתרון.** פתרון: נפתור את צמד הסעיפים הראשונים בעזרת חישובים קומבינטוריים ונוסחת ההסתברות השלמה.

1. הפתרון לסעיף הראשון הוא מיידי והתשובה היא $\frac{5}{8}$. (חלוקה של גודל המאורע במרחב המדגם).
2. נחשב בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה. נסמן ב $B_i, W_i$ $i = 1, 2$ את המאורעות בהם הכדור ה־ $i$ הוא שחור או לבן, בהתאמה.

$$\begin{aligned} P(B_2) =& P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|W_1)P(W_1) \\ =& \frac{9}{12} . \frac{5}{8} + \frac{5}{12} . \frac{3}{8} = \frac{45 + 15}{96} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

באופן מפתיע קיבלנו שההסתברות להוציא שחור בשלב הראשון ובשלב השני שוות.

3. לפני שנענה על הסעיף הנוכחי, ננסה למצוא הוכחה יותר פשוטה שלא תצריך התניות רבות. נתחיל במצב יחסית פשוט: מה היה קורה לו היו לנו רק $2$ כדורים בכד בהתחלה ־ $1$ שחור ו־$1$ לבן? אזי משיקולי סימטריה ההסתברות שהכדור ה־ $100$ היה שחור היא (מאחר והכדור ה־ $100$ הוא שחור או לבן, וישנה סימטריה מלאה בין השחורים ללבנים, אזי ההסתברות שנוציא כל אחד מהם בפעם ה־ $100$ היא שווה). מה לגבי מצב בו ישנם $8$ כדורים בכד ללא צבעים אשר ממוספרים מ־ $1$ עד $8$ (לאחר הוצאה מחזירים את הכדורים עם אותו המספר של הכדור שהוצא)? במצב זה, גם כן יש סימטריה בין שמונת הכדורים ולכן ההסתברות להוציא כדור עם ערך $1$ . כעת נוכל להניח שיש מספרים על הכדורים בבעיה המקורית, הסיכוי שנוציא את כדורים $1$ עד $5$ ) אלו הכדורים הצבועים בשחור) הוא $\frac{5}{8}$ כסכום ההסתברויות להוציא כל מספר מ־ $1$ עד $5$ בנפרד. ולסיכום, ההסתברות שנוציא כדור שחור בפעם ה $100$ היא $\frac{5}{8}$ וזה נכון עבור כל שלב שנבחר

■

50 **דוגמא.** לבן יש מטבע כחול ולאלון מטבע אדום. למטבע הכחול הסתברות $p$ לנחות על 'עץ' $(H)$ ולמטבע האדום הסתברות $q$. .אלון ובן משחקים את המשחק הבא: בכל תור, מטילים שניהם את המטבע שלהם באופן ב"ת באחר או בהטלות הקודמות. אם התקבל פעמיים $H$ , אז הם מחליפים ביניהם את המטבעות. אחרת, כל אחד נשאר עם המטבע שהתחיל איתו את הסיבוב. התהליך חוזר על עצמו שוב ושוב. לכל $n \geq 1$ ,נגדיר את המאורע $A_n$ כמאורע שבתום $n$ סיבובים אלון מחזיק את המטבע האדום. חשבו את $P(A_2)$ ומצאו, עבור אילו ערכי $p$ ו $q$ המאורעות $A_2$ ו $A_3$ ב"ת.

**פיתרון.** ננסה לחשוב מתי $A_2$ אפשרי. זהו המאורע בו אחרי 2 סיבובים אלון מחזיק את המטבע האדום איתו התחיל. דבר זה יכול להתרחש אם ורק אם לא הוחלפו מטבעות כלל, או לחילופין, התבצעו שתי החלפות. ההסתברות להחלפה של מטבע בסיבוב נתון היא $pq$ לכן נקבל ש־

$$P(A_2) = (1 - pq)^2 + (pq)^2 \ .$$

דרך אחת לבחון אי-תלות היא בעזרת ההגדרה

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3) \ .$$

מנגד, ישנה עוד דרך להראות אי־תלות וזאת על ידי השיוויון

מדוע זה אפשרי? ובכן, לפי הגדרה, נובע ש־

$$P(A_3|A_2) = \frac{P(A_3 \cap A_2)}{P(A_2)},$$

ואם בנוסף אנו יודעים ש

$$P(A_3|A_2) = P(A_3)$$

מתרחשים אזי נובע ש

$$\frac{P(A_3 \cap A_2)}{P(A_2)} = p(A_3),$$

כנדרש. נחשב מפורשות את $P(A_3|A_2)$ ואת $P(A_3)$. נסמן $s = pq$ ונקבל

$$P(A_3) = (1-s)^3 + 3(1-s)s^2 \ ,$$

לכן, נבדוק מתי מתקיים

$$1 - s = (1-s)^3 + 3(1-s)s^2 \ .$$

פתרון ראשון הוא $s = 1$. אחרת

$$\begin{aligned} 1 =& (1-s)^2 + 3s^2, \\ 0 =& -2s + 4s^2, \\ 0 =& s(2s-1) \ . \end{aligned}$$

לכן נקבל את הפתרונות $s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = \frac{1}{2}$. נתרגם זאת למונחי $p$ ו $q$ באופן הבא:

$$p = \frac{1}{2q} \Leftrightarrow s = \frac{1}{2} \ ,$$

ואלו המקרים בהם ישנה אי-תלות. התוצאה שקיבלנו היא די הגיונית ואפילו אינטואיטיבית. כאשר $pq = 0$ או $pq = 1$ אז מקבלים שהמאורעות $A_2$ ו $A_3$ מתרחשים בהסתברות 0 או 1 ולכן הם ב"ת בכל מאורע אחר. בנוסף, כאשר $pq = \frac{1}{2}$ אז בכל שלב יש סיכוי שווה להיות בכל מצב ללא תלות בעבר. למעשה, ישנה סימטריה בבעיה מבחינת מיקום המטבעות אצל אלון ובן ולכן מתקיימת אי-תלות. ■

51 **דוגמא.** על השולחן מונחים 2 כדים: בכד הראשון (כד א') שלושה כדורים לבנים וחמישה כדורים אדומים; בכד השני (כד ב') ישנם שישה כדורים לבנים ושלושה כדורים אדומים. אלון מטיל מטבע הוגן. אם תוצאת ההטלה היא "עץ", הוא יוציא מכד א' 2 כדורים עם החזרה. אחרת, הוא יוצא מכד ב' 2 כדורים עם החזרה. נסמן ב־$A$ את המאורע שהכדור הראשון לבן, ב־$B$ את המאורע שהכדור השני לבן וב־$C$ את המאורע בו נבחר כד א'. האם המאורעות $A, B$ תלויים? האם המאורעות $A, B$ תלויים בהינתן $C$?

**פיתרון.** נתחיל בבניית מרחב המדגם. נסמן את הכדורים בכד א' במספרים $1, \ldots, 8$ כאשר שלושת הראשונים יהיו הכדורים הלבנים והיתר אדומים. באופן דומה נסמן את הכדורים בכד ב' במספרים $1, \ldots, 9$ כאשר ששת הראשונים לבנים והיתר אדומים. מרחב המדגם מורכב משלשות כאשר הקואורדינטה הראשונה היא זהות הכד שנבחר והקואורדינטות האחרונות הן ערכי הכדורים שהוצאו מהכד שנבחר. נשים לב שמרחב המדגם מכיל

$$|\Omega| = 8^2 + 9^2 = 145$$

אפשרויות שונות. בנוסף נשים לב שמערכת המדגם אינו מרחב מדגם שווה הסתברות. לדוגמא: ההסתברות להוציא צמד כדורים כלשהם מכד א' היא

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$$

בעוד ההסתברות להוציא צמד כדורים מכד ב' היא

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{}$$

75נחשב את ההסתברות של כל מאורע בנפרד.

$$P(A) = \frac{1}{2}.\frac{3.8}{64} + \frac{1}{2} + \frac{6.9}{81} = \frac{3}{16} + \frac{3}{9} = \frac{75}{144}$$

כאשר ביצענו התנניה על הכד שנבחר, הסתברות $\frac{1}{2}$ לכל כד, ולאחר מכן ספרנו את מספר האפשרויות בכל חלק ממרחב המדגם. באופן זהה לחישוב הקודם, נקבל ש־

$$P(B) = \frac{1}{2}.\frac{3.8}{64} + \frac{1}{2}.\frac{6.9}{81} = \frac{3}{16} + \frac{3}{9} = \frac{75}{144},$$

וכמובן

$$P(C) = \frac{1}{2} \ .$$

נחשב כעת ההסתברות למאורע $P(A \cap B) = A \cap B$

$$\frac{1}{2}.\frac{3/3}{64} + \frac{1}{2}.\frac{6.6}{81} = \frac{9}{128} + \frac{2}{9} = \frac{337}{1152} \ .$$

נשים לב ש

$$P(A)P(B) \neq P(A \cap B)$$

ולכן המאורעות תלויים. נעבור לחישוב השני בשאלה. נחשב את ההסתברות של כל מאורע מותנה בנפרד את ההסתברות של חיתוך המאורעות תחת ההתנייה

$$P(A|C) = \frac{3.8}{64} = \frac{3}{8} = P(B|C)$$

תלויים

$$P(A \cap B|C) = \frac{3.3}{64} = \frac{9}{64} = P(A|C)P(B|C)$$

לכן המאורעות הללו בלתי־תלויים בהינתן ■

52 **דוגמא.** נקבע $1 \leq k \leq n$ מספרים שלמים. בספארי נולדו לקרנף $n$ גורים אחד אחרי השני כאשר כל גור יכל להיוולד לכל מין בהסתברות שווה ובאופן ב"ת במין הגורים האחרים. דוליטול מסתובב בגן החיות ופוגש גור שנבחר באקראי באופן אחיד מבין הגורים. נסמן ב־$A$ את המאורע בו $k$ הגורים הראשונים שנולדו הם ממין זכר. נ סמן ב־$B$ את המאורע שנולדו לפחות $k$ גורים ממין זכר. נסמן ב־$C$ את המאורע בו דוליטול פוגש זכר. עבור $k = 1, n = 2$ חשבו את $P(C|B)$. עבור $n = 12, k = 4$ חשבו חשבו $P(A|C)$.

**פיתרון.** נסמן ב־ $D_i$ את המאורע בו נולדו $i$ גורים ממין זכר. נעזר בפירוק של מרחב המדגם על פי המאורעות

הללו.

$$\begin{aligned}
P(C|B) =& \frac{P(C\cap B)}{P(B)} \\
=& \frac{\sum_{i=0}^{2} P(C\cap B\cap D_i)}{P(B)} \\
=& \frac{P(C\cap B\cap D_1)+P(C\cap B\cap D_2)}{P(B)} \\
=& \frac{P(C\cap D_1)+P(C\cap D_2)}{1-P(B^c)} \\
=& \frac{P(C|D_1)P(D_1)+P(C|D_2)P(D_2)}{1-P(B^c)} \\
=& \frac{\frac{1}{2}.2.\left(\frac{1}{2}\right)^2+1.\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\
=& \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} \\
=& \frac{2}{3}\ .
\end{aligned}$$

נשתמש בחוק בייס לפתרון המשך התרגיל. נסמן ב־$E$ את המאורע בו דוליטול פוגש אחד מארבעת הגורים הראשונים שנולדו.

$$\begin{aligned}
P(A|C) =& \frac{P(C|A)P(A)}{P(C)} \\
=& \frac{\left[P(C|A\cap E)P(E|A)+P(C|A\cap \bar{E})P(\bar{E}|A)\right]\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\frac{1}{2}} \\
=& \frac{\left[1.\frac{4}{12}+\frac{1}{2}.\frac{8}{12}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\frac{1}{2}} \\
=& \frac{1}{12}\ .
\end{aligned}$$

■

**53 דוגמא.** מטילים $2$ קוביות. נסמן ב- $X$ את סכום התוצאות שהתקבלו. כמו כן

$$\begin{aligned}
&\omega=\{(1,1)\}, && X(\omega)=2,\\
&\omega=\{(2,1),(1,2)\}, && X(\omega)=3,\\
&\omega=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}, && X(\omega)=4,\\
&\vdots && \\
&\omega=\{(6,6)\}, && X(\omega)=12.
\end{aligned}$$

זו דוגמה של מ"מ כאשר $X$ הוא המשתנה המקרי.

**54 דוגמא.** מטילים 3 קוביות הוגנות. נגדיר משתנה מקרי $X$ להיות התוצאה המקסימלית מבין ההטלות. כמו כן

$$\begin{aligned}
&\omega = \{(1,1,1)\}, && X(\omega) = 1,\\
&\omega = \{(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}, && X(\omega) = 2,\\
&\vdots\\
&\omega = \{(3,2,1),(2,3,1),(1,2,3),\dots\}, && X(\omega) = 3,\\
&\vdots\\
&\omega = \{(6,6,6)\}, && X(\omega) = 6.
\end{aligned}$$

זו דוגמה של מ"מ כאשר $X$ הוא המשתנה המקרי.

**55 דוגמא.** נטיל קוביה הוגנת ונניח כי $X$ מחזיר את תוצאת ההטלה. אזי

$$\text{Supp}(X) = \{1,2,3,4,5,6\}$$

וההתפלגות של $X$ היא

$$f_X(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{6} & k \in \text{supp}(X) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

במילים, $f_X(k) = \frac{1}{6}$ לכל $k$ בתומך, ו- $0$ אחרת. חשוב לזכור שהתפלגות היא פונקציה ולכן יש צורך לתאר אותה בכל נקודה. משמע, זה לא מספיק לציין את ערכי הפונקציה רק על התומך, אלא בכל נקודה $k \in \mathbb{R}$.

**56 דוגמא.** אלון הוא סוחר ממולח בשוק ההון. הוא משקיע סכום של $\$1000$ במכשיר פיננסי אשר בכל שנה מכפיל את הכסף בסיכוי $\frac{2}{3}$ או מפסיד חצי מההשקעה בסיכוי $\frac{1}{3}$. השנים הן בלתי תלויות. נגדיר את $X$ להיות שווי ההשקעה של אלון לאחר שנתיים. התומך של $X$ כעת הוא

$$\text{supp}(X) = \{250, 1000, 4000\}\ ,$$

על כן, ההתפלגות של $X$ היא

$$f_X(1000) = \frac{4}{9}, \quad f_X(4000) = \frac{4}{9}, \quad f_X(250) = \frac{1}{9}$$

ו - $0$ אחרת.

**57 דוגמא.** מטילים 2 קוביות. נסמן ב- $X$ את סכום התוצאות שהתקבלו. מצאו את ההתפלגות של $X$.

**פיתרון.** נתחיל מהתומך. התוצאות האפשרויות בסכום של $2$ קוביות הן המספרים הטבעיים מ- $2$ עד $12$. בכדי לחשב את ההסתברות לכל ערך נשתמש במרחב מדגם סימטרי: גודל מרחב המדגם הוא $6^2 = 36$, ככמות האפשרויות לבחור תוצאה לקוביה הראשונה מתוך $6$ ותוצאה לקוביה השניה מתוך $6$. נחשב את ההסתברות

של כל תוצאה בנפרד:

$$\begin{aligned}
P(X=2) &= \frac{|\{(1,1)\}|}{6^2} &&= \frac{1}{36}, \\
P(X=3) &= \frac{|\{(2,1),(1,2)\}|}{6^2} &&= \frac{2}{36}, \\
P(X=4) &= \frac{|\{(1,3),(2,2),(3,1)\}|}{6^2} &&= \frac{3}{36}, \\
&\vdots \\
P(X=7) &= \frac{|\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}|}{6^2} &&= \frac{6}{36}, \\
P(X=8) &= \frac{|\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}|}{6^2} &&= \frac{5}{36}, \\
P(X=9) &= \frac{|\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}|}{6^2} &&= \frac{4}{36}, \\
&\vdots \\
P(X=12) &= \frac{|\{(6,6)\}|}{6^2} &&= \frac{1}{36},
\end{aligned}$$

ובאופן דומה ממשיכים לחשב את האפשרויות לכל הערכים האפשריים בתומך. באופן כללי קל לראות שהנוסחא, כאשר $p$ זו הסכום של ה $2$ הקוביות, היא (עיין משוואה (**??**) לעייל)

$$P(X=p) = \frac{1}{36} \times \begin{cases} (p-1) & p<8 \\ (p-1)-2(p-7) & 8 \le p < 14 \end{cases}$$

■

**58 הגדרה. (פונקצית התפלגות מצטברת)** פונקצית התפלגות מצטברת מסומנת ע"י $F_X(x)$ של מ"מ בדיד $X$ בעל פונקצית התפלגות $f_X(k)$ מוגדרת להיות

$$F_X(x) = \sum_{\substack{k \in X \\ k \le x}} f_X(k) \ .$$

במילים אחרות, פונקצית התפלגות מצטברת $F_X(x)$ מוגדרת להיות הפונקציה שתחומה הוא הישר הממשי וטווחה הקטע $[0,1]$ ומקיימת

$$F_X(x) = P(X \le x) \qquad \forall x \in X \ .$$

**59 דוגמא.** אלון הוא סוחר ממולח בשוק ההון. הוא משקיע סכום של $\$1000$ במכשיר פיננסי אשר בכל שנה מכפיל את הכסף בסיכוי $\frac{2}{3}$ או מפסיד חצי מההשקעה בסיכוי $\frac{1}{3}$. השנים הן בלתי תלויות. נגדיר את $X$ להיות שווי ההשקעה של אלון לאחר שנתיים. מצאו את פונקצית ההתפלגות המצטברת של $X$ וציירו אותה.

**פיתרון.** כפי שציינו בדוגמה 88, התומך של $X$ כעת הוא

$$\mathrm{supp}(X) = \{250, 1000, 4000\} \ .$$

על כן, פונקצית ההתפלגות המצטברת של $X$ היא

$$F_X(k) = P(X \le k) = \begin{cases} 0 & k < 250, \\ \frac{1}{9} & 250 \le k < 1000, \\ \frac{5}{9} & 1000 \le k < 4000, \\ 1 & 4000 \le k. \end{cases}$$

■

**60 דוגמא.** התוחלת של הטלת קוביה היא

$$E[X] = \sum_{k=1}^{6} k\frac{1}{6} = \frac{7}{2}\ .$$

**61 דוגמא.** בן הוא סוחר מתוחכם ולכן הוא מציע לאלון להפקיד אצלו 100 שקלים בתחילת השנה. בסיכוי של $\frac{2}{5}$ הסכום יוכפל, ובסיכוי $\frac{2}{5}$ הסכום יצטמצם בחצי בסוף השנה. מה תהיה תוחלת הכסף של אלון לאחר קבלת ההצעה? נסמן ב- $X$ את שווי כסף של אלון בסוף השנה.

$$E[X] = 200.\frac{2}{5} + 50.\frac{3}{5} = 110.$$

זאת אומרת שהצעתו של בן מגלמת תוחלת רווח של 10%!

**62 דוגמא.** בחנות ירקות קטנה ישנם 3 תפוחים ו-4 אגסים. אלון קונה 2 פירות באקראי. בן המוכר מרוויח על כל תפוח 2 ש"ח ועל כל אגס 4 ש"ח. מצאו את תוחלת הרווח של בן.

**פיתרון.** נגדיר מ"מ $Q$ עבור הרווח של בן, ומשתנה מקרי $X$ כמספר התפוחים שאלון קנה. על כן,

$$Q = 2X + 4(2 - X) = 8 - 2X$$

$$P(X=1) = \frac{4}{7}, \qquad P(X=2) = \frac{3}{7}.\frac{2}{6} = \frac{1}{7}, \qquad P(X=0) = \frac{4}{7}.\frac{3}{6} = \frac{2}{7}\ .$$

מכאן נובע ש

$$E[X] = 0.\frac{2}{7} + 1.\frac{4}{7} + 2.\frac{1}{7} = \frac{6}{7}\ .$$

נשתמש בתכונת הליניאריות לחישוב התוחלת של

$$E[Q] = 8 - 2E[X] = 8 - \frac{12}{7} = \frac{44}{7}\ .$$

■

**דוגמא.** בוחרים קוד באורך 10 תווים, כאשר כל תו נבחר באקראי מתוך הספרות 9 – 0 ללא קשר לתווים האחרים שנבחרו. נסמן ב- $X$ מ"מ הסופרים את מספר הרצפים 11 בקוד. חשבו את $E[X]$.

**פיתרון.** נגדיר מ"מ $X_i,\ i = 1, \ldots, 9$ כאשר $X_i$ מקבל את הערך 1 אם ורק אם במקום ה- $i$ מתחיל רצף של 11. לכן

$$X = \sum^{9} X_i$$

$$\begin{aligned}E[X] =&E\left[\sum_{i=1}^{9} X_i\right]\\ =&\sum_{i=1}^{9} E\left[X_i\right]\\ =&\sum_{i=1}^{9}\left[1.P(X_i=1)+0.P(X_i=0)\right]\\ =&\sum_{i=1}^{9} P(X_i=1)\\ =&\sum_{i=1}^{9}\frac{1}{10}.\frac{1}{10}\\ =&\frac{9}{100}\ .\end{aligned}$$

■

**63 דוגמא.** ניקח משתנה מקרי $X$ בעל התפלגות

$$P(X=k)=\begin{cases}\frac{1}{3} & k=-1,\\ \frac{1}{6} & k=0,\\ \frac{1}{2} & k=1.\end{cases}$$

חשבו את $E[X]$ ואת $E[X^4]$.

**פיתרון.** נשתמש בהגדרת התוחלת ונקבל

$$\begin{aligned}E[X] =&(-1).\frac{1}{3}+0.\frac{1}{6}+1.\frac{1}{2} &=\frac{1}{6},\\ E[X^4] =&(-1)^4.\frac{1}{3}+0^4.\frac{1}{6}+1^4.\frac{1}{2} &=\frac{5}{6}.\end{aligned}$$

■

**64 דוגמא.** נניח ש $X$ הוא המספר של רכבים אשר עוברים דרך השתיפת רכב בין השעות $16:00$ ו- $17:00$. ל- $X$ יש את ההתפלגות

| $k$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

הפונקציה $g(X)=2X-1$ מציג את הרווח ב \$ עבור $X$. מצאו את תוחלת הרווח בין השעות $16:00$ ו- $17:00$.

**פיתרון.**

$$\begin{aligned}E[g(X)] =&E[2X-1]\\ =&\sum_{k=4}^{9}(2x-1)f_X(k)\\ =&7.\frac{1}{12}+9.\frac{1}{12}+11.\frac{1}{4}+13.\frac{1}{4}+15.\frac{1}{6}+17.\frac{1}{6}\end{aligned}$$

■

**65 דוגמא.** בר היא בנקאית השקעות מתוחכמת המציעה ללקוחותיה את ההגרלה הבאה: בסיכוי $\frac{2}{5}$ תקבלו רווח של 10. בסיכוי $\frac{1}{5}$ לא תרוויחו ולא תפסידו דבר, ובסיכוי $\frac{3}{5}$ תפסידו 5. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של $X$ המייצג את הרווח מהשקעה אצל בר.

**פיתרון.** תוחלת הרווח היא חיובית שכן

$$\begin{aligned} E[X] =& 10.\frac{2}{5} + 0.\frac{1}{5} - 5.\frac{2}{5} &= 2, \\ (E[X])^2 =& 100.\frac{2}{5} + 0^2.\frac{1}{5} + 25.\frac{2}{5} &= 50, \\ V(X) =& E[X^2] - (E[X])^2 &= 50 - 4 = 46, \\ \Rightarrow \quad \sigma_X =& \sqrt{46}\ . \end{aligned}$$

■

**66 דוגמא.** בר היא בנקאית השקעות מתוחכמת המציעה ללקוחותיה את ההגרלה הבאה: בסיכוי $\frac{2}{5}$ תקבלו רווח של 10. בסיכוי $\frac{1}{5}$ לא תרוויחו ולא תפסידו דבר, ובסיכוי $\frac{3}{5}$ תפסידו 5. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של $X$ המייצג את הרווח מהשקעה אצל בר.

**פיתרון.** תוחלת הרווח היא חיובית שכן

$$\begin{aligned} \mu_X =& 10.\frac{2}{5} + 0.\frac{1}{5} - 5.\frac{2}{5} &= 2, \\ \mu_{X^2} =& 100.\frac{2}{5} + 0^2.\frac{1}{5} + 25.\frac{2}{5} &= 50, \\ V(X) =& \mu_{X^2} - \mu_X^2 &= 50 - 4 = 46, \\ \Rightarrow \quad \sigma_X =& \sqrt{46}\ . \end{aligned}$$

■

**67 דוגמא.** הסיכוי אשר חולה מחלים ממחלת דם חריג הוא $0.4$. אם 15 אנשים נדבקים עם המחלה זו, מהי ההסתברות אשר

1. לפחות 10 יחלימו
2. בין 3 עד 8 יחלימו
3. בדיוק 5 יחלימו?

**פיתרון.** נגדיר $X$ להיות מספר החולים אשר יחלימו.

.1

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) =& 1 - P(X < 10) \\ =& 1 - \sum_{k=0}^{9} f_{X\sim \text{Bin}(15,0.4)}(k) \\ =& 1 - \sum_{k=0}^{9} \binom{15}{k} 0.4^k (1-0.4)^{15-k} \end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned}P(3 \leq X \leq 8) =&1 - P(X < 10)\\ =&\sum_{k=3}^{8} f_{X\sim\text{Bin}(15,0.4)}(k)\\ =&\sum_{k=0}^{8} f_{X\sim\text{Bin}(15,0.4)}(k) - \sum_{k=0}^{2} f_{X\sim\text{Bin}(15,0.4)}(k)\\ =&\left(\sum_{k=0}^{8} - \sum_{k=0}^{2}\right)\binom{15}{k}0.4^k(1-0.4)^{15-k}\\ =&0.9050 - 0.0271 = 0.8779\ .\end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned}P(X = 5) =&f_{X\sim\text{Bin}(15,0.4)}(k=5)\\ =&\binom{15}{5}0.4^5(1-0.4)^{10}\\ =&0.1859\ .\end{aligned}$$

■

**68 דוגמא.** מחשב משתמש במילים באורך 8 ביטים. כאשר משדרים ביטים בקו התקשורת יש סיכוי של $.1$) לשגיאה בביט בודד שמשודר. בכדי לשפר את איכות הקו, משודר כל ביט 3 פעמים ברצף והפענוח של כל שלשת ביטים מתבצע על ידי החלטת הרוב. למשל: אם רוצים לשדר 0 ,משדרים בקו "000" והמקלט מפענח את התשדורת כ-0 אם השלשה שהגיעה אליו מורכבת מלפחות שני אפסים.

1. חשבו את ההסתברות שמילת מחשב תפוענח נכון.
2. מצאו את התפלגות מספר המילים שפוענחו באופן שגוי בקובץ המכיל $1000$ מילים.

פתרון: נשים לב שכמות הטעויות בשליחה של ביט בודד מתפלגת $X \sim \text{Bin}(3, 0.1)$ ולכן ההסתברות שתהיה שגיאה בפענוח ביט בודד היא

$$P(X \geq 2) = \binom{3}{2}0.1^2 0.9 + \binom{3}{1}0.1^3 = 0.028$$

1. כמות השגיאות במילה באורך 8 ביטים מתפלגת

$$Y \sim \text{Bin}(8, 0.028)$$

ולכן המילה תפוענח נכון בהסתברות

$$P(Y = 0) = \binom{8}{0}p^0(1-p)^8 = (1-0.028)^8 = 0.796\ .$$

2. לאור הסעיף הקודם, ההסתברות לשגיאה בפענוח מילה בודדת היא

$$1 - 0.796 = 0.203\ ,$$

לכן מספר המילים שפוענחו באופן שגוי בקובץ המכיל $1000$ מילים מתפלג $\text{Bin}(1000, 0.203)$.

**69 דוגמא.** בכד 9 כדורים לבנים ו- 1 שחור. מושכים באקראי בזה אחר זה כדור מהכד. נסמן ב- $X$ את מספר המשיכות עד לקבלת שחור וב- $Y$ את מספר המשיכות עד לקבלת 3 שחורים.

מצאו את התפלגות $X$ כאשר המשיכה היא עם החזרה.

**פיתרון.** $X$ מקבל ערכים $\mathbb{N}/\{0\}$. בכל הוצאה ישנה הסתברות של $\frac{9}{10}$ לכדור לבן (כישלון) והסתברות של $p=\frac{1}{10}$ לכדור לבן (הצלחה). כלומר, קיבלנו מ"מ גאומטרי

$$X \sim G\left(\frac{1}{10}\right) \ .$$

■

**70 דוגמא.** חלקיקים נפלטים מחומר רדיואקטיבי בתהליך פואסון עם קצב של $0.5$ חלקיקים לשנייה. חשבו את ההסתברויות הבאות:

1. ייפלט לפחות חלקיק אחד בשנייה נתונה.
2. ייפלטו יותר מ-3 חלקיקים ב-5 שניות.

**פיתרון.** התהליך בשאלה הוא תהליך פואסון בעל פרמטר $\lambda = 0.5$ לכן

1.

$$P(X\geq 1) = 1-P(X=0) = 1-e^{-0.5}\frac{0.5^0}{0!} = 0.393 \ .$$

2. כעת בשאלה הוא תהליך פואסון שונה בעל פרמטר $5\lambda$:

$$\begin{aligned}P(X_5>3) =&1-P(X_5=0)-P(X_5=1)-P(X_5=2)-P(X_5=3)\\ =&1-e^{-5\lambda}\frac{(5\lambda)^0}{0!}-e^{-5\lambda}\frac{(5\lambda)^1}{1!}-e^{-5\lambda}\frac{(5\lambda)^2}{2!}-e^{-5\lambda}\frac{(5\lambda)^3}{3!}\\ =&1-e^{-5(0.5)}\frac{(5(0.5))^0}{0!}-e^{-5(0.5)}\frac{(5(0.5))^1}{1!}-e^{-5(0.5)}\frac{(5(0.5))^2}{2!}-e^{-5(0.5)}\frac{(5(0.5))^3}{3!}\\ =&0.242\end{aligned}$$

מאחר ו- $X_5$ מתפלג $P(0.5.5)$

■

**71 דוגמא. (פונקצית התפלגות)** מטילים 2 קוביות. נסמן ב- $X$ את סכום התוצאות שהתקבלו. מצאו את ההתפלגות של $X$.

**פיתרון.** נתחיל מהתומך. התוצאות האפשרויות בסכום של 2 קוביות הן המספרים הטבעיים מ- 2 עד 12. בכדי לחשב את ההסתברות לכל ערך נשתמש במרחב מדגם סימטרי: גודל מרחב המדגם הוא $6^2=36$, ככמות האפשרויות לבחור תוצאה לקוביה הראשונה מתוך 6 ותוצאה לקוביה השניה מתוך 6. נחשב את ההסתברות של כל תוצאה בנפרד:

$$\begin{aligned}P(X=2) =&\frac{|\{(1,1)\}|}{6^2} &&= \frac{1}{36},\\ P(X=3) =&\frac{|\{(2,1),(1,2)\}|}{6^2} &&= \frac{2}{36},\\ P(X=4) =&\frac{|\{(1,3),(2,2),(3,1)\}|}{6^2} &&= \frac{3}{36},\\ &\vdots\\ P(X=7) =&\frac{|\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}|}{6^2} &&= \frac{6}{36},\\ P(X=8) =&\frac{|\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}|}{6^2} &&= \frac{5}{36},\\ P(X=9) =&\frac{|\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}|}{6^2} &&= \frac{4}{36},\\ &\vdots\end{aligned}$$

ובאופן דומה ממשיכים לחשב את האפשרויות לכל הערכים האפשריים בתומך. באופן כללי קל לראות שהנוסחא, כאשר $p$ זו הסכום של ה $2$ הקוביות, היא (עיין משוואה (**??**) לעייל)

$$P(X=p)=\frac{1}{36}\times\begin{cases}(p-1) & p<8\\ \\ (p-1)-2(p-7) & 8\le p<14\end{cases}$$

■

**72 דוגמא. (פונקצית התפלגות מצטברת)** אלון הוא סוחר ממולח בשוק ההון. הוא משקיע סכום של $\$1000$ במכשיר פיננסי אשר בכל שנה מכפיל את הכסף בסיכוי $\frac{2}{3}$ או מפסיד חצי מההשקעה בסיכוי $\frac{1}{3}$. השנים הן בלתי תלויות. נגדיר את $X$ להיות שווי ההשקעה של אלון לאחר שנתיים. מצאו את פונקצית ההתפלגות המצטברת של $X$ ציירו אותה.

**פיתרון.** כפי שציינו בדוגמה 88, התומך של $X$ כעת הוא

$$\text{supp}(X)=\{250,1000,4000\}\ .$$

על כן, פונקצית ההתפלגות המצטברת של $X$ היא

$$F_X(k)=P(X\le k)=\begin{cases}0 & k<250,\\ \frac{1}{9} & 250\le k<1000,\\ \frac{5}{9} & 1000\le k<4000,\\ 1 & 4000\le k.\end{cases}$$

■

**73 דוגמא. (תוחלת)** בן הוא סוחר מתוחכם ולכן הוא מציע לאלון להפקיד אצלו 100 שקלים בתחילת השנה. בסיכוי של $\frac{2}{5}$ הסכום יוכפל, ובסיכוי $\frac{2}{5}$ הסכום יצטמצם בחצי בסוף השנה. מה תהיה תוחלת הכסף של אלון לאחר קבלת ההצעה? נסמן ב- $X$ את שווי כסף של אלון בסוף השנה.

$$E[X]=200.\frac{2}{5}+50.\frac{3}{5}=110.$$

זאת אומרת שהצעתו של בן מגלמת תוחלת רווח של 10%!

**74 דוגמא. (ליניאריות של תוחלת)** בחנות ירקות קטנה ישנם 3 תפוחים ו-4 אגסים. אלון קונה 2 פירות באקראי. בן המוכר מרוויח על כל תפוח 2 ש"ח ועל כל אגס 4 ש"ח. מצאו את תוחלת הרווח של בן.

**פיתרון.** נגדיר מ"מ $Q$ עבור הרווח של בן, ומשתנה מקרי $X$ כמספר התפוחים שאלון קנה. על כן,

$$Q=2X+4(2-X)=8-2X$$

$$P(X=1)=\frac{4}{7},\qquad P(X=2)=\frac{3}{7}.\frac{2}{6}=\frac{1}{7},\qquad P(X=0)=\frac{4}{7}.\frac{3}{6}=\frac{2}{7}\ .$$

מכאן נובע ש

$$E[X]=0.\frac{2}{7}+1.\frac{4}{7}+2.\frac{1}{7}=\frac{6}{7}\ .$$

נשתמש בתכונת הליניאריות לחישוב התוחלת של

$$E[Q]=8-2E[X]=8-\frac{12}{7}=\frac{44}{7}\ .$$

**75 דוגמא.** **(ליניאריות של תוחלת)** בוחרים קוד באורך 10 תווים, כאשר כל תו נבחר באקראי מתוך הספרות 9 – 0 ללא קשר לתווים האחרים שנבחרו. נסמן ב- $X$ מ"מ הסופרים את מספר הרצפים 11 בקוד. חשבו את $E[X]$.

**פיתרון.** נגדיר מ"מ $X_i,\ i=1,\ldots,9$ כאשר $X_i$ מקבל את הערך 1 אם ורק אם במקום ה- $i$ מתחיל רצף של 11. לכן

$$X = \sum_{i=1}^{9} X_i \ .$$

$$\begin{aligned} E[X] =& E\left[\sum_{i=1}^{9} X_i\right] \\ =& \sum_{i=1}^{9} E\left[X_i\right] \\ =& \sum_{i=1}^{9} \left[1.P(X_i=1)+0.P(X_i=0)\right] \\ =& \sum_{i=1}^{9} P(X_i=1) \\ =& \sum_{i=1}^{9} \frac{1}{10}.\frac{1}{10} \\ =& \frac{9}{100} \ . \end{aligned}$$

■

**76 דוגמא.** ריבית הלייבור במכללה שמעון נקבעת באקראי על ידי דגימה של אחד מעשרת הבנקים המסחריים. הבנקים ממסופרים מ-1 עד 10 כאשר בנק $i$ מעניק ריבית בשיעור $i$ ללקוחותיו. לאחר זמן מה נסגרו בנקים 1 ו-2) בשל הענקת ריבית לא כדאית...). חשבו את הסיכוי שריבית הלייבור נמוכה מ-6 וכן את תוחלת ושונות הריבית. בצעו את החישובים עבור התקופה שקדמה לסגירת הבנקים ולאחר הסגירה.

**פיתרון.** נגדיר משתנה מקרי $X$ להיות הריבית טרם הסגירה ו- $Y$ להיות הריבית לאחר שנסגרו הבנקים המדוברים. לכן

$$X \sim U[1,0]$$

ו-

$$Y \sim U[3,10] \ .$$

כמו כן, לפי מסקנה **??**

$$E[X] = \frac{10+1}{2} = 5.5$$

לפי מסקנה **??**

$$V(X) = \frac{(10-1+1)^2-1}{12} = \frac{99}{12} \ .$$

באופן דומה עבור מאורע $Y$, לפי מסקנה **??**

$$E[Y] = \frac{10+3}{2} = 6.5$$

לפי מסקנה **??**

$$\frac{(10-3+1)^2-1}{} = \frac{63}{}$$

$$P(Y \le 5) = \frac{3}{8} = 0.375\ , \qquad P(X \le 5) = \frac{5}{10} = 0.5\ .$$

■

**77 דוגמא.** בר היא בנקאית השקעות מתוחכמת המציעה ללקוחותיה את ההגרלה הבאה: בסיכוי $\frac{2}{5}$ תקבלו רווח של $10$. בסיכוי $\frac{1}{5}$ לא תרוויחו ולא תפסידו דבר, ובסיכוי $\frac{3}{5}$ תפסידו $5$. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של $X$ המייצג את הרווח מהשקעה אצל בר.

**פיתרון.** תוחלת הרווח היא חיובית שכן

$$\begin{aligned}
\mu_X =&10.\frac{2}{5}+0.\frac{1}{5}-5.\frac{2}{5} &&= 2,\\
\mu_{X^2} =&100.\frac{2}{5}+0^2.\frac{1}{5}+25.\frac{2}{5} &&= 50,\\
V(X) =&\mu_{X^2}-\mu_X^2 &&= 50-4=46,\\
\Rightarrow \quad \sigma_X =&\sqrt{46}\ .
\end{aligned}$$

■

**78 דוגמא.** הסיכוי אשר חולה מחלים ממחלת דם חריג הוא $0.4$. אם 15 אנשים נדבקים עם המחלה זו, מהי ההסתברות אשר

1. לפחות $10$ יחלימו
2. בין 3 עד 8 יחלימו
3. בדיוק 5 יחלימו?

**פיתרון.** נגדיר $X$ להיות מספר החולים אשר יחלימו.

.1

$$\begin{aligned}
P(X \ge 10) =&1-P(X<10)\\
=&1-\sum_{k=0}^{9} f_{X\sim \mathrm{Bin}(15,0.4)}(k)\\
=&1-\sum_{k=0}^{9}\binom{15}{k}0.4^k(1-0.4)^{15-k}\\
=&1-0.9662=0.0338\ .
\end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned}
P(3 \le X \le 8) =&1-P(X<10)\\
=&\sum_{k=3}^{8} f_{X\sim \mathrm{Bin}(15,0.4)}(k)\\
=&\sum_{k=0}^{8} f_{X\sim \mathrm{Bin}(15,0.4)}(k)-\sum_{k=0}^{2} f_{X\sim \mathrm{Bin}(15,0.4)}(k)\\
=&\left(\sum_{k=0}^{8}-\sum_{k=0}^{2}\right)\binom{15}{k}0.4^k(1-0.4)^{15-k}
\end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned}P(X=5) =&f_{X\sim \text{Bin}(15,0.4)}(k=5)\\ =&\binom{15}{5}0.4^5(1-0.4)^{10}\\ =&0.1859\ .\end{aligned}$$

■

79 **דוגמא.** מחשב משתמש במילים באורך 8 ביטים. כאשר משדרים ביטים בקו התקשורת יש סיכוי של $.1$ לשגיאה בביט בודד שמשודר. בכדי לשפר את איכות הקו, משודר כל ביט 3 פעמים ברצף והפענוח של כל שלשת ביטים מתבצע על ידי החלטת הרוב. למשל: אם רוצים לשדר 0, משדרים בקו "000" והמקלט מפענח את התשדורת כ-0 אם השלשה שהגיעה אליו מורכבת מלפחות שני אפסים.

1. חשבו את ההסתברות שמילת מחשב תפוענח נכון.
2. מצאו את התפלגות מספר המילים שפוענחו באופן שגוי בקובץ המכיל 1000 מילים.

פתרון: נשים לב שכמות הטעויות בשליחה של ביט בודד מתפלגת $X\sim \text{Bin}(3,0.1)$ ולכן ההסתברות שתהיה שגיאה בפענוח ביט בודד היא

$$P(X\geq 2)=\binom{3}{2}0.1^2 0.9+\binom{3}{1}0.1^3=0.028$$

1. כמות השגיאות במילה באורך 8 ביטים מתפלגת

$$Y\sim \text{Bin}(8,0.028)$$

ולכן המילה תפוענח נכון בהסתברות

$$P(Y=0)=\binom{8}{0}p^0(1-p)^8=(1-0.028)^8=0.796\ .$$

2. לאור הסעיף הקודם, ההסתברות לשגיאה בפענוח מילה בודדת היא

$$1-0.796=0.203\ ,$$

לכן מספר המילים שפוענחו באופן שגוי בקובץ המכיל 1000 מילים מתפלג $\text{Bin}(1000,0.203)$.

80 **דוגמא.** בכד 9 כדורים לבנים ו- 1 שחור. מושכים באקראי בזה אחר זה כדור מהכד. נסמן ב- $X$ את מספר המשיכות עד לקבלת שחור וב- $Y$ את מספר המשיכות עד לקבלת 3 שחורים.

מצאו את התפלגות $X$ כאשר המשיכה היא עם החזרה.

**פיתרון.** $X$ מקבל ערכים $\mathbb{N}/\{0\}$. בכל הוצאה ישנה הסתברות של $\frac{9}{10}$ לכדור לבן (כישלון) והסתברות של $p=\frac{1}{10}$ לכדור לבן (הצלחה). כלומר, קיבלנו מ"מ גאומטרי

$$X\sim G\left(\frac{1}{10}\right)\ .$$

■

81 **דוגמא.** חלקיקים נפלטים מחומר רדיואקטיבי בתהליך פואסון עם קצב של $0.5$ חלקיקים לשנייה. חשבו את ההסתברויות הבאות:

1. ייפלט לפחות חלקיק אחד בשנייה נתונה.

**פיתרון.** התהליך בשאלה הוא תהליך פואסון בעל פרמטר $\lambda = 0.5$ לכן

.1

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-0.5}\frac{0.5^0}{0!} = 0.393\ .$$

2. כעת בשאלה הוא תהליך פואסון שונה בעל פרמטר $5\lambda$:

$$\begin{aligned}P(X_5 > 3) =& 1 - P(X_5 = 0) - P(X_5 = 1) - P(X_5 = 2) - P(X_5 = 3)\\ =& 1 - e^{-5\lambda}\frac{(5\lambda)^0}{0!} - e^{-5\lambda}\frac{(5\lambda)^1}{1!} - e^{-5\lambda}\frac{(5\lambda)^2}{2!} - e^{-5\lambda}\frac{(5\lambda)^3}{3!}\\ =& 1 - e^{-5(0.5)}\frac{(5(0.5))^0}{0!} - e^{-5(0.5)}\frac{(5(0.5))^1}{1!} - e^{-5(0.5)}\frac{(5(0.5))^2}{2!} - e^{-5(0.5)}\frac{(5(0.5))^3}{3!}\\ =& 0.242\end{aligned}$$

מאחר ו- $X_5$ מתפלג $P(0.5.5)$

■

**82 דוגמא.** **(פונקצית התפלגות)** מטילים 2 קוביות. נסמן ב- $X$ את סכום התוצאות שהתקבלו. מצאו את ההתפלגות של $X$.

**פיתרון.** נתחיל מהתומך. התוצאות האפשרויות בסכום של 2 קוביות הן המספרים הטבעיים מ- 2 עד 12. בכדי לחשב את ההסתברות לכל ערך נשתמש במרחב מדגם סימטרי: גודל מרחב המדגם הוא $6^2 = 36$, ככמות האפשרויות לבחור תוצאה לקוביה הראשונה מתוך 6 ותוצאה לקוביה השניה מתוך 6. נחשב את ההסתברות של כל תוצאה בנפרד:

$$\begin{aligned}P(X = 2) =& \frac{|\{(1,1)\}|}{6^2} &= \frac{1}{36},\\ P(X = 3) =& \frac{|\{(2,1),(1,2)\}|}{6^2} &= \frac{2}{36},\\ P(X = 4) =& \frac{|\{(1,3),(2,2),(3,1)\}|}{6^2} &= \frac{3}{36},\\ &\vdots\\ P(X = 7) =& \frac{|\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}|}{6^2} &= \frac{6}{36},\\ P(X = 8) =& \frac{|\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}|}{6^2} &= \frac{5}{36},\\ P(X = 9) =& \frac{|\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}|}{6^2} &= \frac{4}{36},\\ &\vdots\\ P(X = 12) =& \frac{|\{(6,6)\}|}{6^2} &= \frac{1}{36},\end{aligned}$$

ובאופן דומה ממשיכים לחשב את האפשרויות לכל הערכים האפשריים בתומך. באופן כללי קל לראות שהנוסחא, כאשר $p$ זו הסכום של ה 2 הקוביות, היא (עיין משוואה (**??**) לעייל)

$$P(X = p) = \frac{1}{36} \times \begin{cases}(p-1) & p < 8\\ (p-1) - 2(p-7) & 8 \leq p < 14\end{cases}$$

**83 דוגמא. (פונקצית התפלגות מצטברת)** אלון הוא סוחר ממולח בשוק ההון. הוא משקיע סכום של $1000\$$ במכשיר פיננסי אשר בכל שנה מכפיל את הכסף בסיכוי $\frac{2}{3}$ או מפסיד חצי מההשקעה בסיכוי $\frac{1}{3}$. השנים הן בלתי תלויות. נגדיר את $X$ להיות שווי ההשקעה של אלון לאחר שנתיים. מצאו את פונקצית ההתפלגות המצטברת של $X$ ציירו אותה.

**פיתרון.** כפי שציינו בדוגמה 88, התומך של $X$ כעת הוא

$$\text{supp}(X) = \{250, 1000, 4000\} \ .$$

על כן, פונקצית ההתפלגות המצטברת של $X$ היא

$$F_X(k) = P(X \leq k) = \begin{cases} 0 & k < 250, \\ \frac{1}{9} & 250 \leq k < 1000, \\ \frac{5}{9} & 1000 \leq k < 4000, \\ 1 & 4000 \leq k. \end{cases}$$

■

**84 דוגמא. (תוחלת)** בן הוא סוחר מתוחכם ולכן הוא מציע לאלון להפקיד אצלו 100 שקלים בתחילת השנה. בסיכוי של $\frac{2}{5}$ הסכום יוכפל, ובסיכוי $\frac{2}{5}$ הסכום יצטמצם בחצי בסוף השנה. מה תהיה תוחלת הכסף של אלון לאחר קבלת ההצעה? נסמן ב- $X$ את שווי כסף של אלון בסוף השנה.

$$E[X] = 200.\frac{2}{5} + 50.\frac{3}{5} = 110.$$

זאת אומרת שהצעתו של בן מגלמת תוחלת רווח של 10%!

**85 דוגמא. (ליניאריות של תוחלת)** בחנות ירקות קטנה ישנם 3 תפוחים ו-4 אגסים. אלון קונה 2 פירות באקראי. בן המוכר מרוויח על כל תפוח 2 ש"ח ועל כל אגס 4 ש"ח. מצאו את תוחלת הרווח של בן.

**פיתרון.** נגדיר מ"מ $Q$ עבור הרווח של בן, ומשתנה מקרי $X$ כמספר התפוחים שאלון קנה. על כן,

$$Q = 2X + 4(2 - X) = 8 - 2X$$

$$P(X = 1) = \frac{4}{7}, \qquad P(X = 2) = \frac{3}{7}.\frac{2}{6} = \frac{1}{7}, \qquad P(X = 0) = \frac{4}{7}.\frac{3}{6} = \frac{2}{7} \ .$$

מכאן נובע ש

$$E[X] = 0.\frac{2}{7} + 1.\frac{4}{7} + 2.\frac{1}{7} = \frac{6}{7} \ .$$

נשתמש בתכונת הליניאריות לחישוב התוחלת של

$$E[Q] = 8 - 2E[X] = 8 - \frac{12}{7} = \frac{44}{7} \ .$$

■

**86 דוגמא. (ליניאריות של תוחלת)** בוחרים קוד באורך 10 תווים, כאשר כל תו נבחר באקראי מתוך הספרות 9 – 0 ללא קשר לתווים האחרים שנבחרו. נסמן ב- $X$ מ"מ הסופרים את מספר הרצפים 11 בקוד. חשבו את $E[X]$.

**פיתרון.** נגדיר מ"מ $X_i,\ i=1,\ldots,9$ כאשר $X_i$ מקבל את הערך 1 אם ורק אם במקום ה- $i$ מתחיל רצף של 11. לכן

$$X=\sum_{i=1}^{9}X_i\ .$$

$$\begin{aligned}E[X]=&E\left[\sum_{i=1}^{9}X_i\right]\\=&\sum_{i=1}^{9}E\left[X_i\right]\\=&\sum_{i=1}^{9}\left[1.P(X_i=1)+0.P(X_i=0)\right]\\=&\sum_{i=1}^{9}P(X_i=1)\\=&\sum_{i=1}^{9}\frac{1}{10}.\frac{1}{10}\\=&\frac{9}{100}\ .\end{aligned}$$

■

**87 דוגמא.** ריבית הלייבור במכללה שמעון נקבעת באקראי על ידי דגימה של אחד מעשרת הבנקים המסחריים. הבנקים ממסופרים מ-1 עד 10 כאשר בנק $i$ מעניק ריבית בשיעור $i$ ללקוחותיו. לאחר זמן מה נסגרו בנקים 1 ו-2) בשל הענקת ריבית לא כדאית...). חשבו את הסיכוי שריבית הלייבור נמוכה מ-6 וכן את תוחלת ושונות הריבית. בצעו את החישובים עבור התקופה שקדמה לסגירת הבנקים ולאחר הסגירה.

**פיתרון.** נגדיר משתנה מקרי $X$ להיות הריבית טרם הסגירה ו- $Y$ להיות הריבית לאחר שנסגרו הבנקים המדוברים. לכן

$$X\sim U[1,0]$$

ו-

$$Y\sim U[3,10]\ .$$

כמו כן, לפי מסקנה **??**

$$E[X]=\frac{10+1}{2}=5.5$$

לפי מסקנה **??**

$$V(X)=\frac{(10-1+1)^2-1}{12}=\frac{99}{12}\ .$$

באופן דומה עבור מאורע $Y$, לפי מסקנה **??**

$$E[Y]=\frac{10+3}{2}=6.5$$

לפי מסקנה **??**

$$V(Y)=\frac{(10-3+1)^2-1}{12}=\frac{63}{12}\ .$$

$$P(Y\leq 5)=\frac{3}{8}=0.375\ ,\qquad P(X\leq 5)=\frac{5}{10}=0.5\ .$$

**88 דוגמא.** אלון הוא סוחר ממולח בשוק ההון. הוא משקיע סכום של $\$1000$ במכשיר פיננסי אשר בכל שנה מכפיל את הכסף בסיכוי $\frac{2}{3}$ או מפסיד חצי מההשקעה בסיכוי $\frac{1}{3}$. השנים הן בלתי תלויות. נגדיר את $X$ להיות שווי ההשקעה של אלון לאחר שנתיים. התומך של $X$ כעת הוא

$$\text{supp}(X) = \{250, 1000, 4000\} \ ,$$

על כן, ההתפלגות של $X$ היא

$$P_X(1000) = \frac{4}{9}, \quad P_X(4000) = \frac{4}{9}, \quad P_X(250) = \frac{1}{9}$$

ו - $0$ אחרת.

**89 דוגמא.** התוחלת של הטלת קוביה היא

$$E[X] = \sum_{k=1}^{6} k\frac{1}{6} = \frac{7}{2} \ .$$

**90 דוגמא.** בוחרים קוד באורך 10 תווים, כאשר כל תו נבחר באקראי מתוך הספרות 9 – 0 ללא קשר לתווים האחרים שנבחרו. נסמן ב- $X$ מ"מ הסופרים את מספר הרצפים 11 בקוד. חשבו את $E[X]$.

**פיתרון.** נגדיר מ"מ $X_i, \ i = 1, \ldots, 9$ כאשר $X_i$ מקבל את הערך $1$ אם ורק אם במקום ה- $i$ מתחיל רצף של $11$. לכן

$$X = \sum_{i=1}^{9} X_i \ .$$

$$\begin{aligned} E[X] =& E\left[\sum_{i=1}^{9} X_i\right] \\ =& \sum_{i=1}^{9} E\left[X_i\right] \\ =& \sum_{i=1}^{9} \left[1.P(X_i = 1) + 0.P(X_i = 0)\right] \\ =& \sum_{i=1}^{9} P(X_i = 1) \\ =& \sum_{i=1}^{9} \frac{1}{10}.\frac{1}{10} \\ =& \frac{9}{100} \ . \end{aligned}$$

■

**91 דוגמא.** ניקח משתנה מקרי $X$ בעל התפלגות

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{3} & k = -1, \\ \frac{1}{6} & k = 0, \\ \frac{1}{2} & k = 1. \end{cases}$$

**פיתרון.** נשתמש בהגדרת התוחלת ונקבל

$$E[X] =(-1).\frac{1}{3} + 0.\frac{1}{6} + 1.\frac{1}{2} \qquad = \frac{1}{6},$$
$$E[X^4] =(-1)^4.\frac{1}{3} + 0^4.\frac{1}{6} + 1^4.\frac{1}{2} \quad = \frac{5}{6}.$$

■

**92 דוגמא.** נניח ש $X$ הוא המספר של רכבים אשר עוברים דרך השתיפת רכב בין השעות 16 : 00 ו- 17 : 00. ל- $X$ יש את ההתפלגות

| $x$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

הפונקציה $g(X) = 2X - 1$ מצייג את הרווח ב $ עבור $X$. מצאו את תוחלת הרווח בין השעות 16 : 00 ו- 17 : 00.

**פיתרון.**

$$\begin{aligned} E[g(X)] =& E[2X-1] \\ =& \sum_{x=4}^{9}(2x-1)P_X(x) \\ =& 7.\frac{1}{12} + 9.\frac{1}{12} + 11.\frac{1}{4} + 13.\frac{1}{4} + 15.\frac{1}{6} + 17.\frac{1}{6} \\ =& \$12.67\ . \end{aligned}$$

■

**93 דוגמא.** בר היא בנקאית השקעות מתוחכמת המציעה ללקוחותיה את ההגרלה הבאה: בסיכוי $\frac{2}{5}$ תקבלו רווח של 10. בסיכוי $\frac{1}{5}$ לא תרוויחו ולא תפסידו דבר, ובסיכוי $\frac{3}{5}$ תפסידו 5. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של $X$ המייצג את הרווח מהשקעה אצל בר.

**פיתרון.** תוחלת הרווח היא חיובית שכן

$$\mu_X =10.\frac{2}{5} + 0.\frac{1}{5} - 5.\frac{2}{5} \qquad = 2,$$

$$\mu_{X^2} =100.\frac{2}{5} + 0^2.\frac{1}{5} + 25.\frac{2}{5} \quad = 50,$$

$$V(X) =\mu_{X^2} - \mu_X^2 \qquad = 50 - 4 = 46,$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_X = \sqrt{46}\ .$$

■

**94 דוגמא.** הסיכוי אשר חולה מחלים ממחלת דם חריג הוא 0.4. אם 15 אנשים נדבקים עם המחלה זו, מהי ההסתברות אשר

1. לפחות 10 יחלימו
2. בין 3 עד 8 יחלימו

**פיתרון.** נגדיר $X$ להיות מספר החולים אשר יחלימו.

.1

$$\begin{aligned}P(X \geq 10) =& 1 - P(X < 10)\\ =& 1 - \sum_{k=0}^{9} f_{X\sim\text{Bin}(15,0.4)}(k)\\ =& 1 - \sum_{k=0}^{9} \binom{15}{k} 0.4^k (1-0.4)^{15-k}\\ =& 1 - 0.9662 = 0.0338\ .\end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned}P(3 \leq X \leq 8) =& 1 - P(X < 10)\\ =& \sum_{k=3}^{8} f_{X\sim\text{Bin}(15,0.4)}(k)\\ =& \sum_{k=0}^{8} f_{X\sim\text{Bin}(15,0.4)}(k) - \sum_{k=0}^{2} f_{X\sim\text{Bin}(15,0.4)}(k)\\ =& \left(\sum_{k=0}^{8} - \sum_{k=0}^{2}\right) \binom{15}{k} 0.4^k (1-0.4)^{15-k}\\ =& 0.9050 - 0.0271 = 0.8779\ .\end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned}P(X = 5) =& f_{X\sim\text{Bin}(15,0.4)}(k=5)\\ =& \binom{15}{5} 0.4^5 (1-0.4)^{10}\\ =& 0.1859\ .\end{aligned}$$

■

95 **דוגמא.** מחשב משתמש במילים באורך 8 ביטים. כאשר משדרים ביטים בקו התקשורת יש סיכוי של $.1$) לשגיאה בביט בודד שמשודר. בכדי לשפר את איכות הקו, משודר כל ביט 3 פעמים ברצף והפענוח של כל שלשת ביטים מתבצע על ידי החלטת הרוב. למשל: אם רוצים לשדר 0, משדרים בקו "000" והמקלט מפענח את התשדורת כ-0 אם השלשה שהגיעה אליו מורכבת מלפחות שני אפסים.

1. חשבו את ההסתברות שמילת מחשב תפוענח נכון.
2. מצאו את התפלגות מספר המילים שפוענחו באופן שגוי בקובץ המכיל 1000 מילים.

פתרון: נשים לב שכמות הטעויות בשליחה של ביט בודד מתפלגת $X \sim \text{Bin}(3, 0.1)$ ולכן ההסתברות שתהיה שגיאה בפענוח ביט בודד היא

$$P(X \geq 2) = \binom{3}{2} 0.1^2 0.9 + \binom{3}{1} 0.1^3 = 0.028$$

1. כמות השגיאות במילה באורך 8 ביטים מתפלגת

$$Y \sim \text{Bin}(8, 0.028)$$

ולכן המילה תפוענח נכון בהסתברות

$$P(Y = 0) = \binom{8}{0} p^0 (1-p)^8 = (1 - 0.028)^8 = 0.796\ .$$

2. לאור הסעיף הקודם, ההסתברות לשגיאה בפענוח מילה בודדת היא

$$1 - 0.796 = 0.203 \ ,$$

לכן מספר המילים שפוענחו באופן שגוי בקובץ המכיל $1000$ מילים מתפלג $\text{Bin}(1000, 0.203)$.

**96 דוגמא.** בכד 9 כדורים לבנים ו- 1 שחור. מושכים באקראי בזה אחר זה כדור מהכד. נסמן ב- $X$ את מספר המשיכות עד לקבלת שחור וב- $Y$ את מספר המשיכות עד לקבלת 3 שחורים.

מצאו את התפלגות $X$ כאשר המשיכה היא עם החזרה.

**פיתרון.** $X$ מקבל ערכים $\mathbb{N}/\{0\}$. בכל הוצאה ישנה הסתברות של $\frac{9}{10}$ לכדור לבן (כישלון) והסתברות של $p = \frac{1}{10}$ לכדור לבן (הצלחה). כלומר, קיבלנו מ"מ גאומטרי

$$X \sim G\left(\frac{1}{10}\right) \ .$$

■

**97 דוגמא.** חלקיקים נפלטים מחומר רדיואקטיבי בתהליך פואסון עם קצב של $0.5$ חלקיקים לשנייה. חשבו את ההסתברויות הבאות:

1. ייפלט לפחות חלקיק אחד בשנייה נתונה.
2. ייפלטו יותר מ-3 חלקיקים ב-5 שניות.

**פיתרון.** התהליך בשאלה הוא תהליך פואסון בעל פרמטר $\lambda = 0.5$ לכן

1.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-0.5}\frac{0.5^0}{0!} = 0.393 \ .$$

2. כעת בשאלה הוא תהליך פואסון שונה בעל פרמטר $\lambda = 5 \times 0.5 = 2.5$:

$$\begin{aligned} P(X_5 > 3) =& 1 - P(X_5 = 0) - P(X_5 = 1) - P(X_5 = 2) - P(X_5 = 3) \\ =& 1 - e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^0}{0!} - e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^1}{1!} - e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^2}{2!} - e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^3}{3!} \\ =& 1 - e^{-2.5}\frac{(2.5)^0}{0!} - e^{-2.5}\frac{(2.5)^1}{1!} - e^{-2.5}\frac{(2.5)^2}{2!} - e^{-2.5}\frac{(2.5)^3}{3!} \\ =& 0.242 \end{aligned}$$

■

**98 דוגמא. (פונקצית התפלגות)** מטילים 2 קוביות. נסמן ב- $X$ את סכום התוצאות שהתקבלו. מצאו את ההתפלגות של $X$.

**פיתרון.** נתחיל מהתומך. התוצאות האפשרויות בסכום של 2 קוביות הן המספרים הטבעיים מ- $2$ עד $12$. בכדי לחשב את ההסתברות לכל ערך נשתמש במרחב מדגם סימטרי: גודל מרחב המדגם הוא $6^2 = 36$, ככמות האפשרויות לבחור תוצאה לקוביה הראשונה מתוך $6$ ותוצאה לקוביה השניה מתוך $6$. נחשב את ההסתברות

של כל תוצאה בנפרד:

$$\begin{aligned}
P(X=2) &= \frac{|\{(1,1)\}|}{6^2} &&= \frac{1}{36},\\
P(X=3) &= \frac{|\{(2,1),(1,2)\}|}{6^2} &&= \frac{2}{36},\\
P(X=4) &= \frac{|\{(1,3),(2,2),(3,1)\}|}{6^2} &&= \frac{3}{36},\\
&\vdots\\
P(X=7) &= \frac{|\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}|}{6^2} &&= \frac{6}{36},\\
P(X=8) &= \frac{|\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}|}{6^2} &&= \frac{5}{36},\\
P(X=9) &= \frac{|\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}|}{6^2} &&= \frac{4}{36},\\
&\vdots\\
P(X=12) &= \frac{|\{(6,6)\}|}{6^2} &&= \frac{1}{36},
\end{aligned}$$

ובאופן דומה ממשיכים לחשב את האפשרויות לכל הערכים האפשריים בתומך. באופן כללי קל לראות שהנוסחא, כאשר $p$ זו הסכום של ה $2$ הקוביות, היא (עיין משוואה (**??**) לעייל)

$$P(X=p) = \frac{1}{36} \times \begin{cases} (p-1) & p<8 \\ (p-1)-2(p-7) & 8 \le p < 14 \end{cases}$$

■

99 **דוגמא. (פונקצית התפלגות מצטברת)** אלון הוא סוחר ממולח בשוק ההון. הוא משקיע סכום של $\$1000$ במכשיר פיננסי אשר בכל שנה מכפיל את הכסף בסיכוי $\frac{2}{3}$ או מפסיד חצי מההשקעה בסיכוי $\frac{1}{3}$. השנים הן בלתי תלויות. נגדיר את $X$ להיות שווי ההשקעה של אלון לאחר שנתיים. מצאו את פונקצית ההתפלגות המצטברת של $X$ וציירו אותה.

**פיתרון.** כפי שציינו בדוגמה 88, התומך של $X$ כעת הוא

$$\text{supp}(X) = \{250, 1000, 4000\}\ .$$

על כן, פונקצית ההתפלגות המצטברת של $X$ היא

$$F_X(k) = P(X \le k) = \begin{cases} 0 & k < 250, \\ \frac{1}{9} & 250 \le k < 1000, \\ \frac{5}{9} & 1000 \le k < 4000, \\ 1 & 4000 \le k. \end{cases}$$

■

100 **דוגמא. (תוחלת)** בן הוא סוחר מתוחכם ולכן הוא מציע לאלון להפקיד אצלו 100 שקלים בתחילת השנה. בסיכוי של $\frac{2}{5}$ הסכום יוכפל, ובסיכוי $\frac{2}{5}$ הסכום יצטמצם בחצי בסוף השנה. מה תהיה תוחלת הכסף של אלון לאחר קבלת ההצעה? נסמן ב- $X$ את שווי כסף של אלון בסוף השנה.

$$E[X] = 200.\frac{2}{5} + 50.\frac{3}{5} = 110.$$

זאת אומרת שהצעתו של בן מגלמת תוחלת רווח של 10%!

101 **דוגמא. (ליניאריות של תוחלת)** בחנות ירקות קטנה ישנם 3 תפוחים ו-4 אגסים. אלון קונה 2 פירות באקראי. בן המוכר מרוויח על כל תפוח 2 ש"ח ועל כל אגס 4 ש"ח. מצאו את תוחלת הרווח של בן.

**פיתרון.** נגדיר מ"מ $Q$ עבור הרווח של בן, ומשתנה מקרי $X$ כמספר התפוחים שאלון קנה. על כן,

$$Q = 2X + 4(2 - X) = 8 - 2X$$

$$P(X = 1) = \frac{4}{7}, \qquad P(X = 2) = \frac{3}{7}.\frac{2}{6} = \frac{1}{7}, \qquad P(X = 0) = \frac{4}{7}.\frac{3}{6} = \frac{2}{7} \ .$$

מכאן נובע ש

$$E[X] = 0.\frac{2}{7} + 1.\frac{4}{7} + 2.\frac{1}{7} = \frac{6}{7} \ .$$

נשתמש בתכונת הליניאריות לחישוב התוחלת של

$$E[Q] = 8 - 2E[X] = 8 - \frac{12}{7} = \frac{44}{7} \ .$$

■

102 **דוגמא.** אוטובוס מגיע לתחנה כל 30 דקות. בר מגיעה לתחנה באקראי, מבלי לתכנן מראש ומבלי לבדוק את לוחות הזמנים של האוטובוס. נסמן ב-$T$ את זמן ההמתנה המדוייק לאוטובוס, בדקות. רשמו את פונקצית ההתפלגות המצטברת ואת פונקצית הצפיפות של $T$. חשבו את ההסתברויות

$$P(20 \leq T \leq 40)$$

ו-

$$P(T > 23) \ .$$

ענו שוב על השאלה עבור אוטובוס המגיע כל 40 דקות.

**פיתרון.** במקרה הנוכחי, זמן ההמתנה הוא אחיד משום שמועד ההגעה של בר הוא אחיד בזמן לכן,

$$F_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t}{30}, & 0 \leq t \leq 30, \\ 1, & t \geq 30, \end{cases}$$

$$f_T(t) = F_T'(t) = \begin{cases} \frac{1}{30}, & 0 \leq t \leq 30, \\ 0, & \text{אחרת}, \end{cases}$$

$$P(20 \leq T \leq 40) = F_T(40) - F_T(20) = 1 - \frac{20}{30} = \frac{1}{3},$$

עבור אוטובוס המגיע כל 40 דקות נקבל

$$F_T(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{t}{40}, & 0\le t\le 40,\\ 1, & t\ge 40,\end{cases}$$

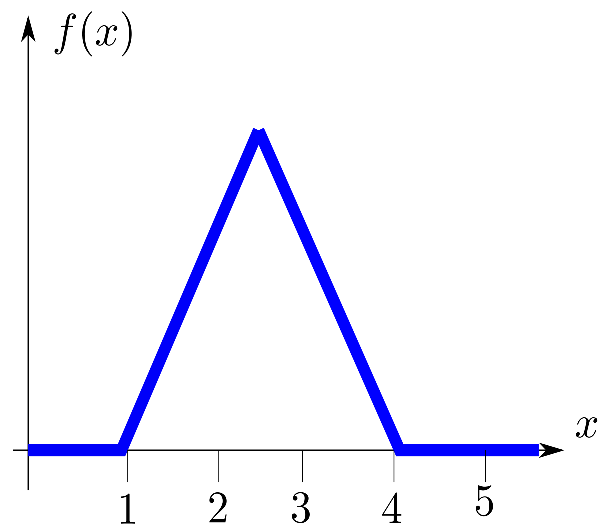
$$f_T(t)=F_T'(t)=\begin{cases}\frac{1}{40}, & 0\le t\le 40,\\ 0, & \text{אחרת},\end{cases},$$

$$P(20\le T\le 40)=F_T(40)-F_T(20)=1-\frac{20}{40}=\frac{1}{2},,$$

$$P(T>23)=1-P(T\le 23)=1-F_T(23)=1-\frac{23}{40}=\frac{17}{40}.,$$

■

103 **דוגמא.** מכונה במפעל ברגים אמורה לייצר ברגים בקוטר 3 מ"מ. בפועל, קוטר הברגים אינו מדויק והצפיפות שלו נתונה על ידי איור להלן אשר מראה את צפיפות קוטר הברגים.




רשמו במדויק את פונקצית הצפיפות. מה ההסתברות שקוטר בורג יעלה על 3 מ"מ? על 4 מ"מ?

**פיתרון.** יש צורך למצוא את פונקצית הצפיפות בצורה מדוייקת. נשתמש תחילה בתנאי הנרמול. אנחנו יודעים כי השטח שבין הגרף לציר $x$ שווה ל-1 כי כלל השטח מייצג את כל ההסתברות,

$$\int_1^5 f_X(x)\,dx=P(1\le X\le 5)=1.$$

נשתמש בנוסחה לשטח משולש (שטח משולש שווה למכפלת הבסיס בחצי הגובה) ונקבל שגובה המשולש $h$ מקיים

$$\frac{4h}{2}=1\qquad\Rightarrow\qquad h=0.5\ .$$

עם כן, יש לנו את הנקודות

$$(1,0)\ ,\ (5,0)\ ,\ (3,0.5)$$

ונוכל למצוא את משוואות הקווים בהתאם. לכן הצפיפות נתונה על ידי

$$, f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 \le x \le 3, \\ -\frac{1}{4}(x-5), & 3 \le x \le 5, \\ 0, & x > 5. \end{cases}$$

בעזרת הצפיפות נוכל לחשב ישירות את ההסתברויות המבוקשות.

$$P(X>3) = \int_3^5 \left(-\frac{1}{4}(x-5)\right) dx \quad = -\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_3^5 = \frac{1}{2},$$
$$P(X>4) = \int_4^5 \left(-\frac{1}{4}(x-5)\right) dx \quad = -\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_4^5 = \frac{1}{8}.$$

■

**104 דוגמא.** לדוגמה, נגיד שמוקד שרות פתוח בין השעות $18:00$ עד $22:00$ , כלומר לאורך זמן של 240 דקות. ההסתברות ששיחה התקבלה בין $18:05$ עד $18:10$, כלומר תוך 5 דקות כלשהן, כאשר $\lambda = \frac{1}{12}$, היא

$$P(18:05\text{–}18:10) = P(X=5) = \int_0^5 f_X(x)dx = \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x}dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^5 = 1-e^{-5\lambda} = 1-e^{-5/12} = 0.34.$$

ההסתברות ששיחה אחת תגיע תוך 15 דקות היא

$$P(X=15) = \int_0^{15} f_X(x)dx = \int_0^{15} \lambda e^{-\lambda x}dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{15} = 1-e^{-15\lambda} = 1-e^{-15/12} = 0.71.$$

**105 דוגמא.** ההסתברות אשר השיחה הראשונה תגיע בין הדקה השנייה לבין הדקה הרביעית היא

$$P(2 \le X \le 4) = F_X(4) - F_X(2) = 1 - e^{-4/12} - (1-e^{-2/12}) = 0.13\ .$$

**106 דוגמא.** בהנחה שבחמש הדקות הראשונות לא התקבל שיחה, ההסתברות שנמתין לפחות עוד דקה עד לשיחה הראשונה ניתנת ע"י

$$P(X>5+1|X>5) = \frac{P(X>6 \cap X>5)}{P(X>5)} = \frac{P(X>6)}{P(X>5)} = \frac{1-F_X(6)}{1-F_X(5)} = \frac{e^{-6/12}}{e^{-5/12}} = e^{-1/12} = P(X>1).$$

**107 דוגמא.** מספר טיפות הגשם הנופלות ביחידת שטח נתונה מתפלגות על פי התפלגות פואסון. ניקח מטר אחד ונניח כי בממוצע נפלו לאורכו 10 טיפות:

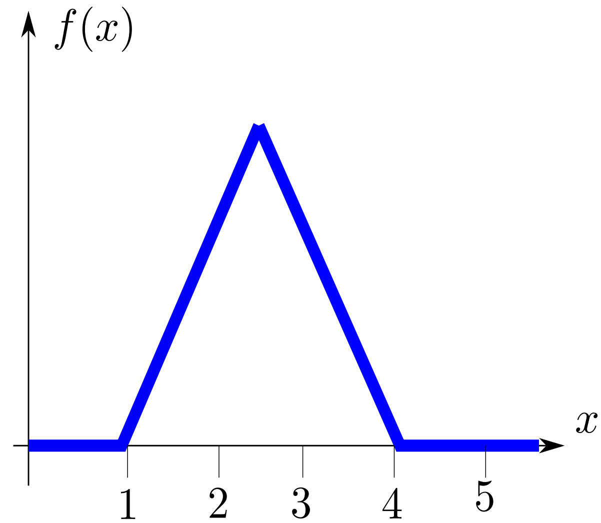
$\lambda = 10$ טיפות למטר .

המרחק $X$ (במטרים) בין טיפות מתפלג פואסונית

$$X \sim \exp(\lambda = 10).$$

ההסתברות שטיפה אחד תיפול לתוך 10 ס"מ ($0.1$ [m]) כלשהו היא

**108 דוגמא.** מכונה במפעל ברגים אמורה לייצר ברגים בקוטר 3 מ"מ. בפועל, קוטר הברגים אינו מדויק והצפיפות שלו נתונה על ידי איור להלן אשר מראה את צפיפות קוטר הברגים.




רשמו במדויק את פונקצית הצפיפות. מה ההסתברות שקוטר בורג יעלה על 3 מ"מ? על 4 מ"מ?

**פיתרון.** יש צורך למצוא את פונקצית הצפיפות בצורה מדוייקת. נשתמש תחילה בתנאי הנרמול. אנחנו יודעים כי השטח שבין הגרף לציר $x$ שווה ל-1 כי כלל השטח מייצג את כל ההסתברות,

$$\int_1^5 f_X(x)\,dx = P(1 \le X \le 5) = 1.$$

נשתמש בנוסחה לשטח משולש (שטח משולש שווה למכפלת הבסיס בחצי הגובה) ונקבל שגובה המשולש $h$ מקיים

$$\frac{4h}{2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad h = 0.5\ .$$

עם כן, יש לנו את הנקודות

$$(1,0), \quad (5,0), \quad (3,0.5)\ .$$

ונוכל למצוא את משוואות הקווים בהתאם. לכן הצפיפות נתונה על ידי

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 \le x \le 3, \\ -\frac{1}{4}(x-5), & 3 \le x \le 5, \\ 0, & x > 5. \end{cases},$$

בעזרת הצפיפות נוכל לחשב ישירות את ההסתברויות המבוקשות.

$$P(X>3) = \int_3^5 \left(-\frac{1}{4}(x-5)\right)dx \quad = -\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_3^5 = \frac{1}{2},$$
$$P(X>4) = \int_4^5 \left(-\frac{1}{4}(x-5)\right)dx \quad = -\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_4^5 = \frac{1}{8}.$$

**109 דוגמא.** מספר טיפות הגשם הנופלות ביחידת שטח נתונה מתפלגות על פי התפלגות פואסון. ניקח מטר אחד ונניח כי בממוצע נפלו לאורכו 10 טיפות:

$\lambda = 10$ טיפות למטר .

המרחק $X$ (במטרים) בין טיפות מתפלג פואסונית

$$X \sim \exp(\lambda = 10).$$

ההסתברות שטיפה אחד תיפול לתוך 10 ס"מ ($0.1$ [m]) כלשהו היא

$$P(X \leq 2) = F_X(20) = 1 - e^{-0.1\lambda} = 1 - e^{-1} = 0.63\ .$$

**110 דוגמא.** משתנה מקרי רציף $X$ בעל פונקציית צפיפות

$$f_X(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

חשבו את $c$, ומצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת $F_X$.

**פיתרון.** בכדי למצוא את הקבוע $c$ נשתמש בתנאי הנרמול. ידוע כי

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f_X(x) = \int_0^2 dx\, cx = c\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2c,$$

לכן

$$c = \frac{1}{2}.$$

עבור $k < 0$, ההסתברות

$$P(X \leq k) = 0$$

כי המשתנה נע בין 0 ל- $2$. עבור $k \geq 2$, ההסתברות

$$P(X \leq k) = 1$$

מאותה הסיבה בדיוק. כעת נותר למצוא את הערך עבור $k \in (0, 2)$.

$$\begin{aligned} F_X(k) &= \int_{-\infty}^{k} f_X(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\, dx + \int_0^k f_X(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_0^k \frac{x}{2}\, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^k = \frac{k^2}{4}. \end{aligned}$$

לסיכום, פונקציית ההתפלגות המצטברת היא

$$F_X(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ \frac{k^2}{4}, & 0 \leq k \leq 2, \\ 1, & k > 2. \end{cases}$$

**111 דוגמא.** נתונה פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f_X(x) = \begin{cases} -x & -1 \le x \le 0, \\ cx^2 & 0 < x \le 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

1. מצאו את ערכו של $c$.
2. חשבו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של $X$.
3. חשבו את ההסתברויות:
   (א) $P(X \le -0.5)$
   (ב) $P(X < -0.5)$
   (ג) $P(X \le 0.5)$
   (ד) $P(-0.2 \le X \le 0.3)$

**פיתרון.** 1. מתכונת הנרמול נקבל

$$\begin{aligned} 1 = &\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f_X(x) = \int_{-1}^{0} (-x) dx + \int_0^1 cx^2\, dx \\ = &\frac{1}{2} + c\left(\frac{1}{3} - 0\right) \end{aligned}$$

ולכן

$$c = 1.5\ .$$

.2

$$F_X(k) = \int_{-\infty}^{k} f_X(x)\, dx = \begin{cases} 0 & k < -1 \\ \frac{1}{2} - \frac{k^2}{2} & -1 \le k < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{k^3}{2} & 0 \le k \le 1 \\ 1 & k > 1. \end{cases}$$

3. נחשב את ההסתברויות באמצעות הצבה בפונקציית ההתפלגות המצטברת:
   (א) $P(X \le -0.5) = F_X(-0.5) = 0.375$
   (ב) $P(X < 0.5) = P(X \le -0.5) = 0.375$ שכן כזכור, נקודה אחת אינה משפיעה על תוצאת אינטגרל וההסתברות להיות שווה בדיוק ל- $0.5$ היא אפס.
   (ג) $P(X \le 0.5) = F_X(0.5) = 0.5625$
   (ד) $P(-0.2 \le X \le 0.3) = F_X(0.3) - F_X(-0.2) = 0.0335$

■

**דוגמא.** אספקת הדלק למאגר של תחנת דלק מתבצעת אחת לשבוע. כמות הדלק (באלפי ליטרים) שתחנה זו מוכרת בשבוע היא משתנה מקרי המתפלג בהתאם לפונקציית הצפיפות:

$$f_X(x) = \begin{cases} c(1-x)^4 & x \in [0,1] \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

1. חשבו את $c$.

**פיתרון.** 1. מתכונת הנרמול נקבל

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\ dx = c\int_0^1 (1-x)^4\ dx = -\frac{c}{5}(1-x)^5\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{c}{5}\ ,$$

ולכן

$$c=5.$$

2. סמן את קיבולת המאגר ב $M$. אנו דורשים שההסתברות שצריכת הדלק תהיה גדולה מהקיבולת תהיה קטנה מ- 5%, כלומר

$$P(X>M)\le 5\%\ .$$

$$P(X>M)=\int_M^1 f_X(x)\,dx = \int_M^1 c(1-x)^4\,dx = -\frac{c}{5}(1-x)^5\Big|_M^1 = (1-M)^5 \le 0.05\ ,$$

ולכן

$$M\ge 0.4507\ .$$

המספר שקיבלנו הוא בדיוק האחוזון ה- 95% מהשבועות צריכת הדלק נמוכה ממספר זה.

■

**112 דוגמא.** תרבית חיידקים מפוזרת באופן אחיד על פני צלחת שרדיוסה 10 ס"מ. יהא $R$ המרחק של חיידק אקראי ממרכז הצלחת.

1. מה ההסתברות שהמרחק הוא בדיוק 3 ס"מ?
2. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של $R$.
3. מהי ההסתברות שהמרחק הוא 3 ס"מ לפחות אם ידוע שהוא 6 ס"מ לכל היותר?
4. מצאו את פונקציית הצפיפות של $R$.

**פיתרון.** 1. מאחר וזהו משתנה מקרי רציף, ההסתברות שיקבל בדיוק ערך מסוים היא אפס.

2. מאחר והחיידקים מפולגים באופן אחיד על הצלחת, הסיכוי שחיידק מסוים נמצא במרחק קטן מ-$r$ היא היחס בין השטח של האזורים שנמצאים במרחק קטן מ-$r$ ביחס לשטח הכולל. לכן

$$F_R(r)=\begin{cases}0, & r<0,\\ \frac{r^2}{10^2}, & 0\le r\le 10,\\ 1, & r>10.\end{cases}$$

3.

$$P(R>3|R>6)=\frac{P(3<R<6)}{P(R<6)}=\frac{F_R(6)-F_R(3)}{F_R(6)}=0.75\ .$$

4.

$$f_R(r)=\frac{dF_R}{dr}=\begin{cases}\frac{r}{50}, & 0\le r\le 10,\\ 0, & \text{אחרת}\ .\end{cases}$$

■

**113 דוגמא.** בתחנת כיבוי האש של אשדוד מתקבלת שיחה אחת בממוצע בכל 3 דקות.

1. מה הסיכוי שהשיחה הראשונה תגיע בין הדקה השנייה לדקה הרביעית?
2. מה הסיכוי שהשיחה הראשונה תגיע אחרי 5 דקות?
3. בהנחה שבחמש הדקות הראשונות לא התקבלה שיחה, מה הסיכוי שנמתין לפחות עוד דקה עד לשיחה

**פיתרון.** הזמן עד השיחה הראשונה מתפלג פואסונית $Y \sim \exp\left(\frac{1}{3}\right)$ כאשר הזמן נמדד בדקות.

.1

$$P(2 \le Y \le 4) = F_Y(4) - F_Y(2) = 1 - e^{-4/3} - (1 - e^{-2/3}) \approx 0.25.$$

.2

$$P(Y > 5) = 1 - P(Y \le 5) = 1 - F_Y(5) = 1 - (1 - e^{-5/3}) \approx 0.189.$$

.3

$$P(Y > 5{+}1|Y > 5) = \frac{P(Y > 6 \cap Y > 5)}{P(Y > 5)} = \frac{P(Y > 6)}{P(Y > 5)} = \frac{1 - F_Y(6)}{1 - F_Y(5)} = \frac{e^{-6/3}}{e^{-5/3}} = e^{-1/3} = P(Y > 1)\,.$$

בחישוב האחרון קיבלנו תכונה מוכרת: חוסר זיכרון. הסיכוי שנמתין 6 דקות לפחות עד לשיחה הראשונה, בהנחה שכבר המתנו 5 דקות ללא שיחה, היא בדיוק הסיכוי שנמתין דקה אחת נוספת - זו תכונת חוסר הזיכרון שראינו עבור משתנה מקרי גיאומטרי. נסכם בטענה הבאה. ■

**114 דוגמא.** בשוק שני יצרני נורות. מפעל 1 שולט על $60\%$ מהשוק ומפעל 2 על היתר. אורך חיים ממוצע של נורה ממפעל 1 הוא חודשיים, בעוד מפעל 2 מייצר נורות עם אורך חיים ממוצע של ארבעה חודשים. עבור נורה שנקנית בשוק (

1. מה הסיכוי שהנורה לא תתקלקל בחודש הראשון?
2. בהנחה והנורה שקנינו דולקת כבר חודש ללא תקלה, מה הסיכוי שמדובר בנורה ממפעל 2?

**פיתרון.** נסמן את זמן החיים של הנורות:

$$X_1 \sim \exp\left(\frac{1}{2}\right), X_2 \sim \exp\left(\frac{1}{4}\right).$$

נסמן את אורך החיים של הנורה שנקנתה ב- $Y$.

.1

$$\begin{aligned} P(Y > 1) =& P(Y > 1|Y = X_1)P(Y = X_1) + P(Y > 1|Y = X_2)P(Y = X_2) \\ =& P(Y > 1|Y = X_1)0.6 + P(Y > 1|Y = X_2)0.4 \\ =& (1 - F_{X_1}(1))0.6 + (1 - F_{X_2}(1))0.4 \\ =& e^{-\frac{1}{2}\cdot 1}.0.6 + e^{-\frac{1}{4}\cdot 1}.0.4 \\ \approx& 0.675 \end{aligned}$$

.2

$$P(Y = X_2|Y > 1) = \frac{P(Y > 1|Y = X_2}{P(Y > 1)} = \frac{e^{-\frac{1}{4}\cdot 1}.0.4}{0.675} \approx 0.462 > 0.4$$

ז"א שזמן החיים הארוך בפועל מגדיל את הסיכוי שמדובר בנורה ממפעל 2, שכן אורך החיים הממוצע של הנורות ממפעל2 הוא ארוך יותר מאלו של מפעל 1. ■

**115 דוגמא.** נתון התפלגות נורמאלי סטנדרדי, מצאו את השטח התחום בין הגרף לציר ה $x$

1. לצד הימין של $z = 1.84$
2. בין הערכים $z = -1.97$ ו- $z = 0.86$.

**פיתרון.** .

1. השטח לצד הימין של $z = 1.84$ שווה ל- $1$ פחות השטח לצד שמאול של $z = 1.84$, קרי

$$1 - 0.9671 = 0.0329$$

2. השטח בין הערכים $z = -1.97$ ו- $z = 0.86$ שווה לשטח לצד שמאול של $z = 0.86$ פחות השטח לצד שמאול של $z = -1.97$, קרי

$$0.8051 - 0.0244 = 0.7807 \ .$$

■

**116 דוגמא.** נתון מ"מ $X$ בעל התפלגות נורמאלי עם הפרמטרים

$$\mu = 50 \ , \quad \sigma = 10 \ ,$$

מצאו את ההסתברות אשר ל- $X$ יש ערך בין 45 לבין 62.

**פיתרון.** הערכים של ה$z$ המתאים ל- $x_1 = 45$ ו- $x_2 = 62$ הם

$$z_1 = \frac{45-50}{10} = -0.5 \ , \qquad z_2 = \frac{62-50}{10} = 1.2 \ .$$

לכן

$$\begin{aligned} P(45 < X < 62) =& P(-0.5 < Z < 1.2) \\ =& P(Z < 1.2) - P(Z < -0.5) \\ =& 0.8849 - 0.3085 \\ =& 0.5764 \ . \end{aligned}$$

■

**117 דוגמא.** נתון התפלגות נורמאלי עם הפרמטרים

$$\mu = 40, \quad \sigma = 6,$$

מצאו את הערך של $x$ אשר יש לו את ההסתברות של

1. 45% של השטח לצד שמאול,
2. 14% של השטח לצד ימין.

**פיתרון.** 1. מחפשים ערך של $z$ כך ש 0.45 של השטח כולו נמצא לצד שמאול שלו. מהטבלה נמצא ש

$$P(Z < -0.13) = 0.45 \ ,$$

לכן ה$z$ הנדרש הוא $-0.13$ ולכן

$$x = 6(-0.13) + 40 = 39.22 \ .$$

2. כעת מחפשים ערך של $z$ כך ש 0.14 של השטח כולו נמצא לצד ימין שלו, ולכן 0.86 של השטח כולו נמצא לצד שמאול שלו. מהטבלה נמצא ש

$$P(Z < 1.08) = 0.86$$

ולכן הערך הנדרש של $z$ הוא 1.08. על כן

$$x = 6(1.08) + 40 = 46.48 \ .$$

■

**118 דוגמא.** יש דגם של מצבר אשר יש לו אורך חיים ממוצע של 3 שנים עם סטיית התקן של 0.5 שנים. על בסיס שאורך חייו של המצבר מתפלג נורמאלי, חפשו את ההסתברות אשר המצבר ישרוד לתקופת זמן פחות מ 2.3

**פיתרון.** לחשב את $P(X < 2.3)$, יש צורך למצוא את השטח התחום של הגרף לצד שמאול של הערך $X = 2.3$. ניתן לחשב את זה ע"י לחשב את השטח לצד שמאול של הערך של ה$z$ המתאים:

$$z = \frac{2.3 - 3}{0.5} = -1.4 \ .$$

מהטבלה נמצא ש

$$P(X < 2.3) = P(Z < -1.4) = 0.0808 \ .$$

■

**119 דוגמא.** כי $X$ מקבל הערך של 4 היא שווה לשטח של המלבן אשר בסיסו מרוכז על $x = 4$:

$$P(X = 4) = b(4, 15, 0.4) = \binom{15}{4} (0.4)^4 (0.6)^{15-4} = 0.1268 \ .$$

אשר הוא שווה בערך לשטח התחום של הגרף בין $x_1 = 3.5$ ו- $x_2 = 4.5$. במונחים של הערכים המתאימים של ה$z$:

$$z_1 = \frac{3.5 - 6}{1.897} = -1.32 \ , \qquad z_2 = \frac{4.5 - 6}{1.897} = -0.79 \ ,$$

נמצא את השטח זו להיות

$$P(-1.32 < Z < -0.79) = P(Z < -0.79) - P(Z < -1.32) = 0.214764 - 0.093418 = 0.121346 \ ,$$

והמספר זו כמעט מסכים לגמרי עם הערך לעייל.

**120 דוגמא. (הסתברות ולוגיקה)** נסמן ב $A$ המאורע שהמשתנה מקרי $x \le a$, נסמן ב $B$ המאורע שהמשתנה מקרי $y \ge b$, ונסמן ב $C$ המאורע שהמשתנה מקרי $y - x > b - a$. יש להוכיח ש

$$P(A \cap B) = P(C \cap B) - P(C \cap \bar{A}) \ . \qquad (*)$$

**פיתרון.** ברור לנו ש

$$(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) = B \cap C \ . \qquad (1*)$$

אם $A \cap B$ הוא אמת, אזי

$$y - x \ge b - x, \quad \Rightarrow \quad y - x \ge b + (-x) \ge b - a \qquad (2*)$$

אבל זה דווקא המאורע $C$, על כן

$$A \cap B \Rightarrow C \qquad (3*)$$

ולכן

$$A \cap B \cap C = A \cap B \qquad (4*)$$

אם $\bar{A} \cap C$ הוא אמת, אזי $y - x > b - a$ ובאותו זמן $x \ge a$, כך ש

$$y > b - a + x \ge b, \qquad (5*)$$

אבל זה דווקא המאורע $B$, על כן

$$\bar{A} \cap C \Rightarrow B \qquad (6*)$$

ולכן

$$\bar{A} \cap C \cap B = \bar{A} \cap C \qquad (7*)$$

את משווה (1*), קרי

$$P(A \cap B \cap C) + P(C \cap \bar{A} \cap B) = P(C \cap B) \ ,$$

לפי (4*) ו- (7*) ניתן לכתוב את זה בצורה

$$P(A \cap B) + P(C \cap \bar{A}) = P(C \cap B) \ ,$$

אבל זו דווקא משוואה (*), כנדרש. ■