

чисוביות וסיבוכיות

מועד ב'

ד"ר יוחאי טויטו, ד"ר ירמי יהו מילר
סמסטר א, תשפ"ה

מספר העמוד הנוכחי ומספר העמודים הכוללים בשאלון מופיעים בחתית כל עמוד. בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות

שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- לשאלון הבחינה יש לצרף כריכה בלבד.
- יש להחזיר את השאלון ביחד עם המחברת/כריכה.

שימוש במחשבונים

- ניתן להשתמש במחשבון.
- לא ניתן להשתמש במחשבון.

חומר עזר

- לא ניתן להשתמש בחומר עזר כלל.
- ניתן להשתמש בחומר עזר/דף נוסחות, כמפורט:
- הבחינה עם חומר פתוח מותר להשתמש בכל חומר עזר מודפס או כתוב.

הנחיות

נא קראו בעיון את הנחיות הבאות בטרם תחילו לפתרו את הבדיקה. מומלץ לקרוא בקצרה את כל השאלות לפני שמתחלים לפתור את הבדיקה. ניתן לענות על השאלות בכל סדר שתרצה.

1. המבחן כולל 5 שאלות. יש לענות על כולן.
2. שאלות הבדיקה שוות משקל - כל שאלה 20 נקודות.
3. כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תזלגו על שלבים.
4. המבחן כולל נספחים, לשימושכם. הסתיעו בהם במידת הצורך.
5. הקפידו על כתב יד ברוח וקריא.
6. הקפידו לרשום בגודל ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
7. כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבלתם. רק הן נבדקות !
8. ניתן לקחת את השאלון כאשר הבדיקה מסתיימת.

בהצלחה!

הבחינה

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

נתון אלפבית הקלט $\Sigma = \{a, b, c\}$ ונתונה השפה הבאה:

$$L = \{a^i b^j c^{2i+3j} \mid i, j \in \mathbb{N}^+\}$$

תארו מכונת טיורינג סטנדרטית (כלומר, במודל הבסיסי) שמכריעה את השפה.

בטעיף זה עלייכם לתאר את המכונה בצורה גרפית בעזרת תרשימים \ דיאגרמת מצבים בלבד, ולא בדרךים אחרות. ככלומר, לא בעזרת טבלת מעברים, לא בעזרת פסאודו-קוד, וכיוצא באלו.

תזכורת, \mathbb{N}^+ היא קבוצת הטבעיים החוביים (כלומר, ללא המספר אפס).

סעיף ב' (10 נקודות)

בנומכונת טיורינג סטנדרטית (כלומר, במודל הבסיסי) שמכריעת את השפה הבאה:

$$L = \{x_1 \dots x_k \# y_1 \dots y_k \# z_1 \dots z_k \mid x_i, y_i, z_i \in \{0, \dots, 9\} \wedge \forall_i (z_i \neq x_i \wedge z_i \neq 2y_i \wedge z_i \geq x_i + y_i)\}$$

את המכונה יש לתאר בעזרת טבלת המעברים בלבד. אין לתאר את המכונה בעזרת תרשימים ו/או פסאודו-קוד (טיור או מילול).

שאלה 2: וריאציות על מכונות טיורינג (20 נקודות)

נסמן ב- T את מודל מכונת הטיורינג הבסיסי. במודל זה בכל צעד ניתן לזרז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר באותו המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לשני הצדדים. בתחילת החישוב הראש נמצא בתחילת הקלט.

נסמן ב- O את מודל מכונת הטיורינג עם סרט ימינה בלבד. במודל זה בכל צעד ניתן לזרז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר באותו המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לכיוון אחד בלבד - ימינה. בתחילת החישוב, הקלט ממוקם בקצתה השמאלי של הסרט והראש נמצא בתחילת הקלט. החישוב מתנהל כמו המכונה במודל T למעט כאשר הראש נמצא במשבצת השמאלית ביותר הסרט וצריך לזרז שמאלה - במקרה זה הראש נשאר באותו מקום ולא זו.

הוכחו כי המודל T והמודל O שקולים חישובית. כיתבו הוכחה מלאה ומפורטת. אל תלגגו על שלבים. תארו באופן מפורט את פונקציית המעברים בשני כיווני הוכחה. העזרו בטבלת מעברים בכדי לתאר באופן מלא את פונקציית המעברים.

שאלה 3:

התזה של צ'רץ'-טיוירינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

נתון הבדיקה הבא. מהי השפה שהבדיקה יוצר? כמובן, מהי $L(G)$? כתבו את השפה בצורה פורמלית, ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של השפה.

$$\begin{aligned} G = & (V, \Sigma, R, S) , \\ V = & \{S, C, D, E, \$, \#\}, \\ \Sigma = & \{a\} , \\ R = & \{ \end{aligned}$$

$$S \rightarrow \$Ca\# ,$$

$$S \rightarrow a ,$$

$$S \rightarrow \varepsilon ,$$

$$Ca \rightarrow aaC ,$$

$$\$D \rightarrow \$C ,$$

$$C\# \rightarrow D\# ,$$

$$C\# \rightarrow E ,$$

$$aD \rightarrow Da ,$$

$$aE \rightarrow Ea ,$$

$$\$E \rightarrow \varepsilon .$$

}

סעיף ב' (10 נקודות)

נתון הבדיקה הבא. מהי השפה שהבדיקה יוצר? כמובן, מהי $L(G)$? כתבו את השפה בצורה פורמלית,

ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של השפה.

$$\begin{aligned}
 G &= (V, \Sigma, R, S) , \\
 V &= \{S, B, C, H\}, \\
 \Sigma &= \{a, b, c\} , \\
 R &= \{ \\
 &\quad S \rightarrow aSBC , \\
 &\quad S \rightarrow aBC , \\
 &\quad CB \rightarrow HB , \\
 &\quad HB \rightarrow HC , \\
 &\quad HC \rightarrow BC , \\
 &\quad aB \rightarrow ab , \\
 &\quad bB \rightarrow bb , \\
 &\quad bC \rightarrow bc , \\
 &\quad cC \rightarrow cc . \\
 \}
 \end{aligned}$$

שאלה 4: אי כריעות (20 נקודות)

נתונה השפה הבאה:

$$L_{\geq 3} = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| \geq 3\}$$

$L_{\geq 3}$ מכילה קידודים של מכונות טירינג שמקבלות לפחות k מילימ' שנות.

סעיף א' (10 נקודות)

הוכחו כי $L_{\geq 3}$ שפה קבילה.

סעיף ב' (10 נקודות)

הוכחו כי $L_{\geq 3}$ לא כריעה.

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

עמוד 5 מטור 6

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד צ'בטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *טפסת

בעיהת סכום התת קבוצה $SUBSETSUM$: בהינתן קבוצת מספרים שלמים $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ומספר t , האם קיימת תת קבוצה $Y \subseteq S$ שסכום איבריה הוא t .

בעיהת סכום התת קבוצה כשפה פורמלית:

$$SUBSETSUM = \left\{ \langle S, t \rangle \mid t = \sum_{y \in Y} y \text{ קבוצת שלמים, } t \text{ שלם וקיימת תת-קבוצה } Y \subseteq S \text{ כך ש-} \right\}$$

בעיהת החלוקה ($PARTITION$) מוגדרת באופן הבא:

בhinnten קבוצת מספרים שלמים $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ האם קיימת חלוקה לשתי קבוצות A_1 ו- A_2 כך ש:

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \bullet$$

$$A_1 \cup A_2 = A \bullet$$

$$\sum_{a_i \in A_1} a_i = \sum_{a_i \in A_2} a_i = \frac{1}{2} \sum_{a_i \in A} a_i \bullet$$

בעיהת החלוקה כשפה פורמלית:

$$PARTITION = \left\{ A \mid \begin{array}{l} A \text{ קבוצת שלמים וקיימות } A_1, A_2 \subset A \text{ כך ש:} \\ A_1 \cup A_2 = A \text{ ו } A_1 \cap A_2 = \emptyset \text{ וגם } \sum_{a \in A_1} a = \sum_{a \in A_2} a = \frac{1}{2} \sum_{a \in A} a \end{array} \right\}$$

הוכחו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה $SUBSETSUM$ לשפה $PARTITION$. כלומר:

$$SUBSETSUM \leq_P PARTITION .$$

בשאלה זו עליכם:

סעיף א' (8 נקודות)

להגיד במדויק את הרדוקציה.

סעיף ב' (6 נקודות)

להראות שהרדוקציה היא רדוקציית התאמה.

סעיף ג' (6 נקודות)

להראות שהרדוקציה פולינומיאלית.