9 התפלגות בינומית, גיאומטרית ופואסונית 27-7

9.1 סיכום פונקצית הסתברות, תוחלת, שונות והתפלגות בינומיאלית, גיאומטרית ופואסונית

9.1 הגדרה. (פונקצית הסתברות / פונקצית התפלגות) הפונקצית ההתפלגות של משתנה מקרי בדיד (מ"מ) X מוגדרת להיות הפונקציה $f_X(k)$ המקבלת המ"מ X ומחזירה את ההסתברות כי למ"מ X יש ערך k:

$$f_X(k) = P(X = k) \ ,$$

עם התכונות

1. $\sum\limits_{k\in X} f_X(k) = 1$.
2. $f_X(k) \geq 0 \quad \forall k$.

9.2 דוגמא. אלון הוא סוחר ממולח בשוק ההון. הוא משקיע סכום של $1000\$$ במכשיר פיננסי אשר בכל שנה מכפיל את הכסף בסיכוי $\frac{2}{3}$ או מפסיד חצי מההשקעה בסיכוי $\frac{1}{3}$. השנים הן בלתי תלויות. נגדיר את X להיות שווי ההשקעה של אלון לאחר שנתיים. התומך של X כעת הוא

$$\text{supp}(X) = \{250, 1000, 4000\} \ ,$$

על כן, ההתפלגות של X היא

$$P_X(1000) = \frac{4}{9}, \quad P_X(4000) = \frac{4}{9}, \quad P_X(250) = \frac{1}{9}$$

ו - 0 אחרת.

9.3 הגדרה. (פונקצית התפלגות מצטברת) פונקצית התפלגות מצטברת מסומנת ע"י $F_X(x)$ של מ"מ בדיד X בעל פונקצית התפלגות $f_X(k)$ מוגדרת להיות

$$F_X(x) = \sum_{\substack{k\in X \\ k\leq x}} f_X(k) \ .$$

במילים אחרות, פונקצית התפלגות מצטברת $F_X(x)$ מוגדרת להיות הפונקציה שתחומה הוא הישר הממשי וטווחה הקטע $[0,1]$ ומקיימת

$$F_X(x) = P(X \leq x) \qquad \forall x \in X \ .$$

9.4 הגדרה. (תוחלת של משתנה נקרי בדיד) התוחלת של משתנה מיקרי X בעל פונקצית הסתברות $f_X(k)$ היא

$$E[X] = \sum_{k\in X} k f_X(k) \ .$$

9.5 דוגמא. התוחלת של הטלת קוביה היא

$$E[X] = \sum_{k=1}^{6} k\frac{1}{6} = \frac{7}{2} \ .$$

9.6 מסקנה. (תכונות של תוחלת) יהי c מספר קבוע. אזי

$$E(c) = c, \qquad E(cX) = cE(X), \qquad E(X_1 \pm X_2) = E(X_1) \pm E(X_2) \ .$$

9.7 הגדרה. (שונות של משתנה נקרי בדיד) השונות של משתנה מיקרי X בעל תוחלת $E[X]$ היא

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 \ .$$

9.8 מסקנה. (תכונות של שונות) יהי c מספר קבוע:

$$V(c)=0, \qquad V(cX)=c^2V(X), \qquad V(X\pm c)=V(X)\ .$$

9.9 הגדרה. (משתנה מקרי בינומי) מבצעים n ניסויים בלתי תלויים. לכל ניסוי יש 2 תוצאות אפשרויות: הצלחה עם הסתברות p או כישלון עם הסתברות $q\equiv 1-p$. משתנה מקרי בינומי X סופר את מספר הצלחות ב n הניסויים.

$$f_X(k)\equiv P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \qquad E[X]=np, \qquad V[X]=np(1-p)\ .$$

9.10 הגדרה. (משתנה גיאומטרי) מבצעים ניסויים בלתי תלויים עם הסתברות להצלחה p וכישלון $q\equiv 1-p$. משתנה מקרי גיאומטרי $X\sim G(p)$ סופר את מספר הניסויים עד להצלחה הראשונה (כולל).

$$f_X(k)\equiv P(X=k)=\begin{cases}(1-p)^{k-1}p & k1,2,\dots\\ 0 & \text{else}\end{cases}, \qquad E[X]=\frac{1}{p}\ , \qquad V(X)=\frac{1-p}{p^2}\ .$$

9.11 הגדרה. (משתנה פואסוני) משתנה פואסוני זה סופר את מספר האירועים שהתרחשו ביחידת זמן, או שטחף וכדומה. λ הוא הקצב הממוצע ליחידת זמן.

$$f_X(k)\equiv P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\ k=0,1,2,\dots\ , \qquad E[X]=\lambda\ , \qquad V[X]=\lambda\ .$$

9.2 תרגילים

9.12 דוגמא. בוחרים קוד באורך 10 תווים, כאשר כל תו נבחר באקראי מתוך הספרות 9 – 0 ללא קשר לתווים האחרים שנבחרו. נסמן ב- X מ"מ הסופרים את מספר הרצפים 11 בקוד. חשבו את $E[X]$.

פיתרון. נגדיר מ"מ $X_i,\ i=1,\dots,9$ כאשר X_i מקבל את הערך 1 אם ורק אם במקום ה- i מתחיל רצף של 11. לכן

$$X=\sum_{i=1}^{9}X_i\ .$$

$$\begin{aligned}E[X]=&E\left[\sum_{i=1}^{9}X_i\right]\\ =&\sum_{i=1}^{9}E\left[X_i\right]\\ =&\sum_{i=1}^{9}\left[1.P(X_i=1)+0.P(X_i=0)\right]\\ =&\sum_{i=1}^{9}P(X_i=1)\\ =&\sum_{i=1}^{9}\frac{1}{10}.\frac{1}{10}\\ =&\frac{9}{100}\ .\end{aligned}$$

■

9.13 דוגמא. ניקח משתנה מקרי X בעל התפלגות

$$P(X=k)=\begin{cases}\frac{1}{3} & k=-1,\\ \frac{1}{6} & k=0,\\ \frac{1}{2} & k=1.\end{cases}$$

חשבו את $E[X]$ ואת $E[X^4]$.

פיתרון. נשתמש בהגדרת התוחלת ונקבל

$$\begin{aligned} E[X] =&(-1).\frac{1}{3}+0.\frac{1}{6}+1.\frac{1}{2} &&= \frac{1}{6},\\ E[X^4] =&(-1)^4.\frac{1}{3}+0^4.\frac{1}{6}+1^4.\frac{1}{2} &&= \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

■

9.14 דוגמא. נניח ש X הוא המספר של רכבים אשר עוברים דרך השתיפת רכב בין השעות $16:00$ ו- $17:00$. ל- X יש את ההתפלגות

x	4	5	6	7	8	9
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

הפונקציה $g(X)=2X-1$ מציג את הרווח ב \$ עבור X. מצאו את תוחלת הרווח בין השעות $16:00$ ו- $17:00$.

פיתרון.

$$\begin{aligned} E[g(X)] =&E[2X-1]\\ =&\sum_{x=4}^{9}(2x-1)P_X(x)\\ =&7.\frac{1}{12}+9.\frac{1}{12}+11.\frac{1}{4}+13.\frac{1}{4}+15.\frac{1}{6}+17.\frac{1}{6}\\ =&\$12.67\ .\end{aligned}$$

■

9.15 דוגמא. בר היא בנקאית השקעות מתוחכמת המציעה ללקוחותיה את ההגרלה הבאה: בסיכוי $\frac{2}{5}$ תקבלו רווח של 10. בסיכוי $\frac{1}{5}$ לא תרוויחו ולא תפסידו דבר, ובסיכוי $\frac{3}{5}$ תפסידו 5. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של X המייצג את הרווח מהשקעה אצל בר.

פיתרון. תוחלת הרווח היא חיובית שכן

$$\begin{aligned} \mu_X =&10.\frac{2}{5}+0.\frac{1}{5}-5.\frac{2}{5} &&= 2,\\ \mu_{X^2} =&100.\frac{2}{5}+0^2.\frac{1}{5}+25.\frac{2}{5} &&= 50,\\ V(X) =&\mu_{X^2}-\mu_X^2 &&= 50-4=46,\\ \Rightarrow\quad \sigma_X =&\sqrt{46}\ . \end{aligned}$$

■

9.16 דוגמא. הסיכוי אשר חולה מחלים ממחלת דם חריג הוא 0.4. אם 15 אנשים נדבקים עם המחלה זו, מהי ההסתברות אשר

1. לפחות 10 יחלימו
2. בין 3 עד 8 יחלימו
3. בדיוק 5 יחלימו?

פיתרון. נגדיר X להיות מספר החולים אשר יחלימו.

.1

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) =& 1 - P(X < 10) \\ =& 1 - \sum_{k=0}^{9} f_{X\sim \text{Bin}(15,0.4)}(k) \\ =& 1 - \sum_{k=0}^{9} \binom{15}{k} 0.4^k (1-0.4)^{15-k} \\ =& 1 - 0.9662 = 0.0338 \ . \end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned} P(3 \leq X \leq 8) =& 1 - P(X < 10) \\ =& \sum_{k=3}^{8} f_{X\sim \text{Bin}(15,0.4)}(k) \\ =& \sum_{k=0}^{8} f_{X\sim \text{Bin}(15,0.4)}(k) - \sum_{k=0}^{2} f_{X\sim \text{Bin}(15,0.4)}(k) \\ =& \left(\sum_{k=0}^{8} - \sum_{k=0}^{2} \right) \binom{15}{k} 0.4^k (1-0.4)^{15-k} \\ =& 0.9050 - 0.0271 = 0.8779 \ . \end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned} P(X = 5) =& f_{X\sim \text{Bin}(15,0.4)}(k=5) \\ =& \binom{15}{5} 0.4^5 (1-0.4)^{10} \\ =& 0.1859 \ . \end{aligned}$$

■

9.17 דוגמא. מחשב משתמש במילים באורך 8 ביטים. כאשר משדרים ביטים בקו התקשורת יש סיכוי של $.1$) לשגיאה בביט בודד שמשודר. בכדי לשפר את איכות הקו, משודר כל ביט 3 פעמים ברצף והפענוח של כל שלשת ביטים מתבצע על ידי החלטת הרוב. למשל: אם רוצים לשדר 0, משדרים בקו "000" והמקלט מפענח את התשדורת כ-0 אם השלשה שהגיעה אליו מורכבת מלפחות שני אפסים.

1. חשבו את ההסתברות שמילת מחשב תפוענח נכון.
2. מצאו את התפלגות מספר המילים שפוענחו באופן שגוי בקובץ המכיל 1000 מילים.

פתרון: נשים לב שכמות הטעויות בשליחה של ביט בודד מתפלגת $X \sim \text{Bin}(3, 0.1)$ ולכן ההסתברות שתהיה שגיאה בפענוח ביט בודד היא

$$P(X \geq 2) = \binom{3}{2} 0.1^2 0.9 + \binom{3}{1} 0.1^3 = 0.028$$

1. כמות השגיאות במילה באורך 8 ביטים מתפלגת

$$Y \sim \text{Bin}(8, 0.028)$$

ולכן המילה תפוענח נכון בהסתברות

$$P(Y=0) = \binom{8}{0} p^0 (1-p)^8 = (1-0.028)^8 = 0.796 \ .$$

2. לאור הסעיף הקודם, ההסתברות לשגיאה בפענוח מילה בודדת היא

$$1 - 0.796 = 0.203 \ ,$$

לכן מספר המילים שפוענחו באופן שגוי בקובץ המכיל 1000 מילים מתפלג $\text{Bin}(1000, 0.203)$.

9.18 דוגמא. בכד 9 כדורים לבנים ו- 1 שחור. מושכים באקראי בזה אחר זה כדור מהכד. נסמן ב- X את מספר המשיכות עד לקבלת שחור וב- Y את מספר המשיכות עד לקבלת 3 שחורים.

מצאו את התפלגות X כאשר המשיכה היא עם החזרה.

פיתרון. X מקבל ערכים $\mathbb{N}/\{0\}$. בכל הוצאה ישנה הסתברות של $\frac{9}{10}$ לכדור לבן (כישלון) והסתברות של $p = \frac{1}{10}$ לכדור לבן (הצלחה). כלומר, קיבלנו מ"מ גאומטרי

$$X \sim G\left(\frac{1}{10}\right) \ .$$

■

9.19 דוגמא. חלקיקים נפלטים מחומר רדיואקטיבי בתהליך פואסון עם קצב של 0.5 חלקיקים לשנייה. חשבו את ההסתברויות הבאות:

1. ייפלט לפחות חלקיק אחד בשנייה נתונה.
2. ייפלטו יותר מ-3 חלקיקים ב-5 שניות.

פיתרון. התהליך בשאלה הוא תהליך פואסון בעל פרמטר $\lambda = 0.5$ לכן

.1

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - e^{-0.5}\frac{0.5^0}{0!} = 0.393 \ .$$

2. כעת בשאלה הוא תהליך פואסון שונה בעל פרמטר $\lambda = 5 \times 0.5 = 2.5$:

$$\begin{aligned}
P(X_5 > 3) =& 1 - P(X_5=0) - P(X_5=1) - P(X_5=2) - P(X_5=3) \\
=& 1 - e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^0}{0!} - e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^1}{1!} - e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^2}{2!} - e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^3}{3!} \\
=& 1 - e^{-2.5}\frac{(2.5)^0}{0!} - e^{-2.5}\frac{(2.5)^1}{1!} - e^{-2.5}\frac{(2.5)^2}{2!} - e^{-2.5}\frac{(2.5)^3}{3!} \\
=& 0.242
\end{aligned}$$

■

9.20 דוגמא. (פונקצית התפלגות) מטילים 2 קוביות. נסמן ב- X את סכום התוצאות שהתקבלו. מצאו את ההתפלגות של X.

פיתרון. נתחיל מהתומך. התוצאות האפשרויות בסכום של 2 קוביות הן המספרים הטבעיים מ- 2 עד 12. בכדי לחשב את ההסתברות לכל ערך נשתמש במרחב מדגם סימטרי: גודל מרחב המדגם הוא $6^2 = 36$, ככמות האפשרויות לבחור תוצאה לקוביה הראשונה מתוך 6 ותוצאה לקוביה השניה מתוך 6. נחשב את ההסתברות של כל תוצאה בנפרד:

$$\begin{aligned}
P(X=2) &= \frac{|\{(1,1)\}|}{6^2} &&= \frac{1}{36}, \\
P(X=3) &= \frac{|\{(2,1),(1,2)\}|}{6^2} &&= \frac{2}{36}, \\
P(X=4) &= \frac{|\{(1,3),(2,2),(3,1)\}|}{6^2} &&= \frac{3}{36}, \\
&\vdots \\
P(X=7) &= \frac{|\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}|}{6^2} &&= \frac{6}{36}, \\
P(X=8) &= \frac{|\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}|}{6^2} &&= \frac{5}{36}, \\
P(X=9) &= \frac{|\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}|}{6^2} &&= \frac{4}{36}, \\
&\vdots \\
P(X=12) &= \frac{|\{(6,6)\}|}{6^2} &&= \frac{1}{36},
\end{aligned}$$

ובאופן דומה ממשיכים לחשב את האפשרויות לכל הערכים האפשריים בתומך. באופן כללי קל לראות שהנוסחא, כאשר p זו הסכום של ה 2 הקוביות, היא (עיין משוואה (**??**) לעייל)

$$P(X=p) = \frac{1}{36} \times \begin{cases} (p-1) & p < 8 \\ (p-1) - 2(p-7) & 8 \le p < 14 \end{cases}$$

■

9.21 דוגמא. (פונקצית התפלגות מצטברת) אלון הוא סוחר ממולח בשוק ההון. הוא משקיע סכום של \$1000 במכשיר פיננסי אשר בכל שנה מכפיל את הכסף בסיכוי $\frac{2}{3}$ או מפסיד חצי מההשקעה בסיכוי $\frac{1}{3}$. השנים הן בלתי תלויות. נגדיר את X להיות שווי ההשקעה של אלון לאחר שנתיים. מצאו את פונקצית ההתפלגות המצטברת של X וציירו אותה.

פיתרון. כפי שציינו בדוגמה 9.2, התומך של X כעת הוא

$$\text{supp}(X) = \{250, 1000, 4000\}\ .$$

על כן, פונקצית ההתפלגות המצטברת של X היא

$$F_X(k) = P(X \le k) = \begin{cases} 0 & k < 250, \\ \frac{1}{9} & 250 \le k < 1000, \\ \frac{5}{9} & 1000 \le k < 4000, \\ 1 & 4000 \le k. \end{cases}$$

■