

המחלקה למדעי המחשב

26/11/24 08 : 00 – 03/12/24 23 : 59 תשפ"ד

אלגברה 2

מועד מיוחד

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר,

תשפ"ד סמסטר ב'

השאלון מכיל 12 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

הנחיות

- יש לפתור את כל השאלות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבירו היטב את מהלך הפתרון. תשובה ללא הסבר (גם נכונה) לא תתקבל.
- אסור לחלוטין לקבל עזרה מסטודנט אחר או מאף אחד. עליכם להעלות את הפתרונות שלכם דרך אתר המודל של הקורס אלגברה 2 למדמ"ח, או במייל, לא יאוחר משעה 23 : 59 – 12 – 24 – 3.
- פתרונות שהוגשו אחרי המועד הזה לא יתקבלו.
- מותר להשתמש בחומר של הקורס, התרגילים של הקורס והספרים של הקורס בלבד, אבל אסור להשתמש בשום מקורות אחרים.
- אחרי הגשת פתרונות אתם תקבלו הזמנה למבחן קצר בעל פה על הפתרונות שלכם.
- ייתכן שלא תעבור את המבחן או יורידו נקודות במקרה שאתם לא יכולים להסביר הפתרונות שלכם היטב.

שאלה 1 (25 נקודות)

תהי $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4i & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -4i \end{pmatrix}$$

(א) האם A לכסינה אוניטרית? אם כן מצאו Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $A = QDQ^{-1}$.

תהי $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ מטריצה מסדר $n \times n$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

(ב) אם B צמודה לעצמה אז כל ערך עצמי של B ממשי.

(ג) אם B סימטרי אז כל ערך עצמי של B ממשי.

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$. בכל אחד של הסעיפים הבאים, הוכיחו או הפריכו כי A הפיכה. אם כן, רשמו את המטריצה ההופכית A^{-1} של A כצירוף ליניארי של חזקות של A .

(א) הערכים עצמיים של A הם $\lambda = i, \lambda = -i, \lambda = 0$.

(ב) הערכים עצמיים של A הם $\lambda = i, \lambda = -i, \lambda = -1$.

שאלה 3 (25 נקודות)

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל \mathbb{C} ויהיו $S : V \rightarrow V, T : V \rightarrow V$ אופרטורים. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

(א) אם T אוניטרית אז הערך מוחלט של כל ערך עצמי שווה ל-1.

(ב) אם T צמוד לעצמו ו- S צמוד לעצמו אז TS צמוד לעצמו.

(ג) אם T נורמלי אז T צמוד לעצמו.

(ד) אם T נורמלי ו- S נורמלי אז $T + S$ נורמלי.

(ה) אם $TS = ST$ אז קיים וקטור $u \in V$ אשר וקטור עצמי של S וגם וקטור עצמי של T .

שאלה 4 (25 נקודות)

תהינה $A, B \in \mathbb{F}^{2 \times 2}$ מטריצות ריבועיות שמקיימות

$$A = AB - BA .$$

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) $A^2 = 0$

(ב) כל ערך עצמי של A חיובי.