

תרגילים : סיבוכיות

שאלה 1 הבעיית קליקה מוגדרת באופן הבא:

קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר טבעי k .
 פלט: האם G מכיל קליקה בגודל k ?

$$CLIQUE = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ מכיל קליקה בגודל } k \}.$$

הבעיית כיסוי בקדקודים מוגדרת:

קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר טבעי k .
 פלט: האם G מכיל כיסוי בקדקודים k ?

$$VC = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ מכיל כיסוי בקדקודים בגודל } k \}.$$

הוכיחו כי קיימת רדוקציה זמן-פולינומיאלית מבעיית $CLIQUE$ לבעיית VC : כלומר

$$CLIQUE \leq_p VC.$$

שאלה 2

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$
 תת-קבוצת קודקודים $S \subseteq V$ היא **קבוצת בלתי תלויה** אם התנאי הבא מתקיים:
 אם $u_1, u_2 \in S$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

תת-קבוצת קודקודים $C \subseteq V$ תקרא **קליקה** אם התנאי הבא מתקיים:
 אם $u_1, u_2 \in C$ אז $(u_1, u_2) \in E$.

הבעיית IS מוגדרת:

$$IS = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ לפחות} \}$$

הבעיית $CLIQUE$ מוגדרת:

$$CLIQUE = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל } k \text{ לפחות} \}$$

הוכיחו כי

$$IS \leq_p CLIQUE.$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה IS לשפה $CLIQUE$.
 יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 3

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$
 תת-קבוצת קדקודים $S \subseteq V$ היא **קבוצת בלתי תלויה** אם התנאי הבא מתקיים:
 אם $u_1, u_2 \in S$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

תת-קבוצת קודקודים $U \subseteq V$ היא **כיסוי קודקודים** אם התנאי הבא מתקיים:
אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \in U$ או $u_2 \in U$.
השפה IS מוגדרת:

$$IS = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ לפחות} \}$$

השפה VC מוגדרת:

$$VC = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל כיסוי קודקודים בגודל } k \text{ לכל היותר} \}$$

הוכיחו כי

$$IS \leq_P VC.$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה IS לשפה VC .
יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 4 בעיית סכום התת קבוצה (subsetSum): בהינתן קבוצת מספרים שלמים $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

ומספר שלם t , האם קיימת תת קבוצה $Y \subseteq S$ שסכום איבריה הוא בדיוק t .
בעיית סכום התת קבוצה כשפה פורמלית:

$$\text{SubsetSum} = \left\{ \langle S, t \rangle \mid t = \sum_{y \in Y} Y \text{ כך ש-} Y \subseteq S \text{ קבוצה תת-קבוצה} \right\}$$

בעיית החלוקה (Partition): בהינתן קבוצת מספרים שלמים $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ האם קיימת תת-קבוצה $Y \subseteq S$ כך ש-
 $\sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in S \setminus Y} y$.
בעיית החלוקה כשפה פורמלית:

$$\text{partition} = \left\{ S \mid \sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in S \setminus Y} y \text{ כך ש-} Y \subseteq S \text{ קבוצה תת-קבוצה, וקיימת תת-קבוצה} \right\}$$

הוכיחו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה SubsetSum לשפה partition. כלומר:

$$\text{SubsetSum} \leq_P \text{Partition}.$$

בשאלה זו עליכם:

(א) להגדיר במפורש את הרדוקציה.

(ב) להראות שהרדוקציה היא רדוקציית התאמה.

(ג) להראות שהרדוקציה פולינומיאלית.

תשובות

שאלה 1 בהינתן זוג $\langle G, k \rangle$ הקלט עבור $CLIQUE$, ניצור זוג $\langle G', k' \rangle$, הקלט של VC ע"י פונקצית הרדוקציה

$$\begin{aligned}\langle G, k \rangle \in CLIQUE &\Rightarrow \langle G', k' \rangle \in VC \\ \langle G, k \rangle \in CLIQUE &\Leftarrow \langle G', k' \rangle \in VC\end{aligned}$$

הגדרת הרדוקציה

• נגדיר את G' להיות הגרף המשלים $\bar{G}(V, \bar{E})$:

$$\bar{E} = \{(u_1, u_2) \mid (u_1, u_2) \notin E\}.$$

• נגדיר $k' = |V| - k$.

נכונות הרדוקציה

כיוון \Leftarrow

נניח כי $\langle G, k \rangle \in CLIQUE$.

\Leftarrow מכיל קליקה C בגודל k .

\Leftarrow לכל $(u_1, u_2) \in \bar{E}$ של \bar{G} , מתקיים $(u_1, u_2) \notin E$ ולכן $u_1 \notin C$ או $u_2 \notin C$.

\Leftarrow לכל שני קודקודים u_1, u_2 ב- \bar{G} , $u_1 \in V \setminus C$ או $u_2 \in V \setminus C$.

\Leftarrow הקובצת קודקודים $V \setminus C$ היא כיסוי בקודקודים של \bar{G} בגודל $k' = |V| - k$.

$\Leftarrow \langle G', k' \rangle \in VC$.

כיוון \Rightarrow

נניח כי $\langle G', k' \rangle \in VC$.

\Leftarrow מכיל כיסוי בקודקודים S בגודל $k' = |V| - k$.

\Leftarrow לכל שני קודקודים u_1, u_2 של G' , אם $(u_1, u_2) \in \bar{E}$ אז $u_1 \in S$ או $u_2 \in S$.

השלילה הלוגית של גרירה זו היא: אם $u_1 \notin S$ וגם $u_2 \notin S$ אז $(u_1, u_2) \notin \bar{E}$.

\Leftarrow אם $u_1 \in V \setminus S$ וגם $u_2 \in V \setminus S$ אז $(u_1, u_2) \in \bar{E}$.

\Leftarrow הקבוצת קודקודים $V \setminus S$ היא קליקה ב- G בגודל $k' = |V| - k$.

\Leftarrow מכיל קליקה בגודל k .

שאלה 2פונקציית הרדוקציה:

אנחנו נגדיר פונקציית הרדוקציה f שבהינתן זוג $\langle G, k \rangle \in IS$ (הקלט של IS), תיצור $\langle G', k' \rangle \in CLIQUE$ (הקלט של $CLIQUE$), כלומר

$$f(\langle G, k \rangle) = \langle G', k' \rangle. \quad (*1)$$

כך שהתנאי הבא מתקיים:

$$\langle G, k \rangle \in IS \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in CLIQUE. \quad (*2)$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת לפי התנאים הבאים:

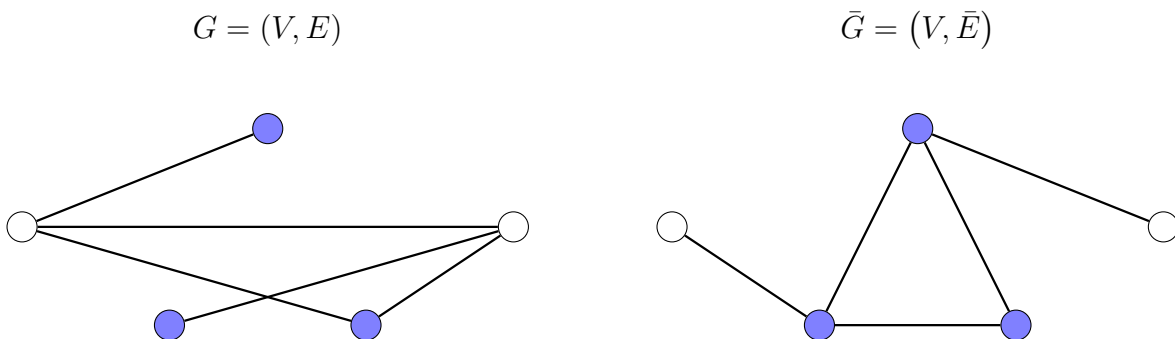
(1) בהינתן גרף $G = (V, E)$.

אז G' הוא הגרף המשלים $\bar{G} = (V, \bar{E})$, כאשר

$$\bar{E} = \{(u_1, u_2) \mid (u_1, u_2) \notin E\}.$$

(2) $k' = k$.

כדוגמה: בהינתן הגרף $G = (V, E)$ שמכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל $k = 3$. הפונקציית הרדוקציה יוצרת את הגרף $\bar{G} = (V, \bar{E})$ ואת המספר $k' = k = 3$, כמתואר בתרשים למטה:

נכונות הרדוקציה

כעת נוכיח שמתקיים: $\langle G, k \rangle \in IS \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in CLIQUE$

כיוון \Leftarrow

בהינתן גרף $G = (V, E)$ ושלם k .

נניח כי $\langle G, k \rangle \in IS$.

\Leftarrow מכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל k לפחות.

\Leftarrow מכיל קבוצה בלתי תלויה S בגודל k .

\Leftarrow אם $u_1, u_2 \in S$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

כלומר, כל שני קדקודים ב- S לא מחוברים בצלע של G .

\Leftarrow אם $u_1, u_2 \in S$ אז $(u_1, u_2) \in \bar{E}$.
 כלומר, כל שני קדקודים ב- S מחוברים בצלע של \bar{G} .
 \Leftarrow הקבוצה S היא קליקה בגודל k של \bar{G} .
 \Leftarrow הקבוצה S היא קליקה בגודל $k' = k$ של $G' = \bar{G}$.
 $\Leftarrow \langle G', k' \rangle \in CLIQUE$

\Rightarrow כיוון

בהינתן גרף G' ושלם k' .
 נניח כי $\langle G', k' \rangle \in CLIQUE$.
 $\Leftarrow \langle \bar{G}, k \rangle \in CLIQUE$ (כי על פי ההגדרה של הפונקציה הרדוקציה, $G' = \bar{G}$ ו- $k' = k$).
 $\Leftarrow \bar{G}$ מכיל קליקה בגודל k לפחות.
 $\Leftarrow \bar{G}$ מכיל קליקה C בגודל k .
 \Leftarrow אם $u_1 \in C$ וגם $u_2 \in C$ אז $(u_1, u_2) \in \bar{E}$.
 כלומר, כל שני קדקודים ב- C מחוברים בצלע של \bar{G} .
 \Leftarrow אם $u_1 \in C$ וגם $u_2 \in C$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.
 כלומר, כל שני קדקודים ב- C לא מחוברים בצלע של הגרף G .
 \Leftarrow הקבוצה C היא קבוצה בלתי תלוייה בגודל k של G .
 $\Leftarrow \langle G, k \rangle \in IS$

שאלה 3

פונקציה הרדוקציה:

נגדיר פונקציה הרדוקציה f שבהינתן זוג $\langle G, k \rangle \in IS$, (הקלט של IS), יוצרת $\langle G', k' \rangle \in VC$, (הקלט של VC), אשר מקיימת את התנאי:

$$\langle G, k \rangle \in IS \iff \langle G', k' \rangle \in VC. \quad (*)$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

(1) בהינתן הגרף $G = (V, E)$, אז הגרף G' הוא אותו גרף $G = (V, E)$.

(2) $k' = |V| - k$

נכונות הרדוקציה

כעת נוכיח שמתקיים: $\langle G, k \rangle \in IS \iff \langle G', k' \rangle \in VC$

\Leftarrow כיוון

בהינתן גרף $G = (V, E)$ ושלם k .
 נניח כי $\langle G, k \rangle \in IS$.
 \Leftarrow G מכיל קבוצה בלתי תלוייה S בגודל k לפחות: $|S| \geq k$.
 \Leftarrow אם $u_1, u_2 \in S$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.
 כלומר, כל שני קדקודים ב- S לא מחוברים בצלע ב- G .
 \Leftarrow השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:
 אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \notin S$ או $u_2 \notin S$.
 \Leftarrow אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \in V \setminus S$ או $u_2 \in V \setminus S$.
 \Leftarrow התת-קבוצה $V \setminus S$ היא כיסוי קודקודים של G .
 $|S| \geq k$ ו- $|V \setminus S| = |V| - |S|$ לכן $|V \setminus S| \leq |V| - k$.
 \Leftarrow $G' = G$ מכיל כיסוי קודקודים U בגודל $|V| - k \leq k'$ לכל היותר.
 $\Leftarrow \langle G', k' \rangle \in VC$.
 \Rightarrow כיוון

בהינתן גרף G' ושלם k' .
 נניח כי $\langle G', k' \rangle \in VC$.
 \Leftarrow $G' = (V, E)$ מכיל כיסוי קודקודים U בגודל $k' \leq k'$ לכל היותר: $|U| \leq k'$.
 \Leftarrow אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \in U$ או $u_2 \in U$.
 \Leftarrow השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:
 אם $u_1 \notin U$ וגם $u_2 \notin U$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.
 \Leftarrow השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:
 אם $u_1 \in V \setminus U$ וגם $u_2 \in V \setminus U$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.
 \Leftarrow התת-קבוצה $S = V \setminus U$ היא קבוצה בלתי תלוייה.
 $|S| = |V| - |U|$ ו- $|U| \leq k'$ אז $|S| \geq |V| - k' = k$.
 \Leftarrow $G' = G$ מכיל קבוצה בלתי תלוייה S בגודל $|V| - k' = k$ לפחות.
 $\Leftarrow \langle G, k \rangle \in IS$.

שאלה 4

(א) נבנה פונקציה הרדוקציה $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ שמוגדרת

$$f(\langle S, t \rangle) = \langle S' \rangle$$

כאשר $\langle S, t \rangle$ קלט של SubsetSum ו- $\langle S' \rangle$ קלט של Partition.

(1) יהי $s = \sum_{x \in S} x$

(2) נגדיר את הקבוצה החדשה S' על ידי הוספת האיבר $s - 2t$ לקבוצה S :

$$S' = S \cup \{s - 2t\}.$$

⇐ כיוון

(ב)

נניח ש- $\langle S, t \rangle \in \text{SubsetSum}$.

$$\Leftarrow \text{קיימת תת-קבוצה } Y \subseteq S \text{ כך ש- } t = \sum_{y \in Y} y.$$

לכן:

$$\begin{aligned} \sum_{y \in (Y \cup \{s-2t\})} y &= |Y| + s - 2t \\ &= t + s - 2t \\ &= s - t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{y \in S' \setminus (Y \cup \{s-2t\})} y &= |S'| - (|Y| + s - 2t) \\ &= |S'| - |Y| - s + 2t \\ &= |S| + s - 2t - |Y| - s + 2t \\ &= |S| - |Y| \\ &= s - t. \end{aligned}$$

⇐ התת-קבוצה $Y \cup \{s - 2t\}$ והתת-קבוצה $S' \setminus (Y \cup \{s - 2t\})$ מהוות חלקיה של הקבוצה S' .
⇐ $\langle S' \rangle \in \text{Partition}$.

⇒ כיוון

נניח ש- $\langle S' \rangle \in \text{Partition}$.

⇐ קיימות תת-קבוצות $S'_1, S'_2 \subseteq S'$ כך שמתקיים

$$S'_1 \cup S'_2 = S' \quad (1*)$$

-1

$$\sum_{x \in S'_1} x = \sum_{x \in S'_2} x. \quad (2*)$$

הקבוצה S קשור לקבוצה S' על ידי היחס $S' = S \cup \{s - 2t\}$
לכן

$$S'_1 \cup S'_2 = S \cup \{s - 2t\} \quad (3*)$$

ללא הגבלת כלליות אנחנו נגדיר את התת-קבוצה $S_1 \subseteq S$ של הקבוצה S להיות

$$S_1 = S'_1 \cup \{s - 2t\} ,$$

ואנחנו נגדיר את התת-קבוצה $S_2 \subseteq S$ של הקבוצה S להיות

$$S_2 = S'_2 .$$

מכאן מנובע מהמשוואה (3*) ש:

$$S_1 \cup S_2 = S'_1 \cup S'_2 + \{s - 2t\} = S \cup \{s - 2t\} \Rightarrow S_1 \cup S_2 = S . \quad (4*)$$

\Leftarrow ניתן לרשום משוואה (2*) בצורה הבאה:

$$\sum_{x \in (S_1 \cup \{s-2t\})} x = \sum_{x \in S_2} x . \quad (5*)$$

ניתן לחלק את הסכום בצד השמאל של המשוואה (5*) ולרשום אותה בצורה הבאה:

$$\sum_{x \in S_1} x + s - 2t = \sum_{x \in S_2} x . \quad (6*)$$

נוסיף את הסכום $\sum_{x \in S_1} x$ לשני האגפים של משוואה של (6*) ונקבל

$$\sum_{x \in S_1} x + \sum_{x \in S_1} x + s - 2t = \sum_{x \in S_2} x + \sum_{x \in S_1} x . \quad (7*)$$

הסכום בצד הימין של משוואה (7*) הוא הסכום $\sum_{x \in (S_1 \cup S_2)} x$.

לפי המשוואה (4*), $S_1 \cup S_2 = S$, לכן $\sum_{x \in S} x = \sum_{x \in (S_1 \cup S_2)} x$.

לכן הסכום בצד הימין של משוואה (7*) הוא הסכום של כל האיברים אשר בקבוצה S .

אנחנו מסמנים את הסכום הזה כ- $\sum_{x \in S} x = s$. לכן ניתן לרשום את משוואה (7*) בצורה הבאה:

$$\sum_{x \in S_1} x + \sum_{x \in S_1} x + s - 2t = s . \quad (8*)$$

אפשר לבטל s בצד שמאל ובצד ימין ולהעביר את ה- $2t$ לצד ימין ולקבל את המשוואה:

$$\sum_{x \in S_1} x + \sum_{x \in S_1} x = 2t , \quad (9*)$$

זאת אומרת

$$2 \sum_{x \in S_1} x = 2t \Rightarrow \sum_{x \in S_1} x = t . \quad (10*)$$

\Leftarrow קיימת תת קבוצה $S_1 \subseteq S$ של S שמקיימת את התנאי $\sum_{x \in S_1} x = t$.

$\Leftarrow \langle S, t \rangle \in \text{SubsetSum}$

ג

הפונקציה הרדוקציה f , על קלט $\langle S, t \rangle$ מחזירה את הפלט $\langle S' \rangle$ כאשר $S' = S \cup \{s - 2t\}$.

לכן הפונקציה מחשבת את הסכום s של כל האיברים שבקבוצה S ואז מחשבת את החיסור $s - 2t$.

נסמן $n = |S|$ האורך של הקבוצה S .

אפשר לתאר את f בפסאודו-קוד באופן הבא:

שלב 1. הפונקציה f מאתחלת משתנה $s = 0$.

שלב 2. הפונקציה נכנסת ללואה מעל כל האיברים שבקבוצה S ומחברת האיבר הנוכחי לערך של s כל איטרציה.

שלב 3. בסוף הפונקציה מחשבת את החיסור $s - 2t$.

שלב 4. הפונקציה מחזירה את הקבוצה החדשה $S' = S \cup \{s - 2t\}$.

• שלב 1 דורש צעד אחד. לכן הסיבוכיות של שלב 1 הוא $O(1)$.

• שלב 2 דורש n צעדים. לכן הסיבוכיות של שלב 2 הוא $O(n)$.

• שלב 3 דורש צעד אחד. לכן הסיבוכיות של שלב 3 הוא $O(1)$.

• שלב 4 דורש צעד אחד. לכן הסיבוכיות של שלב 4 הוא $O(1)$.

בסך הכל הסיבוכיות של הפונקציה f היא

$$O(1) + O(n) + O(1) + O(1) = O(n).$$