

# אלגברה ליניארית

בוחן מגן

מדמ"ח תשפ"ד סמסטר ב'

**שאלה 1. ( 42 נקודות )** פתרו בשיטת גאוס את המערכת הבאה:  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ , כאשר

$$A = \begin{pmatrix} a & a-1 & 2a \\ -a & 2-a & 2-2a \\ a & a+1 & 2+a \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

א' (9 נק') דרג מטריצה מורחבת וציין ערכים מובילים שלה.

ב' (6 נק') יש לציין עבור איזה ערך של  $a$  למערכת יש פתרון יחיד. נמקו היטב.

ג' (6 נק') במקרה של אינסוף פתרונות מצאו את הפתרון הכללי.

ד' (6 נק') עבור איזה ערך של  $a$  אין פתרון? נמקו היטב.

ח' (15 נק') פתרו את המערכת כאשר  $a = -1$  בעזרת המטריצה ההופכית  $A^{-1}$  או בעזרת כלל קרמר. יש להשתמש באחת משתי השיטות. פתרון אחר לא יתקבל.

**שאלה 2 ( 30 נקודות )**

א' (24 נק') עבור כל אחד מהקבוצות הבאות עם פעולות הרגילות, קבוע האם היא מהווה שדה. במידה וכן - ציינו זאת, במידה ולא - ציינו תכונה אחת של שדה שאינה מתקיימת.

1 המספרים הטבעיים

2 המספרים השלמים

3 המספרים הרציונליים

4 המספרים הממשיים

5 המספרים המרוכבים

6 קבוצת השאריות בחלוקה ב-  $p$

7 קבוצת המטריצות בגודל  $n \times n$

8 קבוצת המטריצות לכסניות בגודל  $n \times n$

ב' (6 נק') עבור מספר מרוכב  $z = a + bi$ , הוכיחו ש-

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

### שאלה 3. ( 30 נקודות )

א' (10 נק') פתרו את משוואה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

מעל  $\mathbb{Z}_3$ .

ב' (10 נק') נתונה מטריצה  $S$  סימטרית ( $S = S^T$ ) כלשהן. הראו כי המטריצה הבאה היא סימטרית:

$$M = AB^T SBA^T$$

ג' (10 נק') נתונות מטריצה  $A$  מגודל  $6 \times 6$  ומטריצה  $B$  מגודל  $6 \times 12$ . מצא גודל של מטריצה

$$C = B^T A B$$

בהצלחה!