

שיעור 1

מכונות טיורינג

1.1 הגדרה של מכונת טיורינג

הגדרה 1.1 מכונת טיורינג (הגדרה היוריסטית)

הקלט והסרט

- מכונת טיורינג (מ"ט) קורא קלט.
- הקלט עצמו נמצא על סרט אינסופי מחולק למשבצות.
- כל תו של הקלט כתוב במשבצת אחת של הסרט.
- במכונת טיורינג אנחנו מניחים שהסרט אינסופי לשני הכיוונים.
- * משמאל לתחילת הקלט יש רצף אינסופי של תווי רווח " ".
- * מימין לסוף הקלט יש רצף אינסופי של תווי רווח " ".

...	␣	␣	a	b	b	b	a	a	␣	␣	␣	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

הראש

- במצב ההתחלתי הראש בקצה השמאלי של הקלט.

...	␣	␣	a	b	b	b	a	a	␣	␣	␣	...
			↑									

- הראש יכול לזוז ימינה על הסרט וגם שמאלה על הסרט.
- הראש קורא את התוכן של המשבצת שבה הוא נמצא.
- הראש יכול לכתוב על משבצת, אבל רק על המשבצת שבה הראש נמצא.

תאור העבודה של המכונה

- בתחילת הריצה, הקלט כתוב התחילת הסרט כאשר מימינו נמצא רצף אינסופי של תווי ␣ -ים.
- הראש מצביע על התא הראשון בסרט והמכונה נמצאת במצב התחלתי q_0 .

q_0	...	␣	␣	a	b	b	b	a	a	␣	␣	␣	...
				↑									

- בכל צעד חישוב, בהתאם למצב הנוכחי ולאות שמתחת לראש (התו הנקרא), המכונה מחליטה:
 - * לאיזה מצב לעבור
 - * מה לכתוב מתחת לראש (התו הנכתב)
 - * לאן להזיז את הראש (תא אחד ימינה, או תא אחד שמאלה, או להישאר במקום).
- למכונה ישנם שני מצבים מיוחדים:
 - * q_{acc} : אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל- q_{acc} היא עוברת ומקבלת.
 - * q_{rej} : אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל- q_{rej} היא עוברת ודוחה.
 - * אם המכונה לא מגיעה ל- q_{acc} או q_{rej} היא תמשיך לרוץ לנצח.

הגדרה 1.2 מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$$

כאשר:

Q	קבוצת מצבים סופית ולא ריקה
Σ	אלפבית הקלט
Γ	אלפבית הסרט
δ	פונקציית המעברים
q_0	מצב התחלתי
q_{acc}	מצב מקבל יחיד
q_{rej}	מצב דוחה יחיד

$$_ \notin \Sigma$$

$$\Sigma \subseteq \Gamma, _ \in \Gamma$$

$$\delta : (Q \setminus \{q_{rej}, q_{acc}\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$$

1.1 דוגמה

נבנה מכונת טיורינג אשר מקבלת מילה אם היא בשפה

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#a_w = \#b_w\}.$$

ז"א השפת כל המילים עם מספר שווה אותיות a ו b . הפאודו-קוד של המכונה, כדלקמן.פסאודו-קוד

- (1) סורקים את הקלט משמאל לימין.
 - אם לא מצאנו a וגם לא מצאנו $b \Leftarrow$ מקבלת.
 - אם האות הראשונה שהראש מצא היא a , כותבים עליו \checkmark , ועוברים לשלב (2).
 - אם האות הראשונה שהראש מצא היא b , כותבים עליו \checkmark , ועוברים לשלב (3).
- (2) ממשיכים לזוז ימינה עד שנמצא b תואם.
 - אם לא מצאנו $b \Leftarrow$ דוחה.
 - אם מצאנו b כותבים עליו \checkmark , חוזרים לתחילת הקלט וחוזרים לשלב (1).
- (3) ממשיכים לזוז ימינה עד שנמצא a תואם.
 - אם לא מצאנו $a \Leftarrow$ דוחה.
 - אם מצאנו a כותבים עליו \checkmark , חוזרים לתחילת הקלט וחוזרים לשלב (1).

כעת נתן הגדרה פורמלית של המכונת טיורינג שמבצעת את האלגוריתם הזה.

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$$

כאשר Q הקבוצת המצבנים הבאה:

$$Q = \{q_0, q_a, q_b, q_{back}, q_{rej}, q_{acc}\}.$$

המשמעותם של כל המצבים נרשמים בטבלה למטה:

q_0	המצב ההתחלתי. אליו נחזור אחרי כל סבב התאמה של זוג אותיות.
q_a	מצב שבו ראינו a ומחפשים b תואם.
q_b	מצב שבו ראינו b ומחפשים a תואם.
q_{back}	מצב שנשתמש בו כדי לחזור לקצה השמאלי של הקלט ולהתחיל את הסריקה הבאה (סבב ההתאמה הבא).
q_{acc}	מצב מקבל.
q_{rej}	מצב דוחה.

האלפבית של הקלט, Σ , והלפבית של הסרט, Γ , הינן:

$$\Sigma = \{a, b\}, \quad \Gamma = \{a, b, \sqcup, \checkmark\}.$$

הפונקציות המעבריים $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ היא מוגדרת כדלקמן.

$$\delta(q_0, a) = (q_a, \checkmark, R),$$

$$\delta(q_0, b) = (q_b, \checkmark, R),$$

$$\delta(q_0, \sqcup) = (q_{acc}, \sqcup, R),$$

$$\delta(q_a, \checkmark) = (q_a, \checkmark, R),$$

$$\delta(q_a, a) = (q_a, a, R),$$

$$\delta(q_a, b) = (q_{back}, \checkmark, L),$$

$$\delta(q_b, \checkmark) = (q_b, \checkmark, R),$$

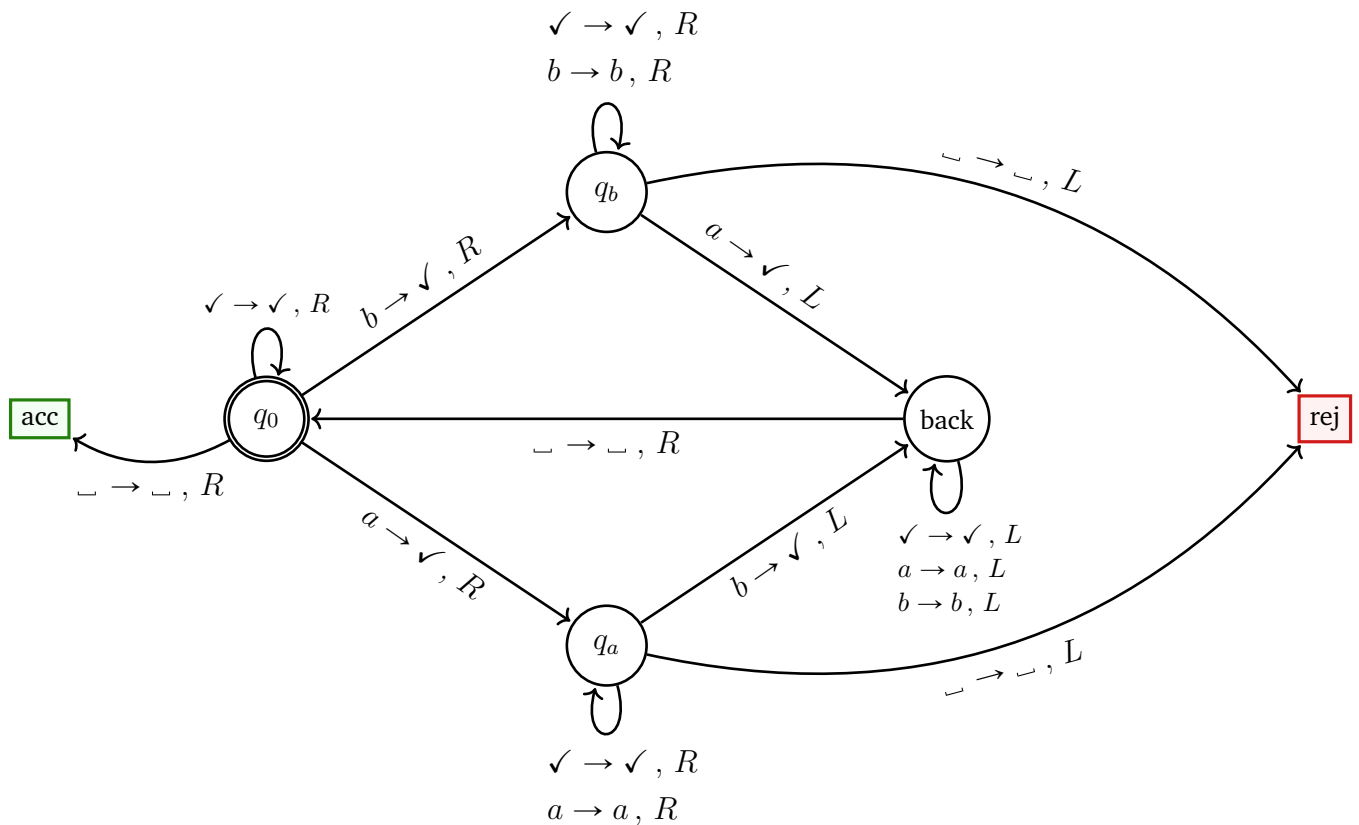
$$\delta(q_b, b) = (q_a, b, R),$$

$$\delta(q_b, a) = (q_{back}, \checkmark, L).$$

לעתים קל יותר לרשום את פונקציית המעבריים δ כטבלה:

$Q \backslash \Gamma$	a	b	\sqcup	\checkmark
q_0	(q_a, \checkmark, R)	(q_b, \checkmark, R)	(q_{acc}, \sqcup, R)	(q_0, \checkmark, R)
q_a	(q_a, a, R)	$(q_{back}, \checkmark, L)$	(q_{rej}, \sqcup, L)	(q_a, \checkmark, R)
q_b	$(q_{back}, \checkmark, L)$	(q_b, b, R)	(q_{rej}, \sqcup, L)	(q_b, \checkmark, R)
q_{back}	(q_{back}, a, L)	(q_{back}, b, L)	(q_0, \sqcup, R)	$(q_{back}, \checkmark, L)$

תרשים מצבים



1.2 דוגמה

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה .aab

פתרון:

⌊	q_0	a	a	b	⌊
⌊	✓	q_a	a	b	⌊
⌊	✓	a	q_a	b	⌊
⌊	✓	q_{back}	a	✓	⌊
⌊	q_{back}	✓	a	✓	⌊
q_{back}	⌊	✓	a	✓	⌊
⌊	q_0	✓	a	✓	⌊
⌊	✓	q_0	a	✓	⌊
⌊	✓	✓	q_a	✓	⌊
⌊	✓	✓	✓	q_a	⌊
⌊	✓	✓	rej	✓	⌊

1.3 דוגמה

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה .abbbbaa

פתרון:

⌊	q_0	a	b	b	b	a	a	⌊
⌊	✓	q_a	b	b	b	a	a	⌊
⌊	q_{back}	✓	✓	b	b	a	a	⌊
q_{back}	⌊	✓	✓	b	b	a	a	⌊
⌊	q_0	✓	✓	b	b	a	a	⌊
⌊	✓	q_0	✓	b	b	a	a	⌊
⌊	✓	✓	q_0	b	b	a	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	q_b	b	a	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	b	q_b	a	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	q_{back}	b	✓	a	⌊
⌊	✓	✓	q_{back}	✓	b	✓	a	⌊
⌊	✓	q_{back}	✓	✓	b	✓	a	⌊
q_{back}	⌊	✓	✓	✓	b	✓	a	⌊
⌊	q_0	✓	✓	✓	b	✓	a	⌊
⌊	✓	q_0	✓	✓	b	✓	a	⌊
⌊	✓	✓	q_0	✓	b	✓	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	q_0	b	✓	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	✓	q_b	✓	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	✓	✓	q_b	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	✓	q_{back}	✓	✓	⌊
⌊	✓	✓	✓	q_{back}	✓	✓	✓	⌊

⊥	✓	✓	q_{back}	✓	✓	✓	✓	⊥
⊥	✓	q_{back}	✓	✓	✓	✓	✓	⊥
⊥	q_{back}	✓	✓	✓	✓	✓	✓	⊥
q_{back}	⊥	✓	✓	✓	✓	✓	✓	⊥
⊥	q_0	✓	✓	✓	✓	✓	✓	⊥
⊥	✓	q_0	✓	✓	✓	✓	✓	⊥
⊥	✓	✓	q_0	✓	✓	✓	✓	⊥
⊥	✓	✓	✓	q_0	✓	✓	✓	⊥
⊥	✓	✓	✓	✓	q_0	✓	✓	⊥
⊥	✓	✓	✓	✓	✓	q_0	✓	⊥
⊥	✓	✓	✓	✓	✓	✓	q_0	⊥
⊥	✓	✓	✓	✓	✓	✓	⊥	q_{acc}

הגדרה 1.3 קונפיגורציה

תהי $M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ מכונת טיורינג. קונפיגורציה של M הינה מחרוזת

$$uq\sigma v$$

כאשר משמעות:

$$u, v \in \Gamma^*, \quad \sigma \in \Gamma, \quad q \in Q.$$

q מצב המכונה,
 σ הסימון במיקום הראש
 u תוכן הסרט משמאל לראש,
 v תוכן הסרט מימין לראש.

דוגמה 1.4 (המשך של דוגמה 1.2)

u	q	σ	v
⊥	q_0	a	a b ⊥
⊥ ✓	q_a	a	b ⊥
⊥ ✓ a	q_a	b	⊥
⊥ ✓	q_{back}	a	✓ ⊥
⊥	q_{back}	✓	a ✓ ⊥
⊥	q_{back}	⊥	✓ a ✓ ⊥
⊥	q_0	✓	a ✓ ⊥
⊥ ✓	q_0	a	✓ ⊥
⊥ ✓ ✓	q_a	✓	⊥
⊥ ✓ ✓ ✓	q_a	⊥	⊥
⊥ ✓ ✓	q_{rej}	✓	⊥

דוגמה 1.5

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת כל מילה בשפה

$$L = \{a^n \mid n = 2^k, k \in \mathbb{N}\}$$

ז"א מילים בעלי מספר אותיות a אשר חזקה של 2.

פתרון:

ראשית נשים לב למשפט הבא:

משפט 1.1

מספר שלם n שווה לחזקה אי-שלילית של 2, כלומר $n = 2^k$ ($k \geq 0$) אם ורק אם קיים שלם m עבורו חילוק של n ב-2 בדיוק m פעמים נותן 1.

הוכחה:

כיוון \Leftarrow

אם $n = 2^k$ ($k \geq 0$) אז $\frac{n}{2^k} = 1$.

כיוון \Rightarrow

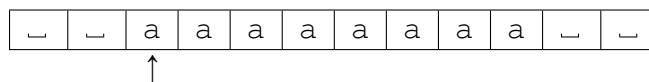
■ אם קיים $m \geq 0$ עבורו $\frac{n}{2^m} = 1$ אז $n = 2^m$ ולכן n שווה לחזקה אי-שלילית של 2.

לאור המשפט הזה נבנה אלגוריתם אשר מחלק את מספר האותיות במילה ב-2 שוב ושוב בצורה איטרטיבית.

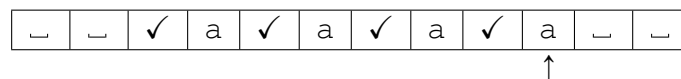
- אם אחרי סיבוב מסויים נקבל מספר אי-זוגי שונה מ-1, אז אין מצב שמספר האותיות a הוא חזקה של 2.
- בצד שני אם אחרי סיבוב כלשהו נקבל בדיוק a אחת הנשארת, ז"א אחרי מספר מסוים של חילוקים של המספר אותיות a קיבלנו 1, אזי מובטח לנו שהמספר של אותיות a הוא שווה לחזקה של 2.

כעת נסביר כיצד המכונת טיורינג מבצעת את השיטה הזאת בפועל כדלקמן.

(1) במצב ההתחלתי יש מחרוזת של רצף אותיות a כתובה על הסרט והראש נמצא מתחת האות הראשונה.



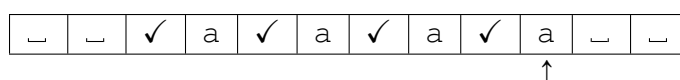
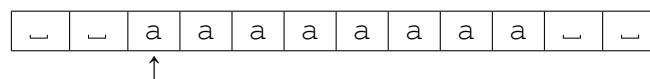
(2) עוברים על הקלט משמאל לימין ומבצעים מחיקה לסירוגין של האות a . כלומר, אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר וכן הלאה, עד שמגיעים לקצה הימין של המילה.



(3) אחרי שהראש הגיע לסוף המילה:

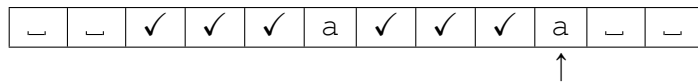
- אם מצאנו אות a אחת בדיוק \Leftarrow המכונה תקבל.
- אם כתוב ✓ בתו האחרון \Leftarrow המכונה תדחה.
- אחרת, אם כתוב a בתו האחרון הראש חוזר לתחילת המחרוזת וחוזרים לשלב (2).

כדוגמה של מילה המתקבלת על ידי האלגוריתם, למטה רשומות האיטרציות של האלגוריתם הזה על המילה $w = aaaaaaaaaa$ (8 אותיות a). במצב ההתחלתי הסרט נראה כדלקמן.



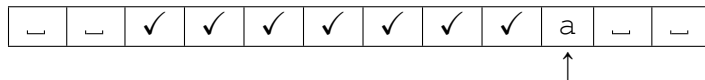
(איטרציה 1) לבסוף האיטרציה $i = 1$ הסרט נראה כך:

התו האחרון a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.



איטרציה 2 בסוף האיטרציה $i = 2$ הסרט נראה כך:

התו הראשון הוא a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

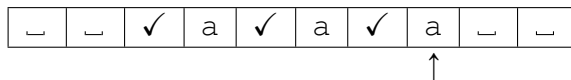
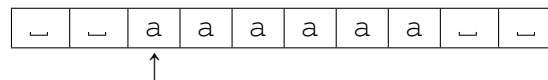


איטרציה 3 לאחר האיטרציה $i = 3$ הסרט נראה כך:

התו האחרון הוא a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

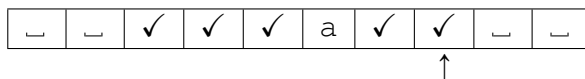
איטרציה 4 באיטרציה $i = 4$ יש אות a אחת בדיוק אז המכונה מקבלת.

כדוגמה של מילה הלא המתקבלת על ידי האלגוריתם, למטה רשומות האיטרציות של האלגוריתם הזה על המילה $w = aaaaaa$ (6 אותיות a).
במצב ההתחלתי הסרט נראה כדלקמן.



איטרציה 1 לבסוף האיטרציה $i = 1$ הסרט נראה כך:

התו האחרון a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.



איטרציה 2 בסוף האיטרציה $i = 2$ הסרט נראה כך:

התו הראשון הוא ✓ אז דוחה.

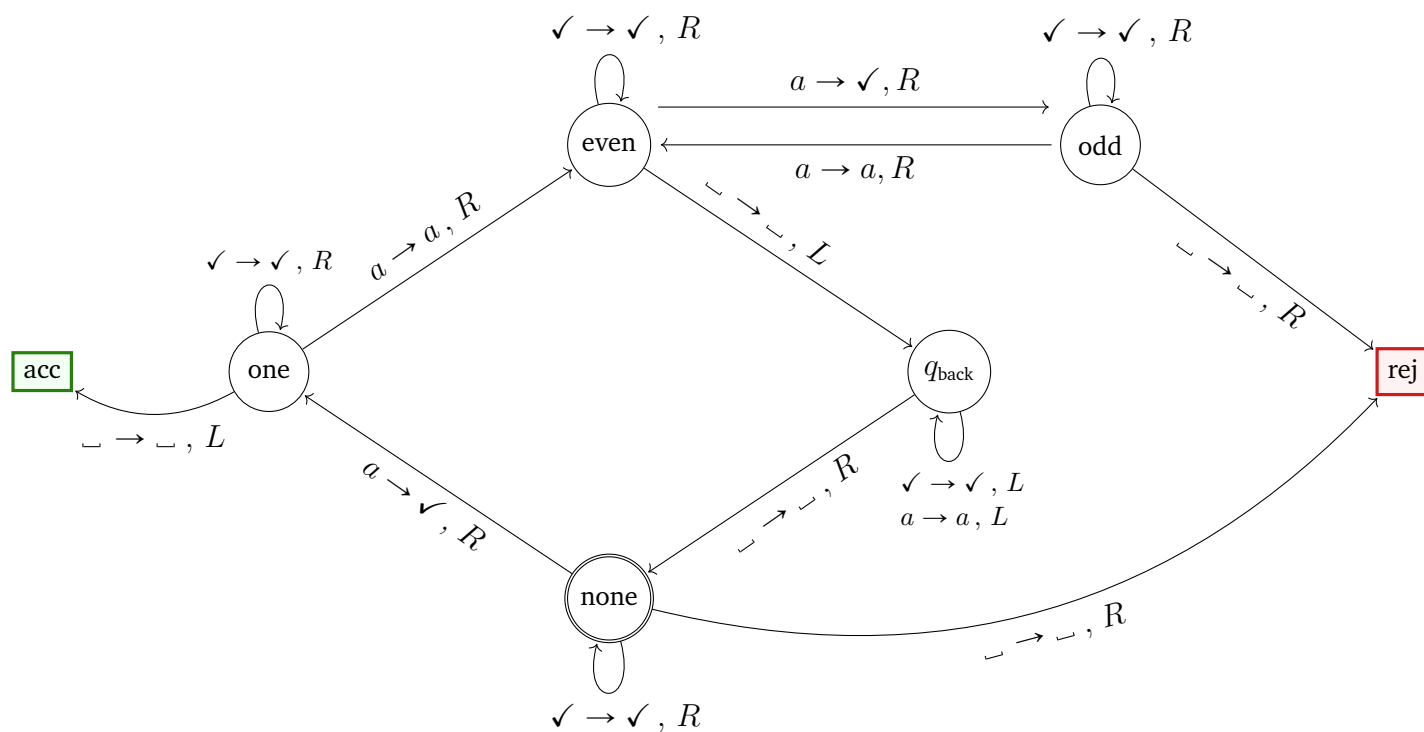
כעת נתן הגדרה פורמלית של המכונת טיורנג שמקבלת השפה הזאת:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej}) ,$$

כאשר $\Sigma = \{a\}$, $\Gamma = \{a, _, \checkmark\}$, והקבוצת המצבים היא $Q = \{q_0, one, even, odd, q_{acc}, q_{rej}\}$ כאשר המשמעותם הם מפורטים למטה:

מצב none:	מצב התחלתי. עדיין לא קראנו a בסבב סריקה זה.
מצב one:	קראנו a בודד.
מצב even:	קראנו מספר זוגי של a .
מצב odd:	קראנו מספר אי-זוגי של a .
מצב q_{back} :	חזרה שלמאלה.
מצבים למטה:	

הפונקציות המעברים מתוארות על ידי התרשים



דוגמה 1.6

בדקו אם המילה aaaa מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.5.

פתרון:

$_$	none	a	a	a	a	$_$
$_$	\checkmark	one	a	a	a	$_$
$_$	\checkmark	a	even	a	a	$_$
$_$	\checkmark	a	\checkmark	odd	a	$_$
$_$	\checkmark	a	\checkmark	a	even	$_$
$_$	\checkmark	a	\checkmark	back	a	$_$
$_$	\checkmark	a	back	\checkmark	a	$_$
$_$	\checkmark	back	a	\checkmark	a	$_$
$_$	back	\checkmark	a	\checkmark	a	$_$
back	$_$	\checkmark	a	\checkmark	a	$_$
$_$	none	\checkmark	a	\checkmark	a	$_$
$_$	\checkmark	none	a	\checkmark	a	$_$
$_$	\checkmark	\checkmark	one	\checkmark	a	$_$
$_$	\checkmark	\checkmark	\checkmark	one	a	$_$
$_$	\checkmark	\checkmark	\checkmark	a	even	$_$
$_$	\checkmark	\checkmark	\checkmark	back	a	$_$
$_$	\checkmark	\checkmark	back	\checkmark	a	$_$
$_$	\checkmark	back	\checkmark	\checkmark	a	$_$
$_$	back	\checkmark	\checkmark	\checkmark	a	$_$
back	$_$	\checkmark	\checkmark	\checkmark	a	$_$
$_$	none	\checkmark	\checkmark	\checkmark	a	$_$
$_$	\checkmark	none	\checkmark	\checkmark	a	$_$
$_$	\checkmark	\checkmark	none	\checkmark	a	$_$

⌊	✓	✓	✓	none	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	✓	one	⌊
⌊	✓	✓	✓	acc	✓	⌊

u	q	σ	v
⌊	none	a	aaa ⌊
⌊ ✓	one	a	aa ⌊
⌊ ✓ a	even	a	a ⌊
⌊ ✓ a ✓	odd	a	⌊
⌊ ✓ a ✓ a	even	⌊	⌊
⌊ ✓ a ✓	back	a	⌊
⌊ ✓ a	back	✓	a ⌊
⌊ ✓	back	a	✓ a ⌊
⌊	back	✓	a ✓ a ⌊
⌊	back	⌊	✓ a ✓ a ⌊
⌊	none	✓	a ✓ a ⌊
⌊ ✓	none	a	✓ a ⌊
⌊ ✓ ✓	one	✓	a ⌊
⌊ ✓ ✓ ✓	one	a	⌊
⌊ ✓ ✓ ✓ a	even	⌊	⌊
⌊ ✓ ✓ ✓	back	a	⌊
⌊ ✓ ✓	back	✓ a	⌊
⌊ ✓	back	✓	✓ a ⌊
⌊	back	✓	✓ ✓ a ⌊
⌊	back	⌊	✓ ✓ ✓ a ⌊
⌊	none	✓	✓ ✓ a ⌊
⌊ ✓	none	✓	✓ a ⌊
⌊ ✓ ✓	none	✓	a ⌊
⌊ ✓ ✓ ✓	none	a	⌊
⌊ ✓ ✓ ✓ ✓	one	⌊	⌊
⌊ ✓ ✓ ✓	acc	✓	⌊

דוגמה 1.7

בדקו אם המילה aaa מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.5.

פתרון:

⌊	none	a	a	a	⌊
⌊	✓	one	a	a	⌊
⌊	✓	a	even	a	⌊
⌊	✓	a	✓	odd	⌊
⌊	✓	a	✓	⌊	rej

u	q	σ	v
⌊	none	a	aa ⌊

␣ ✓	one	a	a ␣
␣ ✓ a	even	a	␣
␣ ✓ a ✓	odd	␣	␣
␣ ✓ a ✓ ␣	rej	␣	␣

דוגמה 1.8

מהי השפה של המכונה למטה:



פתרון:

(1) סורקים את הקלט משמאל לימין.

- אם התו הנקרא a או b עוברים לתו ימינה הבא וחוזרים לשלב (1).
- אם התו הנקרא $_$ אז הגענו לסוף הקלט, ועוברים לשלב (2).

(2) עוברים שמאלה לתו הארון של המילה.

- אם התו הנקרא $a \Leftarrow$ מקבל.
- אחרת דוחה.

לכן המכונה מקבלת שפת המילים המסתיימות באות a .

דוגמה 1.9

מהי השפה של המכונה למטה:



פתרון:

(1) במצב ההתחלתי:

- אם התו הנקרא $_$ \Leftarrow מקבל.
- אם התו הנקרא a מורידים אותו על ידי $_$ ועוברים לשלב (2).
- אחרת \Leftarrow דוחה.

(2) עוברים ימינה עד שמגיעים לסוף המילה.

- אם התו האחרון הוא b , מורידים אותו על ידי $_$, חוזרים לתחילת המילה וחוזרים לשלב (1).
- אחרת דוחה.

בכל איטרציה המכונה מורידה תו a בתחילת המילה וחוזרת ומורידה תו b תואם בסוף המילה. בכל איטרציה אם המכונה לא מוצאת b תואם בסוף המילה היא דוחה המילה. אחרת אם המכונה לא דחתה המילה וכל האותיות נמחקות אז המילה מתקבלת. לכן המכונה מקבלת שפת המילים

$$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}.$$

הגדרה 1.4 גרירה בצעד אחד

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ מכונת טיורינג, ותהייה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M . נסמן

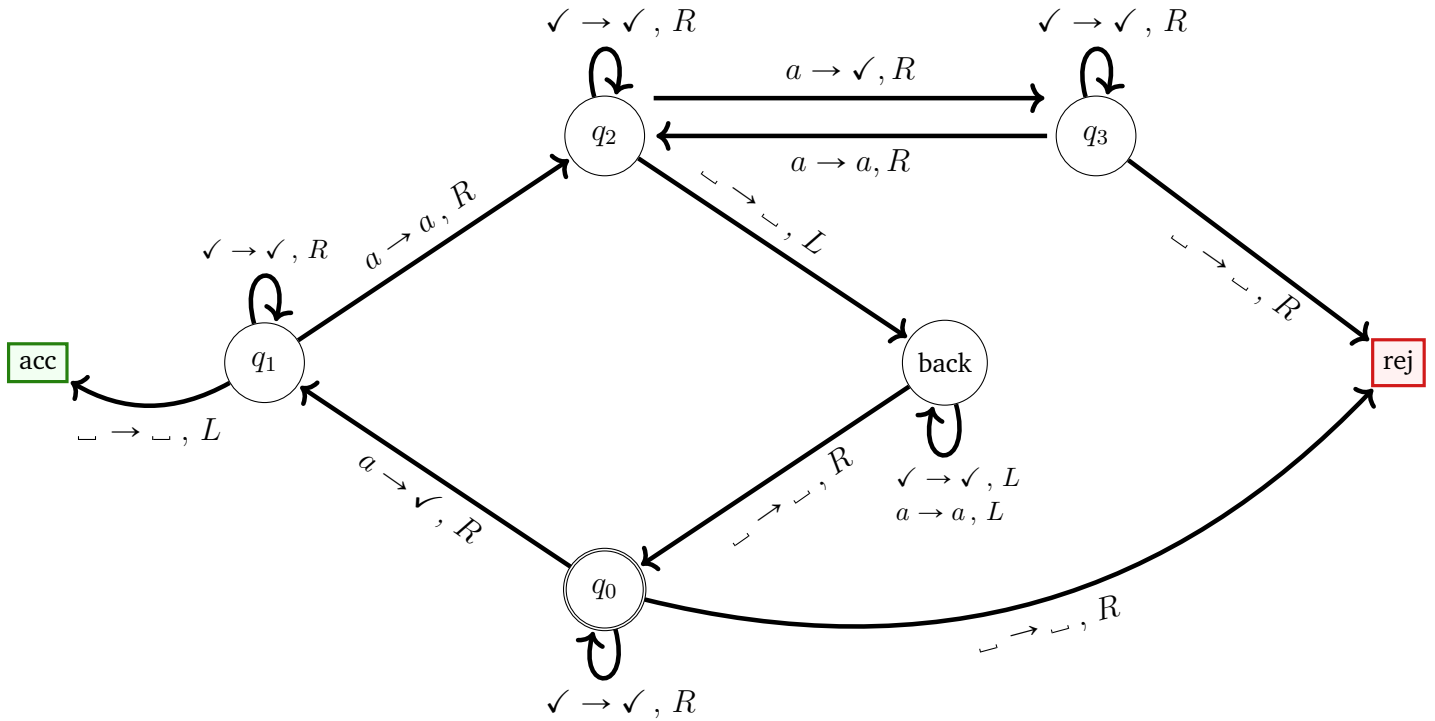
$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם כשנמצאים ב- c_1 עוברים ל- c_2 בצעד בודד.

דוגמה 1.10 (המשך של דוגמה 1.5)

עבור המכונת טיורינג שמתוארת בתרשים למטה מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$



הגדרה 1.5 גרירה בכללי

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ מכונת טיורינג, ותהי c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M .
נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

אם ניתן לעבור מ- c_1 ל- c_2 ב-0 או יותר צעדים.

דוגמה 1.11 (המשך של דוגמה 1.5)

עבור המכונת טיורינג שמתוארת בתרשים למטה מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M^* \checkmark \checkmark \checkmark q_4 a$$

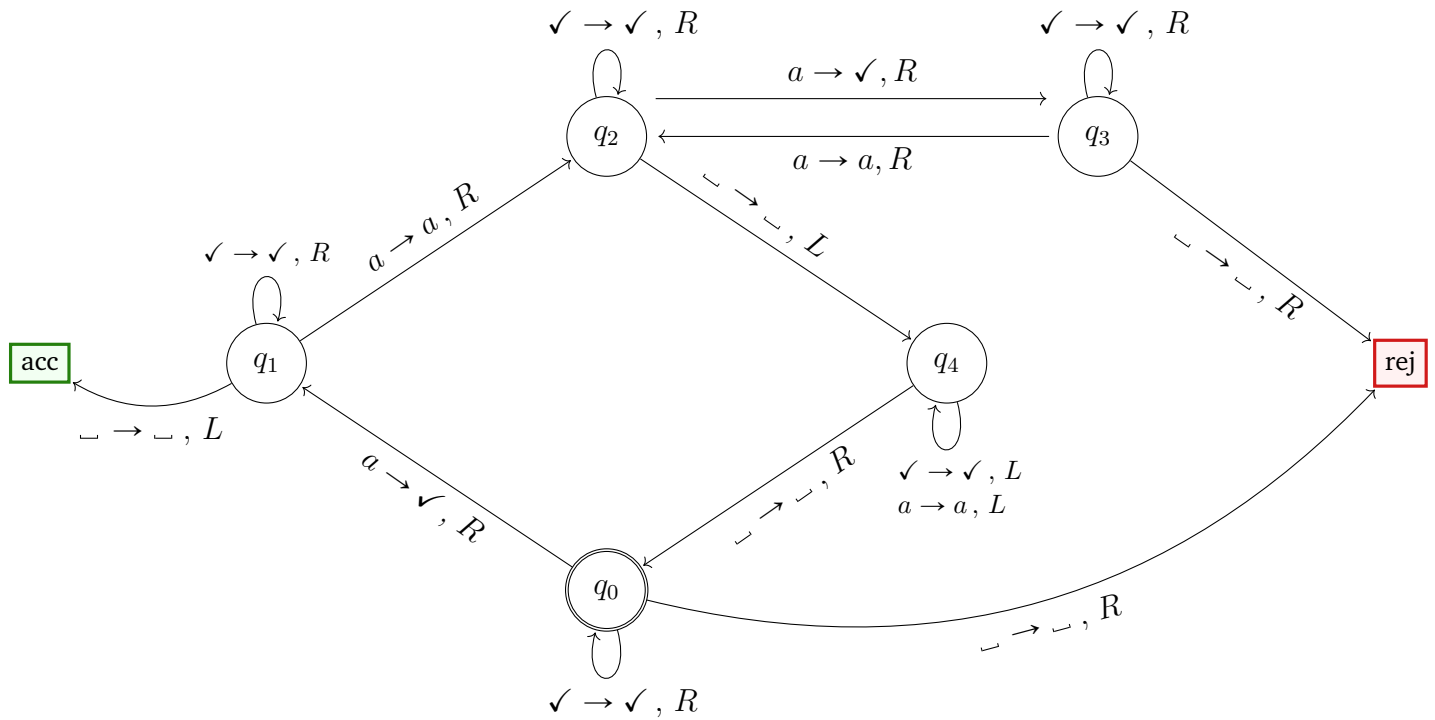
בגלל ש:

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark \checkmark q_1 a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark \checkmark a q_2 \sqcup$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark \checkmark q_4 a .$$



הגדרה 1.6 קבלה ודחייה של מחרוזת

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $w \in \Sigma^*$ מחרוזת. אומרים כי:

• M מקבלת את w אם

$$q_0 w \vdash_M^* u q_{\text{acc}} \sigma v$$

כאשר $u, v \in \Gamma^*$, $\sigma \in \Gamma$ כלשהם.

• M דוחה את w אם

$$q_0 w \vdash_M^* u q_{\text{rej}} \sigma v$$

כאשר $u, v \in \Gamma^*$, $\sigma \in \Gamma$ כלשהם.

הגדרה 1.7 הכרעה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M מכריעה את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים:

• $M \Leftarrow w \in L$ מקבלת את w .

• $M \Leftarrow w \notin L$ דוחה את w .

הגדרה 1.8 קבלה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M מקבלת את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים:

• אם $w \in L$ אז M מקבלת את w .

• אם $w \notin L$ אז M לא מקבלת את w .

במקרה כזה כאשר M מקבלת את השפה L , נכתוב ש-

$$L(M) = L.$$

1.2 טבלת המעברים

1.12 דוגמה

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$L = \{w = \{a, b, c\}^* \mid \#a_w = \#b_w = \#c_w\}$$

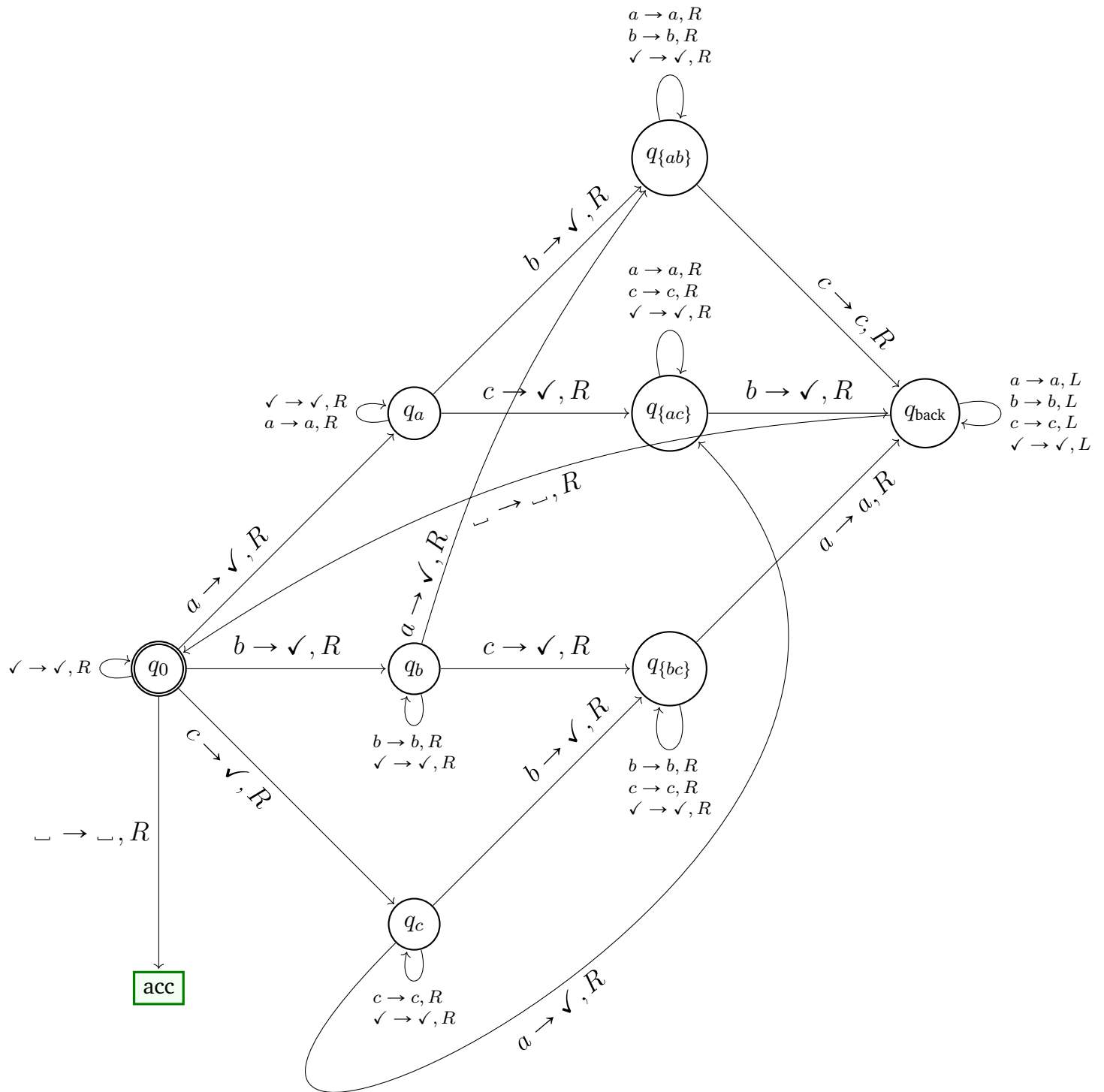
פתרון:

נתאר את המכונה על ידי הטבלת המעברים של המכונה. הסימן S מסמן כל זוג אותיות שונות מהקבוצה $\{a, b, c\}$ ללא חשיבות לסדר. כלומר:

$$S = \{a, b\}, \quad S = \{b, c\}, \quad S = \{a, c\}.$$

תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון בסרט	מצב
$\sigma \in \{a, b, c\}$	R	✓	$q.\sigma$	σ	q_0
$\sigma \in \{a, b, c\}$	R	↻	$q.\sigma$	σ	$q.\sigma$
$\sigma, \tau \in \{a, b, c\} \wedge \sigma \neq \tau$	R	✓	$q.\{\sigma\tau\}$	τ	$q.\sigma$
$\sigma \in S$	R	σ	$q.S$	σ	$q.S$
$\sigma \notin S$	L	✓	q_{back}	σ	qS
	L	↻	q_{back}	a, b, c, \checkmark	q_{back}
	R	↻	q_{acc}	⌊	q_0
	L	↻	q_{back}	a, b, c, \checkmark	q_{back}
	R	↻	q_0	⌊	q_{back}

כעת נתאר את המכונה על ידי תרשים המצבים של המכונה:



דוגמה 1.13

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$\{x_1 \dots x_k \# y_1 \dots y_k \# z_1 \dots z_k \mid x_i, y_i, z_i \in \{0, 1, 2\}, \forall i, x_i \geq z_i \geq y_i\}$$

פתרון:

מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
$X **$	σ	$X\sigma*$	✓	R	
$X **$	✓	$X **$	✓	R	
$X\sigma*$	$0, 1, 2, \checkmark$	$X\sigma*$	↻	R	
$X\tau*$	#	$Y\tau*$	↻	R	
$Y\tau*$	σ	$Y\tau\sigma$	↻	R	
$Y\tau*$	✓	$Y\tau*$	↻	R	
$Y\tau\sigma$	$0, 1, 2, \checkmark$	$Y\tau\sigma$	↻	R	
$Y\tau_1\tau_2$	#	$Z\tau_1\tau_2$	↻	R	
$Z\tau_1\tau_2$	✓	$Z\tau_1\tau_2$	↻	R	
$Z\tau_1\tau_2$	σ	q_{back}	✓	L	
$Z **$	⊥	q_{acc}	↻	R	$\tau_1 \geq \sigma \geq \tau_2$
q_{back}	$0, 1, 2, \checkmark$	q_{back}	↻	L	
q_{back}	⊥	$X **$	↻	R	



1.3 חישוב פונקציות

הגדרה 1.9 מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה f

תהי $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ ותהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ מכונת טיורינג. אומרים כי M מחשבת את f אם:

- $\Sigma_2 \subset \Gamma$ ו- $\Sigma = \Sigma_1$.
- לכל $w \in \Sigma_1^*$ מתקיים $q_0 w \vdash q_{acc} f(w)$.

דוגמה 1.14 חיבור אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i \# 1^j$$

ומחזירה את פלט

$$1^{i+j}.$$

פתרון:



דוגמה 1.15 כפל אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i \# 1^j$$

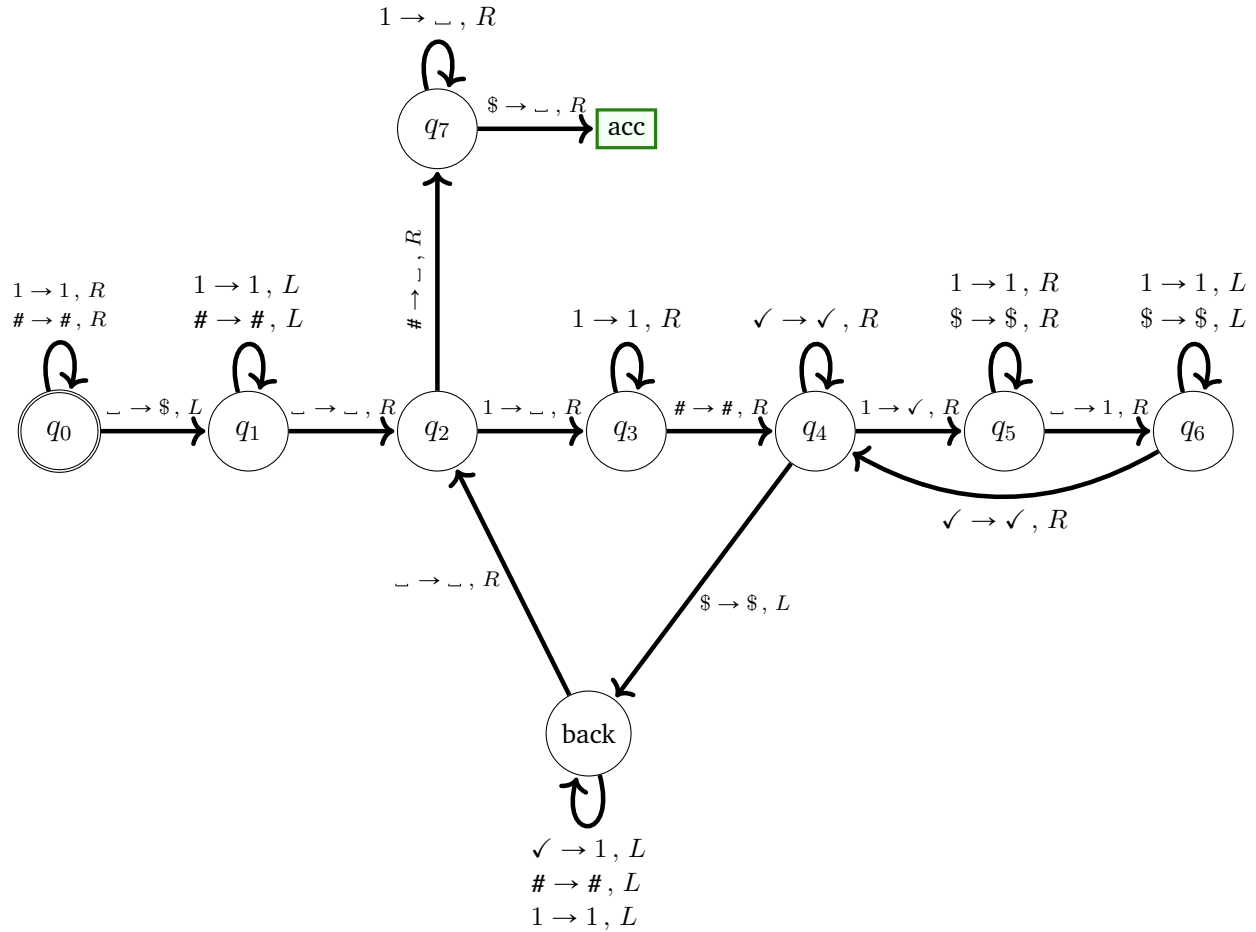
ומחזירה את פלט

$$1^{i \cdot j}.$$

פתרון:

- לדוגמה, נניח שהקלט הוא 2 כפול 2. הקלט הוא 11#11.

- נרצה להבדיל בין הקלט לבין הפלט.
לכן בתחילת הריצה, נתקדם ימינה עד סוף הקלט ונוסיף שם את התו \$.
לאחר מכן נחזור לתחילת הקלט.
- על כל אות 1 במילה השמאלית נעתיק את המילה הימינית לאחר סימן ה- \$.
- לאחר מכן נשאיר רק את התווים שלאחר סימן ה- \$. כלומר, נמחק את כל מה שאינו פלט.



μ	q	σ	ν
$_$	q_0	1	1#11 $_$
$_11\#11$	q_1	$_$	$_$
$_11\#11$	q_1	\$	$_$
$_$	q_1	$_$	11#11\$
$_$	q_2	1	1#11\$
$_ _$	q_3	1	#11\$
$_ _1\#$	q_4	1	1\$
$_ _1\#\checkmark$	q_5	1	\$
$_ _1\#\checkmark1\$$	q_5	$_$	$_$
$_ _1\#\checkmark1\$1$	q_6	$_$	$_$
$_ _1\#$	q_6	\checkmark	1\$1 $_$
$_ _1\#\checkmark$	q_4	1	\$1 $_$
$_ _1\#\checkmark\checkmark$	q_5	\$	1 $_$
$_ _1\#\checkmark\checkmark\1	q_5	$_$	$_$
$_ _1\#\checkmark\checkmark\11	q_6	$_$	$_$

_ _1#✓	q_6	✓	\$11_
_ _1#✓✓	q_4	\$	11_
_ _1#✓	back	✓	\$11_
_	back	_	1#11\$11_
_ _	q_2	1	#11\$11_
_ _ _	q_3	#	11\$11_
_ _ _#	q_4	1	1\$11_
_ _ _#✓	q_5	1	\$11_
_ _ _#✓1\$11	q_5	_	_
_ _ _#✓1\$111	q_6	_	_
_ _ _#	q_6	✓	1\$111_
_ _ _#✓	q_4	1	\$111_
_ _ _#✓✓	q_5	\$	111_
_ _ _#✓✓\$111	q_5	_	_
_ _ _#✓✓\$1111	q_6	_	_
_ _ _#✓	q_4	✓	\$1111
_ _ _#✓✓	q_4	\$	1111
_ _ _#✓	back	✓\$	1111
_ _ _	back	_	#11\$1111
_ _ _ _	q_2	#	11\$1111
_ _ _ _ _	q_7	1	1\$1111
_ _ _ _ _ _ _	q_7	\$	1111
_ _ _ _ _ _ _ _ _	acc	1	111