

תרגילים 2: מקסמין ודואפולד

שאלה 1 מצאו את כל ווקטוריו האסטרטגיות הרציונליים במשחק הבא:

		<i>II</i>	<i>L</i>	<i>R</i>
		<i>I</i>	\diagdown	
<i>I</i>	<i>H</i>	2, 3	1, 5	
	<i>T</i>	0, 0	4, 1	

שאלה 2 הוכיחו כי לא קיים פתרון באסטרטגיות השולטות חזק יחיד במשחק הבא:

		<i>II</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
		<i>I</i>	\diagdown	
<i>I</i>	<i>c</i>	4, 8	5, 10	
	<i>d</i>	6, 20	3, 7	

שאלה 3 כיצד תמליכו לשחקנים לשחק במשחק הבא, אם השחקנים לא בהכרח רציונליים?

		<i>II</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
		<i>I</i>	\diagdown			
<i>I</i>	α	2, 13	4, 8	6, 5	8, 2	
	β	6, 4	2, 3	3, 8	8, 4	
	γ	0, 9	7, 7	2, 7	14, 8	
	δ	4, 0	0, 4	4, 6	6, 0	

שאלה 4 במשחק הבא שהוא משחק שני שחקנים סכום אפס, ודאו כי הווקטור אסטרטגיות המקסמין של המשחק הוא גם שוויי המשקל של המשחק.

		<i>II</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
		<i>I</i>	\diagdown		
<i>I</i>	α	30, -30	-50, 50	-20, 20	
	β	10, -10	40, -40	10, -10	
	γ	60, -60	-30, 30	-50, 50	

שאלה 5 מצאו את כל ווקטוריו האסטרטגיות הרציונליים במשחקים הבאים:

(א)

I	II	L	R
T	9, 5	5, 3	
B	8, 6	8, 4	

(ב)

I	II	a	b	c	d
T	6, 2	5, 3	7, 6	2, 8	
B	8, 5	6, 9	4, 6	4, 7	

(ג)

I	II	a	b	c	d
T	-1, -20	-7, -7	-1, 2	-5, 8	
M	27, 20	13, -2	21, 2	13, -1	
B	-5, 20	-3, 5	7, -1	3, -4	

(ד)

I	II	a	b	c	d
α	3, 7	0, 13	4, 5	5, 3	
β	5, 3	4, 8	4, 3	3, 7	
γ	4, 5	3, 7	4, 5	5, 3	
δ	4, -1	2, 5	1, 2	3, 2	

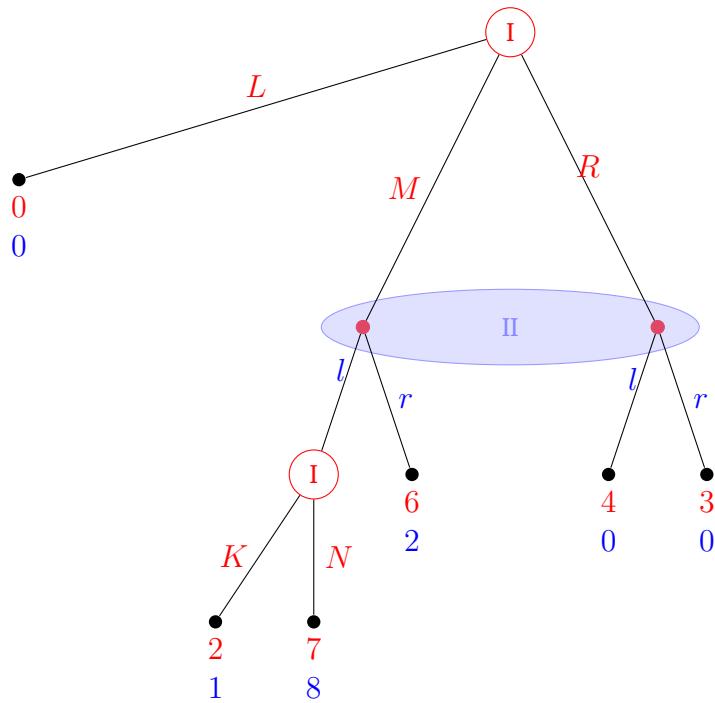
שאלה 6

מצאו את שיווי המשקל במשחק הבאים:

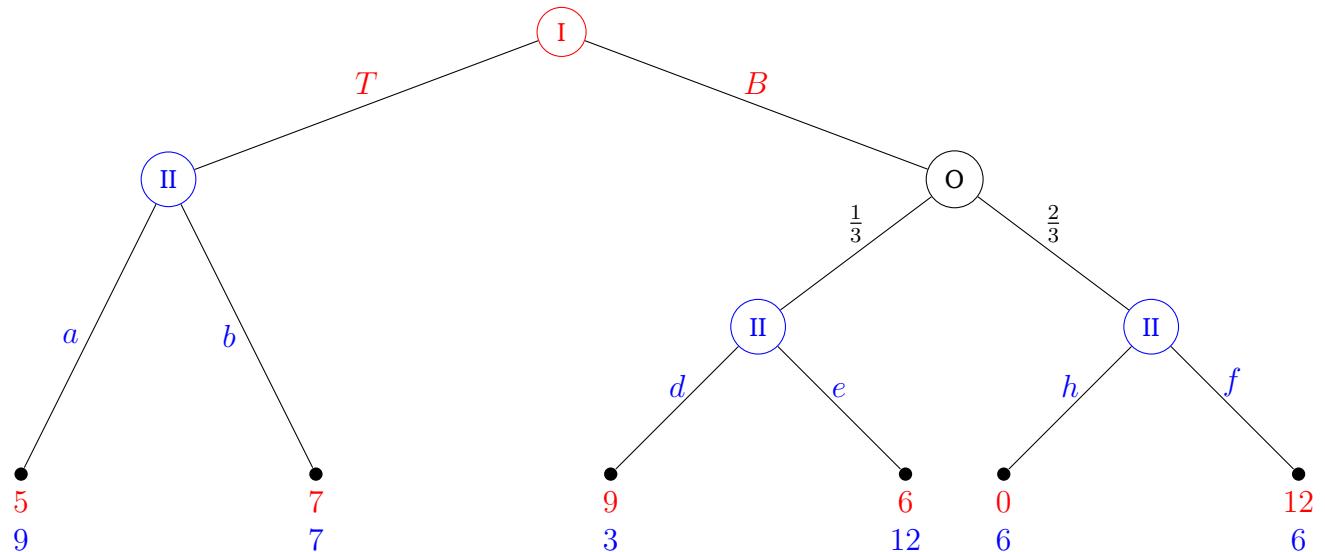
(א)

תשפ"ו סמסטר ב"

תורת המשחקים



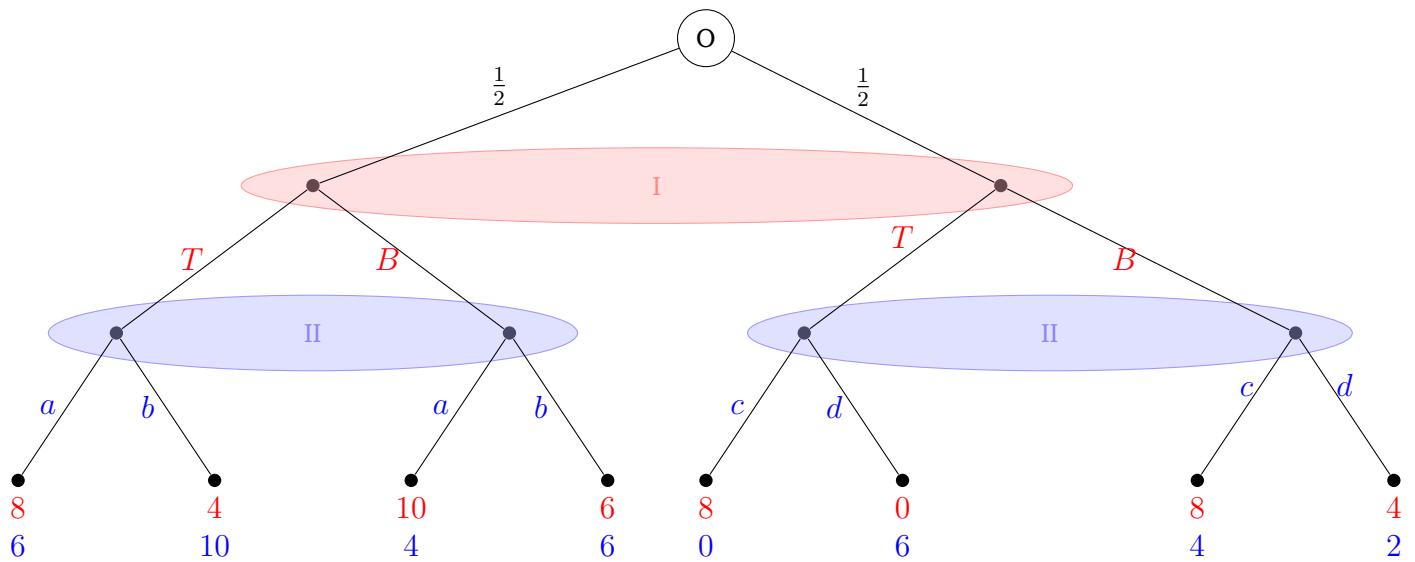
(ב)



(ג)

תשפ"ו סמסטר ב"

תורת המשחקים



שאלה 7 לכל אחד מהשחקים הבאים, מצאו לשחקן *I* אסטרטגיה מקסימינ ולשחקן *II* אסטרטגיה מינimax.

(א)

		<i>II</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>I</i>						
α		8	4	8	4	
β		2	5	3	8	
γ		6	1	4	5	

(ב)

		<i>II</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>I</i>						
α		6	4	2	1	
β		5	3	3	0	
γ		1	0	5	4	
δ		2	-3	2	3	

(ג)

		<i>II</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>I</i>						
α	3	6	5	5		
β	5	5	5	5		
γ	5	3	5	6		
δ	6	5	5	3		

שאלה 8 יהי $((1, \dots, N), (s_1, \dots, s_i), (u_1, \dots, u_N))$ משחק N שחקנים.

הוכחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית.:

אם s^* שוויי משקל של השחקן אז לכל שחקן $N \in i$ האסטרטגיה s^* לא נשלטת על ידי אף אסטרטגיה אחרת.

שאלה 9 הערך של משחק שני שחקנים סכום אפס הנadan על ידי מטריצה A הוא 0. האם בהכרח הערך של משחק שני השחקנים סכום אפס הנadan על ידי המטריצה $-A$ – הוא 0? אם כן, הוכחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

שאלה 10 תהי A ו- B שתי קבוצות סופיות, ותהי $R \rightarrow A \times B \rightarrow u$ פונקציה כלשהי. הוכחו כי

$$\max_{a \in A} \min_{b \in B} u(a, b) \leq \min_{b \in B} \max_{a \in A} u(a, b) .$$

שאלה 11 האם הערך בכל אחד מהשחקנים הבאים קיים? אם כן, מה הוא ומה הן כל האסטרטגיות האופטימליות לכל אחד מהשחקנים. כרגע, שחקן I הוא שחקן השורה ושחקן II הוא שחקן העמודה.

(א)

		<i>II</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>I</i>					
A	1	2	3		
B	4	3	0		

(ב)

		<i>II</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>I</i>				
A	2	2		
B	1	3		

(ג)

I	II	a	b
A	3	0	
B	2	2	
C	0	3	

(2)

I	II	a	b	c	d
A	$\frac{7}{2}$	3	4	12	
B	7	5	6	13	
C	4	2	3	0	

שאלה 12 למשחק הבא, מצאו לשחקן I אסטרטגיה מקסימינית ולשחקן II אסטרטגיה מינימקס. האם יש למשחק ערך?

I	II	a	b	c	d
α	16	8	16	8	
β	4	10	6	16	
γ	12	2	8	10	

שאלה 13 למשחק הבא, מצאו לשחקן I אסטרטגיה מקסימינית ולשחקן II אסטרטגיה מינימקס. האם יש למשחק ערך?

I	II	a	b	c	d
α	18	12	6	3	
β	15	9	9	0	
γ	3	0	15	12	
δ	6	-9	6	9	

שאלה 14 למשחק הבא, מצאו לשחקן I אסטרטגיה מקסימינית ולשחקן II אסטרטגיה מינימקס. האם יש למשחק ערך?

		<i>II</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>I</i>						
α		15	30	25	25	
β		25	25	25	25	
γ		25	15	25	30	
δ		30	25	25	15	

שאלה 15 תהיינה A ו- B שתי מטריצות עם תשלומיים חיוביים (בעלות ממדים סופיים).

		<i>II</i>
<i>I</i>		
	<i>A</i>	0
	0	<i>B</i>

הוכחו כי למשחק לא קיים ערך.

שאלה 16 נתון משחק קורנווט עם n שחקנים. יהיו q_i כמות המוצר הנוצר על ידי שחקן i , ויהי $C_i(q_i)$ כמות הכספיות בשוק. יהיו

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & Q < a \\ 0 & Q \geq a \end{cases} .$$

נניח כי העלות לשחקן i ליצר כמות q_i היא $C_i(q_i) = cq_i$ כאשר $c < a$.

א) מצאו את שוויי המשקל של המשחק.

ב) מה קורה אם $\infty \rightarrow n$?

שאלה 17 נתון משחק דו-אפול עם פונקציית המחיר

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & Q < a \\ 0 & Q \geq a \end{cases} .$$

נניח ש פונקציות העלות של השחקנים לא סימטריות:

$$C_1(q_1) = c_1 q_1 , \quad C_2(q_2) = c_2 q_2 .$$

א) חשבו את שוויי המשקל נאש אם $c_i < \frac{a}{2}$ לכל שחקן.

ב) כיצד התשובה משתנה אם $c_2 > a + c_1$ ו- $c_1 < c_2 < a$?

פתרונות

שאלה 1 לפי ההנחות של שחקנים רציונליים, שחקן רציונלי לא ישחק אסטרטגיה שנשלטה. אם קיימים שיווי משקל יחיד הוא פתרון באסטרטגיות השולכות חזק. אז נחפש שוויי המשקל של המשחק.

	<i>II</i>	<i>L</i>	<i>R</i>
<i>I</i>			
<i>H</i>	2, 3	1, 5	
<i>T</i>	0, 0	4, 1	

שוויי משקל: $s^* = (T, R)$.
 קיימים שוויי משקל יחיד $\Leftarrow s^*$ הוא פתרון באסטרטגיות שלוטות חזק.
 שחקנים רציונליים משחקים רק אסטרטגיות שלוטות חזק לכן s^* הוא וקטור האסטרטגיות הרציונלי היחיד של המשחק.

שאלה 2 קיימים פתרון באסטרטגיות שלוטות חזק אם ורק אם קיימים שוויי משקל יחיד.
 לבדוק את השוויי משקל של המשחק.

	<i>II</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>I</i>			
<i>c</i>	4, 8	5, 10	
<i>d</i>	6, 20	3, 7	

שוויי משקל: $s^* = (c, B) \wedge s^* = (d, A)$.
 יש שני שוויי משקל.
 זה לא קיימים שוויי משקל יחיד \Leftarrow לא קיים פתרון באסטרטגיות שלוטות חזק יחיד.

שאלה 3 אם השחקנים לא רציונליים אז מומלץ גם לשחקן 1 וגם לשחקן 2 לשחק לפי האסטרטגיה המקסימינום שלהם.

	<i>II</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	$\min_{s_2 \in S_2} u_1$
α	2, 13	4, 8	6, 5	8, 2	2	
β	6, 4	2, 3	3, 8	8, 4	2	
γ	0, 9	7, 7	2, 7	14, 8	0	
δ	4, 0	0, 4	4, 6	6, 0	0	
$\min_{s_1 \in S_1} u_2$	0	3	5	0	$v_1 = 2$	$v_2 = 5$

התשלום המקסימין של שחקן 1 הוא
 $v_1 = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1 = 2$.

לכן האסטרטגיה המקסימינ של שחקן 1 היא α או β .

התשלום המקסימינ של שחקן 2 הוא

$$v_2 = \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} u_2 = 5.$$

לכן האסטרטגיה המקסימינ של שחקן 1 היא C .

לכן מומלץ לשחקו 1 לשחק לפי אסטרטגיה α או β ומומלץ לשחקן 2 לשחק לפי אסטרטגיה C .

שאלה 4 נחשב את שוויי המשקל של המשחק לפי שיטת התשובות הטובות ביותר:

	II \\ I	A	B	C
I \\ \alpha	30, -30	-50, 50	-20, 20	
\beta	10, -10	40, -40	10, -10	
\gamma	60, -60	-30, 30	-50, 50	

שוויי המשקל הוא

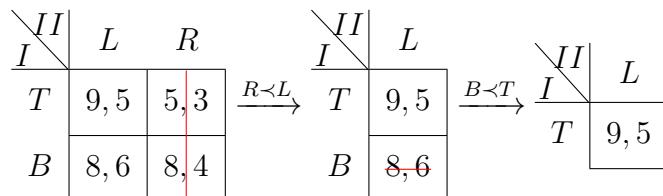
$$s^* = (\beta, C).$$

	II \\ I	A	B	C	$\min_{s_2 \in S_2} u_1$
I \\ \alpha	30, -30	-50, 50	-20, 20		-50
\beta	10, -10	40, -40	10, -10		10
\gamma	60, -60	-30, 30	-50, 50		-60
$\min_{s_1 \in S_1} u_2$	-60	-40	-10		$v_1 = 10$
				$v_2 = -10$	

וקטור האסטרטגיות המקסימינ של המשחק הוא (β, C) .

שאלה 5

(א)



פתרון באסטרטגיות שלוטות חזק: TL

(ב)

		II				
		a	b	c	d	
		T	6, 2	5, 3	7, 6	2, 8
		B	8, 5	6, 9	4, 6	4, 7

$\xrightarrow{c \prec d}$

		II				
		b	d			
		T	5, 3	2, 8		
		B	6, 9	4, 7		

$\xrightarrow{T \prec B}$

		II				
		b	d			
		T	6, 9	4, 7		
		B	6, 9	4, 7		

$\xrightarrow{d \prec b}$

		II			
		b			
		T	6, 9		
		B	6, 9		

פתרון באסטרטגיות שלוטות חזק: Bb .

(ג)

		II				
		a	b	c	d	
		T	-1, 20	-7, -7	-1, 2	-5, 8
		M	27, 20	13, -2	21, 2	13, -1
		B	-5, 20	-3, 5	7, -1	3, -4

$\xrightarrow{b \prec a}$

		II			
		a			
		T	-1, 20		
		M	27, 20		
		B	-5, 20		

פתרון באסטרטגיות שלוטות חזק: Ma .

(ד)

		II				
		a	b	c	d	
		α	3, 7	0, 13	4, 5	5, 3
		β	5, 3	4, 8	4, 3	3, 7
		γ	4, 5	3, 7	4, 5	5, 3
		δ	4, -1	2, 5	1, 2	3, 2

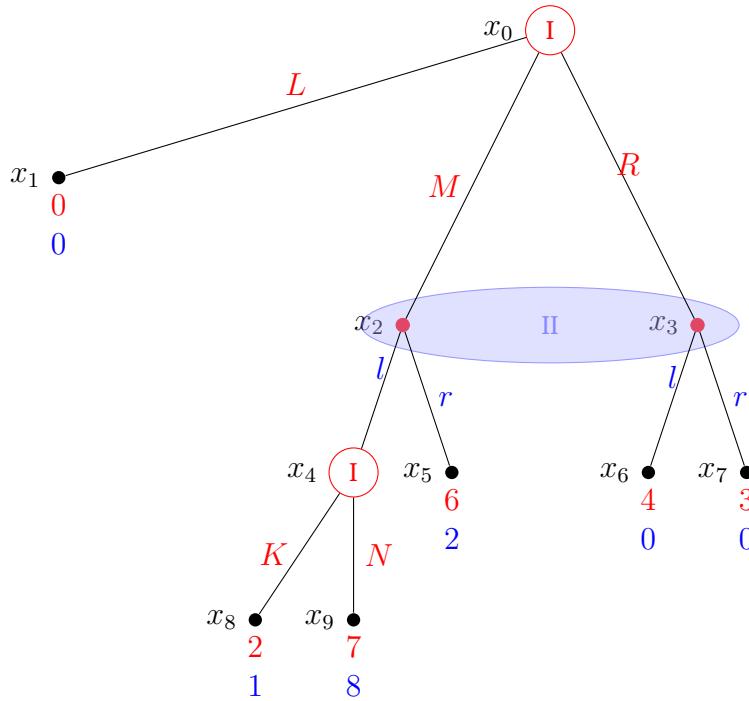
$\xrightarrow{c \prec b}$

		II			
		b			
		α	0, 13		
		β	4, 8		
		γ	3, 7		
		δ	2, 5		

$\xrightarrow{\alpha \preceq \gamma}$

פתרון באסטרטגיות שלוטות חלש: βb .**שאלה 6**

(א)

קבוצות ידיעת של שחקן I :

$$x_0 : (L, M, R) , \quad x_4 : (K, N) .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן I :

$$S_I = (L/K, M/K, R/K, L/N, M/N, R/N) .$$

קבוצות ידיעת של שחקן II :

$$x_2 x_3 : (l, r) .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן II :

$$S_{II} = (l, r) .$$

צורה אסטרטגית של המשחק:

I	II	l	r
L/K	0, 0	0, 0	
M/K	2, 1	6, 2	
R/K	4, 0	3, 0	
L/N	0, 0	0, 0	
M/N	7, 8	6, 2	
R/N	4, 0	3, 0	

נחשב את התשובות הטובות ביותר של שחקן I לכל אסטרטניה של שחקן II :

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>l</i>	<i>r</i>
<i>L/K</i>	0, 0	0, 0	
<i>M/K</i>	2, 1	6, 2	
<i>R/K</i>	4, 0	3, 0	
<i>L/N</i>	0, 0	0, 0	
<i>M/N</i>	7, 8	6, 2	
<i>R/N</i>	4, 0	3, 0	

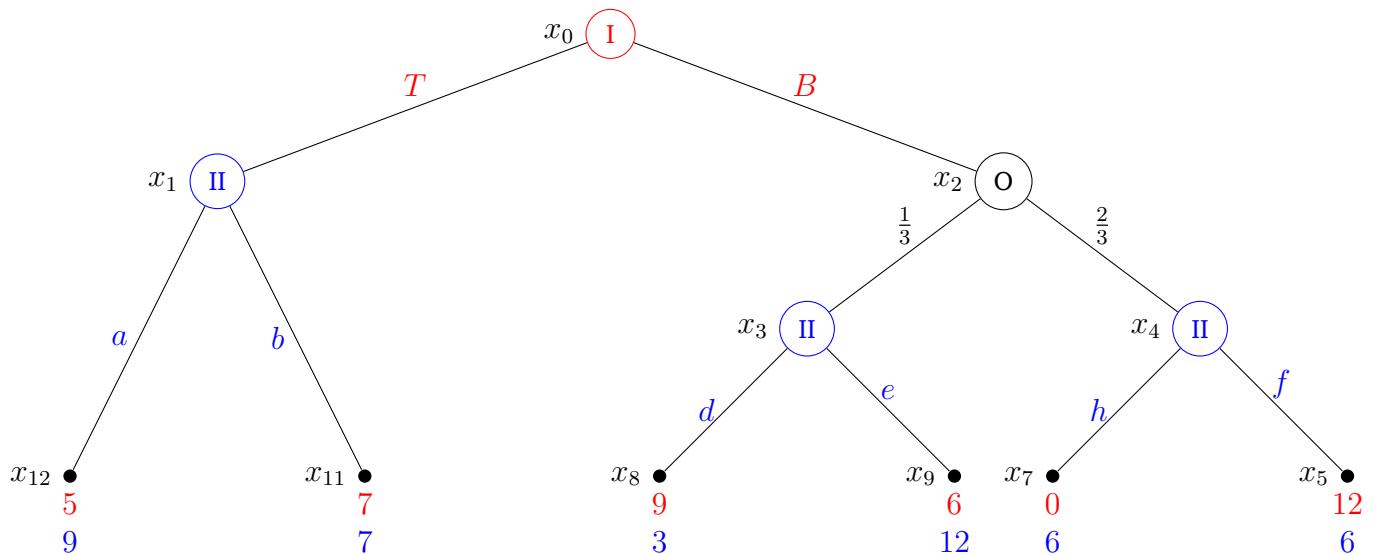
נחשב את התשובות הטובות ביותר של שחקן *II* לכל אסטרטגיה של שחקן *I* :

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>l</i>	<i>r</i>
<i>L/K</i>	0, 0	0, 0	
<i>M/K</i>	2, 1	6, 2	
<i>R/K</i>	4, 0	3, 0	
<i>L/N</i>	0, 0	0, 0	
<i>M/N</i>	7, 8	6, 2	
<i>R/N</i>	4, 0	3, 0	

לכן שיווי המשקל נאש של המשחק הם

$$s^* = (M/N, l) , \quad s^* = (M/K, r) .$$

ב)



קבוצות ידיעת שחקן I :

$$x_0 : (T, B) .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן I :

$$S_I = (T, B) .$$

קבוצות ידיעת שחקן II :

$$x_1 : (a, b) , \quad x_3 : (d, e) , \quad x_4 : (h, f) .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן II :

$$S_{II} = (a/d/h , a/d/f , a/e/h , a/e/f , b/d/h , b/d/f , b/e/h , b/e/f) .$$

$I \backslash II$	$a/d/h$	$a/d/f$	$a/e/h$	$a/e/f$
T	5, 9	5, 9	5, 9	5, 9
B	$\frac{1}{3}(9, 3) + \frac{2}{3}(0, 6)$	$\frac{1}{3}(9, 3) + \frac{2}{3}(12, 6)$	$\frac{1}{3}(6, 12) + \frac{2}{3}(0, 6)$	$\frac{1}{3}(6, 12) + \frac{2}{3}(12, 6)$

$I \backslash II$	$b/d/h$	$b/d/f$	$b/e/h$	$b/e/f$
T	7, 7	7, 7	7, 7	7, 7
B	$\frac{1}{3}(9, 3) + \frac{2}{3}(0, 6)$	$\frac{1}{3}(9, 3) + \frac{2}{3}(12, 6)$	$\frac{1}{3}(6, 12) + \frac{2}{3}(0, 6)$	$\frac{1}{3}(6, 12) + \frac{2}{3}(12, 6)$

$I \backslash II$	$a/d/h$	$a/d/f$	$a/e/h$	$a/e/f$	$b/d/h$	$b/d/f$	$b/e/h$	$b/e/f$
T	5, 9	5, 9	5, 9	5, 9	7, 7	7, 7	7, 7	7, 7
B	3, 5	11, 5	2, 8	10, 8	3, 5	11, 5	2, 8	10, 8

נחשב את התשובות הטובות ביותר של שחקן I לכל אסטרטגיה של שחקן II :

$I \backslash II$	$a/d/h$	$a/d/f$	$a/e/h$	$a/e/f$	$b/d/h$	$b/d/f$	$b/e/h$	$b/e/f$
T	5, 9	5, 9	5, 9	5, 9	7, 7	7, 7	7, 7	7, 7
B	3, 5	11, 5	2, 8	10, 8	3, 5	11, 5	2, 8	10, 8

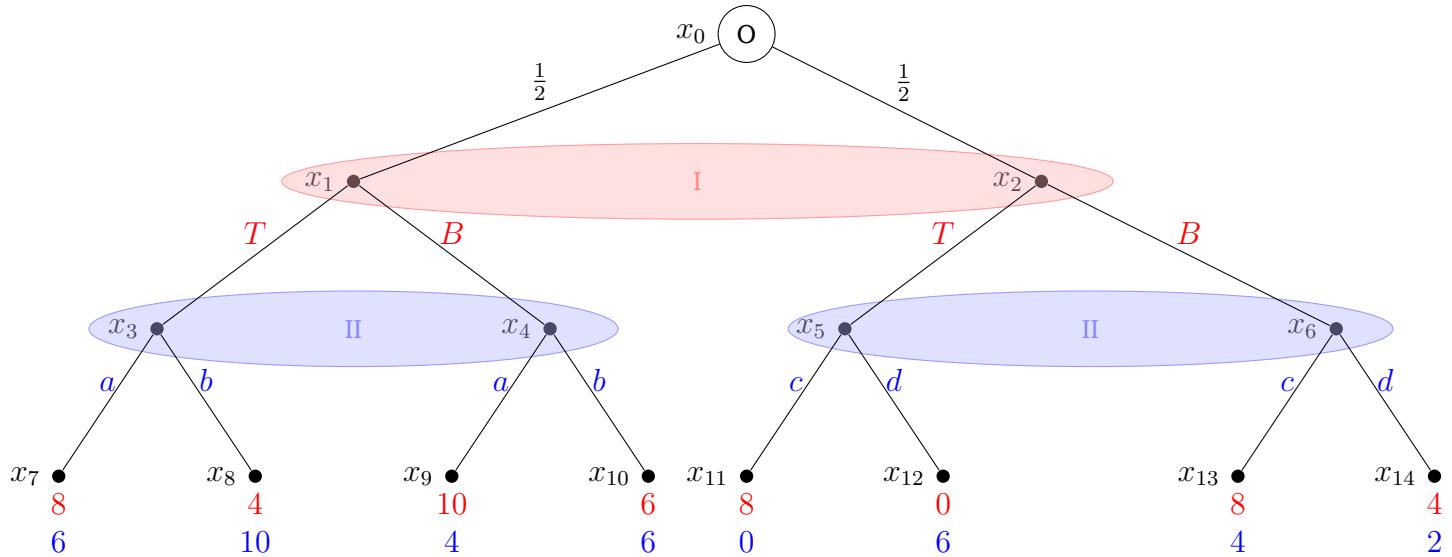
נחשב את התשובות הטובות ביותר של שחקן II לכל אסטרטגיה של שחקן I :

$I \backslash II$	$a/d/h$	$a/d/f$	$a/e/h$	$a/e/f$	$b/d/h$	$b/d/f$	$b/e/h$	$b/e/f$
T	5, 9	5, 9	5, 9	5, 9	7, 7	7, 7	7, 7	7, 7
B	3, 5	11, 5	2, 8	10, 8	3, 5	11, 5	2, 8	10, 8

לכן שיווי המשקל נאש של המשחק הם:

$$s^* = (T, a/d/h) , \quad s^* = (T, a/e/h) , \quad s^* = (B, a/e/f) , \quad s^* = (B, b/e/f) .$$

5



קבוצות ידעה של שחקן I:

$$x_1 x_2 : (T, B) .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I = (T, B) .$$

קבוצות ידעה של שחקן II:

$$x_3 x_4 : (a, b) , \quad x_5 x_6 : (c, d) .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן II

$$S_{II} = (a/c , a/d , b/c , b/d) .$$

$I \backslash II$	a/c	a/d	b/c	b/d
T	$\frac{1}{2}(8, 6) + \frac{1}{2}(8, 0)$	$\frac{1}{2}(8, 6) + \frac{1}{2}(0, 6)$	$\frac{1}{2}(4, 10) + \frac{1}{2}(8, 0)$	$\frac{1}{2}(4, 10) + \frac{1}{2}(0, 6)$
B	$\frac{1}{2}(10, 4) + \frac{1}{2}(8, 4)$	$\frac{1}{2}(10, 4) + \frac{1}{2}(4, 2)$	$\frac{1}{2}(6, 6) + \frac{1}{2}(8, 4)$	$\frac{1}{2}(6, 6) + \frac{1}{2}(4, 2)$

$I \backslash II$	a/c	a/d	b/c	b/d
T	(4, 3)	(4, 6)	(6, 5)	(2, 8)
B	(9, 6)	(7, 3)	(7, 5)	(5, 4)

נחשב את התשובות הטובות ביותר של שחקן I לכל אסטרטגיה של שחקן II :

$I \backslash II$	a/c	a/d	b/c	b/d
T	(4, 3)	(4, 6)	(6, 5)	(2, 8)
B	(9, 6)	(9, 3)	(9, 5)	(5, 4)

נחשב את התשובות הטובות ביותר של שחקן II לכל אסטרטגיה של שחקן I :

$I \backslash II$	a/c	a/d	b/c	b/d
T	(4, 3)	(4, 6)	(6, 5)	(2, 8)
B	(9, 6)	(9, 3)	(9, 5)	(5, 4)

לכן שוויי המשקל נאש היחיד של המשחק הוא

$$s^* = (B, a/c) .$$

שאלה 7

(א)

$I \backslash II$	a	b	c	d	$\min_{s_2 \in S_2} u$
α	8	4	8	4	4
β	2	5	3	8	2
γ	6	1	4	5	1
$\max_{s_1 \in S_1} u$	6	1	4	5	$\underline{v} = 4$
					$\bar{v} = 1$

סטרטגיה מקסימין: α . אסטרטגיה מינימקס: b .

(ב)

$I \backslash II$	a	b	c	d	$\min_{s_2 \in S_2} u$
α	6	4	2	1	1
β	5	3	3	0	0
γ	1	0	5	4	0
δ	2	-3	2	3	-3
$\max_{s_1 \in S_1} u$	6	4	5	4	$\underline{v} = 1$
					$\bar{v} = 4$

סטרטגייה מקסימינ: α . אסטרטגייה מינימקס: b או d .

(5)

$I \backslash II$	a	b	c	d	$\min_{s_2 \in S_2} u$
I					
α	6	4	2	1	1
β	5	3	3	0	0
γ	1	0	5	4	0
δ	2	-3	2	3	-3
$\max_{s_1 \in S_1} u$	6	4	5	1	$\underline{v} = 1$
					$\bar{v} = 1$

סטרטגייה מקסימינ: α . אסטרטגייה מינימקס: d .

(6)

$I \backslash II$	a	b	c	d	$\min_{s_2 \in S_2} u$
I					
α	3	6	5	5	3
β	5	5	5	5	5
γ	5	3	5	6	3
δ	6	5	5	3	3
$\max_{s_1 \in S_1} u$	6	6	5	6	$\underline{v} = 5$
					$\bar{v} = 5$

שאלה 8 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$I \backslash II$	a	b	c
I			
A	0, 1	0, 1	1, 1
B	0, 2	2, 0	1, 0
C	2, 0	1, 1	1, 0

נסמן את התשובות הטובות ביותר ביותר של כל השחקנים:

$I \backslash II$	a	b	c
I			
A	0, <u>1</u>	0, <u>1</u>	<u>1</u> , <u>1</u>
B	0, <u>2</u>	<u>2</u> , 0	<u>1</u> , 0
C	<u>2</u> , 0	1, <u>1</u>	<u>1</u> , 0

הווקטור אסטרטגיות (A, c) הוא שיווי המשקל היחיד של המשחק.

אך A נשלט חזק על ידי C , ו- c נשלט חזק על ידי a .

שאלה 9 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

תהי A מטריצה 2×2 של המשחק שני שחקנים סכום אפס הבא:

		<i>II</i>	<i>L</i>	<i>R</i>	$\min u$
		<i>I</i>	\diagdown		
		<i>T</i>	0	1	0
		<i>B</i>	0	2	0
$\max u$		0	2		

המשחק של המטריצה $-A$ הינו

		<i>II</i>	<i>L</i>	<i>R</i>	$\min u$
		<i>I</i>	\diagdown		
		<i>T</i>	0	-1	-1
		<i>B</i>	0	-2	-2
$\max u$		0	-1		

הערך של המשחק של המטריצה A הוא 0 בעוד הערך של המשחק של $-A$ הוא -1.

שאלה 10 נשים לב כי לפי ההגדרה של הערך המינימלי של קבוצה מתקיים

$$\min_{b' \in B} u(a, b') \leq u(a, b) \quad \forall b \in B, \forall a \in A .$$

ולפי ההגדרה של הערך המקסימלי של פונקציה מותקיים

$$u(a, b) \leq \max_{a' \in A} u(a', b) \quad \forall b \in B, \forall a \in A .$$

מכאן

$$\min_{b' \in B} u(a, b') \leq u(a, b) \leq \max_{a' \in A} u(a', b') .$$

ולכן

$$\min_{b' \in B} u(a, b') \leq \max_{a' \in A} u(a', b') \tag{*}$$

נשים לב כי הצד ימין לא תלוי על a . ז"א משווואה (*) מתקיימת לכל a . בפרט, ניתן לקחת את ה- a אשר ממקסם את הצד ימין והרי נקבל

$$\max_{a' \in A} \min_{b' \in B} u(a', b') \leq \max_{a' \in A} u(a', b') \tag{#}$$

כעת נשים לב כי הצד שמאל לא תלוי על b . ז"א משווואה (#) מתקיימת לכל b . בפרט, ניתן לנקות את ה- b אשר מזער את הצד ימין והרי קיבל

$$\max_{a' \in A} \min_{b' \in B} u(a', b') \leq \min_{b' \in B} \max_{a' \in A} u(a', b')$$

מש"ל.

שאלה 11

(א)

I	II	a	b	c	$\min u$
		1	2	3	1
		4	3	0	0
		4	3	3	

לכן לשחקן אין ערך.

(ב)

I	II	a	b	$\min u$
		2	2	2
		1	3	1
		2	3	

לכן הערך של המשחק הוא $2 = \underline{v} = \bar{v}$. האסטרטגיה האופטימלית לשחקן I היא A . האסטרטגיה האופטימלית לשחקן II היא a .

(ג)

I	II	a	b	$\min u$
		3	0	0
		2	2	2
		0	3	0
		3	3	

לכן לשחקן אין ערך.

(ד)

$I \backslash II$	a	b	c	d	$\min u$
I					
A	$\frac{7}{2}$	3	4	12	3
B	7	5	6	13	5
C	4	2	3	0	0
$\max u$	7	5	6	13	

לכן הערך של המשחק הוא 5. האסטרטגיה האופטימלית של שחקן I היא B . האסטרטגיה האופטימלית של שחקן II היא b .

שאלה 12

(א)

$I \backslash II$	a	b	c	d	$\min_{s_2 \in S_2} u$
I					
α	16	8	16	8	8
β	4	10	6	16	4
γ	12	2	8	10	2
$\max_{s_1 \in S_1} u$	16	10	16	16	$\bar{v} = 8$

$$\underline{v} = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u = 8 , \quad \bar{v} = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u = 10 .$$

אסטרטגיה מקסימין של שחקן I היא α .
אסטרטגיה מינימקס של שחקן II היא b .

לכן $\underline{v} = 8 \neq \bar{v} = 10$ למשחק אין ערך.

שאלה 13

$I \backslash II$	a	b	c	d	$\min_{s_2 \in S_2} u$
I					
α	18	12	6	3	3
β	15	9	9	0	0
γ	3	0	15	12	0
δ	6	-9	6	9	-9
$\max_{s_1 \in S_1} u$	18	12	15	12	$\underline{v} = 3$

$$\underline{v} = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u = 3 , \quad \bar{v} = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u = 12 .$$

אסטרטגיה מקסימינ של שחקן I היא α .
אסטרטגיה מינימקס של שחקן II היא b או d .

$\underline{v} = 3$ וכן למשחק אין ערך.

שאלה 14

		II				$\min_{s_2 \in S_2} u$
		a	b	c	d	
I	α	15	30	25	25	15
	β	25	25	25	25	25
	γ	25	15	25	30	15
	δ	30	25	25	15	15
$\max_{s_1 \in S_1} u$		30	30	25	30	$\underline{v} = 25$ $\bar{v} = 25$

$$\underline{v} = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u = 25 , \quad \bar{v} = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u = 25 .$$

אסטרטגיה מקסימינ של שחקן I היא β .
אסטרטגיה מינימקס של שחקן II היא c . בהכרח

$\underline{v} = 25$ וכן למשחק יש ערך 25.

שאלה 15

תהיינה A ו- B מטריצות בעלות תשלומים חיוביים. איזי עברו

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline A & 0 \\ \hline 0 & B \\ \hline \end{array} .$$

מתקיים $0 \leq T_{ij} \leq 1$.

בכל עמודה יש לפחות אפס אחד, וכך

$$\underline{v} = \max_i \min_j T_{ij} = \max_i 0 = 0 .$$

מצד שני מכיוון ש- A ו- B מטריצות חיוביות, איזי קיים לפחות איבר חיובי אחד בכל שורה. לפיכך

$$\bar{v} = \min_j \max_i T_{ij} > 0 .$$

לכן $\underline{v} < \bar{v}$ ואו $\underline{v} \neq \bar{v}$ וכן למשחק אין ערך.

שאלה 16הרווח לשחקן i נתון עלי ידי פונקציית התשלומים

$$\begin{aligned} u_i(q_1, \dots, q_i, \dots, q_n) &= P(Q)q_i - C_i = (P(Q) - c)q_i \\ &= (a - Q - c)q_i \\ &= (a - q_1 - q_2 - \dots - q_i - \dots - q_n - c)q_i \end{aligned}$$

הווקטור אסטרטגיות $(q_1^*, \dots, q_i^*, \dots, q_n^*)$ יהיה שווי המשקל אם $\sum_{j=1}^n q_j^* = a$ ותשובה טוביה ביותר לשחקן i לכל n קלומר אם

$$\begin{aligned} u_i(q_1^*, \dots, q_i^*, \dots, q_n^*) &= \max_{0 \leq q_i \leq \infty} u_i(q_1^*, \dots, q_i, \dots, q_n^*) . \\ (u_i)'_{q_i} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u_i)'_{q_i} &= (a - q_1 - \dots - q_i - \dots - q_n - c) - q_i \\ &= a - q_1 - \dots - 2q_i - \dots - q_n - c \\ &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \quad a - c &= q_1 + \dots + 2q_i^* + \dots + q_n \end{aligned}$$

לכל $n \geq i$. מכיוון שאנו קיבל אותה משווהה לכל i , אז בהכרח הערכים של q_i זהים ושווים ל-

$$q_1^* = q_2^* = \dots = q_i^* = \dots = q_n^* .$$

נציב זה במשווהה הקודם ואז נקבל

$$(n+1)q_i^* = a - c \quad \Rightarrow \quad q_i^* = \frac{a - c}{n+1} .$$

שאלה 17 פונקציית המחיר היא

$$P(Q) = a - Q ,$$

כאשר הרווח לשחקן 1 הוא $Q = q_1 + q_2$.

$$u_1 = (P - c_1)q_1 = (a - Q - c_1)q_1 = (a - q_1 - q_2 - c_1)q_1 ,$$

הרווח לשחקן 2 הוא

$$u_2 = (P - c_2)q_2 = (a - Q - c_2)q_2 = (a - q_1 - q_2 - c_2)q_2 .$$

בנקודת שוויי משקל:

$$(u_1)'_{q_1} = (a - c_1 - q_1 - q_2) - q_1 = a - c_1 - 2q_1 - q_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_1^* = \frac{a - c_1 - q_2}{2} .$$

בנקודת שוויי משקל:

$$(u_2)'_{q_1} = (a - c_2 - q_1 - q_2) - q_2 = a - c_2 - 2q_1 - q_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_2^* = \frac{a - c_2 - q_1}{2} .$$

נzieb התנאי השני בתנאי הראשוני:

$$q_1^* = \frac{a - c_1 - q_2}{2} = q_1^* = \frac{a - c_1 - \left(\frac{a - c_2 - q_1}{2}\right)}{2} = \frac{a}{4} - \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4} + \frac{q_1^*}{4} \Rightarrow \frac{3q_1^*}{4} = \frac{a}{4} - \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4} = \frac{a - 2c_1 + c_2}{4}$$

$$\Rightarrow q_1^* = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3}.$$

נzieb זה בביטוי ל- q_2^* ונקבל

$$q_2^* = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3}.$$

$$2c_2 > a + c_1 \Rightarrow a - 2c_2 + c_1 < 0 \Rightarrow \frac{a - 2c_2 + c_1}{3} < 0.$$

לכן בהכרח $q_2 = 0$ בגלל כמות לא יכולה להיות שלילית.