חישוביות וסיבוכיות

מועד א'

ד"ר יוחאי טוויטו, ד"ר ירמיהו מילר .

סמסטר א, תשפ"ו'

מספר העמוד הנוכחי ומספר העמודים הכולל בשאלון מופיעים בתחתית כל עמוד. בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות

שאלוני בחינה

☑ לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.

☐ לשאלון הבחינה יש לצרף כריכה בלבד.

☐ יש להחזיר את השאלון ביחד עם המחברת/כריכה.

שימוש במחשבונים

☐ ניתן להשתמש במחשבון.

☑ לא ניתן להשתמש במחשבון.

חומר עזר

☑ לא ניתן להשתמש בחומר עזר כלל.

☐ ניתן להשתמש בחומר עזר/דף נוסחאות, כמפורט:

☐ הבחינה עם חומר פתוח מותר להשתמש בכל חומר עזר מודפס או כתוב.

הנחיות

נא קראו בעיון את ההנחיות הבאות בטרם תתחילו לפתור את הבחינה. מומלץ לקרוא בקצרה את כלל השאלות לפני שמתחילים לפתור את הבחינה. ניתן לענות על השאלות בכל סדר שתרצו.

1. המבחן כולל 5 שאלות. יש לענות על כולן.
2. שאלות הבחינה שוות משקל - כל שאלה 20 נקודות.
3. כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תדלגו על שלבים.
4. המבחן כולל נספחים, לשימושכם. הסתייעו בהם במידת הצורך.
5. הקפידו על כתב יד ברור וקריא.
6. הקפידו לרשום בגדול ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
7. כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבלתם. רק הן נבדקות !
8. ניתן לקחת את השאלון כאשר הבחינה מסתיימת.

בהצלחה!

הבחינה

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

סעיף ב' (10 נקודות)

שאלה 2: וריאציות על מכונות טיורינג (20 נקודות)

שאלה 3: אי כריעות (20 נקודות)

סעיף א' (12 נקודות)

סעיף ב' (8 נקודות)

שאלה 4: אי-כריעות

סעיף א' (10 נקודות)

נתונה השפה הבאה:

$$L = \Big\{\langle M\rangle \;\Big|\; \varepsilon \notin L(M)\Big\} \;.$$

הוכיחו כי $L \notin R$.

סעיף ב' (10 נקודות)

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענה הבאה:
לכל שתי שפות L_1 ו- L_2 אם $L_1 \in RE$ וגם $L_2 \in RE$ אזי $L_1 \cup \bar{L}_2 \in RE$.

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

בהינתן בגרף לא מכוון $G = (V, E)$. קבוצת שולטת היא קבוצת קודקודים $D \subseteq V$ המקיימת התנאי הבא:

לכל קודקוד $u \in V \backslash D$ קיים לפחות קודקוד אחד $w \in D$ כך ש: $uw \in E$.

כלומר, כל קודקוד שלא ב - D מחובר בקשת לקודוד אחד ב- D.

הבעיית DS מוגדרת באופן הבא:

<u>פלט:</u> גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר שלם k.

<u>קלט:</u> האם קיימת קבוצה שולטת $D\subseteq V$ כך ש- $|D|\leqslant k$?

ניתן להגדיר הבעיית DS כשפה פורמלית באופן הבא:

$$DS=\{\langle G,k\rangle \mid \text{גרף לא מכוון שמכיל קבוה שולטת } D\subseteq V \text{ בגודל } k \text{ לפחות } G\}$$

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$. **כיסוי קדקודים** היא קבוצת קדקודים $C\subseteq V$ כך שלכל צלע $(u,w)\in E$ מתקיים: $u\in C \ \vee \ w\in C$.

הבעיית VC מוגדרת באופן הבא:

<u>פלט:</u> גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר שלם k.

<u>קלט:</u> האם G מכיל כיסוי קודקודים בגודל k לכל היותר.

הבעיית VC ניתנת להכדיר כשפה פורמלית באופן הבא:

$$VC=\{\langle G,k\rangle \mid \text{גרף לא מכוון המכיל כיסוי קודקודים בגודל } k \text{ לכל היותר. } G\}$$

הוכיחו:

$$VC\leqslant_P DS\ .$$

חישוביות וסיבוכיות

מועד א'

פתרון לדוגמא

ד"ר יוחאי טוויטו ,   ד"ר ירמיהו מילר .

סמסטר א, תשפ"ו'

מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הינן פתרונות לדוגמא. ניתן לפתור חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *SAMI

פתרונות

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

סעיף ב' (10 נקודות)

שאלה 2: וריאציות על מכונות טיורינג (20 נקודות)

שאלה 3: אי כריעות (20 נקודות)

שאלה 4: אי-כריעות

סעיף א' נראה רדוקציה $L \leqslant \overline{L_{\text{acc}}}$.

בניית הרדוקציה

$$f(x) = \begin{cases} \langle M_{\varnothing} \rangle & : x \neq \langle M, w \rangle \ , \\ \langle M_w \rangle & : x = \langle M, w \rangle \ . \end{cases}$$

כאשר:

- $M_{\varnothing}$ היא מכונת טיורינג הדוחה כל קלט.
- M_w היא מכונת טיורינג של כל קלט y, מתעלמת מ- y, מריצה את M על w ועונה כמוה.

אבחנה

$$L(M_w) = \begin{cases} \Sigma^* & : w \in L(M) \ , \\ \varnothing & : w \notin L(M) \ . \end{cases}$$

הוכחת הנכונות

פתרונות

f חשיבה כי ניתן לבנות מכונת טיורינג שבודקת האם $x = \langle M, w\rangle$. אם לא מחזירה קידוד קבוע $\langle M_\varnothing\rangle$, ואם כן מחזירה קידוד של M_w ע"י שינויים בקידוד של $\langle M\rangle$.

נוכיח כי:

$$x \in \overline{L_{\text{acc}}} \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \in L\ .$$

הוכחה לכיוון $\Leftarrow$

אם $x \in \overline{L_{\text{acc}}} \Leftarrow$ שני מקרים.

1) $x \neq \langle M, w\rangle \Leftarrow f(x) = \langle M_\varnothing\rangle \Leftarrow \varepsilon \notin L(M_\varnothing) \Leftarrow f(x) \in L$.

2) $x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \notin L(M)$.

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M_w\rangle$ ולפי האבחנה $L(M_w) = \varnothing$

$\Leftarrow$ $\varepsilon \notin L(M_w)$

$\Leftarrow$ $f(x) \in L$.

הוכחה לכיוון $\Rightarrow$

אם $x \notin \overline{L_{\text{acc}}}$

$\Leftarrow$ $x = \langle M_w\rangle$ ו- $w \in L(M)$.

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M_w\rangle$ ולפי האבחנה $L(M_w) = \Sigma^*$

$\Leftarrow$ $\varepsilon \in L(M_w)$

$\Leftarrow$ $f(x) \notin L$.

לפיכך הוכחנו רדוקציה

$$\overline{L_{\text{acc}}} \leqslant L$$

ולכן מכיוון ש- $\overline{L_{\text{acc}}} \notin RE$ ממשפט הרדוקציה מתקיים $L \notin RE$.

סעיף ב' הטענה לא נכונה.

דוגמה נגדית: $L_1 = \varnothing$, $L_2 = L_{\text{acc}}$.

ראשית, קיימת מכונת טיורינג M_1 שמקבלת את השפה $L_1 = \varnothing$:

$M_1 =$ " על קלט x דוחה."

הוכחנו בכיתה כי השפה $L_{\text{acc}} \in RE$.

מצד שני $\bar{L}_2 = \overline{L_{\text{acc}}} \notin RE$ לפיכך

$$L_1 \cup \bar{L}_2 = \varnothing \cup \overline{L_{\text{acc}}} = \overline{L_{\text{acc}}} \notin RE\ .$$

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

סעיף א' (12 נקודות)

בניית הרדוקציה

נגדיר פונקציית הרדוקציה f באופן הבא:

$$f\left(\langle G,k\rangle\right)=\langle G',k'\rangle \ .$$

כאשר $k'=k$ ו- G' יהיה כמו G פרט לכך שאם ב- G קיימים קודקודים בודדים נוריד אותם ונוסיף קודקוד w_e לכל צלע $e=u\text{v}\in E$ ונחבר אותו בצלע ל- u ול- v.

פורמלי: אם $G=(V,E)$ גרף לא מכוון ואם $S\subseteq V$ הקבוצה של הקודקודים הבודדים של G (הקודקודים שאינם מחוברים לאף קודקוד אחר בצלע) אז $G'=(V',E')$ כאשר

- $V'=(V\backslash S)\cup\left\{w_e\middle|e\in E\right\}$,
- $E'=E\cup\left\{\{w_eu,w_e\text{v}\}\ \middle|\ e=u\text{v}\in E\right\}$.

הערה

לא מספיק לבנות רדוקציה שמקבלת כקלט גרף לא מכוון G וטבעי k ופולטת גרף G' שהוא אותו גרף G בלי קודקודים בודדים וטבעי k. דוגמה נגדית:

המשולש קשיר $G=K_3$ ו- $k=1$. G מכיל קבוצה שולטת בגודל $k=1$ אבל ב- G לא קיים כיסוי בקודקודים בגודל $k=1$.
ז"א $\langle G,1\rangle\notin VC$ אבל $\langle G,1\rangle\in DS$.

הוכחת הנכונות

נוכיח את התנאי הרדוקיצה:

$$\langle G,k\rangle\in VC \quad\iff\quad \langle G',k'\rangle\in DS \ .$$

כיוון $\Leftarrow$

אם $\langle G,k\rangle\in VC$

$\Leftarrow$ $G=(V,E)$ גרף לא מכוון וקיים כיסוי בקודקודים $C\subseteq V$, $|C|\leqslant k$.

$\Leftarrow$ לכל $w\in V'\backslash C$ אז שני מקרים:

1) $w\in V$ ומכיוון ש- w לא קודקוד בודד אז קיים $uw\in E$
$\Leftarrow$ מכיוון ש- C כיסוי בקודקודים אז $u\in C$.

2) $w\in V_e$ $\Leftarrow$ קיים $e=u\text{v}\in E$ כך ש: w מחובר ל- u ול- v בצלע.

$\Leftarrow$ לכל $w\in V'\backslash C$ קיים $u\in C$ כך ש: w מחובר ל-u בצלע.

$\Leftarrow$ C קבוצה שולטת בגרף G' כאשר $|C|\leqslant k$.

פתרונות

$\Leftarrow$ G' מכיל קבוצה שולטת בגודל k לכל היותר.

$\Leftarrow$ $\langle G', k\rangle \in DS$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

אם $\langle G, k\rangle \notin VC$.

$\Leftarrow$ G לא מכיל כיסוי בקודקודים C בגודל k לכל היותר.

$\Leftarrow$ אחרי הסרת הקודקודים הבודדים ב- G לא תהיה קבוצה שולטת של קודקודים ב- G קטן מ- $k+1$.

$\Leftarrow$ אחרי הוספת קודקודים ביניים V_e והצלעות ביניים, הגרף המתקבל, G' גם לא יכיל קבוצה שולטת של קודקודים קטן מ- $k+1$.

$\Leftarrow$ $\langle G', k'\rangle \in DS$.

<u>סיבוכיות זמן</u>

נוכיח כי הפונקציית הרדוקציה f חשיבה בזמן פולינומיאלית. כלומר נבנה אלגוריתם M_f שמחשבת את f ונראה כי המכונה רצה בזמן פולינומיאלי.

$M_f =$ "על קלט $\langle G, k\rangle$ כאשר $G=(V,E)$ גרף לא מכוון ו- k מספר טבעי:

1) מעתיק את הגרף $G=(V,E)$.

2) מוריד את הקודקודים הבודדים שלא צמודים לאף צלע של G.

3) לכל צלע $e \in E$ מוסיף קודקוד w_e כדי לקבל קבוצה של קודקודים מוספים $V_e = \{w_e \mid e \in E\}$.

4) לכל $e=(u,\mathsf{v}) \in E$ מחבר את w_e ל- u בצלע ואת w_e ל- v עם צלע."

- שלב (1) עולה $O(|V|)+O(|E|)$.
- שלב (2) עולה $O(|V|)$ צעדים.
- שלב (3) עולה $O(|E|)$ צעדים.
- שלב (4) עולה $O(|V'|)=O(|E|)$ צעדים.

לכן M_f רצה בזמן $O(|V|)+O(|E|)=O(n)$ כאשר $n=|\langle G, k\rangle|$ הוא האורך של הקלט.

לכן f היא הרדוקיצה פולינומיאלית מ- VC ל- DS ולכן

$$VC \leqslant_P DS \ .$$