

שיעור 1

מכונות טיורינג

1.1 הגדרה של מכונת טיורינג

הגדרה 1.1 מכונת טיורינג (הגדרה היוריסטית)

הקלט והסרט

- מכונת טיורינג (מ"ט) קורא קלט.
- הקלט עצמו נמצא על סרט אינסופי מחולק למשבצות.
- כל תו של הקלט כתוב במשבצת אחת של הסרט.
- במכונת טיורינג אנחנו מניחים שהסרט אינסופי לשני הכיוונים.
- * משמאל לתחילת הקלט יש רצף אינסופי של תווי רווח " ".
- * מימין לסוף הקלט יש רצף אינסופי של תווי רווח " ".

...	␣	␣	a	b	b	b	a	a	␣	␣	␣	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

הראש

- במצב ההתחלתי הראש בקצה השמאלי של הקלט.

...	␣	␣	a	b	b	b	a	a	␣	␣	␣	...
			↑									

- הראש יכול לזוז ימינה על הסרט וגם שמאלה על הסרט.
- הראש קורא את התוכן של המשבצת שבה הוא נמצא.
- הראש יכול לכתוב על משבצת, אבל רק על המשבצת שבה הראש נמצא.

תאור העבודה של המכונה

- בתחילת הריצה, הקלט כתוב התחילת הסרט כאשר מימינו נמצא רצף אינסופי של תווי ␣ -ים.
- הראש מצביע על התא הראשון בסרט והמכונה נמצאת במצב התחלתי q_0 .

q_0	...	␣	␣	a	b	b	b	a	a	␣	␣	␣	...
				↑									

- בכל צעד חישוב, בהתאם למצב הנוכחי ולאות שמתחת לראש (התו הנקרא), המכונה מחליטה:
 - * לאיזה מצב לעבור
 - * מה לכתוב מתחת לראש (התו הנכתב)
 - * לאן להזיז את הראש (תא אחד ימינה, או תא אחד שמאלה, או להישאר במקום).
- למכונה ישנם שני מצבים מיוחדים:
 - * q_{acc} : אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל- q_{acc} היא עוברת ומקבלת.
 - * q_{rej} : אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל- q_{rej} היא עוברת ודוחה.
 - * אם המכונה לא מגיעה ל- q_{acc} או q_{rej} היא תמשיך לרוץ לנצח.

הגדרה 1.2 מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$$

כאשר:

Q	קבוצת מצבים סופית ולא ריקה
Σ	אלפבית הקלט
Γ	אלפבית הסרט
δ	פונקציית המעברים
q_0	מצב התחלתי
q_{acc}	מצב מקבל יחיד
q_{rej}	מצב דוחה יחיד

$$_ \notin \Sigma$$

$$\Sigma \subseteq \Gamma, _ \in \Gamma$$

$$\delta : (Q \setminus \{q_{rej}, q_{acc}\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$$

דוגמה 1.1

נבנה מכונת טיורינג אשר מקבלת מילה אם היא בשפה

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#a_w = \#b_w\}.$$

ז"א השפת כל המילים עם מספר שווה אותיות a ו b .

הרעיון של האלגוריתם של המכונה היא כדלקמן:

- נסרוק את הקלט משמאל לימין, נחפש את האות a הראשונה, נסמן אותה איכשהו כ"נקראת".
 - אחר כך נחפש b תואם.
 - אם מצאנו b תואם נסמן אותו כ"נקרא", נחזור לתחילת הקלט ונתחיל סיבוב חדש.
 - אם לא מצאנו b תואם אז המכונה תדחה.
 - אם נגיע לסיבוב שבו אינן נשארות אף אותיות לא a :
 - אם יש b לא מסומן אז המכונה תדחה.
 - אחרת אם לא נשאר אף b לא מסומן אז המכונה תקבל.
- כעת נתאר את הפאודו-קוד של המכונה, כדלקמן.

פסאודו-קוד

- 1) סורקים את הקלט משמאל לימין.
 - אם לא מצאנו a וגם לא מצאנו $b \Leftarrow$ מקבלת.
 - אם האות הראשונה שהראש מצא היא a , כותבים עליו \checkmark , חוזרים לתחילת הקלט ועוברים לשלב 2).
 - אם האות הראשונה שהראש מצא היא b , כותבים עליו \checkmark , חוזרים לתחילת הקלט ועוברים לשלב 3).
- 2) סורקים את הקלט משמאל לימין.
 - אם לא מצאנו $b \Leftarrow$ דוחה.
 - אם מצאנו b כותבים עליו \checkmark , חוזרים לתחילת הקלט וחוזרים לשלב 1).
- 3) סורקים את הקלט משמאל לימין.
 - אם לא מצאנו $a \Leftarrow$ דוחה.
 - אם מצאנו a כותבים עליו \checkmark , חוזרים לתחילת הקלט וחוזרים לשלב 1).

כעת נתן הגדרה פורמלית של המכונת טיורינג שמבצעת את האלגוריתם הזה.

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$$

כאשר Q הקבוצת המצבנים הבאה:

$$Q = \{q_0, q_a, q_b, q_{back}, q_{rej}, q_{acc}\} .$$

המשמעותם של כל המצבים נרשמים בטבלה למטה:

q_0	המצב ההתחלתי. אליו נחזור אחרי כל סבב התאמה של זוג אותיות.
q_a	מצב שבו ראינו a ומחפשים b תואם.
q_b	מצב שבו ראינו b ומחפשים a תואם.
q_{back}	מצב שנשתמש בו כדי לחזור לקצה השמאלי של הקלט ולהתחיל את הסריקה הבאה (סבב ההתאמה הבא).
q_{acc}	מצב מקבל.
q_{rej}	מצב דוחה.

האלפבית של הקלט, Σ , והלפבית של הסרט, Γ , הינן:

$$\Sigma = \{a, b\} , \quad \Gamma = \{a, b, _, \checkmark\} .$$

הפונקציית המעברים $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ היא מוגדרת כדלקמן.

$$\delta(q_0, a) = (q_a, \checkmark, R) ,$$

$$\delta(q_0, b) = (q_b, \checkmark, R) ,$$

$$\delta(q_0, _) = (q_{acc}, _, R) ,$$

$$\delta(q_a, \checkmark) = (q_a, \checkmark, R) ,$$

$$\delta(q_a, a) = (q_a, a, R) ,$$

$$\delta(q_a, b) = (back, \checkmark, L) ,$$

$$\delta(q_b, \checkmark) = (q_b, \checkmark, R) ,$$

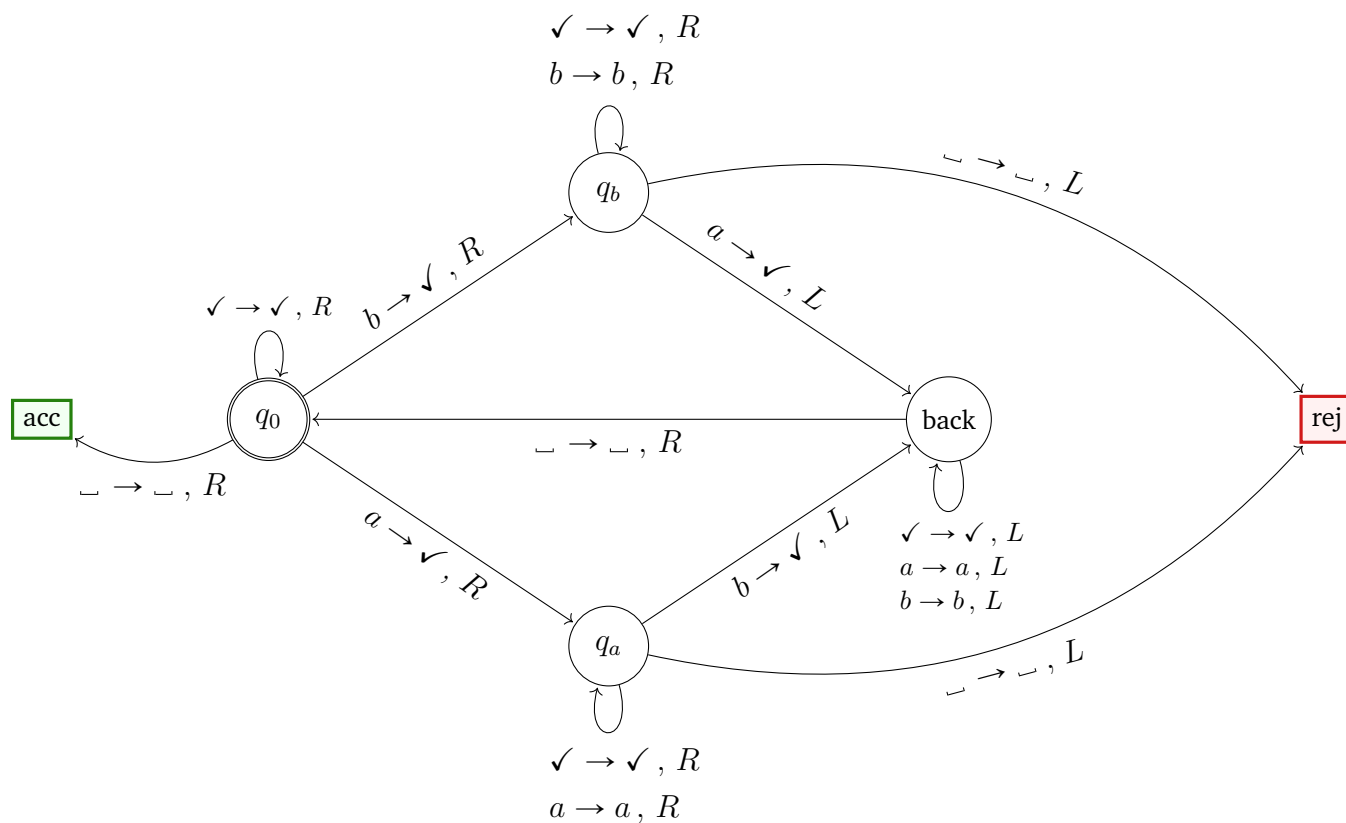
$$\delta(q_b, b) = (q_a, b, R) ,$$

$$\delta(q_b, a) = (back, \checkmark, L) .$$

לעתים קל יותר לרשום את פונקציית המעברים δ כטבלה:

$\Gamma \backslash Q$	a	b	$_$	\checkmark
q_0	(q_a, \checkmark, R)	(q_b, \checkmark, R)	$(q_{acc}, _, R)$	(q_0, \checkmark, R)
q_a	(q_a, a, R)	$(back, \checkmark, L)$	$(q_{rej}, _, L)$	(q_a, \checkmark, R)
q_b	$(back, \checkmark, L)$	(q_b, b, R)	$(q_{rej}, _, L)$	(q_b, \checkmark, R)
back	$(back, a, L)$	$(back, b, L)$	$(q_0, _, R)$	$(back, \checkmark, L)$

תרשים מצבים



- בכל צעד המכונה מבצעת שתי פעולות:

1. כותבת אות במיקום הראש
2. זזה צעד אחד שמאלה או צעד אחד ימינה.

- בכל צעד המכונה יכולה לעבור למצב אחר או להישאר באותו מצב.

דוגמה 1.2

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה $abbbbaa$.

פתרון:

$_$	q_0	a	b	b	b	a	a	$_$
$_$	\checkmark	q_a	b	b	b	a	a	$_$
$_$	back	\checkmark	\checkmark	b	b	a	a	$_$
back	$_$	\checkmark	\checkmark	b	b	a	a	$_$
$_$	q_0	\checkmark	\checkmark	b	b	a	a	$_$
$_$	\checkmark	q_0	\checkmark	b	b	a	a	$_$
$_$	\checkmark	\checkmark	q_0	b	b	a	a	$_$
$_$	\checkmark	\checkmark	\checkmark	q_b	b	a	a	$_$
$_$	\checkmark	\checkmark	\checkmark	b	q_b	a	a	$_$
$_$	\checkmark	\checkmark	\checkmark	back	b	\checkmark	a	$_$
$_$	\checkmark	\checkmark	back	\checkmark	b	\checkmark	a	$_$
$_$	\checkmark	back	\checkmark	\checkmark	b	\checkmark	a	$_$

␣	back	✓	✓	✓	b	✓	a	␣
back	␣	✓	✓	✓	b	✓	a	␣
␣	q_0	✓	✓	✓	b	✓	a	␣
␣	✓	q_0	✓	✓	b	✓	a	␣
␣	✓	✓	q_0	✓	b	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	q_0	b	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	✓	q_b	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	✓	✓	q_b	a	␣
␣	✓	✓	✓	✓	back	✓	✓	␣
␣	✓	✓	✓	back	✓	✓	✓	␣
␣	✓	✓	back	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	back	✓	✓	✓	✓	✓	␣
␣	back	✓	✓	✓	✓	✓	✓	␣
back	␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	␣
␣	q_0	✓	✓	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	q_0	✓	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	✓	q_0	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	✓	✓	q_0	✓	✓	✓	␣
␣	✓	✓	✓	✓	q_0	✓	✓	␣
␣	✓	✓	✓	✓	✓	q_0	✓	␣
␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	q_0	␣
␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	␣	acc

דוגמה 1.3

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה aab.

פתרון:

␣	q_0	a	a	b	␣
␣	✓	q_a	a	b	␣
␣	✓	a	q_a	b	␣
␣	✓	back	a	✓	␣
␣	back	✓	a	✓	␣
back	␣	✓	a	✓	␣
␣	q_0	✓	a	✓	␣
␣	✓	q_0	a	✓	␣
␣	✓	✓	q_a	✓	␣
␣	✓	✓	✓	q_a	␣
␣	✓	✓	rej	✓	␣

הגדרה 1.3 קונפיגורציה

תהי $M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ מכונת טיורינג. קונפיגורציה של M הינה מחרוזת

$uq\sigma v$

כאשר משמעות:

$$u, v \in \Gamma^*, \quad \sigma \in \Gamma, \quad q \in Q.$$

q מצב המכונה,
 σ הסימון במיקום הראש
 u תוכן הסרט משמאל לראש,
 v תוכן הסרט מימין לראש.

נעבור על סרט הקלט. משמאל לימין.

- מבצעים מחיקה לסירוגין של האות a כלומר אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר וכן הלאה.

—	—	✓	a	✓	a	✓	a	✓	a	—	—
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

↑

אם אחרי סבב הראשון

- * יש ✓ בתו האחרון \Leftarrow קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב-2 \Leftarrow אין חזקה של 2 אותיות a במילה.

- * יש a בתו האחרון \Leftarrow קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב-2 ונמשיך לסבב הבא.

- הראש חוזר לתו הראשון של הקלט

—	—	✓	a	✓	a	✓	a	✓	a	—	—
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

↑

- בסבב הבא חוזרים על התהליך של מחיקה לסירוגין של האות a (אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר)

—	—	✓	✓	✓	a	✓	✓	✓	a	—	—
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

↑

אם אחרי סבב השני

- * יש ✓ בתו האחרון \Leftarrow קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב-2 \Leftarrow אין חזקה של 2 אותיות a במילה.

- * יש a בתו האחרון \Leftarrow קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב-2 ונמשיך לסבב הבא.

- הראש חוזר לתו הראשון של הקלט

—	—	✓	✓	✓	a	✓	✓	✓	a	—	—
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

↑

- בסבב הבא חוזרים על התהליך של מחיקה לסירוגין של האות a (אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר)

—	—	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	a	—	—
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

↑

אם אחרי סבב השלישי

- * יש ✓ בתו האחרון \Leftarrow קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב-2 \Leftarrow אין חזקה של 2 אותיות a במילה.

- * יש a בתו האחרון \Leftarrow קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב-2 ונמשיך לסבב הבא.

- הראש חוזר לתו הראשון של הקלט.

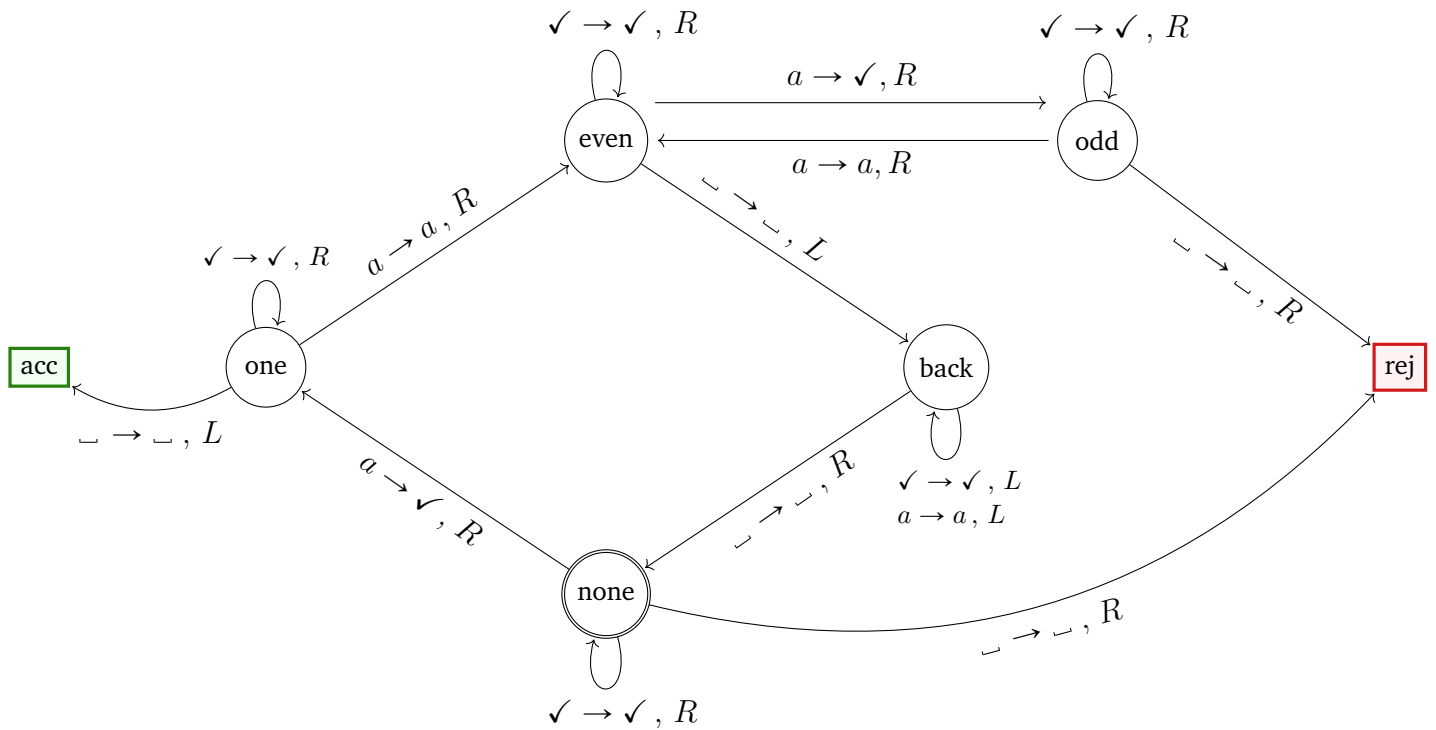
בסבב האחרון נשאיר רק אות a אחת.

לכן לפי המשפט למעלה מובטח לנו כי המילה מורכבת ממספר אותיות a אשר חזקה של 2.

—	—	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	a	—	—
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

↑

המכונת טיורינג אשר מקבלת מילים בשפה שעובדת לפי האלגוריתם המתואר למעלה מתואר בתרשים למטה.



המצבים:

- מצב none: מצב התחלתי. עדיין לא קראנו a בסבב סריקה זה.
- מצב one: קראנו a בודד.
- מצב even: קראנו מספר זוגי של a.
- מצב odd: קראנו מספר אי-זוגי של a.
- מצב back: חזרה שלמאלה.

דוגמה 1.6

בדקו אם המילה

aaaa

מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.5.

פתרון:

␣	none	a	a	a	a	␣
␣	✓	one	a	a	a	␣
␣	✓	a	even	a	a	␣
␣	✓	a	✓	odd	a	␣
␣	✓	a	✓	a	even	␣
␣	✓	a	✓	back	a	␣
␣	✓	a	back	✓	a	␣
␣	✓	back	a	✓	a	␣
␣	back	✓	a	✓	a	␣
back	␣	✓	a	✓	a	␣

┌	none	✓	a	✓	a	└
┌	✓	none	a	✓	a	└
┌	✓	✓	one	✓	a	└
┌	✓	✓	✓	one	a	└
┌	✓	✓	✓	a	even	└
┌	✓	✓	✓	back	a	└
┌	✓	✓	back	✓	a	└
┌	✓	back	✓	✓	a	└
┌	back	✓	✓	✓	a	└
back	┌	✓	✓	✓	a	└
┌	none	✓	✓	✓	a	└
┌	✓	none	✓	✓	a	└
┌	✓	✓	none	✓	a	└
┌	✓	✓	✓	none	a	└
┌	✓	✓	✓	✓	one	└
┌	✓	✓	✓	acc	✓	└

u	q	σ	v
┌	none	a	aaa ┌
┌ ✓	one	a	aa ┌
┌ ✓ a	even	a	a ┌
┌ ✓ a ✓	odd	a	┌
┌ ✓ a ✓ a	even	┌	┌
┌ ✓ a ✓	back	a	┌
┌ ✓ a	back	✓	a ┌
┌ ✓	back	a	✓ a ┌
┌	back	✓	a ✓ a ┌
┌	back	┌	✓ a ✓ a ┌
┌	none	✓	a ✓ a ┌
┌ ✓	none	a	✓ a ┌
┌ ✓ ✓	one	✓	a ┌
┌ ✓ ✓ ✓	one	a	┌
┌ ✓ ✓ ✓ a	even	┌	┌
┌ ✓ ✓ ✓	back	a	┌
┌ ✓ ✓	back	✓ a	┌
┌ ✓	back	✓	✓ a ┌
┌	back	✓	✓ ✓ a ┌
┌	back	┌	✓ ✓ ✓ a ┌
┌	none	✓	✓ ✓ a ┌
┌ ✓	none	✓	✓ a ┌
┌ ✓ ✓	none	✓	a ┌
┌ ✓ ✓ ✓	none	a	┌
┌ ✓ ✓ ✓ ✓	one	┌	┌
┌ ✓ ✓ ✓	acc	✓	┌

דוגמה 1.7

בדקו אם המילה

aaa

מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.5.

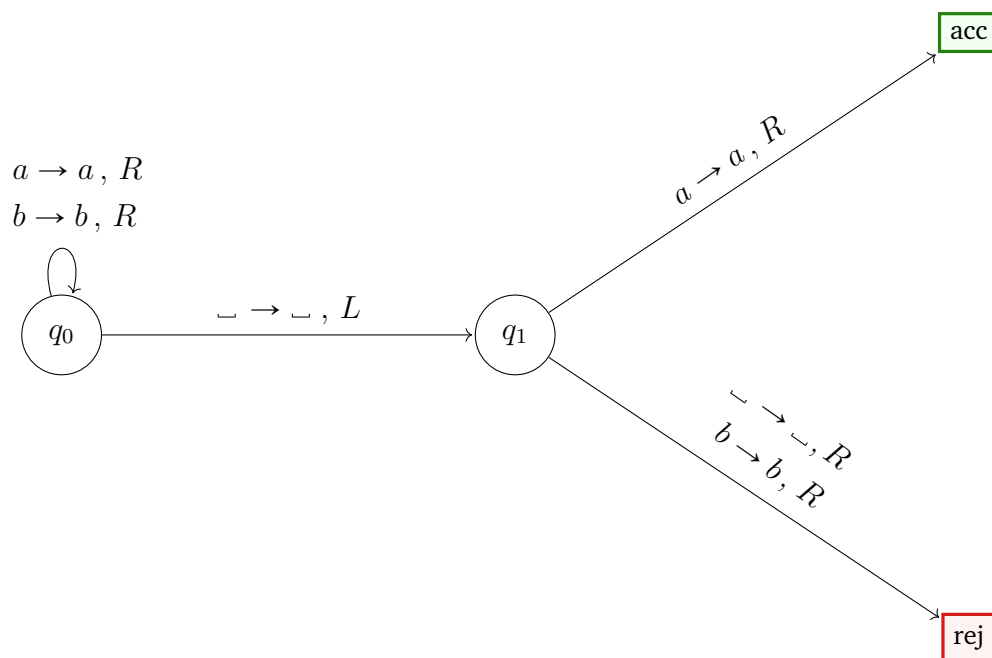
פתרון:

␣	none	a	a	a	␣
␣	✓	one	a	a	␣
␣	✓	a	even	a	␣
␣	✓	a	✓	odd	␣
␣	✓	a	✓	␣	rej

u	q	σ	v
␣	none	a	aa ␣
␣ ✓	one	a	a ␣
␣ ✓ a	even	a	␣
␣ ✓ a ✓	odd	␣	␣
␣ ✓ a ✓ ␣	rej	␣	␣

דוגמה 1.8

מהי שפת המכונה:



פתרון:

תיאור מילולי:

• במצב התחלתי q_0 :

* אם אנחנו רואים a , עוברים למשבצת הבאה לימין הראש.

* אם אנחנו רואים b , עוברים למשבצת הבהאה לשמאל הראש.

• ממשיכים כך עד שנגיע לתו רווח, כלומר לסוף המילה, ואז עוברים למשבצת לשמאל הראש, כלומר לתו האחרון של המילה.

* אם אנחנו רואים a , המילה מתקבלת. (ז"א התו האחרון הינו a).

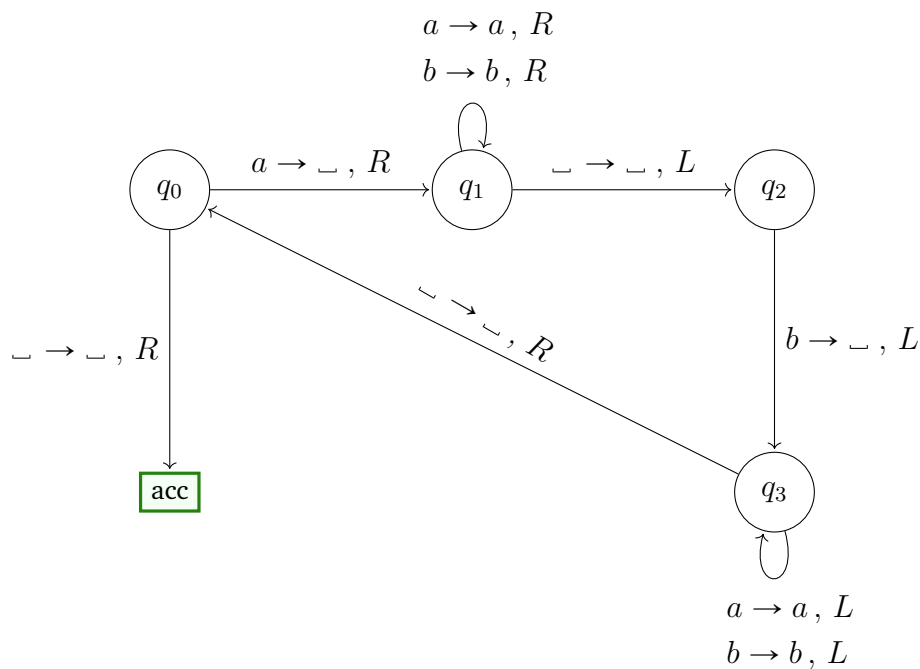
* אם אנחנו רואים b , המילה נדחית. (ז"א התו האחרון הינו b).

* אם אנחנו רואים תו-רווח המילה נדחית. (ז"א המילה הינה ריקה).

תשובה סופית: המכונה מקבלת שפת המילים המסתיימות באות a .

דוגמה 1.9

מהי שפת המכונה:



פתרון:

תיאור מילולי:

- במצב התחלתי q_0 :
 - * אם אנחנו רואים b , המילה נדחית.
 - * אם אנחנו רואים $_,$ המילה מתקבלת.
 - * אם אנחנו רואים a , כותבים עליה $_,$ ועוברים למשבצת הבאה לימין הראש, והמ"ט עוברת למצב q_1 .
- במצב q_1 אנחנו ראינו a וכתבנו עליה $_,$
 - * אם אנחנו רואים במשבצת הבאה a או b , ממשיכים למשבצת הבאה לימין והמ"ט נשארת במצב q_1 .
 - * אם אנחנו רואים תו רווח (כלומר הגענו לסוף המילה) הראש $ז$ למשבצת השמאלי, כלומר לאות האחרונה של המילה והמ"ט עוברת למצב q_2 .
- במצב q_2 ראינו a בתו הראשון, כתבנו עליה $_,$ והראש קורא התו האחרון.
 - * אם אנחנו רואים a המילה נדחית.
 - * אם אנחנו רואים $_,$ המילה נדחית.
 - * אם אנחנו רואים b כותבים עליה $_,$ והמ"ט עוברת למצב q_3 .
- במצב q_3 קראנו a בתו הראשון ומחקנו אותה, קראנו b ומחקנו אותה.
 - * הראש $ז$ משבצת אחת שמאלה עד שיגיע לתו הראשון ומ"ט חוזרת למצב התחלתי q_0 .

- המ"ט באופן איטרטיבי, עוברת על הקלט ובכל מעבר:
 * אם יש a בתחילת המילה מורידה אותה ומחליפה אותה עם $_$, אחרת המילה נדחית,
 * אם יש b בסופה של המילה מורידה אותה ומחליפה אותה עם $_$, אחרת המילה נדחית.
- אם לאחר מספר מעברים כאלו הסרט ריק, המ"ט מקבלת, וזה יתקיים לכל מילה ורק למילים בשפה

$$\{a^n b^n | n \geq 0\}.$$

תשובה סופית: המכונה מקבלת שפת המילים

$$\{a^n b^n | n \geq 0\}.$$

דוגמה 1.10

פתרון:

μ	q	σ	ν
$_ _$	q_0	a	aaabbbb $_ _$
$_ _ _$	q_1	a	aabbbb $_ _$
$_ _ _ a$	q_1	a	abbbb $_ _$
$_ _ _ aa$	q_1	a	bbbb $_ _$
$_ _ _ aaa$	q_1	b	bbb $_ _$
$_ _ _ aaab$	q_1	b	bb $_ _$
$_ _ _ aaabb$	q_1	b	b $_ _$
$_ _ _ aaabbb$	q_1	b	$_ _$
$_ _ _ aaabbbb$	q_1	$_$	$_$
$_ _ _ aaabbb$	q_2	b	$_ _$
$_ _ _ aaabb$	q_3	b	$_ _ _$
$_ _ _ aaab$	q_3	b	b $_ _ _$
$_ _ _ aaa$	q_3	b	bb $_ _ _$
$_ _ _ aa$	q_3	a	bbb $_ _ _$
$_ _ _ a$	q_3	a	abbb $_ _ _$
$_ _ _$	q_3	a	aabbb $_ _ _$
$_ _$	q_3	$_$	aaabbb $_ _ _$
$_ _ _$	q_0	a	aabbb $_ _ _$
$_ _ _ _$	q_1	a	abbb $_ _ _$
$_ _ _ _ a$	q_1	a	bbb $_ _ _$
$_ _ _ _ aa$	q_1	b	bb $_ _ _$
$_ _ _ _ aab$	q_1	b	b $_ _ _$
$_ _ _ _ aabb$	q_1	b	$_ _ _$
$_ _ _ _ aabbb$	q_1	$_$	$_ _$
$_ _ _ _ aabb$	q_2	b	$_ _ _$
$_ _ _ _ aab$	q_3	b	$_ _ _ _$
$_ _ _ _ aa$	q_3	b	b $_ _ _ _$
$_ _ _ _ a$	q_3	a	bb $_ _ _ _$
$_ _ _ _$	q_3	a	abb $_ _ _ _$

— — —	q_3	—	aabb— — —
— — — —	q_0	a	abb— — —
— — — —	q_1	a	bb— — —
— — — — a	q_1	b	b— — —
— — — — ab	q_1	b	— — —
— — — — abb	q_1	—	— — —
— — — — ab	q_2	b	— — —
— — — — a	q_3	b	— — — —
— — — —	q_3	a	b— — —
— — — —	q_3	—	ab— — —
— — — —	q_0	a	b— — —
— — — —	q_1	b	— — —
— — — — b	q_1	—	— — —
— — — —	q_2	b	— — —
— — — —	q_3	—	— — — —
— — — —	q_0	—	— — — —

הגדרה 1.4 גרירה בצעד אחד

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ מכונת טיורינג, ותהי c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M .
נסמן

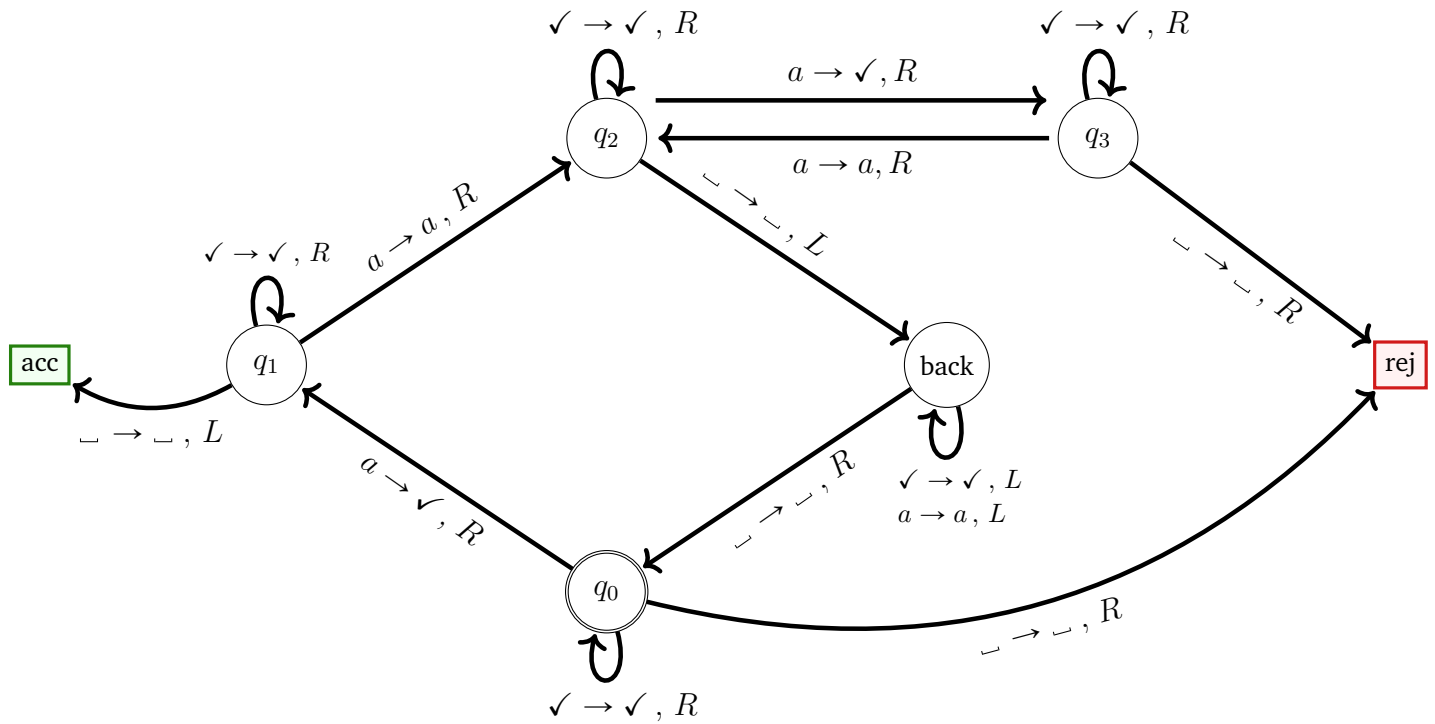
$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם כשנמצאים ב- c_1 עוברים ל- c_2 בצעד בודד.

דוגמה 1.11 (המשך של דוגמה 1.5)

במכונת טיורינג שמתואר בתרשים דמטה (אשר שווה למ"ט בדוגמה 1.5 רק עם סימנים שונים למצבים) מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$



הגדרה 1.5 גרירה בכללי

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ מכונת טיורינג, ותהי c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M .
נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

אם ניתן לעבור מ- c_1 ל- c_2 ב-0 או יותר צעדים.

דוגמה 1.12 (המשך של דוגמה 1.5)

במכונת טיורינג שמתואר בתרשים דמטה (אשר שווה למ"ט בדוגמה 1.5 רק עם סימנוים שונים למצבים) מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M^* \checkmark \checkmark \checkmark q_4 a$$

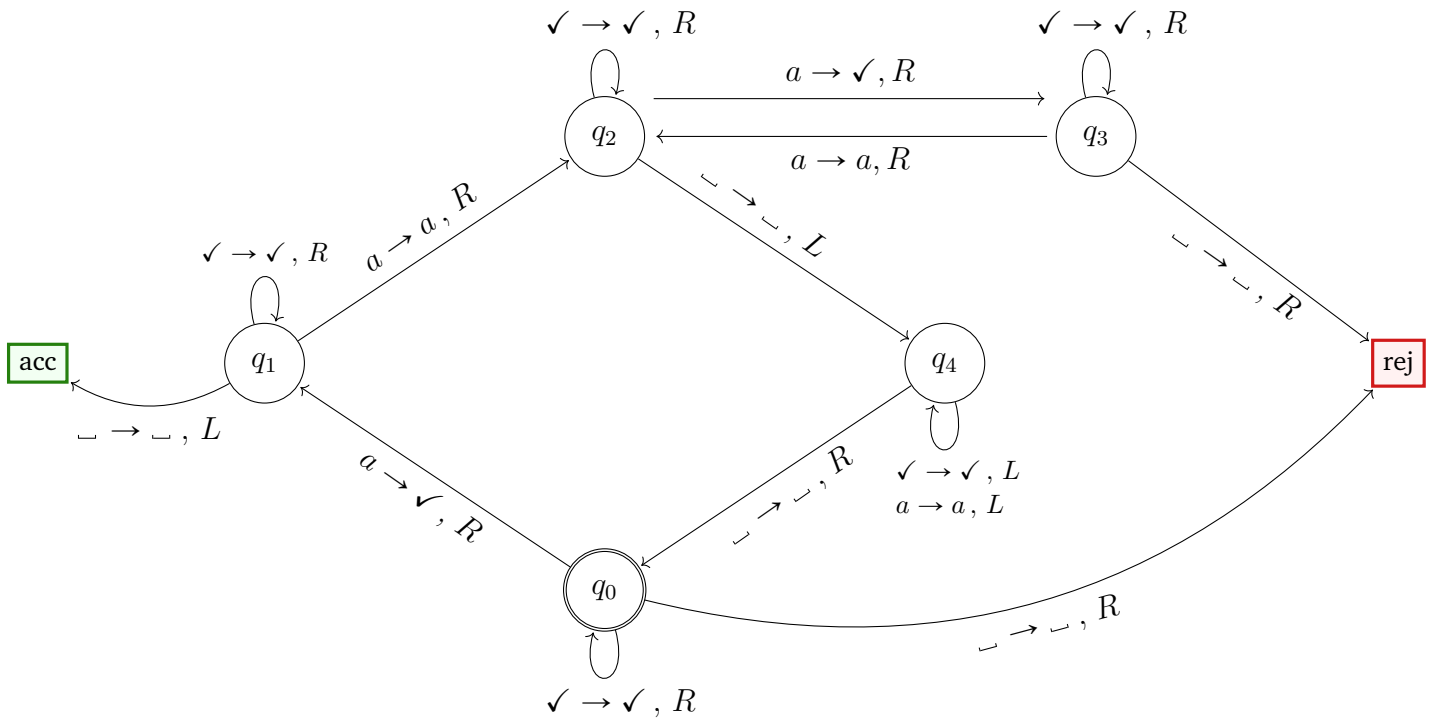
כי

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark \checkmark q_1 a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark \checkmark a q_2 _$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark \checkmark q_4 a .$$



הגדרה 1.6 קבלה ודחייה של מחרוזת

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $w \in \Sigma^*$ מחרוזת. אומרים כי:

• M מקבלת את w אם

$$q_0 w \vdash_M^* u q_{\text{acc}} \sigma v$$

כאשר $u, v \in \Gamma^*$, $\sigma \in \Gamma$ כלשהם.

• M דוחה את w אם

$$q_0 w \vdash_M^* u q_{\text{rej}} \sigma v$$

כאשר $u, v \in \Gamma^*$, $\sigma \in \Gamma$ כלשהם.

הגדרה 1.7 הכרעה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M מכריעה את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים:

• $M \Leftarrow w \in L$ מקבלת את w .

• $M \Leftarrow w \notin L$ דוחה את w .

הגדרה 1.8 קבלה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M מקבלת את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים:

• אם $w \in L$ אז M מקבלת את w .

• אם $w \notin L$ אז M לא מקבלת את w .

במקרה כזה כאשר M מקבלת את השפה L , נכתוב ש-

$$L(M) = L.$$

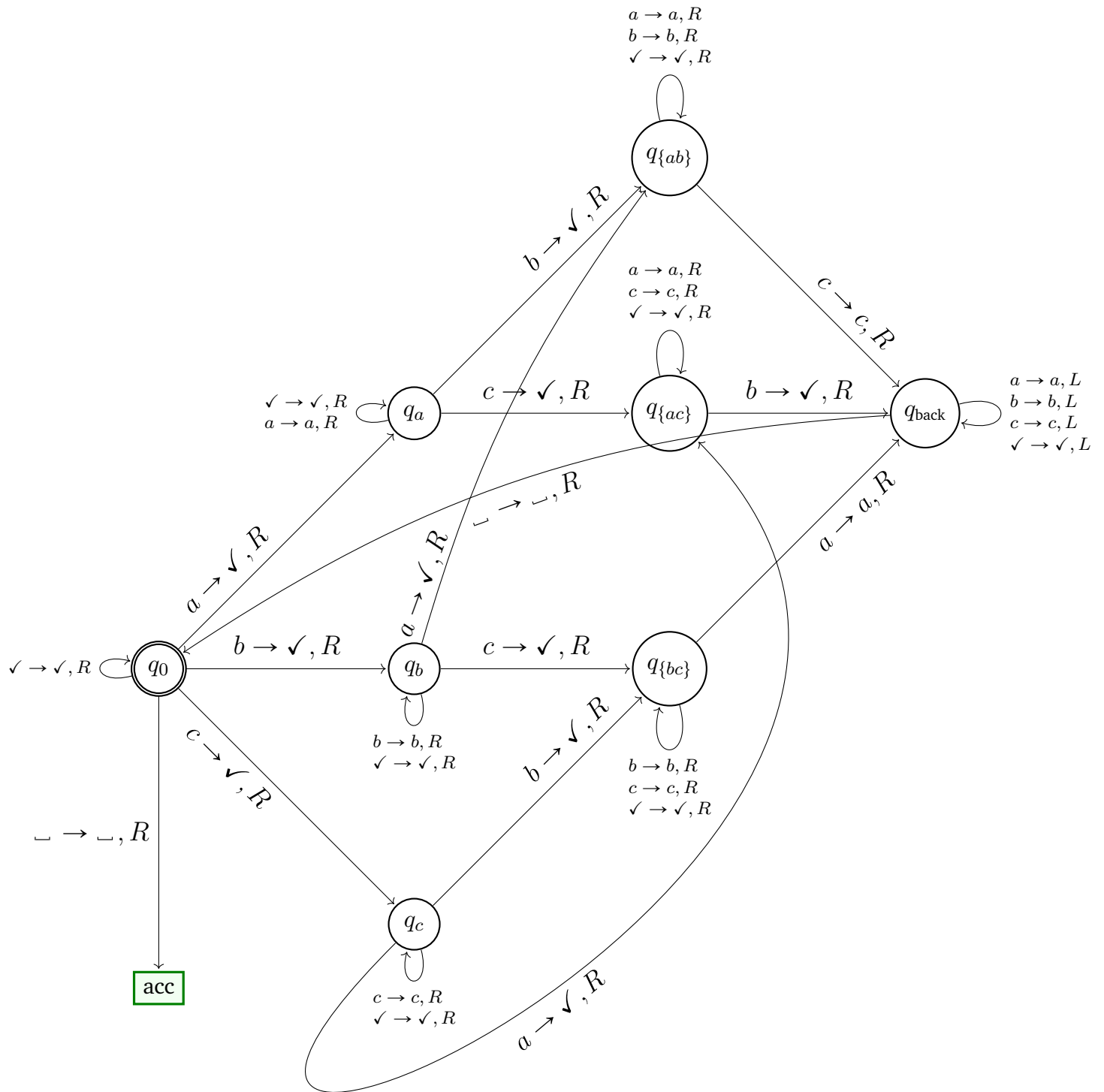
1.2 טבלת המעברים

דוגמה 1.13

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$L = \{w = \{a, b, c\}^* \mid \#a_w = \#b_w = \#c_w\}$$

פתרון:



מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
$q.S$	σ	$q.(S \cup \{\sigma\})$	\checkmark	R	$\sigma \notin S$
$q.S$	σ	$q.S$		R	$\sigma \in S$
$q/\{a, b, c\}$	a, b, c, \checkmark	back		L	
$q.\emptyset$	\perp	acc		R	
back	a, b, c, \checkmark	back		L	
back	\perp	$q.\emptyset$		R	

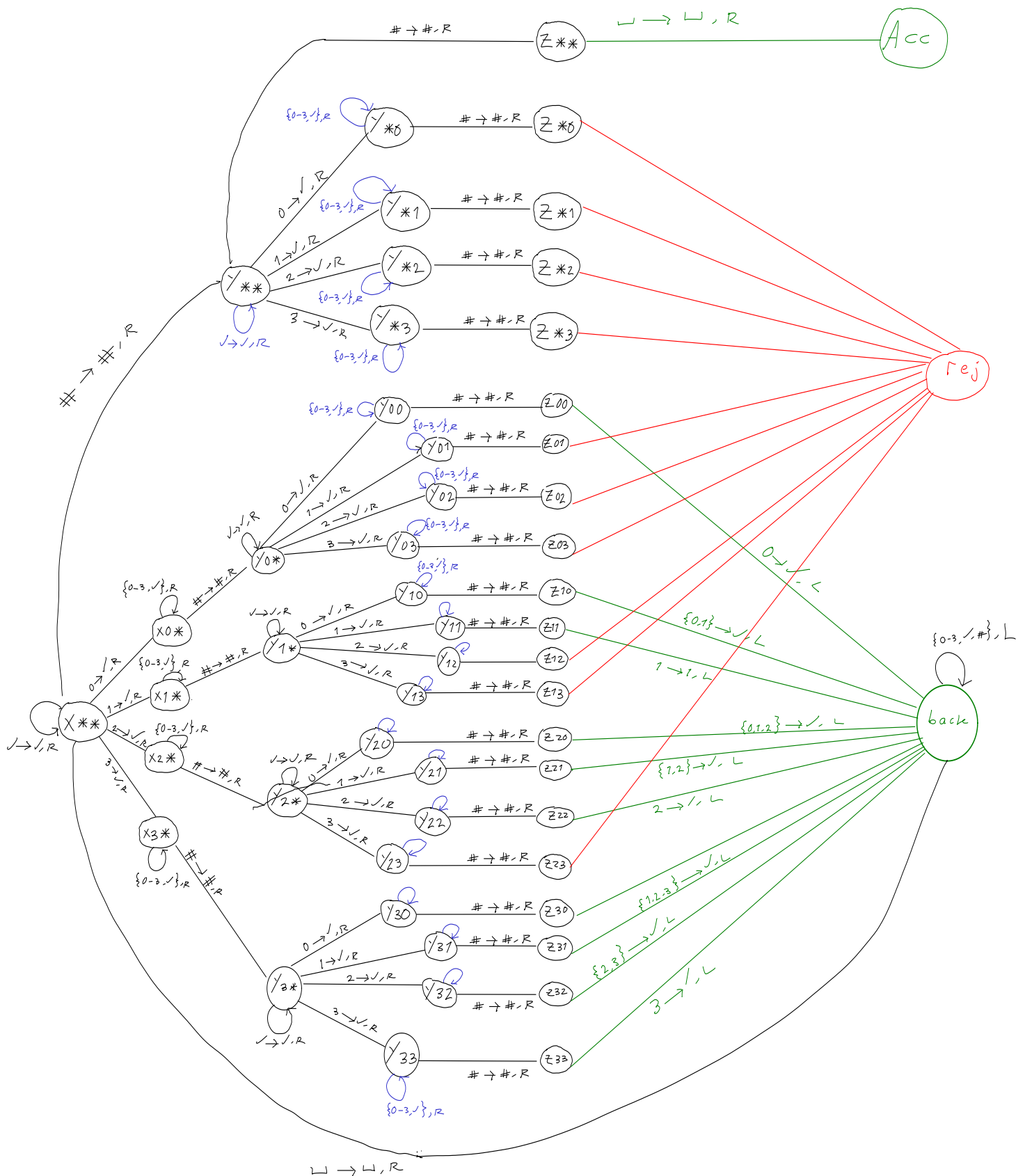
דוגמה 1.14

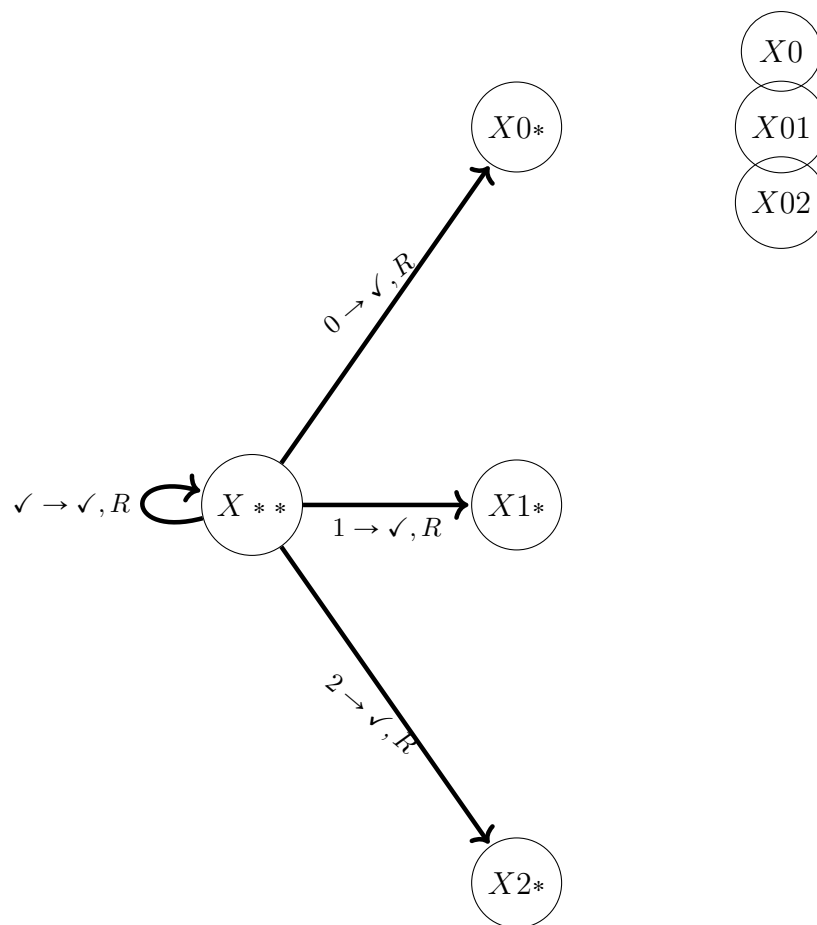
בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$\{x_1 \dots x_k \# y_1 \dots y_k \# z_1 \dots z_k \mid x_i, y_i, z_i \in \{0, \dots, 3\}, \forall i, x_i \geq z_i \geq y_i\}$$

פתרון:

$$L = \{X_1 X_2 \# Y_1 Y_2 \# Z_1 Z_2 \mid X_i, Y_i, Z_i \in \{0,1,2,3\} \forall i, X_1 \neq Z_1, X_2 \neq Z_2\}$$





תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון בסרט	מצב
	R	\checkmark	$X\sigma^*$	σ	X^{**}
	R	\checkmark	X^{**}	\checkmark	X^{**}
	R		$X\sigma^*$	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	$X\sigma^*$
	R		$Y\tau^*$	$\#$	$X\tau^*$
	R		$Y\tau\sigma$	σ	$Y\tau^*$
	R		$Y\tau^*$	\checkmark	$Y\tau^*$
	R		$Y\tau\sigma$	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	$Y\tau\sigma$
	R		$Z\tau_1\tau_2$	$\#$	$Y\tau_1\tau_2$
	R		$Z\tau_1\tau_2$	\checkmark	$Z\tau_1\tau_2$
	L	\checkmark	back	σ	$Z\tau_1\tau_2$
	R		acc	\sqcup	Z^{**}
	L		back	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	back
	R		X^{**}	\sqcup	back

1.3 חישוב פונקציות

הגדרה 1.9 מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה f

תהי $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ ותהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ מכונת טיורינג. אומרים כי M מחשבת את f אם:

$$\bullet \Sigma = \Sigma_1 \text{ ו- } \Sigma_2 \subset \Gamma$$

• לכל $w \in \Sigma_1^*$ מתקיים $q_0 w \vdash q_{acc} f(w)$.

דוגמה 1.15 חיבור אונרי

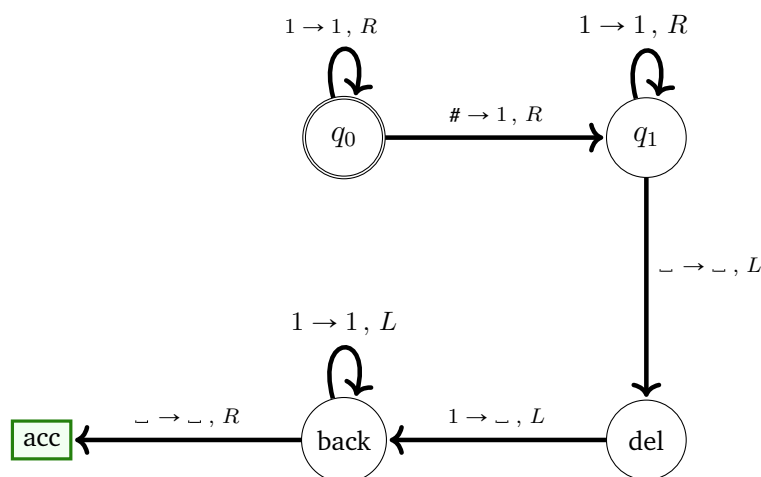
בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i \# 1^j$$

ומחזירה את פלט

$$1^{i+j}.$$

פתרון:



דוגמה 1.16 כפל אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

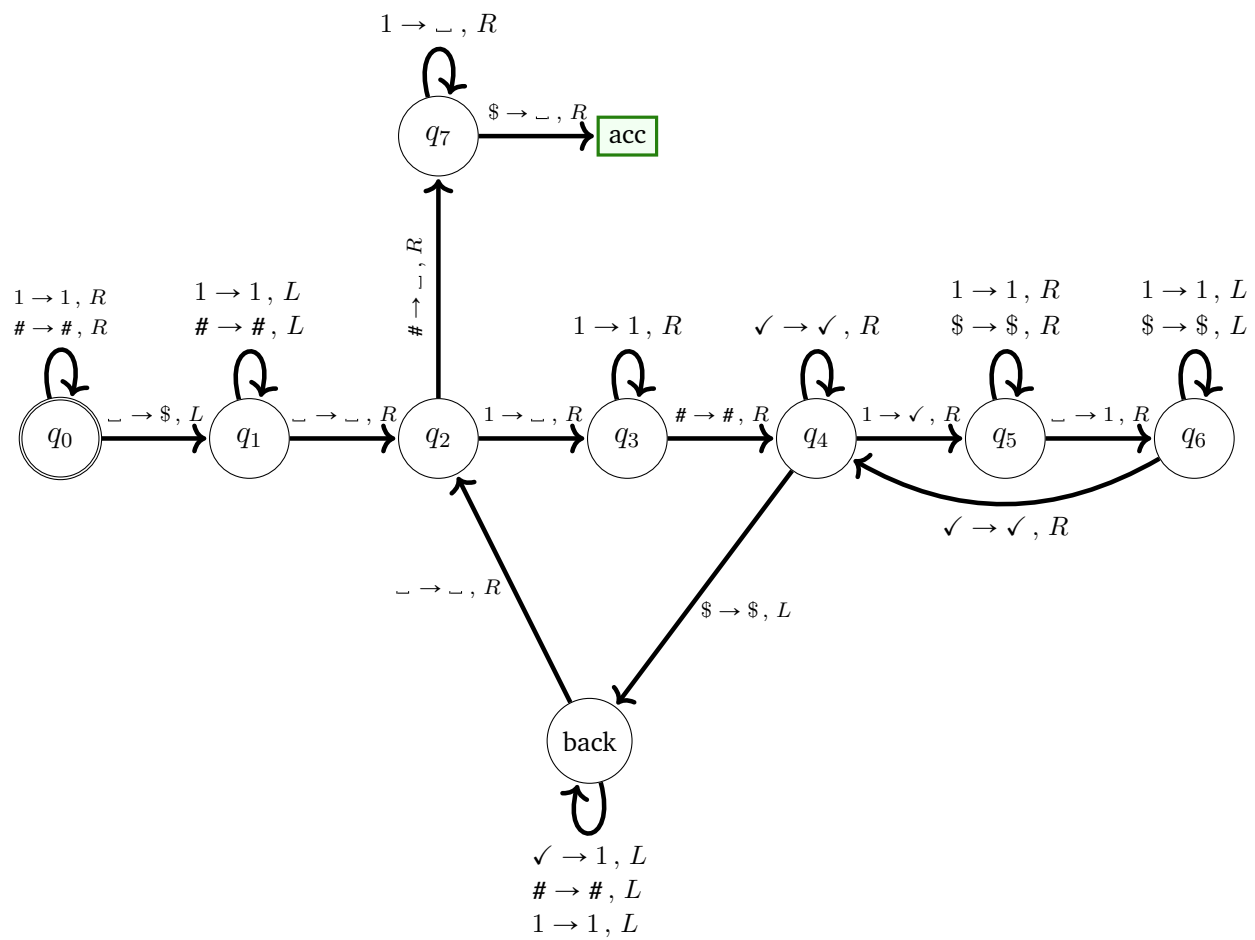
$$1^i \# 1^j$$

ומחזירה את פלט

$$1^{i \cdot j}.$$

פתרון:

- לדוגמה, נניח שהקלט הוא 2 כפול 2. הקלט הוא 11#11.
- נרצה להבדיל בין הקלט לבין הפלט. לכן בתחילת הריצה, נתקדם ימינה עד סוף הקלט ונוסיף שם את התו \$.
- לאחר מכן נחזור לתחילת הקלט. על כל אות 1 במילה השמאלית נעתיק את המילה הימינית לאחר סימן ה-\$.
- לאחר מכן נשאיר רק את התווים שלאחר סימן ה-\$.
- כלומר, נמחק את כל מה שאינו פלט.



μ	q	σ	ν
$_$	q_0	1	$1\#11_$
$_11\#11$	q_1	$_$	$_$
$_11\#11$	q_1	$\$$	$_$
$_$	q_1	$_$	$11\#11\$$
$_$	q_2	1	$1\#11\$$
$_ _$	q_3	1	$\#11\$$
$_ _1\#$	q_4	1	$1\$$
$_ _1\#\checkmark$	q_5	1	$\$$
$_ _1\#\checkmark1\$$	q_5	$_$	$_$
$_ _1\#\checkmark1\$1$	q_6	$_$	$_$
$_ _1\#$	q_6	\checkmark	$1\$1 _$
$_ _1\#\checkmark$	q_4	1	$\$1 _$
$_ _1\#\checkmark\checkmark$	q_5	$\$$	$1 _$
$_ _1\#\checkmark\checkmark\1	q_5	$_$	$_$
$_ _1\#\checkmark\checkmark\11	q_6	$_$	$_$
$_ _1\#\checkmark$	q_6	\checkmark	$\$11_$
$_ _1\#\checkmark\checkmark$	q_4	$\$$	$11_$
$_ _1\#\checkmark$	back	\checkmark	$\$11_$
$_$	back	$_$	$1\#11\$11_$
$_ _$	q_2	1	$\#11\$11_$
$_ _ _$	q_3	$\#$	$11\$11_$
$_ _ _ \#$	q_4	1	$1\$11_$

_ _ _#✓	q_5	1	\$11_
_ _ _#✓1\$11	q_5	_	_
_ _ _#✓1\$111	q_6	_	_
_ _ _#	q_6	✓	1\$111_
_ _ _#✓	q_4	1	\$111_
_ _ _#✓✓	q_5	\$	111_
_ _ _#✓✓\$111	q_5	_	_
_ _ _#✓✓\$1111	q_6	_	_
_ _ _#✓	q_4	✓	\$1111
_ _ _#✓✓	q_4	\$	1111
_ _ _#✓	back	✓\$	1111
_ _	back	_	#11\$1111
_ _ _	q_2	#	11\$1111
_ _ _ _	q_7	1	1\$1111
_ _ _ _ _	q_7	\$	1111
_ _ _ _ _	acc	1	111