

שיעור 2

מודלים חשובים שקולית

הגדרה 2.1 מודל חשובי

מודל חשובי הוא אוסף של מכונות טיורינג שעבורן מוגדרים המושגים של הכרעה וקבלה של שפות.

הגדרה 2.2 מודלים שקולים חשובית

יהיו A ו- B מודלים חשוביים. אומרים כי A ו- B שקולים אם לכל שפה L התנאים הבאים מתקיימים:

- (1) קיימת מ"ט במודל A שמכריעה את L אם"ם קיימת מ"ט במודל B שמכריעה את L .
- (2) קיימת מ"ט במודל A שמקבלת את L אם"ם קיימת מ"ט במודל B שמקבלת את L .

דוגמה 2.1

נסמן ב- T את מודל מכונת הטיורינג הבסיסי.

במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לשני הכיוונים. בתחילת החישוב הראש נמצא בתחילת הקלט.

נסמן ב- O את מודל מכונת הטיורינג עם סרט ימינה בלבד.

במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לכיוון אחד בלבד - ימינה. בתחילת החישוב, הקלט ממוקם בקצה השמאלי של הסרט והראש נמצא בתחילת הקלט. החישוב מתנהל כמו במכונה במודל T , למעט כאשר הראש נמצא במשבצת השמאלית ביותר בסרט וצריך לזוז שמאלה - במקרה כזה הראש נשאר במקום ולא זז.

הוכיחו כי המודל T והמודל O שקולים חשובית.

פתרון:

יש להוכיח ש:

- לכל מ"ט במודל O קיימת מ"ט שקולה במודל T .
- לכל מ"ט במודל T קיימת מ"ט שקולה במודל O .

כיוון ראשון

נוכיח כי לכל מ"ט במודל O קיימת מ"ט שקולה במודל T . כלומר:

נתונה $M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, acc^O, rej^O)$ במודל O .

נבנה $M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, acc^T, rej^T)$ שקולה במודל T .

- רכיבי המ"ט M^T זהים לאלו של המ"ט M^O , מלבד מהתכונה שהראש של M^O לעולם לא זז מעבר לקצה השמאל של הקלט.

- נעבוד רק עם צד ימין של הסרט האינסופי של M^T ואז M^T תהיה שקולה ל- M^O .

- כדי לדאוג שהראש של המכונה הדו-כיוונית M^T לא זז מעבר לקצה השמאל של הקלט, נוסיף מצבים חדשים וגם מעברים חדשים לפונקציית המעברים של M^T , שמבטיחים שהראש של M^T לא זז מעבר לקצה השמול של הקלט, באופן הבא.
- בתחילת כל חישוב, המכונה M^T מסמנת את המשבצת מצד שמאל וליד המשבצת הראשונה של הקלט בסימן מיוחד \$.
- נגדיר את הפונקציית המעברים של M^T כך שכל פעם שהראש מגיע למשבצת המסומנת \$, הראש חוזר ימינה למשבצת הראשונה של הקלט, כמפורט בטבלת המעברים למטה.

לכן, המכונה M^T השקולה למכונה M^O היא

$$M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, q_{acc}^T, q_{rej}^T),$$

כאשר

$$Q^T = Q^O \cup \{q_0^T, q_\$ \}, \quad \Sigma^T = \Sigma^O, \quad \Gamma^T = \Gamma^O \cup \{\$ \}, \quad q_{acc}^T = q_{acc}^O, \quad q_{rej}^T = q_{rej}^O$$

והפונקציית המעברים מתוארת בטבלה למטה.

תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון	מצב
	L	Ω	$q_\$$	σ	q_0^T
	R	$\$$	q_0^O	$_$	$q_\$$
$\forall q \in Q^O$	R	$\$$	q	$\$$	q

הוכחנו את הכיוון הראשון:

ראינו מכונה דו-כיוונית השקולה למכונה חד-כיוונית.

כעת נוכיח את הטענה בכיוון הראשון:

נראה מכונה חד-כיוונית השקולה למכונה דו-כיוונית.

כיוון שני

נוכיח כי לכל מ"ט במודל T קיימת מ"ט שקולה במודל O . כלומר:

נתונה $M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, acc^T, rej^T)$ במודל T .

נבנה $M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, acc^O, rej^O)$ שקולה במודל O .

- נסמן "קו המפריד" על הסרט של המכונה הדו-כיוונית M^T .

...	_	a	b	b		b	c	c	a	b	_	...
-----	---	---	---	---	--	---	---	---	---	---	---	-----

- נסמן את המשבצת הראשונה של הסרט של המכונה החד-כיוונית M^O עם \$.

- כל שאר המשבצות של הסרט של M^O נחלק לשני חצאים: חצי העליון U וחצי התחתון D .

- תוכן הסרט של המכונה הדו-כיוונית M^T נכתב על סרטה של המכונה החד-כיוונית M^O כך:

* החלק של הסרט שמצד שמאל של קו המפריד נכתב בשורה העליונה של סרט M^O בכיוון הפוך (מימין לשמאל).

* החלק של הסרט שמצד ימין של קו המפריד נכתב בשורה התחתונה של סרט M^O בכיוון הרגיל (משמאל לימין).

\$	b	b	a	␣	␣	␣	␣	...
	b	c	c	a	b	␣	␣	...

- * תזוזה ימינה של M^T מצד ימין של קו המפריד \Leftarrow תזוזה ימינה בשורה התחתונה של M^O .
 - * תזוזה ימינה של M^T מצד שמאל של קו המפריד \Leftarrow תזוזה שמאלה בשורה העליונה של M^O .
- תזוזה ימינה ב- M^T :

␣	a →	b →		b →	b →	c →	c →	a →	␣ →
---	-----	-----	--	-----	-----	-----	-----	-----	-----

תזוזה שקולה ב- M^O :

\$	← b	← b	← a	␣	␣	␣	␣
	b →	c →	c →	a →	b →	␣ →	␣

- * תזוזה שמאלה של M^T מצד ימין של קו המפריד \Leftarrow תזוזה שמאלה בשורה התחתונה של M^O .
- * תזוזה שמאלה של M^T מצד שמאל של קו המפריד \Leftarrow תזוזה ימינה בשורה העליונה של M^O .

תזוזה שמאלה ב- M^T :

␣	a ←	b ←		b ←	b ←	c ←	c ←	a ←	␣ ←
---	-----	-----	--	-----	-----	-----	-----	-----	-----

תזוזה שקולה ב- M^O :

\$	→ b	→ b	→ a	␣	␣	␣	␣
	b ←	c ←	c ←	a ←	b ←	␣ ←	␣

לכן, המכונה M^O השקולה למכונה M^T היא

$$M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, q_{acc}^O, q_{rej}^O),$$

נסביר את כל הרכיבים של M^O :

- לכל מצב $q \in Q^T$ נגדיר q_U ו- q_D של Q^O , כדי להבחין בין המצבים שבהם הראש נמצא בחלק העליון לבין המצבים שבהם הראש נמצא בחלק התחתון של הסרט.

$$\Sigma^O = \Sigma^T.$$

$$\Gamma^O \subseteq (\Gamma^T \times \Gamma^T) \cup \{\$ \}.$$

$$q_{acc}^O = q_{acc}^T.$$

$$q_{rej}^O = q_{rej}^T.$$

- הפונקציות המעבריים δ^O מתוארת בטבלת המעבריים למטה. בטבלה, הסימנים $\tau, \sigma, \pi \in \Gamma^T$ מסמנים כל תו שבאלפבית Γ^T :

תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון	מצב
אתחול					
$\tau \in \Sigma \cup \{\perp\}$ $\sigma \in \Sigma$	R	\$	q_τ	τ	q_0^O
	R	\perp_σ	q_τ	τ	q_σ
	L	\perp_\perp	back	\perp	$q.\perp$
	L	\hookrightarrow	q_{back}	\perp_τ	q_{back}
	R	\hookrightarrow	$q_0^T.D$	\$	q_{back}
תזוזה מקורית שמאלה					
תזוזה שמאלה: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$	L	π_τ	p_D	π_σ	q_D
	R	π_π	p_U	σ_π	q_U
תזוזה שמאלה: $(q, \perp) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$	L	τ_\perp	p_D	\perp	q_D
	R	τ_\perp	p_U	\perp	q_U
תזוזה מקורית ימינה					
תזוזה ימינה: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$	R	π_τ	p_D	π_σ	q_D
	L	π_π	p_U	σ_π	q_U
תזוזה ימינה: $(q, \perp) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$	R	τ_\perp	p_D	\perp	q_D
	L	τ_\perp	p_U	\perp	q_U
פגיעה בקצה					
	R	\hookrightarrow	q_U	\$	q_D
	R	\hookrightarrow	q_D	\$	q_U
כל השאר עוברים ל-rej					