

שיעור 5

מישורים במרחב תלת ממדי

5.1 הגדרה ומשוואת המישור במרחב

מישור הוא משטח דו-ממדי שטוח במרחב xyz .

הגדרה 5.1 משוואת המישור

המשוואה המתארת מישור בכללי במרחב xyz הינה

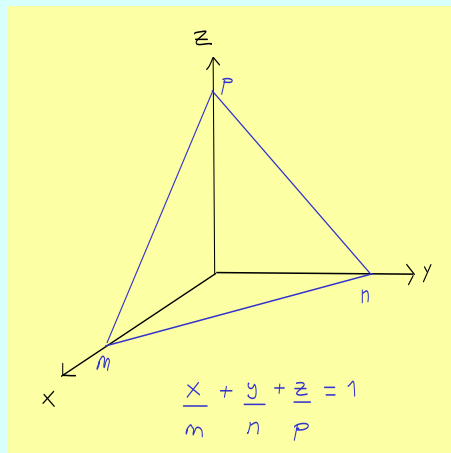
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

כאשר לפחות אחד המקדמים A, B, C אינו אפס.

ניתן לרשום משוואת המישור בצורה

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1.$$

בצורה הזאת המספרים m, n, p הם הנקודות חיתוך של המישור עם הצירי x, y, z בהתאמה כמתואר בשרטוט.



מישור מוגדר ע"י שלוש נקודות שבהן הוא עובר, בתנאי ששלושת הנקודות לא על אותו ישר (כלומר לא קולינאריות).

דוגמה 5.1

מצאו את משוואת המישור העובר דרך הנקודות $R(0, 0, 6)$, $Q(1, 1, 1)$, $P(2, 0, 4)$.

פתרון:

נציב את הנקודות במשוואת המישור $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\begin{cases} 2A + 4C + D = 0 \\ A + B + C + D = 0 \\ 6C + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = -6C \\ 2A + 4C - 6C = 0 \\ A + B + C - 6C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = -6C \\ A = C \\ A + B = 5C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D = -6C \\ A = C \\ B = 4C \end{cases}$$

$$Cx + 4Cy + Cz - 6C = 0 \Rightarrow x + 4y + z - 6 = 0 .$$

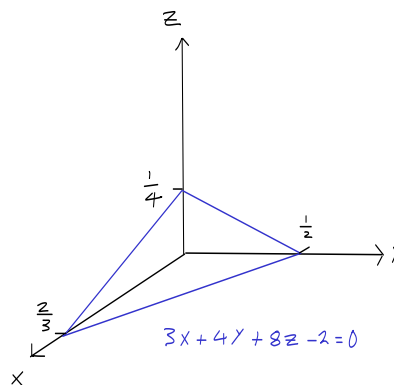
5.2 דוגמה

שרטטו את המישור $3x + 4y + 8z - 2 = 0$.

פתרון:

נרשום את משוואת המישור בצורה קנונית.

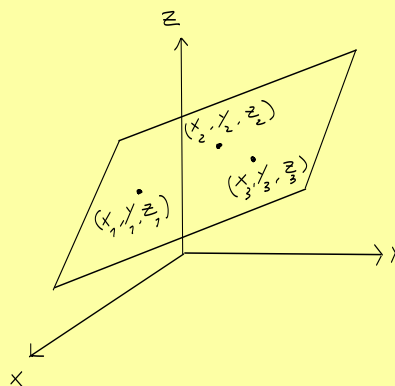
$$3x + 4y + 8z - 2 = 0 \Rightarrow 3x + 4y + 8z = 2 \Rightarrow \frac{3}{2}x + 2y + 4z = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{\frac{1}{2}} + \frac{z}{\frac{1}{4}} = 1$$



משפט 5.1 משוואת המישור העובר דרך שלוש נקודות

משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנתונות (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) ו- (x_3, y_3, z_3) ניתן לרשום בצורה:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$



דוגמה 5.3

מצאו את משוואת המישור העובר דרך הנקודות $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 2)$, $(2, 3, 4)$ ושרטטו אותו.

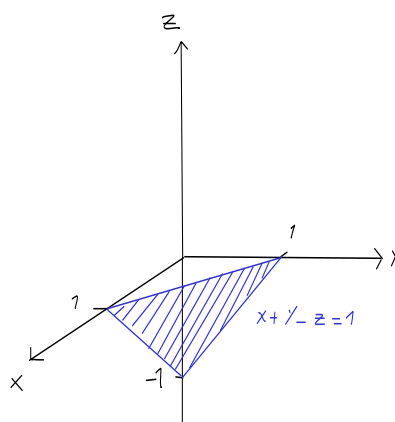
פתרון:

$$(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 1), \quad (x_2, y_2, z_2) = (1, 2, 2), \quad (x_3, y_3, z_3) = (2, 3, 4).$$

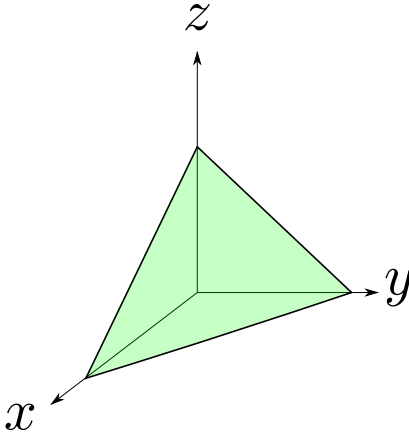
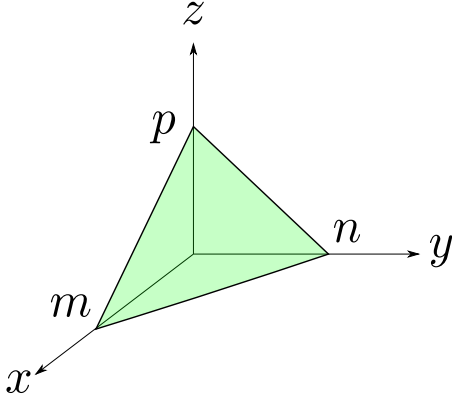
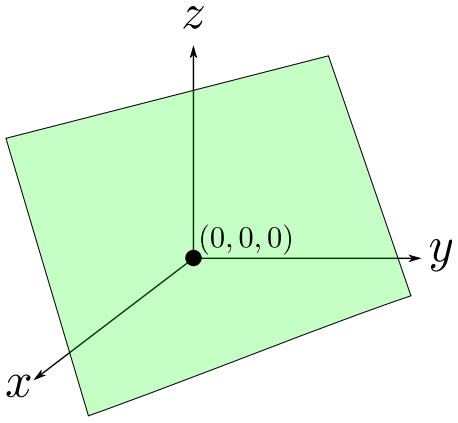
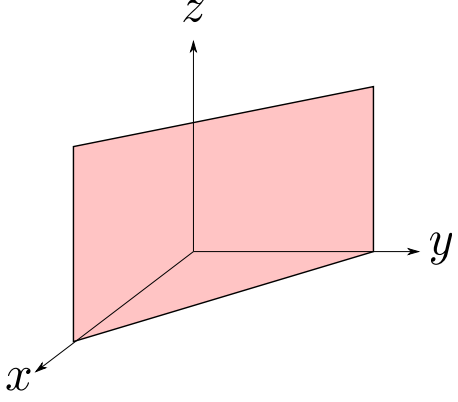
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

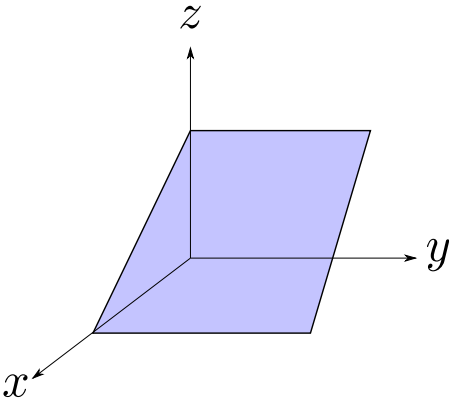
$$x + y - z - 1 = 0$$



5.2 מצבים מיוחדים של מישורים במערכת צירים xyz

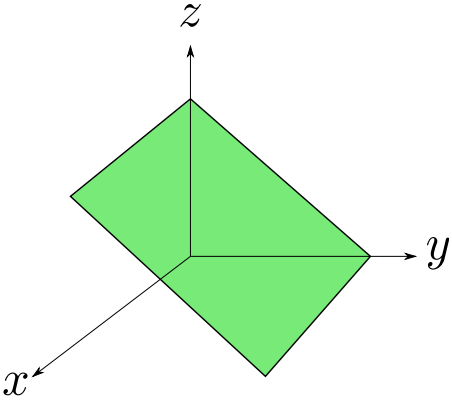
<p>$A, B, C, D \neq 0$ המישור לא עובר את הראשית הצירים.</p>		$Ax + By + Cz + D = 1$
<p>$m, n, p \neq 0$ המישור לא עובר את הראשית הצירים. אין הבדל איכותי בתרשים הזה והתרשים לעיל. השני ביטויים האלה מציגים אותו מישור.</p>		$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$
<p>המישור עובר דרך הראשית הצירים. המישור חותך את כל אחד של הצירים בנקודה $(0, 0, 0)$.</p>		$Ax + By + Cz = 0$
<p>$A, B, D \neq 0$ משתנה ה- z לא משתתף במשוואת המישור. המישור לא חותך את ציר ה-z ולא עובר דרך הראשית הצירים.</p>		$Ax + By + D = 0$

$Ax + Cz + D = 0$



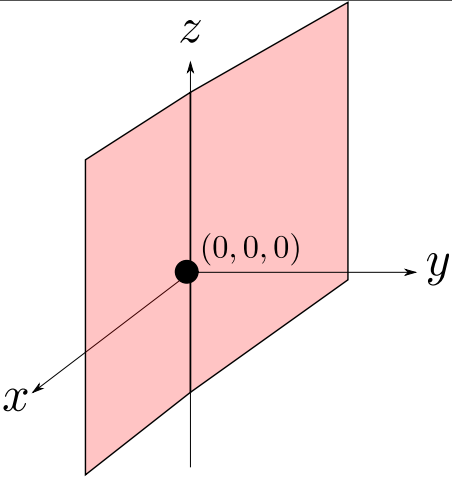
$A, C, D \neq 0$
משתנה ה- y לא משתתף
במשוואת המישור.
המישור לא חותך את ציר ה- y
ולא עובר דרך הראשית הצירים.

$By + Cz + D = 0$



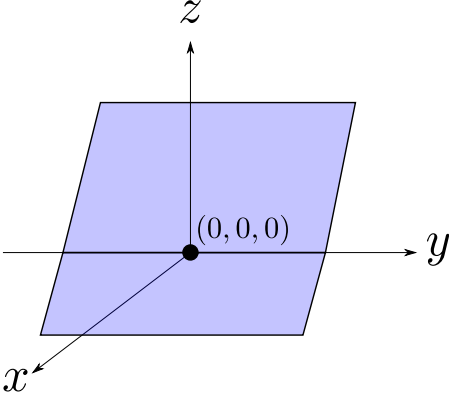
$B, C, D \neq 0$
משתנה ה- x לא משתתף
במשוואת המישור.
המישור לא חותך את ציר ה- x
ולא עובר דרך הראשית הצירים.

$Ax + By = 0$



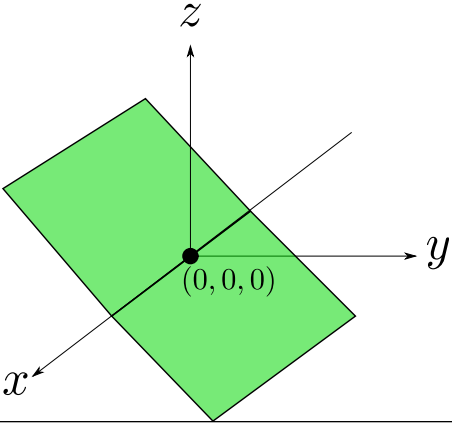
$A, B \neq 0$
משתנה ה- z לא משתתף
במשוואת המישור.
המישור עובר דרך הראשית
הצירים.
המישור מכיל את ציר ה- z .

$Ax + Cz = 0$



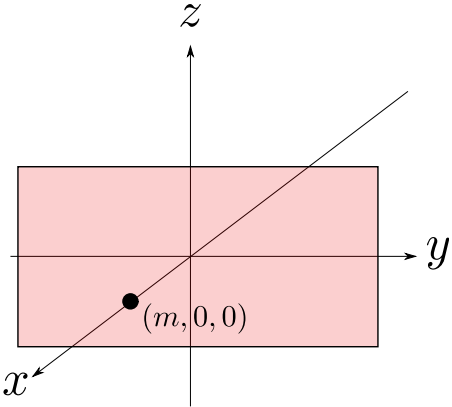
$A, C \neq 0$ משתנה ה- y לא
משתתף במשוואת המישור.
המישור עובר דרך הראשית
הצירים.
המישור מכיל את ציר ה- y .

$By + Cz = 0$



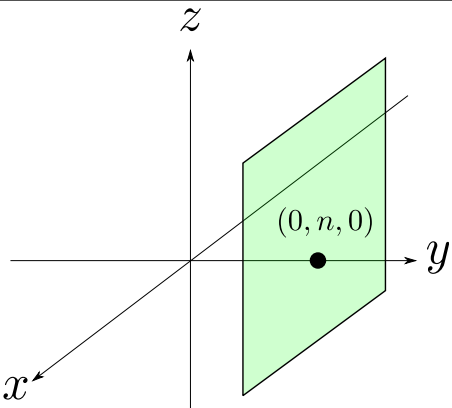
$B, C \neq 0$
משתנה ה- x לא משתתף
במשוואת המישור.
המישור עובר דרך הראשית
הצירים.
המישור מכיל את ציר ה- x .

$Ax + D = 0 \Leftrightarrow x = m$



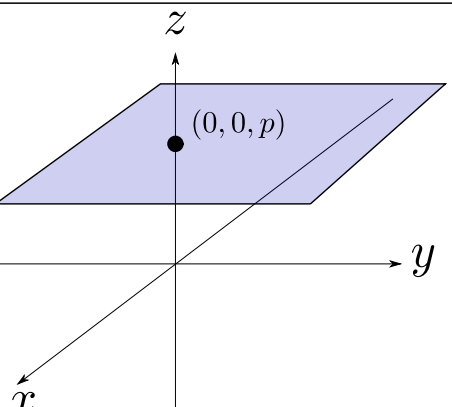
$A, D \neq 0$
משתני y ו- z לא משתתפים
במשוואת המישור.
המישור חותך את ציר ה- x ב-
 $x = m$
המישור מקביל למישור yz .

$By + D = 0 \Leftrightarrow y = n$



$B, D \neq 0$
משתני x ו- z לא משתתפים
במשוואת המישור.
המישור חותך את ציר ה- x ב-
 $y = n$
המישור מקביל למישור xz .

$Cz + D = 0 \Leftrightarrow z = p$



$C, D \neq 0$
משתני x ו- y לא משתתפים
במשוואת המישור.
המישור חותך את ציר ה- x ב-
 $z = p$
המישור מקביל למישור xy .

משפט 5.2 שטח משולש במישור xy

שטחו S של המשולש אשר קדקודיו הם בנקודות (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) הוא

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

משפט 5.3 מרחק מנקודה למישור

המרחק d מהנקודה $P(x_0, y_0, z_0)$ למישור $Ax + By + Cz + D = 0$ הוא

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

משפט 5.4 נפח הפירמידה המשולשת במרחב xyz

הנפח V של הפירמידה המשולשת אשר קדקודיה הם בנקודות (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) , (x_4, y_4, z_4) הוא

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

5.3 דוגמאות

5.4 דוגמה

שרטטו את המישור המוגבל ע"י המישורים

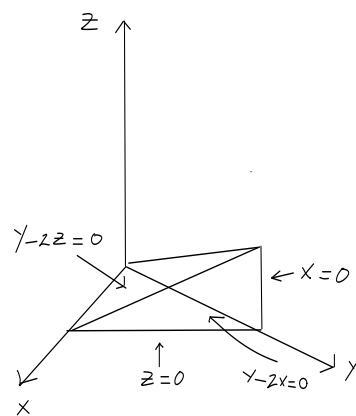
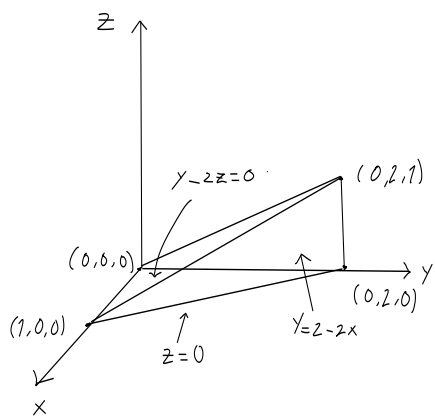
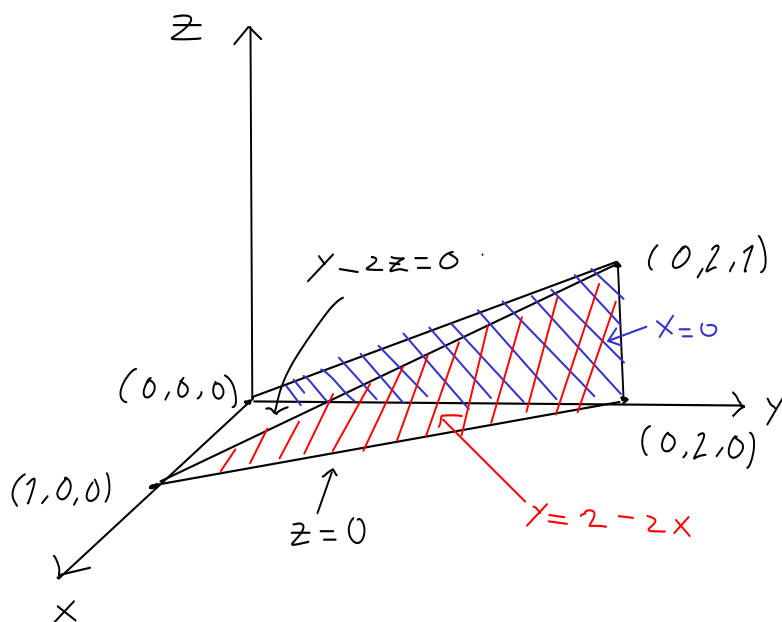
$$x = 0, \quad z = 0, \quad y - 2z = 0, \quad y = 2 - 2x.$$

פתרון:

חיתוך בין שלושה מישורים יצא נקודה. אלו הן הקודקודים של הגוף:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0, 0) \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 2, 0)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - 2z = 0 \\ y = 2 - 2x \end{cases} \Rightarrow (0, 2, 1) \quad \begin{cases} z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ y = 2 - 2x \end{cases} \Rightarrow (1, 0, 0)$$



5.5 דוגמה

שרטטו את הגוף במרחב xyz המוגבל ע"י המישורים

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y = 2, \quad z = y + 1.$$

פתרון:

• המישור $x + y = 2$ מקביל לציר ה- z .

• המישור $z = y + 1$ מקביל לציר ה- x .

• המישור $x = 0$ הוא המישור yz .

• המישור $y = 0$ הוא המישור xz .

• המישור $z = 0$ הוא המישור xy .

נחפש את החיתוך של המישור $x + y = 2$ עם המישור $x = 0$:

$$x = 0 \rightarrow y = 2 \quad (0, 2, z).$$

נחפש את החיתוך של המישור $x + y = 2$ עם המישור $y = 0$:

$$y = 0 \rightarrow x = 2 \quad (2, 0, z).$$

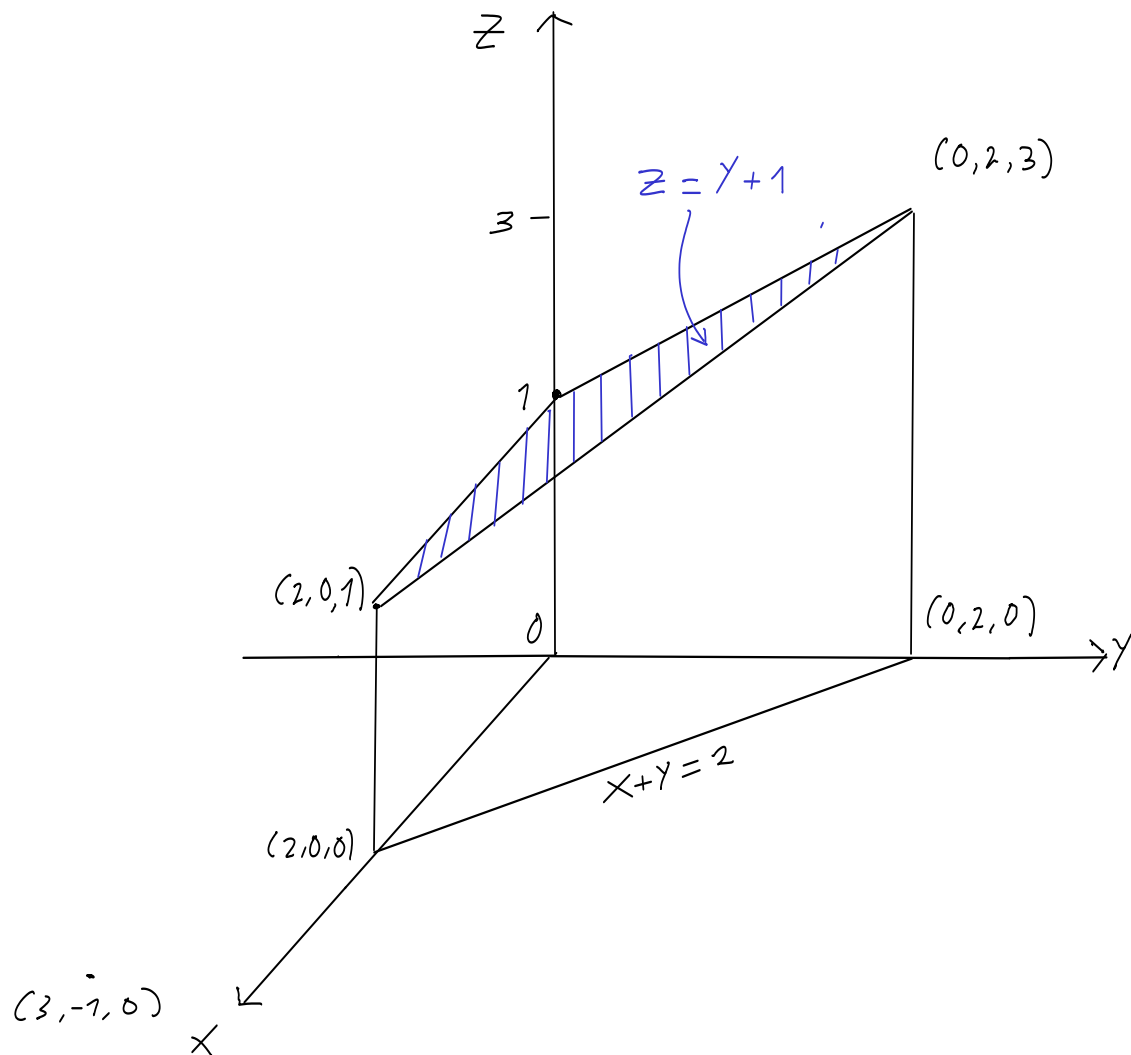
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ z = y + 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow (0, 2, 3)$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ z = y + 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow (2, 0, 1)$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ z = y + 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow (3, 0, -1)$$

$$\begin{cases} z = y + 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \end{cases} \Rightarrow (x, 0, 1)$$

$$\begin{cases} z = y + 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \end{cases} \Rightarrow (x, -1, 0)$$

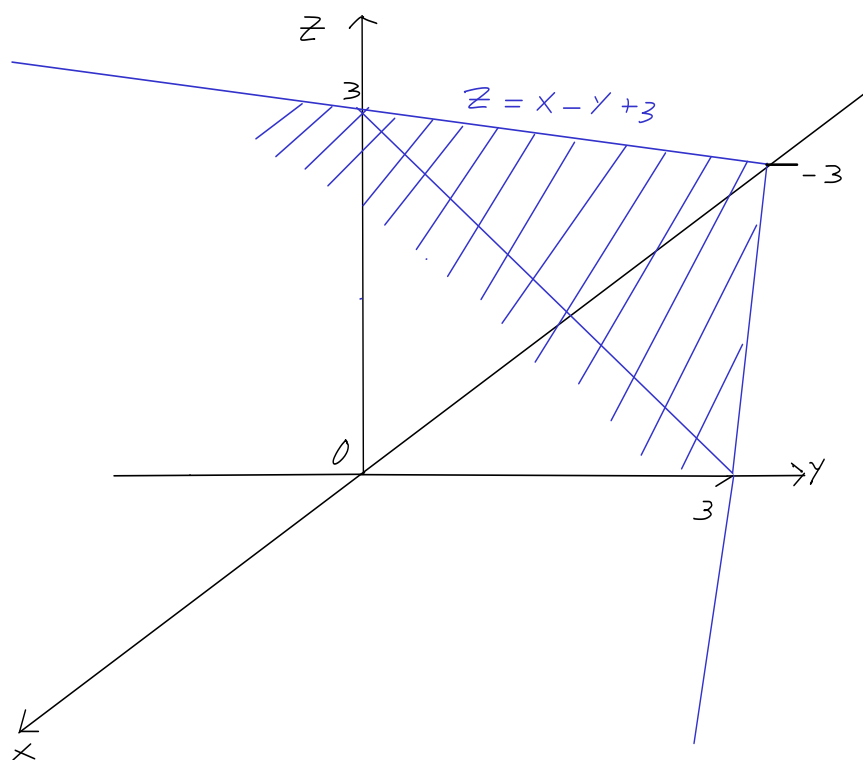


דוגמה 5.6

ציירו את הגוף המוגבל על ידי המישורים $z = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = x$, $z = x - y + 3$.

פתרון:

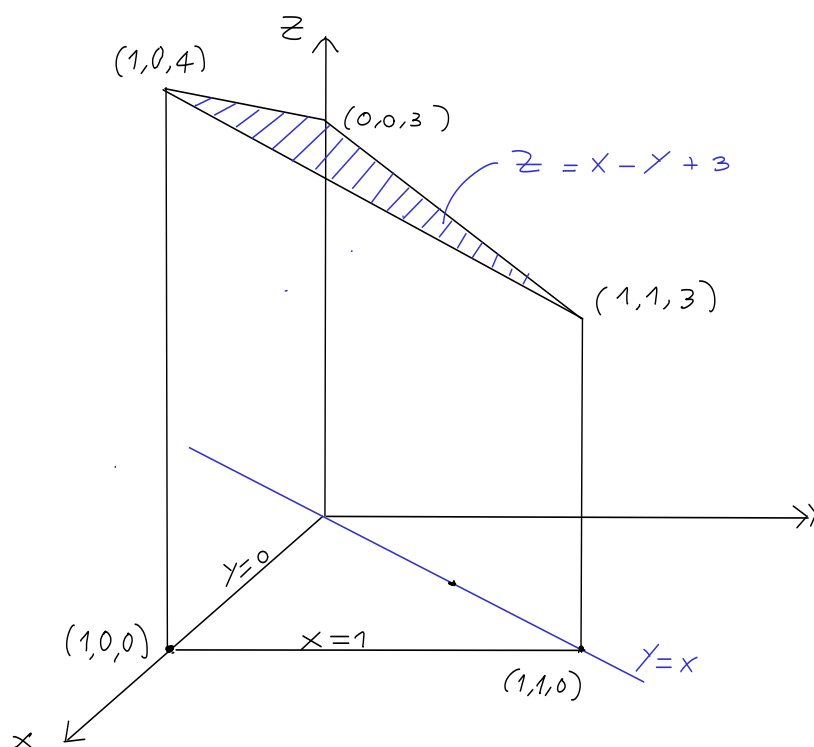
- המישור $z = 0$ הוא המישור xy .
- המישור $y = 0$ הוא המישור xz .
- המישור $x = 1$ מקביל למישור yz .
- המישור $y = x$ הוא המישור $x - y = 0$, מקביל לציר ה- z .
- $z = x - y + 3 \Rightarrow x - y - z = -3 \Rightarrow \frac{x}{-3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3}.$



$$\begin{cases} z = x - y + 3 \\ y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 4$$

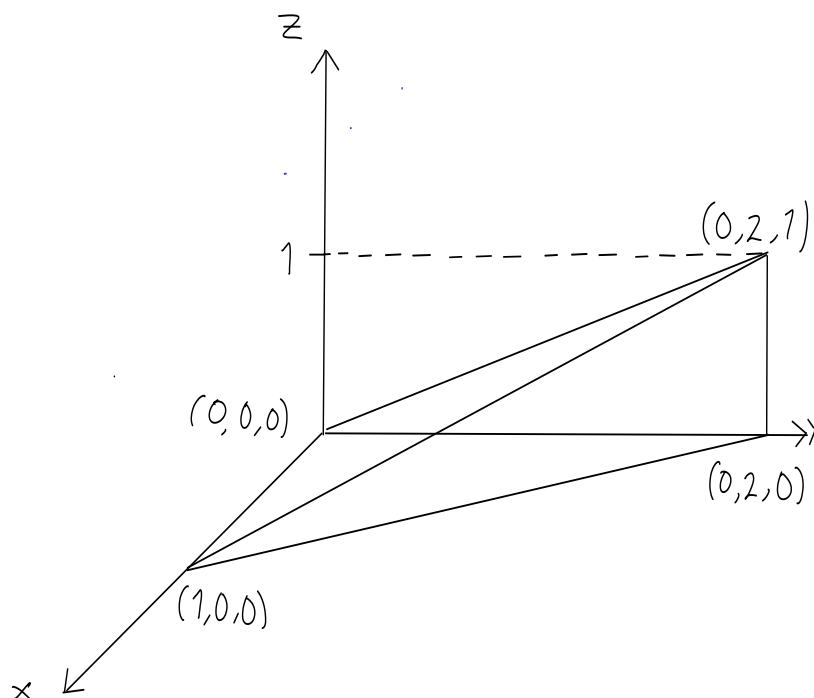
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = x \\ z = x - y + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = x \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$



דוגמה 5.7

מהן משוואות המישורים המגבילים את הגוף הבא:



פתרון:

יש לצורה הזאת ארבע פאות:

• מישור xy :

$$z = 0.$$

מישור yz :

$$x = 0.$$

• המישור שמכיל את $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 1)$, $(1, 0, 0)$:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

נציב את הנקודה $(0, 0, 0)$ ונקבל $D = 0$.

נציב את הנקודה $(1, 0, 0)$ ונקבל $A + D = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

נציב את הנקודה $(0, 2, 1)$ ונקבל $2B + C = 0 \Leftrightarrow C = -2B$. נבחר $B = 1$, $C = -2$. לכן משוואת המישור היא

$$y - 2z = 0$$

• המישור שמכיל את $(0, 2, 0)$, $(0, 2, 1)$, $(1, 0, 0)$:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} (0, 2, 1) \Rightarrow 2B + C + D = 0 \\ (0, 2, 0) \Rightarrow 2B + D = 0 \\ (1, 0, 0) \Rightarrow A + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} D = -A \\ A = 2B \\ C = -2B - D = -A + A = 0 \end{array} \right\}$$

נבחר $D = -2 \Leftrightarrow A = 2 \Leftrightarrow B = 1$. לכן משוואת המישור היא

$$2x + y - 2 = 0$$

משפט 5.5 משוואת המישור במרחב

משוואת המישור המאונך לוקטור $n = (A, B, C)$ העובר דרך הנקודה $M = (x_0, y_0, z_0)$ היא

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

אם נשווה למשוואה $Ax + By + Cz + D = 0$ נקבל ש- $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

n נקרא הנורמל למישור.

הוכחה: עבור הנקודה $P = (x, y, z)$ במישור מתקיים כי

$$n \cdot \overline{MP} = 0$$

בגלל ש n מאונך למישור ו- \overline{MP} מוכל מקביל למישור.

$$\Rightarrow A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0.$$



5.8 דוגמה

משוואת המישור המאונך לוקטור $n = (1, 2, 0)$ העובר דרך הנקודה $M = (-1, 2, 0)$ היא

$$1 \cdot (x + 1) + 2 \cdot (y - 2) + 3 \cdot (z - 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2y + 3z - 3 = 0.$$

5.9 דוגמה

מצאו את משוואת המישור העובר דרך הנקודות $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (-1, 2, 0)$.

פתרון:

הוקטור $n = \overline{AB} \times \overline{AC}$ מאונך למישור.

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (3, 4, -2).$$

לכן המישור נתון ע"י המשוואה:

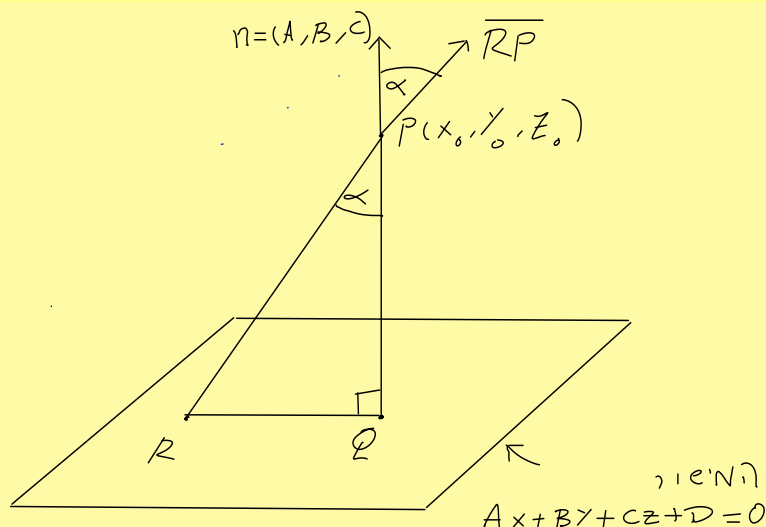
$$3(x - 1) + 4(y - 2) - 2(z - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x + 4y - 2z - 5 = 0.$$

משפט 5.6 מרחק מנקודה למישור

המרחק d מהנקודה $P(x_0, y_0, z_0)$ למישור $Ax + By + Cz + D = 0$ הוא

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

הנקודה הקרובה ביותר במישור ל- P היא הנקודה שדרכה עובר ניצב למישור שעובר דרך P .



הוכחה: נסמן ב- Q את הנקודה על המישור שהיא הקרובה ביותר ל- P . ממשפט פיתגורס, \overline{QP} מאונך למישור. נקח כל נקודה אחרת R במישור. PQR יוצרות משולש ישר זווית, כך ש- PR היתר ו- PQ קטע קצר מ- PR .

עבור נקודה כלשהי $R(x_1, y_1, z_1)$ על המישור, נסמן ב- α את הזווית בין \overline{RP} ל- n .

$$\begin{aligned} |\overline{QP}| &= |\overline{RP}| \cos \alpha \\ &= \frac{|\overline{RP}| \cdot |n| \cdot \cos \alpha}{|n|} \\ &= \frac{\overline{RP} \cdot n}{|n|} \\ &= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

5.10 דוגמה

מצאו את המרחק בין $(1, -1, 2)$ למישור $2x + y - z + 3 = 0$ ומצאו את הנקודה במישור הקרובה ביותר ל- $(1, -1, 2)$.

פתרון:

המרחק הוא

$$d = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

הנורמל למישור הוא $(2, 1, -1)$. כדי למצוא את הנקודה הקרובה ביותר על המישור, נרכיב את משוואת הישר המקביל לוקטור n שעובר דרך הנקודה $(1, -1, 2)$:

$$(x + 2t, y + t, z - t) = (1, -1, 2) \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{aligned} x &= 1 - 2t \\ y &= -1 - t \\ z &= 2 + t \end{aligned} \right\}$$

הנקודה (x, y, z) נמצא במישור לכן נציב אותה למשוואת המישור:

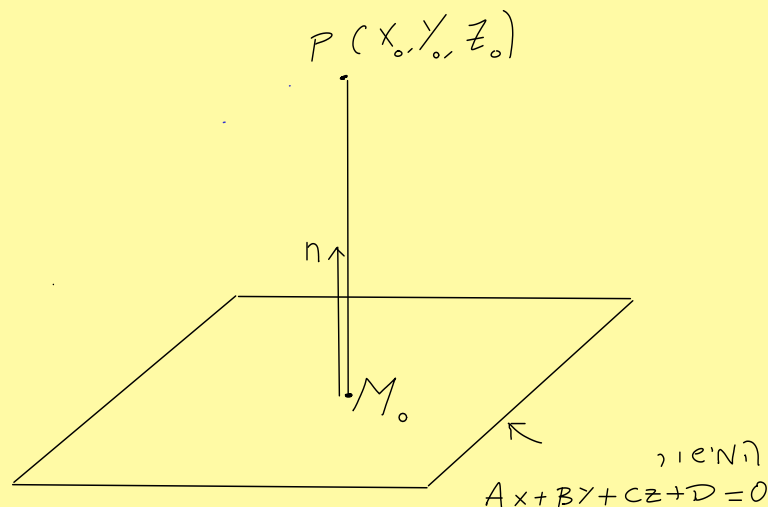
$$2x + y - z + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(1 - 2t) + (-1 - t) - (2 + t) + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - 6t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{3}.$$

לכן הנקודה היא

$$(x, y, z) = \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{3}, -1 - \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right).$$

5.2 הגדרה היטל של נקודה על מישור

ההיטל של נקודה $P(x_0, y_0, z_0)$ על מישור $Ax + By + Cz + D = 0$ היא הנקודה על המישור הקרובה ביותר ל- P . כלומר, נקודה M_0 כך ש- $\overline{M_0P}$ מקביל לנורמל n למישור.



דוגמה 5.11

מצאו את ההיטל של הנקודה $P(2, -3, 4)$ על המישור $x + 2y + 2z = 13$.

פתרון:

הנורמל למישור הוא

$$n = (1, 2, 2).$$

משוואת הישר הנורמל למישור העובר דרך הנקודה P היא

$$M(t) = (2, -3, 4) + t(1, 2, 2) = (2 + t, -3 + 2t, 4 + 2t).$$

נציב את $M(t)$ במשוואת המישור:

$$1 \cdot (2 + t) + 2 \cdot (-3 + 2t) + 2 \cdot (4 + 2t) = 13 \Rightarrow 9t + 4 = 13 \Rightarrow 9t = 9 \Rightarrow t_0 = 1.$$

לכן הנקודה M_0 היא

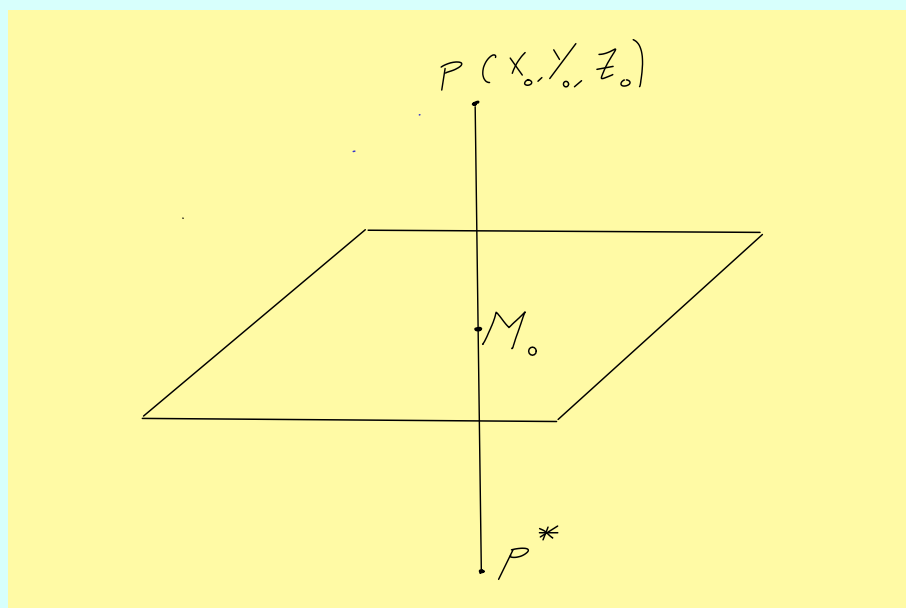
$$M(t_0 = 1) = (3, -1, 6).$$

הגדרה 5.3 השיקוף של נקודה ביחס מישור

השיקוף P^* של נקודה $P(x_0, y_0, z_0)$ ביחס למישור מוגדר להיות

$$P^* = P - 2\overline{M_0P},$$

כאשר M_0 ההיטל של P על המישור.



שיטה אחרת ויותר קלה:

אם נרשום את הישר העובר את הנקודה P וההיטל שלו במישור בצורה

$$M(t) = P + t \cdot \bar{n}$$

כשאר \bar{n} הנורמל של המישור. נניח ש- t_0 הוא הערך של הפרמטר t בנקודת ההיטל, M_0 של P ביחס למישור. אז השיקוף של P ביחס למישור זו ניתן ע"י

$$P^* = M(2t_0) = P + 2t_0 \bar{n}.$$

דוגמה 5.12

מצאו את השיקוף של הנקודה $P(2, -3, 4)$ ביחס למישור $x + 2y + 2z = 13$.

פתרון:

שיטה 1

מדוגמה הקודמת ההיטל הוא $M_0 = (3, -1, 6)$.

$$\overrightarrow{M_0 P} = (-1, -2, -2)$$

לכן

$$P^* = P - 2(-1, -2, -2) = (2, -3, 4) - (-2, -4, -4) = (4, 1, 8).$$

שיטה 2

מהדוגמה הקודמת הערך של הפרמטר של הישר על הנקודה של ההיטל הוא $t_0 = 1$. לכן השיקוף נמצא בנקודה

$$P^* = M(2t_0) = M(2) = P + 2\bar{n} = (2, -3, 4) + 2(1, 2, 2) = (4, 1, 8).$$

5.4 מצבים הדדיים בין שני מישורים

בהינתן שני מישורים $\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$ ניתן להגדיר להם שלושה מצבים הדדיים: נחתכים, מתלכדים או מקבילים.

(1) המישורים נחתכים אם הוקטורים (A_1, B_1, C_1) ו- (A_2, B_2, C_2) לא מקבילים. במצב זה החיתוך בין המישורים הוא קו ישר.

לדוגמה, נתונים שני מישורים $\left. \begin{aligned} 2x - 3y + z + 1 &= 0 \\ x - z + 3 &= 0 \end{aligned} \right\}$. המישורים נחתכים בגלל ש-
 $(1, 0, -1) \nparallel (2, -3, 1)$.

(2) המישורים מקבילים אם אין להם נקודה משותפת. כלומר אין פתרון למערכת במצב זה. הוקטור (A_1, B_1, C_1) מקביל לוקטור (A_2, B_2, C_2) אבל $\frac{D_1}{A_1} \neq \frac{D_2}{A_2}$ (ניתן להחליף ב- B או C).

לדוגמה, נתונים המישורים $\left. \begin{aligned} 2x - 3y + z + 1 &= 0 \\ 6x - 9y + 3z + 2 &= 0 \end{aligned} \right\}$. אבל $\frac{D_1}{A_1} \neq \frac{D_2}{A_2}$ לכן $(2, -3, 1) \parallel (6, -9, 3)$. המישורים מקבילים.

(3) המישורים מתלכדים אם כל הנקודות שלהם משותפות במצב זה, הוקטורים (A_1, B_1, C_1) ו- (A_2, B_2, C_2) מקבילים. מספיק שיש רק נקודה אחת משותפת שכן מישור נקבע ע"י נקודה ווקטור ניצב.

לדוגמה, נתונים שני מישורים $\left. \begin{aligned} 2x - 3y + z + 1 &= 0 \\ -4x + 6y - 2z - 2 &= 0 \end{aligned} \right\}$. המישורים מתלכדים בגלל ש-
 $(2, -3, 1) \parallel (-4, 6, -2)$ והנקודה $(0, 0, -1)$ נקודה משותפת.

5.5 משפטים נוספים

משפט 5.7 שטח משולש במישור xy

שטחו S של המשולש אשר קדקודיו הם בנקודות (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) הוא

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

משפט 5.8 מרחק מנקודה למישור

המרחק d מהנקודה $P(x_0, y_0, z_0)$ למישור $Ax + By + Cz + D = 0$ הוא

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

משפט 5.9 נפח הפירמידה המשולשת במרחב xyz

הנפח V של הפירמידה המשולשת אשר קדקודיה הם בנקודות (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) , (x_4, y_4, z_4) הוא

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$