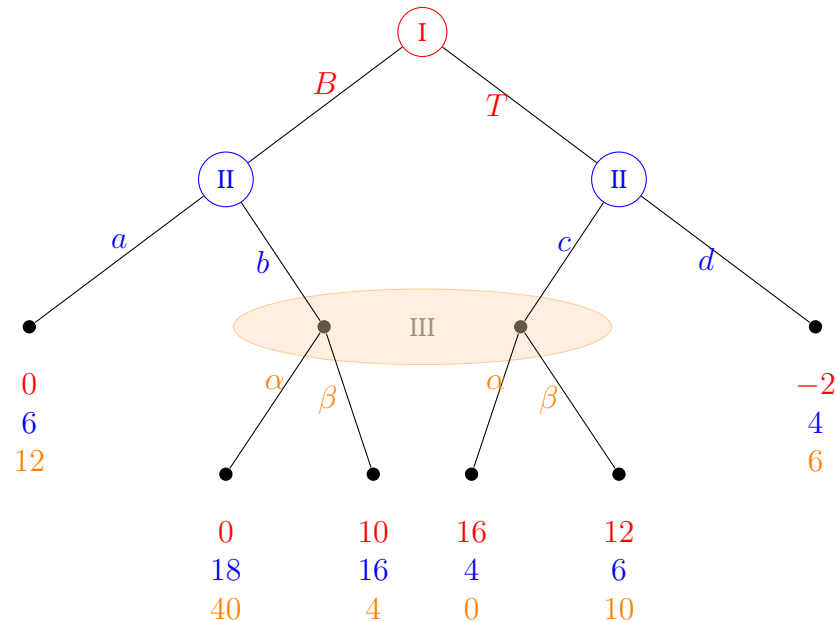


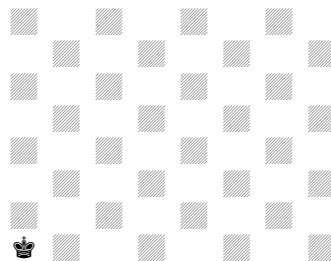
## שאלה 1 (25 נקודות)

מצאו את כל שיווי משקל במשחק הבא:



## שאלה 2 (25 נקודות)

(א) (15 נקודות) נתון לוח שחמט  $3 \times 3$  עם מלך במשבצת A1. המלך יכול לנוע למעלה משבצת אחת, ימינה משבצת אחת, או אלכסוני משבצת אחת (ימינה ולמעלה). המלך לא יכול לנוע שמאלה, למטה, אלכסוני שמאלה ולמעלה, אלכסוני ימינה ולמטה או אלכסוני שמאלה ולמטה. כאשר המלך מגיע למשבצת H8 המלך לא יכול לנוע עוד והמשחק מסתיים. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענה הבאה: לא קיים מסלול בין כל שתי משבצות של אורך יותר מ-100 צעדים.



(ב) (10 נקודות) נתון המשחק שני שחקנים סכום אפס הבא בצורה אסטרטגית:

0	$A$
$B$	$I$

כאשר  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  מטריצה חיובית,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  מטריצה חיובית, ו- $I$  המטריצה היחידה מסדר  $n \times n$ . הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענה הבאה: למשחק אין ערך באסטרטגיות טהורות.

### שאלה 3 (25 נקודות)

אליס ובוב יוצאים למסעדה ואז לראות סרט בקולנוע. אליס בוחרת בין מסעדה בשרית לבין מסעדה חלבית. בוב בוחר בין סרט רומנטי לבין סרט מתח.

אם אליס בוחרת במסעדה בשרית ובוב בוחר בסרט רומנטי אז אליס משלמת לבוב 16 ₪.

אם אליס בוחרת במסעדה חלבית ובוב בוחר בסרט רומנטי אז אליס משלמת לבוב 4 ₪.

אם אליס בוחרת במסעדה בשרית ובוב בוחר בסרט מתח אז אליס משלמת לבוב 8 ₪.

אם אליס בוחרת במסעדה חלבית ובוב בוחר בסרט מתח אז אליס משלמת לבוב 12 ₪.

(א) (5 נקודות)

רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית.

(ב) (5 נקודות)

מצאו את הערך של המשחק, אם יש, באסטרטגיות טהורות.

(ג) (10 נקודות)

מצאו את הערך של המשחק, אם יש, באסטרטגיות מעורבות.

(ד) (5 נקודות)

תהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  מטריצה של משחק שני שחקנים סכום אפס. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית: אם  $A$  מטריצה משולשית עליונה אשר לא כל האיברים אפסים אז למשחק אין ערך באסטרטגיות טהורות.

### שאלה 4 (25 נקודות)

(א) (13 נקודות)

שני יצרניים מייצרים אותו מוצר ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאליים. היצרנים מחליטים סימולטנית על הכמות שהם ייצרו, וההיצע הכולל קובע את מחיר המוצר, שהוא זהה לשני היצרנים. הפרמטר הביקוש ידיעה משותפת ושווה ל-18. עלות הייצור של יחידה ליצרן הראשון היא 4 ₪ וליצרן השני היא 6 ₪. האם קיים שיווי משקל במשחק זה, ואם כן, מה הוא?

(ב) (5 נקודות)

מצאו את הרווח לכל יצרן אם כל יצרן בוחר באסטרטגיה אופטימלית.

**(ג) (7 נקודות)**

תהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  מטריצה אי-סימטרית. תהי  $A$  מטריצת התשלומים של משחק שני-שחקנים סכום אפס. הוכיחו: קיים ערך למשחק באסטרטגיות מעורבות אם ורק אם הערך שווה ל-0.

**שאלה 5 (25 נקודות)**

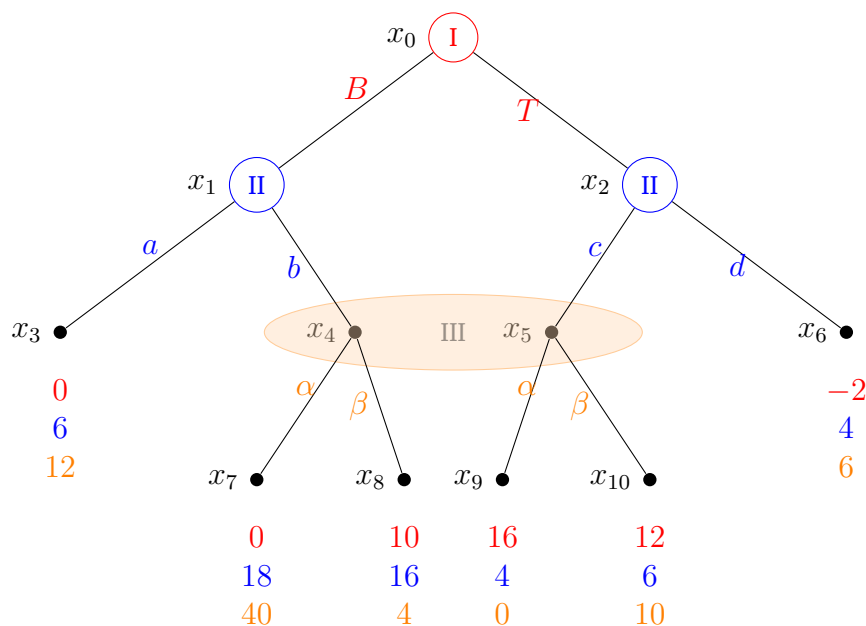
אליס ובוב מייצרים אותו יין ומתרחים על שוק הקונים הפוטנציאלים. הם מחליטים על הכמות שהם ייצרו, וההיצע הכולל קובע את מחיר המוצר, שהוא זהה לשניהם. הפרמטר הביקוש  $a = 4$ . עלות הייצור של יחידה לאליס הוא ידיעה משותפת בין שניהם ושווה ל-1. עלות הייצור של יחידה לבוב ידוע לבוב אך אינה ידוע לאליס. כל שאליס יודעת הוא שהעלות שווה ל- $\frac{3}{4}$  (עלות יצור נמוך) או  $\frac{5}{4}$  (עלות יצור גבוהה) בהסתברות שווה.

**(א) (15 נקודות)** האם קיים שיווי משקל בייסיאני במשחק זה? אם כן, מה הוא?

**(ב) (10 נקודות)** מצאו את כל האפשרויות לתשלומים לאליס ולבוב.

# פתרונות

שאלה 1 (25 נקודות)



קבוצת אסטרטגיות של שחקן  $I$ :

$$S_I = (B, T)$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן  $II$ :

$$S_{II} = (a/c, a/d, b/c, b/d) .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן  $III$ :

$$S_{III} = (\alpha, \beta) .$$

צורת אסטרטגיה של המשחק:

		$\alpha$			
$I$	$II$	$a/c$	$a/d$	$b/c$	$b/d$
	$B$	0, 6, 12	0, 6, 12	0, 18, 40	0, 18, 40
	$T$	16, 4, 0	-2, 4, 6	16, 4, 0	-2, 4, 6

		$\beta$			
$I$	$II$	$a/c$	$a/d$	$b/c$	$b/d$
	$B$	0, 6, 12	0, 6, 12	10, 16, 4	10, 16, 4
	$T$	12, 6, 10	-2, 4, 6	12, 6, 10	-2, 4, 6

נמצא את התשובה הטובה ביותר של שחקן  $I$  לכל אסטרטגיה של שחקן  $II$  ולכל אסטרטגיה של שחקן  $III$ :

		$\alpha$			
$I \backslash II$		$a/c$	$a/d$	$b/c$	$b/d$
$B$		0, 6, 12	0, 6, 12	0, 18, 40	0, 18, 40
$T$		16, 4, 0	-2, 4, 6	16, 4, 0	-2, 4, 6

		$\beta$			
$I \backslash II$		$a/c$	$a/d$	$b/c$	$b/d$
$B$		0, 6, 12	0, 6, 12	10, 16, 4	10, 16, 4
$T$		12, 6, 10	-2, 4, 6	12, 6, 10	-2, 4, 6

נמצא את התשובה הטובה ביותר של שחקן  $II$  לכל אסטרטגיה של שחקן  $I$  ולכל אסטרטגיה של שחקן  $III$ :

		$\alpha$			
$I \backslash II$		$a/c$	$a/d$	$b/c$	$b/d$
$B$		0, 6, 12	0, 6, 12	0, 18, 40	0, 18, 40
$T$		16, 4, 0	-2, 4, 6	16, 4, 0	-2, 4, 6

		$\beta$			
$I \backslash II$		$a/c$	$a/d$	$b/c$	$b/d$
$B$		0, 6, 12	0, 6, 12	10, 16, 4	10, 16, 4
$T$		12, 6, 10	-2, 4, 6	12, 6, 10	2, 4, 6

נמצא את התשובה הטובה ביותר של שחקן  $III$  לכל אסטרטגיה של שחקן  $I$  ולכל אסטרטגיה של שחקן  $II$ :

		$\alpha$			
$I \backslash II$		$a/c$	$a/d$	$b/c$	$b/d$
$B$		0, 6, 12	0, 6, 12	0, 18, 40	0, 18, 40
$T$		16, 4, 0	-2, 4, 6	16, 4, 0	-2, 4, 6

		$\beta$			
$I \backslash II$		$a/c$	$a/d$	$b/c$	$b/d$
$B$		0, 6, 12	0, 6, 12	10, 16, 4	10, 16, 4
$T$		12, 6, 10	-2, 4, 6	16, 4, 10	-2, 4, 6

שיווי משקל נאש:

$$s^* = (T, a/c, \beta), \quad s^* = (B, b/d, \alpha).$$

## שאלה 2 (25 נקודות)

(א) יהי  $G$  הגרף כאשר כל קדקוד מייצג משבצת אחת על הלוח שחמט. המטריצת שכנות  $A$  היא מסדר  $64 \times 64$  של  $G$  משולשית עדיונה, והאיברים על האלכסון אפס. לכן  $A$  אידמפוטנט. בפרט

$$A^k = 0 \quad \forall k \geq 64$$

לכן  $A^{100} = 0$  לכן לא קיים אף מסלול של אורך 100 בין כל שתי משבצות.

(ב) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:  
 $B \in \mathbb{R}^{1 \times 1} = 1, A \in \mathbb{R}^{1 \times 1} = 1$

$I \backslash II$		
	0	1
	1	1

$I \backslash II$			$\min U_{s_2}$
	0	1	0
	1	1	1
$\max U_{s_1}$	1	1	

מכאן

$$\underline{v} = \max_{s_1} \min_{s_2} U = 1, \quad \bar{v} = \min_{s_2} \max_{s_1} U = 1.$$

ז"א  $\underline{v} = 1 = \bar{v}$  לכן הערך של המשחק הוא 1.

### שאלה 3 (25 נקודות)

- (א) המשחק הוא משחק שני שחקנים סכום אפס. נסמן אליס שחקן  $I$  ובוב שחקן  $II$ .  
 $A$  = מסעדה בשרית.  
 $B$  = מסעדה חלבית.  
 $a$  = סרט רומנטי.  
 $b$  = סרט מתח.

$I \backslash II$	$a$	$b$
$A$	16	8
$B$	4	12

$I \backslash II$	$a$	$b$	$\min U_{s_2}$
$A$	16	8	8
$B$	4	12	4
$\max U_{s_1}$	16	12	

מכאן

$$\underline{v} = \max_{s_1} \min_{s_2} U = 8, \quad \bar{v} = \min_{s_2} \max_{s_1} U = 12.$$

ז"א  $\underline{v} = 8 \neq \bar{v} = 12$  לכן למשחק אין ערך באסטרטגיות טהורות.

ג

$I \backslash II$	$y(a)$	$(1-y)(b)$
$x(A)$	16	8
$(1-x)(B)$	4	12

פונקצית תשלום של המשחק:

$$U(x, y) = 16xy + 8x(1-y) + 4(1-x)y + 12(1-x)(1-y) = 28xy - 4x - 8y + 12.$$

אם  $II$  משחק אסטרטגיה אופטימלית  $y^*$  אז

$$U(A, y^*) = U(B, y^*) \Rightarrow U(x=1, y^*) = U(x=0, y^*) \Rightarrow 20y^* + 8 = -8y^* + 12 \Rightarrow y^* = \frac{1}{7}.$$

אם  $I$  משחק אסטרטגיה אופטימלית  $x^*$  אז

$$U(x^*, a) = U(x^*, b) \Rightarrow U(x^*, y=1) = U(x^*, y=0) \Rightarrow 24x^* + 4 = -4x^* + 12 \Rightarrow x^* = \frac{2}{7}.$$

ווקטור אסטרטגיות אופטימלית:

$$s_1^* = \left( \frac{2}{7}(A), \frac{5}{7}(B) \right), \quad s_2^* = \left( \frac{1}{7}(a), \frac{6}{7}(b) \right).$$

תשלום אופטימלי:

$$U(x^*, y^*) = \frac{72}{7}.$$

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  שמוגדרת (ד)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$I \backslash II$			$\min_{s_2} U$
$I$	1	1	1
	0	1	0
$\max_{s_1} U$	1	1	

$$\underline{v} = \max_{s_1} \min_{s_2} U = 1, \quad \bar{v} = \min_{s_2} \max_{s_1} U = 1.$$

לכן  $\underline{v} = 1 = \bar{v}$  ז"א למשחק יש ערך.

#### שאלה 4 (25 נקודות)

(א)

פונקצית המחיר:

$$P(Q) = a - Q ,$$

כאשר  $Q = q_1 + q_2$ . הרווח לשחקן 1 הוא

$$u_1 = (P - c_1)q_1 = (a - Q - c_1)q_1 = (a - q_1 - q_2 - c_1)q_1 ,$$

והרווח לשחקן 2 הוא

$$u_2 = (P - c_2)q_2 = (a - Q - c_2)q_2 = (a - q_1 - q_2 - c_2)q_2 .$$

נציב  $a = 18$ ,  $c_2 = 6$ ,  $c_1 = 4$  ונקבל

$$u_1 = (18 - q_1 - q_2 - 4)q_1 = (14 - q_1 - q_2)q_1 ,$$

$$u_2 = (18 - q_1 - q_2 - 6)q_2 = (12 - q_1 - q_2)q_2 .$$

בנקודת שיווי משקל:

$$(u_1)'_{q_1} = 14 - 2q_1 - q_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_1^* = \frac{14 - q_2}{2} .$$

בנקודת שיווי משקל:

$$(u_2)'_{q_2} = 12 - q_1 - 2q_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_2^* = \frac{12 - q_1}{2} .$$

נציב התנאי השני בתנאי הראשון:

$$q_1^* = \frac{14 - q_2^*}{2} = \frac{14 - \left(\frac{12 - q_1^*}{2}\right)}{2} = 4 + \frac{q_1^*}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{3q_1^*}{4} = 4 \quad \Rightarrow \quad q_1^* = \frac{16}{3} .$$

נציב זה בביטוי ל-  $q_2^*$  ונקבל

$$q_2^* = \frac{10}{3} .$$

(ב)

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = \frac{26}{3} \cdot \frac{16}{3} = \frac{416}{9} .$$

$$u_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{10}{3} \cdot \frac{10}{3} = \frac{100}{9} .$$



ג) התשלום המקסימין של המשחק הוא  $\underline{v} = \max_i \min_j A_{ij}$   
 התשלום המינימקס של המשחק הוא  $\bar{v} = \min_j \max_i A_{ij}$

$$\underline{v} = \bar{v} \Leftrightarrow \max_i \min_j A_{ij} = \min_j \max_i A_{ij}.$$

$A$  אי-סימטרית לכן  $A_{ij} = -A_{ji}$ . לכן

$$\min_j \max_i A_{ij} = \min_j \max_i (-A_{ji}) = \min_j (-\min_i A_{ji}) = -\max_j \min_i A_{ji} = -\max_i \min_j A_{ij}.$$

לכן

$$\underline{v} = \bar{v} \Leftrightarrow \max_i \min_j A_{ij} = -\max_i \min_j A_{ij} \Leftrightarrow \max_i \min_j A_{ij} = 0.$$

לכן אם  $A$  אי-סימטרית אז למשחק יש ערך אם ורק אם הערך שווה אפס.

## שאלה 5 (25 נקודות)

יהי אליס שחקן 1 ובוב שחקן 2.

כמות של יצרן 1:  $q_1$ . כמות של יצרן 2:  $q_2$ .

מחיר ליחידה אחת של המוצר:  $P = a - q_1 - q_2$ .

עלות ליחידה לשחקן 1:  $c_1 = 1$  והוא ידיעה משותפת.

עלות ליחידה לשחקן 2:  $c_2 = c_2^H$  או  $c_2 = c_2^L$  והוא ידוע לשחקן 2 ולא לשחקן 1.

עבור שחקן 1:  $c_2 = c_2^L$  בהסתברות  $\theta$  ו-  $c_2 = c_2^H$  בהסתברות  $1 - \theta$ .

צורה בייסיאנית של המשחק:

$$\bullet N = \{1, 2\}$$

$$\bullet T_2 = \{c_2^H, c_2^L\}, T_1 = \{1\}$$

$$\bullet p_I(t_2 = c_2^L | t_1 = 1) = p_I(t_2 = c_2^L) = \theta$$

$$\bullet p_I(t_2 = c_2^H | t_1 = 1) = p_I(t_2 = c_2^H) = 1 - \theta$$

$$\bullet A_2 = \{q_2^H, q_2^L\}, A_1 = \{q_1\}$$

• פונקצית תשלום לשחקן 1:

$$u_1(s_1(t_1), s_2(t_2), t_1 = 1)$$

פונקצית תשלום לשחקן 2:

$$u_2(s_1(t_1), s_2(t_2), t_2)$$

•

$$s_1(t=1) = q_1, \quad s_2(t_2 = c_2^L) = q_2^L, \quad s_2(t_2 = c_2^H) = q_2^H.$$

לשחקן 1,  $s_2(t_2 = c_2^L) = q_2^L$  בהסתברות  $\theta$  ו-  $s_2(t_2 = c_2^H) = q_2^H$  בהסתברות  $1 - \theta$ .

$$u_1(s_1(t_1), s_2(t_2), t_1 = 1) = u_1(q_1, q_2^H, q_2^L) = q_1(a - q_1 - \theta q_2^L - (1 - \theta)q_2^H - c_1)$$

לשחקן 2, אם  $c_2 = c_2^L$ :

$$u_2(s_1(t_1), s_2(t_2 = c_2^L), t_2 = c_2^L) = u_2(q_1, q_2^L) = q_2^L(a - q_1 - q_2^L - c_2^L).$$

אם  $c_2 = c_2^H$ :

$$u_2(s_1(t_1), s_2(t_2 = c_2^H), t_2 = c_2^H) = u_2(q_1, q_2^H) = q_2^H(a - q_1 - q_2^H - c_2^H).$$

$$q_2^{H*} = \arg \max_{q_2^H \in [0, \infty)} u_2(q_1^*, q_2^H)$$

$$(u_2)'_{q_2^H} = a - c_2^H - q_1^* - 2q_2^H \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow q_2^{H*} = \frac{a - c_2^H - q_1^*}{2}.$$

$$(u_2)'_{q_2^L} = a - c_2^L - q_1^* - 2q_2^L \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow q_2^{L*} = \frac{a - c_2^L - q_1^*}{2}.$$

$$(u_1)'_{q_1} = a - 2q_1 - \theta q_2^{L*} - (1 - \theta)q_2^{H*} - c_1 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow q_1^* = \frac{a - \theta q_2^{L*} - (1 - \theta)q_2^{H*} - c_1}{2}.$$

נציב  $a = 2, c_2^L = \frac{3}{4}, c_2^H = \frac{5}{4}$  ו-  $c_1 = 1$  במערכת זו ונקבל

$$q_1^* = \frac{1}{3}, \quad q_2^{H*} = \frac{5}{24}, \quad q_2^{L*} = \frac{11}{24}.$$

התשלומים הם:

$$\begin{aligned} u_1\left(q_1^* = \frac{1}{3}, q_2^{H*} = \frac{5}{24}, q_2^{L*} = \frac{11}{24}\right) &= \frac{1}{9}, \\ u_2^H\left(q_1^* = \frac{1}{3}, q_2^{H*} = \frac{5}{24}, q_2^{L*} = \frac{11}{24}\right) &= \left(\frac{5}{24}\right)^2, \\ u_2^L\left(q_1^* = \frac{1}{3}, q_2^{H*} = \frac{5}{24}, q_2^{L*} = \frac{11}{24}\right) &= \left(\frac{11}{24}\right)^2. \end{aligned}$$