עבודה עצמית 3

שאלה 1

פתרו

א)

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & -3 & -10 & 8 \\ 9 & -3 & 7 & 7 \\ 5 & -10 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -14 & 0 & 5 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ג)

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ד)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ה)

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & -5 \\ 4 & 1 & -7 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

שאלה 2 נסמן $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$. מצאו את $A^2 - 5A + 2I$.

שאלה 3 נתונות המטריצות A, B. חשב את המטריצה AB ו- BA אם הן קיימות

א)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

ב)

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} .$$

שאלה 4 מטריצות A ו- B נקראות מתחלפות אם $AB = BA$. מצאו את כל המצטריות $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ המתחלפות עם המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

שאלה 5 נתונות $A = \begin{pmatrix} 3 & -k \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & k \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. מצאו את כל ערכי של הפרמטר k כך ש- $AB = BA$.

שאלה 6 תהיינה $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכח או הפרך:

א) אם $AB = AC$ אז $B = C$.

ב) אם $AB = 0$ אז $A = 0$ או $B = 0$.

ג) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

ד) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

ה) $(AB)^t = A^t B^t$.

ו) $(A+B)^t = A^t + B^t$.

שאלה 7

לכל $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ נגדיר $E_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ המטריצה אשר כולה אפסים מלבד הרכיב בשורה ה- i והעמודה ה- j שערכו 1. למשל $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. נסמן $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$ ויהיו $E_{43}, E_{23} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$. מצאו את $B = E_{43} A E_{23}$.

שאלה 8

א) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, מצאו את כל מתטריצות B מסדר 2×2 המקיימות

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

ב) נתונות המטריצות

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} ,$$

א) מצאו את מטריצה X המקיימת

$$AXA^{-1} = B .$$

ב) האם X מטריצה הפיכה? נמקו את תשובתך.

שאלה 9 עבור המטריצות

$$A=\begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & -i \end{pmatrix}\ ,B=\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 4-i & i \end{pmatrix}\ ,D=\begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -3i \end{pmatrix}\ ,C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}\ ,E=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\ .$$

פתרו את המשוואות

א) $AX=D$

ב) $XB=D$

ג) $AXB=D$

ד) $CX=E$

שאלה 10 הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

א) אם A מטריצה משולשת עליונה ו- B מטריצה משולשת עליונה, אז $A\cdot B$ מטריצה משולשת עליונה.

ב) אם A, B מטריצות אלכסוניות, אז $AB=BA$.

ג) אם A, B מטריצות ריבועיות המקיימות $AB=BA$ אז $AB^2=B^2A$.

שאלה 11 נניח ש- $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ מטריצה של משתנים ו- $b\in\mathbb{R}^n$. הוכיחו כי אם למערכת

$$AX=b\ ,\qquad b\neq\bar{0}\ .$$

יש יותר מפתרון אחד אז A לא הפיכה.

פתרונות

שאלה 1

א)

$$3\cdot\begin{pmatrix}-4&0&1&-2\\5&-3&-1&2\\-1&0&-3&-1\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}-2&1&5&-3\\0&-2&-4&-1\\-3&1&2&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5&-3&-10&8\\9&-3&7&7\\5&-10&-12&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-12&0&3&-6\\15&-9&-3&6\\-3&0&-9&-1\end{pmatrix}+\cdot\begin{pmatrix}8&-4&-20&12\\0&8&16&4\\12&-4&-8&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&3&10&-8\\-9&3&-7&-7\\-5&10&12&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&-1&-7&-2\\6&2&6&3\\4&6&-5&9\end{pmatrix}$$

ב)

$$\begin{pmatrix}1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-14&0&5\\4&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&16&9\end{pmatrix}$$

ג)

$$\begin{pmatrix}-1&5\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9&7\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&3\\-3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$$

ד)

$$\begin{pmatrix}2&3&1\\-2&0&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}$$

ה)

$$\begin{pmatrix}7&-6&-5\\4&1&-7\\5&-1&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&4\\-1&2\\9&-10\end{pmatrix}$$

שאלה 2

$$A^2-5A+2I=\begin{pmatrix}7&0&0\\4&1&-7\\0&-1&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&0&0\\4&1&-7\\0&-1&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}35&0&0\\20&5&-35\\0&-5&30\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}49&0&0\\32&8&-49\\-4&-7&43\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}35&0&0\\20&5&-35\\0&-5&30\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}16&0&0\\12&5&-14\\-4&-2&15\end{pmatrix}$$

שאלה 3

א)

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -10 & -2 \end{pmatrix} , \qquad BA = \begin{pmatrix} -8 & -8 \\ 20 & 8 \end{pmatrix} .$$

ב) AB לא קיים.

$$BA = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 6 \\ 12 & 18 & 6 \end{pmatrix} .$$

שאלה 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} .$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ x+z & w+y \end{pmatrix} ,$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & y \\ w+z & w \end{pmatrix} .$$

לכן

$$A \cdot B = B \cdot A \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} x & y \\ x+z & w+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & y \\ w+z & w \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x &= x+y \\ x+z &= z+w \\ y+w &= w \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad y = 0 \ , x = w \ .$$

$$B = \begin{pmatrix} w & 0 \\ z & w \end{pmatrix} \ , z, w \in \mathbb{R} \ .$$

שאלה 5

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 21-5k & -6k \\ -30 & 9-5k \end{pmatrix} , \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 21-5k & -6k \\ -30 & 9-5k \end{pmatrix} .$$

לכן $AB = BA$ לכל $k \in \mathbb{R}$.

שאלה 6

תהיינה $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו:

א) <u>אם $AB = AC$ אז $B = C$</u>:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

$$A\cdot B=A\cdot C=0\ ,\qquad B\neq C\ .$$

ב) <u>אם $AB=0$ אז $A=0$ או $B=0$:</u>

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

$$A\cdot B=0\ ,\qquad A\neq 0\ ,B\neq 0\ .$$

ג) <u>$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$:</u>

טענה לא נכונה. הסבר:

$$(A+B)^2=(A+B)\cdot(A+B)=A^2+AB+BA+B^2\neq A^2+2AB+B^2$$

עבור מטריצות A,B לא מתחלפות.

דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&2\\0&0\end{pmatrix}.$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}-1&2\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

לכן $AB\neq BA$

$$A^2+AB+BA+B^2\neq A^2+2AB+B^2\ .$$

ד) <u>$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$:</u>

טענה לא נכונה. הסבר:

$$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2$$

רק עבור מטריצות מתחלפות, ז"א $AB=BA$.

דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&2\\0&0\end{pmatrix}.$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}-1&2\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

לכן $AB\neq BA$

$$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2\neq A^2-B^2\ .$$

ה) $(AB)^t = A^t B^t$:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} , \qquad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} .$$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^t \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 18 & 4 \end{pmatrix} .$$

ז"א $(AB)^t \neq A^t B^t$.

ו) $(A+B)^t = A^t + B^t$:

טענה נכונה. הוכחה:

נוכיח את הטענה לכל איבר A_{ij} של A וכל איבר B_{ij} של B ($i,j = 1,\dots n$).

$$\left((A+B)^t\right)_{ij} = A_{ji} + B_{ji} = (A^t)_{ij} + (B^t)_{ij} = (A^t + B^t)_{ij}$$

לכל $i,j = 1,\dots n$.

שאלה 7

$$A \cdot E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 22 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{43} \cdot A \cdot E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 8

א) תהי $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} b_{11} + 2b_{21} & b_{12} + 2b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & -2b_{22} \\ -\frac{1}{2}b_{11} & b_{22} \end{pmatrix}$$

ב) א)

$$=A^{-1}\cdot B\cdot A$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{24} & \frac{13}{48} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

ואז

$$X=\begin{pmatrix} -\frac{103}{48} & \frac{5}{24} & \frac{41}{16} \\ \frac{43}{24} & \frac{7}{12} & -\frac{5}{8} \\ \frac{35}{16} & \frac{47}{8} & \frac{25}{16} \end{pmatrix}$$

ב) $\mathrm{Det}\,(X)=13$, כלומר $\mathrm{Det}(X)\neq 0$ לכן X הפיכה.

שאלה 9

א)

$$AX=D \quad\Rightarrow\quad A^{-1}AX=A^{-1}D \quad\Rightarrow\quad X=A^{-1}D\ .$$

נמצא את A^{-1}:

$$(A|I) \quad = \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 1 & 0 \\ 2i & -i & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2iR_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 2-i & -2i & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to(2+i)R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4i+2 & 2+i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to\frac{1}{5}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-4i}{5}+\frac{2}{5} & \frac{2}{5}+\frac{i}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-iR_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5}-\frac{2}{5}i & -\frac{2i}{5}+\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-4i}{5}+\frac{2}{5} & \frac{2}{5}+\frac{i}{5} \end{array}\right)$$

לכן

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5}-\frac{2}{5}i & -\frac{2i}{5}+\frac{1}{5} \\ \frac{-4i}{5}+\frac{2}{5} & \frac{2}{5}+\frac{i}{5} \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1-2i & -2i+1 \\ -4i+2 & 2+i \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}D=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1-2i & -2i+1 \\ -4i+2 & 2+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -3i \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2+i & -4-7i \\ 4+2i & 7-14i \end{pmatrix}$$

ב)

$$XB=D \quad\Rightarrow\quad XBB^{-1}=DB^{-1} \quad\Rightarrow\quad X=DB^{-1}\ .$$

נמצא את B^{-1}:

$$(B|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1-i & 1 & 0 \\ 4-i & i & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-(4-i)R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1-i & 1 & 0 \\ 0 & -3+6i & -4+i & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to(-3-6i)R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1-i & 1 & 0 \\ 0 & 45 & 18+21i & -3-6i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to\frac{1}{45}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1-i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5}+\frac{7}{15}i & -\frac{1}{15}-\frac{2}{15}i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-(1-i)R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{15}-\frac{i}{15} & \frac{1}{5}+\frac{i}{15} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5}+\frac{7}{15}i & -\frac{1}{15}-\frac{2}{15}i \end{array}\right)$$

לכן

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{15}-\frac{i}{15} & \frac{1}{5}+\frac{i}{15} \\ \frac{2}{5}+\frac{7}{15}i & -\frac{1}{15}-\frac{2}{15}i \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ 6+7i & -1-2i \end{pmatrix}$$

$$X = DB^{-1} = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -3i \end{pmatrix}\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ 6+7i & -1-2i \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 13+16i & -3-i \\ 21-18i & -6+3i \end{pmatrix}$$

ג)

$$AXB = D \quad\Rightarrow\quad A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}DB^{-1} \quad\Rightarrow\quad IXI = A^{-1}DB^{-1} \quad\Rightarrow\quad X = A^{-1}DB^{-1}\ .$$

$$X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2+i & -4-7i \\ 4+2i & 7-14i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -3i \end{pmatrix}\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ 6+7i & -1-2i \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix} 6-14i & -1+4i \\ 30-7i & -5+2i \end{pmatrix}\ .$$

ד)

$$CX = E \quad\Rightarrow\quad X = C^{-1}E\ .$$

נמצא את C^{-1}:

$$(C|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-5R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to\frac{-1}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2+4R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{10}{3} & 5 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-3R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{10}{3} & 5 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

לפיכך $C^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ -\frac{10}{3} & 5 & -\frac{4}{3}\\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

$$X=C^{-1}E=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ -\frac{10}{3} & 5 & -\frac{4}{3}\\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ \frac{16}{3}\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

שאלה 10

א) טענה: אם A, B משולשית עליונה אז $A\cdot B$ משולשית עליונה.

מספיק להוכיח כי $(A\cdot B)_{ij}=0$ לכל $i>j$.

הוכחה: נניח ש- $i>j$.

$$(A\cdot B)_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\dots A_{in}B_{nj}\ .$$

לכל איבר $A_{ik}B_{kj}$ יש 5 אפשרויות:

$i>j\geq k$:

A משולשית עליונה לכן $A_{ik}=0$.

$i>k>j$:

A משולשית עליונה ו- B משולשית עליונה לכן $A_{ik}=0$ ו- $B_{kj}=0$.

$i=k>j$:

B משולשית עליונה לכן $B_{kj}=0$.

$i>k=j$:

A משולשית עליונה לכן $A_{ik}=0$.

$k>i\geq j$:

B משולשית עליונה לכן $B_{kj}=0$.

בסה"כ עבור כל אחד מהאפשריות, כל איבר בסכום, $A_{ik}B_{kj}=0$. כלומר כל איבר מתאפס בגלל ש- A משולשית עליונה ו- B משולשית עליונה.
לפיכך, מצאנו כי אם $i>j$ אז $(A\cdot B)_{ij}=0$. מש"ל.

ב) טענה: אם A, B אלכסוניות, אז $AB=BA$.

צריך להוכיח: $(A\cdot B)_{ij}=(B\cdot A)_{ij}$.

הוכחה (שיטה 1):

המכפלה של שתי מטריצות אלכסוניות A, B שווה למטריצה אלכסונית, והאיברים באלכסון של המטריצה המתקבלת שווים למכפלה של האיברים על האלכסונים של A ו- B, כלומר אם

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix} ,$$

אז

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22}B_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn}B_{nn} \end{pmatrix} .$$

לכן

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22}B_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn}B_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{22}A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{nn}A_{nn} \end{pmatrix} = B \cdot A$$

מש"ל.

הוכחה (שיטה 1):

אם A, B אלכסוניות, אז

$$\begin{aligned} (A \cdot B)_{ij} &= A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{ii}B_{ij} + \ldots + A_{in}B_{nj} = A_{ii}B_{ij} \\ &= \begin{cases} A_{ii}B_{ii} & i = j \ , \\ 0 & i \neq j \ . \end{cases} \end{aligned}$$

מצד שני,

$$(B \cdot A)_{ij} = \begin{cases} B_{ii}A_{ii} & i = j \ , \\ 0 & i \neq j \ . \end{cases} = \begin{cases} A_{ii}B_{ii} & i = j \ , \\ 0 & i \neq j \ . \end{cases}$$

ז"א

$$(A \cdot B)_{ij} = (B \cdot A)_{ij}$$

לכן $AB = BA$. מש"ל.

שאלה 11

נוכיח דרך השלילה.
נניח ש- X_1, X_2 פתרונות למערכת $A\mathrm{x} = b$, כאשר $X_2 \neq X_1$ ו- $b \neq \bar{0}$.
נניח ש- A הפיכה.
אז $AX_1 = b$ ו- $AX_2 = b$.

לכן

$$A \cdot (X_1 - X_2) = b - b = \bar{0} \ .$$

A הפיכה אז A^{-1} קיימת. נכפיל ב- A^{-1} מצד שמאל ונקבל

$$A^{-1} \cdot A \cdot (X_1 - X_2) = A^{-1} \cdot \bar{0} \quad \Rightarrow \quad I \cdot (X_1 - X_2) = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad X_1 - X_2 = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad X_1 = X_2 \ ,$$

בסתירה לכך ש- $X_1 \neq X_2$. לכן A לא יכולה להיות הפיכה.