

## עבודה עצמית 1 סדרות

**שאלה 1** רשום את חמשת האיברים הראשונים של כל אחת מהסדרות הבאות:

$$a_n = 2^{n-1} - n^2 + 1 \quad (\text{א})$$

$$a_{n+1} = 2a_n + 3(-1)^n \quad (\text{ב})$$

$$a_n = (-1)^n + 1 \quad (\text{ג})$$

$$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (\text{ד})$$

**שאלה 2** רשום את האיבר הכללי של כל אחת מהסדרות הבאות:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \dots \quad (\text{א})$$

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots \quad (\text{ב})$$

$$2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, \dots \quad (\text{ג})$$

$$-1, 2, -3, 4, -5, \dots \quad (\text{ד})$$

**שאלה 3** בדקו אם הסדרות הבאות חסומות :

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{n^3 + 10n + 1} \quad (\text{א})$$

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{n + 2} \quad (\text{ב})$$

$$a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n \quad (\text{ג})$$

$$a_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\text{ד})$$

$$a_n = \sin(n) \quad (\text{ה})$$

**שאלה 4** בדקו את המונוטוניות של הסדרות הבאות:

$$a_n = \frac{2^n}{n} \quad (\text{א})$$

$$a_n = n^2 + n - 5 \quad (\text{ב})$$

$$a_n = \frac{n}{2n^2 + 1} \quad (\text{ג})$$

$$a_n = \sin(n) \quad (\text{ד})$$

$$a_n = \sqrt{n} + \frac{1}{n} \quad (\text{ה})$$

**שאלה 5** בדקו אם הסדרות הבאות חסומות :

$$a_n = \frac{2n^2 + 3}{n^3 + 8n + 2} \quad (\text{א})$$

$$a_n = \frac{3n^2 + 2}{n + 4} \quad (\text{ב})$$

$$a_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n} \quad (\text{ג})$$

$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\text{ד})$$

$$a_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\text{ה})$$

$$a_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\text{ו})$$

**שאלה 6** בדקו את המונוטוניות של הסדרות הבאות:

$$a_n = \frac{3^n}{n} \quad (\text{א})$$

$$a_n = n^2 + n - 7 \quad (\text{ב})$$

$$a_n = \frac{3n}{4n^2 + 5} \quad (\text{ג})$$

$$a_n = \cos(n) \quad (\text{ד})$$

$$a_n = \sqrt{n} + \frac{1}{n} \quad (\text{ה})$$

**שאלה 7** הוכיחו כי הסדרה  $a_n = \frac{n+5}{4n^2+n}$  יורדת מונוטונית.

**שאלה 8** הסדרה  $a_n$  נתונה על ידי נוסחת הנסיגה הבאה:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right), \quad a_1 = 3.$$

- (א) הוכיחו כי לכל  $n$  מתקיים  $a_n \geq 1$ .
- (ב) הוכיחו כי הסדרה  $a_n$  מונוטונית יורדת.  
רמז: לכל  $x, y \geq 0$  מתקיים כי  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ .
- (ג) הוכיחו כי הסדרה  $a_n$  מתכנסת וחשבו את גבולה.

**שאלה 9** סדרה נתונה על ידי נוסחאת נסיגה (רקורסיה)

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

- (א) הוכיחו כי לכל  $n \geq 1$  מתקיים  $1 \leq a_n < 3$ .
- (ב) הוכיחו כי  $a_n$  עולה מונוטונית.
- (ג) הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

**שאלה 10** הוכיחו כי הסדרה  $a_n = \frac{(n+1)^4}{n^5}$  יורדת מונוטונית.

**שאלה 11** נניח כי  $a_n$  מתבדרת ו- $b_n$  מתבדרת. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:  
 $a_n b_n$  מתבדרת.

**שאלה 12** נניח כי  $a_n$  סדרה מתכנסת ו- $b_n$  סדרה מתבדרת. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:  
 $a_n b_n$  מתבדרת.

**שאלה 13** הוכיחו כי הסדרה  $a_n = \frac{(n+2)^3}{n^6}$  יורדת מונוטונית.

**שאלה 14** סדרה נתונה על ידי נוסחאת נסיגה (רקורסיה)

$$\begin{cases} a_{n+1} = -\sqrt{24 - 2a_n} \\ a_1 = 11 \end{cases}$$

- (א) הוכיחו כי לכל  $n \geq 2$  מתקיים  $-6 < a_n < 0$ .
- (ב) הוכיחו כי  $a_n$  יורדת מונוטונית.

ג) הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

**שאלה 15** נניח כי  $a_n$  מתבדרת ו-  $b_n$  מתבדרת. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:  $a_n b_n$  מתכנסת.

**שאלה 16** נניח כי  $a_n$  סדרה מתכנסת ו-  $b_n$  סדרה מתבדרת. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:  $a_n b_n$  מתכנסת.

## פתרונות

שאלה 1

$$a_n = 2^{n-1} - n^2 + 1 \quad (\text{א})$$

$$a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = -4, a_4 = -7, a_5 = -8 .$$

$$a_{n+1} = 2a_n + 3(-1)^n \quad (\text{ב})$$

$$a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 1, a_4 = -1, a_5 = 1 .$$

$$a_n = (-1)^n + 1 \quad (\text{ג})$$

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 1, a_5 = 0 .$$

$$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (\text{ד})$$

$$a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -1, a_4 = 0, a_5 = 1 .$$

שאלה 2

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad (\text{א})$$

$$a_n = \frac{1}{2n-1} \quad (\text{ב})$$

$$a_n = \frac{n+1}{n} \quad (\text{ג})$$

$$a_n = n \cdot (-1)^n \quad (\text{ד})$$

שאלה 3

$$, n \in \mathbb{N} \quad (\text{א})$$

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{n^3 + 10n + 1} = \frac{n^2}{n^3 + 10n + 1} + \frac{1}{n^3 + 10n + 1} < \frac{n^2}{n^3} + 1 = \frac{1}{n} + 1 < 2$$

,

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{n^3 + 10n + 1} > 0 ,$$

לכן הסדרה חסומה:

$$0 < a_n < 2 .$$

(ב) עבור  $n \geq 2$ ,

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{n + 2} \geq \frac{n^2 + 1}{2n} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2}.$$

הסדרה  $\{\frac{n}{2}\}$  לא חסומה, לכן גם  $\{a_n\}$  לא חסומה.

(ג)

$$a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + 1} - n)(\sqrt{n^2 + 1} + n)}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} < 1$$

ו  $a_n > 0$  לכן  $0 < a_n < 1$  חסומה.

$$a_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\text{ד})$$

 $0 < \frac{1}{n} < 1$ . בקטע  $[0, 1]$   $\tan$  עולה מונוטונית, לכן

$$0 < \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow \tan(0) < \tan\left(\frac{1}{n}\right) < \tan(1)$$

לכן  $a_n$  חסומה.

$$a_n = \sin(n) \quad (\text{ה})$$

 $\sin$  פונקתיה חסונה:

$$-1 < \sin(n) < 1$$

לכן  $\{a_n\}$  חסומה.

#### שאלה 4

(א) לכל  $n \geq 2$ ,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} < 1$$

 $a_n > 0$  לכל  $n \in \mathbb{N}$  לכן  $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 \Leftrightarrow a_n < a_{n+1}$  ז"א הסדרה עולה מונוטונית.

(ב)

$$a_{n+1} = (n+1)^2 + n + 1 - 5 > n^2 + n - 5 = a_n$$

ז"א  $a_{n+1} > a_n$  לכן הסדרה עולה מונוטונית.

$$a_n = \frac{n}{2n^2 + 1} \text{ נגדיר } f(x) = \frac{x}{2x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 1 - 4x^2}{(2x^2 + 1)^2} = \frac{1 - 2x^2}{(2x^2 + 1)^2} = 0 \rightsquigarrow x = \pm\sqrt{1}\sqrt{2} = \pm 0.7.$$

עבור  $x > \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$  הפונקציה יורדת

$x > 1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$	$x < -1/\sqrt{2}$	$x$
—	+	—	$f'(x)$
$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$f(x)$

מונוטונית. לכן הסדרה  $\{a_n\}$  יורדת מונוטונית.

(ד) נבדוק מונוטוניות בקטע  $[k\pi, (k+1)\pi]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

אורך הקטע הוא  $(k+1)\pi - k\pi = \pi > 3$ .

לכן קיים מספר טבעי  $n$  כך ש  $k\pi < n < \pi(k+1)$ . נניח שעבור  $k\pi < n < \pi(k+1)$ ,  $a_n = \sin(n) > 0$ .

אז קיים  $(k+1)\pi < m < (k+2)\pi$ , כך ש  $a_m < 0$ .

וקיים  $t$  כך ש  $(k+2)\pi < t < (k+3)\pi$ , כך ש  $a_t > 0$ .

ז"א  $n < m < t$  ו  $a_n > a_m$ ,  $a_m < a_t$ .

לכן הסדרה לא מונוטונית.

(ה) נגדיר  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ .

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^{3/2} - 2}{2x^2} > 0$$

לכל  $x > 2\sqrt{2}$ . לכן  $f(x)$  עולה מונוטונית בתחום  $(2\sqrt{2}, \infty)$ . ז"א הסדרה  $\{a_n\}$  עולה מונוטונית החל מ  $n = 2$ .

## שאלה 5

(א) לכל  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_n = \frac{2n^2 + 3}{n^3 + 8n + 2} = \frac{2n^2}{n^3 + 8n + 2} + \frac{3}{n^3 + 8n + 2} < \frac{2n^2}{n^3} + \frac{3}{2} = \frac{2}{n} + \frac{3}{2} < \frac{7}{2}$$

$$a_n = \frac{2n^2 + 3}{n^3 + 8n + 2} > 0$$

לכן הסדרה חסומה:

$$0 < a_n < \frac{7}{2}.$$

(ב) עבור  $n \geq 4$ ,

$$a_n = \frac{3n^2 + 2}{n + 4} \geq \frac{3n^2 + 2}{2n} = \frac{3n}{2} + \frac{1}{n} > \frac{3n}{2}.$$

הסדרה  $\{\frac{3n}{2}\}$  לא חסומה, לכן גם  $\{a_n\}$  לא חסומה.

(ג)

$$a_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n})(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}} = \frac{n^2 + 1 - n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}$$

לכל  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} a_n &\geq \frac{n^2 + 1 - n}{\sqrt{2n^2} + \sqrt{n}} = \frac{n^2 + 1 - n}{\sqrt{2}n + \sqrt{n}} \\ &\geq \frac{n^2 + 1 - n}{\sqrt{2}n + n} = \frac{n^2 + 1 - n}{(\sqrt{2} + 1)n} = \frac{n^2 + 1}{(\sqrt{2} + 1)n} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \\ &\geq \frac{n^2}{(\sqrt{2} + 1)n} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{n}{\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \end{aligned}$$

לכן  $a_n$  לא חסומה מלעיל. לכל  $M \in \mathbb{R}$  קיים  $n$  כך ש  $a_n > M$ . לכן  $a_n$  לא חסומה.

$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\text{ד})$$

$\sin$  פונקציה חסונה:

$$-1 < \sin\left(\frac{1}{n}\right) < 1$$

לכן  $\{a_n\}$  חסומה.

$$a_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\text{ה})$$

$\sin$  פונקציה חסונה:

$$-1 < \cos\left(\frac{1}{n}\right) < 1$$

לכן  $\{a_n\}$  חסומה.

$$a_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\text{ו})$$

$0 < \frac{1}{n} < 1$ . בקטע  $[0, 1]$   $\tan$  עולה מונוטונית, לכן

$$0 < \frac{1}{n} < 1 \quad \Rightarrow \quad \tan(0) < \tan\left(\frac{1}{n}\right) < \tan(1)$$

לכן  $a_n$  חסומה.

## שאלה 6

$$a_n = \frac{3^n}{n} \quad \text{לכל } n \geq 1, \quad (\text{א})$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{n}{n+1} = 3 \cdot \frac{n}{n+1} > 3 \cdot \frac{n}{2n} = 3 \cdot \frac{1}{2} > 1.$$



$$n \in \mathbb{N} \text{ לכל } a_n > 0$$

$$\text{לכן } \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n \text{ לכן } \{a_n\} \text{ עולה מונוטונית.}$$

$$a_n = n^2 + n - 7 \quad \text{(ב)}$$

$$\text{לכל } n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n+1} = (n+1)^2 + n+1 - 7 > n^2 + n - 7 = a_n$$

$$\text{ז"א } a_{n+1} > a_n \text{ לכן } \{a_n\} \text{ עולה מונוטונית.}$$

$$a_n = \frac{3n}{4n^2 + 5} \quad \text{(ג)}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(\frac{3n}{4n^2+5}\right)}{\left(\frac{3(n+1)}{4(n+1)^2+5}\right)} = \frac{12n^3 + 24n^2 + 12 + 15n}{12n^3 + 12n^2 + 15n + 15}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{12n^3 + 12n^2 + 15n + 15}{12n^3 + 24n^2 + 27n} \leq 1$$

$$\Rightarrow 12n^3 + 12n^2 + 15 + 15n \leq 12n^3 + 24n^2 + 27n$$

$$\Rightarrow 15 \leq 12n^2 + 12n$$

$$\text{הרי } 15 < 12n^2 + 12n \text{ לכל } n \geq 1 \text{ לכן } \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ לכן הסדרה יורדת מונוטונית.}$$

$$a_n = \cos(n) \text{ לא מונוטונית:} \quad \text{(ד)}$$

$$n \in \{1, 2, 3\} \text{ לכל } a_{n+1} < a_n$$

$$n \in \{4, 5, 6\} \text{ לכל } a_{n+1} > a_n$$

$$n \in \{7, 8, 9\} \text{ לכל } a_{n+1} < a_n$$

$$n \in \{10, 11, 12\} \text{ לכל } a_{n+1} > a_n$$

וכן הלה.

באופן כללי,

$$\begin{cases} a_{n+1} < a_n & (-1)^{\lceil \frac{n}{3} \rceil} = -1 \\ a_{n+1} > a_n & (-1)^{\lceil \frac{n}{3} \rceil} = 1 \end{cases}$$

או שקול

$$\begin{cases} a_{n+1} < a_n & \lceil \frac{n}{3} \rceil \text{ אי זוגי} \\ a_{n+1} > a_n & \lceil \frac{n}{3} \rceil \text{ זוגי} \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} \quad \text{נגדיר } a_n = \sqrt{n} + \frac{1}{n} \quad (\text{ה})$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^{3/2} - 2}{2x^2} > 0$$

לכל  $x > 2\sqrt{2}$ . לכן  $f(x)$  עולה מונוטונית בתחום  $(2\sqrt{2}, \infty)$ . ז"א הסדרה  $\{a_n\}$  עולה מונוטונית החל מ  $n = 2$ .

## שאלה 7

$$a_n = \frac{n+5}{4n^2+n} = \frac{n+5}{n(4n+1)} = \frac{1+\frac{5}{n}}{4n+1}$$

$$a_{n+1} = \frac{1+\frac{5}{n+1}}{4(n+1)+1} < \frac{1+\frac{5}{n}}{4(n+1)+1} < \frac{1+\frac{5}{n}}{4n+1} = a_n$$

כלומר  $a_{n+1} < a_n$  לכן הסדרה יורדת מונוטונית.

## שאלה 8

(א) נוכיח את הטענה באינדוקציה.

בסיס:

עבור  $n = 1$  מתקיים

$$a_1 = 3 \geq 1.$$

מעבר:

נניח כי  $a_n \geq 1$ . אם כן, מתקיים (לפי אי-השוויון ברמז) כי

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = 1.$$

(ב) מכיוון ש-  $a_n \geq 1$  לכל  $n$ , מתקיים כי

$$\frac{1}{a_n} \leq 1 \leq a_n \quad \Rightarrow \quad a_n + \frac{1}{a_n} \leq 2a_n \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right) \leq a_n$$

כנדרש.

(ג) מהסעיפים הקודמים, סדרה  $a_n$  מונוטונית יורדת ומתקיים כי  $1 \leq a_n \leq 3$  לכל  $n$ . כלומר, הסדרה חסומה ומונוטונית ולכן מתכנסת. נסמן

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}.$$

ומכאן שמתקיים

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \left( L + \frac{1}{L} \right)$$

כלומר,

$$2L^2 = L^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad L^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad L = \pm 1.$$

מכיוון שהסדרה  $a_n$  היא סדרה חיובית, הגבול שלה הוא בהכרח אי-שלילי. מכאן

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 .$$

## שאלה 9

(א) נוכיח כי לכל  $n \geq 1$  מתקיים  $1 \leq a_n$  בעזרת אינדוקציה.  
מקרה בסיס: עבור  $n = 1$   $a_1 = 1$ . מעבר: נניח כי  $1 \leq a_n$ . אם כן:

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} < \sqrt{7} > 1$$

ז"א  $a_{n+1} > 1$ , כנדרש.

נוכיח כי לכל  $n \geq 1$  מתקיים  $a_n < 3$  בעזרת אינדוקציה.  
מקרה בסיס:

$$a_1 = 1 < 3 .$$

מעבר: נניח כי  $a_n < 3$ . אם כן:

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} < \sqrt{9} = 3 ,$$

ז"א  $a_{n+1} < 3$ , כנדרש.

(ב) נוכיח כי  $a_n$  עולה מונוטונית בעזרת אינדוקציה.  
מקרה הבסיס:

$$a_2 = \sqrt{6 + a_1} = \sqrt{7} > a_1 .$$

מעבר:

נניח כי  $a_n \leq a_{n+1}$ . אם כן, מכיוון שאיברי הסדרה חיוביים, אז

$$a_{n+2} = \sqrt{6 + a_{n+1}} > \sqrt{6 + a_n} = a_{n+1}$$

ז"א  $a_{n+2} > a_{n+1}$ , כנדרש.

(ג) מכיוון שהוכחנו שהסדרה יורדת וחסומה, היא גם מתכנסת. נסמן

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} .$$

מכיוון שמשוואת הרקורסיה  $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$  מתקיימת לכל  $n$ , מתקיים גם

$$L = \sqrt{6 + L} \Rightarrow L^2 = 6 + L \Rightarrow L^2 - L - 6 = 0 \Rightarrow (L - 3)(L + 2) = 0 .$$

אבל מכיוון שהחל מ-  $a_1$  כל איברי הסדרה חיוביים, בהכרח

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3 .$$

**שאלה 10**

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^4 < \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 = a_n$$

כלומר  $a_{n+1} < a_n$  לכן  $a_n$  יורדת מונוטונית.

**שאלה 11**

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:  $a_n = (-1)^n$  מתבדרת,  $b_n = (-1)^n$  מתבדרת אבל  $a_n \cdot b_n = (-1)^{2n} = 1$  מתכנסת.

**שאלה 12**

לא נכונה. דוגמה נגדית:  $a_n = \frac{1}{n^2}$ ,  $b_n = n$ .

**שאלה 13**

$$a_n = \frac{(n+2)^3}{n^6} = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n+2)^3}{n^3} = \frac{1}{n^3} \cdot \left(\frac{n+2}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^3} \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)^3.$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^3} \cdot \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^3 < \frac{1}{n^3} \cdot \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^3 < \frac{1}{n^3} \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)^3 = a_n.$$

לפיכך  $a_{n+1} < a_n$  לכל  $n$  לכן הסדרה יורדת מונוטונית.

**שאלה 14**

(א) נוכיח כי לכל  $n \geq 1$  מתקיים  $-6 < a_n$  בעזרת אינדוקציה.  
מקרה בסיס:

$$a_2 = -\sqrt{24 - 2a_1} = -\sqrt{24 - 22} = -\sqrt{2} > -6.$$

מעבר: נניח כי  $-6 < a_n$ . אם כן:

$$a_{n+1} = -\sqrt{24 - 2a_n} > -\sqrt{24 - 2(-6)} = -\sqrt{36} = -6$$

ז"א  $a_{n+1} > -6$  כנדרש.

נוכיח כי לכל  $n \geq 2$  מתקיים  $a_n < 0$  בעזרת אינדוקציה.  
מקרה בסיס:

$$a_2 = -\sqrt{24 - 2a_1} = -\sqrt{24 - 22} = -\sqrt{2} < 0.$$

מעבר: נניח כי  $a_n < 0$ . אם כן:

$$a_{n+1} = -\sqrt{24 - 2a_n} < -\sqrt{24} < 0.$$

ז"א  $a_{n+1} < 0$  כנדרש.

(ב)

נוכיח כי  $a_n$  יורדת מונוטונית בעזרת אינדוקציה.  
מקרה הבסיס:

$$a_2 = -\sqrt{24 - 2a_1} = -\sqrt{24 - 22} = -\sqrt{2} < a_1 .$$

מעבר:

כיוון שאיברי הסדרה שליליים עבור  $n \geq 2$ :

$$a_{n+2} = -\sqrt{24 - 2a_{n+1}} \Rightarrow a_{n+2}^2 = 24 - 2a_{n+1} > 24 - 2a_n = a_{n+1}^2$$

ז"א  $a_{n+2}^2 > a_{n+1}^2$ . לפיכך  $|a_{n+2}| > |a_{n+1}|$ . כיוון שאיברי הסדרה שליליים עבור  $n \geq 2$ , אז

$$a_{n+2} < a_{n+1} .$$

(ג)

מכיוון שהוכחנו שהסדרה יורדת וחסומה, היא גם מתכנסת. נסמן

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} .$$

מכיוון שמשוואת הרקורסיה  $a_{n+1} = -\sqrt{24 - 2a_n}$  מתקיימת לכל  $n$ , מתקיים גם

$$L = -\sqrt{24 - 2L} \Rightarrow L^2 = 24 - 2L \Rightarrow L^2 + 2L - 24 = 0 \Rightarrow (L + 6)(L - 4) = 0 .$$

אבל מכיוון שהחל מ- $a_2$  כל איברי הסדרה שליליים, בהכרח

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -6 .$$

## שאלה 15

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:  $a_n = n$  מתבדרת,  $b_n = n$  מתבדרת אבל  $a_n \cdot b_n = n^2$  מתכנסת.

## שאלה 16

לא נכונה. דוגמה נגדית:  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $b_n = n^2$ .