שיעור 9
מבוא לסיבוכיות זמן

9.1 הגדרה של סיבוכיות זמן

הגדרה 9.1 זמן הריצה של מכונת טיורינג

זמן הריצה של מ"ט M על קלט w היא פונקציה $f\left(|w|\right)$ השווה למספר הצעדים הנדרש בחישוב של M על w.

הערה 9.1

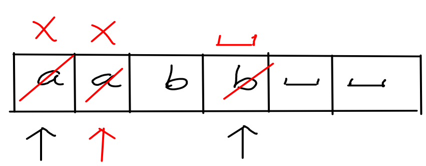
זמן הריצה של מ"ט M על קלט w, נמדד ביחס לגודל הקלט w, כלומר $f\left(|w|\right)$.

הגדרה 9.2 סיבוכיות זמן של בעיה/שפה

בהינתן קלט w באורך $n = |w|$. אומרים כי ניתן להכריעה שפה L בזמן $f(n)$ אם קיימת מ"ט M המכריעה את L כך שלכל $w \in \Sigma^*$, זמן הריצה של M על w חסום ע"י $f\left(|w|\right)$.

דוגמה 9.1 (דוגמה של סיבוכיות זמן של שפה)

נבנה מ"ט M עם סרט יחיד שמכריעה את השפה $L = \left\{a^n b^n \mid n \geqslant 0\right\}$.



<u>התאור של M:</u>

על קלט w:

(1) אם התו שמתחת לראש הוא $\sqcup$ $\Leftarrow$ מקבלת.

(2) אם התו שמתחת לראש הוא b $\Leftarrow$ דוחה.

(3) מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י X.

(4) מזיזה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאל ל- $\sqcup$.

- אם התו הוא a או X $\Leftarrow$ דוחה.
- מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י $\sqcup$, מזיזה את הראש שמאלה עד התו הראשון מימין ל- X וחוזרת ל- (1).

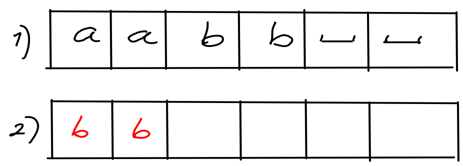
<u>זמן הריצה</u>

- M מבצעת $\frac{|w|}{2}$ איטרציות.
- בכל איטרציה M סורקת את הסרט פעמיים וזה עולה $O(|w|)$.
- לכן סה"כ זמן הריצה של M חסום ע"י

$$\frac{|w|}{2} \cdot O(|w|) = O\left(|w|^2\right) \ .$$

דוגמה 9.2 (דוגמה של סיבוכיות זמן של שפה)

נבנה מ"ט מרובת סרטים M' שמכריעה את השפה $L = \left\{a^n b^n \mid n \geqslant 0\right\}$.



<u>התאור של M':</u>

על קלט w:

(1) מעתיקה את ה- b -ים לסרט 2 (ותוך כדי בודקת האם w מהצורה a^*b^*). $O(|w|)$.

(2) מזיזה את הראשים לתחילת הסרטים. $O(|w|)$.

(3) אם שני הראשען מצביעים על $\sqcup$ $\Leftarrow$ מקבלת.

(4) אם אחד הראשים מצביע על $\sqcup$ והשני לא $\Leftarrow$ לא.

(5) מזיזה את שהע הראשים ימינה וחוזרת לשלב (3). שלבים (3-5): $O(|w|)$.

<u>זמן הריצה</u>

זמן הריצה של M' הוא $O(|w|)$.

הגדרה 9.3 המחלקה $TIME$

תהי $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ פונקציה מהטבעים אל הממשיים האי-שליליים. המחלקה $TIME(f(n))$ היא האוסף של כל השפות שכריעות ע"י מכונת טיורינג $O(f(n))$.

דוגמה 9.3 (דוגמה של מחלקת-זמן של שפה)

עבור השפה L בדוגמה 9.1: $L \in TIME\left(n^2\right)$.

דוגמה 9.4 (דוגמה של מחלקת-זמן של שפה)

עבור השפה L בדוגמה 9.2: $L \in TIME\left(n\right)$.

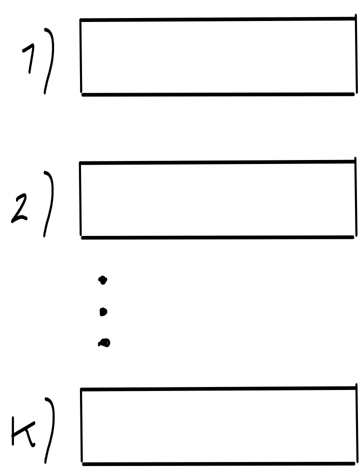
9.2 יחס בין הסיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס

משפט 9.1

לכל מ"ט מרובת סרטים M הרצה בזמן $f(n)$ קיימת מ"ט סרט יחיד M' השקולה ל- M ורצה בזמן $O\left(f^2(n)\right)$.

הוכחה:
בהינתן מ"ט מרובת סרטים M, הרצה בזמן $f(n)$, נבנה מ"ט עם סרט יחיד M' באותו אופן כמו בהוכחת השקילות במשפט 3.1.

כלומר, M' שומרת את התוכן של k סרטים של M על הסרט היחיד שלה (עם הפרדה ע"י #), ובכל צעד חישוב, M' סורקת את הסרט שלה כדי לזהות שת האותיות שמתחת לראשים (שמסומנות ב- $\hat{\alpha}$) ואחרי זה, משתמשת בפונקצית המעברים של M, וסורקת את הסרט פעם נוספת כדי לעדכן את התוכן בכל אחד מהסרטים ואת מיקום הראש בכל אחד מהסרטים.



כמה לוקח ל- M' לסרוק את הסרט שלה? מכיוון שהסרט של M' מכיל את התוכן של k הסרטים של M, והגודל של כל אחד מהסרטים של M חסום ע"י $f(n)$, גודל הסרט של M' חסום ע"י

$$k \cdot f(n) = O\left(f(n)\right) \ .$$

העלות של הסריקה של M' לסרט שלה היא $O\left(f(n)\right)$ וזה עלות של צעד חישוב בריצה של M' על הקלט.

מכיוון ש- M רצה בזמן $f(n)$, זמן היצרה של M' חסום ע"י

$$f(n)\cdot O\left(f(n)\right)=O\left(f^2(n)\right)\ .$$

■

9.3 יחס בין הסיבוכיות של מ"ט דטרמיניסטית ומ"ט א"ד

הגדרה 9.4

בהינתן מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית M, זמן הריצה של M על קלט w, היא פונקציה $f\left(|w|\right)$ השווה למספר הצעדים בחישוב המקסימלי של M על w.

משפט 9.2

לכל מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית N הרצה בזמן $f(n)$, קיימת מכונת טיורינג דטרמיניסטית D השקולה ל- N שרצה בזמן $2^{(f(n))}$.

הוכחה:
בהינתן מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית N הרצה בזמן $f(n)$ מכונת טיורינג דטרמיניסטית D באותו אופן כמו בהוכחת השקילות במשפט 4.1.

כלומר, בהינתן קלט w, D תסרוק את עץ החישוב של N ו- w לרוחב ותקבל כל אחד החישובים של N המסתיים ב- q_{acc}.

בהינתן קלט w באורך n:

- כל מסלול בעץ החישוב של N על w חסום ע"י $f(n)$.
- מספר החישובים ש- D מבצעת חסום ע"י מספר הקודקודים בעץ החישוב של N ו- w.
- מכיוון שמספר הבנים של כל קודקוד בעץ החישוב חסום ע"י
$$C=3|Q|\cdot|\Gamma|$$
מספר הקודקודים בעץ החישוב חסום ע"י
$$C^0+C^2+\ldots C^{f(n)}\leqslant C^{f(n)+1}=C\cdot C^{f(n)}\ .$$
ולכן זמן הריצה של D חסום ע"י
$$f(n)\cdot C\cdot C^{f(n)}\leqslant C^{f(n)}\cdot C^{f(n)}=C^{2f(n)}=\left(C^2\right)^{f(n)}=2^{C'\cdot f(n)}=2^{O(f(n))}\ .$$

נתייחס כאן לשני החסמים הבאים:

■

1) חסם פולינומיאלי הוא חסם מהצורה n^c עבטר $c>0$ כלשהו.
2) חסם אקספוננציאלי הוא חסם מהצורה 2^{n^c} עבור $c>0$ כלשהו.

הגדרה 9.5 בעיית הכרעה

בעיית הכרעה מוגדרת באופן הבא:

"בהינתן קלט כלשהו, האם הקלט מקיים תנאי מסוים"

דוגמה 9.5

בהינתן מספר n, האם n ראשוני?

כל בעיית הכרעה ניתן לתאר כשפה שקולה:

$$L_{\text{prime}} = \left\{ \langle n \rangle \;\middle|\; \text{ראשוני } n \right\} \ .$$

משפט 9.3

שפה $\equiv$ בעיית הכרעה .

הגדרה 9.6 אלגוריתם זמן פולינומיאלי

אומרים כי אלגוריתם A מכריעה בעייה בזמן פולינומיאלי אם קיים קבוע $c > 0$ כך שזמן הריצה של A על כל קלט w חסום ע"י $O\left(|w|^c\right)$.

משפט 9.4 התזה של צירץ' (Church Thesis)

אם קיים אלגוריתם המכריע בעייה בזמן פולינומיאלי, אז קיימת מ"ט דטרמיניסטית המכריעה את השפה השקולה לבעייה זו בזמן פולינומיאלי.

מכונת טיורינג $\equiv$ אלגוריתם מכריעה .

9.4 המחלקה P

הגדרה 9.7 המחלקה P

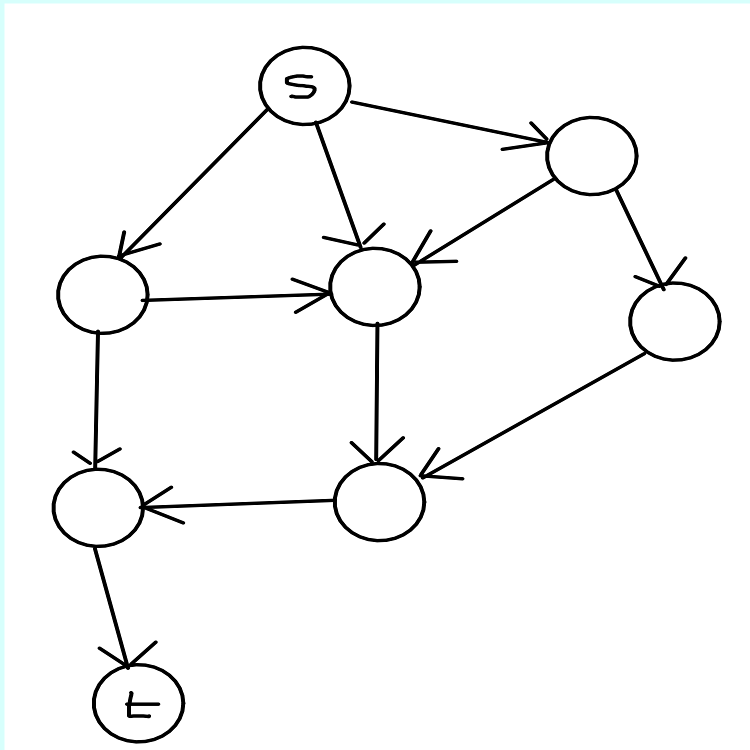
המחלקה P היא אוסף כל הבעיות (השפות) שקיים עבורן אלגוריתם (מכונת טיורינג דטרמיניסטית) המכריע אותן בזמן פולינומיאלי.

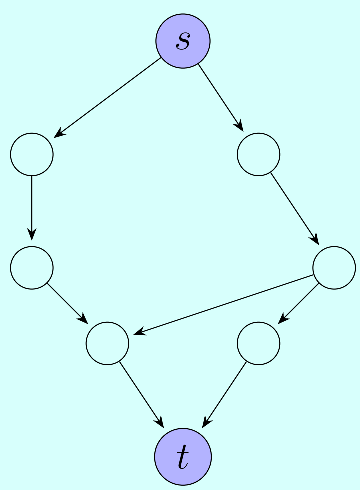
דוגמה 9.6

$$L = \left\{ a^n b^n \;\middle|\; n \geqslant 0 \right\} \in P \ .$$

9.5 בעיית PATH

הגדרה 9.8 בעיית המסלול בגרף מכוון





<u>קלט:</u> גרף מכוון $G=(V,E)$ ושני קודקודים $s,t\in V$.

<u>פלט:</u> האם קיים מסלול ב- G מ- s ל- t?

$$PATH = \left\{ \langle G,s,t\rangle \;\middle|\; \text{קיים מסלול ב- } G \text{ מ- } s \text{ ל- } t \right\}$$

משפט 9.5

$$PATH \in P \ .$$

הוכחה: נבנה אלגוריתם A עבור הבעייה $PATH$.

$A =$ על קלט $\langle G, s, t\rangle$:

1) צובע את s.

2) מבצע $|V|-1$ פעמים:

- לכל צלע $(u, \mathrm{v}) \in E$:
  - אם u צבוע $\Leftarrow$ צבע את v.

3)
- אם t צבוע $\Leftarrow$ החזיר "כן".
- אחרת $\Leftarrow$ החזיר "לא".

זמן ריצה של האלגוריתם הוא $O(|V|\cdot|E|)$ פולינומיאלי במספר הקודקודים $|V|$.

האם זה פולינומיאלי בגודל הקלט $|\langle G\rangle|$?

איך נקודד את G?

- נניח כי $|V|=n$ ו- $V=\{1,2,3, \quad \cdots \quad , n\}$.
- נניח כי הצלעות נתונות ע"י מטריצה M בגודל $n\times n$ כך ש-

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j)\in E \\ 0 & (i,j)\notin E \end{cases} .$$

- נניך כי מספרים מקודדים בבסיס בינארי.
- אזי גודל הקידוד של G שווה $n^2 + n\log_2 n$, כלומר

$$|\langle G\rangle| = \Omega\left(|V|^2\right) \qquad \Rightarrow \qquad |V| = O\left(|\langle G\rangle|\right) .$$

ולכן כל אלגוריתם הרץ בזמן פולינומיאלי במספר הקודקודים $|V|$ ירוץ בזמן פולינומיאלי בגודל הקידוד $|\langle G\rangle|$.

ולכן A רץ בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט. ■

9.6 הבעיית $RELPRIME$

הגדרה 9.9 מספרים זרים (Relatively prime)

אומרים כי שני מספרים שלמים x, y הם זרים אם המחלק המשותף הגדול ביותר, מסומן $\gcd(x,y)$, שווה 1.

הגדרה 9.10 בעיית $RELPRIME$

<u>קלט:</u> שני מספרים x ו- y.

<u>פלט</u>: האם x ו- y זרים?

$$RELPRIME = \{\langle x, y\rangle \mid \gcd(x,y)=1\} \ .$$

אנחנו נוכיח כי ניתן להכריע את $RELPRIME$ בזמן פולינומיאלי, כלומר נוכיח $RELPRIME \in P$ במשפט 9.8 למטה. לפניכן נסביר את האלגוריתם של אוקלידס למציאת ה- gcd של שני שלמים, ומתוך זה נוכל לחשב את הסיבוכיות זמן של $RELPRIME$. ראשית נזכיר משפט שלמדנו בקורסים קודמים:

משפט 9.6 השמפט של האלגוריתם של אוקלידס

אם x, y שלמים אז

$$\gcd(x,y) = \begin{cases} x & y=0 \\ \gcd(y, x \bmod y) & y \neq 0 \end{cases} \ .$$

הוכחה: ההוכחה היא לא חלק של הקורס ומופיע בסעיף האחרון "הוכחות של משפטים שימושיים" בדף 103. ■

האלגוריתם של אוקלידס הוא אלגוריתם, שמקבל כקלט שני מספרים x, y ופולט את $\gcd(x,y)$. הוא מתבוסס על המשפט 9.6. האלגוריתם עצמו הוא כדלקמן:

$EUCLID =$ על קלט $\langle x, y\rangle$ כאשר x, y מספרים שלמים בבסיס בינארי:

(1) כל עוד $y \neq 0$:

(2) $x \leftarrow x \bmod y$

(3) $\text{swap}(x,y)$

(כלומר מחליפים בין x ו- y).

(4) מחזירים את x.

לדוגמה:

$$\gcd(18,32) = \gcd(32,18) = \gcd(18,14) = \gcd(14,4) = \gcd(4,2) = \gcd(2,0) = 2 \ .$$

כדי להוכיח כי $RELPRIME \in P$ נצטרך למשפט עזר הבא:

משפט 9.7 (משפט עזר)

אם $x > y$ אז $x \bmod y < \frac{x}{2}$.

הוכחה: ההוכחה היא לא חלק של הקורס ומופיע בסעיף האחרון "הוכחות של משפטים שימושיים" בדף 104. ■

משפט 9.8

$$RELPRIME \in P \ .$$

הוכחה:

נבנה אלגוריתם A המכריע את $RELPRIME$ בזמן פולינומיאלי. $RELPRIME$ היא השפה של הבעיה, שמקבלת כקלט שני מספרים שלמים x,y ומחזירה תשובה לשאלה, האם x,y זרים. כלומר:

$$\langle x,y\rangle \in RELPRIME \iff \gcd(x,y)=1 \ .$$

לכן A משתמש בהאלגוריתם של אוקלידס $EUCLID(x,y)$ כדי לחשב $\gcd(x,y)$.

בניית האלגוריתם A המכריע $RELPRIME$:

$A=$ " על קלט $\langle x,y\rangle$ כאשר x,y שלמים בבסיס בינארי: A מריץ את $EUCLID$ על x ו- y.

- אם $EUCLID(x,y)$ מחזיר $\gcd(x,y)=1$ אז A מקבל.
- אחרת A דוחה."

הוכחת הנכונות

הנכונות של A מנובעת ישר מהנכונות של האלגוריתם האוקלדס, $EUCLID$.

סיבוכיות זמן

נראה כי A רץ בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט $\langle x,y\rangle$.

- לפי משפט עזר 9.7: $x \bmod y < \dfrac{x}{2}$.
- בכל איטצרציה, בשלב (2) המשתנה x מקבל את הערך החדש $x \leftarrow x \bmod y$.
- לכן בכל איצטרציה הערך החדש של x קטן ממש מחצי של הערך הקודם של x.
- לכן אחרי כל איטרציה, x קטן בלפחות חצי.
- בשלב (3), A מחליף בין x ו- y, אז אחרי כל 2 איטרציות, גם x קטן בלפחות חצי וגם y קטן בלפחות חצי.
- לכן המספר הפעמים המקסימלי שאפשר לבצע שלבי (2) ו- (3) היא $m=\min\left(\ 2\lfloor\log_2 x\rfloor\ ,\ 2\lfloor\log_2 y\rfloor\ \right)$.
- לכן המספר האיטרציות המקסימלי של $EUCLID$ הוא $m=\min\left(\ 2\lfloor\log_2 x\rfloor\ ,\ 2\lfloor\log_2 y\rfloor\ \right)$.
- יהי n האורך של הקלט. כלומר $n=$ האורך של המחרוזות של השלמים x ו- y בבסיס ביניארי.

$$m\leqslant n$$

- לכן A דורש $O(n)$ צעדים.
- כל איטרציה של $EUCLID$ מתבצע בזמן פולינומיאלי.
  כלומר קיים טבעי k עבורו כל איטרציה של $EUCLID$ מתבצע בזמן $O\left(n^k\right)$.
- לכן $EUCLID\in TIME\left(n^{k+1}\right)$ (ראו הגדרה 9.3) ולכן $A\in TIME\left(n^{k+1}\right)$.

לכן A רץ בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט. לכן

$$RELPRIME\in P\ .$$

■

9.7 *הוכחות של משפטים שימושיים

משפט 9.9 השמפט של האלגוריתם של אוקלידס

אם x,y שלמים אז

$$\gcd(x,y) = \begin{cases} x & y=0 \\ \gcd(y, x \bmod y) & y \neq 0 \end{cases} .$$

הוכחה: (להעשרה בלבד)
המטרה של ההוכחה הזו היא רק להוסיף הבנה להוכחה של משפט 9.8 לסיבוכיות זמן של $RELPRIME$ למטה. היא לא הוכחה שאתם תיבחנו עליה ואפשר לדלג עליה.
נתחיל אם משפט החילוק של אוקלידס, שאומר שאם x,y שלמים אז קיימים שלמים q ו- $0 \leqslant r < y$ כך ש:

$$x = qy + r = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor y + (x \bmod y) . \tag{1*}$$

נגדיר $d \triangleq \gcd(x,y)$.
מכיוון ש- d הוא מחלק משותף של x ו- y אז $d \mid x$ וגם $d \mid y$. לכן בזכות משוואה (1*):

$$(d \mid x) \wedge (d \mid y) \quad \xRightarrow{\text{(1*) משוואה}} \quad d \mid (x \bmod y)$$

ז"א $d \mid y$ וגם $d \mid (x \bmod y)$ אז בהכרח:

$$d \mid \gcd(y, x \bmod y) . \tag{2*}$$

כעת נגדיר $\bar{d} \triangleq \gcd(y, y \bmod x)$.
מכיוון ש- $\bar{d}$ הוא מחלק משותף של y ו- $x \bmod y$ אז $\bar{d} \mid y$ וגם $\bar{d} \mid x \bmod y$. לכן בזכות משוואה (1*):

$$(\bar{d} \mid y) \wedge (\bar{d} \mid x \bmod y) \quad \xRightarrow{\text{(1*) משוואה}} \quad \bar{d} \mid x$$

ז"א $\bar{d} \mid y$ וגם $\bar{d} \mid x$ אז בהכרח:

$$\bar{d} \mid \gcd(x,y) . \tag{3*}$$

לסיכום, לפי משוואות (2*) ו- (3*):

$$d \mid \bar{d} \quad \wedge \quad \bar{d} \mid d .$$

מכיוון ש- $d, \bar{d} > 0$ אז בהכרח $d = \bar{d}$, ז"א $\gcd(x,y) = \gcd(y, x \bmod y)$. ■

משפט 9.10 (משפט עזר)

אם $x > y$ אז $x \bmod y < \frac{x}{2}$.

הוכחה: יש שני מקרים:

1) $y \leqslant \frac{x}{2}$

2) $y > \frac{x}{2}$

נוכיח את הטענה עבור שני המקרים.

מקרה 1: $y \leqslant \frac{x}{2}$.

לפי משפט החילוק של אוקלידס אם x, y שלמים עבורם $x > y$ אז קיימים $q = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$ ו- $r = x \bmod y$ כך ש $0 \leqslant r < y$ ו-

$$x = qy + r = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor y + (x \bmod y) \ .$$

בפרט $r < y$ וגם $y \leqslant \frac{x}{2}$ לפיכך $x \bmod y < y \leqslant \frac{x}{2}$.

מקרה 2: $y > \frac{x}{2}$.

לפי משפט החילוק של אוקלידס אם x, y שלמים עבורם $x > y$ אז קיימים שלם $q = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$ ושלם $r = x \bmod y$ כך ש $0 \leqslant r < y$ ו-

$$x = qy + r = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor y + (x \bmod y) \ .$$

בפרט אם $y > \frac{x}{2}$ אז $x < 2y$. אז בהכרח $q < 2$. מכיוון ש- $x > y$ ו- $q = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$ אז הערך המינימלי של q הוא $q = 1$. לכן אם $q < 2$ בהכרח $q = 1$. לכן יש לנו

$$x = qy + r = (1)(y) + ry + (x \bmod y) \ .$$

מכאן

$$x - y = x \bmod y \ .$$

כעת נציב את ההנחה ההתחלתית $y > \frac{x}{2} \Leftarrow x - y < \frac{x}{2}$ ונקבל

$$x \bmod y < \frac{x}{2} \ .$$

■