**1 דוגמא.** בר היא בנקאית השקעות מתוחכמת המציעה ללקוחותיה את ההגרלה הבאה: בסיכוי $\frac{2}{5}$ תקבלו רווח של $10$. בסיכוי $\frac{1}{5}$ לא תרוויחו ולא תפסידו דבר, ובסיכוי $\frac{3}{5}$ תפסידו $5$. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של $X$ המייצג את הרווח מהשקעה אצל בר.

**פיתרון.** תוחלת הרווח היא חיובית שכן

$$\begin{aligned}
\mu_X =& 10.\frac{2}{5} + 0.\frac{1}{5} - 5.\frac{2}{5} &&= 2,\\
\mu_{X^2} =& 100.\frac{2}{5} + 0^2.\frac{1}{5} + 25.\frac{2}{5} &&= 50,\\
V(X) =& \mu_{X^2} - \mu_X^2 &&= 50 - 4 = 46,\\
\Rightarrow \quad \sigma_X =& \sqrt{46}\ .
\end{aligned}$$

■

**2 דוגמא.** הסיכוי אשר חולה מחלים ממחלת דם חריג הוא $0.4$. אם 15 אנשים נדבקים עם המחלה זו, מהי ההסתברות אשר

1. לפחות $10$ יחלימו
2. בין 3 עד 8 יחלימו
3. בדיוק 5 יחלימו?

**פיתרון.** נגדיר $X$ להיות מספר החולים אשר יחלימו.

.1

$$\begin{aligned}
P(X \geq 10) =& 1 - P(X < 10)\\
=& 1 - \sum_{k=0}^{9} f_{X\sim\text{Bin}(15,0.4)}(k)\\
=& 1 - \sum_{k=0}^{9} \binom{15}{k} 0.4^k (1-0.4)^{15-k}\\
=& 1 - 0.9662 = 0.0338\ .
\end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned}
P(3 \leq X \leq 8) =& 1 - P(X < 10)\\
=& \sum_{k=3}^{8} f_{X\sim\text{Bin}(15,0.4)}(k)\\
=& \sum_{k=0}^{8} f_{X\sim\text{Bin}(15,0.4)}(k) - \sum_{k=0}^{2} f_{X\sim\text{Bin}(15,0.4)}(k)\\
=& \left(\sum_{k=0}^{8} - \sum_{k=0}^{2}\right) \binom{15}{k} 0.4^k (1-0.4)^{15-k}\\
=& 0.9050 - 0.0271 = 0.8779\ .
\end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned}
P(X = 5) =& f_{X\sim\text{Bin}(15,0.4)}(k=5)\\
=& \binom{15}{5} 0.4^5 (1-0.4)^{10}
\end{aligned}$$

■

**3 דוגמא.** מחשב משתמש במילים באורך 8 ביטים. כאשר משדרים ביטים בקו התקשורת יש סיכוי של $.1$) לשגיאה בביט בודד שמשודר. בכדי לשפר את איכות הקו, משודר כל ביט 3 פעמים ברצף והפענוח של כל שלשת ביטים מתבצע על ידי החלטת הרוב. למשל: אם רוצים לשדר 0, משדרים בקו "000" והמקלט מפענח את התשדורת כ-0 אם השלשה שהגיעה אליו מורכבת מלפחות שני אפסים.

1. חשבו את ההסתברות שמילת מחשב תפוענח נכון.
2. מצאו את התפלגות מספר המילים שפוענחו באופן שגוי בקובץ המכיל $1000$ מילים.

פתרון: נשים לב שכמות הטעויות בשליחה של ביט בודד מתפלגת $X\sim \text{Bin}(3,0.1)$ ולכן ההסתברות שתהיה שגיאה בפענוח ביט בודד היא

$$P(X\geq 2)=\binom{3}{2}0.1^2 0.9+\binom{3}{1}0.1^3=0.028$$

1. כמות השגיאות במילה באורך 8 ביטים מתפלגת

$$Y\sim \text{Bin}(8,0.028)$$

ולכן המילה תפוענח נכון בהסתברות

$$P(Y=0)=\binom{8}{0}p^0(1-p)^8=(1-0.028)^8=0.796\ .$$

2. לאור הסעיף הקודם, ההסתברות לשגיאה בפענוח מילה בודדת היא

$$1-0.796=0.203\ ,$$

לכן מספר המילים שפוענחו באופן שגוי בקובץ המכיל $1000$ מילים מתפלג $\text{Bin}(1000,0.203)$.

**4 דוגמא.** בכד 9 כדורים לבנים ו- 1 שחור. מושכים באקראי בזה אחר זה כדור מהכד. נסמן ב- $X$ את מספר המשיכות עד לקבלת שחור וב- $Y$ את מספר המשיכות עד לקבלת 3 שחורים.

מצאו את התפלגות $X$ כאשר המשיכה היא עם החזרה.

**פיתרון.** $X$ מקבל ערכים $\mathbb{N}/\{0\}$. בכל הוצאה ישנה הסתברות של $\frac{9}{10}$ לכדור לבן (כישלון) והסתברות של $p=\frac{1}{10}$ לכדור לבן (הצלחה). כלומר, קיבלנו מ"מ גאומטרי

$$X\sim G\left(\frac{1}{10}\right)\ .$$

■

**5 דוגמא.** חלקיקים נפלטים מחומר רדיואקטיבי בתהליך פואסון עם קצב של $0.5$ חלקיקים לשנייה. חשבו את ההסתברויות הבאות:

1. ייפלט לפחות חלקיק אחד בשנייה נתונה.
2. ייפלטו יותר מ-3 חלקיקים ב-5 שניות.

**פיתרון.** התהליך בשאלה הוא תהליך פואסון בעל פרמטר $\lambda=0.5$ לכן

.1

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-e^{-0.5}\frac{0.5^0}{0!}=0.393\ .$$

2. כעת בשאלה הוא תהליך פואסון שונה בעל פרמטר $5\lambda$:

$$\begin{aligned}
P(X_5 > 3) =& 1-P(X_5=0)-P(X_5=1)-P(X_5=2)-P(X_5=3)\\
=& 1 - e^{-5\lambda}\frac{(5\lambda)^0}{0!} - e^{-5\lambda}\frac{(5\lambda)^1}{1!} - e^{-5\lambda}\frac{(5\lambda)^2}{2!} - e^{-5\lambda}\frac{(5\lambda)^3}{3!}\\
=& 1 - e^{-5(0.5)}\frac{(5(0.5))^0}{0!} - e^{-5(0.5)}\frac{(5(0.5))^1}{1!} - e^{-5(0.5)}\frac{(5(0.5))^2}{2!} - e^{-5(0.5)}\frac{(5(0.5))^3}{3!}\\
=& 0.242
\end{aligned}$$

מאחר ו- $X_5$ מתפלג $P(0.5.5)$

■

6 **דוגמא. (פונקצית התפלגות)** מטילים 2 קוביות. נסמן ב- $X$ את סכום התוצאות שהתקבלו. מצאו את ההתפלגות של $X$.

**פיתרון.** נתחיל מהתומך. התוצאות האפשרויות בסכום של 2 קוביות הן המספרים הטבעיים מ- 2 עד 12. בכדי לחשב את ההסתברות לכל ערך נשתמש במרחב מדגם סימטרי: גודל מרחב המדגם הוא $6^2 = 36$, ככמות האפשרויות לבחור תוצאה לקוביה הראשונה מתוך 6 ותוצאה לקוביה השניה מתוך 6. נחשב את ההסתברות של כל תוצאה בנפרד:

$$\begin{aligned}
P(X=2) =& \frac{|\{(1,1)\}|}{6^2} &= \frac{1}{36},\\
P(X=3) =& \frac{|\{(2,1),(1,2)\}|}{6^2} &= \frac{2}{36},\\
P(X=4) =& \frac{|\{(1,3),(2,2),(3,1)\}|}{6^2} &= \frac{3}{36},\\
&\vdots\\
P(X=7) =& \frac{|\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}|}{6^2} &= \frac{6}{36},\\
P(X=8) =& \frac{|\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}|}{6^2} &= \frac{5}{36},\\
P(X=9) =& \frac{|\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}|}{6^2} &= \frac{4}{36},\\
&\vdots\\
P(X=12) =& \frac{|\{(6,6)\}|}{6^2} &= \frac{1}{36},
\end{aligned}$$

ובאופן דומה ממשיכים לחשב את האפשרויות לכל הערכים האפשריים בתומך. באופן כללי קל לראות שהנוסחא, כאשר $p$ זו הסכום של ה 2 הקוביות, היא (עיין משוואה (**??**) לעייל)

$$P(X=p) = \frac{1}{36} \times \begin{cases} (p-1) & p < 8 \\ (p-1)-2(p-7) & 8 \le p < 14 \end{cases}$$

■

7 **דוגמא. (פונקצית התפלגות מצטברת)** אלון הוא סוחר ממולח בשוק ההון. הוא משקיע סכום של $1000\$$ במכשיר פיננסי אשר בכל שנה מכפיל את הכסף בסיכוי $\frac{2}{3}$ או מפסיד חצי מההשקעה בסיכוי $\frac{1}{3}$. השנים הן בלתי תלויות. נגדיר את $X$ להיות שווי ההשקעה של אלון לאחר שנתיים. מצאו את פונקצית ההתפלגות המצטברת של $X$

**פיתרון.** כפי שציינו בדוגמה **??**, התומך של $X$ כעת הוא

$$\text{supp}(X) = \{250, 1000, 4000\} \ .$$

על כן, פונקצית ההתפלגות המצטברת של $X$ היא

$$F_X(k) = P(X \le k) = \begin{cases} 0 & k < 250, \\ \frac{1}{9} & 250 \le k < 1000, \\ \frac{5}{9} & 1000 \le k < 4000, \\ 1 & 4000 \le k. \end{cases}$$

■

8 **דוגמא. (תוחלת)** בן הוא סוחר מתוחכם ולכן הוא מציע לאלון להפקיד אצלו 100 שקלים בתחילת השנה. בסיכוי של $\frac{2}{5}$ הסכום יוכפל, ובסיכוי $\frac{2}{5}$ הסכום יצטמצם בחצי בסוף השנה. מה תהיה תוחלת הכסף של אלון לאחר קבלת ההצעה? נסמן ב- $X$ את שווי כסף של אלון בסוף השנה.

$$E[X] = 200.\frac{2}{5} + 50.\frac{3}{5} = 110.$$

זאת אומרת שהצעתו של בן מגלמת תוחלת רווח של $10\%$!

9 **דוגמא. (ליניאריות של תוחלת)** בחנות ירקות קטנה ישנם 3 תפוחים ו-4 אגסים. אלון קונה 2 פירות באקראי. בן המוכר מרוויח על כל תפוח 2 ש"ח ועל כל אגס 4 ש"ח. מצאו את תוחלת הרווח של בן.

**פיתרון.** נגדיר מ"מ $Q$ עבור הרווח של בן, ומשתנה מקרי $X$ כמספר התפוחים שאלון קנה. על כן,

$$Q = 2X + 4(2 - X) = 8 - 2X$$

$$P(X = 1) = \frac{4}{7}, \qquad P(X = 2) = \frac{3}{7}.\frac{2}{6} = \frac{1}{7}, \qquad P(X = 0) = \frac{4}{7}.\frac{3}{6} = \frac{2}{7} \ .$$

מכאן נובע ש

$$E[X] = 0.\frac{2}{7} + 1.\frac{4}{7} + 2.\frac{1}{7} = \frac{6}{7} \ .$$

נשתמש בתכונת הליניאריות לחישוב התוחלת של

$$E[Q] = 8 - 2E[X] = 8 - \frac{12}{7} = \frac{44}{7} \ .$$

■

10 **דוגמא. (ליניאריות של תוחלת)** בוחרים קוד באורך 10 תווים, כאשר כל תו נבחר באקראי מתוך הספרות 9 – 0 ללא קשר לתווים האחרים שנבחרו. נסמן ב- $X$ מ"מ הסופרים את מספר הרצפים 11 בקוד. חשבו את $E[X]$.

**פיתרון.** נגדיר מ"מ $X_i, \ i = 1, \ldots, 9$ כאשר $X_i$ מקבל את הערך 1 אם ורק אם במקום ה- $i$ מתחיל רצף של 11. לכן

$$X = \sum^{9} X_i \ .$$

$$\begin{aligned}
E[X] =& E\left[\sum_{i=1}^{9} X_i\right] \\
=& \sum_{i=1}^{9} E\left[X_i\right] \\
=& \sum_{i=1}^{9} \left[1.P(X_i=1)+0.P(X_i=0)\right] \\
=& \sum_{i=1}^{9} P(X_i=1) \\
=& \sum_{i=1}^{9} \frac{1}{10}.\frac{1}{10} \\
=& \frac{9}{100}\ .
\end{aligned}$$

■

**11 דוגמא.** ריבית הלייבור במכללה שמעון נקבעת באקראי על ידי דגימה של אחד מעשרת הבנקים המסחריים. הבנקים ממספרים מ-1 עד 10 כאשר בנק $i$ מעניק ריבית בשיעור $i$ ללקוחותיו. לאחר זמן מה נסגרו בנקים 1 ו-2) בשל הענקת ריבית לא כדאית...). חשבו את הסיכוי שריבית הלייבור נמוכה מ-6 וכן את תוחלת ושונות הריבית. בצעו את החישובים עבור התקופה שקדמה לסגירת הבנקים ולאחר הסגירה.

**פיתרון.** נגדיר משתנה מקרי $X$ להיות הריבית טרם הסגירה ו- $Y$ להיות הריבית לאחר שנסגרו הבנקים המדוברים. לכן

$$X \sim U[1,0]$$

ו-

$$Y \sim U[3,10]\ .$$

כמו כן, לפי מסקנה **??**

$$E[X]=\frac{10+1}{2}=5.5$$

לפי מסקנה **??**

$$V(X)=\frac{(10-1+1)^2-1}{12}=\frac{99}{12}\ .$$

באופן דומה עבור מאורע $Y$, לפי מסקנה **??**

$$E[Y]=\frac{10+3}{2}=6.5$$

לפי מסקנה **??**

$$V(Y)=\frac{(10-3+1)^2-1}{12}=\frac{63}{12}\ .$$

$$P(Y\le 5)=\frac{3}{8}=0.375\ , \qquad P(X\le 5)=\frac{5}{10}=0.5\ .$$

■