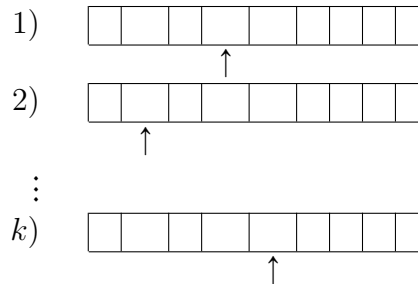


## שיעור 3

### מכונות טיורינג מרובות סרטים

#### 3.1 מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה היוריסטית

מכונת טיורינג מרובת סרטים (מטמ"ס) היא הכללה של מ"ט עם סרט יחיד. ההבדל הוא שלמטמ"ס ישנו מספר סופי של סרטים, נניח  $k > 1$  סרטים.



- לכל סרט יש ראש שלו.
- בתחילת העבודה הקלט  $w$  כתוב בתחילת הסרט הראשון וכל שאר הסרטים ריקים. הראשים בכל סרט מצביעים על התא הראשון בסרט, והמכונה נמצאת במצב התחלתי  $q_0$ .
- בכל צעד חישוב, לפי המצב הנוכחי ול- $k$  התווים שמתחת ל- $k$  הראשים, המכונה מחליטה לאיזה מצב לעבור, מה לכתוב מתחת לכל אחד מ- $k$  הראשים ולכן להזיז את הראש בכל אחד מ- $k$  סרטים.
- הראשים של הסרטים יכולים לזוז באופן בלתי-תלוי בהתאם לפונקצית המעברים של המטמ"ס.

#### 3.2 מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה פורמלית

##### 3.1 מכונת טיורינג מרובת סרטים

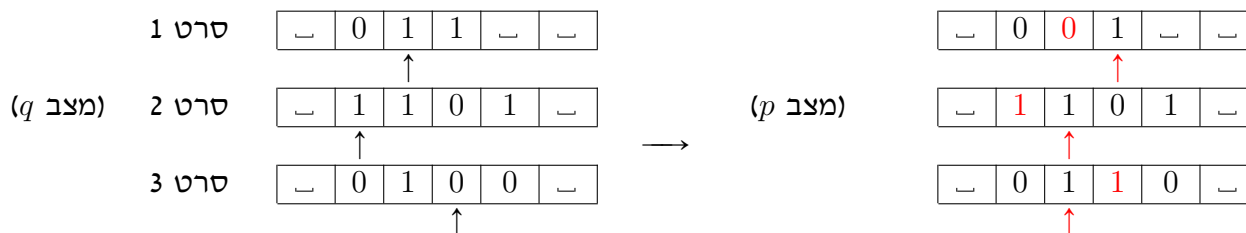
מכונת טיורינג מרובת סרטים היא שביעייה:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{acc}, q_{rej})$$

כאשר  $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{acc}, q_{rej}$  מוגדרים כמו מ"ט עם סרט יחיד (ראו הגדרה 1.2). ההבדל היחיד בין מ"ט עם סרט יחיד לבין מטמ"ס הוא הפונקצית המעברים. עבור מטמ"ס הפונקצית המעברים היא מצורה הבאה:

$$\delta_k : (Q \setminus \{q_{acc}, q_{rej}\}) \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$$

### 3.1 דוגמה



$$\delta_k \left( q, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left( p, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \\ L \end{pmatrix} \right).$$

## 3.3 קונפיגורציה של מטמ"ס

הכללה של קונפיגורציה של מטמ"ס עם סרט יחיד:

$$\begin{pmatrix} u_1 q & v_1 \\ u_2 q & v_2 \\ \vdots \\ u_k q & v_k \end{pmatrix}$$

### 3.2 דוגמה

בנו מטמ"ס שמכריעה את השפה:

$$L_{w^R} = \{ w = \{a, b\}^* \mid w = w^R \}.$$

כלומר שפת הפלינדרומים.

### פתרון:

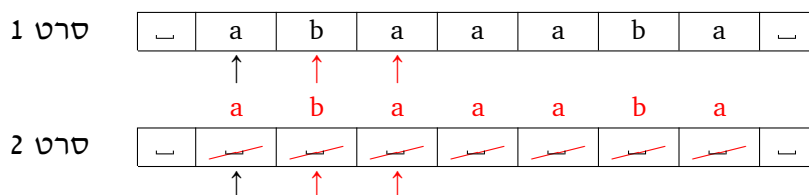
נבנה מטמ"ס עם שני סרטים:

תאור המכונה:

נסמן  $M_2$  המ"ט עם 2 סרטים שמכריעה את השפה  $L_{w^R}$ .

$M_2 =$  על הקלט  $w$ :

(1) מעתיקה את  $w$  לסרט 2.



(2) מזיזה את הראש בסרט 1 לתו הראשון ב-  $w$  ואת הראש בסרט 2 לתו האחרון ב-  $w$ .

(3) משווה בין התווים שמתחת לראשים:

- אם התו שמתחת לראש בסרט 1 הוא  $\_$   
 $\text{acc} \leftarrow$
- אם התווים שמתחת לראשים שונים  $\leftarrow \text{rej}$ .
- אחרת מזיזה את הראש בסרט 1 ימינה ואת הראש בסרט 2 שמאלה, וחוזרת לשלב (3).

הפונקציה המעברים של  $M_2$  היא:

$$\begin{aligned}\delta\left(q_0, \begin{pmatrix} a \\ \_ \end{pmatrix}\right) &= \left(q_0, \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}\right), \\ \delta\left(q_0, \begin{pmatrix} b \\ \_ \end{pmatrix}\right) &= \left(q_0, \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}\right), \\ \delta\left(q_0, \begin{pmatrix} \_ \\ \_ \end{pmatrix}\right) &= \left(q_{\text{back}}, \begin{pmatrix} \_ \\ \_ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ S \end{pmatrix}\right), \\ \delta\left(q_0, \begin{pmatrix} \_ \\ \_ \end{pmatrix}\right) &= \left(q_{\text{back}}, \begin{pmatrix} \_ \\ \_ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ S \end{pmatrix}\right), \\ \delta\left(q_{\text{back}}, \begin{pmatrix} \_ \\ \_ \end{pmatrix}\right) &= \left(q_{\text{check}}, \begin{pmatrix} \_ \\ \_ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}\right), \\ \delta\left(q_{\text{check}}, \begin{pmatrix} \sigma \\ \sigma \end{pmatrix}\right) &= \left(q_{\text{check}}, \begin{pmatrix} \sigma \\ \sigma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ L \end{pmatrix}\right), \\ \delta\left(q_{\text{check}}, \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix}\right) &= \left(q_{\text{rej}}, \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S \\ S \end{pmatrix}\right), \\ \delta\left(q_{\text{check}}, \begin{pmatrix} \_ \\ \_ \end{pmatrix}\right) &= \left(q_{\text{acc}}, \begin{pmatrix} \_ \\ \_ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S \\ S \end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

נשים לב כי הסיבוכיות זמן של המכונה עם שני סרטים,  $M_2$  היא  $O(|w|)$ , כאשר  $w$  האורך של המילה.

כעת נבנה מ"ט עם סרט יחיד שמכריעה את השפה  $L_{WR}$ .

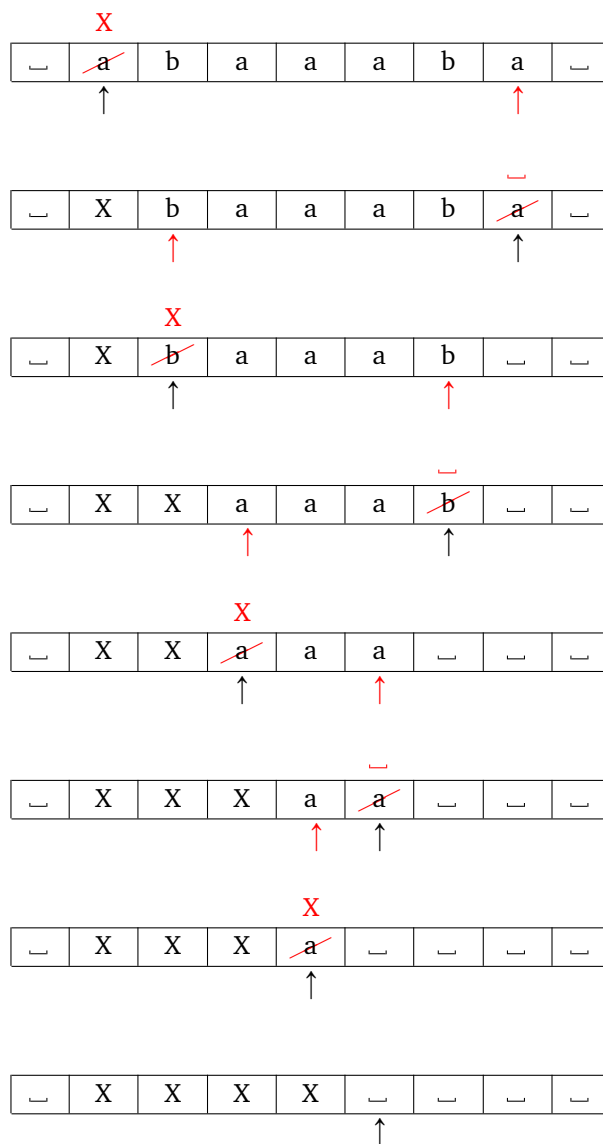
תאור המכונה:

נסמן  $M_1$  המכונה עם סרט יחיד שמכריעה את השפה  $L_{wR}$ .

$M_1 =$  על הקלט  $w$ :

- (1) אם התו שמתחת לראש הוא  $\_$  אז  $M_1 \leftarrow \text{acc}$ .
  - (2) זוכרת את התו שמתחת לראש ומוחקת אותו ע"י  $X$ .
  - (3) מזיזה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאל ל-  $\_$ .
- אם התו שמתחת לראש הוא  $X \leftarrow \text{acc}$ .

- אם התו שונה מהתו שזכרנו  $\Leftarrow \text{rej}$ .
- מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י  $\_$ , מזיזה את הראש שמאולה עד התו הראשון מימין ל-  $X$  וחוזרת לשלב (1).



### 3.4 שקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

מ"ט עם סרט יחיד היא מקרה פרטי של מטמ"ס.

#### משפט 3.1 שקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

לכל מטמ"ס  $M$  קיימת מ"ט עם סרט יחיד  $M'$  השקולה ל-  $M$ .

כלומר, לכל קלט  $w \in \Sigma^*$ :

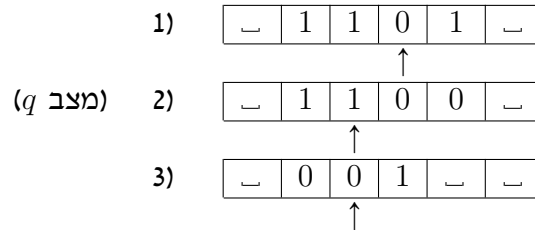
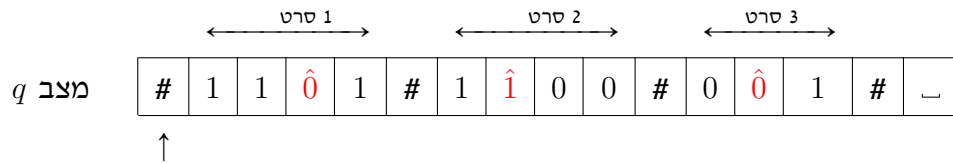
- אם  $M$  מקבלת את  $w \Leftarrow M'$  מקבלת את  $w$ .
- אם  $M$  דוחה את  $w \Leftarrow M'$  דוחה את  $w$ .
- אם  $M$  לא עוצרת על  $w \Leftarrow M'$  לא עוצרת על  $w$ .

הוכחה:

בהינתן מטמ"ס  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{acc}, q_{rej})$  עם  $k$  סרטים, נבנה מטמ"ס עם סרט יחיד  $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q'_0, q'_{acc}, q'_{rej})$  השקולה ל- $M$  באופן הבא:

רעיון הבנייה:

בהינתן קלט  $w \in \Sigma^*$ ,  $M'$  תבצע "סימולציה" של ריצה  $M$  על  $w$ .

ב- $M$ ב- $M'$ 

- $M'$  תשמור את התוכן של  $k$  הסרטים של  $M$  על הסרט, רק שהתוכן של סרט  $i$  יופיע בין  $\#_i$  ל- $\#_{i+1}$ .
- $M'$  תשמור את המיקום של הראשים של  $M$  ע"י הכפלת הא"ב  $\Gamma$ .
- כלומר, לכל אות  $\alpha \in \Gamma$ ,  $M'$  תשמור שתי אותיות  $\alpha$  ו- $\hat{\alpha}$  ב- $\Gamma'$ , כך ש- $\hat{\alpha}$  תסמן את התו שמתחת לראש בכל סרט.
- בכל צעד חישוב,  $M'$  סורקת את הסרט שלה משמאל לימין כדי ללמוד מהם התווים שמתחת לראשים (התווים שמסומנים ב- $\hat{\alpha}$ ).
- $M'$  משתמשת בפונקצית המעברים  $\delta_k$  של  $M$  כדי לחשב את המעבר הבא.
- $M'$  סורקת את הסרט שלה משמאל לימין כדי לעדכן את הסרטים ואת המיקום הראשים בהם.

תאור הבנייה של  $M'$ **(1) שלב האיתחול**

בהינתן קלט  $w = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$ ,  $M'$  מאתחלת את הקונפיגורציה ההתחלתית של  $M$  על הסרט שלה.

ב-  $M$

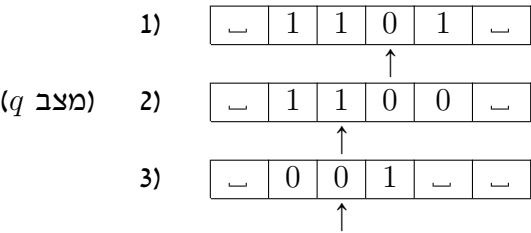


ב-  $M'$

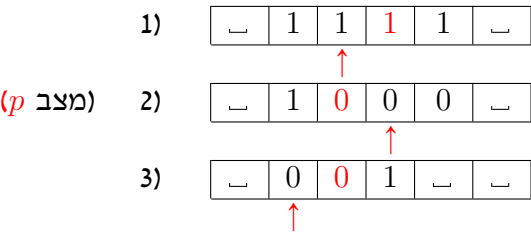


(2) תאור צעד חישוב של  $M$

ב-  $M$



$$\delta_k \left( q, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left( p, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ R \\ L \end{pmatrix} \right)$$



ב-  $M'$

מצב  $q$

|   |   |   |           |   |   |   |           |   |   |   |   |           |   |   |   |
|---|---|---|-----------|---|---|---|-----------|---|---|---|---|-----------|---|---|---|
| # | 1 | 1 | $\hat{0}$ | 1 | # | 1 | $\hat{1}$ | 0 | 0 | # | 0 | $\hat{0}$ | 1 | # | ␣ |
|   |   |   |           |   |   |   |           |   |   |   |   |           |   |   | ↑ |



מצב  $p$

|   |   |           |   |   |   |   |   |           |   |   |           |   |   |   |   |
|---|---|-----------|---|---|---|---|---|-----------|---|---|-----------|---|---|---|---|
| # | 1 | $\hat{1}$ | 1 | 1 | # | 1 | 0 | $\hat{0}$ | 0 | # | $\hat{0}$ | 0 | 1 | # | ␣ |
|   |   |           |   |   |   |   |   |           |   |   |           |   |   |   | ↑ |

- איסוף מידע
- $M'$  סורקת את הסרט שלה משמאל לימין ומזהה את התווים שמסומנים ב-  $\hat{\alpha}$ . מידע זה ניתן לשמור במצבים. לדוגמה:

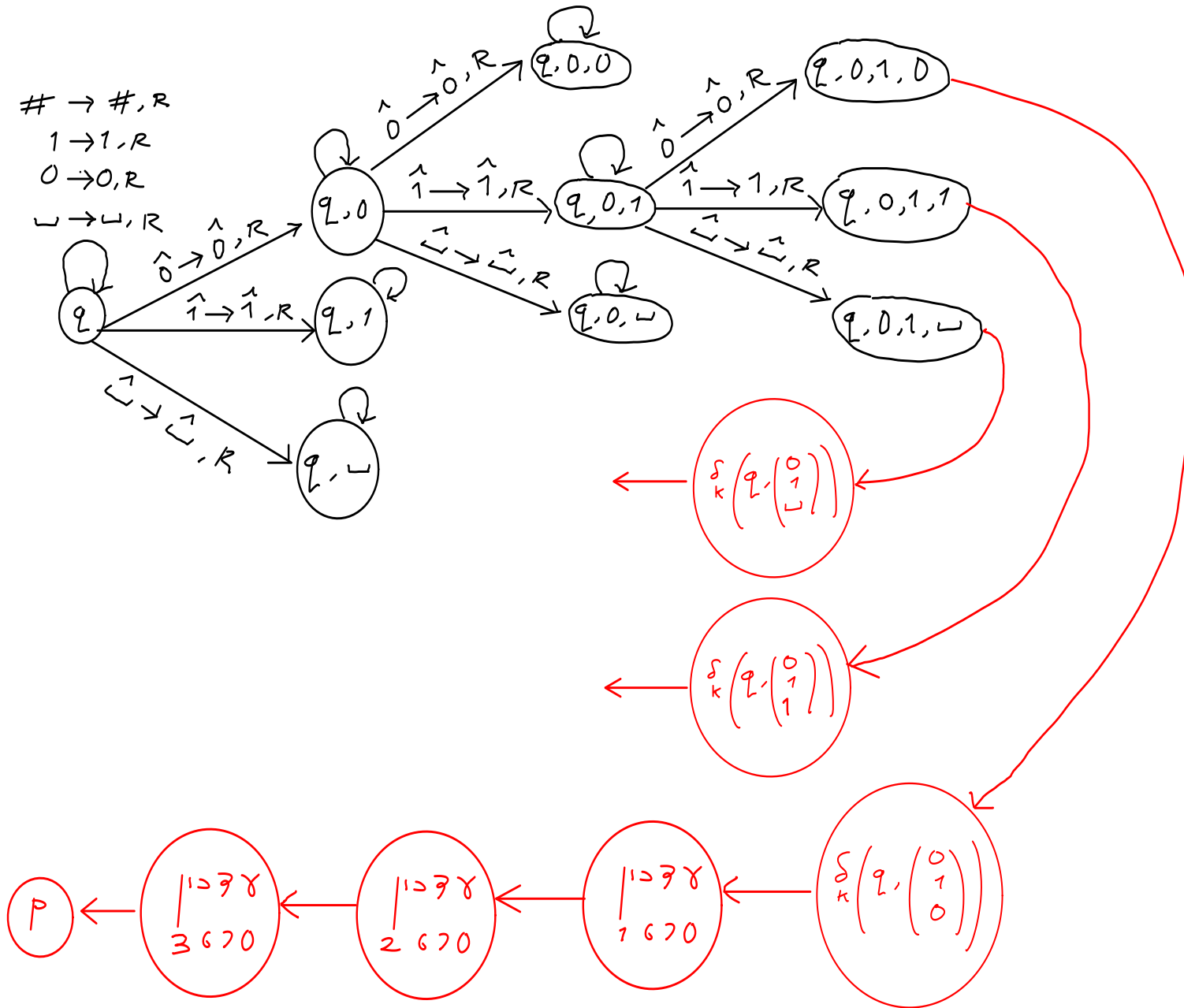
$q, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

זה אפשרי מכיוון שמספר המצבים הנדרש הוא סופי:

$|Q| \times |\Gamma|^k.$

מצב  $q$

|   |   |   |           |   |   |   |           |   |   |   |   |           |   |   |   |
|---|---|---|-----------|---|---|---|-----------|---|---|---|---|-----------|---|---|---|
| # | 1 | 1 | $\hat{0}$ | 1 | # | 1 | $\hat{1}$ | 0 | 0 | # | 0 | $\hat{0}$ | 1 | # | ␣ |
|   |   |   |           |   |   |   |           |   |   |   |   |           |   |   | ↑ |

מצב  $p$ 

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| # | 1 | 1 | 1 | # | 1 | 0 | 0 | # | 0 | 0 | 1 | # | ␣ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|



### • עדכון הסרטים

$M'$  סורקת את הסרט שלה פעם נוספת כדי לפעול על פי פונקצית המעברים, כלומר, לעדכן את התאים שמתחת לראשים ולעדכן את מיקום הראשים.

- אם בכל שלב  $M'$  מזיזה אחד מן הראשים הווירטואליים ימינה אל סימן ה- $\#$ , פעולה זו מציינת שמכונת  $M$  הזיזה את הראש המתאים אל החלק הריק שטרם נקרא של הסרט. לכן  $M'$  כותבת תו  $\sqcup$  על המשבצת הזו ומזיזה את כל התוכן של הסרט בין התא הזה לבין ה- $\#$  הימני ביותר בתא אחד ימינה. לאחר מכן היא ממשיכה את הסימולציה כרגיל.