תוכן העניינים

1 מכפלה פנימית

הגדרה 1: מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. מכפלה פנימית על V היא פונקציה $V \times V \to \mathbb{R}$ המתאימה לכל זוג וקטורים u, v סקלר ממשי המסומן ב- $\langle u, \mathrm{v} \rangle$ כך שמתקיימות התכונות הבאות. לכל $u, \mathrm{v}, w \in V$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{R}$:

1) סימטריות:

$$\langle u, \mathrm{v} \rangle = \langle \mathrm{v}, u \rangle \ .$$

2) ליניאריות ברכיב הראשון:

א)

$$\langle u + \mathrm{v}, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle \mathrm{v}, w \rangle \ .$$

ב)

$$\langle \lambda u, \mathrm{v} \rangle = \lambda \langle u, \mathrm{v} \rangle \ .$$

3) חיוביות:

$$\langle u, u \rangle \geq 0$$

וגם $\langle u, u \rangle = 0$ אם ורק אם $u = 0$.

הגדרה 2: מרחב אווקלידי

מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{R}$ יחד עם מכפלה פנימית מסויימת נקרא מרחב אוקלידי.

משפט 1: ליניאריות ברכיב השני

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ו $\langle , \rangle$ מכפלה פנימית. אז

1) לכל $u, \mathrm{v}, w \in V$,

$$\langle u, \mathrm{v} + w \rangle = \langle u, \mathrm{v} \rangle + \langle u, w \rangle$$

2) לכל $u, \mathrm{v} \in V$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle u, \lambda \mathrm{v} \rangle = \lambda \langle u, \mathrm{v} \rangle \ .$$

הוכחה:

1)

$$\langle u, \mathrm{v} + w \rangle = \langle \mathrm{v} + w, u \rangle = \langle \mathrm{v}, u \rangle + \langle w, u \rangle = \langle u, \mathrm{v} \rangle + \langle u, w \rangle$$

2)

$$\langle u, \lambda \mathrm{v} \rangle = \langle \lambda \mathrm{v}, u \rangle = \lambda \langle \mathrm{v}, u \rangle = \lambda \langle u, \mathrm{v} \rangle \ .$$

■

הגדרה 3: מכפלה פנימית לפי בסיס

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$. נבחר בסיס של V:

$$B = \{b_1, \ldots, b_n\} \ .$$

לכל $u, \mathrm{v} \in V$,

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \ , \quad \mathrm{v} = \sum_{i=1}^{n} y_i b_i \ .$$

מכפלה פנימית לפי בסיס B מסומנת $(,)_B$ ומוגדרת

$$(u,\mathrm{v})_B = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ .$$

קל להוכיח שזה מכפלה פנימית.

הגדרה 4: מכפלה פנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^n$

לכל $u,\mathrm{v} \in \mathbb{R}^n$, נניח כי בבסיס הסטנדרטי,

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ , \quad \mathrm{v} = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \ .$$

המכפלה פנימית הסטנדרטית מסומנת $(,)$ ומוגדרת

$$(u,\mathrm{v}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ .$$

הגדרה 5: העקבה של מטריצה ריבועית

לכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ העקבה של A זה סכום איברי האלכסון של A. העקבה מסומנת

$$\mathrm{tr}\ A \ .$$

משפט 2: תכונות של העקבה

לכל $A,B \in \mathbb{F}^{n\times n}$:

1) $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

2) $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}(A)$ לכל $\lambda \in \mathbb{F}$.

3) $\mathrm{tr}(A^t) = \mathrm{tr}(A)$.

הגדרה 6: המכפלה הפנימית הסטנדרטית של מטריצות

תהיינה $A,B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. המכפלה הפנימית הסטנדרטית של מטריצות היא פונקציה $\langle,\rangle : \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ שמוגדרת ע"י

$$\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}\left(B^t \cdot A\right) \ .$$

המכפלה הזאת נקראת המכפלה הפנימית הסטנדרטית במרחב $\mathbb{R}^{n\times m}$ גם.

הגדרה 7: המכפלה הפנימית הסטנדרטית של פונקציות

תהיינה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו- $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות שמוגדרות בקטע $[a,b]\in\mathbb{R}$. המכפלה הפנימית הסטנדרטית של פונקציות מוגדרת

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\,dx\ .$$

הגדרה 8: מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$. מכפלה פנימית על V היא פונקציה $V\times V\to\mathbb{R}$ המתאימה לכל זוג וקטורים u,v סקלר ב- $\mathbb{R}$ המסומן ב- $\langle u,\mathrm{v}\rangle$ כך שמתקיים התנאים הבאים. לכל וקטורים $u,\mathrm{v},w\in V$ ולכל סקלר $\lambda\in\mathbb{C}$:

1) הרמיטיות:

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle=\overline{\langle \mathrm{v},u\rangle}\ .$$

2) ליניאריות ברכיב הראשון:

א)

$$\langle u+\mathrm{v},w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle \mathrm{v},w\rangle$$

ב)

$$\langle \lambda u,\mathrm{v}\rangle=\lambda\,\langle u,\mathrm{v}\rangle$$

3) חיוביות: $\langle u,u\rangle$ הוא מספר ממשי אי-שללי. $\langle u,u\rangle=0$ אם ורק אם $u=0$.

הגדרה 9: מרחב אוניטרי

מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{C}$ יחד עם מכפלה פנימית מסויימת נקרא מרחב אוניטרי.

משפט 3: ליניאריות חלקית של מ"פ מעל $\mathbb{C}$

יהי V מרחב מכפלה פנימית. אזי

א) לכל $u,\mathrm{v},w\in V$,

$$\langle u,\mathrm{v}+w\rangle=\langle u,\mathrm{v}\rangle+\langle u,w\rangle\ .$$

ב) לכל $u,\mathrm{v}\in V$ ולכל סקלר λ:

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle=\bar{\lambda}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle\ .$$

הוכחה:

א)

$$\langle u,\mathrm{v}+w\rangle=\overline{\langle \mathrm{v}+w,u\rangle}=\overline{\langle \mathrm{v},u\rangle}+\overline{\langle w,u\rangle}=\overline{\langle \mathrm{v},u\rangle}+\overline{\langle w,u\rangle}=\langle u,\mathrm{v}\rangle+\langle u,w\rangle\ .$$

ב)

$$\langle u,\lambda\mathrm{v}\rangle=\overline{\lambda\,\langle \mathrm{v},u\rangle}=\bar{\lambda}\overline{\langle \mathrm{v},u\rangle}=\bar{\lambda}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle\ .$$

■

הגדרה 10: הנורמה

יהי V מרחב מכפלה פנימית. הנורמה $\|u\|$ של וקטור $u \in V$ היא מספר ממשי אי-שללי הניתנת ע"י

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

במרחבים $\mathbb{R}^2$ ו- $\mathbb{R}^3$ הנורמה היא בעצם האורך של וקטור.

משפט 4: משפט פיתגורס המוכלל של ווקטורים במרחב מכפלה פנימית

לכל שני וקטורים u, v במרחב מכפלה פנימית מתקיים:

(1

$$\|u \pm \mathrm{v}\|^2 = \|u\|^2 \pm 2\mathrm{Re}\,\langle u, \mathrm{v}\rangle + \|v\|^2$$

(2

$$\|u + \mathrm{v}\|^2 + \|u - \mathrm{v}\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$$

הוכחה:

(1

$$\begin{aligned}
\|u+\mathrm{v}\|^2 &= \langle u+\mathrm{v}, u+\mathrm{v}\rangle && \text{(הגדרה של המכפלה פנימית)}\\
&= \langle u, u+\mathrm{v}\rangle + \langle \mathrm{v}, u+\mathrm{v}\rangle && \text{(ליניאריות)}\\
&= \langle u, u\rangle + \langle u, \mathrm{v}\rangle + \langle \mathrm{v}, u\rangle + \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle && \text{(ליניאריות חלקית)}\\
&= \langle u, u\rangle + \langle u, \mathrm{v}\rangle + \overline{\langle u, \mathrm{v}\rangle} + \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle && \text{(הרמיטיות)}\\
&= \|u\|^2 + \langle u, \mathrm{v}\rangle + \overline{\langle u, \mathrm{v}\rangle} + \|\mathrm{v}\|^2 && \text{(הגדרה של הנורמה)}\\
&= \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle u, \mathrm{v}\rangle + \|\mathrm{v}\|^2 && \text{(ראו הסבר למטה) .}
\end{aligned}$$

הסבר של שלב האחרון: לכל מספר $z = a + bi$:

$$z + \bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a = 2\mathrm{Re}\ z\ .$$

(2

$$\begin{aligned}
\|u+\mathrm{v}\|^2 + \|u-\mathrm{v}\|^2 =& \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle u, \mathrm{v}\rangle + \|\mathrm{v}\|^2 + \|u\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle u, \mathrm{v}\rangle + \|\mathrm{v}\|^2\\
=& 2\left(\|u\|^2 + \|\mathrm{v}\|^2\right)
\end{aligned}$$

השוויון האחרון במרחב $\mathbb{R}^2$ מבטא את משפט גאומרטי: במקבילית, סכום ריבועי האלכסונים שווה לסכום ריבועי הצלעות.

■

משפט 5: אי-שוויון קושי-שוורץ

לכל וקטורים u ו- v במרחב מכפלה פנימית מתקיים

$$|\langle u, \mathrm{v}\rangle| \leq \|u\| \cdot \|\mathrm{v}\|\ .$$

הוכחה: אם $u=\bar{0}$ אז מקבלים $0\leq 0$.

נניח ש- $u\neq \bar{0}$. לכל סקלר λ מתקיים

(#)
$$\langle \lambda u+\mathrm{v},\lambda u+\mathrm{v}\rangle \geq 0\ ,$$

לפי משפט הקיטוב האגף השמאל הוא

$$\begin{aligned}\langle \lambda u+\mathrm{v},\lambda u+\mathrm{v}\rangle =&\|\lambda u\|^2+2\mathrm{Re}\,\langle \lambda u,\mathrm{v}\rangle +\|\mathrm{v}\|^2\\ =&\|\lambda u\|^2+\langle \lambda u,\mathrm{v}\rangle +\overline{\langle \lambda u,\mathrm{v}\rangle}+\|\mathrm{v}\|^2\\ =&\lambda\bar{\lambda}\|u\|^2+\lambda\,\langle u,\mathrm{v}\rangle +\bar{\lambda}\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}+\|\mathrm{v}\|^2\end{aligned}$$

נציב זה באגף השמאל של (#) ונקבל

$$\lambda\bar{\lambda}\|u\|^2+\lambda\,\langle u,\mathrm{v}\rangle +\bar{\lambda}\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}+\|\mathrm{v}\|^2\geq 0$$

נציב $\lambda=\dfrac{-\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}}{\|u\|^2}$, $\bar{\lambda}=\dfrac{-\langle u,\mathrm{v}\rangle}{\|u\|^2}$ ונקבל

$$\frac{\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle}{\|u\|^2}-\frac{\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle}{\|u\|^2}-\frac{\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle}{\|u\|^2}+\|\mathrm{v}\|^2\geq 0$$

נכפיל ב- $\|u\|^2$:

$$-\langle u,\mathrm{v}\rangle\,\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}+\|u\|^2\|\mathrm{v}\|^2\geq 0$$

נציב $\langle u,\mathrm{v}\rangle\,\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}=|\,\langle u,\mathrm{v}\rangle\,|^2$ ונקבל

$$|\,\langle u,\mathrm{v}\rangle\,|^2\leq \|u\|^2\|\mathrm{v}\|^2$$

מש"ל. ■

הגדרה 11: המרחק

יהיו u ו- v שני וקטורים במרחב מכפלה פנימית. המרחק בין u ו- v הוא מספר ממשי אי-שלילי המוגדר ע"י

$$d(u,\mathrm{v})=\|u-\mathrm{v}\|$$

משפט 6: תכונות של המרחק ואי-שוויון המשולש

נראה כי מושג המרחק החדש מקיים תכונת בסיסית של המרחק המוכר במישור.

1)

$$d(u,\mathrm{v})=d(\mathrm{v},u)$$

הוכחה:

$$d(u,\mathrm{v})=\|u-\mathrm{v}\|=\|(-1)(\mathrm{v}-u)\|=1\cdot\|\mathrm{v}-u\|=d(\mathrm{v},u)$$

2) $d(u,\mathrm{v})\geq 0$. $d(u,\mathrm{v})=0$ אם ורק אם $u=\mathrm{v}$.

3)

$$d(u,\mathrm{v}) \le d(u,w) + d(w,\mathrm{v})$$

זאת תכונה הנקראת **אי-שוויון המשולש**.

הוכחה: לכל שני וקטורים u,v, לפי משפט הקיטוב,

(#1)
$$\|u+\mathrm{v}\|^2 = \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle + \|\mathrm{v}\|^2 \le \|u\|^2 + 2|\,\langle u,\mathrm{v}\rangle\,| + \|\mathrm{v}\|^2$$

<u>הסבר:</u>

נסמן $z = \langle u,\mathrm{v}\rangle = a+ib$,

$\bar{z} = a-ib$.

נרשום $|\,\langle u,\mathrm{v}\rangle\,|^2 = z\bar{z} = a^2+b^2$,

לכן $|\,\langle u,\mathrm{v}\rangle\,| = \sqrt{a^2+b^2}$.

מצד שני $2\mathrm{Re}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle = 2\mathrm{Re}z = 2a$,

לכן נקבל $2\mathrm{Re}(u,\mathrm{v}) = 2a \le 2\sqrt{a^2+b^2} = 2|\,\langle u,\mathrm{v}\rangle\,|$.

נציב אי -שוויון קושי-שוורץ ב- (#1) ונקבל

$$\|u+\mathrm{v}\|^2 \le \|u\|^2 + 2\|u\|\cdot\|\mathrm{v}\| + \|\mathrm{v}\|^2 = (\|u\|+\|\mathrm{v}\|)^2$$

נציב את $-\mathrm{v}$ במקום v:

$$\|u-\mathrm{v}\|^2 \le (\|u\|+\|\mathrm{v}\|)^2 \ .$$

לכן

$$\|u-\mathrm{v}\| \le \|u\|+\|\mathrm{v}\| \ .$$

נציב כעת את $u-w$ במקום u ו $\mathrm{v}-w$ במקום v:

$$\|(u-w)-(\mathrm{v}-w)\| \le \|u-w\| + \|\mathrm{v}-w\| \ .$$

ז"א

$$\|u-\mathrm{v}\| \le \|u-w\| + \|\mathrm{v}-w\| \ .$$

קיבלנו את אי-שוויון המשולש:

$$d(u,\mathrm{v}) \le d(u,w) + d(\mathrm{v},w)$$

■

הגדרה 12: וקטורים אורתוגונליים

וקטורים u,v במרחב מכפלה פנימית נקראים אורתוגונליים זה לזה (או מאונכים זה לזה) אם

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle = 0 \ .$$

סימון:

$$u \perp \mathrm{v} \ .$$

1) אם $\langle u,\mathrm{v}\rangle = 0$ אז

$$\langle \mathrm{v},u\rangle = \overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle} = \bar{0} = 0 \ ,$$

כלומר יחס האורתוגונליות הוא סימטרי.

2) וקטור האפס אורתוגונל לכל וקטור v.

3) במרחב $\mathbb{R}^n$ עם המכפלה פנימית הסטנדרטית, מושג האורתוגונליות מתלכד עם מושג האורתוגונליות המוגדר על סמך המכפלה סלקרית.

הגדרה 13: ווקטור האורתוגונלי לתת-מרחב

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית ו- $V \subset U$ U תת-מרחב של V. נניח ש $\mathrm{v} \in V$. אומרים כי v אורתוגונלי ל- U אם v אורתוגונלי לכל וקטור $u \in U$. כלומר, אם

$$\langle \mathrm{v} | u \rangle = 0$$

לכל $u \in U$, אז הווקטור v אורתוגונלי לתת-מרחב U.

סימון:

$$\mathrm{v} \perp U \ .$$

הגדרה 14: המשלים האורתוגונלי

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית ו- $V \subset U$ U תת-מרחב של V. נניח ש $\mathrm{v} \in V$. **המשלים האורתוגונלי** של U מסומן ב $U^{\perp}$ ומוגדר לפי התנאי שכל ווקטור ב- $U^{\perp}$ אורתגונלי לכל ווקטור ב U.

כלומר:

$$\langle a | b \rangle = 0$$

לכל $a \in U$ ולכל $b \in U^{\perp}$.

2 בסיס אורתוגונלי

הגדרה 15: קבוצת ווקטורים אורתוגונלית

נתון המרחב מכפלה פנימית V ונתונה הקבוצה של ווקטורים

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_k \ .\} \ .$$

הקבוצה נקראת **אורתוגונלית** אם כל שני ווקטורים שלה אורתוגונליים. כלומר:

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \ , \qquad i \neq j \ .$$

הגדרה 16: קבוצת ווקטורים ואורתונורמלית

נתון המרחב מכפלה פנימית V ונתונה הקבוצה של ווקטורים

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_k \ \} \ .$$

הקבוצה נקראת **אורתונורמלית** אם:

א) כל שני ווקטורים שלה אורתוגונליים, כלומר

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \ , \qquad i \neq j \ ,$$

ב) כל ווקטור הוא ווקטור יחידה, כלומר

$$\|u_i\| = 1 \ .$$

משפט 7: קבוצת אורתוגונלית בת"ל

קבוצת אורתוגונלית במרחב מכפלה פנימית שלא מכילה את ווקטור האפס היא בלתי תלויה לינארית.

הוכחה: תהי $\{u_1, \ldots, u_k\}$ קבוצה אורתוגונלית. נניח ש

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k = 0 \ .$$

אז לכל $1 \leq j \leq k$

$$\left\langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \, , \, u_j \right\rangle = \langle 0 \, , \, u_j \rangle = 0 \ .$$

מצד שני

$$\left\langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \, , \, u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle u_i \, , \, u_j \rangle \ .$$

הקבוצה אורתוגונלית, אז $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ אם $i \neq j$, לכן בהסכום לעיל כל האיברים מתאפסים חוץ מהאיבר של $i = j$. לכן נקבל

$$\left\langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \, , \, u_j \right\rangle = \alpha_j \langle u_j \, , \, u_j \rangle \ .$$

לכן

$$\alpha_j \langle u_j \, , \, u_j \rangle = 0 \ .$$

$u_j \neq 0$ (נתון), אז $\langle u_j \, , \, u_j \rangle \neq 0$.
לכן בהכרח

$$\alpha_j = 0$$

לכל $1 \leq j \leq k$.

■

משפט 8: קבוצת אורתוגונלית היא בסיס

נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית כך ש $\dim(V) = n$.

כל קבוצה אורתוגונלית של n ווקטורים ב- V מהווה בסיס של V.

הוכחה: נניח ש V מרחב מכפלה פנימית, $\dim(V) = n$.
נניח ש $U = \{u_1, \ldots, u_n\} \in V$ קבוצה אורתוגונלית.
כל קבוצה אורתוגונלית היא בת"ל, לכן הקבוצה בת"ל.
בקבוצה יש n ווקטורים, לכן $\dim(U) = \dim(V)$.
לכן הקבוצה מהווה בססי של V. ■

הגדרה 17: בסיס אורתוגונלי ובסיס אורתונורמלי

- בסיס של V המורכב מווקטורים אורתוגונליים נקרא **בסיס אורתוגונלי.**
- בסיס של V המורכב מווקטורים אורתונורמליים נקרא **בסיס אורתונורמלי.**

הגדרה 18: הגדרת ההיטל האורתוגונלי

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית ונניח ש $U \subseteq V$ תת מרחב נוצר סופית של V. נניח ש

$$\{u_1, \ldots, u_k\}$$

בסיס אורתוגונלי של U. אז לכל ווקטור $\mathrm{v} \in V$, ההיטל האורתוגונלי של v מסומן ב- $P_U(\mathrm{v})$ ומוגדר

$$P_U(\mathrm{v}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{v}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \ .$$

האופרטור P_U נקרא **אופרטור ההטלה האורתוגונלי על** U .

משפט 9: משפט ההיטל האורתוגונלי

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית, ו- $U \subseteq V$ תת מרחב נוצר סופית של V. נסמן את ההיטל האורתוגונלי של כל ווקטור $\mathrm{v} \in V$ על U ב- $P_U(\mathrm{v})$. הווקטור

$$\mathrm{v} - P_U(\mathrm{v})$$

אורתוגונלי לכל ווקטור ב- U.
כלומר

$$\langle \mathrm{v} - P_U(\mathrm{v}), u \rangle = 0$$

לכל $\mathrm{v} \in V$ ולכל $u \in U$.
נסמן את האורתוגונליות של הווקטור $\mathrm{v} - P_U(\mathrm{v})$ ביחס לתת מרחב U כך:

$$(\mathrm{v} - P_U(\mathrm{v})) \perp U \ .$$

הוכחה: לפי הגדרת היטל אורתוגונלי, צריך להוכיח שווקטור

$$(\mathrm{v} - P_U(\mathrm{v})) \perp U \ .$$

נניח ש $\{u_1,\ldots,u_k\}$ בסיס אורתוגונלי של U. לכל $1\leq j\leq k$,

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{v}-P_U(\mathrm{v}),u_j\rangle &= \left\langle \mathrm{v}-\sum_{i=1}^k \frac{\langle \mathrm{v},u_i\rangle}{\|u_i\|^2}u_i,u_j\right\rangle\\ &=\langle \mathrm{v},u_j\rangle-\left\langle \sum_{i=1}^k \frac{\langle \mathrm{v},u_i\rangle}{\|u_i\|^2}u_i,u_j\right\rangle\\ &=\langle \mathrm{v},u_j\rangle-\sum_{i=1}^k \frac{\langle \mathrm{v},u_i\rangle}{\|u_i\|^2}\cdot\langle u_i,u_j\rangle\\ &=\langle \mathrm{v},u_j\rangle-\sum_{i=1}^k \frac{\langle \mathrm{v},u_i\rangle}{\|u_i\|^2}\langle u_i,u_j\rangle\,\delta_{ij}\\ &=\langle \mathrm{v},u_j\rangle-\frac{\langle \mathrm{v},u_j\rangle}{\|u_j\|^2}\langle u_j,u_j\rangle\\ &=\langle \mathrm{v},u_j\rangle-\frac{\langle \mathrm{v},u_j\rangle}{\|u_j\|^2}\cdot\|u_j\|^2\\ &=\langle \mathrm{v},u_j\rangle-\langle \mathrm{v},u_j\rangle\\ &=0\ .\end{aligned}$$

הוכחנו ש $(\mathrm{v}-P_U(\mathrm{v}))\perp U$.

■

משפט 10: תכונות של אופרטור הטלה האורתוגונלי

נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ו- $U\subset V$ תת-מרחב של V.
נסמן את המשלים האורתוגונלי של U ב- $U^\perp$.

אופרטור ההטלה האורתוגונלי P_U מקיים את התכונות הבאות:

1) P_U העתקה לינארית.

2) לכל $u\in U$ מתקיים $P_U(u)=u$, ולכל $w\in U^\perp$ מתקיים $P_U(w)=0$.

3) $\mathrm{Im}(P_U)=U$ וגם $\mathrm{Ker}(P_U)=U^\perp$.

4) $V=U\oplus U^\perp$

5) $P_U\circ P_U=P_U$

6) לכל $\mathrm{v}\in V$ מתקיים כי
$$(\mathrm{v}-P_U(\mathrm{v}))\in U^\perp$$

הוכחה:

1) P_U העתקה לינארית.

לכל $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in V$

$$\begin{aligned}
P_U\left(\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\right) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\left\langle \mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2, u_i\right\rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\mathrm{v}_1, u_i\right)+\left(\mathrm{v}_2, u_i\right)}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{\left\langle \mathrm{v}_1, u_i\right\rangle}{\|u_i\|^2} u_i + \sum_{i=1}^{k} \frac{\left\langle \mathrm{v}_2, u_i\right\rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= P_U(\mathrm{v}_1)+P_U(\mathrm{v}_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_U\left(\alpha \mathrm{v}\right) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\left\langle \alpha \mathrm{v}, u_i\right\rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha\left\langle \mathrm{v}, u_i\right\rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{k} \frac{\left\langle \mathrm{v}, u_i\right\rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \alpha P_U(\mathrm{v})
\end{aligned}$$

לכן P_U אופרטור לינארי.

2) נניח ש- $\{u_1, \ldots, u_k\}$ בסיס של U. אז לכל $u \in U$ קיימים סקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ כך ש $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k$. אז

$$P_U(u) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i P_U(u_i)$$

לכל $1 \leq j \leq k$,

$$\begin{aligned}
P_U(u_j) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\left\langle u_j, u_i\right\rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \frac{\left\langle u_j, u_j\right\rangle}{\|u_j\|^2} u_j \\
&= u_j \ .
\end{aligned}$$

לכן

$$P_U(u) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i = u \ .$$

לכל $w \in U^{\perp}$ מתקיים $\langle w, u_i\rangle = 0$ לכל $1 \leq i \leq k$. לכן

$$P_U(w) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left\langle w, u_i\right\rangle}{\|u_i\|^2} u_i = 0$$

3) לכל $a \in U$,לפי תנאי 2 $a = P_U(a) \in \mathrm{Im}\left(P_U\right)$, לכן $U \subseteq \mathrm{Im}\left(P_U\right)$.

לפי ההגדרה של ההיטל אם $\{u_1, \ldots, u_k\}$ בסיס אורתוגונלי של U, אז לכל ווקטור $a \in V$,

$$P_U(a) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle a, u_i\rangle}{\|u_i\|^2} u_i$$

לכן $P_U(a) \in \mathrm{span}\{u_1, \ldots, u_k\}$ לכן $P_U(a) \in U$ לכל $a \in V$. לכן $\mathrm{Im}\left(P_U\right) \subseteq U$.

לכן $\mathrm{Im}(P_U) = U$.

בסעיף 2 הוכחנו כי $U^{\perp} \subseteq \ker(P_U)$.
נוכיח כי $\ker(P_U) \subseteq U^{\perp}$.

נניח ש $\mathrm{v} \in \ker(P_U)$. ז"א

$$P_U(\mathrm{v}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{v}, u_i\rangle}{\|u_i\|^2} u_i = 0 .$$

מכיוון ש- $\{u_1, \ldots, u_k\}$ בת"ל אז בהכרח $\langle \mathrm{v}, u_i\rangle = 0$ לכל $1 \leq i \leq k$.
לכן $\mathrm{v} \in U^{\perp}$.

4) $\dim(V) = \dim(\ker P_U) + \dim(\mathrm{Im} P_U)$ לכן

$$\dim(V) = \dim\left(U^{\perp}\right) + \dim\left(U\right)$$

מכאן נובע כי

$$U \cap U^{\perp} = \{0\} \ .$$

5) לכל $\mathrm{v} \in V$,

$$P_U(\mathrm{v}) = u \in U \ .$$

לכן

$$\left(P_U \circ P_U\right)(\mathrm{v}) = P_U\left(P_U(\mathrm{v})\right) = P_U(u) = u \ ,$$

כלומר

$$P_U \circ P_U = P_U \ .$$

6) הוכחנו במשפט 9 כי

$$(\mathrm{v} - P_U(\mathrm{v})) \perp U$$

לכן

$$\mathrm{v} - P_U(\mathrm{v}) \in U^{\perp} \ .$$

■

משפט 11: משפט הפיכות האורתוגונלי

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית ו- $U\subset V$ תת מרחב של V. אז

א) $V=U\oplus U^{\perp}$

ב) $\left(U^{\perp}\right)^{\perp}=U$

הוכחה:

א) $V=U\oplus U^{\perp}$ הוכחנו במשפט 10.

ב)

1) נוכיח כי $U\subseteq\left(U^{\perp}\right)^{\perp}$.

נקח $u\in U$.
צ"ל $u\in\left(U^{\perp}\right)^{\perp}$.

לכל $\mathrm{v}\in U^{\perp}$, $\langle u,\mathrm{v}\rangle=0$ $\Leftarrow$ $u\in\left(U^{\perp}\right)^{\perp}$.

2) צ"ל $\left(U^{\perp}\right)^{\perp}\subseteq U$.

נקח $\mathrm{v}\in\left(U^{\perp}\right)^{\perp}$. לפי סעיף א' קיימים $u\in U$, $w\in U^{\perp}$ כך ש

$$\mathrm{v}=u+w\ .$$

נשים לב כי $\langle u,w\rangle=0$.

$$\begin{aligned}\langle\mathrm{v},w\rangle&=\langle u+w,w\rangle\\&=\langle u,w\rangle+\langle w,w\rangle\\&=\langle w,w\rangle\end{aligned}$$

מכיוון ש $\mathrm{v}\in(U^{\perp})^{\perp}$ ו- $w\in U^{\perp}$, אז נקבל כי $\langle\mathrm{v},w\rangle=0$. לכן $\langle w,w\rangle=0$ ולכן $w=0$.
לכן $\mathrm{v}=u\in U$.
הוכחנו כי $(U^{\perp})^{\perp}=U$.

■

משפט 12: תהליך גרם שמידט

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית ו- $U\subset V$ תת-מרחב של V. נניח שהקבוצה

$$\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_k\ .\}$$

היא בסיס של U. נסמן בסיס אורתוגונלי של U כך:

$$\{u_1,u_2,\ldots,u_k\}\ .$$

ניתן למצוא את כל הווקטורים בבסיס האורתוגונלי, באמצעות התהליך גרם שמידט:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \mathrm{v}_1 \\
u_2 &= \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}\cdot u_1 \\
u_3 &= \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}\cdot u_1 \ - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}\cdot u_2 \\
&\vdots \\
u_k &= \mathrm{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \mathrm{v}_k, u_i\rangle}{\|u_i\|^2}\cdot u_i \\
&\vdots
\end{aligned}$$

3 ערכים עצמיים ווקטוירם עצמיים

הגדרה 19: ערך עצמי ווקטור עצמי של מטריצה

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$. וקטור $\mathrm{v}\in F^n$ שלא שווה לוקטור האפס ($\mathrm{v}\neq\bar{0}$) יקרא וקטור עצמי של A אם קיים סקלר $\lambda\in\mathbb{F}$ כך ש-

$$A\cdot\mathrm{v}=\lambda\mathrm{v}\ .$$

λ נקרא ערך עצמי של A ששייך לוקטור עצמי v. המשוואה הזאת נקראת משוואת ערך עצמי של A.

משפט 13:

ערך עצמי של מטריצה יכול להיות 0.
וקטור האפס לא יכול להיות וקטור עצמי של מטריצה.

משפט 14: המשוואה האופייני של מטריצה

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ויהי v וקטור עצמי של A ששייך לערך עמצי λ. אז לפי הגדרה 19,

$$A\cdot\mathrm{v}=\lambda\mathrm{v}\ ,$$

נעביר אגפים:

$$\bar{0}=\lambda\mathrm{v}-A\mathrm{v}\qquad\Rightarrow\qquad\bar{0}=(\lambda I-A)\,\mathrm{v}$$

כאשר I המטריצה היחידה של $\mathbb{F}^{n\times n}$. קיבלנו את המשוואה

$$(\lambda I-A)\,\mathrm{v}=\bar{0}\ .$$

v וקטור עצמי אז הוא לא יכול להיות וקטור האפס. לכן הדטרמיננטה של המטריצה $(\lambda I-A)$ שווה ל- 0. כלומר

$$|\lambda I-A|=0\ .$$

המשוואה הזאת נקראת **משוואת האופייני של** A.

הצד שמאל נקרא **הפולינום האופייני של** A ומסומן $p_A(\lambda)$. כלומר

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| \ .$$

משפט 15: סדר של פולינום האופייני

אם $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, אז הפולינום האופייני $p_A(x)$ של A מסדר n.

משפט 16: מרחב עצמי

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ויהי λ ערך עצמי של A. נסמן ב- V_λ הקבוצה של כל הוקטורים עצמיים ששייכים לערך עצמי λ, בתוספת הוקטור האפס.
V_λ תת-מרחב של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 17: מרחב עצמי של ערך עצמי λ שווה למרחב האפס של $A-\lambda I$

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, יהי λ ערך עצמי של A ויהי V_λ מרחב העצמי של A. אז

$$V_\lambda = \text{Nul}\,(A-\lambda I) \ .$$

הוכחה: נוכיח כי $V_\lambda \subseteq \text{Nul}\,(A-\lambda I)$.

יהי u וקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי A. ז"א u מקיים את משוואת הערך עצמי:

$$A\cdot u = \lambda u \qquad \Rightarrow \qquad (A-\lambda I)\cdot u = \bar{0}$$

כאשר $\bar{0} \in \mathbb{F}^n$ וקטור האפס. לכן $u \in \text{Nul}(A-\lambda I)$ לכל וקטור $u \in V_\lambda$. לכן

$$V_\lambda \subseteq \text{Nul}\,(A-\lambda I) \ .$$

נוכיח כי $\text{Nul}\,(A-\lambda I) \subseteq V_\lambda$.

יהי $u \in \text{Nul}\,(A-\lambda I)$. ז"א

$$(A-\lambda I)\,u = \bar{0} \qquad \Rightarrow \qquad A\cdot u = \lambda u \ .$$

ז"א u וקטור עצמי של u ששייך לערך עצמי λ. לכן $u \in V_\lambda$ לכל $u \in \text{Nul}\,(A-\lambda I)$. לכן

$$\text{Nul}(A-\lambda I) \subseteq V_\lambda \ .$$

■

הגדרה 20: ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי של ערך עצמי של מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, ויהי u_i ערך עצמי λ_i.

הריבוי אלגברי של λ_i הוא הריבוי של λ_i בפולינום האופייני של A. כלומר אם

$$|\lambda I - A| = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{m_2} \quad \cdots \quad (\lambda-\lambda_i)^{m_i} \quad \cdots \quad (\lambda-\lambda_l)^{m_l} \ ,$$

אז הריבוי אלגברי של λ_i הוא m_i.

הריבוי גיאומטרי של λ_i הוא המימד של המרחב עצמי שלו. כלומר אם

$$V_{\lambda_i} = \{u_1,\ldots,u_k\}$$

אז ל- λ_i יש k וקטורים עצמיים ואומרים כי הריבוי גיאומטרי של λ_i הוא k.

הגדרה 21: לכסינות של מרטיצות

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. A תקרא לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית. כלומר אם קיימת מטריצה הפיכה $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ומטריצה אלכסונית $D \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש-

$$D = P^{-1}AP \ .$$

משפט 18: לכסינות של מרטיצות

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם הוקטורים עצמיים של A מהווה בסיס של $\mathbb{F}^n$ אז A לכסינה.

נסמן הוקטורים עצמיים ב- $\{u_1,\ldots,u_n\}$ ששייכים לערכים עצמיים $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ בהתאמה (הערכים עצמיים לא בהכרח שונים זה מזה). מכאן נובע ש-

$$D = P^{-1}AP \qquad \Leftrightarrow \qquad A = PDP^{-1}$$

כאשר $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית ו $P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ מטריצה הפיכה.

הוכחה: $A\cdot u_i=\lambda_i u_i$ לכל $1\leq i\leq n$. לכן

$$\begin{aligned}
A\cdot P &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A\cdot u_1 & A\cdot u_2 & \dots & A\cdot u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \dots & \lambda_n u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \\
&= PD \ .
\end{aligned}$$

כלומר $AP=PD$. נתון כי הוקטורים עצמיים מהווים בסיס, אז $\{u_1,\dots,u_n\}$ ולכן P הפיכה. לכן P^{-1} קיימת ומותר להכפיל מצד שמאל ב- P^{-1}. נקבל

$$A=P^{-1}PD \ .$$

■

משפט 19: קריטירון 1 ללכסינות של מטריצה

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. אם ל- A יש n ערכים עצמיים **שונים** ב- $\mathbb{F}$, אז A לכסינה.

משפט 20: קריטירון 2 ללכסינות של מטריצה: סכום המימדים של מרחבים העצמיים

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. A לכסינה אם"ם סכום המימדים של המרחבים העצמיים השונים שווה ל- n.

משפט 21: קריטירון 3 ללכסינות של מטריצה

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. אם

1. הפולינום האופייני שלה מתפרק למכפלה של גורמים ליניאריים מעל $\mathbb{F}$, לא בהכרח שונים, ו-
2. הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי שווה לריבוי הגיאומטרי שלו,

אז A לכסינה מעל $\mathbb{F}$.

הגדרה 22: אופרטור ליניארי

יהי V מרחב וקטורי. טרנספורציה ליניארי $T:V\to V$ נקראת אופרטור ליניארי.

הגדרה 23: אופרטור לכסין

אופרטור ליניארי $T:V\to V$ נקראת לכסין אם קיים בסיס של V כך ש- $[T]_B$ אלכסונית.

ז"א קיים בסיס $B=\{b_1,\ldots,b_n\}$ של V כך ש-

$$T(b_1)=\lambda_1 b_1\ , \qquad T(b_2)=\lambda_2 b_2, \quad \ldots \quad , T(b_n)=\lambda_n b_n\ .$$

אז

$$[T]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

(לא כל ה- λ בהכרח שונים זה מזה)

הגדרה 24: ערך עצמי ווקטור עצמי של אופרטור ליניארי

תהי $T:V\to V$ אופרטור ליניארי ו- λ סקלר. λ נקרא **ערך עצמי** של T אם קיים וקטור $u\neq 0$ כך ש-

$$T(u)=\lambda u\ .$$

u נקרא
וקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ.

משפט 22:

אופרטור ליניארי $T:V\to V$ לכסינה אם"ם קיים בסיס של V המורכב מוקטורים עצמיים.

הוכחה: $\Rightarrow$

נניח ש T לכסינה. ז"א קיים בסיס $U=\{u_1,\ldots,u_n\}$ כך ש-

$$T(u_1)=\lambda_1 u_1\ , \qquad T(u_2)=\lambda_2 u_2, \quad \ldots \quad , T(u_n)=\lambda_n u_n\ .$$

אז

$$[T]_U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(לא כל ה- λ בהכרח שונים זה מזה).

$\Leftarrow$

נניח שקיים בסיס $U=\{u_1,\ldots,u_n\}$ שמורכב מוקטורים עצמיים. ז"א קיימים סקלרים $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ כך ש-

$$T(u_1)=\lambda_1 u_1\ , \quad \ldots \quad , T(u_n)=\lambda_n u_n\ .$$

לכן

$$[T]_U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

אלכסונית. ■

הגדרה 25: פולינום האופייני של אופרטור לינארי

תהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי. נניח ש A המטריצה המייצגת של T לפי בסיס B. אז הפולינום

$$p_T(\lambda)=|\lambda I-A|$$

נקרא הפולינום האופייני של T.

הגדרה 26: ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי של ערך עצמי של אופרטור לינארי

נניח $T:V\to V$ אופרטור לינארית ו- λ ערך עצמי.

1) הריבוי האלגברי של λ הוא הריבוי של λ בפולינום האופייני.

2) הריבוי הגאומטרי של λ הוא $\dim(V_\lambda)$, כלומר, מספר הוקטורים העצמיים הבת"ל השייכים ל- λ.

משפט 23:

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי לכסיו.
נניח ש- $[T]_B$ המטריצה המייצגת של T לפי בסיס B.

יהיו $u_1,\dots,u_n$ הוקטורים עצמיים של T לפי בסיס B, ששייכים לערכים עצמיים $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ (הם לא בהכרח שונים זה מזה).
אז

$$[T]_B = PDP^{-1}$$

או באופן שקול

$$P^{-1}[T]_B P = D$$

כאשר $P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ ו- $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}
[T]_B P =& [T]_B \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T]_B u_1 & [T]_B u_2 & \ldots & [T]_B u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \ldots & \lambda_n u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \\
=& PD \ ,
\end{aligned}$$

כלומר, $[T]_B P = PD$. הוקטורים עצמיים $u_1, \ldots, u_n$ בת"ל, אז P הפיכה לכן P^{-1} קיימת. לכן מותר להכפיל מצד ימין ב- P^{-1}. נקבל: ולכן

$$[T]_B = PDP^{-1}$$

ומכאן נובע כי

$$P^{-1}[T]_B P = D$$

■

משפט 24:

תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית ו λ_0 ערך עצמי. אם m הריבוי האלגברי ו- k הריבוי הגיאומטרי של λ_0, אז

$$k \leq m \ .$$

במילים: הריבוי הגיאומטרי קטן או שווה לריבוי האלגברי.

הוכחה: נניח ש- λ_0 ערך עצמי מריבוי אלגברי m וריבוי גיאומטרי k.

ז"א קיימים k וקטורים בת"ל $u_1,\ldots,u_k$ ששייכים לערך עצמי λ_0.
נשלים אותו לבסיס של V:

$$B=\{u_1,\ldots,u_k,u_{k+1},\ldots,u_n\}\ .$$

נחשב את המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס B:

$$T(u_1)=\lambda_0 u_1\ ,\quad \ldots \quad ,T(u_k)=\lambda_0 u_k$$

לכן

$$[T]_B=\left(\begin{array}{cccc|c}
\lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & \\
0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & * \\
0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & A' \\
0 & 0 & \cdots & 0 &
\end{array}\right)$$

הפולינום הופייני של A הוא

$$p_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\left|\left(\begin{array}{cccc|c}
\lambda-\lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & \\
0 & \lambda-\lambda_0 & \cdots & 0 & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & * \\
0 & 0 & \cdots & \lambda-\lambda_0 & \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \lambda I-A' \\
0 & 0 & \cdots & 0 &
\end{array}\right)\right|$$

נחשב את הדטרמיננטה דרך העמודה הראשונה:

$$p_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)\cdot\left|\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-\lambda_0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & * \\ 0 & \cdots & \lambda-\lambda_0 & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \lambda I - A' \\ 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right)\right|$$

עד שנקבל

$$p_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^k\,|\lambda I - A'| = (\lambda-\lambda_0)^k p_{A'}(\lambda)$$

לכן הריבוי האלגברי גדול או שווה ל- k. ■

משפט 25: קריטירון 1 ללכסינות של אופרטור

יהי V מרחב עצמי מעל $\mathbb{F}$, ויהי $T:V\to V$ אופרטור ליניארי. נניח ש- $\dim(V)=n$. אם ל- T יש n ערכים עצמיים **שונים** ב- $\mathbb{F}$, אז T לכסינה.

משפט 26: קריטירון 2 ללכסינות של אופרטור: סכום המימדים של מרחבים העצמיים

יהי V מרחב עצמי מעל $\mathbb{F}$, ויהי $T:V\to V$ אופרטור ליניארי. נניח ש- $\dim(V)=n$. T לכסין אם"ם סכום המימדים של המרחבים העצמיים השונים שווה ל- n.

משפט 27: קריטירון 3 ללכסינות של אופרטור

יהי V מרחב עצמי מעל $\mathbb{F}$, ויהי $T:V\to V$ אופרטור ליניארי. אם

1. הפולינום האופייני של T מתפרק למכפלה של גורמים ליניאריים מעל $\mathbb{F}$, לא בהכרח שונים, ו-
2. הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי שווה לריבוי הגיאומטרי שלו,

אז T לכסין מעל $\mathbb{F}$.

משפט 28: וקטורים עצמיים ששייכים לערכים עצמיים שונים בת"ל

נתון $T:V\to V$ אופרטור ליניארי. וקטורים עצמיים של T ששייכים לערכים עצמיים שונים הם בת"ל.

הוכחה: נתון:

$T:V\to V$ אופרטוא ליניארי,
$\lambda_1, \quad \ldots \quad, \lambda_n$ ערכים עצמיים שונים ששייכים לוקטורים עצמיים $u_1, \quad \ldots \quad, u_n$ של T.

צריך להוכיח:

$u_1, \quad \ldots \quad , u_n$ בת"ל.

הוכחה:

נוכיח את הטענה ע"י אינדוקציה על n.

שלב הבסיס:

עבור $n=1$: $u_1 \neq \bar{0}$, לכן הוא בת"ל.

שלב האינדוקציה:

נניח שעבור $n>1$, n וקטורים עצמיים ששייכים ל n ערכים עצמיים שונים בת"ל. נניח $u_1,\ldots,u_{n+1}$ וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}$. נרשום

(*) $$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1} u_{n+1} = \bar{0}$$

אז

$$\alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \ldots + \alpha_n T(u_n) + \alpha_{n+1} T(u_{n+1}) = \bar{0}$$

(*1) $$\alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n u_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} u_{n+1} = \bar{0}$$

נכפיל (*) ב λ_{n+1}:

(*2) $$\alpha_1 \lambda_{n+1} u_1 + \alpha_2 \lambda_{n+1} u_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_{n+1} u_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} u_{n+1} = \bar{0}$$

נחסיר (*2) מ (*1):

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_{n+1})u_1 + \alpha_2(\lambda_2-\lambda_{n+1})u_2 + \ldots + \alpha_n(\lambda_n-\lambda_{n+1})u_n + \alpha_{n+1}\overset{0}{\cancel{(\lambda_{n+1}-\lambda_{n+1})}}u_n = \bar{0}$$

(*3) $$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_{n+1})u_1 + \alpha_2(\lambda_2-\lambda_{n+1})u_2 + \ldots + \alpha_n(\lambda_n-\lambda_{n+1})u_n = \bar{0}$$

לפי ההנחת האינדוקציה הוקטורים $u_1,\ldots,u_n$ בת"ל. לכן

(*4) $$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_{n+1}) = 0\ , \quad \ldots \quad , \alpha_n(\lambda_n-\lambda_{n+1}) = 0\ .$$

כל הערכים העצמיים שונים זה מזה, כלומר $\lambda_i - \lambda_{n+1} \neq 0$ לכל $i=1,\ldots,n$. לכן

$$\alpha_1 = 0\ , \quad \ldots \quad , \alpha_n = 0\ . \tag{*5}$$

נציב (5*) ב- (*) ונקבל

$$\alpha_1 u_1 = \bar{0}$$

$u_1 \neq 0$ כי הוא וקטור עצמי לכן $\alpha_1 = 0$. לכן (*) מצקיים רק אם כל המקודמים $\alpha_1, \quad \ldots \quad , \alpha_{n+1} = 0$ לכן הוקטורים עצמיים $u_1, \quad \ldots \quad , u_{n+1}$ בת"ל.

■

משפט 29: חזקה של מטריצה הדומה למטריצה אלכסונית

אם A לכסינה, אז קיימת מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D = P^{-1}AP$. לכן

$$A^n = PD^nP^{-1}\ .$$

הוכחה:

נוכיח את הטענה ע"י אינדוקציה.

שלב הבסיס:

עבור $n = 1$, $D = P^{-1}AP \Leftarrow A = PDP^{-1}$.

שלב האינדוקציה:

נניש שעבור n מתקיים $A^n = PD^nP^{-1}$. אז

$$A^{n+1} = \left(PD^nP^{-1}\right) \cdot PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

■

משפט 30:

אם u וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי λ, כלומר $A \cdot u = \lambda u$ אז

$$A^n u = \lambda^n u\ .$$

הוכחה: נוכיח את הטענה ע"י אינדוקציה.

שלב הבסיס:

עבור $n = 1$, $A \cdot u = \lambda u$ מתקיים כי נתון ש- u וקטור עצמי של A.

שלב האינדוקציה:

נניח שעבור $n > 1$, $A^n u = \lambda^n u$. אז

$$A^{n+1}u = A\left(A^n u\right) = A\lambda^n u = \lambda^n A u = \lambda^n \cdot \lambda u = \lambda^{n+1} u\ .$$

■

משפט 31: דטרמיננטה של מטריצה משולשית שווה למכפלה של איברי האלכסון הראשי

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה משולשית עליונה או משולשית תחתונה. הדטרמיננטה של A שווה למכפלה של האיברים על האלכסון הראשי. כלומר

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} , \qquad |A| = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\dots a_{nn} \ .$$

הוכחה: אידוקציה על n.

<u>שלב הבסיס:</u>

עבור $n=1$ הטענה נכונה באופן טריוויאלי.
כלומר נתון $A\in\mathbb{F}^{1\times 1}$. נסמן $A=(a)$ כאשר a האיבר היחיד במטריצה A.

$$|A| = a \ .$$

A מטריצה משולשית, והאיבר היחיד על האלכסון הראשי הוא a. לכן המכפלה של האיברים על האלכסון ראשי פשוט שווה ל- a. לכן $|A|$ שווה למכפלה של האיברים על האלכסון הראשי של A.

<u>שלב האינקודציה:</u>

נניח שהטענה נכונה עבור $n=N$ (הנחת האינדוקציה). נוכיח אותה עבור $n=N+1$.

תהי $A\in\mathbb{F}^{N\times N}$ מטריצה משולשית עליונה:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,N} & a_{1,N+1} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,N} & a_{2,N+1} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,N} & a_{3,N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N,N} & a_{N,N+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{N+1,N+1} \end{pmatrix}$$

נחשב הדטרמיננטה על השורה האחרונה:

$$|A| = a_{N+1,N+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,N} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,N} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N,N} \end{vmatrix}$$

לפי ההנחת האינדוקציה הדטרמיננטה של מטריצה $N \times N$ משולשית עליחונה שווה למכפלה של האיברים על האלכסון הראשי, לכן

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,N} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,N} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N,N} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{N,N} \ .$$

לכן

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{N,N} \cdot a_{N+1,N+1}$$

■

משפט 32: ערכים העצמיים של מטריצה משולשית

הערכים העצמיים של מטריצה משולשית עליונה (או משולשית תחתונה) הם האיברים הנמצאים על האלכסון הראשי.

הוכחה: תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ משולשית, ויהיו $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ האיברים על האלכסון הראשי. אז

$$\lambda I - A$$

גם מטריצה משולשית והאיברים על האלכסון הראשי הם $\{\lambda - \alpha_1, \lambda - \alpha_2, \dots, \lambda - \alpha_n\}$. הדטרמיננטה של מטריצה משולשית היא המכפלה של האיברים על האלכסון הראשי, לכן לכן

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \alpha_1) \cdot (\lambda - \alpha_2) \dots (\lambda - \alpha_n)$$

לכן הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1) \cdot (\lambda - \alpha_2) \dots (\lambda - \alpha_n) = 0 \ .$$

השורשים הם
$$\lambda=\alpha_1,\quad \lambda=\alpha_2,\quad \ldots\quad \lambda=\alpha_n\ .$$
ז"א הערכים עצמיים שווים לאיברים על האלכסון הראשי. ■

הגדרה 27: הגדרת דמיון בין מטריצות

תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נאמר ש- A ו- B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה $P\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש-
$$B=P^{-1}AP\ .$$

משפט 33: פולינום האופייני של מטריצות דומות

אם A ו- B דומות אז יש להן אותו פולינום אופייני, ולכן אותם ערכים עצמיים.

הוכחה:
$$\begin{aligned}f_B(x)&=|xI-B|\\&=\left|xI-P^{-1}AP\right|\\&=\left|P^{-1}xIP-P^{-1}AP\right|\\&=\left|P^{-1}\left(xI-A\right)P\right|\\&=\left|P^{-1}\right|\left|xI-A\right|\left|P\right|\\&=\left|P\right|^{-1}\left|xI-A\right|\left|P\right|\\&=\left|xI-A\right|\left|P\right|^{-1}\left|P\right|\\&=\left|xI-A\right|\\&=f_A(x)\end{aligned}$$
■

משפט 34: קיום ווקטור עצמי של אופרטור לינארית

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית.
קיים לפחות וקטור עצמי אחד של T.

הוכחה: נניח ש- $\dim(V)=n$. יהי $u_1\neq\bar{0}\in V$. הקבוצה
$$\left\{u_1,T\left(u_1\right),T^2\left(u_1\right),\ldots,T^n\left(u_1\right)\right\}$$
תלויה לינארית כי יש בה $n+1$ וקטורים. לכן הצירוף לינארי הבא מתקיים רק אם אחד המקדמים $a_0,\ldots,a_n$ שונה מאפס:
$$a_0u_1+a_1T\left(u_1\right)+a_2T^2\left(u_1\right)+\ldots+a_nT^n\left(u_1\right)=\bar{0}\ . \qquad (*1)$$
נרשום את זה בצורה
$$\left(a_0+a_1T+a_2T^2+\ldots+a_nT^n\right)u_1=\bar{0}\ .$$
בצד שמאל יש הצבת העתקה בפולינום מסדר n. לפי המשפט היסודי של האלגברה יש לפולינום הזה פירוק לגורמים לינאריים:
$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n=c(z-\lambda_1)\ldots(z-\lambda_n)$$

$c \neq 0 \in \mathbb{C}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n$. לכן ניתן לפרק את (*1) כ:

$$a_0 u_1 + a_1 T(u_1) + a_2 T^2(u_1) + \ldots + a_n T^n(u_1) = c(T - \lambda_1 I) \ldots (T - \lambda_n I) u_1 = \bar{0} \ . \qquad (*2)$$

$c \neq 0 \in \mathbb{C}$. אם קיים פתרון $u_1 \neq 0$ למשוואה הומוגונית ב- (*2) אז בהכרח הדטרמיננטה של המטריצה שמכפילה u_1 שווה לאפס. לפיכך

$$|c(T - \lambda_1 I) \ldots (T - \lambda_n I)| = c\,|T - \lambda_1 I| \ldots |T - \lambda_n I| = 0 \ . \qquad (*3)$$

לכן קיים i ($1 \leq i \leq n$) עבורו $|T - \lambda_i I| = 0$ לכן ל- T יש לפחות ערך עצמי אחד.

■

4 משפט קיילי-המילטון ופולינום מינימלי

הגדרה 28: הצבה של מטריצה ריבועית בפולינם

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$. יהי

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_k x^k$$

פוליניום כאשר $\alpha_i \in \mathbb{F}$ סקלרים. הצבה של A בפולינים p מוגדרת להיות

$$p(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_k A^k$$

כאשר I_n המטריצה היחידה של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

משפט 35:

תהי $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית ויהי $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום. אז

$$p(D) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

משפט 36:

תהיינה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ו- $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נניח ש $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה הפיכה. מתקיים:

$$(BAB^{-1})^k = BA^kB^{-1} \ .$$

הוכחה: נוכיח ע"י אינדוקציה.

<u>בסיס:</u> עבור $k=1$

$$(BAB^{-1})^1 = BA^1B^{-1} \ .$$

<u>מעבר:</u>

נניח ש- $(BAB^{-1})^k = BA^kB^{-1}$. (ההנחת האינדוקציה). נוכיח ש- $(BAB^{-1})^{k+1} = BA^{k+1}B^{-1}$.

$$\begin{aligned}(BAB^{-1})^{k+1} =&(BAB^{-1})^k\cdot BAB^{-1}\\ =&BA^kB^{-1}\cdot BAB^{-1} \qquad \text{(ההנחת האינדוקציה)}\\ =&BA^k\cdot\underbrace{(B^{-1}B)}_{=I}\cdot AB^{-1}\\ =&BA^k\cdot I\cdot AB^{-1}\\ =&BA^k\cdot AB^{-1}\\ =&BA^{k+1}B^{-1} \ .\end{aligned}$$

■

משפט 37:

תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות. כלומר קיימת P הפיכה כך ש- $B=PAP^{-1}$. נניח ש- $Q(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינום. אז

$$Q(A) = PQ(B)P^{-1} \ .$$

הוכחה: נסמן $Q(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\ldots+\alpha_kx^k$.

$$\begin{aligned}Q(A) =&\alpha_0I+\alpha_1A+\ldots+\alpha_kA^k\\ =&\alpha_0I+\alpha_1(PBP^{-1})+\ldots+\alpha_k(PBP^{-1})^k\\ =&\alpha_0PP^{-1}+\alpha_1(PBP^{-1})+\ldots+\alpha_k(PBP^{-1})^k\end{aligned}$$

$(PBP^{-1})^k=PB^kP^{-1}$ (לפי משפט 36) לכן נקבל

$$\begin{aligned}Q(A) =&\alpha_0PP^{-1}+\alpha_1PBP^{-1}+\ldots+\alpha_kPB^kP^{-1}\\ =&P\left(\alpha_0I+\alpha_1B+\ldots+\alpha_kB^k\right)P^{-1}\\ =&PQ(B)P^{-1} \ .\end{aligned}$$

■

משפט 38:

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה, כלומר קיימת P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.
נניח ש- $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. אז אז לכל $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ מתקיים

$$q(A) = P \begin{pmatrix} q(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & q(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1}$$

הוכחה: נסמן $D = P^{-1}AP$. לפי משפט 37,

$$P^{-1}q(A)P = q(P^{-1}AP) = q(D) \ .$$

לפי משפט 35,

$$q(D) = \begin{pmatrix} q(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & q(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

לכן נקבל

$$P^{-1}q(A)P = \begin{pmatrix} q(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & q(\lambda_n) \end{pmatrix} ,$$

מכאן נובע כי

$$q(A) = P \begin{pmatrix} q(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & q(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1} \ .$$

■

משפט 39:

תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ סקלר. נניח ש $p(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינום. הוכיחו:

$p(A)=\lambda I_n$ אם"ם $p(B)=\lambda I_n$.

הוכחה: $\Rightarrow$

A,B דומות לכן קיימת $C\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה כך ש $B=C^{-1}AC$. לכן לפי 37,

$$p(B)=p\left(C^{-1}AC\right)=C^{-1}p(A)C$$

אם $p(A)=\lambda I_n$ אז

$$p(B)=C^{-1}\lambda I_n C=\lambda I_n\ .$$

$\Leftarrow$

$A=CBC^{-1}$ לכן לפי 37,

$$p(A)=p\left(CBC^{-1}\right)=Cp(B)C^{-1}\ .$$

לכן אם $p(B)=\lambda I_n$ אז

$$p(A)=C\lambda I_n C^{-1}=\lambda I_n\ .$$

■

הגדרה 29: הצבה של העתקה ליניארית בפולינום

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, נניח ש $T:V\to V$ אופרטור ליניארי ו- $p(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\ldots\alpha_k x^k$ פולינום. נגדיר את האופרטור הליניארי $p(T):V\to V$ ע"י

$$p(T)=\alpha_0 I_V+\alpha_1 T+\ldots\alpha_k T^k$$

כאשר I_V האופרטור הזהות ($I_V(u)=u$ לכל $u\in V$).
$p(T)$ נקראת ההצבה של T ב- p.

משפט 40:

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T:V\to V$. נניח ש $p\in\mathbb{F}[x]$.
אם $u\in V$ וקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי λ, אז u וקטור עצמי של $p(T)$ ששייך לערך עצמי $p(\lambda)$.
כלומר, אם

$$T(u)=\lambda u$$

אז

$$p(T)(u)=p(\lambda)u\ .$$

הוכחה: ראו משפט 30 למעלה:

$$\begin{aligned} p(T)(u) &= \left(\alpha_0 + \alpha_1 T + \ldots + \alpha_k T^k\right)(u) \\ &= \left(\alpha_0 + \alpha_1 T(u) + \ldots + \alpha_k T^k(u)\right) \\ &= \left(\alpha_0 + \alpha_1 \lambda u + \ldots + \alpha_k \lambda^k u\right) \\ &= \left(\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \ldots + \alpha_k \lambda^k\right) u \\ &= p(\lambda)u \ . \end{aligned}$$

■

הגדרה 30: איפוס פולינום ע"י מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ויהי $p(x) \in \mathbb{F}[x]$. אומרים כי A מאפסת את $p(x)$ אם

$$p(A) = 0_{n\times n}$$

כאשר $0_{n\times n}$ מטריצה האפס של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

משפט 41: מטריצות דומות מאפסות אותו פולינום

אם A ו- B מטריצות דומות, אז הפולינום f מתאפס ע"י A אם"ם הוא מתאפס ע"י B.

הוכחה: נניח ש $f(A) = 0$. נוכיח ש $f(B) = 0$:
נסמן

$$f(x) = \alpha_k x^k + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 \ ,$$

אז

$$f(A) = \alpha_k A^k + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0 \ .$$

A ו B מטריצות דומות לכן קיימת מטריצה הפיכה C כך ש

$$A = C^{-1}BC \ .$$

לכן

$$\alpha_k (C^{-1}BC)^k + \ldots + \alpha_1 (C^{-1}BC) + \alpha_0 I = 0 \ .$$

$(C^{-1}BC)^k = C^{-1}B^kC$ (לפי משפט 36) לכן נקבל

$$C^{-1}\left(\alpha_k B^k + \ldots + \alpha_1 B + \alpha_0 I\right) C = 0 \ .$$

C הפיכה אז נכפיל מצד שמאל ב- C ומצד ימין ב- C^{-1} ונקבל

$$\alpha_k B^k + \ldots + \alpha_1 B + \alpha_0 I = 0 \ .$$

קיבלנו ש

$$f(B) = 0 \ .$$

■

משפט 42:

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$.

א. $A^n\in\text{sp}\{I_n,A,A^2,\dots,A^{n-1}\}$ אס"ם קיים פולינום $p(x)\in\mathbb{F}[x]$ מסדר n כך ש $p(A)=0$.

ב. הקבוצה $\{I_n,A,A^2,\dots,A^n\}$ ת"ל אס"ם קיים פולינום שונה מאפס $p(x)\in\mathbb{F}[x]$ מסדר n לכל היותר כך ש- $p(A)=0$.

הוכחה:

<u>סעיף א.</u> נניח ש $A^n\in\text{sp}\{I_n,A,A^2,\dots,A^{n-1}\}$. אז קיימים סקלרים כך ש-

$$A^n=\alpha_0I_n+\alpha_1A+\alpha_2A^2+\ldots+\alpha_{n-1}A^{n-1}$$

ז"א

$$A^n-\alpha_{n-1}A^{n-1}-\alpha_{n-2}A^{n-2}-\ldots-\alpha_1A-\alpha_0I_n=0$$

לכן A מאפסת את

$$p(x)=x^n-\alpha_{n-1}x^{n-1}-\ldots-\alpha_1x-\alpha_0\in\mathbb{F}[x]\ .$$

נניח ש- A מאפסת את הפוליניום

$$Q(x)=\beta_nx^n+\beta_{n-1}x^{n-1}+\ldots+\beta_1x+\beta_0\in\mathbb{F}[x]$$

מסדר n, כלומר $Q(A)=0$. נניח ש $\beta_n\neq0$. אז

$$\beta_nA^n=-\left(\beta_{n-1}A^{n-1}+\ldots+\beta_1A+\beta_0I_n\right)$$

נחלק שני האגפים ב β_n:

$$A^n=-\left(\frac{\beta_{n-1}}{\beta_n}A^{n-1}+\ldots+\frac{\beta_1}{\beta_n}A+\frac{\beta_0}{\beta_n}I_n\right)$$

קיבלנו כי $A^n\in\text{sp}\{I_n,A,A^2,\dots,A^{n-1}\}$.

<u>סעיף ב.</u> נניח ש- $\{I_n,A,A^2,\dots,A^n\}$ ת"ל. אז קיימים סקלרים שאינם כולם אפסים כך ש-

$$\alpha_0I_n+\alpha_1A+\alpha_2A^2+\ldots+\alpha_{n-1}A^{n-1}+\alpha_nA^n=0$$

מכאן A מאפסת $\sum_{i=0}^n\alpha_ix^i$ שהוא פולינום שונה מאפס מסדר n לכל היותר.

להיפך, נניח ש- $p(x)=\sum_{i=0}^n\alpha_ix^i$ אינו פולינום האפס כך ש $p(A)=0$. אז

$$\alpha_0I_n+\alpha_1A+\ldots+\alpha_nA^n=0$$

הוא צירוף לנארי לא טריוויאלי.

■

הגדרה 31: איפוס פולינום על ידי העתקה לינארית

יהי $T:V\to V$ אופרטור ויהי $p(x)\in\mathbb{F}[x]$. אומרים כי T מאפס את $p(x)$ אם $p(T)=0$ כאשר 0 מסמן את העתקת האפס.

משפט 43: משפט קיילי-המילטון

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. אם $p_A(x)$ הוא הפולינום האופייני של A אז

$$p_A(A)=0_{n\times n}$$

כאשר $0_{n\times n}$ מטריצה האפס של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

משפט 44: משפט קיילי-המילטון עבור העתקות

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $T:V\to V$ אופרטור. T מאפס את הפולינום האופייני שלה.

הגדרה 32: פולינום המינימלי

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. הפולינום המינימלי הוא פולינום מתוקן מצורה

$$m(x)=\alpha_0+\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_{k-1}x^{k-1}+x^k\ , \tag{\#}$$

כאשר $k\geq 1$ כך ש:

(1 $m(A)=0$

(2 k היא הסדר הנמוכה ביותר מבין הפולינומים מצורה (#) שמתאפסים ע"י A.

נסמן את הפולינום המינימלי של A ב- $m_A(x)$.

מסקנה 1: פולינום מינימלי של טריצה אלכסונית

אם $D\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה אלכסונית:

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0&0&\ldots&0\\0&\lambda_1&0&0&0&\ldots&0\\0&0&\lambda_1&0&0&\ldots&0\\0&0&0&\lambda_2&0&\ldots&0\\0&0&0&0&\lambda_2&\ldots&0\\0&0&0&0&0&\ldots&0\\\vdots&&&&&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\ldots&\lambda_k&0\\0&0&0&0&\ldots&0&\lambda_k\end{pmatrix}$$

אם $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ האיברים השונים על האלכסון ($k\leq n$) אז הפולינום המינימלי של D הוא

$$m_D(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_k)\ .$$

משפט 45: ל- $m_A(x)$ ול- $p_A(x)$ יש בדיוק אותם גורמים אי-פריקים.

ל- $m_A(x)$ ול- $p_A(x)$ יש בדיוק אותם גורמים אי-פריקים. כלומר

$$m_A(\lambda)=0\quad\Leftrightarrow\quad p_A(\lambda)=0\ .$$

הוכחה:

נניח ש $m_A(\lambda)=0$.

אז $m_A(x)=q(x)(x-\lambda)$ כאשר $\deg\, q(x)<\deg\, m_A(x)$ (נוסחת איוקליד לחיוק פולינומים).

$m_A(x)$ הוא הפולינים המינימלי של A לכן $q(A)\neq 0$.

נגדיר וקטורים v ו- w כך ש- $\mathrm{w}=q(A)\mathrm{v}\neq\bar{0}$.

$$\bar{0}=m_A(A)\mathrm{v}=(A-\lambda I)q(A)\mathrm{v}=(A-\lambda I)\mathrm{w}\ ,$$

לכן

$$A\mathrm{w}=\lambda\mathrm{w}\ .$$

ז"א w וקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ של A.

לכן $p_A(\lambda)=0$.

נניח ש $p_A(\lambda)=0$.
אז λ ערך עצמי של A.
נניח ש- w הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ. אז

$$A\mathrm{w}=\lambda\mathrm{w}\ .$$

לכן

$$m_A(A)\mathrm{w}=m_A(\lambda)\mathrm{w}\ .$$

$m_A(A)=0$ לכן $m(\lambda)\mathrm{w}=0$.
w וקטור עצמי אז $\mathrm{w}\neq\bar{0}$, לכן $m_A(\lambda)=0$. ■

משפט 46: מטריצה מאפסת הפולינום המינימלי של מטריצה שאליה היא דומה

תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות ריבועיות. יהי $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A ויהי $m_B(x)$ הפולינום המינימלי של B. אם A,B מטריצות דומות אז

$$m_A(B)=0$$

ו-

$$m_B(A)=0\ .$$

הוכחה: A ו- B דומות לכן קיימת P הפיכה כך ש- $A=PBP^{-1}$. לפי משפט 37:

$$m_A(A)=P\cdot m_A(B)\cdot P^{-1}$$

P הפיכה אז נכפיל מצד ימין ב- P ומצד שמאל ב- P^{-1}:

$$P^{-1}\cdot m_A(A)\cdot P=m_A(B)\ .$$

$m_A(A)=0$ לכן $m_A(B)=0$. ■

משפט 47: למטריצות דומות יש אותו פולינום מינימלי

תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות. ל-A ו- B יש אותו פולינום מינימלי.

הוכחה: A ו- B דומות $\Leftarrow$ ל- A ו- B יש אותם ערכים עצמיים (לפי משפט 33).
יהי $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A ו- $m_B(x)$ הפולינום המינימלי של B.
כיוון של- A ו- B אותם ערכים עצמיים אז $m_A(x)$ ו- $m_B(x)$ מתפרקים לאותם גורמים לינאריים:

$$m_A(x)=(x-\lambda_1)^{d_1}\ldots(x-\lambda_k)^{d_k}\ ,\qquad m_B(x)=(x-\lambda_1)^{e_1}\ldots(x-\lambda_k)^{e_k}\ .$$

A ו- B דומות אז $m_A(B)=0$ ו- $m_B(A)=0$ (לפי משפט 46 למעלה).

כעת נוכיח דרך השלילה כי $d_i=e_i$ לכל $1\leq i\leq k$ ולכן הפולינומים m_A ו- m_B זהים.

נניח כי עבור אחד הגורמים, $d_i\neq e_i$.

אם $d_i < e_i$, כיוון ש- $m_A(B) = 0$ אז מתקיים ש- B מאפסת פולינום מדרגה נמוכה יותר מ- $m_B(x)$. בסתירה לכך כי $m_B(x)$ הוא הפולינום המינימלי של B.

אם $e_i < d_i$, כיוון ש- $m_B(A) = 0$, אז מתקיים ש- A מאפסת פולינום מדרגה נמוכה יותר מ- $m_A(x)$. בסתירה לכך כי $m_A(x)$ הוא הפולינום המינימלי של A.

■

משפט 48: A לכסינה אא"ם לפולינום מינימלי יש גורמים ליניאריים שונים

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ויהי $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A. A לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אם"ם כל הגורמים האי-פריקים של $m_A(x)$ הם ליניאריים ושונים.
כלומר A לכסינה אם"ם $m_A(x)$ מתפרק ל-

$$m_A(x) = (x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_i)\ldots(x-\lambda_k) \ .$$

הוכחה: נניח ש- A לכסינה.
יהיו $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ הערכים עצמיים השונים של A.
קיימת P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש-

$$A = PDP^{-1} \ .$$

לפי משפט 47 הפולינום המינימלי של A שווה לפולינום המינימלי של D ולפי מסקנה 1 $m_D(x) = (x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_k)$ לכן

$$m_A(x) = m_D(x) = (x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_k) \ .$$

■

5 שילוש מטריצה

משפט 49: ערכים עצמיים ופולינום אופייני של מטאיצה משולשית

תהי A מטריצה משולשית מעל שדה $\mathbb{F}$. כלומר

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \ldots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

אז

1)

$$p_A(x) = (x - a_{11})(x - a_{22}) \ldots (x - a_{nn}) ,$$

כלומר, הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים (לא בהכרח שונים) מעל $\mathbb{F}$.

2) איברי האלכסון של מטריצה משולשית עליונה הם הערכים עצמיים.

המספר הפעמים שכל ערך עצמי מופיע באלכסון הוא הריבוי האלגברי של הערך עצמי.

הוכחה:

1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \ldots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}-\lambda & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$
$$=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda) \qquad (*)$$

2) לפי (*), $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$ הם הערכים עצמיים של A. כל איבר על האלכסון הראשי מופיע בפולינום האופייני. לכן המספר הפעמים שאיבר מסוים מופיע על האלכסון הראשי שווה למספר הפעמים שהוא מופיע בפולינום האופייני. מאותה מידה המספר הפעמים שאיבר מסוים מופיע על האלכסון הראשי שווה לריבוי אלגברי של הערך עצמי.

■

הגדרה 33: מטריצה ניתנת לשילוש

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. אומרים ש A ניתנת לשילוש מעל $\mathbb{F}$ אם A דומה למטריצה משולשית עליונה, כלומר אם קיימת מטריצה P הפיכה כך ש-

$$M = P^{-1}AP$$

מטריצה משולשית. P נקראת מטריצה משלשת.

משפט 50: תנאי לשילוש

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.
אם A ניתנת לשילוש מעל $\mathbb{F}$ אז הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים ליניאריים (לא בהכרח שונים) מעל $\mathbb{F}$.

הוכחה: נניח ש- A ניתנת לשילוש. אז קיימת P הפיכה ו-M משולשית כך ש- $M = P^{-1}AP$. למטריצות דומות יש אותו פוליניום האופייני, לכן

$$p_A(x) = p_M(x)\ .$$

הגורמים של $p_M(x)$ ליניאריים (לא בהכרח שונים) כי M מטריצה משולשית, לכן הגורמים של $p_A(x)$ ליניאריים (לא בהכרח שונים). ■

הגדרה 34: העתקה ליניארית ניתנת לשילוש

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $T : V \to V$ אופרטור. T נקרא ניתן לשילוש אם קיים בסיס B של V שעבורו המטריצה המייצגת $[T]_B$ היא מטריצה משולשית עליונה. הבסיס נקרא בסיס משלש עבור B.

משפט 51: תנאי לקיום שילוש מטריצה

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $T : V \to V$ אופרטור. אם T ניתנת לשילוש אז הפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים ליניאריים (לא בהכרח שונים) מעל $\mathbb{F}$.

משפט 52: קיום שילוש

לכל מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{C}$ ולכל $T \in \mathrm{Hom}(V)$, T ניתנת לשילוש.

הוכחה: כל פולינום מתפרק לגורמים ליניאריים מעל $\mathbb{C}$. ■

6 תת מרחב שמור

הגדרה 35: העתקה ליניארית ניתנת לשילוש

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $T : V \to V$ אופרטור. תת מרחב W של V נקרא תת מרחב T שמור אם $T(W) \subseteq W$.

משפט 53: העתקה ניתנת לשילוש אא"ם קיימת סדרת תת מרחבים T שמורים

יהי V מרחב וקטורי n-ממדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $T : V \to V$ אופרטור. T ניתנת לשילוש אם"ם קיימת סדרה של תת מרחבים $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$ כך ש- V_i הוא תת מרחב T שמור וגם $\dim(V_i) = i$ לכל $1 \le i \le n$.

הוכחה: <u>נוכיח אם</u>

נניח ש T ניתנת לשילוש. אז קיים בסיס $U=\{u_1,\ldots,u_n\}$ שעבורו $[T]_U$ משולשית. ז"א

$$[T]_U=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \ldots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{aligned} T(u_1) =& a_{11}u_1 \ , \\ T(u_2) =& a_{12}u_1+a_{22}u_2 \ , \\ & \vdots \\ T(u_n) =& a_{1n}u_1+a_{2n}u_2+\ldots+a_{nn}u_n \ . \end{aligned}$$

נסמן $V_i=\text{span}(u_1,\ldots,u_i)$. אז $\dim(V_i)=i$.

לכן, $V_1\subset V_2\subset\ldots\subset V_n=V$,
בנוסף $T(u_1),\ldots,T(u_i)\in V_i$.

יהי $u\in V_i$. אז $u=\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_iu_i$. לכן לכל $u\in V_i$:

$$T(u)=\alpha_1T(u_1)+\ldots+\alpha_iT(u_i)\in V_i$$

ז"א V_i תת מרחב T שמור.

נוכיח רק אם

נניח שקיימת סדרת תת מרחבים T שמורים $V_1\subset V_2\subset\ldots\subset V_{n-1}\subset V_n=V$ כך ש

$\forall i$ $\dim(V_i)=i$.

נבנה בסיס $U=\{u_1,\ldots,u_n\}$ של V כך שלכל $1\leq i\leq n$, $\{u_1,\ldots,u_i\}$ הוא בסיס של V_i. את הבסיס U נבנה ע"י אינדוקציה על n.

עבור $n=1$:

$\dim(V_1)=1$ לכן קיים וקטור $u_1\in V_1$. הוקטור $\{u_1\}$ מהווה בסיס של V_1.

הנחת אינדוקציה:

נניח שעבור $1 < i < n$ בנינו בסיס $\{u_1, \ldots, u_i\}$ של V_i.

$\dim(V_{i+1}) = \dim(V_i) + 1$.

לכן, קיים $u_{i+1} \in V_{i+1}/V_i$. אז $u_1, \ldots, u_i, u_{i+1} \in V_{i+1}$ בת"ל. לכן $\{u_1, \ldots, u_i, u_{i+1}\}$ בסיס של V_{i+1}.
הוכחנו דרך אינדוקציה כי קיים בסיס $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ של V כך שלכל $1 \leq i \leq n$, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ בסיס של V_i.

כעת, כיוון ש- V_i תת מרחבים T שמורים, מקבלים

$$\begin{aligned}
T(u_1) =& a_{11}u_1 \ , \\
T(u_2) =& a_{12}u_1 + a_{22}u_2 \ , \\
T(u_3) =& a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3 \ , \\
&\vdots \\
T(u_n) =& a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + a_{3n}u_3 + \ldots + a_{nn}u_n \ .
\end{aligned}$$

לכן

$$[T]_U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \ldots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

מטריצה משולשית. ■

7 צורת ז'ורדן

הגדרה 36: מטריצת ז'ורדן נילפוטנטית יסודית מסדר n

יהי $E = \{e_1, \ldots, e_n\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$.

המטריצה $J_n(0)\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מוגדרת

$$J_n(0)=\begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ \bar{0} & e_1 & e_2 & \dots & e_{n-1} \\ | & | & | & & | \end{pmatrix}$$

שהעמודה הראשונה שלה היא וקטור האפס ושלכל $2\le i\le n$ העמודה ה- i שלה היא e_{i-1}, נקראת מטריצת ז'ורדן נילפוטנטית יסודית מסדר n. כלומר:

$$J_n(0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

הגדרה 37: בלוק ז'ורדן

בלוק ז'ורדן $J_k(\lambda)$, $k\in\mathbb{N}$, $\lambda\in\mathbb{F}$ הוא מטריצה מסדר $k\times k$ מצורה

$$J_k(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

משפט 54: בלוק ז'ורדן לא לכסין

$J_k(\lambda)$ לא לכסין.

הוכחה:

$$J_k(\lambda_1)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & & \ddots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1\end{pmatrix}$$

$J_k(\lambda_1)$ משולשית עליונה. לכן הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים, והערכים עצמיים נמצאים על האלכסון הראשי (משפט 31).

$$p_{J_k(\lambda_1)}(\lambda)=\underbrace{(\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_1)}_{\text{פעמים } k}=(\lambda-\lambda_1)^k$$

יש ערך עצמי יחיד: $\lambda=\lambda_1$ מריבוי אלגברי k. נחשב את המרחב עצמי V_{λ_1}:

$$(A-\lambda_1 I_{k\times k})=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & & \ddots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

נקבל כי $\dim V_{\lambda_1}=k-1$. ז"א הריבוי גאומרטי פחות מהריבוי אלגברי, ולכן המטריצה לא לכסינה. ■

הגדרה 38: צרות ז'ורדן

צורת ז'ורדן היא מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ שעל האלכסון הראשי שלה יש בלוקים ז'ורדן ו- 0 בכל מקום אחר.

$$A=\operatorname{diag}\Big(J_{k_1}(\lambda_1),J_{k_2}(\lambda_2),\dots,J_{k_l}(\lambda_l)\Big)=\begin{pmatrix}J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0\\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \dots & J_{k_l}(\lambda_l)\end{pmatrix}$$

8 אופרטור הצמוד

משפט 55: וקטור בבסיס אורתונורמי

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ ויהי $u \in V$ וקטור של V.
אם $\{b_1, \quad \ldots \quad , b_n\}$ בסיס אורתנורמלי אז

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, b_i \rangle \, b_i \qquad (*1)$$

הוכחה: כל וקטור u ניתן לרשום כצרוף ליניארי של וקטורים של בסיס. לכן נרשום u כצרוף ליניארי של הוקטורים של הבסיס האורתונורמלי הנתון:

$$u = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \qquad (\#)$$

כאשר $\alpha_i \in \mathbb{C}$ סקלרים. כעת נקח את המכפלה הפנימית של u עם הוקטור b_j:

$$\langle u, b_j \rangle \quad = \quad \langle \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n \ , \ b_j \rangle \quad = \quad \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \ , \ b_j \right\rangle$$

המכפלה הפנימית ליניארית (כלומר למכפלה פנימית יש תכונות הליניאריות $\langle u + \mathrm{v}, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle \mathrm{v}, w \rangle$ ולכל בסקלר α: $\langle \alpha u, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle$) לכן ניתן לרשום הביטוי הזה בצורה

$$\langle u, b_j \rangle \quad = \quad \alpha_1 \langle b_1, b_j \rangle + \cdots + \alpha_n \langle b_n \ , \ b_j \rangle \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle b_i \ , \ b_j \rangle$$

מכיוון שהבסיס אורתונורמלי, אז מתקיים $\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$. לכן כל האיברים בהסכום הזה שווים ל-0 פרט לאיבר $i = j$. לכן

$$\langle u, b_j \rangle = \alpha_j \ .$$

נציב $\alpha_j = \langle u, b_j \rangle$ במשוואה (#) ונקבל

$$u = \sum_{j=1}^{n} \langle u, b_i \rangle \, b_i \ .$$

■

מסקנה 2:

דרך שקולה לרשום משוואה (1*) עבור וקטור u בבסיס אורתונורמלי $\{b_1, \quad \cdots \quad , b_n\}$ היא:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \langle u, b_1\rangle \\ \langle u, b_2\rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_i\rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_n\rangle \end{pmatrix}_B \ . \qquad (*2)$$

משפט 56: מטריצה המייצגת של אופרטור על פי בסיס אורתונורמלי

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V. אם $\{b_1, \quad \cdots \quad , b_n\}$ בסיס אורתונורמלי אז המטריצה המייצגת של T על פי בסיס B, מסומן $[T]$, היא

$$[T] = \begin{pmatrix} \langle T(b_1), b_1\rangle & \langle T(b_2), b_1\rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_1\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_1\rangle \\ \langle T(b_1), b_2\rangle & \langle T(b_2), b_2\rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_2\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_2\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_i\rangle & \langle T(b_2), b_i\rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_i\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_i\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_n\rangle & \langle T(b_2), b_n\rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_n\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_n\rangle \end{pmatrix} ,$$

כלומר האיבר ה- ij של $[T]$ הוא

$$[T]_{ij} = \langle T(b_j), b_i\rangle \ . \qquad (3*)$$

הוכחה: המטריצה המייצגת של האופרטור T על פי הבסיס $B=\{b_1, \quad \cdots \quad ,b_n\}$ נתונה על ידי הנוסחה

$$[T]=\begin{pmatrix} | & | & & | & & | \\ [T(b_1)]_B & [T(b_2)]_B & \cdots & [T(b_j)]_B & \cdots & [T(b_n)]_B \\ | & | & & | & & | \end{pmatrix}$$

כל עמודה של המטריצה היא וקטור $T(b_j)$ ($1\le j\le n$) על פי הבסיס האורתונורמלי B. אפשר לרשום כל עמודה כמו משוואה (2*) אך עם הוקטור $T(b_j)$ במקום הוקטור u:

$$[T(b_j)]_B=\begin{pmatrix} \langle T(b_j),b_1\rangle \\ \langle T(b_j),b_2\rangle \\ \vdots \\ \langle T(b_j),b_i\rangle \\ \vdots \\ \langle T(b_j),b_n\rangle \end{pmatrix} , \qquad 1\le j\le n \ .$$

אחרי הצבה של הביטוי הזה בכל עמודה של $[T]$, לכל $1\le j\le n$ בהתאמה, נקבל

$$[T]=\begin{pmatrix} \langle T(b_1),b_1\rangle & \langle T(b_2),b_1\rangle & \cdots & \langle T(b_j),b_1\rangle & \cdots & \langle T(b_n),b_1\rangle \\ \langle T(b_1),b_2\rangle & \langle T(b_2),b_2\rangle & \cdots & \langle T(b_j),b_2\rangle & \cdots & \langle T(b_n),b_2\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1),b_i\rangle & \langle T(b_2),b_i\rangle & \cdots & \langle T(b_j),b_i\rangle & \cdots & \langle T(b_n),b_i\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1),b_n\rangle & \langle T(b_2),b_n\rangle & \cdots & \langle T(b_j),b_n\rangle & \cdots & \langle T(b_n),b_n\rangle \end{pmatrix} ,$$

מכאן הרכיב הכללי בשורה ה- i בעמודה j הוא

$$[T]_{ij}=\langle T(b_j),b_i\rangle \ .$$

■

הגדרה 39: אופרטור הצמוד

יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V. האופרטור הצמוד מוגדר כך שלכל וקטורים $u,w\in V$ מתקיים

$$\langle T(u),w\rangle = \langle u,\bar{T}(w)\rangle \tag{*4}$$

משפט 57:

יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V. אם $\bar{T}$ הצמוד של T אז לכל וקטורים $u,w\in V$ מתקיים

$$\langle \bar{T}(u),w\rangle = \langle u,T(w)\rangle \tag{*5}$$

הוכחה:

$$\langle u,T(w)\rangle \overset{\text{תכונת הרמיטיות}}{=} \overline{\langle T(w),u\rangle} \overset{\text{הגדרת הצמוד}}{=} \overline{\langle w,\bar{T}(u)\rangle} \overset{\text{תכונת הרמיטיות}}{=} \langle \bar{T}(u),w\rangle$$

■

משפט 58: נוסחה של אופרטור ואופטור הצמוד על פי בסיס אורתונורמלי

אם $T:V\to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V, u וקטור של V ו- $\{b_1,\cdots,b_n\}$ בסיס אורתונומרלי של V, אז

$$T(u)=\sum_{i=1}^{n}\langle T(u),b_i\rangle\, b_i\ , \tag{6*}$$

$$\bar{T}(u)=\sum_{i=1}^{n}\langle u,\ T(b_i)\rangle\, b_i\ . \tag{7*}$$

הוכחה:

<u>הוחכה של (6*):</u>

במקום u במשוואה (1*) מציבים $T(u)$ ונקבל משוואה (6*).

<u>הוחכה של (7*):</u>

במשוואה (6*) במקום האופרטור $T(u)$ מציבים האופרטור הצמוד $\bar{T}(u)$ ואז נשתמש במשוואה (5*):

$$\bar{T}(u) \stackrel{(6*)}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle \bar{T}(u), b_i \rangle\, b_i \stackrel{(*5)}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle u, T(b_i) \rangle\, b_i \ .$$

■

משפט 59: מטריצה המייצגת של אופרטור הצמוד

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V.
אם $[T]$ המטריצה המייצגת של T אז המטריצה המייצגת של הצמוד $\bar{T}$ היא $\overline{[T]}$.
כלומר:

$$[\bar{T}] = \overline{[T]} \ . \qquad (8*)$$

הוכחה: ממשוואה (3*) האיבר ה- ij של המטריצה המייצגת של T הוא $[T]_{ij} = \langle T(b_j), b_i \rangle$. במקום T נציב $\bar{T}$ ונקבל

$$\left[\bar{T}\right]_{ij} \stackrel{(3*)}{=} \langle \bar{T}(b_j), b_i \rangle \stackrel{(*5)}{=} \langle b_j, T(b_i) \rangle \stackrel{\text{תכונת הרמטיות}}{=} \overline{\langle T(b_i), b_j \rangle} = \overline{[T]_{ji}}$$

קיבלנו ש- $\left[\bar{T}\right]_{ij} = \overline{[T]_{ji}}$ (שימו לב לסדר הפוך של האינדקסים).
במילים: האיבר ה- ij של $[\bar{T}]$ שווה לצמוד של האיבר ji של $[T]$.
לכן $[\bar{T}]$ שווה להמשוחלפת של המטריצה של הצמודים של האיברים של $[T]$. כלומר:

$$[\bar{T}] = \overline{[T]} \ .$$

■

הגדרה 40: העתקה צמודה לעצמה

העתקה ליניארית

$$T : V \to V$$

במרחב מכפלה פנימית נקראת העתקה צמודה לעצמה אם

$$\bar{T} = T \ ,$$

כלומר לכל u, v,

$$\langle T(u), \mathrm{v} \rangle = \langle u, T(\mathrm{v}) \rangle \ .$$

- העתקה צמודה לעצמה במרחב אוקלידי ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$) נקראת גם העתקה סימטרית.

- במרחב אוניטרי, $(\mathbb{F}=\mathbb{C})$ היא נקראת גם העתקה הרמיטית.

הגדרה 41: מטריצה צמודה לעצמה

מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ $(\mathbb{F}=\mathbb{R}$ או $\mathbb{F}=\mathbb{C}$) נקראת מטריצה צמודה לעצמה אם

$$A=\bar{A}\ .$$

- כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ מטריצה כזו נקראת סימטרית.
- כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ מטריצה כזו נקראת הרמיטית.

משפט 60: העתקה צמודה לעצמה אם"ם המטריצה המייצגת צמודה לעצמה

יהי V במרחב מכפלה פנימית. העתקה $T:V\to V$ צמודה לעצמה אם"ם המטריצה המייצגת של T בבסיס אורתונורמלי כלשהו של V היא צמודה לעצמה.

הגדרה 42: העתקה אנטי-סימטרית

תהי העתקה ליניארית

$$T:V\to V$$

במרחב אוקלידי V. במצב

$$\bar{T}=-T$$

אז T נקראת **אנטי-סימטרית**.

הגדרה 43: העתקה אנטי-הרמיטית

תהי העתקה ליניארית

$$T:V\to V$$

במרחב אוניטרי V. במצב

$$\bar{T}=-T$$

אז T נקראת **אנטי-הרמיטית**.

משפט 61:

תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית כלשהי.
T היא סכום של שתי העתקות, שאחת מהן צמודה לעצמה והשני אנטי-סימטרית או אנטי-הרמיטית.

הוכחה: נניח $T:V\to V$ העתקה ליניארית. נתבונן בהעתקות

$$T_1=\frac{1}{2}\left(T+\bar{T}\right)\ ,\qquad T_2=\frac{1}{2}\left(T-\bar{T}\right)\ .$$

אז

$$T=T_1+T_2\ .$$

$$\bar{T}_1 = \frac{1}{2}\left(\overline{T+\bar{T}}\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{T}+\bar{\bar{T}}\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{T}+T\right) = T_1 \ .$$

ז"א T_1 צמודה לעצמה.

$$\bar{T}_2 = \frac{1}{2}\left(\overline{T-\bar{T}}\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{T}-\bar{\bar{T}}\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{T}-T\right) = -\frac{1}{2}\left(T-\bar{T}\right) = -T_2 \ .$$

ז"א T_2 אנטי-הרמיטית.

■

משפט 62:

1) תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית כלשהי המקיימת

$$\langle T(u),\mathrm{v}\rangle = 0$$

לכל $u,\mathrm{v}\in V$. אז $T=0$.

2) אם $T:V\to V$ העתקה צמודה לעצמה המקיימת

$$\langle T(u),u\rangle = 0$$

לכל $u\in V$. אז $T=0$.

הוכחה:

1)

$$\langle T(u),\mathrm{v}\rangle = 0$$

לכל $u,\mathrm{v}\in V$. נבחר $\mathrm{v}=T(u)$. אז

$$\langle T(u),T(u)\rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T(u)=0$$

לכל $u\in V$. לכן $T=0$.

2) לפי הנתון לכל $u,\mathrm{v}\in V$,

$$\langle T(u+\mathrm{v}),u+\mathrm{v}\rangle = 0 \ , \qquad \langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle = 0 \ , \qquad \langle T(u),u\rangle = 0 \ .$$

מצד שני,

$$\begin{aligned}\langle T(u+\mathrm{v}),u+\mathrm{v}\rangle &= \langle T(u),u\rangle + \langle T(u),\mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}),u\rangle + \langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle\\ 0 &= 0 + \langle T(u),\mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}),u\rangle + 0\\ 0 &= \langle T(u),\mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}),u\rangle\end{aligned}$$

לכן לכל $u,\mathrm{v}\in V$,

$$\langle T(u),\mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}),u\rangle = 0$$

א) במקרה של מרחב אוקלידי (ז"א $\mathbb{F}=\mathbb{R}$) נקבל

$$\begin{aligned}\langle T(u),\mathrm{v}\rangle &= \langle u,T(\mathrm{v})\rangle && \text{(כי } T \text{ צמודה לעצמה)}\\ &= \langle T(\mathrm{v}),u\rangle && \text{(לפי הסימטריות של מכפלה פנימית במרחב אוקלידי)}\end{aligned}$$

לכן

$$\langle T(u),\mathrm{v}\rangle+\langle T(\mathrm{v}),u\rangle=2\langle T(u),\mathrm{v}\rangle=0$$

לכן $\langle T(u),\mathrm{v}\rangle=0$ לכל $u,\mathrm{v}\in V$. לכן לפי סעיף (1), $T=0$.

ב) במקרה של מרחב אוניטרי (ז"א $\mathbb{F}=\mathbb{C}$) נציב בשוויון שקיבלנו קודם iu במקום u:

$$\langle T(iu),\mathrm{v}\rangle+\langle T(\mathrm{v}),iu\rangle=0$$

לכן

$$i\langle T(u),\mathrm{v}\rangle-i\langle T(\mathrm{v}),u\rangle=0 \qquad\Rightarrow\qquad \langle T(u),\mathrm{v}\rangle-\langle T(\mathrm{v}),u\rangle=0$$

וגם

$$\langle T(u),\mathrm{v}\rangle+\langle T(\mathrm{v}),u\rangle=0$$

נחבר את שני השוויונים ונקבל:

$$2\langle T(u),\mathrm{v}\rangle=0 \qquad\Rightarrow\qquad T=0$$

■

הגדרה 44: העתקה אוניטרית

$T:V\to V$ במרחב מכפלה פנימית V נוצר סופית, נקראת העתקה אוניטרית אם

$$T\cdot\bar{T}=\bar{T}\cdot T=I$$

כאשר I העתקה הזהות.

העתקה אוניטרית במרחב אוקלידי (כלומר כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$) נקראת גם העתקה אורתוגונלית.

1) התנאי $\bar{T}\cdot T=T\cdot\bar{T}=I$ פירושו ש- T הפיכה ו- $T^{-1}=\bar{T}$.

2) אם V מרחב נוצר סופית ו- S,T העתקות ליניאריות מ- V ל- S אז השוויון $S\cdot T=I$ גורר את השוויון $T\cdot S=I$. ז"א כדי לוודא ש- T אוניטרית מספיק לבדוק רק אחד השוויונות $T\cdot\bar{T}=I$ או $\bar{T}\cdot T=I$.

משפט 63:

עבור העתקה לינארית $T:V\to V$ במרחב מכפלה פנימית נוצר סופית, התנאים הבאים שקולים:

(1) T העתקה אוניטרית.

(2) לכל u,v

$$\langle T(u),T(\mathrm{v})\rangle=\langle u,\mathrm{v}\rangle\ .$$

(3) לכל $u\in V$,

$$\|T(u)\|=\|u\|$$

הוכחה: $\underline{(1)\Rightarrow(2)}$

נניח ש- T אוניטרית. נבחר $u,\mathrm{v}\in V$. אז

$$\langle T(u),T(\mathrm{v})\rangle=\langle u,\bar{T}\cdot T(\mathrm{v})\rangle=\langle u,I(\mathrm{v})\rangle=\langle u,\mathrm{v}\rangle\ .$$

$\underline{(2)\Rightarrow(3)}$

נתון שלכל u,v, $\langle T(u),T(\mathrm{v})\rangle=\langle u,\mathrm{v}\rangle$. בפרט:

$$\|T(u)\|^2=\langle T(u),T(u)\rangle=\langle u,u\rangle=\|u\|^2\ .$$

$\underline{(3)\Rightarrow(1)}$

$$\begin{aligned}0=&\|T(u)\|^2-\|u\|^2\\ &=\langle T(u),T(u)\rangle-\langle u,u\rangle\\ &=\langle\bar{T}\cdot T(u),u\rangle-\langle u,u\rangle\end{aligned}$$

לכן

$$\langle\bar{T}\cdot T(u),u\rangle=\langle u,u\rangle$$

לכן $\bar{T}\cdot T=I$.

■

משפט 64:

עבור העתקה ליניארית T התנאי שלכל $u\in V$,

$$\|T(u)\|=\|u\|$$

שקול לתנאי שלכל $u,\mathrm{v}\in V$

$$\|T(u)-T(\mathrm{v})\|=\|u-\mathrm{v}\|\ .$$

הוכחה:

1) נניח $\|T(u)\|=\|u\|$ לכל $u\in V$. נקח $u,\mathrm{v}\in V$. אז

$$\|T(u-\mathrm{v})\|=\|u-\mathrm{v}\|\qquad\Rightarrow\qquad\|T(u)-T(\mathrm{v})\|=\|u-\mathrm{v}\|\ .$$

2) נניח $\|T(u)-T(\mathrm{v})\|=\|u-\mathrm{v}\|$ לכל $u,\mathrm{v}\in V$. נגדיר $\mathrm{v}=0$. אז

$$\|T(u)-T(0)\|=\|T(u)\|=\|u-0\|=\|u\|\ .$$

■

משפט 65:

יהי V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית, ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית.

א) אם T העתקה אוניטרית, ואם $B=\{b_1,\ldots,b_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V,
אז גם $\{T(b_1),\ldots,T(b_n)\}$ בסיס אורתונורמלי.

ב) אם קיים בסיס אורתונורמלי של V שהעתקה T מעתיקה לבסיס אורתונורמלי, אז T אוניטרית.

הוכחה:

א)

$$\langle T(b_i),T(b_j)\rangle=\langle b_i,b_j\rangle=\begin{cases}0 & i\neq j\ ,\\ 1 & i=j\ .\end{cases}$$

לכן $\{T(b_1),\ldots,T(b_n)\}$ בסיס אורתונורמלי.

ב) נניח ש- $B=\{b_1,\ldots,b_n\}$ ו- $B'=\{T(b_1),\ldots,T(b_n)\}$ בסיסים אורתונורמליים. לכל $u,\mathrm{v}\in V$,

$$u=\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i\ ,\qquad \mathrm{v}=\sum_{i=1}^n \beta_i b_i\ .$$

אז

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle=\sum_{i=1}^n \alpha_i\bar{\beta}_i\ .$$

$$\langle T(u),T(\mathrm{v})\rangle=\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i T(b_i),\sum_{i=1}^n \beta_i T(b_i)\right\rangle=\sum_{i=1}^n \alpha_i\bar{\beta}_i$$

ז"א $\langle T(u),T(\mathrm{v})\rangle=\langle u,\mathrm{v}\rangle$. לכן T העתקה אוניטרית.

■

הגדרה 45:

תהי A מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$. ל- A קוראים מטריצה אוניטרית אם

$$A\cdot\bar{A}=\bar{A}\cdot A=I$$

(תנאי שקול $A^{-1}=\bar{A}$.)

אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ למטריצה אוניטרית קוראים מטריצה אורתוגונלית, ז"א כאשר

$$A\cdot A^t=A^t\cdot A=I\ ,$$

או, באופן שקול:

$$A^{-1}=A^t\ .$$

משפט 66:

1) אם A מטריצה אוניטרית מסדר n מעל שדה $\mathbb{F}$, אז גם שורותיה וגם עמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{F}^n$.

2) אם שורות (או עמודות) של מטריצה ריבועית מסדר n מעל $\mathbb{F}$ מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ ביחס מכפלה הפנימית הסטנדרטית אז המטריצה אוניטרית.

הוכחה: נסמן

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\ ,\qquad \bar{A}=\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \cdots & \bar{a}_{n1}\\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{nn}\end{pmatrix}\ .$$

1) נניח ש A אוניטרית. אז $A\cdot\bar{A}=I$ וגם $\bar{A}\cdot A=I$. אז האיבר (i,j) של המטריצה $A\cdot\bar{A}$ הוא:

$$\left(A\bar{A}\right)_{ij}=\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\bar{a}_{j1}\\ \vdots \\ \bar{a}_{jn}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^n a_{ik}\bar{a}_{jk}$$

לכן מטריצה A אוניטרית כאשר

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}\bar{a}_{jk}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

הביטוי $\sum_{k=1}^n a_{ik}\bar{a}_{jk}$ הוא המכפלה פנימית ב- $\mathbb{F}^n$ של השורה ה- i והשורה ה- j של מטריצה A. לכן, אם A אוניטרית, אז שורות A הן בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$.

באופן דומה, האיבר ה- (i,j) של המטריצה $\bar{A}A$:

$$\left(\bar{A}A\right)_{ij}=\begin{pmatrix} \bar{a}_{1i} & \cdots & \bar{a}_{ni}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots \\ a_{nj}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^n \bar{a}_{ki}a_{kj}$$

זאת המכפלה הפנימית הסטנדרטית של עמודות מטריצה A.

המכפלה הזאת שווה ל- 1 עבור $i=j$ ושווה ל- 0 עבור $i\neq j$.

לכן עמודות A מהוות בסיס אורתונורמלי של A.

2) נניח ששורות מטריצה A מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$. אז האיבר (i,j) של $A\cdot\bar{A}$:

$$\left(A\bar{A}\right)_{ij}=\begin{pmatrix}a_{i1} & \ldots & a_{in}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\bar{a}_{j1}\\ \vdots\\ \bar{a}_{jn}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\bar{a}_{jk}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} .$$

ז"א $A\bar{A}=I \Leftarrow A$ אוניטרית.

נניח כעת, שעמודות A מהוות בסיס אורתונורמלי. אז

$$\left(\bar{A}A\right)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_{ki}a_{kj}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} .$$

ז"א $\bar{A}\cdot A=I \Leftarrow A$ אוניטרית.

■

משפט 67:

עבור העתקה לינארית $T:V\to V$ (כאשר V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית) התנאים הבאים שקולים זה לזה:

א) T אוניטרית, ז"א

$$\bar{T}\cdot T=T\cdot\bar{T}=1$$

ב) לכל $u,\mathrm{v}\in V$:

$$\langle T(u),T(\mathrm{v})\rangle=\langle u,\mathrm{v}\rangle \ .$$

ג) לכל $u\in V$:

$$\|T(u)\|=\|u\|.$$

ד) לכל $u,\mathrm{v}\in V$:

$$\|T(u)-T(\mathrm{v})\|=\|u-\mathrm{v}\| \ .$$

ה) T מעבירה בסיס אורתונורמלי כלשהו של V לבסיס אורתונורמלי .

ו) המטריצה המייצגת של T לפי בסיס אורתונורמלי מסוים של V היא אוניטרית.

9 אופרטור נורמלי

משפט 68: ערכים עצמיים של העתקה צמודה לעצמה ממשיים

כל הערכים עצמיים של העתקה (מטריצה) צמודה לעצמה הם ממשיים.

הוכחה: נניח $T:V\to V$ העתקה צמודה לעצמה, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v})=\lambda\mathrm{v}$. אז

$$\begin{aligned} \langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \lambda\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &=\lambda\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{ליניאריות של מכפלה פנימית}) \end{aligned} .$$

מצד שני

$$\begin{aligned} \langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \mathrm{v},\bar{T}(\mathrm{v})\rangle && (\text{הגדרה של העתקה צמודה})\\ &= \langle \mathrm{v},T(\mathrm{v})\rangle && (T \text{ צמודה לעצמה})\\ &= \langle \mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &=\bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{ליניאריות חלקית של מכפלה פנימית}) \end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=\bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \quad\Rightarrow\quad (\lambda-\bar{\lambda})\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=0 \ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v}\neq 0 \Leftarrow \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\neq 0 \Leftarrow (\lambda-\bar{\lambda})=0 \Leftarrow \lambda=\bar{\lambda}$.

■

משפט 69: ערכים עצמיים של העתקה אנטי-הרמיטית מדומים

אם T העתקה אנטי-הרמיטית אז כל הערכים העצמיים של T הם מספרים מדומים.

הוכחה:
נניח $T:V\to V$ העתקה צמודה לעצמה, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v})=\lambda\mathrm{v}$.
אז

$$\begin{aligned} \langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \lambda\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &=\lambda\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{ליניאריות של מכפלה פנימית}) \end{aligned} .$$

מצד שני

$$\begin{aligned} \langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \mathrm{v},\bar{T}(\mathrm{v})\rangle && (\text{הגדרה של העתקה צמודה})\\ &= \langle \mathrm{v},-T(\mathrm{v})\rangle && (T \text{ אנטי-הרמיטית})\\ &= -\langle \mathrm{v},T(\mathrm{v})\rangle \\ &= -\langle \mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &= -\bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{ליניאריות חלקית של מכפלה פנימית}) \end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=-\bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \quad\Rightarrow\quad (\lambda+\bar{\lambda})\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=0 \ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v}\neq 0 \Leftarrow \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\neq 0 \Leftarrow (\lambda+\bar{\lambda})=0 \Leftarrow \lambda=-\bar{\lambda}$.

■

משפט 70: פולינום אופייני של העתקה צמודה לעצמה מתפרק לגורמים לינארים ממשיים

תהי T העתקה (מטריצה) צמודה לעצמה.

1) הפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים.

2) השורשים של הפולינום האופייני של T ממשיים.

הוכחה: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית. תהי $[T]_B$ המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס B. עם $\dim(V)=n$ אז $[T]_B\in\mathbb{F}^{n\times n}$.

אם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ אז הפולינום האופייני של $[T]_B$ הוא פולינום מסדר n אם מקדמים מרוכבים:

$$m_T(x)=a_0+a_1x+\ldots x^n\ ,$$

כאשר $a_i\in\mathbb{C}$, $1\leq i\leq n$.
לפי המשפט היסודי של האלגברה יש לפולינום הזה פירוק לגורמים לינאריים:

$$m_T(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+x^n=(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_n)\ ,$$

$\lambda_i\in\mathbb{C}$, $1\leq i\leq n$.
השורשים של m_T הם הערכים העצמיים של T. לפי משפט 68, אם T צמודה לעצמה אז כל הערכים העצמיים של T הם מספרים ממשיים.
כלומר, $\lambda_i\in\mathbb{R}$, $1\leq i\leq n$.

אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז הפולינום האופייני של $[T]_B$ הוא פולינום מסדר n עם מקדמים ממשיים:

$$m_T(x)=a_0+a_1x+\ldots x^n\ ,$$

כאשר $a_i\in\mathbb{R}$, $1\leq i\leq n$. מכאן ההוכחה היא אותה דבר של המקרה של $\mathbb{F}=\mathbb{C}$. ■

משפט 71: ערך מוחלט של כל ערך עצמי של העתקה אוניטרית שווה 1

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbb{C}$, ויהי T העתקה $T:V\to V$ אוניטרית. אז הערך מוחלט של כל ערך עצמי של T שווה ל 1.

הוכחה:
נניח $T:V\to V$ העתקה אוניטרית, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v})=\lambda\mathrm{v}$.
אז

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),T(\mathrm{v})\rangle &=\langle\lambda\mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &=\lambda\langle\mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית})\\ &=\lambda\bar{\lambda}\langle\mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית})\end{aligned}\ .$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),T(\mathrm{v})\rangle &=\langle\mathrm{v},\bar{T}T(\mathrm{v})\rangle && (\text{הגדרה של העתקה צמודה})\\ &=\langle\mathrm{v},I(\mathrm{v})\rangle && (T\text{ אוניטרית})\\ &=\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\bar{\lambda}\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\quad\Rightarrow\quad(\lambda\cdot\bar{\lambda}-1)\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=0\ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v}\neq0 \Leftarrow \langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\neq0 \Leftarrow (\lambda\cdot\bar{\lambda}-1)=0 \Leftarrow \lambda\bar{\lambda}=1 \Leftarrow |\lambda|^2=1$.

■

הגדרה 46: העתקה נורמלית

1) העתקה $T:V\to V$ במרחב מכפלה פנימית נקראת העתקה נורמלית אם

$$T\cdot \bar{T}=\bar{T}\cdot T\ .$$

2) מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת מטריצה נורמלית אם

$$A\cdot \bar{A}=\bar{A}\cdot A\ .$$

מטריצה

הגדרה 47: העתקה לכסינה אוניטרית

(1) תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. A נקראת לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה אוניטרית Q כך ש-

$$D=Q^{-1}AQ$$

כאשר D מטריצה אלכסונית.

(2) תהי העתקה לינארית $T:V\to V$, כאשר V מרחב מכפלה פנימית n ממדי מעל שדה $\mathbb{F}$. T נקראת העתקה לכסינה אוניטרית אם קיים בסיס אורתונורמלי $B=\{u_1,\ldots,u_n\}$ של V, שבו T מיוצגת ע"י מטריצה אלכסונית.

במקרה של $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ למטריצה (העתקה) לכסינה אוניטרית קוראים גם לכסינה אורתוגונלית.

משפט 72: העתקה לכסינה אוניטרית היא נורמלית

תהי $T:V\to V$ במרחב מכפלה פנימית V לכסינה אוניטרית. אז T העתקה נורמלית, כלומר

$$T\cdot \bar{T}=\bar{T}\cdot T\ .$$

הוכחה: נניח כי $T:V\to V$ היא העתקה לכסינה אוניטרית. לכן (משפט 66) קיים בסיס אורתונורמלי B של V כך ש- $[T]_B$ אלכסונית. נרשום

$$[T]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\ .$$

אזי

$$\left[\bar{T}\right]_B = \overline{[T]_B} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

גם מטריצה אלכסונית. מטריצות אלכסוניות מתחלפות, (ראו דוגמה **??**), לכן $\left[\bar{T}\right]_B \cdot [T]_B = [T]_B \cdot \left[\bar{T}\right]_B$, לכן

$$\left[T \cdot \bar{T}\right]_B = \left[\bar{T} \cdot T\right]_B \quad \Rightarrow \quad T \cdot \bar{T} = \bar{T} \cdot T \ .$$

זה תנאי הכרחי לכך ש- T לכסינה אוניטרית. תוצאה מקבילה מתקיימת גם עבור מטריצות:

אם מטריצה ריבועית A לכסינה אוניטרית, אז

$$A \cdot \bar{A} = \bar{A} \cdot A$$

■

משפט 73: העתקה לכסינה אורתוגונלית היא נורמלית וסימטרית

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ותהי $T : V \to V$ העתקה לכסינה אורתוגונלית מעל שדה $\mathbb{R}$.

1) T העתקה נורמלית.

2) T העתקה סימטרית.

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה לכסינה אורתוגונלית מעל שדה $\mathbb{R}$.

3) A העתקה נורמלית.

4) A העתקה סימטרית.

הוכחה:

1) כבר הוכחנו זאת למעלה במשפט 74. T לכסין אורתוגונלי אז קיים בסיס אורתוגונלי B של V כך שהמטריצה המייצגת $[T]_B$ לפי בסיס B אלכסונית:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

מכאן

$$[\bar{T}]_B = \overline{[T]_B} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

אלכסונית. מטריצות אלכסוניות מתחלפות לכן

$$[\bar{T}]_B \cdot [T]_B = [T]_B \cdot [\bar{T}]_B$$

ולכן T נורמלי.

2) T לכסין אורתוגונלי אז קיים בסיס אורתוגונלי B של V כך שהמטריצה המייצגת $[T]_B$ לפי בסיס B אלכסונית:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

T אופרטור ממרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ למרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ לכן $[T]_B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, כלומר האיברים של המטריצה $[T]_B$ ממשיים, כלומר $\lambda_1, \cdots \lambda_n, \in \mathbb{R}$, ובפרט $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1, \cdots, \bar{\lambda}_n = \lambda_n$. לכן $[\bar{T}]_B = \overline{[T]_B} = [T]_B^t$. המטריצה $[T]_B$ אלכסונית לכן $[T]_B^t = [T]_B$ לכן T סימטרי.

3) נניח ש- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ לכסינה אורתוגונלית. אז קיימת Q אורתוגונלית ו- D אלכסונית כך ש-

$$A = Q \cdot D \cdot Q^t \ .$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ לכן $\bar{A} = A^t$. מכאן

$$\begin{aligned} A \cdot \bar{A} = A \cdot A^t &= \left(QDQ^t\right)\left(QDQ^t\right)^t \\ &= QD\underbrace{Q^tQ}_{=I}D^tQ^t && \text{(הגדרה של השיחלוף)} \\ &= QDID^tQ^t && (Q \text{ א"ג אז } Q^tQ = I) \\ &= QDD^tQ^t \\ &= QDDQ^t && (D \text{ אלכסונית אז } D^t = D) \ . \end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\bar{A}\cdot A = A^t\cdot A &= \left(QDQ^t\right)^t\cdot\left(QDQ^t\right)\\ &= QD^t\,\underbrace{Q^tQ}_{=I}\,DQ^t && \text{(הגדרה של השיחלוף)}\\ &= QD^tIDQ^t && (Q\text{ א"ג אז } Q^tQ=I)\\ &= QD^tDQ^t\\ &= QDDQ^t && (D\text{ אלכסונית אז } D^t=D)\ .\end{aligned}$$

לכן $A\cdot\bar{A}=\bar{A}\cdot A$.

4) נניח ש- $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ לכסינה אורתוגונלית. אז קיימת Q אורתוגונלית ו- D אלכסונית כך ש-

$$A=Q\cdot D\cdot Q^t\ .$$

$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ לכן $\bar{A}=A^t$. מכאן

$$\begin{aligned}\bar{A}=A^t &= \left(QDQ^t\right)^t\\ &= QD^tQ^t && \text{(הגדרה של השיחלוף)}\\ &= QDQ^t && (D\text{ אלכסונית אז } D^t=D)\\ &= A\ .\end{aligned}$$

■

הגדרה 48: העתקה לכסינה אוניטרית

(1) תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. A נקראת לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה אוניטרית Q כך ש-

$$D=Q^{-1}AQ$$

כאשר D מטריצה אלכסונית.

(2) תהי העתקה לינארית $T:V\to V$, כאשר V מרחב מכפלה פנימית n ממדי מעל שדה $\mathbb{F}$. T נקראת העתקה לכסינה אוניטרית אם קיים בסיס אורתונורמלי $B=\{u_1,\dots,u_n\}$ של V, שבו T מיוצגת ע"י מטריצה אלכסונית.

במקרה של $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ למטריצה (העתקה) לכסינה אוניטרית קוראים גם לכסינה אורתוגונלית.

משפט 74: העתקה לכסינה אוניטרית היא נורמלית

תהי $T:V\to V$ במרחב מכפלה פנימית V לכסינה אוניטרית. אז T העתקה נורמלית, כלומר

$$T\cdot\bar{T}=\bar{T}\cdot T\ .$$

הוכחה: נניח כי $T:V\to V$ היא העתקה לכסינה אוניטרית. לכן (משפט 66) קיים בסיס אורתונורמלי B של V כך ש- $[T]_B$ אלכסונית. נרשום

$$[T]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} .$$

אזי

$$\left[\bar{T}\right]_B=\overline{[T]_B}=\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n\end{pmatrix}$$

גם מטריצה אלכסונית. מטריצות אלכסוניות מתחלפות, (ראו דוגמה **??**), לכן $[T]_B\cdot\left[\bar{T}\right]_B=\left[\bar{T}\right]_B\cdot[T]_B$, לכן

$$\left[T\cdot\bar{T}\right]_B=\left[\bar{T}\cdot T\right]_B \quad\Rightarrow\quad T\cdot\bar{T}=\bar{T}\cdot T .$$

זה תנאי הכרחי לכך ש- T לכסינה אוניטרית. תוצאה מקבילה מתקיימת גם עבור מטריצות:

אם מטריצה ריבועית A לכסינה אוניטרית, אז

$$A\cdot\bar{A}=\bar{A}\cdot A$$

■

משפט 75: העתקה לכסינה אורתוגונלית היא נורמלית וסימטרית

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ותהי $T:V\to V$ העתקה לכסינה אורתוגונלית מעל שדה $\mathbb{R}$.

1) T העתקה נורמלית.

2) T העתקה סימטרית.

תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה לכסינה אורתוגונלית מעל שדה $\mathbb{R}$.

3) A העתקה נורמלית.

4) A העתקה סימטרית.

הוכחה:

1) כבר הוכחנו זאת למעלה במשפט 74. T לכסין אורתוגונלי אז קיים בסיס אורתוגונלי B של V כך שהמטריצה המייצגת $[T]_B$ לפי בסיס B אלכסונית:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

מכאן

$$[\bar{T}]_B = \overline{[T]_B} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

אלכסונית. מטריצות אלכסוניות מתחלפות לכן

$$[\bar{T}]_B \cdot [T]_B = [T]_B \cdot [\bar{T}]_B$$

ולכן T נורמלי.

2) T לכסין אורתוגונלי אז קיים בסיס אורתוגונלי B של V כך שהמטריצה המייצגת $[T]_B$ לפי בסיס B אלכסונית:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

T אופרטור ממרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ למרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ לכן $[T]_B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, כלומר האיברים של המטריצה $[T]_B$ ממשיים, כלומר $\lambda_1,\cdots\lambda_n,\in\mathbb{R}$, ובפרט $\bar{\lambda}_1=\lambda_1,\cdots,\bar{\lambda}_n=\lambda_n$. לכן $[\bar{T}]_B=\overline{[T]_B}=[T]_B^t$. המטריצה $[T]_B$ אלכסונית לכן $[T]_B^t=[T]_B$ לכן T סימטרי.

3) נניח ש- $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ לכסינה אורתוגונלית. אז קיימת Q אורתוגונלית ו- D אלכסונית כך ש-

$$A = Q\cdot D\cdot Q^t \ .$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ לכן $\bar{A} = A^t$. מכאן

$$A \cdot \bar{A} = A \cdot A^t = \left(QDQ^t\right)\left(QDQ^t\right)^t$$

$$= QD\underbrace{Q^tQ}_{=I}D^tQ^t \qquad \text{(הגדרה של השיחלוף)}$$

$$= QDID^tQ^t \qquad (Q \text{ א"ג אז } Q^tQ = I)$$

$$= QDD^tQ^t$$

$$= QDDQ^t \qquad (D \text{ אלכסונית אז } D^t = D) \ .$$

מצד שני

$$\bar{A} \cdot A = A^t \cdot A = \left(QDQ^t\right)^t \cdot \left(QDQ^t\right)$$

$$= QD^t\underbrace{Q^tQ}_{=I}DQ^t \qquad \text{(הגדרה של השיחלוף)}$$

$$= QD^tIDQ^t \qquad (Q \text{ א"ג אז } Q^tQ = I)$$

$$= QD^tDQ^t$$

$$= QDDQ^t \qquad (D \text{ אלכסונית אז } D^t = D) \ .$$

לכן $A \cdot \bar{A} = \bar{A} \cdot A$.

(4 נניח ש- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ לכסינה אורתוגונלית. אז קיימת Q אורתוגונלית ו- D אלכסונית כך ש-

$$A = Q \cdot D \cdot Q^t \ .$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ לכן $\bar{A} = A^t$. מכאן

$$\bar{A} = A^t = \left(QDQ^t\right)^t$$

$$= QD^tQ^t \qquad \text{(הגדרה של השיחלוף)}$$

$$= QDQ^t \qquad (D \text{ אלכסונית אז } D^t = D)$$

$$= A \ .$$

■

משפט 76: משפט לכסון אוניטרי

(1 תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית במרחב מכפלה פנימית אוניטרי נוצר סופית. T לכסינה אוניטרית אם"ם היא נורמלית.

(2 תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית במרחב מכפלה פנימית אוקלידי נוצר סופית.

T לכסינה אורתונורמלית מעל $\mathbb{R}$ אם"ם היא סימטרית.

3) תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית (ממשית או מרוכבת).
A לכסינה אוניטרית אם"ם היא נורמלית.

4) תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית ממשית. A לכסינה אורתוגונלית אם"ם היא סימטרית.

משפט 77: ווקטור עצמי וערך עצמי של העתקה וצמודתה

אם v וקטור עצמי של העתקה נורמלית T, השייך לערך עצמי λ.
אז $\bar{\lambda}$ הוא ערך עצמי של $\bar{T}$ ו- v הוא גם וקטור עצמי של $\bar{T}$ השייך ל- $\bar{\lambda}$.

הוכחה: נוכיח קודם שלכל $\mathrm{v} \in V$ מתקיים $\|T(\mathrm{v})\| = \|\bar{T}(\mathrm{v})\|$.

$$\begin{aligned}\|T(\mathrm{v})\| &= \langle T(\mathrm{v}), T(\mathrm{v})\rangle \\ &= \langle \mathrm{v}, \bar{T}T(\mathrm{v})\rangle \\ &= \langle \mathrm{v}, T\bar{T}(\mathrm{v})\rangle \\ &= \langle \bar{T}(\mathrm{v}), \bar{T}(\mathrm{v})\rangle \\ &= \|\bar{T}(\mathrm{v})\|^2 \ .\end{aligned}$$

נניח כעת ש- v וקטור עצמי:

$$T(\mathrm{v}) = \lambda \mathrm{v} \ .$$

אז

$$(T-\lambda I)(\mathrm{v}) = 0 \ .$$

לכן

$$\|(T-\lambda I)(\mathrm{v})\| = 0 \ .$$

הוכחנו קודם כי $T-\lambda I$ העתקה נורמלית (ראו דוגמה **??**). לכן

$$\|(T-\lambda I)(\mathrm{v})\| = \|\overline{(T-\lambda I)}(\mathrm{v})\| \ ,$$

ז"א

$$\|\overline{(T-\lambda I)}(\mathrm{v})\| = \|\bar{T}(\mathrm{v}) - \bar{\lambda} I \mathrm{v}\| = 0 \ .$$

לכן

$$\bar{T}(\mathrm{v}) - \bar{\lambda}\mathrm{v} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{T}(\mathrm{v}) = \bar{\lambda}\mathrm{v} \ .$$

ז"א v הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי $\bar{\lambda}$.

■

משפט 78: וקטורים עצמיים של העתקה נורמלית של ערכים עצמיים שונים אורתוגונליים

תהי T העתקה נורמלית במרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{F}$. וקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים שונים, אורתוגונליים זה מזה.

הוכחה: יהיו $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ וקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים λ_1, λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$T(\mathrm{v}_1) = \lambda_1 \mathrm{v}_1 \ , \qquad T(\mathrm{v}_2) = \lambda_2 \mathrm{v}_2 \ .$$

אז

$$\langle T(\mathrm{v}_1), \mathrm{v}_2 \rangle = \langle \lambda_1 \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \rangle = \lambda_1 \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \rangle$$

וגם

$$\langle T(\mathrm{v}_1), \mathrm{v}_2 \rangle = \langle \mathrm{v}_1, \bar{T}(\mathrm{v}_2) \rangle = \langle \mathrm{v}_1, \bar{\lambda}_2 \mathrm{v}_2 \rangle = \lambda_2 \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \rangle$$

ז"א

$$\lambda_1 \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \rangle = \lambda_2 \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \rangle \qquad \Rightarrow \qquad (\lambda_1 - \lambda_2) \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \rangle = 0 \ .$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ לכן $\langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \rangle = 0$.

■

10 משפט הפירוק הספקטרלי

משפט 79: סכום ישר של מרחבים עצמיים של העתקה נורמלית

תהי T העתקה נורמלית במרחב מכפלה אוניטרי V ויהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ כל הערכים העצמיים השונים של T. אם $V_1, \ldots, V_k$ הם התת-מרחבים העצמיים השייכים ל- $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ בהתאמה, אזי

1) $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$

2) $V_i \perp V_j$ לכל $i \neq j$.

הוכחה:

1) T נורמלית ולכן לכסינה אוניטרי (משפט לכסון אוניטרי 76). לכן סכום המימדים של כל התת-מרחביים העצמיים שווה למימד של V, כלומר

$$\dim(V) = \dim(V_1) + \ldots + \dim(V_k) \ .$$

נסמן $\dim(V_i) = n_i$ ו-

$$\{\mathrm{v}_{i1}, \ldots, \mathrm{v}_{in_i}\}$$

בסיס של V_i. אז הקבוצה

$$\bigcup_{i=1}^{k} \{\mathrm{v}_{i1}, \ldots, \mathrm{v}_{in_i}\}$$

היא בסיס של V. ז"א כל וקטור של V הוא צירוף לינארי של הוקטורים העצמיים. לכן לכל $u \in V$,

$$u \in V_1 + V_2 + \ldots + V_k \ .$$

אפשר להראות כי $V_i \cap V_j = \{\bar{0}\}$ דרך השלילה. נניח ש $\exists\ u \neq \bar{0} \in V_i \cap V_j$ כאשר V_i המרחב עצמי של λ_i ו- V_j המרחב עצמי של λ_j ו $\lambda_i \neq \lambda_j$. אז $T(u) = \lambda_i \cdot u$ וגם $T(u) = \lambda_j \cdot u$, ומכאן

$$\lambda_i u = \lambda_j u \quad \Rightarrow \quad (\lambda_i - \lambda_j) u = 0$$

$u \neq \bar{0}$ כי הוא וקטור עצמי לכן $\lambda_i = \lambda_j$, סתירה.

לכן
$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k \ .$$

2) עבור T נורמלית, וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים הם אורתוגונלים (משפט 78), לכן $V_i \perp V_j$ $\forall i \neq j$.

■

משפט 80: משפט הפירוק הספקטרלי

תהי T העתקה נורמלית במרחב אוניטרי V נוצר סופית יהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ כל הערכים העצמיים השונים של T ויהיו $V_1, \ldots, V_k$ המרחבים העצמיים המתאימים. לכל $1 \leq i \leq k$ נסמן ב- P_i את ההעתקה ההטלה האורתוגונלית על V_i. אזי

1) $T = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k$

2) $I = P_1 + \ldots + P_k$

3) לכל $i \neq j$, $P_i \cdot P_j = 0$

4) לכל i, $P_i^2 = P_i$

5) לכל i, $\bar{P}_i = P_i$.

הוכחה:

1) לפי משפט 79, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ וגם $V_i \perp V_j$ עבור $i \neq j$ לכן כל וקטור $\mathrm{v} \in V$ ניתן להציג בצורה
$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_1 + \ldots + \mathrm{v}_k$$
כאשר $\mathrm{v}_i \in V_i$ $(1 \leq i \leq k)$. אז
$$T(\mathrm{v}) = T(\mathrm{v}_1) + \ldots + T(\mathrm{v}_k) = \lambda_1 \mathrm{v}_1 + \ldots + \lambda_k \mathrm{v}_k = \lambda_1 P_1(\mathrm{v}) + \ldots + \lambda_k P_k(\mathrm{v}) = (\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k)(\mathrm{v}) \ .$$
לכן
$$T = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k \ .$$

2) לכל $\mathrm{v} \in V$,
$$(P_1 + \cdots + P_k)(\mathrm{v}) = P_1(\mathrm{v}) + \ldots + P_k(\mathrm{v}) = \mathrm{v}_1 + \ldots + \mathrm{v}_k = \mathrm{v}$$
לכן $P_1 + \ldots + P_k = I$.

3) לכל $i \neq j$ ולכל $\mathrm{v} \in V$,
$$(P_i P_j)(\mathrm{v}) = P_i(P_j(\mathrm{v})) = P_i(\mathrm{v}_j) = 0$$
כי $V_i \perp V_j$ לכן $P_i P_j = 0$ לכל $i \neq j$.

4) לכל $\mathrm{v} \in V$,

$$P_i^2(\mathrm{v}) = P_i\left(P_i(\mathrm{v})\right) = P_i(\mathrm{v}_i) = \mathrm{v}_i = P_i(\mathrm{v})$$

לכן $P_i^2 = P_i$,

5) לכל $u, \mathrm{v} \in V$,

$$u = u_1 + \ldots + u_k \ , \qquad \mathrm{v} = \mathrm{v}_1 + \ldots + \mathrm{v}_k$$

כאשר $u_i, \mathrm{v}_i \in V_i$ $(1 \leq i \leq k)$. אז

$$\langle P_i(\mathrm{v}), u \rangle = \langle \mathrm{v}_i, u_1 + \ldots + u_k \rangle = \langle \mathrm{v}_i, u_i \rangle$$

מצד שני:

$$\langle \mathrm{v}, P_i(u) \rangle = \langle \mathrm{v}_1 + \ldots = +\mathrm{v}_k, u_i \rangle = \langle \mathrm{v}_i, u_i \rangle$$

ז"א

$$\langle P_i(\mathrm{v}), u \rangle = \langle \mathrm{v}, P_i(u) \rangle$$

לכל $u, \mathrm{v} \in V$. לכן $\bar{P}_i = P_i$.

■

11 פולינומים

משפט 81:

הפולינום המינימלי הוא יחיד.

הוכחה: נניח שיש שני פולינומים $f_1(x)$ ו- $f_2(x)$, $f_1(x) \neq f_2(x)$ מאותו סדר, כלומר

$$f_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{k-1} x^{k-1} + x^k \ ,$$

$$f_2(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_{k-1} x^{k-1} + x^k \ .$$

כך ש $f_1(A) = 0$ ו- $f_2(A) = 0$, אז

$$(f_1 - f_2)(A) = 0 \ .$$

$(f_1 - f_2)(x)$ פולינום מסדר קטן מ- k. סתירה. ■

משפט 82: משפט חילוק של פולינומים

יהיו $f(x), g(x)$ פוליניומים כך ש- $\deg g \leq \deg f$. אז קיימים פולינמים $r(x), q(x)$ יחידים כך ש

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

כאשר

$$\deg\, r(x) < \deg\, g(x), \qquad \deg\, g(x) \leq \deg\, f(x) \ .$$

משפט 83: פולינום שמתאפס ע"י A מחלק את הפולינום המינימלי

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית ויהי $f(x)$ פולינום. אם $f(A)=0$ אז

$$m_A(x) \mid f(x) \ .$$

הוכחה: נחלק את $f(x)$ ב- $m_A(x)$. לפי משפט חילוק פולינומים,

$$f(x) = m_A(x)\cdot q(x) + r(x)$$

כאשר $\deg\, r(x) < \deg\, m_A(x)$. אז

$$f(A) = q(A) m_A(A) + r(A) \ .$$

$f(A)=0$ ו $m_A(A)=0$ לכן $r(A)=0$.

ז"א או $r(x)$ הוא הפולינום האפס או הוא לא פולינום האפס אבל $r(x)$ מתאפס ע"י A.
$m_A(x)$ הוא הפולינום המינימלי ו $\deg\, r(x) < \deg\, m_A(x)$, כלומר $m_A(x)$ הוא הפולינום מדרגה הכי נמוכה המתאפס ע"י A.
לכן $r(A)=0$ אם"ם $r(x)=0$, כלומר $r(x)$ פולינום האפס.
כלומר קיבלנו ש- $f(x)=q(x)\cdot m_A(x)$ ולכן $m_A(x) \mid f(x)$. ∎

מסקנה 3: פולינום המינימלי מחלק את הפולינום האופייני

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. אם $p_A(x)$ הפולינום האופייני ו- $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A, אז

$$m_A(x) \mid p_A(x) \ .$$

הוכחה: לפי משפט קיילי המילטון , $p_A(A)=0$. הפולינום המינימלי מחלק כל פולינום המתאפס ע"י A, לכן $m_A(x)|p_A(x)$. ∎

משפט 84: $p_A(x)$ מחלק כל פולינום המתאפס ע"י A בחזקת הסדר של A.

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. יהי $p_A(x)$ הפולינום האופייני של A. אם A מאפסת את הפולינום $f(x)$, כלומר אם $f(A)=0$, אז

$$p_A(x) \mid f^n(x) \ .$$

הוכחה: $\deg\, p_A(x)=n$.
$f(A)=0$ אז $f(x)$ אינו פולינום קבוע, ז"א $\deg\, f(x)\geq 1$, ולכן $\deg\, p_A(x) \leq \deg\, f^n(x)$.
נחלק $f^n(x)$ ב- $p_A(x)$ ע"י האלגוריתם איוקלידי:

$$f^n(x) = q(x) p_A(x) + r(x) \ , \qquad (*1)$$

$\deg\, r(x) < \deg\, p_A(x) \leq \deg\, f^n(x)$.

$m_A(x)|p_A(x)$ אז $p_A(x)=q_1(x)m_A(x)$. נציב זה ב- (*1) ונקבל

$$f^n(x)=q_1(x)q(x)m_A(x)+r(x)\ . \qquad (*2)$$

$f(A)=0$ לכן $f^n(A)=0$ לכן $m_A(x)\mid f^n(x)$.
נניח ש- $r(x)\neq 0$ ב- (*2). אז $m_A(x)\nmid f^n(x)$. סתירה.

■

משפט 85: גורם אי-פריק של הפולינום האופייני מחלק כל פולינום המתאפס ע"י A.

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. יהי $p_A(x)$ הפולינום האופייני של A. אם $(x-\lambda_0)$ גורם אי פריק של $p_A(x)$ ו- $f(x)$ פולינום המתאפס ע"י A, כלומר אם $f(A)=0$, אז

$$(x-\lambda_0)\mid f(x)\ .$$

הוכחה:
אם $(x-\lambda_0)$ גורם אי-פריק של $p_A(x)$, אז λ_0 ערך עצמי של A.
נחלק $f(x)$ ב- $(x-\lambda_0)$. כלומר לפי משפט חילוק פולינומים קיימים פולינומים יחידים $q(x),r(x)$ כך ש-

$$f(x)=q(x)(x-\lambda_0)+r(x)$$

כאשר $\deg\, f(x)\leq\deg\,(x-\lambda_0)<\deg\, r(x)$.
$\deg\,(x-\lambda_0)=1$ אז $\deg\, r(x)=0$.
ז"א $r(x)$ פולינום קבוע: $r(x)=c\in\mathbb{F}$ כאשר c סקלר.
יהי v וקטור עצמי השייך ל- λ_0. אז

$$0=f(A)\mathrm{v}=q(A)(A-\lambda_0 I)\mathrm{v}+c\mathrm{v}$$

v הוא הוקטור עצמי השייך ל- λ_0, אז
$(A-\lambda_0)\mathrm{v}=A\mathrm{v}-\lambda_0\mathrm{v}=\lambda_0\mathrm{v}-\lambda_0\mathrm{v}=0$.
לכן $c=0$, ואז נקבל

$$f(x)=q(x)(x-\lambda_0)\ ,$$

ז"א $(x-\lambda_0)\mid f(x)$.

■

הגדרה 49: מחלק משותף

יהיו $p_1(x),\ldots,p_k(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינומים מעל שדה $\mathbb{F}$. פולינום $h(x)\in\mathbb{F}[x]$ נקרא **מחלק משותף של** $p_1(x),\ldots,p_k(x)$ אם לכל $1\leq i\leq k$ $h(x)$ מחלק את $p_i(x)$.

הגדרה 50: מחלק משותף מקסימלי

יהיו $p_1(x),\ldots,p_k(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינומים שוים מאפס מעל שדה $\mathbb{F}$. פולינום מתוקן $h(x)\in\mathbb{F}[x]$ נקרא **מחלק משותף מקסימלי של** $p_1(x),\ldots,p_k(x)$ אם:

1) h מחלק משותף של $p_1(x),\ldots,p_k(x)$.

2) אם $q(x)$ הוא מחלק משותף של $p_1(x),\ldots,p_k(x)$ אז $q(x)$ מחלק גם את $h(x)$.

מחלק משותף מקסימלי מסומן ב- $\gcd\,(p_1,p_2,\ldots,p_k)$ (greatest common divisor).

משפט 86:

יהיו $p_1(x),\ldots,p_k(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינומים שוים מאפס מעל שדה $\mathbb{F}$. נגדיר

$$I=\left\{q_1p_1+q_2p_2+\cdots+q_kp_k \;\middle|\; q_1,q_2,\ldots,q_k\in\mathbb{F}[x]\right\}$$

כלומר, I הוא אוסף כל "הצירופים הליניאריים" של $p_1(x),\ldots,p_k(x)$ כאשר ה"מקדמים" הם הפולינומים $q_1(x),q_2(x),\ldots,q_k(x)$. מתקיים:

1) $p_1(x),\ldots,p_k(x)\in I$.

2) אם $L(x)\in I$ ואם $q(x)\in\mathbb{F}[x]$ אז $q(x)L(x)\in I$.

3) I תת-מרחב ליניארי של $\mathbb{F}[x]$.

משפט 87:

יהיו $p_1(x),\ldots,p_k(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינומים שוים מאפס מעל שדה $\mathbb{F}$. נגדיר

$$I=\left\{q_1(x)p_1(x)+q_2(x)p_2(x)+\cdots+q_k(x)p_k(x) \;\middle|\; q_1(x),q_2(x),\ldots,q_k(x)\in\mathbb{F}[x]\right\}$$

נניח גם שלפחות אחד מהפולינומים $p_1(x),\ldots,p_k(x)$ אינו פולינום האפס.

1) קיים פולינום מתוקן $h(x)\in I$ כך ששום פולינום שמעלתו קטנה ממעלתו של $h(x)$ פרט לפולינום האפס אינו שייך ל- I.

2) $h(x)$ הוא מחלק משותף של $p_1(x),p_2(x),\ldots,p_k(x)$.

3) אם $k(x)\in\mathbb{F}[x]$ הוא מחלק משותף של $p_1(x),p_2(x),\ldots,p_k(x)$ אז $k(x)$ מחלק גם את $h(x)$.

הוכחה:

1) לפחות אחד מהפולינומים $p_1(x),p_2(x),\ldots,p_k(x)$ אינו פולינום האפס, נסיק מחלק (1) של טענה 86 שיש ב- I לפחות פולינום אחד שאינו אפס כלומר פולינום שמעלתו אי -שלילית. לכל קבוצה לא ריקה של מספרים שלמים אי -שליליים קיים מינימום, נובע שקיים פולינום $\hat{h}(x)\in I$ ממעלה מינימלית. כלומר, שום פולינום שמעלתו קטנה ממעלתו של $\hat{h}(x)$ פרט לפולינום האפס אינו שייך ל - I. אם נסמן ב- $a\neq 0\in\mathbb{F}$ את המקדם העליון של $\hat{h}(x)$ אז הפולינום $h(x)=a^{-1}\hat{h}(x)$ הוא פולינום מתוקן. ממשפט 86 סעיף (3) נובע ש- $h(x)\in I$. מעלתו של $h(x)$ שווה למעלתו של $\hat{h}(x)$. נובע ששום פולינום שמעלתו קטנה ממעלתו של $h(x)$ פרט לפולינום האפס ,אינו שייך ל - I.

2) יהי $L(x)\in I$. נוכיח שקיים $q(x)\in\mathbb{F}[x]$ כך ש- $L(x)=q(x)h(x)$.

מכיוון ש- $h(x)$ אינו פולינום האפס ניתן לחלק את $L(x)$ ב- $h(x)$ עם שארית:

$$L(x)=q(x)h(x)+r(x)$$

כאשר $\deg(r)<\deg(h)$. מכיוון ש- $h(x),L(x)\in I$ אזי מסעיפים (2) ו- (3) של משפט 86 $r(x)=L(x)-h(x)q(x)\in I$. מכיוון ש- $\deg(r)<\deg(h)$ נסיק מתכונת מינימליות של $h(x)$ ש- $r(x)=0$.

לכן $L(x)=q(x)h(x)$ ולכן $h(x)$ מחלק $L(x)$.

3) יהיו $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_k(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינומים המקיימים

$$p_1(x) = g_1(x)k(x), \quad p_2(x) = g_2(x)k(x), \quad \cdots \quad p_k(x) = g_k(x)k(x) \ .$$

מכיוון ש- $h(x) \in I$ נובע שקיימים $q_1(x), q_2(x), \ldots, q_k(x) \in \mathbb{F}[x]$ שעבורם

$$h(x) = q_1 p_1(x) + \cdots + q_k(x) p_k(x) \ .$$

לכן

$$h(x) = q_1(x)g_1(x)k(x) + \cdots + q_k(x)g_k(x)k(x) = \Big(q_1(x)g_1(x) + \cdots + q_k(x)g_k(x) \Big) k(x)$$

כלומר $k(x)$ מחלק את $h(x)$.

■

משפט 88:

יהיו $p_1(x), \ldots, p_k(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינומים שוים מאפס מעל שדה $\mathbb{F}$. נניח גם שלפחות אחד מהפולינומים $p_1(x), \ldots, p_k(x)$ אינו פולינום האפס.

1) קיים מחלק משותף מקסימלי יחיד $h(x) \in \mathbb{F}[x]$ ל- $p_1(x), \ldots, p_k(x)$.

2) קיימים $q_1(x), \ldots, q_k(x) \in \mathbb{F}[x]$ שעבורם $h = q_1 p_1 + q_2 p_2 + \cdots + q_k p_k$.

הוכחה: קיומו של מחלק משותף מקסימלי נובע משפט **??** והגדרה 50.
במהלך ההוכחה של חלק (3) של טענה **??** הוכחנו גם את קיומו של $q_1(x), \ldots, q_k(x) \in \mathbb{F}[x]$, כנדרש.

נותרנו עם הוכחת היחידות.

אם $h(x), h'(x)$ הם מחלקים משותפים מקסימליים של $p_1(x), \ldots, p_k(x)$, אז מתכונת (2) בהגדרה 50 נובע שהם מחלקים זה את זה. שני פולינומים מתוקנים שמחלקים זה את זה הם שווים. ■

הגדרה 51: פולינמים זרים

יהיו $p_1(x), p_2(x)$ פולינומים מעל שדה $\mathbb{F}$.

אומרים כי p_1 ו- p_2 זרים אם אין להם מחלקים משותפים פרט לפולינומי הקבועים.

במילים אחרות, p_1 ו- p_2 זרים אם $\gcd(p_1, p_2) = 1$.

משפט 89: פולינמים זרים

יהיו $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינומים שאינם אפס.

p_1 ו- p_2 זרים אם ורק אם קיימים פולינומים $q_1(x), q_2(x)$ שעבורם $q_1(x)p_1(x) + q_2(x)p_2(x) = 1$.

הוכחה:

כיוון אם

אם $\gcd(p_1,p_2)=1$ אז ממשפט 88 נובע שקיימים $q_1(x),q_2(x)\in\mathbb{F}[x]$ שעבורם $q_1(x)p_1(x)+q_2(x)p_2(x)=1$.

כיוון רק אם

נניח שקיימים $q_1(x),q_2(x)\in\mathbb{F}[x]$ שעבורם $q_1(x)p_1(x)+q_2(x)p_2(x)=1$.
יהי $k(x)$ מחלק משותף של p_1 ו- p_2. עלינו להוכיח ש- $\deg(k)=0$.
לשם כך, די להוכיח ש- $k(x)$ מחלק את 1. ואמנם קיימים פולינומים $g_1,g_2\in\mathbb{F}[x]$ כך ש-

$$p_1(x)=g_1(x)k(x)\ ,\qquad p_2(x)=g_2(x)k(x)\ .$$

לכן,

$$1=q_1(x)g_1(x)k(x)+q_2(x)g_2(x)k(x)=\Big(q_1(x)g_1(x)+q_2(x)g_2(x)\Big)k(x)\ .$$

בפרט, $k(x)$ מחלק את 1.

■

הגדרה 52: כפולה משותפת

יהיו $p_1(x),\ldots,p_k(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינומים שונים מאפס מעל שדה $\mathbb{F}$. פולינום $q(x)\in\mathbb{F}[x]$ נקרא **כפולה משותפת של** $p_1(x),\ldots,p_k(x)$ אם לכל $1\leq i\leq k$ $p_i(x)$ מחלק את $q(x)$.

הגדרה 53: כפולה משותפת מינימלית

יהיו $p_1(x),\ldots,p_k(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינומים שונים מאפס. פולינום מתוקן $q(x)\in\mathbb{F}[x]$ נקרא **כפולה משותפת מינימלית של** $p_1(x),\ldots,p_k(x)$ אם:

1) $q(x)$ הוא כפולה משותפת של $p_1(x),\ldots,p_k(x)$.

2) שום פולינום שמעלתו קטנה ממעלתו של $q(x)$ פרט לפולינום האפס, אינו כפולה משותפת של $p_1(x),\ldots,p_k(x)$.

12 משפט הפירוק הפרימרי

הגדרה 54:

יהיו $V_1,V_2\subseteq V$ תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל השדה $\mathbb{F}$. התת מרחב V_1+V_2 מוגדר

$$V_1+V_2=\{u_1+u_2|u_1\in V_1,u_2\in V_2\}\ .$$

משפט 90: סכום של תת מרחב שווה לפרישה של האיחוד

יהיו $V_1, V_2 \subseteq V$ תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל השדה $\mathbb{F}$. אזי

$$V_1 + V_2 = \text{span}\left(V_1 \cup V_2\right) \ .$$

הוכחה:

נוכיח כי $V_1 + V_2 \subseteq \text{span}\left(V_1 \cup V_2\right)$:

לכל $u_1 \in V_1$ ו- $u_2 \in V_2$ מתקיים $u_1 + u_2 \in \text{span}\left(V_1 \cup V_2\right)$ אזי $V_1 + V_2 \subseteq \left(V_1 \cup V_2\right)$.

נוכיח כי $\text{span}\left(V_1 \cup V_2\right) \subseteq V_1 + V_2$:

יהי $w \in \text{span}\left(V_1 \cup V_2\right)$. אז קיימים $u_1, \ldots, u_k \in V_1$ ו $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n \in V_2$ וסקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$ כך ש

$$w = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k + \beta_1 \mathrm{v}_1 + \cdots + \beta_n \mathrm{v}_n \ .$$

אז $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k \in V_1$ וגם $\beta_1 \mathrm{v}_1 + \cdots + \beta_n \mathrm{v}_n \in V_2$.
לכן $w \in V_1 + V_2$.

הוכחנו ש- $\text{span}\left(V_1 \cup V_2\right) \supseteq V_1 + V_2$ וגם $\text{span}\left(V_1 \cup V_2\right) \subseteq V_1 + V_2$ $\Leftarrow$ $V_1 + V_2 = \text{span}\left(V_1 \cup V_2\right)$ כנדרש.
■

הגדרה 55: סכום ישר

יהיו V_1, V_2 תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$.
אומרים כי התת מרחב $W \subseteq V$ הוא סכום ישר אם

1) $W = V_1 + V_2$

2) לכל וקטור של $w \in W$ קיימים וקטורים יחידים $u_1 \in V_1$ ו- $u_2 \in V_2$ עבורם

$$w = u_1 + u_2 \ .$$

סימון: $W = V_1 \oplus V_2$.

משפט 91:

יהיו V_1, V_2 תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$.
$W = V_1 \oplus V_2$ אם ורק אם

א) $W = V_1 + V_2$

ב) $V_1 \cap V_2 = \{\bar{0}\}$.

הוכחה:

כיוון $\Leftarrow$:

נניח כי $W = V_1 \oplus V_2$.

1) לפי ההגדרה 55, $W = V_1 + V_2$.

2) יהי $u \in V_1 \cap V_2$. לכן קיים צרוף ליניארי יחיד כך ש-

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$$

כאשר $u_1 \in V_1, u_2 \in V_2$ ו- $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ סקלרים.

הביטוי הזה מסופק על ידי ההשמה $u_1 = u, u_2 = 0, \alpha_1 = 1$,

ועל ידי ההשמה $u_1 = 0, u_2 = u, \beta_1 = 1$.

הצרוף ליניארי יחיד לכן בהכרח שתי ההשמות זהות.

הדרך היחידה לקיים שתיהן היא אם $u = 0$.

כיוון $\Rightarrow$:

נניח שמתקיימים התנאים

1) $W = V_1 + V_2$

2) $V_1 \cap V_2 = \{\bar{0}\}$.

אזי התנאי (1) של ההגדרה 55 מתקיים.

נותר להוכיח התנאי (2) של ההגדרה 55.

יהי $w \in W$. מכיוון ש- $W = V_1 + V_2$ אזי קיימים $u_1 \in V_1, u_2 \in V_2$ עבורם $w = u_1 + u_2$.

נוכיח כי הווקטורים u_1, u_2 יחידים.

נניח בשלילה ש-

$$w = u_1 + u_2 \ , \qquad w = u_1' + u_2'$$

כאשר $u_1 \neq u_1' \in V_1$ וקטורים שונים $(u_1 \neq u_1')$ ו- $u_2, u_2' \in V_2$ וקטורים שונים $(u_2 \neq u_2')$. אזי

$$u_1 - u_1' = u_2 - u_2' \ .$$

לכן $u_1 - u_1' \in V_1$ וגם $u_1 - u_1' \in V_2$.

$\Leftarrow$ $u_1 - u_1' \in V_1 \cap V_2$.

מכיוון ש- $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ אז $u_1 = u_1'$, בסתירה לכך ש- $u_1 \neq u_1'$.

■

משפט 92:

יהיו V_1, V_2 תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$.

אם התנאים הבאים מתקיימים:

1) $W = V_1 + V_2$

2) לכל $u_1 \in V_1$, ו- $u_2 \in V_1$ הקבוצה $\{u_1, u_2\}$ בלתי תלויה ליניארית

אזי $W = V_1 \oplus V_2$.

הוכחה:

נוכיח כי התנאים (1) ו- (2) של משפט 91.
תנאי (1) שהוא $W = V_1 + V_2$, מתקיים כי הוא אחד מההנחות של משפט זה.
נותר רק להוכיח שהתנאי (2) מתקיים, כלומר ש- $V_1 \cap V_2 = \{0\}$:
יהי $u \in V_1 \cap V_2$. נגדיר $u_1 = u \in V_1$ ונגדיר $u_2 = -u \in V_2$.
אזי

$$u_1 + u_2 = u + (-u) = 0 \ .$$

$\{u_1, u_2\}$ בלתי-תלויים ליניארית לכן הדרך היחידה שזה מתקיים היא אם $u_1 = 0$ ו- $u_2 = 0$.
לכן $u = 0$ ולכן $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

■

הגדרה 56: תת מרחב T שמור

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$. אומרים כי התת-מרחב $W \subseteq V$ הוא תת-מרחב T- שמור אם לכל $w \in W$ מתקיים

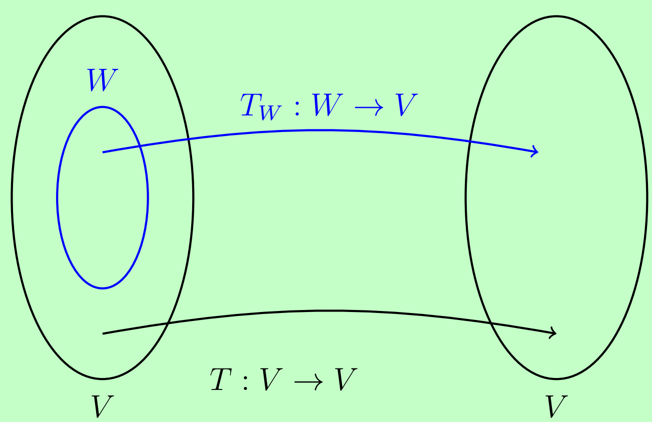
$$T(w) \in W \ .$$

הגדרה 57: צמצום של אופרטור

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$. יהי $W \subseteq V$ תת מרחב של V. הצמצום של T ל- W מסומן T_W ומוגדר להיות

$$T_W : V = T : W \to V \ .$$

במילים אחרות, בצמצום של T ל- W אנחנו מצמצמים את התחום הכדרה מ- V ל- W.



משפט 93: משפט הפירוק הפרימרי

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב וקטורי V מעל $\mathbb{F}$. יהי $m_T(x)$ הפולינום המינימלי של T ונניח של- $m_T(x)$ יש את הפירוק הבא:

$$m_T(x) = m_1^{b_1}(x) \quad \cdots \quad m_k^{b_k}(x) \ ,$$

כאשר $m_i(x)$ הוא פולינום מתוקן אי-פריק מעל $\mathbb{F}$.
יהי W_i המרחב האפס של $m_i^{b_i}(T)$. אזי התאנים הבאים מתקיימים:

1) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \quad \cdots \quad \oplus W_k$.

2) התת-מרחב W_i הוא T שמור.

3) נסמן $T_i = T_{W_i}$ הצמצום של T ל- W_i. אז $m_i^{b_i}(x)$ הוא הפולינום המינימלי של T_i.

4) יהי B_i בסיס של W_i ונסמן $B = B_1 \cup B_2 \cup \quad \cdots \quad \cup B_k$ בסיס של V. אזי

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T_1]_{B_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [T_2]_{B_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [T_k]_{B_k} \end{pmatrix}$$