שעור 5
משפטים של אסטרטגיות, ערך מקסמין ומשחק סכום אפס

5.1 הגדרות: שיווי משקל נאש ותושבה טובה ביותר של שחקן

הגדרה 5.1 שיווי משקל נאש במשחקים עם שני שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים 1 ו- 2. נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, ו- S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2.

קבוצת אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ נקראת **שיווי משקל נאש (שמ"ן)** אם התנאים הבאים מתקיימים:

$$u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*) \qquad \text{לכל } s_1 \in S_1$$

$$u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_2(s_1^*, s_2) \qquad \text{לכל } s_2 \in S_2$$

הגדרה 5.2 שיווי משקל נאש במשחקים עם שלוש שחקנים

נתון משחק עם שלוש שחקנים 1, 2 ו- 3. נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2 ו- S_3 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 3.

קבוצת אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, s_2^*, s_3^*)$ נקראת **שיווי משקל נאש** אם התנאים הבאים מתקיימים:

$$u_1(s_1^*, s_2^*, s_3^*) \geq u_1(s_1, s_2^*, s_3^*) \qquad \text{לכל } s_1 \in S_1$$

$$u_2(s_1^*, s_2^*, s_3^*) \geq u_2(s_1^*, s_2, s_3^*) \qquad \text{לכל } s_2 \in S_2$$

$$u_3(s_1^*, s_2^*, s_3^*) \geq u_3(s_1^*, s_2^*, s_3) \qquad \text{לכל } s_3 \in S_3$$

הגדרה 5.3 תשובה הטובה ביותר במשחקים עם שני שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים 1 ו- 2.
נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, ו- S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2.

- אסטרטגיה $t_1 \in S_1$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 1 לווקטור אסטרטגיות (t_1, s_2) אם

$$u_1(t_1, s_2) = \max_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_2) \ .$$

- אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 2 לווקטור אסטרטגיות (s_1, t_2) אם

$$u_2(s_1, t_2) = \max_{s_2 \in S_2} u_2(s_1, s_2) \ .$$

הגדרה 5.4 תשובה הטובה ביותר במשחקים עם שלוש שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים $1, 2$ ו- 3.
נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2, ו- S_3 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 3,

- אסטרטגיה $t_1 \in S_1$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 1 לווקטור אסטרטגיות (t_1, s_2, s_3) אם

$$u_1(t_1, s_2, s_3) = \max_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_2, s_3) \ .$$

- אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 2 לווקטור אסטרטגיות (s_1, t_2, s_3) אם

$$u_2(s_1, t_2, s_3) = \max_{s_2 \in S_2} u_2(s_1, s_2, s_3) \ .$$

- אסטרטגיה $t_3 \in S_3$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 3 לווקטור אסטרטגיות (s_1, s_2, t_3) אם

$$u_3(s_1, s_2, t_3) = \max_{s_3 \in S_3} u_3(s_1, s_2, s_3) \ .$$

5.2 הקשר בין שיווי משקל נאש ואסטרטגיה שולטת חזק

משפט 5.1

נתון משחק של 2 שחקנים בצורה אסטרטגית $G = ((S_1, S_2), (u_1, u_2))$.

אם הווקטור אסטרטגיות (s_1^*, s_2^*) הוא שיווי משקל נאש היחיד של המשחק, אז הוא פתרון באסטרטגיות השולטות חזק.

הוכחה:
המשפט הזה אומר שאם הווקטור אסטרטגיות (s_1^*, s_2^*) הוא שיווי משקל נאש היחיד, אז הוא ישרוד תהליך סילוק חוזר של אסטרטגיות הנשלטות חזק.

נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי (s_1^*, s_2^*) שיווי משקל נאש, אבל הוא לא פתרון באסטרטגיות שולטות חזק.
נניח כי s_1^* האסטרטגיה הראשונה לרדת בתהליך סילוק חוזר.
אם כן אז קיימת אסטרטגיה $t_1 \in S_1$ אשר שולטת חזק ב- s_1^*, כלומר

$$u_1(s_1^*, s_2) < u_1(t_1, s_2) \quad . \tag{\#1}$$

לכל אסטרטגיה s_2 אשר עדיין לא ירדה.

בפרט, s_2^* עדיין נשאר אפילו אחרי ש s_1^* נמקחה. לכן , לפי (#1),

$$u_1\left(s_1^*, s_2^*\right) < u_1\left(t_1, s_2^*\right) \quad . \tag{\#2}$$

בסתירה לכך ש $s^* = \left(s_1^*, s_2^*\right)$ הוא תשובה טובה ביותר לכל שחקן. ■

משפט 5.2

נתון משחק של 2 שחקנים בצורה אסטרטגית $G = \left(\left(S_1, S_2\right), \left(u_1, u_2\right)\right)$.

אם $\left(s_1^*, s_2^*\right)$ פתרון באסטרטגיות השולטות חזק אז הוא השיווי משקל נאש היחיד של המשחק.

הוכחה: נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי $\left(s_1^*, s_2^*\right)$ הוא הווקטור אסטרטגיות היחיד להישאר אחרי סילוק חוזר אבל הוא לא שיווי משקל נאש.
אז $\exists$ אסטרטגיה $s_1 \in S_1$ עבורה

$$u_1\left(s_1^*, s_2^*\right) < u_1\left(s_1, s_2^*\right) \ . \tag{\#3}$$

האסטרטגיה s_1 נמחק בהליך שיחוק חוזק, לכן בהכרח קיימת אסטרטגיה אחרת $s_1' \in S_1$ עבורה

$$u_1\left(s_1, s_2\right) < u_1\left(s_1', s_2\right) \ . \tag{\#4}$$

לכל האסטרטגיות s_2 מתוך האסטרטגיות הנשארות בתהליך סילוק חוזר.
בפרט, האסטרטגיה s_2^* עדיין נשארת, לכן לפי (#4),

$$u_1\left(s_1, s_2^*\right) < u_1\left(s_1', s_2^*\right) \ . \tag{\#5}$$

אם $s_1' = s_1^*$ אז (#5) סותר את (#3).

אחרת, קיימת s_1'' אשר שולטת חזק ב- s_1', בגלל ש s_1' לא שורדת תהליך סילוק חוזר.
לכן במקום (#4) ו- (#5) נקבל

$$u_1\left(s_1', s_2\right) < u_1\left(s_1'', s_2\right) \ . \tag{\#4'}$$

$$u_1\left(s_1', s_2^*\right) < u_1\left(s_1'', s_2^*\right) \ . \tag{\#5'}$$

אם $s_1'' = s_1^*$ אז (#5') סותר את (#3). אחרת התהליך הזה ממשיך עד שנגיע לסתירה ל- (#3).

■

5.3 אסטרטגיות נשלטות חלש

הגדרה 5.5 אסטרטגיה נשלטת חלש במשחק 2 שחקנים

הגדרה 5.6 אסטרטגיה נשלטת חלש במשחק 2 שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים 1 ו- 2. נניח כי
S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1,

ו- S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2.

- אסטרטגיה $\sigma_1 \in S_1$ של שחקן 1 נשלטת חלש על ידי אסטרטגיה $t_1 \in S_1$ של שחקן 1 אם

$$u_1\left(\sigma_1, s_2\right) \leq u_1\left(t_1, s_2\right)$$

לכל $s_2 \in S_2$.

- אסטרטגיה $\sigma_2 \in S_2$ של שחקן 2 נשלטת חלש ע"י אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ של שחקן 2 אם

$$u_2\left(s_1, \sigma_2\right) \leq u_2\left(s_1, t_2\right)$$

לכל $s_1 \in S_1$.

הגדרה 5.7 אסטרטגיה נשלטת חלש במשחק 3 שחקנים

נתון משחק עם שלוש שחקנים 1, 2 ו- 3. נניח כי
S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1,
S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2
ו- S_3 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 3.

- אסטרטגיה $\sigma_1 \in S_1$ של שחקן 1 נשלטת חלש על ידי אסטרטגיה $t_1 \in S_1$ של שחקן 1 אם

$$u_1\left(\sigma_1, s_2, s_3\right) \leq u_1\left(t_1, s_2, s_3\right)$$

לכל $s_2 \in S_2$ ולכל $s_3 \in S_3$.

- אסטרטגיה $\sigma_2 \in S_2$ של שחקן 2 נשלטת חלש על ידי אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ של שחקן 2 אם

$$u_2\left(s_1, \sigma_2, s_3\right) \leq u_2\left(s_1, t_2, s_3\right)$$

לכל $s_1 \in S_1$ ולכל $s_3 \in S_3$.

- אסטרטגיה $\sigma_3 \in S_3$ של שחקן 3 נשלטת חלש ע"י אסטרטגיה $t_3 \in S_3$ של שחקן 3 אם

$$u_3\left(s_1, s_2, \sigma_3\right) \leq u_3\left(s_1, s_2, t_3\right)$$

לכל $s_1 \in S_1$ ולכל $s_2 \in S_2$.

דוגמה 5.1 ()

נתון משחק בצורה אסטרטגית הבאה:

$I \backslash II$	L	R
T	$1,2$	$2,3$
B	$2,2$	$2,0$

$I \backslash II$	L	R
T	~~$1,2$~~	~~$2,3$~~
B	$2,2$	$2,0$

$\xrightarrow{T \preceq B}$

$I \backslash II$	L	R
B	$2,2$	~~$2,0$~~

$\xrightarrow{R \prec L}$

$I \backslash II$	L
B	$2,2$

דוגמה 5.2 (השפעת סדר הסילוק של אסטרטגיות נשלטות חלש)

$I \backslash II$	L	C	R
T	$1,2$	$2,3$	$0,3$
M	$2,2$	$2,1$	$3,2$
B	$2,1$	$0,0$	$1,0$

פתרון:

$I \backslash II$	L	C	R
T	$1,2$	$2,3$	$0,3$
M	$2,2$	$2,1$	$3,2$
B	$2,1$	$0,0$	$1,0$

$\xrightarrow{T\preceq M}$

$I \backslash II$	L	C	R
M	$2,2$	$2,1$	$3,2$
B	$2,1$	$0,0$	$1,0$

$\xrightarrow{R\preceq L}$

$I \backslash II$	L	C
M	$2,2$	$2,1$
B	$2,1$	$0,0$

$\xrightarrow{L\preceq R}$

$I \backslash II$	L	C
M	$2,2$	$2,1$
B	$2,1$	$0,0$

$\xrightarrow{B\preceq M}$

$I \backslash II$	L	C
M	$2,2$	$2,1$

$\xrightarrow{C\prec L}$

$I \backslash II$	L	C
M	$2,2$	$2,1$

תוצאת התהליך: ML.
תשלום: $(2,2)$.

$I \backslash II$	L	C	R
T	$1,2$	$2,3$	$0,3$
M	$2,2$	$2,1$	$3,2$
B	$2,1$	$0,0$	$1,0$

$\xrightarrow{B\preceq M}$

$I \backslash II$	L	C	R
T	$1,2$	$2,3$	$0,3$
M	$2,2$	$2,1$	$3,2$

$\xrightarrow[C\preceq R]{L\preceq R}$

$I \backslash II$	R
T	$0,3$
M	$3,2$

$\xrightarrow{T\prec M}$

$I \backslash II$	R
M	$3,2$

תוצאת התהליך: MR.
תשלום: $(3,2)$.

■

5.4 קשר בין אסטרטגית שולטת ואסטרטגית מקסמין

משפט 5.3

במשחק שני שחקנים, אם אסטרטגיה σ_1 של שחקן 1 שולטת בכל האסטרטגיות האחרות שלו, אז

א) σ_1 היא אסטרטגית מקסמין שלו.

ב) σ_1 היא תשובה טובה ביותר לכל ווקטור אסטרטגיות של שאר השחקנים.

הוכחה:

א) נניח כי σ_1 היא אסטרטגית שולטת של שחקן 1.

תהי $t_2 \in S_2$ אסטרטגיה של שחקן 2 כך ש-

$$u_1(\sigma_1,t_2)=\min_{s_2\in S_2} u_1(\sigma_1,s_2)$$

מכאן
$$\min_{s_2\in S_2} u_1(\sigma_1,s_2)=u_1(\sigma_1,t_2)\geq u_1(s_1,t_2)\geq \min_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$$
כלומר
$$\min_{s_2\in S_2} u_1(\sigma_1,s_2)\geq \min_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)\ .$$
לפיכך
$$\min_{s_2\in S_2} u_1(\sigma_1,s_2)= \max_{s_1\in S_1}\min_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)\ .$$
אבל $\underline{\mathrm{v}}_1=\max_{s_1\in S_1}\min_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$. לכן σ_1 היא אסטרטגית מקסמין של שחקן 1.

ב) לכל $s_2\in S_2$ מתקיים
$$u_1(s_1,s_2)\leq u_1(\sigma_1,s_2)\ ,$$
ז"א σ_1 שולטת חלש בכל האסטרטגיות האחרות s_1 של שחקן 1. לכן σ_1 תשובה טובה ביותר של שחרן 1 לכל אסטרטגיה של השחקן 2.

■

משפט 5.4

במשחק שני שחקנים, אם לשחקן 1 יש אסטרטגיה s_1^* השולטת חלש על שאר האסטרטגיות שלו, ולשחקן 2 יש אסטרטגיה s_2^* השולטת חלש על כל שאר האסטרטגיות שלו, אז

א) הווקטור אסטרטגיות (s_1^*,s_2^*) שיווי משקל,

ב) s_1^* היא אסטרטגית מקסמין לשחקן 1 ו- s_2^* היא אסטרטגית מקסמין לשחקן 2.

הוכחה:

א) נניח כי (s_1^*,s_2^*) ווקטור אסטרטגיות עבורו s_1^* שולטת חלש על כל שאר האסטרטגיות של שחקן 1 ו- s_2^* שולטת חלש על כל שאר האסטרטגיות של שחקן 2.

אם כן אז לפי משפט 5.3 (חלק 2) למעלה, s_1^* תשובה טובה ביותר של שחקן 1 ו- s_2^* תשובה טובה ביותר של שחקן 2, כלומר
$$u_1(s_1^*,s_2^*)\geq u_1(s_1,s_2^*)$$
לכל $s_1\in S_1$ ו-
$$u_2(s_1^*,s_2^*)\geq u_2(s_1^*,s_2)$$
לכל $s_2\in S_2$. לפיכך הווקטור אסטרטגיות $s^*=(s_1^*,s_2^*)$ הוא נקודת שיווי משקל.

ב) לפי משפט 5.3 (חלק 1), s_1^* היא אסטרטגית מקסמין של שחקן 1 ו- s_2^* היא אסטרטגית מקסמין של שחקן 2. לפיכך הווקטור $s^*=(s_1^*,s_2^*)$ הוא ווקטור אסטרטגיות מקסמין.

■

5.5 * הוכחת המשפט: ש"מ יחיד הוא פתרון באסטרטגיות שולטות חזק במשחק n שחקנים

משפט 5.5

נתון משחק של n שחקנים בצורה אסטרטגית $G = ((S_1, \ldots, S_n), (u_1, \ldots, u_n))$.

אם הווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ הוא שיווי משקל נאש, אז s^* פתרון באסטרטגיות השולטות חזק.

הוכחה:
משפט זו אומר שאם הווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ הוא שיווי משקל נאש, אז s^* ישרוד תהליך סילוק חוזר של אסטרטגיות הנשלטות חזק.

נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ שיווי משקל נאש אבל הוא לא פתרון באסטרטגיות שולטות חזק.
אם כן אז תהי s_i^* האסטרטגיה הראשונה שנמחקה בתהליך סילוק חוזר.
ז"א קיימת אסטרטגיה $t_i \in S_i$ אשר שולטת חזק ב- s_i^*, כלומר

$$u_i(s_1, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n) < u_i(s_1, \ldots, t_i, \ldots, s_n) \quad . \tag{\#1}$$

לכל $s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n$ אשר עדיין נשארות בתהליך.

s_i^* בפרט, האסטרטגיות $s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*$ עדיין נשארים בתהליך אחרי שנמחקה אסטרטגיה s_i^*. לכן, לפי (#1),

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*) < u_i(s_1^*, \ldots, t_i, \ldots, s_n^*) \quad . \tag{\#2}$$

בסתירה לכך ש $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ הוא תשובה טובה ביותר לכל שחקן. ■

משפט 5.6

נתון משחק של n שחקנים בצורה אסטרטגית $G = ((S_1, \ldots, S_n), (u_1, \ldots, u_n))$.

אם ווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ הוא פתרון באסטרטגיות השולטות חזק אז s^* הוא השיווי משקל היחיד של המשחק.

הוכחה: נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ הוא הווקטור אסטרטגיות היחיד שנשארת אחרי סילוק חוזר, אבל הוא לא שיווי משקל.
אם כן אז בהכרח קיימת אשטרטגיה s_i של שחקן i עבורה

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*) < u_i(s_1^*, \ldots, s_i, \ldots, s_n^*) \quad . \tag{\#3}$$

האסטרטגיה s_i נמחקה במהלך התהליך סילוק חוזר. לכן בהכרח קיימת אסטרטגיה s_i' אשר שולטת חזק ב- s_i, כלומר

$$u_i\left(s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_n\right) < u_i\left(s_1,\ldots,s_i',\ldots,s_n\right) \ . \qquad (\#4)$$

לכל אסטרטגיות $s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots s_n$ אשר נשארות בתהליך סילוק חוזר.

בפרט, האסטרטגיות $\left(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*\right)$ נשארות בתהליך אפילו אחרי שהורדנו s_i^*. לכן, לפי (#4),

$$u_i\left(s_1^*,\ldots,s_i,\ldots,s_n^*\right) < u_i\left(s_1^*,\ldots,s_i',\ldots,s_n^*\right) \ . \qquad (\#5)$$

אם $s_i'=s_i^*$ אז (#5) סותר את (#3).

אם לא אז קיימת עוד אסטרטגיה s_i'' אשר שולטת חזק ב- s_i'.
לכן במקום (#4) ו- (#5) נקבל

$$u_i\left(s_1,\ldots,s_i',\ldots,s_n\right) < u_i\left(s_1,\ldots,s_i'',\ldots,s_n\right) \ . \qquad (\#4')$$

$$u_i\left(s_1^*,\ldots,s_i',\ldots,s_n^*\right) < u_i\left(s_1^*,\ldots,s_i'',\ldots,s_n^*\right) \ . \qquad (\#5')$$

אם $s_i''=s_i^*$ אז (#5') סותר את (#3). אם לא אז התהליך ממשיך עד שנגיע לסתירה ל- (#3).

■

5.6 *הוכחת המשפט: במשחק n שחקנים אסטרטגיה השולטת על שאר אסטרטגיות של שחקן היא אסטרטגית מקסמין

משפט 5.7

במשחק n שחקנים, אם אסטרטגיה σ_i של שחקן i השולטת על כל שאר האסטרטגיות שלו, אז

א) σ_i היא אסטרטגית מקסמין שלו.

ב) σ_i היא תשובה טובה ביותר לכל ווקטור אסטרטגיות של שאר השחקנים.

הוכחה:

א) נניח כי σ_i היא אסטרטגית השולטת על כל שאר האסטרטגיות של שחקן i.

יהי $t_{-i}\in S_{-i}$ ווקטור אסטרטגיות כך ש-

$$u_i(\sigma_i,t_{-i}) = \min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i(\sigma_i,s_{-i})$$

מכאן

$$\min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i(\sigma_i,s_{-i}) = u_i(\sigma_i,t_{-i}) \geq u_i(s_i,t_{-i}) \geq \min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i(s_i,s_{-i})$$

כלומר

$$\min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i(\sigma_i,s_{-i}) \geq \min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i(s_i,s_{-i}) \ .$$

לפיכך

$$\min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i(\sigma_i,s_{-i}) = \max_{s_i\in S_i}\min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i(s_i,s_{-i}) \ .$$

אבל $\max\limits_{s_i\in S_i}\min\limits_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i(s_i,s_{-i}) = \underline{\mathrm{v}}_i$. לכן σ_i היא אסטרטגית מקסמין של שחקן i.

ב) לכל $s_{-i} \in S_{-i}$ מתקיים

$$u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(\sigma_i, s_{-i}) \ ,$$

ז"א σ_i שולטת חלש על כל שאר האסטרטגיות s_i של שחקן i. לכן σ_i תשובה טובה ביותר של שחרן i לכל וקטור אסטרטגיות של שאר השחקנים.

■

משפט 5.8

במשחק n שחקנים, אם לכל שחקן יש אסטרטגיה s_i^* ששולטת חלש כל האסטרטגיות האחרות שלו, אז

א) הווקטור אסטרטגיות $(s_1^*, \cdots, s_n^*)$ שיווי משקל,

ב) s_i^* היא אסטרטגית מקסמין לכל שחקן i.

הוכחה:

א) נניח כי $(s_1^*, \cdots, s_n^*)$ וקטור אסטרטגיות עבורו s_i^* שולטת חלש בכל האסטרטגיות האחרות של שחקן i. אז לפי משפט 5.7 (חלק 2) למעלה, s_i^* תשובה טובה ביותר של שחקן i, כלומר

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_i, \ldots, s_n^*)$$

לכל $s_i \in S_i$. לפיכך הווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \cdots, s_n^*)$ הוא נקודת שיווי משקל.

ב) לפי משפט 5.7 (חלק 1), s_i^* היא אסטרטגית מקסמין של שחקן i. לפיכך הווקטור $s^* = (s_1^*, \cdots, s_n^*)$ הוא וקטור אסטרטגיות מקסמין.

■