המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

חדו"א להנדסת תוכנה

מועד ב'

מרצה:

תשע"ח סמסטר ב'

השאלון מכיל עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דף נוסחאות מצורף לשאלון (עמודים בפורמט $A4$).

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות בלבד מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** בלבד מתוך **שתיים**.

==

שאלות 1 ו- 2 - חובה!

שאלה 1 חקרו באופן מלא את הפונקציה

$$f(x)=\frac{x^2}{x+1}$$

(תחום הגדרה, חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וציירו את סקיצת הגרף של הפונקציה.

שאלה 2

א) הוכיחו את המשפט: אם לפונקציה $f(x)$ קיים גבול בנקודה $x=a$ אם ורק אם הגבולות החד צדדיים בנקודה זו קיימים ושווים.

ב) הגדר את המושג נקודת אי רציפות סליקה.

ג) תתנו דוגמה לפונקציה בעלת נקודת אי רציפות סליקה.

שאלה 3

א) חשבו נפח הגוף המתקבל ע"י סיבוב התחום המישורי החסום ע"י הקווים הבאים: $y=\tan x$ $y=x$ $x=\frac{\pi}{4}$ סביב ציר ה- x. תן סקיצה.

ב) חשבו לפי ההגדרה את הנגזרת של $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

שאלה 4

א) חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x+3^x}{3^x+4^x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^{1/x^2}$

ב) הוכיחו את הטענה: $f(x)$ פונקציה מונוטונית עולה תחום D ומתקיים $D > f(x)$ לכל $x\in D$ אזי הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ מונוטונית יורדת בתחום זה.

שאלה 5

א) חשבו את האינטגרלים הבאים:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\left(\max\left(x, 2x - \frac{\pi}{2}\right)\right)\, dx$ **(2)** $\int \frac{x^3+2x+1}{x^2+4x+3}\, dx$

ב) הוכיחו לפי הגדרת הגבול כי

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0\ .$$

שאלה 6

א) חשבו את האינטגרל הבא

$$\int_0^\infty x\, e^{-x^2/2}$$

ב) מצאו את פולינום מקלורן מסדר 2 לפונקציה $y + e^{xy} = 2$

שאלה 7

הוכיחו לכל $b > 0$ ממשי מתקיים

$$\frac{b}{1+b^2} < \arctan(b) < b\ .$$

שאלה 8

על העקומה $x^2+y^2=4$ מצאו את כל הנקודות $M(x_0, y_0)$ שבהן המשיק לעקומה מקביל לקו $x+y=1$.

פתרונות

שאלה 1

שלב 1 תחום הגדרה: $x \neq -1$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0,0)$.

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x > 0$
$f(x)$	$-$	$+$	$+$

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x = -1$

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: אין.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \ , \qquad n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - m \cdot x) = -1 \ .$$

לכן הקו $y = x - 1$ אסימפטוטה משופעת בתהליך כאשר $x \to \infty$.

ב- $x \to -\infty$ אותו הדבר.

שלב 6 תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

נקודות קריטיות: $(-2,-4)$ ו- $(0,0)$.

x	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	מקס	$\searrow$	$\searrow$	מינימום	$\nearrow$

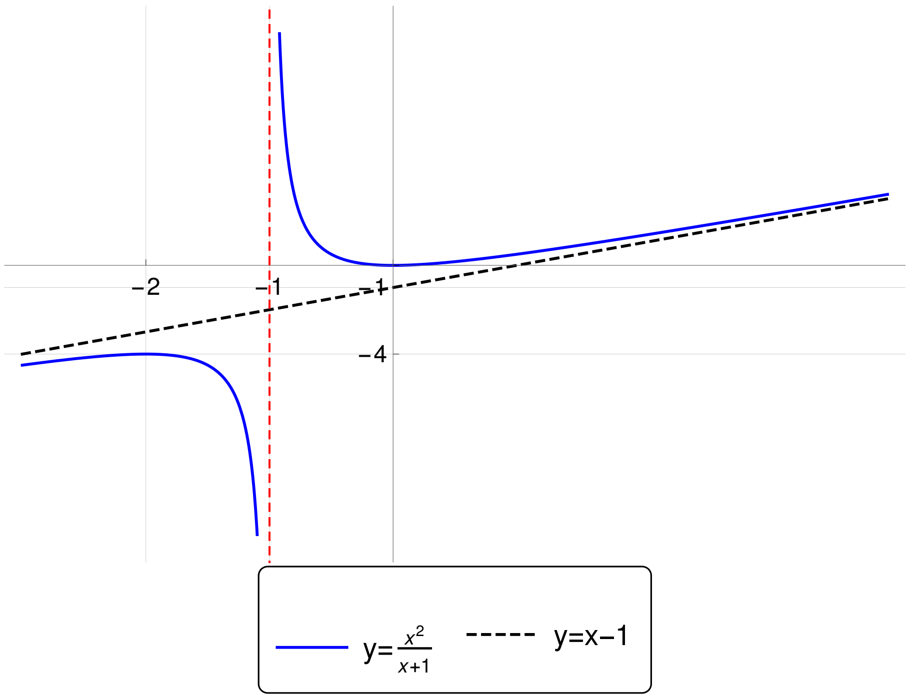
<u>שלב 7</u> תחוטמי קמירות:

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$$

נקודות פיתול: אין.

x	$x < -1$	$x > -1$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	קמורה $\downarrow$	קמורה $\uparrow$

<u>שלב 8</u> שרטוט:



<u>שאלה 2</u>

א)

$\Leftarrow$

נתון כי $\lim_{x \to a} f(x) = L$, אז לפי ההגדרה $\forall \epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם

$$|x-a| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon \ .$$

שים לב

$$0<|x-a|<\delta \quad \rightsquigarrow \quad 0<x-a<\delta \ \text{או}\ -\delta<x-a<0$$
$$\rightsquigarrow \quad a<x<a+\delta \ \text{או}\ a-\delta<x<a$$
$$\rightsquigarrow \quad x\in(a,a+\delta) \ \text{או}\ x\in(a-\delta,a)$$

כלומר, $\forall\epsilon$, $\exists\delta>0$ כך ש-

(1*) $$x\in(a-\delta,a)\Rightarrow \qquad |f(x)-L|<\epsilon$$

(2*) $$x\in(a,a+\delta)\Rightarrow \qquad |f(x)-L|<\epsilon$$

אזי, בהינתן ערך מסוים ל- ϵ, ניתן למצוא ערך של δ כך שהתנאים (1*) ו- (2*) מתקיימים. אבל (1*) דווקא התנאי ההכרחי לקיום הגבול $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$, ו- (2*) דווקא התנאי ההכרחי לקיום הגבול $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$,

לכן הוכיחונו כי

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L \ \text{ו-}\ \lim_{x\to a^-} f(x)=L \qquad \lim_{x\to a} f(x)=L$$

$\underline{\Rightarrow}$

אם $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, אז $\forall\epsilon>0$ קיים $\delta_1>0$ כך ש-

(#1) $$x\in(a-\delta_1,a) \qquad \Rightarrow \qquad |f-L|<\epsilon\ ,$$

ו- $\forall\epsilon>0$ קיים $\delta_2>0$ כך ש-

(#2) $$x\in(a,a+\delta_2) \qquad \Rightarrow \qquad |f-L|<\epsilon\ .$$

נגדיר $\delta:=\min(\delta_1,\delta_2)$. אז

$$x\in(a,a+\delta_2) \ \text{ו-}\ x\in(a-\delta_1,a) \rightsquigarrow \qquad x\in(a-\delta_1,a+\delta_2)$$
$$\rightsquigarrow \qquad x\in(a-\delta,a+\delta)$$

(#3) $$\rightsquigarrow \qquad 0<|x-a|<\delta\ .$$

לכן על-סמך (#3) והתנאים (#1) ו- (#2) הנתונים, $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$ כך ש-

$$0<|x-a|<\delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)-L|<\epsilon\ .$$

אבל זה דווקא התנאי ההכרחי לקיום הגבול $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$. לכן הוכיחונו כי

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L \ \text{ו-}\ \lim_{x\to a^-} f(x)=L \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to a} f(x)=L\ .$$

ב) תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה a אבל לא בהכרח בנקודה a עצמה.

אם קיימים הגבולות החד-צדדים הסופיים ו-

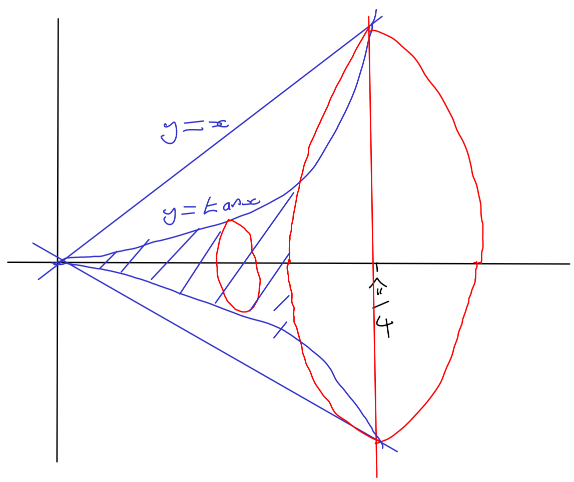
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \neq f(a)$$

או ש $f(a)$ לא מוגדר, אומרים כי a היא נקודת אי-רציפות סליקה של $f(x)$.

ג)

$$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1} \ .$$

שאלה 3



א)

$$V = \pi\int_0^{\pi/4}\left(x^2-\tan^2 x\right) = \pi\left[\frac{x^3}{3}+x-\tan(x)\right]_0^{\pi/4} = -1+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^3}{192} \ .$$

ב)

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt[3]{x}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{1/3}-x^{1/3}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^{1/3}+\frac{1}{3}x^{-2/3}\Delta x+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)}{2}x^{-5/3}\Delta x^2+\ldots-x^{1/3}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^{-2/3}\Delta x+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)}{2}x^{-5/3}\Delta x^2+\ldots}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{3}x^{-2/3}+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)}{2}x^{-5/3}\Delta x+\ldots\\
&=\frac{1}{3}x^{-2/3}+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)}{2}x^{-5/3}\cdot 0+\ldots\\
&=\frac{1}{3}x^{-2/3}\ .
\end{aligned}
$$

שאלה 4

א) 1)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+3^x}{3^x+4^x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{4}\right)^x+\left(\frac{3}{4}\right)^x}{\left(\frac{3}{4}\right)^x+\left(\frac{4}{4}\right)^x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{4}\right)^x+\left(\frac{3}{4}\right)^x}{\left(\frac{3}{4}\right)^x+1} = 0
\end{aligned}
$$

2)

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^{1/x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{1/x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{(\cos x-1)/(x^2\cdot(\cos x-1))}
\end{aligned}
$$

נגדיר $y=\cos x-1$ ונרשום הגבול בצורה

$$
\begin{aligned}
L &= \left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}\right)^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}\\
&=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}
\end{aligned}
$$

ע"י לופיטל

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2x}=\frac{-1}{2}\ .$$

לכן

$$L=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

ב) f מונוטונית $\uparrow$ לכן

(*) $$b>a \qquad \Leftrightarrow \qquad f(b)\geq f(a)\ .$$

אם $f(b)\geq f(a)$ אז $\frac{1}{f(a)}\leq\frac{1}{f(b)}$ ולכן נקבל

(#) $$b>a \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{f(b)}\leq\frac{1}{f(a)}\ .$$

משל"ל

שאלה 5

א) **(1)** $$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\left(\max\left(x,2x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\,dx=0$$

(2) $$\int\frac{x^3+2x+1}{x^2+4x+3}\,dx=\frac{x^2}{2}-4x-\log(x+1)+16\log(x+3)$$

ב) הגדרה של גבול:

אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $x\in(a-\delta,a+\delta)$ אז $|f(x)-L|<\epsilon$, אז L הוא הגבול של f בנקודה $x=a$.

נבדוק האם קיים מספר $\delta>0$ כך שאם $x\in(\infty-\delta,\infty+\delta)$ אז $\left|\frac{1}{x}-0\right|<\epsilon$.

אם $x\in(\infty-\delta,\infty)$ אז

$$0-\frac{1}{x}<\epsilon \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{x}<\epsilon \quad\Rightarrow\quad -x>\epsilon \quad\Rightarrow\quad x<-\epsilon$$

ולכן מצד שמאל של $x=\infty$ נקבל $x<-\epsilon$ לכן מצאונו $\delta_1=\epsilon$ כך שאם $x\in(\infty-\delta_1,\infty)$

אם $x\in(0,\infty)$ אז

$$\frac{1}{x}-0<\epsilon \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x}<\epsilon \quad\Rightarrow\quad x>\epsilon \quad\Rightarrow\quad x<-\epsilon$$

עבור $\epsilon>0$

שאלה 6

א)

$$\int_0^\infty x\,e^{-x^2/2} = 1\ .$$

ב)

$$y(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

שאלה 7 לפי משפט לגרנז' קיימת $c\in(0,b)$ כך ש- $\frac{\arctan b - \arctan 0}{b-0} = \arctan(c)' = \frac{1}{1+c^2}$, ז"א

$$\frac{\arctan b}{b} = \frac{1}{1+c^2}\ .$$

נכפיל ב-b:

$$\arctan b = \frac{b}{1+c^2}\ . \qquad (\#1)$$

בגלל ש- $0<c<b$ אז

$$\frac{b}{1+c^2} > \frac{b}{1+b^2}\ , \qquad (\#2)$$

ו-

$$\frac{b}{1+c^2} < b\ . \qquad (\#3)$$

לכן, מ (#2) ו- (#3) נקבל

$$\frac{b}{1+b^2} < \frac{b}{1+c^2} < b\ . \qquad (\#4)$$

לפי (#1) נציב $\arctan b$ ב- $\frac{b}{1+c^2}$ ונקבל $\frac{b}{1+b^2} < \arctan b < b$.

שאלה 8 השיפוע של הקו $x+y=1$, או שקול $y=1-x$, הוא $m=-1$. לכן יש לחפש את כל הנקודות על העקומה שבהן השיפוע של המשיק שווה -1. נגזור את משוואת העקומה:

$$2x + 2y\cdot y' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{x}{y}\ .$$

נציב $y'=-1$ ונקבל

$$-\frac{x}{y} = -1 \qquad \Rightarrow \qquad y = x\ . \qquad (*)$$

נציב את היחס הזה לתוך משוואת העקומה, קרי $x^2+y^2=4$ ונקבל:

$$2x^2=4 \qquad \Rightarrow \qquad x_1=\sqrt{2}\ , \quad x_2=-\sqrt{2}\ .$$

נציב את הערכים האלה במשוואת המשיק (*) . עבור $x_1=\sqrt{2}$ נקבל $y_1=\sqrt{2}$ ועבור $x_2=-\sqrt{2}$ נקבל $y_2=-\sqrt{2}$. לכן מצאונו שתי נקודות על העקומה שבהן המשיק מקביל להקו: $P_1(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $P_2(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$.