

עבודה עצמית 4 אלגברה וקטורית

לשאלות 1 – 3 נתון:  $A = (0, 1, 1)$ ,  $B = (-1, 3, -1)$ ,  $C = (1, -2, 4)$ ,  $D = (5, 2, 0)$

**שאלה 1** חשבו

(א) (1)  $\overline{AB}$

(2)  $|\overline{AB}|$

(3)  $-\overline{AB}$

(4)  $2\overline{AB}$

(5)  $|5\overline{AB}|$

(6)  $\overline{AB} + \overline{AC}$

(7)  $|\overline{AB} - \overline{AC}|$

(ב) בסעיפים 1-5 מצאו את הקואורדינטות של הנקודה  $M$  ובסעיפים 6-7 מצאו את הערכים של  $x, y, z$ :

(1)  $\overline{AM} = (3, 0, -3)$

(2)  $|\overline{AM}| = 1$

(3)  $\overline{AM} = 2\overline{AB}$

(4)  $\overline{AB} + \overline{AM} = \vec{0}$

(5)  $\overline{AM} = \overline{MB}$

(6)  $\overline{AD} = x \cdot \overline{AB} + y \cdot \overline{AC}$

(7)  $(1, 0, 0) = x \cdot \overline{AB} + y \cdot \overline{AC} + z \cdot \overline{AD}$

(ג) מצאו את שעורי הנקודה  $M$  המחלקת את הקטע  $AB$  ביחס  $\frac{|\overline{AM}|}{|\overline{MB}|} = \frac{1}{2}$ .

(ד) מצאו את נקודת המפגש של תיכוני המשולש  $ABC$ .

**שאלה 2**

(א) הגדרו מכפילה סקלרית של שני ווקטורים ורשמו את התכונות שלה.

(ב) חשבו את:

(1)  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$

(2)  $\angle ABC$

(ג) מצאו את הנקודות  $M$  המקיימות

$$\left. \begin{aligned} \overline{AM} \cdot \overline{AB} &= 0 \\ \overline{AM} \cdot \overline{AC} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{AM} \cdot \overline{AB} &= 0 \\ \overline{AM} \cdot \overline{AC} &= 0 \\ |\overline{AM}| &= |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(ד) חשבו את קוסינוס הכיוון של כל אחד מהווקטורים הבאים ואת ווקטור היחידה שלהם:

$$\overline{AB} \quad (1)$$

$$i + j \quad (2)$$

$$i - j + k \quad (3)$$

### שאלה 3

(א) הגדרו מכפילה ווקטורית של שני ווקטורים ורשמו את התכונות שלה.

(ב) חשבו

$$\overline{AB} \times \overline{AC} \quad (1)$$

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| \quad (2)$$

$$S_{\Delta ABC} \text{ שטח המשולש} \quad (3)$$

$$\overline{AB} \times i \quad (4)$$

$$(i + j) \times (i - j) \quad (5)$$

$$(2i + j) \times (j - k) \quad (6)$$

$$(i + j) \times (j + k) \times k \quad (7)$$

$$(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD} \quad (8)$$

$$(\overline{AB} \times \overline{AC}) \times \overline{AD} \quad (9)$$

$$(\overline{AB} \times \overline{AD}) \times \overline{AC} \quad (10)$$

(ג) הגדירו מכפלה מעורבת של שלושה ווקטורים, רשמו את התכונות שלה והסבירו את המשמעות הגאומטרית שלה.

(ד) מצאו את נפח הפירמידה המשולשת  $ABCD$ .

**שאלה 4** מצאו ווקטור יחידה במאונך לווקטורים  $a = i + j + 2k$ ,  $b = 2i + j + k$ .

**שאלה 5** נתונים ווקטורים  $a = i + j$ ,  $b = j + k$ . מצאו וקטור  $c$  המקיים:

$$|a| = |b| = |c|$$

והזוויות בין כל שני ווקטורים מתוך  $a, b, c$  זהות זו לזו.

**שאלה 6** נתונים ווקטורים  $a = 2i + 2j + k$ ,  $b = 6i + 3j + 2k$ . מצאו אורך ההיטל של ווקטור  $a$  על ווקטור  $b$  ואת אורך היטל של  $a$  על  $b$ .

**שאלה 7** הראו שלא קיים ערך של  $m$  עבורו הווקטורים  $a = i + j + mk$ ,  $b = i + j + (m+1)k$ ,  $c = i - j + mk$  קופלנריים (נמצאים על מישור אחד).

**שאלה 8** הראו שהנקודות  $A(5, 7, -2)$ ,  $B(3, 1, -1)$ ,  $C(9, 4, -4)$ ,  $D(1, 5, 0)$  נמצאות במישור אחד.

**שאלה 9** נתונות נקודות  $A(2, 4, 6)$ ,  $B(6, 2, 2)$ . מצאו את הנקודה  $P$  על ציר ה- $y$  כך ששטח המשולש  $ABP$  יהי מינימלי וחשבו את השטח המינימלי.

## פתרונות

### שאלה 1

$$\overline{AB} = (-1, 3, -1) - (0, 1, 1) = (-1, 2, -2) \quad (1) \quad (א)$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3 \quad (2)$$

$$-\overline{AB} = (1, -2, 2) \quad (3)$$

$$2\overline{AB} = 2 \cdot (-1, 2, -2) = (-2, 4, -4) \quad (4)$$

$$|5\overline{AB}| = 5 \cdot |\overline{AB}| = 15 \quad (5)$$

(6)

$$\overline{AC} = (1, -2, 4) - (0, 1, 1) = (1, -3, 3)$$

$$\overline{AB} + \overline{AC} = (-1, 2, -2) + (1, -3, 3) = (0, -1, 1)$$

(7)

$$\overline{AB} - \overline{AC} = (-1, 2, -2) - (1, -3, 3) = (-2, 5, -5)$$

$$|\overline{AB} - \overline{AC}| = |(-2, 5, -5)| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + (-5)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

(ב)

### שאלה 4

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i + 3j - k = (-1, 3, -1) .$$

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{1 + 9 + 1} = \sqrt{11} .$$

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} \quad \text{נסמן}$$

$$\hat{c} = \left( \frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}} \right) , \quad -\hat{c} = \left( \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{-3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}} \right) .$$

$$\bar{b} = (0, 1, 1) , \bar{a} = (1, 1, 0) \quad \text{שאלה 5}$$

$$|\bar{a}| = |\bar{b}| = \sqrt{2} .$$

$$\text{נסמן את הזווית בין } \bar{a} \text{ ו- } \bar{b} \text{ ב- } \theta :$$

$$\cos \theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{1}{2} .$$

$$\bar{c} = (x, y, z) \quad \text{נסמן}$$

$$|\bar{c}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2} .$$

$$\cos(\bar{a}, \bar{c}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{c}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{c}|} = \frac{x+y}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x+y=1.$$

$$\cos(\bar{b}, \bar{c}) = \frac{\bar{b} \cdot \bar{c}}{|\bar{b}| \cdot |\bar{c}|} = \frac{y+z}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow y+z=1.$$

הפתרון של המערכת משוואות הוא

$$x=z, \quad y=1-x.$$

לכן  $\bar{c} = (x, 1-x, x)$  נציב זה ל-

$$|\bar{c}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$$

ונקבל  $x=1$  או  $x=-\frac{1}{3}$ .

לכן

$$\bar{c} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-1}{3}\right) \text{ או } \bar{c} = (1, 0, 1)$$

**שאלה 6**  $\bar{b} = (6, 3, 2), \bar{a} = (2, 2, 1)$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 20 = |\bar{b}| \cdot a_{\bar{b}} = \sqrt{36+9+4} \cdot a_{\bar{b}}$$

מכאן

$$a_{\bar{b}} = \frac{20}{7}.$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot b_{\bar{a}} = 20 = \sqrt{4+4+1} b_{\bar{a}}$$

לכן

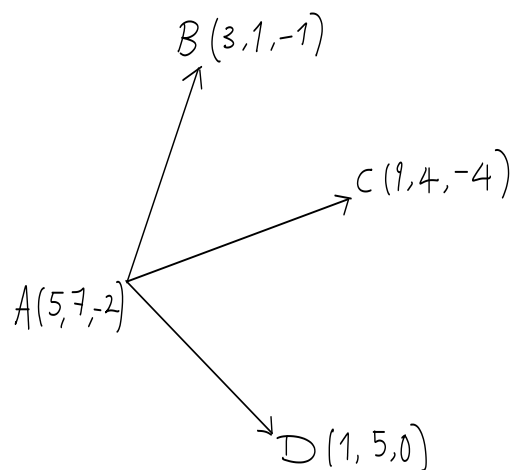
$$b_{\bar{a}} = \frac{20}{3}.$$

**שאלה 7**

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m+1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m+1 \\ -1 & m \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & m+1 \\ 1 & m \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = m+m+1-(m-m-1)+m(-2) = 2 \neq 0$$

לכן הווקטורים  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  קופלנריים לכל  $m$ .

**שאלה 8**

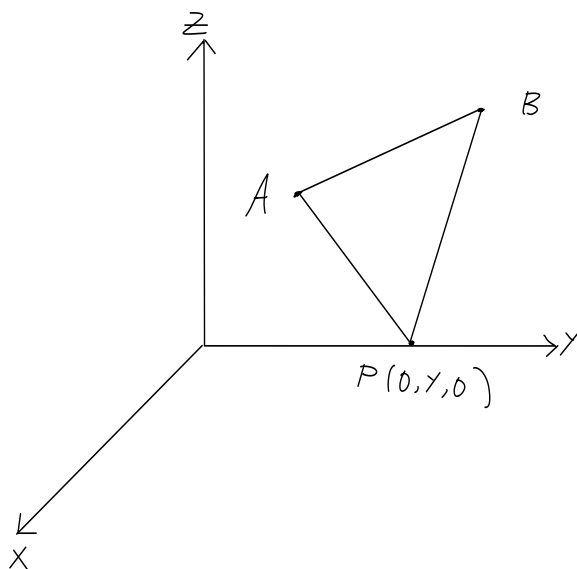


$$\overline{AB} = (-2, -6, 1), \quad \overline{AC} = (4, -3, -2), \quad \overline{AD} = (-4, -2, 2).$$

$$\overline{AD} \cdot (\overline{AB} \times \overline{AC}) = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -2(-10) + 6 \cdot 0 + (-20) = 0$$

לכן הנקודות נמצאות במישור אחד.

### שאלה 9



$$B = (6, 2, 2), A = (2, 4, 6)$$

$$\overline{AB} = (4, -2, -4), \quad \overline{AP} = (-2, y-4, -6)$$

$$S_{\Delta ABP} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AP}|$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -2 & -4 \\ -2 & y-4 & -6 \end{vmatrix} = (4y-4)i + 32j + (4y-20)k.$$

$$S_{\Delta ABP} = \frac{1}{2} \sqrt{(4y-4)^2 + 32^2 + (4y-20)^2}$$

$$S_{\Delta ABP}^2 = \frac{1}{4} [(4y-4)^2 + 32^2 + (4y-20)^2]$$

$$(S_{\Delta ABP}^2)'_y = \frac{1}{4} [8(4y-4) + 8(4y-20)] \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3.$$

$$P = (0, 3, 0) \text{ לכן}$$

$$S_{\Delta ABP} = \frac{\sqrt{64 + 1024 + 64}}{2} = 12\sqrt{2}.$$