שיעור 1
מרחבי מכפלת פנימית

1.1 הגדרה של מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$

הגדרה 1.1 מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. מכפלה פנימית על V היא פונקציה $V\times V\to\mathbb{R}$ המתאימה לכל זוג וקטורים u,v סקלר ממשי המסומן ב- $\langle u,\mathrm{v}\rangle$ כך שמתקיימות התכונות הבאות. לכל $u,\mathrm{v},w\in V$ ולכל סקלר $\lambda\in\mathbb{R}$:

1) סימטריות:
$$\langle u,\mathrm{v}\rangle=\langle \mathrm{v},u\rangle\ .$$

2) ליניאריות ברכיב הראשון:

א)
$$\langle u+\mathrm{v},w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle \mathrm{v},w\rangle\ .$$

ב)
$$\langle \lambda u,\mathrm{v}\rangle=\lambda\langle u,\mathrm{v}\rangle\ .$$

3) חיוביות:
$$\langle u,u\rangle\geq 0$$

וגם $\langle u,u\rangle=0$ אם ורק אם $u=0$.

הגדרה 1.2 מרחב אוקלידי

מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{R}$ יחד עם מכפלה פנימית מסויימת נקרא מרחב אוקלידי.

משפט 1.1 ליניאריות ברכיב השני

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ו $\langle,\rangle$ מכפלה פנימית. אז

1) לכל $u,\mathrm{v},w\in V$,
$$\langle u,\mathrm{v}+w\rangle=\langle u,\mathrm{v}\rangle+\langle u,w\rangle$$

2) לכל $u,\mathrm{v}\in V$ ולכל סקלר $\lambda\in\mathbb{R}$
$$\langle u,\lambda\mathrm{v}\rangle=\lambda\langle u,\mathrm{v}\rangle\ .$$

הוכחה:

1)
$$\langle u,\mathrm{v}+w\rangle=\langle \mathrm{v}+w,u\rangle=\langle \mathrm{v},u\rangle+\langle w,u\rangle=\langle u,\mathrm{v}\rangle+\langle u,w\rangle$$

(2

$$\langle u,\lambda \mathrm{v}\rangle = \langle \lambda \mathrm{v},u\rangle = \lambda \langle \mathrm{v},u\rangle = \lambda \langle u,\mathrm{v}\rangle \ .$$

■

1.2 דוגמאות של מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$

דוגמה 1.1

$V=\mathbb{R}^n$, לכל וקטורים $u=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, נגדיר

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \ .$$

אז זה מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}^n$.

דוגמה 1.2

יהיו $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ מספרים חיוביים. לכל שני וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$, $u=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, נגדיר

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i \ .$$

הוכיחו כי המכפלה הזאת היא מכפלה פנימית.

פתרון:

(1

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i x_i = \langle \mathrm{v},u\rangle$$

(2 נגדיר $w=\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}$. אז

$$\langle u+\mathrm{v},w\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x_i+y_i)\cdot z_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x_i\cdot z_i+y_i\cdot z_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\cdot z_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i\cdot z_i = \langle u,w\rangle + \langle \mathrm{v},w\rangle$$

(3

$$\langle ku,\mathrm{v}\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i(kx_i)y_i = \sum_{i=1}^n k\cdot \lambda_i x_i y_i = k\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i = k\langle u,\mathrm{v}\rangle$$

(4

$$\langle u,u\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq 0$$

כי $\lambda_i > 0$ לכל $1 \leq i \leq n$.

$\forall i$, $x_i = 0$ אם"ם $\langle u,u\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 = 0$

1.3 המכפלות הפנימיות העיקריות מעל $\mathbb{R}$

הגדרה 1.3 מכפלה פנימית לפי בסיס

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$. נבחר בסיס של V:

$$B = \{b_1,\ldots,b_n\} \ .$$

לכל $u,\mathrm{v} \in V$,

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \ , \quad \mathrm{v} = \sum_{i=1}^{n} y_i b_i \ .$$

מכפלה פנימית לפי בסיס B מסומנת $(,)_B$ ומוגדרת

$$(u,\mathrm{v})_B = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ .$$

קל להוכיח שזה מכפלה פנימית.

הגדרה 1.4 מכפלה פנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^n$

לכל $u,\mathrm{v} \in \mathbb{R}^n$, נניח כי בבסיס הסטנדרטי,

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ , \quad \mathrm{v} = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \ .$$

המכפלה פנימית הסטנדרטית מסומנת $(,)$ ומוגדרת

$$(u,\mathrm{v}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ .$$

הגדרה 1.5 העקבה של מטריצה ריבועית

לכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ העקבה של A זה סכום איברי האלכסון של A. העקבה מסומנת

$$\mathrm{tr}\ A \ .$$

משפט 1.2 תכונות של העקבה

לכל $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$:

1) $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$

2) $\mathrm{tr}(\lambda A)=\lambda\mathrm{tr}(A)$ לכל $\lambda\in\mathbb{F}$.

3) $\mathrm{tr}(A^t)=\mathrm{tr}(A)$.

הגדרה 1.6 המכפלה הפנימית הסטנדרטית של מטריצות

תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{n\times m}$. המכפלה הפנימית הסטנדרטית של מטריצות היא פונקציה $\langle,\rangle:\mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}$ שמוגדרת ע"י

$$\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}\left(B^t\cdot A\right)\ .$$

המכפלה הזאת נקראת המכפלה הפנימית הסטנדרטית במרחב $\mathbb{R}^{n\times m}$ גם.

דוגמה 1.3

הוכיחו כי המכפלה הפנימית הסטנדרטית של מטריצות בהגדרה הקודמת מקיינת את התכונות של מכפלה פנימית.

פתרון:

(1

$$\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^t\cdot A)=\mathrm{tr}\left((A^t\cdot B)^t\right)=\mathrm{tr}\left(A^t\cdot B\right)=\langle B,A\rangle\ .$$

(2 א)

$$\langle A+B,C\rangle=\mathrm{tr}(C^t\cdot(A+B))=\mathrm{tr}\left(C^t\cdot A+C^t\cdot B\right)=\mathrm{tr}\left(C^t\cdot A\right)+\mathrm{tr}\left(C^t\cdot B\right)=\langle A,C\rangle+\langle B,C\rangle\ .$$

ב)

$$\langle\lambda A,C\rangle=\mathrm{tr}(B^t\lambda A)=\mathrm{tr}\left(\lambda(B^tA)\right)=\lambda\mathrm{tr}\left(B^tA\right)=\lambda\left\langle A,B\right\rangle\ .$$

(3

$$\langle A,A\rangle=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ji}^2\geq 0$$

$\langle A,A\rangle=0$ אם"ם $a_{ji}=0$ $\forall i,j$, כלומר אם"ם $A=0$.

הגדרה 1.7 המכפלה הפנימית הסטנדרטית של פונקציות

תהיינה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו- $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות שמוגדרות בקטע $[a,b]\in\mathbb{R}$. המכפלה הפנימית הסטנדרטית של פונקציות מוגדרת

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\,dx\ .$$

1.4 מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$

הגדרה 1.8 מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$. מכפלה פנימית על V היא פונקציה $V\times V\to\mathbb{R}$ המתאימה לכל זוג וקטורים u,v סקלר ב- $\mathbb{R}$ המסומן ב- $\langle u,\mathrm{v}\rangle$ כך שמתקיים התנאים הבאים. לכל וקטורים $u,\mathrm{v},w\in V$ ולכל סקלר $\lambda\in\mathbb{C}$:

1) <u>הרמיטיות</u> :

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle=\overline{\langle \mathrm{v},u\rangle}\ .$$

2) <u>ליניאריות ברכיב הראשון</u>:

א)

$$\langle u+\mathrm{v},w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle \mathrm{v},w\rangle$$

ב)

$$\langle \lambda u,\mathrm{v}\rangle=\lambda\langle u,\mathrm{v}\rangle$$

3) <u>**חיוביות:**</u> $\langle u,u\rangle$ הוא מספר ממשי אי-שללי. $\langle u,u\rangle=0$ אם ורק אם $u=0$.

הגדרה 1.9 מרחב אוניטרי

מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{C}$ יחד עם מכפלה פנימית מסויימת נקרא מרחב אוניטרי.

משפט 1.3 ליניאריות חלקית של מ"פ מעל $\mathbb{C}$

יהי V מרחב מכפלה פנימית. אזי

א) לכל $u,\mathrm{v},w\in V$,

$$\langle u,\mathrm{v}+w\rangle=\langle u,\mathrm{v}\rangle+\langle u,w\rangle\ .$$

ב) לכל $u,\mathrm{v}\in V$ ולכל סקלר λ:

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle=\bar{\lambda}\langle u,\mathrm{v}\rangle\ .$$

הוכחה:

א)

$$\langle u,\mathrm{v}+w\rangle=\overline{\langle \mathrm{v}+w,u\rangle}=\overline{\langle \mathrm{v},u\rangle}+\overline{\langle w,u\rangle}=\overline{\langle \mathrm{v},u\rangle}+\overline{\langle w,u\rangle}=\langle u,\mathrm{v}\rangle+\langle u,w\rangle\ .$$

ב)

$$\langle u,\lambda\mathrm{v}\rangle=\overline{\lambda\langle \mathrm{v},u\rangle}=\bar{\lambda}\overline{\langle \mathrm{v},u\rangle}=\bar{\lambda}\langle u,\mathrm{v}\rangle\ .$$

■

1.5 דוגמאות של מרחבים אוניטריים

דוגמה 1.4

לכל $\in \mathbb{C}^n$ $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, $u=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$.

$$(u,\mathrm{v})=\sum_{i=1}^n x_i\bar{y}_i \ .$$

הוכיחו שזאת מרחב מכפלה פנימית.

פתרון:

1)

$$(u,\mathrm{v})=\sum_{i=1}^n x_i\bar{y}_i=\sum_{i=1}^n \overline{\bar{x}_i}\bar{y}_i=\sum_{i=1}^n \overline{\bar{x}_i y_i}=\sum_{i=1}^n \overline{y_i\bar{x}_i}=\overline{\sum_{i=1}^n y_i\bar{x}_i}=\overline{(\mathrm{v},u)} \ .$$

2)

$$(u+\mathrm{v},w)=\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)\cdot\bar{z}_i=\sum_{i=1}^n x_i\cdot\bar{z}_i+\sum_{i=1}^n y_i\cdot\bar{z}_i=(u,w)+(\mathrm{v},w) \ .$$

3)

$$(u,u)=\sum_{i=1}^n x_i\bar{x}_i=\sum_{i=1}^n |x_i|^2\geq 0$$

$u=0 \Leftarrow (u,u)=0$.

מכפלה פנימית זו נקראת המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{C}^n$.

דוגמה 1.5

נתון

$$u=\begin{pmatrix}1-i\\ 2+i\end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{v}=\begin{pmatrix}3+i\\ -i\end{pmatrix} \ .$$

$u,\mathrm{v}\in\mathbb{C}^2$. חשבו את

א) (u,v)

ב) (v,u)

ג) (u,u)

ד) $(u,(1+i)\mathrm{v})$

פתרון:

א)

$$(u,\mathrm{v})=(1-i)(3-i)+(2+i)\cdot i=3-4i-1+2i-1=1-2i$$

ב)

$$(\mathrm{v},u)=(3+i)(1+i)-i(2-i)=3+4i-1-2i-1=1+2i$$

ג)

$$(u,u)=(1-i)(1+i)+(2+i)(2-i)=2+5=7$$

ד)

$$(u,(1+i)\mathrm{v})=\overline{(1+i)}(u,\mathrm{v})=(1-i)(1-2i)=1-3i-2=-1-3i\ .$$

1.6 הנורמה והמרחק

הגדרה 1.10 הנורמה

יהי V מרחב מכפלה פנימית. הנורמה $\|u\|$ של וקטור $u\in V$ היא מספר ממשי אי-שללי הניתנת ע"י

$$\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}$$

במרחבים $\mathbb{R}^2$ ו- $\mathbb{R}^3$ הנורמה היא בעצם האורך של וקטור.

דוגמה 1.6

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbb{F}$, $u\in V$, $\lambda\in\mathbb{F}$. הוכיחו כי

א)

$$\|\lambda u\|=|\lambda|\|u\|$$

ב)

$$\left\|\frac{1}{\|u\|}u\right\|=1$$

פתרון:

א)

$$\|\lambda u\|=\sqrt{(\lambda u,\lambda u)}=\sqrt{\lambda(u,\lambda u)}=\sqrt{\lambda\cdot\bar{\lambda}(u,u)}=\sqrt{|\lambda|^2(u,u)}=\lambda\|u\|\ .$$

ב) $\frac{1}{\|u\|}>0$ לכן לפי סעיף א'

$$\left\|\frac{1}{\|u\|}u\right\|=\frac{1}{\|u\|}\cdot\|u\|=1$$

עבור כל וקטור $u\neq 0$ אפשר למצוא סקלר λ כך ש- λu יהיה וקטור יחידה.

לפעולה, $u\to\frac{u}{\|u\|}$ קוראים נרמול של וקטור u.

לוקטור היחידה $\frac{u}{\|u\|}$ קוראים הוקטור המנורמל.

1.7 דוגמאות של הנורמה

דוגמה 1.7

במרחב $\mathbb{C}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית חשבו את הנורמה של הוקטור $u = \begin{pmatrix} i \\ 1+i \end{pmatrix}$ וחשבו את הוקטור המנורמל.

פתרון:

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)} = \sqrt{i\bar{i} + (1+i)\overline{(1+i)}} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3} \ .$$

ננרמל את הוקטור:

$$\frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} i \\ \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} i \end{pmatrix}$$

דוגמה 1.8

במרחב של הפונקציות הממשיות בקטע $[0,1]$

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_0^1 f^2(x)\,dx}$$

לדוגמה, עבור $f(x) = 1$,

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_0^1 1^2\,dx} = 1$$

עבור $f(x) = x^3$,

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_0^1 x^6\,dx} = \frac{1}{\sqrt{7}} \ .$$

ננרמל את הוקטור הזה:

$$\frac{f(x)}{\|f(x)\|} = \sqrt{7} \cdot x^3 \ .$$

אז

$$\|\sqrt{7}x^3\| = \sqrt{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} = 1 \ .$$

דוגמה 1.9

במרחב $\mathbb{R}^{2\times 2}$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית נקח $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\|A\| = \sqrt{(A,A)} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^t \cdot A)} = \sqrt{14} \ .$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{tr}(A^t \cdot A) = 10 + 4 = 14 \ .$$

ננרמל את הוקטור:

$$\frac{1}{\sqrt{14}} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 \end{pmatrix}$$

1.8 משפט פיתגורס, משפט קושי שוורץ, אי-שוויון משולש

משפט 1.4 משפט פיתגורס המוכלל של ווקטורים במרחב מכפלה פנימית

לכל שני וקטורים u,v במרחב מכפלה פנימית מתקיים:

(1
$$\|u\pm \mathrm{v}\|^2=\|u\|^2\pm 2\mathrm{Re}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle+\|v\|^2$$

(2
$$\|u+\mathrm{v}\|^2+\|u-\mathrm{v}\|^2=2\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)$$

הוכחה:

(1
$$\begin{aligned}
\|u+\mathrm{v}\|^2&=\langle u+\mathrm{v},u+\mathrm{v}\rangle && \text{(הגדרה של המכפלה פנימית)}\\
&=\langle u,u+\mathrm{v}\rangle+\langle \mathrm{v},u+\mathrm{v}\rangle && \text{(ליניאריות)}\\
&=\langle u,u\rangle+\langle u,\mathrm{v}\rangle+\langle \mathrm{v},u\rangle+\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && \text{(ליניאריות חלקית)}\\
&=\langle u,u\rangle+\langle u,\mathrm{v}\rangle+\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}+\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && \text{(הרמיטיות)}\\
&=\|u\|^2+\langle u,\mathrm{v}\rangle+\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}+\|\mathrm{v}\|^2 && \text{(הגדרה של הנורמה)}\\
&=\|u\|^2+2\mathrm{Re}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle+\|\mathrm{v}\|^2 && \text{(ראו הסבר למטה)}\ .
\end{aligned}$$

הסבר של שלב האחרון: לכל מספר $z=a+bi$:

$$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=2\mathrm{Re}\ z\ .$$

(2
$$\begin{aligned}
\|u+\mathrm{v}\|^2+\|u-\mathrm{v}\|^2&=\|u\|^2+2\mathrm{Re}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle+\|\mathrm{v}\|^2+\|u\|^2-2\mathrm{Re}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle+\|\mathrm{v}\|^2\\
&=2\left(\|u\|^2+\|\mathrm{v}\|^2\right)
\end{aligned}$$

השוויון האחרון במרחב $\mathbb{R}^2$ מבטא את משפט גאומרטי: במקבילית, סכום ריבועי האלכסונים שווה לסכום ריבועי הצלעות.

■

משפט 1.5 אי-שוויון קושי-שוורץ

לכל וקטורים u ו- v במרחב מכפלה פנימית מתקיים

$$|\langle u,\mathrm{v}\rangle|\leq \|u\|\cdot\|\mathrm{v}\|\ .$$

הוכחה: אם $u=\bar{0}$ אז מקבלים $0\leq 0$.

נניח ש- $u\neq\bar{0}$. לכל סקלר λ מתקיים

$$\langle \lambda u+\mathrm{v},\lambda u+\mathrm{v}\rangle\geq 0\ , \qquad (\#)$$

לפי משפט הקיטוב האגף השמאל הוא

$$\begin{aligned}\langle \lambda u + \mathrm{v}, \lambda u + \mathrm{v}\rangle =& \|\lambda u\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle \lambda u, \mathrm{v}\rangle + \|\mathrm{v}\|^2\\ =& \|\lambda u\|^2 + \langle \lambda u, \mathrm{v}\rangle + \overline{\langle \lambda u, \mathrm{v}\rangle} + \|\mathrm{v}\|^2\\ =& \lambda\bar{\lambda}\|u\|^2 + \lambda\,\langle u, \mathrm{v}\rangle + \bar{\lambda}\overline{\langle u, \mathrm{v}\rangle} + \|\mathrm{v}\|^2\end{aligned}$$

נציב זה באגף השמאל של (#) ונקבל

$$\lambda\bar{\lambda}\|u\|^2 + \lambda\,\langle u, \mathrm{v}\rangle + \bar{\lambda}\overline{\langle u, \mathrm{v}\rangle} + \|\mathrm{v}\|^2 \geq 0$$

נציב $\lambda = \dfrac{-\overline{\langle u, \mathrm{v}\rangle}}{\|u\|^2}$, $\bar{\lambda} = \dfrac{-\langle u, \mathrm{v}\rangle}{\|u\|^2}$ ונקבל

$$\frac{\overline{\langle u, \mathrm{v}\rangle}\,\langle u, \mathrm{v}\rangle}{\|u\|^2} - \frac{\overline{\langle u, \mathrm{v}\rangle}\,\langle u, \mathrm{v}\rangle}{\|u\|^2} - \frac{\overline{\langle u, \mathrm{v}\rangle}\,\langle u, \mathrm{v}\rangle}{\|u\|^2} + \|\mathrm{v}\|^2 \geq 0$$

נכפיל ב- $\|u\|^2$:

$$-\,\langle u, \mathrm{v}\rangle\,\overline{\langle u, \mathrm{v}\rangle} + \|u\|^2\|\mathrm{v}\|^2 \geq 0$$

נציב $\langle u, \mathrm{v}\rangle\,\overline{\langle u, \mathrm{v}\rangle} = |\,\langle u, \mathrm{v}\rangle\,|^2$ ונקבל

$$|\,\langle u, \mathrm{v}\rangle\,|^2 \leq \|u\|^2\|\mathrm{v}\|^2$$

מש"ל. ■

אפשר לשים לב שבמרחב $\mathbb{R}^2$ הביטוי $\|u - \mathrm{v}\|$ הוא המרחק בין שתי הנקודות במישור המתאימה ל- u ול- v.

ישנה הכללה של מושג המרחק בכל מרחב מכפלה פנימית.

הגדרה 1.11 המרחק

יהיו u ו- v שני וקטורים במרחב מכפלה פנימית. המרחק בין u ו- v הוא מספר ממשי אי-שלילי המוגדר ע"י

$$d(u, \mathrm{v}) = \|u - \mathrm{v}\|$$

משפט 1.6 תכונות של המרחק ואי-שוויון המשולש

נראה כי מושג המרחק החדש מקיים תכונת בסיסית של המרחק המוכר במישור.

1)

$$d(u, \mathrm{v}) = d(\mathrm{v}, u)$$

הוכחה:

$$d(u, \mathrm{v}) = \|u - \mathrm{v}\| = \|(-1)(\mathrm{v} - u)\| = 1 \cdot \|\mathrm{v} - u\| = d(\mathrm{v}, u)$$

2) $d(u, \mathrm{v}) \geq 0$. $d(u, \mathrm{v}) = 0$ אם ורק אם $u = \mathrm{v}$.

3)

$$d(u, \mathrm{v}) \leq d(u, w) + d(w, \mathrm{v})$$

זאת תכונה הנקראת **אי-שוויון המשולש**.

הוכחה: לכל שני וקטורים u,v, לפי משפט הקיטוב,

$$\|u+\mathrm{v}\|^2=\|u\|^2+2\mathrm{Re}\left\langle u,\mathrm{v}\right\rangle+\|\mathrm{v}\|^2\le\|u\|^2+2|\left\langle u,\mathrm{v}\right\rangle|+\|\mathrm{v}\|^2 \qquad \text{(\#1)}$$

<u>הסבר:</u>
נסמן $z=\langle u,\mathrm{v}\rangle=a+ib$,
$\bar{z}=a-ib$.
נרשום $|\langle u,\mathrm{v}\rangle|^2=z\bar{z}=a^2+b^2$,
לכן $|\langle u,\mathrm{v}\rangle|=\sqrt{a^2+b^2}$.
מצד שני $2\mathrm{Re}\langle u,\mathrm{v}\rangle=2\mathrm{Re}z=2a$,
לכן נקבל $2\mathrm{Re}(u,\mathrm{v})=2a\le2\sqrt{a^2+b^2}=2|\langle u,\mathrm{v}\rangle|$.
נציב אי -שוויון קושי-שוורץ ב- (#1) ונקבל

$$\|u+\mathrm{v}\|^2\le\|u\|^2+2\|u\|\cdot\|\mathrm{v}\|+\|\mathrm{v}\|^2=(\|u\|+\|\mathrm{v}\|)^2$$

נציב את $-\mathrm{v}$ במקום v:

$$\|u-\mathrm{v}\|^2\le(\|u\|+\|\mathrm{v}\|)^2\ .$$

לכן

$$\|u-\mathrm{v}\|\le\|u\|+\|\mathrm{v}\|\ .$$

נציב כעת את $u-w$ במקום u ו $\mathrm{v}-w$ במקום v:

$$\|(u-w)-(\mathrm{v}-w)\|\le\|u-w\|+\|\mathrm{v}-w\|\ .$$

ז"א

$$\|u-\mathrm{v}\|\le\|u-w\|+\|\mathrm{v}-w\|\ .$$

קיבלנו את אי-שוויון המשולש:

$$d(u,\mathrm{v})\le d(u,w)+d(\mathrm{v},w)$$

■

1.9 אורתוגונליות

הגדרה 1.12 וקטורים אורתוגונליים

וקטורים u,v במרחב מכפלה פנימית נקראים אורתוגונליים זה לזה (או מאונכים זה לזה) אם

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle=0\ .$$

סימון:

$$u\perp\mathrm{v}\ .$$

1) אם $\langle u,\mathrm{v}\rangle=0$ אז

$$\langle\mathrm{v},u\rangle=\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}=\bar{0}=0\ ,$$

כלומר יחס האורתוגונליות הוא סימטרי.

2) וקטור האפס אורתוגונל לכל וקטור v.

3) במרחב $\mathbb{R}^n$ עם המכפלה פנימית הסטנדרטית, מושג האורתוגונליות מתלכד עם מושג האורתוגונליות המוגדר על סמך המכפלה סלקרית.

דוגמה 1.10

במרחב הפונקציות הרציפות בקטע $[0,1]$,

$$f(x)=2x-1\ ,\quad g(x)=2x^2-2x+\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}(f,g)=&\int_0^1 (2x-1)\left(2x^2-2x-\frac{1}{3}\right)dx\\ =&\int_0^1\left(4x^3-6x^2+\frac{8}{3}x-\frac{1}{3}\right)dx\\ =&\left[x^4-2x^3+\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x\right]_0^1\\ =&0\ .\end{aligned}$$

לכן $f(x)\perp g(x)$.

דוגמה 1.11

במרחב $\mathbb{C}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית:

$$u=\begin{pmatrix}1\\ i\\ 1\\ i\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}=\begin{pmatrix}i\\ 1\\ i\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}(u,\mathrm{v})=&1\cdot\bar{i}+i\cdot\bar{1}+1\cdot\bar{i}+i\cdot\bar{1}\\ =&-i+i-i+i\\ =&0\end{aligned}$$

לכן $u\perp\mathrm{v}$.

דוגמה 1.12

הוכיחו שאם $u\perp\mathrm{v}$ אז

א) $\|u+\mathrm{v}\|^2=\|u\|^2+\|\mathrm{v}\|^2$

ב) $\|u+\mathrm{v}\|=\|u-\mathrm{v}\|$

פתרון:

א)

$$\|u+\mathrm{v}\|^2=\|u\|^2+2\mathrm{Re}\cancelto{0}{\langle u,\mathrm{v}\rangle}+\|\mathrm{v}\|^2=\|u\|^2+\|\mathrm{v}\|^2$$

המשמעות הגאומטרית ב- $\mathbb{R}^2$ - משפט פיתגורס.

ב)

$$\|u-\mathrm{v}\|^2=\|u\|^2-2\mathrm{Re}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle+\|\mathrm{v}\|^2=\|u\|^2+\|\mathrm{v}\|^2=\|u\|^2+\|\mathrm{v}\|^2+2\mathrm{Re}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle$$

בגלל ש $\langle u,\mathrm{v}\rangle=0$. לכן

$$\|u-\mathrm{v}\|^2=\|u+\mathrm{v}\|^2$$

ולכן
$$\|u-\mathrm{v}\|=\|u+\mathrm{v}\|$$
הפירוש הגאומטרית ב- $\mathbb{R}^2$: האלכסונים של מלבן שווים זה לזה.

הגדרה 1.13 וקטור האורתוגונלי לתת-מרחב

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית ו- $U\subset V$ U תת-מרחב של V. נניח ש $\mathrm{v}\in V$. אומרים כי v אורתוגונלי ל- U אם v אורתוגונלי לכל וקטור $u\in U$. כלומר, אם
$$\langle \mathrm{v}|u\rangle=0$$
לכל $u\in U$, אז הווקטור v אורתוגונלי לתת-מרחב U.
סימון:
$$\mathrm{v}\perp U\ .$$

הגדרה 1.14 המשלים האורתוגונלי

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית ו- $U\subset V$ U תת-מרחב של V. נניח ש $\mathrm{v}\in V$. **המשלים האורתוגונלי** של U מסומן ב $U^{\perp}$ ומוגדר לפי התנאי שכל וקטור ב- $U^{\perp}$ אורתגונלי לכל ווקטור ב U.
כלומר:
$$\langle a|b\rangle=0$$
לכל $a\in U$ ולכל $b\in U^{\perp}$.

דוגמה 1.13

נניח ש- $V=\mathbb{R}_2[x]$, ו- $U=\text{span}\{x\}$. מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי $U^{\perp}$. כאשר המכפלה הפנימית היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית בקטע $[0,1]$.

פתרון:

וקטור $p(x)=a+bx+cx^2\in U^{\perp}$ אם"ם $(x,p(x))=0$.
$$\langle x,p(x)\rangle=\langle x,a+bx+cx^2\rangle=\int_0^1 dx\,x\cdot(a+bx+cx^2)=\left[\frac{ax^2}{2}+\frac{bx^3}{3}+\frac{cx^4}{4}\right]_0^1=\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{4}=0\ .$$
לכן
$$U^{\perp}=\left\{a+bx+cx^2\middle|6a+4b+3c=0\ .\right\}$$
נמצא בסיס של $U^{\perp}$:
$$a=-\frac{2}{3}b-\frac{1}{2}c\ ,\quad b,c\in\mathbb{R}\ .$$
לכן
$$a+bx+cx^2=-\frac{2}{3}b-\frac{1}{2}c+bx+cx^2=b\left(-\frac{2}{3}+x\right)+c\left(-\frac{1}{2}+x^2\right)\ ,\qquad b,c\in\mathbb{R}\ .$$
לכן $\{1-2x^2,2-3x\}$ בסיס של $U^{\perp}$. נשים לב כי
$$3=\dim(V)=\overbrace{\dim(U)}^{=1}+\overbrace{\dim(U^{\perp})}^{=2}$$
לכן $V=U\oplus U^{\perp}$

דוגמה 1.14

מצאו בסיס ל- $U^{\perp}$ בכל אחד מהמקרים הבאים:

1) $V=\mathbb{C}^2$, $U=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1+i\\ i\end{pmatrix}\right\}$ ביחס למכפלה פנימית הסטנדרטית.

2) $V=\mathbb{R}_2[x]$, $U=\text{span}\left\{(x,x^2\right\}$ ביחס למכפלה פנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.

3) $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$, $U=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ ביחס למכפלה פנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

פתרון:

1) $\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\in U^{\perp}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}1+i\\ i\end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1+i\\ i\end{pmatrix}\right)=z_1\overline{(1+i)}+z_2\bar{i}=0\quad\Rightarrow\quad z_2=\frac{i}{1-i}z_1=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z_1$$

לכן

$$U^{\perp}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\end{pmatrix}z\middle|z\in\mathbb{C}\right\}\ .$$

בסיס של $U^{\perp}$:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\end{pmatrix}\right\}$$

2) $p(x)=a+bx+cx^2\Leftrightarrow(p(x),x)=0$ וגם $(p(x),x^2)=0$.

$$(p(x),x)=\int_0^1(a+bx+cx^2)x\,dx=\left[\frac{ax^2}{2}+\frac{bx^3}{3}+\frac{cx^4}{4}\right]_0^1 1=\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{4}=0$$

$$(p(x),x^2)=\int_0^1(a+bx+cx^2)x^2\,dx=\left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^4}{4}+\frac{cx^5}{5}\right]_0^1 1=\frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}=0$$

לכן

$$U^{\perp}=\left\{a+bx+cx^2\middle|\begin{array}{rl}6a+4b+3c&=0\\20a+15b+12c&=0\end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}6&4&3\\20&15&12\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to 3R_2-10R_1}\begin{pmatrix}6&4&3\\0&5&6\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to 5R_1-4R_2}\begin{pmatrix}30&0&-9\\0&5&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{10}\\0&1&\frac{6}{5}\end{pmatrix}$$

$a=0.3c$ $b=-1.2c$ $c\in\mathbb{R}$.

$$a+bx+cx^2=\frac{3}{10}c-\frac{12}{10}cx+cx^2=c\left(\frac{3}{10}-\frac{12}{10}x+x^2\right)\ ,\qquad c\in\mathbb{R}\ .$$

לכן נקבל בסיס של $U^{\perp}$:

$$B_{U^{\perp}}=\left\{3-12x+10x^2\right\}$$

3) נסמן $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\Leftarrow$ $U = \text{span}(A_1, A_2)$.

$$U^{\perp} = \left\{ B \in \mathbb{R}^{2\times 2} \middle| (B, A_1) = 0 \ , (B, A_2) = 0 \right\}$$

נסמן $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$(B, A_1) = \text{tr}(A_1^t \cdot B) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \text{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a = 0$$

$$(B, A_2) = \text{tr}(A_2^t \cdot B) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \text{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = a + b = 0$$

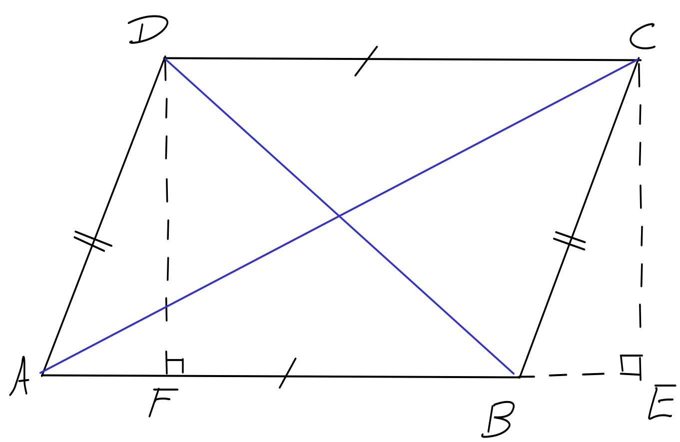
לכן

$$U^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \middle| c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

בסיס של $U^{\perp}$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

1.10 * הערה: סכום ריבועי האלכסונים של במקבילית שווה לסכום ריבועי הצלעות של



הוכחה:

$AC^2 = AE^2 + CE^2$ (פיתגורס).
לכן $AC^2 = (AB + BE)^2 + CE^2$

(1*)
$$AC^2 = AB^2 + BE^2 + 2 \cdot AB \cdot BE + CE^2$$

$CD = EF$ בגלל ש $CDFE$ מלבן.
אבל $CD = AB$ לכן $AB = CD = EF$.

גם $CE = DF$ (מרחק בין שנ ישרים מקבילים).
לכן $\Delta AFD \cong \Delta BEC$ (משולשים חופפים)
לכן $AF = BE$.

נסתכל אל המשולש ישר זוית ΔDFB.
$BD^2 = BF^2 + DF^2$ (פיתגורס).
לכן $BD^2 = (EF - BE)^2 + CE^2$ בגלל ש $DF = CE$.
לכן $BD^2 = (AB - BE)^2 + CE^2$ בגלל ש $EF = AB$.
לכן

$$BD^2 = AB^2 + BE^2 - 2 \cdot AB \cdot BE + CE^2 \qquad (*2)$$

נחבר את הביטוים (1*)+(2*) ונקבל

$$\begin{aligned} & AC^2 + BD^2 = AB^2 + BE^2 + 2 \cdot AB \cdot BE + CE^2 + AB^2 + BE^2 - 2 \cdot AB \cdot BE + CE^2 \\ \Rightarrow \quad & AC^2 + BD^2 = 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot BE^2 + 2 \cdot CE^2 \\ \Rightarrow \quad & AC^2 + BD^2 = 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot \left(BE^2 + CE^2\right) \qquad (*3) \end{aligned}$$

במשולש ישר זוית ΔBEC
$BC^2 = BE^2 + CE^2$ (פיתגורס). לכו נקבל ממשוואה (3*)

$$\begin{aligned} & AC^2 + BD^2 = 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot BC^2 \\ \Rightarrow \quad & AC^2 + BD^2 = AB^2 + AB^2 + BC^2 + BC^2 \\ \Rightarrow \quad & AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 \end{aligned}$$

לכן סכום ריבועי האלכסונים שווה לסכום ריבועי הצלעות.