

## אלגברה ליניארית 1 למדמ"ח

מועד ג'

מרצים: דר' מרינה ברשדסקי, מר' אמיר גוריון.

תשפ"ד סמסטר ב'

השאלון מכיל 11 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

**בהצלחה!**

### הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

### חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט A4), מצורפים לשאלון.

### אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.
- יש לציין את השאלות שעניתם עליהן בתחילת המחברת.

### שאלה 1. ( 25 נקודות )

א' (4 נק') יהו  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ . הוכיחו כי אם  $AB^2 - A$  הפיכה אז  $BA - A$  הפיכה.

ב' (21 נק') פתרו בשיטת גאוס את המערכת הבאה:  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ , כאשר

$$A = \begin{pmatrix} k & k-1 & k \\ k^2+k & k-1 & 2k \\ k^2+2k & 2k-2 & 3k \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2k+3 \\ k^2+3k+3 \\ k^2+5k+6 \end{pmatrix}$$

1. (5 נק') דרגו מטריצה מורחבת וצינו ערכים מובילים שלה.
2. (4 נק') יש לציין עבור איזה ערך של  $k$  למערכת יש פתרון יחיד. נמקו היטב.
3. (4 נק') במקרה של אינסוף פתרונות מצאו את הפתרון הכללי.
4. (4 נק') עבור איזה ערך של  $k$  אין פתרון? נמקו היטב.
5. (4 נק') עבור מקרים 3, 4. מצאו בסיס ומימד למרחבים וקטורים הבאים:

$\text{Col}A, \text{Row}A, \text{Nul}A$

## שאלה 2. (25 נקודות)

א' (8 נק')  $A$  מטריצה מסדר  $m \times n$  ו- $B$  מטריצה מסדר  $n \times m$  המקיימת  $AB = I_m$

1. (4 נק') הוכיחו כי למערכת ההומוגנית  $Bx = 0$  יש פתרון יחיד.
2. (4 נק') הוכיחו כי  $m \leq n$ .

ב' (17 נק') נתון תת-מרחב  $V = \{(1, 0, 2), (2, 1, 4), (3, -1, 6)\}$

1. (5 נק') מצאו בסיס  $B$  של תת-מרחב  $V$ ,
2. (6 נק') לכל אחד מהוקטורי הקבוצה בדקו האם הוא שייך ל- $V$ , במידה וכן מצאו את וקטור הקוארדינטות שלו ביחס לבסיס  $B$ .
3. (6 נק') מצאו את וקטורי הקוארדינטות של וקטורי  $V$  ביחס לבסיס  $B$ .

### שאלה 3. ( 25 נקודות )

א' ( 8 נק' ) תהי  $A$  מטריצה ממשית אנטיסימטרית, כלומר המקיימת  $A^T = -A$ . נתון שמטריצה  $I + A$  הפיכה.

1 ( 4 נק' ) הוכיחו שגם המטריצה  $I - A$  הפיכה.

2 ( 4 נק' ) הוכיחו שהמטריצה  $C = (I - A)(I + A)^{-1}$  מקיימת  $C^T C = I$ .

ב' ( 8 נק' ) נתונות קבוצות הווקטורים :

$$V = \{ax^2 + bx + c \mid a + 2b = 0, a, b, c \in R\} \subseteq P_2[x]$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a^2 + 1 & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in C \right\} \subseteq M_{2 \times 2}$$

האם  $V$  תת-מרחב וקטורי של  $P_2[x]$ ? האם  $W$  תת-מרחב וקטורי של  $M_{2 \times 2}$ ?

ג' ( 9 נק' ) חשבו ביטוי הבא

$$\frac{1+i}{1-i} + (1+2i)(2-i)$$

וכתבו תשובה בצורה אלגברית סטנדרטית.

### שאלה 4. ( 25 נקודות )

א' ( 5 נק' ) עבור אילו ערכי  $a$  מטריצה  $A$  הפיכה ?

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 2a & 8 \\ 3a & 9 & 18 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ב' ( 20 נק' ) נתונה טרנספורמציה ליניארית  $T : M_{2 \times 2}(R) \rightarrow (R^3)$  המוגדרת על ידי :

$$T \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a + 3b + 4c - 3d \\ b + 3c - 2d \\ 3a + 7b + c - 5d \end{pmatrix}$$

1 ( 5 נק' ) מצאו את המטריצה המייצגת הטרנספורמציה הסטרנדרטית של  $T$ .

2 ( 5 נק' ) מצאו את המימד ובסיס של  $ImT$

3 ( 5 נק' ) מצאו את המימד ובסיס של  $KerT$

4 ( 5 נק' ) האם  $T$  חד חד ערכית? האם  $T$  על? נמקו את תשובותיכם.

**שאלה 5. ( 25 נקודות )**

א' ( 6 נק') בדקו קבוצת הווקטורים  $\{u + v + w, v - u, u - w\}$  ת"ל או בת"ל כאשר  $\{u, v, w\}$  ת"ל  
 ב' ( 19 נק') מצאו את משוואת הפולינומים שעוברות דרך נקודות שעבורם סכום ריבועי המרחקים מהנקודות

$$A(0, 1), B(-2, 4), C(1, -2)$$

מינמלי.

1. ( 9 נק') כאשר הפולינום הוא פרבולה

$$y = ax^2 + bx + c$$

2. ( 10 נק') כאשר הפולינום הוא ישר

$$y = ax + b$$