שעור 4
דטרמיננטות וכלל קרמר

4.1 הגדרה של דטרמיננטה של מטריצה ריבועית

נדון רק במטריצה ריבועית.
הדטרמיננטה של מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, תסומן $\det A$ או $|A|$, היא מספר ממשי. באופן דומה, הדטרמיננטה של מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, היא מספר מורכב.

הגדרה 4.1 דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר 2×2

נתוונה מטריצה $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

הדטרמיננטה של A מוגדרת

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \ .$$

דוגמה 4.1 דטרמיננטה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ , \qquad |A| = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2 \ .$$

■

הגדרה 4.2 דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר 3×3

נתוונה מטריצה $A \in \mathbb{F}^{3\times 3}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ניצן לחשב את הדטרמיננטה של A ע"י כל אחת מהשורות או ע"י כל אחת מהעמודות:

שורה 1:

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \ .$$

שורה 2:

$$|A| = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \ .$$

שורה 3:

$$|A| = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \ .$$

עמודה 1:

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} .$$

עמודה 2:

$$|A| = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} .$$

עמודה 3:

$$|A| = a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} .$$

דוגמה 4.2 דטרמיננטה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{aligned} |A| =& 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} . \\ =& 1\cdot(4\cdot 7 - 5\cdot 0) - 2(0\cdot 7 - 5\cdot 6) + 3\cdot(0\cdot 0 - 4\cdot 6) \\ =& 28 + 60 - 72 , \\ =& 16 . \end{aligned}$$

הגדרה 4.3 המינור

נתונה מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. המינור ה- (i,j) של A מסומן ב- M_{ij} ומוגדר להיות הדטרמיננטה של המטריצה הריבועית המתקבלת מ- A ע"י מחיקת שורה i ועמודה j. את המינור ה- (i,j) נסמן ב- M_{ij}.

דוגמה 4.3

עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ מצאו את M_{11}, M_{12}, M_{23}, M_{32}.

פתרון:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 28 ,$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -30 ,$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -12 ,$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 .$$

הגדרה 4.4 הקופקטור

נתונה מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הקופקטור ה- (i,j) של A מסומן ב- C_{ij} ומוגדר להיות המינור ה- (i,j) כפול $(-1)^{i+j}$:
$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij} \ .$$

דוגמה 4.4

עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ מצאו את C_{11}, C_{12}, C_{23}, C_{32}.

פתרון:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= (-1)^2 \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} &&= 28 \ , \\
C_{12} &= (-1)^3 \cdot M_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} &&= 30 \ , \\
C_{23} &= (-1)^5 \cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} &&= 12 \ , \\
C_{32} &= (-1)^5 \cdot M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} &&= -5 \ .
\end{aligned}$$

הגדרה 4.5 דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר $n\times n$

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית.
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \ .$$
הדטרמיננטה של A, מסומנת ב- $|A|$.
ניתן לחשב את הדטרמיננטה לפי שורה i:
$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \ ,$$
כאשר M_{ij} המינור ה- (i,j) של A ו- C_{ij} הקופקטור ה- (i,j) של המטריצה A.
ניתן לחשב את הדטרמיננטה לפי עמודה j:
$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \ .$$
למעשה, ניתן לחשב את $|A|$ לפי שורה כלשהי או לפי עמודה כלשהי.

דוגמה 4.5

נסמן $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, מצאו את הדטרמיננטה של המטריצה.

פתרון:

$$\begin{aligned} |A| \overset{\text{שורה ראשונה}}{=} & 1 \cdot M_{11} - 5 \cdot M_{12} + 0 \cdot M_{13} \\ =& 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ =& -2 \ . \end{aligned}$$

נשתעשע....

$$\begin{aligned} |A| \overset{\text{שורה שנייה}}{=} & -2 \cdot M_{21} + 4 \cdot M_{22} - (-1) \cdot M_{23} \\ =& -2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ =& -2 \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A| \overset{\text{עמודה שלישית}}{=} & 0 \cdot M_{13} - (-1) \cdot M_{23} + 0 \cdot M_{33} \\ =& 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ =& -2 \ . \end{aligned}$$

הערה:

סימני האיברים הם כך:

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

דוגמה 4.6

חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{aligned}|A| &\overset{\text{עמודה ראשונה}}{=} 3\cdot M_{11}-0\cdot M_{21}+0\cdot M_{31}-0\cdot M_{41}+0\cdot M_{51}-0\cdot M_{61}\\ &=3\cdot\begin{vmatrix}2&-5&7&3\\0&1&5&0\\0&2&4&-1\\0&0&-2&0\end{vmatrix}\\ &=3\cdot(-1)^{1+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1&5&0\\2&4&-1\\0&-2&0\end{vmatrix}\\ &=6\cdot(-2)=-12\ .\end{aligned}$$

משפט 4.1 דטרמיננטה של מטריצה משולשית

אם $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה משולשית אז $|A|=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\dots\cdot a_{nn}$, כלומר מכפלת איברי האלכסון הראשי.

הוכחה: תרגיל בית. ■

דוגמה 4.7

חשבו

$$\begin{vmatrix}1&5&7\\0&2&19\\0&0&3\end{vmatrix}\ .$$

פתרון:

$$\begin{vmatrix}1&5&7\\0&2&19\\0&0&3\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}2&19\\0&3\end{vmatrix}=1\cdot2\cdot3=6\ .$$

משפט 4.2

אם $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית ו- B מטריצה המתקבלת מ- A ע"י הפעולה האלמנטרית:

(1) החלפת 2 שורות, אז
$$|B|=-|A|.$$

(2) הכפלת שורה בסקלר $\alpha\neq 0$, אז
$$|B|=\alpha|A|.$$

(3) הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת, אז
$$|B|=|A|\ .$$

הוכחה: תרגיל בית. ■

דוגמה 4.8

חשבו את $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$.

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 12 \cdot \left(1 \cdot 1 - 2 \cdot 2\right) = 12 \cdot (-3) = -36 \ .$$

דוגמה 4.9

חשבו את $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 12 & 15 & 18 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix}$

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 12 & 15 & 18 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 15 & 18 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1} 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 7R_1} 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 24 \cdot (-3) = -72 \ .$$

דוגמה 4.10

חשבו את $\begin{vmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 28 & 35 & 42 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix}$

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 28 & 35 & 42 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 28 & 35 & 42 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix} = 7 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix} = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 7^3 \cdot \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \right)$$

$$= 7^3 \cdot \left(1 \cdot (50 - 48) - 2 \cdot (40 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) \right)$$

$$= 7^3 \cdot (-3) = -1029. \ .$$

משפט 4.3

$$|\alpha A| = \alpha^n \cdot |A|$$

כאשר A מסדר $n \times n$.

הוכחה: תרגיל בית. ■

הערה:

כל מטריצה ריבועית A (מסדר $n \times n$) ניתן להעביר למטריצה מדורגת B ע"י ביצוע מספר סופי של פעולות שורה אלמנטריות מסוג החלפת 2 שורות והוספת שורה אחת לשורה אחרת (בלי פעולת הכפלת שורה בסקלר $\alpha \neq 0$).
לכן

$$|A| = (-1)^k |B|$$

כאשר k הוא מספר החלפות השורות שביצענו. כמו כן מאחר ו- B משולשית עליונה,

$$|B| = b_{11} \cdot b_{22} \cdot \cdots \cdot b_{nn} \ .$$

משפט 4.4

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. מתקיים:

$$|A^t| = |A| \ .$$

הוכחה: תרגיל בית. ■

דוגמה 4.11

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ , \quad |A| = -2 \ ,$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \ , \quad |A^t| = -2 \ .$$

משפט 4.5 משפט המכפלה

תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. מתקיים:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \ .$$

הוכחה: תרגיל בית. ■

דוגמה 4.12

נסמן $A=\begin{pmatrix}6&1\\3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&3\\1&2\end{pmatrix}$. מצאו את המטריצה AB ואת הדטרמיננות הבאות: $|A|$, $|B|$, $|AB|$.

פתרון:

$$\begin{aligned}AB=&\begin{pmatrix}6&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3\\1&2\end{pmatrix}&&=\begin{pmatrix}25&20\\14&13\end{pmatrix}\ ,\\ |A|=&12-3&&=9\ ,\\ |B|=&8-3&&=5\ ,\\ |AB|=&25\cdot 13-20\cdot 14&&=45\ .\end{aligned}$$

משפט 4.6

תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ויהי $k\in\mathbb{N}$. מתקיים:
$$|A^k|=|A|^k\ .$$

הוכחה: תרגיל בית. ■

דוגמה 4.13

נתונה $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ ו- $|A|=-2$ מהי A^{2020}?

פתרון:

$$|A^{2020}|=|\underbrace{A\cdot A\cdot\dots\cdot A}_{\text{פעמים } 2020}|=\underbrace{|A|\cdot|A|\cdot\dots\cdot|A|}_{\text{פעמים } 2020}=|A|^{2020}$$

ולכן $|A^{2020}|=(-2)^{2020}$.

הגדרה 4.6 המטריצה של קופקטורים

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נגדיר את המטריצה של קופקטורים מסדר $n\times n$:

$$C=\begin{pmatrix}C_{11}&\cdots&C_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ C_{n1}&\cdots&C_{nn}\end{pmatrix}$$

כאשר C_{ij} הקופקטור ה- (i,j) של A.

הגדרה 4.7 המטריצה המצורפת

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. המטריצה המצורפת של A היא מטריצה מסדר $n\times n$ שמסומנת $\mathrm{adj}(A)$ ומוגדרת

$$\mathrm{adj}(A) = C^t$$

כאשר C המטריצה של קופקטורים של A.

משפט 4.7 נוסחת קיילי המילטון

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. נניח ש- A הפיכה. אז

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot C^t = \frac{1}{|A|}\cdot \mathrm{adj}(A)\ .$$

הוכחה: מעבר לקורס הזה. ■

דוגמה 4.14

נתונה $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ חשבו את A^{-1}.

פתרון:

$$\begin{array}{ll}
M_{11} = -15 & C_{11} = 15 \\
M_{12} = -3 & C_{12} = 3 \\
M_{13} = 6 & C_{13} = 6 \\
M_{21} = -20 & C_{21} = 20 \\
M_{22} = -4 & C_{22} = -4 \\
M_{23} = 2 & C_{23} = -2 \\
M_{31} = -7 & C_{31} = -7 \\
M_{32} = -5 & C_{32} = 5 \\
M_{33} = -2 & C_{33} = -2
\end{array}$$

$$C = \begin{pmatrix} -15 & 3 & 6 \\ 20 & -4 & -2 \\ -7 & 5 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} -15 & 20 & -7 \\ 3 & -4 & 5 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}\ .$$

$$|A| = 1\cdot(-15) + 3\cdot 3 + 4\cdot 6 = 18\ .$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -15 & 20 & -7 \\ 3 & -4 & 5 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}\ .$$

משפט 4.8 מטריצה הפיכה

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

$|A| \neq 0$ אם ורק אם A הפיכה.

הוכחה: נניח ש- A הפיכה. אז קיימת A^{-1} כך ש-

$$A \cdot A^{-1} = I \ .$$

לכן לפי משפט 4.5:

$$|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \ .$$

כלומר $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$. לכן $|A| \neq 0$.

נניח ש- $|A| \neq 0$. נסמן את הסקלר $a = |A| \in \mathbb{F}$. מכיוון ש- $a \neq 0$ אז ההופכית קיים. זאת אומרת $a^{-1} = \dfrac{1}{|A|}$ קיים. לכן לפי נוסחת קיילי המילטון(משפט 4.7) A^{-1} קיימת. לכן A הפיכה.

■

דוגמה 4.15

היעזרו במשפט 4.8 לעיל וקבעו האם המטריצה הבאה הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_1} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \ .$$

לכן A לא הפיכה.

משפט 4.9

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה, אז

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \ .$$

הוכחה: מתקיים $A^{-1}\cdot A=I$ ולכן $|I|=|A\cdot A^{-1}|$. לפי משפט המכפלה, $|A|\cdot|A^{-1}|=1$. נחלק ב- $|A|\neq 0$ ונקבל
$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}\ .$$
■

דוגמה 4.16

נתונה $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ המקיימת $A^3=2A^{-1}B$, כאשר $B=\begin{pmatrix}-2&3e&\pi\\0&1&23\\0&0&-1\end{pmatrix}$. מצאו את $|A|$.

פתרון:

דרך א:
לפי הנתון $A^3=2A^{-1}B$, ולכן $|A^3|=|2A^{-1}B|$. לפי משפט המכפלה, $|A|^3=|2A^{-1}|\cdot|B|$. מאחר ו- $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$, נקבל $|A|^3=2^3\cdot|A^{-1}|\cdot|B|$. מכאן,
$$|A|^3=2^3\cdot\frac{1}{|A|}\cdot|B|\ ,$$
ולכן
$$|A|^4=8\cdot|B|=8\cdot 2=16\ ,$$
ונקבל $|A|=\pm 2$.
דרך ב:
$$A\cdot(2A^{-1}B)=A\cdot A^3\quad\Rightarrow\quad A^4=(A\cdot 2A^{-2})B\quad\Rightarrow\quad A^4=(2\cdot AA^{-2})B\quad\Rightarrow\quad A^4=(2\cdot I)B$$
$$A^4=2B\quad\Rightarrow\quad |A^4|=|2B|\quad\Rightarrow\quad |A|^4=2^3\cdot|B|\quad\Rightarrow\quad |A|^4=8\cdot 2=16\ .$$

דוגמה 4.17

תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכח או הפרך:
$$|A+B|=|A|+|B|\ .$$

פתרון:
הטענה איננה נכונה. דוגמה נגדית:
$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,$$
$$A+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,$$
$$|A|=0\ ,\qquad |B|=0\ ,$$
$$|A+B|=|I|=1\ ,$$
$$|A+B|\neq|A|+|B|\ .$$

דוגמה 4.18

תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{5\times5}$ הפיכות, כך שמתקיים $A+3B^t=0$. חשבו את $|A^{-1}B^2(B^t)^{-1}|$.

פתרון:
נשים לב שלא נכון לכתוב

$$A+3B^t=0 \quad\Rightarrow\quad |A+3B^t|=|0| \quad\Rightarrow\quad |A|+|3B^t|=0\ .$$

נחשב

$$|A^{-1}B^2(B^t)^{-1}|=|A^{-1}|\cdot|B^2|\cdot|(B^t)^{-1}|=\frac{1}{|A|}\cdot|B|^2\cdot\frac{1}{|B^t|}=\frac{1}{|A|}\cdot|B|^2\cdot\frac{1}{|B|}=\frac{|B|}{|A|}\ .$$

לפי הנתון $A+3B^t=0$ ולכן

$$A=-3B^t \quad\Rightarrow\quad |A|=|-3B^t| \quad\Rightarrow\quad |A|=(-3)^5|B^t| \quad\Rightarrow\quad |A|=-243|B| \quad\Rightarrow\quad \frac{|B|}{|A|}=-\frac{1}{243}\ .$$

דוגמה 4.19

תהיינה $X,Y\in\mathbb{R}^{3\times3}$ המקיימות

$$XY=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

(א) האם X הפיכה?

(ב) עבור $X=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&-1&0\\4&0&-6\end{pmatrix}$ מצאו את Y.

פתרון:

(א) נסמן $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$. לפי הנתון $XY=A$. נשים לב ש- $|A|=-6$ ולפי משפט המכפלה, $|A|=|XY|=|X|\cdot|Y|$. בפרט, $|X|\neq0$, ולכן X הפיכה.

(ב) לפי הנתון $XY=A$. הוכחנו ש- X הפיכה, נכפול את שני האגפים משמאל בהופכית של X. נקבל $Y=X^{-1}A$. לאחר חישוב, נקבל ש-

$$X^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-2&0\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

לכן

$$Y=X^{-1}A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-2&0\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&0\\1&-6&0\\\frac{2}{3}&-2&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\ .$$

4.2 כלל קרמר

משפט 4.10 כלל קרמר

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית הפיכה ויהי $X \in \mathbb{F}^n$ ווקטור של משתנים:

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} , \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

לכל $b \in \mathbb{F}^n$ הפתרון היחיד למערכת $AX = b$ ניתן ע"י

$$x_i = \frac{|A_{ib}|}{|A|}$$

כאשר

$$A_{ib} = \begin{pmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{i-1} & b & a_{i+1} & \ldots & a_n \\ | & | & & | & | & | & & | \end{pmatrix} ,$$

כלומר המטריצה המתקבלת מ- A ע"י החלפת העמודה ה- i ב- b.

הוכחה: תרגיל בית. ■

דוגמה 4.20

פתרו את המערכת הבאה בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 2 \ . \end{aligned}$$

פתרון:

$$\begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 = & 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = & 2 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b}$$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$, ולכן המטריצה הפיכה.

$$\begin{aligned} |A_1(b)| =& \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} &= 0 \ , \\ x_1 =& \frac{|A_1(b)|}{|A|} &= \frac{0}{-2} = 0 \ , \\ |A_2(b)| =& \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} &= -1 \ , \\ x_2 =& \frac{|A_2(b)|}{|A|} &= \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \ . \end{aligned}$$