

# שיעור 5

## תכונות סגירות של $R$ ו- $RE$

### 5.1 הגדרה של השפות $R$ ו- $RE$

#### הגדרה 5.1 $R$

אוסף השפות הכריעות מסומן  $R$  ומוגדר

$$R = \{L \subseteq \Sigma^* : L \text{ מכריעה את } L\}.$$

#### הגדרה 5.2 $RE$

אוסף השפות הקבילות מסומן  $RE$  ומוגדר

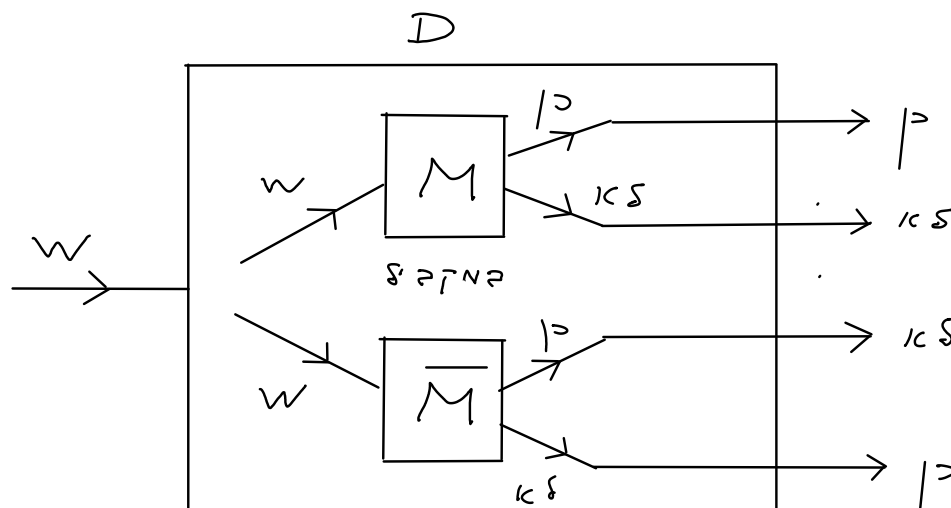
$$RE = \{L \subseteq \Sigma^* : L \text{ מקבלת את } L\}.$$

#### למה 5.1

אם  $L \in RE$  וגם  $\bar{L} \in RE$  אזי  $L \in R$ .

**הוכחה:** תהי  $M$  מ"ט המקבלת את  $L$  ותהי  $\bar{M}$  מ"ט המקבלת את  $\bar{L}$ .

נבנה מ"ט  $D$  המכריעה את  $L$ .



$D =$  על קלט  $w$ :

(1)  $D$  מעתיקה את  $w$  לסרט נוסף.

(2) מריצה במקביל את  $M$  על  $w$  ואת  $\bar{M}$  על העותק של  $w$ .

• אם  $M$  מקבלת  $D \Leftarrow$  מקבלת.

• אם  $\bar{M}$  מקבלת  $D \Leftarrow$  דוחה.

• אם  $M$  דוחה  $D \Leftarrow$  דוחה.

• אם  $\bar{M}$  דוחה  $D \Leftarrow$  מקבלת.

נוכיח כי  $D$  מכריעה את  $L$ .

אם  $w \in L$

$w \in L(M) \Leftarrow$

$\Leftarrow (M \text{ מקבלת את } w) \text{ או } (\bar{M} \text{ דוחה את } w)$

$\Leftarrow D \text{ עוצרת ומקבלת את } w.$

אם  $w \notin L$

$w \in \bar{L} \Leftarrow$

$\Leftarrow w \in L(\bar{M})$

$\Leftarrow (\bar{M} \text{ מקבלת את } w) \text{ או } (M \text{ דוחה את } w)$

$\Leftarrow D \text{ עוצרת ודוחה את } w.$



### משפט 5.1 סגירות של השפות הכריעות

$R$  סגורה תחת:

(1) איחוד

(2) חיתוך

(3) משלים

(4) שרשור

(5) סגור קליין

### משפט 5.2 סגירות של השפות הקבילות

$RE$  סגורה תחת:

(1) איחוד

(2) חיתוך

(3) שרשור

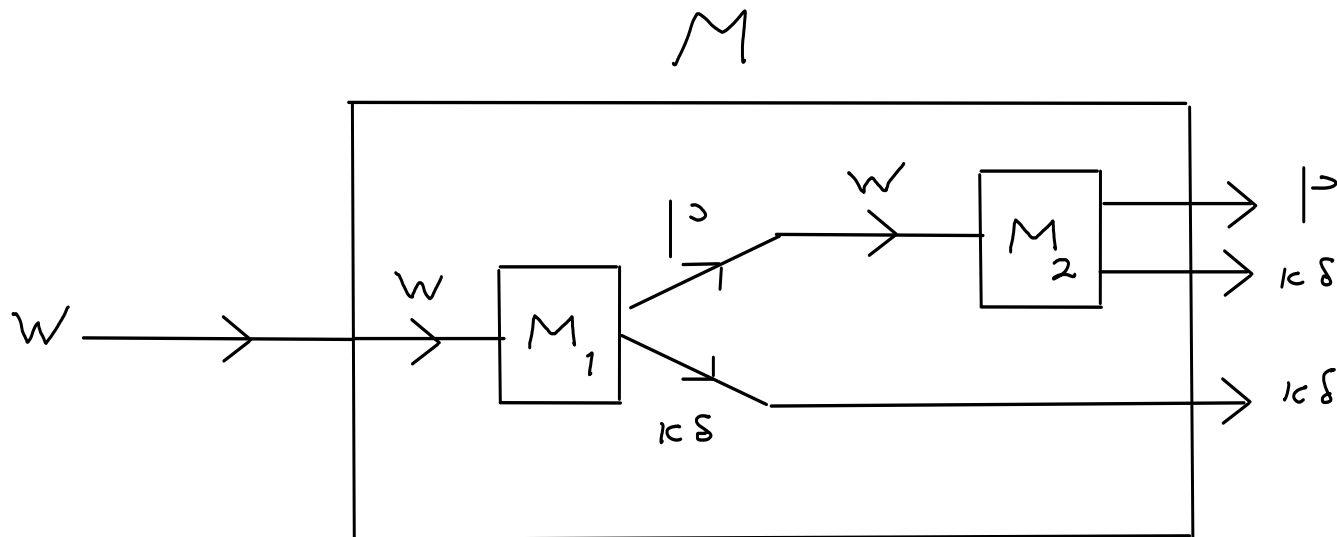
(4) סגור קליין

## (1) חיתוך:

(א) סגורה תחת חיתוך

נוכיח כי לכל שתי שפות  $L_1, L_2 \in R$  מתקיים  $L_1 \cap L_2 \in R$ .

תהי  $M_1$  ו-  $M_2$  מ"ט המכריעות את  $L_1$  ו-  $L_2$  בהתאמה. נבנה מ"ט  $M$  המכריעה את  $L_1 \cap L_2$ .



תאור הבנייה

$M =$  על קלט  $w$ :

(1) מעתיקה את  $w$  לסרט נוסף.

(2) מריצה את  $M_1$  על  $w$ .

• אם  $M_1$  דוחה  $M \Leftarrow$  דוחה.

• אחרת  $M$  מריצה את  $M_2$  על העותק של  $w$  ועונה כמוה.

נכונות:

נוכיח כי  $M$  מכריעה את  $L_1 \cap L_2$ .

אם  $w \in L_1 \cap L_2$

$w \in L_1$  וגם  $w \in L_2 \Leftarrow$

$M_1$  מקבלת את  $w$  וגם  $M_2$  מקבלת את  $w \Leftarrow$

$M$  מקבלת את  $w \Leftarrow$

אם  $w \notin L_1 \cap L_2$

$w \notin L_1$  או  $w \notin L_2 \Leftarrow$

$M_1$  דוחה את  $w$  או  $M_2$  דוחה את  $w \Leftarrow$

$M$  דוחה את  $w \Leftarrow$

RE סגורה תחת חיתוך (ב)

נוכיח כי לכל שתי שפות  $L_1, L_2 \in RE$  מתקיים  $L_1 \cap L_2 \in RE$ .

תהיינה  $M_1$  ו-  $M_2$  שתי מכונות טיורינג המקבלות את  $L_1$  ו-  $L_2$  בהתאמה.

נבנה מ"ט  $M$  המקבלת את  $L_1 \cap L_2$  באותו אופן כמו (א).

(2) איחוד:

R סגורה תחת איחוד (א)

נוכיח כי לדל שתי שפות  $L_1, L_2 \in R$  מתקיים  $L_1 \cup L_2 \in R$ .

תהיינה  $M_1$  מ"ט המכריעה את  $L_1$  ו-  $M_2$  מ"ט המכריעה את  $L_2$ .

נבנה מ"ט  $M$  המכריעה את  $L_1 \cup L_2$ .

תאור הבנייה

$M = \text{על קלט } w$ :

(1)  $M$  מעתיקה את  $w$  לסרט נוסף.

(2)  $M$  מריצה את  $M_1$  על  $w$ .

• אם  $M_1$  מקבלת  $\Leftarrow M$  מקבלת.

• אחרת,  $M$  מריצה את  $M_2$  על העותק של  $w$  ועונה כמוה.

RE סגורה תחת איחוד (ב)

נוכיח כי לכל שתי שפות  $L_1, L_2 \in RE$  מתקיים  $L_1 \cup L_2 \in RE$ .

תהיינה  $M_1$  מ"ט המקבלת את  $L_1$  ו-  $M_2$  מ"ט המקבלת את  $L_2$ .

נבנה מ"ט א"ד  $M$  המקבלת את  $L_1 \cup L_2$ .

תאור הבנייה

$M = \text{על קלט } w$ :

(1)  $M$  בוחרת באופן א"ד  $i \in \{1, 2\}$ .

(2)  $M$  מריצה את  $M_i$  על  $w$  ועונה כמוה.

(3) שרשור:

R סגורה תחת שרשור (א)

נוכיח כי לכל שתי שפות  $L_1, L_2 \in R$  מתקיים  $L_1 \cdot L_2 \in R$  כאשר

$$L_1 \cdot L_2 = \{w = w_1w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}.$$

תהיינה  $M_1$  מ"ט המכריעה את  $L_1$  ו-  $M_2$  מ"ט המכריעה את  $L_2$ .

נבנה מ"ט א"ד  $M$  המכריעה את  $L_1 \cdot L_2$ .

תאור הבנייה

$M = \text{על קלט } w$ :

(1)  $M$  בוחרת באופן א"ד חלוקה של  $w$  ל-  $w = w_1 w_2$ .

(2)  $M$  מריצה את  $M_1$  על  $w_1$ .

• אם  $M_1$  דוחה  $\Leftarrow M$  דוחה.

• אחרת,  $M$  מריצה את  $M_2$  על  $w_2$  ועונה כמוה.

(ב)  $RE$  סגורה תחת שרשור

$RE$  סגורה תחת שרשור באותו אופן כמו ב- (א)

(4) \* קליני

(א)  $R$  סגורה תחת \* קליני

נוכיח כי לכל שפה  $L$ :

$$L \in R \Rightarrow L^* \in R$$

כאשר

$$L^* = \{w = w_1 w_2 \cdots w_k \mid \forall 1 \leq i \leq k, w_i \in L\}.$$

תהי  $M$  מ"ט המכריעה את  $L$ .

נבנה מ"ט  $M^*$  א"ד המכריעה את  $L^*$ .

תאור הבנייה

$M^* =$  על קלט  $w$ :

(1) אם  $w = \varepsilon$  אז  $M^*$  מקבלת.

(2) אחרת  $M^*$  בוחרת באופן א"ד חלוקה של  $w$  ל-  $w = w_1 \cdots w_k$ .

(3) לכל  $1 \leq i \leq k$ :

$M^*$  מריצה את  $M$  על  $w_i$ .

• אם  $M$  דוחה את  $w_i$  אז  $M^*$  דוחה.

• אחרת חוזרים לשלב (3).

(4) אם  $M$  קיבלה את כל המחרוזות  $\{w_i\}$  אזי  $M^*$  מקבלת.

(ב)  $RE$  סגורה תחת \* קליני

(5) משלים

(א)  $R$  סגורה תחת המשלים

נוכיח כי

$$L \in R \Rightarrow \bar{L} \in R,$$

כאשר

$$\bar{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}.$$

תהי  $M$  מ"ט המכריעה את  $L$ .

נבנה מ"ט  $\bar{M}$  המכריעה את  $\bar{L}$ .

$\bar{M} =$  על קלט  $w$ :

(1)  $\bar{M}$  מריצה את  $M$  על  $w$ .

• אם  $M$  מקבלת  $\bar{M} \Leftarrow$  דוחה.

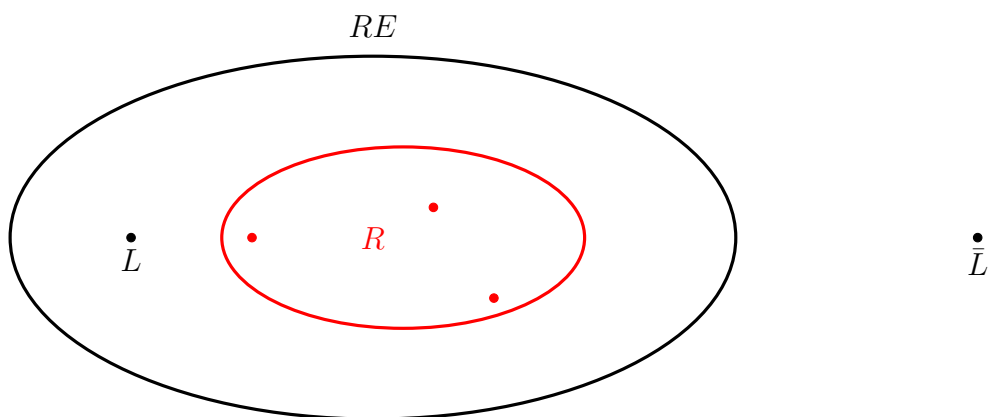
• אם  $M$  דוחה  $\bar{M} \Leftarrow$  מקבלת.

(ב)  $RE$  אינה סגורה תחת המשלים

■

**משפט 5.3  $RE$  אינה סגורה תחת המשלים**

$$L \in RE \setminus R \Rightarrow \bar{L} \notin RE.$$



**הוכחה:**

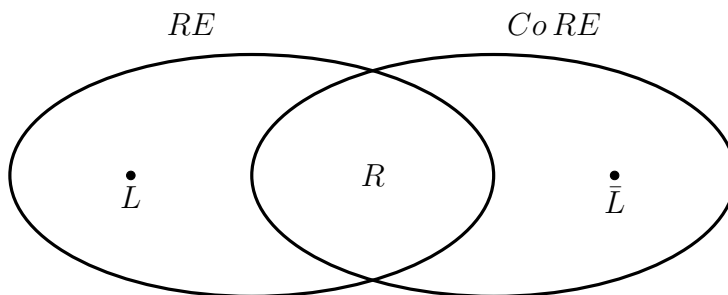
נניח כי  $L \in RE \setminus R$  ונניח בשלילה כי  $\bar{L} \in RE$ .

אזי לפי טענת עזר (למה 5.1),  $L \in R$  וזו סתירה.

■

**הגדרה 5.3  $CoRE$**

$$CoRE = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \bar{L} \in RE\}.$$



אבחנה

לפי למה 5.1:

$$RE \cap CoRE = R.$$

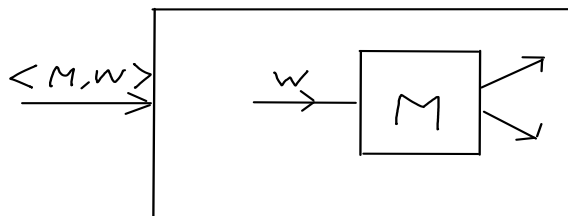
## 5.2 קידוד של מ"ט דטרמיניסטית

### הגדרה 5.4 קידוד של מ"ט

בהינתן קבוצה  $O$  של עצמים מופשטים (למשל מכונת טיורינג, תוכנית מחשב, גרף). הקידוד של  $O$ , מסומן  $\langle O \rangle$ , הוא מיפוי של  $O$  אל מחרוזת מעל אלפבית סופי שיש בו לפחות שני סימנים.

במידה ויש רב עצמים  $O_1, \dots, O_k$  נסמן את הקידוד שלהם  $\langle O_1, O_2, \dots, O_k \rangle$ .

## 5.3 מ"ט אוניברסלית $U$



מ"ט אוניברסלית  $U$  מקבלת כקלט זוג, קידוד של מ"ט  $\langle M \rangle$  וקידוד של מילה  $\langle w \rangle$ , ומבצעת סימוציה של ריצה של  $M$  על  $w$  ועונה בהתאם.

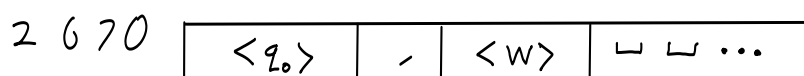
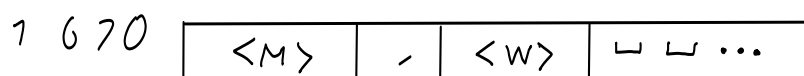
תאור הפעולה של  $U$

$U = \text{על קלט } x$ :

(1) בודקת האם  $x$  הוא קידוד של מ"ט  $\langle M \rangle$  וקידוד של מילה  $\langle w \rangle$ .

• אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

(2) מבצעת סימולציה של  $M$  על  $w$ :



- רושמת את הקונפיגורציה ההתחלתית  $q_0 w$  על סרט 2.
- מחשבת את הקונפיגורציה הבאה בעזרת טבלת המעברים.
- בסוף כל מעבר בין שתי קונפיגורציות,  $U$  בודקת האם המצב הנוכחי הוא  $q_{acc}$ .
- אם כן  $U$  עוצרת ומקבלת.

- \* אחרת  $U$  בודקת האם המצב הוא  $q_{rej}$ .
- \* אם כן  $U$  עוצרת ודוחה.
- \* אחרת  $U$  ממשיכה לקונפיגורציה הבאה.

מהי השפה של  $U$ ?

לכל  $x$ :

(1) אם  $U \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$  דוחה את  $x$ .

(2) אם  $x = \langle M, w \rangle$ :

- אם  $M$  מקבלת  $w \Leftarrow U$  מקבלת את  $x$ .
- אם  $M$  דוחה את  $w \Leftarrow U$  דוחה את  $x$ .
- אם  $M$  לא עוצרת על  $w \Leftarrow U$  לא עוצרת על  $x$ .

$$L(U) = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} .$$

#### הגדרה 5.5 $L_{acc}$

$$L_{acc} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} \in RE \setminus R$$

#### הגדרה 5.6 $L_{halt}$

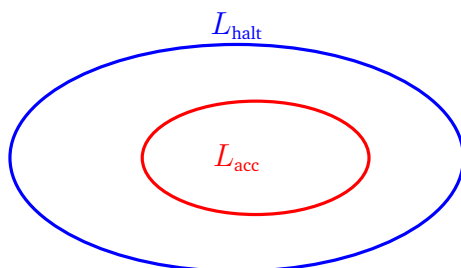
$$L_{halt} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ עוצרת על } w \} \in RE \setminus R$$

#### הגדרה 5.7 $L_d$

$$L_d = \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \} \notin RE$$

אבחנה:

$$L_{acc} \subseteq L_{halt} .$$





## משפט 5.4

$$L_{\text{acc}} \in RE.$$

■

הוכחה: מכיוון ש- $L(U) = L_{\text{acc}}$ ,  $U$  מקבלת את  $L_{\text{acc}}$  ולכן  $L_{\text{acc}} \in RE$ .

## משפט 5.5

$$L_{\text{halt}} \in RE.$$

הוכחה: נבנה מ"ט  $U'$  שהיא למעשה  $U$  פרט למקום שבו  $U$  עצרה ודחתה,  $U'$  תעצור ותקבל.

נוכיח כי  $U'$  מקבלת את  $L_{\text{halt}}$ :

אם  $x \in L_{\text{halt}}$

$x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$   $M$  עוצרת על  $w$

$U'$  עוצרת ומקבלת את  $x$ .

אם  $x \notin L_{\text{halt}}$  שני מקרים:

•  $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow U'$  דוחה את  $x$ .

•  $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow M$  לא עוצרת על  $w \Leftarrow U'$  לא עוצרת על  $x$ .

■