# שיעור 3 גבול של פונקציה

## משפטים יסודיים של גבולות

3.1 משפט. (גבולות מסוימות)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \text{ (x)}$$
 
$$\lim_{x\to\infty}p^x=\begin{cases} 0 & (0< p<1)\\ \infty & p>1 \end{cases} \text{ (a)}$$
 
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=1 \text{ , } (p>0) \text{ . (a)}$$
 
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1 \text{ . (7)}$$

## דוגמאות לחישוב גבולות

דוגמאות.

דוגמא 1.

$$\lim_{x \to 1} (3x^2 - 2x + 7) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 7 = 8.$$

דוגמא 2.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 16)}{(x - 2)(x - 4)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x + 16)}{(x - 4)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{18}{-2}$$

$$= -9.$$

דוגמא 3.

$$\begin{split} \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 2x + 5} &= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} \\ &= \frac{1}{2} \ . \end{split}$$

דוגמא 4.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x} - 2}{x - 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x} - 2}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 3x} + 2}{\sqrt{x^2 + 3x} + 2}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{(x - 1) \cdot (\sqrt{x^2 + 3x} + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 4)}{(x - 1) \cdot (\sqrt{x^2 + 3x} + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 3x} + 2}$$

$$= \frac{5}{4}.$$

דוגמא 5.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5^x + 4^x + 3^x}{5^x - 4^x - 2 \cdot 3^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + (\frac{4}{5})^x + (\frac{3}{5})^x}{1 - (\frac{4}{5})^x - 2 \cdot (\frac{3}{5})^x} = 1.$$

דוגמא 6.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5^x + 4^x + 3^x}{5^x - 4^x - 2 \cdot 3^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^x + \left(\frac{4}{3}\right)^x + 1}{\left(\frac{5}{3}\right)^x + \left(\frac{4}{3}\right)^x - 2} = -\frac{1}{2} \ .$$

דוגמא 7.

$$\lim_{x \to a} (f(x)^n) = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^n$$

# גדלים בלתי מוגדרים

a לכל מספר  $\left[rac{a}{\infty}
ight]=0$  .1

.לא מוגדר  $\left[rac{\infty}{\infty}
ight]$ 

$$a>0$$
 לכל מספר  $\left[rac{a}{0^{-}}
ight]=-\infty$  , $\left[rac{a}{0^{+}}
ight]=\infty$  .2

.לא מוגדר  $\left[ rac{0}{0} 
ight]$ 

$$\left[\frac{\infty}{0^{-}}\right] = -\infty$$
 ,  $\left[\frac{\infty}{0^{+}}\right] = \infty$ 

$$a>0$$
 לכל מספר  $a\cdot\infty=\infty$  ,  $[\infty\cdot\infty]=\infty$  .3

. לא מוגדר  $[0\cdot\infty]$ 

$$[a-\infty]=-\infty$$
 ,  $[a+\infty]=\infty$  .4

$$.[\infty+\infty]=\infty$$

. לא מוגדר 
$$[\infty-\infty]$$

$$a>1$$
 לכל מספר  $[a^{-\infty}]=0$  , $[a^{\infty}]=\infty$  .5

$$a<0$$
 לכל מספר  $[a^{-\infty}]=\infty$  , $[a^{\infty}]=0$ 

$$.[\infty^{\infty}] = \infty \qquad ,[0^{\infty}] = 0$$

לא מוגדר,  $\infty^0$  לא מוגדר,  $\infty^0$  לא מוגדר.  $1^\infty$ 

### דוגמאות.

$$\lim_{x \to \infty} [2^x]^{1/x} = [\infty^0] = \lim_{x \to \infty} 2^{x/x} = 2^1 = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}[2^x]^{1/\sqrt{x}}=[\infty^0]=\lim_{x\to\infty}[2^{\sqrt{x}}]=2^\infty=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{1/x}=[0^0]=\frac{1}{2}\ ,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{1/\sqrt{x}}=[0^0]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}=0\ .$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\cdot x=[0\cdot\infty]=2$$

דוגמא 6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\cdot x^3=[0\cdot\infty]=\infty$$

לא מוגדר.

דוגמא 7.

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = [\infty - \infty] = \lim_{x \to \infty} x(x - 1) = \infty.$$

# משפטים יסודיים של גבולות

## 3.2 משפט. (משפטים של גבולות)

אם לו
$$f(x)=B$$
 -ו  $\lim f(x)=A$  אם

(N

$$\lim_{x \to a} \left( cf(x) \right) = c \cdot A$$

.כאשר c קבוע

(Þ

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$$

()

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

 $.B \neq 0$  בתנאי

דוגמאות.

$$\lim_{x \to \infty} 3 \cdot \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 3x} = 3 \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 3x} = 3 \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = 3 \cdot \frac{1 - \frac{2}{\infty}}{1 + \frac{3}{\infty}} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 \ .$$

(2

(1

$$\lim_{x \to 2} \left( \frac{(x-2)(x+4)}{2x^2 - 8} \right) = \lim_{x \to 2} \left( \frac{(x-2)(x+4)}{2(x+2)(x-2)} \right) = \lim_{x \to 2} \left( \frac{x-2}{2(x-2)} \right) \cdot \lim_{x \to 2} \left( \frac{x+4}{x+2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{4} = 3 \ .$$

$$\lim_{x \to 3^+} \left( \frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x-3} \right) = \lim_{x \to 3^+} \left( \frac{x}{x-1} \right) + \lim_{x \to 3^+} \left( \frac{2x}{x-3} \right) = \frac{3}{2} + \frac{6}{0^+} = \frac{3}{2} + \infty = \infty .$$

(4

$$\lim_{x \to 4} \left( \frac{x^2 - 16}{x + 8} \right) = \lim_{x \to 4} \left( \frac{(x - 4)(x + 4)}{x + 8} \right) = \frac{\lim_{x \to 4} (x - 4)(x + 4)}{\lim_{x \to 4} (x + 8)} = \frac{0}{12} = 0.$$

# פונקציות רציונליות

### 3.1 הגדרה: (פונקציה רציונלית שלמה)

פונקציה f המוגדרת ע"י נוסחה מצורה

$$f(x) = a^n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

עם מקדמים n לעתים ממעלה או פולינום ממעלה רציונלית פולינום מולינום ממעלה  $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{R}$  עם מקדמים ב-  $P_n(x)$  נסמן ב- n

דוגמאות.

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 4$$
 היא פולינום מסדר 1 הוגמא 1). הפונקציה

$$f(x)=4x^3+5x^2-6x+4$$
 היא פולינום מסדר (2 היא בוגמא 1) הפונקציה

$$f(x)=x^9-8x^6+4x^3-2x$$
 היא פולינום מסדר (3 הוגמא 19 הפונקציה

#### 3.2 הגדרה: (פונקציה רציונלית)

פונקציה f(x) שניתן לרשום בצורה

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} ,$$

. כאשר  $P_n$  פולינום ממעלה  $Q_m$  ו-  $Q_m$  פולינום ממעלה  $P_n$  כאשר

- א) נאמר כי f(x) היא פונרציה רצינלית אמיתי אם m < m, כלומר אם מעלת הפולינום שבמונה קטנה ממעלת הפולינום שבמכנה.
- ב) נאמר כי f(x) היא פונקציה רצינלית מדומה אם  $m \geq n$ , כלומר אם מעלת הפולינום שבמונה גדולה או שווה למעלת הפולינום שבמכנה.

דוגמאות.

דוגמא 1)

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 4}{3x + 4}$$

מעלה של הפולינום במונה הוא 2, מעלה של הפולינום במחנה הוא 1, לכן f(x) היא פונקציה רציונלית מדומה.

דוגמא 2)

$$f(x) = \frac{4x+5}{3x^3+x^2-4}$$

מעלה של הפולינום במונה הוא f(x), מעלה של הפולינום במחנה של הפולינום במונה הוא f(x) היא פונקציה רציונלית אמיתי.

דוגמא 3)

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 4}{3x^5 + 4}$$

. מעלה של הפולינום במונה הוא 2, מעלה של הפולינום במחנה הוא 5, לכן f(x) היא פונקציה רציונלית אמיתי

# חקירה חלקית של פונקציה

y=f(x) אלה השלבים הבסיסיים של חקירה מלאה של פונקציה

- $\frac{Df}{dt}$  מצא את תחום הגדרת הפונקציה .1 עייו הגדרה ?? לעייל.
- 2. נקודות חיתוך עם הצירים וסימני הפונקציה
- .(אם קיימים), f(x)=0 אמצוא השורשים אל למצוא ע"י לאפס ע ע"י לאפס איי ע"י איי א גקודות חיתוך עם איר ה $\underline{x}$  לאפס ע
- y=f(0) ע"י ניתנת ע"י עם ציר איז הנקודת אוז הנקודת ע"י ע"י ע"י ע"י ע"י ע"י ע"י עויי עס ציר איז מצא נקודות איז (אם היא קיימת).
  - xברר סימני הפונקציה בקטעים בין נקודות חיתוך עם ציר ה-x
    - 3. אסימפטוטות אנכיות וברר התנהגות הפונקציה בסביבתן

בנקודות אי-הגדרה של הפונקציה יהיו אסימפטוטות אנכיות. ברר התנהגות של הפונקציה בצד ימין וצד בנקודות אי-הגדרה של הפונקציה וסמן התקרבות אליהן של הגרף y=f(x)

4. אסימפטוטות אופקיות

 $x o \pm \infty$  ברר התנהגות של הפונקציה כאשר

אם (א

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$$

ב) אם

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

f(x) אז הישר y=b הוא אסימפטוטה אופקית (שמאלית) אז הישר

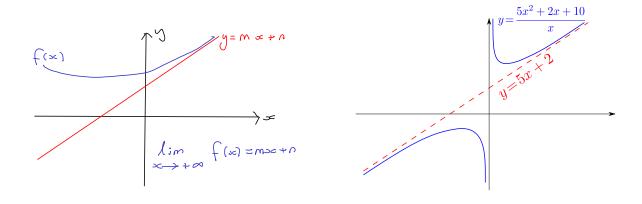
f(x) אם גבולות אלה לא קיימים, בודקים: האם קיימת אסימפטוטה המשופעת של

### 5. אסימפטוטה משופע

קו ישר f(x) אם המרחק בין גרף הפונקציה ובין הקו y=mx+n קו ישר אסימפטוטה אסימפטוטה משופעת של פונקציה  $x\to +\infty$  או y=mx+n שואף ל-0 כאשר y=mx+n

אסימפטוטה y=mx+n או (0 אז  $\pm\infty$  אווה ל- סופי (כלומר אספר סופי למספר שווה למספר שווה ל-  $\tan\frac{f(x)}{x}$  אסימפטוטה משופעת של לf(x) כאשר

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$
,  $n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$ .



### דוגמא.

 $f(x)=rac{x^4-x^3-2x^2}{(x-3)^2}$  שרטטו את הגרף של הפונקציה

### פיתרון.

- תחום הגדרה:
  - $.x \neq 3$
- **2.** נקודות חיתוך: שים לב,

$$f(x) = \frac{x^2(x+1)(x-2)}{(x-3)^3}$$

.(2,0)ו- (-1,0), (0,0) הן חיתוך חיתוך שהנקודות שהנקציה הפונקציה

$\mid y \mid$	x
y < 0	x < -1
y > 0	-1 < x < 0
y > 0	0 < x < 2
y < 0	2 < x < 3
y > 0	x > 3

### 3. אסימפטוטות אנכיות

$$.x = 3$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \ , \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty \ .$$

### 4. אסימפטוטות אופקיות

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \ , \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \ .$$

### 5. אסימפטוטות משופעת

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

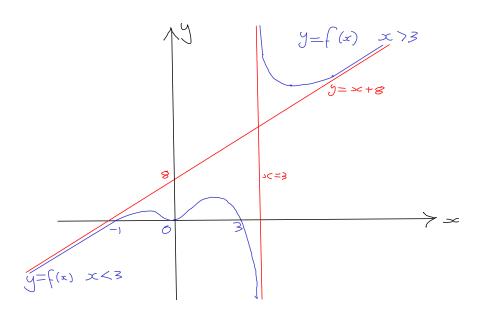
$$n = \lim_{x \to \infty} \left( f(x) - mx \right) = 8$$

 $.x \rightarrow +\infty$  כאשר משופעת אסימפטוטה הוא y=x+8לכן לכן לכן הישר

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = 8$$

 $-\infty$  הוא אסימפטוטה משופעת אסימפטוטה אסימפטוט אסימפטוט לכן הישר y=x+8



### דוגמאות

#### דוגמא.

### פיתרון.

x כל תחום הגדרה: כל

x-טלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה

.  $\left( -2,0\right)$  היא xעם ציר חיתוך נקודת ולכן x=-2 כאשר y=0

y-מקודת חיתוך עם ציר ה

(0,-4) איא עם ציר חיתוך נקודת ולכן ולכן x=0 כאשר y=-4

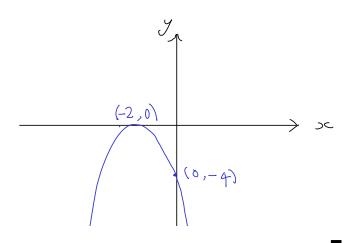
בכל מקום בתחום.  $y \leq 0$ 

שלב 3 הפונקציה מוגדרת בכל נקודה בתחום.

<u>שלב 4</u>

$$\lim_{x\to +\infty} \left\{ -(x+2)^2 \right\} = -\infty \ , \qquad \lim_{x\to -\infty} \left\{ -(x+2)^2 \right\} = -\infty \ .$$

## <u>שלב 5</u>



#### רוגמא.

### פיתרון.

## x- נקודת חיתוך עם ציר ה-x

.(2,0)ו- (0,0) הxה- עם ציר חיתוך ולכן ולכן .x=2או אוx=0כאשר y=0

# y-מקודות חיתוך עם ציר ה

(0,0) איא y -היא עם איר חיתוך ולכן נקודת אולכן x=0 כאשר y=0

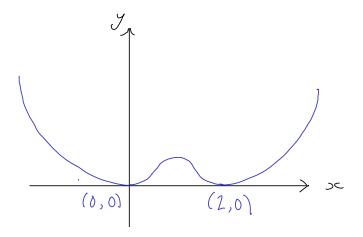
בכל מקום בתחום.  $y \ge 0$ 

שלב 3 הפונקציה מוגדרת בכל נקודה בתחום.

שלב 4

$$\lim_{x\to +\infty} \left\{ x^2 (x-2)^2 \right\} = +\infty \ , \qquad \lim_{x\to -\infty} \left\{ x^2 (x-2)^2 \right\} = +\infty \ .$$

### שלב 5



#### -וגמא.

. צייר סקיצה הגרף של הפונקציה  $y=\dfrac{x}{x^2+9}$  על סמך ביצוע של שלבים 1-5 של סכימת חקירת הפונקציות.

### פיתרון.

x שלב 1 תחום הגדרה: כל

## x- מקודת חיתוך עם ציר ה

(0,0) איא x- היא עם עיר חיתוך נקודת ולכן ולכן x=0 כאשר y=0

# y-נקודות חי<u>תוך עם</u> ציר ה

(0,0) איא y-ה עם ציר חיתוך עם לכן נקודת y=0 לכן נקבל x=0 בפונקציה ונקבל

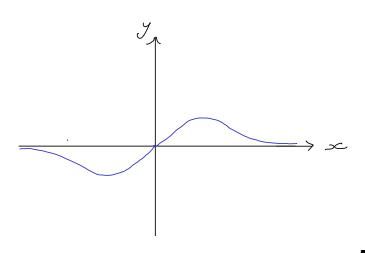
y	x
y > 0	x > 0
y < 0	x < 0
.y = 0	x = 0

שלב 3 אינן נקודות בהן הפונקציה לא מוגדרת.

שלב 4

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x^2+9}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0\ ,\qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x^2+9}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=0\ .$$

<u>שלב 5</u>



דוגמא.

. על סמך הפונקציות חקירת של סכימת 1-5 של שלבים 1-5 על איר  $y=rac{x^4}{x^2+9}$  על הפונקציות אייר סקיצה הגרף של הפונקציה אייר של דיים אייר אייר של הפונקציות אייר מקיצה הגרף של הפונקציות אייר של אייר מקיצה האוד אייר מקיצה הפונקציות.

#### פיתרון.

x כל תחום הגדרה: כל

x-מלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה-

(0,0) איא x עם ציר חיתוך ולכן נקודת היא y=0

yנקודות חיתוך עם ציר ה

(0,0) איא y עם ציר עם לכן נקודת חיתוך עם y=0 נציב y=0 בפונקציה ונקבל

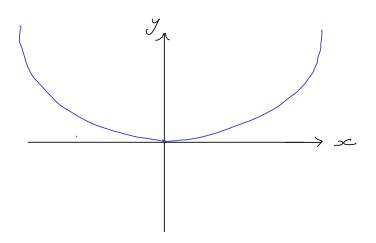
y	x
y > 0	x > 0
y > 0	x < 0
y=0	x = 0

שלב 3 אינן נקודות בהן הפונקציה לא מוגדרת.

<u>שלב 4</u>

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^4}{x^2+9}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^4}{x^2}=\lim_{x\to +\infty}x^2=+\infty\ , \qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{x^4}{x^2+9}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^4}{x^2}=\lim_{x\to -\infty}x^2=+\infty\ .$$

שלב 5



. צייר סקיצה הגרף של הפונקציה  $y=rac{2-x}{x-1}$  על סמך ביצוע של שלבים 1-5 של סכימת חקירת הפונקציות.

## פיתרון.

 $x \neq 1$  שלב תחום הגדרה: כל

x-טלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה

(2,0) איא x עם ציר חיתוך תחלון ולכן נקודת .x=2 כאשר y=0

y	x
y > 0	1 < x < 2
y < 0	x > 2
y < 0	x < 1
y = 0	x = 2

x=1 בנקודה x=1 הפונקציה לא מוגדרת ולכן קיימת אסימפטוטה אנכית ב- x=1

מצד ימין:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2-x}{x-1}=+\infty\ .$$

מצד שמאל:

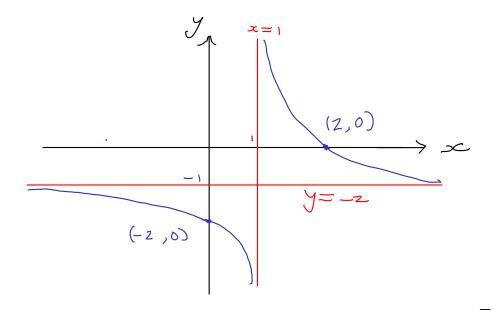
$$\lim_{x \to 1^{-}} \frac{2 - x}{x - 1} = -\infty \ .$$

<u>שלב 4</u>

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2-x}{x-1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-x}{x}=-1\ ,\qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{2-x}{x-1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x}{x}=-1\ .$$

x=-1 -לכן קיימת אסימפטוטה אופקית

### שלב 5



דוגמא.

צייר סקיצה הגרף של הפונקציה  $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$  כאשר a>0 על סמך ביצוע של שלבים 1-5 של סכימת חקירת הפונקציות.

### פיתרון.

 $.\{x>a\cap x<-a\}$  . תחום הגדרה: תחום שלב 1

.(0,0):x נקודת חיתוך עם ציר ה-2 נקודת

נקודת חיתוך עם ציר ה-y: אין

חיובי בכל נקודה בתחום הגדרת הפונקציה. y

x=-a ו- x=+a מצד שמאל של אל x=-a

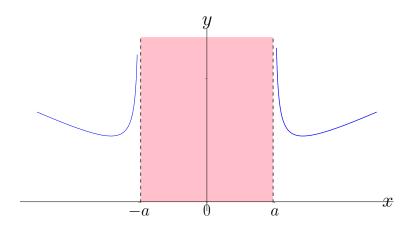
$$\lim_{x \to a^-} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty \ .$$

x=+a מצד ימין של

$$\lim_{x\to a^+}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}=+\infty\ .$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}} = +\infty \ , \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}} = +\infty \ .$$

### <u>שלב 5</u>



דוגמא.

צייר סקיצה הגרף של הפונקציה  $y=\dfrac{x^4}{\sqrt{x^2-a^2}}$  כאשר a>0 על סמך ביצוע של שלבים 1-5 של סכימת חקירת הפונקציות.

פיתרון.

 $\{x > a \cap x < -a\}$  :תחום הגדרה שלב 1

 $(0,0): \underline{x}$  נקודת חיתוך עם ציר ה- $\underline{x}$ 

נקודת חיתוך עם ציר ה-y: אין

. חיובי בכל נקודה בתחום הגדרת הפונקציה.  $\boldsymbol{y}$ 

.x=-aו- x=+a ו- בשפות אסימפטוטות ולפיו קיימות אמוגדרת א הפונקציה  $-a \leq x \leq a$ בקטע מצד בקטע, א ב-aים מצד שמאל של מצד שמאל של הא

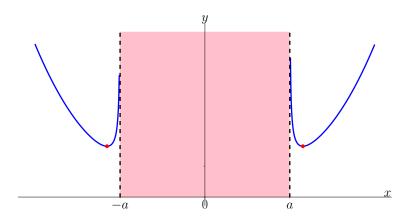
$$\lim_{x \to -a^{-}} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty \ .$$

x = +a מצד ימין של

$$\lim_{x\to a^+}\frac{x^4}{\sqrt{x^2-a^2}}=+\infty\ .$$

שלב 4

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4}{\sqrt{x^2-a^2}} = +\infty \ , \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^4}{\sqrt{x^2-a^2}} = +\infty \ .$$



דוגמא.

אייר סקיצה הגרף של הפונקציה  $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-3a^2}}$  של סכימת חקירת פונקציות.

### פיתרון.

 $\left\{x>\sqrt{a}\cap x<-\sqrt{3}a
ight\}$  מחום הגדרה: שלב 1

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה-x: אין

נקודת חיתוך עם ציר ה-y: אין

. בכל נקודה בתחום הגדרת הפונקציה. y>0

 $x=+\sqrt{3}a$  שלב בקטע אנכיות אסימפטוטות ולפיו לא מוגדרת לא מוגדרת הפונקציה אסימפטוטות הפונקציה לא  $-\sqrt{3}a \leq x \leq \sqrt{3}a$  שלב בקטע ו-  $x=-\sqrt{3}a$ 

, $x=-\sqrt{3}a$  מצד שמאל של

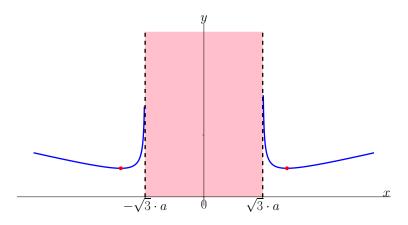
$$\lim_{x\to -\sqrt{3}a^-}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-3a^2}}=+\infty\ .$$

, $x=+\sqrt{a}$  מצד ימין של

$$\lim_{x\to\sqrt{3}a^+}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-3a^2}}=+\infty\ .$$

שלב 4

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-3a^2}} = +\infty \ , \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-3a^2}} = +\infty \ .$$



#### דוגמא.

על סמך ביצוע של שלבים 1-5 של סכימת חקירת אייר אייר אייר אונקציה  $y=\dfrac{4}{x^2-4a^2}$  של סכימת חקירת אייר סקיצה הגרף של הפונקציות.

### פיתרון.

 $\{x \neq 2a \cap x \neq -2a\}$  : שלב מחום הגדרה

. אין. x- אין. עם ציר ה-x- אין.

$$.\bigg(0,-\frac{1}{a^2}\bigg):\underline{y}$$
ים ציר הייען חיתוך נקודת נקודת

y > 0	x < -2a
y < 0	-2a < x < 2a
y > 0	x > 2a

x=-2a ו-  $x=\pm 2a$  בנקודות אנכיות בנקודות אימת אסימפטוטות אוגדרת ולפיו אימת אמוגדרת ולפיו קיימת אסימפטוטות בנקודות אונקציה לא

x = -2a מצד שמאל של

$$\lim_{x \to -2a^{-}} \frac{4}{x^{2} - 4a^{2}} = \lim_{x \to -2a^{-}} \frac{4}{(x + 2a)(x - 2a)} = \left(\lim_{x \to -2a^{-}} \frac{2}{x + 2a}\right) \cdot \left(\lim_{x \to -2a^{-}} \frac{2}{x - 2a}\right) = +\infty$$

x = -2a מצד ימין של

$$\lim_{x \to -2a^+} \frac{4}{x^2 - 4a^2} = \lim_{x \to -2a^+} \frac{4}{(x+2a)(x-2a)} = \left(\lim_{x \to -2a^+} \frac{2}{x+2a}\right) \cdot \left(\lim_{x \to -2a^+} \frac{2}{x-2a}\right) = -\infty$$

 $x = \pm 2a$  מאד שמאל של

$$\lim_{x \to 2a^{-}} \frac{4}{x^{2} - 4a^{2}} = \lim_{x \to 2a^{-}} \frac{4}{(x + 2a)(x - 2a)} = \left(\lim_{x \to 2a^{-}} \frac{2}{x + 2a}\right) \cdot \left(\lim_{x \to 2a^{-}} \frac{2}{x - 2a}\right) = -\infty$$

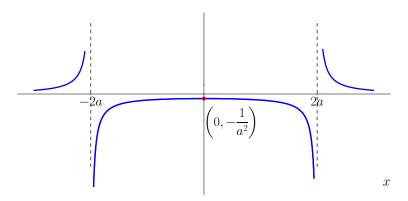
x = +2a מצד ימין של

$$\lim_{x \to 2a^+} \frac{4}{x^2 - 4a^2} = \lim_{x \to 2a^+} \frac{4}{(x+2a)(x-2a)} = \left(\lim_{x \to 2a^+} \frac{2}{x+2a}\right) \cdot \left(\lim_{x \to 2a^+} \frac{2}{x-2a}\right) = +\infty$$

שלב 4

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4}{\sqrt{x^2-a^2}} = +\infty \ , \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^4}{\sqrt{x^2-a^2}} = +\infty \ .$$

<u>שלב 5</u>



#### דוגמא.

אירת חקירת של 1-5 של שלבים ביצוע סמך על סמך על a>0 כאשר  $y=\sqrt{x^2-a^2}$  של סכימת הפונקציות.

#### פיתרון.

 $\{x \leq -a \cap x \geq a\}$  :שלב תחום הגדרה שלב 1

 $.x=\pm a$  :איר ה-2 נקודת חיתוך עם ציר ה-2 נקודת

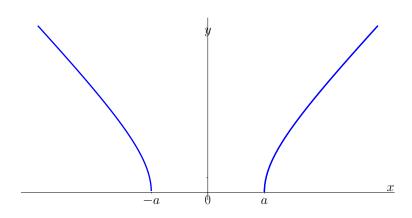
.אין. y-ה אין עם איר חיתוך אין.

y > 0	x < -a
y > 0	x > a

שלב בקטע מכיוון שהפונקציה אבל אינן אסימפטוטות הפונקציה כן הפונקציה כן הפונקציה אבל בקטע בקטע בקטע בישוו אינן אוגדרת. אבל אינן א-a < x < aבנקודות בישוו ביקודות בישוו אינן אוגדרת. ביקודות בישוו אוגדרת בישוו אינן אוגדרת בישוו אינן אוגדרת בישוו אוגדרת בישו אוגדרת בישוו אוגדרת ב

<u>שלב 4</u>

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - a^2} = +\infty \ , \qquad \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - a^2} = +\infty \ .$$



#### דוגמא.

אירת סקיצה הגרף של 1-5 של סכימת מסך על איר a>0 על כאשר  $y=\frac{x^2}{x^2-a^2}$  של סכימת חקירת ביצוע של הפונקציות.

### פיתרון.

 $\{x \leq -a \cap x \geq a\}$  תחום הגדרה:  $\{x \leq -a \cap x \geq a\}$ 

.(0,0):x נקודת חיתוך עם ציר ה-2 נקודת שלב 2

.(0,0):עם ציר ה-yים מקודת חיתוך עם איר

y > 0	x < -a
y < 0	-a < x < a
y > 0	x > a

. בנקודות א הפונקציה  $x=\pm a$  בנקודות שלב ב

$$x=-a$$
 מצד שמאל של

$$\lim_{x\to -a^-}\frac{x^2}{x^2-a^2}=+\infty$$

$$\mathbf{x}=-a^+$$
 מצד ימין של

$$\lim_{x\to -a^+}\frac{x^2}{x^2-a^2}=-\infty$$

$$x=+a$$
 מצד שמאל של

$$\lim_{x\to a^-}\frac{x^2}{x^2-a^2}=-\infty$$

$$x = +a$$
 מצד ימין של

$$\lim_{x\to a^+}\frac{x^2}{x^2-a^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}} = +\infty \ , \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}} = +\infty \ .$$