חישוביות וסיבוכיות

מועד א׳

ד״ר ירמיהו מילר, .

סמסטר ב, תשפ״ה׳

מספר העמוד הנוכחי ומספר העמודים הכולל בשאלון מופיעים בתחתית כל עמוד. בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות

שאלוני בחינה

☑ לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.

☐ לשאלון הבחינה יש לצרף כריכה בלבד.

☐ יש להחזיר את השאלון ביחד עם המחברת/כריכה.

שימוש במחשבונים

☐ ניתן להשתמש במחשבון.

☑ לא ניתן להשתמש במחשבון.

חומר עזר

☑ לא ניתן להשתמש בחומר עזר כלל.

☐ ניתן להשתמש בחומר עזר/דף נוסחאות, כמפורט:

☐ הבחינה עם חומר פתוח מותר להשתמש בכל חומר עזר מודפס או כתוב.

הנחיות רגילות

נא קראו בעיון את ההנחיות הבאות בטרם תתחילו לפתור את הבחינה. מומלץ לקרוא בקצרה את כלל השאלות לפני שמתחילים לפתור את הבחינה. ניתן לענות על השאלות בכל סדר שתרצו.

1. המבחן כולל 5 שאלות. יש לענות על כולן.
2. שאלות הבחינה שוות משקל - כל שאלה 20 נקודות.
3. כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תדלגו על שלבים.
4. המבחן כולל נספחים, לשימושכם. הסתייעו בהם במידת הצורך.
5. הקפידו על כתב יד ברור וקריא.
6. הקפידו לרשום בגדול ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
7. כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבלתם. רק הן נבדקות !
8. ניתן לקחת את השאלון כאשר הבחינה מסתיימת.

בהצלחה!

הנחיות פרטניות למילואימניקים

נא קראו בעיון את ההנחיות הבאות בטרם תתחילו לפתור את הבחינה. מומלץ לקרוא בקצרה את כלל השאלות לפני שמתחילים לפתור את הבחינה. ניתן לענות על השאלות בכל סדר שתרצו.

1. המבחן כולל 5 שאלות. יש לענות על 4 מתוך ה-5 שאלות.
2. שאלות הבחינה שוות משקל - כל שאלה 25 נקודות.
3. מילואימניק יכתוב בדפים שנסרקים - "משויך למתווה המילואים".
4. כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תדלגו על שלבים.
5. המבחן כולל נספחים, לשימושכם. הסתייעו בהם במידת הצורך.
6. הקפידו על כתב יד ברור וקריא.
7. הקפידו לרשום בגדול ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
8. כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבלתם. רק הן נבדקות !
9. ניתן לקחת את השאלון כאשר הבחינה מסתיימת.

בהצלחה!

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | **קמפוס אשדוד** ז'בוטינסקי 84, 77245 | **www.sce.ac.il** | **חייג:** *3223

הבחינה

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

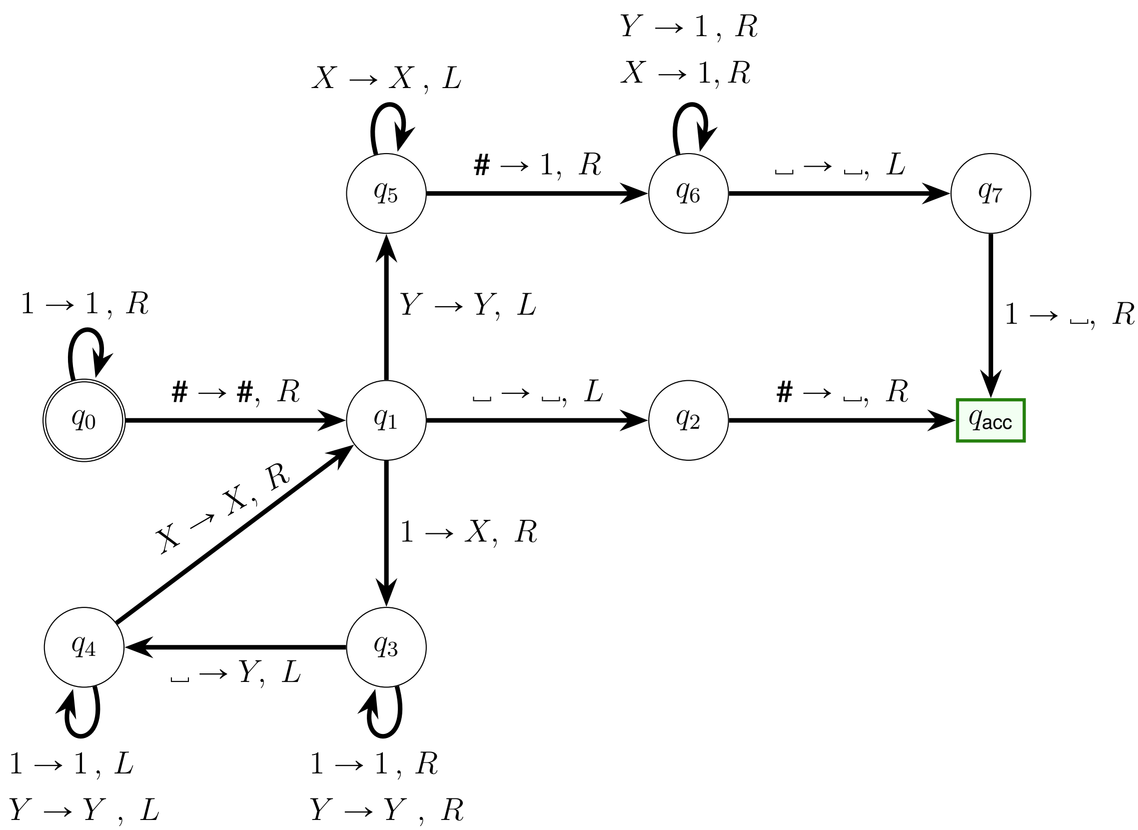
נתונה השפה הבאה:

$$L = \left\{ \sigma w \sigma \;\middle|\; \sigma \in \{a,b\} \;,\; w \in \{a,b\}^* \right\}$$

תארו מכונת טיורינג עם סרט יחיד שמכריעה את השפה בעזרת תרשים מצבים בלבד ולא בדרכים אחרות.

סעיף ב' (10 נקודות)

בתרשים הבא, נתונה מכונת טיורינג M. המכונה מקבלת כקלט שני מספרים בבסיס אונרי, מופרדים #.
בהינתן קלט $1^i\#1^j$, כאשר $i,j \in \mathbb{N}$, מהי הפונקציה f שהמכונה מחשבת?
כל המעברים שאינם מצויינים בתרשים עוברים למצב דחיה.



שאלה 2: סגירות של שפות כריעות (20 נקודות)

בהינתן השפה L. השפה L^* מוגדרת:

$$L^* = \{\varepsilon\} \cup \left\{ w = w_1 w_2 \cdots w_k \,\middle|\, \forall\, 1 \leqslant i \leqslant k \;,\; w_i \in L \right\}$$

בהינתן מכונת טיורינג M המכריעה שפה L. בנו מכונט טיורינג אי דטרמיניסטית M^* המכריעה את השפה L^*.

שאלה 3: אי כריעות (20 נקודות)

סעיף א' (12 נקודות)

תהי $\hat{L}$ השפה

$$\hat{L} = \left\{ \langle M_1, M_2, M_3 \rangle \;\middle|\; L(M_1) \subset L(M_2) \subset L(M_3) \text{ מכונות טיורינג עבורן } M_1, M_2, M_3 \right\}$$

הוכיחו כי $\hat{L} \notin R$.

סעיף ב' (8 נקודות)

קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה:
לכל שלוש שפות L_1, L_2, L_3 אם $L_1 \leqslant L_2$ וגם $L_1 \leqslant L_3$ אזי $L_1 \leqslant (L_2 \cap L_3)$.

שאלה 4: NP - שלמות (20 נקודות)

לכל אחת מהטענות הבאות, קבעו אם הטענה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה.

סעיף א' (5 נקודות)

אם $L_{\text{Halt}} \in P$ אזי $L_{\text{acc}} \in P$.

סעיף ב' (5 נקודות)

אם B היא בעיה NP- קשה וגם A היא בעיה NP -קשה, אזי קיימת רדוקציה $A \leqslant_P B$.

סעיף ג' (5 נקודות)

לכל שפה $L \in R$ כך ש- $L \neq \Sigma^*$ וגם $L \neq \varnothing$, קיימת רדוקציה $\bar{L} \leqslant L$.

סעיף ד' (5 נקודות)

אם $A \leqslant_P B$ ו- $B \leqslant_P C$ אזי $A \leqslant_P C$.

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

בעיית $HAMCYCLE$ (מעגל המילטוני) מוגדרת באופן הבא:
בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$, האם G מכיל מעגל שעובר בכל קודקוד בגרף פעם אחת בדיוק?

בעיית $HAMPATH$ (מסלול המילטוני) מוגדרת באופן הבא:
בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$ ושני קודקודים $s,t\in V$, האם G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t?

סעיף א' (8 נקודות)

בנו מכונת טיורינג אי דטרמיניסטית המכריעה את $HAMCYCLE$ בזמן פולינומיאלי.

סעיף ב' (12 נקודות)

הוכיחו כי $HAMPATH \leqslant_p HAMCYCLE$.

תוכן העניינים

1 מכונות טיורינג

הגדרה 1: מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעיה $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ כאשר:

Q	קבוצת מצבים סופית ולא ריקה	
Σ	א"ב הקלט סופי	$\sqcup \notin \Sigma$
Γ	א"ב הסרט סופי	$\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$
δ	פונקציית המעברים	$\delta : (Q\backslash\{q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}\} \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$
q_0	מצב התחלתי.	
q_{acc}	מצב מקבל יחיד.	
q_{rej}	מצב דוחה יחיד.	

הגדרה 2: קונפיגורציה

בהינתן מכונת טיורינג M ומילה $w \in \Sigma^*$. **קונפיגורציה** בריצה של M על w היא שלושה (u, q, v) (או $uq\mathsf{v}$ לשם קיצור) כאשר:

- $u \in \Sigma^*$: המילה מתחילת הסרט עד (לא כולל) התו שמתחת לראש.
- $\mathsf{v} \in \Sigma^*$: המילה שמתחילה מהתו שמתחת לראש ועד (לא כולל) ה- $\sqcup$ הראשון.

הגדרה 3: גרירה בצעד אחד

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M. נסמן

$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם כשנמצאים ב- c_1 עוברים ל- c_2 בצעד בודד.

הגדרה 4: גרירה בכללי

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M. נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם ניתן לעבור מ- c_1 ל- c_2 ב- 0 או יותר צעדים.

הגדרה 5: קבלה ודחייה של מילה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $w \in \Sigma^*$ מחרוזת. אומרים כי

- M **מקבלת** את w אם $q_0 w \vdash_M^* u\, q_{\text{acc}}\, \mathsf{v}$
- M **דוחה** את w אם $q_0 w \vdash_M^* u\, q_{\text{rej}}\, \mathsf{v}$

עבור $\mathsf{v}, u \in \Gamma^*$ כלשהם.

הגדרה 6: הכרעה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מכריעה** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים

- $w \in L \Leftarrow M$ מקבלת את w.

- $L \notin w$ ⇐ M דוחה את w.

הגדרה 7: קבלה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מקבלת** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים

- אם $w \in L$ אז M מקבלת את w.
- אם $w \notin L$ אז M לא מקבלת את w.

במקרה כזה נכתוב ש- $L(M) = L$.

הגדרה 8: מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה f

תהי $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ ותהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג. אומרים כי M מחשבת את f אם:

- $\Sigma = \Sigma_1$ ו- $\Sigma_2 \subset \Gamma$.
- לכל $w \in \Sigma_1^*$ מתקיים $q_0 w \vdash q_{\text{acc}} f(w)$.

הגדרה 9: מודלים שקולים חישובית

יהיו A ו- B מודלים חישוביים. אומרים כי A ו- B שקולים אם לכל שפה L מתקיימים:

1) קיימת מ"ט במודל A שמכריעה את L אם"ם קיימת מ"ט במודל B שמכריעה את L.
2) קיימת מ"ט במודל A שמקבלת את L אם"ם קיימת מ"ט במודל B שמקבלת את L.

הגדרה 10: מכונט טיורינג מרובת סרטים

מכונת טיורינג מרובת סרטים היא שביעייה:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר Q, Σ, Γ, q_0, q_{acc},q_{rej} מוגדרים כמו מ"ט עם סרט יחיד (ראו הגדרה 1).
ההבדל היחיד בין מ"ט עם סרט יחיד לבין מטב"ס הוא הפונקצית המעברים. עבור מטמ"ס הפונקצית המעברים היא מצורה הבאה:

$$\delta_k : (Q \backslash \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$$

הקונפיגורציה של מכונת טיורנג מרובת סרטים מסומנת $(u_1 q\ \mathsf{v}_1\ ,\ u_2 q\ \mathsf{v}_2\ ,\ \dots\ ,\ u_k q\ \mathsf{v}_k\ .)$

משפט 1: שקילות בין מ"ט מרובת סרטים למ"ט עם סרט יחיד

לכל מטמ"ס M קיימת מ"ט עם סרט יחיד M' השקולה ל- M.
כלומר, לכל קלט $w \in \Sigma^*$:

- אם M מקבלת את w ⇐ M' מקבלת את w.
- אם M דוחה את w ⇐ M' דוחה את w.
- אם M לא עוצרת על w ⇐ M' לא עוצרת על w.

הגדרה 11: מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית (מ"ט א"ד) היא שביעייה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}$ מוגדרים כמו במ"ט דטרמיניסטי (ראו הגדרה 1).
Δ היא פונקצית המעברים

$$\Delta : (Q \backslash \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma \to P\left(Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}\right) \ .$$

$$\Delta(q, a) = \{(q_1, a, S) \ , \ (q_2, b, L) \ , \ \ldots\} \ .$$

כלומר, לכל זוג $q \in Q, \alpha \in \Gamma$ ייתכן מספר מעברים אפשריים, 0, 1 או יותר.

- קונפיגורציה של מ"ט א"ד זהה לקונפיגורציה של מ"ט דטרמיניסטית.
- לכל קונפיגורציה ייתכן מספר קונפיגורציות עוקבות.
- לכל מילה $w \in \Sigma^*$ ייתכן מספר ריצות שונות:
  - ריצות שמגיעות ל- q_{acc}.
  - ריצות שמגיעות ל- q_{rej}.
  - ריצות שלא עוצרות.
  - ריצות שנתקעות.

הגדרה 12: קבלה ודחייה של מילה ושפה של מכונט טיורינג אי דטרמיניסטית

מילה $w \in \Sigma^*$ מתקבלת במ"ט א"ד M אם קיימת לפחות ריצה אחת שמגיעה ל- q_{acc}. השפה של מ"ט א"ד M היא

$$L(M) = \left\{ w \in \Sigma^* \ \middle| \ \exists u, \mathsf{v} \in \Gamma^* \ : \ q_0 w \vdash_* \ u \ q_{\text{acc}} \ \mathsf{v} \right\}$$

כלומר:

- $w \in L(M)$ אם קיימת ריצה אחת שבה M מקבלת את w.
- $w \notin L(M)$ אם בכל ריצה של M על w, M דוחה או לא עוצרת, או נתקעת.

הגדרה 13: מ"ט אי דטרמיניסטית המכריעה שפה L

אומרים כי מ"ט אי דטרמיניסטית M מכריעה שפה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $w \in L \Leftarrow$ M מקבלת את w.
- אם $w \notin L \Leftarrow$ M דוחה את w.

הגדרה 14: מ"ט א"ד המקבלת שפה L

אומרים כי מ"ט אי דטרמיניסטית M מקבלת שפה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $w \in L \Leftarrow$ M מקבלת את w.
- אם $w \notin L \Leftarrow$ M דוחה את w או M לא עוצרת על w.

משפט 2: שקילות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטית ב- RE
לכל מ"ט א"ד N קיימת מ"ט דטרמיניסטית D כך ש-

$$L(N)=L(D)\ .$$

כלומר לכל $w\in\Sigma^*$:

- אם N מקבלת את w $\Leftarrow$ D תקבל את w.
- אם N לא מקבלת את w $\Leftarrow$ D לא תקבל את w.

2 המחלקות החישוביות R, RE ו- $Co\,RE$ ותכונותן

הגדרה 15: כוכב קליני
בהינתן השפה L. השפה L^* מוגדרת:

$$L^*=\{\varepsilon\}\cup\left\{w=w_1w_2\cdots w_k\ \middle|\ \forall\ 1\leqslant i\leqslant k\ ,\ w_i\in L\right\}$$

הגדרה 16:

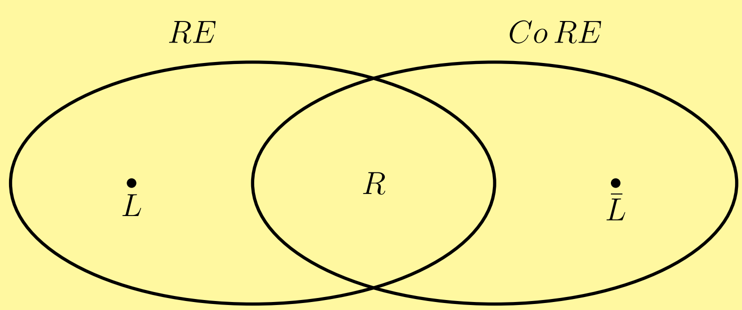
- אוסף השפות הכריעות מסומן R ומוגדר $R=\left\{L\subseteq\Sigma^*\ \middle|\ \text{קיימת מ"ט המכריעה את } L\right\}$.
- אוסף השפות הקבילות מסומן R ומוגדר $RE=\left\{L\subseteq\Sigma^*\ \middle|\ \text{קיימת מ"ט המקבלת את } L\right\}$.
- אוסף השפות שהמשלימה שלהן קבילה מסומן R ומוגדר $Co\,RE=\left\{L\subseteq\Sigma^*\ \middle|\ \bar{L}\in RE\right\}$.

משפט 3: סגירות של השפות הכריעות והשפות הקבילות

- R סגורה תחת: **1)** איחוד **2)** חיתוך **3)** שרשור **4)** סגור קלין **5)** משלים.
- RE סגורה תחת: **1)** איחוד **2)** חיתוך **3)** שרשור **4)** סגור קלין.

משפט 4: תכונות של השפות החישוביות

1. אם $L\in RE$ וגם $\bar{L}\in RE$ אזי $L\in R$.
2. אם $L\in RE\backslash R$ אזי $\bar{L}\notin RE$ (כי $\bar{L}\in Co\,RE\backslash R$).
3. $RE\cap Co\,RE=R$.



הגדרה 17: מכונת טיורינג אוניברסלית
מ"ט אוניברסלית U מקבלת כקלט זוג, קידוד של מ"ט $\langle M \rangle$ וקידוד של מילה $\langle w \rangle$, ומבצעת סימולציה של ריצה של M על w ועונה בהתאם.

$$L(U) = \{\langle M, w\rangle \mid w \in L(M)\} \ .$$

3 אי-כריעות

משפט 5: סיווג שפות ידועות - חישוביות

	כריעה	קבילה
L_{acc}	$\times$	$\checkmark$
$\overline{L_{\text{acc}}}$	$\times$	$\times$
L_{d}	$\times$	$\times$
L_{Halt}	$\times$	$\checkmark$
$\overline{L_{\text{Halt}}}$	$\times$	$\times$
L_{E}	$\times$	$\times$
$\overline{L_{\text{E}}}$	$\times$	$\checkmark$
L_{EQ}	$\times$	$\times$
$\overline{L_{\text{EQ}}}$	$\times$	$\times$
L_{REG}	$\times$	$\times$
L_{NOTREG}	$\times$	$\times$

$L_{\text{acc}} = \{\langle M, w\rangle | w \in L(M)\}$ $\quad \in RE \backslash R$

$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w\rangle |$ M עוצרת על w $\}$ $\quad \in RE \backslash R$

$L_M = \{\langle M \rangle \ ||$ M המקבלת את $\langle M \rangle$ $\}$ $\quad \in RE \backslash R$

$L_{\text{d}} = \{\langle M \rangle | \langle M \rangle \notin L(M)\}$ $\quad \in Co\,RE \backslash R$

$L_E = \{\langle M \rangle | L(M) = \varnothing\}$ $\quad \in Co\,RE \backslash R$

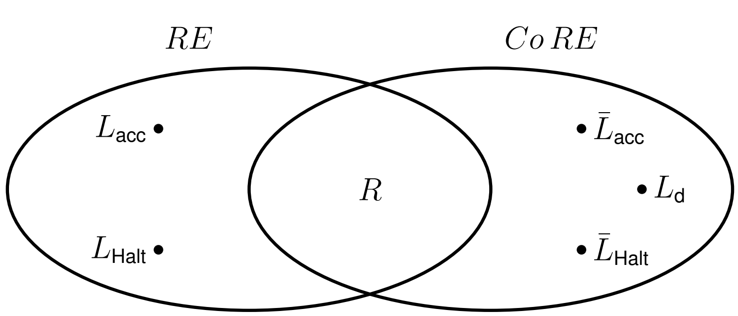
$L_{EQ} = \{\langle M_1, M_2 \rangle | L(M_1) = L(M_2)\}$ $\quad \notin RE \backslash R, \notin Co\,RE \backslash R$

$L_{REG} = \{\langle M \rangle |$ $L(M)$ רגולרית $\}$ $\quad \notin RE \backslash R, \notin Co\,RE \backslash R$

$L_{NOTREG} = \{\langle M \rangle |$ $L(M)$ לא רגולרית $\}$ $\quad \notin RE \backslash R, \notin Co\,RE \backslash R$

משפט 6:

$$\begin{aligned} L_{\text{acc}} \in RE \backslash R &\quad \Rightarrow \quad \bar{L}_{\text{acc}} \notin RE \ , \\ L_{\text{halt}} \in RE \backslash R &\quad \Rightarrow \quad \bar{L}_{\text{halt}} \notin RE \ , \\ L_{\text{d}} \notin RE \backslash R \ . \end{aligned}$$



4 רדוקציות

הגדרה 18: מ"ט המחשבת פונקציה

בהינתן פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ אומרים כי מ"ט M מחשבת את f אם לכל $x \in \Sigma^*$:
- M מגיעה ל- q_{acc} בסוף החישוב של $f(x)$ וגם
- על סרט הפלט של M רשום $f(x)$.

הגדרה 19: מ"ט המחשבת פונקציה

בהינתן פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ אומרים כי f חשיבה אם קיימת מ"ט המחשבת את f.

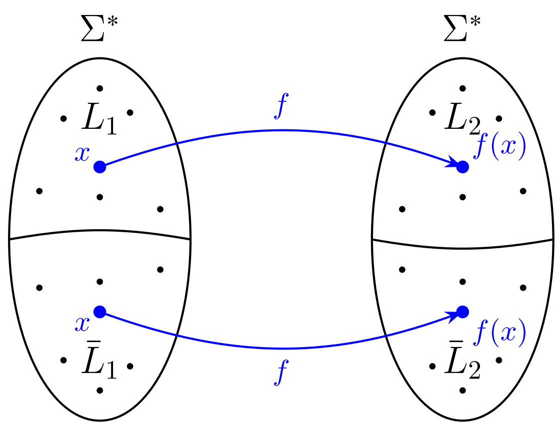
הגדרה 20: רדוקציה

בהינתן שתי שפות $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ אומרים כי L_1 ניתנת לרדוקציה ל- L_2, ומסמנים

$$L_1 \leqslant L_2 \ ,$$

אם קיימת פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ המקיימת:
1) f חשיבה
2) לכל $x \in \Sigma^*$:

$$x \in L_1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_2 \ .$$



משפט 7: משפט הרדוקציה

לכל שתי שפות $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, אם קיימת רדוקציה $L_1 \leqslant L_2$ אזי

$$\begin{aligned}
L_1 \in R \quad &\Leftarrow \quad L_2 \in R\\
L_1 \in RE \quad &\Leftarrow \quad L_2 \in RE\\
L_1 \in Co\,RE \quad &\Leftarrow \quad L_2 \in Co\,RE\\
L_1 \notin R \quad &\Rightarrow \quad L_2 \notin R\\
L_1 \notin RE \quad &\Rightarrow \quad L_2 \notin RE\\
L_1 \notin Co\,RE \quad &\Leftarrow \quad L_2 \notin Co\,RE
\end{aligned}$$

משפט 8: תכונות של רדוקציה

- לכל שפה L מתקיים: $L \leqslant L$.
- אם $L_1 \leqslant L_2$ אזי $\bar{L}_1 \leqslant \bar{L}_2$.
- אם $L_1 \leqslant L_2$ וגם $L_2 \leqslant L_3$ אזי $L_1 \leqslant L_3$.
- לכל $L \in R$ ולכל L' שאינה $\varnothing, \Sigma^*$ מתקיים $L \leqslant L'$.

משפט 9: משפט רייס

עבור כל תכונה S של שפות שאינה טריויאלית מתקיים: $L_S \notin R$

- תכונה S לא טריויאלית היא קבוצה של שפות ב RE כך ש $S \neq RE$ וגם $S \neq \varnothing$.
- $L_S = \{\langle M \rangle \mid L(M) = S\}$.

5 סיבוכיות

משפט 10:

לכל מ"ט מרובת סרטים M הרצה בזמן $f(n)$, קיימת מ"ט סרט יחיד M' השקולה ל- M ורצה בזמן $O\left(f^2(n)\right)$.

משפט 11:

לכל מ"ט א"ד N הרצה בזמן $f(n)$, קיימת מ"ט דטרמיניסטית D השקולה ל- N ורצה בזמן $2^{(f(n))}$.

הגדרה 21: אלגוריתם אימות

אלגוריתם אימות עבור בעייה A הוא אלגוריתם V כך שלכל קלט $w \in \Sigma^*$ מתקיים:

$w \in A$ אם ורק אם קיימת מילה y באורך פולינומיאלי ב- $|w|$ כך ש- V מקבל את הזוג (w, y). כלומר:

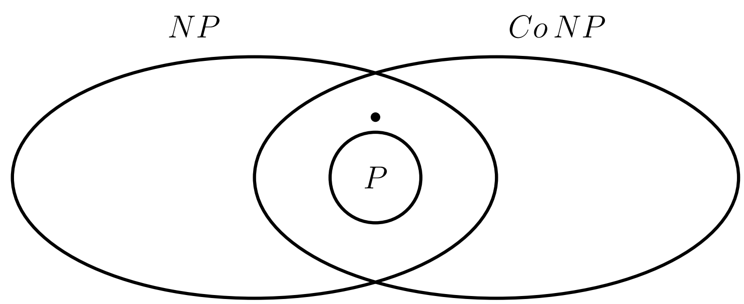
- אם $w \in A$ $\Leftarrow$ קיים $y \in \Sigma^*$ כך ש- $V(w, y) = T$.
- אם $w \notin A$ $\Leftarrow$ לכל $y \in \Sigma^*$ מתקיים $V(w, y) = F$.

הגדרה 22:

- $P =$ קבוצת כל השפות שיש להן מ"ט דטרמיניסטית המכריעה אותן בזמן פולינומי.
- $NP =$ קבוצת כל השפות שיש להן אלגוריתם אימות המאמת אותן בזמן פולינומי.
  הגדרה שקולה:
- $NP =$ קבוצת כל השפות שיש להן מ"ט אי-דטרמיניסטית המכריעה אותן בזמן פולינומי.
- $CoNP =$ קבוצת כל השפות שהמשלימה שלהן שייכת ל- NP $\qquad CoNP = \left\{A \mid \bar{A} \in NP\ .\right\}$.

משפט 12: תכונות של P ו- NP

- $P \subseteq NP$.
- P סגורה תחת משלים: אם $A \in P$ אזי גם $\bar{A} \in P$.
- $P \subseteq NP \cap CoNP$.



6 רדוקציה פולינומיאלית

הגדרה 23: פונקציה פולינומיאלית
בהינתן פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$. אומרים כי f חשיבה בזמן פולינומיאלי אם קיים אלגוריתם (מ"ט דטרמיניסטית) המחשב את f בזמן פולינומיאלי.

הגדרה 24: רדוקציה פולינומיאלית
בהינתן שתי הבעיות A ו- B. אומרים כי A ניתנת לרדוקציה פולינומיאלית ל- B, ומסמנים $A \leqslant_P B$, אם קיימת פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ המקיימת:

(1 f חשיבה בזמן פולינומיאלי
(2 לכל $w \in \Sigma^*$:

$$w \in A \quad \Leftrightarrow \quad f(w) \in B \ .$$

משפט 13: משפט הרדוקציה
לכל שתי בעיות A ו- B, אם $A \leqslant_P B$ אזי

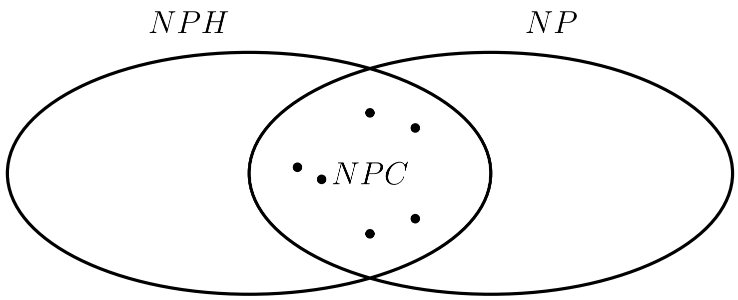
$$\begin{aligned} A \in P &\quad \Leftarrow \quad B \in P \\ A \in NP &\quad \Leftarrow \quad B \in NP \\ A \notin P &\quad \Rightarrow \quad B \notin P \\ A \notin NP &\quad \Rightarrow \quad B \notin NP \end{aligned}$$

7 NP שלמות

הגדרה 25: NP - קשה (NP-hard)
בעייה B נקראת NP קשה אם לכל בעייה $A \in NP$ קיימת רדוקציה $A \leqslant_P B$.

הגדרה 26: NP- שלמה (NP-complete)
בעייה B נקראת NP שלמה אם

(1 $B \in NP$
(2 לכל בעייה $A \in NP$ קיימת רדוקציה $A \leqslant_p B$.



משפט 14: תכונות של רדוקציה פולינומיאלית

- אם קיימת שפה $B \in NPC$ (NP שלמה) וגם $B \in P$ אזי $P = NP$.
- אם $B \leqslant_P A$ אזי $\bar{B} \leqslant_P \bar{A}$.
- אם $B \leqslant_p A$ וגם $C \leqslant_p B$ אזי $C \leqslant_p A$.
- לכל $A \in P$ ולכל B שאינה $\varnothing, \Sigma^*$ מתקיים $A \leqslant_P B$.

משפט 15:

תהי B בעייה NP- שלמה. אזי לכל בעייה $C \in NP$, אם $B \leqslant_p C$ אזי גם C היא NP שלמה.

8 בעיית הספיקות (SAT)

הגדרה 27: נוסחת CNF

נוסחת CNF, ϕ היא נוסחה בוליאנית מעל n משתנים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ המכילה m פסוקיות $C_1, C_2, \ldots, C_m$, כאשר כל פסוקית מכילה אוסף של ליטרלים ($x_i \backslash \bar{x}_i$) המחוברים ע"י OR ($\vee$) בוליאני והפסוקיות מחוברות ע"י AND ($\wedge$) בוליאני. לדוגמה:

$$\phi = \left(\overset{C_1}{x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4 \vee \bar{x}_7} \right) \wedge \left(\overset{C_2}{x_3 \vee x_5 \vee \bar{x}_8} \right) \wedge \quad \cdots$$

הגדרה 28: נוסחת $3CNF$

נוסחת $3CNF$, ϕ היא נוסחה CNF שבה בכל פסוקית יש בדיוק שלוש ליטרלים. לדוגמה:

$$\phi = \left(\overset{C_1}{x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4} \right) \wedge \left(\overset{C_2}{x_3 \vee x_5 \vee \bar{x}_8} \right) \wedge \quad \cdots$$

הגדרה 29: נוסחת CNF ספיקה

נוסחת CNF, ϕ היא ספיקה אם קימת השמה למשתנים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ע"י $T \backslash F$ כך ש- ϕ מקבלת ערך T, כלומר בכל פסוקית ישנו לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך T.

הגדרה 30: בעיית SAT
קלט: נוסחת CNF, ϕ.
פלט: האם ϕ ספיקה?

$$SAT = \{\langle\phi\rangle \mid \text{ספיקה } CNF \text{ נוסחת } \phi\}$$

הגדרה 31: בעיית $3SAT$
קלט: נוסחת $3CNF$ ϕ.
פלט: האם ϕ ספיקה?

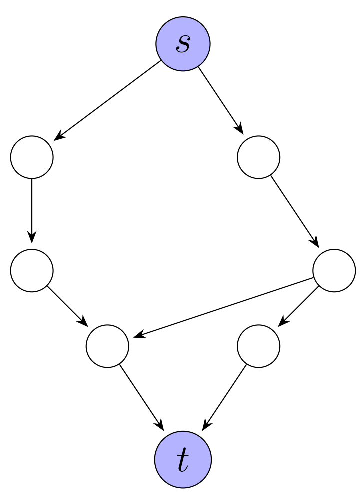
$$3SAT = \{\langle\phi\rangle \mid \text{ספיקה } 3CNF \text{ נוסחת } \phi\}$$

משפט 16:
- $SAT \in NP$.
- **משפט קוק לוין:** $SAT \in NPC$.
- $3SAT \in NPC$.
- $SAT \in P \Leftrightarrow P = NP$.

9 סיווג שפות ידיועות - סיבוכיות

הגדרה 32: בעיית מסלול $PATH$
קלט: גרף מכוון G ושני קודקודים s ו- t.
פלט: האם G מכיל מסלול מקודקוד s לקודדוק t.

$$PATH = \{\langle G, s, t\rangle \mid t \text{ -ל } s \text{ גרף מכוון המכיל מסלול מ- } G\}$$



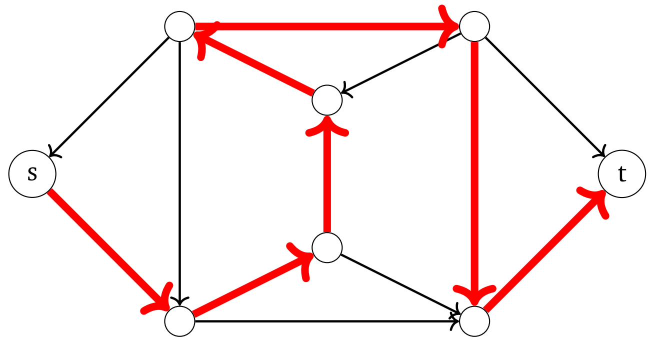
הגדרה 33: בעיית $RELPRIME$
קלט: שני מספרים x ו- y.

פלט: האם x ו- y זרים?

$$RELPRIME = \{\langle x,y\rangle \mid \mathsf{gcd}(x,y)=1\}\ .$$

הגדרה 34: מסלול המילטוני

בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$ ושני קודקודים $s,t\in V$. מסלול המילטוני מ- s ל- t הוא מסלול מ- s ל- t שעובר דרך כל קודקוד ב-G בדיוק פעם אחת.



הגדרה 35: בעיית מסלול המילטוני - $HAMPATH$

קלט: גרף מכוון $G=(V,E)$ ושני קודקודים $s,t\in V$.

פלט: האם G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t?

$$HAMPATH = \{\langle G,s,t\rangle \mid \text{גרף מכוון המכיל מסלול המילטוני מ- } s \text{ ל- } t \text{? } G\}$$

הגדרה 36: מעגל המילטוני

בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$.

מעגל המילטוני הוא מסלול מעגלי שעובר כל קודקוד ב- G בדיוק פעם אחת.

הגדרה 37: בעיית מעגל המילטוני - $HAMCYCLE$

קלט: גרף מכוון $G=(V,E)$.

פלט: האם G מכיל מעגל המילטוני?

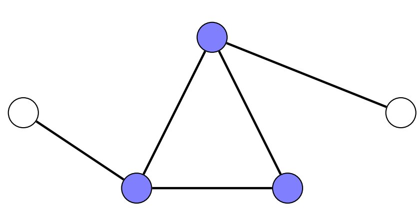
$$HAMCYCLE = \{\langle G\rangle \mid \text{גרף מכוון המכיל מעגל המילטוני. } G\}$$

הגדרה 38: קליקה

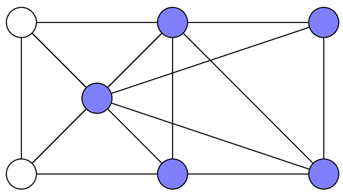
בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$.

קליקה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $C\subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u,\mathsf{v}\in C$ מתקיים $(u,\mathsf{v})\in E$.

קליקה בגודל $k=3$:



קליקה בגודל $k=5$:



הגדרה 39: בעיית הקליקה - $CLIQUE$

קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר k.

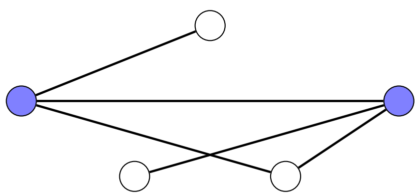
פלט: האם G קליקה בגודל k?

$$CLIQUE=\left\{\langle G,k\rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל } k \; G\right\}$$

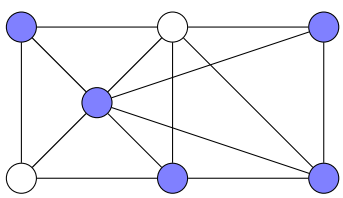
הגדרה 40: כיסוי בקודקודים

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$, כיסוי בקודקודים ב- G הוא תת-קבוצה של קודקודים $C\subseteq V$ כך שלכל צלע $u,v\in S$ מתקיים $u\in C$ או $v\in C$.

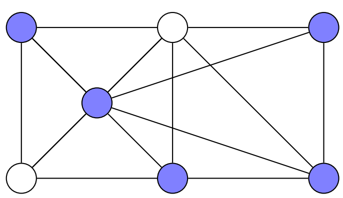
כיסוי בקדקודים בגודל $k=2$:



כיסוי בקדקודים בגודל $k=5$:



כיסוי בקדקודים בגודל $k=5$:



הגדרה 41: בעיית VC

קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר k.

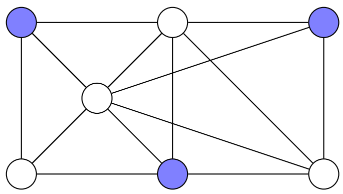
פלט: האם קיים כיסוי בקודקודים ב- G בגודל k?

$$VC=\left\{\langle G,k\rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל כיסוי בקודקודים בגודל } k \; G\right\}$$

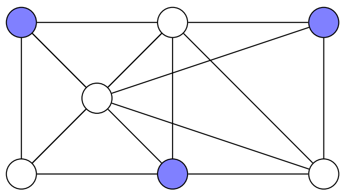
הגדרה 42: קבוצה בלתי תלויה

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$, קבוצה בלתי תלויה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $S\subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u,v\in S$ מתקיים $(u,v)\notin E$.

קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k = 3$:



קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k = 3$:



הגדרה 43: בעיית IS

קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר k.

פלט: האם קיימת קבוצה בלתי תלויה ב- G בגודל k?

$$IS = \{\langle G, k\rangle \mid \text{גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ } G\}$$

הגדרה 44: בעיית $PARTITION$

קלט: קבוצת מספרים שלמים $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

פלט: האם קיימת תת-קבוצה $Y \subseteq S$ כך ש- $\sum_{y \in S \setminus Y} y = \sum_{y \in Y} y$?

$$PARTITION = \left\{ S \;\middle|\; \text{קבוצת שלמים, וקיימת תת-קבוצה } S \text{ } Y \subseteq S \text{ כך ש- } \sum_{y \in S \setminus Y} y = \sum_{y \in Y} y \right\}$$

הגדרה 45: בעיית $SUBSETSUM$

קלט: קבוצת מספרים $S = \{x_1, x_2, \quad \ldots \quad x_n\}$ ומספר t.

פלט: האם קיימת תת-קבוצה של S שסכום איבריה שווה t?

$$SUBSETSUM = \left\{ \langle S, t\rangle \;\middle|\; \text{קיימת } Y \subseteq S \text{ כך ש- } \sum_{x \in Y} x = t \right\}$$

משפט 17:

$PATH = \{\langle G,s,t\rangle \mid \text{גרף מכוון המכיל מסלול מ-} s \text{ ל-} t \text{ } G\}$	$\in P$
$RELPRIME = \{\langle x,y\rangle \mid \gcd(x,y)=1\}$	$\in P$
$SAT = \{\langle \phi\rangle \mid \phi \text{ היא נוסחת } CNF \text{ ספיקה}\}$	$\in NP, \in NPC$
$3SAT = \{\langle \phi\rangle \mid \phi \text{ היא נוסחת } 3CNF \text{ ספיקה}\}$	$\in NP, \in NPC$
$IS = \{\langle G,k\rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל } k\}$	$\in NP, \in NPC$
$CLIQUE = \{\langle G,k\rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל } k\}$	$\in NP, \in NPC$
$VC = \{\langle G,k\rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל כיסוי בקודקודים בגודל } k\}$	$\in NP, \in NPC$
$HAMPATH = \{\langle G,s,t\rangle \mid G \text{ גרף מכוון המכיל מסלול המילטוני מ-} s \text{ ל-} t\}$	$\in NP, \in NPC$
$HAMCYCLE = \{\langle G\rangle \mid G \text{ גרף מכוון המכיל מעגל המילטוני}\}$	$\in NP$
$SUBSETSUM = \left\{\langle S,t\rangle \mid \text{קיימת } Y \subseteq S \text{ כך ש-} \sum_{x\in Y} x = t\right\}$	$\in NP$
$\overline{HAMPATH}$	$\in CoNP$
$\overline{CLIQUE}$	$\in CoNP$

משפט 18: בעיות פתוחות בתורת הסיבוכיות

- האם $P = NP$?
- האם $CoNP = NP$?
- האם $CoNP \cap NP = P$?

10 רדוקציות זמן פולינומיאליות

משפט 19: רדוקציות פולינומיאליות

$$
\begin{aligned}
SAT &\leqslant_P 3SAT\\
3SAT &\leqslant_P CLIQUE\\
CLIQUE &\leqslant_P IS\\
IS &\leqslant_P VC\\
SUBSETSUM &\leqslant_P PARTITION\\
HAMPATH &\leqslant_P HAMCYCLE
\end{aligned}
$$

חישוביות וסיבוכיות

מועד א'

פתרון לדוגמא

ד"ר ירמיהו מילר , .

סמסטר ב, תשפ"ה'

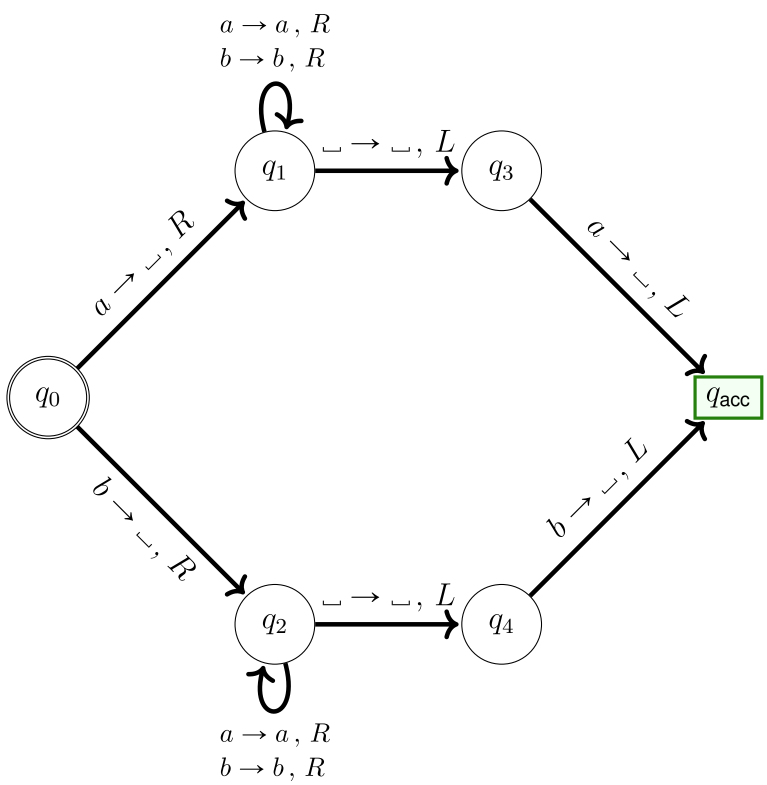
מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הינן פתרונות לדוגמא. ניתן לפתור חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

פתרונות

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

כל המעברים שאינם מופיעים בתרשים עוברים ל- q_{rej}.



סעיף ב' (10 נקודות)

1^{i+2j}

שאלה 2: סגירות של שפות כריעות (20 נקודות)

L. השפה L^* מוגדרת:

$$L^* = \left\{ w = w_1 w_2 \cdots w_k \,\middle|\, \forall\ 1 \leqslant i \leqslant k\ ,\ w_i \in L \right\}$$

פתרונות

תהי M מכונת טיורנג שמכריעה את L.
נבנה מכונת טיורינג M^* אי-דטרמיניסטית המכריעה את L^*.

תאור הבנייה

$M^* =$ על קלט w:

1. אם $w = \varepsilon$ אז M^* מקבלת.
2. אחרת M^* בוחרת באופן אי דטרמיניסטי חלוקה של w ל- $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$ כאשר $k \in \mathbb{N}^+$.
3. לכל $1 \leqslant i \leqslant k$:
   - M^* מריצה את M על w_i.
     * אם M דחתה אז M^* דוחה.
     * אחרת אם M קיבלה חוזרים לשלב 3).
4. אם M קיבלה את כל המחרוזות $\{w_i\}$ אזי M^* מקבלת.

M^* - ניתנת לחישוב - מספר הפירוקים האפשריים ל- w הוא סופי ולכן הניחוש הוא סופי, לפיכך כתיבה על הסרט והרצת M ניתן לחישוב.

הוכחת נכונות: $L^* = L\left(M^*\right)$

כיוון $\Leftarrow$

נניח כי $w \in L\left(M^*\right)$

$\Leftarrow$ קיימת חלוקה $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_k$ $(k \in \mathbb{N}^+)$ כך שעבור כל w_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ M קיבלה.

$\Leftarrow$ כל $w_i \in L(M)$. בפרט, $L(M) = L$.

$\Leftarrow$ $w_i \in L$

$\Leftarrow$ $w = w_1 w_2 \ldots w_k \in L^*$

$\Leftarrow$ $L\left(M^*\right) \subseteq L^*$.

כיוון $\Rightarrow$

נניח כי $w \in L^*$

$\Leftarrow$ קיימת חלוקה $w = w_1 w_2 \cdots w_k$ $(k \in \mathbb{N}^+)$ כך שכל $w_i \in L$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$

$\Leftarrow$ M^* תנחש את הפירוק הזה עבור w

$\Leftarrow$ המכונה M תקבל כל w_i כזה

$\Leftarrow$ M^* תקבל את w

$\Leftarrow$ $w \in L(M^*)$

$\Leftarrow$ $L^* \subseteq L\left(M^*\right)$.

לכן, מאחר ומצאנו ש- $L\left(M^*\right) \subseteq L^*$ ו- $L^* \subseteq L\left(M^*\right)$ אזי $L\left(M^*\right) = L^*$.

שאלה 3: אי כריעות (20 נקודות)

סעיף א' (12 נקודות)

קיימת פונקצית רדוקציה מ- $\bar{L}_{\text{acc}}$ ל- $\hat{L}$.

<u>פונקצית הרדוקציה:</u>

$$f(x) = \begin{cases} \langle M_\varnothing, M', M^* \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\varnothing, M_{\text{even}}, M^* \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- $M_\varnothing$ היא מ"ט שדוחה כל קלט,
- M^* היא מ"ט שמקבלת כל קלט,
- M_{even} היא מ"ט שמקבלת רק מילים $x \in \Sigma^*$ עבורן $|x| \mod 2 = 0$
- M' המ"ט הבאה:

$M' =$ על כל קלט y:

1) אם $|y|$ אי-זוגי $\Leftarrow$ מקבלת.

2) אחרת מריצה M על w ועונה כמוה.

<u>אבחנה:</u>

$$L\left(M'\right) = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \{y \;:\; |y| \mod 2 = 0\} & w \notin L(M) \end{cases}$$

<u>הוכחת הנכונות:</u>

אם $x \in \bar{L}_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

<u>מקרה 1:</u>

$x \neq \langle M, w\rangle$

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M_{\varnothing}, M_{\text{even}}, M^*\rangle$ ו- $L(M_{\varnothing}) \subset L(M_{\text{even}}) \subset L(M^*)$

$\Leftarrow$ $.f(x) \in \hat{L}$

<u>מקרה 2:</u>

$x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \notin L(M)$

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M'\rangle$ ולפי האבחנה $L(M') = \{y : |y| \mod 2 = 0\}$

$\Leftarrow$ $L(M_{\varnothing}) \subset L(M') \subset L(M^*)$

$\Leftarrow$ $.f(x) \in \hat{L}$

אם $x \notin \bar{L}_{\text{acc}}$

$\Leftarrow$ $x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \in L(M)$

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M_{\varnothing}, M', M^*\rangle$ ולפי האבחנה $L(M') = \Sigma^*$

$\Leftarrow$ $L(M') \not\subset L(M^*)$

$\Leftarrow$ $.f(x) \notin \hat{L}$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $\bar{L}_{\text{acc}} \leqslant \hat{L}$.

מכיון ש- $\bar{L}_{\text{acc}} \notin R$ ממשפט הרדוקציה מתקיים $\hat{L} \notin R$.

סעיף ב' (8 נקודות)

<u>שיטה 1</u>

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$L_1 = L_{\text{acc}} , \qquad L_2 = L_{\text{halt}} , \qquad L_3 = L_{\Sigma^*} .$$

תזכורת: $L_{\Sigma^*} = \{\langle M\rangle \mid L(M) = \Sigma^*\}$.
הוכחנו כי $L_{\text{acc}} \leqslant L_{\text{halt}}$ וגם $L_{\text{acc}} \leqslant L_{\Sigma^*}$.
לכן לפי הבחירה של השפות L_1, L_2, L_3, מתקיים $L_1 \leqslant L_2$ וגם $L_1 \leqslant L_3$.
אבל מכיון ש- $L_{\text{halt}} \cap L_{\Sigma^*} = \varnothing$, ז"א $L_2 \cap L_3 = \varnothing$, אזי לא קיימת רדוקציה $L_{\text{acc}} \leqslant (L_{\text{halt}} \cap L_{\Sigma^*})$.

<u>שיטה 2</u>

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$L_1 = L_{\text{halt}} \ , \qquad L_2 = L_{\text{acc}} \ , \qquad L_3 = \overline{L_{\text{acc}}} \ .$$

מתקיים $L_{\text{halt}} \leqslant L_{\text{acc}}$ לכן $L_1 \leqslant L_2$.

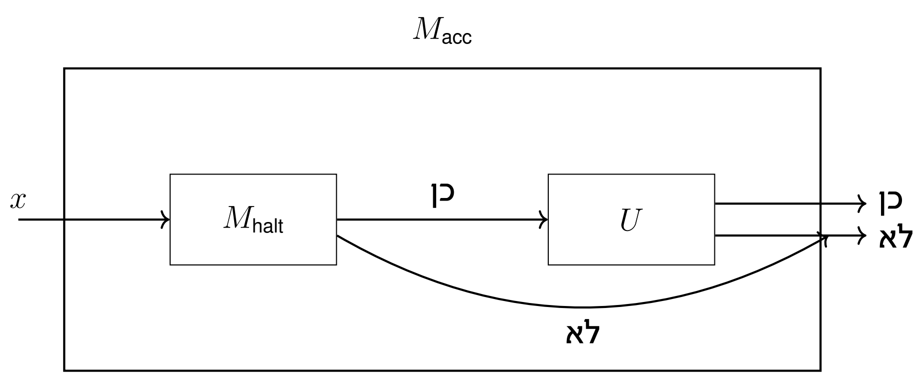
בנוסף $L_{\text{halt}} \leqslant \overline{L_{\text{acc}}}$ לכן $L_1 \leqslant L_3$.

מצד שני: $L_2 \cap L_3 = \varnothing$ ולכן $L_1 \nleqslant L_3$ (אחרת $L_{\text{halt}} \leqslant \varnothing$ ומכיוון ש- $\varnothing \in R$ אזי $L_{\text{halt}} \in R$ בסתירה לכך ש- $L_{\text{halt}} \notin R$).

שאלה 4: NP - שלמות (20 נקודות)

סעיף א' (5 נקודות)

הטענה נכונה.
אם $L_{\text{halt}} \in P$ אזי קיימת מכונת טיורנג M_{halt} המכריעה את L_{halt} בזמן פולינומיאלי.
נבנה מכונת טיורינג M_{acc} המכריעה את L_{acc} בזמן פולינומיאלי באופן הבא:



$M_{\text{acc}} =$ על קלט x:

1) מריצה M_{halt} על x.

- אם M_{halt} דוחה $\Leftarrow$ דוחה.
- אחרת מריצה המ"ט האוניברסלית, U על x ועונה כמוה.

נשים לב ש- M_{acc} תמיד תעצור על כל קלט.

<u>נכונות</u>

אם $x \in L_{\text{acc}}$

$\Leftarrow x = \langle M, w \rangle$ וגם $w \in L(M)$

פתרונות

$\Leftarrow$ $x \in L_{\text{halt}}$

$\Leftarrow$ $x \in L\left(M_{\text{halt}}\right)$

$\Leftarrow$ U תקבל את w

$\Leftarrow$ M_{acc} תקבל את x

$\Leftarrow$ $x \in L\left(M_{\text{acc}}\right)$.

אם $x \notin L_{\text{acc}}$ אז שני מקרים:

- $x \neq \langle M, w\rangle \Leftarrow M_{\text{halt}}$ דוחה את $x \Leftarrow x \notin L\left(M_{\text{acc}}\right)$.
- $x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \notin L(M) \Leftarrow x \in L_{\text{halt}} \Leftarrow U$ תדחה את $x \Leftarrow M_{\text{acc}}$ תדחה את $x \Leftarrow x \notin L\left(M_{\text{acc}}\right)$.

הוכחנו שאם קיימת M_{halt} שמכריעה את L_{halt} אז קיימת M_{acc} שמכריעה את L_{acc}.

בנוסף, אם $L_{\text{halt}} \in P$ אז קיימת מכונת טיורנג פולינומיאלית M_{halt}. לכן המכונט טיורינג M_{acc} היא גם פולינומיאלית, ולכן $L_{\text{acc}} \in P$.

סעיף ב' (5 נקודות)

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: A בעייה NP קשה עבורה $A \notin NP$ ו- B היא שפה NP שלמה.
נניח בשלילה כי $A \leqslant_P B$. ממשפט הרדוקציה, מכיוון ש- $B \in NP$ (כי B היא NP שלמה) מתקיים ש- $A \in NP$ וזו סתירה לבחירה של A.

סעיף ג' (5 נקודות)

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $L = L_{\text{acc}}$.
נניח בשלילה כי $\bar{L} \leqslant L$. אזי
$\overline{L_{\text{acc}}} \leqslant L_{\text{acc}}$. ממשפט הרדוקציה, מכיוון ש- $\overline{L_{\text{acc}}} \notin RE$ אז $L_{\text{acc}} \notin RE$, בסתירה לכך ש- $L_{\text{acc}} \in RE$.

סעיף ד' (5 נקודות)

תהי f פונקצית הרדוקציה $A \leqslant_P B$ שמקיימת $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$ לכל $w \in \Sigma^*$.

תהי g פונקצית הרדוקציה $B \leqslant_P C$ שמקיימת $w \in B \Leftrightarrow f(w) \in C$ לכל $w \in \Sigma^*$.

נוכיח שקיימת רדוקציה $A \leqslant_P C$.

<u>פונקצית הרדוקציה h</u>

לכל $w \in \Sigma^*$ נגדיר $h(w) = g\left(f(w)\right)$.

<u>נכונות הרדוקציה</u>

שלב 1. נוכיח כי $w \in A \Leftrightarrow h(w) \in C$.

- אם $w \in A \Rightarrow f(w) \in B \Rightarrow h(w) = g\left(f(w)\right) \in C$.
- אם $w \notin A \Rightarrow f(w) \notin B \Rightarrow h(w) = g\left(f(w)\right) \notin C$.

שלב 2. נוכיח כי h חשיבה בזמן פולינומיאלי:

נסמן ב- p_f את הפולינום של f.

נסמן ב- p_g את הפולינום של g.

אזי לכל $w \in \Sigma^*$, זמן החישוב של $h(w)$ חסום על ידי :

$$p_f(|w|) + p_g\left(|f(w)|\right) \leqslant p_f(|w|) + p_g\left(p_f\left(|w|\right)\right) = p_f\left(|w|\right) + \left(p_f \circ p_f\right)\left(|w|\right)$$

כאשר $p_f \circ p_f$ הוא הרכבה של שני פולינומים. לכן ניתן לחשב את $h(w)$ בזמן פולינומיאלי בגודל $|w|$.

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

סעיף א' (8 נקודות)

נבנה מכונת טיורינג אי דטרמיניסטית M המכריעה את $HAMCYCLE$ בזמן פולינומיאלי.

$M =$ על קלט $w = \langle G \rangle$:

1. בוחרת באופן אי-דטרמיניסטי סדרה של n קודקודים $u_1, u_2, \ldots, u_n$ מתוך V כאשר $n = |V|$.
2. בודקת האם הקודקודים שונים זה מזה.
   - אם לא $\Leftarrow$ דוחה.
3. בודקת האם כל שני קודקודים עוקבים בסדרה מחוברים בצלע ב- G ואם u_n מחובר בצלע ל- u_1.
   - אם כן $\Leftarrow$ מקבלת.
   - אם לא $\Leftarrow$ דוחה.

<u>זמן הריצה</u>

כל אחד מהצעדים ניתן לממש בזמן פולינומיאלי ולכן זמן הריצה של M הוא פולינומיאלי (אי-דטרמיניסטי).

<u>נכונות</u>

אם $w \in HAMCYCLE$

$\Leftarrow$ $w = \langle G \rangle$ ו- G מכיל מעגל המילטוני C

$\Leftarrow$ קיימת ריצה של M בה היא תבחר את המעגל C ותבדוק שהוא מקיים את כל התנאים ותעצור ותקבל.

אם $w \notin HAMCYCLE$

$\Leftarrow$ $w = \langle G \rangle$ ו- G לא מכיל מעגל המילטוני C

$\Leftarrow$ בכל קיצה של M, כל סדרה של n קודקודים שהיא תבחר היא לא תקיים לפחות אחד התנאים

$\Leftarrow$ בכל ריצה של M על w, M תעצור ותדחה.

פתרונות

סעיף ב' (12 נקודות)

<u>פונקצית הרדוקציה</u>

בהינתן $\langle G,s,t\rangle$ הקֶרט של $HAMPATH$, נבנה גרף $\langle G'\rangle$ הקלט של $HAMCYCLE$ בזמן פולינומיאלי ונוכיח כי:

$$\langle G,s,t\rangle \in HAMPATH \quad \Leftrightarrow \quad \langle G'\rangle \in HAMPATH\ .$$

נבנה את G' באופן הבא:

נוסיף קודקוד חדש x ל- G ושתי צלעות מכוונות חדשות (x,s) ו- (t,x) ונקבל גרף חדש G'.

<u>נכונות הרדוקציה</u>

1. ניתן לחשב את f בזמן קבוע.
2. נוכיח כי $\langle G'\rangle \in HAMPATH \quad \Leftrightarrow \quad \langle G,s,t\rangle \in HAMPATH$.

<u>כיוון ⇐</u>

נניח כי $\langle G,s,t\rangle \in HAMPATH$.

⇐ G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t.

⇐ אותו מסלול קיים ב- G'.

⇐ מסלול זה יחד עם הצלעות שהוספנו (x,s) ו- (t,x) מהווה מעגל המילטוני שעובר דרך כל קודקודי הגרף G'.

⇐ G' מכיל מעגל המילטוני.

⇐ $\langle G'\rangle \in HAMCYCLE$.

<u>כיוון ⇒</u>

נניח כי $\langle G'\rangle \in HAMCYCLE$

⇐ G' מכיל מעגל המילטוני C שעובר דרך כל הקודקודים של G'.

⇐ לפי הבנייה, C בהכרח מכיל את הצלעות החדשות (x,s) ו- (t,x).

⇐ הורדת x ושתי הצלעות (x,s) ו- (t,x) מ- C מאשירה מסלול המילטוני מ- s ל- t שעובר דרך כל קודקוד ב- G בדיוק פעם אחת.

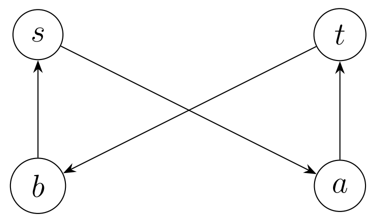
⇐ G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t.

⇐ $\langle G,s,t\rangle \in HAMPATH$.

<u>הערה:</u>

להוסיף צלע (t,s) ל- G לא מספיק.

לדוגמה:



הגרף לא מכיל מסלול המילטוני אבל כן מכיל מעגל המילטוני. ואם נוסיף רק צלע (t,s), המעגל עדיין קיים ב- G'.