תרגילים : סיבוכיות

שאלה 1 הבעיית קליקה מוגדרת באופן הבא:

קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר טבעי k.
פלט: האם G מכיל קליקה בגודל k?

$$CLIQUE = \{\langle G,k\rangle \mid \text{מכיל קליקה בגודל } k \ G\} \ .$$

הבעיית כיסוי בקדקודים מוגדרת:

קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר טבעי k.
פלט: האם G מכיל כיסוי בקדקודים k?

$$VC = \{\langle G,k\rangle \mid \text{מכיל כיסוי בקדקודים בגודל } k \ G\} \ .$$

הוכיחו כי קיימת רדוקציה זמן-פולינומיאלית מבעיית $CLIQUE$ לבעיית VC: כלומר

$$CLIQUE \leq_p VC \ .$$

שאלה 2

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$.
תת-קבוצת קודקודים $S\subseteq V$ היא **קבוצת בלתי תלויה** אם התנאי הבא מתקיים:
אם $u_1,u_2\in S$ אז $(u_1,u_2)\notin E$.

תת-קבוצת קודקודים $C\subseteq V$ תקרא **קליקה** אם התנאי הבא מתקיים:
אם $u_1,u_2\in C$ אז $(u_1,u_2)\in E$.

הבעיית IS מוגדרת:

$$IS = \left\{\langle G,k\rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ לפחות} \ G \right\}$$

הבעיית $CLIQUE$ מוגדרת:

$$CLIQUE = \left\{\langle G,k\rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל } k \text{ לפחות} \ G \right\}$$

הוכיחו כי

$$IS \leq_P CLIQUE \ .$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה IS לשפה $CLIQUE$.
יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 3

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$. קבוצת קדקודים $U\subseteq V$ תקרא **קבוצת בלתי תלויה** אם לכל זוג קדקודים u_1,u_2 ב- U מתקיים ש-

$$(u_1,u_2)\notin E \ .$$

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$. קבוצת קדקודים $U\subseteq V$ תקרא **כיסוי קדקודים** ב- G אם לכל צלע $(u_1,u_2)\in E$, מתקיים ש-

$$u_1\in U \quad \vee \quad u_2\in U \ .$$

נתבונן בשפות הפורמליות הבאות:

$$IS=\left\{\langle G,k\rangle \;\middle|\; G \text{ is an undirected graph, } k \text{ is an integer, } G \text{ includes an } \textbf{independent set} \text{ of size at least } k\right\}$$

$$VC=\left\{\langle G,k\rangle \;\middle|\; G \text{ is an undirected graph, } k \text{ is an integer, } G \text{ includes a } \textbf{vertex cover} \text{ of size at least } k\right\}$$

הוכיחו כי

$$IS\leq_P VC \ .$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה IS לשפה VC.
יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 4 בעיית סכום התת קבוצה (subsetSum): בהינתן קבוצת מספרים שלמים $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ ומספר שלם t, האם קיימת תת קבוצה $Y\subseteq S$ שסכום איבריה הוא בדיוק t.
בעיית סכום התת קבוצה כשפה פורמלית:

$$\text{SubsetSum}=\left\{\langle S,t\rangle \;\middle|\; t=\sum_{y\in Y} Y \text{ כך ש- } Y\subseteq S \text{ קבוצת שלמים, } t \text{ שלם וקיימת תת-קבוצה } S\right\}$$

בעיית החלוקה (Partition): בהינתן קבוצת מספרים שלמים $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ האם קיימת תת-קבוצה $Y\subseteq S$ כך ש- $\sum\limits_{y\in S\setminus Y} y=\sum\limits_{y\in Y} y$.
בעיית החלוקה כשפה פורמלית:

$$\text{partition}=\left\{S \;\middle|\; \sum_{y\in Y} y=\sum_{y\in S\setminus Y} y \text{ כך ש- } Y\subseteq S \text{ קבוצת שלמים, וקיימת תת-קבוצה } S\right\}$$

הוכיחו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה SubsetSum לשפה partition. כלומר:

$$\text{SubsetSum}\leq_P \text{Partition} \ .$$

בשאלה זו עליכם:

א) להגדיר במפורש את הרדוקציה.

ב) להראות שהרדוקציה היא רדוקציית התאמה.

ג) להראות שהרדוקציה פולינומיאלית.

תשובות

<u>שאלה 1</u> בהינתן זוג $\langle G,k\rangle$ הקלט עבור $CLIQUE$, ניצור זוג $\langle G',k'\rangle$, הקלט של VC ע"י פונקצית הרדוקציה

$$\begin{aligned}\langle G,k\rangle \in CLIQUE \quad &\Rightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in VC \\ \langle G,k\rangle \in CLIQUE \quad &\Leftarrow \quad \langle G',k'\rangle \in VC\end{aligned}$$

<u>הגדרת הרדוקציה</u>

- נגדיר את G' להיות הגרף המשלים $\bar{G}(V,\bar{E})$:

$$\bar{E} = \big\{(u_1,u_2)\ \big|\ (u_1,u_2) \notin E\big\}\ .$$

- נגדיר $k' = |V| - k$.

<u>נכונות הרדוקציה</u>

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

נניח כי $\langle G,k\rangle \in CLIQUE$.

$\Leftarrow$ G מכיל קליקה C בגודל k.

$\Leftarrow$ לכל $(u_1,u_2) \in \bar{E}$ של $\bar{G}$, מתקיים $(u_1,u_2) \notin E$ ולכן $u_1 \notin C$ או $u_2 \notin C$.

$\Leftarrow$ לכל שני קודקודים u_1,u_2 ב- $\bar{G}$, $u_1 \in V\backslash C$ או $u_2 \in V\backslash C$.

$\Leftarrow$ הקובצת קודקודים $V\backslash C$ היא כיסוי בקודקודים של $\bar{G}$ בגודל $k' = |V| - k$.

$\Leftarrow$ $\langle G',k'\rangle \in VC$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

נניח כי $\langle G',k'\rangle \in VC$.

$\Leftarrow$ G' מכיל כיסוי בקדקודים S בגודל $k' = |V| - k$.

$\Leftarrow$ לכל שני קודקודים u_1,u_2 של G', אם $(u_1,u_2) \in \bar{E}$ אז $u_1 \in S$ או $u_2 \in S$.
השלילה הלוגית של גרירה זו היא: אם $u_1 \notin S$ וגם $u_2 \notin S$ אז $(u_1,u_2) \notin \bar{E}$.

$\Leftarrow$ אם $u_1 \in V\backslash S$ וגם $u_2 \in V\backslash S$ אז $(u_1,u_2) \in \bar{E}$.

$\Leftarrow$ הקבוצת קודקודים $V\backslash S$ היא קליקה ב- G בגודל $k = |V| - k'$.

$\Leftarrow$ G מכיל קליקה בגודל k.

שאלה 2

פונקציית הרדוקציה:

אנחנו נגדיר פונקציית הרדוקציה f שבהינתן זוג $\langle G,k\rangle \in IS$ (הקלט של IS), תיצור $\langle G',k'\rangle \in CLIQUE$, (הקלט של $CLIQUE$), כלומר

(*1) $$f\left(\langle G,k\rangle\right) = \langle G',k'\rangle \ .$$

כך שהתנאי הבא מתקיים:

(*2) $$\langle G,k\rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in CLIQUE \ .$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת לפי התנאים הבאים:

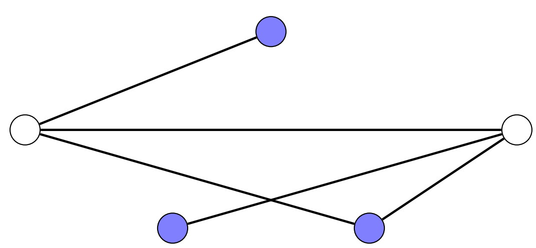
1) בהינתן גרף $G=(V,E)$.
אז G' הוא הגרף המשלים $\bar{G}=(V,\bar{E})$, כאשר

$$\bar{E} = \left\{(u_1,u_2) \ \middle| \ (u_1,u_2) \notin E\right\} \ .$$

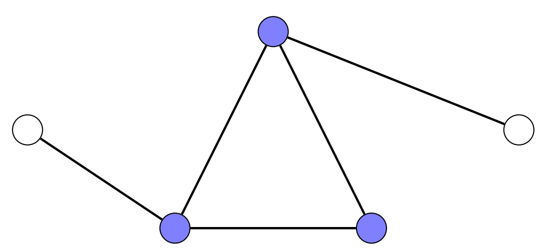
2) $k'=k$.

כדוגמה: בהינתן הגרף $G=(V,E)$ שמכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k=3$. הפונקציית הרדוקציה יוצרת את הגרף $\bar{G}=(V,\bar{E})$ ואת המספר $k'=k=3$, כמתואר בתרשים למטה:

$G=(V,E)$



$\bar{G}=\left(V,\bar{E}\right)$



נכונות הרדוקציה

כעת נוכיח שמתקיים: $\langle G',k'\rangle \in CLIQUE \quad \Leftrightarrow \quad \langle G,k\rangle \in IS$.

כיוון $\Leftarrow$

בהינתן גרף $G=(V,E)$ ושלם k.
נניח כי $\langle G,k\rangle \in IS$.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל k לפחות.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה S בגודל k.

$\Leftarrow$ אם $u_1,u_2 \in S$ אז $(u_1,u_2) \notin E$.
כלומר, כל שני קדקודים ב- S לא מחוברים בצלע של G.

$\Leftarrow$ אם $u_1,u_2\in S$ אז $(u_1,u_2)\in\bar{E}$.

כלומר, כל שני קדקודים ב- S מחוברים בצלע של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ הקבוצה S היא קליקה בגודל k של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ הקבוצה S היא קליקה בגודל $k'=k$ של $G'=\bar{G}$.

$\Leftarrow$ $\langle G',k'\rangle\in CLIQUE$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

בהינתן גרף G' ושלם k'.

נניח כי $\langle G',k'\rangle\in CLIQUE$.

$\Leftarrow$ $\langle\bar{G},k\rangle\in CLIQUE$ (כי על פי ההגדרה של הפונקצית הרדוקציה, $G'=\bar{G}$ ו- $k'=k$).

$\Leftarrow$ $\bar{G}$ מכיל קליקה בגודל k לפחות.

$\Leftarrow$ $\bar{G}$ מכיל קליקה C בגודל k.

$\Leftarrow$ אם $u_1\in C$ וגם $u_2\in C$ אז $(u_1,u_2)\in\bar{E}$.

כלומר, כל שני קדקודים ב- C מחוברים בצלע של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ אם $u_1\in C$ וגם $u_2\in C$ אז $(u_1,u_2)\notin E$.

כלומר, כל שני קדקודים ב- C לא מחוברים בצלע של הגרף G.

$\Leftarrow$ הקבוצה C היא קבוצה בלתי תלוייה בגודל k של G.

$\Leftarrow$ $\langle G,k\rangle\in IS$.

<u>שאלה 3</u> עלינו להוכיח כי $\exists$ רידוקיציית זמן-פולינומיאלית מ- IS ל- VC:

$$IS\le_P VC\ .$$

ראשית נגדיר את הבעיות VC ו- IS.

<u>הגדרת הבעייה VC:</u>

קלט:	גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר שלם חיובי k.
פלט:	האם קיים כיסוי קדקודים ב- G בגודל לפחות k.

$$VC=\left\{\langle G,k\rangle\ \middle|\ G \text{ מכיל כיסוי קדקודים בגודל } k \text{ לפחות}\right\}\ .$$

<u>הגדרת הבעייה IS:</u>

קלט:	גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר שלם חיובי k.
פלט:	האם G מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל לפחות k.

$$IS = \left\{ \langle G,k\rangle \;\middle|\; G \text{ מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל } k \text{ לפחות} \right\} \ .$$

פונקצית הרדוקציה:

אנחנו נגדיר פונקצית הרדוקציה R שבהינתן זוג $\langle G,k\rangle \in IS$, R מחזירה $\langle G',k'\rangle \in VC$, כלומר

(*1) $$R\left(\langle G,k\rangle\right) = \langle G',k'\rangle \ .$$

כך ש:

(*2) $$\langle G,k\rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in VC \ .$$

הפונקציית הרדוקציה במשוואה (*1) מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

1) נניח שהגרף הוא $G=(V,E)$.
אז הגרף G' הוא אותו גרף $G=(V,E)$.

2) $k'=|V|-k$.

נכונות הרדוקציה

כעת נוכיח שתנאי (*2) מתקיים.

כיוון $\Leftarrow$

בהינתן גרף $G=(V,E)$ ושלם k.
נניח כי $\langle G,k\rangle \in IS$.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה U בגודל k לפחות.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה U בגודל k.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- U לא מחוברים בצלע ב- G.

$\Leftarrow$ $V\backslash U$ היא כיסוי קדקודים ב- G בגודל $k'=|V|-k$.

$\Leftarrow$ הגרף $G'=\bar{G}$ מכיל כיסוי קדקודים בגודל k.

$\Leftarrow$ $\langle G',k'\rangle \in VC$.

כיוון $\Rightarrow$

בהינתן גרף G' ושלם k'.
נניח כי $\langle G',k'\rangle \in VC$.

$\Leftarrow$ G' מכיל כיסוי קדקודים בגודל k' לפחות.

$\Leftarrow$ G' מכיל כיסוי קדקודים U' בגודל k'.

$\Leftarrow$ G מכיל כיסוי קדקודים U' בגודל k'.

⇐ כל שני קדקודים ב- $V\backslash U'$ היא קבוצת בלתי תלוייה ב- G' בגודל $k=|V|-k'$.

⇐ הגרף $G=G'$ מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל k.

שאלה 4

א) נבנה פונקצית הרדוקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ שמוגדרת

$$f\left(\langle S,t\rangle\right)=\langle S'\rangle$$

כאשר $\langle S,t\rangle$ קלט של SubsetSum ו- $\langle S'\rangle$ קלט של Partition.

1) יהי $s=\sum\limits_{x\in S}x$.

2) נגדיר את הקבוצה החדשה S' על ידי הוספת האיבר $s-2t$ לקבוצה S:

$$S'=S\cup\{s-2t\}\ .$$

ב) <u>כיוון ⇐</u>

נניח ש- $\langle S,t\rangle\in$ SubsetSum.

⇐ קיימת תת-קבוצה $Y\subseteq S$ כך ש- $t=\sum\limits_{y\in Y}y$.

לכן:

$$\begin{aligned}\sum_{y\in(Y\cup\{s-2t\})}y&=|Y|+s-2t\\&=t+s-2t\\&=s-t\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{y\in S'\backslash(Y\cup\{s-2t\})}y&=|S'|-(|Y|+s-2t)\\&=|S'|-|Y|-s+2t\\&=|S|+s-2t-|Y|-s+2t\\&=|S|-|Y|\\&=s-t\ .\end{aligned}$$

⇐ התת-קבוצה $Y\cup\{s-2t\}$ והתת-קבוצה $S'\backslash\big(Y\cup\{s-2t\}\big)$ מהוות חלקוה של הקבוצה S'.

⇐ $\langle S'\rangle\in$ Partition.

<u>כיוון ⇒</u>

נניח ש- $\langle S'\rangle\in$ Partition.

$\Leftarrow$ קיימות תת-קבוצות $S_1', S_2' \subseteq S'$ כך שמתקיים

$$S_1' \cup S_2' = S' \tag{1*}$$

ו-

$$\sum_{x \in S_1'} x = \sum_{x \in S_2'} x \ . \tag{2*}$$

הקבוצה S קשור לקבוצה S' על ידי היחס $S' = S \cup \{s - 2t\}$.
לכן

$$S_1' \cup S_2' = S \cup \{s - 2t\} \tag{3*}$$

ללא הגבלת כלליות אנחנו נגדיר את התת-קבוצה $S_1 \subseteq S$ של הקבוצה S להיות

$$S_1 = S_1' \cup \{s - 2t\} \ ,$$

ואנחנו נגדיר את התת-קבוצה $S_2 \subseteq S$ של הקבוצה S להיות

$$S_2 = S_2' \ .$$

מכאן מנובע מהמשוואה (3*) ש:

$$S_1 \cup S_2 = S_1' \cup S_2' + \{s - 2t\} = S \cup \{s - 2t\} \qquad \Rightarrow \qquad S_1 \cup S_2 = S \ . \tag{4*}$$

$\Leftarrow$ ניתן לרשום משוואה (2*) בצורה הבאה:

$$\sum_{x \in (S_1 \cup \{s - 2t\})} x = \sum_{x \in S_2} x \ . \tag{5*}$$

ניתן לחלק את הסכום בצד השמאול של המשווה (5*) ולרשום אותה בצורה הבאה:

$$\sum_{x \in S_1} x + s - 2t = \sum_{x \in S_2} x \ . \tag{6*}$$

נוסיף את הסכום $\sum\limits_{x \in S_1} x$ לשני האגפים של משוואה של (6*) ונקבל

$$\sum_{x \in S_1} x + \sum_{x \in S_1} x + s - 2t = \sum_{x \in S_2} x + \sum_{x \in S_1} x \ . \tag{7*}$$

הסכום בצד הימין של משוואה (7*) הוא הסכום $\sum\limits_{x \in (S_1 \cup S_2)} x$.
לפי המשוואה (4*), $S_1 \cup S_2 = S$ לכן $\sum\limits_{x \in S} x = \sum\limits_{x \in (S_1 \cup S_2)} x$.
לכן הסכום בצד הימין של משוואה (7*) הוא הסכום של כל האיברים אשר בקבוצה S.
אנחנו מסמנים את הסכום הזה כ- $\sum\limits_{x \in S} x = s$. לכן ניתן לרשום את משוואה (7*) בצורה הבאה:

$$\sum_{x \in S_1} x + \sum_{x \in S_1} x + s - 2t = s \ . \tag{8*}$$

אפשר לבטל s בצד שמאול ובצד ימין ולהעביר את ה- $2t$ לצד ימין ולקבל את המשוואה:

$$\sum_{x\in S_1} x + \sum_{x\in S_1} x = 2t \ , \tag{9*}$$

זאת אומרת

$$2\sum_{x\in S_1} x = 2t \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{x\in S_1} x = t \ . \tag{10*}$$

$\Leftarrow$ קיימת תת קבוצה $S_1 \subseteq S$ של S שמקיימת את התנאי $\sum\limits_{x\in S_1} x = t$.

$\Leftarrow$ $\langle S,t\rangle \in \text{SubsetSum}$.

ג) הפונקצית הרדוקציה f, על קלט $\langle S,t\rangle$ מחזירה את הפלט $\langle S'\rangle$ כאשר $S' = S \cup \{s-2t\}$.

לכן הפונקציה מחשבת את הסכום s של כל האיברים שבקבוצה S ואז מחשבת את החיסור $s-2t$.

נסמן $n=|S|$ האורך של הקבוצה S.

אפשר לתאר את f בפסאודו-קוד באופן הבא:

שלב 1. הפונקציה f מאתחלת משתנה $s=0$.

שלב 2. הפונקציה נכנסת ללואה מעל כל האיברים שבקבוצה S ומחברת האיבר הנוכחי לערך של s כל איטרציה.

שלב 3. בסוף הפונקציה מחשבת את החיסור $s-2t$.

שלב 4. הפונקציה מחזירה את הקבוצה החדשה $S' = S \cup \{s-2t\}$.

- שלב 1 דורש צעד אחד. לכן הסיבוכיות של שלב 1 הוא $O(1)$.
- שלב 2 דורש n צעדים. לכן הסיבוכיות של שלב 2 הוא $O(n)$.
- שלב 3 דורש צעד אחד. לכן הסיבוכיות של שלב 3 הוא $O(1)$.
- שלב 4 דורש צעד אחד. לכן הסיבוכיות של שלב 4 הוא $O(1)$.

בסך הכל הסיבוכיות של הפונקציה f היא

$$O(1)+O(n)+O(1)+O(1) = O(n) \ .$$