

חוברת תרגילים: אוטומטים ושפות פורמליות

שאלה 1 נתונות השפות הבאות מעל הא"ב $\{0, 1\}$:

$$L_1 = \{\varepsilon\}, \quad L_2 = \{110, 01\}, \quad L_3 = \emptyset, \quad L_4 = \{\varepsilon, 100\}, \quad L_5 = \{00, 11\}.$$

כתבו את הגדרת השפה לשפות הבאות:

(א) $L_1 L_2$

(ב) $L_2 L_3$

(ג) $L_4 - L_1$

(ד) L_2^2

(ה) L_5^R

(ו) L_4^*

(ז) $L_1 \cup L_2^R$

(ח) $(L_2 \cup L_5)^2$

תשובות

שאלה 1

- (א) שרשור של L_1 (שפת המילה הריקה) עם L_2 . כיוון ששרשור של כל מילה w עם ε נותן את w , השפה לא משתנה. לכן: $L_1 L_2 = L_2 = \{110, 01\}$.
- (ב) שרשור של שפה עם השפה הריקה (\emptyset). כיוון שאין אף מילה ב- L_3 שאפשר לשרשר למילות L_2 , התוצאה היא קבוצה ריקה: $L_2 L_3 = \emptyset$.
- (ג) הפרש קבוצות. אנחנו לוקחים את כל המילים ב- L_4 ומסירים מהן את המילים שנמצאות ב- L_1 (כלומר, מסירים את המילה הריקה ε): $L_4 \setminus \{\varepsilon\} = \{100\}$.
- (ד) שרשור של L_2 עם עצמה ($L_2 L_2$). לוקחים כל מילה מ- L_2 ומשרשרים לה כל מילה מ- L_2 :
- $$\begin{aligned} 110 + 110 &= 110110 \bullet \\ 110 + 01 &= 11001 \bullet \\ 01 + 110 &= 01110 \bullet \\ 01 + 01 &= 0101 \bullet \end{aligned}$$
- לכן: $L_2^2 = \{110110, 11001, 01110, 0101\}$.
- (ה) היפוך (Reverse) של השפה L_5 . הופכים את סדר האותיות בכל מילה:
 00 נשאר 1100 נשאר 11. $L_5^R = \{00, 11\}$ (במקרה זה $L_5^R = L_5$).
- (ו) סגור קליני (Kleene Star). זוהי קבוצת כל השרשורים האפשריים (באורך כלשהו) של מילים מתוך L_4 . מכיוון ש- L_4 מכילה את המילה הריקה ואת "100", כל שרשור ביניהן יניב רצפים של "100" או את המילה הריקה עצמה.

$$L_4^* = \{\varepsilon, 100, 100100, 100100100, \dots\} = \{(100)^n \mid n \geq 0\}$$
- (ז) איחוד של L_1 עם היפוך השפה L_2 :
- $$\begin{aligned} L_1 &= \{\varepsilon\} \bullet \\ L_2^R &= \{011, 10\} \bullet \\ L_1 \cup L_2^R &= \{\varepsilon, 011, 10\} \bullet \end{aligned}$$
- (ח) קודם נאחד את השפות ואז נשרשר את התוצאה עם עצמה:
- $$L_2 \cup L_5 = \{110, 01, 00, 11\}$$
- כעת נשרשר את הקבוצה הזו עם עצמה (סך הכל 16 צירופים אפשריים):
- $$(L_2 \cup L_5)^2 = \{110110, 11001, 11000, 11011, 01110, 0101, 0100, 0111, 00110, 0001, 0000, 0011, 11110, 1101, 1100, 1111\}$$