

29/09/24 כ"ו באלול תשפ"ד  
09 : 00 – 12 : 00

## אלגברה ליניארית 1 למדמ"ח

מועד ב'

מרצים: דר' מרינה ברשדסקי, מר' אמיר גוריון.

תשפ"ד סמסטר ב'

השאלון מכיל 11 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

**בהצלחה!**

### הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

### חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט A4), מצורפים לשאלון.

### אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.
- יש לציין את השאלות שעניתם עליהן בתחילת המחברת.

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

## שאלה 1. ( 25 נקודות )

א' (4 נק') הוכיחו או הפריכו: אם  $A$  הפיכה ו  $B$  הפיכה, אז  $A + B$  הפיכה.

ב' (21 נק') פתרו בשיטת גאוס את המערכת הבאה:  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ , כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & a^2 - 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ a + 5 \end{pmatrix}$$

1. (5 נק') דרגו מטריצה מורחבת וצינו ערכים מובילים שלה.

2. (4 נק') יש לציין עבור איזה ערך של  $a$  למערכת יש פתרון יחיד. נמקו היטב.

3. (4 נק') במקרה של אינסוף פתרונות מצאו את הפתרון הכללי.

4. (4 נק') עבור איזה ערך של  $a$  אין פתרון? נמקו היטב.

5. (4 נק') עבור מקרים 3, 4. מצאו בסיס ומימד למרחבים וקטורים הבאים:

$$\text{Col}A, \text{Row}A, \text{Nul}A$$

## שאלה 2. ( 25 נקודות )

א' (8 נק') יהיו  $0 \neq b \in M_{m \times 1}, A \in M_{m \times n}, x \in M_{n \times 1}, m \leq n$  וכן נתון שלמערכת  $Ax = b$  אין פתרון. כמה פתרונות יש למערכת ההומוגנית המתאימה  $Ax = 0$ ? נמק תשובה.

ב' (17 נק') במרחב ווקטורי  $R^4$  נתונים וקטורים:

$$v_1 = (2, 1, 0, 1)$$

$$v_2 = (3, 2, a, 3)$$

$$v_3 = (3, 1, -a, 1)$$

1. (8 נק') עבור איזה ערך  $a \in R$  הוקטורים הנתונים בלתי תלויים ליניארית? נמקו את תשובתך.

2. (9 נק') במקרה שקבוצת הוקטורים נתונה תלויה ליניארית תן דוגמה לצירוף ליניארי של וקטור אחד על ידי שאר הווקטורים.

### שאלה 3. ( 25 נקודות )

א' ( 8 נק' ) הוכיחו או הפריכו: אם  $A$  הפיכה אז  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ .

ב' ( 8 נק' ) נתונות קבוצות הווקטורים :

$$V = \{(a+b, b, a \cdot b) | a, b \in R \subseteq R^3$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+c \end{pmatrix} | a, b \in R \right\} \subseteq M_{2 \times 2}$$

האם  $V$  תת-מרחב וקטורי של  $R^3$ ? האם  $W$  תת-מרחב וקטורי של  $M_{2 \times 2}$ ?

ג' ( 9 נק' ) הוכיחו או הפריכו: אם קבוצת המספרים טבעיים  $N$  שדה.

### שאלה 4. ( 25 נקודות )

א' ( 5 נק' ) מהי דטרמיננטה של מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$$

ועבור איזה ערך של  $k \neq 0$  מתקיים  $A \cdot A^T = I$

ב' ( 20 נק' ) נתונה העתקה הליניארית  $T: R^4 \rightarrow R^4$  מיוצגת על ידי המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

מתקיים  $Tx = A \cdot x$  קבע איזו מבין הטענות שלהלן היא נכונה ואיזה לא. תן הסבר מלא לכל סעיף

1. ( 5 נק' )  $\dim(KerT) = 1$  כי לא קיים וקטור  $x \neq 0$  ש-  $T(x) = 0$ .

2. ( 5 נק' )  $\dim(ImT) = 3$  כי שלוש העמודות הראשונות במטריצה  $A$  הן בסיס לתמונה של  $T$ .

3. ( 5 נק' )  $\dim(KerT) = 0, \dim(ImT) = 4$  ו-  $T$  היא טרנספורמציה חד-חד-ערכית ועל.

4. ( 5 נק' )  $\dim(KerT) = \dim(ImT) = 2$

**שאלה 5. ( 25 נקודות )**

א' ( 6 נק' ) נתונות מטריצות

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6a_3 & 6a_2 & 6a_1 \\ 2b_3 & 2b_2 & 2b_1 \\ -c_3 & -c_2 & -c_1 \end{pmatrix}$$

, כאשר  $\det A = \frac{1}{6}$  מהי הדטרמיננטה של המטריצה  $B$ ?

ב' ( 19 נק' ) מצאו את משוואת הפולינומים שעוברות דרך נקודות שעבורם סכום ריבועי המרחקים מהנקודות

$$A(1, 1), B(-1, 4), C(1, -2)$$

מינמלי. פתרו מערכת משוואות או דרך מטריצה הפוכה או לפי קרמר.

1. ( 9 נק' ) כאשר הפולינום הוא פרבולה

$$y = ax^2 + bx + c$$

2. ( 10 נק' ) כאשר הפולינום הוא ישר

$$y = ax + b$$