המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

מחלקה למדעי המחשב

28/03/25 ל' בשבט תשפ"ה

$08:30 - 11:30$

תורת המשחקים

מועד ב'

מרצה: ד"ר ירמיהו מילר

תשפ"ה סמסטר א'

השאלון מכיל 11 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

<u>הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה</u>

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

<u>חומר עזר</u>

- דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

<u>אחר / הערות</u> יש לענות על השאלות באופן הבא:

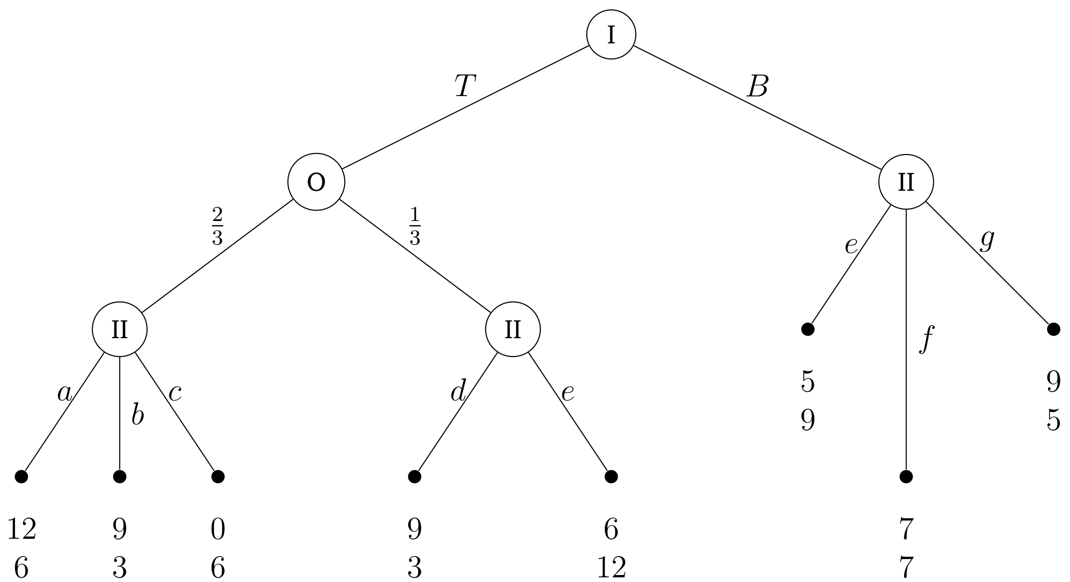
- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.

==

שאלה 1 **(25 נקודות)**

א (20 נק')

מצאו את כל שיווי המשקל של המשחק הבא:



ב (5 נק')

מצאו את כל ווקטורי האסטרטגיות הרציונליים במשחקים הבאים:

$I \backslash II$	L	R
T	$90, 50$	$50, 30$
B	$80, 60$	$80, 40$

שאלה 2 **(25 נקודות)**

א (10 נק')

יהי G משחק N שחקנים באסטרטגיות טהורות. הוכיחו את הטענה הבאה:
אם הוקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \dots, s_N^*)$ שיווי משקל, אז s^* הוא פתרון באסטרטגיות השולטות חזק.

ב) **(15 נק')** נתון משחק שני שחקנים סכום אפס:

$I \backslash II$	L	R
T	4	1
B	2	3

מצאו את הערך של המשחק והאסטרטגיות האופטימליות.

שאלה 3

רבקה, לאה ורחל משחקות את המשחק הבא. תחילה נבחרת אחת מבין לאה ורחל, כל אחת מהן נבחרת בהסתברות $\frac{1}{2}$. אם לאה נבחרה היא משחקת עם רבקה את משחק הבא:

רבקה \ לאה	L	R
T	$2, 5$	$0, 0$
B	$0, 0$	$1, 1$

אם רחל נבחרה היא משחקת עם רבקה את המשחק הבא

רבקה \ רחל	L	R
T	$2, 5$	$0, 0$
B	$0, 0$	$1, 1$

רבקה אינה יודעת מי היא השחקנית שאיתה היא משחקת. התשלום של השחקנית שלא נבחרה הוא 0. ענו על השאלות הבאות:

א) **(6 נק')** ציירו את המשחק בצורה רחבה.

ב) **(6 נק')** רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית.

ג) **(6 נק')** מצאו שני שיווי משקל באסטרטגיות טהורות.

ד) **(7 נק')** מצאו שיווי נוסף באסטרטגיות מעורבות.

שאלה 4

א) **(15 נק')** נתון משחק הבא בצורה אסטרטגית:

II \ I	L	T
T	$1,8$	$9,2$
B	$7,1$	$2,5$

מצאו את כל שיווי המשקל והתשלומי שיווי המשקל לכל השחקנים במשחק זה.

ב) **(10 נק')** תהיינה A ו- B שתי מטריצות חיוביות (בעלות ממדים סופיים).

$$\begin{array}{c|cc} I \backslash II & & \\ \hline & A & 0 \\ & 0 & B \end{array}$$

הוכיחו כי למשחק זה לא קיים ערך.

שאלה 5 **(25 נקודות)**

א) **(5 נק')**
הערך של משחק שני שחקנים סכום אפס הנתון על ידי מטריצה A הוא 0. האם בהכרח הערך של משחק שני השחקנים סכום אפס הנתון על ידיד המטריצה $-A$ הוא 0? אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

ב) **(5 נק')**
אליס ובוב מוכרים מניות של אותה חברה ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאלים. הם מחליטים סימולטנית על מספר המניות שהם מוכרים, וההיצע הכולל קובע את מחיר של מניה אחת, שהוא זהה לשני הסוחרים. נסמן ב- q_1 וב- q_2 את מספר המניות שהסוחרים אליס (שחקן 1) ובוב (שחקן 2) מוכרים בהתאמה. אזי המספר הכולל של מניות בשוק הוא $q_1 + q_2$. נניח כי המחיר של מניה אחת הינו

$$4 - q_1 - q_2 \ .$$

עלות המכירה של מניה אחת לאליס היא 0.5₪ ועלות המכירה של מניה אחת לבוב היא 1₪.
מהן האסטרטגיות של אליס ושל בוב?

ג) **(10 נק')**
חשבו את שיווי המשקל של המשחק.

ד) **(5 נק')**
חשבו את התשלום השיווי המשקל לאליס ולבוב.

פתרונות

שאלה 1 (25 נקודות)

שאלה 2

א) (10 נק')

משפט זו אומר שאם הווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ הוא שיווי משקל נאש, אז s^* תישאר לאחר תהליך סילוק חוזר של אסטרטגיות הנשלטות חזק.

נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ שיווי משקל נאש אבל הוא לא פתרון באסטרטגיות שולטות חזק.
אם כן אז תהי s_i^* האסטרטגיה הראשונה שיורדת בתהליך סילוק חוזר.
ז"א קיימת אסטרטגיה $t_i \in S_i$ אשר שולטת חזק ב- s_i^*, כלומר

$$u_i(s_1, \dots, s_i^*, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, t_i, \dots, s_n) \quad . \qquad (\#1)$$

לכל $s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n$ אשר עדיין נשארות בתהליך.

בפרט, מכיוון שהאסטרטגיות $s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*$ עדיין נשארות בתהליך אחרי מחיקת אסטרטגיה s_i^*, אז לפי (#1) מתקיים

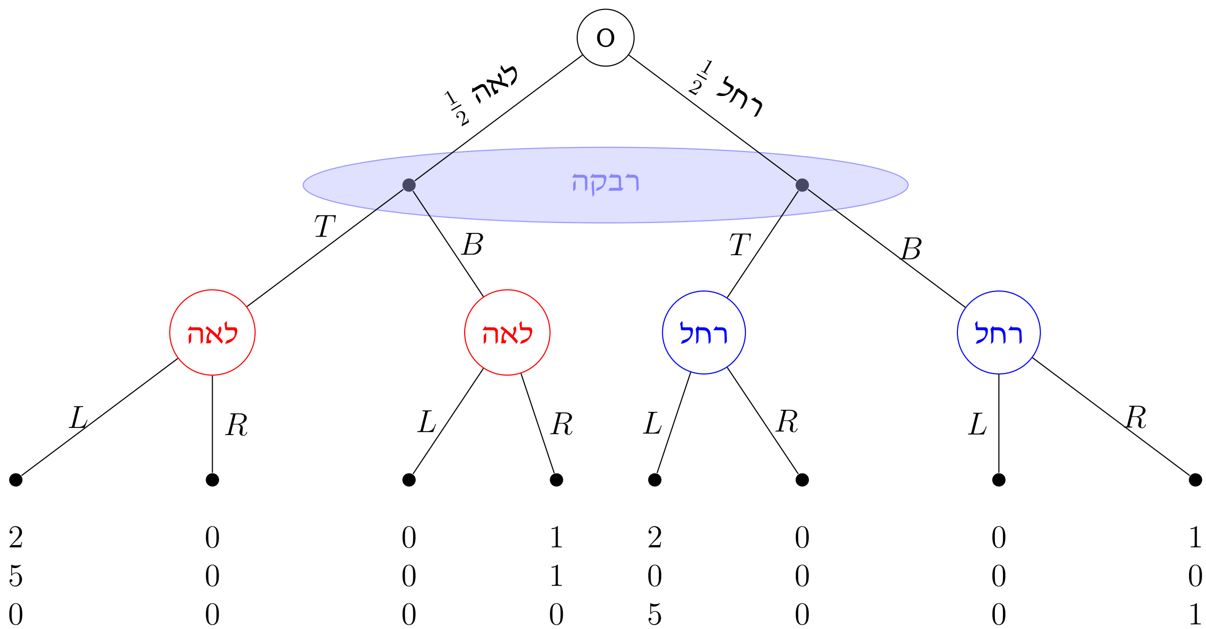
$$u_i(s_1^*, \dots, s_i^*, \dots, s_n^*) < u_i(s_1^*, \dots, t_i, \dots, s_n^*) \quad . \qquad (\#2)$$

בסתירה לכך ש $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ הוא שיווי משקל.

ב) (15 נק')

שאלה 3 (25 נקודות)

א)



ב) הצורה האסטרטגית מתוארת למטה. רבקה שחקן השורה, לאה שחקן העמודה, רחל בוחרת במטריצה.

רחל L

לאה / רבקה	L	R
T	$2, 2.5, 2.5$	$1, 0, 2.5$
B	$0, 0, 0$	$0.5, 0.5, 0$

רחל R

לאה / רבקה	L	R
T	$1, 2.5, 0$	$0, 0, 0$
B	$0.5, 0, 0.5$	$1, 0.5, 0.5$

ג) קיימים שני שווי המשקל של המשחק: $s^* = (T, L, L)$ ו- $s^* = (B, R, R)$.

ד) ההרחבה של המשחק לאסטרטגיות מעורבות מתוארת למטה:

רחל $z(L)$

לאה / רבקה	$y(L)$	$(1-y)(R)$
$x(T)$	$2, 2.5, 2.5$	$1, 0, 2.5$
$(1-x)(B)$	$0, 0, 0$	$0.5, 0.5, 0$

רחל $(1-z)(R)$

לאה / רבקה	$y(L)$	$(1-y)(R)$
$x(T)$	$1, 2.5, 0$	$0, 0, 0$
$(1-x)(B)$	$0.5, 0, 0.5$	$1, 0.5, 0.5$

נניח כי $\sigma^* = (x^*, y^*, z^*)$ שווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

לפי עקרון אדישות שחקן I (רבקה) אדישה בין T ו- B לכן

$$U_1(T,y^*,z^*)=U_1(B,y^*,z^*)\ .$$
$$\Rightarrow\quad 2y^*z^*+z^*(1-y^*)+y^*(1-z^*)=\frac{1}{2}z^*(1-y^*)+\frac{1}{2}y^*(1-z^*)+(1-y^*)(1-z^*)$$
$$\Rightarrow\quad 3y^*+3z^*=2\ .$$

לפי עקרון אדישות שחקן II (לאה) אדישה בין L ו- R לכן

$$U_2(x^*,L,z^*)=U_2(x^*,R,z^*)\ .$$
$$\Rightarrow\quad \frac{5}{2}x^*z^*+\frac{5}{2}x^*(1-z^*)=\frac{1}{2}z^*(1-x^*)+\frac{1}{2}(1-x^*)(1-z^*)$$
$$\Rightarrow\quad \frac{5}{2}x^*=\frac{1}{2}z^*+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^*-\frac{1}{2}z^*\ .$$
$$\Rightarrow\quad x^*=\frac{1}{6}\ .$$

לפי עקרון אדישות שחקן III (רחל) אדישה בין L ו- R לכן

$$U_3(x^*,y^*,L)=U_3(x^*,y^*,R)\ .$$
$$\Rightarrow\quad \frac{5}{2}x^*y^*+\frac{5}{2}x^*(1-y^*)=\frac{1}{2}x^*(1-y^*)+\frac{1}{2}(1-x^*)(1-y^*)$$
$$\Rightarrow\quad \frac{5}{2}x^*+\frac{1}{2}y^*=\frac{1}{2}\ .$$

הפתרון למערכת שלוש משוואת זו הינו

$$x^*=\frac{1}{6}\ ,\qquad y^*=\frac{1}{6}\ ,\qquad z^*=\frac{1}{2}\ .$$

לכן קיים שווי משקל נוסף באסטרטגיות מעורבות:

$$\left(\left(\frac{1}{6}(T),\frac{5}{6}(B)\right)\ ,\ \left(\frac{1}{6}(L),\frac{5}{6}(R)\right)\ ,\ \left(\frac{1}{2}(L),\frac{1}{2}(R)\right)\ .\right)$$

<u>שאלה 4</u> תהיינה A ו- B מטריצות בעלות תשלומים חיוביים. אזי עבור

$$T=\begin{array}{|c|c|}\hline A & 0\\ \hline 0 & B\\ \hline\end{array}\ .$$

מתקיים $T_{ij}\geq 0$.

בכל שורה יש לפחות אפס אחד, לכן

$$\underline{v} = \max_i \min_j T_{ij} = \max_i 0 = 0 \ .$$

מצד שני מכיוון ש- A ו- B מטריצות חיוביות, אזי קיים לפחות איבר חיובי אחד בכל עמודה. לפיכך

$$\bar{v} = \min_j \max_i T_{ij} > 0 \ .$$

לכן $\underline{v} = 0 < \bar{v}$ ז"א $\underline{v} \neq \bar{v}$ ולכן למשחק אין ערך.