המחלקה למדעי המחשב

10/07/2025 י"ד בתמוז תשפ"ה
09 : 00 – 12 : 00

# אלגברה לינארית 2 למדמ"ח

## מועד א'

מרצים: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר .

תשפ"ה סמסטר ב'

**השאלון מכיל 6 עמודים (כולל עמוד זה).**

**בהצלחה!**

==========================================================

**<u>הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה</u>**

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

**<u>חומר עזר</u>**

- דפי נוסחאות של הקורס ( 3 עמודים בפורמט $A4$) מצורפים לשאלון.

**<u>אחר / הערות</u>** יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- יש לרשום בראש המחברת איזה שאלות לבדוק.

==========================================================



המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *

## שאלה 1 (25 נקודות)

**א) (16 נק')**
נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ מצאו צורת ז'ורדן $J$ ומטריצה הפיכה $P$ כך ש- $J=P^{-1}AP$.

**ב) (3 נק')**
תהי $B\in\mathbb{R}^{6\times 6}$ מטריצה עבורה הפולינום האופייני הוא $p_B(x)=(x-1)^3(x-2)^3$
והפולינום המינימלי הוא $m_B(x)=(x-1)^2(x-2)$.
מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של $B$.

**ג) (3 נק')**
הוכיחו או הפריכו: קיימת מטריצה $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ הרמיטית המקיימת $\text{trace}(A)=i$.

**ד) (3 נק')**
הוכיחו או הפריכו: אם $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ לכסינה וכל הערכים העצמיים שלה הם $1$ או $-1$ אז $A^2=I$.

## שאלה 2 (25 נקודות)

**א) (16 נק')** נתונה העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ המוגדרת ע"י

$$T(A)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}A$$

לכל מטריצה $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$.
האם ההעתקה ניתנת ללכסון? במידה וכן, מצאו בסיס שבו המטריצה המייצגת של ההעתקה היא מטריצה אלכסונית. במידה ולא, נמקו מדוע.

יהי $V$ מקחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ ויהיו שלושה וקטורים שונים $u_1,u_2,u_3\in V$ בת"ל. ענו על הסעיפים ב' וג' הבאים:

**ב) (5 נק')** יהי $w\neq 0\in V$ המקיים $\langle u_k,w\rangle=0$ לכל $k=1,2,3$. הוכיחו כי הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3,w\}$ בת"ל.

**ג) (4 נק')** נתון כי $\langle u_1+u_2,u_1\rangle=\langle u_1-u_3,u_2\rangle$. הוכיחו כי הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ אינה אורתוגונלית.

## שאלה 3 (25 נקודות)

**א) (16 נק')** הוכיחו כי המטריצה $A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ לכסינה אורתוגונלית ומצאו מטקיצה אורתוגונלית $P$ ומטריצה אלכסונית $D$ כך ש- $P^tAP = D$. נמקו היטב את תשובתכם.

**ב) (9 נק')** הוכיחו כי מטריצה $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ היא צמודה לעצמה ואוניטרית אם ורק אם $B$ לכסינה אוניטרית ומקיימת $B^2 = I$.

## שאלה 4 (25 נקודות)

**א) (7 נקודות)** תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת $A^3 = 4A$. מצאו את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של $A$.

**ב) (6 נקודות)** תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת $A^3 = 4A$. מצאו את כל האפשרויות עבור $|A|$.

**ג) (6 נקודות)** תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה הרמיטית ונניח כי $A^k = I$ עבור $k \geq 1$ כלשהו. הוכיחו כי $A^2 = I$.

**ד) (6 נקודות)** תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית ויהיו $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ערכים עצמיים שונים של $A$ וכן $u_1, u_2$ וקטורים עצמיים המתאימים ל- $\lambda_1, \lambda_2$. הוכיחו כי $u_1, u_2$ אורתוגונליים.

## שאלה 5 (25 נקודות) יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב וקטורי $V$.

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הענות הבאות:

**א) (6 נק')** אם $T$ אוניטרי אז הערך מוחלט של כל ערך עצמי של $T$ שווה ל- $1$.

**ב) (6 נק')** אם $T$ נורמלי אז $T$ צמוד לעצמו.

**ג) (6 נק')** יהי $\lambda$ ערך עצמי של $T$, אז המרחב העצמי $V_\lambda$ הוא $T$- שמור.

**ד) (7 נק')** אם $T$ אנטי הרמיטי, אז כל ערך עצמי של $T$ מדומה טהור.

**מרחב אוקלידי:** מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$.

**מרחב אוניטרי:** מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$.

**הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי $V$ מעל $\mathbb{R}$:**
לכל $u, \mathrm{v}, w \in V$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{R}$:

**1)** סימטריות: $\langle u, \mathrm{v}\rangle = \langle \mathrm{v}, u\rangle$

**2)** ליניאריות: $\langle u+\mathrm{v}, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle \mathrm{v}, w\rangle$

$\langle \lambda u, \mathrm{v}\rangle = \lambda \langle u, \mathrm{v}\rangle$

**3)** חיוביות: $\langle u, u\rangle \geq 0.$

$\langle u, u\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$

**הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי $V$ מעל $\mathbb{C}$:**
לכל $u, \mathrm{v}, w \in V$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{C}$:

**1)** הרמיטיות: $\langle u, \mathrm{v}\rangle = \overline{\langle \mathrm{v}, u\rangle}$

**2)** ליניאריות: $\langle u+\mathrm{v}, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle \mathrm{v}, w\rangle$

$\langle \lambda u, \mathrm{v}\rangle = \lambda \langle u, \mathrm{v}\rangle$

**3)** חיוביות: $\langle u, u\rangle \geq 0$

$\langle u, u\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$

אי-שוויון קושי שוורץ: $|\langle u, \mathrm{v}\rangle| \leq \|u\| \cdot \|\mathrm{v}\|$

אי-שוויון המשולש: $\|u+\mathrm{v}\| \leq \|u\| + \|\mathrm{v}\|$

היטל אורתוגונלי של ווקטור $\mathrm{v}$ על תת מרחב בעל בסיס אורתוגונלי $u_1, \ldots, u_n$:

$$P_U(\mathrm{v}) = \frac{\langle \mathrm{v}, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle \mathrm{v}, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 + \cdots + \frac{\langle \mathrm{v}, u_n\rangle}{\|u_n\|^2} u_n \ .$$

תהליך גרם שמידט לבניית בסיס אורתוגונלי:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \mathrm{v}_1 \ , \\
u_2 &= \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \\
u_3 &= \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \\
&\vdots \\
u_n &= \mathrm{v}_n - \frac{\langle \mathrm{v}_n, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_n, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \ldots - \frac{\langle \mathrm{v}_n, u_{n-1}\rangle}{\|u_{n-1}\|^2} u_{n-1} \ .
\end{aligned}$$

$\lambda \in \mathbb{F}$ **ערך עצמי** ו- $u \in \mathbb{F}^n$ **ווקטור עצמי** ($u \neq 0$) של מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ אם: $Au = \lambda u$

$\lambda \in \mathbb{F}$ **ערך עצמי** ו- $u \in V$ **ווקטור עצמי** ($u \neq 0$) של אופרטור $T : V \to V$ אם: $T(u) = \lambda u$

**פולינום אופייני** של מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$: $p_A(\lambda) = |\lambda I - A|$

**מרחב עצמי** של מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ששייך לערך עצמי $\lambda$ הוא כל וקטור $u \in \mathbb{F}^n$ כאשר $u \neq 0$ כך ש:
$$Au = \lambda u \ .$$

**מרחב עצמי** של אופרטור $T : V \to V$ ששייך לערך עצמי $\lambda$ הוא כל וקטור $u \in \mathbb{V}$ כאשר $u \neq 0$ כך ש:
$$T(u) = \lambda u \ .$$

**בסיס אורתונורמלי:**

יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. בסיס אורתונורמלי, מסומן $\{b_1, \ldots, b_n\}$, מקיים את התנאי
$$\langle b_i, b_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \ , \qquad 1 \leq i, j \leq n \ .$$

כל וקטור $u \in V$ ניתן לרשום בבסיס אורתונורמלי:
$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, b_i\rangle \, b_i$$

סימון חלופי:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \langle u, b_1\rangle \\ \langle u, b_2\rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_i\rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_n\rangle \end{pmatrix}_B$$

יהי $T : V \to V$ אופרטור. המצרטיצה המייצגת על פי בסיס $B$ היא

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \langle T(b_1), b_1\rangle & \langle T(b_2), b_1\rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_1\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_1\rangle \\ \langle T(b_1), b_2\rangle & \langle T(b_2), b_2\rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_2\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_2\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_i\rangle & \langle T(b_2), b_i\rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_i\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_i\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_n\rangle & \langle T(b_2), b_n\rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_n\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_n\rangle \end{pmatrix} \ .$$

כלומר האיבר ה- $ij$ של המטריצה המייצגת של $T$ על פי הבסיס $B$ היא . $[T]_{ij} = \langle T(b_j), b_i\rangle$

**ההגדרה של אופרטור הצמוד:**

אם $T: V \to V$ אופרטור, ו- $u, w \in V$ שני וקטורים כלשהם של $V$, אזי האופרטור הצמוד של $T$ מוגדר כך שמתקיים

(*1) $$\langle T(u), w \rangle = \langle u, T^*(w) \rangle \ .$$

מההגדרה (*1) נובע:

(*2) $$\langle T^*(u), w \rangle = \langle u, T(w) \rangle$$

נוסחה ל- $T(u)$ ו- $T^*(u)$ במונחי בסיס אורתונורמלי $\{b_1, \cdots, b_n\}$:

(*3) $$T(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(u), b_i \rangle \, b_i$$

(*4) $$T^*(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u, T(b_i) \rangle \, b_i$$

משפט:

(*5) $$T^{**} = T$$

משפט: המטריצה המייצגת של אופרטור צמוד $T^*$ נתונה ע"י

(*6) $$[T^*] = [T]^*$$

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית.

| | |
|---|---|
| $A$ הרמיטית: | $A = A^*$ |
| $A$ אנטי-הרמיטית: | $A^* = -A$ |
| $A$ אוניטרית: | $AA^* = I = A^*A$ |
| $A$ אורתוגונלית : | $AA^t = I = A^tA$ |
| $A$ נורמלית: | $AA^* = A^*A$ |

יהי $T: V \to V$ אופרטור מעל מרחב וקטורי $V$. נסמן המטריצה המייצגת $A = [T]$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $T$ צמוד לעצמו: | $A = A^*$ | $\Leftrightarrow$ | $T = T^*$ |
| $T$ אנטי-הרמיטי: | $A^* = -A$ | $\Leftrightarrow$ | $T^* = -T$ |
| $T$ אוניטרי: | $AA^* = I = A^*A$ | $\Leftrightarrow$ | $TT^* = I_V = T^*T$ |
| $T$ נורמלי: | $AA^* = A^*A$ | $\Leftrightarrow$ | $TT^* = T^*T$ |

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה $Q$ אוניטרית ומטריצה $D$ אלכסונית כך ש:

$$A = QDQ^* \quad \Leftrightarrow \quad D = Q^*AQ \ .$$

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אורתוגונלית אם קיימת מטריצה $P$ אורתוגונלית ומטריצה $D$ אלכסונית כך ש:

$$A = PDP^t \quad \Leftrightarrow \quad D = P^tAP \ .$$

# פתרונות

## שאלה 1

**א) (16 נק')** הפולינום האופייני של $A$ הוא:

$$p_A(x) =$$

**ב) (3 נק')**

**ג) (3 נק')** הטענה לא נכונה.
נניח בשלילה שקיימת מטריצה הרמיטית, כלומר $A = A^*$, עבורה $\text{trace}(A) = i$.
ז"א

**(*1)** $$\text{trace}\left(A^*\right) = \overline{\text{trace}(A)} = \bar{i} = -i \ .$$

מצד שני, מכיוון ש- $A = A^*$ אזי

**(*2)** $$\text{trace}\left(A^*\right) = \text{trace}\left(A\right) = i \ ,$$

בסתירה לזה שמצאני במשוואה **(*1)** ש: $\text{trace}\left(A^*\right) = -i$.
לכן הוכחנו שלא קיימת מטריצה הרמיטית עבורה $\text{trace}(A) = i$.

**ד) (3 נק')** הטענה נכונה. $A$ לכסינה אזי קיימת $P$ הפיכה ו- $D$ אלכסונית:

$$A = PDP^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad D = P^{-1}AP \ .$$

כל הערכים עצמיים שלה הם 1 או $-1$ לפיכך

$$D = \text{diag}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix} \ ,$$

כאשר $\lambda_i = \pm 1$, $1 \leq i \leq n$. לכן

$$D^2 = \begin{pmatrix}\lambda_1^2 & \cdots & 0\\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \cdots & 0\\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1\end{pmatrix} = I \ .$$

מכאן

$$A^2 = PD^2P^{-1} = PIP^{-1} = I$$

כנדרש.

## שאלה 2

**א)**

$$T\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\quad [T(e_1)]_E=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\quad [T(e_2)]_E=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1&0\\-2&0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\quad [T(e_3)]_E=\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\0\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&-1\\0&-2\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\quad [T(e_4)]_E=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

לכן המטירצה המייצגת הסנדרטית היא

$$[T]=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\2&0&-2&0\\0&2&0&-2\end{pmatrix}\ .$$

הפולינום האופייני של $T$ הוא:

$$\begin{aligned}p_T(x)=&\begin{vmatrix}x-1&0&1&0\\0&x-1&0&1\\-2&0&x+2&0\\0&-2&0&x+2\end{vmatrix}\\
=&(x-1)^2(x+2)^2+2(x-1)(x+2)+2\left((x-1)(x+2)+2\right)\\
=&(x-1)(x+2)\left[(x-1)(x+2)+2\right]+2\left[(x-1)(x+2)+2\right]\\
=&\left[(x-1)(x+2)+2\right]^2\\
=&\left[x^2+x\right]^2\\
=&\left[x\left(x+1\right)\right]^2\\
=&x^2\left(x+1\right)^2\ .\end{aligned}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda=0$</u>

$$\text{Nul}\,(A-0\cdot I) \;=\; \text{Nul}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\2&0&-2&0\\0&2&0&-2\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-2R_1} \begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&2&0&-2\end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\to R_4-2R_2} \begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$V_0=\text{span}\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\;,\;u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\;.$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda=-1$</u>

$$\text{Nul}\,(A+I) \;=\; \text{Nul}\begin{pmatrix}2&0&-1&0\\0&2&0&-1\\2&0&-1&0\\0&2&0&-1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-R_1} \begin{pmatrix}2&0&-1&0\\0&2&0&-1\\0&0&0&0\\0&2&0&-1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\to R_4-R_2} \begin{pmatrix}2&0&-1&0\\0&2&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$V_{-1}=\text{span}\left\{u_3=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}\;,\;u_4=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}\;.$$

לכן בסיס שבו במטריצה המייצגת של ההעתקה היא אלכסונית הוא:

$$w_1=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\;,\quad w_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\;,\quad w_3=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\;,\quad w_4=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\;.$$

**ב)** נוכיח כי

**(#)**
$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3+\alpha_4w=0$$

מתקיים אם ורק אם $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$. ראשית נקח את המכפלה פנימית עם $w$ ונקבל

$$\langle w,\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3+\alpha_4w\rangle=\langle w,0\rangle=0\;.$$

נשתמש בתכונת ליניאריות של המכפלה פנימית כדי להרחיב את האגף השמאול באפן הבא:

**(*1)**
$$\langle w,\alpha_1u_1\rangle+\langle w,\alpha_2u_2\rangle+\langle w,\alpha_3u_3\rangle+\langle w,\alpha_4w\rangle=0$$

כעת נוציא את הסקלר החוץ בכל מכפלה פנימית, בהתאם עם התכונת ליניאריות ונקבל ש:

**(*2)**
$$\alpha_1\langle w,u_1\rangle+\alpha_2\langle w,u_2\rangle+\alpha_3\langle w,u_3\rangle+\alpha_4\langle w,w\rangle=0$$

$\langle u_k, w\rangle = 0$ לכל $k = 1,2,3$ לכן השלוש איברים הראשונים בצד שמאל של (2*) שווים ל- $0$ ולכן

$$\alpha_4 \langle w, w\rangle = 0 \tag{*3}$$

נתון בשאלה כי $w \neq 0 \Leftarrow 0$ $\langle w,w\rangle \neq 0 \Leftarrow$ נובע ממשוואה (3*) ש- $\alpha_4 = 0$. נציב $\alpha_4 = 0$ במשוואה (#) ונקבל ש-

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0 \tag{*4}$$

אבל נתון בשאלה כי השלושה וקטורים $u_1, u_2, u_3$ הם בלתי תלויים לינארית לכן (4*) מתקיים אם ורק אם $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

הוכחנו כי (#) מתקיים אם ורק אם $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ ולכן הווקטורים $u_1, u_2, u_3, w$ הם בלתי תלויים לינארית.

**ג)** נתון ש-

$$\langle u_1 - u_3, u_2\rangle = \langle u_1 + u_2, u_1\rangle \ .$$

לפי התכונת הליניאריות של המכפלה פנימית, אפשר להרחיב את המכפלות הפנימיות בשני האגפים ונקבל ש:

$$\langle u_1, u_2\rangle - \langle u_3, u_2\rangle = \langle u_1, u_1\rangle + \langle u_2, u_1\rangle \ .$$

נעביר את $\langle u_2, u_1\rangle$ מהאגף הימין לאגף השמאול:

$$\langle u_1, u_2\rangle - \langle u_3, u_2\rangle - \langle u_2, u_1\rangle = \langle u_1, u_1\rangle \ .$$

מכיוון שהמכפלה פנימית היא מוגדרת במרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{R}$, אזי התכונת סימטריות תוקפת: $\langle u_2, u_1\rangle = \langle u_1, u_2\rangle$. לכן שתי מכפלות פנימיות באגף השמאול מתבטלות ונקבל ש:

$$-\langle u_3, u_2\rangle = \langle u_1, u_1\rangle \ .$$

עכשיו נוכיח בשלילה שהקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ אינה אורתוגונלית.

נניח בשלילה כי הקבוצה כן אורתוגונלית. אזי $\{u_3, u_2\} = 0$. ז"א

$$\langle u_3, u_2\rangle = \langle u_1, u_1\rangle = 0 \ .$$

נתון בשאלה כי הקבוצת וקטורים $\{u_1, u_2, u_3\}$ היא בלתי תלויה ליניארית ולכן אף וקטור בקבוצה הזו לא שווה לוקטור האפס (כי קבוצת וקטורים המכילה וקטור האפס היא תלויה ליניארית, בסתירה לכך כי הקבוצה בת"ל).
לפיכך קיבלנו ש- $\langle u_1, u_1\rangle = 0$ ו- $u_1 \neq 0$, וזאת סותרת את התכונת חיוביות של מכפלה פנימית.

בגלל שהגענו לסתירה אזי הקבוצת וקטורים $\{u_1, u_2, u_3\}$ אינה אורתוגונלית.

## שאלה 3

**א) (16 נק')**

$$A=\begin{pmatrix}11 & -8 & 4\\ -8 & -1 & -2\\ 4 & -2 & -4\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A^t=\begin{pmatrix}11 & -8 & 4\\ -8 & -1 & -2\\ 4 & -2 & -4\end{pmatrix}=A$$

ז"א $A^t=A \Leftarrow A$ סימטרית $\Leftarrow A$ לכסינה אורתוגונלית.

$$\begin{aligned}p_A(x) &= |xI-A|\\ &=\begin{vmatrix}x-11 & 8 & -4\\ 8 & x+1 & 2\\ -4 & 2 & x+4\end{vmatrix}\\ &=(x-11)\begin{vmatrix}x+1 & 2\\ 2 & x+4\end{vmatrix}-8\begin{vmatrix}8 & 2\\ -4 & x+4\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}8 & x+1\\ -4 & 2\end{vmatrix}\\ &=(x-11)\left(x^2+5x\right)-8\left(8x+40\right)-4\left(4x+20\right)\\ &=x(x-11)\left(x+5\right)-64\left(x+5\right)-16\left(x+5\right)\\ &=x(x-11)\left(x+5\right)-80\left(x+5\right)\\ &=\left(x^2-11x-80\right)\left(x+5\right)\\ &=\left(x-16\right)\left(x+5\right)\left(x+5\right)\\ &=\left(x-16\right)\left(x+5\right)^2\end{aligned}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda=16$</u>

$$\text{Nul}\left(A-16I\right) = \begin{pmatrix}-5 & -8 & 4\\ -8 & -17 & -2\\ 4 & -2 & -20\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to 5R_3+4R_1]{R_2\to 5R_2-8R_1}\begin{pmatrix}-5 & -8 & 4\\ 0 & -21 & -42\\ 0 & -42 & -84\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\begin{pmatrix}-5 & -8 & 4\\ 0 & -21 & -42\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to \frac{-1}{21}R_2}\begin{pmatrix}-5 & -8 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+8R_2}\begin{pmatrix}-5 & 0 & 20\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to \frac{-1}{5}R_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$V_{16}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}4\\ -2\\ 1\end{pmatrix}\right\}\setminus\{0\}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda = -5$</u>

$$\text{Nul}\,(A+5I) = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ -8 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to 4R_3 - R_1]{R_2 \to 2R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{4}R_1} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{-5} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \setminus \{0\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \setminus \{0\}$$

נסמן

$$\text{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \text{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} , \quad \text{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

נפעיל האלגוריתם של גרם שמידט כדי למצוא בסיס אורתוגונלי:

$$u_1 = \text{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

$$u_2 = \text{v}_2 - \frac{\langle \text{v}_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{0}{21} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \text{v}_3 - \frac{\langle \text{v}_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \text{v}_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0}{21} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{17} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ 4 \end{pmatrix}$$

לכן מצאנו בסיס אורתוגונלי:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} , \quad u_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

בסיס אורתונוגמלי:

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} , \quad \hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{357}} \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

**ב)** כיוון $\Leftarrow$

נניח כי $B$ צמודה לעצמה וגם $B$ אוניטרית.

(1) $\Leftarrow$ $B=B^*$ וגם $BB^*=I$.

(2) מכיוון ש- $B$ צמודה לעצמה $\Leftarrow$ $B$ נורמלית $\Leftarrow$ ממשפט הלכסון אוניטרית $\Leftarrow$ $B$ לכסינה אוניטרית.

(3)

$$BB \overset{\text{(1): } B \text{ צמוד לעצמו}}{=} BB^* \overset{\text{(1): } B \text{ אוניטרי}}{=} I$$

לכן $B^2=I$, כנדרש.

כנדרש.

כיוון $\Rightarrow$

נניח כי $B^2=I$ וגם $B$ לכסינה אוניטרית.

(1) $\Leftarrow$ $B^2=I$ וגם קיימת $Q$ אוניטרית ו- $D$ אלכסונית כך ש- $B=QDQ^*$.

(2)

$$I=B^2=QDQ^*QDQ^*=QD^2Q^* \quad \Rightarrow \quad D^2=Q^*IQ=Q^*Q=I \ .$$

לכן $D=\operatorname{diag}(\lambda_1, \quad \cdots \quad \lambda_n)$ כשאר $\lambda_i=\pm 1$

(3) $\Leftarrow$ $D$ ממשית ואלכסונית $\Leftarrow$ $D=D^*$.

(4) לכן

$$B^* \overset{(1)}{=} (QDQ^*)^* = QD^*Q^* \overset{(3)}{=} QDQ^* = B$$

לכן $B=B^*$ ולכן $B$ לעצמה, כנדרש.

(5)

$$BB^* \overset{(1)}{=} QDQ^*(QDQ^*)^* = QDQ^*QD^*Q = QDD^*Q \overset{(3)}{=} QD^2Q^* \overset{(2)}{=} QQ^* = I$$

לכן $B$ אוניטרית, כנדרש.

## שאלה 4

## שאלה 5

**א)** נניח ש- $T:V\to V$ אופרטור אוניטרי, ונניח ש- $\lambda$ ערך עצמי של $T$ השייך לוקטור עצמי $\mathrm{v}$. ז"א $T(\mathrm{v})=\lambda\mathrm{v}$. אז

$$\begin{aligned} \langle T(\mathrm{v}),T(\mathrm{v})\rangle &= \langle \lambda\mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\text{וקטור עצמי של } T \ \mathrm{v}) \\ &= \lambda\langle \mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית}) \\ &= \lambda\bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית}) \end{aligned} .$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}), T(\mathrm{v})\rangle &= \langle \mathrm{v}, T^*T(\mathrm{v})\rangle && \text{(הגדרה של אופרטור הצמוד)}\\ &= \langle \mathrm{v}, I(\mathrm{v})\rangle && \text{(} T \text{ אוניטרי)}\\ &= \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle = \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \quad \Rightarrow \quad (\lambda\cdot\bar{\lambda}-1)\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle = 0 \ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v}\neq 0 \Leftarrow \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \neq 0 \Leftarrow (\lambda\cdot\bar{\lambda}-1)=0 \Leftarrow \lambda\bar{\lambda}=1 \Leftarrow |\lambda|^2=1$.

**ב)** הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:
האופרטור $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדר:

$$T(u)=Au\ , \qquad A=\begin{pmatrix}0 & i\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

לכל $u\in\mathbb{R}^2$.

$$[T]=\begin{pmatrix}0 & i\\ 1 & 0\end{pmatrix}\ , \qquad [T]^*=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -i & 0\end{pmatrix}$$

$$[T][T]^*=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=[T][T]^*$$

לכן $T$ נורמלי אבל $[T]\neq[T]^*$ לכן $T$ לא צמוד לעצמו.

**ג) (6 נק')** אם $\lambda$ ערך עצמי של $T$ אזי לכל וקטור עצמי $u\in V_\lambda$ מתקיים

$$T(u)=\lambda u\in \text{span}\{u\}\subseteq V_\lambda$$

לכן לכל $u\in V_\lambda$ מתקיים $T(u)\in V_\lambda$.

**ד) (7 נק')**
נניח ש- $T:V\to V$ אופרטור צמוד לעצמו, ונניח ש- $\lambda$ ערך עצמי של $T$ השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v})=\lambda\mathrm{v}$. אז

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \lambda\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && \text{(v וקטור עצמי של } T\text{)}\\ &= \lambda\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && \text{(לינאריות של מכפלה פנימית)}\end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \mathrm{v},T^*(\mathrm{v})\rangle && \text{(הגדרה של אופרטור הצמוד)}\\ &= \langle \mathrm{v},-T(\mathrm{v})\rangle && \text{(} T \text{ אנטי-הרמיטי)}\\ &= -\langle \mathrm{v},T(\mathrm{v})\rangle\\ &= -\langle \mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && \text{(v וקטור עצמי של } T\text{)}\\ &= -\bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && \text{(לינאריות חלקית של מכפלה פנימית)}\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle = -\bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \quad\Rightarrow\quad (\lambda+\bar{\lambda})\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=0\ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v}\neq 0 \Leftarrow \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\neq 0 \Leftarrow (\lambda+\bar{\lambda})=0 \Leftarrow \lambda=-\bar{\lambda}$.