המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

המחלקה למדעי המחשב

$29/11/23 12:00 - 26/11/23 12:00$ תשפ"ג

אלגברה 2

מועד ב'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר, ד'ר שי סרוסי.

תשפ"ג סמסטר ק'

השאלון מכיל 12 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

אחר / הערות

- יש לפתור את כל השאלות.
- המשקל של כל שאלה מפורט להלן:
  - שאלה 1: 30 נקודות.
  - שאלה 2: 20 נקודות.
  - שאלה 3: 20 נקודות.
  - שאלה 4: 30 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבירו היטב את מהלך הפתרון. תשובה ללא הסבר (גם נכונה) לא תתקבל.
- אסור לחלוטין לקבל עזרה מסטודנט אחר או מאף אחד.
- עליכם להעלות את הפתרונות שלכם דרך אתר המודל של הקורס אלגברה 2 למדמ"ח לא יאוחר משעה 12:00 ביום ד' 23-11-29. פתרונות שהוגשו אחרי המועד הזה לא יתקבלו.
- מותר להשתמש בחומר של הקורס, התרגילים של הקורס והספרים של הקורס בלבד, אבל אסור להשתמש בשום מקורות אחרים.
- אחרי הגשת פתרונות אתם תקבלו הזמנה למבחן קצר בעל פה על הפתרונות שלכם. ייתכן שלא תעבור את המבחן או יורידו נקודות במקרה שאתם לא יכולים להסביר הפתרונות שלכם היטב.
- **סטודנט יהיה זכאי להגיש ערעור / בקשות שונות לגבי הבוחן במשך 5 ימים בלבד מיום קבלת הציון.**

<u>שאלה 1</u>

א) תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ המטירצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. מצאו J צורת ז'ורדן ו- P הפיכה כך ש- $A = PJP^{-1}$.

ב) חשבו את $A^7 \cdot \begin{pmatrix} 51 \\ 12 \\ 36 \\ 18 \end{pmatrix}$.

<u>שאלה 2</u> תהי $A \in \mathbb{C}^{8\times8}$ המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

א) הוכיחו כי כל הערכים העצמיים יהיו ממשיים.

ב) הוכיחו כי הערך מוחלט של כל ערך עצמי של A יהיה 1.

ג) הוכיחו כי קיימת Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $A = QD\bar{Q}$.

<u>שאלה 3</u> תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. יהיו $u \in \mathbb{F}^n$ ווקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ_1 ו- b ווקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ_2. נניח גם ש- $\lambda_1 \neq \lambda_2$. הוכיחו כי הווקטורים a ו- b בלתי תלויים לינאריים.

<u>שאלה 4</u> הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענה הבאה:

קיימת מכפלה פנימית $\langle , \rangle$ של ווקטורים ב- $\mathbb{R}^2$ כך שלכל ווקטור $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ הנורמה ניתנת ע"י הנוסחה

$$\|u\|^2 = |x_1| + |x_2|,$$

כאשר $|x|$ מסמן את הערך מוחלט של x.

פתרונות

שאלה 1

א) פולינום האופייני:

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &=(x-1)\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x-2 & -2 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &=(x-1)x\begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &=(x-1)x\left((x-2)(x-1)-2\right) \\ &=(x-1)x\left(x^2-3x\right) \\ &=x^2(x-1)(x-3)\ . \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 0$ מריבוי אלגברי 2.

$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 1.

פולינום האופייני:

$$p_A(x) = x^2(x-1)(x-3)$$

האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$x(x-1)(x-3)\ , \qquad x^2(x-1)(x-3)\ .$$

<u>נבדוק $x(x-1)(x-3)$.</u>

$$A\,(A-I)\,(A-3I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

לכן

$$m_A(x) = x^2(x-1)(x-3)\ .$$

לפיכך הצורת ז'ורדן היא

$$J=\begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_1(1) & \\ & & J_1(3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&3\end{pmatrix}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=0$:</u>

$$(A-0\cdot I)=\begin{pmatrix} 1&1&2&1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&2&2\\ 0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{2R_4-R_3}\begin{pmatrix} 1&1&2&1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&2&2\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-2R_2}\begin{pmatrix} 1&1&2&1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&2\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1&1&2&1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z,w)=(-y,y,0,0)=y(-1,1,0,0),\quad y\in\mathbb{R}$. לפיכך:

$$V_0=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

נסמן את הווקטור עצמי ב- $u_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$. נחשב את הווקטור עצמי המוכלל. נסמן $u_2=(x,y,z,w)$

ונפתור $(A-0\cdot I)u_2=u_1$

$$(A-0\cdot I) \quad = \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2R_4-R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $y \in \mathbb{R}$,$(x,y,z,w) = (-y+2, y, -1, 1)$. נציב $y=0$ ונקבל

$$u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

כל הערכים עצמיים שונים לכן המטריצה לכסינה.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=1$:</u>

$$(A-I) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_4]{R_2+R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to 3\cdot R_3-R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $x \in \mathbb{R}$,$(x,y,z,w) = (x,0,0,0) = (1,0,0,0)x$. לפיכך:

$$V_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

נסמן את הווקטור עצמי $u_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

כל הערכים עצמיים שונים לכן המטריצה לכסינה.

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 3$:

$$(A - 3 \cdot I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $w \in \mathbb{R} \quad (x, y, z, w) = (\frac{1}{2}y + z + \frac{1}{2}w, \frac{1}{3}z, 2w, w) = (17, 4, 12, 6)w$. לפיכך:

$$V_3 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix}17\\4\\12\\6\end{pmatrix} \right\} .$$

נסמן את הווקטור עצמי $u_4 = \begin{pmatrix}17\\4\\12\\6\end{pmatrix}$.

$$J = \begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_1(1) & \\ & & J_1(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 17 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ב) $\begin{pmatrix}51\\12\\36\\18\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}17\\4\\12\\6\end{pmatrix} = 3u_4$

$$A^7 \begin{pmatrix}51\\12\\36\\18\end{pmatrix} = A^7 \cdot 3u_4 = 3A^7 u_4 = 3 \cdot 3^7 u_4 = 3^8 u_4 = 6561 \cdot u_4 = \begin{pmatrix}111537\\26244\\78732\\39366\end{pmatrix}$$

שאלה 2

א) $A = \bar{A}$, כלומר A צמודה לעצמה לכן כל הערכים עצמיים של A יהיו ממשיים.

ב) $A \cdot \bar{A} = I$ כלומר A אוניטרית, לכן הערך מוחלט של כל ערך עצמי של A יהיה 1.

ג) A צמודה לעצמה לכן A נורמלית לכן A לכסינה אוניטרית.

שאלה 3

נוכיח כי a, b בת"ל. נרשום

(*1)
$$\alpha_1 a + \alpha_2 b = 0$$

כאשר α_1, α_2 סקלרים. נכפיל ב- A:

(*2)
$$A\alpha_1 a + A\alpha_2 b = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1\lambda_1 a + \alpha_2\lambda_2 b = 0 \ .$$

נכפיל (*1) ב- λ_1:

(*3)
$$\lambda_1\alpha_1 a + \lambda_1\alpha_2 b = 0$$

נקח את החיסור (*3)-(*2):

$$\lambda_1\alpha_2 b - \lambda_2\alpha_2 b = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_2 b = 0 \ .$$

b ווקטור עצמי $\Leftarrow$ $b \neq 0$.
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ (נתון) $\Leftarrow$ $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, לכן

$$\alpha_2 = 0 \ .$$

נציב זה ב- (*1) ונקבל

$$\alpha_1 a = 0 \ .$$

a ווקטור עצמי $\Leftarrow$ $a \neq 0$ לפיכך

$$\alpha_1 = 0 \ .$$

לכן (*1) מתקיים רק אם $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ לפיכך a, b בת"ל.

שאלה 4

יהיו

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ , \qquad \mathrm{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \ , \qquad u, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^2$$

$$\|u + \mathrm{v}\|^2 = \|u\|^2 + \|\mathrm{v}\|^2 + 2\langle u, \mathrm{v}\rangle \qquad \Rightarrow \qquad 2\langle u, \mathrm{v}\rangle = \|u + \mathrm{v}\|^2 - \|u\|^2 - \|\mathrm{v}\|^2 \ .$$

$$\langle u, \mathrm{v} \rangle = \frac{1}{2}\left(|x_1+y_1| + |x_2+y_2| - |x_1| - |x_2| - |y_1| - |y_2|\right)$$

נניח ש- $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
אז

$$\langle u, \mathrm{v} \rangle = \frac{1}{2}\left(|0| + |1| - |1| - |0| - |-1| - |1|\right) = -1 \ .$$

$$\langle -3u, \mathrm{v} \rangle = \frac{1}{2}\left(|-4| + |1| - |-3| - |0| - |-1| - |1|\right) = 0 \ .$$

$\langle -3u, \mathrm{v} \rangle \neq 3 = -3\langle u, \mathrm{v} \rangle$, כלומר $\langle , \rangle$ לא מקיים לינאריות. לכן $\langle , \rangle$ לא יכול להיות מכפלה פנימית.