

# חדו"א 1

## סמסטר א' תשפ"ד

### עבודה עצמית 2

#### שאלה 1 לכל אחת מהפונקציות הבאות

$$f(x) = 2 + \frac{x}{2} \quad \textbf{(7)}$$

$$f(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \quad \textbf{(4)}$$

$$f(x) = 3^{x+1} \quad \textbf{(1)}$$

$$f(x) = \max(x, x^2) \quad \textbf{(8)}$$

$$f(x) = \arctan(2x) \quad \textbf{(5)}$$

$$f(x) = \sqrt{2-x} \quad \textbf{(2)}$$

$$f(x) = \sqrt{\ln \cos x} \quad \textbf{(9)}$$

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \quad \textbf{(6)}$$

$$f(x) = \ln(-2x) \quad \textbf{(3)}$$

**(א)** מצאו את תחום ההגדרה

**(ב)** קבעו אם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

**(ג)** ציירו את סקיצת הגרף

**(ד)** קבעו האם הפונקציה חסומה, חסומה מלמעלה, מלמטה.

**(ה)** מצאו את סימני הפונקציה ( התחומים בהם הפונקציה חיובית ושלילית )

**(ו)** קבעו את תחומי עלייה וירידה

**(ז)** קבעו עבור אלו ערכי  $a$  למשוואה  $f(x) = a$  קיים פתרון יחיד

**(ח)** קבעו האם הפונקציה הפיכה, ואם כן מצא את הפונקציה ההפוכה  $f^{-1}(x)$  וציירו את הגרף של  $f^{-1}(x)$ .

#### שאלה 2 עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת תחום ההגדרה של הפונקציה ההפוכה.

$$f(x) = 2x + 3 \quad (-\infty < x < \infty) \quad \textbf{(א)}$$

$$f(x) = x^2 \quad (x \leq 0) \quad \textbf{(ב)}$$

$$f(x) = x^2 \quad (x \geq 0) \quad \textbf{(ג)}$$

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad (x \neq -1) \quad \textbf{(ד)}$$

$$(-1 \leq x \leq 0) \quad f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (\text{ה})$$

$$(0 \leq x \leq 1) \quad f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (\text{ו})$$

### שאלה 3

(א) הגדירו מהו מעגל היחידה והסבר מהן הזוויות  $60^\circ$  ו-  $\pi/8$  רדיאן.

(ב) הגדירו את הפונקציות  $\cos x$  ו-  $\sin x$ .

(ג) הגדירו את הפונקציות  $\arccos x$  ו-  $\arcsin x$ .

(ד) עבור אלו  $x$  מתקיים

$$\tan(\arctan x) = x \quad (1)$$

$$\sin(\arcsin x) = x \quad (2)$$

$$\arcsin(\sin x) = x \quad (3)$$

$$\arctan(\tan x) = x \quad (4)$$

**שאלה 4** נתון שפונקציות  $h(x), g(x), f(x)$  עולות מונוטונית בתחום  $(-\infty, \infty)$ , הוכיחו שאם לכל  $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ אז } g(g(x)) \leq f(f(x)) \leq h(h(x)) \text{ לכל } x \text{ ממשי.}$$

### שאלה 5

$$f(x) = \sqrt{9x+25} + 3 \text{ נתונה פונקציה}$$

(א) מצאו את תחום ההגדרה ואת התמונה של הפונקציה  $f(x)$ .

(ב) מצאו את הפונקציה ההפוכה ל-  $f(x)$ .

(ג) מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של הפונקציה ההפוכה.

(ד) שרטטו את סקיצות הגרפים של שתי הפונקציות (פונקציה  $f(x)$  והפונקציה ההפוכה).

(ה) שרטטו את הגרף של הפונקציה  $f(|x|)$ .

### שאלה 6

בכל אחד מהסעיפים הבאים מצאו את  $g(f(x))$ ,  $f(g(x))$ ,  $g(g(x))$ ,  $f(f(x))$ .

$$g(x) = 2^x, f(x) = x^2 \quad (\text{א})$$

$$g(x) = 2x+1, f(x) = x^2 \quad (\text{ב})$$

$$g(x) = x - \frac{1}{x}, f(x) = \sqrt{x} \quad (\text{ג})$$

$$g(x) = \frac{1}{x}, f(x) = \operatorname{sgn} x \quad (\text{ד})$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ -x^2 & x > 0 \end{cases}, f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases} \quad \text{ה}$$

**שאלה 7** מצאו את התחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות הבאות:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} \quad \text{א}$$

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{ב}$$

$$f(x) = \sqrt{3x - x^3} \quad \text{ג}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \text{ד}$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right) \quad \text{ה}$$

$$f(x) = \ln\sqrt{1-4x^2} \quad \text{ו}$$

## שאלה 8

בדקו את זוגיות הפונקציות הבאות:

$$f(x) = e^{x^2} \quad \text{א}$$

$$g(x) = e^{x^3} \quad \text{ב}$$

$$h(x) = e^x - \frac{1}{e^x} \quad \text{ג}$$

$$i(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \quad \text{ד}$$

$$j(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \quad \text{ה}$$

$$k(x) = \ln^2 x \quad \text{ו}$$

$$p(x) = \ln x^2 \quad \text{ז}$$

$$q(x) = \ln(x-3) + \ln(x+3) \quad \text{ח}$$

$$r(x) = \ln \frac{5-x}{5+x} \quad \text{ט}$$

**שאלה 9** נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{x}$ . שרטטו הפונקציות הבאות:

$$f(x) \quad \text{א}$$

$$f(x+2) \quad \text{ב)}$$

$$f(x+3)+1 \quad \text{ג)}$$

$$f(x-5)+8 \quad \text{ד)}$$

$$f(-x) \quad \text{ה)}$$

$$-f(x) \quad \text{ו)}$$

**שאלה 10** הוכיחו שאם  $f(x)$  אי זוגית אז  $f(0) = 0$ .

**שאלה 11 \***

**א)** הסבר מה זאת פונקציה מחזורית.

**ב)** מצא את המחזור המינימלי של הפונקציות להלן:

$$f(x) = \sin \frac{x+\pi}{2} \quad \text{(1)}$$

$$f(x) = \sin^2 x \quad \text{(2)}$$

$$f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} \quad \text{(3)}$$

$$f(x) = \tan(\pi x) \quad \text{(4)}$$

$$f(x) = 2^{\tan(x)} \quad \text{(5)}$$

$$f(x) = \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \quad \text{(6)}$$

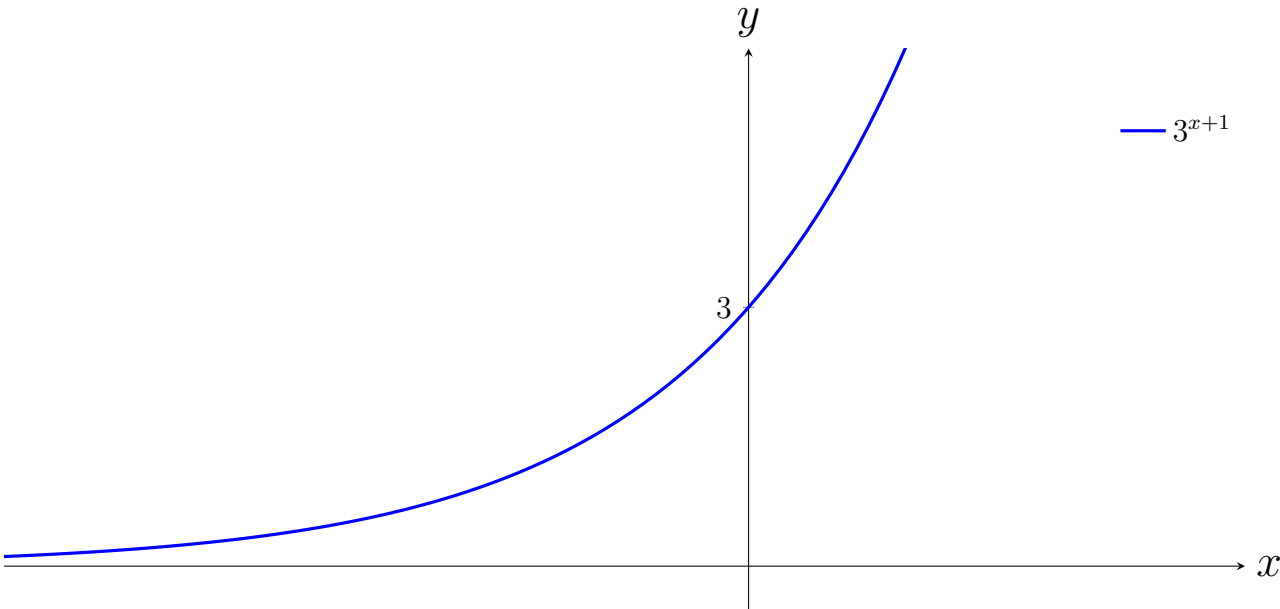
$$f(x) = \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{3} \quad \text{(7)}$$

פתרונות

שאלה 1

$f(x) = 3^{x+1}$  (1)

- (א)  $\text{dom}(f) = (-\infty, \infty)$   
(ב) כללית.  
(ג)



- (ד) חסומה מלמטה.  
(ה)

$x$	$x \in (-\infty, \infty)$
$f(x)$	$+$

(ו)

$x$	$x \in (-\infty, \infty)$
$f(x)$	$\nearrow$

(ז) הפונקציה חיובית וחד ערכית לכל  $x$  לפיכך קיים פתרון יחיד לכל  $a > 0$ .

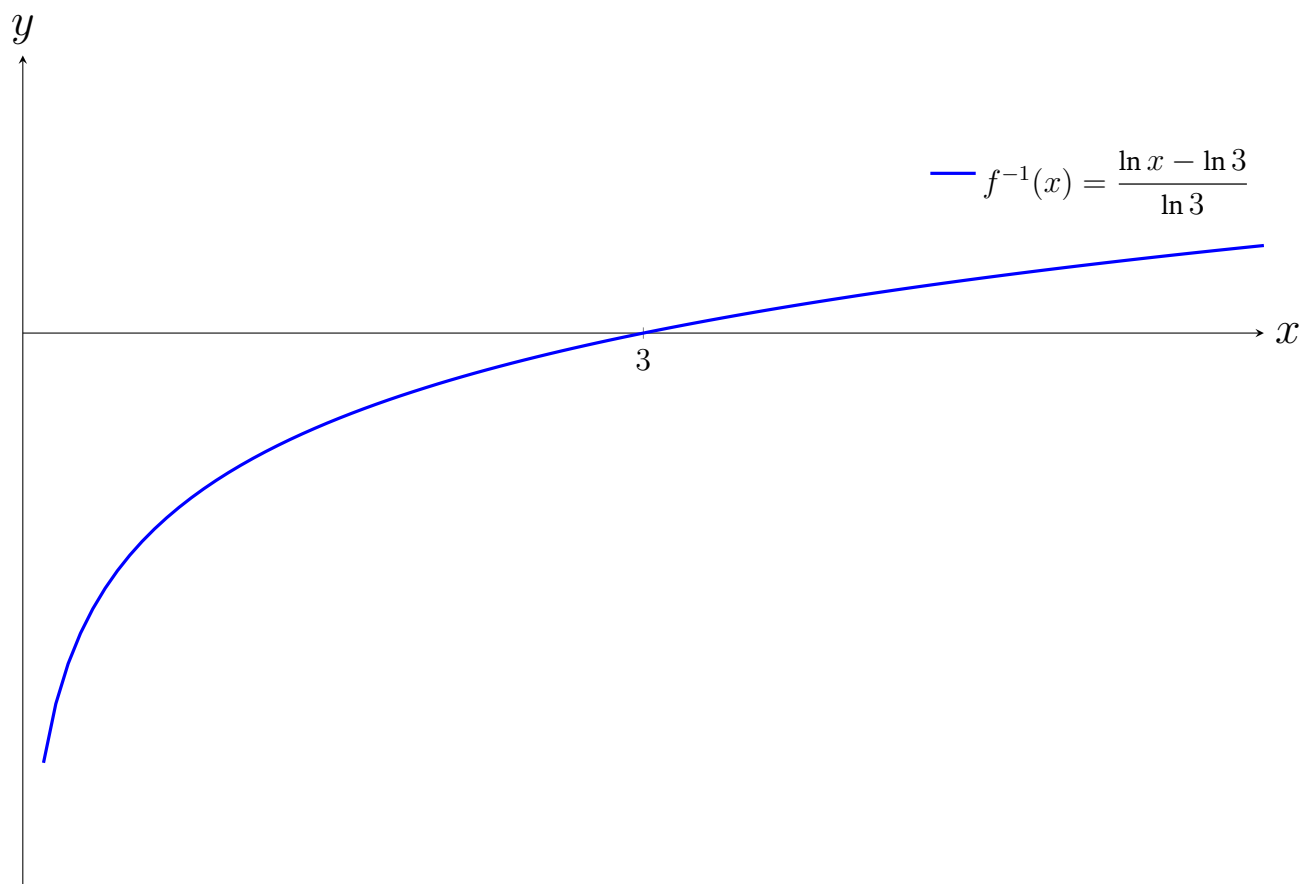
(ח)

הפונקציה חד חד ערכית בתחום הגדרתה ולכן הפיכה.

$$f^{-1}(x) = \frac{\ln(x) - \ln(3)}{\ln(3)}$$

נשים לב כי  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$  ו-  $\text{Im}(f) = (0, \infty)$

לכן  $\text{dom}(f^{-1}) = (0, \infty)$  ו-  $\text{Im}(f^{-1}) = \mathbb{R}$

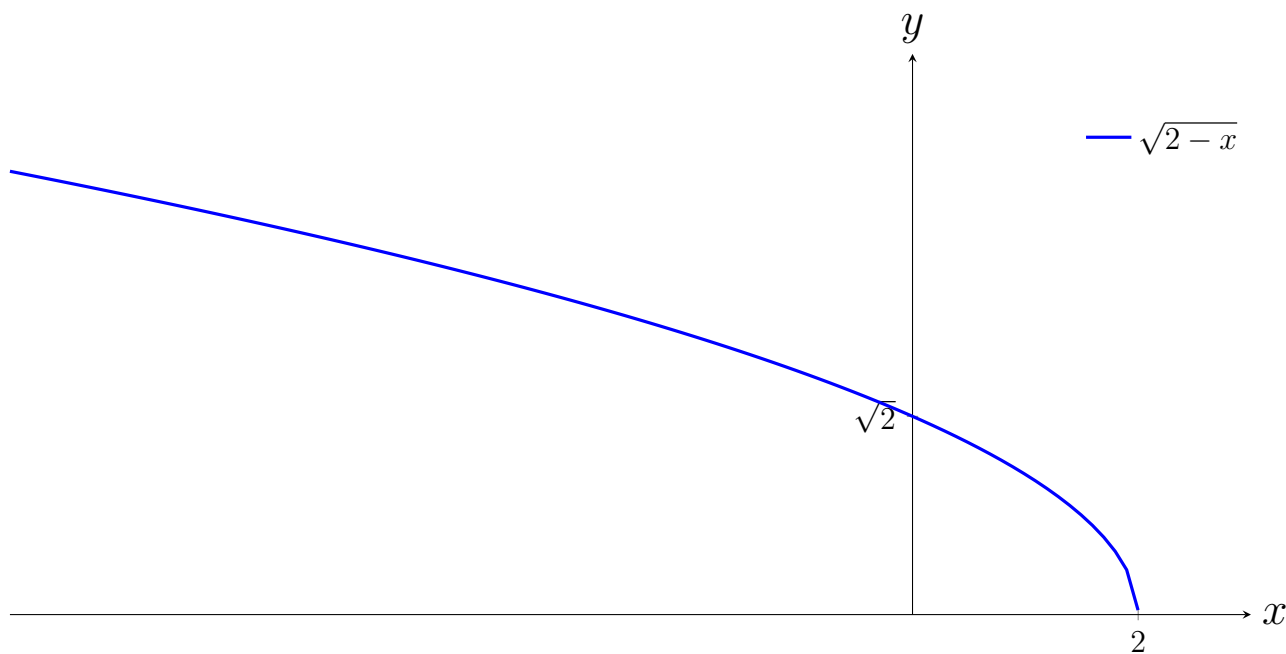


$$\underline{f(x) = \sqrt{2-x}} \quad (2)$$

$$\text{dom}(f) = (-\infty, 2) \quad (א)$$

(ב) כללית.

(ג)



ד) חסומה מלמטה:  $f(x) \geq 0$ .

ה)

$x$	$x \in (-\infty, 2)$
$f(x)$	$+$

ו)

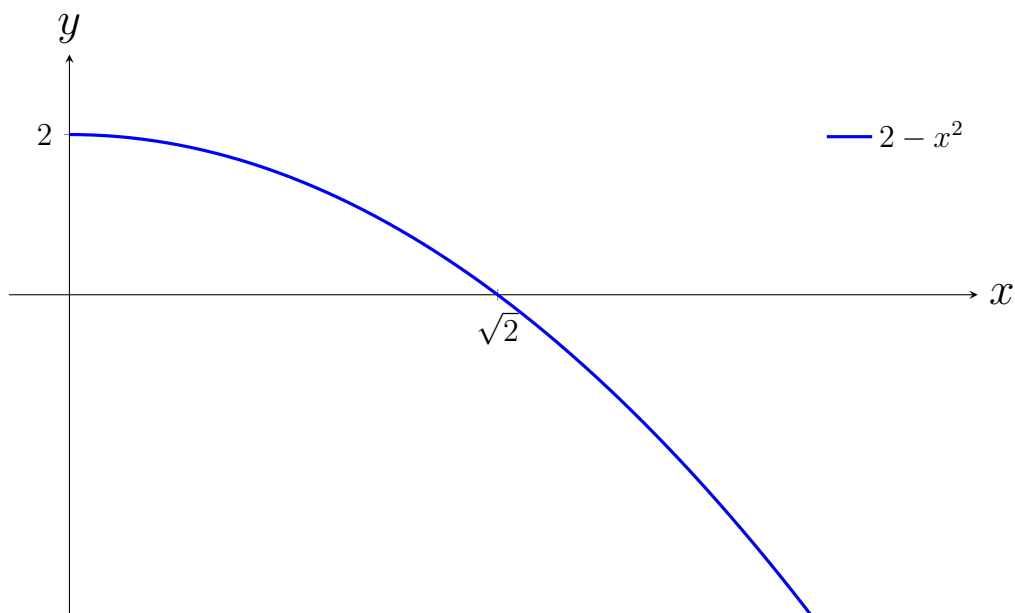
$x$	$x \in (-\infty, 2)$
$f(x)$	$\searrow$

ז) הפונקציה חח"ע וחיובית לכל  $x$  בתחום הגדרתה של הפונקציה, כלומר לכל  $x \leq 2$  לכן קיים פתרון יחיד לכל  $a \geq 0$ .

ח)

נשים לב כי  $\text{dom}(f) = (-\infty, 2]$  ו-  $\text{Im}(f) = [0, \infty)$ .  
לכן  $\text{dom}(f^{-1}) = [0, \infty)$  ו-  $\text{im}(f^{-1}) = (-\infty, 2]$ .

$$f^{-1}(x) = 2 - x^2$$

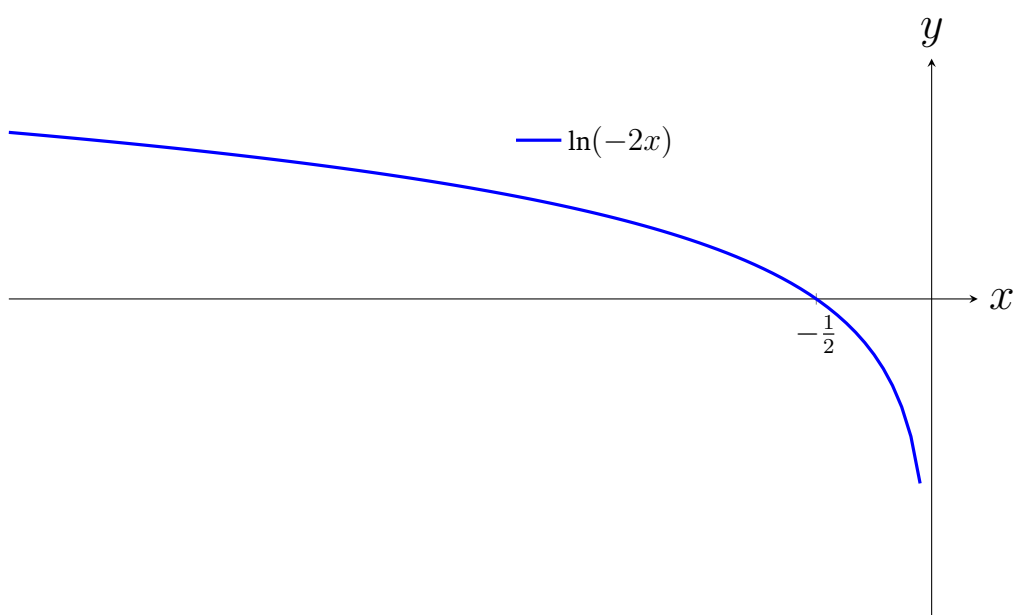


$f(x) = \ln(-2x)$  (3)

$\text{dom}(f) = (-\infty, 0)$  (א)

כללית (ב)

(ג)



(ד) נשים לב ש-  $\text{im}(f) = (-\infty, \infty)$  לפיכך הפונקציה לא חסומה.

(ה)



$x$	$x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$	$x \in (-\frac{1}{2}, 0)$
$f(x)$	$+$	$-$

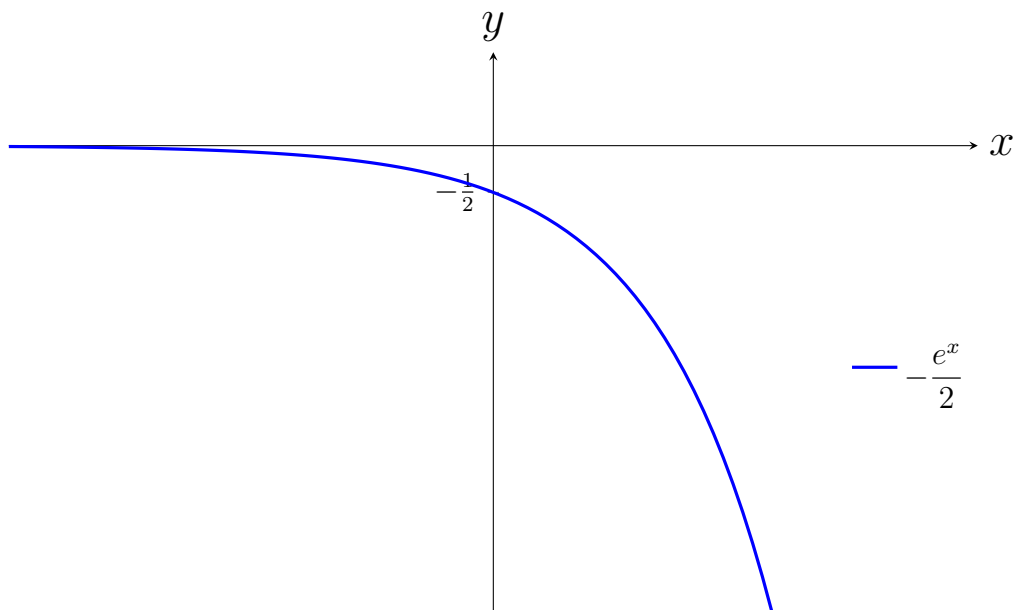
ו)

$x$	$x \in (-\infty, 0)$
$f(x)$	$\searrow$

- ז) הפונקציה חד חד ערכית לכל  $x$  בתחום הגדרתה, ולפיכך ל  $f(x) = a$  יש פתרון יחיד לכל  $a$  ממשי.  
 ח)  $f(x)$  חח"ע בכל נקודה בתחום הגדרתה לכן היא הפיכה.

$$f^{-1}(x) = -\frac{e^x}{2}$$

נשים לב כי  $\text{dom}(f) = (-\infty, 0)$  ו-  $\text{Im}(f) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$   
 לכן  $\text{dom}(f^{-1}) = \mathbb{R}$  ו-  $\text{im}(f^{-1}) = (-\infty, 0)$

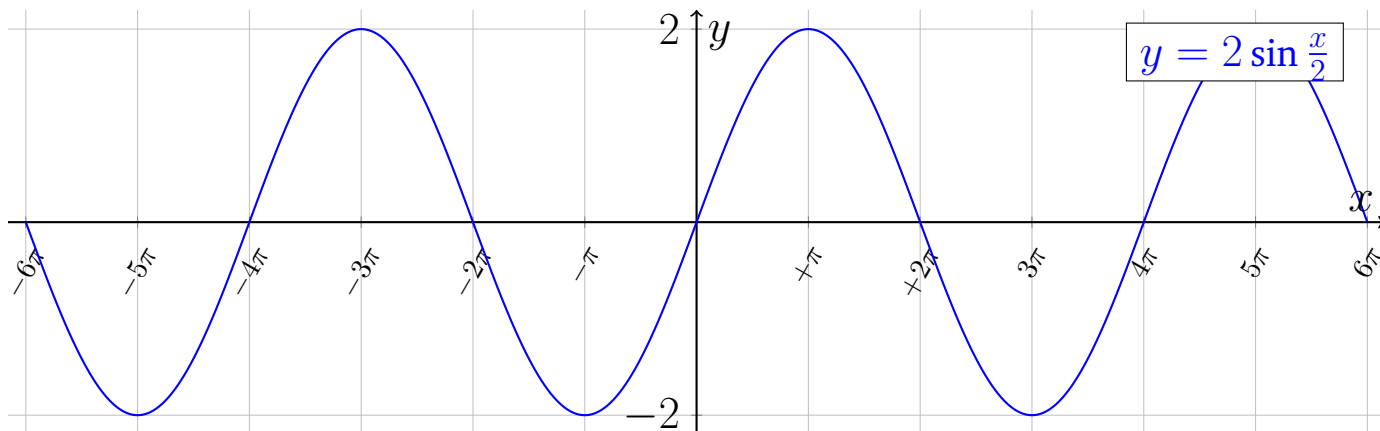


$$\underline{f(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad (4)$$

$\text{dom}(f) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$  א)

ב) אי-זוגית.

ג)



ד) הפונקציה חסומה. הרי  $\text{im}(f) = [-2, 2]$ . כלומר  $-2 \leq f(x) \leq 2$ .  
ה)

$x$	$x \in (4\pi n, 4\pi n + 2\pi)$	$x \in (-2\pi + 4\pi n, 4\pi n)$
$f(x)$	+	-

$$.n \in \mathbb{Z}$$

ו)

$x$	$x \in (4\pi n - \pi, 4\pi n + \pi)$	$x \in (4\pi n + \pi, 4\pi n + 3\pi)$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

$$.n \in \mathbb{Z}$$

ז) נשים לב שהפונקציה לא חח"ע בתחום הגדרתה לכן לא קיים ערך של  $a$  כך של-  $f(x) = a$  יש פתרון יחיד.

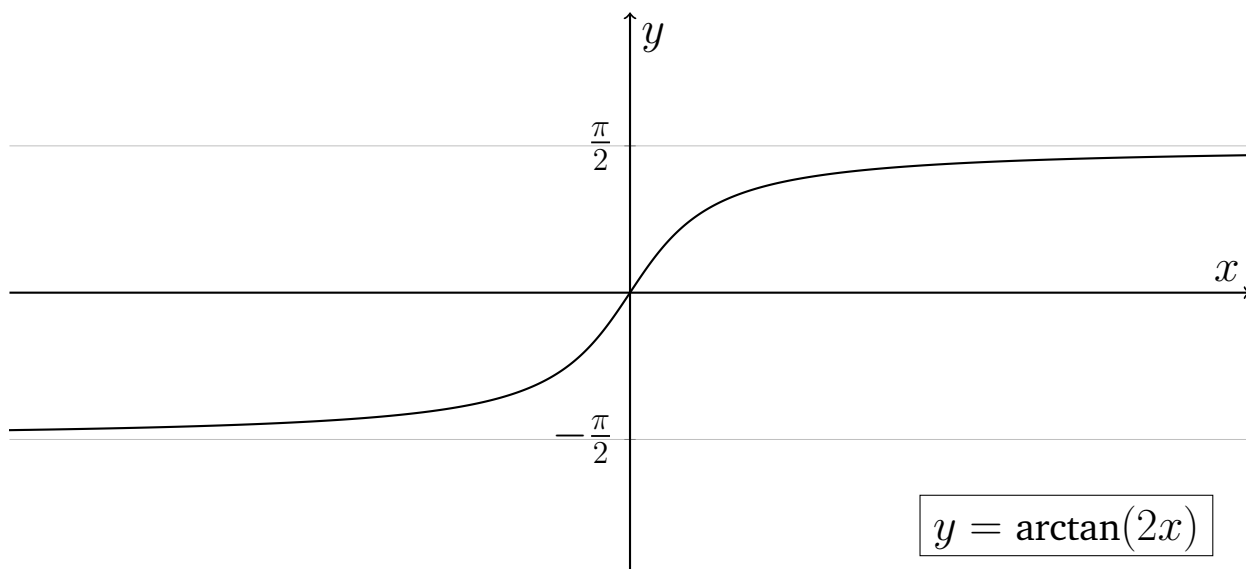
ח) הפונקציה לא חח"ע, לכן היא לא הפיכה.

$$\underline{f(x) = \arctan(2x)} \quad (5)$$

$$\text{dom}(f) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R} \quad (א)$$

(ב) אי-זוגית

(ג)



ד) נשים לב כי  $\text{im}(f) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  אז הפונקציה חסומה:

$$-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2} .$$

ה)

$x$	$x \in (-\infty, 0)$	$x \in (0, \infty)$
$f(x)$	-	+

ו)

$x$	$x \in (-\infty, 0)$	$x \in (0, \infty)$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

ז) בכל נקודה בתחום הגדרתה של הפונקציה היא חד חד ערכית ולכן קיים פתרון יחיד ל-  $f(x) = a$  כאשר

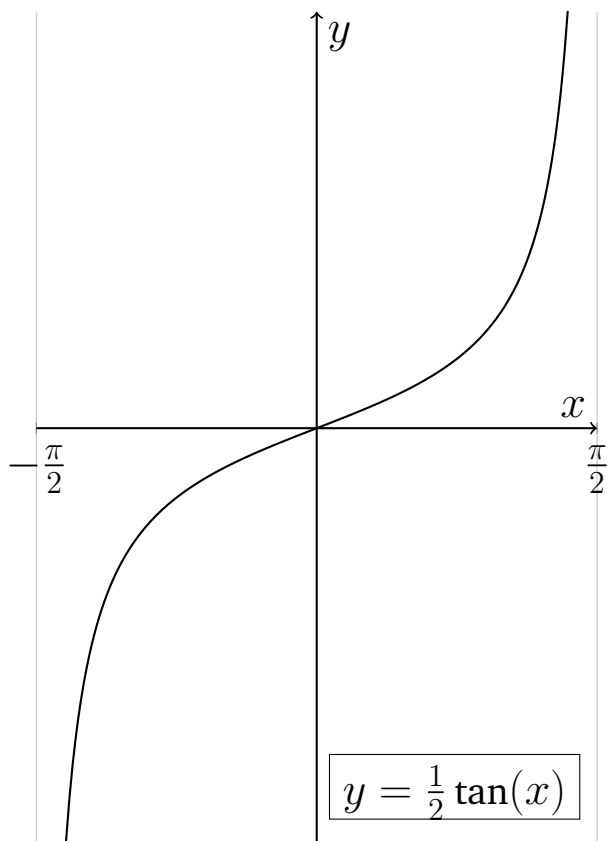
$$a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

ח)  $f(x)$  חח"ע בכל נקודה בתחום הגדרתה לכן היא הפיכה.

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \tan(x) .$$

נשים לב כי  $\text{dom}(f) = (-\infty, \infty)$  ו-  $\text{im}(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

לכן  $\text{dom}(f^{-1}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  ו-  $\text{im}(f^{-1}) = (-\infty, \infty)$

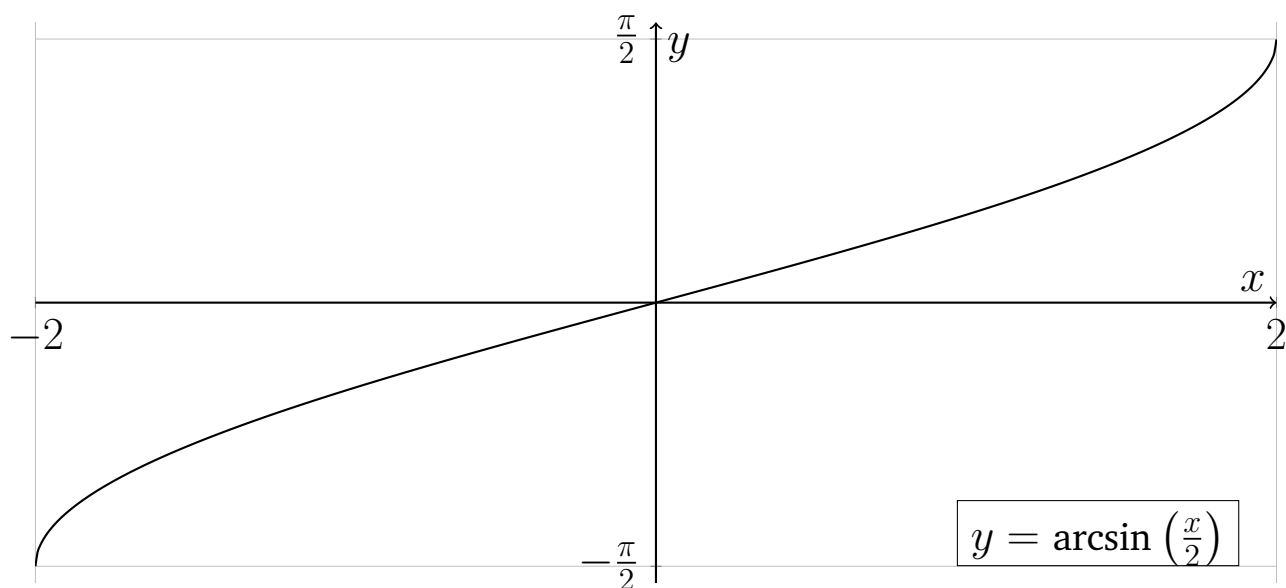


$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$  (6)

$\text{dom}(f) = [-2, 2]$  (א)

(ב)  $f(x)$  איז-גלית.

(ג)



ד) התמונה של  $f$  היא  $\text{Im}(f) = [-\pi/2, \pi/2]$  ולכן  $f(x)$  חסומה:

$$-\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}.$$

ה)

$x$	$x \in [-2, 0)$	$x \in (0, 2]$
$f(x)$	$-$	$+$

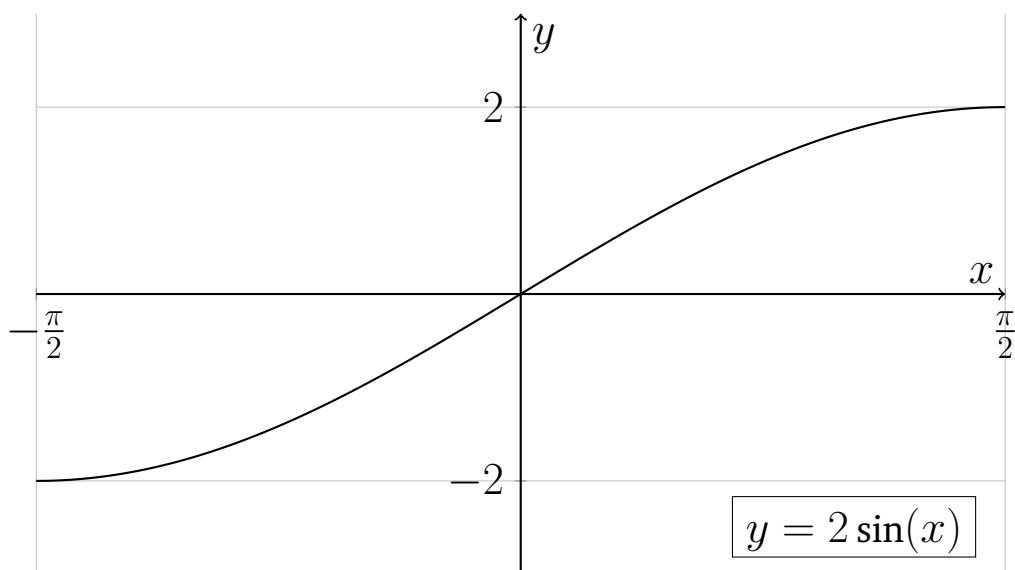
ו)

$x$	$x \in [-2, 0)$	$x \in (0, 2]$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

ז) פונקציה חח"ע לכל  $x$  בתחום הגדרתה, לכן למשוואה  $f(x) = a$  יש פתרון יחיד לכל  $a \in [-\pi/2, \pi/2]$ .

ח)  $f^{-1}(x) = 2 \sin(x)$

$$\text{dom}(f^{-1}) = [-\pi/2, \pi/2]$$

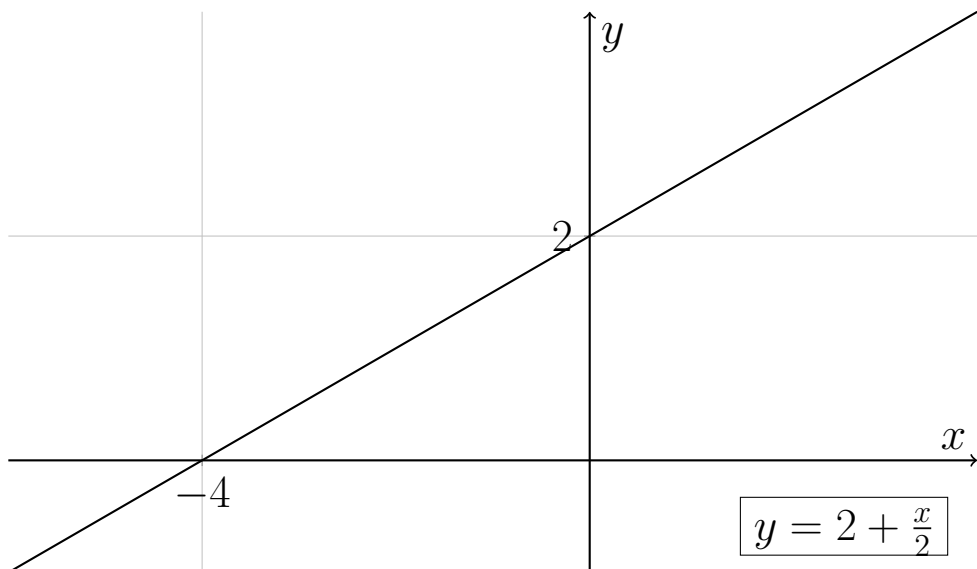


ז)  $f(x) = 2 + \frac{x}{2}$

א)  $\text{dom}(f) = (-\infty, \infty)$

ב) פונקציה כללית.

ג)



ד) אינה חסומה. הרי  $\text{Im}(f) = (-\infty, \infty)$ .

ה)

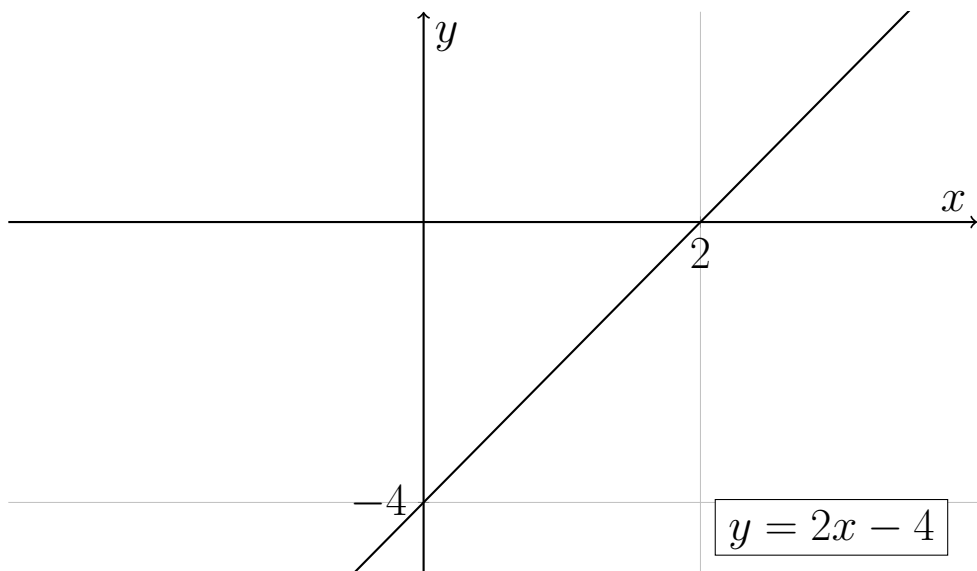
$x$	$x \in (-\infty, -4)$	$x \in (-4, \infty)$
$f(x)$	-	+

ו)

$x$	$x \in (-\infty, -4)$	$x \in (-4, \infty)$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

ז) הפונקציה חח"ע בכל נקודה בתחום הגדרתה לפיכך יש פתרון יחיד למשוואה  $f(x) = a$  לכל  $a \in (-\infty, \infty)$

ח)  $f^{-1}(x) = 2(-2 + x)$

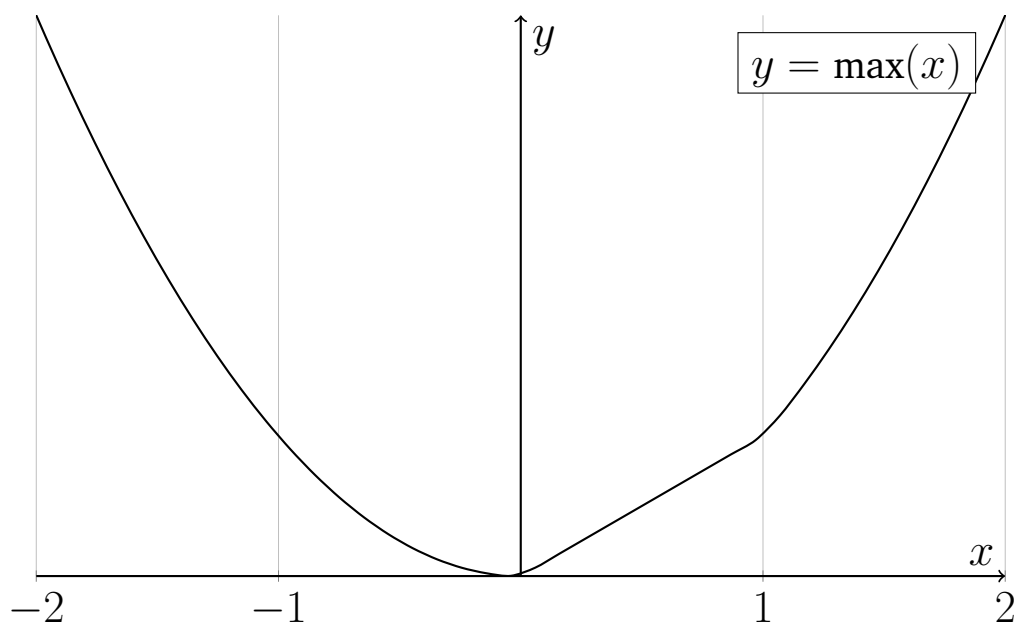


$$\underline{f(x) = \max(x, x^2)} \quad (8)$$

$$x \in (-\infty, \infty) \quad (\text{א})$$

(ב) לא זוגית ולא אי-זוגית

(ג)



(ד) התמונה של  $f$  היא  $\text{Im}(f) = [0, \infty)$  לכן הפונקציה חסומה מלמטה:

$$f(x) \geq 0.$$

(ה)

$x$	$x \in (-\infty, 0)$	$x = 0$	$x \in (0, \infty)$
$f(x)$	$+$	$0$	$+$

(ו)

$x$	$x \in (-\infty, 0)$	$x \in (0, \infty)$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

(ז) קיים פתרון יחיד רק עבור  $a = 0$ .

(ח)  $f(x)$  לא חח"ע, לכן היא לא הפיכה.

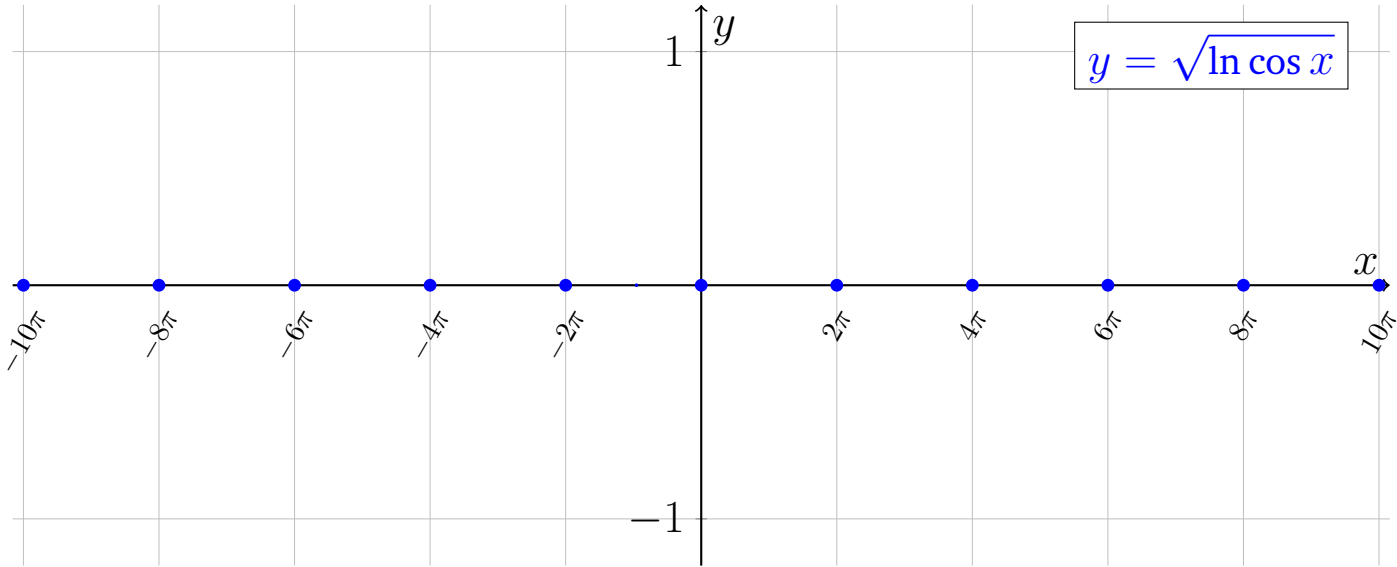
$f(x) = \sqrt{\ln \cos x}$  (9)

(א)

$\text{dom}(f) = \{\dots - 4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \dots\} = \{2n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$  .

(ב) פונקציה זוגית.

(ג)



(ד) התמונה של הפונקציה הינה  $\text{Im}(f) = 0$ , לכן היא חסומה:

$0 \leq f(x) \leq 0$  .

(ה)

$x$	$x \in (2n\pi)$
$f(x)$	$0$



(ו)

$x$	$x \in (2n\pi)$
$f'(x)$	0
$f(x)$	0

(ז) הפונקציה לא חח"ע בתחום הגדרתה לכם לא קיימים ערכי  $a$  כך שלמשוואה  $f(x) = a$  יש פתרון יחיד.

(ח) הפונקציה אינה הפיכה בגלל שהיא לא חח"ע.

## שאלה 2

(א)

$$f(x) = 2x + 3, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$\text{dom}(f) = (-\infty, \infty) \text{ ו- } \text{Im}(f) = (-\infty, \infty) \text{ לכן}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}, \quad \text{dom}(f^{-1}) = (-\infty, \infty)$$

(ב)

$$f(x) = x^2, \quad x \leq 0.$$

$$\text{dom}(f) = (-\infty, 0] \text{ ו- } \text{Im}(f) = [0, \infty) \text{ לפיכך } \text{dom}(f^{-1}) = [0, \infty) \text{ ו- } \text{Im}(f^{-1}) = (-\infty, 0] \text{ לכן}$$

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x}, \quad \text{dom}(f^{-1}) = [0, \infty)$$

(ג)

$$f(x) = x^2, \quad x \geq 0.$$

$$\text{dom}(f) = [0, \infty) \text{ ו- } \text{Im}(f) = [0, \infty) \text{ לפיכך } \text{dom}(f^{-1}) = [0, \infty) \text{ ו- } \text{Im}(f^{-1}) = [0, \infty)$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}, \quad \text{dom}(f^{-1}) = (0, \infty)$$

(ד)

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad x \neq -1$$

$$\text{dom}(f) = \{x \neq -1\} \text{ לפיכך } \text{Im}(f^{-1}) = \{y \neq -1\}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad \text{dom}(f^{-1}) = \{x \neq 1\}$$

(ה)

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leq x \leq 0$$

$$\text{Im}(f^{-1}) = [-1, 0] \text{ ו- } \text{dom}(f^{-1}) = [0, 1] \text{ לפיכך } \text{Im}(f) = [0, 1] \text{ ו- } \text{dom}(f) = [-1, 0]$$

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{1-x^2}, \quad \text{dom}(f^{-1}) = [0, 1]$$

(ו)

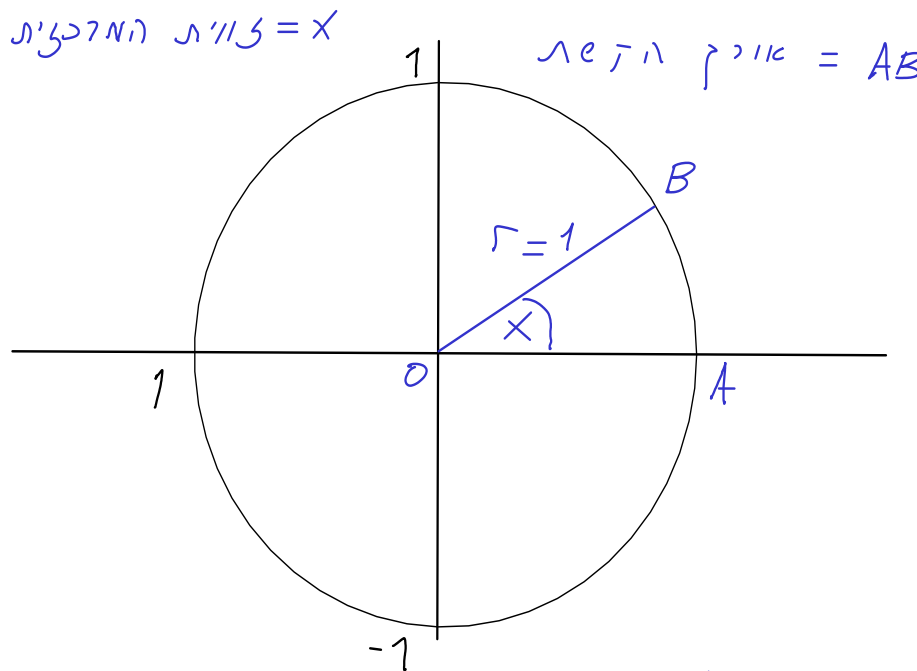
$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\text{Im}(f^{-1}) = [0, 1] \text{ ו- } \text{dom}(f^{-1}) = [0, 1] \text{ לפיכך } \text{Im}(f) = [0, 1] \text{ ו- } \text{dom}(f) = [0, 1]$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad \text{dom}(f^{-1}) = (0, 1)$$

### שאלה 3

(א) מעגל היחידה היא מעגל מרדיוס 1, כך שאורך קשת כלשהו שווה לזווית המרכזית ברדיאנים (ראו איור)



(ב) במשולש ישר זוויתי,

$$\sin x = \frac{\text{אורך של הצלע מול}}{\text{אורך של היתר}}, \quad \cos x = \frac{\text{אורך של הצלע ליד}}{\text{אורך של היתר}},$$

כאשר המול הוא הצלע המול הזווית  $x$ , והיד הוא הצלע ליד הזווית  $x$ .

(ג) אם נגדיר את הפונקציה חד-חד-ערכית  $\sin x$  בעלת התחום ההגדרה  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  אז  $\arcsin(x)$  היא הפונקציה ההפוכה של  $\sin(x)$  בעלת התחום ההגדרה  $x \in [-1, 1]$

אם נגדיר את הפונקציה חד-חד-ערכית  $\cos x$  בעלת התחום ההגדרה  $x \in [0, \pi]$ , אז  $\arccos(x)$  היא הפונקציה ההפוכה של  $\cos(x)$  בעלת התחום ההגדרה  $x \in [-1, 1]$ .

$$\tan(\arctan x) = x \quad (1) \quad (ד)$$

$$x \in \text{Dom}(\arctan) \cap \text{Im}(\tan) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$\sin(\arcsin x) = x \quad (2)$$

התחום ההגדרה של  $\arcsin$  הוא  $-1 \leq x \leq 1$ . לכן השוויון מתקיים עבור  $-1 \leq x \leq 1$ .

$$\arcsin(\sin x) = x \quad (3)$$

$$x \in \text{Dom}(\sin) \cap \text{Im}(\arcsin) = \mathbb{R} \cap \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\arctan(\tan x) = x \quad (4)$$

$$x \in \text{Dom}(\tan) \cap \text{Im}(\arctan) = \left\{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cap \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

**שאלה 4** נתון שפונקציות  $h(x), g(x), f(x)$  עולות מונוטונית בתחום  $(-\infty, \infty)$ , הוכיחו שאם לכל  $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ אז } g(g(x)) \leq f(f(x)) \leq h(h(x)) \text{ לכל } x \text{ ממשי.}$$

הוכחה:

נתון כי  $g(x) \leq f(x)$ .

$g$  עולה מונוטונית. ז"א אם  $a \leq b$  אז  $g(a) \leq g(b)$ . נציב  $a = g(x)$  ו-  $b = f(x)$  ונקבל

$$g(g(x)) \leq g(f(x)) \quad (*1)$$

עכשיו, מכיוון ש-  $g(y) \leq f(y)$  לכל  $y \in \mathbb{R}$  אז עבור  $y = f(x)$  נקבל  $g(f(x)) \leq f(f(x))$ . נציב זה ב-  $(*1)$  ונקבל

$$g(g(x)) \leq g(f(x)) \leq f(f(x)) \Rightarrow g(g(x)) \leq f(f(x)). \quad (*2)$$

נשאר להוכיח ש-  $f(f(x)) \leq h(h(x))$ .

נתון כי  $f(x) \leq h(x)$ .

$f$  עולה מונוטונית. ז"א אם  $a \leq b$  אז  $f(a) \leq f(b)$ . נציב  $a = f(x)$  ו-  $b = h(x)$  ונקבל

$$f(f(x)) \leq f(h(x)) \quad (*3)$$

עכשיו, מכיוון ש-  $f(y) \leq h(y)$  לכל  $y \in \mathbb{R}$  אז עבור  $y = h(x)$  נקבל  $f(h(x)) \leq h(h(x))$ . נציב זה ב-  $(*3)$  ונקבל

$$f(f(x)) \leq f(h(x)) \leq h(h(x)) \Rightarrow f(f(x)) \leq h(h(x)). \quad (*4)$$

נובע מ-  $(*2)$  ו-  $(*4)$  כי

$$g(g(x)) \leq f(f(x)) \leq h(h(x))$$

## שאלה 5

(א) תחום ההגדרה:

$$\text{dom}f(f) = \left\{ x \geq -\frac{25}{9} \right\}$$

תמונה:

$$\text{Im}(f) = \{y \geq 3\}$$

(ב)

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{9x + 25} + 3 \\ \Rightarrow y - 3 &= \sqrt{9x + 25} \\ \Rightarrow (y - 3)^2 &= 9x + 25 \\ \Rightarrow x &= \frac{(y - 3)^2 - 25}{9} \\ &= \frac{y^2 - 6y - 16}{9} \\ &= \frac{(y - 8)(y + 2)}{9} \end{aligned}$$

לפיכך

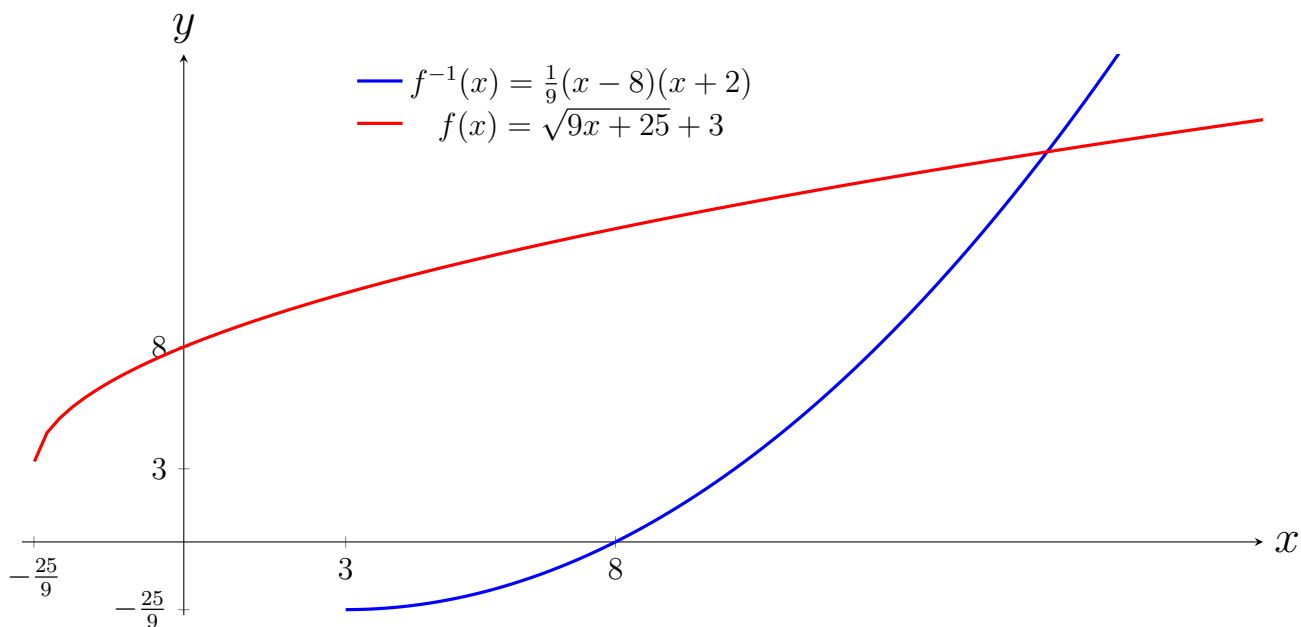
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{9} (x^2 - 6x - 16) = \frac{1}{9} (x - 8)(x + 2) .$$

(ג) תחום הגדרה:

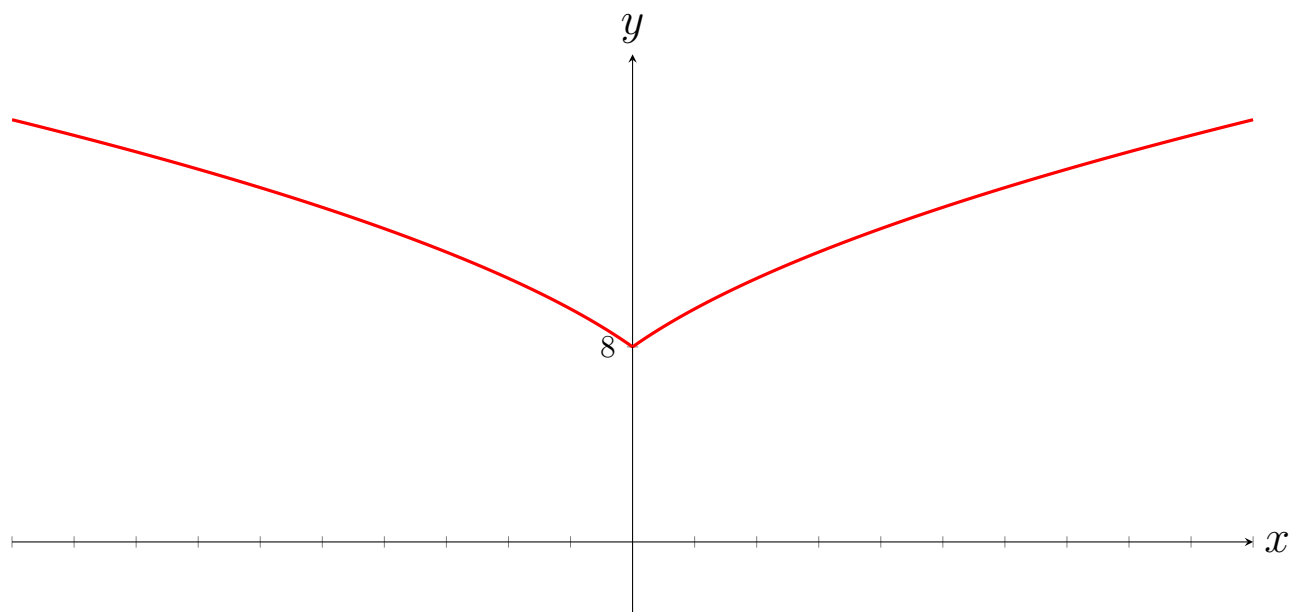
$$\text{dom}(f^{-1}) = \{x \geq 3\}$$

תמונה

$$\text{Im}(f^{-1}) = \left\{ y \geq -\frac{25}{9} \right\}$$



$f(|x|)$  (א)



שאלה 6

$$\underline{f(x) = x^2, g(x) = 2^x} \quad (\aleph)$$

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= 2^{x^2}, \\ f(g(x)) &= 4^x, \\ g(g(x)) &= 2^{2^x}, \\ f(f(x)) &= (x^2)^2 = x^4. \end{aligned}$$

$$\underline{f(x) = x^2, g(x) = 2x + 1} \quad (\beth)$$

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= 2x^2 + 1, \\ f(g(x)) &= (2x + 1)^2, \\ g(g(x)) &= 2 \cdot (2x + 1) + 1 = 4x + 3, \\ f(f(x)) &= (x^2)^2 = x^4. \end{aligned}$$

$$\underline{f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x - \frac{1}{x}} \quad (\aleph)$$

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \frac{x-1}{\sqrt{x}}, \\ f(g(x)) &= \sqrt{x - \frac{1}{x}}, \\ g(g(x)) &= x - \frac{1}{x} + \frac{x}{1-x^2}, \\ f(f(x)) &= \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}. \end{aligned}$$

$$\underline{.g(x) = \frac{1}{x}, f(x) = \operatorname{sgn} x} \quad (\daleth)$$

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \frac{1}{\operatorname{sgn} x} = \operatorname{sgn} x, \\ f(g(x)) &= \operatorname{sgn} \left( \frac{1}{x} \right) = \operatorname{sgn} x, \\ g(g(x)) &= \frac{1}{\left( \frac{1}{x} \right)} = x, \\ f(f(x)) &= \operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(x)) = \operatorname{sgn}(x). \end{aligned}$$

## שאלה 7

(\aleph)

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2}$$

$$\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}$$

(ב)

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{dom}(f) = [-1, 1]$$

(ג)

$$f(x) = \sqrt{3x-x^3} = \sqrt{3x(1-x^2)} = \sqrt{3x(1-x)(1+x)}$$

$$\text{dom}(f) = (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

(ד)

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\text{dom}(f) = [-1, 1)$$

(ה)

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$$

$$\text{dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$$

(ו)

$$f(x) = \ln \sqrt{1-4x^2} = \ln \sqrt{(1-2x)(1+2x)}$$

$$\text{dom}(f) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

## שאלה 8

(א)

$$f(x) = e^{x^2}$$

$$f(-x) = e^{(-x)^2} = e^{x^2} = f(x)$$

הפונקציה זוגית

(ב)

$$g(x) = e^{x^3}$$

הפונקציה כללית.

(ג)

$$h(x) = e^x - \frac{1}{e^x}$$

$$h(-x) = e^{-x} - e^x = -(e^x - e^{-x}) = -f(x) .$$

הפונקציה אי-זוגית

(ד)

$$i(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{1}{e^{-x}+e^x} .$$

$$i(-x) = \frac{1}{e^{-x}+e^x} = \frac{1}{e^x+e^{-x}} = i(x) .$$

הפונקציה זוגית

(ה)

$$j(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

$$j(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = -\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = j(x)$$

הפונקציה אי-זוגית

(ו)

$$k(x) = \ln^2 x$$

הפונקציה כללית.

(ז)

$$p(x) = \ln x^2$$

$$p(-x) = \ln(-x)^2 = \ln x^2 = p(x) .$$

הפונקציה זוגית

(ח)

$$q(x) = \ln(x - 3) + \ln(x + 3)$$

הפונקציה כללית.

(ט)

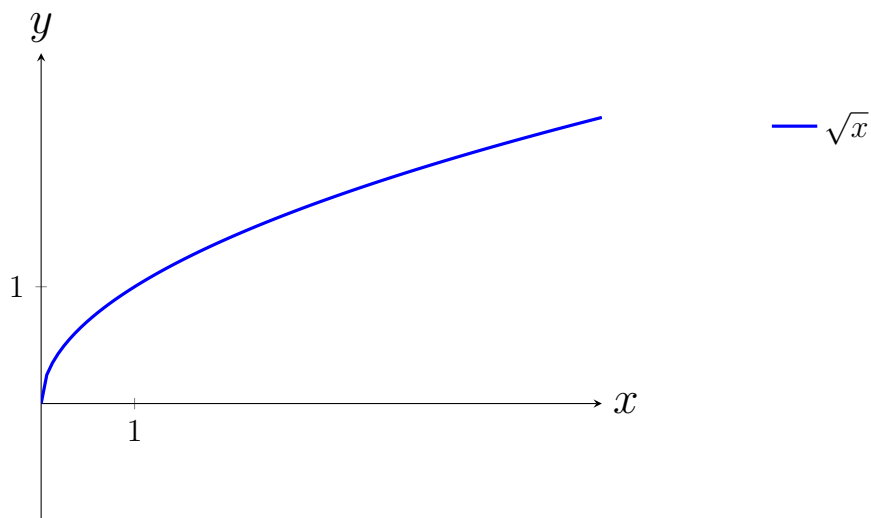
$$r(x) = \ln \frac{5 - x}{5 + x}$$

$$r(-x) = \ln \frac{5 + x}{5 - x} = -\ln \frac{5 + x}{5 - x} = -r(x) .$$

הפונקציה אי-זוגית

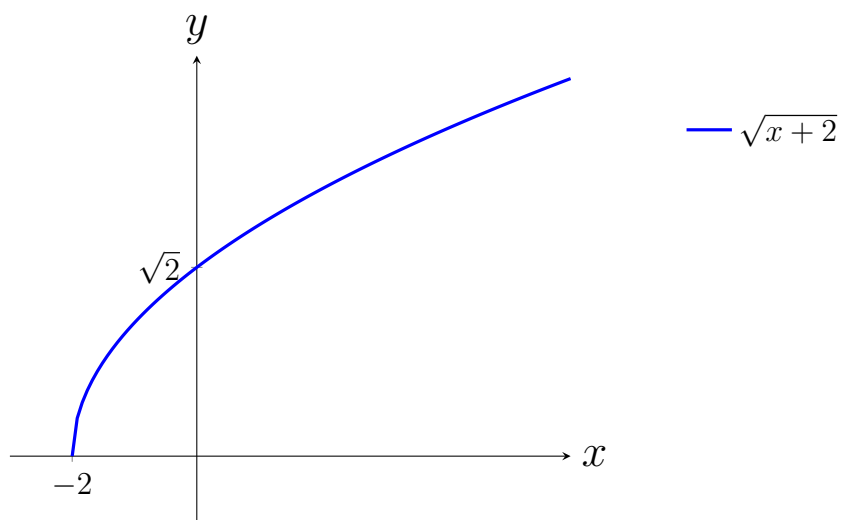
## שאלה 9

(א)

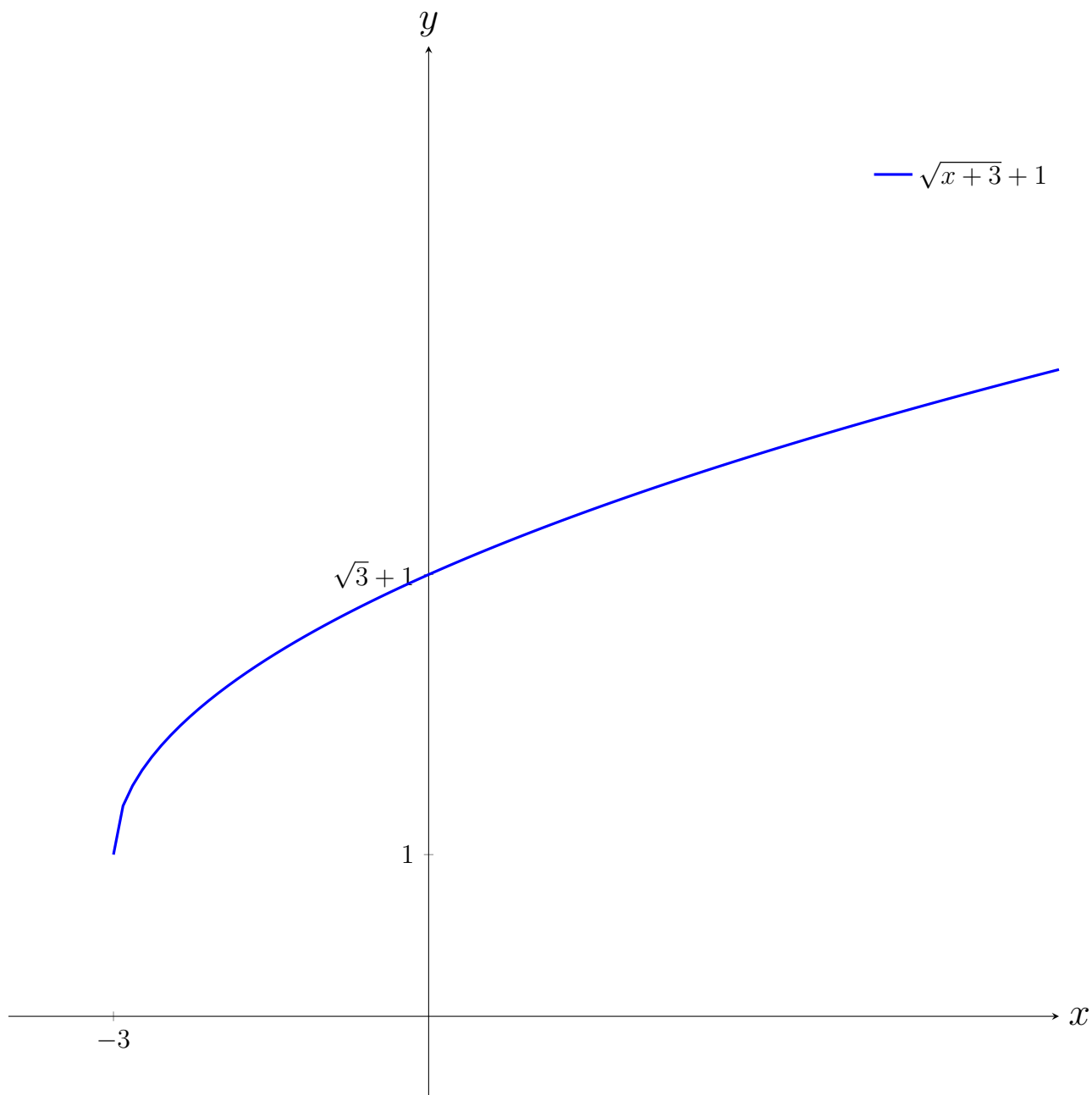


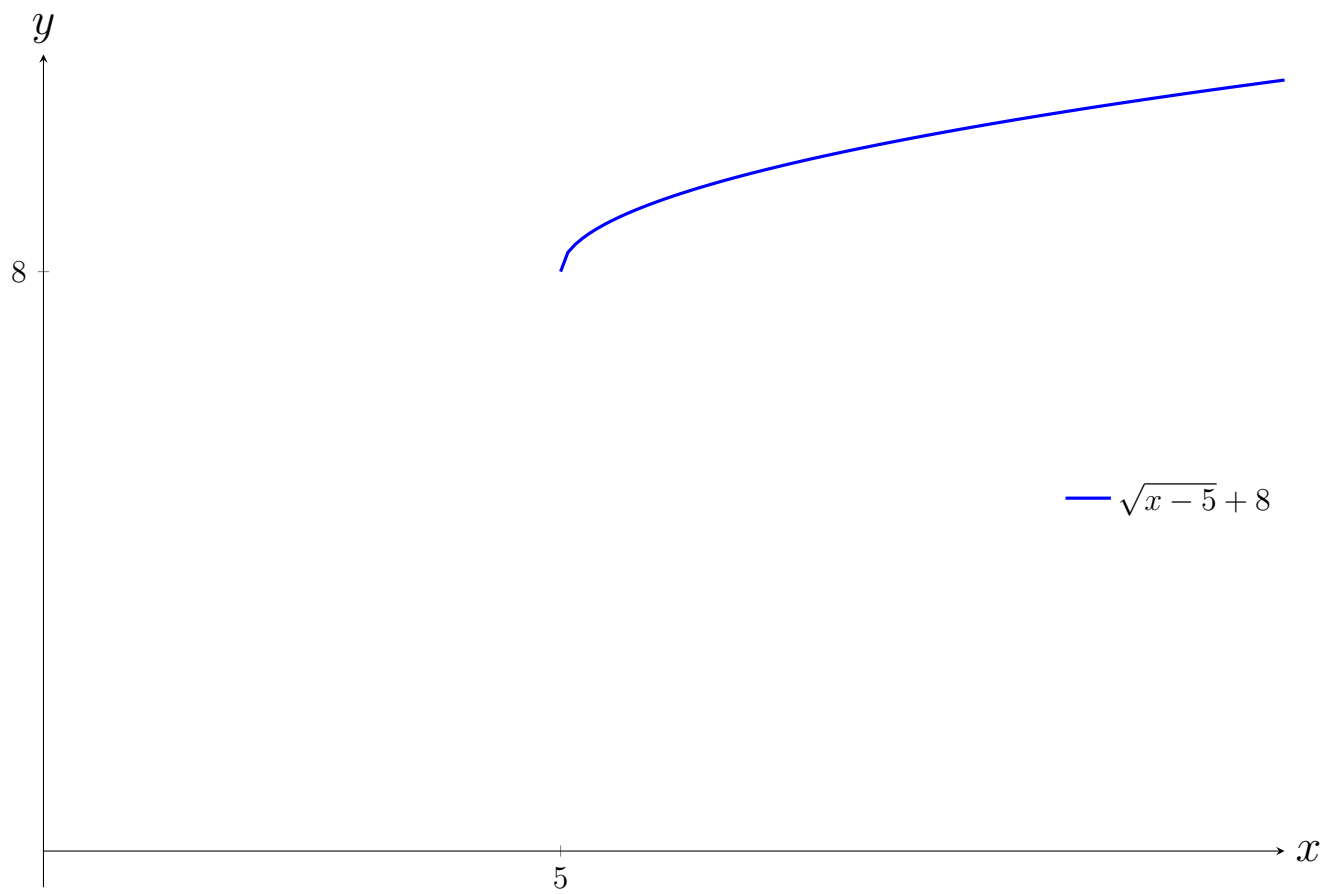


(ב)

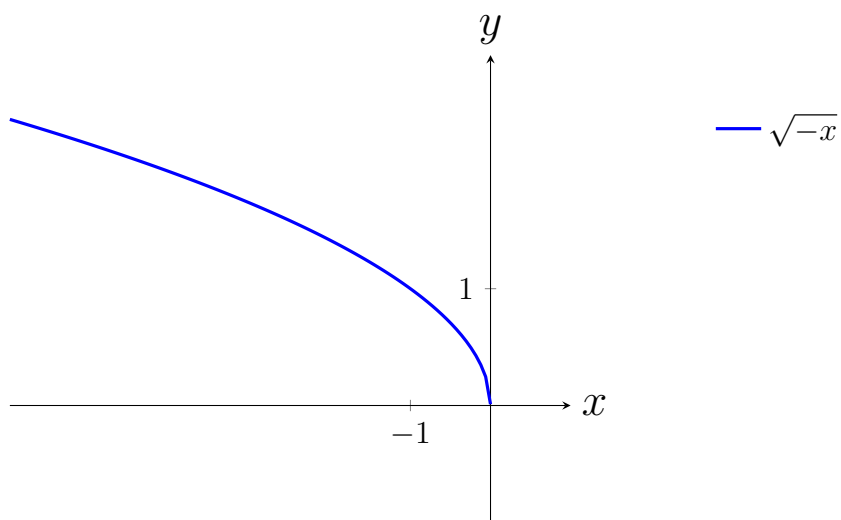


(ג)

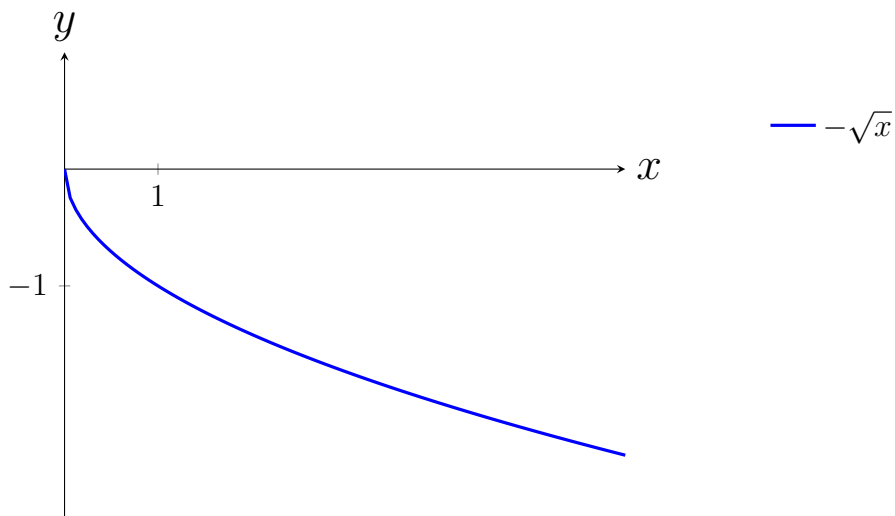




67



68



### שאלה 10

$f$  אי זוגית, ז"א  $f(-x) = -f(x)$  לכל  $x$ .  
לכן

$$f(0) = -f(0) . \quad (\#)$$

נניח ש-  $f(0) > 0$ . אז לפי  $(\#)$  נקבל כי  $f(0) < 0$ , בסתירה לכך ש-  $f(0) > 0$ .  
נניח ש-  $f(0) < 0$ . אז לפי  $(\#)$  נקבל כי  $f(0) > 0$ , בסתירה לכך ש-  $f(0) < 0$ .  
לפיכך  $f(0) \neq 0$  ו-  $f(0) \neq 0$ .  
לכן  $f(0) = 0$ .

### \* שאלה 11

**(א)** פונקציה מחזורית

$f(x)$  תקרא מחזורית אם קיים  $T$  כך ש-

$$f(x + T) = f(x) \quad (*)$$

מכאן  $f(x + n \cdot T) = f(x)$  לכל  $n \in \mathbb{Z}$ . ה-  $T$  הקטן ביותר המקיים  $(*)$  נקרא המחזור של  $f$ .

$$\underline{f(x) = \sin \frac{x + \pi}{2}} \quad \textbf{(ב) (1)}$$

המחזור המינימלי  $4\pi =$

$$\underline{f(x) = \sin^2 x} \quad \textbf{(2)}$$

המחזור המינימלי  $\pi =$

$$\underline{f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}} \quad \textbf{(3)}$$

$\pi$  = המחזור המינימלי

$$\underline{f(x) = \tan(\pi x)} \quad \textbf{(4)}$$

1 = המחזור המינימלי

$$\underline{f(x) = 2^{\tan(x)}} \quad \textbf{(5)}$$

$\pi$  = המחזור המינימלי

$$\underline{f(x) = \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}} \quad \textbf{(6)}$$

$4\pi$  = המחזור המינימלי

$$\underline{f(x) = \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{3}} \quad \textbf{(7)}$$

$12\pi$  = המחזור המינימלי