שעור 8
תלות לינארית

8.1 הגדרה של תלות לינארית

הגדרה 8.1 תלות לינארית

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ונניח ש- $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\in V$. וקטורים של V.

- $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ נקראים תלוים לינארית אם קיימים סקלרים $k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{F}$ שלא כולם אפסים כך ש-

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+\ldots+k_n\mathrm{v}_\mathrm{n}=\bar{0}\ .$$

- $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ נקראים בלי תלוים לינארית אם

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+\ldots+k_n\mathrm{v}_\mathrm{n}=\bar{0}\ ,$$

מתקיים רק אם $k_1=k_2=\ldots=k_n=0$ כלומר המקדמים כולם אפסים.

דוגמה 8.1

$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ תלוים לינארית כי $3\mathrm{v}_1-\mathrm{v}_2=\bar{0}$.

דוגמה 8.2

$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1+i\\-2\end{pmatrix}$, $\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}1-i\\2i\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$ תלוים לינארית כי $i\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2=\bar{0}$.

דוגמה 8.3

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\ ,\ \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2=\bar{0}\qquad\Rightarrow\qquad\left.\begin{array}{ll}2k_1+6k_2&=0\\k_1+4k_2&=0\end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}2&6&0\\1&4&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\to R_2-2R_1}\left(\begin{array}{cc|c}2&6&0\\0&-2&0\end{array}\right)$$

$k_1=0$, $k_2=0$ לכן v_1, v_2 בלתי תלוים לינארית.

דוגמה 8.4

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\ ,\ \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}\ ,\ \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

תלוים לינארית כי

$$0 \cdot \mathrm{v}_1 + 0 \cdot \mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_3 = \bar{0} \ .$$

דוגמה 8.5

בדקו אם הווקטורים

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \qquad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \ , \qquad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

תלוים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם ששווה לווקטור האפס.

פתרון:

$$k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2 + k_3\mathrm{v}_3 = \bar{0}$$

קיבלנו מערכת משוואות הומוגנית:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 4R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$(k_1, k_2, k_3) = (2k_3, -k_3, k_3) \ , \qquad k_3 \in \mathbb{R} \ .$$

למערכת יש פתרון, לכן הווקטורים ת"ל.
נציב $k_3 = 1$ ונקבל

$$(k_1, k_2, k_3) = (2, -1, 1) \ ,$$

ונקבל

$$2\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_3 = \bar{0}$$

משפט 8.1

נניח ש- $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$.
העמודות של A בלתי תלויות לינארית אם ורק אם למערכת $A \cdot X = 0$ יש רק פיתרון טריויאלי.

(ז"א למטריצה המדורגת כל העמודות מובילות.)

הוכחה: נרשום A בצורה

$$A=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \ , \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ .$$

$$AX=0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1u_1+x_2u_2+\cdots x_nu_n=0 \ .$$

X פתרון הטריוויאלי, כלומר $X=0$ אם ורק אם $x_1,x_2,\cdots x_n=0$, ולכן $u_1,u_2,\cdots u_n$ בת"ל.

■

דוגמה 8.6

האם הווקטורים של מרחב $P_2(\mathbb{R})$

$$p_1(x)=3-x+x^2 \ , \qquad p_2(x)=x+5x^2 \ , \qquad p_3(x)=1 \ ,$$

הם תלוים לינארית? אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם שווה לווקטור האפס.

פתרון:

$$k_1p_1(x)+k_2p_2(x)+k_3p_3(x)=\bar{0} \ ,$$
$$k_1\left(3-x+x^2\right)+k_2\left(x+5x^2\right)+k_3\cdot 1=0+0\cdot x+0\cdot x^2 \ ,$$

לכן

$$(3k_1+k_3)+(-k_1+k_2)x+(k_1+5k_2)x^2=0+0\cdot x+0\cdot x^2$$

השוויון אמור להתקיים לכל x, לכן

$$\left.\begin{aligned} 3k_1+k_3 &=0 \\ -k_1+k_2 &=0 \\ k_1+5k_2 &=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_1-3R_3]{R_2\to R_1+3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון יחיד $k_1=0,k_2=0,k_3=0$. לכן הווקטורים בת"ל.

דוגמה 8.7

במרחב ווקטורי $\mathbb{R}^{2\times 2}$ נתונים שלושה ווקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \quad u_2=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \ , \quad u_3=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

בדקו אם הווקטורים u_1,u_2,u_3 תלוים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם שווה לווקטור האפס.

פתרון:

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=\bar{0}\ ,$$
$$k_1\begin{pmatrix}-2&1\\0&-1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}5&-1\\4&-3\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-1&4\\4&-6\end{pmatrix}=\bar{0}\ ,$$

לכן

$$\begin{pmatrix}-2k_1+5k_2-k_3 & k_1-k_2+4k_3\\ 4k_2+4k_3 & -k_1-3k_2-6k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

השוויון אמור להתקיים לכל x, לכן

$$\left.\begin{aligned}-2k_1+5k_2-k_3&=0\\k_1-k_2+4k_3&=0\\4k_2+4k_3&=0\\-k_1-3k_2-6k_3&=0\end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2&5&-1&0\\1&-1&4&0\\0&4&4&0\\-1&-3&-6&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_4\to R_1-2R_4]{R_2\to R_1+2R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}-2&5&-1&0\\0&3&7&0\\0&4&4&0\\0&11&11&0\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}-2&5&-1&0\\0&3&7&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_4\to R_2-3R_4]{R_3\to R_2-3R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}-2&5&-1&0\\0&3&7&0\\0&0&4&0\\0&0&4&0\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}-2&5&-1&0\\0&3&7&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

למערכת ההומוגנית יש פתרון יחיד, טריוויאלי, לכן u_1,u_2,u_3 בת"ל.

דוגמה 8.8

נתונים ווקטורים $\mathrm{v}_1=x,\mathrm{v}_2=e^x,\mathrm{v}_3=x^2$ במרחב ווקטורי $f(\mathbb{R})$. בדקו אם הווקטורים תלוים לינארית.

פתרון:

<u>שיטה 1</u>

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+k_3\mathrm{v}_3=\bar{0}$$

ז"א

$$k_1x+k_2e^x+k_3x^2=0$$

לכל $x\in\mathbb{R}$.

נציב $x=0 \Leftarrow$ $k_2=0$.

$$\left.\begin{array}{lll} x=1 \text{ נציב} & \Rightarrow & k_1+k_3=0 \\ x=-1 \text{ נציב} & \Rightarrow & -k_1+k_3=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad k_1=0\ , k_3=0\ .$$

לכן הווקטורים בת"ל.

שיטה 2: וורונסקיאן

$$W(x)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & e^x & x^2 \\ 1 & e^x & 2x \\ 0 & e^x & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$W(x)=0$ לכל x לכן הווקטורים בת"ל.

דוגמה 8.9

במרחב ווקטורי ${\mathbb{Z}_5}^3$ נתונים ווקטורים

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{3} \\ \bar{1} \end{pmatrix}\ , \quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{4} \\ \bar{2} \end{pmatrix}\ , \quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \end{pmatrix}\ .$$

בדקו אם הווקטורים תלוים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם שווה לווקטור האפס.

פתרון:

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+k_3\mathrm{v}_3=\bar{0}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & 0 \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} & 0 \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_1+3R_3]{R_1\to R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & 0 \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & 0 \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & 0 \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & 0 \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{rl} \bar{2}k_1+k_3 & =\bar{0} \\ \bar{4}k_2+\bar{3}k_3 & =0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rl} \bar{2}k_1 & =\bar{4}k_3 \\ \bar{4}k_2 & =\bar{2}k_3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rl} k_1 & =\bar{2}k_3 \\ k_2 & =\bar{3}k_3 \end{array}\right\}$$

פתרון

$$(k_1,k_2,k_3)=(\bar{2}k_3,\bar{3}k_3,k_3)\ , \qquad k_3\in\mathbb{Z}_5\ .$$

נציב $k_3=\bar{1}$ ונקבל $(k_1,k_2,k_3)=(\bar{2},\bar{3},\bar{1})$. ז"א

$$\bar{2}\mathrm{v}_1+\bar{3}\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3=\bar{0}\ .$$

8.2 תכונות של תלות לינארית

משפט 8.2 תכונות בסיסיות של תלות לינארית

1) ווקטור יחיד, u, תלוי לינארית אם ורק אם $u=\bar{0}$.

2) שני ווקטורים תלוים לינארית אם ורק אם אחד מהם הוא צירוף לינארי של הווקטור השני.

3) ווקטורים $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ תלוים לינארית אם ורק אם לפחות אחד מהם הוא צירוף לינארי של שאר הווקטורים.

4) כל קבוצת ווקטורים שמכילה את ווקטור האפס, היא תלויה לינארית.

5) אם $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\in V$ תלוים לינארית, אז כל קבוצת הווקטורים שמכילה את $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ היא תלויה לינארית.

6) אם קבוצת ווקטורים $\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\}$ בת"ל, אז כל תת קבוצה שלה היא בת"ל.

הוכחה:

1)

u ת"ל אם ורק אם קיים סקלר $k\in\mathbb{F}$ כך ש $ku=\bar{0}\Leftrightarrow u=\bar{0}$.

2)

v_1, v_2 ת"ל $\Leftrightarrow$ קיימים סקלרים k_1, k_2 שלא כולם אפסים כך ש

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2=\bar{0}$$

נניח בלי הגבלת הכלליות ש $k_1\neq 0$, אז

$$\mathrm{v}_1=\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\mathrm{v}_2\ .$$

3)

$\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ ת"ל $\Leftrightarrow$ קיימים $k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{F}$ שלא כולם אפסים כך ש

$$k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_n\mathrm{v}_n=\bar{0}\ .$$

נניח ש $k_i\neq 0$. אז זה מתקיים אם ורק אם

$$\mathrm{v}_i=\left(-\frac{k_1}{k_i}\right)\mathrm{v}_1+\ldots+\left(-\frac{k_{i-1}}{k_i}\right)\mathrm{v}_{i-1}+\left(-\frac{k_{i+1}}{k_i}\right)\mathrm{v}_{i+1}+\ldots+\left(-\frac{k_n}{k_i}\right)\mathrm{v}_n$$

4)

לכל $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\in V$,

$$0\cdot\mathrm{v}_1+\ldots+0\cdot\mathrm{v}_n+1\cdot\bar{0}=\bar{0}$$

לכן $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n,\bar{0}$ ת"ל.

5)

נניח ש $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ ת"ל. אז קיימים סקלרים $k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{F}$ שלא כולם אפסים כך ש

$$k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_n\mathrm{v}_n=\bar{0}\ .$$

אז לכל $u_1,\ldots,u_m\in V$ מתקיים:

$$k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_n\mathrm{v}_n+0\cdot u_1+\ldots+0\cdot u_m=\bar{0}$$

לכן $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n,u_1,\ldots,u_m$ ת"ל.

6)

נוכיח את הטענה בדרך השלילית.

$\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\}$ בת"ל. ז"א הצירוף לינארי הבא

$$k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_n\mathrm{v}_n=\bar{0}$$

מתקיים אם ורק אם $k_1=k_2=\ldots=k_n=0$. נניח שקיימת תת קבוצה של $\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\}$ שהיא תלויה לינארית. כלומר קיימת קבוצה $\{\mathrm{v}_1,\ldots\mathrm{v}_m\}$ שהיא ת"ל. ז"א הצירוף לינארי

$$k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_m\mathrm{v}_m=\bar{0}$$

מתקיים כאשר לפחות אחד של הסקלרים $k_1,\ldots,k_m$ לא שווה אפס. לכן

$$k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_m\mathrm{v}_m+0\cdot\mathrm{v}_{m+1}+\ldots+0\cdot\mathrm{v}_n=\bar{0}$$

מתקיים כאשר לפחות אחד של הסקלרים $k_1,\ldots,k_m$ לא שווה אפס. ז"א מצאנו צירוף לינארי של $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ שבו אחד של הסקלרים לא שווה אפס, ז"א $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ ת"ל. סתירה.

■

דוגמה 8.10

נניח שווקטורים $u,\mathrm{v},w\in V$ בת"ל. הוכיחו כי הווקטורים

$$u+v+w,\quad 2u-4v,\quad u+v-w$$

בת"ל.

פתרון:

נבנה צ"ל של ווקטורים $u+v+w,2u-4v,u+v-w$.

$$k_1(u+\mathrm{v}+w)+k_2(2u-4\mathrm{v})+k_3(u+\mathrm{v}-w)=\bar{0}\ .$$

מכאן

$$(k_1+2k_2+k_3)u+(k_1-4k_2+k_3)\mathrm{v}+(k_1-k_3)w=\bar{0}\ .$$

u,v,w בת"ל, לכן

$$\left.\begin{aligned} k_1+2k_2+k_3&=0\\ k_1-4k_2+k_3&=0\\ k_1-k_3&=0\end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_2 - 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

יש פתרון יחיד למערכת: $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. לכן הווקטורים $u + v + w, 2u - 4v, u + v - w$ בת"ל.