

תרגילים 11: NP שלמות

שאלה 1 האם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה.

עבור שתי בעיות A ו- B , נגדיר את הבעיה $C = \{ww \mid w \in A \wedge w \notin B\}$.
אם $A \in NP$ וגם $B \in NP$ אזי $C \in NP$.

שאלה 2 הוכיחו כי לכל 3 בעיות A, B, C , אם $A \leq_P B$ וגם $B \leq_P C$ אזי $A \leq_P C$.

שאלה 3 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לשאלה פתוחה:

קיימת שפה רגולרית L כך ש- $L \in NP \setminus P$.

שאלה 4 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לשאלה פתוחה:

אם $L_{acc} \notin NP$ אזי $L_{halt} \notin NP$.

שאלה 5 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה.

אם B היא בעיה NP -קשה וגם A היא בעיה NP -קשה, אזי קיימת רדוקציה $A \leq_P B$.

תשובות

שאלה 1 הטענה שקולה לבעיה פתוחה:

נבחר $B = SAT \in NP, A = \Sigma^* \in NP$
נגדיר את הבעיה

$$C' = A \setminus B = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin SAT\} = \overline{SAT}.$$

נראה כי אם $C \in NP$ אזי גם $C' \in NP$ ע"י רדוקציה $C' \leq_P C$.
פונקצית הרדוקציה: $f(w) = ww$ לכל $w \in \Sigma^*$.

ניתן להראות כי

$$w \in C' \Leftrightarrow f(w) \in C.$$

ולכן לפי משפט הרדוקציה, אם $C \in NP$ אזי $C' = \overline{SAT} \in NP$ וזו שאלה פתוחה.

שאלה 2 תהי f פונקצית הרדוקציה $A \leq_P B$ שמקיימת $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$ לכל $w \in \Sigma^*$.

תהי g פונקצית הרדוקציה $B \leq_P C$ שמקיימת $w \in B \Leftrightarrow g(w) \in C$ לכל $w \in \Sigma^*$.

נוכיח שקיימת רדוקציה $A \leq_P C$.

פונקצית הרדוקציה h

לכל $w \in \Sigma^*$ נגדיר $h(w) = g(f(w))$.

נכונות הרדוקציה

שלב 1. נוכיח כי $w \in A \Leftrightarrow h(w) \in C$.

• אם $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B \Leftrightarrow h(w) = g(f(w)) \in C$.

• אם $w \notin A \Leftrightarrow f(w) \notin B \Leftrightarrow h(w) = g(f(w)) \notin C$.

שלב 2. נוכיח כי h חשיבה בזמן פולינומיאלי:

נסמן ב- p_f את הפולינום של f .

נסמן ב- p_g את הפולינום של g .

אזי לכל $w \in \Sigma^*$, זמן החישוב של $h(w)$ חסום על ידי :

$$p_f(|w|) + p_g(|f(w)|) \leq p_f(|w|) + p_g(p_f(|w|)) = p_f(|w|) + (p_f \circ p_g)(|w|)$$

כאשר $p_f \circ p_g$ הוא הרכבה של שני פולינומים. לכן ניתן לחשב את $h(w)$ בזמן פולינומיאלי בגודל $|w|$.

שאלה 3 הטענה לא נכונה.

לכל שפה רגולרית קיים אוטומט סופי ולכן שייכת ל- P .

שאלה 4 הטענה נכונה.

קיימת רדוקציה פולינומיאלית $L_{\text{halt}} \leq_P L_{\text{acc}}$ ולכן ממשפט הרדוקציה אם $L_{\text{acc}} \notin NP$ מתקיים $L_{\text{halt}} \notin NP$.

שאלה 5 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: A בעייה NP קשה עבורה $A \notin NP$ ו- B היא שפה NP שלמה. נניח בשלילה כי $A \leq_p B$. ממשפט הרדוקציה, מכיוון ש- $B \in NP$ (כי B היא NP שלמה) מתקיים ש- $A \in NP$ וזו סתירה לבחירה של A .