

עבודה עצמית 9

שאלה 1 תן דוגמא לשתי קבוצות S, T כך ש $S \subseteq T$ ומתקיים:

- (א) T פורשת את \mathbb{R}^4 ו S לא פורשת את \mathbb{R}^4 .
- (ב) T לא פורשת את \mathbb{R}^4 ו S לא פורשת את \mathbb{R}^4 .
- (ג) T פורשת את \mathbb{R}^4 ו S פורשת את \mathbb{R}^4 .

שאלה 2 תהינה $X \subseteq Y$ קבוצות של וקטורים ב- \mathbb{R}^n . הוכח או הפרך:

- (א) אם Y פורשת את \mathbb{R}^n אז X פורשת את \mathbb{R}^n .
- (ב) אם $0 \in X$ אז X פורשת את \mathbb{R}^n .
- (ג) אם $0 \in X$ אז X לא פורשת את \mathbb{R}^n .
- (ד) אם X פורשת את \mathbb{R}^n אז Y פורשת את \mathbb{R}^n .
- (ה) אם מספר הוקטורים ב- X גדול מ- n אז X פורשת את \mathbb{R}^n .
- (ו) אם קיים $v \in Y$ כך ש $v \notin X$ אז $\text{sp}(Y) \neq \text{sp}(X)$.

שאלה 3 נתונים הוקטורים

$$u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \quad u_3 \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix}$$

- (א) מצא לאילו ערכי a מתקיים $u_3 \in \text{sp}(u_1, u_2)$.
- (ב) עבור ערך a הקטן שמצאת, הצג את u_3 כצירוף לינארי של u_1, u_2 .
- (ג) מצא לאילו ערכי a הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ פורשת את \mathbb{R}^3 .

שאלה 4 קבעו עבור כל אחת מהקבוצות הבאות אם היא מהווה בסיס של \mathbb{R}^3 :

- (א) $\{(1, 0, -1), (1, 2, 1), (0, 4, 2)\}$
- (ב) $\{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$
- (ג) $\{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 2, 0)\}$
- (ד) $\{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (3, 5, 2)\}$

(ה) $\{(1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$

שאלה 5 עבור המטריצות הבאות מצאו בסיס ומימד של $\text{col}(A)$ ובסיס ומימד של $\text{Nul}(A)$.

(א)
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

(ב)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

(ג)
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

שאלה 6 עבור $\{u_1, u_2, u_3, u_4\} \in \mathbb{R}^5$ נסמן $W = \text{sp}\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. הסבר מדוע W הינה תת מרחב של \mathbb{R}^5 ומצאו בסיס ומימד של W במקרים הבאים:

(א) $u_4 = (1, 2, 1, -1, 4), u_3 = (3, 5, -1, -2, 5), u_2 = (1, 2, -1, -2, 1), u_1 = (1, 1, 1, 2, 3)$

(ב) $u_4 = (3, -7, 3, 8, -1), u_3 = (1, -3, 1, 2, 1), u_2 = (-2, 4, -2, -6, 2), u_1 = (1, -2, 1, 3, -1)$

שאלה 7 מצאו בסיס ומימד של מרחב הפתרונות של המערכות ההומוגניות הבאות:

(א)
$$\left. \begin{aligned} x + z + t &= 0 \\ y - s + t &= 0 \\ x + y + z + s - t &= 0 \\ 2y + z + s + 3t &= 0 \end{aligned} \right\}$$

(ב)
$$\left. \begin{aligned} x + 2y + z + t &= 0 \\ y + 3z + s + t &= 0 \\ x + 2y - s &= 0 \end{aligned} \right\}$$

שאלה 8 במרחב הווקטורי $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ (מרחב הפולינומים מסדר 3 לכל היותר) נתונים הווקטורים

$$p_1(t) = 2 - t + t^2, \quad p_2(t) = 2t - 3t^2 + t^3, \quad p_3(t) = 1 - t^2, \quad p_4(t) = 3t - 6t^2 + t^3$$

(א) בדקו אם הווקטורים $p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)$ ת"ל. אם כן מצאו צירוף לינארי הלא טריוויאלי שלהם שווה לווקטור האפס.

(ב) מצאו בסיס ואת המימד של תת המרחב הנפרש על ידי הווקטורים $p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)$.

ג) בטא כל וקטור מתוך $p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)$ כצירוף ליניארי של הבסיס שמצאת בסעיף ב'.

ד) מצא את וקטור הקואורדינטות של $p_4(t)$ ביחס לבסיס שמצאתם.

שאלה 9 במרחב הווקטורי $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ נתונים הוקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

נגדיר $W = \text{sp}(v_1, v_2, v_3)$.

א) תן דוגמא לוקטור כלשהו הנמצא ב W ושונה מוקטור האפס ומהוקטורים v_1, v_2, v_3 .

ב) האם W הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$? האם $W = \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

ג) בדקו האם הקבוצה $\{v_1, v_2, v_3\}$ ת"ל? אם כן, מצא צירוף ליניארי לא טריוויאלי של איברי הקבוצה השווה לווקטור האפס.

ד) מצא בסיס ואת המימד של W .

ה) תן דוגמא למרחב וקטורי V כך ש $V \neq W$ ו V איזומורפי ל W .

ו) מצא לאילו ערכי הפרמטר k הקבוצה $\{2v_1 + 3v_2, 4v_1 + kv_2\}$ היא בלתי תלויה ליניארית.

שאלה 10 לכל אחת מהקבוצות הבאות, קבעו האם היא מהווה בסיס של $\mathbb{R}_3[t]$:

א) $\{2t^3 + t^2 + t + 1, 3t^3 + 3t + 2, t^3 + t^2 - t, 4t^3 + 2t^2 - 2t + 1\}$

ב) $\{1, t - 1, t^3 - t^2 + t - 1, t^2 - t + 1\}$

שאלה 11 לאילו ערכים של הפרמטרים a, b, c הקבוצה

$$\{t^2 + t + 1, ct^2 + bt + a, c^2t^2 + b^2t + a^2\}$$

מהווה בסיס של $P_2(t)$?

שאלה 12 לכל אחת מהקבוצות הבאות, קבעו האם היא מהווה בסיס של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$:

א) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$

ב) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

שאלה 13 לאילו ערכי הפרמטר m הקבוצות הבאות מהוות בסיס של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & m-1 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{א})$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{ב})$$

שאלה 14

במרחב $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ נתונים וקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}.$$

- (א) עבור אילו ערכי a, b ווקטור v שייך לתת המרחב הנפרש על ידי הווקטורים u_1, u_2, u_3 ?
- (ב) עבור הערכים של a, b שמצאת בסעיף א', בטאו את ווקטור v כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 בשתי דרכים שונות (רשמו שני צירופים שונים).
- (ג) האם קיימים ערכי a, b עבורם וקטורים u_1, u_2, u_3, v פורשים את המרחב $\mathbb{R}^{2 \times 2}$? נמקו את תשובתכם.
- (ד) האם הווקטורים u_1, u_2, u_3 תלויים לינארית? אם תשובתכם היא "כן", מצאו צירוף לינארי לא טריוויאלי של u_1, u_2, u_3 השווה לווקטור האפס.

שאלה 15 נתון מרחב וקטורי \mathbb{C}^2 מעל שדה \mathbb{R} . הוכיחו כי קבוצת וקטורים $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$

מהווה בסיס של המרחב הנתון ומצאו את $\begin{pmatrix} 2-7i \\ 1+4i \end{pmatrix}_S$ (כלומר וקטור הקורדינאטות של וקטור $\begin{pmatrix} 2-7i \\ 1+4i \end{pmatrix}$ לפי בסיס S).

שאלה 16

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ k & k^2 & 1 \\ 2k^2 & 4k^2 - 2 & 2 \end{pmatrix}$$
 נתונה מטריצה

- (א) לכל ערך של k מצאו את דרגת מטריצה A ובסיס של $\text{col}(A)$
- (ב) עבור אילו ערכי k למערכת $A \cdot X = b$ יש פתרון לכל וקטור b ?

שאלה 17

לכל אחד מן המרחבים הבאים מצאו בסיס ומימד

(א)

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + y + z = 0 \\ z - y + z = 0 \end{cases} \right\}$$

(ב)

$$W_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \mid p(0) = p(1) = 0\}$$

כאן $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ מסמל את אוסף הפולינומים עם מקדמים ממשיים במשתנה x עד מעלה 3 כולל.

ג)

$$W_3 = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}(\mathbb{Z}_3) \mid A = A^t\}$$

שאלה 18 תהי $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ כך שמרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$ שווה ל -

$$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

מצאו את הדרגה של A .

שאלה 19 נניח ש $A \in \mathbb{R}^{5 \times 3}, B \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$. נגדיר $C = AB$. תחת ההנחה ש $B \neq 0$, ו- $\dim(\text{Nul } C) = 4$ האם ייתכן שלמערכת המשוואות ההומוגנית $A \cdot x = \bar{0}$ יש פתרון יחיד. נמקו תשובתכם.

פתרונות

שאלה 1

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{א)}$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{ב)}$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{ג)}$$

שאלה 2

א) דוגמה נגדית:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

X לא פורשת את \mathbb{R}^2 , Y פורשת את \mathbb{R}^2 .

ב) דוגמה נגדית: $X = \{\bar{0}\}$ לא פורשת את \mathbb{R}^2 .

ג) דוגמה נגדית: $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ פורשת את \mathbb{R}^2 .

ד) נתון: $X \subseteq Y$

צ"ל: Y פורשת את \mathbb{R}^n .

הוכחה

$\text{sp}(X) = \mathbb{R}^n$, לכן לכל $u \in \mathbb{R}^n$ קיימים $v_1, \dots, v_n \in X$ כך ש

$$u = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n.$$

$X \subseteq Y$ לכן $v_1, \dots, v_n \in Y$. $u \in \text{sp}(v_1, \dots, v_n)$ וא"כ $\text{sp}(Y) = \mathbb{R}^n$.

ה) דוגמה נגדית: $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ לא פורשת את \mathbb{R}^2 .

$$(ו) \quad \text{דוגמה נגדית: } X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \text{sp}(X) = \text{sp}(Y)$$

שאלה 3

$$u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \quad u_3 \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix}$$

(א)

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 = u_3$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & a+1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & (a-1)(3-a) \end{array} \right)$$

עבור $a = 1$ ו $a = 3$ למערכת יש פתרון, לכן $u_3 \in \text{sp}(u_1, u_2)$

$$\underline{a = 1}$$

$$k_2 = -1, k_1 = 3$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$3u_1 - u_2 = u_3$$

(ב) עבור $a \neq 1, 3$ הוקטורים u_1, u_2, u_3 בת"ל. $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, לכן u_1, u_2, u_3 בסיס של \mathbb{R}^3 .

שאלה 4

(א)

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

כל העמודות מובילות, לכן הוקטורים בת"ל. $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, לכן הוקטורים מהווים בסיס של \mathbb{R}^3 .

(ב)

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

כל העמודות מובילות, לכן הוקטורים בת"ל. $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, לכן הוקטורים מהווים בסיס של \mathbb{R}^3 .

(ג)

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

הוקטורים ת"ל כי יש עמודה לא מובילה, לכן הם לא מהווים בסיס של \mathbb{R}^3 .

(ד) וקטורים לא יכולים להיות בסיס של \mathbb{R}^3 , כי $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

(ה) שני וקטורים לא מהווים בסיס של \mathbb{R}^3 , כי $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

שאלה 5

(א)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(\text{col}(A)) = 2$ - מספר העמודות המובילות.
בסיס של $\text{col}(A)$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\dim(\text{Nul}(A)) = 4$ - מספר העמודות הלא מובילות.
נמצא בסיס של $\text{Nul}(A)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{13}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}x_2 - \frac{13}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \\ x_3 &= 5x_4 - x_5 \end{aligned} \right\}, \quad x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_2 - \frac{13}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \\ x_2 \\ 5x_4 - x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} \\ 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Nul}(A)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} \\ 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & 13 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(\text{col}(A)) = 3$. בסיס של $\text{col}(A)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\dim(\text{Nul}(A)) = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{13}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{13}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 \in \mathbb{R}, x_4 = 0, x_2 = -\frac{13}{7}x_3, x_1 = \frac{4}{7}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{7}x_3 \\ -\frac{13}{7}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ -\frac{13}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Nul}(A)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ -\frac{13}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ג

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(\text{col}(A)) = 3$. בסיס של $\text{col}(A)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\dim(\text{Nul}(A)) = 2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2}x_4 + \frac{7}{8}x_5 \\ x_2 &= -\frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{8}x_5 \\ x_3 &= \frac{1}{2}x_4 - \frac{5}{8}x_5 \end{aligned} \right\}, \quad x_4, x_5 \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_4 + \frac{7}{8}x_5 \\ \frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{8}x_5 \\ \frac{1}{2}x_4 - \frac{5}{8}x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{5}{8} \\ -\frac{5}{8} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Nul}(A)$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{5}{8} \\ -\frac{5}{8} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 6 $W = \text{sp}\{u_1, u_2, u_3, u_4\}, \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \in \mathbb{R}^5$

(א)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(W) = 3$, מספר העמודות המובילות. בסיס של $W: u_1, u_2, u_4$.

(ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -3 & -7 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(W) = 2$, מספר העמודות המובילות. בסיס של $W: u_1, u_3$.

שאלה 7

(א)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\dim(\text{Nul}(A)) = 1$$

$$x = \frac{9}{2}t, \quad y = \frac{1}{2}t, \quad s = \frac{3}{2}t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

בסיס:

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{11}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\dim(\text{Nul}(A)) = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = -3s - 4t, \quad y = 2s + 2t, \quad z = -s - t, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{pmatrix} -3s - 4t \\ 2s + 2t \\ -s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 8

(א)

$$k_1 p_1(t) + k_2 p_2(t) + k_3 p_3(t) + k_4 p_4(t) = \bar{0}$$

$$k_1(2 - t + t^2) + k_2(2t - 3t^2 + t^3) + k_3(1 - t^2) + k_4(3t - 6t^2 + t^3) = \bar{0}$$

$$(2k_1 + k_3) + (-k_1 + 2k_2 + 3k_4)t + (k_1 - 3k_2 - k_3 - 6k_4)t^2 + (k_2 + k_4)t^3 = \bar{0}$$

$$\left. \begin{aligned} 2k_1 + k_3 &= 0 \\ -k_1 + 2k_2 + 3k_4 &= 0 \\ k_1 - 3k_2 - k_3 - 6k_4 &= 0 \\ k_2 + k_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k_1 = k_4, \quad k_2 = -k_4, \quad k_3 = -2k_4, \quad k_4 \in \mathbb{R}$$

למערכת יש אינסוף פתרונות, לכן הוקטורים ת"ל.

נציב $k_3 = -2, k_2 = -1, k_1 = 1 \Leftarrow k_4 = 1$.

$$p_1(t) - p_2(t) - 2p_3(t) + p_4(t) = \bar{0}$$

(ב)

$$\dim(\text{sp}(p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t))) = 3$$

בסיס: $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$.

(ג)

$$\begin{aligned} p_1(t) &= 1 \cdot p_1(t) + 0 \cdot p_2(t) + 0 \cdot p_3(t), \\ p_2(t) &= 0 \cdot p_1(t) + 1 \cdot p_2(t) + 0 \cdot p_3(t), \\ p_3(t) &= 0 \cdot p_1(t) + 0 \cdot p_2(t) + 1 \cdot p_3(t), \\ p_4(t) &= -1 \cdot p_1(t) + 1 \cdot p_2(t) + 2 \cdot p_3(t). \end{aligned}$$

$$[p_4(t)]_{\{p_1, p_2, p_3\}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{ד})$$

שאלה 9

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$W = \text{sp}(v_1, v_2, v_3)$$

(א)

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in W.$$

(ב)

$$W = \text{sp}(v_1, v_2, v_3) \text{ ופרישה תמיד תת מרחב.}$$

$$\dim(W) = 3 \text{ ו } \dim(\mathbb{R}^{2 \times 2}) = 4 \text{ כי } W \neq \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

(ג)

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = \bar{0}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן v_1, v_2, v_3 בת"ל.

(ד) $\dim(W) = 3$. בסיס של W : v_1, v_2, v_3

(ה)

$$\begin{aligned} &\{2v_1 + 3v_2, 4v_1 + kv_2\} \\ &x(2v_1 + 3v_2) + y(4v_1 + kv_2) = \bar{0} \\ &(2x + 4y)v_1 + (3x + ky)v_2 = \bar{0} \end{aligned}$$

v_1, v_2 בת"ל, לכן

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 3x + ky = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2k - 12 \end{pmatrix}$$

למערכת יש פתרון יחיד עבור $k \neq 6$.

לכן עבור $k \neq 6$ הוקטורים $\{2v_1 + 3v_2, 4v_1 + kv_2\}$ בת"ל.

שאלה 10

(א) נבדוק אם הוקטורים בת"ל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 + 2R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן הוקטורים בת"ל. מדובר ב 4 וקטורים. $\dim(\mathbb{R}_{\leq 3}[x]) = 4$, לכן הם מהווים בסיס של $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

(ב) בקבוצה יש 3 וקטורים, $\dim(\mathbb{R}_{\leq 3}[x]) = 4$, לכן 3 הוקטורים לא מהווים בסיס של $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

שאלה 11

$$c^2t^2 + b^2t + a^2, ct^2 + bt + a, t^2 + t + 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b - a & b^2 - a^2 \\ 0 & c - a & c^2 - a^2 \end{pmatrix}$$

עבור $a = b$ מקבלים שורת אפסים. הוקטורים ת"ל.

עבור $a = c$ מקבלים שורת אפסים. הוקטורים ת"ל.

נניח $b \neq a, c \neq a$. $b - a \neq 0, c - a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b, a \neq c$.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b - a & b^2 - a^2 \\ 0 & c - a & c^2 - a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow \frac{1}{b-a} R_2 \\ R_3 \rightarrow \frac{1}{c-a} R_3}} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a + b \\ 0 & 1 & c + a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a + b \\ 0 & 0 & c - b \end{pmatrix}$$

הוקטורים בת"ל עבור $a \neq c, a \neq b, b \neq c$. $\dim(\mathbb{R}_{\leq 2}[x]) = 3$ לכן במקרים האלה הוקטורים מהווים בסיס של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

שאלה 12

(א) שלושה וקטורים לא ימהווים בסיס של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ כי $\dim(\mathbb{R}^{2 \times 2}) = 4$.

(ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow 3R_3 - 7R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 17 & -16 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \rightarrow 17R_4 - 3R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 17 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 65 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן הוקטורים בת"ל. $\dim(\mathbb{R}^{2 \times 2}) = 4$ לכן 4 וקטורים בת"ל מהווים בסיס של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

שאלה 13

(א)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & m-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & m+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_2 + R_3 \\ R_4 \rightarrow R_2 + 3R_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 3m+6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + 7R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3m-1 \end{pmatrix}$$

עבור $m \neq \frac{1}{3}$ הוקטורים בת"ל.
 $\dim(\mathbb{R}^{2 \times 2}) = 4 \Leftarrow$ הוקטורים מהווים בסיס של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

(ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - mR_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & 1-m & -m^2-m+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \rightarrow R_3 + R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & 0 & -m^2-2m+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & 0 & -(m+3)(m-1) \end{pmatrix}$$

עבור $m \neq -3, 1$ הוקטורים בת"ל.
 $\dim(\mathbb{R}^{2 \times 2}) = 4 \Leftarrow$ הוקטורים מהווים בסיס של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

שאלה 14

במרחב $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ נתונים וקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}.$$

(א) עבור אילו ערכי a, b ווקטור v שייך לתת המרחב הנפרש על ידי הווקטורים u_1, u_2, u_3 ?

$$\begin{aligned} xu_1 + yu_2 + zu_3 &= v \\ \left. \begin{aligned} x + 2y - z &= 2a \\ 2x - y + 8z &= 2 \\ 2x + y + 4z &= b \\ 3x + 2y + 5z &= 3 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2a \\ 2 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & b \\ 3 & 2 & 5 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 3R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2a \\ 0 & -5 & 10 & 2 - 4a \\ 0 & -3 & 6 & b - 4a \\ 0 & -4 & 8 & 3 - 6a \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow 5R_3 - 3R_2 \\ R_4 \rightarrow 5R_4 - 4R_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2a \\ 0 & -5 & 10 & 2 - 4a \\ 0 & 0 & 0 & -8a + 5b - 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 - 14a \end{array} \right)$$

יש פתרון אם $a = \frac{1}{2}$ ו $b = 2$.

(ב) עבור $a = \frac{1}{2}, b = 2$ המדורגת של המטריצה המורחבת של המערכת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{5}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 3z = 1 \\ y - 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 - 3z \\ y = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$z = 1$

$$:z = 0, y = 1, x = 1$$

$$-2u_1 + 2u_2 + u_3 = v$$

$z = 2$

$$:z = 1, y = 3, x = -2$$

$$-5u_1 + 4u_2 + 2u_3 = v$$

(ג) הקבוצה u_1, u_2, u_3, v פורשת $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ אם המימד של הקבוצה שווה 4. המטריצה המדורגת המתקבלת בסעיף הקודם היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2a \\ 0 & -5 & 10 & 2 - 4a \\ 0 & 0 & 0 & -8a + 5b - 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 - 14a \end{array} \right)$$

אין ערכים של a ו b שעבורם המימד של הקבוצה שווה 4 לכן הקבוצה u_1, u_2, u_3, v אינה פורשת את $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

(ד)

$$xu_1 + yu_2 + zu_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow 5R_3 - R_2 \\ R_4 \rightarrow 5R_4 - 4R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{5}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $y = 2z$, $x = -2y + z$. עבור $z = 1$ נקבל $x = -3$, $y = 2$, $z = 1$ ונקבל את הצירוף לינארי

$$-3u_1 + 2u_2 + u_3 = 0.$$

שאלה 15

נוכיח כי הקבוצה

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$$

בת"ל:

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} x + iy = 0 \\ z + iw = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x = -iy \\ z = -iw \end{matrix} \right\} \Rightarrow x = 0, y = 0, z = 0, w = 0.$$

לכן $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$ בת"ל.

$$\begin{pmatrix} 2 - 7i \\ 1 + 4i \end{pmatrix}_S = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}_S$$

שאלה 16

(א)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ k & k^2 & 1 \\ 2k^2 & 4k^2 - 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - k^2 R_1]{R_2 \rightarrow 2R_2 - kR_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2(k-1)k & 2-2k \\ 0 & 2(k^2-1) & 2-2k^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow kR_3 - (k+1)R_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2(k-1)k & 2-2k \\ 0 & 0 & -2(k-1)^2(k+1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2(k-1)k & 2(1-k) \\ 0 & 0 & -2(k-1)^2(k+1) \end{pmatrix}$$

$$\underline{k = 1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עמודה 1 מובילה.

$$B(\text{col}(A)) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(\text{col}(A)) = 1$$

$$\underline{k = -1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עמודה 1 ועמודה 2 מובילות.

$$B(\text{col}(A)) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(\text{col}(A)) = 2$$

$$\underline{k = 0}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עמודה 1 ועמודה 3 מובילות.

$$B(\text{col}(A)) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(\text{col}(A)) = 2$$

$$\underline{k \neq 1, -1, 0}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2(k-1)k & 2(1-k) \\ 0 & 0 & -2(k-1)^2(k+1) \end{pmatrix}$$

עמודות 1, 2 ו 3 מובילות.

$$B\text{col}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 2k^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ k^2 \\ 4k^2 - 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(\text{col}(A)) = 3$$

(ב) עבור אילו ערכי k למערכת $A \cdot X = b$ יש פתרון לכל וקטור b ?
 לפי המדורגת של A , עבור $k = 1, -1, 0$ נקבל שורת סתירה במדורגת של המטריצה המורחבת $(A|b)$ לכל b .
 לכן יש פתרון לכל וקטור b אם $k \neq 1, -1, 0$.

שאלה 17

(א) משיים לב ש W_1 הוא מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית הבאה:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ z - y + z &= 0 \end{aligned}$$

נעבור לכתוב המטריצה המורחבת ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

הפתרון הוא: $(x, y, z) = (-1, 0, 1)z, z \in \mathbb{R}$. מכאן

$$W_1 = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

\Leftarrow בסיס אפשרי ל- W_1 הינו

$$B_{W_1} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\dim W_1 = 1$$

(ב) נסמן $p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ כך:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

$$p(1) = 0 \text{ וגם } p(0) = 0 \Leftrightarrow p(x) \in W_2$$

$$p(0) = a_0 = 0.$$

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

מכאן נקבל מערכת משוואות של מקדמי הפולינום. נעבור למטריצה המורחבת של המערכת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2}$$

הפתרון הוא $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, -a_2 - a_3, a_2, a_3) = a_2(0, -1, 1, 0) + a_3(0, -1, 0, 1)$

$$\text{נסמן } s, t \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ לכן}$$

$$p(x) = t \cdot x + s \cdot x^2 + (-s - t) \cdot x^3 = s(x^2 - x^3) + t(x - x^3).$$

ז"א

$$p(x) \in \text{span}\{x^2 - x^3, x - x^3\}.$$

נשים לב כי הווקטורים $x^2 - x^3, x - x^3$ הם בת"ל. לפיכך בסיס אפשרי ל- W_2 הינו

$$B_{W_2} = \{x^2 - x^3, x - x^3\}$$

$$\dim W_2 = 2.$$

(ג) בסיס של $\mathbb{F}^{2 \times 2}$ הינו

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

כך שכל מצטריצה $A \in \mathbb{F}^{2 \times 2}$ מצורה $A = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix}$ ניתן להירשם כצירוף לינארי של המטריצות של הבסיס:

$$A = k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3 + k_4e_4,$$

כאשר $k_1, \dots, k_4 \in \mathbb{F}$ סקלרים.

עכשיו נניח כי המרחב מורכב ממטריצות סימטריות: $A = A^t$. ז"א איברים $k_2 = k_3$ כך ש $A = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_4 \end{pmatrix}$. כתוצאה הצירוף לינארי לעיל הופך ל-

$$A = k_1e_1 + k_2(e_2 + e_3) + k_4e_4 = k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ז"א בסיס אפשרי של W_3 הינו

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim W_3 = 3 \text{ לפיכך}$$

שאלה 18 נתון כי

$$\text{Nul}(A) = \text{span} \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

□ נמצא את \dim , $\text{Nul}(A)$, נגדיר מטריצה B שעמודותיה הם w_1, w_2, w_3 . מכאן $\text{col}(B) = \text{Nul}(A)$ ומימד $\text{Nul}(A)$ שווה ל- $\text{rank}(B)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $\text{rank}(B) = 2$ לכן $\dim \text{Nul}(A) = 2$.
כעת לפי המשפט מספר עמודות של A $\text{rank}(A) + \dim \text{Nul}(A)$, כלומר

$$\text{rank}(A) + \dim \text{Nul}(A) = 3$$

אז נקבל כי

$$\text{rank}(A) + 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{rank}(A) = 1.$$

שאלה 19

$$\text{rank}(C) = 4 - \dim \text{Null}(C) = 4 - 4 = 0.$$

מאחר ו- $\text{rank}(C) = 0$ נסיק ש- $C = 0$.

נסמן ב- b_1, b_2, b_3, b_4 את העמודות של המטריצה B . נקבל ש-

$$C = A \cdot \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ A \cdot b_1 & A \cdot b_2 & A \cdot b_3 & A \cdot b_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix}.$$

מאחר ו- $C = 0$ אז

$$A \cdot b_1 = A \cdot b_2 = A \cdot b_3 = A \cdot b_4 = 0$$

$B \neq 0$ לכן ישנה לפחות עמודה אחת מתוך b_1, b_2, b_3, b_4 שונה מאפס. לפיכך קיבלנו שלמערכת $A \cdot x = \bar{0}$ יש פתרון לא טריוויאלי ובפרט לכל מערכת הומוגנית $A \cdot x = \bar{0}$ יש אינסוף פתרונות.