

שאלות

שאלה 1

(1) נתונה מערכת משוואות ליניאריות $A \cdot X = b$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ k+1 & -(k+1) & -1 \\ k & -2k & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5k-2 \\ 4k-3 \end{pmatrix}$$

מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין פתרון, יש פתרון יחיד, יש אינסוף פתרונות. במקרה של אינסוף פתרונות רשמו את הפתרון הכללי.

(2) יהי V מרחב וקטורי, $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subseteq V$, $B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subseteq V$, $A \cap B = \emptyset$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם קבוצת וקטורים $A \cup B$ היא בלתי תלויה לינארית, אז $\text{sp}(A) \cap \text{sp}(B) = \{\bar{0}\}$.

(ב) אם $\text{sp}(A) \cap \text{sp}(B) = \{\bar{0}\}$ אז קבוצת וקטורים $A \cup B$ היא בלתי תלויה לינארית.

פתרונות

שאלה 1

(1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ k+1 & -(k+1) & -1 & 5k-2 \\ k & -2k & -3 & 4k-3 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - kR_1]{R_2 \rightarrow R_2 - (k+1)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & k+1 & k & 2k-5 \\ 0 & 0 & k-3 & k-3 \end{array} \right)$$

$$\underline{k = -1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 4R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{array} \right)$$

שורה סתירה: אין פתרון.

$$\underline{k = 0}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow -\frac{1}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

פתרון יחיד:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y - z = 3 \\ y = -5 \\ z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 10 - 1 = 3 \\ y = -5 \\ z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -6 \\ y = -5 \\ z = 1 \end{array} \right\}.$$

$$\underline{k = 3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

שורת אפסים: ∞ פתרונות.

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y - z = 3 \\ 4y + 3z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 3 + 2y + z \\ y = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}z \end{array} \right\}.$$



(2) יהי V מרחב וקטורי, $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $A \cap B = \emptyset$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם קבוצת וקטורים $A \cup B$ היא בת"ל, אז $\text{sp}(A) \cap \text{sp}(B) = \{\bar{0}\}$.

פתרון:

נתון: $A \subseteq V$, $B \subseteq V$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B$ בת"ל.

צריך להוכיח: $\text{sp}(A) \cap \text{sp}(B) = \{\bar{0}\}$

הוכחה:

נוכיח דרך השלילה. נניח $A \cup B$ בת"ל וקיים $x \in \text{sp}(A) \cap \text{sp}(B)$ כך ש $x \neq \bar{0}$. אז

$$x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m$$

נחסיר אגף השמאל מאגף הימין ונקבל

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n - \beta_1 v_1 - \dots - \beta_m v_m = \bar{0}.$$

כיוון ש $A \cup B$ בת"ל, אז הצירוף לינארי הזה מתקיים רק אם $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_m = 0$. אז $x = \bar{0}$ סתירה.

■

(ב) אם $\text{sp}(A) \cap \text{sp}(B) = \{\bar{0}\}$, אז קבוצת וקטורים $A \cup B$ היא בת"ל.

פתרון:

נתון: $A \subseteq V$, $B \subseteq V$, $A \cap B = \emptyset$, $\text{sp}(A) \cap \text{sp}(B) = \{\bar{0}\}$.

צריך להוכיח: $A \cup B$ קבוצת בת"ל.

דוגמה נגדית:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\text{sp}(A) \cap \text{sp}(B) = \{\bar{0}\} \text{ ו } A \cap B = \emptyset$$

$$A \cup B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$A \cup B$ קבוצת תלויה לינארית.

■