המחלקה למדעי המחשב

01/09/2024 כ"ח באב תשפ"ד
$09:00 - 12:00$

חדוא 2

מועד א'

מרצים: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר,

תשפ"ד סמסטר ב'

השאלון מכיל 10 **עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).**

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות בלבד מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** בלבד מתוך **שתיים**.

==

שאלות $1-2$ חובה

שאלה 1 (20 נקודות)

נתונה הפונקציה $f(x,y)=\sqrt{6x-8y-x^2-y^2}$.

א) (10 נק') מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה ומצאו את האקסטרמומים מקומיים של הפונקציה ובררו את סוגיהם.

ב) (10 נק')
מצאו את הערך הגדול ביותר והערך הקקן ביותר של הפונקציה בריבוע:
$D=\{(x,y)|-4\le y\le 4\ ,\ \ -2\le x\le 2\}$.

שאלה 2 (22 נקודות)

תענו על 3 מתוך 4 השאלות $3-6$

שאלה 3 (16 נקודות)

א) (12 נק') שרטטו את תחום האינטגרציה, שנו את סדר האינטגרציה באינטגרל: $\int_{-3}^{3} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} dy\, e^{x^2+y^2}$

וחשבו אותו.

ב) (4 נק') רשמו את משוואת המישור המשיק למשטח $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ בנקודה $M(1,2,2)$.

שאלה 4 (16 נקודות)

א) (8 נק') מצאו את הנפח של הגוף המוגדר על ידי אי-השוויונים:

$$0\le x\le 2\ ,\quad 0\le y\le 2\ ,\quad 0\le z\le 4-x-y\ .$$

ב) (4 נק') ציירו במערכת הצירים xyz את הגוף שמדובר עליו בסעיף א'.

ג) (4 נק') נתונה פונקציה $z(x,y)$ אשר גזירה ב- $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ונתון ווקטור $a=(a_1,a_2)$, $a\neq 0$ ונתונה נקודה P במישור xy. הוכיחו:

$$-|\nabla z(P)|\le \frac{dz(P)}{da}\le |\nabla z(P)|\ .$$

שאלה 5

שאלה 6 **(16 נקודות)**

פתור אחת מבין השאלות $7-8$

שאלה 7 **(10 נקודות)**

שאלה 8 **(10 נקודות)**

במישור $y=0$ מצאו את הנקודה P כך שסכום המרחקים ממנה לנקודות $M(4,3,1)$ ו- $N(-12,4,6)$ יהיה מינימלי וחשבו את הסכום המינימלי.

פתרונות

שאלה 1

א) תחום ההגדרה:

$$6x-8y-x^2-y^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -6x+8y+x^2+y^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2+(y+4)^2-25 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2+(y+4)^2 \leq 25 \; .$$

לפיכך התחום ההגדרה הינו מעגל של רדיוס 5 ומרכזו בנקודה $x=3, y=-4$.

תנאי הכרחי לאקסרמום:

$$f'_x = \frac{3-x}{\sqrt{-x^2+6x-y(y+8)}} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x=3 \; .$$

$$f'_y = \frac{-y-4}{\sqrt{-x^2+6x-y(y+8)}} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y=-4 \; .$$

לפיכך $P_0(x=3, y=-4)$

תנאי מספיק (מבחן Δ):

$$f'_{xx}(P_0) = \frac{y^2+8y-9}{(-x^2+6x-y(y+8))^{3/2}}\Big|_{P_0} = -\frac{1}{5} \; ,$$

$$f'_{yy}(P_0) = \frac{x^2-6x-16}{(-x^2+6x-y(y+8))^{3/2}}\Big|_{P_0} = -\frac{1}{5} \; ,$$

$$f'_{xy}(P_0) = -\frac{(x-3)(y+4)}{(-x^2+6x-y(y+8))^{3/2}}\Big|_{P_0} = 0 \; .$$

$$\Delta(P_0) = f'_{xx}(P_0)\, f'_{yy}(P_0) - f'_{xy}(P_0)^2 = \frac{1}{25} \; .$$

$f'_{xx}(P_0) < 0$ ו- $\Delta(P_0) > 0$ לכן P_0 נקודת מקסימום.

ב) על השפה $x=2$:

$$f_1(y) = f(x=2,y) = \sqrt{-y^2-8y+8} \, , \qquad f'_1(y) = \frac{-y-4}{\sqrt{-y^2-8y+8}} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x=2, y=-4 \, .$$

על השפה $x=-2$:

$$f_2(y) = f(x=-2,y) = \sqrt{-y^2-8y-16} \, , \qquad f'_2(y) = \frac{-y-4}{\sqrt{-y^2-8y-16}} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x=-2, y=-4 \, .$$

על השפה $y=4$:

$$f_3(x)=f(x,y=4)=\sqrt{-x^2+6x-48}\,,\qquad f_3'(x)=\frac{3-x}{\sqrt{-x^2+6x-48}}\overset{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad x=3,y=4\,.$$

על השפה $y=-4$:

$$f_4(x)=f(x,y=4)=\sqrt{-x^2+6x+16}\,,\qquad f_4'(x)=\frac{3-x}{\sqrt{-x^2+6x+16}}\overset{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad x=3,y=-4\,.$$

מצאני את הנקודות $P_1(2,-4),P_2(-2,-4),P_3(3,4),P_4=P_0(3,-4)$

נקודה	ערך של $f(x,y)$
$P_0(3,-4)$	5
$P_1(2,-4)$	$2\sqrt{6}$
$P_2(-2,-4)$	0
$P_3(3,4)$	לא בתחום ההגדרה
$A(2,4)$	לא בתחום ההגדרה
$B(-2,4)$	לא בתחום ההגדרה

תשובה סופית: $\max(f)=5$ בנקודה $P_0(3,-4)$, $\min(f)=0$ בנקודה $P_0(-2,-4)$.

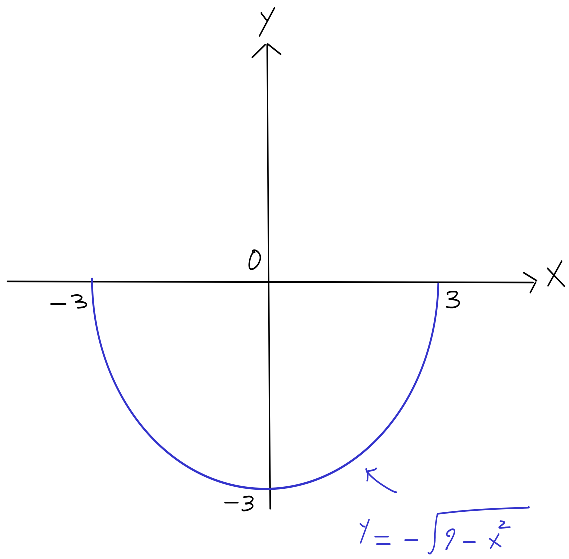
שאלה 2

שאלה 3 (16 נקודות)

א)

ב) **(12 נק')**

$$D=\{-3\le x\le 3\ ,-\sqrt{9-x^2}\le y\le 0\}$$



$$\int_{-3}^{3} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} dy\, e^{x^2+y^2} = \int_{-3}^{0} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{0} dx\, e^{x^2+y^2} + \int_{-3}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{9-y^2}} dx\, e^{x^2+y^2}$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{3} dr\, r\, e^{r^2} = \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{9} dt\, \frac{1}{2}\, e^{t} = \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \frac{1}{2}\left[e^9 - 1\right] = [\theta]_{\pi}^{2\pi}\, \frac{1}{2}\left[e^9 - 1\right] = \frac{\pi}{2}\left[e^9 - 1\right] .$$

ג) (4 נק') המשטח:

$$f(x,y,z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} - z .$$

$$\nabla f = \left(\frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, -1\right) .$$

$$\nabla f(1,2,2) = \left(\frac{-1}{2}, -1, -1\right) .$$

משוואת המישור המשיק למשטח:

$$-\frac{1}{2}(x-1) - (y-2) - (z-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 1 + 2y - 4 + 2z - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2y + z - 12 = 0 .$$

שאלה 4 (16 נקודות)

א)

ב) (8 נק')

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 dx \int_0^2 dy(4-x-y) \\
&= \int_0^2 dx \left[\frac{-(4-x-y)^2}{2}\right]_0^2 \\
&= \int_0^2 dx \left[\frac{-(2-x)^2+(4-x)^2}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 dx \,\left[(4-x)^2-(2-x)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{(4-x)^3}{3}+\frac{(2-x)^3}{3}\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{8}{3}+\frac{0}{3}+\frac{64}{3}-\frac{8}{3}\right] \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{48}{3}=8\ .
\end{aligned}
$$

ג) (4 נק')

ד) (4 נק')

שאלה 5

שאלה 6

שאלה 7

<u>שאלה 8</u> הסכום יהיה מינימלי כאשר P נמצא על הישר MN. הווקטור הכיוון של הישר הינו $\vec{a}=(16,-1,-5)$. המשוואת הישר הינה

$$l(t)=M+ta=(4,3,1)+t(16,-1,-5) \qquad \Rightarrow \qquad x=4+16t\ ,y=3-t\ ,z=1-5t\ ..$$

הנקודה P היא הנקודת חיתוך של הישר עם המישור $y=0$. נציב את משוואת הישר במשוואת המישור:

$$y=3-t=0 \quad \Rightarrow \quad t=3\ .$$

מכאן $P=l(t=3)=(52,0,-14)$.