שיעור 14
אינטגריה של שברים אלגבריים (פונקציות רציונליות)

הגדרה 14.1 פונקציה רציונלית

פונקציה רציונלית (שבר אלגברי) זאת פונקציה מהצורה

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} ,$$

כאשר $P(x)$, $Q(x)$ פולינומים.

דוגמה 14.1 פונקציה רציונלית

$f(x) = \dfrac{x^4 - 5x + 9}{x - 2}$ פונקציה רציונלית: $P(x) = x^4 - 5x + 9$ $Q(x) = x - 2$.

הגדרה 14.2 פונקציה רציונלית אמיתי

שבר אלגברי

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

נקרא אמיתי אם

$$\deg(P) < \deg(Q) .$$

אם שבר אלגברי לא אמיתי, יש לעשות חילוק פולינומים.

דוגמה 14.2 חילוק פולינומים

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} .$$

פתרון:

שלב ראשון בחישוב אינטגרל של שבר אלגברי לא אמיתי, להגיע לשבר אלגברי אמיתי ע"י חילוק פולינומים. ע"י חילוק ארוך:

שלב 1:

$$x-2 \overline{\big) \; x^4 \quad - 5x + 9}$$

שלב 2:

$$\begin{array}{r|l} & x^3 \\ \cline{2-2} x-2 & x^4 \qquad\qquad -5x+9 \\ & x^4 - 2x^3 \\ \cline{2-2} & \qquad 2x^3 \; -5x+9 \end{array}$$

שלב 3:

$$\begin{array}{r|l} & x^3 \; +2x^2 \\ \cline{2-2} x-2 & x^4 \qquad\qquad\quad -5x+9 \\ & x^4 - 2x^3 \\ \cline{2-2} & \qquad 2x^3 \qquad -5x+9 \end{array}$$

שלב 4:

$$\begin{array}{r|l} & x^3 \; +2x^2 \\ \cline{2-2} x-2 & x^4 \qquad\qquad\qquad -5x+9 \\ & x^4 - 2x^3 \\ \cline{2-2} & \qquad 2x^3 \qquad\quad -5x+9 \\ & \qquad 2x^3 \; -4x^2 \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad\quad 4x^2 - 5x+9 \end{array}$$

שלב 5:

$$\begin{array}{r|l} & x^3 \; +2x^2 \quad +4x \\ \cline{2-2} x-2 & x^4 \qquad\qquad\qquad -5x+9 \\ & x^4 - 2x^3 \\ \cline{2-2} & \qquad 2x^3 \qquad\quad -5x+9 \\ & \qquad 2x^3 \; -10x^2 \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad\quad 4x^2 \; -5x+9 \\ & \qquad\qquad\quad 4x^2 \; -8x \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad\qquad\quad 3x+9 \end{array}$$

שלב 6:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 \quad +2x^2 \quad +4x \ + \ 3 \\
\hline
x-2 & x^4 \qquad\qquad\qquad -5x+\ 9 \\
 & x^4 \ -2x^3 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 2x^3 \qquad\quad -5x+\ 9 \\
 & \qquad 2x^3 \ \ -10x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad 4x^2 \ -5x+\ 9 \\
 & \qquad\qquad\quad 4x^2 \ -8x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\quad 3x+\ 9 \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 3x-\ 6 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\ 15
\end{array}
$$

תשובה סופית:

$$\frac{x^4-5x+9}{x-2}=x^3+2x^2+4x+3+\frac{15}{x-2}$$

לכן

$$\int\frac{x^4-5x+9}{x-2}=\int\left(x^3+2x^2+4x+3+\frac{15}{x-2}\right)=\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+2x^2+3x+15\ln|x-2|+C\ .$$

ז"א שלב ראשון בחישוב אינטגרל של שבר אלגברי:

ע"י חילוק ארוך פולינומים להגיע לשבר אלגברי אמיתי. כל שבר אלגברי אמיתי ניתן להציג כסכום של שברים פשוטים. ■

יש 4 סוגים של שברים אלגבריים פשוטים:

שבר אלגברי			שבר פשוט
סוג 1:	$\frac{m}{x-a}$		
סוג 2:	$\frac{m}{(x-a)^2}$		
	$\frac{m}{(x-a)^n}$	$n \in \mathbb{N}\ , \quad n \geq 2$	
סוג 3:	$\frac{mx+n}{x^2+px+q}$		כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.
סוג 4:	$\frac{mx+b}{(x^2+px+q)^2}$		כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.
	$\frac{mx+b}{(x^2+px+q)^n}$	$n \in \mathbb{N}\ , \quad n \geq 2$	כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.

דוגמה 14.3 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-3x+1}$

פתרון:

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+1} = \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

$$A(x-2) + B(x-1) = 2x+1$$

$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad B = 5$$
$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad A = -3$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+1}dx = \int\left(\frac{-3}{x-1} + \frac{5}{x-2}\right)dx = -3\ln|x-1| + 5\ln|x-2| + C$$

■

דוגמה 14.4 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2}$

פתרון:

$$\frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x-3} \ .$$
$$A(x-3)^2 + B(x-2) + C(x-3)(x-2) = x^2+4$$

$$\begin{array}{lll} x=3 & \Rightarrow & B=13 \\ x=2 & \Rightarrow & A=8 \\ x=0 & \Rightarrow & 9A-2B+6C=4 \Rightarrow C=-7 \end{array}$$

$$\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2}\,dx = \int \left(\frac{8}{x-2} + \frac{13}{(x-3)^2} - \frac{7}{x-3}\right) dx = 8\ln|x-2| - \frac{13}{x-3} - 7\ln|x-3| + C \ .$$

■

דוגמה 14.5 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}$

פתרון:

$$\frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \ .$$
$$A(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1) + (Cx+D)x^2 = x^3+1$$

$$\begin{array}{ll} x^3: & B+C=1 \\ x^2: & A+D=0 \\ x: & B=0 \\ x^0: & A=1 \end{array}$$

לכן

$$D=-1 \ , \qquad C=1 \ .$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}\right) dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \arctan(x) + C \ .$$

■

דוגמה 14.6 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $I=\int \dfrac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}$

פתרון:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5}\ .$$
$$A(x^2-2x+5)+(Bx+C)(x-1)=2x^2-3x-3$$

$$\begin{aligned} x^2 :&\quad A+B=2\\ x :&\quad -2A+C-B=-3\\ x^0 :&\quad 5A-C=-3 \end{aligned}$$

לכן

$$A=-1\ ,\qquad B=3\ ,\qquad C=-2\ .$$

$$I=\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx=\int\left(-\frac{1}{x-1}+\frac{3x-2}{x^2-2x+5}\right)dx=-\ln|x-1|+\int\left(\frac{3x-2}{(x-1)^2+4}\right)dx\ .$$

נגדיר $u=x-1$:

$$\begin{aligned} I=&\ln|x-1|+\int\frac{3(u+1)-2}{u^2+4}du\\ =&\ln|x-1|+\int\frac{3(u+1)-2}{u^2+4}du\\ =&\ln|x-1|+3\int\frac{u}{u^2+4}du-\int\frac{1}{u^2+4}du\\ =&\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|u^2+4|-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u}{2}\right)\\ =&\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|(x-1)^2+4|-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) \end{aligned}$$

■

למה 14.1 שלבים באינטגרציה של שברים אלגבריים

<u>שלב 1.</u> לחלק במכנה (חילוק פולינומי) במידה ש $\deg(P)\geq\deg(Q)$.

<u>שלב 2.</u> להציב שבר אלגברי אמיתי כסכום של שברים פשוטים.

<u>שלב 3.</u> לבצע אינטגרציה של כל שבר פשוט.

דוגמה 14.7 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את $I=\int \dfrac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx$

פתרון:

שלב 1:

$$x^4+2x^3+2x^2\,\overline{\big)\,x^5\;+2x^3\;+4x+4}$$

שלב 2:

$$\begin{array}{r|l}
 & \;x \\ \cline{2-2}
x^4+2x^3+2x^2 & x^5\qquad\quad+2x^3\;\;+4x+4 \\
 & x^5+2x^4+2x^3 \\ \cline{2-2}
 & -2x^4\qquad\qquad+4x+4
\end{array}$$

שלב 3:

$$\begin{array}{r|l}
 & \;x-2 \\ \cline{2-2}
x^4+2x^3+2x^2 & x^5\qquad\quad+2x^3\qquad\quad+4x+4 \\
 & x^5+2x^4+2x^3 \\ \cline{2-2}
 & -2x^4\qquad\qquad\qquad+4x+4 \\
 & -2x^4-4x^3-4x^2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad 4x^3+4x^2+4x+4
\end{array}$$

לכן ע"י חילוק ארוך קיבלנו

$$\frac{x^5+2x+4x+4}{x^4+x^3+2x^2}=x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+4\left(\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}\right)$$

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

$$A(x^2+2x+2)+Bx(x^2+2x+2x)+(Cx+D)x^2=x^3+x^2+x+1$$

$$\begin{array}{ll}
x^3: & B+C=1 \\
x^2: & 2A+2B+D=1 \\
x: & 2A+2B=1 \\
x^0: & 2A=1
\end{array}$$

לכן

$$A=\frac{1}{2}\;,\qquad B=0\;,\qquad C=1\;,\qquad D=\frac{1}{2}\;.$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \left(x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x+2}{x^2+2x+2} \right) dx \\
&= \int \left(x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x+2}{(x+1)^2+1} \right) dx \\
&= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 4 \int \frac{x+\frac{1}{2}}{(x+1)^2+1} dx \ .
\end{aligned}$$

נגדיר $u = x + 1$:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 4 \int \frac{u - \frac{1}{2}}{u^2+1} du \\
&= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2 \ln |u^2+1| - 2 \arctan(u) + C \\
&= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2 \ln |(x+1)^2+1| - 2 \arctan(x+1) + C
\end{aligned}$$

■