המחלקה למדעי המחשב

_/_/_ _ _ תשפ"ה

__ : __ – __ : __

אלגברה לינארית 2 למדמ"ח

מועד מיוחד

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר, .

תשפ"ה סמסטר ב'

השאלון מכיל 6 עמודים (כולל עמוד זה).

בהצלחה!

===

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (3 עמודים בפורמט $A4$) מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- יש לרשום בראש המחברת איזה שאלות לבדוק.

===

שאלה 1 ערכים עצמיים וצורות ז'ורדן (25 נקודות)

א) (19 נק') נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. מצאו צורת ז'רדן J ומטריצה P הפיכה כך ש- $A = PJP^{-1}$.

ב) (3 נק') הוכיחו או הפריכו: אם $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה הפיכה ו- $\lambda \in \mathbb{R}$ ערך עצמי של B אזי $\frac{1}{\lambda}$ ערך עצמי של B^{-1}.

ג) (3 נק') הוכיחו או הפריכו: תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה בעלת פולינום אופייני $p_A(x)$ ופולינום מינימלי $m_A(x)$. אם $p_A(x) = m_A(x)$, אז הריבוי הגאומטרי של כל ערך עצמי של A הוא 1.

שאלה 2 מכפלות פנימיות (25 נקודות)

א) (15 נק')
נתון מרחב וקטורי $\mathbb{R}_3[x]$ (פולינומים מדרגה 3 לכל היותר) עם מכפלה פנימית אינטגרלית בקטע $[-1,1]$:

$$\langle p(x)\ ,\ q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx\ .$$

מצאו בסיס אורתוגונלי למרחב $U = \text{span}\left\{1-x\ ,\ 1+x\ ,\ 1-x^2\ ,\ 1+x^3\right\}$.

ב) (10 נק') יהי V מרחב מכפלה פנימית. הוכיחו:
יהיו $u_1,\ldots,u_n \in V$ וקטורים שונים מוקטור האפס אורתוגונליים אחד לשני. אזי $u_1,\ldots,u_n$ הם בלתי-תלויים ליניארי.
(רמז: אינדוקציה על n).

שאלה 3 משפט קיילי המילטון ופולינום המינימלי (25 נקודות)

תהי $A \neq 0$ מטריצה מסדר $n\times n$ מעל השדה $\mathbb{F}$ כך ש- $A^k = 0$ עבור שלם $k > 1$.

א) (5 נקודות) מהם הערכים העצמיים של המטריצה A? נמקו את תשובתכם.

ב) (10 נקודות) הוכיחו כי המטריצה $B = \alpha I - A$ הינה הפיכה לכל סקלר $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$.

ג) (10 נקודות) רשמו את ההופכית של המטריצה $B = I - A$ כפולינום במטריצה A.
(רמז: $1 - x^i = (1-x)(1+x+\ldots+x^{i-1})$ לכל $i \geq 1$.)

שאלה 4 אופרטור הצמוד (25 נקודות)

יהי V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית. הוכיחו או הפריכו את כל הטענות הבאות:

א) (5 נקודות)
אם $T: V \to V$ אופרטור אוניטרי אז לכל $u, w \in V$ מתקיים $\|u - w\| = \|T(u) - T(w)\|$.

ב) (5 נקודות)
אם $T: V \to V$ אופרטור נורמלי אז T צמוד לעצמו.

ג) (5 נקודות)
יהיו $T: V \to V$ ו- $S: V \to V$ אופרטורים. אם $ST = TS$ אזי האופרטור ST צמוד לעצמו.

ד) (5 נקודות)
לכל אופרטור $T: V \to V$ קיימים אופרטורים T_1 הרמיטי ו- T_2 אנטי-הרמיטי כך ש- $T = T_1 + T_2$.

ה) (5 נקודות)
אם $T: V \to V$ אופרטור לכסין ואורתוגונלי, אז $T^2 = Id$ כאשר Id הוא האופרטור הזהות.

שאלה 5 משפט הלכסון אוניטרי (25 נקודות)

א) (15 נקודות)
תהי $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. האם A לכסינה אוניטרית? אם כן מצאו D אלכסונית ו- Q אוניטרית כך ש- $A = QDQ^*$.

תהי $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה מסדר $n \times n$ מעל שדה $\mathbb{F}$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

ב) (5 נקודות)
אם B לכסינה אוניטרית אז B נורמלית.

ג) (5 נקודות)
אם B לכסינה אוניטרית ו- $f(x)$ פולינום אזי $f(B)$ לכסינה אוניטרית.

מרחב אוקלידי: מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$.

מרחב אוניטרי: מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$.

הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי V מעל $\mathbb{R}$:
לכל $u,\mathrm{v},w\in V$ ולכל סקלר $\lambda\in\mathbb{R}$:

1) <u>סימטריות:</u> $\langle u,\mathrm{v}\rangle=\langle \mathrm{v},u\rangle$

2) <u>ליניאריות:</u> $\langle u+\mathrm{v},w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle \mathrm{v},w\rangle$

$\langle \lambda u,\mathrm{v}\rangle=\lambda\langle u,\mathrm{v}\rangle$

3) <u>חיוביות:</u> $\langle u,u\rangle\geq 0.$

$\langle u,u\rangle=0 \quad\Leftrightarrow\quad u=0$

הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי V מעל $\mathbb{C}$:
לכל $u,\mathrm{v},w\in V$ ולכל סקלר $\lambda\in\mathbb{C}$:

1) <u>הרמיטיות:</u> $\langle u,\mathrm{v}\rangle=\overline{\langle \mathrm{v},u\rangle}$

2) <u>ליניאריות:</u> $\langle u+\mathrm{v},w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle \mathrm{v},w\rangle$

$\langle \lambda u,\mathrm{v}\rangle=\lambda\langle u,\mathrm{v}\rangle$

3) <u>חיוביות:</u> $\langle u,u\rangle\geq 0$

$\langle u,u\rangle=0 \quad\Leftrightarrow\quad u=0$

אי-שוויון קושי שוורץ: $|\langle u,\mathrm{v}\rangle|\leq\|u\|\cdot\|\mathrm{v}\|$

אי-שוויון המשולש: $\|u+\mathrm{v}\|\leq\|u\|+\|\mathrm{v}\|$

היטל אורתוגונלי של ווקטור v על תת מרחב בעל בסיס אורתוגונלי $u_1,\dots,u_n$:

$$P_U(\mathrm{v})=\frac{\langle \mathrm{v},u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1+\frac{\langle \mathrm{v},u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2+\cdots+\frac{\langle \mathrm{v},u_n\rangle}{\|u_n\|^2}u_n\ .$$

תהליך גרם שמידט לבניית בסיס אורתוגונלי:

$$\begin{aligned}
u_1 &=\mathrm{v}_1\ ,\\
u_2 &=\mathrm{v}_2-\frac{\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1\\
u_3 &=\mathrm{v}_3-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2\\
&\vdots\\
u_n &=\mathrm{v}_n-\frac{\langle \mathrm{v}_n,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{\langle \mathrm{v}_n,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2-\ldots-\frac{\langle \mathrm{v}_n,u_{n-1}\rangle}{\|u_{n-1}\|^2}u_{n-1}\ .
\end{aligned}$$

$\lambda \in \mathbb{F}$ **ערך עצמי** ו- $u \in \mathbb{F}^n$ **ווקטור עצמי** ($u \neq 0$) של מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ אם: $Au = \lambda u$

$\lambda \in \mathbb{F}$ **ערך עצמי** ו- $u \in V$ **ווקטור עצמי** ($u \neq 0$) של אופרטור $T : V \to V$ אם: $T(u) = \lambda u$

פולינום אופייני של מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$: $p_A(\lambda) = |\lambda I - A|$

מרחב עצמי של מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ששייך לערך עצמי λ הוא כל וקטור $u \in \mathbb{F}^n$ כאשר $u \neq 0$ כך ש:
$$Au = \lambda u \ .$$

מרחב עצמי של אופרטור $T : V \to V$ ששייך לערך עצמי λ הוא כל וקטור $u \in \mathbb{V}$ כאשר $u \neq 0$ כך ש:
$$T(u) = \lambda u \ .$$

בסיס אורתונורמלי:

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. בסיס אורתונורמלי, מסומן $\{b_1, \ldots, b_n\}$, מקיים את התנאי
$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \ , \qquad 1 \leq i, j \leq n \ .$$

כל וקטור $u \in V$ ניתן לרשום בבסיס אורתונורמלי:
$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, b_i \rangle \, b_i$$

סימון חלופי:
$$[u]_B = \begin{pmatrix} \langle u, b_1 \rangle \\ \langle u, b_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_i \rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_n \rangle \end{pmatrix}_B$$

יהי $T : V \to V$ אופרטור. המצרטיצה המייצגת על פי בסיס B היא
$$[T]_B = \begin{pmatrix} \langle T(b_1), b_1 \rangle & \langle T(b_2), b_1 \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_1 \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_1 \rangle \\ \langle T(b_1), b_2 \rangle & \langle T(b_2), b_2 \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_2 \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_i \rangle & \langle T(b_2), b_i \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_i \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_i \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_n \rangle & \langle T(b_2), b_n \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_n \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_n \rangle \end{pmatrix} \ .$$

כלומר האיבר ה- ij של המטריצה המייצגת של T על פי הבסיס B היא . $[T]_{ij} = \langle T(b_j), b_i \rangle$

ההגדרה של אופרטור הצמוד:

אם $T: V \to V$ אופרטור, ו- $u, w \in V$ שני וקטורים כלשהם של V, אזי האופרטור הצמוד של T מוגדר כך שמתקיים

(*1) $$\langle T(u), w \rangle = \langle u, T^*(w) \rangle \ .$$

מההגדרה (*1) נובע:

(*2) $$\langle T^*(u), w \rangle = \langle u, T(w) \rangle$$

נוסחה ל- $T(u)$ ו- $T^*(u)$ במונחי בסיס אורתונורמלי $\{b_1, \cdots, b_n\}$:

(*3) $$T(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(u), b_i \rangle \, b_i$$

(*4) $$T^*(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u, T(b_i) \rangle \, b_i$$

משפט:

(*5) $$T^{**} = T$$

משפט: המטריצה המייצגת של אופרטור צמוד T^* נתונה ע"י

(*6) $$[T^*] = [T]^*$$

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית.

A הרמיטית:	$A = A^*$
A אנטי-הרמיטית:	$A^* = -A$
A אוניטרית:	$AA^* = I = A^*A$
A אורתוגונלית :	$AA^t = I = A^tA$
A נורמלית:	$AA^* = A^*A$

יהי $T: V \to V$ אופרטור מעל מרחב וקטורי V. נסמן המטריצה המייצגת $A = [T]$.

T צמוד לעצמו:	$A = A^*$	$\Leftrightarrow$	$T = T^*$
T אנטי-הרמיטי:	$A^* = -A$	$\Leftrightarrow$	$T^* = -T$
T אוניטרי:	$AA^* = I = A^*A$	$\Leftrightarrow$	$TT^* = I_V = T^*T$
T נורמלי:	$AA^* = A^*A$	$\Leftrightarrow$	$TT^* = T^*T$

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה Q אוניטרית ומטריצה D אלכסונית כך ש:

$$A = QDQ^* \quad \Leftrightarrow \quad D = Q^*AQ \ .$$

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ לכסינה אורתוגונלית אם קיימת מטריצה P אורתוגונלית ומטריצה D אלכסונית כך ש:

$$A = PDP^t \quad \Leftrightarrow \quad D = P^tAP \ .$$

פתרונות

שאלה 1

א) (19 נק')

$$\begin{aligned}
p_A(x) =& |xI - A| \\
=& \begin{vmatrix} x-2 & -2 & -3 \\ -1 & x-3 & -3 \\ 1 & 2 & x+2 \end{vmatrix} \\
=& (x-2)\begin{vmatrix} x-3 & -3 \\ 2 & x+2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & x-3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
=& (x-2)\left(x^2-x\right) + 2(-x+1) - 3(-x+1) \\
=& x(x-2)(x-1) + (x-1) \\
=& (x(x-2)+1)(x-1) \\
=& \left(x^2-2x+1\right)(x-1) \\
=& (x-1)^2(x-1) \\
=& (x-1)^3 \ .
\end{aligned}$$

האפשרויות לפולינום המינימלי הן: $x-1$, $(x-1)^2$ ו- $(x-1)^3$.

- נבדוק $x-1$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \neq 0$$

- נבדוק $(x-1)^2$:

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

לכן הפולינום המינמלי הוא

$$m_A(x) = (x-1)^2 \ .$$

מכאן הצורת ז'רדן היא:

$$J = J_2(1) \oplus J_1(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

נחשב את המרחב עצמי של $\lambda = 1$:

$$\text{Nul}\,(A - I) \quad = \quad \text{Nul} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הפתרון הוא $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} z$ כאשר $y, z \in \mathbb{R}$. לכן המרחב עצמי של הערך עצמי $\lambda = 1$ הוא

$$V_1 = \text{span} \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נרשום וקטור עצמי כללי $\text{v} = \alpha u_1 + \beta u_2$ ונסמן את הוקטור העצמי המוכלל $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ו (פרישה של הבסיס של המרחב עצמי V_1). המשוואת הוקטור העצמי המוכלל היא

$$(A - I)w = \alpha u_1 + \beta u_2 \ , \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ .$$

המבנים של הצורת ז'רדן והמטריצה P של הבסיס ז'דן הם

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \text{v} & w & u_1 \\ | & | & | \end{pmatrix} \ ,$$

כאשר, עבור המטריצה J,

- בעמודה הראשונה יש את הוקטור העצמי v המובנה מפרישה של הבסיס V_1, בעמודה השנייה יש את הוקטור העצמי המוכלל w,
- ובעמודה השלישית עומד כל וקטור עצמי של $\lambda = 1$ אשר בת"ל ל- v. אנחנו בחרנו u_1.

המטירצה המורחבת של המשוואה $(A - I)w = \text{v}$ היא:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2\alpha - 3\beta \\ 1 & 2 & 3 & \alpha \\ -1 & -2 & -3 & \beta \end{array} \right) \quad \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2\alpha - 3\beta \\ 0 & 0 & 0 & 3\alpha + 3\beta \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha - 2\beta \end{array} \right)$$

קיים פתרון אם ורק אם $\beta=-\alpha$. אחרי ההצבה של $\beta=-\alpha$ נקבל את המערכת הבאה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

הפתרון הוא

$$w=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha-2s-3t\\ s\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}s+\begin{pmatrix} -3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}t$$

כאשר $t,s,\alpha\in\mathbb{R}$. נבחר $\alpha=1,t=0,s=0$ ונקבל את הפתרון הבא לוקטור העצמי המוכלל:

$$w=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \ .$$

הוקטור עצמי עצמו הוא

$$\mathrm{v}=\alpha u_1+\beta u_2 \overset{\alpha=1,\beta=-\alpha=-1}{=} \begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ -1\end{pmatrix} \ .$$

לכן

$$J=J_2(1)\oplus J_1(1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \ , \qquad P=\begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathrm{v} & w & u_1 \\ | & | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix} \ .$$

ב) (3 נק') הטענה נכונה.

אם λ ערך עצמי של B אז קיים וקטור $u\neq 0$ כך ש- $Bu=\lambda u$.

B הפיכה לכן קיימת $B^{-1}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ עבורה $B^{-1}B=I$, לכן:

$$B^{-1}Bu=\lambda B^{-1}u \quad\Rightarrow\quad \lambda B^{-1}u=u \ .$$

B הפיכה לכן $\lambda\neq 0$ לכן ההופכי של λ, כלומר $\frac{1}{\lambda}$ קיים. לכן:

$$\lambda B^{-1}u=u \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\lambda}\lambda B^{-1}u=\frac{1}{\lambda}u \quad\Rightarrow\quad B^{-1}u=\frac{1}{\lambda}u \ .$$

לכן $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של B^{-1}.

ג) (3 נק') הטענה נכונה.
נניח ש: $p_A(x) = (x-\lambda_1)^{n_1} \quad \cdots \quad (x-\lambda_k)^{n_k}$.
לכן $p_A(x) = m_A(x)$

$$p_A(x) = (x-\lambda_1)^{n_1} \quad \cdots \quad (x-\lambda_k)^{n_k} = m_A(x) \ .$$

לכל ערך עצמי λ_i ($1 \leq i \leq k$), האינדקס של הבלוק הראשון שווה להריבוי בפולינום המינימלי, n_i, והסכום של האינדקסים שווה להריבוי בפולינום האופייני, אשר הוא n_i.
לכן לכל ערך עצמי יש בלוק ז'ורדן 1 בצורת ז'ורדן של A:

$$J_A = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus \quad \cdots \quad J_{n_k}(\lambda_k) = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

הריבוי הגאומרטי של כל ערך עצמי שווה לכמות הבלוקים של כל ערך עצמי.
לכל ערך עצמי יש בדיוק בלוק אחד לכן הריבוי הגאומטרי של כל ערך עצמי הוא 1.

שאלה 2

א) (15 נק') נסמן

$$\mathrm{v}_1 = 1-x \ , \quad \mathrm{v}_2 = 1+x \ , \quad \mathrm{v}_3 = 1-x^2 \ , \quad \mathrm{v}_4 = 1+x^3 \ .$$

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = 1-x \ .$$

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \ .$$

$$\|u_1\|^2 = \int_{-1}^{1} dx\, (1-x)^2 = \left[\frac{(1-x)^3}{-3} \right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3} \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2, u_1 \rangle = \int_{-1}^{1} dx\, (1+x)(1-x) = \int_{-1}^{1} dx\, (1-x^2) = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3} \ .$$

לכן

$$u_2 = 1 + x - \frac{1}{2}(1-x) = \frac{1+3x}{2} \ .$$

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \ .$$

$$\|u_2\|^2 = \int_{-1}^{1} dx\, \left(\frac{1+3x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{(1+3x)^3}{9} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{36} \left[64 + 8 \right] = 2 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} dx\left(1-x^2\right)(1-x) = \int_{-1}^{1} dx\left(1-x-x^2+x^3\right) = \left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx\left(1-x^2\right)(1+3x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx\left(1+3x-x^2-3x^3\right) = \frac{1}{2}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\ .$$

לפיכך

$$u_3 = 1-x^2-\frac{1}{2}(1-x)-\frac{1}{3}\left(\frac{1+3x}{2}\right) = \frac{1}{3}-x^2\ .$$

$$u_4 = \mathrm{v}_4 - \frac{\langle \mathrm{v}_4, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_4, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_4, u_3\rangle}{\|u_2\|^2}u_3\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_4, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} dx\,(1+x^3)(1-x) = \int_{-1}^{1} dx\ \left(1-x+x^3-x^4\right) = \left[x-\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{5}\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_4, u_2\rangle = \int_{-1}^{1} dx\ \left(1+x^3\right)\left(\frac{1+3x}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx\ \left(1+3x+x^3+3x^4\right) = \frac{1}{2}\left[x+\frac{3x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{5}\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_4, u_3\rangle = \int_{-1}^{1} dx\ \left(1+x^3\right)\left(\frac{1}{3}-x^2\right) = \int_{-1}^{1} dx\ \left(\frac{1}{3}+\frac{x^3}{3}-x^2-x^5\right) = \left[\frac{x}{3}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 0\ .$$

לכן:

$$u_4 = 1+x^3-\frac{3}{5}(1-x)-\frac{4}{5}\left(\frac{1+3x}{2}\right) = x^3-\frac{3}{5}x\ .$$

ב) (10 נק')

<u>שלב הבסיס: $n=2$</u>

יהיו u_1, u_2 וקטורים אורתוגונליים. ז"א $\langle u_1, u_2\rangle = 0$. יהיו α_1, α_2 סקלרים.
נוכיח כי הצירוף הלינארי $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ שווה לוקטור האפס אם ורק אם $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$:
נניח כי

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0. \qquad (*)$$

נקח את המכפלה הפנימית של שני האגפים של (*) עם הוקטור u_1 ואז נקבל

$$\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, u_1\rangle = \langle 0, u_1\rangle = 0$$

ניעזר בתכונת הליניאריות של המכפלה פנימית כדי להרחיב את האגף השמאול ונקבל:

$$\alpha_1 \langle u_1, u_1 \rangle + \alpha_2 \langle u_2, u_1 \rangle = 0 \ .$$

נציב את $\langle u_2, u_1 \rangle = 0$ (מכיוון ש- u_1, u_2 הם אורתוגונליים) ואז נשארת את המשוואה הבאה:

$$\alpha_1 \langle u_1, u_1 \rangle = 0 \ .$$

נתון לנו ש- $u_1 \neq 0$. לכן, לפי התכונת החיוביות של כל מכפלה פנימית, $\langle u_1, u_1 \rangle \neq 0$. לכן בהכרח $\alpha_1 = 0$.

כעת נציב $\alpha_1 = 0$ ב- (*) ואז נקבל:

$$\alpha_2 u_2 = 0. \qquad (**)$$

נתון לנו ש- $u_2 \neq 0$. לכן $\alpha_2 = 0$.

הוכחנו כי (*) מתקיים אם ורק אם $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ לכן הוקטורים בלתי תלויים ליניארית.

<u>שלב המעבר</u>

נניח כי הטענה מתקיימת עבור k וקטורים, ז"א עבור כל קבוצת וקטורים שונים מוקטור האפס, $u_1, \ldots, u_k$, אם הם אורתוגונליים אזי הם בלתי תלויים ליניארית.
זאת מהווה ההנחת האינדוקציה שלנו.
אזי נוכיח את הטענה עבור $k+1$ וקטורים.

נניח כי $u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}$ אורתוגונליים. יהיו $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$ סקלרים ונניח כי הצירוף ליניארי הבא שווה לוקטור האפס:

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k + \alpha_{k+1} u_{k+1} = 0 \qquad (\#)$$

נקח את המכפלה הפנימית של שני האגפים של (#) עם הוקטור u_{k+1} ונקבל

$$\langle \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k + \alpha_{k+1} u_{k+1}, u_{k+1} \rangle = 0 \ .$$

ניעזר בהתכונת הליניאריות של המכפלה הפנימית כדי להרחיב את האגף השמאול ונקבל

$$\alpha_1 \langle u_1, u_{k+1} \rangle + \ldots + \alpha_k \langle u_k, u_{k+1} \rangle + \alpha_{k+1} \langle u_{k+1}, u_{k+1} \rangle = 0 \ . \qquad (\#\#)$$

הוקטורים אורתוגונליים לכן $\langle u_i, u_{k+1} \rangle = 0$ ($i \neq k+1$) לכן, אחרי להוריד את כל המכפלות הפנימיות במשוואה (##), נקבל

$$\alpha_{k+1} \langle u_{k+1}, u_{k+1} \rangle = 0 \ .$$

לפי התכונת החיוביות, מכיוון ש- $u_{k+1} \neq 0$ אזי $\langle u_{k+1}, u_{k+1} \rangle \neq 0$ לכן בהכרח $\alpha_{k+1} = 0$.

כעת נציב $\alpha_{k+1}=0$ במשוואה (#) ונקבל:

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k = 0 \qquad (\#\#\#)$$

לפי ההנחת האינדוקציה, כל קבוצת k וקטורים אורתוגונליים הם בלתי תלויים ליניארית, לכן (###) מתקיים אם ורק אם $\alpha_1=\cdots=\alpha_k=0$.

הוכחנו כי (#) מתקיים אם ורק אם $\alpha_1=\cdots=\alpha_k=\alpha_{k+1}=0$ לכן הקבוצת $k+1$ וקטורים הם בלתי-תלויים ליניארית.

שאלה 3

שאלה 4

א) (5 נקודות)
הטענה נכונה.

$$\begin{aligned}
\|T(u)-T(w)\|^2 &= \|T(u-w)\|^2 && \text{(תכונת הלינאריות של אופטור } T\text{)}\\
&= \langle T(u-w), T(u-w)\rangle && \text{(ההגדרתה של הנורמה)}\\
&= \langle u-w, T^*T(u-w)\rangle && \text{(ההגדרה של האופרטור הצמוד)}\\
&= \langle u-w, Id(u-w)\rangle && (T \text{ אוניטרי})\\
&= \langle u-w, u-w\rangle\\
&= \|u-w\|^2
\end{aligned}$$

ב) (5 נקודות)
הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ האופרטור הבא:

$$T(u)=Au\ , \qquad A=\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\ .$$

$A^*=\begin{pmatrix} -i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$. לכן

$$AA^*=\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ , \qquad A^*A=\begin{pmatrix} -i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

לסיכום $AA^*=I=A^*A$ לכן T נורמלי אבל $A^*\neq A$ לכן T לא צמוד לעצמו.

ג) (5 נקודות)

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$[T] = I \ , \qquad [S] = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \ .$$

מתקיים $[S][T] = [T][S]$ לכן $ST = TS$.

מצד שני, $[ST] = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ לכן $[ST]^* = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \neq [ST]$ לכן $(ST)^* \neq ST$ לכן ST לא צמוד לעצמו.

ד) (5 נקודות)

הטענה נכונה. לכל $T : V \to V$ מתקיים

$$T = \frac{T+T^*}{2} + \frac{T-T^*}{2} = T_1 + T_2$$

כאשר $T_1 := \frac{T+T^*}{2}$ ו- $T_2 := \frac{T-T^*}{2}$. מתקיים:

$$T_1^* = \frac{T^*+T}{2} = T_1 \ , \qquad T_2^* = \frac{T^*-T}{2} = -T_2 \ ,$$

ז"א T_1 הרמיטי ו- T_2 אנטי-הרמיטי.

ה) (5 נקודות)

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

הופרטור $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ המוגדר:

$$T(u) = Ru \ , \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

R אורתוגונלי:

$$RR^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

בנוסף הערכים העצממים של R הם $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ אשר הם שונים לכן T לכסין.

אבל $R^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq I$ לכן $T^2 \neq Id$.

שאלה 5

א) (15 נקודות)

הפולינום האופייני הוא

$$\begin{aligned}p_A(x) =&|xI-A|\\ =&\begin{vmatrix} x & -1 & 0\\ -i & x & -i\\ 0 & -1 & x\end{vmatrix}\\ =&x\left(x^2-i\right)+(-ix)\\ =&x^3-ix-ix\\ =&x\left(x^2-2i\right)\\ =&x\left(x+(1+i)\right)\left(x-(1+i)\right)\end{aligned}$$

הערכים העצמיים הם:
$\lambda=0$ מריבוי אלגברי 1,
$\lambda=1+i$ מריבוי אלגברי 1,
$\lambda=-1-i$ מריבוי אלגברי 1.

<u>מרחב עצמי של $\lambda=0$</u>

$$\text{Nul}\,(A) = \text{Nul}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ i & 0 & i\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} i & 0 & i\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to -iR_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$V_0=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda = 1+i$</u>

$$\text{Nul}\left(A-(1+i)I\right) = \text{Nul}\begin{pmatrix} -1-i & 1 & 0 \\ i & -1-i & i \\ 0 & 1 & -1-i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to(-1+i)R_1} \begin{pmatrix} 2 & -1+i & 0 \\ i & -1-i & i \\ 0 & 1 & -1-i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to 2R_2-iR_1} \begin{pmatrix} 2 & -1+i & 0 \\ 0 & -1-i & 2i \\ 0 & 1 & -1-i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to(-1-i)R_3-R_2} \begin{pmatrix} 2 & -1+i & 0 \\ 0 & -1-i & 2i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to(-1-i)R_1-(-1+i)R_2} \begin{pmatrix} -2-2i & 0 & 2+2i \\ 0 & -1-i & 2i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to \frac{1}{2(1+i)}R_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1-i & 2i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{1+i} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

מרחב עצמי של $\lambda = -(1+i)$

$$\text{Nul}\left(A+(1+i)I\right) = \text{Nul}\begin{pmatrix} 1+i & 1 & 0 \\ i & 1+i & i \\ 0 & 1 & 1+i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to(1-i)R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1-i & 0 \\ i & 1+i & i \\ 0 & 1 & 1+i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to 2R_2-iR_1} \begin{pmatrix} 2 & 1-i & 0 \\ 0 & 1+i & 2i \\ 0 & 1 & 1+i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to(1+i)R_3-R_2} \begin{pmatrix} 2 & 1-i & 0 \\ 0 & 1+i & 2i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to(1+i)R_1-(1-i)R_2} \begin{pmatrix} 2+2i & 0 & -2-2i \\ 0 & 1+i & 2i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{2(1+i)}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1+i & 2i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{-1-i} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

כל הערכים העצמיים שונים לכן הוקטורים העצמיים מהווים בסיס אורתגונלי:

$$\left\{u_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad u_{1+i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad u_{1-i} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \\ 1 \end{pmatrix}\right\} .$$

נבנה בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{\hat{u}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad \hat{u}_{1+i} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad \hat{u}_{1-i} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \\ 1 \end{pmatrix}\right\} .$$

לפיכך

$$A = QDQ^* \,, \qquad Q = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \hat{u}_0 & \hat{u}_{1+i} & \hat{u}_{-1-i} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{-1-i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \,, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & -1-i \end{pmatrix} .$$

ב) (5 נקודות)
הטענה נכונה. אם B לכסינה אוניטרית אז קיימת Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $B = QDQ^*$. לכן:

$$BB^* = QDQ^*(QDQ^*)^* = QDQ^*QD^*Q^* = QDD^*Q^*$$

ו-

$$B^*B = (QDQ^*)^*QDQ^* = QD^*Q^*QDQ^* = QD^*DQ^* = QDD^*Q^* = BB^*$$

כאשר במעבר לפני המעבר האחרון: $DD^* = D^*D$ בגלל ש- D ו- D^* מטריצות אלכסוניות. הוכחנו כי $BB^* = B^*B$ ז"א B נורמלית.

ג) (5 נקודות)
B לכסינה אוניטרית לכן קיימת Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $B = QDQ^*$. לכן

$$f(B) = f(QDQ^*) = Qf(D)Q^* \ .$$

$f(D)$ אלכסונית ו- Q אוניטרית, לכן $f(B)$ לכסינה אוניטרית.