

שיעור 3

מכונות טיורינג מרובת סרטים

1.3. מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה היוריסטית

מכונת טיורינג מרובת סרטים (מטמ"ס) היא הכללה של מ"ט עם סרט יחיד. ההבדל הוא של מטמ"ס ישנו מספר סופי של סרטים, נניח $k > 1$ סרטים.



- לכל סרט יש ראש שלו.
- בתחילת העבודה הקלט w כתוב בתחילת הסרט הראשון וכל הסרטים ריקים. הראשים בכל סרט מוצבאים על התא הראשון הסרט, והמכונה נמצאת במצב התחלתי q_0 .
- בכל צעד חישוב, לפי המצב הנוכחי ול- k התווים שמתוחת לו- k הראשים, המכונה מחליט לאיזה מצב לעבור, מה לכתוב מתחת לכל אחד מ- k הראשים ולאן להזיא את הראש בכל אחד מ- k הסרטים.
- הראשים של הסרטים יכולים לזרז באופן בלתי- תלוי בהתאם לפונקציית המעברים של המטמ"ס.

2. מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה פורמלית

הגדרה 3.1 מכונת טיורינג מרובת סרטים

מכונת טיורינג מרובת סרטים היא שבייעיה:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}$ מוגדרים כמו מ"ט עם סרט יחיד (ראו הגדרה 1.2).
ההבדל היחידי בין מ"ט עם סרט יחיד לבין מטב"ס הוא הפונקציית המעברים. עבור מטמ"ס הפונקציית המעברים היא מצויה הבא:

$$\delta_k : (Q \setminus \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$$

דוגמה 3.1

$$\delta_k \left(q, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left(p, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \\ L \end{pmatrix} \right).$$

3.3 קונפיגורציה של מכונה טיורינג מרובת סרטיים

הכללה של קונפיגורציה של מ"ט עם סרט יחיד:

$$\begin{pmatrix} u_1 q \ v_1 \\ u_2 q \ v_2 \\ \vdots \\ u_k q \ v_k \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.2

בנו מטמ"ס שמכריעת את השפה:

$$L_{w^R} = \{ w = \{a, b\}^* \mid w = w^R \}.$$

כלומר שפת הפלינדרומים.

פתרון:

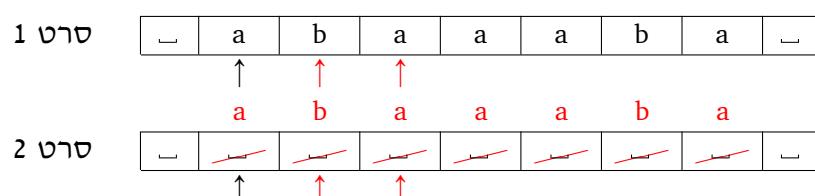
בנייה מ"ט עם שני סרטיים:

תאואר המכונה:

נסמן M_2 המ"ט עם 2 סרטיים שמכריעת את השפה L_{w^R} .

על הקלט $w = M_2$:

(1) מעתיקת את w לסרט 2.



(2) מזיהה את הראש בشرط 1 לתו הראשון ב- w ואת הראש בشرط 2 לתו האחרון ב- w .

(3) משווה בין התווים שמתוחת לראשים:

- אם התו שמתוחת לראש 1 הוא $__$

$$\text{.acc} \Leftarrow$$

- אם התווים שמתוחת לראשים שונים $\text{.rej} \Leftarrow$

- אחרת מזיהה את הראש בشرط 1 ימינה ואת הראש בشرط 2 שמאליה, וחוזרת לשלב (3).

הfonקציית המעברים של M_2 היא:

$$\delta\left(q_0, \begin{pmatrix} a \\ __ \end{pmatrix}\right) = \left(q_0, \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}\right),$$

$$\delta\left(q_0, \begin{pmatrix} b \\ __ \end{pmatrix}\right) = \left(q_0, \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}\right),$$

$$\delta\left(q_0, \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}\right) = \left(q_{\text{back}}, \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ S \end{pmatrix}\right),$$

$$\delta\left(q_0, \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}\right) = \left(q_{\text{back}}, \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ S \end{pmatrix}\right),$$

$$\delta\left(q_{\text{back}}, \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}\right) = \left(q_{\text{check}}, \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}\right),$$

$$\delta\left(q_{\text{check}}, \begin{pmatrix} \sigma \\ \sigma \end{pmatrix}\right) = \left(q_{\text{check}}, \begin{pmatrix} \sigma \\ \sigma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ L \end{pmatrix}\right),$$

$$\delta\left(q_{\text{check}}, \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix}\right) = \left(q_{\text{rej}}, \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S \\ S \end{pmatrix}\right),$$

$$\delta\left(q_{\text{check}}, \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}\right) = \left(q_{\text{acc}}, \begin{pmatrix} __ \\ __ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S \\ S \end{pmatrix}\right).$$

נשים לב כי הסיבוכיות זמן של המcona עם שני סרטים, M_2 היא $O(|w|)$, כאשר w האורך של המילה.

כעת נבנה מ"ט עם סרט ייחיד שמכריעת את השפה L_{W^R} .

תאור המcona:

נסמן M_1 המcona עם סרט ייחיד שמכריעת את השפה L_{w^R}

על הקלט $w = M_1$

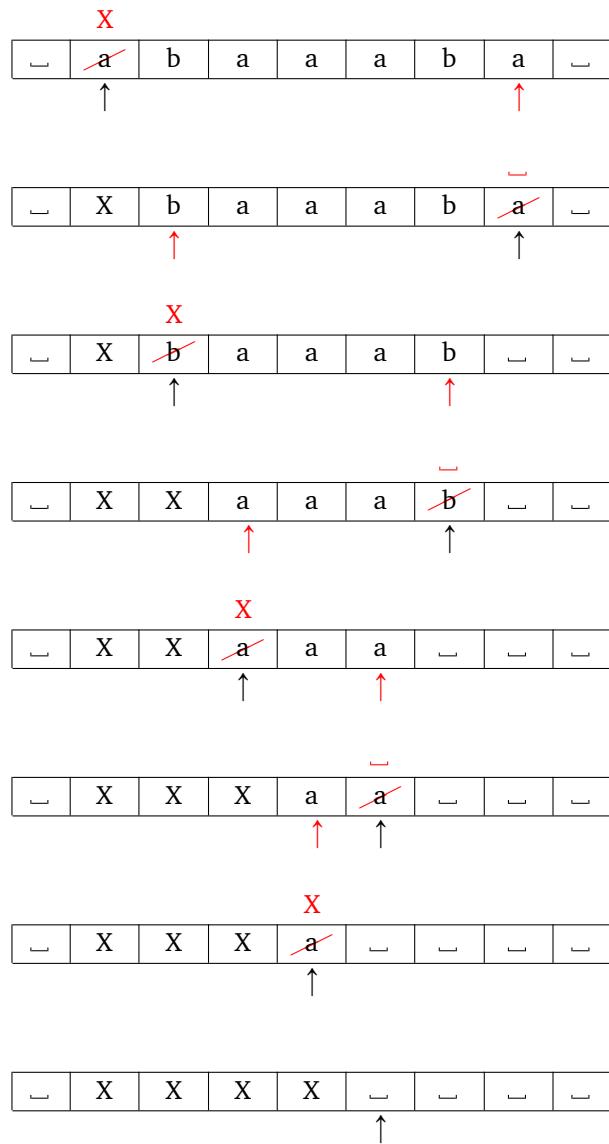
(1) אם התו שמתוחת לראש הוא $__$ אז $.acc \leftarrow M_1$

(2) זוכרת את התו שמתוחת לראש ומוחקתו אותו ע"י X .

(3) מזיהה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאל ל- $__$.

• אם התו שמתוחת לראש הוא X $.acc \Leftarrow X$

- אם הトー שונה מהתו שזכורנו $\Leftarrow \text{ rej}$.
- מוחקמת את הトー שמתוחת בראש ע"י $_$, מזיהה את הראש שמאלוה עד הトー הראשון מימין לו $- X$ וחזרה לשלב (1).



3.4 שיקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

מ"ט עם סרט יחיד היא מקרה פרטי של מטמ"ס.

משפט 3.1 שיקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

לכל מטמ"ס M קיימת מ"ט עם סרט יחיד M' השקולה לו M .

כלומר, לכל קלט $w \in \Sigma^*$:

- אם M מקבלת את w $\Leftarrow M'$ מקבלת את w .
- אם M דוחה את w $\Leftarrow M'$ דוחה את w .
- אם M לא עוצרת על w $\Leftarrow M'$ לא עוצרת על w .

הוכחה:

בhinint מטמ"ס $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q'_0, q'_{acc}, q'_{rej})$ עם k סרטים, נבנה מ"ט עם סרט יחיד $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ שהskolla ל- M באופן הבא:

רעיון הבנייה:

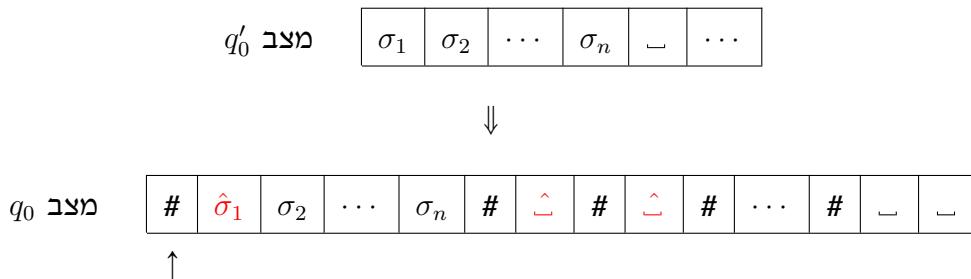
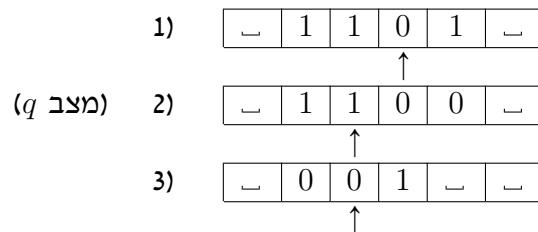
בhinint קלט M' , $w \in \Sigma^*$ תבצע "סימולציה" של ריצה M על w .

 M -ב M' -ב

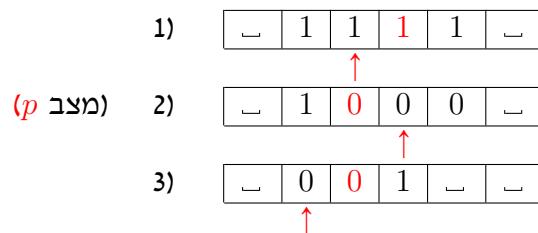
- M' תשמור את התוכן של k הסרטים של M על הסרט, רק שההתוכן של סרט i יופיע בין $\#_i$ ל- $\#_{i+1}$.
- M' תשמור את המיקום של הראשיים של M ע"י הכפלת הא"ב Γ .
כלומר, לכל אות $\alpha \in \Sigma$, M' תשמור שתי אותיות α ו- $\hat{\alpha}$ ב- Γ' , כך ש- $\hat{\alpha}$ תסמן את התו שמתוחת בראש בכל סרט.
- בכל צעד חישוב, M' סורקת את הסרט שלה משמאלי לيمין כדי ללמידה מהם התווים שמתוחת בראשים (התווים שמשמעותם ב- $\hat{\alpha}$).
- M' משתמש בפונקציית המעברים δ_k של M כדי לחשב את המעבר הבא.
- M' סורקת את הסרט שלה משמאלי לימין כדי לעדכן את הסרטים ואת המיקום הראשיים בהם.

תאור הבנייה של M' :**1) שלב האיתחול**

בhinint קלט M' , $w = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$ מתחילה את הקונFIGורציה ההתחלתית של M על הסרט שלה.

M -ב M' -ב(2) תאור צעד חישוב של M M -ב

$$\delta_k \left(q, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left(p, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ R \\ L \end{pmatrix} \right)$$



ב- M'

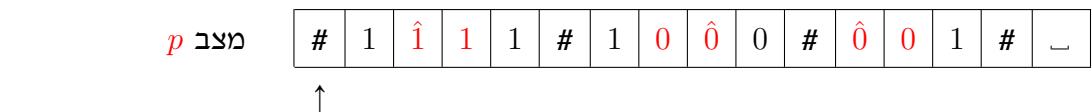
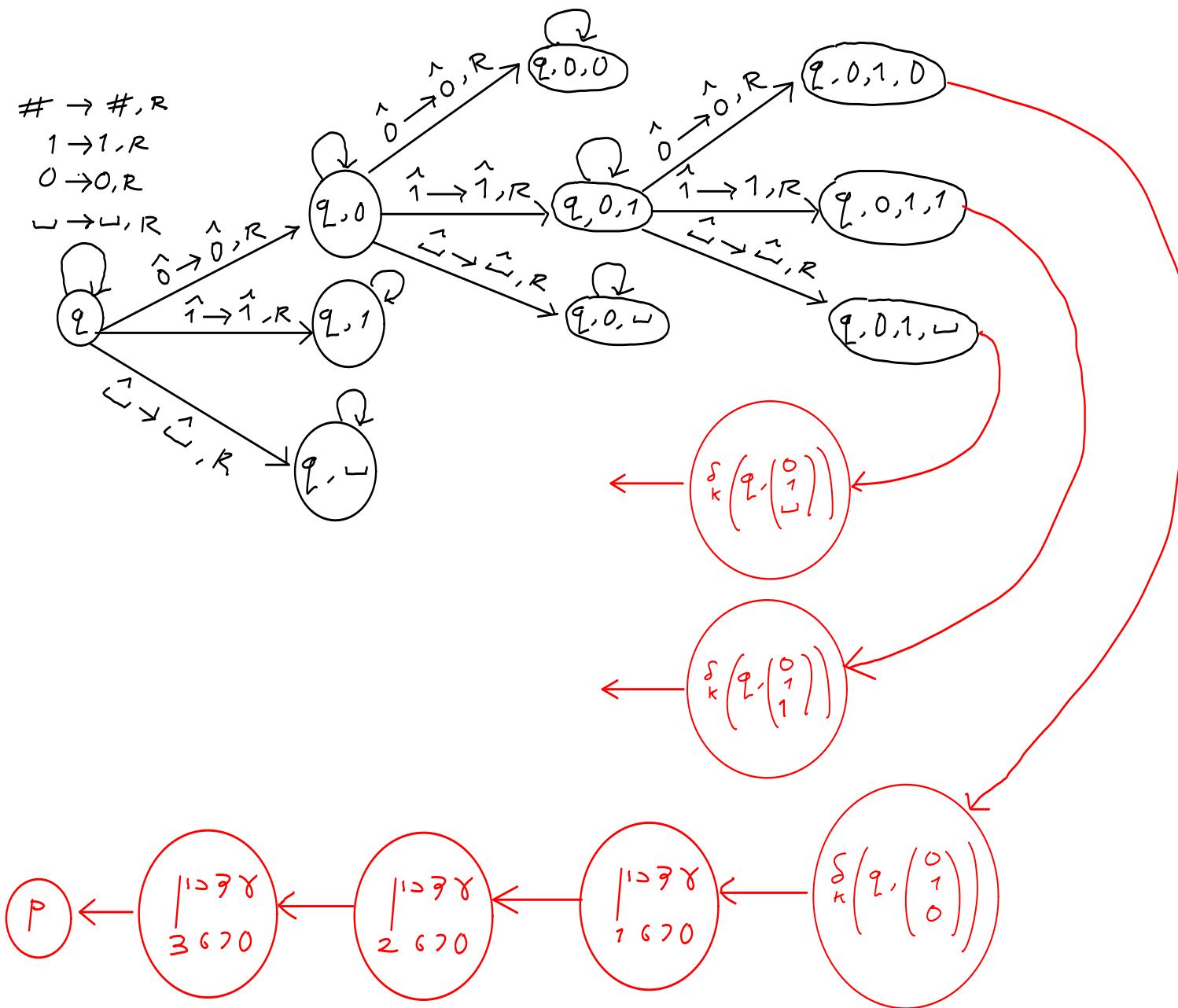
↓

- איסוף מידע
 - M' סורקת את הסרט שלה משמאלי לימיון ומזהה את התווים שמסומנים ב- \hat{a} . מידע זה ניתן לשמר במצבים. לדוגמה:

$$q, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

זה אפשרי מכיוון שמספר המצבים הנדרש הוא סופי:

$$|Q| \times |\Gamma|^k$$



• עדכון הסרטים

- אם בכלל שלב M מזיהה אחד מן הראשים הויירוטואליים ימינה אל סימן ה- #, פעולה זו מציינית שמקונת M הזיהה את הראש המתאים אל החלק הריק שטרם נקרא של הסרט. لكن M כותבתתו על המשבצת הזו ומזיהה את כל התוכן של הסרט בין התא הזה לבין ה- # הימני ביותר בתחום אחד ימינה. לאחר מכן ממשיכת את הסימולציה כרגע.