

פתרונות

חישוביות וסיבוכיות

מועד א'

פתרון לדוגמא

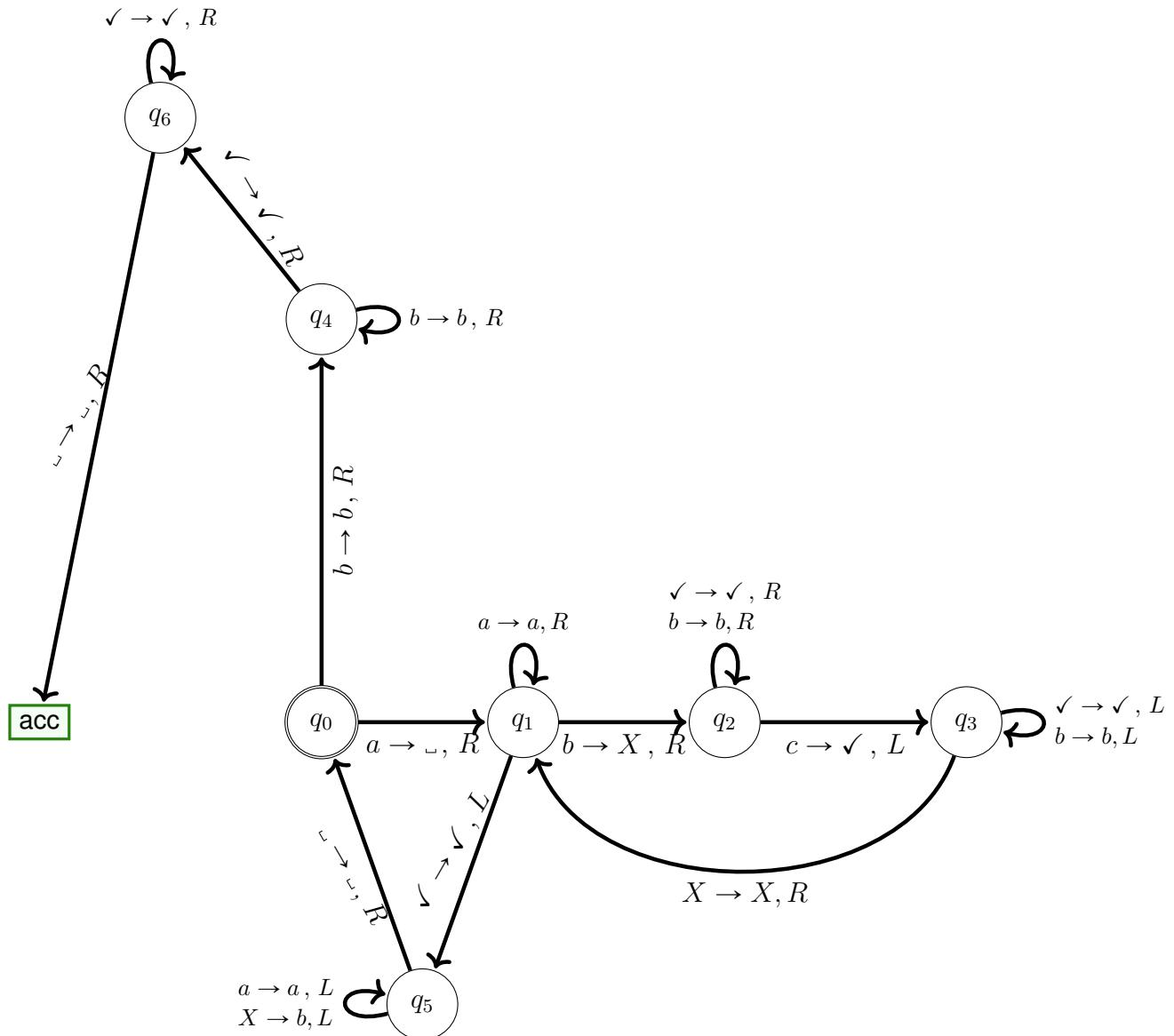
ד"ר יוחאי טויטו, ד"ר ירמייהו מילר,

סמסטר א', תשפ"ה'

מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הין פתרונות לדוגמא. ניתן לפתרו חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

שאלה 1: מכונת טיריניג 20 נקודות

סעיף א'



פתרונות

סעיף ב' הפונקציה שאותה המכונה מחשבת היא הפונקציה:

$$f(x) = x \mod 3 .$$

כלומר, המכונה מחשבת את שארית החלוקת ב- 3 של המספר האונרי הנutanן קלט.

סעיף ג' הפונקציה שאותה המכונה מחשבת היא הפונקציה:

$$f(1^i \# 1^j) = 1^{|i-j|} .$$

כלומר, המכונה מחשבת את הערך המוחלט של ההפרש בין שני מספרים $1^i, 1^j$, הנתונים בקלט. הסבר:

$$q_0 1\#1 \vdash q_1\#1 \vdash_* \#1q_1 \vdash \#q_21 \vdash_* q_{\text{back}} \leftarrow \# \vdash q_0\# \vdash \text{acc} .$$

לכן $f(1\#1) = 0$

$$\begin{aligned} q_0 11\#1 \vdash q_1 1\#1 \vdash_* 1\#1q_1 \vdash 1\#q_21 \vdash_* q_{\text{back}} \leftarrow 1\# \vdash q_0 1\# \\ \vdash q_1 \# \vdash \#q_1 \leftarrow \vdash q_2 \# \leftarrow \vdash q_4 \leftarrow 1 \vdash \leftarrow \text{acc} 1 \end{aligned}$$

לכן $f(11\#1) = 1$

נסתכל על קלט כללי $1^i \# 1^j$ כאשר $j \geq i$:

$$\begin{aligned} q_0 1^i \# 1^j \vdash_* 1^{i-1} \# q_1 1^j \vdash_* 1^{i-1} \# 1^j q_1 \leftarrow \vdash 1^{i-1} \# 1^{j-1} q_2 1 \vdash 1^{i-1} \# 1^{j-2} q_{\text{back}} 1 \leftarrow \\ \vdash_* q_{\text{back}} \leftarrow 1^{i-1} \# 1^{j-1} \vdash q_0 1^{i-1} \# 1^{j-1} \\ \vdots \\ \vdash_* q_0 1^{i-j} \# \leftarrow \vdash_* 1^{i-j-1} \# q_1 \leftarrow \vdash 1^{i-j-1} q_2 \# \vdash 1^{i-j-2} q_4 11 \vdash_* q_4 \leftarrow 1^{i-j} \\ \vdash \text{acc} 1^{i-j} \end{aligned}$$

לכן

$$f(1^i \# 1^j) = 1^{i-j}, \quad i \geq j . \tag{*1}$$

נסתכל על קלט כללי $1^i \# 1^j$ כאשר $j < i$:

$$\begin{aligned}
 q_0 1^i \# 1^j &\vdash_* 1^{i-1} \# q_1 1^j & \vdash_* 1^{i-1} \# 1^j q_1 \sqsubset & \vdash 1^{i-1} \# 1^{j-1} q_2 1 \vdash 1^{i-1} \# 1^{j-2} q_{\text{back}} 1 \sqsubset \\
 &\vdash_* q_{\text{back}} \sqsubset 1^{i-1} \# 1^{j-1} \vdash q_0 1^{i-1} \# 1^{j-1} \\
 &\vdots \\
 &\vdash_* q_0 \# 1^{j-i} \sqsubset & \vdash \text{acc } 1^{j-i} \sqsubset
 \end{aligned}$$

לכן

$$f(1^i \# 1^j) = 1^{j-i}, \quad i < j. \quad (*2)$$

המשוואות (*1) ו(*2) אומורות ש:

$$f(1^i \# 1^j) = 1^{|i-j|}. \quad (*3)$$

שאלה 2: וריאציות על מבנות טיריניג 20 נקודות

כיוון ראשון: לכל מכונה ממודול OR קיימת מכונה שקולת ממודול TS

תהי $M_{OR} = (Q^{OR}, \Sigma^{OR}, \Gamma^{OR}, \delta^{OR}, q_0^{OR}, q_{\text{acc}}^{OR}, q_{\text{rej}}^{OR})$ מכונה ממודול OR.
 נבנה מכונה שקולת $M_{TS} = (Q^{TS}, \Sigma^{TS}, \Gamma^{TS}, \delta^{TS}, q_0^{TS}, q_{\text{acc}}^{TS}, q_{\text{rej}}^{TS})$ ממודול TS.
 כל הרכיבים של המכונה M_{TS} יהיו זהים לרכיבים של המכונה M_{OR} מלבד פונקציית המעברים.
 נגדיר את פונקציית המעברים δ^{TS} .

מעבר תנוועה

נניח ש δ מכילה את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q, \sigma) = (p, \text{move})$$

כאשר:

$$p, q \in Q^{OR}, \quad \sigma \in \Gamma^{OR}, \quad \text{move} \in \{L, R\}.$$

אז ב- δ^{TS} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{TS}(q, \sigma) = (p, \sigma, \text{move})$$

מעבר כתיבה

נניח ש δ מכילה את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q, \sigma) = (p, \tau)$$

פתרונות

כאשר:

$$p, q \in Q^{OR}, \quad \sigma, \tau \in \Gamma^{OR}.$$

از ב- δ^{TS} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{TS}(q, \sigma) = (p, \tau, S)$$

כיוון שני: לכל מכונה ממודול TS קיימת מכונה שקולת מודול OR

$$\text{תהי } M_{TS} = (Q^{TS}, \Sigma^{TS}, \Gamma^{TS}, \delta^{TS}, q_0^{TS}, q_{\text{acc}}^{TS}, q_{\text{rej}}^{TS}) \text{ מכונה ממודול } TS.$$

$$\text{בנייה מכונה שקולת } M_{OR} = (Q^{OR}, \Sigma^{OR}, \Gamma^{OR}, \delta^{OR}, q_0^{OR}, q_{\text{acc}}^{OR}, q_{\text{rej}}^{OR}) \text{ מודול } OR.$$

במעברים בהן המכונה M_{TS} כתובות אותן או שמאלה, לא ניתן מעבר שקול יחיד במכונה ממודול OR . לכן נמייר חלק מהמעברים במכונה M_{TS} לשני מעברים עוקבים במכונה M_{OR} . במעבר הראשון נכתב אותן ובמעבר השני נבצע את התזוזה.

לשם כך, נצטרך מצבים חדשים, שייחבו בין המעברים. לכל מצב q נגדיר שני מצבים ביןיהם "חוודים" q^L ו- q^R . ככלומר:

$$Q^{OR} = Q^{TS} \cup \{q^L \mid q \in Q^{TS}\} \cup \{q^R \mid q \in Q^{TS}\}.$$

נגדיר כעת את δ^{OR} תוך שימוש במצבים ביןיים.

מצבים הביניים תמיד יבצעו תזוזה שמאליה או ימינה בלבד, לכל אחת שבסרט. פורמלית:

$$\begin{aligned} \forall q \in Q^{TS}, \sigma \in \Gamma^{TS}: \quad \delta^{OR}(q^R, \sigma) &= (q, R), \\ \forall q \in Q^{TS}, \sigma \in \Gamma^{TS}: \quad \delta^{OR}(q^L, \sigma) &= (q, L). \end{aligned}$$

עבור מעברים בהן מתבצעת כתיבה ותנוועה, נגדיר את δ^{OR} תוך שימוש במצבים ביןיים.

בהינתן מעבר עם תנוועה ימינה:

$$\delta^{TS}(q, \sigma) = (p, \tau, R).$$

כאשר:

$$q, p \in Q^{TS}, \quad \sigma, \tau \in \Gamma^{TS}$$

از ב- δ^{OR} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q, \sigma) = (p^R, \tau).$$

באופן דומה, בהינתן מעבר עם תנוועה שמאליה:

$$\delta^{TS}(q, \sigma) = (p, \tau, L).$$

כאשר:

$$q, p \in Q^{TS}, \quad \sigma, \tau \in \Gamma^{TS}$$

از ב- δ^{OR} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q, \sigma) = (p^L, \tau).$$

פתרונות

במעברים בהם המכונה M_{TS} אינה מבצעת תנועה (נשארת במקומם) לא נשתחם במצבים הביניים. כלומר, בהינתן מעבר בו המכונה נשארת במקומו:

$$\delta^{TS}(q, \sigma) = (p, \tau, S)$$

כאשר:

$$q, p \in Q^{TS}, \quad \sigma, \tau \in \Gamma^{TS}$$

אז ב δ^{OR} נכנס את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q, \sigma) = (p, \tau).$$

שאלה 3: התזה של צ'רץ' טירינג 20 נקודות

סעיף א' השפה שהדקה G יוצר היא:

$$L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

סעיף ב'

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$$

כלומר, שפת כל המילים בהן מספר שווה של אותיות a , אותיות b , ואותיות c .

שאלה 4: אי-כrüיות 20 נקודות

נתון: השפה $L_{M_1 \cup M_2}$ מוגדרת:

$$L_{M_1 \cup M_2} = \{\langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \cup L(M_2)\}$$

ז"א השפה שכוללת כל המחרוזות $\langle M_1, M_2, w \rangle$ כאשר w שיר לאותת השפות $L(M_1)$ או $L(M_2)$ לפחות.

צריך להוכיח: קיימת רדוקצייה התחילה בין השפה A_{TM} לשפה $L_{M_1 \cup M_2}$, כלומר

$$A_{TM} \leq L_{M_1 \cup M_2}.$$

הגדרת הרדוקצייה:

בהינתן $\langle w \rangle$ קלט של A_{TM} ניצור $\langle M_1, M_2, w \rangle$ קלט של $L_{M_1 \cup M_2}$ כך שמתקיים התנאי הבא:

$$\begin{aligned} \langle M, w \rangle \in A_{TM} &\Rightarrow \langle M_1, M_2, w \rangle \in L_{M_1 \cup M_2}, \\ \langle M, w \rangle \notin A_{TM} &\Rightarrow \langle M_1, M_2, w \rangle \notin L_{M_1 \cup M_2}. \end{aligned}$$

נגידיר את פונקציית הרוקציה באופן הבא:

$$M_1 = \text{"על כל קלט } x \text{ הינו } \text{rej."}$$

$$M_2 = \text{"על כל קלט } x \text{ הינו } \text{acc."}$$

פתרונות

- מריצה M על w ועונה כמוות.

נקונות הרדווקציה:

כימל \Leftarrow

$$\langle M, w \rangle \in A_{TM} \text{ וגם}$$

$$w \in L(M) \Leftarrow$$

$$.w \in L(M_2) \Leftarrow$$

$$w \in L(M_2) \cup \emptyset \Leftarrow$$

$$w \in L(M_2) \cup L(M_1) \Leftarrow$$

$$\langle M_1, M_2, w \rangle \in L_{M_1 \cup M_2} \Leftarrow$$

כימל \Rightarrow

$$\langle M, w \rangle \notin A_{TM} \text{ וגם}$$

$$.w \notin L(M) \Leftarrow$$

$$.w \notin L(M_2) \Leftarrow$$

$$.(\text{השפה של } M_1 \notin w \text{ וכי השפה של } M_2 \text{ היא } \emptyset) \Leftarrow$$

$$\langle M_1, M_2, w \rangle \notin L_{M_1 \cup M_2} \Leftarrow$$

سؤالה 5: סיבוכיות זמן 20 נקודות

פונקציית הרדווקציה:

נגידר פונקציית הרדווקציה f שבהינתן זוג $\langle G, k \rangle \in IS$, (הקלט של IS), יוצרת C , (הקלט של VC) אשר מקיימת את התנאי:

$$\langle G, k \rangle \in IS \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in VC . \quad (*2)$$

הfonקציית הרדווקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

עמוד 7 מתוך 9

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד צבוטינסקי 84 | www.sce.ac.il | חייג: *

פתרונות

1) בהינתן הגרף $G = (V, E)$, אז הגרף G' הוא אותו גраф $.G = (V, E')$

$$.k' = |V| - k \quad (2)$$

נכונות הרדוקציה

כעת נוכחות שמתקיים: $\langle G, k \rangle \in IS \iff \langle G', k' \rangle \in VC$

CTION

בhinתן גראף $G = (V, E)$ ושלם k

נניח כי $\langle G, k \rangle \in IS$.

$\Leftarrow G$ מכיל קבוצה בלתי תלויה S בגודל k לפחות: $|S| \geq k$.

\Leftarrow אם $S \in S$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

כלומר, כל שני קודקודים ב- S לא מחוברים בצלע ב- G .

\Leftarrow השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם $E \in E$ אז $u_1 \notin S$ או $u_2 \notin S$.

\Leftarrow אם $u_2 \in V \setminus S$ אז $u_1 \in V \setminus S$.

\Leftarrow התת-קובוצה $S \setminus V$ היא כיסוי קודקודים של G .

$|V \setminus S| \leq |V| - k$ $|V \setminus S| = |V| - |S| \geq k$ לכן.

$\Leftarrow G'$ מכיל כיסוי קודקודים U בגודל k' לכל היותר.

$\Leftarrow \langle G', k' \rangle \in VC$

CTION

בhinתן גראף G' ושלם k'

נניח כי $\langle G', k' \rangle \in VC$.

$\Leftarrow G'$ מכיל כיסוי קודקודים U בגודל k' לכל היותר: $|U| \leq k'$.

\Leftarrow אם $E \in E$ אז $u_1 \in U$ או $u_2 \in U$.

\Leftarrow השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם $U \in U$ וגם $u_1 \notin U$ וגם $u_2 \notin U$.

\Leftarrow השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם $(u_1, u_2) \notin E$ וגם $u_2 \in V \setminus U$ וגם $u_1 \in V \setminus U$.

פתרונות

הנתן-קבוצה $S = V \setminus U$ היא קבוצה בלתי תלואה.
 $|S| \geq |V| - k'$ אז $|U| \leq k' - 1$ $|S| = |V| - |U|$
 $|V| - k' = k$ מכיל קבוצה בלתי תלואה S בגודל לפחות.
 $\langle G, k \rangle \in IS \iff$