

## שיעור 6

### תכונות סגירות של $R$ ו- $RE$

#### 6.1 הגדרה של השפות $R$ ו- $RE$

##### הגדרה 6.1 $R$

אוסף השפות הכריעות מסומן  $R$  ומוגדר

$$R = \{L \subseteq \Sigma^* : \text{קיים מ"ט המכ裏עה את } L\}.$$

##### הגדרה 6.2 $RE$

אוסף השפות הקבילות מסומן  $RE$  ומוגדר

$$RE = \{L \subseteq \Sigma^* : \text{קיים מ"ט מקבלת את } L\}.$$

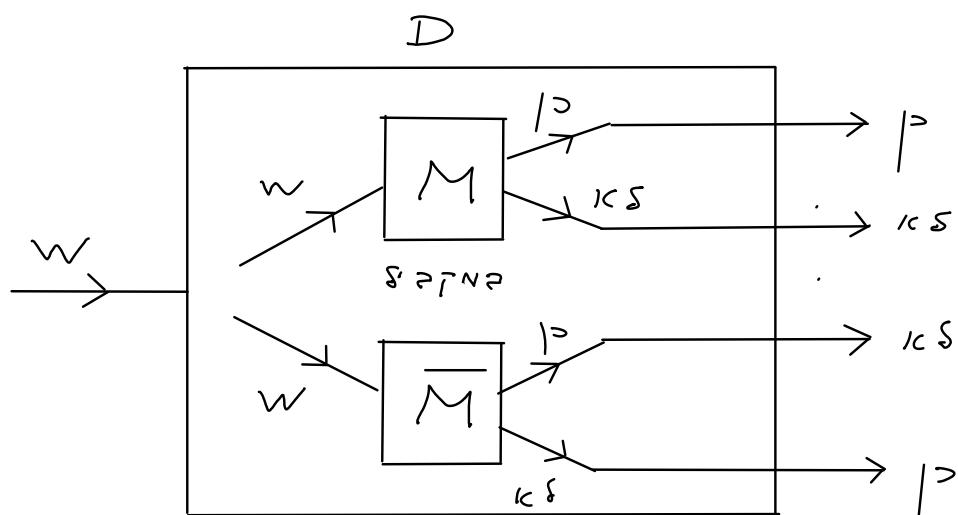
#### 6.2 היחס בין הכרעה וקבלה

##### למה 6.1 היחס בין הכרעה וקבלה

אם  $L \in R$  וגם  $\bar{L} \in RE$  אז  $.L \in RE$

הוכחה: תהי  $M$  מ"ט מקבלת את  $L$  ותהי  $\bar{M}$  מ"ט מקבלת את  $\bar{L}$ .

בנה מ"ט  $D$  המכ裏עה את  $L$ .



על קלט  $w$ :  $D$

1)  $D$  מעתקה את  $w$  לסרט נסף.

2) מריצה במקביל את  $M$  על  $w$  ואת  $\bar{M}$  על העותק של  $w$ .

- אם  $M$  מקבלת  $D$  מקבלת.
- אם  $\bar{M}$  מקבלת  $D$  דוחה.
- אם  $M$  דוחה  $D$  דוחה.
- אם  $\bar{M}$  דוחה  $D$  מקבלת.

נוכיח כי  $D$  מכריעה את  $L$ .

אם  $w \in L$

$w \in L(M) \Leftarrow$

מקבלת את  $w$  או ( $w$  דוחה את  $M$ )  $\Leftarrow$

עוצרת ומתקבלת את  $w$ .

אם  $w \notin L$

$w \in \bar{L} \Leftarrow$

$w \in L(\bar{M}) \Leftarrow$

מקבלת את  $w$  או ( $w$  דוחה את  $\bar{M}$ )  $\Leftarrow$

עוצרת ודוחה את  $w$ .



## 6.3 סגירות של שפות כריעות ושפות קבילות

### משפט 6.1 סגירות של השפות הקריעות

סגורה תחת:  $R$

1) איחוד

2) חיתוך

3) משלימים

4) שרשור

5) סגור כללי

### משפט 6.2 סגירות של השפות הקבילות

סגורה תחת:  $RE$

1) איחוד

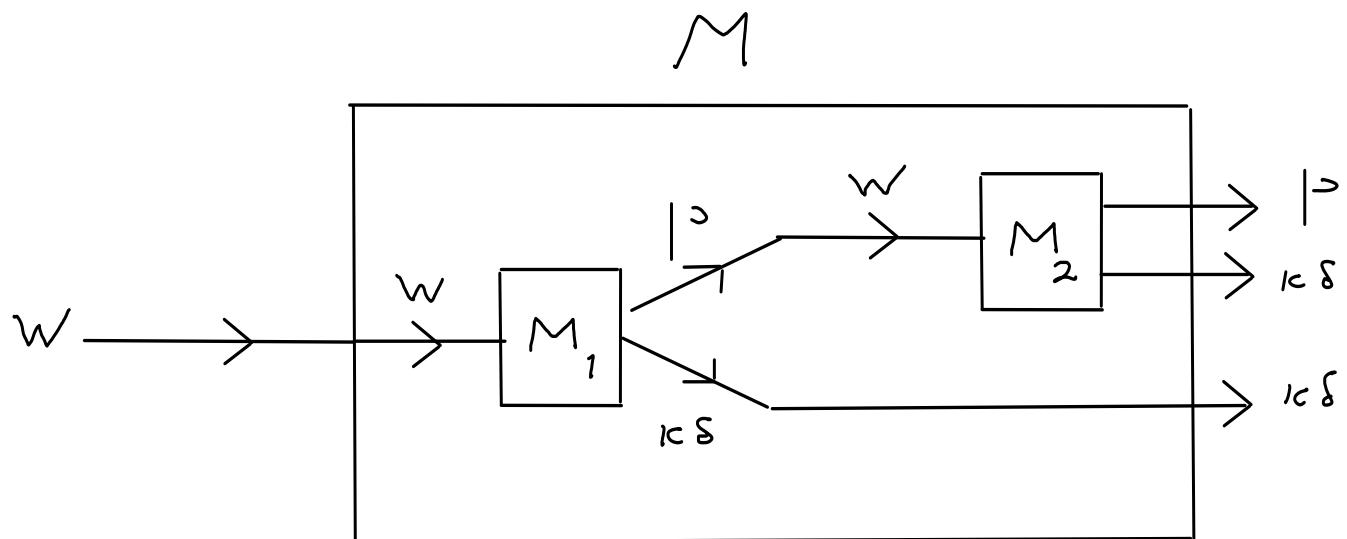
(2) חיתוך

(3) שרשור

(4) סגור קלין

הוכחה:

(1) חיתוך:

(א) סגורה תחת חיתוך  $R$ נוכיח כי לכל שתי שפות  $L_1, L_2 \in R$  מתקיים  $L_1 \cap L_2 \in R$ .תהי  $M_1 \cap M_2 \in R$  המככירה את  $L_1 \cap L_2$  בהתאם. נבנה מ"ט המככירה את  $L_1$  ו-  $L_2$ .תאור הבנייהעל קלט  $w = M$ :1) מעתקה את  $w$  לסרט נוספת.2) מרכיב את  $M_1$  על  $w$ .• אם  $M_1$  דוחה  $\Leftarrow M$  דוחה.• אחרת  $M$  מרכיב את  $M_2$  על העותק של  $w$  ועונה כמוותה.נקודות:נוכיח כי  $M$  מככירה את  $L_1 \cap L_2$ .אם  $w \in L_1 \cap L_2$  $w \in L_2$  וגם  $w \in L_1 \Leftarrow$

$w$  מקבלת את  $M_1$  ו-  $M_2$  מקבלת את  $w \Leftrightarrow$

$M$  מקבלת את  $w$ .

אם

$w \notin L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow$

$w$  דוחה את  $M_2$  או  $w$  דוחה את  $M_1$ .

$w$  דוחה את  $M$ .

### (ב) סגורה תחת חיתוך RE

nocih ci lcl shi shfot  $L_1, L_2 \in RE$  matkym  $L_1 \cap L_2 \in RE$

tahyina  $M_1$  v-  $M_2$  shi mconot tivring hmkblot at  $L_1$  v-  $L_2$  bhtama.

nbnha m't M hmkblat at  $L_1 \cap L_2$  baotu opn cmo (a).

(2) **איחוד:**

### (א) סגורה תחת איחוד R

nocih ci ld l shi shfot  $L_1, L_2 \in R$  matkym  $L_1 \cup L_2 \in R$

tahyina  $M_1$  m't mckriya at  $L_1$  v-  $M_2$  m't mckriya at  $L_2$ .

nbnha m't M mckriya at  $L_1 \cup L_2$ .

#### תאור הבנייה

על קלט  $w = M$ :

(1)  $M$  mutika at  $w$  lsrt nesf.

(2) meriza at  $M_1$  ul  $w$ .

• am  $M_1 \Leftarrow$  mckblat.

• achrat,  $M$  meriza at  $M_2$  ul hwtk sl  $w$  wohn cmoha.

### (ב) סגורה תחת איחוד RE

nocih ci lcl shi shfot  $L_1, L_2 \in RE$  matkym  $L_1 \cup L_2 \in RE$

tahyina  $M_1$  m't hmkblat at  $L_1$  v-  $M_2$  m't hmkblat at  $L_2$ .

nbnha m't M "ad hmkblat at  $L_1 \cup L_2$ .

#### תאור הבנייה

על קלט  $w = M$ :

(1)  $M$  bohrot baopn "ad  $i \in \{1, 2\}$ .

(2)  $M$  meriza at  $M_i$  ul  $w$  wohn cmoha.

(3) **שרשור:**

### (א) סגורה תחת שרשור R

nocih ci lcl shi shfot  $L_1, L_2 \in R$  matkym  $L_1 \cdot L_2 \in R$  ca'asher

$$L_1 \cdot L_2 = \{w = w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\} .$$

תהיינה  $M_1$  מ"ט המכריעה את  $L_1$  ו-  $M_2$  מ"ט המכריעה את  $L_2$ .  
נבנה מ"ט א"ד  $M$  המכריעה את  $L_1 \cdot L_2$ .

תאור הבנייה

על קלט  $w = M$

(1) בוחרת באופן א"ד חלוקה של  $w$  ל-  $w = w_1 w_2$

(2) מרים את  $M_1$  על  $w_1$ .

- אם  $D$  דוחה  $M_1 \Leftarrow D$

- אחרת, מרים את  $M_2$  על  $w_2$  ועונה כמוות.

**(ב) סגורה תחת שרשור**

$RE$  סגורה תחת שרשור באותו אופן כמו ב- (א)

4) \* קליני

**א)  $R$  סגורה תחת \* קליני**

nocich ci lal shfa L:

$$L \in R \Rightarrow L^* \in R$$

כasher

$$L^* = \{w = w_1 w_2 \cdots w_k \mid \forall 1 \leq i \leq k, w_i \in L\}.$$

תהי  $M$  מ"ט המכריעה את  $L$ .

נבנה מ"ט א"ד  $M^*$  המכריעה את  $L^*$ .

תאור הבנייה

על קלט  $w = M^*$

(1) אם  $w = \varepsilon$  מתקבלת.

(2) אחרת  $M^*$  בוחרת באופן א"ד חלוקה של  $w$  ל-  $w = w_1 \cdots w_k$

(3) לכל  $1 \leq i \leq k$

רים את  $M$  על  $w_i$ .

- אם  $D$  דוחה את  $w_i$   $M^* \Leftarrow D$

- אחרת חוזרים לשלב (3).

(4) אם  $M$  קיבלה את כל המחרוזות  $\{w_i\}$  אז  $M^*$  מקבלת.

**ב)  $RE$  סגורה תחת \***

5) משלים

**א)  $R$  סגורה תחת המשלים**

nocich ci

$$L \in R \Rightarrow \bar{L} \in R,$$

כאשר

$$\bar{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\} .$$

תהי  $M$  מ"ט המכריעה את  $L$ .  
נבנה מ"ט  $\bar{M}$  המכריעה את  $\bar{L}$ .

$w = \bar{M}$  על קלט:

(1) מרכיב את  $M$  על  $w$ .

- אם  $M$  מקבלת  $\bar{M}$  דוחה.

- אם דוחה  $M$  מקבלת.

**ב) אינה סגורה תחת המשלים**



### משפט 6.3 אינה סגורה תחת המשלים

$$L \in RE \setminus R \Rightarrow \bar{L} \notin RE .$$



הוכחה:

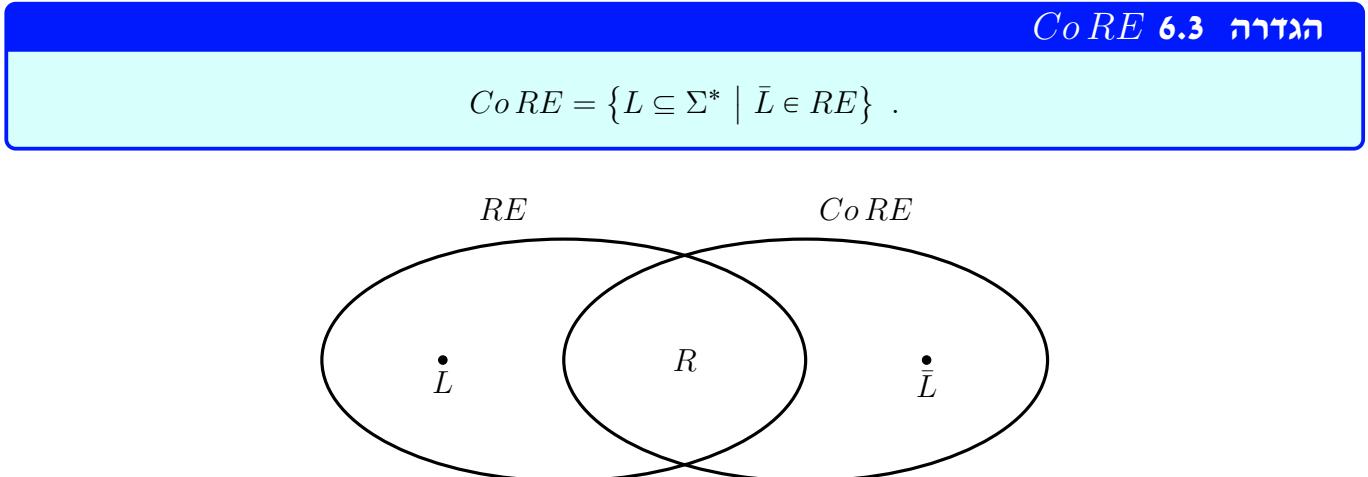
נניח כי  $\bar{L} \in RE$  ונניח בשילילה כי  $L \in RE \setminus R$ .

אזי לפי טענה עזר (למה 6.1),  $L \in R$  וזו סתירה.



### הגדרה 6.3

$$CoRE = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \bar{L} \in RE\} .$$



אבחנה

לפי למה 6.1:

$$RE \cap Co\,RE = R.$$

## 6.4 סגירות של שפות כריעות תחת DROPOUT

### משפט 6.4 סגירות של שפות כריעות תחת DROPOUT

תהי  $L$  שפה כריעה ותהי  $DROPOUT(L)$  השפה הבאה:

$$DROPOUT(L) = \{uv \mid uv \in L, \sigma \in \Sigma^* : u\sigma v \in L\}$$

אזי השפה  $DROPOUT(L)$  גם כריעה.

**הוכחה:**

השפה  $L$  כריעה אזי קיימת מכונת טיריניג  $M_L$  המכריעה אותה. נבנה מכונת טיריניג  $M_{DROPOUT}$  המכריעה את  $DROPOUT(L)$  באופן הבא:

בנייה המכונות טיריניג

על כל קלט  $w$ :

1) בוחרת חילוק של המילה  $w$  לשורש של שני מילים באופן א-דטרמיניסטי כך ש:  $w = uv$ .

2) בוחרת אות  $\sigma^*$  באופן א-דטרמיניסטי ובונה את המילה  $u\sigma v$ .

3) מריצה  $M_L$  על המילה  $u\sigma v = w$  ועונה כמוות.

הוכת הנכונות

נניח ש-  $w \in DROPOUT(L)$ .

$\Leftarrow$  קיימים מילים  $u, v \in L$  וקיים  $\sigma^* \in \Sigma^*$  כך ש-  $w = uv$ .

$\Leftarrow$  קיימת ריצה של  $M_{DROPOUT}$  עבורה  $M_{DROPOUT}$  תבחר חילוק  $w = uv$  ו-  $\sigma^* \in \Sigma^*$  כך ש-  $u\sigma v \in L$ .

$\Leftarrow$   $M_{DROPOUT}$  קיבל את  $w$ .

נניח ש-  $w \notin DROPOUT(L)$ .

$\Leftarrow$  לא קיימים מילים  $u, v \in L$  ו-  $\sigma^* \in \Sigma^*$  כך ש-  $w = uv$ .

$\Leftarrow$  כל ריצה של  $M_{DROPOUT}$  עוברת ל-  $q_{\text{rej}}$ .

$\Leftarrow$   $M_{DROPOUT}$  תדחה את  $w$ .



## 6.5 קידוד של מ"ט דטרמיניסטית

### הגדרה 6.4 קידוד של מ"ט

בاهינתן קבוצה  $O$  של עצמים מופשטים (למשל מכונת טיורינג, תוכנית מחשב, גרפ'). הקידוד של  $O$ , מסומן  $\langle O \rangle$ , הוא מיפוי של  $O$  אל מהירות מעל אלףית סופי ששי בו לפחות שני סימנים. במידה ויש רב עצמים  $O_1, \dots, O_k$  נסמן את הקידוד שלהם  $\langle O_1, O_2, \dots, O_k \rangle$ .

## 6.6 מ"ט אוניברסלית $U$



מ"ט אוניברסלית  $U$  מקבלת כקלט זוג, קידוד של מילה  $\langle w \rangle$  וקידוד של מ"ט  $\langle M \rangle$ , וביצעת סימולציה של ריצה של  $M$  על  $w$  ועונה בהתאם.

### תאור הפעולה של $U$

על קלט  $x$ :

(1) בודקת אם  $x$  הוא קידוד של מ"ט  $\langle M \rangle$  וקידוד של מילה  $\langle w \rangle$ .

- אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

(2) מבצעת סימולציה של  $M$  על  $w$ :

1	6	7	0	$\langle M \rangle$	-	$\langle w \rangle$	...
---	---	---	---	---------------------	---	---------------------	-----

2	6	7	0	$\langle \rangle$	-	$\langle w \rangle$	...
---	---	---	---	-------------------	---	---------------------	-----

- רושמת את הקוניגורציה ההתחלתית  $w_{q_0}$  על סרט 2.
- מחשבת את הקוניגורציה הבאה בעזרת טבלת המעברים.
- בסוף כל מעבר בין שתי קוניגורציות,  $U$  בודקת אם המצב הנוכחי הוא  $q_{acc}$ .
  - \* אם כן  $U$  עוצרת ומקבלת.

- \* לאחרת  $U$  בודקת האם המצב הוא  $q_{\text{rej}}$ .
- \* אם כן  $U$  עוצרת ודוחה.
- \* אחרת  $U$  ממשיכה לكونפיגורציה הבאה.

מהי השפה של  $U$ ?

לכל  $x$ :

. $x$  דוחה את  $U \iff x \neq \langle M, w \rangle$  (1)

: $x = \langle M, w \rangle$  (2)

- אם  $M$  מקבלת  $w$  מקבלת את  $x$ .
- אם  $M$  דוחה את  $w$  דוחה את  $x$ .
- אם  $M$  לא עוצרת על  $w$  לא עוצרת על  $x$ .

$$L(U) = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} .$$

### הגדרה 6.5 $L_{\text{acc}}$

$$L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} \in \text{RE} \setminus \text{R}$$

### הגדרה 6.6 $L_{\text{halt}}$

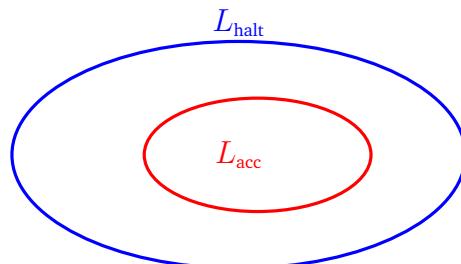
$$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ עוצרת על } M\} \in \text{RE} \setminus \text{R}$$

### הגדרה 6.7 $L_{\text{d}}$

$$L_{\text{d}} = \{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M)\} \notin \text{RE}$$

אבחנה:

$$L_{\text{acc}} \subseteq L_{\text{halt}} .$$



**משפט 6.5**

$$L_{\text{acc}} \in RE .$$

**הוכחה:** מכיוון ש-  $L_{\text{acc}} \in RE$  מקבלת את  $U$ ,  $L(U) = L_{\text{acc}}$  ולכן

**משפט 6.6**

$$L_{\text{halt}} \in RE .$$

**הוכחה:** נבנה מ"ט  $U'$  שהוא למעשה  $U$  פרט למקום שבו  $U$  עצמה ומחטה,  $U'$  תעצור ותקבל.

נווכיח כי  $U'$  מקבלת את  $L_{\text{halt}}$ :

אם  $x \in L_{\text{halt}}$

ו-  $M$  עוצרת על  $w$   $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$

$x$  עוצרת ומקבלת את  $U' \Leftarrow$

אם  $x \notin L_{\text{halt}}$  שני מקרים:

. $x$  דוחה את  $U' \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$  •

. $M$  לא עוצרת על  $U' \Leftarrow w$  לא עוצרת על  $x = \langle M, w \rangle$  •

