שיעור 11
אינטגרלים לא מסויימים

11.1 סכום רימן

הגדרה 11.1 הפרדה

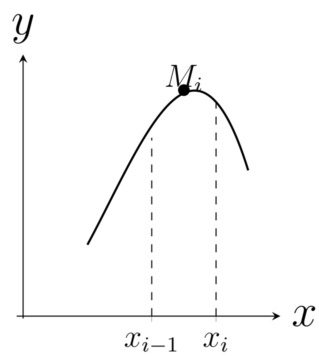
הפרדה של הקטע $[a,b]$ הינה קבוצת נקודות

$$a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{m-1} \le x_n = b \ .$$

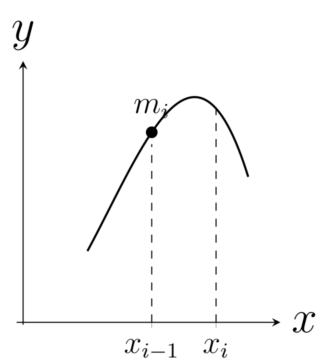
נגדיר $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

הגדרה 11.2

נניח כי $f(x)$ פונקציה חסומה הקטע $[a,b]$. לכל הפרדה P של $[a,b]$. נגדיר $M_i = \max\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

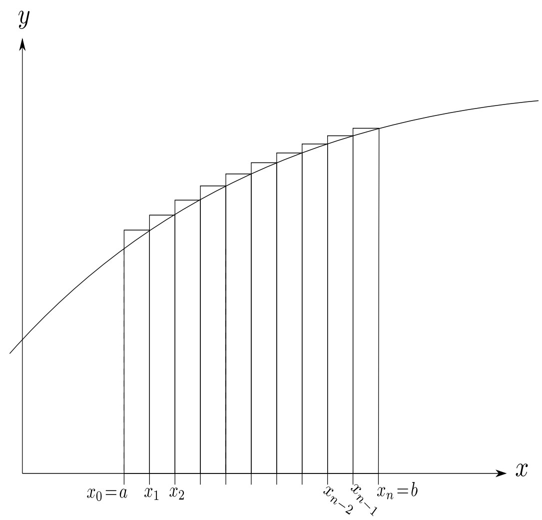


ונגדיר $m_i = \min\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

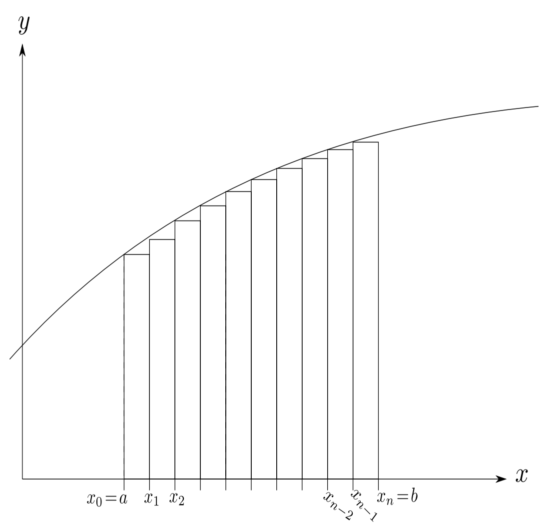


הגדרה 11.3

נניח כי f פונקציה שרציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). נניח כי P הפרדה מסוימת של הקטע $[a,b]$.
נגדיר $U(P,f)=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$. המשמעות הגאומטרי מתואר בגרף להלן.



נגדיר $L(P,f)=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$. המשמעות הגאומטרי מתואר בגרף להלן.



הגדרה 11.4 סכום רימן העליון וסכון רימן התחתון

נניח כי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע $(a.b)$. ה **סכום רימן העליון** מוגדר

$$\int_a^{\bar{b}} f\,dx=\inf_P U(P,f)\ ,$$

וה **סכום רימן התחתון** מוגדר

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \sup_P L(P,f) \ ,$$

הגדרה 11.5 פונקציה אינטגרבילית

נניח כי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע $(a.b)$. אומרים כי f **אינטגרבילית** בקטע $[a,b]$ אם

$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \underline{\int_a^b} f\,dx \ .$$

הגדרה 11.1

נניח כי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע $(a.b)$. **פונקציה הקדומה** F של f מוגדרת לפי

$$f(x) = F'(x) \ .$$

משפט 11.1 המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי I

נניח כי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$. הפונקציה $g(x)$ שמוגדרת

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \ , \qquad a \leq x \leq b \ .$$

רציפה בקטע $[a,b]$, גזירה בקטע (a,b), ו-

$$g'(x) = f(x) \ .$$

ז"א $g(x)$ הפונקציה הקדומה של $f(x)$.

הוכחה: נניח ש- $x \in [a,b]$, $\epsilon > 0$, ונבחור $h > 0$ כך ש- $x+h < b$ ו- $0 < h < \delta$. אז

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\int_h^{x+h} f(t)dt \ .$$

f רציפה בנקודה x לכן קיים $\delta > 0$ כך ש-

$$|t-x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(t)-f(x)| < \epsilon \ .$$

בפרט, אם $t \in [x,x+h]$ אז $x \leq t \leq x+h$ ולכן $0 \leq t-x \leq h < \delta$, ז"א $|t-x| < \delta$.
לכן נקבל $|f(t)-f(x)| < \epsilon$.

מכאן נובע כי

$$-\epsilon < f(t)-f(x) < \epsilon \quad \Rightarrow \quad f(x)-\epsilon < f(t) < f(x)+\epsilon \ .$$

נפעיל אינטגרל על זה מעל הקטע $[x,x+h]$:

$$\begin{array}{rcccl}
f(x)-\epsilon & < & f(t) & < & f(x)+\epsilon \\
\displaystyle\int_x^{x+h} dt\,(f(x)-\epsilon) & < & \displaystyle\int_x^{x+h} dt\, f(t) & < & \displaystyle\int_x^{x+h} dx\,(f(x)+\epsilon) \\
\displaystyle(f(x)-\epsilon)\int_x^{x+h} dt & < & \displaystyle\int_x^{x+h} dt\, f(t) & < & \displaystyle(f(x)+\epsilon)\int_x^{x+h} dt \\
(f(x)-\epsilon)(x+h-x) & < & \displaystyle\int_x^{x+h} dt\, f(t) & < & (f(x)+\epsilon)(x+h-x) \\
f(x)-\epsilon & < & \displaystyle\frac{1}{h}\int_x^{x+h} dt\, f(t) & < & f(x)+\epsilon \\
f(x)-\epsilon & < & \displaystyle\frac{g(x+h)-g(x)}{h} & < & f(x)+\epsilon \\
-\epsilon & < & \displaystyle\frac{g(x+h)-g(x)}{h}-f(x) & < & \epsilon
\end{array}$$

לפיכך

$$\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h}-f(x)\right|<\epsilon\ .$$

לכן הוכחנו כי

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f(x)\ .$$

באופן דומה ניתן להוכיח כי

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f(x)\ .$$

לכן

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f(x)\ .$$

לפי ההגדרה של נגזרת, מכאן נובע כי

$$g'(x)=f(x)\ .$$

■

משפט 11.2 המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי II

נניח כי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$. אז

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt\ =F(b)-F(a)$$

כאשר $F(x)$ פונקציה הקדומה של $f(x)$.

הוכחה: נניח כי F פונקציה הקדומה של f. נגדיר

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt\ .$$

לפי משפט 11.1, g רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b) ו- $g'(x)=f(x)$ לכל $x\in(a,b)$. כעת נגדיר

$$h(x):=g(x)-F(x)\ .$$

g רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). לפיכך הפוקנציה $g-h$.
רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). בפרט, אם $x\in(a,b)$ אז

$$h'(x)=g'(x)-F'(x)\ .$$

לפי המשפט 11.1, $g'(x)=f(x)$ ו- $F'(x)=f(x)$ לפי ההגדרה של פונקציה הקדומה. לכן $h'(x)=f(x)-f(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$. לכן, מכיוון ש- h רציפה בנקודות a ו- b, אז h פונקציה קבועה ולכן $h(a)=h(b)$.

$$\begin{aligned}
h(b)=&h(a)\\
g(b)-F(b)=&g(a)-F(a)\\
g(b)=&g(a)+F(b)-F(a)\\
\int_a^b f(t)dt=&\int_a^a f(t)dt+F(b)-F(a)\\
\int_a^b f(t)dt=&0+F(b)-F(a)\\
\int_a^b f(t)dt=&F(b)-F(a)
\end{aligned}$$

■

11.2 אינטגרלים לא מסויימים

הגדרה 11.2 פונקציה קדומה

אם $f(x)=F'(x)$ אז אומרים כי $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$.

דוגמה 11.1

$$(x^2)'=2x\ ,$$

לכן $F(x)=x^2$ פונקציה קדומה של $f(x)=2x$

משפט 11.3 פונקציה קדומה

אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$, אז $F(x)+C$ (לכל $C\in\mathbb{R}$ קבוע) היא גם פונקציה קדומה של $f(x)$.

ז"א אם פונקציה קדומה של $f(x)$ קיימת, בהכרח ישנם אינסוף פונקציות קדומות של $f(x)$.

דוגמה 11.2

$$(x^2+C)'=2x\ ,$$

לכן לפונקציה $f(x)=2x$ יש אינסוף פונקציות קדומות מהצורה $F(x)=x^2+C$.

הגדרה 11.3 האינטגרל הלא מסויים

האוסף של כל הפונקציות הקדומות של $f(x)$, נקרא האינטגרל הלא מסויים של $f(x)$, מסומן $\int f(x)dx$.
ז"א

$$\int f(x)dx=F(x)+C \qquad \Leftrightarrow \qquad (F(x)+C)'=f(x)\ .$$

dx נקרא הדיפרנציאל של x.

11.3 דוגמאות

דוגמה 11.3

$$\int 2x\,dx=x^2+C$$

דוגמה 11.4

$$\int \cos x\,dx=\sin x+C$$

דוגמה 11.5

$$\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C$$

דוגמה 11.6

$$\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C$$

11.4 לינאריות של אינטגרל לא מסויים

הגדרה 11.4 ליניאריות של אינטגרל לא מסויים

נתונות פונקציות $f(x)$, $g(x)$ וסקלר a.

(i) $\int a\cdot f(x)\,dx = a\cdot \int f(x)\,dx$.

(ii) $\int [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

הוכחה:

(i) אם $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$, ז"א $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, אז $F'(x)=f(x)$. לפיו ולפי משפט **??** (מספר 2),

$$a\cdot f(x) = a\cdot F'(x) = (aF(x))' \ .$$

נפעיל אינטגרל לא מסויים על שני הצדדים ונקבל

$$\int a\cdot f(x)\,dx = a\cdot F(x)+C \ .$$

■

11.5 טבלת האינטגרלים חלקית

$$
\begin{aligned}
\int x^a \, dx =& \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \ , \qquad (a \neq -1) \\
\int \frac{1}{x} \, dx =& \ln|x| + C \ , \\
\int a^x \, dx =& \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \\
\int e^x \, dx =& e^x + C \ , \\
\int \sin x \, dx =& -\cos x + C \ , \\
\int \cos x \, dx =& \sin x + C \ , \\
\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx =& \tan x + C \ , \\
\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx =& -\cot x + C \ , \\
\int \frac{1}{1+x^2} \, dx =& \arctan x + C \ , \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =& \arcsin x + C \ ,
\end{aligned}
$$

11.6 תרגילים

דוגמה 11.7

$$
\begin{aligned}
\int \left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^2 dx =& \int \left(1+2x^{2/3}+x^{4/3}\right) dx \\
=& x + 2\frac{x^{2/3}}{5/3} + \frac{x^{4/3}}{7/3} + C \\
=& x + \frac{6x^{2/3}}{5} + \frac{3x^{4/3}}{7} + C
\end{aligned}
$$

דוגמה 11.8

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} \, dx =& \int x^{-2/5} dx \\
=& \frac{5}{3} x^{1-2/5} + C \\
=& \frac{5}{3} x^{3/5} + C
\end{aligned}
$$

דוגמה 11.9

$$\int \frac{x+1}{x}\,dx = \int \left(1+\frac{1}{x}\right)\,dx$$
$$= x + \ln|x| + C$$

11.7 החלפת משתנה / אינטגרציה ע"י הצבה

משפט 11.4 אינטגרציה ע"י הצבה

נתון אינטגרל מצורה

$$\int f\left(t(x)\right)\cdot u'(x)\,dx$$

כאשר $f\left(u(x)\right)$ פונקציה של הפונקציה $u(x)$ ו- $u'(x)$ הנגזרת של $u(x)$. אז

$$\int f\left(u(x)\right)\cdot u'(x)\,dx = \int f(u)\,du\ .$$

דוגמה 11.10

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \sin(2x)dx$$

פתרון:

$$u = 2x\ , \qquad u'(x) = 2\ , \qquad \frac{1}{2}u'(x) = 1\ .$$

$$\int \sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int \sin u\cdot u'\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}\cos u + C$$
$$= -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$$

■

דוגמה 11.11

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int e^{ax}dx$$

פתרון:

$$u=ax\ ,\qquad u'(x)=a\ ,\frac{1}{a}u'(x)=1\ .$$

$$\begin{aligned}\int e^{ax}dx=&\int e^{u(x)}\cdot\frac{1}{a}\cdot u'(x)\,dx\\ =&\frac{1}{a}\int e^{u}\,du\\ =&\frac{1}{a}e^{u}+C\\ =&\frac{1}{a}e^{ax}+C\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.12

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int\frac{1}{x^2+8}\,dx$$

פתרון:

$$u(x)=\frac{x}{\sqrt{8}}\ ,\qquad u'(x)=\frac{1}{\sqrt{8}}\ ,\qquad\Rightarrow\qquad 1=\sqrt{8}\,u'(x).$$

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2+8}\,dx=&\int\frac{1}{8u^2+8}\,\sqrt{8}u'(x)\ ,dx\\ =&\sqrt{8}\int\frac{1}{8u^2+8}\,du\\ =&\frac{\sqrt{8}}{8}\int\frac{1}{u^2+1}\,du\\ =&\frac{1}{\sqrt{8}}\arctan(u)+C\\ =&\frac{1}{\sqrt{8}}\arctan\left(\frac{x}{8}\right)+C\end{aligned}$$

באופן כללי,

$$\int\frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C\ .$$

■

דוגמה 11.13

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int\frac{1}{5x+2}\,dx$$

פתרון:

$$u(x)=5x+2\ ,\qquad u'(x)=5\ ,\qquad\frac{1}{5}u'(x)=1\ .$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{5x+2}\,dx &= \int \frac{1}{u(x)} \cdot \frac{u'(x)}{5}\,dx \\ &= \frac{1}{5}\int \frac{1}{u(x)}\,du \\ &= \frac{1}{5}\ln|u| + C \\ &= \frac{1}{5}\ln|5x+2| + C\end{aligned}$$

באופן כללי,

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \ .$$

■

דוגמה 11.14

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int (3x-1)^{24}\ dx$$

פתרון:

$$u(x) = 3x-1\ , \qquad u' = 3\ , \qquad \frac{1}{3}u'(x) = 1$$

$$\begin{aligned}\int (3x-1)^{24}\ dx &= \int u^{24} \cdot \frac{u'(x)}{3}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\int u^{24}\,du \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{25}}{25} + C \\ &= \frac{1}{75}(3x-1)^{25} + C\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.15

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \tan x\,dx$$

פתרון:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$u = \cos x\ , \qquad u' = -\sin x\ .$$

$$\begin{aligned}\int \tan x\, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx\\ &= -\int \frac{1}{u}\, u'(x)dx\\ &= -\int \frac{1}{u}\, du\\ &= -\ln|u| + C\\ &= -\ln|\cos x| + C\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.16

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \cot x\, dx$$

פתרון:

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$$

$$u(x) = \sin x\ , \qquad u'(x) = \cos x\ .$$

$$\begin{aligned}\int \cot x\, dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx\\ &= \int \frac{1}{u}\, u'(x)dx\\ &= \int \frac{1}{u}\, du\\ &= \ln|u| + C\\ &= \ln|\sin x| + C\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.17

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int x(x+2)^{69}\, dx$$

פתרון:

$$u = (x+2)\ , \qquad u'(x) = 1\ , \qquad x = u - 2$$

$$\begin{aligned}\int x(x+2)^{69}\,dx &= \int (u-2)u^{69}\,u'(x)\,dx\\ &= \int (u-2)u^{69}\,du\\ &= \int \left(u^{70}-2u^{69}\right)\,du\\ &= \frac{u^{71}}{71}-\frac{2u^{70}}{70}+C\\ &= \frac{(x+2)^{71}}{71}-\frac{(x+2)^{70}}{35}+C\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.18

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{1}{\cot^5 x\cdot\sin^2 x}\,dx$$

פתרון:

$$u=\cot x\ ,\qquad u'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cot^5 x\cdot\sin^2 x}\,dx &= -\int \frac{1}{u^5}u'(x)\,dx\\ &= -\int \frac{1}{u^5}\,du\\ &= -\int u^{-5}\,du\\ &= -\frac{u^{-4}}{-4}+C\\ &= \frac{1}{4\cot^4 x}+C\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.19

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{\cos x}{3+\sin x}\,dx$$

פתרון:

$$u=\sin x\ ,\qquad u'(x)=\cos x\ .$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{3+\sin x}\,dx &= \int \frac{1}{u+3}\,u'(x)\,dx\\ &= \int \frac{1}{u+3}\,du\\ &= \ln|u+3|+C\\ &= \ln|\sin x+3|+C\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.20

חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$$

פתרון:

$$u=e^x\ ,\qquad u'(x)=e^x\ ,\qquad u'(x)e^{-x}=\frac{1}{u}\cdot u'(x)\ .$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^x+1}\,dx &= \int \frac{1}{u(u+1)}\,u'(x)\,dx\\ &= \int \frac{1}{u(u+1)}\,du\\ &= \int \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)\,du\\ &= \ln|u|-\ln|u+1|+C\\ &= \ln(e^x)-\ln(e^x+1)+C\\ &= x-\ln(e^x+1)+C\end{aligned}$$

■

11.8 אינטגרציה בחלקים

משפט 11.5 אינטגרציה בחלקים

יהיו $u(x)$ $\mathrm{v}(x)$ פונקציות של משתנה x.

$$\int u\mathrm{v}'\,dx = u\mathrm{v} - \int u'\mathrm{v}\,dx$$

הוכחה:

לפי כלל הכפל של נגזרות (עיין משפט **??** מספר 3)

$$(u\mathrm{v})' = u'\mathrm{v}+u\mathrm{v}' \qquad \Rightarrow \qquad u\mathrm{v}' = (u\mathrm{v})' - u'\mathrm{v}$$

נפעיל אינטגרל על שני הצדדים:

$$\int u\mathrm{v}'\,dx = \int (u\mathrm{v})'\,dx - \int u'\mathrm{v}\,dx\ . \qquad (*)$$

לפי משפט **??** ניתן לכתוב אגף השמאל של (*) כ

$$\int u\mathrm{v}'(x)\,dx = \int u\,d\mathrm{v} \tag{\#1}$$

האיבר הראשון באגף הימין של (*) הוא

$$\int (u\mathrm{v})'dx = u\mathrm{v} + C \tag{\#2}$$

לפי משפט **??** האיבר השני באגף הימין של (*) הוא

$$\int u'\mathrm{v}\,dx = \int \mathrm{v}\,du \tag{\#3}$$

נציב (#1), (#2), ו- (#3) לתוך (*) ונקבל

$$\int u\,d\mathrm{v} = u\mathrm{v} - \int \mathrm{v}\,du$$

ז"א

$$\int u\mathrm{v}'\,dx = \int (u\mathrm{v})'\,dx - \int u'\mathrm{v}\,dx$$

■

דוגמה 11.21

חשב את האינטגרל

$$\int x\cdot e^x\,dx$$

פתרון:

$u = x \quad \mathrm{v}' = e^x \quad u'(x) = 1 \quad v = e^x$

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx =& xe^x - \int e^x\,dx\\ =& xe^x - e^x + C\end{aligned}$$

■

למה 11.1 מקרים נפוצים של שימוש באינטגרציה בחלקים

1) במקרה

א $\int p(x)\cdot e^{kx}\,dx$,

ב $\int p(x)\cdot \sin(kx)\,dx$,

ג $\int p(x)\cdot \cos(kx)\,dx$

כאשר $p(x)$ פולינום, מגדירים $u = p(x)$.

2) במקרה

א $\int p(x)\cdot \arcsin(kx)\,dx$,

ב $\int p(x)\cdot \arccos(kx)\,dx$,

ג $\int p(x)\cdot \arctan(kx)\,dx$,

ד $\int p(x)\cdot \ln|kx|\,dx$,

ה $\int p(x)\cdot \text{arccot}(kx)\,dx$,

כאשר $p(x)$ פולינום, מגדירים $\text{v}'=p(x)$.

(3 במקרה

א $\int e^{ax}\cdot \sin(bx)\,dx$,

ב $\int e^{ax}\cdot \cos(bx)\,dx$,

מגדירים $u=e^{ax}$.

11.9 דוגמאות

דוגמה 11.22

חשב את האינטגרל

$$\int (2x+1)e^{3x}\,dx$$

פתרון:

$$u=2x+1\ ,\qquad \text{v}'=e^{3x}\qquad u'=2\qquad \text{v}=\frac{1}{3}\cdot e^{3x}$$

$$\begin{aligned}\int (2x+1)e^{3x}\,dx =&\frac{1}{3}(2x+1)e^{3x}-\frac{2}{3}\int e^{3x}\,dx\\ =&\frac{1}{3}(2x+1)e^{3x}-\frac{2}{9}e^{3x}+C\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.23

חשב את האינטגרל

$$\int \ln(x)\,dx$$

פתרון:

$$u=\ln(x)\ ,\qquad \mathrm{v}'=dx\ ,\qquad u'=\frac{1}{x}\ ,\qquad \mathrm{v}=x$$

$$\int \ln x\,dx = x\cdot\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C$$

■

דוגמה 11.24

חשב את האינטגרל

$$\int \arctan(x)\,dx$$

פתרון:

$$u=\arctan(x)\ ,\qquad \mathrm{v}'=1\ ,\qquad u'=\frac{1}{1+x^2}\ ,\qquad \mathrm{v}=x$$

$$\int \arctan x\,dx = x\cdot\arctan x-\int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$u=x^2+1\ ,\qquad u'=2x$$

$$\begin{aligned}\int \arctan x\,dx =& x\cdot\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\,du\\ =& x\cdot\arctan x-\frac{1}{2}\int \ln|u|+C\\ =& x\cdot\arctan x-\frac{1}{2}\int \ln|x^2+1|+C\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.25

חשב את האינטגרל

$$I=\int x^2\sin(2x)\,dx$$

פתרון:

$$u=x^2\ ,\qquad \mathrm{v}'=\sin(2x)\ ,\qquad u'=2x\ ,\qquad \mathrm{v}=-\frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\begin{aligned}I=&-\frac{1}{2}x^2\cdot\cos(2x)+\frac{1}{2}\int 2x\cdot\cos(2x)\,dx\\ =&-\frac{1}{2}x^2\cdot\cos(2x)+\int x\cdot\cos(2x)\,dx\end{aligned}$$

$$u=x\ ,\qquad \mathrm{v}'=\cos(2x)\ ,\qquad u'=1\ ,\qquad \mathrm{v}=\frac{1}{2}\sin(2x)$$

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2}x^2 \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2}x \cdot \sin(2x) - \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2 \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2}x \cdot \sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C \end{aligned}$$

■

דוגמה 11.26

חשב את האינטגרל

$$I = \int e^x \sin x\,dx$$

פתרון:

$$u = e^x\ , \qquad \mathrm{v}' = \sin(x)\ , \qquad u' = e^x\ , \qquad \mathrm{v} = -\cos(x)$$

$$I = -\,e^x \cos x + \int e^x \cdot \cos(x)\,dx$$

$$u = e^x\ , \qquad \mathrm{v}' = \cos(x)\ , \qquad u' = e^x\ , \qquad \mathrm{v} = \sin(x)$$

$$\begin{aligned} I &= -\,e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cdot \sin(x)\,dx \\ &= -\,e^x \cos x + e^x \sin x - I \end{aligned}$$

לכן

$$2I = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

ז"א

$$I = \frac{1}{2}\left(-e^x \cos x + e^x \sin x\right) + C$$

■

דוגמה 11.27

חשב את האינטגרל

$$I = \int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$$

פתרון:

$$u = x\ , \qquad \mathrm{v}' = \frac{1}{\cos^2(x)}\ , \qquad u' = 1\ , \qquad \mathrm{v} = \tan(x)$$

$$\begin{aligned} I =& x \tan x - \int \tan(x)\,dx \\ =& x \tan x + \ln|\cos x| + C \end{aligned}$$

■

דוגמה 11.28

חשב את האינטגרל

$$I = \int \ln\left(x^2+4\right)\, dx$$

פתרון:

$$u = \ln\left(x^2+4\right) \ , \qquad \mathrm{v}' = 1 \ , \qquad u' = \frac{2x}{x^2+4} \ , \qquad \mathrm{v} = x \ .$$

$$\begin{aligned}
I =& x\ln\left(x^2+4\right) - 2\int \frac{x^2}{x^2+4}\, dx \\
=& x\ln\left(x^2+4\right) - 2\int \frac{(x^2+4)-4}{x^2+4}\, dx \\
=& x\ln\left(x^2+4\right) - 2\int \left(1 - \frac{4}{x^2+4}\right)\, dx \\
=& x\ln\left(x^2+4\right) - 2\left(x - 4\cdot\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C \\
=& x\ln\left(x^2+4\right) - 2x + 4\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C \ .
\end{aligned}$$

■