אלגברה לינארית סמסטר סתו 2022-23
עבודה עצמית 5

שאלות

שאלה 1 לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבע האם היא תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

א) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = y = -z\}$

ב) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 3y\}$

ג) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = z^2\}$

ד) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0\}$

ה) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y \geq 0\}$

ו) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0\}$

ז) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = -z\}$

ח) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x \geq 0, y \geq 0\}$

ט) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 1\}$

י) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$

שאלה 2 לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבע האם היא תת מרחב של $P_2(\mathbb{R})$ (מרחב הפולינומים ממעלה עד 2, סימונים נוספים למרחב $P_2(x)$,$P_2(\mathbb{R})$).

א) $W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) | b = 0\}$

ב) $W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) | a + b + c = 0\}$

ג) $W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) | a > b > c\}$

ד) $W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) | a = b = c\}$

ה) $W = \{p \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}$

ו) $W = \{p \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 1\}$

ז) $W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) | a, b, c \in \mathbb{C}, a + b = \bar{c}\}$

שאלה 3 לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבע האם היא תת מרחב של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

א) $W = \left\{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) | A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\right\}$

ב) $W = \left\{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) | A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0\right\}$

ג) $W = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \ \ | \ \ |A| = 0\}$

ד) $W = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \ \ | \ \ |A| \neq 0\}$

ה) $W = \left\{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) | A \cdot B = 0, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\right\}$

שאלה 4 לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבע האם היא תת מרחב של $\{f | f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}\}$.

א) $W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | f(1) = 0\}$

ב) $W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | f(1) + f(2) = 0\}$

ג) $W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)\}$

ד) $W = \left\{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = (f(x))^2\right\}$

שאלה 5 יהי V מרחב וקטורי ויהיו W_1, W_2 תת מרחבים של V.

א) הוכח:

$$W_1 \cap W_2 = \{x \in V | x \in W_1 \land x \in W_2\}$$

הינו תת-מרחב של V.

ב) הוכח:

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1 \ , \ w_2 \in W_2\}$$

הינו תת-מרחב של V.

ג) הפרך:

$$W_1 \cup W_2 = \{x \in V | x \in W_1 \lor x \in W_2\}$$

הינו תת-מרחב של V.

שאלה 6 לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבע האם היא תת מרחב של $P(\mathbb{R})$ (מרחב הפולינומים עם מקדמים ממשיים):

א) $W = \{p \in P(\mathbb{R}) | \deg(p) = 3\}$

ב) $W = \{p \in P(\mathbb{R}) | \deg(p) \text{ even} \cup \{\bar{0}\}\}$

ג) $W = \{p \in P(\mathbb{R}) | p(0) \in \mathbb{Z}\}$

פתרונות

שאלה 1

א) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = y = -z\}$

דוגמה: $(1, 1, -1) \in W$.

1) הוקטור האפס $(0, 0, 0) = \bar{0}$ מקיים את התנאי $x = y = -z$ לכן $\bar{0} \in W$.

2) נניח ש- $u_1 = (x_1, y_1, z_1) \in W$ וגם $u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in W$. לפי זה u_1, u_2 מקיימים את התנאי

(*) $$x_1 = y_1 = -z_1 \ , \qquad x_2 = y_2 = -z_2 \ .$$

נקח הוקטור $u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. נובע מ- **(*)** כי

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = -z_1 - z_2 = -(z_1 + z_2) \ .$$

כלומר $u_1 + u_2$ מקיים את התנאי של W, ולכן $u_1 + u_2 \in W$.

3) נניח $u = (x, y, z) \in W$ ו- k סקלר. כיוון ש- $u \in W$ אז

(#) $$x = y = -z \ .$$

נקח הוקטור $ku = (kx, ky, kz)$. מ- **(#)** נובע כי $kx = ky = k(-z) = -(kz)$, כלומר ku מקיים את התנאי ולכן $ku \in W$.

הוכחנו ש- W תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

■

ב) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 3y\}$

דוגמה: $(3, 1, 2) \in W$.

1) הוקטור האפס $(0, 0, 0) = \bar{0}$ מקיים את התנאי $x = 3y$ לכן $\bar{0} \in W$.

2) נניח ש- $u_1 = (x_1, y_1, z_1) \in W$ וגם $u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in W$. אז

(*) $$x_1 = 3y_1 \ , \qquad x_2 = 3y_2 \ .$$

מתקיים. נקח הוקטור $u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. מ- **(*)** נובע כי

$$x_1 + x_2 = 3y_1 + 3y_2 = 3(y_1 + y_2) \ .$$

ז"א $u_1 + u_2$ מקיים את התנאי של W, ולפיו $u_1 + u_2 \in W$.

3) נניח $u = (x, y, z) \in W$ ו- k סקלר. כיוון ש- $u \in W$ אז

(#) $$x = 3y \ .$$

נקח הוקטור $ku = (kx, ky, kz)$. מ- **(#)** נקבל $k \cdot x = k \cdot (3y) = 3 \cdot (ky)$, ולפי זה ku מקיים את התנאי, ז"א $ku \in W$.

הוכחנו ש- W תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.
■

ג) $\underline{W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|y=z^2\}}$

לדוגמה: $u=(1,9,3)$.

W אינו תת-מרחב. דוגמה נגדית:

$u=(0,2,4)\in W$ כי $2^2=4$ אבל $3u=(0,6,12)$ ו- $6^2\neq 12$. לכן $u\notin W$.
■

ד) $\underline{W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x+y-z=0\}}$

לדוגמה: $u=(1,1,2)\in W$.

1) הוקטור האפס $\bar{0}=(0,0,0)$ מקיים את התנאי $x+y-z=0$ לכן $\bar{0}\in W$.

2) נניח ש- $u_1=(x_1,y_1,z_1)\in W$ וגם $u_2=(x_2,y_2,z_2)\in W$. אז

$$x_1+y_1-z_1=0\ ,\qquad x_2+y_2-z_2=0\ . \qquad (*)$$

מתקיים. נקח הוקטור $u_1+u_2=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$. מ- **(*)**,

$$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-(z_1+z_2)=0$$

ולכן u_1+u_2 מקיים את התנאי של W, ז"א $u_1+u_2\in W$.

3) נניח $u=(x,y,z)\in W$ ו- k סקלר. כיוון ש- $u\in W$ אז

$$x+y-z=0\ . \qquad (\#)$$

נקח הוקטור $ku=(kx,ky,kz)$. כתוצאה של **(#)** נקבל $k\cdot(x+y-z)=0 \quad\Rightarrow\quad$ = $k\cdot x+k\cdot y-k\cdot z=0$, לכן ku מקיים את התנאי, ז"א $ku\in W$.

הוכחנו ש- W תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.
■

ה) $\underline{W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x+y\geq 0\}}$

לדוגמה: $(1,1,0)\in W$.

W אינו תת-מרחב. דוגמה נגדית:

$u=(1,2,3)\in W$ כי $1+2+3\geq 0$. נבחר $k=-1$. אז $k\cdot u=(-1,-2,-3)\notin W$ כי $-1-2<0$.
■

ו) $\underline{W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x=0\}}$

לדוגמה: $(0,1,2)\in W$.

1) הוקטור האפס $\bar{0}=(0,0,0)$ מקיים את התנאי $x=0$ לכן $\bar{0}\in W$.

2) נניח ש- $u_1=(x_1,y_1,z_1)\in W$ וגם $u_2=(x_2,y_2,z_2)\in W$. אז

$$x_1=0\ ,\qquad x_2=0\ . \qquad (*)$$

מתקיים. נקח הוקטור $u_1+u_2=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$. מ- **(*)** נובע כי $(x_1+x_2)=0$. לכן u_1+u_2 מקיים את התנאי של W, ז"א $u_1+u_2\in W$.

3) נניח $u=(x,y,z)\in W$ ו- k סקלר. כיוון ש- $u\in W$ אז

$$x=0\ . \qquad (\#)$$

נקח הוקטור $ku=(kx,ky,kz)$. מ- **(#)** נקבל $kx=0 \quad\Rightarrow\quad k\cdot(x)=0$, אזי ku מקיים את התנאי, ז"א $ku\in W$.

הוכחנו ש- W תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

■

ז) $\underline{W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x+y=-z\}}$

לדוגמה $(1,1,-2)\in W$.

1) $\bar{0}=(0,0,0)$, $0+0=-0 \Leftarrow \bar{0}\in W$.

2) נקח $u_1=(x_1,y_1,z_1)\in W$, וגם $u_2=(x_2,y_2,z_2)\in W$.
ז"א $x_1+y_1=-z_1$, $x_2+y_2=-z_2$. אז

$$u_1+u_2=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$$

$$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)=(x_1+y_1)+(x_2+y_2)=-z_1-z_2=-(z_1+z_2)$$

לכן $u_1+u_2\in W$.

3) נניח $u=(x,y,z)\in W$, $k\in\mathbb{R}$. $\Leftarrow$ $x+y=-z$.

$$ku=(kx,ky,kz)\qquad , \qquad kx+ky=k(x+y)=k(-z)=-kz$$

לכן $ku\in W$.

מסקנה: W תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

■

ח) $\underline{W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x\geq 0,y\geq 0\}}$

לדוגמה: $(1,1,1)\in W$.

W אינו תת-מרחב. דוגמה נגדית:

$$u=(1,1,1)\in W$$

אבל

$$-1\cdot u=(-1,-1,-1)\notin W\ .$$

■

ט) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x+y-z=1\}$

דוגמה: $(1,1,1)\in W$.

אינו תת-מרחב בגלל ש- $\bar{0}=(0,0,0)\notin W$ כי $0+0-0\neq 1$. לכן W לא תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

■

י) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2=0\}$

הוקטור היחידי שמקיים את התנאי הוא וקטור האפס: $\bar{0}=(0,0,0)$, ז"א $W=\{\bar{0}\}$.

1) $\bar{0}\in W$.

2) $\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}\in W$.

3) $k\cdot\bar{0}=\bar{0}$

לכן W תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

■

שאלה 2

א) $W=\{ax^2+bx+c\in P_2(\mathbb{R})|b=0\}$. (דוגמה: $x^2+1\in W$).

1) $\bar{0}=0x^2+0x+0\in W$.

2) נניח $u_1=a_1x^2+c_1\in W$, $u_2=a_2x^2+c_2\in W$. אזי

$$u_1+u_2=(a_1+a_2)x^2+(c_1+c_2)\in W$$

3) נקח $u=ax^2+c\in W$. אז לכל $k\in\mathbb{R}$

$$k\cdot u=(ka_1)x^2+kc\in W\ .$$

מסקנה: W תת-מרחב של $P_2(\mathbb{R})$.

■

ב) $W=\{ax^2+bx+c\in P_2(\mathbb{R})|a+b+c=0\}$ (דוגמה: $x^2+x-2\in W$).

1) $\bar{0}=0x^2+0x+0\in W$.

2) נניח $u_1=a_1x^2+b_1x+c_1\in W$, $u_2=a_2x^2+b_2x+c_2\in W$.
אז $a_1+b_1+c_1=0$ וגם $a_2+b_2+c_2=0$.

$$u_1+u_2=(a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)\ .$$

$$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)=(a_1+b_1+c_1)+(a_2+b_2+c_2)=0+0=0\ .$$

לכן $u_1+u_2\in W$.

3) נקח $u = ax^2+bx+c \in W$. ז"א $a+b+c=0$. אז לכל $k \in \mathbb{R}$

$$k \cdot u = (ka)x^2+(kb)x+(kc) \ .$$

$$ka+kb+kc = k(a+b+c) = k \cdot 0 = 0 \ .$$

לכן $ku \in W$.

מסקנה: W תת-מרחב של $P_2(\mathbb{R})$.

■

ג) $W = \{ax^2+bx+c \in P_2(\mathbb{R}) | a > b > c\}$
דוגמה נגדית: $u = 3x^2+2x+1 \in W$ כי $3 > 2 > 1$.
אבל $(-1) \cdot u = -3x^2-2x-1 \notin W$ כי $-3 < -2 < -1$.

■

ד) $W = \{ax^2+bx+c \in P_2(\mathbb{R}) | a = b = c\}$ (דוגמה: $x^2+x+1 \in W$)
ז"א $W = \{ax^2+ax+a \in P_2(\mathbb{R}) | a \in \mathbb{R}\}$.

1) $\bar{0} = 0x^2+0x+0 \in W$. (עבור $a=0$).

2) נניח $u_1 = a_1x^2+a_1x+a_1 \in W$ ו- $u_2 = a_2x^2+a_2x+a_2 \in W$.
אז $u_1+u_2 = (a_1+a_2)x^2+(a_1+a_2)x+(a_1+a_2) \in W$.

3) נניח $u = ax^2+ax+a \in W$ ו- k סקלר. אז

$$ku = k(ax^2+ax+a) = (ka)x^2+(ka)x+ka \in W$$

מסקנה: W תת מרחב של $P_2(\mathbb{R})$.

■

ה) $W = \{p \in P_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}$ (דוגמה: $x^2+x-2 \in W$) נסמן $p(x) = ax^2+bx+c$.
$p(1) = 0 \Leftarrow a+b+c = 0$. ז"א $W = \{ax^2+bx+c \in P_2(\mathbb{R}) | a+b+c=0\}$. הוכחנו בסעיף ב' שזה תת מרחב של $P_2(\mathbb{R})$.

■

ו) $W = \{p \in P_2(\mathbb{R}) | p(1) = 1\}$
$\bar{0} = 0x^2+0x+0 \notin W$ כי $\bar{0}(1) = 0 \cdot 1^2 + 0 \cdot 1 + 0 \neq 1$.

■

■

שאלה 3

א) $$W = \left\{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

1) $\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$ (עבור $a=0$, $b=0$)

2) נניח $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$.

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} \in W$$

3) נניח $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in W$. אז לכל $k \in \mathbb{R}$, $k \cdot A = \begin{pmatrix} ka & 0 \\ 0 & kb \end{pmatrix} \in W$.

לכן W תת מרחב של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

■

ב) $$W = \left\{ A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) | A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0 \right\}$$

דומגה: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W$.

$\bar{0} \not in W$ כי $\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ($c = 0$). לכן W לא תת מרחב של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

■

ג) $$W = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \quad | \quad |A| = 0\}$$

דוגמה נגדית: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

אז $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin W$. לכן W לא תת מרחב של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

■

ד) $W = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \quad | \quad |A| \neq 0\}$ $W \not\ni \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ כי $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

לכן W לא תת מרחב של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

■

ה) $$W = \left\{ A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) | A \cdot B = 0, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \right\}$$

דוגמה: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$

1) $\bar{0} \in W$ כי $\bar{0} \cdot A = 0$

2) נניח $A_1, A_2 \in W$. ז"א $A_1 \cdot B = 0$, $A_2 \cdot B = 0$. אז

$$(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B = 0 + 0 = 0$$

לכן $A_1 + A_2 \in W$.

3) נניח $A \in W$ ז"א $A \cdot B = 0$. אז לכל סקלר k, $(kA) \cdot B = k(A \cdot B) = k \cdot 0 = 0$.

לכן $A \in W$.

לכן W תת מרחב של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

■

<u>שאלה 4</u>

א) $W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | f(1) = 0\}$
לדוגמה: $f(x) = x - 1$.

1) $\bar{0} = (y = 0) \Leftarrow \bar{0}(1) = 0 \Leftarrow \bar{0} \in W$.

2) נניח $f, g \in W$. $\Leftarrow$ $f(1) = 0$ וגם $g(1) = 0$.
אז $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$.
לכן $f + g \in W$.

3) נניח $f \in W \Leftarrow f(1) = 0$. אז לכל $k \in \mathbb{R}$,

$$(k \cdot f)(1) = k \cdot (f(1)) = k \cdot 0 = 0 \ .$$

לכן $kf \in W$.

מסקנה: W ת"מ של $F(\mathbb{R})$.

■

ב) $W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | f(1) + f(2) = 0\}$
דוגמה: $f(x) = (x - 1)(x - 2)$.

1) $\bar{0} = (y = 0) \Leftarrow \bar{0}(1) = 0$, $\bar{0}(2) = 0$, $\Leftarrow \bar{0}(1) + \bar{0}(2) = 0$.
לכן $\bar{0} \in W$.

2) נניח $f_1, f_2 \in W$. $\Leftarrow$ $f_1(1) + f_1(2) = 0$ וגם $f_2(1) + f_2(2) = 0$.
אז $(f_1 + f_2)(1) + (f_1 + f_2)(2) = [f(1) + f_1(2)] + [f_2(1) + f_2(2)] = 0 + 0 = 0$.
לכן $f_1 + f_2 \in W$.

3) נניח $f \in W \Leftarrow f(1) + f(2) = 0$. אז לכל $k \in \mathbb{R}$,

$$(k \cdot f)(1) + (k \cdot f)(2) = k \cdot (f(1) + f(2)) = k \cdot 0 = 0 \ .$$

לכן $kf \in W$.

מסקנה: W ת"מ של $F(\mathbb{R})$.

■

ג) $W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)\}$
דוגמה: $f(x) = x^2$.

1) $\bar{0}(x) = \bar{0}(-x) = 0$ לכל $x \in \mathbb{R} \Leftarrow \bar{0} \in W$.

2) נניח $f, g \in W$ ז"א $f(x) = f(-x)$, $g(x) = g(-x)$.
אז $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f + g)(-x)$
לכן $f + g \in W$.

3) נניח $f \in W$, $k \in \mathbb{R}$. אז $f(x) = f(-x)$. לכן $(kf)(x) = k(f(x)) = kf(-x) = (kf)(-x)$
לכן $kf \in W$.

מסקנה: W ת"מ של $F(\mathbb{R})$.

■

ד) $W=\left\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}|\forall x\in\mathbb{R}, f(x^2)=(f(x))^2\right\}$
דוגמה נגדית: $f(x)=x^2\in W$, $g(x)=1\in W$,

$$(f+g)(x)=x^2+1\notin W\ .$$

מסקנה: W לא ת"מ של $F(\mathbb{R})$.
■

שאלה 5

א) נתון: W_1,W_2 תת מרחבים של V.
צ"ל: $W_1\cap W_2$ תת מרחבים של V.
הוכחה:

1) צ"ל: $\bar{0}\in W_1\cap W_2$.

$$\left\{\begin{array}{l}W_1 \text{ תת-מרחב, לכן } \bar{0}\in W_1\\ W_2 \text{ תת-מרחב, לכן } \bar{0}\in W_2\end{array}\right. \Leftarrow \bar{0}\in W_1\cap W_2.$$

2) נקח $u_1,u_2\in W_1\cap W_2$ $\Leftarrow$ $\left\{\begin{array}{lll}u_1\in W_1, & u_1\in W_2, & \text{וגם}\\ u_2\in W_1, & u_2\in W_2 & \end{array}\right\}$

$$\left\{\begin{array}{l}W_1 \text{ תת-מרחב, לכן } u_1+u_2\in W_1\\ W_2 \text{ תת-מרחב, לכן } u_1+u_2\in W_2\end{array}\right. \Leftarrow u_1+u_2\in W_1\cap W_2.$$

3) נניח $u\in W_1\cap W_2$, $k\in\mathbb{R}$.
אז $u\in W_1$, $u\in W_2$.

$$\left\{\begin{array}{l}W_1 \text{ תת-מרחב, לכן } ku\in W_1\\ W_2 \text{ תת-מרחב, לכן } ku\in W_2\end{array}\right. \Leftarrow ku\in W_1\cap W_2.$$

מסקנה: $W_1\cap W_2$ תת-מרחב של V.
■

ב) $\underline{W_1+W_2=\{w_1+w_2:w_1\in W_1\ ,\ w_2\in W_2\}}$

צ"ל: W_1+W_2 תת מרחב של V.

1) W_1 תת-מרחב $\Leftarrow$ $\bar{0}\in W_1$, ו- W_2 תת-מרחב $\Leftarrow$ $\bar{0}\in W_2$.

$\bar{0}=\bar{0}+\bar{0}$ $\Leftarrow$ $\bar{0}\in W_1+W_2$.

2) נקח $u,v\in W_1+W_2$. $\Leftarrow$ $\left\{\begin{array}{lll}u=w_1+w_2, & w_1\in W_1, & w_2\in W_2\\ v=w_1'+w_2', & w_1'\in W_1, & w_2'\in W_2\end{array}\right\}$

W_1 תת מרחב, לכן $w_1+w_1'\in W_1$,
W_2 תת מרחב, לכן $w_2+w_2'\in W_2$,
אז

$$u+v=(w_1+w_2)+(w_1'+w_2')=\overbrace{(w_1+w_1')}^{\in W_1}+\overbrace{(w_2+w_2')}^{\in W_2}$$

לכן $u+v\in W_1+W_2$.

3) נניח כי $u\in W_1+W_2$. $\Leftarrow$ $u=w_1+w_2$, $w_1\in W_1$ ו- $w_2\in W_2$.

אז לכל $k\in\mathbb{R}$,

$$ku=k(w_1+w_2)=kw_1+kw_2\ .$$

W_1 ת"מ, לכן $kw_1\in W_1$
W_2 ת"מ, לכן $kw_2\in W_2$
$\Leftarrow$ $ku\in W_1+W_2$.

מסקנה: W_1+W_2 תת-מרחב של V.

■

ג) $\underline{W_1\cup W_2=\{x\in V|x\in W_1\vee x\in W_2\}}$

דוגמה נגדית:

$$W_1=\{(x,y)|y=x\}\ ,\qquad W_2=\{(x,y)|y=2x\}$$

W_1, W_2 תת-מרחבים של $\mathbb{R}^2$.

$u=(1,1)\in W_1$ אז $u=W_1\cup W_2$.

$v=(1,2)\in W_2$ אז $v=W_1\cup W_2$.

$u+v=(2,3)$, $u+v\notin W_1$ וגם $u+v\notin W_2$.
לכן $u+v\notin W_1\cup W_2$.

■

שאלה 6

א) $W=\{p\in P(\mathbb{R})|\deg(p)=3\}$
דוגמה: $p=x^3+x^2+x+1\in W$.
$\bar{0}\notin W$ כי $\deg(\bar{0})=0$
לכן W לא תת-מרחב של $p(\mathbb{R})$.

■

ב) $W=\{p\in P(\mathbb{R})|\deg(p)\ \text{even}\cup\{\bar{0}\}\}$
דוגמה: $p=x^2+1\in W$.
דוגמה נגדית: $p=x^2+x+1\in W$, $q=-x^2+x\in W$,
$p+q=2x+1\notin W$ כי $\deg(p+q)=1$.
לכן W לא תת-מרחב של $P(\mathbb{R})$.

■

ג) $W=\{p\in P(\mathbb{R})|p(0)\in\mathbb{Z}\}$
דוגמה: $p=x+1\in W$ כי $1\in\mathbb{Z}$.
W לא תת-מרחב של $P(\mathbb{R})$.
דוגמה נגדית: $p=x+1\in W$,

$W \notin \pi + x \cdot \pi = p \cdot \pi$ כי $\mathbb{Z} \notin \pi$.

$\blacksquare$