

אלגברה לינארית סמסטר סתו 2022-23
עבודה עצמית 10

שאלה 1 במרחב וקטורי \mathbb{R}^4 נתונים הוקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

נסמן $U = \text{sp}(u_1, u_2)$, $V = \text{sp}(v_1, v_2)$

(א) מצאו בסיס ומימד של U, V .

(ב) מצאו בסיס ומימד של $V + U$.

(ג) מצאו בסיס ומימד של $V \cap U$.

שאלה 2 במרחב וקטורי \mathbb{R}^4 נתונים הוקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

נסמן $U = \text{sp}(u_1, u_2)$, $V = \text{sp}(v_1, v_2)$

(א) מצאו בסיס ומימד של U, V .

(ב) מצאו בסיס ומימד של $V + U$.

(ג) מצאו בסיס ומימד של $V \cap U$.

פתרונות

שאלה 1

(א) בסיס של V :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של V :

$$B(V) = \{v_1, v_2\}$$

$$\dim(V) = 2$$

בסיס של U :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של U :

$$B(U) = \{u_1, u_2\}$$

$$\dim(U) = 2$$

(ב)

$$Q = (v_1, v_2, u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות לכן בסיס של $V + U$ הוא

$$B(V + U) = \{v_1, u_1, u_1, u_2\}$$

$$\dim(V + U) = 4$$

ג) לפי משפט המימדים:

$$\dim(V + U) = \dim(V) + \dim(U) - \dim(V \cap U)$$

כיוון ש $\dim(V) = 2$, $\dim(U) = 2$ ו $\dim(V + U) = 4$, אז

$$\dim(V \cap U) = 0 .$$

לכן $V \cap U$ מורכב מוקטור האפס:

$$V \cap U = \{\bar{0}\} .$$



שאלה 2

א) בסיס של V :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של V :

$$B(V) = \{v_1, v_2\}$$

$$\dim(V) = 2$$

בסיס של U :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של U :

$$B(U) = \{u_1, u_2\}$$

$$\dim(U) = 2$$

ב)

$$Q = (v_1, v_2, u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

העמודות 1, 2, 3 מובילות לכן בסיס של $V + U$ הוא

$$B(V + U) = \{v_1, u_1, u_2\}$$

$$\dim(V + U) = 3$$

לפי משפט המימדים: **ג**

$$\dim(V + U) = \dim(V) + \dim(U) - \dim(V \cap U)$$

$$\dim(V) = 2, \dim(U) = 2, \dim(V + U) = 3 \text{ אז}$$

$$\dim(V \cap U) = 1.$$

כדי למצוא בסיס של $V \cap U$ נמצא את $\text{Nul} Q$. מסעיף הקודם המדורגת של Q היא:

$$Q \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית $Qx = 0$ הוא

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן בסיס של $\text{Nul} Q$ הוא $\left\{ x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. הוקטור x_1 מקיים את משוואת ההומוגנית של Q , לכן

$$Q \cdot x_1 = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad (v_1 \ v_2 \ u_1 \ u_2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \bar{0}$$

לכן נקבל

$$-1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 - 1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad -1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = 1 \cdot u_1 - 2 \cdot u_2.$$

נגדיר את שני האגפים להיות הוקטור y :

$$y := -1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = 1 \cdot u_1 - 2 \cdot u_2$$

נציב את הוקטורים ונמצא כי

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

לכן בסיס של $V \cap U$ הוא

$$B(V \cap U) = \{y\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

■