המחלקה למדעי המחשב

$4-12-22$
$9:10-10:40$

אלגברה ליניארית 1 למדעי המחשב

בוחן אמצע סמסטר

מרצים: ד'ר ירמיהו מילר

תשפ"ג סמסטר א'

השאלון מכיל עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דף נוסחאות של הקורס (עמוד אחד $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לענות על כל השאלות 1-3.

==

שאלה 1 (35 נקודות)

א) (25) נתונה המערכת הלינארית הבאה מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} ax+y+2z &= 0 \\ ax+(a-4)y+5z &= 3 \\ 2ax+(a-3)y+(a^2-8a+19)z &= a-3 \end{aligned}$$

א. **(6)**

מצאו את ערכי הפרמטר a עבורם למערכת אין פתרון.

ב. **(8)**

מצאו את הערכים של a עבורם למערכת יש פתרון יחיד.

ג. **(11)**

מצאו את הערכים של a עבורם למערכת יש אינסוף פתרונות. עבור ערך a הגדול מבין אלו שמצאתם, רשמו את הפתרון הכללי.

ב) (10) פתרו את המערכת הבאה

$$\begin{aligned} 2iz_1+(1-i)z_2 &= 3i\ , \\ (1+i)z_1-4z_2 &= 2\ . \end{aligned}$$

שאלה 2 (30 נקודות)

א) (20) נתונה המערכת הבאה:

$$\begin{aligned} \bar{2}x+\bar{4}y+\bar{3}z &= \bar{2} \\ \bar{3}x+\bar{2}y+z &= \bar{2} \\ x+\bar{2}y+\bar{3}z &= \bar{4} \end{aligned}$$

פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$. רשמו את כל הפתרונות בצורה מפורשת. כמה פתרונות יש למערכת?

ב) (10) בהינתן מערכת לינארית בעלת 2 משוואות ו-3 משתנים מעל $\mathbb{Z}_3$, רשמו את כל האפשרויות למספר הפתרונות של המשוואה.

שאלה 3 (35 נקודות)

א) (16) תהיינה $A,B,C \in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A \neq 0$. הוכיחו או הפריכו:

א. **(8)** אם $AB = AC$ אז $B = C$.

ב. **(8)** אם $AB = 0$ אז $A = 0$ או $B = 0$.

ב) תהיינה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

א) (14) פתרו את המשוואה

$$A \cdot X = B$$

ומצאו את המטריצה X.

ב) (5) האם X הפיכה? נמקו את תשובותיכם.

פתרונות

שאלה 1

א) נדרג את המטריצה המורחבת של המערבת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 0 \\ a & a-4 & 5 & 3 \\ 2a & a-3 & a^2-8a+19 & a-3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-2\cdot R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 0 \\ 0 & a-5 & 3 & 3 \\ 0 & a-5 & a^2-8a+15 & a-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 0 \\ 0 & a-5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & a^2-8a+12 & a-6 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 0 \\ 0 & a-5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-6) & a-6 \end{array}\right)$$

$\underline{a=0}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2+5\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & -6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

שורה סתירה , ז"א אין פתרון.

$\underline{a=5}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-2\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

שורה סתירה , ז"א אין פתרון.

$\underline{a=2}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

שורה סתירה , ז"א אין פתרון.

$\underline{a=6}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש משתנה חופשי לכן למערכת יהיו ∞ פתרונות.

$$\left.\begin{aligned} 6x+y+2z &= 0 \\ y+3z &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 6x+y+2z &= 0 \\ y &= 3-3z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 6x &= -y-2z \\ y &= 3-3z \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 6x &= 3z-3-2z \\ y &= 3-3z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{6}z-\tfrac{1}{2} \\ y &= 3-3z \end{aligned}\right\} .$$

לסיכום,

א. אין פתרון כאשר $a=0,2,5$.

ב. יש פתרון יחיד כאשר $a \neq 0,2,5,6$.

ג. אינסוף פתרונות כאשר $a=6$ מצורה $(x,y,z)=\left(\frac{z-3}{6},3-3z,z\right)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2i & 1-i & 3i \\ 1+i & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to 2iR_2-(1+i)\cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2i & 1-i & 3i \\ 0 & -2-8i & 3+i \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{aligned} 2iz_1+(1-i)z_2 &= 3i \\ (-2-8i)z_2 &= 3+i \end{aligned}\right.$$

$$z_2=\frac{3+i}{-2-8i}=\frac{3+i}{-2-8i}\cdot\left(\frac{-2+8i}{-2+8i}\right)=\frac{(3+i)(-2+8i)}{68}=\frac{-14+22i}{68}=\frac{-7+11i}{34}$$

$$2iz_1=-(1-i)z_2+3i=-(1-i)\cdot\frac{(-7+11i)}{34}+3i=\frac{-4-18i}{34}+3i$$

ז"א

$$z_1=\frac{-4-18i}{68i}+\frac{3}{2}=\frac{4i-18}{68}+\frac{3}{2}=\frac{2i-9}{34}+\frac{3}{2}=\frac{2i-9}{34}+\frac{51}{34}=\frac{2i-9+51}{34}=\frac{2i+42}{34}=\frac{i+21}{17}$$

תשובה סופית:

$$z_1=\frac{21+i}{17}, \qquad z_2=\frac{-7+11i}{34} .$$

שאלה 2

א)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{2} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + \bar{3} \cdot R_1]{R_2 \to R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \bar{3} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + \bar{3} \cdot R_2 + \bar{2} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

פתרון יחיד:

$$x = \bar{1} \,, \qquad y = \bar{1} \,, \qquad z = \bar{2} \,.$$

ב)

ישנן 2 משוואות ו3 משתנים אז יהיה לפחות משתנה חופשי אחד.

יש שורה סתירה	למערכת 0 פתרונות.
משתנה חופשי אחד	למערכת יש 3 פתרונות.
2 משתנים חופשיים	למערכת יש 3^2 פתרונות.

שאלה 3

א) א. <u>אם $AB = AC$ אז $B = C$</u>. לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$AB = AC$ אבל $B \neq C$.

ב. <u>אם $AB = 0$ אז $A = 0$ או $B = 0$</u>.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = 0 \,, \qquad A \neq 0 \,, B \neq 0 \,.$$

ב) א)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to 3R_3 - 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 15 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{3} R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 15 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 23 & 0 & -6 \\ 4 & 0 & -1 \\ -10 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ב) הדטרמיננטה של X שווה 0 כי יש למטריצה עמודה של אפסים. לכן X אינה הפיכה.