חדו"א 1
סמסטר א' תשפד
שאלות חזרה

שאלה 1 מצאו את סוג נקודת אי רציפות של פונקציה

$$f(x) = \frac{|x+3|}{x+3} \ .$$

שרטטו את גרף הפונקציה.

שאלה 2 עבור איזה ערכי A הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{4x}, & x \neq 0, \\ A & x = 0 \end{cases}$$

רציפה לכל x ממשי?

שאלה 3 נתונה פונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(\sqrt{a^2+1}\cdot x)}{2x^2} & x < 0 \\ b & x = 0 \\ x+5 & x > 0 \end{cases}$$

א) עבור אילו ערכי a, b הפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה $x = 0$?

ב) עבור אילו ערכי a, b, $x = 0$ היא נקודת אי רציפות ממין ראשון?

ג) עבור אילו ערכי a, b, $x = 0$ היא נקודת אי רציפות xkhev?

שאלה 4 הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א) סכום של שתי פונקציות זוגיות נותנת פונקציה זוגית.

ב) סכום של שתי פונקציות אי-זוגיות נותנת פונקציה אי-זוגית.

ג) מכפלה או מנה של שתי פונקציות זוגיות נותנת פונקציה זוגית.

ד) מכפלה או מנה של שתי פונקציות אי-זוגיות נותנת פונקציה זוגית.

ה) מכפלה או מנה של פונקציה זוגית עם פונקציה אי-זוגית נותנת פונקציה זוגית.

שאלה 5 הוכיחו את הטענות הבאות.

א) אם $f(x)$ פונקציה עולה ממש ו- $g(x)$ פונקציה עולה ממש אז הפונקציה $(f+g)(x)$ פונקציה עולה ממש.

ב) אם $f(x)$ פונקציה יורדת ממש ו- $g(x)$ פונקציה יורדת ממש אז הפונקציה $(f+g)(x)$ פונקציה יורדת ממש.

ג) אם $f(x)$ פונקציה עולה ממש בקטע D, ואם $f(x)>0$ לכל $x\in D$ אזי בקטע D הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ יורדת ממש.

ד) אם $f(x)$ פונקציה יורדת ממש בקטע D, ואם $f(x)>0$ לכל $x\in D$ אזי בקטע D הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ עולה ממש.

שאלה 6 חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{x^2-4}$$

שאלה 7 הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א) תני $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה. אם $f(x)$ עולה ממש אז f על $\mathbb{R}$.

ב) נתונה פונקציה $f(x)$. אם $f(x)$ פונקציה ליניארית אשר לא פונקציה קבועה אז $f(x)$ עולה ממש.

ג) אם $f(x)$ פונקציה חסומה אז היא גם חח"ע.

ד) אם $f(x)$ פונקציה חסומה אז היא גם מונוטונית.

שאלה 8

נתונה הפונקציה $f(x)=\left|\sqrt{4x+25}\right|+5$.

א) מצאו את תחום ההגדרה ואת ואת התמונה של הפונקציה $f(x)$.

ב) מצאו את הפונקציה ההפוכה ל - $f(x)$.

ג) מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של הפונקציה ההפוכה.

ד) שרטטו את סקיצות הגרפים של שתי הפונקציות (פונקציה $f(x)$ והפונקציה ההפוכה). על אותה מערכת צירים.

ה) שרטטו את הגרף של הפונקציה $f(|x|)$.

ו) שרטטו את הגרף של הפונקציה $|f^{-1}(x)|$.

שאלה 9

נתונה הפונקציה $f(x) = |x^2 - 16| + 7$.

א) מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$.

ב) מצאו את התמונה של $f(x)$.

ג) שרטטו את סקיצת הגרף של $f(x)$.

שאלה 10

נתונה פונקציה $f(x) = |\sqrt{9x+25}| + 3$.

א) מצאו את תחום ההגדרה ואת התמונה של הפונקציה $f(x)$.

ב) מצאו את הפונקציה ההפוכה ל - $f(x)$.

ג) מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של הפונקציה ההפוכה.

ד) שרטטו את סקיצות הגרפים של שתי הפונקציות (פונקציה $f(x)$ והפונקציה ההפוכה).

ה) שרטטו את הגרף של הפונקציה $f(|x|)$.

שאלה 11

נתונה פונקציה $f(x) = \dfrac{x+2}{x-4}$.

א) מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$.

ב) בררו את סימני הפונקציה

ג) תארו את התנהגות הפונקציה סביב נקודות אי הגדרה ובדקו אם יש אסימפטוטה אנכית.

ד) בררו את התנהגות הפונקציה בתהליכים $x \to \infty$ ו- $x \to -\infty$ ומצאו אסימפטוטות אופקיות.

ה) ציירו את הסקיצה של גרף הפונקציה על סמך התוצאות של הסעיפים

שאלה 12

נתונה פונקציה $f(x) = \dfrac{3}{2x+6}$.

א) מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$.

ב) בררו את סימני הפונקציה

ג) תארו את התנהגות הפונקציה סביב נקודות אי הגדרה ובדקו אם יש אסימפטוטה אנכית.

ד) בררו את התנהגות הפונקציה בתהליכים $x \to \infty$ ו- $x \to -\infty$ ומצאו אסימפטוטות אופקיות.

ה) ציירו את הסקיצה של גרף הפונקציה על סמך התוצאות של הסעיפים.

שאלה 13 עבור הפונקציה $f(x) = \frac{24}{4x-8} + 1$.

א) מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$.

ב) מצאו את הנקודות חיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ג) בררו את סימני הפונקציה

ד) תארו את התנהגות הפונקציה סביב נקודות אי הגדרה ובדקו אם יש אסימפטוטה אנכית.

ה) בררו את התנהגות הפונקציה בתהליכים $x \to \infty$ ו- $x \to -\infty$ ומצאו אסימפטוטות אופקיות.

ו) ציירו את הסקיצה של גרף הפונקציה על סמך התוצאות של הסעיפים.

שאלה 14

א) חשבו את הגבולות הבאים

1) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{4x+2\sin x}{\tan x}$

ב) מצאו את הגבולות החד צדדיים של הפונקציה

$$f(x) = \frac{4x}{(x-3)^3}$$

בנקודה $x = 3$. האם קיים $\lim_{x\to 3} f(x)$? נמקו את תשובתכם.

שאלה 15

נתונה פונקציה $f(x) = |\sqrt{x+3}|$.

א) מצאו את תחום ההגדרה ואת התמונה של הפונקציה $f(x)$.

ב) מצאו את הפונקציה ההפוכה של $f(x)$.

ג) מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של הפונקציה ההפוכה.

ד) שרטטו את סקיצות הגרפים של שתי הפונקציות (פונקציה $f(x)$ והפונקציה ההפוכה).

ה) שרטטו את הגרף של הפונקציה $f(|x|)$ ו- $\min(f^{-1}(x), 0)$.

שאלה 16 חשבו את הגבולות הבאים

א) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{3x-1}$

ב) $\lim_{x\to 0}\frac{5x-\sin 2x}{3x+3\sin 4x}$

ג) $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{4^x+2^x}$

שאלה 17

א) מצאו את ערכי הפרמטרים a,b עבורם הפונקציה הבאה רציפה לכל x ממשי:

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & x\le 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0<x<\pi \\ a\cos x & x\ge \pi \end{cases}$$

ב) הוכיחו כי מכפלה של שתי פונקציות אי זוגית היא פונקציה זוגית.

שאלה 18

נגדיר פונקציה

$$f(x)=7^{\frac{1}{4x+12}}\ .$$

א) מצאו התנהגות של הפונקציה מסביב לנקודה אי הגדרה.

ב) חשבו את הגבולות של הפונקציה ב- ∞ וב- $-\infty$.

ג) היעזרו בסעיפים א' וב' ושרטטו סקיצה של גרף הפונקציה כולל אסימפטוטות אופקיות ואסימפטוטות אנכיות שלה.

שאלה 19

א) נתונה פונקציה $f(x)=x^2-2x$ שרטט את סקיצת הגרף של כל אחת מהפונקציות הבאות:

$$|f(x)|, f(|x|), f(-|x|)\ .$$

ב) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $y=\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{8-x}$.

שאלה 20

א) הגדרו את המושג "אסימטוטה אנכית של פונקציה $f(x)$".

ב) תנו דוגמה של פונקציה $f(x)$ המ קיימת

$$\lim_{x\to 2^+} = \infty \ , \qquad \lim_{x\to 2^-} = \infty \ .$$

ג) עבור הפונקציה $f(x) = 2^{\left(\frac{x}{1-x}\right)}$

1) מצאו את תחום ההגדרה

2) ברר ואת סימני הפונקציה

3) מצא ואת נקודות אי הרציפות של $f(x)$ ובררו את סוגן.

4) בדקו את התנהגות של הפונקציה מסביב נקודות אי-הגדרה ובררו אם לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית.

5) בררו את התנהגות הפונקציה בתהליכים $x \to -\infty$, $x \to \infty$

6) ציירו את הסקיצה של גרף הפונקציה על סמך התוצאות של הסעיפים הקודמים.

שאלה 21 (בוחן תשע"ג סמסטר א)

חשבו את הגבולות הבאים:

א) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)$

ב) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x) - \sin(x)}{\sin(4x) - \sin(2x)}$

שאלה 22

נתונה פונקציה $f(x) = \sqrt{2x-6}$.

א) מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של הפונקציה $f(x)$.

ב) מצאו את הפונקציה ההפוכה ל - $f(x)$.

ג) מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של הפונקציה ההפוכה.

ד) סרטטו את סקיצות הגרפים של שתי הפונקציות (פונקציה $f(x)$ והפונקציה ההפוכה).

שאלה 23 חשבו את הגבולות הבאים

א) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-5x} - x\right)$

ב) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x) + \sin x}{\sin x - \sin(2x)}$

שאלה 24

א) חשבו את הגבולות הבאים

1) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+5x+6}\right)^{2x+1}$

2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2\cdot 5^x+3^x}{3\cdot 5^x+2^x}\right)$

3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{4\sin(3x)+\sin(5x)}{x+\tan(8x)}\right)$

ב) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & x\le 2 \\ 3x-5 & x>2 \end{cases}$. האם הגבול $\lim_{x\to 2} f(x)$ קיים? נמקו את תשובתכם.

שאלה 25 לאילו ערכים אי-שליליים a יש לפונקציה $f(x)=\frac{x^2+2x}{x+a}$ נקודת אי-רציפות סליקה?

שאלה 26

נתונה פונקציה $f(x)=|\sqrt{x+3}|-4$.

א) מצאו את תחום ההגדרה ואת התמונה של הפונקציה $f(x)$.

ב) מצאו את הפונקציה ההפוכה ל - $f(x)$.

ג) מצאו את תחום ההגדרה והתמונה של הפונקציה ההפוכה.

ד) שרטטו את סקיצות הגרפים של שתי הפונקציות (פונקציה $f(x)$ והפונקציה ההפוכה).

ה) שרטטו את הגרף של הפונקציה $|f(x)|$.

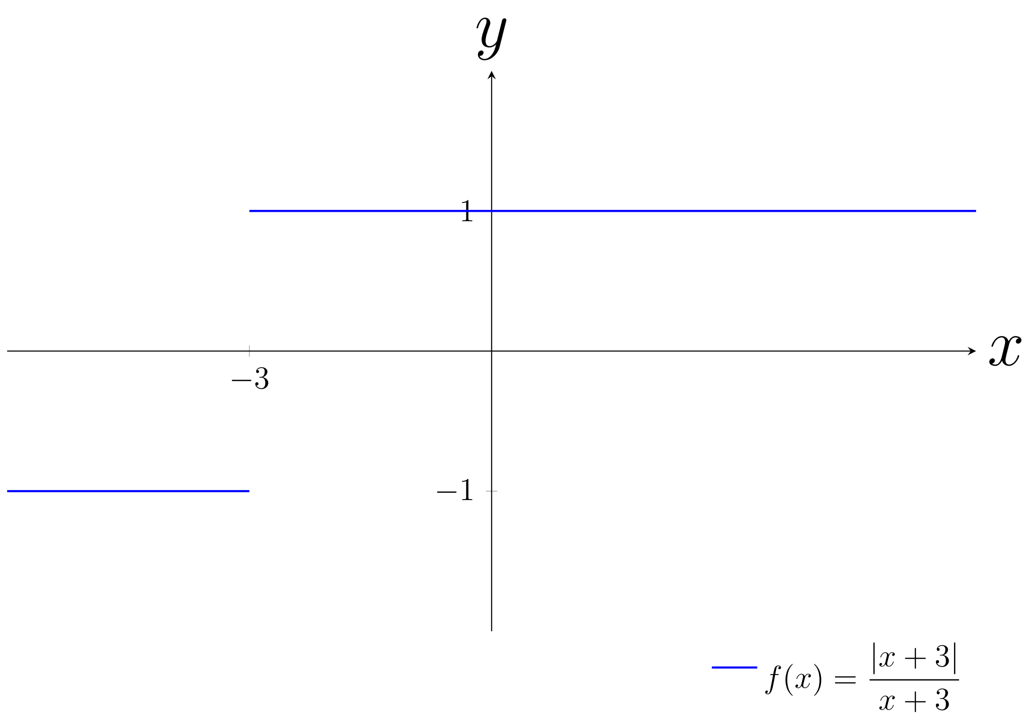
פתרונות

שאלה 1

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{|x+3|}{x+3} = \lim_{x\to -3^+} \frac{x+3}{x+3} = 1 \ ,$$

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{|x+3|}{x+3} = \lim_{x\to -3^-} \frac{-(x+3)}{x+3} = -1 \ ,$$

$x=-3$ נקודת אי רציפות ממין ראשון.



שאלה 2

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+1}-1}{4x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+1}-1}{4x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{4x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{4\left(\sqrt{x+1}+1\right)} \\
&= \frac{1}{4\left(\sqrt{0^+ +1}+1\right)} \\
&= \frac{1}{8} \ .
\end{aligned}$$

באותו חישוב

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{1}{8} \ .$$

לכן

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) \stackrel{!}{=} f(0) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{8} = \frac{1}{8} = A$$

לפיכך $f(x)$ רציפה בנקודה $x=0$ עבור $A=\frac{1}{8}$.

<u>שאלה 3</u>

א) נבדוק רציפות בנקודת תפר ב- $x=0$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2(\sqrt{a^2+1}\cdot x)}{2x^2} &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{\sin(\sqrt{a^2+1}\cdot x)}{x}\right]^2 \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-}\left[\left(\frac{\sin(\sqrt{a^2+1}\cdot x)}{\sqrt{a^2+1}\cdot x}\right)\cdot\sqrt{a^2+1}\right]^2 \\ &= \frac{\sqrt{a^2+1}}{2} \ .\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x+5) = 5 \ .$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x\to 0^+} f(x) \stackrel{!}{=} f(0) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{a^2+1}}{2} = 5 = b \quad \Rightarrow \quad b=5,\ \frac{\sqrt{a^2+1}}{2} = 5$$

לכן

$$b=5,\ \frac{\sqrt{a^2+1}}{2} = 5 \quad \Rightarrow \quad a^2+1=10 \quad \Rightarrow \quad a^2=9\ , \quad a=\pm 3\ .$$

תשובה סופית: $f(x)$ רציפה בנקודה $x=0$ עבור $a=3$ או -3 וגם $b=5$.

ב) הגדרת נק' אי רציפות ממין ראשון:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)\ .$$

הרי

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2+5}{2} \neq 5 \quad \Rightarrow \quad a^2+1 \neq 10 \quad \Rightarrow \quad a^2 \neq 9 \quad \Rightarrow \quad a \neq 3, -3\ .$$

לכן $x=0$ תהיה נקודת אי-רציפות ממין ראשון אם $a\neq 3,-3$ לכל b.

ג) הגדרת נק' אי רציפות ממין סליקה:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \neq f(a)\ .$$

הרי

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \neq f(0) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{a^2+1}}{2} = 5 \neq b \quad \Rightarrow \quad a=\pm 3, b\neq 5\ .\ .$$

ז"א $x=0$ תהיה נקודת אי-רציפות סליקה אם $a=\pm 3$ ו- $b\neq 5$.

שאלה 4

א) נתון: f,g פונקציות זוגיות.

צריך להוכיח: $f+g$ פונקציה זוגית.

הוכחה :

$$(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)\overset{\text{כי } f,g \text{ זוגית}}{=}f(x)+g(x)=(f+g)(x)\ .$$

ב) נתון: f,g פונקציות אי-זוגיות.

צריך להוכיח: $f+g$ פונקציה אי-זוגית.

הוכחה :

$$(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)\overset{\text{כי } f,g \text{ אי-זוגית}}{=}-f(x)-g(x)=-(f(x)+g(x))=-(f+g)(x)\ .$$

ג) נתון: f,g פונקציות זוגיות.

צריך להוכיח: $f\cdot g$ פונקציה זוגית ו- $\dfrac{f}{g}$ פונקציה זוגית.

הוכחה :

$$(f\cdot g)(-x)=f(-x)\cdot g(-x)\overset{\text{כי } f,g \text{ זוגית}}{=}f(x)\cdot g(x)=(f\cdot g)(x)\ .$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-x)=\left(\frac{f(-x)}{g(-x)}\right)\overset{\text{כי } f,g \text{ זוגית}}{=}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\left(\frac{f}{g}\right)(x)\ .$$

ד) נתון: f,g פונקציות אי-זוגיות.

צריך להוכיח: $f\cdot g$ פונקציה זוגית ו- $\dfrac{f}{g}$ פונקציה זוגית.

הוכחה :

$$(f\cdot g)(-x)=f(-x)\cdot g(-x)\overset{\text{כי } f,g \text{ אי-זוגית}}{=}[-f(x)]\cdot[-g(x)]=f(x)\cdot g(x)=(f\cdot g)(x)\ .$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-x)=\left(\frac{f(-x)}{g(-x)}\right)\overset{\text{כי } f,g \text{ אי-זוגית}}{=}\left(\frac{-f(x)}{-g(x)}\right)=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\left(\frac{f}{g}\right)(x)\ .$$

ה) דוגמה נגדית:
$f(x)=x^2$ פונקציה זוגית.
$g(x)=x$ פונקציה אי-זוגית.
$(f\cdot g)(x)=x^3$ פונקציה אי-זוגית.
$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=x$ פונקציה אי-זוגית.

שאלה 5

א) נתון: f, g פונקציות עולות ממש.

צריך להוכיח: $f+g$ פונקציה עולה ממש.

הוכחה :
f עולה ממש אז
$$a < b \qquad \Rightarrow \qquad f(a) < f(b) \ .$$

g עולה ממש אז
$$a < b \qquad \Rightarrow \qquad g(a) < g(b) \ .$$

לפיכך
$$f(a) + g(a) < f(b) + g(b) \ .$$

קיבלנו כי
$$a < b \qquad \Rightarrow \qquad (f+g)(a) < (f+g)(b)$$

ז"א הפונקציה $f+g$ עולה ממש.

ב)

נתון: f, g פונקציות יורדות ממש.

צריך להוכיח: $f+g$ פונקציה יורדת ממש.

הוכחה :
f יורדת ממש אז
$$a < b \qquad \Rightarrow \qquad f(a) > f(b) \ .$$

g יורדת ממש אז
$$a < b \qquad \Rightarrow \qquad g(a) > g(b) \ .$$

לפיכך
$$f(a) + g(a) > f(b) + g(b) \ .$$

קיבלנו כי
$$a < b \qquad \Rightarrow \qquad (f+g)(a) > (f+g)(b)$$

ז"א הפונקציה $f+g$ יורדת ממש.

ג) נתון: $f(x)$ עולה ממש בקטע D, ו- $f(x) > 0$ לכל $x \in D$.

צ"ל: $\dfrac{1}{f(x)}$ יורדת ממש בקטע D.

הוכחה :
f עולה ממש בקטע D. לכן לכל $a, b \in D$:
$$a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) < f(b) \ .$$

לכן $f(x)>0$ לכל $x\in D$

$$a<b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f(a)} > \frac{1}{f(b)}\ .$$

ז"א הפונקציה $\left(\frac{1}{f}\right)(x)$ יורדת ממש בקטע D.

ד) נתון: $f(x)$ יורדת ממש בתחום D, ו- $f(x)>0$ לכל $x\in D$.

צ"ל: $\frac{1}{f(x)}$ עולה ממש בתחום D.

הוכחה:

f יורדת ממש בקטע D. לכן לכל $a,b\in D$:

$$a<b \quad \Rightarrow \quad f(a)>f(b)\ .$$

לכן $f(x)>0$ לכל $x\in D$

$$a<b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f(a)} < \frac{1}{f(b)}\ .$$

ז"א הפונקציה $\left(\frac{1}{f}\right)(x)$ עולה ממש בתחום D.

שאלה 6

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}\frac{\sin(x+2)}{x^2-4} &= \left[\frac{0}{0}\right]\\ &= \lim_{x\to-2}\frac{\sin(x+2)}{(x+2)(x-2)}\\ &= \lim_{x\to-2}\frac{1}{x-2}\cdot\lim_{x\to-2}\frac{\sin(x+2)}{x+2}\\ &= -\frac{1}{4}\cdot 1\\ &= -\frac{1}{4}\ .\end{aligned}$$

שאלה 7

א) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$f(x)=e^x\ .$$

f עולה ממש אבל f לא על $\mathbb{R}$. הרי

$$\mathrm{Im}(f)=(0,\infty)\neq\mathbb{R}\ .$$

ב) הטענה נכונה. הוכחה:

$f(x)$ לינארית ולא פונקציה קבועה. ז"א הצורה הכללית של הפונקציה הינה

$$f(x)=mx+n\ ,\qquad m\neq 0\ .$$

$m \neq 0$ אז $m > 0$ או $m < 0$.
נניח כי $m > 0$. נוכיח כי f עולה ממש, דרך השלילה.

נניח כי f לא עולה ממש. אז קיימים $a \neq b \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$a < b \qquad \Rightarrow \qquad f(a) \not< f(b) \ .$$

נציב $f(x) = mx + b$:
$$a < b \qquad \Rightarrow \qquad ma + n \not< mb + n$$

ז"א
$$a < b \qquad \Rightarrow \qquad ma \not< mb$$

$m > 0$ אז נחלק ב- m ונקבל
$$a < b \qquad \Rightarrow \qquad a \not< b$$

בסתירה לכך ש- $a < b$. לכן אם $f(x) = mx + n$ ($m > 0$) אז f עולה ממש.

נניח כי $m < 0$. נוכיח כי f יורדת ממש, דרך השלילה.

נניח כי f לא יורדת ממש. אז קיימים $a \neq b \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$a < b \qquad \Rightarrow \qquad f(a) \not> f(b) \ .$$

נציב $f(x) = mx + b$:
$$a < b \qquad \Rightarrow \qquad ma + n \not> mb + n$$

ז"א
$$a < b \qquad \Rightarrow \qquad ma \not> mb$$

$m < 0$ אז נחלק ב- m ונקבל
$$a < b \qquad \Rightarrow \qquad a \not< b$$

בסתירה לכך ש- $a < b$. לכן אם $f(x) = mx + n$ ($m < 0$) אז f יורדת ממש.

ג) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:
תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הפונקציה $f(x) = \sin x$.
$f(x)$ חסומה. הרי:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \ .$$

אבל $f(x)$ לא חח"ע. הרי:
$$\sin(0) = \sin(\pi) = 0 \ .$$

ד) טענה לא נכונה. הרי בסעיף הקודם הוכחנו כי אם פונקציה חסומה היא לא בהכרח חח"ע, למשל $f(x) = \sin x$ חסומה אבל לא חח"ע.
מכיוון שפונקציה חח"ע אם ורק אם היא מונוטונית, לכן אם פונקציה חסומה היא לא בהכרח מונוטונית.

שאלה 8

א)

$$4x+25\overset{!}{\geq}0 \quad\Rightarrow\quad x\geq-\frac{25}{4}\ .$$

לכן $\mathrm{Dom}(f)=\left[-\frac{25}{4},\infty\right)$.

$$\left|\sqrt{4x+25}\right|\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \left|\sqrt{4x+25}\right|+5\geq 5 \quad\Rightarrow\quad f(x)\geq 5\ .$$

לכן $\mathrm{Im}(f)=[5,\infty)$.

ב)

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{4x+25}\right|+5 &=y\\ \left|\sqrt{4x+25}\right| &=y-5\\ 4x+25 &= (y-5)^2\\ 4x &= (y-5)^2-25\\ x &= \frac{1}{4}\left((y-5)^2-25\right)\end{aligned}$$

לפיכך

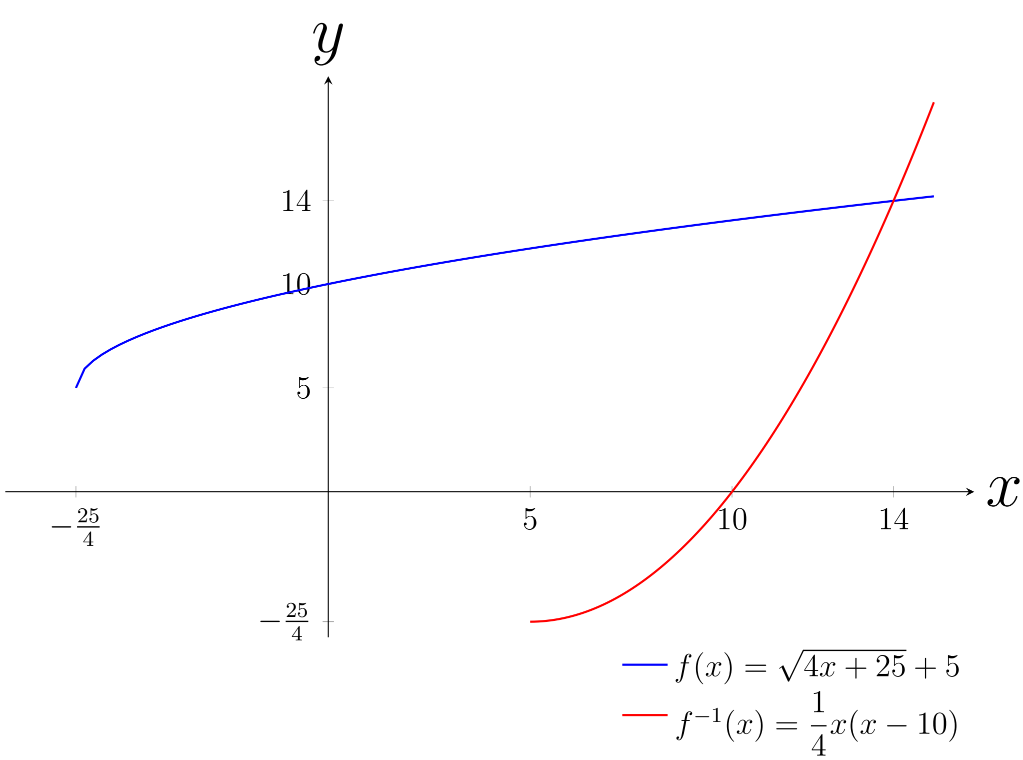
$$f^{-1}(x)=\frac{1}{4}\left((x-5)^2-25\right)=\frac{1}{4}\left(x^2-10x\right)=\frac{1}{4}x\,(x-10)$$

ג)

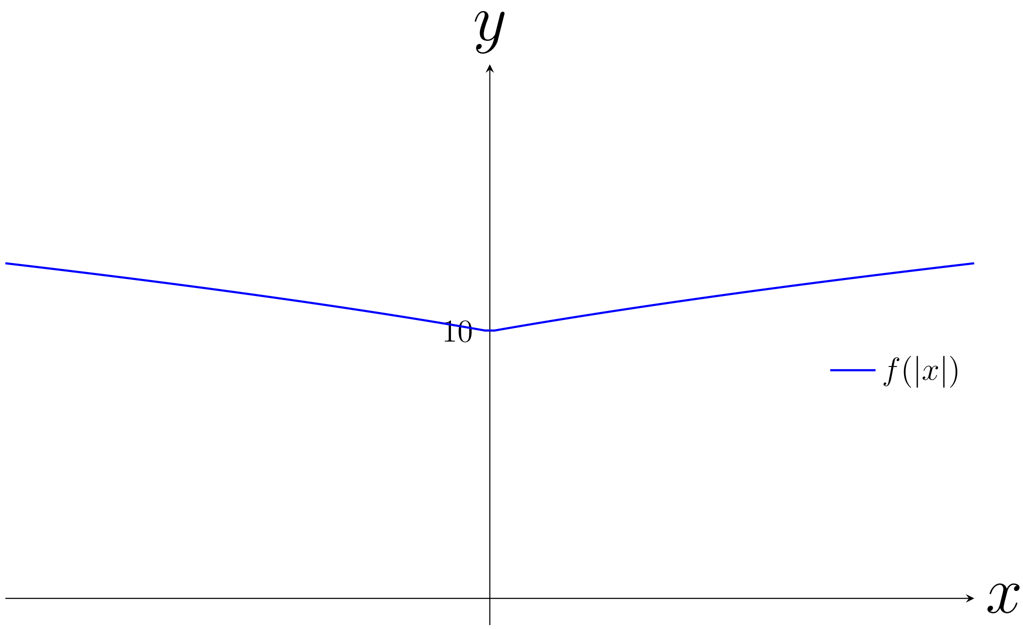
$$\mathrm{Dom}(f^{-1})=\mathrm{Im}(f)=[5,\infty)$$

$$\mathrm{Im}(f^{-1})=\mathrm{Dom}(f)=\left[-\frac{25}{4},\infty\right)$$

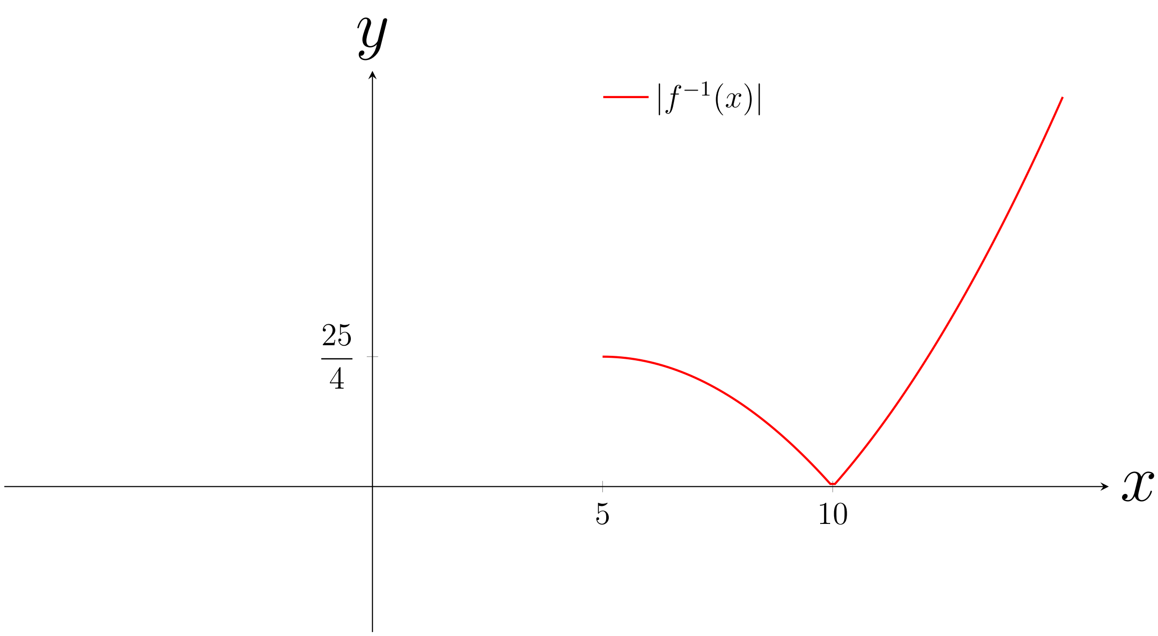
ד)



ה)



ו)



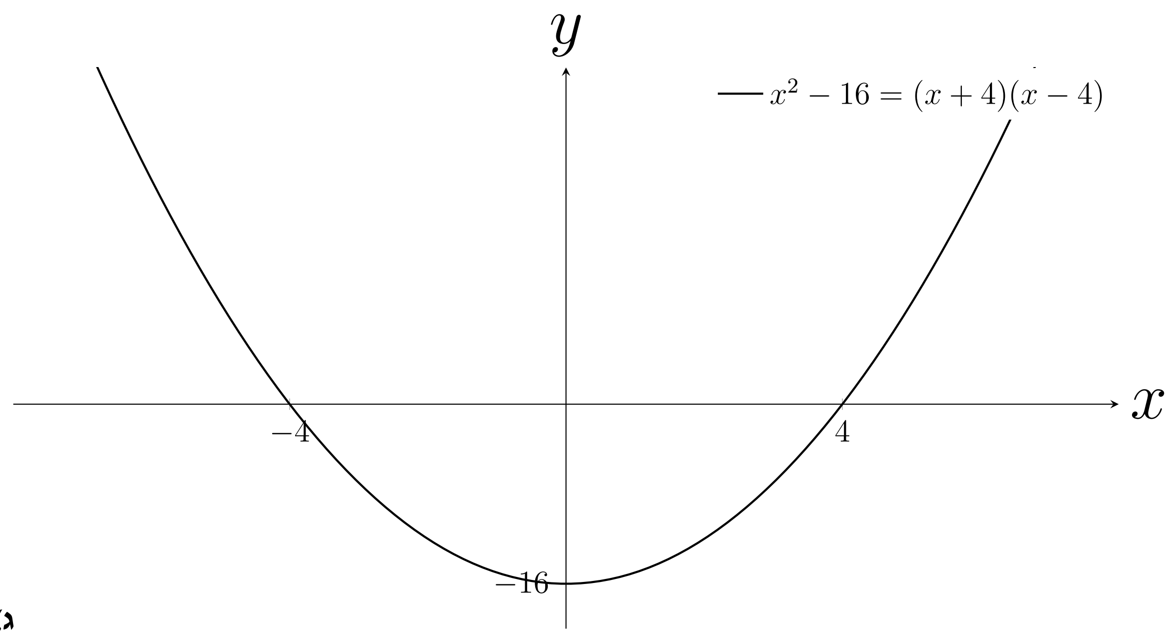
<u>שאלה 9</u>

א) תחום ההגדרה: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

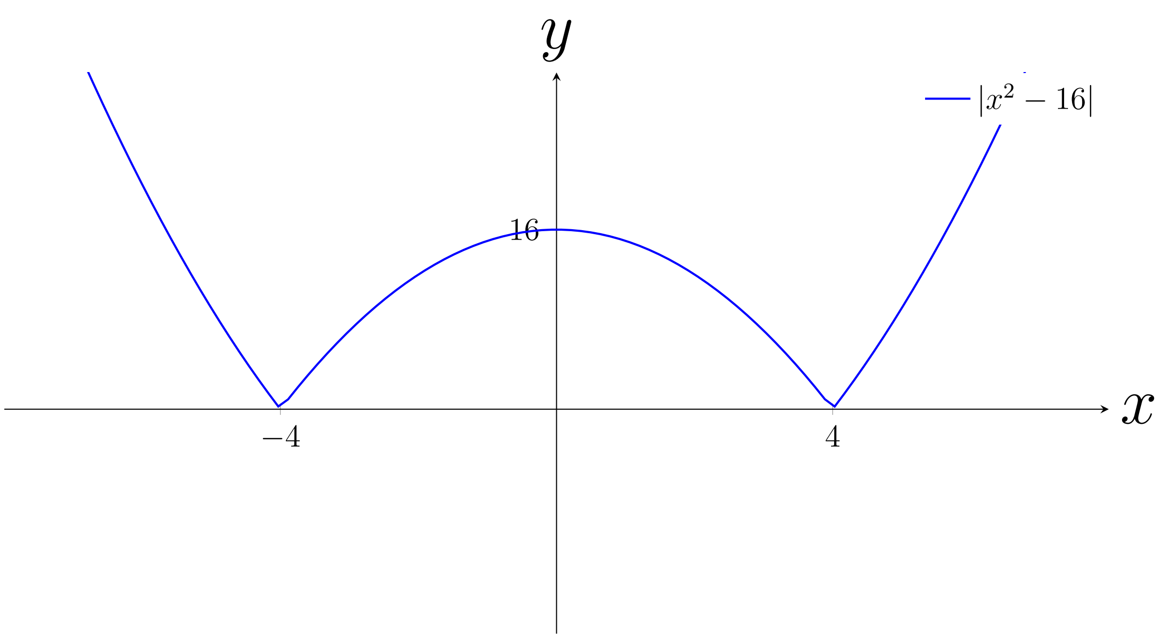
ב) תמונה:

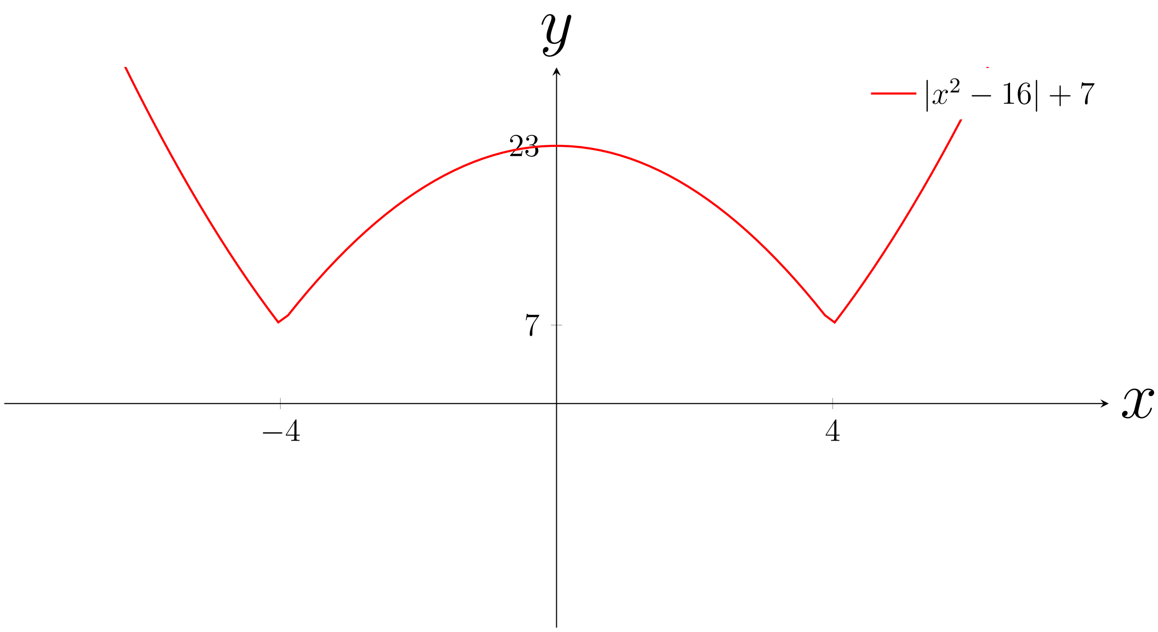
$$\left|x^2 - 16\right| \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \left|x^2 - 16\right| + 7 \geq 7 \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq 7 \ .$$

לפיכך $\text{Im}(f) = [7, \infty)$.



ג)





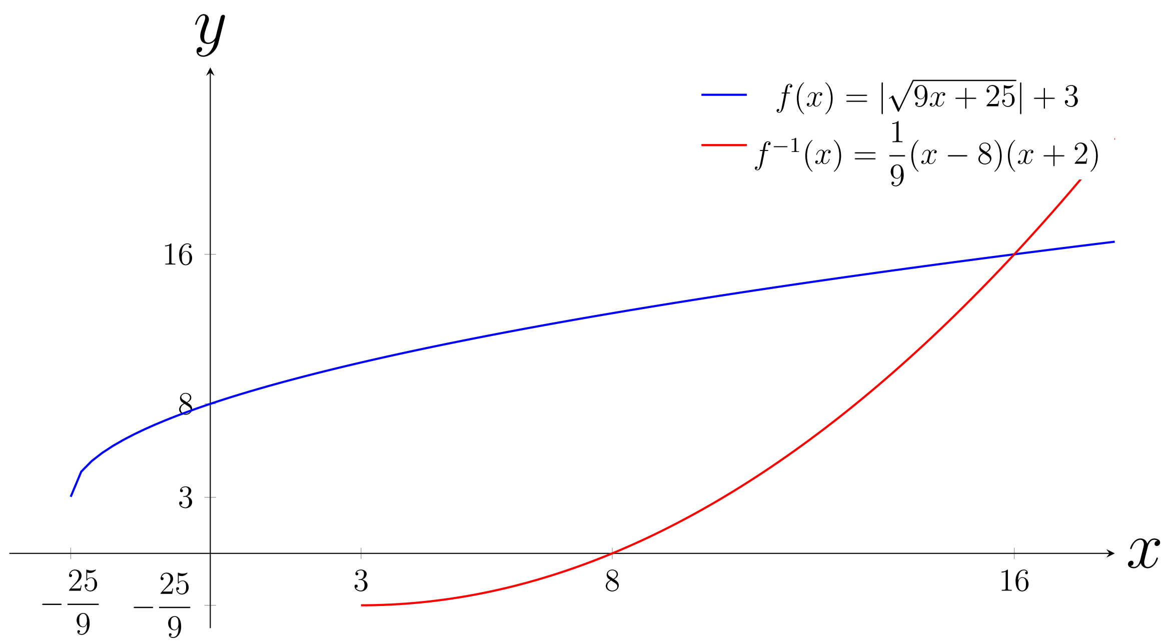
שאלה 10

א)
$$\mathrm{Dom}(f)=\left[-\frac{25}{9},\infty\right)$$
$$\mathrm{Im}(f)=[3,\infty)$$

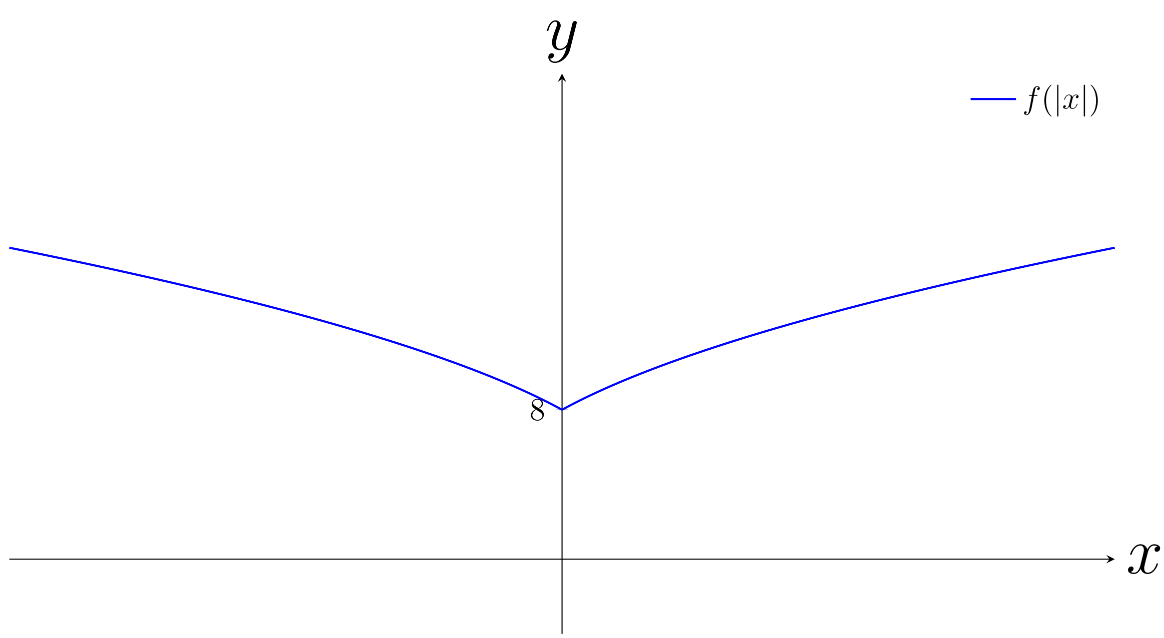
ב)
$$\begin{aligned}\left|\sqrt{9x+25}\right|+3 &= y\\ \left|\sqrt{9x+25}\right| &= y-3\\ 9x+25 &= (y-3)^2\\ 9x &= (y-3)^2-25=y^2-6y+9-25=y^2-6y-16=(y-8)(y+2)\\ x &= \frac{(y-8)(y+2)}{9}\end{aligned}$$
$$f^{-1}(x)=\frac{1}{9}\left(x^2-6x-16\right)=\frac{1}{9}(x-8)(x+2)\ .$$

ג)
$$\mathrm{Dom}\left(f^{-1}\right)=\mathrm{Im}(f)=[3,\infty)$$
$$\mathrm{Im}\left(f^{-1}\right)=\mathrm{Dom}(f)=\left[-\frac{25}{9},\infty\right)$$

ד)



ה)



שאלה 11

א) $\text{Dom}(f) = \{x \neq 4\}$.

ב)

x	$x < -2$	$-2 < x < 4$	$x > 4$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

ג) יש נקודת אי -הגדרה ב- $x=4$.

בנקודה אי-הגדרה יש אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{x+2}{x-4}=\frac{6}{4^--4}=\frac{6}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 4^+}\frac{x+2}{x-4}=\frac{6}{4^+-4}=\frac{6}{0^+}=+\infty$$

לפיכך יש אסימפטוטה אנכית ב- $x=4$.

ד) אם $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ כאשר A מספר סופי אומרים כי $y=A$ אסימפטוטה אופקית ב- ∞.

אם $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=B$ כאשר B מספר סופי אומרים כי $y=B$ אסימפטוטה אופקית ב- $-\infty$.

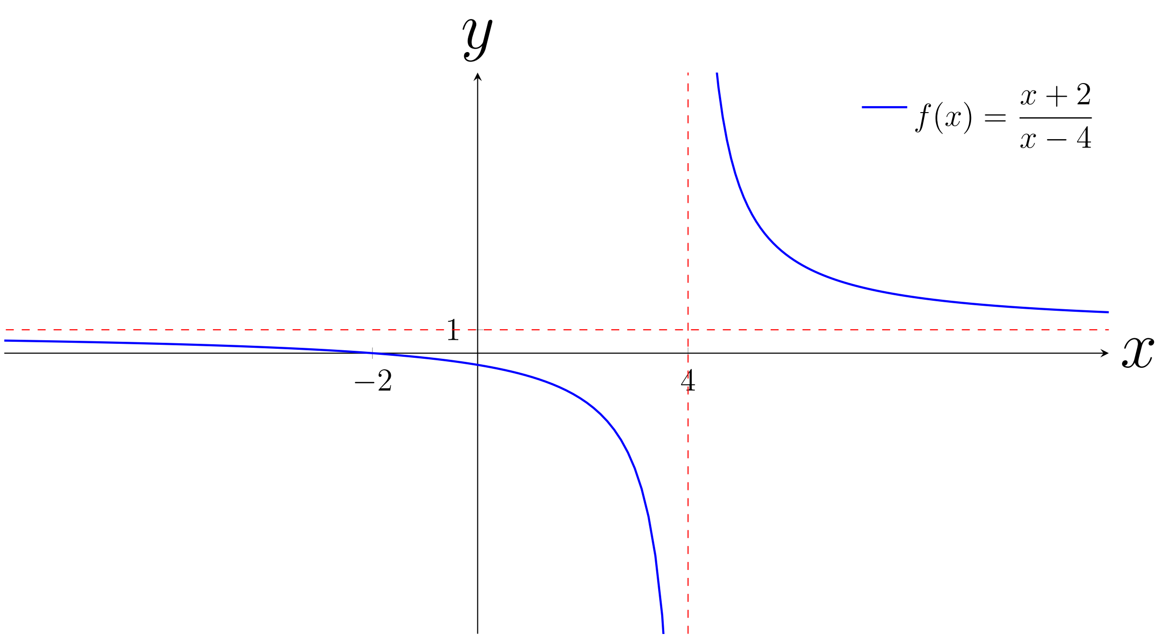
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x-4}=1\ ,$$

לפיכך $y=1$ אסימפטוטה אופקית ב- ∞.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x-4}=1\ .$$

לפיכך $y=1$ אסימפטוטה אופקית ב- $-\infty$.

ה)



<u>שאלה 12</u>

א) $f(x)=\frac{3}{2x+6}=\frac{3}{2(x+3)}$. $\mathrm{Dom}(f)=\{x\neq-3\}$.

ב)

x	$x<-3$	$x>-3$
$f(x)$	$-$	$+$

ג) יש נקודת אי -הגדרה ב- $x=-3$.

בנקודה אי-הגדרה יש אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{3}{2(x+3)}=\frac{3}{2(-3^-+3)}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to -3^+}\frac{3}{2(x+3)}=\frac{3}{2(-3^++3)}=\frac{3}{0^+}=\infty$$

לפיכך יש אסימפטוטה אנכית ב- $x=-3$.

ד) אם $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ כאשר A מספר סופי אומרים כי $y=A$ אסימפטוטה אופקית ב- ∞.

אם $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=B$ כאשר B מספר סופי אומרים כי $y=B$ אסימפטוטה אופקית ב- $-\infty$.

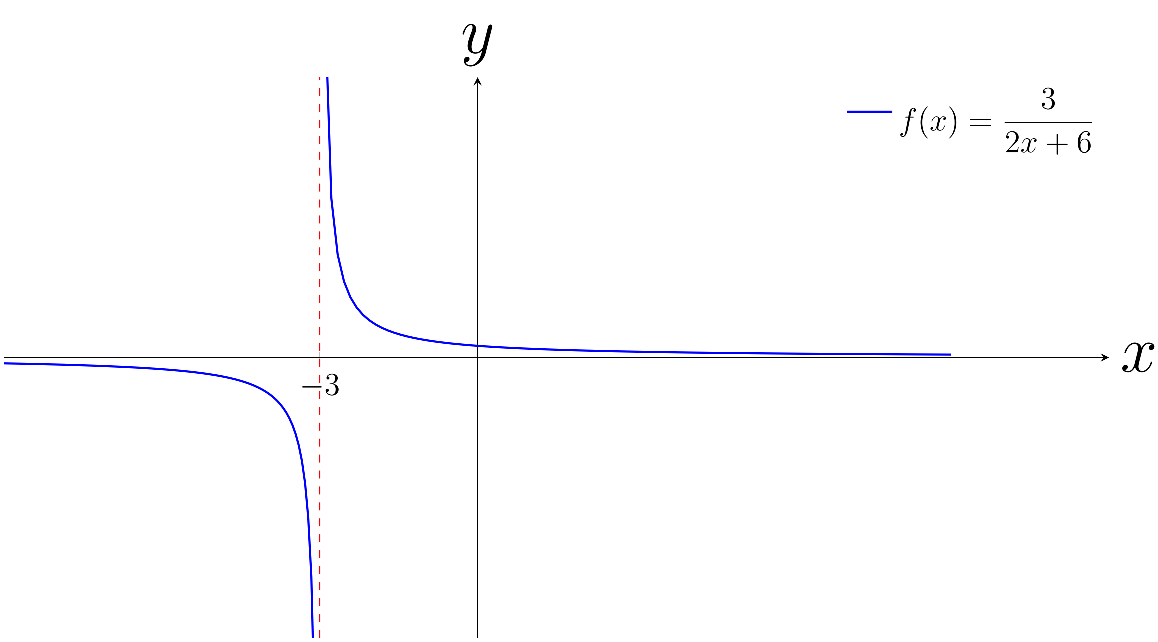
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{2(x+3)}=0\ ,$$

לפיכך $y=0$ אסימפטוטה אופקית ב- ∞.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{2(x+3)}=0\ .$$

לפיכך $y=0$ אסימפטוטה אופקית ב- $-\infty$.

ה)



שאלה 13

א) תחום ההגדרה:

$$4x-8\neq 0 \quad\Rightarrow\quad 4x\neq 8 \quad\Rightarrow\quad x\neq 2\ .$$

לפיכך: $\text{Dom}(f)=\{x\neq 2\}$.

ב) נקודות חיתוך עם ציר ה-x:

$$f(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{24}{4x-8}+1=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{24}{4x-8}=-1 \quad\Rightarrow\quad 24=-4x+8 \quad\Rightarrow\quad 16=-4x \quad\Rightarrow\quad x=-4\ .$$

נקודות חיתוך עם ציר ה-y:

$$f(0)=\frac{24}{-8}+1=-2\ .$$

ג) סימני הפונקציה: נציב מספר קטן מ -10:

$$f(-10)=\frac{24}{-40-8}+1=\frac{24}{-48}+1=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}>0$$

נציב מספר גדול מ -2:

$$f(-2)=\frac{24}{-12-8}+1=\frac{24}{-16}+1=\frac{-3}{2}+1=-\frac{1}{2}<0$$

x	$x<-4$	$x>-4$
$f(x)$	$+$	$-$

יש נקודת אי -הגדרה ב- $x=2$.

ד) **בנקודה אי-הגדרה יש אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.**

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{24}{4x-8}+1\right)=\frac{24}{4\cdot 2^+-8}+1=\frac{24}{8^+-8}+1=\frac{24}{0^+}+1=\infty+1=\infty\ .$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{24}{4x-8}+1\right)=\frac{24}{4\cdot 2^--8}+1=\frac{24}{8^--8}+1=\frac{24}{0^-}+1=-\infty+1=-\infty\ .$$

לפיכך יש אסימפטוטה אנכית ב- $x=2$.

ה) אם $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$ כאשר A מספר סופי אומרים כי $y=A$ אסימפטוטה אופקית ב- ∞.

אם $\lim_{x\to-\infty} f(x)=B$ כאשר B מספר סופי אומרים כי $y=B$ אסימפטוטה אופקית ב- $-\infty$.

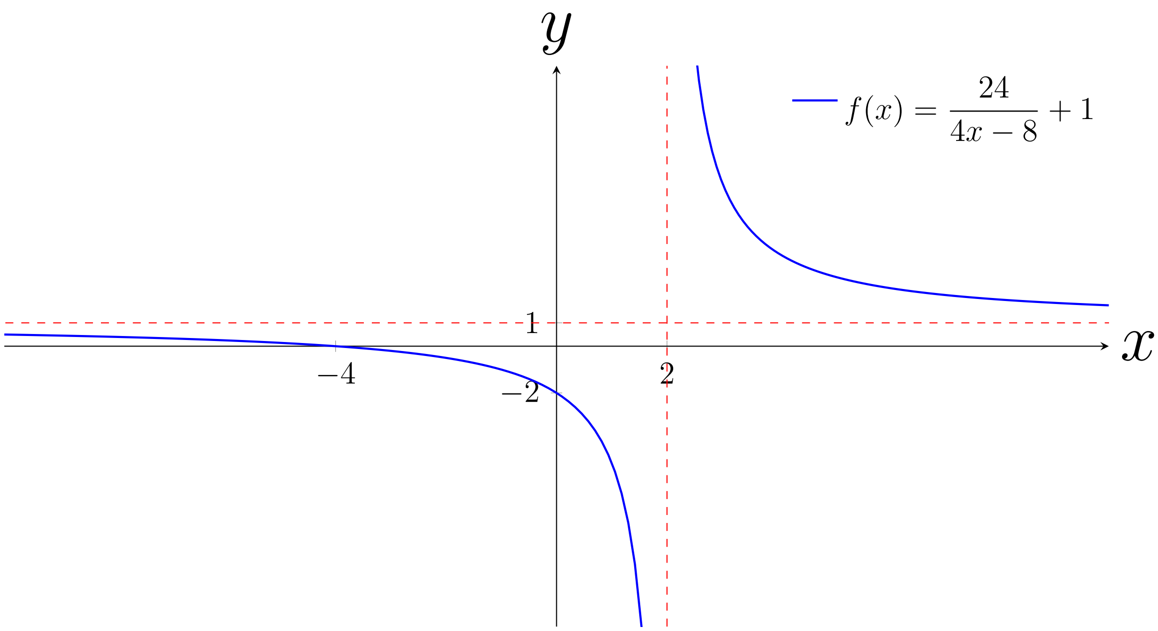
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{24}{4x-8}+1\right)=\frac{24}{4\cdot\infty-8}+1=\frac{24}{\infty-8}+1=\frac{24}{\infty}+1=0^++1=1^+$$

לפיכך $y=1$ אסימפטוטה אופקית ב- ∞.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{24}{4x-8}+1\right) = \frac{24}{4\cdot(-\infty)-8}+1 = \frac{24}{-\infty-8}+1 = \frac{24}{-\infty}+1 = 0^-+1 = 1^-$$

לפיכך $y=1$ אסימפטוטה אופקית ב- $-\infty$.

ו)



שאלה 14

א) 1)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+3}{2x+1}-1\right)^{x+1} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+3-2x-1}{2x+1}\right)^{x+1} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}\cdot(x+1)} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\frac{2}{2x+1}\cdot(x+1)} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(x+1)}{2x+1}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+2}{2x+1}} \\
&= e^1 = e\ .
\end{aligned}$$

2)

$$\lim_{x\to0}\frac{4x+2\sin x}{\tan x} = \lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{4x+2\sin x}{x}\right)}{\left(\frac{\tan x}{x}\right)} = \lim_{x\to0}\frac{\left(4+2\cdot\frac{\sin x}{x}\right)}{\left(\frac{\tan x}{x}\right)} = \frac{\left(4+2\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\right)}{\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\right)} = \frac{4+2\cdot1}{1} = 6\ .$$

ב)

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{4x}{(x-3)^3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{4\cdot 3}{(x-3)^3}=12\cdot\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{(x-3)^3}=12\cdot\left(\frac{1}{(0^-)^3}\right)=\frac{12}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{4x}{(x-3)^3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{4\cdot 3}{(x-3)^3}=12\cdot\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{(x-3)^3}==12\cdot\left(\frac{1}{(0^+)^3}\right)=\frac{12}{0^+}=+\infty\ .$$

הגבול $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ לא קיים בגלל שהגבולות החד צדדים לא קיימים. לפיכך כך ש $x=3$ נקודת אי-רציפות מסוג שני.

<u>שאלה 15</u>

א) תחום הגדרה:

$$\text{Dom}(f)=\{x\geq 3\}=[3,\infty)\ .$$

תמונה:

$$|\sqrt{x+3}|\geq 0\quad\Rightarrow\quad f(x)\geq 0\ .$$

לפיכך $\text{Im}(f)=[0,\infty)$.

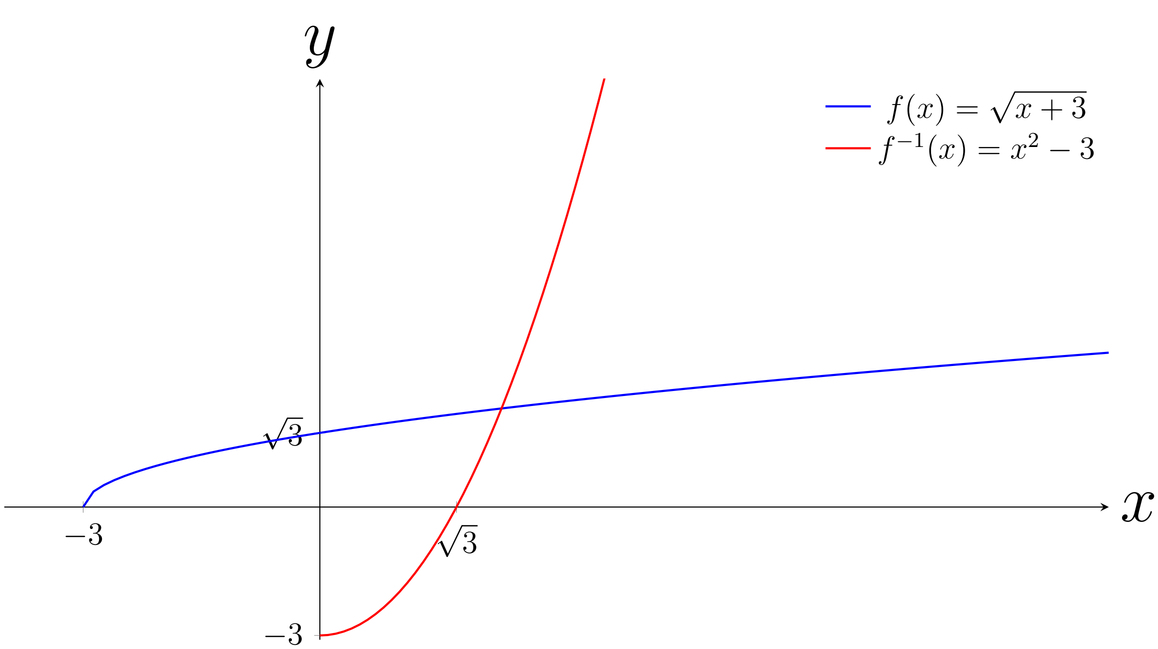
ב)

$$\begin{aligned}|\sqrt{x+3}|=&y\\ x+3=&y^2\\ x=&y^2-3\\ f^{-1}(x)=x^2-3\ .\end{aligned}$$

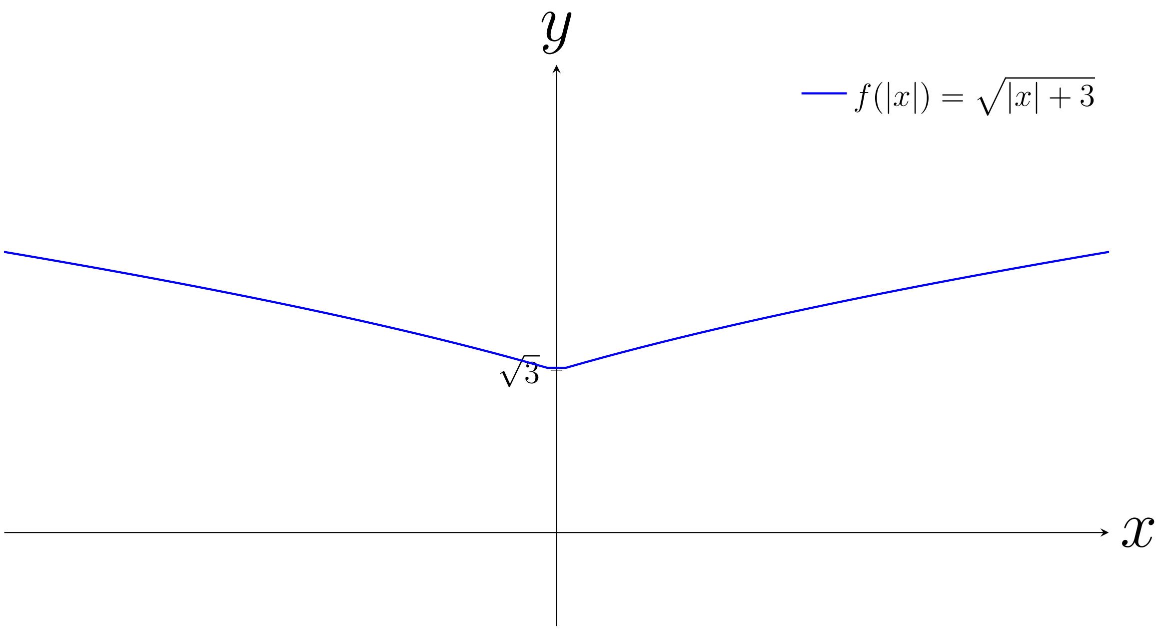
ג) $\text{Dom}\left(f^{-1}\right)=\text{Im}(f)=[0,\infty)$

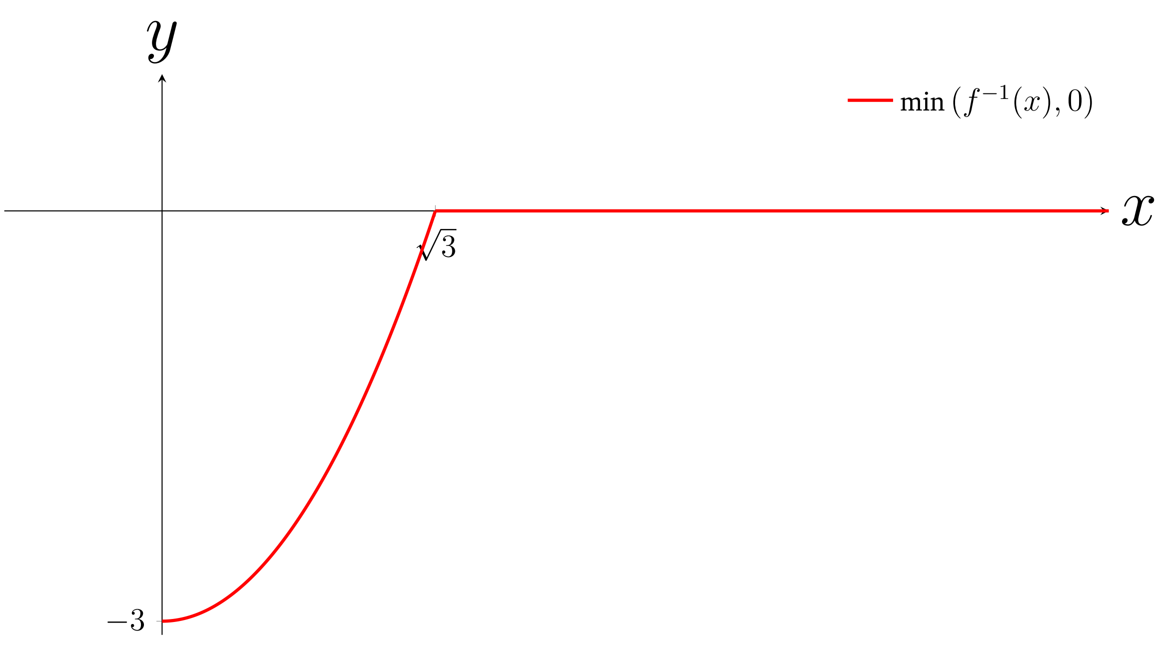
$\text{Im}\left(f^{-1}\right)=\text{Dom}(f)=[-3,\infty)$

ד)



ה)





<u>שאלה 16</u>

א)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{3x-1}=1^{\infty}$$

לא מוגדר.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{3x-1} &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1}{3x+2}-1\right)^{3x-1}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1-3x-2}{3x+2}\right)^{3x-1}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{3x+2}\right)^{3x-1}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{3x+2}\right)^{\left(\frac{3x+2}{-3}\right)\left(\frac{-3}{3x+2}\right)(3x-1)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-3}}\right]^{\frac{-3(3x-1)}{3x+2}}\\
&=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-9x+3}{3x+2}}\\
&=e^{-3}\ .
\end{aligned}$$

ב)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{5x-\sin 2x}{3x+3\sin 4x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{5x-\sin 2x}{x}\right)}{\left(\frac{3x+3\sin 4x}{x}\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(5-\frac{\sin 2x}{x}\right)}{\left(3+\frac{3\sin 4x}{x}\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(5-2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)}{\left(3+4\cdot 3\cdot\frac{\sin 4x}{4x}\right)}\\
&=\frac{\left(5-2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)}{\left(3+12\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\right)}\\
&=\frac{(5-2\cdot 1)}{(3+12\cdot 1)}\\
&=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}\ .
\end{aligned}$$

ג)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{4^x+2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2^x}{4^x}\right)}{\left(\frac{4^x+2^x}{4^x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2^x}{4^x}\right)}{\left(\frac{4^x}{4^x}+\frac{2^x}{4^x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{4}\right)^x}{\left(\frac{4}{4}\right)^x+\left(\frac{2}{4}\right)^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{4}\right)^x}{1+\left(\frac{2}{4}\right)^x}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{4}\right)^x}{1+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{4}\right)^x}$$

$$=\frac{0}{1+0}=\frac{0}{1}=0\ .$$

שאלה 17

א) נדרש רציפות בנקודת תפר $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(ax+b)=b$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \overset{!}{=} \lim_{x\to 0^+} f(x) \overset{!}{=} f(0) \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{1}{2} = b \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{1}{2} \ .$$

נדרש רציפות בנקודת תפר $x = \pi$:

$$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi^-} \frac{\sin(x)}{2x} = \frac{\sin(\pi)}{2\pi} = 0$$

$$\lim_{x\to \pi^+} f(x) = \lim_{x\to \pi^+} a\cos x = a\cos(\pi) = -a$$

$$\lim_{x\to \pi^-} f(x) \overset{!}{=} \lim_{x\to \pi^+} f(x) \overset{!}{=} f(\pi) \qquad \Rightarrow \qquad 0 = -a = -a \qquad \Rightarrow \qquad a = 0 \ .$$

ב) נתון: $f(x)$, $g(x)$ פונקציות אי זוגיות.
צריך להוכיח: $(f\cdot g)(x)$ פונקציה זוגית.
הוכחה:

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(-x) =& f(-x)\cdot g(-x)\\ =& f(x)\cdot g(x)\\ =& [-f(x)]\cdot[-g(x)]\end{aligned}$$

(בלל ש- $f(-x) = -f(x)$ ו- $g(-x) = -g(x)$)

$$\begin{aligned} =& [f(x)]\cdot[g(x)]\\ =& f(x)g(x)\\ =& (f\cdot g)(x)\end{aligned}$$

לפיכך $f\cdot g$ פונקציה זוגית.

שאלה 18

א) נרשום $f(x)$ בצורה

$$f(x) = 7^{\frac{1}{4x+12}} = 7^{\frac{1}{4(x+3)}} \ .$$

ל- $f(x)$ יש נקודת אי-הגדרה ב- $x = -3$.

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-}\left(7^{\frac{1}{4(x+3)}}\right) = 7^{\frac{1}{4\cdot 0^-}} = 7^{\frac{1}{0^-}} = 7^{-\infty} = 0 \ .$$

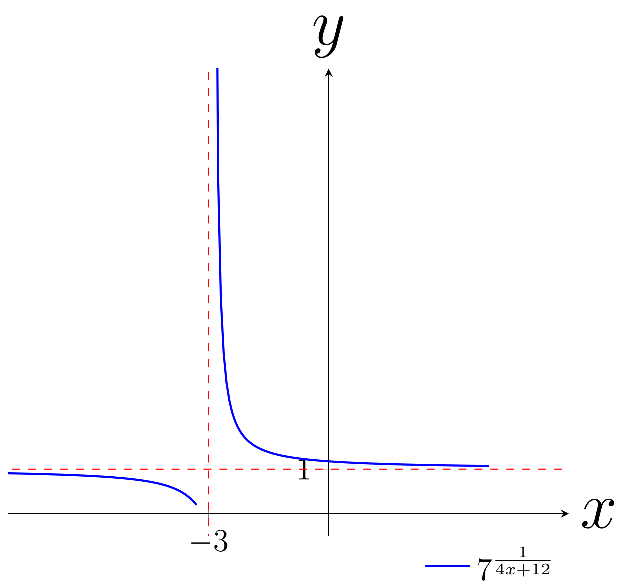
$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+}\left(7^{\frac{1}{4(x+3)}}\right) = 7^{\frac{1}{4\cdot 0^+}} = 7^{\frac{1}{0^+}} = 7^{\infty} = \infty \ .$$

ב)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(7^{\frac{1}{4(x+3)}}\right) = 7^{\frac{1}{4(\infty+3)}} = 7^{\frac{1}{4\cdot\infty}} = 7^{\frac{1}{\infty}} = 7^0 = 1\ .$$

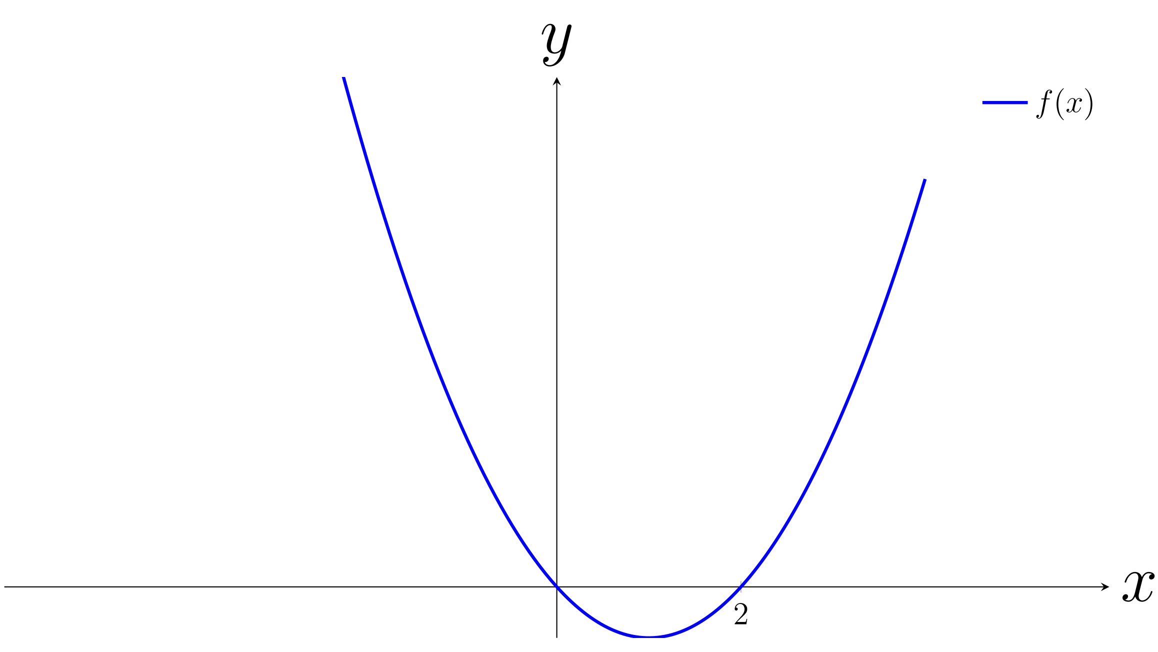
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(7^{\frac{1}{4(x+3)}}\right) = 7^{\frac{1}{4(-\infty+3)}} = 7^{\frac{1}{4\cdot(-\infty)}} = 7^{\frac{1}{-\infty}} = 7^0 = 1\ .$$

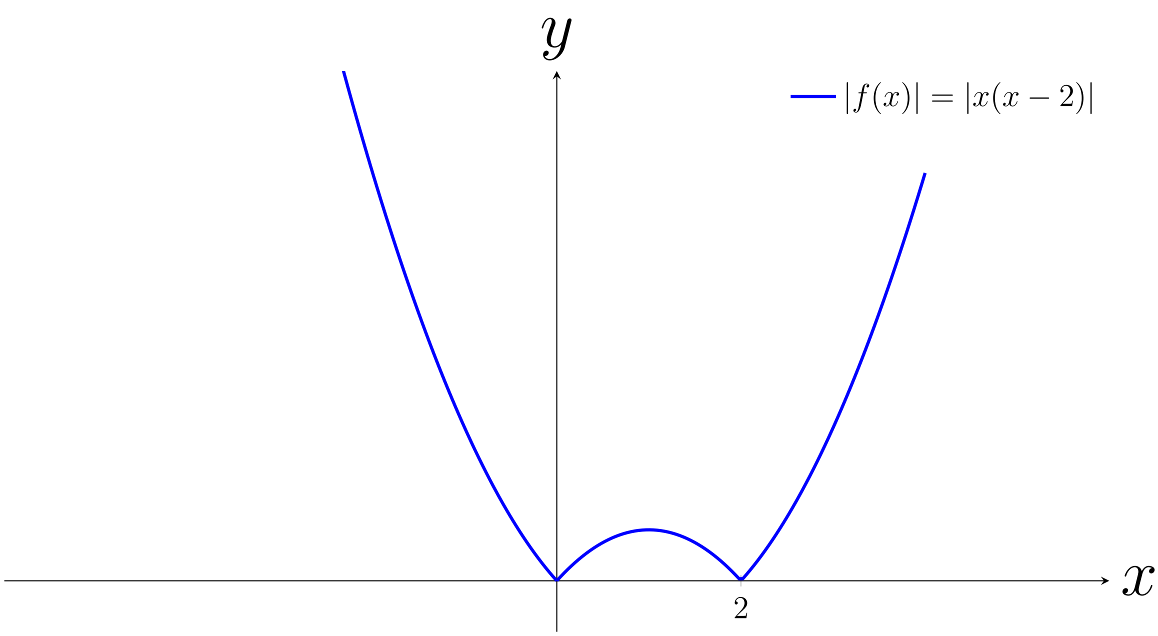
ג)



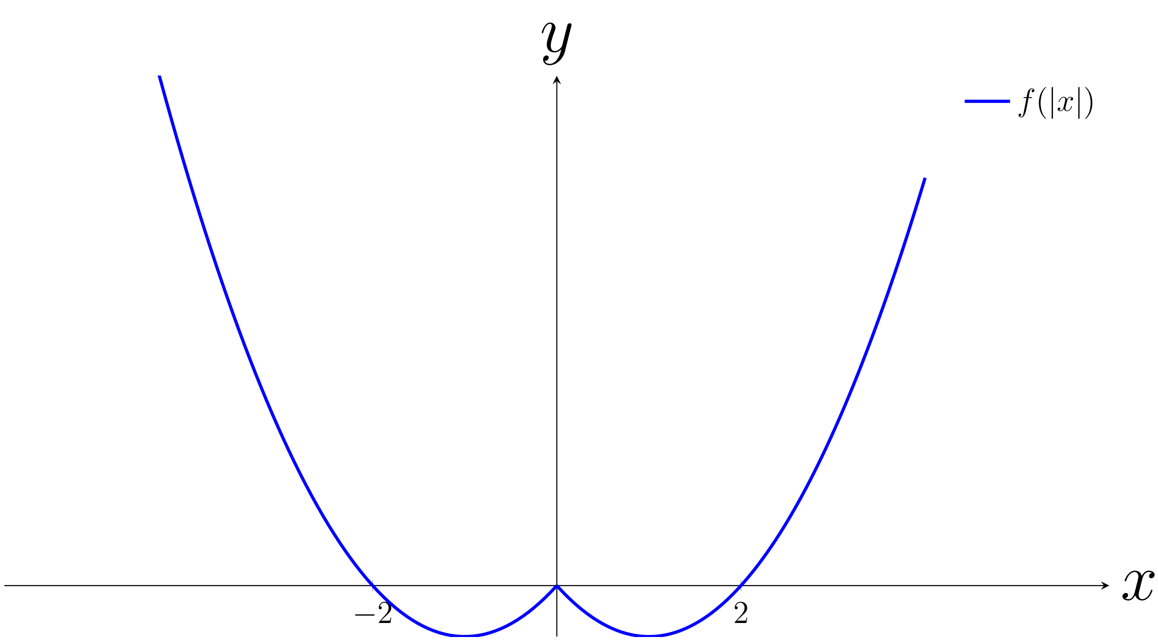
שאלה 19

א) $f(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$

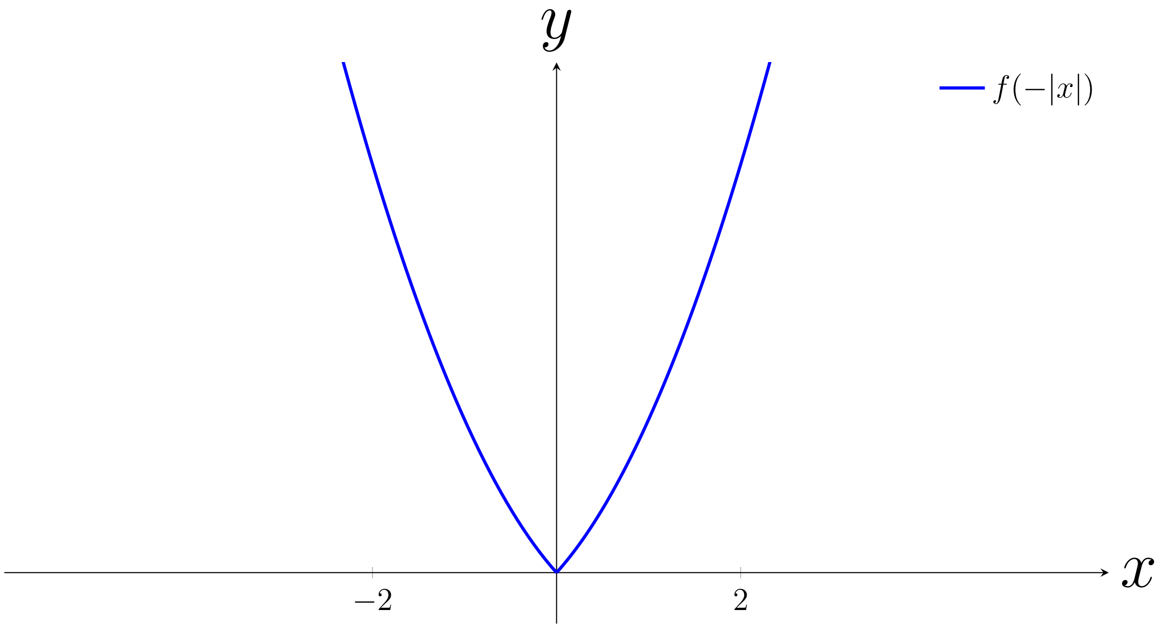




y
$|f(x)| = |x(x-2)|$
x
2



y
$f(|x|)$
x
-2
2



ב)

$$y=\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{8-x}$$

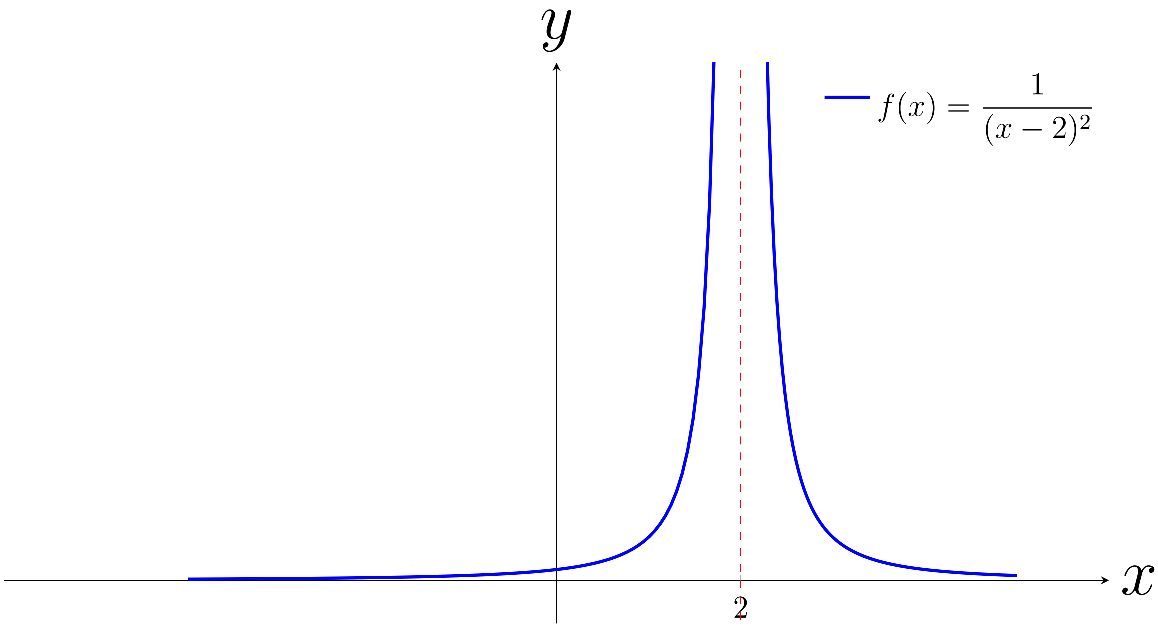
$$\left\{\begin{array}{rl} x^2-4x & \geq 0 \\ 8-x & \geq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rl} x(x-4) & \geq 0 \\ x & \leq 8 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} \{x\leq 0\}\cup\{x\geq 4\} \\ x\leq 8 \end{array}\right. \Rightarrow \{x\leq 0\}\cup\{4\leq x\leq 8\}$$

תחום הגדרה: $\mathrm{Dom}(f)=(-\infty,0]\cup[4,8]$.

<u>שאלה 20</u>

א) אם $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ או $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ אז אומרים כי קיים אסימפטוטה אנכית בנקודה $x=a$.

ב) $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$.



ג) $f(x)=2^{\frac{x}{1-x}}$

1) תחום הגדרה:

$$1-x\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x\neq 1 \ .$$

לפיכך $\mathrm{Dom}(f)=\{x\neq 1\}$

2) 2^a לכל $a\in\mathbb{R}$ חיובי, לכן

$$2^{\frac{x}{1-x}}>0 \quad \Rightarrow \quad f(x)>0$$

לכל x בתחום ההגדרתה. לפיכך $f(x)>0$ לכל $x\neq 1$.

3) יש נקודת אי-הגדרה ב- $x=1$. נבדוק את הסוג של הנקודת אי-רציפות שם:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 2^{\left(\frac{x}{1-x}\right)}=2^{\left(\frac{1^-}{1-1^-}\right)}=2^{\left(\frac{1}{0^+}\right)}=2^{\infty}=\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 2^{\left(\frac{x}{1-x}\right)}=2^{\left(\frac{1^+}{1-1^+}\right)}=2^{\left(\frac{1}{0^-}\right)}=2^{-\infty}=\frac{1}{2^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0 \ .$$

לכן $x=1$ נקודת אי רציפות ממין 2.

4) לפי התוצאות של הסעיף הקודם, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\infty$ ו- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$ לפיכך $x=1$ אסימפטוטה אנכית מצד שמאל.

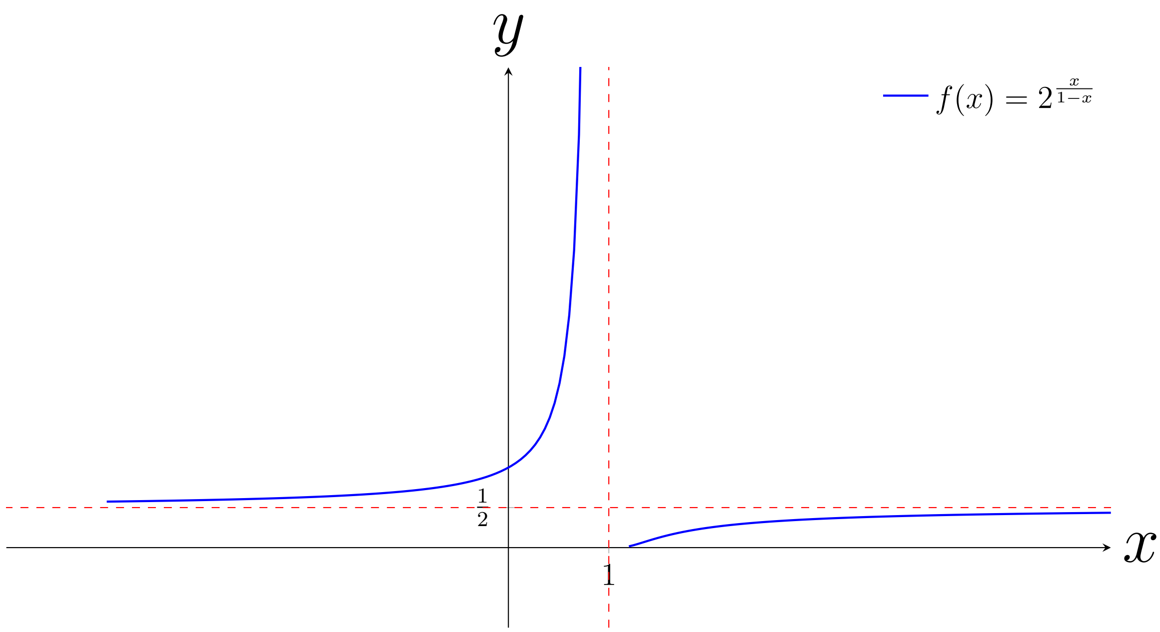
5)

$$\lim_{x\to\infty} 2^{\left(\frac{x}{1-x}\right)}=2^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{1-x}\right)}=2^{-1}=\frac{1}{2}$$

$$2^{\left(\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{1-x}\right)}=2^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)}=2^{-1}=\frac{1}{2} \ .$$

לפיכך $y=\frac{1}{2}$ אסימפטוטה אופקית.

6)



שאלה 21

א)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2x}{x}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{x}\right)}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}+1\right)}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{\frac{x^2+2x}{x^2}}+1\right)}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}$$
$$=\frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{\infty}}+1\right)}$$
$$=\frac{2}{\left(\sqrt{1+0}+1\right)}$$
$$=1$$

ב)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-\sin(x)}{\sin(4x)-\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\sin(2x)}{2x}-\frac{\sin(x)}{x}}{\frac{4\sin(4x)}{4x}-\frac{2\sin(2x)}{2x}}=\frac{2-1}{4-2}=\frac{1}{2}$$

<u>שאלה 22</u> $f(x)=|\sqrt{2x-6}|$.

א) תחום ההגדרה של $f(x)$:

$$2x-6\geq 0 \quad\Rightarrow\quad 2(x-3)\geq 0 \quad\Rightarrow\quad x-3\geq 0 \quad\Rightarrow\quad x\geq 3$$

$\mathrm{Dom}(f)=[3,\infty)$.

$$|\sqrt{2x-6}|\geq 0 \quad\Rightarrow\quad f(x)\geq 0$$

לפיכך $\mathrm{Im}(f)=[0,\infty)$.

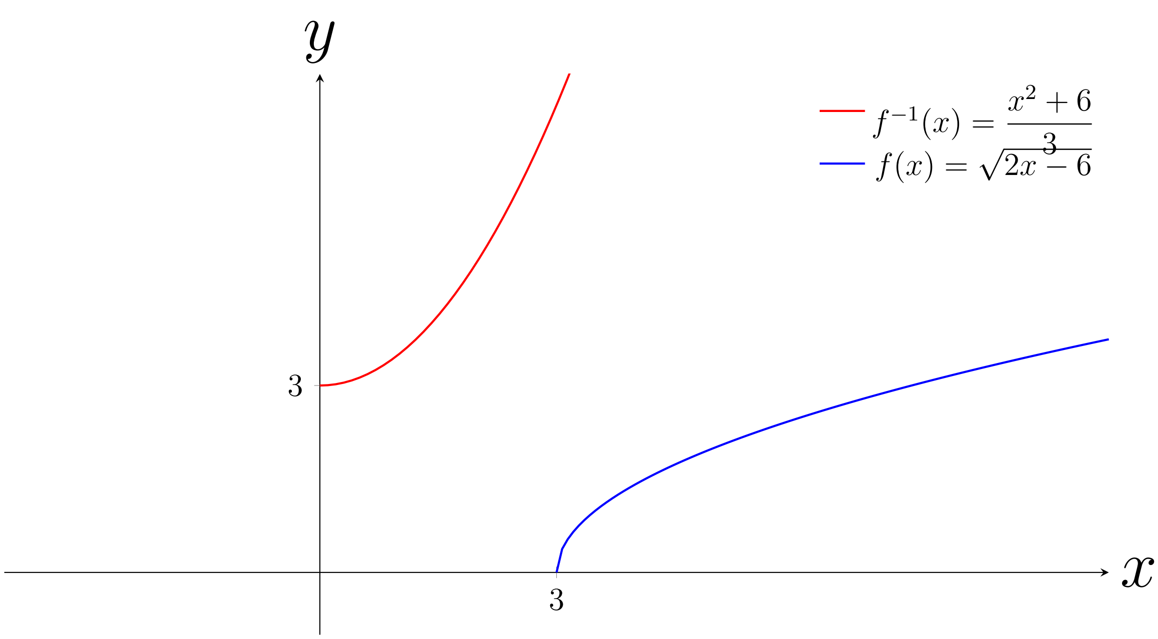
ב)

$$\begin{aligned}|\sqrt{2x-6}| &= y\\ 2x-6 &= y^2\\ 2x &= y^2+6\\ x &= \frac{y^2+6}{2}\end{aligned}$$

לכן $f^{-1}(x)=\frac{x^2+6}{2}$.

ג) התמונה של הפונקציה המקורית היא $\mathrm{Dom}(f^{-1})=\mathrm{Im}(f(x))=[0,\infty)$.
$\mathrm{Im}(f^{-1})=\mathrm{Dom}(f(x))=[3,\infty)$.

ד)



שאלה 23

א)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x}-x\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x}-x\right)\frac{\left(\sqrt{x^2-5x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-5x}+x\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x-x^2}{\sqrt{x^2-5x}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{\sqrt{x^2-5x}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{-5x}{x}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x^2-5x}+x}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-5}{\left(\frac{\sqrt{x^2-5x}}{x}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-5}{\left(\sqrt{\frac{x^2-5x}{x^2}}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-5}{\left(\sqrt{1-\frac{5}{x}}+1\right)} \\
&= \frac{-5}{\left(\sqrt{1-\frac{5}{\infty}}+1\right)} \\
&= \frac{-5}{\left(\sqrt{1-0}+1\right)} \\
&= \frac{-5}{\sqrt{1}+1} \\
&= \frac{-5}{2}\ .
\end{aligned}$$

ב)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)+\sin x}{\sin x-\sin(2x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(3x)+\sin x}{x}}{\frac{\sin x-\sin(2x)}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(3x)}{x}+\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin(2x)}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3\sin(3x)}{3x}+\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin x}{x}-\frac{2\sin(2x)}{2x}} \\
&= \frac{3+1}{1-2} \\
&= -4\ .
\end{aligned}$$

שאלה 24

א) 1)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+5x+6}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{x^2+5x+6}-1\right)^{2x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-x^2-5x-6}{x^2+5x+6}\right)^{2x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5x-6}{x^2+5x+6}\right)^{2x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5x-6}{x^2+5x+6}\right)^{\frac{x^2+5x+6}{-5x-6}\cdot\frac{-5x-6}{x^2+5x+6}\cdot(2x+1)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-5x-6}{x^2+5x+6}\right)^{\frac{x^2+5x+6}{-5x-6}}\right]^{\frac{(-5x-6)(2x+1)}{x^2+5x+6}}$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5x-6}{x^2+5x+6}\right)^{\frac{x^2+5x+6}{-5x-6}}\right]^{\lim_{x\to\infty}\frac{(-5x-6)(2x+1)}{x^2+5x+6}}$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-10x^2-17x-6}{x^2+5x+6}}$$

$$=e^{-10}$$

2)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2\cdot 5^x+3^x}{3\cdot 5^x+2^x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2\cdot 5^x+3^x}{5^x}}{\frac{3\cdot 5^x+2^x}{5^x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2\cdot\frac{5^x}{5^x}+\frac{3^x}{5^x}}{3\cdot\frac{5^x}{5^x}+\frac{2^x}{5^x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+\left(\frac{3}{5}\right)^x}{3+\left(\frac{2}{5}\right)^x}\right)$$

$$=\left(\frac{2+\left(\frac{3}{5}\right)^\infty}{3+\left(\frac{2}{5}\right)^\infty}\right)$$

$$=\left(\frac{2+0}{3+0}\right)$$

$$=\frac{2}{3}$$

(3

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{4\sin(3x)+\sin(5x)}{x+\tan(8x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{4\sin(3x)+\sin(5x)}{x}}{\frac{x+\tan(8x)}{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{4\sin(3x)}{x}+\frac{\sin(5x)}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{\tan(8x)}{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4\cdot\frac{3\sin(3x)}{3x}+\frac{5\sin(5x)}{5x}}{1+\frac{8\tan(8x)}{8x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4\cdot 3+5}{1+8}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{12+5}{9}\right)$$

$$=\frac{17}{9}$$

ב)

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(3x-5)=1\ ,\qquad \lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2+2x)=8\ ,\qquad f(2)=8$$

ז"א הגבולות $\lim_{x\to 2^+}f(x)$ ו- $\lim_{x\to 2^-}f(x)$ קיימים אבל

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)\neq\lim_{x\to 2^-}f(x)$$

לכן $x=2$ נק' אי רציפות ממין ראשון.

<u>שאלה 25</u> נרשום את $f(x)$ בצורה הבאה:

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{x+a}=\frac{x(x+2)}{x+a}\ .$$

אם $a=2$:

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{x+2}\ .$$

במקרה זה הנקודה $x=-2$ נקודת אי-רציפות סליקה, מכיוון ש-

$$f(-2)=\frac{0}{0}$$

אשר לא מוגדר.

אם $a=0$:

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{x}\ .$$

במקרה זה הנקודה $x=0$ נקודת אי-רציפות סליקה, כיוון ש-

$$f(0)=\frac{0}{0}$$

אשר לא מוגדר.

שאלה 26

א) תחום ההגדרה:

$$x+3 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \geq -3$$

לכן $\text{Dom}(f) = [-3, \infty)$.

ב) תמונה:

$$|\sqrt{x+3}| \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad |\sqrt{x+3}| - 4 \geq -4$$

לכן $\text{Im}(f) = [-4, \infty)$.

ג)

$$\begin{aligned} |\sqrt{x+3}| - 4 =& y \\ |\sqrt{x+3}| =& y+4 \\ x+3 =& (y+4)^2 \\ x =& (y+4)^2 - 3 = y^2 + 8y + 13 \end{aligned}$$

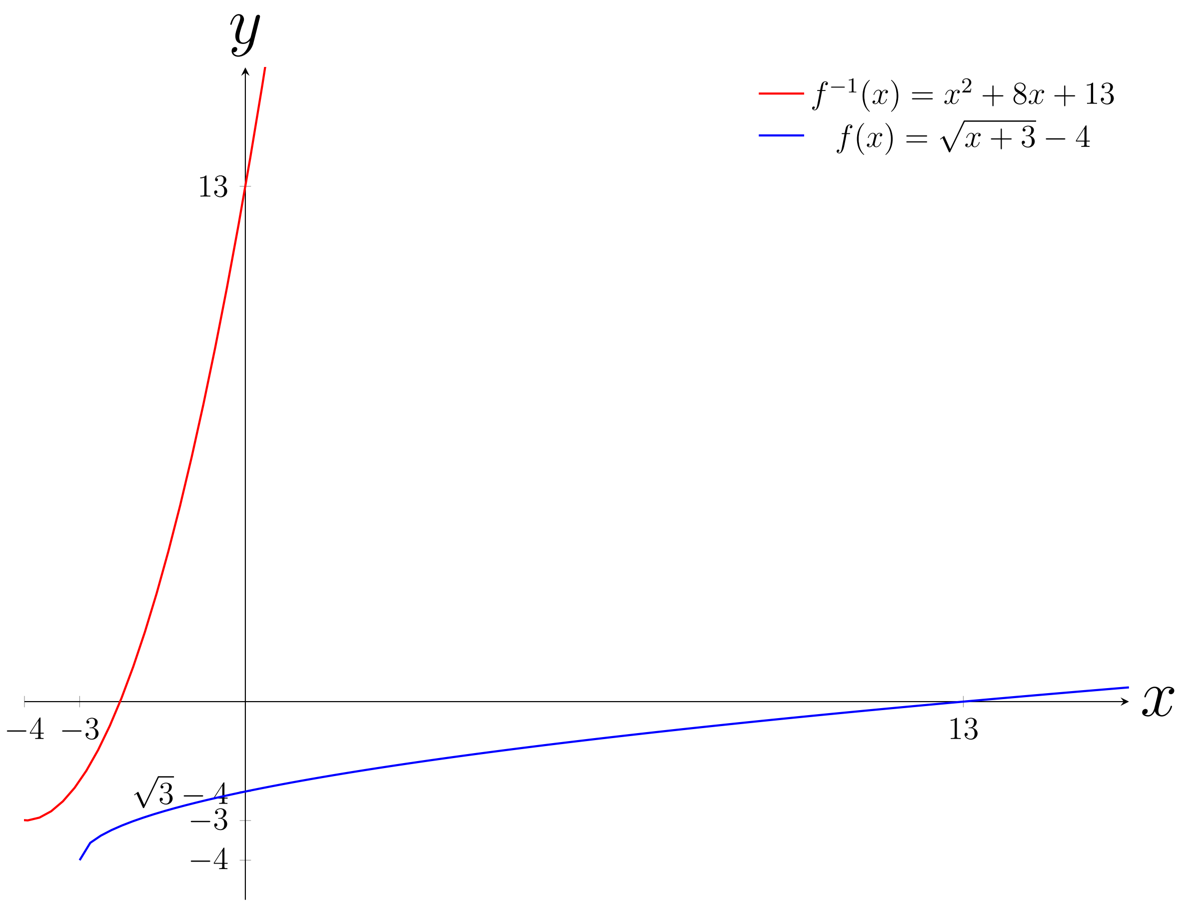
לפיכך

$$f^{-1}(x) = (x+4)^2 - 3 = x^2 + 8x + 13 \ .$$

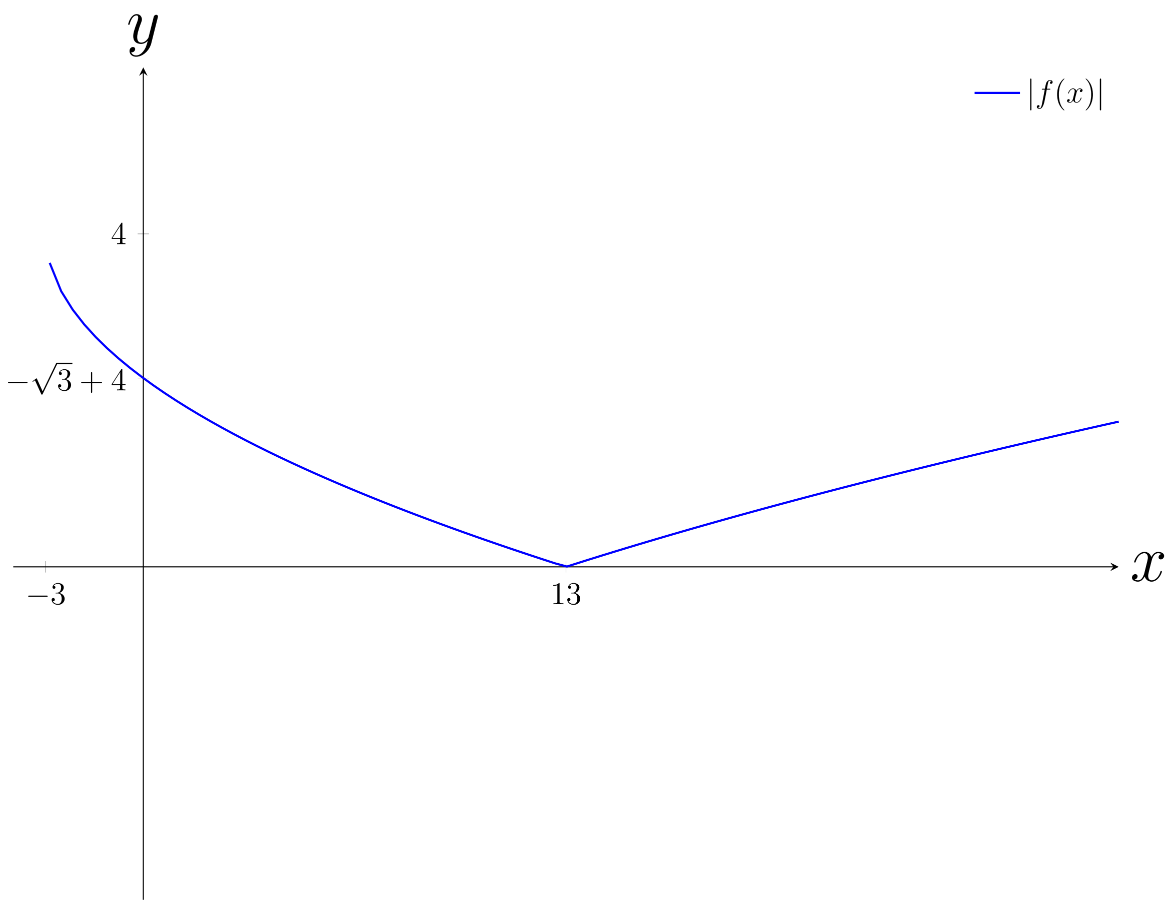
ד)

$$\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Im}(f) = [-4, \infty)$$
$$\text{Im}(f^{-1}) = \text{Dom}(f) = [-3, \infty)$$

ה)



(١



y
$|f(x)|$
4
$-\sqrt{3}+4$
x
-3
13