שיעור 8
תלות לינארית

הגדרה של תלות לינארית

8.1 הגדרה: (תלות לינארית)
נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n \in V$. וקטורים $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ נקראים תלוים לינארית אם קיימים סקלרים $k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{F}$ שלא כולם אפסים כך ש-

$$k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2 + \ldots + k_n\mathrm{v}_\mathrm{n} = \bar{0} \ .$$

דוגמא.
$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ תלוים לינארית כי $3\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2 = \bar{0}$.

דוגמא.
$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1+i\\-2\end{pmatrix}$, $\mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}1-i\\2i\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ תלוים לינארית כי $i\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 = \bar{0}$.

דוגמא.
$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2 = \bar{0} \qquad \Rightarrow \qquad \left.\begin{aligned} 2k_1 + 6k_2 &= 0 \\ k_1 + 4k_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$k_1 = 0$, $k_2 = 0$ לכן v_1, v_2 בלתי תלוים לינארית.

דוגמא.
$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$, $\mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ תלוים לינארית כי

$$0 \cdot \mathrm{v}_1 + 0 \cdot \mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_3 = \bar{0} \ .$$

דוגמא.
בדקו אם הוקטורים

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

תלוים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם ששווה לוקטור האפס.

פיתרון.

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+k_3\mathrm{v}_3=\bar{0}$$

קיבלנו מערכת משוואות הומוגנית:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&4&2&0\\ 2&5&1&0\\ 3&6&0&0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&4&2&0\\ 0&-3&-3&0\\ 0&-6&-6&0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to-\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&4&2&0\\ 0&1&1&0\\ 0&-6&-6&0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&4&2&0\\ 0&1&1&0\\ 0&0&0&0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-4R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&-2&0\\ 0&1&1&0\\ 0&0&0&0 \end{array}\right)$$

$$(k_1,k_2,k_3)=(2k_3,-k_3,k_3)\ ,\qquad k_3\in\mathbb{R}\ .$$

למערכת יש פתרון, לכן הוקטורים ת"ל.

נציב $k_3=1$ ונקבל

$$(k_1,k_2,k_3)=(2,-1,1)\ ,$$

ונקבל

$$2\mathrm{v}_1-\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3=\bar{0}$$

■

8.2 משפט. ()
עמודות מטריצה בלתי תלויה לינארית אם ורק אם למערכת $A\cdot X=0$ יש רק פיתרון טריויאלי, ז"א למטריצה המדורגת כל העמודות מובילות.

דוגמא.
האם הוקטורים של מרחב $P_2(\mathbb{R})$

$$p_1(x)=3-x+x^2\ ,\qquad p_2(x)=x+5x^2\ ,\qquad p_3(x)=1\ ,$$

הם תלוים לינארית? אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם שווה לוקטור האפס.

פיתרון.

$$k_1p_1(x)+k_2p_2(x)+k_3p_3(x)=\bar{0}\ ,$$
$$k_1\left(3-x+x^2\right)+k_2\left(x+5x^2\right)+k_3\cdot 1=0+0\cdot x+0\cdot x^2\ ,$$

לכן
$$(3k_1+k_3)+(-k_1+k_2)x+(k_1+5k_2)x^2=0+0\cdot x+0\cdot x^2$$
השוויון אמור להתקיים לכל x, לכן
$$\left.\begin{aligned} 3k_1+k_3 &=0\\ -k_1+k_2 &=0\\ k_1+5k_2 &=0\end{aligned}\right\}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3&0&1&0\\ -1&1&0&0\\ 1&5&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_1-3R_3]{R_2\to R_1+3R_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 3&0&1&0\\ 0&3&1&0\\ 0&-15&1&0\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_3\to R_3+5R_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 3&0&1&0\\ 0&3&1&0\\ 0&0&6&0\end{array}\right)$$
למערכת יש פתרון יחיד $k_1=0,k_2=0,k_3=0$. לכן הוקטורים בת"ל. ■

דוגמא.
במרחב וקטורי $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ נתונים שלושה וקטורים
$$u_1=\begin{pmatrix}-2&1\\0&-1\end{pmatrix}\ ,\quad u_2=\begin{pmatrix}5&-1\\4&-3\end{pmatrix}\ ,\quad u_3=\begin{pmatrix}-1&4\\4&-6\end{pmatrix}$$
בדקו אם הוקטורים u_1,u_2,u_3 תלוים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם שווה לוקטור האפס.

פיתרון.
$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=\bar{0}\ ,$$
$$k_1\begin{pmatrix}-2&1\\0&-1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}5&-1\\4&-3\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-1&4\\4&-6\end{pmatrix}=\bar{0}\ ,$$
לכן
$$\begin{pmatrix}-2k_1+5k_2-k_3 & k_1-k_2+4k_3\\ 4k_2+4k_3 & -k_1-3k_2-6k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ .$$
השוויון אמור להתקיים לכל x, לכן
$$\left.\begin{aligned} -2k_1+5k_2-k_3 &=0\\ k_1-k_2+4k_3 &=0\\ 4k_2+4k_3 &=0\\ -k_1-3k_2-6k_3 &=0\end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_1 - 2R_4]{R_2 \to R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 11 & 11 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_2 - 3R_4]{R_3 \to R_2 - 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

למערכת ההומוגנית יש פתרון יחיד, טריוויאלי, לכן u_1, u_2, u_3
בת"ל. ■

דוגמא.
נתונים וקטורים $\mathrm{v}_1 = x, \mathrm{v}_2 = e^x, \mathrm{v}_3 = x^2$ במרחב וקטורי $f(\mathbb{R})$. בדקו אם הוקטורים תלוים לינארית.

פיתרון.
<u>שיטה 1</u>

$$k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2 + k_3\mathrm{v}_3 = \bar{0}$$

ז"א

$$k_1 x + k_2 e^x + k_3 x^2 = 0$$

לכל $x \in \mathbb{R}$.
נציב $x = 0$ $\Leftarrow$ $k_2 = 0$.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{נציב } x = 1 & \Rightarrow & k_1 + k_3 = 0 \\ \text{נציב } x = -1 & \Rightarrow & -k_1 + k_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad k_1 = 0 \ , k_3 = 0 \ .$$

לכן הוקטורים בת"ל.

שיטה 2: וורונסקיאן

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & e^x & x^2 \\ 1 & e^x & 2x \\ 0 & e^x & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$W(x) = 0$ לכל x לכן הוקטורים בת"ל. ■

דוגמא.
במרחב וקטורי $\mathbb{Z}_5^3$ נתונים וקטורים

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}\bar{2}\\ \bar{3}\\ \bar{1}\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}\bar{0}\\ \bar{4}\\ \bar{2}\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}\bar{1}\\ \bar{2}\\ \bar{2}\end{pmatrix}\ .$$

בדקו אם הוקטורים תלוים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם שווה לוקטור האפס.

פיתרון.

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+k_3\mathrm{v}_3=\bar{0}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{2}&\bar{0}&\bar{1}&0\\ \bar{3}&\bar{4}&\bar{2}&0\\ \bar{1}&\bar{2}&\bar{2}&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_1+3R_3]{R_1\to R_1+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{2}&\bar{0}&\bar{1}&0\\ \bar{0}&\bar{4}&\bar{3}&0\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{2}&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{2}&\bar{0}&\bar{1}&0\\ \bar{0}&\bar{4}&\bar{3}&0\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{0}&0\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{rl}\bar{2}k_1+k_3&=\bar{0}\\ \bar{4}k_2+\bar{3}k_3&=0\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\left.\begin{array}{rl}\bar{2}k_1&=\bar{4}k_3\\ \bar{4}k_2&=\bar{2}k_3\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\left.\begin{array}{rl}k_1&=\bar{2}k_3\\ k_2&=\bar{3}k_3\end{array}\right\}$$

פתרון

$$(k_1,k_2,k_3)=(\bar{2}k_3,\bar{3}k_3,k_3)\ ,\qquad k_3\in\mathbb{Z}_5\ .$$

נציב $k_3=\bar{1}$ ונקבל $(k_1,k_2,k_3)=(\bar{2},\bar{3},\bar{1})$. ז"א

$$\bar{2}\mathrm{v}_1+\bar{3}\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3=\bar{0}\ .$$

■

תכונות של תלות לינארית

8.3 משפט. (תכונות בסיסיות של תלות לינארית)

כלל תלות לינארית 1) וקטור u תלוי לינארית אם ורק אם $u=\bar{0}$.
כלל תלות לינארית 2) שני וקטורים תלוים לינארית אם ורק אם אחד מהם הוא צירוף לינארי של הוקטור השני.
כלל תלות לינארית 3) וקטורים $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ תלוים לינארית אם ורק אם לפחות אחד מהם הוא צירוף לינארי של שאר הוקטורים.
כלל תלות לינארית 4) כל קבוצת וקטורים שמכילה את וקטור האפס, היא תלויה לינארית.
כלל תלות לינארית 5) אם $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\in V$ תלוים לינארית, אז כל קבוצת הוקטורים שמכילה את $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ היא תלויה לינארית.
כלל תלות לינארית 6) אם קבוצת וקטורים $\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\}$ בת"ל, אז כל תת קבוצה שלה היא בת"ל.

הוכחה.

כלל תלות לינארית 1

u ת"ל אם ורק אם קיים סקלר $k \in \mathbb{F}$ כך ש $ku = \bar{0} \Leftrightarrow u = \bar{0}$.

כלל תלות לינארית 2

v_1, v_2 ת"ל $\Leftrightarrow$ קיימים סקלרים k_1, k_2 שלא כולם אפסים כך ש

$$k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2 = \bar{0}$$

נניח בלי הגבלת הכלליות ש $k_1 \neq 0$, אז

$$\mathrm{v}_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\mathrm{v}_2 \ .$$

כלל תלות לינארית 3

$\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n$ ת"ל $\Leftrightarrow$ קיימים $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{F}$ שלא כולם אפסים כך ש

$$k_1\mathrm{v}_1 + \ldots + k_n\mathrm{v}_n = \bar{0} \ .$$

נניח ש $k_i \neq 0$. אז זה מתקיים אם ורק אם

$$\mathrm{v}_i = \left(-\frac{k_1}{k_i}\right)\mathrm{v}_1 + \ldots + \left(-\frac{k_{i-1}}{k_i}\right)\mathrm{v}_{i-1} + \left(-\frac{k_{i+1}}{k_i}\right)\mathrm{v}_{i+1} + \ldots + \left(-\frac{k_n}{k_i}\right)\mathrm{v}_n$$

כלל תלות לינארית 4

לכל $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n \in V$,

$$0 \cdot \mathrm{v}_1 + \ldots + 0 \cdot \mathrm{v}_n + 1 \cdot \bar{0} = \bar{0}$$

לכן $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n, \bar{0}$ ת"ל.

כלל תלות לינארית 5

נניח ש $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n$ ת"ל. אז קיימים סקלירם $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{F}$ שלא כולם אפסים כך ש

$$k_1\mathrm{v}_1 + \ldots + k_n\mathrm{v}_n = \bar{0} \ .$$

אז לכל $u_1, \ldots, u_m \in V$ מתקיים:

$$k_1\mathrm{v}_1 + \ldots + k_n\mathrm{v}_n + 0 \cdot u_1 + \ldots + 0 \cdot u_m = \bar{0}$$

לכן $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n, u_1, \ldots, u_m$ ת"ל.

כלל תלות לינארית 6

נוכיח את הטענה בדרך השלילית.

$\{\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ בת"ל. ז"א הצירוף לינארי הבא

$$k_1\mathrm{v}_1 + \ldots + k_n\mathrm{v}_n = \bar{0}$$

מתקיים אם ורק אם $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$. נניח שקיימת תת קבוצה של $\{\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ שהיא תלויה לינארית. כלומר קיימת קבוצה $\{\mathrm{v}_1, \ldots \mathrm{v}_m\}$ שהיא ת"ל. ז"א הצירוף לינארי

$$k_1\mathrm{v}_1 + \ldots + k_m\mathrm{v}_m = \bar{0}$$