עבודה עצמית 8

שאלה 1 נתון משחק קורנוט עם n שחקנים. יהי q_i כמות המוצר הנוצר על יד שחקן i, ויהי $Q = q_1 + \ldots + q_n$ כמות הכוללת בשוק. יהי

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & Q < a \\ 0 & Q \geq a \end{cases} .$$

נניח כי העלות לשחקן i לייצר
כמות q_i היא $C_i(q_i) = cq_i$ כאשר $c < a$.

א) מצאו את השיווי משקל של המשחק.

ב) מה קורה אם $n \to \infty$?

שאלה 2 נתון משחק דואפול של קורנוט, כאשר פונקציית המחיר

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & Q < a \\ 0 & Q \geq a \end{cases} .$$

אך לשחקנים יש פונקציות עלות אי-סימטריות:

$$C_1(q_1) = c_1 q_1 \ , \qquad C_2(q_2) = c_2 q_2 \ .$$

א) חשבו את השיווי משקל נאש אם $0 < c_i < \dfrac{a}{2}$ לכל שחקן?

ב) כיצד התשובה משתנה אם $c_1 < c_2 < a$ ו- $2c_2 > a + c_1$?

פתרונות

שאלה 1 הרווח לשחקן i נתון עלי ידי הפונרצית תשלום

$$u_i(q_1,\ldots,q_i,\ldots,q_n) = P(Q)q_i - C_i = (P(Q)-c)\,q_i = (a-Q-c)\,q_i = (a-q_1-q_2-\ldots-q_i-\ldots-q_n-c)\,q_i$$

ווקטור אסטרטגיות $(q_1^*,\ldots,q_i^*,\ldots,q_n^*)$ שיווי משקל אם s_i^* תשובה טובה ביותר לשקחן i לכל $1\leq i\leq n$.

$$u_i\left(q_1^*,\ldots,q_i^*,\ldots,q_n^*\right) = \max_{0\leq q_i\leq\infty} u_i\left(q_1^*,\ldots,q_i,\ldots,q_n^*\right)$$

התשלום u_i מקבל ערך מסימלי בנקודה שבה $(u_i)'_{q_i}=0$.

$$\begin{aligned}(u_i)'_{q_i} &= (a-q_1^*-\ldots-q_i^*-\ldots-q_n^*-c)-q_i^*\\ &= a-q_1^*-\ldots-2q_i^*-\ldots-q_n^*-c \stackrel{!}{=} 0\\ \Rightarrow\quad a-c &= q_1^*+\ldots+2q_i^*+\ldots+q_n^*\end{aligned}$$

לכל $q\leq i\leq n$. מכיוון שאנחנו מקבלים אותו משוואה לכל i, אז בהכרח הערכים של ה- q_i זהים ושווים ל-

$$q_1^* = q_2^* = \ldots = q_i^* = \ldots = q_n^*\ .$$

נציב זה במשוואה הקודם ואז נקבל

$$(n+1)q_i^* = a-c \qquad\Rightarrow\qquad q_i^* = \frac{a-c}{n+1}\ .$$

שאלה 2 פונקצית המחיר:

$$P(Q) = a-Q\ ,$$

כאשר $Q=q_1+q_2$. הרווח לשחקן 1 הוא

$$u_1 = (P-c_1)q_1 = (a-Q-c_1)q_1 = (a-q_1-q_2-c_1)q_1\ ,$$

והרווח לשחקן 2 הוא

$$u_2 = (P-c_2)q_2 = (a-Q-c_2)q_2 = (a-q_1-q_2-c_2)q_2\ .$$

בנקודת שיווי משקל:

$$(u_1)'_{q_1} = (a-c_1-q_1-q_2)-q_1 = a-c_1-2q_1-q_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad\Rightarrow\quad q_1^* = \frac{a-c_1-q_2}{2}\ .$$

בנקודת שיווי משקל:

$$(u_2)'_{q_1} = (a-c_2-q_1-q_2)-q_2 = a-c_2-2q_1-q_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad\Rightarrow\quad q_2^* = \frac{a-c_2-q_1}{2}\ .$$

נציב התנאי השני בתנאי הראשון:

$$q_1^* = \frac{a-c_1-q_2}{2} = q_1^* = \frac{a-c_1-\left(\frac{a-c_2-q_1}{2}\right)}{2} = \frac{a}{4}-\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{4}+\frac{q_1^*}{4} \quad\Rightarrow\quad \frac{3q_1^*}{4} = \frac{a}{4}-\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{4} = \frac{a-2c_1+c_2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad q_1^* = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3} \ .$$

נציב זה בביטוי ל- q_2^* ונקבל

$$q_2^* = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3} \ .$$

$$2c_2 > a + c_1 \quad \Rightarrow \quad a - 2c_2 + c_1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a - 2c_2 + c_1}{3} < 0 \ .$$

לכן בהכרח $q_2 = 0$ בגלל כמות לא יכולה להיות שלילית.