עבודה 5: הצבת מטריצה והעתקה בפולינום ומשפט קיילי המילטון #1

**שאלה 1** חשבו את ההצבה של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ בפולינום $P(x) = 2x^2 - 2x - 4$.

**שאלה 2**

תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ כך ש: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**א)** מצאו את הפולינום האופייני והמינימלי של מטריצה $A$.

**ב)** מצאו את הערכים העצמיים והמרחבים העצמיים של $A$.

**ג)** האם המטריצה לכסינה? אם כן, מצאו מטריצה אלכסונית $D$ ומטריצה הפיכה $P$ שך ש: $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.
אם לא, הסבירו זאת.

**שאלה 3** יהיו $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $P(x) = 2x^2 - 2x - 4$.

$$P(x) = 2x^2 - 2x - 4 = 2(x-2)(x+1) \ .$$

חשבו את $P(A)$.

**שאלה 4** תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ו $Q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \in R_3[x]$. פרקו $Q(x)$ לגורמים לינאריים לינאריים והשתמשו בפירוק זה כדי לחשב שוב את ההצבה של $A$ ב- $Q(x)$.

**שאלה 5** חשבו את ההצבה של $A = \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 20 & -11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ בפולינום $Q(x) = x^{100} + 2x^{51} - 3$.

**שאלה 6**

תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ סקלר. נניח ש $P(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום. הוכיחו ש

$$P(A) = \lambda I_n$$

אם ורק אם

$$P(B) = \lambda I_n$$

**שאלה 7**

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. נניח ש $P(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום. הוכיחו כי

$$P(A)^t = P\left(A^t\right) \ .$$

**שאלה 8** יהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ אופרטור המוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-3y\\2x+y\end{pmatrix}\ .$$

חשבו את ההצבה $P(T)$ עבור $P(x)=3x^2-4x+1$.

**שאלה 9**

נסמן $P(x)=2x^2+3x-4\in\mathbb{R}[x]$. יהי $T\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2)$ המוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\x+2y\end{pmatrix}\ .$$

חשבו את $P(T)$.

**שאלה 10** יהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ אופרטור המוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-2y\\3x+7y\end{pmatrix}\ .$$

חשבו את ההצבה $P(T)$ עבור $P(x)=5x^2-6x+1$ תוך כדי שימוש של המטריצה המייצגת הסטנדרטית של $T$.

**שאלה 11** יהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ אופרטור המוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-3y\\2x+y\end{pmatrix}\ .$$

חשבו את ההצבה $P(T)$ עבור $P(x)=3x^2-4x-1$ תוך כדי שימוש של המטריצה המייצגת הסטנדרטית של $T$.

**שאלה 12** יהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ אופרטור המוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-2y\\3x+7y\end{pmatrix}\ .$$

חשבו את ההצבה $P(T)$ עבור $P(x)=5x^2-6x+1$ תוך כדי שימוש של המטריצה המייצגת הסטנדרטית של $T$.

**שאלה 13**

נגדיר $T\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3)$ ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3y+z\\2x-y+z\\x+y+z\end{pmatrix}\ .$$

נסמן $P(x)=x^2+x-2\in\mathbb{R}[x]$. יהי $e$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.

**א)** חשבו את $[P(T)]_E$.

**ב)** היעזרו בחישוב בסעיף א' כדי למצוא את $P(T)$.

**שאלה 14** תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו את הטענות הבאות:

**א)** $A^m \in \text{span}\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{m-1}\}$ אם ורק אם קיים פולינום $P(x) \in \mathbb{F}[x]$ מסדר $m$ כך ש $P(A) = 0$.

**ב)** הקבוצה $\{I_n, A, A^2, \ldots, A^m\}$ ת"ל אם ורק אם קיים פולינום שונה מאפס $P(x) \in \mathbb{F}[x]$ מסדר $m$ לכל היותר כך ש $P(A) = 0$.

**שאלה 15** נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

להיעזר במשפט קיילי המילטון חשבו את $A^3$ ו- $A^{-1}$.

**שאלה 16** תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו: $\lambda$ הינו ע"ע של $A$ אמ"ם $\lambda$ הינו ע"ע של $A^t$.

**שאלה 17**

עבור

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

מבלי לחשב ישירות מטריצות הופיות, מצאו את $A^{-1}$ ואת $A^{-2}$.

**שאלה 18** תהיינהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו את הטענות הבאות:

**א)** הוכיחו כי

$$A^n \in \text{span}\left\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\right\}$$

**ב)** הוכיחו שאם $A$ הפיכה אז

$$A^{-1} \in \text{span}\left\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\right\}$$

**שאלה 19** תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ונניח ש $A^4 = 0$. מצאו את המטריצה ההופכית של $A + \alpha I$ כאשר $\alpha$ סקלר.

# תשובות

## שאלה 1

$$\begin{aligned}P(A) =&2A^2 - 2A - 4I_2\\ =&2\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix} 14 & 20 \\ 30 & 44 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 24 & 32 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

## שאלה 2

**א)**

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| =&\begin{vmatrix} \lambda & -3 & -1 \\ 1 & \lambda-4 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}\\ =&(1-\lambda)\begin{vmatrix} \lambda & -3 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}\\ =&(\lambda-1)\left(\lambda(\lambda-4)+3\right)\\ =&(\lambda-1)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)\\ =&(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-1)\\ =&(\lambda-1)^2(\lambda-3)\end{aligned}$$

הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-3)\ .$$

האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$(\lambda-1)(\lambda-3)\ , \qquad (\lambda-1)^2(\lambda-3)\ .$$

נבדוק $(\lambda-1)(\lambda-3)$:

$$(A-I)(A-3I) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $m_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-3)$.

**ב)** ערכים עצמיים:
$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 2
$\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 1.
נחשב את המרחב עצמי $V_1$ השייך לערך עצמי 1:

$$(A-I) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2+R_1} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון $(x,y,z)=(3y+z,y,z)=y(3,1,0)+z(1,0,1)$ לכן

$$V_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(V_1)=2$, ז"א הריבוי גאומטרי 2.
נחשב את המרחב עצמי $V_3$ השייך לערך עצמי 3:

$$(A-3I)=\begin{pmatrix}-3&3&1\\-1&1&1\\0&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\-3&3&1\\0&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1}\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&0&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון $(x,y,z)=(y,y,0)=y(1,1,0)$ לכן

$$V_3=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(V_3)=1$, ז"א הריבוי גאומטרי 1.

**ג)** עבור כל אחד של הערכים עצמיים הריבוי גאומטרי שווה לריבוי אלגברי לכן $A$ לכסינה.

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}\ ,\qquad P=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\ .$$

## שאלה 3

$$P(A)=2(A-I_2)(A+I_2)=2\begin{pmatrix}-2&2\\3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&16\\24&32\end{pmatrix}\ .$$

## שאלה 4

$$Q(x)=(x-1)(x-2)(x+1)\ .$$

$$Q(A)=(A-I_3)(A-2I_3)(A+I_3)=\begin{pmatrix}0&-1&2\\3&-2&2\\1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&2\\3&-3&2\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&2\\3&0&2\\1&-1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&10\\-5&1&18\\1&-5&26\end{pmatrix}$$

## שאלה 5

ערכים עצמיים של $A$ הם $\lambda=-1,1$ והמרחבים עצמיים המתאימים הם

$$V_{-1}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}\ ,V_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\right\}\ .$$

לכן

$$A=PDP^{-1}=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}\ .$$

$$\begin{aligned}Q(A) =&P\begin{pmatrix}Q(-1) & 0\\ 0 & Q(1)\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}-4&0\\-8&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}20&-12\\40&-24\end{pmatrix}\end{aligned}$$

## שאלה 6

$\Rightarrow$ $A,B$ דומות לכן קיימת $C \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה כך ש $B = C^{-1}AC$. לכן

$$P(B) = P\left(C^{-1}AC\right) = C^{-1}P(A)C$$

אם $P(A) = \lambda I_n$ אז

$$P(B) = C^{-1}\lambda I_n C = \lambda I_n \ .$$

$\Leftarrow$

$A = CBC^{-1}$ לכן

$$P(A) = P\left(CBC^{-1}\right) = CP(B)C^{-1}$$

אם $P(B) = \lambda I_n$ אז

$$P(A) = C\lambda I_n C^{-1} = \lambda I_n \ .$$

## שאלה 7

אפשר להראות ע"י אינדוקציה ש $(A^t)^m = (A^m)^t$ (תרגיל בית). נרשום $P(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i x^i$. אז

$$P(A^t) = \sum_{i=1}^{k} a_i \left(A^t\right)^i = \sum_{i=1}^{k} a_i \left(A^i\right)^t = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i A^i\right)^t = P(A)^t \ .$$

## שאלה 8

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = [T]_E\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$P(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x-1)(x-1)$$

$$\begin{aligned}P([T]_E) =&(3[T]_E - I)([T]_E - I)\\ =&\left(3\begin{pmatrix}1&-3\\2&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix}1&-3\\2&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\\ =&\begin{pmatrix}2&-9\\6&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-3\\2&0\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}-18&-6\\4&-18\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$P(T)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = P([T]_E)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-18 & -6\\ 4 & -18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-18x-6y\\ 4x-18y\end{pmatrix} \ .$$

## שאלה 9

$$[T]_E = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$2[T]_E^2+3[T]_E-4I = \begin{pmatrix}-1 & -9\\ 9 & 8\end{pmatrix} \ .$$

$$P(T)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = [P(T)]_E\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -9\\ 9 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x-9y\\ 9x+8y\end{pmatrix}$$

## שאלה 10

בסיס סטדרטיצת של $\mathbb{R}^2$:

$$E=\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$[T]_E = \begin{pmatrix}| & |\\ [T(e_1)]_E & [T(e_1)]_E\\ | & |\end{pmatrix}$$

$$[T(e_1)]_E = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \ , \qquad [T(e_2)]_E = \begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}$$

$$[T]_E = \begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 7\end{pmatrix}$$

$[P(T)]_E = P([T]_E)$. נחשב $P([T]_E)$:

$$P(x) = 5x^2-6x+1 = (5x-1)(x-1)$$

$$\begin{aligned}P([T]_E) &= (5([T]_E)-I_2)([T]_E-I_2)\\ &= \left(5\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}9 & -10\\ 15 & 34\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 6\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-21 & -78\\ 117 & 174\end{pmatrix}\end{aligned}$$

לכן עבור וקטור $u=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}[P(T)u]_E &= [P(T)]_E[u]_E\\ &= P([T]_E)[u]_E\\ &= \begin{pmatrix}-21 & -78\\ 117 & 174\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-21x-78y\\ 117x+174y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

## שאלה 11

בסיס סטדרטיצת של $\mathbb{R}^2$:

$$E=\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$[T]_E=\begin{pmatrix}| & | \\ [T(e_1)]_E & [T(e_1)]_E \\ | & |\end{pmatrix}$$

$$[T(e_1)]_E=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\quad,\qquad [T(e_2)]_E=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$$

$$[T]_E=\begin{pmatrix}1 & -3\\2 & 1\end{pmatrix}$$

$[P\left(T\right)]_E=P\left([T]_E\right)$. נחשב $P\left([T]_E\right)$:

$$\begin{aligned}P([T]_E)=&3\left([T]_E\right)^2-4[T]_E-I_3\\ =&3\begin{pmatrix}1 & -3\\2 & 1\end{pmatrix}^2-4\begin{pmatrix}1 & -3\\2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}-20 & -6\\4 & -20\end{pmatrix}\end{aligned}$$

לכן עבור וקטור $u=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}[P(T)u]_E=&[P(T)]_E\,[u]_E\\ =&P\left([T]_E\right)[u]_E\\ =&\begin{pmatrix}-20 & -6\\4 & -20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}-20x-6y\\4x-20y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

## שאלה 12

בסיס סטדרטיצת של $\mathbb{R}^2$:

$$E=\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$[T]_E=\begin{pmatrix}| & | \\ [T(e_1)]_E & [T(e_1)]_E \\ | & |\end{pmatrix}$$

$$[T(e_1)]_E=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\quad,\qquad [T(e_2)]_E=\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}$$

$$[T]_E=\begin{pmatrix}2 & -2\\3 & 7\end{pmatrix}$$

על פי משפט **??**, $[P\left(T\right)]_E=P\left([T]_E\right)$. נחשב $P\left([T]_E\right)$:

$$P(x)=5x^2-6x+1=(5x-1)(x-1)$$

$$\begin{aligned}P([T]_E) &= (5([T]_E) - I_2)([T]_E - I_2)\\ &= \left(5\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}9 & -10\\ 15 & 34\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 6\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-21 & -78\\ 117 & 174\end{pmatrix}\end{aligned}$$

לכן עבור וקטור $u = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}[P(T)u]_E &= [P(T)]_E [u]_E\\ &= P([T]_E)[u]_E\\ &= \begin{pmatrix}-21 & -78\\ 117 & 174\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-21x - 78y\\ 117x + 174y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

## שאלה 13

**א)**

$$[T]_E = \begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$P(x) = (x-1)(x+2)$$

$$\begin{aligned}[P(T)]_E &= P([T]_E)\\ &= ([T]_E - I_3)([T]_E + 2I_3)\\ &= \begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}5 & 1 & 5\\ 1 & 5 & 3\\ 4 & 4 & 2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

**ב)** לכן

$$
\begin{aligned}
P(T)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &= [P(T)]_E\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\
&= x\,[P(T)]_E\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\,[P(T)]_E\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\,[P(T)]_E\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
&= x\begin{pmatrix}5&1&5\\1&5&3\\4&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}5&1&5\\1&5&3\\4&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}5&1&5\\1&5&3\\4&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
&= x\begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}5x+y+5z\\x+5y+3z\\4x+4y+2z\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

## שאלה 14

**א)** נניח ש $A^m\in\text{span}\{I_n,A,A^2,\ldots,A^{m-1}\}$. אז קיימים סקלרים שך ש

$$A^m=\alpha_0I_n+\alpha_1A+\alpha_2A^2+\ldots+\alpha_{m-1}A^{m-1}$$

ז"א

$$A^m-\alpha_{m-1}A^{m-1}-\alpha_{m-2}A^{m-2}-\ldots-\alpha_1A-\alpha_0I_n=0$$

לכן $A$ מאפסת את

$$P(x)=x^m-\alpha_{m-1}x^{m-1}-\ldots-\alpha_1x-\alpha_0\in\mathbb{F}[x]\ .$$

נניח ש- $A$ מאפסת את הפולינויום

$$Q(x)=\beta_mx^m+\beta_{m-1}x^{m-1}+\ldots+\beta_1x+\beta_0\in\mathbb{F}[x]$$

מסדר $m$, כלומר $Q(A)=0$. נניח ש $\beta_m\neq 0$. אז

$$\beta_mA^m=-\left(\beta_{m-1}A^{m-1}+\ldots+\beta_1A+\beta_0I_n\right)$$

נחלק שני האגפים ב $\beta_m$:

$$A^m=-\left(\frac{\beta_{m-1}}{\beta_m}A^{m-1}+\ldots+\frac{\beta_1}{\beta_m}A+\frac{\beta_0}{\beta_m}I_n\right)$$

קיבלנו כי $A^m\in\text{span}\{I_n,A,A^2,\ldots,A^{m-1}\}$.

**ב)** נניח ש- $\{I_n,A,A^2,\ldots,A^m\}$ ת"ל. אז קיימים סקלירם שאינם כולם אפסים כך ש-

$$\alpha_0I_n+\alpha_1A+\alpha_2A^2+\ldots+\alpha_{m-1}A^{m-1}+\alpha_mA^m=0$$

מכאן $A$ מאפסת $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i$ שהוא פולינום שונה מאפס מסדר $m$ לכל היותר.
להיפך, נניח ש- $P(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i$ אינו פולינום האפס כך ש $P(A) = 0$. אז

$$\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_m A^m = 0$$

הוא צירוף לנארי לא טריוויאלי.

## שאלה 15

## שאלה 16

הפולינום האופייני של $A$ הוא

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -5 & 3-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\
&=(-3-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} + (3-\lambda) \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} + (-4-\lambda) \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&=(-3-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 3-\lambda \\ -6 & 6 \end{vmatrix} \\
&=(-3-\lambda) \left((3-\lambda)(-4-\lambda)+6\right) - \left(-5(-4-\lambda)-6\right) - \left(-30+6(3-\lambda)\right) \\
&=-\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda + 16 \\
&=-\left(\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda - 16\right) \\
&=-(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda+4) \\
&=0 \ .
\end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = -2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = -4$ מריבוי אלגברי 1.

נבדוק אם $A$ הפיכה דרך הדטרמיננטה:

$$|A| = p_A(0) = -16 \neq 0$$

לכן $A$ הפיכה.

לפי משפט קיילי-המילטון,

$$p_A(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad A^3 + 4A^2 - 4A - 16I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad A^3 = -4A^2 + 4A + 16I_3$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 6 \\ 6 & -2 & 6 \\ 12 & -12 & 16 \end{pmatrix}$$

לכן

$$A^3 = -4 \begin{pmatrix} 10 & -6 & 6 \\ 6 & -2 & 6 \\ 12 & -12 & 16 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 & 28 & -28 \\ -44 & 36 & -28 \\ -72 & 72 & -64 \end{pmatrix}$$

לפי משפט קיילי-המילטון,

$$p_A(A)=0 \quad\Rightarrow\quad A^3+4A^2-4A-16I_3=0 \quad\Rightarrow\quad I_3=\frac{1}{16}A^3+\frac{1}{4}A^2-\frac{1}{4}A=\left(\frac{1}{16}A^2+\frac{1}{4}A-\frac{1}{4}I_3\right)A$$

ז"א

$$\begin{aligned}A^{-1}=&\frac{1}{16}A^2+\frac{1}{4}A-\frac{1}{4}I_3\\ =&\frac{1}{16}\begin{pmatrix}10&-6&6\\6&-2&6\\12&-12&16\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3&1&-1\\-5&3&-1\\-6&6&-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}-\frac{3}{8}&-\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\\-\frac{7}{8}&\frac{3}{8}&\frac{1}{8}\\-\frac{3}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

## שאלה 17

$$\begin{aligned}p_A(\lambda)=&|A-\lambda I_3|\\ =&\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}\\ =&(1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\2&1-\lambda\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2&2\\2&1-\lambda\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2&1-\lambda\\2&2\end{vmatrix}\\ =&-\lambda^3+3\lambda^2+9\lambda+5\\ =&-(\lambda-5)(\lambda+1)^2\\ =&0\end{aligned}$$

$$p_A(A)=-A^3+3A^2+9A+5I_n=0 \quad\Rightarrow\quad I_n=\frac{1}{5}A^3-\frac{3}{5}A^2-\frac{9}{5}A=A\left(\frac{1}{5}A^2-\frac{3}{5}A-\frac{9}{5}I_3\right)$$

אזי

$$A^{-1}=\frac{1}{5}A^2-\frac{3}{5}A-\frac{9}{5}I_3\ . \qquad (*1)$$

לכן $A^2=\begin{pmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{pmatrix}-\frac{3}{5}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}-\frac{9}{5}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

כדי למצוא את נכפיל את שני אגפי (1*) ב $A^{-1}$ ונקבל:

$$A^{-2}=\frac{1}{5}A-\frac{3}{5}I_3-\frac{9}{5}A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}-\frac{3}{5}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\frac{9}{5}\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}17&-8&-8\\-8&17&-8\\-8&-8&17\end{pmatrix}.$$

## שאלה 18

**א)** לפי משפט ק"ה $A$ מאפסת את $p_A(x)$. כלומר

$$p_A(A)=A^n+\alpha_{n-1}A^{n-1}+\ldots+\alpha_1A+\alpha_0I_n=0\ .$$

לכן

$$A^n=-\alpha_{n-1}A^{n-1}-\ldots-\alpha_1A-\alpha_0I_n\in\text{span}\left\{I_n,A,A^2,\ldots,A^{n-1}\right\}\ .$$

**ב)** לפי משפט ק"ה $A$ מאפסת את $p_A(x)$, כלומר

$$p_A(A)=A^n+\alpha_{n-1}A^{n-1}+\ldots+\alpha_1A+\alpha_0I_n=0\ ,$$

לכן

**(*)** $$-\alpha_0I_n=A^n+\alpha_{n-1}A^{n-1}+\ldots+\alpha_1A\ .$$

$p_A(0)=|A|$. מכיוון ש- $A$ הפיכה אז $\alpha_0\neq0$ ו $\alpha_0^{-1}$ קיים. נכפיל את שני אגפים של (*) ב $\frac{-1}{\alpha_0}A^{-1}$:

**(#)** $$A^{-1}=-\frac{1}{\alpha_0}A^{n-1}-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0}A^{n-2}-\ldots-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}I_n\ .$$

לכן קיבלנו כי

$$A^{-1}\in\text{span}\left\{I_n,A,A^2,\ldots,A^{n-1}\right\}\ .$$

## שאלה 19

נגדיר פולינום $q(x)=x+\alpha$ נגדיר $r(x)=\frac{1}{x+\alpha}$.

$$q(x)\cdot r(x)=1$$

לכל $x$. נפתח $r(x)$ בטור מקלורן:

$$r(x)=\frac{1}{\alpha}-\frac{x}{\alpha^2}+\frac{x^2}{\alpha^3}-\frac{x^3}{\alpha^4}+\cdots$$

לכן

$$r(A)=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}A+\frac{1}{\alpha^3}A^2-\frac{1}{\alpha^4}A^3\ .$$

לכן

$$(A+\alpha I)^{-1}=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}A+\frac{1}{\alpha^3}A^2-\frac{1}{\alpha^4}A^3\ .$$