

# חשוביות וסיבוכיות

## תוכן העניינים

2	1 מכונות טיורינג
2	הגדרה היוריסטית של מכונת טיורינג . . . . .
6	הגדרה פורמלית של מכונת טיורינג . . . . .
19	טבלת המעברים . . . . .
23	חישוב פונקציות . . . . .
27	2 מודלים חשובים שקולית
30	3 מכונות טיורינג מרובת סרטים
30	מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה היוריסטית . . . . .
30	מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה פורמלית . . . . .
31	קונפיגורציה של מטמ"ס . . . . .
33	שקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד . . . . .
38	4 מכונת טיורינג אי דטרמיניסטית
38	הגדרה של מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית . . . . .
40	עץ החישוב של מ"ט א"ד . . . . .
41	שקילות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטית . . . . .
45	5 תכונות סגירות של $R$ ו- $RE$
45	הגדרה של השפות $R$ ו- $RE$ . . . . .
51	קידוד של מ"ט דטרמיניסטית . . . . .
51	מ"ט אוניברסלית $U$ . . . . .
54	6 אי-כריעות משפט הרדוקציה
58	מ"ט המחשבת את פונקציה . . . . .
60	רדוקציות . . . . .

# שיעור 1

## מכונות טיורינג

### 1.1 הגדרה היוריסטית של מכונת טיורינג

#### הגדרה 1.1 מכונת טיורינג (הגדרה היוריסטית)

##### הקלט והסרט

מכונת טיורינג (מ"ט) קורא קלט. הקלט נמצא על סרט אינסופי. התווים של הקלט נמצאים במשבצות של הסרט. במכונת טיורינג אנחנו מניחים שהסרט אינסופי לשני הכיוונים. משמאל לתחילת הקלט לא כתוב כלום, ומימין לסוף הקלט לא כתוב כלום. אנחנו מניחים שיש תו הרווח  $\_$  שנמצא בכל משבצות שאינן משבצות קלט, משמאל לקלט ומימין לקלט.

...	_	_	a	b	b	b	a	a	_	_	_	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

##### הראש

במצב ההתחלתי הראש בקצה השמאלי של הקלט.

...	_	_	a	b	b	b	a	a	_	_	_	...
			↑									

הראש יכול לזוז ימינה על הסרט וגם שמאלה על הסרט. הראש יכול לקרוא את התוכן שנמצא במשבצת הסרט שבה הוא נמצא. הראש יכול לכתוב על המשבצת הסרט שבה הוא נמצא. הכתיבה נעשית תמיד במיקום הראש.

##### המצבים

בהתחלה הראש בקצה השמאלי של הקלט והמ"ט במצב התחלתי  $q_0$ . הראש קורא את התו במשבצת הראשונה וכותב עליה לפי הפונקציית המעברים (שנגדיר בהגדרה 1.2). כעת המ"ט במצב חדש  $q_1$ . הראש קורא את התו במשבצת השניה וכותב עליה לפי הפונקציית המעברים ואז המ"ט במצב חדש  $q_2$ . התהליך ממשיך עד שהראש מגיע לקצה הימני של הקלט, ואז הוא ממשיך לקרוא ולכתוב על כל משבצת בכיוון שמאלה, עד שהוא מגיע לקצה השמאלי. במ"ט ניתן לטייל על הקלט שוב ושוב לשני הכיוונים. התהליך מסתיים כאשר המ"ט מגיע למצב מקבל  $q_{acc}$  או מצב דוחה  $q_{rej}$ .

## דוגמה 1.1

נבנה מכונת טיורינג אשר מקבלת מילה אם היא בשפה

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#a_w = \#b_w\}.$$

ז"א השפה המורכבת מכל המילים עם מספר שווה אותיות  $a$  ו  $b$ .

תיאור מילולי

- נסרוק את הקלט משמאל לימין ולכל  $a$  נחשפ  $b$  תואם.
- נניח שראינו במשבצת הראשונה  $a$ , נסמן עליה  $\checkmark$ .
- עכשיו נסרוק את יתרת הקלט ונחפש אות  $b$  מתאימה ל  $a$  שכבר ראינו.
  - אם לא מצאנו, המילה לא בשפה.
  - אם מצאנו, נסמן את ה-  $b$  התואם ב-  $\checkmark$ .
- נחזור לתחילת הקלט ונעשה סריקה נוספת משמאל לימין.
- במשבצת הראשונה יש  $\checkmark$  מסיבוב הראשון. הראש פשוט כותב עליה  $\checkmark$ , כלומר משבצת ראשונה נשארת ללא שינוי.
- הראש  $z$  שמאלה למשבצת הבאה. נניח שמצאנו  $b$ . נסמן במשבצת  $\checkmark$ .
- נסרוק את יתרת הקלט ונחפש אות  $a$  מתאימה ל  $b$  שכבר ראינו.
  - אם לא מצאנו, המילה לא בשפה.
  - אם מצאנו, נסמן את ה-  $a$  התואם ב-  $\checkmark$ .
  - בכל משבצת שיש  $\checkmark$  כותבים עליה  $\checkmark$  וממשיכים למשבצת הבאה הימני.
- נחזור לתחילת הקלט ונעשה סריקה נוספת משמאל לימין.
- חוזרים על התהליך שוב ושוב.
  - אם היה מעבר שבו לא מצאנו אות תואמת, המילה לא בשפה.
  - אם כולן היו תואמות ועשינו מעבר שבו הגכנו מקצה לקצה, מרווח לרווח, בלי לראות שום אות, אז המילה בשפה.
- כעת נתאר את המ"ט באמצעות המצבי המכונה והפונקציית המעברים.

מצבי המכונה

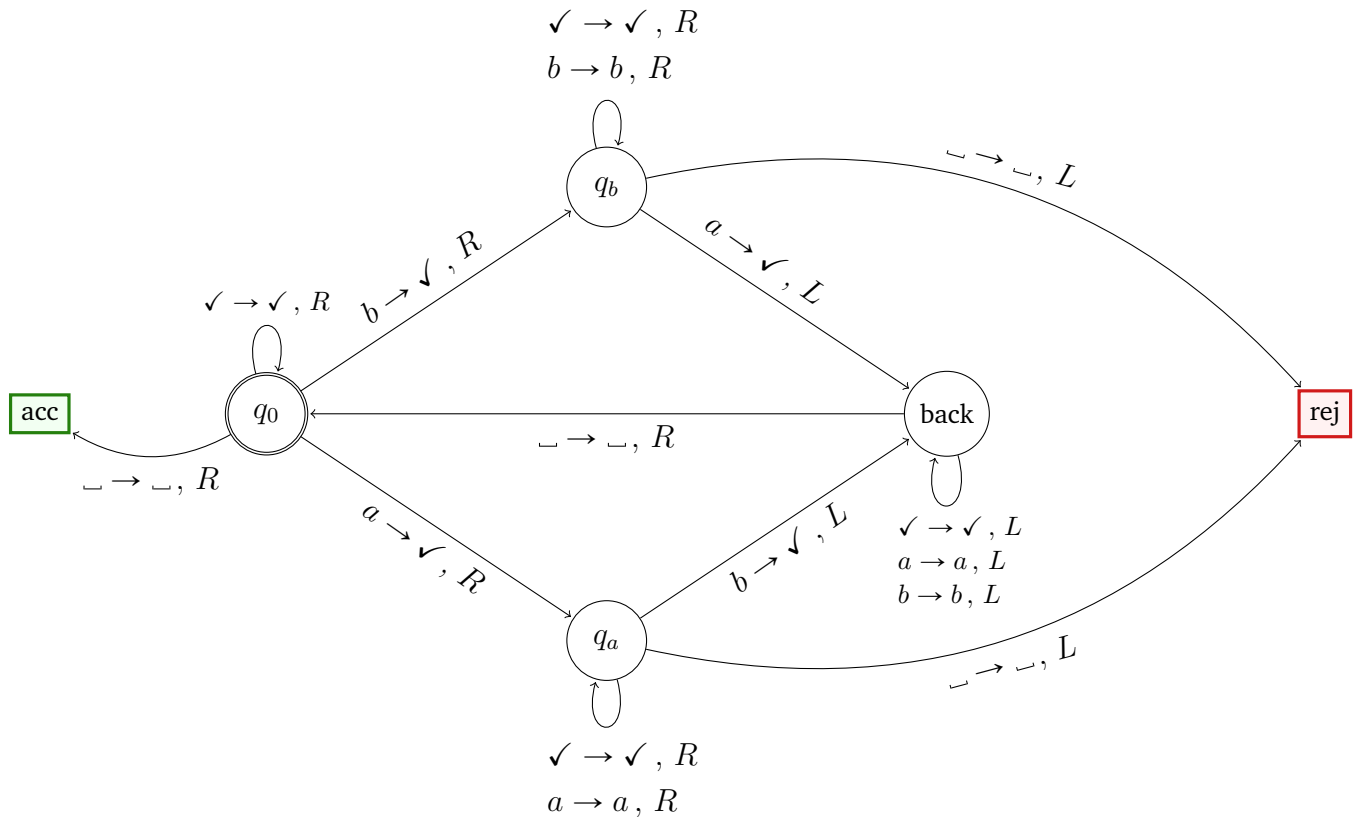
$q_0$	המצב ההתחלתי. אליו נחזור אחרי כל סבב התאמה של זוג אותיות.
$q_a$	מצב שבו ראינו $a$ ומחפשים $b$ תואם.
$q_b$	מצב שבו ראינו $b$ ומחפשים $a$ תואם.
back	מצב שנשתמש בו כדי לחזור לקצה השמאלי של הקלט ולהתחיל את הסריקה הבאה (סבב ההתאמה הבא).
acc	מצב מקבל.
rej	מצב דוחה.

- כאשר המכונה מגיעה למצב acc היא עוצרת.

עצירה במצב acc משמעותה קבלה.

- כאשר המכונה מגיעה למצב  $rej$  היא עוצרת.  
עצירה במצב  $rej$  משמעותה דחייה.
- רק בשני מצבים אלו המכונה מפסיקה.  
בכל מצב אחר המכונה בהכרח ממשיכה.

### תרשים מצבים



- בכל צעד המכונה מבצעת שתי פעולות:

1. כותבת אות במיקום הראש
2. זזה צעד אחד שמאלה או צעד אחד ימינה.

- בכל צעד המכונה יכולה לעבור למצב אחר או להישאר באותו מצב.

### דוגמה 1.2

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה  $abbbbaa$ .

### פתרון:

$\_$	$q_0$	a	b	b	b	a	a	$\_$
$\_$	$\checkmark$	$q_a$	b	b	b	a	a	$\_$
$\_$	back	$\checkmark$	$\checkmark$	b	b	a	a	$\_$
back	$\_$	$\checkmark$	$\checkmark$	b	b	a	a	$\_$
$\_$	$q_0$	$\checkmark$	$\checkmark$	b	b	a	a	$\_$

⌊	✓	$q_0$	✓	b	b	a	a	⌊
⌊	✓	✓	$q_0$	b	b	a	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	$q_b$	b	a	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	b	$q_b$	a	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	back	b	✓	a	⌊
⌊	✓	✓	back	✓	b	✓	a	⌊
⌊	✓	back	✓	✓	b	✓	a	⌊
⌊	back	✓	✓	✓	b	✓	a	⌊
⌊	$q_0$	✓	✓	✓	b	✓	a	⌊
⌊	✓	$q_0$	✓	✓	b	✓	a	⌊
⌊	✓	✓	$q_0$	✓	b	✓	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	$q_0$	b	✓	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	✓	$q_b$	✓	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	✓	✓	$q_b$	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	✓	back	✓	✓	⌊
⌊	✓	✓	✓	back	✓	✓	✓	⌊
⌊	✓	✓	back	✓	✓	✓	✓	⌊
⌊	✓	back	✓	✓	✓	✓	✓	⌊
⌊	back	✓	✓	✓	✓	✓	✓	⌊
⌊	$q_0$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	⌊
⌊	✓	$q_0$	✓	✓	✓	✓	✓	⌊
⌊	✓	✓	$q_0$	✓	✓	✓	✓	⌊
⌊	✓	✓	✓	$q_0$	✓	✓	✓	⌊
⌊	✓	✓	✓	✓	$q_0$	✓	✓	⌊
⌊	✓	✓	✓	✓	✓	$q_0$	✓	⌊
⌊	✓	✓	✓	✓	✓	✓	$q_0$	⌊
⌊	✓	✓	✓	✓	✓	✓	⌊	acc

### דוגמה 1.3

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה .aab

פתרון:

⌊	$q_0$	a	a	b	⌊
⌊	✓	$q_a$	a	b	⌊
⌊	✓	a	$q_a$	b	⌊
⌊	✓	back	a	✓	⌊
⌊	back	✓	a	✓	⌊
back	⌊	✓	a	✓	⌊
⌊	$q_0$	✓	a	✓	⌊
⌊	✓	$q_0$	a	✓	⌊
⌊	✓	✓	$q_a$	✓	⌊
⌊	✓	✓	✓	$q_a$	⌊
⌊	✓	✓	rej	✓	⌊

## 1.2 הגדרה פורמלית של מכונת טיורינג

### הגדרה 1.2 מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$$

כאשר:

$Q$	קבוצת מצבים סופיות
$\Sigma$	א"ב קלט סופי
$\Gamma$	א"ב סרט סופי
$\delta$	פונקציית המעברים
$q_0$	מצב התחלתי
acc	מצב מקבל
rej	מצב דוחה

$$\perp \notin \Sigma$$

$$\Sigma \subseteq \Gamma, \perp \in \Gamma \text{ ref}$$

$$\delta : (Q \setminus \{\text{rej}, \text{acc}\} \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\})$$

### דוגמה 1.4 (המשך דוגמה 1.1)

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$$

$$Q = \{q_0, q_a, q_b, \text{back}, \text{rej}, \text{acc}\}.$$

$$\Sigma = \{a, b\}, \quad \Gamma = \{a, b, \perp, \checkmark\}$$

$$\delta(q_0, a) = (q_a, \checkmark, R),$$

$$\delta(q_0, b) = (q_b, \checkmark, R),$$

$$\delta(q_0, \perp) = (\text{acc}, \perp, R),$$

$$\delta(q_a, \checkmark) = (q_a, \checkmark, R),$$

$$\delta(q_a, a) = (q_a, a, R),$$

$$\delta(q_a, b) = (\text{back}, \checkmark, L),$$

$$\delta(q_b, \checkmark) = (q_b, \checkmark, R),$$

$$\delta(q_b, b) = (q_a, b, R),$$

$$\delta(q_b, a) = (\text{back}, \checkmark, L),$$

קל יותר לרשום את פונקציית המעברים  $\delta$  בטבלה:

$\Gamma \backslash Q$	a	b	$\perp$	$\checkmark$
$q_0$	$(q_a, \checkmark, R)$	$(q_b, \checkmark, R)$	$(\text{acc}, \perp, R)$	$(q_0, \checkmark, R)$
$q_a$	$(q_a, a, R)$	$(\text{back}, \checkmark, L)$	$(\text{rej}, \perp, L)$	$(q_a, \checkmark, R)$
$q_b$	$(\text{back}, \checkmark, L)$	$(q_b, b, R)$	$(\text{rej}, \perp, L)$	$(q_b, \checkmark, R)$
back	$(\text{back}, a, L)$	$(\text{back}, b, L)$	$(q_0, \perp, R)$	$(\text{back}, \checkmark, L)$

## הגדרה 1.3 קונפיגורציה

תהי  $M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$  מכונת טיורינג.

קונפיגורציה של  $M$  הינה מחרוזת

$$\mu q \sigma \nu$$

כאשר משמעות:

$$\mu, \nu \in \Gamma^*, \quad \sigma \in \Gamma, \quad q \in Q.$$

$q$	מצב המכונה,
$\sigma$	הסימון במיקום הראש
$\mu$	תוכן הסרט משמאל לראש,
$\nu$	תוכן הסרט מימין לראש.

## דוגמה 1.5 (המשך של דוגמה 1.3)

$\mu$	$q$	$\sigma$	$\nu$
␣	$q_0$	a	a b ␣
␣✓	$q_a$	a	b ␣
␣✓ a	$q_a$	b	␣
␣✓	back	a	✓ ␣
␣	back	✓	a ✓ ␣
␣	back	␣	✓ a ✓ ␣
␣	$q_0$	✓	a ✓ ␣
␣✓	$q_0$	a	✓ ␣
␣✓✓	$q_a$	✓	␣
␣✓✓✓	$q_a$	␣	␣
␣✓✓	rej	✓	␣

## דוגמה 1.6

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת כל מילה בשפה

$$L = \{a^n \mid n = 2^k, k \in \mathbb{N}\}$$

ז"א מילים בעלי מספר אותיות a אשר חזקה של 2.

## פתרון:

ראשית נשים לב:

$$\frac{n}{2^k} = 1 \text{ כלומר } k \text{ פעמים, } n \text{ ב-2 בדיוק } n = 2^k \text{ אם ורק אם אנחנו מקבלים 1 אחרי חילוק של } n \text{ ב-2}$$

לאור המשפט הזה נבנה אלגוריתם אשר מחלק את מספר האותיות במילה ב-2 בצורה איטרטיבית. אם אחרי סבב מסויים נקבל מספר אי-זוגי גדול מ-1 אז מספר האותיות a במילה לא יכול להיות חזקה של 2. אם אחרי כל הסבבים לא קיבלנו מספר אי-זוגי גדול מ-1 אז מובטח לנו שיש מספר אותיות a אשר חזקה של 2.

- נתון הקלט

␣	␣	a	a	a	a	a	a	a	a	␣	␣
		↑									

נעבר על סרט הקלט. משמאל לימין.

- מבצעים מחקיה לסירוגין של האות a כלומר אות אחת נמחק ואות נשאיר וכן הלאה.

␣	␣	✓	a	✓	a	✓	a	✓	a	␣	␣
										↑	

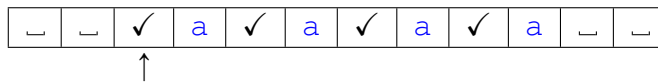
אם אחרי סבב הראשון

\* יש ✓ בתו האחרון  $\Leftarrow$  קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב-2  $\Leftarrow$  אין חזקה של 2 אותיות a במילה.

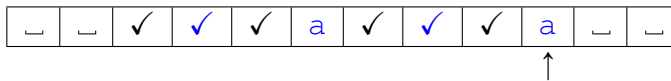
\* יש a בתו האחרון  $\Leftarrow$  קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב-2 ונמשיך לסבב הבא.



- הראש חוזר לתו הראשון של הקלט



- בסבב הבא חוזרים על התהליך של מחיקה לסירוגין של האות a (אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר)

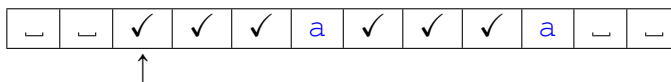


אם אחרי סבב השני

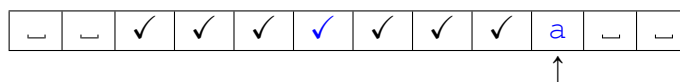
\* יש ✓ בתו האחרון  $\Leftarrow$  קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב-2  $\Leftarrow$  אין חזקה של 2 אותיות a במילה.

\* יש a בתו האחרון  $\Leftarrow$  קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב-2 ונמשיך לסבב הבא.

- הראש חוזר לתו הראשון של הקלט



- בסבב הבא חוזרים על התהליך של מחיקה לסירוגין של האות a (אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר)



אם אחרי סבב השלישי

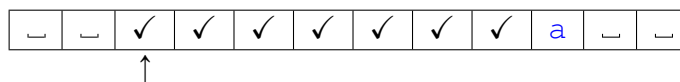
\* יש ✓ בתו האחרון  $\Leftarrow$  קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב-2  $\Leftarrow$  אין חזקה של 2 אותיות a במילה.

\* יש a בתו האחרון  $\Leftarrow$  קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב-2 ונמשיך לסבב הבא.

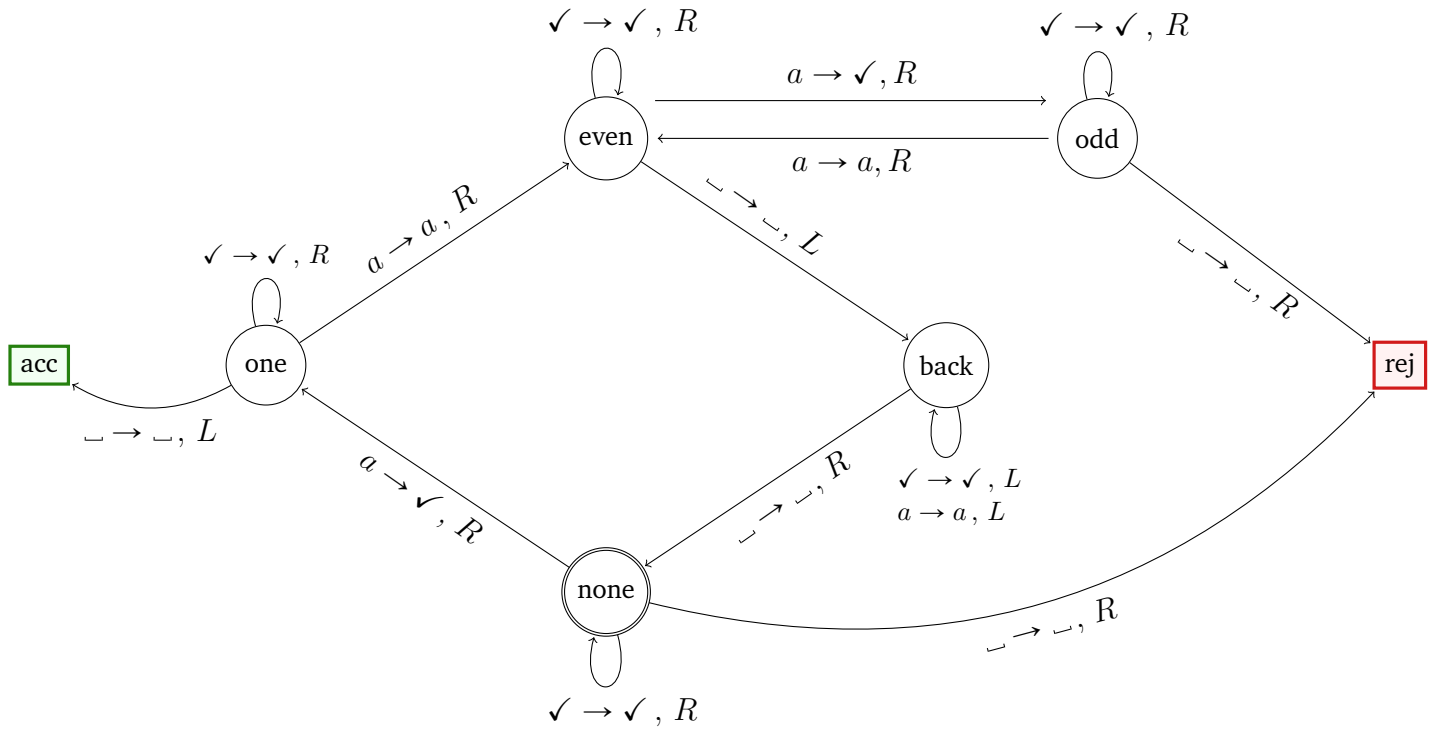
- הראש חוזר לתו הראשון של הקלט.

בסבב האחרון נשאיר רק אות a אחת.

לכן לפי המשפט למעלה מובטח לנו כי המילה מורכבת ממספר אותיות a אשר חזקה של 2.



המכונת טיורינג אשר מקבלת מילים בשפה שעובדת לפי האלגוריתם המתואר למעלה מתואר בתרשים למטה.



### המצבים:

- מצב none: מצב התחלתי. עדיין לא קראנו a בסבב סריקה זה.
- מצב one: קראנו a בודד.
- מצב even: קראנו מספר זוגי של a.
- מצב odd: קראנו מספר אי-זוגי של a.
- מצב back: חזרה שלמאלה.

### דוגמה 1.7

בדקו אם המילה

aaaa

מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.6.

### פתרון:

␣	none	a	a	a	a	␣
␣	✓	one	a	a	a	␣
␣	✓	a	even	a	a	␣
␣	✓	a	✓	odd	a	␣
␣	✓	a	✓	a	even	␣
␣	✓	a	✓	back	a	␣
␣	✓	a	back	✓	a	␣
␣	✓	back	a	✓	a	␣
␣	back	✓	a	✓	a	␣
back	␣	✓	a	✓	a	␣
␣	none	✓	a	✓	a	␣
␣	✓	none	a	✓	a	␣

␣	✓	✓	one	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	one	a	␣
␣	✓	✓	✓	a	even	␣
␣	✓	✓	✓	back	a	␣
␣	✓	✓	back	✓	a	␣
␣	✓	back	✓	✓	a	␣
␣	back	✓	✓	✓	a	␣
back	␣	✓	✓	✓	a	␣
␣	none	✓	✓	✓	a	␣
␣	✓	none	✓	✓	a	␣
␣	✓	✓	none	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	none	a	␣
␣	✓	✓	✓	✓	one	␣
␣	✓	✓	✓	acc	✓	␣

$\mu$	$q$	$\sigma$	$\nu$
␣	none	a	aaa ␣
␣ ✓	one	a	aa ␣
␣ ✓ a	even	a	a ␣
␣ ✓ a ✓	odd	a	␣
␣ ✓ a ✓ a	even	␣	␣
␣ ✓ a ✓	back	a	␣
␣ ✓ a	back	✓	a ␣
␣ ✓	back	a	✓ a ␣
␣	back	✓	a ✓ a ␣
␣	back	␣	✓ a ✓ a ␣
␣	none	✓	a ✓ a ␣
␣ ✓	none	a	✓ a ␣
␣ ✓ ✓	one	✓	a ␣
␣ ✓ ✓ ✓	one	a	␣
␣ ✓ ✓ ✓ a	even	␣	␣
␣ ✓ ✓ ✓	back	a	␣
␣ ✓ ✓	back	✓ a	␣
␣ ✓	back	✓	✓ a ␣
␣	back	✓	✓ ✓ a ␣
␣	back	␣	✓ ✓ ✓ a ␣
␣	none	✓	✓ ✓ a ␣
␣ ✓	none	✓	✓ a ␣
␣ ✓ ✓	none	✓	a ␣
␣ ✓ ✓ ✓	none	a	␣
␣ ✓ ✓ ✓ ✓	one	␣	␣
␣ ✓ ✓ ✓	acc	✓	␣

## דוגמה 1.8

בדקו אם המילה

aaa

מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.6.

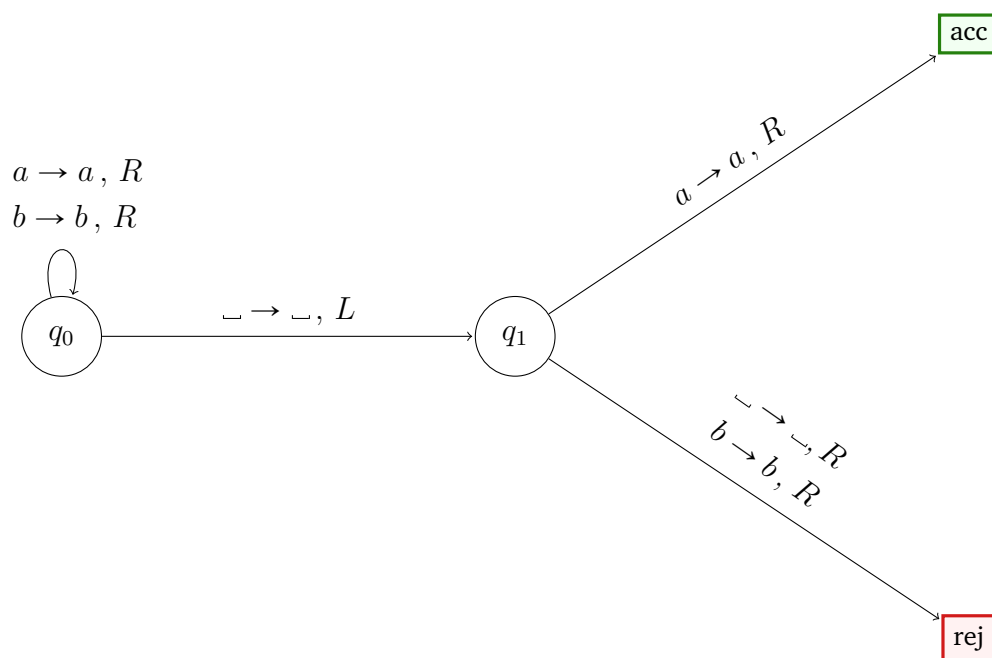
## פתרון:

␣	none	a	a	a	␣
␣	✓	one	a	a	␣
␣	✓	a	even	a	␣
␣	✓	a	✓	odd	␣
␣	✓	a	✓	␣	rej

$\mu$	$q$	$\sigma$	$\nu$
␣	none	a	aa ␣
␣ ✓	one	a	a ␣
␣ ✓ a	even	a	␣
␣ ✓ a ✓	odd	␣	␣
␣ ✓ a ✓ ␣	rej	␣	␣

## דוגמה 1.9

מהי שפת המכונה:



## פתרון:

## תיאור מילולי:

- במצב התחלתי  $q_0$ :

\* אם אנחנו רואים a, עוברים למשבצת הבאה לימין הראש.

\* אם אנחנו רואים b, עוברים למשבצת הבהאה לשמאל הראש.

- ממשיכים כך עד שנגיע לתו רווח, כלומר לסוף המילה, ואז עוברים למשבצת לשמאל הראש, כלומר לתו האחרון של המילה.

\* אם אנחנו רואים a, המילה מתקבלת. (ז"א התו האחרון הינו a.)

\* אם אנחנו רואים b, המילה נדחית. (ז"א התו האחרון הינו b.)

\* אם אנחנו רואים תו-רווח המילה נדחית. (ז"א המילה הינה ריקה.)

תשובה סופית: המכונה מקבלת שפת המילים המסתיימות באות a.

## דוגמה 1.10

מהי שפת המכונה:



## פתרון:

## תיאור מילולי:

- במצב התחלתי  $q_0$ :
  - \* אם אנחנו רואים  $b$ , המילה נדחית.
  - \* אם אנחנו רואים  $\_$ , המילה מתקבלת.
  - \* אם אנחנו רואים  $a$ , כותבים עליה  $\_$  ועוברים למשבצת הבאה לימין הראש, והמ"ט עוברת למצב  $q_1$ .
- במצב  $q_1$  אנחנו ראינו  $a$  וכתבנו עליה  $\_$ .
  - \* אם אנחנו רואים במשבצת הבאה  $a$  או  $b$ , ממשיכים למשבצת הבאה לימין והמ"ט נשארת במצב  $q_1$ .
  - \* אם אנחנו רואים תו רווח (כלומר הגענו לסוף המילה) הראש  $ז$  למשבצת השמאלי, כלומר לאות האחרונה של המילה והמ"ט עוברת למצב  $q_2$ .
- במצב  $q_2$  ראינו  $a$  בתו הראשון, כתבנו עליה  $\_$  והראש קורא התו האחרון.
  - \* אם אנחנו רואים  $a$  המילה נדחית.
  - \* אם אנחנו רואים  $\_$ , המילה נדחית.
  - \* אם אנחנו רואים  $b$  כותבים עליה  $\_$  והמ"ט עוברת למצב  $q_3$ .
- במצב  $q_3$  קראנו  $a$  בתו הראשון ומחקנו אותה, קראנו  $b$  ומחקנו אותה.
  - \* הראש  $ז$  משבצת אחת שמאלה עד שיגיע לתו הראשון ומ"ט חוזרת למצב התחלת  $q_0$ .

- המ"ט באופן איטרטיבי, עוברת על הקלט ובכל מעבר:

\* אם יש  $a$  בתחילת המילה מורידה אותה ומחליפה אותה עם  $\_$ , אחרת המילה נדחית,

\* אם יש  $b$  בסופה של המילה מורידה אותה ומחליפה אותה עם  $\_$ , אחרת המילה נדחית.

- אם לאחר מספר מעברים כאלו הסרט ריק, המ"ט מקבלת, וזה יתקיים לכל מילה ורק למילים בשפה

$$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}.$$

תשובה סופית: המכונה מקבלת שפת המילים

$$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}.$$

## דוגמה 1.11

### פתרון:

$\mu$	$q$	$\sigma$	$\nu$
$\_ \_$	$q_0$	a	aaabbbb $\_ \_$
$\_ \_ \_$	$q_1$	a	aabbbb $\_ \_$
$\_ \_ \_ a$	$q_1$	a	abbbb $\_ \_$
$\_ \_ \_ aa$	$q_1$	a	bbbb $\_ \_$
$\_ \_ \_ aaa$	$q_1$	b	bbb $\_ \_$
$\_ \_ \_ aaab$	$q_1$	b	bb $\_ \_$
$\_ \_ \_ aaabb$	$q_1$	b	b $\_ \_$
$\_ \_ \_ aaabbb$	$q_1$	b	$\_ \_$
$\_ \_ \_ aaabbbb$	$q_1$	$\_$	$\_$
$\_ \_ \_ aaabbb$	$q_2$	b	$\_ \_$
$\_ \_ \_ aaabb$	$q_3$	b	$\_ \_ \_$
$\_ \_ \_ aaab$	$q_3$	b	b $\_ \_ \_$
$\_ \_ \_ aaa$	$q_3$	b	bb $\_ \_ \_$
$\_ \_ \_ aa$	$q_3$	a	bbb $\_ \_ \_$
$\_ \_ \_ a$	$q_3$	a	abbb $\_ \_ \_$
$\_ \_ \_$	$q_3$	a	aabbb $\_ \_ \_$
$\_ \_$	$q_3$	$\_$	aaabbb $\_ \_ \_$
$\_ \_ \_$	$q_0$	a	aabbb $\_ \_ \_$
$\_ \_ \_ \_$	$q_1$	a	abbb $\_ \_ \_$
$\_ \_ \_ \_ a$	$q_1$	a	bbb $\_ \_ \_$
$\_ \_ \_ \_ aa$	$q_1$	b	bb $\_ \_ \_$
$\_ \_ \_ \_ aab$	$q_1$	b	b $\_ \_ \_$
$\_ \_ \_ \_ aabb$	$q_1$	b	$\_ \_ \_$
$\_ \_ \_ \_ aabbb$	$q_1$	$\_$	$\_ \_$
$\_ \_ \_ \_ aabb$	$q_2$	b	$\_ \_ \_$
$\_ \_ \_ \_ aab$	$q_3$	b	$\_ \_ \_ \_$
$\_ \_ \_ \_ aa$	$q_3$	b	b $\_ \_ \_ \_$
$\_ \_ \_ \_ a$	$q_3$	a	bb $\_ \_ \_ \_$
$\_ \_ \_ \_$	$q_3$	a	abb $\_ \_ \_ \_$

_____	$q_3$	—	aabb_____
_____	$q_0$	a	abb_____
_____	$q_1$	a	bb_____
_____a	$q_1$	b	b_____
_____ab	$q_1$	b	_____
_____abb	$q_1$	—	_____
_____ab	$q_2$	b	_____
_____a	$q_3$	b	_____
_____	$q_3$	a	b_____
_____	$q_3$	—	ab_____
_____	$q_0$	a	b_____
_____	$q_1$	b	_____
_____b	$q_1$	—	_____
_____	$q_2$	b	_____
_____	$q_3$	—	_____
_____	$q_0$	—	_____

#### הגדרה 1.4 גרירה בצעד אחד

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$  מכונת טיורינג, ותהי  $c_1$  ו- $c_2$  קונפיגורציות של  $M$ .  
נסמן

$$c_1 \vdash_M c_2$$

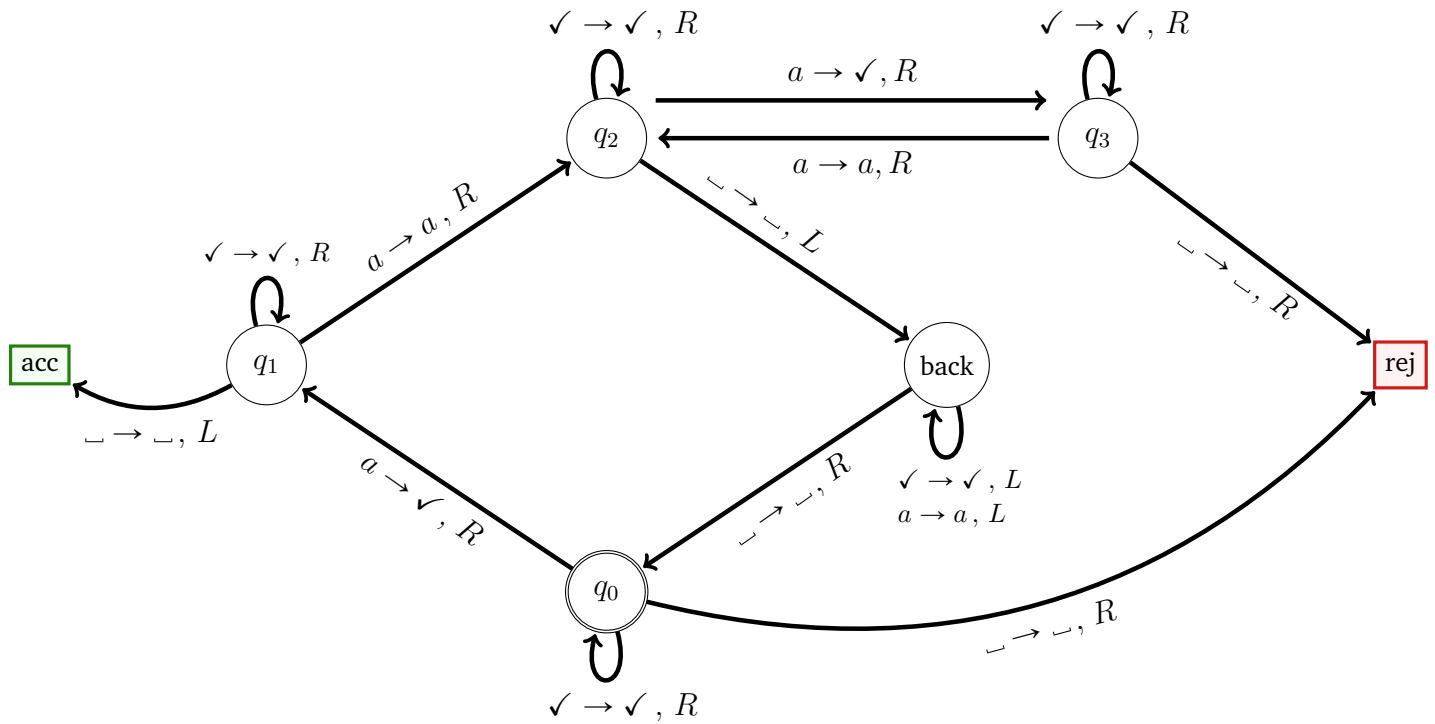
(במילים,  $c_1$  גורר את  $c_2$ ) אם כשנמצאים ב- $c_1$  עוברים ל- $c_2$  בצעד בודד.

#### דוגמה 1.12 (המשך של דוגמה 1.6)

במכונת טיורינג שמתואר בתרשים דמטה (אשר שווה למ"ט בדוגמה 1.6 רק עם סימנוים שונים למצבים) מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$





### הגדרה 1.5 גרירה בכללי

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$  מכונת טיורינג, ותהי  $c_1$  ו-  $c_2$  קונפיגורציות של  $M$ . נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

(במילים,  $c_1$  גורר את  $c_2$ ) אם ניתן לעבור מ-  $c_1$  ל-  $c_2$  ב- 0 או יותר צעדים.

### דוגמה 1.13 (המשך של דוגמה 1.6)

במכונת טיורינג שמתואר בתרשים דוגמה 1.6 (אשר שווה למ"ט בדוגמה 1.6 רק עם סימנים שונים למצבים) מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M^* \checkmark \checkmark \checkmark q_4 a$$

כי

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark \checkmark q_1 a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark \checkmark a q_2 \_$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark \checkmark q_4 a .$$



### הגדרה 1.6 קבלה ודחייה של מחרוזת

תהי

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, acc, rej)$$

מכונת טיורינג, ו-

$$w \in \Sigma^*$$

מחרוזת. אומרים כי

•  $M$  מקבלת את  $w$  אם

$$q_0 w \vdash_M^* u \text{ acc } \sigma v$$

עבור  $v, u \in \Gamma^*, \sigma \in \Gamma$  כלשהם,

•  $M$  דוחה את  $w$  אם

$$q_0 w \vdash_M^* u \text{ rej } \sigma v$$

עבור  $v, u \in \Gamma^*, \sigma \in \Gamma$  כלשהם.

### הגדרה 1.7 הכרעה של שפה

תהי

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, acc, rej)$$

מכונת טיורינג, ו-

$$L \subseteq \Sigma^*$$

שפה. אומרים כי  $M$  מכריעה את  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$  מתקיים

•  $M \Leftarrow w \in L$  מקבלת את  $w$ .

•  $M \Leftarrow w \notin L$  דוחה את  $w$ .

## הגדרה 1.8 קבלה של שפה

תהי

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$$

מכונת טיורינג, ו-

$$L \subseteq \Sigma^*$$

שפה. אומרים כי  $M$  מקבלת את  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$  מתקיים• אם  $w \in L$  אז  $M$  מקבלת את  $w$ .• אם  $w \notin L$  אז  $M$  לא מקבלת את  $w$ .

במקרה כזה נכתוב ש-

$$L(M) = L.$$

## 1.3 טבלת המעברים

## דוגמה 1.14

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$L = \{w = \{a, b, c\}^* \mid \#a_w = \#b_w = \#c_w\}$$

פתרון:



מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
$q.S$	$\sigma$	$q.(S \cup \{\sigma\})$	$\checkmark$	$R$	$\sigma \notin S$
$q.S$	$\sigma$	$q.S$		$R$	$\sigma \in S$
$q/\{a, b, c\}$	$a, b, c, \checkmark$	back		$L$	
$q.\emptyset$	$\perp$	acc		$R$	
back	$a, b, c, \checkmark$	back		$L$	
back	$\perp$	$q.\emptyset$		$R$	

### דוגמה 1.15

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$\{x_1 \dots x_k \# y_1 \dots y_k \# z_1 \dots z_k \mid x_i, y_i, z_i \in \{0, \dots, 3\}, \forall i, x_i \geq z_i \geq y_i\}$$

**פתרון:**

$$L = \{X_1 X_2 \# Y_1 Y_2 \# Z_1 Z_2 \mid X_i, Y_i, Z_i \in \{0,1,2,3\} \forall i, X_1 \geq X_2, Y_1 \geq Y_2\}$$



תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון בסרט	מצב
	$R$	✓	$X\sigma^*$	$\sigma$	$X^{**}$
	$R$	✓	$X^{**}$	✓	$X^{**}$
	$R$		$X\sigma^*$	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	$X\sigma^*$
	$R$		$Y\tau^*$	#	$X\tau^*$
	$R$		$Y\tau\sigma$	$\sigma$	$Y\tau^*$
	$R$		$Y\tau^*$	✓	$Y\tau^*$
	$R$		$Y\tau\sigma$	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	$Y\tau\sigma$
	$R$		$Z\tau_1\tau_2$	#	$Y\tau_1\tau_2$
	$R$		$Z\tau_1\tau_2$	✓	$Z\tau_1\tau_2$
	$L$	✓	back	$\sigma$	$Z\tau_1\tau_2$
	$R$		acc	$\perp$	$Z^{**}$
	$L$		back	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	back
	$R$		$X^{**}$	$\perp$	back

## 1.4 חישוב פונקציות

### הגדרה 1.9 מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה $f$

תהי  $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$  ותהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$  מכונת טיורינג. אומרים כי  $M$  מחשבת את  $f$  אם:

- $\Sigma = \Sigma_1$  ו-  $\Sigma_2 \subset \Gamma$ .
- לכל  $w \in \Sigma_1^*$  מתקיים  $q_0 w \vdash \text{acc} f(w)$ .

### דוגמה 1.16 חיבור אונרי

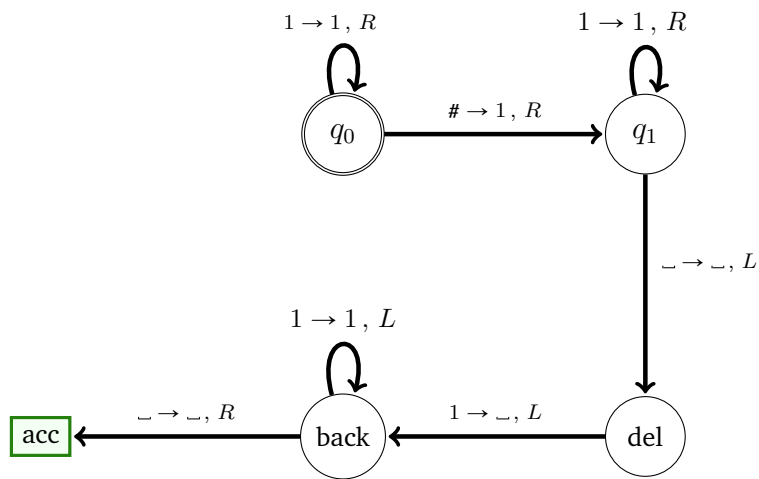
בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i \# 1^j$$

ומחזירה את פלט

$$1^{i+j}.$$

**פתרון:**



### דוגמה 1.17 כפל אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i \# 1^j$$

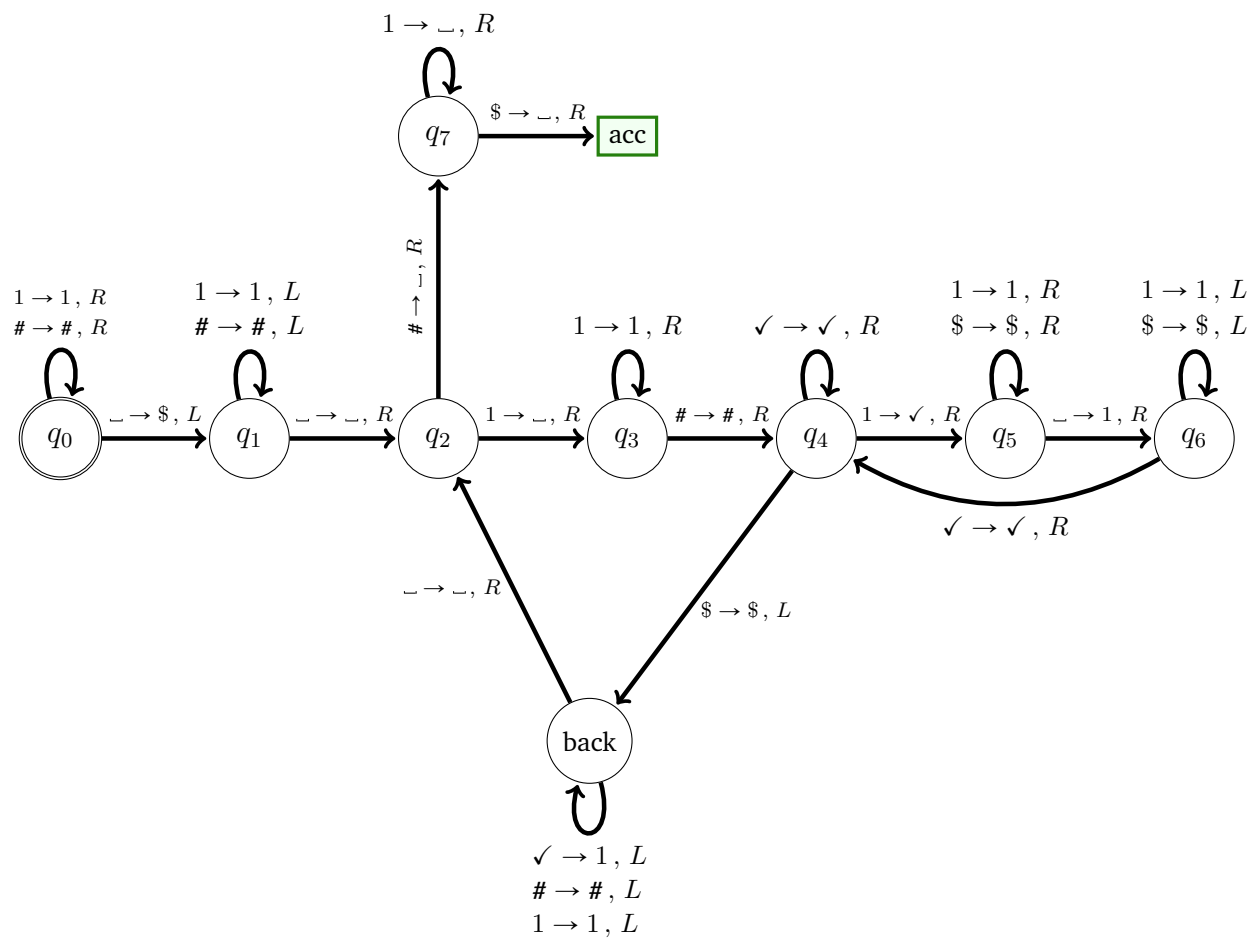
ומחזירה את פלט

$$1^{i \cdot j}.$$

### פתרון:

- לדוגמה, נניח שהקלט הוא 2 כפול 2. הקלט הוא 11#11.
- נרצה להבדיל בין הקלט לבין הפלט. לכן בתחילת הריצה, נתקדם ימינה עד סוף הקלט ונוסיף שם את התו \$.
- לאחר מכן נחזור לתחילת הקלט. על כל אות 1 במילה השמאלית נעתיק את המילה הימינית לאחר סימן ה-\$.
- לאחר מכן נשאיר רק את התווים שלאחר סימן ה-\$.
- כלומר, נמחק את כל מה שאינו פלט.





$\mu$	$q$	$\sigma$	$\nu$
$\_$	$q_0$	1	1#11 $\_$
$\_11\#11$	$q_1$	$\_$	$\_$
$\_11\#11$	$q_1$	\$	$\_$
$\_$	$q_1$	$\_$	11#11\$
$\_$	$q_2$	1	1#11\$
$\_ \_$	$q_3$	1	#11\$
$\_ \_1\#$	$q_4$	1	1\$
$\_ \_1\#\checkmark$	$q_5$	1	\$
$\_ \_1\#\checkmark 1\$$	$q_5$	$\_$	$\_$
$\_ \_1\#\checkmark 1\$1$	$q_6$	$\_$	$\_$
$\_ \_1\#$	$q_6$	$\checkmark$	1\$1 $\_$
$\_ \_1\#\checkmark$	$q_4$	1	\$1 $\_$
$\_ \_1\#\checkmark\checkmark$	$q_5$	\$	1 $\_$
$\_ \_1\#\checkmark\checkmark\$1$	$q_5$	$\_$	$\_$
$\_ \_1\#\checkmark\checkmark\$11$	$q_6$	$\_$	$\_$
$\_ \_1\#\checkmark$	$q_6$	$\checkmark$	\$11 $\_$
$\_ \_1\#\checkmark\checkmark$	$q_4$	\$	11 $\_$
$\_ \_1\#\checkmark$	back	$\checkmark$	\$11 $\_$
$\_$	back	$\_$	1#11\$11 $\_$
$\_ \_$	$q_2$	1	#11\$11 $\_$
$\_ \_ \_$	$q_3$	#	11\$11 $\_$
$\_ \_ \_ \#$	$q_4$	1	1\$11 $\_$

_ _ _#✓	$q_5$	1	\$11_
_ _ _#✓1\$11	$q_5$	_	_
_ _ _#✓1\$111	$q_6$	_	_
_ _ _#	$q_6$	✓	1\$111_
_ _ _#✓	$q_4$	1	\$111_
_ _ _#✓✓	$q_5$	\$	111_
_ _ _#✓✓\$111	$q_5$	_	_
_ _ _#✓✓\$1111	$q_6$	_	_
_ _ _#✓	$q_4$	✓	\$1111
_ _ _#✓✓	$q_4$	\$	1111
_ _ _#✓	back	✓\$	1111
_ _	back	_	#11\$1111
_ _ _	$q_2$	#	11\$1111
_ _ _ _	$q_7$	1	1\$1111
_ _ _ _ _	$q_7$	\$	1111
_ _ _ _ _	acc	1	111

## שיעור 2

### מודלים חשובים שקולית

#### הגדרה 2.1 מודל חשובי

מודל חשובי הוא אוסף של מכונות טיורינג שעבורם מוגדרים המושגים של הכרעה וקבלה של שפות.

#### הגדרה 2.2 מודלים שקולים חשובית

היו  $A$  ו- $B$  מודלים חשוביים. אומרים כי  $A$  ו- $B$  שקולים אם לכל שפה  $L$  התנאים הבאים מתקיימים:

(1) קיימת מ"ט במודל  $A$  שמכריעה את  $L$  אם"ם קיימת מ"ט במודל  $B$  שמכריעה את  $L$ .

(2) קיימת מ"ט במודל  $A$  שמקבלת את  $L$  אם"ם קיימת מ"ט במודל  $B$  שמקבלת את  $L$ .

#### דוגמה 2.1

**נסמן ב- $T$  את מודל מכונת הטיורינג הבסיסי.**

במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לשני הכיוונים. בתחילת החישוב הראש נמצא בתחילת הקלט.

**נסמן ב- $O$  את מודל מכונת הטיורינג עם סרט ימינה בלבד.**

במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לכיוון אחד בלבד - ימינה. בתחילת החישוב, הקלט ממוקם בקצה השמאלי של הסרט והראש נמצא בתחילת הקלט. החישוב מתנהל כמו במכונה במודל  $T$ , למעט כאשר הראש נמצא במשבצת השמאלית ביותר בסרט וצריך לזוז ש מאלה - במקרה כזה הראש נשאר במקום ולא זז.

**הוכיחו כי המודל  $T$  והמודל  $O$  שקולים חשובית.**

#### פתרון:

יש להוכיח ש:

- לכל מ"ט במודל  $O$  קיימת מ"ט שקולה במודל  $T$ .
- לכל מ"ט במודל  $T$  קיימת מ"ט שקולה במודל  $O$ .

#### כיוון ראשון

נוכיח כי לכל מ"ט במודל  $O$  קיימת מ"ט שקולה במודל  $T$ . כלומר:

נתונה  $M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, acc^O, rej^O)$  במודל  $O$ .

נבנה,  $M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, acc^T, rej^T)$  שקולה במודל  $T$ .

נעבוד רק עם צד ימין של הסרט האינסופי של  $M^T$  ואז  $M^T$  תהיה שקולה ל- $M^O$ .

רכיבי המ"ט  $M^T$  זהים לאלו של המ"ט  $M^O$ , מלבד מהתכונה שהראש של  $M^O$  לא זז מעבר לקצה השמאלי של הקלט.

לכן כדי ש-  $M^T$  תהיה שקולה ל-  $M^O$  נוסיף מעברים לפונקצית המעברים של  $M^T$  כדי שהראש של  $M^T$  לא יז מעבר לקצה השמאולי של הקלט.

הרעיון הוא לסמן את המשבצת שמשמאל לתחילת הקלט עם סימן מיוחד \$, ואז להוסיף מעברים לפונקצית המעברים של  $M^T$  שמבטיחים שאם הראש נמצא למשבצת שמסומנת \$ אז הוא מיד חוזר ו-  $M^T$  חוזרת למצב ההתחתי של המ"ט  $M^O$ . זה מתבצע על ידי הוספת השורות הבאות לטבלת המעברים של  $M^T$ :

תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון	מצב
	$L$	$\Omega$	$q_\$$	$\sigma$	$q_0^T$
	$R$	$\$$	$q_0^O$	$\perp$	$q_\$$
$\forall q \in Q^O$	$R$	$\$$	$q$	$\$$	$q$

$$Q^T = Q^O \cup \{q_0^T, q_\$\}, \quad \Sigma^T = \Sigma^O, \quad \Gamma^T = \Gamma^O \cup \{\$\}, \quad \text{acc}^T = \text{acc}^O, \quad \text{rej}^T = \text{rej}^O.$$

### כיוון שני

נוכיח כי לכל מ"ט במודל  $T$  קיימת מ"ט שקולה במודל  $O$ . כלומר:

$$\text{נתונה } M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T) \text{ במודל } T.$$

$$\text{נבנה } M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O) \text{ שקולה במודל } O.$$

הרעיון הוא לסמן קו על הסרט במשבצת באמצע הקלט, ואז לקפל את הסרט בקו הזה. באופן הזה נקבל סרט עם קצה שמאולי ואינסופי ימינה. במשבצות של הסרט החדש המקופל יש שני תווים, אחד למעלה ( $U$ ) ואחד למטה ( $D$ ), מלבד מנקודת הקיפול שבו יש משבצת אחת שמסומנת \$.

באופן הזה אפשר לסמלץ את המכונה  $M^O$  במכונה  $M^T$  על ידי הוספת המעברים הבאים לטבלת המעברים של  $M^T$ . לכל  $\tau, \sigma, \pi \in \Gamma^T$ :

תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון	מצב
תזוזה שמאלה: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$	$L$	$\pi$ $\tau$	$p.D$	$\pi$ $\sigma$	$q.D$
	$R$	$\tau$ $\pi$	$p.U$	$\sigma$ $\pi$	$q.U$
תזוזה שמאלה: $(q, \_ ) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$	$L$	$\_$ $\tau$	$p.D$	$\_$	$q.D$
	$R$	$\tau$ $\_$	$p.U$	$\_$	$q.U$
תזוזה ימינה: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$	$R$	$\pi$ $\tau$	$p.D$	$\pi$ $\sigma$	$q.D$
	$L$	$\tau$ $\pi$	$p.U$	$\sigma$ $\pi$	$q.U$
תזוזה ימינה: $(q, \_ ) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$	$R$	$\_$ $\tau$	$p.D$	$\_$	$q.D$
	$L$	$\tau$ $\_$	$p.U$	$\_$	$q.U$
	$R$	$\curvearrowright$	$q.U$	$\$$	$q.D$
	$R$	$\curvearrowright$	$q.D$	$\$$	$q.U$
אתחול					
$\tau \in \Sigma \cup \{ \_ \}$ $\sigma \in \Sigma$	$R$	$\$$	$q.\tau$	$\tau$	$q_0^O$
	$R$	$\_$ $\sigma$	$q.\tau$	$\tau$	$q.\sigma$
	$L$	$\_$ $\_$	back	$\_$	$q.\_$
	$L$	$\curvearrowright$	back	$\_$ $\tau$	back
	$R$	$\curvearrowright$	$q_0^T.D$	$\$$	back
סיום					
			$acc^O$	הכל	$acc^T.D$
			$acc^O$	הכל	$acc^T.U$
			$rej^O$	הכל	$rej^T.D$
			$rej^O$	הכל	$rej^T.U$
כל השאר עובריסל-rej					

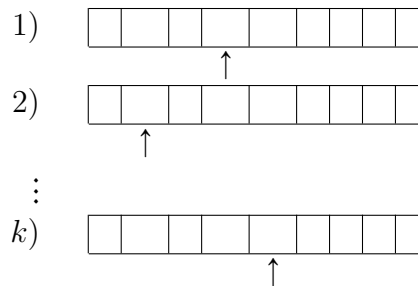
$$\Gamma^O \supseteq (\Gamma^T \times \Gamma^T) \cup \{\$ \} .$$

## שיעור 3

### מכונות טיורינג מרובת סרטים

#### 3.1 מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה היוריסטית

מכונת טיורינג מרובת סרטים (מטמ"ס) היא הכללה של מ"ט עם סרט יחיד. ההבדל הוא שלמטמ"ס ישנו מספר סופי של סרטים, נניח  $k > 1$  סרטים.



- לכל סרט יש ראש שלו.
- בתחילת העבודה הקלט  $w$  כתוב בתחילת הסרט הראשון וכל שאר הסרטים ריקים. הראשים בכל סרט מצביעים על התא הראשון בסרט, והמכונה נמצאת במצב התחלתי  $q_0$ .
- בכל צעד חישוב, לפי המצב הנוכחי ול- $k$  התווים שמתחת ל- $k$  הראשים, המכונה מחליטה לאיזה מצב לעבור, מה לכתוב מתחת לכל אחד מ- $k$  הראשים ולכן להזיז את הראש בכל אחד מ- $k$  סרטים.
- הראשים של הסרטים יכולים לזוז באופן בלתי-תלוי בהתאם לפונקצית המעברים של המטמ"ס.

#### 3.2 מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה פורמלית

##### 3.1 מכונת טיורינג מרובת סרטים

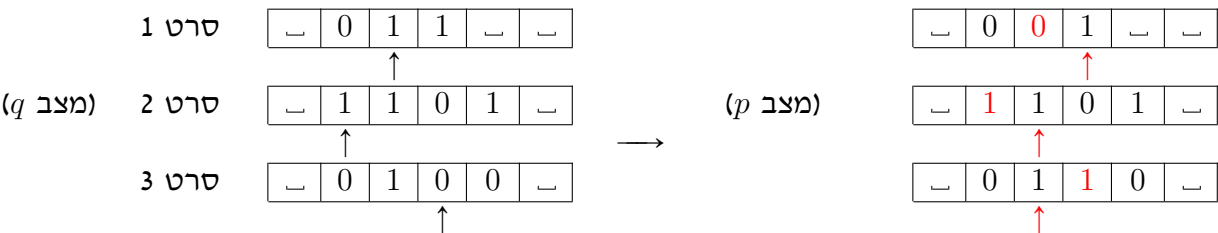
מכונת טיורינג מרובת סרטים היא שביעייה:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{acc}, q_{rej})$$

כאשר  $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{acc}, q_{rej}$  מוגדרים כמו מ"ט עם סרט יחיד (ראו הגדרה 1.2). ההבדל היחיד בין מ"ט עם סרט יחיד לבין מטמ"ס הוא הפונקצית המעברים. עבור מטמ"ס הפונקצית המעברים היא מצורה הבאה:

$$\delta_k : (Q \setminus \{q_{acc}, q_{rej}\}) \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$$

3.1 דוגמה



$$\delta_k \left( q, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left( p, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \\ L \end{pmatrix} \right) .$$

3.3 קונפיגורציה של מטמ"ס

הכללה של קונפיגורציה של מטמ"ס עם סרט יחיד:

$$\begin{pmatrix} u_1q \ v_1 \\ u_2q \ v_2 \\ \vdots \\ u_kq \ v_k \end{pmatrix}$$

3.2 דוגמה

בנו מטמ"ס שמכריעה את השפה:

$$L_{w^R} = \{ w = \{a, b\}^* \mid w = w^R . \}$$

כלומר שפת הפלינדרומים.

פתרון:

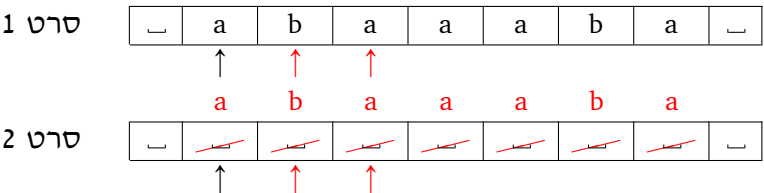
נבנה מטמ"ס עם שני סרטים:

תאור המכונה:

נסמן  $M_2$  המ"ט עם 2 סרטים שמכריעה את השפה  $L_{w^R}$ .

$M_2 =$  על הקלט  $w$ :

(1) מעתיקה את  $w$  לסרט 2.



(2) מזיזה את הראש בסרט 1 לתו הראשון ב-  $w$  ואת הראש בסרט 2 לתו האחרון ב-  $w$ .

(3) משווה בין התווים שמתחת לראשים:

- אם התו שמתחת לראש בסרט 1 הוא  $\_$  אז  $\text{acc} \leftarrow \_$ .
- אם התווים שמתחת לראשים שונים  $\text{rej} \leftarrow \_$ .
- אחרת מזיזה את הראש בסרט 1 ימינה ואת הראש בסרט 2 שמאלה, וחוזרת לשלב (3).

הפונקציה המעברים של  $M_2$  היא:

$$\begin{aligned}\delta\left(q_0, \begin{pmatrix} a \\ \_ \end{pmatrix}\right) &= \left(q_0, \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}\right), \\ \delta\left(q_0, \begin{pmatrix} b \\ \_ \end{pmatrix}\right) &= \left(q_0, \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}\right), \\ \delta\left(q_0, \begin{pmatrix} \_ \\ \_ \end{pmatrix}\right) &= \left(q_{\text{back}}, \begin{pmatrix} \_ \\ \_ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ L \end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

נשים לב כי הסיבוכיות זמן של המכונה עם שני סרטים,  $M_2$  היא  $O(|w|)$ , כאשר  $w$  האורך של המילה.

כעת נבנה מ"ט עם סרט יחיד שמכריעה את השפה  $L_{WR}$ .

תאור המכונה:

נסמן  $M_1$  המכונה עם סרט יחיד שמכריעה את השפה  $L_{wR}$ .

$M_1 =$  על הקלט  $w$ :

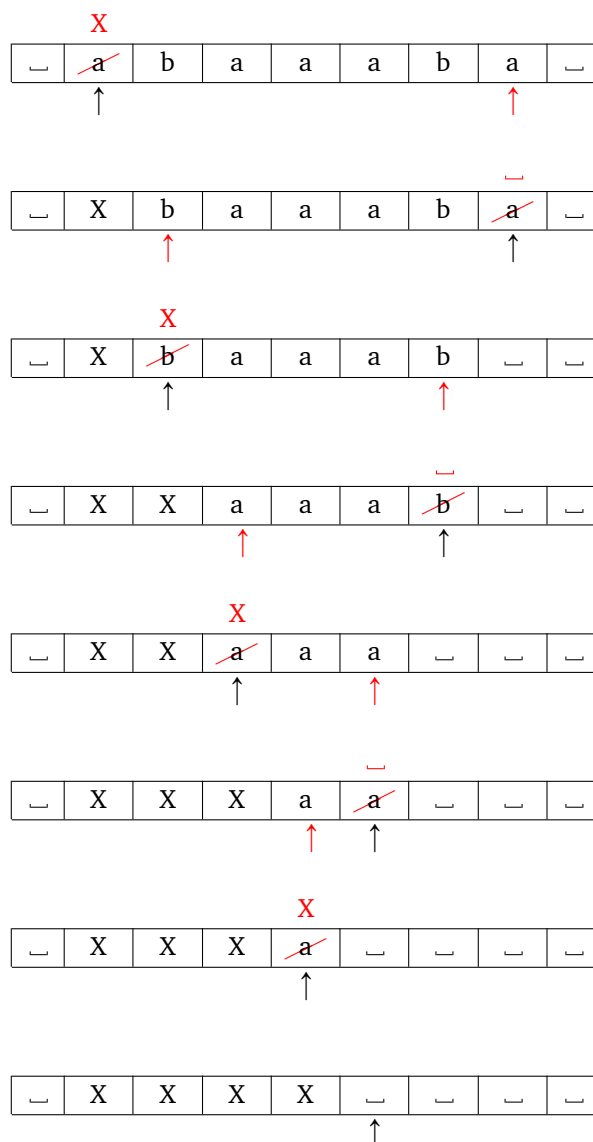
(1) אם התו שמתחת לראש הוא  $\_$  אז  $M_1 \leftarrow \text{acc}$ .

(2) זוכרת את התו שמתחת לראש ומוחקת אותו ע"י  $X$ .

(3) מזיזה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאל ל-  $\_$ .

- אם התו שמתחת לראש הוא  $X$  אז  $\text{acc} \leftarrow X$ .
- אם התו שונה מהתו שזכרנו  $\text{rej} \leftarrow \_$ .
- מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י  $\_$ , מזיזה את הראש שמאלה עד התו הראשון מימין ל-  $X$  וחוזרת לשלב (1).





### 3.4 שקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

מ"ט עם סרט יחיד היא מקרה פרטי של מטמ"ס.

#### משפט 3.1 שקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

לכל מטמ"ס  $M$  קיימת מ"ט עם סרט יחיד  $M'$  השקולה ל-  $M$ .

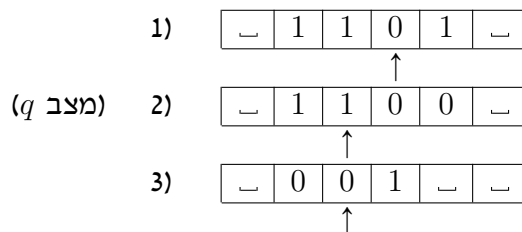
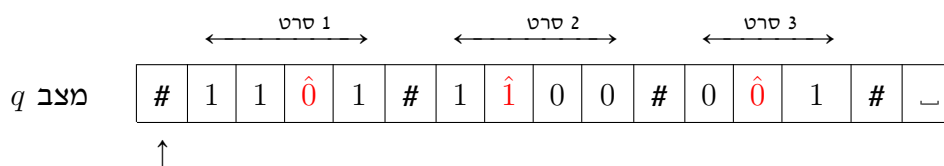
כלומר, לכל קלט  $w \in \Sigma^*$ :

- אם  $M$  מקבלת את  $w$   $\Leftrightarrow$   $M'$  מקבלת את  $w$ .
- אם  $M$  דוחה את  $w$   $\Leftrightarrow$   $M'$  דוחה את  $w$ .
- אם  $M$  לא עוצרת על  $w$   $\Leftrightarrow$   $M'$  עוצרת על  $w$ .

הוכחה:

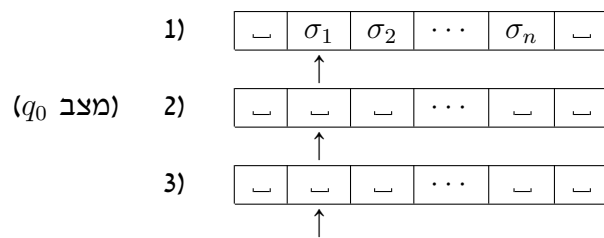
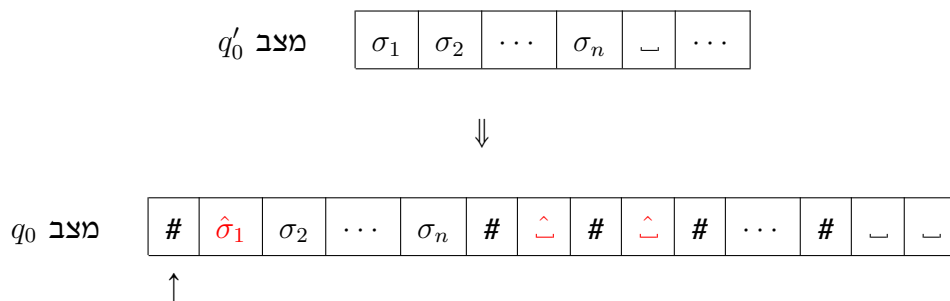
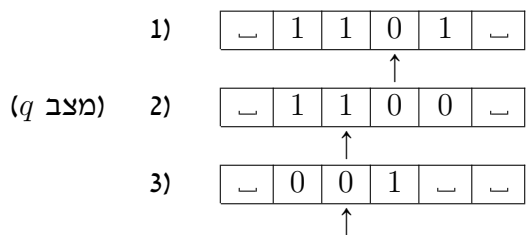
בהינתן מטמ"ס  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{acc}, q_{rej})$  עם  $k$  סרטים, נבנה מ"ט עם סרט יחיד  $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q'_0, q'_{acc}, q'_{rej})$  השקולה ל-  $M$  באופן הבא:

רעיון הבנייה:

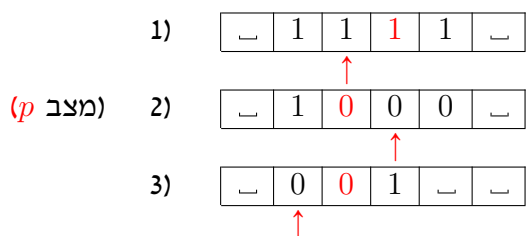
בהינתן קלט  $w \in \Sigma^*$ ,  $M'$  תבצע "סימולציה" של ריצה  $M$  על  $w$ .ב-  $M$ ב-  $M'$ 

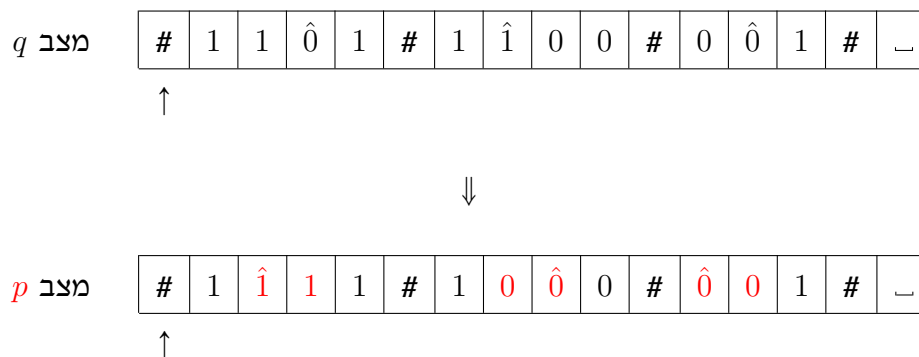
- $M'$  תשמור את התוכן של  $k$  הסרטים של  $M$  על הסרט, רק שהתוכן של סרט  $i$  יופיע בין  $\#_i$  ל-  $\#_{i+1}$ .
- $M'$  תשמור את המיקום של הראשים של  $M$  ע"י הכפלת הא"ב  $\Gamma$ . כלומר, לכל אות  $\alpha \in \Gamma$ ,  $M'$  תשמור שתי אותיות  $\alpha$  ו-  $\hat{\alpha}$  ב-  $\Gamma'$ , כך ש-  $\hat{\alpha}$  תסמן את התו שמתחת לראש בכל סרט.
- בכל צעד חישוב,  $M'$  סורקת את הסרט שלה משמאל לימין כדי ללמוד מהם התווים שמתחת לראשים (התווים שמסומנים ב-  $\hat{\alpha}$ ).
- $M'$  משתמשת בפונקצית המעברים  $\delta_k$  של  $M$  כדי לחשב את המעבר הבא.
- $M'$  סורקת את הסרט שלה משמאל לימין כדי לעדכן את הסרטים ואת המיקום הראשים בהם.

תאור הבנייה של  $M'$ :**(1) שלב האיתחול**בהינתן קלט  $w = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$ ,  $M'$  מאתחלת את הקונפיגורציה ההתחלתית של  $M$  על הסרט שלה.ב-  $M$

 $M'$ (2) תאור צעד חישוב של  $M$  $M$ 

$$\delta_k \left( q, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left( p, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ R \\ L \end{pmatrix} \right)$$



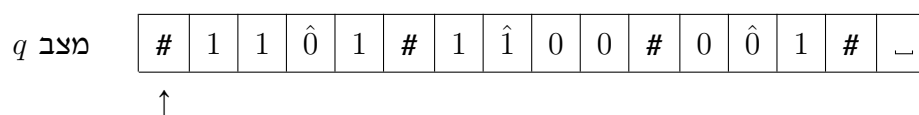
ב- $M'$ 

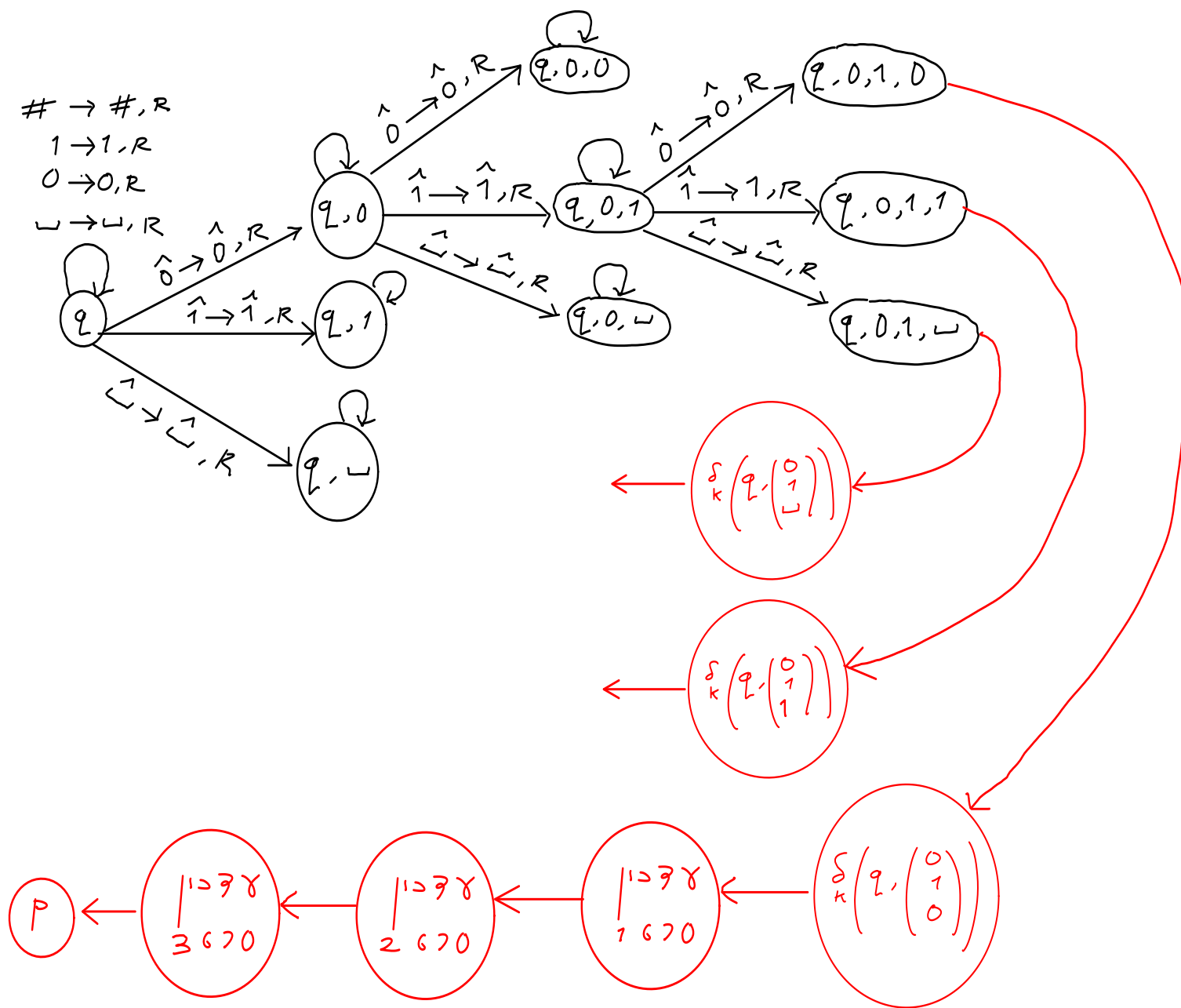
- איסוף מידע
- $M'$  סורקת את הסרט שלה משמאל לימין ומזהה את התווים שמסומנים ב-  $\hat{\alpha}$ . מידע זה ניתן לשמור במצבים. לדוגמה:

$$q, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

זה אפשרי מכיוון שמספר המצבים הנדרש הוא סופי:

$$|Q| \times |\Gamma|^k \quad .$$





מצב  $p$

#	1	$\hat{1}$	1	1	#	1	0	$\hat{0}$	0	#	$\hat{0}$	0	1	#	␣
---	---	-----------	---	---	---	---	---	-----------	---	---	-----------	---	---	---	---

↑

- עדכון הסרטים

$M'$  סורקת את הסרט שלה פעם נוספת כדי לפעול על פי פונקצית המעברים, כלומר, לעדכן את התאים שמתחת לראשים ולעדכן את מיקום הראשים.



## שיעור 4

### מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

#### 4.1 הגדרה של מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

##### 4.1 מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית (מ"ט א"ד) היא שביעייה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$$

כאשר  $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{acc}, q_{rej}$  מוגדרים כמו במ"ט דטרמיניסטי.

$\Delta$  היא פונקצית המעברים

$$\Delta : (Q \setminus \{q_{acc}, q_{rej}\}) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}) .$$

$$\Delta(q, a) = \{(q_1, a, S) , (q_2, b, L) , \dots\} .$$

כלומר, לכל זוג  $q \in Q, a \in \Gamma$  ייתכן מספר מעברים אפשריים, 0, 1 או יותר.

- קונפיגורציה של מ"ט א"ד זהה לקונפיגורציה של מ"ט דטרמיניסטית.
- לכל קונפיגורציה ייתכן מספר קונפיגורציות עוקבות.
- לכל מילה  $w \in \Sigma^*$  חתכן מספר ריצות שונות:

\* ריצות שמגיעות ל-  $q_{acc}$ .

\* ריצות שמגיעות ל-  $q_{rej}$ .

\* ריצות שלא עוצרות.

\* ריצות שנתקעות.

##### 4.2 הגדרה

מילה  $w \in \Sigma^*$  מתקבלת במ"ט א"ד  $M$  אם קיימת לפחות ריצה אחת שמגיעה ל-  $q_{acc}$ .

השפה של מ"ט א"ד  $M$  היא

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Gamma^* : q_0 w \vdash_* u q_{acc} v\}$$

כלומר,

$w \in L(M)$  אם קיימת ריצה אחת שבה  $M$  מקבלת את  $w$ .

$w \notin L(M)$  אם בכל ריצה של  $M$  על  $w$ ,  $M$  דוחה או לא עוצרת, או נתקעת.

**הגדרה 4.3 מ"ט א"ד המכריעה שפה  $L$** 

תהי  $M$  מ"ט א"ד.  
אומרים כי מ"ט א"ד  $M$  מכריעה שפה  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$ :

• אם  $w \in L$  אז  $M$  מקבלת את  $w$ .

• אם  $w \notin L$  אז  $M$  דוחה את  $w$ .

**הגדרה 4.4 מ"ט א"ד המקבלת שפה  $L$** 

תהי  $M$  מ"ט א"ד.  
אומרים כי מ"ט א"ד  $M$  מקבלת שפה  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$ :

• אם  $w \in L$  אז  $M$  מקבלת את  $w$ .

• אם  $w \notin L$  אז  $M$  דוחה את  $w$  או  $M$  לא עוצרת על  $w$ .

**דוגמה 4.1**

נתונה השפה

$$L = \{1^n \mid n \text{ אינו ראשוני}\}, \quad \Sigma = \{1\}.$$

בנו מ"ט המכריעה את השפה  $L$ .

**פתרון:**הרעיון

נבנה מ"ט א"ד  $N$  המכריעה את  $L$ .

$N$  תבחר באופן א"ד מספר  $1 < t < n$  ותבדוק האם  $t$  מחלק את  $n$ .

	$n$							
סרט 1	␣	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	...
	$t$							
סרט 2	␣	1	1	1	␣	...		

תאור הבניה

$N = \text{על קלט } 1^n$

**שלב 1)**

•  $N$  בוחרת באופן א"ד מספר  $1 < t < n$ .

• מעתיקה את  $w$  לסרט 2.

• עוברת על העותק משמאל לימין, ובכל תא מחליטה באופן א"ד האם להשאיר את ה-1 או למחוק אותו ע"י  $X$  (לדאוג שהמספר שנבחר הוא לא 1 ולא  $n$ ).

- בסוף המעבר המספר  $t$  שנבחר הוא כמות ה-1 ים שלא נמחקו.

סרט 1 

␣	1	1	1	1	...	1	1	␣	...
---	---	---	---	---	-----	---	---	---	-----

סרט 2 

␣	1	<del>1</del> <sup>X</sup>	<del>1</del> <sup>X</sup>	1	...	<del>1</del> <sup>X</sup>	1	␣	...
---	---	---------------------------	---------------------------	---	-----	---------------------------	---	---	-----

**שלב 2**  $N$  בודקת האם  $t$  שנבחר מחלק את  $n$ .

- אם כן  $N \Leftarrow$  מקבלת.

- אם לא  $N \Leftarrow$  דוחה.

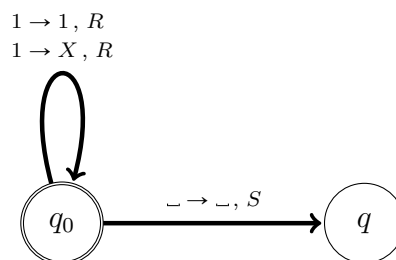
## 4.2 עץ החישוב של מ"ט א"ד

### הגדרה 4.5 עץ החישוב של מ"ט א"ד

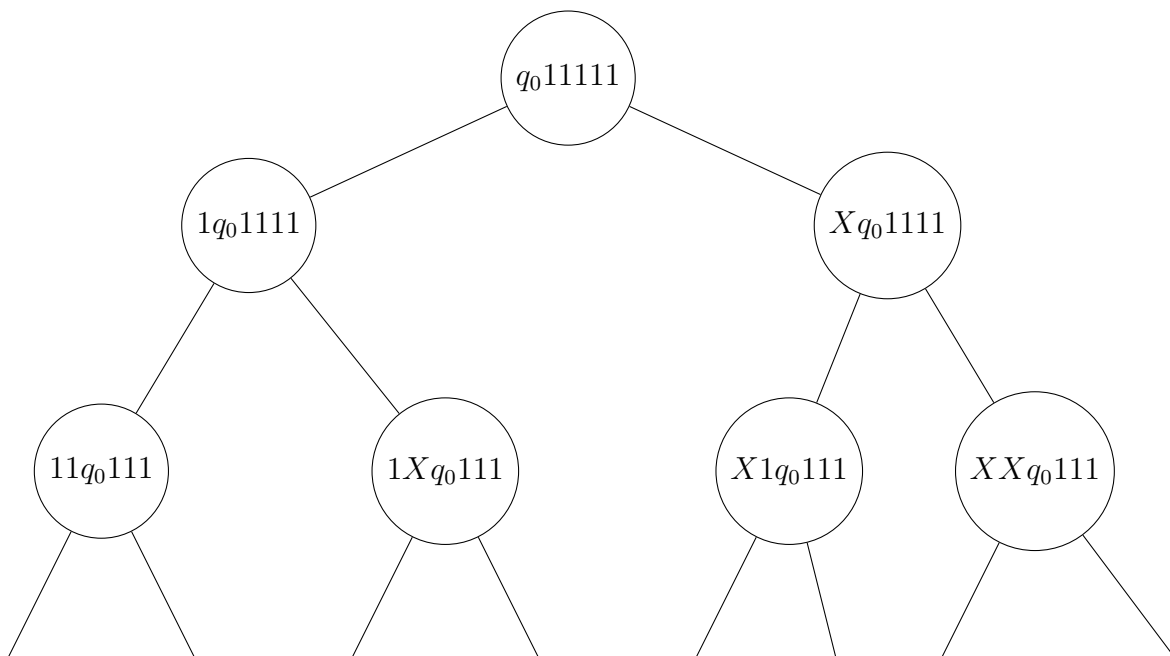
בהינתן מ"ט א"ד  $M$  ומילה  $w \in \Sigma^*$ , עץ החישוב של  $M$  ו- $w$  הוא עץ מושרש שבו:

- (1) כל קדקוד בעץ מתאר קונפיגורציה בחישוב של  $M$  על  $w$ .
- (2) שורש העץ מתאר את הקונפיגורציה ההתחלתית  $q_0 w$ .
- (3) לכל קדקוד  $v$  בעץ הבנים של  $v$  הם כל הקדקודים הנובעים מהקונפיגורציה המתוארת ע"י  $v$ .

### דוגמה 4.2







### 4.3 שקילות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטית

#### משפט 4.1 שקילות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטית ב- $RE$

לכל מ"ט א"ד  $N$  קיימת מ"ט דטרמיניסטית  $D$  כך ש-

$$L(N) = L(D) .$$

כלומר לכל  $w \in \Sigma^*$ :

- אם  $N$  מקבלת את  $w \Leftarrow D$  תקבל את  $w$ .
- אם  $N$  לא מקבלת את  $w \Leftarrow D$  לא תקבל את  $w$ .

**הוכחה:** בהינתן מ"ט א"ד  $N$  נבנה מ"ט דטרמיניסטית  $D$  ונוכיח כי

$$L(N) = L(D) .$$

רעיון ההוכחה

בהינתן קלט  $w \in \Sigma^*$ ,  $D$  תבצע ריצה של כל החישובים האפשריים של  $N$  על  $w$ , ואם אחד החישובים מסתיים ב-  $q_{acc}$  אזי  $D$  תעצור ותקבל.

מכיוון שייטכנו חישובים אינסופיים, לא נוכל לסרוק את עץ החישוב לעומק. במקום זה נסרוק את העץ לרוחב. כלומר, נבדוק את כל החישובים באורך 1, ואחרי זה נבדוק את כל החישובים באורך 2, וכן הלאה. אם אחד החישובים הסתיים ב-  $q_{acc}$ , אזי  $D$  תעצור ותקבל.

תאור הבניה

מכיוון שלכל  $q \in Q$  ולכל  $\alpha \in \Gamma$ :

$$\Delta(q, \alpha) \subseteq Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}.$$

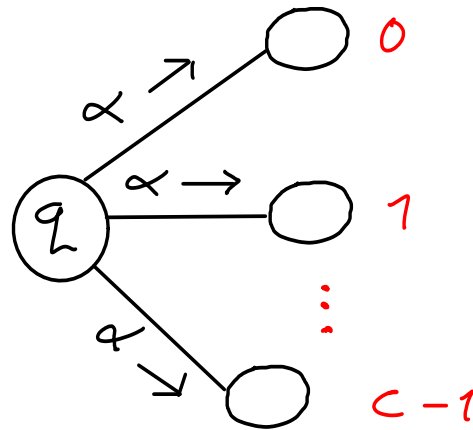
אזי

$$|\Delta(q, \alpha)| \leq |Q| \cdot |\Gamma| \cdot |\{L, R, S\}| = 3|Q| \cdot |\Gamma|.$$

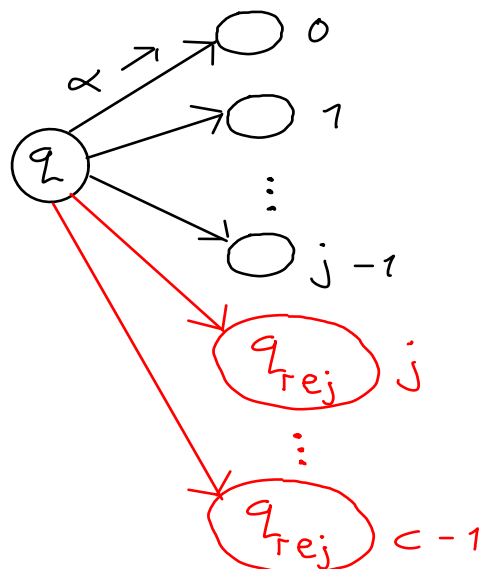
נסמן:

$$C = 3|Q| \cdot |\Gamma|.$$

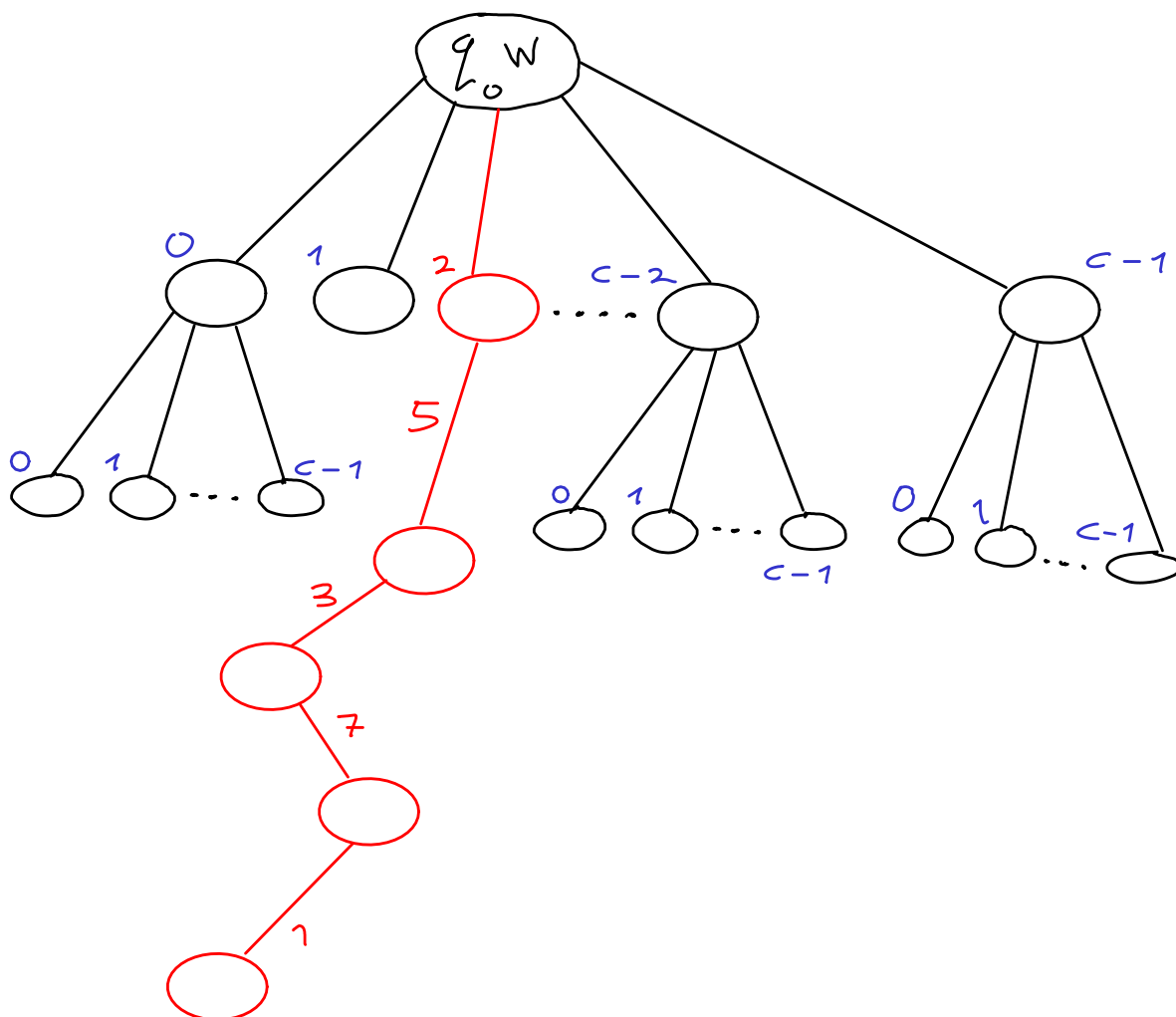
- לכל מצב  $q \in Q$  ולכל אות  $\alpha \in \Gamma$  נמספר את המעברים ב-  $\Delta(q, \alpha)$  שרירותית  $\{0, 1, 2, \dots, C-1\}$ .



- אם  $|\Delta(q, \alpha)| = j < C$ , אזי לכל  $j \leq k \leq C-1$  נקבע  $k = (q_{rej}, \alpha, S)$ .



- נשים לב כי שינוי זה לא משנה את השפה של  $N$ .



קידום לקסיקוגרפי:

0	00	10	...	$(C-1)0$	000	
1	01	11	...	$(C-1)1$	001	
2	02	12	...	$(C-1)2$	002	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	
$C-1$	$0(C-1)$	$1(C-1)$	...	$(C-1)(C-1)$	$00(C-1)$	

הבניה של  $D$

$D$  מכילה 3 סרטים:

	$n$								
סרט 1	␣	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	...
	$t$								
סרט 2	␣	1	1	1	␣	...			
סרט 3	␣	1	1	1	␣	...			

$D = \text{"על קלט } w$ :

(1) מאתחלת את המחרוזת בסרט 3 ל-0.

(2) מעתיקה את  $w$  לסרט 2.

(3) מריצה את  $N$  על  $w$  לפי המחרוזת בסרט 3.

• אם  $N$  קיבלה את  $w \Leftarrow D$  עוצרת ומקבלת.

• אחרת,  $D$  מוחקת את סרט 2, מקדמת את המחרוזת בסרט 3 לקסיקוגרפית וחוזרת לשלב (2).  
"



# שיעור 5

## תכונות סגירות של $R$ ו- $RE$

### 5.1 הגדרה של השפות $R$ ו- $RE$

#### הגדרה 5.1 $R$

אוסף השפות הכריעות מסומן  $R$  ומוגדר

$$R = \{L \subseteq \Sigma^* : L \text{ מכריעה את } L\}.$$

#### הגדרה 5.2 $RE$

אוסף השפות הקבילות מסומן  $R$  ומוגדר

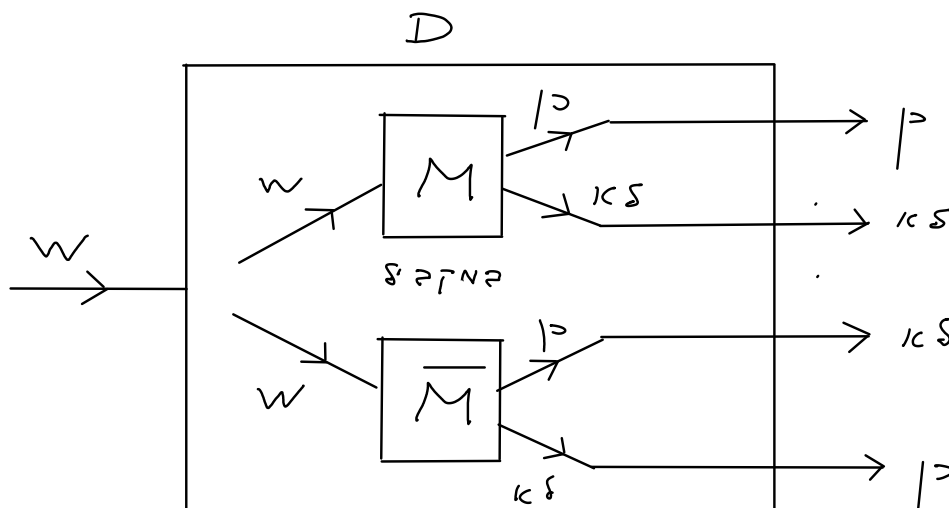
$$RE = \{L \subseteq \Sigma^* : L \text{ מקבלת את } L\}.$$

#### למה 5.1

אם  $L \in RE$  וגם  $\bar{L} \in RE$  אזי  $L \in R$ .

**הוכחה:** תהי  $M$  מ"ט המקבלת את  $L$  ותהי  $\bar{M}$  מ"ט המקבלת את  $\bar{L}$ .

נבנה מ"ט  $D$  המכריעה את  $L$ .



$D = \text{על קלט } w$

(1)  $D$  מעתיקה את  $w$  לסרט נוסף.

(2) מריצה במקביל את  $M$  על  $w$  ואת  $\bar{M}$  על העותק של  $w$ .

• אם  $M$  מקבלת  $D \Leftarrow$  מקבלת.

• אם  $\bar{M}$  מקבלת  $D \Leftarrow$  דוחה.

• אם  $M$  דוחה  $D \Leftarrow$  דוחה.

• אם  $\bar{M}$  דוחה  $D \Leftarrow$  מקבלת.

נוכיח כי  $D$  מכריעה את  $L$ .

אם  $w \in L$

$w \in L(M) \Leftarrow$

$\Leftarrow (M \text{ מקבלת את } w) \text{ או } (\bar{M} \text{ דוחה את } w)$

$\Leftarrow D \text{ עוצרת ומקבלת את } w$ .

אם  $w \notin L$

$w \in \bar{L} \Leftarrow$

$\Leftarrow w \in L(\bar{M})$

$\Leftarrow (\bar{M} \text{ מקבלת את } w) \text{ או } (M \text{ דוחה את } w)$

$\Leftarrow D \text{ עוצרת ודוחה את } w$ .



### משפט 5.1 סגירות של השפות הכריעות

השפות הכריעות  $R$  סגורות תחת:

(1) איחוד

(2) חיתוך

(3) משלים

(4) שרשור

(5) סגור קליין

### משפט 5.2 סגירות של השפות הקבילות

השפות הכריעות  $R$  סגורות תחת:

(1) איחוד

(2) חיתוך

(3) שרשור

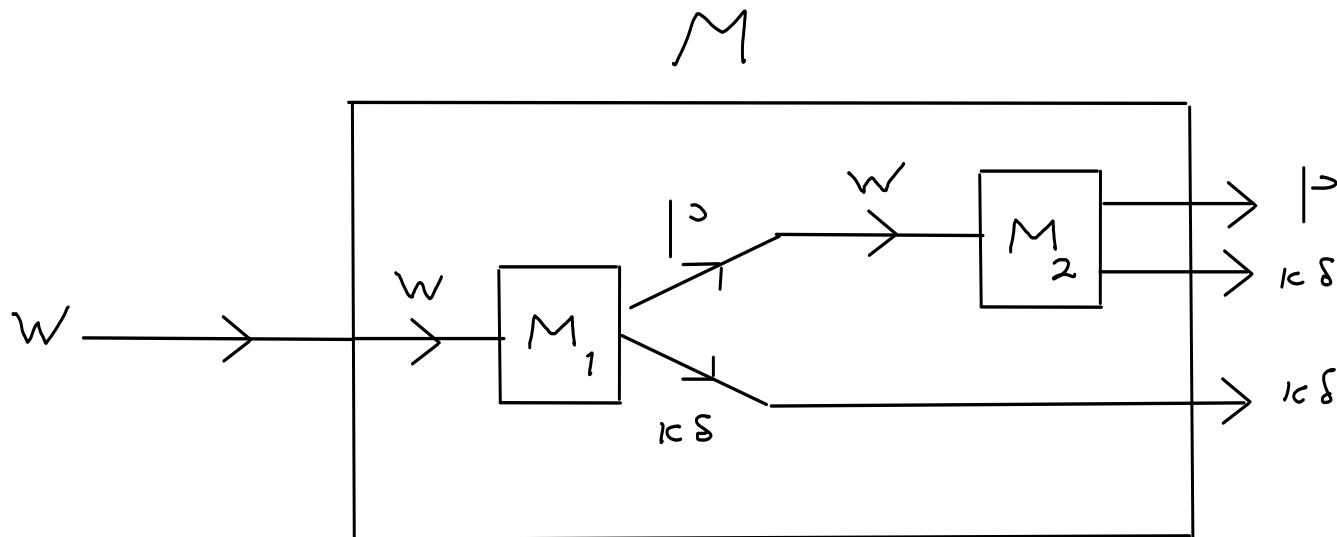
(4) סגור קליין

## (1) חיתוך:

(א) סגורה תחת חיתוך

נוכיח כי לכל שתי שפות  $L_1, L_2 \in R$  מתקיים  $L_1 \cap L_2 \in R$ .

תהי  $M_1$  ו-  $M_2$  מ"ט המכריעות את  $L_1$  ו-  $L_2$  בהתאמה. נבנה מ"ט  $M$  המכריעה את  $L_1 \cap L_2$ .

תאור הבנייה

$M =$  על קלט  $w$ :

(1) מעתיקה את  $w$  לסרט נוסף.

(2) מריצה את  $M_1$  על  $w$ .

• אם  $M_1$  דוחה  $M \Leftarrow$  דוחה.

• אחרת  $M$  מריצה את  $M_2$  על העותק של  $w$  ועונה כמוה.

נכונות:

נוכיח כי  $M$  מכריעה את  $L_1 \cap L_2$ .

אם  $w \in L_1 \cap L_2$

$w \in L_1$  וגם  $w \in L_2 \Leftarrow$

$M_1$  מקבלת את  $w$  וגם  $M_2$  מקבלת את  $w \Leftarrow$

$M$  מקבלת את  $w \Leftarrow$

אם  $w \notin L_1 \cap L_2$

$w \notin L_1$  או  $w \notin L_2 \Leftarrow$

$M_1$  דוחה את  $w$  או  $M_2$  דוחה את  $w \Leftarrow$

$M$  דוחה את  $w \Leftarrow$

RE סגורה תחת חיתוך (ב)

נוכיח כי לכל שתי שפות  $L_1, L_2 \in RE$  מתקיים  $L_1 \cap L_2 \in RE$ .

תהיינה  $M_1$  ו- $M_2$  שתי מכונות טיורינג המקבלות את  $L_1$  ו- $L_2$  בהתאמה.

נבנה מ"ט  $M$  המקבלת את  $L_1 \cap L_2$  באותו אופן כמו (א).

(2) איחוד:

R סגורה תחת איחוד (א)

נוכיח כי לדל שתי שפות  $L_1, L_2 \in R$  מתקיים  $L_1 \cup L_2 \in R$ .

תהיינה  $M_1$  מ"ט המכריעה את  $L_1$  ו- $M_2$  מ"ט המכריעה את  $L_2$ .

נבנה מ"ט  $M$  המכריעה את  $L_1 \cup L_2$ .

תאור הבנייה

$M = \text{על קלט } w$ :

(1) מעתיקה את  $w$  לסרט נוסף.

(2) מריצה את  $M_1$  על  $w$ .

• אם  $M_1$  מקבלת  $\Leftarrow M$  מקבלת.

• אחרת,  $M$  מריצה את  $M_2$  על העותק של  $w$  ועונה כמוה.

RE סגורה תחת איחוד (ב)

נוכיח כי לכל שתי שפות  $L_1, L_2 \in RE$  מתקיים  $L_1 \cup L_2 \in RE$ .

תהיינה  $M_1$  מ"ט המקבלת את  $L_1$  ו- $M_2$  מ"ט המקבלת את  $L_2$ .

נבנה מ"ט א"ד  $M$  המקבלת את  $L_1 \cup L_2$ .

תאור הבנייה

$M = \text{על קלט } w$ :

(1)  $M$  בוחרת באופן א"ד  $i \in \{1, 2\}$ .

(2)  $M$  מריצה את  $M_i$  על  $w$  ועונה כמוה.

(3) שרשור:

R סגורה תחת שרשור (א)

נוכיח כי לכל שתי שפות  $L_1, L_2 \in R$  מתקיים  $L_1 \cdot L_2 \in R$  כאשר

$$L_1 \cdot L_2 = \{w = w_1w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}.$$

תהיינה  $M_1$  מ"ט המכריעה את  $L_1$  ו- $M_2$  מ"ט המכריעה את  $L_2$ .

נבנה מ"ט א"ד  $M$  המכריעה את  $L_1 \cdot L_2$ .

תאור הבנייה

$M = \text{על קלט } w$ :



(1)  $M$  בוחרת באופן א"ד חלוקה של  $w$  ל-  $w = w_1 w_2$ .

(2)  $M$  מריצה את  $M_1$  על  $w_1$ .

• אם  $M_1$  דוחה  $\Leftarrow M$  דוחה.

• אחרת,  $M$  מריצה את  $M_2$  על  $w_2$  ועונה כמוה.

(ב)  $RE$  סגורה תחת שרשור

$RE$  סגורה תחת שרשור באותו אופן כמו ב- (א)

(4) \* קליני

(א)  $R$  סגורה תחת \* קליני

נוכיח כי לכל שפה  $L$ :

$$L \in R \Rightarrow L^* R$$

כאשר

$$L^* = \{w = w_1 w_2 \cdots w_k \mid \forall 1 \leq i \leq k, w_i \in L\}.$$

תהי  $M$  מ"ט המכריעה את  $L$ .

נבנה מ"ט  $M^*$  א"ד המכריעה את  $L^*$ .

תאור הבנייה

$M^* =$  על קלט  $w$ :

(1) אם  $w = \varepsilon$  אז  $M^*$  מקבלת.

(2) אחרת  $M^*$  בוחרת באופן א"ד חלוקה של  $w$  ל-  $w = w_1 \cdots w_k$ .

(3) לכל  $1 \leq i \leq k$ :

$M^*$  מריצה את  $M$  על  $w_i$ .

• אם  $M$  דוחה את  $w_i$  אז  $M^*$  דוחה.

• אחרת חוזרים לשלב (3).

(4) אם  $M$  קיבלה את כל המחרוזות  $\{w_i\}$  אזי  $M^*$  מקבלת.

(ב)  $RE$  סגורה תחת \* קליני

(5) משלים

(א)  $R$  סגורה תחת המשלים

נוכיח כי

$$L \in R \Rightarrow \bar{L} \in R,$$

כאשר

$$\bar{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}.$$

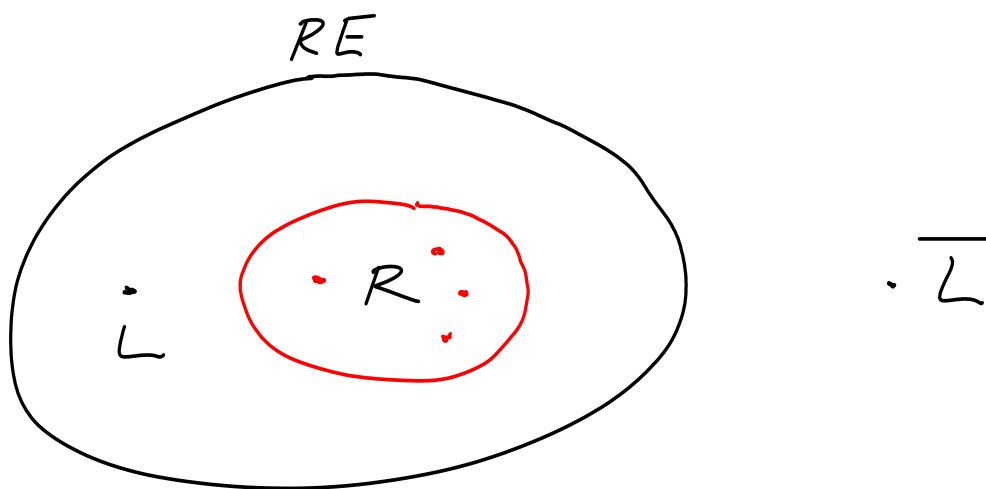
תהי  $M$  מ"ט המכריעה את  $L$ .

נבנה מ"ט  $\bar{M}$  המכריעה את  $\bar{L}$ .

$\bar{M} =$  על קלט  $w$ :

(1)  $\bar{M}$  מריצה את  $M$  על  $w$ .• אם  $M$  מקבלת  $\bar{M} \Leftarrow$  דוחה.• אם  $M$  דוחה  $\bar{M} \Leftarrow$  מקבלת.(ב)  $RE$  אינה סגורה תחת המשלים**משפט 5.3  $RE$  אינה סגורה תחת המשלים**

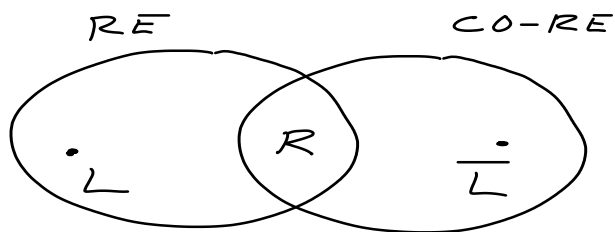
$$L \in RE \setminus R \Rightarrow \bar{L} \notin RE.$$



הוכחה:

נניח כי  $L \in RE \setminus R$  ונניח בשלילה כי  $\bar{L} \in RE$ .אזי לפי טענת עזר (למה 5.1),  $L \in R$  וזו סתירה.**הגדרה 5.3  $CoRE$** 

$$CoRE = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \bar{L} \in RE\}.$$

אבחנה

לפי למה 5.1:

$$RE \cap CoRE = R.$$

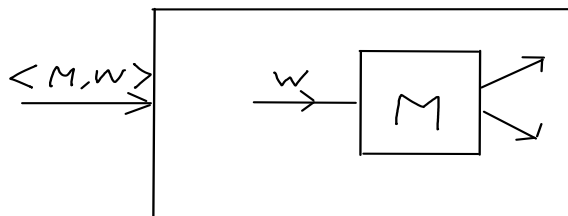
## 5.2 קידוד של מ"ט דטרמיניסטית

### הגדרה 5.4 קידוד של מ"ט

בהינתן קבוצה  $O$  של עצמים מופשטים (לשמל מכונת טיורינג, תוכנית מחשב, גרף). הקידוד של  $O$ , מסומן  $\langle O \rangle$ , הוא מיפוי של  $O$  אל מחרוזת מעל אלפבית סופי שיש בו לפחות שני סימנים.

במידה ויש רב עצמים  $O_1, \dots, O_k$  נסמן את הקידוד שלהם  $\langle O_1, O_2, \dots, O_k \rangle$ .

## 5.3 מ"ט אוניברסלית $U$



מ"ט אוניברסלית  $U$  מקבלת כקלט זוג, קידוד של מ"ט  $\langle M \rangle$  וקידוד של מילה  $\langle w \rangle$ , ומבצעת סימוציה של ריצה של  $M$  על  $w$  ועונה בהתאם.

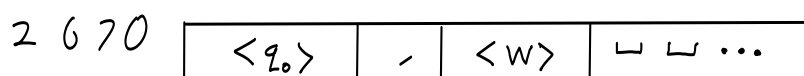
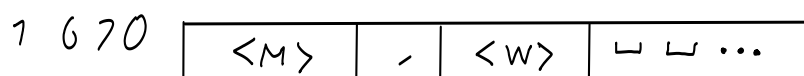
תאור הפעולה של  $U$

$U = \text{על קלט } x$ :

(1) בודקת האם  $x$  הוא קידוד של מ"ט  $\langle M \rangle$  וקידוד של מילה  $\langle w \rangle$ .

• אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

(2) מבצעת סימולציה של  $M$  על  $w$ :



- רושמת את הקונפיגורציה ההתחלתית  $q_0 w$  על סרט 2.
- מחשבת את הקונפיגורציה הבאה בעזרת טבלת המעברים.
- בסוף כל מעבר בין שתי קונפיגורציות,  $U$  בודקת האם המצב הנוכחי הוא  $q_{acc}$ .
- אם כן  $U$  עוצרת ומקבלת.

- \* אחרת  $U$  בודקת האם המצב הוא  $q_{rej}$ .
- \* אם כן  $U$  עוצרת ודוחה.
- \* אחרת  $U$  ממשיכה לקונפיגורציה הבאה.

מהי השפה של  $U$ ?

לכל  $x$ :

(1) אם  $U \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$  דוחה את  $x$ .

(2) אם  $x = \langle M, w \rangle$

- אם  $M$  מקבלת  $w \Leftarrow U$  מקבלת את  $x$ .
- אם  $M$  דוחה את  $w \Leftarrow U$  דוחה את  $x$ .
- אם  $M$  לא עוצרת על  $w \Leftarrow U$  לא עוצרת על  $x$ .

$$L(U) = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} .$$

**הגדרה 5.5**  $L_{acc}$

$$L_{acc} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} \in RE \setminus R$$

**הגדרה 5.6**  $L_{halt}$

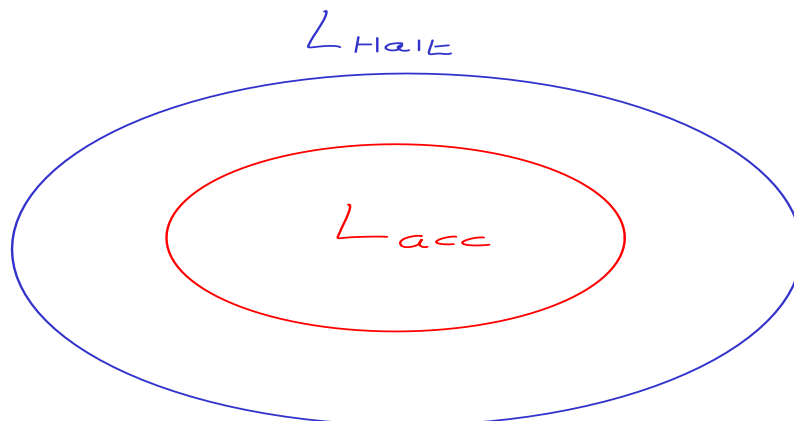
$$L_{halt} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ עוצרת על } w \} \in RE \setminus R$$

**הגדרה 5.7**  $L_d$

$$L_d = \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \} \notin RE$$

אבחנה:

$$L_{acc} \subseteq L_{halt} .$$



## משפט 5.4

$$L_{\text{acc}} \in RE.$$

■

הוכחה: מכיוון ש- $L(U) = L_{\text{acc}}$ ,  $U$  מקבלת את  $L_{\text{acc}}$  ולכן  $L_{\text{acc}} \in RE$ .

## משפט 5.5

$$L_{\text{halt}} \in RE.$$

הוכחה: נבנה מ"ט  $U'$  שהיא למעשה  $U$  פרט למקום שבו  $U$  עצרה ודחתה,  $U'$  תעצור ותקבל.

נוכיח כי  $U'$  מקבלת את  $L_{\text{halt}}$ :

אם  $x \in L_{\text{halt}}$

$x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$   $M$  עוצרת על  $w$

$U'$  עוצרת ומקבלת את  $x$ .

אם  $x \notin L_{\text{halt}}$  שני מקרים:

•  $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow U'$  דוחה את  $x$ .

•  $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$   $M$  לא עוצרת על  $w \Leftarrow U'$  לא עוצרת על  $x$ .

■

## שיעור 6

### אי-כריעות משפט הרדוקציה

#### הגדרה 6.1 $L_{acc}$

$$L_{acc} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} \in RE \setminus R$$

#### הגדרה 6.2 $L_{halt}$

$$L_{halt} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ עוצרת על } w \} \in RE \setminus R$$

#### הגדרה 6.3 $L_d$

$$L_d = \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \} \notin RE$$

#### משפט 6.1 $L_{acc} \in RE$

$$L_{acc} \in RE .$$

**הוכחה:** מכיוון ש- $L(U) = L_{acc}$ , כאשר  $U$  המכונת טיורינג האוניברסלית אשר מקבלת את  $L_{acc}$ , לכן  $L_{acc} \in RE$ . ■

#### משפט 6.2 $L_{halt} \in RE$

$$L_{halt} \in RE .$$

**הוכחה:** נבנה מ"ט  $U'$  שהיא למעשה  $U$  פרט למקום שבו  $U$  עצרה ודחתה,  $U'$  תעצור ותקבל.

נוכיח כי  $U'$  מקבלת את  $L_{halt}$ :

אם  $x \in L_{halt}$

$\Leftarrow x = \langle M, w \rangle$  ו- $M$  עוצרת על  $w$

$\Leftarrow U'$  עוצרת ומקבלת את  $x$ .

אם  $x \notin L_{halt}$  שני מקרים:

•  $x \neq \langle M, w \rangle$  דוחה את  $U'$ .

•  $x = \langle M, w \rangle$  ו- $M$  לא עוצרת על  $w$   $\Leftarrow U'$  לא עוצרת על  $x$ .

משפט 6.3  $L_d \notin RE$ 

$$L_d \notin RE .$$

הוכחה:

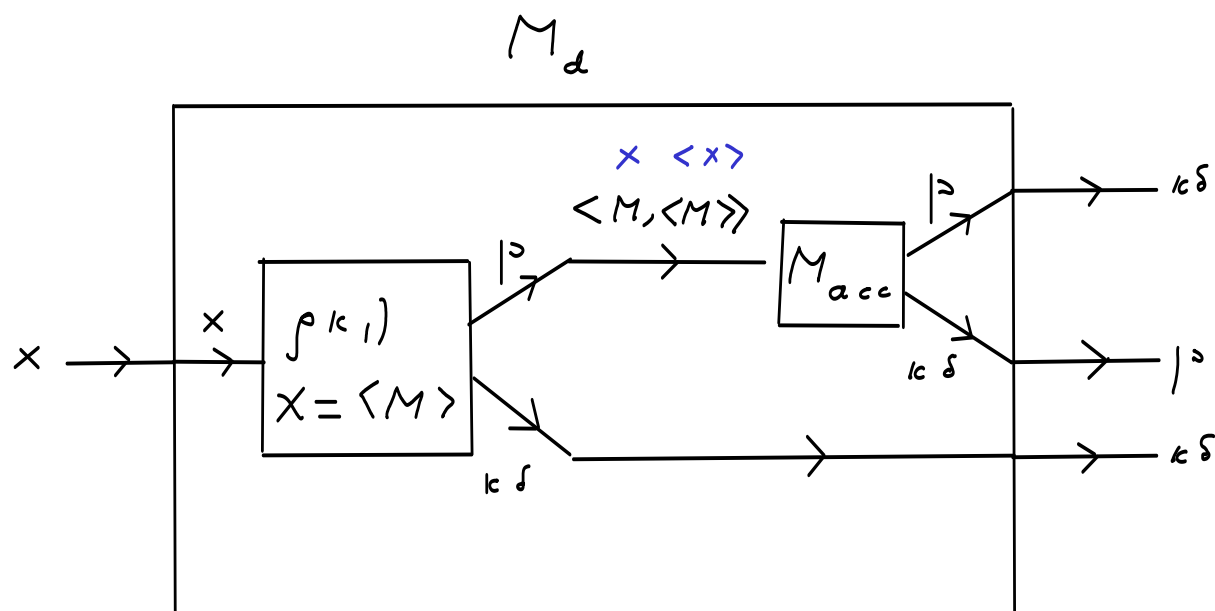
נניח בשלילה כי  $L_d \in RE$ . $\Leftarrow \exists$  מ"ט  $M_d$  המקבלת את  $L_d$ . $\Leftarrow L(M_d) = L_d$ נבדוק ריצה של  $M_d$  על  $\langle M_d \rangle$ :• אם  $\langle M_d \rangle \in L(M_d) \Leftarrow \langle M_d \rangle \notin L_d \Leftarrow L(M_d) \neq L_d$ • אם  $\langle M_d \rangle \notin L(M_d) \Leftarrow \langle M_d \rangle \in L_d \Leftarrow L(M_d) \neq L_d$ בשני המקרים קיבלנו סתירה לכך ש-  $L(M_d) = L_d$  ולכן  $L_d \notin RE$ .משפט 6.4  $L_{acc}$  לא כריעה

$$L_{acc} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} \notin R .$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי  $L_{acc} \in R$  ותהי  $M_{acc}$  המ"ט המכריעה את  $L_{acc}$ .נשתמש ב-  $M_{acc}$  כדי לבנות מ"ט  $M_d$  המכריעה את  $L_d$  (בסתירה לכך ש-  $L_d \notin RE$  כפי שהוכחנו במשפט 6.3).

$$L_d = \{ \langle M, w \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \} .$$



התאור של  $M_d$ 

$$M_d = \text{על קלט } x:$$

(1) בודקת האם  $x = \langle M \rangle$ . אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

(2) מחשבת את  $\langle \langle M \rangle \rangle = \langle x \rangle$ .

(3) מריצה את  $M_{acc}$  על הזוג  $\langle M, \langle M \rangle \rangle$ :

• אם  $M_{acc}$  מקבלת  $\Leftarrow M_d$  דוחה.

• אם  $M_{acc}$  דוחה  $\Leftarrow M_d$  מקבלת.

כעת נוכיח כי  $M_d$  מכריעה את  $L_d$ :

אם  $x \in L_d$

$\Leftarrow x = \langle M \rangle$  ו-  $\langle M \rangle \notin L(M)$

$\Leftarrow M_{acc}$  דוחה את הזוג  $\langle M, \langle M \rangle \rangle$

$\Leftarrow M_d$  מקבלת את  $x$ .

אם  $x \notin L_d$  שני מקרים:

מקרה (1):  $x \neq \langle M \rangle \Leftarrow M_d$  דוחה את  $x$ .

מקרה (2):  $x = \langle M \rangle$  ו-  $\langle M \rangle \in L(M)$

$\Leftarrow M_{acc}$  מקבלת את זוג  $\langle M, \langle M \rangle \rangle$

$\Leftarrow M_d$  דוחה את  $x$ .

**משפט 6.5  $L_{halt}$  לא כריעה**

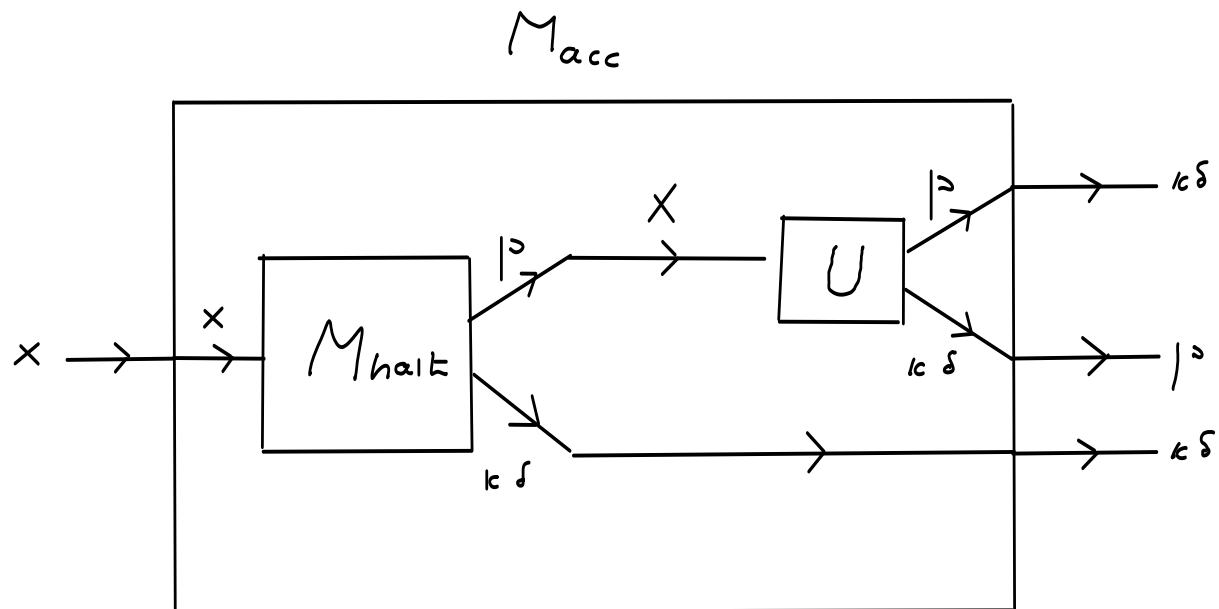
$$L_{halt} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ עוצרת על } w \} \notin R.$$

**הוכחה:**

נניח בשלילה כי  $L_{halt} \in R$  ותהי  $M_{halt}$  מ"ט המכריעה את  $L_{halt}$ .

נשתמש ב-  $M_{halt}$  כדי לבנות מ"ט  $M_{acc}$  המכריעה את  $L_{acc}$  (בסתירה לכך ש-  $L_{acc} \notin R$  כפי שהוכחנו במשפט 6.4).





התאור של  $M_{acc}$

$M_{acc}$  = על קלט  $x$ :

(1) מריצה את  $M_{acc}$  על  $x$ .

- אם  $M_{halt}$  דוחה  $\Leftarrow M_{acc}$  דוחה.
- אם  $M_{halt}$  מקבלת  $\Leftarrow M_{acc}$  מריצה את  $U$  על  $x$  ועונה כמוה.

אבחנה

נוכיח כי  $M_{acc}$  מכריעה את  $L_{acc}$ :

אם  $x \in L_{acc}$

$\Leftarrow x = \langle M, w \rangle$  ו-  $\langle w \rangle \in L(M)$

$\Leftarrow M_{halt}$  מקבלת את  $x$  וגם  $U$  מקבלת את  $x$

$\Leftarrow M_{acc}$  מקבלת את  $x$ .

אם  $x \notin L_{acc}$  שני מקרים:

מקרה (1):  $x \neq \langle M, w \rangle$

$\Leftarrow M_{halt}$  דוחה את  $x$

$\Leftarrow M_{acc}$  דוחה את  $x$ .

מקרה (2):  $x = \langle M, w \rangle$  ו-  $\langle w \rangle \notin L(M)$  שני מקרים:

מקרה (א):  $M$  לא עוצרת על  $w$   $\Leftarrow M_{halt}$  דוחה את  $x$   $\Leftarrow M_{acc}$  דוחה את  $x$ .

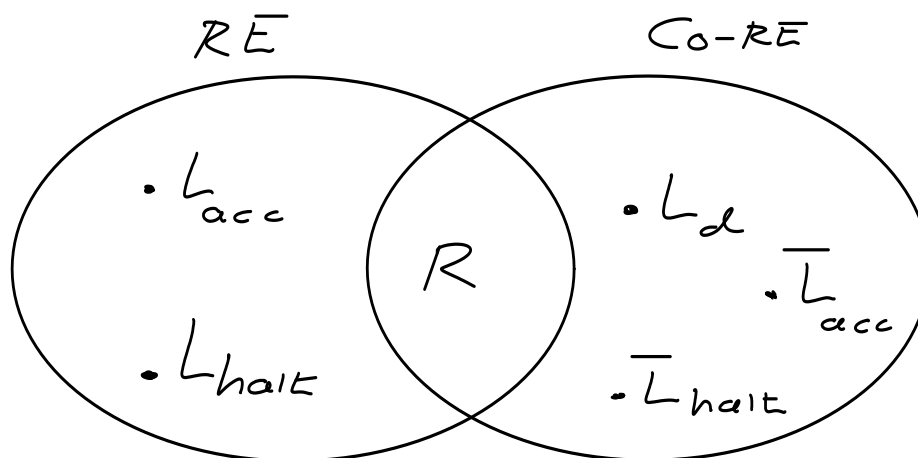
מקרה (ב):  $M$  דוחה את  $w$   $\Leftarrow M_{halt}$  מקבלת את  $x$  אבל  $U$  דוחה את  $x$   $\Leftarrow M_{acc}$  דוחה את  $x$ .

הראנו כי  $M_{acc}$  מכריעה את  $L_{acc}$  בסתירה לכך ש-  $L_{acc} \notin R$ .

לכן  $L_{halt} \notin R$ .

## משפט 6.6

$$\begin{aligned}
 L_{acc} \in RE \setminus R &\Rightarrow \bar{L}_{acc} \notin RE, \\
 L_{halt} \in RE \setminus R &\Rightarrow \bar{L}_{halt} \notin RE, \\
 L_d \notin RE \setminus R.
 \end{aligned}$$



## 6.1 מ"ט המחשבת את פונקציה

## הגדרה 6.4 מ"ט המחשבת פונקציה

בהינתן פונקציה  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  אומרים כי מ"ט  $M$  מחשבת את  $f$  אם לכל  $x \in \Sigma^*$ :

- $M$  מגיעה ל- $q_{acc}$  בסוף החישוב של  $f(x)$  וגם
- על סרט הפלט של  $M$  רשום  $f(x)$ .

## הערה 6.1

מ"ט שמחשבת פונקציה עוצרת תמיד.

## הגדרה 6.5 מ"ט המחשבת פונקציה

בהינתן פונקציה  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  אומרים כי  $f$  חישה אם קיימת מ"ט המחשבת את  $f$ .

## דוגמה 6.1

$$f_1(x) = xx. \quad (6.1)$$

$f_1(x)$  חשיבה.

## דוגמה 6.2

$$f_2(x) = \begin{cases} x & |x| \text{ זוגי} \\ xx & |x| \text{ אי-זוגי} \end{cases} . \quad (6.2)$$

$f_2(x)$  חשיבה.

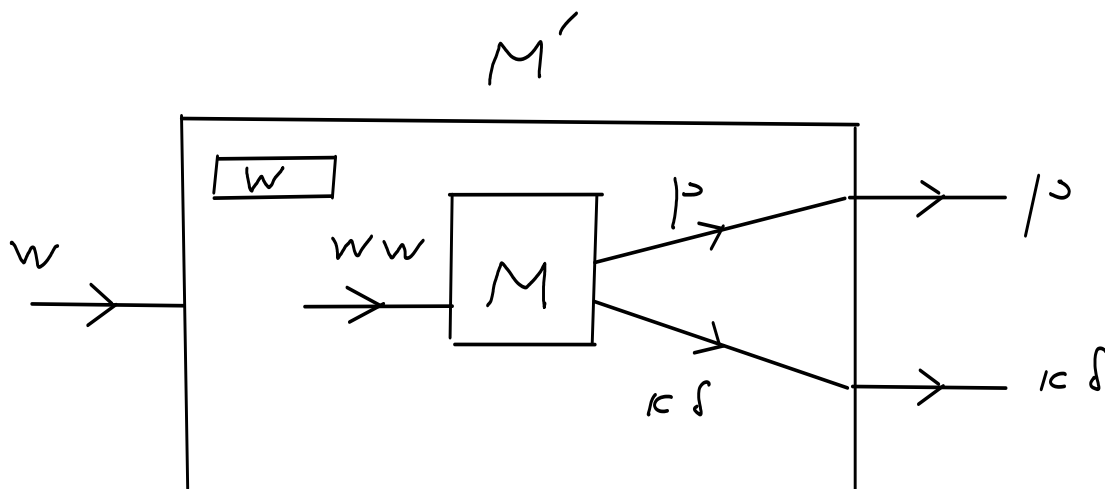
## דוגמה 6.3

$$f_3(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M \rangle \\ \langle M^* \rangle & x \neq \langle M \rangle \end{cases} . \quad (6.3)$$

כאשר

- $M^*$  מ"ט שמקבלת כל קלט.
- $M'$  מ"ט המקבלת את השפה

$$L(M') = \{w \in \Sigma^* \mid ww \in L(M)\}$$



$f_3(x)$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שבודקת האם  $x = \langle M \rangle$ . אם לא, מחזירה קידוד קבוע  $\langle M^* \rangle$ . ואם כן, מחזירה קידוד  $\langle M' \rangle$  ע"י הוספת מעברים המשכפלים את הקלט בתחילת הקידוד  $\langle M \rangle$ .

## דוגמה 6.4

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & x = \langle M \rangle \wedge \langle M \rangle \in L(M) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad (6.4)$$

$f_4(x)$  לא חשיבה כי ייתכנו קלטים  $x = \langle M \rangle$  ו- $M$  לא עוצרת על  $\langle M \rangle$ .

## 6.2 רדוקציות

### הגדרה 6.6 רדוקציות

בהינתן שתי שפות  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$  אומרים כי  $L_1$  ניתנת לרדוקציה ל-  $L_2$ , ומסמנים

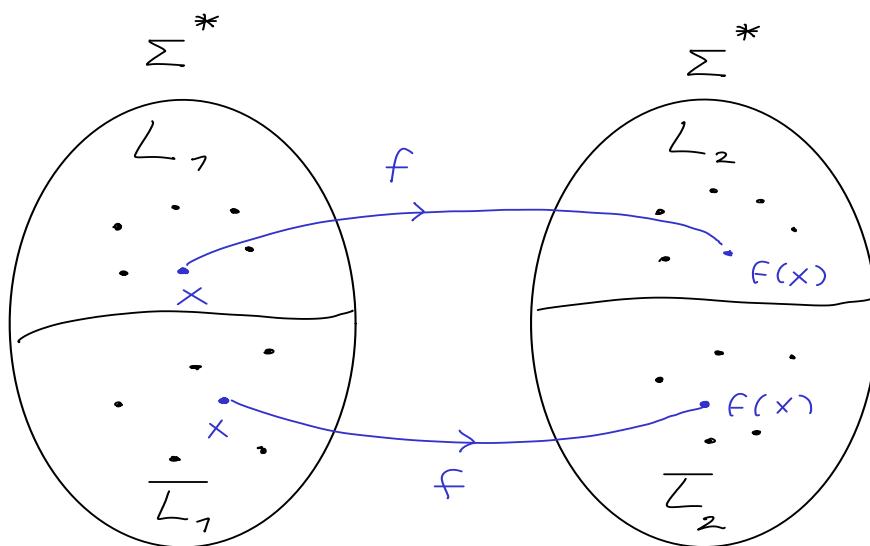
$$L_1 \leq L_2 ,$$

אם  $\exists$  פונקציה  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  המקיימת:

(1) חשיבה

(2) לכל  $x \in \Sigma^*$

$$x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2 .$$



### דוגמה 6.5

נתונות השפות

$$L_1 = \{x \in \{0,1\}^* \mid |x| \text{ זוגי} \} ,$$

$$L_2 = \{x \in \{0,1\}^* \mid |x| \text{ אי-זוגי} \} .$$

הוכיחו כי

$$L_1 \leq L_2 .$$

**פתרון:**

נגדיר את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \text{ זוגי} , \\ 10 & |x| \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

$$f(x) \in L_2 \mid \text{אי-זוגי} |f(x)| \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow |x| \text{ זוגי} \Leftrightarrow x \in L_1$$

$$f(x) \notin L_2 \text{ זוגי } |f(x)| \Leftarrow f(x) = 10 \Leftarrow x \notin L_1 \text{ אי-זוגי}$$

### משפט 6.7 משפט הרדוקציה

לכל שתי שפות  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ , אם קיימת רדוקציה

$$L_1 \leq L_2$$

אזי התנאים הבאים מתקיימים:

$$L_1 \in R \Leftarrow L_2 \in R \quad (1)$$

$$L_1 \in RE \Leftarrow L_2 \in RE \quad (2)$$

$$L_1 \notin R \Rightarrow L_2 \notin R \quad (3)$$

$$L_1 \notin RE \Rightarrow L_2 \notin RE \quad (4)$$

הוכחה: מכיוון ש-

$$L_1 \leq L_2$$

קיימת פונקציה  $f$  חשיבה המקיימת:

$$x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$$

לכל  $x \in \Sigma^*$ .

תהי  $M_f$  מ"ט המחשבת את  $f$ .

$$(1) \quad \underline{L_1 \in R \Leftarrow L_2 \in R} \quad \text{נוכיח}$$

תהי  $M_2$  מ"ט המכריעה את  $L_2$ .

נבנה מ"ט  $M_1$  המכריעה את  $L_1$ .

התאור של  $M_1$

$$M_1 = \text{על קלט } x:$$

1. מחשבת את  $f(x)$  בעזרת  $M_f$ .

2. מריצה את  $M_2$  על  $f(x)$  ועונה כמוה.

נוכיח כי  $M_1$  מכריעה את  $L_1$ .

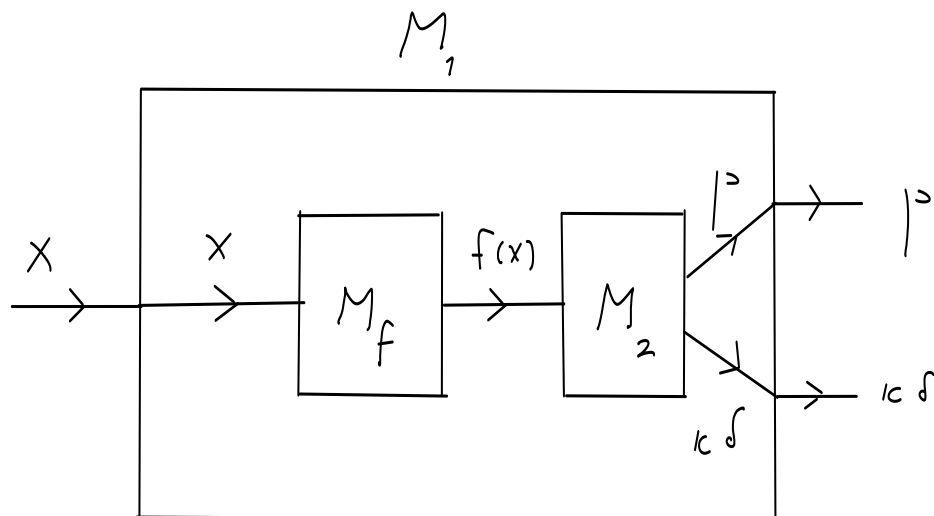
• אם  $x \in L_1 \Leftarrow f(x) \in L_2 \Leftarrow M_2$  מקבלת את  $f(x)$   $M_1$  מקבלת את  $x$ .

• אם  $x \notin L_1 \Leftarrow f(x) \notin L_2 \Leftarrow M_2$  דוחה את  $f(x)$   $M_1$  דוחה את  $x$ .

$$(2) \quad \underline{L_1 \in RE \Leftarrow L_2 \in RE} \quad \text{נוכיח}$$

תהי  $M_2$  מ"ט המקבלת את  $L_2$ .

נבנה מ"ט  $M_1$  המקבלת את  $L_1$ .



התאור של  $M_1$

$M_1 =$  על קלט  $x$ :

1. מחשבת את  $f(x)$  בעזרת  $M_f$ .
2. מריצה את  $M_2$  על  $f(x)$  ועונה כמוה.

נוכיח כי  $M_1$  מקבלת את  $L_1$ :

- אם  $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2 \Leftrightarrow M_2$  מקבלת את  $f(x) \Leftrightarrow M_1$  מקבלת את  $x$ .
- אם  $x \notin L_1 \Leftrightarrow f(x) \notin L_2 \Leftrightarrow M_2$  לא מקבלת את  $f(x) \Leftrightarrow M_1$  לא מקבלת את  $x$ .

(8)

## כלל 6.1

- אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי  $L \in RE$ , בוחרים שפה אחרת  $L' \in RE$  ומראים שקיימת רדוקציה

$$L \leq L'.$$

לדודמה:

$$L \leq L_{acc}$$

(כנ"ל לגבי  $R$ )

- אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי  $L \notin RE$ , בוחרים שפה אחרת  $L' \notin RE$  ומראים שקיימת רדוקציה

$$L' \leq L.$$

לדוגמה

$$L_d \leq L$$

(כנ"ל לגבי  $R$ ).