חישוביות וסיבוכיות

מועד ב'

פתרון לדוגמא

ד"ר יוחאי טוויטו ,   ד"ר ירמיהו מילר .

סמסטר א, תשפ"ה'

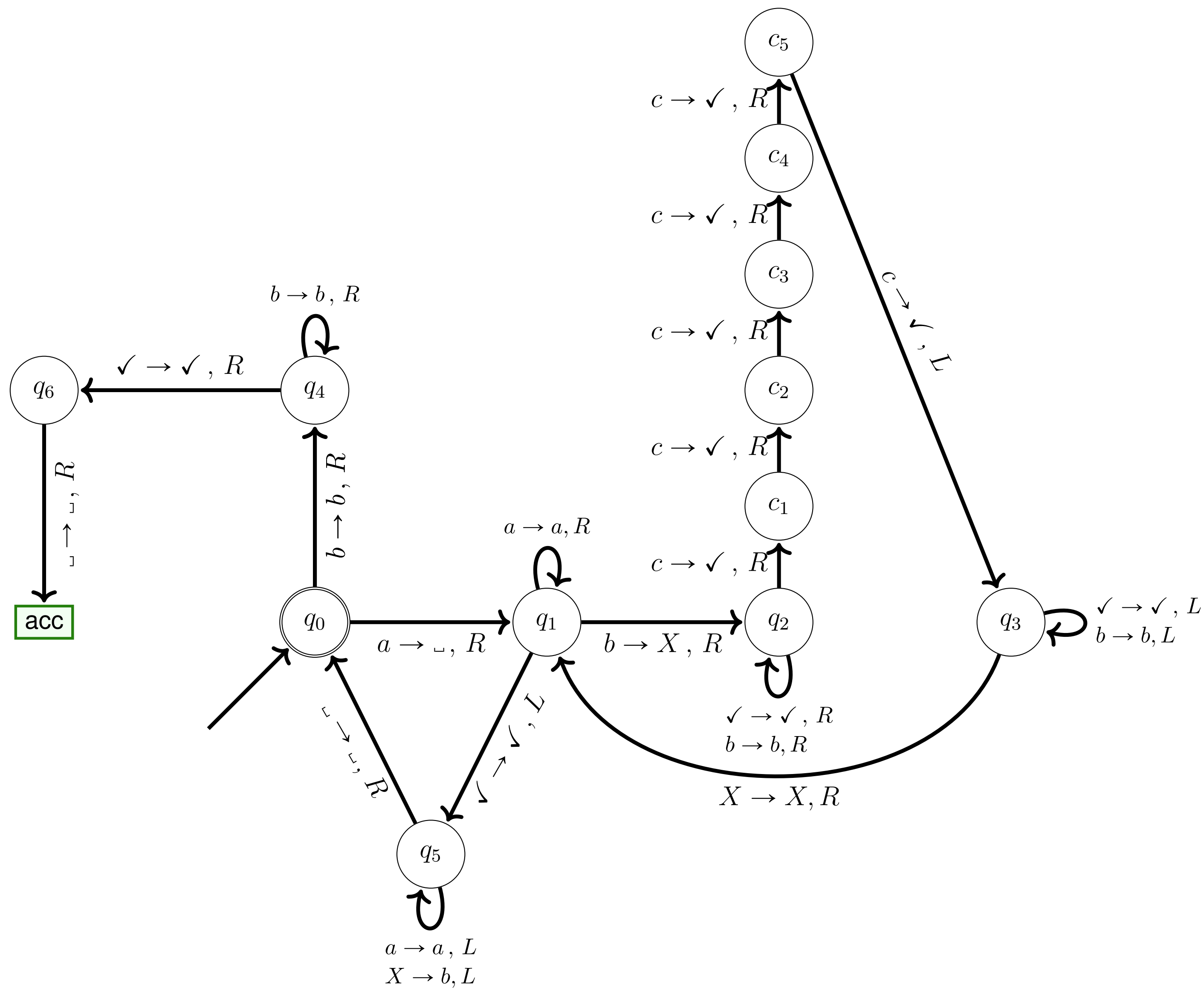
מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הינן פתרונות לדוגמא. ניתן לפתור חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

פתרונות

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

כל מעברים לא מופיעים בתרשים, עוברים למצב rej.



סעיף ב' (10 נקודות)

$$\sigma \in \{0, \dots, 9\}\ , \qquad \tau \in \{0, \dots, 9, *\}\ .$$

מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
$X. * .*$	σ	$X.\sigma.*$	$\checkmark$	R	
$X. * .*$	$\checkmark$	$X. * .*$	$\circlearrowleft$	R	
$X.\sigma.*$	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	$X.\sigma.*$	$\circlearrowleft$	R	
$X.\tau.*$	#	$Y.\tau.*$	$\circlearrowleft$	R	
$Y.\tau.*$	σ	$Y.\tau.\sigma$	$\checkmark$	R	
$Y.\tau.*$	$\checkmark$	$Y.\tau.*$	$\circlearrowleft$	R	
$Y.\tau.\sigma$	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	$Y.\tau.\sigma$	$\circlearrowleft$	R	
$Y.\tau_1.\tau_2$	#	$Z.\tau_1.\tau_2$	$\circlearrowleft$	R	
$Z.\tau_1.\tau_2$	$\checkmark$	$Z.\tau_1.\tau_2$	$\circlearrowleft$	R	
$Z.\tau_1.\tau_2$	σ	back	$\checkmark$	L	$\tau_1, \tau_2 \neq \sigma \wedge \tau_1 + \tau_2 \leqslant \sigma \wedge \tau_1, \tau_2 \neq *$
$Z * *$	$\sqcup$	acc	$\circlearrowleft$	R	
back	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	back	$\circlearrowleft$	L	
back	$\sqcup$	$X. * .*$	$\circlearrowleft$	R	

כל שאר המעברים עוברים ל rej.

שאלה 2: וריאציות על מכונות טיורינג (20 נקודות)

<u>כיוון ראשון</u>

פתרונות

תהי

$$M^O = \left(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O\right) \ ,$$

במודל O החד כיווני. נבנה מכונה

$$M^T = \left(Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T\right) \ ,$$

שקולה במודל הדו כיווני T.

רכיבי המ"ט M^T זהים לאלו של המ"ט M^O, מלבד מהתכונה שהראש של M^O לא זז מעבר לקצה השמאולי של הקלט.

לכן כדי ש- M^T תהיה שקולה ל- M^O יש להוסיף מעברים לפונקצית המעברים של M^T כדי שהראש של M^T לא זז מעבר לקצה השמאולי של הקלט.

הרעיון הוא לסמן את המשבצת שמשמאול לתחילת הקלט עם סימן מיוחד $\$$, ואז להוסיף מעברים לפונקצית המעברים של M^T שמבטיחים שאם הראש נמצא למשבצת שמסומנת $\$$ אז הוא מיד חוזר ו- M^T חוזרת למצב ההתחתי של המ"ט M^O. זה מתבצע על ידי הוספת השורות האלו למטה לטבלת המעברים של M^T:

מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
q_0^T	σ	$q_\$$	$\circlearrowleft$	L	
$q_\$$	$\sqcup$	q_0^O	$\$$	R	
q	$\$$	q	$\$$	R	$\forall q \in Q^O$

$$Q^T = Q^O \cup \{q_0^T, q_\$\} \ , \qquad \Sigma^T = \Sigma^O \ , \qquad \Gamma^T = \Gamma^O \cup \{\$\} \ , \qquad \text{acc}^T = \text{acc}^O \ , \qquad \text{rej}^T = \text{rej}^O \ .$$

<u>כיוון שני</u>

תהי

$$M^T = \left(Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T\right) \ ,$$

במודל T הדו כיווני. נבנה

$$M^O = \left(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O\right) \ ,$$

במודל O החד כיווני.

נתאר סימולציה של הכונה החד-כיוונית במודל הדו-כיוונית.

הרעיון הוא לסמן קו על הסרט במשבת באמצע הקלט, ואז לקפל את הסרט בקו הזה. באופן הזה נקבל סרט עם קצה שמאולי ואינסופי ימינה. במשבצות של הסרט החדש המקופל יש שני תווים, אחד למעלה (U) ואחד למטה (D), מלבד מנקודת הקיפול שבו יש משבצת אחת שמסומנת $\$$.

באופן הזה אפשר לסמלץ את המכונה M^O במכונה M^T על ידי הוספת המעברים הבאים לטבלת המעברים של M^T. **לכל** $\tau, \sigma, \pi \in \Gamma^T$:

פתרונות

תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון	מצב
תזוזה שמאלה: $(q,\sigma) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,L)$	L	π τ	$p.D$	π σ	$q.D$
	R	τ π	$p.U$	σ π	$q.U$
תזוזה שמאלה: $(q,\sqcup) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,L)$	L	$\sqcup$ τ	$p.D$	$\sqcup$	$q.D$
	R	τ $\sqcup$	$p.U$	$\sqcup$	$q.U$
תזוזה ימינה: $(q,\sigma) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,R)$	R	π τ	$p.D$	π σ	$q.D$
	L	τ π	$p.U$	σ π	$q.U$
תזוזה ימינה: $(q,\sqcup) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,R)$	R	$\sqcup$ τ	$p.D$	$\sqcup$	$q.D$
	L	τ $\sqcup$	$p.U$	$\sqcup$	$q.U$
	R	$\circlearrowleft$	$q.U$	$\$$	$q.D$
	R	$\circlearrowleft$	$q.D$	$\$$	$q.U$
אתחול					
$\tau \in \Sigma \cup \{\sqcup\}$ $\sigma \in \Sigma$	R	$\$$	$q.\tau$	τ	q_0^O
	R	$\sqcup$ σ	$q.\tau$	τ	$q.\sigma$
	L	$\sqcup$ $\sqcup$	back	$\sqcup$	$q.\sqcup$
	L	$\circlearrowleft$	back	$\sqcup$ τ	back
	R	$\circlearrowleft$	$q_0^T.D$	$\$$	back
סיום					
			acc^O	הכל	acc$^T.D$
			acc^O	הכל	acc$^T.U$
			rej^O	הכל	rej$^T.D$
			rej^O	הכל	rej$^T.U$
כל השאר עוברים ל-rej					

$$\Gamma^O \supseteq \left(\Gamma^T \times \Gamma^T\right) \cup \{\$\} \,.$$

שאלה 3: התזה של צ'רץ'-טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

$$S \;\to\; \$Ca\# \;\to\; \$aaC\# \;\to\; \$aaE \;\to\; \$aEa \;\to\; \$Eaa \;\to\; aa$$

$$\begin{aligned} S &\to \$Ca\# \to \$aaC\# \to \$aaD\# \to \$aDa\# \to \$Daa\# \to \$Caa\# \\ &\to \$aaCa\# \to \$aaaaC\# \to \$aaaaE \to \$aaaEa \to \$aaEaa \to \$aEaaa \to \$Eaaaa \\ &\to aaaa \end{aligned}$$

באמצעות אינדוקציה על k ניתן להוכיח כי

$$L(G) = \left\{ w \in \Sigma^* \,\middle|\, w = \varepsilon \vee \left(w = a^{2^n} \;,\; n \in \mathbb{N}\right) \right\} \;.$$

סעיף ב' (10 נקודות)

$$S \;\to\; aBC \;\to\; abC \;\to\; abc$$

$$\begin{aligned} S &\to aSBC \to aaBCBC \to aaBHBC \to aaBBCC \to aabBCC \to aabbCC \\ &\to aabbcC \to aabbcc \,. \end{aligned}$$

אפשר להוכיח, ע"י אינדוקציה על n, כי

$$L(G) = \left\{ w \in \Sigma^* \,\middle|\, w = a^n b^n c^n \;,\; n \in \mathbb{N}^+ \right\} \;.$$

שאלה 4: אי כריעות (20 נקודות)

פתרונות

סעיף א' (10 נקודות)

נבנה מ"ט אי-דטרמיניסטית $M_{L_{\geqslant 3}}$ המכריעה את $L_{\geqslant 3}$.

התיאור הבא הוא תיאור של תוכנית אי-דטרמיניסטית של המכונת טיורינג $M_{L_{\geqslant 3}}$.

$M_{L_{\geqslant 3}} =$ על קלט x:

1. $M_{L_{\geqslant 3}}$ בודקת האם הקלט x הוא מכונת טיורינג.
   אם לא אז $M_{L_{\geqslant 3}}$ דוחה.
2. $M_{L_{\geqslant 3}}$ בוחרת באופן אי-דטרמיניטי 3 מילים w_1, w_2, w_3.
   - מריצה את M על w_1.
     * אם M דוחה $\Leftarrow$ $M_{L_{\geqslant 3}}$ דוחה.
   - מריצה את M על w_2.
     * אם M דוחה $\Leftarrow$ $M_{L_{\geqslant 3}}$ דוחה.
   - מריצה את M על w_3 ועונה כמוה.

<u>נכונות.</u>

$x \in L_{\geqslant 3} \Leftarrow x = \langle M \rangle$ ו- $|L(M)| \geqslant 3$.

$\Leftarrow$ $\exists$ 3 מילים w_1, w_2, w_3 המתקבלים ב- M.

$\Leftarrow$ $\exists$ ריצה של $M_{L_{\geqslant 3}}$ בה תבחר את w_1, w_2, w_3 ותריץ עליהם את M ותקבל

$\Leftarrow$ $M_{L_{\geqslant 3}}$ מקבלת את x.

$x \notin L_{\geqslant 3} \Leftarrow$ שני מקרים:

מצב 1. $x \neq \langle M \rangle \Leftarrow M_{L_{\geqslant 3}}$ דוחה את L.

מצב 2. $x = \langle M \rangle$ ו- $|L(M)| < 3$

$\Leftarrow$ לכל 3 מילים שונות w_1, w_2, w_3 לפחות אחת מהן לא מתקבלת ב- M.

$\Leftarrow$ בכל ריצה של $M_{L_{\geqslant 3}}$ בה היא תבחר 3 מילים w_1, w_2, w_3 השונות זו מזו, ולפחות אחת הריצות של M על מילים אלו תדחה או לא תעצור

$\Leftarrow$ בכל ריצה של $M_{L_{\geqslant 3}}$ על x, $M_{L_{\geqslant 3}}$ תדחה או לא תעצור

$\Leftarrow$ $M_{L_{\geqslant 3}}$ לא מקבלת את x.

סעיף ב' (10 נקודות)

נבנה רדוקציה מ- A_{TM}.
הפונקצית הרדוקציה היא:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\varnothing} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

פתרונות

כאשר $M_\varnothing$ היא מ"ט הדוחה כל קלט ו- M' היא מ"ט שעל כל קלט x מריצה את M ועונה כמוה.

__אבחנה__

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \varnothing & w \notin L(M) \end{cases}$$

__נכונות הרדוקציה__

נניח ש- $x \in A_{TM}$.

$\Leftarrow$ $x = \langle M, w \rangle$ **ו-** $w \in L(M)$.

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M' \rangle$.

$\Leftarrow$ $L(M') = \Sigma^*$.

$\Leftarrow$ $|L(M')| = \infty$.

$\Leftarrow$ $f(x) \in L_{\geqslant 3}$.

נניח ש- $x \notin A_{TM}$.

אז יש שני מקרים:

מצב 1: $x \neq \langle M, w \rangle$.

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M_\varnothing \rangle$ **ו-** $|L(M_\varnothing)| = 0$

$\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\geqslant 3}$.

מצב 2: $x = \langle M, w \rangle$ **ו-** $w \notin L(M)$.

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M' \rangle$

$\Leftarrow$ $L(M') = \varnothing$.

$\Leftarrow$ $|L(M')| = 0$.

$\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\geqslant 3}$.

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

סעיף א' (8 נקודות)

נבנה פונקצית הרדוקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ שמוגדרת

$$f(\langle S, t \rangle) = \langle A \rangle$$

כאשר $\langle S, t \rangle$ קלט של $SUBSETSUM$ ו- $\langle A \rangle$ קלט של $PARTITION$.

פתרונות

1) יהי $\sigma = \sum_{x\in S} x$.

2) נגדיר את הקבוצה החדשה A על ידי הוספת האיבר $\sigma - 2t$ לקבוצה S:

$$A = S \cup \{\sigma - 2t\} \ .$$

סעיף ב' (6 נקודות)

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

נניח ש- $\langle S,t\rangle \in$ SubsetSum.

$\Leftarrow$ קיימת תת-קבוצה $Y \subseteq S$ כך ש- $t = \sum_{y\in Y} y$.

$\Leftarrow$ $\sum_{x\in A} x = \sum_{x\in S} x + \sigma - 2t = 2\sigma - 2t$

$\Leftarrow$ אם נגדיר $A_1 = Y \cup \{\sigma - 2t\}$ ו- $A_2 = A\backslash A$ אז

$$\sum_{x\in A_1} x = \sum_{x\in Y} x + \sigma - 2t = t + \sigma - 2t = \sigma - t$$

וכן

$$\sum_{x\in A_2} x = \sum_{x\in A\backslash A_1} x = \sum_{x\in A} x - \sum_{x\in A_1} x = 2\sigma - 2t - (\sigma - t) = \sigma - t \ .$$

$\Leftarrow$ $\sum_{x\in A_1} x = \sum_{x\in A_2} x = \frac{1}{2}\sum_{x\in A} x$

וגם $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap (A\backslash A_1) = \varnothing$

וגם $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A\backslash A_1) = A$.

$\Leftarrow$ קיימת חלוקה $A_1, A_2 \subset A$ של A

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle A\rangle \in PARTITION$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

נניח ש- $\langle A\rangle \in$ Partition.

$\Leftarrow$ קיימות תת-קבוצות $A_1, A_2 \subseteq S'$ כך ש:

$$\sum_{x\in A_1} x = \sum_{x\in A_2} x = \frac{1}{2}\sum_{x\in A} x$$

וגם $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap (A\backslash A_1) = \varnothing$

וגם $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A\backslash A_1) = A$.

$\Leftarrow$ לפי הבניית הרדוקציה: $A = \{\sigma - 2t\} \cup S$ כאשר $\sigma \leqslant t$ שלם ו- S קבוצת שלמים ו- $\sigma = \sum\limits_{x \in S} x$.

$\Leftarrow$ קיימת הקבוצה $S = A \backslash \{\sigma - 2t\}$.

$\Leftarrow$ מכיוון ש: $A = \{\sigma - 2t\} \cup S$ ו- A_1, A_2 מהוות חלוקה של A אז $\{\sigma - 2t\}$ שייך ל- A_1 או A_2.
ללא הגבחת כלליות נניח ש: $\{\sigma - 2t\} \in A_1$

$\Leftarrow$ קיימת הקבוצה $A_1 \backslash \{\sigma - 2t\}$.

$\Leftarrow$ נגדיר הקבוצה:

$$Y = A_1 \backslash \{\sigma - 2t\} \quad \subseteq \quad A \backslash \{\sigma - 2t\} = S \ .$$

$\Leftarrow$

$$\sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in A_1} y - (\sigma - 2t) = \frac{1}{2} \sum_{y \in A} y - (\sigma - 2t) = \frac{1}{2}(2\sigma - 2t) - (\sigma - 2t) = t \ .$$

$\Leftarrow$ קיימת תת- קבוצה $Y \subseteq S$ כך ש: $\sum\limits_{y \in Y} y = t$

$\Leftarrow$ $\langle S, t \rangle \in SUBSETSUM$.

סעיף ג' (6 נקודות)

הפונקצית הרדוקציה f, על קלט $\langle S, t \rangle$ מחזירה את הפלט $\langle A \rangle$ כאשר $A = S \cup \{\sigma - 2t\}$.

לכן, על קלט $\langle S, t \rangle$ הפונקציה f תבצע לכך:

שלב 1) מחשבת את הסכום σ של כל האיברים שבקבוצה S

שלב 2) מחשבת את החיסור $\sigma - 2t$.

שלב 3) בונה את הקבוצה $S \cup \{\sigma - 2t\}$.

נסמן ב- $n = |\langle S, t \rangle|$ אורך הקלט.

- שלב (1) עולה $O(|S|)$ צעדים.
- שלב (2) עולה $O(|S|)$ צעדים.
- שלב (3) עולה n צעדים לכל היותר.

לכן בסה"כ הסיבוכיות זמן של f היא:

$$O(|S|) + O(|S|) + O(n) = O(n) \ .$$