שיעור 4
מכונת טיורינג אי דטרמיניסטית

4.1 הגדרה של מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

הגדרה 4.1 מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית (מ"ט א"ד) היא שביעייה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}$ מוגדרים כמו במ"ט דטרמיניסטי (ראו הגדרה 1.2).

Δ היא פונקציית המעברים

$$\Delta : (Q \backslash \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma \to P\left(Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}\right) \ .$$

$$\Delta(q, a) = \{(q_1, a, S) \ \ , \ \ (q_2, b, L) \ \ , \ \ \ldots\} \ .$$

כלומר, לכל זוג $q \in Q, \alpha \in \Gamma$ ייתכן מספר מעברים אפשריים, 0, 1 או יותר.

- קונפיגורציה של מ"ט א"ד זהה לקונפיגורציה של מ"ט דטרמיניסטית.
- לכל קונפיגורציה ייתכן מספר קונפיגורציות עוקבות.
- לכל מילה $w \in \Sigma^*$ ייתכן מספר ריצות שונות:
  - ריצות שמגיעות ל- q_{acc}.
  - ריצות שמגיעות ל- q_{rej}.
  - ריצות שלא עוצרות.
  - ריצות שנתקעות.

הגדרה 4.2

מילה $w \in \Sigma^*$ מתקבלת במ"ט א"ד M אם קיימת לפחות ריצה אחת שמגיעה ל- q_{acc}.

השפה של מ"ט א"ד M היא

$$L(M) = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \exists u, \mathrm{v} \in \Gamma^* \ \ : \ \ q_0 w \vdash_* \ u \ q_{\text{acc}} \ \mathrm{v} \right\}$$

כלומר,
$w \in L(M)$ אם קיימת ריצה אחת שבה M מקבלת את w.

$w \notin L(M)$ אם בכל ריצה של M על w, M דוחה או לא עוצרת, או נתקעת.

הגדרה 4.3 מ"ט א"ד המכריעה שפה L

תהי M מ"ט א"ד.
אומרים כי מ"ט א"ד M מכריעה שפה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $w \in L \Leftarrow M$ מקבלת את w.
- אם $w \notin L \Leftarrow M$ דוחה את w.

הגדרה 4.4 מ"ט א"ד המקבלת שפה L

תהי M מ"ט א"ד.
אומרים כי מ"ט א"ד M מקבלת שפה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $w \in L \Leftarrow M$ מקבלת את w.
- אם $w \notin L \Leftarrow M$ דוחה את w או M לא עוצרת על w.

דוגמה 4.1

נתונה השפה

$$L = \left\{1^n \;\middle|\; \text{אינו ראשוני } n\right\} \ , \qquad \Sigma = \{1\} \ .$$

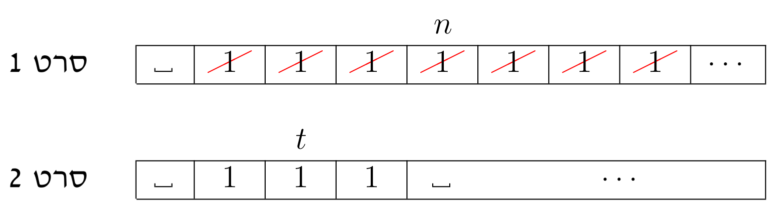
בנו מ"ט המכריעה את השפה L.

פתרון:

<u>הרעיון</u>

נבנה מ"ט א"ד N המכריעה את L.

N תבחר באופן א"ד מספר $1 < t < n$ ותבדוק האם t מחלק את n.



<u>תאור הבניה</u>

$N =$ על קלט $w = 1^n$:

שלב 1)

- N בוחרת באופן א"ד מספר $1 < t < n$.
- מעתיקה את w לסרט 2.
- עוברת על העותק משמאל לימין, ובכל תא מחליטה באופן א"ד האם להשאיר את ה- 1 או למחוק אותו ע"י X (לדאוג שהמספר שנבחר הוא לא 1 ולא n).

- בסוף המעבר המספר t שנבחר הוא כמות ה- 1 -ים שלא נמחקו.

סרט 1

␣	1	1	1	1	$\cdots$	1	1	␣	$\cdots$

סרט 2

		X	X			X			
␣	1	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	1	$\cdots$	$\cancel{1}$	1	␣	$\cdots$

שלב 2) N בודקת האם t שנבחר מחלק את n.

- אם כן $\Leftarrow$ N מקבלת.
- אם לא $\Leftarrow$ N דוחה.

4.2 עץ החישוב של מ"ט א"ד

הגדרה 4.5 עץ החישוב של מ""ט א"ד

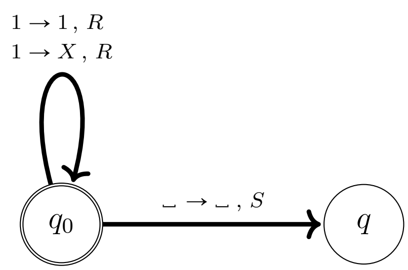
בהינתן מ"ט א"ד M ומילה $w \in \Sigma^*$, עץ החישוב של M ו- w הוא עץ מושרש שבו:

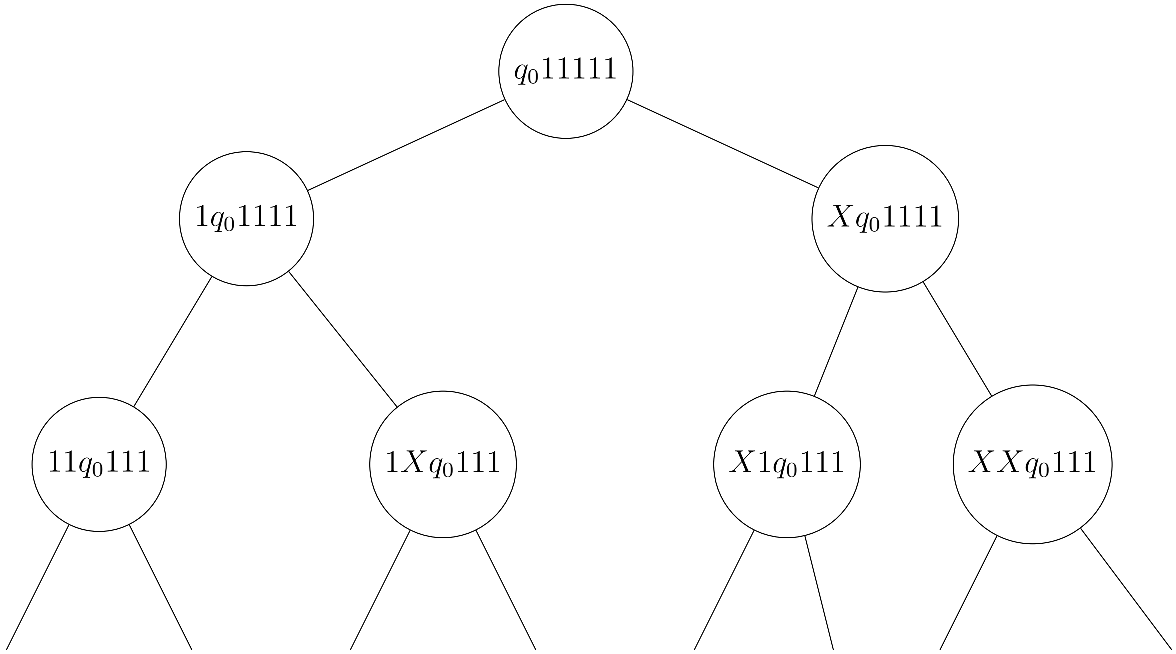
1) כל קדקוד בעץ מתאר קונפיגורציה בחישוב של M על w.

2) שורש העץ מתאר את הקונפיגורציה ההתחלתית q_0w.

3) לכל קדקוד v בעץ הבנים של v הם כל הקדקודים הנובעים מהקונפיגורציה המתוארת ע"י v.

דוגמה 4.2





4.3 שקילות בין מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית למכונת טיורינג דטרמיניסטית

משפט 4.1 שקילות בין מ"ט אי-דטרמיניסטית למ"ט דטרמיניסטית ב- RE

לכל מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית N קיימת מכונת טיורינג דטרמיניסטית D כך ש-

$$L(N) = L(D) \ .$$

כלומר לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם N מקבלת את w $\Leftarrow$ D תקבל את w.
- אם N לא מקבלת את w $\Leftarrow$ D לא תקבל את w.

הוכחה: בהינתן מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית N נבנה מכונת טיורינג דטרמיניסטית D ונוכיח כי

$$L(N) = L(D) \ .$$

<u>רעיון ההוכחה</u>

בהינתן קלט $w \in \Sigma^*$, D תבצע ריצה של כל החישובים האפשריים של N על w, ואם אחד החישובים מסתיים ב- q_{acc} אז D תעצור ותקבל.

מכיוון שייתכנו חישובים אינסופיים, לא נוכל לסרוק את עץ החישוב לעומק. במקום זה נסרוק את העץ לרוחב. כלומר, נבדוק את כל החישובים באורך 1, ואחרי זה נבדוק את כל החישובים באורך 2, וכן הלאה. אם אחד החישובים הסתיים ב- q_{acc}, אזי D תעצור ותקבל.

<u>תאור הבניה</u>

מכיוון שלכל $q\in Q$ ולכל $\alpha\in\Gamma$:

$$\Delta(q,\alpha)\subseteq Q\times\Gamma\times\{L,R,S\}\ .$$

אזי

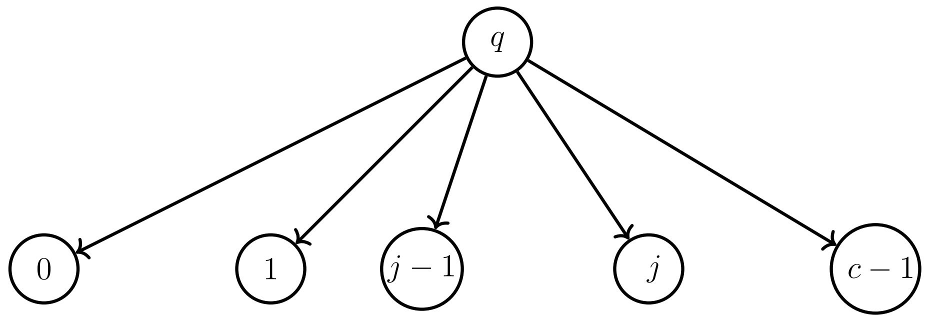
$$|\Delta(q,\alpha)|\leqslant|Q|\cdot|\Gamma|\cdot|\{L,R,S\}|=3|Q|\cdot|\Gamma|\ .$$

נסמן:

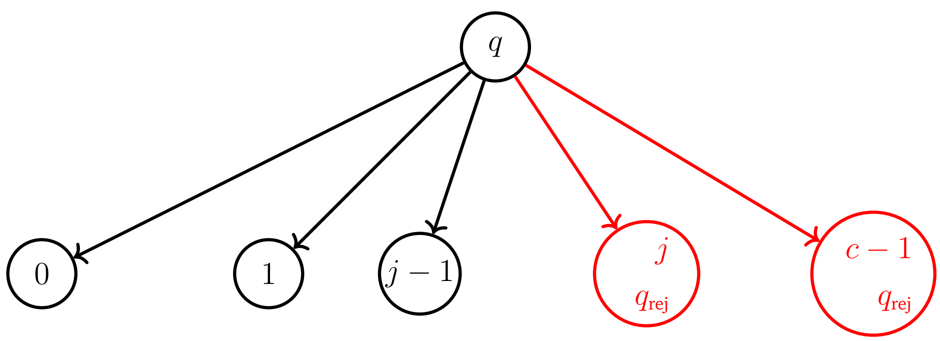
$$C=3|Q|\cdot|\Gamma|\ .$$

- לכל מצב $q\in Q$ ולכל אות $\alpha\in\Gamma$ נמספר את המעברים ב- $\Delta(q,\alpha)$ שרירותית

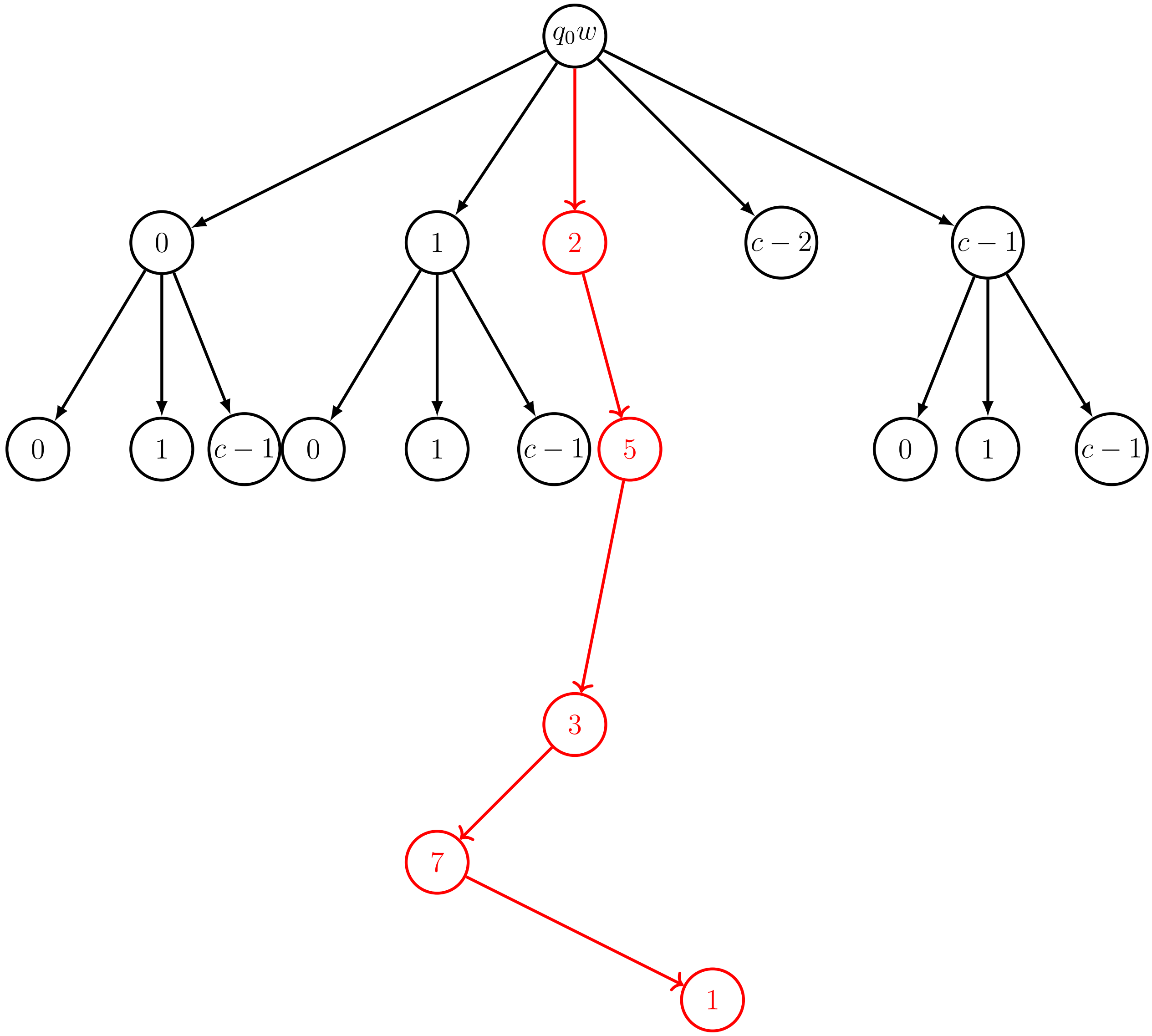
$$\{0,1,2,\cdots,C-1\}\ .$$



- אם $|\Delta(q,\alpha)|=j<C$,
אזי לכל $j\leqslant k\leqslant C-1$
נקבע $k=(q_{\text{rej}},\alpha,S)$.



- נשים לב כי שינוי זה לא משנה את השפה של N.



<u>קידום לקסיקוגרפי:</u>

0	00	10	$\cdots$	$(C-1)0$	000	
1	01	11	$\cdots$	$(C-1)1$	001	
2	02	12	$\cdots$	$(C-1)2$	002	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$C-1$	$0(C-1)$	$1(C-1)$	$\cdots$	$(C-1)(C-1)$	$00(C-1)$	

<u>הבנייה של D</u>

D מכילה 3 סרטים:

					n				
סרט 1	$\sqcup$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cdots$
			t						
סרט 2	$\sqcup$	1	1	1	$\sqcup$	$\cdots$			
סרט 3	$\sqcup$	1	1	1	$\sqcup$	$\cdots$			

$D =$ " על קלט w:

1) מאתחלת את המחרוזת בסרט 3 ל- 0.

2) מעתיקה את w לסרט 2.

3) מריצה את N על w לפי המחרוזת בסרט 3.

- אם N קיבלה את w $\Leftarrow$ D עוצרת ומקבלת.
- אחרת D מוחקת את סרט 2, מקדמת את המחרוזת בסרט 3 לקסיקוגרפית וחוזרת לשלב 2)"

■