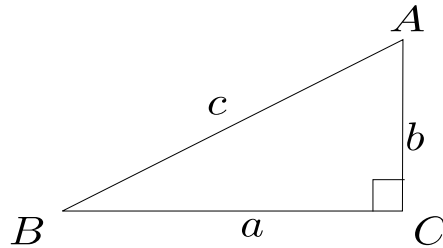


שיעור 2

פונקציות טריגונומטריות

פיתגורס, סינוס וקוסינוס וטנגנט

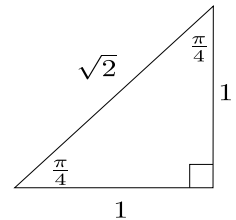


$$\sin(\angle A) = \frac{a}{c}, \quad \cos(\angle A) = \frac{b}{c}, \quad \tan(\angle A) = \frac{a}{b}.$$

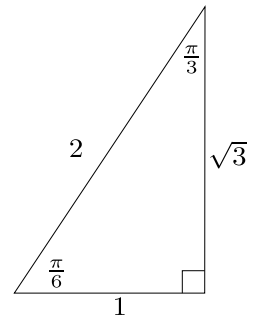
משפט פיתגורס:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Leftrightarrow \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 1 = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \sqrt{3} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} \\ \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \end{aligned}$$



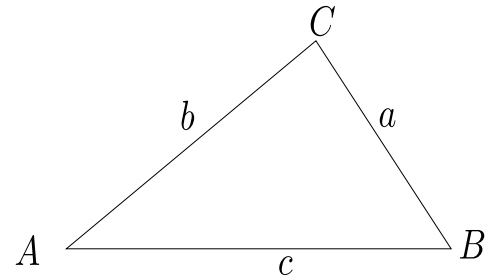
משפט הסינוסים ומשפט הקוסינוסים

משפט הסינוסים:

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)} .$$

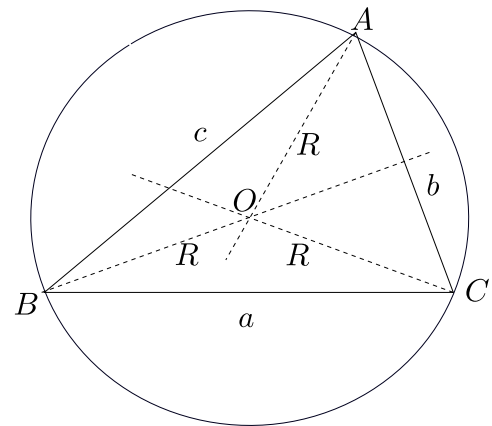
משפט הקוסינוסים:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\angle C) , \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\angle B) , \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\angle A) . \end{aligned}$$



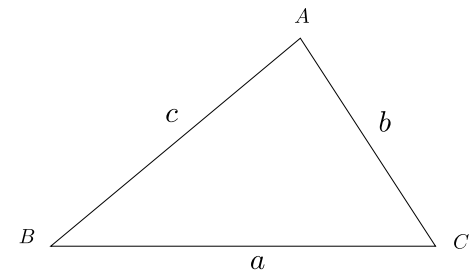
רדיוס של משולש החסום במעגל:

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)} = 2R .$$

כאשר R הוא הרדיוס המעגל החוסם את המשולש.

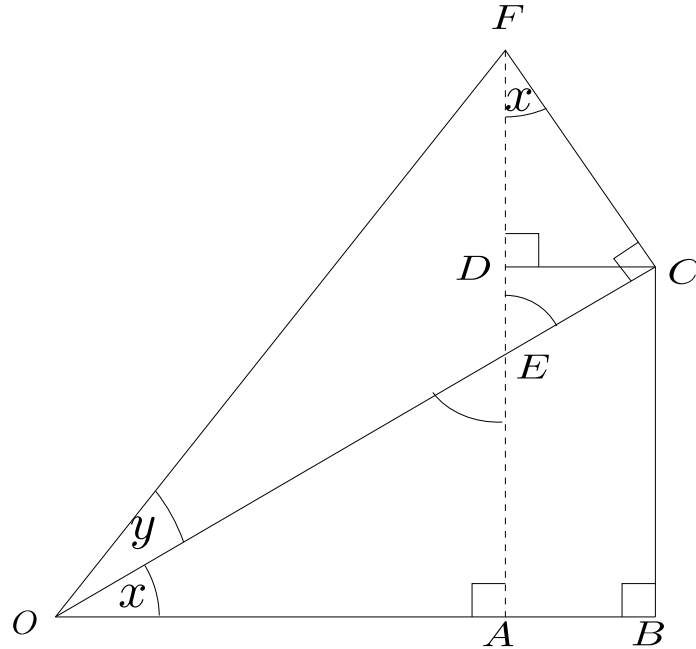
שטח משולש:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot AB \cdot \sin(\angle A)}{2} .$$



זיהויות טריגונומטריות

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$



משולשים ישרי זוויתים OPQ ו- OQR מכילים את הזוויות x ו- y כמתואר בתרשים. הזווית URQ שווה ל- x .

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \frac{AF}{OF} = \frac{AD + DF}{OF} = \frac{BC + DF}{OF} \\ &= \frac{BC}{OC} \times \frac{OC}{OF} + \frac{DF}{CF} \times \frac{CF}{OF} \\ &= \sin x \cos y + \cos x \sin y\end{aligned}$$

הנוסחה עבור $\cos(x+y)$ ניתנת להוכיח בדרך הדומה:

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \frac{OA}{OF} = \frac{OB - AB}{OF} = \frac{OB - DC}{OF} \\ &= \frac{OB}{OC} \times \frac{OC}{OF} - \frac{DC}{CF} \times \frac{CF}{OF} \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y\end{aligned}$$

מהנוסחאות האלה נובעות כי

$$\begin{aligned}
 \tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} \\
 &= \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} \\
 &= \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\sin y \cos x}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} \\
 &= \frac{\frac{\sin x \cancel{\cos y}}{\cancel{\cos x} \cos y} + \frac{\sin y \cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x} \cos y}}{\frac{\cancel{\cos x} \cos y}{\cancel{\cos x} \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} \\
 &= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} \\
 &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}
 \end{aligned}$$

$$\sin(x+y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

$$\sin(x-y) = \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$\cos(x-y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y)$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \tan(y)}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 2 \cos^2(x) - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2(x) \end{aligned}$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(x))$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos(x))$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x)$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \quad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad 1 + \cot^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x) \quad \tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$

עוד זיהויות טריגונומטריות*

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(x))$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos(x))$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$2 \sin(x) \cos(y) = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$

$$2 \cos(x) \sin(y) = \sin(x+y) - \sin(x-y)$$

$$2 \cos(x) \cos(y) = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

$$-2 \sin(x) \sin(y) = \cos(x+y) - \cos(x-y)$$

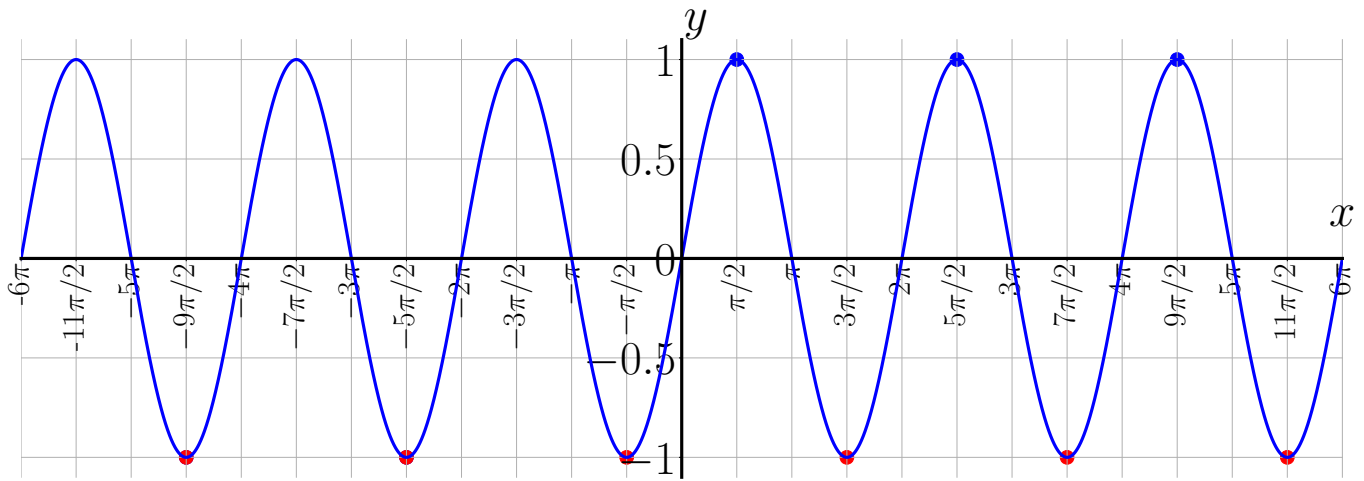
$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin(3x) = 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x) \quad \cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$$

גרפים של פונקציות טריגונומטריות

$$y = \sin x$$



ערכים עיקריים:

$$\sin(0) = 0, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \sin(\pi) = 0, \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1, \quad \sin(2\pi) = 0.$$

פונקציה אי-זוגית:

$$\sin(-x) = -\sin(x).$$

פונקציה מחזורית עם מחזור $T = 2\pi$:

$$\sin(x + 2\pi n) = \sin(x), \quad n \in \mathbb{Z}$$

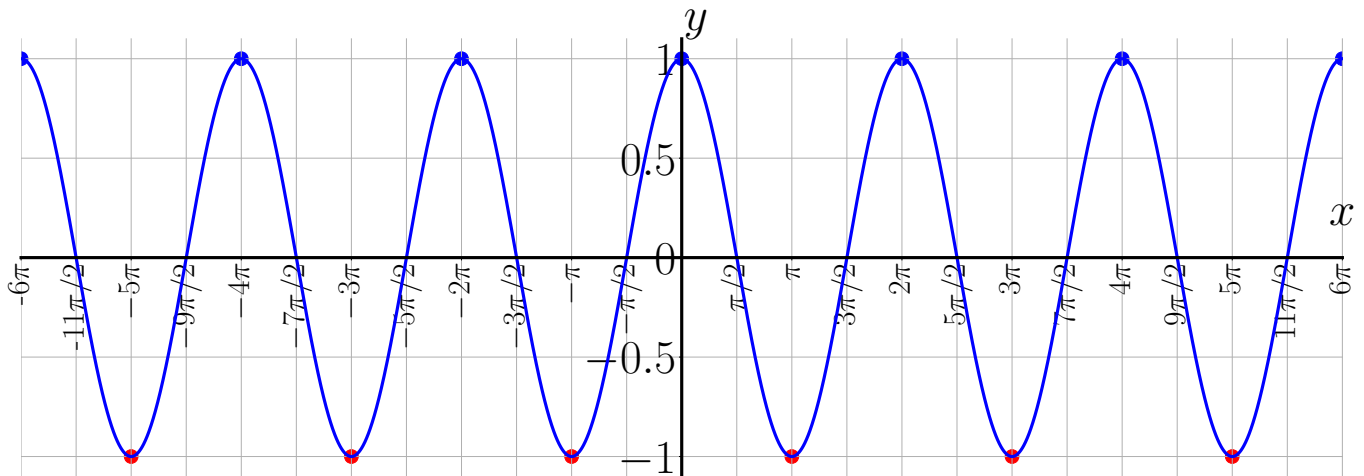
ערכים מחזוריים:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1, \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1, \quad \sin(n\pi) = 0, \quad \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

ערכים שיקופיים:

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \sin(x - \pi) = -\sin x, \quad \sin(x + \pi) = -\sin(x).$$

$$y = \cos x$$



ערכים עיקריים:

$$\cos(0) = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \cos(\pi) = -1, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \quad \cos(2\pi) = 1.$$

פונקציה זוגית:

$$\cos(-x) = \cos(x) .$$

פונקציה מחזורית עם מחזור $T = 2\pi$:

$$\cos(x + 2\pi n) = \cos(x) , \quad n \in \mathbb{Z}$$

ערכים מחזוריים:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0 , \quad \cos(2\pi n) = 1 , \quad \cos(\pi + 2\pi n) = -1 , \quad \cos(n\pi) = (-1)^n , \quad n \in \mathbb{Z} .$$

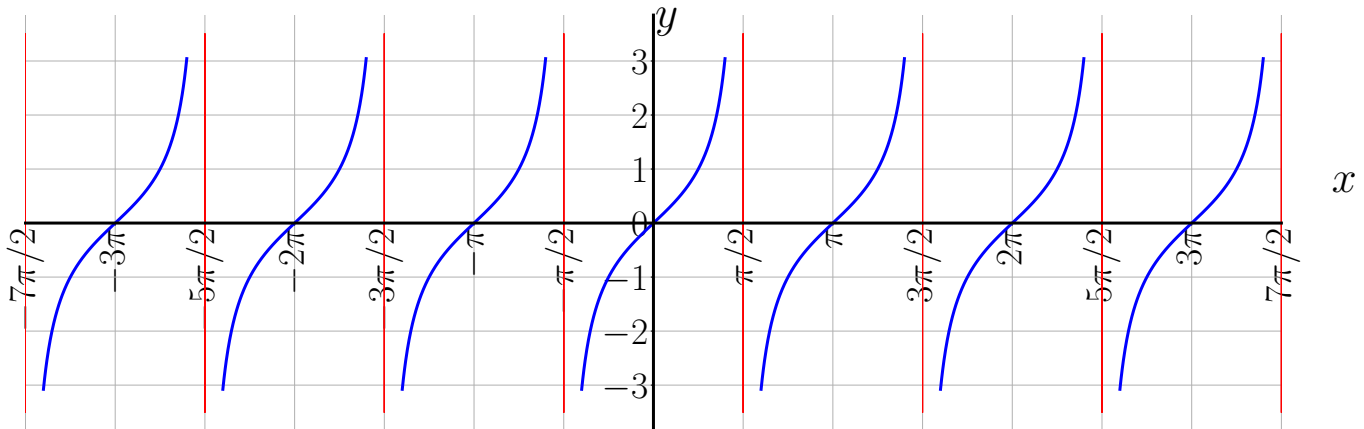
ערכים שיקופיים:

$$\cos(\pi - x) = -\cos x , \quad \cos(x - \pi) = -\cos x , \quad \cos(x + \pi) = -\cos(x) .$$

$$y = \tan x$$

תחום הגדרה:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$



ערכים עיקריים:

$$\tan(0) = 0 , \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 , \quad \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 , \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \infty , \quad \tan\left(-\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow -\infty .$$

פונקציה אי-זוגית:

$$\tan(-x) = -\tan(x) .$$

פונקציה מחזורית עם מחזור $T = \pi$:

$$\tan(x + \pi n) = \tan(x) , \quad n \in \mathbb{Z}$$

ערכים מחזוריים:

$$\tan\left(\frac{|n|\pi}{2}\right) \rightarrow \infty , \quad \tan\left(-\frac{|n|\pi}{2}\right) \rightarrow -\infty , \quad \tan(n\pi) = 0 , \quad n \in \mathbb{Z} .$$

ערכים שיקופיים:

$$\tan(\pi - x) = -\tan x , \quad \tan(x - \pi) = \tan x , \quad \tan(x + \pi) = \tan(x) .$$

פונקציות טריגונומטריות הפוכות

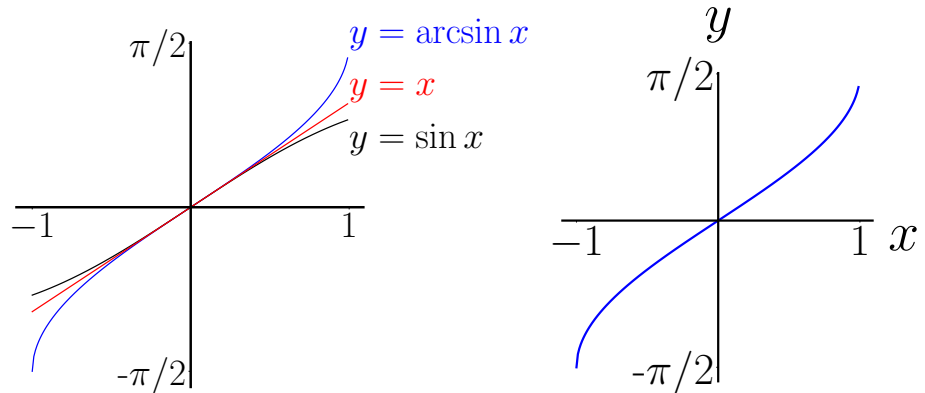
$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \arctan x.$$

$$\underline{y = \arcsin x}$$

$y = \arcsin x$ היא פונקציה הפוכה ל- $y = \sin x$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

$$y = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad -1 \leq y \leq 1$$

לכן תחום ההגדרה של $y = \arcsin x$ הוא $-1 \leq x \leq 1$ והתמונה של $y = \arcsin x$ היא $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.



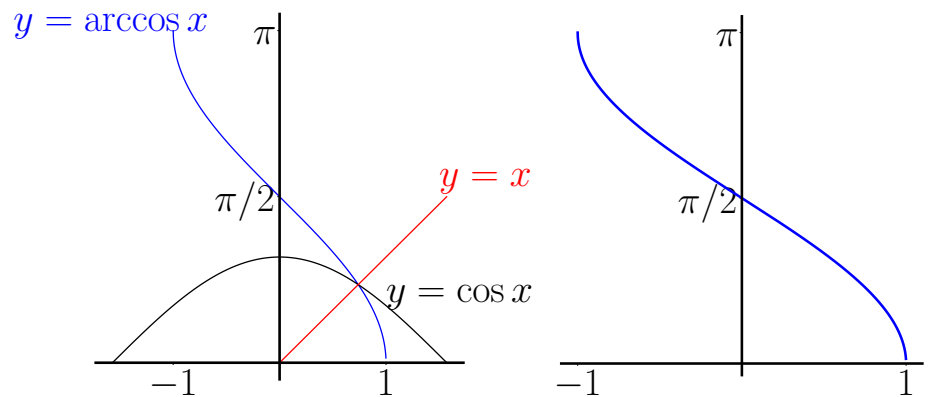
$$\underline{y = \arccos x}$$

$y = \arccos x$ היא פונקציה הפוכה ל- $y = \cos x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$. זאת אומרת

$$y = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad -1 \leq y \leq 1$$

לכן

$$y = \arccos x, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \pi.$$



$$\underline{y = \arctan x}$$

$y = \arctan x$ היא פונקציה הפוכה ל- $y = \tan x$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. זאת אומרת

$$y = \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\infty \leq y \leq \infty$$