המחלקה למדעי המחשב

תשפ"ד 28/09/23
08 : 10 – 11 : 10

חדוא 2

מועד א'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר, ד"ר אבנר סגל,

תשפ"ג סמסטר ב'

השאלון מכיל 8 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (2 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות בלבד מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** בלבד מתוך **שתיים**.

==

שאלות 1-2 חובה

שאלה 1

נתונה הפונקציה

$$f\left(x,y\right)=2x^{2}+y^{3}-2xy+10$$

א) (10 נק') מצאו את נקודות המקסימום והמינימום המקומי של הפונקציה $f\left(x,y\right)$.

ב) (10 נק') מצאו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימאלי אותם מקבלת הפונקציה $f\left(x,y\right)$ בתחום החסום על ידי הקווים $x=0,y=1,x-y=0$.

שאלה 2

1. (10 נק') מצאו את תחום ההתכנסות של טור החזקות

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(3-x\right)^{n}}{3^{n}\sqrt{n}}$$

וקבעו האם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר בנקודה $x=6$.

2. (12 נק') סרטטו את תחום האינטגרציה, החליפו את סדר האינטגרציה וחשבו:

$$\int_{-1}^{0}dx\int_{\sqrt{-x}}^{1}\cos\left(\pi y^{3}\right)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{\sqrt{x}}^{1}\cos\left(\pi y^{3}\right)dy$$

שימו לב: את האינטגרל תוכלו לחשב רק לאחר החלפת סדר האינטגרציה.

יש לפתור 3 שאלות מבין השאלות 3-6

שאלה 3

נתונה הפונקציה $f\left(x,y\right)=x^2y^3-xy^2+3xy-4$ והנקודה $M\left(1,1\right)$.

1. (12 נק') הראו כי לכל וקטור יחידה $\widehat{a}$ מתקיים כי

$$\frac{df}{d\widehat{a}}\left(M\right)\leq\sqrt{32}$$

2. (4 נק') מצאו וקטור $\bar{b}\neq\bar{0}$ הניצב לוקטור $\left(1,1,8\right)$ ומקביל למישור המשיק לגרף הפונקציה $f\left(x,y\right)$ בנקודה M.

שאלה 4

1. (12 נק') מצאו את משוואת המישור המכיל את הישרים

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ y+2z+4=0 \end{cases},\quad \begin{cases} 2x+y-2=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$$

וקבעו עבור איזה ערך של הפרמטר a תהיה הנקודה $P\left(2,-2,a\right)$ שייכת למישור זה.

2. (4 נק') הוכיחו או הפריכו באמצעות דוגמא נגדית: אם הסדרה $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת אז הסדרה $\left(a_n^2\right)_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת.

שאלה 5

1. (10 נק') חשבו את נפח הגוף החסום על ידי המשטחים

$$x=0,\ y=0\ y+x=2,\ z=0\ z=8-2x^2$$

וסרטטו אותו במערכת הצירים xyz.

2. (6 נק') פתרו את בעית קושי

$$\begin{cases} y'=xy+x \\ y\left(0\right)=1 \end{cases}$$

שאלה 6

1. (12 נק') סרטטו את רבע הטבעת

$$D:\begin{cases} 1\le x^2+y^2\le 4\\ x,y\ge 0\end{cases}$$

ומצאו את המסה שלה, בהינתן צפיפות המסה $\mu\left(x,y\right)=\frac{x}{x^2+y^2}$.

2. (4 נק') הגדירו מהו טור מתכנס בתנאי ותנו דוגמא לטור כזה.

<u>יש לפתור שאלה 1 מבין השאלות 7-8</u>

שאלה 7 על המשטח $z=\sqrt{y+2}$ מצאו את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $A\left(-1,1,0\right)$.

שאלה 8 קבעו עבור אילו ערכים של הפרמטר z יתכנס הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\pi n\right)}{n^{\frac{1}{z}}}$$

פתרונות

שאלה 1

א) תחילה, נמצא את הנקודות הקריטיות של הפונקציה

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4x-2y \\ 3y^2-2x \end{pmatrix} \overset{!}{=} \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x = y \\ 3y^2 = 2x \end{cases}$$

על ידי הצבה של המשוואה הראשונה במשוואה השניה נקבל

$$6x^2 = x \;\; \Rightarrow \;\; x = 0, \frac{1}{6}$$

כלומר, מתקבלות הנקודות הקריטיות הבאות

$$P_1\left(0,0\right), \;\; P_2\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$$

בכדי לסווג את הנקודות הקריטיות, נחשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני ונשתמש במבחן הנגזרת השניה

$$f''_{xx} = 4, \;\; f''_{yy} = 6y, \;\; f''_{xy} = f''_{yx} = -2$$

ולכן

$$\Delta\left(P_1\right) = 4\cdot 0 - \left(-2\right)^2 = -4 < 0$$

$$\Delta\left(P_2\right) = 4\cdot \frac{6}{3} - \left(-2\right)^2 = 4 > 0$$

ולכן, הנקודה P_1 היא נקודת אוכף ו-P_2 היא נקודת קיצון ומכיוון ש-$f''_{xx}\left(P_2\right) > 0$ (וגם $f''_{yy}\left(P_2\right) > 0$) מדובר בנקודת מינימום.

ב) תחילה, נשים לב שהנקודה P_2 נמצאת בפנים התחום והנקודה P_1 היא אחד הקודקודים ולכן P_2 היא הנקודה הקריטית הפנימית היחידה בתחום. נסמן את הקודקודים הנוספים ב-

$$P_3\left(0,1\right), \;\; P_4\left(1,1\right)$$

כעת נבדוק נקודות קריטיות על השפה ומכיוון שהיא מורכבת משלושה קווים, נפריד למקרים

- הישר האנכי נתון על ידי

$$\begin{cases} x = 0 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

ועל ידי הצבה של $x = 0$ בפונקציה נקבל

$$g_1\left(y\right) = f\left(0,y\right) = y^3 + 10$$

שהנקודות הקריטיות שלו מתקבלות כאשר

$$g_1'\left(y\right) = 3y^2 \overset{!}{=} 0 \;\; \Rightarrow \;\; y = 0$$

כלומר, בנקודה $A = P_1$.

- הישר האופקי נתון על ידי

$$\begin{cases} y=1 \\ 0\le x\le 1 \end{cases}$$

ועל ידי הצבה של $y=1$ בפונקציה נקבל

$$g_2(x)=f(x,1)=2x^2+1-2x+10=2x^2-2x+11$$

שהנקודות הקריטיות שלו מתקבלות כאשר

$$g_2'(x)=4x-2\overset{!}{=}0 \;\Rightarrow\; x=\frac{1}{2}$$

כלומר, נקודה קריטית מתקבלת בנקודה $P_5\left(\frac{1}{2},1\right)$.

- הישר האלכסוני נתון על ידי

$$\begin{cases} y=x \\ 0\le x\le 1 \end{cases}$$

ועל ידי הצבה של $x=0$ בפונקציה נקבל

$$g_3(x)=f(x,x)=x^3+10$$

שהנקודות הקריטיות שלו מתקבלות כאשר

$$g_3'(x)=3x^2\overset{!}{=}0 \;\Rightarrow\; x=0$$

כלומר, בנקודה $A=P_1$.

כאשר נציב את כל הנקודות הקריטיות שהתקבלו ואת הקודקודים של המשולש, נקבל את הערכים הבאים

$$\begin{aligned} f(P_1)&=g_1(0)=10 \\ f(P_2)&=\frac{539}{54}\approx 9.98 \\ f(P_3)&=g_1(1)=11 \\ f(P_4)&=g_3(1)=11 \\ f(P_5)&=g_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{21}{2}=10.5 \end{aligned}$$

לכן, המקסימום של הפונקציה בתחום הוא $f(P_3)=f(P_4)=11$ והמינימום הוא $f(P_2)=\frac{539}{54}$.

שאלה 2

1. נציב $z=3-x$ ונקבל את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{3^n\sqrt{n}}$$

את רדיוס ההתכנסות של הטור נחשב באמצעות נוסחאת קושי

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\left(3\sqrt[2n]{n}\right)=3$$

כלומר, הטור מתכנס בהחלט עבור $|z|<3$ ומתבדר עבור $|z|>3$. כעת נבדוק את התכנסות הטור בקצוות הקטע. אם נציב את הערך $z=3$ נקבל את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

שהוא טור p-הרמוני מתבדר (כאן $p=\frac{1}{2}<1$). אם, לעומת זאת, נציב $z=-3$ נקבל את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

שהוא טור מתכנס, לפי מבחן לייבניץ (פירוט בהמשך), ומכאן שהטור מתכנס בתנאי עבור $z=-3$ (שכן טור הערכים המוחלטים מתבדר לפי המקרה $z=3$).
<u>שימו לב:</u> בדיקת ההתכנסות לפי מבחן לייבניץ מוכיחה התכנסות אבל לא התכנסות בתנאי, את זו ניתן להסיק רק מכך שהטור מתכנס אבל לא מתכנס בהחלט.
כעת, נבצע בדיקת התכנסות לטור עבור $z=-3$. בכדי להראות כי הטור מתכנס לפי מבחן לייבניץ, מספיק לשים לב כי הסדרה $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ היא סדרה חיובית, יורדת (שכן הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ פונקציה יורדת בתחום $(0,\infty)$) ושואפת ל-0.
אם כן, תחום ההתכנסות הוא $-3\le z<3$ מהצבה של $z=3-x$ נקבל $-3\le 3-x<3$, כלומר תחום ההתכנסות של הטור הוא הקטע $0<x\le 6$ כאשר ההתכנסות היא בהחלט עבור $0<x<6$ וההתכנסות ב-$x=6$ היא בתנאי.

2. נרשום

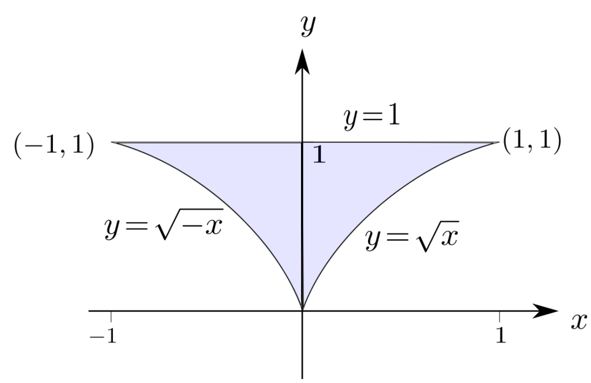
$$I=\int_{-1}^{0}dx\int_{\sqrt{-x}}^{1}\cos\left(\pi y^3\right)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{\sqrt{x}}^{1}\cos\left(\pi y^3\right)dy=\iint_D\cos\left(\pi y^3\right)dxdy$$

כאשר התחום D נתון על ידי

$$D=\left\{(x,y)\mid \begin{array}{c}-1\le x\le 0\\ \sqrt{-x}\le y\le 1\end{array}\right\}\cup\left\{(x,y)\mid \begin{array}{c}0\le x\le 1\\ \sqrt{x}\le y\le 1\end{array}\right\}=\left\{(x,y)\mid \begin{array}{c}0\le y\le 1\\ -y^2\le x\le y^2\end{array}\right\}$$

ולכן,

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \cos\left(\pi y^3\right) dxdy \\ &= \int_0^1 dy \int_{-y^2}^{y^2} \cos\left(\pi y^3\right) dx \\ &= \int_0^1 2y^2 \cos\left(\pi y^3\right) dy \\ &= \left(\frac{2}{3\pi} \sin\left(\pi y^3\right)\right|_{y=0}^{1} = 0 \end{aligned}$$



שאלה 3

1. נחשב, תחילה, את הגרדיאנט של הפונקציה בנקודה

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2xy^3 - y^2 + 3y \\ 3x^2y^2 - 2xy + 3x \end{pmatrix}$$
$$\nabla f\left(M\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

לכן, לכל וקטור יחידה $\widehat{a}$ מתקיים

$$\frac{df}{d\widehat{a}}\left(M\right) = \nabla f\left(M\right) \cdot \widehat{a} = \left|\nabla f\left(M\right)\right| \left|\widehat{a}\right| \cos\theta$$

כאשר θ היא הזווית בין שני הוקטורים. מכיוון ש-$\left|\nabla f\left(M\right)\right| = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32}$ וגם $\left|\widehat{a}\right| = 1$ ומכיוון ש-$\cos\theta \le 1$ מתקיים כי

$$\frac{df}{d\widehat{a}}\left(M\right) \le \sqrt{32}$$

2. בכדי שהווקטור יהיה מקביל למישור המשיק, עליו להיות מאונך לנומרל שלו $\overline{N}=(4,4,-1)$ (שכן הנורמל למישור המשיק לגרף הפונקציה $z=f(x,y)$ בנקודה M הוא $\left(f'_x(M),f'_y(y),-1\right)$). מצד שני, על הוקטור להיות מאונך לוקטור $(1,1,8)$ ועל כן, ניתן לבחור את הוקטור

$$\bar{b}=(4,4,-1)\times(1,1,8)=\begin{vmatrix}\widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k}\\ 4 & 4 & -1\\ 1 & 1 & 8\end{vmatrix}=(33,-33,0)$$

כל וקטור אחר המקיים את דרישות השאלה, מתקבל ככפל בסקלר של הוקטור הזה.

שאלה 4

1. נזכור כי וקטור הכיוון של ישר הנתון כחיתוך של שני מישורים, צריך להיות ניצב לנורמלים שלהם, על כן נחשב את וקטורי הכיוון של הישרים הללו

$$\bar{a}=(1,1,0)\times(0,1,2)=\begin{vmatrix}\widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=(2,-2,1)$$

$$\bar{b}=(2,1,0)\times(1,0,1)=\begin{vmatrix}\widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k}\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=(1,-2,-1)$$

הישרים אינם מקבילים או מתלכדים אך בשאלה נאמר כי ישנו מישור המכיל את שני הישרים, כלומר הם אינם מצטלבים. נוודא זאת על ידי כך שנבדוק כי המרחק ביניהם הוא 0 (כלומר, הם נחתכים). נבחר נקודה על כל אחד מהישרים (על ידי הצבה של $y=0$ במערכת אחת ו-$x=0$ במערכת השניה) $Q(1,0,-2)$ ו-$R(0,2,-1)$ ונחשב את המכפלה הוקטורית בין כיווני הישרים

$$\bar{a}\times\bar{b}=(2,-2,1)\times(1,-2,-1)=\begin{vmatrix}\widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k}\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=(4,3,-2)$$

המרחק בין הישרים נתון על ידי

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{QR}\cdot\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\right|}{\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|}=\frac{|(-1,2,1)\cdot(4,3,-2)|}{|(4,3,-2)|}=\frac{(-1)\cdot 4+2\cdot 3+1\cdot(-2)}{\sqrt{4^2+3^2+(-2)^2}}=0$$

נעיר כי החישוב למעלה לא היה לשווא מכיוון שברוב התוצאות שלו נשתמש בהמשך. תחילה, הנורמל למישור המכיל את שני הישרים נתון על ידי המכפלה הוקטורית בין וקטורי הכיוון $\overline{N}=\bar{a}\times\bar{b}=(4,3,-2)$ ומשוואת המישור מתקבלת על ידי (לאחר הצבה של הנקודה Q)

$$4(x-1)+3(y-0)-2(z+2)=0\iff 4x+3y-2z-8=0$$

בכדי לבדוק עבור איזה פרמטר a הנקודה $P\left(2,-2,a\right)$ תהיה מוכלת במישור, נציב את הנקודה במשוואת המישור

$$8-6-2a-8=0\Rightarrow a=3$$

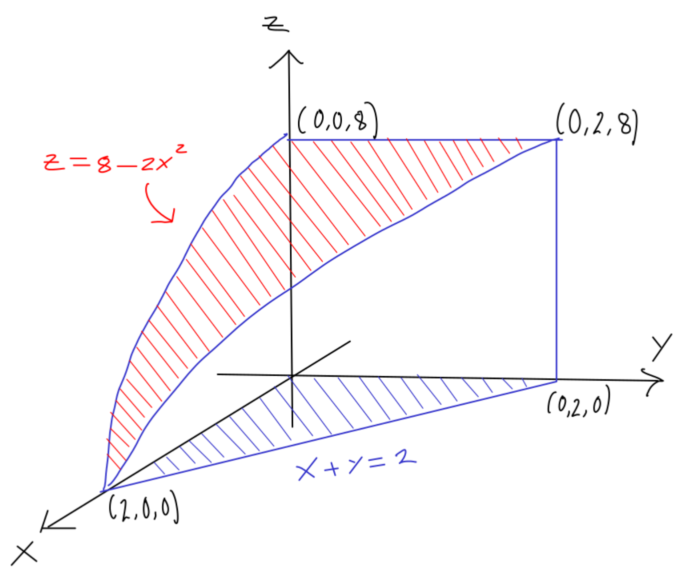
2. הטענה לא נכונה. כדוגמא נגדית, ניקח את הסדרה $a_n=\left(-1\right)^n$, שהיא סדרה מתבדרת למרות שהסדרה $a_n^2=1$ היא סדרה מתכנסת (קבועה).

שאלה 5

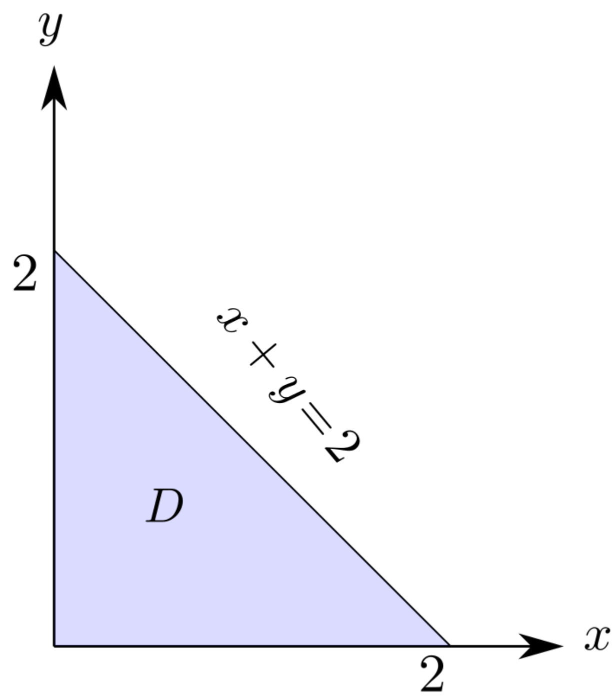
1. הגוף בשאלה הוא הנפח החסום מתחת לגרף הפונקציה $z=8-2x^2$ מעלה המשולש במישור שקודקודיו הם $\left(2,0\right),\left(0,2\right),\left(0,0\right)$. לכן, הנפח נתון על ידי

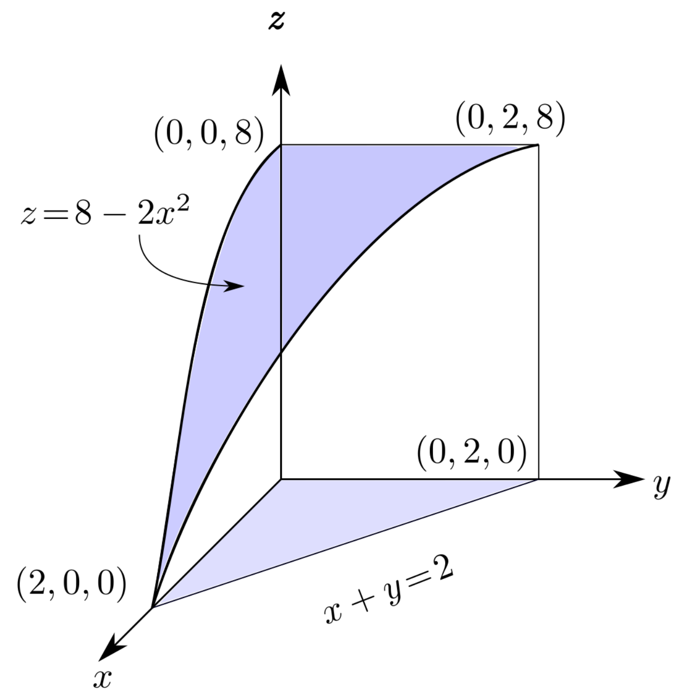
$$\begin{aligned}
V&=\iint_D\left(8-2x^2\right)dxdy\\
&=\int_0^2dx\int_0^{2-x}\left(8-2x^2\right)dy\\
&=\int_0^2\left(8-2x^2\right)\left(2-x\right)dx\\
&=\int_0^2\left(16-8x-4x^2+2x^3\right)dx\\
&=\left(16x-4x^2-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}x^4\right|_{x=0}^{2}=\frac{40}{3}
\end{aligned}$$

סרטוט ידני:



סרטוט ממוחשב:





2. זו משוואה הניתנת להפרדת משתנים

$$\begin{aligned} y' &= xy + x = x(y+1) \\ \Rightarrow \int \frac{dy}{y+1} &= \int x dx \\ \Rightarrow \ln|y+1| &= \frac{x^2}{2} + C \\ \Rightarrow y(x) &= Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1 \end{aligned}$$

ואם נציב את תנאי ההתחלה, נקבל

$$1 = y(0) = Ce^0 - 1 \Rightarrow C = 2$$

ולכן, הפתרון לבעית קשוי זו הוא

$$y(x) = 2e^{\frac{x^2}{2}} - 1$$

שאלה 6

1. אם נרשום

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ \rho = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

נראה שאי השיוויון הראשון שקול לכך ש-$1 \le \rho \le 2$. מאי השיוויון האחרים מקבלים

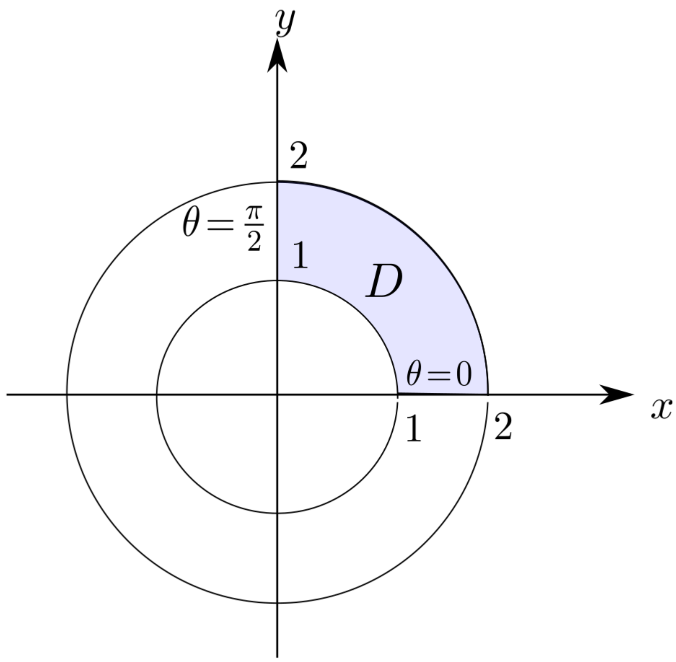
$$x = \rho\cos\varphi \ge 0 \Rightarrow \cos\varphi \ge 0 \Rightarrow 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \text{ or } \frac{3\pi}{2} \le \varphi \le 2\pi$$
$$y = \rho\sin\varphi \ge 0 \Rightarrow \sin\varphi \ge 0 \Rightarrow 0 \le \varphi \le \pi$$

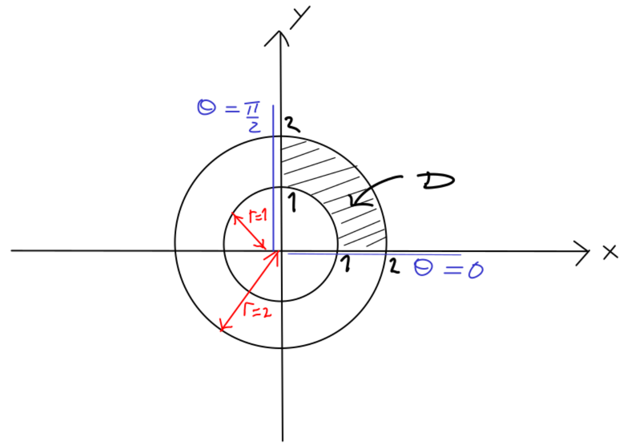
ולכן, ניתן לתאר את התחום בקואורדינטות קוטביות על ידי

$$D : \begin{cases} 1 \le \rho \le 2 \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

מכאן, שהמסה של הגוף נתונה על ידי

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \rho(x,y)\,dxdy \\ &= \iint_D \frac{x}{x^2+y^2} dxdy \\ &= \iint_D \frac{\rho\cos\varphi}{\rho^2} \rho d\rho d\varphi \\ &= \iint_D \cos\varphi d\rho d\varphi \\ &= \int_1^2 d\rho \int_0^{\pi 2} \cos\varphi d\varphi \\ &= (2-1)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)\right) = 1 \end{aligned}$$





2. טור מתכנס בתנאי הוא טור מתכנס שאינו מתכנס בהחלט. בפרט, טור כזה איננו טור חיובי. דוגמא לטור כזה היא הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ משאלה 2.

שאלה 7

המשטח הוא חצי הגליל הפרבולי $y=z^2-2$, המקביל לציר ה-x, שעבורו $z\geq 0$. בנוסף, נשים לב שבהכרח גם $y+2\geq 0$. נניח כי $B\left(x,y,z\right)$ היא הנקודה הקרובה ביותר על המשטח ל-A. אם כן, אז $z=\sqrt{y+2}$ (על פי משוואת המשטח) אבל גם $x=-1$ שכן המרחק שלה מהנקודה A הוא

$$d\left(A,B\right)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2+(z-0)^2}=\sqrt{(x+1)^2+\left[(y-1)^2+y+2\right]}$$

מכיוון שהמשטח מקביל לציר ה-x, ניתן לשנות את קואורדינטה זו מבלי "לצאת" מהמשטח ולכן קל לראות שבנקודה שבה המרחק הוא מינימאלי, הגורם $(x-1)^2$ יתאפס, כלומר $x=1$. לכן,

$$d\left(A,B\right)=\sqrt{(y-1)^2+y+2}=\sqrt{y^2-y+3}=\sqrt{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}$$

יהיה מינימאלי כאשר הגורם $\left(y-\frac{1}{2}\right)^2$ יתאפס, כלומר כאשר $y=\frac{1}{2}$ (ניתן היה לחילופין לגזור את הפונקציה לפי y ולהסביר מדוע הנקודה הקריטית היא מינימום). לסיכום, הקואורדינטות של הנקודה הקרובה ביותר ל-A המשטח נתונות על ידי

$$B\left(-1,\frac{1}{2},\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$$

שאלה 8

תחילה, נזכור כי $\cos(\pi n) = (-1)^n$ ולכן, ניתן לכתוב טור זה בצורה הבאה

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{z}}}$$

כעת, נשים לב שכל עוד $z < 0$, החזקה של n במכנה שלילית ולכן האיבר הכללי של הטור לא יקיים את התנאי ההכרחי להתכנסות

$$\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{z}}} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

שכן

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{z}}}\right| = n^{\frac{1}{|z|}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

לכן, נניח כי מעתה $z > 0$ (ונשים לב שעבור $z = 0$ הטור לא מוגדר כלל).
נבדוק מתי טור זה מתכנס בהחלט

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{z}}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{z}}}$$

זהו טור p-הרמוני ומתכנס כאשר $\frac{1}{z} > 1$, כלומר כאשר $0 < z < 1$ הטור שלנו מתכנס בהחלט.
עבור $0 < \frac{1}{z} \leq 1$ לעומת זאת, טור הערכים המוחלטים מתבדר (מאותה הסיבה), אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{z}}}$ יתכנס בכל זאת (בתנאי) לפי מבחן לייבניץ, שכן הסדרה $\frac{1}{n^{\frac{1}{z}}}$ הינה סדרה חיובית, יורדת ושואפת ל-0 עבור ערכים אלו של z.
לסיכום, הטור שלנו מתכנס בהחלט עבור $0 < z < 1$ ומתכנס בתנאי עבור $1 \leq z$.