תרגילים: NP שלמות

שאלה 1 האם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה.
אם $A \leq_P \bar{A}$ וגם $A \in NP$ אזי $NP = Co\,NP$.

שאלה 2 הוכיחו כי לכל 3 בעיות A, B, C, אם $A \leq_P B$ וגם $B \leq_P C$ אזי $A \leq_P C$.

שאלה 3

תשובות

שאלה 1 הטענה שקולה לבעיה פתוחה:

ידוע כי לכל בעייה $A \in P \subseteq NP$ מתקיים $A \leq_P \bar{A}$ (למעט $A = \emptyset$ ו- $A = \Sigma^*$), וזה לא אומר כלום לגבי השאלה $NP = CoNP$.
רק אם A היא NP- שלמה, יכול להתקיים לפי הנתון ש- $NP = CoNP$.

שאלה 2 תהי f פונקצית הרדוקציה $A \leq_P B$ שמקיימת $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$ לכל $w \in \Sigma^*$.

תהי g פונקצית הרדוקציה $B \leq_P C$ שמקיימת $w \in B \Leftrightarrow f(w) \in C$ לכל $w \in \Sigma^*$.

נוכיח שקיימת רדוקציה $A \leq_P C$.

פונקצית הרדוקציה h

לכל $w \in \Sigma^*$ נגדיר $h(w) = g(f(w))$.

נכונות הרדוקציה

שלב 1. נוכיח כי $w \in A \Leftrightarrow h(w) \in C$.

- אם $h(w) = g(f(w)) \in C \Leftarrow f(w) \in B \Leftarrow w \in A$.
- אם $h(w) = g(f(w)) \notin C \Leftarrow f(w) \notin B \Leftarrow w \notin A$.

שלב 2. נוכיח כי h חשיבה בזמן פולינומיאלי:

נסמן ב- p_f את הפולינומם של f.

נסמן ב- p_g את הפולינומם של g.

אזי לכל $w \in \Sigma^*$, זמן החישוב של $h(w)$ חסום על ידי :

$$p_f(|w|) + p_g(|f(w)|) \leq p_f(|w|) + p_g(p_f(|w|)) = p_f(|w|) + (p_f \circ p_f)(|w|)$$

כאשר $p_f \circ p_f$ הוא הרכבה של שני פולינומים. לכן ניתן לחשב את $h(w)$ בזמן פולינומיאלי בגודל $|w|$.

שאלה 3