שאלה 1 (40 נקודות)

נתונה הפונקציה

$$z(x,y) = 3x^2 + 4x + 8y^2 \ .$$

א) (20 נק') מצאו את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה.

ב) (20 נק') בתחום הסגור המוגבל ע"י הקו

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

מצאו את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר של הפונקציה.

שאלה 2 (30 נקודות)

א) (10 נק') נתונות הנקודות

$$A(4,0,1) \ , \quad B(0,2,1) \ , \quad C(1,1,0) \ , \quad P(1,-1,2) \ .$$

מצאו את משוואת המישור העובר דרך הנקודות ABC וחשבו את השיקוף של הנקודה P ביחס אליו.

ב) (15 נק') מצאו את משוואת המישור המשיק למשטח הרמה

$$f(x,y,z) = e^{3z}(y^4 + 2x^2) \ ,$$

העובר דרך הנקודה $P(1,1,2)$.

ג) (5 נק') מצאו את המצב ההדדי בין המישור שמצאתם בסעיף ב' לבין המישור

$$2x + 3y - 4z + 2 = 0 \ .$$

שאלה 3 (30 נקודות)

א) (15 נקודות) מצאו את המרחק המינימלי בין המשטח

$$9x^2 - 54x + 4y^2 - 16y + 4z^2 + 8z + 65 = 0$$

למישור $y = 16$.

ב) (15 נקודות)
עבור הפונקציה

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 - 2z \ .$$

בדקו האם קיים וקטור $\bar{a}$ כך שבנקודה $P(1,3,1)$, הנגזרת הכיוונית, $\dfrac{df(p)}{d\bar{a}}$ שווה 10?

פתרונות

שאלה 1

א)

$$\left.\begin{array}{ll} f_x = & 4+6x \overset{!}{=} 0 \\ f_y = & 16y \quad \overset{!}{=} 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (x,y) = \left(-\frac{2}{3}, 0\right) .$$

$$f''_{xx} = 6 \ , \quad f''_{yy} = 16 \ , \qquad f''_{xy} = 0 \ .$$

$$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 = 96 > 0$$

$f''_{xx} > 0$ ו- $\Delta > 0$ לכן הנקודה $P_0\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ היא נקודת מינימום מקומי.

ב) על השפה $y = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ הפונקציה היא:

$$f_1(x) = f\left(x, \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right) = x^2 + 4x + 8 \ .$$

$$f_1{}'(x) = 4 + 2x \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \ .$$

על השפה $y = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$, כאשר $x=-2$, $y=0$. נסמן את הנקודה $P_1(-2,0)$.

$$f(-2,0) = f_1(-2) = 4 \ .$$

על השפה $y = -\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ הפונקציה היא:

$$f_2(x) = f\left(x, -\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right) = x^2 + 4x + 8 \ .$$

$$f_2{}'(x) = 4 + 2x \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \ .$$

על השפה $y = -\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$, כאשר $x=-2$, $y=0$. נסמן את הנקודה $P_2(-2,0)$.

$$f(-2,0) = f_2(-2) = 4 \ .$$

$f(x,y)$	נקודה
$\frac{-4}{3}$	$P_0\left(-\frac{2}{3},0\right)$
4	$P_1\left(-2,0\right)$
20	$P_2\left(2,0\right)$
8	$P_3\left(0,1\right)$
8	$P_4\left(0,-1\right)$

ערך הגדול ביותר: 20 בנקודה $(2,0)$.

ערך הקטן ביותר: $\frac{-4}{3}$ בנקודה $\left(-\frac{-2}{3},0\right)$.

<u>שאלה 2</u>

א)

$$\overline{AB}=(-4,2,0)\ ,\qquad \overline{AC}=(-3,1,-1)\ .$$

הווקטור הנורמל של המישור הוא:

$$\bar{n}=\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(-2,-4,2)\ .$$

$$-2(x-4)-4y+2(z-1)=0 \qquad \Rightarrow \qquad -2x-4y+2z+6=0\ .$$

משוואת הישר העובר דרך ההיטל של D ביחס למישור, והנקודה D:

$$x=1-2t\ ,\qquad y=-1-4t\ ,\qquad z=2+2t\ .$$

נציב משוואת הישר במשוואת המישור:

$$12+24t=0 \qquad \Rightarrow \qquad t=-\frac{1}{2}\ .$$

נציב את הערך $t_0=-\frac{1}{2}$ במשוואת המישור ונקבל את הנקודה של ההיטל של D ביחס למישור ABC:

$$P'=M\left(t=-\frac{1}{2}\right)=(2,1,1)\ .$$

שיקוף:

$$P^*=M\left(2t_0\right)=M\left(-1\right)=(3,3,0)\ .$$

ב)

$$\nabla f=\left(4xe^{3z},4y^3e^{3z},3e^{3z}\left(2x^2+y^4\right)\right)=e^{3z}\left(4x,4y^3,3\left(2x^2+y^4\right)\right)$$

$$\nabla f(1,1,2)=e^6\left(4,4,9\right)\ .$$

לכן הווקטור הנורמל של המישור המשיק למשטח בנקודה $P(1,1,2)$ הוא $(4,4,9)$. המשוואה של המישור המשיק למשטח בנקודה P היא

$$4(x-1)+4(y-1)+9(z-2)=0 \qquad \Rightarrow \qquad 4x+4y+9z-26=0\ .$$

ג) הווקטור הנורמל של המישור המשיק למשטח הוא $n_1=(4,4,9)$, והנורמל של המישור $2x+3y-4z+2=0$ הוא $n_2=(2,3,-4)$.

$$n_1 \nparallel n_2\ ,$$

לכן המישורים לא מקבילים, ולכן הם מתלכדים.

שאלה 3

א) נרשום את המשטח בצורה קנונית:

$$\frac{1}{4}(x-3)^2+\frac{1}{9}(y-2)^2+\frac{1}{9}(z+1)^2=1$$

□ המשטח הוא אליפסויד, אשר מרכזו נמצא על הנקודה $(3,2,-1)$. הנקודה על המשטח הקרובה ביותר למישור $y=16$ נמצאת בקדקוד של האליפסויד שנמצא בנקודה $(3,5,-1)$.

ב) הערך המקסימלי של הנגזרת הכיוונית הוא $|\nabla f(P)|$. נחשב את $\nabla f(P)$:

$$\nabla f(p)=\left(3x^2,2y,-2\right)(P)=(3,6,-2)\ .$$

$$|\nabla f(P)|=|(3,6,-2)|=\sqrt{49}=7\ .$$

לכן הערך המקסימלי של $\frac{df(P)}{d\bar{a}}$ בנקודה P בכיוון $\bar{a}$ הוא 7. כלומר

$$\frac{df(P)}{d\bar{a}}\leq 7\ .$$

לכן לא קיים ווקטור $\bar{a}$ כך ש- $\frac{df(P)}{d\bar{a}}=10$.