

שאלות למבחן חדו"א 1 סמסטר ב' תשפ"ד מועד ב'

מרצה - זהבה צבי

תאריך הבחינה : 24/09/2024

משך הבחינה - 3 שעות

מבנה בחינה והוראות לנבחן: בבחינה 8 שאלות.

כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט לא גרפי.

שאלות 1 ו-2 - חובה!

1.א. חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$ לפי הסעיפים הבאים: , תחום הגדרה , נקודות חיתוך עם הצירים , סימני הפונקציה , זוגיות , אסימפטוטות , תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון , תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה ונקודות פיתול. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $|f(x)|$.

2. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x \ln x) \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin(e^x)}{x^2 + 1} \quad \text{ג. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \tan(3x)}{x^3 - x^2} \quad \text{ד. } \lim_{x \rightarrow e} (\ln x)^{\frac{1}{x-e}}$$

ענו על 3 מתוך 4 השאלות 3 - 6

3. חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int \frac{x^4 - x^3 + x^2 + x + 2}{(x^2 - 1)(x - 1)} dx \quad \text{ב. } \int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx$$

ג. קבעו האם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{dx}{\ln(e^x - 1)}$ מתכנס או מתבדר. נמקו את תשובתכם.

4. א. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[0, 1]$ ומקיימת $f(1) > 1$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

1. אם $f(0) < 1$ אז קיימת נקודה $c \in [0, 1]$ כך ש- $f(c) = c$.

2. אם $f(0) < 0$ אז קיימת נקודה $c \in [0, 1]$ כך ש- $f(c) = c$.

ב. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) ונניח כי $f'(x) \neq 1$ לכל $x \in (a, b)$. הוכיחו שלמשוואה $f(x) = x$ יש לכל היותר פתרון אחד בקטע $[a, b]$.

אין קשר בין הסעיפים בשאלה זו.

5. א. כמה פתרונות יש למשוואה $e^x(2-x) = e$? הוכיחו את תשובתכם.

ב. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בנקודה $x_0 \in \mathbb{R}$ ונסתכל על הפונקציה $g(x) = f(|x|)$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

1. הפונקציה $g(x)$ גזירה ב- x_0 .

2. אם $x_0 \neq 0$ אז $g(x)$ גזירה ב- x_0 .

6. א. ישר ששיפועו 2 משיק לגרף הפונקציה $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$. חשבו את השטח הכלוא בין הגרף הפונקציה, המשיק וציר ה- x .

ב. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ומקיימת לכל $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) < x$. כמו כן נתון כי $f(0) = 0$. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $f(x) < \frac{x^2}{2}$.

ענו על 1 מתוך 2 השאלות 7 – 8

7. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה ב- \mathbb{R} . הוכיחו שלמשוואה $f(x) = 0$ יש בדיוק שני פתרונות. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית: למשוואה $f'(x) = 0$ יש בדיוק פתרון אחד.

8. קבעו האם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x} dx$ מתכנס או מתבדר. הוכיחו את תשובתכם.