המחלקה למדעי המחשב

תשפ"ד 28/09/23
$08:10 - 11:10$

חדוא 2

מועד א'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר, ד"ר סטיאנוב פבל, ד"ר אבנר סגל

תשפ"ג סמסטר קיץ'

השאלון מכיל 8 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

<u>הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה</u>

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

<u>חומר עזר</u>

- דפי נוסחאות של הקורס (2 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

<u>אחר / הערות</u>

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות <u>בלבד</u> מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** <u>בלבד</u> מתוך **שתיים**.

==

שאלה 1 **(22 נקודות)**

נתונה הפונקציה

$$z(x,y)=x^2+5y^2+4xy+2y\ .$$

א) (10 נק') מצאו אקסטרמומים לוקליים של פונקציה זו ובררו את סוגן.

ב) (12 נק') בתחום החסום ע"י משולש עם קודקודים $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(3,-3)$ מצאו את הערך הגודל ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה הנתונה.

שאלה 2 **(20 נקודות)**

א) (10 נק') ציירו את תחום האינטגרציה, שנו את סדר האינטגרציה וחשבו:

$$\int_0^2 dx \int_x^{x+2} x\,dy\ .$$

ב) (10 נק') מצאו את תחום ההתכנסות של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^n}{n^2+5}\ .$$

שאלה 3 **(16 נקודות)** נתונה הפונקציה $z=x^2-2xy^2-1$:

א) (12 נק') מצאו את הגרדיאנט של פונקציה זו בנקודה $M(4,3)$ וחשבו $\dfrac{dz(M)}{d\overline{MO}}$ כאשר $O(0,0)$.

ב) (4 נק') מצאו נקודת P על ציר ה- x כך ש- $\dfrac{dz(M)}{d\overline{MP}}=0$.

שאלה 4 **(16 נקודות)**

א) (12 נק')
מצאו את נקודת החיתוך של הישר שעובר דרך שתי הנקודות $A(2,4,2)$ $B(0,2,4)$ עם המישור אשר עובר דרך שלוש נקודות $C(2,0,0)$, $D(0,4,0)$, $E(0,0,2)$.

ב) (4 נק') עבור אילו ערכי p הטור הבא מתכנס:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)^{p^2-5}\ .$$

שאלה 5 __(16 נקודות)__

א) **(12 נק')** חשבו בעזרת אינטגרל כפול את נפח הגוף החסום ע"י המשטחים:

$$x+y=4\ ,\qquad x=2\ ,\qquad y=0\ ,\qquad z=8-y\ ,\qquad z=0\ .$$

ב) **(4 נק')** ציירו את הגוף במערכת צירים תלת מימדית xyz.

שאלה 6 __(16 נקודות)__

א) **(12 נק')** חשבו

$$\oint_L \left(x^2-2xy\right)dx+\left(xy^2+2y\right)dy$$

על שפת הריבוע $OABC$.

$$O(0,0)\ ,\quad A(2,0)\ ,\quad B(2,2)\ ,\quad C(0,2)\ .$$

ב) **(4 נק')** מצאו את הזווית ביו הישר AB ‏($A(4,2,0)$, $B(6,2,4)$) ובין המישור $x=2$.

שאלה 7 __(10 נקודות)__ מצאו נקודה על המשטח

$$x^2+y^2+z^2-4z=4$$

הקרובה ביותר למישור $x+y+z=10$.

שאלה 8 __(10 נקודות)__ מצאו נקודת P על הישר AB הקרובה ביותר למשטח $x^2+y^2=4$ כאשר $A(4,0,0)$, $B(0,3,2)$.

פתרונות

שאלה 1

א)

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= \quad 2x+4y & \overset{!}{=} 0 \\ z'_y &= \quad 4x+10y+2 & \overset{!}{=} 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x=2\ , \quad y=-1\ .$$

$.P\,(2,-1)$

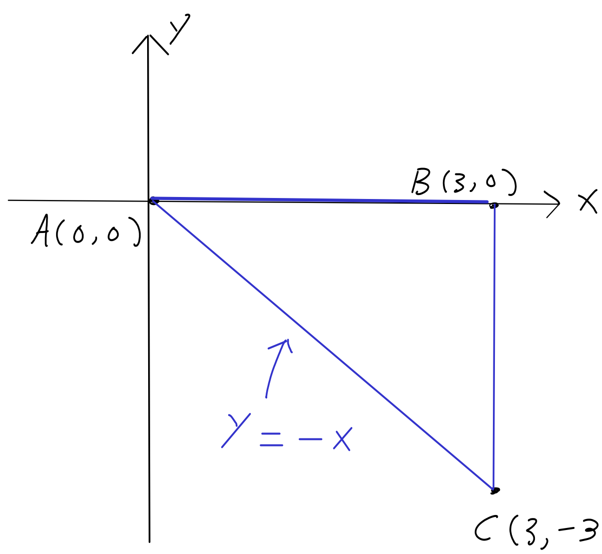
$$z''_{xx}=2\ , \qquad z''_{yy}=10\ , \qquad z''_{xy}=4\ .$$

$$\Delta(P)=z''_{xx}z''_{yy}-\left(z''_{xy}\right)^2=4\ .$$

$z''_{xx}>0$ ו- $\Delta>0$ לכן הנקודה $P_0(2,-1)$ היא נקודת מינימום.

$$z(P_0)=-1\ .$$

ב)



על השפה $y=-x$

$$z_1(x)=z(x,y=-x)=-2x+x^2\ .$$

$$z_1'(x) = -2 + 4x \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{2}\ .$$

בנקודה $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{-1}{2}$. $P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$. ו- $z_1\left(P_1\right) = -\frac{1}{2}$.

<u>על השפה $y = 0$</u>

$$z_2(x) = z(x, y = 0) = x^2\ .$$

$$z_1'(x) = 2x \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0\ .$$

בנקודה $x = 0$, $y = 0$. $P_2\left(0, 0\right)$. ו- $z_2\left(P_2\right) = 0$.

<u>על השפה $x = 3$</u>

$$z_3(y) = z(x = 3, y) = x^2\ .$$

$$z_3'(y) = 14 + 10y \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0\ .$$

בנקודה $x = 3$, $y = -\frac{7}{5}$. $P_3\left(3, -\frac{7}{5}\right)$. ו- $z_2\left(P_3\right) = -\frac{4}{5}$.

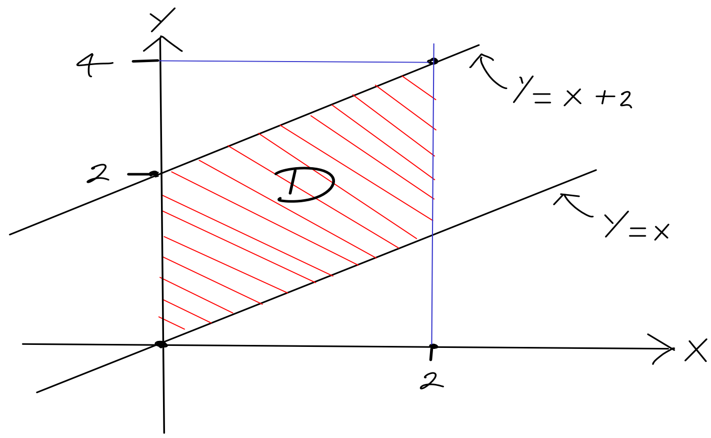
$$z(A) = 0\ , \qquad z(B) = 9\ , \qquad z(C) = 12\ .$$

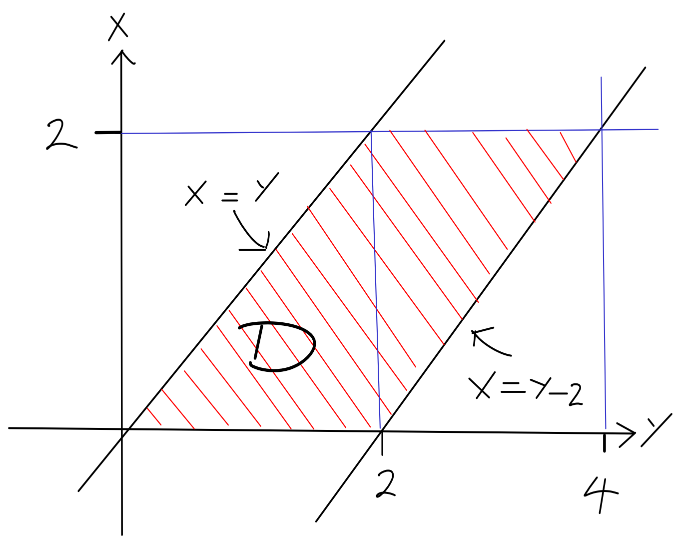
P	$z(x,y)$
$P_0(2,-1)$	-1
$P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$
$P_2\left(0,0\right)$	0
$P_3\left(3, -\frac{7}{5}\right)$	$-\frac{4}{5}$
$A\left(0,0\right)$	0
$B\left(3,0\right)$	9
$C\left(3,-3\right)$	12

$z_{\max} = 12$ בנקודה $C(3,-3)$.
$z_{\min} = -1$ בנקודה $P_0\left(2,-1\right)$.

<u>שאלה 2</u>

א)





$$\int_0^2 dy \int_0^y dx\, x + \int_2^4 dy \int_{y-2}^2 dx\, x = \int_0^2 dy \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y + \int_2^4 dy \left[\frac{x^2}{2}\right]_{y-2}^2$$
$$= \int_0^2 dy\, \frac{y^2}{2} + \int_2^4 dy \left[2 - \frac{(y-2)^2}{2}\right]$$
$$= \left[\frac{y^3}{6}\right]_0^2 + \left[2y - \frac{(y-2)^3}{6}\right]_2^4$$
$$= \frac{8}{6} + 8 - \frac{8}{6} - 4$$
$$= 4\ .$$

ב) נרשום את הטור בצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\ , \qquad a_n = \frac{n}{n^2+5}\ .$$

נחשב את הרדיוס ההתכנסות לפי נוסחת דלמבר:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n}{n^2+5}\right)}{\frac{n+1}{(n+1)^2+5}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n^2+5}{(n+1)^2+5}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \frac{n^2+5}{(n+1)^2+5}$$
$$= \left(1 - \frac{1}{\infty}\right) \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+5}{(n+1)^2+5}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+5}{(n+1)^2+5}\right)\ .$$

כדי לחשב את הגבול הזה אפשר להשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+5}{(x+1)^2+5}\right) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$
$$\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x}{2(x+1)}\right)$$
$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$
$$\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{2}\right)$$
$$= 1\ .$$

לכן

$$R = 1 \ .$$

לכן הטור מתכנס לכל $-1 < x < 1$. נבדוק התכנסות ב- $x = 1$. ב- $x = 1$ הטור נהפך ל-

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ , \qquad a_n = \frac{n}{n^2+5} \ .$$

נבדוק התכנסות בעזרת מבחן השוואה הגבולי. הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, מתבדר.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{n}{n^2+5}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5}{n^2} = 1 \ .$$

לכן, לפי מבחן השוואה הגבולי, כיוון שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר אז גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר. לכן הטור לא מתכנס ב- $x = 1$.

נבדוק התכנסות ב- $x = -1$. ב- $x = -1$ הטור נהפך ל-

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ , \qquad a_n = \frac{(-1)^n n}{n^2+5} \ .$$

נבדוק התכנסות בעזרת מבחן לייבניץ:

נבדוק אם הסדרה $\{a_n\}$, כאשר $a_n = a_n = \frac{n}{n^2+5}$, יורדת מונוטונית.

נרשום $f(x) = \frac{x}{x^2+5}$.

$$f'(x) = \frac{x^2+5-2x^2}{\left(x^2+5\right)^2} = \frac{5-x^2}{\left(x^2+5\right)^2} \ ,$$

$f'(x) < 0$ לכל $x \geq 3$ לכן הסדרה יורדת מונוטונית.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0 \ .$$

לכן לפי מבחן לייבניץ הטור מתכנס ב- $x = -1$. בפרט הטור מתכנס בתנאי.

בסה"כ התחום ההתכנסות של הטור הוא

$$[-1, 1) \ .$$

שאלה 3

א)

$$\nabla z(M) = \left(z'_x, z'_y\right)(M) = \left(2x - 2y^2, -4xy\right)(M) = (-10, -48) \ .$$

$$\frac{dz}{d\overline{OM}} = \frac{\nabla z(M) \cdot \overline{OM}}{|\overline{OM}|} = \frac{(-10,-48)\cdot(4,3)}{|(4,3)|} = \frac{-40-144}{\sqrt{25}} = \frac{-184}{5} \ .$$

ב) נרשום $P = (x, 0)$.

$$\overline{MP} = (x-4, -3) \ .$$

$$\begin{aligned} \nabla z(M) \cdot \overline{MP} &= 0 \\ (-10,-48)\cdot(x-4,-3) &= 0 \\ -10x + 40 + 144 &= 0 \\ 10x &= 184 \\ x &= 18.4 \end{aligned}$$

לכן הנקודה הדרושה היא $(18.4, 0)$.

שאלה 4

א) הווקטור הכיוון של הישר הוא $\overline{AB} = (-2,-2,2)$. נבחר הווקטור הכיוון להיות

$$\bar{a} = (1,1,-1) \ .$$

המשוואתה הישר בצורה פרמטרית היא

$$M(t) = A + t\bar{a} = (0,2,4) + t(1,1,-1) \ ,$$

או בצורה כללית:

$$x = t \ , \qquad y = 2 + t \ , \qquad z = 4 - t \ .$$

$$\overline{DE} = (0,-4,2) \ , \qquad \overline{DC} = (2,-4,0)$$

$$\overline{DC} \times \overline{DE} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 8i + 4j + 8k = (8,4,8) \ .$$

ווקטור הנורמל של המישור הוא $n = (2,1,2)$ ומשוואת המישור היא

$$2x + y + 2z - 4 = 0 \ .$$

נציב משוואת הישר במשוואת המישור:

$$2t + (2+t) + 2(4-t) - 4 = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad t = -6 \ .$$

$$M(6) = (-6,-4,10) \ .$$

<u>שאלה 5</u>

א) הנפח נתון ע"י האינטגרל הכפול

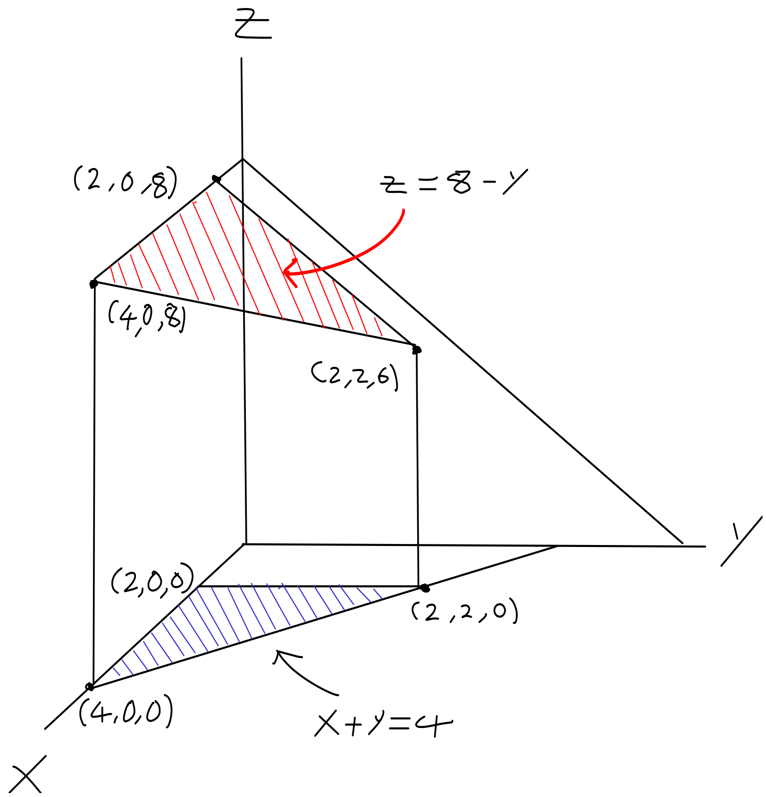
$$V = \iint_D dx\, dy\, (8-y)$$

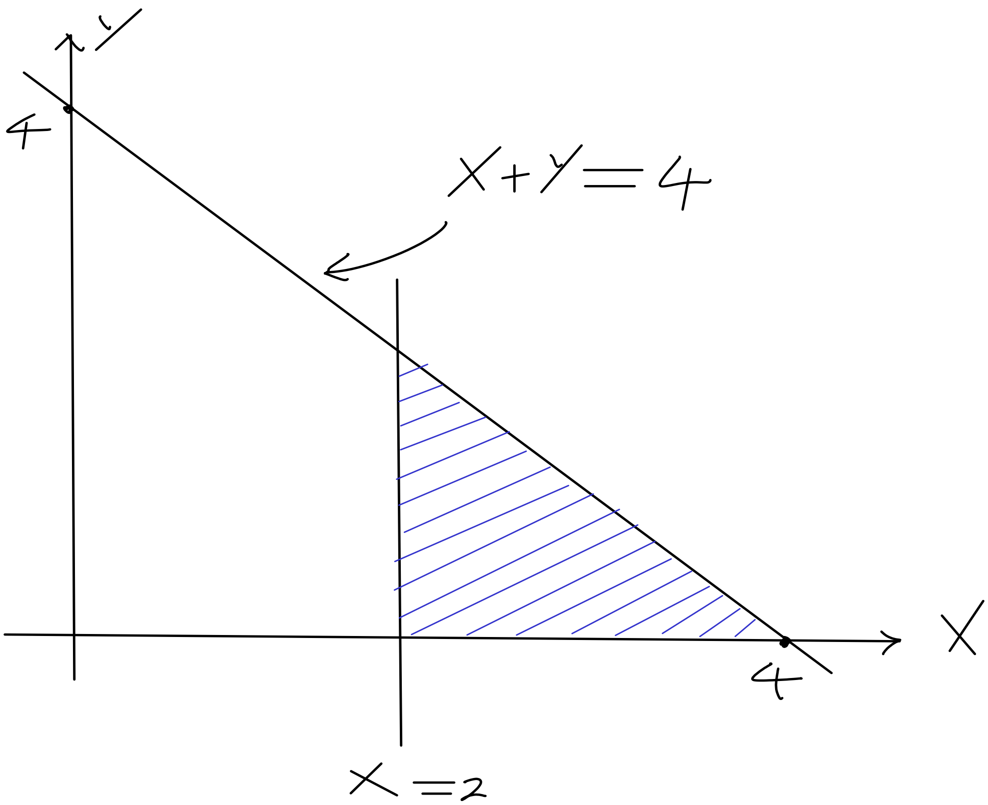
כאשר D התחום

$$D = \{0 \leq y \leq 4-x \ , 2 \leq x \leq 4 \ .\}$$

$$\begin{aligned} V =& \int_2^4 dx \int_0^{4-x} dy (8-y) \\ =& \int_2^4 dx \left[8y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{4-x} \\ =& \int_2^4 dx \left(8(4-x) - \frac{(4-x)^2}{2} \right) \\ =& \left[-4(4-x)^2 + \frac{(4-x)^3}{6} \right]_2^4 \\ =& 16 - \frac{8}{6} \\ =& 16 - \frac{4}{3} \\ =& \frac{44}{3} \ . \end{aligned}$$

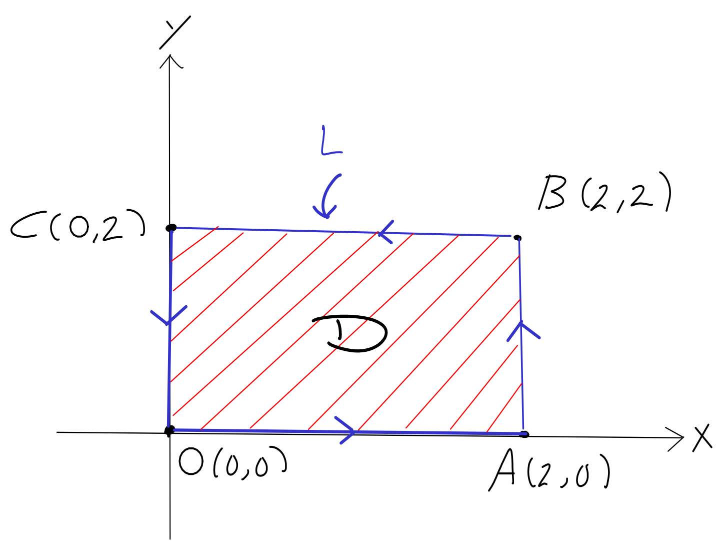
ב)


Z
(2,0,8)
z=8-y
(4,0,8)
(2,2,6)
Y
(2,0,0)
(2,2,0)
(4,0,0)
x+y=4
X



שאלה 6

א)



$$\oint_L P\,dx + Q\,dy \ , \qquad P = x^2 - 2xy \ , \quad Q = xy^2 + 2y \ .$$

לפי נוסחת גרין:

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \iint_D dx\,dy\left(Q'_x - P'_y\right) \ .$$

$$Q'_x = y^2 \ , \qquad P'_y = -2x \ .$$

$$\begin{aligned}\int_0^2 dx \int_0^2 dy\ \left(y^2+2x\right) &= \int_0^2 dx\ \left[\frac{y^3}{3}+2xy\right]_0^2 \\ &= \int_0^2 dx\ \left[\frac{8}{3}+4x\right] \\ &= \left[\frac{8x}{3}+2x^2\right]_0^2 \\ &= \frac{16}{3}+8 \\ &= \frac{40}{3} \ .\end{aligned}$$

ב) ווקטור הכיוון של הישר AB:

$$\bar{a} = \overline{AB} = (2,0,4) \ .$$

ווקטור הנורמל של המישור $x = 2$:

$$\bar{n} = (1,0,0) \ .$$

הזווית ביו המישור והישר ניתנת ע"י הנוסחה

$$\sin\alpha = \frac{\bar{a}\cdot\bar{n}}{|\bar{a}||\bar{n}|} = \frac{(1,0,0)\cdot(2,0,4)}{|(1,0,0)||(2,0,4)|} = \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ .$$

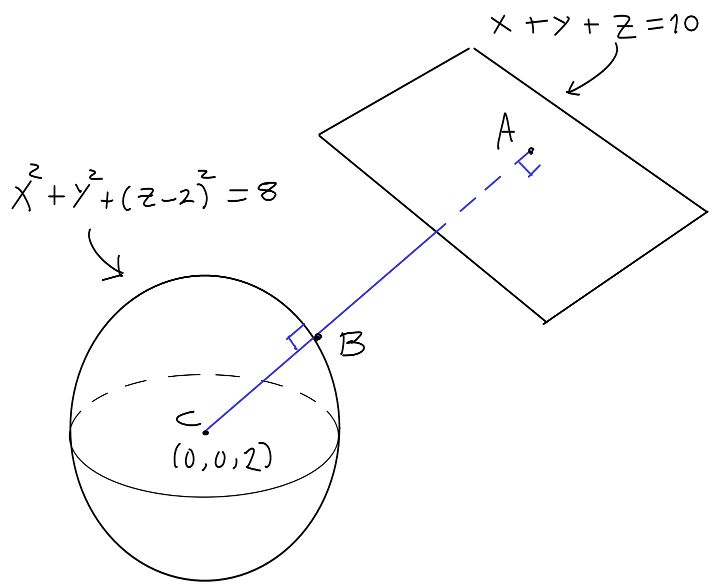
לכן

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 28.8231^\circ \ .$$

<u>שאלה 7</u> נרשום את המשטח בצורה קנונית:

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2-4z &= 4 \ , \\ x^2+y^2+(z-2)^2-4 &= 4 \ , \\ x^2+y^2+(z-2)^2 &= 8 \ .\end{aligned}$$

המשטח הוא כדור מרדיוס $\sqrt{8}$ שמרכזו נמצא בנקודה $C(0,0,2)$.
נניח שA ו- B הנקודות הקרובות ביותר על המישור ועל המשטח בהתאמה, כמתואר בתרשים.



הישר AB המחבר את הנקודות הוא ניצב למישור וניצב למשטח. כל ישר שמאונך למשטח של כדור עובר דרך המרכז של הכדור. לכן הישר AB עובר דרך המרכז C של הכדור.
הנורמל של המישור הוא $n=(1,1,1)$ לכן הווקטור הכיוון של הישר AB הוא $n=(1,1,1)$. הישר עובר דרך הנקודה $C(0,0,2)$ לכן משוואת הישר היא

$$M(t)=(0,0,2)+t(1,1,1)\ ,$$

או בצורה כללית:

$$x=t\ ,\qquad y=t\ ,\qquad z=2+t\ .$$

נציב את משוואת הישר במשוואת המשטח כדי למצוא את הנקודה B:

$$t^2+t^2+t^2=8 \qquad \Rightarrow \qquad t=\pm\sqrt{\frac{8}{3}}\ .$$

שנציב את השני הערכים האלה במשוואת הישר נקבל שתי נקודות. אחת מהן היא הנקודה על המשטח הקרובה ביותר והשניה תהיה הנקודה הרחוקה ביותר:

$$B_1=M\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)=\left(\sqrt{\frac{8}{3}},\sqrt{\frac{8}{3}},2+\sqrt{\frac{8}{3}}\right)\ .$$

$$B_2=M\left(-\sqrt{\frac{8}{3}}\right)=\left(-\sqrt{\frac{8}{3}},-\sqrt{\frac{8}{3}},2-\sqrt{\frac{8}{3}}\right)\ .$$

נבדוק איזה מהן קרובה ביותר למישור בעזרת הנוסחה של המרחק של נקודה ממישור:

$$d_1=\frac{\left|\sqrt{\frac{8}{3}}+\sqrt{\frac{8}{3}}+2+\sqrt{\frac{8}{3}}-10\right|}{\sqrt{3}}=\frac{\left|3\sqrt{\frac{8}{3}}-8\right|}{\sqrt{3}}$$

$$d_2=\frac{\left|-\sqrt{\frac{8}{3}}-\sqrt{\frac{8}{3}}+2-\sqrt{\frac{8}{3}}-10\right|}{\sqrt{3}}=\frac{\left|-3\sqrt{\frac{8}{3}}-8\right|}{\sqrt{3}}=\frac{\left|3\sqrt{\frac{8}{3}}+8\right|}{\sqrt{3}}$$

ברור ש $d_2>d_1$ לכן הנקודה B_1 היא הנקודה על המשטח הקרובה ביותר למישור.

<u>שאלה 8</u> משוואת הישר העובר דרך הנקודות AB היא

$$M(t)=A+t\cdot\overline{AB}=(4,0,0)+t(-4,3,2)\ ,$$

או בצורה כללית:

$$x=4-4t\ ,\qquad y=3t\ ,\qquad z=2t\ .$$

נסמן נקודה על הציר המרכזי של הגליל ב- $N(0,0,z)$.

$$d_{MN}^2=(4-4t)^2+(3t)^2+(2t-z)^2\ .$$

$$\left(d^2\right)_t'=2(4-4t)\cdot(-4)+2(3t)\cdot(3)+2(2t-z)\cdot 2=58t-4z-32\ .$$

$$\left(d^2\right)_z'=2z-4t\ .$$

$$\left.\begin{aligned}\left(d^2\right)_t'&=0\\ \left(d^2\right)_z'&=0\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad t=\frac{16}{25}\ ,\qquad z=\frac{32}{25}\ .$$

לכן הנקודה על הישר הקרובה ביותר למשטח היא

$$M\left(t=\frac{16}{25}\right)=\left(\frac{36}{25},\frac{48}{25},\frac{32}{25}\right)\ .$$