שיעור 1
סדרות של מספרים

1.1 הגדרה של סדרה של מספרים

סדרה של מספרים ממשיים היא רשימה מסודרת (ממוספרת) של מספרים ממשיים.

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \ .$$

סימון:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \qquad \text{או} \qquad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

הגדרה 1.1 סדרות של מספרים

סדרה של מספרים ממשיים היא פונקציה

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ .$$

נסמן

$$a_n := a(n) \ .$$

דוגמה 1.1

סדרה קבועה:	$a_n = 1$.	$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, \ldots$
	$a_n = n$.	$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, \ldots$
הסדרה ההרמונית:	$a_n = \frac{1}{n}$.	$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \ldots$
	$a_n = (-1)^n$.	$a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, \ldots$
	$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.	$a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{5}, a_3 = -\frac{1}{10}, \ldots$

1.2 התכנסות של סדרות מספרים

L הוא הגבול של הסדרה a_n אם איברי a_n הולכים ומתקרבים ל L.

הגדרה 1.2 גבול של סדרה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. אומרים כי מספר L הוא הגבול של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $N > 0$ כך שלכל $n > N$,

$$|a_n - L| < \epsilon \ .$$

מתקיים.

נסמן את הגבול של סדרה ב

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n \ .$$

ז"א a_n יהיו קרובים כרצוננו ל- L עבור n מספיק גדול.

שימו לב כי N תלוי ב- ϵ.

הגדרה 1.3 התכנסות של סדרה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. אם הגבול של (a_n) קיים (לפי הגדרה 1.2) אז אומרים כי הסדרה **מתכנסת**.

אם הגבול של (a_n) לא קיים אז אומרים כי הסדרה **מתבדרת**.

דוגמה 1.2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \ .$$

הוכחה: הסדרה היא $a_n = \frac{1}{n}$ והגבול הוא $L = 0$.

נניח כי $\epsilon > 0$. נבחר N כך ש- $N > \frac{1}{\epsilon}$.

עבור $N > n$ מתקיים:

$$|a_n - L| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon \ .$$

מש"ל. ■

דוגמה 1.3

הוכיחו כי

$$\lim_{n\to\infty} c = c \ .$$

כאן $a_n = c$ סדרה קבועה והגבול הוא $L = c$ קבוע כלשהו.

הוכחה: נניח כי $\epsilon > 0$. נבחר $N = 1$. אז לכל $n > N$ מתקיים:

$$|a_n - L| = |c - c| = 0 < \epsilon \ .$$

כנדרש. ■

דוגמה 1.4

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \ .$$

כאן, הסדרה היא $a_n = \frac{n}{n+1}$ והגבול הוא $L = 1$.

הוכחה: נניח כי $\epsilon > 0$. נבחר N כך ש-

$$N > \frac{1}{\epsilon} - 1 \ .$$

ז"א

$$N > \frac{1}{\epsilon} - 1 \quad \Rightarrow \quad N+1 > \frac{1}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{N+1} < \epsilon \ .$$

לכל $n > N$ מתקיים:

$$|a_n - L| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} < \epsilon \ .$$

כנדרש. ■

לא כל סדרה מתכנסת לגבול!

דוגמה 1.5

הסדרה $a_n = (-1)^n$ לא מתכנסת.

הוכחה: נוכיח דרך השלילה. נניח כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ עבור L סופי.

ז"א **לכל** $\epsilon > 0$, קיים $N > 0$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \epsilon$.

נקבע $\epsilon = \frac{1}{2}$. מההנחה קיים $N > 0$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \dfrac{1}{2}$.

בפרט, $|a_{2N} - L| < \frac{1}{2}$ וגם $|a_{2N+1} - L| < \frac{1}{2}$.

ז"א $|1 - L| < \frac{1}{2}$ וגם $|-1 - L| < \frac{1}{2}$. לפיכך

$$|1-L| < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} < 1 - L < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{2} < -L < -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} < L < \frac{3}{2}$$

ו

$$|-1-L| < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} < -1 - L < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} < -L < \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{2} < L < -\frac{1}{2} \ .$$

סתירה. ■

דוגמה 1.6

הסדרה $a_n = (-1)^n \cdot n$ לא מתכנסת.

הוכחה: נוכיח דרך השלילה. נניח כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ עבור L סופי.

ז"א **לכל** $\epsilon > 0$, קיים $N > 0$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \epsilon$.

נקבע $\epsilon = 1$. מההנחה קיים $N \in \mathbb{N} > 0$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < 1$.

בפרט, $|a_{2N} - L| < 1$ וגם $|a_{2N+1} - L| < 1$.

ז"א $|2N-L|<1$ וגם $|-2N-1-L|<1$. לפיכך

$$|2N-L|<1 \quad\Rightarrow\quad -1<2N-L<1 \quad\Rightarrow\quad -2N-1<-L<-2N+1 \quad\Rightarrow\quad 2N-1<L<2N+1$$

ו

$$|-2N-1-L|<1 \quad\Rightarrow\quad -1<-2N-1-L<1 \quad\Rightarrow\quad 2N<-L<2N+2 \quad\Rightarrow\quad -2N-2<L<-2N\ .$$

סתירה. ■

משפט 1.1 יחידות של גבול

אם לסדרה קיים גבול אז הוא יחיד.

הוכחה: נוכיח המשפט דרך השלילה.
נניח כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ ו- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_2$ עבור $L_1\neq L_2$.

נבחר $\epsilon = \dfrac{|L_2-L_1|}{2}$.

(a_n) מתכנסת ל- L_1. לכן קיים $N_1\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N_1$, מתקיים $|a_n-L_1|<\epsilon$.

(a_n) מתכנסת ל- L_2. לכן קיים $N_2\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N_2$, מתקיים $|a_n-L_2|<\epsilon$.

$$|L_1-L_2| = |(L_1-a_n)+(a_n-L_2)| \leq |L_1-a_n|+|a_n-L_2| < \epsilon+\epsilon = 2\epsilon = |L_2-L_1| .$$

ז"א קיבלנו ש $|L_1-L_2|<|L_2-L_1|$. סתירה. ■

משפט 1.2 אריתמטיקה חשבון של גבולות

תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות כך ש $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ ו $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$.

יהיו $c\in\mathbb{R}$ קבוע. התכונות הבאות מתקיימות:

.1 $\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot a_n) = c\cdot \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = c\cdot A$

.2 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A\pm B$.

.3 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right) = A\cdot B$

.4 אם $B\neq 0$ (ולכן $b_n\neq 0$ עבור n מספיק גדול) אז

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B} .$$

הוכחה:

.1 יהי $\epsilon>0$ ו- $c\neq 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ (נתון), אז קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $|a_n-A|<\dfrac{\epsilon}{|c|}$.

לכן

$$|ca_n - cA| = |c| \cdot |a_n - A| < |c| \cdot \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon \ .$$

$\blacksquare$.

2. יהי $\epsilon > 0$.

a_n מתכנסת ל A אז קיים $N_A \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_A$ מתקיים $|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$.

b_n מתכנסת ל B אז קיים $N_B \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_B$ מתקיים $|b_n - B| < \frac{\epsilon}{2}$.

יהי N הגדול מבין N_A ו N_B. אז לכל $n > N$,

$|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$ ו $|b_n - B| < \frac{\epsilon}{2}$.

לכן לכל $n > N$,

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) - (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \ .$$

$\blacksquare$.

3. יהי $\epsilon > 0$.

a_n מתכנסת ל A אז קיים $N_A \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_A$ מתקיים $|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2|B|}$.

b_n מתכנסת ל B אז קיים $N_B \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_B$ מתקיים $|b_n - B| < \frac{\epsilon}{2A'}$ כאשר $|a_n| < A'$ לכל n (a_n מתכנסת ולכן חסומה לפי משפט 1.4 למטה).

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \\ &= |a_n (b_n - B) + B (a_n - A)| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - B| + |B| \cdot |a_n - A| \\ &< A' \cdot \frac{\epsilon}{2A'} + |B| \cdot \frac{\epsilon}{2|B|} = \epsilon \end{aligned}$$

$\blacksquare$.

4. בעזרת 3, מספיק להראות כי $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$.

יהי $\epsilon > 0$.

b_n מתכנסת אז הסדרה חסומה (ראו משפט 1.4 למטה).

ז"א קיים $m \in \mathbb{R}$ כך ש $|b_n| > m$.

b_n מתכנסת, אז קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$|b_n - B| < m \cdot |B| \epsilon$$

ואז

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = \left| \frac{B - b_n}{b_n \cdot B} \right| < \frac{m \cdot |B| \cdot \epsilon}{|b_n| \cdot |B|} < \frac{m \cdot |B| \cdot \epsilon}{m \cdot |B|} = \epsilon \ .$$

■

דוגמה 1.7

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \right)^2 = 0^2 = 0 \ .$$

דוגמה 1.8

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n+9}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(7 + \frac{a}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} 7 + a \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} 7 + a \cdot 0 = 7 \ .$$

דוגמה 1.9

תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתבדרת. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

$(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת.

פתרון:

טענה נכונה. הוכחה

נוכיח דרך השלילה. נניח ש $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- L (סופי). נתון ש (a_n) מתכנסת. לכן אם (a_n) מתכנסת ל- A, אז לפי תכונה 2 במשפט 1.2,

$$\lim_{n\to\infty} (b_n) = \lim_{n\to\infty} ([a_n + b_n] - a_n) = L - A$$

כאשר $L - A$ קבוע סופי. ז"א קיבלנו ש (b_n) מתכנסת, בסתירה לכך ש- (b_n) מתבדרת.

דוגמה 1.10

תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתבדרת. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

$(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת.

פתרון:

<u>טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:</u>

$a_n=\frac{1}{n}$, ו $b_n=n$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ מתכנסת ו- (b_n) מתבדרת.

$$a_n\cdot b_n=1$$

לפיכך

$$\lim_{n\to\infty} a_n\cdot b_n=1\ .$$

מתכנסת.

דוגמה 1.11

תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתבדרת. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

$(a_n\cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

פתרון:

<u>טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:</u>

$a_n=\frac{1}{n}$, ו $b_n=n^2$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{n}$ מתכנסת ו- $b_n=n^2$ מתבדרת.

$$a_n\cdot b_n=n$$

מתבדרת.

<u>עוד דוגמה נגדית:</u>

$a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=n^3$.

משפט 1.3 משפט הסנדוויץ'

תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות כך ש

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} c_n=L$$

ונניח כי קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים

$$a_n\le b_n\le c_n\ .$$

אז

$$\lim_{n\to\infty} b_n=L\ .$$

הוכחה: יהי $\epsilon > 0$.
מההנחה קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$|a_n - L| < \epsilon \ , \qquad |c_n - L| < \epsilon \ .$$

ז"א

$$-\epsilon < a_n - L < \epsilon \ , \qquad -\epsilon < c_n - L < \epsilon \ .$$

לכן

$$-\epsilon < a_n - L \leq b_n - L \leq c_n - L < \epsilon \qquad \Rightarrow \qquad |b_n - L| < \epsilon \ .$$

■

דוגמה 1.12

חשבו את $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ בעזרת כלל הסנוויץ'.

פתרון:
לכל $n \geq 1$,

$$1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

מצד שמאל,

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \ .$$

מצד ימין,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \ .$$

ז"א $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1$ ולכן לפי כלל הסנדוויץ':

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1 \ .$$

1.3 סדרות חסומות

הגדרה 1.4 סדרות חסומות

1. אומרים כי סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **חסומה מלמעלה** אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \leq M$.

   M תקרא **חסם עליון של הסדרה**.

2. אומרים כי סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **חסומה מלמטה** אם קיים $m \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \geq m$.

   m תקרא **חסם תחתון של הסדרה**.

3. אומרים כי סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **חסומה** אם היא חסומה מלמעלה וגם מלמטה . במילים אחרות, אם קיים $K > 0$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n| \leq K \ .$$

   כל מספר K כזה נקרא **חסם מוחלט** של הסדרה.

דוגמה 1.13

לכל אחת מהסדרות הבאות, קבעו אם היא חסומה מלמעלה, חסומה מלמטה או חסומה.

1. $a_n = \frac{1}{n}$
2. $a_n = n$
3. $a_n = b \cdot q^n$ עבור $-1 < q < 1$.
4. $a_n = (-1)^n n$
5. $a_n = n^2 - n + 3$

פתרון:

1. $a_n = \frac{1}{n}$. לכל n:

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$$

לככן a_n חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה, ולכן חסומה. ■

2. $a_n = n$. לכל n:

$$a_n = n \geq 0\ .$$

לככן a_n חסומה מלמטה.

אבל היא אינה חסומה מלמעלה. אכן לכל $M \in \mathbb{R}$ ניתן למצוא $n \in \mathbb{N}$ כך ש M $a_n = n > M$.

בפרט, a_n גם לא חסומה. ■

3. $a_n = b \cdot q^n$, $-1, q < 1$.

לכל n:

$$|a_n| = |bq^n| = |b| \cdot |q|^n \leq b$$

ולכן הסדרה חסומה (גם מלמעלה וגם מלמטה). ■

4. $a_n = (-1)^n n$.

לא חסומה מלמעלה:

הרי לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $a_n > M$.

לא חסומה מלמטה.

הרי לכל $m \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $a_n < m$.

לפיכך הסדרה לא חסומה. ■

.5 $a_n = n^2 - n + 3$

$$n^2 \geq n \quad \Rightarrow \quad n^2 - n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad n^2 - n + 3 \geq 3 \quad \Rightarrow \quad a_n \geq 3$$

ז"א הסדרה חסומה מלמטה.

$$a_n = n^2 - n + 3 = n^2 - 2n + 2 + n = (n-1)^2 + 2 + n$$
$$(n-1)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (n-1)^2 + 3 \geq 3 \quad \Rightarrow \quad (n-1)^2 + 2 + n \geq 2 + n \quad \Rightarrow \quad a_n \geq 2 + n$$

ז"א $a_n > n$ לכל n.

לכן לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $M < a_n$. לכן הסדרה אינה חסומה מלמעלה.

לכן הסדרה גם לא חסומה. ■

1.4 סדרות מונוטוניות

הגדרה 1.5 סדרות מונוטוניות

1. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית עולה** אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים
$$a_{n+1} \geq a_n \ .$$
2. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית עולה ממש** אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים
$$a_{n+1} > a_n \ .$$
3. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית יורדת** אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים
$$a_{n+1} \leq a_n \ .$$
4. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית יורדת ממש** אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים
$$a_{n+1} < a_n \ .$$
5. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית** אם היא מונוטונית עולה או יורדת.
6. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית ממש** אם היא מונוטונית עולה ממש או יורדת ממש.

דוגמה 1.14

לכל אחת מהסדרות הבאות, קבעו אם היא מונוטונית.

1. $a_n = \dfrac{1}{n}$
2. $a_n = n$
3. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

4. $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

פתרון:

1. $a_n = \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n+1} = a_{n+1}$ לכל n.

ולכן הסדרה יורדת ממש. ■

2. $a_n = n < n+1 = a_{n+1}$, לכל n.

לכן הסדרה עולה ממש. ■

3. $a_1 = -1$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$, $a_3 = -\dfrac{1}{3}$

$a_1 < a_2 > a_3$.

באופן כללי,

$$a_{2n+1} < 0 \ , \qquad a_{2n} > 0 \ .$$

לכן הסדרה לא מונוטונית. ■

4.

$$a_n = \frac{n^2}{2^n} \ , \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \ .$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

לכל $n \geq 3$:

$$1+\frac{1}{n} \leq \frac{4}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{16}{9} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{8}{9} < 1 \ .$$

ז"א לכל $n \geq 3$ מתקיים

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \qquad \forall n \geq 3 \ .$$

ז"א הסדרה יורדת ממש החל מ $n = 3$. ■

דוגמה 1.15

בדקו האם הסדרה $a_n = \dfrac{n^2+1}{n+2}$ חסומה מלמעלה או חסומה מלמטה , וקבעו אם הסדרה מונוטונית.

פתרון:

__שיטה 1__:

$$a_n = \frac{n^2+1}{n+2} = \frac{n(n+2)-2n+1}{n+2} = n + \frac{-2n+1}{n+2} = n + \frac{-2(n+2)+5}{n+2} = n-2+\frac{5}{n+2}$$

לפיכך $a_n \geq -2$ לכן a_n חסומה מלמטה.

בנוסף $a_n \geq n-2$ אז a_n לא חסומה מלמעלה (לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $a_n > n-2 > M$).

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{(n+1)^2+1}{n+3}\right)}{\left(\frac{n^2+1}{n+2}\right)} = \frac{\left((n+1)^2+1\right)(n+2)}{\left(n^2+1\right)(n+3)} = \frac{\left(n^2+2n+2\right)(n+2)}{\left(n^2+1\right)(n+3)} = \frac{n^3+4n^2+6n+4}{n^3+3n^2+n+3}$$

$$n^3+4n^2+6n+4 > n^3+3n^2+n+3$$

לכל $n \geq 0$ לכן

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

לכל $n \geq 0$, ולכן הסדרה עולה ממש.

<u>שיטה 2</u>:

נגדיר פונקציה $f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$, $x \neq -2$. אנו מעוניינים בערכים $a_n = f(n)$ ולכן נחקור את הפונקציה בקטע $[1,\infty)$.

$$f'(x) = \frac{2x(x+2)-1\cdot(x^2+1)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-4\pm\sqrt{16+4}}{2} = -2\pm\sqrt{5}\ .$$

ז"א $f'(x) = \left(x-(-2+\sqrt{5})\right)\left(x-(-2-\sqrt{5})\right)$.

x	$x < -2-\sqrt{5}$	$-2-\sqrt{5} < x < -2$	$-2 < x < -2+\sqrt{5}$	$x > -2+\sqrt{5}$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

כלומר $f(x)$ עולה ממש בקטע $[1,\infty)$ ולכן גם a_n עולה ממש.

בנוסף $f(x) \geq f(-2+\sqrt{5})$ לכל $x \geq -2+\sqrt{5}$. כלומר $f(x)$ חסומה מלמטה ולכן גם a_n חסומה מלמטה .

למה 1.1 גבול של סדרה שווה לגבול של הפונקציה

תהי $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה.

אם $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ אז $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = L$

כאשר $n \in \mathbb{N}$, ו $a_n = f(n)$ סדרה.

הוכחה: נתון כי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$. לכן לפי ההגדרה של גבול של פונקציה ב ∞, לכל $\epsilon>0$ קיים $m>0$ כך שלכל $x>m$,

$$|f(x)-L|<\epsilon\ .$$

ז"א, עבור $N\in\mathbb{N}$, לכל $\epsilon>0$ קיים $m>0$ $N>m$ כך שלכל $n>N>m$,

$$|f(n)-L|<\epsilon\ .$$

לכן, לפי הגדרה 1.2, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=L$.

■

למה 1.2 מונוטוניות של סדרה והפוקנציה

תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה.

אם $f(x)$ מונוטונית (עולה או יורדת) אז גם $a_n=f(n)$ מונוטונית (עולה או יורדת בהתאמה).

הוכחה: אם $f(x)$ עולה מונוטונית, אז לכל $x_1,x_2\in\mathbb{R}$,

$$x_2>x_1 \qquad\Rightarrow\qquad f(x_2)\geq f(x_1)\ .$$

עבור $n\in\mathbb{N}$ נציב $x_1=n$, $x_2=n+1$. $x_2>x_1$ לכן

$$f(n+1)>f(n)\ .$$

■

אם $f(x)$ יורדת מונוטונית, אז לכל $x_1,x_2\in\mathbb{R}$,

$$x_2<x_1 \qquad\Rightarrow\qquad f(x_2)\leq f(x_1)\ .$$

עבור $n\in\mathbb{N}$ נציב $x_1=n$, $x_2=n+1$. $x_2>x_1$ לכן

$$f(n+1)\leq f(n)\ .$$

■

דוגמה 1.16

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. הוכיחו או הפריכו: אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה אז היא מתכנסת.

פתרון:
<u>לא נכון. דוגמה נגדית:</u>

$a_n=(-1)^n$ חסומה:

$$|a_n|=1$$

לכל n.

a_n לא מתכנסת (ראו דוגמה 1.5 לעיל).

משפט 1.4

כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

הוכחה: מסמן $L=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
נניח כי $\epsilon=1$. קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $|a_n-L|<\epsilon=1$.
ז"א

$$-1<a_n-L<1 \quad \Rightarrow \quad L-1<a_n<L+1 \ .$$

נסמן

$$M=\max\left\{a_1,a_2,\ldots,a_N,L+1\right\} \ , \qquad m=\min\left\{a_1,a_2,\ldots,a_N,L-1\right\} \ ,$$

ואז לכל $n\leq N$:

$$m\leq a_n\leq M \ .$$

לכן (a_n) חסומה. ■

דוגמה 1.17

נניח כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. הוכיחו או הפריכו:

אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה אז היא מתכנסת.

פתרון:
טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$a_n=(-1)^n$ חסומה ולא מתכנסת:

- $|a_n|=1$ לכל n ולכן (a_n) חסומה.
- (a_n) לא מתכנסת (ראו דוגמה 1.5 למעלה).

1.5 התכנסות של סדרות חסומות ומונוטוניות

משפט 1.5 סדרה חסומה ומונוטונית מתכנסת

סדרה חסומה ומונוטונית היא מתכנסת.

הוכחה: נניח כי (a_n) עולה וחסומה.

ז"א $a_{n+1}>a_n$ לכל n, וקיים M כך ש $|a_n|<M$. לכל n.

נסמן ב L את החסם מלמעלה הקטן ביותר של הסדרה. נוכיח כי

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \ . \tag{*1}$$

יהי $\epsilon>0$. כיוון ש L חסם עליון הקטן ביותר של (a_n), אז קיים a_N כך ש $L-\epsilon<a_N\leq L$.

כיוון ש (a_n) עולה מונוטונית, אז לכל $n > N$, מתקיים

$$L - \epsilon < a_N \leq a_n \leq L \ .$$

$L < L + \epsilon$, לכן נקבל

$$L - \epsilon < a_N \leq a_n \leq L < L + \epsilon \ . \tag{*2}$$

לכן לכל $n > N$:

$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon \ . \tag{*3}$$

ז"א נתון $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$,

$$|a_n - L| < \epsilon \ .$$

ז"א $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = L$.

■

למה 1.3

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \ .$$

הוכחה: $\Rightarrow$

נתון $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. ז"א לכל $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$,

$$|a_n - 0| < \epsilon \qquad \Rightarrow \qquad |a_n| < \epsilon \qquad \Rightarrow \qquad ||a_n| - 0| < \epsilon \ .$$

$\Leftarrow$

נתון $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. ז"א לכל $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$,

$$||a_n| - 0| < \epsilon \qquad \Rightarrow \qquad |a_n| < \epsilon \qquad \Rightarrow \qquad |a_n - 0| < \epsilon \ .$$

■

משפט 1.6

יהי $q \in \mathbb{R}$ כך ש $|q| < 1$. אז

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \ .$$

הוכחה:

.1 אם $q = 0$ אז $q^n = 0$, ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

.2 אם $0<q<1$ אז לכל $n\in\mathbb{N}$,
$$0<q^{n+1}<q^n$$
ולכן (q^n) יורדת וחסומה. לכן לפי 1.5, הסדרה מתכנסת.

נסמן $L=\lim\limits_{n\to\infty} q^n$.
$$L=\lim_{n\to\infty} q^{n+1}=q\cdot\lim_{n\to\infty} q^n=q\cdot L$$
ז"א
$$(1-q)L=0 \qquad\Rightarrow\qquad L=0\ .$$

.3 אם $-1<q<0$ אז $0<|q|<1$. לכן לפי **.2**, $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n=0$, ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}|q^n|=0$.

אז לפי למה 1.3, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$.

■

דוגמה 1.18
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0\ .$$

1.6 התכנסות במובן הרחב

הגדרה 1.6

תהיה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

- אומרים כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ (שואפת לאינסוף) אם לכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים
$$a_n>M\ .$$
- אומרים כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$ (שואפת למינוס אינסוף) אם לכל $m\in\mathbb{R}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים
$$a_n>m\ .$$

דוגמה 1.19

הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n=\infty$.

פתרון:

לכל $M\in\mathbb{R}>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש $N>\frac{\ln M}{\ln 2}$. אז לכל $n>N$,
$$n>\frac{\ln M}{\ln 2} \qquad\Rightarrow\qquad n\ln 2>\ln M \qquad\Rightarrow\qquad \ln 2^n>\ln M\ . \qquad (\#)$$
$\ln$ עולה מונוטונית. לכן מ (#), לכל $n>N$:
$$2^n>M\ .$$
ז"א אומרת, מצאנו שלכל $M>0$ קיים N כך שלכל $n>N$,
$$a_n=2^n>M\ .$$

דוגמה 1.20

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} n = \infty$.

פתרון:

לכל $M \in \mathbb{R} > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש $N > M$. אז לכל $n > N$,

$$n > M \ . \qquad (*)$$

ז"א אומרת, מצאנו שלכל $M > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$,

$$a_n = n > M \ .$$

1.7 סדרות שימושיות

סדרה	עולה	יורדת	מונוטונית	חסומה	מתכנסת למספר סופי L	מתכנסת במובן הרחב
$a_n = 1$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark \Leftarrow$	$\checkmark$
$a_n = n$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	$\times$	$\times \Leftarrow$	$\checkmark$
$a_n = \frac{1}{n}$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark \Leftarrow$	$\checkmark$
$a_n = (-1)^n$	$\times$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\times \Leftarrow$	$\times$
$a_n = \frac{(-1)^n}{n^1+1}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\times \Leftarrow$	$\times$
$a_n = 1 - \frac{1}{n}$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark \Leftarrow$	$\checkmark$

דוגמה 1.21

לפי משפט 1.6,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \ .$$

דוגמה 1.22

הסדרה (2^n) לא מתכנסת.

1.8 דוגמאות

דוגמה 1.23

הוכיחו שהסדרה

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

מתכנסת.

פתרון:

נוכיח כי $a_n \downarrow$ מונוטונית:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n = &\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \\ =&\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \\ <&\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = 0 \end{aligned}$$

לכן $a_{n+1} - a_n < 0$, ז"א $a_{n+1} < a_n$ ולכן הסדרה $\downarrow$ מונוטונית.

נוכיח כי a_n חסומה:

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

ז"א $a_n > \frac{1}{2}$. הסדרה $\downarrow$ מונוטונית, כלומר

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$$

לכן

$$a_n < a_1 \ .$$

לכן הסדרה חסומה.

סיכום: (a_n) מונוטונית יורדת וחסומה ולכן היא מתכנסת.

דוגמה 1.24

תהי (a_n) סדרה המוגדרת ע"י רקורסיה

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \ , \qquad a_1 = \sqrt{2} \ .$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

פתרון:

נוכיח כי (a_n) $\uparrow$ מונוטונית ע"י אינדוקציה:

עבור $n=1$,

$$a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} = a_2$$

נניח $a_n < a_{n+1}$ (הנחת האינדוקציה) ונוכיח $a_{n+1} < a_{n+2}$:

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+a_{n+1}} = a_{n+2} \ .$$

קבלנו $a_n < a_{n+1} \Leftarrow a_{n+1} < a_{n+2}$ לכן הסדרה עולה מונוטונית.

נוכיח כי (a_n) חסומה ע"י אינדוקציה:

נוכיח כי לכל n, $a_n < 2$.

עבור $n=1$,

$$a_1 = \sqrt{2} < 2 \ .$$

נניח כי $a_n < 2$ (הנחת האינדוקציה) ונוכיח $a_{n+1} < 2$:

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 \ .$$

קבלנו $a_n < 2 \Leftarrow a_{n+1} < 2$ לכן הסדרה חסומה מלמעלה . נוכיח כי היא חסומה מלמטה: הסדרה עולה מונוטונית, אז $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ לכן $a_n \geq a_1 = \sqrt{2}$. מצאנו הסדרה חסומה מלמעלה ומלמטה ולכן חסומה:

$$\sqrt{2} \leq a_n < 2 \ .$$

לסיכום הסדרה עולה מונוטונית וחסומהת ולכן מתכנסת. נחשב את גבולה: נסמן $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n} = \sqrt{2+\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2+L} \ .$$

ז"א
$$L=\sqrt{2+L} \quad\Rightarrow\quad L^2=2+L \quad\Rightarrow\quad L^2-L-2=0 \quad\Rightarrow\quad (L-2)(L+1)=0$$
לכן $L=-1$ או $L=2$. הסדרה חיובית לכן התשובה היא $L=2$.

דוגמה 1.25

תהי (a_n) סדרה המוגדרת ע"י רקורסיה
$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right)\ , \qquad a_1=2\ .$$
הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

פתרון:

נוכיח כי (a_n) חסומה:

נשתמש בעובדה כי הממוצע החשבוני של שני מספרים חיוביים תמיד גדול או שווה לממוצע ההנדסי שלהם, כלומר $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{a\cdot b}$ לכל $a,b>0$. לכן
$$a_{n+1}=\frac{a_n+\dfrac{3}{a_n}}{2}\geq\sqrt{a_n\cdot\frac{3}{a_n}}=\sqrt{3}$$
ז"א $a_n\geq\sqrt{3}$, כלומר הסדרה חסומה מלמטה.

נוכיח כי $\{a_n\}$ יורדת מונוטונית:
$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right)<\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{3}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(a_n+\sqrt{3}\right)<\frac{1}{2}\left(a_n+a_n\right)=a_n$$
לכן הסדרה מונוטונית יורדת.

נוכיח כי היא חסומה מלמעלה: (a_n) יורדת מונוטונית לכן $a_n\leq a_1=2$ לכן הסדרה חסומה מלמעלה .
לסיכום הסדרה יורדת מונוטונית וחסומהת ולכן מתכנסת. נחשב את גבולה: נסמן $L=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.
$$L=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right)=\frac{1}{2}\left(L+\frac{3}{L}\right)=\frac{L^2+3}{2L}\ .$$
ז"א
$$2L^2=L^2+3 \quad\Rightarrow\quad L^2=3 \quad\Rightarrow\quad L=\pm\sqrt{3}\ .$$
הסדרה חיובית לכן $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{3}$.

דוגמה 1.26

נתונה הסדרה $a_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$.
הוכיחו כי הסדרה עולה מונוטונית, והוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

פתרון:

הסדרה עולה מונוטונית:

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=a_{n+1}\ .$$

הסדרה אינה חסומה:

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}\ .$$

קיבלנו שלכל n, מתקיים $a_n\geq\sqrt{n}$. לכן לכל מספר ממשי $M>0$ קיים מספר טבעי N כך ש $\sqrt{n}>M$ ולכן $a_n>M$ ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

דוגמה 1.27

סדרה נתונה באופן רקורסיבי ע"י הכלל

$$a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}\ ,$$

יחד עם התנאי ההתחלה

$$a_1=1\ .$$

קבעו האם קיים הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ ואם כן, חשבו אותו.

פתרון:

נבדוק אם הסדרה מונוטונית וחסומה.

<u>מונוטונית:</u>

נוכיח כי (a_n) מונוטונית $\uparrow$ ע"י אינדוקציה:

עבור $n=1$:

$$a_2=\sqrt{6+a_1}=\sqrt{7}>a_1$$

נניח ש $a_{n+1}>a_n$ (הנחת אינדוקציה). אז

$$a_{n+2}=\sqrt{6+a_{n+1}}>\sqrt{6+a_n}=a_{n+1}\ .$$

קיבלנו ש $a_{n+1}>a_n\Leftarrow a_{n+2}>a_{n+1}$ לכן לפי אינדוקציה הסדרה עולה מונוטונית.

<u>חסימות:</u>

נוכיח כי (a_n) חסומה מלמעלה ע"י אינדוקציה:

בפרט נוכיח שלכל n, $a_n<3$.

<u>בסיס:</u>

עבור $n=1$ מתקיים $a_1=1<3$.

<u>מעבר:</u>

נניח שלכל n, $a_n < 3$ (הנחת האינדוקציה). נוכיח ש- $a_{n+1} < 3$:

$$a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} < \sqrt{6+3} = 3$$

קיבלנו שאם $a_n < 3$ אז $a_{n+1} < 3$. לכן לפי אינדוקציה

$$a_n < 3$$

לכל n.
כעת נוכיח כי הסדרה חסמומה מלמטה.
הסדרה עולה מונוטונית לכן $a_n \geq a_1 = 1$ לכל n.
מצאנו כי a_n חסומה מלמעלה ומלמטה. לכן a_n חסומה:

$$1 \leq a_n < 3 \ .$$

לסיכום הסדרה חסומה ומונוטונית לכן היא מתכנסת.

נחשב את גבולה:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6+a_n} = \sqrt{6+\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{6+L} \ .$$

$$L^2 = 6+L \quad \Rightarrow \quad L^2 - L - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (L-3)(L+2) = 0$$

לכן $L=3$ או $L=-2$ הסדרה חיובית לכן $L=3$. מסקנה :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 3 \ .$$