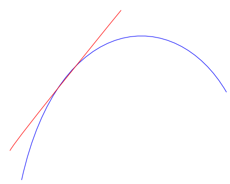
שיעור 7
קמירות אסימפטוטות ודוגמאות לחקירה

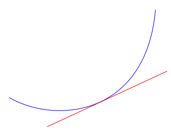
תחומי קמירות ונקודות פיתול

7.1 הגדרה: (פונקציה קמורה)

פונקציה $f(x)$ שגזירה בקטע (a,b) נקראת קמורה כלפי מטה אם בכל נקודה $x \in (a,b)$ המשיק לגרף הפונקציה נמצא מעל הגרף.



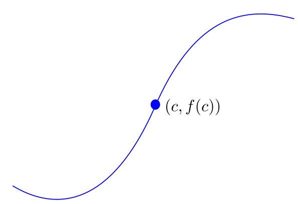
פונקציה $f(x)$ שגזירה בקטע (a,b) נקראת קמורה כלפי מעלה אם בכל נקודה $x \in (a,b)$ המשיק לגרף הפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה



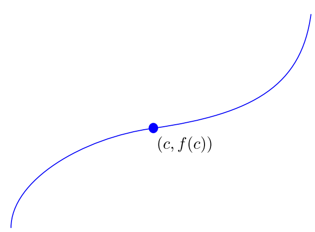
7.2 משפט:
אם $f''(x) < 0$ לכל $x \in (a,b)$ אז $f(x)$ קמורה כלפי מטה בקטע (a,b).

אם $f''(x) > 0$ לכל $x \in (a,b)$ אז $f(x)$ קמורה כלפי מעלה בקטע (a,b).

7.3 הגדרה: (נקודת פיתול)
נקודה בגרף $(c, f(c))$ נקראת נקודת פיתול של הפונקציה אם היא נמצאת בין שני תחומי קמירות שונים.



או



7.4 משפט:
אם $f''(c) = 0$ או $f''(c)$ לא קיימת ובמעבר דרך נקודה c, $f''(c)$ מחליף סימן, אז הנקודה $(c, f(c))$ היא נקודת פיתול.

דוגמא.
נתונה הפונקציה

$$f(x) = x^5 - x + 5$$

מצאו את נקודות פיתול של הפונקציה.

פיתרון.

$$f(x) = x^5 - x + 5 \ , \qquad f'(x) = 5x^4 - 1 \ , \qquad f''(x) = 20x^3 = 0$$

לכן קיימת נקודת פיתול בנקודה $(0, f(0)) = (0, 5)$. ■

אסימפטוטה אנכית

7.5 הגדרה: (אסימפטוטה אנכית)
קו ישר $x = a$ נקרא אסימפטוטה אנכית של פונקציה $f(x)$ אם לפחות אחד הגבולות החד צדדיים $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ או $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ שווה ל- $+\infty$ או $-\infty$.

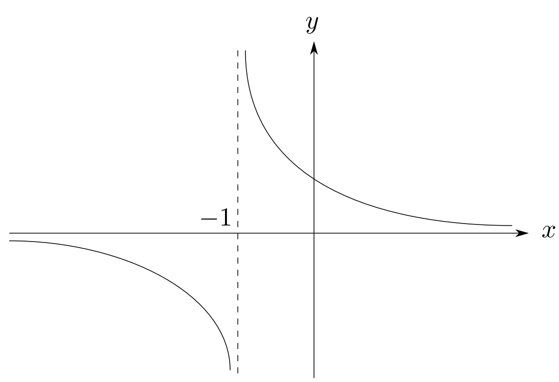
דוגמא.
מצאו את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה

$$f(x) = \frac{2}{x+1}$$

פיתרון.
שים לב

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2}{x+1} = +\infty \ , \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{2}{x+1} = -\infty$$

ולכן ישנה אסימפטוטה אנכית ב- $x = -1$.



■

אסימפטוטה אופקית

7.6 הגדרה: (אסימפטוטה אופקית)
קו ישר $y = b$ נקרא אסימפטוטה אופקית של פונקציה $f(x)$ אם $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ או $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

דוגמא.
מצאו את האסימפטוטות האופקיות של הפונקציה

$$f(x) = \frac{2}{x+1}$$

פיתרון.
שים לב

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x+1} = 0 \ , \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x+1} = 0$$

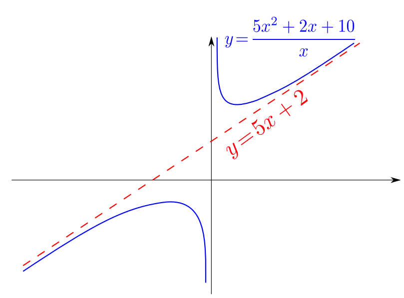
ולכן $y=0$ אסימפטוטה אופקית ב- $\pm\infty$. ■

אסימפטוטה משופעת

7.7 הגדרה: (אסימפטוטה משופעת)
קו ישר $y = m\cdot x + n$ נקרא אסימפטוטה משופעת של פונקציה $f(x)$ אם המרחק בין גרף הפונקציה לבין הקו $y = m\cdot x+n$ שואף ל- 0 כאשר x שואף ל ∞ או $-\infty$. ז"א

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (mx+n)) = 0 \qquad \text{או} \qquad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - (mx+n)) = 0$$

.



7.8 כלל: (נוסחה למציאת אסימפטוטה משופעת)

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \ , \qquad n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$$

(אותו דבר עבור $x\to-\infty$). אם m,n מספרים סופיים, אז קיימת אסימפטוטה משופעת.

דוגמאות

1. $.f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-2}{x(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-2}{x^2-2x}=1\ .$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-x-2}{x-2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-2-x^2+2x}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x-2}=1\ .$$

לכן הקו $y=x+1$ אסימפטוטה משופעת ב- $+\infty$.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-2}{x(x-2)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-2}{x^2-2x}=1\ .$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-x-2}{x-2}-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-2-x^2+2x}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{x-2}=1\ .$$

לכן הקו $y=x+1$ אסימפטוטה משופעת ב- $-\infty$.

2. $.f(x)=x\cdot e^x$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{xe^x}{x}=\lim_{x\to\infty}e^x=\infty\ .$$

לכן אין אסימפטוטה משופעת ב- $+\infty$.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^x=0\ .$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left[xe^x-0\cdot x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0\ .$$

לכן הקו $y=0$ אסימפטוטה משופעת (אופקית) ב- $-\infty$.

שלבים לחקירה מלאה של פונקציה

1. תחום הגדרה
2. נקודות חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה
3. התנהגות סביב נקודות אי הגדרה, אסימפטוטות אנכיות.
4. התנהגות באינסוף, אסימפטוטות אופקיות.
5. אסימפטוטות משופעות.
6. תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון
7. תחומי קמירות, נקודות פיתול.
8. גרף הפונקציה.

דוגמאות לחקירה מלאה של פונקציה

דוגמא.
חוקר באופן מלא את הפונקציה הבאה (תחום הגדרה, נקודות חיתוך, אסימפטוטות אנכיות אופקיות ומשופעות, תחומי עליה ורידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול), וצייר סקיצת הגרף של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

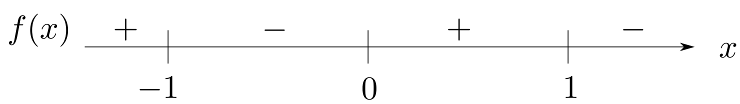
פיתרון.

1. תחום הגדרה: $x \neq \pm 1$

2א נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$

2ב סימני הפונקציה

$f(x)$	x
$+$	$x < -1$
$-$	$-1 < x < 0$
$+$	$0 < x < 1$
$-$	$x > 1$



3. אסימפטוטות אנכיות.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{1-x^2} = \infty \ , \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{1-x^2} = -\infty \ .$$

$x=1$ אסימפטוטה אנכית.

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x}{1-x^2} = \infty \ , \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{1-x^2} = -\infty \ .$$

$x=-1$ אסימפטוטה אנכית.

4. אסימפטוטות אופקיות.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}-1} = 0 \ , \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}-1} = 0 \ .$$

$y=0$ אסימפטוטה אופקית ב- $\pm\infty$.

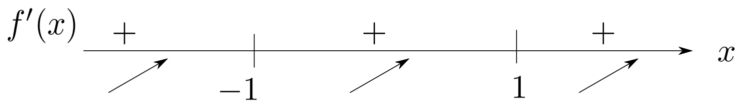
5. אסימפטוטות משופעות: אין

6. תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון

$$f'(x) = \frac{1-x^2-x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$$

מכאן $f'(x)$ לא שווה אפס באף נקודה בתחום הגדרה של הפונקציה (אף על פי שהמונה של $f'(x)$ מתאפס ב- $x=\pm 1$, באותן נקודות נמצאת אסימפטוטות אנכיות בגלל שהפונקציה המקורית $f(x)$ לא מוגדרת בהן).

x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$



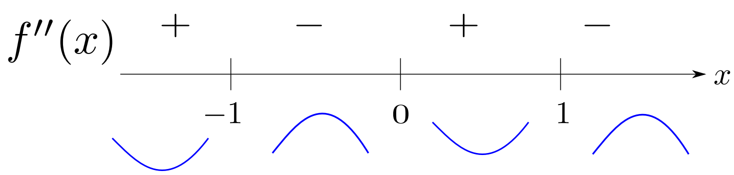
אין נקודת קיצון.

7. <u>תחומי קמירות, נקודות פיתול.</u>

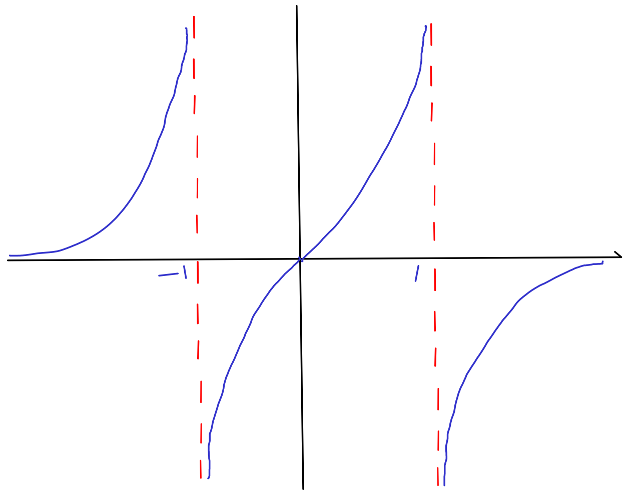
$$
\begin{aligned}
f''(x) =& \frac{2x(1-x^2)^2 - 2(1-x^2)(-2x)(x^2+1)}{(1-x^2)^4} \\
=& \frac{2x(1-x^2)\left[1-x^2+2(x^2+1)\right]}{(1-x^2)^4} \\
=& \frac{2x(1-x^2)\left[1-x^2+2x^2+2)\right]}{(1-x^2)^4} \\
=& \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}
\end{aligned}
$$

לכן $f''(x)=0$ כאשר $x=0$. הנקודה $(0,0)$ נקודת פיתול.

x	$x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$x>1$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$



8. <u>גרף הפונקציה.</u>



■

דוגמא.
חוקר באופן מלא את הפונקציה הבאה (תחום הגדרה, נקודות חיתוך, אסימפטוטות אנכיות אופקיות ומשופעות, תחומי עליה ורידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול), וצייר סקיצת הגרף של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$$

פיתרון.

1. תחום הגדרה: $x \neq 0$

א2 נקודות חיתוך עם הצירים: $(1,0)$

ב2 סימני הפונקציה

x	$f(x)$
$x<0$	$f(x)<0$
$0<x<1$	$f(x)<0$
$x>1$	$f(x)>0$

x		0		1	
$f(x)$	$-$		$-$		$+$

3. אסימפטוטות אנכיות.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^3-1}{x^2} = -\infty \ , \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3-1}{x^2} = +\infty \ .$$

$x=0$ אסימפטוטה אנכית.

4. אסימפטוטות אופקיות.

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^3-1}{x^2} = \infty \ , \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-1}{x^2} = \infty \ .$$

$y=0$ אין אסימפטוטה אופקית ב- $\pm\infty$.

5. <u>אסימפטוטות משופעות.</u>

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^3} = 1 \ , \qquad n = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^2} - x = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x^2} = 0 \ .$$

לכן הקו $y = x$ אסימפטוטה משופעת ב- $+\infty$.

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x^3} = 1 \ , \qquad n = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x^2} - x = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x^2} = 0 \ .$$

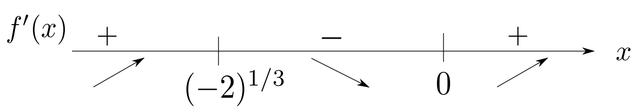
לכן הקו $y = x$ אסימפטוטה משופעת ב- $-\infty$.

6. <u>תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון</u>

$$f'(x) = \frac{3x^2\cdot x^2 - 2x(x^3-1)}{x^4} = \frac{x^4+2x}{x^4} = 1 + \frac{2}{x^3}$$

מכאן $f'(x) = 0$ בנקודות $x = 0$ ו- $x = (-2)^{1/3}$.

x	$x < (-2)^{1/3}$	$x = (-2)^{1/3}$	$(-2)^{1/3} < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$	$\nexists$	$\nearrow$

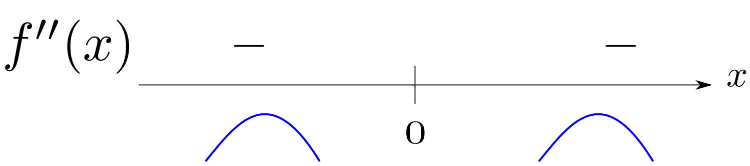


שים לב הפונקציה לא מוגדרת בנקודה $x = 0$ ולכן הנקודה $(-2^{1/3}, -1.89) = (-2^{1/3}, f(-2^{1/3}))$ נקודת מקסימום.

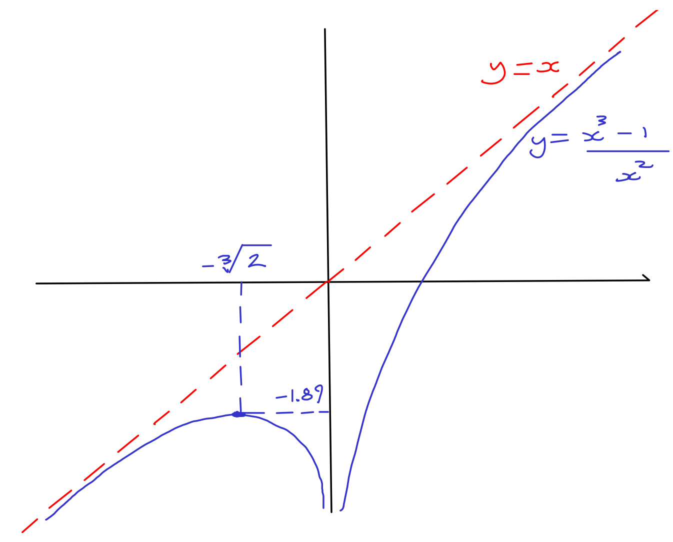
7. <u>תחומי קמירות, נקודות פיתול.</u>

$$f''(x) = \frac{-6}{x^4} < 0$$

x	$x < 0$	0	$x > 0$
$f''(x)$	$-$	0	$-$



8. <u>גרף הפונקציה.</u>



■

דוגמא.
חוקר באופן מלא את הפונקציה הבאה (תחום הגדרה, נקודות חיתוך, אסימפטוטות אנכיות אופקיות ומשופעות, תחומי עליה ורידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול), וצייר סקיצת הגרף של הפונקציה.

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{1+x}$$

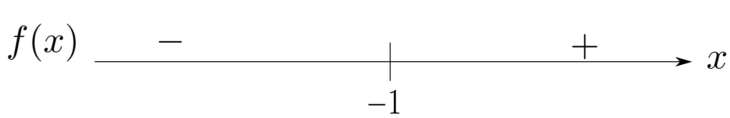
פיתרון.

1. <u>תחום הגדרה:</u> $x\neq -1$.

א2 <u>נקודות חיתוך עם הצירים:</u> $(0,1)$

ב2 <u>סימני הפונקציה</u>

$f(x)$	x
$-$	$x<-1$
$+$	$x>-1$



3. <u>אסימפטוטות אנכיות.</u>

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{e^{2x}}{1+x}=-\infty\ ,\qquad \lim_{x\to -1^+}\frac{e^{2x}}{1+x}=+\infty\ .$$

$x=-1$ אסימפטוטה אנכית.

4. <u>אסימפטוטות אופקיות.</u>

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{1+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{1}=\infty\ ,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{1+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^{2x}}{1}=0\ .$$

$y=0$ אין אסימפטוטה אופקית ב- $-\infty$.

5. <u>אסימפטוטות משופעות.</u>

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4e^{2x}}{2}=\infty\ .$$

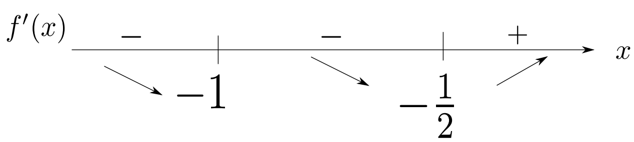
לכן אין אסימפטוטה משופעת ב- $+\infty$.

6. <u>תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון</u>

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(1+x)-e^{2x}\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{e^{2x}(2x+1)}{(1+x)^2}$$

מכאן $f'(x)=0$ בנקודות $x=\frac{-1}{2}$.

x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<\frac{-1}{2}$	$x=\frac{-1}{2}$	$x>\frac{-1}{2}$
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$\frac{2}{e}$	$\nearrow$

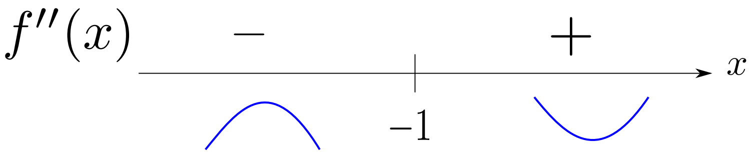


שים לב הפונקציה לא מוגדרת בנקודה $x=-1$ ולכן הנקודה $(-\frac{1}{2},f(-\frac{1}{2}))=(-\frac{1}{2},\frac{2}{e})=(-\frac{1}{2},0.74)$ נקודת מינימום.

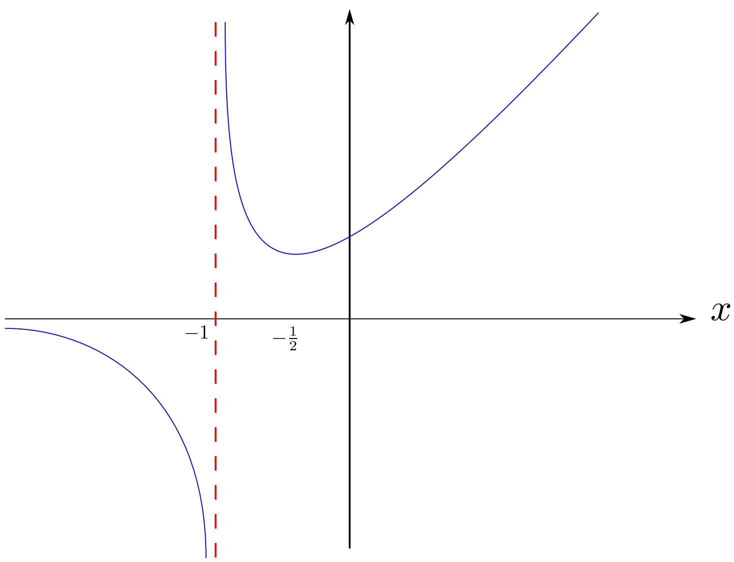
7. <u>תחומי קמירות, נקודות פיתול.</u>

$$\begin{aligned}f''(x)=&\frac{\left[2e^{2x}(2x+1)+2e^{2x}\right](1+x)^2-e^{2x}(2x+1)\cdot 2(1+x)}{(1+x)^4}\\ =&\frac{2e^{2x}(1+x)\left[(2x+2)(1+x)-(2x+1)\right]}{(1+x)^4}\\ =&\frac{2e^{2x}\left[2x^2+2+3x-2x-1\right]}{(1+x)^3}\\ =&\frac{2e^{2x}\left[2x^2+x+1\right]}{(1+x)^3}\end{aligned}$$

x	$x<-1$	-1	$x>-1$
$f''(x)$	$-$	$\nexists$	$-$



8. <u>גרף הפונקציה.</u>



■

דוגמא.
חוקר באופן מלא את הפונקציה הבאה (תחום הגדרה, נקודות חיתוך, אסימפטוטות אנכיות אופקיות ומשופעות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול), וצייר סקיצת הגרף של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$$

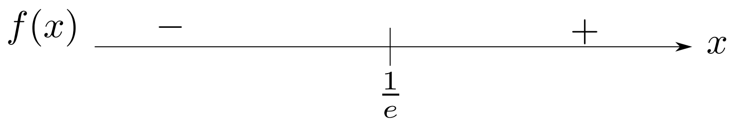
פיתרון.

1. <u>תחום הגדרה:</u> $x > 0$

2א <u>נקודות חיתוך עם הצירים:</u> $(0, \frac{1}{e})$

2ב <u>סימני הפונקציה</u>

x	$f(x)$
$x < \frac{1}{e}$	$-$
$x > \frac{1}{e}$	$+$



3. אסימפטוטות אנכיות.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\ln x}{x} = -\frac{\infty}{0^+} = -\infty \ .$$

$x=0$ אסימפטוטה אנכית.

4. אסימפטוטות אופקיות.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} == 0 \ .$$

$y=0$ אין אסימפטוטה אופקית ב- $+\infty$.

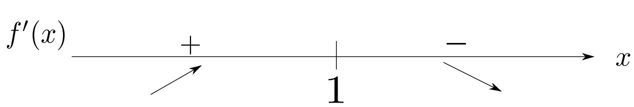
5. אסימפטוטות משופעות: אין

6. תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (1+\ln x)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

מכאן $f'(x)=0$ בנקודות $x=1$.

x	$x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$



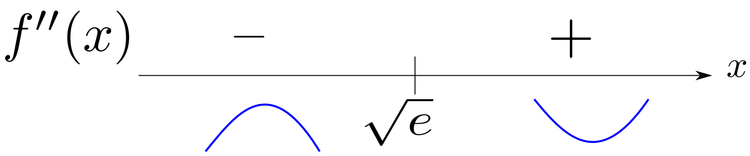
$x=1$ נקודת מקסימום מקומי. $f(1)=1$.

7. תחומי קמירות, נקודות פיתול.

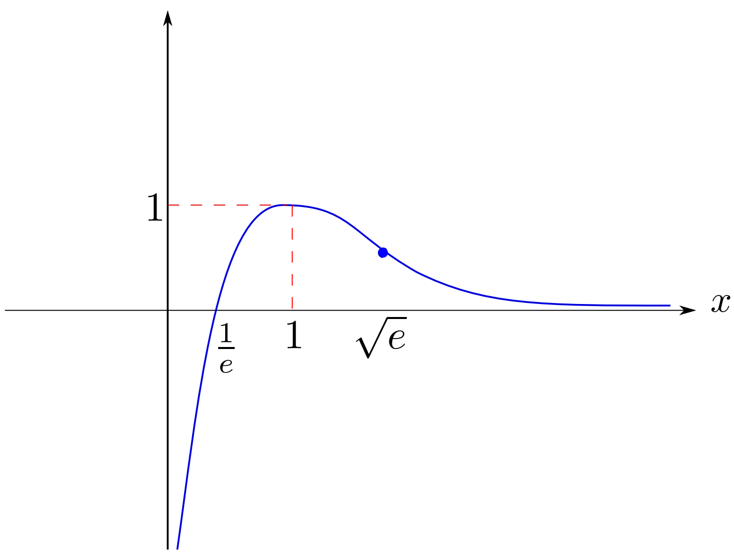
$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 + \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln x - 1}{x^3}$$

מכאן $f''(x)=0$ בנקודות $x=\sqrt{e}$.

x	$x < -\sqrt{e}$	$x = \sqrt{e}$	$x > \sqrt{e}$
$f''(x)$	$-$	0	$+$



8. גרף הפונקציה.



■

דוגמא.

חוקר באופן מלא את הפונקציה הבאה (תחום הגדרה, נקודות חיתוך, אסימפטוטות אנכיות אופקיות ומשופעות, תחומי עליה ורידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול), וצייר סקיצת הגרף של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x^2}{|x| - 1}$$

פיתרון.

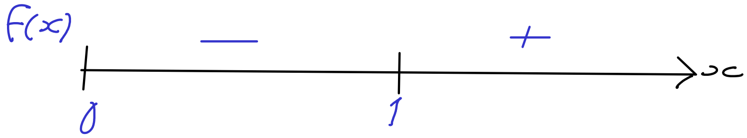
שים לב הפונקציה זוגית ולכן הגרף שלה סומיטרית ביחס לציר ה- y. נבנה את גרף הפונקציה בתחום $x \geq 0$.

1. תחום הגדרה: $x \geq 0$, $x \neq 1$.

2א נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$

2ב סימני הפונקציה

$f(x)$	x
$-$	$x < 1$
$+$	$x > 1$



3. <u>אסימפטוטות אנכיות.</u>

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty \ , \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \infty \ .$$

$x=1$ אסימפטוטה אנכית.

4. <u>אסימפטוטות אופקיות.</u> שים לב

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

לכן $y=x+1$ אסימפטוטה משופעת ב- $+\infty$.

5. <u>אסימפטוטות משופעות:</u> אין

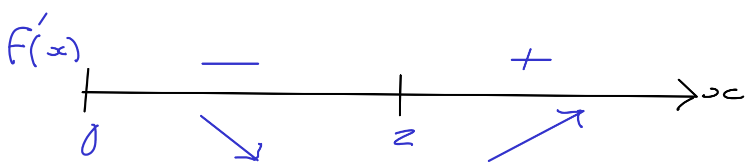
6. <u>תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון</u>

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

מכאן $f'(x)=0$ בנקודות שבהן $(x-1)^2=1$:

$$(x-1)^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x-1 = \pm 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0, 2 \ .$$

x	$0<x<2$	$x=2$	$x>2$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	4	$\nearrow$

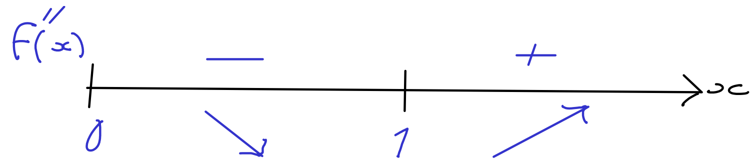


$x=2$ נקודת מינימום מקומי. $f(2)=4$.

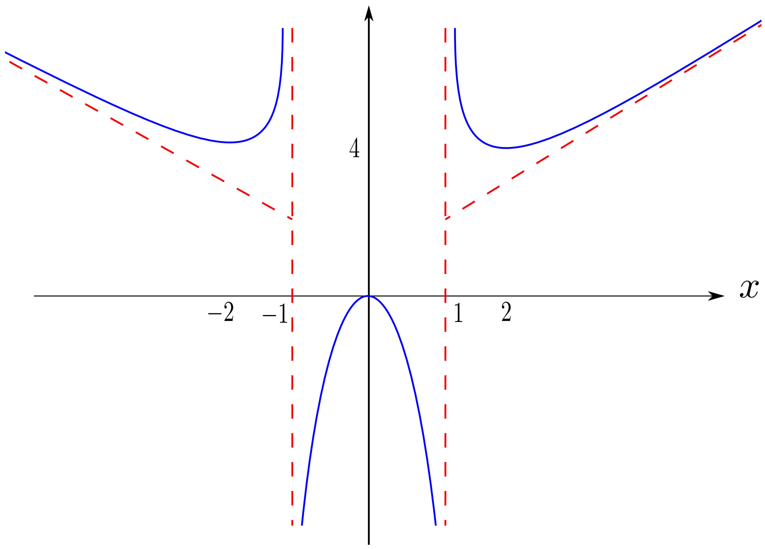
7. <u>תחומי קמירות, נקודות פיתול.</u>

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

x	$0<x<1$	$x=1$	$x>1$
$f''(x)$	$-$	$\nexists$	$+$



8. גרף הפונקציה.

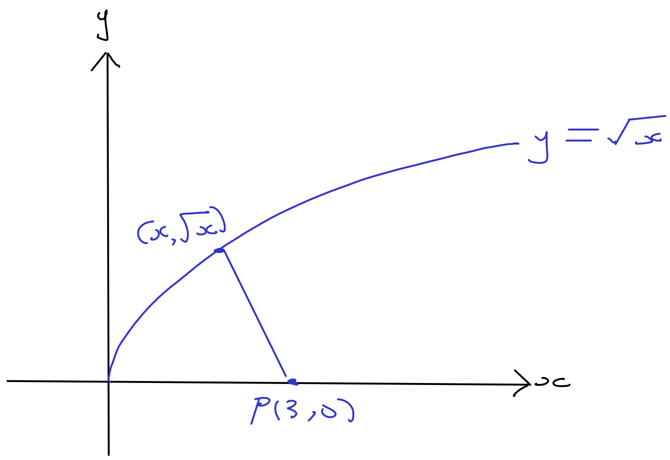


■

בעיות קיצון

דוגמא.
על הקו $y=\sqrt{x}$ מצא את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $P(3,0)$.

פיתרון.



נבחר נקודה שרירותית $(x,\sqrt{x})$ על גרף הפונקציה $y=\sqrt{x}$. נרשום את הנוסחה למרחק בין שתי נקודות $P(3,0)$ ו- $(x,\sqrt{x})$:

$$d=\sqrt{(x-3)^2+(\sqrt{x}-0)^2}=\sqrt{(x-3)^2+x}\ .$$

מכאן

$$d^2=(x-3)^2+x\ .$$

יש למצוא x שעבורו d^2 יקבל ערך מינימלי:

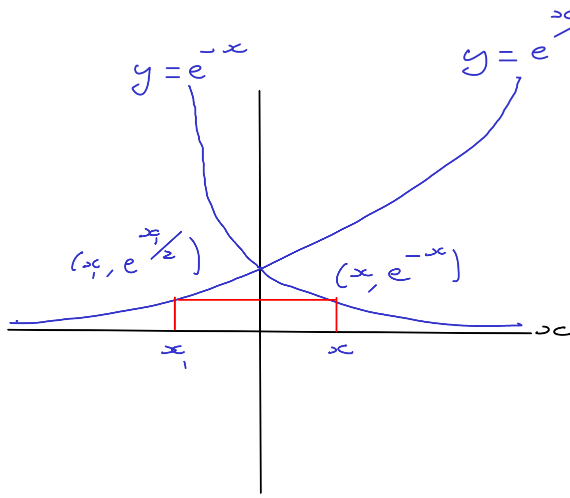
$$\left(d^2\right)'_x=2(x-3)+1=2x-5$$

מכאן $\left(d^2\right)'_x=0$ כאשר $x=2.5$.

תשובה סופית: הנקודה הקרובה ביותר היא $(2.5,\sqrt{2.5})=(2.5,f(2.5))$. ■

דוגמא.
בין הגרפים של פונקציה $y=e^{-x}$ ו- $y=e^{x/2}$ וציר ה- x חסום מלבן. מצא את שטח המקסימלי האפשרי של המלבן הזה.

פיתרון.



$$e^{x_1/2}=e^{-x} \qquad \Rightarrow \qquad x_1=-2x \ .$$

$$S=(x+|x_1|)e^{-x}=3x\cdot e^{-x} \ .$$

$$S'_x=3e^{-x}-3xe^{-x}=3e^{-x}(1-x) \ .$$

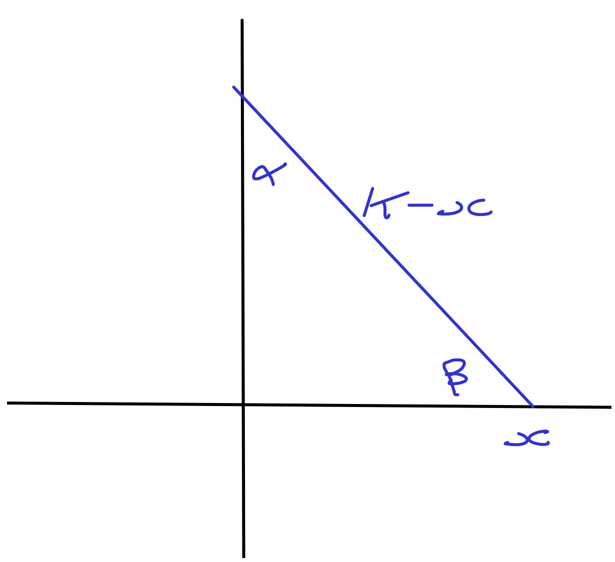
שים לב $S'_x=0$ בנקודה $x=1$. לכן הנקודה $x=1$ מקסימום מקומי.

$$S_{\max}=3\cdot 1\cdot e^{-1}=\frac{3}{e} \ .$$

■

דוגמא.
מצא את הזווית של משולש ישר זוויות בעל השטח הגדול ביותר שבו סכום אורכי היתר ואחד הניצבים שווה ל- K.

פיתרון.



נסמן את אורכי אחד הניצבים ב-x. אז אורך היתר הוא $k-x$ ואורך הניצב השני הוא

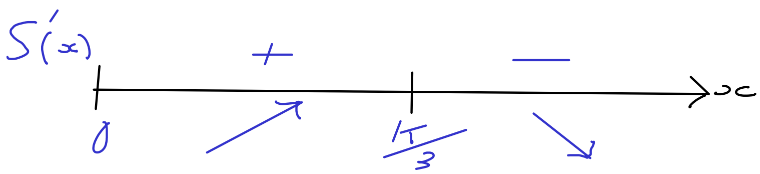
$$\sqrt{(k-x)^2-x^2}=\sqrt{k^2-2kx}$$

אז

$$S=\frac{x\cdot\sqrt{k^2-2kx}}{2}$$

$$\begin{aligned}S'_x=&x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-2k}{2\sqrt{k^2-2kx}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k^2-2kx}\\ =&\frac{1}{2}\left[\frac{-kx}{\sqrt{k^2-2kx}}+\sqrt{k^2-2kx}\right]\\ =&\frac{1}{2\sqrt{k^2-2kx}}\left(-kx+k^2-2kx\right)\\ =&\frac{1}{2\sqrt{k^2-2kx}}k\left(k-3x\right)\end{aligned}$$

$S'_x=0$ כאשר $x=\frac{k}{3}$.



$x=\frac{k}{3}$ נקודת מקסימום.

$$\sin\alpha=\frac{x}{k-x}=\frac{\frac{k}{3}}{k-\frac{k}{3}}=\frac{1}{2}\ ,\qquad\Rightarrow\qquad\alpha=\frac{\pi}{6}\ .$$

הזווית השניה

$$\beta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\ .$$

■

תרגילים לשימוש בחקרית פונקציה

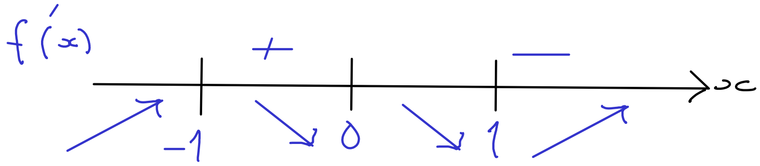
דוגמא.
הוכח כי לכל $x\neq 0$ מתקיים

$$\left|\frac{1}{2x}+\arctan x\right|\geq\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ .$$

פיתרון.
נגדיר $f(x)=\dfrac{1}{2x}+\arctan x$.

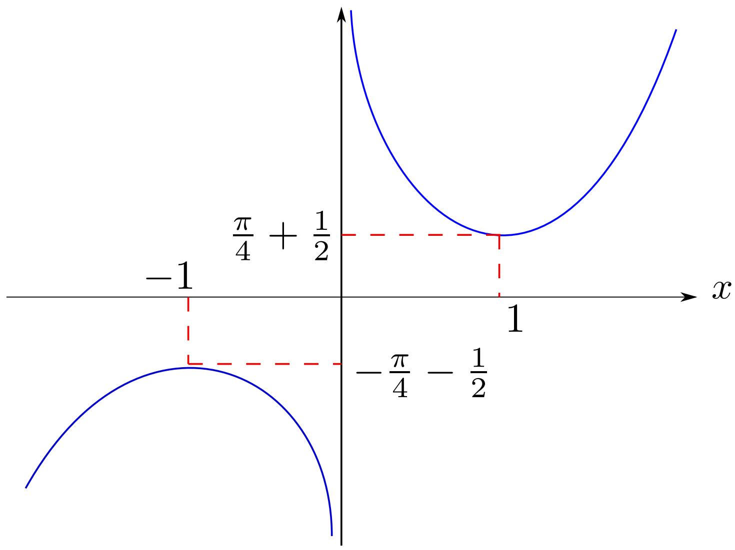
$$f'(x)=-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2-1}{2x^2(x^2+1)}$$

ולפיו $f'(x)=0$ בנקודה $x=\pm1$.



$x=1$ נקודה מינימום מקומי $f(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

$x=-1$ נקודה מקסימום מקומי $f(-1)=-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$



ז"א $f(x)>\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ או $f(x)<-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. לכן

$$\left|\frac{1}{2x}+\arctan x\right|\geq\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ .$$

■

דוגמא.
הוכח כי למשוואת

$$6x^6-6x^4+1=0$$

אין פתרונות ממשיים.

פיתרון.
נגדיר $f(x)=6x^6-6x^4+1$.

$$f'(x)=36x^5-24x^3=12x^3(3x^2-2)=12x^3(\sqrt{3}\cdot x+\sqrt{2})(\sqrt{3}\cdot x-\sqrt{2})\ .$$

מכאן $f'(x)=0$ בנקודות $x=0,\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}$. שים לב בנקודות $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ יש לפונקציה $f(x)$ מינימום, ו- $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{9}>0$ לכן $f(x)>0$ לכל x. ■
