תרגילים : סיבוכיות

שאלה 1

הבעיית קליקה מוגדרת באופן הבא:

קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר טבעי k.
פלט: האם G מכיל קליקה בגודל k?

$$CLIQUE = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ מכיל קליקה בגודל } k\} \ .$$

הבעיית כיסוי בקדקודים מוגדרת:

קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר טבעי k.
פלט: האם G מכיל כיסוי בקדקודים k?

$$VC = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ מכיל כיסוי בקדקודים בגודל } k\} \ .$$

הוכיחו כי קיימת רדוקציה זמן-פולינומיאלית מבעיית $CLIQUE$ לבעיית VC: כלומר

$$CLIQUE \leq_p VC \ .$$

שאלה 2

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$. קבוצת קדקודים $U \subseteq V$ תקרא **קבוצת בלתי תלויה** אם לכל זוג קדקודים u_1, u_2 ב- U מתקיים ש-

$$(u_1, u_2) \notin E \ .$$

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$. קבוצת קדקודים $U \subseteq V$ תקרא **קליקה** אם לכל זוג קדקודים u_1, u_2 ב- U מתקיים ש-

$$(u_1, u_2) \in E \ .$$

נתבונן בשפות הפורמליות הבאות:

$$IS = \left\{\langle G, k\rangle \;\middle|\; G \text{ is an undirected graph, } k \text{ is an integer, } G \text{ includes an } \textbf{independent set} \text{ of size at least } k \right\}$$

$$CLQ = \left\{\langle G, k\rangle \;\middle|\; G \text{ is an undirected graph, } k \text{ is an integer, } G \text{ includes an } \textbf{clique} \text{ of size at least } k \right\}$$

הוכיחו כי

$$IS \leq_P CLQ \ .$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה IS לשפה CLQ.
יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 3

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$. קבוצת קדקודים $U\subseteq V$ תקרא **קבוצת בלתי תלויה** אם לכל זוג קדקודים u_1,u_2 ב- U מתקיים ש-

$$(u_1,u_2)\notin E\ .$$

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$. קבוצת קדקודים $U\subseteq V$ תקרא **כיסוי קדקודים** ב- G אם לכל צלע $(u_1,u_2)\in E$, מתקיים ש-

$$u_1\in U \quad \vee \quad u_2\in U\ .$$

נתבונן בשפות הפורמליות הבאות:

$$IS=\left\{\langle G,k\rangle \;\middle|\; G \text{ is an undirected graph, } k \text{ is an integer, } G \text{ includes an } \textbf{independent set} \text{ of size at least } k\right\}$$

$$VC=\left\{\langle G,k\rangle \;\middle|\; G \text{ is an undirected graph, } k \text{ is an integer, } G \text{ includes a } \textbf{vertex cover} \text{ of size at least } k\right\}$$

הוכיחו כי

$$IS\leq_P VC\ .$$

כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה IS לשפה VC.
יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 4 בעיית סכום התת קבוצה (subsetSum): בהינתן קבוצת מספרים שלמים $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ ומספר שלם t, האם קיימת תת קבוצה $Y\subseteq S$ שסכום איבריה הוא בדיוק t.
בעיית סכום התת קבוצה כשפה פורמלית:

$$\text{SubsetSum}=\left\{\langle S,t\rangle \;\middle|\; \text{קבוצת שלמים, } S \text{ שלם וקיימת תת-קבוצה } t \text{ כך ש- } Y\subseteq S \quad t=\sum_{y\in Y}Y\right\}$$

בעיית החלוקה (Partition): בהינתן קבוצת מספרים שלמים $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ האם קיימת תת-קבוצה $Y\subseteq S$ כך ש- $\sum\limits_{y\in Y}y=\sum\limits_{y\in S\backslash Y}y$.
בעיית החלוקה כשפה פורמלית:

$$\text{partition}=\left\{S \;\middle|\; \text{קבוצת שלמים, וקיימת תת-קבוצה } S \text{ כך ש- } Y\subseteq S \quad \sum_{y\in Y}y=\sum_{y\in S\backslash Y}y\right\}$$

הוכיחו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה SubsetSum לשפה partition. כלומר:

$$\text{SubsetSum}\leq_P \text{Partition}\ .$$

בשאלה זו עליכם:

א) להגדיר במפורש את הרדוקציה.

ב) להראות שהרדוקציה היא רדוקציית התאמה.

ג) להראות שהרדוקציה פולינומיאלית.

תשובות

שאלה 1 בהינתן זוג $\langle G,k\rangle$ הקלט עבור $CLIQUE$, ניצור זוג $\langle G',k'\rangle$, הקלט של VC ע"י פונקצית הרדוקציה

$$\langle G,k\rangle \in CLIQUE \quad \Rightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in VC$$
$$\langle G,k\rangle \in CLIQUE \quad \Leftarrow \quad \langle G',k'\rangle \in VC$$

הגדרת הרדוקציה

- נגדיר את G' להיות הגרף המשלים $\bar{G}(V,\bar{E})$:

$$\bar{E} = \left\{(u_1,u_2) \;\middle|\; (u_1,u_2) \notin E\right\} \ .$$

- נגדיר $k' = |V| - k$.

נכונות הרדוקציה

כיוון $\Leftarrow$

נניח כי $\langle G,k\rangle \in CLIQUE$.

$\Leftarrow$ G מכיל קליקה C בגודל k.

$\Leftarrow$ לכל $(u_1,u_2) \in \bar{E}$ של $\bar{G}$, מתקיים $(u_1,u_2) \notin E$ ולכן $u_1 \notin C$ או $u_2 \notin C$.

$\Leftarrow$ לכל שני קודקודים u_1,u_2 ב- $\bar{G}$, $u_1 \in V\backslash C$ או $u_2 \in V\backslash C$.

$\Leftarrow$ הקובצת קודקודים $V\backslash C$ היא כיסוי בקודקודים של $\bar{G}$ בגודל $k' = |V| - k$.

$\Leftarrow$ $\langle G',k'\rangle \in VC$.

כיוון $\Rightarrow$

נניח כי $\langle G',k'\rangle \in VC$.

$\Leftarrow$ G' מכיל כיסוי בקדקודים S בגודל $k' = |V| - k$.

$\Leftarrow$ לכל שני קודקודים u_1,u_2 של G', אם $(u_1,u_2) \in \bar{E}$ אז $u_1 \in S$ או $u_2 \in S$.
השלילה הלוגית של גרירה זו היא: אם $u_1 \notin S$ וגם $u_2 \notin S$ אז $(u_1,u_2) \notin \bar{E}$.

$\Leftarrow$ אם $u_1 \in V\backslash S$ וגם $u_2 \in V\backslash S$ אז $(u_1,u_2) \in \bar{E}$.

$\Leftarrow$ הקבוצת קודקודים $V\backslash S$ היא קליקה ב- G בגודל $k = |V| - k'$.

$\Leftarrow$ G מכיל קליקה בגודל k.

שאלה 2 עלינו להוכיח כי $\exists$ רידוקיציית זמן-פולינומיאלית מ- IS ל- CLQ:

$$IS \leq_P CLQ \ .$$

ראשית נגדיר את הבעיות CLQ ו- IS.

הגדרת הבעיית CLQ:

קלט:	גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר שלם חיובי k.
פלט:	האם G מכיל קליקה בגודל לפחות k.

$$CLQ = \left\{ \langle G,k\rangle \;\middle|\; \text{מכיל קליקה בגודל } k \text{ לפחות } G \right\} \ .$$

הגדרת הבעיית IS:

קלט:	גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר שלם חיובי k.
פלט:	האם G מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל לפחות k.

$$IS = \left\{ \langle G,k\rangle \;\middle|\; \text{מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל } k \text{ לפחות } G \right\} \ .$$

פונקצית הרדוקציה:

אנחנו נגדיר פונקצית הרדוקציה R שבהינתן זוג $\langle G,k\rangle \in IS$ R מחזירה $\langle G',k'\rangle \in CLQ$, כלומר

(*1) $$R\left(\langle G,k\rangle\right) = \langle G',k'\rangle \ .$$

כך ש:

(*2) $$\langle G,k\rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in CLQ \ .$$

הפונקציית הרדוקציה במשוואה (*1) מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

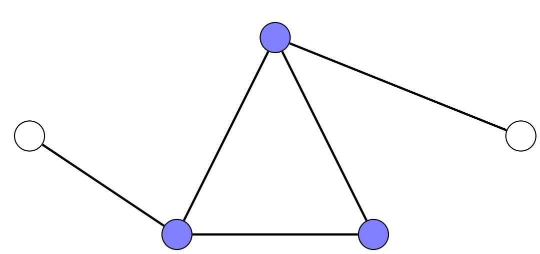
1) נניח שהגרף הוא $G=(V,E)$.
אז הגרף G' הוא הגרף המשלים של $G=(V,E)$.
ז"א $G'=\bar{G}=\left(V,\bar{E}\right)$ כאשר

$$\bar{E} = \left\{ (u_1,u_2) \;\middle|\; (u_1,u_2)\notin E \right\} \ .$$

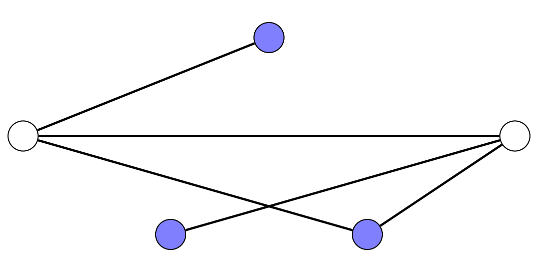
2) $k'=k$.

לדוגמה, בהינתן הגרף $G=(V,E)$ שמכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k=3$, הפונקציית הרדוקציה R מחזירה את הגרף $\bar{G}=(V,\bar{E})$ ואת המספר $k'=k=3$, כמתואר בתרשים למטה:

$\bar{G}=\left(V,\bar{E}\right)$



$G=(V,E)$



<u>נכונות הרדוקציה</u>

כעת נוכיח שתנאי (2*) מתקיים.

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

בהינתן גרף $G=(V,E)$ ושלם k.
נניח כי $\langle G,k\rangle \in IS$.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל k לפחות.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה U בגודל k.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- U לא מחוברים בצלע של G.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- U מחוברים בצלע של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ הקבוצה U היא קליקה בגודל k של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ הקבוצה U היא קליקה בגודל $k'=k$ של $G'=\bar{G}$.

$\Leftarrow$ $\langle G',k'\rangle \in CLQ$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

בהינתן גרף G' ושלם k'.
נניח כי $\langle G',k'\rangle \in CLQ$.

$\Leftarrow$ G' מכיל קליקה בגודל k' לפחות.

$\Leftarrow$ G' מכיל קליקה U' בגודל k'.
על פי ההגדרה של הפונקציית הרדוקיה R: $G'=\bar{G}$.

$\Leftarrow$ $\bar{G}$ מכיל קליקה U' בגודל k'.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- U' מחוברים בצלע של $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- U' לא מחוברים בצלע של המשלים של הגרף $\bar{G}$, דהיינו G.

$\Leftarrow$ הקבוצה U' היא קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k'=k$ של G.

$\Leftarrow$ $\langle G,k\rangle \in IS$.

<u>שאלה 3</u> עלינו להוכיח כי $\exists$ רידוקיציית זמן-פולינומיאלית מ- IS ל- VC:

$$IS \le_P VC \ .$$

ראשית נגדיר את הבעיות VC ו- IS.

<u>הגדרת הבעיית VC:</u>

קלט:	גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר שלם חיובי k.
פלט:	האם קיים כיסוי קדקודים ב- G בגודל לפחות k.

$$VC = \left\{ \langle G,k\rangle \;\middle|\; \text{מכיל כיסוי קדקודים בגודל } k \text{ לפחות } G \right\} .$$

הגדרת הבעיית IS:

קלט:	גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר שלם חיובי k.
פלט:	האם G מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל לפחות k.

$$IS = \left\{ \langle G,k\rangle \;\middle|\; \text{מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל } k \text{ לפחות } G \right\} .$$

פונקצית הרדוקציה:

אנחנו נגדיר פונקצית הרדוקציה R שבהינתן זוג $\langle G,k\rangle \in IS$, R מחזירה $\langle G',k'\rangle \in VC$, כלומר

$$R\left(\langle G,k\rangle\right) = \langle G',k'\rangle \ . \qquad (*1)$$

כך ש:

$$\langle G,k\rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in VC \ . \qquad (*2)$$

הפונקציית הרדוקציה במשוואה (1*) מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

1) נניח שהגרף הוא $G=(V,E)$.
אז הגרף G' הוא אותו גרף $G=(V,E)$.

2) $k'=|V|-k$.

נכונות הרדוקציה

כעת נוכיח שתנאי (2*) מתקיים.

כיוון $\Leftarrow$

בהינתן גרף $G=(V,E)$ ושלם k.
נניח כי $\langle G,k\rangle \in IS$.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה U בגודל k לפחות.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה U בגודל k.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- U לא מחוברים בצלע ב- G.

$\Leftarrow$ $V\backslash U$ היא כיסוי קדקודים ב- G בגודל $k'=|V|-k$.

$\Leftarrow$ הגרף $G'=\bar{G}$ מכיל כיסוי קדקודים בגודל k.

$\Leftarrow$ $\langle G',k'\rangle \in VC$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

בהינתן גרף G' ושלם k'.

נניח כי $\langle G', k' \rangle \in VC$.

$\Leftarrow$ G' מכיל כיסוי קדקודים בגודל k' לפחות.

$\Leftarrow$ G' מכיל כיסוי קדקודים U' בגודל k'.

$\Leftarrow$ G מכיל כיסוי קדקודים U' בגודל k'.

$\Leftarrow$ כל שני קדקודים ב- $V \backslash U'$ היא קבוצת בלתי תלוייה ב- G' בגודל $k = |V| - k'$.

$\Leftarrow$ הגרף $G = G'$ מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל k.

שאלה 4

א) נבנה פונקצית הרדוקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ שמוגדרת

$$f(\langle S, t \rangle) = \langle S' \rangle$$

כאשר $\langle S, t \rangle$ קלט של SubsetSum ו- $\langle S' \rangle$ קלט של Partition.

1) יהי $s = \sum\limits_{x \in S} x$.

2) נגדיר את הקבוצה החדשה S' על ידי הוספת האיבר $s - 2t$ לקבוצה S:

$$S' = S \cup \{s - 2t\} \ .$$

ב) <u>כיוון $\Leftarrow$</u>

נניח ש- $\langle S, t \rangle \in$ SubsetSum.

$\Leftarrow$ קיימת תת-קבוצה $S \subseteq Y$ כך ש- $t = \sum\limits_{y \in Y} y$.

לכן:

$$\begin{aligned} \sum_{y \in (Y \cup \{s-2t\})} y &= |Y| + s - 2t \\ &= t + s - 2t \\ &= s - t \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{y \in S' \backslash (Y \cup \{s-2t\})} y &= |S'| - (|Y| + s - 2t) \\ &= |S'| - |Y| - s + 2t \\ &= |S| + s - 2t - |Y| - s + 2t \\ &= |S| - |Y| \\ &= s - t \ . \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ התת-קבוצה $Y \cup \{s-2t\}$ והתת-קבוצה $S' \backslash \big(Y \cup \{s-2t\}\big)$ מהוות חלקוה של הקבוצה S'.
$\Leftarrow$ $\langle S' \rangle \in \text{Partition}$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

נניח ש- $\langle S' \rangle \in \text{Partition}$.
$\Leftarrow$ קיימות תת-קבוצות $S_1', S_2' \subseteq S'$ כך שמתקיים

(1*) $$S_1' \cup S_2' = S'$$

ו-

(2*) $$\sum_{x \in S_1'} x = \sum_{x \in S_2'} x \ .$$

הקבוצה S קשור לקבוצה S' על ידי היחס $S' = S \cup \{s-2t\}$.
לכן

(3*) $$S_1' \cup S_2' = S \cup \{s-2t\}$$

ללא הגבלת כלליות אנחנו נגדיר את התת-קבוצה $S_1 \subseteq S$ של הקבוצה S להיות

$$S_1 = S_1' \cup \{s-2t\} \ ,$$

ואנחנו נגדיר את התת-קבוצה $S_2 \subseteq S$ של הקבוצה S להיות

$$S_2 = S_2' \ .$$

מכאן מנובע מהמשוואה (3*) ש:

(4*) $$S_1 \cup S_2 = S_1' \cup S_2' + \{s-2t\} = S \cup \{s-2t\} \qquad \Rightarrow \qquad S_1 \cup S_2 = S \ .$$

$\Leftarrow$ ניתן לרשום משוואה (2*) בצורה הבאה:

(5*) $$\sum_{x \in (S_1 \cup \{s-2t\})} x = \sum_{x \in S_2} x \ .$$

ניתן לחלק את הסכום בצד השמאול של המשווה (5*) ולרשום אותה בצורה הבאה:

(6*) $$\sum_{x \in S_1} x + s - 2t = \sum_{x \in S_2} x \ .$$

נוסיף את הסכום $\sum\limits_{x \in S_1} x$ לשני האגפים של משוואה של (6*) ונקבל

(7*) $$\sum_{x \in S_1} x + \sum_{x \in S_1} x + s - 2t = \sum_{x \in S_2} x + \sum_{x \in S_1} x \ .$$

הסכום בצד הימין של משוואה (7*) הוא הסכום $\sum\limits_{x\in(S_1\cup S_2)} x$.

לפי המשוואה (4*), $S_1\cup S_2=S$ לכן $\sum\limits_{x\in S} x = \sum\limits_{x\in(S_1\cup S_2)}$.

לכן הסכום בצד הימין של משוואה (7*) הוא הסכום של כל האיברים אשר בקבוצה S.

אנחנו מסמנים את הסכום הזה כ- $\sum\limits_{x\in S} x = s$. לכן ניתן לרשום את משוואה (7*) בצורה הבאה:

$$\sum_{x\in S_1} x + \sum_{x\in S_1} x + s - 2t = s \ . \tag{8*}$$

אפשר לבטל s בצד שמאול ובצד ימין ולהעביר את ה- $2t$ לצד ימין ולקבל את המשוואה:

$$\sum_{x\in S_1} x + \sum_{x\in S_1} x = 2t \ , \tag{9*}$$

זאת אומרת

$$2\sum_{x\in S_1} x = 2t \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{x\in S_1} x = t \ . \tag{10*}$$

$\Leftarrow$ קיימת תת קבוצה $S_1\subseteq S$ של S שמקיימת את התנאי $\sum\limits_{x\in S_1} x = t$.

$\Leftarrow$ $\langle S,t\rangle \in \text{SubsetSum}$.

ג) הפונקצית הרדוקציה f, על קלט $\langle S,t\rangle$ מחזירה את הפלט $\langle S'\rangle$ כאשר $S'=S\cup\{s-2t\}$.

לכן הפונקציה מחשבת את הסכום s של כל האיברים שבקבוצה S ואז מחשבת את החיסור $s-2t$.

נסמן $n=|S|$ האורך של הקבוצה S.

אפשר לתאר את f בפסאודו-קוד באופן הבא:

שלב 1. הפונקציה f מאתחלת משתנה $s=0$.

שלב 2. הפונקציה נכנסת ללואה מעל כל האיברים שבקבוצה S ומחברת האיבר הנוכחי לערך של s כל איטרציה.

שלב 3. בסוף הפונקציה מחשבת את החיסור $s-2t$.

שלב 4. הפונקציה מחזירה את הקבוצה החדשה $S'=S\cup\{s-2t\}$.

- שלב 1 דורש צעד אחד. לכן הסיבוכיות של שלב 1 הוא $O(1)$.
- שלב 2 דורש n צעדים. לכן הסיבוכיות של שלב 2 הוא $O(n)$.
- שלב 3 דורש צעד אחד. לכן הסיבוכיות של שלב 3 הוא $O(1)$.
- שלב 4 דורש צעד אחד. לכן הסיבוכיות של שלב 4 הוא $O(1)$.

בסך הכל הסיבוכיות של הפונקציה f היא

$$O(1)+O(n)+O(1)+O(1)=O(n) \ .$$