תרגילים: שפות כריעות ושפות קבילות

שאלה L^* מוגדרת: בהינתן השפה L^* מוגדרת:

$$L^* = \{\varepsilon\} \cup \{w = w_1 w_2 \cdots w_k \mid \forall \ 1 \le i \le k \ , \ w_i \in L\}$$

- א). בהינתן מכונת טיורינג M המקבלת שפה . L^* המקבלת את השפה M^* המקבלת את השפה בנו מכונט טיורינג אי דטרמיניסטית
- .L המכריעה שפה M בהינתן מכונת טיורינג בהינתן מכונע טיורינג אי דטרמיניסטית M^* המכריעה את בנו מכונט טיורינג אי
- שאלה 2 האם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה. $L(M) \in R$ אזי $L(M) \in Co\,RE$ לכל מכונת טיורינג
- שאלה לבעיה פתוחה. האם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה. $L_2 \in Co\,RE \,\,$ אם $L_1 \in RE \,\,$ אזי $L_1 \cap L_2 \in R$
 - -שאלה 4 הוכיחו כי לכל 3 שפות L_1, L_2, L_3 כך ש
 - $.L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \Sigma^*$.1
 - $1 \leq i,j \leq 3$,i
 eq j לכל לכל $L_i \cap L_j = \emptyset$.2
 - $1 \leq i \leq 3$ לכל לכל 1 הוכיחו הו $1 \leq i \leq 3$ לכל לכל לכל גי $L_i \in RE$
- ... שאלה לבעיה פתוחה. שאלה לא נכונה, לא נכונה, לא נכונה אם הטענה הבאה לבעיה פתוחה. $L_1\in RE$ אזי $L_1\in RE$ אזי $L_1\cup L_2\in RE$ אכל שתי שפות $L_1\cap L_2\in RE$ אם $L_1\cap L_2\in RE$ אכל שתי שפות אזי
 - . פתוחה שאלה או שקולה לבעיה נכונה, לא נכונה או קבעו אם הטענה הבאה לבעיה $\mathbf{L}_{\Sigma^*} \backslash L_{\mathrm{d}} \in RE$
 - ... שאלה 7 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה. L'=L אזי $L'=\left\{\langle M\rangle\ \middle|\ L(M)\in Co\,RE\right\}$ אם $L'=\left\{\langle M\rangle\ \middle|\ L(M)\in RE\right\}$
 - שאלה 8 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה. לכל מספר n מתקיים n מתקיים לכל מספר n
- שאלה 9 מכילה קידודים של מכונות שמקבלות . $L=\left\{ \langle M \rangle \ \middle| \ |L(M)| \geq 3 \right\}$ נתונה השפה הבאה: $L=\{ \langle M \rangle \ \middle| \ |L(M)| \geq 3 \}$ נתונה. הוכיחו כי $L=\{ C \}$
 - שאלה לשאלה שקולה שקולה לא נכונה, או שקולה פתוחה: $L_2 \in RE$ או $L_1 \in RE$ אזי אוי $L_2 \setminus L_1 \in RE$ אכל שתי שפות $L_2 \in RE$ או $L_1 \in RE$ אזי

ישאלה שקולה שקולה לא נכונה, לא נכונה הבאה פתוחה: קבעו אם הטענה הבאה $L \notin R$ אזי אז $L = \big\{ \langle M \rangle \ \big| \ L(M) \notin RE \big\}$

שאלה לבעיה שקולה לבעיה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה: $L_1 \leq (L_2 \cap L_3)$ אזי $L_1 \leq L_2$ אם או $L_1 \leq L_2$ אם לכל שלוש שפות שפות לבעיה או ב

תשובות

שאלה 1

L את מכונת טיורנג שמזהה את M

 L^{st} אי-דטרמיניסטית אי-דטרמינג מכונת טיורינג M^{st}

תאור הבנייה

:w על קלט $=M^*$

. אם w=arepsilon מקבלת. w=arepsilon

 $k \in \mathbb{N}^+$ כאשר $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$ ל- w ל- של הטרמיניסטי דטרמיניסטי אז בוחרת באופן אי בוחרת באופן אי

i < i < k לכל.

. מריצה את w_i על M על מריצה $M^* ullet$

 \star אם M קיבלה חוזרים לשלב 3).

.4 אזי M^* אזי $\{w_i\}$ אזי כל המחרוזות אזי M מקבלת.

כתיבה הוא סופי הוא סופי ולכן הניחוש הוא סופי, לפיכך כתיבה - w - ניתנת לחישוב - מספר הפירוקים האפשריים לw - מספר הפירוקים האפשריים לw - גיתן לחישוב.

 $\underline{L^{*}}=L\left(M^{*}
ight)$:הוכחת נכונות

⇒ כיוון

 $w\in L\left(M^{st}
ight)$ נניח כי

. קיבלה M ($1 \leq i \leq k$) w_i כך שעבור כל ($k \in \mathbb{N}^+$) $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_k$ קיימת חלוקה

L(M) = L בפרט, בפרט. $w_i \in L(M)$ \Leftarrow

 $w_i \in L \Leftarrow$

 $w = w_1 w_2 \dots w_k \in L^* \Leftarrow$

 $.L\left(M^{\ast}\right) \subseteq L^{\ast}\Leftarrow$

\Rightarrow כיוון

 $w \in L^*$ נניח כי

 $(1 \leq i \leq k) \ w_i \in L$ כך שכל ($k \in \mathbb{N}^+$) $w = w_1 w_2 \cdots w_k$ קיימת חלוקה $k \in \mathbb{N}^+$

w תנחש את הפירוק הזה עבור $M^* \Leftarrow$

כזה w_i כזה תקבל כל M

w תקבל את $M^* \Leftarrow$

 $w \in L(M^*) \Leftarrow$

 $L^* \subset L(M^*) \Leftarrow$

 $L\left(M^{*}
ight)=L^{*}$ אזי $L^{*}\subseteq L\left(M^{*}
ight)$ ו- $L\left(M^{*}
ight)\subseteq L^{*}$ אזי שיר ומצאנו ש-

.L את מכונת טיורנג שמכריעה את מכונת מיורנג M^* אי-דטרמיניסטית המכריעה את גבנה מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

תאור הבנייה

:w על קלט $=M^*$

- .1. אם w=arepsilon מקבלת.
- $k \in \mathbb{N}^+$ כאשר $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$ ל- w ל- בוחרת באופן אי דטרמיניסטי חלוקה של $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$ בוחרת באופן אי
 - $1 \le i \le k$ לכל.
 - w_i על M מריצה את M^*
 - . דוחה M^* אם M דוחה או M^*
 - אחרת אם M קיבלה חוזרים לשלב 3). \ast
 - .4 אזי M^* אזי $\{w_i\}$ אזי לכל המחרוזות M מקבלת.

ניתנת לחישוב - מספר הפירוקים האפשריים ל- w הוא סופי ולכן הניחוש הוא סופי, לפיכך כתיבה - M^st על הסרט והרצת M ניתן לחישוב.

$L^{st}=L\left(M^{st} ight)$ הוכחת נכונות:

 \Leftarrow כיוון

 $w\in L\left(M^{st}
ight)$ ננית כי

- קיבלה. M ($1 \leq i \leq k$) w_i כך שעבור כל ($k \in \mathbb{N}^+$) $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_k$ קיימת חלוקה
 - L(M) = L בפרט, בפרט. $w_i \in L(M)$ כל
 - $w_i \in L \Leftarrow$
 - $w = w_1 w_2 \dots w_k \in L^* \Leftarrow$
 - $L(M^*) \subseteq L^* \Leftarrow$

\Rightarrow כיוון

 $w \in L^*$ נניח כי

- $(1 \leq i \leq k) \ w_i \in L$ כך שכל ($k \in \mathbb{N}^+$) $w = w_1 w_2 \cdots w_k$ קיימת חלוקה $k \in \mathbb{N}^+$
 - w תנחש את הפירוק הזה עבור $M^* \Leftarrow$
 - כזה w_i כזה תקבל כל M כזה \Leftarrow
 - w תקבל את $M^* \Leftarrow$
 - $w \in L(M^*) \Leftarrow$
 - $L^* \subseteq L(M^*) \Leftarrow$

 $L\left(M^{*}
ight)=L^{*}$ אזי אזי $L^{*}\subseteq L\left(M^{*}
ight)$ -ו $L\left(M^{*}
ight)\subseteq L^{*}$ אזי ישחר ומצאנו ש

שאלה 2 הטענה נכונה:

 $L(M) \in RE$. ההגדרה: מתקיים, לפל מכונת טיורינג מתקיים, לפי ההגדרה: $L(M) \in Co\:RE \mapsto L(M) \in RE \cap Co\:RE = R \;.$

שאלה 3 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

יהי
$$L_1 = L_{\Sigma^*}
otin RE$$
 כאשר

$$L_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^* \}$$

$$.L_2=\overline{L_{\Sigma^*}}$$
 ותהי

$$.L_1\cap L_2=\emptyset\in R$$
 -בורר ש

,
$$L_1
otin Co \, RE$$
 מצד שני, $L_1 = L_{\Sigma^*}
otin RE$ וגם

$$L_2
otin RE$$
 וגם $L_2 = \overline{L_{\Sigma^*}}
otin Co\,RE$ -י

שאלה 4

שיטה 1

 $.1 \leq i \leq 3$ לכל L_i את המקבלת M_i טיורינג סיורינג קיימת קיימת שר קיימת שר $L_i \in RE$ את מכונת אם לכל המכריעה המכריעה M_i^* המכריעה או נבנה מכונת הורינג ל L_i המכריעה את המכריעה את אורינג לבנה מכונת המכריעה את המכריעה את אוריים המכריעה את המכריעה את אוריים המכריעה את המכר

 M_3^* -ו M_2^* את הבנייה עבור באופן דומה אפשר לבנות את הבנייה עבור M_1^*

$$:w$$
 על קלט $=M_1^*$

 M_1,M_2,M_3 מריצה במקביל את שלושת במקביל •

. אם
$$M_1^* \Leftarrow$$
 מקבלת סיבלת אם M_1

. דוחה
$$M_2^* \Leftarrow \eta$$
 קיבלה $M_2 \Leftrightarrow \eta$

. דוחה
$$M_3^* \Leftarrow$$
 קיבלה M_3 דוחה ס

נכונות הבנייה:

 $.L_1$ את מכרעיה את M_1^st נראה כי

.w את מקבלת $M_1^* \Leftarrow w$ את מקבלת $M_1 \Leftarrow w \in L_1$ אם

.w את דוחה $M_1^* \Leftarrow w$ את מקבלת את את מקבלת את מקבלת $M_2 \Leftarrow w \in M_2 \cup M_3 \Leftarrow w \notin L_1$ אם

שיטה 2

 $ar{L}_1\in RE$ נשים לב כי RE תחת איחוד, גם $L_2\in RE$ וגם $L_2\in RE$ ואם לב כי $L_3=ar{L}_1$ נשים לב כי $L_1\in R$ ואם לב $L_1\in RE$ וגם לב כי $L_1\in RE$ איי קיבלנו ש-

 $\cdot L_3$ -ו $\cdot L_2$ כנ"ל עבור

שאלה 5 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

נתונה השפה

$$L_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^* \}$$

ונתונה השפה

$$\overline{L_{\Sigma^*}} = \left\{ \langle M \rangle \mid L(M) \neq \Sigma^* \right\} \cup \left\{ x \neq \langle M \rangle \right\} .$$

הוכחנו בכיתה כי:

$$L_{\Sigma^*}
otin RE$$
 (8

$$L_{\Sigma^*}
otin R$$
 (2

$$\overline{L_{\Sigma^*}}
otin RE$$
 (2

:תהיינה L_1, L_2 השפות הבאות

$$L_1 = L_{\Sigma^*}$$
, $L_2 = \overline{L_{\Sigma^*}}$.

מכאן

$$L_1 \cap L_2 = \emptyset \in RE$$
, $L_1 \cup L_2 = \Sigma^* \in RE$,

 $L_2
otin RE$ אבל $L_1
otin RE$ וגם

שאלה 6 הטענה לא נכונה.

השפה L_{Σ^*} היא

$$L_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^* \}$$

והשפה $L_{
m d}$ היא

$$L_{
m d}=\left\{\langle M
angle \ \ \middle| \ \ \langle M
angle
otin L_{
m d}=\left\{\langle M
angle \ \ \middle| \ \ \langle M
angle\in L(M)
ight\}\cup \left\{x
eq\langle M
angle
ight\}$$
 לכך
$$L_{\Sigma^*}\backslash L_{
m d}=L_{\Sigma^*}\cap \overline{L_{
m d}}=L_{\Sigma^*}
otin RE \ .$$

שאלה 7 הטענה לא נכונה.

המ"ט אוניברסלית $\langle w \rangle$ מקבלת כקלט זוג, קידוד של מ"ט מ"ט מיט אוניברסלית מקבלת כקלט זוג, קידוד של מ"ט מ"ט אוניברסלית מקבלת כקלט זוג, אוג, קידוד של מ"ט מ"ט מיט מיט מיט מקבלת בהתאם.

עבור המכונה האוניברסלית U, מתקיים:

$$L(U) = L_{\rm acc} \in RE$$
.

 $.L(U) = L_{\rm acc} \notin Co\,RE$ -ש מכיוון ש
 , $\langle U \rangle \notin L'$ אבל , $\langle U \rangle \in L$ ולכן ולכן

שאלה 8 הטענה נכונה.

$$\gcd(n, n+1) = \gcd(n+1, 1) = 1$$

 $.\langle n, n+1 \rangle \in RELPRIME$ ולכן

 A_L אי-דטרמיניסטית המקבלת את נבנה מ"ט אי-דטרמיניסטית ובנה מ"ט אי

:x על קלט $=M_L$

- . אם אם אם $x=\langle M \rangle$ בודקת בודקת (1)
- $.w_1, w_2, w_3$ בוחרת אי-דטרמיניסטי 3 מילים אי-דטרמיניסטי (2)
 - $.w_1$ על M על •
 - . דוחה $M_L \Leftarrow \sigma$ דוחה אם σ
 - w_2 על M על \bullet
 - דוחה. $M_L \Leftarrow \sigma$ דוחה $M_L \Leftrightarrow \sigma$
 - . מריצה את M על w_3 ועונה כמוה ullet

<u>נכונות</u>:

 $x \in L$ אם

$$|L(M)| \ge 3$$
 -1 $x = \langle M \rangle \Leftarrow$

M -ם המתקבלות ב- w_1, w_2, w_3 מילים מילים \Leftarrow

Mאת עליהם ותריץ ותריץ w_1, w_2, w_3 בה תבחר בה M_L של ריצה ריצה \Leftarrow

.x את מקבלת מקב $M_L \Leftarrow$

אם אם עני מקרים: $x \notin L$ אם

- L את דוחה את $M_L \Leftarrow x \neq \langle M \rangle$
 - |L(M)| < 3 -1 $x = \langle M \rangle$ •
- M -ב מילים אחת אחת לפחות לפחות w_1, w_2, w_3 מילים לכל לכל \Leftarrow
- על מילים אלו אחת אחת אחת לפחות מילים 3 מילים מילים בה היא בה של בכל ריצה אלו בה בכל מילים מילים מילים מילים אלו בה או לא תעצור תדחה או לא תעצור
 - על אתעצור תדחה M_L ,x על או לא תעצור \Leftarrow
 - .x לא מקבלת את $M_L \Leftarrow$

שאלה 10 הטענה לא נכונה: תהיינה

$$L_1 = L_2 = L_{\rm d}$$

 $L_{
m d} = ig\{\langle M
angle \mid \langle M
angle
otin L(M) ig\}$ כאשר

 $L_2
otin RE$ אבל, כפי שהוכחנו בכיתה, $L_1
otin RE$ א"א וגם $L_1
otin RE$ וגם $L_2
otin RE$ אבל, כפי שהוכחנו

שאלה 11 הטענה לא נכונה.

$$L = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \notin RE \} = \emptyset \in R .$$

שאלה 12

שיטה 1

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$L_1 = L_{\mathrm{acc}} \; , \qquad L_2 = L_{\mathrm{halt}} \; , \qquad L_3 = L_{\Sigma^*} \; .$$

 $L_{\Sigma^*}=\left\{\langle M
angle\ |\ L(M)=\Sigma^*
ight\}$:תזכורת: $L_{
m acc}\leq L_{
m D^*}$ וגם $L_{
m acc}\leq L_{
m halt}$

 $L_1\leq L_3$ וגם $L_1\leq L_2$ מתקיים , L_1,L_2,L_3 מתקיים של הבחירה של השפות גום הבחירה $L_1\leq L_2$ מתקיים , L_1,L_2,L_3 מתקיים אבל מכיוון ש- $L_{acc}\leq (L_{halt}\cap L_{\Sigma^*})$ איי לא קיימת רדוקציה , $L_{halt}\cap L_{\Sigma^*}=\emptyset$ אבל מכיוון ש-

שיטה 2

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$L_1 = L_{\mathsf{halt}} \; , \qquad L_2 = L_{\mathsf{acc}} \; , \qquad L_3 = \overline{L_{\mathsf{acc}}} \; .$$

 $L_1 \leq L_2$ מתקיים לכן לכן $L_{
m halt} \leq L_{
m acc}$

 $L_1 \leq L_3$ לכן $L_{
m halt} \leq \overline{L_{
m acc}}$ בנוסף

-ם בסתירה לכך בסתירה לכך בסתירה לכך $L_{
m halt}\in R$ מצד שני: $\ell_{
m halt}\in L_{
m a}$ ולכן $\ell_{
m halt}\in L_{
m a}$ ולכן $\ell_{
m halt}\in L_{
m a}$ ומכיוון ש- $\ell_{
m halt}\in L_{
m a}$ ולכן ש- $\ell_{
m halt}\in L_{
m halt}$