המחלקה למדעי המחשב

כ"ו באלול תשפ"ד 29/09/24
09 : 00 − 12 : 00

אלגברה 2

מועד ב'

מרצים: ד"ר זהבה צבי , ד"ר ירמיהו מילר.

תשפ"ד סמסטר ב'

השאלון מכיל 5 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (2 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.

==

שאלה 1 (25 נקודות)

א) (7 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית ממשית המקיימת $A^2+A+I=0$. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית: אין ל- A ערך עצמי ממשי.

ב) (18 נק') תהי $A=\begin{pmatrix}6 & 1 & 4\\ 3 & 7 & 7\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$. קבעו אם A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ואם A לכסינה מעל $\mathbb{C}$?
במידה וכן, מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש- $D=P^{-1}AP$.
במידה והמטריצה לא לכסינה, מצאו צורת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP=J$.

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי $A \in \mathbb{C}^{7\times 7}$ מטריצה בעלת פולינום אופייני

$$p_A(t)=t^2\left(1+t\right)^4\left(2-t\right)$$

ופולינום מינימלי

$$m_A(t)=t\left(t+1\right)^2\left(t-2\right)\ .$$

מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A.

שאלה 3 (25 נקודות)

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $T:V\to V$ אופרטור ו- $S:V\to V$ אופרטור.
הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את כל הטענות הבאות:

א) (5 נק') אם T אוניטרי אז T^k אוניטרי לכל $k\geq 2$.

ב) (5 נק') אם λ ערך עצמי של T אז $\bar{\lambda}$ ערך עצמי של $\bar{T}$.

ג) (5 נק') אם S צמוד לעצמו, T צמוד לעצמו ו- $S\cdot T$ צמוד לעצמו אז $ST=TS$.

ד) (5 נק') נתון כי $ST=TS$. λ ערך עצמי של S אם ורק אם λ ערך עצמי של T.

ה) (5 נק') אם $ST=TS$ ואם u ווקטור עצמי של S אז u ווקטור עצמי של T.

שאלה 4 (25 נקודות)

תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ מטריצה ממשית מסדר 3×3, כך ש- $\det(A)=1$.
בנוסף כל הערכים עצמיים של A שונים זה מזה, ואחד מהם הוא $\lambda_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

א) (6 נקודות) מצאו את כל הערכים העצמיים של A.

ב) (6 נקודות) נתון כי A מקיימת $A^3 = aA^2 + bA + cI$ כאשר $a, b, c \in \mathbb{R}$ סקלרים. מצאו את a, b, c.
נמקו את תשובתכם.

ג) (7 נקודות) נתון כי A מקיימת $A^{100} = dA^2 + eA + fI$ כאשר $d, e, f \in \mathbb{R}$ סקלרים. מצאו את d, e, f.
נמקו את תשובתכם.

ד) (3 נקודות) האם יתכן כי A מטריצה אוניטרית? נמקו את תשובתכם.

ה) (3 נקודות) האם יתכן כי A צמודה לעצמה? נמקו את תשובתכם.

<u>שאלה 5</u> (25 נקודות)

א) (17 נק') נתונה קבוצת וקטורים במרחב מכפלה פנימית הסטנדרטי של $\mathbb{F}^{2\times 2}$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{F}^{2\times 2} .$$

בנו בסיס אורתונורמלי של S.

ב) (4 נק') תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצות כאשר $A = I$ ו- $B \neq I$.
הוכיחו או הפריכו: A ו- B דומות.

ג) (4 נק') תהיינה $C, D \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ כך ש- 0 ערך עצמי של C ו- D מטריצה אוניטרית.
הוכיחו או הפריכו: C ו- D דומות.

פתרונות

שאלה 1

א) (18 נק')

$$A=\begin{pmatrix}6&1&4\\3&7&7\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
|xI-A| &= \begin{vmatrix}x-6&-1&-4\\-3&x-7&-7\\0&1&x-2\end{vmatrix}\\
&=(x-6)\begin{vmatrix}x-7&-7\\1&x-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-3&-7\\0&x-2\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}-3&x-7\\0&1\end{vmatrix}\\
&=(x-6)\left(x^2-9x+21\right)-3x+6+12\\
&=(x-6)\left(x^2-9x+21\right)-3x+18\\
&=(x-6)\left(x^2-9x+21\right)-3(x-6)\\
&=(x-6)\left(x^2-9x+21-3\right)\\
&=(x-6)\left(x^2-9x+18\right)\\
&=(x-6)(x-3)(x-6)\\
&=(x-3)(x-6)^2\ .
\end{aligned}$$

לכן הפולינום האופייני הוא $p_A(x)=(x-6)^2(x-3)$.

ערכים עצמיים:

$\lambda=6$ מריבוי אלגברי 2,

$\lambda=3$ מריבוי אלגברי 1.

$$m_A(x)=(x-6)^2(x-3)\ .$$

$$J=\begin{pmatrix}J_2(6)&\\&J_1(3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&1&0\\0&6&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda=6$:</u>

$$(A-6I)=\begin{pmatrix}0&1&4\\3&1&7\\0&-1&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}3&1&7\\0&1&4\\0&-1&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\begin{pmatrix}3&1&7\\0&1&4\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\begin{pmatrix}3&0&3\\0&1&4\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{3}R_1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&4\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון $(x,y,z)=z(-1,-4,1)$.

$$V_6=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

נסמן את הוקטור עצמי ב- $u_1=\begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix}$.

<u>וקטור עצמי מוכלל:</u>

$u_2=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$$(A-6I)u_2=u_1\ ,\qquad\Rightarrow\qquad(A-6I)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix}.$$

נרשום את המטירצה המורחבת של המערכת:

$$(A-6I)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&4&-1\\3&1&7&-4\\0&-1&-4&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&7&-4\\0&1&4&-1\\0&-1&-4&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&7&-4\\0&1&4&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}3&0&3&-3\\0&1&4&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{3}R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&-1\\0&1&4&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

פתרון: $(x,y,z)=(-z-1,-4z-1,z)$ $z\in\mathbb{R}$. נציב $z=0$ ונקבל

$$u_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda=3$:</u>

$$(A-3I)=\begin{pmatrix}3&1&4\\3&4&7\\0&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}3&1&4\\0&3&3\\0&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to 3R_3+R_2}\begin{pmatrix}3&1&4\\0&3&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{3}3R_2}\begin{pmatrix}3&1&4\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\begin{pmatrix}3&0&3\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{3}R_1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z)=(-z,-z,z)$ $z\in\mathbb{R}$. וקטור עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=3$:

$$u_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

$$J=\begin{pmatrix}J_2(6)&\\&J_1(3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&1&0\\0&6&0\\0&0&3\end{pmatrix},\qquad P=\begin{pmatrix}u_1,u_2,u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-4&-1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

שאלה 2 (25 נקודות)

$$J_1(0)\oplus J_1(0)\oplus J_2(-1)\oplus J_2(-1)\oplus J_1(2)$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&-1&1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&-1&1&0\\0&0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0&2\end{pmatrix}$$

$$J_1(0)\oplus J_1(0)\oplus J_2(-1)\oplus J_1(-1)\oplus J_1(-1)\oplus J_1(2)$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&-1&1&0\\0&0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0&2\end{pmatrix}$$

שאלה 3

א) (5 נק') T אוניטרי $\Leftarrow$ $T\bar{T}=I$.

נוכיח את הטענה באינדוקציה.

<u>בסיס:</u>

עבור $k=2$:

$$T^2\overline{(T^2)}=TT\bar{T}\bar{T}=TI\bar{T}=T\bar{T}=I\ .$$

<u>מעבר:</u>

נניח כי הטענה מתקיימת עבור k. אז

$$\begin{aligned} T^{k+1}\overline{(T^{k+1})} &= TT^k\overline{T^k}\bar{T} \\ &= TI\bar{T} && \text{(ההנחת האינדוקציה, } T^k \text{ אוניטרי)} \\ &= T\bar{T} \\ &= I && (T \text{ אוניטרי)} \end{aligned}$$

ב) (5 נק') יהי u וקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי λ.

$$\begin{aligned} \langle T(u),u\rangle &= \langle \lambda u,u\rangle && (u \text{ וקטור עצמי)} \\ &= \lambda\langle u,u\rangle && \text{(תכונת ליניאריות של מכפלה פנימית)} \end{aligned}$$

מצד שני,

$$\begin{aligned} \langle T(u),u\rangle &= \langle u,\bar{T}(u)\rangle && \text{(הגדרה של הצמוד)} \\ &= \langle u,\mu u\rangle && (u \text{ וקטור עצמי של } \bar{T}) \\ &= \bar{\mu}\langle u,u\rangle\ . \end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\langle u,u\rangle=\bar{\mu}\langle u,u\rangle \quad\Rightarrow\quad (\lambda-\bar{\mu})\langle u,u\rangle=0\ .$$

u וקטור עצמי לכן $u\neq 0$ $\Leftarrow$ $\langle u,u\rangle\neq 0$ $\Leftarrow$ $(\lambda-\bar{\mu})=0$ $\Leftarrow$ $\lambda=\bar{\mu}$.

ג) (5 נק')

$$\begin{aligned} TS &= \bar{T}\bar{S} && (S \text{ צמוד לעצמו, } T \text{ צמוד לעצמו)} \\ &= \overline{ST} \\ &= ST && (ST \text{ צמוד לעצמו.)} \end{aligned}$$

ד) (5 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:
$S=I$, $T=2I$.
הערכים עצמיים של S: $\lambda=1$.
הערכים עצמיים של T: $\lambda=2$.

ה) (5 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:
$S=I$, $T=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

שאלה 4

א) (6 נקודות) מכיוון ש- A מטריצה ממשית ו- $\lambda_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ערך עצמי מרוכב, אז הצמוד $\lambda_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ גם ערך עצמי של A. כל הערכים עצמיים שונים לכן ל- A יש ערך עצמי נוסף λ_3. המכפלה של כל הערכים עצמיים שווה לדטרמיננטה של A. לפיכך,

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\lambda_3=\det(A)=1 \qquad\Rightarrow\qquad \lambda_3=1 \qquad\Rightarrow\qquad \lambda_3=1\ .$$

הפתרון לזה הוא $\lambda_3=1$.

ב) (6 נקודות) הפולינום אופייני של A הוא

$$p(x)=\left(x-\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\right)(x-1)=x^3-1\ .$$

ג) (7 נקודות) לפי משפט קיילי-המילטון

$$p(A)=0 \quad\Rightarrow\quad A^3-I=0 \quad\Rightarrow\quad A^3=I \quad\Rightarrow\quad \left(A^3\right)^{33}=I^{33}=I \quad\Rightarrow\quad A^{100}=A^{99}A=IA=A\ .$$

לכן $a=0,b=1,c=0$.

ד) (3 נקודות) הערך מוחלט של כל ערך עצמי שווה ל- 1 לכן יתכן כי A אוניטרית.

ה) (3 נקודות) הערכים עצמיים של מטריצה צמודה לעצמה ממשיים. לא כל הערכים עצמיים ממשיים לכן לא יתכן כי A צמודה לעצמה.

שאלה 5 **(25 נקודות)**

א) (17 נק')

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\ ,\qquad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}3&2\\1&0\end{pmatrix}\ ,\qquad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}\ ,\qquad \mathrm{v}_4=\begin{pmatrix}4&4\\4&4\end{pmatrix}\ .$$

$$w_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\ ,\qquad w_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad w_3=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\ ,\qquad w_4=\begin{pmatrix}4\\4\\4\\4\end{pmatrix}\ .$$

נשים לב כי

$$\begin{pmatrix}1&3&2&4\\2&2&0&4\\3&1&0&4\\4&0&-1&4\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to R_4-4R_1]{\substack{R_2\to R_2-2R_1\\R_3\to R_3-3R_1}}\begin{pmatrix}1&3&2&4\\0&-4&-4&-4\\0&-8&-6&-8\\0&-12&-9&-12\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to R_4-3R_2]{R_3\to R_3-2R_2}\begin{pmatrix}1&3&2&4\\0&-4&-4&-4\\0&0&2&0\\0&0&3&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to 2R_4-3R_3}\begin{pmatrix}1&3&2&4\\0&-4&-4&-4\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן הבסיס מורכב מהווקטורים $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3$

$$u_1=\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\ .$$

$$u_2=\mathrm{v}_2-\frac{\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1\ .$$

$$\|u_1\|^2=\langle u_1,u_1\rangle=\mathrm{tr}\left(u_1^t\cdot u_1\right)=\mathrm{tr}\left(\left(\begin{array}{cc}1&3\\2&4\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc}1&2\\3&4\end{array}\right)\right)=\mathrm{tr}\left(\begin{array}{cc}10&14\\14&20\end{array}\right)=30\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle=\mathrm{tr}\left(u_1^t\cdot \mathrm{v}_2\right)=\mathrm{tr}\left(\left(\begin{array}{cc}1&3\\2&4\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc}3&2\\1&0\end{array}\right)\right)=\mathrm{tr}\left(\begin{array}{cc}6&2\\10&4\end{array}\right)=10\ .$$

$$u_2=\left(\begin{array}{cc}3&2\\1&0\end{array}\right)-\frac{10}{30}\left(\begin{array}{cc}1&2\\3&4\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}\frac{8}{3}&\frac{4}{3}\\0&-\frac{4}{3}\end{array}\right)=\frac{1}{3}\left(\begin{array}{cc}8&4\\0&-4\end{array}\right)\ .$$

$$u_3=\mathrm{v}_3-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle=\mathrm{tr}\left(u_1^t\cdot \mathrm{v}_3\right)=\mathrm{tr}\left(\left(\begin{array}{cc}1&3\\2&4\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc}2&0\\0&-1\end{array}\right)\right)=\mathrm{tr}\left(\begin{array}{cc}2&-3\\4&-4\end{array}\right)=-2\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle=\mathrm{tr}\left(u_2^t\cdot \mathrm{v}_3\right)=\frac{1}{3}\mathrm{tr}\left(\left(\begin{array}{cc}8&0\\4&-4\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc}2&0\\0&-1\end{array}\right)\right)=\frac{1}{3}\mathrm{tr}\left(\begin{array}{cc}16&0\\8&4\end{array}\right)=\frac{20}{3}\ .$$

$$\|u_2\|^2 = \langle u_2, u_2\rangle = \mathrm{tr}\left(u_2^t \cdot u_2\right) = \frac{1}{9}\mathrm{tr}\left(\left(\begin{array}{cc} 8 & 0 \\ 4 & -4 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc} 8 & 4 \\ 0 & -4 \end{array}\right)\right) = \frac{1}{9}\mathrm{tr}\left(\begin{array}{cc} 64 & 32 \\ 32 & 32 \end{array}\right) = \frac{96}{9} = \frac{32}{3} .$$

$$\begin{aligned} u_3 =& \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 \\ =& \left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right) - \frac{-2}{30}\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}\right) - \frac{\left(\frac{20}{3}\right)}{\left(\frac{32}{3}\right)}\cdot\frac{1}{3}\left(\begin{array}{cc} 8 & 4 \\ 0 & -4 \end{array}\right) \\ =& \frac{1}{10}\left(\begin{array}{cc} 4 & -7 \\ 2 & 1 \end{array}\right) . \end{aligned}$$

בסיס אורתוגונלי:

$$\left\{u_1 = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}\right) , \quad u_2 = \frac{1}{3}\left(\begin{array}{cc} 8 & 4 \\ 0 & -4 \end{array}\right) , \quad u_3 = \frac{1}{10}\left(\begin{array}{cc} 4 & -7 \\ 2 & 1 \end{array}\right)\right\} .$$

$$\|u_3\|^3 = \mathrm{tr}\left(u_3^t u_3\right) = \frac{1}{100}\mathrm{tr}\left(\left(\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ -7 & 1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc} 4 & -7 \\ 2 & 1 \end{array}\right)\right) = \frac{1}{100}\mathrm{tr}\left(\begin{array}{cc} 20 & -26 \\ -26 & 50 \end{array}\right) = \frac{7}{10} .$$

בסיס אורתונורמלי:

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{\|u_1\|}u_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}\right) .$$

$$\hat{u}_2 = \frac{1}{\|u_2\|}u_2 = \sqrt{\frac{1}{96}}\left(\begin{array}{cc} 8 & 4 \\ 0 & -4 \end{array}\right) .$$

$$\hat{u}_3 = \frac{1}{\|u_3\|}u_3 = \sqrt{\frac{1}{70}}\left(\begin{array}{cc} 4 & -7 \\ 2 & 1 \end{array}\right) .$$

ב) (4 נק')

הטענה לא נכונה. הוכחה:

נניח ש- $A = I$ ו- $B \neq I$ דומות.

אז קיימת P הפיכה כך ש-

$$B = CAC^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$$

ז"א $B = I$ בסתירה לכך ש- $B \neq I$.

ג) (4 נק')

הטענה לא נכונה. הוכחה:

D אוניטרית $\Leftarrow$ D הפיכה $\Leftarrow$ $|D| \neq 0$.

0 ערך עצמי של C $\Leftarrow$ $|C| = 0$.
נניח כי C ו- D דומות.
אז קיימת P הפיכה כך ש-

$$D = PCP^{-1} \quad \Rightarrow \quad |D| = |PCP^{-1}| \quad \Rightarrow \quad |D| = |C| = 0 \ .$$

בסתירה לכך ש- $D \neq 0$.