שיעור 1
מערכות ליניאריות

מערכות של משוואות ליניאריות

1.1 הגדרה: משוואה ליניארית במשתנים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ היא משוואה שניתן להציגה בצורה

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

כאשר $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$.

תרגיל: קבעו מי בין המשוואות הבאות היא ליניארית:

$$\begin{aligned} 7x_1 + 3x_2 =& 34 \\ 3x + 7y + \sqrt{2} =& 5 \\ 3x + 7y + \sqrt{2}z =& 5 \\ 3x + 7y + \sqrt{z} =& 5 \\ 3xy + 7y =& 5 \end{aligned}$$

1.2 הגדרה: מערכת ליניארית היא אוסף של m משוואות $(m \in \mathbb{N})$ ב- n משתנים $(n \in \mathbb{N})$.

דוגמא. בהמערכת הבאה

$$\begin{aligned} x + y =& 4 \\ x - y =& 2 \end{aligned}$$

יש 2 משוואות ו-2 משתנים, x ו-y:

משתנה 1		משתנה 2				
$\downarrow$		$\downarrow$				
x	$+$	y	$=$	4		משוואה 1
x	$-$	y	$=$	2		משוואה 2

דוגמא. בהמערכת הבאה

$$\begin{aligned} x + y - z =& 4 \\ x - 2y + 3z =& 7 \end{aligned}$$

יש 2 משוואות ו- 3 משתנים, x ו-y:

משתנה 1		משתנה 2		משתנה 3				
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$				
x	$+$	y	$-$	z	$=$	4		משוואה 1
x	$-$	$2y$	$+$	$3z$	$=$	7		משוואה 2

דוגמא. בהמערכת הבאה

$$\begin{aligned} x + y - z + w =& 3 \\ x - 2y + 8z - 7w =& 7 \\ x - 2y + 3z + 2w =& 7 \\ x - 2y + 3z - 9w =& 10 \end{aligned}$$

יש 4 משוואות ו- 4 משתנים, x, y, z ו- w:

	משתנה 4		משתנה 3		משתנה 2		משתנה 1
	$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
משוואה 1 $\quad 4$	$w =$	$+$	z	$-$	y	$+$	x
משוואה 2 $\quad 7$	$7w =$	$-$	$8z$	$+$	$2y$	$-$	x
משוואה 3 $\quad 7$	$2w =$	$+$	$3z$	$+$	$2y$	$-$	x
משוואה 4 $\quad 10$	$9w =$	$-$	$3z$	$+$	$2y$	$-$	x

באופן כללי מערכת של m משוואות ב- n משתנים ניתן לכתוב בצורה

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

1.3 הגדרה: פתרון של מערכת לינארית כנ"ל הוא רשימה של מספרים

$$(s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

כך שהצבתם במשתנים המתאימים תהפוך כל משוואה לאמת.

דוגמא. המערכת לינארית הבאה

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

יש לה פתרון

$$(x, y) = (3, 1) \ .$$

במילים אחרות אם נציב $x = 3$ ו- $y = 1$ בהמערכת נמצא כי האגף השמאול הוא אותו דבר לאגף הימין בכל אחד מן המשוואות.

פתרון של מערכות לינאריות

דוגמא. פיתרו את המערכת הלינארית הבאה:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 2 \end{aligned}$$

פיתרון. כותבים את המערכת בצורה:

$$\begin{array}{rrcrl} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & = 4 \\ \boldsymbol{R_2}: & 3x_1 & + & 4x_2 & = 2 \end{array}$$

כדי לבטל את x_1 במשוואה השנייה נבצע את הפעולה $R_2 - 3R_1$ ונקבל

$$\begin{array}{rrcrl} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & = 4 \\ \boldsymbol{R_2}: & & & -2x_2 & = -10 \end{array}$$

מחלקים את משוואה השנייה ב- -2, כלומר $R_2 \to -\frac{1}{2}R_2$:

$$\begin{array}{rrcrl} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & = 4 \\ \boldsymbol{R_2}: & & & x_2 & = 5 \end{array}$$

קיבלנו $x_2 = 5$. עכשיו מציבים $x_2 = 5$ בהמשוואה הראשונה ונקבל

$$x_1 + 2 \cdot 5 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -6 \ .$$

לכן הפתרון הוא

$$(x_1, x_2) = (-6, 5) \ .$$

■

דוגמא. פיתרו את המערכת הלינארית הבאה:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 &= 12 \\ 20x_1 + 8x_2 &= 20 \end{aligned}$$

פיתרון. כותבים את המערכת בצורה:

$$\begin{array}{rrcrl} \boldsymbol{R_1}: & 5x_1 & + & 10x_2 & = 45 \\ \boldsymbol{R_2}: & 20x_1 & - & 5x_2 & = 90 \end{array}$$

במשוואה ראשונה כדי להפוך את המקדם של ה x_1 ל 1 מבצעים את הפעולה $R_1 \to \frac{1}{5}R_1$:

$$\begin{array}{rrcrl} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & = 9 \\ \boldsymbol{R_2}: & 20x_1 & - & 5x_2 & = 90 \end{array}$$

כדי לבטל את x_1 במשוואה השנייה נבצע את הפעולה $R_2 - 20R_1$ ונקבל

$$\begin{array}{rrcrl} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & = 9 \\ \boldsymbol{R_2}: & & & -45x_2 & = -90 \end{array}$$

מחלקים את משוואה השנייה ב- -45, כלומר $R_2 \to -\frac{1}{45}R_2$:

$$\begin{array}{rrcrl} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & = 9 \\ \boldsymbol{R_2}: & & & x_2 & = 2 \end{array}$$

קיבלנו $x_2 = 2$. עכשיו מציבים $x_2 = 2$ בהמשוואה הראשונה ונקבל

$$x_1 + 2 \cdot 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5 \ .$$

לכן הפתרון הוא

$$(x_1, x_2) = (5, 2) \ .$$

■

דוגמא. פיתרו את המערכת הלינארית הבאה:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 14 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}$$

פיתרון.

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ \boldsymbol{R_2}: & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 14 \\ \boldsymbol{R_3}: & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}$$

מבצעים את הפעולה $R_2 \to R_2 - 2R_1$ ומקבלים

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ \boldsymbol{R_2}: & & - & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \\ \boldsymbol{R_3}: & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}$$

מבצעים את הפעולה $R_3 \to R_3 - 3R_1$ ומקבלים

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ \boldsymbol{R_2}: & & - & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \\ \boldsymbol{R_3}: & & - & 5x_2 & - & 10x_3 & = & -20 \end{array}$$

מחליפים את השורות R_2 ו- R_3:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ \boldsymbol{R_2}: & & - & 5x_2 & - & 10x_3 & = & -20 \\ \boldsymbol{R_3}: & & - & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \end{array}$$

מכפילים את השורה R_2 ב- $-\frac{1}{5}$, כלומר $R_2 \to -\frac{1}{5}R_2$:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ \boldsymbol{R_2}: & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ \boldsymbol{R_3}: & & - & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \end{array}$$

מבצעים את הפעולה $R_3 \to R_3 + 7R_2$ ומקבלים

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ \boldsymbol{R_2}: & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ \boldsymbol{R_3}: & & & & & 10x_3 & = & 30 \end{array}$$

$R_3 \to \frac{1}{10}R_3$:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ \boldsymbol{R_2}: & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ \boldsymbol{R_3}: & & & & & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$R_1 \to R_1 - 3R_3$:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & & & = & -3 \\ \boldsymbol{R_2}: & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ \boldsymbol{R_3}: & & & & & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_3$:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & + & 2x_2 & & & = & -3 \\ \boldsymbol{R_2}: & & & x_2 & & & = & -2 \\ \boldsymbol{R_3}: & & & & & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$R_1 \to R_1 - 2R_2$:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \boldsymbol{R_1}: & x_1 & & & & & = & 1 \\ \boldsymbol{R_2}: & & & x_2 & & & = & -2 \\ \boldsymbol{R_3}: & & & & & x_3 & = & 3 \end{array}$$

לכן הפתרון שקיבלנו הוא

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -2, 3) \ .$$

בדיקה:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2\cdot(-2) & + & 3\cdot 3 & = & 6 \\ 2\cdot 1 & - & 3\cdot(-2) & + & 2\cdot 3 & = & 14 \\ 3\cdot 1 & + & (-2) & - & 3 & = & -2 \end{array}$$

■

מטריצת המקדמים ומטריצה המורחבת

למערכת $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6 \\ 2x_1-3x_2+2x_3=14 \\ 3x_1+x_2-x_3=-2 \end{cases}$ נתאים שתי מטריצות:

המטריצה המורחבת של המערכת $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$ והמטריצה המקדמים של המערכת $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

נפתור את התרגיל לעיל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{5}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+7R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to \frac{1}{10}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-3\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-2\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

1.4 הגדרה: (פעולות אלמנטריות)

ישנם שלוש פעולות אלמנטריות:

פעולה 1: החלפת שתי שורות $R_i \leftrightarrow R_j$

פעולה 2: הכפלת שורה בסקלר $\alpha \neq 0$ $R_i \to \alpha \cdot R_i$

פעולה 3: הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת $R_i \to R_i + \alpha \cdot R_j$

1.5 הגדרה: (איבר המוביל)

בהינתן מטריצה (ללא קשר למערכת לינארית), האיבר הראשון משמאל השונה מאפס בכל שורה, נקרא איבר מוביל.

דוגמא. במטריצה

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

האיבר המוביל של השורה הראשונה הוא 3, האיבר המוביל של השורה השנייה הוא 4, ולשורה השלישית אין איבר מוביל מכיוון שהשורה השלילית היא כולה אפסים.

1.6 הגדרה: (מטריצה מדורגת)

מטריצה תיקרא מדורגת אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. שורות שכולן 0, אם ישנן, נמצאות מתחת השורות שלא כולן 0.
2. מספר האפסים לפני איבר מוביל הולך וגדל משורה לשורה עד שמגיעים לשורות אפסים, אם ישנן.

דוגמא. (מטריצות מדורגות)

1 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ מדורגת

2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ מדורגת

3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ לא מדורגת

4 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ לא מדורגת

5 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ לא מדורגת

1.7 הגדרה: (מטריצה מדורגת קנונית)

מטריצה A תיקרא <u>מדורגת קנונית</u> אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

1. שורות שכולן 0 נמצאות מתחת השורות שלא כולן 0.
2. מספר האפסים לפני איבר מוביל הולך וגדל משורה לשורה עד שמגיעים לשורות אפסים.
3. כל איבר מוביל $= 1$.
4. כל איבר המוביל (שחייב שווה 1) הוא האיבר היחיד האינו שווה ל 0 בעמודה שלו.

שימו לב, לפי תנאים 1 ו- 2 מטריצה חייבת להיות מדורגת כדי להיות גם מדורגת קנונית.

דוגמא. (מטריצות מדורגות קנוניות)
המטריצות הבאות מדורגות קנוניות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המטריצות הבאות לא מדורגות קנוניות:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ תנאי 1 לא מתקיים.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ תנאי 2 לא מתקיים.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ תנאי 3 לא מתקיים.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ תנאי 4 לא מתקיים.

אלגוריתם הדרוג של גאוס-ג'ורדן

בהסבר הבא נשתמש בפעולה 1, פעולה 2 ופעולה 3 מן הפעולות האלמנטריות בהגדרה 1.4. כדי להפוך מטריצה למטריצה מדורגת קנונית יש לעקוב את השלבים הבאים, קרי האלגוריתם הדרוג של גאוס-ג'ורדן:

שלב 1 אם המטריצה היא מטריצה האפס, אז סיימנו.

שלב 2 מחפשים את העמודה הרשאשונה שאיננה כולה אפס, נבחר איבר בעמודה זו , נחלק את השורה שלו בערכו (פעולה 2) על מנת לקבל 1.

שלב 3 נעביר את השורה הזו לשורה ראשונה (פעולה 1).

שלב 4 ע"י פעולות מסוג של פעולה 3, נאפס את כל האיברים שמתחת ה 1 באותה העמודה.

שלב 5 נבצע את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת (לאחר השמטת שורה ראשונה, ו"חלק שמאלי" של אפסים).

עד עכשיו המטריצה מדובר בצורה מדורגת. על מנת לקבל מטריצה מדורגת קנונית, נבצע את שלב האחרון:

שלב 6 נאפס את כל האיברים מעל כל 1 המוביל ל 0 בעזרת פעולה 3.

דוגמא. (אלגורתם הדרוג של גאוס-ג'ורדן)
פתרו את המערכת

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 1\\ 2x_1-x_2+3x_3 &= 3\\ 3x_1-3x_2+6x_3 &= 5 \end{aligned}$$

פיתרון. המטריצה המורחבת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 3\\ 3 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right)$$

נפתור את המערכת ע"י האלגוריתם.

שלב 1 המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים הלא שווה אפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2 העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס היא העמודה הרשאשונה. האיבר המוביל הוא 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 3\\ 3 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right)$$

אז נמשיך לשלב 3.

שלב 3 השורה הזו (עם 1 המוביל) הוא כבר נמצא בשורה הראשונה אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4 נאפס כל איבר באותה עמודה של ה1 המוביל שמתחת ה 1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 3\\ 3 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 1 & 1\\ 3 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 1 & 1\\ 0 & -6 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

כך כל איבר בעמודה של ה1 המוביל (שמתחת ה-1 המוביל) שווה 0.

שלב 5 חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

שלב 1' המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים הלא שווה אפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2' העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס היא העמודה השנייה. נבחר $a=-3$ בשורה השנייה ונחלק את שורה השנייה ב -3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -6 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

שלב 3' שורה השנייה הוא כבר בשורה הראשונה של המטריצה החלקית אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4' נאפס כל איבר באותה עמודה של ה1 המוביל שמתחת ה 1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -6 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

כך כל איבר בעמודה של ה1 המוביל (שמתחת ה 1 המוביל) שווה 0.

שלב 5' אין צורך לחזור לשלבים 1-4 בגלל שבשורה הסופית האיבר המוביל כבר שווה 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

שלב 6' הצבת אחור: המערכת המתאימה היא

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & -\frac{1}{3} & x_3 & = & -\frac{1}{3} \\ & & & & x_3 & = & 0 \end{array}$$

מהמשוואה השלישית:

$$x_3 = 0\ .$$

נציב $x_3=0$ במשוואה שנייה:

$$x_2-\frac{1}{3}\cdot(0)=-\frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad x_2=-\frac{1}{3}\ .$$

נציב $x_3=0$ ו- $x_2=-\frac{1}{3}$ במשוואה ראשונה:

$$x_1-\frac{1}{3}+0=1 \qquad \Rightarrow \qquad x_1=\frac{4}{3}\ .$$

לכן הפתרון הוא

$$(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3},0\right)\ .$$

■

דוגמא. (אלגורתם הדרוג של גאוס-ג'ורדן)
נהפוך את המטריצה הבאה למטריצה מדורגת:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & -6 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 2 & 19 \end{pmatrix}$$

שלב 1 המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים הלא שווה אפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2 העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס היא העמודה השנייה. נבחר $a = -2$ בשורה השנייה ונחלק את שורה השנייה ב -2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & -6 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 2 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{2} \cdot R_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 2 & 19 \end{pmatrix}$$

שלב 3 מחליפים שורות R_1 ו- R_2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 2 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 2 & 19 \end{pmatrix}$$

שימו לב ה-1 המוביל בשורה הראשונה מוקף.

שלב 4 **(א)** לוקחים 2 כפול שורה הראשונה משורה השלישית:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 2 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 2 & 19 \end{pmatrix}$$

(ב) לוקחים 2 כפול שורה הראשונה משורה הרביעית:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 2 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 3R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 22 \end{pmatrix}$$

כך כל איבר בעמודה של ה1 המוביל (שמתחת ה-1 המוביל) שווה 0.

שלב 5 חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת (המוקפת במעגל האדום להלן):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 22 \end{pmatrix}$$

שלב 1' המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים הלא שווה אפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2' העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא העמודה רביעית:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 22 \end{pmatrix}$$

נבחר $a = 2$ בשורה השנייה ונחלק את שורה השנייה ב 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2} \cdot R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 22 \end{pmatrix}$$

שלב 3' השורה כבר בשורה ראשונה של המטריצה החלקית.

שלב 4' נאפס כל איבר שמתחת ה 1 המוביל: לוקחים 5 כפול שורה השנייה משורה הרביעית:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 5 \cdot R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

כך כל איבר בעמודה של ה1 המוביל (שמתחת ה 1 המוביל) שווה 0.

שלב 5' חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת (המוקפת במעגל האדום להלן):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

שלב 1" המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים הלא שווה אפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2" העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא עמודה חמישית:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

נבחר $a = 2$ בשורה השלישית ונחלק את שורה השנייה ב 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{2} \cdot R_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

שלב 3" שורה השלישית כבר בשורה הראשונה של המטריצה החלקית.

שלב 4" מוסיפים $\frac{1}{2}$ כפול שורה השלישית לשורה הרביעית:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + \frac{1}{2}\cdot R_4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שלב 5" אין עוד שורות אז נמשיך לשלב 6.

שלב 6" נאפס את כל איבר מעל ה 1 המוביל:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}\cdot R_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + \cdot R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסוף קיבלנו מטריצה מדורגת קנונית, כנדרש.

דוגמא. (פתרון מערכת ע"י שיטת גאוס)
פיתרו את המערכת לינארית הבאה ע"י השיטה של גאוס-ג'ורדן:

$$\begin{array}{ccccccc} 4x & + & 3y & - & z & = 24 \\ 6x & - & y & + & 2z & = -9 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = -3 \,. \end{array}$$

פיתרון.
המטריצה המורחבת של המערכת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & 24 \\ 6 & -1 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

שלב 1 המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים הלא שווה אפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2 העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס היא העמודה ראשונה.
נחלק את שורה הראשונה ב 4:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & 24 \\ 6 & -1 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{4}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 6 & -1 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

שלב 3 ה 1 המוביל כבר בשורה הראשונה אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4 נאפס כל איבר באותה עמודה של ה1 המוביל שמתחת ה 1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 6 & -1 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 6\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -15 \end{array}\right)$$

כך כל איבר בעמודה של ה1 המוביל (שמתחת ה-1 המוביל) שווה 0 .

שלב 5 חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת

שלב 1' המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים הלא שווה אפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2' העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא העמודה השנייה.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -15 \end{array}\right)$$

נבחר $a = \frac{1}{2}$ ונכפיל שורה השלישית ב 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \end{array}\right)$$

שלב 3' מחליפים שורות R_2 ו- R_3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \end{array}\right)$$

שלב 4' נאפס כל איבר שמתחת ה 1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + \frac{11}{2} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & 42 & -210 \end{array}\right)$$

שלב 5' חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת :

שלב 1" המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים הלא שווה אפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2" העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא העמודה השלישית.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & 42 & -210 \end{array}\right)$$

נחלק שורה השלישית ב- 42:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & 42 & -210 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{42} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

שלב 3" השורה (עם ה 1 המוביל) כבר בשורה ראשונה של המטריצה החלקית אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4" כל איבר באותה עמודה של ה 1 שמתחת ה 1 המוביל כבר שווה 0.

שלב 5" אין לנו עוד שורות אז נמשיך לשלב 6

שלב 6" נאפס את כל איבר מעל ה 1 המוביל (הצבת אחור):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + \frac{1}{4}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{19}{4} \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 7\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{19}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - \frac{3}{4}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

קיבלנו מטריצה מדורגת קנונית.

המערכת המתאימה היא

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 1 \\ x_2 \qquad &= 5 \\ x_3 &= -5 \ . \end{aligned}$$

כך נקבל את הפתרון

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 5, -5) \ .$$

■

דוגמא. (פתרון מערכת ע"י שיטת גאוס)
פיתרו את המערכת לינארית הבאה ע"י השיטה של גאוס-ג'ורדן:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & & = 3 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & = 18 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = 10 \ . \end{array}$$

פיתרון.
המטריצה המורחבת של המערכת היא

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & -2 & 4 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

שלב 1 המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים הלא שווה אפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2 העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס היא העמודה ראשונה.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & -2 & 4 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

האיבר המוביל כבר שווה 1 אז נמשיך לשלב 3.

שלב 3 השורה כבר בשורה הראשונה, כלומר

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & -2 & 4 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4 נאפס כל איבר באותה עמודה של ה1 המוביל שמתחת ה 1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & -2 & 4 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2 \cdot R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

כך כל איברבעמודה של ה1 המוביל (שמתחת ה 1 המוביל) שווה 0.

שלב 5 חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת (המוקפת במעגל האדום להלן):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

שלב 1' המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים הלא שווה אפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2' העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא העמודה השנייה.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

שלב 3' מחליפים שורות R_2 ו- R_3:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

שלב 4' כל איבר שמתחת ה 1 המוביל כבר שווה 0 אז נמשיך לשלב 5.

שלב 5' חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת (המוקפת במעגל האדום להלן):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

שלב 1'' המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים הלא שווה אפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2'' העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא העמודה השלישית.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

נחלק שורה השלישית ב- 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{2} \cdot R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

שלב 3" השורה (עם ה 1 המוביל) כבר בשורה ראשונה של המטריצה החלקית אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4" כל איבר באותה עמודה של ה 1 שמתחת ה 1 המוביל כבר שווה 0.

שלב 5" אין לנו עוד שורות אז נמשיך לשלב 6

שלב 6" נאפס את כל איבר מעל ה 1 המוביל (הצבת אחור):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

קיבלנו מטריצה מדורגת קנונית.

המערכת המתאימה היא

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & & + & x_4 & = 3 \\ & x_2 & & + & x_4 & = 4 \\ & & x_3 & + & 2x_4 & = 6 \ . \end{array}$$

המשתנים x_1, x_2 ו- x_3 מתאימים ל ה- 1 המובילים, לכן הם המשתנים התלויים, ו- x_4 הוא המשתנה החופשי. לכן ע"י לפתור המערכת מקבלים תשובות בשביל המשתמים התלויים במונחים של המשתנה החופשי, x_4. כך נקבל את הפתרון

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - x_4 \ , \\ x_2 &= 4 - x_4 \ , \\ x_3 &= 6 - 2x_4 \ . \end{aligned}$$

נציב ב- x_4 את המשתנה החופשי t, כך שניתן לציין את הפתרון בצורה

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3-t, 4-t, 6-2t, t) \ , \qquad t \in \mathbb{R} \ .$$

■

קיום וכמות פתרונות למערכת לינארית

1.8 הגדרה: (משתנה תלוי ומשתנה חופשי)

עבור מטריצה מורחבת של מערכת לינארית, נגדיר:

- משתנה שמתאים לו איבר מוביל יקרא משתנה **תלוי** .
- משתנה שלא מתאים לו איבר מוביל יקרא משתנה **חופשי** .

דוגמא. משתנה תלוי ומשתנה חופשי

נתונה המערכת $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = & 0 \\ 11x_2 - 7x_3 = & 0 \end{cases}$ שנתאים לו מטריצה מורחבת $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & -7 & 0 \\ 0 & 11 & -7 & 0 \end{array}\right)$

1.9 משפט. (קיום וכמות פתרונות למערכת ליניארית I)
בהינתן מערכת ליניארית, ישנם האפשרויות הבאות לפתרונות של המערכת:

1 אם יש **שורה סתירה** במטריצה מורחבת מדורגת, אין פתרון למערכת כאשר שורה סתירה היא שורה מהצורה

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \end{array}\right)$$

2 אם יש **שורה כולה אפס** במטריצה המורחבת ישנן אינסוף פתרונות.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \end{array}\right)$$

3 אם כמות המשתנים גדולה מכמות השוואות יהיו אינסוף פתרונות. כלומר, במונחים של המטריצה המקדמים $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, אם $m < n$, אז יהיו אינסוף פתרונות.

דוגמא. נתונה המטריצה המורחבת הבאה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

האם למערכת הליניארית המתאימה יש פתרון? אם כן, כמה?

פיתרון. נשים לב שהמטריצה מדורגת. יש אינסוף פתרונות בגלל שיש שורה כולה אפס. נרשום את המשוואות המתקבלות

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & & & & & = 6 \\ & & 3y & & & = -6 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = 0 \end{array}$$

כלומר

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= -2 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

לכן, יש אינסוף פיתרונות, והפתרון הככלי הוא

$$(3, -2, z) \quad z \in \mathbb{R} \ .$$

■

דוגמא. נתונה המטריצה המורחבת הבאה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 33 & 44 & 234 & 1122 & 343 \\ 0 & 23 & 44 & 667 & 87 \\ 0 & 0 & 0 & 2344 & 5767 \end{array}\right)$$

האם למערכת הלינארית המתאימה יש פתרון? אם כן, כמה?

פיתרון. כן יש פתרון (בגלל שאין שורה סתירה), אבל בגלל שכמות המשתנים ($n = 4$) יותר מכמות המשוואות ($m = 3$) אז יהיו אינסוף פתרונות. נוכל להשתמש ברעיון של "הבצה לאחור":

$$\begin{array}{ccccccccc} 33x_1 & + & 44x_2 & + & 234x_3 & + & 1122x_4 & = 343 \\ & & 23x_2 & + & 44x_3 & + & 667x_4 & = 87 \\ & & & & & & 23554x_4 & = 5767 \end{array}$$

שימו לב, קיבלנו שלמערכת יש אינסוף פתרונות לו בגלל שכמות המשתנים גדולה מכמות השוואות. ■

תרגיל: תנו דוגמה למערכת בה כמות המשתנים גדולה מכמות המשוואות ואן לה אינסוף פתרונות.

פיתרון. כאשר תהיה שורה סתירה. למשל,

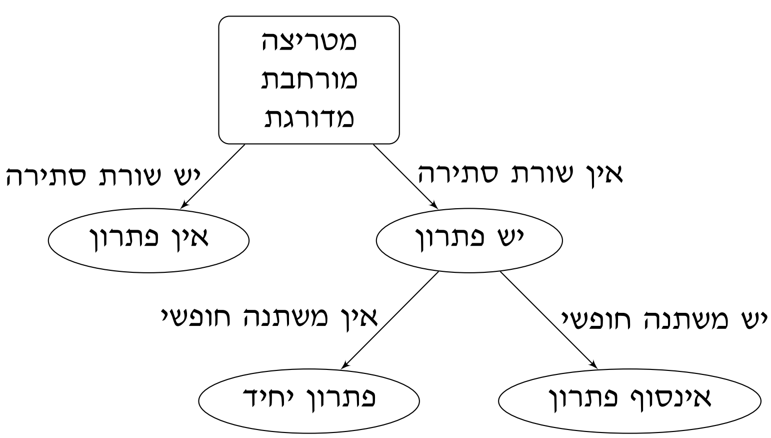
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

■

1.10 משפט. (קיום וכמות פתרונות למערכת לינארית II)

1. למערכת לינארית עם מקדמים ממשיים יש פתרון אם ורק אם במטריצה מורחבת מדורגת אין שורה סתירה, כאשר שורה סתירה היא שורה מהצורה $(0 \ \ldots \ 0|b)$ $(0 \ 0$ כאשר $b \neq 0$.
2. אם למערכת יש פתרון אז יתכנו 2 אפשרויות:
   (א) יש פתרון יחיד,
   (ב) יש פתרון אינסוף.

נסכם בעזרת עץ:



תרגיל: נתונה המערכת הלינארית הבאה:

$$\begin{aligned} x + (a-1)y - z &= 4 \\ (a+1)x + (2a-2)y + (a-4)z &= a+10 \\ (a+2)x + (3a-3)y + (2a-7)z &= a+17 \end{aligned}$$

עבור אילו ערכי הפרמטר a למערכת יש

1. פתרון יחיד
2. אין פתרון
3. אינסוף פתרונות?

במקרה של אינסוף פתרונות רשוף את הפתרון הכללי.

פיתרון.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ a+1 & 2a-2 & a-4 & a+10 \\ a+2 & 3a-3 & 2a-7 & a+17 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-(a+1)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ 0 & -a^2+2a-1 & 2a-3 & 6-3a \\ a+2 & 3a-3 & 2a-7 & a+17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-(a+2)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ 0 & -a^2+2a-1 & 2a-3 & 6-3a \\ 0 & -a^2+2a-1 & 3a-5 & 9-3a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ 0 & -a^2+2a-1 & 2a-3 & 6-3a \\ 0 & 0 & a-2 & 3 \end{array}\right)$$

לכן למערכת יש פתרון יחיד אם ורק אם (אס"ם) $a-2\neq 0$ וגם $(-a^2+2a-1)\neq 0$, כלומר $a\neq 1,2$.

עבור $a=1$ נקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן למערכת אינסוף פתרונות. מתקבל

$$x=1\ ,\ y\in\mathbb{R}\ ,\ z=-3\ .$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$(1,y,-3)$$

כאשר $y\in\mathbb{R}$.

עבור $a=2$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

וקיבלנו שורת סתירה לכן אין פתרון. ■

תרגיל: מצאו את כמות הפתרונות של המערכת הבאה:

$$\begin{aligned} x+\left(\sqrt{\pi^2+e}-1\right)y-z &=4 \\ \left(\sqrt{\pi^2+e}+1\right)x+\left(2\sqrt{\pi^2+e}-2\right)y+\left(\sqrt{\pi^2+e}-4\right)z &=\sqrt{\pi^2+e}+10 \\ \left(\sqrt{\pi^2+e}+2\right)x+\left(3\sqrt{\pi^2+e}-3\right)y+\left(2\sqrt{\pi^2+e}-7\right)z &=\sqrt{\pi^2+e}+17 \end{aligned}$$