אלגברה לינארית 2

תוכן העניינים

שעור 1
מרחבי מכפלת פנימית

1.1 הגדרה של מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$

הגדרה 1.1 מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. מכפלה פנימית על V היא פונקציה $V \times V \to \mathbb{R}$ המתאימה לכל זוג וקטורים u, v סקלר ממשי המסומן ב- $\langle u, \mathrm{v} \rangle$ כך שמתקיימות התכונות הבאות. לכל $u, \mathrm{v}, w \in V$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{R}$:

1) **סימטריות:**
$$\langle u, \mathrm{v} \rangle = \langle \mathrm{v}, u \rangle \ .$$

2) **ליניאריות ברכיב הראשון:**

א)
$$\langle u + \mathrm{v}, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle \mathrm{v}, w \rangle \ .$$

ב)
$$\langle \lambda u, \mathrm{v} \rangle = \lambda \langle u, \mathrm{v} \rangle \ .$$

3) **חיוביות:**
$$\langle u, u \rangle \geq 0$$

וגם $\langle u, u \rangle = 0$ אם ורק אם $u = 0$.

הגדרה 1.2 מרחב אווקלידי

מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{R}$ יחד עם מכפלה פנימית מסויימת נקרא מרחב אוקלידי.

משפט 1.1 ליניאריות ברכיב השני

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ו $\langle , \rangle$ מכפלה פנימית. אז

1) לכל $u, \mathrm{v}, w \in V$,
$$\langle u, \mathrm{v} + w \rangle = \langle u, \mathrm{v} \rangle + \langle u, w \rangle$$

2) לכל $u, \mathrm{v} \in V$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{R}$
$$\langle u, \lambda \mathrm{v} \rangle = \lambda \langle u, \mathrm{v} \rangle \ .$$

הוכחה:

1)
$$\langle u, \mathrm{v} + w \rangle = \langle \mathrm{v} + w, u \rangle = \langle \mathrm{v}, u \rangle + \langle w, u \rangle = \langle u, \mathrm{v} \rangle + \langle u, w \rangle$$

(2

$$\langle u, \lambda \mathrm{v}\rangle = \langle \lambda \mathrm{v}, u\rangle = \lambda \langle \mathrm{v}, u\rangle = \lambda \langle u, \mathrm{v}\rangle \ .$$

■

1.2 דוגמאות של מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$

דוגמה 1.1

$V=\mathbb{R}^n$, לכל וקטורים $u=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $\mathrm{v}=\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, נגדיר

$$\langle u, \mathrm{v}\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \ .$$

אז זה מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}^n$.

דוגמה 1.2

יהיו $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ מספרים חיוביים. לכל שני וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$, $u=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $\mathrm{v}=\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, נגדיר

$$\langle u, \mathrm{v}\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i \ .$$

הוכיחו כי המכפלה הזאת היא מכפלה פנימית.

פתרון:

(1

$$\langle u, \mathrm{v}\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i x_i = \langle \mathrm{v}, u\rangle$$

(2 נגדיר $w=\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}$. אז

$$\langle u+\mathrm{v}, w\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i+y_i)\cdot z_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i\cdot z_i + y_i\cdot z_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\cdot z_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i\cdot z_i = \langle u, w\rangle + \langle \mathrm{v}, w\rangle$$

(3

$$\langle ku, \mathrm{v}\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i (kx_i) y_i = \sum_{i=1}^n k\cdot \lambda_i x_i y_i = k\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i = k\langle u, \mathrm{v}\rangle$$

(4

$$\langle u,u\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq 0$$

כי $\lambda_i > 0$ לכל $1 \leq i \leq n$.

$\forall i$, $x_i = 0$ אם"ם $\langle u,u\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 = 0$

1.3 המכפלות הפנימיות העיקריות מעל $\mathbb{R}$

הגדרה 1.3 מכפלה פנימית לפי בסיס

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$. נבחר בסיס של V:

$$B = \{b_1, \ldots, b_n\} .$$

לכל $u, \mathrm{v} \in V$,

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \ , \quad \mathrm{v} = \sum_{i=1}^{n} y_i b_i \ .$$

מכפלה פנימית לפי בסיס B מסומנת $(,)_B$ ומוגדרת

$$(u,\mathrm{v})_B = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ .$$

קל להוכיח שזה מכפלה פנימית.

הגדרה 1.4 מכפלה פנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^n$

לכל $u, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^n$, נניח כי בבסיס הסטנדרטי,

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ , \quad \mathrm{v} = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \ .$$

המכפלה פנימית הסטנדרטית מסומנת $(,)$ ומוגדרת

$$(u,\mathrm{v}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ .$$

הגדרה 1.5 העקבה של מטריצה ריבועית

לכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ העקבה של A זה סכום איברי האלכסון של A. העקבה מסומנת

$$\mathrm{tr}\ A \ .$$

משפט 1.2 תכונות של העקבה

לכל $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$:

1) $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$
2) $\mathrm{tr}(\lambda A)=\lambda\mathrm{tr}(A)$ לכל $\lambda\in\mathbb{F}$.
3) $\mathrm{tr}(A^t)=\mathrm{tr}(A)$.

הגדרה 1.6 המכפלה הפנימית הסטנדרטית של מטריצות

תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{n\times m}$. המכפלה הפנימית הסטנדרטית של מטריצות היא פונקציה $\langle,\rangle:\mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}$ שמוגדרת ע"י

$$\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}\left(B^t\cdot A\right)\ .$$

המכפלה הזאת נקראת המכפלה הפנימית הסטנדרטית במרחב $\mathbb{R}^{n\times m}$ גם.

דוגמה 1.3

הוכיחו כי המכפלה הפנימית הסטנדרטית של מטריצות בהגדרה הקודמת מקיינת את התכונות של מכפלה פנימית.

פתרון:

1)

$$\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^t\cdot A)=\mathrm{tr}\left((A^t\cdot B)^t\right)=\mathrm{tr}\left(A^t\cdot B\right)=\langle B,A\rangle\ .$$

2) א)

$$\langle A+B,C\rangle=\mathrm{tr}(C^t\cdot(A+B))=\mathrm{tr}\left(C^t\cdot A+C^t\cdot B\right)=\mathrm{tr}\left(C^t\cdot A\right)+\mathrm{tr}\left(C^t\cdot B\right)=\langle A,C\rangle+\langle B,C\rangle\ .$$

ב)

$$\langle\lambda A,C\rangle=\mathrm{tr}(B^t\lambda A)=\mathrm{tr}\left(\lambda(B^tA)\right)=\lambda\mathrm{tr}\left(B^tA\right)=\lambda\left\langle A,B\right\rangle\ .$$

3)

$$\langle A,A\rangle=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ji}^2\geq 0$$

$\langle A,A\rangle=0$ אם"ם $a_{ji}=0$ $\forall i,j$, כלומר אם"ם $A=0$.

הגדרה 1.7 המכפלה הפנימית הסטנדרטית של פונקציות

תהיינה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו- $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות שמוגדרות בקטע $[a,b]\in\mathbb{R}$. המכפלה הפנימית הסטנדרטית של פונקציות מוגדרת

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\,dx\ .$$

1.4 מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$

הגדרה 1.8 מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$. מכפלה פנימית על V היא פונקציה $V\times V\to\mathbb{R}$ המתאימה לכל זוג וקטורים u,v סקלר ב- $\mathbb{R}$ המסומן ב- $\langle u,\mathrm{v}\rangle$ כך שמתקיים התנאים הבאים. לכל וקטורים $u,\mathrm{v},w\in V$ ולכל סקלר $\lambda\in\mathbb{C}$:

1) <u>הרמיטיות</u>:
$$\langle u,\mathrm{v}\rangle=\overline{\langle \mathrm{v},u\rangle}\ .$$

2) <u>ליניאריות ברכיב הראשון</u>:

א)
$$\langle u+\mathrm{v},w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle \mathrm{v},w\rangle$$

ב)
$$\langle \lambda u,\mathrm{v}\rangle=\lambda\langle u,\mathrm{v}\rangle$$

3) <u>חיוביות:</u> $\langle u,u\rangle$ הוא מספר ממשי אי-שללי. $\langle u,u\rangle=0$ אם ורק אם $u=0$.

הגדרה 1.9 מרחב אוניטרי

מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{C}$ יחד עם מכפלה פנימית מסויימת נקרא מרחב אוניטרי.

משפט 1.3 ליניאריות חלקית של מ"פ מעל $\mathbb{C}$

יהי V מרחב מכפלה פנימית. אזי

א) לכל $u,\mathrm{v},w\in V$,
$$\langle u,\mathrm{v}+w\rangle=\langle u,\mathrm{v}\rangle+\langle u,w\rangle\ .$$

ב) לכל $u,\mathrm{v}\in V$ ולכל סקלר λ:
$$\langle u,\mathrm{v}\rangle=\bar{\lambda}\langle u,\mathrm{v}\rangle\ .$$

הוכחה:

א)
$$\langle u,\mathrm{v}+w\rangle=\overline{\langle \mathrm{v}+w,u\rangle}=\overline{\langle \mathrm{v},u\rangle}+\overline{\langle w,u\rangle}=\overline{\langle \mathrm{v},u\rangle}+\overline{\langle w,u\rangle}=\langle u,\mathrm{v}\rangle+\langle u,w\rangle\ .$$

ב)
$$\langle u,\lambda\mathrm{v}\rangle=\overline{\lambda\langle \mathrm{v},u\rangle}=\bar{\lambda}\overline{\langle \mathrm{v},u\rangle}=\bar{\lambda}\langle u,\mathrm{v}\rangle\ .$$

■

1.5 דוגמאות של מרחבים אוניטריים

דוגמה 1.4

לכל $\in \mathbb{C}^n$ $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathrm{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$$(u,\mathrm{v}) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \ .$$

הוכיחו שזאת מרחב מכפלה פנימית.

פתרון:

1)

$$(u,\mathrm{v}) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = \sum_{i=1}^n \overline{\bar{x}_i} \bar{y}_i = \sum_{i=1}^n \overline{\bar{x}_i y_i} = \sum_{i=1}^n \overline{y_i \bar{x}_i} = \overline{\sum_{i=1}^n y_i \bar{x}_i} = \overline{(\mathrm{v},u)} \ .$$

2)

$$(u+\mathrm{v},w) = \sum_{i=1}^n (x_i+y_i)\cdot \bar{z}_i = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \bar{z}_i + \sum_{i=1}^n y_i \cdot \bar{z}_i = (u,w)+(\mathrm{v},w) \ .$$

3)

$$(u,u) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \geq 0$$

$u=0 \Leftarrow (u,u)=0$.

מכפלה פנימית זו נקראת המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{C}^n$.

דוגמה 1.5

נתון

$$u = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+i \end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{v} = \begin{pmatrix} 3+i \\ -i \end{pmatrix} \ .$$

$u,\mathrm{v} \in \mathbb{C}^2$. חשבו את

א) (u,v)

ב) (v,u)

ג) (u,u)

ד) $(u,(1+i)\mathrm{v})$

פתרון:

א)

$$(u,\mathrm{v}) = (1-i)(3-i) + (2+i)\cdot i = 3-4i-1+2i-1 = 1-2i$$

ב)

$$(\mathrm{v},u) = (3+i)(1+i) - i(2-i) = 3+4i-1-2i-1 = 1+2i$$

ג)

$$(u,u)=(1-i)(1+i)+(2+i)(2-i)=2+5=7$$

ד)

$$(u,(1+i)\mathrm{v})=\overline{(1+i)}(u,\mathrm{v})=(1-i)(1-2i)=1-3i-2=-1-3i\ .$$

1.6 הנורמה והמרחק

הגדרה 1.10 הנורמה

יהי V מרחב מכפלה פנימית. הנורמה $\|u\|$ של וקטור $u\in V$ היא מספר ממשי אי-שללי הניתנת ע"י

$$\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}$$

במרחבים $\mathbb{R}^2$ ו- $\mathbb{R}^3$ הנורמה היא בעצם האורך של וקטור.

דוגמה 1.6

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbb{F}$, $u\in V$, $\lambda\in\mathbb{F}$. הוכיחו כי

א)

$$\|\lambda u\|=|\lambda|\|u\|$$

ב)

$$\left\|\frac{1}{\|u\|}u\right\|=1$$

פתרון:

א)

$$\|\lambda u\|=\sqrt{(\lambda u,\lambda u)}=\sqrt{\lambda(u,\lambda u)}=\sqrt{\lambda\cdot\bar{\lambda}(u,u)}=\sqrt{|\lambda|^2(u,u)}=\lambda\|u\|\ .$$

ב) $\frac{1}{\|u\|}>0$ לכן לפי סעיף א'

$$\left\|\frac{1}{\|u\|}u\right\|=\frac{1}{\|u\|}\cdot\|u\|=1$$

עבור כל וקטור $u\neq 0$ אפשר למצוא סקלר λ כך ש- λu יהיה וקטור יחידה.

לפעולה, $\frac{u}{\|u\|}\to u$ קוראים נרמול של וקטור u.

לוקטור היחידה $\frac{u}{\|u\|}$ קוראים הוקטור המנורמל.

1.7 דוגמאות של הנורמה

דוגמה 1.7

במרחב $\mathbb{C}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית חשבו את הנורמה של הוקטור $u=\begin{pmatrix} i \\ 1+i \end{pmatrix}$ וחשבו את הוקטור המנורמל.

פתרון:

$$\|u\|=\sqrt{(u,u)}=\sqrt{i\bar{i}+(1+i)\overline{(1+i)}}=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}\ .$$

ננרמל את הוקטור:

$$\frac{u}{\|u\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} i \\ 1+i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}i \\ \frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}i \end{pmatrix}$$

דוגמה 1.8

במרחב של הפונקציות הממשיות בקטע $[0,1]$

$$\|f(x)\|=\sqrt{\int_0^1 f^2(x)\,dx}$$

לדוגמה, עבור $f(x)=1$,

$$\|f(x)\|=\sqrt{\int_0^1 1^2\,dx}=1$$

עבור $f(x)=x^3$,

$$\|f(x)\|=\sqrt{\int_0^1 x^6\,dx}=\frac{1}{\sqrt{7}}\ .$$

ננרמל את הוקטור הזה:

$$\frac{f(x)}{\|f(x)\|}=\sqrt{7}\cdot x^3\ .$$

אז

$$\|\sqrt{7}x^3\|=\sqrt{7}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}=1\ .$$

דוגמה 1.9

במרחב $\mathbb{R}^{2\times 2}$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית נקח $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\|A\|=\sqrt{(A,A)}=\sqrt{\mathrm{tr}(A^t\cdot A)}=\sqrt{14}\ .$$

$$A^t\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(A^t\cdot A)=10+4=14\ .$$

ננרמל את הוקטור:

$$\frac{1}{\sqrt{14}}\cdot A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 \end{pmatrix}$$

1.8 משפט פיתגורס, משפט קושי שוורץ, אי-שוויון משולש

משפט 1.4 משפט פיתגורס המוכלל של ווקטורים במרחב מכפלה פנימית

לכל שני וקטורים u,v במרחב מכפלה פנימית מתקיים:

1)

$$\|u\pm \mathrm{v}\|^2=\|u\|^2\pm 2\mathrm{Re}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle+\|v\|^2$$

2)

$$\|u+\mathrm{v}\|^2+\|u-\mathrm{v}\|^2=2\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)$$

הוכחה:

1)

$$\begin{aligned}\|u+\mathrm{v}\|^2&=\langle u+\mathrm{v},u+\mathrm{v}\rangle && \text{(הגדרה של המכפלה פנימית)}\\&=\langle u,u+\mathrm{v}\rangle+\langle \mathrm{v},u+\mathrm{v}\rangle && \text{(ליניאריות)}\\&=\langle u,u\rangle+\langle u,\mathrm{v}\rangle+\langle \mathrm{v},u\rangle+\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && \text{(ליניאריות חלקית)}\\&=\langle u,u\rangle+\langle u,\mathrm{v}\rangle+\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}+\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && \text{(הרמיטיות)}\\&=\|u\|^2+\langle u,\mathrm{v}\rangle+\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}+\|\mathrm{v}\|^2 && \text{(הגדרה של הנורמה)}\\&=\|u\|^2+2\mathrm{Re}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle+\|\mathrm{v}\|^2 && \text{(ראו הסבר למטה)}\ .\end{aligned}$$

הסבר של שלב האחרון: לכל מספר $z=a+bi$:

$$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=2\mathrm{Re}\ z\ .$$

2)

$$\begin{aligned}\|u+\mathrm{v}\|^2+\|u-\mathrm{v}\|^2=&\|u\|^2+2\mathrm{Re}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle+\|\mathrm{v}\|^2+\|u\|^2-2\mathrm{Re}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle+\|\mathrm{v}\|^2\\=&2\left(\|u\|^2+\|\mathrm{v}\|^2\right)\end{aligned}$$

השוויון האחרון במרחב $\mathbb{R}^2$ מבטא את משפט גאומרטי: במקבילית, סכום ריבועי האלכסונים שווה לסכום ריבועי הצלעות.

■

משפט 1.5 אי-שוויון קושי-שוורץ

לכל וקטורים u ו- v במרחב מכפלה פנימית מתקיים

$$|\langle u,\mathrm{v}\rangle|\leq\|u\|\cdot\|\mathrm{v}\|\ .$$

הוכחה: אם $u=\bar{0}$ אז מקבלים $0\leq 0$.

נניח ש- $u\neq\bar{0}$. לכל סקלר λ מתקיים

$$\langle \lambda u+\mathrm{v},\lambda u+\mathrm{v}\rangle\geq 0\ ,\qquad (\#)$$

לפי משפט הקיטוב האגף השמאל הוא

$$\begin{aligned}\langle \lambda u+\mathrm{v},\lambda u+\mathrm{v}\rangle =&\|\lambda u\|^2+2\mathrm{Re}\,\langle \lambda u,\mathrm{v}\rangle+\|\mathrm{v}\|^2\\ =&\|\lambda u\|^2+\langle \lambda u,\mathrm{v}\rangle+\overline{\langle \lambda u,\mathrm{v}\rangle}+\|\mathrm{v}\|^2\\ =&\lambda\bar{\lambda}\|u\|^2+\lambda\,\langle u,\mathrm{v}\rangle+\bar{\lambda}\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}+\|\mathrm{v}\|^2\end{aligned}$$

נציב זה באגף השמאל של (#) ונקבל

$$\lambda\bar{\lambda}\|u\|^2+\lambda\,\langle u,\mathrm{v}\rangle+\bar{\lambda}\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}+\|\mathrm{v}\|^2\geq 0$$

נציב $\lambda=\dfrac{-\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}}{\|u\|^2}$, $\bar{\lambda}=\dfrac{-\langle u,\mathrm{v}\rangle}{\|u\|^2}$ ונקבל

$$\frac{\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle}{\|u\|^2}-\frac{\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle}{\|u\|^2}-\frac{\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle}{\|u\|^2}+\|\mathrm{v}\|^2\geq 0$$

נכפיל ב- $\|u\|^2$:

$$-\langle u,\mathrm{v}\rangle\,\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}+\|u\|^2\|\mathrm{v}\|^2\geq 0$$

נציב $\langle u,\mathrm{v}\rangle\,\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}=|\,\langle u,\mathrm{v}\rangle\,|^2$ ונקבל

$$|\,\langle u,\mathrm{v}\rangle\,|^2\leq\|u\|^2\|\mathrm{v}\|^2$$

מש"ל. ■

אפשר לשים לב שבמרחב $\mathbb{R}^2$ הביטוי $\|u-\mathrm{v}\|$ הוא המרחק בין שתי הנקודות במישור המתאימה ל- u ול- v.

ישנה הכללה של מושג המרחק בכל מרחב מכפלה פנימית.

הגדרה 1.11 המרחק

יהיו u ו- v שני וקטורים במרחב מכפלה פנימית. המרחק בין u ו- v הוא מספר ממשי אי-שלילי המוגדר ע"י

$$d(u,\mathrm{v})=\|u-\mathrm{v}\|$$

משפט 1.6 תכונות של המרחק ואי-שוויון המשולש

נראה כי מושג המרחק החדש מקיים תכונת בסיסית של המרחק המוכר במישור.

(1

$$d(u,\mathrm{v})=d(\mathrm{v},u)$$

הוכחה:

$$d(u,\mathrm{v})=\|u-\mathrm{v}\|=\|(-1)(\mathrm{v}-u)\|=1\cdot\|\mathrm{v}-u\|=d(\mathrm{v},u)$$

(2 $d(u,\mathrm{v})\geq 0$. $d(u,\mathrm{v})=0$ אם ורק אם $u=\mathrm{v}$.

(3

$$d(u,\mathrm{v})\leq d(u,w)+d(w,\mathrm{v})$$

זאת תכונה הנקראת **אי-שוויון המשולש**.

הוכחה: לכל שני וקטורים u,v, לפי משפט הקיטוב,

$$\|u+\mathrm{v}\|^2 = \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle + \|\mathrm{v}\|^2 \leq \|u\|^2 + 2|\,\langle u,\mathrm{v}\rangle\,| + \|\mathrm{v}\|^2 \tag{\#1}$$

<u>הסבר:</u>
נסמן $z=\langle u,\mathrm{v}\rangle = a+ib$,
$\bar{z}=a-ib$.
נרשום $|\,\langle u,\mathrm{v}\rangle\,|^2 = z\bar{z} = a^2+b^2$,
לכן $|\,\langle u,\mathrm{v}\rangle\,| = \sqrt{a^2+b^2}$.
מצד שני $2\mathrm{Re}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle = 2\mathrm{Re}z = 2a$,
לכן נקבל $2\mathrm{Re}(u,\mathrm{v}) = 2a \leq 2\sqrt{a^2+b^2} = 2|\,\langle u,\mathrm{v}\rangle\,|$.
נציב אי -שוויון קושי-שוורץ ב- (#1) ונקבל

$$\|u+\mathrm{v}\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\cdot\|\mathrm{v}\| + \|\mathrm{v}\|^2 = (\|u\|+\|\mathrm{v}\|)^2$$

נציב את $-\mathrm{v}$ במקום v:

$$\|u-\mathrm{v}\|^2 \leq (\|u\|+\|\mathrm{v}\|)^2\ .$$

לכן

$$\|u-\mathrm{v}\| \leq \|u\|+\|\mathrm{v}\|\ .$$

נציב כעת את $u-w$ במקום u ו $\mathrm{v}-w$ במקום v:

$$\|(u-w)-(\mathrm{v}-w)\| \leq \|u-w\| + \|\mathrm{v}-w\|\ .$$

ז"א

$$\|u-\mathrm{v}\| \leq \|u-w\| + \|\mathrm{v}-w\|\ .$$

קיבלנו את אי-שוויון המשולש:

$$d(u,\mathrm{v}) \leq d(u,w) + d(\mathrm{v},w)$$

■

1.9 אורתוגונליות

הגדרה 1.12 ווקטורים אורתוגונליים

וקטורים u,v במרחב מכפלה פנימית נקראים אורתוגונליים זה לזה (או מאונכים זה לזה) אם

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle = 0\ .$$

סימון:

$$u\perp \mathrm{v}\ .$$

1) אם $\langle u,\mathrm{v}\rangle = 0$ אז

$$\langle \mathrm{v},u\rangle = \overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle} = \bar{0} = 0\ ,$$

כלומר יחס האורתוגונליות הוא סימטרי.

2) וקטור האפס אורתוגונל לכל וקטור v.

3) במרחב $\mathbb{R}^n$ עם המכפלה פנימית הסטנדרטית, מושג האורתוגונליות מתלכד עם מושג האורתוגונליות המוגדר על סמך המכפלה סלקרית.

דוגמה 1.10

במרחב הפונקציות הרציפות בקטע $[0,1]$,

$$f(x) = 2x-1\ , \quad g(x) = 2x^2-2x+\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}(f,g) =& \int_0^1 (2x-1)\left(2x^2-2x-\frac{1}{3}\right)dx \\ =& \int_0^1 \left(4x^3-6x^2+\frac{8}{3}x-\frac{1}{3}\right)dx \\ =& \left[x^4-2x^3+\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x\right]_0^1 \\ =&0\ .\end{aligned}$$

לכן $f(x)\perp g(x)$.

דוגמה 1.11

במרחב $\mathbb{C}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית:

$$u=\begin{pmatrix}1\\i\\1\\i\end{pmatrix}\ , \quad \mathrm{v}=\begin{pmatrix}i\\1\\i\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}(u,\mathrm{v}) =&1\cdot\bar{i}+i\cdot\bar{1}+1\cdot\bar{i}+i\cdot\bar{1} \\ =&-i+i-i+i \\ =&0\end{aligned}$$

לכן $u\perp \mathrm{v}$.

דוגמה 1.12

הוכיחו שאם $u\perp \mathrm{v}$ אז

א) $\|u+\mathrm{v}\|^2=\|u\|^2+\|\mathrm{v}\|^2$

ב) $\|u+\mathrm{v}\|=\|u-\mathrm{v}\|$

פתרון:

א)

$$\|u+\mathrm{v}\|^2=\|u\|^2+2\mathrm{Re}\cancelto{0}{\langle u,\mathrm{v}\rangle}+\|\mathrm{v}\|^2=\|u\|^2+\|\mathrm{v}\|^2$$

המשמעות הגאומטרית ב- $\mathbb{R}^2$ - משפט פיתגורס.

ב)

$$\|u-\mathrm{v}\|^2=\|u\|^2-2\mathrm{Re}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle+\|\mathrm{v}\|^2=\|u\|^2+\|\mathrm{v}\|^2=\|u\|^2+\|\mathrm{v}\|^2+2\mathrm{Re}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle$$

בגלל ש $\langle u,\mathrm{v}\rangle=0$. לכן

$$\|u-\mathrm{v}\|^2=\|u+\mathrm{v}\|^2$$

ולכן

$$\|u-\mathrm{v}\| = \|u+\mathrm{v}\|$$

הפירוש הגאומטרית ב- $\mathbb{R}^2$: האלכסונים של מלבן שווים זה לזה.

הגדרה 1.13 וקטור האורתוגונלי לתת-מרחב

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית ו- $U \subset V$ U תת-מרחב של V. נניח ש $\mathrm{v} \in V$. אומרים כי v אורתוגונלי ל- U אם v אורתוגונלי לכל וקטור $u \in U$. כלומר, אם

$$\langle \mathrm{v}|u\rangle = 0$$

לכל $u \in U$, אז הווקטור v אורתוגונלי לתת-מרחב U.
סימון:

$$\mathrm{v} \perp U \ .$$

הגדרה 1.14 המשלים האורתוגונלי

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית ו- $U \subset V$ U תת-מרחב של V. נניח ש $\mathrm{v} \in V$. **המשלים האורתוגונלי** של U מסומן ב $U^\perp$ ומוגדר לפי התנאי שכל וקטור ב- $U^\perp$ אורתגונלי לכל ווקטור ב U. כלומר:

$$\langle a|b\rangle = 0$$

לכל $a \in U$ ולכל $b \in U^\perp$.

דוגמה 1.13

נניח ש- $V = \mathbb{R}_2[x]$, ו- $U = \text{span}\{x\}$. מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי $U^\perp$. כאשר המכפלה הפנימית היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית בקטע $[0,1]$.

פתרון:

וקטור $p(x) = a + bx + cx^2 \in U^\perp$ אם"ם $(x, p(x)) = 0$.

$$\langle x, p(x)\rangle = \langle x, a + bx + cx^2\rangle = \int_0^1 dx\, x \cdot (a + bx + cx^2) = \left[\frac{ax^2}{2} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^4}{4}\right]_0^1 = \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} = 0 \ .$$

לכן

$$U^\perp = \left\{a + bx + cx^2 \middle| 6a + 4b + 3c = 0 \ .\right\}$$

נמצא בסיס של $U^\perp$:

$$a = -\frac{2}{3}b - \frac{1}{2}c \ , \qquad b, c \in \mathbb{R} \ .$$

לכן

$$a + bx + cx^2 = -\frac{2}{3}b - \frac{1}{2}c + bx + cx^2 = b\left(-\frac{2}{3} + x\right) + c\left(-\frac{1}{2} + x^2\right) \ , \qquad b, c \in \mathbb{R} \ .$$

לכן $\{1 - 2x^2, 2 - 3x\}$ בסיס של $U^\perp$. נשים לב כי

$$3 = \dim(V) = \overbrace{\dim(U)}^{=1} + \overbrace{\dim(U^\perp)}^{=2}$$

לכן $V = U \oplus U^\perp$

דוגמה 1.14

מצאו בסיס ל- $U^{\perp}$ בכל אחד מהמקרים הבאים:

1) $V=\mathbb{C}^2$, $U=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1+i\\ i\end{pmatrix}\right\}$ ביחס למכפלה פנימית הסטנדרטית.

2) $V=\mathbb{R}_2[x]$, $U=\operatorname{span}\left\{(x,x^2\right\}$ ביחס למכפלה פנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.

3) $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$, $U=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ ביחס למכפלה פנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

פתרון:

1) $\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}\in U^{\perp}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}1+i\\ i\end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1+i\\ i\end{pmatrix}\right)=z_1\overline{(1+i)}+z_2\bar{i}=0\quad\Rightarrow\quad z_2=\frac{i}{1-i}z_1=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z_1$$

לכן

$$U^{\perp}=\left\{\begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\end{pmatrix}z\,\middle|\,z\in\mathbb{C}\right\}\ .$$

בסיס של $U^{\perp}$:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\end{pmatrix}\right\}$$

2) $p(x)=a+bx+cx^2\Leftrightarrow(p(x),x)=0$ וגם $(p(x),x^2)=0$.

$$(p(x),x)=\int_0^1(a+bx+cx^2)x\,dx=\left[\frac{ax^2}{2}+\frac{bx^3}{3}+\frac{cx^4}{4}\right]_0^1 1=\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{4}=0$$

$$(p(x),x^2)=\int_0^1(a+bx+cx^2)x^2\,dx=\left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^4}{4}+\frac{cx^5}{5}\right]_0^1 1=\frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}=0$$

לכן

$$U^{\perp}=\left\{a+bx+cx^2\,\middle|\,\begin{array}{rl}6a+4b+3c&=0\\ 20a+15b+12c&=0\end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}6&4&3\\20&15&12\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to 3R_2-10R_1}\begin{pmatrix}6&4&3\\0&5&6\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to 5R_1-4R_2}\begin{pmatrix}30&0&-9\\0&5&6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{10}\\0&1&\frac{6}{5}\end{pmatrix}$$

$a=0.3c$ $b=-1.2c$ $c\in\mathbb{R}$.

$$a+bx+cx^2=\frac{3}{10}c-\frac{12}{10}cx+cx^2=c\left(\frac{3}{10}-\frac{12}{10}x+x^2\right)\ ,\qquad c\in\mathbb{R}\ .$$

לכן נקבל בסיס של $U^{\perp}$:

$$B_{U^{\perp}}=\left\{3-12x+10x^2\right\}$$

3) נסמן $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\Leftarrow$ $U = \text{span}(A_1, A_2)$.

$$U^\perp = \left\{B \in \mathbb{R}^{2\times 2} \middle| (B, A_1) = 0 \ , (B, A_2) = 0\right\}$$

נסמן $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$(B, A_1) = \text{tr}(A_1^t \cdot B) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \text{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a = 0$$

$$(B, A_2) = \text{tr}(A_2^t \cdot B) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \text{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = a + b = 0$$

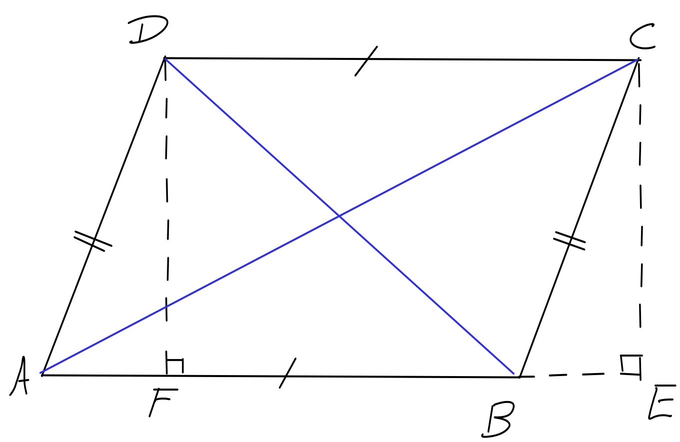
לכן

$$U^\perp = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \middle| c, d \in \mathbb{R}\right\}$$

בסיס של $U^\perp$:

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \ .$$

1.10 * הערה: סכום ריבועי האלכסונים של במקבילית שווה לסכום ריבועי הצלעות של



הוכחה:

$AC^2 = AE^2 + CE^2$ (פיתגורס).
לכן $AC^2 = (AB + BE)^2 + CE^2$

(1*)
$$AC^2 = AB^2 + BE^2 + 2 \cdot AB \cdot BE + CE^2$$

$CD = EF$ בגלל ש $CDFE$ מלבן.
אבל $CD = AB$ לכן $AB = CD = EF$.

גם $CE = DF$ (מרחק בין שנ ישרים מקבילים).
לכן $\Delta AFD \cong \Delta BEC$ (משולשים חופפים)
לכן $AF = BE$.

נסתכל אל המשולש ישר זוית ΔDFB.
$BD^2 = BF^2 + DF^2$ (פיתגורס).
לכן $BD^2 = (EF–BE)^2 + CE^2$ בגלל ש $DF = CE$.
לכן $BD^2 = (AB–BE)^2 + CE^2$ בגלל ש $EF = AB$.
לכן

$$BD^2 = AB^2 + BE^2 - 2 \cdot AB \cdot BE + CE^2 \qquad (*2)$$

נחבר את הביטוים (1*)+(2*) ונקבל

$$\begin{aligned}
& AC^2 + BD^2 = AB^2 + BE^2 + 2 \cdot AB \cdot BE + CE^2 + AB^2 + BE^2 – 2 \cdot AB \cdot BE + CE^2 \\
\Rightarrow \quad & AC^2 + BD^2 = 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot BE^2 + 2 \cdot CE^2 \\
\Rightarrow \quad & AC^2 + BD^2 = 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot \left(BE^2 + CE^2\right) \qquad (*3)
\end{aligned}$$

במשולש ישר זוית ΔBEC
$BC^2 = BE^2 + CE^2$ (פיתגורס). לכו נקבל ממשוואה (3*)

$$\begin{aligned}
& AC^2 + BD^2 = 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot BC^2 \\
\Rightarrow \quad & AC^2 + BD^2 = AB^2 + AB^2 + BC^2 + BC^2 \\
\Rightarrow \quad & AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2
\end{aligned}$$

לכן סכום ריבועי האלכסונים שווה לסכום ריבועי הצלעות.

שעור 2
בסיסים אורתוגונליים

2.1 בסיסים אורתוגונליים

הגדרה 2.1 קבוצת ווקטורים אורתוגונלית

נתון המרחב מכפלה פנימית V ונתונה הקבוצה של ווקטורים

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_k .\} \ .$$

הקבוצה נקראת **אורתוגונלית** אם כל שני ווקטורים שלה אורתוגונליים. כלומר:

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \ , \qquad i \neq j \ .$$

הגדרה 2.2 קבוצת ווקטורים ואורתונורמלית

נתון המרחב מכפלה פנימית V ונתונה הקבוצה של ווקטורים

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_k \ \} \ .$$

הקבוצה נקראת **אורתונורמלית** אם:

א) כל שני ווקטורים שלה אורתוגונליים, כלומר

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \ , \qquad i \neq j \ ,$$

ב) כל ווקטור הוא ווקטור יחידה, כלומר

$$\|u_i\| = 1 \ .$$

דוגמה 2.1

נתון הבסיס הסטנדרטי $\{e_1, \ldots, e_n\}$ של $\mathbb{R}^n$ עם המכפלה הסקלרית. בדקו אם הקבוצה אורתונורמלית.

פתרון:

תזכורת: נתונים שני ווקטורים $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathrm{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, המכפלה הסקלרית מוגדרת

$$(u, \mathrm{v}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \ .$$

נרשום את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$:

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, , \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

א)

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} ,$$

כלומר כל שני ווקטורים אורתוגונליים.

ב)

$$\|e_i\| = \sqrt{(e_i, e_i)} = 1 ,$$

כלומר כל ווקטור בקבוצה הוא ווקטור יחידה.

לכן הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$ הוא קבוצה אורתונורמלי.

דוגמה 2.2

נתונה הקבוצה

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 3+i \\ 4+3i \\ 5i \end{pmatrix} \right\}$$

של ווקטורים ב- $\mathbb{C}^3$ עם המ"פ הסטנדרטית.

א) הוכיחו שהקבוצה אורתוגונלית.

ב) מצאו את הקבוצה האורתנורמלית המתאימה לקבוצה זו.

פתרון:

א)

$$\langle u_1, u_2 \rangle = (1+i)\bar{i} - 1 \cdot 1 + 1(-\bar{i}) = (1+i)(-i) - 1 + 1(i) = -i + 1 - 1 + i = 0 \Rightarrow u_1 \perp u_2 .$$

$$\langle u_1, u_3 \rangle = (1+i)(3-i) - 1(4-3i) + 1(-5i) = 4 + 2i - 4 + 3i - 5i = 0 \Rightarrow u_1 \perp u_3 .$$

$$\langle u_2, u_3 \rangle = i(3-i) + 1(4-3i) - i(-5i) = 1 + 3i + 4 - 3i - 5 = 0 \Rightarrow u_2 \perp u_3 .$$

לכן הקבוצה אורתוגונלית.

ב)

$$\|u_1\|^2 = \langle u_1, u_1 \rangle = (1+i)(1-i) + (-1)(-1) + 1 \cdot 1 = 4$$

$$\|u_2\|^2 = \langle u_2, u_2 \rangle = i(-i) + 1 \cdot 1 + (-i) \cdot i = 3 .$$

$$\|u_3\|^2 = \langle u_3, u_3 \rangle = (3+i)(3-i) + (4+3i)(4-3i) + 5i(-5i) = 10 + 25 + 25 = 60 .$$

לכן קבוצת הווקטורים

$$\left\{ \frac{1}{2} u_1 \ , \frac{1}{\sqrt{3}} u_2, \frac{1}{\sqrt{60}} u_3 \right\}$$

היא קבוצה אורתונורמלית.

משפט 2.1 קבוצה אורתוגונלית בת"ל

קבוצה אורתוגונלית במרחב מכפלה פנימית שלא מכילה את וקטור האפס היא בלתי תלויה ליניארית.

הוכחה: תהי $\{u_1,\ldots,u_k\}$ קבוצה אורתוגונלית. נניח ש

$$\alpha_1 u_1+\ldots+\alpha_k u_k=0\ .$$

אז לכל $1\leq j\leq k$

$$\left\langle \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i\,,\,u_j\right\rangle=\langle 0\,,\,u_j\rangle=0\ .$$

מצד שני

$$\left\langle \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i\,,\,u_j\right\rangle=\sum_{i=1}^k \alpha_i\,\langle u_i\,,\,u_j\rangle\ .$$

הקבוצה אורתוגונלית, אז $\langle u_i,u_j\rangle=0$ אם $i\neq j$, לכן בהסכום לעיל כל האיברים מתאפסים חוץ מהאיבר של $i=j$. לכן נקבל

$$\left\langle \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i\,,\,u_j\right\rangle=\alpha_j\,\langle u_j\,,\,u_j\rangle\ .$$

לכן

$$\alpha_j\,\langle u_j\,,\,u_j\rangle=0\ .$$

$u_j\neq 0$ (נתון), אז $\langle u_j\,,\,u_j\rangle\neq 0$.
לכן בהכרח

$$\alpha_j=0$$

לכל $1\leq j\leq k$.

■

משפט 2.2 קבוצה אורתוגונלית היא בסיס

נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית כך ש $\dim(V)=n$.

כל קבוצה אורתוגונלית של n ווקטורים ב- V מהווה בסיס של V.

הוכחה: נניח ש V מרחב מכפלה פנימית, $\dim(V)=n$.
נניח ש $U=\{u_1,\ldots,u_n\}\in V$ קבוצה אורתוגונלית.
כל קבוצה אורתוגונלית היא בת"ל, לכן הקבוצה בת"ל.
בקבוצה יש n ווקטורים, לכן $\dim(U)=\dim(V)$.
לכן הקבוצה מהווה בססי של V.
■

הגדרה 2.3 בסיס אורתוגונלי ובסיס אורתונורמלי

- בסיס של V המורכב מווקטורים אורתוגונליים נקרא **בסיס אורתוגונלי.**
- בסיס של V המורכב מווקטורים אורתונורמליים נקרא **בסיס אורתונורמלי.**

דוגמה 2.3

עבור כל אחד של הקבוצות ווקטורים הבאות של $\mathbb{R}^3$ עם מ"פ סטנדרטית. בדקו אם הקבוצה היא בסיס אורתוגונלי, ובסיס אורתנורמלי.

א)
$$\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},u_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ב)
$$\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},u_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

פתרון:

א) $\langle u_1,u_2\rangle=1\neq 0$

לכן הקבוצה לא אורתוגונלית.

ב)
$$\begin{aligned}\langle u_1,u_2\rangle &=0\\ \langle u_1,u_3\rangle &=0\\ \langle u_2,u_3\rangle &=0\end{aligned}$$

לכן הקבוצה אורתוגונלית, ולכן הקבוצה בת"ל ולכן הקבוצה בסיס של $\mathbb{R}^3$.

$$\|u_1\|=\sqrt{1+4+4}=3\ ,\quad \|u_2\|=\sqrt{2}\ ,\quad \|u_3\|=\sqrt{18}\ .$$

לכן הקבוצה לא בסיס אורתונורמלי.

נבנה בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{\frac{1}{3}u_1,\frac{1}{\sqrt{2}}u_2,\frac{1}{\sqrt{18}}u_3\right\}$$

דוגמה 2.4

במרחב $\mathbb{C}^4$ עם מ"פ סטנדרטית, נתונה קבוצת ווקטורים הבאה:

$$\left\{u_1=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}i\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}0\\ \frac{i}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix},u_3=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2}i\\ \frac{-1}{2}+\frac{1}{2}i\end{pmatrix},\right\}$$

בדקו אם הקבוצה אורתוגונלית ואורתונורמלית.

פתרון:

$$\langle u_1,u_2\rangle=0+\frac{1}{2}\left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}i\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\cdot 0=\frac{-i}{\sqrt{2}}\neq 0$$

לכן הקבוצה אינה אורתוגונלית.

דוגמה 2.5

קבעו אם הקבוצות הבאות אורתוגונליות ואורתונורמליות במרחב $\mathbb{R}_3[x]$
עם מ"פ האינטגרלית בקטע $[0,1]$:

א) $\{1, x, x^2\}$

ב) $\left\{1, x-\frac{1}{2}, x^2-x+\frac{1}{6}\right\}$

פתרון:

א)

$$u_1 - 1\ , \quad u_2 = x\ , \quad u_3 = x^2\ .$$

$$\langle u_1, u_2\rangle = \int_0^1 1\cdot x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \neq 0$$

לכן B_1 קבוצה לא אורתוגונלית.

ב)

$$u_1 - 1\ , \quad u_2 = x - \frac{1}{2}\ , \quad u_3 = x^2 - x + \frac{1}{6}\ .$$

$$\langle u_1, u_2\rangle = \int_0^1 1\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right]_0^1 = 0$$

$$\langle u_1, u_3\rangle = \int_0^1 1\cdot\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}\right]_0^1 = 0$$

$$\begin{aligned}\langle u_2, u_3\rangle &= \int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\,dx = \int_0^1\left(x^3-x^2+\frac{x}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-\frac{1}{12}\right)dx \\ &= \int_0^1\left(x^3-\frac{3x^2}{2}+\frac{2x}{3}-\frac{1}{12}\right)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12} = 0\end{aligned}$$

לכן הקבוצה אורתוגונלית.

$$\|u_1\|^2 = \langle u_1, u_1\rangle = \int_0^1 1\cdot 1\,dx = [x]_0^1 = 1$$

$$\|u_2\|^2 = \langle u_2, u_2\rangle = \int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\,dx = \int_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{1}{12}\ .$$

$$\begin{aligned}
\|u_3\|^2 &= \langle u_3, u_3\rangle \\
&= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 \, dx \\
&= \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{x^2}{3} + x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{36}\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{4x^2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{1}{36}\right) dx \\
&= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^3}{9} - \frac{x^2}{6} + \frac{x}{36}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} \\
&= \frac{36}{180} - \frac{90}{180} + \frac{80}{180} - \frac{30}{180} + \frac{5}{180} \\
&= \frac{1}{180} \ .
\end{aligned}$$

לסיכום:

$$\|u_1\| = 1, \quad \|u_2\| = \frac{1}{12}, \quad \|u_3\| = \frac{1}{180} \ .$$

לכן הקבוצה אינה אורתונורמלית.

נבנה קבוצה אורתונורמלית:

$$\left\{u_1, \sqrt{12}\cdot u_2, \sqrt{180}\cdot u_3\right\} \ .$$

דוגמה 2.6

נתונה הקבוצה

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

במרחב $\mathbb{R}^{3\times 3}$ עם מ"פ הסטנדרטית. בדקו אם הקבוצה אורתוגונלית ואורתונורמלית.

פתרון:

$$\langle A_1, A_2\rangle = \mathrm{tr}\left(A_2^t \cdot A_1\right) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0 \ .$$

$$\langle A_1, A_3\rangle = \mathrm{tr}\left(A_3^t \cdot A_1\right) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = 1 + 3 - 4 = 0 \ .$$

$$\langle A_2, A_3\rangle = \mathrm{tr}\left(A_3^t \cdot A_2\right) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0 \ .$$

לכן הקבוצה אורתוגונלית.

$$\|A_1\|^2=\langle A_1,A_1\rangle=\operatorname{tr}\left(A_1^t\cdot A_1\right)=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\right)=\operatorname{tr}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&8\\3&8&14\end{pmatrix}=20\ .$$

$$\|A_2\|^2=\langle A_2,A_2\rangle=\operatorname{tr}\left(A_2^t\cdot A_2\right)=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right)=\operatorname{tr}\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&-0&0\end{pmatrix}=4+4=8\ .$$

$$\|A_3\|^2=\langle A_3,A_3\rangle=\operatorname{tr}\left(A_3^t\cdot A_3\right)=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right)=\operatorname{tr}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&-2\\-1&-2&3\end{pmatrix}=6\ .$$

לכן הקבוצה לא אורתונורמלית. אבל הקבוצה הבאה

$$\left\{\frac{1}{\|A_1\|}A_1,\frac{1}{\|A_2\|}A_2,\frac{1}{\|A_3\|}A_3\right\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{20}}A_1,\frac{1}{\sqrt{8}}A_2,\frac{1}{\sqrt{6}}A_3\right\}$$

כן קבוצה אורתונומלית.

קודם הגדרנו מושג של היטל אורתוגונלי של ווקטור על תת מרחב. ניסחנו משפט שטוען את הדבר הבא:

אם V מרחב מכפלה פנימית, $U\subseteq V$ תת מרחב נוצר סופית, אז לכל ווקטור $\mathrm{v}\in V$ קיים ווקטור יחיד $u_0\in V$ כך ש-

$$(\mathrm{v}-u_0)\perp U\ .$$

לווקטור u_0 קוראים ההיטל של v על U, אבל לא הוכחנו את קיומו.

נוכיח בהתחלה את קיומו של היטל בתנאי שלתת מרחב U קיים בסיס אורתונורמלי.

הגדרה 2.4 הגדרת ההיטל האורתוגונלי

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית ונניח ש $U\subseteq V$ תת מרחב נוצר סופית של V. נניח ש

$$\{u_1,\ldots,u_k\}$$

בסיס אורתוגונלי של U. אז לכל ווקטור $\mathrm{v}\in V$, ההיטל האורתוגונלי של v מסומן ב- $P_U(\mathrm{v})$ ומוגדר

$$P_U(\mathrm{v})=\sum_{i=1}^{k}\frac{\langle\mathrm{v},u_i\rangle}{\|u_i\|^2}u_i\ .$$

האופרטור P_U נקרא **אופרטור ההטלה האורתוגונלי על** U .

משפט 2.3 משפט ההיטל האורתוגונלי

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית, ו- $U\subseteq V$ תת מרחב נוצר סופית של V. נסמן את ההיטל האורתוגונלי של כל ווקטור $\mathrm{v}\in V$ על U ב- $P_U(\mathrm{v})$. הווקטור

$$\mathrm{v}-P_U(\mathrm{v})$$

אורתוגונלי לכל ווקטור ב- U.

כלומר

$$\langle \mathrm{v} - P_U(\mathrm{v}), u \rangle = 0$$

לכל $V \in \mathrm{v}$ ולכל $u \in U$.

נסמן את האורתוגונליות של הווקטור $\mathrm{v} - P_U(\mathrm{v})$ ביחס לתת מרחב U כך:

$$(\mathrm{v} - P_U(\mathrm{v})) \perp U \ .$$

הוכחה: לפי הגדרת היטל אורתוגונלי, צריך להוכיח שווקטור

$$(\mathrm{v} - P_U(\mathrm{v})) \perp U \ .$$

נניח ש $\{u_1, \ldots, u_k\}$ בסיס אורתוגונלי של U. לכל $1 \leq j \leq k$,

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{v} - P_U(\mathrm{v}), u_j \rangle &= \left\langle \mathrm{v} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{v}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i, u_j \right\rangle \\
&= \langle \mathrm{v}, u_j \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{v}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i, u_j \right\rangle \\
&= \langle \mathrm{v}, u_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{v}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} \cdot \langle u_i, u_j \rangle \\
&= \langle \mathrm{v}, u_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{v}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} \langle u_i, u_j \rangle \delta_{ij} \\
&= \langle \mathrm{v}, u_j \rangle - \frac{\langle \mathrm{v}, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} \langle u_j, u_j \rangle \\
&= \langle \mathrm{v}, u_j \rangle - \frac{\langle \mathrm{v}, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} \cdot \|u_j\|^2 \\
&= \langle \mathrm{v}, u_j \rangle - \langle \mathrm{v}, u_j \rangle \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

הוכחנו ש $(\mathrm{v} - P_U(\mathrm{v})) \perp U$.

■

2.2 אופרטור הטלה האורתוגונלי

משפט 2.4 תכונות של אופרטור הטלה האורתוגונלי

נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ו- $U \subset V$ תת-מרחב של V.
נסמן את המשלים האורתוגונלי של U ב- $U^{\perp}$.

אופרטור ההטלה האורתוגונלי P_U מקיים את התכונות הבאות:

1) P_U העתקה לינארית.

2) לכל $u \in U$ מתקיים $P_U(u) = u$, ולכל $w \in U^{\perp}$ מתקיים $P_U(w) = 0$.

3) $\mathrm{Im}(P_U) = U$ וגם $\mathrm{Ker}(P_U) = U^{\perp}$.

4) $V = U \oplus U^{\perp}$

5) $P_U \circ P_U = P_U$

6) לכל $\mathrm{v} \in V$ מתקיים כי
$$(\mathrm{v} - P_U(\mathrm{v})) \in U^{\perp}$$

הוכחה:

1) P_U העתקה לינארית.

לכל $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in V$

$$\begin{aligned}
P_U\left(\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2\right) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{(\mathrm{v}_1, u_i) + (\mathrm{v}_2, u_i)}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{v}_1, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i + \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= P_U(\mathrm{v}_1) + P_U(\mathrm{v}_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_U\left(\alpha \mathrm{v}\right) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \alpha \mathrm{v}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha \langle \mathrm{v}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{v}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \alpha P_U(\mathrm{v})
\end{aligned}$$

לכן P_U אופרטור לינארי.

2) נניח ש- $\{u_1, \ldots, u_k\}$ בסיס של U. אז לכל $u \in U$ קיימים סקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ כך ש $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k$. אז

$$P_U(u) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i P_U(u_i)$$

לכל $1 \leq j \leq k$,

$$\begin{aligned}
P_U(u_j) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle u_j, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \frac{\langle u_j, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} u_j \\
&= u_j \ .
\end{aligned}$$

לכן

$$P_U(u)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i u_i=u\ .$$

לכל $w\in U^{\perp}$ מתקיים $\langle w,u_i\rangle=0$ לכל $1\leq i\leq k$. לכן

$$P_U(w)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\langle w,u_i\rangle}{\|u_i\|^2}u_i=0$$

3) לכל $a\in U$, לפי תנאי 2 $a=P_U(a)\in\mathrm{Im}\left(P_U\right)$, לכן $U\subseteq\mathrm{Im}\left(P_U\right)$.

לפי ההגדרה של ההיטל אם $\{u_1,\ldots,u_k\}$ בסיס אורתוגונלי של U, אז לכל ווקטור $a\in V$,

$$P_U(a)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\langle a,u_i\rangle}{\|u_i\|^2}u_i$$

לכן $P_U(a)\in\mathrm{span}\{u_1,\ldots,u_k\}$ לכן $P_U(a)\in U$ לכל $a\in V$. לכן $\mathrm{Im}\left(P_U\right)\subseteq U$.

לכן $\mathrm{Im}(P_U)=U$.

בסעיף 2 הוכחנו כי $U^{\perp}\subseteq\ker(P_U)$.
נוכיח כי $\ker(P_U)\subseteq U^{\perp}$.

נניח ש $\mathrm{v}\in\ker(P_U)$. ז"א

$$P_U(\mathrm{v})=\sum_{i=1}^{k}\frac{\langle \mathrm{v},u_i\rangle}{\|u_i\|^2}u_i=0.$$

מכיוון ש- $\{u_1,\ldots,u_k\}$ בת"ל אז בהכרח $\langle\mathrm{v},u_i\rangle=0$ לכל $1\leq i\leq k$.
לכן $\mathrm{v}\in U^{\perp}$.

4) $\dim(V)=\dim(\ker P_U)+\dim(\mathrm{Im}P_U)$ לכן

$$\dim(V)=\dim\left(U^{\perp}\right)+\dim\left(U\right)$$

מכאן נובע כי

$$U\cap U^{\perp}=\{0\}\ .$$

5) לכל $\mathrm{v}\in V$,

$$P_U(\mathrm{v})=u\in U\ .$$

לכן

$$\left(P_U\circ P_U\right)(\mathrm{v})=P_U\left(P_U(\mathrm{v})\right)=P_U(u)=u\ ,$$

כלומר

$$P_U\circ P_U=P_U\ .$$

6) הוכחנו במשפט 2.3 כי

$$\left(\mathrm{v}-P_U(\mathrm{v})\right)\perp U$$

לכן

$$\mathrm{v}-P_U(\mathrm{v})\in U^{\perp}\ .$$

■

משפט 2.5 משפט הפיכות האורתוגונלי

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית ו- $U\subset V$ תת מרחב של V. אז

א) $V=U\oplus U^{\perp}$

ב) $\left(U^{\perp}\right)^{\perp}=U$

הוכחה:

א) $V=U\oplus U^{\perp}$ הוכחנו במשפט 2.4.

ב)

1) נוכיח כי $U\subseteq\left(U^{\perp}\right)^{\perp}$.

נקח $u\in U$.
צ"ל $u\in\left(U^{\perp}\right)^{\perp}$.

לכל $\mathrm{v}\in U^{\perp}$, $\langle u,\mathrm{v}\rangle=0 \Leftarrow u\in\left(U^{\perp}\right)^{\perp}$.

2) צ"ל $\left(U^{\perp}\right)^{\perp}\subseteq U$.

נקח $\mathrm{v}\in\left(U^{\perp}\right)^{\perp}$. לפי סעיף א' קיימים $u\in U$, $w\in U^{\perp}$ כך ש

$$\mathrm{v}=u+w\ .$$

נשים לב כי $\langle u,w\rangle=0$.

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{v},w\rangle &=\langle u+w,w\rangle\\ &=\langle u,w\rangle+\langle w,w\rangle\\ &=\langle w,w\rangle\end{aligned}$$

מכיוון ש $\mathrm{v}\in\left(U^{\perp}\right)^{\perp}$ ו- $w\in U^{\perp}$, אז נקבל כי $\langle \mathrm{v},w\rangle=0$. לכן $\langle w,w\rangle=0$ ולכן $w=0$.
לכן $\mathrm{v}=u\in U$.
הוכחנו כי $(U^{\perp})^{\perp}=U$.

■

2.3 תהליך גרם שמידט

משפט 2.6 תהליך גרם שמידט

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית ו- $U\subset V$ תת-מרחב של V. נניח שהקבוצה

$$\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_k\ .\}$$

היא בסיס של U. נסמן בסיס אורתוגונלי של U כך:

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \ .$$

ניתן למצוא את כל הווקטורים בבסיס האורתוגונלי, באמצעות התהליך גרם שמידט:

$$\begin{aligned}
u_1 =& \mathrm{v}_1 \\
u_2 =& \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 \\
u_3 =& \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 \ - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} \cdot u_2 \\
&\vdots \\
u_k =& \mathrm{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \mathrm{v}_k, u_i\rangle}{\|u_i\|^2} \cdot u_i \\
&\vdots
\end{aligned}$$

דוגמה 2.7

$V = \mathbb{R}^4$ עם מכפלה פנימית סטנדרטית.

$$U = \text{span}\left\{ \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מצאו בסיס אורתוגונלי ל- U.

פתרון:

נגדיר $u_1 = \mathrm{v}_1$. $V_1 = \text{span}(u_1)$.

$$\mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

אפשר לבחור $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$V_2 = \text{span}\{u_1, u_2\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_3 - P_{V_2}(\mathrm{v}_3) =& \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}\cdot u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}\cdot u_2 \\ =& \begin{pmatrix} 0\\0\\-1\\1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1\\-2\\0\\1 \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1\\1\\-3\\1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

נגדיר $u_3 = \begin{pmatrix} 1\\1\\-3\\1 \end{pmatrix}$. בסיס אורתוגונלי:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\\-2\\0\\1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\\1\\-3\\1 \end{pmatrix} \right\}$$

נבנה בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}}u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{-2}{\sqrt{6}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{12}}u_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}}\\\frac{1}{\sqrt{12}}\\\frac{-3}{\sqrt{12}}\\\frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix} \right\}$$

דוגמה 2.8

במרחב $\mathbb{R}_2[x]$ עם מכפלה פנימית אינטגרלית בקטע $[0,1]$. נתון הבסיס סטנדרטית

$$\left\{ e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 \right\} \ .$$

מצאו בסיס אורתוגונלי.

פתרון:

$V_1 = \mathrm{span}(1)$, $u_1 = e_1 = 1$.

$$u_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 = x - \frac{1}{2}$$

$$\langle e_2, u_1\rangle = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\ , \qquad \|u_1\|^2 = \int_0^1 1^2 dx = 1\ .$$

$$V_2 = \mathrm{span}\left(1, x - \frac{1}{2}\right)\ .$$

$$u_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{\langle e_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2$$

$$\langle e_3,u_1\rangle=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}\ ,\qquad \langle e_3,u_2\rangle=\int_0^1 x^2\left(x-\frac{1}{2}\right)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{6}\right]_0^1=\frac{1}{12}\ .$$

$$\|u_2\|^2=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\,dx=\int_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}\right]_0^1=\frac{1}{12}\ .$$

לכן

$$u_3=x^2-\frac{1}{3}-u_2=x^2-x+\frac{1}{6}\ .$$

בסיס אורתוגונלי:

$$u_1=1\ ,\qquad u_2=x-\frac{1}{2}\ ,\qquad u_3=x^2-x+\frac{1}{6}\ .$$

נמצא בסיס אורתונורמלי:

$$\|u_1\|^2=1\ ,\qquad \|u_2\|^2=\frac{1}{12}\ ,$$

$$\begin{aligned}\|u_3\|^2&=\int_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)^2\,dx\\&=\int_0^1\left(x^4-2x^3+\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}\right)\,dx\\&=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+\frac{4}{9}x^3-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{36}x\right]_0^1\\&=\frac{1}{180}\ .\end{aligned}$$

בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{u_1,\ \sqrt{12}\,u_2,\ \sqrt{180}u_3\right\}\ .$$

דוגמה 2.9

מצאו בסיס אורתונורמלי למרחב $U=\mathrm{span}(1,x,x^2)$ ביחס למכפלה פנימית אינטגרלית בקטע $[-1,1]$.

פתרון:

נסמן $\mathrm{v}_1=1,\mathrm{v}_2=x,\mathrm{v}_3=x^2$.

$$u_1=1\ ,\qquad u_2=\mathrm{v}_2-\frac{\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1$$

$$\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle=\int_{-1}^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1=0\ .$$

לכן

$$u_2=x\ .$$

$$u_3=\mathrm{v}_3-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2\ .$$

$$\|u_1\|^2=\int_{-1}^1 1\,dx=[x]_{-1}^1=2\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_2 \rangle = 0 \ .$$

$$\|u_2\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \ .$$

לכן

$$u_3 = x^2 - \frac{1}{3} \ .$$

בסיס אורתוגונלי:

$$u_1 = 1 \ , \qquad u_2 = x \ , \qquad u_3 = x^2 - \frac{1}{3} \ .$$

נחפש בסיס אורתונורמלי:

$$\|u_1\|^2 = 2 \ , \qquad \|u_2\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \ .$$

$$\begin{aligned} \|u_3\|^2 &= \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right) \, dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{8}{45} \ . \end{aligned}$$

בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \ , \quad \sqrt{\frac{3}{2}}x \ , \quad \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \right\} \ .$$

דוגמה 2.10

מצאו בסיס אורתונורמלי למרחב $U = \mathrm{span}\left\{ \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix}, \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 2+2i \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{C}^3$.

פתרון:

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\langle \mathrm{v}_2, u_1 \rangle = (2+2i) \cdot 2 + 0 + 8 = 12 + 4i$$

$$\|u_1\|^2 = 12 \ .$$

$$\|u_2\|^2 = \frac{16}{9} + \frac{4}{9} + 4 + 4 + \frac{4}{9} = \frac{32}{3} \ .$$

לכן

$$u_2 = \begin{pmatrix} 2+2i \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \left(1 + \frac{1}{3}i\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4i}{3} \\ \frac{2}{3} - 2i \\ 2 - \frac{2}{3}i \end{pmatrix}$$

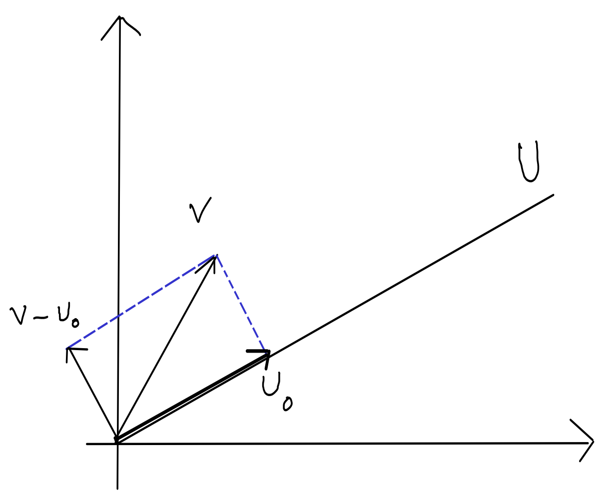
בסיס אורתונורמלי:

$$\frac{1}{\sqrt{12}} u_1 \ , \qquad \sqrt{\frac{3}{32}} u_2 \ .$$

2.4 *הערה: משמעות גיאומטרית של ההיטל

יהי U ישר במישור, ותהי v נקודה כלשהי במישור שאינה על U. בגיאומטריה מוכיחים כי אפשר להוריד אנך מ- v על U, ואורך אנך זה הוא המרחק הקצר ביותר בין הנקודה v לנקודה כלשהי בישר. מרחק זה נקרא גם המרחק בין v ל- U. קיים טענה דומה גם במרחב מכפלה פנימית.

נגדיר כעת אנך מוקטור v לתת-מרחב U. צריך למצוא וקטור $u_0 \in U$ המקיים $(\mathrm{v} - u_0) \perp U$.



יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $U \subset V$ תת-מרחב נוצר סופית של V. יהי $\mathrm{v} \in V$ שאינו שייך ל- U, כלומר $\mathrm{v} \notin U$.

א) נגדיר את ההיטל האורתוגונלי של וקטור v על תת מרחב U ע"י התנאי הבא:

$$(\mathrm{v} - u_0) \perp U \ .$$

ב) המרחק בין v ל U מוגדר להיות $d(\mathrm{v}, u_0)$, כלומר המרחק בין v להיטל של v על U.

2.5 * הערה: משפט קיום בסיס אורתוגונלי

הגדרה 2.5 קיום בסיס אורתוגונלי

לכל מרחב מכפלה פנימית V ממימד סופי קיים בסיס אורתוגונלי.

הוכחה: נניח
$$\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\}$$
בסיס של V. נגדיר סדרת מרחבים ווקטורים
$$V_1=\operatorname{span}(\mathrm{v}_1)\subset V_2=\operatorname{span}(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2)\subset\ldots\subset V_n=\operatorname{span}(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n)=V$$
לכל $1\leq i\leq n$.
נגדיר
$$u_i=\mathrm{v}_i-P_{V_{i-1}}(\mathrm{v}_i)\ .$$
נוכיח באינדוקציה כי $u_1,u_2,\ldots,u_n$ בסיס אורתוגונלי.
עבור $i=1$ הקבוצה $\{u_1\}$ בסיס אורתוגונלי של V_1.
נניח שעבור i, קבוצת הווקטורים $\{u_1,\ldots,u_i\}$ אורתוגונלית.
נוכיח כי $u_j\perp u_{i+1}$ לכל $1\leq j\leq i$, כאשר $u_{i+1}=\mathrm{v}_{i+1}-P_{V_i}(\mathrm{v}_{i+1})$.
הוכחנו במשפט 2.3 כי
$$(\mathrm{v}_{i+1}-P_{V_i}(\mathrm{v}_{i+1}))\perp V_i\ .$$

■

שעור 3
ערכים עצמיים ווקטוירם עצמיים

3.1 ערכיים עצמיים, ווקטורים עצמיים של מטריצות

הגדרה 3.1 ערך עצמי ווקטור עצמי של מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$. וקטור $\mathrm{v} \in F^n$ שלא שווה לוקטור האפס $(\mathrm{v} \neq \bar{0})$ יקרא וקטור עצמי של A אם קיים סקלר $\lambda \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$A \cdot \mathrm{v} = \lambda \mathrm{v} \ .$$

λ נקרא ערך עצמי של A ששייך לוקטור עצמי v. המשוואה הזאת נקראת משוואת ערך עצמי של A.

דוגמה 3.1

נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \ ,$$

קבעו אם כל אחד מהוקטורים הבאים, הוא וקטור עצמי של A ומצאו את הערך עצמי המתאים:

(א) $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(ב) $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ג) $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

פתרון:

(א)

$$A \cdot \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 8u_1 .$$

ולכן u_1 הוא הוקטור עצמי של A השייך לערך עצמי

$$\lambda_1 = 8 \ .$$

(ב)

$$A \cdot \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0u_2 .$$

ולכן u_2 הוא הוקטור עצמי של A השייך לערך עצמי

$$\lambda_2 = 0 \ .$$

(ג)

$$A\cdot u_3=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\neq\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן u_3 אינו וקטור עצמי של A.

דוגמה 3.2

נתונה מטריצה

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\ ,$$

קבעו אם כל אחד מהוקטורים הבאים, הוא וקטור עצמי של A ומצאו את הערך עצמי המתאים:

(א) $u_1=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ב) $u_2=\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ג) $u_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

פתרון:

(א)

$$A\cdot u_1=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 24 \\ 10 \end{pmatrix}\neq\lambda u_1.$$

ולכן u_1 אינו וקטור עצמי של A.

(ב)

$$A\cdot u_2=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}=2u_2.$$

ולכן u_2 הוא הוקטור עצמי של A השייך לערך עצמי

$$\lambda=2\ .$$

(ג)

$$A\cdot u_3=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}=8\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולכן u_3 הוא הוקטור עצמי של A השייך לערך עצמי $\lambda=8$.

דוגמה 3.3

הראו ש $u_1=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ הינם וקטורי עצמיים של המטריצה

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$A\cdot u_1=\begin{pmatrix}5&0\\2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}\quad=2\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$$
$$A\cdot u_2=\begin{pmatrix}5&0\\2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad=0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

לכן u_1 הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda_1=2$ ו u_2 הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda_2=0$.

משפט 3.1

ערך עצמי של מטריצה יכול להיות 0.
וקטור האפס לא יכול להיות וקטור עצמי של מטריצה.

משפט 3.2 המשוואה האופייני של מטריצה

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ויהי v וקטור עצמי של A ששייך לערך עמצי λ. אז לפי הגדרה 3.1,

$$A\cdot\mathrm{v}=\lambda\mathrm{v}\ ,$$

נעביר אגפים:

$$\bar{0}=\lambda\mathrm{v}-A\mathrm{v}\qquad\Rightarrow\qquad\bar{0}=(\lambda I-A)\,\mathrm{v}$$

כאשר I המטריצה היחידה של $\mathbb{F}^{n\times n}$. קיבלנו את המשוואה

$$(\lambda I-A)\,\mathrm{v}=\bar{0}\ .$$

v וקטור עצמי אז הוא לא יכול להיות וקטור האפס. לכן הדטרמיננטה של המטריצה $(\lambda I-A)$ שווה ל- 0. כלומר

$$|\lambda I-A|=0\ .$$

המשוואה הזאת נקראת **משוואת האופייני של A.**

הצד שמאל נקרא **הפולינום האופייני של A** ומסומן $p_A(\lambda)$. כלומר

$$p_A(\lambda)=|\lambda I-A|\ .$$

משפט 3.3 סדר של פולינום האופייני

אם $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, אז הפולינום האופייני $p_A(x)$ של A מסדר n.

משפט 3.4 מרחב עצמי

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ויהי λ ערך עצמי של A. נסמן ב- V_λ הקבוצה של כל הוקטורים עצמיים ששייכים לערך עצמי λ, בתוספת הוקטור האפס.
V_λ תת-מרחב של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 3.5 מרחב עצמי של ערך עצמי λ שווה למרחב האפס של $A-\lambda I$

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, יהי λ ערך עצמי של A ויהי V_λ מרחב העצמי של A. אז

$$V_\lambda=\mathrm{Nul}\,(A-\lambda I)\ .$$

הוכחה: נוכיח כי $V_\lambda \subseteq \text{Nul}\,(A-\lambda I)$.

יהי u וקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי A. ז"א u מקיים את משוואת הערך עצמי:

$$A\cdot u=\lambda u \qquad \Rightarrow \qquad (A-\lambda I)\cdot u=\bar{0}$$

כאשר $\bar{0}\in\mathbb{F}^n$ וקטור האפס. לכן $u\in \text{Nul}(A-\lambda I)$ לכל וקטור $u\in V_\lambda$. לכן

$$V_\lambda \subseteq \text{Nul}\,(A-\lambda I)\ .$$

נוכיח כי $\text{Nul}\,(A-\lambda I)\subseteq V_\lambda$.

יהי $u\in \text{Nul}\,(A-\lambda I)$. ז"א

$$(A-\lambda I)\,u=\bar{0} \qquad \Rightarrow \qquad A\cdot u=\lambda u\ .$$

ז"א u וקטור עצמי של u ששייך לערך עצמי λ. לכן $u\in V_\lambda$ לכל $u\in \text{Nul}\,(A-\lambda I)$. לכן

$$\text{Nul}(A-\lambda I)\subseteq V_\lambda\ .$$

■

הגדרה 3.2 ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי של ערך עצמי של מטריצה

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ויהי u_i ערך עצמי λ_i.

הריבוי אלגברי של λ_i הוא הריבוי של λ_i בפולינום האופייני של A. כלומר אם

$$|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\quad\cdots\quad(\lambda-\lambda_i)^{m_i}\quad\cdots\quad(\lambda-\lambda_l)^{m_l}\ ,$$

אז הריבוי אלגברי של λ_i הוא m_i.

הריבוי גיאומטרי של λ_i הוא המימד של המרחב עצמי שלו. כלומר אם

$$V_{\lambda_i}=\{u_1,\ldots,u_k\}$$

אז ל- λ_i יש k וקטורים עצמיים ואומרים כי הריבוי גיאומטרי של λ_i הוא k.

דוגמה 3.4

מצאו את כל הערכים עצמיים והוקטורים עצמיים של המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\ .$$

פתרון:
נרשום את הפולינום האופייני של המטריצה:

$$|\lambda I-A|=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-3&\lambda-2\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda-1)(\lambda-2)-6=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda^2-3\lambda-4=0$$

או שקול

$$(\lambda-4)(\lambda+1)=0$$

ולכן לפולינום אופייני יש שני פתרונות:

$\lambda = 4$

$\lambda = -1$.

נמצא את הוקטורים עצמיים של כל אחד של הערכים עצמיים ע"י למצוא את $\text{Nul}\,(A - \lambda I)$.

$\underline{\lambda = 4}$

$$(A - \lambda I \mid \bar{0}) \overset{\lambda=4}{=} (A - 4I \mid \bar{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. נסמן

$$V_4 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} .$$

V_4 הוא ה **מרחב עצמי** השייך לערך עצמי $\lambda = 4$. נסמן

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

u_1 הוא הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 4$.

$\dim(V_4) = 1$ לכן הריכוי גיאומטרי של $\lambda = 4$, הוא 1.

$\underline{\lambda = -1}$

$$(A - \lambda I \mid \bar{0}) \overset{\lambda=-1}{=} (A + I \mid \bar{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

הפתרון הוא: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ נסמן

$$V_{-1} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

V_{-1} הוא המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda = -1$. נסמן

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

u_2 הוא הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = -1$.

$\dim(V_{-1}) = 1$ לכן הריכוי גיאומטרי של $\lambda = -1$, הוא 1.

דוגמה 3.5

מצאו את כל הערכים עצמיים והוקטורים עצמיים של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

פתרון:
נרשום את הפולינום האופייני של המטריצה:

$$|\lambda I - A| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-1)(\lambda-2)\left((\lambda-2)^2-1\right) = 0 \ .$$

$$\begin{aligned} (\lambda-1)(\lambda-2)\left(\lambda^2-4\lambda+4-1\right) &= 0 \\ (\lambda-1)(\lambda-2)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right) &= 0 \\ (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-1) &= 0 \\ (\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-3) &= 0 \end{aligned}$$

קיימים 3 ערכים עצמיים:
$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 2.
$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 1.

<u>$\lambda = 1$</u>

$$(A-\lambda I \mid \bar{0}) \overset{\lambda=1}{=} (A - I \mid \bar{0}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

הפתרון הוא $z, w \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1$ הוא

$$V_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בבסיס של V_1 ישנם שני וקטורים. נסמן

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

u_1 ו- u_2 הם הוקטורים עצמיים ששייכים לערך עצמי $\lambda = 1$.
כיוון ש $\dim(V_1) = 2$, אומרים כי **הריבוי גאומטרי** של הערך עצמי $\lambda = 1$, הוא 2.

<u>$\lambda = 2$</u>

$$(A-2I \mid \bar{0}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ y \in \mathbb{R}.$ המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 2$ הוא

$$V_2 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

בביס של V_2 יש וקטור אחד. נסמן

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

u_3 הוא הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 2$. כיוון ש $\dim(V_2) = 1$, אז אומרים כי הריבוי גאומטרי של הערך עצמי $\lambda = 2$, הוא 1.

$\underline{\lambda = 3}$

$$(A-3I\mid \bar{0})=\left(\begin{array}{cccc|c}-1&0&0&1&0\\0&-1&-1&-1&0\\-1&-1&-1&0&0\\0&0&0&-2&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_2\to -R_2]{R_1\to -R_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\0&1&1&1&0\\-1&-1&-1&0&0\\0&0&0&-2&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4\to -\frac{1}{2}R_4]{R_3\to R_3+R_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\0&1&1&1&0\\0&-1&-1&1&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\0&1&1&1&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_4-2R_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\0&1&1&1&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

פתרון: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\quad z\in\mathbb{R}.$ המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=3$ הוא

$$V_3=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

בבסיס של V_3 יש וקטור אחד:

$$u_4=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\ .$$

u_4 הוא הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=3$. כיוון ש- $\dim(V_3)=1$ אז אומרים כי הריבוי גאומטרי של הערך עצמי $\lambda=3$, הוא 1.

3.2 לכסון של מטריצה

הגדרה 3.3 לכסינות של מרטיצות

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. A תקרא לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית. כלומר אם קיימת מטריצה הפיכה $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ומטריצה אלכסונית $D \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש-

$$D = P^{-1}AP \ .$$

משפט 3.6 לכסינות של מרטיצות

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם הוקטורים עצמיים של A מהווה בסיס של $\mathbb{F}^n$ אז A לכסינה.

נסמן הוקטורים עצמיים ב- $\{u_1,\ldots,u_n\}$ ששייכים לערכים עצמיים $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ בהתאמה (הערכים עצמיים לא בהכרח שונים זה מזה). מכאן נובע ש-

$$D = P^{-1}AP \qquad \Leftrightarrow \qquad A = PDP^{-1}$$

כאשר $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית ו $P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ מטריצה הפיכה.

הוכחה: $A\cdot u_i = \lambda_i u_i$ לכל $1 \leq i \leq n$. לכן

$$\begin{aligned} A\cdot P =& \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A\cdot u_1 & A\cdot u_2 & \ldots & A\cdot u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \ldots & \lambda_n u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ =& PD \ . \end{aligned}$$

כלומר $AP = PD$. נתון כי הוקטורים עצמיים מהווים בסיס, אז $\{u_1,\ldots,u_n\}$ ולכן P הפיכה. לכן P^{-1} קיימת ומותר להכפיל מצד שמאל ב- P^{-1}. נקבל

$$A = P^{-1}PD \ .$$

■

משפט 3.7 קריטירון 1 ללכסינות של מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם ל- A יש n ערכים עצמיים **שונים** ב- $\mathbb{F}$, אז A לכסינה.

הוכחה: תרגיל בית.

■

משפט 3.8 קריטירון 2 ללכסינות של מטריצה: סכום המימדים של מרחבים העצמיים

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. A לכסינה אם"ם סכום המימדים של המרחבים העצמיים השונים שווה ל- n.

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 3.9 קריטירון 3 ללכסינות של מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם

1. הפולינום האופייני שלה מתפרק למכפלה של גורמים ליניאריים מעל $\mathbb{F}$, לא בהכרח שונים, ו-
2. הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי שווה לריבוי הגיאומטרי שלו,

אז A לכסינה מעל $\mathbb{F}$.

הוכחה: תרגיל בית. ■

3.3 ערכים עצמיים של טרנספורמציות ליניאריות

הגדרה 3.4 אופרטור ליניארי

יהי V מרחב וקטורי. טרנספורציה ליניארי $T : V \to V$ נקראת אופרטור ליניארי.

הגדרה 3.5 אופרטור לכסין

אופרטור ליניארי $T : V \to V$ נקראת לכסין אם קיים בסיס של V כך ש- $[T]_B$ אלכסונית.

ז"א קיים בסיס $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ של V כך ש-

$$T(b_1) = \lambda_1 b_1 \ , \qquad T(b_2) = \lambda_2 b_2, \quad \ldots \quad , T(b_n) = \lambda_n b_n \ .$$

אז

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(לא כל ה- λ בהכרח שונים זה מזה)

הגדרה 3.6 ערך עצמי ווקטור עצמי של אופרטור ליניארי

תהי $T : V \to V$ אופרטור ליניארי ו- λ סקלר. λ נקרא **ערך עצמי** של T אם קיים וקטור $u \neq 0$ כך ש-

$$T(u) = \lambda u \ .$$

u נקרא
וקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ.

משפט 3.10

אופרטור ליניארי $T:V\to V$ לכסינה אם"ם קיים בסיס של V המורכב מוקטורים עצמיים.

הוכחה: $\Rightarrow$

נניח ש T לכסינה. ז"א קיים בסיס $U=\{u_1,\ldots,u_n\}$ כך ש-

$$T(u_1)=\lambda_1 u_1\ ,\qquad T(u_2)=\lambda_2 u_2,\quad \ldots\quad ,T(u_n)=\lambda_n u_n\ .$$

אז

$$[T]_U=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

(לא כל ה- λ בהכרח שונים זה מזה).

$\Leftarrow$

נניח שקיים בסיס $U=\{u_1,\ldots,u_n\}$ שמורכב מוקטורים עצמיים. ז"א קיימים סקלרים $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ כך ש-

$$T(u_1)=\lambda_1 u_1\ ,\quad \ldots\quad ,T(u_n)=\lambda_n u_n\ .$$

לכן

$$[T]_U=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

אלכסונית. ■

הגדרה 3.7 פולינום האופייני של אופרטור ליניארי

תהי $T:V\to V$ אופרטור ליניארי. נניח ש A המטריצה המייצגת של T לפי בסיס B. אז הפולינום

$$p_T(\lambda)=|\lambda I-A|$$

נקרא הפולינום האופייני של T.

הגדרה 3.8 ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי של ערך עצמי של אופרטור ליניארי

נניח $T:V\to V$ אופרטור ליניארית ו- λ ערך עצמי.

1) הריבוי האלגברי של λ הוא הריבוי של λ בפולינום האופייני.

2) הריבוי הגאומטרי של λ הוא $\dim(V_\lambda)$, כלומר, מספר הוקטורים העצמיים הבת"ל השייכים ל- λ.

דוגמה 3.6

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\3x+2y\end{pmatrix}$$

חפשו את הוקטורים עצמיים של T כך ש- $T(u)=\lambda u$.
האם T לכסינה?

פתרון:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\3x+2y\end{pmatrix}$$

כאשר $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$ המטריצה המייצגת של האופרטור.

פולינום האופייני:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-3&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)-6=\lambda^2-3\lambda-4=(\lambda-4)(\lambda+1)=0\ .$$

ערכים עצמיים:
$\lambda=-1$
$\lambda=4$.

$\underline{\lambda=4}$

$$(A-4I)=\begin{pmatrix}-3&2\\3&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-3&2\\0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}y, y\in\mathbb{R}$ $=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. לכן המרחב עצמי של $\lambda=4$ הוא $V_4=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$. נסמן הוקטור עצמי שלו ב- $u_1=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

$\underline{\lambda=-1}$

$$(A+I)=\begin{pmatrix}2&2\\3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}y, y\in\mathbb{R}$ $=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. לכן המרחב עצמי של $\lambda=-1$ הוא $V_{-1}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$. נסמן הוקטור עצמי שלו ב- $u_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

u_1,u_2 בת"ל:

$$\begin{pmatrix}u_1&u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1\\0&-5\end{pmatrix}$$

לכן הם מהווים בסיס של $\mathbb{R}^2$. לכן T לכסינה.

$$T(u_1)=4\cdot u_1\ ,\qquad T(u_2)=-1\cdot u_2\ .$$

משפט 3.11

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי לכסיו.
נניח ש- $[T]_B$ המטריצה המייצגת של T לפי בסיס B.
יהיו $u_1,\ldots,u_n$ הוקטורים עצמיים של T לפי בסיס B, ששייכים לערכים עצמיים $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ (הם לא בהכרח שונים זה מזה).
אז

$$[T]_B = PDP^{-1}$$

או באופן שקול

$$P^{-1}[T]_B P = D$$

כאשר $P=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ ו- $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}
[T]_B P =& [T]_B \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T]_B u_1 & [T]_B u_2 & \ldots & [T]_B u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \ldots & \lambda_n u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \\
=& PD \ ,
\end{aligned}$$

כלומר, $[T]_B P = PD$. הוקטורים עצמיים $u_1,\ldots,u_n$ בת"ל, אז P הפיכה לכן P^{-1} קיימת. לכן מותר להכפיל מצד ימין ב- P^{-1}. נקבל: ולכן

$$[T]_B = PDP^{-1}$$

ומכאן נובע כי

$$P^{-1}[T]_B P = D$$

■

משפט 3.12

תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית ו λ_0 ערך עצמי. אם m הריבוי האלגברי ו- k הריבוי הגיאומטרי של λ_0, אז

$$k \leq m \ .$$

במילים: הריבוי הגיאומטרי קטן או שווה לריבוי האלגברי.

הוכחה: נניח ש- λ_0 ערך עצמי מריבוי אלגברי m וריבוי גיאומטרי k.
ז"א קיימים k וקטורים בת"ל $u_1,\ldots,u_k$ ששייכים לערך עצמי λ_0.
נשלים אותו לבסיס של V:

$$B=\{u_1,\ldots,u_k,u_{k+1},\ldots,u_n\}\ .$$

נחשב את המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס B:

$$T(u_1)=\lambda_0 u_1\ ,\quad \ldots\quad ,T(u_k)=\lambda_0 u_k$$

לכן

$$[T]_B=\left(\begin{array}{cccc|c} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & A' \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right)$$

הפולינום הופייני של A הוא

$$p_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\left|\left(\begin{array}{cccc|c} \lambda-\lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda-\lambda_0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-\lambda_0 & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \lambda I-A' \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right)\right|$$

נחשב את הדטרמיננטה דרך העמודה הראשונה:

$$p_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)\cdot\left|\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-\lambda_0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & * \\ 0 & \cdots & \lambda-\lambda_0 & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \lambda I-A' \\ 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right)\right|$$

עד שנקבל

$$p_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k\,|\lambda I-A'|=(\lambda-\lambda_0)^k p_{A'}(\lambda)$$

לכן הריבוי האלגברי גדול או שווה ל- k. ■

דוגמה 3.7

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 3\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

א מצאו את הערכים העצמיים ומרחבים עצמיים של A.

ב האם A לכסינה? אם כן, רשמו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש

$$D=P^{-1}AP\ .$$

פתרון:

א

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & -3 \\ 1 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} &= (\lambda+1) \begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 \\ -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1+\lambda \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1)\left((\lambda+1)(\lambda-1)-9\right) - (0-(1+\lambda)) \\ &= (\lambda+1)(\lambda^2-1-9+1) \\ &= (\lambda+1)(\lambda^2-9) \\ &= (\lambda+1)(\lambda+3)(\lambda-3)\end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=-1$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=3$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=-3$ מריבוי אלגברי 1.

<u>$\lambda=-1$</u>

$$(A+I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $y\in\mathbb{R} \quad y, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda=-1$ הוא

$$V_{-1} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

הווקטור עצמי של $\lambda=-1$ הוא $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\dim(V_{-1})=1$ לכן הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי $\lambda=-1$, הוא 1.

<u>$\lambda=3$</u>

$$(A-3I) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & -12 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $z\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{z}{4}\\ \frac{3}{4}z\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda=3$ הוא

$$V_3 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$$

הוקטור עצמי של הערך עצמי $\lambda=3$ הוא

$$u_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} \ .$$

$\dim(V_3)=1$ לכן הריבוי גיאומטרי של הערך עצמי $\lambda=3$, הוא 1.

$\underline{\lambda=-3}$

$$(A+3I) = \begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&3\\-1&3&4\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&3\\0&6&9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $z\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}z\\-\frac{3}{2}z\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda=-3$ הוא

$$V_{-3} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}\right\}$$

הוקטור עצמי של הערך עצמי $\lambda=-3$ הוא

$$u_3 = \begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix} \ .$$

$\dim V_{-3}=1$ לכן הריבוי גיאומטרי של הערך עצמי $\lambda=-3$, הוא 1.

ב $\dim V_1 + \dim V_3 + \dim V_{-3} = 3$ לכן קיים בסיס של $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} \ , \quad u_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} \ , \quad u_3 = \begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix} \ .$$

ומטריצה A לכסינה:

$$D = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix} \ , \qquad P = \begin{pmatrix}3&1&-1\\1&3&-3\\0&4&2\end{pmatrix} \ .$$

דוגמה 3.8

$$A=\begin{pmatrix}5&2&-2\\2&5&-2\\-2&-2&5\end{pmatrix}$$

א מצאו את הערכים העצמיים ומרחבים עצמיים של A.

ב האם A לכסינה? אם כן, רשמו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש

$$D=P^{-1}AP\ .$$

פתרון:

א

$$\begin{aligned}|\lambda I-A|=&\begin{vmatrix}\lambda-5&-2&2\\-2&\lambda-5&2\\2&2&\lambda-5\end{vmatrix}\\
=&(\lambda-5)\begin{vmatrix}\lambda-5&2\\2&\lambda-5\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2&2\\2&\lambda-5\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2&\lambda-5\\2&2\end{vmatrix}\\
=&(\lambda-5)\left((\lambda-5)^2-4\right)+2\left(-2(\lambda-5)-4\right)+2\left(-4-2(\lambda-5)\right)\\
=&(\lambda-5)\left(\lambda^2-10\lambda+21\right)+2\left(-2\lambda+6\right)+2\left(-2\lambda+6\right)\\
=&(\lambda-5)(\lambda-7)(\lambda-3)-4(\lambda-3)-4(\lambda-3)\\
=&(\lambda-3)\left((\lambda-5)(\lambda-7)-8\right)\\
=&(\lambda-3)\left(\lambda^2-12\lambda+35-8\right)\\
=&(\lambda-3)\left(\lambda^2-12\lambda+27\right)\\
=&(\lambda-3)(\lambda-9)(\lambda-3)\end{aligned}$$

$\lambda=3$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 2.

$\lambda=9$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 1.

<u>$\lambda=3$</u>

$$(A-3I)=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&2&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y+z\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda=3$ הוא

$$V_3=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(V_3)=2$ אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי $\lambda=3$, הוא 2.

$\underline{\lambda = 9}$

$$(A-9I) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda = 9$ הוא

$$V_9 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(V_9) = 1$, אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי הוא 1.

ב $\dim\ V_3 = 2$, $\dim\ V_9 = 1$.

$$\dim V_3 + \dim V_9 = 3\ .$$

לכן קיים בסיס של $\mathbb{R}^3$ המורכב מוקטורים עצמיים:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\ .$$

ומטריצה A לכסינה:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\ ,\qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

$$D = P^{-1}AP$$

דוגמה 3.9

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

האם A לכסינה?

פתרון:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -12\\ -1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-1)\lambda(\lambda-1)=0$$

$\lambda=0$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 1.
$\lambda=1$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 2.

<u>$\lambda=1$</u>

$$(A-I)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 12\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\y\\0\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda=1$ הוא

$$V_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(V_1)=1$ אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי $\lambda=1$ הוא 1.

<u>$\lambda=0$</u>

$$(A-0\cdot I)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 12\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda=0$ הוא

$$V_0=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(V_0)=1$ אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי $\lambda=0$ הוא 1.
$\dim\,V_1=1$,$\dim\,V_0=1$.

$$\dim V_1+\dim V_0=2<\dim(\mathbb{R}^3)\ .$$

לכן לא קיים בסיס של $\mathbb{R}^3$ המורכב מוקטורים עצמיים. לכן A לא לכסינה.

משפט 3.13 קריטירון 1 ללכסינות של אופרטור

יהי V מרחב עצמי מעל $\mathbb{F}$, ויהי $T:V\to V$ אופרטור ליניארי. נניח ש- $\dim(V)=n$. אם ל- T יש n ערכים עצמיים **שונים** ב- $\mathbb{F}$, אז T לכסינה.

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 3.14 קריטירון 2 ללכסינות של אופרטור: סכום המימדים של מרחבים העצמיים

יהי V מרחב עצמי מעל $\mathbb{F}$, ויהי $T:V\to V$ אופרטור ליניארי. נניח ש- $\dim(V)=n$. T לכסין אם"ם סכום המימדים של המרחבים העצמיים השונים שווה ל- n.

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 3.15 קריטירון 3 ללכסינות של אופרטור

יהי V מרחב עצמי מעל $\mathbb{F}$, ויהי $T:V\to V$ אופרטור ליניארי. אם

1. הפולינום האופייני של T מתפרק למכפלה של גורמים ליניאריים מעל $\mathbb{F}$, לא בהכרח שונים, ו-
2. הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי שווה לריבוי הגיאומטרי שלו,

אז T לכסין מעל $\mathbb{F}$.

הוכחה: תרגיל בית. ■

דוגמה 3.10

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

1. האם A לכסינה מעל $\mathbb{R}$?
2. האם A לכסינה מעל $\mathbb{C}$?

פתרון:

$$p_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda&-1\\1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1$$

1. $p_A(\lambda)$ לא מתפרק לגורמים ליניאריים מעל $\mathbb{R}$, לכן A לא לכסינה מעל $\mathbb{R}$.
2.
$$\lambda^2+1=(\lambda-i)(\lambda+i)=0$$
$\lambda=i$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 1.
$\lambda=-i$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 1.

$\underline{\lambda=i}$

$$(A - iI) = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $y\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iy \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda = i$ הוא

$$V_i = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(V_i) = 1$ אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי הוא 1.

<u>$\lambda = -i$</u>

$$(A + iI) = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $y\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iy \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda = -i$ הוא

$$V_{-i} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(V_{-i}) = 1$ אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי הוא 1.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} , \qquad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} , \qquad D = P^{-1}AP .$$

משפט 3.16 וקטורים עצמיים ששייכים לערכים עצמיים שונים בת"ל

נתון $T : V \to V$ אופרטור ליניארי. וקטורים עצמיים של T ששייכים לערכים עצמיים שונים הם בת"ל.

הוכחה: <u>נתון:</u>

$T : V \to V$ אופרטוא ליניארי,
$\lambda_1, \ \ldots \ ,\lambda_n$ ערכים עצמיים שונים ששייכים לוקטורים עצמיים $u_1, \ \ldots \ ,u_n$ של T.

<u>צריך להוכיח:</u>

$u_1, \ \ldots \ ,u_n$ בת"ל.

<u>הוכחה:</u>

נוכיח את הטענה ע"י אינדוקציה על n.

<u>שלב הבסיס:</u>

עבור $n=1$: $u_1 \neq \bar{0}$, לכן הוא בת"ל.

<u>שלב האינדוקציה:</u>

נניח שעבור $n>1$, n וקטורים עצמיים ששייכים ל n ערכים עצמיים שונים בת"ל. נניח $u_1,\ldots,u_{n+1}$ וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}$. נרשום

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1} u_{n+1} = \bar{0} \tag{*}$$

אז

$$\alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \ldots + \alpha_n T(u_n) + \alpha_{n+1} T(u_{n+1}) = \bar{0}$$

$$\alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n u_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} u_{n+1} = \bar{0} \tag{*1}$$

נכפיל (*) ב λ_{n+1}:

$$\alpha_1 \lambda_{n+1} u_1 + \alpha_2 \lambda_{n+1} u_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_{n+1} u_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} u_{n+1} = \bar{0} \tag{*2}$$

נחסיר (*2) מ (*1):

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_{n+1})u_1 + \alpha_2(\lambda_2-\lambda_{n+1})u_2 + \ldots + \alpha_n(\lambda_n-\lambda_{n+1})u_n + \alpha_{n+1}\cancelto{0}{(\lambda_{n+1}-\lambda_{n+1})}u_n = \bar{0}$$

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_{n+1})u_1 + \alpha_2(\lambda_2-\lambda_{n+1})u_2 + \ldots + \alpha_n(\lambda_n-\lambda_{n+1})u_n = \bar{0} \tag{*3}$$

לפי ההנחת האינדוקציה הוקטורים $u_1,\ldots,u_n$ בת"ל. לכן

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_{n+1}) = 0 \ , \quad \ldots \quad , \alpha_n(\lambda_n-\lambda_{n+1}) = 0 \ . \tag{*4}$$

כל הערכים העצמיים שונים זה מזה, כלומר $\lambda_i - \lambda_{n+1} \neq 0$ לכל $i=1,\ldots,n$. לכן

$$\alpha_1 = 0 \ , \quad \ldots \quad , \alpha_n = 0 \ . \tag{*5}$$

נציב (*5) ב- (*) ונקבל

$$\alpha_1 u_1 = \bar{0}$$

$u_1 \neq 0$ כי הוא וקטור עצמי לכן $\alpha_1 = 0$. לכן (*) מצקיים רק אם כל המקודמים $\alpha_1, \quad \ldots \quad , \alpha_{n+1} = 0$ לכן הוקטורים עצמיים $u_1, \quad \ldots \quad , u_{n+1}$ בת"ל.

■

3.4 שימושים של לכסון מטריצה

משפט 3.17 חזקה של מטריצה הדומה למטריצה אלכסונית

אם A לכסינה, אז קיימת מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D=P^{-1}AP$. לכן

$$A^n=PD^nP^{-1}\ .$$

הוכחה:

נוכיח את הטענה ע"י אינדוקציה.

שלב הבסיס:

עבור $n=1$, $D=P^{-1}AP \Leftarrow A=PDP^{-1}$.

שלב האינדוקציה:

נניש שעבור n מתקיים $A^n=PD^nP^{-1}$. אז

$$A^{n+1}=(PD^nP^{-1})\cdot PDP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$$

■

דוגמה 3.11

נתונה המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

1 מצאו את הערכים עצמיים והמרחבים עצמיים של A.

2 האם A לכסינה? אם כן רשמו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D=P^{-1}AP$.

3 חשבו את A^{1001}.

פתרון:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda&-1\\-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-1)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$$

$\lambda=1$ מריבוי אלגברי 2.
$\lambda=-1$ מריבוי אלגברי 1.
$\underline{\lambda=1}$

$$(A-I)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+z\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

מרחב עצמי:

$$V_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

<u>$\lambda=-1$</u>

$$(A+I)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-2\\0&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\y\\0\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

מרחב עצמי:

$$V_{-1}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\dim V_1+\dim V_{-1}=2+1=3=\dim\ \mathbb{R}^3$$

לכן A לכסינה.

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\ ,\qquad P=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$A^{1001}=PD^{1001}P^{-1}$$

נמצא את P^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\1&0&1&0&0&1\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

לכן $D^{1001}=\begin{pmatrix}1^{1001}&0&0\\0&1^{1001}&0\\0&0&(-1)^{1001}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

$$A^{1001}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

משפט 3.18

אם u וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי λ, כלומר $A\cdot u=\lambda u$ אז

$$A^nu=\lambda^nu\ .$$

הוכחה: נוכיח את הטענה ע"י אינדוקציה.

שלב הבסיס:

עבור $n=1$, $A\cdot u=\lambda u$ מתקיים כי נתון ש- u וקטור עצמי של A.

שלב האינדוקציה:

נניח שעבור $n>1$, $A^n u=\lambda^n u$. אז

$$A^{n+1}u=A\left(A^n u\right)=A\lambda^n u=\lambda^n Au=\lambda^n\cdot\lambda u=\lambda^{n+1}u \ .$$

■

דוגמה 3.12

$$A=\begin{pmatrix}0&-4&0\\1&-4&0\\1&-2&1\end{pmatrix} .$$

א מצאו את הערך עצמי ווקטור עצמי של A.

ב האם A לכסינה? אם כן רשמו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D=P^{-1}AP$.

ג חשבו את $A^{2023}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

פתרון:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&4&0\\-1&\lambda+4&0\\-1&2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda&4\\-1&\lambda+4\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+4)=(\lambda-1)(\lambda+2)^2=0$$

$\lambda=1$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda=-2$ מריבוי אלגברי 2.
<u>$\lambda=-2$</u>

$$(A+2I)=\begin{pmatrix}2&-4&0\\1&-2&0\\1&-2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&-2&3\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y\\y\\0\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

מרחב עצמי:

$$V_{-2}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

<u>$\lambda=1$</u>

$$(A-I)=\begin{pmatrix}-1&-4&0\\1&-5&0\\1&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&-4&0\\0&-9&0\\0&-6&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מרחב עצמי:

$$V_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim V_1 + \dim V_{-2} = 1 + 1 = 2 < \dim\ \mathbb{R}^3$$

לכן A לא לכסינה.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ וקטור עצמי השייך ל $\lambda = -2$, לכן

$$A^{2023} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2)^{2023} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^{2024} \\ -2^{2023} \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.5 משפטים נוספים הקשורים ללכסון של מטריצה

משפט 3.19 דטרמיננטה של מטריצה משולשית שווה למכפלה של איברי האלכסון הראשי

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה משולשית עליונה או משולשית תחתונה. הדטרמיננטה של A שווה למכפלה של האיברים על האלכסון הראשי. כלומר

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} , \qquad |A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \ldots a_{nn} \ .$$

הוכחה: אידוקציה על n.

שלב הבסיס:

עבור $n = 1$ הטענה נכונה באופן טריוויאלי.
כלומר נתון $A \in \mathbb{F}^{1 \times 1}$. נסמן $A = (a)$ כאשר a האיבר היחיד במטריצה A.

$$|A| = a \ .$$

A מטריצה משולשית, והאיבר היחיד על האלכסון הראשי הוא a. לכן המכפלה של האיברים על האלכסון ראשי פשוט שווה ל- a. לכן $|A|$ שווה למכפלה של האיברים על האלכסון הראשי של A.

שלב האינקודציה:

נניח שהטענה נכונה עבור $n = N$ (הנחת האינדוקציה). נוכיח אותה עבור $n = N + 1$.

תהי $A\in\mathbb{F}^{N\times N}$ מטריצה משולשית עליונה:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,N} & a_{1,N+1}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,N} & a_{2,N+1}\\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,N} & a_{3,N+1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N,N} & a_{N,N+1}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{N+1,N+1}\end{pmatrix}$$

נחשב הדטרמיננטה על השורה האחרונה:

$$|A|=a_{N+1,N+1}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,N}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,N}\\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,N}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N,N}\end{vmatrix}$$

לפי ההנחת האינדוקציה הדטרמיננטה של מטריצה $N\times N$ משולשית עליחונה שווה למכפלה של האיברים על האלכסון הראשי, לכן

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,N}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,N}\\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,N}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N,N}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\dots a_{N,N}\ .$$

לכן

$$|A|=a_{11}\cdot a_{22}\dots a_{N,N}\cdot a_{N+1,N+1}$$

■

משפט 3.20 ערכים העצמיים של מטריצה משולשית

הערכים העצמיים של מטריצה משולשית עליונה (או משולשית תחתונה) הם האיברים הנמצאים על האלכסון הראשי.

הוכחה: תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ משולשית, ויהיו $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ האיברים על האלכסון הראשי. אז

$$\lambda I-A$$

גם מטריצה משולשית והאיברים על האלכסון הראשי הם $\{\lambda-\alpha_1,\lambda-\alpha_2,\dots,\lambda-\alpha_n\}$. הדטרמיננטה של מטריצה משולשית היא המכפלה של האיברים על האלכסון הראשי, לכן לכן

$$|\lambda I-A|=(\lambda-\alpha_1)\cdot(\lambda-\alpha_2)\dots(\lambda-\alpha_n)$$

לכן הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda)=(\lambda-\alpha_1)\cdot(\lambda-\alpha_2)\dots(\lambda-\alpha_n)=0\ .$$

השורשים הם

$$\lambda=\alpha_1,\quad \lambda=\alpha_2,\quad \dots\quad \lambda=\alpha_n\ .$$

ז"א הערכים עצמיים שווים לאיברים על האלכסון הראשי. ■

הגדרה 3.9 הגדרת דמיון בין מטריצות

תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נאמר ש- A ו- B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה $P\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש-

$$B=P^{-1}AP\ .$$

משפט 3.21 פולינום האופייני של מטריצות דומות

אם A ו- B דומות אז יש להן אותו פולינום אופייני, ולכן אותם ערכים עצמיים.

הוכחה:

$$\begin{aligned}
f_B(x)&=|xI-B|\\
&=\left|xI-P^{-1}AP\right|\\
&=\left|P^{-1}xIP-P^{-1}AP\right|\\
&=\left|P^{-1}\left(xI-A\right)P\right|\\
&=\left|P^{-1}\right|\left|xI-A\right|\left|P\right|\\
&=\left|P\right|^{-1}\left|xI-A\right|\left|P\right|\\
&=\left|xI-A\right|\left|P\right|^{-1}\left|P\right|\\
&=\left|xI-A\right|\\
&=f_A(x)
\end{aligned}$$

■

משפט 3.22 קיום ווקטור עצמי של אופרטור ליניארית

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית.
קיים לפחות וקטור עצמי אחד של T.

הוכחה: נניח ש- $\dim(V)=n$. יהי $u_1\neq\bar{0}\in V$. הקבוצה

$$\left\{u_1,T\left(u_1\right),T^2\left(u_1\right),\ldots,T^n\left(u_1\right)\right\}$$

תלויה לינארית כי יש בה $n+1$ וקטורים. לכן הצירוף ליניארי הבא מתקיים רק אם אחד המקדמים $a_0,\ldots,a_n$ שונה מאפס:

$$a_0u_1+a_1T\left(u_1\right)+a_2T^2\left(u_1\right)+\ldots+a_nT^n\left(u_1\right)=\bar{0}\ . \qquad (*1)$$

נרשום את זה בצורה

$$\left(a_0+a_1T+a_2T^2+\ldots+a_nT^n\right)u_1=\bar{0}\ .$$

בצד שמאל יש הצבת העתקה בפולינום מסדר n. לפי המשפט היסודי של האלגברה יש לפולינום הזה פירוק לגורמים לינאריים:

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n=c(z-\lambda_1)\ldots(z-\lambda_n)$$

$c\neq0\in\mathbb{C}$, $\lambda_i\in\mathbb{C}$, $1\leq i\leq n$. לכן ניתן לפרק את (*1) כ:

$$a_0u_1+a_1T\left(u_1\right)+a_2T^2\left(u_1\right)+\ldots+a_nT^n\left(u_1\right)=c\left(T-\lambda_1I\right)\ldots\left(T-\lambda_nI\right)u_1=\bar{0}\ . \qquad (*2)$$

$c\neq0\in\mathbb{C}$. אם קיים פתרון $u_1\neq0$ למשוואה הומוגונית ב- (*2) אז בהכרח הדטרמיננטה של המטריצה שמכפילה u_1 שווה לאפס. לפיכך

$$\left|c\left(T-\lambda_1I\right)\ldots\left(T-\lambda_nI\right)\right|=c\left|T-\lambda_1I\right|\ldots\left|T-\lambda_nI\right|=0\ . \qquad (*3)$$

לכן קיים i ($1\leq i\leq n$) עבורו $|T-\lambda_iI|=0$ לכן ל- T יש לפחות ערך עצמי אחד.

■

שעור 4
משפט קיילי-המילטון ופולינום מינימלי

4.1 הצבה של מטריצה ריבועית בפולינם

הגדרה 4.1 הצבה של מטריצה ריבועית בפולינם

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$. יהי

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_k x^k$$

פוליניום כאשר $\alpha_i \in \mathbb{F}$ סקלרים. הצבה של A בפולינים p מוגדרת להיות

$$p(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_k A^k$$

כאשר I_n המטריצה היחידה של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

דוגמה 4.1

יהיו $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $p(x) = 2x^2 - 2x - 4$. חשבו את $p(A)$.

פתרון:

$$p(x) = 2x^2 - 2x - 4 = 2(x-2)(x+1) \ .$$

$$p(A) = 2(A - I_2)(A + I_2) = 2\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 24 & 32 \end{pmatrix} \ .$$

דוגמה 4.2

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ו $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \in \mathbb{R}_3[x]$. פרקו $p(x)$ לגורמים ליניאריים והשתמשו בפירוק זה כדי לחשב שוב את ההצבה של A ב- $p(x)$.

פתרון:

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x+1) \ .$$

$$p(A) = (A - I_3)(A - 2I_3)(A + I_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 10 \\ -5 & 1 & 18 \\ 1 & -5 & 26 \end{pmatrix}$$

משפט 4.1

תהי $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית ויהי $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום. אז

$$p(D) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

הוכחה: תרגיל בית

■

משפט 4.2

תהיינה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ו- $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. נניח ש $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה הפיכה. מתקיים:

$$(BAB^{-1})^k = BA^kB^{-1} \ .$$

הוכחה: נוכיח ע"י אינדוקציה.

<u>בסיס:</u> עבור $k=1$

$$(BAB^{-1})^1 = BA^1B^{-1} \ .$$

<u>מעבר:</u>

נניח ש- $(BAB^{-1})^k = BA^kB^{-1}$. (ההנחת האינדוקציה). נוכיח ש- $(BAB^{-1})^{k+1} = BA^{k+1}B^{-1}$.

$$\begin{aligned} (BAB^{-1})^{k+1} &= (BAB^{-1})^k \cdot BAB^{-1} \\ &= BA^kB^{-1} \cdot BAB^{-1} && \text{(ההנחת האינדוקציה)} \\ &= BA^k \cdot \underbrace{(B^{-1}B)}_{=I} \cdot AB^{-1} \\ &= BA^k \cdot I \cdot AB^{-1} \\ &= BA^k \cdot AB^{-1} \\ &= BA^{k+1}B^{-1} \ . \end{aligned}$$

■

משפט 4.3

תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות. כלומר קיימת P הפיכה כך ש- $B = PAP^{-1}$. נניח ש- $Q(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום. אז

$$Q(A) = PQ(B)P^{-1} \ .$$

הוכחה: נסמן $Q(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\ldots+\alpha_k x^k$.

$$\begin{aligned} Q(A) =& \alpha_0 I+\alpha_1 A+\ldots+\alpha_k A^k \\ =& \alpha_0 I+\alpha_1 (PBP^{-1})+\ldots+\alpha_k (PBP^{-1})^k \\ =& \alpha_0 PP^{-1}+\alpha_1 (PBP^{-1})+\ldots+\alpha_k (PBP^{-1})^k \end{aligned}$$

$(PBP^{-1})^k=PB^kP^{-1}$ (לפי משפט 4.2) לכן נקבל

$$\begin{aligned} Q(A) =& \alpha_0 PP^{-1}+\alpha_1 PBP^{-1}+\ldots+\alpha_k PB^kP^{-1} \\ =& P\left(\alpha_0 I+\alpha_1 B+\ldots+\alpha_k B^k\right)P^{-1} \\ =& PQ(B)P^{-1}\ . \end{aligned}$$

■

משפט 4.4

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה, כלומר קיימת P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A=PDP^{-1}$.
נניח ש- $D=\text{diag}\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$. אז לכל $q(x)\in\mathbb{F}[x]$ מתקיים

$$q(A)=P\begin{pmatrix} q(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & q(\lambda_n) \end{pmatrix}P^{-1}$$

הוכחה: נסמן $D=P^{-1}AP$. לפי משפט 4.3,

$$P^{-1}q(A)P=q(P^{-1}AP)=q(D)\ .$$

לפי משפט 4.1,

$$q(D)=\begin{pmatrix} q(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & q(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

לכן נקבל

$$P^{-1}q(A)P=\begin{pmatrix} q(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & q(\lambda_n) \end{pmatrix}\ ,$$

מכאן נובע כי

$$q(A)=P\begin{pmatrix} q(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & q(\lambda_n) \end{pmatrix}P^{-1}\ .$$

■

דוגמה 4.3

חשבו את ההצבה של $A=\begin{pmatrix}11 & -6\\ 20 & -11\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ בפולינום $Q(x)=x^{100}+2x^{51}-3$.

פתרון:
הערכים עצמיים של A הם $\lambda=-1$ ו- $\lambda=1$. המרחבים עמציים הם

$$V_{-1}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}\ ,V_1=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\right\}\ .$$

לכן $A=PDP^{-1}$ כאשר $P=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$ ו- $D=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} q(A)=&P\begin{pmatrix}q(-1)&0\\0&q(1)\end{pmatrix}P^{-1}= \quad \begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}-4&0\\-8&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}20&-12\\40&-24\end{pmatrix}\end{aligned}$$

דוגמה 4.4

תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ סקלר. נניח ש $p(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינום. הוכיחו:

$p(A)=\lambda I_n$ אם"ם $p(B)=\lambda I_n$.

הוכחה: $\Rightarrow$

A,B דומות לכן קיימת $C\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה כך ש $B=C^{-1}AC$. לכן לפי 4.3,

$$p(B)=p\left(C^{-1}AC\right)=C^{-1}p(A)C$$

אם $p(A)=\lambda I_n$ אז

$$p(B)=C^{-1}\lambda I_nC=\lambda I_n\ .$$

$\Leftarrow$

$A=CBC^{-1}$ לכן לפי 4.3,

$$p(A)=p\left(CBC^{-1}\right)=Cp(B)C^{-1}\ .$$

לכן אם $p(B)=\lambda I_n$ אז

$$p(A)=C\lambda I_nC^{-1}=\lambda I_n\ .$$

■

4.2 הצבת של העתקה לינארית בפולינום

הגדרה 4.2 הצבה של העתקה ליניארית בפולינום

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, נניח ש $T : V \to V$ אופרטור ליניארי ו- $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots \alpha_k x^k$ פולינום. נגדיר את האופרטור הליניארי $p(T) : V \to V$ ע"י

$$p(T) = \alpha_0 I_V + \alpha_1 T + \ldots \alpha_k T^k$$

כאשר I_V האופרטור הזהות ($I_V(u) = u$ לכל $u \in V$).
$p(T)$ נקראת ההצבה של T ב- p.

דוגמה 4.5

יהי $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ אופרטור המוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3y \\ 2x+y \end{pmatrix} \ .$$

חשבו את $p(T)$ עבור $p(x) = 3x^2 - 4x - 1$ תוך כדי שימוש של המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

פתרון:

שיטה 1

הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$ הוא $E = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. המטריצה המייצגת הסטנדרטית מוגדרת $[T]_E = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(e_1)]_E & [T(e_1)]_E \\ | & | \end{pmatrix}$. נקבל

$$[T(e_1)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ , \qquad [T(e_2)]_E = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$

לכן $[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. נשתמש בנוסחה

$$[p(T)]_E = p([T]_E) \ .$$

נחשב $p([T]_E)$:

$$p([T]_E) = 3([T]_E)^2 - 4[T]_E - I_3 = 3\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 - 4\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -6 \\ 4 & -20 \end{pmatrix}$$

לכן לכל וקטור $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} [p(T)u]_E &= [p(T)]_E \cdot [u]_E \\ &= p([T]_E)[u]_E \\ &= \begin{pmatrix} -20 & -6 \\ 4 & -20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -20x-6y \\ 4x-20y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

שיטה 2

$$\begin{aligned}
p(T)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= 3T^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 4T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
&= 3T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
&= 3\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-15\\12\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-20\\4\end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(T)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} &= 3T^2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - 4T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
&= 3T\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
&= 3\begin{pmatrix}-6\\-5\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-18\\-15\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-12\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-6\\-20\end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(T)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= p\left(x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\\
&= \begin{pmatrix}-20x-6y\\4x-20y\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

דוגמה 4.6

יהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ אופרטור שמוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-3y\\2x+y\end{pmatrix} .$$

חשבו את ההצבה $p(T)$ עבור $p(x)=3x^2-4x+1$.

פתרון:

נחשב את המטריצה המייצגת של T שמוגדרת $[T]_E = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(e_1)]_E & [T(e_1)]_E \\ | & | \end{pmatrix}$.

$$[T(e_1)]_E = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} , \qquad [T(e_2)]_E = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$$

לכן $[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
p(x) &= 3x^2 - 4x + 1 = (3x-1)(x-1) \\
p([T]_E) &= (3[T]_E - I)([T]_E - I) \\
&= \left(3\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -18 & -6 \\ 4 & -18 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$p(T)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = p\left([T]_E\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -6 \\ 4 & -18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18x - 6y \\ 4x - 18y \end{pmatrix} \ .$$

דוגמה 4.7

נסמן $p(x) = 2x^2 + 3x - 4 \in \mathbb{R}[x]$. יהי $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ שמוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + 2y \end{pmatrix} \ .$$

חשבו את $p(T)$.

פתרון:

$$\begin{aligned}
p(T)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 2T^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 2T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 2\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 32\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$p(T)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
p(T)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= p\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= x\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -9 \\ 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -x - 9y \\ 9x + 8y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

דוגמה 4.8

יהי $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ אופרטור שמוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 3x + 7y \end{pmatrix} \ .$$

חשבו את $p(T)$ עבור $p(x)=5x^2-6x+1$ תוך כדי שימוש של המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

פתרון:

שיטה 1

הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$ הוא $E=\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$. ההגדרה של המטריצה המייצגת הסטנדרטית היא $[T]_E=\begin{pmatrix}| & |\\ [T(e_1)]_E & [T(e_1)]_E\\ | & |\end{pmatrix}$.

$$[T(e_1)]_E=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\ ,\qquad [T(e_2)]_E=\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}\ ,$$

לכן נקבל $[T]_E=\begin{pmatrix}2&-2\\3&7\end{pmatrix}$. ניתן לפרק את $p(x)$ לגורמים ליניאריים:

$$p(x)=5x^2-6x+1=(5x-1)(x-1)\ .$$

בלהיעזר בפירוק הזה נחשב את $p\left([T]_E\right)$:

$$\begin{aligned}p([T]_E)&=(5\left([T]_E\right)-I_2)\left([T]_E-I_2\right)\\&=\left(5\begin{pmatrix}2&-2\\3&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix}2&-2\\3&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\\&=\begin{pmatrix}9&-10\\15&34\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\3&6\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-21&-78\\117&174\end{pmatrix}\end{aligned}$$

לכן עבור וקטור $u=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}[p(T)u]_E&=[p(T)]_E\cdot[u]_E\\&=\begin{pmatrix}-21&-78\\117&174\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-21x-78y\\117x+174y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

שיטה 2

$$\begin{aligned}p(T)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}&=5T^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-6T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=5T\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=5\begin{pmatrix}-2\\27\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-21\\117\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(T)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} =& 5T^2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - 6T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
=& 5T\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
=& 5\begin{pmatrix}-18\\43\end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
=& \begin{pmatrix}-90\\215\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}12\\-42\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
=& \begin{pmatrix}-78\\174\end{pmatrix} \ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(T)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} =& p\left(x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\\
=& \begin{pmatrix}-21x-78y\\117x+174y\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

בדיוק כמו הפתרון המתקבל ע"י שיטה 1.

דוגמה 4.9

נגדיר $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3y+z\\2x-y+z\\x+y+z\end{pmatrix} \ .$$

נסמן $p(x)=x^2+x-2\in\mathbb{R}[x]$. יהי E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.

א חשבו את $[p(T)]_E$.

ב היעזרו בחישוב בסעיף א' כדי למצוא את $p(T)$.

פתרון:

סעיף א $[T]_E=\begin{pmatrix}0&3&1\\2&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. ניתן לפרק את $p(x)$ כ- $p(x)=(x-1)(x+2)$. לכן

$$[p(T)]_E = ([T]_E - I_3)([T]_E + 2I_3) = \begin{pmatrix}-1&3&1\\2&-2&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&1\\2&1&1\\1&1&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5&1&5\\1&5&3\\4&4&2\end{pmatrix}$$

סעיף ב לכן

$$\begin{aligned}
p(T)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} &= [p(T)]_E \cdot \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\\
&= x\,[p(T)]_E \cdot \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + y\,[p(T)]_E \cdot \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + z\,[p(T)]_E \cdot \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\\
&= x\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5\\ 1 & 5 & 3\\ 4 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5\\ 1 & 5 & 3\\ 4 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5\\ 1 & 5 & 3\\ 4 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\\
&= x\begin{pmatrix} 5\\ 1\\ 4\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1\\ 5\\ 4\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 5\\ 3\\ 2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 5x+y+5z\\ x+5y+3z\\ 4x+4y+2z\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

משפט 4.5

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T : V \to V$. נניח ש $p \in \mathbb{F}[x]$.
אם $u \in V$ וקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי λ, אז u וקטור עצמי של $p(T)$ ששייך לערך עצמי $p(\lambda)$.
כלומר, אם

$$T(u) = \lambda u$$

אז

$$p(T)\,(u) = p(\lambda) u\ .$$

הוכחה: ראו משפט 3.18 למעלה:

$$\begin{aligned}
p(T)(u) &= \left(\alpha_0 + \alpha_1 T + \ldots + \alpha_k T^k\right)(u)\\
&= \left(\alpha_0 + \alpha_1 T(u) + \ldots + \alpha_k T^k(u)\right)\\
&= \left(\alpha_0 + \alpha_1 \lambda u + \ldots + \alpha_k \lambda^k u\right)\\
&= \left(\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \ldots + \alpha_k \lambda^k\right) u\\
&= p(\lambda) u\ .
\end{aligned}$$

■

4.3 איפוס פולינום על ידי מטריצה

הגדרה 4.3 איפוס פולינום ע"י מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ויהי $p(x) \in \mathbb{F}[x]$. אומרים כי A מאפסת את $p(x)$ אם

$$p(A) = 0_{n\times n}$$

כאשר $0_{n\times n}$ מטריצה האפס של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

משפט 4.6 מטריצות דומות מאפסות אותו פולינום

אם A ו- B מטריצות דומות, אז הפולינום f מתאפס ע"י A אם"ם הוא מתאפס ע"י B.

הוכחה: נניח ש $f(A)=0$. נוכיח ש $f(B)=0$:
נסמן

$$f(x)=\alpha_k x^k+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0\ ,$$

אז

$$f(A)=\alpha_k A^k+\ldots+\alpha_1 A+\alpha_0 I=0\ .$$

A ו B מטריצות דומות לכן קיימת מטריצה הפיכה C כך ש

$$A=C^{-1}BC\ .$$

לכן

$$\alpha_k(C^{-1}BC)^k+\ldots+\alpha_1(C^{-1}BC)+\alpha_0 I=0\ .$$

$(C^{-1}BC)^k=C^{-1}B^kC$ (לפי משפט 4.2) לכן נקבל

$$C^{-1}\left(\alpha_k B^k+\ldots+\alpha_1 B+\alpha_0 I\right)C=0\ .$$

C הפיכה אז נכפיל מצד שמאל ב- C ומצד ימין ב- C^{-1} ונקבל

$$\alpha_k B^k+\ldots+\alpha_1 B+\alpha_0 I=0\ .$$

קיבלנו ש

$$f(B)=0\ .$$

■

משפט 4.7

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$.

א. $A^n\in \mathrm{sp}\{I_n,A,A^2,\ldots,A^{n-1}\}$ אם"ם קיים פולינום $p(x)\in\mathbb{F}[x]$ מסדר n כך ש $p(A)=0$.

ב. הקבוצה $\{I_n,A,A^2,\ldots,A^n\}$ ת"ל אם"ם קיים פולינום שונה מאפס $p(x)\in\mathbb{F}[x]$ מסדר n לכל היותר כך ש- $p(A)=0$.

הוכחה:

<u>**סעיף א.**</u> נניח ש $A^n\in \mathrm{sp}\{I_n,A,A^2,\ldots,A^{n-1}\}$. אז קיימים סקלרים כך ש-

$$A^n=\alpha_0 I_n+\alpha_1 A+\alpha_2 A^2+\ldots+\alpha_{n-1}A^{n-1}$$

ז"א

$$A^n-\alpha_{n-1}A^{n-1}-\alpha_{n-2}A^{n-2}-\ldots-\alpha_1 A-\alpha_0 I_n=0$$

לכן A מאפסת את

$$p(x)=x^n-\alpha_{n-1}x^{n-1}-\ldots-\alpha_1 x-\alpha_0\in\mathbb{F}[x]\ .$$

נניח ש- A מאפסת את הפולינויים

$$Q(x) = \beta_n x^n + \beta_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0 \in \mathbb{F}[x]$$

מסדר n, כלומר $Q(A) = 0$. נניח ש $\beta_n \neq 0$. אז

$$\beta_n A^n = -\left(\beta_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \beta_1 A + \beta_0 I_n\right)$$

נחלק שני האגפים ב β_n:

$$A^n = -\left(\frac{\beta_{n-1}}{\beta_n}A^{n-1} + \ldots + \frac{\beta_1}{\beta_n}A + \frac{\beta_0}{\beta_n}I_n\right)$$

קיבלנו כי $A^n \in \text{sp}\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\}$.

סעיף ב. נניח ש- $\{I_n, A, A^2, \ldots, A^n\}$ ת"ל. אז קיימים סקלירם שאינם כולם אפסים כך ש-

$$\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \alpha_n A^n = 0$$

מכאן A מאפסת $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$ שהוא פולינום שונה מאפס מסדר n לכל היותר.

להיפך, נניח ש- $p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$ אינו פולינום האפס כך ש $p(A) = 0$. אז

$$\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_n A^n = 0$$

הוא צירוף לנארי לא טריוויאלי.

■

4.4 איפוס פולינום על ידי העתקה לינארית

הגדרה 4.4 איפוס פולינום על ידי העתקה לינארית

יהי $T : V \to V$ אופרטור ויהי $p(x) \in \mathbb{F}[x]$. אומרים כי T מאפס את $p(x)$ אם $p(T) = 0$ כאשר 0 מסמן את העתקה האפס.

דוגמה 4.10

נתון $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדר ע"י

$$T(x, y) = (-y, x)$$

חשבו את $f(T)$ כאשר $f(x)$ הפולינום

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1\ .$$

פתרון:

$$T^2(x, y) = T\left(T(x, y)\right) = T\left(-y, x\right) = (-x, -y)$$
$$T^3(x, y) = T\left(T^2(x, y)\right) = T\left(-x, -y\right) = (y, -x)$$

לכן

$$f(T) = (y, -x) - (-x, -y) + (-y, x) - (x, y) = (0, 0)\ .$$

4.5 משפט קיילי-המילטון (Cayley-Hamilton)

משפט 4.8 משפט קיילי-המילטון

תהי $A\in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם $p_A(x)$ הוא הפולינום האופייני של A אז

$$p_A(A)=0_{n\times n}$$

כאשר $0_{n\times n}$ מטריצה האפס של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

דוגמה 4.11

נתונה $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

א) בדקו ש- $p_A(A)=0$.

ב) חשבו את A^2 ללא חישוב ישיר.

פתרון:

א)

$$p_A(\lambda)=|\lambda-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-1=\lambda^2-2\lambda$$

$$\begin{aligned}p_A(A)=&A^2-2A=A(A-2I)\\&=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]\\&=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ב) לפי קיילי-המילטון $p_A(A)=0$ לכן

$$A^2-2A=0\qquad\Rightarrow\qquad A^2=2A=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$$

דוגמה 4.12

נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$. מצאו את A^{-1} בעזרת משפט קיילי המילטון.

פתרון:

הפולינום האופייני של A הוא:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)-2 = \lambda^2-4\lambda+1$$

לכן

$$p_A(A) = A^2-4A+I=0 \qquad \Rightarrow \qquad 4A-A^2=I \qquad \Rightarrow \qquad A(4I-A)=I \ . \qquad (*)$$

$|A|=1$ לכן A הפיכה. נכפיל (*) ב- A^{-1} ונקבל $4I-A=A^{-1}$, ולכן

$$A^{-1}=4I-A=4\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix} \ .$$

דוגמה 4.13

נתונה מטריצה

$$A=\begin{pmatrix}-3&1&-1\\-5&3&-1\\-6&6&-4\end{pmatrix}$$

להיעזר במשפט קיילי המילטון חשבו את A^3 ו- A^{-1}.

פתרון:

הפולינום האופייני של A הוא

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) =& \begin{vmatrix} \lambda+3 & -1 & 1 \\ 5 & \lambda-3 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda+4 \end{vmatrix} \\ =&(\lambda+3)\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1\\ -6 & \lambda+4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & 1\\ 6 & \lambda+4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & \lambda-3\\ 6 & -6\end{vmatrix} \\ =&(\lambda+3)\left((\lambda-3)(\lambda+4)+6\right)+(5(\lambda+4)-6)+(-30-6(\lambda-3)) \\ =&(\lambda+3)(\lambda+3)(\lambda-2)+5\lambda+14-6\lambda-12 \\ =&(\lambda+3)(\lambda+3)(\lambda-2)-\lambda+2 \\ =&(\lambda+3)(\lambda+3)(\lambda-2)-(\lambda-2) \\ =&(\lambda-2)\left((\lambda+3)(\lambda+3)-1\right) \\ =&(\lambda-2)\left(\lambda^2+6\lambda+8\right) \\ =&(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda+4) \\ =&\lambda^3+4\lambda^2-4\lambda-16 \ . \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=-2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=-4$ מריבוי אלגברי 1.

נבדוק אם A הפיכה דרך הדטרמיננטה:

$$|A|=p_A(0)=-16\neq 0$$

לכן A הפיכה.

לפי משפט קיילי-המילטון,

$$p_A(A)=0 \quad \Rightarrow \quad A^3+4A^2-4A-16I_3=0 \quad \Rightarrow \quad A^3=-4A^2+4A+16I_3$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 6 \\ 6 & -2 & 6 \\ 12 & -12 & 16 \end{pmatrix}$$

לכן

$$A^3 = -4 \begin{pmatrix} 10 & -6 & 6 \\ 6 & -2 & 6 \\ 12 & -12 & 16 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 & 28 & -28 \\ -44 & 36 & -28 \\ -72 & 72 & -64 \end{pmatrix}$$

לפי משפט קיילי-המילטון,

$$p_A(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad A^3 + 4A^2 - 4A - 16I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{1}{16}A^3 + \frac{1}{4}A^2 - \frac{1}{4}A = \left(\frac{1}{16}A^2 + \frac{1}{4}A - \frac{1}{4}I_3\right) A$$

ז"א

$$\begin{aligned} A^{-1} =& \frac{1}{16}A^2 + \frac{1}{4}A - \frac{1}{4}I_3 \\ =& \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 10 & -6 & 6 \\ 6 & -2 & 6 \\ 12 & -12 & 16 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{7}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

דוגמה 4.14

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו את הטענות הבאות:

א.

$$A^n \in \mathrm{sp}\left\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\right\}$$

ב. אם A הפיכה אז

$$A^{-1} \in \mathrm{sp}\left\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\right\}$$

ג. עבור

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

מבלי לחשב ישירות מטריצות הופכיות, מצאו את A^{-1} ואת A^{-2}.

פתרון:

סעיף א. לפי משפט ק"ה A מאפסת את $p_A(x)$. כלומר

$$p_A(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n = 0 \ .$$

לכן

$$A^n = -\alpha_{n-1}A^{n-1} - \ldots - \alpha_1 A - \alpha_0 I_n \in \mathrm{sp}\left\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\right\} \ .$$

סעיף ב. לפי משפט ק"ה A מאפסת את $p_A(x)$, כלומר

$$p_A(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n = 0 \ ,$$

לכן

$$-\alpha_0 I_n = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A \ . \qquad (*)$$

$|A| = p_A(0)$. מכיוון ש- A הפיכה אז $\alpha_0 \neq 0$ ו α_0^{-1} קיים. נכפיל את שני אגפים של (*) ב $\dfrac{-1}{\alpha_0}A^{-1}$:

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_0}A^{n-1} - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0}A^{n-2} - \ldots - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}I_n \ . \qquad (\#)$$

לכן קיבלנו כי

$$A^{-1} \in \text{sp}\left\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\right\} \ .$$

סעיף ג.

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) =& |\lambda I_3 - A| \\
=& \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
=& (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & \lambda-1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \\
=& (\lambda-5)(\lambda+1)^2 \\
=& \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5
\end{aligned}$$

$$p_A(A) = A^3 - 3A^2 - 9A - 5I_n = 0 \quad \Rightarrow \quad I_n = \frac{1}{5}A^3 - \frac{3}{5}A^2 - \frac{9}{5}A = A\left(\frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A - \frac{9}{5}I_3\right)$$

אזי

$$A^{-1} = \frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A - \frac{9}{5}I_3 \ . \qquad (*1)$$

לכן $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{9}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

כדי למצוא את A^{-2} נכפיל את שני אגפי (*1) ב A^{-1} ונקבל:

$$A^{-2} = \frac{1}{5}A - \frac{3}{5}I_3 - \frac{9}{5}A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{9}{5}\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 17 & -8 & -8 \\ -8 & 17 & -8 \\ -8 & -8 & 17 \end{pmatrix} .$$

משפט 4.9 משפט קיילי-המילטון עבור העתקות

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $T:V\to V$ אופרטור. T מאפס את הפולינום האופייני שלה.

דוגמה 4.15

נתון אופרטור ליניארי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ שמוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6x+y+12z\\-8x+2y+15z\\-2x+5z\end{pmatrix}$$

הוכיחו ש- T הפיך באמצעות משפט ק"ה וחשבו $T^{-1}\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$

פתרון:

הממ"ס היא

$$A=[T]_E=\begin{pmatrix}-6&1&12\\-8&2&15\\-2&0&5\end{pmatrix}\ .$$

אז הפולינום האופייני

$$\begin{aligned}p_A(x)=&|xI-A|\\=&\begin{vmatrix}x+6&-1&-12\\8&x-2&-15\\2&0&x-5\end{vmatrix}\\=&2\begin{vmatrix}-1&-12\\x-2&-15\end{vmatrix}+(x-5)\begin{vmatrix}x+6&-1\\8&x-2\end{vmatrix}\\=&2\left(15+12x-24\right)+(x-5)\left((x+6)(x-2)+8\right)\\=&-18+24x+(x-5)\left(x^2+4x-4\right)\\=&x^3-x^2+2\ .\end{aligned}$$

האיבר החופשי שונה מאפס לכן T הפיך. לפי משפט ק"ה:

$$T^3-T^2+2I=0$$

כאשר האגף הימין הוא אופרטור האפס. נפעיל T^{-1} על המשוואה ונקבל:

$$T^2-T+2T^{-1}=0$$

לכן

$$T^{-1}=-\frac{1}{2}T^2+\frac{1}{2}T$$

4.6 הפולינום המינימלי של מטריצה

הגדרה 4.5 פולינום המינימלי

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. הפולינום המינימלי הוא פולינום מתוקן מצורה

(#)
$$m(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{k-1}x^{k-1} + x^k \ ,$$

כאשר $k \geq 1$ כך ש:

1) $m(A) = 0$

2) k היא הסדר הנמוכה ביותר מבין הפולינומים מצורה (#) שמתאפסים ע"י A.

נסמן את הפולינום המינימלי של A ב- $m_A(x)$.

מסקנה 4.1 פולינום מינימלי של טריצה אלכסונית

אם $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה אלכסונית:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

אם $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ האיברים השונים על האלכסון ($k \leq n$) אז הפולינום המינימלי של D הוא

$$m_D(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_k) \ .$$

משפט 4.10 ל- $m_A(x)$ ול- $p_A(x)$ יש בדיוק אותם גורמים אי-פריקים.

ל- $m_A(x)$ ול- $p_A(x)$ יש בדיוק אותם גורמים אי-פריקים. כלומר

$$m_A(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_A(\lambda) = 0 \ .$$

הוכחה:

נניח ש $m_A(\lambda) = 0$.

אז $m_A(x) = q(x)(x-\lambda)$ כאשר $\deg q(x) < \deg m_A(x)$ (נוסחת איוקליד לחיוק פולינומים).

$m_A(x)$ הוא הפולינים המינימלי של A לכן $q(A) \neq 0$.

נגדיר וקטורים v ו- w כך ש- $\mathrm{w} = q(A)\mathrm{v} \neq \bar{0}$.

$$\bar{0} = m_A(A)\mathrm{v} = (A-\lambda I)q(A)\mathrm{v} = (A-\lambda I)\mathrm{w} \ ,$$

לכן

$$A\mathrm{w} = \lambda \mathrm{w} \ .$$

ז"א w וקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ של A.

לכן $p_A(\lambda) = 0$.

נניח ש $p_A(\lambda)=0$.
אז λ ערך עצמי של A.
נניח ש- w הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ. אז

$$A\text{w}=\lambda\text{w} \ .$$

לכן

$$m_A(A)\text{w}=m_A(\lambda)\text{w} \ .$$

$m_A(A)=0$ לכן $m(\lambda)\text{w}=0$.
w וקטור עצמי אז $\text{w}\neq\bar{0}$, לכן $m_A(\lambda)=0$. ■

משפט 4.11 מטריצה מאפסת הפולינום המינימלי של מטריצה שאליה היא דומה

תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות ריבועיות. יהי $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A ויהי $m_B(x)$ הפולינום המינימלי של B. אם A,B מטריצות דומות אז

$$m_A(B)=0$$

ו-

$$m_B(A)=0 \ .$$

הוכחה: A ו- B דומות לכן קיימת P הפיכה כך ש- $A=PBP^{-1}$. לפי משפט 4.3:

$$m_A(A)=P\cdot m_A(B)\cdot P^{-1}$$

P הפיכה אז נכפיל מצד ימין ב- P ומצד שמאל ב- P^{-1}:

$$P^{-1}\cdot m_A(A)\cdot P=m_A(B) \ .$$

$m_A(A)=0$ לכן $m_A(B)=0$. ■

משפט 4.12 למטריצות דומות יש אותו פולינום מינימלי

תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות. ל- A ו- B יש אותו פולינום מינימלי.

הוכחה: A ו- B דומות $\Leftarrow$ ל- A ו- B יש אותם ערכים עצמיים (לפי משפט 3.21).
יהי $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A ו- $m_B(x)$ הפולינום המינימלי של B.
כיוון של- A ו- B אותם ערכים עצמיים אז $m_A(x)$ ו- $m_B(x)$ מתפרקים לאותם גורמים לינאריים:

$$m_A(x)=(x-\lambda_1)^{d_1}\ldots(x-\lambda_k)^{d_k} \ , \qquad m_B(x)=(x-\lambda_1)^{e_1}\ldots(x-\lambda_k)^{e_k} \ .$$

A ו- B דומות אז $m_A(B)=0$ ו- $m_B(A)=0$ (לפי משפט 4.11 למעלה).

כעת נוכיח דרך השלילה כי $d_i=e_i$ לכל $1\leq i\leq k$ ולכן הפולינומים m_A ו- m_B זהים.

נניח כי עבור אחד הגורמים, $d_i\neq e_i$.

אם $d_i<e_i$, כיוון ש- $m_A(B)=0$ אז מתקיים ש- B מאפסת פולינום מדרגה נמוכה יותר מ- $m_B(x)$. בסתירה לכך כי $m_B(x)$ הוא הפולינום המינימלי של B.

אם $e_i < d_i$, כיוון ש- $m_B(A) = 0$, אז מתקיים ש- A מאפסת פולינום מדרגה נמוכה יותר מ- $m_A(x)$. בסתירה לכך כי $m_A(x)$ הוא הפולינום המינימלי של A.

■

משפט 4.13 A לכסינה אא"ם לפולינום מינימלי יש גורמים ליניאריים שונים

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ויהי $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A. A לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אם"ם כל הגורמים האי-פריקים של $m_A(x)$ הם ליניאריים ושונים.
כלומר A לכסינה אם"ם $m_A(x)$ מתפרק ל-

$$m_A(x) = (x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_i)\ldots(x-\lambda_k) \ .$$

הוכחה: נניח ש- A לכסינה.
יהיו $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ הערכים עצמיים השונים של A.
קיימת P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש-

$$A = PDP^{-1} \ .$$

לפי משפט 4.12 הפולינום המינימלי של A שווה לפולינום המינימלי של D ולפי מסקנה 4.1 $m_D(x) = (x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_k)$ לכן

$$m_A(x) = m_D(x) = (x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_k) \ .$$

■

4.7 תרגילים על הפולינום המינימלי

דוגמה 4.16

אם הפולינום המינימלי של מטריצה A הוא $m(x) = (x-1)(x-2)$, אז A לכסינה.

דוגמה 4.17

נניח A מטריצה מעל $\mathbb{R}$ כך שהפולינום המינימלי שלה הוא

$$m_A(x) = (x-1)(x-2)^2$$

אז A לא לכסינה.

דוגמה 4.18

נניח ש

$$p_A(x) = (x-1)^2(x-2)^2$$

אז

$$m_A(x) \neq (x-1)(x-2)(x-3)$$

כי $m_A(x) \nmid p_A(x)$.

דוגמה 4.19

נניח ש

$$p_A(x)=(x-1)(x-2)x$$

אז

$$m_A(x)=(x-1)(x-2)x\ .$$

דוגמה 4.20

נניח ש

$$p_A(x)=(x-1)^2(x-2)^2$$

מהן האפשרויות עבור m_A?

פתרון:

ישנן 4 אפשרויות:

$$(x-1)(x-2)\ ,\qquad (x-1)^2(x-2)\ ,\qquad (x-1)(x-2)^2\ ,\qquad (x-1)^2(x-2)^2\ .$$

(אם A נתונה אפשר לבדוק איזה מהם מתאפס ע"י A. יש להציב את A בכל אחד מהפולינומים)

דוגמה 4.21

מצאו את הפולינום המינימלי של $A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&5\end{pmatrix}$.

פתרון:

$$p_A(x)=(x-2)^3(x-5)\ .$$

האפשרויות ל- $m_A(x)$ הם

$$f_1(x)=(x-2)(x-5)\ ,\qquad f_2(x)=(x-2)^2(x-5)\ ,\qquad f_3(x)=(x-2)^3(x-5)\ .$$

נציב את A:

$$\begin{aligned}f_1(A)=&(A-2I)(A-5I)\\
=&\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1&0&0\\0&-3&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}0&-3&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\
\neq&0\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_2(A) =&(A-2I)^2(A-5I)\\ =&\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1&0&0\\0&-3&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-3&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\ =&0\ .\end{aligned}$$

לכן $m_A(x)=f_2(x)=(x-2)^2(x-5)$.

דוגמה 4.22

תהיינה

$$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$$

האם A ו- B דומות?

פתרון:

$$p_A(x)=(x-2)^2=p_B(x)$$

A אלכסונית. B לא לכסינה, כי עבור הערך עצמי $\lambda=2$, הריבוי אלגברי שווה 2 אבל הריבוי גאומטרי שווה 1.

$$A-2I=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad \dim V_2=1\ .$$

$$m_A(x)=x-2\ ,\qquad m_B(x)=(x-2)^2\ .$$

לכן A ו- B לא דומות.

דוגמה 4.23

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו שכל ערך עצמי של A הוא שורש של הפולינום המינימלי.

הוכחה: נניח ש λ_0 ערך עצמי של A. אז

$$p_A(x)=(x-\lambda_0)^k\cdot q(x)\ ,$$

$k\geq 1$. ז"א, ב- $p_A(x)$ יש גורם אי פריק $(x-\lambda_0)$. לכן, לפי משפט 4.10, הוא מופיע גם ב- $m_A(x)$. ז"א

$$m_A(x)=(x-\lambda_0)^l\cdot t(x)\ .$$

ז"א

$$m_A(\lambda_0)=0\ .$$

■

דוגמה 4.24

תהי A מטריצה ריבועית כך שהפולינום המינימלי שלה הוא $m_A(x)=(x-1)^2$. יהי $f(x)=x^2+4x+3$.
הוכיחו כי המטריצה $f(A)$ הפיכה.

פתרון:
$m_A(A)=0 \Leftarrow (A-I)^2=0$.

$$f(A)=A^2+4A+3I=(A^2-2A+I)+6A+2I=(A-I)^2+6A+2I=6A+2I\ .$$

נוכיח כי $|6A+2I|\neq 0$ בדרך השלילה.

נניח ש $|6A+2I|=0$. אז

$$|6A+2A|=\left|6(A+\frac{2}{6}I)\right|=6^n\left|A+\frac{1}{3}I\right|=0$$

ז"א $\lambda=-\frac{1}{3}$ ערך עצמי של A. לכן הוא חייב להיות שורש של הפולינום המינימלי. סתירה.

דוגמה 4.25

מצאו את הפולינום המינימלי של $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}$

פתרון:
הפולינום האופייני של A הוא

$$p_A(\lambda)=(\lambda-2)^3=\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8\ .$$

לכו האפשרויות בשביל הפולינום מינימלי הן

$$f_1(x)=x_2\ ,\qquad f_2(x)=(x-2)^2\ ,\qquad f_3(x)=(x-2)^3\ .$$

$$f_1(A)=A-2I=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix}\neq 0$$

$$f_2(A)=(A-2I)^2=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן הפולינום המינימלי הוא

$$m_A(x)=(x-2)^2\ .$$

דוגמה 4.26

מצאו את הפולינום המינימלי והפולינום האופייני של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I \ .$$

פתרון:
הפולינום האופייני של A הוא

$$p_A(x) = (x-4)^3 \ .$$

A מטריצה סקלרית (מטריצה סקלירת היא מצורה αI כאשר α סקלר). הפולינום המינימלי של מטריצה סלרית הוא $m_A(x) = (x-\alpha)$. לכן הפולינום המינימלי של A הוא

$$m_A(x) = x - 4 \ .$$

שעור 5
שילוש מטריצה

5.1 מטריצה משולשית עילית

משפט 5.1 ערכים עצמיים ופולינום אופייני של מטאיצה משולשית

תהי A מטריצה משולשית מעל שדה $\mathbb{F}$. כלומר

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \ldots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

אז

(1

$$p_A(x) = (x - a_{11})(x - a_{22}) \ldots (x - a_{nn}) ,$$

כלומר, הפולינום האופייני מתפרק לגורמים ליניאריים (לא בהכרח שונים) מעל $\mathbb{F}$.

(2 איברי האלכסון של מטריצה משולשית עליונה הם הערכים עצמיים.
המספר הפעמים שכל ערך עצמי מופיע באלכסון הוא הריבוי האלגברי של הערך עצמי.

הוכחה:

(1

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \ldots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) =& |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}-\lambda & \ldots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \\ =& (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\ldots(a_{nn}-\lambda) \end{aligned} \qquad (*)$$

(2 לפי (*), $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$ הם הערכים עצמיים של A. כל איבר על האלכסון הראשי מופיע בפולינום האופייני.
לכן המספר הפעמים שאיבר מסוים מופיע על האלכסון הראשי שווה למספר הפעמים שהוא מופיע בפולינום

האופייני. מאותה מידה המספר הפעמים שאיבר מסוים מופיע על האלכסון הראשי שווה לריבוי אלגברי של הערך עצמי.

■

הגדרה 5.1 מטריצה ניתנת לשילוש

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. אומרים ש A ניתנת לשילוש מעל $\mathbb{F}$ אם A דומה למטריצה משולשית עליונה, כלומר אם קיימת מטריצה P הפיכה כך ש-

$$M=P^{-1}AP$$

מטריצה משולשית. P נקראת מטריצה משלשת.

דוגמה 5.1

מטריצה $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}$ ניתנת לשילוש מעל $\mathbb{R}$ כי קיימת $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ הפיכה ו- $M=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ משולשית כך ש- $P^{-1}AP=M$:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}$$

בנוסף קיימת $P=\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}$ הפיכה ו- $M=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&1\end{pmatrix}$ משולשית כך ש- $P^{-1}AP=M$:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&1\end{pmatrix}$$

משפט 5.2 תנאי לשילוש

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$.
אם A ניתנת לשילוש מעל $\mathbb{F}$ אז הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים ליניאריים (לא בהכרח שונים) מעל $\mathbb{F}$.

הוכחה: נניח ש- A ניתנת לשילוש. אז קיימת P הפיכה ו-M משולשית כך ש- $M=P^{-1}AP$. למטריצות דומות יש אותו פוליניום האופייני, לכן

$$p_A(x)=p_M(x)\ .$$

הגורמים של $p_M(x)$ ליניאריים (לא בהכרח שונים) כי M מטריצה משולשית, לכן הגורמים של $p_A(x)$ ליניאריים (לא בהכרח שונים). ■

דוגמה 5.2

נתונה $A\in\mathbb{F}^{2\times 2}$. נניח ש $p(A)$ מתפרק למכפלה של גורמים ליניאריים מעל $\mathbb{F}$. הוכיחו כי A ניתנת לשילוש.

פתרון:
$p(A)$ מתפרק לגורמים ליניאריים, לכן קיים לפחות ערך עצמי אחד λ. יהי u_1 הוקטור עצמי השייך לערך עצמי λ. ז"א

$$A\cdot u_1=\lambda u_1\ .$$

נשלים את u_1 לבסיס של $\mathbb{F}^2$. נקבל בסיס $B=\{u_1,u_2\}$. אז

$$\begin{aligned} A\cdot u_1 =& \lambda u_1 + 0\cdot \mathrm{v}_1 \\ A\cdot u_2 =& \alpha_1 u_1 + \alpha_2\cdot \mathrm{v}_2 \end{aligned}$$

A מייצגת את הטרנספורמציה $T_A:\mathbb{F}^2\to\mathbb{F}^2$ ביחס לבסיס הסטנדרטי E של $\mathbb{F}^2$. המטריצה המייצגת של $T:\mathbb{F}^2\to\mathbb{F}^2$ בבסיס B היא

$$[T_A]_B = \begin{pmatrix} | & | \\ T(b_1) & T(b_2) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \ .$$

נסמן ב- $P_{E\to B}$ המטריצה המעבר מבסיס E לבסיס B. אז

$$[T_A]_B = P_{E\to B}[T_A]_E P^{-1}_{E\to B}$$

כלומר

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} = P_{E\to B} A P^{-1}_{E\to B}$$

קיבלנו ש- A דומה למטריצה משולשית.

דוגמה 5.3

הוכיחו כי המטריצה $A=\begin{pmatrix} 5 & -\frac{3}{2} \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ ניתנת לשילוש מעל $\mathbb{R}$. מצאו מטריצה משולשית עבור A ומטריצה משלשת P.

פתרון:

נמצא את הערכים עמציים של A.

$$\begin{vmatrix} \lambda-5 & \frac{3}{2} \\ -6 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda+1)+9 = \lambda^2-4\lambda+4 = (\lambda-2)^2$$

יש ערך עצמי אחד $\lambda=2$ מריבוי אלגברי 2.

נמצא את הוקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda=2$:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -\frac{3}{2} \\ 6 & -1-\lambda \end{pmatrix} \stackrel{\lambda=2}{=} \begin{pmatrix} 3 & -\frac{3}{2} \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון $x=\frac{1}{2}y$, $y\in\mathbb{R}$. לכן הוקטור עצמי הוא $u_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. נשלים את u_1 לבסיס של $\mathbb{R}^2$:

$$u_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ , \qquad u_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot u_1 = 2u_1$$

$$A\cdot u_2 = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{3}{2} \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}u_1 + 2u_2$$

לכן A דומה למטריצה

$$M=\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

המטריצה המשלשת היא

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

5.2 העתקות ליניאריות ניתנות לשילוש

הגדרה 5.2 העתקה ליניארית ניתנת לשילוש

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $T:V\to V$ אופרטור. T נקרא ניתן לשילוש אם קיים בסיס B של V שעבורו המטריצה המייצגת $[T]_B$ היא מטריצה משולשית עליונה. הבסיס נקרא בסיס משלש עבור B.

משפט 5.3 תנאי לקיום שילוש מטריצה

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $T:V\to V$ אופרטור. אם T ניתנת לשילוש אז הפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים ליניאריים (לא בהכרח שונים) מעל $\mathbb{F}$.

משפט 5.4 קיום שילוש

לכל מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{C}$ ולכל $T\in\mathrm{Hom}(V)$, T ניתנת לשילוש.

הוכחה: כל פולינום מתפרק לגורמים ליניאריים מעל $\mathbb{C}$. ■

5.3 תת מרחבים שמורים (אינווריאנטיים)

הגדרה 5.3 העתקה ליניארית ניתנת לשילוש

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $T:V\to V$ אופרטור. תת מרחב W של V נקרא תת מרחב T שמור אם $T(W)\subseteq W$.

דוגמה 5.4

$$W=\{\bar{0}\}\subseteq V$$

תת מרחב שמור לכל $T:V\to V$.

דוגמה 5.5

אם $W=V_\lambda$ המרחב עצמי של λ ביחס לאופרטור T. אז לכל $u\in V_\lambda$,

$$T(u)=\lambda u\in V_\lambda$$

לכן V_λ
הוא תת מרחב שמור לכל $T:V\to V$.

דוגמה 5.6

הוכיחו כי לכל אופרטור $T:V\to V$:

א) תת מרחב T $\ker$ הוא תת מרחב T - שמור.

ב) תת מרחב T Im הוא תת-מרחב T - שמור.

פתרון:

א) צריך להוכיח ש T $\ker T$ שמור.

לכל $u \in \ker T$,
$$T(u) = \bar{0} \in \ker(T)$$
לכן תת מרחב T - שמור.

ב) צריך להוכיח ש T Im הוא תת-מרחב T- שמור.

לכל $u \in \text{Im}(T)$,
$$T(u) \in \text{Im}(T)$$
לכן $\text{Im}(T)$ הוא תת מרחב T - שמור.

דוגמה 5.7

יהי u וקטור עצמי של אופרטור T ששייך לערך עצמי λ. נסמן $V_1 = \text{span}(u)$. הוכיחו כי V_1 תת מרחב שמור.

פתרון:

צריך להוכיח ש $T(u_1) \subseteq V_1$.

נקח $u \in V_1$.
$\Leftarrow$
קיים $\alpha \in \mathbb{F}$ כך ש $u = \alpha u$. אז
$$T(u) = \alpha T(u) = \alpha \cdot \lambda u \in \text{sp}(u) = V_1$$

5.4 *העתקה ניתנת לשילוש אא"ם קיימת סדרת תת מרחבים

משפט 5.5 העתקה ניתנת לשילוש אא"ם קיימת סדרת תת מרחבים T שמורים

יהי V מרחב וקטורי n-ממדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $T: V \to V$ אופרטור. T ניתנת לשילוש אם"ם קיימת סדרה של תת מרחבים $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$ כך ש- V_i הוא תת מרחב T שמור וגם $\dim(V_i) = i$ לכל $1 \leq i \leq n$.

הוכחה: <u>נוכיח אם</u>

נניח ש T ניתנת לשילוש. אז קיים בסיס $U=\{u_1,\dots,u_n\}$ שעבורו $[T]_U$ משולשית. ז"א

$$[T]_U=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{aligned} T(u_1) =& a_{11}u_1 \ , \\ T(u_2) =& a_{12}u_1+a_{22}u_2 \ , \\ & \vdots \\ T(u_n) =& a_{1n}u_1+a_{2n}u_2+\ldots+a_{nn}u_n \ . \end{aligned}$$

נסמן $V_i=\text{span}(u_1,\dots,u_i)$. אז $\dim(V_i)=i$.

לכן, $V_1\subset V_2\subset\ldots\subset V_n=V$,
בנוסף $T(u_1),\dots,T(u_i)\in V_i$.

יהי $u\in V_i$. אז $u=\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_iu_i$. לכן לכל $u\in V_i$:

$$T(u)=\alpha_1T(u_1)+\ldots+\alpha_iT(u_i)\in V_i$$

ז"א V_i תת מרחב T שמור.

<u>נוכיח רק אם</u>

נניח שקיימת סדרת תת מרחבים T שמורים $V_1\subset V_2\subset\ldots\subset V_{n-1}\subset V_n=V$ כך ש

$\forall i\ \dim(V_i)=i$.

נבנה בסיס $U=\{u_1,\dots,u_n\}$ של V כך שלכל $1\leq i\leq n$, $\{u_1,\dots,u_i\}$ הוא בסיס של V_i. את הבסיס U נבנה ע"י אינדוקציה על n.

<u>עבור $n=1$</u>:

$\dim(V_1)=1$ לכן קיים וקטור $u_1\in V_1$. הוקטור $\{u_1\}$ מהווה בסיס של V_1.

<u>הנחת אינדוקציה:</u>
נניח שעבור $1<i<n$ בנינו בסיס $\{u_1,\dots,u_i\}$ של V_i.

$\dim(V_{i+1})=\dim(V_i)+1$.

לכן, קיים $u_{i+1}\in V_{i+1}/V_i$. אז $u_1,\dots,u_i,u_{i+1}\in V_{i+1}$ בת"ל. לכן $\{u_1,\dots,u_i,u_{i+1}\}$ בסיס של V_{i+1}.
הוכחנו דרך אינדוקציה כי קיים בסיס $U=\{u_1,\dots,u_n\}$ של V כך שלכל $1\leq i\leq n$, $\{u_1,\dots,u_n\}$ בסיס של V_i.

כעת, כיוון ש- V_i תת מרחבים T שמורים, מקבלים

$$\begin{aligned} T(u_1) =& a_{11}u_1 \ , \\ T(u_2) =& a_{12}u_1 + a_{22}u_2 \ , \\ T(u_3) =& a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3 \ , \\ &\vdots \\ T(u_n) =& a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + a_{3n}u_3 + \ldots + a_{nn}u_n \ . \end{aligned}$$

לכן

$$[T]_U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \ldots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

מטריצה משולשית. ■

5.5 *אלגוריתם לשילוש מטריצה: פירוק שור

דוגמה 5.8

נתונה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה משולשית T כך ש

$$T = P^{-1}AP$$

פתרון:

<u>שלב 1:</u> נמצא ערכים עמצים של A:

$$|A - \lambda I| = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \ .$$

הערכים עמציים הם $\lambda = 1$, $\lambda = -1$, $\lambda = 2$.

<u>שלב 2:</u> נמצא הוקטור עצמי השייך חערך עצמי $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x, y, z) = (3, -2, 1)z$ $z \in \mathbb{R}$. לכן הוקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda = 1$ הוא $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>שלב 3:</u> נשלים את u_1 לבסיס של $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ואז נגדיר את המטריצה

$$U_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>שלב 4:</u> נגדיר

$$U_1^{-1} A U_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

<u>שלב 5:</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} , \qquad A_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

עכשיו נחזור על שלבים $1-5$ עבור המטריצה A_1 המתקבל.

<u>שלב 1':</u> נמצא ערכים עמצים של A_1:

$$|A_1 - \lambda I| = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \ .$$

הערכים עמציים הם $\lambda = -1$, $\lambda = 2$.

<u>שלב 2':</u> נמצא הוקטור עצמי השייך חערך עצמי $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y) = (-\frac{1}{2}, 1)y$ $y \in \mathbb{R}$. לכן הוקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda = -1$ הוא $\mathrm{u}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>שלב 3':</u> נשלים את u_1 לבסיס של $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ואז נגדיר את המטריצה

$$M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ואת המטריצה

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>שלב 4':</u> נגדיר

$$M_2^{-1}A_1M_2=\begin{pmatrix}-2&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{3}&\frac{4}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-\frac{8}{3}\\0&2\end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה משולשית עילית אז התהליך מסתיים כאן.

$$(U_1U_2)^{-1}A(U_1U_2)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{2}{3}\\0&-1&-\frac{8}{3}\\0&0&2\end{pmatrix}=T$$

לכן מצאנו P הפיכה ו T משולשית כך ש-

$$P^{-1}AP=T$$

דוגמה 5.9

נתונה $A=\begin{pmatrix}3&1&2&0\\0&7&4&0\\0&0&1&0\\0&0&1&2\end{pmatrix}$ מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה משולשית T כך ש

$$T=P^{-1}AP$$

פתרון:

<u>שלב 1:</u> נמצא ערכים עמצים של A:

$$|A-\lambda I|=\lambda^4-13\lambda^3+53\lambda^2-83\lambda+42=(\lambda-7)(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1)=0\ .$$

הערכים עמציים הם $\lambda=1$, $\lambda=2$, $\lambda=3$, $\lambda=7$.

<u>שלב 2:</u> נמצא הוקטור עצמי השייך חערך עצמי $\lambda=1$:

$$\begin{pmatrix}2&1&2&0\\0&6&4&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&2&0\\0&6&4&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&2&0\\0&3&2&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z,w)=(2,2,-3,3)w$ $w\in\mathbb{R}$. לכן הוקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda=1$ הוא $u_1=\begin{pmatrix}2\\2\\-3\\3\end{pmatrix}$

<u>שלב 3:</u> נשלים את u_1 לבסיס של $\mathbb{R}^4$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2\\2\\-3\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}$$

ואז נגדיר את המטריצה

$$U_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>שלב 4:</u> נגדיר

$$U_1^{-1}AU_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0\\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 7 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 6 & 2 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & 4 & 0\\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>שלב 5:</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 6 & 2 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & 4 & 0\\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0\\ \frac{3}{2} & 4 & 0\\ -\frac{3}{2} & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

עכשיו נחזור על שלבים $1-5$ עבור המטריצה A_1 המתקבל.

<u>שלב 1':</u> נמצא ערכים עמצים של A_1:

$$|A_1 - \lambda I| = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 41\lambda + 42 = -(\lambda-7)(\lambda-3)(\lambda-2) = 0 \ .$$

הערכים עמציים הם $\lambda=2$, $\lambda=3$, $\lambda=7$.

<u>שלב 2':</u> נמצא הוקטור עצמי השייך חערך עצמי $\lambda=2$:

הוקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda=2$ הוא $\mathrm{u}_1 = \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}$

<u>שלב 3':</u> נשלים את u_1 לבסיס של $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix} \right\}$$

ואז נגדיר את המטריצה

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ואת המטריצה

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שלב 4': נגדיר

$$M_2^{-1}A_1M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & 4 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 4 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה משולשית עילית אז התהליך מסתיים כאן.

שלב 5':

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & {\color{red}4} & {\color{red}\frac{3}{2}} \\ 0 & {\color{red}2} & {\color{red}6} \end{pmatrix} , \qquad {\color{red}A_2 = \begin{pmatrix} 4 & \frac{3}{2} \\ 2 & 6 \end{pmatrix}} .$$

עכשיו נחזור על שלבים $1'-5'$ עבור המטריצה A_2 המתקבל.

שלב 1'': נמצא ערכים עמצים של A_2:

$$|A_2 - \lambda I| = \lambda^2 - 10\lambda + 21 = -(\lambda - 7)(\lambda - 3) = 0 .$$

הערכים עמציים הם $\lambda = 3$, $\lambda = 7$.

שלב 2'': נמצא הוקטור עצמי השייך חערך עצמי $\lambda = 3$:

הוקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda = 3$ הוא $\mathrm{w}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

שלב 3'': נשלים את w_1 **לבסיס של** $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ואז נגדיר את המטריצה

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ואת המטריצה

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

שלב 4'': נגדיר

$$M_3^{-1}A_2M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & \frac{3}{2} \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה משולשית עילית אז התהליך מסתיים כאן.

$$(U_1U_2U_3)^{-1}A(U_1U_2U_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = T$$

לכן מצאנו P הפיכה ו T משולשית כך ש-

$$P^{-1}AP = T$$

שעור 6
צורת ז'ורדן

הגדרה 6.1 מטריצת ז'ורדן נילפוטנטית יסודית מסדר n

יהי $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\} = E=\{e_1,\ldots,e_n\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$.
המטריצה $J_n(0)\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מוגדרת

$$J_n(0)=\begin{pmatrix}| & | & | & & |\\ \bar{0} & e_1 & e_2 & \ldots & e_{n-1}\\ | & | & | & & |\end{pmatrix}$$

שהעמודה הראשונה שלה היא וקטור האפס ושלכל $2\le i\le n$ העמודה ה- i שלה היא e_{i-1}, נקראת מטריצת ז'ורדן נילפוטנטית יסודית מסדר n. כלומר:

$$J_n(0)=\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ & & & & 0\end{pmatrix}$$

הגדרה 6.2 בלוק ז'ורדן

בלוק ז'ורדן $J_k(\lambda)$, $k\in\mathbb{N}$, $\lambda\in\mathbb{F}$ הוא מטריצה מסדר $k\times k$ מצורה

$$J_k(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & & \ddots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda\end{pmatrix}$$

דוגמה 6.1

$$J_4(2)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

דוגמה 6.2

מצאו את הפולינום האופייני של $J_4(2)$.

פתרון:
$J_4(2)$ משולשית עליונה, לכן הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים, והערכים עצמיים נמצאים על האלכסון הראשי. לכן נקבל

$$P_{J_4(2)} = (\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-2) = (\lambda-2)^4 \ .$$

יש ערך עצמי יחיד $\lambda=2$ מריבוי אלגברי 4. נמצא את הריבוי הגאומטרי:

$$(A-2I_{4\times4}) = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

אנחנו רואים מייד כי $\dim V_2 = 3$. ז"א הריבוי גאומטרי פחות מהריבוי אלגברי, ולכן המטריצה לא לכסינה.

משפט 6.1 בלוק ז'ורדן לא לכסין

$J_k(\lambda)$ לא לכסין.

הוכחה:

$$J_k(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & & \ddots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$J_k(\lambda_1)$ משולשית עליונה. לכן הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים, והערכים עצמיים נמצאים על האלכסון הראשי (משפט 3.19).

$$p_{J_k(\lambda_1)}(\lambda) = \underbrace{(\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_1)}_{\text{פעמים } k} = (\lambda-\lambda_1)^k$$

יש ערך עצמי יחיד: $\lambda=\lambda_1$ מריבוי אלגברי k. נחשב את המרחב עצמי V_{λ_1}:

$$(A-\lambda_1 I_{k\times k}) = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&\ldots&0\\ 0&0&1&0&\ldots&0\\ 0&0&0&1&\ldots&0\\ \vdots&&&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&&&&\ddots&1\\ 0&0&0&0&\ldots&0 \end{pmatrix}$$

נקבל כי $\dim V_{\lambda_1} = k-1$. ז"א הריבוי גאומטרי פחות מהריבוי אלגברי, ולכן המטריצה לא לכסינה. ■

הגדרה 6.3 צרות ז'ורדן

צורת ז'ורדן היא מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ שעל האלכסון הראשי שלה יש בלוקים ז'ורדן ו- 0 בכל מקום אחר.

$$A=\mathrm{diag}\Big(J_{k_1}(\lambda_1),J_{k_2}(\lambda_2),\ldots,J_{k_l}(\lambda_l)\Big)=\begin{pmatrix}J_{k_1}(\lambda_1)&0&\ldots&0\\0&J_{k_2}(\lambda_2)&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&\ldots&J_{k_l}(\lambda_l)\end{pmatrix}$$

דוגמה 6.3

$$\mathrm{diag}\Big(J_2(1),J_3(0)\Big)=\begin{pmatrix}J_1(1)&0\\0&J_3(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{diag}\Big(J_3(5),J_2(7),J_4(9)\Big)=\begin{pmatrix}J_3(5)&0&0\\0&J_2(7)&0\\0&0&J_4(9)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&5&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&5&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&7&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&7&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&9&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&9&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&9&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&9\end{pmatrix}$$

1) צורת ז'ורדן היא משולשית.

2) מטריצה אלכסונית היא בצורת ז'ורדן.

3) צורת ז'ורדן היא הצורה הקרובה ביותר למטירצה אלכסונית.

תהי A מטריצה ריבועית מסדר 2×2 עם ערך עצמיי אחד, λ מריבוי אלגברי 2. יהי V_λ המרחב עצמי. אז ישנן שתי אפשרויות:

(1) $\dim(V_\lambda)=2$ (הריבוי גאומרטי 2).

(2) $\dim(V_\lambda)=1$ (הריבוי גאומרטי 1).

מקרה (1): $\dim(V_\lambda)=2$.

A לכסינה כי לכל ערך עצמי הריבוי אלגברי שווה לריבוי גאומטרי. יהיו שני וקטורים עצמיים u_1, u_2 השייכים לערך עצמי λ. כלומר $A\cdot u_1=\lambda u_1$ ו- $A\cdot u_2=\lambda u_2$. לכן

$$A\cdot\begin{pmatrix}|&|\\u_1&u_2\\|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|&|\\A\cdot u_1&A\cdot u_2\\|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|&|\\\lambda u_1&\lambda u_2\\|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|&|\\u_1&u_2\\|&|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}$$

נסמן $P=\begin{pmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{pmatrix}$ ו- $D=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. אז

$$A\cdot P = PD \qquad \Rightarrow \qquad A = PDP^{-1}$$

A דומה למטריצה אלכסונית ולכן A לכסינה.

מקרה (2): $\dim(V_\lambda)=1$

A לא לכסינה כי עבור הערך עצמי λ הריבוי אלגברי לא שווה לריובי גאומטרי. אז A לא לכסינה אבל היא כן דומה למטריצה בלוק ז'ורדן $J_2(\lambda)$.

יש וקטור עצמי אחד, u_1 השייך לערך עצמי λ. כלומר

$$A\cdot u_1 = \lambda u_1 \qquad \Rightarrow \qquad (A-\lambda I)\cdot u_1 = 0 \ .$$

נגדיר וקטור u_2 כך ש-

$$(A-\lambda I)\cdot u_2 = u_1 \qquad \Rightarrow \qquad A\cdot u_2 = \lambda u_2 + u_1 \ .$$

מכאן

$$(A-\lambda I)^2 u_2 = (A-\lambda I)\cdot u_1 = 0 \ .$$

לכן נקבל

$$A\cdot \begin{pmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ A\cdot u_1 & A\cdot u_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ \lambda u_1 & \lambda u_2 + u_1 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \ .$$

נשים לב שהמטריצה בסוף היא $J_2(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. נסמן $P=\begin{pmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{pmatrix}$. אז קיבלנו

$$A\cdot P = P\cdot J_2(\lambda) \qquad \Rightarrow \qquad A = PJ_2(\lambda)P^{-1} \ .$$

הקבוצת וקטורים $\{u_1,u_2\}$ נקראת **בסיס ז'ורדן** של A.

דוגמה 6.4

תהי $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. מצאו צורת זיורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $A=PJP^{-1}$.

פתרון:

הפולינום האופיינו הוא:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 \\ 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0$$

לכן יש ערך עצמי אחד, $\lambda=2$, מירבוי אלגברי 2. נמצא את המרחב עצמי:

$$(A-2I) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

הפתרון הוא $x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. לכן

$$V_2=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}\ .$$

נסמן ב- $u_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ הוקטור עצמי של ערך עצמי $\lambda=2$. $\dim(V_\lambda)=1<2$. לכן A לא לכסינה. נסמו הוקטור עצמי $u_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

$$(A-\lambda I)\cdot u_2=u_1\ .$$

נסמן $u_2=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

$$(A-2I)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}0&3&1\\0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}0&1&\frac{1}{3}\\0&0&0\end{array}\right)$$

לכן $u_2=\begin{pmatrix}x\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$. נבחר $x=1$ ונקבל $u_2=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

$P=\begin{pmatrix}|&|\\u_1&u_2\\|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$.

$$A=PJP^{-1}\ .$$

דוגמה 6.5

תהי $A=\begin{pmatrix}4&0&1\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$. מצאו צורת זיורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $A=PJP^{-1}$.

פתרון:
הפולינום האופיינו הוא:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&0&-1\\0&\lambda-4&0\\0&0&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-4)^3=0$$

לכן יש ערך עצמי אחד, $\lambda=4$, מירבוי אלגברי 3. נמצא את המרחב עצמי:

$$(A-4I)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

הפתרון הוא $x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. לכן

$$V_4=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\ .$$

$\dim(V_\lambda) = 2 < 3$. לכן A לא לכסינה. נסמן הוקטורים בבסיס של V_4 ב- $u_1 = \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}$. נרשום וקטור עצמי w_1 של $\lambda = 4$ כצירוף לינארי של הבסיס הזה:

$$w_1 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \ .$$

נגדיר w_2 לפי:

$$(A-4I)\cdot w_2 = w_1 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \ .$$

נסמן $w_2 = \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix}$ ונרשום את המשוואה בצורה

$$(A-4I)\cdot \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2\\ \alpha_1\\ 0 \end{pmatrix}$$

נרכיב את המטריצה המורחבת של המשוואה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש פתרון כאשר $\alpha_1 = 0$. נבחור $\alpha_2 = 1$ ונקבל את הפתרון $w_2 = \begin{pmatrix} x\\y\\1 \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$. המשתנים x, y יכולים לקבל כל ערך. נציב $x = 1, y = 1$ ונקבל $w_2 = \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}$.

נבנה בסיס ז'ורדן מהוקטורים עצמיים $u_1 = \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}$ והוקטור המוכלל $u_3 = \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}$.

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A = PJP^{-1} \ .$$

שימו לב שבדוגמה הזאת J צורת ז'ורדן מצורה

$$J = \text{diag}\left(J_1(\lambda), J_2(\lambda)\right) = \text{diag}\left(J_1(4), J_2(4)\right) \ .$$

דוגמה 6.6

תהי $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. מצאו צורת זיורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $A = PJP^{-1}$.

פתרון:

הפולינום האופיינו הוא:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-4 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-4)^3 = 0$$

לכן יש ערך עצמי אחד, $\lambda = 4$, מירבוי אלגברי 3. נמצא את המרחב עצמי:

$$(A-4I) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

הפתרון הוא $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. לכן

$$V_4 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

$\dim(V_\lambda) = 1 < 3$. לכן A לא לכסינה. נסמן הוקטור בבסיס של V_4 ב- $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$(A-4I) \cdot u_2 = u_1 \ .$$

נסמן $u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$(A-4I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

הפתרון הוא $u_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(A-4I) \cdot u_3 = u_2 \ .$$

נסמן $u_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

הפתרון הוא $u_3 = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\beta \in \mathbb{R}$. נציב $\alpha = 1$, $\beta = 1$ ונקבל הבסיס ג'ורדן:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A = PJP^{-1} \ .$$

שימו לב שבדוגמה הזאת J צורת ז'ורדן מצורה

$$J = J_3(\lambda) = J_3(4) \ .$$

משפט 6.2 משפט ז'ורדן

יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי מעל שדה $\mathbb{F}$. נניח שהפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים

$$p(x) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(x - \lambda_2)^{n_2} \ldots (x - \lambda_l)^{n_l}$$

כאשר $\lambda_i \neq \lambda_j$ עבור $i \neq j$ לכל $1 \leq i \leq l$. נניח שפולינום המינימלי הוא

$$m(x) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \ldots (x - \lambda_l)^{m_l}$$

כאשר $1 \leq m_i \leq n_i$ לכל i. אז יש ל- T יצוג ע"י מטריצה מצורת ז'ורדן מצורה

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 & \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \beta_l \end{pmatrix}$$

כאשר β_i מתאים לערך עצמי λ_i,

$$\beta_i = \text{diag}\Big(J_{a_1}(\lambda_i), J_{a_2}(\lambda_i), \ldots, J_{a_s}(\lambda_i)\Big) = \begin{pmatrix} J_{a_1}(\lambda_i) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{a_2}(\lambda_i) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & J_{a_s}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

כאשר

(1 $a_1 = m_i$

(2 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_s$

(3 $a_1 + a_2 + \ldots + a_s = n_i$

(4 s הוא הריבוי הגאומרטי של λ_i

לכן, שתי מטריצות דומות אם ורק אם יש להן אותה צורת ז'ורדן עד כדי סדר הבלוקים.

דוגמה 6.7

נתון פולינום אופייני $p(x) = (x-2)^4(x-3)^3$ ופולינום מינימלי $m(x) = (x-2)^2(x-3)^2$ אז צורת ז'ורדן

היא

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

נמצא β_1 עבור $\lambda = 2$:

יש שתי אפשרויות עבור β_1.

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} J_2(2) & 0 \\ 0 & J_2(2) \end{pmatrix} \qquad \text{או} \qquad \beta_1 = \begin{pmatrix} J_2(2) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(2) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(2) \end{pmatrix}$$

נחשב β_2 עבור $\lambda = 3$:

$$\beta_2 = \begin{pmatrix} J_2(3) & 0 \\ 0 & J_1(3) \end{pmatrix}$$

בכדי לקבוע β_1 יש למצוא את הירבוי הגאומטרי של $\lambda = 2$.

מספר הבלוקים ב- β_1 שווה לריבוי הגאומרי של $\lambda = 2$.

דוגמה 6.8

נתון הפולינום האופייני $p(x) = (x-2)^3(x-5)^2$ מצאו את הצורות ז'ורדן האפשריות.

פתרון:

האפשרויות של הפולינום המינימלי הן

$$(x-2)^3(x-5)^2\ , \quad (x-2)^3(x-5)\ , \quad (x-2)^2(x-5)^2\ , \quad (x-2)^2(x-5)\ , \quad (x-2)(x-5)^2\ , \quad (x-2)(x-5)\ .$$

לכן האפשרויות לצורת ז'ורדן הן:

$\underline{m(x) = (x-2)(x-5)}$

$$\begin{pmatrix} J_1(2) & & & & \\ & J_1(2) & & & \\ & & J_1(2) & & \\ & & & J_1(5) & \\ & & & & J_1(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\underline{m(x) = (x-2)^2(x-5)}$

$$\begin{pmatrix} J_2(2) & & & \\ & J_1(2) & & \\ & & J_1(5) & \\ & & & J_1(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\underline{m(x) = (x-2)^3(x-5)}$

$$\begin{pmatrix} J_3(2) & & \\ & J_1(5) & \\ & & J_1(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{m(x) = (x-2)(x-5)^2}$$

$$\begin{pmatrix} J_1(2) & & & \\ & J_1(2) & & \\ & & J_1(2) & \\ & & & J_2(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{m(x) = (x-2)^2(x-5)^2}$$

$$\begin{pmatrix} J_2(2) & & \\ & J_1(2) & \\ & & J_2(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{m(x) = (x-2)^3(x-5)^2}$$

$$\begin{pmatrix} J_3(2) & \\ & J_2(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

דוגמה 6.9

למטריצות A ו- B יש אותו פולינום מינימלי ופולינום אופייני:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad p_A(x) = x^4 \ , \qquad m_A(x) = x^2 \ .$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad p_B(x) = x^4 \ , \qquad m_B(x) = x^2 \ .$$

מטריצות A ו- B לא דומות אבל

- למרטיצות A ו- B יש אותם ערכים עצמיים,
- $|A| = |B|$ אבל
- $\text{rank}(A) \neq \text{rank}(B)$.

בדוגמה היו שתי מטריצות לא דומות עם אותם $p(x)$ ו- $m(x)$, $|A|=|B|$ אותם ערכים עצמיים וגם אותה דרגה.

משפט 6.3 צורת ז'ורדן של מטריצה 3×3

עבור מטריצות 3×3 צורות פולינום אופייני הן:

$$p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ , \qquad p(x)=(x-a)^2(x-b)\ , \qquad p(x)=(x-a)^3\ .$$

מקרה 1:

$$p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ , \qquad m(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ .$$

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

מטריצה אלכסונית. הצ'ורת ז'ורדן היא

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(a) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(b) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(c) \end{pmatrix}$$

מקרה 2:

$$p(x)=(x-a)^2(x-b)$$

$\Leftarrow$ ישנן שתי אפשרויות לפולינום המינימלי:

$$m(x)=(x-a)(x-b) \qquad \vee \qquad m(x)=(x-a)^2(x-b)$$

$\underline{m(x)=(x-a)(x-b)}$

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$\begin{pmatrix} J_1(a) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(a) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$\underline{m(x)=(x-a)^2(x-b)}$

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$\begin{pmatrix} J_2(a) & 0 \\ 0 & J_1(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

מקרה 3:

$$p(x) = (x-a)^3$$

אז ישנן 3 אפשרויות ל- $m(x)$:

$$(x-a)\ , \qquad (x-a)^2\ , \qquad (x-a)^3\ .$$

$m(x) = (x-a)$

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$\begin{pmatrix} J_1(a) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(a) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$m(x) = (x-a)^2$

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$\begin{pmatrix} J_2(a) & 0 \\ 0 & J_1(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$m(x) = (x-a)^3$

קיימת צורת ז'ורדן אחת:

$$\begin{pmatrix} J_3(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

ז"א לכל פולינום מינימלי כאן יש צורת ז'ורדן אחת. לכן כל שתי מטריצות מסדר 3×3 עם אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי הן דומות אחת לשניה.

דוגמה 6.10

מצאו את צורת ז'ורדן ובסיס מז'רדן אל מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{aligned}
p_A(x) =&|xI-A|\\
=&\begin{vmatrix} x-1 & 3 & -4 \\ -4 & x+7 & -8 \\ -6 & 7 & x+7 \end{vmatrix}\\
=&(x-1)\begin{vmatrix} x+7 & -8 \\ 7 & x+7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -4 & -8 \\ -6 & x+7 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -4 & x+7 \\ -6 & 7 \end{vmatrix}\\
=&(x-1)\left((x+7)^2+56\right) - 3\left(-28-4x+48\right) - 4\left(-28-6(7+x)\right)\\
=&-(x+1)^2(x-3)
\end{aligned}$$

האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$m(x)=(x+1)(x-3) \qquad \text{או} \qquad m(x)=(x+1)^2(x-3)\ .$$

נבדוק איזה מהם מתאפס ע"י A:

$$(A+I)(A-3)=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix} \neq 0$$

לכן $m(x)=(x+1)^2(x-3)$. הצורת ז'ורדן היא

$$\begin{pmatrix} J_2(-1) & 0 \\ 0 & J_1(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

נמצא את הבסיס המז'רדן: $\lambda=-1$ ערך עצמי. נמצא וקטור עצמי השייך ל $\lambda=-1$:

$$(A+I)=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z)=(z,2z,z)$ $z\in\mathbb{R}$.

$$V_{-1}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

נסמן את הבסיס של V_{-1} ב- $u_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$(A+I)u_2=u_1$$

נסמן $u_2=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -6 & 8 & 2 \\ 6 & -7 & 8 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 6 & -7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $(x,y,z)=(-1+z,-1+2z,z)$ $z\in\mathbb{R}$. **נציב** $z=1$:

$$u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

נחפש הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=3$:

$$(A-3I)=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 0 & -16 & 16 \\ 0 & -16 & 16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(x,y,z)=(\frac{1}{2}z,z,z)$ $z\in\mathbb{R}$.

$$u_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

לכן המרוצה P של הבסיס ג'ורדן היא
$$P=\begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

והצורת ז'ורדן היא
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_2(-1) & 0 \\ 0 & J_1(3) \end{pmatrix}=J$$
לכן.

$$A=PJP^{-1}$$

דוגמה 6.11

מצאו את צורת ז'ורדן אל מטריצה

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

מעל $\mathbb{C}$ ומטריצה P כך ש $P^{-1}AP=J$.

פתרון:

$$\begin{aligned}
p_A(x) =&|x - IA|\\
=&\begin{vmatrix} x+4 & -2 & -10 \\ 4 & x-3 & -7 \\ 3 & -1 & x-7 \end{vmatrix}\\
=&(x+4)\begin{vmatrix} x-3 & -7 \\ -1 & x-7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 3 & x-7 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 4 & x-3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\\
=&(x+4)\left(x^2-10x+21-7\right) + 2\left(4x-28+21\right) - 10\left(-4-3x+9\right)\\
=&(x+4)(x^2-10x+14) + 2\left(4x-7\right) - 10\left(-3x+5\right)\\
=&x^3-10x^2+14x+4x^2-40x+56+8x-14+30x-50\\
=&x^3-6x^2+12x-8\\
=&(x-2)^3 \ .
\end{aligned}$$

האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$m(x) = (x-2) \qquad \text{או} \qquad m(x) = (x-2)^2 \qquad \text{או} \qquad m(x) = (x-2)^3 \ .$$

נבדוק איזה מהם מתאפס ע"י A:

$$(A-2I) \neq 0 \ , \qquad (A-2I)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \neq 0$$

לכן $m(x) = (x-2)^3$. הצורת ז'ורדן היא

$$J = \left(J_3(2)\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

נמצא את הבסיס המז'רדן: $\lambda = 2$ ערך עצמי. נמצא את המרחב עצמי ששייך ל $\lambda = 2$:

$$(A-2I) = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z) = (2z,z,z)$ $z \in \mathbb{R}$. לכן המרחב עצמי הוא $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. נסמן את הוקטור בבסיס של V_2 ב-

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נסמן $u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$(A-2I)\cdot u_2 = u_1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 2 & 10 & 2 \\ -4 & 1 & 7 & 1 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $(x,y,z)=(2z,z+1,z)$, $z\in\mathbb{R}$. נסמן

$$u_2=\begin{pmatrix} 2\alpha \\ 1+\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \ , \qquad \alpha\in\mathbb{R} \ .$$

נסמן $u_3=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$(A-2I)u_3=u_2 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 2 & 10 & 2 \\ -4 & 1 & 7 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 1+\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \ .$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 2 & 10 & 2\alpha \\ -4 & 1 & 7 & 1+\alpha \\ -3 & 1 & 5 & \alpha \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to\frac{1}{2}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 5 & \alpha \\ -4 & 1 & 7 & 1+\alpha \\ -3 & 1 & 5 & \alpha \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to 3R_2-4\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 5 & \alpha \\ 0 & -1 & 1 & 3-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1\to -\frac{1}{3}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיים פתרון לכל α. נבחור $\alpha=1$ ונקבל את הפתרון $(x,y,z)=(-1+2z,-2+z,z)$, $z\in\mathbb{R}$. נציב $z=1$ ונקבל

$$u_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן המטריצה של הבסיס ז'ורדן היא

$$P=\begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

והצורת ז'ורדן היא

$$J=J_3(2)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

דוגמה 6.12

תהי $A=\begin{pmatrix} 4&1&1&0&0\\ 0&4&1&0&0\\ 0&0&4&0&0\\ 0&0&0&2&3\\ 0&0&0&0&2 \end{pmatrix}$. מצאו צורת זיורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $A=PJP^{-1}$.

פתרון:

הפולינום האופיינו הוא:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-4&-1&-1&0&0\\ 0&\lambda-4&-1&0&0\\ 0&0&\lambda-4&0&0\\ 0&0&0&\lambda-2&-3\\ 0&0&0&0&\lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-4)^3(\lambda-2)^2=0$$

הערכים עצמיים הם:

$\lambda=2$ מירבוי אלגברי 2.

$\lambda=4$ מירבוי אלגברי 3.

נמצא את המרחב עצמי V_2:

$$(A-2I)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 2&1&1&0&0&0\\ 0&2&1&0&0&0\\ 0&0&2&0&0&0\\ 0&0&0&0&3&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right)$$

הפתרון הוא $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\s\\0\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $s\in\mathbb{R}$. לכן

$$V_2=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\ .$$

$\dim(V_2)=1<2$. לכן A לא לכסינה. נסמו הוקטור עצמי $u_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$.

$$(A-2I)\cdot u_2=u_1\ .$$

נסמן $u_2=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\s\\t\end{pmatrix}$.

$$(A-2I)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}2&1&1&0&0&0\\0&2&1&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&0&3&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

לכן $u_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\alpha\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, $\alpha\in\mathbb{R}$. לכל α קיים פתרון. נציב $\alpha=0$ ונקל $u_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

נמצא את המרחב עצמי V_4:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}0&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&-2&3&0\\0&0&0&0&-2&0\end{array}\right)$$

הפתרון הוא $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$. לכן

$$V_4=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\ .$$

$\dim(V_4)=1<3$. לכן A לא לכסינה. נסמו הוקטור עצמי $u_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

$$(A-4I)\cdot u_4=u_3\ .$$

נסמן $u_4 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix}$.

$$(A-4I)\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

לכן $u_4 = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

$$(A-4I)\cdot u_5 = u_4 \ .$$

נסמן $u_5 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix}$.

$$(A-4I)\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

לכל β קיים פתרון. נציב $\beta = 0$ ונקבל

$u_5 = \begin{pmatrix} \gamma \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\gamma \in \mathbb{R}$. נציב $\gamma = 0$ ונקבל $u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(2) & 0 \\ 0 & J_3(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

$$A = PJP^{-1} .$$

שעור 7
העתקות צמודות לעצמן

7.1 הגדרה של אופרטור הצמוד

משפט 7.1 וקטור בבסיס אורתונורמי

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ ויהי $u \in V$ וקטור של V.
אם $\{b_1, \quad \ldots \quad , b_n\}$ בסיס אורתנורמלי אז

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, b_i \rangle \, b_i \tag{*1}$$

הוכחה: כל וקטור u ניתן לרשום כצרוף ליניארי של וקטורים של בסיס. לכן נרשום u כצרוף ליניארי של הוקטורים של הבסיס האורתונורמלי הנתון:

$$u = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \tag{\#}$$

כאשר $\alpha_i \in \mathbb{C}$ סקלרים. כעת נקח את המכפלה הפנימית של u עם הוקטור b_j:

$$\langle u, b_j \rangle \quad = \quad \langle \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n \ , \ b_j \rangle \quad = \quad \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \ , \ b_j \right\rangle$$

המכפלה הפנימית ליניארית (כלומר למכפלה פנימית יש תכונות הליניאריות $\langle u + \mathrm{v}, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle \mathrm{v}, w \rangle$ ולכל בסקלר α: $\langle \alpha u, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle$) לכן ניתן לרשום הביטוי הזה בצורה

$$\langle u, b_j \rangle \quad = \quad \alpha_1 \langle b_1, b_j \rangle + \cdots + \alpha_n \langle b_n \ , \ b_j \rangle \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle b_i \ , \ b_j \rangle$$

מכיוון שהבסיס אורתונורמלי, אז מתקיים $\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$. לכן כל האיברים בהסכום הזה שווים ל-0 פרט לאיבר $i = j$. לכן

$$\langle u, b_j \rangle = \alpha_j \ .$$

נציב $\alpha_j = \langle u, b_j \rangle$ במשוואה (#) ונקבל

$$u = \sum_{j=1}^{n} \langle u, b_i \rangle \, b_i \ .$$

■

מסקנה 7.1

דרך שקולה לרשום משוואה (1*) עבור וקטור u בבסיס אורתונורמלי $\{b_1, \quad \cdots \quad, b_n\}$ היא:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \langle u, b_1\rangle \\ \langle u, b_2\rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_i\rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_n\rangle \end{pmatrix}_B \ . \tag{*2}$$

משפט 7.2 מטריצה המייצגת של אופרטור על פי בסיס אורתונורמלי

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V. אם $\{b_1, \quad \cdots \quad, b_n\}$ בבסיס אורתונורמלי אז המטריצה המייצגת של T על פי בסיס B, מסומן $[T]$, היא

$$[T] = \begin{pmatrix} \langle T(b_1), b_1\rangle & \langle T(b_2), b_1\rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_1\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_1\rangle \\ \langle T(b_1), b_2\rangle & \langle T(b_2), b_2\rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_2\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_2\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_i\rangle & \langle T(b_2), b_i\rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_i\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_i\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_n\rangle & \langle T(b_2), b_n\rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_n\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_n\rangle \end{pmatrix} ,$$

כלומר האיבר ה- ij של $[T]$ הוא

$$[T]_{ij} = \langle T(b_j), b_i\rangle \ . \tag{3*}$$

הוכחה: המטריצה המייצגת של האופרטור T על פי הבסיס $B = \{b_1, \quad \cdots \quad, b_n\}$ נתונה על ידי הנוסחה

$$[T] = \begin{pmatrix} | & | & & | & & | \\ [T(b_1)]_B & [T(b_2)]_B & \cdots & [T(b_j)]_B & \cdots & [T(b_n)]_B \\ | & | & & | & & | \end{pmatrix}$$

כל עמודה של המטריצה היא וקטור $T(b_j)$ ($1 \leq j \leq n$) על פי הבסיס האורתונורמלי B. אפשר לרשום כל עמודה כמו משוואה (2*) אך עם הוקטור $T(b_j)$ במקום הוקטור u:

$$[T(b_j)]_B = \begin{pmatrix} \langle T(b_j), b_1\rangle \\ \langle T(b_j), b_2\rangle \\ \vdots \\ \langle T(b_j), b_i\rangle \\ \vdots \\ \langle T(b_j), b_n\rangle \end{pmatrix} , \qquad 1 \leq j \leq n \ .$$

אחרי הצבה של הביטוי הזה בכל עמודה של $[T]$, לכל $1 \leq j \leq n$ בהתאמה, נקבל

$$[T] = \begin{pmatrix} \langle T(b_1), b_1\rangle & \langle T(b_2), b_1\rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_1\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_1\rangle \\ \langle T(b_1), b_2\rangle & \langle T(b_2), b_2\rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_2\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_2\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_i\rangle & \langle T(b_2), b_i\rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_i\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_i\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_n\rangle & \langle T(b_2), b_n\rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_n\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_n\rangle \end{pmatrix} ,$$

מכאן הרכיב הכללי בשורה ה- i בעמודה j הוא

$$[T]_{ij} = \langle T(b_j), b_i\rangle \ .$$

■

הגדרה 7.1 אופרטור הצמוד

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V. האופרטור הצמוד מוגדר כך שלכל וקטורים $u, w \in V$ מתקיים

$$\langle T(u), w\rangle = \langle u, \bar{T}(w)\rangle \qquad (*4)$$

משפט 7.3

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V. אם $\bar{T}$ הצמוד של T אז לכל וקטורים $u, w \in V$ מתקיים

$$\langle \bar{T}(u), w\rangle = \langle u, T(w)\rangle \qquad (*5)$$

הוכחה:

$$\langle \bar{T}(u), w\rangle \overset{\text{תכונת הרמיטיות}}{=} \overline{\langle w, \bar{T}(u)\rangle} \overset{\text{הגדרת הצמוד}}{=} \overline{\langle T(w), u\rangle} \overset{\text{תכונת הרמיטיות}}{=} \langle u, T(w)\rangle$$

■

משפט 7.4 נוסחה של אופרטור ואופטור הצמוד על פי בסיס אורתונורמלי

אם $T : V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V, u וקטור של V ו- $\{b_1, \cdots, b_n\}$ בסיס אורתונומרלי של V, אז

$$T(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(u), b_i\rangle\, b_i \ , \qquad (6*)$$

$$\bar{T}(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u,\ T(b_i)\rangle\, b_i \ . \qquad (7*)$$

הוכחה:

<u>הוחכה של (*6):</u>

במקום u במשוואה (*1) מציבים $T(u)$ ונקבל משוואה (*6).

<u>הוחכה של (*7):</u>

במשוואה (*6) במקום האופרטור $T(u)$ מציבים האופרטור הצמוד $\bar{T}(u)$ ואז נשתמש במשוואה (*5):

$$\bar{T}(u) \stackrel{(6*)}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle \bar{T}(u), b_i \rangle b_i \stackrel{(*5)}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle u, T(b_i) \rangle b_i \ .$$

■

דוגמה 7.1

יהי $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ האורפטור המוגדר

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x-y \end{pmatrix} \ .$$

מצאו את $\bar{T}$.

פתרון:

$$T(e_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad T(e_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

נסמן וקטור כללי של $\mathbb{R}^2$ $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\langle \mathrm{v}, T(e_1) \rangle = x+y \ , \qquad \langle \mathrm{v}, T(e_2) \rangle = -x-y \ ,$$

לכן

$$\begin{aligned} \bar{T}(\mathrm{v}) &= \sum_{i=1}^{2} \langle \mathrm{v}, T(e_i) \rangle e_i = \langle \mathrm{v}, T(e_1) \rangle e_1 + \langle \mathrm{v}, T(e_2) \rangle e_2 \\ &= (x+y)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-x-y)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x+y \\ -x-y \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

דוגמה 7.2

יהי $T:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ אופרטור המוגדר

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 3 & 2+3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix+y \\ 3x+(2+3i)y \end{pmatrix} \ .$$

מצאו את $\bar{T}$.

פתרון:

$$T(e_1)=T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i\\3\end{pmatrix}\ ,\quad T(e_2)=T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2+3i\end{pmatrix}$$

נסמן וקטור כללי של $\mathbb{C}^2$

$\mathrm{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ כלשהו. לפי הנוסחה של המכפלה הפנימית הסטנדרטית:

$$\langle \mathrm{v},T(e_1)\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\3\end{pmatrix}\right\rangle=-ix+3y\ ,\qquad \langle \mathrm{v},T(e_2)\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2+3i\end{pmatrix}\right\rangle=x+(2-3i)y\ ,$$

לכן

$$\begin{aligned}\bar{T}(\mathrm{v})&=\sum_{i=1}^{2}\langle \mathrm{v},T(e_i)\rangle\, e_i\\&=\langle \mathrm{v},T(e_1)\rangle\, e_1+\langle \mathrm{v},T(e_2)\rangle\, e_2\\&=(-ix+3y)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+(x+(2-3i)y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-ix+3y\\x+(2-3i)y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

דוגמה 7.3

תהי V המרחב המכפלה פנימית $\mathbb{R}_2[x]$ עם המכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$$

לכל $f(x),g(x)\in\mathbb{R}_2[x]$.

יהי $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ אופרטור המוגדר

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=3b+(a+c)x+(a+b+2c)x^2\ .$$

מצאו את $\bar{T}$.

פתרון:

בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$ הינו $E=\{e_1=1,\ e_2=x,\ e_3=x^2\}$. לכן

$$T(e_1)=T(1)=x+x^2\ ,\quad T(e_2)=T(x)=3+x^2\ ,\quad T(e_3)=T(x^2)=x+2x^2\ .$$

נסמן וקטור כללי של $\mathbb{R}_2[x]$: $\mathrm{v}=a+bx+cx^2$. לפי הנוסחה הנתונה בשביל המכפלה הפנימית:

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{v},(T(e_1)\rangle&=\langle a+bx+cx^2,x+x^2\rangle\\&=\int_0^1\left(x+x^2\right)\left(a+bx+cx^2\right)dx\\&=\int_0^1\left(ax+ax^2+bx^2+bx^3+cx^3+cx^4\right)dx\\&=\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{4}+\frac{c}{5}\\&=\frac{5a}{6}+\frac{7b}{12}+\frac{9c}{20}\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{v}, (T(e_2)\rangle &= \langle a+bx+cx^2, 3+x^2\rangle \\ &= \int_0^1 \left(3+x^2\right)\left(a+bx+cx^2\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(3a+ax^2+3b+bx^3+3c+cx^4\right) dx \\ &= 3a+\frac{a}{3}+3b+\frac{b}{4}+3c+\frac{c}{5} \\ &= \frac{10a}{3}+\frac{13b}{4}+\frac{16c}{5} \ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{v}, (T(e_3)\rangle &= \langle a+bx+cx^2, x+2x^2\rangle \\ &= \int_0^1 \left(x+2x^2\right)\left(a+bx+cx^2\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(ax+2ax^2+bx^2+2bx^3+cx^3+2cx^4\right) dx \\ &= \frac{a}{2}+\frac{2a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}+\frac{2c}{5} \\ &= \frac{7a}{6}+\frac{5b}{6}+\frac{13c}{20} \ .\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\bar{T}(\mathrm{v}) &= \sum_{i=1}^{3} \langle \mathrm{v}, T(e_i))\rangle\, e_i \\ &= \langle \mathrm{v}, T(e_1)\rangle\, e_1 + \langle \mathrm{v}, T(e_2)\rangle\, e_2 + \langle \mathrm{v}, T(e_3)\rangle\, e_3 \\ &= \left(\frac{5a}{6}+\frac{7b}{12}+\frac{9c}{20}\right) e_1 + \left(\frac{10a}{3}+\frac{13b}{4}+\frac{16c}{5}\right) e_2 + \left(\frac{7a}{6}+\frac{5b}{6}+\frac{13c}{20}\right) \\ &= \left(\frac{5a}{6}+\frac{7b}{12}+\frac{9c}{20}\right) + \left(\frac{10a}{3}+\frac{13b}{4}+\frac{16c}{5}\right) x + \left(\frac{7a}{6}+\frac{5b}{6}+\frac{13c}{20}\right) x^2\end{aligned}$$

משפט 7.5 מטריצה המייצגת של אופרטור הצמוד

יהי $T: V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V.
אם $[T]$ המטריצה המייצגת של T אז המטריצה המייצגת של הצמוד $\bar{T}$ היא $\overline{[T]}$.
כלומר:

$$[\bar{T}] = \overline{[T]} \ . \tag{8*}$$

הוכחה: ממשוואה (3*) האיבר ה- ij של המטריצה המייצגת של T הוא $[T]_{ij} = \langle T(b_j), b_i\rangle$. במקום T נציב $\bar{T}$ ונקבל

$$\left[\bar{T}\right]_{ij} \overset{(3*)}{=} \langle \bar{T}(b_j), b_i\rangle \overset{(*5)}{=} \langle b_j, T(b_i)\rangle \overset{\text{תכונת הרמטיות}}{=} \overline{\langle T(b_i), b_j\rangle} = \overline{[T]_{ji}}$$

קיבלנו ש- $\overline{[T]_{ji}} = \left[\bar{T}\right]_{ij}$ (שימו לב לסדר הפוך של האינדקסים).
במילים: האיבר ה- ij של $[\bar{T}]$ שווה לצמוד של האיבר של ji של $[T]$.
לכן $[\bar{T}]$ שווה להמשוחלפת של המטריצה של הצמודים של האיברים של $[T]$. כלומר:

$$[\bar{T}] = \overline{[T]} \ .$$

■

7.2 אופרטור צמוד לעצמו

הגדרה 7.2 העתקה צמודה לעצמה

העתקה ליניארית
$$T : V \to V$$
במרחב מכפלה פנימית נקראת העתקה צמודה לעצמה אם
$$\bar{T} = T \ ,$$
כלומר לכל u, v,
$$\langle T(u), \mathrm{v}\rangle = \langle u, T(\mathrm{v})\rangle \ .$$

- העתקה צמודה לעצמה במרחב אוקלידי ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$) נקראת גם העתקה סימטרית.
- במרחב אוניטרי, ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$) היא נקראת גם העתקה הרמיטית.

הגדרה 7.3 מטריצה צמודה לעצמה

מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ או $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) נקראת מטריצה צמודה לעצמה אם
$$A = \bar{A} \ .$$

- כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ מטריצה כזו נקראת סימטרית.
- כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ מטריצה כזו נקראת הרמיטית.

משפט 7.6 העתקה צמודה לעצמה אם"ם המטריצה המייצגת צמודה לעצמה

יהי V במרחב מכפלה פנימית. העתקה $T : V \to V$ צמודה לעצמה אם"ם המטריצה המייצגת של T בבסיס אורתונורמלי כלשהו של V היא צמודה לעצמה.

דוגמה 7.4

נניח ש- $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ נעתקב במרחב $\mathbb{R}^n$ עם מכפלה פנימית הסטנדרטית שמוגדרת ע"י
$$T(u) = A \cdot u \ .$$
הוכיחו כי T צמודה לעצמה אם"ם A סימטרית.

פתרון:

המטריצה המייצגת של ההעתקה היא $A = [T]_E$. T צמודה לעצמה אם"ם המטריצה המייצגת צמודה לעצמה, כלומר אם $\bar{A} = A$. המטריצה A ממשית, אז $\bar{A} = A^t$. לכן T צמודה לעצמה אם"ם $A = A^t$.

דוגמה 7.5

נניח ש- $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ נעתקב במרחב $\mathbb{C}^n$ עם מכפלה פנימית הסטנדרטית שמוגדרת ע"י
$$T(u) = A \cdot u \ .$$

הוכיחו כי T צמודה לעצמה אס"ם A הרמיטית.

פתרון:
המטריצה המייצגת של ההעתקה היא $[T]_E = A$. T צמודה לעצמה אס"ם המטריצה המייצגת צמודה לעצמה, כלוסר אם $\bar{A} = A$, כלומר אם A הרמיטית. לכן T צמודה לעצמה אס"ם A הרמיטית.

דוגמה 7.6

הוכיחו כי ההעתקה הזהות $I_V : V \to V$ צמודה לעצמה.

פתרון:
המטריצה המייצגת של ההעתקה הזהות היא המטריצה היחידה I. I צמודה לעצמה בגלל ש- $\bar{I} = I$ לכן ההתקה הזהות I_V צמודה לעצמה.

דוגמה 7.7

הוכיחו כי ההעתקה האפס $0_V : V \to V$ צמודה לעצמה.

פתרון:
המטריצה המייצגת של ההעתקה הזהות היא המטריצה האפס $0_{n\times n}$. $0_{n\times n}$ צמודה לעצמה בגלל ש- $\bar{0}_{n\times n} = 0_{n\times n}$. לכן ההתקה האפס 0_V צמודה לעצמה.

דוגמה 7.8

הוכיחו כי ההעתקה סקלרית $S_\alpha : V \to V$ שמוגדרת ע"י $S_\alpha(\mathrm{v}) = \alpha \cdot \mathrm{v}$ צמודה לעצמה אס"ם $\overline{\alpha I} = \alpha I$.

פתרון:
המטריצה המייצגת של

$$[S_\alpha] = \alpha I \ .$$

המטירצה המייצגת צמודה לעצמה אס"ם

$$\bar{\alpha}\bar{I} = \alpha I$$

כלומר אם $\bar{\alpha} = \alpha$.

דוגמה 7.9

במרחב $\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, נתון בסיס

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

נתון ההעתקה לינארית $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ עם הטריצה המייצגת $[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. האם T סימטרית?

פתרון:
שיטה 1

נבחר בסיס אורתונורמלי:

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\ .$$

אז $e_1=-b_2$, $e_2=b_1+b_2$.

לכן

$$[T(b_1)]_B=0\cdot b_1-b_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad [T(b_2)]_B=0\cdot b_1+b_2=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

לכן

$$T(e_1)=-T(b_2)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=e_1+0\cdot e_2\ .$$

$$T(e_2)=T(b_1)+T(b_2)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0\cdot e_1+0\cdot e_2\ .$$

לכן

$$[T]_E=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

מטריצה סימטרית, לכן T העתקה סימטרית.

שיטה 2

$$[T]_B=P_{E\to B}[T]_E P^{-1}_{E\to B}$$

$$\left(\ B\mid E\ \right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&0\\1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&1\\0&1&-1&1\end{array}\right)$$

לכן $P_{E\to B}=\left(\begin{array}{cc}0&1\\-1&1\end{array}\right)$. נמצא $P^{-1}_{E\to B}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}0&1&1&0\\-1&1&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}-1&1&0&1\\0&1&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&0&-1\\0&1&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-1\\0&1&1&0\end{array}\right)$$

לכן $P^{-1}_{E\to B}=\left(\begin{array}{cc}1&-1\\1&0\end{array}\right)$.

$$[T]_B=P_{E\to B}[T]_E P^{-1}_{E\to B}\qquad\Leftrightarrow\qquad [T]_E=P^{-1}_{E\to B}[T]_B P_{E\to B}=\left(\begin{array}{cc}1&-1\\1&0\end{array}\right)\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix}\left(\begin{array}{cc}0&1\\-1&1\end{array}\right)$$
$$=\left(\begin{array}{cc}1&-1\\1&0\end{array}\right)\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

דוגמה 7.10

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

א) אם T ו- S העתקות צמודות לעצמן אז $T+S$ צמודה לעצמה.

ב) אם $T\neq 0$ צמודה לעצמה ו- αT צמודה לעצמה, אז α הוא סקלר ממשי.

ג) אם $T\neq 0$ צמודה לעצמה ו $\alpha=\bar{\alpha}\neq 0$ אז αT צמודה לעצמה.

ד) אם T_1 ו- T_2 צמודות לעצמן אז $T_1\cdot T_2$ צמודה לעצמה.

ה) אם T_1 ו- T_2 צמודות לעצמן ו- T_1 ו- T_2 מתחלפות (ז"א $T_1T_2=T_2T_1$), אז $T_1\cdot T_2$ צמודה לעצמה.

ו) אם T_1 ו- T_2 צמודות לעצמן ו- $T_1\cdot T_2$ צמודה לעצמה, אז T_1 ו- T_2 מתחלפות (ז"א $T_1T_2=T_2T_1$).

ז) אם T צמודה לעצמה, אז T^2 צמודה לעצמה.

פתרון:

א) טענה נכונה. הוכחה:

$$\overline{T+S}=\bar{T}+\bar{S}=T+S\ .$$

ב) αT צמודה לעצמה (נתון) לכן

$$\overline{\alpha T}=\bar{\alpha}\bar{T}=\alpha T\ .$$

T צמודה לעצמה (נתון) לכן $\bar{T}=T$. נציב ונקבל

$$\bar{\alpha}T=\alpha T\qquad\Rightarrow\qquad(\bar{\alpha}-\alpha)T=0\ .$$

$T\neq 0$ (נתון) לכן $\bar{\alpha}-\alpha=0$ לכן $\bar{\alpha}=\alpha$.

ג) טענה נכונה. הוכחה:

T צמודה לעצמה (נתון) לכן

$$\overline{\alpha T}=\bar{\alpha}\bar{T}=\bar{\alpha}T\ .$$

$\bar{\alpha}=\alpha$ (נתון). נציב ונקבל

$$\overline{\alpha T}=\alpha T\ .$$

ד) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$T_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\ ,\qquad [T_1]_E=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$T_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\ ,\qquad [T_2]_E=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$$

T_1 ו- T_2 העתקות סימטריות אבל

$$[T_1\cdot T_2]_E=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

לא סימטרית, לכן $T_1\cdot T_2$ אינה צמודה לעצמה.

ה) טענה נכונה. הוכחה:

נניח $T_1 : V \to V$, $T_2 : V \to V$, העתקות צמודות לעצמן. נניח כי $T_1 \cdot T_2$ העתקה צמודה לעצמה ונניח כי

$$T_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1 \ .$$

אז

$$\overline{T_1 \cdot T_2} = \bar{T}_2 \cdot \bar{T}_1 = T_2 \cdot T_1 = T_1 \cdot T_2 \ .$$

לכן $T_1 \cdot T_2$ צמודה לעצמה.

ו) טענה נכונה. הוכחה:

נניח $T_1 : V \to V$, $T_2 : V \to V$, העתקות צמודות לעצמן ונניח כי $T_1 \cdot T_2$ העתקה צמודה לעצמה. אז

$$\overline{T_1 \cdot T_2} = T_1 \cdot T_2 \ .$$

מצד שני,

$$\overline{T_1 \cdot T_2} = \bar{T}_2 \cdot \bar{T}_1 = T_2 \cdot T_1 \ .$$

לכן

$$T_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1 \ .$$

ז) טענה נכונה. הוכחה:

$$\overline{(TT)} = \bar{T} \cdot \bar{T} = T \cdot T \ .$$

דוגמה 7.11

יהי V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית. תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית. הוכיחו כי $\bar{T} \cdot T$ ו- $T \cdot \bar{T}$ העתקה צמודה לעצמה.

פתרון:

$$\overline{T \cdot \bar{T}} = \bar{\bar{T}} \cdot \bar{T} = T \cdot \bar{T} \ .$$

לכן $T \cdot \bar{T}$ העתקה צמודה לעצמה.
מאותה מידה:

$$\overline{\bar{T} \cdot T} = \bar{T} \cdot \bar{\bar{T}} = \bar{T} \cdot T \ .$$

לכן $\bar{T} \cdot T$ העתקה צמודה לעצמה.

הגדרה 7.4 העתקה אנטי-סימטרית

תהי העתקה לינארית

$$T : V \to V$$

במרחב אוקלידי V. במצב

$$\bar{T} = -T$$

אז T נקראת **אנטי-סימטרית**.

הגדרה 7.5 העתקה אנטי-הרמיטית

תהי העתקה ליניארית

$$T : V \to V$$

במרחב אוניטרי V. במצב

$$\bar{T} = -T$$

אז T נקראת **אנטי-הרמיטית**.

כל מספר מרוכב $z = x + iy$ הוא סכום של מספר ממשי x ומספר מדומה iy. בדומה לכך, כל העתקה ליניארית T היא סכום של שתי העתקות, שאחת מהן צמודה לעצמה והשני אנטי-סימטרית או אנטי-הרמיטית. נוכיח את הטענה הזאת במשפט הבא.

משפט 7.7

תהי $T : V \to V$ העתקה ליניארית כלשהי.
T היא סכום של שתי העתקות, שאחת מהן צמודה לעצמה והשני אנטי-סימטרית או אנטי-הרמיטית.

הוכחה: נניח $T : V \to V$ העתקה ליניארית. נתבונן בהעתקות

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(T + \bar{T}\right) \ , \qquad T_2 = \frac{1}{2}\left(T - \bar{T}\right) \ .$$

אז

$$T = T_1 + T_2 \ .$$

$$\bar{T}_1 = \frac{1}{2}\left(\overline{T + \bar{T}}\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{T} + \bar{\bar{T}}\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{T} + T\right) = T_1 \ .$$

ז"א T_1 צמודה לעצמה.

$$\bar{T}_2 = \frac{1}{2}\left(\overline{T - \bar{T}}\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{T} - \bar{\bar{T}}\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{T} - T\right) = -\frac{1}{2}\left(T - \bar{T}\right) = -T_2 \ .$$

ז"א T_2 אנטי-הרמיטית.

■

משפט 7.8

(1 תהי $T : V \to V$ העתקה ליניארית כלשהי המקיימת

$$\langle T(u), \mathrm{v} \rangle = 0$$

לכל $u, \mathrm{v} \in V$. אז $T = 0$.

(2 אם $T : V \to V$ העתקה צמודה לעצמה המקיימת

$$\langle T(u), u \rangle = 0$$

לכל $u \in V$. אז $T = 0$.

הוכחה:

(1

$$\langle T(u), \mathrm{v}\rangle = 0$$

לכל $u, \mathrm{v} \in V$. נבחר $\mathrm{v} = T(u)$. אז

$$\langle T(u), T(u)\rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T(u) = 0$$

לכל $u \in V$. לכן $T = 0$.

(2 לפי הנתון לכל $u, \mathrm{v} \in V$,

$$\langle T(u+\mathrm{v}), u+\mathrm{v}\rangle = 0 \ , \qquad \langle T(\mathrm{v}), \mathrm{v}\rangle = 0 \ , \qquad \langle T(u), u\rangle = 0 \ .$$

מצד שני,

$$\begin{aligned} \langle T(u+\mathrm{v}), u+\mathrm{v}\rangle &= \langle T(u), u\rangle + \langle T(u), \mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}), u\rangle + \langle T(\mathrm{v}), \mathrm{v}\rangle \\ 0 =& 0 + \langle T(u), \mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}), u\rangle + 0 \\ 0 =& \langle T(u), \mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}), u\rangle \end{aligned}$$

לכן לכל $u, \mathrm{v} \in V$,

$$\langle T(u), \mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}), u\rangle = 0$$

א) במקרה של מרחב אוקלידי (ז"א $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) נקבל

$$\begin{aligned} \langle T(u), \mathrm{v}\rangle &= \langle u, T(\mathrm{v})\rangle && \text{(כי } T \text{ צמודה לעצמה)} \\ &= \langle T(\mathrm{v}), u\rangle && \text{(לפי הסימטריות של מכפלה פנימית במרחב אוקלידי)} \end{aligned}$$

לכן

$$\langle T(u), \mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}), u\rangle = 2\,\langle T(u), \mathrm{v}\rangle = 0$$

לכן $\langle T(u), \mathrm{v}\rangle = 0$ לכל $u, \mathrm{v} \in V$. לכן לפי סעיף (1), $T = 0$.

ב) במקרה של מרחב אוניטרי (ז"א $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) נציב בשוויון שקיבלנו קודם iu במקום u:

$$\langle T(iu), \mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}), iu\rangle = 0$$

לכן

$$i\,\langle T(u), \mathrm{v}\rangle - i\,\langle T(\mathrm{v}), u\rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \langle T(u), \mathrm{v}\rangle - \langle T(\mathrm{v}), u\rangle = 0$$

וגם

$$\langle T(u), \mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}), u\rangle = 0$$

נחבר את שני השוויונים ונקבל:

$$2\,\langle T(u), \mathrm{v}\rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T = 0$$

■

7.3 העתקות אוניטריות

נשים לב שעבור מספר מרוכב z,

$$|z| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z \cdot \bar{z} = 1 \ .$$

נגדיר מושג דומה עבור העתקות לינאריות.

הגדרה 7.6 העתקה אוניטרית

$T:V\to V$ במרחב מכפלה פנימית V נוצר סופית, נקראת העתקה אוניטרית אם

$$T\cdot\bar{T}=\bar{T}\cdot T=I$$

כאשר I העתקה הזהות.

העתקה אוניטרית במרחב אוקלידי (כלומר כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$) נקראת גם העתקה אורתוגונלית.

(1 התנאי $I=\bar{T}\cdot T=T\cdot\bar{T}$ פירושו ש- T הפיכה ו- $T^{-1}=\bar{T}$.

(2 אם V מרחב נוצר סופית ו- S,T העתקות לינאריות מ- V ל- S אז השוויון $I=S\cdot T$ גורר את השוויון $T\cdot S=I$. ז"א כדי לוודא ש- T אוניטרית מספיק לבדוק רק אחד השוויונות $I=T\cdot\bar{T}$ או $\bar{T}\cdot T=I$.

דוגמה 7.12

נניח כי V מרחב מכפלה פנימית של $\mathbb{C}^1$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית

$$\langle z,w\rangle=z\cdot\bar{w}\ .$$

תהי $T:\mathbb{C}^1\to\mathbb{C}^1$ העתקה שמוגדרת $T(z)=\alpha\cdot z$ כאשר $\alpha\in\mathbb{C}$. הוכיחו:

א אם T אוניטרית אז $\alpha\bar{\alpha}=1$.

ב אם T אוניטרית אז $\|T(z)\|=\|z\|$ לכל $z\in\mathbb{C}^1$.

ג אם T אוניטרית אז $\langle T(z),T(w)\rangle=\langle z,w\rangle$ לכל $z,w\in\mathbb{C}^1$.

פתרון:

א $T(z)=\alpha z$ אז

$$\bar{T}(z)=\bar{\alpha}z\ .$$

מכאן

$$\left(\bar{T}T\right)(z)=\bar{T}\left(T(z)\right)=\bar{T}\left(\alpha z\right)=\bar{\alpha}\cdot\alpha z\ .$$

לכן $\bar{T}\cdot T=I$ אם"ם $\bar{\alpha}\cdot\alpha=1$.

ז"א הערך המוחלט של α שווה ל- 1.

ב נחשב את $\|T(z)\|$.

$$\|T(z)\|^2=\langle T(z),T(z)\rangle=\langle\alpha z,\alpha z\rangle=\alpha\cdot\bar{\alpha}\langle z,z\rangle=\langle z,z\rangle=\|z\|^2\ .$$

כלומר $\|T(z)\|=\|z\|$.

ג לכל $z,w\in\mathbb{C}^1$

$$\langle T(z),T(w)\rangle=\langle\alpha z,\alpha w\rangle=\alpha\cdot\bar{\alpha}\langle z,w\rangle=\langle z,w\rangle\ ,$$

כלומר $\langle T(z),T(w)\rangle=\langle z,w\rangle$.

בדוגמה הקודמת מצאנו כי העתקה שומרת על הנורמה ועל המכפלה הפנימית של וקטורים.

התכונות האלה (שמירה על נורמה ועל מכפלה פנימית) מתקיימות לכל העתקה אוניטרית.

כל אחת מהתכונות האלה שקולה לכך שהעתקה תהיה אוניטרית.

משפט 7.9

עבור העתקה ליניארית $T : V \to V$ במרחב מכפלה פנימית נוצר סופית, התנאים הבאים שקולים:

(1) T העתקה אוניטרית.

(2) לכל u, v

$$\langle T(u), T(\mathrm{v})\rangle = \langle u, \mathrm{v}\rangle \ .$$

(3) לכל $u \in V$,

$$\|T(u)\| = \|u\|$$

הוכחה: $(1) \Rightarrow (2)$

נניח ש- T אוניטרית. נבחר $u, \mathrm{v} \in V$. אז

$$\langle T(u), T(\mathrm{v})\rangle = \langle u, \bar{T} \cdot T(\mathrm{v})\rangle = \langle u, I(\mathrm{v})\rangle = \langle u, \mathrm{v}\rangle \ .$$

$(2) \Rightarrow (3)$

נתון שלכל u, v, $\langle T(u), T(\mathrm{v})\rangle = \langle u, \mathrm{v}\rangle$. בפרט:

$$\|T(u)\|^2 = \langle T(u), T(u)\rangle = \langle u, u\rangle = \|u\|^2 \ .$$

$(3) \Rightarrow (1)$

$$\begin{aligned} 0 =& \|T(u)\|^2 - \|u\|^2 \\ &= \langle T(u), T(u)\rangle - \langle u, u\rangle \\ &= \langle \bar{T} \cdot T(u), u\rangle - \langle u, u\rangle \end{aligned}$$

לכן

$$\langle \bar{T} \cdot T(u), u\rangle = \langle u, u\rangle$$

לכן $\bar{T} \cdot T = I$.

■

משפט 7.10

עבור העתקה ליניארית T התנאי שלכל $u \in V$,

$$\|T(u)\| = \|u\|$$

שקול לתנאי שלכל $u, \mathrm{v} \in V$

$$\|T(u) - T(\mathrm{v})\| = \|u - \mathrm{v}\| \ .$$

הוכחה:

1) נניח $\|T(u)\|=\|u\|$ לכל $u\in V$. נקח $u,\mathrm{v}\in V$. אז

$$\|T(u-\mathrm{v})\|=\|u-\mathrm{v}\| \qquad \Rightarrow \qquad \|T(u)-T(\mathrm{v})\|=\|u-\mathrm{v}\| \ .$$

2) נניח $\|T(u)-T(\mathrm{v})\|=\|u-\mathrm{v}\|$ לכל $u,\mathrm{v}\in V$. נגדיר $\mathrm{v}=0$. אז

$$\|T(u)-T(0)\|=\|T(u)\|=\|u-0\|=\|u\| \ .$$

■

הפירוש הגאומטרי של השוויון $\|T(u)-T(\mathrm{v})\|=\|u-\mathrm{v}\|$ הוא שהמרחק בין וקטורים שווה למרחק בין תמונותיהם. מהמשפט נובע כי העתקה אוניטרית שומרת על מרחקים.

נראה במשפט הבא אפיון נוסף של העתקות אוניטריות.

משפט 7.11

יהי V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית, ותהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית.

א) אם T העתקה אוניטרית, ואם $B=\{b_1,\ldots,b_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V, אז גם $\{T(b_1),\ldots,T(b_n)\}$ בסיס אורתונורמלי.

ב) אם קיים בסיס אורתונורמלי של V שהעתקה T מעתיקה לבסיס אורתונורמלי, אז T אוניטרית.

הוכחה:

א)

$$\langle T(b_i),T(b_j)\rangle=\langle b_i,b_j\rangle=\begin{cases}0 & i\neq j \ ,\\ 1 & i=j \ .\end{cases}$$

לכן $\{T(b_1),\ldots,T(b_n)\}$ בסיס אורתונורמלי.

ב) נניח ש- $B=\{b_1,\ldots,b_n\}$ ו- $B'=\{T(b_1),\ldots,T(b_n)\}$ בסיסים אורתונורמליים. לכל $u,\mathrm{v}\in V$,

$$u=\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \ , \qquad \mathrm{v}=\sum_{i=1}^n \beta_i b_i \ .$$

אז

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle=\sum_{i=1}^n \alpha_i\bar{\beta}_i \ .$$

$$\langle T(u),T(\mathrm{v})\rangle=\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i T(b_i),\sum_{i=1}^n \beta_i T(b_i)\right\rangle=\sum_{i=1}^n \alpha_i\bar{\beta}_i$$

ז"א $\langle T(u),T(\mathrm{v})\rangle=\langle u,\mathrm{v}\rangle$. לכן T העתקה אוניטרית.

■

7.4 מטריצות מייצגות של העתקות אוניטירות

נניח $T:V\to V$ העתקה אוניטרית, B בסיס אורתונורמלי. נסמן $[T]_B=A$. אז $[\bar{T}]_B=\bar{A}$. לכן

$$[T\bar{T}]_B=[T]_B\cdot[\bar{T}]_B=A\cdot\bar{A}=I$$

וגם

$$[\bar{T}T]_B=[\bar{T}]_B\cdot[T]_B=\bar{A}\cdot A=I$$

הגדרה 7.7

תהי A מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$. ל-A קוראים מטריצה אוניטרית אם

$$A\cdot\bar{A}=\bar{A}\cdot A=I$$

(תנאי שקול $A^{-1}=\bar{A}$.)

אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ למטריצה אוניטרית קוראים מטריצה אורתוגונלית, ז"א כאשר

$$A\cdot A^t=A^t\cdot A=I\ ,$$

או, באופן שקול:

$$A^{-1}=A^t\ .$$

דוגמה 7.13

$$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\ ,\qquad T(\mathrm{v})=A\cdot\mathrm{v}$$

כאשר $A=[T]_E$. אם A אורתוגונלית, אז $A\cdot A^t=I$. לכן

$$|A|\cdot|A^t|=|A|^2=1$$

לכן

$$|A|=\pm1\ .$$

בנוסף, אם A אורתוגונלית, אז

$$A^{-1}=A^t\ .$$

נסמן

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

<u>המקרה $|A|=1$.</u>

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}=A^t=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\ .$$

לכן $c=-b$, $a=d$. כלומר

$$A=A_1=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$$

כאשר $a^2+b^2=1$.

<u>המקרה $|A|=-1$.</u>

במקרה של $|A|=-1$ נקבל

$$A^{-1}=-\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=A^t=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \ ,$$

לכן $b=c$, $d=-a$. כלומר

$$A=A_2=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

כאשר $a^2+b^2=1$.

מהשוויון הזה, $a^2+b^2=1$, נובע שקיימת זווית יחידה ϕ $(0\leq\phi<2\pi)$ כך ש:

$$b=\sin\phi \ , \qquad a=\cos\phi \ .$$

לכן ניתן לרשום:

$$A_1=\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$A_2=\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

מצאנו צורה של כל המטריצות האורתוגונליות ב $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

המשמעות הגאומטרית של העתקה $u\to A_i u$ היא הסיבוב של המישור בזווית ϕ נגד הכיוון השעון. נשים לב כי

$$A_2=\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

כלומר

$$A_2=A_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ היא המטריצה הסטנדרטית של העתקה השיקוף של המישור ביחס לציר ה- x. לכן פירושה הגאומטרית של A^{-1} הוא שיקוף המישור ביחס לציר ה- x, ולאחר מכן סיבוב בזווית ϕ נגד כיוון השעון.

נרשום את צנאי האוניטריות של מטריצה A בעזרת קואורדינטות.

משפט 7.12

1) אם A מטריצה אוניטרית מסדר n מעל שדה $\mathbb{F}$, אז גם שורותיה וגם עמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{F}^n$.

2) אם שורות (או עמודות) של מטריצה ריבועית מסדר n מעל $\mathbb{F}$ מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ ביחס מכפלה הפנימית הסטנדרטית אז המטריצה אוניטרית.

הוכחה: נסמן

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \ , \qquad \bar{A}=\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \cdots & \bar{a}_{n1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} \ .$$

1) נניח ש A אוניטרית. אז $A\cdot\bar{A}=I$ וגם $\bar{A}\cdot A=I$. אז האיבר (i,j) של המטריצה $A\cdot\bar{A}$ הוא:

$$\left(A\bar{A}\right)_{ij}=\begin{pmatrix}a_{i1} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\bar{a}_{j1}\\ \vdots\\ \bar{a}_{jn}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\bar{a}_{jk}$$

לכן מטריצה A אוניטרית כאשר

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\bar{a}_{jk}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

הביטוי $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\bar{a}_{jk}$ הוא המכפלה פנימית ב- $\mathbb{F}^n$ של השורה ה- i והשורה ה- j של מטריצה A. לכן, אם A אוניטרית, אז שורות A הן בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$.

באופן דומה, האיבר ה- (i,j) של המטריצה $\bar{A}A$:

$$\left(\bar{A}A\right)_{ij}=\begin{pmatrix}\bar{a}_{1i} & \cdots & \bar{a}_{ni}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_{ki}a_{kj}$$

זאת המכפלה הפנימית הסטנדרטית של עמודות מטריצה A.

המכפלה הזאת שווה ל- 1 עבור $i=j$ ושווה ל- 0 עבור $i\neq j$.

לכן עמודות A מהוות בסיס אורתונורמלי של A.

2) נניח ששורות מטריצה A מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$. אז האיבר (i,j) של $A\cdot\bar{A}$:

$$\left(A\bar{A}\right)_{ij}=\begin{pmatrix}a_{i1} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\bar{a}_{j1}\\ \vdots\\ \bar{a}_{jn}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\bar{a}_{jk}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\ .$$

ז"א $A\bar{A}=I\Leftarrow A$ אוניטרית.

נניח כעת, שעמודות A מהוות בסיס אורתונורמלי. אז

$$\left(\bar{A}A\right)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_{ki}a_{kj}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\ .$$

ז"א $\bar{A}\cdot A=I\Leftarrow A$ אוניטרית.

■

משפט 7.13

עבור העתקה לינארית $T:V\to V$ (כאשר V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית) התנאים הבאים שקולים זה לזה:

א) T אוניטרית, ז"א

$$\bar{T}\cdot T=T\cdot\bar{T}=1$$

ב) לכל $u,\mathrm{v}\in V$:

$$\langle T(u),T(\mathrm{v})\rangle=\langle u,\mathrm{v}\rangle\ .$$

ג) לכל $u \in V$:
$$\|T(u)\| = \|u\|.$$

ד) לכל $u, \mathrm{v} \in V$:
$$\|T(u) - T(\mathrm{v})\| = \|u - \mathrm{v}\| \ .$$

ה) T מעבירה בסיס אורתונורמלי כלשהו של V לבסיס אורתונורמלי .

ו) המטריצה המייצגת של T לפי בסיס אורתונורמלי מסוים של V היא אוניטרית.

דוגמה 7.14

עבור אילו ערכים של α המטריצה הנתונה היא אורתוגונלית? אוניטרית?

א) $A = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \alpha \end{pmatrix}$

ב) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

פתרון:

א)
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \alpha \end{pmatrix} \ , \qquad \bar{A} = A = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$
$$A \cdot \bar{A} = \begin{pmatrix} \alpha\bar{\alpha} + \frac{1}{4} & \frac{1}{2}(\bar{\alpha} - \alpha) \\ \frac{1}{2}(\alpha - \bar{\alpha}) & \alpha\bar{\alpha} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + \frac{1}{4} & \frac{1}{2}(\bar{\alpha} - \alpha) \\ \frac{1}{2}(\alpha - \bar{\alpha}) & |\alpha|^2 + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
לכן $\alpha = \bar{\alpha} \in \mathbb{R}$, $|\alpha|^2 + \frac{1}{4} = 1$, לכן $|\alpha|^2 = \frac{3}{4}$, $\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. ז"א המטריצה אורתוגונלית עבור $\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ב) המכפלה הפנימית של העמודות שווה ל- 1 לכן העמודות לא מהוות בסיס אורתונורמלי. לכן A לא אורתוגונלית ולא אוניטרית.

דוגמה 7.15

א) יהי $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ וקטור יחידה כלשהו ב- $\mathbb{F}^n$ (המכפלה הפנימית היא סטנדרטית). הוכיחו כי קיימת מטריצה אוניטרית שהעמודה הראשונה שלה היא $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

ב) מצאו מטריצה אוניטרית מסדר 3, שהעמודה הראשונה שלה היא $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

פתרון:

א) נשלים את הוקטור הנתון לבסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ ונשים אותם בעמודות המטריצה. המטריצה המתקבלת אוניטרית.

ב) $\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ וקטור יחידה כי

$$\langle \mathrm{v}_1,\mathrm{v}_1\rangle = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1 \ .$$

נשלים את v_1 לבסיס כלשהו של $\mathbb{C}^3$:

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

נבנה בסיס אורתונורמלי (נשתמש בתהליך גרם-שמידט):

$$u_1 = \mathrm{v}_1 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \ .$$

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}i \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}i \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2$$

$$\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle = -\frac{1}{2} \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}i \ .$$

$$\|u_2\|^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16} = \frac{1}{2} \ .$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}i \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\|u_3\|^2 = \frac{1}{16}+\frac{1}{16} = \frac{1}{8} \ .$$

בסיס אורתנורמלי:

$$\hat{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} , \qquad \hat{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}i \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}i \end{pmatrix} , \qquad \hat{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} ,$$

לכן מטריצה $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ אוניטרית.

דוגמה 7.16

נתבונן בשלושת התנאים הבאים על העתקה $T:V\to V$.

א) T אוניטרית.

ב) T צמודה לעצמה.

ג) $T^2=I$.

הוכיחו כי קיום כל שני תנאים מאלה שרשומים גורר קיום התנאי השלישי.

פתרון:

<u>נוכיח: (א) ו- (ב) $\Leftarrow$ (ג)</u>

נתון: T אוניטרית וצמודה לעצמה. אז

$$\begin{aligned} T^2 =& T\cdot T \\ =& \bar{T}\cdot T && (\text{צמודה לעצמה } T) \\ =& I && (\text{אוניטרית } T \text{ כי}) \end{aligned}$$

<u>נוכיח: (ב) ו- (ג) $\Leftarrow$ (א)</u>

נניח: T צמודה לעצמה ו- $T^2=I$.

צריך להוכיח: T אוניטרית.

$$\begin{aligned} \bar{T}\cdot T =& T\cdot T && (\text{צמודה לעצמה } T) \\ =& I && (\text{לפי הנתון}) \end{aligned}$$

לכן T אוניטרית.

<u>נוכיח: (ג) ו- (א) $\Leftarrow$ (ב)</u>

נניח: T אוניטרית ו- $T^2=I$.

צריך להוכיח: T צמודה לעצמה.

$$\bar{T}\cdot T = I \quad\Rightarrow\quad \bar{T}\cdot T^2 = T$$

לכן $T^2=I$ נקבל

$$\bar{T}=T\ .$$

דוגמה 7.17

א) הוכיחו כי מכפלת העתקות אוניטריות היא העתקה אוניטרית.

ב) תהי T העתקה אוניטרית. מתי αT היא העתקה לינארית?

ג) האם סכום העתקות אוניטריות היא העתקה אוניטרית?

ד) תהי T העתקה אוניטרית. הוכיחו כי $\bar{T}$ ו- T^{-1} אוניטריות.

פתרון:

א) נניח כי T_1,T_2 העתקות אוניטריות.

אז

$$(T_1T_2)\cdot\overline{(T_1T_2)}=T_1\left(T_2\bar{T}_2\right)\bar{T}_1=T_1\bar{T}_1=I\ .$$

ב)

$$(\alpha T)\left(\overline{\alpha T}\right)=\alpha T\cdot\bar{\alpha}\bar{T}=\alpha\bar{\alpha}T\cdot\bar{T}=\alpha\bar{\alpha}=1$$

אם"ם $|\alpha|^2=1$.

ג) דוגמה נגדית: נקח T העתקה אוניטרית. אז לפי סעיף (ב), גם $-T$ אוניטרית. אבל $T+(-T)=0$ לא אוניטרית.

ד) T אוניטרית (נתון) לכן

$$T\cdot\bar{T}=\bar{T}\cdot T=I$$

נקח את הצמודה של $\bar{T}\cdot T=I$:

$$\overline{\bar{T}\cdot T}=\bar{I}\qquad\Rightarrow\qquad\bar{T}\cdot\bar{\bar{T}}=\bar{T}\cdot T=I\ .$$

לכן $\bar{T}$ אוניטרית.

T אוניטרית, לכן

$$\bar{T}\cdot T=I\qquad\Rightarrow\qquad T^{-1}=\bar{T}\ .$$

שעור 8
העתקות נורמליות

8.1 ערכים עצמיים של העתקות במרחבי מכפלות פנימיות

משפט 8.1 ערכים עצמיים של העתקה צמודה לעצמה ממשיים

כל הערכים עצמיים של העתקה (מטריצה) צמודה לעצמה הם ממשיים.

הוכחה: נניח $T:V\to V$ העתקה צמודה לעצמה, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v})=\lambda\mathrm{v}$. אז

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \lambda\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &=\lambda\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית})\end{aligned}\ .$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \mathrm{v},\bar{T}(\mathrm{v})\rangle && (\text{הגדרה של העתקה צמודה})\\ &= \langle \mathrm{v},T(\mathrm{v})\rangle && (\text{צמודה לעצמה } T)\\ &= \langle \mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &=\bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית})\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=\bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \quad\Rightarrow\quad (\lambda-\bar{\lambda})\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=0\ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v}\neq 0 \Leftarrow \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\neq 0 \Leftarrow (\lambda-\bar{\lambda})=0 \Leftarrow \lambda=\bar{\lambda}$.

■

משפט 8.2 ערכים עצמיים של העתקה אנטי-הרמיטית מדומים

אם T העתקה אנטי-הרמיטית אז כל הערכים העצמיים של T הם מספרים מדומים.

הוכחה:
נניח $T:V\to V$ העתקה צמודה לעצמה, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v})=\lambda\mathrm{v}$. אז

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \lambda\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &=\lambda\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית})\end{aligned}\ .$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \mathrm{v},\bar{T}(\mathrm{v})\rangle && (\text{הגדרה של העתקה צמודה})\\ &= \langle \mathrm{v},-T(\mathrm{v})\rangle && (\text{אנטי-הרמיטית } T)\\ &= -\langle \mathrm{v},T(\mathrm{v})\rangle \\ &= -\langle \mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &=-\bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית})\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda \langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle = -\bar{\lambda} \langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle \quad \Rightarrow \quad (\lambda + \bar{\lambda}) \langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle = 0 \ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v} \neq 0 \Leftarrow \langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle \neq 0 \Leftarrow (\lambda + \bar{\lambda}) = 0 \Leftarrow \lambda = -\bar{\lambda}$.

■

משפט 8.3 פולינום אופייני של העתקה צמודה לעצמה מתפרק לגורמים ליניארים ממשיים

תהי T העתקה (מטריצה) צמודה לעצמה.

(1 הפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים ליניאריים.

(2 השורשים של הפולינום האופייני של T ממשיים.

הוכחה: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T : V \to V$ העתקה ליניארית. תהי $[T]_B$ המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס B. עם $\dim(V) = n$ אז $[T]_B \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אז הפולינום האופייני של $[T]_B$ הוא פולינום מסדר n אם מקדמים מרוכבים:

$$m_T(x) = a_0 + a_1 x + \ldots x^n \ ,$$

כאשר $a_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n$.
לפי המשפט היסודי של האלגברה יש לפולינום הזה פירוק לגורמים ליניאריים:

$$m_T(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + x^n = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n) \ ,$$

$\lambda_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n$.
השורשים של m_T הם הערכים העצמיים של T. לפי משפט 8.1, אם T צמודה לעצמה אז כל הערכים העצמיים של T הם מספרים ממשיים.
כלומר, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$.

אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז הפולינום האופייני של $[T]_B$ הוא פולינום מסדר n עם מקדמים ממשיים:

$$m_T(x) = a_0 + a_1 x + \ldots x^n \ ,$$

כאשר $a_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. מכאן ההוכחה היא אותה דבר של המקרה של $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. ■

משפט 8.4 ערך מוחלט של כל ערך עצמי של העתקה אוניטרית שווה 1

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbb{C}$, ויהי T העתקה $T : V \to V$ אוניטרית. אז הערך מוחלט של כל ערך עצמי של T שווה ל 1.

הוכחה:
נניח $T : V \to V$ העתקה אוניטרית, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v}) = \lambda \mathrm{v}$.
אז

$$\begin{aligned}
\langle T(\mathrm{v}), T(\mathrm{v}) \rangle &= \langle \lambda \mathrm{v}, \lambda \mathrm{v} \rangle && (\text{v וקטור עצמי של } T) \\
&= \lambda \langle \mathrm{v}, \lambda \mathrm{v} \rangle && (\text{ליניאריות של מכפלה פנימית}) \\
&= \lambda \bar{\lambda} \langle \mathrm{v}, \lambda \mathrm{v} \rangle && (\text{ליניאריות חלקית של מכפלה פנימית})
\end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned}
\langle T(\mathrm{v}), T(\mathrm{v}) \rangle &= \langle \mathrm{v}, \bar{T} T(\mathrm{v}) \rangle && (\text{הגדרה של העתקה צמודה}) \\
&= \langle \mathrm{v}, I(\mathrm{v}) \rangle && (T \text{ אוניטרית}) \\
&= \langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle
\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle = \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \quad \Rightarrow \quad (\lambda\cdot\bar{\lambda}-1)\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle = 0 \ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v}\neq 0 \Leftarrow \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \neq 0 \Leftarrow (\lambda\cdot\bar{\lambda}-1)=0 \Leftarrow \lambda\bar{\lambda}=1 \Leftarrow |\lambda|^2=1$.

■

8.2 העתקות ומטריצות נורמליות

הגדרה 8.1 העתקה נורמלית

1) העתקה $T:V\to V$ במרחב מכפלה פנימית נקראת העתקה נורמלית אם

$$T\cdot\bar{T} = \bar{T}\cdot T \ .$$

2) מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת מטריצה נורמלית אם

$$A\cdot\bar{A} = \bar{A}\cdot A \ .$$

8.3 דוגמאות של העתקות נורמליות

דוגמה 8.1

הוכיחו: העתקה (מטריצה) צמודה לעצמה היא נורמלית.

פתרון:

אם T צמודה לעצמה אז $\bar{T}=T$, לכן

$$T\cdot\bar{T} = T^2 = \bar{T}\cdot T \ .$$

דוגמה 8.2

העתקה (מטריצה) אנטי-הרמיטית היא נורמלית.

פתרון:

אם T אנטי-הרמיטית, אז $\bar{T}=-T$, לכן

$$T\cdot\bar{T} = T\cdot(-T) = (-T)\cdot T = \bar{T}\cdot T \ .$$

דוגמה 8.3

העתקה (מטריצה) אוניטרית היא נורמלית.

פתרון:

אם T אוניטרית, אז

$$T\cdot\bar{T} = I \ . \tag{\#1}$$

נכפיל (#1) מצד ימין ב- T:

$$T \cdot \bar{T} \cdot T = I \cdot T \qquad \Rightarrow \qquad T \cdot \left(\bar{T} \cdot T\right) = T \ . \tag{\#2}$$

מכאן

$$\bar{T} \cdot T = I \ . \tag{\#3}$$

לכן מ- (#1) ו- (#3):

$$T \cdot \bar{T} = I = \bar{T} \cdot T \ .$$

דוגמה 8.4

קבעו אם המטריצה $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$

א) אורתוגונלית,

ב) סימטרית,

ג) אנטי-סימטרית,

ד) נורמלית.

פתרון:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

א) A אינה אורתוגונלית.

ב) A אינה סימטרית.

ג) A אינה אנטי-סימטרית.

ד)

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 12 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

לכן A נורמלית.

דוגמה 8.5

מטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ 2 & 4+2i \end{pmatrix}$ אינה אוניטרית, אינה הרמיטית, ואינה אנטי-הרמיטית, אבל היא נורמלית כי $\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2i & 4-2i \end{pmatrix}$ ולכן

$$A \cdot \bar{A} = \bar{A} \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 8+8i \\ 8-8i & 24 \end{pmatrix}$$

דוגמה 8.6

מטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ אינה נורמלית כי $\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -i & 3\end{pmatrix}$ ולכן

$$A\cdot\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -i & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3i\\ -3i & 9\end{pmatrix}$$

$$\bar{A}\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -i & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 10\end{pmatrix}$$

ראינו קודם (במשפט 8.5) כי הנומרליות היא תנאי הכרחי ללכסינות אונטריות. האם זה תנאי מספיק?

במקרה של $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ זה לא נכון.

דוגמה נגדית: $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ מטריצה נומרלית כי $AA^t=A^tA$ אבל A אינה לכסינה כי

$$p_A(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+2$$

אינו מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{R}$. לכן A גם לא לכסינה אורתוגונלית.

אותה המטריצה מעל $\mathbb{C}$ היא לכסינה אוניטרית באמצעות המטריצה האוניטרית $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. אנחנו נוכיח בהמשך שנומרליות היא תנאי הכרחי ומספיק ללכסון אוניטרי מעל $\mathbb{C}$.

דוגמה 8.7

הוכיחו או הפריכו: כל מטריצה סימטרית (לאו דווקא ממשית) היא נורמלית.

פתרון:

דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 2\end{pmatrix}$$

סימטרית (לא הרמיטית).

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 2\end{pmatrix}$$

$$A\cdot\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 5\end{pmatrix}$$

$$\bar{A}\cdot A=\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -i\\ i & 5\end{pmatrix}$$

$A\cdot\bar{A}\neq\bar{A}\cdot A$, לכן A לא נורמלית.

דוגמה 8.8

תהי A מטריצה נורמלית ו- Q מטריצה אוניטרית. הוכיחו כי $\bar{Q}\cdot A\cdot Q$ היא מטריצה נורמלית.

פתרון:
נסמן $B=\bar{Q}AQ$. אז

$$\begin{aligned}
B\cdot\bar{B} &= \left(\bar{Q}AQ\right)\cdot\overline{\left(\bar{Q}AQ\right)}\\
&= \left(\bar{Q}AQ\right)\cdot\left(\bar{Q}\bar{A}Q\right)\\
&=\bar{Q}A\underbrace{Q\bar{Q}}_{=I}\bar{A}Q\\
&=\bar{Q}A\bar{A}Q\\
&=\bar{Q}\bar{A}AQ
\end{aligned}$$

(כי A נורמללית) .

$$\begin{aligned}
\bar{B}\cdot B &=\overline{\left(\bar{Q}AQ\right)}\cdot\left(\bar{Q}AQ\right)\\
&= \left(\bar{Q}\bar{A}Q\right)\cdot\left(\bar{Q}AQ\right)\\
&=\bar{Q}\bar{A}\underbrace{Q\bar{Q}}_{=I}AQ\\
&=\bar{Q}\bar{A}AQ\ .
\end{aligned}$$

ז"א $B\cdot\bar{B}=\bar{B}\cdot B$ ולכן B נורמלית.

דוגמה 8.9

תהי T העתקה נורמלית ב- V. אז $T-\lambda I$ היא העתקה נורמלית לכל סקלר λ.

פתרון:

$$\begin{aligned}
(T-\lambda I)\cdot\overline{(T-\lambda I)} &= (T-\lambda I)\cdot\left(\bar{T}-\bar{\lambda}I\right)\\
&=T\bar{T}-\bar{\lambda}T-\lambda\bar{T}+(\lambda\bar{\lambda})I\\
\overline{(T-\lambda I)}\cdot(T-\lambda I) &= \left(\bar{T}-\bar{\lambda}I\right)\cdot(T-\lambda I)\\
&=\bar{T}T-\lambda\bar{T}-\bar{\lambda}T+(\lambda\bar{\lambda})I
\end{aligned}$$

T נרומלית, לכן $T\cdot\bar{T}=\bar{T}\cdot T$. מכאן

$$(T-\lambda I)\cdot\overline{(T-\lambda I)}=\overline{(T-\lambda I)}\cdot(T-\lambda I)$$

לכן $T-\lambda I$ העתקה נורמלית.
ראינו קודם (במשפט 8.5) שנורמליות היא תנאי הכרחי ללכסינות אוניטריות. ז"א אם מטריצה לכסינה אוניטרית, אז היא נורמלית. נוכיח בהמשך שבמקרה של מרוכבים, שנורמליות היא גם תנאי מספיק ללכסינות אוניטריות. כלומר אם מטריצה נורמלית אז היא לכסינה אוניטרית מעל $\mathbb{C}$.

במקרה של $\mathbb{R}$, התנאי הזה לא מספיק. ראינו קודם דוגמה (דוגמה 8.7) נגדית. דרוש תנאי נוסף.

8.4 העתקה לכסינה אוניטרית ומטריצה לכסינה אוניטרית

הגדרה 8.2 העתקה לכסינה אוניטרית

(1) תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. A נקראת לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה אוניטרית Q כך ש-

$$D = Q^{-1}AQ$$

כאשר D מטריצה אלכסונית.

(2) תהי העתקה ליניארית $T : V \to V$, כאשר V מרחב מכפלה פנימית n ממדי מעל שדה $\mathbb{F}$. T נקראת העתקה לכסינה אוניטרית אם קיים בסיס אורתונורמלי $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ של V, שבו T מיוצגת ע"י מטריצה אלכסונית.

במקרה של $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ למטריצה (העתקה) לכסינה אוניטרית קוראים גם לכסינה אורתוגונלית.

משפט 8.5 העתקה לכסינה אוניטרית היא נורמלית

תהי $T : V \to V$ במרחב מכפלה פנימית V לכסינה אוניטרית. אז T העתקה נורמלית, כלומר

$$T \cdot \bar{T} = \bar{T} \cdot T \ .$$

הוכחה: נניח כי $T : V \to V$ היא העתקה לכסינה אוניטרית. לכן (משפט 7.12) קיים בסיס אורתונורמלי B של V כך ש- $[T]_B$ אלכסונית. נרשום

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \ .$$

אזי

$$\left[\bar{T}\right]_B = \overline{[T]_B} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

גם מטריצה אלכסונית. מטריצות אלכסוניות מתחלפות, (ראו דוגמה 7.10), לכן $\left[\bar{T}\right]_B \cdot [T]_B = [T]_B \cdot \left[\bar{T}\right]_B$, לכן

$$\left[T \cdot \bar{T}\right]_B = \left[\bar{T} \cdot T\right]_B \quad \Rightarrow \quad T \cdot \bar{T} = \bar{T} \cdot T \ .$$

זה תנאי הכרחי לכך ש- T לכסינה אוניטרית. תוצאה מקבילה מתקיימת גם עבור מטריצות:

אם מטריצה ריבועית A לכסינה אוניטרית, אז

$$A \cdot \bar{A} = \bar{A} \cdot A$$

■

משפט 8.6 העתקה לכסינה אורתוגונלית היא נורמלית וסימטרית

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ותהי $T:V\to V$ העתקה לכסינה אורתוגונלית מעל שדה $\mathbb{R}$.

1) T העתקה נורמלית.

2) T העתקה סימטרית.

תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה לכסינה אורתוגונלית מעל שדה $\mathbb{R}$.

3) A העתקה נורמלית.

4) A העתקה סימטרית.

הוכחה:

1) כבר הוכחנו זאת למעלה במשפט 8.5. T לכסין אורתוגונלי אז קיים בסיס אורתוגונלי B של V כך שהמטריצה המייצגת $[T]_B$ לפי בסיס B אלכסונית:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1 &&&\\ &\lambda_2&&\\ &&\ddots&\\ &&&\lambda_n\end{pmatrix} .$$

מכאן

$$[\bar{T}]_B=\overline{[T]_B}=\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1 &&&\\ &\bar{\lambda}_2&&\\ &&\ddots&\\ &&&\bar{\lambda}_n\end{pmatrix}$$

אלכסונית. מטריצות אלכסוניות מתחלפות לכן

$$[\bar{T}]_B\cdot[T]_B=[T]_B\cdot[\bar{T}]_B$$

ולכן T נורמלי.

2) T לכסין אורתוגונלי אז קיים בסיס אורתוגונלי B של V כך שהמטריצה המייצגת $[T]_B$ לפי בסיס B אלכסונית:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1 &&&\\ &\lambda_2&&\\ &&\ddots&\\ &&&\lambda_n\end{pmatrix} .$$

T אופרטור ממרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ למרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ לכן $[T]_B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, כלומר האיברים של המטריצה $[T]_B$ ממשיים, כלומר $\lambda_1,\cdots\lambda_n,\in\mathbb{R}$, ובפרט $\bar{\lambda}_1=\lambda_1,\cdots,\bar{\lambda}_n=\lambda_n$. לכן $[\bar{T}]_B=\overline{[T]_B}=[T]_B^t$. המטריצה $[T]_B$ אלכסונית לכן $[T]_B^t=[T]_B$ לכן T סימטרי.

3) נניח ש- $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ לכסינה אורתוגונלית. אז קיימת Q אורתוגונלית ו- D אלכסונית כך ש-

$$A=Q\cdot D\cdot Q^t .$$

$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ לכן $\bar{A}=A^t$. מכאן

$$A\cdot\bar{A}=A\cdot A^t=\left(QDQ^t\right)\left(QDQ^t\right)^t$$

$$=QD\underbrace{Q^tQ}_{=I}D^tQ^t$$ (הגדרה של השיחלוף)

$$=QDID^tQ^t$$ (Q א"ג אז $Q^tQ=I$)

$$=QDD^tQ^t$$

$$=QDDQ^t$$ (D אלכסונית אז $D^t=D$) .

מצד שני

$$\bar{A}\cdot A=A^t\cdot A=\left(QDQ^t\right)^t\cdot\left(QDQ^t\right)$$

$$=QD^t\underbrace{Q^tQ}_{=I}DQ^t$$ (הגדרה של השיחלוף)

$$=QD^tIDQ^t$$ (Q א"ג אז $Q^tQ=I$)

$$=QD^tDQ^t$$

$$=QDDQ^t$$ (D אלכסונית אז $D^t=D$) .

לכן $A\cdot\bar{A}=\bar{A}\cdot A$.

4) נניח ש- $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ לכסינה אורתוגונלית. אז קיימת Q אורתוגונלית ו- D אלכסונית כך ש-

$$A=Q\cdot D\cdot Q^t\ .$$

$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ לכן $\bar{A}=A^t$. מכאן

$$\bar{A}=A^t=\left(QDQ^t\right)^t$$

$$=QD^tQ^t$$ (הגדרה של השיחלוף)

$$=QDQ^t$$ (D אלכסונית אז $D^t=D$)

$$=A\ .$$

■

דוגמה 8.10

תהי T העתקה לכסינה אוניטרית. הוכיחו כי $\bar{T}$ לכסינה אוניטרית.

פתרון:

T לכסינה אוניטרית לכן לפי משפט 7.12, קיים בסיס אורתונורמלי B כך ש-

$$[T]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\ .$$

מכאן

$$[\bar{T}]_B = \overline{[T]_B} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix} .$$

קיבלנו כי בבסיס אורתונורמלי B, המטריצה המייצגת של $\bar{T}$ אלכסונית. ז"א קיים בסיס אורתונורמלי שבו המטריצה המייצגת של $\bar{T}$ אלכסונית, לכן $\bar{T}$ לכסינה אוניטרית (לפי הגדרה 8.2).

8.5 משפט לכסון אוניטרי

משפט 8.7 משפט לכסון אוניטרי

1) תהי $T : V \to V$ העתקה ליניארית במרחב מכפלה פנימית אוניטרי נוצר סופית.
T לכסינה אוניטרית אם"ם היא נורמלית.

2) תהי $T : V \to V$ העתקה ליניארית במרחב מכפלה פנימית אוקלידי נוצר סופית.
T לכסינה אורתונורמלית מעל $\mathbb{R}$ אם"ם היא סימטרית.

3) תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית (ממשית או מרוכבת).
A לכסינה אוניטרית אם"ם היא נורמלית.

4) תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית ממשית. A לכסינה אורתוגונלית אם"ם היא סימטרית.

למה 8.1 ווקטור עצמי וערך עצמי של העתקה וצמודתה

אם v וקטור עצמי של העתקה נורמלית T, השייך לערך עצמי λ.
אז $\bar{\lambda}$ הוא ערך עצמי של $\bar{T}$ ו- v הוא גם וקטור עצמי של $\bar{T}$ השייך ל- $\bar{\lambda}$.

הוכחה: נוכיח קודם שלכל $\mathrm{v} \in V$ מתקיים $\|T(\mathrm{v})\| = \|\bar{T}(\mathrm{v})\|$.

$$\begin{aligned} \|T(\mathrm{v})\| &= \langle T(\mathrm{v}), T(\mathrm{v})\rangle \\ &= \langle \mathrm{v}, \bar{T}T(\mathrm{v})\rangle \\ &= \langle \mathrm{v}, T\bar{T}(\mathrm{v})\rangle \\ &= \langle \bar{T}(\mathrm{v}), \bar{T}(\mathrm{v})\rangle \\ &= \|\bar{T}(\mathrm{v})\|^2 . \end{aligned}$$

נניח כעת ש- v וקטור עצמי:

$$T(\mathrm{v}) = \lambda \mathrm{v} .$$

אז

$$(T - \lambda I)(\mathrm{v}) = 0 .$$

לכן

$$\|(T - \lambda I)(\mathrm{v})\| = 0 .$$

הוכחנו קודם כי $T - \lambda I$ העתקה נורמלית (ראו דוגמה 8.9). לכן

$$\|(T - \lambda I)(\mathrm{v})\| = \|\overline{(T - \lambda I)}(\mathrm{v})\| ,$$

ז"א

$$\|\overline{(T-\lambda I)}(\mathrm{v})\| = \|\bar{T}(\mathrm{v}) - \bar{\lambda} I \mathrm{v}\| = 0 \ .$$

לכן

$$\bar{T}(\mathrm{v}) - \bar{\lambda}\mathrm{v} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{T}(\mathrm{v}) = \bar{\lambda}\mathrm{v} \ .$$

ז"א v הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי $\bar{\lambda}$.

■

משפט 8.8 וקטורים עצמיים של העתקה נורמלית של ערכים עצמיים שונים אורתוגונליים

תהי T העתקה נורמלית במרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{F}$. וקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים שונים, אורתוגונליים זה מזה.

הוכחה: יהיו $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ וקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים λ_1, λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$T(\mathrm{v}_1) = \lambda_1 \mathrm{v}_1 \ , \qquad T(\mathrm{v}_2) = \lambda_2 \mathrm{v}_2 \ .$$

אז

$$\langle T(\mathrm{v}_1), \mathrm{v}_2\rangle = \langle \lambda_1 \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\rangle = \lambda_1 \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\rangle$$

וגם

$$\langle T(\mathrm{v}_1), \mathrm{v}_2\rangle = \langle \mathrm{v}_1, \bar{T}(\mathrm{v}_2)\rangle = \langle \mathrm{v}_1, \bar{\lambda}_2 \mathrm{v}_2\rangle = \lambda_2 \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\rangle$$

ז"א

$$\lambda_1 \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\rangle = \lambda_2 \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\rangle \qquad \Rightarrow \qquad (\lambda_1 - \lambda_2)\langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\rangle = 0 \ .$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ לכן $\langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\rangle = 0$.

■

8.6 שיטה המעשית ללכסון אוניטרי

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה נורמלית. במקרה ש $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ נניח גם ש- A סימטרית. אז A לכסינה אוניטרית, בפרט היא לכסינה. לכן הפולינום האופייני מתפרק לגורמים ליניאריים וריבוי אלגברי של כל ערך עצמי שווה לריבוי הגאומטרי. כלומר אם

$$|A - \lambda I| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$$

כאשר $\lambda_1, \cdots \lambda_k$ הם השורשים השונים של הפולינום האופייני, אז

$$\dim(V_{\lambda_i}) = n_i$$

כאשר $V_i = \{\mathrm{v} \in \mathbb{F}^n | A\cdot \mathrm{v} = \lambda_i \mathrm{v}\}$.

בעזרת תהליך גרם-שמידט, נבנה ב- V_{λ_i} בסיס אורתונורמלי B_i. בסיס כזה מכיל n_i וקטורים אורתונורמליים זה לזה.

נתבונן בקבוצת וקטורין

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k \ .$$

הקבוצה הזאת היא בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$. האיברים של B הם וקטורים עצמיים.

דוגמה 8.11

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון:
נבדוק אם A מטריצה נורמלית:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ז"א $AA^t = A^tA$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

ערכים עצמיים: $\lambda_1 = 1+i, \lambda_2 = 1-i$. נמצא את המרחב עצמי V_{λ_1}:

$$A\mathrm{v} - \lambda_1 \mathrm{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - (1+i))\,\mathrm{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \mathrm{v} = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{iR_2+R_1} \left(\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $-ix = y$ לכן $x = iy$.

$$V_{\lambda_1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

בסיס אורתונורמלי של V_{λ_1}:

$$B_{\lambda_1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right\}$$

נמצא את המרחב עצמי V_{λ_2}:

$$A\mathrm{v} - \lambda_2 \mathrm{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - (1-i))\,\mathrm{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \mathrm{v} = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{iR_2-R_1} \left(\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $ix = y$ לכן $x = -iy$.

$$V_{\lambda_2} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

בסיס אורתונורמלי של V_{λ_2}:

$$B_{\lambda_2} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right\}$$

לכן

$$B = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right\}$$

בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^2$. לכן

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

$$D = \bar{Q} \cdot A \cdot Q$$

דוגמה 8.12

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון:

נבדוק אם A מטריצה נורמלית:

$$A \cdot \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ז"א $A\bar{A} = \bar{A}A$. לכן A נורמלית.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 + 1\right) = (\lambda-1)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 2\right) = (1-\lambda)(\lambda-1-i)(\lambda-1+i)$$

ערכים עצמיים: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1+i, \lambda_3 = 1-i$. נמצא את המרחב עצמי $\lambda = 1$:

$$A\mathrm{v} - \lambda_1 \mathrm{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - 1)\,\mathrm{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{v} = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $x = 0, y = 0, z \in \mathbb{C}$. לכן

$$V_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נמצא את המרחב עצמי $\lambda = 1+i$:

$$A\mathrm{v} - \lambda_2 \mathrm{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - (1+i))\,\mathrm{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \mathrm{vv} = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -i & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to iR_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to iR_1,R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $x=-iy, z=0$.

$$V_{1+i} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

נמצא את המרחב עצמי $\lambda = 1-i$:

$$A\text{v} - \lambda_3 \text{v} = 0 \quad\Rightarrow\quad (A-(1-i))\,\text{v} = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \text{vv} = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & 1 & 0 & 0 \\ -1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to iR_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to -iR_1,R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $x=iy, z=0$.

$$V_{1-i} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

הבסיס אורתונורמלי:

$$B = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^2$. לכן

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

$$D = \bar{Q}\cdot A\cdot Q$$

דוגמה 8.13

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ מטריצה סימטרית, לכן היא לכסינה אורתוגונלית.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(\lambda-6)^2(\lambda-3) = 0\ .$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=6$ מריבוי אלגברי 2.

$\lambda=3$ מריבוי אלגברי 1.

נמצא את המרחב עצמי $\lambda=6$:

$$A\mathrm{v}-\lambda_1\mathrm{v}=0 \quad \Rightarrow \quad (A-6I)\,\mathrm{v}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\mathrm{v}=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-1&-1&0\\-1&-1&-1&0\\-1&-1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

פתרון: $x=-y-z$, $y,z\in\mathbb{R}$. לכן

$$\begin{pmatrix}-y-z\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\ .$$

$$V_6=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\ .$$

נמצא את המרחב עצמי $\lambda=3$:

$$A\mathrm{v}-3\mathrm{v}=0 \quad \Rightarrow \quad (A-3I)\,\mathrm{v}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\mathrm{v}=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&-1&0\\-1&2&-1&0\\-1&-1&2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

פתרון: $x=z,y=z,z\in\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$V_3=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס של וקטורים עצמיים:

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

נבנה בסיס אורתוגונלי של V_6:

$$w_1=\mathrm{v}_1\ .$$

$$w_2=\mathrm{v}_2-\frac{\langle \mathrm{v}_2,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\\frac{-1}{2}\\1\end{pmatrix}\ .$$

נבנה בסיס אורתוגונלי של V_3:

$$w_3=\mathrm{v}_3\ .$$

לכן בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^3$:

$$u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\quad u_2=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\\frac{-1}{2}\\1\end{pmatrix}\ ,\quad u_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{1}{2\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$D=\bar{Q}\cdot A\cdot Q$$

8.7 שימושים של משפט הלכסון האוניטרי

הוכחנו כי אם T העתקה צמודה לעצמה, אז כל השורשים של הפולינום האופייני הם ממשיים (משפט 8.1), וגם אם T אוניטרית אז הערך המוחלט של כל ערך עצמי שווה ל- 1 (משפט 8.4).

ניתן גם להוכיח את המשפט ההפוך.

משפט 8.9 אם שורשי פולינום אופייני ממשיים אז ההעתרה צמודה לעצמה

תהי T העתקה נורמלית במרחב מכפלה פנימית V נוצר סופית.

אם כל שורשי הפולינום האופייני של T ממשיים, אז T העתקה צמודה לעצמה.

הוכחה: T נורמלית לכן היא לכסינה אוניטרית. ז"א אם $[T]_B$ המטריצה המייצגת לפי כל בסיס B, קיימת Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש-

$$[T]_B=QDQ^{-1}\quad\Rightarrow\quad [T]_BQ=QD\ .$$

כאשר $Q=\begin{pmatrix}|&&|\\u_1&\cdots&u_n\\|&&|\end{pmatrix}$ ו- $D=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$. העמודות של Q הם הווקטורים עצמיים של $[T]_B$ והיאברים של D הם הערכים עצמיים.

$$[\bar{T}]_B=\overline{[T]_B}=\overline{QD\bar{Q}}=Q\bar{D}\bar{Q}\ .$$

אם הערכים עצמיים של T ממשיים אז $\bar{D}=D$ ונקבל

$$[\bar{T}]_B=QD\bar{Q}=[T]_B\ ,$$

כלומר $\bar{T}=T$ ולכן T צמודה לעצמה.

■

משפט 8.10 אם ערך מוחלט של שורשי פולינום אופייני שווה 1 אז ההעתקה אוניטרית

תהי T העתקה נורמלית במרחב מכפלה פנימית V נוצר סופית.

אם כל שורשי הפולינום האופייני של T שווים בערכם ל- 1, אז T העתקה אוניטרית.

הוכחה: T נורמלית לכן היא לכסינה אוניטרית, לכן $\exists Q$ אוניטרית ו- D אלכסונית. ז"א אם $[T]_B$ המטריצה המייצגת לפי כל בסיס B, קיימת Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש-

$$[T]_B = QD\bar{Q} \ .$$

כאשר $Q = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ ו- $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. העמודות של Q הם הווקטורים העצמיים של $[T]_B$ והאיברים של D הם הערכים עצמיים. נניח ש $|\lambda_1| = \cdots = |\lambda_n| = 1$. לכן

$$D \cdot \bar{D} = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} = I \ .$$

לכן

$$[T]_B[\bar{T}]_B = \left(QD\bar{Q}\right) \cdot \left(\overline{QD\bar{Q}}\right) = QD\underbrace{\bar{Q}Q}_{=I}\bar{D}\bar{Q} = Q\underbrace{D\bar{D}}_{=I}\bar{Q} = Q\bar{Q} = I \ .$$

לכן T אוניטרית.

■

דוגמה 8.14

תהי H העתקה הרמיטית ו- U העתקה אוניטרית במרחב מכפלה פנימית. הוכיחו כי אם H ו- U מתחלפות אז $T = H \cdot U$ נורמלית.

הוכחה: נתון:

H הרמיטית לכן $\bar{H} = H$.
U אוניטרית, לכן $\bar{U} \cdot U = U \cdot \bar{U} = I$.

צריך להוכיח:

$T = H \cdot U = U \cdot H$ נורמלית.

הוכחה:

$$\begin{aligned} T \cdot \bar{T} =& (H \cdot U) \cdot (\bar{U} \cdot \bar{H}) && \text{(הגדרה של הצמודה)} \\ =& H \cdot U \cdot \bar{U} \cdot \bar{H} && \text{(}U \text{ ו } H \text{ מתחלפות)} \\ =& H \cdot \bar{H} && \text{(}U \text{ אוניטרית)} \\ =& H^2 && \text{(}H \text{ צמודה לעצמה)} \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}\cdot T =& \overline{(H\cdot U)}\cdot(U\cdot H) \\
=& \bar{U}\cdot\bar{H}\cdot U\cdot H && \text{(הגדרה של הצמודה)} \\
=& \bar{U}\cdot\bar{H}\cdot H\cdot U && \text{(} U \text{ ו } H \text{ מתחלפות)} \\
=& \bar{U}\cdot H\cdot H\cdot U && \text{(} H \text{ צמודה לעצמה)} \\
=& \bar{U}\cdot U\cdot H\cdot H && \text{(} U \text{ ו } H \text{ מתחלפות)} \\
=& H\cdot H && \text{(} U \text{ אוניטרית)} \\
=& H^2 \ .
\end{aligned}$$

לכן $T\cdot\bar{T}=\bar{T}\cdot T$ ולכן T נורמלית.

■

8.8 *הוכחת המשפט: A לכסינה אוניטרית אם"ם קבוצת ו"ע שלה בסיס א"נ

משפט 8.11 A לכסינה אוניטרית אם"ם קבוצת ווקטורים עצמיים שלה בסיס אורתונורמלי

מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אוניטרית אם"ם קיים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{F}^n$), שכל איבריו הם ווקטורים עצמיים של A.

ווקטורי הבסיס הזה, הרשומים כעמודות, יוצרים מטריצה המלכסנת אוניטרית את A.

הוכחה: נניח ש- A לכסינה אוניטרית. אז קיימת Q אוניטרית ו D אלכסונית כך ש-

$$A=QDQ^{-1}\qquad\Leftrightarrow\qquad AQ=QD$$

נרשום $Q=\begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ ו- $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

מכאן

$$\begin{pmatrix} A\cdot u_1 & \cdots & A\cdot u_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \cdots & \lambda_n u_n \end{pmatrix}$$

לכן נקבל כי

$$A\cdot u_1=\lambda_1 u_1,\qquad\cdots\qquad, A\cdot u_n=\lambda_n u_n\ .$$

בנוסף Q אוניטירת לכן הקבוצה של העמודות של Q, $\{u_1,\cdots,u_n\}$ היא בסיס אורתונורמלי של V.
לכן מצאנו בסיס אורתונורמלי $\{u_1,\cdots,u_n\}$ שמורכב מווקטורים עצמיים של A.

נניח שקיים בסיס אורתונורמלי $U=\{u_1,\cdots,u_n\}$ של V המורכב מווקטורים עצמיים של A:

$$A\cdot u_1=\lambda_1 u_1,\qquad\cdots\qquad, A\cdot u_n=\lambda_n u_n\ .$$

U בסיס של V, לכן $\dim U=\dim V$.

לכן A לכסינה.

נרשום $Q=\begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix}$. הקבוצה של העמודות של Q היא בסיס אורתונורמלי לכן Q אוניטרית. ברפט:

$$AQ=\begin{pmatrix} | & & | \\ Au_1 & \cdots & Au_n \\ | & & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 u_1 & \cdots & \lambda_n u_n \\ | & & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

נגדיר $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$. קיבלנו כי

$$AQ=QD \quad \Rightarrow \quad A=QDQ^{-1} .$$

לכן A לכסינה אוניטרית.

■

משפט 8.12 T לכסין אוניטרי אם"ם קבוצת ווקטורים עצמיים שלו בסיס אורתונורמלי

תהי העתקה ליניארית $T:V\to V$, כאשר V מרחב מכפלה פנימית n ממדי מעל $\mathbb{F}$. T לכסינה אוניטרית אם"ם קיים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{F}^n$), שכל איבריו הם ווקטורים עצמיים של T.

זהו בסיס שבו T מיוצגת ע"י מטריצה אלכסונית.

הוכחה: נניח ש- T לכסינה אוניטרית. אז קיימת בסיס אורתונורמלי $B=\{u_1,\cdots,u_n\}$ כך שהמטריצה המייצגת לפי בסיס B, $[T]_B$ אלכסונית. נסמן

$$[T]_B=D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

נרשום המטריצה המייצגת של T, $[T]_E$ לפי הבסיס הסטנדרטי E של $\mathbb{F}^n$:

$$[T]_E=Q[T]_BQ^{-1} ,$$

כאשר $Q=\begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix}$, (עם הווקטורים u_i לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$) המטריצה המעבר מבסיס B לבסיס E ($Q=P_{B\to E}$). לכן

$$\begin{aligned} [T]_EQ=Q[T]_B \quad &\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} | & & | \\ [T]_E[u_1]_E & \cdots & [T]_E[u_n]_E \\ | & & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1[u_1]_E & \cdots & \lambda_n[u_n]_E \\ | & & | \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(u_1)]_E & \cdots & [T(u_n)]_E \\ | & & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1[u_1]_E & \cdots & \lambda_n[u_n]_E \\ | & & | \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

מצאנו כי
$$T(u_1)=\lambda_1 u_1\ ,\qquad \cdots \qquad ,T(u_n)=\lambda_n u_n\ .$$
לכן הבסיס האורתונורמלי $B=\{u_1,\cdots,u_n\}$ מורכב מווקטורים עצמיים של T.

נניח שקיים בסיס אורתונורמלי $B=\{u_1,\cdots,u_n\}$ של V המורכב מווקטורים עצמיים של T:
$$T(u_1)=\lambda_1 u_1,\qquad \cdots \qquad ,T(u_n)=\lambda_n u_n\ ,$$
לכן
$$[T]_E\cdot[u_1]_E=\lambda_1[u_1]_E,\qquad \cdots \qquad ,[T]_E\cdot[u_n]_E=\lambda_1[u_n]_E\ .$$
B בסיס של V, לכן $\dim U=\dim V$.

לכן T לכסינה.

נרשום $Q=\begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix}$. הקבוצה של העמודות של Q היא בסיס אורתונורמלי לכן Q אוניטרית. ברפט:
$$[T]_E Q=\begin{pmatrix} | & & | \\ [T]_E[u_1]_E & \cdots & [T]_E[u_n]_E \\ | & & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 u_1 & \cdots & \lambda_n u_n \\ | & & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}\ .$$
נגדיר $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$. מצאנו כי
$$[T]_E Q=QD \quad\Rightarrow\quad [T]_E=QDQ^{-1}\ .$$
Q המטריצה המעבר מבסיס B לבסיס הסנדרטי E. לכן מהטריצה D היא המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס B. נסמן $[T]_B=D$: מצאני כי קיים בסיס B כך ש $[T]_B$ אלכסונית. B בסיס אורתונורמלי לכן T לכסינה אוניטרית.

■

8.9 הוכחת משפט שור

משפט 8.13 תזכורת: מטריצה ניתנת לשילוש

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. A דומה למטריצה משולשית מעל $\mathbb{F}$ אם"ם הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים ליניאריים בשדה $\mathbb{F}$.

הוכחה: ההוכחה נתונה במשפט 12.10. ■

משפט 8.14 משפט שור

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ויהיו $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ ערכים עצמיים של A (לא בהכרח שונים זה מזה).
$\exists$ מטריצה Q אוניטרית כך ש-

$$A = QB\bar{Q}$$

כאשר

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ובפרט B משולשית עליונה.

במילים פשוטות, כל מטריצה ריבועית A דומה אוניטרית למטריצה משולשית עליונה שבו איברי האלכסון הראשי הם הערכים עצמיים של A.

הוכחה: נשים לב כי $A = QB\bar{Q} \Leftrightarrow B = \bar{Q}AQ$.

יהי q_1 וקטור עצמי של A עם נורמה 1 ששייך לערל עצמי λ_1 ויהיו $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ שאר הערכים עצמיים של A.

יהיו $q_2,\ldots,q_n$ כל וקטורים אורתונורמליים אשר אורתוגונליים ל- q_1. נגדיר

$$Q_1 = \begin{pmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & q_n \\ | & & | \end{pmatrix} .$$

מכאו $\bar{Q}_1 Q_1 = I$ ז"א Q_1 אוניטרית.

$$AQ_1 = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Aq_1 & Aq_2 & \cdots & Aq_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 q_1 & Aq_2 & \cdots & Aq_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = Q_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

לכן

$$\bar{Q}_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

כעת נוכיח כי הערכים עצמיים של A_2 הם $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$.

$$|\lambda I - A| = |\bar{Q}_1(\lambda I - A)Q_1| = |\lambda \bar{Q}_1 Q_1 - \bar{Q}_1 A Q_1| = \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda I - A_2 \end{vmatrix}$$

ומכאן הערכים עצמיים של A_2 הם $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$.

שאר ההוכחה היא באינדוקציה.

<u>בסיס</u>: עבור $n=1$ הטענה מתקיימת.

<u>מעבר</u>: נניח כי הטענה מתקיים עבור k. נוכיח אותה עבור $k+1$.

תהי $A\in\mathbb{F}^{k\times k}$. לפי (*),

$$\bar{Q}_1AQ_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$$

כאשר $A_2\in\mathbb{F}^{k\times k}$. לפי ההנחת האינדוקציה $\exists\, Q_2$ אוניטרית ו- $B_2=\begin{pmatrix}\lambda_2 & * & \cdots & *\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & *\\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$ משולשית עליונה כך ש-

$$A_2=Q_2B_2\bar{Q}_2\ .$$

נגדיר

$$Q=Q_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q_2\end{pmatrix}\ .$$

$$\begin{aligned}AQ=&AQ_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q_2\end{pmatrix}=Q_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q_2\end{pmatrix}=Q_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & A_2Q_2\end{pmatrix}=Q_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & Q_2B_2\end{pmatrix}\\ =&Q_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & B_2\end{pmatrix}=QB\end{aligned}$$

לפיכך $A=QB\bar{Q}$.

■

8.10 הוכחת המשפט: נורמליות נשמרת תחת דמיון אוניטרי

למה 8.2 נורמליות נשמרת תחת דמיון אוניטרי

תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית במרחב מכפלה פנימית נוצר-סופית V מעל שדה $\mathbb{F}$.
תהי Q העתקה אוניטרית.
T נורמלית אם"ם $QT\bar{Q}$ נורמלית.

הוכחה: נגדיר $S=QT\bar{Q}$. Q אוניטרית אז $T=\bar{Q}SQ$.

$$\begin{aligned}T\bar{T}=&\bar{T}T\\ \Rightarrow\quad (\bar{Q}SQ)\cdot\overline{(\bar{Q}SQ)}=&\overline{(\bar{Q}SQ)}\cdot(\bar{Q}SQ)\\ \Rightarrow\quad \bar{Q}S\underbrace{Q\bar{Q}}_{=I}\bar{S}Q=&\bar{Q}\bar{S}\underbrace{Q\bar{Q}}_{=I}SQ\\ \Rightarrow\quad \bar{Q}S\bar{S}Q=&\bar{Q}\bar{S}SQ\\ \Rightarrow\quad S\bar{S}=&\bar{S}S\ .\end{aligned}$$

■

8.11 הוכחת המשפט: מטריצה נורמלית ומשולשית היא אלכסונית

למה 8.3 מטריצה נורמלית ומשולשית היא אלכסונית

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית.
אם A מטריצה משולשית וגם נורמלית אז A אלכסונית.

הוכחה: נוכיח ע"י אינדוקציה.

בסיס: עבור $n=1$ הטענה נכונה באופן טריוויאלי.

הנחת האינדוקציה:

נניח שהטענה נכונה עבור $n-1$, $n\geq 2$. נוכיח אותה עבור $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נניח ש- A נורמלית ומשולשית עליונה. אז

$$A=\left(\begin{array}{c|c} a_{11} & \bar{\mathrm{x}} \\ \hline 0 & A' \end{array}\right) , \qquad \bar{A}=\left(\begin{array}{c|c} a_{11} & 0 \\ \hline \mathrm{x} & \bar{A}' \end{array}\right)$$

כאשר $A'\in\mathbb{F}^{n-1\times n-1}$ משולשית עליונה.

$$A\cdot\bar{A}=\left(\begin{array}{c|c} |a_{11}|^2+\|\mathrm{x}\|^2 & \mathrm{y} \\ \hline \mathrm{y} & A'\cdot\bar{A}' \end{array}\right) , \qquad \bar{A}\cdot A=\left(\begin{array}{c|c} |a_{11}|^2 & \mathrm{y} \\ \hline \mathrm{y} & \mathrm{x}\bar{\mathrm{x}}+\bar{A}'\cdot A' \end{array}\right)$$

אם $A\cdot\bar{A}=\bar{A}\cdot A$ אז $\mathrm{x}=\bar{0}$ ו- $A'\cdot\bar{A}'=\bar{A}'\cdot A$. כלומר A' נורמלית. גם, A' משולישת עליונה, לכן לפי ההנחת האינדוקציה A' אלכסונית. לכן A אלכסונית.

■

8.12 הוכחת משפט לכסון אוניטרי

משפט 8.15 משפט לכסון אוניטרי

(1 תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית במרחב מכפלה פנימית אוניטרי נוצר סופית.
T לכסינה אוניטרית אם"ם היא נורמלית.

(2 תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית במרחב מכפלה פנימית אוקלידי נוצר סופית.
T לכסינה אורתונורמלית מעל $\mathbb{R}$ אם"ם היא סימטרית.

(3 תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית (ממשית או מרוכבת). A לכסינה אוניטרית אם"ם היא נורמלית.

(4 תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית ממשית. A לכסינה אורתוגונלית אם"ם היא סימטרית.

הוכחה:

רק אם:

לכל הטענות $1-4$, את הכיוון "רק אם" הוכחנו כבר לעיל. נשאר להוכיח את הכיוון השני "אם".

רק אם:

1) כעת נוכיח כי אם T נורמלית אז היא לכסינה אוניטרית:

T נורמלית $\xleftarrow{\quad}$ $T=QS\bar{Q}$, כאשר Q אונטרית ו- S משולשית

(למה 8.14: כל מטריצה דומה אוניטרית למטריצה משולשית)

$\xleftarrow{\quad}$ S נורמלית

(למה 8.2: נורמליות נשמרת תחת שוויון אוניטרי)

$\xleftarrow{\quad}$ S אלכסונית

(למה 8.3: מטריצה נורמלית ומשולשית היא אלכסונית)

$\xleftarrow{\quad}$ T דומה אוניטרי למטריצה אלכסונית.

2) נניח ש $T:V\to V$ כאשר T מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{R}$. נניח כי T נורמלית, כלומר $T\bar{T}=\bar{T}T$. בסעיף **1)** (סעיף הקודם) הוכחנו שאם T נורמלית אז היא לכסינה אוניטרית. ז"א $\exists Q$ אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $[T]=QD\bar{Q}$. במקרה פרטי ש T אופרטור במרחב אוקלידי, אז $[T]\in\mathbb{R}$ ו- $Q\in\mathbb{R}$ כך ש- $\bar{Q}=Q^t$. בפרט, T תהיה לכסינה אורתוגונלית:

$$[T]=QD\bar{Q}=QDQ^t\ ,$$

כאשר Q אורתוגונלית, כלומר

$$QQ^t=I\ .$$

לכן

$$[T]^t=\left(QDQ^t\right)^t=QD^tQ^t=QDQ^t=[T]\ .$$

לכן T סימטרית.

3) מקרה פרטי של **(1)** כאשר $T(u)=A\cdot u$, $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ נורמלית.

4) מקרה פרטי של **(2)** כאשר $T(u) = A \cdot u$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ סימטרית.

■

שעור 9
משפט הפירוק הספקטרלי

ניתן לסכם את כל המושגים הנלמדים על העתקות נורמליות במשפט הבא:

משפט 9.1 סכום ישר של מרחבים עצמיים של העתקה נורמלית

תהי T העתקה נורמלית במרחב מכפלה אוניטרי V ויהיו $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ כל הערכים העצמיים השונים של T. אם $V_1,\dots,V_k$ הם התת-מרחבים העצמיים השייכים ל- $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ בהתאמה, אזי

(1 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k$

(2 $V_i\perp V_j$ לכל $i\neq j$.

הוכחה:

(1 T נורמלית ולכן לכסינה אוניטרי (משפט לכסון אוניטרי 8.15). לכן סכום המימדים של כל התת-מרחביים העצמיים שווה למימד של V, כלומר

$$\dim(V)=\dim(V_1)+\ldots+\dim(V_k)\ .$$

נסמן $\dim(V_i)=n_i$ ו-

$$\{\mathrm{v}_{i1},\dots,\mathrm{v}_{in_i}\}$$

בסיס של V_i. אז הקבוצה

$$\bigcup_{i=1}^{k}\{\mathrm{v}_{i1},\dots,\mathrm{v}_{in_i}\}$$

היא בסיס של V. ז"א כל וקטור של V הוא צירוף לינארי של הוקטורים העצמיים. לכן לכל $u\in V$,

$$u\in V_1+V_2+\ldots+V_k\ .$$

אפשר להראות כי $V_i\cap V_j=\{\bar{0}\}$ דרך השלילה. נניח ש $\exists\ u\neq\bar{0}\in V_i\cap V_j$ כאשר V_i המרחב עצמי של λ_i ו- V_j המרחב עצמי של λ_j ו $\lambda_i\neq\lambda_j$. אז $T(u)=\lambda_i\cdot u$ וגם $T(u)=\lambda_j\cdot u$, ומכאן

$$\lambda_i u=\lambda_j u\quad\Rightarrow\quad(\lambda_i-\lambda_j)u=0$$

$u\neq\bar{0}$ כי הוא וקטור עצמי לכן $\lambda_i=\lambda_j$, סתירה.

לכן

$$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k\ .$$

(2 עבור T נורמלית, וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים הם אורתוגונלים (משפט 8.8), לכן $\forall i\neq j\ V_i\perp V_j$.

■

המטרה שלנו היא לנסח משפט שקול הידוע בשם "משפט הפירוק הספקטרלי". אנחנונראה כי כל עתקה נורמלית במרחב מכפלה פנימית נוצר סופית היא צירוף לינארי של הטלת אורתוגונלית על המרחבים העצמיים שלה. המקדמים של הצירוף הלינארי הם הערכים העצמיים של ההעתקה. נראה את זה קודםם בדוגמה.

דוגמה 9.1

$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$T(\mathrm{v})=\begin{pmatrix}3&2\\2&0\end{pmatrix}\cdot\mathrm{v}$$

T העתקה סימטרית במרחב אוקלידי, לכן היא נורמלית.

$$T-\lambda I=\begin{vmatrix}3-\lambda&2\\2&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda-4=(\lambda+1)(\lambda-4)=0$$

ערכים עצמיים: $\lambda_1=4$, $\lambda_2=-1$.

<u>$\lambda=4$</u>

$$\begin{pmatrix}-1&2\\2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to-R_1}\begin{pmatrix}1&-2\\2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\end{pmatrix}$$

$x=2y$, $y\in\mathbb{R}$. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y\\y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

$$V_4=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ בסיס של V_4.

<u>$\lambda=-1$</u>

$$\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{4}\cdot R_1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&0\end{pmatrix}$$

$x=-\frac{1}{2}y$, $y\in\mathbb{R}$. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\cdot y\\y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$.

$$V_{-1}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ בסיס של V_{-1}.

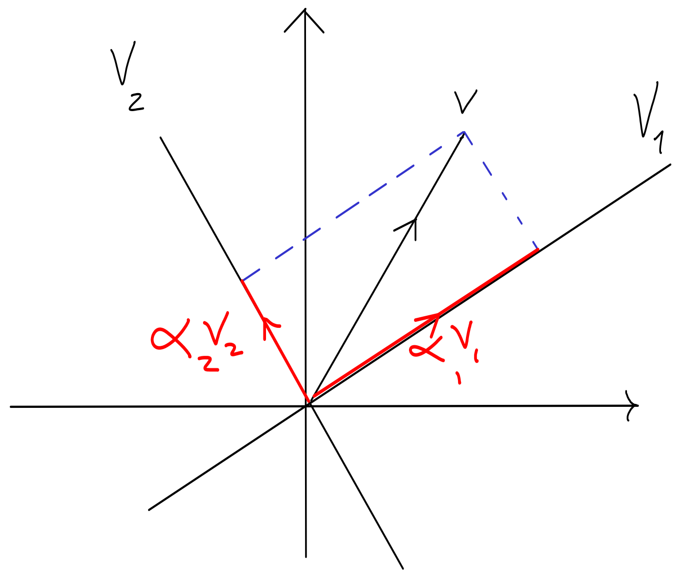
לכן $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2$ בסיס של $\mathbb{R}^2$. לכן לכל $\mathrm{v}\in\mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{v}=\alpha_1\mathrm{v}_1+\alpha_2\mathrm{v}_2\ .$$

מכאן

$$\mathrm{v}=\alpha_1\lambda_1\mathrm{v}_1+\alpha_2\lambda_2\mathrm{v}_2=4\alpha_1\mathrm{v}_1-\alpha_2\mathrm{v}_2\ .$$

נשים לב ש- $\alpha_1\mathrm{v}_1$ הוא ההיטל האורתוגונלי (ראו הגדרה 2.4) של v על V_1 ו- $-\alpha_2\mathrm{v}_2$ ההיטל האורתוגונלי של v על V_2.



אם נסמן ב- P_i $(i = 1, 2)$ את העתקת ההטלה האורתוגונלית על תת המרחב V_i, נוכל לרשום

$$P_1(\mathrm{v}) = \alpha_1 \mathrm{v}_1 \ , \qquad P_2(\mathrm{v}) = \alpha_2 \mathrm{v}_2 \ .$$

מכאן

$$T(\mathrm{v}) = 4P_1(\mathrm{v}) + (-1)P_2(\mathrm{v}) = (4P_1 - P_2)(\mathrm{v}) \ .$$

כלומר $T = 4P_1 - P_2$.

ז"א ההעתקה T היא צירוף ליניארי של הטלות אורתוגונליות P_1 ו- P_2 על המרחבים העצמיים של T ומקדמי הצירוף הם הערכים העצמיים המתאימים.

במילים אחרות, כדי להפעיל את T על וקטור v, צריך להטיל אותו על המרחבים V_1 ו- V_2, לכפול את ההטלות ב- λ_1, λ_2 בהתאמה, ולחבר את הוקטורים המתקבלים.

נשים לב: ההטלות P_1 ו- P_2 מקיימות שתי תכונות נוספות:

1) $P_1 + P_2 = I$

2) $P_1 \cdot P_2 = P_2 \cdot P_1 = 0$

<u>הוכחה:</u>

1) לכל $\mathrm{v} \in V$,

$$\mathrm{v} = \alpha_1 \mathrm{v}_1 + \alpha_2 \mathrm{v}_2 = P_1(\mathrm{v}) + P_2(\mathrm{v}) = (P_1 + P_2)(\mathrm{v})$$

לכן $P_1 + P_2 = I$.

2)

$$(P_1 \cdot P_2)(\mathrm{v}) = P_2 (P_1(\mathrm{v})) = P_2(\alpha_1 \mathrm{v}_1) = 0$$

כי $\alpha_1 \mathrm{v}_1 \perp V_2$.

3) $P_1 \cdot P_2 = P_2 \cdot P_1 = 0$

המשפט הבא הנקרא "המשפט הפירוק הספקטרלי" מכליל את הדוגמה האחרונה.

משפט 9.2 משפט הפירוק הספקטרלי

תהי T העתקה נורמלית במרחב אוניטרי V נוצר סופית יהיו $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ כל הערכים העצמיים השונים של T ויהיו $V_1,\ldots,V_k$ המרחבים העצמיים המתאימים. לכל $1\leq i\leq k$ נסמן ב- P_i את ההעתקה ההטלה האורתוגונלית על V_i. אזי

1) $T=\lambda_1P_1+\ldots+\lambda_kP_k$

2) $I=P_1+\ldots+P_k$

3) לכל $i\neq j$, $P_i\cdot P_j=0$

4) לכל i, $P_i^2=P_i$

5) לכל i, $\bar{P}_i=P_i$.

הוכחה:

1) לפי משפט 9.1, $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k$ וגם $V_i\perp V_j$ עבור $i\neq j$ לכן כל וקטור $\mathrm{v}\in V$ ניתן להציג בצורה

$$\mathrm{v}=\mathrm{v}_1+\ldots+\mathrm{v}_k$$

כאשר $\mathrm{v}_i\in V_i$ $(1\leq i\leq k)$. אז

$$T(\mathrm{v})=T(\mathrm{v}_1)+\ldots+T(\mathrm{v}_k)=\lambda_1\mathrm{v}_1+\ldots+\lambda_k\mathrm{v}_k=\lambda_1P_1(\mathrm{v})+\ldots+\lambda_kP_k(\mathrm{v})=(\lambda_1P_1+\ldots+\lambda_kP_k)(\mathrm{v})\ .$$

לכן

$$T=\lambda_1P_1+\ldots+\lambda_kP_k\ .$$

2) לכל $\mathrm{v}\in V$,

$$(P_1+\cdots+P_k)(\mathrm{v})=P_1(\mathrm{v})+\ldots+P_k(\mathrm{v})=\mathrm{v}_1+\ldots+\mathrm{v}_k=\mathrm{v}$$

לכן $P_1+\ldots+P_k=I$.

3) לכל $i\neq j$ ולכל $\mathrm{v}\in V$,

$$(P_iP_j)(\mathrm{v})=P_i(P_j(\mathrm{v}))=P_i(\mathrm{v}_j)=0$$

כי $V_i\perp V_j$ לכן $P_iP_j=0$ לכל $i\neq j$.

4) לכל $\mathrm{v}\in V$,

$$P_i^2(\mathrm{v})=P_i(P_i(\mathrm{v}))=P_i(\mathrm{v}_i)=\mathrm{v}_i=P_i(\mathrm{v})$$

לכן $P_i^2=P_i$,

5) לכל $u,\mathrm{v}\in V$,

$$u=u_1+\ldots+u_k\ ,\qquad \mathrm{v}=\mathrm{v}_1+\ldots+\mathrm{v}_k$$

כאשר $u_i,\mathrm{v}_i\in V_i$ $(1\leq i\leq k)$. אז

$$\langle P_i(\mathrm{v}),u\rangle=\langle \mathrm{v}_i,u_1+\ldots+u_k\rangle=\langle \mathrm{v}_i,u_i\rangle$$

מצד שני:

$$\langle \mathrm{v},P_i(u)\rangle=\langle \mathrm{v}_1+\ldots=+\mathrm{v}_k,u_i\rangle=\langle \mathrm{v}_i,u_i\rangle$$

ז"א

$$\langle P_i(\mathrm{v}),u\rangle=\langle \mathrm{v},P_i(u)\rangle$$

לכל $u,\mathrm{v}\in V$. לכן $\bar{P}_i=P_i$.

■

9.1 שימושים של הפירוק הספקטרלי

דוגמה 9.2

נתונה העתקה $T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$ אזי

$$\begin{aligned} T^2 &= \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \lambda_i \lambda_j P_i P_j \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 P_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 P_i \end{aligned}$$

קל להוכיח באינדוקציה:

$$T^n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n P_i$$

דוגמה 9.3

במקרה של $\mathbb{F} = \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \overline{\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i\right)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i \bar{P}_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i P_i \end{aligned}$$

לכן, אם כל הערכים עצמיים הם ממשיים, אז

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i P_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i = T \end{aligned}$$

כלומר T צמודה לעצמה.

דוגמה 9.4

אם כל הערכים העצמיים מקיימים $|\lambda_i| = 1$ נקבל

$$\begin{aligned}
T\cdot\bar{T} &= \left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i P_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{k}\bar{\lambda}_i P_i\right)\\
&=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_i\bar{\lambda}_j P_i P_j\\
&=\sum_{i=1}^{k}|\lambda_i|^2 P_i^2\\
&=\sum_{i=1}^{k}|P_i\\
&=I
\end{aligned}$$

לכן T אוניטרית.

שעור 10
פולינומים

10.1 חילוק פולינומים, פולינום המינימלי ופולינומים שמתאפסים ע"י מטריצה

משפט 10.1

הפולינום המינימלי הוא יחיד.

הוכחה: נניח שיש שני פולינומים $f_1(x)$ ו- $f_2(x)$, $f_1(x)\neq f_2(x)$ מאותו סדר, כלומר

$$f_1(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\ldots+\alpha_{k-1}x^{k-1}+x^k\ ,$$

$$f_2(x)=\beta_0+\beta_1x+\ldots+\beta_{k-1}x^{k-1}+x^k\ .$$

כך ש $f_1(A)=0$ ו- $f_2(A)=0$, אז

$$(f_1-f_2)(A)=0\ .$$

$(f_1-f_2)(x)$ פולינום מסדר קטן מ- k. סתירה. ■

משפט 10.2 משפט חילוק של פולינומים

יהיו $f(x),g(x)$ פוליניומים כך ש- $\deg g\leq \deg f$. אז קיימים פולינמים $r(x),q(x)$ יחידים כך ש

$$f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x)$$

כאשר

$$\deg\ r(x)<\deg\ g(x),\qquad \deg\ g(x)\leq\deg\ f(x)\ .$$

משפט 10.3 פולינום שמתאפס ע"י A מחלק את הפולינום המינימלי

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית ויהי $f(x)$ פולינום. אם $f(A)=0$ אז

$$m_A(x)\mid f(x)\ .$$

הוכחה: נחלק את $f(x)$ ב- $m_A(x)$. לפי משפט חילוק פולינומים,

$$f(x)=m_A(x)\cdot q(x)+r(x)$$

כאשר $\deg\ r(x)<\deg\ m_A(x)$. אז

$$f(A)=q(A)m_A(A)+r(A)\ .$$

$f(A)=0$ ו $m_A(A)=0$ לכן $r(A)=0$.

ז"א או $r(x)$ הוא הפולינום האפס או הוא לא פולינום האפס אבל $r(x)$ מתאפס ע"י A.
$m_A(x)$ הוא הפולינום המינימלי ו $\deg\, r(x) < \deg\, m_A(x)$, כלומר $m_A(x)$ הוא הפולינום מדרגה הכי נמוכה המתאפס ע"י A.
לכן $r(A)=0$ אם"ם $r(x)=0$, כלומר $r(x)$ פולינום האפס.
כלומר קיבלנו ש- $f(x)=q(x)\cdot m_A(x)$ ולכן $m_A(x) \mid f(x)$. ■

מסקנה 10.1 פולינום המינימלי מחלק את הפולינום האופייני

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. אם $p_A(x)$ הפולינום האופייני ו- $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A, אז

$$m_A(x) \mid p_A(x) \ .$$

הוכחה: לפי משפט קיילי המילטון , $p_A(A)=0$. הפולינום המינימלי מחלק כל פולינום המתאפס ע"י A, לכן $m_A(x)|p_A(x)$. ■

משפט 10.4 $p_A(x)$ מחלק כל פולינום המתאפס ע"י A בחזקת הסדר של A.

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. יהי $p_A(x)$ הפולינום האופייני של A. אם A מאפסת את הפולינום $f(x)$, כלומר אם $f(A)=0$, אז

$$p_A(x) \mid f^n(x) \ .$$

הוכחה: $\deg\, p_A(x)=n$.
$f(A)=0$ אז $f(x)$ אינו פולינום קבוע, ז"א $\deg\, f(x)\geq 1$, ולכן $\deg\, p_A(x)\leq \deg\, f^n(x)$.
נחלק $f^n(x)$ ב- $p_A(x)$ ע"י האלגוריתם איוקלידי:

$$f^n(x)=q(x)p_A(x)+r(x)\ , \tag{*1}$$

$\deg\, r(x) < \deg\, p_A(x) \leq \deg\, f^n(x)$.

$m_A(x)|p_A(x)$ אז $p_A(x)=q_1(x)m_A(x)$. נציב זה ב- (*1) ונקבל

$$f^n(x)=q_1(x)q(x)m_A(x)+r(x)\ . \tag{*2}$$

$f(A)=0$ לכן $f^n(A)=0$ לכן $m_A(x)\mid f^n(x)$.
נניח ש- $r(x)\neq 0$ ב- (*2). אז $m_A(x)\nmid f^n(x)$. סתירה.
■

משפט 10.5 גורם אי-פריק של הפולינום האופייני מחלק כל פולינום המתאפס ע"י A.

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. יהי $p_A(x)$ הפולינום האופייני של A. אם $(x-\lambda_0)$ גורם אי פריק של $p_A(x)$ ו- $f(x)$ פולינום המתאפס ע"י A, כלומר אם $f(A)=0$, אז

$$(x-\lambda_0) \mid f(x) \ .$$

הוכחה:
אם $(x-\lambda_0)$ גורם אי-פריק של $p_A(x)$, אז λ_0 ערך עצמי של A.
נחלק $f(x)$ ב- $(x-\lambda_0)$. כלומר לפי משפט חילוק פולינומים קיימים פולינומים יחידים $q(x),r(x)$ כך ש-

$$f(x)=q(x)(x-\lambda_0)+r(x)$$

כאשר $\deg\, r(x) < \deg\, (x-\lambda_0) \leq \deg\, f(x)$.
$\deg\, (x-\lambda_0) = 1$ אז $\deg\, r(x) = 0$.
ז"א $r(x)$ פולינום קבוע: $r(x) = c \in \mathbb{F}$ כאשר c סקלר.
יהי v וקטור עצמי השייך ל- λ_0. אז

$$0 = f(A)\mathrm{v} = q(A)(A-\lambda_0 I)\mathrm{v} + c\mathrm{v}$$

v הוא הוקטור עצמי השייך ל- λ_0, אז
$(A-\lambda_0)\mathrm{v} = A\mathrm{v} - \lambda_0\mathrm{v} = \lambda_0\mathrm{v} - \lambda_0\mathrm{v} = 0$.
לכן $c=0$, ואז נקבל

$$f(x) = q(x)(x-\lambda_0) \ ,$$

ז"א $(x-\lambda_0) \mid f(x)$. ■

10.2 מחלק משותף

הגדרה 10.1 מחלק משותף

יהיו $p_1(x),\ldots,p_k(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינומים מעל שדה $\mathbb{F}$. פולינום $h(x) \in \mathbb{F}[x]$ נקרא **מחלק משותף של** $p_1(x),\ldots,p_k(x)$ אם לכל $1 \leq i \leq k$ $h(x)$ מחלק את $p_i(x)$.

הגדרה 10.2 מחלק משותף מקסימלי

יהיו $p_1(x),\ldots,p_k(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינומים שונים מאפס מעל שדה $\mathbb{F}$. פולינום מתוקן $h(x) \in \mathbb{F}[x]$ נקרא **מחלק משותף מקסימלי של** $p_1(x),\ldots,p_k(x)$ אם:

1) h מחלק משותף של $p_1(x),\ldots,p_k(x)$.
2) אם $q(x)$ הוא מחלק משותף של $p_1(x),\ldots,p_k(x)$ אז $q(x)$ מחלק גם את $h(x)$.

מחלק משותף מקסימלי מסומן ב- $\gcd\,(p_1,p_2,\ldots,p_k)$ (greatest common divisor).

משפט 10.6

יהיו $p_1(x),\ldots,p_k(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינומים שונים מאפס מעל שדה $\mathbb{F}$. נגדיר

$$I = \left\{ q_1p_1 + q_2p_2 + \cdots + q_kp_k \;\middle|\; q_1,q_2,\ldots,q_k \in \mathbb{F}[x] \right\}$$

כלומר, I הוא אוסף כל "הצירופים הליניאריים" של $p_1(x),\ldots,p_k(x)$ כאשר ה"מקדמים" הם הפולינומים $q_1(x),q_2(x),\ldots,q_k(x)$. מתקיים:

1) $p_1(x),\ldots,p_k(x) \in I$.
2) אם $L(x) \in I$ ואם $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ אז $q(x)L(x) \in I$.
3) I תת-מרחב ליניארי של $\mathbb{F}[x]$.

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 10.7

יהיו $p_1(x),\ldots,p_k(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינומים שוים מאפס מעל שדה $\mathbb{F}$. נגדיר

$$I=\left\{q_1(x)p_1(x)+q_2(x)p_2(x)+\cdots+q_k(x)p_k(x)\;\middle|\;q_1(x),q_2(x),\ldots,q_k(x)\in\mathbb{F}[x]\right\}$$

נניח גם שלפחות אחד מהפולינומים $p_1(x),\ldots,p_k(x)$ אינו פולינום האפס.

1) קיים פולינום מתוקן $h(x)\in I$ כך ששום פולינום שמעלתו קטנה ממעלתו של $h(x)$ פרט לפולינום האפס אינו שייך ל- I.

2) $h(x)$ הוא מחלק משותף של $p_1(x),p_2(x),\ldots,p_k(x)$.

3) אם $k(x)\in\mathbb{F}[x]$ הוא מחלק משותף של $p_1(x),p_2(x),\ldots,p_k(x)$ אז $k(x)$ מחלק גם את $h(x)$.

הוכחה:

1) לפחות אחד מהפולינומים $p_1(x),p_2(x),\ldots,p_k(x)$ אינו פולינום האפס, נסיק מחלק (1) של טענה 10.6 שיש ב- I לפחות פולינום אחד שאינו אפס כלומר פולינום שמעלתו אי -שלילית. לכל קבוצה לא ריקה של מספרים שלמים אי -שליליםקיים מינימום, נובע שקיים פולינום $\hat{h}(x)\in I$ ממעלה מינימלית. כלומר, שום פולינום שמעלתו קטנה ממעלתו של $\hat{h}(x)$ פרט לפולינום האפס אינו שייך ל - I. אם נסמן ב- $a\neq 0\in\mathbb{F}$ את המקדם העליון של $\hat{h}(x)$ אז הפולינום $h(x)=a^{-1}\hat{h}(x)$ הוא פולינום מתוקן. ממשפט 10.6 סעיף (3) נובע ש- $h(x)\in I$. מעלתו של $h(x)$ שווה למעלתו של $\hat{h}(x)$. נובע ששום פולינום שמעלתו קטנה ממעלתו של $h(x)$ פרט לפולינום האפס, אינו שייך ל - I.

2) יהי $L(x)\in I$. נוכיח שקיים $q(x)\in\mathbb{F}[x]$ כך ש- $L(x)=q(x)h(x)$.

מכיוון ש- $h(x)$ אינו פולינום האפס ניתן לחלק את $L(x)$ ב- $h(x)$ עם שארית:

$$L(x)=q(x)h(x)+r(x)$$

כאשר $\deg(r)<\deg(h)$. מכיוון ש- $h(x),L(x)\in I$ אזי מסעיפים (2) ו- (3) של משפט 10.6

$r(x)=L(x)-h(x)q(x)\in I$. מכיוון ש- $\deg(r)<\deg(h)$ נסיק מתכונת מינימליות של $h(x)$ ש- $r(x)=0$.

לכן $L(x)=q(x)h(x)$ ולכן $h(x)$ מחלק $L(x)$.

3) יהיו $g_1(x),g_2(x),\ldots,g_k(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינומים המקיימים

$$p_1(x)=g_1(x)k(x),\quad p_2(x)=g_2(x)k(x),\quad\cdots\quad p_k(x)=g_k(x)k(x)\ .$$

מכיוון ש- $h(x)\in I$ נובע שקיימים $q_1(x),q_2(x),\ldots,q_k(x)\in\mathbb{F}[x]$ שעבורם

$$h(x)=q_1p_1(x)+\cdots+q_k(x)p_k(x)\ .$$

לכן

$$h(x)=q_1(x)g_1(x)k(x)+\cdots+q_k(x)g_k(x)k(x)=\Big(q_1(x)g_1(x)+\cdots+q_k(x)g_k(x)\Big)k(x)$$

כלומר $k(x)$ מחלק את $h(x)$.

■

משפט 10.8

יהיו $p_1(x),\ldots,p_k(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינומים שוים מאפס מעל שדה $\mathbb{F}$. נניח גם שלפחות אחד מהפולינומים $p_1(x),\ldots,p_k(x)$ אינו פולינום האפס.

1) קיים מחלק משותף מקסימלי יחיד $h(x)\in\mathbb{F}[x]$ ל- $p_1(x),\ldots,p_k(x)$.

2) קיימים $q_1(x),\ldots,q_k(x)\in\mathbb{F}[x]$ שעבורם $h=q_1p_1+q_2p_2+\cdots+q_kp_k$.

הוכחה: קיומו של מחלק משותף מקסימלי נובע משפט **??** והגדרה 10.2.
במהלך ההוכחה של חלק (3) של טענה **??** הוכחנו גם את קיומו של $q_1(x),\ldots,q_k(x)\in\mathbb{F}[x]$, כנדרש.

נותרנו עם הוכחת היחידות.

אם $h(x),h'(x)$ הם מחלקים משותפים מקסימליים של $p_1(x),\ldots,p_k(x)$, אז מתכונת (2) בהגדרה 10.2 נובע שהם מחלקים זה את זה. שני פולינומים מתוקנים שמחלקים זה את זה הם שווים. ■

הגדרה 10.3 פולינמים זרים

יהיו $p_1(x),p_2(x)$ פולינומים מעל שדה $\mathbb{F}$.

אומרים כי p_1 ו- p_2 זרים אם אין להם מחלקים משותפים פרט לפולינומי הקבועים.

במילים אחרות, p_1 ו- p_2 זרים אם $\gcd(p_1,p_2)=1$.

משפט 10.9 פולינמים זרים

יהיו $p_1(x),p_2(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינומים שאינם אפס.

p_1 ו- p_2 זרים אם ורק אם קיימים פולינומים $q_1(x),q_2(x)$ שעבורם $q_1(x)p_1(x)+q_2(x)p_2(x)=1$.

הוכחה:

<u>כיוון אם</u>

אם $\gcd(p_1,p_2)=1$ אז ממשפט 10.8 נובע שקיימים $q_1(x),q_2(x)\in\mathbb{F}[x]$ שעבורם $q_1(x)p_1(x)+q_2(x)p_2(x)=1$.

<u>כיוון רק אם</u>

נניח שקיימים $q_1(x),q_2(x)\in\mathbb{F}[x]$ שעבורם $q_1(x)p_1(x)+q_2(x)p_2(x)=1$.
יהי $k(x)$ מחלק משותף של p_1 ו- p_2. עלינו להוכיח ש- $\deg(k)=0$.
לשם כך, די להוכיח ש- $k(x)$ מחלק את 1. ואמנם קיימים פולינומים $g_1,g_2\in\mathbb{F}[x]$ כך ש-

$$p_1(x)=g_1(x)k(x)\ ,\qquad p_2(x)=g_2(x)k(x)\ .$$

לכן,

$$1=q_1(x)g_1(x)k(x)+q_2(x)g_2(x)k(x)=\Big(q_1(x)g_1(x)+q_2(x)g_2(x)\Big)k(x)\ .$$

בפרט, $k(x)$ מחלק את 1.

■

10.3 כפולה משותפת

הגדרה 10.4 כפולה משותפת

יהיו $p_1(x),\ldots,p_k(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינומים שונים מאפס מעל שדה $\mathbb{F}$. פולינום $q(x)\in\mathbb{F}[x]$ נקרא **כפולה משותפת של** $p_1(x),\ldots,p_k(x)$ אם לכל $1\leq i\leq k$ $p_i(x)$ מחלק את $q(x)$.

הגדרה 10.5 כפולה משותפת מינימלית

יהיו $p_1(x),\ldots,p_k(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינומים שונים מאפס. פולינום מתוקן $q(x)\in\mathbb{F}[x]$ נקרא **כפולה משותפת מינימלית של** $p_1(x),\ldots,p_k(x)$ אם:

1) $q(x)$ הוא כפולה משותפת של $p_1(x),\ldots,p_k(x)$.

2) שום פולינום שמעלתו קטנה ממעלתו של $q(x)$ פרט לפולינום האפס, אינו כפולה משותפת של $p_1(x),\ldots,p_k(x)$.

שעור 11
משפט הפירוק הפרימרי

11.1 הגדרה של חיתוך וסכום של תתי מרחבים

משפט 11.1 חיתוך של תת מרחב

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, V_1, V_2 תתי מרחבים של V. אז $V_1\cap V_2$ היא תת מרחב של V.

הוכחה:

1) V_1, V_2 תת מרחבים $\Leftarrow$ $\bar{0}\in V_1$ וגם $\bar{0}\in V_2$ $\Leftarrow$ $\bar{0}\in V_1\cap V_2$.

2) נניח $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\in V_1\cap V_2$.
אז $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\in V_1$ וגם $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\in V_2$.
V_1 תת מרחב $\Leftarrow$ $\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\in V_1$.
V_2 תת מרחב $\Leftarrow$ $\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\in V_2$.
ז"א $\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\in V_1\cap V_2$.

3) נניח $\mathrm{v}\in V_1\cap V_2$ ו $k\in\mathbb{F}$ סקלר.
אז $\mathrm{v}\in V_1$ ו $\mathrm{v}\in V_2$.
V_1 תת מרחב לכן $k\cdot\mathrm{v}\in V_1$.
V_2 תת מרחב לכן $k\cdot\mathrm{v}\in V_2$.
ז"א $k\cdot\mathrm{v}\in V_1\cap V_2$.

■

דוגמה 11.1

עבור V_1,V_2 תתי מרחבים של מרחב ווקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$, האם $V_1\cup V_2$ בהכרח תת מרחב של V?

פתרון:

דוגמה נגדית:

$V=\mathbb{R}^2$.

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}\ ,\qquad V_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}\ .$$

אז $\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in V_1$, $\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in V_2$, אבל $\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\notin V_1\cup V_2$.

משפט 11.2 תת מרחב הקטן ביותר

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, V_1, V_2 תתי מרחבים של V. אז הקבוצה

$$W = \{\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 | \mathrm{v}_1 \in V_1, \mathrm{v}_2 \in V_2\}$$

היא תת מרחב הקטן ביותר שמכיל את V_1 ו V_2.
ז"א לכל תת מרחב W' שמכיל את V_1 ו V_2, מתקיים $W \subseteq W'$.

הוכחה:

1) נוכיח ש W תת מרחב של V.

א) $V_1 \ni \bar{0}$ וגם $\bar{0} \in V_2$. לכן

$$\bar{0} = \bar{0} + \bar{0} \in W \ .$$

ב) נניח $w_1 = u_1 + u_2 \in W$, $w_2 = \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \in W$.
אז $u_1, \mathrm{v}_1 \in V_1$ וגם $u_2, \mathrm{v}_2 \in V_2$.
V_1, V_2 תתי מרחבים.
לכן $u_1 + \mathrm{v}_1 \in V_1$, וגם $u_2 + \mathrm{v}_2 \in V_2$.
מכאן

$$w_1 + w_2 = (u_1 + u_2) + (\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2) = (u_1 + \mathrm{v}_1) + (u_2 + \mathrm{v}_2) \in W \ .$$

ג) נניח $w = u_1 + u_2 \in W$ ו $k \in \mathbb{F}$. אז $u_1 \in V_1$ ו $u_2 \in V_2$. V_1, V_2 תתי מרחבים, לכן $ku_1 \in V_1$, $ku_2 \in V_2$. מכאן

$$kw = k(u_1 + u_2) = ku_1 + ku_2 \in W$$

2) נוכיח כי W התת מרחב הקטן ביותר

ברור כי W מכיל את V_1 ו V_2 כי
לכל $u \in V_1$, $u = u + \bar{0} \in W$
וגם לכל $u \in V_2$, $u = \bar{0} + u \in W$.
נוכיח ש W הוא תת מרחב הקטן ביותר שמכיל את V_1 ו V_2.
נניח ש W' איזשהו תת מרחב שמכיל את V_1 ו V_2.
נוכיח כי $W \subseteq W'$.
נקח וקטור $w \in W$. אז $w = u_1 + u_2$, כאשר $u_1 \in V_1$, $u_2 \in V_2$.
$V_1 \in W' \Leftarrow u_1 \in W'$.
$V_2 \in W' \Leftarrow u_2 \in W'$.
W' תת מרחב, לכן $w = u_1 + u_2 \in W'$.
מש"ל.

■

למה 11.1

למרחב W של משפט 11.2 (המשפט הקודם) נקרא הסכום של V_1 ו V_2 ומסומן ב V_1+V_2.

משפט 11.3 סכום של תת מרחב שווה לפרישה של האיחוד

$$V_1+V_2=\text{span}\left(V_1\cup V_2\right) \ .$$

הוכחה: נוכיח כי $V_1+V_2\subseteq \text{span}\left(V_1\cup V_2\right)$:

$V_1,V_2\subseteq \text{span}\left(V_1\cup V_2\right)$
לכן, לפי משפט 11.2,

$$V_1+V_2\subseteq \text{span}\left(V_1\cup V_2\right) \ .$$

נוכיח כי $\text{span}\left(V_1\cup V_2\right)\subseteq V_1+V_2$:

נניח $w\in \text{span}\left(V_1\cup V_2\right)$. אז קיימים $u_1,\ldots,u_k\in V_1$ ו $\text{v}_1,\ldots,\text{v}_n\in V_2$ וסקלרים $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{F}$, $\beta_1,\ldots,\beta_n\in\mathbb{F}$ כך ש

$$w=\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_ku_k+\beta_1\text{v}_1+\cdots+\beta_n\text{v}_n \ .$$

אז $\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_ku_k\in V_1$ וגם $\beta_1\text{v}_1+\cdots+\beta_n\text{v}_n\in V_2$.
לכן $w\in V_1+V_2$.

הוכחנו כי $V_1+V_2\subseteq \text{span}\left(V_1\cup V_2\right)$ וגם $\text{span}\left(V_1\cup V_2\right)\subseteq V_1+V_2$ $\Leftarrow$

$$V_1+V_2=\text{span}\left(V_1\cup V_2\right) \ .$$

■

דוגמה 11.2

נקח את המרחב ווקטורי $V=\mathbb{R}^3$. נקח את התתי מרחבים $\mathbb{R}^3$: $V_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}$, ו $V_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}\middle| y\in\mathbb{R}\right\}$, קווים ישרים ב $\mathbb{R}^3$. אז הסכום שלהם הינו

$$V_1+V_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\middle| x,y\in\mathbb{R}\right\} \ ,$$

ומהווה את המישור $z=0$ ב $\mathbb{R}^3$.

11.2 משפט המימדים של סכום וחיתוך

משפט 11.4 משפט המימדים

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, V_1, V_2 תתי מרחבים של V. אז

$$\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1\cap V_2)$$

הוכחה: נסמן $\dim(V_1)=k$, $\dim(V_2)=n$, $\dim(V_1\cap V_2)=m$.
$V_1\cap V_2\subseteq V_1$ לכן $m\leq k$.
$V_1\cap V_2\subseteq V_2$ לכן $m\leq n$.
נבחר בסיס $u_1,\ldots,u_m$ של $V_1\cap V_2$.
נשלים אותו לבסיס של V_1 ונקבל
$u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m}$.
נשלים אותו גם לבסיס של V_2:
$u_1,\ldots,u_m,b_1,\ldots,b_{n-m}$.

נוכיח כי $V_1+V_2=\text{span}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}.\right)$:

נניח $w=\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\in V_1+V_2$. אז

$$\mathrm{v}_1=\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_mu_m+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}\in V_1\ ,$$
$$\mathrm{v}_2=\alpha'_1u_1+\ldots+\alpha'_mu_m+\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}\in V_2\ .$$

אז

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2=&\left(\alpha_1+\alpha'_1\right)u_1+\ldots+\left(\alpha_m+\alpha'_m\right)u_m\\&+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}\\&+\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}\end{aligned}$$

ז"א

$$\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\in\text{span}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\right)$$

נוכיח את ההכלה ההפוכה, כלומר $\text{span}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\right)\in V_1+V_2$:

נניח
$$w\in\text{span}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\right)$$
אז קיימים סקלרים $\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots,\beta_{k-m},\gamma_1,\ldots,\gamma_{n-m}$ כך ש

$$w=\alpha_1u_1+\ldots\alpha_mu_m+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}+\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}$$

נסמן

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_1=&\alpha_1u_1+\ldots\alpha_mu_m+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}\\\mathrm{v}_2=&\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}\end{aligned}$$

אז

$$\mathrm{v}_1\in V_1,\qquad\mathrm{v}_2\in V_2,\qquad w=\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2$$

כלומר $w\in V_1+V_2$.

נשאר להוכיח שוקטורים $\{u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\}$ בת"ל:

נניח:

$$\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k-m} a_{k-m} + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{n-m} b_{n-m} = \bar{0} \ . \qquad (*1)$$

אז

$$\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k-m} a_{k-m} = -\gamma_1 b_1 - \ldots - \gamma_{n-m} b_{n-m} := \mathrm{v}. \qquad (*2)$$

הוקטור באגף השמאל שייך ל V_1.
הוקטור באגף הימין שייך ל V_2.
לכן, לפי (2*) $\mathrm{v} \in V_1 \cap V_2$. $u_1, \ldots, u_m$ בסיס של $V_1 \cap V_2$ (נתון) . לכן קיימים סקלרים $\delta_1, \ldots, \delta_m$ כך ש

$$\mathrm{v} = \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m \ .$$

לכן

$$\begin{aligned} \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{n-m} b_{n-m} =& \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m - (-\gamma_1 b_1 - \ldots - \gamma_{n-m} b_{n-m}) \\ =& \mathrm{v} - \mathrm{v} \\ =& \bar{0} \ , \end{aligned}$$

ז"א

$$\delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{n-m} b_{n-m} = \bar{0} \ . \qquad (*3)$$

$u_1, \ldots u_m, b_1, \ldots, b_{n-m}$ בסיס של V_2 (נתון) . לכן הם בת"ל. לכן (3*) מתקיים רק אם

$$\delta_1 = \ldots = \delta_m = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{n-m} = 0 \ . \qquad (*4)$$

מכאן מקבלים מ (1*) כי

$$\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k-m} a_{k-m} = \bar{0} \ . \qquad (*5)$$

$u_1, \ldots u_m, a_1, \ldots, a_{k-m}$ בסיס של V_1 (נתון) , לכן הם בת"ל.
לכן (5*) מתקיים רק אם

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \beta_1 = \ldots = \beta_{k-m} = 0. \qquad (*6)$$

לכן, בגלל שהמקדמים ב (1*) כולם שווים ל 0, כפי שהוכחנו ב (4*) ו (6*), אז הוקטורים $u_1, \ldots u_m, a_1, \ldots, a_{k-m}, b_1, \ldots . b_{n-m}$ בת"ל. כלומר הם מהווים בסיס של $V_1 + V_2$.
מכאן

$$\dim(V_1 + V_2) = m + (k - m) + (n - m) = k + n - m = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

מש"ל. ■

מסקנה 11.1

נניח $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ תתי מרחבים ממימד 2, אז $\dim(V_1 \cap V_2) > 0$.

הוכחה: V_1, V_2 תתי מרחבים של $\mathbb{R}^3$, לכן $\dim(V_1 + V_2) \leq 3$. לפי משפט 11.4,

$$4 = \dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) \leq 3 + \dim(V_1 \cap V_2)$$

■

11.3 סכום ישר

הגדרה 11.1 סכום ישר

יהיו U_1 ו U_2 שני תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$.
תת מרחב W של מרחב וקטורי V נקרא סכום ישר של U_1 ו U_2 אם ורק אם מתקיימים:

א) $W = U_1 + U_2$

ב) לכל וקטור של W יש הצגה יחידה כסכום של וקטורים ב U_1 ובו U_2.

סימון:

$$W = U_1 \oplus U_2$$

הסכום הישר של U_1, U_2.

משפט 11.5

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, U ו W תת מרחבים של V. אז $V = U \oplus W$ אם ורק אם

א) $V = U + W$

ב) $U \cap W = \{\bar{0}\}$.

הוכחה:

1) נניח כי $V = U \oplus W$. אז לפי הגדרה 11.1, סכום ישר $V = U + W$. נשאר להוכיח כי $U \cap W = \{\bar{0}\}$.
נניח $\mathrm{v} \in U \cap W$, אז $\mathrm{v} \in U$ וגם $\mathrm{v} \in W$. לכן אפשר לרשום

$$\mathrm{v} = \underset{\in U}{\mathrm{v}} + \underset{\in W}{\bar{0}}$$

וגם

$$\mathrm{v} = \underset{\in U}{\bar{0}} + \underset{\in W}{\mathrm{v}}$$

מכיוון שהסכום הוא ישר, יש רק דרך יחידה לרשום את v כסכום של וקטורים של U ו W. לכן $\mathrm{v} = \bar{0}$.

2) נניח כי $V = U + W$ וגם $U \cap W = \{\bar{0}\}$.
נוכיח כי $V = U \oplus W$.

לפי הגדרת סכום ישר 11.1, נשאר להוכיח כי כל וקטור $\mathrm{v} \in V$ ניתן להציג בדרך יחידה כסכום של וקטורים של U ו W.

נקח $\mathrm{v} \in V$. נניח כי $\mathrm{v} = u_1 + \mathrm{w}_1$ וגם $\mathrm{v} = u_2 + \mathrm{w}_2$ כאשר $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$.
אז

$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \qquad \Rightarrow \qquad u_1 - u_2 = w_2 - w_1$$

(כאשר $u_1 - u_2 \in U$ ו $w_2 - w_1 \in W$. לכן

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{\bar{0}\} \ .$$

מכאן, $u_1 - u_2 = \bar{0}$ וגם $w_2 - w_1 = \bar{0}$.
לכן $u_1 = u_2$ וגם $w_1 = w_2$.

■

שעור 12
שונות

12.1 לכסון אורתוגונית

הגדרה 12.1 מטריצה לכסינה אורתוגונלית

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אורתוגונלית אן קיימת מטריצה אורתוגונלית U ומטריצה אלכסונית D כך ש-

$$A = UDU^{-1} = UDU^t \ .$$

הגדרה 12.2 מטריצה סימטרית

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת מטריצה סימטרית אם

$$A = A^t \ .$$

משפט 12.1 מטריצה לכסינה אורתוגונלית היא סימטרית

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ שלכסינה אורתוגונלית היא בהכרח מטירצה סימטרית.

הוכחה: נניח כי A לכסינה אורתוגונלית.

ז"א קיימת D אלכסונית ו- U אורתוגונלית כך ש-

$$A = UDU^{-1} = UDU^t \ .$$

לפיכך

$$A^t = \left(UDU^t\right)^t = \left(U^t\right)^t D^t U^t = UDU^t = A \ .$$

■

משפט 12.2 תנאי מספיק למטירצה סימטרית

מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ היא מטירצה סימטרית אם ורק אם

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$, כאשר $(,)$ המכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^n$.

הוכחה: נניח כי A סימטרית. אזי

$$(Ax, y) = (Ax)^t y = x^t A^t y = \left(x, A^t y\right) = (x, Ay)$$

נניח כי $(Ax, y) = (x, Ay)$. נרשום

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

כאשר $a_i\in\mathbb{R}^n$ העמודות של המטריצה A.

$$(Ae_i,e_j)=(a_i,e_j)=A_{ji}=\ \text{רכיב ה-}(j,i)\text{ של }A$$

$$(e_i,Ae_j)=(e_i,a_j)=A_{ij}=\ \text{רכיב ה-}(i,j)\text{ של }A$$

לכן

$$(Ae_i,e_j)=(e_i,Ae_j)\quad\Rightarrow\quad A_{ji}=A_{ij}\quad\Rightarrow\quad A^t=A\ .$$

ז"א A סימטרית. ■

כלל 12.1 תכונות של מספרים מרוכבים

- כל מספר $z\in\mathbb{C}$ ניתן לרשום בצורה $z=a+ib$ כאשר $a,b\in\mathbb{R}$.
- $i^2=-1$.
- נתון מספר מרוכב $z\in\mathbb{C}$ מצורה $z=a+ib$. נגדיר הצמוד של z לפי $\bar{z}=a-ib$.
- $z\in\mathbb{R}$ אם ורק אם $\bar{z}=z$.
- $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$.
- נתון $z\in\mathbb{C}$. הערך מוחלט של z מסומן $|z|$ ומוגדר $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.
- $z\bar{z}=a^2+b^2=|z|^2$.
- לכל $z,w\in\mathbb{C}$ מתקיים $\overline{zw}=\bar{z}\bar{w}$.

משפט 12.3 הערכים עצמיים של מטריצה סימטרית ממשיים

אם $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית אז כל הערכים עצמיים של A ממשיים.

הוכחה: לפי משפט הפירוק הפרימרי, ל-A יש ערכים עצמיים $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ (לא בהכרח שונים).

לכל $u=\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n$, הסקלר $a=\bar{u}Au$ ממשי:

$$\begin{aligned}
a&=(u^*)^t Au=(u^*)^t A^t u &&(\text{סימטרית } A)\\
&=(Au^*)^t u=u^t(Au^*) &&(\text{משפט } 12.2)\\
&=u^tA^*u^* &&(\text{ממשי } A)\\
&=a^*\ .
\end{aligned}$$

נניח כי $u=\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n$ ווקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ_i. אזי

$$\bar{u}Az=\bar{u}\lambda_i u=\lambda_i\bar{u}u=\lambda_i(\bar{u},u)=\lambda_i\left(|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2\right)$$

u ווקטור עצמי $\Leftarrow u\neq 0 \Leftarrow \exists\, z_k\neq 0 \Leftarrow \left(|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2\right)\neq 0$.
בנוסף $\left(|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2\right)$ ממשי, ו- $\bar{u}Az$ ממשי. לכן λ_i בהכרח ממשי. ■

משפט 12.4 מטריצה ממשית לכסינה אורתוגונלית אם"ם היא סימטרית

נתונה $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריתה ממשית. A לכסינה אורתוגונלית אם ורק אם היא סימטרית.

הוכחה: נניח כי A לכסינה אורתוגונלית.
ז"א קיימת D אלכסונית ו- U אורתוגונלית כך ש-

$$A=UDU^{-1}=UDU^{t}\ .$$

אזי

$$A^t=\left(UDU^t\right)^t=\left(U^t\right)^t D^tU^t=UDU^t=A\ .$$

נניח כי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית. נוכיח באמצעות אינדוקציה על n כי היא לכסינה אורתוגונלית.

<u>שלב הבסיס</u>

עבור $A\in\mathbb{R}^{1\times 1}$, כלומר $A=a$ כאשר $a\in\mathbb{R}$ סקלר.

$$A=a=UDU^t$$

כאשר $U=(1)\in\mathbb{R}^{1\times 1}$ אורתוגונלית ו- $D=(a)\in\mathbb{R}^{1\times 1}$ אלכסונית.

<u>שלב האינדוקציה</u>

נניח כי כל מטריצה סימטרית מסדר $(n-1)\times(n-1)$ לכסינה אורתוגונלית (ההנחת האינדוקציה).

לכל מטריצה קיימת לפחות ווקטור עצמי אחד.
לכן נניח כי v_1 ווקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ_1 ונניח כי $\|\mathrm{v}_1\|=1$.
A סימטרית לכן $\lambda_1\in\mathbb{R}$ (משפט 12.3).
נשלים $\{\mathrm{v}_1\}$ לבסיס של $\mathbb{R}^n$:

$$\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n\}\ .$$

נבצע התהליך של גרם שמידט כדי להמיר בסיס זו לבסיס אורתוגונלי של $\mathbb{R}^n$:

$$B=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}\ ,$$

כאשר $u_1=\mathrm{v}_1$, $u_2=\mathrm{v}_2-\dfrac{(\mathrm{v}_2,u_1)}{\|u_1\|^2}u_1$ וכן הלאה.
נגדיר

$$P=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}\ .$$

נשים לב כי P היא המטריצה המעבר מבסיס הסטנדרטי לבסיס B.
P אורתוגונלי לכן $P^{-1}=P^t$.
נתבונן על המטריצה $P^{-1}AP=P^tAP$. נשים לב כי היא סימטרית

$$\left(P^tAP\right)^t=P^tA^t\left(P^t\right)^t=P^tA^tP=P^tAP\ .$$

והעמודה הראשונה הינה

$$P^{-1}APe_1=P^{-1}Au_1=P^{-1}\lambda_1u_1=\lambda_1P^{-1}u_1=\lambda_1\left[u_1\right]_B=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\ .$$

לפיכך $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & B\end{pmatrix}$ כאשר $\mathbb{0}$ בלוק עם $n-1$ אפסים ו- B מטריצה סימטרית מסדר $(n-1)\times(n-1)$.

לפי ההנחת האינדוקציה B לכסינה אורתוגונלית.
ז"א קיימת $U'\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ אורתוגונלית ו- $D'\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ אלכסונית כך ש- $B=U'D'U'^{-1}=U'D'U'^{t}$.

לכן

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & U'D'U'^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & U'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & D'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & U'^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & U'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & D'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & U'\end{pmatrix}^{-1}$$

נכפיל מצד שמאל ב- P ומצד ימין ב- P^{-1}:

$$A=P\begin{pmatrix}1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & U'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & D'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & U'\end{pmatrix}^{-1}P^{-1}$$

נגדיר $U=P\begin{pmatrix}1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & U'\end{pmatrix}$ ו- $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & D'\end{pmatrix}$. ז"א

$$A=UDU^{-1}\ .$$

נשים לב כי U אורתוגונלית ו- D אלכסונית. לפיכך A לכסינה אורתוגונלית.

■

12.2 שילוש לכיסון של מטריצה לפי פולינום מינימלי

הגדרה 12.3 צמצום של העתקה

נתון מרחב ווקטורי V ונתונה אופרטור $T:V\to V$. נניח כי $W\subset V$ תת-מרחב T-שמור של V.
נניח כי $\mathrm{v}\in V$ ווקטור של V.
נגדיר קבוצת פולינומים $S_T(\mathrm{v},W)$ כך שכל פולינום $g\in S_T(\mathrm{v},W)$ מקיים את התנאי

$$g(T)\mathrm{v}\in W\ .$$

הקבוצה $S_T(\mathrm{v},W)$ תקרא המנחה T.

הגדרה 12.4

נתון $S_T(\mathrm{v},W)$. הפולינום המתוקן של דרגה הקטנה ביותר ב- $S_T(\mathrm{v},W)$ נקרא מנחה-T מינימלי.

משפט 12.5

נניח כי $S_T(\mathrm{v},W)$ conductor T של v ונניח כי g המנחה-T מינימלי.

$$f\in S_T(\mathrm{v},W)\Leftrightarrow g\mid f\ .$$

הוכחה: נניח כי $f\in S_T(\mathrm{v},W)$. נוכיח כי $g\mid f$ דרך השלילה. ז"א נניח כי $g\nmid f$. לפי כלל אוקליד,

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x)\qquad\Rightarrow\qquad f(x)-q(x)g(x)=r(x)\ .$$

כאשר $\deg(r)<\deg(g)\le\deg(f)$.

$f, g \in S_T(\mathrm{v}, W)$ לכן $f(T)\mathrm{v} \in W$, ו- $g(T)\mathrm{v} \in W$. לכן גם $q(T)g(T)\mathrm{v} \in W$ בגלל ש- W תת-מרחב T שמור. לפיכך $r(T)\mathrm{v} \in W$. אך $\deg(r) < \deg(g)$, בסתירה לכך ש- g הפולינום של דרגה קטנה ביותר המקיים $g(T)\mathrm{v} \in W$.

נניח כי $g \mid f$.
$f(T)\mathrm{v} = q(T)g(T)\mathrm{v} \Leftarrow f(x) = q(x)g(x) \Leftarrow$
$g(T)\mathrm{v} \in W$ לכן $q(T)g(T)\mathrm{v} \in W$ בגלל ש- W תת-מרחב T-שמור.
לכן $f(T)\mathrm{v} \in W$.

■

משפט 12.6

נניח כי $S_T(\mathrm{v}, W)$ T-conductor. נניח כי g המנחה T-מינימלי ו- m_T הפולינום המינימלי של T. אז $g \mid m_T$.

הוכחה: נוכיח כי $g \mid m_T$ דרך השלילה.
נניח כי $g \nmid m_T$. לפי כלל אוקליד:

$$m_T(x) = q(x)g(x) + r(x) \ ,$$

$\deg(r) < \deg(g) \leq \deg(m_T)$.

$$0 = m_T(T) = g(T)q(T) + r(T) = 0 + r(T) \quad \Rightarrow \quad r(T) = 0$$

בסתירה לכך כי $m_T(T)$ הפולינום המינימלי.

■

משפט 12.7

$m_T \in S_T(\mathrm{v}, W)$.

הוכחה: נניח כי $g(x)$ המנחה T-מינימלי . לפי משפט 12.6, $g \mid m_T$.
לכן לפי משפט 12.5, $m_T \in S_T(\mathrm{v}, W)$.

■

משפט 12.8

נניח כי V מרחב ווקטורי $T : V \to V$ אופרטור. נניח כי $W \subset V$ תת מרחב T שמור. קיים $\alpha \in V \notin W$ כך ש-

$$(T - \lambda)\alpha \in W$$

כאשר λ ערך עצמי של T.

הוכחה:
נוכיח כי המנחה-T המינימלי של α ל- W הוא פולינום ליניארי.

נניח כי β כל ווקטור שב- V אבל לא ב- W, כלומר $\beta \in V \notin W$.
יהי g המנחה-T המינימלי של β ל- W.
משפט 12.6 $\Leftarrow g \mid m_T \Leftarrow g(x) = (x - \lambda_i)h(x)$ כאשר λ_i ערך עצמי של T ו- $h(x)$ פולינום.

g הפולינום של דרגה קטנה ביותר כך ש- $W \ni g(T)\beta$. לכן $\alpha = h(T)\beta \notin W$.

לכן
$$(T-\lambda_i I)\alpha = (T-\lambda_i)h(T)\beta = g(T)\beta \in W$$
בגלל ש- $g(T)$ המנחה T-המינימלי של β.

■

משפט 12.9

T לכסינה אם ורק אם m_T מתפרק לגורמים ליניאריים שונים:
$$m_T(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)\ .$$

הוכחה: נניח כי $m_T(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$.
נניח כי $W = \text{span}\{u_1,\ldots,u_k\}$ כאשר $u_1,\ldots,u_k$ הווקטורים עצמיים של T, ו- $W \neq V$.
לפי משפט 12.8 קיים $\alpha \notin W$ וערך עצמי λ_i של T כך שהווקטור $\beta = (T-\lambda_i I)\alpha \in W$.

מכיוון ש- $\beta \in W$ אז $\beta = u_1+\ldots+u_k$, כאשר $Tu_i = \lambda_i u_i$ לכל $1 \leq i \leq k$.

לכן

(*)
$$h(T)\beta = h(\lambda_1)u_1+\ldots+h(\lambda_k)u_k \in W\ .$$

לכל פולינום h.

(**)
$$m_T(x)\beta = (x-\lambda_i)q(x)$$

כאשר $q(x)$ פולינום.

לפי מפשט השארית,

(***)
$$q(x) = (x-\lambda_i)h(x) + q(\lambda_i)$$

כאשר $q(x)$ פולינום. לכן

(****)
$$q(T)\alpha - q(\lambda_i)\alpha = h(T)(T-\lambda_i I)\alpha = h(T)\beta$$

לפי (*), $h(T)\beta \in W$.

מכיוון ש-
$$0 = m_T(T)\alpha = (T-\lambda_i)q(T)\alpha,$$
כלומר $q(T)\alpha$ ווקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי λ_i, אז $q(T)\alpha \in W$.

לכן לפי (****), $q(\lambda_i)\alpha \in W$.

אבל $\alpha \notin W$, לכן $q(\lambda_i) = 0$.

אז לפי (**), לא כל השורשים של m_T שונים. סתירה!

■

משפט 12.10

T ניתנת לשילוש אם ורק אם m_T מתפרק לגורמים ליניאריים (לא בהכרח שונים):

$$m_T(x) = (x-\lambda_1)^{r_1}\cdots(x-\lambda_k)^{r_k} \ .$$

הוכחה: נניח כי $m_T(x) = (x-\lambda_1)^{r_1}\cdots(x-\lambda_k)^{r_k}$.
אנחנו רוצים למצוא בסיס $\beta_1,\ldots\beta_n$ כך ש-

$$[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

נדרוש כי

$$T(\beta_i) = a_{1i}\beta_1 + \ldots + a_{ii}\beta_i \ .$$

ז"א $T(\beta_i) \in \{\beta_1,\ldots,\beta_i\}$.
יהי $W = \{0\} \subset V$.
לפי משפט 12.8 $\exists \alpha \in V \notin \{0\}$ כך ש- $(T-\lambda_1)\alpha \in \{0\}$.
ז"א

$$(T-\lambda_1 I)\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad T\alpha = \lambda_1\alpha \ ,$$

ז"א α ווקטור עצמי של T.
נבחור $\alpha = \beta_1$. אז $[T(\beta_1)]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
יהי $W_1 = \{\beta_1\} \subset V$. נשים לב כי W_1 תת מרחב T שמור.
לפי משפט 12.8 $\exists \alpha \in V \notin W_1$ כך ש- $(T-\lambda_2)\alpha \in W_1$.
ז"א

$$(T-\lambda_2 I)\alpha = k\beta_1 \quad \Rightarrow \quad T(\alpha) = k\beta_1 + \lambda_2\alpha \ ,$$

נבחור $\alpha = \beta_2$. אז $T(\beta_2) = k\beta_1 + \lambda_2\beta_2$.
שימו לב, $\beta_2 \notin W_1$ ו- $\beta_1 \in W$, לכן $\{\beta_1,\beta_2\}$ בלתי תלויים ליניארית.
$[T(\beta_2)]_\beta = \begin{pmatrix} k \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
נמשיך עם התהליך הזה:
יהי $W_i = \{\beta_1,\ldots,\beta_i\} \subset V$. נשים לב כי W_i תת מרחב T שמור.
לפי משפט 12.8 $\exists \alpha \in V \notin W_i$ כך ש- $(T-\lambda_j)\alpha \in W_i$.
ז"א

$$(T-\lambda_j I)\alpha = c_1\beta_1 + \ldots + c_i\beta_i \quad \Rightarrow \quad T(\alpha) = c_1\beta_1 + \ldots + c_i\beta_i + \lambda_j\alpha\alpha \ .$$

שימו לב, $\alpha \notin W_i$ לכן α בלתי תלוי ליניארית מ- $\{\beta_1,\ldots,\beta_i\}$.
נבחור $\alpha = \beta_{i+1}$.

$$[T(\beta_{i+1})]_\beta = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \lambda_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

נניח כי T ניתנת לשילוש.

$\Leftarrow$ קיים בסיס עבורו המטריצה המייצגת $[T]$ לכסין.

$\Leftarrow$ הפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים (לא בהכרלח שונים).

$p \mid m \Leftarrow m$ מתפרק לגורמים ליניאריים (לא בהכרח שונים). ■