דף סיכום אופרטור הצמוד

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$.

בסיס אורתונורמלי, מסומן $\{b_1, \ldots, b_n\}$, מקיים את התנאי

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} , \qquad 1 \leq i, j \leq n \ .$$

כל וקטור $u \in V$ ניתן לרשום בצורה

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, b_i \rangle \, b_i$$

סימון חלופי:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \langle u, b_1 \rangle \\ \langle u, b_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_i \rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_n \rangle \end{pmatrix}_B$$

יהי $T : V \to V$ אופרטור. המצרטיצה המייצגת על פי בסיס B היא

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \langle T(b_1), b_1 \rangle & \langle T(b_2), b_1 \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_1 \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_1 \rangle \\ \langle T(b_1), b_2 \rangle & \langle T(b_2), b_2 \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_2 \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_i \rangle & \langle T(b_2), b_i \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_i \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_i \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_n \rangle & \langle T(b_2), b_n \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_n \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_n \rangle \end{pmatrix} \ .$$

כלומר האיבר ה- ij של המטריצה המייצגת של T על פי הבסיס B היא

$$[T]_{ij} = \langle T(b_j), b_i \rangle \ .$$

ההגדרה של אופרטור הצמוד:

אם $T : V \to V$ אופרטור, ו- $u, w \in V$ שני וקטורים כלשהם של V, אזי האופרטור הצמוד של T מוגדר כך ש-

$$\langle T(u), w \rangle = \langle u, \bar{T}(w) \rangle \ . \qquad (*1)$$

משפט:

$$\langle \bar{T}(u), w \rangle = \langle u, T(w) \rangle \qquad (*2)$$

נוסחה ל- $T(u)$ ו- $\bar{T}(u)$ במונחי בסיס אורתונורמלי $\{b_1, \cdots, b_n\}$:

$$T(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(u), b_i \rangle b_i \tag{*3}$$

$$\bar{T}(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u, T(b_i) \rangle b_i \tag{*4}$$

משפט:

$$\bar{\bar{T}} = T \tag{*5}$$

משפט: המטריצה המייצגת של אופרטור צמוד $\bar{T}$ נתונה ע"י

$$[\bar{T}] = \overline{[T]} \tag{*6}$$

יהי $T : V \to V$ אופרטור מעל מרחב וקטורי V. נסמן המטריצה המייצגת $A = [T]$.

- אומרים כי T **צמוד לעצמו** אם $T = \bar{T} \quad \Leftrightarrow \quad A = \bar{A}$.
- אומרים כי T **אנטי-הרמיטי** אם $\bar{T} = -T \quad \Leftrightarrow \quad \bar{A} = -A$.
- אומרים כי T **אוניטרי** אם $T\bar{T} = I_V = \bar{T}T \quad \Leftrightarrow \quad A\bar{A} = I = \bar{A}A$.
- אומרים כי T **נורמלי** $T\bar{T} = \bar{T}T \quad \Leftrightarrow \quad A\bar{A} = \bar{A}A$.