

## חדו"א 2 למדמ"ח

מועד א'

ד"ר מרינה ברשדסקי   ד"ר ירמיהו מילר   ד"ר זהבה צבי

תשפ"ה סמסטר ב'

**בהצלחה!**

**השאלון מכיל 6 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).**

**סדר התשובות הינו חשוב. הסבירו היטב את מהלך הפתרון.**

**תשובה ללא הסבר ( גם נכונה ) לא תתקבל.**

### חומר עזר:

- מחשבון (ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן).
- דפי הנוסחאות המצורפים לשאלון המבחן.

### הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.

### יש לענות על השאלות באופן הבא:

- שאלות 1,2,3 - יש לענות על כל השאלות.
- שאלות 4,5,6 - יש לענות שתי שאלות בלבד מתוך שלוש.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה אחת בלבד מתוך שתיים.

## שאלות 3 – 1 חובה

**שאלה 1 (24 נקודות)** נתונה הפונקציה  $z(x, y) = xye^{-(x+y)}$ .

(א) (12 נק') מצאו אקסטרמומים לוקליים של פונקציה זו ובררו את סוגן.

(ב) (12 נק') בתחום החסום ע"י משולש עם קודקודים  $A(1, -1)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(0, 0)$  מצאו את הערך הגודל ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה הנתונה.

## שאלה 2 (18 נקודות)

(א) (9 נק') שרטטו את תחום האינטגרציה, שנו את סדר האינטגרציה באינטגרל  $\int_{-3}^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 dy e^{(x^2+y^2)}$ .

(ב) (9 נק') חשבו בעזרת אינטגרל כפול את נפח הגוף החסום ע"י המשטחים: חשבו את הנפח הגוף המוגבל על ידי המשטחים הנתונים וציירו את הגוף במערכת שיעורים מרחבית  $xyz$  וצייר בנפרד גם את היטלו של הגוף על המישור  $xy$ .

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z - x = 0.$$

**שאלה 3 (18 נקודות)** הראו שסדרה  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת לגבול סופי ומצא את הגבול

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{\ln a_n}, \quad n \geq 1.$$

רמז: ראשית בדקו תחומי עליה וירידה, ונקודות קיצון לפונקציה תואמת  $y = \frac{x}{\ln x}$ .

תענו על 2 מתוך 3 השאלות 4 – 6

## שאלה 4 (12 נקודות)

(א) (6 נק') מצאו את המרחק בין הישרים:

$$l_1 : \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \quad l_2 : \quad \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{2}.$$

האם הישרים האלה הם נחתכים, מצטלבים, מקבילים או מתלכדים?

(ב) (6 נק') הוכיחו או הפריכו שסדרה  $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת, אם  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  מתכנסות.

**שאלה 5 (12 נקודות)** תהינה  $f(x, y, z) = xz - \frac{y}{z} - z + 2$  ו-  $P(1, 0, -1)$ .

(א) (6 נק') רשמו את משוואת המישור המשיק למשטח הרמה של הפונקציה  $f(x, y, z)$  אשר עובר דרך הנקודה  $P$ .

(ב) (6 נק') תנו דוגמה של וקטור  $\vec{a}$  כך שיתקיים:

$$\frac{df(P)}{d\vec{a}} = 0.$$

נמקו את התשובה.

**שאלה 6 (12 נקודות)**

(א) (6 נק') חשבו את הגבול

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{xy + (x + y)^2}$$

או הוכיחו שהוא אינו קיים.

(ב) (6 נק') הוכיחו שטור הפונקציות

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sin x} \right)^n$$

מתבדר לכל  $x$  ממשי.

**שאלה 7 (16 נקודות)** יהי

$$M(t) = A + t\vec{a}$$

ישר במרחב  $x, y, z$  כאשר  $A$  נקודה על הישר ו-  $\vec{a}$  הווקטור הכיוון של הישר. תהי  $B(x_0, y_0, z_0)$  נקודה כלשהי שלא נמצאת על הישר. הוכיחו כי המרחק של הנקודה מהישר  $M(t)$  נתון על ידי הנוסחה

$$d = \frac{|\vec{AB} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

**שאלה 8 (16 נקודות)** הוכח ש-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

## פתרונות

## שאלה 1

(א) (12 נק')

לפי התנאי הכרחי לנקודות קיצון

$$\begin{cases} f_x = ye^{-(x+y)} - xye^{-(x+y)} = 0, \rightarrow y(1-x) = 0 \\ f_y = xe^{-(x+y)} - xye^{-(x+y)} = 0, \rightarrow x(1-y) = 0 \end{cases}$$

נקבל את נקודות קריטיות  $(0,0)$ ,  $(1,1)$ . נחשב את הנגזרות מסדר השני :

$$f''_{xx} = (xy - 2y)e^{-(x+y)}$$

$$f''_{yy} = (xy - 2x)e^{-(x+y)}$$

$$f''_{xy} = (xy - x - y + 1)e^{-(x+y)}$$

עבור הנקודות קריטיות  $P_1(0,0)$ :

$$f''_{xx}(0,0) = 0, \quad f''_{yy}(0,0) = 0, \quad f''_{xy}(0,0) = 1, \quad \Delta(0,0) = -1 < 0.$$

לכן הנקודה  $P_1(0,0)$  היא נקודת אוכף.עבור הנקודות קריטיות  $P_2(1,1)$ :

$$f''_{xx}(1,1) = -1 < 0, \quad \Delta(1,1) = 1 - 0 = 1 > 0.$$

לכן הנקודה  $P_2(1,1)$  היא נקודת מקסימום.  $\max f = f(1,1) = e^{-2}$ .

(ב) (12 נק')

ראשית נבנה את המשוואות הישרים העוברים דרך כל זוג של נקודות  $A, B, C$ .

$AB$	$x = 1$
$AC$	$y = -x$
$BC$	$y = 0$

נציב כל אחד מהם לפונקציה נתונה:  $z(x,y) = xye^{-(x+y)}$ .על השפה  $AB$ 

$$z(1,y) = ye^{-(1+y)}$$

$$z'_y(1,y) = e^{-(1+y)} - ye^{-(1+y)} = e^{-(1+y)}(1-y) = 0, \rightarrow y = 0, x = 1$$

לכן קיבלנו את הנקודה  $(1,0)$ , אשר היא הנקודה  $B$ .

על השפה AC

$$z(x, -x) = -x^2 e^{-(x-x)} = -x^2$$

$$z'_x(x, -x) = -2x = 0, \rightarrow x = 0, y = -x = 0$$

לכן קיבלנו את הנקודה  $(0, 0)$ , אשר היא הנקודה  $C$ .

על השפה BC

$$z(x, 0) = -x \cdot 0 \cdot e^{-(x+0)} = 0$$

זוהי פונקציה קבועה עבורה קיימת נקודת קיצון.

נקודה	ערך של הפונקציה
$P_1(0, 0)$	0
$P_2(1, 1)$	$\frac{1}{e^2}$
$A(1, -1)$	-1
$B(1, 0)$	0
$C(0, 0)$	0

מכאן:

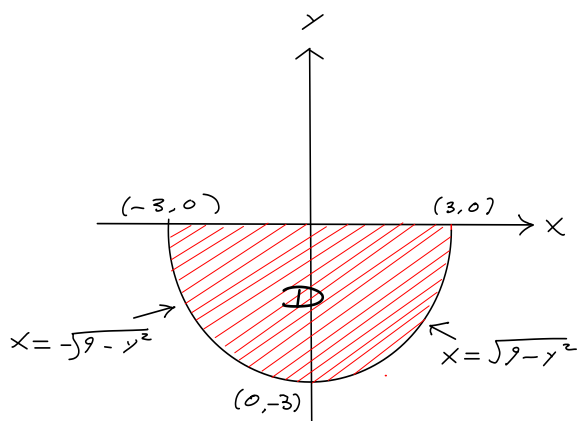
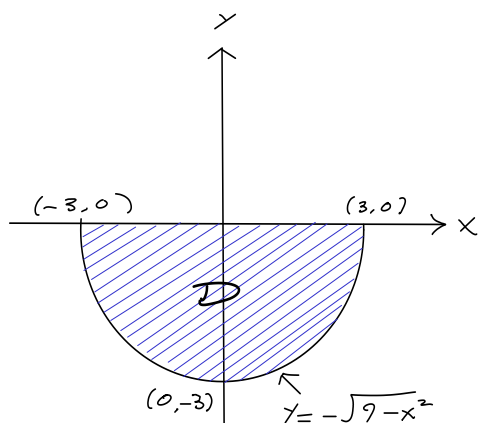
$$\max_D z(x, y) = \frac{1}{e^2}, \quad \operatorname{argmax}_D z(x, y) = P_2(1, 1).$$

$$\min_D z(x, y) = -1, \quad \operatorname{argmax}_D z(x, y) = A(1, -1).$$

שאלה 2 (18 נקודות)

(א) (9 נק')

שרטוט של התחום



התחום של האינטגרל הנתון הוא

$$D = \{(x, y) \mid -\sqrt{9-x^2} \leq y \leq 0, -3 \leq x \leq 3\}.$$

אם נהפוך את הסדר של האינטגרלים (כלומר האינטגרל של מעל  $x$  ראשון והאינטגרל מעל  $y$  שני) נצטרך לרשום את התחום בצורה הבאה:

$$D = \{(x, y) \mid -\sqrt{9-y^2} \leq x \leq \sqrt{9-y^2}, -3 \leq y \leq 0\}.$$

שינוי סדר של האינטגרל:

$$\int_{-3}^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 dy e^{(x^2+y^2)} = \int_{-3}^0 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} dx e^{(x^2+y^2)}$$

חישוב של האינטגרל:

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 dy e^{(x^2+y^2)} &= \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_0^3 e^{r^2} r dr \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{r=3} e^t \frac{t'}{2} dr \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_{t=0}^{t=9} e^t dt \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} d\theta [e^t]_0^9 \\ &= \pi (e^9 - 1). \end{aligned}$$

(ב) (9 נק')

$$V = \iint_D x \, dx \, dy$$

במונחי משתנים  $(r, \theta)$  התחום  $D$  הוא  $(r, \theta)$ :

$$D = \left\{ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1 \right\}$$

במונחי משתנים  $(r, \theta)$  האינטגרל הכפול הוא

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 dr \, r \cdot r \cos \theta &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos \theta \int_0^1 dr \, r^2 \\ &= [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$V = \frac{2}{3} \text{ לכן}$$

**שאלה 3 (18 נקודות)** ראשית נשים לב שהסדרה מוגדרת רק אם  $a_n > 0$  ו-  $a_n \neq 1 \Leftrightarrow \ln a_n \neq 0$ .

מונוטוניות

נסתכל על שלוש מקרים:  $a_n > e$ ,  $a_n = e$  ו-  $a_n < e$ .

• לכל  $a_n > e$  מתקיים  $\ln a_n > 1$  אז  $\frac{1}{\ln a_n} < 1$  ולכן

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\ln a_n} < a_n.$$

מכאן לכל  $a_n > e$  הסדרה יורדת מונוטונית.

• אם  $a_n = e$  אזי  $a_{n+1} = \frac{e}{\ln e} = 1$ . לכן  $e$  הוא נקודת שבת של הסדרה.

• אם  $0 < a_n < e$  מתקיים  $0 < \ln a_n < 1$  אז  $\frac{1}{\ln a_n} > 1$  ולכן

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\ln a_n} < a_n.$$

מכאן לכל  $a_n < e$  הסדרה עולה מונוטונית.

חסימות

- הוכחנו למעלה כי  $a_n \geq e$  לכל  $n$ .
- בנוסף האיבר ההתחלתי הוא  $a_1 = 5$  והסדרה יורדת לכן בהכרח  $a_n \leq 5$  לכל  $n \geq 1$ . ז"א לכל  $n \geq 1$  מתקיים:

$$e \leq a_n \leq 5$$

ולכן הסדרה חסומה.

הגבול

הסדרה מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת. נסמן:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}.$$

ואז נקח את הגבול של הסדרה  $a_{n+1} = \frac{a_n}{\ln a_n}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\ln a_n} \Rightarrow L = \frac{L}{\ln L} \Rightarrow L(\ln L - 1) = 0 \Rightarrow L = e.$$

הערה: אי אפשר להסיק כי  $L = 0$  כי הערך הזה לא בתחום ההגדרה של  $\ln(L)$ .

שאלה 4 (12 נקודות)

(א) (6 נק') הוקטור הכיוון של הישר  $l_1$  הוא

$$\vec{a} = (2, -1, 1) \times (1, 1, -1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k} = (0, 3, 3) = 3(0, 1, 1)$$

הוקטור הכיוון של הישר  $l_2$  הוא

$$\vec{b} = (1, 2, 2).$$

נמצא נקודה על הישר  $l_1$  על ידי להציב  $z = 0$  ולפתור את המערכת:

$$\left. \begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2x - (2 - x) = 1 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1.$$

לכן נקודה על הישר  $l_1$  היא  $M(1, 1, 0)$ .



נקודה על הישר  $l_2$  היא  $N(1, -1, -2)$ .

כעת נציב את  $\vec{a}, \vec{b}, M, N$  בהנוסחה למרחק בין שני ישרים:  $d = \frac{\vec{MN} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$  ראשית נחשב את  $\vec{a} \times \vec{b}$ :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} = (0, 1, -1) .$$

הוקטור  $\vec{MN}$  הוא  $\vec{MN} = (0, -2, -2)$  לכן

$$d = \frac{(0, -2, -2) \cdot (0, 1, -1)}{|(0, 1, -1)|} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0 .$$

ז"א הישרים נחתכים.

(ב) (6 נק') הטענה לא נכונה.

## שאלה 5 (12 נקודות)

(א) (6 נק') נתון משטח רמה  $f(x, y, z) = C$  משוואת המישור המשיק למשטח בנקודה  $P(x_0, y_0, z_0)$  נתונה על ידי הנוסחה

$$f'_x(P)(x - x_0) + f'_y(P)(y - y_0) + f'_z(P)(z - z_0) .$$

הרי

$$f'_x = z \Rightarrow f'_x(P) = -1 ,$$

$$f'_y = \frac{-1}{z} \Rightarrow f'_y(P) = 1 ,$$

$$f'_z = x + \frac{y}{z^2} - 1 \Rightarrow f'_z(P) = 0 .$$

מכאן המשוואת המישור המשיק למשטח בנקודה  $P$  היא

$$-(x - 1) + y = 0 \Rightarrow -x + y + 1 = 0 .$$

(ב) (6 נק') הגראדיאנט הוא  $\nabla f(P) = (f'_x(P), f'_y(P), f'_z(P)) = (-1, 1, 0)$  מכאן:

$$\frac{df(P)}{d\vec{a}} = \frac{\nabla f(P) \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(-1, 1, 0) \cdot (a_x, a_y, a_z)}{|\vec{a}|} = \frac{-a_x + a_y}{|\vec{a}|}$$

לכן כל וקטור מהצורה  $\vec{a} = (a_x, a_x, a_z)$  כך ש-  $|\vec{a}| \neq 0$  מקיים את התנאי  $\frac{df(P)}{d\vec{a}} = 0$ . לדוגמה:  $\vec{a} = (1, 1, 2)$

## שאלה 6 (12 נקודות)

(א) (6 נק') אם הערך של הגבול תלוי על הכיוון שעליו אנחנו מחשבים את הגבול אז הגבול לא קיים. אנחנו נחשב את הגבול על הישר  $y = 2x$  ואחר כך על הישר  $y = 3x$  ואז נשווה בין התשובות.

ראשית נחשב את הגבול על הישר  $y = 2x$ :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{xy + (x+y)^2} \stackrel{y=2x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x^2}{2x^2 + (3x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x^2}{11x^2} = \frac{-3}{11}.$$

כעת נחשב את הגבול על הישר  $y = 3x$ :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{xy + (x+y)^2} \stackrel{y=3x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8x^2}{3x^2 + (4x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8x^2}{19x^2} = \frac{-8}{19}.$$

ז"א עבור שני כיוונים שונים קיבלנו שתי תשובות שונות לאותו גבול ולכן הגבול לא קיים.

(ב) (6 נק') ניתן לרשום את הטור בשאלה  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sin x} \right)^n$  בצורת טור הנדסי  $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$  כאשר לכל  $x$  ממשי,

האיבר ההתחלתי הוא  $a = \frac{1}{\sin x}$  והמנת הטור הוא  $q = \frac{1}{\sin x}$ . טור הנדסי מתכנס אם  $|q| < 1$  ומתבדר אם  $|q| \geq 1$ . בדוגמה זו:  $|q| = \frac{1}{|\sin x|}$ . הפונקציה  $\sin x$  היא פונקציה חסומה בין  $-1$  ו- $1$ . כלומר:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\sin x| \leq 1.$$

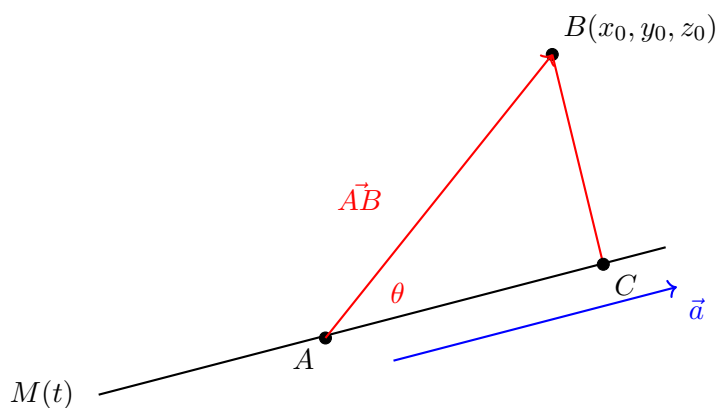
מכאן

$$\frac{1}{|\sin x|} \geq 1.$$

לכן לכל  $x$  ממשי, המנת הטור  $|q| \geq 1$  ולכן לא קיים  $x$  ממשי עבורו הטור מתכנס, ולפיכך הטור מתבדר לכל  $x$  ממשי.

## שאלה 7 (16 נקודות)

נסמן את הישר העובר דרך הנקודה  $A$  ומקביל לוקטור  $\vec{a}$  ב- $M(t)$ . תהי  $C$  נקודה על הישר כך שהישר  $BC$  הוא מאונך לישר  $M(t)$  כמתואר בתרשים למטה. אזי הנקודה  $C$  היא הנקודה על הישר  $M(t)$  הקרובה ביותר לנקודה  $B$ . המרחק של  $B$  מהישר  $M(t)$  מוגדר להיות המרחק מהנקודה  $B$  לנקודה על הישר  $M(t)$  הקרובה ביותר לנקודה  $B$ , דהיינו הנקודה  $C$ . ז"א המרחק הוא המרחק  $BC$ .



מכיוון שהשלוש נקודות  $ABC$  יוצרות משולש זווית ישירה, אז מתקיים:

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \sin \theta \quad \Rightarrow \quad |BC| = |AB| \sin \theta . \quad (*)$$

אם  $\vec{a}$  הוא הווקטור הכיוון של הישר  $M(t)$  אז מתקיים:

$$\vec{AB} \times \vec{a} = |AB||a| \sin \theta \quad (\#)$$

אם אנחנו נציב  $|AB| \sin \theta = |BC|$  ממשוואה (\*) הרי נקבל

$$\vec{AB} \times \vec{a} = |BC||a|$$

ולכן

$$|BC| = \frac{|\vec{AB} \times \vec{a}|}{|a|} .$$

לכן המרחק,  $|BC|$  של הנקודה  $B$  מהישר הוא

$$d = \frac{|\vec{AB} \times \vec{a}|}{|a|} .$$

## שאלה 8 (16 נקודות)

לפי כלל הסנדוויץ' נגדיר נחלק הוכח ל-3 מקרים:  $a = 1$ ,  $a > 1$ ,  $a < 1$

מקרה  $a = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = 1$$

$a > 1$

$$1 < a < n$$

לא משנה עד כמה  $a$  גדולה תמיד יש  $n$  גדולה יותר.

$$\sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$$

לפי כלל הסנדוויץ' תרגיל קודם

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

$$0 < a < 1 \text{ נסמן } b = \frac{1}{a} \text{ אזי } 1 < b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b_n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b}} = 1$$