אלגברה ליניארית 1
סמסטר א' תשפ"ד
שאלות חזרה

שאלה 1 בהינתן מערכת לינארית בעלת 2 משוואות ו-3 משתנים מעל $\mathbb{Z}_3$, רשמו את כל האפשרויות למספר הפתרונות של המשוואה.

שאלה 2 (מבחן תשפ"א סמסטר ב מועד א)

תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. הוכיחו או הרפיכו:

א) אם $AB = B$ ו- $B \neq 0$ אז A היא מטריצה היחידה.

ב) $|A - B| = |A| - |B|$

שאלה 3 (מבחן תשע"ט סמסטר 1 מועד ב)

נאמר שמטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית אם $A^t = A$. הוכח או הפרך: אם $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ סימטריות אז AB סימטרית.

שאלה 4 (מבחן תשפ סמסטר א מועד ב)

תהיינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$. הוכיחו או הפריכו:

א) $|A + B| = |B + A|$

ב) אם $AB = AC$ אז $|B| = |C|$.

ג) אם קיים $\mathrm{v} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ כך ש- $(AB)\mathrm{v} = 0$ אז $|A| = 0$ או $|B| = 0$.

שאלה 5 תהיינה $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A \neq 0$. הוכח או הפרך:

א. אם $AB = AC$ אז $B = C$.

ב. אם $AB = 0$ אז $A = 0$ או $B = 0$.

שאלה 6 פתרו את המערכות הבאות מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x+y-2z &= 0 \\ 2x-y+z &= 0 \\ x+y-z &= 6 \end{aligned}$$

שאלה 7 נסמן $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. מצאו את $A^2-4A+2I$.

שאלה 8 תהיינה $A,B,C\in M_n$. הוכח או הפרך:

אם $AB=AC$ אז $B=C$.

שאלה 9 חשבו את המטריצה ההפוכה של $A=\begin{pmatrix} -5 & 8 & 0 \\ -5 & 9 & 1 \\ -4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ בעזרת זה פתרו את המערכת

$$\begin{aligned} -5x+8y &= 1 \\ -5x+9y+z &= 2 \\ -4x+7y+2z &= 3 \end{aligned}$$

שאלה 10 **(מבחן תשע"ט סמסטר ב מועד ב)**

פתרו את המערכת הבאה בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{cases} 2x+y+z &= 3 \\ x+2y+z &= 0 \\ x+y+2z &= 0 \end{cases}$$

שאלה 11 פתרו את המערכת הבאה בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{aligned} -5x-4y+5z-2t &= -2 \\ 4x-y-5z-2t &= -9 \\ 4x-y-4z-t &= -10 \\ 2x-y-3z-2t &= -5 \end{aligned}$$

שאלה 12 פתרו את המערכות הבאות מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2x+y-4z &= 0 \\ 4x+5y+z &= 0 \\ 2x+3y-z &= 6 \end{aligned}$$

שאלה 13 נסמן $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. מצאו את $A^2-3A+2I$.

שאלה 14 תהיינה $A,B\in M_n$. הוכח או הפרך:

אם $AB=0$ ו- $A\neq 0$, אז B איננה הפיכה.

שאלה 15 תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{R})$. הוכח או הפרך: $(AB)^2=A^2B^2$.

שאלה 16 חשבו את המטריצה ההפוכה של $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ בעזרת זה פתרו את המערכת

$$\begin{aligned} 3x+2y+z &= 0 \\ 4x+2y+z &= 2 \\ 4x+6y+2z &= 3 \end{aligned}$$

שאלה 17 פתרו את המערכת הבא בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{aligned} -5x-4y+5z-2t &= -2 \\ 4x-y-5z-2t &= -9 \\ 4x-y-4z-t &= -10 \\ 2x-y-3z-2t &= -5 \end{aligned}$$

שאלה 18 בהינתן מערכת לינארית בעלת 3 משוואות ו-4 משתנים מעל $\mathbb{Z}_5$, רשום את כל האפשרויות למספר הפתרונות של המשוואה.

שאלה 19 תהיינה $A,B,C\in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A\neq 0$.

הוכח או הפרך:

אם $AB=AC$ אז $B=C$.

שאלה 20 תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A \neq 0,\ B \neq 0$. הוכח או הפרך:

$$AB = BA$$

שאלה 21 תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A \neq 0,\ B \neq 0$. הוכח או הפרך:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

שאלה 22 תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A \neq 0,\ B \neq 0$. הוכח או הפרך:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

שאלה 23 תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A \neq 0$. הוכח או הפרך:
אם $AB = 0$ אז $A = 0$ או $B = 0$.

שאלה 24 תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A \neq 0,\ B \neq 0$. הוכח או הפרך:

$$(AB)^t = A^t B^t$$

שאלה 25 תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A \neq 0,\ B \neq 0$. הוכח או הפרך:

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

פתרונות

שאלה 1

- אם יש שורה סתירה אז למערכת 0 פתרונות. אחרת, יתכנו המקרי הבאים:
- משתנה חופשי אחד ואז למערכת יש 3 פתרונות.
- 2 משתנים חופשיים ואז למערכת יש 3^2 פתרונות.

$\blacksquare$

שאלה 2

א) הטענה איננה נכונה. דוגמא נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

מתקיים $AB = B$, $B \neq 0$ אבל A איננה מטריצת היחידה.

ב) הטענה איננה נכונה. דוגמא נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

מתקיים

$$|A - B| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = -1$$

ו

$$|A| - |B| = 0 - 0 = 0 \neq |A - B| \ .$$

$\blacksquare$

שאלה 3

דומגה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad , \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

קל לראות ש A, B סימטריות: $A^t = A$, $B^t = B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

AB אינה סימטרית כי $AB \neq (AB)^t = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$\blacksquare$

שאלה 4

א) טענה נכונה. הסבר:

$A+B=B+A$ לכן $|A+B|=|B+A|$.

ב) דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

$$A\cdot B=A\cdot C=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad |B|=1\ ,\ |C|=0\ .$$

ג) טענה נכונה. הסבר:

אם קיים $\mathrm{v}\neq\bar{0}\in\mathbb{R}^n$ כך ש $(AB)\mathrm{v}=0$, אז למערכת משוואת הומוגנית $(A\cdot B)\cdot X=0$ יש אינסוף פתרונות, לכן $|A\cdot B|=0$, ז"א

$$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|=0\ .$$

מכאן $|B|=0$ או $|A|=0$.

■

שאלה 5

תהיינה $A,B,C\in M_n(\mathbb{R})$ ו- $A\neq 0$.

א. <u>אם $AB=AC$ אז $B=C$.</u>

לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

$$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad AC=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,$$

$AB=AC$ אבל $B\neq C$.

ב. <u>אם $AB=0$ אז $A=0$ או $B=0$.</u>

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

$$A\cdot B=0\ ,\qquad A\neq 0\ ,B\neq 0\ .$$

■

שאלה 6

$$\begin{aligned} x+y-2z &= 0\\ 2x-y+z &= 0\\ x+y-z &= 6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -3 & 5 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -3 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2+\frac{5}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 10\\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+\frac{1}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 10\\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$(x,y,z)=(2,10,6)$$

■

שאלה 7

נכתוב A בצורה $A=(a_1\ a_2\ a_3)$ כאשר

$$a_1=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}\quad a_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\quad a_3=\begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix}$$

כך ש-

$$A \cdot a_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2a_1 + 4a_2 + 0a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0a_1 + 2a_2 + a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot a_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = a_1 - 5a_2 + 3a_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -21 \\ 4 \end{pmatrix}$$

סך הכל

$$A^2 = A \cdot A = (A \cdot a_1 \;\; A \cdot a_2 \;\; A \cdot a_3) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 16 & -1 & -21 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 4A + 2I = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 16 & -1 & -21 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

■

שאלה 8

<u>אם $AB = AC$ אז $B = C$</u>:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = A \cdot C = 0 \ , \qquad B \neq C \ .$$

■

שאלה 9

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -11 & 16 & -8 \\ -6 & 10 & -5 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -11 & 16 & -8 \\ -6 & 10 & -5 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \ .$$

■

שאלה 10

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 1 - 1 = 4$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 9$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$x = \frac{9}{4} \ , \qquad y = \frac{-3}{4} \ , \qquad z = \frac{-3}{4} \ .$$

■

שאלה 11

$$\begin{aligned} -5x - 4y + 5z - 2t &= -\,2 \\ 4x - y - 5z - 2t &= -\,9 \\ 4x - y - 4z - t &= -\,10 \\ 2x - y - 3z - 2t &= -\,5 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & -5 & -2 \\ 4 & -1 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \ , \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & -5 & -2 \\ 4 & -1 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 5 & -2 \\ -9 & -1 & -5 & -2 \\ -10 & -1 & -4 & -1 \\ -5 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & -2 & 5 & -2 \\ 4 & -9 & -5 & -2 \\ 4 & -10 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -16$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & -4 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -9 & -2 \\ 4 & -1 & -10 & -1 \\ 2 & -1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & -5 & -9 \\ 4 & -1 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 8$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1 \ , \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 4 \ , \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1 \ , \qquad t = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -2 \ .$$

■

שאלה 12

$$\begin{aligned} 2x + y - 4z &= 0 \\ 4x + 5y + z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-4R_1, R_3\to R_3-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to -\frac{1}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$(x,y,z) = (-7,6,-2)$$

■

<u>שאלה 13</u> נסמן $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. מצאו את $A^2-3A+2I$. נכתוב A בצורה $A=(a_1\ a_2\ a_3)$ כאשר

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כך ש-

$$A \cdot a_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad = 3 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot a_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad = 0 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 2 \cdot a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot a_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad = 2 \cdot a_1 + 5 \cdot a_2 + a_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix}$$

סך הכל

$$A^2 = A \cdot A = (A \cdot a_1 \ A \cdot a_2 \ A \cdot a_3) = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 \\ 0 & 14 & 15 \\ 0 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 \\ 0 & 14 & 15 \\ 0 & 6 & 11 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

■

שאלה 14

אם $AB = 0$ ו- $A \neq 0$ אז B איננה הפיכה.

טענה נכונה. הסבר:

נניח בדרך השלילה ש $A \cdot B = 0$ ו- $A \neq 0$ ו- B הפיכה. אז קיימת B^{-1}. לכן

$$A \cdot B \cdot B^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \ .$$

סתירה!

■

שאלה 15 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ , \qquad (AB)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \ ,$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad A^2B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

■

שאלה 16 חשבו את המטריצה ההפוכה של $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ בעזרת זה פתרו את המערכת

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ 4x + 2y + z &= 2 \\ 4x + 6y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 8 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 8 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -5 \end{pmatrix} .$$

■

שאלה 17 פתרו את המערכת הבא בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{aligned} -5x - 4y + 5z - 2t &= -2 \\ 4x - y - 5z - 2t &= -9 \\ 4x - y - 4z - t &= -10 \\ 2x - y - 3z - 2t &= -5 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & -5 & -2 \\ 4 & -1 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} , \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & -5 & -2 \\ 4 & -1 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 5 & -2 \\ -9 & -1 & -5 & -2 \\ -10 & -1 & -4 & -1 \\ -5 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & -2 & 5 & -2 \\ 4 & -9 & -5 & -2 \\ 4 & -10 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -16$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & -4 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -9 & -2 \\ 4 & -1 & -10 & -1 \\ 2 & -1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & -5 & -9 \\ 4 & -1 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 8$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1 \ , \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 4 \ , \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1 \ , \qquad t = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -2 \ .$$

■

<u>שאלה 18</u>

- אם יש שורה סתירה אז למערכת 0 פתרונות. אחרת, למערכת יש פתרונות. יתכנו המקרי הבאים:
- משתנה חופשי אחד ואז למערכת יש 5 פתרונות.
- 2 משתנים חופשיים ואז למערכת יש 5^2 פתרונות.
- 3 משתנים חופשיים ואז למערכת יש 5^3 פתרונות.
- 4 משתנים חופשיים ואז למערכת יש 5^4 פתרונות.

■

<u>שאלה 19</u>

<u>אם $AB = AC$ אז $B = C$</u>:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = A \cdot C = 0 \ , \qquad B \neq C \ .$$

■

<u>שאלה 20</u> לא נכונה. הטענה לא בהכרח מתקיים. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq AB \ .$$

■

<u>שאלה 21</u> הטענה לא נכונה.

$$\begin{aligned} (A+B)^2 =& (A+B)(A+B) \\ =& A \cdot A + B \cdot A + A \cdot B + B \cdot B \\ =& A^2 + BA + AB + B^2 \end{aligned}$$

שים לב ש $AB = BA$ לא בהכרח מתקיים ולכן

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

באופן כללי.
■

שאלה 22 הטענה לא נכונה.

$$\begin{aligned}(A+B)(A-B) =& A \cdot A + B \cdot A - A \cdot B - B \cdot B \\ =& A^2 + BA - AB - B^2\end{aligned}$$

שים לב ש $AB = BA$ לא בהכרח מתקיים ולכן

$$(A+B)(A-B) \neq A^2 + AB - BA - B^2$$

באופן כללי.
■

שאלה 23 לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad a > 0, b > 0 \ .$$

■

שאלה 24 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \qquad (AB) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad (AB)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \qquad A^t B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq (AB)^t$$

■

שאלה 25 הטענה נכונה. הסבר:

$$\left((A+B)^t\right)_{ij} = \left(A^t + B^t\right)_{ij} = \left(A^t\right)_{ij} + \left(B^t\right)_{ij} = A_{ji} + B_{ji} = (A+B)_{ji} = \left((A+B)^t\right)_{ij}$$

שים לב ששתי מטריצות שוות אם"ם הרכיבים שווים. כיוון שהרכיבים שווים, אז

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

■
