

## שיעור 2

### מודלים חשובים שקולית

#### הגדרה 2.1 מודל חשובי

מודל חשובי הוא אוסף של מכונות טיורינג שעבורן מוגדרים המושגים של הכרעה וקבלה של שפות.

#### הגדרה 2.2 מודלים שקולים חשובית

יהיו  $A$  ו- $B$  מודלים חשוביים. אומרים כי  $A$  ו- $B$  שקולים אם לכל שפה  $L$  התנאים הבאים מתקיימים:

(1) קיימת מ"ט במודל  $A$  שמכריעה את  $L$  אם"ם קיימת מ"ט במודל  $B$  שמכריעה את  $L$ .

(2) קיימת מ"ט במודל  $A$  שמקבלת את  $L$  אם"ם קיימת מ"ט במודל  $B$  שמקבלת את  $L$ .

#### דוגמה 2.1

**נסמן ב- $T$  את מודל מכונת הטיורינג הבסיסי.**

במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לשני הכיוונים. בתחילת החישוב הראש נמצא בתחילת הקלט.

**נסמן ב- $O$  את מודל מכונת הטיורינג עם סרט ימינה בלבד.**

במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לכיוון אחד בלבד - ימינה. בתחילת החישוב, הקלט ממוקם בקצה השמאלי של הסרט והראש נמצא בתחילת הקלט. החישוב מתנהל כמו במכונה במודל  $T$ , למעט כאשר הראש נמצא במשבצת השמאלית ביותר בסרט וצריך לזוז שמאלה - במקרה כזה הראש נשאר במקום ולא זז.

**הוכיחו כי המודל  $T$  והמודל  $O$  שקולים חשובית.**

#### פתרון:

יש להוכיח ש:

• לכל מ"ט במודל  $O$  קיימת מ"ט שקולה במודל  $T$ .

• לכל מ"ט במודל  $T$  קיימת מ"ט שקולה במודל  $O$ .

#### כיוון ראשון

נוכיח כי לכל מ"ט במודל  $O$  קיימת מ"ט שקולה במודל  $T$ . כלומר:

נתונה  $M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, acc^O, rej^O)$  במודל  $O$ .

נבנה  $M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, acc^T, rej^T)$  שקולה במודל  $T$ .

• רכיבי המ"ט  $M^T$  זהים לאלו של המ"ט  $M^O$ , מלבד מהתכונה שהראש של  $M^O$  לעולם לא זז מעבר לקצה השמאל של הקלט.

• נעבוד רק עם צד ימין של הסרט האינסופי של  $M^T$  ואז  $M^T$  תהיה שקולה ל- $M^O$ .

- כדי לדאוג שהראש של המכונה הדו-כיוונית  $M^T$  לא זז מעבר לקצה השמאל של הקלט, נוסיף מצבים חדשים וגם מעברים חדשים לפונקציית המעברים של  $M^T$ , שמבטיחים שהראש של  $M^T$  לא זז מעבר לקצה השמול של הקלט, באופן הבא.
- בתחילת כל חישוב, המכונה  $M^T$  מסמנת את המשבצת מצד שמאל וליד המשבצת הראשונה של הקלט בסימן מיוחד \$.
- נגדיר את הפונקציית המעברים של  $M^T$  כך שכל פעם שהראש מגיע למשבצת המסומנת \$, הראש חוזר ימינה למשבצת הראשונה של הקלט, כמפורט בטבלת המעברים למטה.

לכן, המכונה  $M^T$  השקולה למכונה  $M^O$  היא

$$M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, q_{acc}^T, q_{rej}^T),$$

כאשר

$$Q^T = Q^O \cup \{q_0^T, q_\$ \}, \quad \Sigma^T = \Sigma^O, \quad \Gamma^T = \Gamma^O \cup \{\$ \}, \quad q_{acc}^T = q_{acc}^O, \quad q_{rej}^T = q_{rej}^O$$

והפונקציית המעברים מתוארת בטבלה למטה.

תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון	מצב
	$L$	$\Omega$	$q_\$$	$\sigma$	$q_0^T$
	$R$	$\$$	$q_0^O$	$\_$	$q_\$$
$\forall q \in Q^O$	$R$	$\$$	$q$	$\$$	$q$

הוכחנו את הכיוון הראשון:

ראינו מכונה דו-כיוונית השקולה למכונה חד-כיוונית.

כעת נוכיח את הטענה בכיוון הראשון:

נראה מכונה חד-כיוונית השקולה למכונה דו-כיוונית.

### כיוון שני

נוכיח כי לכל מ"ט במודל  $T$  קיימת מ"ט שקולה במודל  $O$ . כלומר:

נתונה  $M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, acc^T, rej^T)$  במודל  $T$ .

נבנה  $M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, acc^O, rej^O)$  שקולה במודל  $O$ .

- נסמן "קו המפריד" על הסרט של המכונה הדו-כיוונית  $M^T$ .

...	_	a	b	b		b	c	c	a	b	_	...
-----	---	---	---	---	--	---	---	---	---	---	---	-----

- נסמן את המשבצת הראשונה של הסרט של המכונה החד-כיוונית  $M^O$  עם \$.

- כל שאר המשבצות של הסרט של  $M^O$  נחלק לשני חצאים: חצי העליון  $U$  וחצי התחתון  $D$ .

- תוכן הסרט של המכונה הדו-כיוונית  $M^T$  נכתב על סרטה של המכונה החד-כיוונית  $M^O$  כך:

\* החלק של הסרט שמצד שמאל של קו המפריד נכתב בשורה העליונה של סרט  $M^O$  בכיוון הפוך (מימין לשמאל).

\* החלק של הסרט שמצד ימין של קו המפריד נכתב בשורה התחתונה של סרט  $M^O$  בכיוון הרגיל (משמאל לימין).

\$	b	b	a	␣	␣	␣	␣	...
	b	c	c	a	b	␣	␣	...

- \* תזוזה ימינה של  $M^T$  מצד ימין של קו המפריד  $\Leftarrow$  תזוזה ימינה בשורה התחתונה של  $M^O$ .
  - \* תזוזה ימינה של  $M^T$  מצד שמאל של קו המפריד  $\Leftarrow$  תזוזה שמאלה בשורה העליונה של  $M^O$ .
- תזוזה ימינה ב-  $M^T$ :

␣	a →	b →		b →	b →	c →	c →	a →	␣ →
---	-----	-----	--	-----	-----	-----	-----	-----	-----

תזוזה שקולה ב-  $M^O$ :

\$	← b	← b	← a	␣	␣	␣	␣
	b →	c →	c →	a →	b →	␣ →	␣

- \* תזוזה שמאלה של  $M^T$  מצד ימין של קו המפריד  $\Leftarrow$  תזוזה שמאלה בשורה התחתונה של  $M^O$ .
- \* תזוזה שמאלה של  $M^T$  מצד שמאל של קו המפריד  $\Leftarrow$  תזוזה ימינה בשורה העליונה של  $M^O$ .

תזוזה שמאלה ב-  $M^T$ :

␣	a ←	b ←		b ←	b ←	c ←	c ←	a ←	␣ ←
---	-----	-----	--	-----	-----	-----	-----	-----	-----

תזוזה שקולה ב-  $M^O$ :

\$	→ b	→ b	→ a	␣	␣	␣	␣
	b ←	c ←	c ←	a ←	b ←	␣ ←	␣

לכן, המכונה  $M^O$  השקולה למכונה  $M^T$  היא

$$M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, q_{acc}^O, q_{rej}^O),$$

נסביר את כל הרכיבים של  $M^O$ :

- לכל מצב  $q \in Q^T$  נגדיר  $q_U$  ו-  $q_D$  של  $Q^O$ , כדי להבחין בין המצבים שבהם הראש נמצא בחלק העליון לבין המצבים שבהם הראש נמצא בחלק התחתון של הסרט.

$$\Sigma^O = \Sigma^T.$$

$$\Gamma^O \subseteq (\Gamma^T \times \Gamma^T) \cup \{\$ \}.$$

$$q_{acc}^O = q_{acc}^T.$$

$$q_{rej}^O = q_{rej}^T.$$

- הפונקציות המעברים  $\delta^O$  מתוארת בטבלת המעברים למטה. בטבלה, הסימנים  $\tau, \sigma, \pi \in \Gamma^T$  מסמנים כל תו שבאלפבית  $\Gamma^T$ :

תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון	מצב
אתחול					
$\tau \in \Sigma \cup \{\perp\}$ $\sigma \in \Sigma$	$R$	\$	$q_\tau$	$\tau$	$q_0^O$
	$R$	$\perp_\sigma$	$q_\tau$	$\tau$	$q_\sigma$
	$L$	$\perp_\perp$	back	$\perp$	$q.\perp$
	$L$	$\curvearrowright$	$q_{\text{back}}$	$\perp_\tau$	$q_{\text{back}}$
	$R$	$\curvearrowright$	$q_0^T.D$	\$	$q_{\text{back}}$
תזוזה מקורית שמאלה					
תזוזה שמאלה: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$	$L$	$\pi_\tau$	$p_D$	$\pi_\sigma$	$q_D$
	$R$	$\pi_\pi$	$p_U$	$\sigma_\pi$	$q_U$
תזוזה שמאלה: $(q, \perp) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$	$L$	$\tau_\perp$	$p_D$	$\perp$	$q_D$
	$R$	$\perp_\perp$	$p_U$	$\perp$	$q_U$
תזוזה מקורית ימינה					
תזוזה ימינה: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$	$R$	$\pi_\tau$	$p_D$	$\pi_\sigma$	$q_D$
	$L$	$\pi_\pi$	$p_U$	$\sigma_\pi$	$q_U$
תזוזה ימינה: $(q, \perp) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$	$R$	$\tau_\perp$	$p_D$	$\perp$	$q_D$
	$L$	$\perp_\perp$	$p_U$	$\perp$	$q_U$
פגיעה בקצה					
	$R$	$\curvearrowright$	$q_U$	\$	$q_D$
	$R$	$\curvearrowright$	$q_D$	\$	$q_U$
כל השאר עוברים ל- $\text{rej}$					