שיעור 8
מונוטוניות, נקודות קיצון ונוסחת טיילור

נוסחת טיילור ומקלורן

כדי למצוא ערכים של פונקציה מקרבים אותה באמצעות פולינום.

8.1 משפט. (משפט טיילור)
תהי f פונקציה מוגדרת בסביבה של נקודה a וגזירה לפחות $n+1$ פעמים בנקודה a. אז לכל x בסביבה לנקודה a קיימת נקודה c בין a ל- x כך ש-

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

הנוסחה זו נקראת נוסחת טיילור. האיבר הסופי

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

נקרא השארית. זאת אומרת

$$f(x)=\overbrace{f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}^{n \text{ פולינום טיילור מסדר}}+R_n(x)$$

נוסחת מקלורן היא נוסחת טיילור עבור $a=0$.

8.2 משפט. (מקלורן)
תהי f פונקציה מוגדרת בסביבה של נקודה 0 וגזירה לפחות $n+1$ פעמים בנקודה 0. אז לכל x בסביבה לנקודה 0 קיימת נקודה c בין 0 ל- x כך ש-

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$

כאשר

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\ .$$

דוגמאות

1. $\underline{f(x)=e^x}$

נרשום פולינום מקלורן מסדר n:

$$f(0)=e^0=1$$

ו-

$$f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$$

לכן

$$f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=e^0=1\ ,$$

ונקבל

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\ .$$

.2 $\underline{f(x)=\sin x}$

נרשום פולינום מקלורן מסדר n:
$$f(0)=\sin(0)=0\ .$$
ו-
$$f'(x)=\cos x\ ,\qquad f'(0)=\cos(0)=1\ .$$
$$f''(x)=-\sin x\ ,\quad f''(0)=-\sin(0)=0\ .$$
$$f'''(x)=-\cos x\ ,\quad f'''(0)=-\cos(0)=-1\ .$$
$$f^{(4)}(x)=\sin x\ ,\qquad f^{(4)}(0)=\sin(0)=0\ .$$
$$f^{(5)}(x)=\cos x\ ,\qquad f^{(5)}(0)=\cos(0)=1\ .$$
$$f^{(6)}(x)=-\sin x\ ,\quad f^{(6)}(0)=-\sin(0)=0\ .$$
$$f^{(7)}(x)=-\cos x\ ,\quad f^{(7)}(0)=-\cos(0)=-1\ .$$
לכן
$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\ .$$

.3 $\underline{f(x)=\cos x}$

נרשום פולינום מקלורן מסדר n:
$$f(0)=\cos(0)=1\ .$$
ו-
$$f'(x)=-\sin x\ ,\quad f'(0)=-\sin(0)=0\ .$$
$$f''(x)=-\cos x\ ,\quad f''(0)=-\cos(0)=-1\ .$$
$$f^{(3)}(x)=\sin x\ ,\qquad f^{(3)}(0)=\sin(0)=0\ .$$
$$f^{(4)}(x)=\cos x\ ,\qquad f^{(4)}(0)=\cos(0)=1\ .$$
$$f^{(5)}(x)=-\sin x\ ,\quad f^{(5)}(0)=-\sin(0)=0\ .$$
$$f^{(6)}(x)=-\cos x\ ,\quad f^{(6)}(0)=-\cos(0)=-1\ .$$
$$f^{(7)}(x)=\sin x\ ,\qquad f^{(7)}(0)=\sin(0)=0\ .$$
לכן
$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\ .$$

תרגילים

דוגמא.

רשום את פולינום מקלורן מסדר 3 עבור הפונקציה $y=\arctan(x+1)$.

פיתרון.

$$f(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \ .$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2+1} \ , \qquad f'(0) = \frac{1}{2} \ .$$

$$f''(x) = \frac{-2(x+1)}{\left((x+1)^2+1\right)^2} \ , \quad f''(0) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \ .$$

.

$$P_2(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2\cdot 2!} = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} \ .$$

■

דוגמא.
ידוע שפולינום מקלורן מסדר 3 של פונקציה $f(x)$ הוא $x+2x^2-x^3$. חשב את $f''(0)\cdot f'''(0)$.

פיתרון.

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 = x + 2x^2 - x^3 \ .$$

לכן

$$f'(0) = 1 \ , \qquad \frac{f''(0)}{2!} = 2, \qquad \frac{f^{(3)}(0)}{3!} = -1$$

ז"א

$$f''(0)\cdot f'''(0) = 4\cdot(-6) = -24 \ .$$

■

דוגמא.
רשום פולינום מקלורן מסדר 2 עבור פונקציה $y(x)$ הנתונה בצורה סתומה:

$$xy + y^3 = \cos(2x) \ .$$

פיתרון.
נציב $x=0$:

$$y(0)^3 = \cos(2\cdot 0) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y(0) = 1 \ .$$

נגזור את שני הצדדים:

$$y + xy' + 3y^2\cdot y' = -2\sin(2x)$$

נציב $x=0$, $y(0)=1$:

$$1 + 3\cdot 1^2\cdot y'(0) = -2\sin(2\cdot 0) \qquad \Rightarrow \qquad 1 + 3\cdot y'(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y'(0) = -\frac{1}{3} \ .$$

נגזור את שני הצדדים פעם שניה:

$$y' + y' + xy'' + 6y \cdot (y')^2 + 3y^2 \cdot y'' = -4\cos(2x)$$

נציב $x=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-\frac{1}{3}$:

$$-\frac{2}{3} + 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 3y'' = -4 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 3y'' = -4 \qquad \Rightarrow \qquad y'' = -\frac{4}{3} \ .$$

$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{3 \cdot 2!}x^2 = 1 - \frac{x}{3} - \frac{2}{3}x^2$$

■

דוגמא.
רשום פולינום מקלורן מסדר 2 עבור פונקציה $y(x)$ הנתונה בצורה פרמטרית:

$$x = \ln(t+2) \ , \qquad y = t^2 - 3t \ .$$

פיתרון.

$$x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ln(t+2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = -1 \ .$$

לכן

$$y = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) = 4 \ .$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t-3}{\frac{1}{t+2}} = (2t-3)(t+2) = 2t^2 + t - 6 \ .$$

$$y'_x(t=-1) = -5 \ .$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{4t+1}{\frac{1}{t+2}} = (4t+1)(t+2) \ .$$

$$y''_x(t=-1) = -3 \ .$$

לכן

$$P_2(x) - 5 - 5x - \frac{3x^2}{2!} = 4 - 5x - \frac{3x^2}{2} \ .$$

■

תחומי עליה וירידה של פונקציה

8.3 משפט. (תנאי הכרחי למונוטוניות)
תהי f פונקציה גזירה בקטע (a,b) ועולה בקטע זו. אז $f'(x) \geq 0$ לכל $x \in (a,b)$.

תהי f פונקציה גזירה בקטע (a,b) ויורדת בקטע זו. אז $f'(x) \leq 0$ לכל $x \in (a,b)$.

הוכחה.
נניח ש f עולה בקטע (a,b).

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ז"א

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

נתבונן ב- $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'_+(x)$. $\Delta x>0$ ו- $f(x+\Delta x)-f(x)>0$ לכן $f'_+(x)>0$.

עבור $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'_-(x)$, $\Delta x<0$ ו- $f(x+\Delta x)-f(x)<0$ לכן $f'_-(x)>0$.

$f'(x)=f'_+(x)=f'_-(x)$ לכן $f'(x)\geq 0$. ■

הערה.
לא ניתן להשתמש במשפט הזה בכיוון הפוך. כלומר, לכל $x\in(a,b)$

$f(x)$ עולה מונוטונית $\Rightarrow$ $f'(x)\geq 0$

$f(x)$ עולה מונוטונית $\not\Leftarrow$ $f'(x)\geq 0$

ו-

$f(x)$ יורדת מונוטונית $\Rightarrow$ $f'(x)\leq 0$

$f(x)$ יורדת מונוטונית $\not\Leftarrow$ $f'(x)\leq 0$

■

8.4 משפט. (תנאי המספיק למונוטוניות)
תהי f פונקציה גזירה בקטע (a,b). לכל $x\in(a,b)$:

$f'(x)>0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ עולה מונוטונית

$f'(x)<0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ יורדת מונוטונית

הוכחה.
נניח ש $f'(x)>0$ לכל $x\in(a,b)$. נקח $x_1<x_2$ בתוך הקטע. לפי משפט לגרנז' **??** קיים c כך ש- $x_1<c<x_2$ ו-

$$f(x_2)-f(x_1) = f'(c)(x_2-x_1)\ .$$

לפי הנתון, $f'(c)>0$, לכן $f(x_2)-f(x_1)>0 \Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$. ז"א f עולה מונוטונית בקטע (a,b). ■

תרגילים

דוגמא.
בדוק את תחומי עליה וירידה של פונקציה $f(x)=x^3-3x-4$.

פיתרון.

$$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)\ .$$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

■

דוגמא.
הראו כי למשוואה $2\ln x+x^2-5=0$ יש שורש ממשי אחד בדיוק.

פיתרון.
נגדיר $f(x)=2\ln x+x^2-5$. שים לב

$$f(1)=-4<0\ ,\qquad f(2)=2\ln 2-1>0\ .$$

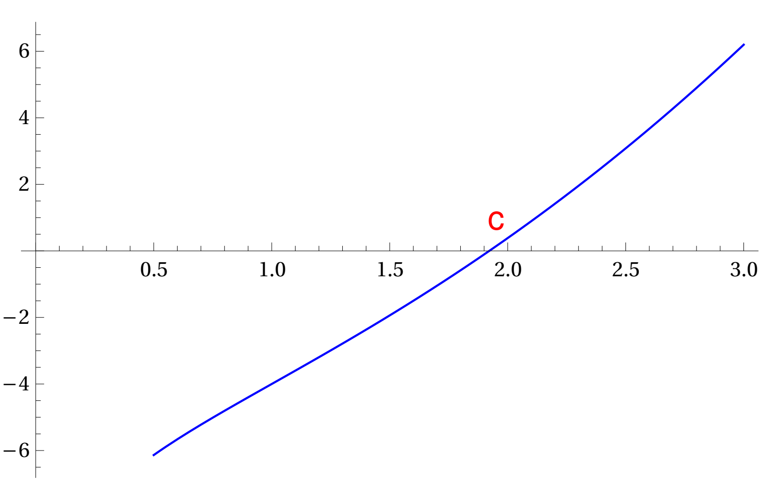
תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא $x>0$. מכיוון ש $f(x)$ פונקציה אלמנטרית, ומוגדרת בקטע $[1,2]$, אז היא רציפה בקטע זו וגזירה בקטע $(1,2)$. לפי משפט ערך הביניים **??** קיים $c\in(1,2)$ כך ש- $f(c)=0$.

נוכיח שהשורש c היא יחיד:

שים לב

$$f'(x)=\frac{2}{x}+2x>0$$

לכל x בתחום ההגדרה. לכן, f עולה מונוטונית בתחום $(0,\infty)$. ז"א השורש הוא יחיד.



■

נקודות קיצון

8.5 משפט. (נקודת מקסימום)
נקודה a נקראת נקודת מקסימום מקומי של פונקציה $f(x)$ אם קיימת סביבה של a כך שלכל $x \neq a$ השייך לסביבה, מתקיים

$$f(x) < f(a) \ .$$

8.6 משפט. (נקודת מינימום)
נקודה a נקראת נקודת מינימום מקומי של פונקציה $f(x)$ אם קיימת סביבה של a כך שלכל $x \neq a$ השייך לסביבה, מתקיים

$$f(x) > f(a) \ .$$

נקודות מקסימום ומינימום נקראים **נקודות קיצון** או גם **נקודות אקסטרמום.**

8.7 משפט. (משפט פרמה (תנאי הכרחי לאקסטרמום))
תהי f פונקציה גזירה בסביבה של נקודה a. נניח ש- $x=a$ נקודת קיצון של $f(x)$. אז $f'(a)=0$.

המשמעות הגיאומטרית: בנקודהת קיצון המשיק מקביל לציר ה- x.

הערה.
שים לב המשפט ההפוך לא נכון. כלומר בהינתן פונקציה גזירה בסביבה של נקודה a.

a נקודת קיצון של f $\quad \Rightarrow \quad f'(a)=0$

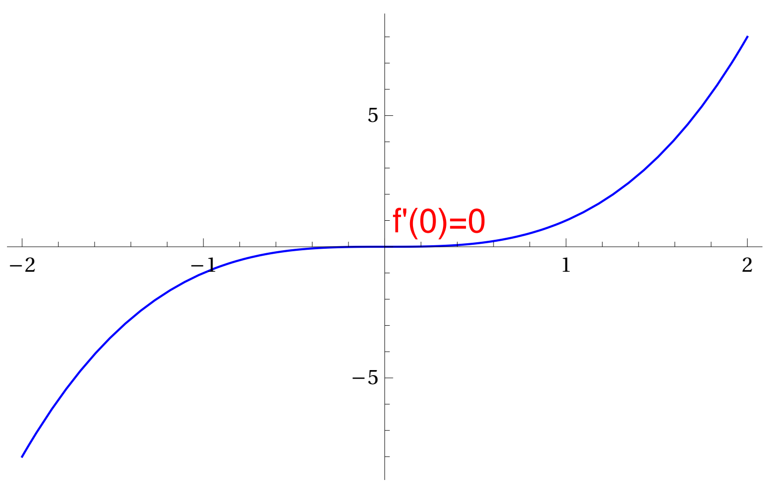
$f'(a)=0 \quad \not\Rightarrow \quad$ a נקודת קיצון של f

■

<u>לדוגמה: $f(x)=x^3$</u>

$$f'(x)=3x^2 \ , \qquad \Rightarrow \qquad f'(0)=0$$

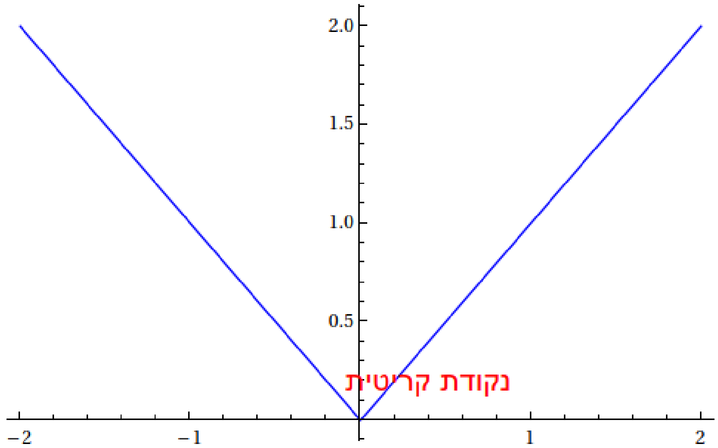
אבל $x=0$ לא נקודת קיצון (עיין תרשים להלן)



גם קיימות פונקציות שיש להן נקודת קיצון אבל הן לא גזירות בנקודה הזאת. לדוגמה:

$f(x) = |x|$

$f'(0)$ לא קיימת אבל הנקודה $x = 0$ נקודת מינימום (עיין תרשים להלן)



8.8 כלל: (נקודת קריטית)
נקודת אקסטרמום של פונקציה יכולה להיות בין הנקודות שבהן הנגזרת שווה ל- 0 או לא קיימת. נקודות האלה נקראים נקודות קריטיות (או נקודות חשודות לאקסטרמום).

8.9 משפט. (תנאי המספיק למונוטוניות)
תהי f פונקציה מוגדרת בנקודה a וגזירה בסביבה של a, אבל לא בהכרח גזירה ב- a. תהי a היא נקודה חשודה לקיצון. אזי:

1) אם במעבר דרך הנקודה a משמאל לימין $f'(x)$ משנה את הסימן מ $+$ ל- $-$ אז a נקודת מקסימום מקומי.

2) אם במעבר דרך הנקודה a משמאל לימין $f'(x)$ משנה את הסימן מ $-$ ל- $+$ אז a נקודת מינימום מקומי.

תרגילים

דוגמא.
מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x) = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$.

פיתרון.

$$f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{3\sqrt[3]{x}}$$

הנקודות החשודות לקיצון $x = 0, 8$.

x	$(-\infty,0)$	$(0,8)$	$(8,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

לכן $(0,f(0))=(0,0)$ נקודת מקסימום מקומי.

$(8,f(8))=(8,-\frac{4}{3})$ נקודת מינימום מקומי. ■

דוגמא.
מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$.

פיתרון.

$$f'(x)=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

הנקודות הקריטיות הן $x=-1,1,3$.

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

לכן נקבל:

$x=3$ נק' מינימום מקומי: $f(3)=8$.
$x=-1$ נק' מקסימום מקומי: $f(-1)=0$.
■

מציאת הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של פונקציה רציפה בקטע סגור

תהי f רציפה בקטע סגור $[a,b]$. אז לפי משפט ווירשטרס **??**, $f(x)$ מקבלת בקטע $[a,b]$ את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר.

הערך הזה יכול להתקבל בנקודה פנימית של הקטע, (אז היא נקודה קריטית של פונקציה $f(x)$) או באחד הקצוות של הקטע. לכן השלבים למציאת הערך הגדול ביותר והקטן ביותר הם:

1. למצוא את כל הנקודות החשודות לאקסרמום השייכות לקטע (a,b).
2. לחשב את הערך של $f(x)$ בכל הנקודות של סעיף הקודם.
3. לחשב את $f(a)$ ו- $f(b)$.
4. מתוך הערכים שחישבנו לבחור את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר.