

שיעור 6

תכונות סגירות של R ו- RE

6.1 הגדרה של השפות R ו- RE

הגדרה 6.1 R

אוסף השפות הכריעות מסומן R ומוגדר

$$R = \{L \subseteq \Sigma^* : \text{קיים מ"ט המכ裏עה את } L\}.$$

הגדרה 6.2 RE

אוסף השפות הקבילות מסומן RE ומוגדר

$$RE = \{L \subseteq \Sigma^* : \text{קיים מ"ט מקבלת את } L\}.$$

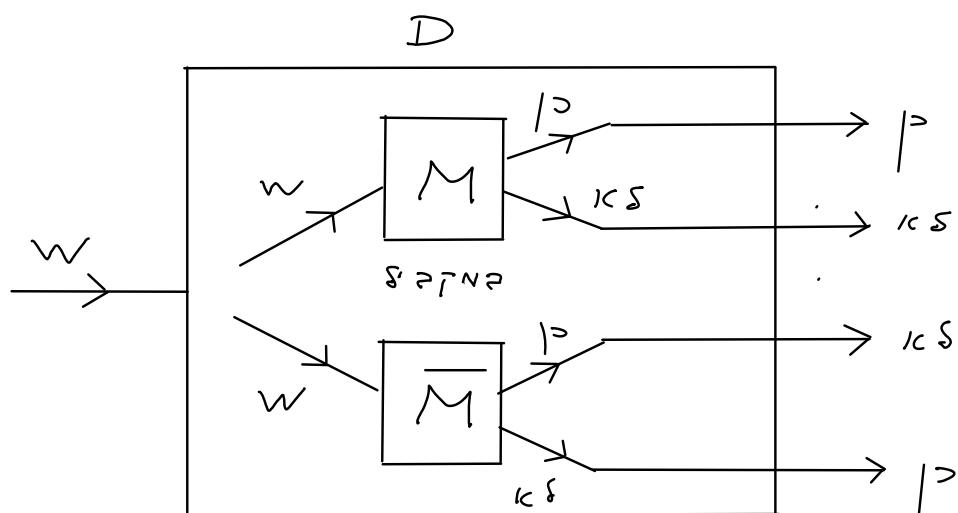
6.2 היחס בין הכרעה וקבלה

למה 6.1 היחס בין הכרעה וקבלה

אם $L \in R$ וגם $\bar{L} \in RE$ אז $.L \in RE$

הוכחה: תהי M מ"ט מקבלת את L ותהי \bar{M} מ"ט מקבלת את \bar{L} .

בנה מ"ט D המכ裏עה את L .



על קלט w : D

1) D מעתקה את w לסרט נסף.

2) מריצה במקביל את M על w ואת \bar{M} על העותק של w .

- אם M מקבלת D מקבלת.
- אם \bar{M} מקבלת D דוחה.
- אם M דוחה D דוחה.
- אם \bar{M} דוחה D מקבלת.

נוכיח כי D מכריעה את L .

אם $w \in L$

$w \in L(M) \Leftarrow$

מקבלת את w או (w דוחה את M) \Leftarrow

עוצרת ומתקבלת את w .

אם $w \notin L$

$w \in \bar{L} \Leftarrow$

$w \in L(\bar{M}) \Leftarrow$

מקבלת את w או (w דוחה את M) \Leftarrow

עוצרת ודוחה את w .



6.3 סגירות של שפות כריעות ושפות קבילות

משפט 6.1 סגירות של השפות הקריעות

סגורה תחת: R

1) איחוד

2) חיתוך

3) משלימים

4) שרשור

5) סגור כללי

משפט 6.2 סגירות של השפות הקבילות

סגורה תחת: RE

1) איחוד

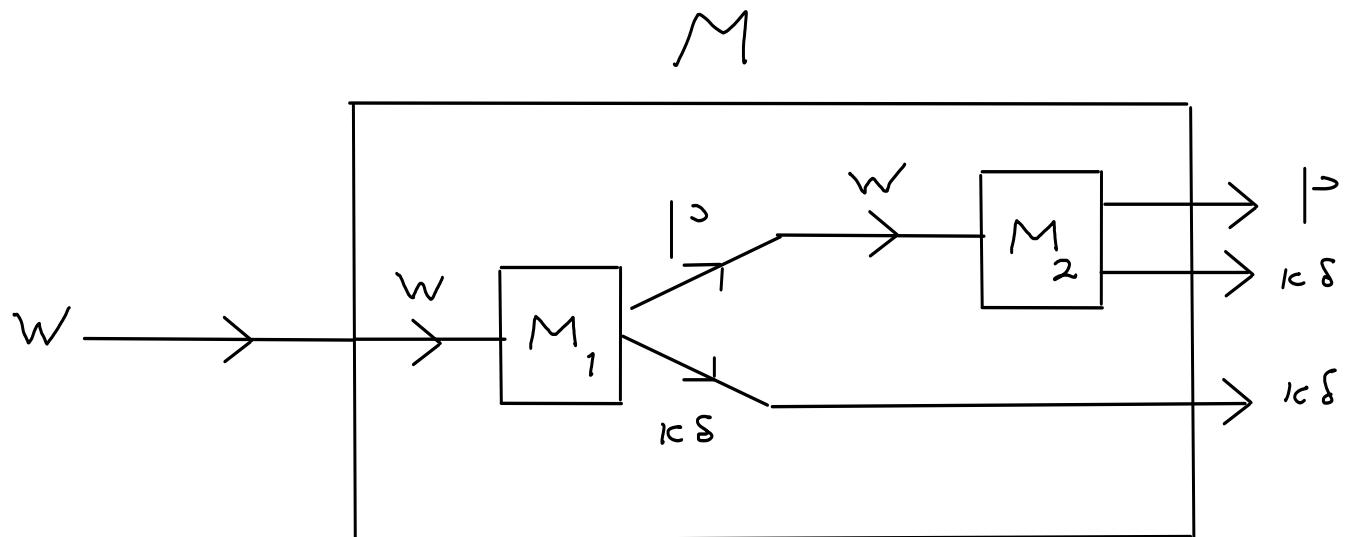
(2) חיתוך

(3) שרשור

(4) סגור קלין

הוכחה:

(1) חיתוך:

(א) סגורה תחת חיתוך R נוכיח כי לכל שתי שפות $L_1, L_2 \in R$ מתקיים $L_1 \cap L_2 \in R$.תהי $M_1 \cap M_2 \in R$ המככירה את $L_1 \cap L_2$ בהתאם. נבנה מ"ט המככירה את L_1 ו- L_2 .תאור הבנייהעל קלט $w = M$:1) מעתקה את w לסרט נוסף.2) מרכיב את M_1 על w .• אם M_1 דוחה $\Leftarrow M$ דוחה.• אחרת M מרכיב את M_2 על העותק של w ועונה כמוות.נקודות:נוכיח כי M מככירה את $L_1 \cap L_2$.אם $w \in L_1 \cap L_2$ $w \in L_2$ וגם $w \in L_1 \Leftarrow$

w מקבלת את M_1 ו- M_2 מקבלת את $w \Leftrightarrow$

M מקבלת את w .

אם

$w \notin L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow$

w דוחה את M_2 או w דוחה את M_1 .

w דוחה את M .

(ב) סגורה תחת חיתוך RE

nocih ci lcl shi shfot $L_1, L_2 \in RE$ matkym $L_1 \cap L_2 \in RE$

tahyina M_1 M₂ shi mconot tyorign makkblot at L_1 - L_2 bhetama.

nbnha m't M makkblat at $L_1 \cap L_2$ baotu open cmo (a).

(2) **איחוד:**

(א) סגורה תחת איחוד R

nocih ci ld l shi shfot $L_1, L_2 \in R$ matkym $L_1 \cup L_2 \in R$

tahyina M_1 m't mckriya at L_1 - M_2 m't mckriya at L_2 .

nbnha m't M mckriya at $L_1 \cup L_2$.

תאור הבנייה

על קלט $w = M$:

(1) M mutika at w lsrut nosf.

(2) mericha at M_1 ul w .

• am M_1 makkblat $\Leftarrow M$ makkblat.

• achrat, M mericha at M_2 ul houtek shel w wouna cmoha.

(ב) סגורה תחת איחוד RE

nocih ci lcl shi shfot $L_1, L_2 \in RE$ matkym $L_1 \cup L_2 \in RE$

tahyina M_1 m't makkblat at L_1 - M_2 m't makkblat at L_2 .

nbnha m't M az M makkblat at $L_1 \cup L_2$.

תאור הבנייה

על קלט $w = M$:

(1) M bochrot baopen az'd $i \in \{1, 2\}$.

(2) M mericha at M_i ul w wouna cmoha.

(3) **שרשור:**

(א) סגורה תחת שרשור R

nocih ci lcl shi shfot $L_1, L_2 \in R$ matkym $L_1 \cdot L_2 \in R$ ca'asher

$$L_1 \cdot L_2 = \{w = w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\} .$$

תהיינה M_1 מ"ט המכריעה את L_1 ו- M_2 מ"ט המכריעה את L_2 .
נבנה מ"ט א"ד M המכריעה את $L_1 \cdot L_2$.

תאור הבנייה

על קלט $w = M$

(1) בוחרת באופן א"ד חלוקה של w ל- $w = w_1 w_2$

(2) מרים את M_1 על w_1 M

- אם D דוחה $M_1 \Leftarrow D$

- אחרת, M מרים את M_2 על w_2 ועונה כמוות.

(ב) סגורה תחת שרשור

RE סגורה תחת שרשור באותו אופן כמו ב- (א)

4) * קליני

א) סגורה תחת * קליני

nocich ci lal shfa L:

$$L \in R \Rightarrow L^* \in R$$

כasher

$$L^* = \{w = w_1 w_2 \cdots w_k \mid \forall 1 \leq i \leq k, w_i \in L\}.$$

תהי M מ"ט המכריעה את L .

נבנה מ"ט א"ד M^* המכריעה את L^* .

תאור הבנייה

על קלט $w = M^*$

(1) אם $w = \varepsilon$ מתקבלת.

(2) אחרת M^* בוחרת באופן א"ד חלוקה של w ל- $w = w_1 \cdots w_k$

(3) לכל $1 \leq i \leq k$

w_i מרים את M על M^*

- אם D דוחה את w_i $M^* \Leftarrow D$

- אחרת חוזרים לשלב (3).

(4) אם M קיבלה את כל המחרוזות $\{w_i\}$ אז M^* מקבלת.

(ב) סגורה תחת * קליני

5) משלים

א) סגורה תחת המשלים

nocich ci

$$L \in R \Rightarrow \bar{L} \in R,$$

כאשר

$$\bar{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\} .$$

תהי M מ"ט המכריעה את L .
נבנה מ"ט \bar{M} המכריעה את \bar{L} .

$w = \bar{M}$ על קלט:

(1) מרכיב את M על w .

- אם M מקבלת \bar{M} דוחה.

- אם דוחה M מקבלת.

ב) אינה סגורה תחת המשלים



משפט 6.3 אינה סגורה תחת המשלים

$$L \in RE \setminus R \Rightarrow \bar{L} \notin RE .$$



הוכחה:

נניח כי $\bar{L} \in RE$ ונניח בשילילה כי $L \in RE \setminus R$.

אזי לפי טענה עזר (למה 6.1), $L \in R$ וזו סתירה.



הגדרה 6.3

$$CoRE = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \bar{L} \in RE\} .$$



אבחנה

לפי למה 6.1:

$$RE \cap Co\,RE = R.$$

6.4 סגירות של שפות כריעות תחת DROPOUT

משפט 6.4 סגירות של שפות כריעות תחת DROPOUT

תהי L שפה כריעה ותהי $DROPOUT(L)$ השפה הבאה:

$$DROPOUT(L) = \{uv \mid uv \in L, \sigma \in \Sigma^* : u\sigma v \in L\}$$

אזי השפה $DROPOUT(L)$ גם כריעה.

הוכחה:

השפה L כריעה אזי קיימת מכונת טיריניג M_L המכריעה אותה. נבנה מכונת טיריניג $M_{DROPOUT}$ המכריעה את $DROPOUT(L)$ באופן הבא:

בנייה המכונות טיריניג

על כל קלט w :

1) בוחרת חילוק של המילה w לשורש של שני מילים

באופן א-דטרמיניסטי כך ש: $uv = w$.

2) בוחרת אותן Σ^* באופן א-דטרמיניסטי ובונה את המילה $u\sigma v = w$.

3) מריצה M_L על המילה $u\sigma v = w$ ועונה כמוות.

הוכת הנכונות

נניח ש- $w \in DROPOUT(L)$.

\Leftarrow קיימים מילים $u, v \in L$ וקיים $\Sigma^* \in \sigma$ כך ש- $u\sigma v \in L$.

\Leftarrow קיימת ריצה של $M_{DROPOUT}$ עבורה $M_{DROPOUT}$ תבחר חילוק $w = uv$ ו- $\sigma \in \Sigma^*$ כך ש- $u\sigma v \in L$.

\Leftarrow $M_{DROPOUT}$ קיבל את w .

נניח ש- $w \notin DROPOUT(L)$.

\Leftarrow לא קיימים מילים $u, v \in L$ ו- $\Sigma^* \in \sigma$ כך ש- $u\sigma v \in L$.

\Leftarrow כל ריצה של $M_{DROPOUT}$ עוברת ל- q_{rej} .

\Leftarrow $M_{DROPOUT}$ תדחה את w .



6.5 קידוד של מ"ט דטרמיניסטית

הגדרה 6.4 קידוד של מ"ט

בاهינתן קבוצה O של עצמים מופשטים (למשל מכונת טיורינג, תוכנית מחשב, גרפ'). הקידוד של O , מסומן $\langle O \rangle$, הוא מיפוי של O אל מהירות מעל אלףית סופי ששי בו לפחות שני סימנים. במידה ויש רב עצמים O_1, \dots, O_k נסמן את הקידוד שלהם $\langle O_1, O_2, \dots, O_k \rangle$.

6.6 מ"ט אוניברסלית U



מ"ט אוניברסלית U מקבלת כקלט זוג, קידוד של מילה $\langle w \rangle$ וקידוד של מ"ט $\langle M \rangle$, וביצעת סימולציה של ריצה של M על w ועונה בהתאם.

תאור הפעולה של U

על קלט x :

(1) בודקת אם x הוא קידוד של מ"ט $\langle M \rangle$ וקידוד של מילה $\langle w \rangle$.

- אם לא \Leftarrow דוחה.

(2) מבצעת סימולציה של M על w :

1	6	7	0	$\langle M \rangle$	-	$\langle w \rangle$...
---	---	---	---	---------------------	---	---------------------	-----

2	6	7	0	$\langle \rangle$	-	$\langle w \rangle$...
---	---	---	---	-------------------	---	---------------------	-----

- רושמת את הקוניגורציה ההתחלתית w_{q_0} על סרט 2.
- מחשבת את הקוניגורציה הבאה בעזרת טבלת המעברים.
- בסוף כל מעבר בין שתי קוניגורציות, U בודקת אם המצב הנוכחי הוא q_{acc} .
 - * אם כן U עוצרת ומתקבלת.

- * לאחרת U בודקת האם המצב הוא q_{rej} .
- * אם כן U עוצרת ודוחה.
- * אחרת U ממשיכה לكونפיגורציה הבאה.

מהי השפה של U ?

לכל x :

. x דוחה את $U \iff x \neq \langle M, w \rangle$ (1)

: $x = \langle M, w \rangle$ (2)

- אם M מקבלת w מקבלת את x .
- אם M דוחה את w דוחה את x .
- אם M לא עוצרת על w לא עוצרת על x .

$$L(U) = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} .$$

הגדרה 6.5 L_{acc}

$$L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} \in \text{RE} \setminus \text{R}$$

הגדרה 6.6 L_{halt}

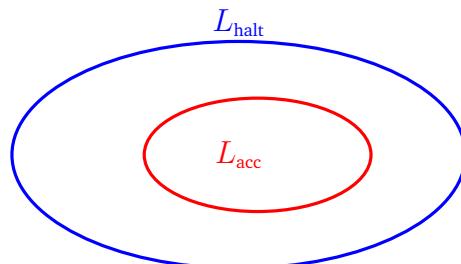
$$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ עוצרת על } M\} \in \text{RE} \setminus \text{R}$$

הגדרה 6.7 L_{d}

$$L_{\text{d}} = \{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M)\} \notin \text{RE}$$

אבחנה:

$$L_{\text{acc}} \subseteq L_{\text{halt}} .$$



משפט 6.5

$$L_{\text{acc}} \in RE .$$

הוכחה: מכיוון ש- $L_{\text{acc}} \in RE$ מקבלת את U , $L(U) = L_{\text{acc}}$ ולכן

משפט 6.6

$$L_{\text{halt}} \in RE .$$

הוכחה: נבנה מ"ט U' שהוא למעשה U פרט למקום שבו U עצמה ומחטה, U' תעצור ותקבל.

נווכיח כי U' מקבלת את L_{halt} :

אם $x \in L_{\text{halt}}$

ו- M עוצרת על w $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$

x עוצרת ומקבלת את $U' \Leftarrow$

אם $x \notin L_{\text{halt}}$ שני מקרים:

. x דוחה את $U' \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$ •

. M לא עוצרת על $U' \Leftarrow w$ לא עוצרת על $x = \langle M, w \rangle$ •

