

אלגברה לינארית 2 למדמ"ח

מועד ב'

מרצים: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר .

תשפ"ה סמסטר ב'

השאלון מכיל 6 עמודים (כולל עמוד זה).

בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (3 עמודים בפורמט A4) מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- יש לרשום בראש המחברת איזה שאלות לבדוק.

שאלה 1 25 נקודות

(א 5 נק') נתונה קבוצה של וקטורים $\{1, 2 + 3x, x - x^2\}$ במרחב הוקטורי $\mathbb{R}_2[x]$ עם המכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0, 1]$:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$$

מצאו בסיס אורתונורמלי של הקבוצה.

תהינה $A, B \in \mathbb{F}$ מטריצות ריבועיות. יהי $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A ויהי $m_B(x)$ הפולינום המינימלי של B . בנוסף יהי $p_A(x)$ הפולינום האופייני של A ו- $p_B(x)$ הפולינום האופייני של B .

(ב 5 נק') הוכיחו או הפריכו: אם A ו- B דומות אז $m_A(x) = m_B(x)$.

(ג 5 נק') הוכיחו או הפריכו: אם $m_A(x) = m_B(x)$ אז A ו- B דומות.

(ד 5 נק') הוכיחו או הפריכו: אם $m_A(x) = p_A(x)$ אז A לכסינה.

(ה 5 נק') הוכיחו או הפריכו: אם A לכסינה אז $m_A(x) = p_A(x)$.

שאלה 2

(א 6 נק') תהי $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ מטריצה הרמיטית. הוכיחו כי כל הערכים העצמיים של A הם ממשיים.

(ב 6 נק') הוכיחו או הפריכו: אם $\lambda \neq 0$ ערך עצמי של $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ (\mathbb{F} שדה) אז λ^2 הוא ערך עצמי של AA^t .

(ג 7 נק') הוכיחו או הפריכו: אם \mathbb{F} שדה ומטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ לכסינה בעלת פולינום אופייני $p_A(x)$ ומטריצה $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ המקיימת $p_A(B) = 0$ אז B לכסינה.

(ד 6 נק') הוכיחו או הפריכו: כל שתי מטריצות $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ (\mathbb{F} שדה) הפיכות הן דומות זו לזו.

שאלה 3 תהי $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 5i & -1 & i \\ 1 & 5i & 1 \\ i & -1 & 5i \end{pmatrix}$$

(א 17 נק') האם A לכסינה אוניטרית? במקרה ו- A לכסינה אוניטרית, מצאו מטריצה אוניטרית Q ומטריצה אלכסונית D כך ש- $Q^*AQ = D$. נמקו היטב את תשובתכם.

(ב 8 נק') מצאו מטריצה $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ המקיימת:
 $|C| = |I + C| = |I - C|$

שאלה 4 תהי מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך שהפולינום האופייני שלה אינו מתפרק לגורמים ליניאריים מעל \mathbb{R} .

- (א) (6 נק') הוכיחו או הפריכו: A לכסינה מעל \mathbb{C} עבור $n = 2$.
- (ב) (6 נק') הוכיחו או הפריכו: A לכסינה מעל \mathbb{C} עבור $n = 4$.
- (ג) (7 נק') תהי $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. הוכיחו או הפריכו: אם A^2 נורמלית אז A נורמלית.
- (ד) (6 נק') הוכיחו או הפריכו: אם מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מקיימת $(A - 3I)(A + 2I) = 0$ אז קיים $u \neq 0 \in \mathbb{F}^n$ כך ש- $Au = 3u$.

שאלה 5 נגדיר העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ ע"י

$$T(a + bx + cx^2) = (-3a + 4b + c) + (-2a + 2b)x + (2a - 3b - c)x^2.$$

- (א) (3 נק') מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית.
- (ב) (5 נק') האם המטריצה A שמצאתם לכסינה? במידה וכן, מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש- $P^{-1}AP = D$. במידה ולא, מצאו צורת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP = J$.
- נתונה $A, B \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ מטריצות עם פולינומים מינימליים
- $$m_A(t) = t^2 - 3t, \quad m_B(t) = t^2 - 6t + 9.$$
- (ג) (7 נק') רשמו את כל צורות ז'ורדן האפשריות עבור A ו- B .
- (ד) (5 נק') כיצד תשתנה התשובה לסעיף א' אם נתון, בנוסף, שהריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 3 הוא 3? וכיצד תשתנה התשובה אם נתון שהריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 3 הוא 4?
- (ה) (5 נק') האם ייתכן שהמטריצה A סימטרית? האם ייתכן שהמטריצה B סימטרית? נמקו את תשובתכם.

מרחב אוקלידי: מרחב מכפלה פנימית מעל \mathbb{R} .

מרחב אוניטרי: מרחב מכפלה פנימית מעל \mathbb{C} .

הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי V מעל \mathbb{R} :
לכל $u, v, w \in V$ ולכל $\lambda \in \mathbb{R}$ סקלר

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \text{(1) סימטריות:}$$

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad \text{(2) ליניאריות:}$$

$$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

$$\langle u, u \rangle \geq 0. \quad \text{(3) חיוביות:}$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי V מעל \mathbb{C} :
לכל $u, v, w \in V$ ולכל $\lambda \in \mathbb{C}$ סקלר

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} \quad \text{(1) הרמיטיות:}$$

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad \text{(2) ליניאריות:}$$

$$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

$$\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \text{(3) חיוביות:}$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

אי-שוויון קושי שוורץ:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

אי-שוויון המשולש:

היטל אורתוגונלי של וקטור v על תת מרחב בעל בסיס אורתוגונלי u_1, \dots, u_n :

$$P_U(v) = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 + \dots + \frac{\langle v, u_n \rangle}{\|u_n\|^2} u_n.$$

תהליך גרם שמידט לבניית בסיס אורתוגונלי:

$$u_1 = v_1,$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

\vdots

$$u_n = v_n - \frac{\langle v_n, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_n, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \dots - \frac{\langle v_n, u_{n-1} \rangle}{\|u_{n-1}\|^2} u_{n-1}.$$

$\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי ו- $u \in \mathbb{F}^n$ ווקטור עצמי של מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ אם: $Au = \lambda u$

$\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי ו- $u \in V$ ווקטור עצמי של אופרטור $T : V \rightarrow V$ אם: $T(u) = \lambda u$

פולינום אופייני של מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$: $p_A(\lambda) = |\lambda I - A|$

מרחב עצמי של מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ששייך לערך עצמי λ הוא כל וקטור $u \in \mathbb{F}^n$ כאשר $u \neq 0$ כך ש: $Au = \lambda u$.

מרחב עצמי של אופרטור $T : V \rightarrow V$ ששייך לערך עצמי λ הוא כל וקטור $u \in V$ כאשר $u \neq 0$ כך ש: $T(u) = \lambda u$.

בסיס אורתונורמלי:

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל \mathbb{C} . בסיס אורתונורמלי, מסומן $\{b_1, \dots, b_n\}$, מקיים את התנאי

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

כל וקטור $u \in V$ ניתן לרשום בבסיס אורתונורמלי:

$$u = \sum_{i=1}^n \langle u, b_i \rangle b_i$$

סימון חלופי:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \langle u, b_1 \rangle \\ \langle u, b_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_i \rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_n \rangle \end{pmatrix}_B$$

יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור. המצטרפה המייצגת על פי בסיס B היא

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \langle T(b_1), b_1 \rangle & \langle T(b_2), b_1 \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_1 \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_1 \rangle \\ \langle T(b_1), b_2 \rangle & \langle T(b_2), b_2 \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_2 \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_i \rangle & \langle T(b_2), b_i \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_i \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_i \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_n \rangle & \langle T(b_2), b_n \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_n \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_n \rangle \end{pmatrix}.$$

כלומר האיבר ה- ij של המטריצה המייצגת של T על פי הבסיס B היא $[T]_{ij} = \langle T(b_j), b_i \rangle$.

ההגדרה של אופרטור הצמוד:

אם $T : V \rightarrow V$ אופרטור, ו- $u, w \in V$ שני וקטורים כלשהם של V , אזי האופרטור הצמוד של T מוגדר כך שמתקיים

$$\langle T(u), w \rangle = \langle u, T^*(w) \rangle. \quad (*)1$$

מההגדרה (*)1 נובע:

$$\langle T^*(u), w \rangle = \langle u, T(w) \rangle \quad (*)2$$

נוסחה ל- $T(u)$ ו- $T^*(u)$ במונחי בסיס אורתונורמלי $\{b_1, \dots, b_n\}$:

$$T(u) = \sum_{i=1}^n \langle T(u), b_i \rangle b_i \quad (*)3$$

$$T^*(u) = \sum_{i=1}^n \langle u, T(b_i) \rangle b_i \quad (*)4$$

משפט:

$$T^{**} = T \quad (*)5$$

משפט: המטריצה המייצגת של אופרטור צמוד T^* נתונה ע"י

$$[T^*] = [T]^* \quad (*)6$$

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית.

$A = A^*$	הרמיטית: A
$A^* = -A$	אנטי-הרמיטית: A
$AA^* = I = A^*A$	אוניטרית: A
$AA^t = I = A^tA$	אורתוגונלית: A
$AA^* = A^*A$	נורמלית: A

יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור מעל מרחב וקטורי V . נסמן המטריצה המייצגת $A = [T]$.

$T = T^*$	\Leftrightarrow	$A = A^*$	צמוד לעצמו: T
$T^* = -T$	\Leftrightarrow	$A^* = -A$	אנטי-הרמיטי: T
$TT^* = I_V = T^*T$	\Leftrightarrow	$AA^* = I = A^*A$	אוניטרי: T
$TT^* = T^*T$	\Leftrightarrow	$AA^* = A^*A$	נורמלי: T

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה Q אוניטרית ומטריצה D אלכסונית כך ש:

$$A = QDQ^* \Leftrightarrow D = Q^*AQ.$$

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ לכסינה אורתוגונלית אם קיימת מטריצה P אורתוגונלית ומטריצה D אלכסונית כך ש:

$$A = PDP^t \Leftrightarrow D = P^tAP.$$

פתרונות

שאלה 1

(א) (5 נק') נסמן:

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 2 + 3x, \quad v_3 = x - x^2$$

האלגוריתם של גרם-שמידט:

$$u_1 = v_1 = 1.$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = .$$

$$\langle v_2, u_1 \rangle = \int_0^1 (2 + 3x) dx = \frac{7}{2}.$$

$$\|u_1\|^2 = \langle u_1, u_1 \rangle = \int_0^1 (1) dx = 1.$$

לכן

$$u_2 = 2 + 3x - \frac{7}{2} = -\frac{3}{2} + 3x.$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2.$$

$$\langle v_3, u_1 \rangle = \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}.$$

$$\begin{aligned} \langle v_3, u_2 \rangle &= \int_0^1 (x - x^2) \left(-\frac{3}{2} + 3x \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}x + 3x^2 + \frac{3}{2}x^2 - 3x^3 \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}x^2 - 3x^3 \right) dx \\ &= -\frac{3}{4} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$u_3 = x - x^2 - \frac{1}{6} - \frac{0}{\|u_2\|^2} \left(-\frac{3}{2} + 3x \right) \\ = x - x^2 - \frac{1}{6} .$$

(ב) (5 נק') הטענה נכונה.

הוכחה:

אם A ו- B דונמות אז קיימת מטריצה P הפכיה כך ש- $B = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PBP^{-1}$.
לכל מטריצות A, B דומות ולכל פולינום $f(x)$, מתקיים $f(A) = Pf(B)P^{-1}$ וגם $f(B) = P^{-1}f(A)P$.
מכאן, אם $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A ו- $m_B(x)$ הפולינום המינימלי של B אזי

$$m_A(B) = Pm_B(B)P^{-1} = 0, \quad m_B(A) = Pm_A(A)P^{-1} = 0,$$

כלומר

$$m_A(B) = 0, \quad m_B(A) = 0.$$

כדי להראות ש- $m_A(x) = m_B(x)$ ראשית נראה כי $\deg(m_A(x)) = \deg(m_B(x))$ באופן הבא:

• נניח ש- $\deg(m_A(x)) < \deg(m_B(x))$.

בגלל ש- $m_A(B) = 0$ אז B מאפסת פולינום מדרגה נמוכה יותר מהדרגה של m_B .

זאת בסתירה לכך ש- $m_B(x)$ הוא הפולינום המינימלי של B .

• נניח ש- $\deg(m_A(x)) > \deg(m_B(x))$.

בגלל ש- $m_B(A) = 0$ אז A מאפסת פולינום מדרגה נמוכה יותר מהדרגה של m_A .

זאת בסתירה לכך ש- $m_A(x)$ הוא הפולינום המינימלי של A .

לכן $\deg(m_B(x)) \not< \deg(m_A(x))$ וגם $\deg(m_B(x)) \not> \deg(m_A(x))$ לכן בהכרח:

$$\deg(m_A(x)) = \deg(m_B(x))$$

כעת נוכיח שהפולינומים $m_A(x)$ ו- $m_B(x)$ הם זהים.

נניח ש: $\deg(m_A(x)) = \deg(m_B(x)) = k$. אזי

$$\left. \begin{aligned} m_A(x) &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{k-1} x^{k-1} + x^k, \\ m_B(x) &= \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_{k-1} x^{k-1} + x^k. \end{aligned} \right\}$$

נוכיח כי המקדמים זהים: $\alpha_i = \beta_i$. יהי $q(x)$ הפולינום הבא:

$$q(x) = m_A(x) - m_B(x) = (\alpha_0 - \beta_0) + (\alpha_1 - \beta_1)x + \cdots + (\alpha_{k-1} - \beta_{k-1})x^{k-1}.$$

עבור $q(x)$:

$$q(A) = m_A(A) - m_B(A) = 0, \quad \text{וגם} \quad q(B) = m_A(B) - m_B(B) = 0.$$

נניח בשלילה כי $m_A(x) \neq m_B(x)$. אזי קיימים מקדמים עבורם $\alpha_i \neq \beta_i$.
לכן:

A מאפסת את הפולינום $q(x)$ אשר מדרגה נמוכה יותר מהדרגה של $m_A(x)$, סתירה! ו-
 B מאפסת את הפולינום $q(x)$ אשר מדרגה נמוכה יותר מהדרגה של $m_B(x)$, סתירה!

לכן $m_A(x) = m_B(x)$. כנדרש.

(ג) הטענה לא נכונה.
דוגמה נגדית:

$$A = J_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = J_2(2) \oplus J_1(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A ו- B הן צורות ז'ורדן.
לכן הפולינומים המינימליים שלהן הם:

$$m_A(x) = (x - 2)^3, \quad m_B(x) = (x - 2)^3,$$

$$m_A(x) = m_B(x) \text{ ז"א}$$

עבור הערך עצמי $\lambda = 2$, ל- A יש בלוק אחד, ועבור הערך עצמי $\lambda = 2$, ל- B יש שני בלוקים. לכן

$$\left. \begin{array}{l} \text{geo}_A(\lambda = 2) = 1 \\ \text{geo}_B(\lambda = 2) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{geo}_A(\lambda = 2) \neq \text{geo}_B(\lambda = 2),$$

כלומר הריבוי הגאומטרי של $\lambda = 2$ של המטריצה A לא שווה להריבוי הגאומטרי של $\lambda = 2$ של המטריצה B לכן הן לא דומות.

(ד) הטענה לא נכונה.
דוגמה נגדית:

תהי $A = \mathbb{R}^{n \times n}$ המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A היא הבלוק ז'ורדן $J_2(2)$.
הפולינום המינימלי הוא

$$m_A(x) = (x - 2)^2,$$

והפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = (x - 2)^2.$$

לכן $m_A(x) = p_A(x)$ אבל A לא לכסינה כי היא בלוק ז'ורדן, וכל בלוק ז'ורדן לא לכסין.

(ה) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:
תהי $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A מטריצה היחידה של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. בפרט A אלכסונית ולכן לכסינה. אבל הפולינום המינימלי הוא

$$m_A(x) = x - 1$$

והפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = (x - 1)^2.$$

ז"א מצאנו דוגמה עבורה A לכסינה אבל $p_A(x) \neq m_A(x)$.

שאלה 2

(א) (6 נק') יהי u וקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ .

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle &= \langle \lambda u, u \rangle \\ &= \lambda \langle u, u \rangle. \end{aligned}$$

מצד שני:

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle &= \langle u, A^* u \rangle \\ &= \langle u, Au \rangle \\ &= \lambda \langle u, \lambda u \rangle \\ &= \bar{\lambda} \langle u, u \rangle. \end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda \langle u, u \rangle = \bar{\lambda} \langle u, u \rangle \Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda}) \langle u, u \rangle = 0$$

u וקטור עצמי $u \neq 0 \Leftrightarrow \langle u, u \rangle \neq 0 \Leftrightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Leftrightarrow \lambda$ ממשי.

(ב) (6 נק')

הטענה לא נכונה.

דוגמה נגדית:

תהי A המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

הערכים העצמיים של A הם $\lambda = 0$ ו- $\lambda = 1$.

כעת נחשב את AA^t :

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

הערכים העצמיים של AA^t הם 0 ו-2. לפיכך $\lambda = 1$ הוא ערך עצמי של A אבל $\lambda^2 = 1$ אינו ערך עצמי של AA^t .

(ג) (7 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

 A לכסינה והפולינום האופייני של A הוא $p_A(x) = (x-1)^2$.

$$p_A(B) = (B - I)^2 = 0$$

אבל B בלוק ז'ורדן ולכן היא לא לכסינה.(ד) (6 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ו- $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. A הפיכה מסיבה ש- $|A| = 2 \neq 0$. B הפיכה מסיבה ש- $|B| = 12 \neq 0$.מצד שני הדטרמיננטות שלהן לא שוות: $|A| \neq |B|$, ולכן הן לא דומות.

שאלה 3

(א) (17 נק')

$$A = \begin{pmatrix} 5i & -1 & i \\ 1 & 5i & 1 \\ i & -1 & 5i \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} -5i & 1 & -i \\ -1 & -5i & -1 \\ -i & 1 & -5i \end{pmatrix}.$$

מכאן

$$AA^* = \begin{pmatrix} 27 & 11i & -9 \\ -i & 27 & -11i \\ -11 & 11i & 27 \end{pmatrix} = A^*A.$$

 A נורמלית לכן לכסינה אוניטרית.

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-5i & 1 & -i \\ -1 & x-5i & -1 \\ -i & 1 & x-5i \end{vmatrix}$$

$$= (x-5i) \begin{vmatrix} x-5i & -1 \\ 1 & x-5i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -i & x-5i \end{vmatrix} - i \begin{vmatrix} -1 & x-5i \\ -i & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-5i) [(x-5i)(x-5i) + 1] - [-x+5i-i] - i [-1-i(x-5i)]$$

$$= (x-5i) [x^2 - 10i - 24] + (x-4i) - i(-4-ix)$$

$$= (x-5i)(x-6i)(x-4i) + x-4i + x-4i$$

$$= (x-4i) [(x-5i)(x-6i) + 2]$$

$$= (x-4i) [x^2 - 11i - 28]$$

$$= (x-4i)(x-4i)(x-7i)$$

$$= (x-4i)^2(x-7i).$$

לכן הפולינום האופייני של A הוא

$$p_A(x) = (x - 4i)^2(x - 7i) .$$

הערכים העצמיים הם:

$$\text{alg}(4i) = 2, \lambda = 4i$$

$$\text{alg}(7i) = 1, \lambda = 7i$$

ריבוי גיאומטרי של $\lambda = 4i$:

$$\text{Nul}(A - 4iI) = \begin{pmatrix} -2i & -1 & i \\ 1 & -2i & 1 \\ i & -1 & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - R_1]{R_2 \rightarrow iR_2 - R_1} \begin{pmatrix} i & -1 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{פתרון: } (x, y, z) = (-iy - z, y, z) = (-i, 1, 0) + (-1, 0, 1)$$

$$V_{4i} = \text{span} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ריבוי גיאומטרי של $\lambda = 7i$:

$$\begin{aligned} \text{Nul}(A - 7iI) &= \begin{pmatrix} -2i & -1 & i \\ 1 & -2i & 1 \\ i & -1 & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow 2R_3 + R_1]{R_2 \rightarrow 2iR_2 + R_1} \begin{pmatrix} -2i & -1 & i \\ 0 & 3 & 3i \\ 0 & -3 & -3i \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} -2i & -1 & i \\ 0 & 3 & 3i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} -2i & -1 & i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_2} \begin{pmatrix} -2i & 0 & 2i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{i}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{פתרון: } (x, y, z) = (z, -iz, z) = (1, -i, 1)z$$

$$V_{7i} = \text{span} \left\{ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נבנה בסיס אורתונורמלי ע"י התהליך גרם שמידט:

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

v_3 אורתוגונלי ביחס ל- u_1 ו- u_2 מסיבה שהוקטור עצמי v_3 והוקטורים העצמיים u_1 ו- u_2 שייכים לערכים העצמיים שונים. לכן קיבלנו בסיס אורתוגונלי:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

הבסיס האורתונורמלי הוא

$$\left\{ \hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}} u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

לכן $A = QDQ^*$ כאשר

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{-i}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ב } 8 \text{ נק'})$$

שאלה 4

(א) (6 נק') הטענה נכונה.

לכל $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ הפולינום האופייני הוא $p_A(x) = x^2 - \text{tr}(A)x + |A|^2$. A ממשת אזי $\text{tr}(A)$ ממשת ו- $|A|$ ממשת. ז"א כל המקדמים בפולינום האופייני הם ממשיים. כל פולינום עם מקדמים ממשיים מתפרק לגורמים לינאריים עם שורשים מרוכבים:

$$p_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$$

כאשר $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ו- $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, כאשר $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. הפולינום האופייני אינו מתפרק לגורמים לינאריים מעל \mathbb{R} אז $\beta \neq 0 \Leftarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \Leftarrow A$ יש 2 ערכים עצמיים שונים מעל \mathbb{C} לכסינה מעל \mathbb{C} .

(ב) (6 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = (x^2 + 1)^2 = (x + i)^2(x - i)^2.$$

ז"א $p_A(x)$ אינו מתפרק לגורמים ליניאריים מעל \mathbb{R} .
הצורת ז'ורדן של A היא $J = J_2(-i) \oplus J_2(i)$ לכן A לא לכסינה מעל \mathbb{C} .

(ג) (7 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$A^2 = 0$ כלומר A^2 היא המטריצת האפס לכן A^2 נורמלית באופן טריוויאלי.

מצד שני

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^*A$$

(ד) (6 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I.$$

ברור ש- $A + 2I = 0$ לכן $(A - 3I)(A + 2I) = 0$ אבל הערכים העצמיים של A הם 2 עם ריבוי אלגברי 2. לכן 3 לא ערך עצמי של A לכן לא קיים וקטור $u \neq 0$ עבורו $Au = 3u$.

שאלה 5

(א) (3 נק')

$$[T] = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

(ב) (5 נק') הפולינום האופייני הוא $p_T(x) = x(x + 1)^2$. הערכים העצמיים הם:

$$\text{alg}(0) = 1, \lambda = 0$$

$$\text{alg}(0) = 2, \lambda = -1$$

וקטור עצמי של $\lambda = 0$

$$\begin{aligned}
 \text{Nul}([T] - 0 \cdot I) &= \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \rightarrow 3R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow 3R_3 + 2R_1}]{} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_3 \rightarrow 2R_3 - R_2} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 4R_2} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow -\frac{1}{3}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

לכן

$$\text{Nul}([T] - 0 \cdot I) = \text{span} \left\{ u_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

לכן

$$V_0 = \text{Ker}(T - 0 \cdot I) = \text{span} \{ w_0 = -1 - x + x^2 \}.$$

וקטור עצמי של $\lambda = -1$

$$\begin{aligned}
 \text{Nul}([T] - (-1) \cdot I) &= \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1}]{} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 4R_2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow[\substack{R_1 \rightarrow -R_1 \\ R_2 \rightarrow -R_2}]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

לכן

$$\text{Nul}([T] + I) = \text{span} \left\{ u_{-1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

לכן

$$V_{-1} = \text{Ker}(T + I) = \text{span} \{ w_{-1} = -3 - 2x + 2x^2 \}.$$

 $\dim(\text{Ker}(T + I)) = 1 < \text{alg}(-1)$ לכן T לא לכסיין.
וקטור עצמי מוכלל של $\lambda = -1$

נסמן הוקטור עצמי מוכלל של $\lambda = -1$ כ- $u'_{-1} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ונפתור את המשוואה:

$$(A + I)u'_1 = u_1$$

המטריצה המורחבת היא $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \end{array} \right)$. נדרג:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \end{array} \right) & \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 4R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow -R_1 \\ R_2 \rightarrow -R_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

פתרון: $(x, y, z) = (-\frac{3}{2}z - \frac{1}{2}, -z - 1, z) = (-\frac{3}{2}, -1, 1)z + (-\frac{1}{2}, -1, 0)$. נציב $z = 0$ ואז נקבל תשובה

$$u'_{-1} = (-\frac{1}{2}, -1, 0) .$$

$$[T] = PJP^{-1} , \quad P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_0 & u_{-1} & u'_{-1} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} , \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

(ג) (7 נק')

לפי הפולינום המינימלי $m_A(t) = t(t - 3)$:

• הערכים העצמיים של A הם 0 ו-3

• הפולינום המינימלי מתפרק לגורמים ליניאריים שונים לכן A לכסינה ולכן הצורות ז'ורדן של A האפשריות הן

$$J_A = \begin{pmatrix} 3 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}.$$

לפי הפולינום המינימלי $m_B(t) = (t - 3)^2$

- הערך העצמי היחיד הוא 3.
 - הגודל של הבלוק ז'ורדן הכי גדול הוא 2 לכל היותר.
- לכן הצורות ז'ורדן האפשריות הן:

$$J_B = \begin{pmatrix} J_2(3) & & \\ & J_2(3) & \\ & & J_2(3) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} J_2(3) & & \\ & J_2(3) & \\ & & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} J_2(3) & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}$$

ד) (5 נק')

ה) (5 נק')