עבודת בית 1: מכפלות פנימיות

שאלה 1 האם הנוסחה $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 + y_2$ מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$?

שאלה 2 האם הנוסחה $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1$ מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$?

שאלה 3 יהיו $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} \mathrm{v}_1 \\ \mathrm{v}_2 \end{pmatrix}$. הוכיחו שהנוסחה

$$\langle u, \mathrm{v} \rangle = u_1\mathrm{v}_1 + 2u_1\mathrm{v}_2 + 2u_2\mathrm{v}_1 + u_2\mathrm{v}_2$$

מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$.

שאלה 4 במרחב $\mathbb{R}^{n\times n}$ נגדיר $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(B^t A)$ לכל $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

א) הוכיחו כי הנוסחה מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^{n\times n}$.

ב) חשבו את הזווית בין המטריצות $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ביחס המכפלה הפנימית הנ"ל.

שאלה 5 יהיו $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} \mathrm{v}_1 \\ \mathrm{v}_2 \end{pmatrix}$. האם הנוסחאות הבאות מגדירות מכפלות פנימיות ב- $\mathbb{R}^2$?

א) $\langle u, \mathrm{v} \rangle = \mathrm{v}^t A u$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

ב) $\langle u, \mathrm{v} \rangle = 4u_1\mathrm{v}_1 + u_2\mathrm{v}_1 + u_1\mathrm{v}_2 + 4u_2\mathrm{v}_2$.

שאלה 6 יהי V ממ"פ ויהיו $\mathrm{v}, \mathrm{v}' \in V$ כך ש- $\mathrm{v} \neq \mathrm{v}'$. הוכיחו כי תמיד קיים ווקטור $w \in V$ המקיים

$$\langle \mathrm{v}, w \rangle \neq \langle \mathrm{v}', w \rangle \ .$$

שאלה 7 יהי V ממ"פ ויהיו $u, \mathrm{v} \in V$ וקטורים המקיימים:

$$\|u\| = 3 \ , \qquad \|u + \mathrm{v}\| = 4 \ , \qquad \|u - \mathrm{v}\| = 6 \ .$$

מצאו את $\|\mathrm{v}\|$.

שאלה 8 הוכיחו או הפריכו: יהיו u_1, u_2 וקטורים במרחב מכפלה פנימית ממשי המקיימים:

$$\|u_1\| = \|u_2\| = 2 \ , \qquad \langle u_1, u_2 \rangle = 1 \ .$$

אזי מתקיים:

$$\|u_1 - 2u_2\| = 4 \ .$$

שאלה 9 יהי V מרחב מכפלה פנימית ממשי. הוכיחו כי עבור כל $u,\mathrm{v}\in V$ מתקיימת הזהות הפולרית

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle=\frac{1}{4}\left(\|u+\mathrm{v}\|^2-\|u-\mathrm{v}\|^2\right)\ .$$

שאלה 10 הוכיחו כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k\cdot 2^k}\leq\sqrt{(n^2+n)\cdot(2^n-1)}\ .$$

שאלה 11 בעזרת אי-שוויון קושי-שוורץ הוכיחו כי

$$(a\cos\theta+b\sin\theta)^2\leq a^2+b^2$$

לכל $a,b,\theta\in\mathbb{R}$.

שאלה 12 עבור אילו ערכי $k\in\mathbb{R}$, הוקטורים $u=\begin{pmatrix}k\\k\\1\end{pmatrix}$, $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}k\\5\\6\end{pmatrix}$ הם אורתוגונליים?

שאלה 13 נתונים 2 הוקטורים ב - $\mathbb{R}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית:

$$u=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix},\mathrm{v}=\begin{pmatrix}0\\-1\\3\\-2\end{pmatrix}$$

א) בדקו כי הוקטורים אורתוגונליים.

ב) נרמלו את שני הוקטורים.

ג) ודאו כי מתקיים השוויון שלמדנו בהרצאה:

$$\|u+\mathrm{v}\|^2=\|u\|^2+\|\mathrm{v}\|^2$$

שאלה 14 במרחב מכפלה פנימית $\mathbb{R}^{2\times 2}$ עם המכפלה פנימית הסטנדרטית $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^tA)$ לכל $A,B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$.

א) הראו כי הקבוצה

$$\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix},\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\right\}$$

מהווה מערכת אורתונורמלית ב - $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ביחס למכפלה ה פנימית הנ"ל.

ב) חשבו את הנורמה של $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

שאלה 15 במרחב של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[0,1]$ עם המכפלה פנימית האינטגרלי הסטנדרטית שמוגדרת

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \ .$$

חשבו את הזווית בין $f(x)=x$ ו- $g(x)=\sqrt{x}$.

שאלה 16 חשבו את ההיטל של $u=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ על $\mathrm{v}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

שאלה 17 חשבו את ההיטל של $\mathrm{v}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ על $u=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

שאלה 18 תהי $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ קבוצה אורתוגונלית של וקטורים במרחב מכפלה פנימית. הוכיחו כי מתקיים

$$\|u_1+u_2+\ldots+u_n\|^2 = \|u_1\|^2+\|u_2\|^2+\ldots+\|u_n\|^2 \ .$$

שאלה 19

א) נתונים הווקטורים של $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

מצאו בסיס אורתוגונלי של $\mathrm{span}\,\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3\}$

ב) נתונים הווקטורים של $\mathbb{C}^3$:

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2i \end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

מצאו בסיס אורתוגונלי של $\mathrm{span}\,\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3\}$

שאלה 20 עבור $\mathrm{v}=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $u=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ נגדיר

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle = ax_1x_2+by_1y_2+cz_1z_2$$

כאשר $a,b,c\in\mathbb{R}$ סקלרים של $\mathbb{R}$ ו- $a,b,c>0$. הוכיחו כי $\langle,\rangle$ היא מכפלה פנימית ממשית ב - $\mathbb{R}^3$.

שאלה 21 יהיו $u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{v}=\begin{pmatrix} \mathrm{v}_1 \\ \mathrm{v}_2 \end{pmatrix}$. עבור אילו ערכי k הנוסחה

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle = u_1\mathrm{v}_1 - 3u_1\mathrm{v}_2 - 3u_2\mathrm{v}_1 + ku_2\mathrm{v}_2$$

מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$.

שאלה 22 איזו נוסחה מגדירה מכפלה פנימית במרחב של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[-1,1]$?

א) $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g^2(x)\,dx$

ב) $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$

ג) $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\sin x\,dx$

ד) $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)x^4\,dx$

שאלה 23

א) נתונים $x,y,z\in\mathbb{R}$, כך ש- $x,y,z>0$ ו- $x+y+z\leq 3$. הוכיחו כי

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3\ .$$

ב) הוכיחו שלכל n מספרים ממשיים $x_1,x_2,\ldots,x_n$ מתקיים אי-השוויון $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}$.

שאלה 24 יהיו u,v וקטורים של מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוכמה נגדית:

א) אם $\|u+\mathrm{v}\|^2 = \|u\|^2+\|\mathrm{v}\|^2$ אז $\langle u,\mathrm{v}\rangle = 0$.

ב) אם $\langle u,\mathrm{v}\rangle = 0$ אז $\|u+\mathrm{v}\|^2 = \|u\|^2+\|\mathrm{v}\|^2$.

תשובות

<u>שאלה 1</u> לא. הסבר: נסמן $u=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$. אז

$$\langle\alpha\cdot u,\mathrm{v}\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}\alpha\cdot x_1\\\alpha\cdot x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right\rangle=\alpha x_1+y_2\ ,$$

$$\alpha\langle\alpha\cdot u,\mathrm{v}\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right\rangle=\alpha\left(x_1+y_2\right)\ ,$$

לכן

$$\langle\alpha\cdot u,\mathrm{v}\rangle\neq\alpha\langle\alpha\cdot u,\mathrm{v}\rangle\ .$$

<u>שאלה 2</u> הפונקציה לא מכפלה פנימית. דוגמה נגדית:

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right\rangle=1\cdot(-2)+1\cdot(-2)=-4\ngeq 0\ .$$

<u>שאלה 3</u>

(1

(2 <u>סימטריות:</u>

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle=u_1\mathrm{v}_1+2u_1\mathrm{v}_2+2u_2\mathrm{v}_1+u_2\mathrm{v}_2=\left(u_1+u_2\right)\left(\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\right)=\left(\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\right)\left(u_1+u_2\right)=\langle\mathrm{v},u\rangle\ .$$

(3 <u>לינאריות:</u>

<u>שאלה 6</u>

$$\|u+\mathrm{v}\|^2-\|u-\mathrm{v}\|^2=4\mathrm{Re}\langle u,\mathrm{v}\rangle\ .$$

נציב

<u>שאלה 7</u>

$$\|u+\mathrm{v}\|^2-\|u-\mathrm{v}\|^2=4\mathrm{Re}\langle u,\mathrm{v}\rangle\ .$$

נציב $\|u+\mathrm{v}\|=4$ ו- $\|u-\mathrm{v}\|=6$:

$$16-36=4\mathrm{Re}\langle u,\mathrm{v}\rangle\qquad\Rightarrow\qquad\langle u,\mathrm{v}\rangle=-\frac{4}{20}=-\frac{1}{5}\ .\ .$$

ז"א

$$16=\|u+\mathrm{v}\|^2=\|u\|^2+\|\mathrm{v}\|^2+2\mathrm{Re}\langle u,\mathrm{v}\rangle=9+\|\mathrm{v}\|^2-\frac{2}{5}\ .$$

לכן

$$\|\mathrm{v}\|^2=7+\frac{2}{5}=\frac{37}{5}\ .$$

שאלה 9

$$\begin{aligned}\|u+\mathrm{v}\|^2-\|u-\mathrm{v}\|^2 =&\|u\|^2+\|\mathrm{v}\|^2+\langle u,\mathrm{v}\rangle+\langle \mathrm{v},u\rangle-\|u\|^2-\|\mathrm{v}\|^2+\langle u,\mathrm{v}\rangle+\langle \mathrm{v},u\rangle\\ =&2\langle u,\mathrm{v}\rangle+2\langle \mathrm{v},u\rangle\end{aligned}$$

המרחב ממשי לכן $\langle u,\mathrm{v}\rangle=\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}=\langle \mathrm{v},u\rangle$. נציב ונקבל:

$$\|u+\mathrm{v}\|^2-\|u-\mathrm{v}\|^2=4\langle u,\mathrm{v}\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \langle u,\mathrm{v}\rangle=\frac{1}{4}\left(\|u+\mathrm{v}\|^2-\|u-\mathrm{v}\|^2\right) \ .$$

מש"ל.

שאלה 10

יהי V המרחב המכפלה פנימית הסטנדרטית מעל הדה $\mathbb{R}$. נגדיר את שני ווקטורים $a,b\in V$:

$$a=\begin{pmatrix}\sqrt{1}\\ \sqrt{2}\\ \sqrt{3}\\ \vdots\\ \sqrt{n}\end{pmatrix} \ , \qquad b=\begin{pmatrix}2^{1/2}\\ 2^{2/2}\\ 2^{3/2}\\ \vdots\\ 2^{n/2}\end{pmatrix} \ .$$

לפי אי-השוויון קושי שוורץ:

$$|\langle a,b\rangle|=\|a\|\cdot\|b\| \ .$$

$$\langle a,b\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}\sqrt{1}\\ \sqrt{2}\\ \sqrt{3}\\ \vdots\\ \sqrt{n}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2^{1/2}\\ 2^{2/2}\\ 2^{3/2}\\ \vdots\\ 2^{n/2}\end{pmatrix}\right\rangle=2^{1/2}\cdot\sqrt{1}+2^{2/2}\cdot\sqrt{2}+2^{3/2}\cdot\sqrt{3}+\cdots+2^{n/2}\cdot\sqrt{n}=\sum_{k=1}^n\sqrt{k}\cdot 2^{k/2}=\sum_{k=1}^n\sqrt{k\cdot 2^k} \ .$$

$$\|a\|=\sqrt{\langle a,a\rangle}=\sqrt{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}=\sqrt{\sum_{k=1}^n k} \ .$$

נציב $\sum_{k=1}^n=\frac{1}{2}n\cdot(n+1)$ ונקבל

$$\|a\|=\sqrt{\frac{1}{2}n\cdot(n+1)} \ .$$

$$\|b\|=\sqrt{\langle b,b\rangle}=\sqrt{2^{1/2}\cdot 2^{1/2}+2^{2/2}\cdot 2^{2/2}+2^{3/2}\cdot 2^{3/2}+\cdots+2^{n/2}\cdot 2^{n/2}}=\sqrt{\sum_{k=1}^n 2^k}$$

נציב $\sum_{k=1}^n 2^k=\frac{2\left(2^n-1\right)}{2-1}=2\left(2^n-1\right)$ ונקבל

$$\|b\|=\sqrt{2\left(2^n-1\right)} \ .$$

לפיכך לפי אי-השוויון קושי שוורץ:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\cdot 2^{k/2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k\cdot 2^{k}} \le \sqrt{\frac{1}{2}n\cdot(n+1)}\cdot\sqrt{2\left(2^{n}-1\right)} = \sqrt{(n^2+n)\cdot(2^n-1)}\ .$$

שאלה 16

$$\mathrm{v}_0 = P_{\mathrm{v}}(u) = \frac{\langle \mathrm{v},u\rangle}{\|\mathrm{v}\|^2}\mathrm{v} = \frac{1}{14}\cdot\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \frac{7}{14}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\ .$$

בדיקה:

$$u-\mathrm{v}_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3/2\\1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1/2\\3/2\end{pmatrix}\ .$$

$$\langle u-\mathrm{v}_0,\mathrm{v}_0\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}0\\-1/2\\3/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3/2\\1/2\end{pmatrix}\right\rangle = 0-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=0\ .$$

שאלה 17

$$u_0 = P_u(\mathrm{v}) = \frac{\langle u,\mathrm{v}\rangle}{\|u\|^2}u = \frac{1}{4}\cdot\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\\4\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{7}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\ .$$

בדיקה:

$$\mathrm{v}-u_0 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\4\end{pmatrix} - \frac{7}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/4\\-3/4\\-7/4\\9/4\end{pmatrix}\ .$$

$$\langle \mathrm{v}-u_0,u_0\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1/4\\-3/4\\-7/4\\9/4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7/4\\7/4\\7/4\\7/4\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{7}{16}-\frac{21}{16}-\frac{49}{16}+\frac{63}{16}=0\ .$$

שאלה 18

נוכיח לפי אינדוקציה. עבור $n=2$:

$$\|u_1+u_2\|^2 = \|u_1\|^2+\|u_2\|^2+2\mathrm{Re}\cancelto{0}{\langle u_1,u_2\rangle} = \|u_1\|^2+\|u_2\|^2\ .$$

נניח שהטענה נכונה עבור $n=N$. נוכיח אותה עבור $n=N+1$. נגדיר $\mathrm{v}=u_1+u_2+\ldots+u_N$. לפי משפט פיתגורס:

$$\|\mathrm{v}+u_{N+1}\|^2 = \|\mathrm{v}\|^2+\|u_{N+1}\|^2+2\mathrm{Re}\,\langle \mathrm{v},u_{N+1}\rangle\ .$$

כל הווקטורים אורתוגונליים זה לזה לכן

$$\langle \mathrm{v},u_{N+1}\rangle = \langle u_1,u_{N+1}\rangle+\langle u_2,u_{N+1}\rangle+\ldots+\langle u_N,u_{N+1}\rangle = 0+0+\ldots+0=0\ .$$

נציב ונקבל כי

$$\|\mathrm{v}+u_{N+1}\|^2=\|\mathrm{v}\|^2+\|u_{N+1}\|^2 \ .$$

לפי ההנחת האינדוקציה

$$\|\mathrm{v}\|^2=\|u_1+\ldots+u_N\|^2=\|u_1\|^2+\|u_2\|^2+\ldots+\|u_N\|^2 \ ,$$

לכן

$$\|u_1+\ldots+u_N+u_{N+1}\|^2=\|u_1\|^2+\|u_2\|^2+\ldots+\|u_N\|^2+\|u_{N+1}\|^2 \ .$$

מש"ל.

שאלה 19

א) נתונים הווקטורים של $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}, \quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}-5&0\\0&5\end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}0&9\\9&0\end{pmatrix} \ .$$

מצאו בסיס אורתוגונלי של $\mathrm{span}\left\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3\right\}$.

$$u_1=\mathrm{v}_1 \ .$$

$$\|u_1\|^2=\langle u_1,u_1\rangle=\mathrm{tr}\left(u_1^t\cdot u_1\right)=5 \ .$$

$$u2=\mathrm{v}_2-\frac{\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle=\mathrm{tr}\left(u_1^t\cdot \mathrm{v}_2\right)=-5$$

$$u_2=\left(\begin{array}{cc}-4&2\\0&5\end{array}\right) \ .$$

$$\|u_2\|^2=\langle u_2,u_2\rangle=\mathrm{tr}\left(u_2^t\cdot u_2\right)=45 \ .$$

$$u_3=\mathrm{v}_3-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle=\mathrm{tr}\left(u_1^t\cdot \mathrm{v}_3\right)=18 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle=\mathrm{tr}\left(u_2^t\cdot \mathrm{v}_3\right)=18 \ .$$

$$u_3=\mathrm{v}_3-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2=\left(\begin{array}{cc}-2&1\\9&-2\end{array}\right)$$

תשובה סופית: בסיס אורתוגונלי:

$$u_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix} \ , \quad u_2=\left(\begin{array}{cc}-4&2\\0&5\end{array}\right) \ , \quad u_3=\left(\begin{array}{cc}-2&1\\9&-2\end{array}\right) \ .$$

ב) נתונים הווקטורים של $\mathbb{C}^3$:

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\2i\end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix} \ .$$

מצאו בסיס אורתוגונלי של $\operatorname{span}\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3\}$.

$$u_1=\mathrm{v}_1 \ .$$

$$\|u_1\|^2=2 \ .$$

$$u2=\mathrm{v}_2-\frac{\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle=2$$

$$u_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2i\end{pmatrix} \ .$$

$$\|u_2\|^2=6 \ .$$

$$u_3=\mathrm{v}_3-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle=0$$

$$\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle=-6$$

$$u_3=\mathrm{v}_3-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\2i\end{pmatrix}$$

תשובה סופית: בסיס אורתוגונלי:

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \ , \quad u_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2i\end{pmatrix} \ , \quad u_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\2i\end{pmatrix} \ .$$

שאלה 20

נבדוק אם התנאים של מכפלה פנימית ממשית מתקיימים:

סימטריות

לכל $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \mathrm{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$,

$$\langle u, \mathrm{v} \rangle = ax_1x_2 + by_1y_2 + cz_1z_2 = ax_2x_1 + by_2y_1 + cz_2z_1 = \langle \mathrm{v}, u \rangle$$

מתקיים.

<u>לינאריות ברכיב הראשון:</u>

לכל $w = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \mathrm{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
\langle u + \mathrm{v}, w \rangle =& \left\langle \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \right\rangle \\
=& a(x_1 + x_2)x_3 + b(y_1 + y_2)y_3 + c(z_1 + z_2)z_3 \\
=& ax_1x_3 + by_1y_3 + cz_1z_3 + ax_2x_3 + by_2y_3 + cz_2z_3 \\
=& \langle u, w \rangle + \langle \mathrm{v}, w \rangle
\end{aligned}$$

לכל $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \mathrm{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, וסקלר $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\langle \lambda u, \mathrm{v} \rangle =& \left\langle \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
=& \left\langle \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \\ \lambda z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
=& a\lambda x_1x_2 + b\lambda y_1y_2 + c\lambda z_1z_2 \\
=& \lambda(ax_1x_2 + by_1y_2 + cz_1z_2) \\
=& \lambda \langle u, \mathrm{v} \rangle
\end{aligned}$$

<u>חיוביות</u>

נניח כי $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$,

$$\langle u, u \rangle = ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 \ .$$

נתון כי $a, b, c > 0$. אך גם $x_1^2 \geq 0, y_1^2 \geq 0, z_1^2 \geq 0$. לפיכך

$$\langle u, u \rangle \geq 0 \ .$$

בפרט,

$$\langle u, u \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1, y_1, z_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$$

שאלה 21 $\langle , \rangle$ מכפלה פנימית אם סימטריות, לינאריות וחיוביות מתקיימים.

סימטריות

$$\begin{aligned}&\langle u,\mathrm{v}\rangle = \langle \mathrm{v},u\rangle\\ \Rightarrow\quad & u_1\mathrm{v}_1 - 3u_1\mathrm{v}_2 - 3u_2\mathrm{v}_1 + ku_2\mathrm{v}_2 = \mathrm{v}_1u_1 - 3\mathrm{v}_1u_2 - 3\mathrm{v}_2u_1 + k\mathrm{v}_2u_2\\ \Rightarrow\quad & u_1\mathrm{v}_1 - 3\left(u_1\mathrm{v}_2 + u_2\mathrm{v}_1\right) + ku_2\mathrm{v}_2 = \mathrm{v}_1u_1 - 3\left(\mathrm{v}_1u_2 + \mathrm{v}_2u_1\right) + k\mathrm{v}_2u_2\end{aligned}$$

לכל ווקטור u ולכל ערך של k סימטריות מתקיים.

חיוביות

$$\langle u,u\rangle = u_1^2 - 3u_1u_2 - 3u_2u_1 + ku_2^2 = \left(u_1 - 3u_2\right)^2 + (k-9)\,u_2^2$$

מכאן $\langle u,u\rangle \geq 0$ לכל ווקטור u אם ורק אם $k \geq 9$.

שאלה 22

א) לא מכפלה פנימית. דוגמה נגדית: $f(x)=1$, $g(x)=x$.

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}\ , \qquad \langle g,f\rangle = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0\ , \qquad \langle f,g\rangle \neq \langle g,f\rangle$$

ז"א סימטריות לא מקקיימת.

ב) הנוסחה

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

מהווה מכפלה פנימית. הוכחה:

סימטריות

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} g(x)f(x)\,dx = \langle g,f\rangle\ .$$

לינטאריות:

$$\langle f,g+h\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\left[g(x)+h(x)\right]\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx + \int_{-1}^{1} f(x)h(x)\,dx = \langle f,g\rangle + \langle f,h\rangle\ .$$

$$\langle \alpha f,g\rangle = \int_{-1}^{1} \alpha f(x)g(x)\,dx = \alpha\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx = \alpha\,\langle f,g\rangle\ .$$

חיוביות:

$$\langle f,f\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx \geq 0 \ ,$$

$\langle f,f\rangle = \int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx = 0$ אם"ם $f(x)=0$.

ג) לא מכפלה פנימית. דוגמה נגדית: $f(x)=(1-x)$,

$$\langle f,f\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x)^2\sin x\,dx = 2\cos(1)-2\sin(1) < 0 \ .$$

כלומר חיוביות לא מתקיימת.

ד) הנוסחה

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^4 f(x)g(x)\,dx$$

מהווה מכפלה פנימית. הוכחה:

סימטריות:

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} x^4 f(x)g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^4 g(x)f(x)\,dx = \langle g,f\rangle \ .$$

לינאריות:

$$\langle f,g+h\rangle = \int_{-1}^{1} x^4 f(x)\left[g(x)+h(x)\right]\,dx = \int_{-1}^{1} x^4 f(x)g(x)\,dx+\int_{-1}^{1} x^4 f(x)h(x)\,dx = \langle f,g\rangle+\langle f,h\rangle \ .$$

$$\langle \alpha f,g\rangle = \int_{-1}^{1} x^4\alpha f(x)g(x)\,dx = \alpha\int_{-1}^{1} x^4 f(x)g(x)\,dx = \alpha\,\langle f,g\rangle \ .$$

חיוביות:

$$\langle f,f\rangle = \int_{-1}^{1} x^4 f(x)f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^4 f^2(x)\,dx \geq 0 \ ,$$

$\langle f,f\rangle = \int_{-1}^{1} x^4 f^2(x)\,dx = 0$ אם"ם $f(x)=0$.

שאלה 23

א) נגדיר ווקטורים $a,b\in\mathbb{R}^3$:

$$a=\begin{pmatrix}\sqrt{x}\\ \sqrt{y}\\ \sqrt{z}\end{pmatrix} \ , \qquad b=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{x}}\\ \frac{1}{\sqrt{y}}\\ \frac{1}{\sqrt{z}}\end{pmatrix} \ .$$

תהי $\langle,\rangle$ המכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^3$. לפי אי-השוויון קושי-שוורץ:

$$|\langle a,b\rangle| \leq \|a\|\cdot\|b\| \ .$$

$$\langle a,b\rangle = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{z}\cdot\frac{1}{\sqrt{z}} = 3 \ .$$

$$\|a\| = \sqrt{x+y+z} \ , \qquad \|b\| = \sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \ .$$

נציב את הביטוים האלה באי-שוויון קושי-שוורץ ונקבל

$$3 \leq \sqrt{x+y+z}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \leq \sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$$

לכן

$$\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \geq \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 3 \ .$$

ב) נגדיר את הווקטור $a=\frac{1}{n}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ של $\mathbb{R}^n$ ונגדיר את הווקטור $b=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ של $\mathbb{R}^n$. לפי אי-שוויון קושי שוורץ:

$$|\langle a,b\rangle|^2 \leq \|a\|^2\|b\|^2$$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right|^2 \leq \left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{i=1}^n 1\right) = \left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\cdot n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k^2$$

ז"א

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right|^2 \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k^2 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right| \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2} \ .$$

שאלה 24

א) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$, $u=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. תהי $\langle,\rangle$ המכפלה פנימית הסטנדרטית של $\mathbb{C}^2$.

$$\|u\|^2=\langle u,u\rangle = \left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle^2 = 1 \ , \qquad \|\mathrm{v}\|^2=\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle = \left\langle\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}\right\rangle^2 = 1 \ ,$$

$$\|u+\mathrm{v}\|^2 = \langle u+\mathrm{v},u+\mathrm{v}\rangle = \left\langle\begin{pmatrix}1+i\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1+i\\0\end{pmatrix}\right\rangle = (1+i)(1-i) = 2 \ .$$

לכן $\|u+\mathrm{v}\|^2 = 2 = \|u\|^2+\|\mathrm{v}\|^2$.
אבל

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle = \left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}\right\rangle = i \neq 0 \ .$$

ב) הטענה נכונה. הוכחה:
לפי משפט פיתגורס, אם $\langle u, \mathrm{v}\rangle = 0$ אז

$$\|u + \mathrm{v}\|^2 = \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle u, \mathrm{v}\rangle\,\|\mathrm{v}\|^2 \overset{\langle u,\mathrm{v}\rangle = 0}{=} \|u\|^2 + \|\mathrm{v}\|^2 \ \ .$$