

## שיעור 2

### טורים חיוביים וטורים כלליים

#### 2.1 סדרות חשבוניות

##### הגדרה 2.1 סדרה חשבונית

(א) סדרה חשבונית היא סדרה של מספרים שבה ההפרש בין כל איבר לקודמו הוא גודל קבוע. את הפרש הסדרה מסמנים באות  $d$ .

(ב) באופן כללי אם נתונה סדרה חשבונית

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

שהפרשה  $d$ , אזי מתקיים

$$a_2 - a_1 = d, a_3 - a_2 = d, a_4 - a_3 = d,$$

וכו'.

(ג) הנוסחה לאיבר הכללי בסדרה חשבונית היא

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

##### כלל 2.1 הסכום של סדרה חשבונית

נסמן את סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה ב-  $S_n$ , כלומר

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

הסכום של  $n$  האיברים הראשונים בסדרה חשבונית שהפרשה  $d$  ואיבר הראשונה שלה  $a_1$  ניתן ע"י הנוסחה

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

או שקול

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d).$$

#### 2.2 סדרה הנדסית

## הגדרה 2.2 סדרה הנדסית

(א) סדרה הנדסית היא סדרה של מספרים שבה המנה של כל איבר באיבר הקודם לו היא גודל קבוע. את מנת הסדרה מסמנים באות  $q$ .

(ב) באופן כללי אם נתונה סדרה הנדסית

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

ומנה הסדרה היא  $q$ , אזי מתקיים

$$\frac{a_2}{a_1} = q, \quad \frac{a_3}{a_2} = q, \quad \frac{a_4}{a_3} = q,$$

וכו'.

(ג) בסדרה הנדסית  $a_1, a_2, a_3, \dots$  שהמנה שלה  $q$  מתקיים

$$a_1 \neq 0, \quad q \neq 0.$$

(ד) כל איבר בסדרה הנדסית (פרט לראשון) מתקבל ע"י כפל של האיבר הקודם לו במנה  $q$ , כלומר מתקיים

$$a_1 = qa_2, \quad a_3 = qa_2, \quad a_4 = qa_3,$$

וכו'.

(ה) הנוסחה לאיבר הכללי בסדרה הנדסית היא

$$a_n = q^{n-1}a_1.$$

## כלל 2.2 התנהגות של סדרה הנדסית

ניתן לקבוע אם סדרה הנדסית היא סדרה הנדסית עולה, סדרה הנדסית יורדת או סדרה הנדסית שאינה עולה ואינה יורדת לפי הערך של המנה  $q$  ושל האיבר הראשון  $a_1$ .

(א) עבור  $q > 1$ :

(1) אם  $a_1 > 0$  אז הסדרה היא סדרה הנדסית עולה, למשל

$$3, 15, 45, \dots$$

(2) אם  $a_1 < 0$  אז הסדרה היא סדרה הנדסית יורדת, למשל

$$-3, -6, -12, \dots$$

(ב) עבור  $0 < q < 1$ :

(1) אם  $a_1 > 0$  אז הסדרה היא סדרה הנדסית יורדת, למשל

$$20, 10, 5, \dots$$

(2) אם  $a_1 < 0$  אז הסדרה היא סדרה הנדסית עולה, למשל

$$-36, -12, -4, \dots$$

(ג) עבור  $a < 0$  הסדרה אינה עולה ואינה יורדת, למשל

$$5, -10, 20, -40, \dots$$

(ד) עבור  $q = 1$ : במקרה זה מתקבלת סדרה שכל איבריה שווים זה לזה, למשל

$$8, 8, 8, \dots$$

סדרה זו גם נקרא סדרה קבועה.

### כלל 2.3 הסכום של סדרה הנדסית

נסמן את סכום  $N$  האיברים הראשונים בסדרה ב- $S_N$ , כלומר

$$S_N = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^{N-1} = \sum_{n=1}^N a_1q^{n-1}.$$

הסכום של  $n$  האיברים הראשונים בסדרה הנדסית שמנת הסדרה היא  $q$  ואיבר הראשונה שלה  $a_1$  ניתן ע"י הנוסחה

$$S_N = \frac{a_1(1 - q^N)}{1 - q}.$$

### כלל 2.4 הסכום אינסופי של סדרה הנדסית

הסכום אינסופי של טור הנדסי הוא

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1q^{n-1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1(1 - q^N)}{1 - q} = \begin{cases} \text{מתבדר} & |q| > 1 \\ \frac{a_1}{1 - q} & |q| < 1 \end{cases}$$

### דוגמה 2.1

חשבו את

$$S_{10} = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2^n}$$

ו  $S_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ .

**פתרון:**

$$q = \frac{1}{2} \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_{10} = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1023}{1024}.$$

$$S_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1.$$

## 2.2 דוגמה

עבור אילט ערכים של הפרמטר  $p$  מתכנס הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{p^{2n}}$ .

**פתרון:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{p^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{e}{p^2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} q^n .$$

כאשר  $q = \frac{e}{p^2}$ . טור זה מתכנס אם  $|q| = \left| \frac{e}{p^2} \right| < 1$  ז"א  $p^2 > e$ . לכן הטור מתכנס אם

$$|p| > \sqrt{e} ,$$

כלומר הטור מתכנס עבור  $p > \sqrt{e}$  או  $p < -\sqrt{e}$ .

## 2.3 טור טלסקופי

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{N+1} \right) \\ &= 1 . \end{aligned}$$

## 2.4 טורים חיוביים

### הגדרה 2.3 טור

ביטוי מצורה

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

נקרא **סכום אינסופי** או **טור**.

## הגדרה 2.4 סכום החלקי

הסכום החלקי  $S_n$  של הטור יסומן ב-  $S_n$  ויוגדר כסכום של  $n$  האיברים הראשונים בטור:

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n .$$

## הגדרה 2.5 טור חיובי

הטור  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  נקרא **טור חיובי** אם לכל  $k$  מתקיים

$$a_k > 0 .$$

## הגדרה 2.6 התכנסות

אם קיים גבול סופי  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , אומרים שהטור **מתכנס** וגבול זה נקרא סכום הטור ומסומן ב-  $S$ . כלומר

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) .$$

במקרה כאשר גבול של  $S_n$  אינו קיים (או הוא אינסופי) אומרים שהטור **מתבדר**.

## דוגמה 2.3

נתון הטור

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$$

קבעו אם הטור מתכנס.

### פתרון:

הטור מתבדר:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow \infty$$

## דוגמה 2.4

הטור

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots$$

הוא טור הנדסי בעל מנה  $q$ . קבעו לאיזה ערכים של  $q$  הטור מתכנס.

### פתרון:

לפי נוסחה 2.3,

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} .$$

לכן

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

ולכן הטור מתכנס אם ורק אם  $|q| < 1$  ובמקרה זה

$$S = \frac{1}{1 - q} .$$

לרוב הטורים נוסחאות מדויקות אינן קיימות. במקרים אלה ניתן להעריך את הסכומים החלקיים בעזרת אינטגרל ע"י שימוש במשפט הבא.

## 2.5 תנאי הכרחי להתכנסות ותנאי מספיק להתבדרות

### משפט 2.1 תנאי הכרחי להתכנסות טור

אם הטור  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  מתכנס, אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**הוכחה:** שים לב שלכל  $n$  טבעי,  $a_n = S_n - S_{n-1}$  ולפיו אם קיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  כך ש- $S$  סופי, אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

■

### משפט 2.2 תנאי מספיק להתבדרות טור

אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  אז הטור  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  מתבדר.

## 2.5 כלל

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$$

ולכן בבדיקה המתאימה אינם חשובים סימני איבריו של הטור.

## 2.5 דוגמה

קבעו אם הטורים הבאים מתכנסים ומתבדרים:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} n$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^2}$$

### פתרון:

$$1. a_n = (-1)^n$$

לכן הטור מתבדר.  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq 0$

$$2. a_n = n$$

לכן הטור מתבדר.  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq 0$

$$a_n = \frac{n^2}{1+n^2} \quad 3.$$

לכן הטור מתבדר.  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1 \neq 0$

## 2.6 משפטים בסיסיים על התכנסות טורים

### משפט 2.3

1. הורדת מספר סופי של איברים מהטור אינה משפיעה על התכנסותו או התבדרותו.

2. אם  $c \in \mathbb{R}$  מספר ממשי שונה מאפס, אז אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס אז גם  $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$  מתכנס.

אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתבדר אז גם  $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$  מתבדר. מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

3. אם הטורים  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ו-  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתכנסים, אז גם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  מתכנס ומתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

4. אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  מתכנס אז גם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס (ואומרים כי הטור מתכנס בהחלט).

### דוגמה 2.6

קבעו אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^n + 4 \cdot 5^n}{10^n}$  מתכנס.

### פתרון:

לפי משפטים 2 ו 3:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^n + 4 \cdot 5^n}{10^n} &= 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{10^n} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{10^n} \\ &= 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 3 \cdot \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} - 1} + 4 \cdot 1 \\ &= 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \\ &= \frac{19}{4} . \end{aligned}$$

## דוגמה 2.7

קבעו אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  מתכנס.

**פתרון:**

לפי משפטים 4: הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  מתכנס לכן גם  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  מתכנס.

## 2.7 מבחן האינטגרל להתכנסות

## משפט 2.4 מבחן האינטגרל להתכנסות של טורים חיוביים

אם פונקציה חיובית  $f(x)$  מונוטונית יורדת בתחום  $x \geq 1$ .

(1) אם  $\int_1^{\infty} dx f(x)$  מתכנס אז  $S = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  מתכנס, כך ש-

$$\int_1^{\infty} dx f(x) \leq S \leq \int_1^{\infty} dx f(x) + f(1).$$

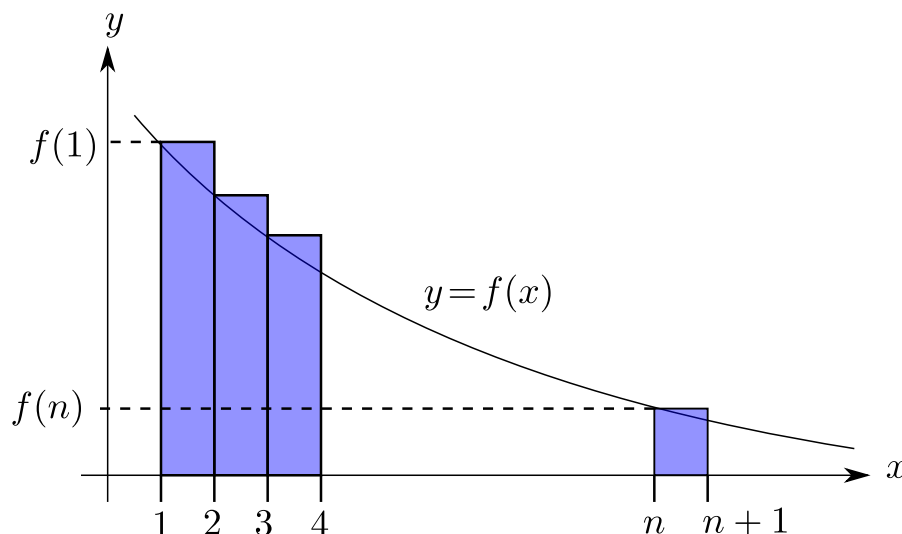
(2) אם  $\int_1^{\infty} dx f(x)$  מתבדר אז  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  מתבדר.

במקרה זה התכנסות הטור  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  שקולה להתכנסות האינטגרל הלא אמיתי  $\int_1^{\infty} dx f(x)$ .

**הוכחה:** אם פונקציה חיובית  $f(x)$  מונוטונית יורדת בתחום  $x \geq 1$  אזי

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq f(1) + f(2) + \dots + f(n)$$

בגלל ש-  $f(1) + f(2) + \dots + f(n)$  שווה לסכום של השטחים של המלבנים מעל הקו כמתואר בהתרשים.

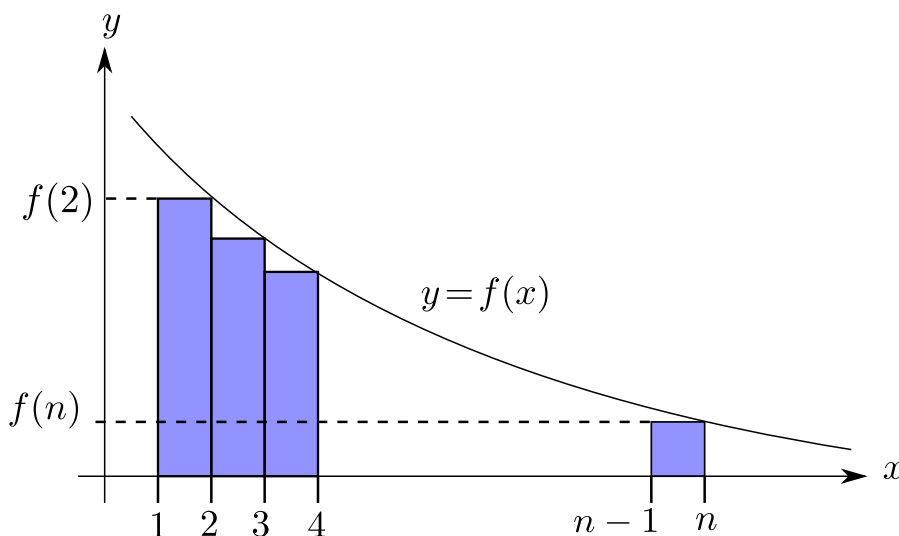




מאותה מידה,

$$f(2) + f(3) + \dots + f(n) \leq \int_1^n f(x) dx$$

בגלל ש-  $f(2) + f(2) + \dots + f(n)$  שווה לסכום של השטחים של המלבנים מתחת הקו כמתואר בהתרשים.



הפונקציה חיובית לכן

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx .$$

בסה"כ נקבל את אי-השוויון

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx .$$

נקח את הגבול  $n \rightarrow \infty$  ונקבל

$$\int_1^\infty f(x) dx \leq \sum_{k=1}^\infty f(k) \leq f(1) + \int_1^\infty f(x) dx .$$



## דוגמה 2.8

קבעו אם הטור

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

מתכנס ואם כן מהו הערך של הטור.

**פתרון:**

$$f(k) = \frac{1}{k^2} \text{ יהי}$$

$$\int_1^\infty dx f(x) = \int_1^\infty dx \frac{1}{x^2} = \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^\infty = 1 .$$

לכן לפי מבחן האינטגרל במשפט 2.4 לעיל הטור מתכנס, ו-

$$1 \leq S \leq 2 .$$

## דוגמה 2.9

קבעו אם הטור

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

מתכנס ואם כן מהו הערך של הטור.

**פתרון:**

$$f(k) = \frac{1}{k} \text{ יהי}$$

$$\int_1^{n+1} dx f(x) = \int_1^{n+1} dx \frac{1}{x} = [\ln x]_1^{n+1} = \ln(n+1).$$

האינטגרל אינו מתכנס כאשר  $n \rightarrow \infty$  ולכן הטור גם לא מתכנס לפי מבחן האינטגרל במשפט 2.4 לעיל.

## דוגמה 2.10

קבעו אם הטור

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

מתכנס או לא.

**פתרון:**

$$f(k) = \frac{1}{k^p} \text{ יהי}$$

$$\int_1^{\infty} dx f(x) = \int_1^{\infty} dx \frac{1}{x^p} = \left[ \frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^{\infty}$$

האינטגרל מתכנס אם  $p > 1$  ומתבדר אם  $p \leq 1$ . לכן לפי מבחן האינטגרל במשפט 2.4 לעיל, הטור  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$  מתכנס אם  $p > 1$  ומתבדר אם  $p \leq 1$ .

## דוגמה 2.11

קבעו אם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2^n}{3^n \cdot n^3}$$

מתכנס.

**פתרון:**

$$f(x) = \frac{x^2 + 2^x}{3^x \cdot x^3} \text{ נרשום זו פונקציה חיובית ויורדת מונוטונית}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + \ln 2 \cdot 2^x) \cdot 3^x \cdot x^3 - (x^2 + 2^x)(\ln 3 \cdot 3^x \cdot x^3 + 3^x \cdot 3x^2)}{3^{2x} x^6} \\ &= \frac{(2x + \ln 2 \cdot 2^x) \cdot x - (x^2 + 2^x)(\ln 3 \cdot x + 3)}{3^x x^4} \\ &= \frac{-x^2 - (\ln 3 - \ln 2)x \cdot 2^x - 3 \cdot 2^x - \ln 3 \cdot 2^x \cdot x^3}{3^x x^4}. \end{aligned}$$

בתחום  $[1, \infty)$   $f' < 0$  לכן מונוטונית יורדת. לכן הטור מתכנס אם  $f(x)$  מתכנס.

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{x^2 + 2^x}{3^x \cdot x^3} dx &= \int_1^\infty \frac{1}{3^x \cdot x} dx + \int_1^\infty \frac{2^x}{3^x \cdot x^3} dx \\ &< \int_1^\infty \left(\frac{1}{3}\right)^x dx + \int_1^\infty \left(\frac{2}{3}\right)^x dx \\ &= \left[ \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \right]_1^\infty \\ &= \left[ -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \right] \end{aligned}$$

לכן הטור מתכנס.

## 2.12 דוגמה

קבעו אם הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

מתכנס.

## פתרון:

נרשום  $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$ . זו פונקציה חיובית ויורדת מונוטונית בתחום  $[2, \infty)$ . לכן הטור מתכנס רק אם האינטגרל  $\int_2^\infty f(x) dx$  מתכנס.

$$\begin{aligned} \int_2^\infty \frac{1}{x \cdot \ln x} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_2^R \frac{1}{x \cdot \ln x} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{e^2}^{e^R} \frac{1}{t} dt \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} [\ln t]_{e^2}^{e^R} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} [R - 2] \\ &= \infty. \end{aligned}$$

לכן הטור מתבדר.

## 2.8 מבחן השוואה

### משפט 2.5 מבחן השוואה

יהיו  $a_n, b_n$  סדרות חיוביות כך ש-  $a_n \leq b_n$  לכל  $n$  החל ממספר מסוים  $k$ . אזי

1. אם  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתכנס אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס.

2. אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתבדר אז  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתבדר.

### דוגמה 2.13

קבעו אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$  מתכנס.

**פתרון:**

נבדוק התכנסות של הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ . האינטגרל  $\int_1^{\infty} \frac{1}{2^x} dx = \frac{1}{2 \cdot \ln 2}$  מתכנס, לכן לפי מבחן האינטגרל הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  מתכנס, ולכן לפי מבחן השוואה הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$  מתכנס.

### דוגמה 2.14

קבעו אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$  מתכנס.

**פתרון:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

לכן לפי מבחן השוואה הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$  מתבדר.

### דוגמה 2.15

עבור אילו ערכים שלמים של הפרמטר  $p$  הטור  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^p}{\ln(n!)}$  מתכנס.

**פתרון:**

$$n! < n^n < 2^n \text{ לכל } n > 3.$$

$$\begin{aligned} n \cdot \ln 2 < \ln(n!) < n \cdot \ln n &\Rightarrow \frac{n^p}{n \cdot \ln 2} > \frac{n^p}{\ln(n!)} > \frac{n^p}{n \cdot \ln n} \\ \Rightarrow \frac{n^{p-1}}{\ln 2} > \frac{n^p}{\ln(n!)} > \frac{n^{p-1}}{\ln n} &\Rightarrow \frac{1}{n^{1-p} \ln 2} > \frac{n^p}{\ln(n!)} > \frac{1}{n^{1-p} \ln n} \end{aligned}$$

מכאן אם  $1 - p > 1$  (כלומר  $p < 0$ ) הטור מתכנס.  
אם  $1 - p \leq 1$  (כלומר  $p \geq 0$ ) הטור מתבדר.

## משפט 2.6 מבחן השוואה הגבולי

יהיו  $a_n, b_n$  סדרות חיוביות כך ש-  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$  אז הטורים

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

מתכנסים או מתבדרים ביחד.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

### דוגמה 2.16

קבעו אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(5^{-n})$  מתכנס.

פתרון:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(5^{-n})}{5^{-n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

לכן  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(5^{-n})$  מתכנס יחד עם  $\sum_{n=1}^{\infty} (5^{-n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ .

### דוגמה 2.17

קבעו אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$  מתכנס.

פתרון:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\pi}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

לכן  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$  מתכנס או מתבדר יחד עם  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\pi}{n}$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

מתכנס לכן גם  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$  מתכנס.

## 2.9 שארית הטור

### הגדרה 2.7 שארית הטור

הטור

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

נקרא **שארית- $n$**  (או "זנב") של הטור  $\sum_{k=1}^n a_k$ .

אם טור השארית מתכנס אז נסמן את סכומו ב- $R_n$ .

אם טור  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  מתכנס אזי

$$R_n = S - S_n$$

ולכן

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

## 2.10 מבחן דלמבר ומבחן קושי

### משפט 2.7 מבחן דלמבר (d'Alembert)

נתון הטור  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ . אם קיים הגבול

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

אז

1. אם  $q < 1$  הטור מתכנס.
2. אם  $q > 1$  הטור מתבדר.
3. אם  $q = 1$  המבחן דלמבר אינו נותן תשובה על התכנסות הטור.

### משפט 2.8 מבחן קושי (Cauchy)

נתון הטור  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ . אם קיים הגבול

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n}$$

(כאשר הסימונים  $\sqrt[n]{a_n} \equiv a_n^{1/n}$  שקולים ואומרים השורש ה- $n$  של  $a_n$ ) אז

1. אם  $q < 1$  הטור מתכנס.
2. אם  $q > 1$  הטור מתבדר.
3. אם  $q = 1$  המבחן קושי אינו נותן תשובה על התכנסות הטור.

## דוגמה 2.18 מבחן דלמבר

קבעו אם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

מתכנס.

### פתרון:

שים לב האיבר ה-  $n$  בסדרה הוא

$$a_n = \frac{n}{2^n}$$

נשתמש במבחן דלמבר:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

לכן הטור מתכנס.

נשתמש במבחן קושי:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \\ &= \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

## דוגמה 2.19 מבחן קושי

קבעו אם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$$

מתכנס.

### פתרון:

שים לב האיבר ה-  $n$  בסדרה הוא

$$a_n = \frac{1}{n^n}$$

נשתמש במבחן קושי:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{-n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ &= 0 < 1.\end{aligned}$$

לכן הטור מתכנס.

## 2.11 גבולות שימושיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad 1$$

$$2 \quad \text{אם } c > 0 \text{ אז } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1.$$

$$3 \quad \text{אם } a_k > 0 \text{ אז}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_0 + a_1 n + \dots + a_k n^k} = 1$$

$$4 \quad \text{אם } 1 \leq f(n) \leq n^p \text{ כאשר } p > 0 \text{ אז}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f(n)} = 1$$

## 2.20 דוגמה

$$\text{קבעו אם הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} \text{ מתכנס.}$$

**פתרון:**

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^{(n+1) \cdot \frac{n}{n+1}} \\ &= \frac{3}{e} > 1.\end{aligned}$$

ולכן הטור מתבדר לפי מבחן דלמבר.



## 2.12 טורים כללים

### הגדרה 2.8 טור כללי

טור כללי הוא טור מצורה  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  אשר כל איברו  $a_n$  לא בהכרח חיובי, אלא ישנם אינסוף איברים חיוביים ואינסוף איברים שליליים. לדוגמא הטור

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

הוא סוג של טור כללי הנקרא **טור מחליף סימן**.

### הגדרה 2.9 טור מחליף סימן

טור מצורה

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

שבו איברים מחליפים סימן לסירוגין נקרא **טור מחליף סימן**.

### משפט 2.9 התכנסות של טור כללי

1. אם  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  מתכנס אז גם  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  מתכנס, ואומרים שהטור  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  **מתכנס בהחלט** (absolutely convergent).

2. אם  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  מתבדר אבל  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$  יש להמשיך לחקור את הטור  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ע"י מבחן לייבניץ (Leibniz).

3. אם  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  מתבדר אבל הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס, אומרים שהטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  **מתכנס בתנאי** (conditionally convergent).

### דוגמה 2.21

קבעו אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  מתכנס.

**פתרון:**

מתכנס לכן  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  מתכנס בהחלט.

## 2.22 דוגמה

קבעו אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  מתכנס.

**פתרון:**

מתבדר (ראו דוגמה 2.9 לעיל) אבל  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  מתכנס (ראו דוגמה למטה). לכן  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  מתכנס בתנאי.

## 2.23 דוגמה

קבעו אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^3 n}{n!}$  מתכנס.

**פתרון:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos^3 n}{n!} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

הטור באגף הימין מתכנס (ראו דוגמה 2.8 לעיל) לכן לפי מבחן השוואה  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos^3 n}{n!} \right|$  מתכנס ולכן  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^3 n}{n!}$  מתכנס בהחלט.

## 2.13 מבחן לייבניץ (Leibniz)

### משפט 2.10 מבחן לייבניץ (Leibniz)

מבחן לייבניץ קשור לטור מחליף סימן.

נתון טור מחליף סימן מצורה

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \quad a_n > 0.$$

אם הסדרה מקיימת את התנאים הבאים:

$$1 \quad a_n > 0 \text{ לכל } n.$$

$$2 \quad \{a_n\} \text{ מונוטונית יורדת } (a_{n+1} \leq a_n \text{ לכל } n)$$

$$3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

אז הטור מתכנס ומתקיים

$$0 < S < a_1,$$

-1

$$|S - S_N| < a_{N+1} - 1.$$

## דוגמה 2.24

קבעו אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  מתבדר או מתכנס.

**פתרון:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad a_n = \frac{1}{n}.$$

$$(1) \quad a_n = \frac{1}{n} > 0 \text{ לכל } n.$$

$$(2) \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n \text{ לכל } n, \text{ כלומר } a_n \downarrow \text{ מונוטונית.}$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

לכן הטור מתכנס.

שימו לב הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  מתבדר (עין דוגמה 2.9 לעיל) לכן הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  מתכנס בתנאי.

## דוגמה 2.25

קבעו אם הטור  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \cdot \cos(n\pi)}{n^2 + \sqrt{n}}$  מתבדר או מתכנס.

**פתרון:**

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

לכן ניתן לרשום את הטור בצורה

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \cdot \cos(n\pi)}{n^2 + \sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + \sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad a_n = \frac{n}{n^2 + \sqrt{n}}.$$

$$(1) \quad a_n = \frac{n}{n^2 + \sqrt{n}} > 0 \text{ לכל } n.$$

(2) כדי לבדוק מונוטוניות נגדיר פונקציה

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + \sqrt{x}}.$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x^2 + \sqrt{x}) - x \cdot \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x^2 + \sqrt{x})^2} \\ &= \frac{-x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{x}}{(x^2 + \sqrt{x})^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x^2 = \frac{1}{2}\sqrt{x} \quad \rightsquigarrow \quad x^4 = \frac{1}{4} \quad \rightsquigarrow \quad x^3 = \frac{1}{4} \quad \rightsquigarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

$x$	$x < 4^{-1/3}$	$x > 4^{-1/3}$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

כלומר,  $f \downarrow$  עבור  $x \geq 2$ .

לכל  $n \geq 2$ , כלומר  $a_n \downarrow$  מונוטונית.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + \frac{1}{\sqrt{n}}} = 0$  (3)

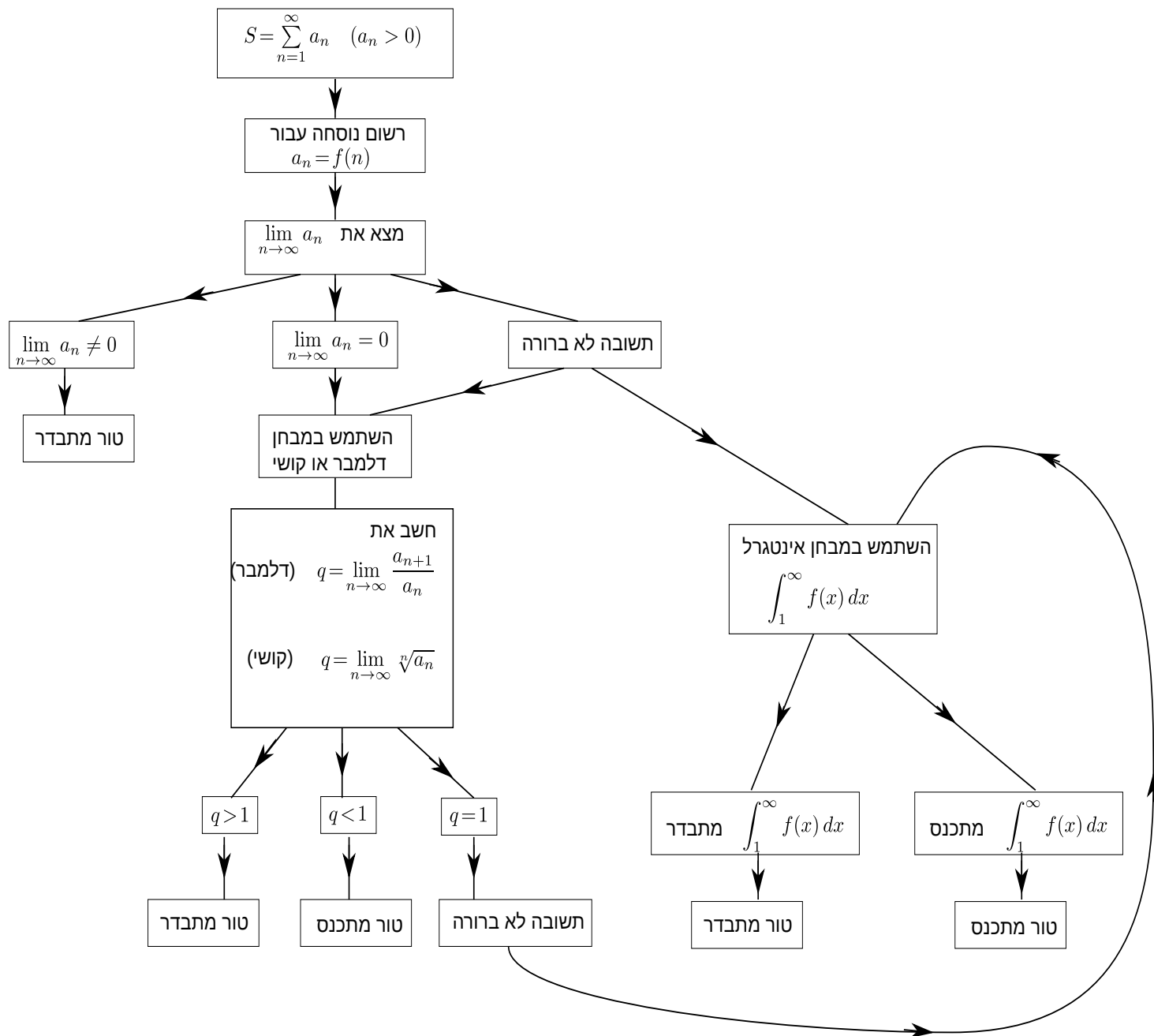
לכן הטור מתכנס.

שימו לב הטור  $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{n \cdot \cos(n\pi)}{n^2 + \sqrt{n}} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2 + \sqrt{n}}$  מתבדר:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2 + \sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{\sqrt{n}}} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty$$

לכן הטור  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \cdot \cos(n\pi)}{n^2 + \sqrt{n}}$  מתכנס בתנאי.

## 2.14 כיצד בודקים התכנסות טור חיובי



## 2.15 כיצד בודקים התכנסות טור כללי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ?

כיצד בודקים התכנסות טור חיובי  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ?

1. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq 0$  אז הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתבדר.

2. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$  בודקים את התכנסות של הטור החיובי  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  ע"י השיטה המתואר בתרשים לעיל.

3. אם  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  מתכנס אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס בהחלט.

4. אם  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  מתבדר אז נשאר האפשרות שהטור הנתון  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס בתנאי .

5. כדי לבדוק את התכנסות הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  במקרה האחרון ניתן להשתמש בשיטה ליבניץ אשר טוען

אם סימנים איברי הטור מתחלפים והסדרה  $\{|a_n|\}$  מונוטונית יורדת ושואפת לאפס אזי הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס.

## 2.16 תרגילים

### 2.26 דוגמה

רשמו את הנוסחה לחישוב של  $S_n$  עבור הטור הנתון, בדקו את התכנסות הטור על סמך ההגדרה ומצאו את סכום הטור במקרה שהוא מתכנס.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n - 1) \quad \text{א)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (0.1)^n \quad \text{ב)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} \quad \text{ג)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad \text{ד)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \quad \text{ה)}$$

**פתרון:**

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2k - 1) = 2 \cdot \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 \quad \text{א)}$$

שים לב,

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

הוא סכום של סדרה חשבונית עם  $a_1 = 1$  ו-  $d = 1$  (עיין הגדרה 2.1). לכן לפי כלל 2.1,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

ולכן

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2k-1) = n(n+1) - n = n^2$$

ואז קל לראות כי

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \rightarrow \infty$$

לא מתכנס. ■

(ב)

$$S_n = \sum_{k=1}^n (0.1)^k = 0.1 + 0.1^2 + 0.1^3 + \dots + (0.1)^n$$

הוא טור הנדסי אשר מנת הסדרה  $q = 0.1$  ואיבר הראשון הוא  $a_1 = 0.1$  (עין הגדרה 2.2 לעיל). הסכום של  $n$  איברים הראשונים הוא, לפי הנוסחה בכלל 2.3,

$$S_n = \frac{0.1(1 - 0.1^n)}{1 - 0.1} = \frac{0.1(1 - 0.1^n)}{0.9} = \frac{1 - 0.1^n}{9}.$$

הטור מתכנס:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{9}.$$

(ג)

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^k + 3^k}{5^k} = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{5^k} + \sum_{k=1}^n \frac{3^k}{5^k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{5}\right)^k + \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{5}\right)^k = \sum_{k=1}^n (0.4)^k + \sum_{k=1}^n (0.6)^k$$

אז קבלנו שני סכומים של סדרה הנדסית. עבור הראשון,  $a_1 = 0.4$ ,  $q = 0.4$  כך שהסכום החלקי (סכום של  $n$  איברים הראשונים) לפי 2.3 הוא

$$\frac{0.4(1 - 0.4^n)}{1 - 0.4} = \frac{2(1 - 0.4^n)}{3}$$

ועבור השני,  $a_1 = 0.6$ ,  $q = 0.6$  כך שהסכום החלקי ולפי משפט 2.3 הוא

$$\frac{0.6(1 - 0.6^n)}{1 - 0.6} = \frac{3(1 - 0.6^n)}{2}$$

אז בסך הכל

$$S_n = \frac{2(1 - 0.4^n)}{3} + \frac{3(1 - 0.6^n)}{2}.$$

הטור מתכנס:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}.$$

(ד) הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$  לא חשבוני ולא הנדסי אבל הוא טור חיובי וגם מונוטוני יורד, לפיו ניתן לבדוק התכנסותו ע"י מבחן האינטגרל (עין משפט 2.4). הפונקציה של האיבר ה- $n$  הוא  $a_n = f(n)$

נבדוק אם האינטגרל המתאים מתכנס:  $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$$\begin{aligned} \int_1^\infty f(x) dx &= \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} dx \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} dx \\ &= \int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})} dx \\ &= \int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x+1-x} dx \\ &= \int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{1} dx \\ &= \int_1^\infty (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) dx \\ &= \left[ \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{2x^{3/2}}{3} \right]_1^\infty \rightarrow \infty \end{aligned}$$

בגלל שהאינטגרל לא מתכנס אז גם הטור לא מתכנס.

(ה) כמו הסעיף הקודם, הטור  $\sum_{n=1}^\infty \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$  לא חשבוני ולא הנדסי אבל הוא טור חיובי וגם מונוטוני יורד, לפיו ניתן לבדוק התכנסותו ע"י מבחן האינטגרל (עין משפט 2.4). הפונקציה של האיבר ה- $n$  הוא  $a_n = f(n) = \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$ . נבדוק אם האינטגרל המתאים מתכנס:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty f(x) dx &= \int_1^\infty \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \int_1^\infty \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) dx \\ &= \int_1^\infty (\ln(x+1) - \ln(x)) dx \\ &= \left[ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right]_1^\infty \\ &= \left[ \frac{-1}{x(x+1)} \right]_1^\infty \rightarrow \infty \end{aligned}$$

בגלל שהאינטגרל לא מתכנס אז גם הטור לא מתכנס.

## דוגמה 2.27

חשבו את הערך את  $S_n$  בעזרת האינטגרל ובדקו את התכנסות הטור על סמך הערכה זו

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2n-1} \quad \text{(א)}$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{(ב)}$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \quad \text{(ג)}$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad (ד)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad (ה)$$

## פתרון:

(א) הפונקציה עבור איבר ה-  $n$  הינה

$$a_n = \frac{1}{2n-1} \equiv f(n)$$

נבדוק את האינטגרל המתאים:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} \frac{1}{2x-1} dx \\ &= \left[ \frac{1}{2} \ln(2x-1) \right]_1^{\infty} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

ולכן לפי משפט 2.4 הטור מתבדר. ■

(ב) הפונקציה עבור איבר ה-  $n$  הינה

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \equiv f(n)$$

נבדוק את האינטגרל המתאים:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= [2\sqrt{x}]_1^{\infty} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

ולכן לפי משפט 2.4 הטור מתבדר. ■

(ג) הפונקציה עבור איבר ה-  $n$  הינה

$$a_n = \frac{1}{n^2} \equiv f(n)$$

נבדוק את האינטגרל המתאים:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \\ &= \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ולכן לפי משפט 2.4 הטור מתכנס כך ש-

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_1^{\infty} f(x) dx + f(1) \Rightarrow 1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$$

■

החישוב של הערך המדויק של הטור לא חלק של השאלה וגם לא בסילבוס, אבל למי שמעוניין החישוב נמצא בסוף הפרק הזה, לפי

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(ד) הפונקציה עבור איבר ה-  $n$  הינה

$$a_n = \frac{n}{2^n} \equiv f(n)$$

נבדוק את האינטגרל המתאים:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} \frac{x}{2^x} dx \\ &= \left[ -\frac{2^{-x}(x \ln(2) + 1)}{\ln^2(2)} \right]_1^{\infty} \\ &= \frac{1 + \ln(2)}{2 \ln^2(2)} \end{aligned}$$

ולכן לפי משפט 2.4 הטור מתכנס כך ש-

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \leq \int_1^{\infty} f(x) dx + f(1) \Rightarrow 1.76203 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \leq 2.26203$$

■

החישוב של הערך המדויק של הטור לא חלק של השאלה ולא בסילבוס, אבל למי שמעוניין:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( -z \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z^n} \right) \right) \Big|_{z=2} \\ &= -z \frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z^n} \right) \Big|_{z=2} \\ &= -z \frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z^n} \right) \Big|_{z=2} \\ &= -z \frac{d}{dz} \left( \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right) \Big|_{z=2} \\ &= -z \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z - 1} \right) \Big|_{z=2} \\ &= -z \left( \frac{-1}{(z - 1)^2} \right) \Big|_{z=2} \\ &= \frac{z}{(z - 1)^2} \Big|_{z=2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

(ה) הפונקציה עבור איבר ה-  $n$  הינה

$$a_n = \frac{1}{n^2} \equiv f(n)$$

נבדוק את האינטגרל המתאים:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty f(x) dx &= \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \\ &= \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^\infty \\ &= 1\end{aligned}$$

ולכן לפי משפט 2.4 הטור מתכנס כך ש-

$$\int_1^\infty f(x) dx \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \leq \int_1^\infty f(x) dx + f(1) \Rightarrow 1 \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \leq 2$$

■

החישוב של הערך המדויק של הטור לא חלק של השאלה וגם לא בסילבוס, אבל למי שמעוניין החישוב נמצא בסוף הפרק הזה, לפיו

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(1) הפונקציה עבור איבר ה- $n$  הינה

$$a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \equiv f(n)$$

נבדוק את האינטגרל המתאים:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty f(x) dx &= \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx \\ &= \left[ -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{x}} \right]_1^\infty \\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

ולכן לפי משפט 2.4 הטור מתכנס כך ש-

$$\int_1^\infty f(x) dx \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\sqrt{n}} \leq \int_1^\infty f(x) dx + f(1) \Rightarrow \frac{2}{3} \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\sqrt{n}} \leq 1$$