8 משתנה מקריים חד מימידיים מיוחדים 25-7

8.1 סיכום נוסחאות: פונקצית התפלגות (מצטברת), תוחלת, שונות.

8.1 הגדרה. (משתנה מקרי בדיד) משתנה מקרי (חד מימדי) בדיד X (מ"מ) הוא פונקציה על המרחב מדגם המתאימה ערך מספרי יחיד לכל תוצאה במרחב הסתברות,

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \ .$$

8.2 דוגמא. מטילים 2 קוביות. נסמן ב- X את סכום התוצאות שהתקבלו. כמו כן

$$\begin{aligned} &\omega = \{(1,1)\}, && X(\omega) = 2, \\ &\omega = \{(2,1),(1,2)\}, && X(\omega) = 3, \\ &\vdots \\ &\omega = \{(6,6)\}, && X(\omega) = 12. \end{aligned}$$

זו דוגמה של מ"מ כאשר X הוא המשתנה המקרי.

8.3 הגדרה. (תומך של מ"מ בדיד) התומך של משתנה מקרי בדיד X זו קבוצת המספרים ש-X יכול להיות שווה להם בהסתברות חיובית, קרי

$$\text{Supp}(X) = \{k \in \mathbb{R} : P(X = k) > 0\} \ .$$

8.4 הגדרה. (פונקצית הסתברות / פונקצית התפלגות) הפונקצית ההתפלגות של משתנה מקרי בדיד (מ"מ) X מוגדרת להיות הפונקציה $f_X(k)$ המקבלת המ"מ X ומחזירה את ההסתברות כי למ"מ X יש ערך k:

$$f_X(k) = P(X = k) \ ,$$

עם התכונות

1. $\sum_{k \in X} f_X(k) = 1$.
2. $f_X(k) \geq 0 \quad \forall k$.

8.5 דוגמא. אלון הוא סוחר ממולח בשוק ההון. הוא משקיע סכום של $\$1000$ במכשיר פיננסי אשר בכל שנה מכפיל את הכסף בסיכוי $\frac{2}{3}$ או מפסיד חצי מההשקעה בסיכוי $\frac{1}{3}$. השנים הן בלתי תלויות. נגדיר את X להיות שווי ההשקעה של אלון לאחר שנתיים. התומך של X כעת הוא

$$\text{supp}(X) = \{250, 1000, 4000\} \ ,$$

על כן, ההתפלגות של X היא

$$P_X(1000) = \frac{4}{9}, \quad P_X(4000) = \frac{4}{9}, \quad P_X(250) = \frac{1}{9}$$

ו - 0 אחרת.

8.6 הגדרה. (פונקצית התפלגות מצטברת) פונקצית התפלגות מצטברת מסומנת ע"י $F_X(x)$ של מ"מ בדיד X בעל פונקצית התפלגות $f_X(k)$ מוגדרת להיות

$$F_X(x) = \sum_{\substack{k \in X \\ k \leq x}} f_X(k) \ .$$

במילים אחרות, פונקצית התפלגות מצטברת $F_X(x)$ מוגדרת להיות הפונקציה שתחומה הוא הישר הממשי וטווחה הקטע $[0,1]$ ומקיימת

$$F_X(x) = P(X \leq x) \qquad \forall x \in X \ .$$

8.7 הגדרה. (תוחלת של משתנה נקרי בדיד) יהי X משתנה מקרי בדיד בעל פונקצית התפלגות $f_X(k)$. התוחלת (expectation) של X היא

$$\mu_X \equiv E[X] = \sum_{k \in X} k f_X(k)\ .$$

8.8 דוגמא. התוחלת של הטלת קוביה היא

$$E[X] = \sum_{k=1}^{6} k\frac{1}{6} = \frac{7}{2}\ .$$

8.9 מסקנה. (לינאריות התוחלת)

1. עבור כל קבוע $a \in \mathbb{R}$ התוחלת של a היא

$$E[a] = a\ .$$

2. עבור כל משתנה מקרי X וקבוע $a \in \mathbb{R}$ התוחלת של aX היא

$$E[aX] = aE[X]\ .$$

3. עבור כל צמד משתנים מקריים X ו- Y התוחלת של $X+Y$ היא

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]\ .$$

4. כמובן שהתכונה הנ"ל ניתנת להכללה גם עבור מספר כללי של משתנים , שכן

$$E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]\ .$$

5. עבור המספרים קבועים a_i ומ"מ X_i,

$$E[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i]\ .$$

דוגמא. בוחרים קוד באורך 10 תווים, כאשר כל תו נבחר באקראי מתוך הספרות 9 – 0 ללא קשר לתווים האחרים שנבחרו. נסמן ב- X מ"מ הסופרים את מספר הרצפים 11 בקוד. חשבו את $E[X]$.

פיתרון. נגדיר מ"מ $X_i,\ i = 1, \ldots, 9$ כאשר X_i מקבל את הערך 1 אם ורק אם במקום ה- i מתחיל רצף של 11. לכן

$$X = \sum_{i=1}^{9} X_i\ .$$

$$\begin{aligned}E[X] =&E\left[\sum_{i=1}^{9} X_i\right]\\ =&\sum_{i=1}^{9} E\left[X_i\right]\\ =&\sum_{i=1}^{9}\left[1.P(X_i=1)+0.P(X_i=0)\right]\\ =&\sum_{i=1}^{9} P(X_i=1)\\ =&\sum_{i=1}^{9}\frac{1}{10}.\frac{1}{10}\\ =&\frac{9}{100}\ .\end{aligned}$$

■

8.10 הגדרה. (שונות של משתנה מקרי) יהי X משתנה מקרי בדיד בעל פונקצית התפלגות $f_X(k)$ ותוחלת μ. השונות (variance) של X הוא

$$V(X)=E[(X-\mu)^2]=\sum_{k\in X}(k-\mu)^2 f_X(k)\ .$$

הגדרה. (סטיית התקן) סטיית התקן (standard deviation) של משתנה מקרי X מוגדרת להיות שורש השונות ומסומנת ב-

$$\sigma_X=\sqrt{V(X)}\ .$$

8.11 מסקנה. (קיצור דרך לשונות)

$$\begin{aligned}V(X) =&E[(X-\mu_X)^2]\\ =&E[(X^2-2\mu_X X+\mu_X^2)]\\ =&E[X^2]-2\mu_X E[X]+E[\mu_X^2]\\ =&E[X^2]-2\mu_X\mu_X+\mu_X^2\\ =&E[X^2]-(E[X])^2\ .\end{aligned}$$

8.12 דוגמא. בר היא בנקאית השקעות מתוחכמת המציעה ללקוחותיה את ההגרלה הבאה: בסיכוי $\frac{2}{5}$ תקבלו רווח של 10. בסיכוי $\frac{1}{5}$ לא תרוויחו ולא תפסידו דבר, ובסיכוי $\frac{3}{5}$ תפסידו 5. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של X המייצג את הרווח מהשקעה אצל בר.

פיתרון. תוחלת הרווח היא חיובית שכן

$$\begin{aligned}\mu_X =&10.\frac{2}{5}+0.\frac{1}{5}-5.\frac{2}{5} &&=2,\\ \mu_{X^2} =&100.\frac{2}{5}+0^2.\frac{1}{5}+25.\frac{2}{5} &&=50,\\ V(X) =&\mu_{X^2}-\mu_X^2 &&=50-4=46,\\ \Rightarrow\quad \sigma_X =&\sqrt{46}\ .\end{aligned}$$

■

8.13 מסקנה. (תכונות השונות)

1. השונות של מספר קבוע היא אפס: ניקח את המספר הקבוע b. אזי

$$V(b) = E[(b-\mu_b)^2] = E[(b-b)^2] = 0 \ .$$

2. שונות היא אי-שלילית.
3. שונות של טרנספורמציה לינארית של משתנה מקרי:
עבור X מ"מ וקבועים $a,b\in\mathbb{R}$ נקבל b,

$$\begin{aligned} V(aX+b) =& E[(aX+b-E(aX+b))^2] \\ =& E[(aX+b-aE(X)-b)^2] \\ =& E[(aX-aE(X))^2] \\ =& E[a^2(X-E(X))^2] \\ =& a^2E[(X-E(X))^2] \\ =& a^2V(X) \ . \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו שוב ושוב בתוכנת הלינאריות. נקבל

$$V(aX+b) = a^2V(X) \ .$$

8.2 משתנה ברנולי

ניסוי ברנולי הוא ניסוי עם תוצאה בינארית - כן או לא. 0 או 1 .הצלחה או כישלון. ניתן לחשוב על ניסוי ברנולי בתור הטלת מטבע, לא בהכרח הוגן. המטבע נוחת על עץ או פלי, כאשר אחד מהם מגדיר הצלחה = 1, והאחר מגדיר כישלון = 0 .הסיכוי להצלחה נתון על ידי הפרמטר

$$0 \le p \le 1 \ .$$

8.14 הגדרה. (משתנה ברנולי) משתנה ברנולי הוא משתנה המקבל את הערכים 0 ו-1 בהתבסס על ניסוי ברנולי עם סיכוי p להצלחה. המשתנה מסומן ב- $X\sim \mathrm{Ber}(p)$ (במילים, X מתפלג לפי התפלגות ברנולי עם פרמטר p). פורמאלית,

$$P(X=k) = \begin{cases} p, & k=1, \\ 1-p, & k=0 \ . \end{cases}$$

8.15 מסקנה. (תוחלת של משתנה ברנולי) התוחלת של משתנה ברנולי היא

$$E[X] = 1.p + 0.(1-p) = p \ ,$$

ו- נובע כי

$$E[X^2] = 1^2.p + 0^2.(1-p) = p \ ,$$

וכן הלאה,

$$E[X^n] = 1^n.p + 0^n.(1-p) = p \ ,$$

לכל n טבעי.

8.16 מסקנה. (שונות של משתנה ברנולי) השונות של משתנה ברנולי היא (עיין מסקנה (8.11) לעייל)

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = p - p^2 = p(1-p) \ .$$

8.3 התפלגות הבינומית

התפלגות הבינומית מכלילה את התפלגות ברנולי למספר ניסויי ברנולי בלתי תלויים. נדמיין ניסוי ברנולי, כגון הטלת מטבע, אשר מבוצע שוב ושוב ובסה"כ n פעמים. השאלה הטבעית שעולה היא מה יהיו מספר ההצלחות בכלל הניסויים. לדוגמא, אם בוחנים השפעות של תרופה על n נבדקים, נרצה לדעת בכמה מקרים התרופה אכן הייתה אפקטיבית. המשתנה אשר מציין את מספר ההצלחות ב-n ניסויי ברנולי ב"ת עם פרמטר p הוא משתנה בינומי, בעל התפלגות בינומית. נסמן זאת ב-

$$X \sim \text{Bin}(n, p) \ .$$

התומך של משתנה מקרי בינומי הוא

$$\text{supp}(X) = \{0, 1, \ldots, n\}$$

יכולות להתקבל 0 הצלחות, הצלחה אחת וכן הלאה, עד למקסימום של n הצלחות. ההתפלגות עצמה נתונה על ידי הנוסחה

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^k \ .$$

עבור כל k בתומך. נסביר את הנוסחה. המאורע $X = k$ מציין k הצלחות. הניסויים עצמם בלתי תלויים ולכן הסיכוי שיהיה בדיוק k הצלחות ספציפיות ב n ניסויים הוא $p^k(1-p)^{n-k}$ (ההסתברות לקבל k הצלחות ו $n-k$ כשלונות מסויימים). בנוסף, צריך לקחת בחשבון את כלל הקומבינציות לקבלת אותן ההצלחות - ניתן לבחור באילו ניסויים, מתוך סה"כ הניסויים, יהיו הצלחות ומספר האפשרויות הללו הוא בחירה של k מתוך n, $\binom{n}{k}$ כידוע.

8.17 הגדרה. (משתנה מקרי בינומי) מבצעים n ניסויים בלתי תלויים. לכל ניסוי יש 2 תוצאות אפשרויות: הצלחה עם הסתברות p או כישלון עם הסתברות $q \equiv 1-p$. משתנה מקרי בינומי X סופר את מספר הצלחות ב n הניסויים.

חוק. (התפלגות בינומית) משתנה בינומי הוא משתנה המקבל את הערכים $0, 1, \ldots, n$ עד ערך מקסימלי n בהתבסס על n ניסויים שבוצעו. ההתפלגות מוגדרת על ידי הסיכוי p^k עבור k הצלחות, יחד עם הסיכוי $(1-p)^{n-k}$ עבור $1-p$ כישלונות, ואלו יחד עם המספר הדרכים לבחור k מתוך n, אשר בדיוק שווה ל $\binom{n}{k}$, שכזה נובע להתפלגות בינימית:

$$f_X(k) \equiv P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \ .$$

8.18 דוגמא. הסיכוי אשר חולה מחלים ממחלת דם חריג הוא 0.4. אם 15 אנשים נדבקים עם המחלה זו, מהי ההסתברות אשר

1. לפחות 10 יחלימו
2. בין 3 עד 8 יחלימו
3. בדיוק 5 יחלימו?

פיתרון. נגדיר X להיות מספר החולים אשר יחלימו.

.1

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) =& 1 - P(X < 10) \\ =& 1 - \sum_{k=0}^{9} f_{X \sim \text{Bin}(15, 0.4)}(k) \\ =& 1 - \sum_{k=0}^{9} \binom{15}{k} 0.4^k (1-0.4)^{15-k} \\ =& 1 - 0.9662 = 0.0338 \ . \end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned} P(3 \le X \le 8) =& 1 - P(X < 10) \\ =& \sum_{k=3}^{8} f_{X\sim\mathrm{Bin}(15,0.4)}(k) \\ =& \sum_{k=0}^{8} f_{X\sim\mathrm{Bin}(15,0.4)}(k) - \sum_{k=0}^{2} f_{X\sim\mathrm{Bin}(15,0.4)}(k) \\ =& \left(\sum_{k=0}^{8} - \sum_{k=0}^{2}\right)\binom{15}{k} 0.4^k (1-0.4)^{15-k} \\ =& 0.9050 - 0.0271 = 0.8779 \ . \end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned} P(X=5) =& f_{X\sim\mathrm{Bin}(15,0.4)}(k=5) \\ =& \binom{15}{5} 0.4^5 (1-0.4)^{10} \\ =& 0.1859 \ . \end{aligned}$$

■

8.19 דוגמא. מחשב משתמש במילים באורך 8 ביטים. כאשר משדרים ביטים בקו התקשורת יש סיכוי של $.1$) לשגיאה בביט בודד שמשודר. בכדי לשפר את איכות הקו, משודר כל ביט 3 פעמים ברצף והפענוח של כל שלשת ביטים מתבצע על ידי החלטת הרוב. למשל: אם רוצים לשדר 0, משדרים בקו "000" והמקלט מפענח את התשדורת כ-0 אם השלשה שהגיעה אליו מורכבת מלפחות שני אפסים.

1. חשבו את ההסתברות שמילת מחשב תפוענח נכון.
2. מצאו את התפלגות מספר המילים שפוענחו באופן שגוי בקובץ המכיל 1000 מילים.

פתרון: נשים לב שכמות הטעויות בשליחה של ביט בודד מתפלגת $X \sim \mathrm{Bin}(3, 0.1)$ ולכן ההסתברות שתהיה שגיאה בפענוח ביט בודד היא

$$P(X \ge 2) = \binom{3}{2} 0.1^2 0.9 + \binom{3}{1} 0.1^3 = 0.028$$

1. כמות השגיאות במילה באורך 8 ביטים מתפלגת

$$Y \sim \mathrm{Bin}(8, 0.028)$$

ולכן המילה תפוענח נכון בהסתברות

$$P(Y=0) = \binom{8}{0} p^0 (1-p)^8 = (1-0.028)^8 = 0.796 \ .$$

2. לאור הסעיף הקודם, ההסתברות לשגיאה בפענוח מילה בודדת היא

$$1 - 0.796 = 0.203 \ ,$$

לכן מספר המילים שפוענחו באופן שגוי בקובץ המכיל 1000 מילים מתפלג $\mathrm{Bin}(1000, 0.203)$.

8.20 מסקנה. (תוחלת של התפלגות בינומית) התוחלת של משתנה מקרי X בעל התפלגות בינומית, או במילים אחרות התוחלת של מספר ההצלחות ב-n ניסויי ברנולי בלתי תלויים היא

$$E[X] = np$$

הוכחה. הצבה ישירה להגדרה של תוחלת תניב

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k f_X(k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

כאשר $q \equiv 1 - p$. יש לכתוב kp^k כ $p\frac{d}{dp}p^k$ וכמו כן

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k f_X(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p\frac{d}{dp} p^k q^{n-k} = p\frac{d}{dp} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \ .$$

קיים זיהוי אשר מציין כי $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$. לכן מקבלים

$$E[X] = p\frac{d}{dp}(p+q)^n = pn(p+q)^{n-1} \ .$$

אבל $p + q = p + 1 - p = 1$, על כן

$$E[X] = np \ .$$

■

8.21 מסקנה. (שונות של התפלגות בינומית) השונות משתנה מקרי X בעל התפלגות בינומית, או במילים אחרות השונות של מספר ההצלחות ב-n ניסויי ברנולי בלתי תלויים היא

$$V[X] = np(1-p)$$

הוכחה. נחשב את

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 f_X(k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

כאשר $q \equiv 1 - p$. יש לכתוב k^2p^k כ $p\frac{d}{dp}\left(p\frac{d}{dp}p^k\right)$ וכמו כן

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k f_X(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p\frac{d}{dp}\left(p\frac{d}{dp} p^k q^{n-k}\right) = p\frac{d}{dp}\left(p\frac{d}{dp} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\right) \ .$$

קיים זיהוי אשר מציין כי $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$. לכן מקבלים

$$E[X] = p\frac{d}{dp}\left(p\frac{d}{dp}(p+q)^n\right) = p\frac{d}{dp}\left(pn(p+q)^{n-1}\right) = np(p+q)^{n-1} + n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} \ .$$

אבל $p + q = p + 1 - p = 1$, על כן

$$E[X^2] = np + n(n-1)p^2 \ .$$

על כן

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = np + n(n-1)p^2 - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p) \ .$$

■

8.4 התפלגות גיאומטרית

נניח כי אנו מטילים צמד קוביות שוב ושוב עד שמתקבלת לראשונה התוצאה $(6,6)$. מה מספר ההטלות שנדרש לבצע? ובכן, התשובה לשאלה הזו היא משתנה מקרי כלשהו. ייתכן וכבר בסיבוב הראשון נקבל את התוצאה הרצויה, ייתכן ותתקבל בסיבוב השני, וגם קיימת האפשרות כי נאלץ לחכות מאה סיבובים (ואף יותר מכך) עד שנקבל את התוצאה המבוקשת. מספר הסיבובים הנדרש אינו חסום ויוכל להיות גדול כרצוננו. המשתנה המקרי המתאר את מספר הסיבובים נקרא משתנה מקרי גיאומטרי, והתפלגותו נקראת התפלגות גיאומטרית. פורמאלית,

8.22 הגדרה. (משתנה גיאומטרי) מבצעים ניסויים בלתי תלויים עם הסתברות להצלחה p וכישלון $q \equiv 1-p$. משתנה מקרי גיאומטרי X סופר את מספר הניסויים עד להצלחה הראשונה (כולל).

8.23 חוק. (והתפלגותו של משתנה גיאומטרי) משתנה מקרי גיאומטרי הוא משתנה מקרי המציין את מספר ניסויי הברנולי הבלתי תלויים שמתקיימים עד לקבלת הצלחה ראשונה. התפלגות גיאומטרית נתונה על ידי פרמטר יחיד p והוא הסיכוי לקבלת הצלחה בניסוי ברנולי בודד. נסמן את המשתנה ב- $X \sim G(p)$ והתפלגותו היא

$$f_X(k) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1} & k = 1,2,\ldots \\ 0 \\ \text{else} \end{cases}$$

עבור כל

$$k \geq 1$$

טבעי.

ההסבר להתפלגות הוא מיידי. בכדי להגיע להצלחה הראשונה בניסוי ה-k, צריכים להתרחש $k-1$ כשלונות רצופים ומיד לאחר מכן הצלחה. זאת בדיוק הנוסחה ההסתברותית שכתבנו. התומך של ההתפלגות הוא כל המספרים הטבעים, כאשר הערך המינימאלי הוא 1, כי צריך להתקיים לפחות ניסוי אחד בכדי להגיע להצלחה אחת.
חישובי תוחלת ושונות עבור התפלגות גיאומטרית מתבססים על סכומים גיאומטריים, סכום סדרה הנדסית.

8.24 מסקנה. (תוחלת של התפלגות גיאומטרית)

$$E[X] \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k f_X(k) = \frac{1}{p} \ .$$

הוכחה. הצבה של הביטוי המפורש להפונקצית הסתברות של מ"מ גיאומטרי, קרי $f_X(k) = (1-p)^{k-1}p$ תניב

$$E[X] \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k f_X(k) = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} \ .$$

כאשר השוויון האחרון נובע בשל העובדה כי האיבר $k=0$ שווה אפס. במקום $k(1-p)^{k-1}$ אפשר להחליף עם $-\frac{d}{dp}(1-p)^k$ כך

$$E[X] = -\sum_{k=0}^{\infty} p\frac{d}{dp}(1-p)^k \ .$$

ניתן להעביר את כל האיברים האינם תלויים בk לחוץ הסכום:

$$E[X] = -p\frac{d}{dp}\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k \ .$$

ישר מן הזיהוי $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ מסיקים כי

$$E[X] = -p\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{1-[1-p]}\right) = -p\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) = -p\left(-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{p} \ .$$

■

8.25 מסקנה. (שונות של התפלגות גיאומטרית)

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1-p}{p^2} \ .$$

הוכחה. קודם כל יש צורך לגזור את $E[X^2]$. הצבה של הביטוי המפורש להפונקצית הסתברות של מ"מ גיאומטרי, קרי $f_X(k) = (1-p)^{k-1}p$ תניב

$$E[X^2] \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k^2 f_X(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} \ .$$

כאשר השוויון האחרון נובע בשל העובדה כי האיבר $k=0$ שווה אפס. במקום $k^2(1-p)^{k-1}$ אפשר להחליף אותו עם $\frac{d}{dp}\left((1-p)\frac{d}{dp}(1-p)^k\right)$ כך

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} p\frac{d}{dp}\left((1-p)\frac{d}{dp}(1-p)^k\right) \ .$$

ניתן להעביר את כל האיברים האינם תלויים בk לחוץ הסכום:

$$E[X^2] = p\frac{d}{dp}\left((1-p)\frac{d}{dp}\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k\right) \ .$$

ישר מן הזיהוי $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ מסיקים כי

$$\begin{aligned}
E[X^2] =& p\frac{d}{dp}\left((1-p)\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{1-[1-p]}\right)\right)\\
=& p\frac{d}{dp}\left((1-p)\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right)\right)\\
=& p\frac{d}{dp}\left(\frac{-(1-p)}{p^2}\right)\\
=& p\left(\frac{-1}{p^2}+\frac{2}{p^3}\right)\\
=& \frac{1}{p}\left(-1+\frac{2}{p}\right)\\
=& \frac{1}{p}\left(\frac{2-p}{p}\right) \ .
\end{aligned}$$

לכן

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} \ .$$

■

8.26 דוגמא. בכד 9 כדורים לבנים ו- 1 שחור. מושכים באקראי בזה אחר זה כדור מהכד. נסמן ב- X את מספר המשיכות עד לקבלת שחור וב- Y את מספר המשיכות עד לקבלת 3 שחורים.

מצאו את התפלגות X כאשר המשיכה היא עם החזרה.

פיתרון. X מקבל ערכים $\mathbb{N}/\{0\}$. בכל הוצאה ישנה הסתברות של $\frac{9}{10}$ לכדור לבן (כישלון) והסתברות של $p=\frac{1}{10}$ לכדור לבן (הצלחה). כלומר, קיבלנו מ"מ גאומטרי

$$X \sim G\left(\frac{1}{10}\right) \ .$$

■

8.5 התפלגות פואסונית

דוגמה של תהליך פאוסוני היא מספר שיחות טלפון נענו במוקד שרות של חברת סלולר. יהי

$$t = \text{מספר הלקוחות הממוצע שיתקשרו לשעה}$$

ו-

$$n = \text{המספר הלקוחות הכללי}$$

שכזה

$$p \equiv \frac{t}{n} = \text{ההסתברות ש } t \text{ לקוחות יתקשרו בשעה אחת}$$

לכן

$$np = \text{מספר הלקוחות הממוצע שיתקשרו בשעה כלשהי}$$

מניחים כי בכל שעה כל לקוח מתקשר בהסתברות קטנה, בלי תלות ביתר הלקוחות. מה המספר הלקוחות הממוצע שיתקשרו בשעתיים? מתכונות הלינאריות אנחנו יודעים ש

$$2np = \text{מספר הלקוחות הממוצע שיתקשרו בשעתיים}$$

וכן

$$knp = \text{מספר הלקוחות הממוצע שיתקשרו ב } k \text{ שעות הבאות}$$

באופן דומה המספר הלקוחות הממוצע אשר יתקשרו חצי שעה כלשה י? נובע מתכונת הלינאריות:

$$\frac{1}{2}np = \text{מספר הלקוחות הממוצע שיתקשרו בחצי שעה כלשהי}$$

מניחים כי הפרמטר n מייצג את מספר הלקוחות והוא יחסית גדול, בעוד הפרמטר p מייצג את הסיכוי של כל לקוח להתקשר והוא יחסית קטן. זאת אומרת ש-np הוא (בקירוב) גודל קבוע כלשהו:

$$\lambda \equiv np$$

כאשר λ הוא מספר קבוע. התכונות הבאות מאפיינות תהליך פואסון.

- מספר האירועים הממוצע ליחידת זמן כלשהי (או ליחידת שטח כלשהי) הוא ערך קבוע $\lambda > 0$ זהו הפרמטר המרכזי בהתפלגות פואסון.
- מספר האירועים בקטעי זמן (או שטח) זרים הם בלתי תלויים זה בזה. במילים אחרות, מספר השיחות שנקבל בשעה הראשונה הוא בלתי תלוי במספר השיחות שנקבל בשעה השנייה.
- הסיכוי לאירוע בקטע זמן (שטח) מסויים תלוי אך ורק באורך קטע הזמן (השטח). במילים אחרות, הסיכוי שתתקבל שיחה בשעה הראשונה שווה לסיכוי שתתקבל שיחה בשעה השנייה ושניהם שווים לסיכוי שתתקבל שיחה בשעה השלישית וכן הלאה. באופן דומה, הסיכוי לקבל שיחה בחצי השעה הראשונה שווה לסיכוי לקבל שיחה בחצי השעה השנייה וכו'. אורך קטע הזמן הוא המשפיע על ההסתברות, ולא המיקום של הקטע על ציר הזמן.

8.27 הגדרה. (משתנה פואסוני) משתנה פואסוני זה סופר את מספר האירועים שהתרחשו ביחידת זמן, או שטחף וכדומה. λ הוא הקצב הממוצע ליחידת זמן

8.28 חוק. (התפלגות פואסוני) נניח ש X הוא משתנה מקרי של תהליך פואסון. נסמן את זה ב $X \sim P(\lambda)$, כאשר λ הוא המספר האירועים ליחידה זמן, או יחידת שטח, וכדומה. התומך של X הוא

$$\operatorname{supp}(X) = \{0, 1, \ldots, \}$$

כלומר כל מספר שלם $k \geq 0$. מספר האירועים אינו שלילי, ויכול להתקבל כל מספר אירועים, החל מ-0 ומעלה. ההתפלגות עצמה נתונה על ידי הנוסחה

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

עבור כל ערך בתומך.

הוכחה. כיצד הגענו לנוסחה הזאת? התשובה נעוצה בסיפור ממנו נפתח הדיון. לוקחים התפלגות בינומית ומניחים כי $\lambda = np$. כעת לוקחים את הגבול $n \to \infty$ מחשבים את הערך

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \ .$$

זאת ההסתברות של משתנה בינומי לקבל את הערך k. הגבול המתקבל תחת ההנחה ש $\lambda = np$ הוא:

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{\lambda^k}{k!}$$
$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

אבל $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ מוגדר להיות e^x, לכן מקבלים

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \ ,$$

וזה בדיוק הביטוי שכתבנו. ■

מסקנה. (תוחלת של התפלגות פואסון)

$$E[X] = \lambda$$

הוכחה.

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

אבל $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ מוגדר להיות e^x לכן

$$E[X] = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda \ .$$

■

8.29 מסקנה. (שונות של התפלגות פואסון)

$$V(X) = \lambda \ .$$

הוכחה.

$$\begin{aligned}
E[X^2] =& \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X=k) & &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
=& \lambda \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{k\lambda^{k-1}}{(k-1)!} & &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(k-1)\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
=& \lambda \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(k-1)\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} & &= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
=& \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}
\end{aligned}$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ מוגדר להיות e^x לכן

$$\begin{aligned}
& E[X^2] = \lambda^2 + \lambda & &= \lambda + \lambda^2 \ . \\
\Rightarrow \quad & V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 & &= \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda \ .
\end{aligned}$$

■

8.30 דוגמא. חלקיקים נפלטים מחומר רדיואקטיבי בתהליך פואסון עם קצב של 0.5 חלקיקים לשנייה. חשבו את ההסתברויות הבאות:

1. ייפלט לפחות חלקיק אחד בשנייה נתונה.
2. ייפלטו יותר מ-3 חלקיקים ב-5 שניות.

פיתרון. התהליך בשאלה הוא תהליך פואסון בעל פרמטר $\lambda = 0.5$ לכן

.1

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - e^{-0.5}\frac{0.5^0}{0!} = 0.393\ .$$

2. כעת בשאלה הוא תהליך פואסון שונה בעל פרמטר 5λ:

$$\begin{aligned}
P(X_5 > 3) =& 1 - P(X_5 = 0) - P(X_5 = 1) - P(X_5 = 2) - P(X_5 = 3) \\
=& 1 - e^{-5\lambda}\frac{(5\lambda)^0}{0!} - e^{-5\lambda}\frac{(5\lambda)^1}{1!} - e^{-5\lambda}\frac{(5\lambda)^2}{2!} - e^{-5\lambda}\frac{(5\lambda)^3}{3!} \\
=& 1 - e^{-5(0.5)}\frac{(5(0.5))^0}{0!} - e^{-5(0.5)}\frac{(5(0.5))^1}{1!} - e^{-5(0.5)}\frac{(5(0.5))^2}{2!} - e^{-5(0.5)}\frac{(5(0.5))^3}{3!} \\
=& 0.242
\end{aligned}$$

מאחר ו- X_5 מתפלג $P(0.5.5)$

■

8.6 תרגילים

8.31 דוגמא. (פונקצית התפלגות) מטילים 2 קוביות. נסמן ב- X את סכום התוצאות שהתקבלו. מצאו את ההתפלגות של X.

פיתרון. נתחיל מהתומך. התוצאות האפשרויות בסכום של 2 קוביות הן המספרים הטבעיים מ- 2 עד 12. בכדי לחשב את ההסתברות לכל ערך נשתמש במרחב מדגם סימטרי: גודל מרחב המדגם הוא $36 = 6^2$, ככמות האפשרויות לבחור תוצאה לקוביה הראשונה מתוך 6 ותוצאה לקוביה השניה מתוך 6. נחשב את ההסתברות של כל תוצאה בנפרד:

$$\begin{aligned}
P(X=2) =& \frac{|\{(1,1)\}|}{6^2} &= \frac{1}{36}, \\
P(X=3) =& \frac{|\{(2,1),(1,2)\}|}{6^2} &= \frac{2}{36}, \\
P(X=4) =& \frac{|\{(1,3),(2,2),(3,1)\}|}{6^2} &= \frac{3}{36}, \\
& \vdots \\
P(X=7) =& \frac{|\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}|}{6^2} &= \frac{6}{36}, \\
P(X=8) =& \frac{|\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}|}{6^2} &= \frac{5}{36}, \\
P(X=9) =& \frac{|\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}|}{6^2} &= \frac{4}{36}, \\
& \vdots \\
P(X=12) =& \frac{|\{(6,6)\}|}{6^2} &= \frac{1}{36},
\end{aligned}$$

ובאופן דומה ממשיכים לחשב את האפשרויות לכל הערכים האפשריים בתומך. באופן כללי קל לראות שהנוסחא, כאשר p זו הסכום של ה 2 הקוביות, היא (עיין משוואה (**??**) לעייל)

$$P(X=p)=\frac{1}{36}\times\begin{cases}(p-1) & p<8\\ (p-1)-2(p-7) & 8\le p<14\end{cases}$$

■

8.32 דוגמא. (פונקצית התפלגות מצטברת) אלון הוא סוחר ממולח בשוק ההון. הוא משקיע סכום של $1000\$$ במכשיר פיננסי אשר בכל שנה מכפיל את הכסף בסיכוי $\frac{2}{3}$ או מפסיד חצי מההשקעה בסיכוי $\frac{1}{3}$. השנים הן בלתי תלויות. נגדיר את X להיות שווי ההשקעה של אלון לאחר שנתיים. מצאו את פונקצית ההתפלגות המצטברת של X ציירו אותה.

פיתרון. כפי שציינו בדוגמה 8.5, התומך של X כעת הוא

$$\mathrm{supp}(X)=\{250,1000,4000\}\ .$$

על כן, פונקצית ההתפלגות המצטברת של X היא

$$F_X(k)=P(X\le k)=\begin{cases}0 & k<250,\\ \frac{1}{9} & 250\le k<1000,\\ \frac{5}{9} & 1000\le k<4000,\\ 1 & 4000\le k.\end{cases}$$

■

8.33 דוגמא. (תוחלת) בן הוא סוחר מתוחכם ולכן הוא מציע לאלון להפקיד אצלו 100 שקלים בתחילת השנה. בסיכוי של $\frac{2}{5}$ הסכום יוכפל, ובסיכוי $\frac{2}{5}$ הסכום יצטמצם בחצי בסוף השנה. מה תהיה תוחלת הכסף של אלון לאחר קבלת ההצעה? נסמן ב- X את שווי כסף של אלון בסוף השנה.

$$E[X]=200.\frac{2}{5}+50.\frac{3}{5}=110.$$

זאת אומרת שהצעתו של בן מגלמת תוחלת רווח של 10%!

8.34 דוגמא. (ליניאריות של תוחלת) בחנות ירקות קטנה ישנם 3 תפוחים ו-4 אגסים. אלון קונה 2 פירות באקראי. בן המוכר מרוויח על כל תפוח 2 ש"ח ועל כל אגס 4 ש"ח. מצאו את תוחלת הרווח של בן.

פיתרון. נגדיר מ"מ Q עבור הרווח של בן, ומשתנה מקרי X כמספר התפוחים שאלון קנה. על כן,

$$Q=2X+4(2-X)=8-2X$$

$$P(X=1)=\frac{4}{7},\qquad P(X=2)=\frac{3}{7}.\frac{2}{6}=\frac{1}{7},\qquad P(X=0)=\frac{4}{7}.\frac{3}{6}=\frac{2}{7}\ .$$

מכאן נובע ש

$$E[X]=0.\frac{2}{7}+1.\frac{4}{7}+2.\frac{1}{7}=\frac{6}{7}\ .$$

נשתמש בתכונת הליניאריות לחישוב התוחלת של

$$E[Q]=8-2E[X]=8-\frac{12}{7}=\frac{44}{7}\ .$$

■

8.35 דוגמא. (ליניאריות של תוחלת) בוחרים קוד באורך 10 תווים, כאשר כל תו נבחר באקראי מתוך הספרות 9 – 0 ללא קשר לתווים האחרים שנבחרו. נסמן ב- X מ"מ הסופרים את מספר הרצפים 11 בקוד. חשבו את $E[X]$.

פיתרון. נגדיר מ"מ 9 $X_i,\ i=1,\ldots,9$ כאשר X_i מקבל את הערך 1 אם ורק אם במקום ה- i מתחיל רצף של 11. לכן

$$X = \sum_{i=1}^{9} X_i \ .$$

$$\begin{aligned} E[X] =& E\left[\sum_{i=1}^{9} X_i\right] \\ =& \sum_{i=1}^{9} E\left[X_i\right] \\ =& \sum_{i=1}^{9} \left[1.P(X_i=1) + 0.P(X_i=0)\right] \\ =& \sum_{i=1}^{9} P(X_i=1) \\ =& \sum_{i=1}^{9} \frac{1}{10}.\frac{1}{10} \\ =& \frac{9}{100} \ . \end{aligned}$$

■

8.7 *הערה: שונות משותפת

8.36 הגדרה. (שונות משותפת) השונות המשותפת (covariance) של צמד מ"מ X ו- Y היא

$$\text{Cov}(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \ .$$

(כאשר $\mu_X \equiv E[X]$ ו $\mu_Y \equiv E[Y]$)
במילים, השונות המשותפת מוגדרת ע"י תוחלת המכפלה $(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$.

8.37 מסקנה. (קיצור דרך לשונות משותפת)

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X,Y) =& E((X-E(X))(Y-E(Y))) \\ =& E(XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)) \\ =& E(XY) - E(XE(Y)) - E(YE(X)) + E(E(X)E(Y)) \\ =& E(XY) - 2E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\ =& E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

8.8 *הערה: התפלגות אחידה

8.38 הגדרה. (התפלגות אחידה) התפלגות אחידה מוגדרת כהתפלגות כך ש

$$f_X(k) = p \quad \forall\ k \in X$$

במילים, לכל ערך $k \in X$ יש הסתברות שווה.

ניקח שני מספרים שלמים $a<b$ ונגיד שמשתנה מקרי X מתפלג אחיד על $[a,b]$. בסימונים

$$X\sim[a,b] \qquad \text{אם } P(X=k)=\frac{1}{b{-}a+1}$$

לכל $a\le k\le b$ זאת אומרת התומך של משתנה אחיד שכזה הוא

$$\operatorname{supp}(X)=a,a+1,a+2,\dots,b$$

וכל הערכים מתקבלים בהסתברות שווה.

דוגמא מוכרת של התפלגות אחידה היא הטלת קוביה הוגנת. בהטלת קוביה הוגנת מקבלים ערכים מ-1 עד 6, וכל ערך מתקבל בהסתברות שווה ($\frac{1}{6}$). זה הרעיון שעומד בבסיס ההתפלגות האחידה. כמובן שנוסחה זאת עיקבית עם הדוגמא הבסיסית של קוביה הוגנת בעלת התפלגות אחידה מ-1 עד 6, עבורה כל ערך מתקבל בסיכוי $\frac{1}{6-1+1}=\frac{1}{6}$.

חישוב התוחלת והשונות של משתנה בעלת התפלגות אחידה מבוסס על נוסחאות של סכום סדרה חשבונית וסכום ריבועים של מספרים שלמים עוקבים:

8.39 מסקנה. (תוחלת של משתנה אחידה) ניקח שני מספרים שלמים $a<b$ ונגיד שמשתנה מקרי X מתפלג אחיד על $[a,b]$ בסימונים

$$X\sim[a,b] \qquad \text{אם} \qquad P(X=k)=\frac{1}{b{-}a+1}$$

לכל $a\le k\le b$. התוחלת של משתנה בעלת התפלגות אחידה, מבוסס על נוסחאות של סכום סדרה חשבונית וסכום ריבועים של מספרים שלמים עוקבים, היא

$$\begin{aligned}
E[X]=&\sum_{k=a}^{b}k.\frac{1}{b-a+1}\\
=&\frac{1}{b-a+1}\sum_{k=a}^{b}k\\
=&\frac{1}{b-a+1}.\frac{(b+a)(b-a+1)}{2}\\
=&\frac{b+a}{2}\ ,
\end{aligned}$$

כאשר המעבר השלישי מבוסס על סכום סדרה חשבונית.

8.40 מסקנה. (שונות של משתנה אחידה) השונות של משתנה בעלת התפלגות אחידה, מבוסס על נוסחאות של סכום סדרה חשבונית ($\sum_{a}^{b}k=\frac{(b+a)(b-a+1)}{2}$) וסכום ריבועים של מספרים שלמים עוקבים ($\sum_{a}^{b}k^2=-\frac{1}{6}(a-$ $(b-1)\left(2a^2+2ab-a+2b^2+b\right)$), הוא

$$\begin{aligned}
E[X^2]=&\sum_{k=a}^{b}k^2.\frac{1}{b-a+1}\\
=&\frac{1}{b-a+1}\sum_{k=a}^{b}k^2\\
=&-\frac{1}{b-a+1}.\frac{1}{6}(a-b-1)\left(2a^2+2ab-a+2b^2+b\right)\\
=&\frac{1}{6}\left(2a^2+2ab-a+2b^2+b\right)
\end{aligned}$$