

# חישוביות וסיבוכיות

## טבלה של רדוקציות

רדוקציה	עמוד
$L_{\text{HALT}} \leq L_{\text{acc}}$	דוגמה 7.6 עמוד 71
$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{\text{NOTREG}}$	דוגמה 7.11 עמוד 75
$L_{\text{acc}} \leq L_{\text{NOTREG}}$	דוגמה 7.12 עמוד 76
$L_{\text{HALT}} \leq L_{\text{NOTREG}}$	דוגמה 7.13 עמוד 77
$L_{\text{acc}} \leq L_{\text{REG}}$	דוגמה 7.15 עמוד 79
$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{\text{REG}}$	דוגמה 7.14 עמוד 78
$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \neg M_2}$ <b>כאשר</b> $L_{M_1 \neg M_2} = \{\langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2)\}$	דוגמה 7.16 עמוד 80
$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \subset M_2}$ <b>כאשר</b> $L_{M_1 \subset M_2} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) \subset L(M_2)\}$	דוגמה 7.17 עמוד 80

## תוכן העניינים

<b>1</b>	<b>מכונות טיורינג</b>	<b>3</b>
	הגדרה היוריסטית של מכונת טיורינג	3
	הגדרה פורמלית של מכונת טיורינג	7
	טבלת המעברים	20
	חישוב פונקציות	24
<b>2</b>	<b>מודלים חישוביים שקולית</b>	<b>28</b>
<b>3</b>	<b>מכונות טיורינג מרובות סרטים</b>	<b>31</b>
	מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה היוריסטית	31
	מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה פורמלית	31
	קונפיגורציה של מטמ"ס	32
	שקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד	34
<b>4</b>	<b>מכונת טיורינג אי דטרמיניסטית</b>	<b>40</b>
	הגדרה של מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית	40
	עץ החישוב של מ"ט א"ד	42
	שקילות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטית	43

47	5	תכונות סגירות של $R$ ו- $RE$
47		הגדרה של השפות $R$ ו- $RE$
53		קידוד של מ"ט דטרמיניסטית
53		מ"ט אוניברסלית $U$
56	6	אי-כריעות
56		השפות $L_d, L_{halt}, L_{acc}$ לא כריעות
60		השפה $L_E$ לא כריעה
62		השפה $L_{EQ}$ לא כריעה
66	7	רדוקציה
66		טבלה של רדוקציות
66		מ"ט המחשבת את פונקציה
68		רדוקציות
75		דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה בין שפות משלימות (משפט 7.2)
75		דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה (משפט 7.1)
82	8	מבוא לסיבוכיות
82		הגדרה של סיבוכיות
84		היחס בין המודלים השונים
87		המחלרה $P$

# שיעור 1

## מכונות טיורינג

### 1.1 הגדרה היוריסטית של מכונת טיורינג

#### הגדרה 1.1 מכונת טיורינג (הגדרה היוריסטית)

##### הקלט והסרט

מכונת טיורינג (מ"ט) קורא קלט. הקלט נמצא על סרט אינסופי. התווים של הקלט נמצאים במשבצות של הסרט. במכונת טיורינג אנחנו מניחים שהסרט אינסופי לשני הכיוונים. משמאל לתחילת הקלט לא כתוב כלום, ומימין לסוף הקלט לא כתוב כלום. אנחנו מניחים שיש תו הרווח  $\_$  שנמצא בכל משבצות שאינן משבצות קלט, משמאל לקלט ומימין לקלט.

...	_	_	a	b	b	b	a	a	_	_	_	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

##### הראש

במצב ההתחלתי הראש בקצה השמאלי של הקלט.

...	_	_	a	b	b	b	a	a	_	_	_	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----



הראש יכול לזוז ימינה על הסרט וגם שמאלה על הסרט. הראש יכול לקרוא את התוכן שנמצא במשבצת הסרט שבה הוא נמצא. הראש יכול לכתוב על המשבצת הסרט שבה הוא נמצא. הכתיבה נעשית תמיד במיקום הראש.

##### המצבים

בהתחלה הראש בקצה השמאלי של הקלט והמ"ט במצב התחלתי  $q_0$ . הראש קורא את התו במשבצת הראשונה וכותב עליה לפי הפונקציית המעברים (שנגדיר בהגדרה 1.2). כעת המ"ט במצב חדש  $q_1$ . הראש קורא את התו במשבצת השניה וכותב עליה לפי הפונקציית המעברים ואז המ"ט במצב חדש  $q_2$ . התהליך ממשיך עד שהראש מגיע לקצה הימני של הקלט, ואז הוא ממשיך לקרוא ולכתוב על כל משבצת בכיוון שמאלה, עד שהוא מגיע לקצה השמאלי. במ"ט ניתן לטייל על הקלט שוב ושוב לשני הכיוונים. התהליך מסתיים כאשר המ"ט מגיע למצב מקבל  $q_{acc}$  או מצב דוחה  $q_{rej}$ .

## דוגמה 1.1

נבנה מכונת טיורינג אשר מקבלת מילה אם היא בשפה

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#a_w = \#b_w\}.$$

ז"א השפה המורכבת מכל המילים עם מספר שווה אותיות  $a$  ו  $b$ .

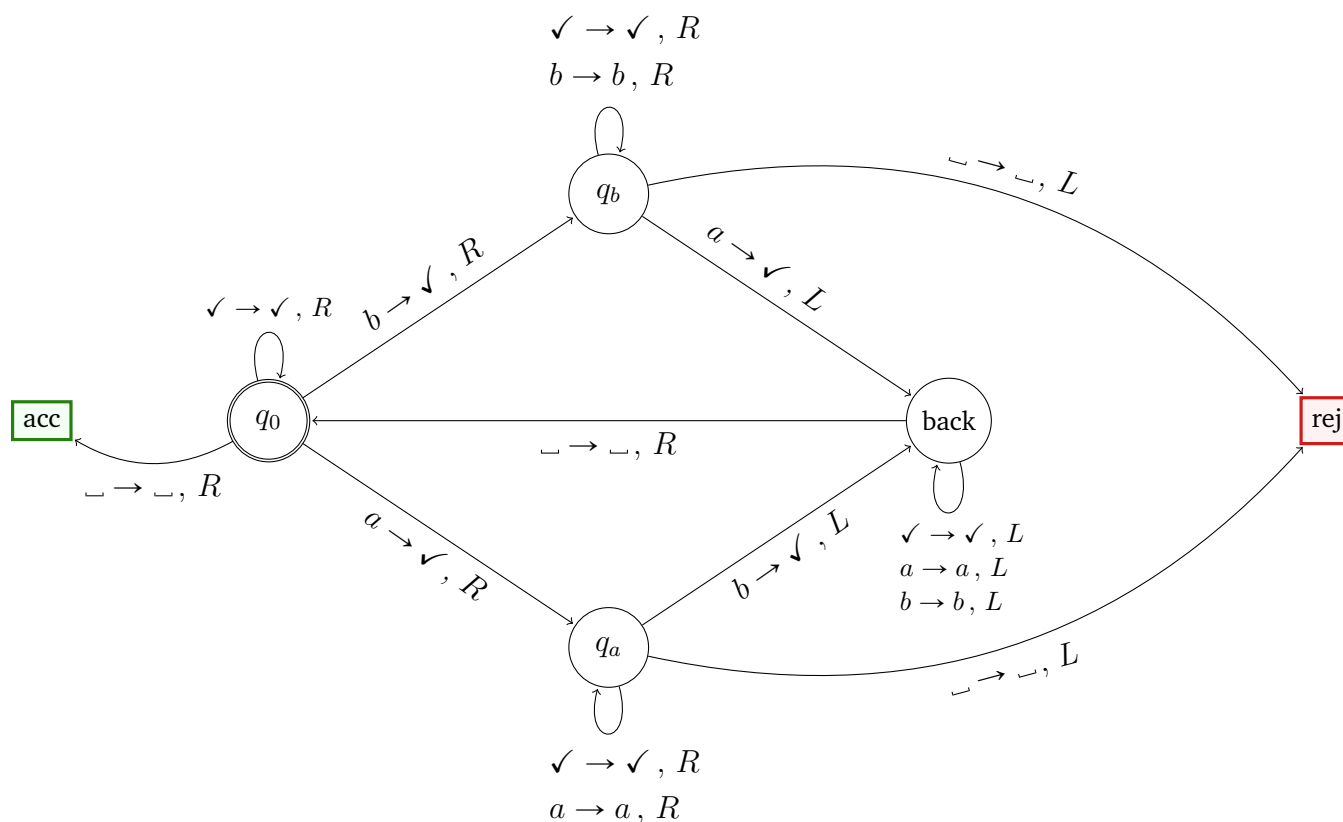
תיאור מילולי

- נסרוק את הקלט משמאל לימין ולכל  $a$  נחשפ  $b$  תואם.
  - נניח שראינו במשבצת הראשונה  $a$ , נסמן עליה ✓.
  - עכשיו נסרוק את יתרת הקלט ונחפש אות  $b$  מתאימה ל  $a$  שכבר ראינו.
    - אם לא מצאנו, המילה לא בשפה.
    - אם מצאנו, נסמן את ה-  $b$  התואם ב- ✓.
  - נחזור לתחילת הקלט ונעשה סריקה נוספת משמאל לימין.
  - במשבצת הראשונה יש ✓ מסיבוב הראשון. הראש פשוט כותב עליה ✓, כלומר משבצת ראשונה נשארת ללא שינוי.
  - הראש זז שמאלה למשבצת הבאה. נניח שמצאנו  $b$ . נסמן במשבצת ✓.
  - נסרוק את יתרת הקלט ונחפש אות  $a$  מתאימה ל  $b$  שכבר ראינו.
    - אם לא מצאנו, המילה לא בשפה.
    - אם מצאנו, נסמן את ה-  $a$  התואם ב- ✓.
    - בכל משבצת שיש ✓ כותבים עליה ✓ וממשיכים למשבצת הבאה הימני.
  - נחזור לתחילת הקלט ונעשה סריקה נוספת משמאל לימין.
  - חוזרים על התהליך שוב ושוב.
    - אם היה מעבר שבו לא מצאנו אות תואמת, המילה לא בשפה.
    - אם כולן היו תואמות ועשינו מעבר שבו הגכנו מקצה לקצה, מרווח לרווח, בלי לראות שום אות, אז המילה בשפה.
- כעת נתאר את המ"ט באמצעות המצבי המכונה והפונקציית המעברים.

מצבי המכונה

$q_0$	המצב ההתחלתי. אליו נחזור אחרי כל סבב התאמה של זוג אותיות.
$q_a$	מצב שבו ראינו $a$ ומחפשים $b$ תואם.
$q_b$	מצב שבו ראינו $b$ ומחפשים $a$ תואם.
back	מצב שנשתמש בו כדי לחזור לקצה השמאלי של הקלט ולהתחיל את הסריקה הבאה (סבב ההתאמה הבא).
acc	מצב מקבל.
rej	מצב דוחה.

- כאשר המכונה מגיעה למצב acc היא עוצרת.  
עצירה במצב acc משמעותה קבלה.
- כאשר המכונה מגיעה למצב rej היא עוצרת.  
עצירה במצב rej משמעותה דחייה.
- רק בשני מצבים אלו המכונה מפסיקה.  
בכל מצב אחר המכונה בהכרח ממשיכה.

תרשים מצבים

- בכל צעד המכונה מבצעת שתי פעולות:

1. כותבת אות במיקום הראש
2. זזה צעד אחד שמאלה או צעד אחד ימינה.

- בכל צעד המכונה יכולה לעבור למצב אחר או להישאר באותו מצב.

**דוגמה 1.2**

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה .abbbbaa

**פתרון:**

—  $q_0$  a b b b a a —

␣	✓	$q_a$	b	b	b	a	a	␣
␣	back	✓	✓	b	b	a	a	␣
back	␣	✓	✓	b	b	a	a	␣
␣	$q_0$	✓	✓	b	b	a	a	␣
␣	✓	$q_0$	✓	b	b	a	a	␣
␣	✓	✓	$q_0$	b	b	a	a	␣
␣	✓	✓	✓	$q_b$	b	a	a	␣
␣	✓	✓	✓	b	$q_b$	a	a	␣
␣	✓	✓	✓	back	b	✓	a	␣
␣	✓	✓	back	✓	b	✓	a	␣
␣	✓	back	✓	✓	b	✓	a	␣
␣	back	✓	✓	✓	b	✓	a	␣
back	␣	✓	✓	✓	b	✓	a	␣
␣	$q_0$	✓	✓	✓	b	✓	a	␣
␣	✓	$q_0$	✓	✓	b	✓	a	␣
␣	✓	✓	$q_0$	✓	b	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	$q_0$	b	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	✓	$q_b$	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	✓	✓	$q_b$	a	␣
␣	✓	✓	✓	✓	back	✓	✓	␣
␣	✓	✓	✓	back	✓	✓	✓	␣
␣	✓	✓	back	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	back	✓	✓	✓	✓	✓	␣
back	␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	␣
␣	$q_0$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	$q_0$	✓	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	✓	$q_0$	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	✓	✓	$q_0$	✓	✓	✓	␣
␣	✓	✓	✓	✓	$q_0$	✓	✓	␣
␣	✓	✓	✓	✓	✓	$q_0$	✓	␣
␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	$q_0$	␣
␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	␣	acc

### דוגמה 1.3

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה aab.

פתרון:

␣	$q_0$	a	a	b	␣
␣	✓	$q_a$	a	b	␣
␣	✓	a	$q_a$	b	␣
␣	✓	back	a	✓	␣
␣	back	✓	a	✓	␣
back	␣	✓	a	✓	␣
␣	$q_0$	✓	a	✓	␣
␣	✓	$q_0$	a	✓	␣
␣	✓	✓	$q_a$	✓	␣
␣	✓	✓	✓	$q_a$	␣
␣	✓	✓	rej	✓	␣

## 1.2 הגדרה פורמלית של מכונת טיורינג

### הגדרה 1.2 מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעיה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$$

כאשר:

$Q$	קבוצת מצבים סופיות
$\Sigma$	א"ב קלט סופי
$\Gamma$	א"ב סרט סופי
$\delta$	פונקציית המעברים
$q_0$	מצב התחלתי
acc	מצב מקבל
rej	מצב דוחה

$\Sigma \subseteq \Gamma$ ,  $\sqcup \in \Gamma$  ref  
 $\delta : (Q \setminus \{\text{rej}, \text{acc}\} \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$   
 $\sqcup \notin \Sigma$

## דוגמה 1.4 (המשך דוגמה 1.1)

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$$

$$Q = \{q_0, q_a, q_b, \text{back}, \text{rej}, \text{acc}\} .$$

$$\Sigma = \{a, b\} , \quad \Gamma = \{a, b, \_, \checkmark\}$$

$$\delta(q_0, a) = (q_a, \checkmark, R) ,$$

$$\delta(q_0, b) = (q_b, \checkmark, R) ,$$

$$\delta(q_0, \_) = (\text{acc}, \_, R) ,$$

$$\delta(q_a, \checkmark) = (q_a, \checkmark, R) ,$$

$$\delta(q_a, a) = (q_a, a, R) ,$$

$$\delta(q_a, b) = (\text{back}, \checkmark, L) ,$$

$$\delta(q_b, \checkmark) = (q_b, \checkmark, R) ,$$

$$\delta(q_b, b) = (q_a, b, R) ,$$

$$\delta(q_b, a) = (\text{back}, \checkmark, L) ,$$

קל יותר לרשום את פונקציית המעברים  $\delta$  כטבלה:

$\Gamma \backslash Q$	a	b	_	✓
$q_0$	$(q_a, \checkmark, R)$	$(q_b, \checkmark, R)$	$(\text{acc}, \_, R)$	$(q_0, \checkmark, R)$
$q_a$	$(q_a, a, R)$	$(\text{back}, \checkmark, L)$	$(\text{rej}, \_, L)$	$(q_a, \checkmark, R)$
$q_b$	$(\text{back}, \checkmark, L)$	$(q_b, b, R)$	$(\text{rej}, \_, L)$	$(q_b, \checkmark, R)$
back	$(\text{back}, a, L)$	$(\text{back}, b, L)$	$(q_0, \_, R)$	$(\text{back}, \checkmark, L)$

## הגדרה 1.3 קונפיגורציה

תהי  $M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$  מכונת טיורינג.

קונפיגורציה של  $M$  הינה מחרוזת

$$\mu q \sigma \nu$$

כאשר משמעות:

$$\mu, \nu \in \Gamma^* , \quad \sigma \in \Gamma , \quad q \in Q .$$

$q$  מצב המכונה,

$\sigma$  הסימון במיקום הראש

$\mu$  תוכן הסרט משמאל לראש,

$\nu$  תוכן הסרט מימין לראש.



## דוגמה 1.5 (המשך של דוגמה 1.3)

$\mu$	$q$	$\sigma$	$\nu$
␣	$q_0$	a	a b ␣
␣✓	$q_a$	a	b ␣
␣✓ a	$q_a$	b	␣
␣✓	back	a	✓ ␣
␣	back	✓	a ✓ ␣
␣	back	␣	✓ a ✓ ␣
␣	$q_0$	✓	a ✓ ␣
␣✓	$q_0$	a	✓ ␣
␣✓✓	$q_a$	✓	␣
␣✓✓✓	$q_a$	␣	␣
␣✓✓	rej	✓	␣

## דוגמה 1.6

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת כל מילה בשפה

$$L = \{a^n \mid n = 2^k, k \in \mathbb{N}\}$$

ז"א מילים בעלי מספר אותיות a אשר חזקה של 2.

## פתרון:

ראשית נשים לב:

$$n = 2^k \text{ אם ורק אם אנחנו מקבלים 1 אחרי חילוק של } n \text{ ב- } 2 \text{ בדיוק } k \text{ פעמים, כלומר } \frac{n}{2^k} = 1.$$

לאור המשפט הזה נבנה אלגוריתם אשר מחלק את מספר האותיות במילה ב- 2 בצורה איטרטיבית. אם אחרי סבב מסויים נקבל מספר אי-זוגי גדול מ- 1 אז מספר האותיות a במילה לא יכול להיות חזקה של 2. אם אחרי כל הסבבים לא קיבלנו מספר אי-זוגי גדול מ- 1 אז מובטח לנו שיש מספר אותיות a אשר חזקה של 2.

• נתון הקלט

␣	␣	a	a	a	a	a	a	a	a	␣	␣

↑

נעבר על סרט הקלט. משמאל לימין.

• מבצעים מחקיה לסירוגין של האות a כלומר אות אחת נמחק ואות אחת נשאר וכן הלאה.

—	—	✓	a	✓	a	✓	a	✓	a	—	—
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

↑

אם אחרי סבב הראשון

\* יש ✓ בתו האחרון  $\Leftarrow$  קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב-2  $\Leftarrow$  אין חזקה של 2 אותיות a במילה.

\* יש a בתו האחרון  $\Leftarrow$  קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב-2 ונמשיך לסבב הבא.

• הראש חוזר לתו הראשון של הקלט

—	—	✓	a	✓	a	✓	a	✓	a	—	—
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

↑

• בסבב הבא חוזרים על התהליך של מחיקה לסירוגין של האות a (אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר)

—	—	✓	✓	✓	a	✓	✓	✓	a	—	—
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

↑

אם אחרי סבב השני

\* יש ✓ בתו האחרון  $\Leftarrow$  קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב-2  $\Leftarrow$  אין חזקה של 2 אותיות a במילה.

\* יש a בתו האחרון  $\Leftarrow$  קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב-2 ונמשיך לסבב הבא.

• הראש חוזר לתו הראשון של הקלט

—	—	✓	✓	✓	a	✓	✓	✓	a	—	—
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

↑

• בסבב הבא חוזרים על התהליך של מחיקה לסירוגין של האות a (אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר)

—	—	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	a	—	—
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

↑

אם אחרי סבב השלישי

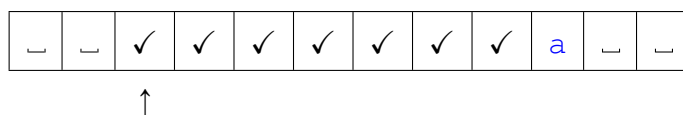
\* יש ✓ בתו האחרון  $\Leftarrow$  קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב-2  $\Leftarrow$  אין חזקה של 2 אותיות a במילה.

\* יש a בתו האחרון  $\Leftarrow$  קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב-2 ונמשיך לסבב הבא.

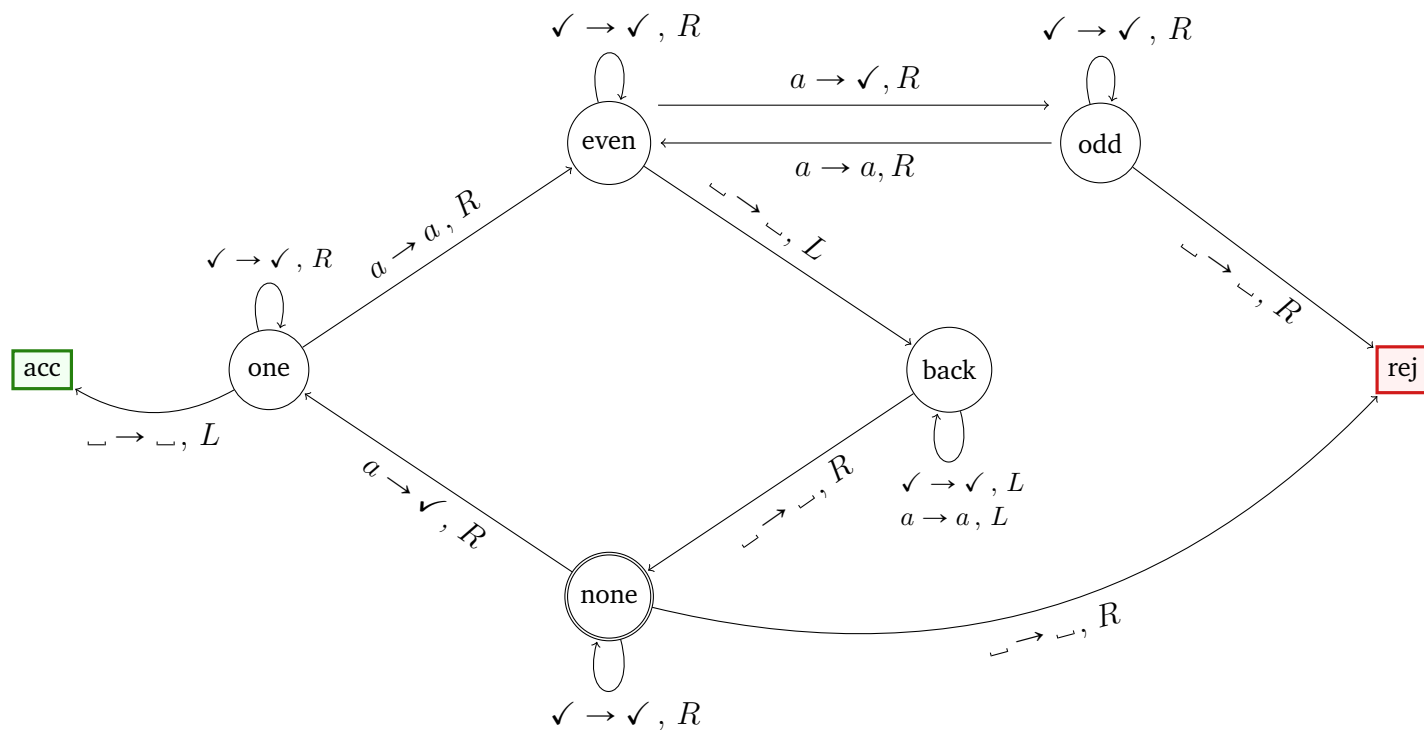
• הראש חוזר לתו הראשון של הקלט.

בסבב האחרון נשאיר רק אות a אחת.

לכן לפי המשפט למעלה מובטח לנו כי המילה מורכבת ממספר אותיות a אשר חזקה של 2.



המכונת טיורינג אשר מקבלת מילים בשפה שעובדת לפי האלגוריתם המתואר למעלה מתואר בתרשים למטה.



### המצבים:

מצב none: מצב התחלתי. עדיין לא קראנו a בסבב סריקה זה.

מצב one: קראנו a בודד.

מצב even: קראנו מספר זוגי של a.

מצב odd: קראנו מספר אי-זוגי של a.

מצב back: חזרה שלמאלה.

### דוגמה 1.7

בדקו אם המילה

aaaa

מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.6.

### פתרון:

_	none	a	a	a	a	_
_	✓	one	a	a	a	_

⌊	✓	a	even	a	a	⌊
⌊	✓	a	✓	odd	a	⌊
⌊	✓	a	✓	a	even	⌊
⌊	✓	a	✓	back	a	⌊
⌊	✓	a	back	✓	a	⌊
⌊	✓	back	a	✓	a	⌊
⌊	back	✓	a	✓	a	⌊
back	⌊	✓	a	✓	a	⌊
⌊	none	✓	a	✓	a	⌊
⌊	✓	none	a	✓	a	⌊
⌊	✓	✓	one	✓	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	one	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	a	even	⌊
⌊	✓	✓	✓	back	a	⌊
⌊	✓	✓	back	✓	a	⌊
⌊	✓	back	✓	✓	a	⌊
⌊	back	✓	✓	✓	a	⌊
back	⌊	✓	✓	✓	a	⌊
⌊	none	✓	✓	✓	a	⌊
⌊	✓	none	✓	✓	a	⌊
⌊	✓	✓	none	✓	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	none	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	✓	one	⌊
⌊	✓	✓	✓	acc	✓	⌊

$\mu$	$q$	$\sigma$	$\nu$
⌊	none	a	aaa ⌊
⌊ ✓	one	a	aa ⌊
⌊ ✓ a	even	a	a ⌊
⌊ ✓ a ✓	odd	a	⌊
⌊ ✓ a ✓ a	even	⌊	⌊
⌊ ✓ a ✓	back	a	⌊
⌊ ✓ a	back	✓	a ⌊

␣ ✓	back	a	✓ a ␣
␣	back	✓	a ✓ a ␣
␣	back	␣	✓ a ✓ a ␣
␣	none	✓	a ✓ a ␣
␣ ✓	none	a	✓ a ␣
␣ ✓ ✓	one	✓	a ␣
␣ ✓ ✓ ✓	one	a	␣
␣ ✓ ✓ ✓ a	even	␣	␣
␣ ✓ ✓ ✓	back	a	␣
␣ ✓ ✓	back	✓ a	␣
␣ ✓	back	✓	✓ a ␣
␣	back	✓	✓ ✓ a ␣
␣	back	␣	✓ ✓ ✓ a ␣
␣	none	✓	✓ ✓ a ␣
␣ ✓	none	✓	✓ a ␣
␣ ✓ ✓	none	✓	a ␣
␣ ✓ ✓ ✓	none	a	␣
␣ ✓ ✓ ✓ ✓	one	␣	␣
␣ ✓ ✓ ✓	acc	✓	␣

## דוגמה 1.8

בדקו אם המילה

aaa

מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.6.

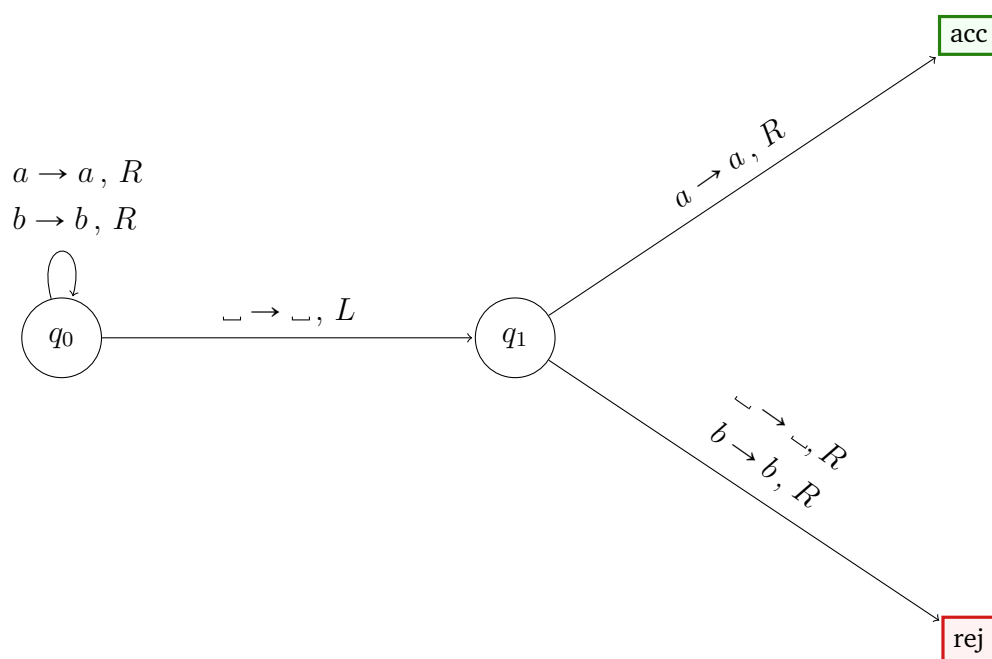
**פתרון:**

␣	none	a	a	a	␣
␣	✓	one	a	a	␣
␣	✓	a	even	a	␣
␣	✓	a	✓	odd	␣
␣	✓	a	✓	␣	rej

$\mu$	$q$	$\sigma$	$\nu$
$\_$	none	a	aa $\_$
$\_ \checkmark$	one	a	a $\_$
$\_ \checkmark a$	even	a	$\_$
$\_ \checkmark a \checkmark$	odd	$\_$	$\_$
$\_ \checkmark a \checkmark \_$	rej	$\_$	$\_$

## 1.9 דוגמה

מהי שפת המכונה:



## פתרון:

### תיאור מילולי:

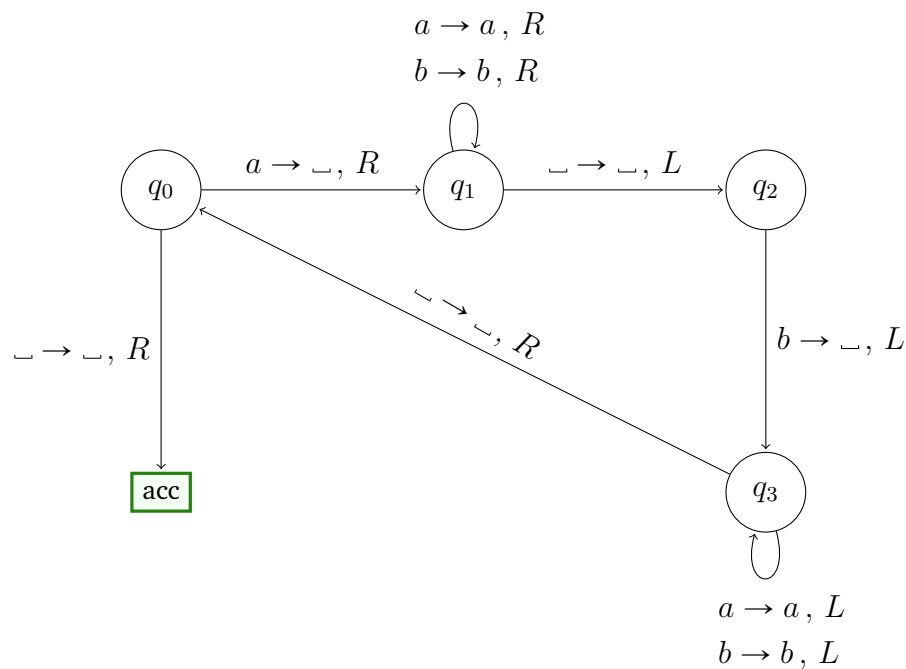
- במצב התחלתי  $q_0$ :
  - \* אם אנחנו רואים a, עוברים למשבצת הבהא לימין הראש.
  - \* אם אנחנו רואים b, עוברים למשבצת הבהא לשמאל הראש.
- ממשיכים כך עד שנגיע לתו רווח, כלומר לסוף המילה, ואז עוברים למשבצת לשמאל הראש, כלומר לתו האחרון של המילה.

- \* אם אנחנו רואים a, המילה מתקבלת. (ז"א התו האחרון הינו a.)
- \* אם אנחנו רואים b, המילה נדחית. (ז"א התו האחרון הינו b.)
- \* אם אנחנו רואים תו-רווח המילה נדחית. (ז"א המילה הינה ריקה.)

תשובה סופית: המכונה מקבלת שפת המילים המסתיימות באות a.

## דוגמה 1.10

מהי שפת המכונה:



## פתרון:

## תיאור מילולי:

- במצב התחלתי  $q_0$ :
  - \* אם אנחנו רואים  $b$ , המילה נדחית.
  - \* אם אנחנו רואים  $\_$ , המילה מתקבלת.
  - \* אם אנחנו רואים  $a$ , כותבים עליה  $\_$  ועוברים למשבצת הבאה לימין הראש, והמ"ט עוברת למצב  $q_1$ .
- במצב  $q_1$  אנחנו ראינו  $a$  וכתבנו עליה  $\_$ .
  - \* אם אנחנו רואים במשבצת הבאה  $a$  או  $b$ , ממשיכים למשבצת הבאה לימין והמ"ט נשארת במצב  $q_1$ .
  - \* אם אנחנו רואים תו רווח (כלומר הגענו לסוף המילה) הראש  $ז$  למשבצת השמאלי, כלומר לאות האחרונה של המילה והמ"ט עוברת למצב  $q_2$ .
- במצב  $q_2$  ראינו  $a$  בתו הראשון, כתבנו עליה  $\_$  והראש קורא התו האחרון.
  - \* אם אנחנו רואים  $a$  המילה נדחית.
  - \* אם אנחנו רואים  $\_$ , המילה נדחית.
  - \* אם אנחנו רואים  $b$  כותבים עליה  $\_$  והמ"ט עוברת למצב  $q_3$ .
- במצב  $q_3$  קראנו  $a$  בתו הראשון ומחקנו אותה, קראנו  $b$  ומחקנו אותה.
  - \* הראש  $ז$  משבצת אחת שמאלה עד שיגיע לתו הראשון ומ"ט חוזרת למצב התחלת  $q_0$ .

- המ"ט באופן איטרטיבי, עוברת על הקלט ובכל מעבר:

\* אם יש  $a$  בתחילת המילה מורידה אותה ומחליפה אותה עם  $\_$ , אחרת המילה נדחית,

\* אם יש  $b$  בסופה של המילה מורידה אותה ומחליפה אותה עם  $\_$ , אחרת המילה נדחית.

- אם לאחר מספר מעברים כאלו הסרט ריק, המ"ט מקבלת, וזה יתקיים לכל מילה ורק למילים בשפה

$$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}.$$

תשובה סופית: המכונה מקבלת שפת המילים

$$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}.$$

## דוגמה 1.11

פתרון:

$\mu$	$q$	$\sigma$	$\nu$
$\_ \_$	$q_0$	a	aaabbbb $\_ \_$
$\_ \_ \_$	$q_1$	a	aabbbb $\_ \_$
$\_ \_ \_ a$	$q_1$	a	abbbb $\_ \_$
$\_ \_ \_ aa$	$q_1$	a	bbbb $\_ \_$
$\_ \_ \_ aaa$	$q_1$	b	bbb $\_ \_$
$\_ \_ \_ aaab$	$q_1$	b	bb $\_ \_$
$\_ \_ \_ aaabb$	$q_1$	b	b $\_ \_$
$\_ \_ \_ aaabbb$	$q_1$	b	$\_ \_$
$\_ \_ \_ aaabbbb$	$q_1$	$\_$	$\_$
$\_ \_ \_ aaabbb$	$q_2$	b	$\_ \_$
$\_ \_ \_ aaabb$	$q_3$	b	$\_ \_ \_$
$\_ \_ \_ aaab$	$q_3$	b	b $\_ \_ \_$
$\_ \_ \_ aaa$	$q_3$	b	bb $\_ \_ \_$
$\_ \_ \_ aa$	$q_3$	a	bbb $\_ \_ \_$
$\_ \_ \_ a$	$q_3$	a	abbb $\_ \_ \_$
$\_ \_ \_$	$q_3$	a	aabbb $\_ \_ \_$
$\_ \_$	$q_3$	$\_$	aaabbb $\_ \_ \_$
$\_ \_ \_$	$q_0$	a	aabbb $\_ \_ \_$
$\_ \_ \_ \_$	$q_1$	a	abbb $\_ \_ \_$



_____ a	$q_1$	a	bbb_____
_____ aa	$q_1$	b	bb_____
_____ aab	$q_1$	b	b_____
_____ aabb	$q_1$	b	_____
_____ aabbb	$q_1$	—	_____
_____ aabb	$q_2$	b	_____
_____ aab	$q_3$	b	_____
_____ aa	$q_3$	b	b_____
_____ a	$q_3$	a	bb_____
_____	$q_3$	a	abb_____
_____	$q_3$	—	aabb_____
_____	$q_0$	a	abb_____
_____	$q_1$	a	bb_____
_____ a	$q_1$	b	b_____
_____ ab	$q_1$	b	_____
_____ abb	$q_1$	—	_____
_____ ab	$q_2$	b	_____
_____ a	$q_3$	b	_____
_____	$q_3$	a	b_____
_____	$q_3$	—	ab_____
_____	$q_0$	a	b_____
_____	$q_1$	b	_____
_____ b	$q_1$	—	_____
_____	$q_2$	b	_____
_____	$q_3$	—	_____
_____	$q_0$	—	_____

#### הגדרה 1.4 גרירה בצעד אחד

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$  מכונת טיורינג, ותהי  $c_1$  ו- $c_2$  קונפיגורציות של  $M$ .  
נסמן

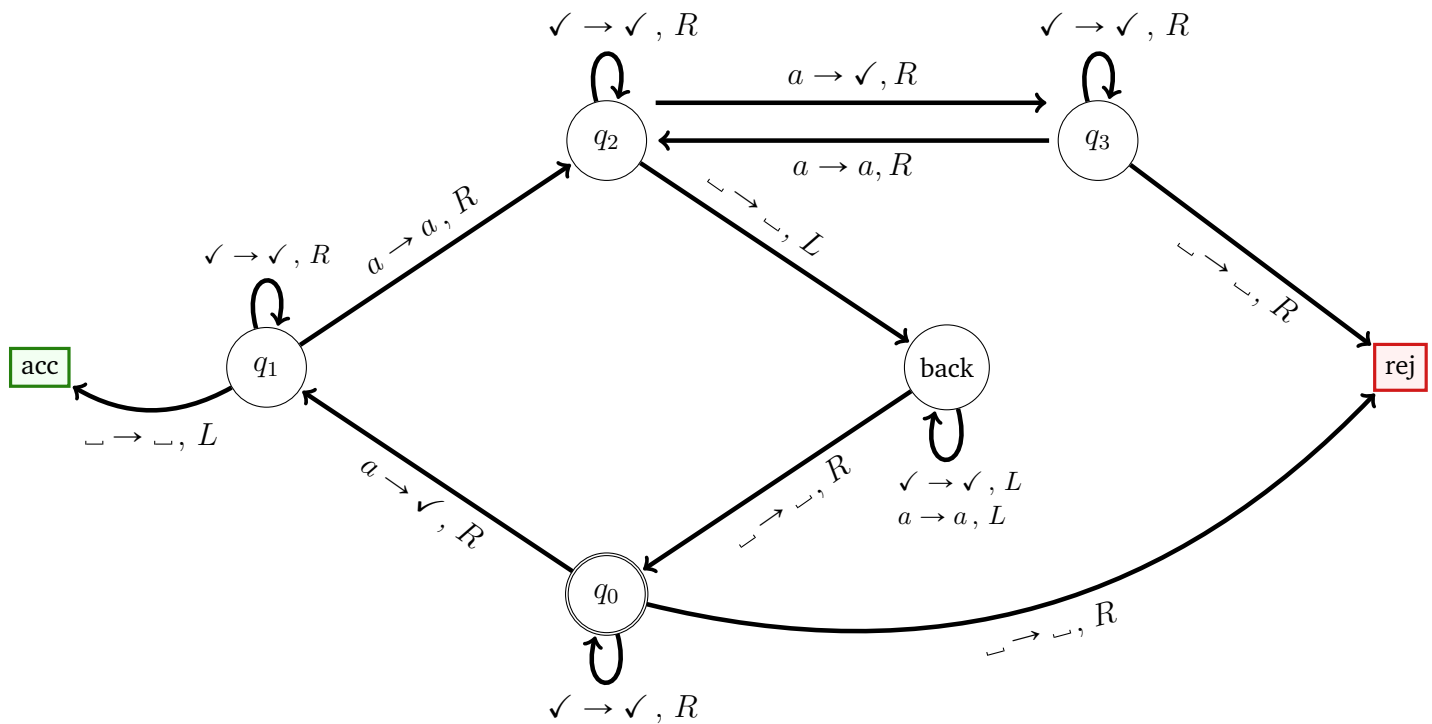
$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים,  $c_1$  גורר את  $c_2$ ) אם כשנמצאים ב- $c_1$  עוברים ל- $c_2$  בצעד בודד.

## דוגמה 1.12 (המשך של דוגמה 1.6)

במכונת טיורינג שמתואר בתרשים דמטה (אשר שווה למ"ט בדוגמה 1.6 רק עם סימנוים שונים למצבים) מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$



## הגדרה 1.5 גרירה בכללי

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, acc, rej)$  מכונת טיורינג, ותהי  $c_1$  ו- $c_2$  קונפיגורציות של  $M$ . נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

(במילים,  $c_1$  גורר את  $c_2$ ) אם ניתן לעבור מ- $c_1$  ל- $c_2$  ב-0 או יותר צעדים.

## דוגמה 1.13 (המשך של דוגמה 1.6)

במכונת טיורינג שמתואר בתרשים דמטה (אשר שווה למ"ט בדוגמה 1.6 רק עם סימנוים שונים למצבים) מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M^* \checkmark \checkmark \checkmark q_4 a$$

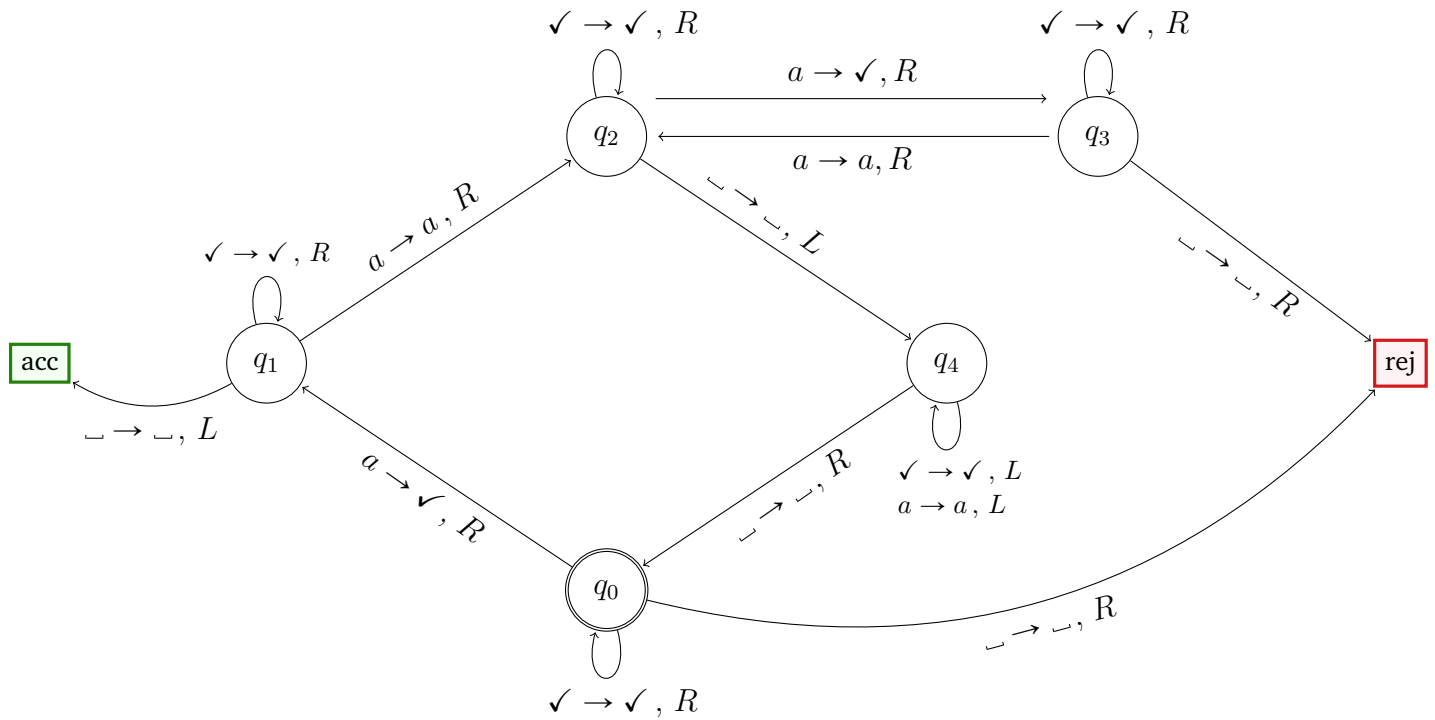
כי

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark \checkmark q_1 a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark \checkmark a q_2 \sqcup$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark \checkmark q_4 a .$$



### הגדרה 1.6 קבלה ודחייה של מחרוזת

תהי

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, acc, rej)$$

מכונת טיורינג, ו-

$$w \in \Sigma^*$$

מחרוזת. אומרים כי

•  $M$  מקבלת את  $w$  אם

$$q_0 w \vdash_M^* u \text{ acc } \sigma v$$

עבור  $v, u \in \Gamma^*, \sigma \in \Gamma$  כלשהם,

•  $M$  דוחה את  $w$  אם

$$q_0 w \vdash_M^* u \text{ rej } \sigma v$$

עבור  $v, u \in \Gamma^*, \sigma \in \Gamma$  כלשהם.

### הגדרה 1.7 הכרעה של שפה

תהי

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, acc, rej)$$

מכונת טיורינג, ו-

$$L \subseteq \Sigma^*$$

שפה. אומרים כי  $M$  מכריעה את  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$  מתקיים

•  $M \Leftarrow w \in L$  מקבלת את  $w$ .

•  $M \Leftarrow w \notin L$  דוחה את  $w$ .

## הגדרה 1.8 קבלה של שפה

תהי

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$$

מכונת טיורינג, ו-

$$L \subseteq \Sigma^*$$

שפה. אומרים כי  $M$  מקבלת את  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$  מתקיים• אם  $w \in L$  אז  $M$  מקבלת את  $w$ .• אם  $w \notin L$  אז  $M$  לא מקבלת את  $w$ .

במקרה כזה נכתוב ש-

$$L(M) = L.$$

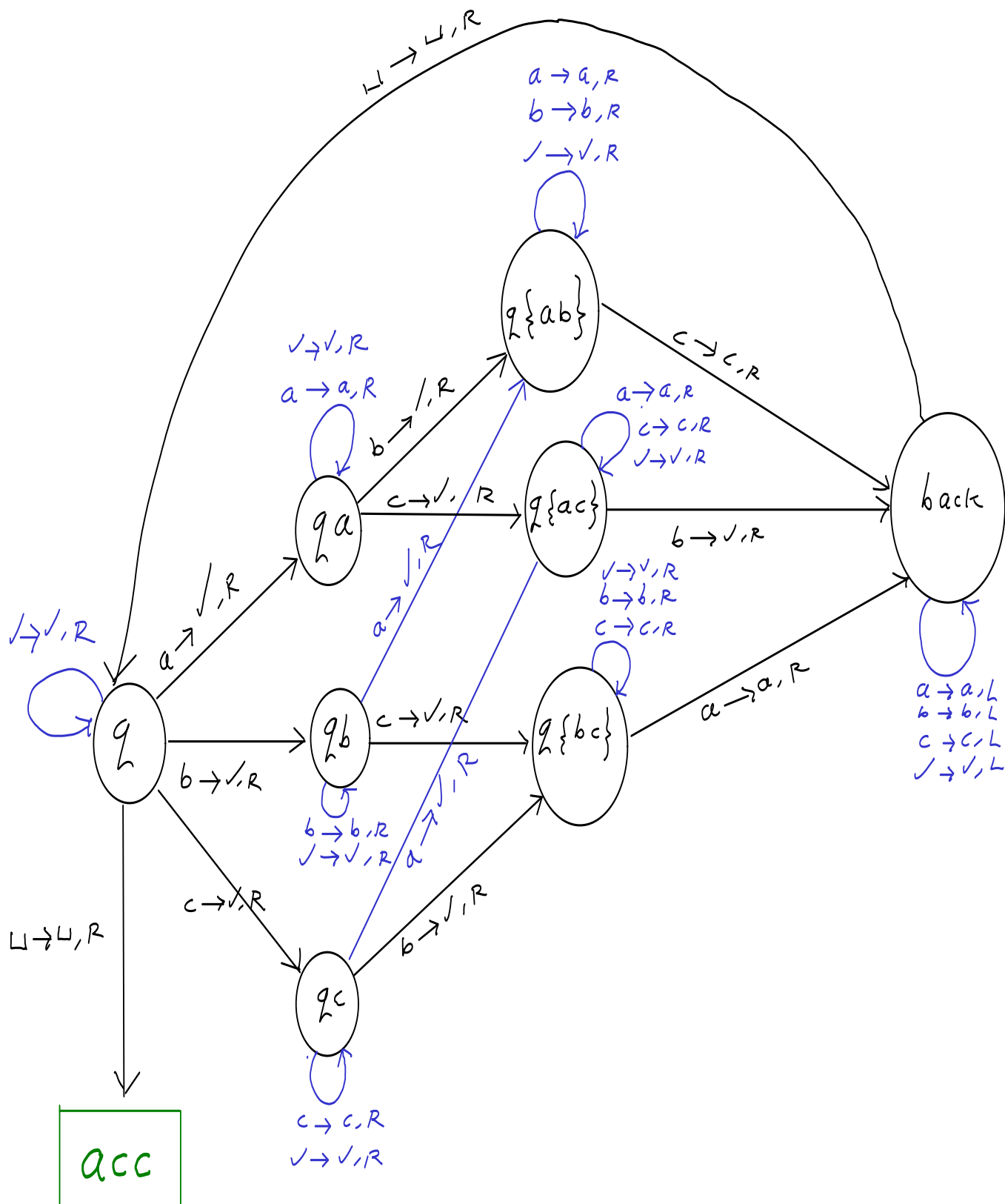
## 1.3 טבלת המעברים

## דוגמה 1.14

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$L = \{w = \{a, b, c\}^* \mid \#a_w = \#b_w = \#c_w\}$$

פתרון:



מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
$q.S$	$\sigma$	$q.(S \cup \{\sigma\})$	$\checkmark$	$R$	$\sigma \notin S$
$q.S$	$\sigma$	$q.S$		$R$	$\sigma \in S$
$q/\{a, b, c\}$	$a, b, c, \checkmark$	back		$L$	
$q.\emptyset$	$\perp$	acc		$R$	
back	$a, b, c, \checkmark$	back		$L$	
back	$\perp$	$q.\emptyset$		$R$	

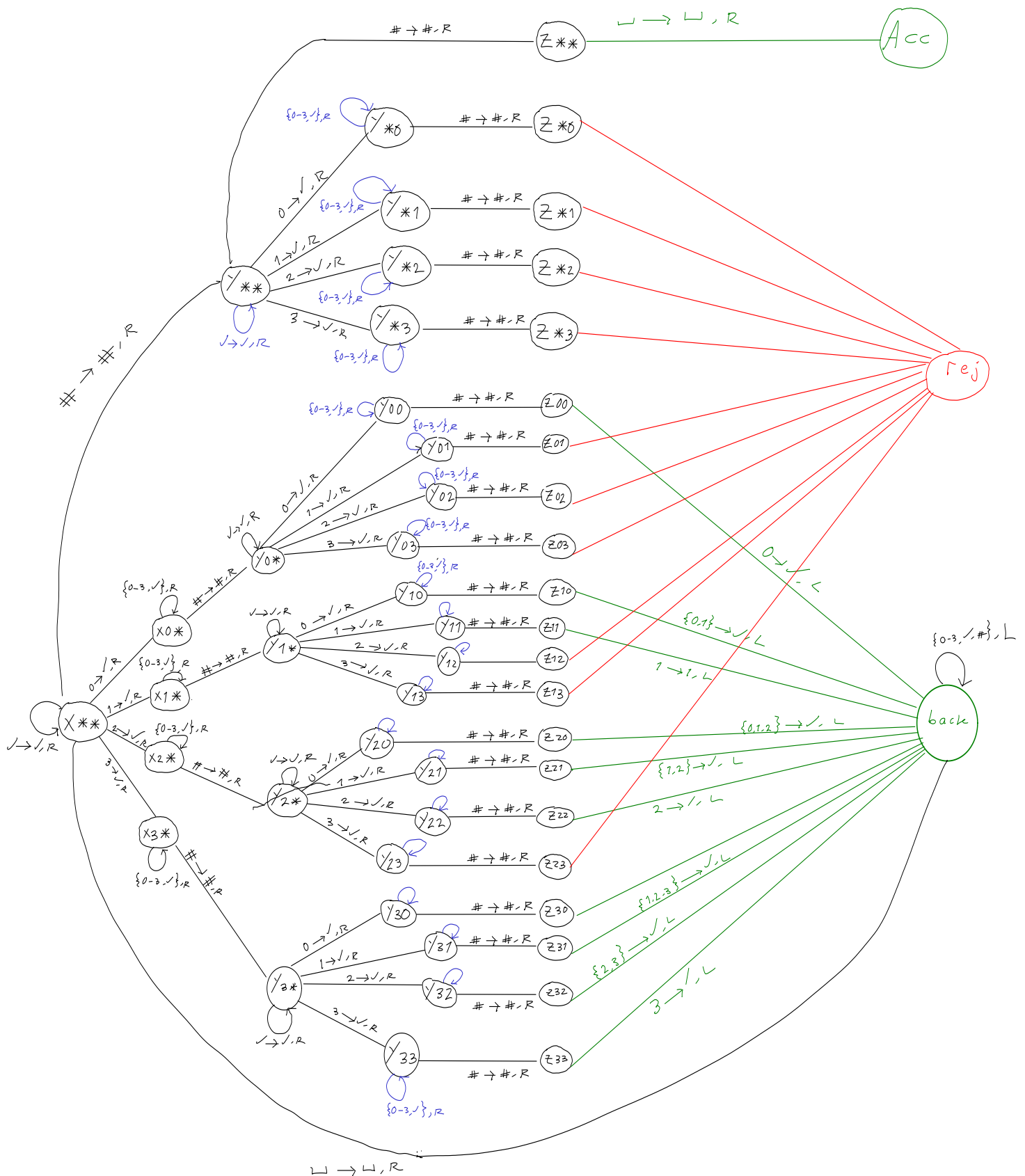
### דוגמה 1.15

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$\{x_1 \dots x_k \# y_1 \dots y_k \# z_1 \dots z_k \mid x_i, y_i, z_i \in \{0, \dots, 3\}, \forall i, x_i \geq z_i \geq y_i\}$$

**פתרון:**

$$L = \{X_1 X_2 \# Y_1 Y_2 \# Z_1 Z_2 \mid X_i, Y_i, Z_i \in \{0,1,2,3\} \forall i, X_1 \geq X_2, Y_1 \geq Y_2\}$$



תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון בסרט	מצב
	$R$	✓	$X\sigma^*$	$\sigma$	$X^{**}$
	$R$	✓	$X^{**}$	✓	$X^{**}$
	$R$		$X\sigma^*$	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	$X\sigma^*$
	$R$		$Y\tau^*$	#	$X\tau^*$
	$R$		$Y\tau\sigma$	$\sigma$	$Y\tau^*$
	$R$		$Y\tau^*$	✓	$Y\tau^*$
	$R$		$Y\tau\sigma$	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	$Y\tau\sigma$
	$R$		$Z\tau_1\tau_2$	#	$Y\tau_1\tau_2$
	$R$		$Z\tau_1\tau_2$	✓	$Z\tau_1\tau_2$
	$L$	✓	back	$\sigma$	$Z\tau_1\tau_2$
	$R$		acc	$\sqsubset$	$Z^{**}$
	$L$		back	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	back
	$R$		$X^{**}$	$\sqsubset$	back

## 1.4 חישוב פונקציות

### הגדרה 1.9 מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה $f$

תהי  $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$  ותהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$  מכונת טיורינג. אומרים כי  $M$  מחשבת את  $f$  אם:

- $\Sigma = \Sigma_1$  ו-  $\Sigma_2 \subset \Gamma$ .
- לכל  $w \in \Sigma_1^*$  מתקיים  $q_0 w \vdash \text{acc} f(w)$ .

### דוגמה 1.16 חיבור אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

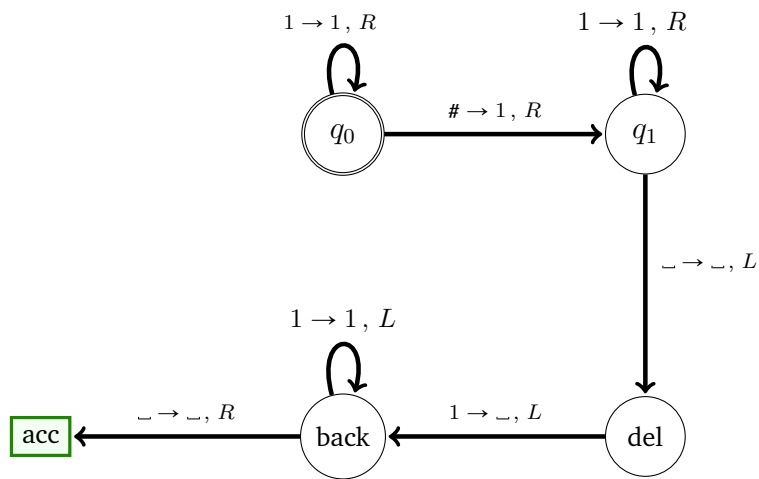
$$1^i \# 1^j$$

ומחזירה את פלט

$$1^{i+j}.$$

**פתרון:**





### דוגמה 1.17 כפל אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

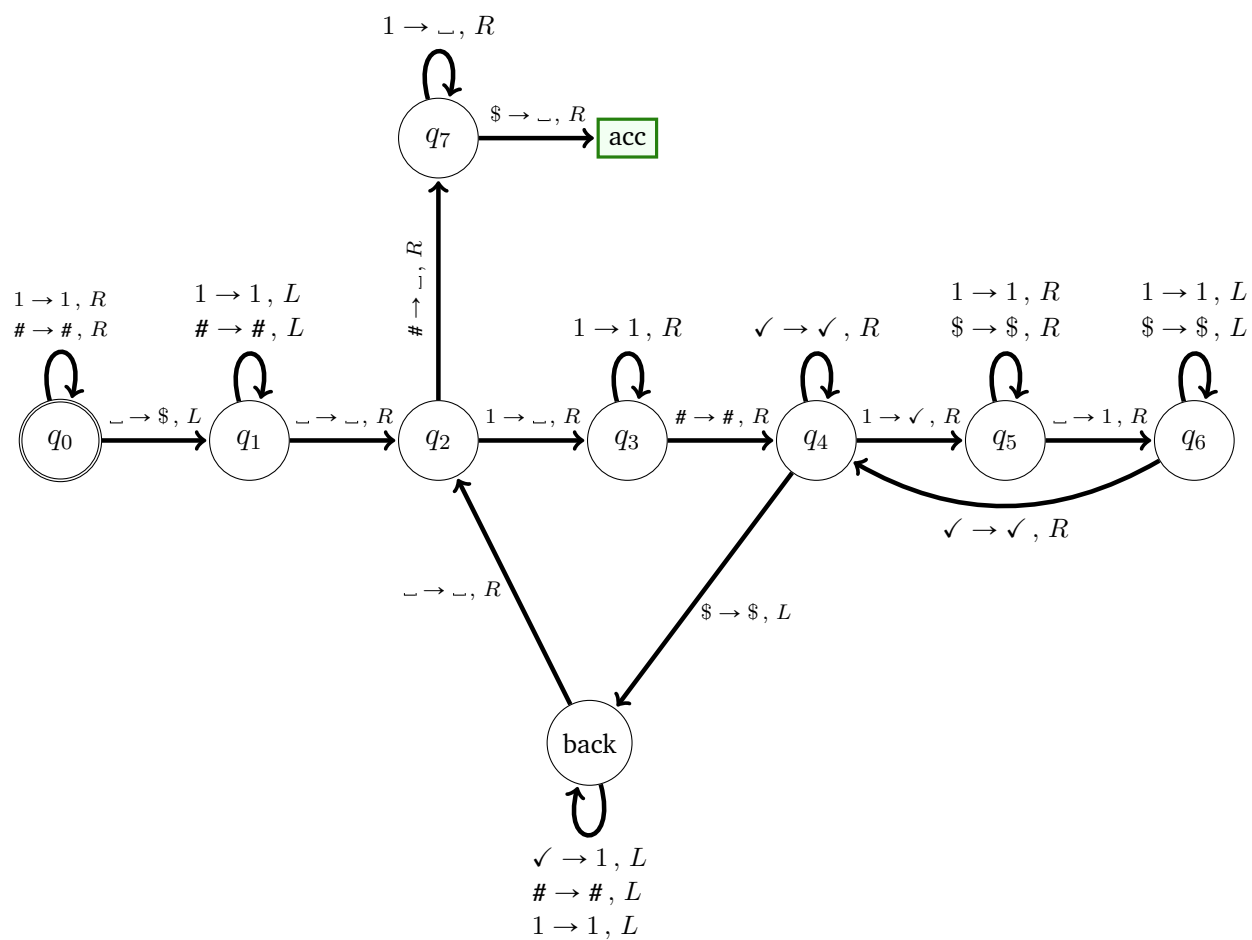
$$1^i \# 1^j$$

ומחזירה את פלט

$$1^{i \cdot j}.$$

### פתרון:

- לדוגמה, נניח שהקלט הוא 2 כפול 2. הקלט הוא 11#11.
- נרצה להבדיל בין הקלט לבין הפלט. לכן בתחילת הריצה, נתקדם ימינה עד סוף הקלט ונוסיף שם את התו \$.
- לאחר מכן נחזור לתחילת הקלט. על כל אות 1 במילה השמאלית נעתיק את המילה הימינית לאחר סימן ה-\$.
- לאחר מכן נשאיר רק את התווים שלאחר סימן ה-\$.
- כלומר, נמחק את כל מה שאינו פלט.



$\mu$	$q$	$\sigma$	$\nu$
$\_$	$q_0$	1	1#11 $\_$
$\_11\#11$	$q_1$	$\_$	$\_$
$\_11\#11$	$q_1$	\$	$\_$
$\_$	$q_1$	$\_$	11#11\$
$\_$	$q_2$	1	1#11\$
$\_ \_$	$q_3$	1	#11\$
$\_ \_1\#$	$q_4$	1	1\$
$\_ \_1\#\checkmark$	$q_5$	1	\$
$\_ \_1\#\checkmark 1\$$	$q_5$	$\_$	$\_$
$\_ \_1\#\checkmark 1\$1$	$q_6$	$\_$	$\_$
$\_ \_1\#$	$q_6$	$\checkmark$	1\$1 $\_$
$\_ \_1\#\checkmark$	$q_4$	1	\$1 $\_$
$\_ \_1\#\checkmark\checkmark$	$q_5$	\$	1 $\_$
$\_ \_1\#\checkmark\checkmark \$1$	$q_5$	$\_$	$\_$
$\_ \_1\#\checkmark\checkmark \$11$	$q_6$	$\_$	$\_$

1#✓	$q_6$	✓	\$11
1#✓✓	$q_4$	\$	11
1#✓	back	✓	\$11
	back		1#11\$11
	$q_2$	1	#11\$11
	$q_3$	#	11\$11
#	$q_4$	1	1\$11
#✓	$q_5$	1	\$11
#✓1\$11	$q_5$		
#✓1\$111	$q_6$		
#	$q_6$	✓	1\$111
#✓	$q_4$	1	\$111
#✓✓	$q_5$	\$	111
#✓✓\$111	$q_5$		
#✓✓\$1111	$q_6$		
#✓	$q_4$	✓	\$1111
#✓✓	$q_4$	\$	1111
#✓	back	✓\$	1111
	back		#11\$1111
	$q_2$	#	11\$1111
	$q_7$	1	1\$1111
	$q_7$	\$	1111
	acc	1	111

## שיעור 2

### מודלים חשובים שקולית

#### הגדרה 2.1 מודל חשובי

מודל חשובי הוא אוסף של מכונות טיורינג שעבורם מוגדרים המושגים של הכרעה וקבלה של שפות.

#### הגדרה 2.2 מודלים שקולים חשובית

היו  $A$  ו- $B$  מודלים חשוביים. אומרים כי  $A$  ו- $B$  שקולים אם לכל שפה  $L$  התנאים הבאים מתקיימים:

- (1) קיימת מ"ט במודל  $A$  שמכריעה את  $L$  אם"ם קיימת מ"ט במודל  $B$  שמכריעה את  $L$ .
- (2) קיימת מ"ט במודל  $A$  שמקבלת את  $L$  אם"ם קיימת מ"ט במודל  $B$  שמקבלת את  $L$ .

#### דוגמה 2.1

**נסמן ב- $T$  את מודל מכונת הטיורינג הבסיסי.**

במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לשני הכיוונים. בתחילת החישוב הראש נמצא בתחילת הקלט.

**נסמן ב- $O$  את מודל מכונת הטיורינג עם סרט ימינה בלבד.**

במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לכיוון אחד בלבד - ימינה. בתחילת החישוב, הקלט ממוקם בקצה השמאלי של הסרט והראש נמצא בתחילת הקלט. החישוב מתנהל כמו במכונה במודל  $T$ , למעט כאשר הראש נמצא במשבצת השמאלית ביותר בסרט וצריך לזוז ש מאלה - במקרה כזה הראש נשאר במקום ולא זז.

**הוכיחו כי המודל  $T$  והמודל  $O$  שקולים חשובית.**

#### פתרון:

יש להוכיח ש:

- לכל מ"ט במודל  $O$  קיימת מ"ט שקולה במודל  $T$ .
- לכל מ"ט במודל  $T$  קיימת מ"ט שקולה במודל  $O$ .

#### כיוון ראשון

נוכיח כי לכל מ"ט במודל  $O$  קיימת מ"ט שקולה במודל  $T$ . כלומר:

נתונה  $M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, acc^O, rej^O)$  במודל  $O$ .

נבנה,  $M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, acc^T, rej^T)$  שקולה במודל  $T$ .

נעבוד רק עם צד ימין של הסרט האינסופי של  $M^T$  ואז  $M^T$  תהיה שקולה ל- $M^O$ .

רכיבי המ"ט  $M^T$  זהים לאלו של המ"ט  $M^O$ , מלבד מהתכונה שהראש של  $M^O$  לא זז מעבר לקצה השמאלי של הקלט.

לכן כדי ש-  $M^T$  תהיה שקולה ל-  $M^O$  נוסיף מעברים לפונקצית המעברים של  $M^T$  כדי שהראש של  $M^T$  לא יז מעבר לקצה השמאולי של הקלט.

הרעיון הוא לסמן את המשבצת שמשמאל לתחילת הקלט עם סימן מיוחד \$, ואז להוסיף מעברים לפונקצית המעברים של  $M^T$  שמבטיחים שאם הראש נמצא למשבצת שמסומנת \$ אז הוא מיד חוזר ו-  $M^T$  חוזרת למצב ההתחתי של המ"ט  $M^O$ . זה מתבצע על ידי הוספת השורות הבאות לטבלת המעברים של  $M^T$ :

תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון	מצב
	$L$	$\Omega$	$q_\$$	$\sigma$	$q_0^T$
	$R$	$\$$	$q_0^O$	$\perp$	$q_\$$
$\forall q \in Q^O$	$R$	$\$$	$q$	$\$$	$q$

$$Q^T = Q^O \cup \{q_0^T, q_\$\}, \quad \Sigma^T = \Sigma^O, \quad \Gamma^T = \Gamma^O \cup \{\$\}, \quad \text{acc}^T = \text{acc}^O, \quad \text{rej}^T = \text{rej}^O.$$

### כיוון שני

נוכיח כי לכל מ"ט במודל  $T$  קיימת מ"ט שקולה במודל  $O$ . כלומר:

$$\text{נתונה } M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T) \text{ במודל } T.$$

$$\text{נבנה } M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O) \text{ שקולה במודל } O.$$

הרעיון הוא לסמן קו על הסרט במשבצת באמצע הקלט, ואז לקפל את הסרט בקו הזה. באופן הזה נקבל סרט עם קצה שמאולי ואינסופי ימינה. במשבצות של הסרט החדש המקופל יש שני תווים, אחד למעלה ( $U$ ) ואחד למטה ( $D$ ), מלבד מנקודת הקיפול שבו יש משבצת אחת שמסומנת \$.

באופן הזה אפשר לסמלץ את המכונה  $M^O$  במכונה  $M^T$  על ידי הוספת המעברים הבאים לטבלת המעברים של  $M^T$ . לכל  $\tau, \sigma, \pi \in \Gamma^T$ :

תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון	מצב
תזוזה שמאלה: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$	$L$	$\pi$ $\tau$	$p.D$	$\pi$ $\sigma$	$q.D$
	$R$	$\tau$ $\pi$	$p.U$	$\sigma$ $\pi$	$q.U$
תזוזה שמאלה: $(q, \_ ) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$	$L$	$\_$ $\tau$	$p.D$	$\_$	$q.D$
	$R$	$\tau$ $\_$	$p.U$	$\_$	$q.U$
תזוזה ימינה: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$	$R$	$\pi$ $\tau$	$p.D$	$\pi$ $\sigma$	$q.D$
	$L$	$\tau$ $\pi$	$p.U$	$\sigma$ $\pi$	$q.U$
תזוזה ימינה: $(q, \_ ) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$	$R$	$\_$ $\tau$	$p.D$	$\_$	$q.D$
	$L$	$\tau$ $\_$	$p.U$	$\_$	$q.U$
	$R$	$\curvearrowright$	$q.U$	$\$$	$q.D$
	$R$	$\curvearrowright$	$q.D$	$\$$	$q.U$
אתחול					
$\tau \in \Sigma \cup \{ \_ \}$ $\sigma \in \Sigma$	$R$	$\$$	$q.\tau$	$\tau$	$q_0^O$
	$R$	$\_$ $\sigma$	$q.\tau$	$\tau$	$q.\sigma$
	$L$	$\_$ $\_$	back	$\_$	$q.\_$
	$L$	$\curvearrowright$	back	$\_$ $\tau$	back
	$R$	$\curvearrowright$	$q_0^T.D$	$\$$	back
סיום					
			$acc^O$	הכל	$acc^T.D$
			$acc^O$	הכל	$acc^T.U$
			$rej^O$	הכל	$rej^T.D$
			$rej^O$	הכל	$rej^T.U$
כל השאר עובריסל-rej					

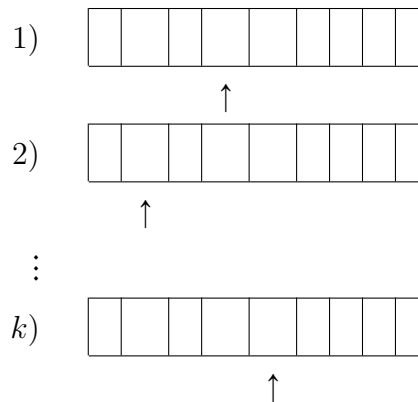
$$\Gamma^O \supseteq (\Gamma^T \times \Gamma^T) \cup \{\$ \} .$$

## שיעור 3

### מכונות טיורינג מרובות סרטים

#### 3.1 מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה היוריסטית

מכונת טיורינג מרובת סרטים (מטמ"ס) היא הכללה של מ"ט עם סרט יחיד. ההבדל הוא שלמטמ"ס ישנו מספר סופי של סרטים, נניח  $k > 1$  סרטים.



- לכל סרט יש ראש שלו.

- בתחילת העבודה הקלט  $w$  כתוב בתחילת הסרט הראשון וכל שאר הסרטים ריקים. הראשים בכל סרט מצביעים על התא הראשון בסרט, והמכונה נמצאת במצב התחלתי  $q_0$ .

- בכל צעד חישוב, לפי המצב הנוכחי ול- $k$  התווים שמתחת ל- $k$  הראשים, המכונה מחליטה לאיזה מצב לעבור, מה לכתוב מתחת לכל אחד מ- $k$  הראשים ולכן להזיז את הראש בכל אחד מ- $k$  סרטים.

- הראשים של הסרטים יכולים לזוז באופן בלתי-תלוי בהתאם לפונקצית המעברים של המטמ"ס.

#### 3.2 מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה פורמלית

##### הגדרה 3.1 מכונת טיורינג מרובת סרטים

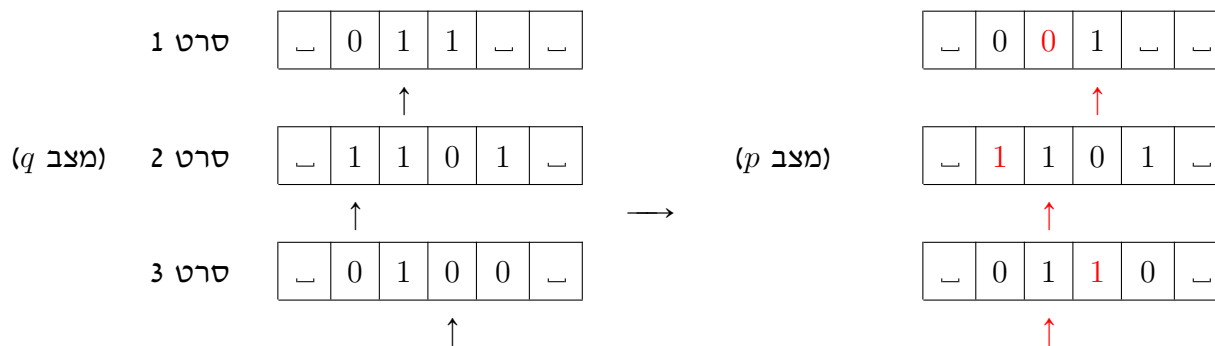
מכונת טיורינג מרובת סרטים היא שביעיה:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{acc}, q_{rej})$$

כאשר  $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{acc}, q_{rej}$  מוגדרים כמו מ"ט עם סרט יחיד (ראו הגדרה 1.2). ההבדל היחיד בין מ"ט עם סרט יחיד לבין מטמ"ס הוא הפונקצית המעברים. עבור מטמ"ס הפונקצית המעברים היא מצורה הבאה:

$$\delta_k : (Q \setminus \{q_{acc}, q_{rej}\}) \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$$

## 3.1 דוגמה



$$\delta_k \left( q, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left( p, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \\ L \end{pmatrix} \right).$$

## 3.3 קונפיגורציה של מטמ"ס

הכללה של קונפיגורציה של מטמ"ס עם סרט יחיד:

$$\begin{pmatrix} u_1 q & v_1 \\ u_2 q & v_2 \\ \vdots \\ u_k q & v_k \end{pmatrix}$$

## 3.2 דוגמה

בנו מטמ"ס שמכריעה את השפה:

$$L_{w^R} = \{w = \{a, b\}^* \mid w = w^R.\}$$

כלומר שפת הפלינדרומים.

## פתרון:

נבנה מטמ"ס עם שני סרטים:

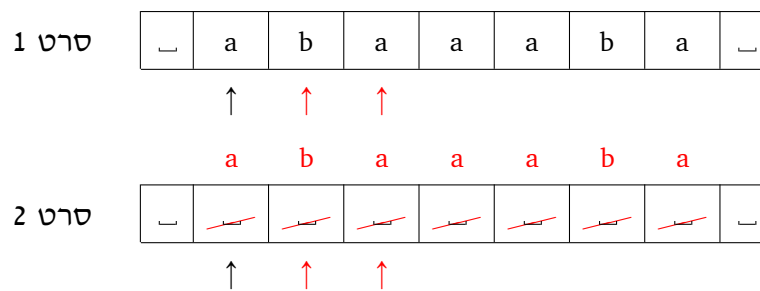
תאור המכונה:

נסמן  $M_2$  המ"ט עם 2 סרטים שמכריעה את השפה  $L_{w^R}$ .

$M_2 =$  על הקלט  $w$ :

(1) מעתיקה את  $w$  לסרט 2.





(2) מזיזה את הראש בסרט 1 לתו הראשון ב- $w$  ואת הראש בסרט 2 לתו האחרון ב- $w$ .

(3) משווה בין התווים שמתחת לראשים:

- אם התו שמתחת לראש בסרט 1 הוא  $\perp$  אז  $\text{acc} \leftarrow \perp$ .
- אם התווים שמתחת לראשים שונים אז  $\text{rej} \leftarrow \text{rej}$ .
- אחרת מזיזה את הראש בסרט 1 ימינה ואת הראש בסרט 2 שמאלה, וחוזרת לשלב (3).

הפונקציה המעברים של  $M_2$  היא:

$$\delta \left( q_0, \begin{pmatrix} a \\ \perp \end{pmatrix} \right) = \left( q_0, \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix} \right),$$

$$\delta \left( q_0, \begin{pmatrix} b \\ \perp \end{pmatrix} \right) = \left( q_0, \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix} \right),$$

$$\delta \left( q_0, \begin{pmatrix} \perp \\ \perp \end{pmatrix} \right) = \left( q_{\text{back}}, \begin{pmatrix} \perp \\ \perp \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ L \end{pmatrix} \right).$$

נשים לב כי הסיבוכיות זמן של המכונה עם שני סרטים,  $M_2$  היא  $O(|w|)$ , כאשר  $w$  האורך של המילה.

כעת נבנה מ"ט עם סרט יחיד שמכריעה את השפה  $L_{WR}$ .

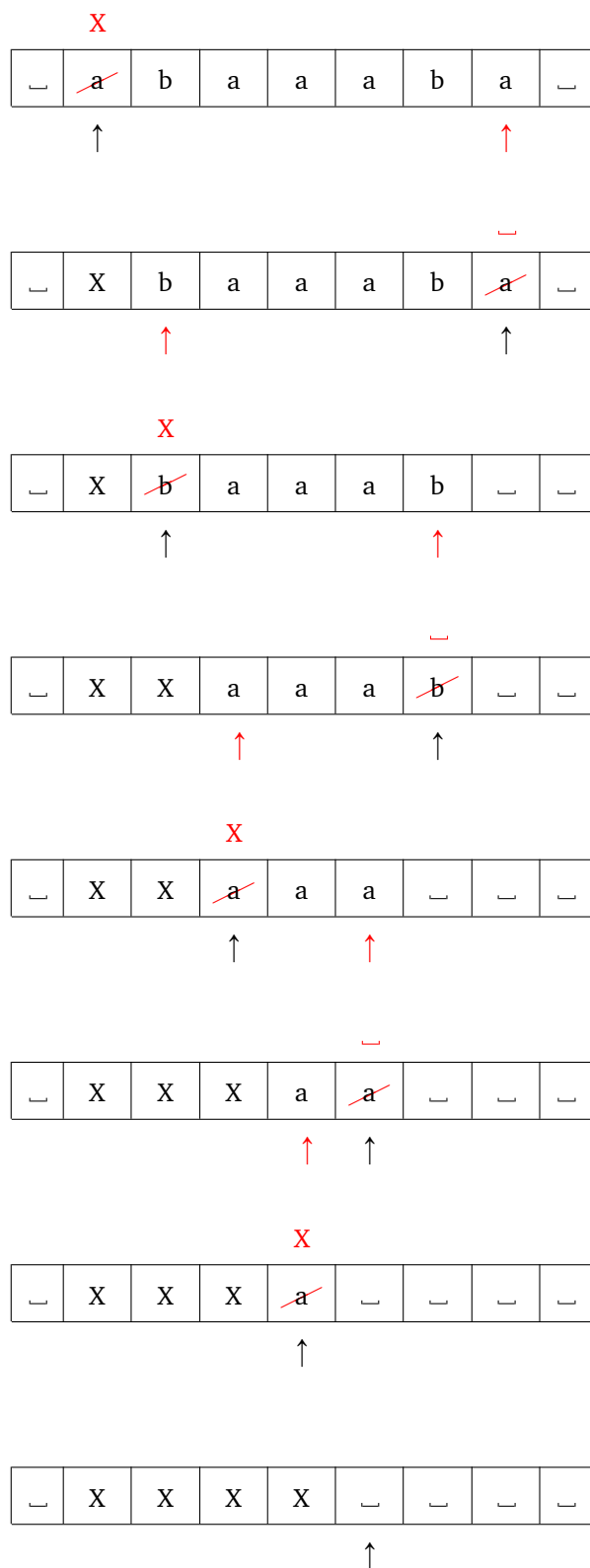
תאור המכונה:

נסמן  $M_1$  המכונה עם סרט יחיד שמכריעה את השפה  $L_{wR}$ .

$M_1 =$  על הקלט  $w$ :

- (1) אם התו שמתחת לראש הוא  $\perp$  אז  $\text{acc} \leftarrow M_1$ .
- (2) זוכרת את התו שמתחת לראש ומוחקת אותו ע"י  $X$ .
- (3) מזיזה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאל ל- $\perp$ .

- אם התו שמתחת לראש הוא  $X$  אז  $\text{acc} \leftarrow X$ .
- אם התו שונה מהתו שזכרנו אז  $\text{rej} \leftarrow \text{rej}$ .
- מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י  $\perp$ , מזיזה את הראש שמאלה עד התו הראשון מימין ל- $X$  וחוזרת לשלב (1).



### 3.4 שקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

מ"ט עם סרט יחיד היא מקרה פרטי של מטמ"ס.

## משפט 3.1 שקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

לכל מטמ"ס  $M$  קיימת מ"ט עם סרט יחיד  $M'$  השקולה ל- $M$ .

כלומר, לכל קלט  $w \in \Sigma^*$ :

- אם  $M$  מקבלת את  $w$   $\Leftrightarrow M'$  מקבלת את  $w$ .
- אם  $M$  דוחה את  $w$   $\Leftrightarrow M'$  דוחה את  $w$ .
- אם  $M$  לא עוצרת על  $w$   $\Leftrightarrow M'$  עוצרת על  $w$ .

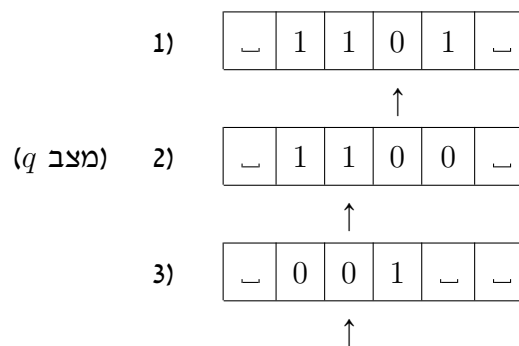
הוכחה:

בהינתן מטמ"ס  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{acc}, q_{rej})$  עם  $k$  סרטים, נבנה מ"ט עם סרט יחיד  $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q'_0, q'_{acc}, q'_{rej})$  השקולה ל- $M$  באופן הבא:

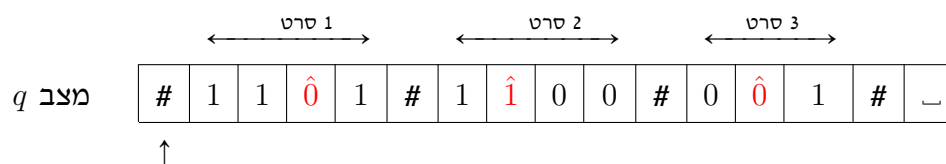
רעיון הבנייה:

בהינתן קלט  $w \in \Sigma^*$ ,  $M'$  תבצע "סימולציה" של ריצה  $M$  על  $w$ .

ב- $M$



ב- $M'$



•  $M'$  תשמור את התוכן של  $k$  הסרטים של  $M$  על הסרט, רק שהתוכן של סרט  $i$  יופיע בין  $\#_i$  ל- $\#_{i+1}$ .

•  $M'$  תשמור את המיקום של הראשים של  $M$  ע"י הכפלת הא"ב  $\Gamma$ .

כלומר, לכל אות  $\alpha \in \Gamma$ ,  $M'$  תשמור שתי אותיות  $\alpha$  ו- $\hat{\alpha}$  ב- $\Gamma$ , כך ש- $\hat{\alpha}$  תסמן את התו שמתחת לראש בכל סרט.

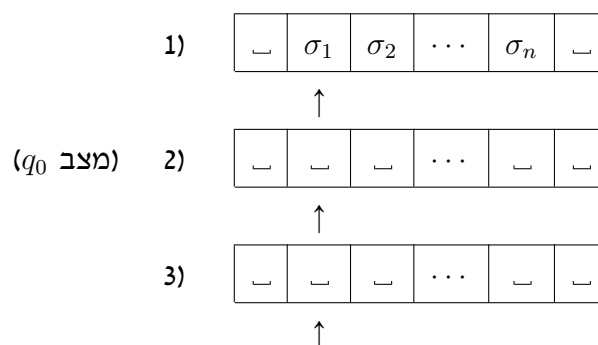
- בכל צעד חישוב,  $M'$  סורקת את הסרט שלה משמאל לימין כדי ללמוד מהם התווים שמתחת לראשים (התווים שמסומנים ב- $\hat{\alpha}$ ).
- $M'$  משתמשת בפונקצית המעברים  $\delta_k$  של  $M$  כדי לחשב את המעבר הבא.
- $M'$  סורקת את הסרט שלה משמאל לימין כדי לעדכן את הסרטים ואת המיקום הראשים בהם.

תאור הבנייה של  $M'$ :

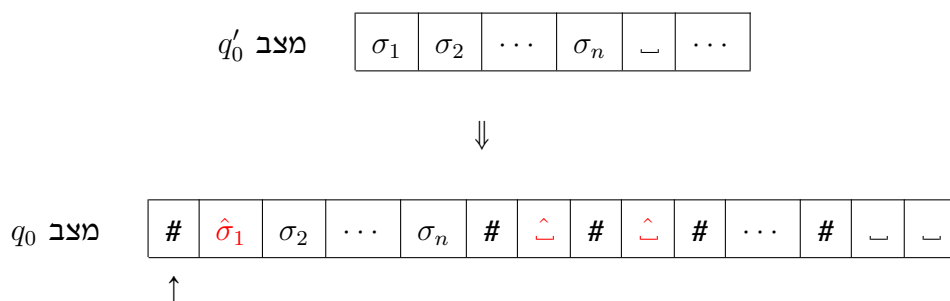
### (1) שלב האיתחול

בהינתן קלט  $w = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$ ,  $M'$  מאתחלת את הקונפיגורציה ההתחלתית של  $M$  על הסרט שלה.

ב-  $M$

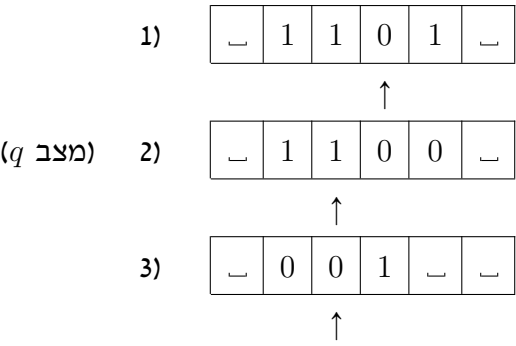


ב-  $M'$

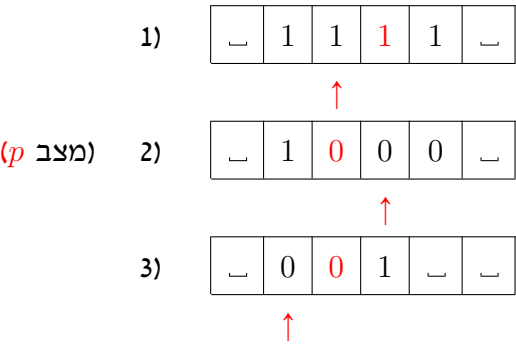


### (2) תאור צעד חישוב של $M$

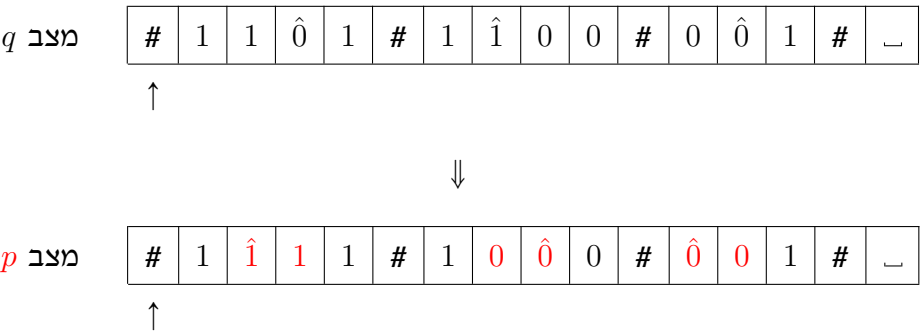
ב-  $M$



$$\delta_k \left( q, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left( p, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ R \\ L \end{pmatrix} \right)$$



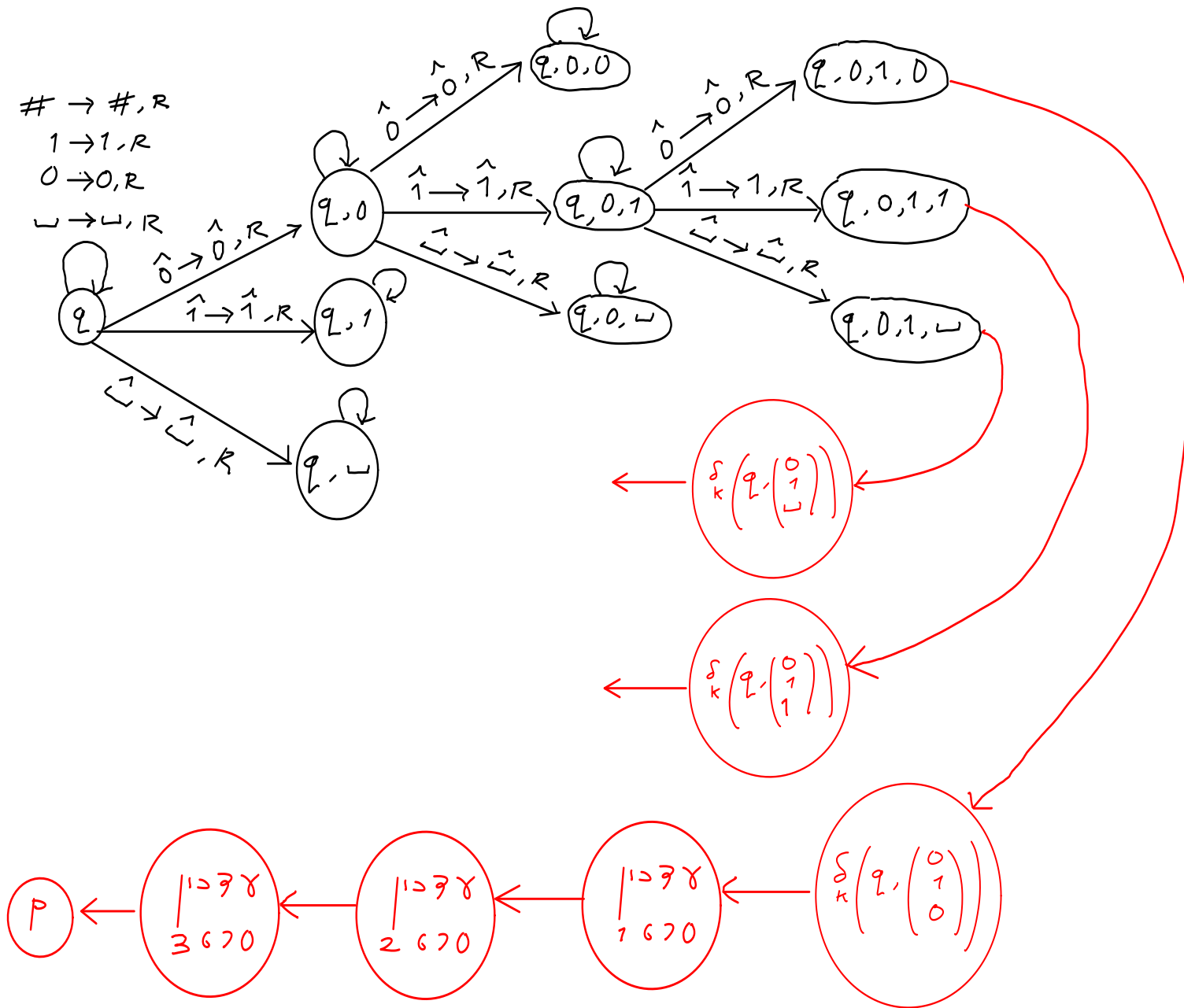
ב-  $M'$



- איסוף מידע
- $M'$  סורקת את הסרט שלה משמאל לימין ומזהה את התווים שמסומנים ב-  $\hat{\alpha}$ . מידע זה ניתן לשמור במצבים. לדוגמה:

$$q, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$





מצב  $p$

#	1	$\hat{1}$	1	1	#	1	0	$\hat{0}$	0	#	$\hat{0}$	0	1	#	—
		↑													

# • עדכון הסרטים

$M'$  סורקת את הסרט שלה פעם נוספת כדי לפעול על פי פונקצית המעברים, כלומר, לעדכן את התאים שמתחת לראשים ולעדכן את מיקום הראשים.

## שיעור 4

### מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

#### 4.1 הגדרה של מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

##### 4.1 מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית (מ"ט א"ד) היא שביעייה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$$

כאשר  $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{acc}, q_{rej}$  מוגדרים כמו במ"ט דטרמיניסטי.

$\Delta$  היא פונקצית המעברים

$$\Delta : (Q \setminus \{q_{acc}, q_{rej}\}) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}) .$$

$$\Delta(q, a) = \{(q_1, a, S) , (q_2, b, L) , \dots\} .$$

כלומר, לכל זוג  $q \in Q, \alpha \in \Gamma$  ייתכן מספר מעברים אפשריים, 0, 1 או יותר.

- קונפיגורציה של מ"ט א"ד זהה לקונפיגורציה של מ"ט דטרמיניסטית.
- לכל קונפיגורציה ייתכן מספר קונפיגורציות עוקבות.
- לכל מילה  $w \in \Sigma^*$  חתכן מספר ריצות שונות:

\* ריצות שמגיעות ל-  $q_{acc}$ .

\* ריצות שמגיעות ל-  $q_{rej}$ .

\* ריצות שלא עוצרות.

\* ריצות שנתקעות.

##### 4.2 הגדרה

מילה  $w \in \Sigma^*$  מתקבלת במ"ט א"ד  $M$  אם קיימת לפחות ריצה אחת שמגיעה ל-  $q_{acc}$ .

השפה של מ"ט א"ד  $M$  היא

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Gamma^* : q_0 w \vdash_* u q_{acc} v\}$$

כלומר,

$w \in L(M)$  אם קיימת ריצה אחת שבה  $M$  מקבלת את  $w$ .

$w \notin L(M)$  אם בכל ריצה של  $M$  על  $w$ ,  $M$  דוחה או לא עוצרת, או נתקעת.



**הגדרה 4.3 מ"ט א"ד המכריעה שפה  $L$** 

תהי  $M$  מ"ט א"ד.  
אומרים כי מ"ט א"ד  $M$  מכריעה שפה  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$ :

• אם  $w \in L$  אז  $M$  מקבלת את  $w$ .

• אם  $w \notin L$  אז  $M$  דוחה את  $w$ .

**הגדרה 4.4 מ"ט א"ד המקבלת שפה  $L$** 

תהי  $M$  מ"ט א"ד.  
אומרים כי מ"ט א"ד  $M$  מקבלת שפה  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$ :

• אם  $w \in L$  אז  $M$  מקבלת את  $w$ .

• אם  $w \notin L$  אז  $M$  דוחה את  $w$  או  $M$  לא עוצרת על  $w$ .

**דוגמה 4.1**

נתונה השפה

$$L = \{1^n \mid n \text{ אינו ראשוני}\}, \quad \Sigma = \{1\}.$$

בנו מ"ט המכריעה את השפה  $L$ .

**פתרון:**הרעיון

נבנה מ"ט א"ד  $N$  המכריעה את  $L$ .

$N$  תבחר באופן א"ד מספר  $1 < t < n$  ותבדוק האם  $t$  מחלק את  $n$ .

	$n$							
סרט 1	␣	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	...
	$t$							
סרט 2	␣	1	1	1	␣	...		

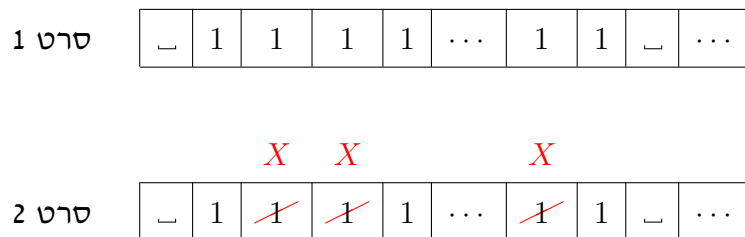
תאור הבניה

$N =$  על קלט  $1^n$

**(שלב 1)**

•  $N$  בוחרת באופן א"ד מספר  $1 < t < n$ .

- מעתיקה את  $w$  לסרט 2.
- עוברת על העותק משמאל לימין, ובכל תא מחליטה באופן א"ד האם להשאיר את ה-1 או למחוק אותו ע"י  $X$  (לדאוג שהמספר שנבחר הוא לא 1 ולא  $n$ ).
- בסוף המעבר המספר  $t$  שנבחר הוא כמות ה-1-ים שלא נמחקו.



שלב 2)  $N$  בודקת האם  $t$  שנבחר מחלק את  $n$ .

- אם כן  $N \Leftarrow$  מקבלת.
- אם לא  $N \Leftarrow$  דוחה.

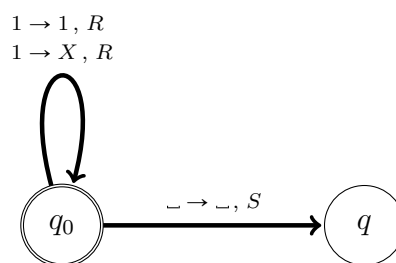
## 4.2 עץ החישוב של מ"ט א"ד

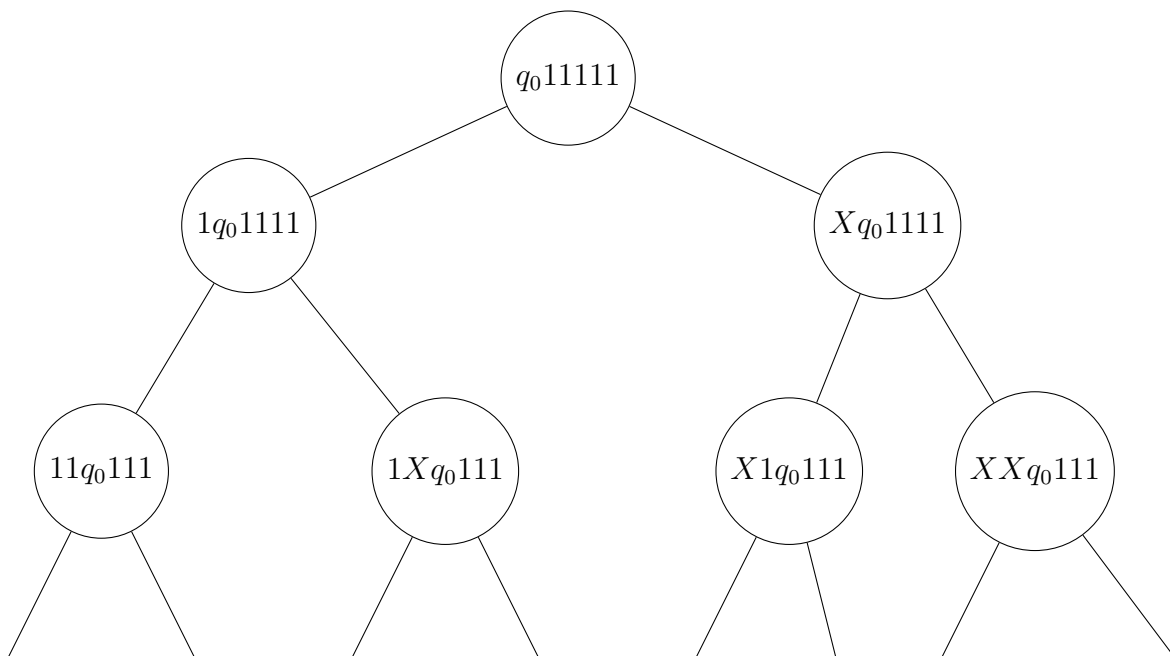
### הגדרה 4.5 עץ החישוב של מ"ט א"ד

בהינתן מ"ט א"ד  $M$  ומילה  $w \in \Sigma^*$ , עץ החישוב של  $M$  ו- $w$  הוא עץ מורש שבו:

- (1) כל קדקוד בעץ מתאר קונפיגורציה בחישוב של  $M$  על  $w$ .
- (2) שורש העץ מתאר את הקונפיגורציה ההתחלתית  $q_0 w$ .
- (3) לכל קדקוד  $v$  בעץ הבנים של  $v$  הם כל הקדקודים הנובעים מהקונפיגורציה המתוארת ע"י  $v$ .

### דוגמה 4.2





### 4.3 שקילות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטית

#### משפט 4.1 שקילות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטית ב- $RE$

לכל מ"ט א"ד  $N$  קיימת מ"ט דטרמיניסטית  $D$  כך ש-

$$L(N) = L(D) .$$

כלומר לכל  $w \in \Sigma^*$ :

- אם  $N$  מקבלת את  $w \Leftarrow D$  תקבל את  $w$ .
- אם  $N$  לא מקבלת את  $w \Leftarrow D$  לא תקבל את  $w$ .

**הוכחה:** בהינתן מ"ט א"ד  $N$  נבנה מ"ט דטרמיניסטית  $D$  ונוכיח כי

$$L(N) = L(D) .$$

רעיון ההוכחה

בהינתן קלט  $w \in \Sigma^*$ ,  $D$  תבצע ריצה של כל החישובים האפשריים של  $N$  על  $w$ , ואם אחד החישובים מסתיים ב-  $q_{acc}$  אזי  $D$  תעצור ותקבל.

מכיוון שייטכנו חישובים אינסופיים, לא נוכל לסרוק את עץ החישוב לעומק. במקום זה נסרוק את העץ לרוחב. כלומר, נבדוק את כל החישובים באורך 1, ואחרי זה נבדוק את כל החישובים באורך 2, וכן הלאה. אם אחד החישובים הסתיים ב-  $q_{acc}$ , אזי  $D$  תעצור ותקבל.

תאור הבניה

מכיוון שלכל  $q \in Q$  ולכל  $\alpha \in \Gamma$ :

$$\Delta(q, \alpha) \subseteq Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}.$$

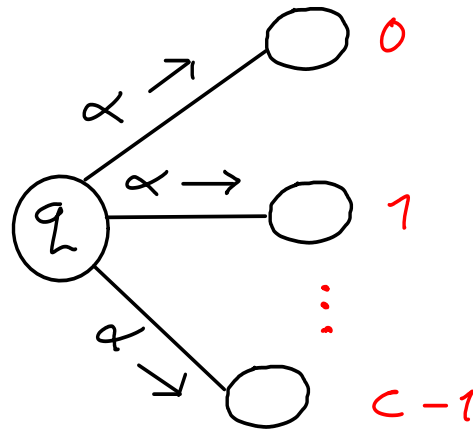
אזי

$$|\Delta(q, \alpha)| \leq |Q| \cdot |\Gamma| \cdot |\{L, R, S\}| = 3|Q| \cdot |\Gamma|.$$

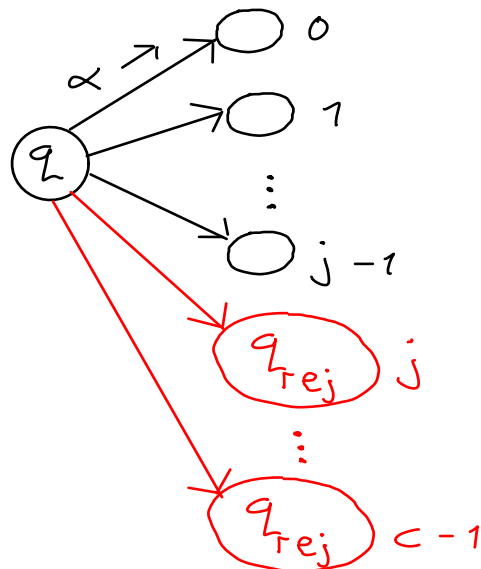
נסמן:

$$C = 3|Q| \cdot |\Gamma|.$$

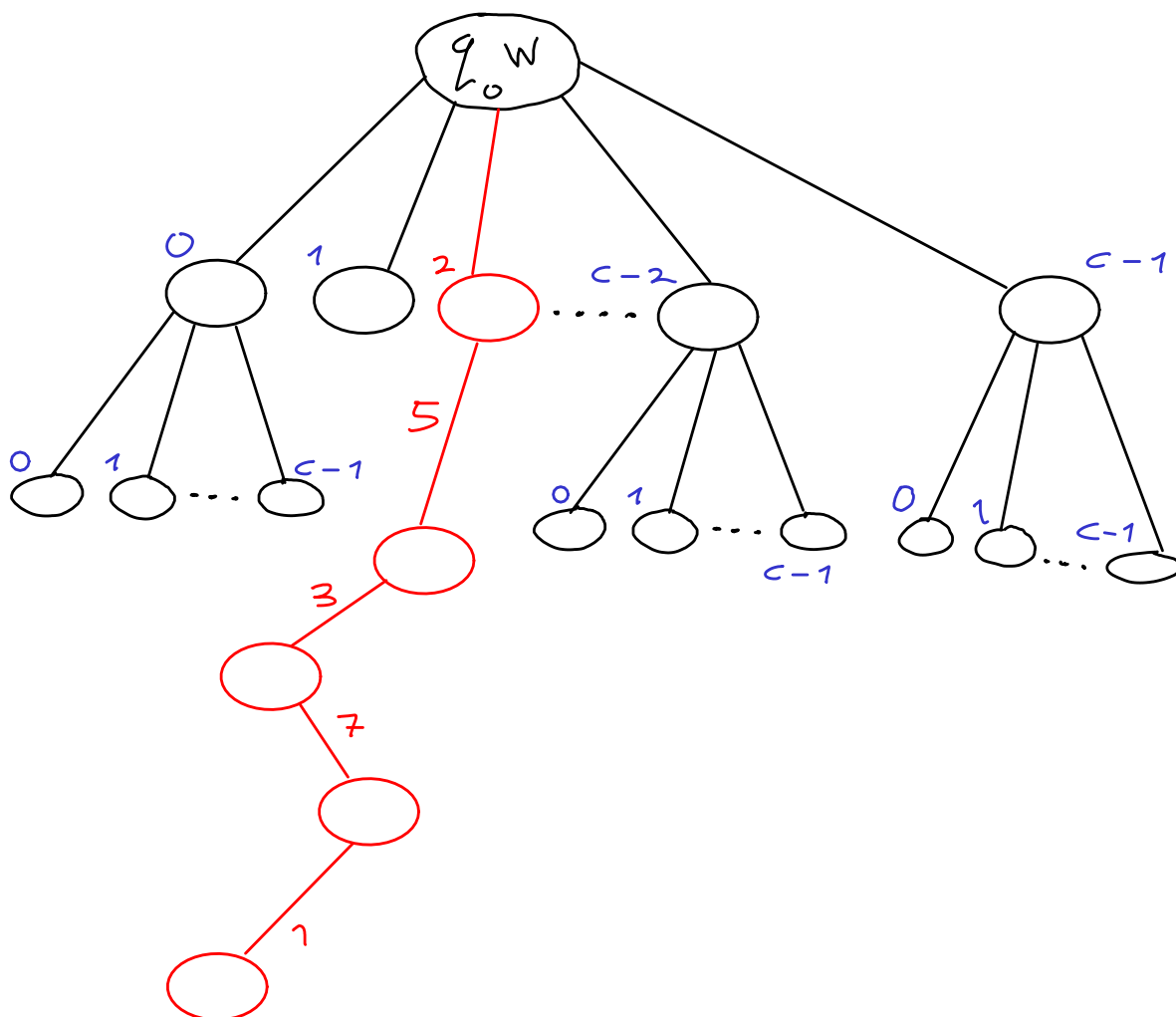
- לכל מצב  $q \in Q$  ולכל אות  $\alpha \in \Gamma$  נמספר את המעברים ב-  $\Delta(q, \alpha)$  שרירותית  $\{0, 1, 2, \dots, C-1\}$ .



- אם  $|\Delta(q, \alpha)| = j < C$ , אזי לכל  $j \leq k \leq C-1$  נקבע  $k = (q_{rej}, \alpha, S)$ .



- נשים לב כי שינוי זה לא משנה את השפה של  $N$ .



קידום לקסיקוגרפי:

0	00	10	...	$(C-1)0$	000
1	01	11	...	$(C-1)1$	001
2	02	12	...	$(C-1)2$	002
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
$C-1$	$0(C-1)$	$1(C-1)$	...	$(C-1)(C-1)$	$00(C-1)$

הבניה של  $D$

$D$  מכילה 3 סרטים:

	$n$								
סרט 1	$\_$	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	...
	$t$								
סרט 2	$\_$	1	1	1	$\_$	...			
סרט 3	$\_$	1	1	1	$\_$	...			

$D = "$  על קלט  $w$ :

(1) מאתחלת את המחרוזת בסרט 3 ל-0.

(2) מעתיקה את  $w$  לסרט 2.

(3) מריצה את  $N$  על  $w$  לפי המחרוזת בסרט 3.

• אם  $N$  קיבלה את  $w \Leftarrow D$  עוצרת ומקבלת.

• אחרת,  $D$  מוחקת את סרט 2, מקדמת את המחרוזת בסרט 3 לקסיקוגרפית וחוזרת לשלב (2).  
“



# שיעור 5

## תכונות סגירות של $R$ ו- $RE$

### 5.1 הגדרה של השפות $R$ ו- $RE$

#### הגדרה 5.1 $R$

אוסף השפות הכריעות מסומן  $R$  ומוגדר

$$R = \{L \subseteq \Sigma^* : L \text{ מכריעה את } L\}.$$

#### הגדרה 5.2 $RE$

אוסף השפות הקבילות מסומן  $R$  ומוגדר

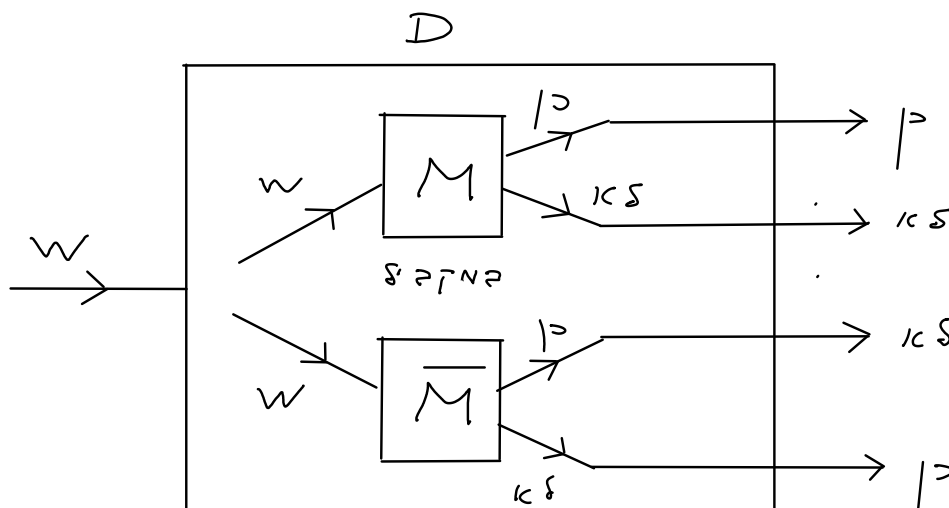
$$RE = \{L \subseteq \Sigma^* : L \text{ מקבלת את } L\}.$$

#### למה 5.1

אם  $L \in RE$  וגם  $\bar{L} \in RE$  אזי  $L \in R$ .

**הוכחה:** תהי  $M$  מ"ט המקבלת את  $L$  ותהי  $\bar{M}$  מ"ט המקבלת את  $\bar{L}$ .

נבנה מ"ט  $D$  המכריעה את  $L$ .



$D = \text{על קלט } w$

(1)  $D$  מעתיקה את  $w$  לסרט נוסף.

(2) מריצה במקביל את  $M$  על  $w$  ואת  $\bar{M}$  על העותק של  $w$ .

• אם  $M$  מקבלת  $D \Leftarrow$  מקבלת.

• אם  $\bar{M}$  מקבלת  $D \Leftarrow$  דוחה.

• אם  $M$  דוחה  $D \Leftarrow$  דוחה.

• אם  $\bar{M}$  דוחה  $D \Leftarrow$  מקבלת.

נוכיח כי  $D$  מכריעה את  $L$ .

אם  $w \in L$

$w \in L(M) \Leftarrow$

$\Leftarrow (M \text{ מקבלת את } w) \text{ או } (\bar{M} \text{ דוחה את } w)$

$\Leftarrow D \text{ עוצרת ומקבלת את } w$ .

אם  $w \notin L$

$w \in \bar{L} \Leftarrow$

$\Leftarrow w \in L(\bar{M})$

$\Leftarrow (\bar{M} \text{ מקבלת את } w) \text{ או } (M \text{ דוחה את } w)$

$\Leftarrow D \text{ עוצרת ודוחה את } w$ .



### משפט 5.1 סגירות של השפות הכריעות

השפות הכריעות  $R$  סגורות תחת:

(1) איחוד

(2) חיתוך

(3) משלים

(4) שרשור

(5) סגור קליין

### משפט 5.2 סגירות של השפות הקבילות

השפות הכריעות  $R$  סגורות תחת:

(1) איחוד

(2) חיתוך

(3) שרשור

(4) סגור קליין

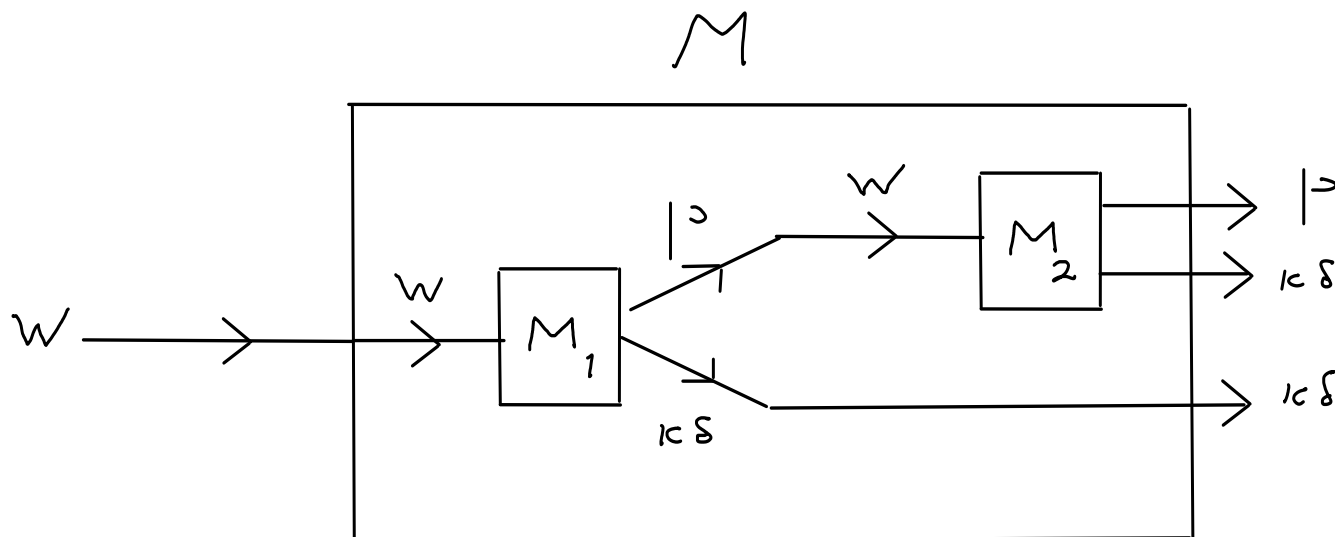


## (1) חיתוך:

(א) סגורה תחת חיתוך

נוכיח כי לכל שתי שפות  $L_1, L_2 \in R$  מתקיים  $L_1 \cap L_2 \in R$ .

תהי  $M_1$  ו-  $M_2$  מ"ט המכריעות את  $L_1$  ו-  $L_2$  בהתאמה. נבנה מ"ט  $M$  המכריעה את  $L_1 \cap L_2$ .

תאור הבנייה

$M =$  על קלט  $w$ :

(1) מעתיקה את  $w$  לסרט נוסף.

(2) מריצה את  $M_1$  על  $w$ .

• אם  $M_1$  דוחה  $M \Leftarrow$  דוחה.

• אחרת  $M$  מריצה את  $M_2$  על העותק של  $w$  ועונה כמוה.

נכונות:

נוכיח כי  $M$  מכריעה את  $L_1 \cap L_2$ .

אם  $w \in L_1 \cap L_2$

$w \in L_1$  וגם  $w \in L_2 \Leftarrow$

$M_1$  מקבלת את  $w$  וגם  $M_2$  מקבלת את  $w \Leftarrow$

$M$  מקבלת את  $w \Leftarrow$

אם  $w \notin L_1 \cap L_2$

$w \notin L_1$  או  $w \notin L_2 \Leftarrow$

$M_1$  דוחה את  $w$  או  $M_2$  דוחה את  $w \Leftarrow$

$M$  דוחה את  $w \Leftarrow$

RE סגורה תחת חיתוך (ב)

נוכיח כי לכל שתי שפות  $L_1, L_2 \in RE$  מתקיים  $L_1 \cap L_2 \in RE$ .

תהיינה  $M_1$  ו-  $M_2$  שתי מכונות טיורינג המקבלות את  $L_1$  ו-  $L_2$  בהתאמה.

נבנה מ"ט  $M$  המקבלת את  $L_1 \cap L_2$  באותו אופן כמו (א).

(2) איחוד:

R סגורה תחת איחוד (א)

נוכיח כי לדל שתי שפות  $L_1, L_2 \in R$  מתקיים  $L_1 \cup L_2 \in R$ .

תהיינה  $M_1$  מ"ט המכריעה את  $L_1$  ו-  $M_2$  מ"ט המכריעה את  $L_2$ .

נבנה מ"ט  $M$  המכריעה את  $L_1 \cup L_2$ .

תאור הבנייה

$M = \text{על קלט } w$ :

(1) מעתיקה את  $w$  לסרט נוסף.

(2)  $M$  מריצה את  $M_1$  על  $w$ .

• אם  $M_1$  מקבלת  $\Leftarrow M$  מקבלת.

• אחרת,  $M$  מריצה את  $M_2$  על העותק של  $w$  ועונה כמוה.

RE סגורה תחת איחוד (ב)

נוכיח כי לכל שתי שפות  $L_1, L_2 \in RE$  מתקיים  $L_1 \cup L_2 \in RE$ .

תהיינה  $M_1$  מ"ט המקבלת את  $L_1$  ו-  $M_2$  מ"ט המקבלת את  $L_2$ .

נבנה מ"ט א"ד  $M$  המקבלת את  $L_1 \cup L_2$ .

תאור הבנייה

$M = \text{על קלט } w$ :

(1)  $M$  בוחרת באופן א"ד  $i \in \{1, 2\}$ .

(2)  $M$  מריצה את  $M_i$  על  $w$  ועונה כמוה.

(3) שרשור:

R סגורה תחת שרשור (א)

נוכיח כי לכל שתי שפות  $L_1, L_2 \in R$  מתקיים  $L_1 \cdot L_2 \in R$  כאשר

$$L_1 \cdot L_2 = \{w = w_1w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}.$$

תהיינה  $M_1$  מ"ט המכריעה את  $L_1$  ו-  $M_2$  מ"ט המכריעה את  $L_2$ .

נבנה מ"ט א"ד  $M$  המכריעה את  $L_1 \cdot L_2$ .

תאור הבנייה

$M = \text{על קלט } w$ :

(1)  $M$  בוחרת באופן א"ד חלוקה של  $w$  ל-  $w = w_1 w_2$ .

(2)  $M$  מריצה את  $M_1$  על  $w_1$ .

• אם  $M_1$  דוחה  $\Leftarrow M$  דוחה.

• אחרת,  $M$  מריצה את  $M_2$  על  $w_2$  ועונה כמוה.

(ב)  $RE$  סגורה תחת שרשור

$RE$  סגורה תחת שרשור באותו אופן כמו ב- (א)

(4) \* קליני

(א)  $R$  סגורה תחת \* קליני

נוכיח כי לכל שפה  $L$ :

$$L \in R \Rightarrow L^* R$$

כאשר

$$L^* = \{w = w_1 w_2 \cdots w_k \mid \forall 1 \leq i \leq k, w_i \in L\}.$$

תהי  $M$  מ"ט המכריעה את  $L$ .

נבנה מ"ט  $M^*$  א"ד המכריעה את  $L^*$ .

תאור הבנייה

$$M^* = \text{על קלט } w:$$

(1) אם  $w = \varepsilon$  אז  $M^*$  מקבלת.

(2) אחרת  $M^*$  בוחרת באופן א"ד חלוקה של  $w$  ל-  $w = w_1 \cdots w_k$ .

(3) לכל  $1 \leq i \leq k$ :

$M^*$  מריצה את  $M$  על  $w_i$ .

• אם  $M$  דוחה את  $w_i$  אז  $M^*$  דוחה.

• אחרת חוזרים לשלב (3).

(4) אם  $M$  קיבלה את כל המחרוזות  $\{w_i\}$  אזי  $M^*$  מקבלת.

(ב)  $RE$  סגורה תחת \* קליני

(5) משלים

(א)  $R$  סגורה תחת המשלים

נוכיח כי

$$L \in R \Rightarrow \bar{L} \in R,$$

כאשר

$$\bar{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}.$$

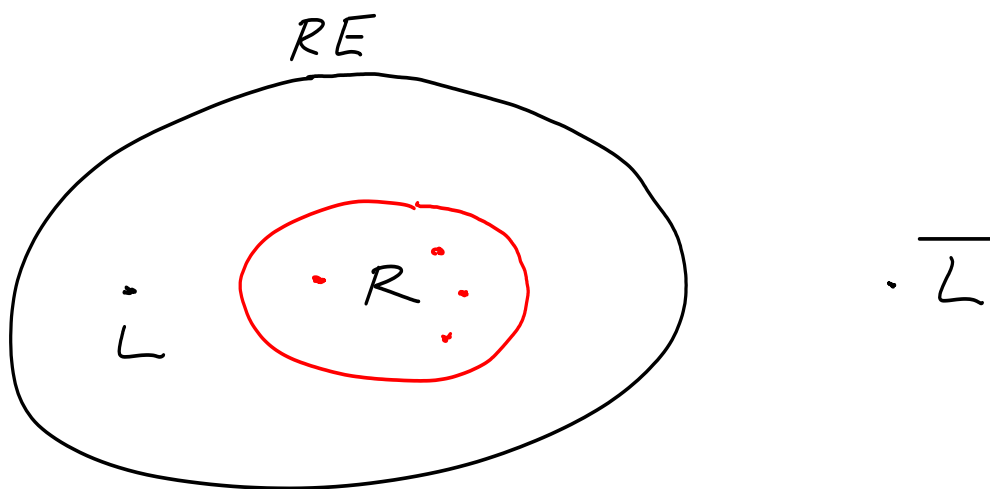
תהי  $M$  מ"ט המכריעה את  $L$ .

נבנה מ"ט  $\bar{M}$  המכריעה את  $\bar{L}$ .

$$\bar{M} = \text{על קלט } w:$$

(1)  $\bar{M}$  מריצה את  $M$  על  $w$ .• אם  $M$  מקבלת  $\bar{M} \Leftarrow$  דוחה.• אם  $M$  דוחה  $\bar{M} \Leftarrow$  מקבלת.(ב)  $RE$  אינה סגורה תחת המשלים**משפט 5.3  $RE$  אינה סגורה תחת המשלים**

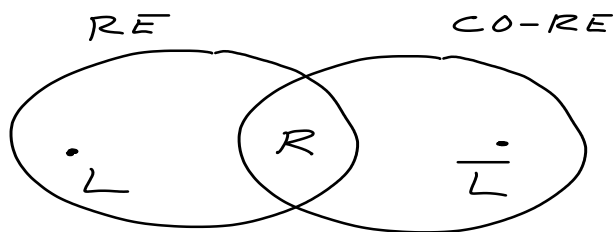
$$L \in RE \setminus R \Rightarrow \bar{L} \notin RE.$$



הוכחה:

נניח כי  $L \in RE \setminus R$  ונניח בשלילה כי  $\bar{L} \in RE$ .אזי לפי טענת עזר (למה 5.1),  $L \in R$  וזו סתירה.**הגדרה 5.3  $CoRE$** 

$$CoRE = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \bar{L} \in RE\}.$$

אבחנה

לפי למה 5.1:

$$RE \cap CoRE = R.$$

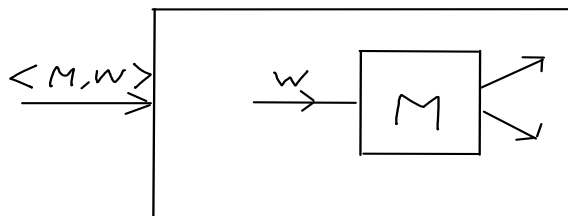
## 5.2 קידוד של מ"ט דטרמיניסטית

### הגדרה 5.4 קידוד של מ"ט

בהינתן קבוצה  $O$  של עצמים מופשטים (לשמל מכונת טיורינג, תוכנית מחשב, גרף). הקידוד של  $O$ , מסומן  $\langle O \rangle$ , הוא מיפוי של  $O$  אל מחרוזת מעל אלפבית סופי שיש בו לפחות שני סימנים.

במידה ויש רב עצמים  $O_1, \dots, O_k$  נסמן את הקידוד שלהם  $\langle O_1, O_2, \dots, O_k \rangle$ .

## 5.3 מ"ט אוניברסלית $U$



מ"ט אוניברסלית  $U$  מקבלת כקלט זוג, קידוד של מ"ט  $\langle M \rangle$  וקידוד של מילה  $\langle w \rangle$ , ומבצעת סימוציה של ריצה של  $M$  על  $w$  ועונה בהתאם.

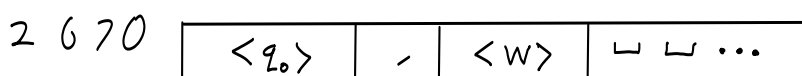
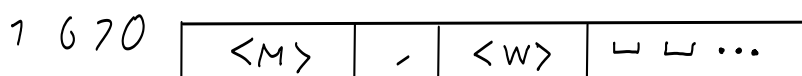
תאור הפעולה של  $U$

$U = \text{על קלט } x$ :

(1) בודקת האם  $x$  הוא קידוד של מ"ט  $\langle M \rangle$  וקידוד של מילה  $\langle w \rangle$ .

• אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

(2) מבצעת סימולציה של  $M$  על  $w$ :



- רושמת את הקונפיגורציה ההתחלתית  $q_0 w$  על סרט 2.
- מחשבת את הקונפיגורציה הבאה בעזרת טבלת המעברים.
- בסוף כל מעבר בין שתי קונפיגורציות,  $U$  בודקת האם המצב הנוכחי הוא  $q_{acc}$ .
- אם כן  $U$  עוצרת ומקבלת.

- \* אחרת  $U$  בודקת האם המצב הוא  $q_{rej}$ .
- \* אם כן  $U$  עוצרת ודוחה.
- \* אחרת  $U$  ממשיכה לקונפיגורציה הבאה.

מהי השפה של  $U$ ?

לכל  $x$ :

(1) אם  $U \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$  דוחה את  $x$ .

(2) אם  $x = \langle M, w \rangle$

- אם  $M$  מקבלת  $w \Leftarrow U$  מקבלת את  $x$ .
- אם  $M$  דוחה את  $w \Leftarrow U$  דוחה את  $x$ .
- אם  $M$  לא עוצרת על  $w \Leftarrow U$  לא עוצרת על  $x$ .

$$L(U) = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} .$$

### הגדרה 5.5 $L_{acc}$

$$L_{acc} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} \in RE \setminus R$$

### הגדרה 5.6 $L_{halt}$

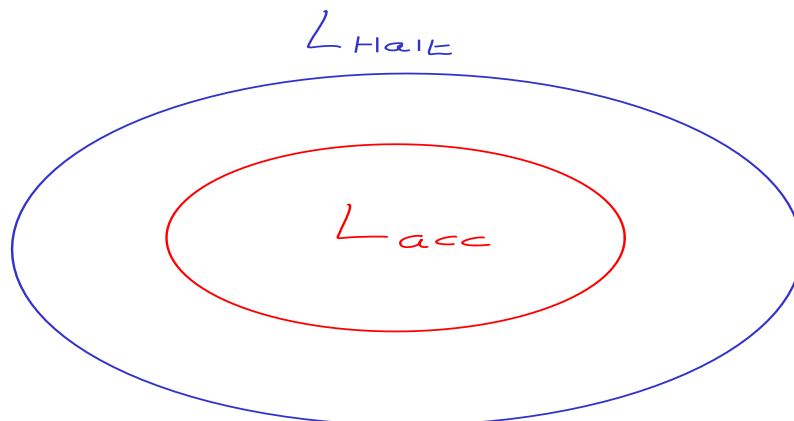
$$L_{halt} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ עוצרת על } w \} \in RE \setminus R$$

### הגדרה 5.7 $L_d$

$$L_d = \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \} \notin RE$$

אבחנה:

$$L_{acc} \subseteq L_{halt} .$$



## משפט 5.4

$$L_{\text{acc}} \in RE.$$

■

הוכחה: מכיוון ש- $L(U) = L_{\text{acc}}$ ,  $U$  מקבלת את  $L_{\text{acc}}$  ולכן  $L_{\text{acc}} \in RE$ .

## משפט 5.5

$$L_{\text{halt}} \in RE.$$

הוכחה: נבנה מ"ט  $U'$  שהיא למעשה  $U$  פרט למקום שבו  $U$  עצרה ודחתה,  $U'$  תעצור ותקבל.

נוכיח כי  $U'$  מקבלת את  $L_{\text{halt}}$ :

אם  $x \in L_{\text{halt}}$

$x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$   $M$  עוצרת על  $w$

$U'$  עוצרת ומקבלת את  $x$ .

אם  $x \notin L_{\text{halt}}$  שני מקרים:

•  $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow U'$  דוחה את  $x$ .

•  $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow M$  לא עוצרת על  $w \Leftarrow U'$  לא עוצרת על  $x$ .

■

## שיעור 6

### אי-כריעות

#### 6.1 השפות $L_d, L_{halt}, L_{acc}$ לא כריעות

##### הגדרה 6.1 $L_{acc}$

$$L_{acc} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} \in RE \setminus R$$

##### הגדרה 6.2 $L_{halt}$

$$L_{halt} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ עוצרת על } w \} \in RE \setminus R$$

##### הגדרה 6.3 $L_d$

$$L_d = \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \} \notin RE$$

##### משפט 6.1 $L_{acc} \in RE$

$$L_{acc} \in RE.$$

**הוכחה:** מכיוון ש- $L(U) = L_{acc}$ , כאשר  $U$  המכונת טיורינג האוניברסלית אשר מקבלת את  $L_{acc}$ , לכן  $L_{acc} \in RE$ . ■

##### משפט 6.2 $L_{halt} \in RE$

$$L_{halt} \in RE.$$

**הוכחה:** נבנה מ"ט  $U'$  שהיא למעשה  $U$  פרט למקום שבו  $U$  עצרה ודחתה,  $U'$  תעצור ותקבל.

נוכיח כי  $U'$  מקבלת את  $L_{halt}$ :

אם  $x \in L_{halt}$

$\Leftarrow x = \langle M, w \rangle$  ו- $M$  עוצרת על  $w$

$\Leftarrow U'$  עוצרת ומקבלת את  $x$ .



אם  $x \notin L_{\text{halt}} \Leftarrow$  שני מקרים:

•  $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow U'$  דוחה את  $x$ .

•  $x = \langle M, w \rangle$  ו- $M$  לא עוצרת על  $w \Leftarrow U'$  לא עוצרת על  $x$ .

■

### משפט 6.3 $L_d \notin RE$

$$L_d \notin RE.$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי  $L_d \in RE$ .

$\Leftarrow \exists$  מ"ט  $M_d$  המקבלת את  $L_d$ .

$\Leftarrow L(M_d) = L_d$ .

נבדוק ריצה של  $M_d$  על  $\langle M_d \rangle$ :

• אם  $\langle M_d \rangle \in L(M_d) \Leftarrow \langle M_d \rangle \notin L_d \Leftarrow L(M_d) \neq L_d$ .

• אם  $\langle M_d \rangle \notin L(M_d) \Leftarrow \langle M_d \rangle \in L_d \Leftarrow L(M_d) \neq L_d$ .

■

בשני המקרים קיבלנו סתירה לכך ש- $L(M_d) = L_d$  ולכן  $L_d \notin RE$ .

### משפט 6.4 $L_{\text{acc}}$ לא כריעה

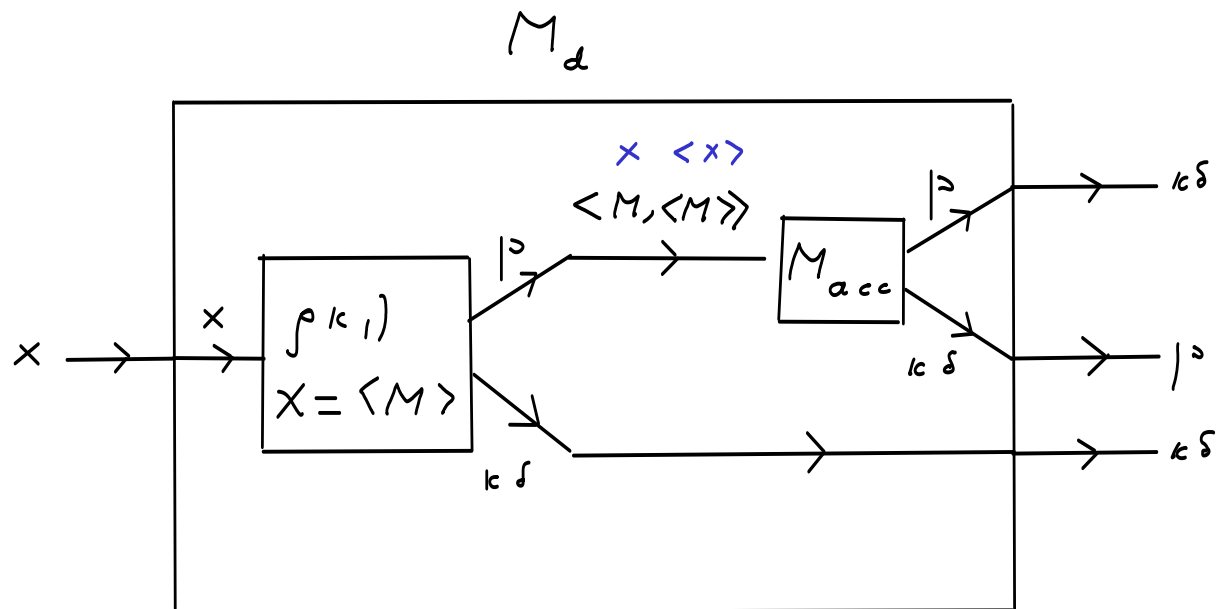
$$L_{\text{acc}} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} \notin R.$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי  $L_{\text{acc}} \in R$  ותהי  $M_{\text{acc}}$  המ"ט המקריעה את  $L_{\text{acc}}$ .

נשתמש ב- $M_{\text{acc}}$  כדי לבנות מ"ט  $M_d$  המקריעה את  $L_d$  (בסתירה לכך ש- $L_d \notin RE$  כפי שהוכחנו במשפט 6.3).

$$L_d = \{ \langle M, w \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \}.$$



התאור של  $M_d$

$M_d = \text{על קלט } x$

(1) בודקת האם  $x = \langle M \rangle$ . אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

(2) מחשבת את  $\langle \langle M \rangle \rangle$ .

(3) מריצה את  $M_{acc}$  על הזוג  $\langle M, \langle M \rangle \rangle$ :

• אם  $M_{acc}$  מקבלת  $M_d \Leftarrow$  דוחה.

• אם  $M_{acc}$  דוחה  $M_d \Leftarrow$  מקבלת.

כעת נוכיח כי  $M_d$  מכריעה את  $L_d$ :

אם  $x \in L_d$

$\Leftarrow x = \langle M \rangle$  ו-  $\langle M \rangle \notin L(M)$

$\Leftarrow M_{acc}$  דוחה את הזוג  $\langle M, \langle M \rangle \rangle$

$\Leftarrow M_d$  מקבלת את  $x$ .

אם  $x \notin L_d$  שני מקרים:

מקרה (1):  $x \neq \langle M \rangle \Leftarrow M_d$  דוחה את  $x$ .

מקרה (2):  $x = \langle M \rangle$  ו-  $\langle M \rangle \in L(M)$

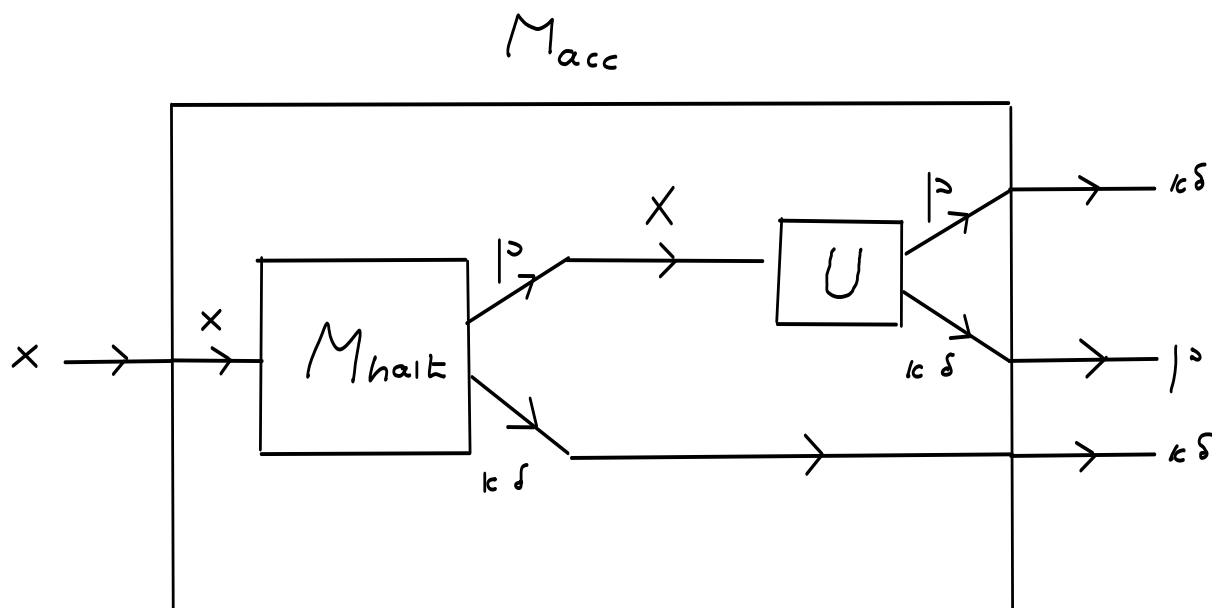
$\Leftarrow M_{acc}$  מקבלת את זוג  $\langle M, \langle M \rangle \rangle$

$\Leftarrow M_d$  דוחה את  $x$ .

משפט 6.5  $L_{\text{halt}}$  לא כריעה

$$L_{\text{halt}} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ עוצרת על } w \} \notin R.$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי  $L_{\text{halt}} \in R$  ותהי  $M_{\text{halt}}$  מ"ט המכריעה את  $L_{\text{halt}}$ .נשתמש ב-  $M_{\text{halt}}$  כדי לבנות מ"ט  $M_{\text{acc}}$  המכריעה את  $L_{\text{acc}}$  (בסתירה לכך ש-  $L_{\text{acc}} \notin R$  כפי שהוכחנו במשפט 6.4).התאור של  $M_{\text{acc}}$  $M_{\text{acc}}$  = על קלט  $x$ :(1) מריצה את  $M_{\text{acc}}$  על  $x$ .

- אם  $M_{\text{halt}}$  דוחה  $\Leftarrow M_{\text{acc}}$  דוחה.
- אם  $M_{\text{halt}}$  מקבלת  $\Leftarrow M_{\text{acc}}$  מריצה את  $U$  על  $x$  ועונה כמוה.

אבחנהנוכיח כי  $M_{\text{acc}}$  מכריעה את  $L_{\text{acc}}$ :אם  $x \in L_{\text{acc}}$ 

$$\Leftarrow x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } \langle w \rangle \in L(M)$$

$$\Leftarrow M_{\text{halt}} \text{ מקבלת את } x \text{ וגם } U \text{ מקבלת את } x$$

$$\Leftarrow M_{\text{acc}} \text{ מקבלת את } x.$$

אם  $x \notin L_{acc} \Leftarrow$  שני מקרים:

מקרה (1):  $x \neq \langle M, w \rangle$

$M_{halt}$  דוחה את  $x \Leftarrow$

$M_{acc}$  דוחה את  $x \Leftarrow$

מקרה (2):  $x = \langle M, w \rangle$  ו-  $\langle w \rangle \notin L(M) \Leftarrow$  שני מקרים:

מקרה (א):  $M$  לא עוצרת על  $w \Leftarrow M_{halt}$  דוחה את  $x \Leftarrow M_{acc}$  דוחה את  $x$ .

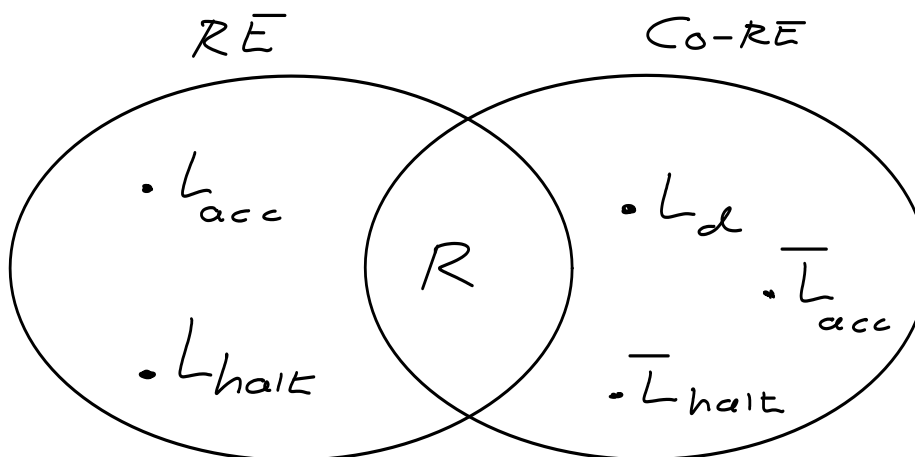
מקרה (ב):  $M$  דוחה את  $w \Leftarrow M_{halt}$  מקבלת את  $x$  אבל  $U$  דוחה את  $x \Leftarrow M_{acc}$  דוחה את  $x$ .

הראנו כי  $M_{acc}$  מכריעה את  $L_{acc}$  בסתירה לכך ש-  $L_{acc} \notin R$ .

לכן  $L_{halt} \notin R$ .

## משפט 6.6

$$\begin{aligned} L_{acc} \in RE \setminus R &\Rightarrow \bar{L}_{acc} \notin RE, \\ L_{halt} \in RE \setminus R &\Rightarrow \bar{L}_{halt} \notin RE, \\ L_d &\notin RE \setminus R. \end{aligned}$$



## 6.2 השפה $L_E$ לא כריעה

### הגדרה 6.4 השפה $L_E$

$$L_E = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset \}.$$

### משפט 6.7 $L_E \notin R$

$$L_E \notin R.$$

כלומר  $L_E$  לא כריעה.

**הוכחה:**

נניח בשלילה כי  $L_E$  כריעה. אז נבנה מ"ט  $M_{acc}$  המכריעה את  $L_{acc}$  באופן הבא.

בנייה של  $M_w$ 

ראשית נגדיר את המ"ט  $M_w$ :

$$M_w = \text{על כל קלט } x$$

(1) אם  $x \neq w$  דוחה.

(2) אם  $x = w$  אז מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוה.

אבחנה

אם  $x = w$  ו-  $M$  מקבלת את  $w$  אז  $L(M_w) = \Sigma^*$ .

אם  $x \neq w$  או אם  $x = w$  ו-  $M$  דוחה את  $w$  אז  $L(M_w) = \emptyset$ .

בנייה של  $M_{acc}$ 

נניח כי קיימת מ"ט  $M_E$  המכריעה את  $L_E$ . אז נבנה מ"ט  $M_{acc}$  המכריעה את  $L_{acc}$ :

$$M_{acc} = \text{על כל קלט } x$$

(1) אם  $\langle M, w \rangle \neq x$  דוחה.

(2) אם  $x = \langle M, w \rangle$ , בעזרת התאור  $\langle M, w \rangle$ , בונה מ"ט  $M_w$ .

(3) מריצה  $M_E$  על  $\langle M_w \rangle$ :

(4) • אם  $M_E$  מקבלת דוחה.

• אם  $M_E$  דוחה מקבלת.

נכונות

אם  $x \in L_{acc}$  אז  $x = \langle M, w \rangle$  ו-  $w \in L(M)$  ו-  $L(M_w) = \Sigma^* \neq \emptyset \Leftarrow M_E$  דוחה  $\langle M_w \rangle$   $\Leftarrow M_{acc}$  מקבלת.

אם  $x \notin L_{acc}$  שני מקרים:

מקרה 1:  $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow M_E$  מקבלת  $\langle M_w \rangle \Leftarrow M_{acc}$  דוחה.

מקרה 2:  $x = \langle M, w \rangle$  ו-  $w \notin L(M) \Leftarrow L(M_w) = \emptyset \Leftarrow M_E$  מקבלת  $\langle M_w \rangle \Leftarrow M_{acc}$  דוחה.

**לסיכום:**

אם  $L_E$  כריעה אז אפשר לבנות מ"ט  $M_{acc}$  המכריעה את  $L_{acc}$  בסתירה לכך ש-  $L_{acc} \notin R$ .  
לכן  $L_E \notin R$ .

משפט 6.8  $L_E \notin RE$ 

$$L_E \notin RE$$

הוכחה:

הרעיוןנבנה מ"ט א"ד  $N$  המקבלת את

$$\bar{L}_E = \{\langle M \rangle \mid L(M) \neq \emptyset\}$$

 $\square = N$  על קלט  $x$ :(1) אם  $x \neq \langle M \rangle$  דוחה.(2) אם  $x = \langle M \rangle$  אז  $N$  בוחרת מילה  $w \in \Sigma^*$  באופן א"ד.(3) מריצה  $M$  על  $w$ .• אם  $M$  מקבלת  $N \Leftarrow$  מקבלת.• אם  $M$  דוחה  $N \Leftarrow$  דוחה.הוכחת הנכונותאם  $x \in \bar{L}_E$ 

$$\Leftarrow x = \langle M \rangle \text{ ו- } L(M) \neq \emptyset$$

$$\Leftarrow \text{קיימת מילה } w \in \Sigma^* \text{ כך ש- } w \in L(M)$$

$$\Leftarrow \exists \text{ ניחוש } w \in \Sigma^* \text{ כך ש- } M \text{ מקבלת את } w$$

$$\Leftarrow \text{קיים חישוב של } N \text{ המקל את } x = \langle M \rangle$$

$$\Leftarrow x \in L(N)$$

לכן קיימת מ"ט א"ד  $N$  המקבלת את השפה  $\bar{L}_E$  לכן  $\bar{L}_E \in RE$ .כעת נוכיח כי  $L_E \notin RE$ .נניח בשלילה כי  $L_E \in RE$ . הוכחנו למעלה ש-  $\bar{L}_E \in RE$ . לכן לפי משפט 5.1,  $L_E \in R$ .זו בסתירה לכך ש-  $L_E \notin R$ .לכן  $L_E \notin RE$ .

■

6.3 השפה  $L_{EQ}$  לא כריעההגדרה 6.5  $L_{EQ}$ 

$$L_{EQ} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\}$$

משפט 6.9  $L_{EQ} \notin R$ 

$$L_{EQ} \notin R$$

השפה  $L_{EQ}$  לא כריעה.

**הוכחה:**

נניח בשלילה כי  $L_{EQ}$  כריעה. תהי  $M_{EQ}$  מ"ט המכריעה את  $L_{EQ}$ . אז נבנה מ"ט  $M_E$  המכריעה את  $L_E$  באופן הבא.

בנייה של  $M_E$

$$M_E = \text{על כל קלט } x:$$

(1) אם  $x \neq \langle M \rangle \Leftarrow$  דוחה.

(2) אם  $x = \langle M \rangle$ , מריצה  $M_{EQ}$  על  $\langle M, M_\emptyset \rangle$  כאשר  $M_\emptyset$  המ"ט שדוחה כל קלט.

(3) • אם  $M_{EQ}$  מקבלת  $\Leftarrow$  מקבלת.

• אם  $M_{EQ}$  דוחה  $\Leftarrow$  דוחה.

נכונות

אם  $x \in L_E$

$$\Leftarrow x = \langle M \rangle \text{ ו- } L(M) = \emptyset$$

$$\Leftarrow L(M) = L(M_\emptyset)$$

$$\Leftarrow \langle M, M_\emptyset \rangle \in L_{EQ}$$

$$\Leftarrow M_{EQ} \text{ מקבלת } \langle M, M_\emptyset \rangle$$

$$\Leftarrow M_E \text{ מקבל.}$$

אם  $x \notin L_E$  שני מקרים:

מקרה 1:  $x \neq \langle M \rangle \Leftarrow M_E$  דוחה.

מקרה 2:  $x = \langle M \rangle \text{ ו- } L(M) \neq \emptyset \Leftarrow$

$$\Leftarrow L(M) \neq L(M_\emptyset)$$

$$\Leftarrow \langle M, M_\emptyset \rangle \notin L_{EQ}$$

$$\Leftarrow M_{EQ} \text{ דוחה } \langle M, M_\emptyset \rangle$$

$$\Leftarrow M_E \text{ דוחה.}$$

**לסיכום:**

אם  $L_{EQ}$  כריעה אז אפשר לבנות מ"ט  $M_E$  המכריעה את  $L_E$  בסתירה למשפט 6.7 האומר ש-  $L_E \notin R$ .  
לכן  $L_{EQ} \notin R$ .

משפט 6.10  $L_{EQ} \notin RE$ 

$$L_{EQ} \notin RE$$

$L_{EQ}$  לא קבילה.

**הוכחה:**

נניח בשלילה כי  $L_{EQ}$  קבילה. תהי  $M_{EQ}$  מ"ט המקבלת את  $L_{EQ}$ . אז נבנה מ"ט  $M_E$  המקבלת את  $L_E$  באופן הבא.

בנייה של  $M_E$

$$M_E = \text{על כל קלט } x:$$

(1) אם  $x \neq \langle M \rangle \Leftarrow$  דוחה.

(2) אם  $x = \langle M \rangle$ , מריצה  $M_{EQ}$  על  $\langle M, M_\emptyset \rangle$  כאשר  $M_\emptyset$  המ"ט שדוחה כל קלט.

(3) • אם  $M_{EQ}$  מקבלת  $\Leftarrow$  מקבלת.

נכונות

אם  $x \in L_E$

$$\Leftarrow x = \langle M \rangle \text{ ו- } L(M) = \emptyset$$

$$\Leftarrow L(M) = L(M_\emptyset)$$

$$\Leftarrow \langle M, M_\emptyset \rangle \in L_{EQ}$$

$$\Leftarrow M_{EQ} \text{ מקבלת } \langle M, M_\emptyset \rangle$$

$$\Leftarrow M_E \text{ מקבל.}$$

**לסיכום:**

אם  $L_{EQ}$  קבילה אז אפשר לבנות מ"ט  $M_E$  המקבלת את  $L_E$  בסתירה למשפט 6.8 האומר ש-  $L_E \notin RE$ .  
לכן  $L_{EQ} \notin RE$ .

משפט 6.11  $\bar{L}_{EQ} \notin RE$ 

$$\bar{L}_{EQ} \notin RE.$$

**הוכחה:**

נניח בשלילה כי  $\bar{L}_{EQ}$  קבילה. תהי  $M_{\bar{EQ}}$  מ"ט המקבלת את  $\bar{L}_{EQ}$ . אז נבנה מ"ט  $M_{\bar{acc}}$  המקבלת את  $\bar{L}_{acc}$  באופן הבא.

בנייה של  $M_1$

ראשית נגדיר מ"ט  $M_1$  באופן הבא:

$$M_1 = \text{על קלט } x:$$



(1) מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוה.

בנייה של  $M_{\text{acc}}$

$M_{\text{acc}} = \text{על כל קלט } x:$

(1) אם  $\langle M, w \rangle \neq x$  מקבלת.

(2) אם  $x = \langle M, w \rangle$  אז בונה  $M_1$ .

(3) מריצה  $M_{\overline{EQ}}$  על  $\langle M_1, M^* \rangle$  כאשר  $M^*$  המ"ט שמקבלת כל קלט.

(4) • אם  $M_{\overline{EQ}}$  מקבלת  $\Leftarrow$  מקבלת.

נכונות

אם  $x \in L_{\text{acc}}$

$\Leftarrow M$  לא מקבלת  $w$

$\Leftarrow L(M_1) = \emptyset$

$\Leftarrow \langle M_1, M^* \rangle \in L_{\overline{EQ}}$

$\Leftarrow M_{\overline{EQ}}$  מקבלת  $\langle M_1, M^* \rangle$

$\Leftarrow M_{\text{acc}}$  מקבל.

**לסיכום:**

אם  $L_{\overline{EQ}}$  קבילה אז אפשר לבנות מ"ט  $M_{\text{acc}}$  המקבלת את  $L_{\text{acc}}$  בסתירה למשפט 6.6 האומר ש-  $L_{\text{acc}} \notin RE$ .  
לכן  $L_{\overline{EQ}} \notin RE$ .



## שיעור 7

### רדוקציה

#### 7.1 טבלה של רדוקציות

##### טבלה של רדוקציות

רדוקציה	עמוד
$L_{\text{HALT}} \leq L_{\text{acc}}$	דוגמה 7.6 עמוד 71
$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{\text{NOTREG}}$	דוגמה 7.11 עמוד 75
$L_{\text{acc}} \leq L_{\text{NOTREG}}$	דוגמה 7.12 עמוד 76
$L_{\text{HALT}} \leq L_{\text{NOTREG}}$	דוגמה 7.13 עמוד 77
$L_{\text{acc}} \leq L_{\text{REG}}$	דוגמה 7.15 עמוד 79
$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{\text{REG}}$	דוגמה 7.14 עמוד 78
$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \neg M_2}$ כאשר $L_{M_1 \neg M_2} = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2) \}$	דוגמה 7.16 עמוד 80
$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \subset M_2}$ כאשר $L_{M_1 \subset M_2} = \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) \subset L(M_2) \}$	דוגמה 7.17 עמוד 80

#### 7.2 מ"ט המחשבת את פונקציה

##### הגדרה 7.1 מ"ט המחשבת פונקציה

בהינתן פונקציה  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  אומרים כי מ"ט  $M$  מחשבת את  $f$  אם לכל  $x \in \Sigma^*$ :

- $M$  מגיעה ל-  $q_{\text{acc}}$  בסוף החישוב של  $f(x)$  וגם
- על סרט הפלט של  $M$  רשום  $f(x)$ .

##### הערה 7.1

מ"ט שמחשבת פונקציה עוצרת תמיד.

##### הגדרה 7.2 מ"ט המחשבת פונקציה

בהינתן פונקציה  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  אומרים כי  $f$  חישה אם קיימת מ"ט המחשבת את  $f$ .

## דוגמה 7.1

$$f_1(x) = xx \quad (7.1)$$

$f_1(x)$  חשיבה.

## דוגמה 7.2

$$f_2(x) = \begin{cases} x & |x| \text{ זוגי} \\ xx & |x| \text{ אי-זוגי} \end{cases} \quad (7.2)$$

$f_2(x)$  חשיבה.

## דוגמה 7.3

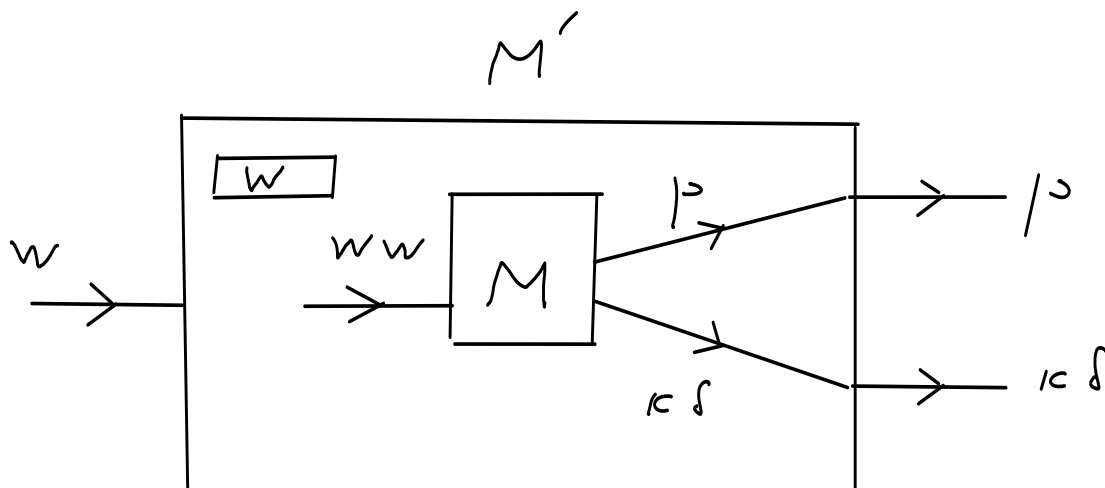
$$f_3(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M \rangle \\ \langle M^* \rangle & x \neq \langle M \rangle \end{cases} \quad (7.3)$$

כאשר

•  $M^*$  מ"ט שמקבלת כל קלט.

•  $M'$  מ"ט המקבלת את השפה

$$L(M') = \{w \in \Sigma^* \mid ww \in L(M)\}$$



$f_3(x)$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שבודקת האם  $x = \langle M \rangle$ . אם לא, מחזירה קידוד קבוע  $\langle M^* \rangle$ . ואם כן, מחזירה קידוד  $\langle M' \rangle$  ע"י הוספת מעברים המשכפלים את הקלט בתחילת הקידוד  $\langle M \rangle$ .

## דוגמה 7.4

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & x = \langle M \rangle \wedge \langle M \rangle \in L(M) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad (7.4)$$

$f_4(x)$  לא חשיבה כי ייתכנו קלטים  $x = \langle M \rangle$  ו- $M$  לא עוצרת על  $\langle M \rangle$ .

## 7.3 רדוקציות

## הגדרה 7.3 רדוקציות

בהינתן שתי שפות  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$  אומרים כי  $L_1$  ניתנת לרדוקציה ל- $L_2$ , ומסמנים

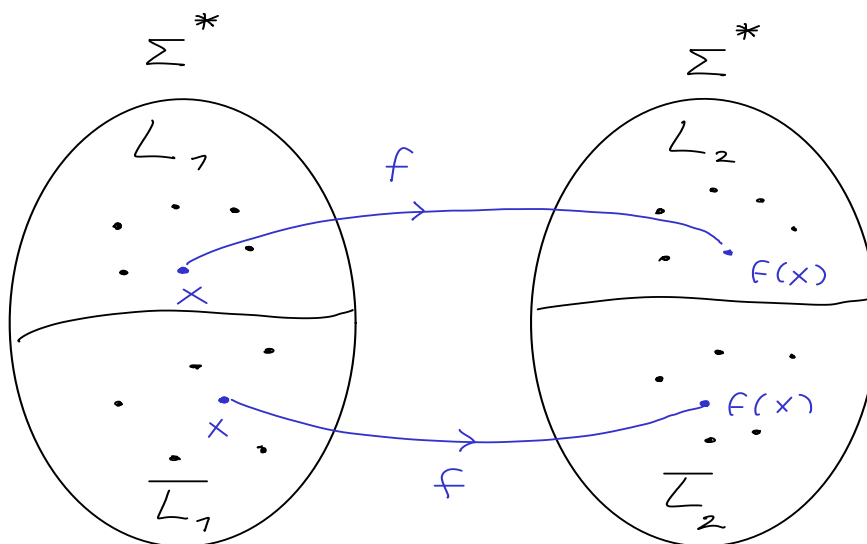
$$L_1 \leq L_2 ,$$

אם  $\exists$  פונקציה  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  המקיימת:

(1)  $f$  חשיבה

(2) לכל  $x \in \Sigma^*$

$$x \in L_1 \iff f(x) \in L_2 .$$



## דוגמה 7.5

נתונות השפות

$$L_1 = \{x \in \{0, 1\}^* \mid |x| \text{ זוגי} \} ,$$

$$L_2 = \{x \in \{0, 1\}^* \mid |x| \text{ אי-זוגי} \} .$$

הוכיחו כי

$$L_1 \leq L_2 .$$

**פתרון:**

נגדיר את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \text{ זוגי} \\ 10 & |x| \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

$$f(x) \in L_2 \text{ אי-זוגי } |f(x)| \Leftarrow f(x) = 1 \Leftarrow |x| \text{ זוגי } \Leftarrow x \in L_1$$

$$f(x) \notin L_2 \text{ זוגי } |f(x)| \Leftarrow f(x) = 10 \Leftarrow |x| \text{ אי-זוגי } \Leftarrow x \notin L_1$$

**משפט 7.1 משפט הרדוקציה**לכל שתי שפות  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ , אם קיימת רדוקציה

$$L_1 \leq L_2$$

אזי התנאים הבאים מתקיימים:

$$L_1 \in R \iff L_2 \in R \quad (1)$$

$$L_1 \in RE \iff L_2 \in RE \quad (2)$$

$$L_1 \notin R \implies L_2 \notin R \quad (3)$$

$$L_1 \notin RE \implies L_2 \notin RE \quad (4)$$

**הוכחה:** מכיוון ש-

$$L_1 \leq L_2$$

קיימת פונקציה  $f$  חשיבה המקיימת:

$$x \in L_1 \iff f(x) \in L_2$$

לכל  $x \in \Sigma^*$ .תהי  $M_f$  מ"ט המחשבת את  $f$ .

$$(1) \quad \underline{L_1 \in R \iff L_2 \in R} \text{ נוכיח}$$

תהי  $M_2$  מ"ט המכריעה את  $L_2$ .נבנה מ"ט  $M_1$  המכריעה את  $L_1$ .התאור של  $M_1$ 

$$M_1 = \text{על קלט } x$$

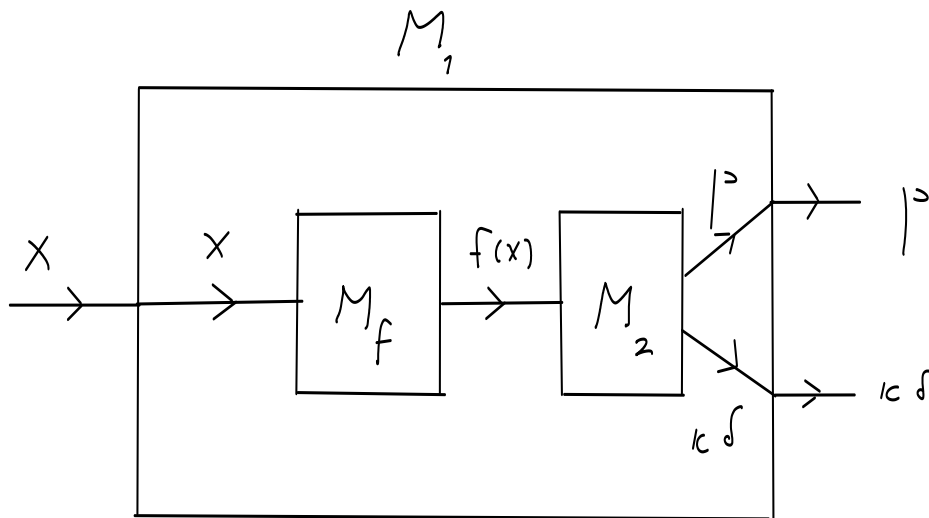
1. מחשבת את  $f(x)$  בעזרת  $M_f$ .2. מריצה את  $M_2$  על  $f(x)$  ועונה כמוה.נוכיח כי  $M_1$  מכריעה את  $L_1$ .

- אם  $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2 \Leftrightarrow M_2$  מקבלת את  $f(x) \Leftrightarrow M_1$  מקבלת את  $x$ .
- אם  $x \notin L_1 \Leftrightarrow f(x) \notin L_2 \Leftrightarrow M_2$  דוחה את  $f(x) \Leftrightarrow M_1$  דוחה את  $x$ .

(2) נוכיח  $L_1 \in RE \Leftrightarrow L_2 \in RE$

תהי  $M_2$  מ"ט המקבלת את  $L_2$ .

נבנה מ"ט  $M_1$  המקבלת את  $L_1$ .



התאור של  $M_1$

$M_1 =$  על קלט  $x$ :

1. מחשבת את  $f(x)$  בעזרת  $M_f$ .
2. מריצה את  $M_2$  על  $f(x)$  ועונה כמוה.

נוכיח כי  $M_1$  מקבלת את  $L_1$ :

- אם  $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2 \Leftrightarrow M_2$  מקבלת את  $f(x) \Leftrightarrow M_1$  מקבלת את  $x$ .
- אם  $x \notin L_1 \Leftrightarrow f(x) \notin L_2 \Leftrightarrow M_2$  לא מקבלת את  $f(x) \Leftrightarrow M_1$  לא מקבלת את  $x$ .

(3)

(4)

## כלל 7.1

- אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי  $L \in RE$ , בוחרים שפה אחרת  $L' \in RE$  ומראים שקיימת רדוקציה

$$L \leq L'.$$

לדוגמה:

$$L \leq L_{acc}$$

(כנ"ל לגבי  $R$ )

- אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי  $L \notin RE$  בוחרים שפה אחרת  $L' \notin RE$  ומראים שקיימת רדוקציה

$$L' \leq L.$$

לדוגמה

$$L_d \leq L$$

(כנ"ל לגבי  $R$ ).

## דוגמה 7.6

נתונות השפות  $L_{acc} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\}$  ו-  $L_{halt} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ עוצרת על } w\}$ .  
הוכיחו כי  $L_{acc} \notin R$  ע"י רדוקציה  $L_{acc} \leq L_{halt}$ .

## פתרון:

נבנה פונקציה  $f$  חשיבה ומקיימת

$$x \in L_{acc} \iff f(x) \in L_{halt}.$$

$$M \text{ מקבלת את } w \iff M' \text{ תעצור על } w'.$$

$$M \text{ דוחה את } w \iff M' \text{ לא תעצור על } w'.$$

$$M \text{ לא עוצרת את } w \iff M' \text{ לא תעצור על } w'.$$

$$f(x) = \begin{cases} \langle M', w \rangle & : x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{loop}, \varepsilon \rangle & : x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- $M_{loop}$  מ"ט שלא עוצרת על אף קלט.

- $M'$  מ"ט המתנהגת כמו  $M$  פרט למקומות בהם  $M$  עצרה ודחתה,  $M'$  תיכנס ללולאה אינסופית.

## נכונות הרדוקציה

$f$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם  $x = \langle M, w \rangle$ .

אם לא, תחזיר קידוד קבוע  $\langle M_{loop}, w \rangle$

ואם כן, תחזיר קידוד  $\langle M', w \rangle$  ע"י ביצוע שינויים לוקלים בקידוד של  $M$ .

נוכיח כי  $x \in L_{\text{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L_{\text{halt}}$

אם  $x \in L_{\text{acc}}$

$$w \in L(M) \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$$

$$f(x) = \langle M', w \rangle \Leftarrow \text{עוצרת ומקבלת את } w \text{ ו- } M'$$

$$f(x) \in L_{\text{halt}} \Leftarrow$$

אם  $x \notin L_{\text{acc}}$  אז שני מקרים:

מקרה 1:

$$x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow f(x) = \langle M_{\text{loop}}, \varepsilon \rangle \Leftarrow \text{לא עוצרת על } \varepsilon \Leftarrow f(x) \notin L_{\text{halt}}$$

מקרה 2:

$$x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } w \notin L(M) \Leftarrow f(x) = \langle M', w \rangle \Leftarrow \text{שני מקרים:}$$

$$\text{מקרה א: } M \text{ לא עוצרת על } w \Leftarrow M' \text{ לא עוצרת על } w \Leftarrow f(x) \notin L_{\text{halt}}$$

$$\text{מקרה ב: } M \text{ דוחה את } w \Leftarrow M' \text{ לא עוצרת על } w \Leftarrow f(x) \notin L_{\text{halt}}$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $L_{\text{acc}} \leq L_{\text{halt}}$  ומכיוון ש-  $L_{\text{acc}} \notin R$  (משפט 6.4) אז ממשט הרדוקציה 7.1, מתקיים  $L_{\text{halt}} \notin R$ .

## 7.7 דוגמה

נתונה השפה

$$L_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^* \}$$

ונתונה השפה

$$\bar{L}_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \neq \Sigma^* \} \cup \{ x \neq \langle M \rangle \} .$$

הוכיחו כי:

$$L_{\Sigma^*} \notin RE \quad (\text{א})$$

$$L_{\Sigma^*} \notin R \quad (\text{ב})$$

$$\bar{L}_{\Sigma^*} \notin RE \quad (\text{ג})$$

**פתרון:**

נוכיח כי  $L_{\Sigma^*} \notin R$  ע"י רדוקציה

$$L_{\text{acc}} \leq L_{\Sigma^*} .$$

נבנה פונקציה חשיבה  $f$  המקיימת

$$x \in L_{\text{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L_{\Sigma^*} .$$

$$L(M') = \Sigma^* \Leftarrow w \in L(M)$$

$$L(M') \neq \Sigma^* \Leftarrow w \notin L(M)$$



$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & : x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & : x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- $M_\emptyset$  מ"ט שדוחה כל קלט.
- $M'$  היא מ"ט שעל כל קלט  $x$ , מתעלמת מ- $x$  ומריצה את  $M$  על  $w$  ועונה כמוה.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & : w \in L(M) \\ \emptyset & : w \notin L(M) \end{cases}$$

נכונות הרדוקציה:

$f$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם  $x = \langle M, w \rangle$ .

אם לא תחזיר קידוד קבוע  $\langle M_\emptyset \rangle$ .

אם כן, תחזיר קידוד  $\langle M' \rangle$  ע"י הוספת קוג ל- $M$  שמוחק את הקלט מהסרט וכותב  $w$  במקומו.

נוכיח כי

$$x \in L_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{\Sigma^*}$$

$$\iff \begin{aligned} & \text{אם } x \in L_{\text{acc}} \iff x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } w \in L(M) \iff f(x) = \langle M' \rangle \text{ ולפי האבחנה } L(M') = \Sigma^* \\ & \text{אם } f(x) \in L_{\Sigma^*} \end{aligned}$$

$$\text{אם } x \in L_{\text{acc}} \iff \text{שני מקרים:}$$

$$\text{מקרה 1: } x \neq \langle M, w \rangle \iff f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \text{ ו- } L(M_\emptyset) = \emptyset \iff f(x) \notin L_{\Sigma^*}$$

$$\text{מקרה 2: } x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } w \notin L(M) \iff f(x) = \langle M' \rangle \text{ ולפי האבחנה } L(M') = \emptyset \iff f(x) \notin L_{\Sigma^*}$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $L_{\text{acc}} \leq L_{\Sigma^*}$ . ומכיוון ש- $L_{\text{acc}} \notin R$  (משפט 6.4) אז ממשט הרדוקציה 7.1, מתקיים  $L_{\Sigma^*} \notin R$ .

## 7.8 דוגמה

נתונה השפה

$$L_d = \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \}$$

ונתונה השפה

$$\bar{L}_{\text{acc}} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \notin L(M) \} \cup \{ x \neq \langle M, w \rangle \} .$$

הוכיחו כי

$$\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE \text{ ע"י רדוקציה}$$

$$L_d \leq \bar{L}_{\text{acc}} .$$

**פתרון:**

נבנה פונקציה חשיבה  $f$  המקיימת

$$x \in L_d \Leftrightarrow f(x) \in L_{acc}.$$

$$w' \notin L(M') \Leftarrow \langle M \rangle \notin L(M)$$

$$w' \in L(M') \Leftarrow \langle M \rangle \in L(M)$$

$$f(x) = \begin{cases} \langle M, \langle M \rangle \rangle & : x = \langle M \rangle \\ \langle M^*, \varepsilon \rangle & : x \neq \langle M \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M^*$  המ"ט שמקבלת כל קלט.

נכונות הרדוקציה:

$f$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם  $x = \langle M, w \rangle$ .

אם לא תחזיר קידוד קבוע  $\langle M^*, \varepsilon \rangle$ .

אם כן, תחשב  $\langle M, \langle M \rangle \rangle$ .

נוכיח כי

$$\begin{aligned} x \in L_d &\Leftrightarrow f(x) \in \bar{L}_{acc} \\ \Leftrightarrow \langle M \rangle \notin L(M) \text{ ו- } f(x) = \langle M, \langle M \rangle \rangle &\Leftrightarrow \langle M \rangle \notin L(M) \text{ ו- } x = \langle M \rangle \Leftrightarrow x \in L_d \text{ אם } f(x) \in \bar{L}_{acc} \end{aligned}$$

אם  $x \notin L_d$  שני מקרים:

$$\text{מקרה 1: } f(x) \notin \bar{L}_{acc} \Leftarrow \varepsilon \in L(M^*) \text{ ו- } f(x) = \langle M^*, \varepsilon \rangle \Leftarrow x \neq \langle M \rangle$$

$$\text{מקרה 2: } f(x) \notin \bar{L}_{acc} \Leftarrow \langle M \rangle \in L(M) \text{ ו- } f(x) = \langle M, \langle M \rangle \rangle \Leftarrow \langle M \rangle \in L(M) \text{ ו- } x = \langle M \rangle$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $L_d \leq \bar{L}_{acc}$ , ומכיוון ש-  $L_d \notin RE$  (משפט 6.3) אז ממשט הרדוקציה 7.1, מתקיים  $\bar{L}_{acc} \notin RE$ .

## משפט 7.2 משפט הרדוקציה בין שפות משלימות

אם קיימת רדוקציה  $L_1 \leq L_2$ , אדי קיימת רדוקציה  $\bar{L}_1 \leq \bar{L}_2$ .

**הוכחה:**

אם  $\exists$  רדוקציה

$$L_1 \leq L_2$$

אזי  $\exists$  פונקציה חשיבה  $f$  המקיימת

$$x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$$

ולכן עבור אותה פונקציה  $f$  היא גם חשיבה וגם מקיימת

$$x \in \bar{L}_1 \Leftrightarrow f(x) \in \bar{L}_2$$

ולכן

$$\bar{L}_1 \leq \bar{L}_2.$$

## 7.4 דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה בין שפות משלימות (משפט 7.2)

### 7.9 דוגמה

הוכחנו בדוגמה 7.7 רדוקציה

$$L_{acc} \leq L_{\Sigma^*}.$$

לכן לפי משפט 7.2 קיימת רדוקציה

$$\bar{L}_{acc} \leq \bar{L}_{\Sigma^*}.$$

מכיוון ש- $\bar{L}_{acc} \notin RE$ , אזי ממשט הרדוקציה 7.1 מתקיים  $\bar{L}_{\Sigma^*} \notin RE$ .

### 7.10 דוגמה

הוכחנו בדוגמה 7.8 רדוקציה

$$L_d \leq \bar{L}_{acc}.$$

לכן לפי משפט 7.2 קיימת רדוקציה

$$\bar{L}_d \leq L_{acc}.$$

מכיוון ש- $L_{acc} \in RE$ , אזי ממשט הרדוקציה 7.1 מתקיים  $\bar{L}_d \in RE$ .

## 7.5 דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה (משפט 7.1)

### 7.11 דוגמה $\bar{L}_{acc} \leq L_{NOTREG}$

תהי  $L_{NOTREG}$  השפה

$$L_{NOTREG} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית}\}.$$

הוכיחו כי השפה  $L_{NOTREG}$  לא כריעה על ידי רדוקציה מ- $\bar{L}_{acc}$ .

### פתרון:

השפה  $\bar{L}_{acc}$  מוגדרת

$$\bar{L}_{acc} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ לא מקבלת } M\} \cup \{x \neq \langle M, w \rangle\}.$$

והשפה  $L_{NOTREG}$  מוגדרת

$$L_{NOTREG} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית}\}.$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ w' \in PAL & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M'$  מ"ט הבאה:

$M' =$  על כל קלט  $y$ :

(1) אם  $y \in PAL \Leftarrow$  מקבלת.

(2) אחרת מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוה.

### הוכחת נכונות הרדוקציה

אם  $x \in \bar{L}_{acc}$   $\Leftarrow$  שני מקרים:

מקרה 1:  $x = \langle M, w \rangle$

$\Leftarrow M$  לא מקבלת  $w$

$\Leftarrow L(M') \in PAL$

$\Leftarrow \langle M' \rangle \in PAL$

$\Leftarrow f(x) \in PAL$

$\Leftarrow f(x) \in L_{NOTREG}$

מקרה 2:  $x \neq \langle M, w \rangle$   $\Leftarrow f(x) \in PAL \Leftarrow f(x) \in L_{NOTREG}$

אם  $x \notin \bar{L}_{acc}$   $\Leftarrow M$  מקבלת  $w$   $\Leftarrow L(M') = \Sigma^*$   $\Leftarrow f(x) \in \Sigma^*$   $\Leftarrow f(x) \in L_{NOTREG}$ .

לכן הוכחנו כי  $x \in \bar{L}_{acc} \Leftrightarrow f(x) \in NOTERG$ , ז"א  $f(x)$  היא רדוקציה מ- $L_{acc}$  ל- $L_{NOTREG}$ .

השפה  $\bar{L}_{acc}$  לא כריעה. לפיכך, לפי משפט הרדוקציה גם  $L_{NOTREG}$  לא כריעה.

### **7.12 דוגמה** $L_{acc} \leq L_{NOTREG}$

תהי  $L_{NOTREG}$  השפה

$$L_{NOTREG} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית} \}.$$

הוכיחו כי השפה  $L_{NOTREG}$  לא כריעה על ידי רדוקציה מ- $L_{acc}$ .

### **פתרון:**

השפה  $L_{acc}$  מוגדרת

$$L_{acc} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ מקבלת } w \}.$$

והשפה  $L_{NOTREG}$  מוגדרת

$$L_{NOTREG} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית} \}.$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\emptyset} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M'$  מ"ט הבאה:

$M' =$  על כל קלט  $y$ :

(1)  $M'$  מריצה  $M$  על  $w$ .

(2) אם  $M$  דוחה  $\Leftarrow$  דוחה.

• אם  $M$  מקבלת  $M' \Leftarrow$  בודקת אם  $y$  פלינדרום.

\* אם כן  $\Leftarrow$  מקבלת.

\* אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

### הוכחת נכונות הרדוקציה

אם  $x \in L_{acc}$   $\Leftarrow$   $M$  מקבלת  $w$   $\Leftarrow$   $L(M') = PAL$   $\Leftarrow$   $f(x) \in PAL$   $\Leftarrow$   $f(x) \in L_{NOTREG}$ .

$x \notin L_{acc}$   $\Leftarrow$  שני מקרים.

מקרה 1:  $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow f(x) = \langle M_\emptyset \rangle$  ו-  $L(M_\emptyset) = \emptyset \Leftarrow \langle M_\emptyset \rangle \notin L_{NOTREG}$   
 $\Leftarrow f(x) \notin L_{NOTREG}$

מקרה 2:  $x = \langle M, w \rangle$  ו-  $M$  לא מקבלת  $w \Leftarrow L(M') = \emptyset \Leftarrow \langle M' \rangle \notin L_{NOTREG}$   
 $\Leftarrow f(x) \notin L_{NOTREG}$

### **7.13 דוגמה** $L_{HALT} \leq L_{NOTREG}$

תהי  $L_{NOTREG}$  השפה

$$L_{NOTREG} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית} \}.$$

הוכיחו כי השפה  $L_{NOTREG}$  לא כריעה על ידי רדוקציה מ-  $L_{HALT}$ .

### **פתרון:**

השפה  $L_{HALT}$  מוגדרת

$$L_{HALT} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ עוצרת על } w \}.$$

והשפה  $L_{NOTREG}$  מוגדרת

$$L_{NOTREG} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית} \}.$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}.$$

כאשר  $M'$  מ"ט הבאה:

$M' =$  על כל קלט  $y$ :

(1)  $M'$  מריצה  $M$  על  $w$ .

(2) אם  $M$  דוחה  $\Leftarrow$  דוחה.

• אם  $M$  מקבלת  $\Leftarrow$  ממשיכה לשלב (3).

(3)  $M'$  בודקת אם  $y \in PAL$ .

• אם כן  $\Leftarrow$  מקבלת.

• אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

הוכחת הנכונות

$$L(M') \in L_{\text{NOTREG}} \iff L(M') \in PAL \iff x \in L_{\text{HALT}}$$

$$\text{שני מקרים:} \iff x \notin L_{\text{HALT}}$$

$$\langle M_\emptyset \rangle \notin L_{\text{NOTREG}} \iff L(M_\emptyset) = \emptyset \text{ ו- } f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle \quad \text{מקרה 1:}$$

$$f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} \iff$$

$$\langle M_\emptyset \rangle \notin L_{\text{NOTREG}} \iff L(M_\emptyset) = \emptyset \iff w \text{ לא עוצרת על } M \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle \quad \text{מקרה 2:}$$

$$f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} \iff$$

**דוגמה 7.14**  $\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{\text{REG}}$ תהי  $L_{\text{REG}}$  השפה

$$L_{\text{REG}} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ רגולרית} \}.$$

הוכיחו כי השפה  $L_{\text{REG}}$  לא כריעה על ידי רדוקציה מ- $\bar{L}_{\text{acc}}$ .**פתרון:**השפה  $\bar{L}_{\text{acc}}$  מוגדרת

$$\bar{L}_{\text{acc}} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \text{ לא מקבלת } M \} \cup \{ x \mid x \neq \langle M, w \rangle \}.$$

והשפה  $L_{\text{REG}}$  מוגדרת

$$L_{\text{REG}} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ רגולרית} \}.$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M_\emptyset$  המ"ט שדוחה כל קלט ו- $M'$  מ"ט הבאה:

$$M' = \text{על כל קלט } y:$$

(1) מריצה  $M$  על  $w$ .(2) • אם  $M$  דוחה  $\Leftarrow$  דוחה.• אם  $M$  מקבלת  $\Leftarrow$  בודקת אם  $y$  פלינדרום:• אם כן  $\Leftarrow$  מקבלת.• אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.אבחנה

$$L(M') = \begin{cases} PAL & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

הוכחת נכונות הרדוקציה

אם  $x \in \bar{L}_{acc}$  שני מקרים:  $\Leftarrow$

מקרה 1:  $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow f(x) = \langle M_{\emptyset} \rangle \Leftarrow L(M_{\emptyset}) = \emptyset \Leftarrow \langle M_{\emptyset} \rangle \in L_{REG} \Leftarrow f(x) \in L_{REG}$

מקרה 2:  $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow x \notin L(M) \Leftarrow f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow L(M') = \emptyset$  ולפי האבחנה  $\langle M_{\emptyset} \rangle \in L_{REG} \Leftarrow f(x) \in L_{REG}$

אם  $x \notin \bar{L}_{acc} \Leftarrow w \in L(M) \Leftarrow f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow L(M') \in PAL \Leftarrow f(x) \in PAL$   
 $f(x) \notin L_{REG} \Leftarrow$

## דוגמה 7.15 $L_{acc} \leq L_{REG}$

תהי  $L_{REG}$  השפה

$$L_{REG} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ רגולרית} \}.$$

הוכיחו כי השפה  $L_{REG}$  לא כריעה על ידי רדוקציה מ- $L_{acc}$ .

## פתרון:

השפה  $L_{acc}$  מוגדרת

$$L_{acc} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ מקבלת } w \}.$$

והשפה  $L_{REG}$  מוגדרת

$$L_{REG} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ רגולרית} \}.$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{PAL} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M_{PAL}$  המ"ט שמכריעה את השפה של פלינדרומים, ו- $M'$  מ"ט הבאה:

$$M' = \text{על כל קלט } y:$$

(1)  $M'$  בודקת אם  $y$  פלינדרום:

- אם כן  $\Leftarrow$  מקבלת.
- אם לא מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמזה.

## הוכחת נכונות הרדוקציה

אם  $x \in L_{acc} \Leftarrow M \text{ מקבלת } w \Leftarrow L(M') = \Sigma^* \Leftarrow f(x) \in REG$

$x \notin L_{acc} \Leftarrow$  שני מקרים:

מקרה 1:  $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow f(x) = \langle M_{PAL} \rangle \Leftarrow L(M_{PAL}) = PAL \Leftarrow \langle M_{PAL} \rangle \notin L_{REG}$   
 $f(x) \notin L_{REG} \Leftarrow$

מקרה 2:  $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow M \text{ לא מקבלת } w \Leftarrow L(M') = PAL \Leftarrow \langle M' \rangle \notin L_{REG}$   
 $f(x) \notin L_{REG} \Leftarrow$

**דוגמה 7.16**  $\bar{L}_{acc} \leq L_{M_1 \neg M_2}$ 

נתונה השפה הבאה:

$$L = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2) \} .$$

הוכיחו כי  $L \notin RE$  ע"י רדוקציה מ- $\bar{L}_{acc}$ .**פתרון:**פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M^*, M, w \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

•  $M^*$  היא מ"ט שמקבלת כל קלט•  $M_\emptyset$  היא מ"ט שדוחה כל קלט.נכונת הרדוקציה:

ראשית,  $f$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם  $x = \langle M, w \rangle$ . אם לא, תחזיר קידוד קבוע  $\langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle$  ואם כן, תחזיר קידוד  $\langle M^*, M, w \rangle$ .

נוכיח כי

$$x \in \bar{L}_{acc} \iff f(x) \in L_{M_1 \neg M_2} .$$

אם  $x \in \bar{L}_{acc}$   $\Leftarrow$  שני מקרים:

$$f(x) \in L_{M_1 \neg M_2} \iff x \neq \langle M, w \rangle \iff f(x) = \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle \iff \varepsilon \in L(M_\emptyset) \text{ ו- } \varepsilon \notin L(M^*) \iff \varepsilon \notin L(M_\emptyset) \iff f(x) \in L_{M_1 \neg M_2} .$$

$$\text{מקרה 2: } x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } w \notin L(M) \iff f(x) = \langle M^*, M, w \rangle \iff w \in L(M^*) \text{ ו- } w \notin L(M) \iff f(x) \in L_{M_1 \neg M_2} .$$

$$\text{אם } x \notin \bar{L}_{acc} \iff x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } w \in L(M) \iff f(x) = \langle M^*, M, w \rangle \iff w \in L(M^*) \text{ ו- } w \in L(M) \iff f(x) \notin L_{M_1 \neg M_2} .$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $\bar{L}_{acc} \leq L_{M_1 \neg M_2}$ , ומכיוון ש- $\bar{L}_{acc} \notin RE$  ממשפט הרדוקציה מתקיים  $L_{M_1 \neg M_2} \notin RE$ .

**דוגמה 7.17**  $L_{acc} \leq L_{M_1 \subset M_2}$ 

נתונה השפה הבאה:

$$L = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2) \} .$$

הוכיחו כי  $L \notin RE$  ע"י רדוקציה מ- $L_{acc}$ .**פתרון:**פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M_\emptyset, M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset, M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$



כאשר

- $M_\emptyset$  היא מ"ט שדוחה כל קלט.
- $M'$  היא מ"ט שעל קלט  $y$  מתעלמת מ- $y$  ומריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוה.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}.$$

נכונת הרדוקציה:

ראשית,  $f$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם  $x = \langle M, w \rangle$ . אם לא, תחזיר קידוד קבוע  $\langle M_\emptyset, M_\emptyset \rangle$  ואם כן, תחזיר קידוד  $\langle M^*, M' \rangle$ , כאשר  $M_\emptyset$  היא קידוד קבוע ו- $M'$  נוצר ע"י הוספת קוד ל- $\langle M \rangle$  המוחק את הקלט  $y$  ורושם  $w$  במקומו.

נוכיח כי

$$x \in L_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{M_1 \subset M_2}.$$

$$L(M') = \Sigma^* \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M_\emptyset, M' \rangle \iff x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } w \in L(M) \iff x \in L_{\text{acc}} \\ f(x) \in L_{M_1 \subset M_2} \iff L(M_\emptyset) \subset L(M') \iff$$

$$x \notin L_{\text{acc}} \iff \text{שני מקרים:}$$

$$\text{מקרה 1: } x \neq \langle M, w \rangle \iff f(x) = \langle M_\emptyset, M_\emptyset \rangle \text{ ו- } L(M_\emptyset) = L(M_\emptyset) \iff f(x) \notin L_{M_1 \subset M_2}.$$

$$\text{מקרה 2: } x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } w \notin L(M) \iff f(x) = \langle M_\emptyset, M' \rangle \text{ ולפי האבחנה } L(M') = \emptyset \\ L(M') = L(M_\emptyset) \iff f(x) \notin L_{M_1 \subset M_2}.$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $L_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \subset M_2}$ , ומכיוון ש- $L_{\text{acc}} \notin R$  ממשפט הרדוקציה מתקיים  $L_{M_1 \subset M_2} \notin R$ .

## שיעור 8

### מבוא לסיבוכיות

#### 8.1 הגדרה של סיבוכיות

##### 8.1 הערה

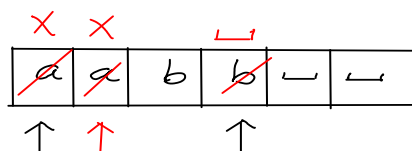
זמן ריצה של מ"ט  $M$  על קלט  $w$ , נמדד ביחס לגודל הקלט  $w$ , כלומר  $f(|w|)$ .

##### 8.1 הגדרה

נאמר כי ניתן להכריע שפה  $L$  בזמן  $f(n)$ , אם קיימת מ"ט  $M$  המכריעה את  $L$  ולכן קלט  $w \in \Sigma^*$ , זמן הריצה של  $M$  על  $w$  חסום ע"י  $f(|w|)$ .

##### 8.1 דוגמה

נבנה מ"ט  $M$  המכריעה השפה  $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ .



התאור של  $M$ :

על קלט  $w$ :

(1) אם התו שמתחת לראש הוא  $\_$   $\Leftarrow$  מקבלת.

(2) אם התו שמתחת לראש הוא  $b$   $\Leftarrow$  דוחה.

(3) מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י  $X$ .

(4) מזיזה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאל ל- $\_$ .

• אם התו הוא  $a$  או  $X$   $\Leftarrow$  דוחה.

• מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י  $\_$ , מזיזה את הראש שמאלה עד התו הראשון מימין ל- $X$  וחוזרת ל- (1).

זמן הריצה

•  $\frac{|w|}{2}$  איטרציות.

• בכל איטרציה מבצעים  $O(|w|)$  צעדים.

$$\frac{|w|}{2} \cdot O(|w|) = O(|w|^2).$$

**הגדרה 8.2 זמן הריצה**

זמן הריצה של מ"ט  $M$  על קלט  $w$  היא פונקציה  $f(|w|)$  השווה למספר הצעדים הנדרש בחישוב של  $M$  על  $w$ .

**הערה 8.2**

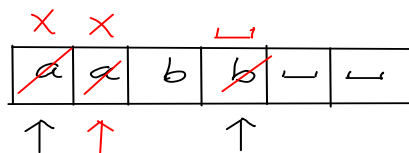
זמן הריצה של מ"ט נמדד ביחס לגודל הקלט  $|w|$ .

**הגדרה 8.3**

אומרים כי ניתן להכריעה שפה  $L$  בזמן  $f(n)$  אם קיימת מ"ט  $M$  המכריעה את  $L$  כך שלכל  $w \in \Sigma^*$ , זמן הריצה של  $M$  על  $w$  חסום ע"י  $f(|w|)$ .

**דוגמה 8.2**

נבנה מ"ט  $M$  עם סרט יחיד שמכריעה את השפה  $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ .



התאור של  $M$ :

על קלט  $w$ :

(1) אם התו שמתחת לראש הוא  $\_$   $\Leftarrow$  מקבלת.

(2) אם התו שמתחת לראש הוא  $b$   $\Leftarrow$  דוחה.

(3) מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י  $X$ .

(4) מזיזה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאל ל- $\_$ .

• אם התו הוא  $a$  או  $X$   $\Leftarrow$  דוחה.

• מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י  $\_$ , מזיזה את הראש שמאלה עד התו הראשון מימין ל- $X$  וחוזרת ל-(1).

זמן הריצה

•  $M$  מבצעת  $\frac{|w|}{2}$  איטרציות.

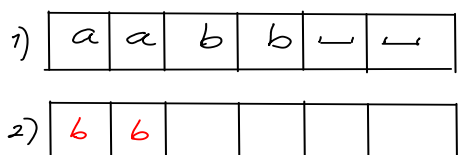
• בכל איטרציה  $M$  סורקת את הסרט פעמיים וזה עולה  $O(|w|)$ .

• לכן סה"כ זמן הריצה של  $M$  חסום ע"י

$$\frac{|w|}{2} \cdot O(|w|) = O(|w|^2).$$

## 8.3 דוגמה

נבנה מ"ט מרובת סרטים  $M'$  שמכריעה את השפה  $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ .



התאור של  $M'$ :

על קלט  $w$ :

- (1) מעתיקה את ה- $b$  ים לסרט 2 (ותוך כדי בודקת האם  $w$  מהצורה  $a^*b^*$ ).  $O(|w|)$
- (2) מזיזה את הראשים לתחילת הסרטים.  $O(|w|)$
- (3) אם שני הראשען מצביעים על  $\_$  מקבלת.  $O(|w|)$
- (4) אם אחד הראשים מצביע על  $\_$  והשני לא  $\Leftarrow$  לא.
- (5) מזיזה את שהע הראשים ימינה וחוזרת לשלב (3). שלבים (3-5):  $O(|w|)$ .

זמן הריצה

זמן הריצה של  $M'$  הוא  $O(|w|)$ .

## 8.2 היחס בין המודלים השונים

## 8.1 משפט

לכל מ"ט מרובת סרטים  $M$  הרצה בזמן  $f(n)$  קיימת סרט יחיד  $M'$  השקולה ל- $M$  ורצה בזמן  $O(f^2(n))$ .

הוכחה:

בהינתן מ"ט מרובת סרטים  $M$ , הרצה בזמן  $f(n)$ , נבנה מ"ט עם סרט יחיד  $M'$  באותו אופן כמו בהוכחת השקילות במשפט 3.1.

כלומר,  $M'$  שומרת את התוכן של  $k$  סרטים של  $M$  על הסרט היחיד שלה (עם הפרדה ע"י #), ובכל צעד חישוב,  $M'$  סורקת את הסרט שלה כדי לזהות שת האותיות שמתחת לראשים (שמסומנות ב- $\hat{a}$ ) ואחרי זה, משתמשת בפונקצית המעברים של  $M$ , וסורקת את הסרט פעם נוספת כדי לעדכן את התוכן בכל אחד מהסרטים ואת מיקום הראש בכל אחד מהסרטים.

1) 2) 

⋮

k) 

#	$\hat{\alpha}_1$	#	$\hat{\alpha}_2$	#	$\hat{\alpha}_3$	#	
---	------------------	---	------------------	---	------------------	---	--

כמה לוקח ל-  $M'$  לסרוק את הסרט שלה? מכיוון שהסרט של  $M'$  מכיל את התוכן של  $k$  הסרטים של  $M$ , והגודל של כל אחד מהסרטים של  $M$  חסום ע"י  $f(n)$ , גודל הסרט של  $M'$  חסום ע"י

$$k \cdot f(n) = O(f(n)) .$$

העלות של הסריקה של  $M'$  לסרט שלה היא  $O(f(n))$  וזה עלות של צעד חישוב בריצה של  $M'$  על הקלט.

מכיוון ש-  $M$  רצה בזמן  $f(n)$ , זמן היצירה של  $M'$  חסום ע"י

$$f(n) \cdot O(f(n)) = O(f^2(n)) .$$

#### הגדרה 8.4

בהינתן מ"ט א"ד  $M$ , זמן הריצה של  $M$  על קלט  $w$ , היא פונקציה  $f(|w|)$  השווה למספר הצעדים בחישוב המקסימלי של  $M$  על  $w$ .

#### משפט 8.2

לכל מ"ט א"ד  $N$  הרצה בזמן  $f(n)$ , קיימת מ"ט דטרמיניסטית  $D$  השקולה ל-  $N$  ורצה בזמן  $2^{f(n)}$ .

**הוכחה:**

בהינתן מ"ט א"ד  $N$  הרצה בזמן  $f(n)$  מ"ט דטרמיניסטית  $D$  באותו אופן כמו בהוכחת השקילות במשפט 4.1.

כלומר, בהינתן קלט  $w$ ,  $D$  תסרו' את עץ החישוב של  $N$  ו-  $w$  לרוחב ותקבל כל אחד החישובים של  $N$  המסתיים

ב-  $q_{acc}$

בהינתן קלט  $w$  באורך  $n$ :

- כל מסלול בעץ החישוב של  $N$  על  $w$  חסום ע"י  $f(n)$ .
- מספר החישובים ש-  $D$  מבצעת חסום ע"י מספר הקודקודים בעץ החישוב של  $N$  ו-  $w$ .
- מכיוון שמספר הבנים של כל קודקוד בעץ החישוב חסום ע"י

$$C = 3|Q| \cdot |\Gamma|$$

מספר הקודקודים בעץ החישוב חסום ע"י

$$C^0 + C^2 + \dots C^{f(n)} \leq C^{f(n)+1} = C \cdot C^{f(n)}.$$

ולכן זמן הריצה של  $D$  חסום ע"י

$$f(n) \cdot C \cdot C^{f(n)} \leq C^{f(n)} \cdot C^{f(n)} = C^{2f(n)} = (C^2)^{f(n)} = 2^{C' \cdot f(n)} = 2^{O(f(n))}.$$

נתייחס כאן לשני החסמים הבאים:



(1) חסם פולינומיאלי הוא חסם מהצורה  $n^c$  עבור  $c > 0$  כלשהו.

(2) חסם אקספוננציאלי הוא חסם מהצורה  $2^{n^c}$  עבור  $c > 0$  כלשהו.

### הגדרה 8.5 בעיית הכרעה

בעיית הכרעה מוגדרת באופן הבא:

"בהינתן קלט כלשהו, האם הקלט מקיים תנאי מסוים"

### דוגמה 8.4

בהינתן מספר  $n$ , האם  $n$  ראשוני?

כל בעיית הכרעה ניתן לתאר כפשה שקולה:

$$L_{\text{prime}} = \{ \langle n \rangle \mid n \text{ ראשוני} \}.$$

### משפט 8.3

. שפה  $\equiv$  בעיית הכרעה

### הגדרה 8.6 אלגוריתם זמן פולינומיאלי

אומרים עי אלגוריתם  $A$  מכריעה בעייה בזמן פולינומיאלי אם קיים קבוע  $c > 0$  כך שזמן הריצה של  $A$  על כל קלט  $w$  חסום ע"י  $O(|w|^c)$ .

**משפט 8.4 התזה של צירץ' (Church Thesis)**

אם קיים אלגוריתם המכריעה בעייה בזמן פולינומיאלי, אז קיימת מ"ט דטרמיניסטית המכריעה את השפה השקולה לבעייה זו בזמן פולינומיאלי.

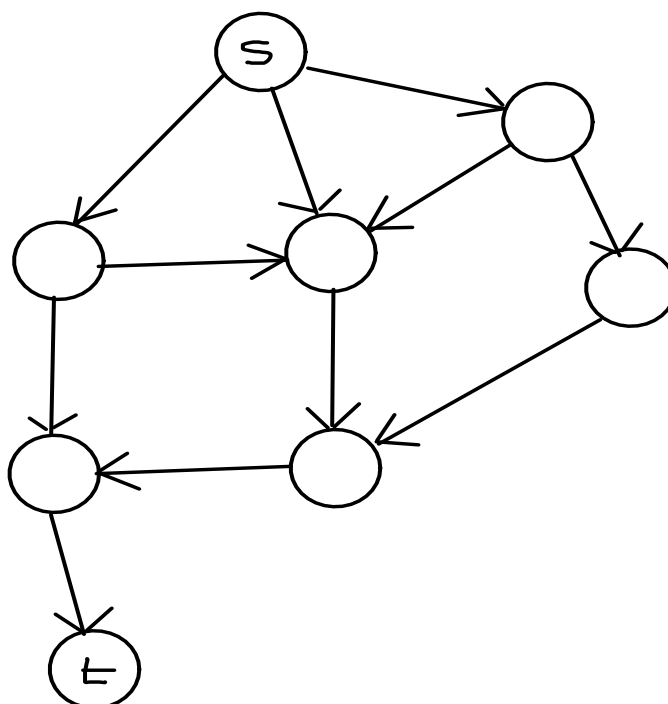
. מכונת טיורינג  $\equiv$  אלגוריתם מכריעה

**8.3 המחלרה  $P$** **הגדרה 8.7 המחלקה  $P$** 

אוסף כל הבעיות (השפות) שקיים עבורן אלגוריתם (מכונת טיורינג דטרמיניסטית) המכריעה אותן בזמן פולינומיאלי.

**דוגמה 8.5**

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \in P.$$

**דוגמה 8.6 בעיית המסלול בגרף מכוון**

קלט: גרף מכוון  $G = (V, E)$  ושני קודקודים  $s, t \in V$ .

פלט: האם קיים מסלול ב-  $G$  מ-  $s$  ל-  $t$ ?

$$PATH = \{ \langle G, s, t \rangle \mid t \text{ ל-} s \text{ ב-} G \}$$

## משפט 8.5

$$PATH \in P.$$

**הוכחה:** נבנה אלגוריתם  $A$  עבור הבעיה  $PATH$ .

$= A$  על קלט  $\langle G, s, t \rangle$ :

(1) צובע את  $s$ .

(2) מבצע  $|V| - 1$  פעמים:

• לכל צלע  $(u, v) \in E$ :

\* אם  $u$  צבוע  $\Leftarrow$  צבע את  $v$ .

(3) • אם  $t$  צבוע  $\Leftarrow$  החזיר "כן".

• אחרת  $\Leftarrow$  החזיר "לא".

זמן ריצה של האלגוריתם הוא  $O(|V| \cdot |E|)$  פולינומיאלי במספר הקודקודים  $|V|$ .

האם זה פולינומיאלי בגודל הקלט  $|\langle G \rangle|$ ?

איך נקודד את  $G$ ?

• נניח כי  $|V| = n$  ו-  $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

• נניח כי הצלעות נתונות ע"י מטריצה  $M$  בגודל  $n \times n$  כך ש-

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & (i, j) \in E \\ 0 & (i, j) \notin E \end{cases}.$$

• נניח כי מספרים מקודדים בבסיס ביניארי.

• אזי גודל הקידוד של  $G$  שווה  $n^2 + n \log_2 n$ , כלומר

$$|\langle G \rangle| = \Omega(|V|^2) \Rightarrow |V| = O(|\langle G \rangle|).$$

ולכן כל אלגוריתם הרץ בזמן פולינומיאלי במספר הקודקודים  $|V|$  ירוץ בזמן פולינומיאלי בגודל הקידוד  $|\langle G \rangle|$ .

■

ולכן  $A$  רץ בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט.

## הגדרה 8.8 מספרים זרים (Relatively prime)

שני מספרים  $x, y$  זרים אם המחלק המשותף הגדול ביותר, מסומן  $\gcd(x, y)$ , שווה 1.

## הגדרה 8.9 בעיית RelPrime

קלט: שני מספרים  $x$  ו-  $y$ .



פלט: האם  $x$  ו- $y$  זרים?

$$RelPrime = \{ \langle x, y \rangle \mid \gcd(x, y) = 1 \} .$$

## משפט 8.6

$$RelPrime \in P .$$

**הוכחה:** נבנה אלגוריתם  $A$  המכריעה את  $RelPrime$  בזמן פולינומיאלי.

האלגוריתם מבוסס על העובדה ש-

$$\gcd(x, y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, y \rangle \in RelPrime .$$

ולכן נשתמש באלגוריתם האוקלידי לחישוב  $\gcd$ :

$$\gcd(x, y) = \begin{cases} x & y = 0 \\ \gcd(y, x \bmod y) & y \neq 0 \end{cases} .$$

הוכחה: נסמן  $d = \gcd(x, y)$ . אזי קיימים שלמים  $s, t$  כך ש- $dx + ty = d$ . נסמן  $r = x \bmod y$ . אז  $x = qy + r$ . לכן

$$s(qy + r) + ty = d \quad \Rightarrow \quad sr + (t + sq)y = d \quad \Rightarrow \quad \gcd(x, y) = d = \gcd(y, r) .$$

לדוגמה:

$$\gcd(18, 32) = \gcd(32, 18) = \gcd(18, 14) = \gcd(14, 4) = \gcd(4, 2) = \gcd(2, 0) = 2 .$$

האלגוריתם האוקלידי:

על קלט  $x$  ו- $y$ :

(1) כל עוד  $y \neq 0$

$$\bullet \quad x \bmod y \rightarrow x$$

$$\bullet \quad \text{swap}(x, y)$$

(כלומר מחליפים בין  $x$  ו- $y$ ).

(2) מחזירים את  $x$ .

האלגוריתם  $A$  המכריע  $RelPrime$ :

$A = \text{על קלט } \langle x, y \rangle$

(1) מריץ את האלגוריתם האוקלידי על  $x$  ו- $y$ .

• אם האלגוריתם האוקלידי החזיר 1  $\Leftarrow$  מקבל.

• אחרת  $\Leftarrow$  דוחה.

נכונות האלגוריתם נובעת מנכונות האלגוריתם האוקלידי.

נוכיח כי  $A$  רץ בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט.

טענת עזר:

$$\text{אם } x > y \text{ אזי } x \bmod y < \frac{x}{2}.$$

הוכחה:

יש שתי אפשרויות:

$$\bullet \text{ אם } y \leq \frac{x}{2}$$

$$x \bmod y < y \leq \frac{x}{2}.$$

$$\bullet \text{ נניח ש- } \frac{x}{2} < y < x$$

$$\text{מכיוון ש- } x = qy + (x \bmod y) \text{ וגם } x < 2y \text{ אז בהכרח } q < 2 \text{ ולכן } x = y + (x \bmod y) \\ \text{ולכן } x - y = x \bmod y.$$

לפיכך

$$x \bmod y = x - y < \frac{x}{2}.$$

■

לפי טענת העזר, אחרי כל איטרציה  $x$  קטן בלפחות חצי.מכיוון שבכל איטרציה מחליפים בין  $x$  ו- $y$ , אחרי כל שתי איטרציות גם  $x$  וגם  $y$  קטנים בלפחות חצי.ולכן לאחר  $\log_2 x + \log_2 y$  איטרציות לפחות  $x$  או  $y$  שווים ל-0.ולכן מספר האיטרציות באלגוריתם האוקלידי חסום ע"י  $\log_2 x + \log_2 y$ , וזה בדיוק זמן הריצה של האלגוריתם  $A$ .ולכן  $A$  רץ בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט.

ולכן

$$RelPrime \in P.$$

■