שיעור 8
פולינום מקלורן וטיילור, כלל לופיטל

8.1 נוסחת טיילור ומקלורן

כדי למצוא ערכים של פונקציה מקרבים אותה באמצעות פולינום.

משפט 8.1 משפט טיילור

תהי f פונקציה מוגדרת בסביבה של נקודה a וגזירה לפחות $n+1$ פעמים בנקודה a. אז לכל x בסביבה לנקודה a קיימת נקודה c בין a ל- x כך ש-

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

הנוסחה זו נקראת נוסחת טיילור. האיבר הסופי

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

נקרא השארית. זאת אומרת

$$f(x) = \overbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}^{\text{פולינום טיילור מסדר } n} + R_n(x)$$

נוסחת מקלורן היא נוסחת טיילור עבור $a=0$.

משפט 8.2 מקלורן

תהי f פונקציה מוגדרת בסביבה של נקודה 0 וגזירה לפחות $n+1$ פעמים בנקודה 0. אז לכל x בסביבה לנקודה 0 קיימת נקודה c בין 0 ל- x כך ש-

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

כאשר

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \ .$$

8.2 דוגמאות

דוגמה 8.1

$f(x)=e^x$

נרשום פולינום מקלורן מסדר n:

$$f(0)=e^0=1$$

ו-

$$f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$$

לכן

$$f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=e^0=1\ ,$$

ונקבל

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\ .$$

דוגמה 8.2

$f(x)=\sin x$

נרשום פולינום מקלורן מסדר n:

$$f(0)=\sin(0)=0\ .$$

ו-

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\cos x\ , & f'(0)&=\cos(0)=1\ .\\
f''(x)&=-\sin x\ , & f''(0)&=-\sin(0)=0\ .\\
f'''(x)&=-\cos x\ , & f'''(0)&=-\cos(0)=-1\ .\\
f^{(4)}(x)&=\sin x\ , & f^{(4)}(0)&=\sin(0)=0\ .\\
f^{(5)}(x)&=\cos x\ , & f^{(5)}(0)&=\cos(0)=1\ .\\
f^{(6)}(x)&=-\sin x\ , & f^{(6)}(0)&=-\sin(0)=0\ .\\
f^{(7)}(x)&=-\cos x\ , & f^{(7)}(0)&=-\cos(0)=-1\ .
\end{aligned}$$

לכן

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\ .$$

דוגמה 8.3

$f(x)=\cos x$

נרשום פולינום מקלורן מסדר n:

$$f(0)=\cos(0)=1\ .$$

ו-

$$f'(x) = -\sin x \ , \quad f'(0) = -\sin(0) = 0 \ .$$
$$f''(x) = -\cos x \ , \quad f''(0) = -\cos(0) = -1 \ .$$
$$f^{(3)}(x) = \sin x \ , \qquad f^{(3)}(0) = \sin(0) = 0 \ .$$
$$f^{(4)}(x) = \cos x \ , \qquad f^{(4)}(0) = \cos(0) = 1 \ .$$
$$f^{(5)}(x) = -\sin x \ , \quad f^{(5)}(0) = -\sin(0) = 0 \ .$$
$$f^{(6)}(x) = -\cos x \ , \quad f^{(6)}(0) = -\cos(0) = -1 \ .$$
$$f^{(7)}(x) = \sin x \ , \qquad f^{(7)}(0) = \sin(0) = 0 \ .$$

לכן

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ .$$

דוגמה 8.4

רשמו את פולינום מקלורן מסדר 3 עבור הפונקציה $y = \arctan(x+1)$.

פתרון:

$$f(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \ .$$
$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2+1} \ , \qquad f'(0) = \frac{1}{2} \ .$$
$$f''(x) = \frac{-2(x+1)}{\left((x+1)^2+1\right)^2} \ , \quad f''(0) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \ .$$

.

$$P_2(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} \ .$$

■

דוגמה 8.5

ידוע שפולינום מקלורן מסדר 3 של פונקציה $f(x)$ הוא $x + 2x^2 - x^3$. חשב את $f''(0) \cdot f'''(0)$.

פתרון:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 = x + 2x^2 - x^3 \ .$$

לכן

$$f'(0) = 1 \ , \qquad \frac{f''(0)}{2!} = 2, \qquad \frac{f^{(3)}(0)}{3!} = -1$$

ז"א

$$f''(0)\cdot f'''(0)=4\cdot(-6)=-24\ .$$

■

דוגמה 8.6

רשמו פולינום מקלורן מסדר 2 עבור פונקציה $y(x)$ הנתונה בצורה סתומה:

$$xy+y^3=\cos(2x)\ .$$

פתרון:

נציב $x=0$:

$$y(0)^3=\cos(2\cdot 0)=1\qquad\Rightarrow\qquad y(0)=1\ .$$

נגזור את שני הצדדים:

$$y+xy'+3y^2\cdot y'=-2\sin(2x)$$

נציב $x=0$, $y(0)=1$:

$$1+3\cdot 1^2\cdot y'(0)=-2\sin(2\cdot 0)\qquad\Rightarrow\qquad 1+3\cdot y'(0)=0\qquad\Rightarrow\qquad y'(0)=-\frac{1}{3}\ .$$

נגזור את שני הצדדים פעם שניה:

$$y'+y'+xy''+6y\cdot(y')^2+3y^2\cdot y''=-4\cos(2x)$$

נציב $x=0$, $y(0)=1$ $y'(0)=-\frac{1}{3}$:

$$-\frac{2}{3}+6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2+3y''=-4\qquad\Rightarrow\qquad -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+3y''=-4\qquad\Rightarrow\qquad y''=-\frac{4}{3}\ .$$

$$P_2(x)=1-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3\cdot 2!}x^2=1-\frac{x}{3}-\frac{2}{3}x^2$$

■

דוגמה 8.7

רשמו פולינום מקלורן מסדר 2 עבור פונקציה $y(x)$ הנתונה בצורה פרמטרית:

$$x=\ln(t+2)\ ,\qquad y=t^2-3t\ .$$

פתרון:

$$x=0\qquad\Rightarrow\qquad \ln(t+2)=0\qquad\Rightarrow\qquad t=-1\ .$$

לכן

$$y=(-1)^2-3\cdot(-1)=4\ .$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2t-3}{\frac{1}{t+2}}=(2t-3)(t+2)=2t^2+t-6\ .$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{4t+1}{\frac{1}{t+2}} = (4t+1)(t+2) \ .$$
$$y''_x(t=-1) = -3 \ .$$

לכן

$$P_2(x) - 5 - 5x - \frac{3x^2}{2!} = 4 - 5x - \frac{3x^2}{2} \ .$$

■

8.3 כלל לופיטל

משפט 8.3 כלל לופיטל

יהיו $f(x)$, $g(x)$ פונקציות רציפות וגזירות בסביבה של נקודה a. אם התנאים הבאים מתקיימים:

.1

$$\lim_{x\to a} f(a) = 0 \ , \qquad \lim_{x\to a} g(a) = 0$$

או

$$\lim_{x\to a} f(a) = \pm\infty \ , \qquad \lim_{x\to a} g(a) = \pm\infty$$

.2 $g'(x) \neq 0$ בסביבה של a,

.3 הגבול $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים וסופי,

אז

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

8.4 דוגמאות

דוגמה 8.8

קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x\cdot \ln x}$$

פתרון:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x\cdot \ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)'}{(x\cdot \ln x)'}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{(1+\ln x)}$$

■

דוגמה 8.9

קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}$$

פתרון:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 6x)'}{(2x^2)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{4x}\ .\end{aligned}$$

<u>דרך 1</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{4x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(6\sin 6x)'}{(4x)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{36\cdot\cos 6x}{4}\\ &=\frac{36\cdot\cos 0}{4}\\ &=\frac{36}{4}\ .\end{aligned}$$

<u>דרך 2</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{4x} &= \lim_{x\to 0}\frac{6}{4}\cdot\frac{6\sin 6x}{6x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{36}{4}\cdot\frac{\sin 6x}{6x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{36}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}\\ &=\frac{36}{4}\ .\end{aligned}$$

■

דוגמה 8.10

קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan 3x}{\tan 5x}$$

פתרון:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan 3x}{\tan 5x} &= \lim_{x\to\pi/2}\frac{(\tan 3x)'}{(\tan 5x)'}\\
&= \lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}}\\
&=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x}\\
&=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{2}(1+\cos 10x)}{\frac{1}{2}(1+\cos 6x)}\\
&=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{(1+\cos 10x)}{(1+\cos 6x)}\\
&=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{(1+\cos 10x)'}{(1+\cos 6x)'}\\
&=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{-10\cdot\sin 10x}{-6\cdot\sin 6x}\\
&=\frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin 10x}{\sin 6x}\\
&=\frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{(\sin 10x)'}{(\sin 6x)'}\\
&=\frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{10\cdot\cos 10x}{6\cdot\cos 6x}\\
&=\frac{25}{9}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos 10x}{\cos 6x}\\
&=\frac{25}{9}\cdot\frac{\cos(5\pi)}{\cos(3\pi)}\\
&=\frac{25}{9}\cdot\frac{-1}{-1}\\
&=\frac{25}{9}\ .
\end{aligned}
$$

■

דוגמה 8.11

קבע את הערך של הגבול

$$
\lim_{x\to 2}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)(2-x)\right]
$$

פתרון:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)(2-x)\right] &= \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\cot\left(\frac{\pi}{4}x\right)} \\
&= \lim_{x\to 2}\frac{-1}{\frac{\pi}{4}\cdot\frac{-1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)}} \\
&= \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}} \\
&= \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}} \\
&= \frac{4}{\pi}\ .
\end{aligned}$$

■

דוגמה 8.12

קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

פתרון:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\cdot\ln x} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\cdot\ln x)'} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1-1/x}{\ln x+(x-1)/x} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(1-1/x)'}{(\ln x+(x-1)/x)'} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{-1/x^2}{1/x+1/x^2} \\
&= \frac{1}{2}\ .
\end{aligned}$$

■

דוגמה 8.13

קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2}$$

פתרון:

דרך 1

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0}\left[\Big(1+(\cos 2x-1)\Big)^{1/(\cos 2x-1)}\right]^{(\cos 2x-1)/x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} e^{(\cos 2x-1)/x^2}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x-1)/x^2}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}(-2\sin 2x)/2x}$$
$$= e^{-2} \ .$$

דרך 2

תהי $f(x) = (\cos 2x)^{1/x^2}$. אז

$$\ln f(x) = \frac{1}{x^2}\ln\cos(2x)$$

ו-

$$f(x) = e^{\ln f(x)} \ .$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos(2x)}{x^2}}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin(2x)}{2x\cos 2x}}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{(-2)}{\cos 2x}}$$
$$= e^{-2} \ .$$

■