

## שיעור 3

### הצפנים הבסיסיים

#### 1.3. מושג של קריפטו-מערכת

אליס וbob, לתקשר מעל גבי עורך תקשורת בלתי אמין (נאמר קו טלפון או דואר אלקטרוני), ומבקשים להנחות מסוימות. כמובן, הם מעריכים שום גורם עיוון, אוסקר, עשוי לזכות לשיחתם, לא יכול להבין את תוכנה.

שם כך משתמשים אליס וbob בצופן (cryptosystem). אליס וbob מסכימים ביניהם מראש על שיטה מסוימת להצפנה ועל מפתח, (key) שהוא ערך מסוימי (או כמה ערכים מסוימים).עת, נניח שאليس מעריכים מועוניית לשЛОח לבוב הودעה מסוימת. היא מצפינה את ההודעה בשיטה שהיא ובוב בחרו בה תוך כדי שימוש במפתח שהם קבעו. לאחר ההצפנה, ההודעה שניתנה את צורתה. להודעה המקוריות אנו קוראים טקסט גלי (plaintext) ואילו ההודעה לאחר ההצפנה נקראת טקסט מוצפן (ciphertext). אליס שולחת את הטקסט המוצפן לבוב. לבב מפענה אותו ומשחרר את הטקסט המקורי. אוסקר, המזמין לעורך, איננו ידע את ערכו של המפתח שנעשה בו שימוש (למרות ש, יתכן בהחלט ואף סביר להניח שהוא, ידוע מהו הצפן שהשתמשו בו אליס וbob).

#### הגדרה 3.1 צופן

צופן, (או לעיתים קריפטו-מערכת) מוצג באמצעות קבוצה  $(P, C, K, E, D)$ , כאשר:

(1)  $E$  מסמן קבוצה של טקסט גלי, plaintext,

(2)  $C$  מסמן קבוצה של טקסט מוצפן, ciphertext,

(3)  $K$  מסמן את מרחב המפתח, keyspace

(4) לכל  $k \in K$  יש שתי פונקציות: כלל מצפן  $e \in E$  וכלל מפענה  $d \in D$ :

$$e : P \rightarrow C , \quad d : C \rightarrow P ,$$

כך ש-

$$d(e(x)) = x$$

לכל איבר של מרחב הטקסט גלי  $P$

נניח כי ההודעה הנשלחה על ידי אליס לבוב היא הרץ האותיות

$$X = x_1 x_2 \cdots x_n$$

עבור  $1 \leq n$  טבעי, אשר כל אות הוא אחת של טקסט גלי  $x_i \in P$ ,  $i \leq n$ . כל  $x_i$  מוצפן באמצעות הכלל הצפנה  $e_k$  אשר נקבעת מראש על ידי המפתח  $k$  הנבחר. "אليس מחשבת

$$y_i = e_k(x_i)$$

$1 \leq i \leq n$  ומקבלת את רצף אותיות מוצפנות

$$Y = y_1 y_2 \cdots y_n .$$

הרץ זה נשלח מעל גבי העורך. כאשר לבב מקבל את  $Y$  הוא מפענה אותו באמצעות הפונקציה  $d_k$  וכך הוא מקבל הרץ אותיות של טקסט גלי המקורי

$$X = x_1 x_2 \cdots x_n .$$

פונקציה הצפנה  $e_k$  חד-חד ערכית. אחרת לא יהיה אפשרי לפענח את הרצף אותיות מוצפנות. הרי אם  $e_k$  לא חד-חד ערכית אז יכול להיות מצב ש-

$$y = e_k(x_1) = e_k(x_2)$$

כאשר  $x_2 \neq x_1$  ואז לבוב לא יוכל לדעת אם  $y$  הפענחה של  $x_1$  או  $x_2$ .

## 3.2 צופן ההזהה

### הגדרה 3.2 צופן ההזהה

יהיו  $0 \leq k \leq 25$ . עבור  $P = C = K = \mathbb{Z}_{26}$  נגדיר

$$e_k(x) = (x + k) \bmod 26 , \quad x \in \mathbb{Z}_{26}$$

$$d_k(y) = (y - k) \bmod 26 , \quad y \in \mathbb{Z}_{26} .$$

-1

צופן ההזהה מוגדר מעל  $\mathbb{Z}_{26}$  בגלל שיש 26 אותיות באלפבית.

במטרה להשתמש בצופן ההזהה כדי להצפין טקסט גלי, קודם כל נגדיר התאמה בין אותיות של האלפבית ומספרים של  $\mathbb{Z}_{26}$ :

$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$i$	$j$	$k$	$l$	$m$	$n$	$o$	$p$	$q$	$r$	$s$	$t$	$u$	$v$	$w$	$x$	$y$	$z$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

### דוגמה 3.1

נתון טקסט גלי

shamoon

נניח כי המפתח בשביל צופן ההזהה הוא  $k = 11$ . מצאו את הטקסט מוצפן.

פתרונות:

**שלב 1)** נמיר את הטקסט גלי לרצף מספרים לפי הסדר של האלפבית:

$x \in P$		s		h		a		m		o		o		n
$x \in \mathbb{Z}_{26}$		18		7		0		12		14		14		13

**שלב 2)** נוסיף 11 לכל ערך ולעבור את הערך המתקין לאיבר ב-  $\mathbb{Z}_{26}$ :

$x \in P$		s		h		a		m		o		o		n
$x \in \mathbb{Z}_{26}$		18		7		0		12		14		14		13
$y \in \mathbb{Z}_{26}$		3		18		11		23		25		25		24

**שלב 3)** נעביר את הרצץ מספרים לטקסט מוצפן:

$x \in P$	s	h	a	m	o	o	n
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	7	0	12	14	14	13
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	3	18	11	23	25	25	24
$y \in C$	D	S	L	X	Z	Z	Y

текסט מוצפן המתקבל הוא  
DSLXZZY

### 3.2 דוגמה

נתון הטקסט מוצפן על ידי צופן קיסר (צופן הזזה):

UJCNQO

מצאו את הטקסט גלי.

**פתרונות:**

נססה לפענח את הטקסט מוצפן בעזרת הצופן הזה עם המפתחות  $d_0 = 0, d_1 = 1, d_2 = 2, \dots$  בטור.

$y \in C$	U	J	C	N	Q	O
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	20	9	2	13	16	14
$y - d_1 \in \mathbb{Z}_{26}$	19	8	1	12	15	13
$x \in P$	t	i	b	m	p	n
$y - d_2 \in \mathbb{Z}_{26}$	18	7	0	11	14	12
$x \in P$	s	h	a	l	o	m

### 3.3 דוגמה

נתון הטקסט מוצפן הבא:

QRQXFJANHXD

מצאו את הטסט גלי

**פתרונות:**

נססה לפענח את הטקסט מוצפן בעזרת הצופן הזה עם המפתחות  $d_0, d_1, \dots$  בטור.

$d_0$  qrqxfjanhx  
 $d_1$  pqpwieizmgwc  
 $d_2$  opovdhylfvb  
 $d_3$  nonucgxkeua  
 $d_4$  mnmtbfwjdtz  
 $d_5$  lmlsaevicsy  
 $d_6$  klkrzduhbrx  
 $d_7$  jkjqyctgaqw  
 $d_8$  ijipxbssfzp  
 $d_9$  hihowareyou

בשלב זה מצאנו את הטקסט גליוי:  
hihowareyou .

המפתח הוא  $.k = 9$

### משפט 3.1 צופן חזזה ניתן לפענוח

צופן חזזה ניתן לפענוח. ככלומר, אם  $d_k(x) = x - k \bmod 26$  ו-  $e_k(x) = x + k \bmod 26$  אז

$$d_k(e_k(x)) = x \bmod 26 .$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} d_k(e_k(x)) &= (e_k(x) - k) \bmod 26 \\ &= ((x + k) \bmod 26 - k) \bmod 26 . \end{aligned}$$

נזכיר כי  $(x + k) \bmod 26 = x + k - 26q$  כאשר  $q$  הוא מספר שלם, ונקבל

$$\begin{aligned} d_k(e_k(x)) &= (x + k - 26q - k) \bmod 26 \\ &= (x - 26q) \bmod 26 \end{aligned}$$

מכיוון ש-  $q$  הוא מספר שלם אז  $x - 26q \equiv x \pmod{26}$  לכן לפי משפט :

$$d_k(e_k(x)) = (x - 26q) \bmod 26 = x \bmod 26 .$$

## 3.3 צופן האפייני

באופן כללי, בצופן האפייני הכלל מצפין נתון ע"י הפונקציה מצוראה

$$e(x) = (ax + b) \% 26 .$$

עבור  $a, b \in \mathbb{Z}_{26}$ . פונקציה מסווג זה נקראת **פונקציה אפינית**.

כדי שפונקציה יהיה אפשרי נדרש כי הפונקציה הזאת חד-חד-ערכית. במלילים אחרות, נדרש כי לביטוי (יחס שקולות)

$$ax + b \equiv y \pmod{26}$$

יש פתרון יחיד ל- $x$ .

למטה נוכיח כי אכן יש פתרון יחיד אם ורק אם  $\gcd(a, 26) = 1$

### משפט 3.2

לייחס שקולות

$$ax + b \equiv y \pmod{26}$$

יש פתרון יחיד בשביל  $x$  אם ורק אם  $\gcd(a, 26) = 1$

**הוכחה:**

כיוון  $\Leftarrow$

נניח ש-  $\gcd(a, 26) = 1$ . לכן לפי משפט בزو קיימים שלמים  $y, x$  כך ש-  $xa + y(26) = 1$ . נעביר אגפים ונקבל:  $xa \equiv 1 - y(26) \pmod{26}$  ולכן  $xa = 1 - y(26)$ .

כיוון  $\Rightarrow$

נניח ש-  $ax + (-q)(26) \equiv 1 \pmod{26}$ . אז קיימים שלם  $q$  עבורו  $ax = q(26) + 1$ . נעביר אגפים ונקבל:  $ax \equiv 1 - q(26) \pmod{26}$ . לכן קיימים שלמים  $x$  ו-  $y = -q$  כך ש:  $xa + y(26) = 1$ .

■

### דוגמה 3.4

בדקו אם הפונקציה

$$e(x) = 4x + 7 \pmod{26}$$

כלל מצפין תקין, כלומר בדקו אם קיים כלל מפענה.

**פתרון:**

$\gcd(4, 26) = 2$ , אז הפונקציה  $e(x) = 4x + 7 \pmod{26}$  אינה כלל מצפין תקין, בגלל שהיא לא חד-חד-ערכית ולכן לא יכולה להיות כלל מצפין.

למשל, הפונקציה הזאת מוחזרה הערכים הבאים בשביל  $x$  ו-  $x + 13$ :

$$e(x) = 4x + 7 \pmod{26}$$

בעוד

$$\begin{aligned}
 e(x+13) &= 4(x+13) + 7 \pmod{26} \\
 &= 4x + 52 + 7 \pmod{26} \\
 &= 4x + 2 \cdot 26 + 7 \pmod{26} \\
 &= 4x + 7 \pmod{26}
 \end{aligned}$$

ז"א  $e(x)$  מצפין את  $x$  ו-  $x+13$  לאותו אות מוצפן.

### הגדרה 3.3 צופן האפיני

יהי  $P = C = \mathbb{Z}_{26}$  ויהי

$$K = \{a, b \in \mathbb{Z}_{26} \mid \gcd(a, 26) = 1\}.$$

עבור  $k = (a, b) \in K$  נגידיר כלל המצפין

$$e_k(x) = (ax + b) \pmod{26},$$

ועבור  $y \in \mathbb{Z}_{26}$  נגידיר כלל המעננה

$$d_k(y) = a^{-1}(y - b) \pmod{26}.$$

### כלל 3.1

הפירוק לראשוניים של 26 הינו

$$26 = 2^1 13^2.$$

לכן האיברים  $a \in \mathbb{Z}_{26}$  עבורם  $\gcd(a, 26) = 1$  הם

$$a = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25.$$

ז"א יש בדיק 12 ערכי  $a$  עבורם  $\gcd(a, 26) = 1$ .

המספר איברים ב-  $\mathbb{Z}_{26}$  עבורם  $\gcd(a, 26) = 1$  נובע מנוסחת אוילר (הגדרה 2.4):

$$\phi(26) = (2^1 - 2^0)(13^1 - 13^0) = 12.$$

הפרמטר  $b$  מקבל כל איבר של  $\mathbb{Z}_{26}$ . לפיכך לצופן האפיני יש  $12 \times 26 = 312$  מפתחות אפשריות.

### דוגמה 3.5

נתון כלל מצפין של צופן אפיני בעל המפתח  $(a = 7, b = 3)$

**1)** רשמו את כלל המצפין.

**2)** רשמו את כלל המעננה.

**3)** בדקו כי התנאי

מתקיים.

**פתרונות:**

**1)** הכלל מצפין הוא

$$e_k(x) = 7x + 3 \pmod{26},$$

**2)** הכלל מפענץ הוא

$$\begin{aligned} d_k(y) &= 7^{-1}(y - 3) \pmod{26} \\ &= 15(y - 3) \pmod{26} \\ &= 15y - 45 \pmod{26} \\ &= 15y - 19 \\ &= 15y + 7. \end{aligned}$$

**3)** נבדוק כי הכלל מפענץ המתקיים מקיים  $x$ 

$$\begin{aligned} d_k(e_k(x)) &= d_k(7x + 3) \pmod{26} \\ &= 15(7x + 3) + 7 \pmod{26} \\ &= 105x + 45 + 7 \pmod{26} \\ &= 104x + x + 52 \pmod{26} \\ &= 4 \times 26x + x + 52 \pmod{26} \\ &= x. \end{aligned}$$

**דוגמה 3.6**

בעזרת הצופן של דוגמה 3.5:

**1)** מצאו את הטקסט מוצפן של הטקסט גליי hot .**2)** בדקו שהפעולה של הכלל מפענץ על הטקסט מוצפן מחזיר את טקסט גליי hot .**פתרונות:****סעיף 1)** נעביר את הواتיות של hot לערכים של  $\mathbb{Z}_{26}$ :

$x \in P$	h	o	t
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	7	14	19

נפעיל את הכלל מצפין על הערכים  $x$ :

$$\begin{aligned} e_k(7) &= 7 \times 7 + 3 \pmod{26} \\ &= 52 \pmod{26} \\ &= 2 \times 26 \pmod{26} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_k(14) &= 7 \times 14 + 3 \pmod{26} \\
 &= 101 \pmod{26} \\
 &= 3 \times 26 + 23 \pmod{26} \\
 &= 23 .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_k(19) &= 7 \times 19 + 3 \pmod{26} \\
 &= 136 \pmod{26} \\
 &= 5 \times 26 + 6 \pmod{26} \\
 &= 6 .
 \end{aligned}$$

מכאן נקבל

$x \in P$	h	o	t
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	7	14	19
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	0	23	6
$y \in C$	A	X	G

לכן הטקסט מוצפן המתכבר הוא  
 $AXG$

**סעיף 2)** הכלל מפענה הוא

$$d_k(y) = 15y + 7 .$$

נעביר את הواتיות של  $AXG$  לערכים של  $\mathbb{Z}_{26}$

$y \in P$	A	X	G
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	1	23	6

נפעיל את הכלל מפענה על הערכים  $y$ :

$$\begin{aligned}
 d_k(1) &= 15 \times 1 + 7 \pmod{26} \\
 &= 22 \pmod{26} \\
 &= 22 .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_k(23) &= 15 \times 23 + 7 \pmod{26} \\
 &= 352 \pmod{26} \\
 &= 338 + 14 \pmod{26} \\
 &= 13 \times 26 + 14 \pmod{26} \\
 &= 14 .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_k(6) &= 15 \times 6 + 7 \pmod{26} \\
 &= 97 \pmod{26} \\
 &= 3 \times 26 + 19 \pmod{26} \\
 &= 19 .
 \end{aligned}$$

$y \in C$	A	X	G
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	1	23	6
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	22	14	19
$x \in P$	h	o	t

לכן הטקסט גלי המתקבל הוא  
hot  
כנדרש.

### 3.7 דוגמה

נתון הטקסט מוצפן

ACSE

והמפתח  $(23, 2)$  של צופן אפייני. מצאו את הטקסט גלי.

**פתרון:**

$$\begin{aligned}
 d_k(y) &= 23^{-1}(y - 2) \pmod{26} \\
 &= 17(y - 2) = 17y - 34 \pmod{26} \\
 &= 17y - 26 - 8 \pmod{26} \\
 &= 17y - 8 \pmod{26} \\
 &= 17y + 18 .
 \end{aligned}$$

נעביר את הواتיות של ACSE לערכים של  $\mathbb{Z}_{26}$ :

$y \in C$	A	C	S	E
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	0	2	18	4

$$\begin{aligned}
 d_k(0) &= 18 \pmod{26} \\
 &= 18 .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_k(2) &= 17 \times 2 + 18 \pmod{26} \\
 &= 52 \pmod{26} \\
 &= 0 .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_k(18) &= 17 \times 18 + 18 \pmod{26} \\
 &= 324 \pmod{26} \\
 &= 12 \times 26 + 12 \pmod{26} \\
 &= 12 .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_k(4) &= 17 \times 4 + 18 \pmod{26} \\
 &= 86 \pmod{26} \\
 &= 3 \times 26 + 8 \pmod{26} \\
 &= 8 .
 \end{aligned}$$

$y \in C$	A	C	S	E
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	0	2	18	4
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	0	12	8
$x \in P$	s	a	m	i

## 3.4 צופן ויז'נר

צופן ההזזה וצופן ההחלפה דוגמאות של צופן מונואלפביתי: כל TWO אלפביתיות ב-  $P$  נתאים לטו אלפביתית יחיד ב-  $C$ . צופן ויז'נר הוא צופן פוליאלפביתי: אין מצפינים כל אות בנפרד, אלא בלוקים, או קבוצות של כמה אותיות באורך קבוע  $m$ .

### הגדרה 3.4 צופן ויז'נר (Vigenere Cipher)

יהי  $m$  מספר שלם חיובי.

$P = C = K = \mathbb{Z}_{26}^m$

עבור מפתח  $k = (k_1, k_2, \dots, k_m)$  נגידיר כלל מצפן

$$e_k(x_1, x_2, \dots, x_m) = (x_1 + k_1, x_2 + k_2, x_3 + k_3, \dots, x_m + k_m)$$

ונגידיר כלל מפענה

$$d_k(y_1, y_2, \dots, y_m) = (y_1 - k_1, y_2 - k_2, y_3 - k_3, \dots, y_m - k_m) ,$$

כאשר כל הפעולות נבצעות ב-  $\mathbb{Z}_{26}$ .

### דוגמה 3.8

נתון הטקסט גליי

string

והמפתח  $.k = \text{ AND }$ .

(1) מצאו את הכלל מצפן והכלל מפענה.

(2) מצאו את הטקסט מצפון.

(3) בדקו כי הכלל מפענה מחזיר את הטקסט גליי.

**פתרון:**

(1) והמפתח הוא

$\text{AND} .$

הערכים המתאימים ב-  $\mathbb{Z}_{26}$  הינם

$$k = (0, 13, 3) .$$

לכן  $m = 3$ .

הכלל מצפן הוא

$$e_k(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + 13, x_3 + 3) ,$$

והכלל מפענה הוא

$$d_k(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2 - 13, y_3 - 3) .$$

(2) נעביר את האותיות של הטקסט גליי לערכים של  $\mathbb{Z}_{26}$ :

$x \in P$	$s$	$t$	$r$	$i$	$n$	$g$
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	19	17	8	13	6

נפרק את הטבלה של התווים של הטקסט גליי יחד עם הערכים המתאימים של  $\mathbb{Z}_{26}$  לחת-קבוצות של 3 תווים:

$x \in P$	s	t	r	i	n	g
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	19	17	8	13	6

בכל תת-קבוצה, נattaים לכל TWO ערך של המפתח  $:k = (0, 13, 3)$

$x \in P$	s	t	r	i	n	g
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	19	17	8	13	6
$k_i \in k$	0	13	3	0	13	3

על כל שלישי  $(x_1, x_2, x_3)$  בבלוק אחד, נפעיל את כלל המיפוי

$$e_k(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + k_1, x_2 + k_2, x_3 + k_3) \mod 26 .$$

לדוגמא בבלוק הראשון נקבל

$$\begin{aligned} e_k(18, 19, 17) &= (18 + 0, 19 + 13, 17 + 3) \mod 26 \\ &= (18, 32, 20) \mod 26 \\ &= (18, 6, 20) . \end{aligned}$$

בלוק השני נקבל

$$\begin{aligned} e_k(8, 13, 6) &= (8 + 0, 13 + 13, 6 + 3) \mod 26 \\ &= (8, 26, 9) \mod 26 \\ &= (8, 0, 9) . \end{aligned}$$

$x \in P$	s	t	r	i	n	g
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	19	17	8	13	6
$k_i \in k$	0	13	3	0	13	3
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	6	20	8	0	9

נעבור את הערכים של הטקסט מוצפן:

$x \in P$	s	t	r	i	n	g
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	19	17	8	13	6
$k_i \in k$	0	13	3	0	13	3
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	18	6	20	8	0	9
$y \in C$	S	G	U	I	A	J

הтекסט מוצפן המתקבל הוא  
SGUIAJ .

3) נעביר את האותיות של הטקסט מוצפן לערכים של  $\mathbb{Z}_{26}$

$y \in C$	S	G	U	I	A	J
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	18	6	20	8	0	9

נפרק את הטבלה של התווים של הטקסט גליי יחד עם הערכים המתאימים של  $\mathbb{Z}_{26}$  לחת-קבוצות של 3 תווים:

$y \in C$	S	G	U	I	A	J
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	18	6	20	8	0	9

בכל תת-קובוצה, נתאים לכל TWO ערך של המפתח  $(k_1, k_2, k_3)$ :

$x \in P$	S	G	U	I	A	J
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	18	6	20	8	0	9
$k_i \in k$	0	13	3	0	13	3

על כל שלישייה  $(y_1, y_2, y_3)$  בבלוק אחד, נפעיל את כלל המיפוי

$$d_k(y_1, y_2, y_3) = (y_1 - k_1, y_2 - k_2, y_3 - k_3) \pmod{26}.$$

לדוגמה בבלוק הראשון נקבל

$$\begin{aligned} d_k(18, 6, 20) &= (18 - 0, 6 - 13, 20 - 3) \pmod{26} \\ &= (18, 19, 17). \end{aligned}$$

בלוק השני נקבל

$$\begin{aligned} d_k(8, 0, 9) &= (8 + 0, 0 - 13, 9 - 3) \pmod{26} \\ &= (8, 13, 6). \end{aligned}$$

$y \in C$	s	t	r	i	n	g
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	18	6	20	8	0	9
$k_i \in k$	0	13	3	0	13	3
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	19	17	8	13	6

נעבור את הערכים  $x \in \mathbb{Z}_{26}$  לאותיות של הטקסט גלי:

$y \in C$	S	G	U	I	A	J
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	18	6	20	8	0	9
$k_i \in k$	0	13	3	0	13	3
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	19	17	8	13	6
$x \in P$	s	t	r	i	n	g

הטקסט גלי המתקיים הוא  
string.



### 3.9 דוגמה

נניח כי  $m = 6$  והמפתח הוא

CIPHER.

הערכים המתאימים ב-  $\mathbb{Z}_{26}$  הינם  
 $k = (2, 8, 15, 7, 4, 17)$ .

נתון הטקסט גלי

thiscryptosystemisnotsecure.

מצאו את הטקסט מוצפן.

**פתרונות:**

שלב 1:

נעביר את האותיות של הטקסט גלי לערכים של  $\mathbb{Z}_{26}$ :

$x \in P$	t	h	i	s	c	r	y	p	t	o	s	y	s	t	e	m	i	s
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	19	7	8	18	2	17	24	15	19	14	18	24	18	19	4	12	8	18

$x \in P$	n	o	t	s	e	c	u	r	e
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	13	14	19	18	4	2	20	17	4

שלב 2:

נפרק את הטלבה של התווים של הטקסט גלי יחד עם הערכים המתאימים של  $\mathbb{Z}_{26}$  לחת-קבוצות של  $m = 6$  תווים:

$x \in P$	t	h	i	s	c	r	y	p	t	o	s	y	s	t	e	m	i	s
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	19	7	8	18	2	17	24	15	19	14	18	24	18	19	4	12	8	18

$x \in P$	n	o	t	s	e	c	u	r	e
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	13	14	19	18	4	2	20	17	4

שלב 3:

בכל תת-קבוצה, נתאים לכל TWO ערך של המפתח :

$x \in P$	t	h	i	s	c	r	y	p	t	o	s	y	s	t	e	m	i	s
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	19	7	8	18	2	17	24	15	19	14	18	24	18	19	4	12	8	18
$k_i \in k$	2	8	15	7	4	17	2	8	15	7	4	17	2	8	15	7	4	17

$x \in P$	n	o	t	s	e	c	u	r	e
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	13	14	19	18	4	2	20	17	4
$k_i \in k$	2	8	15	7	4	17	2	8	15

שלב 3:

על כל ששייה ( $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ ) בבלוק אחד, נפעיל את כלל המציגין

$$e_k(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_1 + k_1, x_2 + k_2, x_3 + k_3, x_4 + k_4, x_5 + k_5, x_6 + k_6) \pmod{26}.$$

לדוגמה בבלוק הראשון נקבל

$$\begin{aligned} e_k(19, 7, 8, 18, 2, 17) &= (19 + 2, 7 + 8, 8 + 15, 18 + 7, 2 + 4, 17 + 17) \pmod{26} \\ &= (21, 15, 23, 25, 6, 34) \pmod{26} \\ &= (21, 15, 23, 25, 6, 8). \end{aligned}$$

$x \in P$	t	h	i	s	c	r	y	p	t	o	s	y	s	t	e	m	i	s
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	19	7	8	18	2	17	24	15	19	14	18	24	18	19	4	12	8	18
$k_i \in k$	2	8	15	7	4	17	2	8	15	7	4	17	2	8	15	7	4	17
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	21	15	23	25	6	8	0	23	34	21	22	15	20	1	19	19	12	9

$x \in P$	n	o	t	s	e	c	u	r	e
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	13	14	19	18	4	2	20	17	4
$k_i \in k$	2	8	15	7	4	17	2	8	15
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	15	22	8	25	8	19	22	25	19

שלב 4:

נעביר את הערכים של  $y \in \mathbb{Z}_{26}$  לאותיות של הטקסט מוצפן:

$x \in P$	t	h	i	s	c	r	y	p	t	o	s	y	s	t	e	m	i	s
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	19	7	8	18	2	17	24	15	19	14	18	24	18	19	4	12	8	18
$k_i \in k$	2	8	15	7	4	17	2	8	15	7	4	17	2	8	15	7	4	17
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	21	15	23	25	6	8	0	23	8	21	22	15	20	1	19	19	12	9
$y \in \mathbb{C}$	V	P	X	Z	G	I	A	X	I	V	W	P	U	B	T	T	M	J

$x \in P$	n	o	t	s	e	c	u	r	e
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	13	14	19	18	4	2	20	17	4
$k_i \in k$	2	8	15	7	4	17	2	8	15
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	15	22	8	25	8	19	22	25	19
$y \in \mathbb{C}$	P	W	I	Z	I	T	W	Z	T

הtekst מוצפן המתקין הוא

VPXZGIAKIVWPUBTMJPWIZITWZT



## 3.5 צופן היל

### הגדרה 3.5 צופן היל

נניח כי  $m \geq 2$  מספר שלם.יהי  $P = C = \mathbb{Z}_{26}^m$  ויהי

$$k = \mathbb{Z}_{26}^{m \times m}$$

מטריצה בחוג  $\mathbb{Z}_{26}^m$  מסדר  $m \times m$ .עבור מפתח  $K \in K$  נגדיר כלל מצפין

$$e_k(x) = x \cdot k ,$$

ונגדיר כלל מפענה

$$d_k(y) = y \cdot k^{-1} ,$$

כאשר כל פעולות נצעות ב-  $\mathbb{Z}_{26}$ 

### הגדרה 3.6 המטריצה של קופקטורים

תהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

הקובקטור ה- $(j)$  של  $A$  מוגדר להיות הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת מ- $A$  ע"י מחיקת שורה  $i$  ועמודה  $j$ , כפול  $(-1)^{i+j}$ .

המטריצה של קובוקטורים של המטריצה  $A$  מוגדרת

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

כאשר  $C_{ij}$  הקובקטור ה- $(i,j)$  של  $A$ .

### הגדרה 3.7 המטריצה המצורפת

תהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . המטריצה המצורפת של  $A$  היא מטריצה מסדר  $n \times n$  שמסומנת  $\text{adj}(A)$  ומוגדרת

$$\text{adj}(A) = C^t$$

כאשר  $C$  המטריצה של קובוקטורים של  $A$ .

### משפט 3.3 נוסחת קיילי המילטון

נניח כי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  מטריצה ריבועית. אם  $A$  הפיכה, כלומר אם  $|A| \neq 0$  אז המטריצה ההופכית נתונה ע"י נוסחת קיילי המילטון:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A),$$

כאשר  $\text{adj}(A)$  המטריצה המצורפת של  $A$ .

### דוגמה 3.10

נתון רצף טקסט גלי

յולן

ונתון המפתח

$$k = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

של צופן היל. מצאו את הטקסט מוצפן.

**פתרונות:**  
שלב 1:

נעביר את האותיות של הטקסט גלי לערכים של  $\mathbb{Z}_{26}$ :

$x \in P$	$j$	$u$	$l$	$y$
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	9	20	11	24

שלב 2:

נפרק את הטבלה של התווים של הטקסט גלי יחד עם הערכים המתאימים של  $\mathbb{Z}_{26}$  לחת-קבוצות של  $2 = m$  תווים:

$x \in P$	j	u	l	y
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	9	20	11	24

שלב 3:

עבור כל תת-קובוצה המתקבל נחשב

$$\begin{aligned}(y_1 & y_2) = (x_1 & x_2) k \pmod{26} \\ &= (x_1 & x_2) \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \pmod{26}\end{aligned}$$

עבור התת-קובוצה הראשונה קיבל

$$\begin{aligned}(y_1 & y_2) &= (9 & 20) \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \pmod{26} \\ &= (99 + 60 & 72 + 140) \pmod{26} \\ &= (159 & 212) \pmod{26} \\ &= (3 & 4)\end{aligned}$$

עבור התת-קובוצה השנייה קיבל

$$\begin{aligned}(y_1 & y_2) &= (11 & 24) \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \pmod{26} \\ &= (121 + 72 & 88 + 168) \pmod{26} \\ &= (193 & 256) \pmod{26} \\ &= (11 & 22)\end{aligned}$$

$x \in P$	j	u	l	y
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	9	20	11	24
$x \cdot k \in \mathbb{Z}_{26}$	3	4	11	22

שלב 4:נעביר את הערכים  $y \in \mathbb{Z}_{26}$  לאותיות של הטקסט מוצפן:

$x \in P$	j	u	l	y
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	9	20	11	24
$x \cdot k \in \mathbb{Z}_{26}$	3	4	11	22
$y \in C$	D	E	L	W

הטקסט מוצפן המתקבל הוא

DELW

**דוגמה 3.11**

נתון רצף טקסט מוצפן

DELW

ונתנו המפתח

$$k = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

של צופן היל. מצאו את הטקסט גלי.

**פתרונות:**שלב 0:נחשב את ההופכית  $:k^{-1}$ 

$$|k| = 11 \cdot 7 - 8 \cdot 3 \pmod{26} = 77 - 24 \pmod{26} = 53 \pmod{26} = 1 .$$

לכן המטריצה הפיכה ב-  $\mathbb{Z}_{26}$   $\gcd(1, 26) = 1$ 

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{11} = (-1)^{1+1}(7) = 7 .$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{12} = (-1)^{2+1}(3) = -3 .$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{21} = (-1)^{1+2}(8) = -8 .$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{22} = (-1)^{2+2}(11) = 11 .$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = C^t = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} \pmod{26} = \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 23 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{2 \times 2} .$$

$$A^{-1} = |A|^{-1} \text{adj}(A) .$$

$$|A|^{-1} = 1^{-1} = 1 \in \mathbb{Z}_{26}$$

לפיכך

$$A^{-1} = |A|^{-1} \text{adj}(A) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 23 & 11 \end{pmatrix}$$

שלב 1:נעביר את האותיות של הטקסט גלי לערכים של  $\mathbb{Z}_{26}$ :

$y \in C$		D		E		L		W
$y \in \mathbb{Z}_{26}$		3		4		11		22

שלב 2:נפרק את הtablלה של התווים של הטקסט מוצפן יחד עם הערכים המתאים של  $\mathbb{Z}_{26}$  לחת-קבוצות של 2 תווים:

$y \in C$	D	E	L	W
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	3	4	11	22

שלב 3:

עבור כל תת-קובוצה המתקבל נחשב

$$\begin{aligned} (x_1 & x_2) = (y_1 & y_2) k^{-1} \pmod{26} \\ &= (y_1 & y_2) \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 23 & 11 \end{pmatrix} \pmod{26} \end{aligned}$$

עבור התת-קובוצה הראשונה נקבל

$$\begin{aligned} (x_1 & x_2) &= (3 & 4) \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 23 & 11 \end{pmatrix} \pmod{26} \\ &= (21 + 92 & 54 + 44) \pmod{26} \\ &= (113 & 98) \pmod{26} \\ &= (9 & 20) \end{aligned}$$

עבור התת-קובוצה השנייה נקבל

$$\begin{aligned} (x_1 & x_2) &= (11 & 22) \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 23 & 11 \end{pmatrix} \pmod{26} \\ &= (77 + 468 & 198 + 242) \pmod{26} \\ &= (583 & 440) \pmod{26} \\ &= (11 & 24) \end{aligned}$$

$y \in C$	D	E	L	W
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	3	4	11	22
$y \cdot k^{-1} \in \mathbb{Z}_{26}$	9	20	11	24

שלב 5:נעבור את הערכים  $y \in \mathbb{Z}_{26}$  לאותיות של הטקסט מוצפן:

$y \in C$	D	E	L	W
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	3	4	11	22
$y \cdot k^{-1} \in \mathbb{Z}_{26}$	9	20	11	24
$x \in P$	j	u	l	y

הtekst גליי המתקבל הוא

july

**דוגמה 3.12**

נתון רצף טקסט מוצפן

ונתון המפתח

$$k = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

של צופן היל. מצאו את הטקסט גליי.

**פתרונות:**שלב 0:נחשב את ההופכית  $:k^{-1}$ 

$$\begin{aligned} |k| &= 3 \cdot (13 \cdot 10 - 11 \cdot 8) - 2 \cdot (5 \cdot 13 - 8 \cdot 6) + 5 \cdot (5 \cdot 11 - 6 \cdot 10) \pmod{26} \\ &= 3 \cdot 42 - 2 \cdot 17 + 5 \cdot (-5) \pmod{26} \\ &= 126 - 34 - 25 \pmod{26} \\ &= 67 \pmod{26} \\ &= 15. \end{aligned}$$

לכן המטריצה הפיכה ב-  $\mathbb{Z}_{26}$  שכן  $\gcd(1, 26) = 1$ 

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 11 & 13 \end{vmatrix} = 42 \pmod{26} = 16.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 13 \end{vmatrix} = -17 \pmod{26} = 9.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = -5 \pmod{26} = 21.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 11 & 13 \end{vmatrix} = -29 \pmod{26} = 23.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 13 \end{vmatrix} = 9.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = -21 \pmod{26} = 5.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = -34 \pmod{26} = 18.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 20 .$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 9 & 21 \\ 3 & 9 & 5 \\ 18 & 1 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = C^t = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 18 \\ 9 & 9 & 1 \\ 21 & 5 & 20 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3 \times 3} .$$

$$k^{-1} = |k|^{-1} \text{adj}(k) .$$

$$|k|^{-1} = 15^{-1} = 7 \in \mathbb{Z}_{26}$$

לפיכך

$$\begin{aligned} k^{-1} &= |k|^{-1} \text{adj}(k) \\ &= 7 \cdot \begin{pmatrix} 16 & 3 & 18 \\ 9 & 9 & 1 \\ 21 & 5 & 20 \end{pmatrix} \pmod{26} \\ &= \begin{pmatrix} 112 & 21 & 126 \\ 63 & 63 & 7 \\ 147 & 35 & 140 \end{pmatrix} \pmod{26} \end{aligned}$$

$$112 \% 26 = 112 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{112}{26} \right\rfloor = 8 .$$

$$63 \% 26 = 63 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{63}{26} \right\rfloor = 11 .$$

$$147 \% 26 = 147 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{147}{26} \right\rfloor = 17 .$$

$$35 \% 26 = 35 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{35}{26} \right\rfloor = 9 .$$

$$140 \% 26 = 140 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{140}{26} \right\rfloor = 10 .$$

לפיכך

$$k^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 21 & 22 \\ 11 & 11 & 7 \\ 17 & 9 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3 \times 3} .$$

שלב 1:

נעביר את האותיות של הטקסט גלי לערכים של  $\mathbb{Z}_{26}$ 

$y \in C$	P	G	R	F	G	G	C	S	Y
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	15	6	17	5	6	6	2	18	24

שלב 2:

נפרק את הtablה של התווים של הטקסט מוצפן יחד עם הערכים המתאימים של  $\mathbb{Z}_{26}$  למת-קבוצות של 3 תווים:

$y \in C$	P	G	R	F	G	G	C	S	Y
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	15	6	17	5	6	6	2	18	24

שלב 3:

עבור כל מת-קבוצה המתקבל נחשב

$$\begin{aligned} (x_1 & x_2 & x_3) = (y_1 & y_2 & y_3) k^{-1} \pmod{26} \\ &= (y_1 & y_2 & y_3) \begin{pmatrix} 8 & 21 & 22 \\ 11 & 11 & 7 \\ 17 & 9 & 10 \end{pmatrix} \pmod{26} \end{aligned}$$

עבור התת-קבוצה הראשונה קיבל

$$\begin{aligned} (x_1 & x_2 & x_3) = (15 & 6 & 17) \begin{pmatrix} 8 & 21 & 22 \\ 11 & 11 & 7 \\ 17 & 9 & 10 \end{pmatrix} \pmod{26} \\ &= (475 & 534 & 542) \pmod{26} \\ &= (7 & 14 & 22) \end{aligned}$$

עבור התת-קבוצה השנייה קיבל

$$\begin{aligned} (x_1 & x_2 & x_3) = (5 & 6 & 6) \begin{pmatrix} 8 & 21 & 22 \\ 11 & 11 & 7 \\ 17 & 9 & 10 \end{pmatrix} \pmod{26} \\ &= (208 & 225 & 212) \pmod{26} \\ &= (0 & 17 & 4) \end{aligned}$$

עבור התת-קבוצה השלישי קיבל

$$\begin{aligned} (x_1 & x_2 & x_3) = (2 & 18 & 24) \begin{pmatrix} 8 & 21 & 22 \\ 11 & 11 & 7 \\ 17 & 9 & 10 \end{pmatrix} \pmod{26} \\ &= (622 & 456 & 410) \pmod{26} \\ &= (24 & 14 & 20) \end{aligned}$$

$y \in C$	P	G	R	F	G	G	C	S	Y
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	15	6	17	5	6	6	2	18	24
$y \cdot k^{-1} \in \mathbb{Z}_{26}$	7	14	22	0	17	4	24	14	20

שלב 5:

עבור את הערכים  $y \in \mathbb{Z}_{26}$  לאותיות של הטקסט מוצפן: