

חדו"א 2 למדמ"ח

מועד א'

ד"ר מרינה ברשדסקי ד"ר ירמיהו מילר ד"ר זהבה צבי

תשפ"ה סמסטר ב'

בהצלחה!

השאלון מכיל 6 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

סדר התשובות הינו חשוב. הסבירו היטב את מהלך הפתרון.

תשובה ללא הסבר (גם נכונה) לא תתקבל.

חומר עזר:

- מחשבון (ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן).
- דפי הנוסחאות המצורפים לשאלון המבחן.

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- שאלות 1,2,3 - יש לענות על כל השאלות.
- שאלות 4,5,6 - יש לענות שתי שאלות בלבד מתוך שלוש.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה אחת בלבד מתוך שתיים.

שאלות 3 – 1 חובה

שאלה 1 (24 נקודות) נתונה הפונקציה $z(x, y) = xye^{-(x+y)}$.

(א) (12 נק') מצאו אקסטרמומים לוקליים של פונקציה זו ובררו את סוגן.

(ב) (12 נק') בתחום החסום ע"י משולש עם קודקודים $A(1, -1)$, $B(1, 0)$, $C(0, 0)$ מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה הנתונה.

שאלה 2 (18 נקודות)

(א) (9 נק') שרטטו את תחום האינטגרציה, שנו את סדר האינטגרציה באינטגרל $\int_{-3}^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 dy e^{(x^2+y^2)}$.

(ב) (9 נק') חשבו בעזרת אינטגרל כפול את נפח הגוף החסום ע"י המשטחים: חשבו את הנפח הגוף המוגבל על ידי המשטחים הנתונים וציירו את הגוף במערכת שיעורים מרחבית xyz וצייר בנפרד גם את היטלו של הגוף על המישור xy .

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z - x = 0.$$

שאלה 3 (18 נקודות) הראו שסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול סופי ומצא את הגבול

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{\ln a_n}, \quad n \geq 1.$$

רמז: ראשית בדקו תחומי עליה וירידה, ונקודות קיצון לפונקציה תואמת $y = \frac{x}{\ln x}$.

תענו על 2 מתוך 3 השאלות 4 – 6

שאלה 4 (12 נקודות)

(א) (6 נק') מצאו את המרחק בין הישרים:

$$l_1: \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \quad l_2: \quad \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{2}.$$

האם הישרים האלה הם נחתכים, מצטלבים, מקבילים או מתלכדים?

(ב) (6 נק') הוכיחו או הפריכו שסדרה $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות.

שאלה 5 (12 נקודות) תהייה $f(x, y, z) = xz - \frac{y}{z} - z + 2$ ו- $P(1, 0, -1)$.

(א) (6 נק') רשמו את משוואת המישור המשיק למשטח הרמה של הפונקציה $f(x, y, z)$ אשר עובר דרך הנקודה P .

(ב) (6 נק') תנו דוגמה של וקטור \vec{a} כך שיתקיים:

$$\frac{df(P)}{d\vec{a}} = 0.$$

נמקו את התשובה.

שאלה 6 (12 נקודות)

(א) (6 נק') חשבו את הגבול

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{xy + (x + y)^2}$$

או הוכיחו שהוא אינו קיים.

(ב) (6 נק') הוכיחו שטור הפונקציות

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sin x} \right)^n$$

מתבדר לכל x ממשי.

שאלה 7 (16 נקודות) יהי

$$M(t) = A + t\vec{a}$$

ישר במרחב x, y, z כאשר A נקודה על הישר ו- \vec{a} הווקטור הכיוון של הישר. תהי $B(x_0, y_0, z_0)$ נקודה כלשהי שלא נמצאת על הישר. הוכיחו כי המרחק של הנקודה מהישר $M(t)$ נתון על ידי הנוסחה

$$d = \frac{|\vec{AB} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

שאלה 8 (16 נקודות) הוכח ש-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

פתרונות

שאלה 1

(א) (12 נק')

לפי התנאי הכרחי לנקודות קיצון

$$\begin{cases} f_x = ye^{-(x+y)} - xye^{-(x+y)} = 0, \rightarrow y(1-x) = 0 \\ f_y = xe^{-(x+y)} - xye^{-(x+y)} = 0, \rightarrow x(1-y) = 0 \end{cases}$$

נקבל את נקודות קריטיות $(0,0)$, $(1,1)$. נחשב את הנגזרות מסדר השני :

$$f''_{xx} = (xy - 2y)e^{-(x+y)}$$

$$f''_{yy} = (xy - 2x)e^{-(x+y)}$$

$$f''_{xy} = (xy - x - y + 1)e^{-(x+y)}$$

עבור הנקודות קריטיות $P_1(0,0)$:

$$f''_{xx}(0,0) = 0, \quad f''_{yy}(0,0) = 0, \quad f''_{xy}(0,0) = 1, \quad \Delta(0,0) = -1 < 0.$$

לכן הנקודה $P_1(0,0)$ היא נקודת אוכף.עבור הנקודות קריטיות $P_2(1,1)$:

$$f''_{xx}(1,1) = -1 < 0, \quad \Delta(1,1) = 1 - 0 = 1 > 0.$$

לכן הנקודה $P_2(1,1)$ היא נקודת מקסימום. $\max f = f(1,1) = e^{-2}$.

(ב) (12 נק')

ראשית נבנה את המשוואות הישרים העוברים דרך כל זוג של נקודות A, B, C .

AB	$x = 1$
AC	$y = -x$
BC	$y = 0$

נציב כל אחד מהם לפונקציה נתונה: $z(x,y) = xye^{-(x+y)}$.על השפה AB

$$z(1,y) = ye^{-(1+y)}$$

$$z'_y(1,y) = e^{-(1+y)} - ye^{-(1+y)} = e^{-(1+y)}(1-y) = 0, \rightarrow y = 0, x = 1$$

לכן קיבלנו את הנקודה $(1,0)$, אשר היא הנקודה B .

על השפה AC

$$z(x, -x) = -x^2 e^{-(x-x)} = -x^2$$

$$z'_x(x, -x) = -2x = 0, \rightarrow x = 0, y = -x = 0$$

לכן קיבלנו את הנקודה $(0, 0)$, אשר היא הנקודה C .

על השפה BC

$$z(x, 0) = -x \cdot 0 \cdot e^{-(x+0)} = 0$$

זוהי פונקציה קבועה עבורה קיימת נקודת קיצון.

נקודה	ערך של הפונקציה
$P_1(0, 0)$	0
$P_2(1, 1)$	$\frac{1}{e^2}$
$A(1, -1)$	-1
$B(1, 0)$	0
$C(0, 0)$	0

מכאן:

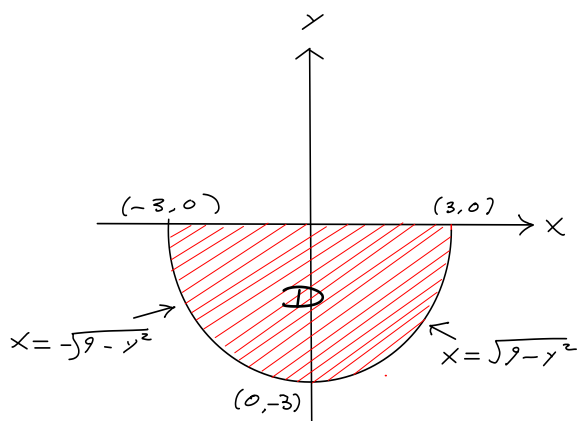
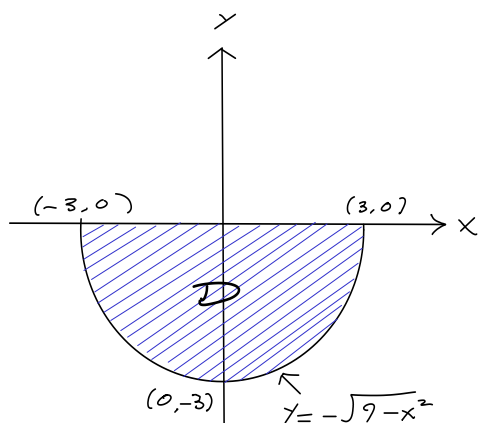
$$\max_D z(x, y) = \frac{1}{e^2}, \quad \operatorname{argmax}_D z(x, y) = P_2(1, 1).$$

$$\min_D z(x, y) = -1, \quad \operatorname{argmax}_D z(x, y) = A(1, -1).$$

שאלה 2 (18 נקודות)

(א) (9 נק')

שרטוט של התחום



התחום של האינטגרל הנתון הוא

$$D = \{(x, y) \mid -\sqrt{9-x^2} \leq y \leq 0, -3 \leq x \leq 3\}.$$

אם נהפוך את הסדר של האינטגרלים (כלומר האינטגרל של מעל x ראשון והאינטגרל מעל y שני) נצטרך לרשום את התחום בצורה הבאה:

$$D = \{(x, y) \mid -\sqrt{9-y^2} \leq x \leq \sqrt{9-y^2}, -3 \leq y \leq 0\}.$$

שינוי סדר של האינטגרל:

$$\int_{-3}^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 dy e^{(x^2+y^2)} = \int_{-3}^0 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} dx e^{(x^2+y^2)}$$

חישוב של האינטגרל:

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 dy e^{(x^2+y^2)} &= \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_0^3 e^{r^2} r dr \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{r=3} e^t \frac{t'}{2} dr \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_{t=0}^{t=9} e^t dt \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} d\theta [e^t]_0^9 \\ &= \pi (e^9 - 1). \end{aligned}$$

(ב) (9 נק')

$$V = \iint_D x \, dx \, dy$$

במונחי משתנים (r, θ) התחום D הוא (r, θ) :

$$D = \left\{ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1 \right\}$$

במונחי משתנים (r, θ) האינטגרל הכפול הוא

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 dr \, r \cdot r \cos \theta &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos \theta \int_0^1 dr \, r^2 \\ &= [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$V = \frac{2}{3} \text{ לכן}$$

שאלה 3 (18 נקודות) ראשית נשים לב שהסדרה מוגדרת רק אם $a_n > 0$ ו- $a_n \neq 1 \Leftrightarrow \ln a_n \neq 0$.

מונוטוניות

נסתכל על שלוש מקרים: $a_n > e$, $a_n = e$ ו- $a_n < e$.

• לכל $a_n > e$ מתקיים $\ln a_n > 1$ אז $\frac{1}{\ln a_n} < 1$ ולכן

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\ln a_n} < a_n.$$

מכאן לכל $a_n > e$ הסדרה יורדת מונוטונית.

• אם $a_n = e$ אזי $a_{n+1} = \frac{e}{\ln e} = 1$. לכן e הוא נקודת שבת של הסדרה.

• אם $0 < a_n < e$ מתקיים $0 < \ln a_n < 1$ אז $\frac{1}{\ln a_n} > 1$ ולכן

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\ln a_n} < a_n.$$

מכאן לכל $a_n < e$ הסדרה עולה מונוטונית.

חסימות

- הוכחנו למעלה כי $a_n \geq e$ לכל n .
- בנוסף האיבר ההתחלתי הוא $a_1 = 5$ והסדרה יורדת לכן בהכרח $a_n \leq 5$ לכל $n \geq 1$. ז"א לכל $n \geq 1$ מתקיים:

$$e \leq a_n \leq 5$$

ולכן הסדרה חסומה.

הגבול

הסדרה מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת. נסמן:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}.$$

ואז נקח את הגבול של הסדרה $a_{n+1} = \frac{a_n}{\ln a_n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\ln a_n} \Rightarrow L = \frac{L}{\ln L} \Rightarrow L(\ln L - 1) = 0 \Rightarrow L = e.$$

הערה: אי אפשר להסיק כי $L = 0$ כי הערך הזה לא בתחום ההגדרה של $\ln(L)$.

שאלה 4 (12 נקודות)

(א) (6 נק') הוקטור הכיוון של הישר l_1 הוא

$$\vec{a} = (2, -1, 1) \times (1, 1, -1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k} = (0, 3, 3) = 3(0, 1, 1)$$

הוקטור הכיוון של הישר l_2 הוא

$$\vec{b} = (1, 2, 2).$$

נמצא נקודה על הישר l_1 על ידי להציב $z = 0$ ולפתור את המערכת:

$$\left. \begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2x - (2 - x) = 1 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1.$$

לכן נקודה על הישר l_1 היא $M(1, 1, 0)$.

נקודה על הישר l_2 היא $N(1, -1, -2)$.

כעת נציב את \vec{a}, \vec{b}, M, N בהנוסחה למרחק בין שני ישרים: $d = \frac{\vec{MN} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$ ראשית נחשב את $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} = (0, 1, -1) .$$

הוקטור \vec{MN} הוא $\vec{MN} = (0, -2, -2)$ לכן

$$d = \frac{(0, -2, -2) \cdot (0, 1, -1)}{|(0, 1, -1)|} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0 .$$

ז"א הישרים נחתכים.

(ב) (6 נק') הטענה לא נכונה.

שאלה 5 (12 נקודות)

(א) (6 נק') נתון משטח רמה $f(x, y, z) = C$ משוואת המישור המשיק למשטח בנקודה $P(x_0, y_0, z_0)$ נתונה על ידי הנוסחה

$$f'_x(P)(x - x_0) + f'_y(P)(y - y_0) + f'_z(P)(z - z_0) .$$

הרי

$$f'_x = z \Rightarrow f'_x(P) = -1 ,$$

$$f'_y = \frac{-1}{z} \Rightarrow f'_y(P) = 1 ,$$

$$f'_z = x + \frac{y}{z^2} - 1 \Rightarrow f'_z(P) = 0 .$$

מכאן המשוואת המישור המשיק למשטח בנקודה P היא

$$-(x - 1) + y = 0 \Rightarrow -x + y + 1 = 0 .$$

(ב) (6 נק') הגראדיאנט הוא $\nabla f(P) = (f'_x(P), f'_y(P), f'_z(P)) = (-1, 1, 0)$ מכאן:

$$\frac{df(P)}{d\vec{a}} = \frac{\nabla f(P) \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(-1, 1, 0) \cdot (a_x, a_y, a_z)}{|\vec{a}|} = \frac{-a_x + a_y}{|\vec{a}|}$$

לכן כל וקטור מהצורה $\vec{a} = (a_x, a_x, a_z)$ כך ש- $|\vec{a}| \neq 0$ מקיים את התנאי $\frac{df(P)}{d\vec{a}} = 0$. לדוגמה: $\vec{a} = (1, 1, 2)$

שאלה 6 (12 נקודות)

(א) (6 נק') אם הערך של הגבול תלוי על הכיוון שעליו אנחנו מחשבים את הגבול אז הגבול לא קיים. אנחנו נחשב את הגבול על הישר $y = 2x$ ואחר כך על הישר $y = 3x$ ואז נשווה בין התשובות.

ראשית נחשב את הגבול על הישר $y = 2x$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{xy + (x+y)^2} \stackrel{y=2x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x^2}{2x^2 + (3x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x^2}{11x^2} = \frac{-3}{11}.$$

כעת נחשב את הגבול על הישר $y = 3x$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{xy + (x+y)^2} \stackrel{y=3x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8x^2}{3x^2 + (4x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8x^2}{19x^2} = \frac{-8}{19}.$$

ז"א עבור שני כיוונים שונים קיבלנו שתי תשובות שונות לאותו גבול ולכן הגבול לא קיים.

(ב) (6 נק') ניתן לרשום את הטור בשאלה $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sin x} \right)^n$ בצורת טור הנדסי $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ כאשר לכל x ממשי,

האיבר ההתחלתי הוא $a = \frac{1}{\sin x}$ והמנת הטור הוא $q = \frac{1}{\sin x}$. טור הנדסי מתכנס אם $|q| < 1$ ומתבדר אם $|q| \geq 1$. בדוגמה זו: $|q| = \frac{1}{|\sin x|}$. הפונקציה $\sin x$ היא פונקציה חסומה בין -1 ו- 1 . כלומר:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\sin x| \leq 1.$$

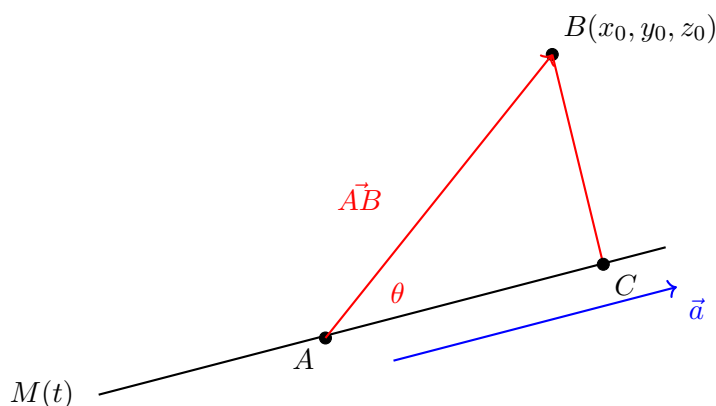
מכאן

$$\frac{1}{|\sin x|} \geq 1.$$

לכן לכל x ממשי, המנת הטור $|q| \geq 1$ ולכן לא קיים x ממשי עבורו הטור מתכנס, ולפיכך הטור מתבדר לכל x ממשי.

שאלה 7 (16 נקודות)

נסמן את הישר העובר דרך הנקודה A ומקביל לווקטור \vec{a} ב- $M(t)$. תהי C נקודה על הישר כך שהישר BC הוא מאונך לישר $M(t)$ כמתואר בתרשים למטה. אזי הנקודה C היא הנקודה על הישר $M(t)$ הקרובה ביותר לנקודה B . המרחק של B מהישר $M(t)$ מוגדר להיות המרחק מהנקודה B לנקודה על הישר $M(t)$ הקרובה ביותר לנקודה B , דהיינו הנקודה C . ז"א המרחק הוא המרחק BC .



מכיוון שהשלוש נקודות ABC יוצרות משולש זווית ישירה, אז מתקיים:

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \sin \theta \quad \Rightarrow \quad |BC| = |AB| \sin \theta . \quad (*)$$

אם \vec{a} הוא הווקטור הכיוון של הישר $M(t)$ אז מתקיים:

$$\vec{AB} \times \vec{a} = |AB||a| \sin \theta \quad (\#)$$

אם אנחנו נציב $|AB| \sin \theta = |BC|$ ממשוואה (*) הרי נקבל

$$\vec{AB} \times \vec{a} = |BC||a|$$

ולכן

$$|BC| = \frac{|\vec{AB} \times \vec{a}|}{|a|} .$$

לכן המרחק, $|BC|$ של הנקודה B מהישר הוא

$$d = \frac{|\vec{AB} \times \vec{a}|}{|a|} .$$

שאלה 8 (16 נקודות)

נוכיח את הטענה עבור שלוש מקרים: $0 < a < 1$, $a = 1$ ו- $a > 1$.

• מקרה $a = 1$ באופן טריוויאלי מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^{1/n} = 1^{1/\infty} = 1^0 = 1 .$$

• מקרה $a > 1$

יהי $a > 1$. קיים מספר טבעי n אשר יותר גדול מ- a , כלומר $1 < a < n$. אזי

$$1 < a < n \Rightarrow 1^{1/n} < a^{1/n} < n^{1/n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 1^{1/n} < \lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} < \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} \Rightarrow 1 < \lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} < 1$$

כאשר במעבר האחרון הצבנו את $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$ מהדף הנוסחאות. לכן מכלל הסנדוויץ', לכל $a > 1$ מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1.$$

• מקרה $0 < a < 1$

כדי להוכיח את הטענה עבור המקרה $0 < a < 1$ נוח להגדיר $b = \frac{1}{a}$. בגלל ש- $0 < a < 1$ אזי $b > 1$. הוכחנו בסעיף הקודם כי לכל $b > 1$ מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} b^{1/n} = 1$. לכן:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b} \right)^{1/n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b^{1/n}} = 1$$