המחלקה למדעי המחשב

$29/11/2312:00 - 26/11/2312:00$ תשפ"ג

אלגברה 2

מועד ב'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר, ד'ר שי סרוסי.

תשפ"ג סמסטר ק'

השאלון מכיל 12 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

אחר / הערות

- יש לפתור את כל השאלות.
- המשקל של כל שאלה מפורט להלן:
  - שאלה 1: 30 נקודות.
  - שאלה 2: 20 נקודות.
  - שאלה 3: 20 נקודות.
  - שאלה 4: 30 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבירו היטב את מהלך הפתרון. תשובה ללא הסבר (גם נכונה) לא תתקבל.
- אסור לחלוטין לקבל עזרה מסטודנט אחר או מאף אחד.
- עליכם להעלות את הפתרונות שלכם דרך אתר המודל של הקורס אלגברה 2 למדמ"ח לא יאוחר משעה $12:00$ ביום ד' $23-11-29$. פתרונות שהוגשו אחרי המועד הזה לא יתקבלו.
- מותר להשתמש בחומר של הקורס, התרגילים של הקורס והספרים של הקורס בלבד, אבל אסור להשתמש בשום מקורות אחרים.
- אחרי הגשת פתרונות אתם תקבלו הזמנה למבחן קצר בעל פה על הפתרונות שלכם. ייתכן שלא תעבור את המבחן או יורידו נקודות במקרה שאתם לא יכולים להסביר הפתרונות שלכם היטב.
- **סטודנט יהיה זכאי להגיש ערעור / בקשות שונות לגבי הבוחן במשך 5 ימים בלבד מיום קבלת הציון.**

==

<u>שאלה 1</u> תהי $A \in \mathbb{C}^{4\times4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} -i & i & i & i \\ i & -i & i & i \\ i & i & -i & i \\ i & -i & i & i \end{pmatrix}$.

א) האם A אלכסונית? אם כן מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A = PDP^{-1}$.

ב) הוכיחו כי $A = -\frac{i}{2}A^2 - \frac{1}{4}A^3 - \frac{i}{8}A^4$.

<u>שאלה 2</u> תהי $A \in \mathbb{C}^{4\times4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{3} & i \end{pmatrix}$.

א) ללא חישוב ישר, הוכיחו כי A לכסינה אוניטרית.

ב) ללא חישוב ישר, הוכיחו כי לא כולם הערכים העצמיים של A ממשיים.

ג) מצאו Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $A = QD\bar{Q}$.

<u>שאלה 3</u> תהי $A \in \mathbb{C}^{4\times4}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & -i & 0 & 0 \\ i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & i \\ 0 & 0 & -i & 4 \end{pmatrix}$.

א) ללא חישוב ישר, הוכיחו כי A לכסינה אוניטרית.

ב) הוכיחו כי כל הערכים עצמיים של A ממשיים.

ג) מצאו Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $A = QD\bar{Q}$.

<u>שאלה 4</u> תהי $A \in \mathbb{C}^{2\times2}$ מטריצה ריבועית מצורה כללית $a,b,c,d \in \mathbb{C}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

א) הוכיחו כי הפולינום האופייני הוא $p_A(x) = x^2 - (a+d)x + ad - bc$.

ב) הוכיחו כי $p_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A)$.

ג) יהיו $B, C \in \mathbb{C}^{2\times2}$ אשר מקיימים את היחס $B = BC - CB$. הוכיחו את הטענות הבאות:

1) $\mathrm{tr}(B) = 0$.

2) $B^2 = -\det(B)I$.

3) $\det(B) = 0$.

4) $B^2 = 0$ (מטריצה האפס).

פתרונות

שאלה 1

א) נחשב את הפולינום האופייני:

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x+i & -i & -i & -i \\ -i & x+i & -i & -i \\ -i & -i & x+i & -i \\ -i & i & -i & x-i \end{vmatrix}$$

$$= (x+i)\begin{vmatrix} x+i & -i & -i \\ -i & x+i & -i \\ i & -i & x-i \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} -i & -i & -i \\ -i & x+i & -i \\ -i & -i & x-i \end{vmatrix} - i\begin{vmatrix} -i & x+i & -i \\ -i & -i & -i \\ -i & i & x-i \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} -i & x+i & -i \\ -i & -i & x+i \\ -i & i & -i \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} =&(x+i)^2\begin{vmatrix} x+i & -i \\ -i & x-i \end{vmatrix} + i(x+i)\begin{vmatrix} -i & -i \\ i & x-i \end{vmatrix} - i(x+i)\begin{vmatrix} -i & x+i \\ i & -i \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} x+i & -i \\ -i & x-i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -i & -i \\ -i & x-i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -i & x+i \\ -i & -i \end{vmatrix} \\ &- \begin{vmatrix} -i & -i \\ i & x-i \end{vmatrix} + i(x+i)\begin{vmatrix} -i & -i \\ -i & x-i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -i & -i \\ -i & i \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} -i & x+i \\ i & -i \end{vmatrix} - i(x+i)\begin{vmatrix} -i & x+i \\ -i & -i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -i & -i \\ -i & i \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} =&(x+i)^2\left(x^2+2\right) + i(x+i)(-2-ix) - i(x+i)(-ix) \\ &+ 2 + x^2 + ix - 2 + ix \\ &+ ix + 2 + i(x+i)(-ix) - 2 \\ &- ix - i(x+i)(ix-2) + 2 \end{aligned}$$

$$= x^4 + 2ix^3 + 4x^2 + 8ix$$

$$= x(x-2i)(x+2i)^2$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = -2i$ מריבוי אלגברי 2.

$\lambda = 2i$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 0$ מריבוי אלגברי 1.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = -2i$</u>

$$
\begin{aligned}
(A+2iI) \quad &= \quad \begin{pmatrix} i & i & i & i \\ i & i & i & i \\ i & i & i & i \\ i & -i & i & 3i \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to -iR_4]{\substack{R_1\to -iR_1 \\ R_2\to -iR_2 \\ R_3\to -iR_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[R_4\to R_4-R_1]{\substack{R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3-R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[R_4 R_3]{\substack{R_2\to R_4 \\ R_3\to R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to 4R_4-R_2]{R_3\to 2R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

פתרון: $(x,y,z,w) = (-z-2w, w, z, w) = (-1,0,1,0)z + (-2,1,0,1)w,\ \ z,w \in \mathbb{C}$.

$$V_{-2i} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 0$</u>

$$(A-0\cdot I) = \begin{pmatrix} -i & i & i & i \\ i & -i & i & i \\ i & i & -i & i \\ i & -i & i & i \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to -iR_4]{\substack{R_1\to iR_1 \\ R_2\to -iR_2 \\ R_3\to -iR_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4\to R_4-R_1]{\substack{R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3-R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z,w) = (-w,-w,-w,w) = (-1,-1,-1,1)w,\ \ w\in\mathbb{C}$.

$$V_0 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 2i$</u>

$$(A-2iI) = \begin{pmatrix} -3i & i & i & i \\ i & -3i & i & i \\ i & i & -3i & i \\ i & -i & i & -i \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to -iR_4]{\substack{R_1\to iR_1\\ R_2\to -iR_2 \\ R_3\to -iR_3}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4\to -iR_4]{\substack{R_1\to iR_1\\ R_2\to -iR_2 \\ R_3\to -iR_3}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4\to 3R_4-R_1]{\substack{R_2\to 3R_2-R_1\\ R_3\to 3R_3-R_1}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to 4R_4-R_2]{R_3\to 2R_3+R_2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_4+R_3} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{2i} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

עבור כל ערך עצמי הריבוי גאומטרי שווה לריבוי אלגברי לכן A לכסינה.

$$D = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_{2i} & u_{-2i} & u'_{-2i} & u_0 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

ב) הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = x(x-2i)(x+2i)^2 = x^4 + 2ix^3 + 4x^2 + 8ix .$$

לפי משפט קיילי המילטון, $p_A(A) = 0$ לכן

$$A^4 + 2iA^3 + 4A^2 + 8iA = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{i}{2}A^2 - \frac{1}{4}A^3 - \frac{i}{8}A^4 .$$

שאלה 2

א)

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{3} & i \end{pmatrix}, \qquad \bar{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5i & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} & -i \end{pmatrix}.$$

$$\bar{A}\cdot A=\begin{pmatrix} 12 & 22\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 22\sqrt{2} & 89 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 37 & -12i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 12i\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}, \qquad A\cdot\bar{A}=\begin{pmatrix} 12 & 22\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 22\sqrt{2} & 89 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 37 & -12i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 12i\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix},$$

לכן $A\cdot\bar{A}=\bar{A}\cdot A$ לכן A נורמלית לכן A לכסינה אוניטרית.

ב) $A\neq\bar{A}$ לכן A לא צמודה לעצמה, אבל A נורמלית.
הערכים עצמיים של מטריצה נורמלית ממשיים אם ורק אם המטריצה צמודה לעצמה.
A לא צמודה לעצמה לפיכך לא כל הערכים עצמיים יהיו ממשיים.

ג)

$$p_A(x)=|xI-A|=\begin{vmatrix} x-2 & -2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -2\sqrt{2} & x-9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-5i & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} & x-i \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & x-9 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x-5i & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & x-i \end{vmatrix}$$

$$=((x-2)(x-9)-8)\,((x-5i)(x-i)+12)$$

$$=\left(x^2-11x+10\right)\left(x^2-6ix+7\right)$$

$$=(x-10)(x-1)(x-7i)(x+i)$$

ערכים עצמיים:
$\lambda=10$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda=7i$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda=-i$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda=1$ מריבוי אלגברי 1.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 10</u>

$$(A-10I) = \begin{pmatrix} -8 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10+5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{3} & -10+i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to(-10+5i)R_4+2\sqrt{3}R_3} \begin{pmatrix} -8 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10+5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 107-60i \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -8 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10+5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_{10} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $7i$</u>

$$V_{7i} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{3}i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $-i$</u>

$$V_{-i} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\} .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 1</u>

$$V_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} .$$

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_{10} & u_{7i} & u_{-i} & u_1 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -i\sqrt{3} & \frac{i}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

שאלה 3

א)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -i & 0 & 0 \\ i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & i \\ 0 & 0 & -i & 4 \end{pmatrix} , \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -i & 0 & 0 \\ i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & i \\ 0 & 0 & -i & 4 \end{pmatrix} .$$

$\bar{A} = A$

לכן A צמודה לעצמה ולכן A נורמלית לכן A לכסינה אוניטרית.

ב) הערכים עצמיים של מטריצה נורמלית ממשיים אם ורק אם המטריצה צמודה לעצמה.
A צמודה לעצמה לפיכך כל הערכים עצמיים יהיו ממשיים.

ג) ערכים עצמיים:
$\lambda = 5$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 2.
$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 5</u>

$$V_5 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}\right\} .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 3</u>

$$V_3 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 1</u>

$$V_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_5 & u_3 & u_3' & u_1 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ i & -i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

<u>שאלה 4</u>

א)

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix} = (x-a)(x-d) - bc = x^2 - (a+d)x + ad - bc .$$

ב) $\det(A) = ad - bc$ ו- $\text{tr}(A) = a + d$ לכן

$$p_A(x) = x^2 - (a+d)x + ad - bc = x^2 - \text{tr}(A) + \det(A) .$$

ג) **1)** $B = BC - CB$. נקח את העקבה של הביטוי הזה ונקבל

$$\text{tr}(B) = \text{tr}(BC - CB) = \text{tr}(BC) - \text{tr}(CB) = \text{tr}(BC) - \text{tr}(BC) = 0 ,$$

2) בסעיף ב' הוכחנו כי אם $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ אז הפולינום האופייני שלה היא

$$p_B(x) = x^2 - \text{tr}(B) + \det(B) \ .$$

בסעיף ג' (1) מצאני כי $\text{tr}(B) = 0$ לפיכך

$$p_B(x) = x^2 + \det(B) \ .$$

לפי משפט קיילי-המילטון כל מטריצה מאפסת את הפולינום האופייני שלה, לכן

$$p_B(B) = B^2 + \det(B)I = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B^2 = -\det(B)I \ , \qquad (\#)$$

3)

$$B = BC - CB \qquad \Rightarrow \qquad B^2 = B^2C - BCB \ , \qquad (*1)$$

$$B = BC - CB \qquad \Rightarrow \qquad B^2 = BCB - CB^2 \ , \qquad (*2)$$

:(*2) + (*1)

$$2B^2 = B^2C - CB^2 \ .$$

נציב (#), כלומר $B^2 = -\det(B)I$ ונקבל

$$-2 - \det(B)I = -\det(B)I \cdot C + C \cdot \det(B)I = -\det(B)C + \det(B)C = 0 \ ,$$

ולכן $\det(B) = 0$.

4) מסעיף ג) 2) $B^2 = -\det(B)$ ומסעיף ג) 3) $\det(B) = 0$ לכן $B^2 = 0$.