עבודה עצמית 3

שאלה 1 בדקו אם הקבוצות הבאות ביחד עם פעולות הכפל והחיבור המתאימות מהווה שדה. כדי להראות שכן, הוכיחו שכל אקסיומות השדה מתקיימות וכדי להראות שלא, הראו לפחות אקסיומה אחת איננה מתקיימת.

א) קבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$ עם פעולות החיבור והכפל הרגילות.

ב) קבוצת המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$ עם פעולות $a+b=\dfrac{a-b}{3}$ ו- $a\cdot b=3ab$.

ג) הקבוצה $\left\{a+b\sqrt{2} | a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ ביחס לפעולות החיבור והכפל הרגילות. כלומר:

$$\begin{aligned}(a+b\sqrt{2})\oplus(c+d\sqrt{2}) =&(a+c)+(b+2)\sqrt{2}\\ (a+b\sqrt{2})\cdot(c+d\sqrt{2}) =&(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\end{aligned}$$

ד) הקבוצה $\left\{a+b\sqrt{2} | a,b\in\mathbb{Q}\right\}$ ביחס לפעולות החיבור והכפל הרגילות.

ה) הקבוצה

$$\mathbb{R}[x]=\left\{\sum_{i=0}^{k}a_ix^i \Big| k\in\mathbb{N}, a_0,\dots,a_k\in\mathbb{R}\right\}$$

(קבוצת הפולינומים עם מקדמים ממשיים) עם הפעולות - חיבור פולינומים וכפל פולינומים.

שאלה 2

א) רשמו את טבלאות הכפל וחיבור של $\mathbb{Z}_7$.

ב) רשמו את האיברים ההופכיים של $2,3,4,5,6$ ב- $\mathbb{Z}_7$ וב- $\mathbb{Z}_{11}$.

ג) הגדירו על הקבוצה $\{0,1,a,b\}$ פעולות כפל וחיבור (ע"י כתיבת טבלאות הכפל והחיבור) כך שזה יהיה שדה.

הדרכה: קבעו ש- $a+1=b$.

שאלה 3 יהי $\mathbb{F}$ שדה, הוכיחו את הטענות הבאות:

א) לכל מספר טבעי k, ולכל $a_1,\dots,a_k,b\in\mathbb{F}$ מתקיים

$$(a_1+\ldots+a_k)\,b=a_1b+\ldots a_kb\ .$$

רמז: אינדוקציה על k.

ב) לכל $a\in\mathbb{F}$ פרט ל- 0 יש $b\in\mathbb{F}$ <u>יחיד</u> כך ש- $ab=1$.

ג) יהי $a\in\mathbb{F}$. אם $a+a=a$ אז $a=0$.

ד) יהיו $a,b\in\mathbb{F}$. אם $ab=0$ אז $a=0$ או $b=0$.

ה) לכל $a, b \in \mathbb{F}$ מתקיים $-(ab) = (-a)b$.

שאלה 4

א) מצאו הפתרונות של המשוואות (1) $3x = 2$ (2) $-3x = 2$

1) בשדה $\mathbb{Z}_5$
2) בשדה $\mathbb{Z}_7$
3) בשדה $\mathbb{Z}_{97}$

ב) יהי $\mathbb{F}$ שדה. הוכיחו כי לכל $a, b \in \mathbb{F}$ כך ש $a \neq 0$ למשוואה $ax = b$ ישנו פתרון יחיד.

ג) מצאו את כל הפתרונות של המשוואות $x + ay = b$ בשדה אותו הגדרתם בשאלה 2 סעיף ג.

שאלה 5

פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$. כמה פתרונות יש למערכת?

$$\begin{aligned} x + \bar{3}y + z =& \bar{1} \\ \bar{3}x + y + \bar{4}z =& \bar{2} \\ \bar{2}x + \bar{4}y + \bar{4}z =& \bar{3} \end{aligned}$$

פתרונות

שאלה 1

א) <u>לא שדה</u>

לא שדה משום שלא לכל איבר יש איבר הופכי.

ב) <u>שדה</u>

קשירות וכל האקסיומות נכונות, משום שכל התוצאות שיתקבלו שייכות למספרים הרציונליים.

ג) <u>לא שדה</u>

האם לכל איבר יש הופכי?
נחפש איבר נגדי ל- $(a+b\sqrt{2})$.

$$\begin{aligned}(a+b\sqrt{2})(x+y\sqrt{2}) &= 1\\ ax+ay\sqrt{2}+bx\sqrt{2}+2by &= 1\end{aligned}$$

שימו לב $a,b,x,y\in\mathbb{Z}$ צריך להתקיים

$$\left.\begin{aligned}ax+2by &= 1\\ ay+bx &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}abx+2b^2y &= b\\ -a^2y-abx &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow abx+2b^2y-a^2y-abx=b \Rightarrow 2b^2y-a^2y=b$$

ואז נקבל $y=\dfrac{b}{2b^2-a^2}$, וזה לא בהכרח מספר שלם. $\Leftarrow$ לא לכל איבר קיים איבר נגדי. $\Leftarrow$ לכן הקבוצה אינה שדה.

ד) <u>שדה</u>

הקבוצה $\{a+b\sqrt{2}|a,b\in\mathbb{Q}\}$ ביחס לפעולות החיבור והכפל הרגילות.

קומוטטיביות, אסוציאטיביות, דיסטריבוטיביות, וקשירות בחיבור נובעות מאותן התכונות ב- $\mathbb{Q}$. גם איבר נגדי.

קשירות בכפל:

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = ac+ad\sqrt{2}+bc\sqrt{2}+2bd = \underbrace{(ac+2bd)}_{\in\mathbb{Q}}+\underbrace{(ad+bc)}_{\in\mathbb{Q}}\sqrt{2}\in\mathbb{F}$$

איבר הופכי:

$$(a+b\sqrt{2})(x+y\sqrt{2})=1$$

$$\begin{aligned} x+y\sqrt{2} =& \frac{1}{a+b\sqrt{2}} \\ =& \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2} \\ =& \underbrace{\frac{a}{a^2-2b^2}}_{\in\mathbb{Q}} - \underbrace{\frac{b}{a^2-2b^2}}_{\in\mathbb{Q}}\sqrt{2} \in \mathbb{F} \ . \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ קיים איבר הופכי לכל $a+b\sqrt{2}\neq 0$. לכן הקבוצה היא שדה.

ה) <u>לא שדה</u>

נתבונן על $k=2$ ונחפש איבר הופכי לפולינום $a_0+a_1x+a_2x^2$. נניח שההופכי הוא $b_0+b_1x+b_2x^2$.

$$\begin{aligned} (a_0+a_1x+a_2x^2)(b_0+b_1x+b_2x^2) =& 1 \\ a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_2b_0+a_1b_1)x^2+(a_1b_2+a_2b_1)x^3+a_2b_2x^4 =& 1 \end{aligned}$$

לפי השוואת מקדמים:

$$\begin{aligned} &(1) \quad x^0 & a_0b_0 &= 1 \\ &(2) \quad x^1 & a_0b_1+a_1b_0 &= 0 \\ &(3) \quad x^2 & a_0b_2+aa_1b_a+_2b_0 &= 0 \\ &(4) \quad x^3 & a_1b_2+a_2b_1 &= 0 \\ &(5) \quad x^4 & a_2b_2 &= 0 \end{aligned}$$

(5) $\Leftarrow$ $a_2=0$ או $b_2=0$.

<u>$a_2=0$, $b_2\neq 0$</u>

(4) $\Leftarrow$ $a_1=0$
(3) $\Leftarrow$ $a_0=0$
ואז נקבל

$$0\cdot(b_0+b_1x+b_2x^2)=1 \quad \Rightarrow \quad 0=1$$

סתירה!.

<u>$b_2=0$, $a_2\neq 0$</u>

(4) $\Leftarrow$ $b_1=0$
(3) $\Leftarrow$ $b_0=0$
ואז נקבל

$$(a_0+a_1x+a_2x^2)\cdot 0=1 \quad \Rightarrow \quad 0=1$$

סתירה!.

לכן אין איבר הופכי לכל איבר ב- $\mathbb{R}[x]$.

לכן $\mathbb{R}[x]$ לא שדה.

שאלה 2

א)

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

ב) $\underline{\mathbb{Z}_7}$

$$-\bar{2}=\bar{5}\ ,\qquad -\bar{3}=\bar{4}\ ,\qquad -\bar{4}=\bar{3}\ ,\qquad -\bar{5}=\bar{2}\ ,\qquad -\bar{6}=\bar{1}\ .$$

$\underline{\mathbb{Z}_{11}}$

$$-\bar{2}=\bar{9}\ ,\qquad -\bar{3}=\bar{8}\ ,\qquad -\bar{4}=\bar{7}\ ,\qquad -\bar{5}=\bar{6}\ ,\qquad -\bar{6}=\bar{5}\ .$$

שאלה 3

שאלה 4

שאלה 5

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{8} & \bar{1} & -\bar{1} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & -\bar{2} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & -\bar{3} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \bar{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{1} & -\bar{5} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} x + \bar{3}y + z &= \bar{1} \\ y + z &= \bar{2} \\ \bar{4}z &= \bar{0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + \bar{3}y + \bar{0} &= \bar{1} \\ y + \bar{0} &= \bar{2} \\ z &= \bar{0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + \bar{3}y &= \bar{1} \\ y &= \bar{2} \\ z &= \bar{0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + \bar{3} \cdot \bar{2} &= \bar{1} \\ y &= \bar{2} \\ z &= \bar{0} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x + \bar{6} &= \bar{1} \\ y &= \bar{2} \\ z &= \bar{0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= -\bar{5} \\ &= \bar{0} \\ y &= \bar{2} \\ z &= \bar{0} \end{aligned}\right\}$$

תשובה סופית:

$$(x, y, z) = (\bar{0}, \bar{2}, \bar{0}) \ .$$