

28/02/25 ל' בשבט תשפ"ה

08 : 30 – 11 : 30

אלגברה לינארית 1 למדמ"ח

מועד ב'

מרצים: ד"ר זהבה צבי, ד"ר מרינה ברשדסקי, ד"ר ירמיהו מילר.

תשפ"ה סמסטר א'

השאלון מכיל 11 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!**הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה**

• לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.

• ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

• דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט A4), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

• יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.

• יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.

• סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.

• הסבר היטב את מהלך הפתרון.

• יש לציין את השאלות שעניתם עליהן בתחילת המחברת.

שאלה 1 (25 נקודות)

א (13 נק') תנונה מערכת משוואות ליניאריות:

$$\begin{aligned}x + 2y + (k - 1)z &= 1 \\ 2x + y + (2k - 6)z &= -k \\ kx + 2ky + 2z &= -1\end{aligned}$$

מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין פתרון, יש פתרון יחיד, יש אינסוף פתרונות. במקרה של אינסוף פתרונות רשמו את הפתרון הכללי.

ב (4 נק') הוכיחו: אם $A^2 + 2A + I = 0$ אז A הפיכה.

ג (4 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ מטריצה הפיכה, ונתון כי $A^3 + A = 0$. מצאו את $\det(A)$.

ד (4 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$. הוכיחו: אם $A^3 + A = 0$ אז A לא הפיכה.

שאלה 2 (25 נקודות)

נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ a & a^2 + a - 1 & 3a - 1 \\ 3 & 3a & 9 \end{pmatrix}$

א (4 נק') לכל ערך של פרמטר a מצאו דרגת מטריצה A ובסיס ומימד של $\text{Nul}(A)$.

ב (4 נק') האם קיים ערך של a עבורו ישנם שני וקטורים u_1, u_2 בלתי תלויים לינארית המקיימים $Au_1 = 0$ ו- $Au_2 = 0$? אם כן, מצאו אותם. אם לא, הוכיחו זאת.

ג (5 נק') עבור $a = 1$, תנו דוגמה של וקטורים $u, w \in \mathbb{R}^3$ כך ש- $u \neq 0$, $u \in \text{Nul}(A)$, $w \notin \text{Nul}(A)$.

ד (6 נק') הוכיחו שכל שני וקטורים $u, w \in \mathbb{R}^3$ המקיימים $u \neq 0$, $u \in \text{Nul}(A)$, $w \notin \text{Nul}(A)$ הם בלתי תלויים לינארית.

ה (6 נק') פתרו את המשוואה המטריציאלית $XA = B$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

שאלה 3 (25 נקודות)

במרחב וקטורים \mathbb{R}^3 נתונה קבוצת וקטורים $B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

א) (9 נק') הוכיחו ש- U בסיס של \mathbb{R}^3 ומצאו את וקטור הקואורדינטות $\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right]_B$.

ב) (6 נק') מצאו את מטריצת המעבר מהבסיס הסטנדרטי לבסיס B .

ג) (5 נק') יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:
אם $AB = BA$ אז $A^2B = BA^2$.

שאלה 4 (25 נקודות)

א) (8 נק') מצאו את המימד ובסיס של תת המרחב הנפרש על ידי הוקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad u_5 = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 14 & 24 \end{pmatrix}.$$

ב) (7 נק') בטאו את הוקטורים מתוך u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 שלא שיכים לבסיס שמצאתם בסעיף א', כצירוף ליניארי של הבסיס.

ג) (5 נק') הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית: אם $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ו- $A = A^2$ אז $A = I$ או $A = 0$.

שאלה 5 (25 נקודות)

א) (10 נק') תהיה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ויהיה

$$W = \left\{ B \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid AB = BA \right\}.$$

הוכיחו כי W תת מרחב של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

ב) (10 נק') מצאו בסיס ומימד ל- W .

ג) (5 נק') הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענה הבאה:
אם U ו- W תתי מרחבים של מרחב וקטורי V כך ש- $\dim(U) = \dim(W)$ אז $U = W$.

שאלה 6 (25 נקודות)

שאלה 7 (25 נקודות)

נתונה העתקה לינארית $T : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ המוגדרת ע"י:

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} a + 3b + 4c - 3d & b + 3c - 2d \\ 0 & 3a + 7b + 6c - 5d \end{pmatrix}$$

לכל $a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x]$

(א) (5 נק') מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T .

(ב) (5 נק') האם T על? האם T חד-חד-ערכית?

(ג) (5 נק') מצאו בסיס ואת המימד של $\text{Im} T$. תנו דוגמה לאיבר בתמונה של T .

(ד) (5 נק') מצאו בסיס ואת המימד של $\text{Ker} T$. תנו דוגמה לאיבר בגרעין של T .

(ה) (5 נק') מצאו את כל הוקטורים $a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x]$ כך ש-

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ו) מצאו את המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיסים הסדורים

$$B = \{b_1 = x^2, b_2 = x, b_3 = 1, b_4 = x^3\}$$

של $\mathbb{R}_3[x]$ ו-

$$C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, c_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

(ז) יהי $w \in \mathbb{R}_3[x]$ כך ש- $[w]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. מצאו את $[T(w)]_C$.

פתרונות

שאלה 1

שאלה 2

שאלה 3

שאלה 5

שאלה 6

שאלה 7