

עבודה עצמית אינטגרלים קווים

שאלה 1 (אינטגרל קו מסוג ראשון)

חשבו את האינטגרלים הבאים כאשר המסלול הוא המצולע בעל הקדקודים הנתונים:

(א)

$$\int_L (x + y) dl, \quad A(0,0), B(1,1), C(1,0).$$

(ב)

$$\int_L xy dl, \quad A(0,0), B(0,1), C(1,0).$$

שאלה 2 (אינטגרל קו מסוג ראשון)

חשבו את האינטגרל הקווי לפי חלק הקו $y = \gamma(x)$ המתאים לקטע הנתון:

(א)

$$\int_L x dl, \quad y = \frac{x^2}{2}, 0 \leq x \leq 2.$$

(ב)

$$\int_L \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} dl, \quad y = \ln x, 1 \leq x \leq e.$$

(ג)

$$\int_L y^2 dl, \quad x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

שאלה 3 (אינטגרל קו מסוג שני)

חשבו את האינטגרלים הבאים בשתי דרכים:

(1) ללא שימוש במשפט גרין ו-

(2) בעזרת משפט גרין.

והשוו את התוצאות.

(א)

$$\oint \frac{y}{x+2} dx + \frac{x}{y^2+1} dy, \quad A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(0,-1).$$

(ב)

$$\oint (x - y)^2 dx + xy dy, \quad A(1, 0), B(1, 1), C(0, 1).$$

(ג)

$$\oint x dy, \quad A(0, 0), B(2, 2), C(4, 2), D(5, 0).$$

(ד)

$$\oint (xy^2 + y^2) dx + y(x + 1)^2 dy, \quad A(1, 1), B(2, 1), C(2, 4).$$

שאלה 4 (שימוש באינטגרל קווי לחישוב שטחים)

הוכיחו ששטח S על הצורה החסומה ע"י הקו הסגור L ניתן לחשב בעזרת הנוסחה:

(א)

$$S = \left| \oint_L x dy \right|.$$

(ב)

$$S = \left| \oint_L y dx \right|.$$

(ג)

$$S = \frac{1}{2} \left| \oint_L x dy - y dx \right|.$$

שאלה 5 (שימוש באינטגרל קווי לחישוב שטחים)

שרטטו את הצורה החסומה ע"י הקו הסגור הנתון וחשבו את השטח ע"י אחת מהנוסחאות מהשאלה הקודמת:

(א)

$$x = a \cos t, y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(ב)

$$x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(ג)

$$x = a(2 \cos t - \cos(2t)), \quad y = a(2 \sin t - \sin(2t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

שאלה 6 (30 נקודות)

(א) (15 נקודות)

חשבו את הצאינטגרל

$$\oint_L \frac{y}{x} dx + xy dy$$

לאורך שפת המשולש עם קודקודים $A(1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, 2)$.

(ב) (15 נקודות)

חשבו את הצאינטגרל

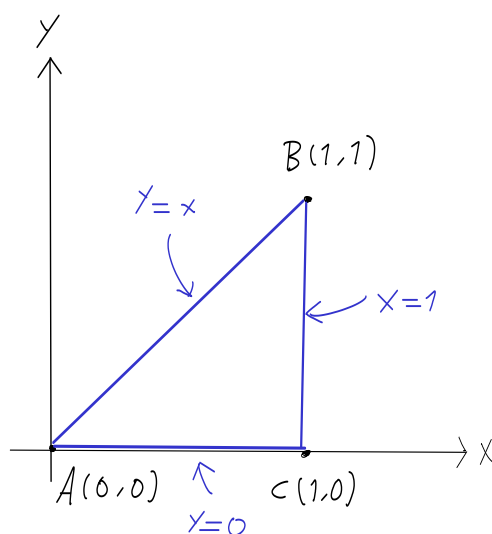
$$\oint_L (x + y) dx + (x^2 - y) dy$$

לאורך שפת המשולש ABC (בכיוון החיובי) כאשר $A(0, 0)$, $B(0, 2)$, $C(2, 0)$.

פתרונות

שאלה 1

(א)



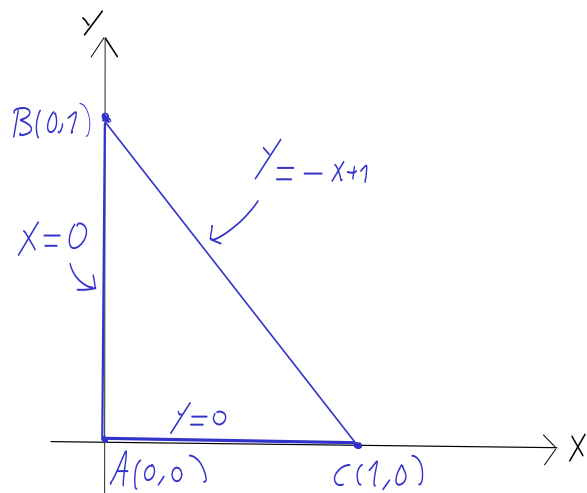
$$\int_{AB} (x+y) dl = \int_0^1 2x \sqrt{1+1^2} dx = 2\sqrt{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \sqrt{2} .$$

$$\int_{AC} (x+y) dl = \int_0^1 x \sqrt{1+0^2} dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} .$$

$$\int_{CB} (x+y) dl = \int_0^1 (1+y) \sqrt{1^2+0^2} dy = \left[y + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2} .$$

$$\int (x+y) dl = \int_{AC} (x+y) dl + \int_{CB} (x+y) dl + \int_{BA} (x+y) dl = \sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \sqrt{2} + 2 .$$

(ב)



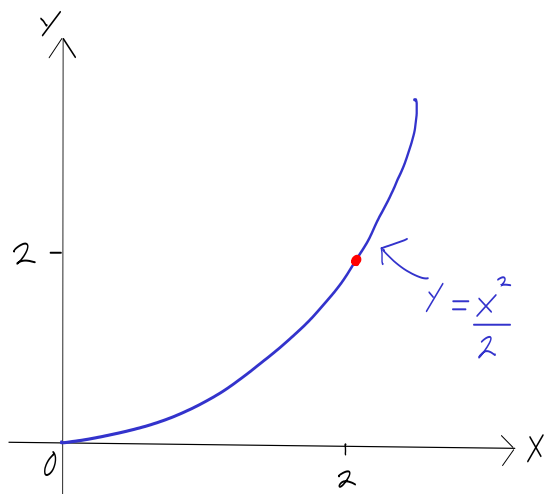
$$\int_{AB} xy \, dl = 0 .$$

$$\int_{AC} xy \, dl = 0 .$$

$$\int_{BC} xy = \int_0^1 (-x^2 + x) \sqrt{1 + (-1)^2} \, dx = \sqrt{2} \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{2} .$$

שאלה 2

(א)



$$\int_L x \, dl, \quad L = \left\{ y = \frac{x^2}{2} \mid 0 \leq x \leq 2 \right\}.$$

$$\int_L x \, dl = \int_0^2 x \sqrt{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{1+x^2} d(1+x^2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[(1+x^2)^{3/2} \right]_0^2$$

$$= \frac{1}{3} \left[(5)^{3/2} - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{3} (\sqrt{125} - 1).$$

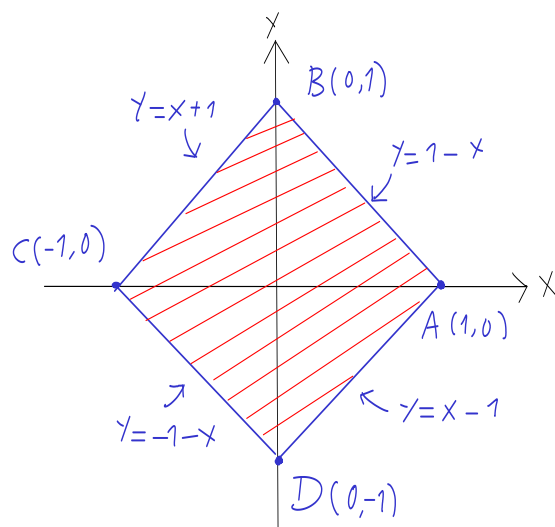
$$\frac{2}{3} (\sqrt{125} - 1)$$

1. **ב**

$$\frac{108\sqrt{2}}{15} \cdot a^3 \quad \text{ג}$$

שאלה 3

א



$$\oint \frac{y}{x+2} dx + \frac{x}{y^2+1} dy = \oint P dx + Q dy$$

$$P = \frac{y}{x+2}, \quad Q = \frac{x}{y^2+1}, \quad P'_y = \frac{1}{x+2}, \quad Q'_x = \frac{1}{y^2+1}.$$

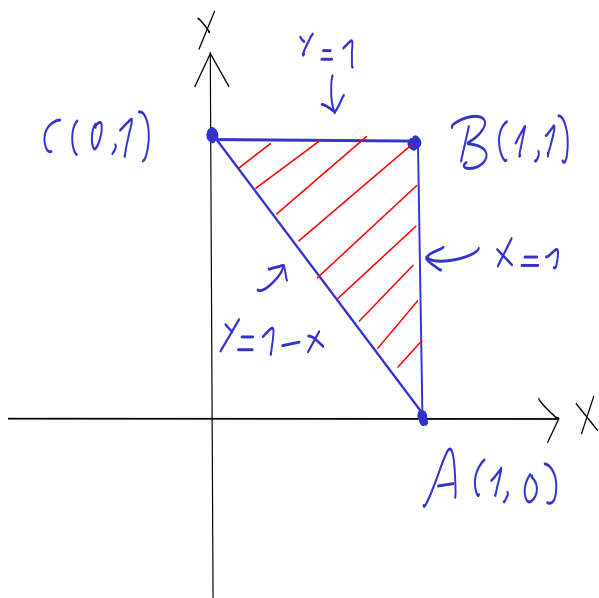
לפי נוסחת גרין:

$$\begin{aligned} \oint Pdx + Qdy &= \iint_D (Q'_x - P'_y) \\ &= \iint_{D_1} \left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{x+2} \right) + \iint_{D_2} \left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{x+2} \right) \\ &= \int_{-1}^0 dx \int_{-(1+x)}^{1+x} dy \left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{x+2} \right) + \int_0^1 dx \int_{-(1-x)}^{1-x} dy \left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{x+2} \right) \end{aligned}$$

באינטגרל הראשון נציב $dt = -dx, t = -x$

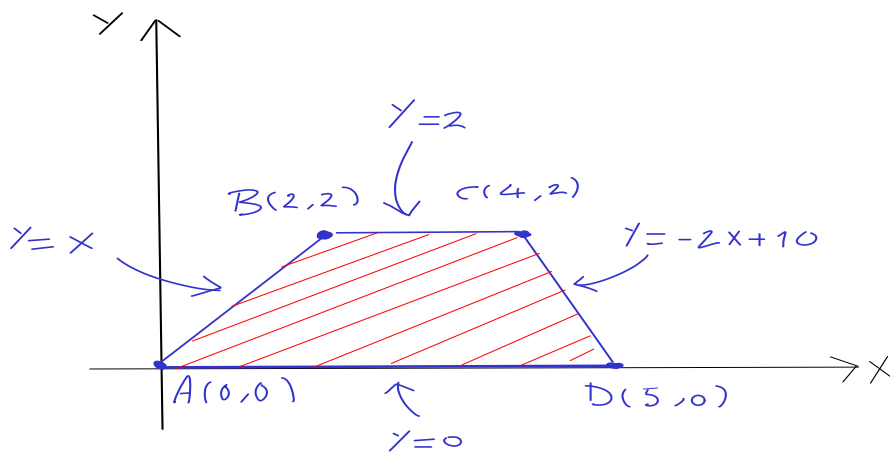
$$\begin{aligned} &\int_{t=1}^{t=0} (-dt) \int_{-(1-t)}^{1-t} dy \left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{-t+2} \right) + \int_0^1 dx \int_{-(1-x)}^{1-x} dy \left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{x+2} \right) \\ &= \int_{t=0}^{t=1} dt \int_{-(1-t)}^{1-t} dy \left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{-t+2} \right) + \int_0^1 dx \int_{-(1-x)}^{1-x} dy \left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{x+2} \right) \\ &= \int_0^1 dx \int_{-(1-x)}^{1-x} dy \left(\frac{2}{y^2+1} - \frac{1}{-x+2} - \frac{1}{x+2} \right) \\ &= \int_0^1 dx \left[2 \arctan(y) - \frac{y}{-x+2} - \frac{y}{x+2} \right]_{-(1-x)}^{1-x} \\ &= \int_0^1 dx \left[2 \arctan(1-x) - \frac{1-x}{-x+2} - \frac{1-x}{x+2} - 2 \arctan(-(1-x)) + \frac{-(1-x)}{-x+2} + \frac{-(1-x)}{x+2} \right] \\ &= \int_0^1 dx \left[4 \arctan(1-x) - \frac{2(1-x)}{-x+2} - \frac{2(1-x)}{x+2} \right] \\ &= \int_0^1 dx \left[4 \arctan(1-x) - 2 + \frac{2}{-x+2} + 2 - \frac{6}{x+2} \right] \\ &= \int_0^1 dx \left[4 \arctan(1-x) + \frac{2}{-x+2} - \frac{6}{x+2} \right] \\ &= \left[-4(1-x) \arctan(1-x) + 4 \cdot \frac{1}{2} \ln((1-x)^2+1) - 2 \ln(2-x) - 6 \ln(x+2) \right]_0^1 \\ &= \left[-6 \ln 3 + 4 \cdot \frac{\pi}{4} - 2 \ln 2 + 2 \ln 2 + 6 \ln 2 \right] \\ &= [-6 \ln 3 + \pi + \ln 2^6] \\ &= [-6 \ln 3 + \pi + \ln 64]. \end{aligned}$$

(ב)



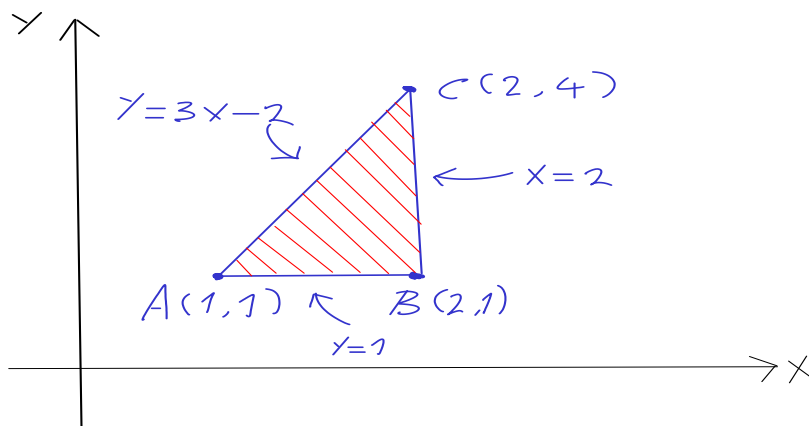
$$\frac{1}{3}$$

(ג)



7

(ד)



0

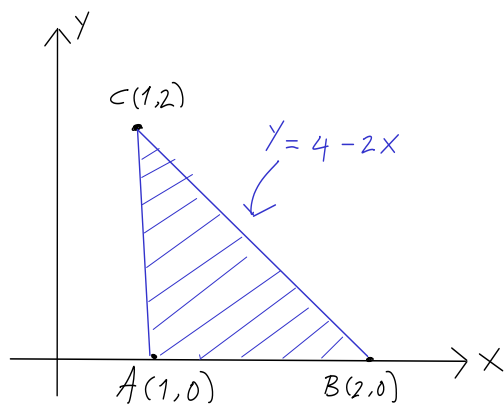
שאלה 5

(א) $ab\pi$

(ב) $\frac{3a^2\pi}{8}$

(ג) $\frac{108}{15} \cdot \sqrt{2} \cdot a^3$

שאלה 6



(א)

נוסחת גריו:

$$\begin{aligned}
 \oint_L \frac{y}{x} dx + xy dy &= \iint_D dx dy \left[(xy)'_x - \left(\frac{y}{x}\right)'_y \right] \\
 &= \int_1^2 dx \int_0^{-2x+4} dy \left[y - \frac{1}{x} \right] \\
 &= \int_1^2 dx \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} \right]_0^{-2x+4} \\
 &= \int_1^2 dx \left[\frac{1}{2} (-2x+4)^2 - \frac{(-2x+4)}{x} \right] \\
 &= \int_1^2 dx \left[2x^2 - 8x + 8 + 2 - \frac{4}{x} \right] \\
 &= \int_1^2 dx \left[2x^2 - 8x + 10 - \frac{4}{x} \right] \\
 &= \left[\frac{2x^3}{3} - 4x^2 + 10x - 4 \ln x \right]_1^2 \\
 &= \frac{16}{3} - 16 + 20 - 4 \ln 2 - \frac{2}{3} + 4 - 10 \\
 &= \frac{16}{3} - 2 - 4 \ln 2 - \frac{2}{3} \\
 &= \frac{8}{3} - 4 \ln 2 .
 \end{aligned}$$

$$\frac{8}{3} - 4 \ln 2 \approx -0.1$$

$$\frac{2}{3}$$

(ב)