עבודה עצמית 6 מישורים וישירים במרחב

שאלה 1 מצאו מהי קבוצת הנקודות במרחב הנקבעת על ידי המשוואה הנתונה:

א) $xy - 3y = 0$

ב) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 0$

ג) $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 0$

ד) $|y| - |x| = -1$

ה) $\max\left(|x+1|, |y+1|, |z-1|\right) = 1$

ו) $x^2 + y^2 + z^2 = 2x - 4z$

ז) $2x^2 + 3y^2 = 12$

ח) $y^2 + z^2 = 9$

ט) $x^2 + z^2 = 2x$

י) $z = x^2 + y^2$

יא) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

יב) $z = x^2 + 1$

שאלה 2 שרטטו במערכת צירים מרחבית את הגוף החסום על ידי המשטחים הבאים:

א) $xyz = 0$, $x = 1$, $y = 2$, $z = 4$.

ב) $x + y = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 4$

ג) $|x| + |y| = 2$, $z = -1$, $z = 1$

ד) $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $z^2 - z = 0$.

ה) $(x^2 - 3x)(y^2 - y) = 0$, $z = 0$, $z = 4 - y^2$.

ו) $16x^2 + 9y^2 = 144$, $z = 0$, $z = 4 - y$.

שאלה 3

א) מצא את נקודות החיתוך של המישור $6x + 3y + 2z = 6$ עם צירי המערכת וצייר את חלק המישור הזה הראשוןהנמצא

ב) רשמו את משוואת הספירה שמרכזה בנקודה $C(1,-3,0)$ אשר משיקה את המישור $z+4=0$.

ג) על ציר ה- y מצאו את הנקודה קרובה ביותר לשמטח $x^2+y^2+z^2-4x-6y-8z=0$.

ד) מצאו את משוואת המיקום הגאומטרי של נקודות במרחב הנמצאות במרחקים שווים מראשית הצירים ומהמישור $y-3=0$.

שאלה 4 מצאו את משוואת המישור שעובר דרך הנקודה $P(2,1,-1)$ במקביל לישרים

$$\left.\begin{aligned} x-2z &= 4 \\ y+2 &= 0 \end{aligned}\right\} , \qquad \left.\begin{aligned} x+y &= 4 \\ 2x-y+2z &= 0 \end{aligned}\right\} ,$$

שאלה 5 מצאו את סינוס הזוית בין הישר $\frac{z}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{x-1}{-6}$ לבין המישור העובר דרך הישר

$$(x,y,z) = (2,5,1) + t(4,-1,1)$$

ומאונך למישור $x+2y+3z-1=0$.

שאלה 6 מצאו את משוואות המישורים שכל נקודותיהם נמצאות במרחק שווה לשני המישורים

מישור 2 : $5x-5y+3z+2=0$. , מישור 1 : $3x+5y+5z+4=0$,

שאלה 7 נתונות הנקודות $A(-1,2,4)$ ו- $B(2,1,1)$. מצאו את הנקודה על מישור xz שסכום מרחקיה מהנקודות A ו- B הוא מינימאלי.

שאלה 8 מצאו את משוואת המישור המכיל את הישרים

$$\left.\begin{aligned} 2x+y-2 &= 0 \\ x+z+1 &= 0 \end{aligned}\right\} , \qquad \left.\begin{aligned} x+y-1 &= 0 \\ y+2z+4 &= 0 \end{aligned}\right\} ,$$

וקבעו עבור איזה ערך של הפרמטר a תהיה הנקודה $P(2,-2,a)$ שייכת למישור זה.

שאלה 9 מצאו את משוואת המישור העובר דרך הנקודה $P(2,4,3)$ ומקביל לישרים:

$$M_1(t): \left.\begin{aligned} 5x+3y+2 &= 0 \\ 5y+3z+4 &= 0 \end{aligned}\right\} , \qquad M_2(t): \left.\begin{aligned} 3x+2y+z &= 0 \\ 2x+3z+5 &= 0 \end{aligned}\right\} ,$$

שאלה 10 מצאו את משוואת המישור העובר דרך הנקודה $P(3,8,5)$ ומאונך למישורים:

$$\pi_1: \quad 2x+3y-z=2 , \qquad \pi_2: \quad 3x+y-4z=1 .$$

שאלה 11 מצאו את משוואת המישור העובר דרך הישר

$$\left.\begin{aligned} x + 5y + 8z &= 10 \\ 2x - y - 3z &= -1 \end{aligned}\right\}$$

ונציב למישור $z = 0$.

שאלה 12 נתונות הנקודות: $P(1,1,1)$, $B(0,1,2)$, $C(3,0,1)$, $D(1,-1,2)$.

א) מצאו את המרחק מהנקודה P למישור BCD.

ב) מצאו את ההיטל והשיוקף של P על המישור BCD.

ג) מצאו את הזווית בין המישור

$$\pi_1 : \quad 2x + y - 2z - 4 = 0$$

לבין המישור BCD.

ד) קבעו אם PB ו- CD מצטלבים ומצאו את הנקודות הקרובות ביותא עליהם.

שאלה 13 נתונות שלוש הנקודות $A(1,3,0)$, $B(2,5,7)$, $C(-4,10,6)$.

א) מצאו את המשוואות של הישרים AB, BC, AC.

ב) מצאו את שטח המשולש ABC.

ג) נתונה נקודה רביעית $D(12,13,14)$ מצאו את נפח הפירמידה המשולשית $ABCD$.

שאלה 14

א) הוכיחו שווקטור $(4,6,8) \times (2,-2,4)$ הוא קוליניאר ל

$$2x + 3y + 4z = 6 \ , \qquad x - y + 2z = 2 \ .$$

ב) רשמו את משוואה הפרמטרית של הישר שנתון כחיתוך של שני המישורים

$$3x - 6y + 3z = 0 \ , \qquad 4x - 2z = 4$$

וחשבו את הזווית בין ישר זה ובין המישור $x = 2$.

שאלה 15 נתונות שלוש הנקודות הבאות

$$A_1(2,2,2), \ B_1(5,5,5), \ C_1(-1,1,1)$$

ואת שלוש הנקודות הבאות

$$A_2(-1,-1,-2), \ B_2(1,4,7), \ C_2(-3,8,9)$$

א) מצאו את משוואת המישור (P_1) העובר דרך הנקודות A_1, B_1, C_1 ואת משוואת המישור (P_2) העובר דרך הנקודות A_2, B_2, C_2.

ב) קבעו אם המישורים P_1, P_2 מקבילים או נחתכים, והסבירו מדוע. במידה שהמישורים נחתכים מצאו את משוואת הישר בה המישורים נחתכים אחד עם השני.

שאלה 16

נתונים שני המישורים

$$\begin{aligned} \pi_1: &\quad -4x+2y+8z-10 &= 0 \\ \pi_2: &\quad x+ky-2z+3 &= 0 \end{aligned}$$

כאשר $k \in \mathbb{R}$ הוא פרמטר ממשי. מצאו את ערך הפרמטר k שעבורו המישורים מקבילים. עבור ערך זה של k מצאו את מרחק בין המישורים.

שאלה 17

מצאו את הערכים של הפרמטרים a ו- b עבורם ה מישור $x-2ay+z+2=0$ מקביל לישר

$$\frac{x+b}{-7a} = \frac{y-b}{a-1} = \frac{z-4}{a-2}$$

כך שהמרחק בין הישר והמישור הוא $\sqrt{6}$.

שאלה 18

א) הוכיחו כי הישר $\left\{ \begin{aligned} 5x-3y+2z-5 &= 0 \\ 2x-y-z-1 &= 0 \end{aligned} \right.$ נמצא על המישור $4x-3y+7z-7=0$.

ב) מצאו את משוואת המישור שעובר דרך הנקודות $A(1,2,-1)$, $B(2,4,-5)$, $C(6,8,0)$, ומצאו את ההיטל והשיקוף של הנקודה $P(1,0,-1)$ ביחס למישור הזה.

שאלה 19 (20 נקודות)

מצאו את משוואת המישור המכיל את הישרים

$$\left. \begin{aligned} 2x+y-2 &= 0 \\ x+z+1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad , \quad \left. \begin{aligned} x+3y-1 &= 0 \\ 5y+2z+4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

וקבעו עבור איזה ערך של הפרמטר k תהיה הנקודה $P(1,k,-2)$ שייכת למישור זה.

שאלה 20 (20 נקודות)

נתונות הנקודות $B(0,1,2)$, $C(3,0,1)$, $D(1,-1,2)$, $P(1,1,1)$. קבעו אם הישר שעובר דרך הנקודות PB, והישר שעובר דרך הנקודות CD מצטלבים. אם כן, מצאו את הנקודות הקרובות ביותר.

פתרונות

<u>שאלה 1</u>

א)

$$xy - 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x-3) = 0$$

ז"א $y = 0$ או $x = 3$. קיבלנו שני מישורים.

ב)

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3 \quad \text{וגם} \quad x+1 = 0$$

ז"א $\begin{cases} x &= -1 \\ y &= 3 \\ z &= t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$. קיבלנו משוואת ישר.

ג)

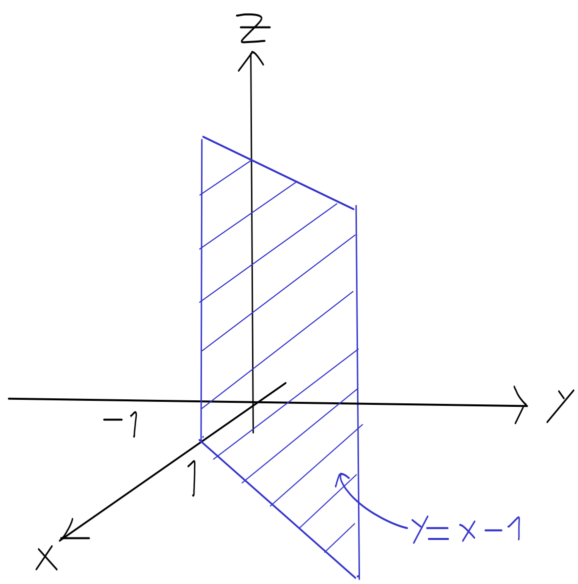
$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x-1 = 0 \quad \text{וגם} \quad y+3 = 0 \quad \text{וגם} \quad z+1 = 0\ .$$

לכן $\begin{cases} x &= 1 \\ y &= -3 \\ z &= -1 \end{cases}$ נקודה $(1,-3,-1)$.

ד) $|y| - |x| = -1$

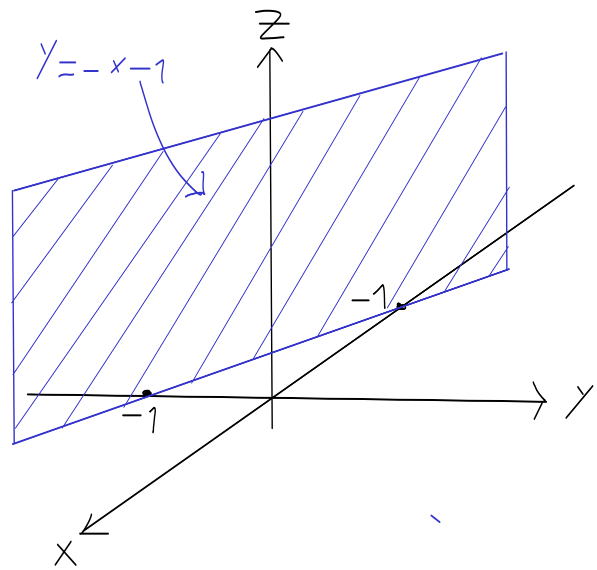
אם $x \geq 0, y \geq 0$ נקבל

$$y - x = -1 \quad \Rightarrow \quad y = x - 1\ .$$



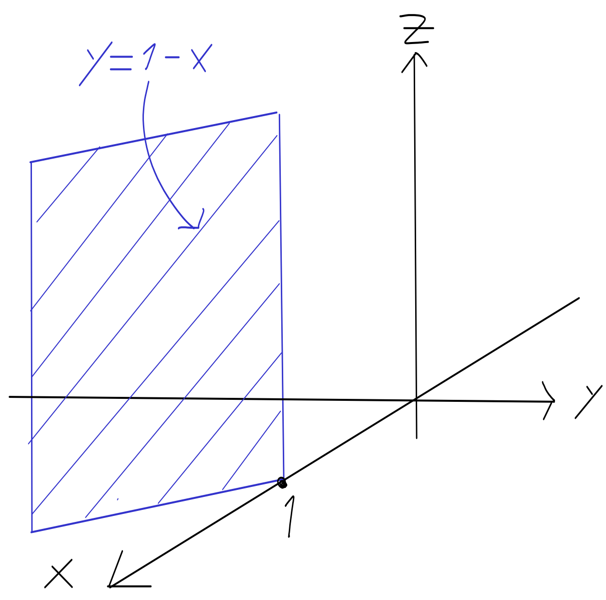
אם $x \leq 0, y \geq 0$ נקבל

$$y + x = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -x - 1\ .$$



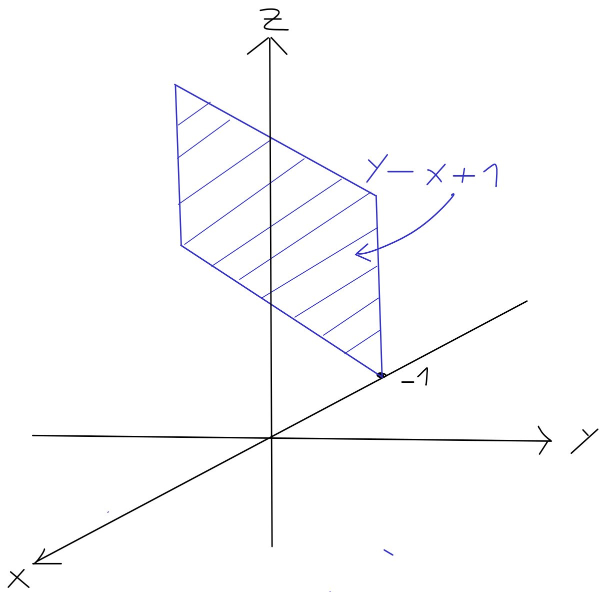
אם $x \geq 0, y < 0$ נקבל

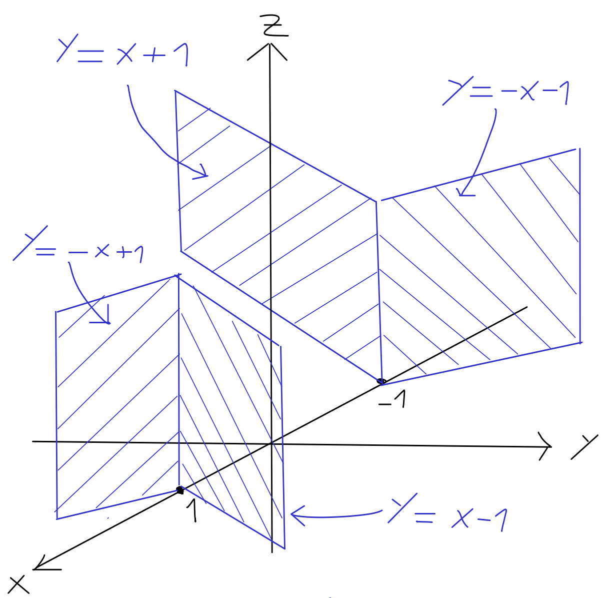
$$-y-x=-1 \quad \Rightarrow \quad y=-x+1 \ .$$



אם $x < 0, y < 0$ נקבל

$$-y+x=-1 \quad \Rightarrow \quad y=x+1 \ .$$





ה) $\max\left(|x+1|,|y+1|,|z-1|\right)=1$

ו) $x^2+y^2+z^2=2x-4z$

ז) $2x^2+3y^2=12$

ח) $y^2+z^2=9$

ט) $x^2+z^2=2x$

י) $z=x^2+y^2$

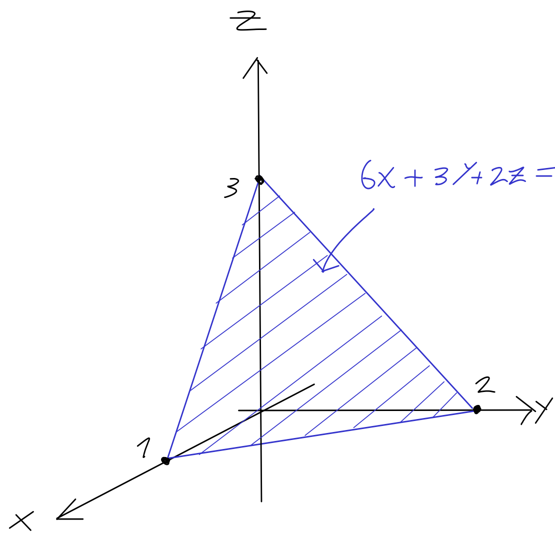
יא) $z=\sqrt{x^2+y^2}$

יב) $z = x^2 + 1$

שאלה 2

שאלה 3

א)



ב) $C(1,-3,0)$, $z+4=0$. רדיוס הספירה שווה למרחק מנקודה C למישור $z+4=0$:

$$d = \frac{|0+4|}{\sqrt{1}} = 4 \ .$$

לכן משוואת הספירה:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 16 \ .$$

ג)

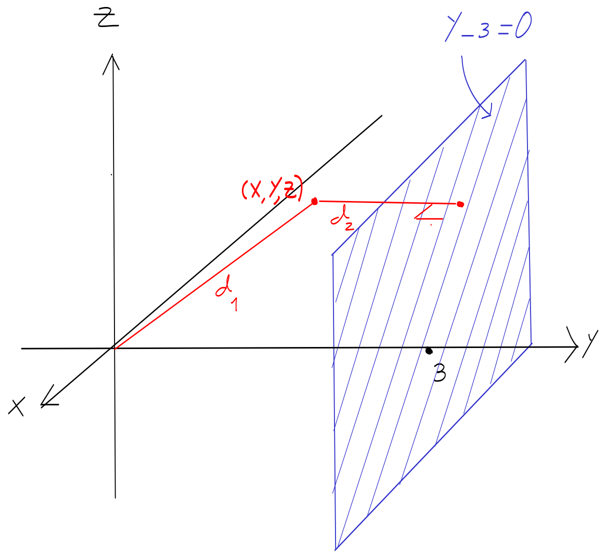
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 8z = 30 \ .$$

נשלים את הריבוע ונקבל

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 1 \ .$$

קיבלנו משוואה של ספירה שמרכזה היא בנקודה $(2,3,4)$. הנקודה על הספריה הקרובה ביותר לציר ה-y היא $(0,2,0)$.

ד)



המרחק מנקודה (x,y,z) לראשית הצירים:

$$d_1=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ .$$

המרחק מנקודה (x,y,z) למישור $y-3=0$:

$$d_2=|y-3|\ .$$

$y<3$ לכן $d_2=3-y$.

$$\begin{aligned}d_1 &= d_2\\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} &= 3-y\\ x^2+y^2+z^2 &= (3-y)^2\\ x^2+y^2+z^2 &= 9-6y+y^2\\ x^2+z^2+6y-9=0\ .\end{aligned}$$

שאלה 4 משוואה של ישר 1 בצורה פרמטרית:

$$\left.\begin{aligned}x+y &= 4\\ 2x-y+2z &= 0\end{aligned}\right\}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&4\\2&-1&2&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&4\\0&-3&2&-8\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&6&4\\0&-3&2&-8\end{array}\right)$$

$$x=-6t+4\ ,\qquad y=\frac{8+2t}{3}\ ,\qquad z=t\ ,$$

או

$$(x,y,z)=t\left(-6,\frac{2}{3},1\right)+\left(4,\frac{8}{3},0\right)\ .$$

וקטור הכיוון: $(-18,2,3)$.

משוואה של ישר 2 בצורה פרמטרית:

$$\left.\begin{aligned} x-2z &= 4 \\ y+ &= 2 \end{aligned}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$x = 2t+4 \ , \qquad y = 2 \ , \qquad z = t \ ,$$

או

$$(x,y,z) = t\,(2,0,1) + (4,2,0) \ .$$

וקטור הכיוון: $(2,0,1)$.

לכן וקטור הנורמל של המישור הוא

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -18 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2,24,-4) = 2\cdot(1,12,-2) \ .$$

לכן משוואת המישור היא

$$x+12y-2z+D=0 \ .$$

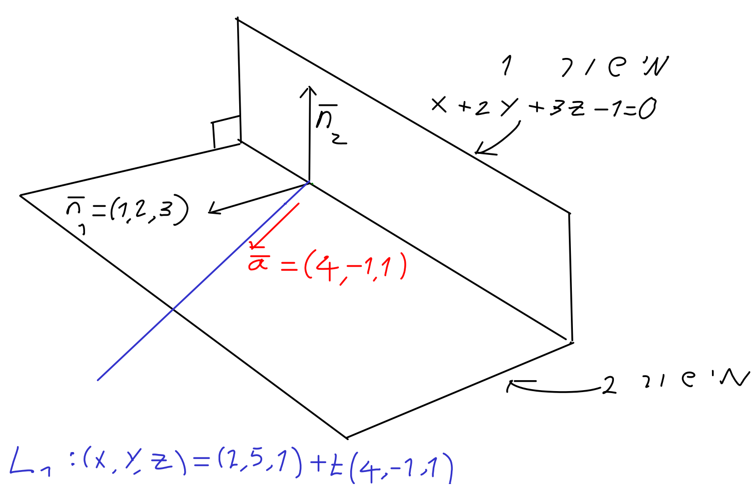
המישור עובר דרך הנקודה $P(2,1,-1)$. נציב את הקואורדינטות של P:

$$2+12\cdot 1-2\cdot(-1)+D=0 \qquad \Rightarrow \qquad 16+D=0 \qquad \Rightarrow \qquad D=-16 \ .$$

לכן משוואת הישר הינה

$$x+12y-2z-16=0 \ .$$

<u>שאלה 5</u>

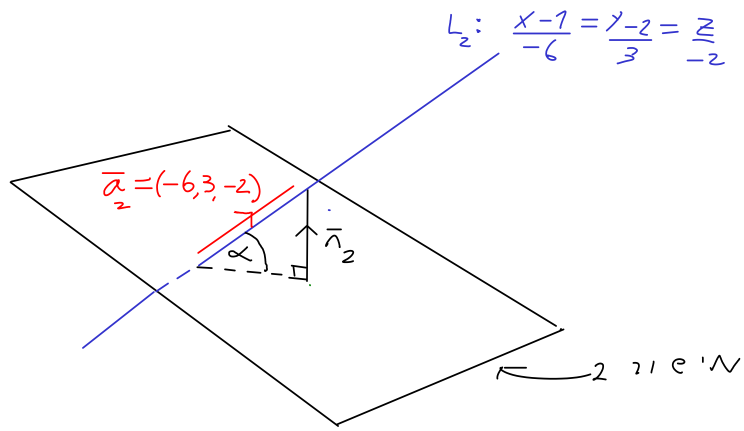


נסמן את המישור $x+2y+3z-1=0$ במישור 1. הנומרל שלו הינו $\bar{n}_1=(1,2,3)$.

נקרא את המישור שמאונך למישור 1 ושכולל את הישיר $(x,y,z)=(2,5,1)+t(4,-1,1)$, מישור 2.

הוקטור הכיוון של הישר הוא $\bar{a}=(4,-1,1)$. נשים לב שהוקטורים $\bar{a}$ ו- $\bar{n}_1$ נמצאים במישור 2 (ראו שרטוט). לכן הנורמל $\bar{n}_1$ של משיור 1 הוא המכפלה וקטורית של $\bar{a}$ ו- $\bar{n}_1$:

$$\bar{n}_2=\bar{a}\times\bar{n}_1=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=(5,11,-9)\ .$$



$$\sin\alpha=\frac{\bar{a}_2\cdot\bar{n}_2}{|\bar{a}_2||\bar{n}_2|}=\frac{(-6,3,-2)\cdot(5,11,-9)}{|(5,11,-9)|\cdot|(-6,3,-2)|}=\frac{21}{\sqrt{227}\sqrt{49}}=0.199\ .$$
$$\alpha=\arcsin(0.199)=11.49^\circ\ .$$

שאלה 6 המרחקים בין נקודה $P(x,y,z)$ כלשהי ממישור 1 ומישור 2 הם

$$d_1=\frac{|3x+5y+5z+4|}{\sqrt{3^2+5^2+5^2}}\ ,\qquad d_2=\frac{|5x-5y+3z+2|}{\sqrt{3^2+(-5)^2+3^2}}$$

נדרש $d_1=d_2$:

$$\frac{|3x+5y+5z+4|}{\sqrt{3^2+5^2+5^2}}=\frac{|5x-5y+3z+2|}{\sqrt{3^2+(-5)^2+3^2}}$$

$$\frac{|3x+5y+5z+4|}{\sqrt{59}}=\frac{|5x-5y+3z+2|}{\sqrt{59}}$$

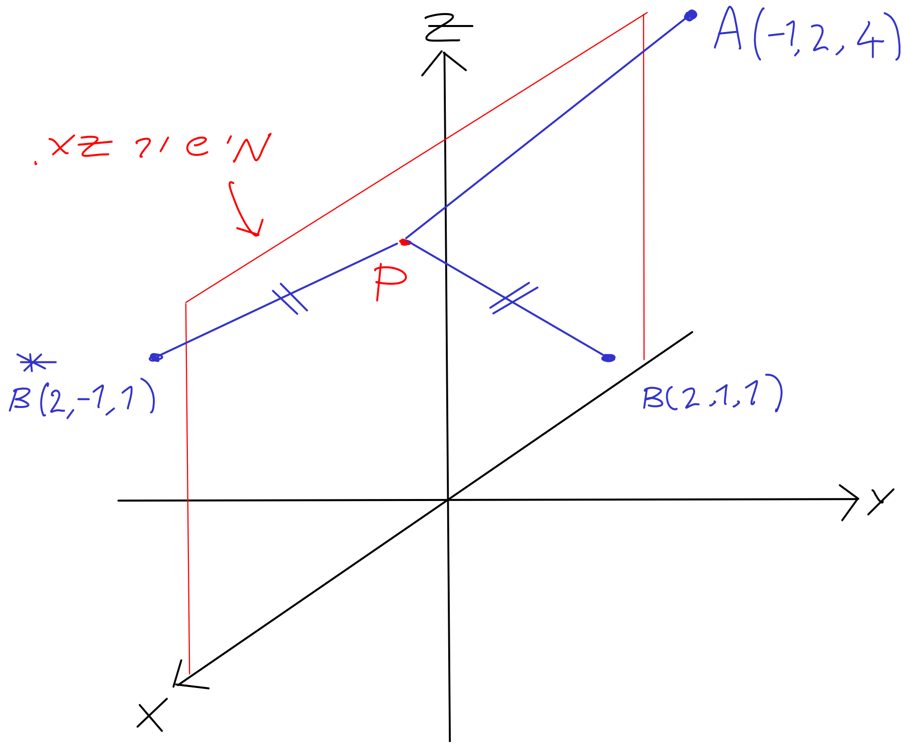
$$|3x+5y+5z+4|=|5x-5y+3z+2|$$

$$3x+5y+5z+4=\pm(5x-5y+3z+2)$$

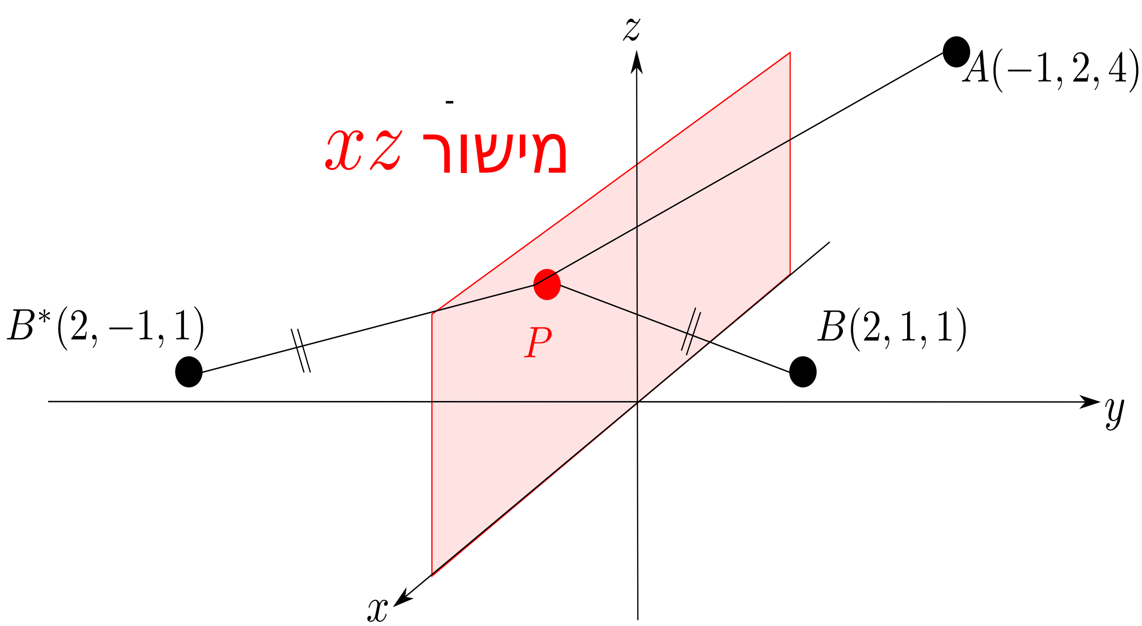
$$3x+5y+5z+4=5x-5y+3z+2 \qquad \text{או} \qquad 3x+5y+5z+4=-(5x-5y+3z+2)$$

$$-2x+10y+2z+2=0 \qquad \text{או} \qquad 8x+8z+6=0\ .$$

שאלה 7



מישור xz נתון על ידי המשוואה $y=0$. נשים לב ששתי הנקודות A ו- B אינן על המישור ושתיהן נמצאות "מימין" למישור, (כן ערך ה- y של שתיהן חיובי). נשים לב גם שאם $B^*(2,-1,1)$ היא השיקוף של B ביחס למישור xz, אז לכל נקודה $P(x,y,z)$ על המישור מתקיים שהמרחק $d(P,B)=d(P,B^*)$. כלומר, ניתן לנסח את הבעיה מחדש כך: מצאו את הנקודה על מישור xz שסכום מרחקיה מהנקודות A ו- B^* הוא מינימאלי.



מצד שני, אם P היא נקודת החיתוך של הקטע AB^* עם מישור xz אז

$$d(P,A)+d(P,B^*)=d(A,B^*)\ ,$$

לכלנקודה אחרת על המישור, Q, מתקבל משולש AB^*Q במרחב ומאי-שיוויון המשולש מתקיים

$$d(A,B^*)\le d(Q,A)+d(Q,B^*)\ .$$

כלומר,הנקודה המבוקשת P היא נקודת החיתוך בין הקטע AB^* לבין מישור xz. אם נרשום הצגה פרמטרית של הישר נקבל

$$M(t)=(A+t\cdot\overline{AB^*})=(-1,2,4)+t(3,-3,-3)=(-1+3t,2-3t,4-3t)\ ,$$

ומהצבהבמשוואת המישור נקבל

$$2-3t=0\quad\Rightarrow\quad t=\frac{2}{3}\ .$$

ולכןנקודת החיתוך היא $P=(1,0,2)$. מתקיים

$$\begin{aligned}d(P,A)+d(P,B^*)=&\sqrt{2^2+(-2)^2+(-2)^2}+\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}\\=&2\sqrt{3}+\sqrt{3}\\=&3\sqrt{3}\\=&\sqrt{3^2+(-3)^2+(-3)^2}\\=&d(A,B^*)\end{aligned}$$

כנדרש.

<u>שאלה 8</u> נזכור כי וקטור הכיוון של ישר הנתון כחיתוך של שני מישורים, צריך להיות ניצב לנורמלים שלהם, על כן נחשב את וקטורי הכיוון של הישרים הללו

$$\bar{a}=(1,1,0)\times(0,1,2)=(2,-2,1)\ .$$

$$\bar{b}=(2,1,0)\times(1,0,1)=(1,-2,-1)\ .$$

הישרים אינם מקבילים או מתלכדים אך בשאלה נאמר כי ישנו מישור המכיל את שני הישרים, כלומר הם אינם מצטלבים. נוודא זאת על ידי כך שנבדוק כי המרחק ביניהם הוא 0 (כלומר, הם נחתכים). נבחר נקודה על כל אחד מהישרים (על ידי הצבה של $y=0$ במערכת אחת ו- $x=0$ במערכת השניה) $R(0,2,-1)$ ו- $Q(1,0,-2)$ ונחשב את המכפלה הוקטורית בין כיווני הישרים:

$$\bar{a}\times\bar{b}=(2,-2,1)\times(1,-2,-1)=(4,3,-2)\ .$$

המרחק בין הישרים נתון על ידי

$$d=\frac{\overline{QR}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})}{|\bar{a}\times\bar{b}|}=\frac{|(-1,2,1)\cdot(4,3,-2)|}{|(4,3,-2)|}=0\ .$$

נעיר כי החישוב למעלה לא היה לשווא מכיוון שברוב התוצאות שלו נשתמש בהמשך. תחילה, הנורמל למישור המכיל את שני הישרים נתון על ידי המכפלה הוקטורית בין וקטורי הכיוון $\bar{n}=\bar{a}\times\bar{b}=(4,3,-2)$ ומשוואת המישור מתקבלת על ידי (לאחר הצבה של הנקודה Q)

$$4(x-1)+3(y-0)-2(z+2)=0\qquad\Leftrightarrow\qquad 4x+3y-2z-8=0\ .$$

בכדי לבדוק עבור איזה פרמטר a הנקודה $P(2,-2,a)$ תהיה מוכלת במישור, נציב את הנקודה במשוואת המישור

$$8-6-2a-8=0 \quad \Rightarrow \quad a=4 \ .$$

<u>שאלה 9</u> $-235(x-2)-186(y-4)-27(z-3)=0$

<u>שאלה 10</u> $-11x+5y-7z+28=0$

<u>שאלה 11</u> $-220(x-0)-132(y-2)-88(z-1)=0$

<u>שאלה 12</u>

א) משוואת המישור BCD:

$$2x+y+5z-11=0 \ .$$

מרחק של P מהמישור BCD:

$$d=\frac{3}{\sqrt{30}} \ .$$

ב) היטל: $\left(\frac{19}{15},\frac{17}{15},\frac{25}{15}\right)$.

שיקוף: $\left(\frac{23}{15},\frac{19}{15},\frac{35}{15}\right)$.

ג) $\cos\alpha=\frac{5}{3\sqrt{30}}$.

ד) מצטלבים. $P(2,1,0)$, $Q\left(\frac{5}{3},\frac{-2}{3},\frac{5}{3}\right)$.

<u>שאלה 13</u>

א) הוקטורים הכיוון הינם:

$$\overrightarrow{AB}=(1,2,7), \qquad \overrightarrow{BC}=(-6,5,-1), \qquad \overrightarrow{AC}=(-5,7,6).$$

והמשוואות של הישירם הינם:

$$\ell_{AB}: \qquad (x,y,z)=(1,3,0)+t(1,2,7),$$

$$\ell_{BC}: \qquad (x,y,z)=(2,5,7)+t(-6,5,-1),$$

$$\ell_{AC}: \qquad (x,y,z)=(-4,10,6)+t(-5,7,6)$$

ב)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|AB \times AC\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 7 \\ -5 & 7 & 6 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}|-37\boldsymbol{i} - 41\boldsymbol{j} + 17\boldsymbol{k}| = 28.892$$

ג)

$$\overrightarrow{AD} = (11, 10, 14)$$

$$V_{ABC} = \frac{1}{6}\left||AD \cdot AB \times AC|\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix} 11 & 10 & 14 \\ 1 & 2 & 7 \\ -5 & 7 & 6 \end{vmatrix}\right\| = \frac{579}{6} = 96.5$$

שאלה 14

א) נסמן $\vec{a} = (4, 6, 8)$, $\vec{b} = (2, -2, 4)$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (4, 6, 8) \times (2, -2, 4) = (40, 0, -20) =: \vec{c}$$

הנורמל למישור $2x + 3y + 4z = 6$ הינו

$$\vec{n}_1(2, 3, 4)$$

ו-

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{c} = 0$$

הנורמל למישור $x - y + 2z = 2$ הינו

$$\vec{n}_2(1, -1, 2)$$

ו-

$$\vec{n}_2 \cdot \vec{c} = 0$$

ב) נמצאו את משוואת הישר דרך הפתרון למערכת

$$\begin{aligned} 3x - 6y + 3z &= 0 \\ 4x - 2z &= 4 \end{aligned}$$

נקבל אינסוף פתרונות מצורה פרמטרית:

$$(x, y, z) = \left(1 + \frac{1}{2} \cdot t \ , \ \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot t \ , \ t\right) = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right) + t\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right) \sim \left(1, \frac{1}{2}, 0\right) + t\,(2, 3, 4)$$

זהו המשוואת הישר בו המישורים נחתכים.

הנורמל למישור $x = 2$ הינו $\vec{n} = (1, 0, 0)$. קוסינוס הזווית בין הנורמל ובין ישר שווה לסינוס הזווית בין הישר והמישור:

$$\sin\alpha = \frac{(1, 0, 0) \cdot (2, 3, 4)}{|(1, 0, 0)|\ |(2, 3, 4)|} = \frac{2}{\sqrt{29}} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right) = 21.8014^\circ$$

שאלה 15

א)

$$\overrightarrow{A_1B_1} = (3,3,3)\ , \qquad \overrightarrow{A_1C_1} = (-3,-1,-1)$$

הנורמל של P_1 ניתן ע"י

$$\overrightarrow{A_1B_1} \times \overrightarrow{A_1C_1} = (3,3,3) \times (-3,-1,-1) = (0,-6,6)$$

ובהתאם משוואת המישור P_1 הינה

$$-6y + 6z + D_1 = 0$$

נקבע D_1 ע"י להציב את הקואורדינטות של הנקודה A_1 שבה בתוך המשוואה:

$$-6 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + D_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad D_1 = 0$$

ולכן נקבל את המשוואה

$$-6y + 6z = 0\ .$$

הנורמל של P_2 ניתן ע"י

$$\overrightarrow{A_2B_2} \times \overrightarrow{A_2C_2} = (2,5,9) \times (-2,9,11) = (-26,-40,28) \sim (-13,-20,14)$$

ובהתאם משוואת המישור P_2 הינה

$$-13x - 20y + 14z + D_2 = 0$$

נקבע D_2 ע"י להציב את הקואורדינטות של הנקודה A_2 בתוך משוואת הישר:

$$-13 \cdot (-1) - 20 \cdot (-1) + 14 \cdot (-2) + D_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad D_2 = -5$$

ולכן נקבל את המשוואה

$$-13x - 20y + 14z - 5 = 0\ .$$

ב) מכיוון שהנורמלים של השני מישורים $\overrightarrow{n_1} = (0,-6,6)$ ו- $\overrightarrow{n_2} = (-13,-20,14)$ אינם פרופורציונות, אז הנורמלים אינם מקבילים, ולכן המישורים לא מקיבילים אלא הם נחתכים. נמצאו את משוואת הישר שבה הם נחתכים:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -6y + 6z & = & 0 \\ -13x - 20y + 14z & = & 5 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad (x,y,z) = \left(-\frac{5}{13} - \frac{6}{13} \cdot t,\ t,\ t\right) = \left(-\frac{5}{13}, 0, 0\right) + t\left(-\frac{6}{13},\ 1,\ 1\right)$$

שאלה 16

הוקטורים הנורמלים

$$\begin{aligned} n_1 =& (-4,2,8) \\ n_2 =& (1,k,-2) \end{aligned}$$

מקבילים זה לזה עבור $k = -\frac{1}{2}$ אז $n_1 = -4n_2$.

המרחק בין שני המישורים π_1 ו- π_2 שווה למרחק בין נקודה P על π_1 לבין π_2.

נקבע)באופן שרירותי(את הנקודה $P(-2,1,0)$ על מישור π_1. בכדי לחשב את ההמרחק P לבין המישור π_2 נשתמש בנוסחא $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ הנותנת המרחק בין נקודה (x_0,y_0,z_0) למישור $Ax+By+Cz+D=0$.
על ידי הצבה בנוסחא נקבל את המרחק

$$d=\frac{|1\cdot(-2)-\frac{1}{2}\cdot 1-2\cdot 0+3||}{\sqrt{1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{21}}\ .$$

<u>שאלה 17</u> משוואת המישור הנתון היא

$$x-2ay+z+2=0$$

ולכן הווקטור $\bar{n}=(1,-2a,1)$ נורמלי למישור זה.
משוואת הישר הנתון היא

$$\frac{x+b}{-7a}=\frac{y-b}{a-1}=\frac{z-4}{a-2}$$

מכאן הישר עובר דרך נקודה $C(-b,b,4)$ והוקטור $(-7a,a-1,a-2)$ הוא וקטור כיוון שלו. כדי שהמישור והישר יהיו מקבילים, נדרוש שווקטור הכיוון של הישר יהיה מאונך לווקטור הנורמל של המישור. כלומר, נדרוש

$$\begin{aligned}0&=(-7a,a-1,a-2)\cdot(1,-2a,1)\\&=(-7a)(1)+(a-1)(-2a)+(a-2)(1)\\&=-7a-2a^2+2a+a-2\\&=-2a^2-4a-2\\&=-2(a+1)^2\end{aligned}$$

ולכן $a=-1$. כלומר, משוואת המישור היא

$$x+2y+z+2=0$$

המרחק בין ישר למישור הוא המרחק בין נקודה כלשהי על הישר למישור. לכן, כדי למצוא את הערך של b, נחשב את המרחק בין הנקודה $(-b,b,4)$ (שהיא נמצאת על הישר) לבין המישור בעזרת נוסחת מרחק בין נקודה למישור ונדרוש שהמרחק הזה יהיה שווה ל $\sqrt{6}$:

$$\sqrt{6}=D=\frac{|(1)(-b)+(2)(b)+(1)(4)+(2)|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(1)^2}}=\frac{|b+6|}{\sqrt{6}}$$

ולכן

$$|b+6|=\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}=6$$

כלומר, $b=0$ או $b=-12$.

<u>שאלה 18</u>

א)

$$\begin{aligned}\pi_1:&\qquad 5x-3y+2z-5&=0\\\pi_2:&\qquad 2x-y-z-1&=0\end{aligned}$$

הנומרל של π_1 הוא $n_1=(5,-3,2)$. הנומרל של π_2 הוא $n_2=(2,-1,-1)$. הוקטור הכיוון של הקו החיתוך הוא מאונך לשני הנורמלים של המישורים:

$$\bar{a}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=(5,9,1)$$

נחפש נקודה אחת על הישר. נציב $z=0$ ב- π_1 ו- π_2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -5 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

לכן הנקודה $(-2,-5,0)$ היא על הישר. המשוואת הישר היא

$$M(t)=(-2,-5,0)+t(5,9,1)\ .$$

נוכיח כי כל נקודה על הישר מקיימת את משוואת המישור של π_3: $4x-3y+7z-7=0$

$$4(-2+5t)-3(-5+9t)+7(t)-7=-8+20t+15-27t+7t-7=0$$

ב) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ הם שני וקטורים במישור. הנורמל ניתן ע"י

$$n=\overline{AB}\times\overline{AC}=(1,2,-4)\times(5,6,1)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -4 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}=(26,-21,-4).$$

משוואת המישור עם נורמל $n=(A,B,C)$ שעובר דרך נקודה (x_0,y_0,z_0):

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

נציב $n=(A,B,C)=(26,-21,-4)$ ונקודה $(x_0,y_0,z_0)=A=(1,2,-1)$ ונקבל

$$26x-21y-4z+12=0\ .$$

נחשב את ההיטל. הישר שעובר דרך הנקודה P וניצב למישור , כלומר וקטור הכיוון של הישר הוא הנורמל המישור:

$$M(t)=P+t\cdot n=(10,11,20)+t(26,-21,-4)\ ,\qquad\Rightarrow\qquad x=10+26t\ ,\quad y=11-21t\ ,\qquad z=20-4t\ .$$

נציב משוואת הישר במשוואת המישור:

$$26(10+26t)-21(11-21t)+4(20-4t)=0\qquad\Rightarrow\qquad t_0=\frac{1}{103}\ .$$

היטל:

$$P'=M\left(t_0=\frac{1}{103}\right)=\left(\frac{1056}{103},\frac{1112}{103},\frac{2056}{103}\right)\ .$$

שיקוף:

$$P^*=P+2t_0n=(10,11,20)+\frac{2}{103}(26,-21,-4)=\left(\frac{1082}{103},\frac{1091}{103},\frac{2052}{103}\right)$$

תשובה סופית - משוואת המישור:

$$26x - 21y - 4z + 12 = 0 \ .$$

היטל:

$$P' = \left(\frac{41}{1133}, \frac{882}{1133}, -\frac{965}{1133}\right) \ .$$

שיקוף:

$$P^* = \left(-\frac{1051}{1133}, \frac{1764}{1133}, -\frac{797}{1133}\right) \ .$$

שאלה 19

$$\left.\begin{array}{ll} \pi_1: & x + 3y - 1 = 0 \\ \pi_2: & 5y + 2z + 4 = 0 \end{array}\right\} , \qquad \left.\begin{array}{ll} \pi_3: & 2x + y - 2 = 0 \\ \pi_4: & x + z + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

הנורמלים של מישורים הם:

$$n_1 = (1,3,0) \ , \quad n_2 = (0,5,2) \ , \quad n_3 = (2,1,0) \ , \quad n_4 = (1,0,1) \ .$$

נזכור כי וקטור הכיוון של ישר הנתון כחיתוך של שני מישורים, צריך להיות ניצב לנורמלים שלהם, על כן נחשב את וקטורי הכיוון של הישרים הללו. וקטור כיוון של הישר הראשון:

$$a = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = (6, -2, 5) \ .$$

וקטור כיוון של הישר השני:

$$b = n_3 \times n_4 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, -1) \ .$$

הישרים אינם מקבילים או מתלכדים אך בשאלה נאמר כי ישנו מישור המכיל את שני הישרים, כלומר הם אינם מצטלבים. נוודא זאת על ידי כך שנבדוק כי המרחק ביניהם הוא 0 (כלומר, הם נחתכים). נבחר נקודה על כל אחד מהישרים (על ידי הצבה של $y = 0$ במערכת אחת ו- $x = 0$ במערכת השניה) $Q\,(1,0,-2)$ ו- $R\,(0,2,-1)$ ונחשב את המכפלה הוקטורית בין כיווני הישרים אשר נותן את הנורמל שמכיל את שני הישרים:

$$n = a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (12, 11, -10) \ .$$

המרחק בין הישרים נתון על ידי

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{QR} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})\right|}{\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|} = \frac{|(-1,2,1) \cdot (12,11,-10)|}{|(12,11,-10)|} = \frac{(-1) \cdot 12 + 2 \cdot 11 + 1 \cdot (-10)}{\sqrt{12^2 + 11^2 + (-10)^2}} = 0$$

נעיר כי החישוב למעלה לא היה לשווא מכיוון שברוב התוצאות שלו נשתמש בהמשך. תחילה, הנורמל למישור המכיל את שני הישרים נתון על ידי המכפלה הוקטורית בין וקטורי הכיוון

$$n = a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (12, 11, -10) \ .$$

ומשוואת המישור מתקבלת על ידי (לאחר הצבה של הנקודה Q)

$$12\,(x-1) + 11\,(y-0) - 10\,(z+2) = 0 \ \Rightarrow \ 12x + 11y - 10z - 32 = 0 \ .$$

בכדי לבדוק עבור איזה פרמטר k הנקודה $P\,(1, k, -2)$ תהיה מוכלת במישור, נציב את הנקודה במשוואת המישור

$$12 + 11k + 20 - 32 = 0 \Rightarrow k = 0 \ .$$

תשובה סופית - משוואת המישור:

$$12x + 11y - 10z - 32 = 0 \ .$$

הנקודה $P\,(1, k, -2)$ תהיה מוכלת במישור אם $k = 0$.

שאלה 20 הישרים מצטלבים.

נקודות הקרובות ביותר הן $(3, 0, 1)$ על CD ו- $(2, 1, 0)$ על PB.