

המחלקה למדעי המחשב

10/02/25 י"ב בשבט תשפ"ה
09 : 00 – 12 : 00

אלגברה לינארית 1 למדמ"ח

מועד א'

מרצה: ד"ר זהבה צבי, ד"ר מרינה ברשדסקי, ד"ר ירמיהו מילר.

תשפ"ה סמסטר א'

השאלון מכיל 11 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דף נוסחאות מצורף לשאלון (7 עמודים בפורמט A4).

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות.
- יש לנמק היטב כל שלב בפתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לציין בראש המחברת אילו שאלות לבדוק.

שאלה 1 (25 נקודות)

תהי $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ נגדיר

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ -b \\ a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad U = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = -v\}.$$

(א) (7 נק') הוכיחו כי U, W תתי מרחבים של \mathbb{R}^3 .

(ב) (7 נק') מצאו בסיס ומימד של U, W .

(ג) (7 נק') מצאו בסיסים ומימדים ל- $U + W$ ול- $U \cap W$.

(ד) (4 נק') יהי \mathbb{F} שדה יהיו U, V מרחבים וקטורים מעל \mathbb{F} .

תהי $T : U \rightarrow V$ העתקה ליניארית. $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ קבוצת וקטורים ב U . הוכיחו או הפריכו:
אם הקבוצה $\{T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_k)\}$ בלתי תלויה ליניארית אז הקבוצה $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ בלתי תלויה ליניארית. (אין קשר לסעיפים קודמים).

שאלה 2 (25 נקודות)

יהי $a \in \mathbb{R}$ פרמטר. נתבונן במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -a & a+2 & 2a \\ 2a+1 & -a-2 & -a^2-3a+6 \\ a & -a-2 & a^2-2a-4 \end{pmatrix}$$

(א) (7 נק') מצאו את כל ערכי הפרמטר a שעבורם המטריצה אינה הפיכה.

(ב) (7 נק') עבור $a = -1$ מצאו בסיס ומימד של $\text{col}(A)$ ול- $\text{Nul}(A)$.

(ג) (6 נק') עבור $a = -1$ מצאו בסיס ומימד של $\text{col}(A) \cap \text{Nul}(A)$.

(ד) (5 נק')

יהי \mathbb{F} שדה. תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך שלכל מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n \times n} \neq 0$ מתקיים $AB \neq 0$.
הוכיחו כי A הפיכה. (אין קשר לסעיפים קודמים).

שאלה 3 (25 נקודות)

(א) (7 נק') במרחב $\mathbb{R}_3[x]$ נתונים וקטורים

$$u_1 = 1 + 2x + x^2 + 3x^3, \quad u_2 = 2 - x + x^2 + 2x^3, \quad u_3 = -1 + 8x + x^2 + 5x^3, \quad w = a + x + bx^2 + 5x^3.$$

עבור אילו ערכי a, b הוקטור w שייך לתת המרחב הנפרש על ידי הוקטורים u_1, u_2, u_3 ?

(ב) (7 נק') עבור הערכים של a, b שמצאתם בסעיף א', בטאו את הוקטור w כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 .

(ג) (5 נק') האם הוקטורים u_1, u_2, u_3, w פורשים את המרחב $\mathbb{R}_3[x]$? נמקו את תשובתכם.

(ד) (3 נק') הוכיחו או הפריכו:

לכל $A \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$ קיים $b \in \mathbb{R}^5$ כך שלמשוואה $AX = b$ אין פתרון.
(אין קשר לסעיפים קודמים).

(ה) (3 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה הפיכה ויהי $b \in \mathbb{R}^n$. הוכיחו או הפריכו:
למערכת $Ax = b$ יש יותר מפתרון אחד.
(אין קשר לסעיפים קודמים).

שאלה 4 (25 נקודות)

(א) (8 נק') פתרו את המערכת הליניארית הבאה מעל \mathbb{C} :

$$\begin{cases} 2ix + (4 - 2i)y + 4z = 6 - 4i, \\ 2x + (-2 - 4i)y + (1 - 2i)z = 1 - i, \\ (1 + i)x + (1 - 3i)y + (3 + i)z = 7 + 3i. \end{cases}$$

(ב) (7 נק') קבעו לאילו ערכים של a הוקטורים הבאים תלויים ליניארית מעל \mathbb{C} :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix}.$$

(ג) (5 נק') יהי \mathbb{F} שדה. תהיינה מטריצות $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$. הוכיחו או הפריכו:
אם ב- A יש שורת אפסים אז $\dim(\text{col}(A)) < n$. (אין קשר לסעיפים קודמים).

(ד) (5 נק') תהיינה מטריצות $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. הוכיחו או הפריכו:
אם $AB = B$ ו- $B \neq 0$ אז A מטריצה היחידה. (אין קשר לסעיפים קודמים).

שאלה 5 (25 נקודות)

נתונה העתקה לינארית $T : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ המוגדרת ע"י:

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} a + 3b + 4c - 3d & b + 3c - 2d \\ a + c & 3a + 7b + 6c - 5d \end{pmatrix}$$

לכל $a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x]$.

- א) (5 נק') מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T .
- ב) (5 נק') האם T על? האם T חד-חד ערכית? נמקו תשובתכם.
- ג) (5 נק') מצאו בסיס ואת המימד של $\text{Im}T$ ותנו דוגמה לאיבר בתמונה של T פרט מאיברי הבסיס.
- ד) (5 נק') מצאו בסיס ואת המימד של $\text{Ker}T$. תנו דוגמה לאיבר בגרעין של T פרט איברי הבסיס.
- ה) (5 נק') מצאו את כל הוקטורים $a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x]$ כך ש-

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$