מחלקה למדעי המחשב

09/06/24 כ"ב בניסן תשפ"ד
$14:00-17:00$

אלגברה ליניארית 1 למדמ"ח

מועד ג'

מרצים: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר, ד"ר מרינה ברשדסקי.

תשפ"ד סמסטר א'

השאלון מכיל 11 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

<u>הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה</u>

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

<u>חומר עזר</u>

- דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

<u>אחר / הערות</u> יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.
- יש לציין את השאלות שעניתם עליהן בתחילת המחברת.

==

שאלה 1 (25 נקודות)

א) (13 נקודות)
נתונה המערכת הליניארית

$$\left.\begin{aligned} x+3y+(k-2)z &= 3 \\ kx+(5k-4)y+(k^2-2k+4)z &= 3k+2 \\ -2kx+(-4-4k)y+(-k^2-k+8)z &= -5k-1 \end{aligned}\right\}$$

עבור אילו ערכי הפרמטר k למערכת פתרון יחיד, אינסוף פתרונות ואין פתרון. במקרה של אינסוף פתרונות רשמו את הפתרון הכללי.

ב) (3 נקודות) נתונים הווקטורים במרחב וקטורי $\mathbb{R}_{\le 2}[x]$:

$$\left\{u_1 = 1+kx-2kx^2\ , u_2 = 3+(5k-4)x+(-4-4k)x^2\ , u_3 = k-2+(k^2-2k+4)x+(-k^2-k+8)x^2\right\}\ .$$

עבור אילו ערכי הפרמטר k הקבוצה $\{u_1,u_2\}$ פורשת $\mathbb{R}_{\le 2}[x]$?

ג) (3 נקודות) עבור אילו ערכי הפרמטר k הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ פורשת $\mathbb{R}_{\le 2}[x]$?

לכל אחד מהקבוצות הבאות הוכיחו או הפריכו שהיא שדה:

ד) (4 נקודות) $F_1=\{a\in\mathbb{R}\}$ שעליה מוגדרות הפעולות חיבור $\oplus$ וכפל $\odot$ לפי הנוסחאות:

$$a\oplus b = 2a+3b\ , \qquad a\odot b = 2ab+a+2b\ .$$

ה) (4 נקודות) $F_2=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$ עליה מוגדרות הפעולות חיבור מטריצות וכפל מטריצות.

שאלה 2 (25 נקודות)

במרחב $\mathbb{R}^{2\times 2}$ נתונים הווקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix},\ u_2=\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix},\ u_3=\begin{pmatrix}-1&8\\1&5\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}a&1\\b&5\end{pmatrix}$$

א) (5 נקודות) עבור אילו ערכי a,b ווקטור w שייך לתת מרחב הנפרש על ידי הווקטורים u_1,u_2,u_3?

ב) (5 נקודות) עבור הערכים של a,b שמצאת בסעיף א', רשמו את ווקטור w כצירוף לינארי של u_1,u_2,u_3 בשתי דרכים שונות (רשמו שני צירופים שונים).

ג) **(4 נקודות)** האם הווקטורים u_1, u_2, u_3, w פורשים המרחב $\mathbb{R}^{2\times 2}$? נמקו את תשובתכם.

ד) **(5 נקודות)** האם הווקטורים u_1, u_2, u_3 תלויים לינארית? אם כן מצאו צירוף לינארי לא טריוויאלי של u_1, u_2, u_3 השווה לווקטור האפס.

ה) **(6 נקודות)** נתונה הפונקציה $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ x+y \end{pmatrix} .$$

בדקו אם T העתקה לינארית.

שאלה 3 (25 נקודות)

נתונה מטריצה C במרחב $\mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$C = \begin{pmatrix} a & 9 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a & a \end{pmatrix}$$

א) **(5 נקודות)** לכל ערך של a מצאו את המימד ובסיס של $\text{Nul}(C)$.

ב) **(5 נקודות)** לכל ערך של a מצאו את המימד ובסיס של $\text{Col}(C)$.

ג) **(5 נקודות)** נתונה מטריצה $M \in \mathbb{R}^{4\times 8}$. האם יכול להיות ש- $\dim\left(\text{Nul}(M)\right) = 3$? נמקו את תשובתכם.

תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

ד) **(5 נקודות)** אם $AB = A$ ו- $A \neq 0$ אז $B = I$.

ה) **(5 נקודות)** אם קיים ווקטור $u \in \mathbb{R}^n$ $(u \neq \bar{0})$ המקיים $Au = Bu$ אז $A = B$.

שאלה 4 (25 נקודות)

א) **(7 נקודות)** נתונות הקבוצות ווקטורים של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$:

$$B = \left\{1+2x+3x^2\ , 1-x^2\ , 1+2x\right\}\ ,\ C = \left\{2x-x^2\ , 1+x\ , 1+x^2\right\}\ .$$

הוכיחו כי הקבוצה B בסיס של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ והקבוצה C בסיס של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

ב) **(6 נקודות)** נתון הווקטור w של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ אשר הווקטור הקואורדינטות שלו על פי בסיס B הינו

$[w]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. מצאו את הווקטור הקואורדינטות של w על פי הבסיס C.

ג) (6 נקודות) נתונים הווקטורים w_1, w_2, w_3 של המרחב ווקטורי $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$:

$$w_1 = b_1 + b_2 + b_3 \ , \qquad w_2 = b_1 - b_2 + 3b_3 \ , \qquad w_3 = b_1 + 2b_2 \ .$$

קבעו אם הווקטורים w_1, w_2, w_3 בלתי תלויים ליניארית.

יהיו u_1, u_2, u_3 ווקטורים שונים של $\mathbb{R}^n$ ($u_1 \neq u_2 \neq u_3$ ו- $n \geq 3$). הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

ד) (3 נקודות) אם $\{u_1, u_2\}$ בת"ל אז $\{u_1, u_2, u_3\}$ בת"ל.

ה) (3 נקודות) אם $\{u_1, u_2, u_3\}$ בת"ל אז $\{u_1, u_2\}$. בת"ל.

שאלה 5 (25 נקודות)

תהי $T : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י:

$$T\left(a + bx + cx^2\right) = (a - 2c) + (a - b - c)x + (a - 2c)x^2 \ .$$

א) (5 נקודות) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

ב) (5 נקודות) מצאו בסיס ומימד לגרעין של T.

ג) (5 נקודות) מצאו בסיס ומימד לתמונה של T.

ד) (5 נקודות) הוכיחו שלא קיימת מטריצה B שמקיימת $A \cdot B = 2I$, כאשר I המטריצה היחידה.

ה) (5 נקודות) נניח כי $S : U \to V$ העתקה ליניארית ממרחב ווקטורי U למרחב ווקטורי V. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:
אם $\{u_1, \ldots, u_k\}$ ת"ל אז $\{S(u_1), \ldots, S(u_k)\}$ ת"ל.

פתרונות

שאלה 1 (25 נקודות)

א) (13 נקודות)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & k-2 & 3 \\ k & 5k-4 & (k-2)k+4 & 3k+2 \\ -2k & -4(k+1) & -k^2-k+8 & -5k-1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3+2kR_1]{R_2\to R_2-kR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & k-2 & 3 \\ 0 & 2(k-2) & 4 & 2 \\ 0 & 2(k-2) & k^2-5k+8 & k-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & k-2 & 3 \\ 0 & 2(k-2) & 4 & 2 \\ 0 & 0 & k^2-5k+4 & k-3 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & k-2 & 3 \\ 0 & 2(k-2) & 4 & 2 \\ 0 & 0 & (k-4)(k-1) & k-3 \end{array}\right)$$

עבור $\underline{k=2}$ נקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to 2R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש משתנה חופשי ואין שורת סתירה לכן יש אינסוף פתרונות. פתרון הכללי: $(x,y,z)=\left(3-3y,y,\frac{1}{2}\right)$, $y\in\mathbb{R}$.

עבור $\underline{k=4}$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. קיבלנו שורת סתירה ולכן לא קיים פתרון.

עבור $\underline{k=1}$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$. קיבלנו שורת סתירה ולכן לא קיים פתרון.

עבור $k\neq 1,2,4$ אין שורת סתירה ואין משתנה חופשי לכן למערכת פתרון יחיד.

ב) (3 נקודות) $\dim\left(\mathbb{R}_{\le 2}[x]\right)=3$ ובקבוצה $\{u_1,u_2\}$ יש רק 2 ווקטורים לכן לכן אין מצב ש $\{u_1,u_2\}$ פורשת $\mathbb{R}_{\le 2}[x]$. ז"א לא קיים ערך של k עבורו הקבוצה $\{u_1,u_2\}$ פורשת $\mathbb{R}_{\le 2}[x]$.

ג) (3 נקודות) נרשום $\{u_1,u_2,u_3\}$ כווקטורים על ידי האיזומורפיזם הטבעי:

$$w_1=\begin{pmatrix}1\\k\\-2k\end{pmatrix},\quad w_2=\begin{pmatrix}3\\5k-4\\-4-4k\end{pmatrix},\quad w_3=\begin{pmatrix}k-2\\k^2-2k+4\\-k^2-k+8\end{pmatrix}$$

נבדוק עבור אילו ערכי k הווקטורים בת"ל. בעזרת סעיף א':

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k-2 \\ k & 5k-4 & (k-2)k+4 \\ -2k & -4(k+1) & -k^2-k+8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & k-2 \\ 0 & 2(k-2) & 4 \\ 0 & 0 & (k-4)(k-1) \end{pmatrix}$$

עבור $k \neq 1,2,4$ כל העמודות מובילות לכן הקבוצה בת"ל לכן הקבוצה פורשת $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

ד) (4 נקודות) F_1 לא שדה. דוגמה נגדית: $a = 1, b = 2$.

$$1 \oplus 2 = 2 \cdot 1_3 \cdot 2 = 8 \ , \quad 2 \oplus 1 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7 \ , \quad 1 \oplus 2 \neq 2 \oplus 1 \ .$$

כלומר חוק החילוף לא מתקיים.

ה) (4 נקודות) F_2 לא שדה. דוגמה נגדית: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

A לא הפיכה לכן לא קיימת A^{-1} כך ש- $A \cdot A^{-1} = I$ כאשר I מטריצה יחידה.

שאלה 2 (25 נקודות)

א) (5 נקודות) $\mathbb{R}^{2\times 2} \cong \mathbb{R}^4$ לכן אפשר לעבוד עם הווקטורים ב- $\mathbb{R}^4$:

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} , \ \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} , \ \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} , \ \mathrm{v} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{v} = \mathrm{span}\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v} = k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2 + k_3\mathrm{v}_3 \ .$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 2 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 3 & 2 & 5 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 3R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & -5 & 10 & 1-2a \\ 0 & -1 & 2 & b-a \\ 0 & -4 & 8 & 5-3a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & -1 & 2 & b-a \\ 0 & -5 & 10 & 1-2a \\ 0 & -4 & 8 & 5-3a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 - 4R_2]{R_3 \to R_3 - 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & -1 & 2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 3a-5b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-4b+5 \end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון כאשר $\begin{cases} 3a-5b &= -1 \\ a-4b &= -5 \end{cases} \Leftarrow b=2, a=3$.

ב) (5 נקודות) עבור $b=2, a=3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} k_1 &= -3k_3+1 \\ k_2 &= 2k_3+1 \end{cases}$ לכל $k_3 \in \mathbb{R}$. נציב $k_3=1 \Leftarrow k_1=-2, k_2=3$.

$$w=-2u_1+3u_2+u_3 \ .$$

נציב $k_3=0 \Leftarrow k_1=1, k_2=1$.

$$w=u_1+u_2 \ .$$

ג) (4 נקודות)

u_1,u_2,u_3 תלויים לינארית בגלל שלא כל העמודות מובילות, לכן u_1,u_2,u_3,w תלויים לינארית. לפיכך u_1,u_2,u_3,w אינם פורשים את $\mathbb{R}^{2\times 2}$. נמתא את הצירוף הלינארי הלא טריוויאלי של u_1,u_2,u_3 ששווה לווקטור האפס:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$(x,y,z)=(-3z,2z,z), \ z\in\mathbb{R}$. נציב $z=1 \Leftarrow x=3, y=2$:

$$-3u_1+2u_2+u_3=0 \ .$$

ד) (6 נקודות) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ x+y \end{pmatrix} \ .$$

T לא העתקה לינארית. דוגמה נגדית: $u_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$T(u_1)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad T(2u_1)=T\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 2T(u_1) \ .$$

שאלה 3 (25 נקודות)

א) (5 נקודות)

$$\begin{pmatrix} a & 9 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a & a \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to aR_3 - R_1]{R_2 \to aR_1 - R_1} \begin{pmatrix} a & 9 & 0 \\ 0 & a^2-9 & a \\ 0 & a^2-9 & a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} a & 9 & 0 \\ 0 & a^2-9 & a \\ 0 & 0 & (a-1)a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 9 & 0 \\ 0 & (a+3)(a-3) & a \\ 0 & 0 & (a-1)a \end{pmatrix}$$

עבור $a=0$ נקבל $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. פתרון הכללי למשוואה הומוגנית:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad x, z \in \mathbb{R} \ .$$

$B_{\text{Nul}(C)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim(\text{Nul}(C)) = 2$.

עבור $a=3$ נקבל $\begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. פתרון הכללי למשוואה הומוגנית:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad y \in \mathbb{R} \ .$$

$B_{\text{Nul}(C)} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim(\text{Nul}(C)) = 1$.

עבור $a = -3$ נקבל $\begin{pmatrix} -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 4R_2} \begin{pmatrix} -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$. פתרון הכללי למשוואה הומוגנית:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad y \in \mathbb{R} \ .$$

$B_{\text{Nul}(C)} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim\left(\text{Nul}(C)\right) = 1$.

עבור $a = 1$ נקבל $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to 8R_1 + 9R_2} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. פתרון הכללי למשוואה הומוגנית:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{8}z \\ \frac{1}{8}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{8}z \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} , \quad z \in \mathbb{R} .$$

$B_{\text{Nul}(C)} = \left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim\left(\text{Nul}(C)\right) = 1$.

ב) (5 נקודות)

עבור $a = 0$, $B_{\text{Col}(C)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim\left(\text{Col}(C)\right) = 1$.

עבור $a = 3$, $B_{\text{Col}(C)} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim\left(\text{Col}(C)\right) = 2$.

עבור $a = -3$, $B_{\text{Col}(C)} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim\left(\text{Col}(C)\right) = 2$.

עבור $a = 1$, $B_{\text{Col}(C)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim\left(\text{Col}(C)\right) = 1$.

עבור $a = -3$ נקבל $\begin{pmatrix} -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 4R_2} \begin{pmatrix} -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$. פתרון הכללי למשוואה הומוגנית:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad y \in \mathbb{R} .$$

$B_{\text{Nul}(C)} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim\left(\text{Nul}(C)\right) = 1$.

עבור $a=1$ נקבל $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to 8R_1+9R_2} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. פתרון הכללי למשוואה הומוגנית:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{8}z \\ \frac{1}{8}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{8}z \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \quad , \quad z\in\mathbb{R} \ .$$

$B_{\text{Nul}(C)} = \left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim(\text{Nul}(C))=1$.

ג) (5 נקודות) $M\in\mathbb{R}^{4\times 8}$. אם $\dim(\text{Nul}(M))=3$ אז $\text{rank}(M)=8-3=5$. ז"א $\dim(\text{Row}(M))=5$. למטריצה M יש 4 שורות אז $\dim(\text{Row}(M))\leq 4$. לכן לא יכול ליהות ש- $\dim(\text{Nul}(M))=3$.

ד) (5 נקודות) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=A \ .$$

ה) (5 נקודות) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $u=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$Au=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad Bu=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

הרי $Au=Bu$ ו- $A\neq B$.

שאלה 4 (25 נקודות)

א) (7 נקודות)

$$b_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad b_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad b_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות לכן b_1,b_2,b_3 בת"ל. $\dim\{b_1,b_2,b_3\}=3=\dim(\mathbb{R}_{\leq 2}[x])$ לכן הקבוצה $\{b_1,b_2,b_3\}$ מהווה בסיס של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

$$c_1=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\quad,\quad c_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad,\quad c_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}| & | & |\\ c_1 & c_2 & c_3\\ | & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to 2R_3+R_1}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות לכן c_1,c_2,c_3 בת"ל. $\dim\{c_1,c_2,c_3\}=3=\dim\left(\mathbb{R}_{\leq 2}[x]\right)$ לכן הקבוצה $\{c_1,c_2,c_3\}$ מהווה בסיס של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

ב) (6 נקודות) $[w]_C=P_{B\to C}[w]_B$ כאשר $P_{B\to C}$ המטריצה המעבר מבסיס B ל- בסיס C.

$$(C|B)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&1&1\\2&1&0&2&0&2\\-1&0&1&3&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&2&0&2\\0&1&1&1&1&1\\-1&0&1&3&-1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to 2R_3+R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&2&0&2\\0&1&1&1&1&1\\0&1&2&8&-2&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&2&0&2\\0&1&1&1&1&1\\0&0&1&7&-3&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&2&0&2\\0&1&0&-6&4&0\\0&0&1&7&-3&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&8&-4&2\\0&1&0&-6&4&0\\0&0&1&7&-3&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to \frac{1}{2}R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&4&-2&1\\0&1&0&-6&4&0\\0&0&1&7&-3&1\end{array}\right)$$

$$.P_{B\to C}=\begin{pmatrix}4&-2&1\\-6&4&0\\7&-3&1\end{pmatrix}$$

$$[w]_C=P_{B\to C}[w]_B=\begin{pmatrix}4&-2&1\\-6&4&0\\7&-3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}_C\quad.$$

ג) (6 נקודות)
עלינו לבדוק האם $\exists$ צירוף לינארי <u>לא</u> טריוויאלי של w_1, w_2, w_3 אשר נותן את $\bar{0}$ (ווקטור האפס).

$$\begin{aligned} 0 =& \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 \\ =& \alpha_1 (b_1 + b_2 + b_3) + \alpha_2 (b_1 - b_2 + 3b_3) + \alpha_3 () \\ =& (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) b_1 + (\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3) b_2 + (\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0\alpha_3) b_3 \end{aligned}$$

יש לנו כאן צירוף לינארי של b_1, b_2, b_3 שנותן את 0 מאחר והם בת"ל נקבל את המערכת הבאה:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 0\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

אם למערכת פתרון יחיד אז w_1, w_2, w_3 בת"ל אחרת w_1, w_2, w_3 ת"ל.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{2} R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

למערכת יש ∞ פתרונות $\Leftarrow$ w_1, w_2, w_3 ת"ל.
נשים לב

$$\frac{3}{2} w_1 - \frac{1}{2} w_2 = w_3 \ .$$

ד) (3 נקודות) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ווקטורים של $\mathbb{R}^3$. הרי $\{u_1, u_2\}$ בת"ל ו- $\{u_1, u_2, u_3\}$ ת"ל.

ה) (3 נקודות) טענה נכונה. נוכיח דרך השלילה. נניח כי $\{u_1, u_2, u_3\}$ בת"ל ו- $\{u_1, u_2\}$ ת"ל.
אז מתקיים

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0$$

עם מקדמים לא כולם אפסים, כלומר אחד המקדמים, $\alpha_i \neq 0$.
נוסיף $u_3 \cdot 0$ לשני האגפים ונקבל

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + 0 \cdot u_3 = 0$$

הרי קיבלנו צירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 עם מקדמים לא כולם אפסים ששווה לווקטור האפס.
ז"א u_1, u_2, u_3 ת"ל. זאת סותר את ההנחה ש- u_1, u_2, u_3 בת"ל.

שאלה 5 (25 נקודות)

א) (5 נקודות) המטריצה המייצגת הסטנדרטית: $A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\1&-1&-1\\1&0&-2\end{pmatrix}$

ב) (5 נקודות)

$$\begin{pmatrix}1&0&-2\\1&-1&-1\\1&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+2R_2}\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Nul}(A)$:

$$B_{\text{Nul}(A)}=\left\{\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$B_{\text{Ker}(T)}=\{2+2x+x^2\}$$

$\dim(\text{Ker}(T))=2$.

ג) (5 נקודות)

$$B_{\text{col}(A)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

$\dim(\text{Im}(A))=2$.

$$B_{\text{Im}(T)}=\{1+x+x^2\ ,\ -x\}\ .$$

$\dim(\text{Im}(T))=2$.

ד) (5 נקודות) מסעיף א' $A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\1&-1&-1\\1&0&-2\end{pmatrix}$.

שורה שלישית שווה לשורה ראשונה לכן $|A|=0 \Leftarrow A$ לא הפיכה.

נניח כי $AB=2I \Leftarrow A\left(\frac{1}{2}B\right)=I \Leftarrow A$ הפיכה. בסתירה לכך ש- A לא הפיכה.

ה) (5 נקודות)