

## שיעור 12

### רذוקציות פולינומיאליות

### CLIQUE 12.1 - NP היא - שלמה

**משפט 12.1**  $CLIQUE \in NPC$

הבעית CLIQUE היא (ראו הגדרה 10.8):

$$CLIQUE = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ מכיל קליקה בגודל } k \}.$$

היא NP - שלמה CLIQUE

**הוכחה:**

1) הוכחנו כי  $CLIQUE \in NP$  במשפט 10.3.

2) נוכח כי  $NP \leq_P CLIQUE$  קשה ע"י רذוקציה.

פונקציית הרזוקציה

בhinintן נוסחת  $\phi$  3CNF מעל  $n$  משתנים  $x_1, x_2, \dots, x_n$  המכילה  $m$  פסוקיות, ניצור זוג  $\langle G, k \rangle$  ונוכח כי

$$\langle \phi \rangle \in 3SAT \Leftrightarrow \langle G, k \rangle \in CLIQUE.$$

בנייה את הגרף  $G$  באופן הבא:

הקודקודים של  $G$ :

לכל פסוקית  $C_i$  ב-  $\phi$  המכילה 3 ליטרלים ניצור שלשה  $t_i$  המכילה 3 קודקודים המתאימים להחטறלים של  $C_i$ :



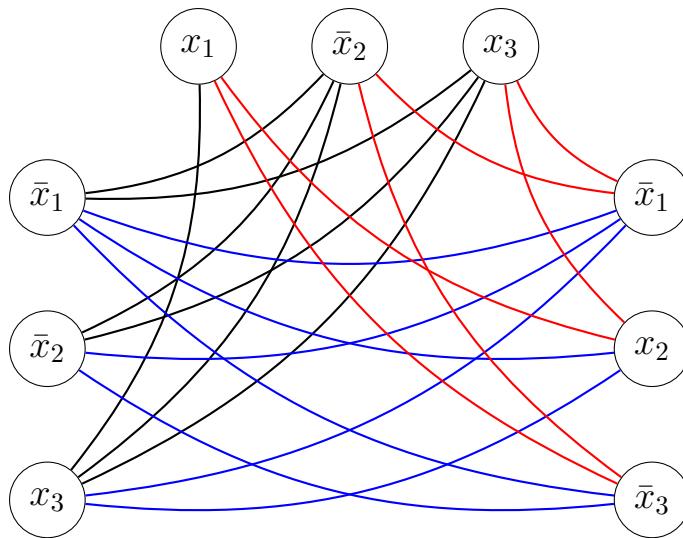
הצלעות של  $G$ :

נבחר בין כל שני קודקודים פרט לזוגות הבאים:

- זוג קודקודים המתאימים למשתנה ומשלים שלו.
- זוג קודקודים שנמצאים באותו שלושה.

לדוגמא:

$$\phi = \left( \begin{array}{c} \textcolor{red}{T} \\ x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \\ C_1 \end{array} \right) \wedge \left( \begin{array}{c} \textcolor{red}{T} \\ \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \\ C_2 \end{array} \right) \wedge \left( \begin{array}{c} \textcolor{red}{T} \\ \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \\ C_3 \end{array} \right)$$



נקבע  $k = m$ .

### נכונות הרדוקציה

1) ניתן לבנות את  $G$  בזמן פולינומיائي בגודל  $\phi$ .

2) נוכיח כי

$$\langle \phi \rangle \in 3SAT \Leftrightarrow \langle G, k \rangle \in CLIQUE .$$

כיוון  $\Leftarrow$

- נניח כי  $\phi$  ספיקה ונסתכל על השמה המספקת את  $\phi$ .
- בכל פסוקית  $C_i$  ב-  $\phi$  יש לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך  $T$ .
- נבחר מכל שלשה  $t_i$  בקודקוד אחד המתאים לליטרל שקיבל ערך  $T$  ב-  $C_i$  ונוסיף אותו לקליקה.
- מספר הקודקודים שבחרנו שווה  $k$  וכל שניים מהם מחוברים בצלע כי לא בחרנו שני קודקודים מאותה שלשה ולא בחרנו שני קודקודים המתאימים לשינוי ומשלים שלו.
- ולכן  $G$  מכיל קליקה בגודל  $k$ .

כיוון  $\Rightarrow$

- נניח כי  $G$  מכיל קליקה בגודל  $k$  ונסתכל על קליקה כזו.
- לפי הבנייה הקליקה מכילה בדיזוק קודקוד אחד מכל שלשה  $t_i$ . ניתן השמה למשתנים של  $\phi$  כך שהליטרל שמתאים לקודקוד שנמצא בклיקה יקבל ערך  $T$ .
- השמה זו אפשרית מכיוון שהקליקה לא מכילה שני קודקודים המתאימים לשינוי ומשלים שלו.

- בנוסף לשם זו מספקת את  $\phi$  מכיוון שהקליקה מכילה קודקוד מכל שלשה  $t_i$  ולכן הliterל המתאים לקודקוד בשלה  $t_i$  קיבל ערך  $T$  ולכן הוא מספק את הפסוקית  $C_i$ .
- לכן  $\phi$  ספיקה.

■

## 12.2 בעיית הקבוצה הבלתי תלויות

### הגדרה 12.1 קבוצה בלתי תלויות

בاهינתן גרף לא מכוון  $G = (V, E)$ , קבוצה בלתי תלויות ב-  $G$  היא תת-קבוצה של קודקודים  $S \subseteq V$  כך שלכל שני קודקודים  $S \in S$ ,  $u, v \in S$  מתקיים  $(u, v) \notin E$ .



קבוצת בלתי תלויות בגודל 3:  $k = 3$



קבוצת בלתי תלויות בגודל 3:  $k = 3$

### הגדרה 12.2 בעיית $IS$

קלט: גרף לא מכוון  $G = (V, E)$  ומספר  $k$ .

פלט: האם קיימת קבוצה בלתי תלויות ב-  $G$  בגודל  $k$ ?

$$IS = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויות בגודל } k \}$$

### משפט 12.2 $IS \in NPC$

הבעיה  $IS$  היא  $NP$  - שלמה.

הוכחה:

(1) נומינצי  $IS \in NP$

בנייה אלגוריתם אimoto  $V$  עבור  $IS$ .  
 $V = \text{על קלט } (\langle G, k \rangle, y)$ :

- בודק האם  $y$  היא קבוצה של  $k$  קודקודים מ-  $G$  השוניים זה מזה.
  - אם לא  $\Rightarrow$  דוחה.
- בודק האם כל שני קודקודים מ-  $y$  לא מחוברים בצלע ב-  $G$ .
  - אם כן  $\Rightarrow$  מקבל.

- אם לא  $\Rightarrow$  דוחה.

## (2) נוכחות CIQUE $\leq_P$ IS

פונקציית הרדוקציה:

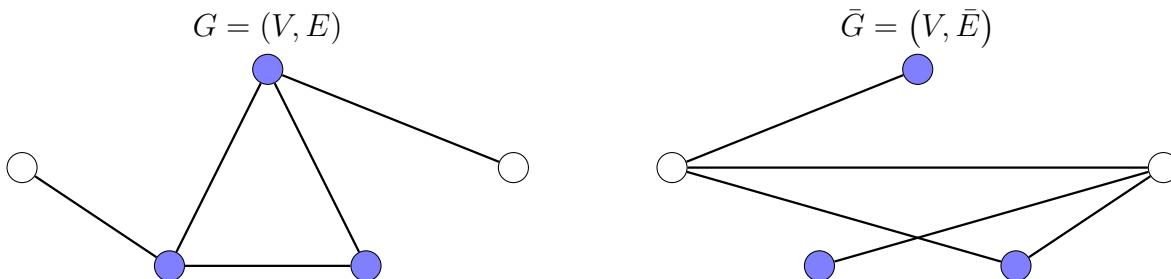
בhinתן זוג  $\langle G, k \rangle$  הקלט של CLIQUE, ניצור זוג  $\langle G', k' \rangle$ , הקלט של IS, ונוכח כי:

$$\langle G, k \rangle \in CLIQUE \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in IS.$$

הfonקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקייםים:

- 1) נניח שהגרף הוא  $G = (V, E)$ . אז הגרף  $G'$  הוא הגרף המשלים של  $G = (V, E)$  כאשר  $G' = \bar{G} = (V, \bar{E})$  ו $\bar{E} = \{(u_1, u_2) \mid (u_1, u_2) \notin E\}$ .
- 2)  $k' = k$

לדוגמא, בהינתן הגרף  $G = (V, E)$  שמכיל קliquה בגודל  $3, k = 3$ , הפונקציית הרדוקציה  $R$  מוחירה את הגרף  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  ואת המספר  $3, k' = k = 3$ , כמתואר בתרשימים למטה:



nocחות הרדוקציה

- 1) ניתן לבנות  $G'$  בזמן פולינומיائي בגודל  $G$ .
- 2) נוכחה כי  $\langle G, k \rangle \in CLIQUE \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in IS$ .

כיוון

- בhinתן גרף  $G = (V, E)$  ושלם נניח כי  $\langle G, k \rangle \in CLIQUE$ .
- אם  $G$  מכיל קliquה  $S$  בגודל  $k$ ,  $\langle u_1, u_2 \rangle \in S$  (אם  $u_1, u_2 \in S$  שני קודקודים בקliquה  $S$  אי- $S$  כלומר, כל שני קודקודים ב-  $S$  מחוברים בצלע של  $G$ ).
- אם  $u_1, u_2 \in S$  אי- $\langle u_1, u_2 \rangle \notin \bar{E}$  (אם  $u_1, u_2 \in S$  לא מחוברים בצלע של המשלים של הגרף  $\bar{G}$ , דהיינו  $\langle u_1, u_2 \rangle \in IS$ ).

$\Leftarrow$  אותה הקבוצה  $S$  היא קבוצה בלתי תלوية ב-  $G'$  בגודל  $k' = k$ .

$\Leftarrow$   $G'$  מכיל קבוצה בלתי תלوية בגודל  $k'$ .

$\langle G', k' \rangle \in IS \Leftarrow$

כיוון  $\Rightarrow$

בhinתן גרף  $G'$  ושלם  $k'$ .

$\langle G', k' \rangle \in IS$ .

$\Leftarrow G'$  מכיל קבוצה בלתי תלوية  $S$  בגודל  $k'$ .

$\Leftarrow$  אם  $u_1, u_2 \in S$  איזי  $(u_1, u_2) \notin \bar{E}$ .

כלומר, כל שני קדוקודים ב-  $S$  לא מחוברים בצלע של  $G'$ .

$\Leftarrow$  אם  $u_1, u_2 \in S$  איזי  $(u_1, u_2) \in E$ .

כלומר, כל שני קדוקודים ב-  $S$  מחוברים בצלע של  $G(V, E)$ .

$\Leftarrow$  אותה הקבוצה  $S$  היא קליקה ב-  $G$  בגודל  $k' = k$ .

$\Leftarrow G$  מכיל קליקה בגודל  $k$ .

$\Leftarrow \langle G, k \rangle \in CLIQUE$ .

■

## 12.3 בעיית הcisוי בקדוקודים

### הגדרה 12.3 cisוי בקדוקודים

בhinתן גרף לא מכוון  $G = (V, E)$ , cisוי בקדוקודים ב-  $G$  הוא תת-קבוצה של קודוקודים  $C \subseteq V$  כך שלכל צלע  $S \in C$ ,  $u \in C$  וותקיים  $v \in S$   $u \neq v$ .



cisוי בקדוקודים בגודל 2:  $k = 2$



cisוי בקדוקודים בגודל 5:  $k = 5$



cisוי בקדוקודים בגודל 5:  $k = 5$

## 12.4 הבעיה $VC$

### הגדירה 12.4 בעיית $VC$

קלט: גראף לא מכוון  $G = (V, E)$  ומספר  $k$ .

פלט: האם קיימים כיסוי בקודקודים ב-  $G$  בגודל  $k$ ?

$$VC = \{\langle G, k \rangle \mid \text{גראף לא מכוון המכיל כיסוי בקודקודים בגודל } k\}$$

### משפט 12.3 $VC \in NPC$

הבעיה  $VC$  היא  $NP$  - שלמה.

הוכחה:

$$\underline{VC \in NP}$$

בנייה אלגוריתם אימות  $VC$  עבור  $.VC$  על קלט  $(\langle G, k \rangle, y) = V$ :

- בודק האם כל צלע ב-  $G$  מכילה לפחות קצה אחד ב-  $y$ .

○ אם כן  $\Rightarrow$  מקבל.

○ אם לא  $\Rightarrow$  דוחה.

$$\underline{\text{נוכיח כי } VC \text{ היא } NP\text{-קשה ע"י רדוקציה}}$$

פונקציית הרדוקציה:

בהתנחת זוג  $\langle G, k \rangle$  הקלט של  $IS$ , נוצר זוג  $\langle G', k' \rangle$  הקלט של  $VC$  ונוכיח כי

$$\langle G, k \rangle \in IS \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in VC .$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

$$\begin{aligned} 1) \text{ נניח שהגרף הוא } &G = (V, E) \\ \text{ אז הגרף } G' \text{ הוא אותו גראף } &G = (V, E) \end{aligned}$$

$$.k' = |V| - k \quad (2)$$

### נכונות הרדוקציה

1) ניתן לבנות  $G'$  בזמן פולינומיאלי בגודל  $G$ .

$$2) \text{ נוכיח כי } \langle G, k \rangle \in IS \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in VC .$$

כיוון

בהתנחת גראף  $G = (V, E)$  ושלם  $k$ .

$$\text{נניח כי } \langle G, k \rangle \in IS .$$

$\Leftarrow G$  מכיל קבוצה בלתי תלויות  $S$  בגודל  $k$ .  
 $\Leftarrow$  אם  $u_1 \in S$  וגם  $u_2 \in S$  אז  $(u_1, u_2) \notin E$ .  
 כלומר, כל שני קדוקודים ב-  $S$  לא מחוברים בצלע ב-  $G$ .

$\Leftarrow$  השלילה הלוגית של הגרירה הזאת היא:  
 אם  $u_2 \notin S$  אז  $u_1 \notin S$  או  $(u_1, u_2) \in E$ .  
 $\Leftarrow$  אם  $u_2 \in V \setminus S$  אז  $u_1 \in V \setminus S$  או  $(u_1, u_2) \in E$ .  
 $\Leftarrow$   $k' = |V| - k$  היא כיסוי קדוקודים ב-  $G$  בגודל  $k'$ .  
 $\Leftarrow$  הגרף  $G' = G$  מכיל כיסוי קדוקודים בגודל  $k'$ .  
 $\Leftarrow \langle G', k' \rangle \in VC$   $\Leftarrow$

כיוון  $\Rightarrow$

בהינתן גרף  $G'$  ושלם  $k'$ .  
 $\langle G', k' \rangle \in VC$ .

$\Leftarrow G''$  מכיל כיסוי בקדוקודים  $C$  בגודל  $k''$ .  
 $\Leftarrow$  אם  $u_2 \in C$  אז  $u_1 \in C$  או  $(u_1, u_2) \in E$ .  
 $\Leftarrow$  השלילה הלוגית של הגרירה הזאת היא:  
 אם  $(u_1, u_2) \notin E$  אז  $u_2 \notin C$  ו  $u_1 \notin C$ .  
 $\Leftarrow$  אם  $(u_1, u_2) \notin E$  וגם  $u_2 \in V \setminus C$  אז  $u_1 \in V \setminus C$ .  
 $\Leftarrow$  כל שני קדוקודים ב-  $V \setminus C$  לא מחוברים בצלע ב-  $G''$ .  
 $\Leftarrow$   $k = |V| - k'$  היא קבוצת בלתי תלויות ב-  $G''$  בגודל  $k$ .  
 $\Leftarrow$  הגרף  $G = G'$  מכיל קבוצה בלתי תלויות בגודל  $k$ .



## PARTITION 12.5

### הגדרה 12.5 בעית PARTITION

קלט: קבוצת מספרים שלמים  $.S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$   
פלט: האם קיימת תת-קבוצה  $Y \subseteq S$  כך ש-

$$\sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in S \setminus Y} y$$

$$PARTITION = \left\{ S \mid \sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in S \setminus Y} y \text{ קבוצת שלמים, וקיימת תת-קבוצה } Y \subseteq S \text{ כך ש-} \right\}$$

## 12.6 רדוקציות פולינומיאליות

**משפט 12.4 רדוקציות פולינומיאליות**

$$\begin{aligned}
 SAT &\leqslant_P 3SAT \\
 3SAT &\leqslant_P CLIQUE \\
 CLIQUE &\leqslant_P IS \\
 IS &\leqslant_P VC \\
 SubSetSum &\leqslant_P PARTITION \\
 HAMPATH &\leqslant_P HAMCYCLE
 \end{aligned}$$

**משפט 12.7 שפות NP שלמות****משפט 12.5 שפות NP- שלמות**

(משפט קוק לוין)  $SAT$ - שלמה.  $3SAT$ - שלמה.  $HAMPATH$ - שלמה.  $CLIQUE$ - שלמה.  $IS$ - שלמה.  $VC$ - שלמה.