

עבודה עצמית 2 שדות

לוח הכפל של איברים ב- \mathbb{Z}_3 :

\cdot	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$\bar{1}^{-1} = \bar{1}$

$\bar{2}^{-1} = \bar{2}$

לוח החיבור של איברים ב- \mathbb{Z}_3 :

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

$-\bar{0} = \bar{0}$

$-\bar{1} = \bar{2}$

$-\bar{2} = \bar{1}$

לוח הכפל של איברים ב- \mathbb{Z}_5 :

\cdot	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$\bar{1}^{-1} = \bar{1}$

$\bar{2}^{-1} = \bar{3}$

$\bar{3}^{-1} = \bar{2}$

$\bar{4}^{-1} = \bar{4}$

לוח החיבור של איברים ב- \mathbb{Z}_5 :

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

$-\bar{0} = \bar{0}$

$-\bar{1} = \bar{4}$

$-\bar{2} = \bar{3}$

$-\bar{3} = \bar{2}$

$-\bar{4} = \bar{1}$

לוח הכפל של איברים ב- \mathbb{Z}_7 :

\cdot	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$

$\bar{1}^{-1} = \bar{1}$

$\bar{2}^{-1} = \bar{4}$

$\bar{3}^{-1} = \bar{5}$

$\bar{4}^{-1} = \bar{2}$

$\bar{5}^{-1} = \bar{3}$

$\bar{6}^{-1} = \bar{6}$

לוח החיבור של איברים ב- \mathbb{Z}_7 :

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$

$-\bar{0} = \bar{0}$

$-\bar{1} = \bar{6}$

$-\bar{2} = \bar{5}$

$-\bar{3} = \bar{4}$

$-\bar{4} = \bar{3}$

$-\bar{5} = \bar{2}$

$-\bar{6} = \bar{1}$

שאלה 1 רשמו את האיברים הבאים ב- \mathbb{Z}_3 :

(א) $\overline{12}$

(ב) $\overline{23}$

(ג) $\overline{57}$

(ד) $\overline{46}$

(ה) $\overline{19}$

(ו) $\overline{-7}$

(ז) $\bar{2} + \bar{1}$

(ח) $\bar{2} + \bar{2}$

(ט) $\bar{1} + \bar{1}$

(י) $\bar{2} \cdot \bar{2}$

(יא) $\bar{2} \cdot \bar{0}$

(יב) $\bar{2} \cdot \bar{1}$

שאלה 2 רשמו את האיברים הבאים ב- \mathbb{Z}_5 :

(א) $\overline{11}$

(ב) $\overline{24}$

(ג) $\overline{56}$

(ד) $\overline{98}$

(ה) $\overline{22}$

(ו) $\overline{-8}$

(ז) $\bar{2} + \bar{2}$

(ח) $\bar{2} + \bar{3}$

(ט) $\bar{1} + \bar{4}$

(י) $\bar{2} \cdot \bar{4}$

(יא) $\bar{3} \cdot \bar{2}$

(יב) $\bar{4} \cdot \bar{3}$

שאלה 3 רשמו את האיברים הבאים ב- \mathbb{Z}_7 :

(א) $\overline{13}$

(ב) $\overline{33}$

(ג) $\overline{74}$

(ד) $\overline{16}$

(ה) $\overline{12}$

(ו) $\overline{-9}$

(ז) $\bar{2} + \bar{6}$

(ח) $\bar{3} + \bar{5}$

(ט) $\bar{6} + \bar{3}$

(י) $\bar{2} \cdot \bar{6}$

(יא) $\bar{3} \cdot \bar{5}$

(יב) $\bar{4} \cdot \bar{6}$

שאלה 4

(א) רשמו את טבלאות הכפל וחיבור של \mathbb{Z}_7 .

(ב) רשמו את האיברים ההופכיים של 2, 3, 4, 5, 6 ב- \mathbb{Z}_7 וב- \mathbb{Z}_{11} .

שאלה 5

(א) מצאו הפתרונות של המשוואות (1) $3x = 2$ (2) $-3x = 2$

(1) בשדה \mathbb{Z}_5

(2) בשדה \mathbb{Z}_7

(3) בשדה \mathbb{Z}_{11}

(ב) יהי \mathbb{F} שדה. הוכיחו כי לכל $a, b \in \mathbb{F}$ כך ש $a \neq 0$ למשוואה $ax = b$ ישנו פתרון יחיד.

שאלה 6

יהי \mathbb{F} שדה. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) לכל מספר טבעי k , ולכל $a_1, \dots, a_k, b \in \mathbb{F}$ מתקיים

$$(a_1 + \dots + a_k)b = a_1b + \dots + a_kb \in \mathbb{F}.$$

רמז: אינדוקציה על k .

(ב) לכל $a \in \mathbb{F}$ פרט ל- 0 יש $b \in \mathbb{F}$ יחיד כך ש- $ab = 1$.

(ג) יהי $a \in \mathbb{F}$. אם $a + a = a$ אז $a = 0$.

(ד) יהיו $a, b \in \mathbb{F}$. אם $ab = 0$ אז $a = 0$ או $b = 0$.

(ה) לכל $a, b \in \mathbb{F}$ מתקיים $-(ab) = (-a)b$.

שאלה 7

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות ע"י דוגמה נגדית:

(א) קבוצת המספרים השלמים \mathbb{Z} עם פעולות החיבור והכפל הרגילות שדה.

(ב) קבוצת המספרים הרציונליים \mathbb{Q} עם פעולות $a + b = \frac{a-b}{3}$ ו- $a \cdot b = 3ab$ שדה.

ג) הקבוצה $\{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\}$ ביחס לפעולות החיבור והכפל הרגילות, כלומר,

$$(a + b\sqrt{2}) \oplus (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$

שדה.

ד) הקבוצה $\{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ ביחס לפעולות החיבור והכפל הרגילות, שדה.

שאלה 8

- א) רשמו את טבלאות הכפל וחיבור של \mathbb{Z}_7 .
- ב) רשמו את האיברים ההופכיים של 2, 3, 4, 5, 6 ב- \mathbb{Z}_7 וב- \mathbb{Z}_{11} .
- ג) הגדירו על הקבוצה $\{0, 1, a, b\}$ פעולות כפל וחיבור (ע"י כתיבת טבלאות הכפל והחיבור) כך שזה יהיה שדה.
- הדרכה: קבעו ש- $a + 1 = b$.

שאלה 9

פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל \mathbb{Z}_3 :

$$\begin{aligned} x + 2y &= \bar{2} \\ 2x - y &= \bar{1} \end{aligned}$$

שאלה 10

פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל \mathbb{Z}_3 :

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= \bar{2} \\ x + y &= \bar{1} \end{aligned}$$

שאלה 11

פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל \mathbb{Z}_5 :

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= \bar{3} \\ 3x - y &= \bar{2} \end{aligned}$$

שאלה 12

פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל \mathbb{Z}_5 :

$$\begin{aligned} 3x + y &= \bar{2} \\ 3x + 4y &= \bar{3} \end{aligned}$$

שאלה 13

פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל \mathbb{Z}_5 :

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= \bar{0} \\ x - 3y &= \bar{4} \end{aligned}$$

שאלה 14

פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל \mathbb{Z}_7 :

$$5x + 2y = 3$$

$$4x - 3y = 4$$

שאלה 15

פתרו את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_5 . כמה פתרונות יש למערכת?

$$x + 3y + z = 1$$

$$3x + y + 4z = 2$$

$$2x + 4y + 4z = 3$$

שאלה 16

נתונה המערכת הבאה:

$$x + 3y + z = 1$$

$$3x + y + 2z = 2$$

$$2x + 2y + 3z = 4$$

פתרו את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_5 . רשמו את כל הפתרונות בצורה מפורשת. כמה פתרונות יש למערכת?

שאלה 17

פתרו את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_7 . כמה פתרונות יש למערכת?

$$x + 2y + z = 2$$

$$3x + y + 4z = 3$$

$$2x + 4y + 4z = 3$$

שאלה 18

פתרו את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_5 . כמה פתרונות יש למערכת?

$$x + 3y + z = 1$$

$$3x + y + 2z = 2$$

$$2x + 2y + 3z = 4$$

שאלה 19

פתרו את מערכת המשוואות הבאה מעל שדה \mathbb{Z}_5 :

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ 4x + 2y + z = 1 \\ x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

רשמו את כל הפתרונות שלה.

שאלה 20

פתרו את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_7 .

$$2x + 3y + 3z = 5$$

$$3x + 4y + z = 1$$

$$x + y + 6z = 2$$

שאלה 21

פתרו את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_5 .

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 2 \\ 3x + y + 4z &= 3 \\ 2x + 4y + 4z &= 3\end{aligned}$$

שאלה 22

הוכיחו שלמערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_p , יש פתרון יחיד עם $p \geq 7$ מספר ראשוני.

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 2 \\ 3x + y + 4z &= 3 \\ 2x + 4y + 4z &= 3\end{aligned}$$

שאלה 23

פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל \mathbb{C} :

$$\begin{aligned}(1+i)z_1 + (1-i)z_2 &= 1+i \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 &= 1+3i\end{aligned}$$

שאלה 24

פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל \mathbb{C} :

$$\begin{aligned}2z_1 - (2+i)z_2 &= -i \\ (4-2i)z_1 - 5z_2 &= -1-2i\end{aligned}$$

שאלה 25

פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל \mathbb{C} :

$$\begin{aligned}(1-i)z_1 - 3z_2 &= -i \\ 2z_1 - (3+3i)z_2 &= 3-i\end{aligned}$$

שאלה 26

פתרו את המערכת הבאה מעל \mathbb{C} :

$$\begin{aligned}iz_1 + (1-i)z_2 &= 2i, \\ (1+2i)z_1 - 2z_2 &= 1.\end{aligned}$$

שאלה 27

פתרו את המערכת הבאה מעל \mathbb{C} :

$$\begin{aligned}3iz_1 + (6-6i)z_2 &= 6i, \\ (1+i)z_1 - 2z_2 &= 1.\end{aligned}$$

שאלה 28

פתרו את המערכת הבאה מעל \mathbb{C} :

$$\begin{aligned}4z_1 + 4z_2 &= 4i, \\ (5+10i)z_1 - 5z_2 &= 5.\end{aligned}$$

פתרונות

שאלה 1

(א)

$$\overline{12} = \overline{\text{rem}(12, 3)} = \bar{0}$$

(ב)

$$\overline{23} = \overline{\text{rem}(23, 3)} = \bar{2}$$

(ג)

$$\overline{57} = \overline{\text{rem}(57, 3)} = \bar{0}$$

(ד)

$$\overline{46} = \overline{\text{rem}(46, 3)} = \bar{1}$$

(ה)

$$\overline{19} = \overline{\text{rem}(19, 3)} = \bar{1}$$

(ו)

$$\bar{2} + \bar{7} = \bar{9} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad -\bar{7} = \bar{2} .$$

(ז)

$$\bar{2} + \bar{1} = \bar{3} = \bar{0}$$

(ח)

$$\bar{2} + \bar{2} = \bar{4} = \bar{1}$$

(ט)

$$\bar{1} + \bar{1} = \bar{2}$$

(י)

$$\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{4} = \bar{1}$$

(יא)

$$\bar{2} \cdot \bar{0} = \bar{0}$$

(יב)

$$\bar{2} \cdot \bar{1} = \bar{2}$$

שאלה 2

(א)

$$\overline{11} = \overline{\text{rem}(11, 5)} = \bar{1}$$

(ב)

$$\overline{24} = \overline{\text{rem}(24, 5)} = \bar{4}$$

(ג)

$$\overline{56} = \overline{\text{rem}(56, 5)} = \bar{1}$$

(ד)

$$\overline{98} = \overline{\text{rem}(98, 5)} = \bar{3}$$

(ה)

$$\overline{22} = \overline{\text{rem}(22, 5)} = \bar{2}$$

(ו)

$$\bar{8} + \bar{2} = \overline{10} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad -\bar{8} = \bar{2} .$$

(ז)

$$\bar{2} + \bar{2} = \bar{4} .$$

(ח)

$$\bar{2} + \bar{3} = \bar{5} = \bar{0}$$

(ט)

$$\bar{1} + \bar{4} = \bar{5} = \bar{0}$$

(י)

$$\bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{8} = \bar{3}$$

(יא)

$$\bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{6} = \bar{1}$$

(יב)

$$\bar{4} \cdot \bar{3} = \overline{12} = \bar{2}.$$

שאלה 3

(א)

$$\overline{13} = \overline{\text{rem}(13, 7)} = \bar{6}$$

(ב)

$$\overline{33} = \overline{\text{rem}(33, 7)} = \bar{5}$$

(ג)

$$\overline{74} = \overline{\text{rem}(74, 7)} = \bar{4}$$

(ד)

$$\overline{16} = \overline{\text{rem}(16, 7)} = \bar{2}$$

(ה)

$$\overline{12} = \overline{\text{rem}(12, 7)} = \bar{5}$$

(ו)

$$\bar{9} + \bar{5} = \overline{14} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad -\bar{9} = \bar{5}.$$

(ז)

$$\bar{2} + \bar{6} = \bar{8} = \bar{1}.$$

(ח)

$$\bar{3} + \bar{5} = \bar{8} = \bar{1}$$

(ט)

$$\bar{6} + \bar{3} = \bar{9} = \bar{2}$$

(י)

$$\bar{2} \cdot \bar{6} = \overline{12} = \bar{5}$$

(יא)

$$\bar{3} \cdot \bar{5} = \overline{15} = \bar{1}$$

(יב)

$$\bar{4} \cdot \bar{6} = \overline{24} = \bar{3}.$$

שאלה 4

(א)

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$

·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

 \mathbb{Z}_7 (ב)

$$-\bar{1} = \bar{6}, \quad -\bar{2} = \bar{5}, \quad -\bar{3} = \bar{4}, \quad -\bar{4} = \bar{3}, \quad -\bar{5} = \bar{2}, \quad -\bar{6} = \bar{1}.$$

 \mathbb{Z}_{11}

$$-\bar{1} = \bar{10}, \quad -\bar{2} = \bar{9}, \quad -\bar{3} = \bar{8}, \quad -\bar{4} = \bar{7}, \quad -\bar{5} = \bar{6}, \quad -\bar{6} = \bar{5}, \quad -\bar{7} = \bar{4}, \quad -\bar{8} = \bar{3}, \quad -\bar{9} = \bar{2},$$

$$-\overline{10} = \overline{1}.$$

שאלה 5

(א) (1)

$$-\overline{3}x = \overline{2} \Rightarrow \overline{2}x = \overline{2} \Rightarrow x = \overline{1}.$$

(2)

$$-\overline{3}x = \overline{2} \Rightarrow \overline{4}x = \overline{2} \Rightarrow \overline{2} \cdot \overline{4}x = \overline{2} \cdot \overline{2} \Rightarrow \overline{8}x = \overline{4} \Rightarrow x = \overline{4}.$$

(3)

$$-\overline{3}x = \overline{2} \Rightarrow \overline{8}x = \overline{2} \Rightarrow \overline{7} \cdot \overline{8}x = \overline{7} \cdot \overline{2} \Rightarrow \overline{56}x = \overline{14} \Rightarrow x = \overline{4}.$$

(ב) קיום

\mathbb{F} שדה לכן קיים $a^{-1} \in \mathbb{F}$ כך ש- $a \cdot a^{-1} = 1$. לכן

$$a^{-1} \cdot a \cdot x = a^{-1} \cdot b \Rightarrow x = a^{-1} \cdot b.$$

$a^{-1}, b \in \mathbb{F}$ לכן גם $a^{-1} \cdot b \in \mathbb{F}$ לכן קיים פתרון בשדה \mathbb{F} .

יחידות

נניח שקיים יותר מפתרון אחד, כלומר קיימים $x_1, x_2 \in \mathbb{F}$ כך ש- $ax_1 = b$ ו- $ax_2 = b$. שדה לכן קיים איבר הנגדי $-ax_2$ ואיבר הנגדי $-b$. לכן

$$ax_1 + (-ax_2) = b + (-b) = 0 \Rightarrow ax_1 - ax_2 = 0 \Rightarrow a \cdot (x_1 - x_2) = 0.$$

$a \neq 0$ לכן $x_1 - x_2 = 0$ לכן $x_1 = x_2$ הוא האיבר הנגדי של $-x_2 = -x_1$. לכן $x_1 = x_2$ בסתירה לכן שקיים יותר מפתרון אחד.

שאלה 6

(א) שלב הבסיס:

\mathbb{F} לכן אם $a_1, b \in \mathbb{F}$ אז $a_1 \cdot b \in \mathbb{F}$.

שלב האינדוקציה:

הנחת האינדוקציה. נניח כי $a_1, \dots, a_k, b \in \mathbb{F}$ ומתקיים $(a_1 + \dots + a_k)b = a_1b + \dots + a_kb \in \mathbb{F}$. נסמן $c = a_1b + \dots + a_kb$. נניח כי $a_{k+1} \in \mathbb{F}$. גם $b, c \in \mathbb{F}$ לכן $a_{k+1}b \in \mathbb{F}$ (שדה סגורה ביחס לכפל) ו- $c + a_{k+1}b \in \mathbb{F}$ (שדה סגורה ביחס לחיבור). לכן

$$c + a_{k+1}b = a_1b + \dots + a_kb + a_{k+1}b \in \mathbb{F}.$$

(ב) \mathbb{F} שדה לכן לכל $a \in \mathbb{F}$ קיים איבר ההופכי b כך ש- $ab = 1$.

נניח כי קיים יותר מאיבר הופכי אחד לכל $a \in \mathbb{F}$. כלומר נניח כי קיים $b_1, b_2 \in \mathbb{F}$, $b_1 \neq b_2$ כך ש- $ab_1 = 1$ ו- $ab_2 = 1$. $ab_2 \in \mathbb{F}$ לכן קיים איבר ההגדי $-ab_2 = -1$. לפיכך

$$ab_1 + (-ab_2) = 1 + (-1) = 0 \Rightarrow ab_1 + (-ab_2) = 0 \Rightarrow ab_1 + (-ab_2) + ab_2 = 0 + ab_2 \Rightarrow ab_1 = ab_2$$

$a \in \mathbb{F}$ לכן קיים איבר ההופכי a^{-1} כך ש- $a^{-1}a = 1$. נכפיל ב- a^{-1} ונקבל

$$b_1 = b_2$$

בסתירה לכך ש- $b_1 \neq b_2$.

(ג) $a \in \mathbb{F}$ לכן קיים איבר הנגדי $-a$ כך ש- $a + (-a) = 0$.

$$a + a = a \Rightarrow a + a + (-a) = a + (-a) \Rightarrow a + 0 = 0 \Rightarrow a = 0.$$

(ד) נניח ש- $a, b \in \mathbb{F}$ ו- $ab = 0$. נניח ש- $a \neq 0$. אז קיים איבר ההופכי $a^{-1} \in \mathbb{F}$ כך ש- $a \cdot a^{-1} = 1$. לכן

$$ab = 0 \Rightarrow a^{-1}ab = a^{-1} \cdot 0 \Rightarrow 1 \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0.$$

נניח ש- $b \neq 0$. אז קיים איבר ההופכי $b^{-1} \in \mathbb{F}$ כך ש- $b \cdot b^{-1} = 1$. לכן

$$ab = 0 \Rightarrow b^{-1}ab = a^{-1} \cdot 0 \Rightarrow ab^{-1}b = a^{-1} \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 1 = 0 \Rightarrow a = 0.$$

נניח ש- $a \neq 0, b \neq 0$. אז קיים איבר ההופכי $a^{-1} \in \mathbb{F}$ ואיבר ההופכי $b^{-1} \in \mathbb{F}$ כך ש- $a^{-1}a = 1$ ו- $b^{-1}b = 1$.

$$ab = 0 \Rightarrow a^{-1}ab = a^{-1}0 \Rightarrow b = 0$$

בסתירה לכך ש- $b \neq 0$.

(ה) $a, b \in \mathbb{F}$. לכן קיים $-a \in \mathbb{F}$ כך ש- $a + (-a) = 0$. לפי חוק הפילוג

$$(-a)b + ab = ((-a) + a)b = 0 \cdot b = 0$$

לכן $(-a)b$ האיבר הנגדי של האיבר ab .

שאלה 7

(א) לא שדה

דוגמה נגדית: $a = 2 \in \mathbb{Z}$ אבל לא קיים $a^{-1} \in \mathbb{Z}$ כך ש- $aa^{-1} = 1$.

(ב) לא שדה

חוק החילוף לא מתקיים: $a \oplus b = \frac{a-b}{3}$, $b \oplus a = \frac{b-a}{3}$. לכן $a \oplus b \neq b \oplus a$.

קשירות וכל האקסיומות נכונות, משום שכל התוצאות שיתקבלו שייכות למספרים הרציונליים.

לא שדה

(ג)

נשים לב שלאיבר 3, למשל, אין הופכי ב- \mathbb{F} . אכן, נניח שקיים $a + b\sqrt{2}$ כך ש-

$$3 \odot (a + b\sqrt{2}) = 1.$$

מכאן $a = \frac{1}{3}, b = 0$. בסתירה לכך ש- $a \in \mathbb{Z}$.

שדה

(ד)

נסמן $\mathbb{F} = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ביחס לפעולות החיבור והכפל הרגילות.

יהיו $x, y, z \in \mathbb{F}$. אכן

$$x = a + b\sqrt{2}, \quad y = c + d\sqrt{2}, \quad z = e + f\sqrt{2}, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}.$$

(1) \mathbb{F} סגורה תחת חיבור:

$$x + y = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}.$$

$$x + y \in \mathbb{F} \text{ לכן } b + d \in \mathbb{Q}, a + c \in \mathbb{Q}$$

(2) סגורה תחת כפל:

$$x \cdot y = (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = ac + ad\sqrt{2} + bc\sqrt{2} + 2bd.$$

$$x \cdot y \in \mathbb{F} \text{ לכן } ad + bc \in \mathbb{Q}, ac + 2bd \in \mathbb{Q}$$

(3) חוק החילוף I:

$$x + y = y + x$$

(4) חוק החילוף II:

$$x \cdot y = y \cdot x$$

(5) חוק הקיבוץ I:

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

(6) חוק הקיבוץ II:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

(7) חוק הפילוג:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

(8) קיום איבר ניוטרלי:

$$\text{קיים איבר } \bar{0} \in \mathbb{F} \text{ כך ש- } x + \bar{0} = x$$

$$\bar{0} = 0 + 0 \cdot \sqrt{2}.$$

(9) קיום איבר יחיד (האיבר ניוטרל לגבי כפל):

$$\text{קיים איבר } \bar{1} \in \mathbb{F} \text{ כך ש- } x \cdot \bar{1} = x$$

$$\bar{1} = 1 + 0 \cdot \sqrt{2}.$$

(10) קיום איבר נגדי:לכל $x \in \mathbb{F}$ קיים איבר נגדי $(-x) \in \mathbb{F}$ כך ש- $x + (-x) = \bar{0}$:

$$-x = -a - b\sqrt{2}.$$

(11) קיום איבר הופכי:לכל $x \in \mathbb{F}$ ש $x \neq \bar{0}$ קיים איבר $x^{-1} \in \mathbb{F}$ המקיים $x \cdot x^{-1} = 1$:

$$x^{-1} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}.$$

$$.x^{-1} \in \mathbb{Q} \text{ לכן } \frac{-b}{a^2 - 2b^2} \in \mathbb{Q}, \frac{a}{a^2 - 2b^2} \in \mathbb{Q}$$

שאלה 8**(א)**

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	0	1	2	3	4	5	6
$\bar{1}$	1	2	3	4	5	6	0
$\bar{2}$	2	3	4	5	6	0	1
$\bar{3}$	3	4	5	6	0	1	2
$\bar{4}$	4	5	6	0	1	2	3
$\bar{5}$	5	6	0	1	2	3	4
$\bar{6}$	6	0	1	2	3	4	5

·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{1}$	0	1	2	3	4	5	6
$\bar{2}$	0	2	4	6	1	3	5
$\bar{3}$	0	3	6	2	5	1	4
$\bar{4}$	0	4	1	5	2	6	3
$\bar{5}$	0	5	3	1	6	4	2
$\bar{6}$	0	6	5	4	3	2	1

(ב) $\underline{\mathbb{Z}_7}$

$$-\bar{2} = \bar{5}, \quad -\bar{3} = \bar{4}, \quad -\bar{4} = \bar{3}, \quad -\bar{5} = \bar{2}, \quad -\bar{6} = \bar{1}.$$

 $\underline{\mathbb{Z}_{11}}$

$$-\bar{2} = \bar{9}, \quad -\bar{3} = \bar{8}, \quad -\bar{4} = \bar{7}, \quad -\bar{5} = \bar{6}, \quad -\bar{6} = \bar{5}.$$

שאלה 9

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & | & \bar{2} \\ \bar{2} & -\bar{1} & | & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & | & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} & | & \bar{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & | & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{4} & | & \bar{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & | & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & | & \bar{0} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_2} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & | & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & | & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & | & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & | & \bar{0} \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$(x, y) = (\bar{2}, \bar{0}) .$$

שאלה 10

$$\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} & | & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{1} & | & \bar{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & | & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} & | & \bar{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{2} \cdot R_1} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & | & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & | & \bar{0} \end{pmatrix}$$

יש משתנה חופשי ואין שורת סתירה לכן יהיו 3 פתרונות:

$$x + y = \bar{1} \quad \Rightarrow \quad x = \bar{1} - \bar{1} \cdot y = \bar{1} + \bar{2} \cdot y .$$

לפיכך הפתרון הכללי הינו

$$(x, y) = (\bar{1} + \bar{2}y, y) .$$

יש 3 פתרונות:

$$(x, y) = (\bar{1}, \bar{0}) \quad :y = \bar{0}$$

$$(x, y) = (\bar{3}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1}) \quad :y = \bar{1}$$

$$(x, y) = (\bar{5}, \bar{2}) = (\bar{2}, \bar{2}) \quad :y = \bar{2}$$

שאלה 11

$$\begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{2} & | & \bar{3} \\ \bar{3} & -\bar{1} & | & \bar{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{2} & | & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{4} & | & \bar{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow \bar{4}R_1} \begin{pmatrix} \bar{16} & \bar{8} & | & \bar{12} \\ \bar{3} & \bar{4} & | & \bar{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & | & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{4} & | & \bar{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{3} \cdot R_1} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & | & \bar{2} \\ \bar{0} & -\bar{5} & | & -\bar{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & | & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & | & \bar{1} \end{pmatrix}$$

קיבלנו שרות סתירה לכן למערכת אין פתרון.

שאלה 12

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{cc|c} \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{3} \end{array} \right) & \xrightarrow{R_1 \rightarrow \bar{2} \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{6} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{3} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{3} \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{3} \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & -\bar{2} & -\bar{9} \end{array} \right) & = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{1} \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{R_2 \rightarrow \bar{2} R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{6} & \bar{2} \end{array} \right) & = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - \bar{2} \cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

פתרון:

$$(x, y) = (\bar{0}, \bar{2}) .$$

שאלה 13

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{cc|c} \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{1} & -\bar{3} & \bar{4} \end{array} \right) & = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{2} \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & -\bar{1} & -\bar{8} \end{array} \right) & = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{R_2 \rightarrow \bar{4} \cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{16} & \bar{8} \end{array} \right) & = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - \bar{2} \cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & -\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array} \right) & = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

פתרון:

$$(x, y) = (\bar{3}, \bar{3}) .$$

שאלה 14

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{cc|c} \bar{5} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{4} & -\bar{3} & \bar{4} \end{array} \right) & = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{5} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{4} & \bar{4} & \bar{4} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow \bar{3} \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{15} & \bar{6} & \bar{9} \\ \bar{4} & \bar{4} & \bar{4} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{4} & \bar{4} & \bar{4} \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{4} \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{0} & -\bar{20} & -\bar{4} \end{array} \right) & = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - \bar{6} \cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & -\bar{14} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

פתרון:

$$(x, y) = (\bar{0}, \bar{3}) .$$

שאלה 15

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{8} & \bar{1} & -\bar{1} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & -\bar{2} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & -\bar{3} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - \bar{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{1} & -\bar{5} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{0} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow \bar{4} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - \bar{3} \cdot R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \right)$$

תשובה סופית:

$$(x, y, z) = (\bar{0}, \bar{2}, \bar{0}) .$$

שאלה 16

$$\begin{aligned} x + \bar{3}y + z &= \bar{1} \\ \bar{3}x + y + \bar{2}z &= \bar{2} \\ \bar{2}x + \bar{2}y + \bar{3}z &= \bar{4} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - \bar{2}R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{3}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{8} & -\bar{1} & -\bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{4} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - \bar{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow \bar{3} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{0} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - \bar{3} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \right)$$

$$(x, y, z) = (\bar{0}, \bar{2}, \bar{0})$$

פתרון יחיד.

שאלה 17

$$\begin{aligned} x + \bar{2}y + z &= \bar{2} \\ \bar{3}x + y + \bar{4}z &= \bar{3} \\ \bar{2}x + \bar{4}y + \bar{4}z &= \bar{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array} \right) & \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 3 \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & -\bar{5} & \bar{1} & -\bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2 \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & -\bar{1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{6} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_2 \rightarrow \bar{4}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{8} & \bar{4} & \bar{16} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{6} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{6} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow \bar{4} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{8} & \bar{24} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{4} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & -\bar{10} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - \bar{2} \cdot R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{9} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array} \right) \\
 & (x, y, z) = (\bar{5}, \bar{4}, \bar{3})
 \end{aligned}$$

פתרון יחיד.

שאלה 18 פתרו את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_5 . כמה פתרונות יש למערכת?

$$\begin{aligned}
 x + \bar{3}y + z &= \bar{1} \\
 \bar{3}x + y + \bar{2}z &= \bar{2} \\
 \bar{2}x + \bar{2}y + \bar{3}z &= \bar{4}
 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 + \bar{3}R_1]{R_2 \rightarrow R_2 + \bar{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{7} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{11} & \bar{6} & \bar{7} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow \bar{3} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{6} & \bar{12} & \bar{12} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{1} & \bar{0} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{0} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow \bar{4} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{16} & \bar{0} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{2} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - \bar{3}R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \right)$$

תשובה סופית:

$$(x, y, z) = (\bar{0}, \bar{2}, \bar{0})$$

פתרון יחיד.

שאלה 19**שיטה 1**

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - \bar{3} \cdot R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{4} \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{2} & -\bar{11} & -\bar{3} \\ \bar{0} & -\bar{1} & -\bar{8} & \bar{1} \end{array} \right) \\
& = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow \bar{2} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{6} & \bar{8} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - \bar{4} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{10} & -\bar{15} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right) \\
& = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

פתרון:

$$\left. \begin{array}{l} x = \bar{2} \\ y + \bar{3}z = \bar{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \bar{2} \\ y = \bar{4} + (-\bar{3})z = \bar{4} + \bar{2}z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \bar{2} \\ y = \bar{4} + \bar{2}z \end{array} \right\} z \in \mathbb{Z}_5.$$

יש 5 פתרונות למערכת:

$$\begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{4} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{3} \\ \bar{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{2} \\ \bar{4} \end{pmatrix}.$$

שיטה 2

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_1 + \bar{2}R_3]{R_2 \rightarrow \bar{2}R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + \bar{3} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

פתרון:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{3}x = \bar{1} \\ y + \bar{3}z = \bar{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{2} \cdot \bar{3}x = \bar{2} \cdot \bar{1} \\ y = \bar{4} + (-\bar{3})z = \bar{4} + \bar{2}z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \bar{2} \\ y = \bar{4} + \bar{2}z \end{array} \right\} z \in \mathbb{Z}_5.$$

יש 5 פתרונות למערכת:

$$\begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{4} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{3} \\ \bar{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{2} \\ \bar{4} \end{pmatrix}.$$

שאלה 20

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{5} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \end{array} \right) & \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{5} \end{array} \right) & \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{3} \cdot R_1 \\ R_2 \rightarrow R_2 - \bar{2} \cdot R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & -\bar{17} & -\bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} & -\bar{9} & \bar{1} \end{array} \right) \\ & = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{5} & \bar{1} \end{array} \right) & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & -\bar{1} \end{array} \right) \\ & = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{6} \end{array} \right) & \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{4} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & -\bar{22} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{6} \end{array} \right) \\ & = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{6} \end{array} \right) & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2 - \bar{6} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{40} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{6} \end{array} \right) \\ & = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{6} \end{array} \right) \end{aligned}$$

פתרון:

$$(x, y, z) = (\bar{2}, \bar{6}, \bar{6}).$$

שאלה 21

שיטה 1

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array} \right) & \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{3} \cdot R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - \bar{2} \cdot R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & -\bar{5} & \bar{1} & -\bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & -\bar{1} \end{array} \right) & = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - \bar{2} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right) & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right) \end{aligned}$$

פתרון:

$$(x, y, z) = (-\bar{2}y, y, \bar{2}) = (\bar{3}y, y, \bar{2}), \quad y \in \mathbb{Z}_5.$$

למערכת יש 5 פתרונות:

$$(\bar{0}, \bar{0}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{2}, \bar{2}), (\bar{4}, \bar{3}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{4}, \bar{2}).$$

שיטה 2

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array} \right) & \xrightarrow[R_3 \rightarrow 3R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow \bar{2} \cdot R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{5} & \bar{5} & \bar{6} & \bar{7} \\ \bar{5} & \bar{10} & \bar{7} & \bar{9} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_3 \rightarrow \bar{3} \cdot R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right) \end{aligned}$$

פתרון:

$$(x, y, z) = (-\bar{2}y, y, \bar{2}) = (\bar{3}y, y, \bar{2}), \quad y \in \mathbb{Z}_5.$$

למערכת יש 5 פתרונות:

$$(\bar{0}, \bar{0}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{2}, \bar{2}), (\bar{4}, \bar{3}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{4}, \bar{2}).$$

שאלה 23

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 1+i & 1-i & 1+i \\ 1-i & 1+i & 1+3i \end{array} \right) & \xrightarrow{R_1 \rightarrow (1-i)R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2i & 2 \\ 1-i & 1+i & 1+3i \end{array} \right) \\ \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 1 \\ 1-i & 1+i & 1+3i \end{array} \right) & \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - (1-i)R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 1 \\ 0 & 2+2i & 4i \end{array} \right) \\ \xrightarrow{R_2 \rightarrow (2-2i)R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 1 \\ 0 & 8 & 8+8i \end{array} \right) & \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{8}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 1 \\ 0 & 1 & 1+i \end{array} \right) \\ \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + iR_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1+i \end{array} \right) \end{aligned}$$

פתרון: $(z_1, z_2) = (i, 1+i)$.

שאלה 24

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2-i & -i \\ 4-2i & -5 & -1-2i \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - (2-i)R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2-i & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

פתרון: $(z_1, z_2) = (-\frac{i}{2} + (1 + \frac{i}{2}) \cdot z_2, z_2), z_2 \in \mathbb{C}$. למערכת יש אינסוף פתרונות.

שאלה 25

$$\begin{pmatrix} 1-i & -3 & -i \\ 2 & -3-3i & 3-i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow (1+i)R_1} \begin{pmatrix} 2 & -3-3i & 1-i \\ 2 & -3-3i & 3-i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 2 & -3-3i & 1-i \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

קיבלנו שורת סתירה לכן למערכת אין פתרון.

שאלה 26

$$\begin{pmatrix} i & 1-i & 2i \\ 1+2i & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow (-i)R_1} \begin{pmatrix} 1 & -i-1 & 2 \\ 1+2i & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - (1+2i)R_2} \begin{pmatrix} 1 & -i-1 & 2 \\ 0 & -3+3i & -1-4i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow (-3-3i) \cdot R_2} \begin{pmatrix} 1 & -i-1 & 2 \\ 0 & 18 & -9+15i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{18} \cdot R_2} \begin{pmatrix} 1 & -i-1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} + \frac{5}{6}i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + (1+i) \cdot R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} + \frac{i}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} - \frac{5}{6}i \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{2+i}{3}, \quad y = \frac{-3+5i}{6}$$

שאלה 27

$$x = \frac{3+i}{5}, \quad y = \frac{-3+4i}{10}$$

שאלה 28

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{-1}{2} + i$$