המחלקה למדעי המחשב

י"ג בתשרי תשפ"ה 15/10/2024
13 : 30 − 16 : 30

חדו"א 2

מועד ג'

מרצים: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר.

תשפ"ד סמסטר ב'

השאלון מכיל 10 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות בלבד מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** בלבד מתוך **שתיים**.

==

שאלות $1-2$ חובה

שאלה 1 <u>(20 נקודות)</u>

נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^2+y^2-6x+4y+2$.

א) (10 נק') מצאו ומיינו את כל נקודות האקסטרמום (נקודות קיצון ואוכף) המקומיות של הפונקציה.

ב) (10 נק') מצאו את הערך הקטן ביותר ואת הערך הגדול ביותר של $f(x,y)$ בתחום החסום

$$\{1\le x\le 4\ ,\quad -3\le y\le 2\}\ .$$

שאלה 2 <u>(22 נקודות)</u>

א) (8 נק') קבעו התכנסות בהחלט, בתנאי או התבדרות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$.

ב) (8 נק') מצאו את תחום ההתכנסות של טור ההחזקות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-\sqrt{n})2^n}{(n+\sqrt{n})5^n}x^n$.

ג) (6 נק') קבעו האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\left(\frac{1}{2n}\right)$ מתכנס.

תענו על 3 מתוך 4 השאלות $3-6$

שאלה 3 <u>(16 נקודות)</u>

א) (8 נק') פתרו את המשוואה הדיפרנציאלית $y'=\frac{x+1}{y^4+1}$.

ב) (8 נק') מצאו את משוואת המישור העובר דרך הנקודות $A(1,2,3)$ ו- $B(4,5,6)$ ומקביל לציר ה-x.

שאלה 4 <u>(16 נקודות)</u>

א) (8 נק') החליפו את סדר האינטגרציה, שרטטו את תחום האינטגרציה וחשבו: $\int_{1/2}^{1}dy\int_{\ln y}^{-\ln y}dx\,e^x$.

ב) (8 נק') הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}n^{p^2-2p}$ מתבדר לכל $p\in\mathbb{R}$.

שאלה 5 <u>**(16 נקודות)**</u> נתונה הפונקציה: $z(x,y) = 2ye^{3x} + x^2y$.

א) (6 נק') מצאו את הנגזרת הכיוונית $\dfrac{dz}{d\overline{PO}}$ בנקדודה $P(1,0)$ כאשר הנקודה $O(0,0)$ היא ראשית הצירים.

ב) (6 נק') מצאו את הערך המקסימלי והערך המינימלי של הנגזרת הכיוונית בנקודה $P(1,0)$.

ג) (4 נק') מצאו את משוואת הישר הנורמל למשטח $z(x,y) = 2ye^{3x} + x^2y$ בנקודה עליו שבה $x = 1, y = 0$.

שאלה 6 <u>**(16 נקודות)**</u>

א) (10 נק') חשבו את נפח הגוף החסום ע"י המשטחים

$$z = 16 - x^2 - y^2 \ , \qquad z = 7 \ .$$

ב) (6 נק') נתונה הפונקציה $z = e^{y - \cos x}$. מצאו את משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $(x,y) = (\pi/2, 1)$.

פתור אחת מבין השאלות $7 - 8$

שאלה 7 <u>**(10 נקודות)**</u> מצאו משוואת המישור המשיק למשטח $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ כך שהמישור המשיק יקביל למישור $x + 4y + 6z = 13$. מצאו את כל המישורים המקיימים את התנאי.

שאלה 8 <u>**(10 נקודות)**</u> מצאו את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^{1/x}}$.

פתרונות

שאלה 1

א) (10 נק')

$$f'_x(x,y) = -6+2x \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x=3 \ , \qquad f'_y(x,y) = 4+2y \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y=-2 \ .$$

$$f''_{xx}(3,-2) = 2 > 0 \ , \quad f''_{yy}(3,-2) = 2 \ , \quad f''_{xy}(3,-2) = 0 \ , \quad \Delta(3,-2) = 4 > 0$$

לפיכך $(3,-2)$ נקודת מינימום מקומי.

ב)

$$f_1(y) = f(x=1,y) = y^2+4y-3 \ , \quad f'_1(y) = 2y+4 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x=1, y=-2 \ .$$

$$f_2(y) = f(x=4,y) = y^2+4y-6 \ , \quad f'_2(y) = 2y+4 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x=4, y=-2 \ .$$

$$f_3(x) = f(y=-3,x) = x^2-6x-1 \ , \quad f'_3(x) = 2x-6 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x=3, y=-3 \ .$$

$$f_4(x) = f(y=2,x) = x^2-6x+14 \ , \quad f'_2(y) = 2x-6 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x=3, y=2 \ .$$

$f(x,y)$	נקודה
-11	$3,-2$
-7	$1,-2$
-10	$4,-2$
-10	$3,-3$
5	$3,2$
-6	$1,-3$
9	$1,2$
-9	$4,-3$
6	$4,2$

$\max\limits_D f(x,y) = 9$,
$\operatorname*{argmax}\limits_D f(x,y) = (1,2)$,
$\min\limits_D f(x,y) = -11$,
$\operatorname*{argmin}\limits_D f(x,y) = (3,-2)$.

שאלה 2

א) הטור החיובי הינו

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

אשר מתבדר, לכן לפי מבחן השוואה הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ מתבדר.

נבדוק התכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$ בעזרת מבחן לייבניץ.

$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+1}>0$ לכל $n\geq 1$.

$$a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}<\frac{1}{\sqrt{n}+1}=a_n$$

לכן a_n יורדת מונוטונית.

$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{\sqrt{\infty}+1}=0$.

לכן לפי לייבניץ הטור מתכנס בתנאי.

ב) $a_n=\frac{(n-\sqrt{n})2^n}{(n+\sqrt{n})5^n}$. לפי מבחן דלמבר הרדיוס התכנסות הינו

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\left(n-\sqrt{n}\right)\left(n+\sqrt{n+1}+1\right)}{2\left(n+\sqrt{n}\right)\left(n-\sqrt{n+1}+1\right)}=\frac{5}{2}\ .$$

לכן הטור מתכנס לכל $-\frac{5}{2}<x<\frac{5}{2}$.

ב- $x=\frac{5}{2}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-\sqrt{n})2^n}{(n+\sqrt{n})5^n}x^n\overset{x=5/2}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-\sqrt{n})}{(n+\sqrt{n})}\ .$$

$a_n=\frac{(n-\sqrt{n})}{(n+\sqrt{n})}$ לכן $\lim_{n\to\infty}a_n=1\neq 0$ לכן הטור מתבדר.

ב- $x=-\frac{5}{2}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-\sqrt{n})2^n}{(n+\sqrt{n})5^n}x^n\overset{x=5/2}{=}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n-\sqrt{n})}{(n+\sqrt{n})}\ .$$

מהשלב הקודם הערך מוחלט $\left|(-1)^n\frac{(n-\sqrt{n})}{(n+\sqrt{n})}\right|$ לא שואף ל- 0 בתהליך כאשר $n\to\infty$ לפיכך הטור מתבדר.

התחום ההתכנסות הוא $x\in\left(-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$.

ג) $\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{1}{2n}\right)=1\neq 0$ לכן הטור מתבדר.

שאלה 3 (16 נקודות)

א)

$$y'(y^4+1) = x+1 \quad \Rightarrow \quad \int (y^4+1)y'dx = \int (x+1)dx \quad \Rightarrow \quad \int (y^4+1)dy = \int (x+1)dx$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{y^5}{5} + y\right) = \frac{x^2}{2} + x + C \ .$$

ב) $\overline{AB} = (3,3,3)$.

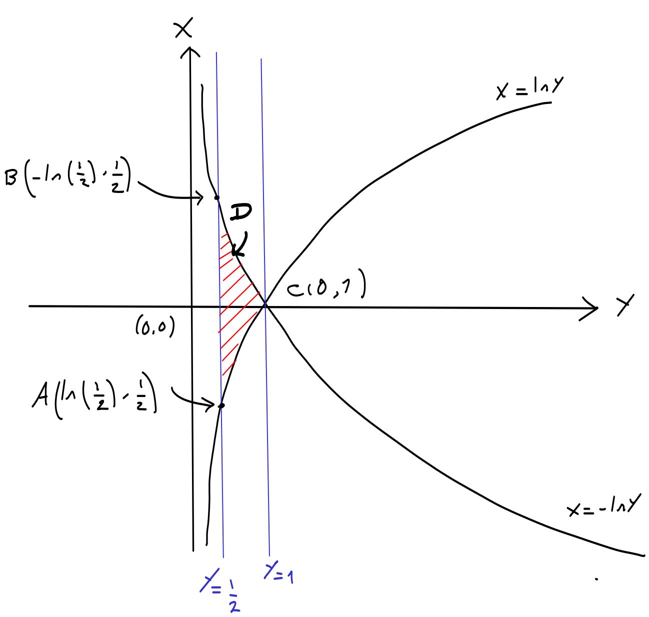
$$n = \overline{AB} \times (1,0,0) = (0,-3,3) \ .$$

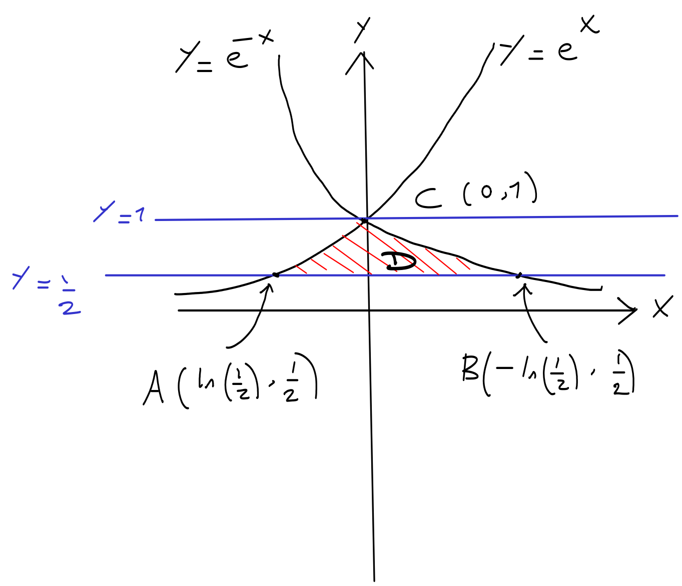
$$0 \cdot (x-1) - 3(y-2) + 3(z-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3y + 3z - 3 = 0 \ .$$

שאלה 4 (16 נקודות)

א)

$$D = \left\{ \frac{1}{2} \le y \le 1 \ , \ \ln y \le x \le \ln y \right\}$$





$$D = D_1 \cup D_2 \ , \quad D_1 = \left\{ -\ln 2 \le x \le 0 \ , \ \frac{1}{2} \le y \le e^x \right\} \ , \quad D_2 = \left\{ 0 \le x \le \ln 2 \ , \ \frac{1}{2} \le y \le e^{-x} \right\} \ .$$

האינטגרל הוא

$$\left[\iint\limits_{D_1} + \iint\limits_{D_2} \right] e^x \, dx \, dy = \int_{-\ln 2}^{0} dx \int_{1/2}^{e^x} dy \, e^x + \int_{0}^{\ln 2} dx \int_{1/2}^{e^{-x}} dy \, e^x$$

חישוב של האינטגרל:

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^{1} dy \int_{\ln y}^{-\ln y} dx \, e^x &= \int_{1/2}^{1} dy \, [e^x]_{\ln y}^{-\ln y} \\ &= \int_{1/2}^{1} dy \left[\frac{1}{y} - y \right] \\ &= \int_{1/2}^{1} dy \left[\ln y - \frac{y^2}{2} \right] \\ &= -\frac{1}{2} - \left[-\ln 2 - \frac{1}{8} \right] \\ &= -\frac{3}{8} + \ln 2 \ . \end{aligned}$$

ב) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^k$ מתבדר לכל $k \ge -1$. הרי $p^2 - 2p = (p-1)^2 - 1 \ge -1$ לכן $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p^2-2p}$ מתבדר לכל p.

שאלה 5 (16 נקודות)

א) (10 נק')

$$\nabla z = \left(6e^{3x} y + 2xy, x^2 + 2e^{3x} \right) \quad \Rightarrow \quad \nabla z(1,0) = (0, 1 + 2e^3) \ .$$

$$\frac{dz}{d\overline{PO}} = \frac{(0, 1+2e^3) \cdot (1,0)}{|(1,0)|} = 0 \ .$$

ב) ערך המקסימלי: $|\nabla z(1,0)| = 1 + 2e^3$.
ערך המינימלי: $-|\nabla z(1,0)| = -1 - 2e^3$.

ג) $n = (0, 1 + 2e^3, -1)$.

$$0(x-0) + (1+2e^3)(y-1) - (z-0) = (1+2e^3)y - z - 1 - 2e^3 \ .$$

שאלה 6 (16 נקודות)

א)

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3 dr\,r\left(16-r^2-7\right)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3 dr\,r\left(9-r^2\right)=\frac{-1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_9^0 du\,u=\frac{81(2\pi)}{4}=\frac{81\pi}{2}\,.$$

ב)

$$z'_x(P)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+z'_y(P)(y-1)-(z-e)=0\quad\Rightarrow\quad e\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+e(y-1)-(z-e)=0\quad\Rightarrow\quad ex+ey-z-\frac{e\pi}{2}=0\,.$$

שאלה 7

שאלה 8