שיעור 3
כפל מטריצות וייצוג מערכת באמצעות $AX=b$

3.1 מושג של מטריצה

מטריצה זאת טבלה של מספרים. הצורה הכללית של מטריצה:

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn}\end{pmatrix}$$

A מטריצה מסדר $m\times n$ (m שורות ו- n עמודות).

אם כל האיברים מספרים ממשיים אומרים כי A מטריצה מעל השדה $\mathbb{R}$ בעלת m שורות ו- n עמודות.
סימון: $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

האיבר בשורה i בעמודה j מסומן

$$A_{ij}$$

האינדקס הראשון, "i" מסמן את משורה, והאינדקס השני "j" מסמן את העמודה.
מפתח לזכור האינדקסים:

$$A_{\text{שע}}$$

כאשר ה- ""ש" מסמן את השורה וה-"ע" מסממן את העמודה.

דוגמה 3.1

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 23 & 45 & 2\\ 12 & 34 & 67 & 87 & 55\\ 22 & 33 & 66 & 89 & 19\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 5}\ .$$

האיבר בשורה 3 בעמודה 4 הוא 89. נסמן

$$A_{34}=89$$

האיבר בשורה 1 בעמודה 5 הוא 2. נסמן

$$A_{15}=2$$

האיבר בשורה 2 בעמודה 3 הוא 67. נסמן

$$A_{23}=67$$

■

אם $m=n$ למטריצה קוראים מטריצה ריבועית.

3.2 מטריצות ריבועיות מיוחדות

מטריצה אלכסונית:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

מטריצה משולשית עליונה

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

מטריצה משולשית תחתונה

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

מטריצת האפס

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

מטריצה היחידה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.2

1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית.

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית.

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית.

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ לא מטריצה אלכסונית.

3.3 חיבור מטריצות וכפל מטריצות בסקלר

הגדרה 3.1 חיבור מטריצות

לכל מטריצות A, B מסדר $m \times n$ מוגדרת מטריצה $A + B$:

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1n} + B_{1n} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2n} + B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} + B_{m1} & A_{m2} + B_{m2} & \cdots & A_{mn} + A_{mn} \end{pmatrix}$$

במילים אחרות, האיבר ה- ij של המטריצה $A + B$ ניתן ע"י

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \ .$$

אפשר לחבר מטריצות של אותו גודל בלבד!

לדוגמה $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ לא מוגדר!

הגדרה 3.2 כפל מטריצה בסקלר

לכל מטריצות A מסדר $m \times n$:

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \cdots & \alpha A_{1n} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} & \cdots & \alpha A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha A_{m1} & \alpha A_{m2} & \cdots & \alpha A_{mn} \end{pmatrix}$$

במילים אחרות, האיבר ה- ij של המטריצה $\alpha \cdot A$ ניתן ע"י

$$(\alpha \cdot A)_{ij} = \alpha \cdot A_{ij} \ .$$

דוגמה 3.3 חיבור מטריצות

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 11 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+8 & 5+9 \\ 3+11 & 4+5 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 14 \\ 14 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.4 כפל מטריצה בסקלר

$$7\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\cdot 1 & 7\cdot 2\\ 7\cdot 3 & 7\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 14\\ 21 & 28\end{pmatrix}$$

■

משפט 3.1 תכונות של חיבור מטריצות וכפל מטריצות

יהיו $A,B,C\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו- $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. אזי:

(1 חוק החילוף של חיבור מטריצות:

$$A+B=B+A\ .$$

(2 חוק הקיבוץ של חיבור מטריצות:

$$(A+B)+C=A+(B+C)\ .$$

(3

$$A+0=A\ .$$

(4

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B\ .$$

(5

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A\ .$$

(6

$$\alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\cdot\beta)\cdot A\ .$$

הוכחה מיידית מההגדרות.

3.4 מטריצה משוחלפת

הגדרה 3.3 מטריצה משוחלפת

בהינתן מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ (מטריצה בעלת m שורות ו- n עמודות):

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn}\end{pmatrix}$$

המטריצה המשוחלפת של A מסומנת ב- A^t והיא מטריצה בעלת n שורות ו- m עמודות המתקבלת מהמטריצה A ע"י להחליף שורות עם עמודות:

$$A^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

במילים אחורת, האיבר ה- i,j של המטריצה המשוחלפת של A ניתן ע"י

$$A^t_{ij} = A_{ji} \ .$$

דוגמה 3.5 מטריצה משוחלפת

נתונה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ מצאו את המשוחלפת שלה, כלומר A^t.

פתרון:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

משפט 3.2 תכונות של מטריצה משוחלפת

תהיינה A, B מטריצה כך שהסכומים והמכפלות מוגדרים ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. מתקיים:

.1
$$\left(A^t\right)^t = A$$

.2
$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

.3
$$(\alpha A)^t = \alpha A^t$$

.4
$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

שימו לב, הסדר השתנה.

הוכחה: תרגיל בית. ■

3.5 כפל מטריצה בווקטור

הגדרה 3.4 מכפלה של מטריצה בוקטור

תהי $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה מסדר $m \times n$ ו- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$ וקטור מסדר n. המכפלה של המטריצה A עם הווקטור X, שמסומנת $A \cdot X$, נותנת וקטור מסדר m שמוגדר

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n \\ \vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} A_{1j}x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} A_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} A_{mj}x_j \end{pmatrix} .$$

במילים אחרות, האיבר ה- i של הווקטור $A \cdot X$ ניתן ע"י

$$(A \cdot X)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j \ .$$

כללים של כפל מטריצה בווקטור:

1) כפל של מטטריצה $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ עם וקטור $X \in \mathbb{F}^n$ מחזירה וקטור ב- $\mathbb{F}^m$.

2) אפשר להכפיל מטריצה עם וקטור רק אם מספר העמודות של המטריצה שווה למספר השורות של הווקטור.

דוגמה 3.6 כפל מטריצה בווקטור

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cdot 1 + 8\cdot 2 + 9\cdot 3 \\ 7\cdot 4 + 8\cdot 5 + 9\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 122 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.7

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 6 \\ 1\cdot 3 + 2\cdot 6 \\ 4\cdot 3 + 5\cdot 6 \\ 7\cdot 3 + 8\cdot 6 \\ 10\cdot 3 + 11\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 42 \\ 79 \\ 96 \end{pmatrix}$$

3.6 כפל מטריצות

הגדרה 3.5 מכפלה של שתי מטריצות

$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mk} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{m\times k}$ מטריצה מסדר $m\times k$ ו- $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kn} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{k\times n}$ מטריצה מסדר $k\times n$. המכפלה של השתי מטריצות A, B מסומנת $A\cdot B$ ומוגדרת

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+\cdots+A_{1k}B_{k1} & A_{11}B_{12}+\cdots+A_{1k}B_{k2} & \cdots & A_{11}B_{1n}+\cdots+A_{1k}B_{kn} \\ A_{21}B_{11}+\cdots+A_{2k}B_{k1} & A_{21}B_{12}+\cdots+A_{2k}B_{k2} & \cdots & A_{21}B_{1n}+\cdots+A_{2k}B_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B_{11}+\cdots+A_{mk}B_{k1} & A_{m1}B_{12}+\cdots+A_{mk}B_{k2} & \cdots & A_{m1}B_{1n}+\cdots+A_{mk}B_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{p=1}^{k} A_{1p}B_{p1} & \sum\limits_{p=1}^{k} A_{1p}B_{p2} & \cdots & \sum\limits_{p=1}^{k} A_{1p}B_{pn} \\ \sum\limits_{p=1}^{k} A_{2p}B_{p1} & \sum\limits_{p=1}^{k} A_{2p}B_{p2} & \cdots & \sum\limits_{p=1}^{k} A_{2p}B_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{p=1}^{k} A_{mp}B_{p1} & \sum\limits_{p=1}^{k} A_{mp}B_{p2} & \cdots & \sum\limits_{p=1}^{k} A_{mp}B_{pn} \end{pmatrix}$$

במילים אחרות, האיבר ה- ij של המכפלה $A\cdot B$ ניתנת ע"י הנוסחה:

$$(A\cdot B)_{ij} = \sum_{p=1}^{k} A_{ip}B_{pj} \ .$$

כללים של כפל מטריצות:

1) ניתן להכפיל מטריצה A במטריצה B רק כאשר A מטריצה מסדר $m\times k$ ו- B מטריצה מסדר $k\times n$. זאת אומרת מספר עמודות של A שווה למספר השורות של B.

2) אם A מסדר $m\times k$ ו- B מסדר $k\times n$ אז $A\cdot B$ היא מטריצה מסדר $m\times n$.

דוגמה 3.8

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+8\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.9

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2+3\cdot 8+1\cdot 1 & 2\cdot 5+3\cdot 7+1\cdot 1 \\ -1\cdot 2+0\cdot 8+4\cdot 1 & -1\cdot 5+0\cdot 7+4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 32 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.10

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 11+2\cdot 5+3\cdot 21 & 1\cdot 12+2\cdot 6+3\cdot 22 & 1\cdot 13+2\cdot 7+3\cdot 23 & 1\cdot 14+2\cdot 8+3\cdot 24 \\ 0\cdot 11+7\cdot 5+8\cdot 21 & 0\cdot 12+7\cdot 6+8\cdot 22 & 0\cdot 13+7\cdot 7+8\cdot 23 & 0\cdot 14+7\cdot 8+8\cdot 24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 84 & 90 & 96 & 102 \\ 203 & 218 & 233 & 248 \end{pmatrix}$$

הגדרה 3.6 מטריצה היחידה

למטריצה ריבועית מסדר $n \times n$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

קוראים מטריצת היחידה.

דוגמה 3.11

המטריצה $I \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה $I \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה $I \in \mathbb{R}^{4\times 4}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

משפט 3.3 כפל מטריצה במטריצה היחידה

1) תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו- $I\in\mathbb{F}^{n\times n}$. אז

$$A\cdot I=A\ .$$

2) תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו- $I\in\mathbb{F}^{m\times m}$. אז

$$I\cdot A=A\ .$$

הוכחה: תרגיל בית! ■

דוגמה 3.12

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0&1\cdot2+0\cdot7&1\cdot3+0\cdot8\\0\cdot1+1\cdot0&0\cdot2+1\cdot7&0\cdot3+1\cdot8\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}$$

דוגמה 3.13

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+3\cdot0&1\cdot0+2\cdot1+3\cdot0&1\cdot0+2\cdot0+3\cdot1\\0\cdot1+7\cdot0+8\cdot0&0\cdot0+7\cdot1+8\cdot0&0\cdot0+7\cdot0+8\cdot1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}$$

משפט 3.4 תכונות של כפל מטריצות

תהיינה A,B,C מטריצות כך שהסכומים והמכפלות מוגדרים ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$. אזי

א) חוק הקיבוץ:

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$$

ב) חוק הפילוג:

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

ג) חוק הפילוג:

$$(B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A$$

ד) $\alpha(A\cdot B)=(\alpha\cdot A)\cdot B=A\cdot(\alpha\cdot B)$

ה) אם $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ו- $I_{n\times n}$ מטריצת היחידה מסדר $n\times n$ ו- $I_{m\times m}$ מטריצת היחידה מסדר $m\times m$ אז

$$I_{m\times m}\cdot A=A=A\cdot I_{n\times n}\ .$$

הוכחה: תרגיל בית! ■

כלל 3.1 כפל מטריצות לא קומוטטיבית

נתונות $A \in \mathbb{F}^{m\times k}$ ו- $B \in \mathbb{F}^{k\times n}$. באופן כללי, $A \cdot B$ לא בהכרח שווה ל- $B \cdot A$. כלומר

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

באופן כללי.

דוגמה 3.14

אם A מטריצה מסדר 3×2 ו- B מטריצה מסדר 4×3, אז $A \cdot B$ מוגדר, אבל $B \cdot A$ לא מוגדר.

דוגמה 3.15

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ -13 & 27 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 19 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$$

ז"א $A \cdot B \neq B \cdot A$.

דוגמה 3.16 כפל מטריצה אינה קומוטטיבית

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. חשבו $A \cdot B$ ו- $B \cdot A$. האם A ו- B מתחלפות (קומוטטיביות)?

פתרון:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 27 \end{pmatrix}$$

אבל

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 22 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$ לכן A ו- B לא מתחלפות.

כלל 3.2 מטריצות דומות

נתונות מטריצות A, B, C ו- $A \neq 0$.

אם $AB = AC$ אז B לא בהכרח שווה ל- C. ז"א $B \neq C$ באופן כללי.

דוגמה 3.17

תנו דוגמה של $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש- $AB = AC$ ו- $A \neq 0$ אבל $B \neq C$.

פתרון:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

הרי $AB=AC$ ו- $A\neq 0$ אבל $B\neq C$.

כלל 3.3 מכפלה מטריצות המתאפסת

נתונות מטריצות A,B.

אם $AB=0$ אז A לא בהכרח מטריצה האפס ו- B לא בהכרח מטריצה האפס.

ז"א אם קיימות $A\neq 0$ ו- $B\neq 0$ כך ש- $A\cdot B=0$.

דוגמה 3.18

תנו דוגמה של $A,B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש- $A,B\neq 0$ אבל $A\cdot B=0$.

פתרון:

דוגמה 1) $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

דוגמה 2) $a\in\mathbb{R}\neq 0$, $A=\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix}$,

$b\in\mathbb{R}\neq 0$ $B=\begin{pmatrix}b&0\\0&0\end{pmatrix}$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

הגדרה 3.7 העלאה מטריצה בחזקה

תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ויהי $k\in\mathbb{N}$. נגדיר

$$A^k=\overbrace{A\cdot A\cdot\dots\cdot A}^{k\ \text{פעמים}}$$

אם $A\neq 0$, ונגדיר

$$A^0=I_{n\times n}\ .$$