תשפ"ה סמסטר ב'

# תרגילים: שפות כריעות ושפות קבילות

שאלה 1 בהינתן השפה  $L^*$  מוגדרת:

$$L^* = \{\varepsilon\} \cup \{w = w_1 w_2 \cdots w_k \mid \forall \ 1 \le i \le k \ , \ w_i \in L\}$$

- L בהינתן מכונת טיורינג M המקבלת שפה בהינתן בהינתן בהינת א $L^{\ast}$  המקבלת את המקבלת  $M^{\ast}$  דטרמיניסטית אי דטרמינט טיורינג אי
- .L המכריעה שפה M המכריעה מכונת טיורינג בהינתן מכונט טיורינג אי דטרמיניסטית  $M^*$  המכריעה את השפה בנו מכונט טיורינג אי

שאלה 2 האם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה.  $L(M) \in R \ \, \lambda + L(M) \in Co\,RE$  לכל מכונת טיורינג M, אם לכל מכונת טיורינג

שאלה לבעיה פתוחה. האם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה.  $L_2 \in Co\:RE\:$  או  $L_1 \in RE\:$  אזי  $L_1 \cap L_2 \in R$ 

#### תשובות

### שאלה 1

L את מכונת טיורנג שמזהה את M

 $L^*$  אי-דטרמיניסטית אמקבלת אי-דטרמיניסטית טיורינג  $M^*$ 

# תאור הבנייה

:w על קלט  $=M^*$ 

. אם w=arepsilon מקבלת. w=arepsilon

 $k \in \mathbb{N}^+$  כאשר  $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$  ל- w ל- מלוקה של אי דטרמיניסטי דטרמיניסטי אווקה  $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$  בוחרת באופן אי

i < i < k לכל.

. מריצה את  $w_i$  על M על מריצה  $M^* ullet$ 

.(3 קיבלה חוזרים לשלב M אם \*

.4 אזי  $M^*$  אזי  $\{w_i\}$  אזי כל המחרוזות אזי M מקבלת.

ניתנת לחישוב - מספר הפירוקים האפשריים ל- w הוא סופי ולכן הניחוש הוא סופי, לפיכך כתיבה -  $M^st$  על הסרט והרצת M ניתן לחישוב.

 $\underline{L^{*}}=L\left( M^{*}
ight)$  :הוכחת נכונות

⇒ כיוון

 $w\in L\left(M^{st}
ight)$  נניח כי

. קיבלה M ( $1 \leq i \leq k$ )  $w_i$  כך שעבור כל ( $k \in \mathbb{N}^+$ )  $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_k$  קיבלה m

L(M) = L כל  $w_i \in L(M)$  בפרט,  $w_i \in L(M)$ 

 $w_i \in L \Leftarrow$ 

 $w = w_1 w_2 \dots w_k \in L^* \Leftarrow$ 

 $L(M^*) \subseteq L^* \Leftarrow$ 

# $\Rightarrow$ כיוון

 $w \in L^*$  נניח כי

 $(1 \leq i \leq k) \ w_i \in L$  כך שכל ( $k \in \mathbb{N}^+$ )  $w = w_1 w_2 \cdots w_k$  קיימת חלוקה  $k \in \mathbb{N}^+$ 

w תנחש את הפירוק הזה עבור  $M^* \Leftarrow$ 

כזה  $w_i$  כזה תקבל כל M

w תקבל את  $M^* \Leftarrow$ 

 $w \in L(M^*) \Leftarrow$ 

 $L^* \subset L(M^*) \Leftarrow$ 

 $L\left(M^{st}
ight)=L^{st}$  אזי אזי  $L^{st}\subseteq L\left(M^{st}
ight)$  ו-  $L\left(M^{st}
ight)\subseteq L^{st}$  אזי שלכן, מאחר ומצאנו ש

.L את מכונת טיורנג שמכריעה את מכונת טיורנג  $M^*$  אי-דטרמיניסטית המכריעה את  $M^*$ 

#### תאור הבנייה

:w על קלט  $=M^*$ 

- .1. אם w=arepsilon מקבלת.
- $k \in \mathbb{N}^+$  כאשר  $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$  ל- w ל- בוחרת באופן אי דטרמיניסטי חלוקה של  $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$  בוחרת באופן אי
  - $1 \le i \le k$  לכל.
  - $.w_i$  על M מריצה את  $M^*$
  - . דוחה  $M^*$  אם M דוחה או  $M^*$
  - אחרת אם M קיבלה חוזרים לשלב 3).  $\ast$
  - .4 אזי  $M^*$  אזי  $\{w_i\}$  אזי המחרוזות  $\{w_i\}$  אזי את כל מקבלת.

ניתנת לחישוב - מספר הפירוקים האפשריים ל- w הוא סופי ולכן הניחוש הוא סופי, לפיכך כתיבה -  $M^st$  על הסרט והרצת M ניתן לחישוב.

# $L^{st}=L\left( M^{st} ight)$ הוכחת נכונות:

 $\Leftarrow$  כיוון

 $w\in L\left(M^{st}
ight)$ ננית כי

- קיבלה. M ( $1 \leq i \leq k$ )  $w_i$  כך שעבור כל ( $k \in \mathbb{N}^+$ )  $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_k$  קיימת חלוקה
  - L(M) = L בפרט, בפרט.  $w_i \in L(M)$  כל
    - $w_i \in L \Leftarrow$
    - $w = w_1 w_2 \dots w_k \in L^* \Leftarrow$ 
      - $L(M^*) \subseteq L^* \Leftarrow$

# $\Rightarrow$ כיוון

 $w \in L^*$  נניח כי

- $(1 \leq i \leq k) \ w_i \in L$  כך שכל ( $k \in \mathbb{N}^+$ )  $w = w_1 w_2 \cdots w_k$  קיימת חלוקה  $k \in \mathbb{N}^+$ 
  - w תנחש את הפירוק הזה עבור  $M^* \Leftarrow$ 
    - כזה  $w_i$  כזה תקבל כל M כזה  $\Leftarrow$ 
      - w תקבל את  $M^* \Leftarrow$ 
        - $w \in L(M^*) \Leftarrow$
        - $L^* \subseteq L(M^*) \Leftarrow$

 $L\left(M^{*}
ight)=L^{*}$  אזי אזי  $L^{*}\subseteq L\left(M^{*}
ight)$  -ו  $L\left(M^{*}
ight)\subseteq L^{*}$  אזי ישחר ומצאנו ש

# שאלה 2 הטענה נכונה:

 $L(M) \in RE$  . ההגדרה: לפל מכונת טיורינג מתקיים, לפי לפל לכל לכל מכונת לפי אזי  $L(M) \in Co\:RE$  לכן, אם  $L(M) \in RE \cap Co\:RE = R$  .

שאלה 3 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

יהי 
$$L_1 = L_{\Sigma^*} 
otin RE$$
 כאשר

$$L_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^* \}$$

$$.L_2=\overline{\overline{L_{\Sigma^*}}}$$
 ותהי

$$.L_1\cap L_2=\emptyset\in R$$
 -בורר ש

,
$$L_1 
otin Co\,RE$$
 מצד שני,  $L_1 = L_{\Sigma^*} 
otin RE$  מצד שני,

$$L_2 
otin RE$$
 וגם  $L_2 = \overline{L_{\Sigma^*}} 
otin Co\,RE$  -ו