עבודה עצמית 6

 \mathbb{R}^3 שאלה $\mathbf{1}$ לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבעו האם היא תת מרחב של

$$W = \left\{ egin{pmatrix} x \ y \ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x = y = -z
ight\}$$
 (8)

$$W = \left\{ egin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x = 3y
ight\}$$

$$W = \left\{ egin{pmatrix} x \ y \ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| y = z^2
ight\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + y - z = 0 \right\}$$

$$W = \left\{egin{pmatrix} x \ y \ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + y \geq 0
ight\}$$
 (ភ

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x = 0 \right\} \qquad (1)$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + y = -z \right\} \qquad (7)$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x \ge 0, y \ge 0 \right\}$$
 (n

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + y - z = 1 \right\}$$
 (v

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\} \qquad (2)$$

מרחב $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ מרחב היא תת מרחב של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ מרחב לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבעו האם היא תת מרחב של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ (מרחב הפולינומים ממעלה עד 2).

$$W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid b = 0\}$$
 (x

$$W = \left\{ ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid a + b + c = 0 \right\}$$

$$W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\le 2}[x] \mid a > b > c\}$$

$$W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\le 2}[x] \mid a = b = c\}$$

$$W = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid p(1) = 0
ight\}$$
 (ក

$$W = \{ p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid p(1) = 1 \}$$
 (1)

$$W = \left\{ ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}_{\leq 2}[x] \mid a, b, c \in \mathbb{C}, a + b = \bar{c} \right\}$$

שאלה 3

 $\mathbb{R}^{2 imes2}$ של מרחב היא תת הקבוצות הנמצא איבר הנמצא איבר הנמצא מהקבוצות מהקבוצות לכל

$$W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 imes 2} \;\middle|\; A = egin{pmatrix} a & 0 \ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}
ight\}$$
 (8)

$$W=\left\{A\in\mathbb{R}^{2 imes2}\;\left|\;A=egin{pmatrix}a&b\0&c\end{pmatrix},a,b,c\in\mathbb{R},c
eq0
ight\}$$
 (2

$$W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 imes 2} \; \middle| \; |A| = 0
ight\}$$

$$W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 imes 2} \; \middle| \; |A|
eq 0
ight\}$$

$$W=\left\{A\in\mathbb{R}^{2 imes2}igg|A\cdot B=0,B=egin{pmatrix}1&2\3&6\end{pmatrix}
ight\}$$
 (ភ

 $\{f|f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}\}$ לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבעו האם היא לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבעו

$$W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | f(1) = 0\}$$
 (x

$$W=\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}|f(1)+f(2)=0\}$$

$$W = \{f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x) \}$$
 (2)

$$W = \left\{ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = \left(f(x) \right)^2 \right\}$$
 (7

V שאלה V יהי V מרחב ווקטורי ויהיו איז W_2 , W_1 יהי מרחבים של

א) הוכיחו:

$$W_1 \cap W_2 = \{ x \in V | x \in W_1 \land x \in W_2 \}$$

N הינו תת-מרחב של

ב) הוכיחו:

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

.V הינו תת-מרחב של

ג) הפריכו:

$$W_1 \cup W_2 = \{ x \in V | x \in W_1 \lor x \in W_2 \}$$

.V הינו תת-מרחב של

שאלה 6 לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבעו האם היא תת מרחב של (מרחב $\mathbb{R}[x]$ (מרחב הפולינומים עם מקדמים ממשיים):

$$W=\{p(x)\in\mathbb{R}[x]|\mathrm{deg}(p)=3\}$$
 (8

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | \deg(p) \text{ even} \cup \{\bar{0}\}\}$$

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | p(0) \in \mathbb{Z}\}$$

פתרונות

שאלה 1

$$W = \left\{ egin{pmatrix} x \ y \ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x = y = -z
ight\}$$
 (8)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in W$$
 :דוגמה:

$$ar{0},ar{0}\in W$$
 לכן $x=y=-z$ לכן את התנאי $ar{0}=egin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ לכן הווקטור האפס

$$u_1:W$$
 את התנאי של $u_2:W$ לפי זה $u_1:W$ לפי את וגם $u_1=egin{pmatrix} x_2\\y_2\\z_2 \end{pmatrix}\in W$ וגם $u_1=egin{pmatrix} x_1\\y_1\\z_1 \end{pmatrix}\in W$ נניח ש-

$$x_1 = y_1 = -z_1$$
, $x_2 = y_2 = -z_2$. (*)

נבדוק אם הווקטור
$$w_1+u_2=egin{pmatrix} x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2 \end{pmatrix}$$
 נבדוק אם הווקטור (*) כי

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = -z_1 - z_2 = -(z_1 + z_2)$$
.

 $.u_1+u_2\in W$ ולכן אל התנאי את מקיים מקיים u_1+u_2

תנאי 3) נניח
$$w\in W$$
 ו- $u=egin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in W$ תנאי 3) ו $u\in W$ תנאי

$$x = y = -z . (#)$$

$$kx=ky=k(-z)=-(kz)$$
 נבדוק אם הווקטור $ku=\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$ שייך ל- $ku=ku=\begin{pmatrix}kx\\kz\end{pmatrix}$ כלומר $ku\in W$ מקיים את התנאי של $ku\in W$ ולכן

 \mathbb{R}^3 את-מרחב של תת-מרחב לפיכך את מקיים את מקיים את מל התנאים של תת-מרחב של W

$$W = \left\{ egin{pmatrix} x \ y \ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x = 3y
ight\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in W$$
 דוגמה:

$$ar{u}=0$$
 תנאי ב $u_1=0$ הווקטור האפס $ar{u}=0$ מקיים את התנאי $u_2=egin{pmatrix} x_2\\y_2\\z_2 \end{pmatrix}\in W$ וגם $u_1=egin{pmatrix} x_1\\y_1\\z_1 \end{pmatrix}\in W$ אז $u_2=3y_1$, $u_2=3y_2$.

מתקיים. נבדוק אם הווקטור
$$\left(m{x}_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2
ight)$$
 מתקיים. נבדוק אם הווקטור ווקטור $\left(m{x}_1 + x_2 \\ z_1 + z_2 \right)$

$$x_1 + x_2 = 3y_1 + 3y_2 = 3(y_1 + y_2)$$
.

 $.u_1+u_2\in W$ מקיים את התנאי של א מקיים מקיים u_1+u_2

תנאי 3) נניח
$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W$$
 ו- $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ אז

$$x = 3y . (#)$$

נבדוק אם הווקטור $ku=\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$ שייך ל- W. מ- (#) נקבל (W) שייך ל- W שייך ל- W שייך ל- W שייך ל- W מקיים את התנאי של W, ז"א א W

 \mathbb{R}^3 של מקיים את מת-מרחב לפיכך תת-מרחב של התנאים את מקיים W

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| y = z^2 \right\}$$
 (3)

$$.u = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$
 לדוגמה:

אינו תת-מרחב. דוגמה נגדית: W

$$u
otin W$$
 פי $u=egin{pmatrix} 0 \ 6 \ 12 \end{pmatrix}$ אבל $2^2=4$ פי $u=egin{pmatrix} 0 \ 2 \ 4 \end{pmatrix}\in W$ $W=\left\{egin{pmatrix} x \ y \ z \end{pmatrix}\in \mathbb{R}^3 \middle| x+y-z=0
ight\}$

$$.u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in W$$
 :לדוגמה

$$ar{0}\in W$$
 לכן $x+y-z=0$ מקיים את התנאי $ar{0}=egin{pmatrix} 0 \ 0 \ 0 \end{pmatrix}$ לכן הווקטור האפס

תנאי
$$u_2=egin{pmatrix} x_2\\y_2\\z_2 \end{pmatrix}\in W$$
 וגם $u_1=egin{pmatrix} x_1\\y_1\\z_1 \end{pmatrix}\in W$ -את אומרת (2 תנאי 2) נניח ש

$$x_1 + y_1 - z_1 = 0$$
, $x_2 + y_2 - z_2 = 0$. (*)

 $u_1+u_2\in W$ מתקיים. נבדוק אם הווקטור

$$u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} .$$

:W מקיים את מקיים u_1+u_2 נבדוק אם

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = \underbrace{x_1 + y_1 - z_1}_{=0} + \underbrace{x_2 + y_2 - z_2}_{=0} = 0$$

 u_1+u_2 כאשר $u_1\in W$ מכיוון ש- $u_1\in W$ ו- $u_1\in W$ מכיוון ש- $u_1+u_2\in W$ מכיוון ש- $u_1+u_2\in W$ מקיים את התנאי של $u_1+u_2\in W$ ז"א א"א $u_1+u_2\in W$

תנאי 3) נניח
$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W$$
 ו- $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ אז

$$x + y - z = 0 . (#)$$

נקבל (#) נקבה (און כתוצאה של אם הווקטור (
$$kx$$
 ky kz ky כתוצאה של (kz

$$k \cdot (x + y - z) = 0$$
 \Rightarrow $= k \cdot x + k \cdot y - k \cdot z = 0$,

 $ku \in W$ מקיים את התנאי של א"א מקיים את לכן או לכן

 \mathbb{R}^3 הוכחנו ש- W מקיים את כל התנאים של תת-מרחב של מקיים את מקיים את מקיים של הוכחנו

$$W = \left\{egin{pmatrix} x \ y \ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + y \geq 0
ight\}$$
 (ຈ

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$$
 לדוגמה:

אינו תת-מרחב. דוגמה נגדית: W

$$.k=-1$$
 נבחר . $1+2+3\geq 0$ כי $u=egin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\in W$

$$k \cdot u = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \notin W$$
בגלל ש- $k \cdot u = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x = 0 \right\}$$

$$egin{aligned} . egin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in W :$$
לדוגמה

$$ar{0}\in W$$
 לכן $x=0$ מקיים את התנאי $ar{0}=egin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ לכן הווקטור האפט

$$u_1=egin{pmatrix} x_2\y_2\z_2 \end{pmatrix}\in W$$
 וגם $u_1=egin{pmatrix} x_1\y_1\z_1 \end{pmatrix}\in W$ אז $u_2=egin{pmatrix} x_2\z_1 \end{pmatrix}$ נניח ש

$$x_1 = 0 , x_2 = 0 . (*)$$

$$.W$$
 -שייך ל $u_1+u_2=egin{pmatrix} x_1+x_2\ y_1+y_2\ z_1+z_2 \end{pmatrix}$ מתקיים. נבדוק אם הווקטור

 $.u_1+u_2\in W$ מי", אי", איים את מקיים u_1+u_2 לכן $.(x_1+x_2)=0$ מ- (*) נובע כי

תנאי 3) נניח
$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W$$
 ו- $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ אז

$$x=0$$
 . (#

$$ku=egin{pmatrix} kx \ ky \ kz \end{pmatrix}$$
 שייך ל- $ku=egin{pmatrix} kx \ ky \ kz \end{pmatrix}$

מ- (#) נקבל

$$k \cdot (x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad kx = 0 \; ,$$

 $.ku\in W$ אזי איי של את התנאי את מקיים את מקיים או אזי אזי

 \mathbb{R}^3 הוכחנו ש- W מקיים את כל התנאים של תת-מרחב של מקיים את מקיים את מקיים של הוכחנו ש

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + y = -z \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in W$$
 לדוגמה

$$ar{.0} \in W \Leftarrow 0 + 0 = -0$$
 , $ar{0} = ig(0,0,0ig)$ תנאי 1)

$$u_2=egin{pmatrix} x_2\ y_2\ z_2 \end{pmatrix}\in W$$
 וגם וגם , $u_1=egin{pmatrix} x_1\ y_1\ z_1 \end{pmatrix}\in W$ -תנאי 2) נניח ש

נבדוק אם הווקטור $.x_2+y_2=-z_2$, $x_1+y_1=-z_1$ א"א

$$u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

:W מקיים את התנאי של

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = -z_1 - z_2 = -(z_1 + z_2)$$

 $.u_1 + u_2 \in W$ לכן

 $:ku\in W$ נניח אם הווקטור $k\in\mathbb{R}$, $u=egin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in W$ נניח נניח (3)

$$ku = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$$
 , $kx + ky = k(x+y) = k(-z) = -kz$

 $ku \in W$ לכן ku לפיכך את התנאי של לפיכך

 \mathbb{R}^3 הוכחנו ש- W מקיים את כל התנאים של תת-מרחב של מקיים את מקיים את מקיים של

$$W=\left\{egin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\Big|x\geq0,y\geq0
ight\}$$
 לדוגמה: $.egin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in W$:

:אינו תת-מרחב. דוגמה נגדית W

$$u=egin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in W$$
אבל
$$-1\cdot u=egin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}
otin W\ .$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + y - z = 1 \right\}$$
 (v

$$. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$$
 דוגמה:

 \mathbb{R}^3 אינו תת-מרחב בגלל ש- $\bar{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\notin W$ לא תת-מרחב אינו תת-מרחב אינו תת-מרחב של ל $\bar{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\}$$

 $W=\{ar{0}\}$ ז"א א"ה , $ar{0}=egin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ הווקטור היחידי שמקיים את התנאי הוא ווקטור האפס:

$$.ar{0}\in W$$
 (1

$$.ar{0} + ar{0} = ar{0} \in W$$
 (2

$$k\cdot ar{0}=ar{0}$$
 (3

 \mathbb{R}^3 את-מרחב של תת-מרחב לפיכך את מקיים את כל התנאים של תת-מרחב של W

שאלה 2

$$.W=\left\{ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_{\leq 2}[x]\mid b=0
ight\}$$
 לדוגמה: $x^2+1\in W$:

$$.ar{0} = 0x^2 + 0x + 0 \in W$$
 (1 תנאי

אזי
$$.u_2 = a_2 x^2 + c_2 \in W$$
 , $u_1 = a_1 x^2 + c_1 \in W$ תנאי 2) נניח

$$u_1 + u_2 = (a_1 + a_2)x^2 + (c_1 + c_2) \in W$$

$$k\in\mathbb{R}$$
 אז לכל . $u=ax^2+c\in W$ תנאי (3) תנאי

$$k \cdot u = (ka_1)x^2 + kc \in W .$$

 $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ מסקנה: W תת-מרחב של

$$W = \left\{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid a+b+c=0
ight\}$$
לדוגמה: $x^2 + x - 2 \in W$

$$.ar{0} = 0x^2 + 0x + 0 \in W$$
 (1 תנאי

$$.u_2=a_2x^2+b_2x+c_2\in W$$
 , $u_1=a_1x^2+b_1x+c_1\in W$ תנאי 2) נניח (2) אז $.a_2+b_2+c_2=0$ וגם $.a_1+b_1+c_1=0$ אז

$$u_1+u_2=(a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)\ .$$

$$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)=(a_1+b_1+c_1)+(a_2+b_2+c_2)=0+0=0\ .$$

$$u_1+u_2\in W\ \ \text{def}$$

$$k\in\mathbb{R}$$
 אז לכל $a+b+c=0$ א"ג $u=ax^2+bx+c\in W$ תנאי (נקח $k\cdot u=(ka)x^2+(kb)x+(kc)$.

$$ka + kb + kc = k(a + b + c) = k \cdot 0 = 0$$
.

 $.ku \in W$ לכן

 $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ מסקנה: W תת-מרחב של

$$W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid a > b > c\}$$
 (3)

 $u=3x^2+2x+1\in W$ בגלל ש- בגלל ש- $u=3x^2+2x+1\in W$

$$-3 < -2 < -1$$
 בגלל ש- $(-1) \cdot u = -3x^2 - 2x - 1 \notin W$ אבל

$$.W = \left\{ ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid a = b = c \right\}$$
 (7

 $x^2 + x + 1 \in W$ לדוגמה:

$$W = \{ax^2 + ax + a \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid a \in \mathbb{R}\}$$
 ז"א ניתן לרשום W בצורה

$$.(a=0 \,\,$$
עבור . $ar{0}=0x^2+0x+0\in W$ (עבור 1

$$.u_2=a_2x^2+a_2x+a_2\in W$$
 רו $u_1=a_1x^2+a_1x+a_1\in W$ תנאי 2) נניח $.u_1+u_2=(a_1+a_2)x^2+(a_1+a_2)x+(a_1+a_2)\in W$ אז

תנאי 3) נניח
$$k-1$$
 $u=ax^2+ax+a\in W$ הקלר. אז

$$ku = k(ax^2 + ax + a) = (ka)x^2 + (ka)x + ka \in W$$

 $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ מסקנה: W תת מרחב של

$$.W = \{ p \in \mathbb{R}_{\le 2}[x] \mid p(1) = 0 \}$$
 (7)

$$.x^2+x-2\in W$$
 לדוגמה:

$$.p(x) = ax^2 + bx + c$$
נסמן

$$p(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a + b + c = 0 \ .$$

Vכך: א"א ניתן לרשום W

$$W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\le 2}[x] \mid a + b + c = 0\}.$$

 $\mathbb{R}_{<2}[x]$ אור מרחב של בסעיף ב' שזה תת

$$W = \{ p \in \mathbb{R}_{\le 2}[x] \mid p(1) = 1 \}$$

$$.\bar{0}(1)=0\cdot 1^2+0\cdot 1+0\neq 1$$
בגלל ש- $\bar{0}=0x^2+0x+0\notin W$

. לפיכך W לא תת-מרחב

$$W = \left\{ ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) \mid a, b, c \in \mathbb{C}, a + b = \bar{c} \right\}$$

$$p(x)=x^2+ix+(1-i)\in W$$
 לא תת-מרחב. דומגה נגדית: W

$$(1+i) \cdot p = (1+i)x^2 + (-1+i)x + 2$$
$$.(1+i) + (-1+i) = 2i \neq 2$$

 $P_2(\mathbb{C})$ מסקנה, W לא תת-מרחב של

שאלה 3

$$W=\left\{A\in\mathbb{R}^{2 imes2}igg|A=egin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix},a,b\in\mathbb{R}
ight\}$$
 (א $b=0$, $a=0$ עבור (עבור $ar{0}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in W$ (1 תנאי ביח $A_2=egin{pmatrix}a_2&0\\0&b_2\end{pmatrix}$, $A_1=egin{pmatrix}a_1&0\\0&b_1\end{pmatrix}$ נניח $A_1+A_2=egin{pmatrix}a_1+a_2&0\\0&b_1+b_2\end{pmatrix}\in W$

 $.k\cdot A=egin{pmatrix}ka&0\\0&kb\end{pmatrix}\in W$, $k\in\mathbb{R}$ אז לכל $.A=egin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\in W$ נניח (3) נניח $.R^{2 imes2}$

$$W=\left\{A\in\mathbb{R}^{2 imes2}igg|A=egin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix},a,b,c\in\mathbb{R},c
eq0
ight\}$$
 דומגה: $A=egin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\in W$

 $\mathbb{R}^{2 imes 2}$ אתת מרחב של W לכן C=0). לכן $0_{2 imes 2}=egin{pmatrix} 0&0\0&0\end{pmatrix}$ בגלל ש- $0_{2 imes 2}\notin W$

$$.W=\left\{A\in\mathbb{R}^{2 imes2}\ \middle|\ |A|=0
ight\}$$
 ,
$$B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$
 אז העת מרחב. דוגמה נגדית:
$$A+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\notin W$$
 אז $.\mathbb{R}^{2 imes2}$. אז $.\mathbb{R}^{2 imes2}$

$$.W = \{A \in \mathbb{R}^{2 imes 2} \mid |A|
eq 0\}$$
 (7

$$.ig|0_{2 imes2}ig|=0$$
 כי $0_{2 imes2}=egin{pmatrix} 0&0\0&0 \end{pmatrix}
otin W$

 $\mathbb{R}^{2 imes 2}$ לכן W לא תת מרחב של

$$W=\left\{A\in\mathbb{R}^{2 imes2}|A\cdot B=0,B=egin{pmatrix}1&2\3&6\end{pmatrix}
ight\}$$
 דוגמה: $.egin{pmatrix}0&0\0&0\end{pmatrix}\in W$

$$0_{2\times2}\cdot B=0$$
 כי $0_{2\times2}\in W$ (1) תנאי

תנאי 2) נניח
$$B=0$$
 -ו $A_1\cdot B=0$ ז"א $A_1,A_2\in W$ תנאי 2) נניח

$$(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B = 0 + 0 = 0$$

$$A_1 + A_2 \in W$$
 לכן

$$A\cdot B=0$$
 ז"א $A\in W$ תנאי (3 נניח

$$(kA)\cdot B=k(A\cdot B)=k\cdot 0=0$$
 מתקיים אז לכל סקלר

$$.kA \in W$$
 לכן

 $\mathbb{R}^{2 imes 2}$ לכן W תת מרחב של

שאלה 4

$$W=\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}|f(1)=0\}$$
 לדוגמה: $f(x)=x-1$

תנאי 1)

$$\bar{0}(x) = 0 \implies \bar{0}(1) = 0 \implies \bar{0} \in W$$
.

$$g(1)=0$$
 וגם $f(1)=0$ ואט $f(1)=0$ ז"א וגם $f(1)=0$ וגם

$$f(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$$
 אא

$$.f+g\in W$$
 לכן

$$\mathbf{,}k\in\mathbb{R}$$
 גניח אי לכל $f\in W$ מניח גניח (1) אי לכל ז"א אי לכל

$$(k \cdot f)(1) = k \cdot (f(1)) = k \cdot 0 = 0$$
.

$$.kf \in W$$
 לכן

 $F(\mathbb{R})$ מסקנה: W מסקנה:

$$W = \{f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | f(1) + f(2) = 0\}$$
 דוגמה: $f(x) = (x-1)(x-2)$

תנאי 1)

$$\bar{0}(x) = 0 \implies \bar{0}(1) = 0 , \ \bar{0}(2) = 0 \implies \bar{0}(1) + \bar{0}(2) = 0$$

 $ar{.0} \in W$ לכן

$$f_2(1)+f_2(2)=0$$
 וגם $f_1(1)+f_1(2)=0$ ז"א $f_1,f_2\in W$ תנאי 2) נניח

とか

$$(f_1 + f_2)(1) + (f_1 + f_2)(2) = [f(1) + f_1(2)] + [f_2(1) + f_2(2)] = 0 + 0 = 0$$
.

$$f_1 + f_2 \in W$$
 לכן

$$f(1), k \in \mathbb{R}$$
 אי לכל $f(1) + f(2) = 0 \Leftarrow f \in W$ תנאי 3) נניח

$$(k \cdot f)(1) + (k \cdot f)(2) = k \cdot (f(1) + f(2)) = k \cdot 0 = 0.$$

$$.kf \in W$$
 לכן

 $F(\mathbb{R})$ מסקנה: W ת"מ של

$$W = \{ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x) \}$$

$$f(x) = x^2$$
 דוגמה:

תנאי 1)

$$\bar{0}(x) = \bar{0}(-x) = 0$$

 $ar{.0} \in W$ לכל $x \in \mathbb{R}$ לכל

$$g(x)=g(-x)$$
 , $f(x)=f(-x)$ ז"א $f,g\in W$ תנאי 2) נניח

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f+g)(-x)$$

 $f+q\in W$ לכו

תנאי 3) נניח
$$f(x)=f(-x)$$
 אז $k\in\mathbb{R}$, $f\in W$ תנאי 3

$$(kf)(x) = k(f(x)) = kf(-x) = (kf)(-x)$$

 $.kf \in W$ לכו

 $F(\mathbb{R})$ מסקנה: W ת"מ של

$$W = \left\{ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = (f(x))^2 \right\}$$

 ${\it ,g}(x)=1\in W$, ${\it f}(x)=x^2\in W$: נגדית: דוגמה מרחב. לא W

$$(f+g)(x) = x^2 + 1 \notin W .$$

 $F(\mathbb{R})$ מסקנה: W לא ת"מ של

שאלה 5

 W_2,W_1 נתון: W_2,W_1 נתון (N V צריך להוכיח: $W_1\cap W_2$ של

הוכחה:

$$ar{.0} \in W_1 \cap W_2$$
 צריך להוכיח: צריך צריך

$$ar{n}$$
 תנאי 1) צריך להוכיח: $ar{0}\in W_1\cap W_2$:תת-מרחב, לכן $W_1\cap W_2 \Leftarrow \left\{egin{array}{l} ar{0}\in W_1\cap W_2 \ ar{0}\in W_2 \end{array}
ight.$ לכן $W_1\cap W_2 \Leftrightarrow \left\{egin{array}{l} ar{0}\in W_1\cap W_2 \ ar{0}\in W_2 \end{array}
ight.$

$$\left\{egin{array}{ll} & \hbox{,}u_1\in W_2 & \hbox{,}u_1\in W_1 \\ u_2\in W_2 & \hbox{,}u_2\in W_1 \end{array}
ight\} \Leftarrow u_1,u_2\in W_1\cap W_2$$
 נקח (2) תנאי (2) נקח

$$u_1+u_2\in W_1\cap W_2 \Leftarrow \left\{ egin{array}{ll} u_1+u_2\in W_1 & \ u_1+u_2\in W_2 \ u_1+u_2\in W_2 \end{array}
ight.$$
תת-מרחב, לכן W_2

 $k \in \mathbb{R}$, $u \in W_1 \cap W_2$ נניח (3) תנאי

$$u \in W_2$$
 , $u \in W_1$ אז

$$.ku \in W_1 \cap W_2 \Leftarrow \left\{ egin{array}{l} ku \in W_1 \ ku \in W_2 \end{array} ,$$
לכן $w \in W_1 \cap W_2 \end{array} \right.$

V מסקנה: $W_1 \cap W_2$ תת-מרחב של

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1 , w_2 \in W_2\}$$
 (2

 M_1+W_2 של אריך להוכיח: W_1+W_2

 $ar{.0} \in W_2 \Leftarrow$ תת-מרחב היה W_2 ו- $ar{.0} \in W_1 \Leftarrow$ תת-מרחב תנאי 1 W_1 תת-מרחב

$$ar{0}\in W_1+W_2\Leftarrow ar{0}=ar{0}+ar{0}$$
 $\{egin{array}{ll} w_2\in W_2 & \mbox{,}w_1\in W_1 & u=w_1+w_2, \\ w_2'\in W_2 & \mbox{,}w_1'\in W_1 & {
m v}=w_1'+w_2', \end{array}\} \Leftarrow .u,{
m v}\in W_1+W_2$ תנאי 2) נקח

 $w_1+w_1'\in W_1$ תת מרחב, לכן W_1

, $w_2+w_2'\in W_2$ לכן מרחב, מרחב, W_2

K

$$u + v = (w_1 + w_2) + (w'_1 + w'_2) = \underbrace{(w_1 + w'_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(w_2 + w'_2)}_{\in W_2}$$

 $.u + \mathbf{v} \in W_1 + W_2$ לכן

 $.w_2 \in W_2$ -ו $w_1 \in W_1$, $u = w_1 + w_2 \Leftarrow .u \in W_1 + W_2$ נניח כי

 $k \in \mathbb{R}$ אז לכל

$$ku = k(w_1 + w_2) = kw_1 + kw_2$$
.

$$.ku\in W_1+W_2 \Leftarrow \left\{ egin{array}{ll} kw_1\in W_1 \ kw_2\in W_2 \end{array}
ight. \ kw_2\in W_2$$
 ת"מ, לכן W_2

.V של מסקנה: W_1+W_2 מסקנה:

$$W_1 \cup W_2 = \{x \in V | x \in W_1 \lor x \in W_2\}$$

דוגמה נגדית:

$$W_1 = \{(x, y)|y = x\}, \qquad W_2 = \{(x, y)|y = 2x\}$$

 \mathbb{R}^2 תת-מרחבים של W_2 , W_1

$$.u=W_1\cup W_2$$
 אז $u=(1,1)\in W_1$

$$\mathbf{v} = W_1 \cup W_2$$
 אז $\mathbf{v} = (1,2) \in W_2$

$$.u+\mathbf{v}\notin W_2$$
 וגם $u+\mathbf{v}\notin W_1$, $u+\mathbf{v}=(2,3)$ לכך $.u+\mathbf{v}\notin W_1\cup W_2$

שאלה 6

$$W=\{p\in\mathbb{R}[x]|\mathrm{deg}(p)=3\}$$
 (x

$$p = x^3 + x^2 + x + 1 \in W$$
 : דוגמה

$$\deg(ar{0})=0$$
 כי $ar{0} \notin W$

 $p(\mathbb{R})$ לכן של תת-מרחב לא W

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | \deg(p) \text{ even } \cup \{\bar{0}\}\}$$

$$.p(x) = x^2 + 1 \in W$$
 דוגמה:

,
$$q(x)=-x^2+x\in W$$
 , $p(x)=x^2+x+1\in W$ נגדית: דוגמה נגדית לא תת-מרחב. אונמה לא W

$$\deg(p+q)=1$$
 כי $p(x)+q(x)=2x+1
otin W$

 $\mathbb{R}[x]$ לכן W לא תת-מרחב של

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | p(0) \in \mathbb{Z}\}$$
 (3

$$1 \in \mathbb{Z}$$
 כי $p(x) = x + 1 \in W$ דוגמה:

 $\mathbb{R}[x]$ לא תת-מרחב של W

$$p(x) = x + 1 \in W$$
 :דוגמה נגדית

$$\pi \notin \mathbb{Z}$$
 -בגלל ש- $\pi \cdot p = \pi \cdot x + \pi \notin W$