

15/10/24 י"ג בתשרי תשפ"ה
13 : 30 – 16 : 30

חדו"א 1 למדמ"ח

מועד ג'

מרצה: ד"ר זהבה צבי

תשפ"ד סמסטר ב'

השאלון מכיל 8 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דף נוסחאות מצורף לשאלון (5 עמודים בפורמט A4).

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות בלבד מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** בלבד מתוך **שניים**.

שאלות 1 ו-2 - חובה!

שאלה 1 (21 נקודות)

א (16 נק') חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = \frac{x-2}{e^{2x}}$ לפי הסעיפים הבאים: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, זוגיות, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון, תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה ונקודות פיתול. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ב (5 נק') שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(|x|)$.

שאלה 2 (24 נקודות)

א (12 נק') $\int x \ln(3x+2) dx$

ב (12 נק') $\int \frac{x+4}{x^3-4x} dx$

ענו על 3 מתוך 4 השאלות 3 – 6

שאלה 3 (15 נקודות) חשבו את הגבולות הבאים:

א (5 נק') $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3x) - \sin x}{\ln(x+1)} \right)$

ב (5 נק') $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \tan x$

ג (5 נק') $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{1/x^2}$

שאלה 4 (15 נקודות)

א (12 נק') רשמו את הפולינום מקלורן מסדר 2 עבור הפונקציה $f(x) = \ln(x+1) + \arctan(2x)$.

ב (3 נק') לאילו ערכים של הפרמטר a הפונקציה $f(x) = |x^3 - ax|$ תהיה גזירה לכל x ?

שאלה 5 (15 נקודות) יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ קבועים המקיימים $0 < a < b$. נגדיר $f(x) = \frac{1}{x^a + x^b}$.

(א) (5 נק') הוכיחו כי אם $b > 1$ אזי האינטגרל $\int_1^\infty f(x) dx$ מתכנס.

(ב) (5 נק') הוכיחו כי אם $b \leq 1$ אזי האינטגרל $\int_1^\infty f(x) dx$ מתבדר.

(ג) (5 נק') יהי $k \in \mathbb{R}$ קבוע. עבור אילו ערכים של k לפונקציה $f(x) = kx + \sin(2x)$ אין נקודות קיצון?

שאלה 6 (15 נקודות)

(א) (10 נק') הוכיחו כי למשוואה $(1-x)^3 = \arctan(x)$ יש שורש אחד ויחיד.

(ב) (5 נק') עבור איזה ערכים של פרמטר a הפונקציה $f(x) = x^3 - ax$ עולה לכל x ממשי?

ענו על 1 מתוך 2 השאלות 7-8

שאלה 7 (10 נקודות) הוכיחו כי $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx < 2$.

שאלה 8 (10 נקודות) הוכיחו כי לכל $0 < a < b$ מתקיים אי-השוויון $1 - \frac{a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b}{a} - 1$.