

# שיעור 10

## צפנים בлокים ו- DES

### 10.1 רשות החלפה-תמורה

#### הגדרה 10.1 רשות החלפה-תמורה

נתון טקסט גליי  $x \in \{0,1\}^n$  כרצף סיביות. מחלקים  $x$  ל-  $m$  קבוצות של אורך  $\ell$ :

$$x = x_{<1>} || x_{<2>} || \cdots || x_{<m>}$$

כאשר

$$x_{<1>} = x_1 x_2 \cdots x_\ell, \quad x_{<2>} = x_{\ell+1} x_{\ell+2} \cdots x_{2\ell}, \quad x_{<m>} = x_{(m-1)\ell+1} x_{(m-1)\ell+2} \cdots x_{m\ell}.$$

ברשות החלפה-תמורה יש 4 מרכיבים:

- החלפה של אורך  $m$ , שנסמך  $\pi_S : \{0,1\}^\ell \rightarrow \{0,1\}^\ell$
- תמורה של אורך  $\ell m = n$  שנסמך  $\pi_P : \{1, \dots, \ell m\} \rightarrow \{1, \dots, \ell m\}$
- מפתח התחלתי  $.k$ .
- זמן המפתחות  $(k^1, \dots, k^{N+1})$ , אחד לכל שלב של ההצפנה.

האלגוריתם של ההצפנה הוא כמוerten להלן:

$$(1) \text{ מגדרים } w^0 = x.$$

$$(2) \text{ מחשבים } w^1 = w^0 \oplus k^1 \text{ כאשר } \oplus \text{ האופרטור XOR.}$$

$$(3) \text{ מבצעים את החלפה } \pi_S \text{ על כל תת-קבוצה } u_{<i>}^1 \text{ לכל } 1 \leq i \leq m \text{ לצל } v_{<i>}^1.$$

$$(4) \text{ מבצעים את התמורה } \pi_P \text{ על תת-קבוצה } v^1 \text{ של } v^1.$$

cut חזרים על שלבים (2)-(4):

$$(2') \text{ מחשבים } w^2 = w^1 \oplus k^2 \text{ כאשר } \oplus \text{ האופרטור XOR.}$$

$$(3') \text{ מבצעים את החלפה } \pi_S \text{ על כל תת-קבוצה } u_{<i>}^2 \text{ לכל } 1 \leq i \leq m \text{ לצל } v_{<i>}^2.$$

$$(4') \text{ מבצעים את התמורה } \pi_P \text{ על תת-קבוצה } v^2 \text{ של } v^2.$$

התהליך ממשיך עד שמניגים לסוף שלב ה-  $N$ -ית. בשלב  $N$  לא מוחשבים את  $w^N$  אלא מקבלים את הטקסט מוצפן לפי

$$y = v^N \oplus k^{N+1}.$$

**דוגמה 10.1**

נתון הטקסט גלי

$$x = 00100110.$$

נתונה ההחלפה  $\pi_S : \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}^4$  שמוגדרת

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
$\pi_S(z)$	D	4	3	1	2	F	B	8	3	A	6	C	5	9	0	7

נתונה התמורה  $\pi_P : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 8\}$  שמוגדרת

z	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi_P(z)$	8	5	4	2	3	6	1	7

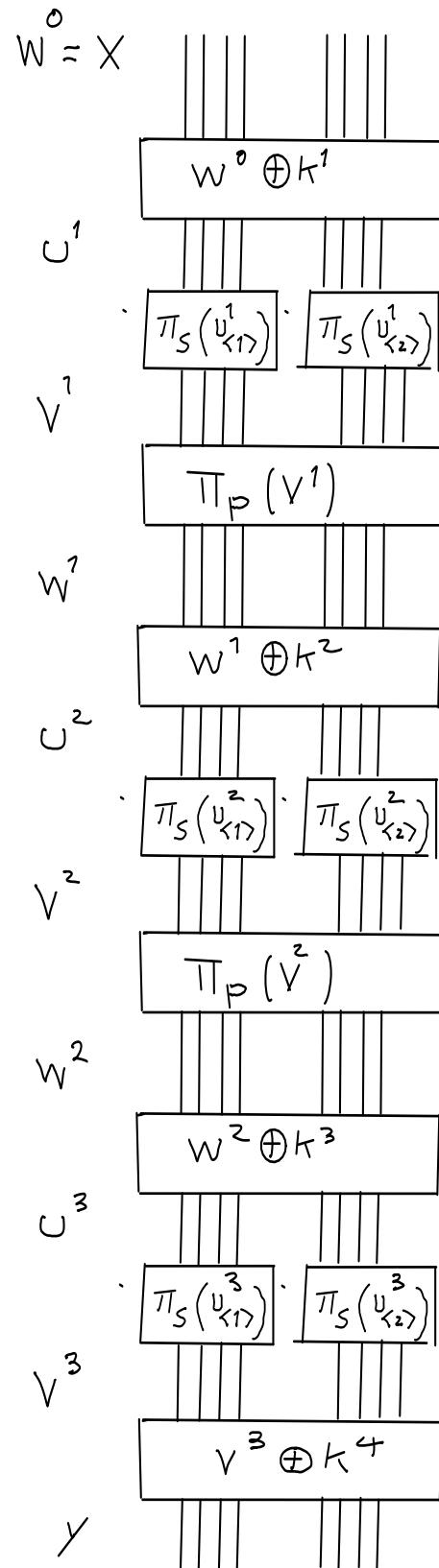
או בסימון מחזורי

$$(1 \ 8 \ 7) (2 \ 5 \ 3 \ 4) (6)$$

ונתנו מפתח התחלתי

$$k = 0011 \ 1010 \ 1001 \ 0100 \ 1111.$$

מספר השלבים בהצפנה הוא  $N + 1$  כאשר  $N = 2$ . נגדיר תיזמו המפתחות  $(k^1, k^2, k^3)$  כאשר המפתח  $k^i$  רצף סיביות של אורך 8 אשר מתחילה עם הסיבית ה- $(4i - 3)$  ית של  $k$ . מצטו את הטקסט מוצפן.

**פתרונות:**

המפתחות של כל שלב של ההצפנה הם

$$\begin{aligned}k^1 &= 0011 \ 1010, \\k^2 &= 1010 \ 1001, \\k^3 &= 1001 \ 0100, \\k^4 &= 0100 \ 1111.\end{aligned}$$

**שלב (1)**

$$\begin{aligned}w^0 &= 0010 \ 0110 \\k^1 &= 0011 \ 1010 \\u^1 = w^0 \oplus k^1 &= 0001 \ 1100\end{aligned}$$

$$u^1 = u_{<1>} || u_{<2>} = 0001 || 1100$$

בבסיס הקסדצימלי:

$$u^1 = u_{<1>} || u_{<2>} = 1 || C$$

$$v^1 = \pi_S(u_{<1>}) || \pi_S(u_{<2>}) = \pi_S(1) || \pi_S(C) = 4 || 5$$

בבסיס בינארי:

$$v^1 = 0100 || 0101$$

$$w^1 = \pi_P(0100 \ 0101) = 1001 \ 0100$$

**שלב (2)**

$$\begin{aligned}w^1 &= 1001 \ 0100 \\k^2 &= 1010 \ 1001 \\u^2 = w^1 \oplus k^2 &= 0011 \ 1101\end{aligned}$$

$$u^2 = u_{<1>}^2 || u_{<2>}^2 = 0011 || 1101$$

בבסיס הקסדצימלי:

$$u^2 = u_{<1>}^2 || u_{<2>}^2 = 3 || D$$

$$v^2 = \pi_S(u_{<2>}^2) || \pi_S(u_{<2>}^2) = \pi_S(3) || \pi_S(D) = 1 || 9$$

בbasis בינארי:

$$v^2 = 0001 || 1001$$

$$w^2 = \pi_P(0001 \ 1001) = 1110 \ 0000$$

**שלב (3)**

$$\begin{aligned} w^2 &= 1110 \quad 0000 \\ k^3 &= 1001 \quad 0100 \\ u^3 = w^2 \oplus k^3 &= 0111 \quad 0100 \end{aligned}$$

$$u^3 = u_{<1>}^3 || u_{<2>}^3 = 0111 || 0100$$

בבסיס הקסדצימלי:

$$u^3 = u_{<1>}^3 || u_{<2>}^3 = 7 || 4$$

$$v^3 = \pi_S(u_{<2>}^3) || \pi_S(u_{<2>}^3) = \pi_S(7) || \pi_S(4) = 8 || 2$$

בבסיס בינארי:

$$v^3 = 1000 || 0010$$

$$\begin{aligned} v^3 &= 1000 \quad 0010 \\ k^4 &= 0100 \quad 1111 \\ y = v^3 \oplus k^4 &= 1100 \quad 1101 \end{aligned}$$

## 10.2 רשות פייסטל

### הגדרה 10.2 רשות פייסטל (Feistel)

נתון טקסט גלי  $x = \{0, 1\}^{2n}$  כרכף סיביות.

$$x = \underbrace{x_1 \dots x_n}_{L_0} \quad \underbrace{x_n \dots x_{2n}}_{R_0}$$

מחלקים את  $x$  לשני חצאים שננסמן  $L_0$  ו-  $R_0$ :

ברשות פייסטל יש 4 מרכיבים:

- מספר שלם  $N$  אשר קובע את המספר של שלבים בתהליך הצפנה.

- מפתח התחלתי  $k$ .

- מערכת של  $N$  תת-מפתחות  $(k_1, \dots, k_N)$ , אחד לכל שלב של התהליך הצפנה.

- פונקציית ליבה  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ .

$$1) \text{ מגדירים } R_0 = x_n \dots x_{2n}, L_0 = x_1 \dots x_n$$

$$. L_i = R_{i-1}, \quad R_i = L_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, k_i)$$

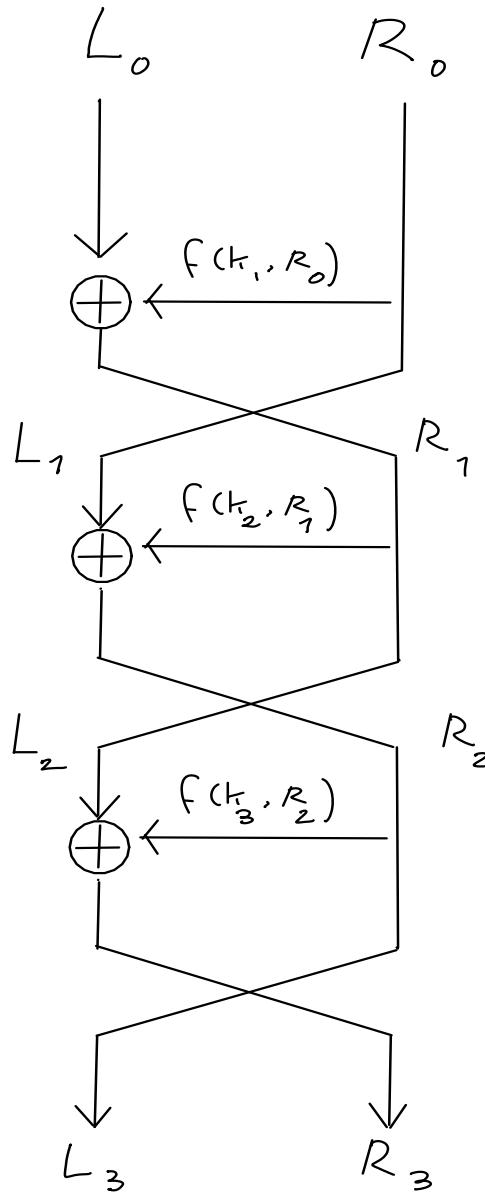
בשלב ה-  $i$  ית  $(1 \leq i \leq N)$ :

$$y = R_N L_N$$

בשלב ה-  $N$  קיבל את הטקסט מוצפן לפי

לדוגמה, עבור תהליך הצפנה עם  $N = 3$  שלבים:

$$\begin{aligned} L_1 &= R_0 , & L_2 &= R_1 , & L_3 &= R_2 , \\ R_1 &= L_0 \oplus f(R_0, k_1) , & R_2 &= L_1 \oplus f(R_1, k_2) , & R_3 &= L_2 \oplus f(R_2, k_3) . \end{aligned}$$



### דוגמה 10.2

נתון צופן פיזיטל שמוגדר עם הפונקציה ליבה המפתח הראשוני הוא התמורה  $\pi$ . כל תת-מפתח  $k_i$  הוא התמורה המתקבלת על ידי לבצע  $i$  פעמים את התמורה  $\pi$ . מצאו את טקסט מוצפן של הטקסט גליי 0010111001.

**פתרונות:**

$R_0 = 11001$  ו-  $L_0 = 00101$ . התת מפתחות הם

$$k_1 = (135)(24) , \quad k_2 = (153)(2)(4) , \quad k_3 = (1)(3)(5)(24) .$$

מכאן

$$L_1 = R_0 = 11001 .$$

$$R_1 = L_0 \oplus f(R_0, k_1) = 00101 \oplus 00111 = 00010 .$$

$$L_2 = R_1 = 00010 .$$

$$R_2 = L_1 \oplus f(R_1, k_2) = 11001 \oplus 00010 = 11011 .$$

$$L_3 = R_2 = 11011 .$$

$$R_3 = L_2 \oplus f(R_2, k_3) = 00010 \oplus 11011 = 11001 .$$

$$y = R_3 L_3 = 1100111011$$

■

### משפט 10.1 משוואות פיסטל

משוואות פיסטל להצפנה:

נתון טקסט גלי  $x = L_0 R_0$  :  
 $1 \leq i \leq N$ .  
 $L_i = R_{i-1}$  ,  $R_i = L_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, k_i)$  ,  $y = R_N L_N$

משוואות פיסטל לענוה:

נתון טקסט גלי  $y = R_N L_N$  :  
 $1 \leq i \leq N$ .  
 $R_i = L_{i+1}$  ,  $L_i = R_{i+1} \oplus f(R_i, k_{i+1})$  ,  $x = L_0 R_0$

### דוגמה 10.3 ענוה של צופן פיסטל

текסט גלי של bit 10 היה מוצפן באמצעות צופן צוף פיסטל עם מפתח התחלה  $(35)(124)$ . כל תת מפתח  $k = (124)(35)$  מתקבל על ידי לבצע התמורה התחלה  $i$  פעמים. הטקסט מוצפן הוא  $1100001010$ . מצאו את הטקסט גלי.

פתרונות:

התת מפתחות הם:

$$k_1 = (124)(35) , \quad k_2 = (142)(3)(5) , \quad k_3 = (1)(2)(4)(35) .$$

הtekסט מוצפן התקבל על ידי להפוך את השני חצאים,  $R_3 = 11000$ ,  $L_3 = 01010$ . לכן, השלב 1 הוא:

$$R_2 = L_3 = 01010$$

-1

$$L_2 = R_3 \oplus f(R_2, k_3) = 11000 \oplus 01010 = 10010 .$$

שלב 2:

$$R_1 = L_2 = 10010 .$$

$$L_1 = R_2 \oplus f(R_1, k_2) = 01010 \oplus 11000 = 10010$$

שלב 3:

$$R_0 = L_1 = 10010 .$$

$$L_0 = R_1 \oplus f(R_0, k_1) = 10010 \oplus 01010 = 11000$$

לכן הטקסט גלי הוא

$$X = L_0 R_0 = 1100010010 .$$

■

## 10.3 תקן הצפנה מיידע (DES)

התקן הצפנה מיידע, באנגלית Data Encryption Standard ובראשי תיבות (DES), הוא צופן בלוקים סימטרי שפותח ב- 1974 במרכז המחקר של IBM בשיתוף פעולה עם הסוכנות לביטחון לאומי של ממשלת ארצות הברית.

**שלב (1)** נתון טקסט גלי  $x = x_1 \dots x_{64}$  כרצף סיביות של 64 ביטים. בונים רצף סיביות  $x_0$  באמצעות תמורה של הביטים של  $x$  לפי תמורה סטטistica הנקראת IP (initial permutation):

$$IP = \begin{pmatrix} 58 & 50 & 42 & 34 & 26 & 18 & 10 & 2 & 60 & 52 & 44 & 36 & 28 & 20 & 12 & 4 \\ 62 & 54 & 46 & 38 & 30 & 22 & 14 & 6 & 64 & 56 & 48 & 40 & 32 & 24 & 16 & 8 \\ 57 & 49 & 41 & 33 & 25 & 17 & 9 & 1 & 59 & 51 & 43 & 35 & 27 & 19 & 11 & 3 \\ 61 & 53 & 45 & 37 & 29 & 21 & 13 & 5 & 63 & 55 & 47 & 39 & 31 & 23 & 15 & 7 \end{pmatrix}$$

ז"א, לפי הטבלה,

$$IP \left( x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, \right. \\ \left. x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{26}, x_{27}, x_{28}, x_{29}, x_{30}, x_{31}, x_{32}, \right. \\ \left. x_{33}, x_{34}, x_{35}, x_{36}, x_{37}, x_{38}, x_{39}, x_{40}, x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44}, x_{45}, x_{46}, x_{47}, x_{48}, \right. \\ \left. x_{49}, x_{50}, x_{51}, x_{52}, x_{53}, x_{54}, x_{55}, x_{56}, x_{57}, x_{58}, x_{59}, x_{60}, x_{61}, x_{62}, x_{63}, x_{64} \right)$$

$$= x_{58}, x_{50}, x_{42}, x_{34}, x_{26}, x_{18}, x_{10}, x_2, x_{60}, x_{52}, x_{44}, x_{36}, x_{28}, x_{20}, x_{12}, x_4 \\ x_{62}, x_{54}, x_{46}, x_{38}, x_{30}, x_{22}, x_{14}, x_6, x_{64}, x_{56}, x_{48}, x_{40}, x_{32}, x_{24}, x_{16}, x_8 \\ x_{57}, x_{49}, x_{41}, x_{33}, x_{25}, x_{17}, x_9, x_1, x_{59}, x_{51}, x_{43}, x_{35}, x_{27}, x_{19}, x_{11}, x_3 \\ x_{61}, x_{53}, x_{45}, x_{37}, x_{29}, x_{21}, x_{13}, x_5, x_{63}, x_{55}, x_{47}, x_{39}, x_{31}, x_{23}, x_{15}, x_7$$

**שלב (2)** מחלקים  $x_0 = IP(x)$  לשני חצאים:

$$x_0 = IP(x) = L_0 R_0 ,$$

כאשר  $L_0$  ה-32 ביטים הראשונים של  $x_0$  ו-  $R_0$  ה-32 ביטים האחרונים:

$$L_0 = x_{58}, x_{50}, x_{42}, x_{34}, x_{26}, x_{18}, x_{10}, x_2, x_{60}, x_{52}, x_{44}, x_{36}, x_{28}, x_{20}, x_{12}, x_4$$

$$x_{62}, x_{54}, x_{46}, x_{38}, x_{30}, x_{22}, x_{14}, x_6, x_{64}, x_{56}, x_{48}, x_{40}, x_{32}, x_{24}, x_{16}, x_8 ,$$

$$R_0 = x_{57}, x_{49}, x_{41}, x_{33}, x_{25}, x_{17}, x_9, x_1, x_{59}, x_{51}, x_{43}, x_{35}, x_{27}, x_{19}, x_{11}, x_3$$

$$x_{61}, x_{53}, x_{45}, x_{37}, x_{29}, x_{21}, x_{13}, x_5, x_{63}, x_{55}, x_{47}, x_{39}, x_{31}, x_{23}, x_{15}, x_7 .$$

**שלב (3)** מבצעים 16 מחזוריים של אלגוריתם פיסטול מסוימים. מחשבים את  $i \leq 16$   $L_i, R_i$  לפי הכלל

$$L_i = R_{i-1}, \quad R_i = L_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, k_i)$$

כאשר  $\oplus$  מסמן XOR ו-  $k_1, \dots, k_{16}$  התח-מפתחות שבנויים מרצפי סיביות, כל אחד של אורך 48 שמתקבלים ממפתח התחלתי  $k$ .

**שלב (4)** בסוף מפעילים התמורה ההפוכה  $IP^{-1}$  על הרצף סיביות  $R_{16}L_{16}$  כדי לקבל הטקסט מוצפן הסופי  $y$ . ז"א

$$y = IP^{-1}(R_{16}L_{16}) .$$

כאשר

$$IP^{-1} = \begin{pmatrix} 40 & 8 & 48 & 16 & 56 & 24 & 64 & 32 & 39 & 7 & 47 & 15 & 55 & 23 & 63 & 31 \\ 38 & 6 & 46 & 14 & 54 & 22 & 62 & 30 & 37 & 5 & 45 & 13 & 53 & 21 & 61 & 29 \\ 36 & 4 & 44 & 12 & 53 & 20 & 60 & 28 & 35 & 3 & 43 & 11 & 51 & 19 & 59 & 27 \\ 34 & 2 & 42 & 10 & 50 & 18 & 58 & 26 & 33 & 1 & 41 & 9 & 49 & 17 & 57 & 25 \end{pmatrix}$$

## הפונקציית ליבה של DES

בכל מחזור של DES מבצעים את הפונקציית ליבה

$$R_i = L_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, k_i) .$$

מקבלת ארגומנט ראשון  $A$  אשר הוא רצף סיביות של אורך 32, וארגומנט שני  $J$  אשר רצף סיביות של אורך 48, ומהזירה רצף סיביות של אורך 32.

$$f : \{0, 1\}^{32} \times \{0, 1\}^{48} \rightarrow \{0, 1\}^{32} .$$

**שלב (1)** ראשית הפונקציית ליבה  $f$  הופכת  $A$  לרצף סיביות של אורך 48 באמצעות הפונקציה

$$E : \{0, 1\}^{32} \rightarrow \{0, 1\}^{48} .$$

היא תמורה של הסיביות של  $A$  עבורה 16 ספרות מופיעות פעמיים.

$$E = \begin{pmatrix} 32 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 1 \end{pmatrix}$$

**שלב (2)** מחשבים  $J$  ורושמים התוצאה כשירשור של שמונה רצפי סיביות של 6 ביטים

$$B = B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8 .$$

**שלב (3)** בשלב זה משתמשים בkopfsאות הוחלפות  $.S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8$

כל  $S_i$  היא מטריצה  $4 \times 16$  אשר איבריה הם שלמים  $1, 2, \dots, 15$

כל  $S_i$  עובדת כפונקציה

$$S_j : \{0, 1\}^2 \times \{0, 1\}^4 \rightarrow \{0, 1\}^4 .$$

ספרטיבי, נתון רצף סיביות של אורך 6,  $B_j = b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$ , אז

$$S_j(B_j) = S_j(r, c)$$

כאשר  $S_j(r, c)$  הוא האיבר בשורה ה-  $r$  ועמודה ה-  $c$  של המטריצה  $S_i$ .

הביטויים  $b_1 b_6$  קובעים את היצוג הבינארי של שורה  $r$  של  $S_j$ , והביטויים  $b_2 b_3 b_4 b_5$  קובעים את היצוג הבינארי של עמודה  $c$  של  $S_j$ .

מגדירים

$$C_j = S_j(B_j) , \quad 1 \leq j \leq 8 .$$

**שלב (4)** מבצעים תמורה הסטטי  $P$  על הרצף סיביות  $C = C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6 C_7 C_8$  כאשר התמורה נתונה בטבלה למטה:

$$P = \begin{pmatrix} 16 & 7 & 20 & 21 \\ 29 & 12 & 28 & 17 \\ 1 & 15 & 23 & 26 \\ 5 & 18 & 31 & 10 \\ 2 & 8 & 24 & 14 \\ 32 & 27 & 3 & 9 \\ 19 & 13 & 30 & 6 \\ 22 & 11 & 4 & 25 \end{pmatrix}$$

הרץף סיביות המתקובל  $P(C)$  מוגדר להיות  $.f(A, J)$

## התזמון המפתח של DES

נתון מפתח התחלתי  $k$  של 64 ביטים. משתמשים בו 56 סיביות של  $k$  בהרכבת התת-מפתחות  $k_1$ .

**שלב (1)** מבצעים התמורה

$$PC_1 = \begin{pmatrix} 57 & 49 & 41 & 33 & 25 & 17 & 9 \\ 1 & 58 & 50 & 42 & 34 & 26 & 18 \\ 10 & 2 & 59 & 51 & 43 & 35 & 27 \\ 19 & 11 & 3 & 60 & 52 & 44 & 36 \\ 63 & 55 & 47 & 39 & 31 & 23 & 15 \\ 7 & 62 & 54 & 46 & 38 & 30 & 22 \\ 14 & 6 & 61 & 53 & 45 & 37 & 29 \\ 21 & 13 & 5 & 28 & 20 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

**שלב (2)** נסמן

$$PC_1(k) = C_0 D_0$$

כאשר  $C_0$  הוא 28 סיביות הראשונות ו-  $D_0$  הוא 28 סיביות האחרונות.

**שלב (3)** לכל  $1 \leq i \leq 16$ , מחשבים

$$C_i = LS_i(C_{i-1}) , \quad D_i = LS_i(D_{i-1}) .$$

$$k_i = PC_2(C_i D_i) .$$

הוא הזהה של מקום אחד או שני מקומות שמאליה:

$$LS_i = \begin{cases} \text{זהה מקום אחד שמאליה} & i = 1, 2, 9, 16, \\ \text{זהה שני מקומות שמאליה} & i = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15 . \end{cases}$$

התמורה  $PC_2$  היא

$$PC_2 = \begin{pmatrix} 14 & 17 & 11 & 24 & 1 & 5 \\ 3 & 28 & 15 & 6 & 21 & 10 \\ 23 & 19 & 12 & 4 & 26 & 8 \\ 16 & 7 & 27 & 20 & 13 & 2 \\ 41 & 52 & 31 & 37 & 47 & 55 \\ 30 & 40 & 51 & 45 & 33 & 48 \\ 44 & 49 & 39 & 56 & 34 & 53 \\ 46 & 42 & 50 & 36 & 29 & 32 \end{pmatrix}$$

## הבלוקים של החלפות של DES

$S_1$	14	4	13	1	2	15	11	8	3	10	6	12	5	9	0	7
	0	15	7	4	14	2	13	1	10	6	12	11	9	5	3	8
	4	1	14	8	13	6	2	11	15	12	9	7	3	10	5	0
	15	12	8	2	4	9	1	7	5	11	3	14	10	0	6	13
$S_2$	15	1	8	14	6	11	3	4	9	7	2	13	12	0	5	10
	3	13	4	7	15	2	8	14	12	0	1	10	6	9	11	5
	0	14	7	11	10	4	13	1	5	8	12	6	9	3	2	15
	13	8	10	1	3	15	4	2	11	6	7	12	0	5	14	9
$S_3$	10	0	9	14	6	3	15	5	1	13	12	7	11	4	2	8
	13	7	0	9	3	4	6	10	2	8	5	14	12	11	15	1
	13	6	4	9	8	15	3	0	11	1	2	12	5	10	14	7
	1	10	13	0	6	9	8	7	4	15	14	3	11	5	2	12
$S_4$	7	13	14	3	0	6	9	10	1	2	8	5	11	12	4	15
	13	8	11	5	6	15	0	3	4	7	2	12	1	10	14	9
	10	6	9	0	12	11	7	13	15	1	3	14	5	2	8	4
	3	15	0	6	10	1	13	8	9	4	5	11	12	7	2	14
$S_5$	2	12	4	1	7	10	11	6	8	5	3	15	13	0	14	9
	14	11	2	12	4	7	13	1	5	0	15	10	3	9	8	6
	4	2	1	11	10	13	7	8	15	9	12	5	6	3	0	14
	11	8	12	7	1	14	2	13	6	15	0	9	10	4	5	3
$S_6$	12	1	10	15	9	2	6	8	0	13	3	4	14	7	5	11
	10	15	4	2	7	12	9	5	6	1	13	14	0	11	3	8
	9	14	15	5	2	8	12	3	7	0	4	10	1	13	11	6
	4	3	2	12	9	5	15	10	11	14	1	7	6	0	8	13
$S_7$	4	11	2	14	15	0	8	13	3	12	9	7	5	10	6	1
	13	0	11	7	4	9	1	10	14	3	5	12	2	15	8	6
	1	4	11	13	12	3	7	14	10	15	6	8	0	5	9	2
	6	11	13	8	1	4	10	7	9	5	0	15	14	2	3	12
$S_8$	13	2	8	4	6	15	11	1	10	9	3	14	5	0	12	7
	1	15	13	8	10	3	7	4	12	5	6	11	0	14	9	2
	7	11	4	1	9	12	14	2	0	6	10	13	15	3	5	8
	2	1	14	7	4	10	8	13	15	12	9	0	3	5	6	11

## דוגמאות

### 10.4

בצעו את האלגוריתם ליצירת תת-מפתחות לחשב  $k_1$  מהמפתח המקורי

$$k = 133457799\text{BBCDF}FF1$$

פתרונות:

hex	1	3	3	4	5	7	7	9
binary	0001	0011	0011	0100	0101	0111	0111	1001

hex	9	B	B	C	D	F	F	1
binary	1001	1011	1011	1100	1101	1111	1111	0001

מכאן

$$k = 0001 \ 0011 \ 0011 \ 0100 \ 0101 \ 0111 \ 0111 \ 1001 \\ 1001 \ 1011 \ 1011 \ 1100 \ 1101 \ 1111 \ 1111 \ 0001 .$$

$$PC_1(k) = C_0 D_0$$

כasher

$$C_0 = 1111 \ 0000 \ 1100 \ 1100 \ 1010 \ 1010 \ 1111$$

$$D_0 = 0101 \ 0101 \ 0110 \ 0110 \ 0111 \ 1000 \ 1111 .$$

נבעז הזהה של ספרה אחד לשמאלו לקבול

$$C_1 = 111 \ 0000 \ 1100 \ 1100 \ 1010 \ 1010 \ 1111 \ 1$$

$$D_1 = 101 \ 0101 \ 0110 \ 0110 \ 0111 \ 1000 \ 1111 \ 0 .$$

$$PC_2(C_1 D_1) = k_1 = 0001 \ 1011 \ 0000 \ 0010 \ 1110 \ 1111 \ 1111 \ 1100 \ 0111 \ 0000 \ 0111 \ 0010 .$$

■

### דוגמה 10.5

מצאו את ההצפנה אחורי מחזיר אחד של קריפטו-מערכת DES של הטקסט גלי

0123456789ABCDEF

עם מפתח התחלתי

133457799BBCDFF1

פתרונות:

תחליה נרשום את הטקסט מוצפן בסיביות:

hex	0	1	2	3	4	5	6	7
binary	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111

hex	8	9	A	B	C	D	E	F
binary	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

אנחנו כבר חישבנו את התת-מפתח  $k_1$  בדוגמה 10.4

$$k_1 = 0001 \ 1011 \ 0000 \ 0010 \ 1110 \ 1111 \ 1111 \ 1100 \ 0111 \ 0000 \ 0111 \ 0010 .$$

נפעיל תמורה הסטטיטית IP על הרץ סיביות 64 ביטים ונקבל

$$IP(x) = L_0 R_0$$

כasher

$$L_0 = 1100 \ 1100 \ 0000 \ 0000 \ 1100 \ 1100 \ 1111 \ 1111 ,$$

1

$$R_0 = 1111 \ 0000 \ 1010 \ 1010 \ 1111 \ 0000 \ 1010 \ 1010 ,$$

cut נחשב את  $f(R_0, k_1)$ 

שלב (1)

$$E(R_0) = 0111 \ 1010 \ 0001 \ 0101 \ 0101 \ 0101 \ 0111 \ 1010 \ 0001 \ 0101 \ 0101 \ 0101 ,$$

שלב (2)

$$E(R_0) \oplus k_1 = 011000 \ 010001 \ 011110 \ 111010 \ 100001 \ 100110 \ 010100 \ 100111 ,$$

שלב (3) בעזרת הקופסאות  $S_i$  נחליף כל רצף 6- ביטים אם רצף 4- ביטים.

שלב (4) עברור הרצף 6- ביטים הראשון:

$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 = 011000 ,$$

נקה שורה 00 ועמודה  $b_1 b_6 = 00$  ועמודה  $b_2 b_3 b_4 b_5 = 1100$  של הקופסה  $S_2$ . זהי 5, אשר הוא 0101 בבסיס בינארי.  
חזרים ומבצעים אותו חישוב על כל רצף 6- ביטים של  $E(R_0) \oplus k_1$  כדי לקבל הרצף 32- ביטים:

$$C = 0101 \ 1100 \ 1000 \ 0010 \ 1011 \ 0101 \ 1001 \ 0111$$

שלב (5) מפעלים התמורה על  $C$ :

$$f(R_0, k_1) = P(C) = 0010 \ 0011 \ 0100 \ 1010 \ 1010 \ 1001 \ 1011 \ 1011$$

בסיום ו-  $L_1 = R_0$ 

$$R_1 = L_0 \oplus f(R_0, k_1) = 1110 \ 1111 \ 0100 \ 1010 \ 0110 \ 0101 \ 0100 \ 0100$$



## 10.6 דוגמה

נתון הטקסט גלי

02468ACE13579BDF ,

נתון המפתח ההתחלתי

$$k = 010145458989CD\text{CD} ,$$

ונתנו כי התת-מפתח הראשון של קריפטו-מערכת DES הוא

$$k_1 = 0000 \ 1011 \ 0000 \ 0010 \ 0100 \ 0011 \ 1001 \ 1001 \ 0100 \ 1000 \ 0010 \ 0100 .$$

בצעו את המחרוז הראשון של הצפנה DES.

**פתרון:**

hex	0	2	4	6	8	A	C	E
binary	0000	0010	0100	0110	1000	1010	1100	1110
hex	1	3	5	7	9	B	D	F
binary	0001	0011	0101	0111	1001	1011	1101	1111

$$\text{כasher } IP(x) = L_0 R_0$$

$$L_0 = 1010 \ 1010 \ 1111 \ 0000 \ 1010 \ 1010 \ 1111 \ 0000$$

$$R_0 = 1100 \ 1100 \ 0000 \ 0000 \ 1100 \ 1100 \ 1111 \ 1111$$

כדי

להשתמש במשוואות פיזיטל נציגן לחשב את הפונקציית ליבת  $f(R_0, k_1)$ . תחילת משבבים את

$$E(R_0) = 1111 \ 1111 \ 0111 \ 1001 \ 0101 \ 0110 \ 0001 \ 0000 \ 0000 \ 1000 \ 0101 \ 1110.$$

מבצעים XOR של  $E(R_0)$  עם  $k_1$  ורושמים את התוצאה בקבוצות של 6 ביטים:

$$E(R_0) \oplus k_1 = 111011 \ 101000 \ 001001 \ 000010 \ 111111 \ 001101 \ 111111 \ 011011.$$

קופסה החלפה S1 שורה 11, عمودה 1101, ומקבלים את האיבר 0.

קופסה החלפה S2 שורה 10, عمودה 0100, ומקבלים את האיבר 10.

קופסה החלפה S3 שורה 01, عمودה 0100, ומקבלים את האיבר 3.

קופסה החלפה S4 שורה 00, عمودה 0001, ומקבלים את האיבר 13.

קופסה החלפה S5 שורה 11, عمودה 1111, ומקבלים את האיבר 3.

קופסה החלפה S6 שורה 01, عمودה 0110, ומקבלים את האיבר 9.

קופסה החלפה S7 שורה 11, عمودה 1111, ומקבלים את האיבר 12.

קופסה החלפה S8 שורה 01, عمودה 1101, ומקבלים את האיבר 14.

לכן

$$C = 0000 \ 1010 \ 0011 \ 1101 \ 0011 \ 1001 \ 1100 \ 1110$$

מבצעים את התמורה הסטטיטית:  $C$ 

$$P(C) = f(R_0, k_1) = 1111 \ 1100 \ 0001 \ 1010 \ 0011 \ 0000 \ 1110 \ 0101$$

לבסוף אנחנו מקבלים

$$L_1 = R_0 = 1100 \ 1100 \ 0000 \ 0000 \ 1100 \ 1100 \ 1111 \ 1111$$

$$R_1 = L_0 \oplus f(R_0, k_1) = 0101 \ 0110 \ 1110 \ 1010 \ 1001 \ 1010 \ 0001 \ 0101$$

■

## IDEA 10.4

### הגדרה 10.3 פעולות בינאריות של IDEA

או מוציא XOR	$\oplus$
חיבור מודולו $2^n$ כאשר $n$ שלים השווה לאורך של הבלוקים	$\boxplus$
כפל מודולו $1 + 2^n$	$\odot$

### דוגמה 10.7

$$0110 \oplus 1011 = 1101 .$$

### דוגמה 10.8

$$0110 \boxplus 1011 \xrightarrow{\text{ספרות דצימליות}} 6 \boxplus 11 = 6 + 11 \mod 2^4 = 1 \xrightarrow{\text{סיביות}} 0001 .$$

### דוגמה 10.9

$$0110 \odot 1011 \xrightarrow{\text{ספרות דצימליות}} 6 \odot 11 = 6 \cdot 11 \mod 2^4 + 1 = 66 \mod 17 = 15 \xrightarrow{\text{סיביות}} 1111 .$$

### דוגמה 10.10

$$0000 \odot 1011 \xrightarrow{\text{ספרות דצימליות}} 2^4 \odot 11 = 16 \cdot 11 \mod 2^4 + 1 = 176 \mod 17 = 6 \xrightarrow{\text{סיביות}} 0110 .$$

## תת מפתחות של IDEA

נתון מפתח התחלתי  $k$  של IDEA של אורך 128 ביטים. כל הצפנה משתמשת ב- 6 תת מפתחות, וכל תפקoka משתמשת ב- 4 תת מפתחות. התת מפתחות מסומנות ב-  $k_i^{(r)}$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ,  $1 \leq r \leq 8$ . כל הצפנה משתמשת ב- 25  $k$  אחד של אורך 16 ביטים, ואחר כך להזין מקומות שמאליה. התת מפתחות המתקבלים מתוארים בטבלה למטה.

$r$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$
1	0 – 15	16 – 31	32 – 47	48 – 63	64 – 79	80 – 95
2	96 – 111	112 – 127	25 – 40	41 – 56	57 – 72	73 – 88
3	89 – 104	105 – 120	121 – 8	9 – 24	50 – 65	66 – 81
4	82 – 97	98 – 113	114 – 1	2 – 17	18 – 33	34 – 49
5	75 – 90	91 – 106	107 – 122	123 – 10	11 – 26	27 – 42
6	43 – 58	59 – 74	100 – 115	116 – 3	4 – 19	20 – 35
7	36 – 51	52 – 67	68 – 83	84 – 99	125 – 12	13 – 28
8	29 – 44	45 – 60	61 – 76	77 – 92	93 – 108	109 – 124
9	22 – 37	38 – 53	54 – 69	70 – 85	–	–

## אלגוריתם ההצפנה

- נתון טקסט גליי  $P$  של אורך 64 ביטים.
  - מחלקים  $X$  לארבע בלוקים, כל אחד של אורך 16 ביטים:
- $$P = P_1 P_2 P_3 P_4 .$$
- בתחילה של מחזור ה- 1, נסמן את הטקסט מוצפן המתקיים ממחזור הקודם (מחזור  $r - 1$ ) ב-  $C^{(1)}, C^{(r)}$ , מלבד מהשלבים הבאים:
  - כל מחזור  $r$  מורכב מהשלבים הבאים:

$$Y_1 = C_1^{(r)} \odot k_1^{(r)} = C_1^{(r)} \cdot k_1^{(r)} \pmod{2^{16} + 1} \quad [1]$$

$$Y_2 = C_2^{(r)} \boxplus k_2^{(r)} = C_2^{(r)} + k_2^{(r)} \pmod{2^{16}} \quad [2]$$

$$Y_3 = C_3^{(r)} \boxplus k_3^{(r)} = C_3^{(r)} + k_3^{(r)} \pmod{2^{16}} \quad [3]$$

$$Y_4 = C_4^{(r)} \odot k_4^{(r)} = C_4^{(r)} \cdot k_4^{(r)} \pmod{2^{16} + 1} \quad [4]$$

$$Y_5 = Y_1 \oplus Y_3 \quad [5]$$

$$Y_6 = Y_2 \oplus Y_4 \quad [6]$$

$$Y_7 = Y_5 \odot k_5^{(r)} = Y_5 \cdot k_5^{(r)} \pmod{2^{16} + 1} \quad [7]$$

$$Y_8 = Y_6 \boxplus Y_7 = Y_6 + Y_7 \pmod{2^{16}} \quad [8]$$

$$Y_9 = Y_8 \odot k_6^{(r)} = Y_8 \cdot k_6^{(r)} \pmod{2^{16} + 1} \quad [9]$$

$$Y_{10} = Y_7 \boxplus Y_9 = Y_7 + Y_9 \pmod{2^{16}} \quad [10]$$

$$C_1^{(r+1)} = Y_1 \oplus Y_9 \quad [11]$$

$$C_2^{(r+1)} = Y_3 \oplus Y_9 \quad [12]$$

$$C_3^{(r+1)} = Y_2 \oplus Y_{10} \quad [13]$$

$$C_4^{(r+1)} = Y_4 \oplus Y_{10} \quad [14]$$

הערכים  $Y_i$  נקראים הערכים הביניים. התפקיד  $i$  נקראות הטקסטים מוצפנים הביניים.

- בכדי לקבל את הטקסט מוצפן הסופי, אחרי השלבים של כל מחזור  $r$  מבצעים את השלב התפקיד:

$$C_1 = C_1^{(9)} \odot k_1^{(9)} = C_1^{(9)} \cdot k_1^{(9)} \pmod{2^{16} + 1} \quad [1]$$

$$C_2 = C_3^{(9)} \boxplus k_2^{(9)} = C_3^{(9)} + k_2^{(9)} \pmod{2^{16}} \quad [2]$$

$$C_3 = C_2^{(9)} \boxplus k_3^{(9)} = C_2^{(9)} + k_3^{(9)} \pmod{2^{16}} \quad [3]$$

$$C_4 = C_4^{(9)} \odot k_4^{(9)} = C_4^{(9)} \cdot k_4^{(9)} \pmod{2^{16} + 1} \quad [4]$$

- לבסוף הטקסט מוצפן 64- ביטים מתקבל מהארבע בלוקים 16- ביטים

$$C = C_1 C_2 C_3 C_4 .$$

## דוגמאות

### דוגמה 10.11

נתון מפתח התחלתי

$$k = 01010303030301010123\text{cdef}00110011$$

בצעו את המחזור הראשון של הצפנה IDEA על הטקסט גלי

$$P = 000f11111111000f$$

**פתרונות:**

רושמים את המפתח במונחי סיביות:

hex	0	1	0	1	0	3	0	3
binary	0000	0001	0000	0001	0000	0011	0000	0011
hex	0	3	0	3	0	1	0	1
binary	0000	0011	0000	0011	0000	0001	0000	0001
hex	0	1	2	3	c	d	e	f
binary	0000	0001	0010	0011	1100	1101	1110	1111
hex	0	0	1	1	0	0	1	1
binary	0000	0000	0001	0001	0000	0000	0001	0001

יצרים את התת מתחות למחזור הראשון:

$$k_1^{(1)} = 0000000100000001 = 257$$

$$k_2^{(1)} = 0000001100000011 = 771$$

$$k_3^{(1)} = 0000001100000011 = 771$$

$$k_4^{(1)} = 0000000100000001 = 257$$

$$k_5^{(1)} = 0000000100100011 = 291$$

$$k_6^{(1)} = 1100110111101111 = 52719$$

רושמים את הטקסט גלי במונחי סיביות:

hex	0	0	0	f	1	1	1	1
binary	0000	0000	0000	1111	0001	0001	0001	0001
hex	1	1	1	1	0	0	0	f
binary	0001	0001	0001	0001	0000	0000	0000	1111

מוצאים מחזור ראשון של ההצפנה:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= C_1^{(1)} = 0000000000001111 = 15 , \\
 P_2 &= C_2^{(1)} = 0001000100010001 = 4369 , \\
 P_3 &= C_3^{(1)} = 0001000100010001 = 4369 , \\
 P_4 &= C_4^{(1)} = 0000000000001111 = 15 ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= C_1^{(1)} \odot k_1^{(1)} = 15 \cdot 257 \pmod{65537} = 3855 \Rightarrow Y_1 = 0000\ 1111\ 0000\ 1111 , \\
 Y_2 &= C_2^{(1)} \boxplus k_2^{(1)} = 4369 + 771 \pmod{65536} = 5140 \Rightarrow Y_2 = 0001\ 0100\ 0001\ 0100 , \\
 Y_3 &= C_3^{(1)} \boxplus k_3^{(1)} = 4369 + 771 \pmod{65536} = 5140 \Rightarrow Y_3 = 0001\ 0100\ 0001\ 0100 , \\
 Y_4 &= C_4^{(1)} \odot k_4^{(1)} = 15 \cdot 257 \pmod{65537} = 3855 \Rightarrow Y_4 = 0000\ 1111\ 0000\ 1111 , \\
 Y_5 &= Y_1 \oplus Y_3 = 0001\ 1011\ 0001\ 1011 = 6939 , \\
 Y_6 &= Y_2 \oplus Y_4 = 0001\ 1011\ 0001\ 1011 = 6939 , \\
 Y_7 &= Y_5 \odot k_5^{(1)} = 6939 \cdot 291 \pmod{65537} = 53139 \Rightarrow Y_7 = 1100\ 1111\ 1001\ 0011 , \\
 Y_8 &= Y_6 \boxplus Y_7 = 6939 + 53139 \pmod{65536} = 60078 \Rightarrow Y_8 = 1110\ 1010\ 1010\ 1110 , \\
 Y_9 &= Y_8 \odot k_6^{(1)} = 60078 \cdot 52719 \pmod{65537} = 45483 \Rightarrow Y_9 = 1011\ 0001\ 1010\ 1011 , \\
 Y_{10} &= Y_7 \boxplus Y_9 = 53139 + 45483 \pmod{65536} = 33086 \Rightarrow Y_{10} = 1000\ 0001\ 0011\ 1101 .
 \end{aligned}$$

התפוקה של מחזור הראשון הינה

$$\begin{aligned}
 C_1^{(2)} &= Y_1 \oplus Y_9 = 1011111010100100 \\
 C_2^{(2)} &= Y_3 \oplus Y_9 = 1010010110111111 \\
 C_3^{(2)} &= Y_2 \oplus Y_{10} = 1001010100101010 \\
 C_4^{(2)} &= Y_4 \oplus Y_{10} = 1000111000110001
 \end{aligned}$$

## 10.12 דוגמה

מצאו את המפתחות פענו של המחזור הראשון של IDEA בעזרת המפתח ההתחלתי

$$k = 00112233445566778899aabbcdddeeff .$$

**פתרונות:**

המפתחות לפענו הם

$$DK_1^{(1)} = \left( K_1^{(9)} \right)^{-1} ,$$

$$DK_2^{(1)} = - \left( K_2^{(9)} \right) ,$$

$$DK_3^{(1)} = - \left( K_3^{(9)} \right) ,$$

$$DK_4^{(1)} = \left( K_4^{(9)} \right)^{-1} ,$$

$$DK_5^{(1)} = K_5^{(8)} ,$$

$$DK_6^{(1)} = K_6^{(8)} .$$

hex	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
binary	0000	0000	0001	0001	0010	0010	0011	0011	0100	0100	0101
hex	5	6	6	7	7	8	8	9	9	a	a
binary	0101	0110	0110	0111	0111	1000	1000	1001	1001	1010	1010
hex	b	b	c	c	d	d	e	e	f	f	
binary	1011	1011	1100	1100	1101	1101	1110	1110	1111	1111	

$$k_1^{(9)} = 0100\ 0110\ 0110\ 1000 = 18024 . \quad :22 - 37$$

$$k_2^{(9)} = 1000\ 1010\ 1010\ 1100 = 35500 . \quad :38 - 53$$

$$k_3^{(9)} = 1100\ 1110\ 1111\ 0001 = 52977 . \quad :54 - 69$$

$$k_4^{(9)} = 0001\ 0011\ 0011\ 0101 = 4917 . \quad :70 - 85$$

$$k_5^{(8)} = 1011\ 1100\ 1100\ 1101 . \quad :93 - 108$$

$$k_6^{(8)} = 1101\ 1110\ 1110\ 1111 . \quad :109 - 124$$

$$DK_1^{(1)} = \left(K_1^{(9)}\right)^{-1} = (18024)^{-1} \mod 65537 = 45753 = 1011\ 0010\ 1011\ 1001 ,$$

$$DK_2^{(1)} = -\left(K_2^{(9)}\right) = -35500 \mod 65536 = 30036 = 0111\ 0101\ 0101\ 0100 .$$

$$DK_3^{(1)} = -\left(K_3^{(9)}\right) = -52977 \mod 65536 = 12559 = 0011\ 0001\ 0000\ 1111 .$$

$$DK_4^{(1)} = \left(K_4^{(9)}\right)^{-1} = (4917)^{-1} \mod 65537 = 18047 = 0100\ 0110\ 0111\ 1111 .$$

$$DK_5^{(1)} = K_5^{(8)} = 1011\ 1100\ 1100\ 1101 .$$

$$DK_6^{(1)} = K_6^{(8)} = 1101\ 1110\ 1110\ 1111 .$$

■