29-6　2

2.1　עוד חוקי הסתברות בסיסיים

2.1 חוק. (נוסחת ההכלה וההפרדה) לכל צמד מאורעות A ו- B מתקיים

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B). \tag{2.1}$$

חוק. (הסתברות של איחוד של שלושה מאורעות)
אם A ו-B זרים אז

$$P(A\cap B)=P(\phi)=0. \tag{2.2}$$

חוק. (הסתברות של מאורעות זרים) עבור שלושה מאורעות A, B, C מתקיים

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C). \tag{2.3}$$

חוק. (הסתברויות המשלימות) אם $\bar{A}$ המאורע משלים של A אז

$$P(A)+P(\bar{A})=1, \qquad \Leftrightarrow \qquad P(\bar{A})=1-P(A). \tag{2.4}$$

דוגמא. בהצגה לכבוד פורים מככבים אסתר, מרדכי והמן הרשע. לכל אחד מכוכבי ההצגה יש שחקן מחליף למקרה של היעדרות. אסתר נעדרת ב- 40% מההופעות, מרדכי ב 50% מההופעות והמן ב 35% מההופעות. ידוע שכל שניים מהכוכבים נעדרים יחדיו ב 15% מההופעות וכולם ביחד נעדרים ב 5%. מההופעות. חשבו את ההסתברות שבהצגה אליה קניתם כרטיסים לא יהיה אף שחקן מחליף.

פיתרון. נסמן:

$$A=\text{אסתר נעדרת}$$
$$B=\text{מרדכי נעדר}$$
$$C=\text{המן נעדר}$$

נתון כי

$$\begin{aligned}
P(A)=&0.4,\\
P(B)=&0.5,\\
P(C)=&0.35,\\
P(A\cap B)=&P(B\cap C)=P(C\cap A)=0.15, P(A\cap B\cap C)=0.05.
\end{aligned}$$

המאורע שלא יהיה אף שחקן הוא $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$.

חוקי דה מורגן

$$\begin{aligned}
\overline{A\cup B}=&\bar{A}\cap\bar{B},\\
\overline{A\cap B}=&\bar{A}\cup\bar{B},\\
\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=&\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i,\\
\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=&\bigcup_{i=1}^{n}\bar{A}_i.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

לפי חוקי דה מורגן
$$\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}=\overline{A\cup B\cup C}.$$
לכן
$$P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C).$$
לפי (2.3),
$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)=&P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)\\=&0.4+0.5+0.35-0.15-0.15-0.15+0.05\\=&0.85.\end{aligned}$$
לכן
$$P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C})=1-0.85=0.15.$$
■

דוגמא. בסקר שנערך בעיר מסוימת נמצא ש־ 60% מהתושבים מגדלים כלב. בנוסף, 30% מהתושבים מגדלים חתולים ו־ 15% מגדלים גם כלב וגם חתול. חחפשו את ההסתברות שתושב מקרי

1. מגדל לפחות בעל חיים אחד
2. לא מגדל 2 בעלי חיים
3. מגדל כלב, אך לא חתול
4. מגדל חתול, אך לא כלב.

פיתרון.

$C=$ המאורע של בעלי כלבים,
$D=$ המאורע של בעלי חתולים.

.1
$$\begin{aligned}P(C\cup D)=&P(C)+P(D)-P(C\cap D)\\=&0.6+0.3-0.15\\=&0.75.\end{aligned}$$

.2
$$\begin{aligned}P(\overline{C\cap D})=&1-P(C\cap D)\\=&1-0.15\\=&0.85.\end{aligned}$$

3. יש צורך להשתמש בהחוקים
$$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap\bar{A}), \tag{2.6}$$
$$P(B\cap\bar{A})=P(B)-P(B\cap A). \tag{2.7}$$
אזי
$$\begin{aligned}P(C\cap\bar{D})=&P(C)-P(C\cap D)\\=&0.6-0.15\\=&0.45.\end{aligned}$$

.4
$$\begin{aligned}P(\bar{C}\cap D)=&P(D)-P(C\cap D)\\=&0.3-0.15\\=&0.15.\end{aligned}$$

■

2.1 הגדרה. (מרחב מדגם אחיד) מרחב מדגם נקרא אחיד אם לכל איבר $\omega \in \Omega$ במרחב מתקיים

$$P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}, \tag{2.8}$$

כאשר

$$|\Omega| = \text{\# נקודות ב- } \Omega.$$

2.2 דוגמא. (מרחב מדגם אחיד) לדוגמא לניסוי הטלת קוביה הוגנת יש מרחב מדגם Ω כאשר $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ ומתקיים כי $P(\omega \in \Omega) = \frac{1}{6}$. על כן Ω הוא מרחב מדגם אחיד.

2.3 דוגמא. (מרחב מדגם לא סימטרי) בכד נמצא 12 כדורים: שחור אחת, לבן 2, כחול 3, אדום 4 וירוק-5. המרחב מדגם הוא

$$\Omega = \{bk, w, r, bl, g\}.$$

ומתקיים כי

$$P(bk) = \frac{1}{12}, \quad P(w) = \frac{2}{12}, \quad P(r) = \frac{3}{12}, \quad P(bl) = \frac{4}{12}, \quad P(g) = \frac{5}{12}.$$

על כן Ω הוא מרחב מדגם אי-סימטרי.

2.2 עקרון הכפל

כדי לחשב ההסתברות של מאורע, יש צורך לדעת כיצד לספור את כמות האפשרויות בכל מאורע. עקרון הכפל מסייע לנו לקבוע את המספר האפשרויות כאשר ישנו תהליך המתבצע בשלבים. בכדי להבין את עיקרון הכפל כראוי, נעבור על כמה דוגמאות:

- מספר התוצאות האפשריות בהטלת מטבע פעמיים הוא 4 $(\Omega = \{HH, HT, TH, TT\})$ 2 אפשרויות בשלב הראשון ועבור כל אפשרות בשלב הראשון יש 2 אפשרויות בשלב השני:

$$|\Omega| = 2.2 = 2^2 = 4.$$

- מספר התוצאות האפשריות בהטלת מטבע 3 פעמים הוא $2^3 = 8$.
- מספר התוצאות האפשריות בהטלת קוביה פעמים הוא $6.6 = 36$ (6 תוצאות אפשריות בהטלה הראשונה ו־6 תוצאות בהטלה השנייה).
- מספר התוצאות האפשריות בהטלת קוביה ולאחר מכן מטבע הוא $6.2 = 12$.

מספר המילים השונות בנות 5 אותיות שניתן ליצור מהא"ב העברי הוא 22^5.

> באופן כללי, אם בכל שלב בניסוי ה-k-שלבי יש n אפשרויות, אזי ישנן n^k תוצאות אפשריות סה"כ.

דוגמא. בבית ספר מקצים באקראי 4 מורים ל-8 כיתות בלי הגבלה על המספר הכיתות שכל מורה ילמד. מהי המספר החלוקות האפשרי?

פיתרון. כל כיתה צריך לבחור את המורה שילמד אותו. הכיתות בוחרים את המורים, ולכן,
לכיתה הראשון יש 4 אפשרויות.
לכיתה השני יש 4 אפשרויות,
וכן הלאה.
סה"כ יש 4^8 חלוקות אפשרויות. ■