שיעור 10
המחלקה P והמחלקה NP

10.1 המחלקה P

הגדרה 10.1 בעיית הכרעה

בעיית הכרעה מוגדרת באופן הבא:

"בהינתן קלט כלשהו, האם הקלט מקיים תנאי מסוים ? "

דוגמה 10.1 דוגמה של בעיית הכרעה

לדוגמה, בהינתן מספר n, האם n ראשוני?

משפט 10.1 שקיות בין בעייה לשפה

כל בעייה הכרעה ניתן לתאר כשפה שקולה:

$$\text{בעיית הכרעה} \equiv \text{שפה} \ .$$

דוגמה 10.2

לדוגמה, הבעיית הכרעה הבאה:

"בהינתן מספר n, האם n ראשוני? "

ניתנת לרשום כשפה הבאה:

$$L_{\text{prime}} = \left\{ \langle n \rangle \ \middle| \ \text{ראשוני } n \right\} \ .$$

הגדרה 10.2 אלגוריתם זמן פולינומיאלי

אומרים כי אלגוריתם A מכריע בעייה בזמן פולינומיאלי אם קיים קבוע $c > 0$ כך שזמן הריצה של A על קלט w חסום ע"י $O\left(|w|^c\right)$.

התזה של צרץ' טיורינג אומר שאם קיים אלגוריתם המכריע בעייה בזמן פולינומיאלי, אזי קיימת מכונת טיורינג דטרמיניסטית המכריעה את השפה השקולה לבעייה זו בזמן פולינומיאלי.

$$\text{אלגוריתם מכריע} \equiv \text{מכונת טיורנג דטרמיניסטית} \ .$$

הגדרה 10.3 המחלקה P

המחלקה P היא אוסף כל הבעיות (השפות) שקיים עבורן אלגוריתם (מכונת טיורנג דטרמיניסטית) המכריע אותן בזמן פולינומיאלי.

10.2 דוגמאות לבעיות ב- P

(1

$$PATH = \{\langle G,s,t\rangle \mid \text{גרף מכוון המכיל מסלול מ-}\ s\ \text{ל-}\ t\ \ G\} \in P$$

(2

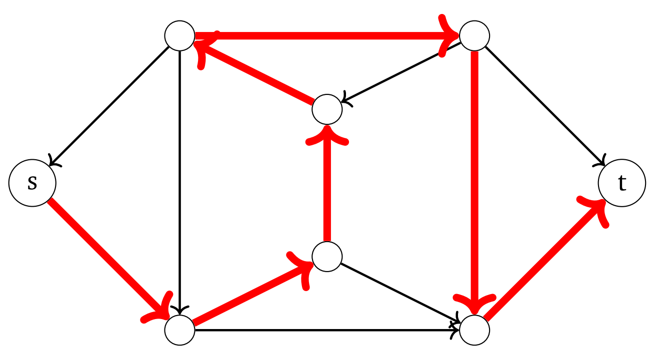
$$RELPRIME = \{\langle x,y\rangle \mid x\ \text{ו-}\ y\ \text{זרים}\} \in P$$

10.3 בעיית המסלול ההמילטוני $HAMPATH$

הגדרה 10.4 $HAMPATH$

בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$ ושני קודקודים $s,t \in V$. מסלול המילטוני מ- s ל- t ב- G הוא מסלול מ- s ל- t שעובר דרך כל קודקוד בגרף בדיוק פעם אחת.

לדוגמה:



הגדרה 10.5 בעיית HAMPATH

<u>קלט:</u> גרף מכוון $G=(V,E)$ ושני קודקודים $s,t \in V$.

<u>פלט:</u> האם G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t?

$$HAMPATH = \{\langle G,s,t\rangle \mid G\ \text{גרף מכוון המכיל מסלול המילטוני מ-}\ s\ \text{ל-}\ t?\}$$

נשאל שאלה: האם $HAMPATH \in P$?

לא ידוע האם קיים אלגוריתם המכריע את $HAMPATH$ בזמן פולינומיאלי (שאלה פתוחה).

- בהינתן קלט $\langle G,s,t\rangle$, האם $\langle G,s,t\rangle \in HAMPATH$?
- נענה על שאלה אחרת:

  בהינתן קלט $\langle G,s,t\rangle$, ומחרוזת y, האם $\langle G,s,t\rangle \in HAMPATH$?
- יתן לבדוק האם y היא מסלול המילטוני מ- s ל- t ב- G בזמן פולינומיאלי ולענות בהתאם.
- במקרה זה, אומרים כי $HAMPATH$ ניתנת לאימות בזמן פולינומיאלי.

10.4 אלגוריתם אימות

הגדרה 10.6 אלגוריתם אימות

אלגוריתם אימות עבור בעייה A הוא אלגוריתם V כך שלכל קלט $w \in \Sigma^*$ מתקיים:

$w \in A$ אם ורק אם קיימת מחרוזת (עדות) y באורך פולינומיאלי ב- $|w|$ כך ש- V מקבל את הזוג (w, y) כלומר:

- אם $w \in A$ $\Leftarrow$ קיים y כך ש: $V(w, y) = T$.
- אם $w \notin A$ $\Leftarrow$ לכל y מתקיים $V(w, y) = F$.

הערה 10.1

- זמן ריצה של אלגוריתום אימות נמדד ביחס לגודל הקלט $|w|$.
- אלגוריתם אימות פולינומיאלי אם הוא רץ בזמן פולינומיאלי.

10.5 המחלקה NP

הגדרה 10.7 המחלקה NP

המחלקה NP היא אוסף כל הבעיות שקיים עבורן אלגוריתם אימות פולינומיאלי.

משפט 10.2 $HAMPATH \in NP$

בעיית המסלול ההמילטוני $HAMPATH$:

<u>קלט:</u> גרף מכוון $G = (V, E)$ ושני קודקודים $s, t \in V$.

<u>פלט:</u> האם G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t?

$$HAMPATH = \{\langle G, s, t\rangle \mid \text{גרף מכוון המכיל מסלול המילטוני מ- } s \text{ ל- } t \text{?} \ G\}$$

הוכיחו כי $HAMPATH \in NP$.

הוכחה: נבנה אלגוריתם אימות V עבור $HAMPATH$.

$V =$ על קלט $(\langle G, s, t\rangle, y)$:

1) בודק האם y היא סדרה של

$$u_1, u_2, \quad \ldots \quad u_n$$

השונים זה מזה.

- אם לא $\Leftarrow$ דוחה.

2) בודק האם $u_1 = s$ ו- $u_n = t$.

- אם לא $\Leftarrow$ דוחה.

(3 בודק שכל הצלעות (u_i, u_{i+1}) (לכל $1 \leqslant i \leqslant n$) קיימות ב- G.

- אם כן $\Leftarrow$ מקבל.
- אם לא $\Leftarrow$ דוחה.

<u>נכונות</u>

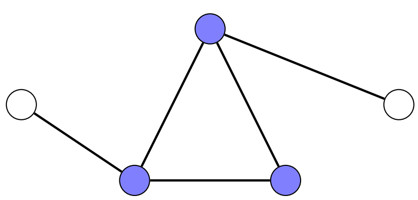
- זמן הריצה של האלגוריתם הוא פולינומיאלי בגודל הקלט.
- אם $\langle G, s, t\rangle \in HAMPATH$ $\Leftarrow$ G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t $\Leftarrow$ עבור y שהוא קידוד של מסלול זה, V יקבל את הזוג $(\langle G, s, t\rangle, y)$.
- אם $\langle G, s, t\rangle \notin HAMPATH$ $\Leftarrow$ G לא מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t $\Leftarrow$ לכל y, האלגוריתם ידחה את הזוג $(\langle G, s, t\rangle, y)$.

■

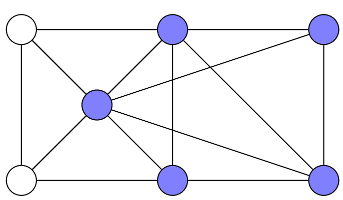
הגדרה 10.8 קליקה

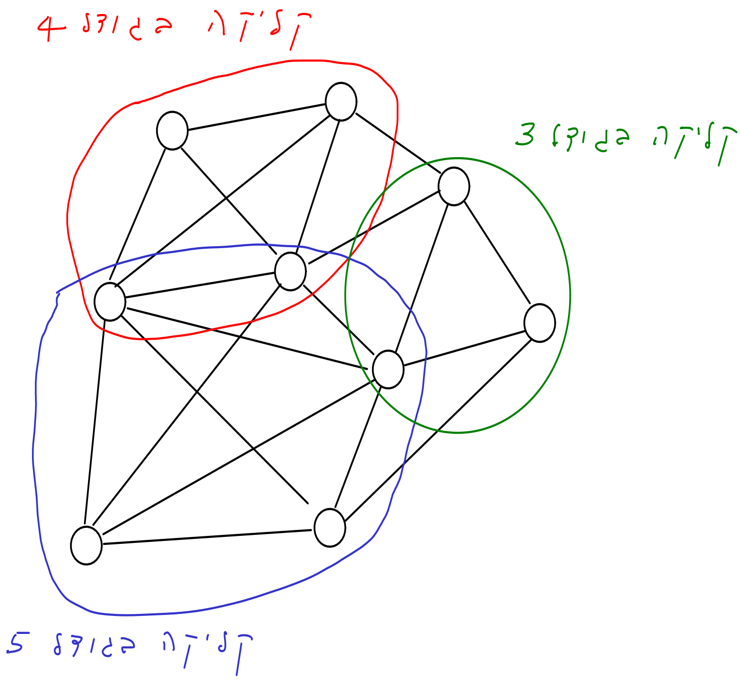
בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, קליקה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $C \subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u, \mathrm{v} \in C$ מתקיים $(u, \mathrm{v}) \in E$.

קליקה בגודל $k = 3$:



קליקה בגודל $k = 5$:





הגדרה 10.9 בעיית הקליקה

<u>קלט:</u> גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר k.

<u>פלט:</u> האם G קליקה בגודל k?

$$CLIQUE = \left\{ \langle G,k\rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל } k \ G \right\}$$

משפט 10.3 $CLIQUE \in NP$

$CLIQUE \in NP$.

הוכחה: נבנה אלגוריתם אימות V עבור $CLIQUE$.

$V =$ על קלט $(\langle G,k\rangle, y)$:

1) בודק האם y היא קבוצה של k קודקודים שונים מ- G.

- אם לא $\Leftarrow$ דוחה.

2) בודק האם כל שני קודקודים מ- y מחוברים בצלע ב- G.

- אם כן $\Leftarrow$ מקבל.
- אם לא $\Leftarrow$ דוחה.

■

הגדרה 10.10 בעיית $SubSetSum$

קלט: קבוצת מספרים $S = \{x_1, x_2, \quad \ldots \quad x_n\}$ ומספר t.

פלט: האם קיימת תת-קבוצה של S שסכום איבריה שווה t?

$$SubSetSum = \left\{ \langle S, t \rangle \;\middle|\; \text{קיימת } Y \subseteq S \text{ כך ש- } \sum_{x \in Y} x = t \right\}$$

משפט 10.4 $SubSetSum \in NP$

$$SubSetSum \in NP \ .$$

הוכחה: נבנה אלגוריתם אימות V עבור $SubSetSum$.

$V =$ על קלט $(\langle S, t \rangle, y)$:

1) בודק האם y היא תת-קבוצה של S.
- אם לא $\Leftarrow$ דוחה.

2) בודק האם סכום המספרים ב- y שווה t.
- אם לא $\Leftarrow$ דוחה.
- אחרת $\Leftarrow$ מקבל.

■

10.6 הקשר בין NP למכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

NP=Non-deterministic polynomial-time.

משפט 10.5

לכל בעייה A:

$A \in NP$ אם ורק אם קיימת מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית המכריעה את A בזמן פולינומיאלי.

דוגמה 10.3

נבנה מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית M המכריעה את $CLIQUE$ בזמן פולינומיאלי.

$M =$ על קלט $\langle G, k \rangle$:

- בוחרת באופן אי-דטרמיניסטי קבוצה y של k קודקודים מ- G.
- בודקת האם כל שני קודקודים מ- y מחוברים בצלע ב- G.
  * אם כן $\Leftarrow$ מקבלת.
  * אחרת $\Leftarrow$ דוחה.

אלגוריתם אימות $\equiv$ מ"ט א"ד.

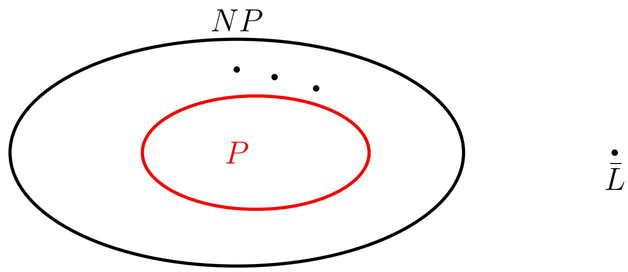
10.7 הקשר בין המחלקה P ו- NP

$P =$ כל הבעיות שניתן להכריע בזמן פולינומיאלי.

$NP =$ כל הבעיות שניתן לאמת בזמן פולינומיאלי.

משפט 10.6

$$P \subseteq NP \ .$$



שאלה פתוחה: האם $P = NP$?

משפט 10.7

P סגורה תחת משלים.

הוכחה: אם $A \in P$ אזי גם $\bar{A} \in P$. ■

הגדרה 10.11 $CoNP$

$$CoNP = \{A \mid \bar{A} \in NP \ .\}$$

לדוגמה:

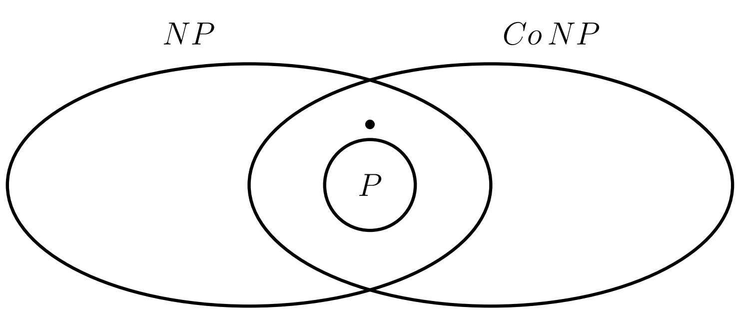
$$\overline{HAMPATH} \in CoNP \ .$$

$$\overline{CLIQUE} \in CoNP \ .$$

שאלה פתוחה: האם $NP = CoNP$?

משפט 10.8

$$P \subseteq NP \cap CoNP \ .$$



שאלה פתוחה: האם $P = NP \cap CoNP$?

נדון בשאלה המרכזית: האם $P = NP$?

הגדרה 10.12 פונקציה פולינומיאלית

בהינתן פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$, אומרים כי f חשיבה בזמן פולינומיאלי אם קיים אלגוריתם (מ"ט דטרמיניסטית) המחשב את f בזמן פולינומיאלי.

הגדרה 10.13 רדוקציה פולינומיאלית

בהינתן שתי הבעיות A ו- B. אומרים כי A ניתנת לרדוקציה פולינומיאלית ל- B, ומסמנים $A \leqslant_P B$, אם קיימת פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ המקיימת:

(1 f חשיבה בזמן פולינומיאלי

(2 לכל $w \in \Sigma^*$:
$$w \in A \quad \Leftrightarrow \quad f(w) \in B \ .$$

משפט 10.9 משפט הרדוקציה

לכל שתי בעיות A ו- B, אם $A \leqslant_P B$ אזי

(1 אם $B \in P$ אזי $A \in P$.

(2 אם $B \in NP$ אזי $A \in NP$.

מסקנה מ- (1) ו- (2):

(3 אם $A \notin P$ אזי $B \notin P$.

(4 אם $A \notin NP$ אזי $B \notin NP$.

הוכחה: מכיוון שקיימת רדוקציה $A \leqslant_P B$, קיימת פנקציה f חשיבה בזמן פולנומיאלי המקיימת, לכל $w \in \Sigma^*$,
$$w \in A \quad \Leftrightarrow \quad f(w) \in B \ .$$
יהי M_f האלגוריתם שמחשבת את f בזמן פולינומיאלי.

(1) נוכיח כי אם $B \in P$ אזי $A \in P$.

יהי M_B האלגוריתם שמכריע עת B בזמן פולינומיאלי. נבנה אלגוריתם M_A המכריע את A בזמן פולינומיאי.

<u>התאור של M_A</u>

$M_A =$ על כל קלט w:

.1 מחשב את $f(w)$ ע"י M_f.

.2 מריץ את M_B על $f(w)$ ועונה כמוה.

נוכיח כי M_A מכריע את A בזמן פולינומיאלי:

- אם $w \in A \Leftarrow f(w) \in B \Leftarrow M_B$ מקבל את $f(w) \Leftarrow M_A$ מקבל את w.
- אם $w \notin A \Leftarrow f(w) \notin B \Leftarrow M_B$ דוחה את $f(w) \Leftarrow M_A$ דוחה את w.

נוכיח כי זמן הריצה של M_A הוא פולינומיאי בגודל הקלט $|w|$ בזמן פולינומיאלי:

- נסמן ב- P_f את הפולינום של M_f.
- נסמן ב- P_B את הפולינום של M_B.

זמן הריצה של M_A על קלט w שווה

$$P_f\left(|w|\right)+P_B\left(|f(w)|\right)$$

מכיוו ש- $|f(w)|\leqslant P_f\left(|w|\right)$, זמו הריצה של M_A על w חסום ע"י

$$P_f\left(|w|\right)+P_B\left(P_f\left(|w|\right)\right)=P_f\left(|w|\right)+\left(P_B\circ P_f\right)\left(|w|\right)$$

כאשר $P_B\circ P_f$ מסמן את ההרכבה של שני פולינומים. לכן M_A רץ בזמן פולינומיאלי בגודל $|w|$.

■