אלגברה לינארית סמסטר סתו 2022-23
עבודה עצמית 3

שאלות

שאלה 1 חשב את המטריצה ההפוכה של A ובדקו כי מתקיים $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

א)
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

ב)
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$$

ג)

ד)
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ה)
$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 0 \\ -5 & 9 & 1 \\ -4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

ו) פתרו את המערכת
$$\left.\begin{aligned} -5x + 8y \quad &= 1 \\ -5x + 9y + z \quad &= 2 \\ -4x + 7y + 2z \quad &= 3 \end{aligned}\right\}$$
בעזרת סעיף ד.

שאלה 2 פתרו את המשוואות המטריציאליות הבאות:

א)
$$A \cdot X = B\ , \qquad A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad B = \begin{pmatrix} -13 & -9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ב)
$$A \cdot X = B\ , \qquad A = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad B = \begin{pmatrix} -11 & 5 & -15 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ג)

$$A\cdot X=B\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\2&0&3\\1&1&3\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}0&-2\\-4&4\\-3&4\end{pmatrix}$$

ד)

$$X\cdot A=B\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}2&-5&0\\-3&-6&1\\4&4&-1\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}-9&9&1\\1&-3&0\end{pmatrix}$$

ה)

$$A\cdot X\cdot B=C\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}2&-3\\-2&4\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}-3&6\\-2&5\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}7&-4\\-12&12\end{pmatrix}$$

שאלה 3 נתונות המטריצות:

$$A=\begin{pmatrix}5&-4\\-8&6\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\ .$$

פתרו את המשוואות הבאות:

א) $AX=C$

ב) $XB=C$

ג) $AXB=C$

שאלה 4 נתונה מטריצות $A,B,C\in M_n(\mathbb{R})$ כך ש- A ו- C הפיכות. נתון ש- $BC=C(2A-3X)A$ כאשר $X\in M_n(\mathbb{R})$. מצאו את X.

שאלה 5 עבור אילו ערכים של הפרמטר k המטריצה $\begin{pmatrix}0&4--k&3\\3+k&0&2\\0&4&-k\end{pmatrix}$ הפיכה?

שאלה 6 מצאו את המטריצה A המקיימת $(2I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$.

שאלה 7 תהי $A\in M_3(\mathbb{R})$ המקיימת

$$A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}\ ,\qquad A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\ ,\qquad A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\ .$$

מצאו את A.

שאלה 8 תהיינה $A,B,C\in M_n(\mathbb{R})$ מטריצות הפיכות. מצאו את ההופכית של $7B^{-1}CA^{-1}B^2$.

שאלה 9 נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&6\\3&6&10\end{pmatrix}$

א) מצאו את A^{-1}.

ב) מצאו $X\in M_3(\mathbb{R})$ כך ש- $AXA+A=A^2$.

שאלה 10 תהיינה $A,B,C\in M_n(\mathbb{R})$. הוכח או הפרך:

א) אם A הפיכה ו- $BA=CA$ אז $B=C$.

ב) אם $AB=AC$ אז $B=C$.

ג) אם $AB=0$ אז A ו- B אינן הפיכות.

ד) אם $AB=0$ ו- $A\neq 0$ אז B איננה הפיכה.

ה) אם AB הפיכה אז A ו- B הפיכות.

ו) אם A הפיכה אז AB הפיכה.

ז) אם A הפיכה ו- B לא הפיכה אז $A+B$ לא הפיכה.

ח) אם A הפיכה אז עמודות של A בת"ל ופורשות את $\mathbb{R}^n$.

ט) תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $f(x)=2x^4-x^2+3x-2$ פולינום כך ש- $f(A)=0$. אזי A הפיכה.

י) אם A הפיכה אז $A+A^t$ הפיכה.

פתרונות

שאלה 1

א)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to \frac{-1}{7}\cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to -R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-4}{7} & \frac{-1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix}$$

■

ב)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 2 & 1 & 0 \\ -9 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-3\cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+2R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to -\frac{1}{3}\cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to -R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

■

ג)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to 4\cdot R_1+5\cdot R_3]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -25 & -7 & 4 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to 7\cdot R_3+25\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -7 & -49 & -70 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to \frac{1}{7}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+5\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & -3 & -4 & -35 & -50 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+3\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 5 & 40 & 55 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to \frac{1}{5}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 8 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 11 \\ -1 & -7 & -10 \\ 3 & 25 & 35 \end{pmatrix}$$

■

ד)

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 0 \\ -5 & 9 & 1 \\ -4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to 4\cdot R_1-5\cdot R_3]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -10 & 4 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+3\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to 7\cdot R_2+R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -6 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to 7R_1-8R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -35 & 0 & 0 & 55 & -80 & 40 \\ 0 & 7 & 0 & -6 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to \frac{1}{5}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -7 & 0 & 0 & 11 & -16 & 8 \\ 0 & 7 & 0 & -6 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1\to \frac{-1}{7}\cdot R_1 \\ R_2\to \frac{1}{7}\cdot R_2 \\ R_3\to \frac{-1}{7}\cdot R_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-11}{7} & \frac{16}{7} & \frac{-8}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-6}{7} & \frac{10}{7} & \frac{-5}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{5}{7} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-11}{7} & \frac{16}{7} & \frac{-8}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{10}{7} & \frac{-5}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

■

ה) פתרו את המערכת $\left.\begin{aligned} -5x+8y &= 1 \\ -5x+9y+z &= 2 \\ -4x+7y+2z &= 3 \end{aligned}\right\}$ בעזרת סעיף ד.

$$A\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-11}{7} & \frac{16}{7} & \frac{-8}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{10}{7} & \frac{-5}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7}\\ -\frac{1}{7}\\ \frac{8}{7}\end{pmatrix} \ .$$

$$x=-\frac{3}{7}\ , \qquad y=-\frac{1}{7}\ , \qquad z=\frac{8}{7}\ .$$

■

שאלה 2

א)

$$A\cdot X=B\ , \qquad A=\begin{pmatrix} 6 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\ , \qquad B=\begin{pmatrix} -13 & -9\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B\ , \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1\\ -1 & -6\end{pmatrix}\ .$$

לכן

$$X=\begin{pmatrix} 0 & -1\\ -1 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -13 & -9\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\ .$$

■

ב)

$$A\cdot X=B\ , \qquad A=\begin{pmatrix} -6 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\ , \qquad B=\begin{pmatrix} -11 & 5 & -15\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B\ , \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & -6\end{pmatrix}\ .$$

לכן

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -11 & 5 & -15\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix}\ .$$

■

ג)

$$A\cdot X=B\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\2&0&3\\1&1&3\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}0&-2\\-4&4\\-3&4\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B\ ,\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-4&6\\3&-5&7\\-2&3&-4\end{pmatrix}\ .$$

לכן

$$X=\begin{pmatrix}3&-4&6\\3&-5&7\\-2&3&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-2\\-4&4\\-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2\\-1&2\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

■

ד)

$$X\cdot A=B\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}2&-5&0\\-3&-6&1\\4&4&-1\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}-9&9&1\\1&-3&0\end{pmatrix}$$

$$X=B\cdot A^{-1}\ ,\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&5&5\\-1&2&2\\-12&28&27\end{pmatrix}\ .$$

לכן

$$X=\begin{pmatrix}-9&9&1\\1&-3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&5&5\\-1&2&2\\-12&28&27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&1&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}\ .$$

■

ה)

$$A\cdot X\cdot B=C\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}2&-3\\-2&4\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}-3&6\\-2&5\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}7&-4\\-12&12\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}\ .$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&\frac{3}{2}\\1&1\end{pmatrix}\ ,\qquad B^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}&2\\-\frac{2}{3}&1\end{pmatrix}\ .$$

$$X=\begin{pmatrix}2&\frac{3}{2}\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&-4\\-12&12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}&2\\-\frac{2}{3}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\3&-2\end{pmatrix}\ .$$

■

שאלה 3

$$A=\begin{pmatrix}5&-4\\-8&6\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\ .$$

פתרו את המשוואות הבאות:

א)

$$AX = C \qquad \Rightarrow \qquad X = A^{-1} \cdot C$$
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$
$$X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -\frac{13}{2} & \frac{13}{2} \end{pmatrix} \ .$$

■

ב)

$$XB = C \qquad \Rightarrow \qquad X = C \cdot B^{-1}$$
$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$X = C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \ .$$

■

ג)

$$AXB = C \qquad \Rightarrow \qquad X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -35 & 25 \\ -\frac{91}{2} & \frac{65}{2} \end{pmatrix} \ .$$

■

שאלה 4

$$BC = C(2A - 3X)A \ \Rightarrow \ C^{-1}BC = (2A - 3X)A \ \Rightarrow \ C^{-1}BCA^{-1} = 2A - 3X$$
$$\Rightarrow \ C^{-1}BCA^{-1} - 2A = -3X \ \Rightarrow \ X = -\tfrac{1}{3}\left(C^{-1}BCA^{-1} - 2A\right) \ .$$

■

שאלה 5 תהי $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 - -k & 3 \\ 3 + k & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -k \end{pmatrix}$. $\det(A) = -((k-6)(k+2)(k+3))$. לכן המטריצה הפיכה לכל $k \neq 6, -2, -3$.

■

שאלה 6

$$
\begin{aligned}
(2I-A)^{-1} &= \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\\
2I-A &= \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}^{-1} \qquad\qquad = \begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\\
A &= 2I - \begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\\
A &= \begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

■

<u>שאלה 7</u> נגדיר את המטריצות

$$
B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} , \qquad C = \begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} .
$$

אז

$$
A\cdot B = C , \qquad A = B^{-1}\cdot C .
$$

$$
B^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} .
$$

לכן

$$
A = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix} .
$$

■

<u>שאלה 8</u> תהי $X=\left(7B^{-1}CA^{-1}B^2\right)^{-1}$. אז

$$
\begin{aligned}
X\cdot 7B^{-1}CA^{-1}B^2 &= I\\
X\cdot B^{-1}CA^{-1}B^2 &= \frac{1}{7}\cdot I\\
X\cdot B^{-1}CA^{-1} &= \frac{1}{7}B^{-2}\\
X\cdot B^{-1}C &= \frac{1}{7}B^{-2}\cdot A\\
X\cdot B^{-1} &= \frac{1}{7}B^{-2}\cdot A\cdot C^{-1}\\
X &= \frac{1}{7}B^{-2}\cdot A\cdot C^{-1}\cdot B .
\end{aligned}
$$

■

שאלה 9

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

א) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\blacksquare$

ב)

$$AXA + A = A^2 \qquad \Rightarrow \qquad AX + I = A \qquad \Rightarrow \qquad X = A^{-1} \cdot (A - I) = I - A^{-1}$$

לכן

$$X = \begin{pmatrix} 14 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

שאלה 10

א) אם A הפיכה ו- $BA = CA$ אז $B = C$.

טענה נכונה. הסבר:

A הפיכה לכן

$$B \cdot A \cdot A^{-1} = C \cdot A \cdot A^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad B = C \ .$$

$\blacksquare$

ב) אם $AB = AC$ אז $B = C$.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ , \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \ .$$

$AB = AC = 0$, $B \neq C$.

$\blacksquare$

ג) אם $AB = 0$ אז A ו- B אינן הפיכות.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$A \cdot B = 0$, B הפיכה.

■

ד) אם $AB = 0$ ו- $A \neq 0$ אז B איננה הפיכה.

טענה נכונה. הסבר:

נניח בדרך השלילה ש $A \cdot B = 0$ ו- $A \neq 0$ ו- B הפיכה. אז קיימת B^{-1}. לכן

$$A \cdot B \cdot B^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 .$$

סתירה!

■

ה) אם AB הפיכה אז A ו- B הפיכות.

טענה נכונה. הסבר:

$A \cdot B$ הפיכה לכן קיימת $(AB)^{-1}$. ז"א $A \cdot B \cdot (AB)^{-1} = I$. אז $B \cdot (AB)^{-1} = A^{-1}$. כלומר A מטריצה הפיכה. מכאן

$$A^{-1} \cdot A \cdot B \cdot (AB)^{-1} = A^{-1} \quad \Rightarrow \quad B \cdot (AB)^{-1} = A^{-1}$$

$$\Rightarrow \qquad B(AB)^{-1}A = I \qquad \Rightarrow \quad (AB)^{-1}A = B^{-1}$$

לכן B הפיכה.

■

ו) אם A הפיכה אז AB הפיכה.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

A הפיכה אבל AB לא הפיכה.

■

ז) אם A הפיכה ו- B לא הפיכה אז $A+B$ לא הפיכה.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad A+B=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\ .$$

A הפיכה, B לא הפיכה, $A+B$ הפיכה.

■

ח) אם A הפיכה אז עמודות של A בת"ל ופורשות את $\mathbb{R}^n$.

טענה נכונה. הסבר:

■

ט) תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $f(x)=2x^4-x^2+3x-2$ פולינום כך ש- $f(A)=0$. אזי A הפיכה.

טענה נכונה. הסבר:

לפי הנתון,

$$2A^4-A^2+3A-2I=0\quad\Rightarrow\quad A\cdot(2A^3-A+3)=2I\quad\Rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{2}\left(2A^3-A+3I\right)$$

לכן A הפיכה.

■

י) אם A הפיכה אז $A+A^t$ הפיכה.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad A^t=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\ .$$

A הפיכה, אבל

$$A+A^t=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$$

לא הפיכה.

■