

שיעור 12

מטריצה המעבר מבסיס לבסיס וטנרספורמציות

משפט 12.1

נניח כי $v_1, \dots, v_n \in V$ בסיס של V מעל שדה \mathbb{F} . אז כל ווקטור $u \in V$ ניתן לרשום כצ"ל יחיד של v_1, \dots, v_n .

הוכחה: v_1, \dots, v_n בסיס של V , לכן $\text{span}(v_1, \dots, v_n) = V$. מכאן נובע שלכל $u \in V$, $u \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$. ז"א קיימים סקלרים $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{F}$ כך ש

$$u = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n.$$

נוכיח שהצ"ל הוא יחיד בדרך השלילה:
נניח שקיים צ"ל אחר:

$$u = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n.$$

אם קיים $1 \leq i \leq n$ כך ש $k_i \neq t_i$. לכן

$$(k_1 - t_1)v_1 + \dots + (k_i - t_i)v_i + \dots + (k_n - t_n)v_n = \bar{0}$$

ו $k_i - t_i \neq 0$. ז"א ווקטורים v_1, \dots, v_n ת"ל. סתירה. ■

הגדרה 12.1

אם $v_1, \dots, v_n \in V$ בסיס של V מעל שדה \mathbb{F} ו $u \in V$ אז

$$u = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n.$$

לוקטור

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

קוראים ווקטור הקואורדינטות של ווקטור u לפי בסיס $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ סימון:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

דוגמה 12.1

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}, \mathbb{R}^3 \text{ הבסיס } E = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$u = 2e_1 + (-1)e_2 + 10e_3$$

$$[u]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

12.2 דוגמה

אז $E = \{1, x, x^2\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$, $p(x) = 1 + 8x - 5x^2$.

$$p(x) = 1 \cdot 1 + 8x - 5x^2 = 1e_1 + 8e_2 - 5e_3$$

$$[p(x)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

12.3 דוגמה

הראו כי קבוצת הווקטורים

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$.u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ מצאו את } [u]_B \text{ עבור ווקטור}$$

פתרון:

נבדוק אם B בת"ל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן b_3, b_2, b_1 בת"ל.

$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, לכן $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ בסיס של \mathbb{R}^3 .

נמצא את הקואורדינטות של ווקטור u לפי בסיס B .

$$u = k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array} \right)$$

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ -9 \end{pmatrix}$$

12.4 דוגמה

נתונים שני בסיסים של מרחב V , $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ ו $C = \{c_1, \dots, c_n\}$. נתון $[u]_B$. מהו $[u]_C$?

פתרון:

נרשום את u כצ"ל של בסיס B .

$$u = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n \quad \Rightarrow \quad [u]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

כל ווקטור b_i ($1 \leq i \leq n$) הוא צ"ך של בסיס C

$$\begin{aligned} b_1 &= b_{11}c_1 + b_{21}c_2 + \dots + b_{n1}c_n \\ b_2 &= b_{12}c_1 + b_{22}c_2 + \dots + b_{n2}c_n \\ &\vdots \\ b_n &= b_{1n}c_1 + b_{2n}c_2 + \dots + b_{nn}c_n \end{aligned}$$

מכאן מקבלים

$$\begin{aligned} u &= x_1(b_{11}c_1 + b_{21}c_2 + \dots + b_{n1}c_n) + x_2(b_{12}c_1 + b_{22}c_2 + \dots + b_{n2}c_n) + \dots + x_n(b_{1n}c_1 + b_{2n}c_2 + \dots + b_{nn}c_n) \\ &= (x_1b_{11} + x_2b_{12} + \dots + x_nb_{1n})c_1 + (x_1b_{21} + x_2b_{22} + \dots + x_nb_{2n})c_2 + \dots + (x_1b_{n1} + x_2b_{n2} + \dots + x_nb_{nn})c_n \end{aligned}$$

לפיכך

$$[u]_C = \begin{pmatrix} x_1b_{11} + x_2b_{12} + \dots + x_nb_{1n} \\ x_1b_{21} + x_2b_{22} + \dots + x_nb_{2n} \\ \vdots \\ x_1b_{n1} + x_2b_{n2} + \dots + x_nb_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot [u]_B$$

למטריצה

$$P_{B \rightarrow C} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

קוראים מטריצה המעבר מבסיס B לבסיס C . ז"א קיבלנו נוסחה:

$$[u]_C = P_{B \rightarrow C} [u]_B$$

כאשר

$$P_{B \rightarrow C} = ([b_1]_C \dots [b_2]_C)$$

12.5 דוגמה

נתונים שני בסיסים של \mathbb{R}^3 , $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ כאשר

$$\begin{aligned} b_1 &= \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \\ c_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ נתון } [u]_C \text{ מצאו את}$$

פתרון:

נשתמש בנוסחה

$$[u]_C = P_{B \rightarrow C} \cdot [u]_B$$

כדי למצוא את $P_{B \rightarrow C}$ צריך לפתור את המערכת:

$$C \cdot X = b_1$$

$$C \cdot X = b_2$$

$$C \cdot X = b_3$$

כאשר מטריצה C מורכבת מווקטורים c_3, c_2, c_1 העומדים בעמודות. מכיוון ש c_3, c_2, c_1 בסיס, למערכת $C \cdot X = b_i$ יש פתרון יחיד, לכן בדירוג ניתן להגיע למטריצה היחידה I . ז"א בתהליך גאוס נגיע למצבים:

$$(C|b_1) \rightarrow \dots \rightarrow (I|P_{B \rightarrow C} \text{ של } b_1)$$

\vdots

$$(C|b_n) \rightarrow \dots \rightarrow (I|P_{B \rightarrow C} \text{ של } b_n)$$

מכיוון שבדירוג מבצעים את אותן הפעולות האלמנטריות, אפשר לפתור את כל המעקות בבת אחת!

$$(C|B) \rightarrow \dots \rightarrow (I|P_{B \rightarrow C})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -7 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$P_{B \rightarrow C} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[u]_C = P_{B \rightarrow C} \cdot [u]_B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix}$$

דוגמה 12.6

נתון

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$$

שני בסיסים סדורים של \mathbb{R}^2 .

מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס C .

יהי $V \in \mathbb{R}^2$ כך ש- $(V)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. מצאו את $(V)_C$.

מצאו את מטריצת המעבר מהבסיס C לבסיס B .

הגדרה 12.2 המרחב של פולינומים מסדר n

המרחב של פולינומים מסדר n יסומן $\mathbb{R}_n[x]$ או $P_n[x]$ ויוגדר- הקבוצה של כל הפולינומים מסדר n לכל היותר:

$$P_n[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

דוגמה 12.7

$$1 + 2x \in P_1[x], \quad 1 + 5x^2 \notin P_1[x].$$

$$1 + 2x \in P_3[x], \quad 1 + 4x + 3x^2 \in P_3[x], \quad 3 + 8x + 7x^3 \in P_3[x], \quad 6x + 5x^4 \notin P_3[x].$$

$$1 - 3x^4 + 6x^7 \in P_7[x], \quad 1 - 3x^4 + 6x^7 + 6x^8 - x^9 \notin P_7[x].$$

משפט 12.2 תלות ליניארית של פולינומים

קבוצת פולינומים מסדר n

$$S = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n, \dots\}$$

בת"ל אם"ם קבוצת הווקטורים של המקדמים בת"ל, כלומר אם הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \dots \right\}$$

בת"ל.

אם נגדיר המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & \cdots \\ a_1 & b_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ a_n & b_n & \cdots \end{pmatrix}$$

אז הפולינומים בת"ל אם"ם

$$\det(A^t A) \neq 0.$$

משפט 12.3 בסיס הסטנדרטי של פולינומים

הקבוצה

$$E = \{e_1 = 1, \quad e_2 = x, \quad e_3 = x^2, \quad \dots, \quad e_{n+1} = x^n\}$$

הינה בסיס של המרחב ווקטורי של פולינומים מסדר n ונקרא הבסיס הסטנדרטי של $P_n[x]$.

משפט 12.4 הוורונסקיאן

נתון קבוצה

$$F = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$$

של n פונקציות במרחב V של כל הפונקציות מעל \mathbb{R} . נגדיר את הוורונסקיאן

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

אם קיים $x_0 \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$W(x_0) \neq 0$$

אז F בת"ל.

הוכחה: יהיו

$$F = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$$

קבוצה של n פונקציות במרחב V של כל הפונקציות מעל \mathbb{R} . הקבוצה בת"ל אם"ס הצ"ל

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים רק אם $c_i = 0$ לכל $i = 1, 2, \dots, n$. נגזור את הצ"ל $n - 1$ פעמים כדי לקבל

$$c_1 f_1^{(i)}(x) + c_2 f_2^{(i)}(x) + \dots + c_n f_n^{(i)}(x) = 0$$

לכל $x \in \mathbb{R}$. כמשוואה מטריציאלית

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

הדטרמיננטה של המטריצה המקדמים נקראת הוורונסקיאן של הקבוצה $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ ומסומן ב $W(x)$. לכן אם קיים נקודה $x_0 \in \mathbb{R}$ כך ש $W(x_0) \neq 0$ אז המטריצה המקדמים איננה אפס בנקודה $x = x_0$ ולכן כל המקדמים $c_i = 0$. לכן, אם הוורונסקיאן אינו שווה אפס בנקודה $x_0 \in \mathbb{R}$, אז הקבוצה $F = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ בת"ל.

דוגמה 12.8

עבור המרחב $P_2[x]$,

מצאו מטריצת מעבר מהבסיס הסדור

$$B = \{b_1 = 1 - 2x + x^2, \quad b_2 = 3 - 5x + 4x^2, \quad b_3 = 2x + 3x^2\}$$

לבסיס הסטנדרטי

$$E = \{e_1 = 1, \quad e_2 = x, \quad e_3 = x^2\}$$

ומצאו את הווקטור $-1 + 2x$ לפי הבסיס B .

פתרון:

נחשב את $P_{B \rightarrow E}$:

$$(E|B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right)$$

וסיימנו.

$$P_{B \rightarrow E} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{array} \right)$$

$$[u]_B = P_{E \rightarrow B} [u]_E .$$

$$P_{E \rightarrow B} = P_{B \rightarrow E}^{-1}$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{R_3 \rightarrow R_3 - R_1}]{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -23 & -9 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$P_{E \rightarrow B} = \left(\begin{array}{ccc} -23 & -9 & 6 \\ 8 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad \text{לכן}$$

$$[u]_B = P_{E \rightarrow B} [u]_E = \left(\begin{array}{ccc} -23 & -9 & 6 \\ 8 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} -1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ -2 \\ 1 \end{array} \right)_B$$

בדיקה:

$$\begin{aligned} 5b_1 - 2b_2 + 1b_3 &= 5(1 - 2x + x^2) - 2(3 - 5x + 4x^2) + 1(2x + 3x^2) \\ &= 5 - 6 - 10x + 10x + 2x + 5x^2 - 8x^2 + 3x^2 \\ &= -1 + 2x . \end{aligned}$$