

# חדו"א 1 סמסטר א' תשפד עבודת בית 4

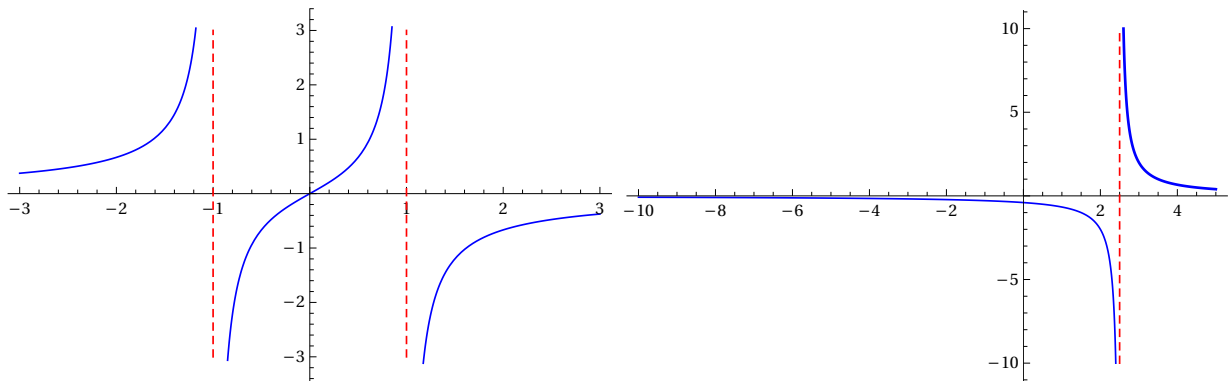
**שאלה 1** הגדירו מהי אסימפטוטה אופקית של  $f(x)$  ותנו דוגמה של פונקציה שמקיימת

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1, \quad f(1) = 0.$$

**שאלה 2** הגדירו מהי אסימפטוטה אנכית של  $f(x)$  ותנו דוגמה של פונקציה שמקיימת:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty.$$

**שאלה 3** נתונות הפונקציות הבאות המוגדרות באופן גרפי:



**(א)** תארו על ידי גבולות חד-צדדיים את התנהגותן של הפונקציות עם הגרפים הנתונים באיור סביב נקודות אי-הרציפות וגם בתהליכים  $x \rightarrow +\infty$  ו-  $x \rightarrow -\infty$ .

**(ב)** מהן האסימפטוטות של הפונקציות האלה?

**(ג)** מהם תחומי עלייה וירידה של הפונקציות?

**שאלה 4** עבור כל אחת מהפונקציות ברשימה:

$$f(x) = \frac{1}{2^x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (2)$$

$$f(x) = x\sqrt{8 - x^2} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{1 + x}{1 - x} \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{2x}{1 + x^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{\ln|x|} \quad (7)$$

**(א)** מצאו את תחום ההגדרתה של הפונקציה וסמן אותו על הציר הממשי

**(ב)** מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים

**(ג)** ברר סימני הפונקציה (תחומים שבהם  $f(x) > 0$  ("+") או  $f(x) < 0$  ("-") וסמן על הציר הממשי

**(ד)** מצאו נקודות אי-רציפות של  $f(x)$  וברר את סוגן. תאר התנהגות של הפונקציה סביב נקודות אלה באופן סימבולי, בטא באופן גרפי בסקיצה וסמן אסימפטוטות אנכיות (אם יש).

**(ה)** בררו התנהגות הפונקציה בתהליכים  $x \rightarrow +\infty$  ו-  $x \rightarrow -\infty$  שבהם יש משמעות לפונקציה זו, תאר את המצב באופן סימבולי, בטא באופן גרפי בסקיצה וסמן אסימפטוטות ב-  $\pm\infty$  (אם יש).

**(ו)** ציירו את הסקיצה המשוערת של גרף הפונקציה על סמך התוצאות של הסעיפים הקודמים.

**שאלה 5** מייך את נקודות האי-רציפות של הפונקציות:

$$y = \frac{1}{2 + 3^{-1/(x+1)}} + \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 4} - \frac{3^x - 1}{2^x - 1} \quad (א)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^3 + 4x^2} + \frac{27}{9 - 3^{1/(x-1)}} \quad (ב)$$

**שאלה 6** בדקו את רציפות הפונקציות הבאות ב"נקודת התפר" שלהן

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{1/x} & x < 0 \end{cases} \quad (א)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1 + e^{1/x} & x < 0 \end{cases} \quad (ב)$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq 2 \\ 5 - x & x > 2 \end{cases} \quad (ג)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (\text{ד})$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & 1 \leq x < 2 \\ x - 3 & x \geq 2 \end{cases} \quad (\text{ה})$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x - 2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x - 2 & x > 2 \end{cases} \quad (\text{ו})$$

**שאלה 7** מצאו את ערכי הפרמטר  $k$  עבורם הפונקציות הבאות רציפות לכל  $x$  ממשי

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx & x > 2 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (\text{ג})$$

**שאלה 8** מצאו את ערכי הפרמטרים  $a, b$  עבורם הפונקציות הבאות רציפות לכל  $x$  ממשי

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4\frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$f(x) = \begin{cases} x^{1/(1-x)} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a\frac{2^{1/x} - 2}{2^{1/x} + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (\text{ג})$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{1/(1-x)}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{1/(x-2)} & x > 2 \end{cases} \quad (\text{ד})$$

**שאלה 9** הוכיחו שלמשוואה הנתונה יש פתרון ממשי ומצאו אותו (אחד מהפתרונות, אם יש יותר) בדרך נומרית בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית

$$x + \ln(1 + x^2) = 3 \quad (\text{א})$$

$$x + 2 \arctan(x) - 4 = 0 \quad (\text{ב})$$

$$x^5 + x = 50 \quad (\text{ג})$$

**שאלה 10** תהינה  $f, g$  פונקציות רציפות בקטע  $[a, b]$  המקיימות  $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$ . הוכיחו שקיימת נקודה  $c$  כך ש-  $a < c < b$  ו-  $f(c) = g(c)$ . רמז: הגדירו פונקציה  $h(x) = f(x) - g(x)$  והשתמש במשפט ערך הביניים.

**שאלה 11** לאילו ערכים של הפרמטר  $a$  הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin x}{x} & x < 0 \\ a + \tan x & x \geq 0 \end{cases}$$

תהיה רציפה בכל קטע סגור?

**שאלה 12** נתונה פונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ a + \sin x & x \geq 0 \end{cases}.$$

עבור אילו ערכי  $a$  הפונקציה רציפה בנקודה  $x = 0$

**שאלה 13** נתונה הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{\frac{1}{x-2}} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}.$$

**שאלה 14** פתרו את גבול הבא:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x+7} \right)^{3x+7}$$

**שאלה 15** חשבו את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(7x) - x}{\sin(2) + 7x}$$

**שאלה 16** נניח ש-  $f(x)$  היא פונקציה חסומה בתחום  $(0, \infty)$  חשבו את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+4)f(x)}{x^2+3x+2} .$$

**שאלה 17** פתרו את גבול הבא:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{9 \arctan(3x) + 6x} - \sqrt{6}\sqrt{x} .$$

**שאלה 18** חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 5x + 3}{8x^2 + 6x + 3}$

## פתרונות

**שאלה 1** הישר  $y = a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) אסימפטוטה אופקית לפונקציה  $f(x)$  ב-  $x = \infty$  אם

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$$

ו  $y = b$  ( $b \in \mathbb{R}$ ) אסימפטוטה אופקית לפונקציה  $f(x)$  ב-  $x = -\infty$  אם

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b .$$

לדוגמה עבור הפונקציה  $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 .$$

לדוגמה עבור הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 .$$

אכן יש לה אסימפטוטה אופקית ב-  $x = \pm\infty$ .

**שאלה 2** דוגמה:  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ .

## שאלה 3

(1) א

$$\lim_{x \rightarrow 2.5^+} f(x) = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow 2.5^-} f(x) = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 .$$

ב)  $x = 2.5$  אסימפטוטה אנכית

$y = 0$  אסימפטוטה אופקית

ג) תחומי ירדיה:  $(-\infty, 2.5)$   $(2.5, \infty)$

אין תחומי עליה

(2) א

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 .$$

ב)  $x = 1$   $x = -1$  אסימפטוטה אנכיות

$y = 0$  אסימפטוטה אופקית

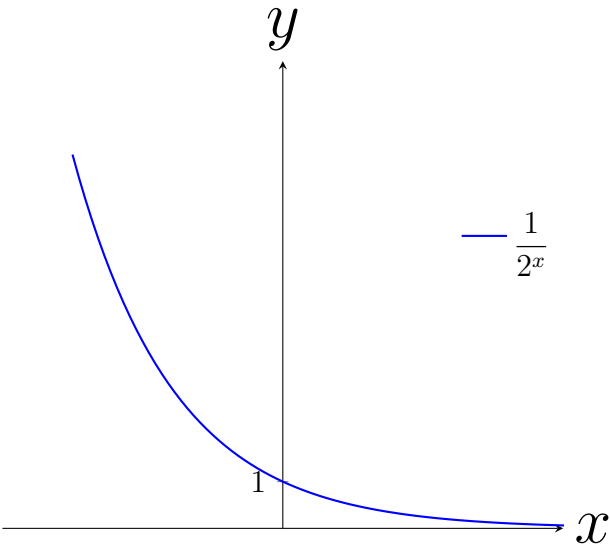
ג) תחומי עליה:  $(-\infty, -1)$   $(-1, 1)$   $(1, \infty)$

אין תחומי ירידה

שאלה 4

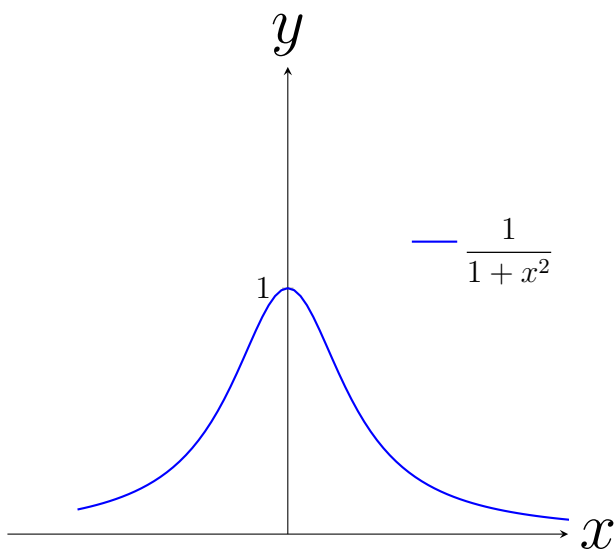
$f(x) = \frac{1}{2^x}$  (1)

$\mathbb{R}$	תחום הגדרה:
$(0, 1)$	חיתוך עם הצירים:
$x$ לכל $f(x) > 0$	סימני הפונקציה:
אין	נקודת אי רציפות:
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$	התנהגות ב $\infty$
$x = \infty$ ב- $y = 0$	אסימפטוטה אופקית:



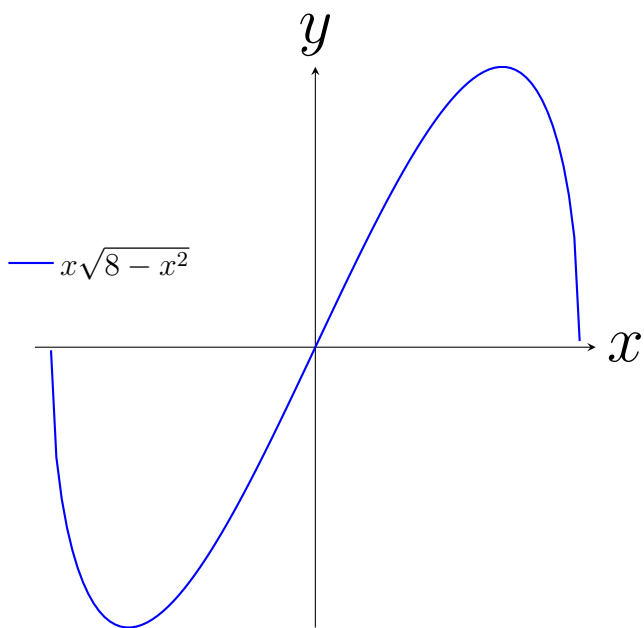
$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$  (2)

$\mathbb{R}$	תחום הגדרה:
$(0, 1)$	חיתוך עם הצירים:
$x$ לכל $f(x) > 0$	סימני הפונקציה:
אין	נקודת אי רציפות:
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$	התנהגות ב $\infty$
$x = \pm \infty$ ב- $y = 0$	אסימפטוטה אופקית:



$$f(x) = x\sqrt{8-x^2} \quad (3)$$

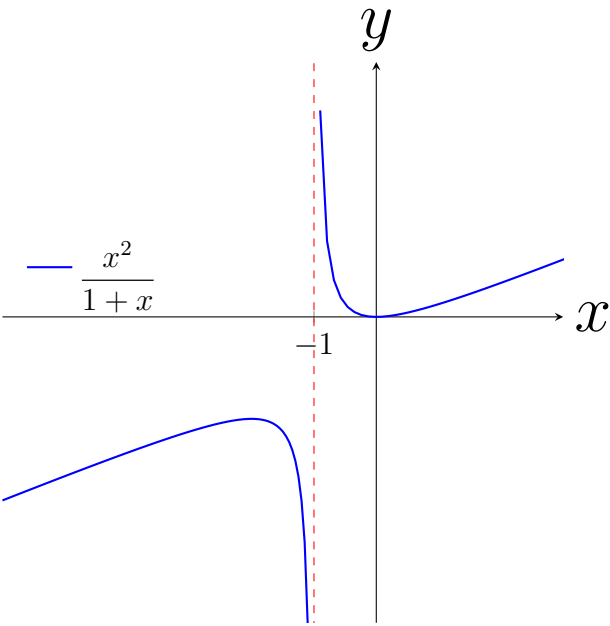
$-\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}$				תחום הגדרה:
$(-\sqrt{8}, 0) \cup (\sqrt{8}, 0), (0, 0)$				חיתוך עם הצירים:
$x$	$(-\sqrt{8}, 0)$	$(0, \sqrt{8})$		סימני הפונקציה:
$f(x)$	-	+		
אין				נקודת אי רציפות:
אין משמעות				התנהגות ב $\infty$
אין				אסימפטוטה אופקית:



$$f(x) = \frac{x^2}{1+x} \quad (4)$$

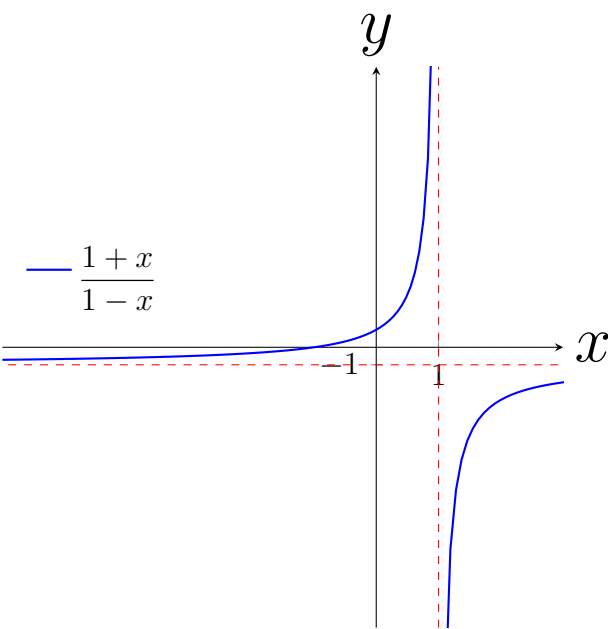


$x \neq -1$					תחום הגדרה:
$(0, 0)$					חיתוך עם הצירים:
	$x$	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$	סימני הפונקציה:
	$f(x)$	-	+	+	
נקודת אי רציפות ממין שני $x = -1$					נקודת אי רציפות:
$x = -1$					אסימפטוטה אנכית:
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$					התנהגות ב $\infty$
אין					אסימפטוטה אופקית:



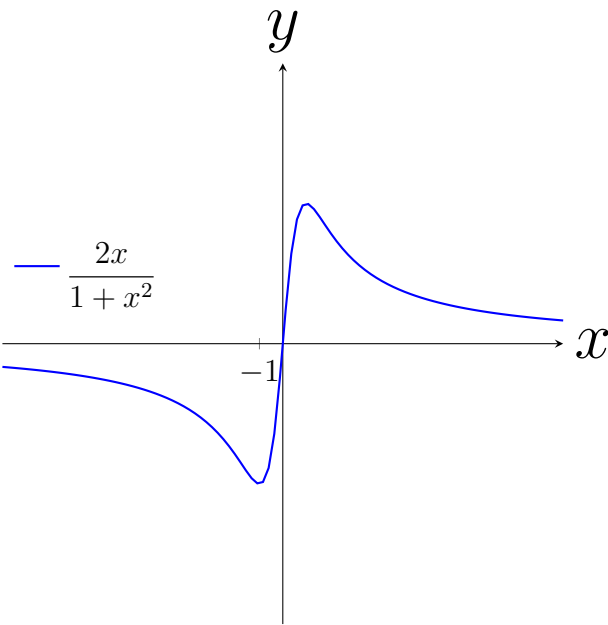
$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$
(5)

$x \neq 1$					תחום הגדרה:
$(0, 1) , (-1, 0)$					חיתוך עם הצירים:
	$x$	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$	סימני הפונקציה:
	$f(x)$	-	+	-	
נקודת אי רציפות ממין שני $x = 1$					נקודת אי רציפות:
$x = 1$					אסימפטוטה אנכית:
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$					התנהגות ב $\infty$
$y = -1$					אסימפטוטה אופקית:



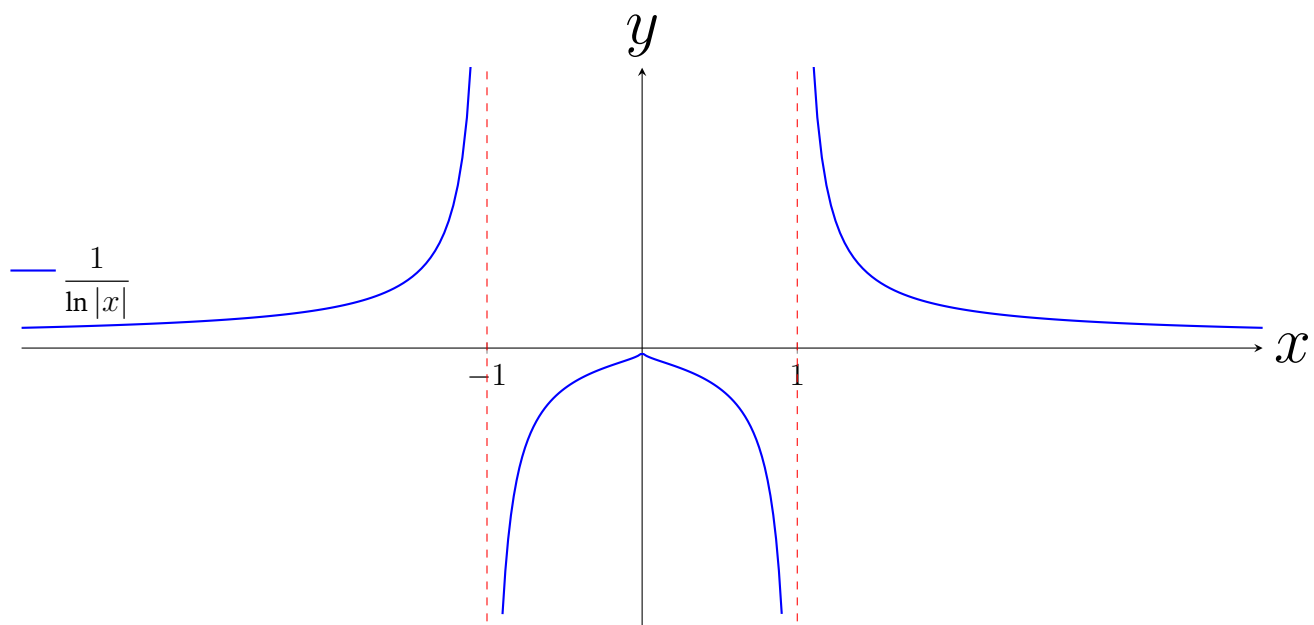
$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad (6)$$

R				תחום הגדרה:
(0, 0)				חיתוך עם הצירים:
	$x$	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$	סימני הפונקציה:
	$f(x)$	-	+	
אין				נקודת אי רציפות:
אין				אסימפטוטה אנכית:
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$				התנהגות ב $\infty$
$y = 0$				אסימפטוטה אופקית:



$$f(x) = \frac{1}{\ln |x|} \quad (7)$$

$x \neq -1, 0, 1$					תחום הגדרה:
אין					חיתוך עם הצירים:
$x$	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(0, \infty)$	סימני הפונקציה:
$f(x)$	+	-	-	+	
נקודת אי רציפות שני $x = 0$ נק' אי-רציפות שני $x = 1$ נק' אי-רציפות שני $x = -1$					נקודת אי רציפות:
$x = 1, -1$					אסימפטוטה אנכית:
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$					התנהגות ב $\infty$
$y = 0$					אסימפטוטה אופקית:



## שאלה 5

(א)

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left( \frac{\sin(x-2)}{x^2-4} - \frac{3^x-1}{2^x-1} + \frac{1}{3^{-\frac{1}{x+1}}+2} \right) = \frac{1}{3}(\sin(3)-4)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left( \frac{\sin(x-2)}{x^2-4} - \frac{3^x-1}{2^x-1} + \frac{1}{3^{-\frac{1}{x+1}}+2} \right) = \frac{1}{6}(2\sin(3)-5)$$

לכן  $x = -1$  נקודת אי-רציפות ממין ראשון.

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \left( \frac{\sin(x-2)}{x^2-4} - \frac{3^x-1}{2^x-1} + \frac{1}{3^{-\frac{1}{x+1}}+2} \right) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \left( \frac{\sin(x-2)}{x^2-4} - \frac{3^x-1}{2^x-1} + \frac{1}{3^{-\frac{1}{x+1}}+2} \right) = -\infty$$

לכן  $x = -2$  נקודת אי-רציפות ממין שני.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\sin(x-2)}{x^2-4} - \frac{3^x-1}{2^x-1} + \frac{1}{3^{-\frac{1}{x+1}}+2} \right) = \frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} - \frac{29}{12}$$

לכן  $x = 2$  נקודת אי-רציפות סליקה.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{\sin(x-2)}{x^2-4} - \frac{3^x-1}{2^x-1} + \frac{1}{3^{-\frac{1}{x+1}}+2} \right) = \frac{3}{7} - \frac{\log(3)}{\log(2)} + \frac{\sin(2)}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sin(x-2)}{x^2-4} - \frac{3^x-1}{2^x-1} + \frac{1}{3^{-\frac{1}{x+1}}+2} \right) = \frac{3}{7} - \frac{\log(3)}{\log(2)} + \frac{\sin(2)}{4}$$

לכן  $x = 0$  נקודת אי-רציפות סליקה.

(ב)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x^2-3x}{x^3+4x^2} + \frac{27}{9-3^{\frac{1}{x-1}}} \right) = -\infty$$

לכן  $x = 0$  נקודת אי-רציפות ממין שני.

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} \left( \frac{x^2-3x}{x^3+4x^2} + \frac{27}{9-3^{\frac{1}{x-1}}} \right) = \infty$$

לכן  $x = -4$  נקודת אי-רציפות ממין שני.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{x^2-3x}{x^3+4x^2} + \frac{27}{9-3^{\frac{1}{x-1}}} \right) = \frac{13}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x^2-3x}{x^3+4x^2} + \frac{27}{9-3^{\frac{1}{x-1}}} \right) = -\frac{2}{5}$$

לכן  $x = 1$  נקודת אי-רציפות ממין שני.

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3}{2})^+} \left( \frac{x^2-3x}{x^3+4x^2} + \frac{27}{9-3^{\frac{1}{x-1}}} \right) = \infty$$

לכן  $x = \frac{3}{2}$  נקודת אי-רציפות ממין שני.

## שאלה 6

(א)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(4x)}{x} = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{1/x} + 4) = 4.$$

$f(0)$  לא מוגדר לכן  $x = 0$  נקודת אי רציפות סליקה.

(ב)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{1/x} + 1) = 1, \quad f(0) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x).$$

לכן  $x = 0$  נקודת אי רציפות סליקה.

(ג)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} (5-x) = 3, \quad f(2) = 3.$$

לכן רציפה ב-  $x = 2$ .

(ד)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1, \quad f(1) = 1.$$

לכן  $f(x)$  רציפה ב-  $x = 1$ .

(ה)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0, \quad f(0) = 0.$$

לכן  $f(x)$  רציפה ב-  $x = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x) = 1, \quad f(1) = 2 - 1 = 1.$$

לכן  $f(x)$  רציפה ב-  $x = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (2 - x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 3) = 1.$$

לכן  $x = 2$  נק' אי רציפות ממין ראשון.

(ו)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} |x - 2| = 1, \quad f(1) = 1.$$

לכן  $f(x)$  רציפה ב-  $x = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} |x - 2| = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0, \quad f(2) = 1.$$

לכן  $x = 2$  נק' אי רציפות סליקה.

## שאלה 7

$$k = 0 \quad \text{(א)}$$

$$k = 4 \quad \text{(ב)}$$

$$k = \frac{2}{3} \quad \text{(ג)}$$

## שאלה 8

$$b = \frac{1}{2}, a = 0 \quad \text{(א)}$$

$$b = 2, a = 1 \quad \text{(ב)}$$

$$b = 1, a = 2$$

$$b = \frac{1}{e}, a = -\frac{2}{e} \quad \text{(ג)}$$

$$b = -\frac{e}{3}, a = \frac{e}{3} \quad \text{(ד)}$$

### שאלה 10

נתון:  $f, g$  רציפות בקטע  $[a, b]$ ,  $f(a) < g(a)$ ,  $f(b) > g(b)$ .  
 צ"ל: קיימת נקודה  $c$  כך ש  $a < c < b$  ו  $f(c) = g(c)$ .  
 הוכחה:  $h(x)$  רציפה בקטע  $[a, b]$  כי  $f$  ו  $g$  רציפה בקטע הזה.

$$h(b) = f(b) - g(b) > 0, \quad h(a) = f(a) - g(a) < 0,$$

לכן לפי משפט ערך הביניים, קיים  $c$  כך ש  $a < c < b$  ו  $h(c) = 0$ . ז"א

$$h(c) = f(c) - g(c) = 0, \quad \Rightarrow \quad f(c) = g(c).$$

### שאלה 11 הפונקציה רציפה ב- $x = 0$ אם

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0).$$

$$f(0) = a + \tan(0) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a + \tan x = a + \tan(0) = a.$$

לכן

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad \Rightarrow \quad a = 2.$$

### שאלה 12

הפונקציה רציפה ב-  $x = 0$  אם

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0).$$

$$f(0) = a + \sin(0) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a + \sin x = a + \sin(0) = a.$$

לכן

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad \Rightarrow \quad a = 1.$$

### שאלה 13

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} = \lim_{x \rightarrow 2^-} x e^{\frac{1}{x-2}} = 2 e^{\frac{1}{2-2^-}} = 2 e^{\frac{1}{0^+}} = 2 e^\infty = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} = \lim_{x \rightarrow 2^+} x e^{\frac{1}{x-2}} = 2 e^{\frac{1}{2-2^+}} = 2 e^{\frac{1}{0^-}} = 2 e^{-\infty} = 0.$$

$$f(0) = 2.$$

קיבלנו כי

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} = f(2 = 0)$$

לכן הנקודה  $x = 2$  היא נקודת אי רציפות ממין שני.

## שאלה 14

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x+7} = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x+7} - 1 = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x+7} - \frac{x+7}{x+7} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1-(x+7)}{x+7} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{-6}{x+7} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{x+7}{-6}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x+7} \right)^{3x+7} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right)^{\alpha \cdot \frac{3x+7}{\alpha}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right)^{\alpha} \right]^{\frac{3x+7}{\alpha}} \\ &= \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right)^{\alpha} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+7}{\alpha}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6(3x+7)}{x+7}} \\ &= e^{-18}. \end{aligned}$$

## שאלה 15

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(7x) - x}{\sin(2x) + 7x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan(7x)}{\sin(2x)} - \frac{x}{\sin(2x)}}{\frac{\sin(2x)}{\sin(2x)} + \frac{7x}{\sin(2x)}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan(7x)}{\sin(2x)} - \frac{x}{\sin(2x)}}{1 + \frac{7x}{\sin(2x)}} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(7x)}{\sin(2x)} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(2x)}}{1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin(2x)}} \\
&= \frac{\frac{7}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{7}{2}} \\
&= \frac{\frac{6}{2}}{\frac{9}{2}} \\
&= \frac{6}{9} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

## שאלה 16

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+4)f(x)}{x^2 + 3x + 2} = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+4}{x^2 + 3x + 2} \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+4}{x^2 + 3x + 2} = 0 \quad \text{כי גבול ב-} \infty \text{ של פונקציה רציונלית אמיתית שווה 0.}$$

כאשר  $c \in \mathbb{R}$  מספר סופי כי הגבול ב-  $\infty$  של פונקציה חסומה שווה למשפר סופי. לכן  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+4)f(x)}{x^2 + 3x + 2} = 0 \cdot c = 0.$$

שאלה 17 הפונקציה בהגבול היא  $\sqrt{9 \arctan(3x) + 6x} - \sqrt{6}\sqrt{x}$ . נכפיל אותה ב  $\frac{\sqrt{9 \arctan(3x) + 6x} + \sqrt{6}\sqrt{x}}{\sqrt{9 \arctan(3x) + 6x} + \sqrt{6}\sqrt{x}}$ :



$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( \sqrt{9 \arctan(3x) + 6x} - \sqrt{6}\sqrt{x} \right) \left( \sqrt{9 \arctan(3x) + 6x} - \sqrt{6}\sqrt{x} \right)}{\sqrt{9 \arctan(3x) + 6x} + \sqrt{6}\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 \arctan(3x) + 6x - 6x}{\sqrt{9 \arctan(3x) + 6x} + \sqrt{6}\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 \arctan(3x)}{\sqrt{9 \arctan(3x) + 6x} + \sqrt{6}\sqrt{x}} \\
&= \frac{9 \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(3x)}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} 9 \arctan(3x) + \lim_{x \rightarrow \infty} 6x} + \sqrt{6} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}} \\
&= \frac{9 \frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + \infty} + \sqrt{6}\sqrt{\infty}} \\
&= \frac{9 \frac{\pi}{2}}{\infty} \\
&= 0
\end{aligned}$$

**שאלה 18** תשובה סופית:  $\frac{3}{4}$ .

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 5x + 3}{8x^2 + 6x + 3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{6x^2 + 5x + 3}{x^2} \right)}{\left( \frac{8x^2 + 6x + 3}{x^2} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{6x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right)}{\left( \frac{8x^2}{x^2} + \frac{6x}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{8 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{5}{\infty} + \frac{3}{\infty}}{8 + \frac{6}{\infty} + \frac{3}{\infty}} \\
&= \frac{6 + 0 + 0}{8 + 0 + 0} \\
&= \frac{6}{8} \\
&= \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$