

# שיעור 1

## מכונות טיורינג

### 1.1 הגדרה של מכונת טיורינג

#### הגדרה 1.1 מכונת טיורינג (הגדרה היוריסטית)

##### הקלט והסרט

- מכונת טיורינג (מ"ט) קורא קלט.
- הקלט עצמו נמצא על סרט אינסופי מחולק למשבצות.
- כל תו של הקלט כתוב במשבצת אחת של הסרט.
- במכונת טיורינג אנחנו מניחים שהסרט אינסופי לשני הכיוונים.
- \* משמאל לתחילת הקלט יש רצף אינסופי של תווי רווח " ".
- \* מימין לסוף הקלט יש רצף אינסופי של תווי רווח " ".

...	␣	␣	a	b	b	b	a	a	␣	␣	␣	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

##### הראש

- במצב ההתחלתי הראש בקצה השמאלי של הקלט.

...	␣	␣	a	b	b	b	a	a	␣	␣	␣	...
			↑									

- הראש יכול לזוז ימינה על הסרט וגם שמאלה על הסרט.
- הראש קורא את התוכן של המשבצת שבה הוא נמצא.
- הראש יכול לכתוב על משבצת, אבל רק על המשבצת שבה הראש נמצא.

##### תאור העבודה של המכונה

- בתחילת הריצה, הקלט כתוב התחילת הסרט כאשר מימינו נמצא רצף אינסופי של תווי ␣ -ים.
- הראש מצביע על התא הראשון בסרט והמכונה נמצאת במצב התחלתי  $q_0$ .

$q_0$	...	␣	␣	a	b	b	b	a	a	␣	␣	␣	...
				↑									

- בכל צעד חישוב, בהתאם למצב הנוכחי ולאות שמתחת לראש (התו הנקרא), המכונה מחליטה:
  - \* לאיזה מצב לעבור
  - \* מה לכתוב מתחת לראש (התו הנכתב)
  - \* לאן להזיז את הראש (תא אחד ימינה, או תא אחד שמאלה, או להישאר במקום).
- למכונה ישנם שני מצבים מיוחדים:
  - \*  $q_{acc}$ : אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל-  $q_{acc}$  היא עוברת ומקבלת.
  - \*  $q_{rej}$ : אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל-  $q_{rej}$  היא עוברת ודוחה.
  - \* אם המכונה לא מגיעה ל-  $q_{acc}$  או  $q_{rej}$  היא תמשיך לרוץ לנצח.

## הגדרה 1.2 מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$$

כאשר:

$Q$	קבוצת מצבים סופית ולא ריקה
$\Sigma$	אלפבית הקלט
$\Gamma$	אלפבית הסרט
$\delta$	פונקציית המעברים
$q_0$	מצב התחלתי
$q_{acc}$	מצב מקבל יחיד
$q_{rej}$	מצב דוחה יחיד

$$\_ \notin \Sigma$$

$$\Sigma \subseteq \Gamma, \_ \in \Gamma$$

$$\delta : (Q \setminus \{q_{rej}, q_{acc}\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$$

## 1.1 דוגמה

נבנה מכונת טיורינג אשר מקבלת מילה אם היא בשפה

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#a_w = \#b_w\}.$$

ז"א השפת כל המילים עם מספר שווה אותיות  $a$  ו  $b$ . הפאודו-קוד של המכונה, כדלקמן.פסאודו-קוד

- (1) סורקים את הקלט משמאל לימין.
  - אם לא מצאנו  $a$  וגם לא מצאנו  $b \Leftarrow$  מקבלת.
  - אם האות הראשונה שהראש מצא היא  $a$ , כותבים עליו  $\checkmark$ , ועוברים לשלב (2).
  - אם האות הראשונה שהראש מצא היא  $b$ , כותבים עליו  $\checkmark$ , ועוברים לשלב (3).
- (2) ממשיכים לזוז ימינה עד שנמצא  $b$  תואם.
  - אם לא מצאנו  $b \Leftarrow$  דוחה.
  - אם מצאנו  $b$  כותבים עליו  $\checkmark$ , חוזרים לתחילת הקלט וחוזרים לשלב (1).
- (3) ממשיכים לזוז ימינה עד שנמצא  $a$  תואם.
  - אם לא מצאנו  $a \Leftarrow$  דוחה.
  - אם מצאנו  $a$  כותבים עליו  $\checkmark$ , חוזרים לתחילת הקלט וחוזרים לשלב (1).

כעת נתן הגדרה פורמלית של המכונת טיורינג שמבצעת את האלגוריתם הזה.

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$$

כאשר  $Q$  הקבוצת המצבנים הבאה:

$$Q = \{q_0, q_a, q_b, q_{back}, q_{rej}, q_{acc}\}.$$

המשמעותם של כל המצבים נרשמים בטבלה למטה:

$q_0$	המצב ההתחלתי. אליו נחזור אחרי כל סבב התאמה של זוג אותיות.
$q_a$	מצב שבו ראינו $a$ ומחפשים $b$ תואם.
$q_b$	מצב שבו ראינו $b$ ומחפשים $a$ תואם.
$q_{back}$	מצב שנשתמש בו כדי לחזור לקצה השמאלי של הקלט ולהתחיל את הסריקה הבאה (סבב ההתאמה הבא).
$q_{acc}$	מצב מקבל.
$q_{rej}$	מצב דוחה.

האלפבית של הקלט,  $\Sigma$ , והלפבית של הסרט,  $\Gamma$ , הינן:

$$\Sigma = \{a, b\}, \quad \Gamma = \{a, b, \sqcup, \checkmark\}.$$

הפונקציות המעבריים  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$  היא מוגדרת כדלקמן.

$$\delta(q_0, a) = (q_a, \checkmark, R),$$

$$\delta(q_0, b) = (q_b, \checkmark, R),$$

$$\delta(q_0, \sqcup) = (q_{acc}, \sqcup, R),$$

$$\delta(q_a, \checkmark) = (q_a, \checkmark, R),$$

$$\delta(q_a, a) = (q_a, a, R),$$

$$\delta(q_a, b) = (q_{back}, \checkmark, L),$$

$$\delta(q_b, \checkmark) = (q_b, \checkmark, R),$$

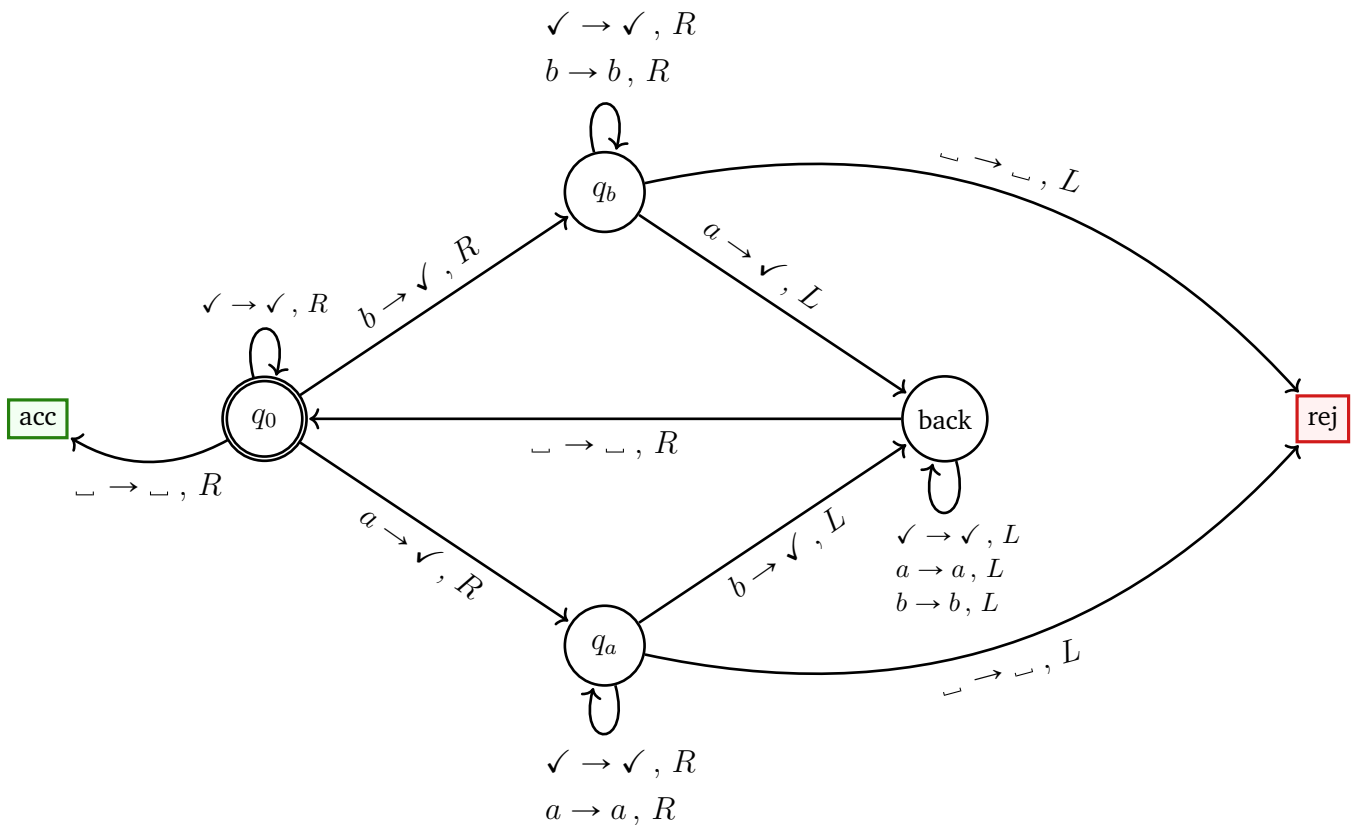
$$\delta(q_b, b) = (q_a, b, R),$$

$$\delta(q_b, a) = (q_{back}, \checkmark, L).$$

לעתים קל יותר לרשום את פונקציית המעבריים  $\delta$  כטבלה:

$Q \backslash \Gamma$	a	b	$\sqcup$	$\checkmark$
$q_0$	$(q_a, \checkmark, R)$	$(q_b, \checkmark, R)$	$(q_{acc}, \sqcup, R)$	$(q_0, \checkmark, R)$
$q_a$	$(q_a, a, R)$	$(q_{back}, \checkmark, L)$	$(q_{rej}, \sqcup, L)$	$(q_a, \checkmark, R)$
$q_b$	$(q_{back}, \checkmark, L)$	$(q_b, b, R)$	$(q_{rej}, \sqcup, L)$	$(q_b, \checkmark, R)$
$q_{back}$	$(q_{back}, a, L)$	$(q_{back}, b, L)$	$(q_0, \sqcup, R)$	$(q_{back}, \checkmark, L)$

### תרשים מצבים



## 1.2 דוגמה

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה .aab

**פתרון:**

⌊	$q_0$	a	a	b	⌊
⌊	✓	$q_a$	a	b	⌊
⌊	✓	a	$q_a$	b	⌊
⌊	✓	$q_{back}$	a	✓	⌊
⌊	$q_{back}$	✓	a	✓	⌊
$q_{back}$	⌊	✓	a	✓	⌊
⌊	$q_0$	✓	a	✓	⌊
⌊	✓	$q_0$	a	✓	⌊
⌊	✓	✓	$q_a$	✓	⌊
⌊	✓	✓	✓	$q_a$	⌊
⌊	✓	✓	rej	✓	⌊

## 1.3 דוגמה

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה .abbbbaa

**פתרון:**

⌊	$q_0$	a	b	b	b	a	a	⌊
⌊	✓	$q_a$	b	b	b	a	a	⌊
⌊	$q_{back}$	✓	✓	b	b	a	a	⌊
$q_{back}$	⌊	✓	✓	b	b	a	a	⌊
⌊	$q_0$	✓	✓	b	b	a	a	⌊
⌊	✓	$q_0$	✓	b	b	a	a	⌊
⌊	✓	✓	$q_0$	b	b	a	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	$q_b$	b	a	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	b	$q_b$	a	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	$q_{back}$	b	✓	a	⌊
⌊	✓	✓	$q_{back}$	✓	b	✓	a	⌊
⌊	✓	$q_{back}$	✓	✓	b	✓	a	⌊
$q_{back}$	⌊	✓	✓	✓	b	✓	a	⌊
⌊	$q_0$	✓	✓	✓	b	✓	a	⌊
⌊	✓	$q_0$	✓	✓	b	✓	a	⌊
⌊	✓	✓	$q_0$	✓	b	✓	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	$q_0$	b	✓	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	✓	$q_b$	✓	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	✓	✓	$q_b$	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	✓	$q_{back}$	✓	✓	⌊
⌊	✓	✓	✓	$q_{back}$	✓	✓	✓	⌊

⊥	✓	✓	$q_{back}$	✓	✓	✓	✓	⊥
⊥	✓	$q_{back}$	✓	✓	✓	✓	✓	⊥
⊥	$q_{back}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	⊥
$q_{back}$	⊥	✓	✓	✓	✓	✓	✓	⊥
⊥	$q_0$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	⊥
⊥	✓	$q_0$	✓	✓	✓	✓	✓	⊥
⊥	✓	✓	$q_0$	✓	✓	✓	✓	⊥
⊥	✓	✓	✓	$q_0$	✓	✓	✓	⊥
⊥	✓	✓	✓	✓	$q_0$	✓	✓	⊥
⊥	✓	✓	✓	✓	✓	$q_0$	✓	⊥
⊥	✓	✓	✓	✓	✓	✓	$q_0$	⊥
⊥	✓	✓	✓	✓	✓	✓	⊥	$q_{acc}$

### הגדרה 1.3 קונפיגורציה

תהי  $M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$  מכונת טיורינג. קונפיגורציה של  $M$  הינה מחרוזת

$$uq\sigma v$$

כאשר משמעות:

$$u, v \in \Gamma^*, \quad \sigma \in \Gamma, \quad q \in Q.$$

$q$  מצב המכונה,  
 $\sigma$  הסימון במיקום הראש  
 $u$  תוכן הסרט משמאל לראש,  
 $v$  תוכן הסרט מימין לראש.

### דוגמה 1.4 (המשך של דוגמה 1.2)

$u$	$q$	$\sigma$	$v$
⊥	$q_0$	a	a b ⊥
⊥ ✓	$q_a$	a	b ⊥
⊥ ✓ a	$q_a$	b	⊥
⊥ ✓	$q_{back}$	a	✓ ⊥
⊥	$q_{back}$	✓	a ✓ ⊥
⊥	$q_{back}$	⊥	✓ a ✓ ⊥
⊥	$q_0$	✓	a ✓ ⊥
⊥ ✓	$q_0$	a	✓ ⊥
⊥ ✓ ✓	$q_a$	✓	⊥
⊥ ✓ ✓ ✓	$q_a$	⊥	⊥
⊥ ✓ ✓	$q_{rej}$	✓	⊥

### דוגמה 1.5

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת כל מילה בשפה

$$L = \{a^n \mid n = 2^k, k \in \mathbb{N}\}$$

ז"א מילים בעלי מספר אותיות  $a$  אשר חזקה של 2.

## פתרון:

ראשית נשים לב למשפט הבא:

## משפט 1.1

מספר שלם  $n$  שווה לחזקה אי-שלילית של 2, כלומר  $n = 2^k$  ( $k \geq 0$ ) אם ורק אם קיים שלם  $m$  עבורו חילוק של  $n$  ב-2 בדיוק  $m$  פעמים נותן 1.

הוכחה:

כיוון  $\Leftarrow$ 

אם  $n = 2^k$  ( $k \geq 0$ ) אז  $\frac{n}{2^k} = 1$ .

כיוון  $\Rightarrow$ 

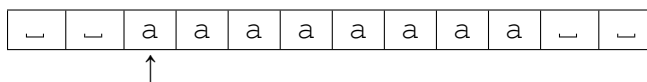
■ אם קיים  $m \geq 0$  עבורו  $\frac{n}{2^m} = 1$  אז  $n = 2^m$  ולכן  $n$  שווה לחזקה אי-שלילית של 2.

לאור המשפט הזה נבנה אלגוריתם אשר מחלק את מספר האותיות במילה ב-2 שוב ושוב בצורה איטרטיבית.

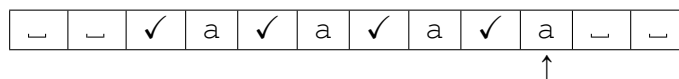
- אם אחרי סיבוב מסויים נקבל מספר אי-זוגי שונה מ-1, אז אין מצב שמספר האותיות  $a$  הוא חזקה של 2.
- בצד שני אם אחרי סיבוב כלשהו נקבל בדיוק  $a$  אחת הנשארת, ז"א אחרי מספר מסוים של חילוקים של המספר אותיות  $a$  קיבלנו 1, אזי מובטח לנו שהמספר של אותיות  $a$  הוא שווה לחזקה של 2.

כעת נסביר כיצד המכונת טיורינג מבצעת את השיטה הזאת בפועל כדלקמן.

(1) במצב ההתחלתי יש מחרוזת של רצף אותיות  $a$  כתובה על הסרט והראש נמצא מתחת האות הראשונה.



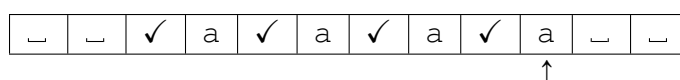
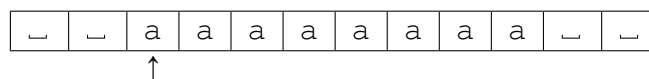
(2) עוברים על הקלט משמאל לימין ומבצעים מחיקה לסירוגין של האות  $a$ . כלומר, אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר וכן הלאה, עד שמגיעים לקצה הימין של המילה.



(3) אחרי שהראש הגיע לסוף המילה:

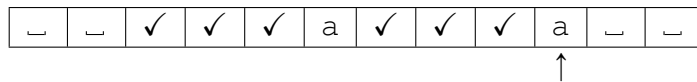
- אם מצאנו אות  $a$  אחת בדיוק  $\Leftarrow$  המכונה תקבל.
- אם כתוב ✓ בתו האחרון  $\Leftarrow$  המכונה תדחה.
- אחרת, אם כתוב  $a$  בתו האחרון הראש חוזר לתחילת המחרוזת וחוזרים לשלב (2).

כדוגמה של מילה המתקבלת על ידי האלגוריתם, למטה רשומות האיטרציות של האלגוריתם הזה על המילה  $w = aaaaaaaaaa$  (8 אותיות  $a$ ). במצב ההתחלתי הסרט נראה כדלקמן.



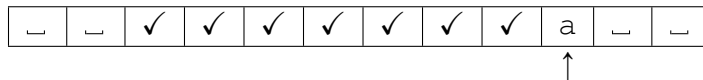
(איטרציה 1) לבסוף האיטרציה  $i = 1$  הסרט נראה כך:

התו האחרון  $a$  אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.



**איטרציה 2** בסוף האיטרציה  $i = 2$  הסרט נראה כך:

התו הראשון הוא  $a$  אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

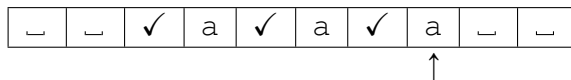
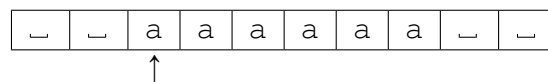


**איטרציה 3** לאחר האיטרציה  $i = 3$  הסרט נראה כך:

התו האחרון הוא  $a$  אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

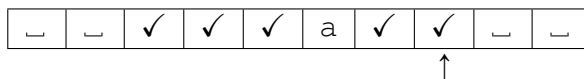
**איטרציה 4** באיטרציה  $i = 4$  יש אות  $a$  אחת בדיוק אז המכונה מקבלת.

כדוגמה של מילה הלא המתקבלת על ידי האלגוריתם, למטה רשומות האיטרציות של האלגוריתם הזה על המילה  $w = aaaaaa$  (6 אותיות  $a$ ).  
במצב ההתחלתי הסרט נראה כדלקמן.



**איטרציה 1** לבסוף האיטרציה  $i = 1$  הסרט נראה כך:

התו האחרון  $a$  אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.



**איטרציה 2** בסוף האיטרציה  $i = 2$  הסרט נראה כך:

התו הראשון הוא ✓ אז דוחה.

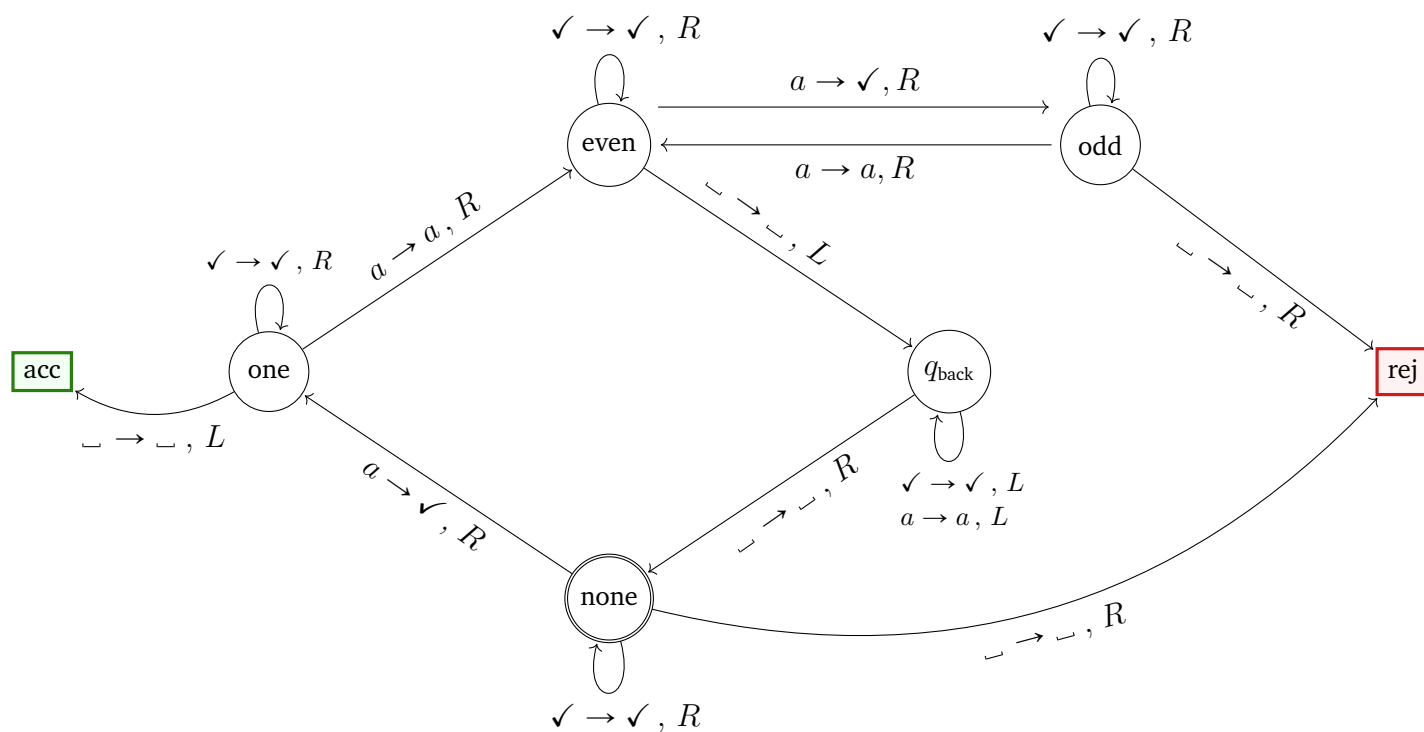
כעת נתן הגדרה פורמלית של המכונת טיורנג שמקבלת השפה הזאת:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej}) ,$$

כאשר  $\Sigma = \{a\}$ ,  $\Gamma = \{a, \_, \checkmark\}$ , והקבוצת המצבים היא  $Q = \{q_0, one, even, odd, q_{acc}, q_{rej}\}$  כאשר המשמעותם הם מפורטים למטה:

מצב none:	מצב התחלתי. עדיין לא קראנו $a$ בסבב סריקה זה.
מצב one:	קראנו $a$ בודד.
מצב even:	קראנו מספר זוגי של $a$ .
מצב odd:	קראנו מספר אי-זוגי של $a$ .
מצב $q_{back}$ :	חזרה שלמאלה.
מצבים למטה:	

הפונקציות המעברים מתוארות על ידי התרשים



## דוגמה 1.6

בדקו אם המילה aaaa מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.5.

פתרון:

$\_$	none	a	a	a	a	$\_$
$\_$	$\checkmark$	one	a	a	a	$\_$
$\_$	$\checkmark$	a	even	a	a	$\_$
$\_$	$\checkmark$	a	$\checkmark$	odd	a	$\_$
$\_$	$\checkmark$	a	$\checkmark$	a	even	$\_$
$\_$	$\checkmark$	a	$\checkmark$	back	a	$\_$
$\_$	$\checkmark$	a	back	$\checkmark$	a	$\_$
$\_$	$\checkmark$	back	a	$\checkmark$	a	$\_$
$\_$	back	$\checkmark$	a	$\checkmark$	a	$\_$
back	$\_$	$\checkmark$	a	$\checkmark$	a	$\_$
$\_$	none	$\checkmark$	a	$\checkmark$	a	$\_$
$\_$	$\checkmark$	none	a	$\checkmark$	a	$\_$
$\_$	$\checkmark$	$\checkmark$	one	$\checkmark$	a	$\_$
$\_$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	one	a	$\_$
$\_$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	a	even	$\_$
$\_$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	back	a	$\_$
$\_$	$\checkmark$	$\checkmark$	back	$\checkmark$	a	$\_$
$\_$	$\checkmark$	back	$\checkmark$	$\checkmark$	a	$\_$
$\_$	back	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	a	$\_$
back	$\_$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	a	$\_$
$\_$	none	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	a	$\_$
$\_$	$\checkmark$	none	$\checkmark$	$\checkmark$	a	$\_$
$\_$	$\checkmark$	$\checkmark$	none	$\checkmark$	a	$\_$



⌊	✓	✓	✓	none	a	⌊
⌊	✓	✓	✓	✓	one	⌊
⌊	✓	✓	✓	acc	✓	⌊

$u$	$q$	$\sigma$	$v$
⌊	none	a	aaa ⌊
⌊ ✓	one	a	aa ⌊
⌊ ✓ a	even	a	a ⌊
⌊ ✓ a ✓	odd	a	⌊
⌊ ✓ a ✓ a	even	⌊	⌊
⌊ ✓ a ✓	back	a	⌊
⌊ ✓ a	back	✓	a ⌊
⌊ ✓	back	a	✓ a ⌊
⌊	back	✓	a ✓ a ⌊
⌊	back	⌊	✓ a ✓ a ⌊
⌊	none	✓	a ✓ a ⌊
⌊ ✓	none	a	✓ a ⌊
⌊ ✓ ✓	one	✓	a ⌊
⌊ ✓ ✓ ✓	one	a	⌊
⌊ ✓ ✓ ✓ a	even	⌊	⌊
⌊ ✓ ✓ ✓	back	a	⌊
⌊ ✓ ✓	back	✓ a	⌊
⌊ ✓	back	✓	✓ a ⌊
⌊	back	✓	✓ ✓ a ⌊
⌊	back	⌊	✓ ✓ ✓ a ⌊
⌊	none	✓	✓ ✓ a ⌊
⌊ ✓	none	✓	✓ a ⌊
⌊ ✓ ✓	none	✓	a ⌊
⌊ ✓ ✓ ✓	none	a	⌊
⌊ ✓ ✓ ✓ ✓	one	⌊	⌊
⌊ ✓ ✓ ✓	acc	✓	⌊

## דוגמה 1.7

בדקו אם המילה aaa מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.5.

פתרון:

⌊	none	a	a	a	⌊
⌊	✓	one	a	a	⌊
⌊	✓	a	even	a	⌊
⌊	✓	a	✓	odd	⌊
⌊	✓	a	✓	⌊	rej

$u$	$q$	$\sigma$	$v$
⌊	none	a	aa ⌊

␣	✓		one	a	a	␣
␣	✓	a	even	a	␣	
␣	✓	a	odd	␣	␣	
␣	✓	a	rej	␣	␣	

## דוגמה 1.8

מהי השפה של המכונה למטה:



## פתרון:

(1) סורקים את הקלט משמאל לימין.

- אם התו הנקרא  $a$  או  $b$  עוברים לתו ימינה הבא וחוזרים לשלב (1).
- אם התו הנקרא  $\_$  אז הגענו לסוף הקלט, ועוברים לשלב (2).

(2) עוברים שמאלה לתו הארון של המילה.

- אם התו הנקרא  $a \Leftarrow$  מקבל.
- אחרת דוחה.

לכן המכונה מקבלת שפת המילים המסתיימות באות  $a$ .

## דוגמה 1.9

מהי השפה של המכונה למטה:



## פתרון:

## (1) במצב ההתחלתי:

- אם התו הנקרא  $\_$   $\Leftarrow$  מקבל.
- אם התו הנקרא  $a$  מורידים אותו על ידי  $\_$  ועוברים לשלב (2).
- אחרת  $\Leftarrow$  דוחה.

## (2) עוברים ימינה עד שמגיעים לסוף המילה.

- אם התו האחרון הוא  $b$ , מורידים אותו על ידי  $\_$ , חוזרים לתחילת המילה וחוזרים לשלב (1).
- אחרת דוחה.

בכל איטרציה המכונה מורידה תו  $a$  בתחילת המילה וחוזרת ומורידה תו  $b$  תואם בסוף המילה. בכל איטרציה אם המכונה לא מוצאת  $b$  תואם בסוף המילה היא דוחה המילה. אחרת אם המכונה לא דחתה המילה וכל האותיות נמחקות אז המילה מתקבלת. לכן המכונה מקבלת שפת המילים

$$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}.$$

## הגדרה 1.4 גרירה בצעד אחד

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$  מכונת טיורינג, ותהייה  $c_1$  ו- $c_2$  קונפיגורציות של  $M$ .  
נסמן

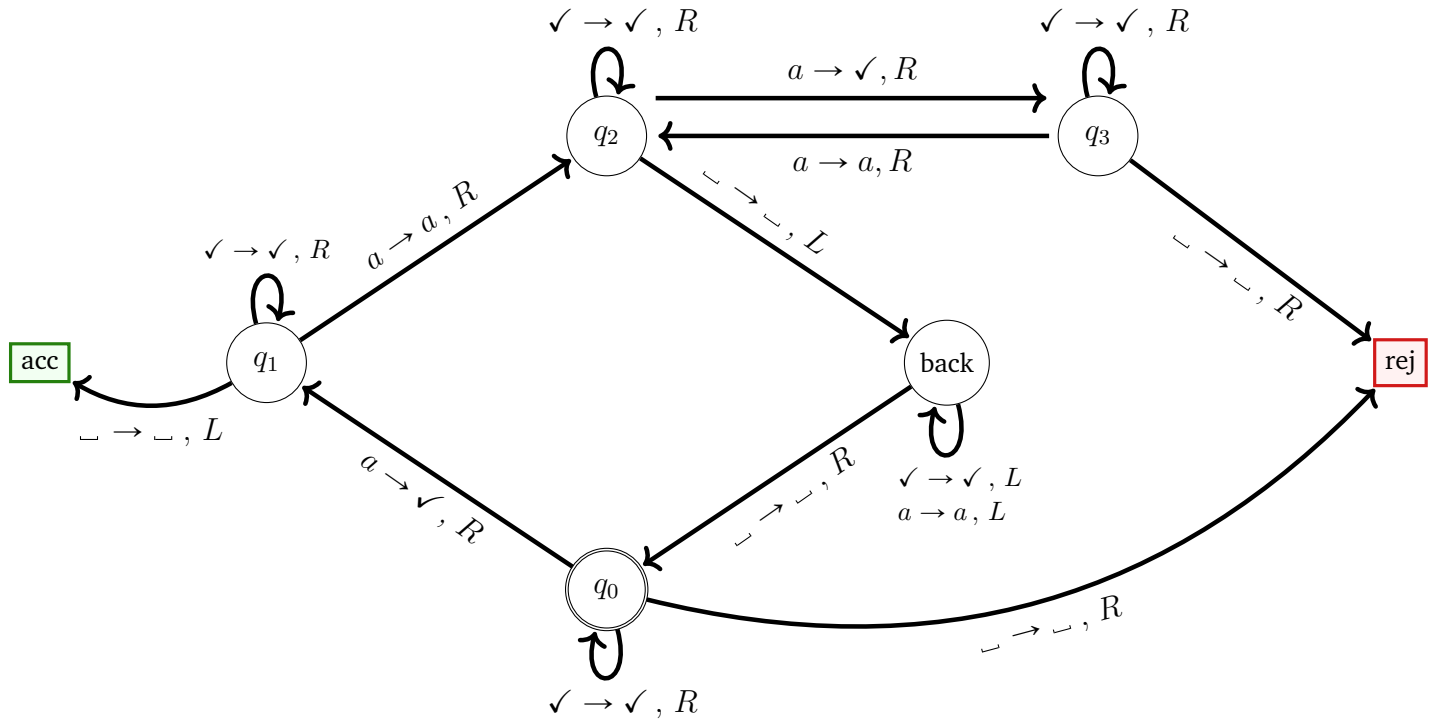
$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים,  $c_1$  גורר את  $c_2$ ) אם כשנמצאים ב- $c_1$  עוברים ל- $c_2$  בצעד בודד.

## דוגמה 1.10 (המשך של דוגמה 1.5)

עבור המכונת טיורינג שמתוארת בתרשים למטה מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$



## הגדרה 1.5 גרירה בכללי

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$  מכונת טיורינג, ותהי  $c_1$  ו- $c_2$  קונפיגורציות של  $M$ .  
נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

אם ניתן לעבור מ- $c_1$  ל- $c_2$  ב-0 או יותר צעדים.

## דוגמה 1.11 (המשך של דוגמה 1.5)

עבור המכונת טיורינג שמתוארת בתרשים למטה מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M^* \checkmark \checkmark \checkmark q_4 a$$

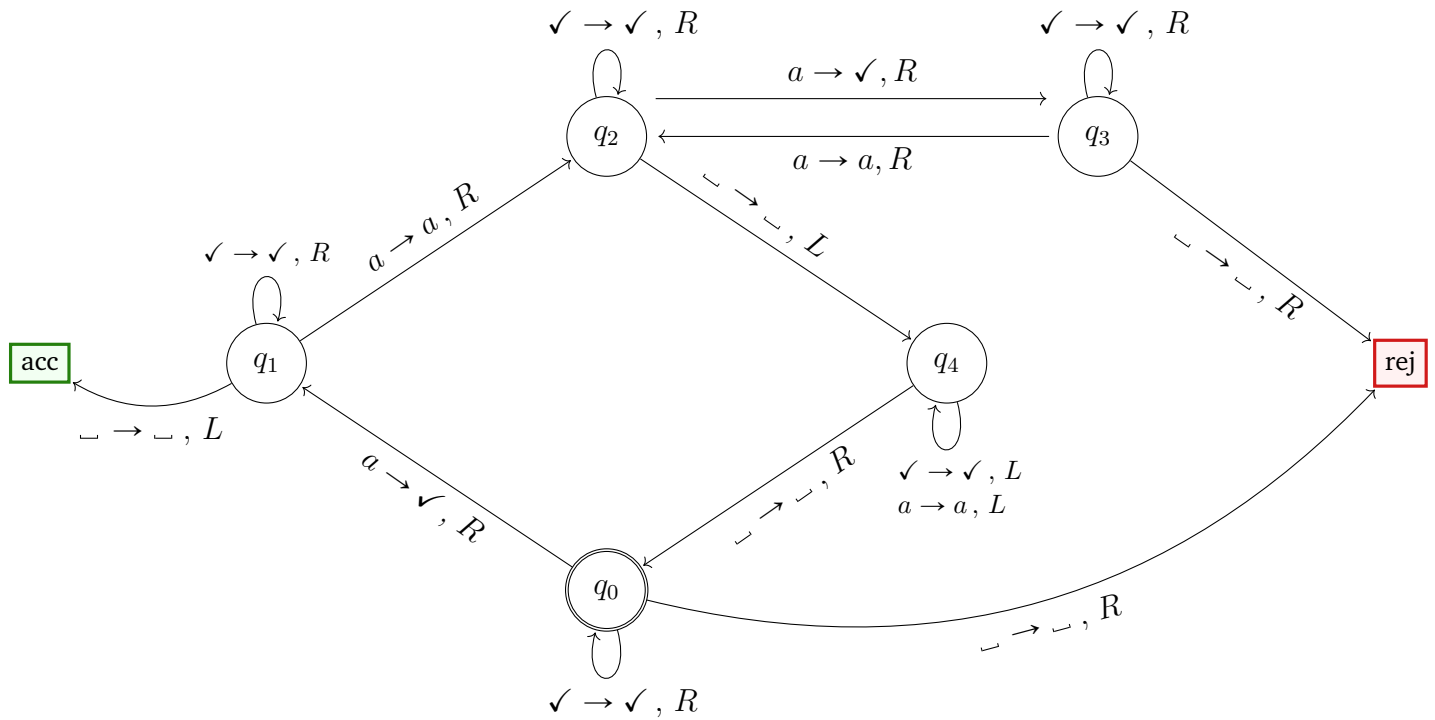
בגלל ש:

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark \checkmark q_1 a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark \checkmark a q_2 \_$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark \checkmark q_4 a .$$



### הגדרה 1.6 קבלה ודחייה של מחרוזת

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$  מכונת טיורינג, ו-  $w \in \Sigma^*$  מחרוזת. אומרים כי:

•  $M$  מקבלת את  $w$  אם

$$q_0 w \vdash_M^* u q_{acc} \sigma v$$

כאשר  $u, v \in \Gamma^*$ ,  $\sigma \in \Gamma$  כלשהם.

•  $M$  דוחה את  $w$  אם

$$q_0 w \vdash_M^* u q_{rej} \sigma v$$

כאשר  $u, v \in \Gamma^*$ ,  $\sigma \in \Gamma$  כלשהם.

### הגדרה 1.7 הכרעה של שפה

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, acc, q_{rej})$  מכונת טיורינג, ו-  $L \subseteq \Sigma^*$  שפה. אומרים כי  $M$  מכריעה את  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$  מתקיים:

•  $M \Leftarrow w \in L$  מקבלת את  $w$ .

•  $M \Leftarrow w \notin L$  דוחה את  $w$ .

### הגדרה 1.8 קבלה של שפה

תהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$  מכונת טיורינג, ו-  $L \subseteq \Sigma^*$  שפה. אומרים כי  $M$  מקבלת את  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$  מתקיים:

• אם  $w \in L$  אז  $M$  מקבלת את  $w$ .

• אם  $w \notin L$  אז  $M$  לא מקבלת את  $w$ .

במקרה כזה כאשר  $M$  מקבלת את השפה  $L$ , נכתוב ש-

$$L(M) = L.$$

## 1.2 טבלת המעברים

### 1.12 דוגמה

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$L = \{w = \{a, b, c\}^* \mid \#a_w = \#b_w = \#c_w\}$$

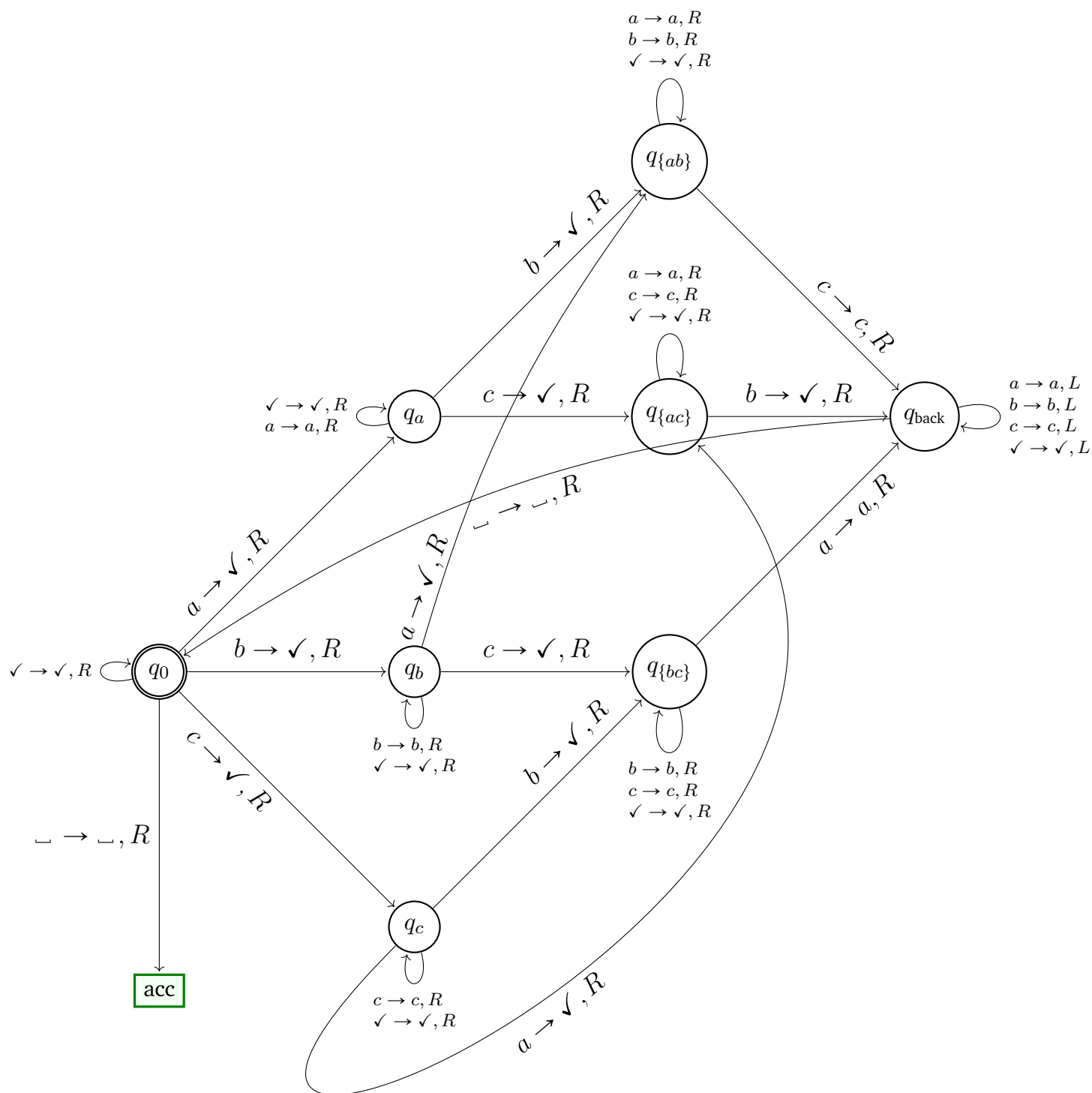
#### פתרון:

נתאר את המכונה על ידי הטבלת המעברים של המכונה. הסימן  $S$  מסמן כל זוג אותיות שונות מהקבוצה  $\{a, b, c\}$  ללא חשיבות לסדר. כלומר:

$$S = \{a, b\}, \quad S = \{b, c\}, \quad S = \{a, c\}.$$

מצי	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
$q_0$	$\sigma$	$q.\sigma$	✓	$R$	$\sigma \in \{a, b, c\}$
$q.\sigma$	$\sigma$	$q.\sigma$	↻	$R$	$\sigma \in \{a, b, c\}$
$q.\sigma$	$\tau$	$q.\{\sigma\tau\}$	✓	$R$	$\sigma, \tau \in \{a, b, c\} \wedge \sigma \neq \tau$
$q.S$	$\sigma$	$q.S$	$\sigma$	$R$	$\sigma \in S$
$qS$	$\sigma$	$q_{\text{back}}$	✓	$L$	$\sigma \notin S$
$q_{\text{back}}$	$a, b, c, \checkmark$	$q_{\text{back}}$	↻	$L$	
$q_0$	␣	$q_{\text{acc}}$	↻	$R$	
$q_{\text{back}}$	$a, b, c, \checkmark$	$q_{\text{back}}$	↻	$L$	
$q_{\text{back}}$	␣	$q_0$	↻	$R$	

כעת נתאר את המכונה על ידי תרשים המצבים של המכונה:



## דוגמה 1.13

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$\{x_1 \dots x_k \# y_1 \dots y_k \# z_1 \dots z_k \mid x_i, y_i, z_i \in \{0, 1, 2\}, \forall i, x_i \geq z_i \geq y_i\}$$

פתרון:

מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
$X **$	$\sigma$	$X\sigma*$	$\checkmark$	$R$	
$X **$	$\checkmark$	$X **$	$\checkmark$	$R$	
$X\sigma*$	$0, 1, 2, \checkmark$	$X\sigma*$	$\Omega$	$R$	
$X\tau*$	$\#$	$Y\tau*$	$\Omega$	$R$	
$Y\tau*$	$\sigma$	$Y\tau\sigma$	$\Omega$	$R$	
$Y\tau*$	$\checkmark$	$Y\tau*$	$\Omega$	$R$	
$Y\tau\sigma$	$0, 1, 2, \checkmark$	$Y\tau\sigma$	$\Omega$	$R$	
$Y\tau_1\tau_2$	$\#$	$Z\tau_1\tau_2$	$\Omega$	$R$	
$Z\tau_1\tau_2$	$\checkmark$	$Z\tau_1\tau_2$	$\Omega$	$R$	
$Z\tau_1\tau_2$	$\sigma$	$q_{\text{back}}$	$\checkmark$	$L$	
$Z **$	$\sqcup$	$q_{\text{acc}}$	$\Omega$	$R$	$\tau_1 \geq \sigma \geq \tau_2$
$q_{\text{back}}$	$0, 1, 2, \checkmark$	$q_{\text{back}}$	$\Omega$	$L$	
$q_{\text{back}}$	$\sqcup$	$X **$	$\Omega$	$R$	





## 1.3 חישוב פונקציות

### הגדרה 1.9 מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה $f$

תהי  $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$  ותהי  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$  מכונת טיורינג. אומרים כי  $M$  מחשבת את  $f$  אם:

- $\Sigma_2 \subset \Gamma$  ו-  $\Sigma = \Sigma_1$ .
- לכל  $w \in \Sigma_1^*$  מתקיים  $q_0 w \vdash q_{acc} f(w)$ .

### דוגמה 1.14 חיבור אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i \# 1^j$$

ומחזירה את פלט

$$1^{i+j}.$$

פתרון:



### דוגמה 1.15 כפל אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i \# 1^j$$

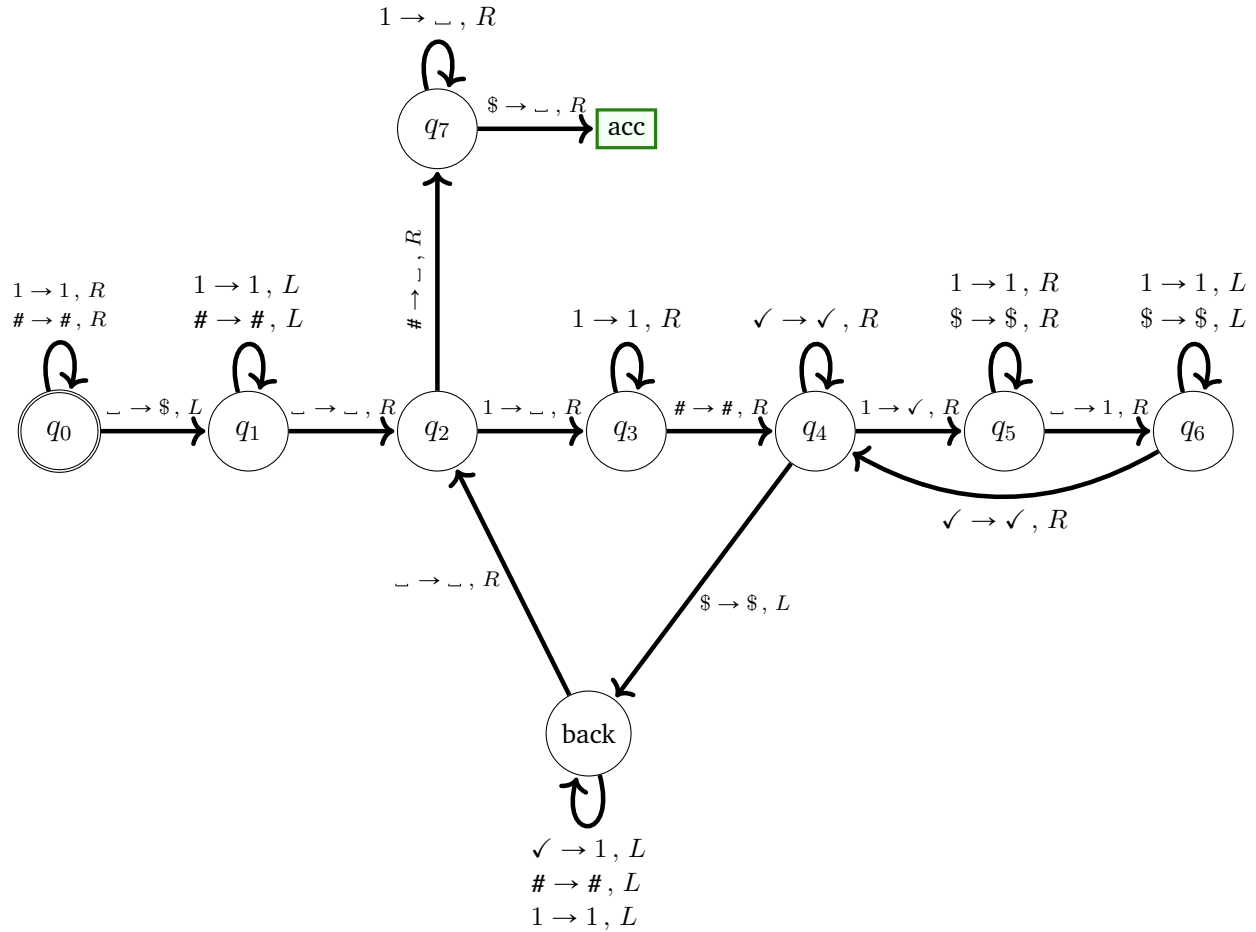
ומחזירה את פלט

$$1^{i \cdot j}.$$

פתרון:

- לדוגמה, נניח שהקלט הוא 2 כפול 2.
- הקלט הוא 11#11.

- נרצה להבדיל בין הקלט לבין הפלט.  
לכן בתחילת הריצה, נתקדם ימינה עד סוף הקלט ונוסיף שם את התו \$.  
לאחר מכן נחזור לתחילת הקלט.
- על כל אות 1 במילה השמאלית נעתיק את המילה הימינית לאחר סימן ה- \$.
- לאחר מכן נשאיר רק את התווים שלאחר סימן ה- \$. כלומר, נמחק את כל מה שאינו פלט.



$\mu$	$q$	$\sigma$	$\nu$
$\_$	$q_0$	1	1#11 $\_$
$\_11\#11$	$q_1$	$\_$	$\_$
$\_11\#11$	$q_1$	\$	$\_$
$\_$	$q_1$	$\_$	11#11\$
$\_$	$q_2$	1	1#11\$
$\_ \_$	$q_3$	1	#11\$
$\_ \_1\#$	$q_4$	1	1\$
$\_ \_1\#\checkmark$	$q_5$	1	\$
$\_ \_1\#\checkmark1\$$	$q_5$	$\_$	$\_$
$\_ \_1\#\checkmark1\$1$	$q_6$	$\_$	$\_$
$\_ \_1\#$	$q_6$	$\checkmark$	1\$1 $\_$
$\_ \_1\#\checkmark$	$q_4$	1	\$1 $\_$
$\_ \_1\#\checkmark\checkmark$	$q_5$	\$	1 $\_$
$\_ \_1\#\checkmark\checkmark\$1$	$q_5$	$\_$	$\_$
$\_ \_1\#\checkmark\checkmark\$11$	$q_6$	$\_$	$\_$

_ _1#✓	$q_6$	✓	\$11_
_ _1#✓✓	$q_4$	\$	11_
_ _1#✓	back	✓	\$11_
_	back	_	1#11\$11_
_ _	$q_2$	1	#11\$11_
_ _ _	$q_3$	#	11\$11_
_ _ _#	$q_4$	1	1\$11_
_ _ _#✓	$q_5$	1	\$11_
_ _ _#✓1\$11	$q_5$	_	_
_ _ _#✓1\$111	$q_6$	_	_
_ _ _#	$q_6$	✓	1\$111_
_ _ _#✓	$q_4$	1	\$111_
_ _ _#✓✓	$q_5$	\$	111_
_ _ _#✓✓\$111	$q_5$	_	_
_ _ _#✓✓\$1111	$q_6$	_	_
_ _ _#✓	$q_4$	✓	\$1111
_ _ _#✓✓	$q_4$	\$	1111
_ _ _#✓	back	✓\$	1111
_ _ _	back	_	#11\$1111
_ _ _ _	$q_2$	#	11\$1111
_ _ _ _ _	$q_7$	1	1\$1111
_ _ _ _ _ _ _	$q_7$	\$	1111
_ _ _ _ _ _ _ _ _	acc	1	111