1 דוגמא. (מאורע) נתון המרחב המדגם $\Omega = \{HH, TH, HT, TT\}$ של תוצאות של זריקת מטבע פעמיים ברצף, המאורע של לקבל H לפחות פעם אחת הוא $A = \{HH, TH, HT\}$. דרך פורמלי לבטא זה הוא

$$A \subset \Omega.$$

פיתרון. ■

2 דוגמא. (לוגיקה) אם הניסוי הוא הטלת קוביה ומאורע $A = \{6\}$ מציין את התוצאה 6 בעוד מאורע $B = \{4, 5, 6\}$ מציין שהתוצאה גדולה או שווה ל 4, אז ברגע ש A מתרחש גם B מתרחש, ו

$$A \subseteq B.$$

נשים לב כי $A = B$ זה מקרי פרטי של הכלה, כי כל איברי A נמצאים ב-B ולהפך:

$$A \subseteq B \quad \text{ו} \quad B \subseteq A \quad \Leftrightarrow A = B.$$

פיתרון. ■

3 דוגמא. (לוגיקה) אם R הוא המאורע שקלף אדום נלקח מחבילת רגילה של 52 קלפים, ואם Ω הוא המרחב המדגם המורכב מהחבילה של כל הקלפים. לכן המשלים המאורע R' הוא המאורע כי הקלף הנלקח מהחבילה אינו אדום, אלא קלף שחור.

4 דוגמא. (לוגיקה) נתון המרחב המדגם

$$\Omega = \{\text{Dropbox}, \text{f}, \text{G}, \text{in}, \text{WhatsApp}, \text{YouTube}\}$$

והתת קבוצה

$$A = \{\text{Dropbox}, \text{G}, \text{in}, \text{YouTube}\}.$$

הקבוצה המשלימה של A היא

$$A' = \{\text{f}, \text{WhatsApp}\}.$$

פיתרון. ■

5 דוגמא. (חיתוך) החיתוך בין המאורעות

$$A = \{\text{ן}, \text{ו}, \text{ל}, \text{ק}, \text{ש}, \text{א}\} \quad \text{ו} \quad B = \{\text{ם}, \text{י}, \text{ל}, \text{ש}, \text{ו}, \text{ר}, \text{י}\}$$

הוא

$$A \cap B = \{\text{ו}, \text{ל}, \text{ש}\}.$$

פיתרון. ■

6 דוגמא. (חיתוך) החיתוך בין המאורעות

$$A = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\} \quad \text{ו} \quad B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

הוא

$$A \cap B = \{2\}.$$

פיתרון. ■

7 דוגמא. (קבוצה הריקה) אם O הוא הקבוצה המורכב מן המספרים האי זוגיים מ1 עד 10 וE הקבוצה המורכב מהמספרים הזוגיים מ0 עד 10, כלומר

$$E = \{2,4,6,8,10\} \qquad O = \{1,3,5,7,9\}\,,$$

לכן קל לראות שהמאורעות האלה הם מאורעות זרים זה לזה בגלל

$$E \cap O = \phi.$$

פיתרון. ■

8 דוגמא. (האיחוד) אם

$$A = \{a,b,c\} \quad \text{ו} \quad \{b,c,d,e\}$$

אזי

$$A \cup B = \{a,b,c,d,e\}\,.$$

פיתרון. ■

9 דוגמא. (האיחוד) אם

$$M = \{x \mid 3 < x < 9\} \quad \text{ו} \quad N = \{y \mid 5 < y < 12\}$$

אזי

$$M \cup N = \{z \mid 3 < z < 12\}\,.$$

פיתרון. ■

10 דוגמא. אם $A = \{1,2\}$ ו $B = \{1,3,6\}$,

$$A/B = \{2\}$$

פיתרון. ■

11 דוגמא. בן מטיל קוביה הוגנת.

1. רשמו את מרחב המדגם
2. רשמו את המאורעות הבאים:
   (א) A התוצאות קטנה מ 4 ,
   (ב) B התוצאות גדולה או שווה ל 3,
   (ג) C התוצאות זוגית,
   (ד) D התוצאות אי זוגית,
3. האם $A \in 4$? האם $B \in 3$?
4. רשמו מפורשות את המאורעות הבאים:
   (א) $A \cap B$,
   (ב) $A \cup B$,
   (ג) $C \cap B$,
   (ד) $(A \cap B) \cup C$.

פיתרון. 1. $S = \{1,2,3,4,5,6\}\,.$
2. (א) $A = \{1,2,3\}\,.$
   (ב) $B = \{3,4,5,6\}\,.$

(ד) $D = \{1,3,5\}$.

3. $A \notin 4$ לא .
$B \in 3$ כן.

4. (א) $A \cap B = \{3\}$,
(ב) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$,
(ג) $C \cap B = \{3,4,6\}$,
(ד) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cap C) = \{1,2,3\} \cap \{4,6\} = \phi$.

■

דוגמא. ניקח את קבוצות הסטודנטים הנמצאים בכיתה ונגדיר את המאורעות הבאים:

- הסטודנטים שאוהבים חתולים $= C$,
- הסטודנטים שאוהבים כלבים $= D$,
- הסטודנטים שאוהבים דגים $= F$.

רשמו את המאורעות הבאים:

1. A_1 - הסטדנטים שאוהבים לפחות חיה אחת.
2. A_2 - הסטדנטים שלא אוהבים אף חיה.
3. A_3 - הסטדנטים שאוהבים רק חתולים.
4. A_4 - הסטדנטים שאוהבים את כל החיות.
5. A_5 - הסטדנטים שאוהבים בעל חיים אחד בלבד.
6. A_6 - הסטדנטים שאוהבים לפחות 2 בעלי חיים.

פיתרון. 1. $A_1 = C \cup D \cup F$.
2. $A_2 = \bar{A}_1 = \bar{C} \cap \bar{D} \cap \bar{F}$.
3. $A_3 = C \cap \bar{D} \cap \bar{F} = (C/D)/F$.
4. $A_4 = C \cap D \cap F$.
5. $A_5 = (C \cap \bar{D} \cap \bar{F}) \cup (\bar{C} \cap D \cap \bar{F}) \cup (\bar{C} \cap \bar{D} \cap F)$.
6. $A_6 = (C \cap D) \cup (D \cap F) \cup (C \cap F)$.

■

דוגמא. מהו הסיכוי שבהטלת כפולה של מטבע הוגן נקבל לפחות H אחת? 12

פיתרון. המרחב המדגם לניסוי הזה הוא

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}.$$

נניח שהמטבע הוגן. לכן לכל אחת מהתוצאות האלה יש סיכוי שווה. נסמן את ההסתברות של כל תוצאה ב ω. אזי

$$4\omega = 1 \qquad \Rightarrow \omega = \frac{1}{4}.$$

נסמן את המאורע שנקבל לפחות H אחת ב- A.

$$\begin{aligned} A =& \{HH, HT, TH\}, \\ P(A) =& \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

■

דוגמא. קוביה משוקלת באופן כך שיש סיכוי לזרוק מספר זוגי פי שתיים מהסיכוי לזרוק מספר אי זוגי. נסמן

פיתרון. המרחב המדגם הוא

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}\,.$$

נותנים הסתברות של w לכל מספר אי-זוגי והסתברות $2w$ לכל מספר זוגי. הסכום של ההסתברויות שווה ל 1. לכן

$$3(2w) + 3w = 6w + 3w = 9w = 1. \qquad \Rightarrow \qquad w = \frac{1}{9}.$$

למאורע E יש את האיברים

$$E = \{1,2,3\}\,.$$

אזי

$$P(E) = w + 2w + w = 4w = \frac{4}{9}.$$

■

דוגמא. אם A זו המאורע לזרוק מספר זוגי ו B המאורע לזרוק מספר אשר מתחלק ב-3. חפשו $P(A\cap B)$ ו $P(A\cup B)$.

פיתרון.

$$A = \{2,4,6\}\,, \qquad B = \{3,6\}\,.$$

$$A\cup B = \{2,3,4,6\}\,.$$

$$A\cap B = \{6\}\,.$$

לכל מספר זוגי יש הסתברות של $w = \frac{2}{9}$ ולכל מספר אי-זוגי יש הסתברות של $w = \frac{1}{9}$. אזי

$$P(A\cup B) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

$$P(A\cap B) = \frac{2}{9}.$$

■

13 **דוגמא.** רשמו את המרחב מדגם והמאורעות המצויינים בהמשך במונחי תורת הקבוצות:

1. הוצאה של כדור מתוך כד בו יש 2 כדורים לבנים, וכדור שחור. A- הוצא כדור שחור.
2. הוצאה של כדור מתוך כד בו יש 2 כדורים לבנים הממוספרים ב $1,2$ וכדור שחור. A- הוצא כדור לבן.
3. הוצאה עם החזרה של 2 כדורים מתוך כד בו יש 2 כדורים לבנים, ו-1 שחור. A- הכדור השני שהוצא איננו לבן.
4. הוצאה ללא החזרה של כדור מתוך כד בו יש 2 כדורים לבנים, ו-1 שחור. A- הכדור השני שהוצא הוא לבן.

פיתרון. 1. מרחב המדגם בהוצאה של כדור מתוך כד בו יש 2 כדורים לבנים, וכדור שחור.

$$\Omega = \{w,b\}\,.$$

המאורע נתון על ידי

2. מרחב המדגם בהוצאה של כדור מתוך כד בו יש 2 כדורים לבנים הממוספרים ב $1,2$ וכדור שחור הוא

$$\Omega = \{w_1, w_2, b\}$$
$$A = \{w_1, w_2\}.$$

3.

$$\Omega = \{(w,w),(w,b),(b,w),(b,b)\}$$
$$A = \{(w,b),(b,b)\}.$$

4.

$$\Omega = \{(w,w),(w,b),(b,w)\}$$
$$A = \{(w,w),(b,w)\}.$$

■

14 דוגמא. () נתון מרחב המדגם

$$\Omega = \{1,2,\ldots,10\}$$

ונתון ההסתברויות

$$P(i) = ci^2 \qquad \forall\ i \in S,$$

כאשר c הוא קבוע כלשהו. מצאו את ערכו של c וחשבו את ההסתברויות של תוצאות הניסוי תתחלק ב- 3.

פיתרון. נוכל למצוא את הקבוע c מתנאי הנרמול. בפרט אנחנו יודעים שסכום ההסתברויות חייב להיות 1. לכן

$$1 = \sum_{i=1}^{10} P(i) = \sum_{i=1}^{10} c\ i^2 = \frac{c(10)(21)(11)}{6} = 385c.$$

מכאן נובע ש

$$c = \frac{1}{385}.$$

המאורע המבקש בשאלה (תוצאות הניסוי מתחלקת ב- 3) הוא

$$A = \{3,6,9\}$$

מחיבוריות נקבל

$$P(A) = P(3) + P(6) + P(9) = \frac{3^2 + 6^2 + 9^2}{385} = \frac{126}{385}.$$

■

15 דוגמא. בניסוי הטלת קוביה הוגנת נגדיר המאורעות

$$A = \{1,2,3\} \qquad B = \{2,3,4\}.$$

אזי

$$P(A \cap B) = P(\{2,3\}) = \frac{2}{6},$$

$$P(A) = \frac{3}{6}, \qquad P(B) = \frac{3}{6}.$$

$$P(A \cup B) = P(\{1,2,3,4\}) = \frac{4}{6},$$

פיתרון. ■

16 דוגמא. בניסוי הטלת שתי קוביות הוגנות, מהי ההסתברות לזרוק 7 או 11?

פיתרון. נסמן ב- A המאורע לזרוק 7 ונסמן ב- B המאורע לזרוק 11. זריקת 7 מתרחש ב 6 מתוך 36 של הנקודות במרחב מדגם. 11 מתרחש ב 2 מתוך 36 של הנקודות במרחב מדגם. מכיוון שלכל הנקודות יש סכוי שווה, אזי

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \qquad P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

המאורעות A ו-B זרים, (אי-אפשר לזרוק 7 באותו זמן של לזרוק 11). לכן,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{2}{9}.$$

■