המחלקה למדעי המחשב

08/03/24-14/01/24

חדו"א 2 למדמ"ח

מועד מיוחד'

מרצים: ד'ר ירמיהו מילר,

תשפ"ג סמסטר קיץ'

השאלון מכיל 3 עמודים.

בהצלחה!

==

אחר / הערות

- תשובה ללא הסבר, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות בלבד מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** בלבד מתוך **שתיים**.
- **סטודנט יהיה זכאי להגיש ערעור / בקשות שונות לגבי הבוחן במשך 5 ימים בלבד מיום קבלת הציון.**

==

שאלות 1-2 חובה!

שאלה 1 (20 נקודות)

א) (10 נק')
מצאו את האקסטרמומים של הפונקציה $z(x,y)=e^{x^2+y^2-2x}$ ובררו את סוגיהם.

ב) (10 נק')
מצאו את הערך הגדול ביותר והערך הקקן ביותר של הפונקציה $z(x,y)=e^{x^2+y^2-2x}$ בתחום $D=\{(x,y)|0\le x^2+y^2\le 1, x\ge 0\}$.

שאלה 2 (22 נקודות)

א) (16 נק') נתונה סדרה
$$a_{n+1}=\sqrt{3a_n}\ , \qquad a_0=1\ .$$
קבעו אם הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת? אם כן, חשבו את גבולה. אם לא, הסבירו מדוע.

ב) (8 נק') הוכיחו או הפריכו: אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר והטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ מתבדר.

פתרו 3 מבין השאלות 3-6

שאלה 3 (16 נקודות)

א) (12 נק') שרטטו את תחום האינטגרציה, שנו את סדר האינטגרציה באינטגרל: $\int_{-3}^{3} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} dy\, e^{x^2+y^2}$

וחשבו אותו.

ב) (4 נק') רשמו את משוואת המישור המשיק למשטח $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ בנקודה $M(1,2,2)$.

שאלה 4 (16 נקודות)

א) (12 נק') מצאו את הנפח של הגוף החסום ע"י המשטחים:
$$x=0\ , \qquad y=0\ , \qquad x+y=2\ , \qquad z=0\ , \qquad z=5-x^2\ .$$

ב) (4 נק') ציירו במערכת הצירים xyz את הגוף שמדובר עליו בסעיף א'.

שאלה 5 (16 נקודות)

א) (12 נק') מצאו את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{5^n \sqrt{n}}$.

ב) (4 נק') חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_D 7\,dx\,dy$ כאשר $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| (x-1)^2 + (y-2)^2 \le 9\right\}$.

רמז: חישבו על המשמעות הגאומטרית.

שאלה 6 (16 נקודות) נתונה הפונקציה $z(x,y) = \ln\left(x^2 + 2xy\right)$.

א) (5 נק') מצאו את הנגזרת הכיוונית $\frac{dz}{d\overline{MO}}$ בנקודה $M(1,0)$ כאשר $O(0,0)$.

ב) (5 נק') מצאו את הכיוון בו הנגזרת הכיוונית בנקודה $M(1,0)$ מקבלת את ערכה המינימלי וחישבו את הנגזרת המינימלית.

ג) (6 נק') מצאו את משוואת הישר הנומרל למשטח $z(x,y) = \ln\left(x^2 + 2xy\right)$ בנקודה עליו שבה $x = 1, y = 0$.

פתרו אחת מהשאלות 7 ו- 8

שאלה 7 (10 נקודות)

מצאו את הנקודה P במישור העובר דרך הנקודות $A(4,0,0), B(0,8,0), C(0,0,4)$ אשר הקרובה ביותר למשטח $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

שאלה 8 (10 נקודות)

חישבו את נפח הגוף החסום ע"י המשטחים $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. שרטטו את הגוף במערכת הצירים התלת מימדית.

פתרונות

שאלה 1

א)

$$z'_x = (2x-2)e^{x^2-2x+y^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \ .$$

$$z'_y = 2ye^{x^2-2x+y^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \ .$$

לפיכך הנקודה $P_0(1,0)$ נקודת קריטית.

$$z''_{xx} = \left(4x^2-8x+6\right)e^{x^2-2x+y^2} \ , \quad z''_{yy} = \left(4y^2+2\right)e^{x^2-2x+y^2} \ , \quad z''_{xy} = 4(x-1)ye^{x^2-2x+y^2} \ .$$

$$z''_{xx}(1,0) = \frac{2}{e} \ , \quad z''_{yy}(1,0) = \frac{2}{e} \ , \quad z''_{xy}(1,0) = 0 \ .$$

$$\Delta(1,0) = z''_{xx}z''_{yy} - \left(z''_{xy}\right)^2 = \frac{4}{e^2} \ .$$

$z''_{xx}(1,0) > 0$ ו- $\Delta(1,0) > 0$ לפיכך הנקודה $P_0(1,0)$ נקודת מינימום.

ב) על השפה $x^2+y^2=1$:

$$z_1(x) = z(x, y=\sqrt{1-x^2}) = e^{1-2x} \ .$$

$$z'_1(x) = -2e^{1-2x} \neq 0 \ .$$

נקודה	ערך של הפונקציה $z(x,y)$
$P_0(1,0)$	$\frac{1}{e}$
$A(-1,0)$	e^3
$B(0,1)$	e
$B(0,-1)$	e

לפיכך $\max_D\left(z(x,y)\right) = e^3$ בנקודה $A(-1,0)$.

$\min_D\left(z(x,y)\right) = \frac{1}{e}$ בנקודה $P_0(1,0)$.

שאלה 2

א)

$$a_1 = \sqrt{3a_0} = \sqrt{3} > a_0$$

$$a_2 = \sqrt{3a_1} = \sqrt{3\sqrt{3}} > a_1$$

נוכיח באינדוקציה כי הסדרה עולה מונוטונית. נניח כי $a_{n+1} > a_n$. אז

$$a_{n+2} = \sqrt{3a_{n+1}} > \sqrt{3a_n} = a_{n+1} \qquad \Rightarrow \qquad a_{n+2} > a_{n+1} \ .$$

לכן הסדרה עולה מונוטונית.
נתון כי $a_0 = 1$ והסדרה עולה לכן היא חסומה מלמטה.
נוכיח כי הסדרה חסומה מלמעלה. נניח כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. אז

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3a_n} = \sqrt{3 \lim_{n\to\infty} a_n} \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{3L} \quad \Rightarrow \quad L^2 = 3L \quad \Rightarrow \quad L(L-3) = 0 \ .$$

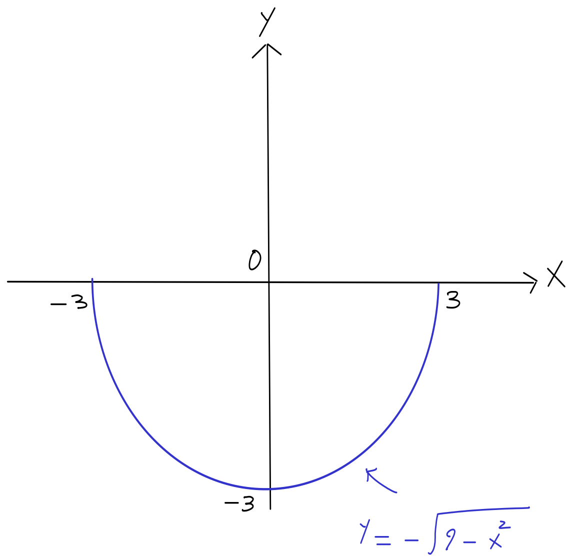
לכן $L = 0$ או $L = 3$.
$L = 0$ לא אפשרי כי $a_n \geq 1$ לכן $L = 3$.
ז"א $a_n \leq 3$. לכן הסדרה חסומה מלמעלה.
לכן הסדרה חסומה ומונוטונית ולכן מתכנסת.

ב) לא נכון. דוגמה נגדית: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר ו- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)$ מתבדר אבל הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס.

שאלה 3

א)

$$D = \{-3 \leq x \leq 3 \ , -\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq 0\}$$



$$\int_{-3}^{3} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} dy\, e^{x^2+y^2} = \int_{-3}^{0} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{0} dx\, e^{x^2+y^2} + \int_{-3}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{9-y^2}} dx\, e^{x^2+y^2}$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{3} dr\, r\, e^{r^2} = \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{9} dt\, \frac{1}{2}\, e^{t} = \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \frac{1}{2}\left[e^9 - 1\right] = [\theta]_{\pi}^{2\pi}\, \frac{1}{2}\left[e^9 - 1\right] = \frac{\pi}{2}\left[e^9 - 1\right]\ .$$

ב) המשטח:

$$f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} - z\ .$$

$$\nabla f = \left(\frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, -1\right)\ .$$

$$\nabla f(1, 2, 2) = \left(\frac{-1}{2}, -1, -1\right)\ .$$

משוואת המישור המשיק למשטח:

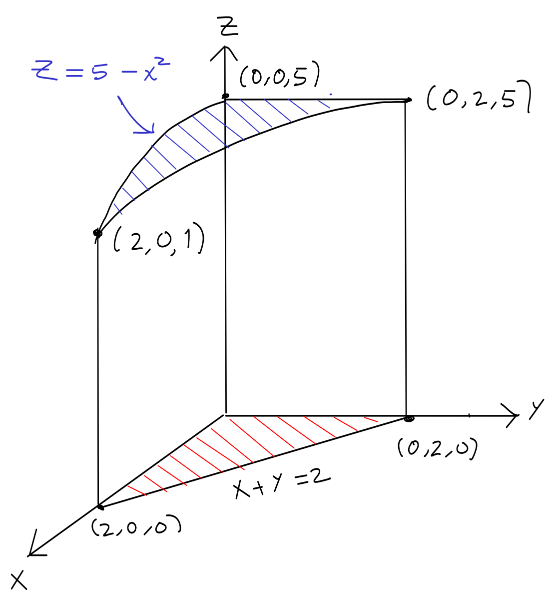
$$-\frac{1}{2}(x-1) - (y-2) - (z-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 1 + 2y - 4 + 2z - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2y + z - 12 = 0\ .$$

שאלה 4

א)

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy(5-x^2) \\
&= \int_0^2 dx\ [y]_0^{2-x}\ (5-x^2) \\
&= \int_0^2 dx\,(2-x)(5-x^2) \\
&= \int_0^2 dx\,(10-5x-2x^2+x^3) \\
&= \left[10x - \frac{5x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^2 \\
&= 20 - 10 - \frac{16}{3} + 4 \\
&= \frac{42}{3} - \frac{16}{3} = \frac{26}{3}\ .
\end{aligned}
$$

ב)



שאלה 5

א)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-2)^n \ , \qquad a_n = \frac{3^n}{5^n \sqrt{n}}\ .$$

נוסחת דלמבר לרדיוס התכנסות:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3^n}{5^n\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{3^{n+1}}{5^{n+1}\sqrt{n+1}}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{3}\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n}} \\ &= \frac{5}{3} \ . \end{aligned}$$

לכן הטור מתכנס לכל $-\frac{5}{3} < x-2 < \frac{5}{3}$.

$x-2=\frac{5}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x-2)^n}{5^n\sqrt{n}} \overset{x-2=\frac{5}{3}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ .$$

לא מתכנס. לכן הטור לא מתכנס ב- $x-2=\frac{5}{3}$.

$x-2=\frac{-5}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x-2)^n}{5^n\sqrt{n}} \overset{x-2=\frac{-5}{3}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ .$$

לפי מבחן לייבניץ הטור מתכנס.
לכן הטור לא מתכנס ב- $x-2=\frac{-5}{3}$.

תשובה סופית: התחום התכנסות הינו $-\frac{5}{3} \le x-2 < \frac{5}{3}$ כלומר $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$.

ב)

$$\iint_D 7\,dx\,dy = 7\cdot\iint_D dx\,dy = 7\cdot\pi\cdot 3^2 = 63\pi \ .$$

שאלה 6

א)

$$\nabla z = \frac{1}{x^2+2xy}\cdot(2x+2y,2x) \qquad \Rightarrow \qquad \nabla z(M) = (2,2) \ .$$

$\overline{MO} = (-1,0)$.

$$\frac{dz(M)}{d\overline{MO}} = \frac{\nabla z(1,0)\cdot\overline{MO}}{|\overline{MO}|} = \frac{(2,2)\cdot(-1,0)}{|(-1,0)|} = -2 \ .$$

ב) $|\nabla z(M)| \le \dfrac{dz(M)}{d\overline{MO}} \le -|\nabla z(M)|$ לכן הערך המינימלי של $\dfrac{df(M)}{d\overline{MO}}$ הינו $-|\nabla f(M)| = -\sqrt{8}$.
$z(1,0) = \ln(1) = 0$.

ג) בנקודה $x=1, y=0, z=0$ הנורמל למשטח $f(x,y,z) = \ln(x^2+2xy) - z = 0$ הינה

$$n = \left(f'_x, f'_y, -1\right)(1,0,0) = (2,2,-1) \ .$$

משוואת המישטר המשיק למישור בנקודה $(1,0,0)$:

$$2(x-1) + 2y - z = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y - z - 2 = 0 \ .$$

שאלה 7

הנורמל למישור: $\overline{AB} = (-4,8,0)$, $\overline{AC} = (-4,0,4)$.

$$n = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (32,16,32) = (2,1,2) \ .$$

משוואת המישור:

$$2(x-4) + y + 2z = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + y + 2z - 8 = 0 \ .$$

המשטח:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \ .$$

כדור מרדיוס 1 שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$.
משוואת הישר העובר דרך המישור ומרכז הכדור:

$$M(t) = (0,0,1) + t(2,1,2) \ , \quad \Rightarrow \quad x = 2t \ , \ \ y = t \ , \ \ z = 1 + 2t \ .$$

נציב משוואת הישר במשוואת המישור:

$$4t + t + 2 + 4t - 8 = 9t - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \ .$$

לכן הנקודה על המישור הקרובה ביותר לכדור הינה

$$M\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right) \ .$$

שאלה 8