

תרגילים 7: אי-כריעות

שאלה 1 נתונה השפה הבאה: $L = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| \geq 3\}$. כלומר L מכילה קידודים של מכונות שמקבלות לפחות 3 מילים שונות. הוכיחו כי $L \notin R$ ע"י רדוקציה מ- L_{acc} .

שאלה 2 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה:
לכל שלוש שפות L_1, L_2, L_3 אם $L_1 \leq L_2$ וגם $L_1 \leq L_3$ אזי $L_1 \leq (L_2 \cap L_3)$.

שאלה 3 נגדיר את השפה $L = \{\langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in (L(M_1) \cup L(M_2))\}$

(א) הוכיחו כי $L \in RE$.

(ב) הוכיחו ע"י רדוקציה כי $L \notin R$.

שאלה 4 הוכיחו כי השפה $\overline{L_{acc}} \setminus \overline{L_{halt}} \in RE$.

תשובות

שאלה 1

פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M_\emptyset היא מ"ט הדוחה כל קלט ו- M' היא מ"ט שעל כל קלט y , מתעלמת מ- y ומריצה את M על w ועונה כמוה.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

נכונות הרדוקציה:

נוכיח כי

$$x \in L_{\text{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L_{\geq 3}.$$

אם $x \in L_{\text{acc}} \Leftrightarrow x = \langle M, w \rangle$ ו- $w \in L(M) \Leftrightarrow f(x) = \langle M' \rangle \Leftrightarrow f(x) \in L_{\geq 3}$ ולכן $L(M') = \Sigma^*$ ולפי האבחנה $L(M') = \Sigma^*$ ולכן $|L(M')| = \infty$.

אם $x \notin L_{\text{acc}}$ שני מקרים:

מקרה 1: $x \neq \langle M, w \rangle \Leftrightarrow f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \Leftrightarrow |L(M_\emptyset)| = 0 \Leftrightarrow f(x) \notin L_{\geq 3}$.

מקרה 2: $x \neq \langle M, w \rangle$ ו- $w \notin L(M) \Leftrightarrow f(x) = \langle M' \rangle \Leftrightarrow L(M') = \emptyset$ ולפי האבחנה $L(M') = \emptyset \Leftrightarrow |L(M')| = 0 \Leftrightarrow f(x) \notin L_{\geq 3}$.

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $L_{\text{acc}} \leq L_{\geq 3}$ ולכן ממשפט הרדוקציה, מכיוון ש- $L_{\text{acc}} \notin R$, מתקיים $L_{\geq 3} \notin R$.

שאלה 2

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$L_1 = L_{\text{halt}}, \quad L_2 = L_{\text{acc}}, \quad L_3 = \overline{L_{\text{acc}}}.$$

מתקיים $L_{\text{halt}} \leq L_{\text{acc}}$ לכן $L_1 \leq L_2$.בנוסף $L_{\text{halt}} \leq \overline{L_{\text{acc}}}$ לכן $L_1 \leq L_3$.

מצד שני: $L_2 \cap L_3 = \emptyset$ ולכן $L_1 \not\leq L_3$ (אחרת $L_{\text{halt}} \leq \emptyset$ ומכיוון ש- $\emptyset \in R$ אזי $L_{\text{halt}} \in R$ בסתירה לכך ש- $L_{\text{halt}} \notin R$).

שאלה 3

(א) נבנה מ"ט M^* שמקבלת את L .
$$M^* = \text{על קלט } \langle M_1, M_2, w \rangle$$

- מריצה M_1 על w . אם M_1 מקבלת אז M^* מקבלת.
- אחרת M^* מריצה M_2 על w . אם M_2 מקבלת אז M^* מקבלת.

נכונות:

- אם $\langle M_1, M_2, w \rangle \in L$ אז M_1 מקבלת w או M_2 מקבלת w $\Leftarrow M^*$ תקבל.
- לכן קיימת מ"ט M^* שמקבלת כל מחרוזת $\langle M_1, M_2, w \rangle \in L$
- לכן $L \in RE$.

נתון: השפה $L_{M_1 \cup M_2}$ מוגדרת:

(ב)

$$L_{M_1 \cup M_2} = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \cup L(M_2) \}$$

ז"א $L_{M_1 \cup M_2}$ השפה שכוללת כל המחרוזות $\langle M_1, M_2, w \rangle$ כאשר w שייך לאחת השפות $L(M_1)$ או $L(M_2)$ לפחות.

צריך להוכיח: קיימת רדוקציה התאמה בין השפה L_{acc} לשפה $L_{M_1 \cup M_2}$, כלומר

$$L_{acc} \leq L_{M_1 \cup M_2} .$$

הגדרת הרדוקציה:

בהינתן $\langle M, w \rangle$ קלט של L_{acc} ניצור $\langle M_1, M_2, w \rangle$ קלט של $L_{M_1 \cup M_2}$ כך שמתקיים התנאי הבא:

$$\begin{aligned} \langle M, w \rangle \in L_{acc} &\Rightarrow \langle M_1, M_2, w \rangle \in L_{M_1 \cup M_2} , \\ \langle M, w \rangle \notin L_{acc} &\Rightarrow \langle M_1, M_2, w \rangle \notin L_{M_1 \cup M_2} . \end{aligned}$$

נגדיר את פונקציית הרדוקציה באופן הבא:

$$M_1 = \text{"על כל קלט } x \text{ } M_1 \leftarrow \text{rej."}$$

$$M_2 = \text{"על כל קלט } x \text{ :}$$

- מריצה M על w ועונה כמוה.

נכונות הרדוקציה:

כיוון \Leftarrow

$$\text{אם } \langle M, w \rangle \in L_{acc}$$

$$w \in L(M) \Leftarrow$$

$$w \in L(M_2) \Leftarrow$$

$$w \in L(M_2) \cup \emptyset \Leftarrow$$

$$w \in L(M_2) \cup L(M_1) \Leftarrow$$

$$\langle M_1, M_2, w \rangle \in L_{M_1 \cup M_2} \Leftarrow$$

כיוון \Rightarrow

$$\text{אם } \langle M, w \rangle \notin L_{acc}$$

$$\begin{aligned}
 w \notin L(M) &\Leftarrow \\
 w \notin L(M_2) &\Leftarrow \\
 w \notin L(M_1) \text{ וגם } w \notin L(M_2) &\Leftarrow \text{ (כי השפה של } M_1 \text{ היא } \emptyset). \\
 \langle M_1, M_2, w \rangle \notin L_{M_1 \cup M_2} &\Leftarrow
 \end{aligned}$$

שאלה 4

M עוצרת על w ודוחה את w $\{ \langle M, w \rangle \mid w \text{ ודוחה את } w \}$ $\overline{L_{\text{acc}}} \setminus \overline{L_{\text{halt}}} = M^*$ נבנה מ"ט M^* שמקבלת את השפה. "על כל קלט $\langle M, w \rangle$: $M^* =$

(1) בודקת האם $x = \langle M, w \rangle$

• אם לא \Leftarrow דוחה.

(2) מריצה M על w .

• אם M מקבלת $M^* \Leftarrow$ דוחה.

• אם M דוחה $M^* \Leftarrow$ מקבלת.

M^* מקבלת בדיוק את הזוגות $\langle M, w \rangle$ עבורם M עוצרת ודוחה את w .

$$\overline{L_{\text{acc}}} \setminus \overline{L_{\text{halt}}} \in RE \Leftarrow$$