

חישוביות וסיבוכיות תשפ"ה סמסטר א'

שיעור 2

וריאציות של מכונות טיורינג

תוכן העניינים

2	2.1	הגדרה של מכונת טיורינג שמכריעה את חיתוך השפות $A \cap B$
3	2.2	מודל דו-ממדי
4	2.3	מודל לא דטרמיניסטית
7	2.4	שקילות חישוב של מכונה דטרמיניסטית ולא דטרמיניסטית

משפט 2.1: קיום מכונת טיורינג שמכריעה את חיתוך שפות כריעות

תהינה M^A מ"ט שמכריעה את השפה A ו- M^B מכונת טיורינג שמכריעה את השפה B . אז קיים מכונת טיורינג M^C שמכריעה את הפסה $A \cap C$.

הוכחה: ?



2.1 הגדרה של מכונת טיורינג שמכריעה את חיתוך השפות $A \cap B$

תהי

$$M^A = (Q^A, \Sigma, \Gamma^A, \delta^A, q_0^A, \text{acc}^A, \text{rej}^A)$$

המכונת טיורינג שמכריעה את השפה A ותהי

$$M^B = (Q^B, \Sigma, \Gamma^B, \delta^B, q_0^B, \text{acc}^B, \text{rej}^B)$$

המכונת טיורינג שמכריעה את השפה B .

נגדיר את מכונת טיורינג חדש M^C אשר מכריעה את חיתוך השפות $A \cap B$ באופן הבא:

$$M^C = (Q^C, \Sigma, \Gamma^C, \delta^C, q_0^C, \text{acc}^C, \text{rej}^C) .$$

האלפיבית של הסרט של M^C מוגדר להיות

$$\Gamma^C = \Gamma^A \cup \Gamma^B ,$$

כלומר האלפיבית של M^C מכילה את הא"ב של M^A והא"ב של M^B .

הקבוצת מצבים של M^C מוגדרת להיות

$$Q^C = Q^A \cup Q^B \cup \{q_0^C, q_1^C, \text{acc}^C, \text{rej}^C\}$$

כאן

Q^A היא הקבוצת מצבים של המ"ט M^A ,

Q^B היא הקבוצת מצבים של המ"ט M^B ,

acc^C המצב קבלה של M^C ,

rej^C המצב דחייה של M^C ,

q_0^C ו- q_1^C הם מצבים אשר שייכים ל- M^C אבל לא ל- M^A או ל- M^B . למטה נסביר את הפעולות של M^C

בשלב 1 של הכרעה של $A \cap B$, שמתוארים במשפט 2.1, וספציבי בשלב 1 נסביר את התפקיד של המצבים q_0^C ו- q_1^C .

שלב 1) העתק את הקלט w של M^A לסרט השני של M^B והחזר את הראש לתחילת הקלט בשני הסרטים.

למטרה זה נשתמש במעברים הבאים:

$$\delta^C(q_0^C, \sigma, _) = (q_0^C, \sigma, R, \sigma, R)$$

במילים, במצב q_0^C , אם הראש של M^A קורא אות σ והראש של M^B קורא $_$, כותבים σ על ה- $_$ בסרט השני של M^B , ושני הראשים זזים ימינה.

כאשר השני ראשים מגיעים לסוף הקלט של M^A , שני הראשים קוראים $_$ ואז M^C מבצעת את המעבר הבא:

$$\delta^C(q_0^C, _, _) = (q_0^C, _, L, _, L)$$

במילים M^C עוברת למצב q_1^C ושני הראשים זזים שמאלה.

כל עוד ש- M^C במצב q_1^C והראשים עדיין לא הכיעו לתחילת הקלט של M^A , היא ממשיכה להזיז את הראשים שמאלה צעד צעד, אשר מתוארת על ידי המעבר הבא:

$$\delta^C(q_1^C, \sigma, \sigma) = (q_0^C, \sigma, L, \sigma, L) .$$

ברגע שהראשים של M^A ו- M^B קוראים $(_, _)$, כלומר תו רווח בסרט של M^A וגם תו רווח בסרט של M^B , ז"א ששני הראשים של M^C מגיעה לתחילת הקלט היא עוברת למצב ההתחלתי של M^A , (שבו M^A מוכן להתחיל לסרוק את הקלט, אשר בשלב 2 של ההכרעה):

$$\delta^C(q_1^C, _, _) = (q_0^A, _, R, _, R) .$$

שלב 2) הרץ את M^A על w בסרט הראשון. אם דחתה אז M^C עוברת ל- rej^C .

כעת אנחנו מריצים את M^A על הסרט הראשון. M^A ועוברת בין המצבים $q \in Q^A$ שלה לפי הפונקצית המעברים שלה, δ^A . בפרט נניח שבמצב $q \in Q^A$, M^A כותבת τ על σ_1 וזזה $m(=L/R)$, ועוברת ממצב q למצב q' . כלומר $\delta^A(q, \sigma_1) = (q', \tau, m)$. אז המעבר המתאים ב- M^C הוא

$$\forall q \in Q^A \quad \delta^C(q, (\sigma_1, \sigma_2)) = (q', \tau, m, \sigma_2, S) .$$

שימו לב: לא שנינו את האות σ_2 על הסרט השני והראש של M^B נשאר במקומו.

היוצא דופן הוא אם M^A דוחה את w אז M^C דוחה את המילה.

לכן

$$\delta^C(\text{rej}^A, (\sigma_1, \sigma_2)) = (\text{rej}^C, \sigma_1, S, \sigma_2, S) .$$

אם M^A קיבלה את המילה אז עוברים לשלב 3.

שלב 3) הרץ את M^B על w בסרט השני.

כעת אנחנו מריצים את M^B על הסרט הראשון. M^B ועוברת בין המצבים $q \in Q^B$ שלה לפי הפונקצית המעברים שלה, δ^B . בפרט נניח שבמצב $q \in Q^B$, M^B כותבת τ על σ_2 וזזה $m(=L/R)$, ועוברת ממצב q למצב q' . כלומר $\delta^B(q, \sigma_2) = (q', \tau, m)$. אז המעבר המתאים ב- M^C הוא

$$\forall q \in Q^B \quad \delta^C(q, (\sigma_1, \sigma_2)) = (q', \sigma_1, S, \tau, m) .$$

שימו לב: לא שנינו את האות σ_1 על הסרט הראשון והראש של M^A נשאר במקומו.

נטפל במקרה ש אם M^B דוחה את המילה אז M^C עוברת ל- rej^C על יד המעבר

$$\delta^C(\text{rej}^B, (\sigma_1, \sigma_2)) = (\text{rej}^C, \sigma_1, S, \sigma_2, S) .$$

לבסוף אם M^B מקבלת את המילה אז M^C עוברת ל- acc^C :

$$\delta^C(\text{acc}^B, (\sigma_1, \sigma_2)) = (\text{acc}^C, \sigma_1, S, \sigma_2, S) .$$

2.2 מודל דו-ממדי

הגדרה 2.1: סרט דו ממדי

בסרט דו ממדי הסרט כמו טבלה אינסופי (כמתואר בתרשים למטה) עם

- אינסוף שורות כלפי מעלה,
- אינסוף עמודות לכיוון ימין.
- הסרט חסום מצד שמאל ומלמטה.
- בתחילת הריצה הקלט מופיע בשורה התחתונה וצמוד לשמאל.
- הראש יכול לזוז ימינה, שמאלה למעלה ולמטה.

הפונקציות המעברים של מכונת טיורינג דו ממדי מוגדר:

$$\delta : (Q \setminus \{\text{acc}, \text{rej}\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, U, D\} .$$

␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
a	b	a	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣

2.3 מודל לא דטרמיניסטית

הגדרה 2.2: מודל לא דטרמיניסטית

תהי M מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית. עבור שפה $w \in \Sigma^*$ אומרים עי

- M מקבלת את w אם קיים חושב של M על w שמגיע למצב acc .
- M דוחה את w אם כל חושב של M על w מגיע למצב rej .

הגדרה 2.3: מודל לא דטרמיניסטית

תהי M מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית.

עבור שפה $w \in \Sigma^*$ אומרים עי

- M מקבלת את w אם קיים חושב של M על w שמגיע למצב acc .
 - M דוחה את w אם כל חושב של M על w מגיע למצב rej .
- עבור שפה $L \subseteq \Sigma^*$ אומרים כי M מגיעה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:
- אם $w \in L$ אז M מקבלת את w .
 - אם $w \notin L$ אז M דוחה את w .
- M מקבלת את L אם לכל $w \in \Sigma^*$, M מקבלת את w אם $w \in L$.

המודל הלא דטרמיניסטי

- בהכרעה לא דטרמיניסטית של שפה
לכל מילה בשפה \exists לפחות חושב אחד שעוצר במצב מקבל.
לכל מילה שאינה בשפה כל החישובים חייבים לעצור במצב דוחה.
- בקבלה לא דטרמיניסטית של שפה
לכל מילה בשפה \exists לפחות חושב אחד שעוצר במצב מקבל.
לכל מילה שאינה בשפה המכונה יכולה לדחות או לא לעצור.

2.1 דוגמה

$$L = \left\{ w \in \{0,1\}^* \mid w = uv, (u\bar{v}) = (u\bar{v})^R \right\}$$

שפת כל המחרוזות שניתן להפוך אותן לפילנדרום ע"י פעולת "משלים לסיפא". למשל: $01101 \in w$ מכיוון

ש-

$$011\overline{01} = 01110 = (01110)^R.$$

 $1010010 \in w$ מכיוון ש-

$$10100\overline{10} = 1010101 = (1010101)^R.$$

בנו מכונת

(א) דטרמיניסטית שמכריעה את שפת כל הפלינדרומים.

(ב) לא דטרמיניסטית שמכריעה את השפה L .

פתרון:

סעיף א)

מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה
q_0	\perp	acc		R
q_0	σ	$q.\sigma$	\perp	R
$q.\sigma$	τ	$q.\sigma$		R
$q.\sigma$	\perp	$p.\sigma$	\perp	L
$p.\sigma$	σ	back	\perp	L
$p.\sigma$	\perp	acc		R
$p.\sigma$	τ	rej		R
back	σ	back		L
back	\perp	q_0	\perp	R

כאשר

$$\tau \neq \sigma, \tau \in \Sigma, \sigma \in \Sigma.$$

זאת מכונה דטרמיניסטית המכריעה את שפת הפלינגרומים.

סעיף ב) לבניית המכונה הלא דטרמיניסטית שמכריעה את L , נוסיף את המעברים החדשים הבאים:

מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה	
\hat{q}_0	0, 1	\hat{q}_0		R	תזוזה ימינה
\hat{q}_0	0, 1, \perp	flip		S	flip למצב אי-דטרמיניסטי מעבר
flip	0	1	flip	R	ביצוע פעולת "משלים לסיפא" החל מהנקודה שנבחרה אי-דטרמיניסטית
flip	1	0	flip	R	ביצוע פעולת "משלים לסיפא" החל מהנקודה שנבחרה אי-דטרמיניסטית
flip	\perp	back	\perp	L	
back	0, 1	back		L	חזרה להתחלה
back	\perp	q_0		R	מעבר למכונה לבדיקת פלינדרום

• אם $w \in L$ אז \exists חישוב שעושה flip בדיוק במיקום הנכון \leftarrow הופך את הסיפא של המילה \leftarrow המכונה pal מקבלת w .

• אם $w \notin L$ אז לא משנה באיזה מיקום במילה עוברים למצב flip לא מקבלים פלינדרום \leftarrow כל חישוב ידיע למצב rej.

- לפיכך המכונה הלא דטרמיניסטית הזו מכריעה את השפה L .

משפט 2.2: סגירות תחת פעולת ה Prefix

תהי L שפה שמתקבלת ע"י מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית.
אזי גם

$$\text{prefix}(L) = \{u \mid \exists v, uv \in L\}$$

מתקבלת ע"י מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית.

הוכחה: תהי M^L מ"ט שמקבלת את L .
נבנה M^P שמקבלת את $\text{prefix}(L)$.

נוסיף באופן אי דטרמיניסטי סיפא v לאחר הקלט u ואז נבדוק אם המילה היא בשפה L .

בפרט, נתונה טבלת המעברים של המכונה M^L שמקבלת את השפה L :

מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה
q_0^L
⋮				

נוסיף את הטבלת המעברים הבאה:

מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה	תיאור מילולי
q_0^P	σ	q_0^P		R	
q_0^P	$_$	add	$_$	S	
add	$_$	add	σ	R	$\forall \sigma \in \Sigma$ מגיעים לסוף המילה ואז מוסיפים אותיות באופן לא דטרמיניסטי.
add	$_$	back	$_$	L	חוזרים להתחלה.
back	σ	back		L	
back	$_$	q_0^L		R	עוברים למכונה M^L ובודקים אם המילה בשפה L .

אם המילה $uv \in \text{prefix}(L)$ $\Leftarrow \exists v \Leftarrow u \in \text{prefix}(L)$ כך ש-
 $\Leftarrow \exists$ חישוב שמנחש לכתוב בדיוק v לאחר u
 $\Leftarrow M^L$ מגיעה למצב acc
 $\Leftarrow M^P$ מגיעה למצב acc.

אם המילה $u \notin \text{prefix}(L)$ \Leftarrow לא משנה איזה v נוסיף, לא נגיע למילה בשפה L .
 \Leftarrow המכונה המקורית M^L לא תקבל את uv
 \Leftarrow המכונה שלנו M^P לא תקבל את u .

שימו לב, M^P מקבלת את השפה $\text{prefix}(L)$.

אבל היא לא מכריעה את $\text{prefix}(L)$.
 בשביל להכריע צריך שכל מילה שלא בשפה $\text{prefix}(L)$ תדחה, אבל \exists חישוב אחד שלא מגיע למצב rej וזה חישוב שלא עוצר, שנשאר במצב add כל הזמן ורק מוסיף אותיות.

2.4 שקילות חישוב של מכונה דטרמיניסטית ולא דטרמיניסטית

משפט 2.3: שקילות בין מ"ט דטרמיניסטית לבין מ"ט לא דטרמיניסטית

לכל מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית \exists מכונה דטרמיניסטית שקולה.

הוכחה:

תהי N מ"ט לא דטרמיניסטית.

נבנה M מ"ט דטרמיניסטית שקולה.

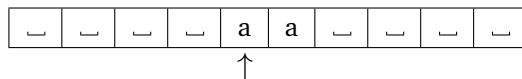
הרעיון הבניה הוא שהמ"ט דטרמיניסטית תנסה את כל החישובים של הטט"לד אחד אחד. אם המט"ד מגלה חישוב שעובר ל- acc אז נקבל. אם היא מגלה שכל החישובים מובילים ל- rej אז נדחה.

2.2 דוגמה

נתונה הטבלת המעברים של מטל"ד

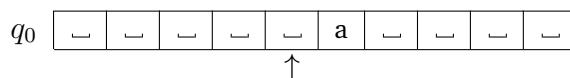
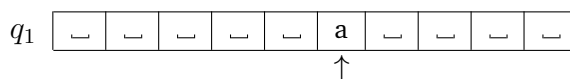
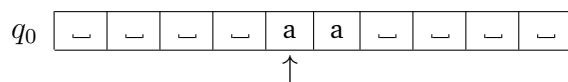
	תזוזה	כתיבה	חדש מצב	סימון	מצב
1	R	a	q_0	a	q_0
2	R	$_$	q_1	a	q_0
3	R	a	q_1	a	q_0
4	L	a	q_0	a	q_0
1	L	$_$	acc	$_$	q_0
1	L	a	q_0	a	q_1
2	R	a	q_1	a	q_1
1	R	a	rej	$_$	q_1
2	L	a	q_1	$_$	q_1

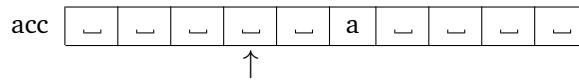
נתון הקלט:



ריצה אפשרית על הקלט הינה

$$_ q_0 a a _ \xrightarrow{2} _ _ q_1 a _ \xrightarrow{1} _ q_0 _ a _ \xrightarrow{1} acc _ _ a _$$

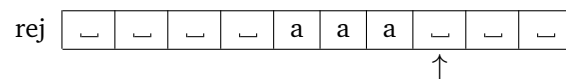
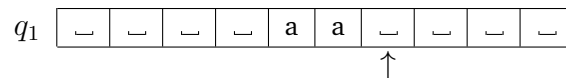
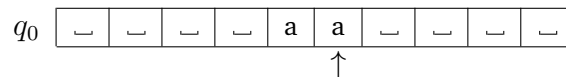
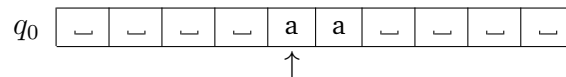




החישוב הגיע למצב מקבל.

ריצה אחרת אפשרית על הקלט הינה

$$_ q_0 a a _ \xrightarrow{1} _ a q_0 a _ \xrightarrow{3} _ a a q_1 _ \xrightarrow{1} _ a a a \text{ rej } _$$



החישוב הגיע למצב דוחה.

בסה"כ \exists סדרת בחירות שמובילה למצב acc
ו- \exists סדרת בחירות שמובילה למצב rej.

מכונת טיורינג היא אי-דטרמיניסטית אם היא קובעת בעצמה את הבחירות שלה כאשר יש מספר אפשרויות לבצע צעד.

כדי להפוך אותה למט"ד אנחנו נקבע את הבחירות והיא לא תבחר בצורה אי-דטרמיניסטית.

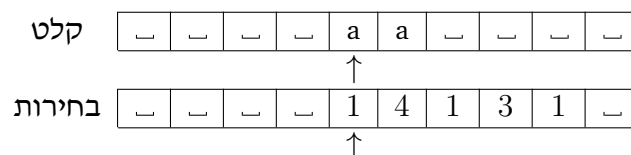
כשלב ביניים להסבר, נעבור למכונה עם 2 סרטים: סרט הקלט וסרט הבחירות.

סרט הבחירות יכלול סדרת מספרים שהיא בחירה ספציפית של מעברים. כך המ"ט לא תהיה יותר אי-דטרמיניסטית.

סרט הבחירות יקבע מה לעשות בכל שלב בחישוב.

המכונה עובדת על סרט הקלט ובכל צעד מבצעת את מה שכתוב על סרט הבחירות.

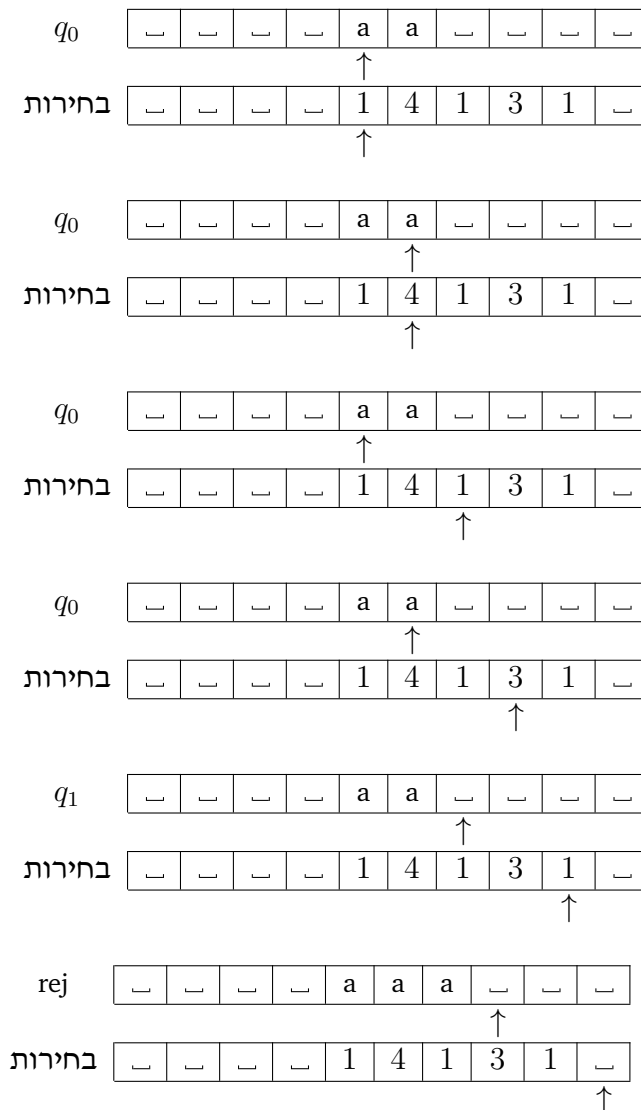
דוגמה 2.3



	מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה
1	q_0	a	q_0	a	R
2	q_0	a	q_1	␣	R
3	q_0	a	q_1	a	R
4	q_0	a	q_0	a	L
1	q_0	␣	acc	␣	L
1	q_1	a	q_0	a	L
2	q_1	a	q_1	a	R
1	q_1	␣	rej	a	R
2	q_1	␣	q_1	a	L

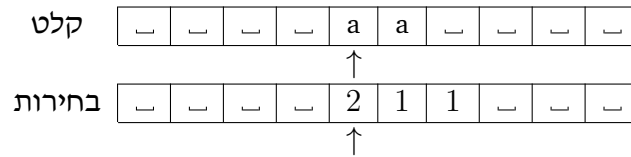
ההוספה של סרט הבחירות הופכת את המ"ט למט"ד ונקבל את הריצה הבאה על הקלט aa:

␣ q_0 a a ␣ ␣ $\xrightarrow{1}$ ␣ a q_0 a ␣ ␣ $\xrightarrow{4}$ ␣ q_0 a a ␣ ␣ $\xrightarrow{1}$ ␣ a q_0 a ␣ ␣
 $\xrightarrow{3}$ ␣ a a q_1 ␣ ␣ $\xrightarrow{1}$ ␣ a a a rej ␣



החישוב הסתיים במצב דחייה.

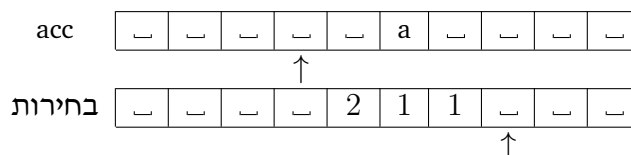
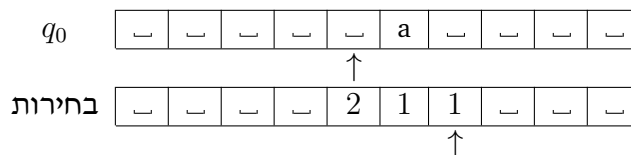
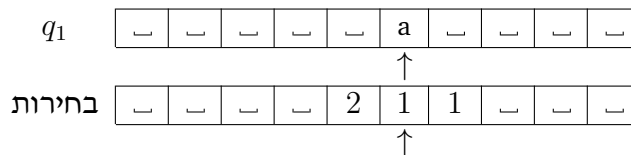
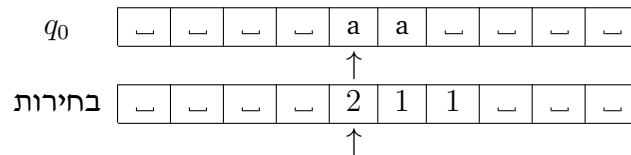
2.4 דוגמה



	מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה
1	q_0	a	q_0	a	R
2	q_0	a	q_1	␣	R
3	q_0	a	q_1	a	R
4	q_0	a	q_0	a	L
1	q_0	␣	acc	␣	L
1	q_1	a	q_0	a	L
2	q_1	a	q_1	a	R
1	q_1	␣	rej	a	R
2	q_1	␣	q_1	a	L

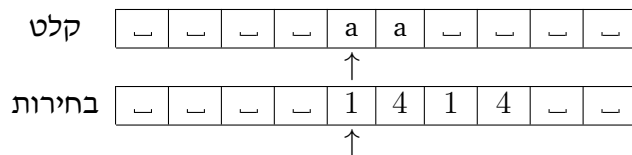
ההוספה של סרט הבחירות הופכת את המ"ט למט"ד ונקבל את הריצה הבאה על הקלט aa:

␣ q_0 a a ␣ ␣ $\xrightarrow{2}$ ␣ ␣ q_1 a ␣ ␣ $\xrightarrow{1}$ ␣ q_0 ␣ a ␣ ␣ $\xrightarrow{1}$ acc ␣ ␣ a ␣ ␣



החישוב הסתיים במצב קבלה.

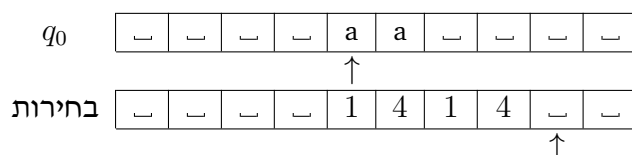
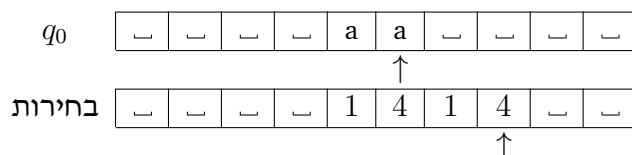
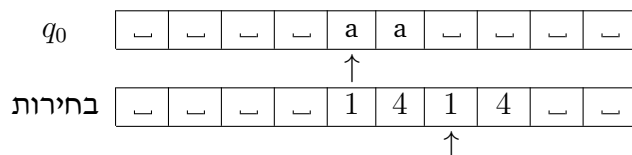
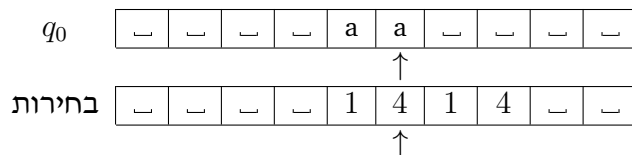
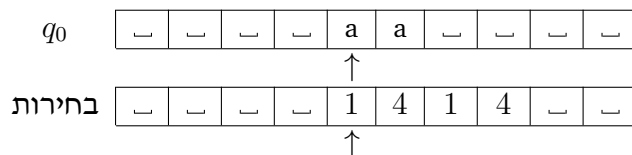
דוגמה 2.5



	מצב	סימון	חדש מצב	כתיבה	תזוזה
1	q_0	a	q_0	a	R
2	q_0	a	q_1	␣	R
3	q_0	a	q_1	a	R
4	q_0	a	q_0	a	L
1	q_0	␣	acc	␣	L
1	q_1	a	q_0	a	L
2	q_1	a	q_1	a	R
1	q_1	␣	rej	a	R
2	q_1	␣	q_1	a	L

ההוספה של סרט הבחירות הופכת את המ"ט למט"ד ונקבל את הריצה הבאה על הקלט aa:

$$_ q_0 \ a \ a \ _ _ \xrightarrow{2} _ _ q_1 \ a \ _ _ \xrightarrow{1} _ q_0 \ _ a \ _ _ \xrightarrow{1} \text{acc} \ _ _ a \ _ _$$



החישוב הסתייסבלי להגיע למצב עצירה.

כיצד תעבוד המכונה הדטרמיניסטית?

הסדרה בסרט הבחירות קובעת את סדרת הבחירות לביצוע בסרט הראשון. המכונה הזו היא מכונה דטרמיניסטית. בסרט הבחירות התנועה היא תמיד ימינה, כי מדובר בבחירות שעושים בזו אחר זו בכל צעד וצעד. בסרט הקלט התזוזה יכולה להיות לכל כיוון.

הרעיון הוא שהמכונה תייצר את כל סדרות הבחירות האפשריות. לכל סדרת בחירות, המכונה תריץ את החישוב כפי שראינו. כך המכונה תמשיך עד שתמצא חישוב שמגיע למצב קבלה. אם תמצא כזה היא תעבור לקבלה. ואם לא, אז המכונה תמשיך לחפש, עוד חישוב ועוד חישוב. למכונה יהיה סרט נוסף שיקרא כספת הקלט. הוא ישמור גרסא מקורית של הקלט. את הקלט נעתיק בכל סבב מכספת הקלט (הסרט העליון) לסרט העבודה (הסרט האמצעי).