

שיעור 7

אי-כריעות

7.1 השפות L_d, L_{halt}, L_{acc} לא כריעות

הגדרה 7.1 L_{acc}

$$L_{acc} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} \in RE \setminus R$$

הגדרה 7.2 L_{halt}

$$L_{halt} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ עוצרת על } w \} \in RE \setminus R$$

הגדרה 7.3 L_d

$$L_d = \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \} \notin RE$$

משפט 7.1 $L_{acc} \in RE$

$$L_{acc} \in RE .$$

הוכחה: מכיוון ש- $L(U) = L_{acc}$, כאשר U המכונת טיורינג האוניברסלית אשר מקבלת את L_{acc} , לכן $L_{acc} \in RE$.

משפט 7.2 $L_{halt} \in RE$

$$L_{halt} \in RE .$$

הוכחה: נבנה מ"ט U' שהיא למעשה U פרט למקום שבו U עצרה ודחתה, U' תעצור ותקבל.

נוכיח כי U' מקבלת את L_{halt} :

אם $x \in L_{halt}$

$\Leftarrow x = \langle M, w \rangle$ ו- M עוצרת על w

$\Leftarrow U'$ עוצרת ומקבלת את x .

אם $x \notin L_{\text{halt}} \Leftarrow$ שני מקרים:

• $U' \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$ דוחה את x .

• $x = \langle M, w \rangle$ ו- M לא עוצרת על $w \Leftarrow U'$ לא עוצרת על x .

משפט 7.3 $L_d \notin RE$

$$L_d \notin RE .$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי $L_d \in RE$.

$\Leftarrow \exists$ מ"ט M_d המקבלת את L_d .

$\Leftarrow L(M_d) = L_d$.

נבדוק ריצה של M_d על $\langle M_d \rangle$:

• אם $\langle M_d \rangle \in L(M_d) \Leftarrow \langle M_d \rangle \notin L_d \Leftarrow L(M_d) \neq L_d$.

• אם $\langle M_d \rangle \notin L(M_d) \Leftarrow \langle M_d \rangle \in L_d \Leftarrow L(M_d) \neq L_d$.

בשני המקרים קיבלנו סתירה לכך ש- $L(M_d) = L_d$ ולכן $L_d \notin RE$.

משפט 7.4 L_{acc} לא כריעה

$$L_{\text{acc}} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} \notin R .$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי $L_{\text{acc}} \in R$ ותהי M_{acc} המ"ט המכריעה את L_{acc} .

נשתמש ב- M_{acc} כדי לבנות מ"ט M_d המכריעה את L_d (בסתירה לכך ש- $L_d \notin RE$ כפי שהוכחנו במשפט 7.3).

$$L_d = \{ \langle M, w \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \} .$$



התאור של M_d

$M_d = \text{על קלט } x$

(1) בודקת האם $x = \langle M \rangle$. אם לא \Leftarrow דוחה.

(2) מחשבת את $\langle \langle x \rangle \rangle = \langle \langle M \rangle \rangle$.

(3) מריצה את M_{acc} על הזוג $\langle M, \langle M \rangle \rangle$:

• אם M_{acc} מקבלת $M_d \Leftarrow$ דוחה.

• אם M_{acc} דוחה $M_d \Leftarrow$ מקבלת.

כעת נוכיח כי M_d מכריעה את L_d :

אם $x \in L_d$

$\Leftarrow x = \langle M \rangle$ ו- $\langle M \rangle \notin L(M)$

$\Leftarrow M_{acc}$ דוחה את הזוג $\langle M, \langle M \rangle \rangle$

$\Leftarrow M_d$ מקבלת את x .

אם $x \notin L_d$ שני מקרים:

מקרה (1): $x \neq \langle M \rangle \Leftarrow M_d$ דוחה את x .

מקרה (2): $x = \langle M \rangle$ ו- $\langle M \rangle \in L(M)$

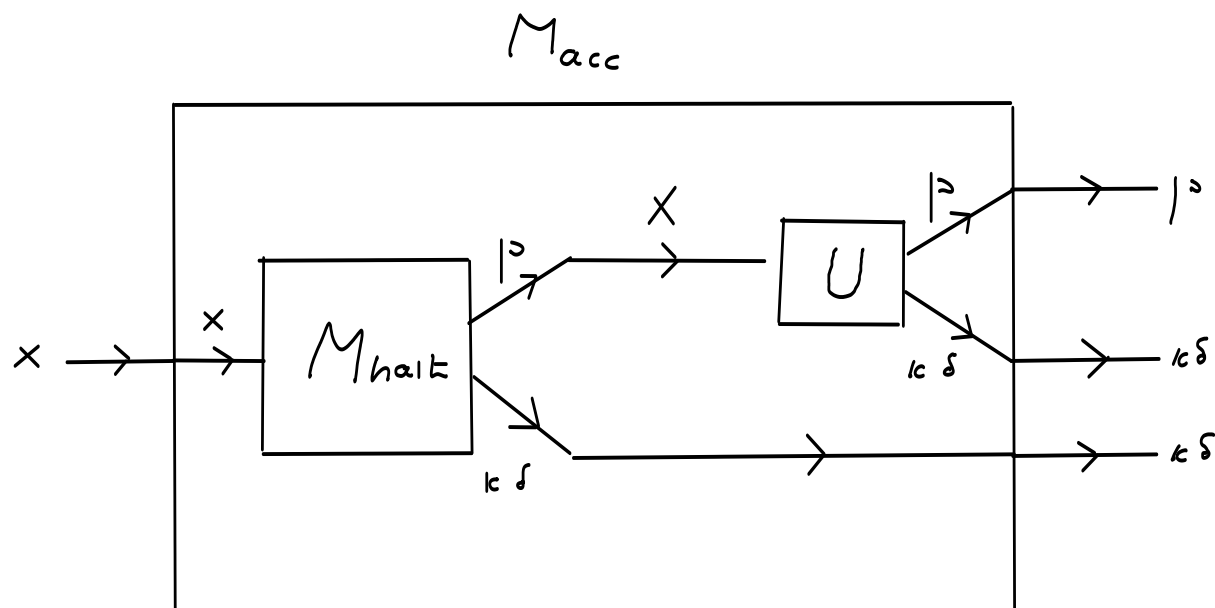
$\Leftarrow M_{acc}$ מקבלת את זוג $\langle M, \langle M \rangle \rangle$

$\Leftarrow M_d$ דוחה את x .

משפט 7.5 L_{halt} לא כריעה

$$L_{\text{halt}} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ עוצרת על } w \} \notin R.$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי $L_{\text{halt}} \in R$ ותהי M_{halt} מ"ט המכריעה את L_{halt} .נשתמש ב- M_{halt} כדי לבנות מ"ט M_{acc} המכריעה את L_{acc} (בסתירה לכך ש- $L_{\text{acc}} \notin R$ כפי שהוכחנו במשפט 7.4).התאור של M_{acc} M_{acc} = על קלט x :(1) מריצה את M_{halt} על x .

- אם M_{halt} דוחה $\Leftarrow M_{\text{acc}}$ דוחה.
- אם M_{halt} מקבלת $\Leftarrow M_{\text{acc}}$ מריצה את U על x ועונה כמוה.

אבחנהנוכיח כי M_{acc} מכריעה את L_{acc} :אם $x \in L_{\text{acc}}$

$$\Leftarrow x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } \langle w \rangle \in L(M)$$

$$\Leftarrow M_{\text{halt}} \text{ מקבלת את } x \text{ וגם } U \text{ מקבלת את } x$$

$$\Leftarrow M_{\text{acc}} \text{ מקבלת את } x.$$

אם $x \notin L_{acc} \Leftarrow$ שני מקרים:

מקרה (1): $x \neq \langle M, w \rangle$

M_{halt} דוחה את $x \Leftarrow$

M_{acc} דוחה את $x \Leftarrow$

מקרה (2): $x = \langle M, w \rangle$ ו- $\langle w \rangle \notin L(M) \Leftarrow$ שני מקרים:

מקרה (א): M לא עוצרת על $w \Leftarrow M_{halt}$ דוחה את $x \Leftarrow M_{acc}$ דוחה את x .

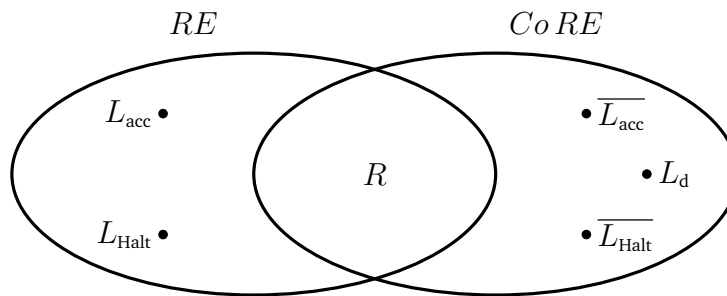
מקרה (ב): M דוחה את $w \Leftarrow M_{halt}$ מקבלת את x אבל U דוחה את $x \Leftarrow M_{acc}$ דוחה את x .

הראנו כי M_{acc} מכריעה את L_{acc} בסתירה לכך ש- $L_{acc} \notin R$.

לכן $L_{halt} \notin R$.

משפט 7.6

$$\begin{aligned} L_{acc} \in RE \setminus R &\Rightarrow \bar{L}_{acc} \notin RE, \\ L_{halt} \in RE \setminus R &\Rightarrow \bar{L}_{halt} \notin RE, \\ L_d \notin RE \setminus R. \end{aligned}$$



7.2 השפה L_E לא כריעה

הגדרה 7.4 השפה L_E

$$L_E = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset \}.$$

משפט 7.7 $L_E \notin R$

$$L_E \notin R.$$

כלומר L_E לא כריעה.

הוכחה:

נניח בשלילה כי L_E כריעה. אז נבנה מ"ט M_{acc} המכריעה את L_{acc} באופן הבא.

בנייה של M_w

ראשית נגדיר את המ"ט M_w :

$$M_w = \text{על כל קלט } x:$$

(1) אם $x \neq w \Leftarrow$ דוחה.

(2) אם $x = w$ אז מריצה M על w ועונה כמוה.

אבחנה

אם $x = w$ ו- M מקבלת את w אז $L(M_w) = \Sigma^*$

אם $x \neq w$ או אם $x = w$ ו- M דוחה את w אז $L(M_w) = \emptyset$

בנייה של M_{acc}

נניח כי קיימת מ"ט M_E המכריעה את L_E . אז נבנה מ"ט M_{acc} המכריעה את L_{acc} :

$$M_{\text{acc}} = \text{על כל קלט } x:$$

(1) אם $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow$ דוחה.

(2) אם $x = \langle M, w \rangle$, בעזרת התאור $\langle M, w \rangle$, בונה מ"ט M_w .

(3) מריצה M_E על $\langle M_w \rangle$:

(4) • אם M_E מקבלת \Leftarrow דוחה.

• אם M_E דוחה \Leftarrow מקבלת.

נכונות

אם $x \in L_{\text{acc}} \Leftarrow x = \langle M, w \rangle \Leftarrow x = \langle M, w \rangle$ ו- $w \in L(M) \Leftarrow L(M_w) = \Sigma^* \neq \emptyset \Leftarrow M_E$ דוחה $\langle M_w \rangle$ מקבלת. M_{acc}

אם $x \notin L_{\text{acc}} \Leftarrow$ שני מקרים:

מקרה 1: $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow L(M_w) = \emptyset \Leftarrow M_E$ מקבלת $\langle M_w \rangle \Leftarrow M_{\text{acc}}$ דוחה.

מקרה 2: $x = \langle M, w \rangle$ ו- $w \notin L(M) \Leftarrow L(M_w) = \emptyset \Leftarrow M_E$ מקבלת $\langle M_w \rangle \Leftarrow M_{\text{acc}}$ דוחה.

לסיכום:

אם L_E כריעה אז אפשר לבנות מ"ט M_{acc} המכריעה את L_{acc} בסתירה לכך ש- $L_{\text{acc}} \notin R$.
לכן $L_E \notin R$

משפט 7.8 $L_E \notin RE$

$L_E \notin RE$

הוכחה:
הרעיון

נבנה מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית N המקבלת את

$$\bar{L}_E = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \neq \emptyset \}.$$

N = על קלט x :

(1) אם $\langle M \rangle \neq x$ דוחה.

(2) אם $x = \langle M \rangle$ אז N בוחרת מילה $w \in \Sigma^*$ באופן אי-דטרמיניסטית.

(3) מריצה M על w .

• אם M מקבלת N מקבלת.

• אם M דוחה N דוחה.

הוכחת הנכונות

אם $x \in \bar{L}_E$

$$\Leftrightarrow x = \langle M \rangle \text{ ו- } L(M) \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \text{קיימת מילה } w \in \Sigma^* \text{ כך ש- } w \in L(M)$$

$$\Leftrightarrow \exists \text{ ניחוש } w \in \Sigma^* \text{ כך ש- } M \text{ מקבלת את } w$$

$$\Leftrightarrow \text{קיים חישוב של } N \text{ המקבל את } \langle M \rangle = x$$

$$\Leftrightarrow x \in L(N)$$

לכן קיימת מ"ט א"ד N המקבלת את השפה \bar{L}_E לכן $\bar{L}_E \in RE$.

כעת נוכיח כי $L_E \notin RE$.

נניח בשלילה כי $L_E \in RE$. הוכחנו למעלה ש- $\bar{L}_E \in RE$. לכן לפי משפט 6.1, $L_E \in R$.

זו בסתירה לכך ש- $L_E \notin R$.

לכן $L_E \notin RE$.

■

7.3 השפה L_{EQ} לא כריעה

הגדרה 7.5 L_{EQ}

$$L_{EQ} = \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2) \}$$

משפט 7.9 $L_{EQ} \notin R$

$$L_{EQ} \notin R$$

השפה L_{EQ} לא כריעה.

הוכחה:

נניח בשלילה כי L_{EQ} כריעה. תהי M_{EQ} מ"ט המכריעה את L_{EQ} . אז נבנה מ"ט M_E המכריעה את L_E באופן הבא.

בנייה של M_E

$$M_E = \text{על כל קלט } x:$$

(1) אם $x \neq \langle M \rangle \Leftarrow$ דוחה.

(2) אם $x = \langle M \rangle$, מריצה M_{EQ} על $\langle M, M_\emptyset \rangle$ כאשר M_\emptyset המ"ט שדוחה כל קלט.

(3) • אם M_{EQ} מקבלת \Leftarrow מקבלת.

• אם M_{EQ} דוחה \Leftarrow דוחה.

נכונות

אם $x \in L_E$

$$\Leftarrow x = \langle M \rangle \text{ ו- } L(M) = \emptyset$$

$$\Leftarrow L(M) = L(M_\emptyset)$$

$$\Leftarrow \langle M, M_\emptyset \rangle \in L_{EQ}$$

$$\Leftarrow M_{EQ} \text{ מקבלת } \langle M, M_\emptyset \rangle$$

$$\Leftarrow M_E \text{ מקבל.}$$

אם $x \notin L_E$ שני מקרים:

מקרה 1: $x \neq \langle M \rangle \Leftarrow M_E$ דוחה.

מקרה 2: $x = \langle M \rangle \Leftarrow L(M) \neq \emptyset$

$$\Leftarrow L(M) \neq L(M_\emptyset)$$

$$\Leftarrow \langle M, M_\emptyset \rangle \notin L_{EQ}$$

$$\Leftarrow M_{EQ} \text{ דוחה } \langle M, M_\emptyset \rangle$$

$$\Leftarrow M_E \text{ דוחה.}$$

לסיכום:

אם L_{EQ} כריעה אז אפשר לבנות מ"ט M_E המכריעה את L_E בסתירה למשפט 7.7 האומר ש- $L_E \notin R$.
לכן $L_{EQ} \notin R$.

משפט 7.10 $L_{EQ} \notin RE$

$$L_{EQ} \notin RE$$

L_{EQ} לא קבילה.

הוכחה:

נניח בשלילה כי L_{EQ} קבילה. תהי M_{EQ} מ"ט המקבלת את L_{EQ} . אז נבנה מ"ט M_E המקבלת את L_E באופן הבא.

בנייה של M_E

$$M_E = \text{על כל קלט } x:$$

(1) אם $\langle M \rangle \neq x \Leftarrow$ דוחה.

(2) אם $x = \langle M \rangle$, מריצה M_{EQ} על $\langle M, M_\emptyset \rangle$ כאשר M_\emptyset המ"ט שדוחה כל קלט.

(3) • אם M_{EQ} מקבלת \Leftarrow מקבלת.

נכונות

אם $x \in L_E$

$$\Leftarrow \langle M \rangle = x \text{ ו- } L(M) = \emptyset$$

$$\Leftarrow L(M) = L(M_\emptyset)$$

$$\Leftarrow \langle M, M_\emptyset \rangle \in L_{EQ}$$

$$\Leftarrow M_{EQ} \text{ מקבלת } \langle M, M_\emptyset \rangle$$

$$\Leftarrow M_E \text{ מקבל.}$$

לסיכום:

אם L_{EQ} קבילה אז אפשר לבנות מ"ט M_E המקבלת את L_E בסתירה למשפט 7.8 האומר ש- $L_E \notin RE$.
לכן $L_{EQ} \notin RE$.

משפט 7.11 $\bar{L}_{EQ} \notin RE$

$$\bar{L}_{EQ} \notin RE.$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי \bar{L}_{EQ} קבילה. תהי M_{EQ} מ"ט המקבלת את \bar{L}_{EQ} . אז נבנה מ"ט M_{acc} המקבלת את \bar{L}_{acc} באופן הבא.

בנייה של M_1

ראשית נגדיר מ"ט M_1 באופן הבא:

$$M_1 = \text{על קלט } x:$$

(1) מריצה M על w ועונה כמוה.

בנייה של M_{acc}

$$M_{acc} = \text{על כל קלט } x:$$

(1) אם $\langle M, w \rangle \neq x \Leftarrow$ מקבלת.

(2) אם $x = \langle M, w \rangle$ אז בונה M_1 .

(3) מריצה $M_{\overline{EQ}}$ על $\langle M_1, M^* \rangle$ כאשר M^* המ"ט שמקבלת כל קלט.

(4) • אם $M_{\overline{EQ}}$ מקבלת \Leftarrow מקבלת.

נכונות

אם $x \in L_{\overline{acc}}$

$\Leftarrow M$ לא מקבלת w

$\Leftarrow L(M_1) = \emptyset$

$\Leftarrow \langle M_1, M^* \rangle \in L_{\overline{EQ}}$

$\Leftarrow M_{\overline{EQ}}$ מקבלת $\langle M_1, M^* \rangle$

$\Leftarrow M_{\overline{acc}}$ מקבל.

לסיכום:

אם $L_{\overline{EQ}}$ קבילה אז אפשר לבנות מ"ט $M_{\overline{acc}}$ המקבלת את $L_{\overline{acc}}$ בסתירה למשפט 7.6 האומר ש- $L_{\overline{acc}} \notin RE$.
לכן $L_{\overline{EQ}} \notin RE$.

7.4 סיכום: כריעות וקבילות של שפות

| קבילה | כריעה | |
|-------|-------|---------------------------------|
| ✓ | × | $L_{\overline{acc}}$ |
| × | × | $\overline{L_{\overline{acc}}}$ |
| × | × | L_d |
| ✓ | × | L_{Halt} |
| × | × | $\overline{L_{\text{Halt}}}$ |
| × | × | L_E |
| ✓ | × | $\overline{L_E}$ |
| × | × | L_{EQ} |
| × | × | $\overline{L_{\text{EQ}}}$ |
| × | × | L_{REG} |
| × | × | L_{NOTREG} |