חישוביות וסיבוכיות

מועד ב'

ד"ר ירמיהו מילר, .

סמסטר ב, תשפ"ה'

מספר העמוד הנוכחי ומספר העמודים הכולל בשאלון מופיעים בתחתית כל עמוד. בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות

שאלוני בחינה

- ☑ לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ☐ לשאלון הבחינה יש לצרף כריכה בלבד.
- ☐ יש להחזיר את השאלון ביחד עם המחברת/כריכה.

שימוש במחשבונים

- ☐ ניתן להשתמש במחשבון.
- ☑ לא ניתן להשתמש במחשבון.

חומר עזר

- ☑ לא ניתן להשתמש בחומר עזר כלל.
- ☐ ניתן להשתמש בחומר עזר/דף נוסחאות, כמפורט:
- ☐ הבחינה עם חומר פתוח ⍰ מותר להשתמש בכל חומר עזר מודפס או כתוב.

הנחיות רגילות

נא קראו בעיון את ההנחיות הבאות בטרם תתחילו לפתור את הבחינה. מומלץ לקרוא בקצרה את כלל השאלות לפני שמתחילים לפתור את הבחינה. ניתן לענות על השאלות בכל סדר שתרצו.

1. המבחן כולל 5 שאלות. יש לענות על כולן.
2. שאלות הבחינה שוות משקל - כל שאלה 20 נקודות.
3. כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תדלגו על שלבים.
4. המבחן כולל נספחים, לשימושכם. הסתייעו בהם במידת הצורך.
5. הקפידו על כתב יד ברור וקריא.
6. הקפידו לרשום בגדול ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
7. כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבלתם. רק הן נבדקות !
8. ניתן לקחת את השאלון כאשר הבחינה מסתיימת.

בהצלחה!

הנחיות פרטניות למילואימניקים

נא קראו בעיון את ההנחיות הבאות בטרם תתחילו לפתור את הבחינה. מומלץ לקרוא בקצרה את כלל השאלות לפני שמתחילים לפתור את הבחינה. ניתן לענות על השאלות בכל סדר שתרצו.

1. המבחן כולל 5 שאלות. יש לענות על 4 מתוך ה-5 שאלות.
2. שאלות הבחינה שוות משקל - כל שאלה 25 נקודות.
3. מילואימניק יכתוב בדפים שנסרקים - "משויך למתווה המילואים".
4. כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תדלגו על שלבים.
5. המבחן כולל נספחים, לשימושכם. הסתייעו בהם במידת הצורך.
6. הקפידו על כתב יד ברור וקריא.
7. הקפידו לרשום בגדול ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
8. כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבלתם. רק הן נבדקות !
9. ניתן לקחת את השאלון כאשר הבחינה מסתיימת.

בהצלחה!

הבחינה

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

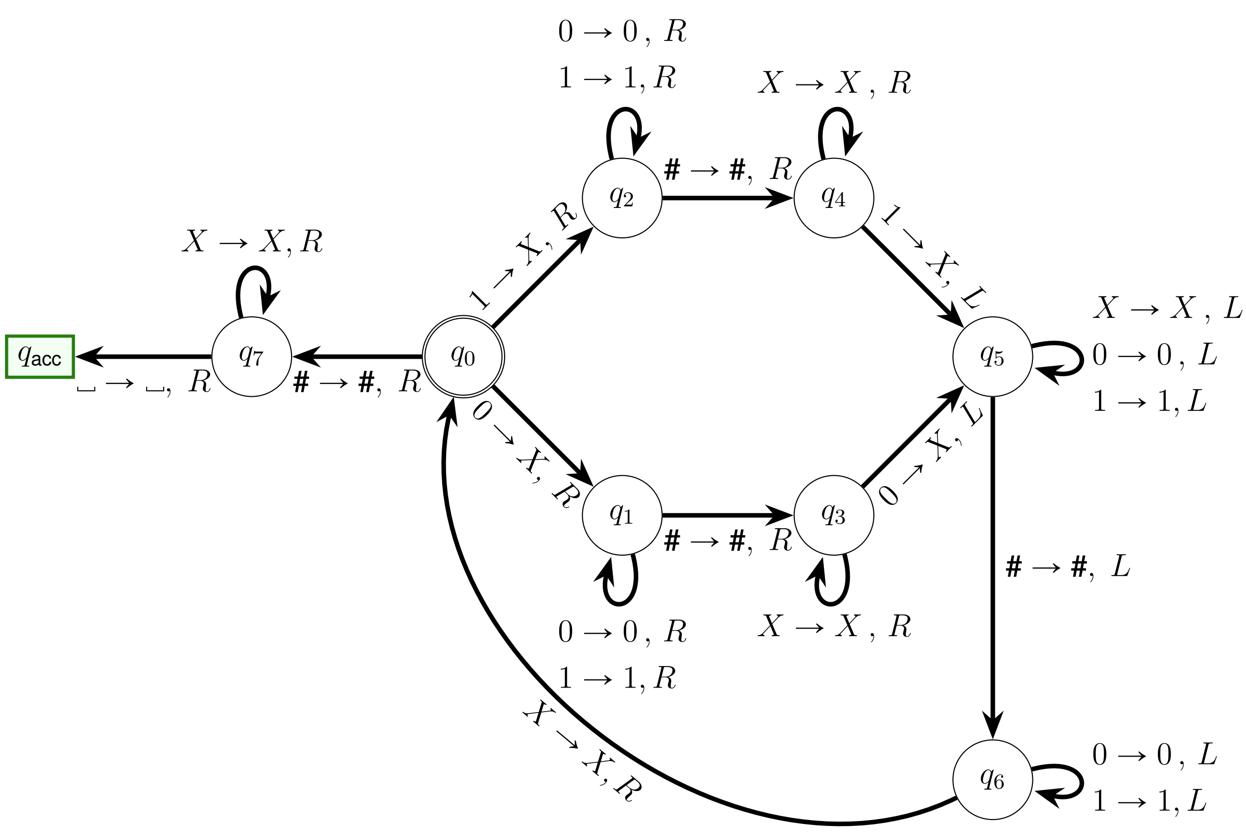
נתונה השפה הבאה:

$$L = \left\{ w \in \{a,b\}^* \,\middle|\, \#a_w > \#b_w \right\}$$

תארו מכונת טיורינג עם סרט יחיד שמכריעה את השפה בעזרת תרשים מצבים בלבד ולא בדרכים אחרות.

סעיף ב' (10 נקודות)

בתרשים הבא, נתונה מכונת טיורינג $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$. האלפבית של הקלט היא $\Sigma = \{0, 1, \#\}$ והאלפבית של הסרט היא $\Gamma = \{0, 1, \#, X, \sqcup\}$. מהי השפה שהמכונה M מקבלת?
כל המעברים שאינם מצויינים בתרשים עוברים למצב דחיה.



שאלה 2: סגירות של שפות כריעות (20 נקודות)

תהיינה L_1, L_2 שתי שפות. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות.

סעיף א' (10 נקודות)

אם $L_1, L_2 \in RE$ אז $L_1 \cup L_2 \in RE$.

סעיף ב' (10 נקודות)

אם $L_1, L_2 \in R$ אז $L_1 \cap L_2 \in R$.

שאלה 3: אי כריעות (20 נקודות)

סעיף א' (12 נקודות)

נתונה השפה הבאה:

$$\hat{L} = \left\{ \langle M_1, M_2 \rangle \;\middle|\; L(M_1) \subset L(M_2) \text{ עבורן } M_1, M_2 \text{ מכונות טיורינג} \right\}$$

הוכיחו כי $\hat{L} \notin R$.

סעיף ב' (8 נקודות)

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה ע"י דוגמה נגדית:

לכל שלוש שפות L_1, L_2, L_3 אם $L_1 \leqslant L_2$ וגם $L_1 \leqslant L_3$ אזי $L_1 \leqslant (L_2 \cup L_3)$.

שאלה 4: NP - שלמות (20 נקודות)

לכל אחת מהטענות הבאות, הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

סעיף א' (5 נקודות)

אם $L_1 \cap L_2 \in R$ אזי $L_1 \in RE$ או $L_2 \in Co\,RE$.

סעיף ב' (5 נקודות)

לכל שתי שפות L_1 ו- L_2 כך ש- $L_1 \subset L_2$, אם $L_2 \backslash L_1 \in RE$, אזי $L_1 \in RE$ או $L_2 \in RE$.

סעיף ג' (5 נקודות)

$L_{\text{halt}} \backslash L_{\text{acc}} \in RE$.

סעיף ד' (5 נקודות)

לכל שתי שפות L_1 ו- L_2, אם $L_1 \leqslant L_{\text{acc}}$ וגם $L_2 \leqslant L_{\text{acc}}$ אזי $(L_1 \cup L_2) \leqslant L_{\text{acc}}$.

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$. תת-קבוצת קודקודים $U \subseteq V$ היא **כיסוי קודקודים** אם התנאי הבא מתקיים:
אם $(u_1,u_2) \in E$ **אז** $u_1 \in U$ **או** $u_2 \in U$.

הבעיית VC מוגדרת באופן הבא:

קלט: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k.

פלט: האם G מכיל כיסוי בקודקודים בגודל k?

$$VC = \left\{ \langle G,k \rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל כיסוי קודקודים בגודל } k \text{ } G \right\}$$

הבעיית SC מוגדרת באופן הבא:

קלט:
- אוסף S של קבוצות סופיות: $S=\{s_1 , \quad \ldots \quad , s_m\}$.
S מכילה m קבוצות כך שהאיחוד של כל הקבוצות היא קבוצה $U=s_1 \cup \cdots \cup s_m$ בעלת n איברים.
- מספר טבעי k.

פלט: האם קיים כיסוי קבוצות בגודל k?

$$SC = \left\{ \langle S,k \rangle \;\middle|\; \text{אוסף קבוצות המכיל כיסוי קבוצות בגודל } k \text{ } S \right\}$$

הוכיחו כי:

$$VC \leqslant_P SC \ .$$

תוכן העניינים

1 מכונות טיורינג

הגדרה 1: מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעיה $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ כאשר:

Q	קבוצת מצבים סופית ולא ריקה	
Σ	א"ב הקלט סופי	$\_ \notin \Sigma$
Γ	א"ב הסרט סופי	$\Sigma \cup \{\_\} \subseteq \Gamma$
δ	פונקציית המעברים	$\delta : (Q \backslash \{q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}\} \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$
q_0	מצב התחלתי.	
q_{acc}	מצב מקבל יחיד.	
q_{rej}	מצב דוחה יחיד.	

הגדרה 2: קונפיגורציה

בהינתן מכונת טיורינג M ומילה $w \in \Sigma^*$. **קונפיגורציה** בריצה של M על w היא שלושה (u, q, v) (או $uq\text{v}$ לשם קיצור) כאשר:

- $u \in \Sigma^*$: המילה מתחילת הסרט עד (לא כולל) התו שמתחת לראש.
- $\text{v} \in \Sigma^*$: המילה שמתחילה מהתו שמתחת לראש ועד (לא כולל) ה- $\_$ הראשון.

הגדרה 3: גרירה בצעד אחד

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M. נסמן

$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם כשנמצאים ב- c_1 עוברים ל- c_2 בצעד בודד.

הגדרה 4: גרירה בכללי

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M. נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם ניתן לעבור מ- c_1 ל- c_2 ב- 0 או יותר צעדים.

הגדרה 5: קבלה ודחייה של מילה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $w \in \Sigma^*$ מחרוזת. אומרים כי

- M **מקבלת** את w אם $q_0 w \vdash_M^* u\, q_{\text{acc}}\, \text{v}$
- M **דוחה** את w אם $q_0 w \vdash_M^* u\, q_{\text{rej}}\, \text{v}$

עבור $\text{v}, u \in \Gamma^*$ כלשהם.

הגדרה 6: הכרעה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מכריעה** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים

- $w \in L \Leftarrow M$ מקבלת את w.

- $L \notin w \Leftarrow M$ דוחה את w.

הגדרה 7: קבלה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מקבלת** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים

- אם $w \in L$ אז M מקבלת את w.
- אם $w \notin L$ אז M לא מקבלת את w.

במקרה כזה נכתוב ש- $L(M) = L$.

הגדרה 8: מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה f

תהי $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ ותהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג. אומרים כי M מחשבת את f אם:

- $\Sigma = \Sigma_1$ ו- $\Sigma_2 \subset \Gamma$.
- לכל $w \in \Sigma_1^*$ מתקיים $q_0 w \vdash q_{\text{acc}} f(w)$.

הגדרה 9: מודלים שקולים חישובית

יהיו A ו- B מודלים חישוביים. אומרים כי A ו- B שקולים אם לכל שפה L מתקיימים:

1) קיימת מ"ט במודל A שמכריעה את L אם"ם קיימת מ"ט במודל B שמכריעה את L.
2) קיימת מ"ט במודל A שמקבלת את L אם"ם קיימת מ"ט במודל B שמקבלת את L.

הגדרה 10: מכונט טיורינג מרובת סרטים

מכונת טיורינג מרובת סרטים היא שביעייה:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר Q, Σ, Γ, q_0, q_{acc},q_{rej} מוגדרים כמו מ"ט עם סרט יחיד (ראו הגדרה 1).
ההבדל היחיד בין מ"ט עם סרט יחיד לבין מטב"ס הוא הפונקצית המעברים. עבור מטמ"ס הפונקצית המעברים היא מצורה הבאה:

$$\delta_k : (Q \backslash \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$$

הקונפיגורציה של מכונת טיורנג מרובת סרטים מסומנת $(u_1 q \ \mathsf{v}_1 \ , \ u_2 q \ \mathsf{v}_2 \ , \ \ldots \ , \ u_k q \ \mathsf{v}_k \ .)$

משפט 1: שקילות בין מ"ט מרובת סרטים למ"ט עם סרט יחיד

לכל מטמ"ס M קיימת מ"ט עם סרט יחיד M' השקולה ל- M.
כלומר, לכל קלט $w \in \Sigma^*$:

- אם M מקבלת את w $\Leftarrow$ M' מקבלת את w.
- אם M דוחה את w $\Leftarrow$ M' דוחה את w.
- אם M לא עוצרת על w $\Leftarrow$ M' לא עוצרת על w.

הגדרה 11: מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית (מ"ט א"ד) היא שביעייה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}$ מוגדרים כמו במ"ט דטרמיניסטי (ראו הגדרה 1).
Δ היא פונקצית המעברים

$$\Delta : (Q \backslash \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma \to P\left(Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}\right) \ .$$

$$\Delta(q, a) = \{(q_1, a, S) \ , \ (q_2, b, L) \ , \ \ldots\} \ .$$

כלומר, לכל זוג $q \in Q, \alpha \in \Gamma$ ייתכן מספר מעברים אפשריים, 0, 1 או יותר.

- קונפיגורציה של מ"ט א"ד זהה לקונפיגורציה של מ"ט דטרמיניסטית.
- לכל קונפיגורציה ייתכן מספר קונפיגורציות עוקבות.
- לכל מילה $w \in \Sigma^*$ ייתכן מספר ריצות שונות:
  - ריצות שמגיעות ל- q_{acc}.
  - ריצות שמגיעות ל- q_{rej}.
  - ריצות שלא עוצרות.
  - ריצות שנתקעות.

הגדרה 12: קבלה ודחייה של מילה ושפה של מכונט טיורינג אי דטרמיניסטית

מילה $w \in \Sigma^*$ מתקבלת במ"ט א"ד M אם קיימת לפחות ריצה אחת שמגיעה ל- q_{acc}. השפה של מ"ט א"ד M היא

$$L(M) = \left\{ w \in \Sigma^* \ \middle| \ \exists u, \mathsf{v} \in \Gamma^* \ : \ q_0 w \vdash_* \ u \ q_{\text{acc}} \ \mathsf{v} \right\}$$

כלומר:

- $w \in L(M)$ אם קיימת ריצה אחת שבה M מקבלת את w.
- $w \notin L(M)$ אם בכל ריצה של M על w, M דוחה או לא עוצרת, או נתקעת.

הגדרה 13: מ"ט אי דטרמיניסטית המכריעה שפה L

אומרים כי מ"ט אי דטרמיניסטית M מכריעה שפה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $w \in L \Leftarrow M$ מקבלת את w.
- אם $w \notin L \Leftarrow M$ דוחה את w.

הגדרה 14: מ"ט א"ד המקבלת שפה L

אומרים כי מ"ט אי דטרמיניסטית M מקבלת שפה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $w \in L \Leftarrow M$ מקבלת את w.
- אם $w \notin L \Leftarrow M$ דוחה את w או M לא עוצרת על w.

משפט 2: שקילות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטית ב- RE

לכל מ"ט א"ד N קיימת מ"ט דטרמיניסטית D כך ש-

$$L(N) = L(D)\ .$$

כלומר לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם N מקבלת את w $\Leftarrow$ D תקבל את w.
- אם N לא מקבלת את w $\Leftarrow$ D לא תקבל את w.

2 המחלקות החישוביות R, RE ו- $Co\,RE$ ותכונותן

הגדרה 15: כוכב קליני

בהינתן השפה L. השפה L^* מוגדרת:

$$L^* = \{\varepsilon\} \cup \left\{ w = w_1 w_2 \cdots w_k \;\middle|\; \forall\ 1 \leqslant i \leqslant k\ ,\ w_i \in L \right\}$$

הגדרה 16:

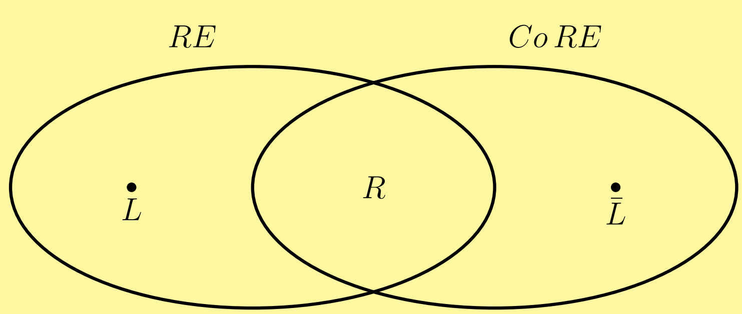
- אוסף השפות הכריעות מסומן R ומוגדר $R = \left\{ L \subseteq \Sigma^* \;\middle|\; \text{קיימת מ"ט המכריעה את } L \right\}$.
- אוסף השפות הקבילות מסומן R ומוגדר $RE = \left\{ L \subseteq \Sigma^* \;\middle|\; \text{קיימת מ"ט המקבלת את } L \right\}$.
- אוסף השפות שהמשלימה שלהן קבילה מסומן R ומוגדר $Co\,RE = \left\{ L \subseteq \Sigma^* \;\middle|\; \bar{L} \in RE \right\}$.

משפט 3: סגירות של השפות הכריעות והשפות הקבילות

- R סגורה תחת: **1)** איחוד **2)** חיתוך **3)** שרשור **4)** סגור קלין **5)** משלים.
- RE סגורה תחת: **1)** איחוד **2)** חיתוך **3)** שרשור **4)** סגור קלין.

משפט 4: תכונות של השפות החישוביות

1. אם $L \in RE$ וגם $\bar{L} \in RE$ אזי $L \in R$.
2. אם $L \in RE \backslash R$ אזי $\bar{L} \notin RE$ (כי $\bar{L} \in Co\,RE \backslash R$).
3. $RE \cap Co\,RE = R$.



הגדרה 17: מכונת טיורינג אוניברסלית
מ"ט אוניברסלית U מקבלת כקלט זוג, קידוד של מ"ט $\langle M\rangle$ וקידוד של מילה $\langle w\rangle$, ומבצעת סימולציה של ריצה של M על w ועונה בהתאם.

$$L(U)=\{\langle M,w\rangle \mid w\in L(M)\}\ .$$

3 אי-כריעות

משפט 5: סיווג שפות ידועות - חישוביות

	כריעה	קבילה
L_{acc}	×	✓
$\overline{L_{\text{acc}}}$	×	×
L_{d}	×	×
L_{Halt}	×	✓
$\overline{L_{\text{Halt}}}$	×	×
L_{E}	×	×
$\overline{L_{\text{E}}}$	×	✓
L_{EQ}	×	×
$\overline{L_{\text{EQ}}}$	×	×
L_{REG}	×	×
L_{NOTREG}	×	×

$L_{\text{acc}}=\{\langle M,w\rangle | w\in L(M)\}$ $\quad \in RE\backslash R$

$L_{\text{halt}}=\{\langle M,w\rangle |$ M עוצרת על w $\}$ $\quad \in RE\backslash R$

$L_M=\{\langle M\rangle ||$ M המקבלת את $\langle M\rangle$ $\}$ $\quad \in RE\backslash R$

$L_{\text{d}}=\{\langle M\rangle | \langle M\rangle\notin L(M)\}$ $\quad \in Co\,RE\backslash R$

$L_E=\{\langle M\rangle | L(M)=\varnothing\}$ $\quad \in Co\,RE\backslash R$

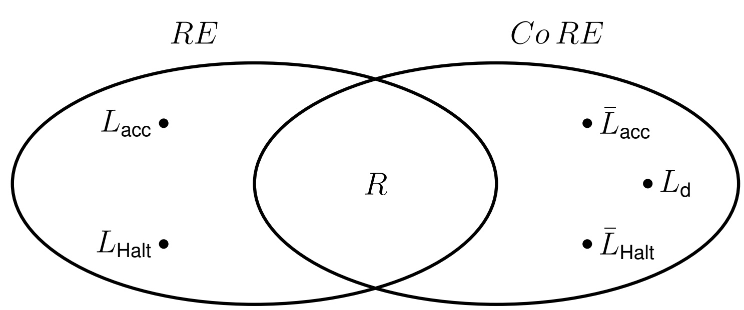
$L_{EQ}=\{\langle M_1,M_2\rangle | L(M_1)=L(M_2)\}$ $\quad \notin RE\backslash R, \notin Co\,RE\backslash R$

$L_{REG}=\{\langle M\rangle |$ $L(M)$ רגולרית $\}$ $\quad \notin RE\backslash R, \notin Co\,RE\backslash R$

$L_{NOTREG}=\{\langle M\rangle |$ $L(M)$ לא רגולרית $\}$ $\quad \notin RE\backslash R, \notin Co\,RE\backslash R$

משפט 6:

$$L_{\text{acc}}\in RE\backslash R \quad\Rightarrow\quad \bar{L}_{\text{acc}}\notin RE\ ,$$
$$L_{\text{halt}}\in RE\backslash R \quad\Rightarrow\quad \bar{L}_{\text{halt}}\notin RE\ ,$$
$$L_{\text{d}}\notin RE\backslash R\ .$$



4 רדוקציות

הגדרה 18: מ"ט המחשבת פונקציה
בהינתן פונקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ אומרים כי מ"ט M מחשבת את f אם לכל $x\in\Sigma^*$:
- M מגיעה ל- q_{acc} בסוף החישוב של $f(x)$ וגם
- על סרט הפלט של M רשום $f(x)$.

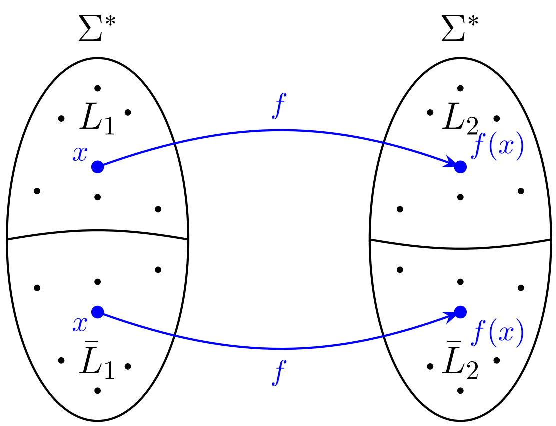
הגדרה 19: מ"ט המחשבת פונקציה
בהינתן פונקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ אומרים כי f חשיבה אם קיימת מ"ט המחשבת את f.

הגדרה 20: רדוקציה
בהינתן שתי שפות $L_1,L_2\subseteq\Sigma^*$ אומרים כי L_1 ניתנת לרדוקציה ל- L_2, ומסמנים

$$L_1\leqslant L_2\ ,$$

אם קיימת פונקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ המקיימת:
1) f חשיבה
2) לכל $x\in\Sigma^*$:

$$x\in L_1\quad\Leftrightarrow\quad f(x)\in L_2\ .$$



משפט 7: משפט הרדוקציה
לכל שתי שפות $L_1,L_2\subseteq\Sigma^*$, אם קיימת רדוקציה $L_1\leqslant L_2$ אזי

$$\begin{aligned}
L_1\in R &\quad\Leftarrow\quad L_2\in R\\
L_1\in RE &\quad\Leftarrow\quad L_2\in RE\\
L_1\in Co\,RE &\quad\Leftarrow\quad L_2\in Co\,RE\\
L_1\notin R &\quad\Rightarrow\quad L_2\notin R\\
L_1\notin RE &\quad\Rightarrow\quad L_2\notin RE\\
L_1\notin Co\,RE &\quad\Leftarrow\quad L_2\notin Co\,RE
\end{aligned}$$

משפט 8: תכונות של רדוקציה

- לכל שפה L מתקיים: $L \leqslant L$.
- אם $L_1 \leqslant L_2$ אזי $\bar{L}_1 \leqslant \bar{L}_2$.
- אם $L_1 \leqslant L_2$ וגם $L_2 \leqslant L_3$ אזי $L_1 \leqslant L_3$.
- לכל $L \in R$ ולכל L' שאינה $\varnothing, \Sigma^*$ מתקיים $L \leqslant L'$.

משפט 9: משפט רייס

עבור כל תכונה S של שפות שאינה טריויאלית מתקיים: $L_S \notin R$

- תכונה S לא טריויאלית היא קבוצה של שפות ב RE כך ש $S \neq RE$ וגם $S \neq \varnothing$.
- $L_S = \{\langle M \rangle \mid L(M) = S\}$.

5 סיבוכיות

משפט 10:

לכל מ"ט מרובת סרטים M הרצה בזמן $f(n)$, קיימת מ"ט סרט יחיד M' השקולה ל- M ורצה בזמן $O\left(f^2(n)\right)$.

משפט 11:

לכל מ"ט א"ד N הרצה בזמן $f(n)$, קיימת מ"ט דטרמיניסטית D השקולה ל- N ורצה בזמן $2^{(f(n))}$.

הגדרה 21: אלגוריתם אימות

אלגוריתם אימות עבור בעייה A הוא אלגוריתם V כך שלכל קלט $w \in \Sigma^*$ מתקיים:
$w \in A$ אם ורק אם קיימת מילה y באורך פולינומיאלי ב- $|w|$ כך ש- V מקבל את הזוג (w,y). כלומר:

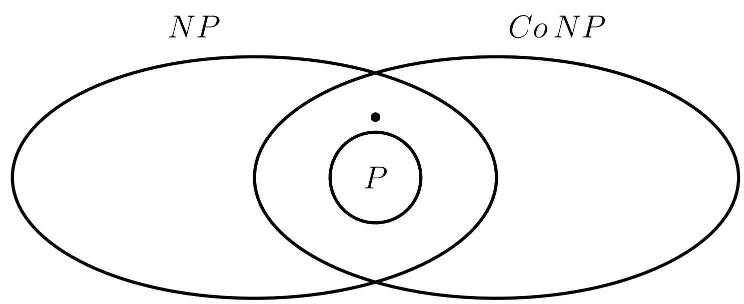
- אם $w \in A$ $\Leftarrow$ קיים $y \in \Sigma^*$ כך ש- $V(w,y) = T$.
- אם $w \notin A$ $\Leftarrow$ לכל $y \in \Sigma^*$ מתקיים $V(w,y) = F$.

הגדרה 22:

- $P =$ קבוצת כל השפות שיש להן מ"ט דטרמיניסטית המכריעה אותן בזמן פולינומי.
- $NP =$ קבוצת כל השפות שיש להן אלגוריתם אימות המאמת אותן בזמן פולינומי.
  הגדרה שקולה:
- $NP =$ קבוצת כל השפות שיש להן מ"ט אי-דטרמיניסטית המכריעה אותן בזמן פולינומי.
- $CoNP =$ קבוצת כל השפות שהמשלימה שלהן שייכת ל- NP $\qquad CoNP = \left\{A \mid \bar{A} \in NP\ .\right\}$.

משפט 12: תכונות של P ו- NP

- $P \subseteq NP$.
- P סגורה תחת משלים: אם $A \in P$ אזי גם $\bar{A} \in P$.
- $P \subseteq NP \cap CoNP$.



6 רדוקציה פולינומיאלית

הגדרה 23: פונקציה פולינומיאלית
בהינתן פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$. אומרים כי f חשיבה בזמן פולינומיאלי אם קיים אלגוריתם (מ"ט דטרמיניסטית) המחשב את f בזמן פולינומיאלי.

הגדרה 24: רדוקציה פולינומיאלית
בהינתן שתי הבעיות A ו- B. אומרים כי A ניתנת לרדוקציה פולינומיאלית ל- B, ומסמנים $A \leqslant_P B$, אם קיימת פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ המקיימת:

1) f חשיבה בזמן פולינומיאלי
2) לכל $w \in \Sigma^*$:

$$w \in A \quad \Leftrightarrow \quad f(w) \in B \ .$$

משפט 13: משפט הרדוקציה
לכל שתי בעיות A ו- B, אם $A \leqslant_P B$ אזי

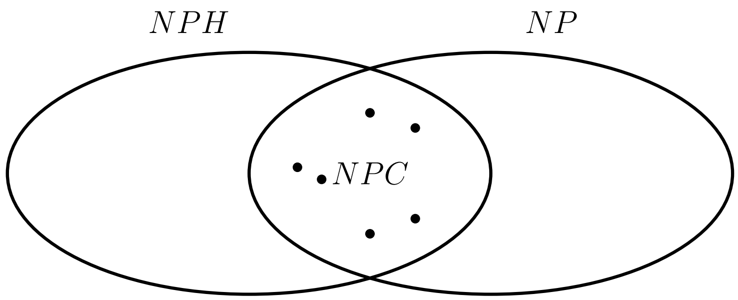
$$\begin{aligned} A \in P \quad &\Leftarrow \quad B \in P \\ A \in NP \quad &\Leftarrow \quad B \in NP \\ A \notin P \quad &\Rightarrow \quad B \notin P \\ A \notin NP \quad &\Rightarrow \quad B \notin NP \end{aligned}$$

7 NP שלמות

הגדרה 25: NP - קשה (NP-hard)
בעייה B נקראת NP קשה אם לכל בעייה $A \in NP$ קיימת רדוקציה $A \leqslant_P B$.

הגדרה 26: NP- שלמה (NP-complete)
בעייה B נקראת NP שלמה אם

1) $B \in NP$
2) לכל בעייה $A \in NP$ קיימת רדוקציה $A \leqslant_p B$.



משפט 14: תכונות של רדוקציה פולינומיאלית

- אם קיימת שפה $B \in NPC$ (NP שלמה) וגם $B \in P$ אזי $P = NP$.
- אם $B \leqslant_P A$ אזי $\bar{B} \leqslant_P \bar{A}$.
- אם $B \leqslant_p A$ וגם $C \leqslant_p B$ אזי $C \leqslant_p A$.
- לכל $A \in P$ ולכל B שאינה $\varnothing, \Sigma^*$ מתקיים $A \leqslant_P B$.

משפט 15:
תהי B בעייה NP- שלמה. אזי לכל בעייה $C \in NP$, אם $B \leqslant_p C$ אזי גם C היא NP שלמה.

8 בעיית הספיקות (SAT)

הגדרה 27: נוסחת CNF
נוסחת CNF, ϕ היא נוסחה בוליאנית מעל n משתנים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ המכילה m פסוקיות $C_1, C_2, \ldots, C_m$, כאשר כל פסוקית מכילה אוסף של ליטרלים ($x_i \backslash \bar{x}_i$) המחוברים ע"י OR ($\vee$) בוליאני והפסוקיות מחוברות ע"י AND ($\wedge$) בוליאני. לדוגמה:

$$\phi = \left(\overset{C_1}{x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4 \vee \bar{x}_7}\right) \wedge \left(\overset{C_2}{x_3 \vee x_5 \vee \bar{x}_8}\right) \wedge \quad \cdots$$

הגדרה 28: נוסחת $3CNF$
נוסחת $3CNF$, ϕ היא נוסחה CNF שבה בכל פסקוית יש בדיוק שלוש ליטרלים. לדוגמה:

$$\phi = \left(\overset{C_1}{x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4}\right) \wedge \left(\overset{C_2}{x_3 \vee x_5 \vee \bar{x}_8}\right) \wedge \quad \cdots$$

הגדרה 29: נוסחת CNF ספיקה
נוסחת CNF, ϕ היא ספיקה אם קימת השמה למשתנים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ע"י $T \backslash F$ כך ש- ϕ מקבלת ערך T, כלומר בכל פסוקית ישנו לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך T.

הגדרה 30: בעיית SAT
קלט: נוסחת CNF, ϕ.
פלט: האם ϕ ספיקה?

$$SAT = \{\langle\phi\rangle \mid \text{ספיקה } CNF \text{ נוסחת } \phi\}$$

הגדרה 31: בעיית $3SAT$
קלט: נוסחת $3CNF$ ϕ.
פלט: האם ϕ ספיקה?

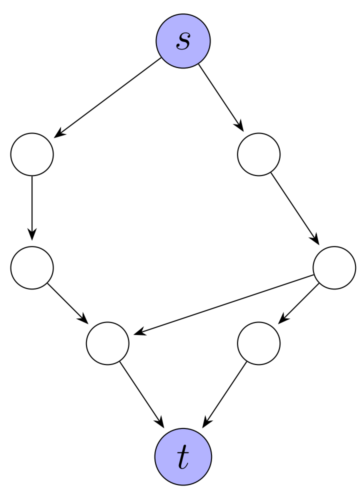
$$3SAT = \{\langle\phi\rangle \mid \text{ספיקה } 3CNF \text{ נוסחת } \phi\}$$

משפט 16:
- $SAT \in NP$.
- **משפט קוק לוין:** $SAT \in NPC$.
- $3SAT \in NPC$.
- $SAT \in P \Leftrightarrow P = NP$.

9 סיווג שפות ידיועות - סיבוכיות

הגדרה 32: בעיית מסלול $PATH$
קלט: גרף מכוון G ושני קודקודים s ו- t.
פלט: האם G מכיל מסלול מקודקוד s לקודדוק t.

$$PATH = \{\langle G,s,t\rangle \mid t \text{ -ל } s \text{ גרף מכוון המכיל מסלול מ- } G\}$$



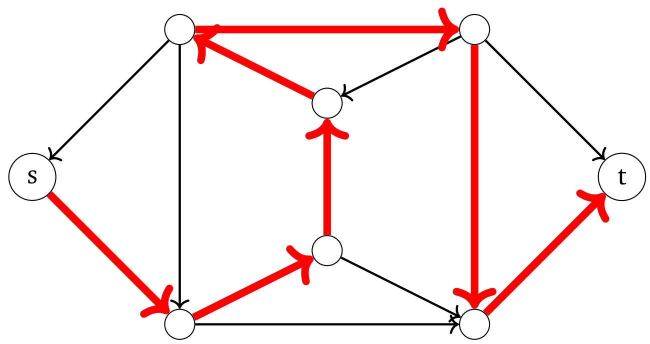
הגדרה 33: בעיית $RELPRIME$
קלט: שני מספרים x ו- y.

פלט: האם x ו- y זרים?

$$RELPRIME = \left\{\langle x,y\rangle \;\middle|\; \mathsf{gcd}(x,y)=1\right\} \ .$$

הגדרה 34: מסלול המילטוני

בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$ ושני קודקודים $s,t\in V$. מסלול המילטוני מ- s ל- t הוא מסלול מ- s ל- t שעובר דרך כל קודקוד ב-G בדיוק פעם אחת.



הגדרה 35: בעיית מסלול המילטוני - $HAMPATH$

קלט: גרף מכוון $G=(V,E)$ ושני קודקודים $s,t\in V$.

פלט: האם G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t?

$$HAMPATH = \left\{\langle G,s,t\rangle \;\middle|\; \text{גרף מכוון המכיל מסלול המילטוני מ- } s \text{ ל- } t\text{?}\ G\right\}$$

הגדרה 36: מעגל המילטוני

בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$.

מעגל המילטוני הוא מסלול מעגלי שעובר כל קודקוד ב- G בדיוק פעם אחת.

הגדרה 37: בעיית מעגל המילטוני - $HAMCYCLE$

קלט: גרף מכוון $G=(V,E)$.

פלט: האם G מכיל מעגל המילטוני?

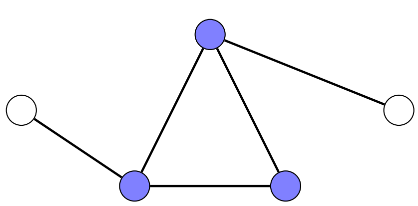
$$HAMCYCLE = \left\{\langle G\rangle \;\middle|\; \text{גרף מכוון המכיל מעגל המילטוני.}\ G\right\}$$

הגדרה 38: קליקה

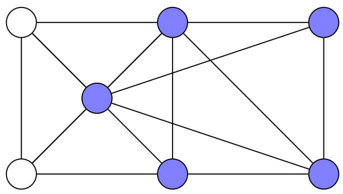
בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$.

קליקה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $C\subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u,\mathsf{v}\in C$ מתקיים $(u,\mathsf{v})\in E$.

קליקה בגודל $k=3$:



קליקה בגודל $k = 5$:



הגדרה 39: בעיית הקליקה - $CLIQUE$

<u>קלט</u>: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר k.

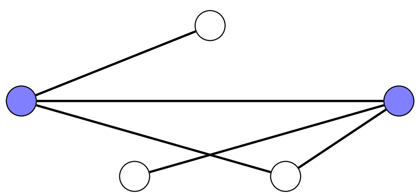
<u>פלט</u>: האם G קליקה בגודל k?

$$CLIQUE = \left\{ \langle G, k \rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל } k \text{ } G \right\}$$

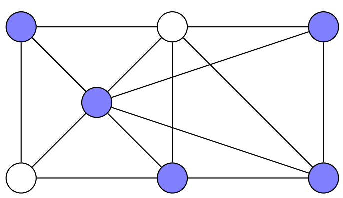
הגדרה 40: כיסוי בקודקודים

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, כיסוי בקודקודים ב- G הוא תת-קבוצה של קודקודים $C \subseteq V$ כך שלכל צלע S $u, v \in$ מתקיים $u \in C$ או $v \in C$.

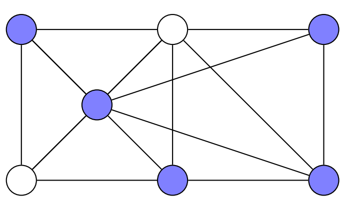
כיסוי בקדקודים בגודל $k = 2$:



כיסוי בקדקודים בגודל $k = 5$:



כיסוי בקדקודים בגודל $k = 5$:



הגדרה 41: בעיית VC

<u>קלט</u>: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר k.

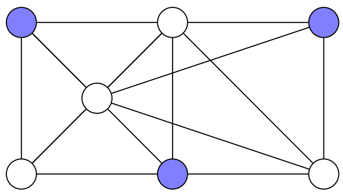
<u>פלט</u>: האם קיים כיסוי בקודקודים ב- G בגודל k?

$$VC = \left\{ \langle G, k \rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל כיסוי בקודקודים בגודל } k \text{ } G \right\}$$

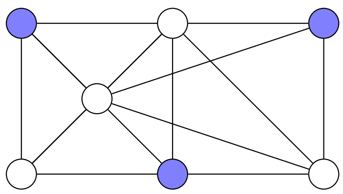
הגדרה 42: קבוצה בלתי תלויה

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, קבוצה בלתי תלויה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $S \subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u, v \in S$ מתקיים $(u, v) \notin E$.

קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k=3$:



קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k=3$:



הגדרה 43: בעיית IS

קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר k.

פלט: האם קיימת קבוצה בלתי תלויה ב- G בגודל k?

$$IS=\left\{\langle G,k\rangle \mid \text{גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \ \ G\right\}$$

הגדרה 44: בעיית $PARTITION$

קלט: קבוצת מספרים שלמים $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$.

פלט: האם קיימת תת-קבוצה $Y\subseteq S$ כך ש- $\sum\limits_{y\in S\backslash Y} y=\sum\limits_{y\in Y} y$?

$$PARTITION=\left\{S \;\middle|\; \sum_{y\in Y} y=\sum_{y\in S\backslash Y} y \text{ קבוצת שלמים, וקיימת תת-קבוצה } Y\subseteq S \text{ כך ש- } \ S\right\}$$

הגדרה 45: בעיית $SUBSETSUM$

קלט: קבוצת מספרים $S=\{x_1,x_2,\quad\ldots\quad x_n\}$ ומספר t.

פלט: האם קיימת תת-קבוצה של S שסכום איבריה שווה t?

$$SUBSETSUM=\left\{\langle S,t\rangle \;\middle|\; \text{קיימת } Y\subseteq S \text{ כך ש- } \sum_{x\in Y} x=t\right\}$$

משפט 17:

$PATH = \{\langle G,s,t\rangle \mid$ גרף מכוון המכיל מסלול מ- s ל- t $G\}$	$\in P$
$RELPRIME = \{\langle x,y\rangle \mid \gcd(x,y)=1\}$	$\in P$
$SAT = \{\langle \phi\rangle \mid$ היא נוסחת CNF ספיקה $\phi\}$	$\in NP, \in NPC$
$3SAT = \{\langle \phi\rangle \mid$ היא נוסחת $3CNF$ ספיקה $\phi\}$	$\in NP, \in NPC$
$IS = \{\langle G,k\rangle \mid$ גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל k $G\}$	$\in NP, \in NPC$
$CLIQUE = \{\langle G,k\rangle \mid$ גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל k $G\}$	$\in NP, \in NPC$
$VC = \{\langle G,k\rangle \mid$ גרף לא מכוון המכיל כיסוי בקודקודים בגודל k $G\}$	$\in NP, \in NPC$
$HAMPATH = \{\langle G,s,t\rangle \mid$ גרף מכוון המכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t $G\}$	$\in NP, \in NPC$
$HAMCYCLE = \{\langle G\rangle \mid$ גרף מכוון המכיל מעגל המילטוני $G\}$	$\in NP$
$SUBSETSUM = \left\{\langle S,t\rangle \mid \right.$ קיימת $Y \subseteq S$ כך ש- $\left.\sum_{x\in Y} x = t\right\}$	$\in NP$
$\overline{HAMPATH}$	$\in CoNP$
$\overline{CLIQUE}$	$\in CoNP$

משפט 18: בעיות פתוחות בתורת הסיבוכיות

- האם $P = NP$?
- האם $CoNP = NP$?
- האם $CoNP \cap NP = P$?

10 רדוקציות זמן פולינומיאליות

משפט 19: רדוקציות פולינומיאליות

$$\begin{aligned} SAT &\leqslant_P 3SAT \\ 3SAT &\leqslant_P CLIQUE \\ CLIQUE &\leqslant_P IS \\ IS &\leqslant_P VC \\ SUBSETSUM &\leqslant_P PARTITION \\ HAMPATH &\leqslant_P HAMCYCLE \end{aligned}$$

חישוביות וסיבוכיות

מועד ב'

פתרון לדוגמא

ד"ר ירמיהו מילר ,   .

סמסטר ב, תשפ"ה'

מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הינן פתרונות לדוגמא. ניתן לפתור חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

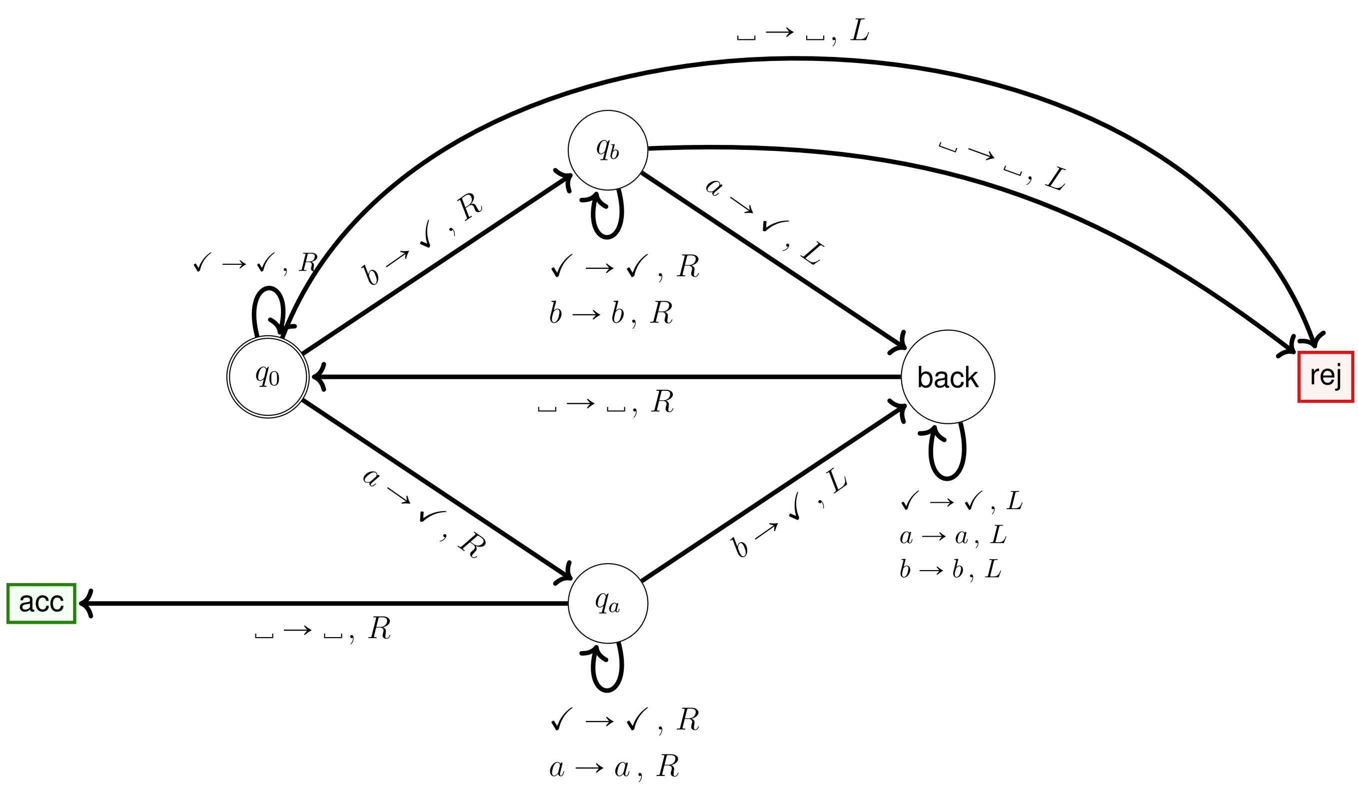
המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *סמי

פתרונות

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

כל המעברים שאינם מופיעים בתרשים עוברים ל- q_{rej}.



סעיף ב' (10 נקודות)

$$L = \left\{ w\#w \;\middle|\; w \in 0,1^* \right\}$$

שאלה 2: סגירות של שפות כריעות (20 נקודות)

פתרונות

סעיף א'

נוכיח כי לכל שתי שפות $L_1, L_2 \in RE$ מתקיים $L_1 \cup L_2 \in RE$.
תהיינה M_1 מ"ט המקבלת את L_1 ו- M_2 מ"ט המקבלת את L_2.
נבנה מ"ט א"ד M המקבלת את $L_1 \cup L_2$.

<u>תאור הבנייה</u>

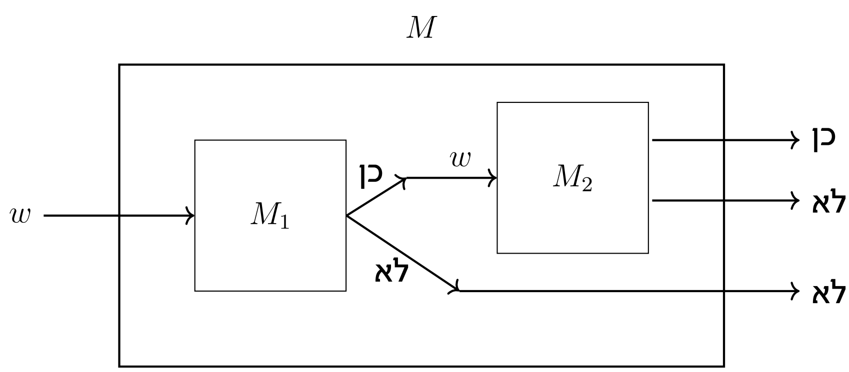
$M =$ על קלט w:

1) M בוחרת באופן א"ד $i \in \{1, 2\}$.
2) M מריצה את M_i על w ועונה כמוה.

סעיף ב'

נוכיח כי לכל שתי שפות $L_1, L_2 \in R$ מתקיים $L_1 \cap L_2 \in R$.

תהי M_1 ו- M_2 מ"ט המכריעות את L_1 ו- L_2 בהתאמה. נבנה מ"ט M המכריעה את $L_1 \cap L_2$.



<u>תאור הבנייה</u>

$M =$ על קלט w:

1) M מעתיקה את w לסרט נוסף.
2) M מריצה את M_1 על w.
- אם M_1 דוחה $\Leftarrow$ M דוחה.
- אחרת M מריצה את M_2 על העותק של w ועונה כמוה.

<u>נכונות:</u>

נוכיח כי M מכריעה את $L_1 \cap L_2$.

אם $w \in L_1 \cap L_2$

$\Leftarrow$ $w \in L_1$ וגם $w \in L_2$

$\Leftarrow$ M_1 מקבלת את w וגם M_2 מקבלת את w

$\Leftarrow$ M מקבלת את w.

אם $w \notin L_1 \cap L_2$

$\Leftarrow$ $w \notin L_1$ או $w \notin L_2$

$\Leftarrow$ M_1 דוחה את w או M_2 דוחה את w

$\Leftarrow$ M דוחה את w.

שאלה 3: אי כריעות (20 נקודות)

סעיף א' (12 נקודות)

נוכיח רדוקציה $L_{\text{acc}} \leqslant \hat{L}$ כאשר הפונקצית הרדוקציה היא כדלקמן:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M_\varnothing, M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\varnothing, M_\varnothing \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר $M_\varnothing$ היא מכונת טיורינג הדוחה כל קלט ו- M' היא מכונת טיורינג שעל קלט y מתעלמת מ- y ומריצה M על w ועונה כמוה.

<u>אבחנה</u>

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \varnothing & w \notin L(M) \end{cases} .$$

<u>נכונות הרדוקציה</u>

f חשיבה כי ניתן לבנות מכונת טיורנג שתבדוק האם $\langle M, w \rangle = w$. אם לא תחזיר קידוד קבוע של $\langle M_\varnothing, M_\varnothing \rangle$, ואם כן תחזיר קידוד של $\langle M_\varnothing, M' \rangle$, כאשר $\langle M_\varnothing \rangle$ הוא קידוד קבוע ו- $\langle M' \rangle$ נוצר ע"י הוספת קוד ל- $\langle M \rangle$ המקבל את הקלט y ורושם w במקומו.

כעת נוכיח כי

$$x \in L_{\text{acc}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in \hat{L} \, .$$

אם $x \in L_{\text{acc}}$

$\Leftarrow$ $x = \langle M, W \rangle$ ו- $w \in L(M)$.

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M_\varnothing, M' \rangle$ ולפי האבחנה $L(M') = \Sigma^*$.

$\Leftarrow$ $L\left(M_\varnothing\right) \subset L\left(M'\right)$

$\Leftarrow \hat{L} \ni f(x)$.

אם $x \notin L_{\text{acc}} \Leftarrow$ שני מקרים:

1) $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow f(x) = \langle M_\varnothing, M_\varnothing \rangle$ ו- $L(M_\varnothing) = L(M_\varnothing) \Leftarrow f(x) \notin \hat{L}$.

2) $x = \langle M, w \rangle$ ו- $w \notin L(M) \Leftarrow f(x) = \langle M_\varnothing, M' \rangle$ ולפי האבחנה $L(M') = \varnothing$

ולכן $L(M') = L(M_\varnothing) \Leftarrow f(x) \notin \hat{L}$.

לסיכום, הראינו רדוקציה $L_{\text{acc}} \leqslant \hat{L}$ ומכיוון ש- $L_{\text{acc}} \notin R$ ממשפט הרדוקציה, מתקיים $\hat{L} \notin R$.

סעיף ב' (8 נקודות)

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$L_1 = L_{\text{acc}} \in RE\ , \qquad L_2 = L_{\Sigma*} \notin RE\ , \qquad L_3 = \overline{L_{\Sigma*}} \notin RE$$

כאשר $L_{\Sigma*} = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; L(M) = \Sigma^* \right\}$ ו- $\overline{L_{\Sigma*}} = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; L(M) \neq \Sigma^* \right\} \cup \{ x \neq \langle M \rangle \}$.

מתקיים:

- $L_1 \leqslant L_2$
- $L_1 \leqslant L_3$

בנוסף, $L_2 \cup L_3 = \Sigma^* \in R$.

אבל לא מתקיים $L_{\text{acc}} \leqslant \Sigma^*$ כי זה סותר את משפט הרדוקציה.

שאלה 4: NP - שלמות (20 נקודות)

סעיף א' (5 נקודות)

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

עבור השפה $L_1 = L_{\Sigma*}$, מתקיים ש- $L_1 \notin RE$ וגם $L_1 \notin Co\,RE$.

עבור השפה $L_2 = \overline{L_{\Sigma*}} \notin Co\,RE$ מתקיים ש- $L_2 \notin RE$ וגם $L_2 \notin Co\,RE$.

מצד שני מתקיים $L_1 \cap L_2 = \varnothing \in R$.

סעיף ב' (5 נקודות)

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$L_1 = L_{\Sigma*}\ , \qquad L_2 = L_{\Sigma*} \cup \{\varepsilon\}\ .$$

אזי:

$$L_2 \backslash L_1 = \{\varepsilon\} \in RE\ , \qquad L_1 \subset L_2\ .$$

אבל: $L_1 \notin RE$ (הוכחנו בהרצאה) וגם $L_2 \notin RE$ כי אם קיים מכונת טיורינג עבורה, אזי ניתן להשתמש במכונה זו כדי לבנות מ"ט עבור L_1.

(ניתן להוכיח כי $L_2 \notin RE$ ע"י רדוקציה פשוטה $L_1 \leqslant L_2$).

סעיף ג' (5 נקודות)

הטענה נכונה.

$$L_{\text{halt}} \backslash L_{\text{acc}} = \{\langle M, w\rangle \ \ M \text{ דוחה את } w\}$$

נבנה מ"ט M_L המקבלת את L:

$M_L =$ על קלט x:

1) בודקת האם $x = \langle M, w\rangle$. אם לא $\Leftarrow$ דוחה.

2) מריצה את M על w.

- אם M מקבלת את $w \Leftarrow M_L$ דוחה את x.
- אם M דוחה את $w \Leftarrow M_L$ מקבלת את x.

<u>נכונות הבנייה:</u>

נראה כי $L(M_L) = L$.

- אם $x \in L \Leftarrow x = \langle M, w\rangle$ ו- M דוחה את $w \Leftarrow M_L$ מקבלת את x.
- אם $x \notin L \Leftarrow$ שני מקרים:
  1) $x \neq \langle M, w\rangle \Leftarrow M_L$ דוחה את x.
  2) $x = \langle M, w\rangle \Leftarrow$ שני מקרים:
     - M מקבלת את $w \Leftarrow M_L$ דוחה את x.
     - M לא עוצרת על $w \Leftarrow M_L$ לא עוצרת על x.

סעיף ד' (5 נקודות)

הטענה נכונה.

ממשפט הרדוקציה, נובע ש- $L_1 \in RE$ וגם $L_2 \in RE$ ומכיוון ש- RE סגורה תחת איחוד אזי $L = L_1 \cup L_2 \in RE$.

ניתן לבצע רדוקציה $L \leqslant L_{\text{acc}}$ באופן הבא.

תהי M מכונת טיורינג המקבלת את L.

פונקצית הרדוקציה: לכל $x \in \Sigma^*$, $f(x) = \langle M, w\rangle$.

ברור שפונקציה זו מקיית את התנאי הרדוקציה: $f(x) \in L_{\text{acc}} \quad \Leftrightarrow \quad x \in L$.

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

נגדיר פונקצית הרדוקציה $f:\Sigma^* \to \Sigma^*$ באופן הבא. בהינתן $\langle G,k\rangle$, הקלט של VC, כאשר $G=(V,E)$ גרף לא מכוון ו- k משפר טבעי, f מחזירה $\left(U, S=\left\{S_u \,\middle|\, u\in V\right\}, k'\right)$ כשאר:

- האיחוד של כל הקבוצות, $U=\bigcup_{S_u\in S} S_u$, שווה לקבוצת הצלעות E של G:
$$U:=E\ .$$
- לכל קודקוד $u\in V$ נגדיר קבוצה $S_u\subseteq U$ כאשר
$$S_u:=\left\{e\in E \,\middle|\, e \text{ נוגע ב- } u\right\}\ .$$
ז"א S_u מכילה קבוצת כל הצלעות שהקודקוד u נוגע בהן.
- k' מספר טבעי שווה לטבעי k:
$$k'=k\ .$$

נוכיח ש:
$$\langle G,k\rangle\in VC \quad\Leftrightarrow\quad \langle S,k'\rangle\in SC\ .$$

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

נניח כי $\langle G,k\rangle\in VC$.

$\Leftarrow$ $G=(V,E)$ גרף מכוון שמכיל כיסוי קודקודים C, בגודל k.

$\Leftarrow$ קיימת $C\subseteq V$ כך שאם $e=u_1u_2\in E$ אזי $u_1\in C\vee u_2\in C$.

$\Leftarrow$ עבור $A:=\left\{S_u \,\middle|\, u\in C\right\}$ כאשר $S_u=\left\{e\in E \,\middle|\, e \text{ נוגע ב- } u\right\}$, מכיוון ש- C כיסוי קודקודים אזי
$$\bigcup_{u\in C} S_u = E\ .$$

$\Leftarrow$ מכיוון ש- $U:=E$ אזי
$$\bigcup_{S_u\in A} S_u = U\ .$$

$\Leftarrow$ קיים כיסוי קבוצות A בגודל $k=k'$

$\Leftarrow$ S מכיל כיסוי קבוצות בגודל k'

$\Leftarrow$ $\langle S,k'\rangle\in SC$.

כיוון $\Rightarrow$

נניח כי $\langle S, k' \rangle \in SC$.

$\Leftarrow$ S **מכיל כיסוי קבוצות בגודל** $k' = k$.

$\Leftarrow$ **קיים אוסף קבוצות** $A = \{S_u\}$ **בגודל** $k' = k$ **כך ש-**

$$\bigcup_{S_u \in A} S_u = U \ ,$$

כאשר $U = \bigcup_{S_i \in S} S_i$.

$\Leftarrow$ **מכיוון שכל קבוצה ב-** S **היא מהצורה** S_u **כאשר** u **קודקוד של** V**, אז אם נגדיר**

$$C := \left\{ u \in V \;\middle|\; S_u \in A \right\}$$

אזי

$$\bigcup_{u \in C} S_u = U = E \ ,$$

ו- $|C| = |A| = k' = k$.

$\Leftarrow$ **לכל** $e = u_1 u_2 \in E$**, מכיוון ש-** $U = E \ni e$ **אז קיימת** $S_u \in A$ **כך ש-** $e \in S_u$.

$\Leftarrow$ **לכל** $e = u_1 u_2 \in E$**, מכיוון ש-** $e \in U$ **ולפי ההגדרה** $S_u = \left\{ e \in E \;\middle|\; e \text{ נוגע ב- } u \right\}$**, אז קיימת** $S_u \in A$ **כך ש-** $u_1 \in S_u \vee u_2 \in S_u$.

$\Leftarrow$ **לכל** $e = u_1 u_2 \in E$**, מכיוון ש-** $e \in U$ **אז** $u_1 \in C \vee u_2 \in C$.

$\Leftarrow$ C **כיסוי קודקודים בגודל** k.

$\Leftarrow$ $\langle G, k \rangle \in VC$.