# שעור 4
# משחקים בצורה אסטרטגית

## 4.1 הגדרה של משחק בצורה אסטרטגית

**הגדרה 4.1 משחק בצורה אסטרטגית**

**משחק בצורה אסטרטגית או צורה נורמלית** הוא ווקטור מצורה

$$G = (N \ , \ (S_I, S_{II}, \ldots) \ , \ (u_I, u_{II}, \ldots))$$

שבה

**1)** $N = \{I, II, \ldots\}$ היא קבוצת שחקנים סופית.

**2)** לכל שחקן $i \in N$, $S_i$ היא קבוצה של כל האסטרטגיות האפשריות של שחקן $i$.

**3)** לכל שחקן $i \in N$

$$u_i(s_I, s_{II}, \ldots)$$

היא פונקציה המתאימה לכל ווקטור אסטרטגיות $(s_I, s_{II}, \ldots)$ תשלום לשחקן $i$.

כדוגמה של משחק בצורה אסטרטגית, נחזור לדוגמה 2.1.

### דוגמה 4.1 (משחק התאמת המטבעות)

נתון משחק של התאמת מטבעות כמתואר בדוגמה 2.1. רשמו את צורה רחבה וצורה אסטרטגית של המשחק.

שחקן אחד בוחר אחד הצדדים של מטבע, $H$ (עץ) או $T$ (פלי). הוא רושם בחירותו על פתק, חותם עליו ומעביר אותו לשופט. אחר כך שחקן שני בוחר $H$ או $T$, רושם בחירותו על פתק, חותם עליו ומעביר אותו לשופט.

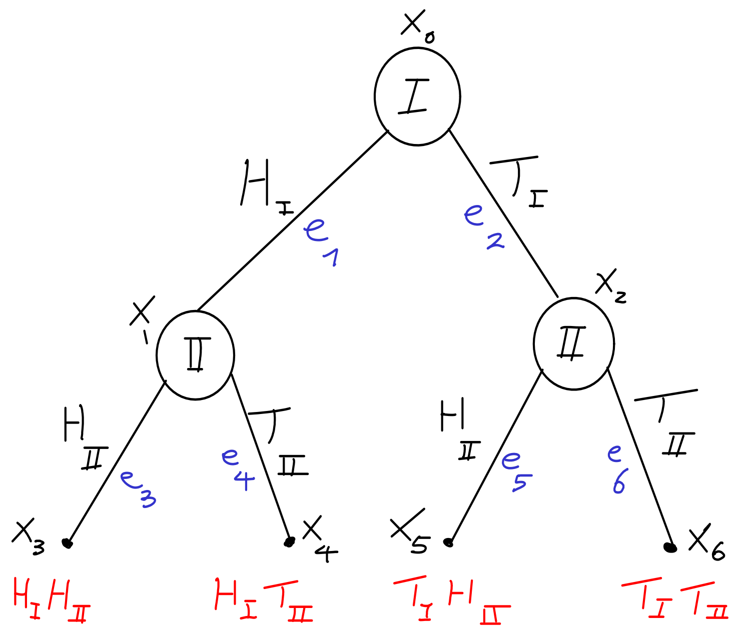
- אם שני השחקנים בוחרים באותו צד, משלם שחקן השני לשחקן הראשון ₪1.
- אם הם בוחרים בצדדים שונים, משלם שחקן הראשון לשחקן השני ₪1.

רשמו את המשחק בצורה רחבה.

**פתרון:**

**צורה רחבה**

נסמן ב- $I$ הראשון ונסמן ב- $II$ השקחן השני. התיאור של המשחק בצורה רחבה נתון בתרשים למטה.




$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_I, V_{II}\}, O, u)$$

שחקנים: $N = \{I, II\}$.

קדקודים: $V = \{x_0, x_1, x_2, x_3, e_4, x_5, x_6\}$.

קשתות: $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

מצב המשחק ההתחלתי: $x_0$.

קדקודים:

$$V_I = \{x_0\} \ , \quad V_{II} = \{x_1, x_2\} \ .$$

תוצאות אפשרייות:

$$O = \{x_3, x_4, x_5, x_6\} = \{H_I H_{II} \ , \ H_I T_{II} \ , \ T_I H_{II} \ , \ T_I T_{II}\} \ .$$

הפונקציות תשלום כפונקציות של האסטרטגיות הן:

$$\begin{aligned} u_I(HH) &= 1 \ , & u_{II}(HH) &= -1 \ , \\ u_I(HT) &= -1 \ , & u_{II}(HT) &= 1 \ , \\ u_I(TH) &= -1 \ , & u_{II}(HT) &= 1 \ , \\ u_I(TT) &= -1 \ , & u_{II}(TT) &= -1 \ . \end{aligned}$$

**<u>צורה אסטרטגית</u>**

$$G = ((I, II) \ , \ (S_I = (H, T), S_{II} = (H, T)) \ , \ (u_I, u_{II}) \ )$$

$$\begin{aligned} u_I(HH) &= 1 \ , & u_{II}(HH) &= -1 \ , \\ u_I(HT) &= -1 \ , & u_{II}(HT) &= 1 \ , \\ u_I(TH) &= -1 \ , & u_{II}(HT) &= 1 \ , \\ u_I(TT) &= -1 \ , & u_{II}(TT) &= -1 \ . \end{aligned}$$

| | | שחקן $II$ | |
|---|---|---|---|
| | | $H$ | $T$ |
| שחקן $I$ | $H$ | $1,-1$ | $-1,1$ |
| | $T$ | $-1,1$ | $1,-1$ |

■

**דוגמה 4.2 (דילמה האסיר בצורה אסטרטגית)**

המשטרה עצרה שני פושעים שביצעו פשע משותף, ושמה אותם בחדרים נפרדים.

אין למשטרה מספיק ראיות להביא אותם להרשעתם על העבירה שבוצעו.

במקום, המשטרה מתכננת להעמיד אותם לדין על עבירה משנית.

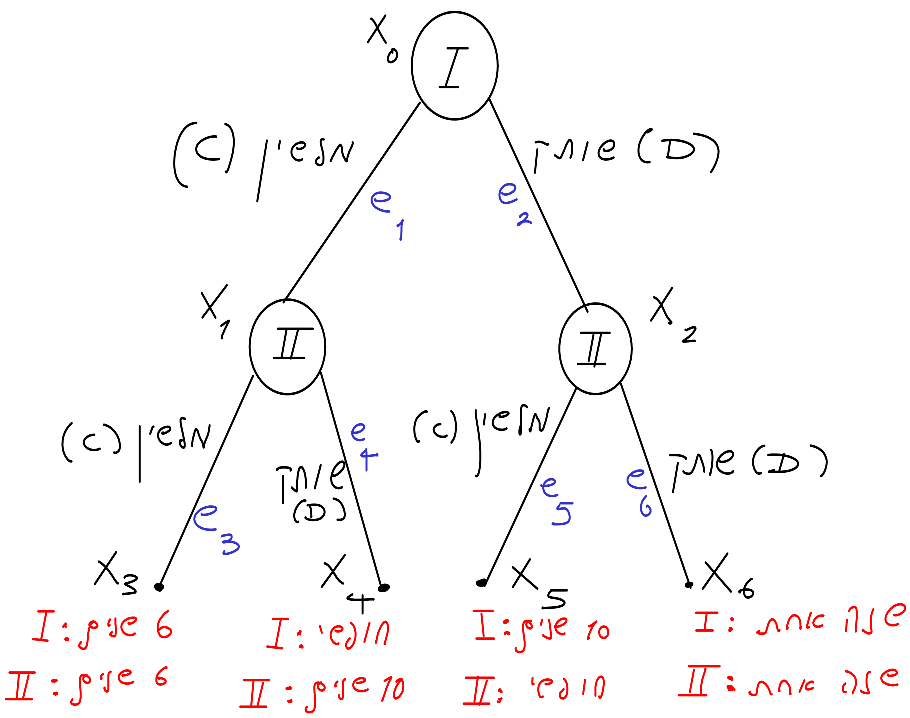
המשטרה מציעה לשני הפושעים דיל. אבל יש קאץ'....

שני עבריינים ביצעו פשע חמור ונעצרו. בהעדר כל הוכחות אחרות, הדרך היחידה שבה יכולה המשטרה להשיג הרשעה על עבירה זו היא שאחד העצורים (או שניהם) מודה. העמידה המשטרה כל אחד מהעצורים בפני ההחלטה הבאה:

- אם $I$ מלשין ($C$) ו-$II$ שותק ($D$), $I$ יוצא חופשי ו- $II$ מקבל 10 שנים מאסר.
- אם $II$ מלשין ($C$)ו-$I$ שותק ($D$), $II$ יוצא חופשי ו- $I$ מקבל 10 שנים מאסר.
- אם שניהם שותקים ($D$), יש בידי המשטרה ראיות להרשעתם בעבירות פחותות (למשל, העלמת מס) שמוביל למאסר של שנה אחת לכל אחד.
- אם שניהם מלשינים ($C$), המשטרה מבקשת להתחשב בשיתוף הפעולה שלהם ולגזור את עונשם ל־6 שנות מאסר לכל אחד.

**פתרון:**

**<u>צורה רחבה</u>**




$$\Gamma = \big(N, V, E, x_0, (V_i)_{i\in N} \cup V_0, O, u\big)$$

שחקנים: $N = \{I, II\}$.

קדקודים: $V = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

קשתות: $E = \{e_1, \ldots, e_6\}$.

מצב המשחק ההתחלתי: $x_0$.

קדקודים:

$$V_I = \{x_0\}\ , \quad V_{II} = \{x_1, x_2\}\ .$$

תוצאות אפשרייות:

$$O = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}\ .$$

לשחקן $I$ יש אסטרטגיות $C$ או $D$.

לשחקן $II$ יש אסטרטגיות $C$ או $D$.

פונקציה תשלום במונחי האסטרטגיות היא (ביחידות של שנים מאסר):

$$\begin{aligned}
u_I(C,C) &= -6\ , & u_{II}(C,C) &= -6\ ,\\
u_I(C,D) &= 0\ , & u_{II}(C,D) &= -10\ ,\\
u_I(D,C) &= -10\ , & u_{II}(D,C) &= 0\ ,\\
u_I(D,D) &= -1\ , & u_{II}(D,D) &= -1\ .
\end{aligned}$$

**צורה אסטרטגית**

| | | שחקן $II$ | |
|---|---|---|---|
| | | $C$ | $D$ |
| שחקן $I$ | $C$ | $-6,-6$ | $0,-10$ |
| | $D$ | $-10,0$ | $-1,-1$ |

■

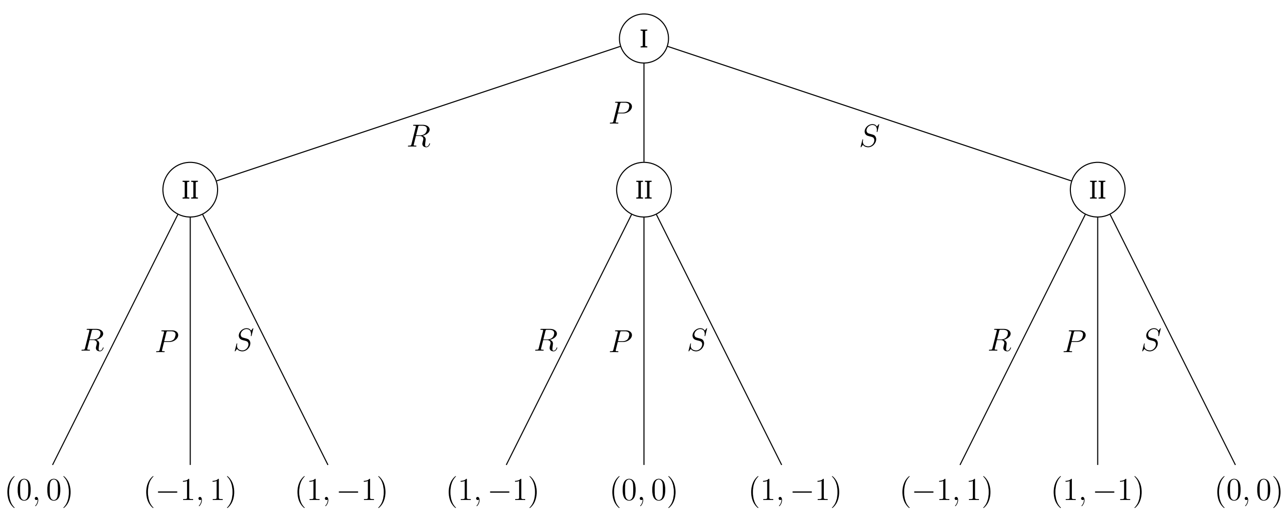
## דוגמה 4.3 ( )

במשחק "אבן, נייר ומספריים" כל אחד משני שחקנים בוחר אחת מתוך שלוש אפשרויות: אבן, נייר או מספריים. יש יחס שליטה מעגלי בין שלושת הסמלים:

האבן שוברת את המספריים שגוזרים את הנייר שעוטף את האבן.

רשמו את הצורת רחבה והצורה אסטרטגית של המשחק.

**פתרון:**
המשחק בצורתו הרחבה מתואר בתרשים למטה.



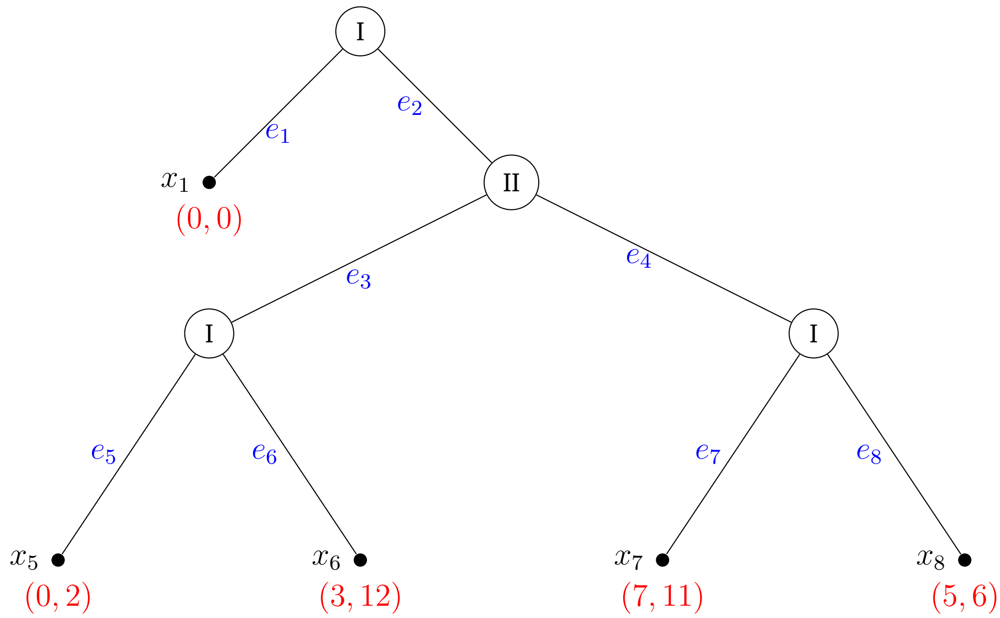

אם נסמן ניצחון לשחקן כתשלום $1$, הפסד כתשלום $-1$, ותיקו כתשלום $0$, נקבל את המשחק בצורה אסטרטגית המופיע בטבלה למטה.

| | | שחקן II | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $R$ | $P$ | $S$ |
| | $R$ | $0,0$ | $-1,1$ | $1,-1$ |
| שחקן $I$ | $P$ | $1,-1$ | $0,0$ | $-1,1$ |
| | $S$ | $-1,1$ | $1,-1$ | $0,0$ |

■

### דוגמה 4.4 ) (

נתון המשחק הבא בצורה קרחבה רשמו אותו בצורה אסטרטגית.




ונתונים האסטרטגיות הבאות:

$$s_{I,0}(x_0) = e_1 \ ,$$

$$s_{I,1}(x_0) = e_2 \ , \qquad s_{I,1}(x_3) = e_5 \ , \quad s_{I,1}(x_4) = e_7 \ ,$$

$$s_{I,2}(x_0) = e_2 \ , \qquad s_{I,2}(x_3) = e_6 \ , \quad s_{I,2}(x_4) = e_7 \ ,$$

$$s_{I,3}(x_0) = e_2 \ , \qquad s_{I,3}(x_3) = e_5 \ , \quad s_{I,3}(x_4) = e_8 \ ,$$

$$s_{I,4}(x_0) = e_2 \ , \qquad s_{I,4}(x_3) = e_6 \ , \quad s_{I,4}(x_4) = e_8 \ ,$$

$$s_{II,1}(x_2) = e_3 \ ,$$

$$s_{II,2}(x_2) = e_4 \ .$$

רשמו את כל המסלולים האפשריים ורשמו את המשחק בצורה אסטרטגית.

**פתרון:**

$\underline{s_{I,0}}$

$$w = x_0 \ e_1 \ x_1 \ .$$

$$u_I(s_{I,0}) = 0 \ , \qquad u_{II}(s_{I,0}) = 0 \ .$$

$\underline{s_{I,1}, s_{II,1}}$

$$w = x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_3 \ x_3 \ e_5 \ x_5 \ .$$

$$u_I(s_{I,1}, s_{II,1}) = 10 \ , \qquad u_{II}(s_{I,1}, s_{II,1}) = 2 \ .$$

$\underline{s_{I,1}, s_{II,2}}$

$$w = x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_4 \ x_4 \ e_7 \ x_7 \ .$$

$$u_I(s_{I,1}, s_{II,2}) = 7 \ , \qquad u_{II}(s_{I,1}, s_{II,2}) = 11 \ .$$

$\underline{s_{I,3}, s_{II,1}}$

$$w = x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_3 \ x_3 \ e_5 \ x_5 \ .$$

$$u_I(s_{I,3}, s_{II,1}) = 10, \qquad u_{II}(s_{I,3}, s_{II,1}) = 2 \ .$$

$\underline{s_{I,3}, s_{II,2}}$

$$w = x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_4 \ x_4 \ e_8 \ x_8 \ .$$

$$u_I(s_{I,3}, s_{II,1}) = 7, \qquad u_{II}(s_{I,3}, s_{II,1}) = 11 \ .$$

$\underline{s_{I,4}, s_{II,1}}$

$$w = x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_3 \ x_3 \ e_6 \ x_6 \ .$$

$$u_I(s_{I,4}, s_{II,1}) = 3, \qquad u_{II}(s_{I,4}, s_{II,1}) = 12 \ .$$

$\underline{s_{I,4}, s_{II,2}}$

$$w = x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_4 \ x_4 \ e_7 \ x_7 \ .$$

$$u_I(s_{I,4}, s_{II,1}) = 5, \qquad u_{II}(s_{I,4}, s_{II,1}) = 6 \ .$$

$\underline{s_{I,2}, s_{II,1}}$

$$w = x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_3 \ x_3 \ e_6 \ x_6 \ .$$

$$u_I(s_{I,2}, s_{II,1}) = 3, \qquad u_{II}(s_{I,2}, s_{II,1}) = 12 \ .$$

$\underline{s_{I,2}, s_{II,2}}$

$$w = x_0 \ e_2 \ x_2 \ e_4 \ x_4 \ e_7 \ x_7 \ .$$

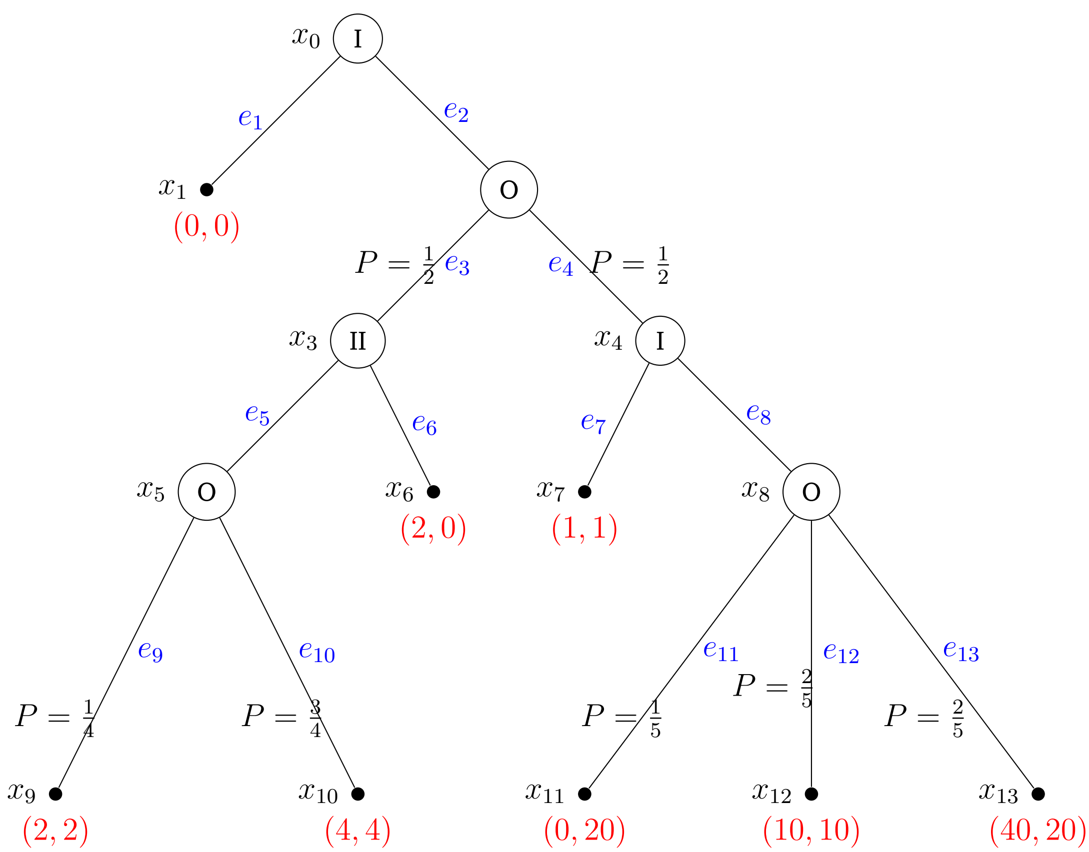
$$u_I(s_{I,2}, s_{II,1}) = 7, \qquad u_{II}(s_{I,2}, s_{II,1}) = 11 \ .$$

| | $s_{II,1}$ | $s_{II,2}$ |
|---|---|---|
| $s_{I,0}$ | $0,0$ | $0,0$ |
| $s_{I,1}$ | $10,2$ | $7,11$ |
| $s_{I,2}$ | $3,12$ | $7,11$ |
| $s_{I,3}$ | $10,2$ | $5,6$ |
| $s_{I,4}$ | $3,12$ | $5,6$ |

■

**דוגמה 4.5 ( )**

נתון המשחק הבא בצורה רחבה רשמו אותו בצורה אסטרטגית.




**פתרון:**

$\underline{s_{I,0}}$

$$w = x_0 \ e_1 \ x_1 \ .$$

$$u = (0,0) \ .$$

$\underline{s_{I,1}, s_{II,1}}$

$$w = \begin{cases} x_0\ e_2\ x_2\ e_3\ x_3\ e_5\ x_5\ e_9\ x_9 & P = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} & u = (2,2) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_3\ x_3\ e_5\ x_5\ e_{10}\ x_{10} & P = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8} & u = (4,4) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_7\ x_7 & P = \frac{1}{2} & u = (1,1) \end{cases} .$$

תוחלת התשלום:

$$E = \frac{1}{8}(2,2) + \frac{3}{8}(4,4) + \frac{1}{2}(1,1) = \left(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right) .$$

$\underline{s_{I,2}, s_{II,1}}$

$$w = \begin{cases} x_0\ e_2\ x_2\ e_3\ x_3\ e_5\ x_5\ e_9\ x_9 & P = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} & u = (2,2) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_3\ x_3\ e_5\ x_5\ e_{10}\ x_{10} & P = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8} & u = (4,4) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_8\ x_8\ e_{11}\ x_{11} & P = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{10} & u = (0,20) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_8\ x_8\ e_{12}\ x_{12} & P = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{10} & u = (10,10) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_8\ x_8\ e_{13}\ x_{13} & P = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{10} & u = (40,20) \end{cases} .$$

תוחלת התשלום:

$$E = \frac{1}{8}(2,2) + \frac{3}{8}(4,4) + \frac{1}{10}(0,20) + \frac{2}{10}(10,10) + \frac{2}{10}(40,20) = \left(\frac{47}{4}, \frac{39}{4}\right) .$$

$\underline{s_{I,1}, s_{II,2}}$

$$w = \begin{cases} x_0\ e_2\ x_2\ e_3\ x_3\ e_6\ x_6 & P = \frac{1}{2} & u = (2,0) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_7\ x_7 & P = \frac{1}{2} & u = (1,1) \end{cases} .$$

תוחלת התשלום:

$$E = \frac{1}{2}(2,0) + \frac{1}{2}(1,1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) .$$

$\underline{s_{I,2}, s_{II,2}}$

$$w = \begin{cases} x_0\ e_2\ x_2\ e_3\ x_3\ e_6\ x_6 & P = \frac{1}{2} & u = (2,0) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_8\ x_8\ e_{11}\ x_{11} & P = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{10} & u = (0,20) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_8\ x_8\ e_{12}\ x_{12} & P = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{10} & u = (10,10) \\ x_0\ e_2\ x_2\ e_4\ x_4\ e_8\ x_8\ e_{13}\ x_{13} & P = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{10} & u = (40,20) \end{cases} .$$

תוחלת התשלום:

$$E=\frac{1}{2}(2,0)+\frac{1}{10}(0,20)+\frac{2}{10}(10,10)+\frac{2}{10}(40,20)=(11,8)\ .$$

| $I \backslash II$ | $s_{II,1}$ | $s_{II,2}$ |
|---|---|---|
| $s_{I,0}$ | $0,0$ | $0,0$ |
| $s_{I,1}$ | $\frac{9}{4},\frac{9}{4}$ | $\frac{3}{2},\frac{1}{2}$ |
| $s_{I,2}$ | $\frac{47}{4},\frac{39}{4}$ | $11,8$ |

■

## 4.2 אסטרטגיה נשלטת חזק

**הגדרה 4.2 אסטרטגיה נשלטת חזק במשחק עם $2$ שחקנים**

נתון משחק עם שני שחקנים $I$ ו- $II$. נניח כי
$S_I$ מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של $I$,
ו- $S_{II}$ מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של $II$.

- אסטרטגיה $\sigma_I\in S_I$ של שחקן $I$ נשלטת חזק על ידי אסטרטגיה $t_I\in S_I$ של שחקן $I$ אם
$$u_I(\sigma_I,s_{II})<u_I(t_I,s_{II})$$
לכל $s_{II}\in S_{II}$.
- אסטרטגיה $\sigma_{II}\in S_{II}$ של שחקן $II$ נשלטת חזק ע"י אסטרטגיה $t_{II}\in S_{II}$ של שחקן $II$ אם
$$u_{II}(s_I,\sigma_{II})<u_{II}(s_I,t_{II})$$
לכל $s_I\in S_I$.

**הגדרה 4.3 אסטרטגיה נשלטת חזק במשחק עם $3$ שחקנים**

נתון משחק עם שלוש שחקנים $I$, $II$ ו- $III$. נניח כי
$S_I$ מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של $I$,
$S_{II}$ מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של $II$
ו- $S_{III}$ מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של $III$,

- אסטרטגיה $\sigma_I\in S_I$ של שחקן $I$ נשלטת חזק על ידי אסטרטגיה $t_I\in S_I$ של שחקן $I$ אם
$$u_I(\sigma_I,s_{II},s_{III})<u_I(t_I,s_{II},s_{III})$$
לכל $s_{II}\in S_{II}$ ולכל $s_{III}\in S_{III}$.
- אסטרטגיה $\sigma_{II}\in S_{II}$ של שחקן $II$ נשלטת חזק על ידי אסטרטגיה $t_{II}\in S_{II}$ של שחקן $II$ אם
$$u_{II}(s_I,\sigma_{II},s_{III})<u_{II}(s_I,t_{II},s_{III})$$

לכל $s_I \in S_I$ ולכל $s_{III} \in S_{III}$.

- אסטרטגיה $\sigma_{III} \in S_{III}$ של שחקן $III$ נשלטת חזק ע"י אסטרטגיה $t_{III} \in S_{III}$ של שחקן $III$ אם

$$u_{III}\left(s_I, s_{II}, \sigma_{III}\right) < u_{III}\left(s_I, s_{II}, t_{III}\right)$$

לכל $s_I \in S_I$ ולכל $s_{II} \in S_{II}$.

**דוגמה 4.6 ()**

נתון המשחק הבא בצורה אסטקטגית.

1) מצאו אסטרטגיה הנשלטת חזק של שחקן $I$.
2) מצאו אסטרטגיה הנשלטת חזק של שחקן $II$.

| $I \backslash II$ | $L$ | $M$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $1,0$ | $1,2$ | $0,1$ |
| $B$ | $0,3$ | $0,1$ | $2,0$ |

**פתרון:**

$$1 = u_{II}(T,R) < u_{II}(T,M) = 2 \ ,$$

$$0 = u_{II}(B,R) < u_{II}(B,M) = 1 \ .$$

לכן אסטרטגיה $R$ נשלטת חזק על ידי $M$. ■

# 4.3 הנחות של רציונליות בתורת המשחקים

**הנחה 4.1 הנחות של רציונליות בתורת המשחקים**

1) שחקן רציונלי לא ישתמש באסטרטגיה נשלטת חזק.
2) כל השחקנים במשחק רציונליים.
3) העובדה שכל השחקנים רציונליים היא ידיעה משותפת בין כל השחקנים.

# 4.4 סילוק חוזר

### דוגמה 4.7 ()

נתון המשחק הבא, מצאו את התשלום סופי של המשחק, והאסטרטגיות השולטות חזק של שני השחקנים, לפי הכללים של רציונליות.

| $I \backslash II$ | $L$ | $M$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $1,0$ | $1,2$ | $0,1$ |
| $B$ | $0,3$ | $0,1$ | $2,0$ |

**פתרון:**

| $I \backslash II$ | $L$ | $M$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $1,0$ | $1,2$ | $\cancel{0,1}$ |
| $B$ | $0,3$ | $0,1$ | $\cancel{2,0}$ |

$\xrightarrow{R \prec M}$

| $I \backslash II$ | $L$ | $M$ |
|---|---|---|
| $T$ | $1,0$ | $1,2$ |
| $\cancel{B}$ | $\cancel{0,3}$ | $\cancel{0,1}$ |

$\xrightarrow{B \prec T}$

| $I \backslash II$ | $L$ | $M$ |
|---|---|---|
| $T$ | $\cancel{1,0}$ | $1,2$ |

$\xrightarrow{L \prec M}$

| $I \backslash II$ | $M$ |
|---|---|
| $T$ | $1,2$ |

לכן לפי הכללים של שחקנים רציונליים, שחקו $I$ ישתמש באסטרטגיה $T$, שחקן $II$ ישתמש באסטרטגיה $M$ והתשלום הסופי יהיה:

$$u_I(T,M)=1 \ , \qquad u_{II}(T,M)=2 \ .$$

■

### דוגמה 4.8 (דילמה האסיר)

המשטרה עצרה שני פושעים שביצעו פשע משותף, ושמה אותם בחדרים נפרדים.

אין למשטרה מספיק ראיות להביא אותם להרשעתם על העבירה שבוצעו.

במקום, המשטרה מתכננת להעמיד אותם לדין על עבירה משנית.

המשטרה מציעה לשני הפושעים דיל. אבל יש קאץ'....

שני עבריינים ביצעו פשע חמור ונעצרו. בהעדר כל הוכחות אחרות, הדרך היחידה שבה יכולה המשטרה להשיג הרשעה על עבירה זו היא שאחד העצורים (או שניהם) מודה. העמידה המשטרה כל אחד מהעצורים בפני ההחלטה הבאה:

- אם $I$ מלשין ($C$) ו-$II$ שותק ($D$), $I$ יוצא חופשי ו- $II$ מקבל 10 שנים מאסר.
- אם $II$ מלשין ($C$)ו-$I$ שותק ($D$), $II$ יוצא חופשי ו- $I$ מקבל 10 שנים מאסר.
- אם שניהם שותקים ($D$), יש בידי המשטרה ראיות להרשעתם בעבירות פחותות (למשל, העלמת מס) שמוביל למאסר של שנה אחת לכל אחד.

- אם שניהם מלשינים ($C$), המשטרה מבקשת להתחשב בשיתוף הפעולה שלהם ולגזור את עונשם ל-6 שנות מאסר לכל אחד.

רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית ומצאו את הפתרון של אסטרטגיות שולטות חזק.

**פתרון:**
המשחק בצורה אסטרטגית הנה:

| שחקן $I$ \ שחקן $II$ | $C_{II}$ | $D_{II}$ |
|---|---|---|
| $C_I$ | $-6,-6$ | $0,-10$ |
| $D_I$ | $-10,0$ | $-1,-1$ |

| $I$ \ $II$ | $C_{II}$ | $D_{II}$ |
|---|---|---|
| $C_I$ | $-6,-6$ | $0,-10$ |
| $D_I$ | $-10,-10$ | $-1,-1$ |

$\xrightarrow{D_{II}\prec C_{II}}$

| $I$ \ $II$ | $C_{II}$ |
|---|---|
| $C_I$ | $-6,-6$ |
| $D_I$ | $\cancel{-10,-10}$ |

$\xrightarrow{D_I\prec C_I}$

| $I$ \ $II$ | $C_{II}$ |
|---|---|
| $C_I$ | $-6,-6$ |

לכן לפי הכללים של שחקנים רציונליים, שחקן $I$ ישתמש באסטרטגיה $C_I$, שחקן $II$ ישתמש באסטרטגיה $C_{II}$ והתשלום הסופי יהיה:

$$u_I(C,C)=-6\ ,\qquad u_{II}(C,C)=-6\ .$$

■

# 4.5 שיווי משקל נאש

**הגדרה 4.4 שיווי משקל נאש במשחקים עם שני שחקנים**

נתון משחק עם שני שחקנים $I$ ו- $II$. נניח כי $S_I$ מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של $I$, ו- $S_{II}$ מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של $II$.

קבוצת אסטרטגיות $s^*=(s_I^*,s_{II}^*)$ נקראת **שיווי משקל נאש (שמ"ן)** אם התנאים הבאים מתקיימים:

$$u_I\left(s_I^*,s_{II}^*\right)\geq u_I\left(s_I,s_{II}^*\right)\qquad ,s_I\in S_I \text{ לכל}$$

$$u_{II}\left(s_I^*,s_{II}^*\right)\geq u_{II}\left(s_I^*,s_{II}\right)\qquad ,s_{II}\in S_{II} \text{ לכל}$$

**הגדרה 4.5 שיווי משקל נאש במשחקים עם שלוש שחקנים**

נתון משחק עם שלוש שחקנים $I$, $II$ ו- $III$. נניח כי $S_I$ מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של $I$, $S_{II}$ מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של $II$ ו- $S_{III}$ מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של $III$.

קבוצת אסטרטגיות $s^*=(s_I^*,s_{II}^*,s_{III}^*)$ נקראת **שיווי משקל נאש** אם התנאים הבאים מתקיימים:

$$u_I\left(s_I^*,s_{II}^*,s_{III}^*\right)\geq u_I\left(s_I,s_{II}^*,s_{III}^*\right)\qquad , \quad s_I\in S_I \text{ לכל}$$

$$u_{II}\left(s_I^*,s_{II}^*,s_{III}^*\right)\geq u_{II}\left(s_I^*,s_{II},s_{III}^*\right)\qquad , s_{II}\in S_{II} \text{ לכל}$$

$$u_{III}\left(s_I^*,s_{II}^*,s_{III}^*\right)\geq u_{III}\left(s_I^*,s_{II}^*,s_{III}\right)\qquad , s_{III}\in S_{III} \text{ לכל}$$

**דוגמה 4.9 (דילמה האסיר)**

בדילמה האסיר מצאו את השיווי משקל נאש.

**פתרון:**

| $I \backslash II$ | $C_{II}$ | $D_{II}$ |
|---|---|---|
| $C_I$ | $-6,-6$ | $0,-10$ |
| $D_I$ | $-10,-10$ | $-1,-1$ |

$$(s_I^*,s_{II}^*)=(C_I,C_{II})\ .$$

הסבר:

$$-6=u_I\left(C_I,C_{II}\right)>u_I\left(D_I,C_{II}\right)=-10\ ,$$

$$-6=u_{II}\left(C_I,C_{II}\right)>u_{II}\left(C_I,D_{II}\right)=-10\ .$$

■

**דוגמה 4.10 (משחק תיאום)**

המשחק המתואר בטבלה למטה שייך למשפחה של משחקים הנקראים "משחקי תיאום" (coordination games).

| $I \backslash II$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $A$ | $1,1$ | $0,0$ |
| $B$ | $0,0$ | $3,3$ |

מצאו את כל שיווי משקל במשחק.

**פתרון:**

$(A,a)$ שיווי משקל.

הסבר:

$$1 = u_I(A,a) > u_I(B,a) = 0 \ ,$$

$$1 = u_{II}(A,a) > u_{II}(A,b) = 0 \ .$$

$(B,b)$ שיווי משקל.
הסבר:

$$3 = u_I(B,b) > u_I(A,b) = 0 \ ,$$

$$3 = u_{II}(B,b) > u_{II}(B,a) = 0 \ .$$

■

### דוגמה 4.11 (מלחמת המינים.)

המשחק המשחק הבא נקרא "מלחמת המינים" (battle of the sexes). שמו של המשחק בא מהתיאור הבא. זוג מתכנן בילוי למוצא שבת. האפשרויות העומדות לרשותם הן קונצרט $(C)$ או צפייה במשחק כדורגל $(F)$. הגבר (שחקן $I$) מעדיף צפייה במשחק הכדורגל, בעוד האישה (שחקן $II$) מעדיפה את הקונצרט, אך שניהם מעדיפים להיות יחד גם אם הבילוי המשותף הוא הפחות עדיף בעיניהם. השמחק בצורה אסטרטגית מתואר למטה. מצאו את כל שיווי משקל.

| $I \backslash II$ | $C$ | $F$ |
|---|---|---|
| $C$ | $1,2$ | $0,0$ |
| $F$ | $0,0$ | $2,1$ |

**פתרון:**
$(C,C)$ שיווי משקל.
הסבר:

$$1 = u_I(C,C) > u_I(F,C) = 0 \ ,$$

$$2 = u_{II}(C,C) > u_{II}(C,F) = 0 \ .$$

$(F,F)$ שיווי משקל.
הסבר:

$$2 = u_I(F,F) > u_I(C,F) = 0 \ ,$$

$$1 = u_{II}(F,F) > u_{II}(F,C) = 0 \ .$$

■

### דוגמה 4.12 ()

נתון המשחק הבא מצאו כל השיווי משקל נאש.

| $I \backslash II$ | $L$ | $C$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $1,2$ | $2,3$ | $0,3$ |
| $M$ | $2,2$ | $2,1$ | $3,2$ |
| $B$ | $2,1$ | $0,0$ | $1,0$ |

**פתרון:**
הקבוצת אסטרטגיות $(T,C)$ שיווי משקל. הסבר:

$$u_I(T,C)=u_I(M,C)\ ,\qquad u_I(T,C)>u_{II}(B,C)\ ,$$
$$u_{II}(T,C)=u_{II}(T,R)\ ,\qquad u_{II}(T,C)>u_{II}(T,L)\ .$$

הקבוצת אסטרטגיות $(M,L)$ שיווי משקל. הסבר:

$$u_I(M,L)>u_I(T,L)\ ,\qquad u_I(M,L)=u_I(B,L)\ ,$$
$$u_{II}(M,L)>u_{II}(M,C)\ ,\qquad u_{II}(M,L)=u_{II}(M,R)\ .$$

הקבוצת אסטרטגיות $(M,R)$ שיווי משקל. הסבר:

$$u_I(M,R)>u_I(T,R)\ ,\qquad u_I(M,R)>u_I(B,R)\ ,$$
$$u_{II}(M,R)>u_{II}(M,C)\ ,\qquad u_{II}(M,R)=u_{II}(M,L)\ .$$

■