שיעור 11
סכום ישר

11.1 דוגמא. (סכום ישר)
נניח ש

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

תת מרחב של $\mathbb{R}^3$ ו

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \middle| x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.
אז $\dim(U_1) = \dim(U_2) = 2$.

$$U_1 \cap U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\} , \dim(U_1 \cap U_2) = 1 \ .$$

$$U_1 + U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix} \middle| y_1, z_1, x_2, z_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_1 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \middle| x_2, y_1, z_1 + z_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^3 \ .$$

אז כל וקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U_1 + U_2$ ניתן להציג כסכום של וקטורים של U_1 ו U_2 באינסוף דרכים שונות:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z - z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

לכל $z_0 \in \mathbb{R}$.

11.2 דוגמא.

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| y, z \in \mathbb{R} \right\}$$
$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$

U_1, U_2 תת מרחבים של U_1, U_2.

$$\dim(U_1)=2\ ,\qquad \dim(U_2)=1\ .$$

$$U_1\cap U_2=\{\bar{0}\}\ ,$$

$$U_1+U_2=\mathbb{R}^3\ ,$$

ולכל וקטור $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ יש דרך יחידה להציג אותו כסכום של וקטורים של U_1 ו U_2:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

דוגמה 11.2 היא דוגמה של סכום ישר של תת מרחבים.

11.3 הגדרה: (סכום ישר)

יהיו U_1 ו U_2 שני תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$.

תת מרחב W של מרחב וקטורי V נקרא סכום ישר של U_1 ו U_2 אם ורק אם מתקיימים:

א) $W=U_1+U_2$

ב) לכל וקטור של W יש הצגה יחידה כסכום של וקטורים ב U_1 וב U_2.

סימון:

$$W=U_1\oplus U_2$$

הסכום הישר של U_1, U_2.

11.4 משפט. ()

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, U ו W תת מרחבים של V. אז $V=U\oplus W$ אם ורק אם

א) $V=U+W$

ב) $U\cap W=\{\bar{0}\}$.

11.5 הוכחה.

1) נניח כי $V=U\oplus W$. אז לפי הגדרה 11.3, סכום ישר $V=U+W$. נשאר להוכיח כי $U\cap W=\{\bar{0}\}$.
נניח $\mathrm{v}\in U\cap W$, אז $\mathrm{v}\in U$ וגם $\mathrm{v}\in W$. לכן אפשר לרשום

$$\mathrm{v}=\underset{\in U}{\mathrm{v}}+\underset{\in W}{\bar{0}}$$

וגם

$$\mathrm{v}=\underset{\in U}{\bar{0}}+\underset{\in W}{\mathrm{v}}$$

מכיוון שהסכום הוא ישר, יש רק דרך יחידה לרשום את v כסכום של וקטורים של U ו W. לכן $\mathrm{v}=\bar{0}$.

2) נניח כי $V=U+W$ וגם $U\cap W=\{\bar{0}\}$.
נוכיח כי $V=U\oplus W$.

לפי הגדרת סכום ישר 11.3, נשאר להוכיח כי כל וקטור $\mathrm{v}\in V$ ניתן להציג בדרך יחידה כסכום של וקטורים של U ו W.
נקח $\mathrm{v}\in V$. נניח כי $\mathrm{v}=u_1+\mathrm{w}_1$ וגם $\mathrm{v}=u_2+\mathrm{w}_2$ כאשר $u_1,u_2\in U$, $w_1,w_2\in W$.
אז

$$u_1+w_1=u_2+w_2 \qquad \Rightarrow \qquad u_1-u_2=w_2-w_1$$

(כאשר $u_1-u_2\in U$ ו $w_2-w_1\in W$. לכן

$$u_1-u_2=w_2-w_1\in U\cap W=\{\bar{0}\}\ .$$

מכאן, $u_1-u_2=\bar{0}$ וגם $w_2-w_1=\bar{0}$.
לכן $u_1=u_2$ וגם $w_1=w_2$.

■

11.6 דוגמא.
נסמן

$$U=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\middle|\,a,b,c\in\mathbb{F}\right\}$$

$$W=\left\{\begin{pmatrix}0&b\\-b&0\end{pmatrix}\middle|\,b\in\mathbb{F}\right\}$$

U קבוצת כל המטריצות הסימטריות מסדר 2×2,

W קבוצת כל המטריצות האנטי-סימטריות מסדר 2×2.

U, W תת מרחבים של מרחב וקטורי $M_{2\times 2}(\mathbb{F})$. הראו כי $M_{2\times 2}(\mathbb{F})=U\oplus W$.

הוכחה.

1) <u>צריך להוכיח:</u> $U\cap W=\{\bar{0}\}$.

נניח $\mathrm{v}\in U\cap W$. $\Leftarrow$

$$\mathrm{v}=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\b_1&c_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&b_2\\-b_2&0\end{pmatrix}$$

מכאן, $a_1=0$, $c_1=0$, $b_1=b_2$ ו $b_1=-b_2$.

לכן $b_1=b_2=0$.

ז"א $\mathrm{v}=\bar{0}$.

2) <u>נוכיח כי:</u> $M_{2\times 2}(\mathbb{F})=U+W$.

לכל מטריצה $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{F}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. נגדיר מטריצות $B = A + A^t$ ו $C = A - A^t$, ז"א

$$B = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix} \in U$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} \in W$$

אז

$$A = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C \in U + W \ .$$

■

11.7 משפט. ()

נניח ש V מרחב וקטורי ממיד n, U תת מרחב של V ממימד m, אז קיים תת מרחב W ממימד $n-m$ כך ש $V = U \oplus W$.

11.8 הוכחה.

נבחר בסיס כלשהו של U:

$$u_1, \ldots, u_m$$

ונשלים אותו לבסיס של V:

$$u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n$$

אז

$$U = \mathrm{sp}(u_1, \ldots, u_m)$$

$$V = \mathrm{sp}(u_1, \ldots, u_n)$$

נגדיר

$$W = \mathrm{sp}(u_{m+1}, \ldots, u_n)$$

נוכיח כי $V = U \oplus W$.

1) לכל $\mathrm{v} \in V$ קיימים סקלרים $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{F}$ כך ש

$$\mathrm{v} = k_1 u_1 + \ldots + k_m u_m + k_{m+1} u_{m+1} + \ldots + k_n u_n$$

נסמן

$$u = k_1 u_1 + \ldots + k_m u_m \in U \ , \qquad w = k_{m+1} u_{m+1} + \ldots + k_n u_n \in W \ .$$

אז $\mathrm{v} = u + w \Leftarrow V = U + W$.

2) <u>נוכיח כי:</u> $U \cap W = \{\bar{0}\}$.

נניח $\mathrm{v} \in U \cap W \Leftarrow \mathrm{v} \in U$ ו $\mathrm{v} \in W$.
לכן

$$\mathrm{v} = k_1 u_1 + \ldots + k_m u_m$$

וגם

$$\mathrm{v} = k_{m+1} u_{m+1} + \ldots + k_n u_n$$