

תרגילים 8: רדוקציות

שאלה 1 נתונה השפה הבאה:

$$L_{\geq 3} = \{ \langle M \rangle \mid |L(M)| \geq 3 \}$$

$L_{\geq 3}$ מכילה קידודים של מכונות טיורינג שמקבלות לפחות 3 מילים שונות. הוכיחו כי $R \notin L_{\geq 3}$ ע"י רדוקציה מ- L_{acc} .

שאלה 2 נתונה השפה הבאה:

$$L = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2) \}.$$

הוכיחו כי $RE \notin L$ ע"י רדוקציה מ- \bar{L}_{acc} .

שאלה 3 תהי L השפה

$$L_{1a} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ מקבלת בדיוק מילה אחת המתחילה ב-} a \}$$

(א) מצאו פונקציה רדוקציה מ- \bar{L}_{acc} ל- L_{1a} .

(ב) הוכיחו כי $RE \notin L_{1a}$.

(ג) הוכיחו כי $R \notin L_{1a}$.

שאלה 4 תהי L השפה

$$L_{\geq 1a} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ מקבלת לפחות מילה אחת המתחילה ב-} a \}$$

(א) מצאו פונקציה רדוקציה מ- L_{acc} ל- L_{1a} .

(ב) הוכיחו כי $R \notin L_{1a}$.

שאלה 5 תהי L השפה

$$L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} = \{ \langle M_1, M_2, M_3 \rangle \mid L(M_1) \subset L(M_2) \subset L(M_3) \}$$

(א) מצאו פונקציה רדוקציה מ- \bar{L}_{acc} ל- $L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3}$.

(ב) הוכיחו כי $R \notin L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3}$.

(ג) הוכיחו כי $RE \notin L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3}$.

שאלה 6 תהי L_ε השפה הבאה:

$$L_\varepsilon = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ עוצרת על מילת הריקה } \varepsilon \}$$

(א) האם L_ε כריעה?

(ב) האם L_ε קבילה?

שאלה 7 נתונה השפה הבאה:

$$L = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \varepsilon \} .$$

הוכיחו כי $L \notin R$ ע"י רדוקציה מ- L_{acc} .

שאלה 8 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה.

אם $L_1 \notin R$ אז לכל שפה $L_2 \notin R$ קיימת רדוקציה $L_2 \leq L_1$.

תשובות

שאלה 1פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M_\emptyset היא מ"ט הדוחה כל קלט ו- M' היא מ"ט שעל כל קלט y , מתעלמת מ- y ומריצה את M על w ועונה כמוה.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

נכונות הרדוקציה:

נוכיח כי

$$x \in L_{\text{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L_{\geq 3}.$$

אם $x \in L_{\text{acc}} \Leftrightarrow x = \langle M, w \rangle$ ו- $w \in L(M) \Leftrightarrow f(x) = \langle M' \rangle \Leftrightarrow f(x) \in L_{\geq 3}$ ולכן $L(M') = \Sigma^*$ ולפי האבחנה $|L(M')| = \infty$.

אם $x \notin L_{\text{acc}}$ שני מקרים:

מקרה 1: $x \neq \langle M, w \rangle \Leftrightarrow f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \Leftrightarrow |L(M_\emptyset)| = 0 \Leftrightarrow f(x) \notin L_{\geq 3}$.

מקרה 2: $x \neq \langle M, w \rangle$ ו- $w \notin L(M) \Leftrightarrow f(x) = \langle M' \rangle \Leftrightarrow L(M') = \emptyset$ ולפי האבחנה $|L(M')| = 0 \Leftrightarrow f(x) \notin L_{\geq 3}$.

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $L_{\text{acc}} \leq L_{\geq 3}$ ולכן ממשפט הרדוקציה, מכיוון ש- $L_{\text{acc}} \notin R$, מתקיים $L_{\geq 3} \notin R$.

שאלה 2פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M^*, M, w \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

• M^* היא מ"ט שמקבלת כל קלט

• M_\emptyset היא מ"ט שדוחה כל קלט.

נכונות הרדוקציה:

ראשית, f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x = \langle M, w \rangle$. אם לא, תחזיר קידוד קבוע $\langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle$ ואם כן, תחזיר קידוד $\langle M^*, M, w \rangle$.

נוכיח כי

$$x \in \bar{L}_{\text{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L.$$

אם $x \in \bar{L}_{acc}$ \Leftarrow שני מקרים:

מקרה 1: $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow f(x) = \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle$ ו- $\varepsilon \in L(M^*)$ ו- $\varepsilon \notin L(M_\emptyset) \Leftarrow f(x) \in L$

מקרה 2: $x = \langle M, w \rangle$ ו- $w \notin L(M) \Leftarrow f(x) = \langle M^*, M, w \rangle$ ו- $w \in L(M^*)$ ו- $w \notin L(M) \Leftarrow f(x) \in L$

אם $x \notin \bar{L}_{acc} \Leftarrow x = \langle M, w \rangle$ ו- $w \in L(M) \Leftarrow f(x) = \langle M^*, M, w \rangle$ ו- $w \in L(M^*)$ ו- $w \notin L(M) \Leftarrow f(x) \notin L$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $\bar{L}_{acc} \leq L$, ומכיוון ש- $\bar{L}_{acc} \notin RE$ ממשפט הרדוקציה מתקיים $L \notin RE$.

שאלה 3

(א) פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \{ "ab" \} & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M' המ"ט הבאה:

$M' =$ על כל קלט y :

(1) אם $y = "ab"$ \Leftarrow מקבלת.

(2) אחרת מריצה M על w ועונה כמוה.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \{ab\} & w \notin L(M) \end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

אם $x \in \bar{L}_{acc}$ \Leftarrow שני מקרים:

מקרה 1: $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow f(x) = \{ "ab" \} \Leftarrow f(x) \in L_{1a}$

מקרה 2: $x = \langle M, w \rangle$ ו- $w \notin L(M) \Leftarrow L(M') = \{ "ab" \}$ לפי האבחנה $\Leftarrow f(x) \in L_{1a}$

אם $x \notin \bar{L}_{acc} \Leftarrow x = \langle M, w \rangle$ ו- $w \in L(M) \Leftarrow f(x) = \langle M' \rangle$ ולפי האבחנה $\Leftarrow \langle M' \rangle \notin L_{1a} \Leftarrow L(M') = \Sigma^*$ מכילה יותר ממילה אחת המתחילה ב- $a \Leftarrow f(x) \notin L_{1a}$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $\bar{L}_{acc} \leq L_{1a}$.

(ב) מכיוון ש- $\bar{L}_{acc} \notin RE$ ממשפט הרדוקציה מתקיים $L_{1a} \notin RE$

(ג) מכיוון ש- $\bar{L}_{acc} \notin R$ ממשפט הרדוקציה מתקיים $L_{1a} \notin R$

שאלה 4**(א)** פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M_\emptyset היא מ"ט שדוחה כל קלט ו- M' המ"ט הבאה: $M' =$ על כל קלט y :**(1)** אם $y \neq "ab"$ דוחה.**(2)** אחרת מריצה M על w ועונה כמוה.אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \{ "ab" \} & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

$$L(M') = \{ "ab" \} \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M' \rangle \iff x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } w \in L(M) \iff x \in L_{acc} \text{ אם } \\ f(x) \in L_{\geq 1a} \iff \langle M' \rangle \in L_{\geq 1a}$$

אם $x \notin L_{acc}$ שני מקרים:

$$\text{מקרה 1: } x \neq \langle M, w \rangle \iff f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \text{ ו- } L(M_\emptyset) = \emptyset \iff L(M_\emptyset) \notin L_{\geq 1a} \iff f(x) \notin L_{\geq 1a} \\ \iff L(M_\emptyset) \notin L_{1a} \text{ לא מכילה מילה המתחילה ב- } a$$

$$\text{מקרה 2: } x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } w \notin L(M) \iff L(M') = \emptyset \text{ לפי האבחנה } \iff L(M_\emptyset) \notin L_{1a} \iff f(x) \notin L_{1a}$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $L_{acc} \leq L_{\geq 1a}$.**(ב)** מכיוון ש- $L_{acc} \notin R$ ממשפט הרדוקציה מתקיים $L_{\geq 1a} \notin R$.**שאלה 5****(א)** פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M_\emptyset, M', M^* \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset, M_{\text{even}}, M^* \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

• M_\emptyset היא מ"ט שדוחה כל קלט,• M^* היא מ"ט שמקבלת כל קלט,• M_{even} היא מ"ט שמקבלת רק מילים $x \in \Sigma^*$ עבורן $|x| \bmod 2 = 0$ • M' המ"ט הבאה:

$M' = \text{על כל קלט } y:$

(1) אם $|y|$ אי-זוגי \Leftarrow מקבלת.

(2) אחרת מריצה M על w ועונה כמוה.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \{y : |y| \bmod 2 = 0\} & w \notin L(M) \end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

אם $x \in \bar{L}_{\text{acc}}$ \Leftarrow שני מקרים:

מקרה 1:

$$\begin{aligned} x &\neq \langle M, w \rangle \\ L(M_\emptyset) \subset L(M_{\text{even}}) \subset L(M^*) \text{ ו- } f(x) = \langle M_\emptyset, M_{\text{even}}, M^* \rangle &\Leftarrow \\ f(x) \in L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} &\Leftarrow \end{aligned}$$

מקרה 2:

$$\begin{aligned} x &= \langle M, w \rangle \text{ ו- } w \notin L(M) \\ L(M') = \{y : |y| \bmod 2 = 0\} \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M' \rangle &\Leftarrow \\ L(M_\emptyset) \subset L(M') \subset L(M^*) &\Leftarrow \\ f(x) \in L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} &\Leftarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &\notin \bar{L}_{\text{acc}} \text{ אם} \\ w &\in L(M) \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle &\Leftarrow \\ L(M') = \Sigma^* \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M_\emptyset, M', M^* \rangle &\Leftarrow \\ L(M') \not\subset L(M^*) &\Leftarrow \\ f(x) &\notin L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} &\Leftarrow \\ \bar{L}_{\text{acc}} &\leq L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} \text{ לסיכום, הוכחנו רדוקציה} \end{aligned}$$

(ב) מכיוון ש- $\bar{L}_{\text{acc}} \notin R$ ממשפט הרדוקציה מתקיים $L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} \notin R$

(ג) מכיוון ש- $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$ ממשפט הרדוקציה מתקיים $L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} \notin RE$

שאלה 6 נבנה רדוקציה מ- L_ε ל- L_{acc} :

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{loop} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M_{loop} מ"ט שלא עוצרת על אף קלט ו- M' המ"ט הבאה:

$$M' = \text{על כל קלט } y:$$

(1) מריצה M על ε .

(2) אם M מקבלת $\Leftarrow M'$ מקבלת.

(3) אם M דוחה $\Leftarrow M'$ מקבלת.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & M \text{ עוצרת על } \varepsilon \\ \emptyset & M \text{ לא עוצרת על } \varepsilon \end{cases}$$

הוכת הנכונות:

$$\langle M' \rangle \in L_{acc} \iff L(M') = \Sigma^* \iff M \text{ עוצרת על } \varepsilon \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle \iff x \in L_\varepsilon$$

$$f(x) \in L_{acc} \iff$$

$$x \notin L_\varepsilon \iff \text{שני מקרים:}$$

$$\text{מקרה 1: } f(x) \notin L_{acc} \iff f(x) = \langle M_{loop} \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle$$

$$\text{מקרה 2: } x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } M \text{ לא עוצרת על } \varepsilon \iff L(M') = \emptyset \iff \text{לא קיים מילה אשר } M' \text{ מקבלת}$$

$$\langle M' \rangle \notin L_{acc} \iff$$

שאלה 7 פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M_\emptyset מכונת טיורינג שדוחה כל קלט.

$$M' = \text{על קלט } y:$$

• שומרת את y על סרט נוסף.

• מריצה את M על w .

○ אם M דוחה $\Leftarrow M'$ דוחה.

○ אם M מקבלת $\Leftarrow M'$ בודקת האם $y = \varepsilon$.

* אם כן, מקבלת.

* אם לא, דוחה.

אבחנה

$$L(M') = \begin{cases} \{\varepsilon\} & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}.$$

נכונות הרדוקציה

(1) f חשיבה כי ניתן לבנות מכונת טיורינג שבודקת האם $x = \langle M, w \rangle$. אם לא, מחזירה קידוד קבוע של $\langle M_0 \rangle$. אם כן, מחזירה קידוד של M' ע"י הוספת קוד שמעתיק את y לסרט נוסף ומבצע השווה בין y ל- ε .

(2) נראה כי $w \in L_{acc} \Leftrightarrow f(x) \in L$.

אם $x \in L_{acc}$

$$w \in L(M) \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$$

$$L(M') = \{\varepsilon\} \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow$$

$$f(x) \in L \Leftarrow$$

אם $x \notin L_{acc} \Leftarrow$ שני מקרים:

$$\bullet f(x) \notin L \Leftarrow L(M_0) = \emptyset \text{ ו- } f(x) = \langle M_0 \rangle \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$$

$$\bullet f(x) \notin L \Leftarrow L(M') = \emptyset \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow w \notin L(M) \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle$$

הראינו רדוקציה $L_{acc} \leq L$ ומכיוון ש- $L_{acc} \notin R$, ממשפט הרדוקציה מתקיים, $L \notin R$.

שאלה 8

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $L_2 = \overline{L_{acc}}, L_1 = L_{acc}$.

$$\bullet L_2 \notin R \text{ וגם } L_1 \notin R$$

$$\bullet \text{ נניח בשלילה כי } L_2 \leq L_1.$$

$$\bullet \text{ נתון כי } L_1 = L_{acc} \text{ ואנחנו יודעים ש: } L_{acc} \in RE \text{ לכן } L_1 \in RE.$$

$$\bullet \text{ אזי ממשפט הרדוקציה } L_2 \in RE, \text{ בסתירה לכך ש- } \overline{L_{acc}} \notin RE.$$

הסבר: כפי שהוכחנו בכיתה, נניח בשלילה כי $\overline{L_{acc}} \in RE$.

$$\text{מכיוון ש- } L_{acc} \in RE \text{ אז בהכרח } L_{acc} \in R.$$

זאת סתירה לכך ש- L_{acc} לא כריעה.