

## שיעור 2

### חוגים מתמטיים

### 2.1 הפונקציה אוילר

#### הגדרה 2.1 פונקציה אוילר

יהי  $m$  מספר שלם. הפונקציה אוילר מסומנת  $\phi(m)$  ומוגדרת להיות כמות השלמים שקטנים ממש  $m$  וזרים ביחס ל- $m$ .

$$\phi(m) := |\{a \in \mathbb{N} \mid \gcd(a, m) = 1, a < m\}|.$$

#### דוגמה 2.1

מכיוון ש- $26 = 2 \times 13$ , הערכים של  $a$  עבורם  $\gcd(a, 26) = 1$  הם

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25\}.$$

ז"א יש בדיוק 12 ערכים של  $a$  עבורם  $\gcd(a, 26) = 1$ .

$$\phi(26) = 12.$$

#### משפט 2.1 הפירוק לראשוניים של פונקציה אוילר

יהי  $m \geq 2$  מספר שלם ונניח כי הפירוק למספרים ראשוניים שלו הוא

$$m = \prod_{i=1}^n p_i^{e_i}.$$

אזי

$$\phi(m) = \prod_{i=1}^n (p_i^{e_i} - p_i^{e_i-1}).$$

#### דוגמה 2.2

מצאו את  $\phi(60)$ .

**פתרון:**

$$60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \text{ לכן}$$

$$\phi(60) = (2^2 - 2^1) (3^1 - 3^0) (5^1 - 5^0) = (2)(2)(4) = 16.$$

#### דוגמה 2.3

חשבו את  $\phi(24)$

## פתרון:

$$24 = 2^3 3^1 .$$

לכן

$$\phi(24) = (2^3 - 2^2)(3^1 - 3^0) = (8 - 4)(3 - 1) = 8 .$$

## משפט 2.2

אם  $p$  מספר ראשוני אז

$$\phi(p) = p - 1 .$$

הוכחה: תרגיל בית.

## משפט 2.3

אם  $p$  מספר ראשוני אז

$$\phi(p^n) = p^n - p^{n-1} .$$

הוכחה: תרגיל בית.

## משפט 2.4

אם  $a, b$  שלמים זרים (כלומר  $\gcd(a, b) = 1$ ) אז

$$\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b) .$$

הוכחה:

• נניח ש- $a, b$  זרים.• נניח שהפירוקים לראשוניים של  $a$  ו- $b$  הם:

$$a = p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n} , \quad b = q_1^{f_1} \dots q_m^{f_m} .$$

• ו- $a$  זרים לכן הראשוניים בין השני הפירוקים כולם שונים, כלומר  $p_i \neq q_j$  לכל  $1 \leq i, j \leq \min n, m$ .• לכן אם הפירוק לראשוניים של  $ab$  הוא

$$ab = p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n} q_1^{f_1} \dots q_m^{f_m} .$$

• מכאן

$$\phi(ab) = (p_1^{e_1} - p_1^{e_1-1}) \dots (p_n^{e_n} - p_n^{e_n-1}) (q_1^{f_1} - q_1^{f_1-1}) \dots (q_m^{f_m} - q_m^{f_m-1}) = \phi(a)\phi(b) .$$

## משפט 2.5

אם  $p$  ו- $q$  מספרים ראשוניים שונים אז

$$\phi(p \cdot q) = (p - 1)(q - 1) .$$

הוכחה: תרגיל בית.

## 2.2 החוג $\mathbb{Z}_m$

### הגדרה 2.2 החוג $\mathbb{Z}_m$

החוג  $\mathbb{Z}_m$  מוגדר להיות להיות הקבוצה של מספרים שלמים

$$\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m - 1\}$$

יחד עם הפעולות  $\oplus$  ו- $\odot$  המוגדרות כך:

לכל  $a, b \in \mathbb{Z}_m$ ,

$$a \oplus b = (a + b) \bmod m \quad a \odot b = ab \bmod m .$$

במילים אחרות,  $\mathbb{Z}_m$  היא קבוצת השארית בחלוקה ב- $m$ .

מכאן ואילך נסמן חיבור וכפל ב-  $\mathbb{Z}_m$  עם הסימנים הרגילים  $+$  ו- $\times$  או  $\cdot$ .

### דוגמה 2.4

חשבו את  $11 \times 13$  ב-  $\mathbb{Z}_{16}$ .

**פתרון:**

$$11 \times 13 = 143 . \text{ נמצא את השארית בחלוקה ב- } 16 :$$

$$(11 \times 13) \bmod 16 = 143 \bmod 16 = 15 .$$

לפיכך  $11 \times 13 = 15$  ב-  $\mathbb{Z}_{16}$ .

### משפט 2.6 תכונות של החוג $\mathbb{Z}_m$

לכל  $a, b, c \in \mathbb{Z}_m$  התנאים הבאים מתקיימים.

1. סגירה תחת חיבור:

$$a + b \in \mathbb{Z}_m .$$

2. חוק החילוף לחיבור:

$$a + b = b + a .$$

3. חוק הקיבוץ לחיבור:

$$(a + b) + c = a + (b + c) .$$

4. קיום איבר הניטרלי ביחס לחיבור:

$$a + 0 = 0 + a = a .$$

5. האיבר הנגדי של  $a$  הוא  $m - a$ , ז"א  $-a = m - a$ . הסבר:

$$a + (m - a) = (m - a) + a = m = 0$$

ב-  $\mathbb{Z}_m$ .

6. סגירה תחת כפל:

$$ab \in \mathbb{Z}_m .$$

7. חוק החילוף לכפל:

$$ab = ba .$$

8. חוק הקיבוץ לכפל:

$$(ab)c = a(bc) .$$

9. קיום איבר הניטרלי ביחס לכפל:

$$a \times 1 = 1 \times a = a .$$

10. חוק הפילוג:

$$(a + b)c = (ac) + (bc) .$$

תכונות 1, 3-5 אומרות כי  $\mathbb{Z}_m$  הינו "חבורה מתמטית".

יחד עם תכונה 2,  $\mathbb{Z}_m$  הוא חבורה אָבֵלִית.

כל התכונות 1-10 אומרות כי  $\mathbb{Z}_m$  הוא חוג מתמטי.

### הגדרה 2.3 איבר ההופכי ב- $\mathbb{Z}_m$

יהי  $a \in \mathbb{Z}_m$ . האיבר ההופכי של  $a$  מסומן ב-  $a^{-1}$  ומקיים את התנאי

$$aa^{-1} \equiv 1 \pmod{m} \quad \text{וגם} \quad a^{-1}a \equiv 1 \pmod{m}$$

### משפט 2.7

נתון היחס שקילות

$$ax \equiv y \pmod{m} .$$

יש פתרון יחיד  $x \in \mathbb{Z}_m$  לכל  $y \in \mathbb{Z}_m$  אם ורק אם  $\gcd(a, m) = 1$ .

הוכחה:

כיוון  $\Leftarrow$

נניח בשלילה כי למשוואה  $ax \equiv y \pmod{m}$  יש פתרון יחיד  $x = x_1$  אבל  $\gcd(a, m) = d > 1$ .

אזי  $ax_1 \equiv y \pmod{m}$  ולכן קיים  $q$  שלם עבורו  $ax_1 = qm + y$ .

לכן  $\frac{am}{d}$  הוא שלם ולכן  $ax_1 + \frac{am}{d} = qm + y + \frac{am}{d}$ .

מכאן  $a \left( x_1 + \frac{m}{d} \right) = \left( q + \frac{a}{d} \right) m + y$ , ז"א קיים שלם  $Q = q + \frac{a}{d}$  כך ש-

$$a \left( x_1 + \frac{m}{d} \right) = Qm + y \Rightarrow a \left( x_1 + \frac{m}{d} \right) \equiv y \pmod{m}$$

ולכן  $ax_2 \equiv y \pmod{m}$  כאשר  $x_2 = x_1 + \frac{m}{d}$ .

לכן  $x_2$  הוא גם פתרון, בסתירה לכך שיש רק פתרון יחיד.

כיוון  $\Rightarrow$

ננחית ש:  $\gcd(a, m) = 1$  ונניח בשלילה כי יש שני פתרונות  $x_1 \not\equiv x_2 \pmod{26}$ . כלומר:

$$ax_1 \equiv y \pmod{m} \quad \text{ו-} \quad ax_2 \equiv y \pmod{m} .$$

לפי טרנזיטיביות  $ax_1 \equiv ax_2 \pmod{m}$  ולכן  $m \mid a(x_1 - x_2)$ .

■  $\gcd(a, m) = 1$  ולכן  $m \nmid a$  ולכן  $m \mid x_1 - x_2$  לכן  $x_1 \equiv x_2 \pmod{26}$ , בסתירה לכך ש-  $x_1 \not\equiv x_2 \pmod{26}$ .

## מסקנה 2.1

יהי  $a \in \mathbb{Z}_m$ . קיים איבר הופכי  $a^{-1} \in \mathbb{Z}_m$  כך ש- 2.3 מקיים את התנאי

$$aa^{-1} \equiv 1 \pmod{m} ,$$

אם ורק אם  $\gcd(a, m) = 1$ .

הוכחה:

כיוון  $\Leftarrow$

נניח ש-  $\gcd(a, m) = 1$ . לכן לפי משפט בזו קיימים שלמים  $x, y$  כך ש-  $xa + ym = 1$ . נבעיר אגפים ונקבל:  $xa \equiv 1 \pmod{m}$  ולכן  $xa = 1 - ym$ .

כיוון  $\Rightarrow$

נניח ש-  $ax \equiv 1 \pmod{m}$ . אזי קיים שלם  $q$  עבורו  $ax = qm + 1$ . נעביר אגפים ונקבל:  $ax + (-q)m = 1$ . לכן קיימים שלמים  $x$  ו-  $y = -q$  כך ש:  $ax + ym = 1$ . לכן לפי משפט בזו,  $\gcd(a, m) = 1$ .

## דוגמה 2.5

הוכיחו שקיים איבר הופכי ל- 11 ב-  $\mathbb{Z}_{26}$  ואם כן מצאו אותו.

**פתרון:**

קיים איבר הופכי של  $a$  ב-  $\mathbb{Z}_m$  אם ורק אם  $\gcd(a, m) = 1$ . לכן נבדוק את ה-  $\gcd(26, 11)$  באמצעות האלגוריתם של אוקליד המוכלל. יהיו  $a = 26, b = 11$ .

$$\begin{aligned} r_0 &= a = 26 , & r_1 &= b = 11 , \\ s_0 &= 1 , & s_1 &= 0 , \\ t_0 &= 0 , & t_1 &= 1 . \end{aligned}$$

$q_1 = 2$	$r_2 = 26 - 2 \cdot 11 = 4$	$s_2 = 1 - 2 \cdot 0 = 1$	$t_2 = 0 - 2 \cdot 1 = -2$	שלב $i = 1$
$q_2 = 2$	$r_3 = 11 - 2 \cdot 4 = 3$	$s_3 = 0 - 2 \cdot 1 = -2$	$t_3 = 1 - 2 \cdot (-2) = 5$	שלב $i = 2$
$q_3 = 1$	$r_4 = 4 - 1 \cdot 3 = 1$	$s_4 = 1 - 1 \cdot (-2) = 3$	$t_4 = -2 - 1 \cdot (5) = -7$	שלב $i = 3$
$q_4 = 3$	$r_5 = 3 - 3 \cdot 1 = 0$	$s_5 = -2 - 3 \cdot (3) = -11$	$t_5 = 5 - 3 \cdot (-7) = 28$	שלב $i = 4$

$$\gcd(a, b) = r_4 = 1, \quad x = s_4 = 3, \quad y = t_4 = -7.$$

$$ax + by = 3(26) - 7(11) = 1.$$

מכאן אנחנו רואים כי  $\gcd(26, 11) = 1$  ולכן לפי משפט 2.7 ההופכי של 11 קיים ב- $\mathbb{Z}_{26}$ . מחשבים את האיבר ההופכי לפי השיטה הבאה:

$$-7(11) = 1 - 9(26) \Rightarrow -7(11) \equiv 1 \pmod{26} \Rightarrow 19(11) \equiv 1 \pmod{26} \Rightarrow 11^{-1} \equiv 19 \pmod{26}.$$

■

## כלל 2.1

האיברים של  $\mathbb{Z}_{26}$  שעבורם קיימים איברים הופכיים הינם

$1^{-1}$	$3^{-1}$	$5^{-1}$	$7^{-1}$	$9^{-1}$	$11^{-1}$	$15^{-1}$	$17^{-1}$	$19^{-1}$	$21^{-1}$	$23^{-1}$	$25^{-1}$
1	9	21	15	3	19	7	23	11	5	17	25

## הגדרה 2.4 פונקציית אוילר $\phi(m)$

נתון החוג  $\mathbb{Z}_m$  כאשר  $m \geq 2$  מספר טבעי.  $\phi(m)$  תוגדר להיות הפונקציה הנותנת את מספר איברים ב- $\mathbb{Z}_m$  אשר זרים ל- $m$ . (שימו לב ההגדרה הזאת זהה להגדרה 2.1.)

## מסקנה 2.2 מספר איברים הפיכיים ב- $\mathbb{Z}_m$

מספר האיברים של החוג  $\mathbb{Z}_m$  שעבורם קיימים איברים הופכיים שווה ל- $\phi(m)$ .

**הוכחה:**  $\phi(m)$  שווה למספר איברים  $a \in \mathbb{Z}_m$

עבורם  $\gcd(a, m) = 1$ , ולפי משפט 2.1 אותם האיברים הם האיברים ההפיכיים של  $\mathbb{Z}_m$ .

■

## 2.3 הפיכת מטריצות בחוג $\mathbb{Z}_m$

### הגדרה 2.5 המטריצה של קופקטורים

תהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

הקופקטור ה- $(i, j)$  של  $A$  מוגדר להיות הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת מ- $A$  ע"י מחיקת שורה  $i$  ועמודה  $j$ , כפול  $(-1)^{i+j}$ .

המטריצה של קופקטורים של המטריצה  $A$  מוגדרת

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

כאשר  $C_{ij}$  הקופקטור ה- $(i, j)$  של  $A$ .

## הגדרה 2.6 המטריצה המצורפת

תהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . המטריצה המצורפת של  $A$  היא מטריצה מסדר  $n \times n$  שמסומנת  $\text{adj}(A)$  ומוגדרת

$$\text{adj}(A) = C^t$$

כאשר  $C$  המטריצה של קופקטורים של  $A$ .

## משפט 2.8 נוסחת למטריצה ההופכית

נניח כי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  מטריצה ריבועית. אם  $A$  הפיכה, (כלומר אם  $|A| \neq 0$ ) אז המטריצה ההופכית נתונה ע"י נוסחת קיילי המילטון:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A),$$

כאשר  $\text{adj}(A)$  המטריצה המצורפת של  $A$ .

## דוגמה 2.6

מצאו את ההופכית של

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{2 \times 2}.$$

## פתרון:

$$|A| = 11 \cdot 7 - 8 \cdot 3 = 53 = 1 \pmod{26}.$$

$\gcd(1, 26) = 1$  לכן המטריצה הפיכה ב- $\mathbb{Z}_{26}$ .

$$\begin{pmatrix} \cancel{11} & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{11} = (-1)^{1+1} 7 = 7$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{11} & \cancel{8} \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{12} = (-1)^{1+2} 3 = -3$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ \cancel{3} & \cancel{7} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{21} = (-1)^{2+1} 8 = -8$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & \cancel{7} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{22} = (-1)^{2+2} 11 = 11$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = C^t = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = |A|^{-1} \text{adj}(A) .$$

$$|A|^{-1} = 1^{-1} = 1 \in \mathbb{Z}_{26}$$

לפיכך

$$A^{-1} = |A|^{-1} \text{adj}(A) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 22 \\ 23 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{2 \times 2} .$$

■

## 2.7 דוגמה

מצאו את ההופכית של

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3 \times 3} .$$

**פתרון:**

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 15 + 1 \cdot (-10) = 5 .$$

$$\gcd(15, 26) = 1 \text{ לכן המטריצה הפיכה ב- } \mathbb{Z}_{26} .$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & 0 & \cancel{1} \\ 0 & 5 & 0 \\ \cancel{2} & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 15 .$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 .$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & 0 & \cancel{1} \\ 0 & 5 & \cancel{0} \\ 2 & 0 & \cancel{3} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -10 .$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & 0 & 1 \\ \cancel{0} & 5 & \cancel{0} \\ \cancel{2} & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{0} \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} \\ \cancel{0} & 5 & \cancel{0} \\ 2 & 0 & \cancel{3} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 .$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = C^t = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -10 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 21 \\ 0 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3 \times 3} .$$

$$A^{-1} = |A|^{-1} \text{adj}(A) .$$

$$|A|^{-1} = 5^{-1} = 21 \in \mathbb{Z}_{26}$$

לפיכך

$$A^{-1} = |A|^{-1} \text{adj}(A) = 21 \cdot \begin{pmatrix} 15 & 0 & 21 \\ 0 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 315 & 0 & 441 \\ 0 & 21 & 0 \\ 336 & 0 & 105 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3 \times 3} .$$

$$315 \% 26 = 315 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{315}{26} \right\rfloor = -23 \equiv 3 \pmod{26} \Rightarrow 315 \equiv 3 \pmod{26} .$$

$$441 \% 26 = 441 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{441}{26} \right\rfloor = 25 \Rightarrow 441 \equiv 25 \pmod{26} .$$

$$336 \% 26 = 336 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{336}{26} \right\rfloor = 24 \Rightarrow 336 \equiv 24 \pmod{26} .$$

$$105 \% 26 = 105 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{105}{26} \right\rfloor = 1 \Rightarrow 105 \equiv 1 \pmod{26} .$$

לפיכך

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 25 \\ 0 & 21 & 0 \\ 24 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3 \times 3} .$$

בדיקה:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 25 \\ 0 & 21 & 0 \\ 24 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 26 \\ 0 & 105 & 0 \\ 78 & 0 & 53 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{26} .$$