שעור 4
משפט קיילי-המילטון ופולינום מינימלי

4.1 הצבה של מטריצה ריבועית בפולינם

הגדרה 4.1 הצבה של מטריצה ריבועית בפולינם

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$. יהי

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_k x^k$$

פוליניום כאשר $\alpha_i \in \mathbb{F}$ סקלרים. הצבה של A בפולינים p מוגדרת להיות

$$p(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_k A^k$$

כאשר I_n המטריצה היחידה של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

דוגמה 4.1

יהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $p(x) = 2x^2 - 2x - 4$. חשבו את $p(A)$.

פתרון:

$$p(x) = 2x^2 - 2x - 4 = 2(x-2)(x+1) \ .$$

$$p(A) = 2(A - I_2)(A + I_2) = 2\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 24 & 32 \end{pmatrix} \ .$$

דוגמה 4.2

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ו $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \in \mathbb{R}_3[x]$. פרקו $p(x)$ לגורמים ליניאריים והשתמשו בפירוק זה כדי לחשב שוב את ההצבה של A ב- $p(x)$.

פתרון:

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x+1) \ .$$

$$p(A) = (A - I_3)(A - 2I_3)(A + I_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 10 \\ -5 & 1 & 18 \\ 1 & -5 & 26 \end{pmatrix}$$

משפט 4.1

תהי $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית ויהי $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום. אז

$$p(D) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

הוכחה: תרגיל בית

■

משפט 4.2

תהיינה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ו- $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. נניח ש $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה הפיכה. מתקיים:

$$(BAB^{-1})^k = BA^kB^{-1} \ .$$

הוכחה: נוכיח ע"י אינדוקציה.

<u>בסיס:</u> עבור $k=1$

$$(BAB^{-1})^1 = BA^1B^{-1} \ .$$

<u>מעבר:</u>

נניח ש- $(BAB^{-1})^k = BA^kB^{-1}$. (ההנחת האינדוקציה). נוכיח ש- $(BAB^{-1})^{k+1} = BA^{k+1}B^{-1}$.

$$\begin{aligned} (BAB^{-1})^{k+1} &= (BAB^{-1})^k \cdot BAB^{-1} \\ &= BA^kB^{-1} \cdot BAB^{-1} && \text{(ההנחת האינדוקציה)} \\ &= BA^k \cdot \underbrace{(B^{-1}B)}_{=I} \cdot AB^{-1} \\ &= BA^k \cdot I \cdot AB^{-1} \\ &= BA^k \cdot AB^{-1} \\ &= BA^{k+1}B^{-1} \ . \end{aligned}$$

■

משפט 4.3

תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות. כלומר קיימת P הפיכה כך ש- $B = PAP^{-1}$. נניח ש- $Q(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום. אז

$$Q(A) = PQ(B)P^{-1} \ .$$

הוכחה: נסמן $Q(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\ldots+\alpha_k x^k$.

$$\begin{aligned} Q(A) =& \alpha_0 I+\alpha_1 A+\ldots+\alpha_k A^k \\ =& \alpha_0 I+\alpha_1 (PBP^{-1})+\ldots+\alpha_k (PBP^{-1})^k \\ =& \alpha_0 PP^{-1}+\alpha_1 (PBP^{-1})+\ldots+\alpha_k (PBP^{-1})^k \end{aligned}$$

$(PBP^{-1})^k=PB^kP^{-1}$ (לפי משפט 4.2) לכן נקבל

$$\begin{aligned} Q(A) =& \alpha_0 PP^{-1}+\alpha_1 PBP^{-1}+\ldots+\alpha_k PB^kP^{-1} \\ =& P\left(\alpha_0 I+\alpha_1 B+\ldots+\alpha_k B^k\right)P^{-1} \\ =& PQ(B)P^{-1} \ . \end{aligned}$$

■

משפט 4.4

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה, כלומר קיימת P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A=PDP^{-1}$.
נניח ש- $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. אז לכל $q(x)\in\mathbb{F}[x]$ מתקיים

$$q(A)=P\begin{pmatrix} q(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & q(\lambda_n) \end{pmatrix}P^{-1}$$

הוכחה: נסמן $D=P^{-1}AP$. לפי משפט 4.3,

$$P^{-1}q(A)P=q(P^{-1}AP)=q(D) \ .$$

לפי משפט 4.1,

$$q(D)=\begin{pmatrix} q(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & q(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

לכן נקבל

$$P^{-1}q(A)P=\begin{pmatrix} q(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & q(\lambda_n) \end{pmatrix} ,$$

מכאן נובע כי

$$q(A)=P\begin{pmatrix} q(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & q(\lambda_n) \end{pmatrix}P^{-1} \ .$$

■

דוגמה 4.3

חשבו את ההצבה של $A=\begin{pmatrix}11 & -6\\ 20 & -11\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ בפולינום $Q(x)=x^{100}+2x^{51}-3$.

פתרון:
הערכים עצמיים של A הם $\lambda=-1$ ו- $\lambda=1$. המרחבים עמציים הם

$$V_{-1}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}\ ,V_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\right\}\ .$$

לכן $A=PDP^{-1}$ כאשר $P=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$ ו- $D=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}q(A)=&P\begin{pmatrix}q(-1)&0\\0&q(1)\end{pmatrix}P^{-1}=\quad\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}-4&0\\-8&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}20&-12\\40&-24\end{pmatrix}\end{aligned}$$

דוגמה 4.4

תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ סקלר. נניח ש $p(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינום. הוכיחו:

$p(A)=\lambda I_n$ אם"ם $p(B)=\lambda I_n$.

הוכחה: $\Leftarrow$

A,B דומות לכן קיימת $C\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה כך ש $B=C^{-1}AC$. לכן לפי 4.3,

$$p(B)=p\left(C^{-1}AC\right)=C^{-1}p(A)C$$

אם $p(A)=\lambda I_n$ אז

$$p(B)=C^{-1}\lambda I_nC=\lambda I_n\ .$$

$\Rightarrow$

$A=CBC^{-1}$ לכן לפי 4.3,

$$p(A)=p\left(CBC^{-1}\right)=Cp(B)C^{-1}\ .$$

לכן אם $p(B)=\lambda I_n$ אז

$$p(A)=C\lambda I_nC^{-1}=\lambda I_n\ .$$

■

4.2 הצבת של העתקה לינארית בפולינום

הגדרה 4.2 הצבה של העתקה ליניארית בפולינום

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, נניח ש $T : V \to V$ אופרטור ליניארי ו- $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots \alpha_k x^k$ פולינום. נגדיר את האופרטור הליניארי $p(T) : V \to V$ ע"י

$$p(T) = \alpha_0 I_V + \alpha_1 T + \ldots \alpha_k T^k$$

כאשר I_V האופרטור הזהות ($I_V(u) = u$ לכל $u \in V$).
$p(T)$ נקראת ההצבה של T ב- p.

דוגמה 4.5

יהי $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ אופרטור המוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3y \\ 2x+y \end{pmatrix} \ .$$

חשבו את $p(T)$ עבור $p(x) = 3x^2 - 4x - 1$ תוך כדי שימוש של המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

פתרון:

<u>שיטה 1</u>

הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$ הוא $E = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. המטריצה המייצגת הסטנדרטית מוגדרת $[T]_E = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(e_1)]_E & [T(e_1)]_E \\ | & | \end{pmatrix}$. נקבל

$$[T(e_1)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ , \qquad [T(e_2)]_E = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$

לכן $[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. נשתמש בנוסחה

$$[p(T)]_E = p([T]_E) \ .$$

נחשב $p([T]_E)$:

$$p([T]_E) = 3([T]_E)^2 - 4[T]_E - I_3 = 3\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 - 4\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -6 \\ 4 & -20 \end{pmatrix}$$

לכן לכל וקטור $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} [p(T)u]_E &= [p(T)]_E \cdot [u]_E \\ &= p([T]_E)\,[u]_E \\ &= \begin{pmatrix} -20 & -6 \\ 4 & -20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -20x-6y \\ 4x-20y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

שיטה 2

$$\begin{aligned}
p(T)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} =&3T^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-4T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
=&3T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
=&3\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}-15\\12\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}-20\\4\end{pmatrix}\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(T)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} =&3T^2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-4T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
=&3T\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
=&3\begin{pmatrix}-6\\-5\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}-18\\-15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-12\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}-6\\-20\end{pmatrix}\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(T)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} =&p\left(x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\\
=&\begin{pmatrix}-20x-6y\\4x-20y\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

דוגמה 4.6

יהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ אופרטור שמוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-3y\\2x+y\end{pmatrix}\ .$$

חשבו את ההצבה $p(T)$ עבור $p(x)=3x^2-4x+1$.

פתרון:

נחשב את המטריצה המייצגת של T שמוגדרת $[T]_E=\begin{pmatrix}| & |\\ [T(e_1)]_E & [T(e_1)]_E\\ | & |\end{pmatrix}$.

$$[T(e_1)]_E=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\ ,\qquad [T(e_2)]_E=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$$

לכן $[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^2 - 4x + 1 = (3x-1)(x-1) \\ p([T]_E) &= (3[T]_E - I)([T]_E - I) \\ &= \left(3\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -18 & -6 \\ 4 & -18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$p(T)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = p\left([T]_E\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -6 \\ 4 & -18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18x - 6y \\ 4x - 18y \end{pmatrix} \ .$$

דוגמה 4.7

נסמן $p(x) = 2x^2 + 3x - 4 \in \mathbb{R}[x]$. יהי $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ שמוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + 2y \end{pmatrix} \ .$$

חשבו את $p(T)$.

פתרון:

$$\begin{aligned} p(T)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 2T^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 32\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$p(T)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(T)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= p\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= x\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -9 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x - 9y \\ 9x + 8y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

דוגמה 4.8

יהי $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ אופרטור שמוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 3x + 7y \end{pmatrix} \ .$$

חשבו את $p(T)$ עבור $p(x)=5x^2-6x+1$ תוך כדי שימוש של המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

פתרון:

שיטה 1

הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$ הוא $E=\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$. ההגדרה של המטריצה המייצגת הסטנדרטית היא $[T]_E=\begin{pmatrix}| & | \\ [T(e_1)]_E & [T(e_1)]_E \\ | & |\end{pmatrix}$.

$$[T(e_1)]_E=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\ ,\qquad [T(e_2)]_E=\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}\ ,$$

לכו נקבל $[T]_E=\begin{pmatrix}2&-2\\3&7\end{pmatrix}$. ניתן לפרק את $p(x)$ לגורמים לינאריים:

$$p(x)=5x^2-6x+1=(5x-1)(x-1)\ .$$

בלהיעזר בפירוק הזה נחשב את $p\left([T]_E\right)$:

$$\begin{aligned}p([T]_E)&=\left(5\left([T]_E\right)-I_2\right)\left([T]_E-I_2\right)\\&=\left(5\begin{pmatrix}2&-2\\3&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix}2&-2\\3&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\\&=\begin{pmatrix}9&-10\\15&34\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\3&6\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-21&-78\\117&174\end{pmatrix}\end{aligned}$$

לכן עבור וקטור $u=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}[p(T)u]_E&=[p(T)]_E\cdot[u]_E\\&=\begin{pmatrix}-21&-78\\117&174\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-21x-78y\\117x+174y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

שיטה 2

$$\begin{aligned}p(T)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}&=5T^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-6T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=5T\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=5\begin{pmatrix}-2\\27\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-21\\117\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(T)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} =& 5T^2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - 6T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
=& 5T\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
=& 5\begin{pmatrix}-18\\43\end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
=& \begin{pmatrix}-90\\215\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}12\\-42\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
=& \begin{pmatrix}-78\\174\end{pmatrix}\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(T)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} =& p\left(x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\\
=& \begin{pmatrix}-21x-78y\\117x+174y\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

בדיוק כמו הפתרון המתקבל ע"י שיטה 1.

דוגמה 4.9

נגדיר $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3y+z\\2x-y+z\\x+y+z\end{pmatrix}\ .$$

נסמן $p(x)=x^2+x-2\in\mathbb{R}[x]$. יהי E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.

א חשבו את $[p(T)]_E$.

ב היעזרו בחישוב בסעיף א' כדי למצוא את $p(T)$.

פתרון:

סעיף א $[T]_E=\begin{pmatrix}0&3&1\\2&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. ניתן לפרק את $p(x)$ כ- $p(x)=(x-1)(x+2)$. לכן

$$[p(T)]_E = ([T]_E - I_3)([T]_E+2I_3) = \begin{pmatrix}-1&3&1\\2&-2&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&1\\2&1&1\\1&1&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5&1&5\\1&5&3\\4&4&2\end{pmatrix}$$

סעיף ב לכן

$$
\begin{aligned}
p(T)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} &= [p(T)]_E \cdot \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\\
&= x\,[p(T)]_E \cdot \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + y\,[p(T)]_E \cdot \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + z\,[p(T)]_E \cdot \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\\
&= x\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5\\ 1 & 5 & 3\\ 4 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5\\ 1 & 5 & 3\\ 4 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5\\ 1 & 5 & 3\\ 4 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\\
&= x\begin{pmatrix} 5\\ 1\\ 4\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1\\ 5\\ 4\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 5\\ 3\\ 2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 5x+y+5z\\ x+5y+3z\\ 4x+4y+2z\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

משפט 4.5

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T:V\to V$. נניח ש $p\in\mathbb{F}[x]$.
אם $u\in V$ וקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי λ, אז u וקטור עצמי של $p(T)$ ששייך לערך עצמי $p(\lambda)$.
כלומר, אם

$$T(u)=\lambda u$$

אז

$$p(T)\,(u)=p(\lambda)u\ .$$

הוכחה: ראו משפט 3.18 למעלה:

$$
\begin{aligned}
p(T)(u) &= \left(\alpha_0+\alpha_1 T+\ldots+\alpha_k T^k\right)(u)\\
&= \left(\alpha_0+\alpha_1 T(u)+\ldots+\alpha_k T^k(u)\right)\\
&= \left(\alpha_0+\alpha_1 \lambda u+\ldots+\alpha_k \lambda^k u\right)\\
&= \left(\alpha_0+\alpha_1 \lambda+\ldots+\alpha_k \lambda^k\right)u\\
&= p(\lambda)u\ .
\end{aligned}
$$

■

4.3 איפוס פולינום על ידי מטריצה

הגדרה 4.3 איפוס פולינום ע"י מטריצה

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ויהי $p(x)\in\mathbb{F}[x]$. אומרים כי A מאפסת את $p(x)$ אם

$$p(A)=0_{n\times n}$$

כאשר $0_{n\times n}$ מטריצה האפס של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

משפט 4.6 מטריצות דומות מאפסות אותו פולינום

אם A ו- B מטריצות דומות, אז הפולינום f מתאפס ע"י A אם"ם הוא מתאפס ע"י B.

הוכחה: נניח ש $f(A)=0$. נוכיח ש $f(B)=0$:
נסמן
$$f(x)=\alpha_k x^k+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0\ ,$$
אז
$$f(A)=\alpha_k A^k+\ldots+\alpha_1 A+\alpha_0 I=0\ .$$
A ו B מטריצות דומות לכן קיימת מטריצה הפיכה C כך ש
$$A=C^{-1}BC\ .$$
לכן
$$\alpha_k(C^{-1}BC)^k+\ldots+\alpha_1(C^{-1}BC)+\alpha_0 I=0\ .$$
$(C^{-1}BC)^k=C^{-1}B^kC$ (לפי משפט 4.2) לכן נקבל
$$C^{-1}\left(\alpha_k B^k+\ldots+\alpha_1 B+\alpha_0 I\right)C=0\ .$$
C הפיכה אז נכפיל מצד שמאל ב- C ומצד ימין ב- C^{-1} ונקבל
$$\alpha_k B^k+\ldots+\alpha_1 B+\alpha_0 I=0\ .$$
קיבלנו ש
$$f(B)=0\ .$$
■

משפט 4.7

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$.

א. $A^n\in \text{sp}\{I_n,A,A^2,\ldots,A^{n-1}\}$ אם"ם קיים פולינום $p(x)\in\mathbb{F}[x]$ מסדר n כך ש $p(A)=0$.

ב. הקבוצה $\{I_n,A,A^2,\ldots,A^n\}$ ת"ל אם"ם קיים פולינום שונה מאפס $p(x)\in\mathbb{F}[x]$ מסדר n לכל היותר כך ש- $p(A)=0$.

הוכחה:

<u>סעיף א.</u> נניח ש $A^n\in \text{sp}\{I_n,A,A^2,\ldots,A^{n-1}\}$. אז קיימים סקלרים כך ש-
$$A^n=\alpha_0 I_n+\alpha_1 A+\alpha_2 A^2+\ldots+\alpha_{n-1}A^{n-1}$$
ז"א
$$A^n-\alpha_{n-1}A^{n-1}-\alpha_{n-2}A^{n-2}-\ldots-\alpha_1 A-\alpha_0 I_n=0$$
לכן A מאפסת את
$$p(x)=x^n-\alpha_{n-1}x^{n-1}-\ldots-\alpha_1 x-\alpha_0\in\mathbb{F}[x]\ .$$

נניח ש- A מאפסת את הפולינויום

$$Q(x) = \beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0 \in \mathbb{F}[x]$$

מסדר n, כלומר $Q(A) = 0$. נניח ש $\beta_n \neq 0$. אז

$$\beta_n A^n = -\left(\beta_{n-1} A^{n-1} + \ldots + \beta_1 A + \beta_0 I_n\right)$$

נחלק שני האגפים ב β_n:

$$A^n = -\left(\frac{\beta_{n-1}}{\beta_n} A^{n-1} + \ldots + \frac{\beta_1}{\beta_n} A + \frac{\beta_0}{\beta_n} I_n\right)$$

קיבלנו כי $A^n \in \text{sp}\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\}$.

סעיף ב. נניח ש- $\{I_n, A, A^2, \ldots, A^n\}$ ת"ל. אז קיימים סקלירם שאינם כולם אפסים כך ש-

$$\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \alpha_n A^n = 0$$

מכאן A מאפסת $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$ שהוא פולינום שונה מאפס מסדר n לכל היותר.

להיפך, נניח ש- $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$ אינו פולינום האפס כך ש $p(A) = 0$. אז

$$\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_n A^n = 0$$

הוא צירוף לנארי לא טריוויאלי.

■

4.4 איפוס פולינום על ידי העתקה לינארית

הגדרה 4.4 איפוס פולינום על ידי העתקה לינארית

יהי $T : V \to V$ אופרטור ויהי $p(x) \in \mathbb{F}[x]$. אומרים כי T מאפס את $p(x)$ אם $p(T) = 0$ כאשר 0 מסמן את העתקת האפס.

דוגמה 4.10

נתון $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדר ע"י

$$T(x, y) = (-y, x)$$

חשבו את $f(T)$ כאשר $f(x)$ הפולינום

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1 \ .$$

פתרון:

$$T^2(x, y) = T\left(T(x, y)\right) = T(-y, x) = (-x, -y)$$
$$T^3(x, y) = T\left(T^2(x, y)\right) = T(-x, -y) = (y, -x)$$

לכן

$$f(T) = (y, -x) - (-x, -y) + (-y, x) - (x, y) = (0, 0) \ .$$

4.5 משפט קיילי-המילטון (Cayley-Hamilton)

משפט 4.8 משפט קיילי-המילטון

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם $p_A(x)$ הוא הפולינום האופייני של A אז

$$p_A(A) = 0_{n\times n}$$

כאשר $0_{n\times n}$ מטריצה האפס של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

דוגמה 4.11

נתונה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

א) בדקו ש- $p_A(A) = 0$.

ב) חשבו את A^2 ללא חישוב ישיר.

פתרון:

א)

$$p_A(\lambda) = |\lambda - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda$$

$$\begin{aligned} p_A(A) =& A^2 - 2A = A(A-2I) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ב) לפי קיילי-המילטון $p_A(A) = 0$ לכן

$$A^2 - 2A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A^2 = 2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

דוגמה 4.12

נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. מצאו את A^{-1} בעזרת משפט קיילי המילטון.

פתרון:

הפולינום האופייני של A הוא:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)-2 = \lambda^2-4\lambda+1$$

לכן

$$p_A(A) = A^2-4A+I=0 \quad \Rightarrow \quad 4A-A^2=I \quad \Rightarrow \quad A(4I-A)=I \ . \qquad (*)$$

$|A|=1$ לכן A הפיכה. נכפיל (*) ב- A^{-1} ונקבל $4I-A=A^{-1}$, ולכן

$$A^{-1}=4I-A=4\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix} \ .$$

דוגמה 4.13

נתונה מטריצה

$$A=\begin{pmatrix}-3&1&-1\\-5&3&-1\\-6&6&-4\end{pmatrix}$$

להיעזר במשפט קיילי המילטון חשבו את A^3 ו- A^{-1}.

פתרון:

הפולינום האופייני של A הוא

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) =& \begin{vmatrix} \lambda+3 & -1 & 1 \\ 5 & \lambda-3 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda+4 \end{vmatrix} \\
=&(\lambda+3)\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 \\ -6 & \lambda+4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & \lambda+4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & \lambda-3 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} \\
=&(\lambda+3)\left((\lambda-3)(\lambda+4)+6\right)+(5(\lambda+4)-6)+(-30-6(\lambda-3)) \\
=&(\lambda+3)(\lambda+3)(\lambda-2)+5\lambda+14-6\lambda-12 \\
=&(\lambda+3)(\lambda+3)(\lambda-2)-\lambda+2 \\
=&(\lambda+3)(\lambda+3)(\lambda-2)-(\lambda-2) \\
=&(\lambda-2)\left((\lambda+3)(\lambda+3)-1\right) \\
=&(\lambda-2)\left(\lambda^2+6\lambda+8\right) \\
=&(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda+4) \\
=&\lambda^3+4\lambda^2-4\lambda-16 \ .
\end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=-2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=-4$ מריבוי אלגברי 1.

נבדוק אם A הפיכה דרך הדטרמיננטה:

$$|A|=p_A(0)=-16\neq 0$$

לכן A הפיכה.

לפי משפט קיילי-המילטון,

$$p_A(A)=0 \quad \Rightarrow \quad A^3+4A^2-4A-16I_3=0 \quad \Rightarrow \quad A^3=-4A^2+4A+16I_3$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 6 \\ 6 & -2 & 6 \\ 12 & -12 & 16 \end{pmatrix}$$

לכן

$$A^3 = -4 \begin{pmatrix} 10 & -6 & 6 \\ 6 & -2 & 6 \\ 12 & -12 & 16 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 & 28 & -28 \\ -44 & 36 & -28 \\ -72 & 72 & -64 \end{pmatrix}$$

לפי משפט קיילי-המילטון,

$$p_A(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad A^3+4A^2-4A-16I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{1}{16}A^3+\frac{1}{4}A^2-\frac{1}{4}A = \left(\frac{1}{16}A^2 + \frac{1}{4}A - \frac{1}{4}I_3\right) A$$

ז"א

$$\begin{aligned} A^{-1} =& \frac{1}{16}A^2 + \frac{1}{4}A - \frac{1}{4}I_3 \\ =& \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 10 & -6 & 6 \\ 6 & -2 & 6 \\ 12 & -12 & 16 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{7}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

דוגמה 4.14

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו את הטענות הבאות:

א.

$$A^n \in \text{sp}\left\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\right\}$$

ב. אם A הפיכה אז

$$A^{-1} \in \text{sp}\left\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\right\}$$

ג. עבור

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

מבלי לחשב ישירות מטריצות הופכיות, מצאו את A^{-1} ואת A^{-2}.

פתרון:

סעיף א. לפי משפט ק"ה A מאפסת את $p_A(x)$. כלומר

$$p_A(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n = 0 \ .$$

לכן

$$A^n = -\alpha_{n-1}A^{n-1} - \ldots - \alpha_1 A - \alpha_0 I_n \in \text{sp}\left\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\right\} \ .$$

סעיף ב. לפי משפט ק"ה A מאפסת את $p_A(x)$, כלומר

$$p_A(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n = 0 \ ,$$

לכן

$$-\alpha_0 I_n = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A \ . \qquad (*)$$

$|A| = p_A(0)$. מכיוון ש- A הפיכה אז $\alpha_0 \neq 0$ ו α_0^{-1} קיים. נכפיל את שני אגפים של (*) ב $\frac{-1}{\alpha_0}A^{-1}$:

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_0}A^{n-1} - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0}A^{n-2} - \ldots - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}I_n \ . \qquad (\#)$$

לכן קיבלנו כי

$$A^{-1} \in \text{sp}\left\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\right\} \ .$$

סעיף ג.

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) =& |\lambda I_3 - A| \\
=& \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
=& (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & \lambda-1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \\
=& (\lambda-5)(\lambda+1)^2 \\
=& \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5
\end{aligned}$$

$$p_A(A) = A^3 - 3A^2 - 9A - 5I_n = 0 \quad \Rightarrow \quad I_n = \frac{1}{5}A^3 - \frac{3}{5}A^2 - \frac{9}{5}A = A\left(\frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A - \frac{9}{5}I_3\right)$$

אזי

$$A^{-1} = \frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A - \frac{9}{5}I_3 \ . \qquad (*1)$$

לכן $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{9}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

כדי למצוא את A^{-2} נכפיל את שני אגפי (*1) ב A^{-1} ונקבל:

$$A^{-2} = \frac{1}{5}A - \frac{3}{5}I_3 - \frac{9}{5}A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{9}{5}\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 17 & -8 & -8 \\ -8 & 17 & -8 \\ -8 & -8 & 17 \end{pmatrix} \ .$$

משפט 4.9 משפט קיילי-המילטון עבור העתקות

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $T:V\to V$ אופרטור. T מאפס את הפולינום האופייני שלה.

דוגמה 4.15

נתון אופרטור ליניארי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ שמוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6x+y+12z\\ -8x+2y+15z\\ -2x+5z\end{pmatrix}$$

הוכיחו ש- T הפיך באמצעות משפט ק"ה וחשבו $T^{-1}\begin{pmatrix} 3\\ 0\\ -4\end{pmatrix}$

פתרון:

הממ"ס היא

$$A=[T]_E=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 12\\ -8 & 2 & 15\\ -2 & 0 & 5\end{pmatrix}\ .$$

אז הפולינום האופייני

$$\begin{aligned}
p_A(x)=&|xI-A|\\
=&\begin{vmatrix} x+6 & -1 & -12\\ 8 & x-2 & -15\\ 2 & 0 & x-5\end{vmatrix}\\
=&2\begin{vmatrix} -1 & -12\\ x-2 & -15\end{vmatrix}+(x-5)\begin{vmatrix} x+6 & -1\\ 8 & x-2\end{vmatrix}\\
=&2\left(15+12x-24\right)+(x-5)\left((x+6)(x-2)+8\right)\\
=&-18+24x+(x-5)\left(x^2+4x-4\right)\\
=&x^3-x^2+2\ .
\end{aligned}$$

האיבר החופשי שונה מאפס לכן T הפיך. לפי משפט ק"ה:

$$T^3-T^2+2I=0$$

כאשר האגף הימין הוא אופרטור האפס. נפעיל T^{-1} על המשוואה ונקבל:

$$T^2-T+2T^{-1}=0$$

לכן

$$T^{-1}=-\frac{1}{2}T^2+\frac{1}{2}T$$

4.6 הפולינום המינימלי של מטריצה

הגדרה 4.5 פולינום המינימלי

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. הפולינום המינימלי הוא פולינום מתוקן מצורה

(#)
$$m(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{k-1}x^{k-1} + x^k \ ,$$

כאשר $k \geq 1$ כך ש:

(1 $m(A) = 0$

(2 k היא הסדר הנמוכה ביותר מבין הפולינומים מצורה (#) שמתאפסים ע"י A.

נסמן את הפולינום המינימלי של A ב- $m_A(x)$.

מסקנה 4.1 פולינום מינימלי של טריצה אלכסונית

אם $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה אלכסונית:

$$D = \begin{pmatrix}
\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & & & & & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_k & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_k
\end{pmatrix}$$

אם $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ האיברים השונים על האלכסון ($k \leq n$) אז הפולינום המינימלי של D הוא

$$m_D(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_k) \ .$$

משפט 4.10 ל- $m_A(x)$ ול- $p_A(x)$ יש בדיוק אותם גורמים אי-פריקים.

ל- $m_A(x)$ ול- $p_A(x)$ יש בדיוק אותם גורמים אי-פריקים. כלומר

$$m_A(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_A(\lambda) = 0 \ .$$

הוכחה:

נניח ש $m_A(\lambda) = 0$.

אז $m_A(x) = q(x)(x-\lambda)$ כאשר $\deg\, q(x) < \deg\, m_A(x)$ (נוסחת איוקליד לחיוק פולינומים).

$m_A(x)$ הוא הפולינים המינימלי של A לכן $q(A) \neq 0$.

נגדיר וקטורים v ו- w כך ש- $\mathrm{w} = q(A)\mathrm{v} \neq \bar{0}$.

$$\bar{0} = m_A(A)\mathrm{v} = (A-\lambda I)q(A)\mathrm{v} = (A-\lambda I)\mathrm{w} \ ,$$

לכן

$$A\mathrm{w} = \lambda \mathrm{w} \ .$$

ז"א w וקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ של A.

לכן $p_A(\lambda) = 0$.

נניח ש $p_A(\lambda)=0$.
אז λ ערך עצמי של A.
נניח ש- w הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ. אז

$$A\mathrm{w}=\lambda\mathrm{w}\ .$$

לכן

$$m_A(A)\mathrm{w}=m_A(\lambda)\mathrm{w}\ .$$

$m_A(A)=0$ לכן $m(\lambda)\mathrm{w}=0$.
w וקטור עצמי אז $\mathrm{w}\neq\bar{0}$, לכן $m_A(\lambda)=0$. ■

משפט 4.11 מטריצה מאפסת הפולינום המינימלי של מטריצה שאליה היא דומה

תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות ריבועיות. יהי $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A ויהי $m_B(x)$ הפולינום המינימלי של B. אם A,B מטריצות דומות אז

$$m_A(B)=0$$

ו-

$$m_B(A)=0\ .$$

הוכחה: A ו- B דומות לכן קיימת P הפיכה כך ש- $A=PBP^{-1}$. לפי משפט 4.3:

$$m_A(A)=P\cdot m_A(B)\cdot P^{-1}$$

P הפיכה אז נכפיל מצד ימין ב- P ומצד שמאל ב- P^{-1}:

$$P^{-1}\cdot m_A(A)\cdot P=m_A(B)\ .$$

$m_A(A)=0$ לכן $m_A(B)=0$. ■

משפט 4.12 למטריצות דומות יש אותו פולינום מינימלי

תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות. ל- A ו- B יש אותו פולינום מינימלי.

הוכחה: A ו- B דומות $\Leftarrow$ ל- A ו- B יש אותם ערכים עצמיים (לפי משפט 3.21).
יהי $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A ו- $m_B(x)$ הפולינום המינימלי של B.
כיוון של- A ו- B אותם ערכים עצמיים אז $m_A(x)$ ו- $m_B(x)$ מתפרקים לאותם גורמים ליניאריים:

$$m_A(x)=(x-\lambda_1)^{d_1}\ldots(x-\lambda_k)^{d_k}\ ,\qquad m_B(x)=(x-\lambda_1)^{e_1}\ldots(x-\lambda_k)^{e_k}\ .$$

A ו- B דומות אז $m_A(B)=0$ ו- $m_B(A)=0$ (לפי משפט 4.11 למעלה).

כעת נוכיח דרך השלילה כי $d_i=e_i$ לכל $1\leq i\leq k$ ולכן הפולינומים m_A ו- m_B זהים.

נניח כי עבור אחד הגורמים, $d_i\neq e_i$.

אם $d_i<e_i$, כיוון ש- $m_A(B)=0$ אז מתקיים ש- B מאפסת פולינום מדרגה נמוכה יותר מ- $m_B(x)$. בסתירה לכך כי $m_B(x)$ הוא הפולינום המינימלי של B.

אם $e_i < d_i$, כיוון ש- $m_B(A) = 0$, אז מתקיים ש- A מאפסת פולינום מדרגה נמוכה יותר מ- $m_A(x)$. בסתירה לכך כי $m_A(x)$ הוא הפולינום המינימלי של A.

■

משפט 4.13 A לכסינה אא"ם לפולינום מינימלי יש גורמים ליניאריים שונים

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ויהי $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A. A לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אם"ם כל הגורמים האי-פריקים של $m_A(x)$ הם ליניאריים ושונים.
כלומר A לכסינה אם"ם $m_A(x)$ מתפרק ל-

$$m_A(x) = (x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_i)\ldots(x-\lambda_k) \ .$$

הוכחה: נניח ש- A לכסינה.
יהיו $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ הערכים עצמיים השונים של A.
קיימת P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש-

$$A = PDP^{-1} \ .$$

לפי משפט 4.12 הפולינום המינימלי של A שווה לפולינום המינימלי של D ולפי מסקנה 4.1 $m_D(x) = (x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_k)$ לכן

$$m_A(x) = m_D(x) = (x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_k) \ .$$

■

4.7 תרגילים על הפולינום המינימלי

דוגמה 4.16

אם הפולינום המינימלי של מטריצה A הוא $m(x) = (x-1)(x-2)$, אז A לכסינה.

דוגמה 4.17

נניח A מטריצה מעל $\mathbb{R}$ כך שהפולינום המינימלי שלה הוא

$$m_A(x) = (x-1)(x-2)^2$$

אז A לא לכסינה.

דוגמה 4.18

נניח ש

$$p_A(x) = (x-1)^2(x-2)^2$$

אז

$$m_A(x) \neq (x-1)(x-2)(x-3)$$

כי $m_A(x) \nmid p_A(x)$.

דוגמה 4.19

נניח ש
$$p_A(x) = (x-1)(x-2)x$$
אז
$$m_A(x) = (x-1)(x-2)x \ .$$

דוגמה 4.20

נניח ש
$$p_A(x) = (x-1)^2(x-2)^2$$
מהן האפשרויות עבור m_A?

פתרון:

ישנן 4 אפשרויות:
$$(x-1)(x-2) \ , \qquad (x-1)^2(x-2) \ , \qquad (x-1)(x-2)^2 \ , \qquad (x-1)^2(x-2)^2 \ .$$
(אם A נתונה אפשר לבדוק איזה מהם מתאפס ע"י A. יש להציב את A בכל אחד מהפולינומים)

דוגמה 4.21

מצאו את הפולינום המינימלי של $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

פתרון:

$$p_A(x) = (x-2)^3(x-5) \ .$$
האפשרויות ל- $m_A(x)$ הם
$$f_1(x) = (x-2)(x-5) \ , \qquad f_2(x) = (x-2)^2(x-5) \ , \qquad f_3(x) = (x-2)^3(x-5) \ .$$
נציב את A:
$$\begin{aligned} f_1(A) =& (A-2I)(A-5I) \\ =& \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \neq& 0 \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(A) =&(A-2I)^2(A-5I)\\ =&\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1&0&0\\0&-3&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-3&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\ =&0\ . \end{aligned}$$

לכן $m_A(x)=f_2(x)=(x-2)^2(x-5)$.

דוגמה 4.22

תהיינה

$$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$$

האם A ו- B דומות?

פתרון:

$$p_A(x)=(x-2)^2=p_B(x)$$

A אלכסונית. B לא לכסינה, כי עבור הערך עצמי $\lambda=2$, הריבוי אלגברי שווה 2 אבל הריבוי גאומטרי שווה 1.

$$A-2I=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad \dim V_2=1\ .$$

$$m_A(x)=x-2\ ,\qquad m_B(x)=(x-2)^2\ .$$

לכן A ו- B לא דומות.

דוגמה 4.23

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו שכל ערך עצמי של A הוא שורש של הפולינום המינימלי.

הוכחה: נניח ש λ_0 ערך עצמי של A. אז

$$p_A(x)=(x-\lambda_0)^k\cdot q(x)\ ,$$

$k\geq 1$. ז"א, ב- $p_A(x)$ יש גורם אי פריק $(x-\lambda_0)$. לכן, לפי משפט 4.10, הוא מופיע גם ב- $m_A(x)$. ז"א

$$m_A(x)=(x-\lambda_0)^l\cdot t(x)\ .$$

ז"א

$$m_A(\lambda_0)=0\ .$$

■

דוגמה 4.24

תהי A מטריצה ריבועית כך שהפולינום המינימלי שלה הוא $m_A(x)=(x-1)^2$. יהי $f(x)=x^2+4x+3$.
הוכיחו כי המטריצה $f(A)$ הפיכה.

פתרון:
$m_A(A)=0 \Leftarrow (A-I)^2=0$.

$$f(A)=A^2+4A+3I=(A^2-2A+I)+6A+2I=(A-I)^2+6A+2I=6A+2I\ .$$

נוכיח כי $|6A+2I|\neq 0$ בדרך השלילה.

נניח ש $|6A+2I|=0$. אז

$$|6A+2A|=\left|6(A+\frac{2}{6}I)\right|=6^n\left|A+\frac{1}{3}I\right|=0$$

ז"א $\lambda=-\frac{1}{3}$ ערך עצמי של A. לכן הוא חייב להיות שורש של הפולינום המינימלי. סתירה.

דוגמה 4.25

מצאו את הפולינום המינימלי של $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}$

פתרון:
הפולינום האופייני של A הוא

$$p_A(\lambda)=(\lambda-2)^3=\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8\ .$$

לכו האפשרויות בשביל הפולינום מינימלי הן

$$f_1(x)=x_2\ ,\qquad f_2(x)=(x-2)^2\ ,\qquad f_3(x)=(x-2)^3\ .$$

$$f_1(A)=A-2I=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix}\neq 0$$

$$f_2(A)=(A-2I)^2=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן הפולינום המינימלי הוא

$$m_A(x)=(x-2)^2\ .$$

דוגמה 4.26

מצאו את הפולינום המינימלי והפולינום האופייני של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I \ .$$

פתרון:
הפולינום האופייני של A הוא

$$p_A(x) = (x-4)^3 \ .$$

A מטריצה סקלרית (מטריצה סקלרית היא מצורה αI כאשר α סקלר). הפולינום המינימלי של מטריצה סלרית הוא $m_A(x) = (x-\alpha)$. לכן הפולינום המינימלי של A הוא

$$m_A(x) = x-4 \ .$$

4.8 *משפטים: חילוק פולינומים, פולינום המינימלי ופולינומים שמתאפסים ע"י מטריצה

משפט 4.14

הפולינום המינימלי הוא יחיד.

הוכחה: נניח שיש שני פולינומים $f_1(x)$ ו- $f_2(x)$, $f_1(x) \neq f_2(x)$ מאותו סדר, כלומר

$$f_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{k-1} x^{k-1} + x^k \ ,$$

$$f_2(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_{k-1} x^{k-1} + x^k \ .$$

כך ש $f_1(A) = 0$ ו- $f_2(A) = 0$, אז

$$(f_1 - f_2)(A) = 0 \ .$$

$(f_1 - f_2)(x)$ פולינום מסדר קטן מ- k. סתירה. ■

משפט 4.15 משפט חילוק של פולינומים

יהיו $f(x), g(x)$ פוליניומים כך ש- $\deg g \leq \deg f$. אז קיימים פולינמים $r(x), q(x)$ יחידים כך ש

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

כאשר

$$\deg\ r(x) < \deg\ g(x), \qquad \deg\ g(x) \leq \deg\ f(x) \ .$$

משפט 4.16 פולינום שמתאפס ע"י A מחלק את הפולינום המינימלי

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית ויהי $f(x)$ פולינום. אם $f(A) = 0$ אז

$$m_A(x) \mid f(x) \ .$$

הוכחה: נחלק את $f(x)$ ב- $m_A(x)$. לפי משפט חילוק פולינומים,

$$f(x) = m_A(x) \cdot q(x) + r(x)$$

כאשר $\deg\, r(x) < \deg\, m_A(x)$. אז

$$f(A) = q(A) m_A(A) + r(A) \ .$$

$f(A) = 0$ ו $m_A(A) = 0$ לכן $r(A) = 0$.

ז"א או $r(x)$ הוא הפולינום האפס או הוא לא פולינום האפס אבל $r(x)$ מתאפס ע"י A.
$m_A(x)$ הוא הפולינום המינימלי ו $\deg\, r(x) < \deg\, m_A(x)$, כלומר $m_A(x)$ הוא הפולינום מדרגה הכי נמוכה המתאפס ע"י A.
לכן $r(A) = 0$ אם"ם $r(x) = 0$, כלומר $r(x)$ פולינום האפס.
כלומר קיבלנו ש- $f(x) = q(x) \cdot m_A(x)$ ולכן $m_A(x) \mid f(x)$. ■

מסקנה 4.2 פולינום המינימלי מחלק את הפולינום האופייני

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית. אם $p_A(x)$ הפולינום האופייני ו- $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A, אז

$$m_A(x) \mid p_A(x) \ .$$

הוכחה: לפי משפט קיילי המילטון , $p_A(A) = 0$. הפולינום המינימלי מחלק כל פולינום המתאפס ע"י A, לכן $m_A(x) | p_A(x)$. ■

משפט 4.17 $p_A(x)$ מחלק כל פולינום המתאפס ע"י A בחזקת הסדר של A.

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית. יהי $p_A(x)$ הפולינום האופייני של A. אם A מאפסת את הפולינום $f(x)$, כלומר אם $f(A) = 0$, אז

$$p_A(x) \mid f^n(x) \ .$$

הוכחה: $\deg\, p_A(x) = n$.
$f(A) = 0$ אז $f(x)$ אינו פולינום קבוע, ז"א $\deg\, f(x) \geq 1$, ולכן $\deg\, p_A(x) \leq \deg\, f^n(x)$.
נחלק $f^n(x)$ ב- $p_A(x)$ ע"י האלגוריתם איוקלידי:

$$f^n(x) = q(x) p_A(x) + r(x) \ , \qquad (*1)$$

$\deg\, r(x) < \deg\, p_A(x) \leq \deg\, f^n(x)$.

$m_A(x) | p_A(x)$ אז $p_A(x) = q_1(x) m_A(x)$. נציב זה ב- (*1) ונקבל

$$f^n(x) = q_1(x) q(x) m_A(x) + r(x) \ . \qquad (*2)$$

$f(A) = 0$ לכן $f^n(A) = 0$ לכן $m_A(x) \mid f^n(x)$.
נניח ש- $r(x) \neq 0$ ב- (*2). אז $m_A(x) \nmid f^n(x)$. סתירה.

■

משפט 4.18 גורם אי-פריק של הפולינום האופייני מחלק כל פולינום המתאפס ע"י A.

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. יהי $p_A(x)$ הפולינום האופייני של A. אם $(x-\lambda_0)$ גורם אי פריק של $p_A(x)$ ו- $f(x)$ פולינום המתאפס ע"י A, כלומר אם $f(A)=0$, אז

$$(x-\lambda_0) \mid f(x) \ .$$

הוכחה:
אם $(x-\lambda_0)$ גורם אי-פריק של $p_A(x)$, אז λ_0 ערך עצמי של A.
נחלק $f(x)$ ב- $(x-\lambda_0)$. כלומר לפי משפט חילוק פולינומים קיימים פולינומים יחידים $q(x), r(x)$ כך ש-

$$f(x) = q(x)(x-\lambda_0) + r(x)$$

כאשר $\deg\ r(x) < \deg\ (x-\lambda_0) \leq \deg\ f(x)$.
$\deg\ (x-\lambda_0) = 1$ אז $\deg\ r(x) = 0$.
ז"א $r(x)$ פולינום קבוע: $r(x) = c \in \mathbb{F}$ כאשר c סקלר.
יהי v וקטור עצמי השייך ל- λ_0. אז

$$0 = f(A)\mathrm{v} = q(A)(A-\lambda_0 I)\mathrm{v} + c\mathrm{v}$$

v הוא הוקטור עצמי השייך ל- λ_0, אז
$(A-\lambda_0)\mathrm{v} = A\mathrm{v} - \lambda_0\mathrm{v} = \lambda_0\mathrm{v} - \lambda_0\mathrm{v} = 0$.
לכן $c=0$, ואז נקבל

$$f(x) = q(x)(x-\lambda_0) \ ,$$

ז"א $(x-\lambda_0) \mid f(x)$. ■