המחלקה למדעי המחשב

ד' באדר תשפ"ד 14/03/24
16 : 10 − 17 : 40

אלגברה ליניארית 1 למדמ"ח

בוחן אמצע סמסטר

מרצים: ד'ר מרינה ברשדסקי, ד'ר ירמיהו מילר, ד'ר זהבית צבי.

תשפ"ד סמסטר א'

השאלון מכיל עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

===

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דף נוסחאות של הקורס (עמוד אחד $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לענות על כל השאלות 1-3.

===

שאלה 1 (35 נקודות)

נתונה מערכת משוואות ליניארית:

$$\begin{aligned} x+y+kz&=k\\ (k+1)y+(k-1)z&=k+2\\ 2x+2y+(3k-1)z&=3k+2\\ x+(k+2)y+(3k-2)z&=3k+4 \end{aligned}$$

א) מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין פתרון.

ב) מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת יש פתרון יחיד.

ג) מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת יהיו אינסוף פתרונות. לכל אחד מערכי k שמצאתם רשמו את הפתרון הכללי.

שאלה 2 (35 נקודות)

א) נתונה המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} \bar{2}x+\bar{3}y+z&=\bar{4}\\ \bar{3}x+\bar{2}y-\bar{3}z&=\bar{2}\\ x+y+\bar{2}z&=\bar{1} \end{aligned}$$

רשמו את כל הפתרונות בצורה מפורשת. כמה פתרונות יש למערכת?

ב) תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית: אם A הפיכה ו- B הפיכה אז $A+B$ הפיכה.

שאלה 3 (30 נקודות)

א) תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ המטריצות $A=\begin{pmatrix}1&4\\0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0\\7&6\end{pmatrix}$ ותהי $X\in\mathbb{R}^{2\times 2}$.
מצאו את המטריצה X המקיימת $AX=B$.

ב) נתונות $A,B,C\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:
אם $AB=AC$ אז $B=C$.

ג) נתונות $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:
$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ לכל $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$.

ד) תהי $F=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}\}$ הקבוצה של מטריצות ממשיות מסדר 2×2. הוכיחו או הפריכו כי F שדה.

פתרונות

שאלה 1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & k & k \\ 0 & (k+1) & k-1 & k+2 \\ 2 & 2 & 3k-1 & 3k+2 \\ 1 & k+2 & 3k-2 & 3k+4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4\to R_4-R_1]{R_3\to R_3-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k \\ 0 & (k+1) & k-1 & k+2 \\ 0 & 0 & k-1 & k+2 \\ 0 & k+1 & 2k-2 & 2k+4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k \\ 0 & (k+1) & k-1 & k+2 \\ 0 & k+1 & 2k-2 & 2k+4 \\ 0 & 0 & k-1 & k+2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k \\ 0 & (k+1) & k-1 & k+2 \\ 0 & 0 & k-1 & k+2 \\ 0 & 0 & k-1 & k+2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_4-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k \\ 0 & (k+1) & k-1 & k+2 \\ 0 & 0 & k-1 & k+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

:$k=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה ולכן אין פתרון.

:$k=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש משתנה חופשי ולכן יש אינסוף פתרונות. פתרון הכללי:

$$\left.\begin{array}{rl} (x+y & =-\frac{3}{3} \\ z & =-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rl} (x & =-y-\frac{3}{3} \\ z & =-\frac{1}{2} \end{array}\right\} , \quad y\in\mathbb{R} .$$

עבור $k\neq 1,-1$ יש פתרון יחיד.

<u>שאלה 2</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{3} & \bar{2} & -\bar{3}=\bar{2} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow[R_2\rightarrow R_2+\bar{3}R_1]{R_2\rightarrow R_2+\bar{2}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{5} & \bar{4} & \bar{6} & \bar{4} \\ \bar{5} & \bar{6} & \bar{7} & \bar{7} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\rightarrow R_3-\bar{4}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{7} & -\bar{4} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\rightarrow \bar{2}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\rightarrow R_2-\bar{2}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & -\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\rightarrow R_1-\bar{2}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & -\bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\rightarrow R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

פתרון: $(x,y,z)=(\bar{4},\bar{3},\bar{2})$.

א) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A,B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \qquad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$|A|=-1\neq 0$ לכן A הפיכה. $|B|=-1\neq 0$ לכן B הפיכה.

$$A+B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

$|A+B|=0$ לפיכך $A+B$ לא הפיכה.

שאלה 3

א) $|A| = 2$ לכן A הפיכה.

$$AX = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B \; .$$

$$(A|I) \quad = \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

לכן $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -24 & -24 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

ב) **א)** טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = A \cdot C = 0 \; , \qquad B \neq C \; .$$

ב) טענה לא נכונה. הרי, מכיוון ש- $AB \neq BA$ באופן כללי אז $AB - BA \neq 0$ באופן כלליי ולכן

$$(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2 \neq A^2 - B^2$$

באופן כללי.

ג) F לא שדה.

<u>שיטה 1</u>

דוגמה נגית: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ לא הפיכה (שורת אפסים) לכן לא קיימת מטריצה הופכית A^{-1} של A.

<u>שיטה 2</u>

הרי עבור מטריצות $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$AB \neq BA,$$

ז"א חוק החילוף לא מתקיים.