היחידה למתמטיקה

29/08/23 תשפ"ג
$11:10-12:40$

אלגברה ליניארית 2 למדמ"ח

בוחן אמצע סמסטר

מרצה: ד"ר ירמיהו מילר, ד'ר שי סרוסי.

תשפ"ג סמסטר ק'

השאלון מכיל 12עמודים (כולל עמוד זה).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (2 עמודים בפורמט $A4$) מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לענות על שאלות 1-4.

==

שאלה 1 (40 נקודות)

א) (32 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ כך ש: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) (12 נק') מצאו את הפולינום האופייני והמינימלי של מטריצה A.

2) (15 נק') מצאו את הערכים העצמיים והמרחבים העצמיים של A.

3) (5 נק') האם המטריצה לכסינה? אם כן, מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P שך ש: $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$. אם לא, הסבירו זאת.

ב) (8 נק') תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות.

1) אם A לא הפיכה אז A לא לכסינה.

2) אם ל- A יש ערך עצמי $\lambda = 0$ אז A לא הפיכה.

שאלה 2 (40 נקודות)

א) (20 נק') נתון אופרטור לינארי $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ שמוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y+2z \\ 2x+y+3z \\ x+z \end{pmatrix} .$$

בדקו אם התת מרחב $W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ הוא T שמור.

ב) (20 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ כך ש:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

הוכיחו ש:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\left(5I + 5A - 5A^2 + A^3\right) \ .$$

שאלה 3 (20 נקודות)

א) (10 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ מטריצה המקיימת

$$m_A(x) = (x-4)^2(x-2)(x-1)\ , \qquad p_A(x) = (x-4)^4(x-2)(x-1)\ ,$$

כאשר $p_A(x)$ הפולינום האופייני של A ו- $m_A(x)$ הפולינום המינימלי שלה. מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A.

ב) (10 נק') הוכיחו: לכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$A^2 \in \text{span}\{I, A\}\ .$$

פתרונות

שאלה 1

א) 1)

$$\begin{aligned}|\lambda I-A| =& \begin{vmatrix}\lambda & -3 & -1\\ 1 & \lambda-4 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}\\ =&(1-\lambda)\begin{vmatrix}\lambda & -3\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}\\ =&(\lambda-1)\left(\lambda(\lambda-4)+3\right)\\ =&(\lambda-1)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)\\ =&(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-1)\\ =&(\lambda-1)^2(\lambda-3)\end{aligned}$$

הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-3)\ .$$

האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$(\lambda-1)(\lambda-3)\ ,\qquad (\lambda-1)^2(\lambda-3)\ .$$

נבדוק $(\lambda-1)(\lambda-3)$:

$$(A-I)(A-3I)=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

לכן $m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-3)$.

2) ערכים עצמיים:

$\lambda=1$ מריבוי אלגברי 2

$\lambda=3$ מריבוי אלגברי 1.

נחשב את המרחב עצמי V_1 השייך לערך עצמי 1:

$$(A-I)=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+R_1}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

פתרון $(x,y,z)=(3y+z,y,z)=y(3,1,0)+z(1,0,1)$ לכן

$$V_1=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(V_1)=2$, ז"א הריבוי גאומטרי 2.
נחשב את המרחב עצמי V_3 השייך לערך עצמי 3:

$$(A-3I)=\begin{pmatrix}-3&3&1\\-1&1&1\\0&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\-3&3&1\\0&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1}\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&0&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון $(x,y,z)=(y,y,0)=y(1,1,0)$ לכן

$$V_3=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(V_3)=1$, ז"א הריבוי גאומטרי 1.

3) עבור כל אחד של הערכים עצמיים הריבוי גאומטרי שווה לריבוי אלגברי לכן A לכסינה.

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}\ ,\qquad P=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\ .$$

ב) 1) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

A לא הפיכה.

$$p_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-1)\ .$$

הערכים עצמיים הם $\lambda=0$ מריבוי אלגברי 1 ו- $\lambda=1$ מריבוי אלגברי 1. לכן A לכסינה.

2) טענה נכונה. אם ל-A יש ערך עצמי $\lambda=0$ ז"א ש- 0 שורש של הפולינום האופייני, כלומר $p_A(0)=0$. $p_A(0)=|A|$, לכן $|A|=0$ לכן A לא הפיכה.

שאלה 2

א)

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2\\2+3\\1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}\notin W$$

לכן התת מרחב W אינו T -שמור.

ב) A מטריצה משולשית, לכן הערכים עצמיים הם האיברים ע האלכסון הראשי, והריובי אלגברי של כל ערך עצמי שווה למספר הפעמים האיבר מופיע על האלכסון הראשי. מכאן הפולינויום האופייני של A הוא

$$\begin{aligned} p_A(x) =&(x-2)(x-3)(x-1)(x+1) \\ =&(x-2)(x-3)(x^2-1) \\ =&(x-2)(x^3-3x^2-x+3) \\ =&x^4-3x^3-x^2+3x-2x^3+6x^2+2x-6 \\ =&x^4-5x^3+5x^2+5x-6\ . \end{aligned}$$

לפי משפט קיילי המילטון, $p_A(A)=0$ לכן

$$\begin{aligned} &A^4-5A^3+5A^2+5A-6I=0 \\ \Rightarrow\quad & 6I=A^4-5A^3+5A^2+5A \\ \Rightarrow\quad & I=\frac{1}{6}\left(A^4-5A^3+5A^2+5A\right) \\ \Rightarrow\quad & I=A\cdot\frac{1}{6}\left(A^3-5A^2+5A+5I\right) \end{aligned}$$

לכן

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\left(A^3-5A^2+5A+5I\right)\ .$$

מש"ל.

שאלה 3

א)

$$\begin{pmatrix} J_2(4) & & & \\ & J_2(4) & & \\ & & J_1(2) & \\ & & & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

או

$$\begin{pmatrix} J_2(4) & & & & \\ & J_1(4) & & & \\ & & J_1(4) & & \\ & & & J_1(2) & \\ & & & & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ב) לפי משפט קיילי המילטון, לכל $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ מטריצה ריבועית, $p_A(A)=0$ כאשר $p_A(x)$ הוא הפולינום האופייני של A.

עבור מטריצה 2×2, $p_A(x)$ הוא פולינום מתוקן מסדר 2. נרשום

$$p_A(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+x^2\ .$$

$$\begin{aligned} & p_A(A)=0 \\ \Rightarrow\quad & \alpha_0 I+\alpha_1 A+A^2=0 \\ \Rightarrow\quad & A^2=-\alpha_0 I-\alpha_1 A \end{aligned}$$

ז"א

$$A^2\in \text{span}\,\{I,A\}\ .$$

משל.