23/06/2023
08 : 30 – 11 : 30

חדו"א 1 למדעי המחשב

מועד א'

מרצה: ד"ר ירמיהו מילר

תשע"ג סמסטר ב'

השאלון מכיל עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דף נוסחאות מצורף לשאלון (עמודים בפורמט $A4$).

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות בלבד מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** בלבד מתוך **שתיים**.

==

שאלות 1 ו- 2 - חובה!

שאלה 1 **(21 נקודות)**

א) (18 נק') חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4}$ (תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, זוגיות, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וציירו את סקיצת הגרף של הפונקציה.

ב) (3 נק') שרטטו את הפונקציה $f(|x|)$.

שאלה 2 **(24 נקודות)**

פתרו 2 מתוך 3 האינטגרלים הבאים:

א) (12 נק') $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx$

ב) (12 נק') $\displaystyle\int\frac{2x+3}{x^2-7x+12}\,dx$

ג) (12 נק') $\displaystyle\int_0^{\pi/2}x^2\sin(2x)\,dx$

ענו על 3 מתוך 4 השאלות $3-6$

שאלה 3 **(15 נקודות)**

א) (12 נק')
חשבו את פולינום מקלורן מסדר 2 של הפונקציה הפרמטרית הבאה:

$$x(t)=e^{3t}-1\ ,\qquad y(t)=t^2+5t+6\ .$$

ב) (3 נק') מצאו את נקודות אי רציפות של הפונקציה $f(x)=\dfrac{1}{\tan x}$ וקבעו את סוגן.

שאלה 4 **(15 נקודות)**

א) (10 נק') חשבו את הגבולות הבאים:

1) (5 נק') $\lim_{x\to 0}(1+\tan x)^{3\text{ctg}(2x)}$

2) (5 נק') $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$

ב) (5 נק') הוכיחו שקיים פתרון למשוואה $x^{101}+2x-2$ והוא יחיד.

שאלה 5 **(15 נקודות)**

א) (10 נק') מצאו את משוואות המשיק והנורמל של הפונקציה $y\cos(x)+xy^2-(x-1)^2=0$ בנקודה $x=0$.

ב) (5 נק') הוכיחו כי האינטגרל $\int_4^\infty \frac{2x+3}{x^2+17x+8}\,dx$ מתבדר. נמקו את התשובה שלכם.

שאלה 6 **(15 נקודות)**

א) (5 נק') חשבו את השטח של התחום החסום על ידי הקווים $y=x^2$ ו- $y=-x^2+2x$. ציירו את הסקיצה המתאימה.

ב) (5 נק') חשבו את הנפח של הגוף המתקבל ע"י סיבוב סביב ציר ה- x של השטח החסום ע"י הקו $y=\sqrt{9-x}$ והקו $x+3y=9$.

ג) (5 נק') הוכיחו:

אם $f(x)$ פונקציה מונוטונית יורדת בתחום D ו- $f(x)>0$ לכל $x\in D$, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ מונוטונית עולה בתחום D.

ענו על 1 **מתוך** 2 **השאלות** $7-8$

שאלה 7 (10 נקודות)

למשולש ישר זווית OAB קודקוד O בראשית הצירים, קדקוד A על ציר ה- x בקטע $x>0$, וקדוקד B נמצא על הקו $4x^2+9y^2=36$ בתחום $x>0, y>0$. מצאו את הנקודה B כך שהשטח של המשולש OAB יהיה מקסימלי.

שאלה 8 (10 נקודות)

הוכיחו כי לכל x בקטע $(-1,1)$ $x \neq 0$ מתקיים

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \ .$$

פתרונות

שאלה 1

א) 1) **נקודות חיתוך, סימני הפונקציה, תחום הגדרה**

$$f(x)=\frac{x^2-3x-4}{x^2-4}=\frac{(x+1)(x-4)}{(x+2)(x-2)}$$

תחום הגדרה: $x\neq\pm 2$.

נקודות חיתוך ציר x: $(-1,0),(4,0)$.

נקודות חיתוך ציר y: $(0,1)$.

סימני הפונקציה:

x	$x<-2$	$-2<x<-1$	$-1<x<2$	$2<x<4$	$x>4$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

2) **אסימפטוטות אנכיות** $x=\pm 2$

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{(x+1)(x-4)}{(x+2)(x-2)}=\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{(x+1)(x-4)}{(x+2)(x-2)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{(x+1)(x-4)}{(x+2)(x-2)}=\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{(x+1)(x-4)}{(x+2)(x-2)}=-\infty$$

3) **אסימפטוטות אופקיות** $x=\pm 2$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{(x+1)(x-4)}{(x+2)(x-2)}=1$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{(x+1)(x-4)}{(x+2)(x-2)}=1$$

$y=1$ אסימפטוטה אופקית ב $x=\infty$ וב- $x=-\infty$.

4) **אסימפטוטות משופעות** אין.

5) <u>תחומי עליה וירידה</u>

$$f'(x) = \frac{3\left(x^2+4\right)}{\left(x^2-4\right)^2}$$

לא קיים x כך ש- $f'(x)=0$ ולכן אין נקודות קריטיות.

x	$x<-2$	$-2<x<2$	$x>2$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

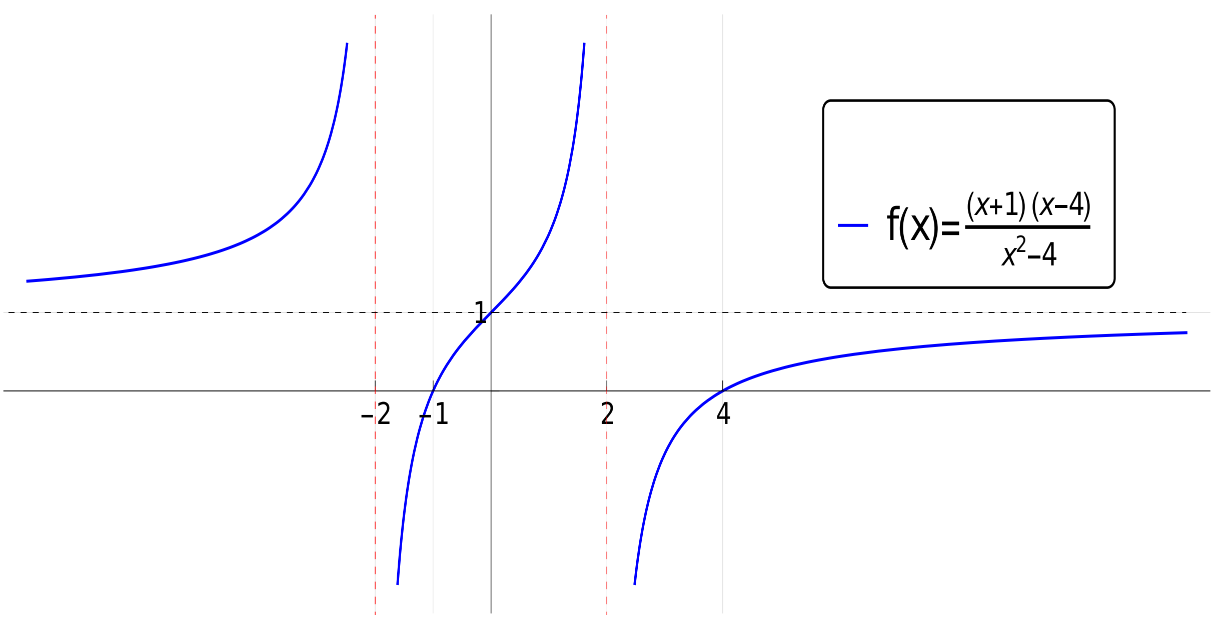
6) <u>תחומי קמירות נקודות פיתול</u>

$$f''(x) = -\frac{6x\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3} \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad x=0$$

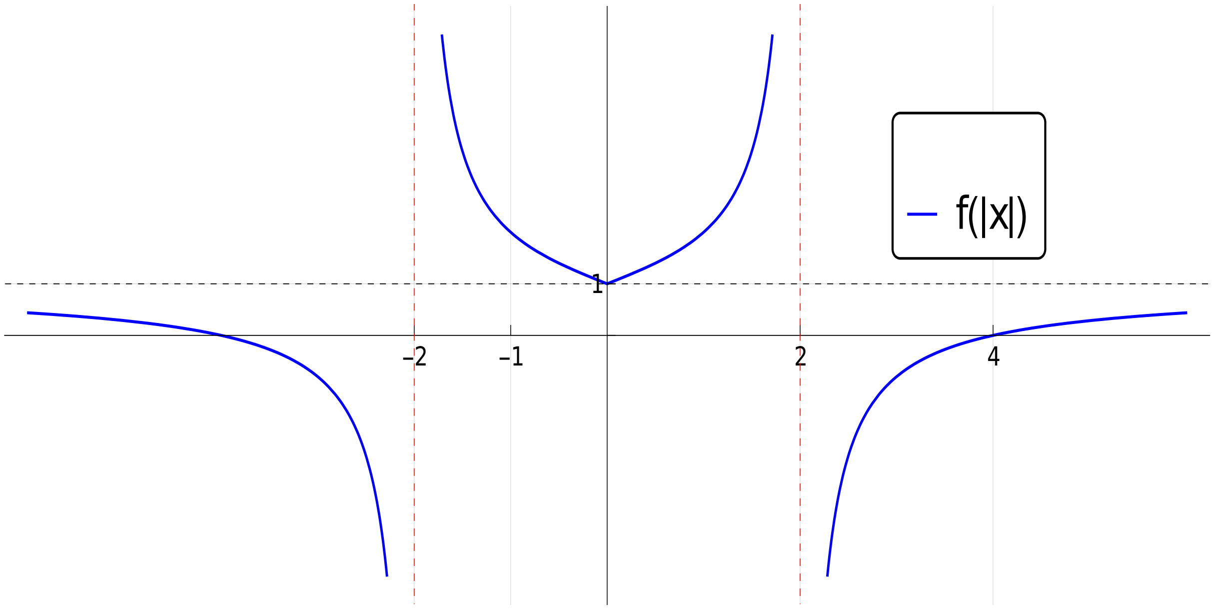
לכן $x=0$ חשודה לנקודת פיתול.

x	$x<-2$	$-2<x<0$	$0<x<2$	$x>2$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	קמורה $\uparrow$	קמורה $\downarrow$	קמורה $\uparrow$	קמורה $\downarrow$

7) <u>שירטוט</u>



ב)



שאלה 2

א) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx$

$x = \dfrac{3}{\sin t}$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{\frac{9}{\sin^2 t}-9}}{\frac{3}{\sin t}}\,dx$$
$$= \int 3\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}\cdot\frac{\sin t}{3}\,dx$$
$$= \int \sqrt{\cot^2 t}\cdot \sin t\,dx$$
$$= \int \cot t\cdot \sin t\,dx$$
$$= \int \cos t\,dx$$
$$= \int \cos t\,\frac{x_t'}{x_t'}dx$$
$$= \int \cos t\,x_t' dt$$
$$= \int \cos t\left(-\frac{3\cos t}{\sin^2 t}\right)dt$$
$$= -3\int \cot^2 t\,dt$$
$$= -3\int \left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt$$
$$= -3\,(-\cot t - t) + C$$
$$= 3\cot t + 3t + C$$
$$= 3\cot\left(\arcsin\left(\frac{3}{x}\right)\right) + 3\arcsin\left(\frac{3}{x}\right) + C$$

ב) $\int \frac{2x+3}{x^2-7x+12}\,dx$

$$\frac{2x+3}{x^2-7x+12} = \frac{11}{x-4} - \frac{9}{x-3}$$
$$\int dx\,\frac{2x+3}{x^2-7x+12} = \int dx\left(\frac{11}{x-4}-\frac{9}{x-3}\right) = 11\log(4-x) - 9\log(3-x) + C$$

ג)

$$\int_0^{\pi/2} x^2\sin(2x)\,dx = \int_0^{\pi/2} dx\,u\cdot \mathrm{v}'$$
$$u = x^2\ , \qquad \mathrm{v}' = \sin(2x)\ , \qquad u' = 2x\ , \qquad \mathrm{v} = -\frac{\cos(2x)}{2}\ .$$

$$[u\cdot \mathrm{v}]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}u'\cdot \mathrm{v}\,dx=\left[-x^2\cdot\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}2x\cdot\frac{\cos(2x)}{2}\,dx$$
$$=\frac{\pi^2}{8}+\int_0^{\pi/2}x\cdot\cos(2x)\,dx$$

$$u=x\ ,\qquad \mathrm{v}'=\cos(2x)\ ,\qquad u'=1\ ,\qquad \mathrm{v}=\frac{\sin(2x)}{2}\ .$$

$$\frac{\pi^2}{8}+[u\cdot \mathrm{v}]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}u'\cdot \mathrm{v}\,dx=\frac{\pi^2}{8}+\left[x\cdot\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2x)}{2}\,dx$$
$$=\frac{\pi^2}{8}+0-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin(2x)\,dx$$
$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2}$$
$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\cdot[\cos(\pi)-\cos(0)]$$
$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{-1}{2}\ .$$

שאלה 3

א)

$$x(t)=e^{3t}-1\overset{!}{=}0\qquad\Rightarrow\qquad t=0\ .$$
$$y(x=0)=y(t=0)=6\ .$$
$$y'(x)=\frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$$

$$y'_t(t)=2t+5\ ,\qquad x'_t(t)=3e^{3t}\ ,\qquad y'(x)=\frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}=\frac{1}{3}e^{-3t}(2t+5)\ .$$
$$y'_x(x=0)=y'_x(t=0)=\frac{5}{3}\ .$$

$$y''_{xx}(x)=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$
$$(y'_x)'_t=-\frac{1}{3}e^{-3t}(6t+13)$$
$$y''_{xx}(x)=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{-\frac{1}{3}e^{-3t}(6t+13)}{3e^{3t}}=-\frac{1}{9}e^{-6t}(6t+13)$$

$$y''_{xx}(x=0) = y''_{xx}(t=0) = -\frac{13}{9} \ .$$

$$P_2(x) = y(0) + y'_x(0)x + \frac{1}{2!}y''_{xx}(0)x^2 = 6 + \frac{5}{3}x - \frac{13}{18}x^2$$

ב) $\tan(x) = 0$ בנקודות

$$x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi \ , \ldots$$

לכן לפונקציה $f(x) = \dfrac{1}{\tan x}$ יש נקודות אי-רציפה מסוג שני ב- $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi \ , \ldots$.

שאלה 4

א) 1)

$$\lim_{x\to 0} (1+\tan x)^{3/\tan(2x)} = \lim_{x\to 0} (1+\tan x)^{\dfrac{3(1-\tan^2 x)}{2\tan x}}$$

נגדיר $y = \tan x$:

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0} (1+y)^{\dfrac{3(1-y^2)}{2y}} &= \lim_{y\to 0} \left[(1+y)^{1/y}\right]^{3(1-y^2)/2} \\ &= e^{\lim_{y\to 0} 3(1-y^2)/2} \\ &= e^{3/2} \ .\end{aligned}$$

נגדיר $y = \tan x$.

2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-e^x+1}{x(e^x-1)}\right) \\ &= \left[\frac{0}{0}\right] \\ &\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-e^x}{e^x-1+xe^x}\right) \\ &= \left[\frac{0}{0}\right] \\ &\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{-e^x}{e^x+xe^x+e^x}\right) \\ &= \frac{-1}{2}\end{aligned}$$

ב) נגדיר $f(x)=x^{101}+2x-2$ נוכיח שקיים פתרון ל- $f(x)=0$ והוא יחיד.

$$f(1)=1\ ,\qquad f(0)=-2$$

לכן לפי משפט ערך ביניים קיימת $c\in(0,1)$ כך ש- $f(c)=0$. נוכיח שהוא יחיד:

$$f'(x)=101\cdot x^{100}+2>0\qquad\forall x$$

לכן f עולה מונוטונית לכל x, לכן f חח"ע ולכן השורש יחיד.

שאלה 5

א) נציב $x=0$ בפונקציה הסתומה:

$$y(0)\cdot\cos(0)+0\cdot y(0)^2-(-1)^2=0\qquad\Rightarrow\qquad y(0)=1\ .$$

נגזור הפונקציה הסתומה:

$$y'\cos x-y\sin x+y^2+2xyy'-2(x-1)=0$$

נציב $x=0$ ו- $y(0)=1$:

$$y'(0)\cos(0)-y(0)\sin(0)+y(0)^2+2\cdot0\cdot y(0)y'(0)-2(-1)=0\qquad\Rightarrow\qquad y'(0)+1+2=0\qquad\Rightarrow\qquad y'(0)=-3\ .$$

משוואת המשיק:

$$y-y(0)=y'(0)(x-0)\qquad\Rightarrow\qquad y=1-3x$$

משוואת הנורמל:

$$y-y(0)=\frac{-1}{y'(0)}(x-0)\qquad\Rightarrow\qquad y=1+\frac{1}{3}x\ .$$

ב) נגדיר

$$f(x)=\frac{2x+3}{x^2+17x+8}\ ,\qquad g(x)=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=2$$

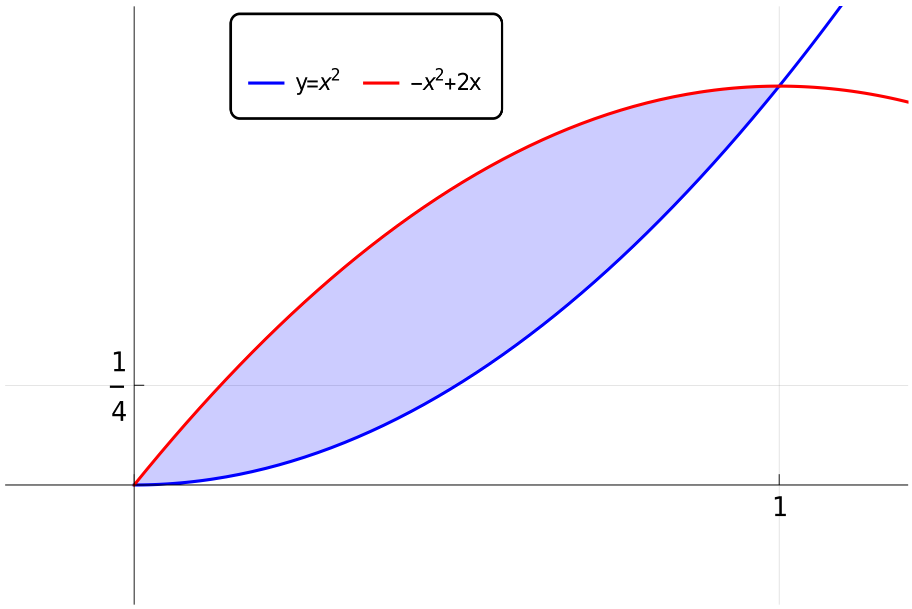
לכן לפי מבחן השוואה הגבולי, $\int_4^\infty f(x)\,dx$ ו- $\int_4^\infty g(x)\,dx$ מתכנסים ביחד או מתבדרים ביחד.

$$\int_4^\infty g(x)\,dx=\int_4^\infty\frac{1}{x}\,dx$$

מתבדר לכן גם $\int_4^\infty f(x)\,dx$ מתבדר.

שאלה 6

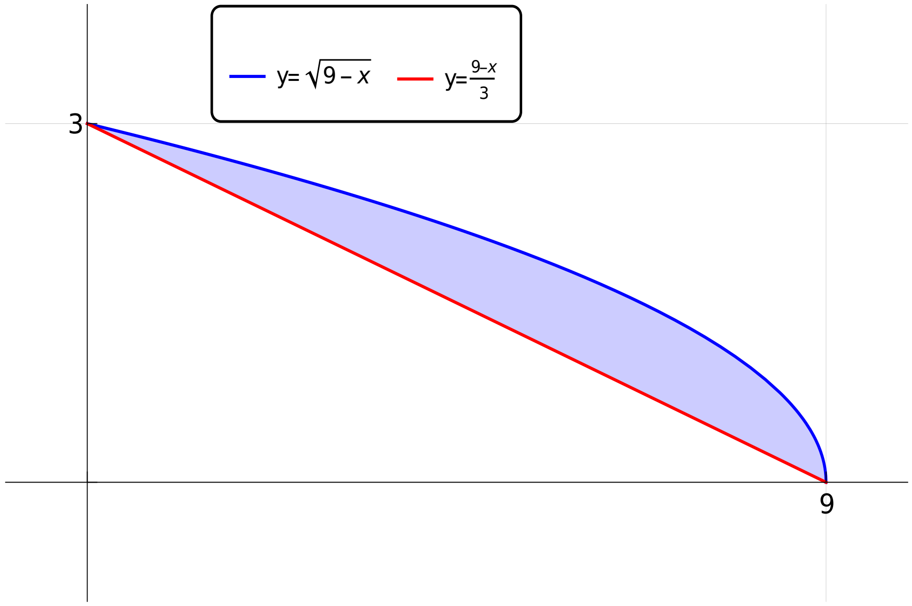
א)



הגרפים נחתכים ב $x = 0$ ו- $x = 1$.

$$\int_{-2}^{1} \left(-x^2 + 2x - x^2\right) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + x^2\right]_0^1 = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}\ .$$

ב)



הגרפים נחתכים ב $x=0$ ו- $x=9$.

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^9 \left(\left(\sqrt{9-x}\right)^2-\left(3-\frac{x}{3}\right)^2\right) \\ &= \pi\int_0^9 \left(9-x-9+2x-\frac{x^2}{9}\right) \\ &= \pi\int_0^9 \left(x-\frac{x^2}{9}\right) \\ &= \pi\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{27}\right]_0^9 \\ &= \pi\left[\frac{81}{2}-27\right] \\ &= \frac{27\pi}{2} \end{aligned}$$

ג) נתון: $f(x)>0$ ו- $f(x)$ יורדת מונוטונית לכל $x\in D$.

צריך להוכיח:

$\frac{1}{f(x)}$ עולה לכל $x\in D$.

הוכחה:

$f(x)$ יורדת לכל $x \in D$. לכן לכל $a < b \in D$,

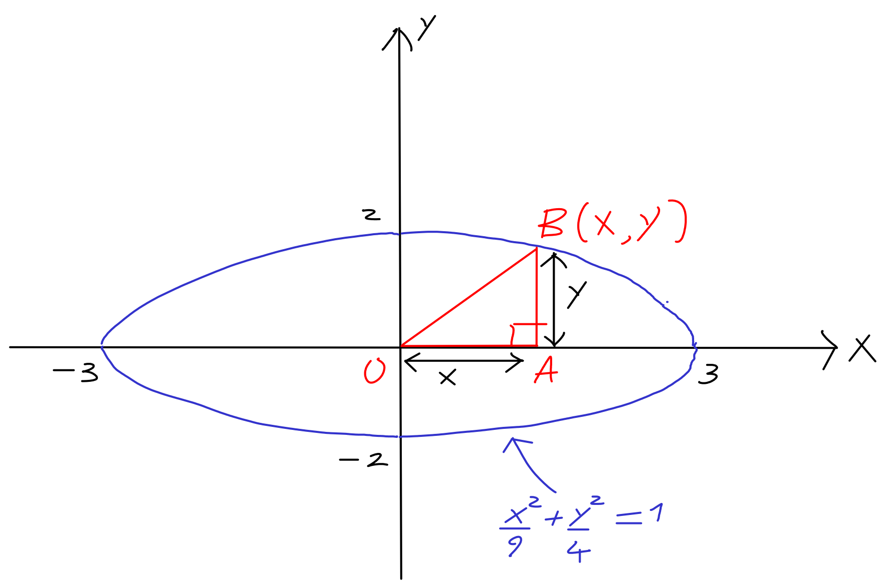
$$b > a \qquad \Rightarrow \qquad f(b) < f(a)\ .$$

$f(x) > 0$ לכל $x \in D$ לכן

$$b > a \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{f(b)} > \frac{1}{f(a)}\ ,$$

ולכן $\frac{1}{f(x)}$ עולה מונוטונית לכל $x \in D$.

שאלה 7



שטח המשולש ΔOAB ניתן ע"י:

$$S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y$$

נציב $y = \sqrt{\frac{36-4x^2}{9}} = 2\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$

$$S = \frac{1}{3} \cdot x \cdot \sqrt{9-x^2}\ .$$

$$S^2=\frac{1}{9}\cdot x^2\cdot\left(9-x^2\right)\ .$$

$$\left(S^2\right)'_x=2x-\frac{4x^3}{9}\overset{!}{=}0\qquad\Rightarrow\qquad 2x\left(1-\frac{2x^2}{9}\right)=0\qquad\Rightarrow\qquad x=0\ ,\frac{3}{\sqrt{2}}\ .$$

השטח המקסימלי מתקבל ב- $x=\frac{\sqrt{9}}{2}$. נציב במשוואת הקו ונקבל $y=\sqrt{2}$. לכן הנקודה B שעבורה השטח מקסימלי היא $\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$.

<u>שאלה 8</u> נגדיר פונקציה $f(x)=\ln(1+x)$. לפי משפט לגרנז' קיימת $c\in(a,b)$ שבה $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

נבחר $a=0$, $b=x\in(0,1)$.

כך קיימת $c\in(0,x)$ כך ש-

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c)\qquad\Rightarrow\qquad\frac{\ln(x+1)-\ln(1)}{x}=\frac{1}{1+c}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{\ln(x+1)}{x}=\frac{1}{1+c}\ .$$

$0<c<x$ לכן

$$\frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+c}<1\ .$$

נציב $\frac{1}{1+c}=\frac{\ln(x+1)}{x}$ ונקבל

$$\frac{1}{1+x}<\frac{\ln(x+1)}{x}<1\qquad\Rightarrow\qquad\frac{x}{1+x}<\ln(x+1)<x\ .$$

ז