

שעור 3

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

3.1 ערכיים עצמיים, ווקטורים עצמיים של מטריצות

הגדרה 3.1 ערך עצמי ווקטור עצמי של מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית מעל שדה \mathbb{F} . וקטור $v \in F^n$ שלא שווה לוקטור האפס ($v \neq \bar{0}$) יקרא וקטור עצמי של A אם קיים סקלר $\lambda \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$A \cdot v = \lambda v.$$

λ נקרא ערך עצמי של A ששייך לוקטור עצמי v . המשוואה הזאת נקראת משוואת ערך עצמי של A .

3.1 דוגמה

נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},$$

קבעו אם כל אחד מהוקטורים הבאים, הוא וקטור עצמי של A ומצאו את הערך העצמי המתאים:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (\text{א})$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ב})$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ג})$$

פתרון:

(א)

$$A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 8u_1.$$

ולכן u_1 הוא הוקטור עצמי של A השייך לערך עצמי

$$\lambda_1 = 8.$$

(ב)

$$A \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0u_2.$$

ולכן u_2 הוא הוקטור עצמי של A השייך לערך עצמי

$$\lambda_2 = 0.$$

(ג)

$$A \cdot u_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן u_3 אינו וקטור עצמי של A .

דוגמה 3.2

נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix},$$

קבעו אם כל אחד מהוקטורים הבאים, הוא וקטור עצמי של A ומצאו את הערך העצמי המתאים:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{א})$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ב})$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ג})$$

פתרון:

(א)

$$A \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 10 \end{pmatrix} \neq \lambda u_1.$$

ולכן u_1 אינו וקטור עצמי של A .

(ב)

$$A \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2u_2.$$

ולכן u_2 הוא הוקטור עצמי של A השייך לערך עצמי

$$\lambda = 2.$$

(ג)

$$A \cdot u_3 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולכן u_3 הוא הוקטור עצמי של A השייך לערך עצמי $\lambda = 8$.

דוגמה 3.3

הראו ש $u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ הינם וקטורי עצמיים של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$A \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן u_1 הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda_1 = 2$ ו u_2 הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda_2 = 0$.

משפט 3.1

ערך עצמי של מטריצה יכול להיות 0.
וקטור האפס לא יכול להיות וקטור עצמי של מטריצה.

משפט 3.2 המשוואה האופייני של מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, ויהי v וקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ . אז לפי הגדרה 3.1,

$$A \cdot v = \lambda v ,$$

נעביר אגפים:

$$\bar{0} = \lambda v - Av \quad \Rightarrow \quad \bar{0} = (\lambda I - A) v$$

כאשר I המטריצה היחידה של $\mathbb{F}^{n \times n}$. קיבלנו את המשוואה

$$(\lambda I - A) v = \bar{0} .$$

v וקטור עצמי אז הוא לא יכול להיות וקטור האפס. לכן הדטרמיננטה של המטריצה $(\lambda I - A)$ שווה ל-0.
כלומר

$$|\lambda I - A| = 0 .$$

המשוואה הזאת נקראת **משוואת האופייני של A** .

הצד שמאל נקרא **פולינום האופייני של A** ומסומן $p_A(\lambda)$. כלומר

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| .$$

משפט 3.3 סדר של פולינום האופייני

אם $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, אז הפולינום האופייני $p_A(x)$ של A מסדר n .

משפט 3.4 מרחב עצמי

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ויהי λ ערך עצמי של A . נסמן ב- V_λ הקבוצה של כל הוקטורים עצמיים ששייכים לערך עצמי λ , בתוספת הוקטור האפס.
 V_λ תת-מרחב של $\mathbb{F}^{n \times n}$.

הוכחה: תרגיל בית.

משפט 3.5 מרחב עצמי של ערך עצמי λ שווה למרחב האפס של $A - \lambda I$

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, יהי λ ערך עצמי של A ויהי V_λ מרחב העצמי של A . אז

$$V_\lambda = \text{Nul}(A - \lambda I) .$$

הוכחה: נוכיח כי $V_\lambda \subseteq \text{Nul}(A - \lambda I)$.

יהי u וקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ . אז u מקיים את משוואת הערך עצמי:

$$A \cdot u = \lambda u \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I) \cdot u = \bar{0}$$

כאשר $\bar{0} \in \mathbb{F}^n$ וקטור האפס. לכן $u \in \text{Nul}(A - \lambda I)$ לכל וקטור $u \in V_\lambda$. לכן

$$V_\lambda \subseteq \text{Nul}(A - \lambda I) .$$

נוכיח כי $\text{Nul}(A - \lambda I) \subseteq V_\lambda$.

יהי $u \in \text{Nul}(A - \lambda I)$. אז

$$(A - \lambda I) u = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad A \cdot u = \lambda u .$$

אז u וקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ . לכן $u \in V_\lambda$ לכל $u \in \text{Nul}(A - \lambda I)$. לכן

$$\text{Nul}(A - \lambda I) \subseteq V_\lambda .$$



הגדרה 3.2 ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי של ערך עצמי של מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, ויהי u_i ערך עצמי λ_i .

הריבוי אלגברי של λ_i הוא הריבוי של λ_i בפולינום האופייני של A . כלומר אם

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_i)^{m_i} \cdots (\lambda - \lambda_l)^{m_l} ,$$

אז הריבוי אלגברי של λ_i הוא m_i .

הריבוי גיאומטרי של λ_i הוא המימד של המרחב עצמי שלו. כלומר אם

$$V_{\lambda_i} = \{u_1, \dots, u_k\}$$

אז ל- λ_i יש k וקטורים עצמיים ואומרים כי הריבוי גיאומטרי של λ_i הוא k .

דוגמה 3.4

מצאו את כל הערכים עצמיים והוקטורים עצמיים של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

פתרון:

נרשום את הפולינום האופייני של המטריצה:

$$|\lambda I - A| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

או שקול

$$(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

ולכן לפולינום אופייני יש שני פתרונות:

$$\lambda = 4$$

$$\lambda = -1$$

נמצא את הוקטורים עצמיים של כל אחד של הערכים עצמיים ע"י למצוא את $\text{Nul}(A - \lambda I)$.

$$\underline{\lambda = 4}$$

$$(A - \lambda I \mid \bar{0}) \stackrel{\lambda=4}{\equiv} (A - 4I \mid \bar{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{פתרון: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ נסמן}$$

$$V_4 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

V_4 הוא ה **מרחב עצמי** השייך לערך עצמי $\lambda = 4$. נסמן

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

u_1 הוא הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 4$.

$\dim(V_4) = 1$ לכן הרכיבי גיאומטרי של $\lambda = 4$, הוא 1.

$$\underline{\lambda = -1}$$

$$(A - \lambda I \mid \bar{0}) \stackrel{\lambda=-1}{\equiv} (A + I \mid \bar{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{הפתרון הוא: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ נסמן}$$

$$V_{-1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

V_{-1} הוא המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda = -1$. נסמן

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

u_2 הוא הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = -1$.

$\dim(V_{-1}) = 1$ לכן הרכיבי גיאומטרי של $\lambda = -1$, הוא 1.

3.5 דוגמה

מצאו את כל הערכים עצמיים והוקטורים עצמיים של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

פתרון:

נרשום את הפולינום האופייני של המטריצה:

$$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2)((\lambda - 2)^2 - 1) = 0.$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

קיימים 3 ערכים עצמיים:

2. $\lambda = 1$ מריבוי אלגברי

1. $\lambda = 2$ מריבוי אלגברי

1. $\lambda = 3$ מריבוי אלגברי

$$\underline{\lambda = 1}$$

$$(A - \lambda I \mid \bar{0}) \stackrel{\lambda=1}{=} (A - I \mid \bar{0}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

הפתרון הוא $\lambda = 1$ הוא המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 1$ הוא $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $z, w \in \mathbb{R}$

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בבסיס של V_1 ישנם שני וקטורים. נסמן

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

u_1 ו- u_2 הם הוקטורים עצמיים ששייכים לערך עצמי $\lambda = 1$.

כיוון ש $\dim(V_1) = 2$, אומרים כי **הריבוי גאומטרי** של הערך עצמי $\lambda = 1$ הוא 2.

$$\underline{\lambda = 2}$$

$$(A - 2I \mid \bar{0}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

פתרון: $y \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 2$ הוא

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

בביס של V_2 יש וקטור אחד. נסמן

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

u_3 הוא הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 2$. כיוון ש $\dim(V_2) = 1$, אז אומרים כי הריבוי גאומטרי של הערך עצמי $\lambda = 2$ הוא 1.

$$\underline{\lambda = 3}$$

$$(A - 3I \mid \bar{0}) = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow -R_1 \\ R_2 \rightarrow -R_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 + R_1 \\ R_4 \rightarrow -\frac{1}{2}R_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - 2R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

פתרון: $\lambda = 3$ הוא המרחב עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 3$ הוא $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R}.$

$$V_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

בבסיס של V_3 יש וקטור אחד:

$$u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

u_4 הוא הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda = 3$. כיוון ש- $\dim(V_3) = 1$ אז אומרים כי הריבוי גאומטרי של הערך עצמי $\lambda = 3$ הוא 1.

3.2 לכסון של מטריצה

הגדרה 3.3 לכסינות של מרטיצות

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. A תקרא לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית. כלומר אם קיימת מטריצה הפיכה $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ומטריצה אלכסונית $D \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש-

$$D = P^{-1}AP.$$

משפט 3.6 לכסינות של מרטיצות

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. אם הוקטורים עצמיים של A מהווה בסיס של \mathbb{F}^n אז A לכסינה.

נסמן הוקטורים עצמיים ב- $\{u_1, \dots, u_n\}$ ששייכים לערכים עצמיים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ בהתאמה (הערכים עצמיים לא בהכרח שונים זה מזה). מכאן נובע ש-

$$D = P^{-1}AP \quad \Leftrightarrow \quad A = PDP^{-1}$$

כאשר $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית ו $P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ מטריצה הפיכה.

הוכחה: $A \cdot u_i = \lambda_i u_i$ לכל $1 \leq i \leq n$. לכן

$$\begin{aligned} A \cdot P &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A \cdot u_1 & A \cdot u_2 & \dots & A \cdot u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \dots & \lambda_n u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= PD. \end{aligned}$$

כלומר $AP = PD$. נתון כי הוקטורים עצמיים מהווים בסיס, אז $\{u_1, \dots, u_n\}$ ולכן P הפיכה. לכן P^{-1} קיימת ומותר להכפיל מצד שמאל ב- P^{-1} . נקבל

$$A = P^{-1}PD.$$

■

משפט 3.7 קריטריון 1 ללכסינות של מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. אם ל- A יש n ערכים עצמיים שונים ב- \mathbb{F} , אז A לכסינה.

■

הוכחה: תרגיל בית.

משפט 3.8 קריטריון 2 ללכסינות של מטריצה: סכום המימדים של מרחבים העצמיים

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. לכסינה אם"ס סכום המימדים של המרחבים העצמיים השונים שווה ל- n .

הוכחה: תרגיל בית.

משפט 3.9 קריטריון 3 ללכסינות של מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ אם

1. הפולינום האופייני שלה מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים מעל \mathbb{F} , לא בהכרח שונים, ו-

2. הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי שווה לריבוי הגיאומטרי שלו,

אז A לכסינה מעל \mathbb{F} .

הוכחה: תרגיל בית.

3.3 ערכים עצמיים של טרנספורמציות לינאריות

הגדרה 3.4 אופרטור לינארי

יהי V מרחב וקטורי. טרנספורציה לינארי $T : V \rightarrow V$ נקראת אופרטור לינארי.

הגדרה 3.5 אופרטור לכסין

אופרטור לינארי $T : V \rightarrow V$ נקראת לכסין אם קיים בסיס של V כך ש- $[T]_B$ אלכסונית.

ז"א קיים בסיס $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ של V כך ש-

$$T(b_1) = \lambda_1 b_1, \quad T(b_2) = \lambda_2 b_2, \quad \dots, \quad T(b_n) = \lambda_n b_n.$$

אז

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(לא כל ה- λ בהכרח שונים זה מזה)

הגדרה 3.6 ערך עצמי ווקטור עצמי של אופרטור לינארי

תהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי ו- λ סקלר. λ נקרא **ערך עצמי** של T אם קיים וקטור $u \neq 0$ כך ש-

$$T(u) = \lambda u.$$

u נקרא

וקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ .

משפט 3.10

אופרטור לינארי $T : V \rightarrow V$ לכסינה אם"ם קיים בסיס של V המורכב מוקטורים עצמיים.

הוכחה: \Rightarrow

נניח ש T לכסינה. ז"א קיים בסיס $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ כך ש-

$$T(u_1) = \lambda_1 u_1, \quad T(u_2) = \lambda_2 u_2, \quad \dots, \quad T(u_n) = \lambda_n u_n.$$

אז

$$[T]_U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(לא כל ה- λ בהכרח שונים זה מזה).

\Leftarrow

נניח שקיים בסיס $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ שמורכב מוקטורים עצמיים. ז"א קיימים סקלרים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ כך ש-

$$T(u_1) = \lambda_1 u_1, \quad \dots, \quad T(u_n) = \lambda_n u_n.$$

לכן

$$[T]_U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

אלכסונית.

הגדרה 3.7 פולינום האופייני של אופרטור לינארי

תהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי. נניח ש A המטריצה המייצגת של T לפי בסיס B . אז הפולינום

$$p_T(\lambda) = |\lambda I - A|$$

נקרא הפולינום האופייני של T .

הגדרה 3.8 ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי של ערך עצמי של אופרטור לינארי

נניח $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי ו- λ ערך עצמי.

(1) הריבוי האלגברי של λ הוא הריבוי של λ בפולינום האופייני.

(2) הריבוי הגאומטרי של λ הוא $\dim(V_\lambda)$, כלומר, מספר הוקטורים העצמיים הבת"ל השייכים ל- λ .

דוגמה 3.6

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$$

חפשו את הוקטורים עצמיים של T כך ש- $T(u) = \lambda u$.
האם T לכסינה?

פתרון:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$$

כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ המטריצה המייצגת של האופרטור.

פולינום האופייני:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0.$$

ערכים עצמיים:

$$\lambda = -1$$

$$\lambda = 4$$

$$\underline{\lambda = 4}$$

$$(A - 4I) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} y, y \in \mathbb{R}$. לכן המרחב עצמי של $\lambda = 4$ הוא $V_4 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$. נסמן הוקטור עצמי שלו

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ב-}$$

$$\underline{\lambda = -1}$$

$$(A + I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} y, y \in \mathbb{R}$. לכן המרחב עצמי של $\lambda = -1$ הוא $V_{-1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. נסמן הוקטור

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ב-}$$

בת"ל: u_1, u_2

$$(u_1 \ u_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

לכן הם מהווים בסיס של \mathbb{R}^2 . לכן T לכסינה.

$$T(u_1) = 4 \cdot u_1, \quad T(u_2) = -1 \cdot u_2.$$

משפט 3.11

יהי V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} ויהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור ליניארי לכסיו. נניח ש- $[T]_B$ המטריצה המייצגת של T לפי בסיס B . יהיו u_1, \dots, u_n הוקטורים עצמיים של T לפי בסיס B , ששייכים לערכים עצמיים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (הם לא בהכרח שונים זה מזה). אז

$$[T]_B = PDP^{-1}$$

או באופן שקול

$$P^{-1}[T]_B P = D$$

כאשר $P = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}$ ו- $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

הוכחה:

$$\begin{aligned} [T]_B P &= [T]_B \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ [T]_B u_1 & [T]_B u_2 & \dots & [T]_B u_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \dots & \lambda_n u_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= PD, \end{aligned}$$

כלומר, $[T]_B P = PD$. הוקטורים עצמיים u_1, \dots, u_n בת"ל, אז P הפיכה לכן P^{-1} קיימת. לכן מותר להכפיל מצד ימין ב- P^{-1} . נקבל: ולכן

$$[T]_B = PDP^{-1}$$

ומכאן נובע כי

$$P^{-1}[T]_B P = D$$

משפט 3.12

תהי $T : V \rightarrow V$ העתקה ליניארית ו λ_0 ערך עצמי. אם m הריבוי האלגברי ו- k הריבוי הגיאומטרי של λ_0 , אז

$$k \leq m.$$

במילים: הריבוי הגיאומטרי קטן או שווה לריבוי האלגברי.

הוכחה: נניח ש- λ_0 ערך עצמי מריבוי אלגברי m וריבוי גיאומטרי k .
ז"א קיימים k וקטורים בת"ל u_1, \dots, u_k ששייכים לערך עצמי λ_0 .
נשלים אותו לבסיס של V :

$$B = \{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}.$$

נחשב את המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס B :

$$T(u_1) = \lambda_0 u_1, \quad \dots, \quad T(u_k) = \lambda_0 u_k$$

לכן

$$[T]_B = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & & & & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & \end{array} \begin{array}{l} * \\ \\ \\ \\ \hline A' \end{array} \right)$$

הופולינום הופייני של A הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left| \begin{array}{cccc|cccc} \lambda - \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ 0 & \lambda - \lambda_0 & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - \lambda_0 & & & & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & \end{array} \begin{array}{l} * \\ \\ \\ \\ \hline \lambda I - A' \end{array} \right|$$

נחשב את הדטרמיננטה דרך העמודה הראשונה:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0) \cdot \left| \begin{array}{ccc|ccc} \lambda - \lambda_0 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \lambda - \lambda_0 & & & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & & & \end{array} \begin{array}{l} * \\ \\ \\ \hline \lambda I - A' \end{array} \right|$$

עד שנקבל

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k |\lambda I - A'| = (\lambda - \lambda_0)^k p_{A'}(\lambda)$$

לכן הריבוי האלגברי גדול או שווה ל- k .

דוגמה 3.7

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

א מצאו את הערכים העצמיים ומרחבים עצמיים של A .

ב האם A לכסינה? אם כן, רשמו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש

$$D = P^{-1}AP.$$

פתרון:

א

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & -3 \\ 1 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1) \begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 \\ -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1+\lambda \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1) ((\lambda+1)(\lambda-1) - 9) - (0 - (1+\lambda)) \\ &= (\lambda+1)(\lambda^2 - 1 - 9 + 1) \\ &= (\lambda+1)(\lambda^2 - 9) \\ &= (\lambda+1)(\lambda+3)(\lambda-3) \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

1. $\lambda = -1$ מריבוי אלגברי 1.

1. $\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 1.

1. $\lambda = -3$ מריבוי אלגברי 1.

$$\underline{\lambda = -1}$$

$$(A + I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $y \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda = -1$ הוא

$$V_{-1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

הווקטור עצמי של $\lambda = -1$ הוא $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\dim(V_{-1}) = 1$ לכן הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי $\lambda = -1$ הוא 1.

$$\underline{\lambda = 3}$$

$$(A - 3I) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & -12 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z}{4} \\ \frac{3}{4}z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda = 3$ הוא

$$V_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

הוקטור עצמי של הערך עצמי $\lambda = 3$ הוא

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$\dim(V_3) = 1$ לכן הריבוי גיאומטרי של הערך עצמי $\lambda = 3$ הוא 1.

$$\underline{\lambda = -3}$$

$$(A + 3I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ -\frac{3}{2}z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda = -3$ הוא

$$V_{-3} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

הוקטור עצמי של הערך עצמי $\lambda = -3$ הוא

$$u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$\dim V_{-3} = 1$ לכן הריבוי גיאומטרי של הערך עצמי $\lambda = -3$ הוא 1.

ב $\dim V_1 + \dim V_3 + \dim V_{-3} = 3$ לכן קיים בסיס של \mathbb{R}^3 :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ומטריצה A לכסינה:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

דוגמה 3.8

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

א מצאו את הערכים העצמיים ומרחבים עצמיים של A .

ב האם A לכסינה? אם כן, רשמו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש

$$D = P^{-1}AP.$$

פתרון:

א

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 5 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 5) \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & \lambda - 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 5) ((\lambda - 5)^2 - 4) + 2(-2(\lambda - 5) - 4) + 2(-4 - 2(\lambda - 5)) \\ &= (\lambda - 5) (\lambda^2 - 10\lambda + 21) + 2(-2\lambda + 6) + 2(-2\lambda + 6) \\ &= (\lambda - 5) (\lambda - 7) (\lambda - 3) - 4(\lambda - 3) - 4(\lambda - 3) \\ &= (\lambda - 3) ((\lambda - 5) (\lambda - 7) - 8) \\ &= (\lambda - 3) (\lambda^2 - 12\lambda + 35 - 8) \\ &= (\lambda - 3) (\lambda^2 - 12\lambda + 27) \\ &= (\lambda - 3) (\lambda - 9)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

$\lambda = 3$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 2.

$\lambda = 9$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 1.

$$\underline{\lambda = 3}$$

$$(A - 3I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda = 3$ הוא

$$V_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(V_3) = 2$ אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי $\lambda = 3$ הוא 2.

$$\underline{\lambda = 9}$$

$$(A - 9I) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda = 9$ הוא

$$V_9 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(V_9) = 1$, אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי הוא 1.

ב $\dim V_9 = 1, \dim V_3 = 2$.

$$\dim V_3 + \dim V_9 = 3.$$

לכן קיים בסיס של \mathbb{R}^3 המורכב מוקטורים עצמיים:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ומטריצה A לכסינה:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$D = P^{-1}AP$$

3.9 דוגמה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

האם A לכסינה?

פתרון:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -12 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ = (\lambda - 1)\lambda(\lambda - 1) = 0$$

1. $\lambda = 0$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 1.

2. $\lambda = 1$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 2.

$$\underline{\lambda = 1}$$

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda = 1$ הוא

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

1. $\dim(V_1) = 1$ אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי $\lambda = 1$ הוא 1.

$$\underline{\lambda = 0}$$

$$(A - 0 \cdot I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda = 0$ הוא

$$V_0 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

1. $\dim(V_0) = 1$ אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי $\lambda = 0$ הוא 1.
 $\dim V_0 = 1, \dim V_1 = 1$

$$\dim V_1 + \dim V_0 = 2 < \dim(\mathbb{R}^3) .$$

לכן לא קיים בסיס של \mathbb{R}^3 המורכב מוקטורים עצמיים. לכן A לא לכסינה.

משפט 3.13 קריטריון 1 ללכסינות של אופרטור

יהי V מרחב עצמי מעל \mathbb{F} , ויהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי. נניח ש- $\dim(V) = n$. אם ל- T יש n ערכים עצמיים שונים ב- \mathbb{F} , אז T לכסינה.

הוכחה: תרגיל בית.

משפט 3.14 קריטריון 2 ללכסינות של אופרטור: סכום המימדים של מרחבים העצמיים

יהי V מרחב עצמי מעל \mathbb{F} , ויהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי. נניח ש- $\dim(V) = n$. ל- T לכסין אם סכום המימדים של המרחבים העצמיים השונים שווה ל- n .

הוכחה: תרגיל בית.

משפט 3.15 קריטריון 3 ללכסינות של אופרטור

יהי V מרחב עצמי מעל \mathbb{F} , ויהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי. אם

1. הפולינום האופייני של T מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים מעל \mathbb{F} , לא בהכרח שונים, ו-
2. הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי שווה לריבוי הגיאומטרי שלו,

אז T לכסין מעל \mathbb{F} .

הוכחה: תרגיל בית.

דוגמה 3.10

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. האם A לכסינה מעל \mathbb{R} ?

2. האם A לכסינה מעל \mathbb{C} ?

פתרון:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

1. $p_A(\lambda)$ לא מתפרק לגורמים לינאריים מעל \mathbb{R} , לכן A לא לכסינה מעל \mathbb{R} .

2.

$$\lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i) = 0$$

1. $\lambda = i$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 1.

1. $\lambda = -i$ ערך עצמי מריבוי אלגברי 1.

$$\underline{\lambda = i}$$

$$(A - iI) = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iy \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda = i$ הוא

$$V_i = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(V_i) = 1$ אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי הוא 1.

$$\underline{\lambda = -i}$$

$$(A + iI) = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iy \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$. המרחב עצמי השייך להערך עצמי $\lambda = -i$ הוא

$$V_{-i} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(V_{-i}) = 1$ אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי הוא 1.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad D = P^{-1}AP.$$

משפט 3.16 וקטורים עצמיים ששייכים לערכים עצמיים שונים בת"ל

נתון $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי. וקטורים עצמיים של T ששייכים לערכים עצמיים שונים הם בת"ל.

הוכחה: נתון:

$T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ערכים עצמיים שונים ששייכים לוקטורים עצמיים u_1, \dots, u_n של T .

צריך להוכיח:

u_1, \dots, u_n בת"ל.

הוכחה:

נוכיח את הטענה ע"י אינדוקציה על n .

שלב הבסיס:

עבור $n = 1$: $u_1 \neq \bar{0}$, לכן הוא בת"ל.

שלב האינדוקציה:

נניח שעבור $n, n > 1$ וקטורים עצמיים ששייכים ל n ערכים עצמיים שונים בת"ל. נניח u_1, \dots, u_{n+1} וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$. נרשום

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1} u_{n+1} = \bar{0} \quad (*)$$

אז

$$\alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \dots + \alpha_n T(u_n) + \alpha_{n+1} T(u_{n+1}) = \bar{0}$$

$$\alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n u_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} u_{n+1} = \bar{0} \quad (*1)$$

נכפיל (*) ב λ_{n+1} :

$$\alpha_1 \lambda_{n+1} u_1 + \alpha_2 \lambda_{n+1} u_2 + \dots + \alpha_n \lambda_{n+1} u_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} u_{n+1} = \bar{0} \quad (*2)$$

נחסיר (*2) מ (*1):

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) u_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_{n+1}) u_2 + \dots + \alpha_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) u_n + \alpha_{n+1} (\lambda_{n+1} - \lambda_{n+1}) u_{n+1} = \bar{0}$$

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) u_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_{n+1}) u_2 + \dots + \alpha_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) u_n = \bar{0} \quad (*3)$$

לפי ההנחת האינדוקציה הוקטורים u_1, \dots, u_n בת"ל. לכן

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) = 0, \dots, \alpha_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) = 0. \quad (*4)$$

כל הערכים העצמיים שונים זה מזה, כלומר $\lambda_i - \lambda_{n+1} \neq 0$ לכל $i = 1, \dots, n$. לכן

$$\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0. \quad (*5)$$

נציב (*5) ב- (*) ונקבל

$$\alpha_{n+1} u_{n+1} = \bar{0}$$

$u_1 \neq 0$ כי הוא וקטור עצמי לכן $\alpha_1 = 0$. לכן (*) מצביע רק אם כל המקודמים $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} = 0$ לכן הוקטורים עצמיים u_1, \dots, u_{n+1} בת"ל.

■

3.4 שימושים של לכסון מטריצה

משפט 3.17 חזקה של מטריצה הדומה למטריצה אלכסונית

אם A לכסינה, אז קיימת מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D = P^{-1}AP$. לכן

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

הוכחה:

נוכיח את הטענה ע"י אינדוקציה.

שלב הבסיס:

$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow D = P^{-1}AP, n = 1$$

שלב האינדוקציה:

נניש שעבור n מתקיים $A^n = PD^nP^{-1}$. אז

$$A^{n+1} = (PD^nP^{-1}) \cdot PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

דוגמה 3.11

נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 מצאו את הערכים עצמיים והמרחבים עצמיים של A .

2 האם A לכסינה? אם כן רשמו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D = P^{-1}AP$.

3 חשבו את A^{1001} .

פתרון:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$$

$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 2.

$\lambda = -1$ מריבוי אלגברי 1.

$$\underline{\lambda = 1}$$

$$(A - I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מרחב עצמי:

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lambda = -1$$

$$(A + I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מרחב עצמי:

$$V_{-1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim V_1 + \dim V_{-1} = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

לכן A לכסינה.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{1001} = P D^{1001} P^{-1}$$

נמצא את P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$D^{1001} = \begin{pmatrix} 1^{1001} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{1001} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{1001} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{לכן}$$

$$A^{1001} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

משפט 3.18

אם u וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי λ , כלומר $A \cdot u = \lambda u$ אז

$$A^n u = \lambda^n u.$$

הוכחה: נוכיח את הטענה ע"י אינדוקציה.

שלב הבסיס:

עבור $n = 1$, $A \cdot u = \lambda u$ מתקיים כי נתון ש- u וקטור עצמי של A .

שלב האינדוקציה:

נניח שעבור $n > 1$, $A^n u = \lambda^n u$. אז

$$A^{n+1}u = A(A^n u) = A\lambda^n u = \lambda^n Au = \lambda^n \cdot \lambda u = \lambda^{n+1}u.$$

■

דוגמה 3.12

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

א מצאו את הערך עצמי וקטור עצמי של A .

ב האם A לכסינה? אם כן רשמו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D = P^{-1}AP$.

ג חשבו את $A^{2023} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

פתרון:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 4 & 0 \\ -1 & \lambda + 4 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & 4 \\ -1 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 = 0$$

$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = -2$ מריבוי אלגברי 2.

$$\underline{\underline{\lambda = -2}}$$

$$(A + 2I) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מרחב עצמי:

$$V_{-2} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 1}}$$

$$(A - I) = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מרחב עצמי:

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim V_1 + \dim V_{-2} = 1 + 1 = 2 < \dim \mathbb{R}^3$$

לכן A לא לכסינה.

$$\text{וקטור עצמי השייך ל } \lambda = -2, \text{ לכן } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{2023} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2)^{2023} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^{2024} \\ -2^{2023} \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.5 משפטים נוספים הקשורים ללכסון של מטריצה

משפט 3.19 דטרמיננטה של מטריצה משולשית שווה למכפלה של איברי האלכסון הראשי

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה משולשית עליונה או משולשית תחתונה. הדטרמיננטה של A שווה למכפלה של האיברים על האלכסון הראשי. כלומר

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad |A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

הוכחה: אידוקציה על n .

שלב הבסיס:

עבור $n = 1$ הטענה נכונה באופן טריוויאלי. כלומר נתון $A \in \mathbb{F}^{1 \times 1}$. נסמן $A = (a)$ כאשר a האיבר היחיד במטריצה A .

$$|A| = a.$$

A מטריצה משולשית, והאיבר היחיד על האלכסון הראשי הוא a . לכן המכפלה של האיברים על האלכסון ראשי פשוט שווה ל- a . לכן $|A|$ שווה למכפלה של האיברים על האלכסון הראשי של A .

שלב האינדוקציה:

נניח שהטענה נכונה עבור $n = N$ (הנחת האינדוקציה). נוכיח אותה עבור $n = N + 1$.

תהי $A \in \mathbb{F}^{N \times N}$ מטריצה משולשית עליונה:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,N} & a_{1,N+1} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,N} & a_{2,N+1} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,N} & a_{3,N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N,N} & a_{N,N+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{N+1,N+1} \end{pmatrix}$$

נחשב הדטרמיננטה על השורה האחרונה:

$$|A| = a_{N+1,N+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,N} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,N} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N,N} \end{vmatrix}$$

לפי ההנחת האינדוקציה הדטרמיננטה של מטריצה $N \times N$ משולשית עליונה שווה למכפלה של האיברים על האלכסון הראשי, לכן

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,N} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,N} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N,N} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{N,N} .$$

לכן

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{N,N} \cdot a_{N+1,N+1}$$

■

משפט 3.20 ערכים העצמיים של מטריצה משולשית

הערכים העצמיים של מטריצה משולשית עליונה (או משולשית תחתונה) הם האיברים הנמצאים על האלכסון הראשי.

הוכחה: תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ משולשית, ויהיו $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ האיברים על האלכסון הראשי. אז

$$\lambda I - A$$

גם מטריצה משולשית והאיברים על האלכסון הראשי הם $\{\lambda - \alpha_1, \lambda - \alpha_2, \dots, \lambda - \alpha_n\}$. הדטרמיננטה של מטריצה משולשית היא המכפלה של האיברים על האלכסון הראשי, לכן לכן

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \alpha_1) \cdot (\lambda - \alpha_2) \dots (\lambda - \alpha_n)$$

לכן הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1) \cdot (\lambda - \alpha_2) \dots (\lambda - \alpha_n) = 0 .$$

השורשים הם

$$\lambda = \alpha_1, \quad \lambda = \alpha_2, \quad \dots \quad \lambda = \alpha_n .$$

ז"א הערכים עצמיים שווים לאיברים על האלכסון הראשי.

■

הגדרה 3.9 הגדרת דמיון בין מטריצות

תהינה $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. נאמר ש- A ו- B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש-

$$B = P^{-1}AP.$$

משפט 3.21 פולינום האופייני של מטריצות דומות

אם A ו- B דומות אז יש להן אותו פולינום אופייני, ולכן אותם ערכים עצמיים.

הוכחה:

$$\begin{aligned} f_B(x) &= |xI - B| \\ &= |xI - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}xIP - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(xI - A)P| \\ &= |P^{-1}| |xI - A| |P| \\ &= |P|^{-1} |xI - A| |P| \\ &= |xI - A| |P|^{-1} |P| \\ &= |xI - A| \\ &= f_A(x) \end{aligned}$$

■

משפט 3.22 קיום ווקטור עצמי של אופרטור לינארית

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה \mathbb{F} ותהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית. קיים לפחות וקטור עצמי אחד של T .

הוכחה: נניח ש- $\dim(V) = n$. יהי $u_1 \neq \bar{0} \in V$ הקבוצה

$$\{u_1, T(u_1), T^2(u_1), \dots, T^n(u_1)\}$$

תלויה לינארית כי יש בה $n+1$ וקטורים. לכן הצירוף לינארי הבא מתקיים רק אם אחד המקדמים a_0, \dots, a_n שונה מאפס:

$$a_0 u_1 + a_1 T(u_1) + a_2 T^2(u_1) + \dots + a_n T^n(u_1) = \bar{0}. \quad (*)$$

נרשום את זה בצורה

$$(a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \dots + a_n T^n) u_1 = \bar{0}.$$

בצד שמאל יש הצבת העתקה בפולינום מסדר n . לפי המשפט היסודי של האלגברה יש לפולינום הזה פירוק לגורמים לינאריים:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = c(z - \lambda_1) \dots (z - \lambda_n)$$

כ: $1 \leq i \leq n, \lambda_i \in \mathbb{C}, c \neq 0 \in \mathbb{C}$. לכן ניתן לפרק את (*) כ:

$$a_0 u_1 + a_1 T(u_1) + a_2 T^2(u_1) + \dots + a_n T^n(u_1) = c(T - \lambda_1 I) \dots (T - \lambda_n I) u_1 = \bar{0}. \quad (**)$$

$c \neq 0 \in \mathbb{C}$. אם קיים פתרון $u_1 \neq 0$ למשוואה הומוגנית ב- (*) אז בהכרח הדטרמיננטה של המטריצה שמכפילה u_1 שווה לאפס. לפיכך

$$|c(T - \lambda_1 I) \dots (T - \lambda_n I)| = c |T - \lambda_1 I| \dots |T - \lambda_n I| = 0. \quad (***)$$

לכן קיים i ($1 \leq i \leq n$) עבורו $|T - \lambda_i I| = 0$ לכן T יש לפחות ערך עצמי אחד.

■