חישוביות וסיבוכיות

תוכן העניינים

פרק 1
מכונות טיורינג

פרק 2
הגדרה היוריסטית של מכונת טיורינג

הגדרה 2.1 מכונת טיורינג (הגדרה היוריסטית)

הקלט והסרט

מכונת טיורינג (מ"ט) קורא קלט.
הקלט נמצא על סרט אינסופי.
התווים של הקלט נמצאים במשבצות של הסרט.
במכונת טיורינג אנחנו מניחים שהסרט אינסופי לשני הכיוונים.
משמאל לתחילת הקלט לא כתוב כלום, ומימין לסוף הקלט לא כתוב כלום.
אנחנו מניחים שיש תו הרווח $\sqcup$ שנמצא בכל משבצות שאינן משבצות קלט, משמאל לקלט ומימין לקלט.

$\cdots$	$\sqcup$	$\sqcup$	a	b	b	b	a	a	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\cdots$

הראש

במצב ההתחלתי הראש בקצה השמאלי של הקלט.

$\cdots$	$\sqcup$	$\sqcup$	a	b	b	b	a	a	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\cdots$
			$\uparrow$									

הראש יכול לזוז ימינה על הסרט וגם שמאלה על הסרט.
הראש יכול לקרוא את התוכן שנמצא במשבצת הסרט שבה הוא נמצא.
הראש יכול לכתוב על המשבצת הסרט שבה הוא נמצא. הכתיבה נעשית תמיד במיקום הראש.

המצבים

בהתחלה הראש בקצה השמאלי של הקלט והמ"ט במצב התחלתי q_0.
הראש קורא את התו במשבצת הראשונה וכותב עליה לפי הפונקציית המעברים (שנגדיר בהגדרה 3.1). כעת המ"ט במצב חדש q_1.
הראש קורא את התו במשבצת השניה וכותב עליה לפי הפונקציית המעברים ואז המ"ט במצב חדש q_2.
התהליך ממשיך עד שהראש מגיע לקצה הימיני של הקלט, ואז הוא ממשיך לקרוא ולכתוב על כל משבצת בכיוון שמאלה, עד שהוא מגיע לקצה השמאלי.
במ"ט ניתן לטייל על הקלט שוב ושוב לשני הכיוונים.
התהליך מסתיים כאשר המ"ט מגיע למצב מקבל q_{acc} או מצב דוחה q_{rej}.

דוגמה 2.1 label

נרכיב מכונת טיורינג אשר מקבלת מילה אם היא בשפה

$$L = \left\{ w \in \{a,b\}^* \middle| \#a_w = \#b_w \right\} \ .$$

ז"א השפה המורכבת מכל המילים עם מספר שווה אותיות a ו b.

<u>תיאור מילולי</u>

- נסרוק את הקלט משמאל לימין ולכל a נחשף b תואם.
- נניח שראינו במשבצת הראשונה a, נסמן עליה ✓.
- עכשיו נסרוק את יתרת הקלט ונחפש אות b מתאימה ל a שכבר ראינו.
  - אם לא מצאנו ,המילה לא בשפה.
  - אם מצאנו ,נסמן את ה- b התואם ב- ✓.
- נחזור לתחילת הקלט ונעשה סריקה נוספת משמאל לימין.
- במשבצת הראשונה יש ✓ מסיבוב הראשון. הראש פשוט כותב עליה ✓, כלומר משבצת ראשונה נשארת ללא שינוי.
- הראש זז שמאלה למשבצת הבאה. נניח שמצאנו b. נסמן במשבצת ✓.
- נסרוק את יתרת הקלט ונחפש אות a מתאימה ל b שכבר ראינו.
  - אם לא מצאנו ,המילה לא בשפה.
  - אם מצאנו ,נסמן את ה- a התואם ב- ✓.
  - בכל משבצת שיש ✓ כותבים עליה ✓ וממשיכים למשבצת הבאה הימני.
- נחזור לתחילת הקלט ונעשה סריקה נוספת משמאל לימין.
- חוזרים על התהליך שוב ושוב.
  - אם היה מעבר שבו לא מצאנו אות תואמת, המילה לא בשפה.
  - אם כולן היו תואמות ועשינו מעבר שבו הגכנו לקצה, מרווח לרווח, בלי לראות שום אות, אז המילה בשפה.

כעת נתאר את המ"ט באמצעות המצבי המכונה והפונקציית המעברים.

<u>מצבי המכונה</u>

q_0	המצב ההתחלתי. אליו נחזור לאחרכל סבב התאמה של זוג אותיות.
q_a	מצב שבו ראינו a ומחפשים b תואם.
q_b	מצב שבו ראינו b ומחפשים a תואם.
back	מצב שנשתמש בו כדי לחזור לקצה השמאלי של הקלט ולהתחיל את הסריקה הבאה (סבב ההתאמה הבא).
acc	מצב מקבל.
rej	מצב דוחה.

- כאשר המכונה מגיעה למצב acc היא עוצרת.

  עצירה במצב acc ומשמעותה קבלה.

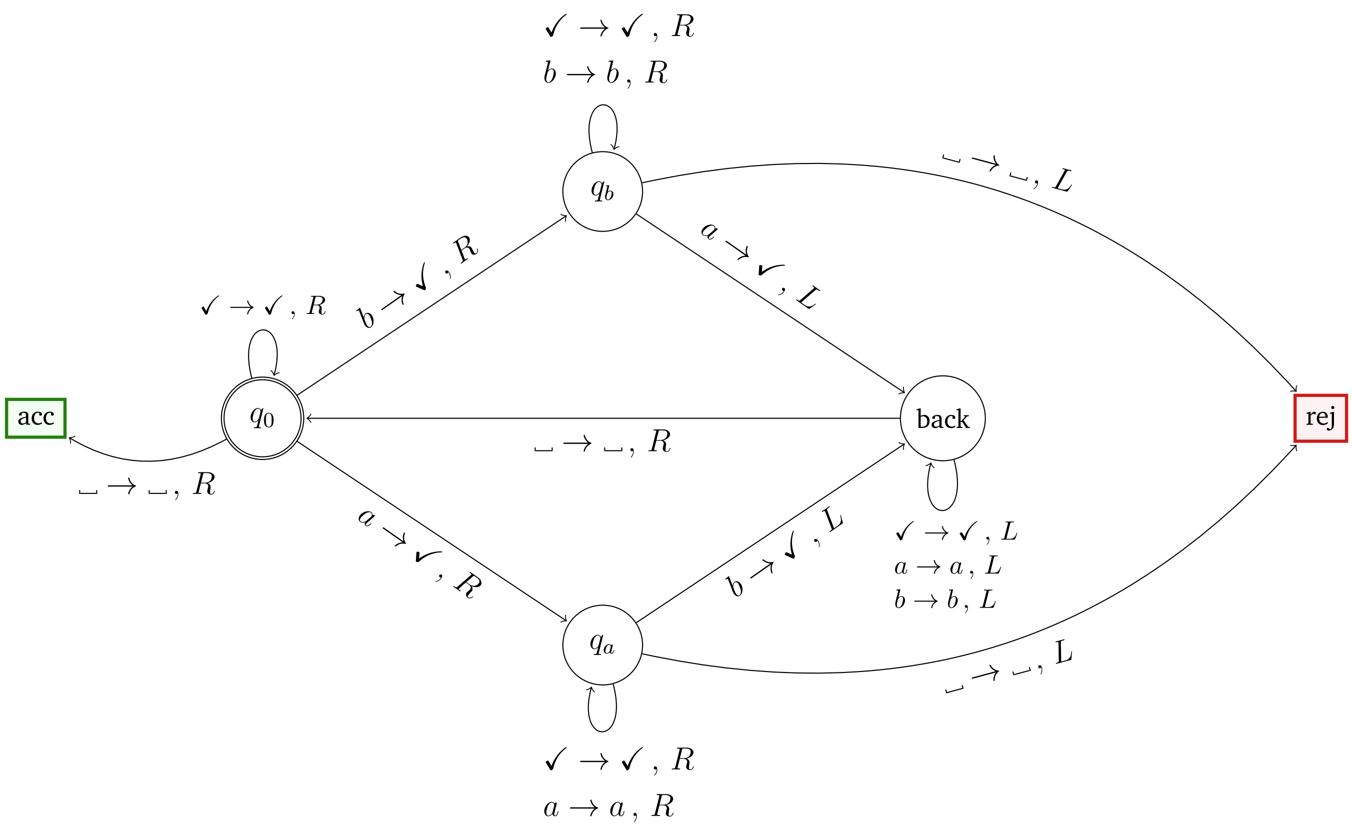
- כאשר המכונה מגיעה למצב rej היא עוצרת.

  עצירה במצב rej ומשמעותה דחייה.

- רק בשני מצבים אלו המכונה מפסיקה.

  בכל מצב אחר המכונה בהכרח ממשיכה.

<u>המעברים</u>



- בכל צעד המכונה מבצעת שתי פעולות:

  1. כותבת אות במיקום הראש
  2. זזה צעד אחד שמאלה או צעד אחד ימינה.

- בכל צעד המכונה יכולה לעבור למצב אחר או להישאר באותו מצב.

דוגמה 2.2

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה **??** מקבלת את המילה `abbbaa`.

פתרון:

␣	q_0	a	b	b	b	a	a	␣
␣	✓	q_a	b	b	b	a	a	␣
␣	back	✓	✓	b	b	a	a	␣
back	␣	✓	✓	b	b	a	a	␣

␣	q_0	✓	✓	b	b	a	a	␣
␣	✓	q_0	✓	b	b	a	a	␣
␣	✓	✓	q_0	b	b	a	a	␣
␣	✓	✓	✓	q_b	b	a	a	␣
␣	✓	✓	✓	b	q_b	a	a	␣
␣	✓	✓	✓	back	b	✓	a	␣
␣	✓	✓	back	✓	b	✓	a	␣
␣	✓	back	✓	✓	b	✓	a	␣
␣	back	✓	✓	✓	b	✓	a	␣
back	␣	✓	✓	✓	b	✓	a	␣
␣	q_0	✓	✓	✓	b	✓	a	␣
␣	✓	q_0	✓	✓	b	✓	a	␣
␣	✓	✓	q_0	✓	b	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	q_0	b	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	✓	q_b	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	✓	✓	q_b	a	␣
␣	✓	✓	✓	✓	back	✓	✓	␣
␣	✓	✓	✓	back	✓	✓	✓	␣
␣	✓	✓	back	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	back	✓	✓	✓	✓	✓	␣
␣	back	✓	✓	✓	✓	✓	✓	␣
back	␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	␣
␣	q_0	✓	✓	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	q_0	✓	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	✓	q_0	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	✓	✓	q_0	✓	✓	✓	␣
␣	✓	✓	✓	✓	q_0	✓	✓	␣
␣	✓	✓	✓	✓	✓	q_0	✓	␣
␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	q_0	␣
␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	␣	acc

■

דוגמה 2.3 label

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה ?? מקבלת את המילה aab.

פתרון:

␣	q_0	a	a	b	␣
␣	✓	q_a	a	b	␣
␣	✓	a	q_a	b	␣
␣	✓	back	a	✓	␣
␣	back	✓	a	✓	␣
back	␣	✓	a	✓	␣
␣	q_0	✓	a	✓	␣
␣	✓	q_0	a	✓	␣
␣	✓	✓	q_a	✓	␣
␣	✓	✓	✓	q_a	␣

$$\sqcup \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \text{rej} \quad \checkmark \quad \sqcup$$

■

הגדרה 2.2 מכונות טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעייה

$$M = (Q, q_0, F, \Gamma, \Sigma, b, \delta)$$

פרק 3
הגדרה פורמלית של מכונת טיורינג

הגדרה 3.1 מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעיה

$$M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$$

כאשר:

Q	קבוצת מצבים סופיות	
Σ	א"ב קלט סופי	$\sqcup \notin \Sigma$
Γ	א"ב סרט סופי	$\Sigma \subseteq \Gamma$, $\sqcup \in \Gamma$ ref
δ	פונקציית המעברים	$\delta : (Q \backslash \{\text{rej}, \text{acc}\} \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$
q_0	מצב התחלתי	
acc	מצב מקבל	
rej	מצב דוחה	

דוגמה 3.1

(המשך דוגמה ??)

$$M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$$

$$Q = \{q_0, q_a, q_b, \text{back}, \text{rej}, \text{acc}\} \ .$$

$$\Sigma = \{\texttt{a}, \texttt{b}\} \ , \qquad \Gamma = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \sqcup, \checkmark\}$$

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, \mathtt{a}) &= (q_a, \checkmark, R) \ , \\
\delta(q_0, \mathtt{b}) &= (q_b, \checkmark, R) \ , \\
\delta(q_0, \sqcup) &= (\text{acc}, \sqcup, R) \ , \\
\delta(q_a, \checkmark) &= (q_a, \checkmark, R) \ , \\
\delta(q_a, \mathtt{a}) &= (q_a, \mathtt{a}, R) \ , \\
\delta(q_a, \mathtt{b}) &= (\text{back}, \checkmark, L) \ , \\
\delta(q_b, \checkmark) &= (q_b, \checkmark, R) \ , \\
\delta(q_b, \mathtt{b}) &= (q_a, \mathtt{b}, R) \ , \\
\delta(q_b, \mathtt{a}) &= (\text{back}, \checkmark, L) \ ,
\end{aligned}$$

קל יותר לרשום את פונקציית המעבירים δ כטבלה:

$Q \backslash \Gamma$	$\mathtt{a}$	$\mathtt{b}$	$\sqcup$	$\checkmark$
q_0	$(q_a, \checkmark, R)$	$(q_b, \checkmark, R)$	$(\text{acc}, \sqcup, R)$	$(q_0, \checkmark, R)$
q_a	$(q_a, \mathtt{a}, R)$	$(\text{back}, \checkmark, L)$	$(\text{rej}, \sqcup, L)$	$(q_a, \checkmark, R)$
q_b	$(\text{back}, \checkmark, L)$	$(q_b, \mathtt{b}, R)$	$(\text{rej}, \sqcup, L)$	$(q_b, \checkmark, R)$
back	$(\text{back}, \mathtt{a}, L)$	$(\text{back}, \mathtt{b}, L)$	$(q_0, \sqcup, R)$	$(\text{back}, \checkmark, L)$

הגדרה 3.2 קונפיגורציה

תהי $M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$ מכונת טיורינג.
קונפיגורציה של M הינה מחרוזת

$$\mu q \sigma \nu$$

כאשר משמעות:

$$\mu, \nu \in \Gamma^* \ , \qquad \sigma \in \Gamma \ , \qquad q \in Q \ .$$

q מצב המכונה,
σ הסימון במיקום הראש
μ תוכן הסרט משמאל לראש,
ν תוכן הסרט מימין לראש.

דוגמה 3.2

(המשך של דוגמה ??)

μ	q	σ	ν
$\sqcup$	q_0	a	a b $\sqcup$
$\sqcup\checkmark$	q_a	a	b $\sqcup$
$\sqcup$ $\checkmark$ a	q_a	b	$\sqcup$
$\sqcup$ $\checkmark$	back	a	$\checkmark$ $\sqcup$
$\sqcup$	back	$\checkmark$	a $\checkmark$ $\sqcup$
$\sqcup$	back	$\sqcup$	$\checkmark$ a $\checkmark$ $\sqcup$
$\sqcup$	q_0	$\checkmark$	a $\checkmark$ $\sqcup$
$\sqcup$ $\checkmark$	q_0	a	$\checkmark$ $\sqcup$
$\sqcup$ $\checkmark$ $\checkmark$	q_a	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$ $\checkmark$ $\checkmark$ $\checkmark$	q_a	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup$ $\checkmark$ $\checkmark$	rej	$\checkmark$	$\sqcup$

דוגמה 3.3 label

הרכיבו מכונת טיורינג אשר מקבלת כל מילה בשפה

$$L = \{a^n \,|\, n = 2^k \;,\; k \in \mathbb{N}\}$$

ז"א מילים בעלי מספר אותיות a אשר חזקה של 2.

פתרון:

ראשית נשים לב שאם $n = 2^k$ מספר אשר חזקה של 2, אז $n = 1$ (אם $k = 0$) או n מתחלק ב- 2 בדיוק k פעמים.
אם n אינו חזקה של 2 אז קיים שלם $m \geq 1$ עבורו אחרי m חילוקים ב- 2 נקבל מספר אי-זוגי שגדול מ-1.
למעשה מתקיים משפט שנקרא **משפט החילוק של חזקה של 2**:
נתון מספר שלם n.

n שווה לחזקה של 2 אם ורק אם לא קיים שלם m עבורו אחרי m חילוקים ב- 2 נקבל מספר שלם אי-זוגי שגדול מ- 1.
אפשר לנסח את המשפט בצורה שקולה:

n שווה לחזקה של 2 אם ורק אם קיים שלם m עבורו אחרי m חילוקים ב- 2 נקבל 1.
הוכחה:
יהי n שלם. לפי המשפט הפירוק לראשוניים,

$$n = 2^{e_1}\;3^{e_2}\;5^{e_3}\;7^{e_4}\cdots = 2^{e_1}\prod_{i=2}^{r} p_i^{e_i}$$

כאשר $\{p_i\}$ קבוצת הראשוניים בפירוק של n ו- e_i שלמיים.
אם n חזקה של 2 אז $e_2 = e_3 = \cdots = e_r = 0$ ולא קיים m עבורו אחרי m חילוקים ב-2 נקבל מספר אי-זוגי אשר גדול מ- 1.
אם n לא חזקה של 2 אז לפחות אחת החזקות $e_2, e_3, \ldots, e_r$ שונה מאפס ואחרי $m = e_1$ חילוקים ב- 2 נקבל את השלם $\prod_{i=2}^{r} p_i^{e_i} = 3^{e_2}\;5^{e_3}\;7^{e_4}\cdots$ אשר מספר אי-זוגי. גדול מ- 1. $\blacksquare$

לאור המשפט הזה נרכיב אלגוריתם אשר מחלק את מספר האותיות במילה ב- 2 בצורה איטרטיבית. אם אחרי סבב מסויים נקבל מספר אי-זוגי גדול מ- 1 אז מספר האותיות a במילה לא יכול להיות חזקה של 2. אם אחרי כל הסבבים לא קיבלנו מספר אי-זוגי גדול מ-1 אז מובטח לנו שיש מספר אותיות a אשר חזקה של 2.

- נתון הקלט

␣	␣	a	a	a	a	a	a	a	a	␣	␣
		↑									

נעבר על סרט הקלט. משמאל לימין.

- מבצעים מחקיה לסירוגין של האות a כלומר אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר וכן הלאה.

␣	␣	✓	a	✓	a	✓	a	✓	a	␣	␣
									↑		

אם אחרי סבב הראשון

* יש ✓ בתו האחרון $\Leftarrow$ קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 $\Leftarrow$ אין חזקה של 2 אותיות a במילה.
* יש a בתו האחרון $\Leftarrow$ קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ונמשיך לסבב הבא.

- הראש חוזר לתו הראשון של הקלט

␣	␣	✓	a	✓	a	✓	a	✓	a	␣	␣
		↑									

- בסבב הבא חוזרים על התהליך של מחיקה לסירוגין של האות a (אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר)

␣	␣	✓	✓	✓	a	✓	✓	✓	a	␣	␣
									↑		

אם אחרי סבב השני

* יש ✓ בתו האחרון $\Leftarrow$ קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 $\Leftarrow$ אין חזקה של 2 אותיות a במילה.
* יש a בתו האחרון $\Leftarrow$ קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ונמשיך לסבב הבא.

- הראש חוזר לתו הראשון של הקלט

␣	␣	✓	✓	✓	a	✓	✓	✓	a	␣	␣
		↑									

- בסבב הבא חוזרים על התהליך של מחיקה לסירוגין של האות a (אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר)

␣	␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	a	␣	␣
									↑		

אם אחרי סבב השלישי

* יש $\checkmark$ בתו האחרון $\Leftarrow$ קיבלנו מספר אי-זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 $\Leftarrow$ אין חזקה של 2 אותיות a במילה.
* יש a בתו האחרון $\Leftarrow$ קיבלנו מספר זוגי של אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ונמשיך לסבב הבא.

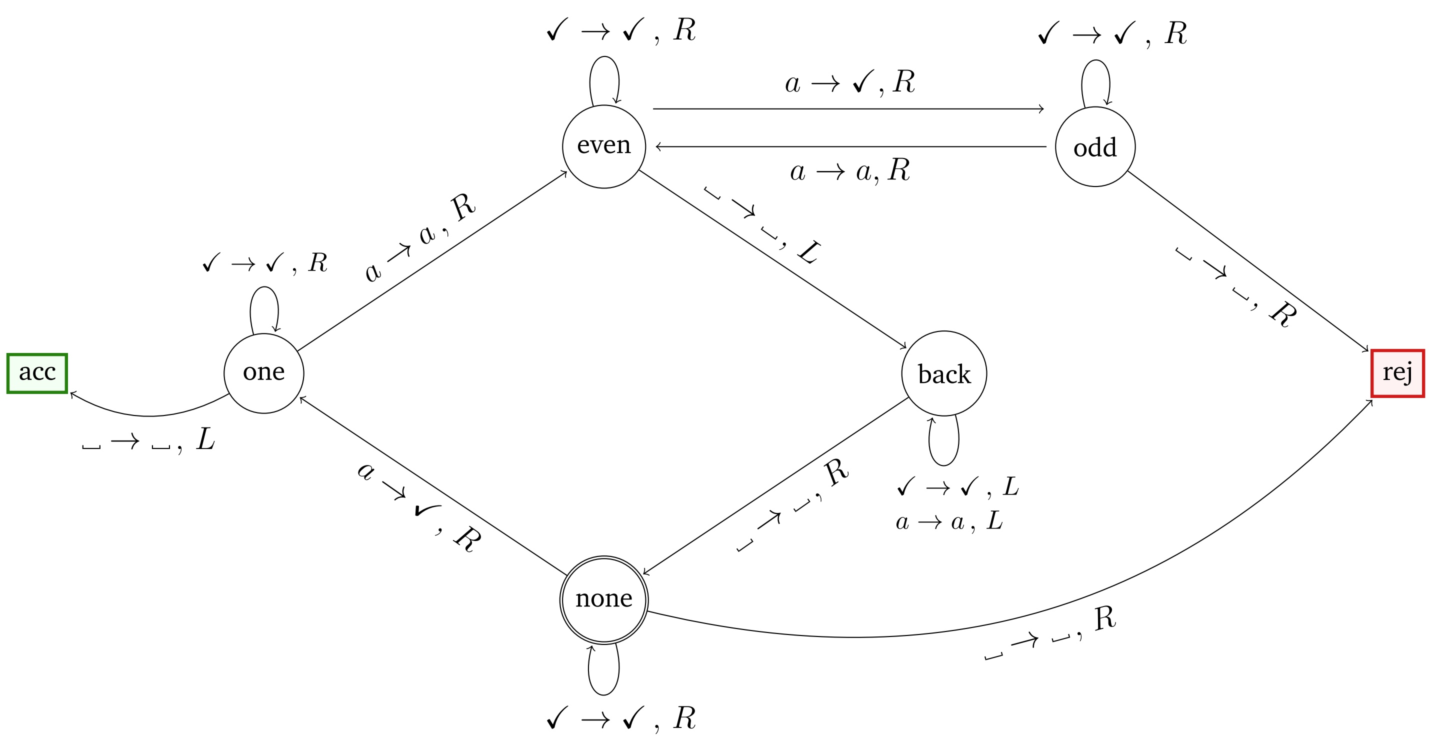
- הראש חוזר לתו הראשון של הקלט.

בסבב האחרון נשאר רק אות a אחת.

לכן לפי המשפט למעלה מובטח לנו כי המילה מורכבת ממספר אותיות a אשר חזקה של 2.

␣	␣	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	a	␣	␣
		$\uparrow$									

המכונת טיורינג אשר מקבלת מילים בשפה שעובדת לפי האלגוריתם המתואר למעלה מתואר בתרשים למטה.



המצבים:

מצב none: מצב התחלתי. עדיין לא קראנו a בסבב סריקה זה.
מצב one: קראנו a בודד.
מצב even: קראנו מספר זוגי של a .
מצב odd: קראנו מספר אי-זוגי של a .
מצב back: חזרה שלמאלה.

■

דוגמה 3.4

בדקו אם המילה

aaaa

מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה ??.

פתרון:

␣	none	a	a	a	a	␣
␣	✓	one	a	a	a	␣
␣	✓	a	even	a	a	␣
␣	✓	a	✓	odd	a	␣
␣	✓	a	✓	a	even	␣
␣	✓	a	✓	back	a	␣
␣	✓	a	back	✓	a	␣
␣	✓	back	a	✓	a	␣
␣	back	✓	a	✓	a	␣
back	␣	✓	a	✓	a	␣
␣	none	✓	a	✓	a	␣
␣	✓	none	a	✓	a	␣
␣	✓	✓	one	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	one	a	␣
␣	✓	✓	✓	a	even	␣
␣	✓	✓	✓	back	a	␣
␣	✓	✓	back	✓	a	␣
␣	✓	back	✓	✓	a	␣
␣	back	✓	✓	✓	a	␣
back	␣	✓	✓	✓	a	␣
␣	none	✓	✓	✓	a	␣
␣	✓	none	✓	✓	a	␣
␣	✓	✓	none	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	none	a	␣
␣	✓	✓	✓	✓	one	␣
␣	✓	✓	✓	acc	✓	␣

μ	q	σ	ν
␣	none	a	a a a ␣
␣ ✓	one	a	a a ␣
␣ ✓ a	even	a	a ␣
␣ ✓ a ✓	odd	a	␣
␣ ✓ a ✓ a	even	␣	␣
␣ ✓ a ✓	back	a	␣
␣ ✓ a	back	✓	a ␣
␣ ✓	back	a	✓ a ␣
␣	back	✓	a ✓ a ␣
␣	back	␣	✓ a ✓ a ␣
␣	none	✓	a ✓ a ␣
␣✓	none	a	✓ a ␣
␣✓✓	one	✓	a ␣
␣✓✓✓	one	a	␣
␣✓✓✓ a	even	␣	␣
␣✓✓✓	back	a	␣
␣✓✓	back	✓ a	␣
␣✓	back	✓	✓ a ␣
␣	back	✓	✓✓ a ␣

␣	back	␣	✓✓✓ a ␣
␣	none	✓	✓✓ a ␣
␣✓	none	✓	✓ a ␣
␣✓✓	none	✓	a ␣
␣✓✓✓	none	a	␣
␣✓✓✓✓	one	␣	␣
␣✓✓✓	acc	✓	␣

■

דוגמה 3.5

בדקו אם המילה

aaa

מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה **??**.

פתרון:

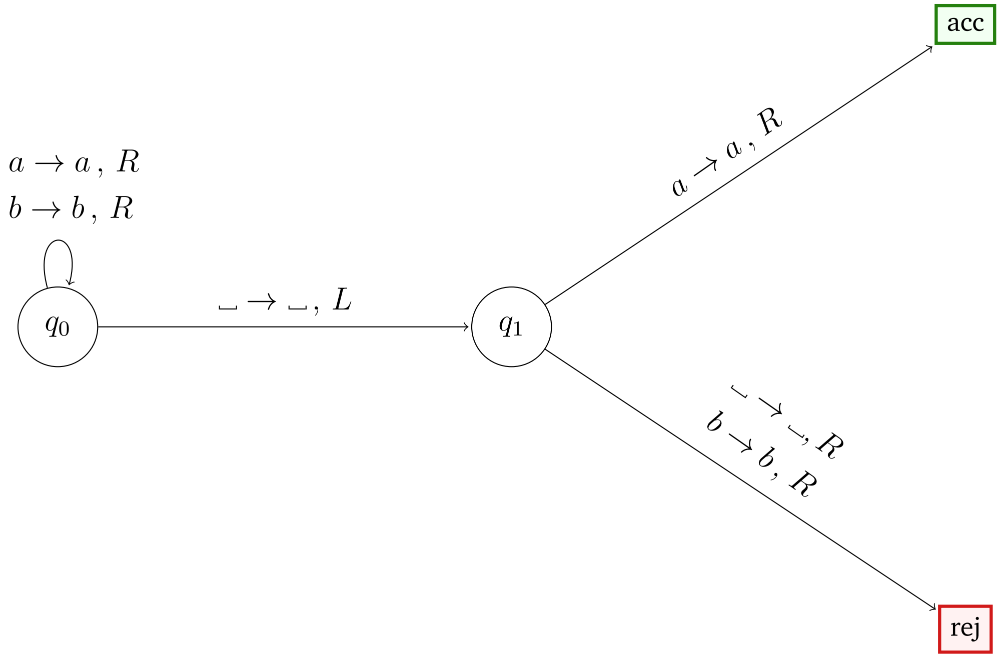
␣	none	a	a	a	␣
␣	✓	one	a	a	␣
␣	✓	a	even	a	␣
␣	✓	a	✓	odd	␣
␣	✓	a	✓	␣	rej

μ	q	σ	ν
␣	none	a	aa ␣
␣ ✓	one	a	a ␣
␣ ✓ a	even	a	␣
␣ ✓ a ✓	odd	␣	␣
␣ ✓ a ✓ ␣	rej	␣	␣

■

דוגמה 3.6

מהי שפת המכונה:



פתרון:

תיאור מילולי:

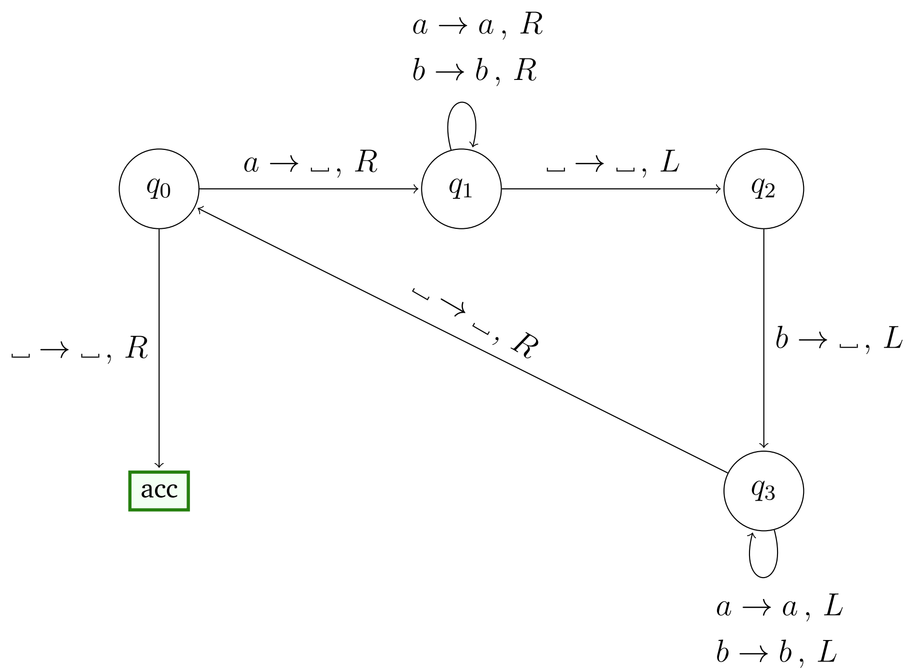
- במצב התחלתי q_0:
  - אם אנחנו רואים a, עוברים למשבצת הבאה לימין הראש.
  - אם אנחנו רואים b, עוברים למשבצת הבהאה לשמאל הראש.
- ממשיכים כך עד שנגיע לתו רווח, כלומר לסוף המילה, ואז עוברים למשבצת לשמאל הראש, כלומר לתו האחרון של המילה.
  - אם אנחנו רואים a, המילה מתקבלת. (ז"א התו האחרון הינו a.)
  - אם אנחנו רואים b, המילה נדחית. (ז"א התו האחרון הינו b.)
  - אם אנחנו רואים תו-רווח המילה נדחית. (ז"א המילה הינה ריקה.)

תשובה סופית: המכונה מקבלת שפת המילים המסתיימות באות a.

■

דוגמה 3.7

מהי שפת המכונה:



פתרון:

תיאור מילולי:

- במצב התחלתי q_0:
  - ∗ אם אנחנו רואים b, המילה נדחית.
  - ∗ אם אנחנו רואים $\llcorner\!\lrcorner$, המילה מתקבלת.
  - ∗ אם אנחנו רואים a, כותבים עליה $\llcorner\!\lrcorner$ ועוברים למשבצת הבאה לימין הראש, והמ"ט עוברת למצס q_1.
- במצב q_1 אנחנו ראינו a וכתבנו עליה $\llcorner\!\lrcorner$.
  - ∗ אם אנחנו רואים במשבצת הבאה a או b, ממשיכים למשבצת הבאה לימין והמ"ט נשארת במצב q_1.
  - ∗ אם אנחנו רואים תו רווח (כלומר הגענו לסוף המילה) הראש זז למשבצת השמאלי, כלומר לאות האחרונה של המילה והמ"ט עוברת למצב q_2.
- במצב q_2 ראינו a בתו הראשון, כתבנו עליה $\llcorner\!\lrcorner$ והראש קורא התו האחרון.
  - ∗ אם אנחנו רואים a המילה נדחית.
  - ∗ אם אנחנו רואים $\llcorner\!\lrcorner$, המילה נדחית.
  - ∗ אם אנחנו רואים b כותבים עליה $\llcorner\!\lrcorner$ והמ"ט עוברת למצב q_3.
- במצב q_3 קראנו a בתו הראשון ומחקנו אותה, קראנו b ומחקנו אותה.
- הראש זז משבצת אחת שמאלה עד שיגיע לתו הרשאון ומ"ט חוזרת למצב התחלת q_0.

- המ"ט באופן איטרטיבי, עוברת על הקלט ובכל מעבר:
  * אם יש a בתחילת המילה מורידה אותה ומחליפה אותה עם ␣, אחרת המילה נדחית,
  * אם יש b בסופה של המילה מורידה אותה ומחליפה אותה עם ␣, אחרת המילה נדחית.
- אם לאחר מספר מעברים כאלו הסרט ריק, המ"ט מקבלת, וזה יתקיים לכל מילה ורק למילים בשפה

$$\left\{a^n b^n \middle| n \geq 0\right\} \ .$$

תשובה סופית: המכונה מקבלת שפת המילים

$$\left\{a^n b^n \middle| n \geq 0\right\} \ .$$

■

דוגמה 3.8

פתרון:

μ	q	σ	ν
␣ ␣	q_0	a	aaabbbb␣ ␣
␣ ␣ ␣	q_1	a	aabbbb␣ ␣
␣ ␣ ␣ a	q_1	a	abbbb␣ ␣
␣ ␣ ␣ aa	q_1	a	bbbb␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaa	q_1	b	bbb␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaab	q_1	b	bb␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaabb	q_1	b	b␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaabbb	q_1	b	␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaabbbb	q_1	␣	␣
␣ ␣ ␣ aaabbb	q_2	b	␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaabb	q_3	b	␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaab	q_3	b	b␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ aaa	q_3	b	bb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ aa	q_3	a	bbb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ a	q_3	a	abbb␣␣␣
␣␣␣	q_3	a	aabbb␣␣␣
␣␣	q_3	␣	aaabbb␣␣␣
␣ ␣ ␣	q_0	a	aabbb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣	q_1	a	abbb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ a	q_1	a	bbb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aa	q_1	b	bb␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aab	q_1	b	b␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aabb	q_1	b	␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aabbb	q_1	␣	␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aabb	q_2	b	␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aab	q_3	b	␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ aa	q_3	b	b␣ ␣ ␣ ␣

␣ ␣ ␣ ␣ a	q_3	a	bb␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣	q_3	a	abb␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣	q_3	␣	aabb␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣	q_0	a	abb␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_1	a	bb␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ a	q_1	b	b␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ab	q_1	b	␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ abb	q_1	␣	␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ab	q_2	b	␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ a	q_3	b	␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_3	a	b␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣	q_3	␣	ab␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_0	a	b␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_1	b	␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣ b	q_1	␣	␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_2	b	␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_3	␣	␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣
␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣	q_0	␣	␣ ␣ ␣ ␣ ␣

■

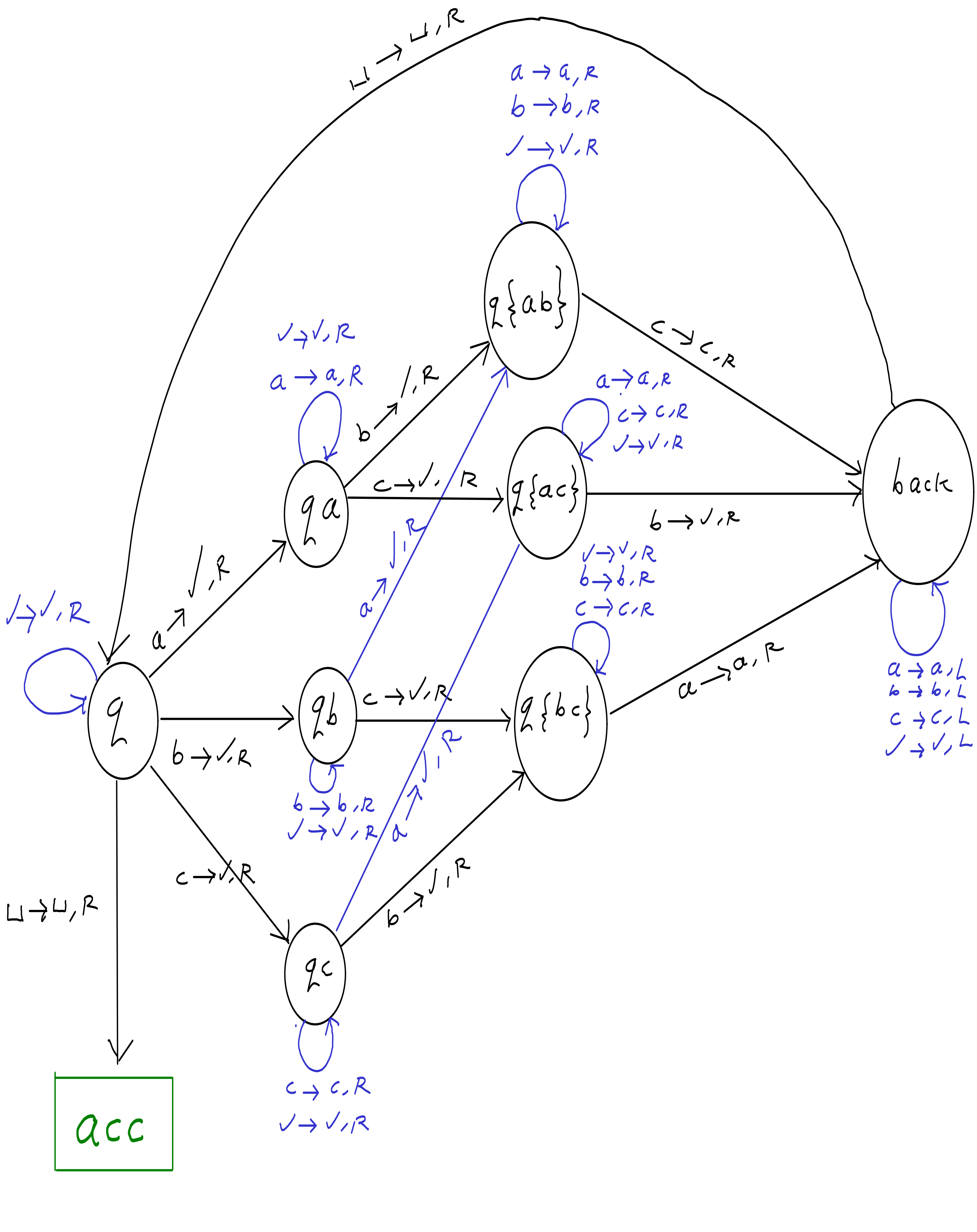
פרק 4
טבלת המעברים

4.1 דוגמה

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$L = \left\{ w = \{a,b,c\}^* \middle| \#a_w = \#b_w = \#c_w \right\}$$

פתרון:


q
qa
qb
qc
q{ab}
q{ac}
q{bc}
back
acc
a → a, R
b → b, R
√ → √, R
c → c, R
a → √, R
b → √, R
c → √, R
⊔ → ⊔, R
a → a, L
b → b, L
c → c, L
√ → √, L

מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
$q.S$	σ	$q.\left(S\cup\{\sigma\}\right)$	$\checkmark$	R	$\sigma\notin S$
$q.S$	σ	$q.S$		R	$\sigma\in S$
$q/\{a,b,c\}$	$a,b,c,\checkmark$	back		L	
$q.\emptyset$	$\sqcup$	acc		R	
back	$a,b,c,\checkmark$	back		L	
back	$\sqcup$	$q.\emptyset$		R	

■

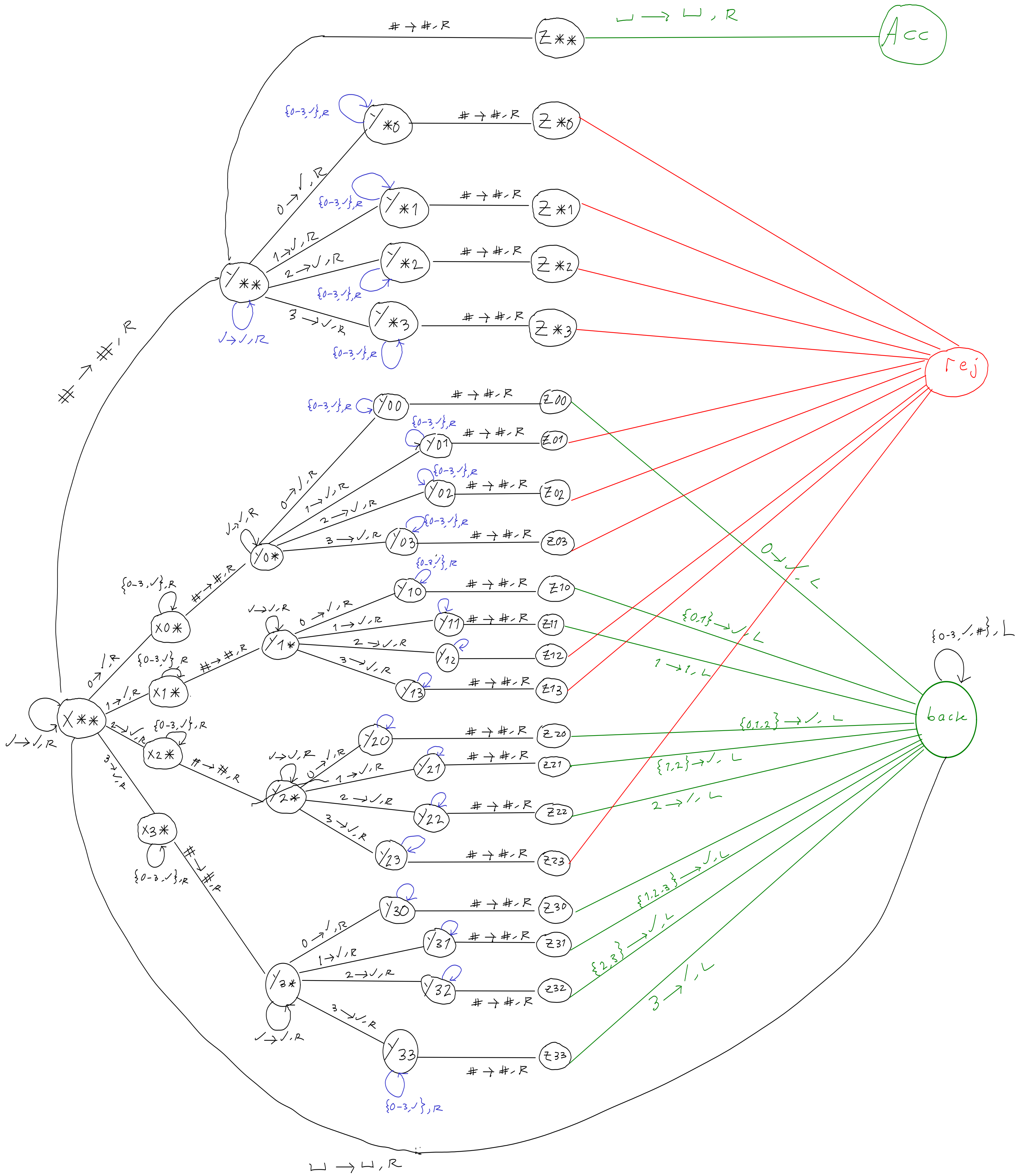
דוגמה 4.2

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$\left\{x_1\ldots x_k\#y_1\ldots y_k\#z_1\ldots z_k\;\middle|x_i,y_i,z_i\in\{0,\ldots,3\}\;,\;\forall i,x_i\geq z_i\geq y_i\right\}$$

פתרון:

$L=\{x_1x_2\#y_1y_2\#z_1z_2 \mid x_i,y_i,z_i\in\{0,1,2,3\}\ \forall i\ x_i\ge z_i\ge y_i\}$



תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון בסרט	מצב
	R	$\checkmark$	$X\sigma*$	σ	$X**$
	R	$\checkmark$	$X**$	$\checkmark$	$X**$
	R		$X\sigma*$	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	$X\sigma*$
	R		$Y\tau*$	#	$X\tau*$
	R		$Y\tau\sigma$	σ	$Y\tau*$
	R		$Y\tau*$	$\checkmark$	$Y\tau*$
	R		$Y\tau\sigma$	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	$Y\tau\sigma$
	R		$Z\tau_1\tau_2$	#	$Y\tau_1\tau_2$
	R		$Z\tau_1\tau_2$	$\checkmark$	$Z\tau_1\tau_2$
	L	$\checkmark$	back	σ	$Z\tau_1\tau_2$
	R		acc	$\llcorner\!\lrcorner$	$Z**$
	L		back	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	back
	R		$X**$	$\llcorner\!\lrcorner$	back

■

פרק 5
חישוב פונקציות

5.1 דוגמה

כפל אונרי בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

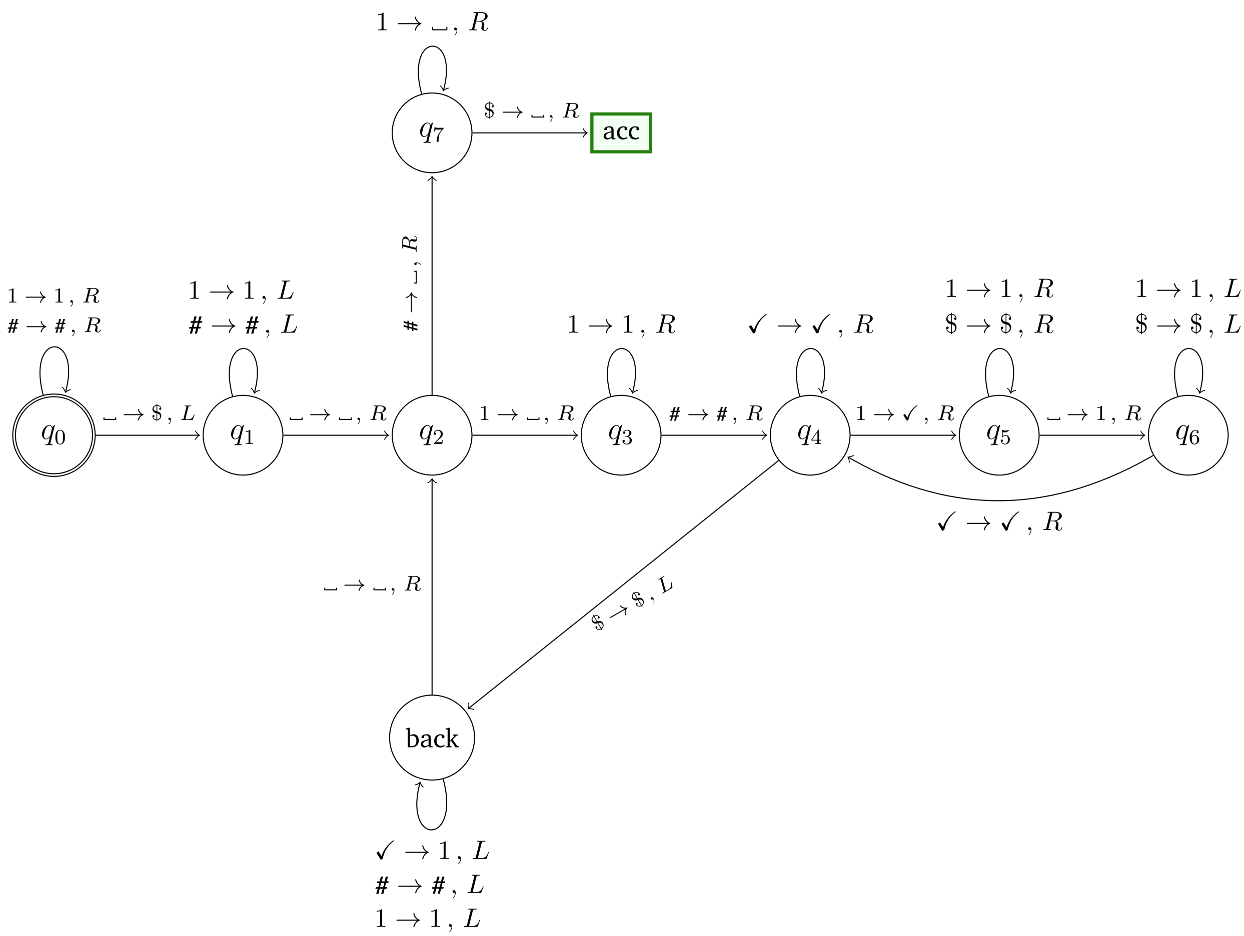
$$1^i\#1^j$$

ומחזירה את פלט

$$1^{i\cdot j}\ .$$

פתרון:

- לדוגמה, נניח שהקלט הוא 2 כפול 2.
  הקלט הוא 11#11.
- נרצה להבדיל בין הקלט לבין הפלט.
  לכן בתחילת הריצה, נתקדם ימינה עד סוף הקלט ונוסיף שם את התו $.
  לאחר מכן נחזור לתחילת הקלט.
- על כל אות 1 במילה השמאלית נעתיק את המילה הימינית לאחר סימן ה- $.
- לאחר מכן נשאיר רק את התווים שלאחר סימן ה $. כלומר, נמחק את כל מה שאינו פלט.



μ	q	σ	ν
␣	q_0	1	1#11␣
␣11#11	q_1	␣	␣
␣11#11	q_1	$	␣
␣	q_1	␣	11#11$
␣	q_2	1	1#11$
␣ ␣	q_3	1	#11$
␣ ␣1#	q_4	1	1$
␣ ␣1#✓	q_5	1	$
␣ ␣1#✓1$	q_5	␣	␣
␣ ␣1#✓1$1	q_6	␣	␣
␣ ␣1#	q_6	✓	1$1 ␣
␣ ␣1#✓	q_4	1	$1 ␣
␣ ␣1#✓✓	q_5	$	1 ␣
␣ ␣1#✓✓$1	q_5	␣	␣
␣ ␣1#✓✓$11	q_6	␣	␣
␣ ␣1#✓	q_6	✓	$11␣
␣ ␣1#✓✓	q_4	$	11␣
␣ ␣1#✓	back	✓	$11␣
␣	back	␣	1#11$11␣
␣ ␣	q_2	1	#11$11␣
␣ ␣ ␣	q_3	#	11$11␣
␣ ␣ ␣#	q_4	1	1$11␣

$\sqcup\sqcup\sqcup\#\checkmark$	q_5	1	$\$11\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\#\checkmark 1\$11$	q_5	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\#\checkmark 1\$111$	q_6	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\#$	q_6	$\checkmark$	$1\$111\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\#\checkmark$	q_4	1	$\$111\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\#\checkmark\checkmark$	q_5	$\$$	$111\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\#\checkmark\checkmark\$111$	q_5	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\#\checkmark\checkmark\$1111$	q_6	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\#\checkmark$	q_4	$\checkmark$	$\$1111$
$\sqcup\sqcup\sqcup\#\checkmark\checkmark$	q_4	$\$$	1111
$\sqcup\sqcup\sqcup\#\checkmark$	back	$\checkmark\$$	1111
$\sqcup\sqcup$	back	$\sqcup$	$\#11\$1111$
$\sqcup\sqcup\sqcup$	q_2	$\#$	$11\$1111$
$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$	q_7	1	$1\$1111$
$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$	q_7	$\$$	1111
$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$	acc	1	111

■

פרק 6
בעיות לא כריעות

הגדרה 6.1 פונקציה ניתנת לחישוב

פונקציה

$$f : \Sigma^* \to \Sigma$$

היא ניתנת לחישוב אם קיימת מ"ט M כך ש-

$$f = f_M \ .$$

משפט 6.1 קיום פונקציות שאינן ניתנות לחישוב

קיימות פונקציות שאינן ניתנות לחישוב.

הוכחה: ? ■

פרק 7
תורת סיבוכיות

הגדרה 7.1 זמן הריצה

זמן הריצה של מכונת טיורינג M על קלט x הוא מספר צעדי החישוב ש־ M מבצעת על x.

משפט 7.1

$$P \subseteq R$$

ואם $f \in \mathrm{POLY}$ אז f מלאה.

הוכחה: תהא $L \in P$. ■

פרק 8
בעיות NP שלמות

הגדרה 8.1 רידוקציה פולינומית

יהיו $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ שפות כלשהן. רידוקציה פולינומית מ- L_1 אל L_2 היא פונקציה

$$f : \Sigma^* \to \Sigma^*$$

כך ש- $f \in \text{POLY}$ המקיימת

$$x_1 \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2 \ .$$

אםקיימת רדוקציה פולינומית מ- L_1 אל L_2 מסמנים זאת $L_1 \leq_p L_2$. רדוקציות פולינומיות הן מעניינות בזכות משפט הרדוקציה המתאים:

משפט 8.1

תהיינה L_1, L_2 שפות כך ש- $L_1 \leq_p L_2$.

- אם $L_2 \in P$ אז $L_1 \in P$.
- אם $L_2 \in NP$ אז $L_1 \in NP$.

פרק 9
אלגוריתמי קירוב

הגדרה 9.1 שידוך

שידוך בגרף G הוא תת-קבוצה $M \subseteq E$ כך שאין שתי קשתות ב- M עם צומת משותף. שידוך הוא. שידוך הוא מקסימלי אם לא ניתן להוסיף לו קשת שאין לה צומת משותף עם קשתות אחרות בשידוך.

משפט 9.1

תהא f_{VC} הפונקציה אשר מחזירה עבור גרף את הגודל המינימלי של כיסוי בצמתים עבורו. יהא G גרף ו- M שידודמקסימלי בגרף. אז

$$f_{\text{VC}}(G) \leq |V_M| \leq 2 f_{\text{VC}}(G) \ .$$

הוכחה: ? ■

פרק 10
סיבוכיות זיכרון

הגדרה 10.1

מכונת טיורינג חד סרטית M פועלת על קלט w בסיבוכיות זיכרון k אם הראש הקורא של המכונה אינו מגיע אל מימין לתא מספר k. בהינתן פונקציה $s:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ נאמר ש־ M פועלת בסיבוכיות זיכרון s אם לכל $w\in\Sigma^*$, M פועלת על x בסחבוכיות זיכרון $s(|x|)$.

משפט 10.1

אם $\mathrm{P} \in L$ אז $L \in \mathrm{PSPACE}$.

הוכחה: ? ■

נספח א
כלים מתמטיים

הגדרה A.1 מכונות טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעייה

$$M = (Q, q_0, F, \Gamma, \Sigma, b, \delta)$$

הגדרה A.2 הקונפיגורציה ההתחלתית

הקונפיגורציה ההתחלתית בחישוב של המ"ט M היא שלשה

$$C = (\alpha, q, i)$$

נספח ב
שפות רגולריות

הגדרה B.1 מכונות טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעייה

$$M = (Q, q_0, F, \Gamma, \Sigma, b, \delta)$$

הגדרה B.2 הקונפיגורציה ההתחלתית

הקונפיגורציה ההתחלתית בחישוב של המ"ט M היא שלשה

$$C = (\alpha, q, i)$$

נספח ג
שפה חופשית הקשר

הגדרה C.1 מכונות טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעייה

$$M = (Q, q_0, F, \Gamma, \Sigma, b, \delta)$$

הגדרה C.2 הקונפיגורציה ההתחלתית

הקונפיגורציה ההתחלתית בחישוב של המ"ט M היא שלשה

$$C = (\alpha, q, i)$$