שיעור 6
תת מרחב

הגדרה 6.1 תת מרחב

נניח כי V מרחב ווקטורי מעל שדה, $\mathbb{F}$.

תת קבוצה W של V נקראת תת מרחב (ת"מ) של V אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

(1) $\bar{0} \in W$.

(2) לכל $u, \mathrm{v}, \in W$,
$$u + \mathrm{v} \in W \ .$$

(3) לכל $u \in W$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים
$$\alpha \cdot u \in W \ .$$

דוגמה 6.1

נגדיר $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, $W \subseteq \mathbb{R}^2$. האם W תת מרחב של $\mathbb{R}^2$?

פתרון:

לא. דוגמה נגדית:
$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \notin W \ .$$

לכן W לא תת מרחב של $\mathbb{R}^2$.

דוגמה 6.2

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \middle| k \in \mathbb{R} \right\} \ .$$

$W \subseteq \mathbb{R}^2$. האם W תת מרחב של $\mathbb{R}^2$?

פתרון:

1) לכל $u = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \in W$, $v = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \in W$,
$$u + v = \begin{pmatrix} k + t \\ 2(k + t) \end{pmatrix} \in W \ ,$$

(2 לכל $u=\begin{pmatrix}k\\2k\end{pmatrix}\in W$, ולכל סקלר $t\in\mathbb{R}$,

$$tu=\begin{pmatrix}tk\\2(tk)\end{pmatrix}\in W\ ,$$

(3

$$\bar{0}=\begin{pmatrix}0\\2\cdot 0\end{pmatrix}\in W\ .$$

לכן השלושה התנאים של תת מרחב בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W תת מרחב של $\mathbb{R}^2$.

דוגמה 6.3

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a\\a+2\end{pmatrix}\middle| a\in\mathbb{R}\right\}\ .$$

האם W תת מרחב של $\mathbb{R}^2$?

פתרון:
$W\notin\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\bar{0}$ לכן W לא תת מרחב של $\mathbb{R}^2$.

דוגמה 6.4

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\middle| x\geq 0, x,y\in\mathbb{R}\right\}\ .$$

האם W תת מרחב של $\mathbb{R}^2$?

פתרון:
לא. דוגמה נגדית:

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\in W\ ,\qquad (-1)\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}\notin W\ .$$

דוגמה 6.5

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\middle| x^2-y^2=0\right\}\ .$$

האם W תת מרחב של $\mathbb{R}^2$?

פתרון:
לא. דוגמה נגדית:

$$u=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\in W\ ,\qquad \mathrm{v}=\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}\in W\ ,\qquad u+\mathrm{v}=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}\notin W\ .$$

דוגמה 6.6

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\;\middle|\;\begin{aligned}x-2y+z&=0\\y-z&=0\end{aligned}\right\}\ .$$

האם W תת מרחב של $\mathbb{R}^3$?

פתרון:
כן:

1) צריך להוכיח כי $W\in\bar{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$:

$$\left\{\begin{aligned}0-2\cdot0+0&=0\\0-0&=0\end{aligned}\right.\qquad\Rightarrow\qquad\bar{0}\in W\ .$$

2) נניח $u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in W$. ז"א מתקיים $\left\{\begin{aligned}x-2y+z&=0\\y-z&=0\end{aligned}\right.$. נקח סקלר k. צריך להוכיח: $ku\in W$.

$$ku=\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad\left\{\begin{aligned}kx-2ky+kz&=k(x-2y+z)&&=0\\ky-kz&=k(y-z)&&=0\end{aligned}\right.$$

לכן $ku\in W$.

3) נקח $u=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\in W$, $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\in W$. ז"א מתקיים

$$\left\{\begin{aligned}x_1-2y_1+z_1&=0\\y_1-z_1&=0\end{aligned}\right.\quad\text{וגם}\quad\left\{\begin{aligned}x_2-2y_2+z_2&=0\\y_2-z_2&=0\end{aligned}\right.$$

אז

$$u+\mathrm{v}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix}\ .$$

נבדוק אם $u+\mathrm{v}\in W$.

$$(x_1+x_2)-2(y_1+y_2)+(z_1+z_2)=(x_1-2y_1+z_1)+(x_2-2y_2+z_2)=0\ ,$$

$$(y_1+y_2)-(z_1+z_2)=(y_1-z_1)+(y_2-z_2)=0\ ,$$

לכן $u+\mathrm{v}\in W$. לכן השלושה התנאים של תת מרחב בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

דוגמה 6.7

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\middle|\,a+b+c=d\right\}\ .$$

האם W תת מרחב של $\mathbb{F}^{2\times2}$?

פתרון:

1)

$$\bar{0}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in W$$

כי $0+0+0=0$.

2) נקח

$$u=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in W\ .$$

ז"א מתקיים $a+b+c=d$. נקח סקלר k. אז

$$ku=\begin{pmatrix}ka&kb\\kc&kd\end{pmatrix}\in W\ .$$

$ka+kb+kc=k(a+b+c)=kd$. לכן $ku\in W$.

3)

$$u=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}\in W\ ,\qquad \mathrm{v}=\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}\in W\ .$$

צריך להוכיח $u+\mathrm{v}\in W$.

$u\in W \Leftarrow a_1+b_1+c_1=d_1$.

$\mathrm{v}\in W \Leftarrow a_2+b_2+c_2=d_2$.

$$u+\mathrm{v}=\begin{pmatrix}a_1+a_2&b_1+b_2\\c_1+c_2&d_1+d_2\end{pmatrix}$$

$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)=(a_1+b_1+c_1)+(a_2+b_2+c_2)=d_1+d_2$ ז"א $u+\mathrm{v}\in W$.

לכן השלושה התנאים של תת מרחב בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W תת מרחב של $\mathbb{F}^{2\times 2}$.

דוגמה 6.8

תהי

$$W=\left\{p(x)\middle|\deg(p(x))=2\ ,p(x)\in\mathbb{F}[x]\right\}$$

קבוצת כל הפולינומים במעלה 2 בדיוק עם מקדמים מתוך שדה $\mathbb{F}$. קבעו אם W תת מרחב של $\mathbb{F}[x]$.

פתרון:

W לא תת מרחב של $\mathbb{F}[x]$. הסבר:

$\bar{0}\notin W$.

דוגמה 6.9

נסמן

$$\mathbb{F}_2[x]=\left\{p(x)\in\mathbb{F}[x]\middle|\deg(p(x))\leq 2\right\}$$

קבוצת כל הפולינומים של $\mathbb{F}[x]$ מסדר 2 לכל היותר.

$\mathbb{F}_2[x]$ תת מרחב של $\mathbb{F}[x]$.

דוגמה 6.10

$$W = \{ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \big| f(3) = 0 \}$$

$W \subseteq F(\mathbb{R})$. קבעו האם W תת מרחב של $F(\mathbb{R})$.

פתרון:

1) האיבר $\bar{0}$ הינו הפונקציה $f(x) = 0$. לכן $\bar{0}(3) = 0 \Leftarrow \bar{0} \in W$.

2) אם $f \in W$ ו- $k \in \mathbb{R}$, אז $f(3) = 0$ לכן

$$(kf)(3) = k(f(3)) = k \cdot 0 = 0 \ .$$

ז"א $kf \in W$.

3) נניח $f, g \in W$, ז"א $f(3) = 0$, $g(3) = 0$. אז

$$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = 0 + 0 = 0 \ ,$$

כלומר $f + g \in W$.

לכן השלושה התנאים של תת מרחב בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W תת מרחב של $F(\mathbb{R})$.

דוגמה 6.11

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{rl} 3x + y - z & = 1 \\ 2x + 5y & = 0 \\ -x + 10y - z & = 5 \end{array} \right\}$$

קבעו האם W תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

פתרון:

W לא תת מרחב של $\mathbb{R}^3$, $\bar{0} \notin W$.

משפט 6.1 מרחב האפס הוא תת מרחב

לכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, אוסף הפתרונות של מערכת הומוגנית $A \cdot X = 0$ הוא תת מרחב של $\mathbb{F}^n$.

הוכחה: נסמן

$$\text{Nul}(A) = \{ X \big| A \cdot X = 0, X \in \mathbb{F}^n \}$$

נוכיח כי $\text{Nul}(A)$ תת מרחב של $\mathbb{F}^n$ ע"י להוכיח כי כל השלושה תנאים של תת מרחב מתקיימים עבור $\text{Nul}(A)$.

1) צריך להוכיח $\bar{0} \in \text{Nul}(A)$, כאשר $\bar{0}$ מטריצה האפס.

$$A \cdot \bar{0} = 0 \ ,$$

לכן $\bar{0} \in \text{Nul}(A)$.

2) נניח $u,\mathrm{v}\in \mathrm{Nul}(A)$. צריך להוכיח $u+\mathrm{v}\in \mathrm{Nul}(A)$.

$u\in \mathrm{Nul}(A) \Rightarrow A\cdot u=0$.

$\mathrm{v}\in \mathrm{Nul}(A) \Rightarrow A\cdot \mathrm{v}=0$.

לכן

$$A(u+\mathrm{v})=Au+A\mathrm{v}=0+0=0 \quad \Rightarrow \quad u+\mathrm{v}\in \mathrm{Nul}(A)$$

3) נקח $u\in \mathrm{Nul}(A)$ וסקלר $k\in \mathbb{F}$. צריך להוכיח $ku\in \mathrm{Nul}(A)$.

$u\in \mathrm{Nul}(A) \Rightarrow A\cdot u=0$. אז

$$A(ku)=k(Au)=k\cdot 0=0 \quad \Rightarrow \quad ku\in \mathrm{Nul}(A)\ .$$

מש"ל.

■