שיעור 2
טורים חיוביים וטורים כלליים

2.1 סדרות חשבוניות

הגדרה 2.1 סדרה חשבונית

(א) סדרה חשבונית היא סדרה של מספרים שבה ההפרש בין כל איבר לקודמו הוא גודל קבוע. את הפרש הסדרה מסמנים באות d.

(ב) באופן כללי אם נתונה סדרה חשבונית

$$a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \ldots$$

שהפרשה d, אזי מתקיים

$$a_2-a_1=d\,,\ a_3-a_2=d\,,\ a_4-a_3=d\,,$$

וכו'.

(ג) הנוסחה לאיבר הכללי בסדרה חשבונית היא

$$a_n=a_1+(n-1)d\ .$$

כלל 2.1 הסכום של סדרה חשבונית

נסמן את סכום n האיברים הראשונים בסדרה ב- S_n, כלומר

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\ .$$

הסכום של n האיברים הראשונים בסדרה חשבונית שהפרשה d ואיבר הראשונה שלה a_1 ניתן ע"י הנוסחה

$$S_n=\frac{n}{2}\left(a_1+a_n\right)$$

או שקול

$$S_n=\frac{n}{2}\left(2a_1+(n-1)d\right)\ .$$

2.2 סדרה הנדסית

הגדרה 2.2 סדרה הנדסית

(א) סדרה הנדסית היא סדרה של מספרים שבה המנה של כל איבר באיבר הקודם לו היא גודל קבוע. את מנת הסדרה מסמנים באות q.

(ב) באופן כללי אם נתונה סדרה הנדסית

$$a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \ldots$$

ומנה הסדרה היא q, אזי מתקיים

$$\frac{a_2}{a_1}=q\,,\ \frac{a_3}{a_2}=q\,,\ \frac{a_4}{a_3}=q\,,$$

וכו'.

(ג) בסדרה הנדסית $a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ldots$ שהמנה שלה q מתקיים

$$a_1\neq 0\,,\qquad q\neq 0\ .$$

(ד) כל איבר בסדרה הנדסית (פרט לראשון) מתקבל ע"י כפל של האיבר הקודם לו במנה q, כלומר מתקיים

$$a_1=qa_2\,,\quad a_3=qa_2\,,\quad a_4=qa_3\,,$$

וכו'.

(ה) הנוסחה לאיבר הכללי בסדרה הנדסית היא

$$a_n=q^{n-1}a_1\ .$$

כלל 2.2 התנהגות של סדרה הנדסית

ניתן לקבוע אם סדרה הנדסית היא סדרה הנדסית עולה, סדרה הנדסית יורדת או סדרה הנדסית שאינה עולה ואינה יורדת לפי הערך של המנה q ושל האיבר הראשון a_1.

(א) עבור $q>1$:

(1) אם $a_1>0$ אז הסדרה היא סדרה הנדסית עולה, למשל

$$3\,,\ 15\,,\ 45\,,\ldots$$

(2) אם $a_1<0$ אז הסדרה היא סדרה הנדסית יורדת, למשל

$$-3\,,\ -6\,,\ -12\,,\ldots$$

(ב) עבור $0<q<1$:

(1) אם $a_1>0$ אז הסדרה היא סדרה הנדסית יורדת, למשל

$$20\,,\ 10\,,\ 5\,,\ldots$$

(2) אם $a_1<0$ אז הסדרה היא סדרה הנדסית עולה, למשל

$$-36\,,\ -12\,,\ -4\,,\ldots$$

(ג) עבור $a<0$ הסדרה אינה עולה ואינה יורדת, למשל

$$5\,,\ -10\,,\ 20\,,\ -40\,,\ \ldots$$

(ד) עבור $q=1$: במקרה זה מתקבלת סדרה שכל איבריה שווים זה לזה, למשל

$$8\,,\ 8\,,\ 8\,,\ldots$$

סדרה זו גם נקרא סדרה קבועה.

כלל 2.3 הסכום של סדרה הנדסית

נסמן את סכום N האיברים הראשונים בסדרה ב- S_N, כלומר

$$S_N=a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\ldots+a_1q^{N-1}=\sum_{n=1}^{N}a_1q^{n-1}\ .$$

הסכום של n האיברים הראשונים בסדרה הנדסית שמנת הסדרה היא q ואיבר הראשונה שלה a_1 ניתן ע"י הנוסחה

$$S_N=\frac{a_1\left(1-q^N\right)}{1-q}\ .$$

כלל 2.4 הסכום אינסופי של סדרה הנדסית

הסכום אינסופי של טור הנדסי הוא

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_1q^{n-1}=\lim_{N\to\infty}\frac{a_1(1-q^N)}{1-q}=\begin{cases}\text{מתבדר} & |q|>1\\ \dfrac{a_1}{1-q} & |q|<1\end{cases}$$

דוגמה 2.1

חשבון את
$S_{10}=\sum\limits_{n=1}^{10}\frac{1}{2^n}$
ו $S_\infty=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

פתרון:
$q=\frac{1}{2}$ $a_1=\frac{1}{2}$

$$S_{10}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1023}{1024}\ .$$

$$S_\infty=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=1\ .$$

דוגמה 2.2

עבור אילו ערכים של הפרמטר p מתכנס הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{p^{2n}}$.

פתרון:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{p^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{p^2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \ .$$

כאשר $q = \frac{e}{p^2}$. טור זה מתכנס אם $1 > \left|\frac{e}{p^2}\right| = |q|$ ז"א $p^2 > e$. לכן הטור מתכנס אם

$$|p| > \sqrt{e} \ ,$$

כלומר הטור מתכנס עבור $p > \sqrt{e}$ או $p < -\sqrt{e}$.

2.3 טור טלסקופי

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\
&\quad = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&\quad = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&\quad = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} + \ldots + \cancel{\frac{1}{N}} - \frac{1}{N+1}\right) \\
&\quad = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) \\
&\quad = 1 \ .
\end{aligned}$$

2.4 טורים חיוביים

הגדרה 2.3 טור

ביטוי מצורה

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \ldots$$

נקרא **סכום אינסופי** או **טור**.

הגדרה 2.4 סכום החלקי

הסכום החלקי S_n של הטור יסומן ב- S_n ויוגדר כסכום של n האיברים הראשונים בטור:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ .$$

הגדרה 2.5 טור חיובי

הטור $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ נקרא **טור חיובי** אם לכל k מתקיים

$$a_k > 0 \ .$$

הגדרה 2.6 התכנסות

אם קיים גבול סופי $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, אומרים שהטור **מתכנס** וגבול זה נקרא סכום הטור ומסומן ב- S. כלומר

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \ .$$

במקרה כאשר גבול של S_n אינו קיים (או הוא אינסופי) אומרים שהטור **מתבדר**.

דוגמה 2.3

נתון הטור

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots$$

קבעו אם הטור מתכנס.

פתרון:

הטור מתבדר:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} \to \infty$$

דוגמה 2.4

הטור

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots$$

הוא טור הנדסי בעל מנה q. קבעו לאיזה ערכים של q הטור מתכנס.

פתרון:

לפי נוסחה 2.3,

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \ .$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q}$$

ולכן הטור מתכנס אם ורק אם $|q| < 1$ ובמקרה זה

$$S = \frac{1}{1-q} \ .$$

לרוב הטורים נוסחאות מדויקות אינן קיימות. במקרים אלה ניתן להעריך את הסכומים החלקיים בעזרת אינטגרל ע"י שימוש במשפט הבא.

2.5 תנאי הכרחי להתכנסות ותנאי מספיק להתבדרות

משפט 2.1 תנאי הכרחי להתכנסות טור

אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס, אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

הוכחה: שים לב שלכל n טבעי, $a_n = S_n - S_{n-1}$ ולפיו אם קיים $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ כך ש- S סופי, אז

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0 \ .$$

■

משפט 2.2 תנאי מספיק להתבדרות טור

אם $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ אז הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתבדר.

כלל 2.5

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

ולכן בבדיקה המתאימה אינם חשובים סימני איבריו של הטור.

דוגמה 2.5

קבעו אם הטורים הבאים מתכנסים ומתבדרים:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^2}$

פתרון:

1. $a_n = (-1)^n$

$\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$ לכן הטור מתבדר.

2. $a_n = n$

$\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$ לכן הטור מתבדר.

.3 $a_n=\dfrac{n^2}{1+n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=1\neq 0$ לכן הטור מתבדר.

2.6 משפטים בסיסיים על התכנסות טורים

משפט 2.3

.1 הורדת מספר סופי של איברים מהטור אינה משפיעה על התכנסותו או התבדרותו.

.2 אם $c\in\mathbb{R}$ מספר ממשי שונה מאפס, אז אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אז גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c\cdot a_n$ מתכנס.

אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר אז גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c\cdot a_n$ מתבדר. מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}c\cdot a_n=c\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ .$$

.3 אם הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ ו- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנסים, אז גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ מתכנס ומתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\ .$$

.4 אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס אז גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס (ואומרים כי הטור מתכנס בהחלט).

דוגמה 2.6

קבעו אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3\cdot 2^n+4\cdot 5^n}{10^n}$ מתכנס.

פתרון:

לפי משפטים 2 ו 3:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 2^n+4\cdot 5^n}{10^n}&=3\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{10^n}+4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{10^n}\\&=3\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n+4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\&=3\cdot\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}}+4\cdot 1\\&=3\cdot\frac{1}{4}+4\\&=\frac{19}{4}\ .\end{aligned}$$

דוגמה 2.7

קבעו אם הטור $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ מתכנס.

פתרון:

לפי משפטים 4: הטור $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס לכן גם $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ מתכנס.

2.7 מבחן האינטגרל להתכנסות

משפט 2.4 מבחן האינטגרל להתכנסות של טורים חיוביים

אם פונקציה חיובית $f(x)$ מונוטונית יורדת בתחום $x \geq 1$.

(1) אם $\displaystyle\int_1^{\infty} dx\, f(x)$ מתכנס אז $\displaystyle S = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ מתכנס, כך ש-

$$\int_1^{\infty} dx\, f(x) \leq S \leq \int_1^{\infty} dx\, f(x) + f(1)\ .$$

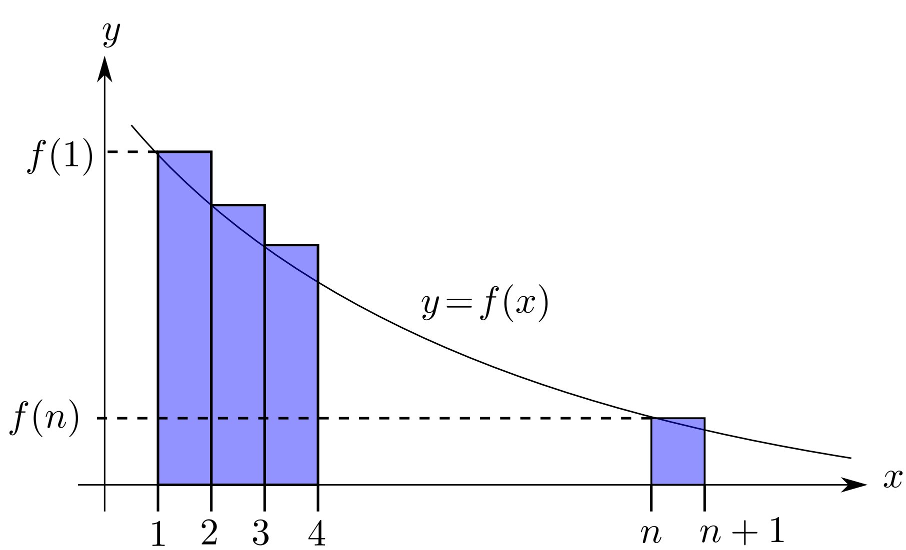
(2) אם $\displaystyle\int_1^{\infty} dx\, f(x)$ מתבדר אז $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ מתבדר.

במקרה זה התכנסות הטור $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ שקולה להתכנסות האינטגרל הלא אמיתי $\displaystyle\int_1^{\infty} dx\, f(x)$.

הוכחה: אם פונקציה חיובית $f(x)$ מונוטונית יורדת בתחום $x \geq 1$ אזי

$$\int_1^{n+1} f(x)\, dx \leq f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$$

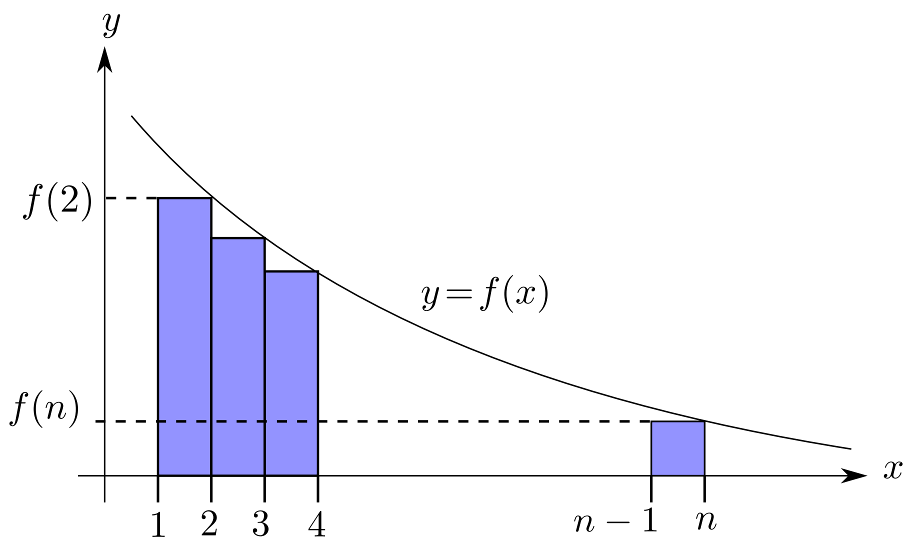
בגלל ש- $f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$ שווה לסכום של השטחים של המלבנים מעל הקו כמתואר בהתרשים.



מאותה מידה,

$$f(2)+f(3)+\ldots+f(n) \leq \int_1^n f(x)\,dx$$

בגלל ש- $f(2)+f(2)+\ldots+f(n)$ שווה לסכום של השטחים של המלבנים מתחת הקו כמתואר בהתרשים.



הפונקציה חיובית לכן

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n) \leq f(1)+\int_1^n f(x)\,dx \ .$$

בסה"כ נקבל את אי-השוויון

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n) \leq f(1)+\int_1^n f(x)\,dx \ .$$

נקח את הגבול $n\to\infty$ ונקבל

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq f(1)+\int_1^{\infty} f(x)\,dx \ .$$

■

דוגמה 2.8

קבעו אם הטור

$$S=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

מתכנס ואם כך מהו הערך של הטור.

פתרון:

יהי $f(k)=\dfrac{1}{k^2}$.

$$\int_1^{\infty} dx\, f(x)=\int_1^{\infty} dx\,\frac{1}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty}=1 \ .$$

לכן לפי מבחן האינטגרל במשפט 2.4 לעיל הטור מתכנס, ו-

$$1\leq S\leq 2 \ .$$

דוגמה 2.9

קבעו אם הטור
$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \ldots$$
מתכנס ואם כך מהו הערך של הטור.

פתרון:

יהי $f(k) = \frac{1}{k}$.
$$\int_1^{n+1} dx\, f(x) = \int_1^{n+1} dx\, \frac{1}{x} = [\ln x]_1^{n+1} = \ln(n+1).$$
האינטגרל אינו מתכנס כאשר $n \to \infty$ ולכן הטור גם לא מתכנס לפי מבחן האינטגרל במשפט 2.4 לעיל.

דוגמה 2.10

קבעו אם הטור
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$
מתכנס או לא.

פתרון:

יהי $f(k) = \frac{1}{k^p}$.
$$\int_1^{\infty} dx\, f(x) = \int_1^{\infty} dx\, \frac{1}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^{\infty}$$
האינטגרל מתכנס אם $p > 1$ ומתבדר אם $p \leq 1$. לכן לפי מבחן האינטגרל במשפט 2.4 לעיל, הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ מתכנס אם $p > 1$ ומתבדר אם $p \leq 1$.

דוגמה 2.11

קבעו אם הטור
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2^n}{3^n \cdot n^3}$$
מתכנס.

פתרון:

נרשום $f(x) = \frac{x^2 + 2^x}{3^x \cdot x^3}$. זו פונקציה חיובית ויורדת מונוטונית
$$\begin{aligned}
f'(x) =& \frac{(2x + \ln 2 \cdot 2^x) \cdot 3^x \cdot x^3 - (x^2 + 2^x)(\ln 3 \cdot 3^x \cdot x^3 + 3^x \cdot 3x^2)}{3^{2x} x^6} \\
=& \frac{(2x + \ln 2 \cdot 2^x) \cdot x - (x^2 + 2^x)(\ln 3 \cdot x + 3)}{3^x x^4} \\
=& \frac{-x^2 - (\ln 3 - \ln 2)x \cdot 2^x - 3 \cdot 2^x - \ln 3 \cdot 2^x \cdot x^3}{3^x x^4} \ .
\end{aligned}$$
בתחום $[1, \infty)$ $f' < 0$ לכן מונוטונית יורדת. לכן הטור מתכנס אם $\int_1^{\infty} f(x)$ מתכנס.

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{x^2+2^x}{3^x\cdot x^3}dx &= \int_1^\infty \frac{1}{3^x\cdot x}dx + \int_1^\infty \frac{2^x}{3^x\cdot x^3}dx \\
&< \int_1^\infty \left(\frac{1}{3}\right)^x dx + \int_1^\infty \left(\frac{2}{3}\right)^x dx \\
&= \left[\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\right]_1^\infty \\
&= \left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\right]
\end{aligned}$$

לכן הטור מתכנס.

דוגמה 2.12

קבעו אם הטור

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\cdot\ln n}$$

מתכנס.

פתרון:

נרשום $f(x)=\frac{1}{x\cdot\ln x}$. זו פונקציה חיובית ויורדת מונוטונית בתחום $[2,\infty)$. לכן הטור מתכנס רק אם האינטגרל $\int_2^\infty f(x)\,dx$ מתכנס.

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{1}{x\cdot\ln x}dx &= \lim_{R\to\infty}\int_2^R \frac{1}{x\cdot\ln x}dx \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_{e^2}^{e^R} \frac{1}{t}dt \\
&= \lim_{R\to\infty}\left[\ln t\right]_{e^2}^{e^R} \\
&= \lim_{R\to\infty}\left[R-2\right] \\
&=\infty\ .
\end{aligned}$$

לכן הטור מתבדר.

2.8 מבחן השוואה

משפט 2.5 מבחן השוואה

יהיו a_n, b_n סדרות חיוביות כך ש- $a_n\leq b_n$ לכל n החל ממספר מסוים k. אזי

1. אם $\sum_{n=1}^\infty b_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס.

2. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

דוגמה 2.13

קבעו אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ מתכנס.

פתרון:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

נבדוק התכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. האינטגרל $\frac{1}{2 \cdot \ln 2} = \int_1^{\infty} \frac{1}{2^x} dx$ מתכנס, לכן לפי מבחן האינטגרל הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ מתכנס, ולכן לפי מבחן השוואה הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ מתכנס.

דוגמה 2.14

קבעו אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ מתכנס.

פתרון:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

לכן לפי מבחן השוואה הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ מתבדר.

דוגמה 2.15

עבור אילו ערכים שלמים של הפרמטר p הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^p}{\ln(n!)}$ מתכנס.

פתרון:

$2^n < n! < n^n$ לכל $n > 3$. לכן

$$\frac{n^p}{n \cdot \ln n} < \frac{n^p}{\ln(n!)} < \frac{n^p}{n \cdot \ln 2} \quad \Leftarrow \quad n \cdot \ln 2 < \ln(n!) < n \cdot \ln n$$

$$\frac{1}{n^{1-p} \ln n} < \frac{n^p}{\ln(n!)} < \frac{1}{n^{1-p} \ln 2} \quad \Leftarrow \quad \frac{n^{p-1}}{\ln n} < \frac{n^p}{\ln(n!)} < \frac{n^{p-1}}{\ln 2} \quad \Leftarrow$$

מכאן אם $1 - p > 1$ (כלומר $p < 0$) הטור מתכנס.

אם $1 - p \leq 1$ (כלומר $p \geq 0$) הטור מתבדר.

משפט 2.6 מבחן השוואה הגבולי

יהיו a_n, b_n סדרות חיוביות כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c\neq 0$ אז הטורים
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.

דוגמה 2.16

קבעו אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(5^{-n}\right)$ מתכנס.

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(5^{-n})}{5^{-n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

לכן $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(5^{-n}\right)$ מתכנס יחד עם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(5^{-n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

דוגמה 2.17

קבעו אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ מתכנס.

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\pi}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

לכן $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ מתכנס או מתבדר יחד עם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\pi}{n}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$$

מתכנס לכן גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ מתכנס.

2.9 שארית הטור

הגדרה 2.7 שארית הטור

הטור

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}a_n$$

נקרא n **-שארית** (או "זנב") של הטור $\sum_{k=1}^{n} a_n$.

אם טור השארית מתכנס אז נסמן את סכומו ב- R_n.

אם טור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אזי

$$R_n = S - S_n$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \ .$$

2.10 מבחן דלמבר ומבחן קושי

משפט 2.7 מבחן דלמבר (d'Alembert)

נתון הטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. אם קיים הגבול

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

אז

1. אם $q < 1$ הטור מתכנס.
2. אם $q > 1$ הטור מתבדר.
3. אם $q = 1$ המבחן דלמבר אינו נותן תשובה על התכנסות הטור.

משפט 2.8 מבחן קושי (Cauchy)

נתון הטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. אם קיים הגבול

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \equiv \lim_{n\to\infty} {a_n}^{1/n}$$

(כאשר הסימונים $\sqrt[n]{a_n} \equiv {a_n}^{1/n}$ שקולים ואומרים השורש ה-n של a_n)
אז

1. אם $q < 1$ הטור מתכנס.
2. אם $q > 1$ הטור מתבדר.
3. אם $q = 1$ המבחן קושי אינו נותן תשובה על התכנסות הטור.

דוגמה 2.18 מבחן דלמבר

קבעו אם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

מתכנס.

פתרון:
שים לב האיבר ה- n בסדרה הוא

$$a_n = \frac{n}{2^n}$$

נשתמש במבחן דלמבר:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} < 1 \ .
\end{aligned}$$

לכן הטור מתכנס.
נשתמש במבחן קושי:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \\
&= \frac{1}{2} < 1 \ .
\end{aligned}$$

דוגמה 2.19 מבחן קושי

קבעו אם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$$

מתכנס.

פתרון:
שים לב האיבר ה- n בסדרה הוא

$$a_n = \frac{1}{n^n}$$

נשתמש במבחן קושי:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{-n}} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}\\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^n}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\\ &=0 < 1\end{aligned}$$

.

לכן הטור מתכנס.

2.11 גבולות שימושיים

1 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

2 אם $c > 0$ אז $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

3 אם $a_k > 0$ אז

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_0 + a_1 n + \ldots + a_k n^k} = 1$$

4 אם $1 \le f(n) \le n^p$ כאשר $p > 0$ אז

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f(n)} = 1$$

דוגמה 2.20

קבעו אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ מתכנס.

פתרון:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}}\\ &= \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty} 3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty} 3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}}\\ &=\frac{3}{e} > 1\ .\end{aligned}$$

ולכן הטור מתבדר לפי מבחן דלמבר.

2.12 טורים כללים

הגדרה 2.8 טור כללי

טור כללי הוא טור מצורה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ אשר כל איברו a_n לא בהכרח חיובי, אלא ישנם אינסוף איברים חיוביים ואינסוף איברים שליליים. לדוגמא הטור

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

הוא סוג של טור כללי הנקרא **טור מחליף סימן** .

הגדרה 2.9 טור מחליף סימן

טור מצורה

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

שבו איברים מחליפים סימן לסירוגין נקרא **טור מחליף סימן**.

משפט 2.9 התכנסות של טור כללי

1. אם $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ מתכנס אז גם $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס, ואומרים שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **מתכנס בהחלט** (absolutely convergent).
2. אם $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ מתבדר אבל $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ יש להמשיך לחקור את הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ע"י מבחן לייבניץ (Leibinz).
3. אם $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ מתבדר אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אומרים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **מתכנס בתנאי** (conditionally convergent).

דוגמה 2.21

קבעו אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ מתכנס.

פתרון:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס לכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ מתכנס בהחלט.

דוגמה 2.22

קבעו אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ מתכנס.

פתרון:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right|$ מתבדר (ראו דוגמה 2.9 לעיל) אבל $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ מתכנס (ראו דוגמה למטה). לכן $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ מתכנס בתנאי.

דוגמה 2.23

קבעו אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^3 n}{n!}$ מתכנס.

פתרון:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos^3 n}{n!}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

הטור באגף הימין מתכנס (ראו דוגמה 2.8 לעיל) לכן לפי מבחן השוואה $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\cos^3 n}{n!}\right|$ מתכנס ולכן $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^3 n}{n!}$ מתכנס בהחלט.

2.13 מבחן לייבניץ (Leibniz)

משפט 2.10 מבחן לייבניץ (Leibniz)

מבחן לייבניץ קשור לטור מחליף סימן.

נתון טור מחליף סימן מצורה

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \ , \qquad a_n>0 \ .$$

אם הסדרה מקיימת את התנאים הבאים:

1 $a_n>0$ לכל n.

2 $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת ($a_{n+1}\leq a_n$ לכל n)

3 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

אז הטור מתכנס ומתקיים

$$0<S<a_1 \ ,$$

ו-

$$|S-S_N|<a_{N+1}-1 \ .$$

דוגמה 2.24

קבעו אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ מתבדר או מתכנס.

פתרון:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n\ ,\qquad a_n=\frac{1}{n}\ .$$

1) $a_n=\frac{1}{n}>0$ לכל n.

2) $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}=a_n$ לכל n, כלומר $a_n\downarrow$ מונוטונית.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

לכן הטור מתכנס.

שימו לב הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n}\right|$ מתבדר (עין דוגמה 2.9 לעיל) לכן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ מתכנס בתנאי.

דוגמה 2.25

קבעו אם הטור $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n\cdot\cos(n\pi)}{n^2+\sqrt{n}}$ מתבדר או מתכנס.

פתרון:

$$\cos(n\pi)=(-1)^n$$

לכן ניתן לרשום את הטור בצורה

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\cdot\cos(n\pi)}{n^2+\sqrt{n}}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+\sqrt{n}}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n\ ,\qquad a_n=\frac{n}{n^2+\sqrt{n}}\ .$$

1) $a_n=\frac{n}{n^2+\sqrt{n}}>0$ לכל n.

2) כדי לבדוק מונוטוניות נגדיר פונקציה

$$f(x)=\frac{x}{x^2+\sqrt{x}}\ .$$

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{(x^2+\sqrt{x})-x\cdot\left(2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x^2+\sqrt{x})^2}\\=&\frac{-x^2+\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(x^2+\sqrt{x})^2}\end{aligned}$$

$$f'(x)=0\quad\rightsquigarrow\quad x^2=\frac{1}{2}\sqrt{x}\quad\rightsquigarrow\quad x^4=\frac{1}{4}x\quad\rightsquigarrow\quad x^3=\frac{1}{4}\quad\rightsquigarrow\quad x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\ .$$

x	$x < 4^{-1/3}$	$x > 4^{-1/3}$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

כלומר, $f \downarrow$ עבור $x \geq 2$.

לכל $n \geq 2$, כלומר $a_n \downarrow$ מונוטונית.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 0$.

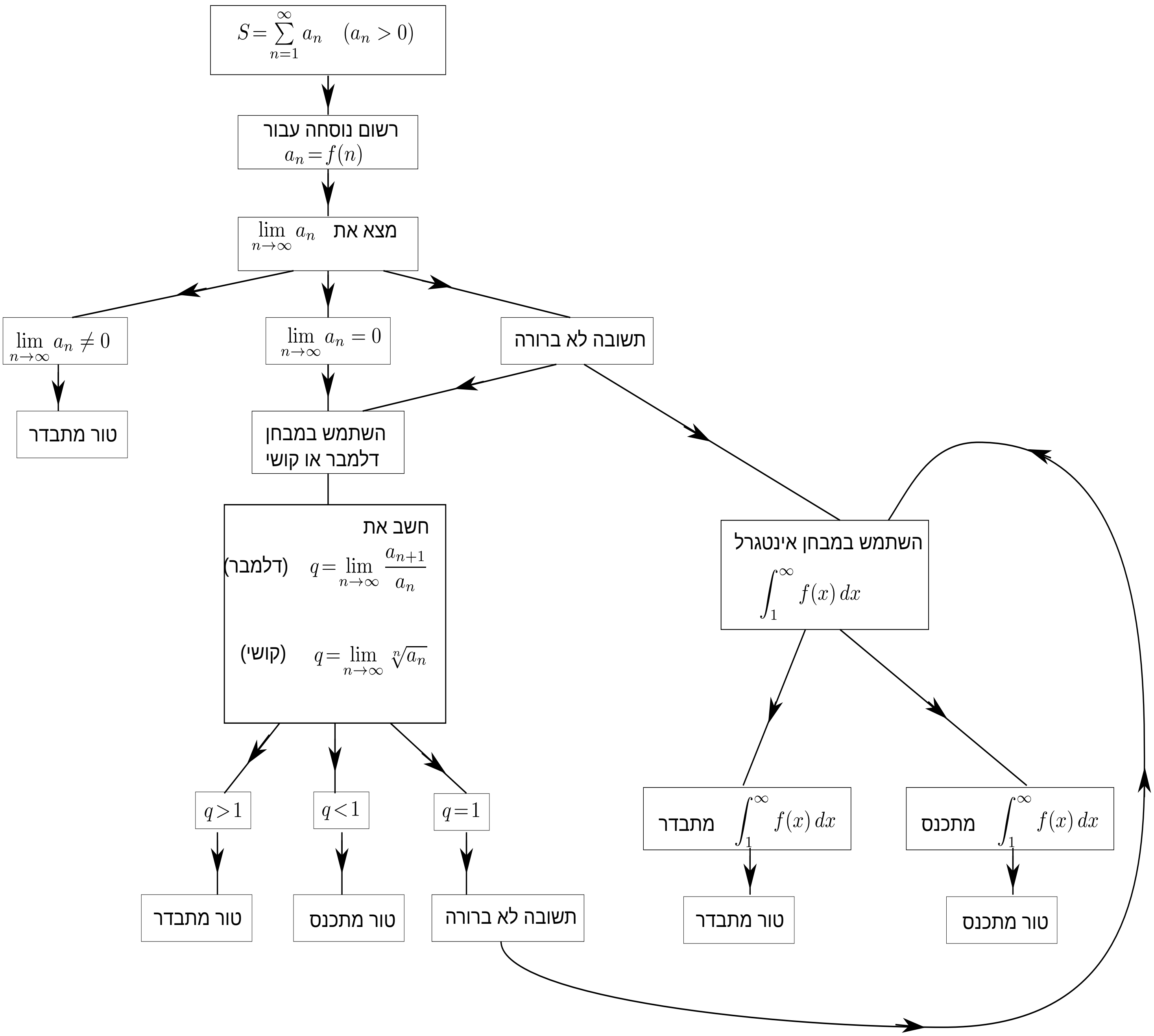
לכן הטור מתכנס.

שימו לב הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2+\sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{n\cdot\cos(n\pi)}{n^2+\sqrt{n}} \right|$ מתבדר:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2+\sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{\sqrt{n}}} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$$

לכן הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\cdot\cos(n\pi)}{n^2+\sqrt{n}}$ מתכנס בתנאי.

2.14 כיצד בודקים התכנסות טור חיובי



2.15 כיצד בודקים התכנסות טור כללי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

כיצד בודקים התכנסות טור חיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

1. אם $\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

2. אם $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$ בודקים את התכנסות של הטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ ע"י השיטה המתואר בתרשים לעיל.

3. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט.

4. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתבדר אז נשארת האפשרות שהטור הנתון $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בתנאי .

5. כדי לבדוק את התכנסות הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ במקרה האחרון ניתן להשתמש בשיטה ליבנייץ אשר טוען

אם סימנים איברי הטור מתחלפים והסדרה $\{|a_n|\}$ מונוטונית יורדת ושואפת לאפס אזי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

2.16 תרגילים

דוגמה 2.26

רשמו את הנוסחה לחישוב של S_n עבור הטור הנתון, בדקו את התכנסות הטור על סמך ההגדרה ומצאו את סכום הטור במקרה שהוא מתכנס.

א) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)$

ב) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(0.1)^n$

ג) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+3^n}{5^n}$

ד) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

ה) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

פתרון:

א) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)=2\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}k-\sum\limits_{k=1}^{n}1$

שים לב,

$$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n$$

הוא סכום של סדרה חשבונית עם $a_1=1$ ו- $d=1$ (עיין הגדרה 2.1). לכן לפי כלל 2.1,

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

ולכן

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n(n+1)-n=n^2$$

ואז קל לראות כי

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n\to\infty$$

לא מתכנס. ■

ב)

$$S_n\sum_{k=1}^{n}(0.1)^k=0.1+0.1^2+0.1^3+\cdots+(0.1)^n$$

הוא טור הנדסי אשר מנת הסדרה $q=0.1$ ואיבר הראשון הוא $a_1=0.1$ (עין הגדרה 2.2 לעיל). הסכום של n איברים הראשונים הוא, לפי הנוסחא בכלל 2.3,

$$S_n=\frac{0.1(1-0.1^n)}{1-0.1}=\frac{0.1(1-0.1^n)}{0.9}=\frac{1-0.1^n}{9}\ .$$

הטור מתכנס:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{9}\ .$$

ג)

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k+3^k}{5^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{5^k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k}{5^k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{5}\right)^k+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^k=\sum_{k=1}^{n}(0.4)^k+\sum_{k=1}^{n}(0.6)^k$$

אז קבלנו שני סכומים של סדרה הנדסית. עבור הראשון, $a_1=0.4$, $q=0.4$ כך שהסכום החלקי (סכום של n איברים הראשונים) לפי 2.3 הוא

$$\frac{0.4(1-0.4^n)}{1-0.4}=\frac{2(1-0.4^n)}{3}$$

ועבור השני, $a_1=0.6$, $q=0.6$ כך שהסכום החלקי ולפי משפט 2.3 הוא

$$\frac{0.6(1-0.6^n)}{1-0.6}=\frac{3(1-0.6^n)}{2}$$

אז בסך הכל

$$S_n=\frac{2(1-0.4^n)}{3}+\frac{3(1-0.6^n)}{2}\ .$$

הטור מתכנס:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{13}{6}\ .$$

ד) הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ לא חשבוני ולא הנדסי אבל הוא טור חיובי וגם מונוטוני יורד, לפיו ניתן לבדוק התכנסותו ע"י מבחן האינטגרל (עין משפט 2.4). הפונקציה של האיבר ה- n הוא $a_n=f(n)=$

$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. נבדוק אם האינטגרל המתאים מתכנס:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty f(x)\,dx &= \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,dx \\
&= \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\,dx \\
&= \int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}\,dx \\
&= \int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x}\,dx \\
&= \int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{1}\,dx \\
&= \int_1^\infty \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\,dx \\
&= \left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{2x^{3/2}}{3}\right]_1^\infty \to \infty
\end{aligned}$$

בגלל שהאינטגרל לא מתכנס אז גם הטור לא מתכנס.

ה) כמו הסעיף הקודם, הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ לא חשבוני ולא הנדסי אבל הוא טור חיובי וגם מונוטוני יורד, לפיו ניתן לבדוק התכנסותו ע"י מבחן האינטגרל (עין משפט 2.4). הפונקציה של האיבר ה- n הוא $a_n = f(n) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. נבדוק אם האינטגרל המתאים מתכנס:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty f(x)\,dx &= \int_1^\infty \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\,dx \\
&= \int_1^\infty \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\,dx \\
&= \int_1^\infty \left(\ln(x+1) - \ln(x)\right)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right]_1^\infty \\
&= \left[\frac{-1}{x(x+1)}\right]_1^\infty \to \infty
\end{aligned}$$

בגלל שהאינטגרל לא מתכנס אז גם הטור לא מתכנס.

דוגמה 2.27

חשבו את הערך את S_n בעזרת האינטגרל ובדקו את התכנסות הטור על סמך הערכה זו

א) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

ב) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

ג) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

ד) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

ה) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

פתרון:

א) הפונקציה עבור איבר ה- n הינה

$$a_n = \frac{1}{2n-1} \equiv f(n)$$

נבדוק את האינטגרל המתאים:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{2x-1}\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}\ln(2x-1)\right]_1^{\infty} \to \infty$$

ולכן לפי משפט 2.4 הטור מתבדר. ■

ב) הפונקציה עבור איבר ה- n הינה

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \equiv f(n)$$

נבדוק את האינטגרל המתאים:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$= \left[2\sqrt{x}\right]_1^{\infty} \to \infty$$

ולכן לפי משפט 2.4 הטור מתבדר. ■

ג) הפונקציה עבור איבר ה- n הינה

$$a_n = \frac{1}{n^2} \equiv f(n)$$

נבדוק את האינטגרל המתאים:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty}$$
$$=1$$

ולכן לפי משפט 2.4 הטור מתכנס כך ש-

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \int_1^{\infty} f(x)\,dx + f(1) \quad \Rightarrow \quad 1 \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le 2$$

■

החישוב של הערך המדויק של הטור לא חלק של השאלה וגם לא בסילבוס, אבל למי שמעוניין החישוב נמצא בסוף הפרק הזה, לפיו

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ .$$

ד) הפונקציה עבור איבר ה- n הינה

$$a_n = \frac{n}{2^n} \equiv f(n)$$

נבדוק את האינטגרל המתאים:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} f(x)\,dx &= \int_1^{\infty} \frac{x}{2^x}\,dx \\ &= \left[-\frac{2^{-x}(x\ln(2)+1)}{\ln^2(2)}\right]_1^{\infty} \\ &= \frac{1+\ln(2)}{2\ln^2(2)}\end{aligned}$$

ולכן לפי משפט 2.4 הטור מתכנס כך ש-

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \le \int_1^{\infty} f(x)\,dx + f(1) \quad \Rightarrow \quad 1.76203 \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \le 2.26203$$

■

החישוב של הערך המדויק של הטור לא חלק של השאלה ולא בסילבוס, אבל למי שמעוניין:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^n}\right)\right)\Bigg|_{z=2} \\ &= -z\frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z^n}\right)\Bigg|_{z=2} \\ &= -z\frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z^n}\right)\Bigg|_{z=2} \\ &= -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)\Bigg|_{z=2} \\ &= -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-1}\right)\Bigg|_{z=2} \\ &= -z\left(\frac{-1}{(z-1)^2}\right)\Bigg|_{z=2} \\ &= \frac{z}{(z-1)^2}\Bigg|_{z=2} \\ &= 2\end{aligned}$$

ה) הפונקציה עבור איבר ה- n הינה

$$a_n = \frac{1}{n^2} \equiv f(n)$$

נבדוק את האינטגרל המתאים:

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty$$
$$=1$$

ולכן לפי משפט 2.4 הטור מתכנס כך ש-

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \le \int_1^\infty f(x)\,dx + f(1) \quad \Rightarrow \quad 1 \le \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \le 2$$

■

החישוב של הערך המדויק של הטור לא חלק של השאלה וגם לא בסילבוס, אבל למי שמעוניין החישוב נמצא בסוף הפרק הזה, לפיו

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

ו) הפונקציה עבור איבר ה- n הינה

$$a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \equiv f(n)$$

נבדוק את האינטגרל המתאים:

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$$
$$= \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$$
$$= \left[-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_0^\infty$$
$$=\frac{2}{3}\ .$$

ולכן לפי משפט 2.4 הטור מתכנס כך ש-

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\sqrt{n}} \le \int_1^\infty f(x)\,dx + f(1) \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3} \le \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\sqrt{n}} \le 1$$