אלגברה לינארית סמסטר סתו 2022-23
עבודה עצמית 5

שאלות

שאלה 1 לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבע האם היא תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

א) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x=y=-z\}$

ב) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x=3y\}$

ג) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | y=z^2\}$

ד) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+y-z=0\}$

ה) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+y\geq 0\}$

ו) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x=0\}$

ז) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+y=-z\}$

ח) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x\geq 0, y\geq 0\}$

ט) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+y-z=1\}$

י) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2=0\}$

שאלה 2 לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבע האם היא תת מרחב של $\mathbb{R}_2[x]$ (מרחב הפולינומים ממעלה עד 2, סימונים נוספים למרחב $P_2(x)$,$P_2(\mathbb{R})$).

א) $W=\{ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x] | b=0\}$

ב) $W=\{ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x] | a+b+c=0\}$

ג) $W=\{ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x] | a>b>c\}$

ד) $W=\{ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x] | a=b=c\}$

ה) $W=\{p\in\mathbb{R}_2[x]|p(1)=0\}$

ו) $W=\{p\in\mathbb{R}_2[x]|p(1)=1\}$

שאלה 3 לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבע האם היא תת מרחב של $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

א) $W=\left\{A\in M_2(\mathbb{R})|A=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix},a,b\in\mathbb{R}\right\}$

ב) $W=\left\{A\in M_2(\mathbb{R})|A=\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix},a,bmc\in\mathbb{R},c\neq 0\right\}$

ג) $W=\{A\in M_2(\mathbb{R})||A|=0\}$

ד) $W=\{A\in M_2(\mathbb{R})||A|\neq 0\}$

ה) $W=\left\{A\in M_2(\mathbb{R})|A+B=0,B=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}\right\}$

שאלה 4 לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבע האם היא תת מרחב של $\{f|f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}\}$.

א) $W=\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}|f(1)=0\}$

ב) $W=\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}|f(1)+f(2)=0\}$

ג) $W=\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}|\forall x\in\mathbb{R},f(x)=f(-x)\}$

ד) $W=\left\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}|\forall x\in\mathbb{R},f(x^2)=(f(x))^2\right\}$

שאלה 5 יהי V מרחב וקטורי ויהיו W_1, W_2 תת מרחבים של V.

א) הוכח:

$$W_1\cap W_2=\{x\in V|x\in W_1\wedge x\in W_2\}$$

הינו תת-מרחב של V.

ב) הוכח:

$$W_1+W_2=\{w_1+w_2:w_1\in W_1\ ,\ w_2\in W_2\}$$

הינו תת-מרחב של V.

ג) הפרך:

$$W_1\cup W_2=\{x\in V|x\in W_1\vee x\in W_2\}$$

הינו תת-מרחב של V.

שאלה 6 לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבע האם היא תת מרחב של $\mathbb{R}[x]$ (מרחב הפולינומים עם מקדמים ממשיים):

א) $W=\{p\in\mathbb{R}[x] | \deg(p)=3\}$

ב) $W=\{p\in\mathbb{R}[x] | \deg(p) \text{ even}\}\cup\{0\}$

ג) $W=\{p\in\mathbb{R}[x] | p(0)\in\mathbb{Z}\}$

פתרונות

שאלה 1

א) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = y = -z\}$

דוגמה: $(1,1,-1) \in W$.

① הוקטור האפס $(0,0,0) = \mathbb{0}$ מקיים את התנאי $x = y = -z$ לכן $\mathbb{0} \in W$.

② נניח ש- $u_1 = (x_1,y_1,z_1) \in W$ וגם $u_2 = (x_2,y_2,z_2) \in W$. לפי זה u_1, u_2 מקיימים את התנאי

(*) $$x_1 = y_1 = -z_1 \ , \qquad x_2 = y_2 = -z_2 \ .$$

נקח הוקטור $u_1 + u_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$. נובע מ- **(*)** כי

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = -z_1 - z_2 = -(z_1 + z_2) \ .$$

כלומר $u_1 + u_2$ מקיים את התנאי של W, ולכן $u_1 + u_2 \in W$.

③ נניח $u = (x,y,z) \in W$ ו- k סקלר. כיוון ש- $u \in W$ אז

(#) $$x = y = -z \ .$$

נקח הוקטור $ku = (kx,ky,kz)$. מ- **(#)** נובע כי $kx = ky = k(-z) = -(kz)$, כלומר ku מקיים את התנאי ולכן $ku \in W$.

הוכחנו ש- W תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.
■

ב) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 3y\}$

דוגמה: $(3,1,2) \in W$.

① הוקטור האפס $(0,0,0) = \mathbb{0}$ מקיים את התנאי $x = 3y$ לכן $\mathbb{0} \in W$.

② נניח ש- $u_1 = (x_1,y_1,z_1) \in W$ וגם $u_2 = (x_2,y_2,z_2) \in W$. אז

(*) $$x_1 = 3y_1 \ , \qquad x_2 = 3y_2 \ .$$

מתקיים. נקח הוקטור $u_1+u_2=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$. מ- **(*)** נובע כי

$$x_1+x_2=3y_1+3y_2=3(y_1+y_2)\ .$$

ז"א u_1+u_2 מקיים את התנאי של W, ולפיו $u_1+u_2\in W$.

③ נניח $u=(x,y,z)\in W$ ו- k סקלר. כיוון ש- $u\in W$ אז

(#) $$x=3y\ .$$

נקח הוקטור $ku=(kx,ky,kz)$. מ- **(#)** נקבל $k\cdot x=k\cdot(3y)=3\cdot(ky)$, ולפי זה ku מקיים את התנאי, ז"א $ku\in W$.

הוכחנו ש- W תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

■

ג) $\underline{W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|y=z^2\}}$

לדוגמה: $u=(1,9,3)$.

W אינו תת-מרחב. דוגמה נגדית:

$u=(0,2,4)\in W$ כי $2^2=4$ אבל $3u=(0,6,12)$ ו- $6^2\neq 12$. לכן $u\notin W$.

■

ד) $\underline{W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x+y-z=0\}}$

לדוגמה: $u=(1,1,2)\in W$.

① הוקטור האפס $\mathbb{0}=(0,0,0)$ מקיים את התנאי $x+y-z=0$ לכן $\mathbb{0}\in W$.

② נניח ש- $u_1=(x_1,y_1,z_1)\in W$ וגם $u_2=(x_2,y_2,z_2)\in W$. אז

(*) $$x_1+y_1-z_1=0\ ,\qquad x_2+y_2-z_2=0\ .$$

מתקיים. נקח הוקטור $u_1+u_2=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$. מ- **(*)**,

$$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-(z_1+z_2)=0$$

ולכן u_1+u_2 מקיים את התנאי של W, ז"א $u_1+u_2\in W$.

③ נניח $u=(x,y,z)\in W$ ו- k סקלר. כיוון ש- $u\in W$ אז

(#) $$x+y-z=0\ .$$

נקח הוקטור $ku=(kx,ky,kz)$. כתוצאה של (#) נקבל $= \quad \Rightarrow \quad k\cdot(x+y-z)=0$
$k\cdot x+k\cdot y-k\cdot z=0$, לכן ku מקיים את התנאי, ז"א $ku\in W$.

הוכחנו ש- W תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.
■

ה) $\underline{W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+y\geq 0\}}$

לדוגמה: $(1,1,0)\in W$.

W אינו תת-מרחב. דוגמה נגדית:

$u=(1,2,3)\in W$ כי $1+2+3\geq 0$. נבחר $k=-1$. אז $k\cdot u=(-1,-2,-3)\notin W$ כי $-1-2<0$.
■

ו) $\underline{W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x=0\}}$

לדוגמה: $(0,1,2)\in W$.

1. הוקטור האפס $\mathbb{0}=(0,0,0)$ מקיים את התנאי $x=0$ לכן $\mathbb{0}\in W$.

2. נניח ש- $u_1=(x_1,y_1,z_1)\in W$ וגם $u_2=(x_2,y_2,z_2)\in W$. אז

$$x_1=0\ ,\qquad x_2=0\ . \tag{*}$$

מתקיים. נקח הוקטור $u_1+u_2=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$. מ- (*) נובע כי $(x_1+x_2)=0$. לכן u_1+u_2 מקיים את התנאי של W, ז"א $u_1+u_2\in W$.

3. נניח $u=(x,y,z)\in W$ ו- k סקלר. כיוון ש- $u\in W$ אז

$$x=0\ . \tag{\#}$$

נקח הוקטור $ku=(kx,ky,kz)$. מ- (#) נקבל $kx=0 \quad \Rightarrow \quad k\cdot(x)=0$, אזי ku מקיים את התנאי, ז"א $ku\in W$.

הוכחנו ש- W תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.
■

ז) $\underline{W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+y=-z\}}$

1

2

3

■

ח) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \geq 0, y \geq 0\}$

לדוגמה: $(1, 1, 1) \in W$.

W אינו תת-מרחב. דוגמה נגדית:

$$u = (1, 1, 1) \in W$$

אבל

$$-1 \cdot u = (-1, -1, -1) \notin W \ .$$

■

ט) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 1\}$

דוגמה: $(1, 1, 1) \in W$.

אינו תת-מרחב בגלל ש- $W \notin (0, 0, 0) = \mathbb{0}$ כי $1 \neq 0 - 0 + 0$. לכן W לא תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.
■

י) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$

הוקטור היחידי שמקיים את התנאי הוא וקטור האפס: $(0, 0, 0) = \mathbb{0}$, לכן $W = \{\mathbb{0}\}$. לגבי התנאים האחרים, $\mathbb{0} + \mathbb{0} = \mathbb{0} \in W$,$\mathbb{0} \in W$ ו- $k \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0} \in W$. לכן W תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.
■

שאלה 2

א) דוגמה:

$$x^2 + 1 \in W.$$

1 $\mathbb{0} = 0x^2 + 0x + 0 \in W$.

2 נניח $u_1 = a_1x^2 + c_1 \in W$, $u_2 = a_2x^2 + c_2 \in W$. אזי

$$u_1 + u_2 = (a_1 + a_2)x^2 + (c_1 + c_2) \in W$$

3 נקח $u = ax^2 + c \in W$. אז לכל $k \in \mathbb{R}$

$$k \cdot u = (ka_1)x^2 + kc \in W \ .$$

מסקנה: W תת-מרחב של $P_2(\mathbb{R})$.

■

ב) דוגמה:

$$x^2 + x - 2 \in W.$$

1 $\mathbb{0} = 0x^2 + 0x + 0 \in W$.

2 נניח $u_1 = a_1x^2 + b_1xc_1 \in W$, $u_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2 \in W$.
אז $a_1 + b_1 + c_1 = 0$ ו- $a_2 + b_2 + c_2 = 0$ מתקיימים.
נקח הוקטור $u_1 + u_2 = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$.
שים לב כי $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) = 0$.
לכן $u_1 + u_2 \in W$.

3 נקח $u = ax^2 + bx + c \in W$. אז לכל $k \in \mathbb{R}$

$$k \cdot u = (ka)x^2 + (kb)x + (kc) \in W \ .$$

מסקנה: W תת-מרחב של $P_2(\mathbb{R})$.

■

שאלה 3

א)

ב)

ג)

ד)

ה)

ו)

ז)

ח)

ט)

י)

יא)

שאלה 4

א)

ב)

ג)

ד)

ה)

ו)

ז)

ח)

ט)

י)

יא)

שאלה 5

א) $\underline{W_1 \cap W_2 = \{x \in V | x \in W_1 \land x \in W_2\}}$

1 W_1 תת-מרחב, לכן $\mathbb{0} \in W_1$.
W_2 תת-מרחב, לכן $\mathbb{0} \in W_2$.
$\Leftarrow$ $\mathbb{0} \in W_1 \cap W_2$.

(2) נקח $u_1,u_2\in W_1\cap W_2$.
$\Leftarrow$ $u_1\in W_1$, $u_1\in W_2$, וגם $u_2\in W_1$,$u_2\in W_1$.
W_1 ת"מ, לכן $u_1+u_2\in W_1$.
W_2 ת"מ, לכן $u_1+u_2\in W_2$.
לכן $u_1+u_2\in W_1\cap W_2$.

(3) נניח $u\in W_1\cap W_2$, $k\in\mathbb{R}$.
אז $u\in W_1$, $u\in W_2$.
W_1 ת"מ $\Leftarrow$ $ku\in W_1$.
W_2 ת"מ $\Leftarrow$ $ku\in W_2$.
$\Leftarrow$ $ku\in W_1\cap W_2$.

מסקנה: $W_1\cap W_2$ תת-מרחב של V.
■

ב) $\underline{W_1+W_2=\{w_1+w_2 : w_1\in W_1\ ,\ w_2\in W_2\}}$

(1) W_1 תת-מרחב לכן $\mathbb{0}\in W_1$, ו- W_2 תת-מרחב לכן $\mathbb{0}\in W_2$.

שים לב, $\mathbb{0}+\mathbb{0}=\mathbb{0}$ אז $\mathbb{0}\in W_1+W_2$.

(2) נקח $u,v\in W_1+W_2$.
אז קיימים $w_1\in W_1$ ו- $w_2\in W_2$ כך ש- $u=w_1+w_2$.
באופן דומה קיימים $w_1'\in W_1$ ו- $w_2'\in W_2$ כך ש- $v=w_1'+w_2'$.

W_1 ת"מ, לכן $w_1+w_1'\in W_1$, וגם W_2 ת"מ, לכן $w_2+w_2'\in W_2$.

סך הכל

$$u+v=(w_1+w_2)+(w_1'+w_2')=(w_1+w_1')+(w_2+w_2')\ ,$$

וכיוון ש- $w_1+w_1'\in W_1$ ו- $w_2+w_2'\in W_2$ אז

$$u+v\in W_1+W_2\ .$$

(3) נניח כי $u\in W_1+W_2$.
אז קיימים $w_1\in W_1$ ו- $w_2\in W_2$ כך ש- $u=w_1+w_2$. אז לכל $k\in\mathbb{R}$,

$$ku=k(w_1+w_2)=kw_1+kw_2\ .$$

W_1 ת"מ, לכן $kw_1 \in W_1$, וגם W_2 ת"מ, לכן $kw_2 \in W_2$.
לכן $ku \in W_1 + W_2$.

מסקנה: $W_1 + W_2$ תת-מרחב של V.
■

ג) $\underline{W_1 \cup W_2 = \{x \in V | x \in W_1 \vee x \in W_2\}}$

דוגמה נגדית:

$$W_1 = \{(x,y)|y=x\} \ , \qquad W_2 = \{(x,y)|y=2x\}$$

W_1, W_2 תת-מרחבים של $\mathbb{R}^2$.

$u = (1,1) \in W_1$ אז $u = W_1 \cup W_2$.

$v = (1,2) \in W_2$ אז $v = W_1 \cup W_2$.

$u + v = (2,3)$,
$u + v \notin W_1$
וגם $u + v \notin W_2$.
לכן $u + v \notin W_1 \cup W_2$.
■

שאלה 6

א) דוגמה: $p = x^3 + x^2 + x + 1 \in W$.
$W \notin \mathbb{0}$ כי $\deg(\mathbb{0}) = 0$
לכן W לא תת-מרחב של $p(\mathbb{R})$.
■

ב) דוגמה: $p = x^2 + 1 \in W$.
דוגמה נגדית: $p = x^2 + x + 1 \in W$, $q = -x^2 + x \in W$,
$p + q = 2x + 1 \notin W$ כי $\deg(p+q) = 1$.
לכן W לא תת-מרחב של $P(\mathbb{R})$.
■

ג) דוגמה: $p = x + 1 \in W$ כי $1 \in \mathbb{Z}$.
W לא תת-מרחב של $P(\mathbb{R})$.
דוגמה נגדית: $p = x + 1 \in W$,
$\pi \cdot p = \pi \cdot x + \pi \notin W$ כי $\pi \notin \mathbb{Z}$.
■