

חדו"א 1

סמסטר א' תשפד

עבודת בית 4

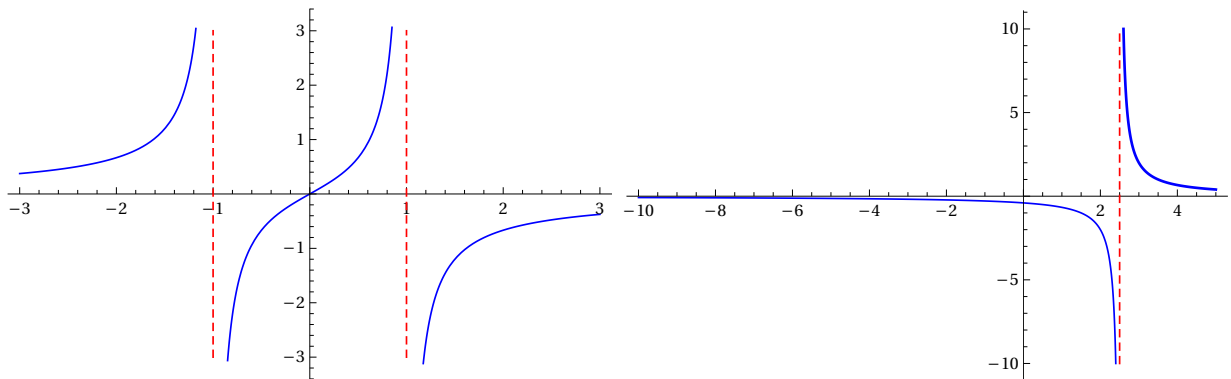
שאלה 1 הגדירו מהי אסימפטוטה אופקית של $f(x)$ ותנו דוגמה של פונקציה שמקיימת

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1, \quad f(1) = 0.$$

שאלה 2 הגדירו מהי אסימפטוטה אנכית של $f(x)$ ותנו דוגמה של פונקציה שמקיימת:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty.$$

שאלה 3 נתונות הפונקציות הבאות המוגדרות באופן גרפי:



(א) תארו על ידי גבולות חד-צדדיים את התנהגותן של הפונקציות עם הגרפים הנתונים באיור סביב נקודות אי-הרציפות וגם בתהליכים $x \rightarrow +\infty$ ו- $x \rightarrow -\infty$.

(ב) מהן האסימפטוטות של הפונקציות האלה?

(ג) מהם תחומי עלייה וירידה של הפונקציות?

שאלה 4 עבור כל אחת מהפונקציות ברשימה:

$$f(x) = \frac{1}{2^x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (2)$$

$$f(x) = x\sqrt{8-x^2} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{\ln|x|} \quad (7)$$

(א) מצאו את תחום ההגדרתה של הפונקציה וסמן אותו על הציר הממשי

(ב) מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים

(ג) ברר סימני הפונקציה (תחומים שבהם $f(x) > 0$ ("+") או $f(x) < 0$ ("-") וסמן על הציר הממשי

(ד) מצאו נקודות אי-רציפות של $f(x)$ וברר את סוגן. תאר התנהגות של הפונקציה סביב נקודות אלה באופן סימבולי, בטא באופן גרפי בסקיצה וסמן אסימפטוטות אנכיות (אם יש).

(ה) בררו התנהגות הפונקציה בתהליכים $x \rightarrow +\infty$ ו- $x \rightarrow -\infty$ שבהם יש משמעות לפונקציה זו, תאר את המצב באופן סימבולי, בטא באופן גרפי בסקיצה וסמן אסימפטוטות ב- $\pm\infty$ (אם יש).

(ו) ציירו את הסקיצה המשווערת של גרף הפונקציה על סמך התוצאות של הסעיפים הקודמים.

שאלה 5 מייך את נקודות האי-רציפות של הפונקציות:

$$y = \frac{1}{2 + 3^{-1/(x+1)}} + \frac{\sin(x-2)}{x^2-4} - \frac{3^x-1}{2^x-1} \quad (א)$$

$$f(x) = \frac{x^2-3x}{x^3+4x^2} + \frac{27}{9-3^{1/(x-1)}} \quad (ב)$$

שאלה 6 בדקו את רציפות הפונקציות הבאות ב"נקודת התפר" שלהן

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{1/x} & x < 0 \end{cases} \quad (א)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1 + e^{1/x} & x < 0 \end{cases} \quad (ב)$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (ג)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (\text{ד})$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & 1 \leq x < 2 \\ x - 3 & x \geq 2 \end{cases} \quad (\text{ה})$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x - 2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x - 2 & x > 2 \end{cases} \quad (\text{ו})$$

שאלה 7 מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם הפונקציות הבאות רציפות לכל x ממשי

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx & x > 2 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (\text{ג})$$

שאלה 8 מצאו את ערכי הפרמטרים a, b עבורם הפונקציות הבאות רציפות לכל x ממשי

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4\frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$f(x) = \begin{cases} x^{1/(1-x)} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a\frac{2^{1/x} - 2}{2^{1/x} + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (\text{ג})$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{1/(1-x)}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{1/(x-2)} & x > 2 \end{cases} \quad (ד)$$

שאלה 9 הוכיחו שלמשוואה הנתונה יש פתרון ממשי ומצאו אותו (אחד מהפתרונות, אם יש יותר) בדרך נומרית בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית

$$x + \ln(1 + x^2) = 3 \quad (א)$$

$$x + 2 \arctan(x) - 4 = 0 \quad (ב)$$

$$x^5 + x = 50 \quad (ג)$$

שאלה 10 תהיינה f, g פונקציות רציפות בקטע $[a, b]$ המקיימות $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$. הוכיחו שקיימת נקודה c כך ש- $a < c < b$ ו- $f(c) = g(c)$. רמז: הגדירו פונקציה $h(x) = f(x) - g(x)$ והשתמשו במשפט ערך הביניים.

שאלה 11 לאילו ערכים של הפרמטר a הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin x}{x} & x < 0 \\ a + \tan x & x \geq 0 \end{cases}$$

תהיה רציפה בכל קטע סגור?

שאלה 12 נתונה פונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ a + \sin x & x \geq 0 \end{cases}.$$

עבור אילו ערכי a הפונקציה רציפה בנקודה $x = 0$

שאלה 13 נתונה הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{\frac{1}{x-2}} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}.$$

שאלה 14 פתרו את גבול הבא:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+7} \right)^{3x+7}$$

שאלה 15 חשבו את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(7x) - x}{\sin(2) + 7x}$$

שאלה 16 נניח ש- $f(x)$ היא פונקציה חסומה בתחום $(0, \infty)$ חשבו את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+4)f(x)}{x^2 + 3x + 2} .$$

שאלה 17 פתרו את גבול הבא:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{9 \arctan(3x) + 6x} - \sqrt{6}\sqrt{x} .$$

שאלה 18 חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 5x + 3}{8x^2 + 6x + 3}$

פתרונות

שאלה 1 הישר $y = a$ ($a \in \mathbb{R}$) אסימפטוטה אופקית לפונקציה $f(x)$ ב- $x = \infty$ אם

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$$

ו $y = b$ ($b \in \mathbb{R}$) אסימפטוטה אופקית לפונקציה $f(x)$ ב- $x = -\infty$ אם

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b .$$

לדוגמה עבור הפונקציה $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 .$$

לדוגמה עבור הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9}$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 .$$

אכן יש לה אסימפטוטה אופקית ב- $x = \pm\infty$.

שאלה 2 דוגמה: $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

שאלה 3

(א) (1)

$$\lim_{x \rightarrow 2.5^+} f(x) = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow 2.5^-} f(x) = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 .$$

ב) $x = 2.5$ אסימפטוטה אנכית

$y = 0$ אסימפטוטה אופקית

ג) תחומי ירדיה: $(-\infty, 2.5)$ $(2.5, \infty)$

אין תחומי עליה

(א) (2)

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 .$$

ב) $x = -1$ $x = 1$ אסימפטוטה אנכיות

$y = 0$ אסימפטוטה אופקית

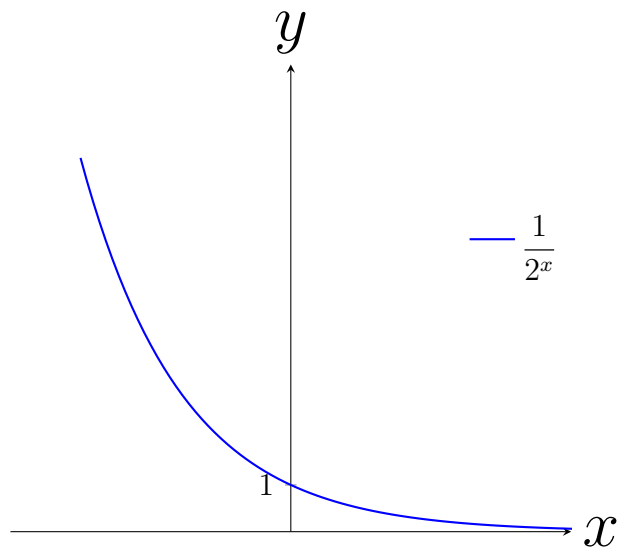
ג) תחומי עליה: $(-\infty, -1)$ $(-1, 1)$ $(1, \infty)$

אין תחומי ירידה

שאלה 4

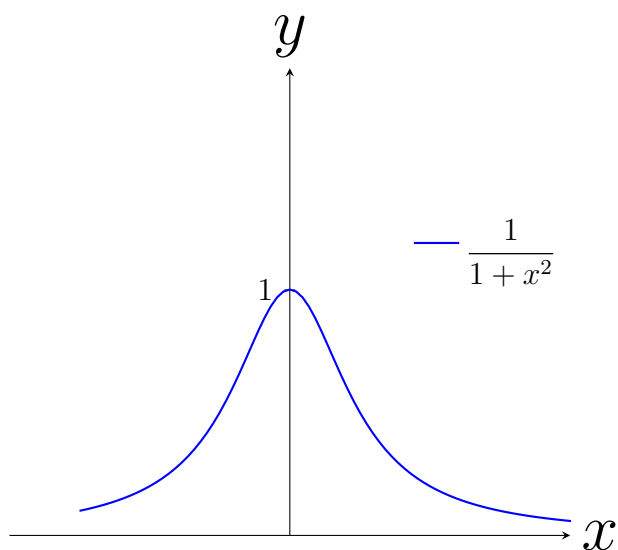
$$f(x) = \frac{1}{2^x} \quad (1)$$

\mathbb{R}	תחום הגדרה:
$(0, 1)$	חיתוך עם הצירים:
$f(x) > 0$ לכל x	סימני הפונקציה:
אין	נקודת אי רציפות:
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$	התנהגות ב ∞
$x = \infty$ ב- $y = 0$	אסימפטוטה אופקית:



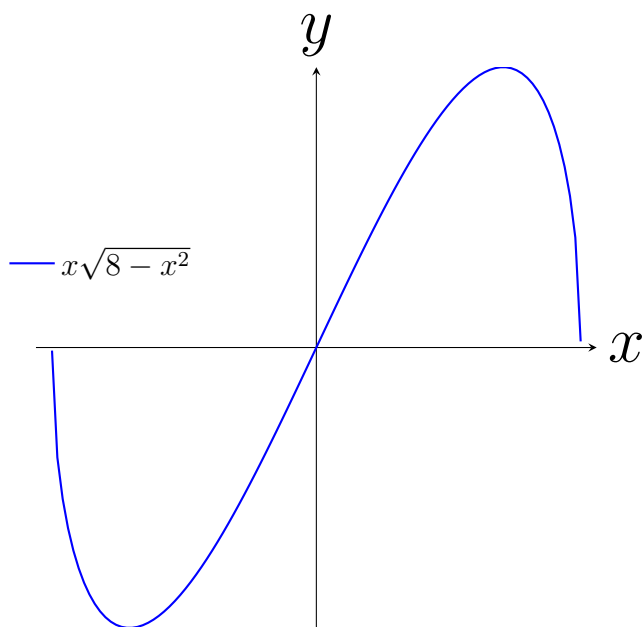
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (2)$$

\mathbb{R}	תחום הגדרה:
$(0, 1)$	חיתוך עם הצירים:
$f(x) > 0$ לכל x	סימני הפונקציה:
אין	נקודת אי רציפות:
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$	התנהגות ב ∞
$x = \pm\infty$ ב- $y = 0$	אסימפטוטה אופקית:



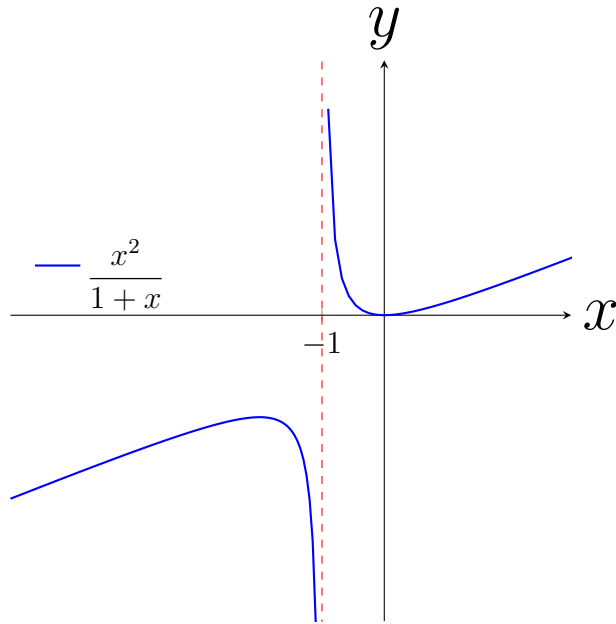
$$f(x) = x\sqrt{8-x^2} \quad (3)$$

$-\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}$			תחום הגדרה:
$(-\sqrt{8}, 0) \cup (\sqrt{8}, 0), (0, 0)$			חיתוך עם הצירים:
x	$(-\sqrt{8}, 0)$	$(0, \sqrt{8})$	סימני הפונקציה:
$f(x)$	-	+	
אין			נקודת אי רציפות:
אין משמעות			התנהגות ב ∞
אין			אסימפטוטה אופקית:



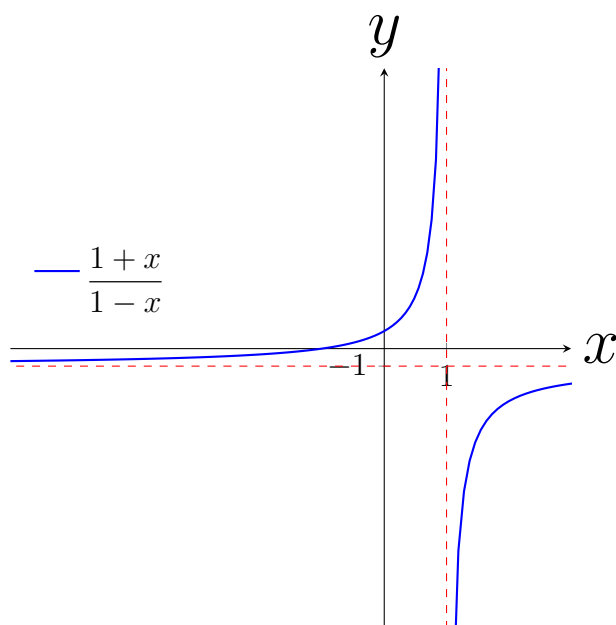
$$f(x) = \frac{x^2}{1+x} \quad (4)$$

$x \neq -1$				תחום הגדרה:
$(0, 0)$				חיתוך עם הצירים:
x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$	סימני הפונקציה:
$f(x)$	$-$	$+$	$+$	
$x = -1$ נקודת אי רציפות ממין שני				נקודת אי רציפות:
$x = -1$				אסימפטוטה אנכית:
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$				התנהגות ב ∞
אין				אסימפטוטה אופקית:



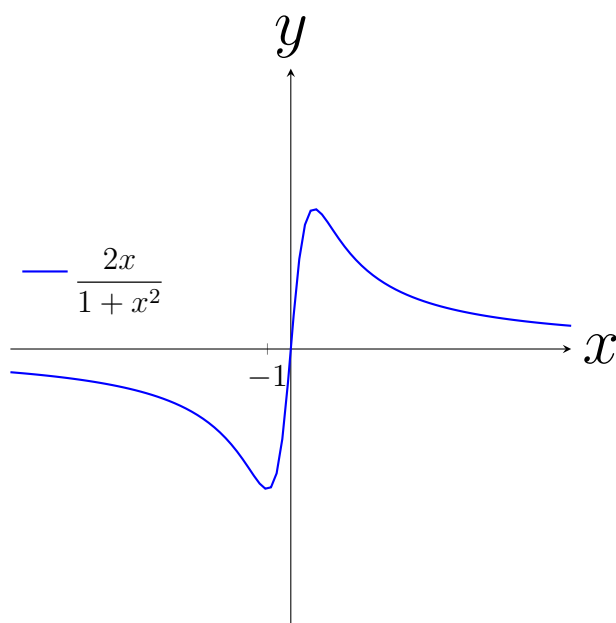
$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad (5)$$

$x \neq 1$				תחום הגדרה:
$(0, 1), (-1, 0)$				חיתוך עם הצירים:
x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$	סימני הפונקציה:
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	
$x = 1$ נקודת אי רציפות ממין שני				נקודת אי רציפות:
$x = 1$				אסימפטוטה אנכית:
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$				התנהגות ב ∞
$y = -1$				אסימפטוטה אופקית:



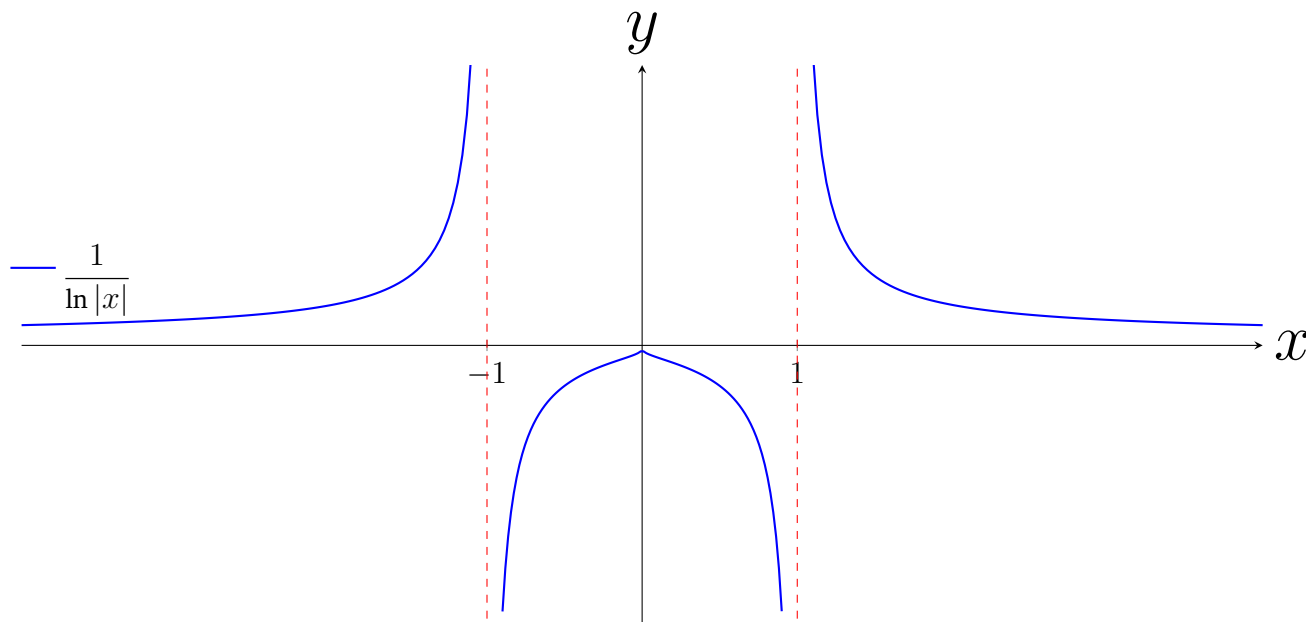
$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad (6)$$

R				תחום הגדרה:
(0, 0)				חיתוך עם הצירים:
	x	(−∞, 0)	(0, ∞)	סימני הפונקציה:
	f(x)	−	+	
אין				נקודת אי רציפות:
אין				אסימפטוטה אנכית:
lim_{x→∞} f(x) = lim_{x→−∞} f(x) = 0				התנהגות ב ∞
y = 0				אסימפטוטה אופקית:



$$f(x) = \frac{1}{\ln|x|} \quad (7)$$

$x \neq -1, 0, 1$						תחום הגדרה:
אין						חיתוך עם הצירים:
x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$		סימני הפונקציה:
$f(x)$	+	-	-	+		
$x = -1$ נק' אי רציפות ממין שני $x = 0$ נק' אי-רציפות ממין שני $x = 1$ נק' אי-רציפות ממין שני						נקודת אי רציפות:
$x = 1, -1$						אסימפטוטה אנכית:
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$						התנהגות ב ∞
$y = 0$						אסימפטוטה אופקית:



שאלה 5

(א)

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left(\frac{\sin(x-2)}{x^2-4} - \frac{3^x-1}{2^x-1} + \frac{1}{3^{-\frac{1}{x+1}}+2} \right) = \frac{1}{3}(\sin(3)-4)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{\sin(x-2)}{x^2-4} - \frac{3^x-1}{2^x-1} + \frac{1}{3^{-\frac{1}{x+1}}+2} \right) = \frac{1}{6}(2\sin(3)-5)$$

לכן $x = -1$ נקודת אי-רציפות ממין ראשון.

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \left(\frac{\sin(x-2)}{x^2-4} - \frac{3^x-1}{2^x-1} + \frac{1}{3^{-\frac{1}{x+1}}+2} \right) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \left(\frac{\sin(x-2)}{x^2-4} - \frac{3^x-1}{2^x-1} + \frac{1}{3^{-\frac{1}{x+1}}+2} \right) = -\infty$$

לכן $x = -2$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sin(x-2)}{x^2-4} - \frac{3^x-1}{2^x-1} + \frac{1}{3^{-\frac{1}{x+1}}+2} \right) = \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}} - \frac{29}{12}$$

לכן $x = 2$ נקודת אי-רציפות סליקה.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin(x-2)}{x^2-4} - \frac{3^x-1}{2^x-1} + \frac{1}{3^{-\frac{1}{x+1}}+2} \right) = \frac{3}{7} - \frac{\log(3)}{\log(2)} + \frac{\sin(2)}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin(x-2)}{x^2-4} - \frac{3^x-1}{2^x-1} + \frac{1}{3^{-\frac{1}{x+1}}+2} \right) = \frac{3}{7} - \frac{\log(3)}{\log(2)} + \frac{\sin(2)}{4}$$

לכן $x = 0$ נקודת אי-רציפות סליקה.

(ב)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2-3x}{x^3+4x^2} + \frac{27}{9-3^{\frac{1}{x-1}}} \right) = -\infty$$

לכן $x = 0$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} \left(\frac{x^2-3x}{x^3+4x^2} + \frac{27}{9-3^{\frac{1}{x-1}}} \right) = \infty$$

לכן $x = -4$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^2-3x}{x^3+4x^2} + \frac{27}{9-3^{\frac{1}{x-1}}} \right) = \frac{13}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2-3x}{x^3+4x^2} + \frac{27}{9-3^{\frac{1}{x-1}}} \right) = -\frac{2}{5}$$

לכן $x = 1$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3}{2})^+} \left(\frac{x^2-3x}{x^3+4x^2} + \frac{27}{9-3^{\frac{1}{x-1}}} \right) = \infty$$

לכן $x = \frac{3}{2}$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

שאלה 6

(א)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(4x)}{x} = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{1/x} + 4) = 4.$$

$f(0)$ לא מוגדר לכן $x = 0$ נקודת אי רציפות סליקה.

(ב)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{1/x} + 1) = 1, \quad f(0) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x).$$

לכן $x = 0$ נקודת אי רציפות סליקה.

(ג)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} (5-x) = 3, \quad f(2) = 3.$$

לכן רציפה ב- $x = 2$.

(ד)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1, \quad f(1) = 1.$$

לכן $f(x)$ רציפה ב- $x = 1$.

(ה)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0, \quad f(0) = 0.$$

לכן $f(x)$ רציפה ב- $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x) = 1, \quad f(1) = 2 - 1 = 1.$$

לכן $f(x)$ רציפה ב- $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (2 - x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 3) = 1.$$

לכן $x = 2$ נק' אי רציפות ממין ראשון.

(ו)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} |x - 2| = 1, \quad f(1) = 1.$$

לכן $f(x)$ רציפה ב- $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} |x - 2| = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0, \quad f(2) = 1.$$

לכן $x = 2$ נק' אי רציפות סליקה.

שאלה 7

(א) $k = 0$

(ב) $k = 4$

(ג) $k = \frac{2}{3}$

שאלה 8

(א) $b = \frac{1}{2}, a = 0$

(ב) $b = 2, a = 1$
או

$b = 1, a = 2$

(ג) $b = \frac{1}{e}, a = -\frac{2}{e}$

(ד) $b = -\frac{e}{3}, a = \frac{e}{3}$

שאלה 10

נתון: f, g רציפות בקטע $[a, b]$, $f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$.
צ"ל: קיימת נקודה c כך ש $a < c < b$ ו $f(c) = g(c)$.
הוכחה: $h(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$ כי f ו g רציפה בקטע הזה.

$$h(b) = f(b) - g(b) > 0, \quad h(a) = f(a) - g(a) < 0,$$

לכן לפי משפט ערך הביניים, קיים c כך ש $a < c < b$ ו $h(c) = 0$.

$$h(c) = f(c) - g(c) = 0, \quad \Rightarrow \quad f(c) = g(c).$$

שאלה 11

הפונקציה רציפה ב- $x = 0$ אם

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0).$$

$$f(0) = a + \tan(0) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a + \tan x = a + \tan(0) = a.$$

לכן

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad \Rightarrow \quad a = 2.$$

שאלה 12

הפונקציה רציפה ב- $x = 0$ אם

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0).$$

$$f(0) = a + \sin(0) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a + \sin x = a + \sin(0) = a.$$

לכן

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad \Rightarrow \quad a = 1.$$

שאלה 13

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} = \lim_{x \rightarrow 2^-} x e^{\frac{1}{x-2}} = 2 e^{\frac{1}{2-2^-}} = 2 e^{\frac{1}{0^+}} = 2 e^\infty = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} = \lim_{x \rightarrow 2^+} x e^{\frac{1}{x-2}} = 2 e^{\frac{1}{2-2^+}} = 2 e^{\frac{1}{0^-}} = 2 e^{-\infty} = 0.$$

$$f(0) = 2.$$

קיבלנו כי

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} = f(2 = 0)$$

לכן הנקודה $x = 2$ היא נקודת אי רציפות ממין שני.

שאלה 14

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x+7} = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x+7} - 1 = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x+7} - \frac{x+7}{x+7} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1-(x+7)}{x+7} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{-6}{x+7} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{x+7}{-6}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+7} \right)^{3x+7} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)^{\alpha \cdot \frac{3x+7}{\alpha}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)^{\alpha} \right]^{\frac{3x+7}{\alpha}} \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)^{\alpha} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+7}{\alpha}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6(3x+7)}{x+7}} \\ &= e^{-18}. \end{aligned}$$

שאלה 15

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(7x) - x}{\sin(2x) + 7x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan(7x)}{\sin(2x)} - \frac{x}{\sin(2x)}}{\frac{\sin(2x)}{\sin(2x)} + \frac{7x}{\sin(2x)}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan(7x)}{\sin(2x)} - \frac{x}{\sin(2x)}}{1 + \frac{7x}{\sin(2x)}} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(7x)}{\sin(2x)} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(2x)}}{1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin(2x)}} \\
 &= \frac{\frac{7}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{7}{2}} \\
 &= \frac{\frac{6}{2}}{\frac{9}{2}} \\
 &= \frac{6}{9} \\
 &= \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

שאלה 16

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+4)f(x)}{x^2 + 3x + 2} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+4}{x^2 + 3x + 2} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right)$$

כי גבול ב- ∞ של פונקציה רציונלית אמיתית שווה 0. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+4}{x^2 + 3x + 2} = 0$

כאשר $c \in \mathbb{R}$ מספר סופי כי הגבול ב- ∞ של פונקציה חסומה שווה למשפר סופי. לכן $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+4)f(x)}{x^2 + 3x + 2} = 0 \cdot c = 0.$$

שאלה 17

הפונקציה בהגבול היא $\sqrt{9 \arctan(3x) + 6x} - \sqrt{6}\sqrt{x}$. נכפיל אותה ב $\frac{\sqrt{9 \arctan(3x) + 6x} + \sqrt{6}\sqrt{x}}{\sqrt{9 \arctan(3x) + 6x} + \sqrt{6}\sqrt{x}}$:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{9 \arctan(3x) + 6x} - \sqrt{6}\sqrt{x} \right) \left(\sqrt{9 \arctan(3x) + 6x} + \sqrt{6}\sqrt{x} \right)}{\sqrt{9 \arctan(3x) + 6x} + \sqrt{6}\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 \arctan(3x) + 6x - 6x}{\sqrt{9 \arctan(3x) + 6x} + \sqrt{6}\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 \arctan(3x)}{\sqrt{9 \arctan(3x) + 6x} + \sqrt{6}\sqrt{x}} \\
&= \frac{9 \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(3x)}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} 9 \arctan(3x) + \lim_{x \rightarrow \infty} 6x} + \sqrt{6} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}} \\
&= \frac{9 \frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + \infty} + \sqrt{6}\sqrt{\infty}} \\
&= \frac{9 \frac{\pi}{2}}{\infty} \\
&= 0
\end{aligned}$$

שאלה 18 תשובה סופית: $\frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 5x + 3}{8x^2 + 6x + 3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{6x^2 + 5x + 3}{x^2} \right)}{\left(\frac{8x^2 + 6x + 3}{x^2} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{6x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right)}{\left(\frac{8x^2}{x^2} + \frac{6x}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{8 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{5}{\infty} + \frac{3}{\infty}}{8 + \frac{6}{\infty} + \frac{3}{\infty}} \\
&= \frac{6 + 0 + 0}{8 + 0 + 0} \\
&= \frac{6}{8} \\
&= \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$