המחלקה למדעי המחשב

07/03/25 ז' באדר תשפ"ה
$08:30 - 11:30$

אלגברה ליניארית 2

מועד א'

מרצה: ד"ר ירמיהו מילר .

תשפ"ה סמסטר א'

השאלון מכיל 5 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

===

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (2 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.

===

שאלה 1 (25 נקודות)

א) (19 נק')
נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ מצאו צורת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $J = P^{-1}AP$.

ב) (3 נק')
תהי $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ מטריצה שמוגדרת $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.
הוכיחו כי $f(B) \neq 0$ כאשר $f(x)$ הפולינום $f(x) = x(x-1)$.

ג) (3 נק')
חשבו את e^B.

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ מטריצה בעלת שני ערכים עצמיים שונים λ_1, λ_2.
יהיו $f(x) = a + bx + x^2$ ו- $p(x) = c + dx + x^2$ פולינומים כך ש- $f(A) = 0$ וגם $p(A) = 0$.

א) (7 נק') הוכיחו כי $a = c$ וגם $b = d$.

ב) (6 נק') נתון כי $a = 1$. האם יתכן ש- λ_1 ו- λ_2 ממשיים? נמקו את תשובתכם.

ג) (6 נק') בנוסף נתון כי $b = 0$. חשבו את λ_1 ו- λ_2.

ד) (6 נק') הוכיחו: $A^2 + A^4 = 0$.

שאלה 3 (25 נקודות)

א) (19 נקודות)
נתון מרחב וקטורי $\mathbb{R}_3[x]$ (פולינומים מדרגה 3 לכל היותר) עם מכפלה פנימית אינטגרלית בקטע $[-1,1]$:

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx \ .$$

1) (11 נקודות) מצאו בסיס אורתוגונלי למרחב $U = \text{span}\{1, 1-x, x^2\}$.

2) (8 נקודות) מצאו את ההיטל האורתוגונלי של כל אחד מהווקטוררים: $w_1 = 2 - 12x + 19x^2$, $w_2 = 2x^3$, על תת המרחב U.

ב) (6 נק') הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענה הבאה:

קיימת מכפלה פנימית $\langle , \rangle$ של וקטורים ב- $\mathbb{R}^2$ כך לכל וקטור $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ הנורמה ניתנת ע"י הנוסחה

$$\|u\|^2 = |x_1| + |x_2|,$$

כאשר $|x|$ מסמן את הערך מוחלט של x.

שאלה 4 (25 נקודות) תהי $A \in \mathbb{C}^{3\times3}$ מטריצה שמוגדרת $A = \begin{pmatrix} -i & 2i & 0 \\ 2i & 0 & 2i \\ 0 & 2i & i \end{pmatrix}$.

א) (3 נק') האם A לכסינה אוניטרית? נמקו את תשובתכם.

ב) (12 נק') אם כן מצאו D אלכסונית ו- Q אוניטרית כך ש- $A = QD\bar{Q}$.

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב וקטורי V.
הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הענות הבאות:

ג) (5 נק') אם T צמוד לעצמו אז כל ערך עצמי של T ממשי.

ד) (5 נק') אם λ ערך עצמי של T אז $\bar{\lambda}$ ערך עצמי של $\bar{T}$.

שאלה 5 (25 נקודות)

תהי $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ העתקה נורמלית. נניח כי הערכים עצמיים של T הם $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$ והמרחבים עצמיים הם

$$V_{-4} = \text{span}\left\{-1 + x^2\right\} \ , \qquad V_{-1} = \text{span}\left\{1 - x + x^2\right\} \ .$$

נתון וקטור a של המרחב ווקטורי $\mathbb{R}^3$: $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

א) (10 נקודות) מצאו את $T(a)$.

ב) (5 נקודות) מצאו את $T^4(a)$.

תהיינה $A, B \in \mathbb{C}^{2\times2}$. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

ג) (5 נקודות) אם A צמודה לעצמה ו- B צמודה לעצמה, אזי גם $A \cdot B$ צמודה לעצמה.

ד) (5 נקודות) אם A צמודה לעצמה ו- B צמודה לעצמה, אזי גם $A + B$ צמודה לעצמה.

פתרונות

שאלה 1

א) (19 נק')

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} x-2 & -2 & -2 \\ 2 & x & -2 \\ -2 & -2 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)\left(x(x-2)-4\right) + 2\left(2(x-2)-4\right) - 2\left(-4+2x\right)$$

$$\begin{aligned}
&=(x-2)\left(x^2-2x-4\right)+2\left(2x-8\right)-2\left(2x-4\right)\\
&=(x-2)\left(x^2-2x-4\right)+4x-16-4x+8\\
&=(x-2)\left(x^2-2x-4\right)-8\\
&=x^3-2x^2-4x-2x^2+4x+8-8\\
&=x^3-4x^2\\
&=x^2\left(x-4\right)
\end{aligned}$$

ערכים עצמיים:
$\lambda = 0$ מריבוי אלגברי 2.
$\lambda = 4$ מריבוי אלגברי 1.
האפשרויות לפולינום המינימלי הן $x(x-4)$ ו- $x(x-4)$.
נבדוק $x(x-4)$:

$$A(A-4I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \neq 0$$

לכן הפולינום המינימלי הוא

$$m_A(x) = x^2(x-4)\ .$$

לפי המבנה של הפולינום האופייני והפולינום המינימלי הצורת ז'ורדן של A היא

$$J = J_2(0) \oplus J_1(4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\ .$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda = 4$</u>

$$\text{Nul}(A-4I) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3+R_1]{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $V_4 = \text{span}\left\{ u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

מרחב עצמי של $\lambda = 0$

$$\text{Nul}(A-0I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2+R_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $V_0 = \text{span}\left\{ u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

וקטור עצמי מוכלל

נפתור את המערכת $Aw = u_0$. המטריצה המורחבת הינה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2\to \frac{1}{2}R_2]{R_1\to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+1 \\ -2z-\frac{1}{2} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

נציב $\alpha = 0$ ואז נקבל את הפתרון $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. לכן

$$A = PJP^{-1} , \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} , \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

ב) (3 נק') פולינום אופייני של B:

$$p_B(x) = \left|xI - B\right| = \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ 1 & x-4 \end{vmatrix} = (x-1)(x-4)+2 = x^2-5x+6 = (x-3)(x-2) .$$

הערכים עצמיים של B הם $\lambda=2$ ו- $\lambda=3$.
מכאן הפולינום המינימלי הוא $m_B(x)=(x-2)(x-3)$.
נניח בשלילה כי $f(B)=0$. אז $m_B(x)|f(x)$.
הגענו לסתירה לכן $f(B)\neq 0$.

ג) (3 נק') כל הערכים עצמיים של B שונים לכן B לכסינה:

$$B=PDP^{-1}$$

כאשר $P=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$ ו- $D=\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$.
לכל פונקציה אלמנטרית:

$$f(B)=Pf(D)P^{-1}$$

ולכל מטריצה אלכסונית $D=\text{diag}\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$:

$$f(D)=\text{diag}\left(f\left(\lambda_1\right),\ldots,f\left(\lambda_n\right)\right)\ .$$

לכן

$$e^B=P\begin{pmatrix}e^3&0\\0&e^2\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^3&0\\0&e^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-e^2&0\\0&-e^3\end{pmatrix}$$

שאלה 2

א) למטריצה A יש שני ערכים עצמיים שונים לכן הפולינום המינימלי הוא

$$m_A(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)=x^2-(\lambda_1+\lambda_2)x+\lambda_1\lambda_2$$

A מאפסת את $f(x)$ $\Leftarrow$ $f(x)=m_A(x)$
(אחרת יהיו שני פולינומים מסדר 2 שמתאפסים ע"י A בסתירה לכך שהפולינום המינימלי יחיד).
A מאפסת את $p(x)$ $\Leftarrow$ $p(x)=m_A(x)$
(אחרת יהיו שני פולינומים מסדר 2 שמתאפסים ע"י A בסתירה לכך שהפולינום המינימלי יחיד).
לכן

$$f(x)=m_A(x)=p(x)\qquad\Rightarrow\qquad f(x)=p(x)$$

לכן $a=c$, $b=d$.

ב)

$$a=1\quad\Rightarrow\quad\lambda_1\lambda_2=1\quad\Rightarrow\quad\lambda_2=\frac{1}{\lambda_1}\ .$$

בנוסף $\lambda_1\neq\lambda_2$.
אז יתכן כי $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$. לדוגמה: $\lambda_1=2,\lambda_2=\frac{1}{2}$.

ג) $b=0$ לכן $\lambda_1+\lambda_2=0$ לכן $\lambda_1=-\lambda_2$
לכן $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$.

ד) הפולינום המינימלי הוא $m_A(x)=(x+i)(x-i)=x^2+1$ לכן $A^2+I=0$ לכן $A^4+A^2=0$.

שאלה 3

א) נסמן

$$\mathrm{v}_1 = 1, \quad \mathrm{v}_2 = 1-x \ , \quad \mathrm{v}_3 = x^2 \ .$$

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = 1 \ .$$

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\|u_1\|^2 = \int_{-1}^{1} dx\, (1)^2 = 2 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2, u_1 \rangle = \int_{-1}^{1} dx\, (1-x) = 2 \ .$$

לכן

$$u_2 = -x \ .$$

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_1 \rangle = \int_{-1}^{1} dx\, x^2 = \frac{2}{3} \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_2 \rangle = \int_{-1}^{1} dx\, (-x)x^2 = 0 \ .$$

$$\|u_2\|^2 = \int_{-1}^{1} dx\, (-x)^2 = \frac{2}{3} \ .$$

לכן

$$u_3 = x^2 - \frac{1}{3} \ .$$

בסיס אורתונורמלי:

$$U = \left\{ u_1 = 1, \quad u_2 = -x \ , \quad u_3 = x^2 - \frac{1}{3} \right\} \ .$$

ב) $w_1 \in U$ לכן $P_U(w_1) = w_1$.

$$\begin{aligned} P_U(w_2) =& \frac{\langle w_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 + \frac{\langle w_2, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 + \frac{\langle w_2, u_3\rangle}{\|u_3\|^2}u_3 \\ =& 0 + \frac{\left(-\frac{2}{5}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)}(-x) + 0 \\ =& \frac{3x}{5} \ . \end{aligned}$$

ג) יהיו

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ , \qquad \mathrm{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \ , \qquad u, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^2$$

$$\|u+\mathrm{v}\|^2 = \|u\|^2 + \|\mathrm{v}\|^2 + 2\langle u, \mathrm{v}\rangle \qquad \Rightarrow \qquad 2\langle u, \mathrm{v}\rangle = \|u+\mathrm{v}\|^2 - \|u\|^2 - \|\mathrm{v}\|^2 \ .$$

$$\langle u, \mathrm{v}\rangle = \frac{1}{2}\left(|x_1+y_1| + |x_2+y_2| - |x_1| - |x_2| - |y_1| - |y_2|\right)$$

נניח ש- $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
אז

$$\langle u, \mathrm{v}\rangle = \frac{1}{2}\left(|0| + |1| - |1| - |0| - |-1| - |1|\right) = -1 \ .$$

$$\langle -3u, \mathrm{v}\rangle = \frac{1}{2}\left(|-4| + |1| - |-3| - |0| - |-1| - |1|\right) = 0 \ .$$

$\langle -3u, \mathrm{v}\rangle \neq 3 = -3\langle u, \mathrm{v}\rangle$, כלומר $\langle , \rangle$ לא מקיים לינאריות. לכן $\langle , \rangle$ לא יכול להיות מכפלה פנימית.

שאלה 4

א)

$$A = \begin{pmatrix} -i & 2i & 0 \\ 2i & 0 & 2i \\ 0 & 2i & i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} i & -2i & 0 \\ -2i & 0 & -2i \\ 0 & -2i & -i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A\bar{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \bar{A}A$$

לכן A נורמלית ולכן לכסינה אוניטרית.

ב) A נורמלית לכן היא לכסינה אוניטרית. נמצא את הפולינום אופייני:

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \left|\lambda I - A\right| \\
&= \begin{vmatrix} \lambda+i & -2i & 0 \\ -2i & \lambda & -2i \\ 0 & -2i & \lambda-i \end{vmatrix} \\
&=(\lambda+i)\left[\lambda(\lambda-i)+4\right]-2i\left[+2i\left(\lambda-i\right)\right] \\
&=(\lambda+i)\left[\lambda^2-i\lambda+4\right]+4\left(\lambda-i\right) \\
&=\lambda^3-i\lambda^2+4\lambda+i\lambda^2+\lambda+4i+4\lambda-4i \\
&=\lambda^3+9\lambda \\
&=\lambda\left(\lambda^2+9\right) \\
&=\lambda\left(\lambda-3i\right)\left(\lambda+3i\right)
\end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=3i$ ריבוי אלגברי 1 .

$\lambda=-3i$ ריבוי אלגברי 1 .

$\lambda=0$ ריבוי אלגברי 1 .

<u>מרחב עצמי של $\lambda=3i$:</u>

$$(A-3iI)=\begin{pmatrix} -4i & 2i & 0 \\ 2i & -3i & 2i \\ 0 & 2i & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to 2R_2+R_1} \begin{pmatrix} -4i & 2i & 0 \\ 0 & -4i & 4i \\ 0 & 2i & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to 2R_3+R_2} \begin{pmatrix} -4i & 2i & 0 \\ 0 & -4i & 4i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1\to \frac{i}{2}R_1]{R_2\to \frac{i}{4}2R_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1+R_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $z \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z}{2} \\ z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $z\in\mathbb{R}$.

$$V_{3i}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

נסמן את הווקטור עצמי:

$$\text{v}_{3i}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda=-3i$:</u>

$$(A+3iI)=\begin{pmatrix}2i&2i&0\\2i&3i&2i\\0&2i&4i\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}2i&2i&0\\0&i&2i\\0&2i&4i\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\begin{pmatrix}2i&2i&0\\0&i&2i\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3\to -iR_2]{R_1\to -\frac{1}{2}R_1}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $z\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2z\\-2z\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $z\in\mathbb{R}$.

$$V_{-3i}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נסמן את הווקטורר עצמי:

$$\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\ .$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda=0$</u>:

$$(A-0I)=\begin{pmatrix}-i&2i&0\\2i&0&2i\\0&2i&i\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+2R_1}\begin{pmatrix}-i&2i&0\\0&4i&2i\\0&2i&i\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to 2R_3-R_2}\begin{pmatrix}-i&2i&0\\0&4i&2i\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1\to iR_1]{R_2\to \frac{-i}{2}R_2}\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $z\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-z\\-\frac{z}{2}\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $z\in\mathbb{R}$.

$$V_0=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

נסמן את הווקטור עצמי:

$$\mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\ .$$

$$A=PDP-1\ .$$

$$.P=\begin{pmatrix}| & | & |\\ \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3\\ | & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&1\\2&1&-2\end{pmatrix}\ ,D=\begin{pmatrix}3i&0&0\\0&-3i&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

נחשב בסיס אורתוגונלי באמצעות התהליך גרם שמידט:

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\ ,\qquad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\ .$$

$$u_1=\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$u_2=\mathrm{v}_2-\frac{\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\rangle}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$u_3=\mathrm{v}_3-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\rangle}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{9}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

לכן מצאנו את הבסיס אורתוגונלי

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\ ,\qquad u_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad u_3=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\ .$$

ננרמל:

$$\hat{u}_1=\frac{u_1}{\|u_1\|}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\ ,\qquad \hat{u}_2=\frac{u_2}{\|u_2\|}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad \hat{u}_3=\frac{u_3}{\|u_3\|}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\ .$$

$$A=QD\bar{Q}=QDQ^{-1}\ ,\quad D=\begin{pmatrix}3i&0&0\\0&-3i&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\2&1&-2\end{pmatrix}\ .$$

ג) טענה נכונה. הוכחה:

נניח $T:V\to V$ העתקה צמודה לעצמה, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v})=\lambda\mathrm{v}$. אז

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \lambda\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{וקטור עצמי של } T \ \mathrm{v}) \\ &= \lambda\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית})\end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \mathrm{v},\bar{T}(\mathrm{v})\rangle && (\text{הגדרה של העתקה צמודה}) \\ &= \langle \mathrm{v},T(\mathrm{v})\rangle && (T \text{ צמודה לעצמה}) \\ &= \langle \mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\text{וקטור עצמי של } T \ \mathrm{v}) \\ &= \bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית})\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=\bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \quad\Rightarrow\quad (\lambda-\bar{\lambda})\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=0\ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v}\neq 0 \Leftarrow \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\neq 0 \Leftarrow (\lambda-\bar{\lambda})=0 \Leftarrow \lambda=\bar{\lambda}$.

ד)

$$\begin{aligned}\langle T(u),u\rangle &= \langle \lambda u,u\rangle && (\ u \text{ וקטור עצמי}\ ) \\ &= \lambda\langle u,u\rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית})\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle T(u),u\rangle &= \langle u,\bar{T}(u)\rangle && (\ u \text{ הגדרה של העתקה צמודה}\ ) \\ &= \langle u,\mu u\rangle && (\ \bar{T} \text{ וקטור עצמי של } u) \\ &= \bar{\mu}\langle u,u\rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית})\ .\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\langle u,u\rangle-\bar{\mu}\langle u,u\rangle=0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda-\bar{\mu})\langle u,u\rangle=0\ .$$

u וקטור עצמי לכן $u\neq\bar{0}$ לכן $\langle u,u\rangle\neq 0$ לכן $(\lambda-\bar{\mu})=0$ לכן $\lambda=\bar{\mu}$.

שאלה 5 (25 נקודות)

א) (10 נקודות) T העתקה נורמלית. לפיכך לפי משפט הפירוק הספקטרלי:

$$[T]\cdot a=\lambda_1 P_{V_{\lambda_1}}(a)+\lambda_2 P_{V_{\lambda_2}}(a)+\lambda_3 P_{V_{\lambda_3}}(a)\ .$$

לכן $P_{V_{\lambda_3}}(a)=a-P_{V_{\lambda_1}}(a)-P_{V_{\lambda_2}}(a)$

$$[T]\cdot a=\lambda_1 P_{V_{\lambda_1}}(a)+\lambda_2 P_{V_{\lambda_2}}(a)+\lambda_3\Big(a-P_{V_{\lambda_1}}(a)-P_{V_{\lambda_2}}(a)\Big)\ .$$

$$P_{V_{\lambda_1}}(a)=\frac{\langle a,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1=\frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\ .$$

$$P_{V_{\lambda_2}}(a)=\frac{\langle a,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2=\frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{3}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

$$[T]\cdot a=(-4)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+2\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}.$$

לפיכך $T(a)=2+3x-2x^2$.

ב) (5 נקודות)

לפיכך לפי משפט הפירוק הספקטרלי:

$$[T]^4\cdot a=\lambda_1^4P_{V_{\lambda_1}}(a)+\lambda_2^4P_{V_{\lambda_2}}(a)+\lambda_3^4P_{V_{\lambda_3}}(a).$$

לכן $P_{V_{\lambda_3}}(a)=a-P_{V_{\lambda_1}}(a)-P_{V_{\lambda_2}}(a)$

$$[T]^4\cdot a=\lambda_1^4P_{V_{\lambda_1}}(a)+\lambda_2^4P_{V_{\lambda_2}}(a)+\lambda_3^4\left(a-P_{V_{\lambda_1}}(a)-P_{V_{\lambda_2}}(a)\right).$$

$$[T]^4\cdot a=(-4)^4\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+(-1)^4\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+2^4\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-119\\15\\137\end{pmatrix}.$$

לפיכך $T^4(a)=-119+15x+137x^2$.

ג) (5 נק') טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$.

$\bar{A}=A$ לכן A צמודה לעצמה.

$\bar{B}=B$ אז B צמודה לעצמה.

$$AB=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

$$\overline{AB}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\neq AB.$$

ד) (5 נק') טענה נכונה.

$$\overline{A+B}=\bar{A}+\bar{B}=A+B.$$