

עבודה עצמית 4

שאלה 1

חשבו את המטריצה ההפוכה של A ובדקו כי מתקיים $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \quad (\text{א})$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} \quad (\text{ב})$$

(ג)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ד})$$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 0 \\ -5 & 9 & 1 \\ -4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{ה})$$

$$(\text{ו}) \quad \left. \begin{array}{l} -5x + 8y = 1 \\ -5x + 9y + z = 2 \\ -4x + 7y + 2z = 3 \end{array} \right\} \text{פתרו את המערכת בעזרת סעיף ד.}$$

שאלה 2 פתרו את המשוואות המטריציאליות הבאות:

(א)

$$A \cdot X = B, \quad A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -13 & -9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(ב)

$$A \cdot X = B, \quad A = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -11 & 5 & -15 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(ג)

$$A \cdot X = B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

(ד)

$$X \cdot A = B, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -9 & 9 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

(ה)

$$A \cdot X \cdot B = C, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 12 \end{pmatrix}$$

שאלה 3

נתונות המטריצות:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

פתרו את המשוואות הבאות:

(א) $AX = C$

(ב) $XB = C$

(ג) $AXB = C$

שאלה 4 נתונה מטריצות $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך ש- A ו- C הפיכות. נתון ש- $BC = C(2A - 3X)A$ כאשר $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$. מצאו את X .

שאלה 5

עבור אילו ערכים של הפרמטר k המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 4-k & 3 \\ 3+k & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -k \end{pmatrix}$ הפיכה?

שאלה 6

מצאו את המטריצה A המקיימת $(2I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

שאלה 7

תהי $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ המקיימת

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

מצאו את A .

שאלה 8

תהינה $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצות הפיכות. מצאו את ההופכית של $7B^{-1}CA^{-1}B^2$.

שאלה 9

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

(א) מצאו את A^{-1} .

(ב) מצאו $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ כך ש- $AXA + A = A^2$.

שאלה 10 תהינה $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. הוכיחו או הפריכו:

- (א) אם A הפיכה ו- $BA = CA$ אז $B = C$.
- (ב) אם $AB = AC$ אז $B = C$.
- (ג) אם $AB = 0$ אז A ו- B אינן הפיכות.
- (ד) אם $AB = 0$ ו- $A \neq 0$ אז B איננה הפיכה.
- (ה) אם AB הפיכה אז A ו- B הפיכות.
- (ו) אם A הפיכה אז AB הפיכה.
- (ז) אם A הפיכה ו- B הפיכה אז $A + B$ הפיכה.
- (ח) אם A הפיכה ו- B לא הפיכה אז $A + B$ לא הפיכה.
- (ט) תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ויהי $f(x) = 2x^4 - x^2 + 3x - 2$ פולינום כך ש- $f(A) = 0$. אזי A הפיכה.
- (י) אם A הפיכה אז $A + A^t$ הפיכה.

שאלה 11 הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. אם A הפיכה ו- $A + B$ הפיכה אז

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(A + B)^{-1}.$$

שאלה 12 תהי $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. אומרים כי A מטריצה סטוקסטית אם הסכום של האיברים בכל עמודה שווה 1.

הוכיחו כי המכפלה של כל שתי מטריצות סטוקסטיות שווה למטריצה סטוקסטית.

שאלה 13 נניח ש- $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה המקדמים, ו- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$ ווקטור המשתנים של המערכת

הוכיחו: אם A הפיכה אז הפתרון היחיד למערכת $AX = 0$ הוא $X = 0$ (ווקטור האפס).

פתרונות

שאלה 1

(א)

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{-1}{7} \cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow -R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-4}{7} & \frac{-1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{array} \right) \\
 A^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{-4}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(ב)

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 2 & 1 & 0 \\ -9 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 3 \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_1 \rightarrow -\frac{1}{3} \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right) \\
 A^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{-2}{3} \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(ג)

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow 4 \cdot R_1 + 5 \cdot R_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -25 & -7 & 4 & 0 & 5 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow 7 \cdot R_3 + 25 \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2 \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -7 & -49 & -70 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{7} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 5 \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & -3 & -4 & -35 & -50 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 3 \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 5 & 40 & 55 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{5} \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 8 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 11 \\ -1 & -7 & -10 \\ 3 & 25 & 35 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 0 \\ -5 & 9 & 1 \\ -4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad (ד)$$

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow[R_3 \rightarrow 4 \cdot R_1 - 5 \cdot R_3]{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -10 & 4 & 0 & -5 \end{array} \right) \\ \\ \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 3 \cdot R_2} & & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 3 & -5 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_2 \rightarrow 7 \cdot R_2 + R_3} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -6 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 3 & -5 \end{array} \right) \\ \\ \xrightarrow{R_1 \rightarrow 7R_1 - 8R_2} & & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -35 & 0 & 0 & 55 & -80 & 40 \\ 0 & 7 & 0 & -6 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 3 & -5 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{5} \cdot R_1} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -7 & 0 & 0 & 11 & -16 & 8 \\ 0 & 7 & 0 & -6 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 3 & -5 \end{array} \right) \\ \\ \xrightarrow[R_3 \rightarrow \frac{-1}{7} \cdot R_3]{R_1 \rightarrow \frac{-1}{7} \cdot R_1, R_2 \rightarrow \frac{1}{7} \cdot R_2} & & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-11}{7} & \frac{16}{7} & \frac{-8}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-6}{7} & \frac{10}{7} & \frac{-5}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{5}{7} \end{array} \right) & & \\ \\ & & A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-11}{7} & \frac{16}{7} & \frac{-8}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{10}{7} & \frac{-5}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -11 & 16 & -8 \\ -6 & 10 & -5 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(ה) \quad \left. \begin{array}{rcl} -5x + 8y & = & 1 \\ -5x + 9y + z & = & 2 \\ -4x + 7y + 2z & = & 3 \end{array} \right\} \text{פתרו את המערכת בעזרת סעיף ד.}$$

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{-11}{7} & \frac{16}{7} & \frac{-8}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{10}{7} & \frac{-5}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{7} \\ \frac{-1}{7} \\ \frac{8}{7} \end{pmatrix} . \\ x &= -\frac{3}{7}, \quad y = -\frac{1}{7}, \quad z = \frac{8}{7} . \end{aligned}$$

שאלה 2

(א)

$$A \cdot X = B, \quad A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -13 & -9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

לכן

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -13 & -9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(ב)

$$A \cdot X = B, \quad A = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -11 & 5 & -15 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

לכן

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 & 5 & -15 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(ג)

$$A \cdot X = B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 3 & -5 & 7 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

לכן

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 3 & -5 & 7 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ד)

$$X \cdot A = B, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -9 & 9 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = B \cdot A^{-1}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \\ -12 & 28 & 27 \end{pmatrix}.$$

לכן

$$X = \begin{pmatrix} -9 & 9 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \\ -12 & 28 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(ה)

$$A \cdot X \cdot B = C, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 12 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & 2 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & 2 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

שאלה 3

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

פתרו את המשוואות הבאות:

(א)

$$AX = C \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot C$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -\frac{13}{2} & \frac{13}{2} \end{pmatrix}.$$

(ב)

$$XB = C \quad \Rightarrow \quad X = C \cdot B^{-1}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

(ג)

$$AXB = C \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -35 & 25 \\ -\frac{91}{2} & \frac{65}{2} \end{pmatrix}.$$

שאלה 4

$$BC = C(2A - 3X)A \quad \Rightarrow \quad C^{-1}BC = (2A - 3X)A \quad \Rightarrow \quad C^{-1}BCA^{-1} = 2A - 3X$$

$$\Rightarrow C^{-1}BCA^{-1} - 2A = -3X \quad \Rightarrow \quad X = -\frac{1}{3}(C^{-1}BCA^{-1} - 2A).$$

שאלה 5 תהי $A = \begin{pmatrix} 0 & 4-k & 3 \\ 3+k & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -k \end{pmatrix}$

$$\det(A) = -(k-6)(k+2)(k+3).$$

$|A| \neq 0$ אם $k \neq 6, -2, -3$. לכן המטריצה הפיכה לכל $k \neq 6, -2, -3$.

שאלה 6

$$\begin{aligned} (2I - A)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2I - A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ A &= 2I - \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

שאלה 7 נגדיר את המטריצות

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

אז

$$A \cdot B = C, \quad A = C \cdot B^{-1}.$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

לכן

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

שאלה 8 תהי $X = (7B^{-1}CA^{-1}B^2)^{-1}$ אז

$$X \cdot 7B^{-1}CA^{-1}B^2 = I$$

$$X \cdot B^{-1}CA^{-1}B^2 = \frac{1}{7} \cdot I$$

$$X \cdot B^{-1}CA^{-1} = \frac{1}{7}B^{-2}$$

$$X \cdot B^{-1}C = \frac{1}{7}B^{-2} \cdot A$$

$$X \cdot B^{-1} = \frac{1}{7}B^{-2} \cdot A \cdot C^{-1}$$

$$X = \frac{1}{7}B^{-2} \cdot A \cdot C^{-1} \cdot B.$$

שאלה 9 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

(א) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ב)

$$AXA + A = A^2 \Rightarrow AX + I = A \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (A - I) = I - A^{-1}$$

לכן

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 10

(א) אם A הפיכה ו- $BA = CA$ אז $B = C$.

טענה נכונה. הוכחה:

A הפיכה לכן קיימת A^{-1} . נכפיל מצד ימין ב- A^{-1} :

$$B \cdot A \cdot A^{-1} = C \cdot A \cdot A^{-1} \Rightarrow B = C.$$

(ב) אם $AB = AC$ אז $B = C$.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$B \neq C, AB = AC = 0$$

(ג) אם $AB = 0$ אז A ו- B אינן הפיכות.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = 0 \text{ ו- } B \text{ הפיכה.}$$

(ד) אם $AB = 0$ ו- $A \neq 0$ אז B איננה הפיכה.

טענה נכונה. הוכחה:

נוכיח בדרך השלילה. נניח ש- $A \cdot B = 0$ ו- $A \neq 0$ ו- B הפיכה.

אז קיימת B^{-1} . נכפיל את $AB = 0$ מצד ימין ב- B^{-1} :

$$A \cdot B \cdot B^{-1} = 0 \cdot B^{-1} \Rightarrow A \cdot I = 0 \Rightarrow A = 0,$$

בסתירה דכך ש- $A \neq 0$.

(ה) אם AB הפיכה אז A ו- B הפיכות.

טענה נכונה. הוכחה:

AB הפיכה $\Leftrightarrow |AB| \neq 0 \Leftrightarrow |A| \cdot |B| \neq 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0$ וגם $|B| \neq 0$. לפיכך A הפיכה וגם B הפיכה.

(ו) אם A הפיכה אז AB הפיכה.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A הפיכה אבל AB לא הפיכה.

(ז) אם A הפיכה ו- B הפיכה אז $A + B$ הפיכה.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + I_{2 \times 2}, \quad B = -I, \quad A + B = I_{2 \times 2} - I_{2 \times 2} = 0_{2 \times 2}.$$

$$|A| = |I| = 1$$

$$|B| = |-I| = (-1)^2 |I| = 1$$

$$|A + B| = 0$$

ז"א A הפיכה, B הפיכה, $A + B$ לא הפיכה.

(ח) אם A הפיכה ו- B לא הפיכה אז $A + B$ לא הפיכה.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|A + B| = 2, |B| = 0, |A| = 1$$

ז"א A הפיכה, B לא הפיכה, $A + B$ הפיכה.

(ט) תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ויהי $f(x) = 2x^4 - x^2 + 3x - 2$ פולינום כך ש- $f(A) = 0$. אזי A הפיכה.

טענה נכונה. הוכחה:

לפי הנתון,

$$f(A) = 2A^4 - A^2 + 3A - 2I = 0 \Rightarrow A \cdot (2A^3 - A + 3I) = 2I \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} (2A^3 - A + 3I)$$

ז"א A^{-1} קיימת לכן A הפיכה.

י) אם A הפיכה אז $A + A^t$ הפיכה.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A + A^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$A \Leftarrow |A| = 1$ הפיכה.
 $A + A^t \Leftarrow |A + A^t| = 0$ לא הפיכה.

שאלה 11 הטענה נכונה. הוכחה:

נכפיל מצד ימין ב- $A + B$:

$$(A + B)^{-1}(A + B) = A^{-1}(A + B) - A^{-1}B(A + B)^{-1}(A + B) = I_{n \times n} + A^{-1}B - A^{-1}BI_{n \times n} = I_{n \times n}.$$

שאלה 12

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

$$a_1 a_2 + b_1 c_2 + c_1 a_2 + d_1 c_2 = a_2(a_1 + c_1) + c_2(b_1 + d_1) = a_2 + c_2 = 1,$$

$$a_1 b_2 + b_1 d_2 + c_1 b_2 + d_1 d_2 = b_2(a_1 + c_1) + d_2(b_1 + d_1) = b_2 + d_2 = 1.$$

שאלה 13 נוכיח דרך השלילה. נניח ש A הפיכה ו קיים פתרון $X \neq 0$.
 A הפיכה אז A^{-1} קיימת.

$$AX = 0 \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1} \cdot 0 \Rightarrow IX = 0 \Rightarrow X = 0$$

בסתירה לכך ש- $X \neq 0$.