עבודה עצמית אינטגרלים קווים

שאלה 1 (אינטגרל קוו מסוג ראשון)

חשבו את האינטגרלים הבאים כאשר המסלול הוא המצולע בעל הקדקודים הנתונים:

א)

$$\int_L (x+y)\,dl \ , \qquad A(0,0),\ B(1,1),\ C(1,0)\ .$$

ב)

$$\int_L xy\,dl \ , \qquad A(0,0),\ B(0,1),\ C(1,0)\ .$$

שאלה 2 (אינטגרל קוו מסוג ראשון)

חשבו את האינטגרל הקווי לפי חלק הקו $y=\gamma(x)$ המתאים לקטע הנתון:

א)

$$\int_L x\,dl \ , \qquad , y=\frac{x^2}{2},\ 0\le x\le 2\ .$$

ב)

$$\int_L \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}\,dl \ , \qquad y=\ln x,\ 1\le x\le 1\ .$$

ג)

$$\int_L y^2\,dl \ , \qquad x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi\ .$$

שאלה 3 (אינטגרל קוו מסוג שני)

חשבו את האינטגרלים הבאים בשתי דרכים:

1) ללא שימוש במשפט גרין ו-

2) בעזרת משפט גרין.

והשוו את התוצאות.

א)

$$\oint \frac{y}{x+2}dx+\frac{x}{y^2+1}dy \ , \qquad A(1,0),\ B(0,1),\ C(-1,0),\ D(0,-1)\ .$$

ב)

$$\oint (x-y)^2 dx + xy dy \ , \qquad A(1,0),\ B(1,1),\ C(0,1)\ .$$

ג)

$$\oint x\, dy \ , \qquad A(0,0),\ B(2,2),\ C(4,2),\ D(5,0)\ .$$

ד)

$$\oint (xy^2+y^2)\, dx + y(x+1)^2 dy \ , \qquad A(1,1),\ B(2,1),\ C(2,4)\ .$$

שאלה 4 (שימוש באינטגרל קווי לחישוב שטחים)

הוכיחו ששטחה S על הצורה החסומה ע"י הקו הסגור L ניתן לחשב בעזרת הנוסחה:

א)

$$S = \left| \oint_L x\, dy \right| .$$

ב)

$$S = \left| \oint_L y\, dx \right| .$$

ג)

$$S = \frac{1}{2} \left| \oint_L x\, dy - y\, dx \right| .$$

שאלה 5 (שימוש באינטגרל קווי לחישוב שטחים)

שרטטו את הצורה החסומה ע"י הקו הסגור הנתון וחשבו את השטח ע"י אחת מהנוסחאות מהשאלה הקודמת:

א)

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t \ , \qquad 0 \le t \le 2\pi\ .$$

ב)

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t \ , \qquad 0 \le t \le 2\pi\ .$$

ג)

$$x = a\left(2\cos t - \cos(2t)\right), \ \ y = a\left(2\sin t - \sin(2t)\right) \ \ , \qquad 0 \le t \le 2\pi \ .$$

שאלה 6 (30 נקודות)

א) (15 נקודות)

חשבו אתצ האינטגרל

$$\oint_L \frac{y}{x}\,dx + xy\,dy$$

לאורך שפת המשולש עם קודקודים $A(1,0)$, $B(2,0)$, $C(1,2)$.

ב) (15 נקודות)

חשבו אתצ האינטגרל

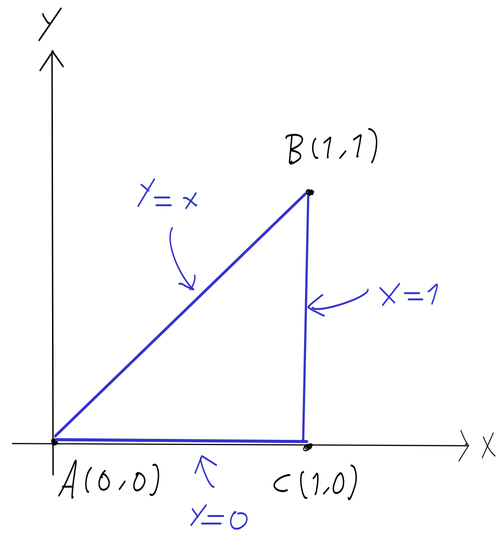
$$\oint_L (x+y)\ dx + \left(x^2 - y\right)\ dy$$

לאורך שפת המשולש ABC (בכיוון החיובי) כאשר $A(0,0)$, $B(0,2)$, $C(2,0)$.

פתרונות

שאלה 1

א)



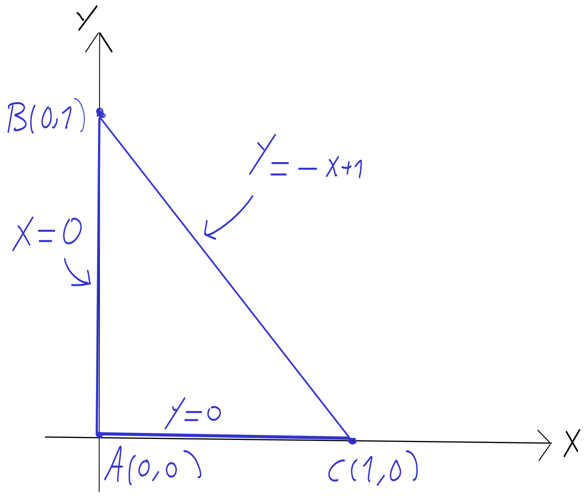
$$\int_{AB} (x+y)dl = \int_0^1 2x\sqrt{1+1^2}dx = 2\sqrt{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \sqrt{2}\ .$$

$$\int_{AC} (x+y)dl = \int_0^1 x\sqrt{1+0^2}dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ .$$

$$\int_{CB} (x+y)dl = \int_0^1 (1+y)\sqrt{1^2+0^2}dy = \left[y+\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\ .$$

$$\int (x+y)dl = \int_{AC} (x+y)dl + \int_{CB} (x+y)dl + \int_{BA} (x+y)dl = \sqrt{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2} = \sqrt{2}+2\ .$$

ב)



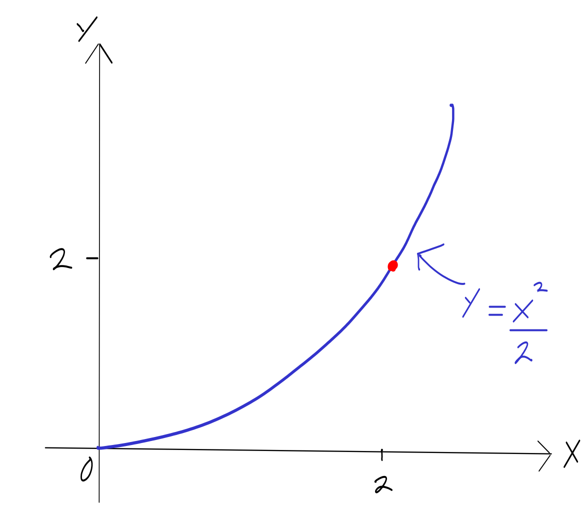
$$\int_{AB} xy\,dl = 0\ .$$

$$\int_{AC} xy\,dl = 0\ .$$

$$\int_{BC} xy = \int_0^1 \left(-x^2+x\right)\sqrt{1+(-1)^2}\,dx = \sqrt{2}\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}\cdot\sqrt{2}\ .$$

שאלה 2

א)



$$\int_L x\,dl\ , \qquad L=\left\{y=\frac{x^2}{2}\ \middle|\ 0\le x\le 2\right\}\ .$$

$$\begin{aligned}\int_L x\,dl &= \int_0^2 x\sqrt{1+x^2}dx\\ &=\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}d\left(1+x^2\right)\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[\left(1+x^2\right)^{3/2}\right]_0^2\\ &=\frac{1}{3}\left[(5)^{3/2}-1\right]\\ &=\frac{1}{3}\left(\sqrt{125}-1\right)\ .\end{aligned}$$

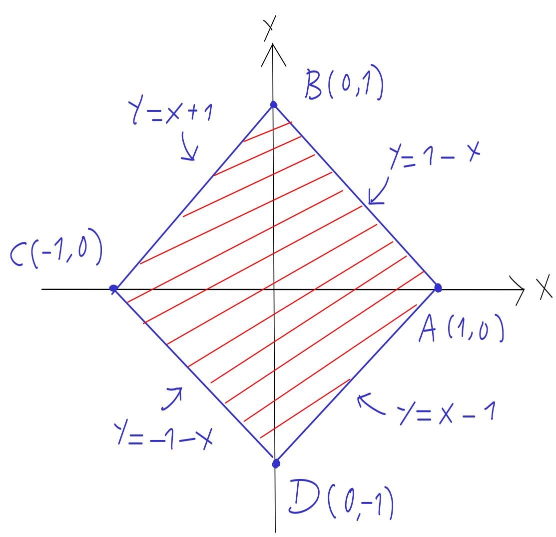
$.\frac{2}{3}\left(\sqrt{125}-1\right)$

ב) .1

ג) $.\frac{108\sqrt{2}}{15}\cdot a^3$

שאלה 3

א)



$$\oint \frac{y}{x+2}dx+\frac{x}{y^2+1}dy=\oint Pdx+Qdy$$

$$P=\frac{y}{x+2}\ ,\quad Q=\frac{x}{y^2+1}\ ,\quad P'_y=\frac{1}{x+2}\ ,\quad Q'_x=\frac{1}{y^2+1}\ .$$

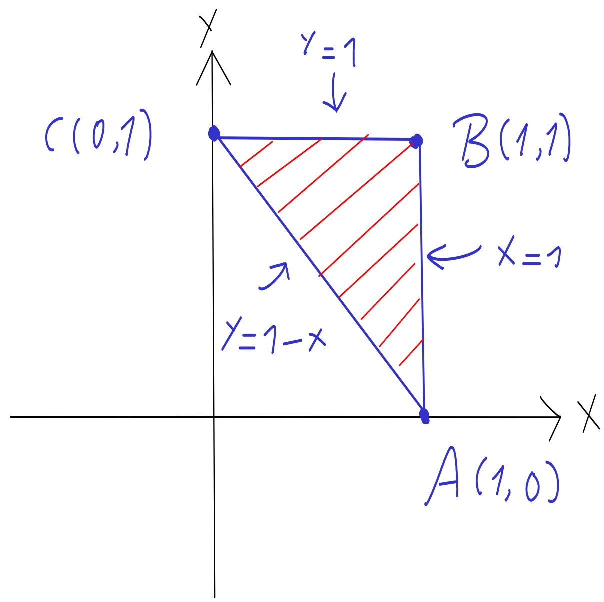
לפי נוסחת גרין:

$$\begin{aligned}\oint Pdx+Qdy&=\iint\limits_D \left(Q'_x-P'_y\right)\\
&=\iint\limits_{D_1}\left(\frac{1}{y^2+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\iint\limits_{D_2}\left(\frac{1}{y^2+1}-\frac{1}{x+2}\right)\\
&=\int_{-1}^{0}dx\int_{-(1+x)}^{1+x}dy\left(\frac{1}{y^2+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\int_0^1 dx\int_{-(1-x)}^{1-x}dy\left(\frac{1}{y^2+1}-\frac{1}{x+2}\right)\end{aligned}$$

באינטגרל הראשון נציב $t=-x$, $dt=-dx$

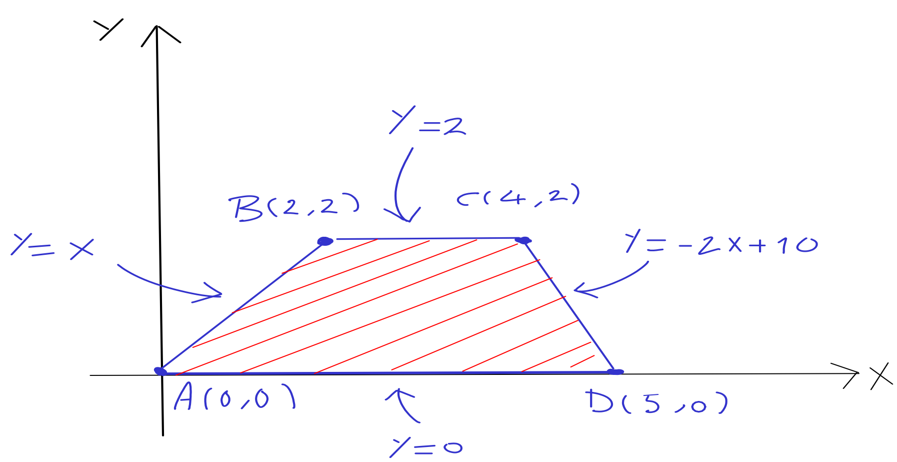
$$\begin{aligned}&\int_{t=1}^{t=0}(-dt)\int_{-(1-t)}^{1-t}dy\left(\frac{1}{y^2+1}-\frac{1}{-t+2}\right)+\int_0^1 dx\int_{-(1-x)}^{1-x}dy\left(\frac{1}{y^2+1}-\frac{1}{x+2}\right)\\
&=\int_{t=0}^{t=1}dt\int_{-(1-t)}^{1-t}dy\left(\frac{1}{y^2+1}-\frac{1}{-t+2}\right)+\int_0^1 dx\int_{-(1-x)}^{1-x}dy\left(\frac{1}{y^2+1}-\frac{1}{x+2}\right)\\
&=\int_0^1 dx\int_{-(1-x)}^{1-x}dy\left(\frac{2}{y^2+1}-\frac{1}{-x+2}-\frac{1}{x+2}\right)\\
&=\int_0^1 dx\left[2\arctan(y)-\frac{y}{-x+2}-\frac{y}{x+2}\right]_{-(1-x)}^{1-x}\\
&=\int_0^1 dx\left[2\arctan(1-x)-\frac{1-x}{-x+2}-\frac{1-x}{x+2}-2\arctan(-(1-x))+\frac{-(1-x)}{-x+2}+\frac{-(1-x)}{x+2}\right]\\
&=\int_0^1 dx\left[4\arctan(1-x)-\frac{2(1-x)}{-x+2}-\frac{2(1-x)}{x+2}\right]\\
&=\int_0^1 dx\left[4\arctan(1-x)-2+\frac{2}{-x+2}+2-\frac{6}{x+2}\right]\\
&=\int_0^1 dx\left[4\arctan(1-x)+\frac{2}{-x+2}-\frac{6}{x+2}\right]\\
&=\left[-4(1-x)\arctan(1-x)+4\cdot\frac{1}{2}\ln\left((1-x)^2+1\right)-2\ln(2-x)-6\ln(x+2)\right]_0^1\\
&=\left[-6\ln 3+4\cdot\frac{\pi}{4}-2\ln 2+2\ln 2+6\ln 2\right]\\
&=\left[-6\ln 3+\pi+\ln 2^6\right]\\
&=\left[-6\ln 3+\pi+\ln 64\right]\ .\end{aligned}$$

ב)



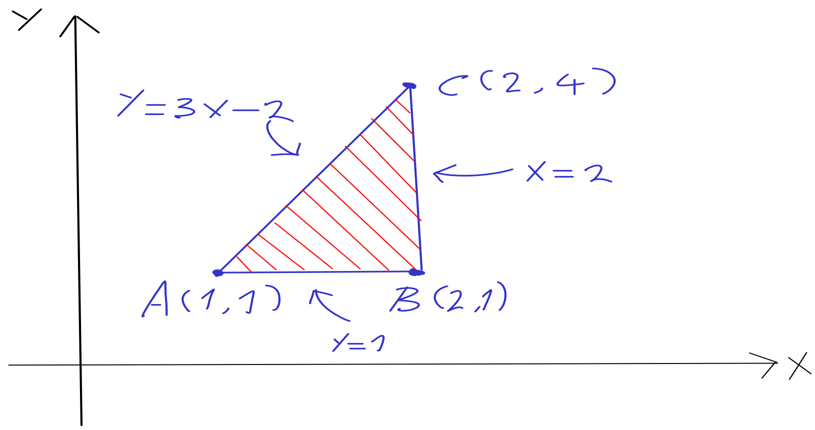
$\frac{1}{3}$

ג)



7

ד)



0

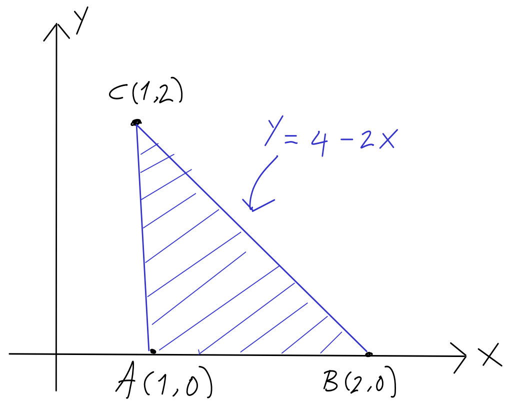
שאלה 5

א) $ab\pi$

ב) $\frac{3a^2\pi}{8}$

ג) $\frac{108}{15} \cdot \sqrt{2} \cdot a^3$

שאלה 6



א)

נוסחת גריו:

$$
\begin{aligned}
\oint_L \frac{y}{x}\,dx + xy\,dy &= \iint_D dx\,dy\left[(xy)'_x - \left(\frac{y}{x}\right)'_y\right] \\
&= \int_1^2 dx \int_0^{-2x+4} dy\left[y - \frac{1}{x}\right] \\
&= \int_1^2 dx \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x}\right]_0^{-2x+4} \\
&= \int_1^2 dx \left[\frac{1}{2}(-2x+4)^2 - \frac{(-2x+4)}{x}\right] \\
&= \int_1^2 dx \left[2x^2 - 8x + 8 + 2 - \frac{4}{x}\right] \\
&= \int_1^2 dx \left[2x^2 - 8x + 10 - \frac{4}{x}\right] \\
&= \left[\frac{2x^3}{3} - 4x^2 + 10x - 4\ln x\right]_1^2 \\
&= \frac{16}{3} - 16 + 20 - 4\ln 2 - \frac{2}{3} + 4 - 10 \\
&= \frac{16}{3} - 2 - 4\ln 2 - \frac{2}{3} \\
&= \frac{8}{3} - 4\ln 2\ .
\end{aligned}
$$

$.\frac{8}{3} - 4\ln 2 \approx -0.1$

ב) $.\frac{2}{3}$