עבודה 6: משפט קיילי המילטון, פולינום מינימל #2

שאלה 1 נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ חשבו את A^{-2}, A^{12} באמצעות משפט קיילי המילטון.

שאלה 2 עבור המטריצות הבאות מצאו את הפולינום האופייני והמינימלי

א) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

ב) $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -3 \\ -6 & -1 & 3 \\ 12 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

ג) $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

ד) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

שאלה 3 עבור אילו ערכי k המטריצה $\begin{pmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ -k-3 & k & k+3 \\ -k-3 & k & k+3 \end{pmatrix}$ אינה לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

שאלה 4 הוכיחו כי לכל מטריצות דומות A, B ולכל פולינום f קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $f(B) = P^{-1} \cdot f(A) \cdot P$.

שאלה 5 נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. מצאו את A^{-1} באמצעות משפט קיילי המילטון.

שאלה 6 תהי A מטריצה הפיכה מסדר $n\times n$. הוכיחו כי A^{-1} היא צירוף לינארי של המטריצות $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$.
(רמז: היעזרו במשפט קיילי המילטון)

שאלה 7 תהי A מטריצה ריבועית כך שהפולינום המינימלי שלה הינו $m_A(x) = (x-1)^2$. יהי $f(x) = x^2 + 4x + 3$. הוכיחו כי מטריצה $f(A)$ הפיכה.

שאלה 8 נתון אופרטור לינארי $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ שמוגדר ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+y+2z\\2x+y+3z\\x+z\end{pmatrix}\ .$$

בדקו אם התת מרחב $W=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ הוא T שמור.

שאלה 9

תהי A מטריצה המקיימת $A^2=A$.

א) מהן האפשרויות לפולינום המינימלי של A ולערכים עצמיים של A.

ב) הוכיחו כי הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים לינאריים.

שאלה 10 הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א) אם $m_A(x)=m_B(x)$ אז מטריצות A ו- B דומות.

ב) אם $m_A(x)=m_B(x)$ אז $p_A(x)=p_B(x)$.

שאלה 11 הוכיחו: לכל מטריצה $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$A^2\in\text{span}\{I,A\}\ .$$

שאלה 12

א) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

1) מצאו את הפולינום האופייני והמינימלי של מטריצה A.

2) מצאו את הערכים העצמיים והמרחבים העצמיים של A.

3) האם המטריצה לכסינה ? אם כן, מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P שך ש: $D=P^{-1}\cdot A\cdot P$. אם לא, הסבירו זאת.

ב) תהי A מטריצה הפיכה בעלת ערך עצמי $\alpha\in\mathbb{R}$. יהי u וקטור עצמי של A השייך לערך העצמי α.

1) הוכיחו ש- u הינו וקטור עצמי של A^{-1} ומצאו את הערך העצמי השייך ל- u.

2) הוכיחו ש- u הינו וקטור עצמי של A^2 ומצאו את הערך העצמי השייך ל- u.

שאלה 13 נתונה המטריצה

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

הוכיחו ש:

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\left(5I+5A-5A^2+A^3\right) .$$

שאלה 14

א) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. חשבו באמצעות משפט קיילי המילטון את

1) A^{15}

2) A^{-1}

ב) תהי A מטריצה ריבועית כך שהפולינום המינימלי שלה הינו $m_A(x)=(x+1)^2$. יהי $f(x)=x^2-2x+3$. הוכיחו כי מטריצה $f(A)$ הפיכה.

תשובות

<u>שאלה 1</u> $p_A(x) = 1 - x^3$. לפי משפט קיילי המילטון:

$$p_A(A) = I - A^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad A^3 = I \quad \Rightarrow \quad A^2 \cdot A = I \quad \Rightarrow \quad A^{-2} = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

$$A^3 = I \qquad \Rightarrow \qquad A^{12} = (A^3)^4 = I^4 = I \ .$$

$$A^{-2} = A^3 \cdot A^{-2} = A \ .$$

<u>שאלה 2</u>

א) $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_A(x) =& |A - xI| = \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 0 \\ -4 & -1-x & 0 \\ 4 & -8 & -2-x \end{vmatrix} \\ =&(-2-x)\left((3-x)(-1-x)+4\right) \\ =&(-2-x)\left(-3+x-3x+x^2+4\right) \\ =&(-2-x)\left(1-2x+x^2\right) \\ =&-(x+2)(x-1)^2 \ . \end{aligned}$$

לכן $p_A(x) = (x-1)^2(x+2)$.

האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$(x+2)(x-1) \ , \qquad (x+2)(x-1)^2 \ .$$

נבדוק $(x+2)(x-1)$:

$$(A+2I)(A-I) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & -3 \end{pmatrix} \neq 0$$

לכן $m_A(x) = -(x-1)^2(x+2)$.

ב) $$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -3 \\ -6 & -1 & 3 \\ 12 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
p_A(x) =&|A-xI| = \begin{vmatrix} 8-x & 3 & -3 \\ -6 & -1-x & 3 \\ 12 & 6 & -4-x \end{vmatrix} \\
=&(8-x)\left((-1-x)(-4-x)-18\right)-3\left(-6(-4-x)-36\right)-3\left(-36+12(1+x)\right) \\
=&(8-x)\left(4+4x+x+x^2-18\right)-3\left(24+6x-36\right)-3\left(-36+12+12x\right) \\
=&(8-x)\left(5x+x^2-14\right)-3\left(6x-12\right)-3\left(-24+12x\right) \\
=&(8-x)(x+7)(x-2)-18\left(x-2\right)-36\left(x-2\right) \\
=&(x-2)\left((8-x)(x+7)-54\right) \\
=&(x-2)\left(8x-x^2+56-7x-54\right) \\
=&(x-2)\left(x-x^2+2\right) \\
=&-(x-2)(x-2)(x+1) \\
=&-(x+1)(x-2)^2 \ .
\end{aligned}$$

לכן $p_A(x)=(x-2)^2(x+1)$.

האפשרויות דפולינום המינימלי הן

$$(x-2)(x+1) \ , \qquad (x-2)^2(x+1)$$

נבדוק $(x-2)(x+1)$:

$$(A-2I)(A+I) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -6 & -3 & 3 \\ 12 & 6 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 3 & -3 \\ -6 & 0 & 3 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $m_A(x)=(x-2)(x+1)$.

ג) $$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
p_A(x) =&|A-xI| = \begin{vmatrix} 5-x & -6 & -6 \\ -1 & 4-x & 2 \\ 3 & -6 & -4-x \end{vmatrix} \\
=&(5-x)\left((4-x)(-4-x)+12\right)+6\left(4+x-6\right)-6\left(6-3(4-x)\right) \\
=&(5-x)\left(-16+x^2+12\right)+6\left(x-2\right)-6\left(-6+3x\right) \\
=&(5-x)\left(x^2-4\right)+6\left(x-2\right)-18\left(x-2\right) \\
=&(5-x)(x+2)(x-2)-12\left(x-2\right) \\
=&(x-2)\left((5-x)(x+2)-12\right) \\
=&(x-2)\left(5x-x^2+10-2x-12\right) \\
=&(x-2)\left(3x-x^2-2\right) \\
=&-(x-2)(x-1)(x-2) \\
=&-(x-2)^2(x-1) \ .
\end{aligned}$$

לכן $p_A(x)=(x-2)^2(x-1)$.

האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$(x-2)(x-1)\ , \qquad (x-2)^2(x-1)$$

נבדוק $(x-2)(x-1)$:

$$(A-2I)(A-I)=\begin{pmatrix}3&-6&-6\\-1&2&2\\3&-6&-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&-6&-6\\-1&3&2\\3&-6&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן $m_A(x)=(x-2)(x-1)$.

ד) $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. המטריצה משולשית עליונה לכן הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x)=(x-2)(x-1)^2\ .$$

האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$(x-2)(x-1)\ , \qquad (x-2)(x-1)^2$$

נבדוק $(x-2)(x-1)$:

$$(A-2I)(A-I)=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן $m_A(x)=(x-2)(x-1)$.

<u>שאלה 3</u>

$A=\begin{pmatrix}k+3&0&0\\-k-3&k&k+3\\-k-3&k&k+3\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}|A-xI|&=\begin{vmatrix}k+3-x&0&0\\-k-3&k-x&k+3\\-k-3&k&k+3-x\end{vmatrix}\\&=(k+3-x)\left((k-x)(k+3-x)-k(k+3)\right)\\&=(k+3-x)\left(k^2+3k-kx-3x-kx+x^2-k^2-3k\right)\\&=(k+3-x)\left(-2kx-3x+x^2\right)\\&=(k+3-x)x\left(x-2k-3\right)\\&=-\left(x-(k+3)\right)x\left(x-(2k+3)\right)\ .\end{aligned}$$

<u>מקרה 1:</u> $k+3=0$.

$$k+3=0 \qquad \Rightarrow \qquad k=-3 \ .$$
$$p_A(x)=x^2(x+3) \ .$$

ערכים עצמיים: $x=0$ מריבוי אלגברי 2, $x=-3$ מריבוי אלגברי 1.

נחשב את המרחב עצמי השייך ל $x=0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הריבוי הגאומטרי של $x=0$ שווה לריבוי האלגברי לכן A לכסינה.

<u>מקרה 2:</u> $k=\dfrac{-3}{2}$.

$$k=\frac{-3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad p_A(x)=x^2\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

ערכים עצמיים: $x=0$ מריבוי אלגברי 2, $x=\frac{3}{2}$ מריבוי אלגברי 1.

נחשב את המרחב עצמי השייך ל $x=0$:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הריבוי הגאומטרי שווה ל- 1, הריבוי האלגברי שווה ל- 2, לכן A לא לכסינה.

<u>מקרה 3:</u> $k+3=2k+3$.

$$k+3=2k+3 \qquad \Rightarrow \qquad k=0 \ .$$
$$p_A(x)=x(x-3)^2 \ .$$

ערכים עצמיים: $x=0$ מריבוי אלגברי 1, $x=3$ מריבוי אלגברי 2.

נחשב את המרחב עצמי השייך ל $x=3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הריבוי הגאומטרי 1, הריבוי האלגברי 2, לכן A לא לכסינה.

<u>מקרה 4:</u> $k\neq -3,\frac{-3}{2},0$.

A לכסינה כי $p_A(x)$ מתפרק לגורמין ליניאריים שונים.

תשובה סופית: A לא לכסינה עבור $k=\frac{-3}{2}$ ו $k=0$.

שאלה 4 A ו- B דומות לכן קיימת P הפיכה כך ש-

$$B = PAP^{-1} \ .$$

לכל i טבעי,

$$\begin{aligned} B^i = \left(PAP^{-1}\right)^i =& \overbrace{\left(PAP^{-1}\right)\left(PAP^{-1}\right)\ldots\left(PAP^{-1}\right)}^{i \text{ איברים}} \\ =& PAP^{-1}\ PAP^{-1}\ldots PAP^{-1} \\ =& PAIAI\ldots IAP^{-1} \\ =& PA\cdot A\cdot\ldots\cdot AP^{-1} \\ =& PA^iP^{-1} \end{aligned} \qquad (*)$$

נניח ש $f(x)$ פולינום מצורה

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k \ .$$

$$\begin{aligned} f(B) =& a_0I + a_1B + a_2B^2 + \ldots + a_kB^k \\ =& a_0P\cdot P^{-1} + a_1PAP^{-1} + a_2\left(PAP^{-1}\right)^2 + \ldots + a_k\left(PAP^{-1}\right)^k \end{aligned}$$

נציב (*) ונקבל

$$\begin{aligned} f(B) =& a_0P\cdot P^{-1} + a_1PAP^{-1} + a_2PA^2P^{-1} + \ldots + a_kPA^kP^{-1} \\ =& P\left(a_0 + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_kA^k\right)P^{-1} \\ =& Pf(A)P^{-1} \ . \end{aligned}$$

שאלה 5

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

$$|A-xI| = \begin{pmatrix}1-x & 2\\ 3 & 4-x\end{pmatrix} = (1-x)(4-x)-6 = x^2-4x-x+4-6 = x^2-5x-2 \ .$$

$p_A(x)=x^2-5x-2$.

$$P_A(A) = A^2-5A-2I=0 \quad\Rightarrow\quad A^2-5A=2I \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\left(A^2-5A\right)=I \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}A\left(A-5I\right)=I$$

$$\Rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{2}\left(A-5I\right) \quad\Rightarrow\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} \ .$$

שאלה 6

נסמן

$$m_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 \ .$$

אז

$$m_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0 \ .$$

A הפיכה לכן $a_0 \neq 0$
(הסבר: נניח ש $a_0 = 0$. אז

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A = A \cdot \left(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_1 I\right) = 0$$

A הפיכה לכן קיימת A^{-1} $\Leftarrow$

$$A^{-1}A \cdot \left(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_1 I\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_1 I = 0 \ .$$

קיבלנו פולינום שמתאפס ע"י A מדרגה קטנה יותר מדרגה של $m_A(x)$. סתירה. לכן $a_0 \neq 0$.)

נכפיל $m_A(x)$ ב- A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot m_A(A) = A^{-1}\left(A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I\right) = A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_1 I + a_0 A^{-1} = 0 \ .$$

לכן

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}A^{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_0}A^{n-2} - \ldots - \frac{a_1}{a_0}I$$

שאלה 7

$$f(x) = x^2 + 4x + 3 = (x-1)^2 + 6x + 2 = m_A(x) + 2(3x+1) \ .$$

לכן

$$f(A) = m_A(A) + 2(3A + I) \ .$$

$m_A(A) = 0$ ו $2(3A+1) \neq 0$ אחרת יהיה פולינום שמתאפס ע"י A מדרגה נמוכה יותר מ- m_A, סתירה. לכן

$$f(A) = 2(3A + I) \ .$$

נניח ש- A מסדר $n \times n$. אז

$$|f(A)| = |2(3A+I)| = \left|6\left(A + \frac{1}{3}I\right)\right| = 6^n \left|I - \left(-\frac{1}{3}A\right)\right| \neq 0$$

כי $-\dfrac{1}{3}$ לא ערך עצמי של A בגלל ש- $-\dfrac{1}{3}$ לא שורש של $m_A(x)$. לכן $|f(A)| \neq 0$ ולכן $f(A)$ הפיכה.

שאלה 8

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+2\\2+3\\1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} \notin W$$

לכן התת מרחב W אינו T -שמור.

שאלה 9

א) נתון: $A^2=A$. נסמן $f(x)=x^2-x=x(x-1)$. לכן $f(A)=0$. פולינום המינימלי של A מחלק כל פולינום המתאפס ע"י A:
$$m_A(x)\mid x(x-1)\ .$$
מכאן האפשרויות ל- $m_A(x)$ הן
$$x\ ,\quad x-1\ ,\qquad x(x-1)\ .$$
האפשרויות לערכים עצמיים של A הן: 0, או 1, או 0 וגם 1.

ב) לכל מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ולכל פולינום $f(x)$ שמתאפס ע"י A, הפולינום האופייני מחלק את $f^n(x)$:
$$p_A(x)\mid f^n(x)\ .$$
לכן כל גורם אי-פריק של $p_A(x)$ מופיע גם ב- $f(x)$. $f(x)$ מתפרק לגורמים ליניאריים, לכן גם $p_A(x)$ מתפרק לגורמים ליניאריים.

שאלה 10

א) דוגמה נגדית:
$$A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\ .$$
A ו- B לא דומות:
$$A-2I=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad \dim\left(\text{Nul}\left(A-2I\right)\right)=3\ .$$
$$B-2I=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad \dim\left(\text{Nul}\left(A-2I\right)\right)=2\ .$$
ז"א הריבוי גאומטרי של הערך עצמי $\lambda=2$ של A, והריבוי גאומטרי של הערך עצמי $\lambda=2$ של B לא זהים, לכן A ו- B לא דומות. אבל ל- A ו- B יש אותו פולינום מינימלי:ז
$$m_A(x)=m_B(x)=(x-2)^2\ .$$

ב) דוגמה נגדית:
$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\ .$$

$$p_A(x) = (x-1)^3(x-2)\ , \qquad p_B(x) = (x-1)^2(x-2)^2\ .$$

$$m_A(x) = (x-1)^2(x-2)\ , \qquad m_B(x) = (x-1)^2(x-2)\ .$$

שאלה 11

לפי משפט קיילי המילטון, לכל $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ מטריצה ריבועית, $p_A(A) = 0$ כאשר $p_A(x)$ הוא הפולינום האופייני של A.

עבור מטריצה 2×2, $p_A(x)$ הוא פולינום מתוקן מסדר 2. נרשום

$$p_A(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + x^2\ .$$

$$\begin{aligned} & p_A(A) = 0 \\ \Rightarrow\quad & \alpha_0 I + \alpha_1 A + A^2 = 0 \\ \Rightarrow\quad & A^2 = -\alpha_0 I - \alpha_1 A \end{aligned}$$

ז"א

$$A^2 \in \text{span}\left\{I, A\right\}\ .$$

מש"ל.

שאלה 12

א) 1)

$$\begin{aligned} |A-\lambda I| =& \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ =&(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ =&(1-\lambda)\left((2-\lambda)(2-\lambda)-1\right) \\ =&(1-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+4-1\right) \\ =&(1-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right) \\ =&(1-\lambda)\left(\lambda-3\right)\left(\lambda-1\right) \\ =&-\left(\lambda-1\right)^2\left(\lambda-3\right) \end{aligned}$$

הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-3)\ .$$

האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$(\lambda-1)(\lambda-3)\ , \qquad (\lambda-1)^2(\lambda-3)\ .$$

נבדוק $(\lambda-1)(\lambda-3)$:

$$(A-I)(A-3I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $m_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-3)$.

2) ערכים עצייים:
$\lambda=1$ מריבוי אלגברי 2
$\lambda=3$ מריבוי אלגברי 1.
נחשב את המרחב עצמי V_1 השייך לערך עצמי 1:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \stackrel{\lambda=1}{=} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון $(x,y,z)=(y-z,y,z)=y(1,1,0)+z(-1,0,1)$ לכן

$$V_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(V_1)=2$, ז"א הריבוי גאומטרי 2.
נחשב את המרחב עצמי V_3 השייך לערך עצמי 3:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \stackrel{\lambda=3}{=} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

פתרון $(x,y,z)=(-y,y,0)=y(-1,1,0)$ לכן

$$V_3=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(V_3)=1$, ז"א הריבוי גאומטרי 1.

3) עבור כל אחד של הערכים עצמיים הריבוי גאומטרי שווה לריבוי אלגברי לכן A לכסינה.

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix} , \qquad P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} .$$

ב) 1)

$$A\cdot u=\alpha u$$

A הפיכה לכן קיימת A^{-1} כך ש- $A\cdot A^{-1}=I$. נכפיל מצד שמאל ב- A^{-1}:

$$A^{-1}\cdot A\cdot u=A^{-1}\cdot(\alpha u) \qquad \Rightarrow \qquad I\cdot u=\alpha A^{-1}\cdot u \qquad \Rightarrow \qquad u=\alpha A^{-1}\cdot u .$$

A הפיכה לכן 0 לא יכול להיות ערך עצמי, כלומר $\alpha\neq 0$. לכן ההופכית $\alpha^{-1}=\dfrac{1}{\alpha}$ קיימת. נכפיל ב- α^{-1} ונקבל

$$\alpha^{-1}u=\alpha^{-1}\cdot\alpha A^{-1}\cdot u \qquad \Rightarrow \qquad A^{-1}\cdot u=\frac{1}{\alpha}u .$$

2)

$$A\cdot u=\alpha u \qquad \Rightarrow \qquad A^2\cdot u=A\cdot(\alpha u)=\alpha A\cdot u=\alpha\cdot\alpha u=\alpha^2 u .$$

שאלה 14

א) 1) הפולינום האופייני של A הוא:

$$|A-xI| = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x\cdot(x^2) - 1\cdot(-1) = 1-x^3 \ .$$

לכן $p_A(x) = A^3 - I$. לפי משפט קיילי-המילטון:

$$p_A(A)=0 \qquad \Rightarrow \qquad A^3-I=0 \qquad \Rightarrow \qquad A^3=I \qquad \Rightarrow \qquad A\cdot A^2=I$$

לכן

$$A^{-1}=A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

2)

$$A^{15} = \left(A^3\right)^5 = I^5 = I \ .$$

ב) נרשום $f(x)$ בצורה

$$f(x) = x^2-2x+3 = x^2+2x+1-4x+2 = (x+1)^2 - 4\left(x-\frac{1}{2}\right) = m_A(x) - 4\left(x-\frac{1}{2}\right) \ .$$

נציב A בפולינום f:

$$f(A) = m_A(A) - 4\left(A-\frac{1}{2}I\right) = -4\left(A-\frac{1}{2}I\right) \ ,$$

בגלל ש- $m_A(A)=0$ כי A מאפסת את הפולינום המינימלי. לכן

$$|f(A)| = (-4)^n \left|A-\frac{1}{2}I\right| \ .$$

$\left|A-\frac{1}{2}I\right| \neq 0$ כי $\frac{1}{2}$ לא ערך עצמי של A בגלל ש $\frac{1}{2}$ לא שורש של הפולינום המינימלי. לכן

$$|f(A)| \neq 0$$

ולכן $f(A)$ הפיכה.