המחלקה למדעי המחשב

ג' באב תשפ"ה 28/07/2025
$09:00 - 12:00$

אלגברה לינארית 2 למדמ"ח

מועד ב'

מרצים: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר .

תשפ"ה סמסטר ב'

השאלון מכיל 6 עמודים (כולל עמוד זה).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (3 עמודים בפורמט $A4$) מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- יש לרשום בראש המחברת איזה שאלות לבדוק.

==

שאלה 1 **25 נקודות**

א) (5 נק') נתונה קבוצה של וקטורים $\{1, 2+3x, x-x^2\}$ במרחב הוקטורי $\mathbb{R}_2[x]$ עם המכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$:

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

מצאו בסיס אורתונורמלי של הקבוצה.

תהיינה $A, B \in \mathbb{F}$ מטריצות ריבועיות. יהי $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A ויהי $m_B(x)$ הפולינום המינימלי של B. בנוסף יהי $p_A(x)$ הפולינום האופייני של A ו- $p_B(x)$ הפולינום האופייני של B.

ב) (5 נק') הוכיחו או הפריכו: אם A ו- B דומות אז $m_A(x) = m_B(x)$.

ג) (5 נק') הוכיחו או הפריכו: אם $m_A(x) = m_B(x)$ אז A ו- B דומות.

ד) (5 נק') הוכיחו או הפריכו: אם $m_A(x) = p_A(x)$ אז A לכסינה.

ה) (5 נק') הוכיחו או הפריכו: אם A לכסינה אז $m_A(x) = p_A(x)$.

שאלה 2

א) (6 נק') תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה הרמיטית. הוכיחו כי כל הערכים העצמיים של A הם ממשיים.

ב) (6 נק') הוכיחו או הפריכו: אם $\lambda \neq 0$ ערך עצמי של $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ (שדה $\mathbb{F}$) אז λ^2 הוא ערך עצמי של AA^t.

ג) (7 נק') הוכיחו או הפריכו: אם $\mathbb{F}$ שדה ומטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה בעלת פולינום אופייני $p_A(x)$ ומטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ המקיימת $p_A(B) = 0$ אז B לכסינה.

ד) (6 נק') הוכיחו או הפריכו: כל שתי מטריצות $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ (שדה $\mathbb{F}$) הפיכות הן דומות זו לזו.

שאלה 3 תהי $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ המטריצה הבאה: $A = \begin{pmatrix} 5i & -1 & i \\ 1 & 5i & 1 \\ i & -1 & 5i \end{pmatrix}$.

א) (17 נק') האם A לכסינה אוניטרית? במקרה ו- A לכסינה אוניטרית, מצאו מטריצה אוניטרית Q ומטריצה אלכסונית D כך ש- $Q^*AQ = D$. נמקו היטב את תשובתכם.

ב) (8 נק') מצאו מטריצה $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ המקיימת:
$|C| = |I+C| = |I-C|$.

שאלה 4 תהי מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך שהפולינום האופייני שלה אינו מתפרק לגורמים ליניאריים מעל $\mathbb{R}$.

א) (6 נק') הוכיחו או הפריכו: A לכסינה מעל $\mathbb{C}$ עבור $n=2$.

ב) (6 נק') הוכיחו או הפריכו: A לכסינה מעל $\mathbb{C}$ עבור $n=4$.

ג) (7 נק') תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו: אם A^2 נורמלית אז A נורמלית.

ד) (6 נק') הוכיחו או הפריכו: אם מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מקיימת $(A-3I)(A+2I)=0$ אז קיים $u \neq 0 \in \mathbb{F}^n$ כך ש- $Au=3u$.

שאלה 5 נגדיר העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ ע"י

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=(-3a+4b+c)+(-2a+2b)x+(2a-3b-c)x^2\ .$$

א) (3 נק') מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית.

ב) (5 נק') האם המטריצה A שמצאתם לכסינה? במידה וכן, מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D שך ש- $P^{-1}AP=D$. במידה ולא, מצאו צורת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP=J$.

נתונה $A,B \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ מטריצות עם פולינומים מינימליים

$$m_A(t)=t^2-3t\ ,\qquad m_B(t)=t^2-6t+9\ .$$

ג) (7 נק') רשמו את כל צורות ז'ורדן האפשריות עבור A ו- B.

ד) (5 נק') כיצד תשתנה התשובה לסעיף א' אם נתון, בנוסף, שהריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 3 הוא 3? וכיצד תשתנה התשובה אם נתון שהריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 3 הוא 4?

ה) (5 נק') האם ייתכן שהמטריצה A סימטרית? האם ייתכן שהמטריצה B סימטרית? נמקו את תשובתכם.

מרחב אוקלידי: מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$.

מרחב אוניטרי: מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$.

הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי V מעל $\mathbb{R}$:
לכל $u, \mathrm{v}, w \in V$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{R}$:

1) סימטריות: $\langle u, \mathrm{v}\rangle = \langle \mathrm{v}, u\rangle$

2) ליניאריות: $\langle u+\mathrm{v}, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle \mathrm{v}, w\rangle$
$\langle \lambda u, \mathrm{v}\rangle = \lambda \langle u, \mathrm{v}\rangle$

3) חיוביות: $\langle u, u\rangle \geq 0.$
$\langle u, u\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$

הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי V מעל $\mathbb{C}$:
לכל $u, \mathrm{v}, w \in V$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{C}$:

1) הרמיטיות: $\langle u, \mathrm{v}\rangle = \overline{\langle \mathrm{v}, u\rangle}$

2) ליניאריות: $\langle u+\mathrm{v}, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle \mathrm{v}, w\rangle$
$\langle \lambda u, \mathrm{v}\rangle = \lambda \langle u, \mathrm{v}\rangle$

3) חיוביות: $\langle u, u\rangle \geq 0$
$\langle u, u\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$

אי-שוויון קושי שוורץ: $|\langle u, \mathrm{v}\rangle| \leq \|u\| \cdot \|\mathrm{v}\|$

אי-שוויון המשולש: $\|u+\mathrm{v}\| \leq \|u\| + \|\mathrm{v}\|$

היטל אורתוגונלי של ווקטור v על תת מרחב בעל בסיס אורתוגונלי $u_1, \ldots, u_n$:

$$P_U(\mathrm{v}) = \frac{\langle \mathrm{v}, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle \mathrm{v}, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 + \cdots + \frac{\langle \mathrm{v}, u_n\rangle}{\|u_n\|^2} u_n \ .$$

תהליך גרם שמידט לבניית בסיס אורתוגונלי:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \mathrm{v}_1 \ , \\
u_2 &= \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \\
u_3 &= \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \\
&\vdots \\
u_n &= \mathrm{v}_n - \frac{\langle \mathrm{v}_n, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_n, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \ldots - \frac{\langle \mathrm{v}_n, u_{n-1}\rangle}{\|u_{n-1}\|^2} u_{n-1} \ .
\end{aligned}$$

$\lambda \in \mathbb{F}$ **ערך עצמי** ו- $u \in \mathbb{F}^n$ **ווקטור עצמי** ($u \neq 0$) של מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ אם: $Au = \lambda u$

$\lambda \in \mathbb{F}$ **ערך עצמי** ו- $u \in V$ **ווקטור עצמי** ($u \neq 0$) של אופרטור $T : V \to V$ אם: $T(u) = \lambda u$

פולינום אופייני של מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$: $p_A(\lambda) = |\lambda I - A|$

מרחב עצמי של מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ששייך לערך עצמי λ הוא כל וקטור $u \in \mathbb{F}^n$ כאשר $u \neq 0$ כך ש:
$$Au = \lambda u \ .$$

מרחב עצמי של אופרטור $T : V \to V$ ששייך לערך עצמי λ הוא כל וקטור $u \in \mathbb{V}$ כאשר $u \neq 0$ כך ש:
$$T(u) = \lambda u \ .$$

בסיס אורתונורמלי:

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. בסיס אורתונורמלי, מסומן $\{b_1, \ldots, b_n\}$, מקיים את התנאי
$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \ , \qquad 1 \leq i, j \leq n \ .$$

כל וקטור $u \in V$ ניתן לרשום בבסיס אורתונורמלי:
$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, b_i \rangle \, b_i$$

סימון חלופי:
$$[u]_B = \begin{pmatrix} \langle u, b_1 \rangle \\ \langle u, b_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_i \rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_n \rangle \end{pmatrix}_B$$

יהי $T : V \to V$ אופרטור. המצרטיצה המייצגת על פי בסיס B היא
$$[T]_B = \begin{pmatrix} \langle T(b_1), b_1 \rangle & \langle T(b_2), b_1 \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_1 \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_1 \rangle \\ \langle T(b_1), b_2 \rangle & \langle T(b_2), b_2 \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_2 \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_i \rangle & \langle T(b_2), b_i \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_i \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_i \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_n \rangle & \langle T(b_2), b_n \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_n \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_n \rangle \end{pmatrix} \ .$$

כלומר האיבר ה- ij של המטריצה המייצגת של T על פי הבסיס B היא . $[T]_{ij} = \langle T(b_j), b_i \rangle$

ההגדרה של אופרטור הצמוד:

אם $T:V\to V$ אופרטור, ו- $u,w\in V$ שני וקטורים כלשהם של V, אזי האופרטור הצמוד של T מוגדר כך שמתקיים

(*1) $$\langle T(u),w\rangle=\langle u,T^*(w)\rangle\ .$$

מההגדרה (*1) נובע:

(*2) $$\langle T^*(u),w\rangle=\langle u,T(w)\rangle$$

נוסחה ל- $T(u)$ ו- $T^*(u)$ במונחי בסיס אורתונורמלי $\{b_1,\cdots,b_n\}$:

(*3) $$T(u)=\sum_{i=1}^n\langle T(u),b_i\rangle\, b_i$$

(*4) $$T^*(u)=\sum_{i=1}^n\langle u,T(b_i)\rangle\, b_i$$

משפט:

(*5) $$T^{**}=T$$

משפט: המטריצה המייצגת של אופרטור צמוד T^* נתונה ע"י

(*6) $$[T^*]=[T]^*$$

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית.

A הרמיטית:	$A=A^*$
A אנטי-הרמיטית:	$A^*=-A$
A אוניטרית:	$AA^*=I=A^*A$
A אורתוגונלית :	$AA^t=I=A^tA$
A נורמלית:	$AA^*=A^*A$

יהי $T:V\to V$ אופרטור מעל מרחב וקטורי V. נסמן המטריצה המייצגת $A=[T]$.

T צמוד לעצמו:	$A=A^*$	$\Leftrightarrow$	$T=T^*$
T אנטי-הרמיטי:	$A^*=-A$	$\Leftrightarrow$	$T^*=-T$
T אוניטרי:	$AA^*=I=A^*A$	$\Leftrightarrow$	$TT^*=I_V=T^*T$
T נורמלי:	$AA^*=A^*A$	$\Leftrightarrow$	$TT^*=T^*T$

מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה Q אוניטרית ומטריצה D אלכסונית כך ש:

$$A=QDQ^*\quad\Leftrightarrow\quad D=Q^*AQ\ .$$

מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אורתוגונלית אם קיימת מטריצה P אורתוגונלית ומטריצה D אלכסונית כך ש:

$$A=PDP^t\quad\Leftrightarrow\quad D=P^tAP\ .$$

פתרונות

שאלה 1

א) (5 נק') נסמן:

$$\mathrm{v}_1 = 1 \ , \quad \mathrm{v}_2 = 2 + 3x \ , \quad \mathrm{v}_3 = x - x^2$$

<u>האלגוריתם של גרם-שמידט:</u>

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = 1 \ .$$

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2, u_1 \rangle = \int_0^1 (2 + 3x)\, dx = \frac{7}{2} \ .$$

$$\|u_1\|^2 = \langle u_1, u_1 \rangle = \int_0^1 (1)\, dx = 1 \ .$$

לכן

$$u_2 = 2 + 3x - \frac{7}{2} = -\frac{3}{2} + 3x \ .$$

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_1 \rangle = \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \frac{1}{6} \ .$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{v}_3, u_2 \rangle &= \int_0^1 (x - x^2) \left(-\frac{3}{2} + 3x \right) \, dx \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}x + 3x^2 + \frac{3}{2}x^2 - 3x^3 \right) \, dx \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}x^2 - 3x^3 \right) \, dx \\
&= -\frac{3}{4} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 =& x - x^2 - \frac{1}{6} - \frac{0}{\|u_2\|^2}\left(-\frac{3}{2}+3x\right) \\ =& x - x^2 - \frac{1}{6} \ . \end{aligned}$$

ב) (5 נק') הטענה נכונה.
הוכחה:

אם A ו- B דונמות אז קיימת מטריצה P הפכיה כך ש- $B=P^{-1}AP \quad \Leftrightarrow \quad A=PBP^{-1}$.
לכל מטריצות A,B דומות ולכל פולינום $f(x)$, מתקיים $f(A)=Pf(B)P^{-1}$ וגם $f(B)=P^{-1}f(A)P$.
מכאן, אם $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A ו- $m_B(x)$ הפולינום המינימלי של B אזי

$$m_B(A)=Pm_B(A)P^{-1}=0 \ , \qquad m_A(B)=Pm_B(B)P^{-1}=0 \ ,$$

כלומר

$$m_B(A)=0 \quad \text{ו-} \quad m_A(B)=0 \ .$$

כדי להראות ש- $m_A(x)=m_B(x)$ ראשית נראה כי $\deg(m_A(x))=\deg(m_B(x))$ באופן הבא:

- נניח ש- $\deg(m_A(x))<\deg(m_B(x))$.
בגלל ש- $m_A(B)=0$ אז B מאפסת פולינום מדרגה נמוכה יותר מהדרגה של m_B.
זאת בסתירה לכך ש- $m_B(x)$ הוא הפולינום המינימלי של B.
- נניח ש- $\deg(m_A(x))>\deg(m_B(x))$.
בגלל ש- $m_B(A)=0$ אז A מאפסת פולינום מדרגה נמוכה יותר מהדרגה של m_A.
זאת בסתירה לכך ש- $m_A(x)$ הוא הפולינום המינימלי של A.

לכן $\deg(m_A(x))\not<\deg(m_B(x))$ וגם $\deg(m_A(x))\not>\deg(m_B(x))$.
לכן בהכרח, אם A ו- B דומות אז

$$\deg(m_A(x))=\deg(m_B(x))$$

כעת נוכיח שהפולינומים $m_A(x)$ ו- $m_B(x)$ הם זהים. ראשית אנחנו רושמים את $m_A(x)$ ו- $m_B(x)$, כך שהם מאותה דרגה: $\deg(m_A(x))=\deg(m_B(x))$ ושניהם פולינומים מתוקנים:

$$\left.\begin{array}{rlcl} m_A(x)= & \alpha_0+\alpha_1x+ & \cdots & \alpha_{k-1}x^{k-1}+x^k \ , \\ m_B(x)= & \beta_0+\beta_1x+ & \cdots & \beta_{k-1}x^{k-1}+x^k \ . \end{array}\right\}$$

יהי $q(x)$ הפולינום הבא:

$$q(x)=m_A(x)-m_B(x)=(\alpha_0-\beta_0)+(\alpha_1-\beta_1)x+ \quad \cdots \quad (\alpha_{k-1}-\beta_{k-1})x^{k-1} \ .$$

עבור $q(x)$:

$$q(B)=m_A(B)-m_B(B)=0 \quad \text{וגם} \quad q(A)=m_A(A)-m_B(A)=0 \ .$$

נניח בשלילה כי $m_A(x) \neq m_B(x)$. אזי קיימים מקדמים עבורם $\alpha_i \neq \beta_i$.
לכן:
A מאפסת את הפולינום $q(x)$ אשר מדרגה נמוכה יותר מהדרגה של $m_A(x)$, סתירה! ו-
B מאפסת את הפולינום $q(x)$ אשר מדרגה נמוכה יותר מהדרגה של $m_B(x)$. סתירה!

לכן $m_A(x) = m_B(x)$. כנדרש.

ג) הטענה לא נכונה.
דוגמה נגדית:

$$A = J_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ , \qquad B = J_2(2) \oplus J_1(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

A ו- B הן צורות ז'ורדן.
לכן הפולינומים המינימליים שלהן הם:

$$m_A(x) = (x-2)^3 \ , \qquad m_B(x) = (x-2)^3 \ ,$$

ז"א $m_A(x) = m_B(x)$.

עבור הערך עצמי $\lambda = 2$, ל- A יש בלוק אחד, ועבור הערך עצמי $\lambda = 2$, ל- B יש שני בלוקים. לכן

$$\left. \begin{array}{ll} \text{geo}_A\left(\lambda = 2\right) & = 1 \\ \text{geo}_B\left(\lambda = 2\right) & = 2 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \text{geo}_A\left(\lambda = 2\right) \neq \text{geo}_B\left(\lambda = 2\right) \ ,$$

כלומר הריבוי הגאומטרי של $\lambda = 2$ של המטריצה A לא שווה להריבוי הגאומטרי של $\lambda = 2$ של המטריצה B לכן הן לא דומות.

ד) הטענה לא נכונה.
דוגמה נגדית:

תהי $A = \mathbb{R}^{n \times n}$ המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

A היא הבלוק ז'ורדן $J_2(2)$.
הפולינום המינימלי הוא

$$m_A(x) = (x-2)^2 \ ,$$

והפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = (x-2)^2 \ .$$

לכן $m_A(x) = p_A(x)$ אבל A לא לכסינה כי היא בלוק ז'ורדן, וכל בלוק ז'ורדן לא לכסין.

ה) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:
תהי $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

A מטריצה היחידה של $\mathbb{R}^{2\times 2}$. בפרט A אלכסונית ולכן לכסינה.
אבל הפולינום המינימלי הוא

$$m_A(x) = x - 1$$

והפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = (x-1)^2 \ .$$

ז"א מצאנו דוגמה עבורה A לכסינה אבל $p_A(x) \neq m_A(x)$.

שאלה 2

א) (6 נק') יהי u וקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ.

$$\begin{aligned}\langle Au, u\rangle &= \langle \lambda u, u\rangle \\ &= \lambda \langle u, u\rangle \ .\end{aligned}$$

מצד שני:

$$\begin{aligned}\langle Au, u\rangle &= \langle u, A^* u\rangle \\ &= \langle u, Au\rangle \\ &= \lambda \langle u, \lambda u\rangle \\ &= \overline{\lambda} \langle u, \ u\rangle \ .\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda \langle u, u\rangle = \overline{\lambda} \langle u, u\rangle \quad \Rightarrow \quad (\lambda - \overline{\lambda}) \langle u, u\rangle = 0$$

u וקטור עצמי $\Leftarrow u \neq 0 \Leftarrow \langle u, u\rangle \neq 0 \Leftarrow \lambda = \overline{\lambda} \Leftarrow \lambda$ ממשי.

ב) (6 נק')
הטענה לא נכונה.

דוגמה נגדית:
תהי A המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

הערכים העצמיים של A הם $\lambda = 0$ ו- $\lambda = 1$.
כעת נחשב את AA^t:

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

הערכים העצמיים של AA^t הם 0 ו- 2. לפיכך $\lambda = 1$ הוא ערך עצמי של A אבל $\lambda^2 = 1$ אינו ערך עצמי של AA^t.

ג) (7 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

A לכסינה והפולינום האופייני של A הוא $p_A(x) = (x-1)^2$.

$$p_A(B) = (B-I)^2 = 0$$

אבל B בלוק ז'ורדן ולכן לא לכסינה.

ד) (6 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ו- $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. A הפיכה (מסיבה ש- $|A| = 2 \neq 0$) ו- B הפיכה (מסיבה ש- $|B| = 12 \neq 0$). מצד שני הדטרמיננטות שלהן לא שוות ולכן הן לא דומות.

שאלה 3

א) (17 נק')

$$A = \begin{pmatrix} 5i & -1 & i \\ 1 & 5i & 1 \\ i & -1 & 5i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^* = \begin{pmatrix} -5i & 1 & -i \\ -1 & -5i & -1 \\ -i & 1 & -5i \end{pmatrix} \ .$$

מכאן

$$AA^* = \begin{pmatrix} 27 & 11i & -9 \\ -i & 27 & -11i \\ -11 & 11i & 27 \end{pmatrix} = A^*A \ .$$

A נורמלית לכן לכסינה אוניטרית.

הפולינום האופייני של A הוא

$$p_A(x) = (x-4i)^2(x-7i) \ .$$

הערכים העצמיים הם:

$\lambda = 4i$, $\text{alg}(4i) = 2$,

$\lambda = 7i$, $\text{alg}(7i) = 1$.

<u>ריבוי גיאומטרי של $\lambda = 4i$</u>:

$$\text{Nul}(A - 4iI) \ = \ \begin{pmatrix} -2i & -1 & i \\ 1 & -2i & 1 \\ i & -1 & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to iR_2 - R_1} \begin{pmatrix} i & -1 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z) = (-iy - z, y, z) = (-i,1,0) + (-1,0,1)$.

$$V_{4i} = \text{span}\left\{ \text{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \text{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ריבוי גיאומטרי של $\lambda = 7i$:

$$\text{Nul}(A-7iI) = \begin{pmatrix} -2i & -1 & i \\ 1 & -2i & 1 \\ i & -1 & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to 2R_3+R_1]{R_2\to 2iR_2+R_1} \begin{pmatrix} -2i & -1 & i \\ 0 & 3 & 3i \\ 0 & -3 & -3i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2} \begin{pmatrix} -2i & -1 & i \\ 0 & 3 & 3i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to \frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} -2i & -1 & i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2} \begin{pmatrix} -2i & 0 & 2i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to \frac{i}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z)=(z,-iz,z)=(1,-i,1)z$.

$$V_{7i} = \text{span}\left\{ \text{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נבנה בסיס אורתונורמלי ע"י התהליך גרם שמידט:

$$u_1 = \text{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \text{v}_2 - \frac{\langle \text{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-i}{2}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} .$$

v_3 אורתוגונלי ביחס ל- u_1 ו- u_2 מסיבה שהוקטור עצמי v_3 והוקטורים העצמיים u_1 ו- u_2 שייכים לערכים העצמיים שונים. לכן קיבלנו בסיס אורתוגונלי:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} , \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

הבסיס האורתונורמלי הוא

$$\left\{ \hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \frac{1}{\sqrt{6}}u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} , \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

לכן $A = QDQ^*$ כאשר

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{-i}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

ב) (8 נק') $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

שאלה 4

א) (6 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_A(x) = x^2 + 1 = (x+i)(x-i) \ .$$

ב) (6 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = \left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right) = (x+i)(x-i)(x+2i)(x-2i) \ .$$

ג) (7 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = 0$$

לכן A^2 נורמלית באופן טריוויאלי. מצד שני

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^* = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^*A$$

ד) (6 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \ .$$

שאלה 5

א) (3 נק')

$$[T] = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

ב) (5 נק') הפולינום האופייני הוא $p_T(x) = x(x+1)^2$. הערכים העצמיים הם:

$\lambda = 0$, $\text{alg}(0) = 1$.

$\lambda = -1$, $\text{alg}(0) = 2$.

<u>וקטור עצמי של $\lambda = 0$</u>

$$\text{Nul}\left([T] - 0 \cdot I\right) = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to 3R_3 + 2R_1]{R_2 \to 3R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to 2R_3 - R_2} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 4R_2} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to -\frac{1}{3}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$\text{Nul}\left([T] - 0 \cdot I\right) = \text{span}\left\{ u_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

לכן

$$V_0 = \text{Ker}\left(T - 0 \cdot I\right) = \text{span}\left\{ w_0 = -1 - x + x^2 \right\} .$$

<u>וקטור עצמי של $\lambda = -1$</u>

$$\text{Nul}\left([T]-(-1)\cdot I\right) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3+R_1]{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1+4R_2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2\to -R_2]{R_1\to -R_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$\text{Nul}\left([T]+I\right) = \text{span}\left\{ u_{-1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

לכן

$$V_{-1} = \text{Ker}\left(T+I\right) = \text{span}\left\{ w_{-1} = -3-2x+2x^2 \right\} \ .$$

$\dim\left(\text{Ker}\left(T+I\right)\right) = 1 < \text{alg}(-1)$ לכן T לא לכסין.

<u>וקטור עצמי מוכלל של $\lambda=-1$</u>

נסמן הוקטור עצמי מוכלל של $\lambda=-1$ כ- $u'_{-1} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ונפתור את המשוואה:

$$(A+I)u'_1 = u_1$$

המטריצה המורחבת היא $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right)$. נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3+R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+4R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2\to -R_2]{R_1\to -R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $\left(-\frac{1}{2},-1,0\right) + z\left(-\frac{3}{2},-1,1\right) = \left(-\frac{3}{2}z-\frac{1}{2},-z-1,z\right) = (x,y,z)$, $z\in\mathbb{R}$. נציב $z=0$ ואז נקבל תשובה

$$u'_{-1} = \left(-\tfrac{1}{2},-1,0\right) \ .$$

$$[T]=PJP^{-1}\ ,\quad P=\begin{pmatrix} | & | & | \\ u_0 & u_{-1} & u'_{-1} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\ ,\quad J=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

ג) (7 נק')

לפי הפולינום המינימלי $m_A(t)=t(t-3)$:

- הערכים העצמיים של A הם 0 ו- 3
- הפולינום המינימלי מתפרק לגורמים ליניאריים שונים לכן A לכסינה ולכן הצורות ז'ורדן של A האפשריות הן

$$J_A=\begin{pmatrix} 3 &&&&& \\ & 0 &&&& \\ && 0 &&& \\ &&& 0 && \\ &&&& 0 & \\ &&&&& 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 3 &&&&& \\ & 3 &&&& \\ && 0 &&& \\ &&& 0 && \\ &&&& 0 & \\ &&&&& 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 3 &&&&& \\ & 3 &&&& \\ && 3 &&& \\ &&& 0 && \\ &&&& 0 & \\ &&&&& 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 &&&&& \\ & 3 &&&& \\ && 3 &&& \\ &&& 3 && \\ &&&& 0 & \\ &&&&& 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 3 &&&&& \\ & 3 &&&& \\ && 3 &&& \\ &&& 3 && \\ &&&& 3 & \\ &&&&& 0 \end{pmatrix}.$$

לפי הפולינום המינימלי $m_B(t)=(t-3)^2$:

- הערך העצמי היחיד הוא 3.
- הגודל של הבלוק ז'ורדן הכי גדול הוא 2 לכל היותר.

לכן הצורות ז'ורדן האפשריות הן:

$$J_B=\begin{pmatrix} J_2(3) && \\ & J_2(3) & \\ && J_2(3) \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} J_2(3) &&& \\ & J_2(3) && \\ && 3 & \\ &&& 3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} J_2(3) &&&& \\ & 3 &&& \\ && 3 && \\ &&& 3 & \\ &&&& 3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 3 &&&&& \\ & 3 &&&& \\ && 3 &&& \\ &&& 3 && \\ &&&& 3 & \\ &&&&& 3 \end{pmatrix}$$

ד) (5 נק')

ה) (5 נק')