

**чисוביות וסיבוכיות****מועד א'**

ד"ר יוחאי טוינו, ד"ר ירמי יהו מילר,  
סמסטר א, תשפ"ה

מספר העמוד הנוכחי ומספר העמודים הכוללים בשאלון מופיעים בחתית כל עמוד. בהצלחה!

**הנחיות למדור בחינות****שאלוני בחינה**

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- לשאלון הבחינה יש לצרף כריכה בלבד.
- יש להחזיר את השאלון ביחד עם המחברת/כריכה.

**שימוש במחשבונים**

- ניתן להשתמש במחשבון.
- לא ניתן להשתמש במחשבון.

**חומר עזר**

- לא ניתן להשתמש בחומר עזר כלל.
- ניתן להשתמש בחומר עזר/דף נוסחות, כמפורט:
- הבחינה עם חומר פתוח  מותר להשתמש בכל חומר עזר מודפס או כתוב.

## הנחיות

נא קראו בעיון את הנחיות הבאות בטרם תחילו לפתרו את הבדיקה. מומלץ לקרוא בקצרה את כל השאלות לפני שמתחלים לפתור את הבדיקה. ניתן לענות על השאלות בכל סדר שתרצה.

1. המבחן כולל 5 שאלות. יש לענות על כולן.
2. שאלות הבדיקה שוות משקל - כל שאלה 20 נקודות.
3. כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תזלגו על שלבים.
4. המבחן כולל נספחים, לשימושכם. הסתיעו בהם במידת הצורך.
5. הקפידו על כתב יד ברוח וקריא.
6. הקפידו לרשום בגודל ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
7. כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבלתם. רק הן נבדקות !
8. ניתן לקחת את השאלון כאשר הבדיקה מסתיימת.

**בהצלחה!**

## הבחינה

### שאלה 1: מכונת טיריניג 20 נקודות

#### סעיף א' 10 נקודות

נתון אלפבית הקלט  $\{a, b, c\} = \Sigma$  ונתונה השפה הבאה:

$$L = \{a^i b^j c^{i-j} \mid i, j \in \mathbb{N}^+\}$$

תארו מכונת טיריניג סטנדרטית (כלומר, במודל הבסיסי) שמכריעת את השפה.

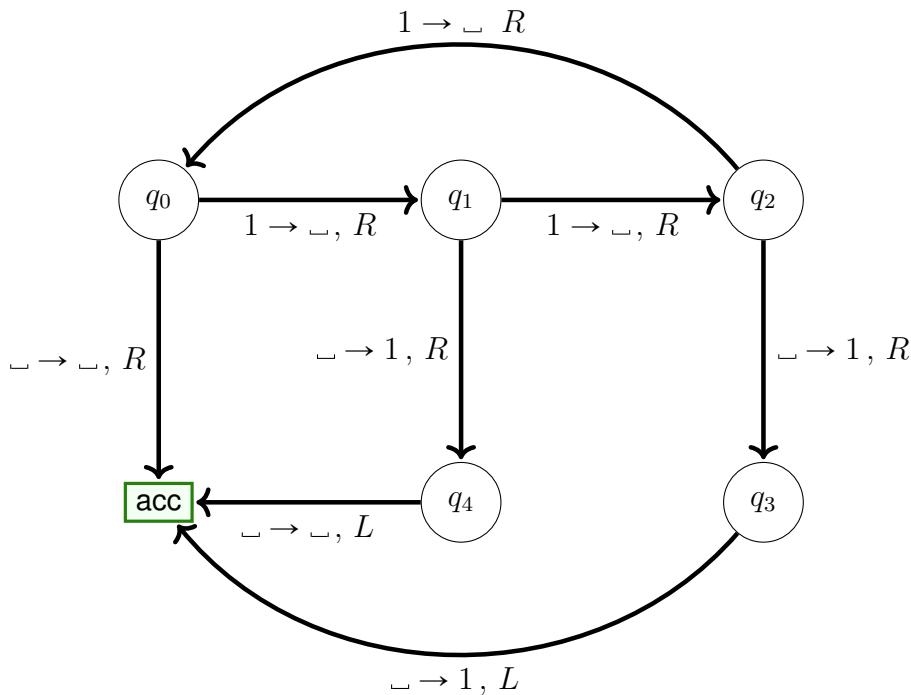
בסעיף זה עלייכם לתאר את המכונה בצורה גרפית בעזרת תרשימים / דיאגרמת מצבים בלבד, ולא בדרך כלל. כלומר, לא בעזרת טבלת מעברים, לא בעזרת פסאודו-קוד, וכיוצא באלו.

תזכורת:  $\mathbb{N}^+$  היא קבוצת הטבעיים החיוביים (כלומר, ללא המספר אפס).

#### סעיף ב' 5 נקודות

נתון אלפבית הקלט  $\{1\} = \Sigma$ . בתרשים הבא, נתונה מכונת טיריניג  $M$ . המכונה מקבלת קלט מספר בסיסי אונרי.

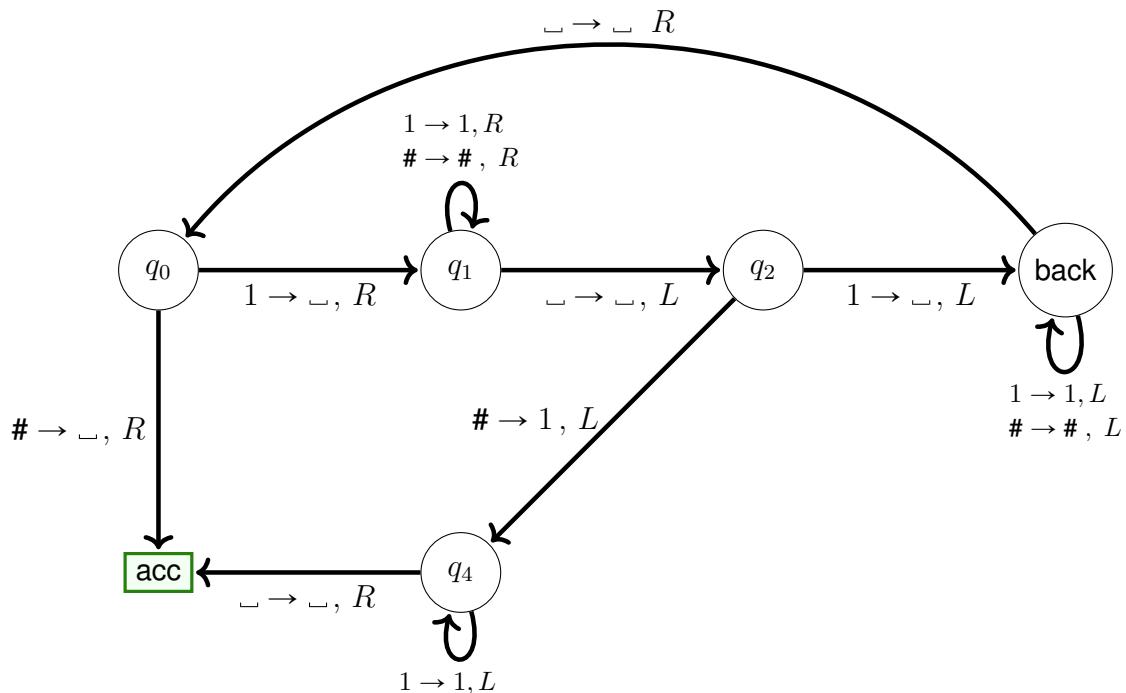
מהי הפונקציה  $f$  שהמכונה מחשבת? כתבו את הפונקציה בצורה פורמלית, ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של הפונקציה.



### סעיף ג' 5 נקודות

בתרשים הבא, נתונה מכונת טיורינג  $M$ . המכונה מקבלת קלט שני מספרים בסיס אונרי, מופרדים ע"י האות  $\#$ .

בhinintן קלט מהצורה  $j\#\#1^i$ , כאשר  $\mathbb{N} \in j, i$ , מהי הפונקציה  $f$  שהמכונה מחשבת? כתבו את הפונקציה בצורה פורמלית, ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של הפונקציה.



### שאלה 2: וריאציות על מכונת טיורינג 20 נקודות

נגדיר מודל מכונת טיורינג חדש שנקרא לו  $OR$ . במודל זה, הראש יכול לבצע בכל מעבר רק פעולה אחת:

1. או לזרז על הסרט (ימינה או שמאל).
2. או לכתוב במייקום הנוכחי בסרט, ללא תנוצה ימינה או שמאל.

כלומר פונקציית המעברים במודל זה מוגדרת כך:

$$\delta : (Q \times (\Gamma \cup \{L, R\})) \rightarrow (Q \times \{L, R\}) ,$$

כאשר המשמעות של פעולה האיחוד היא שבמעבר נתון, אפשר או לזרז שמאלה/ימינה, אך לא גם וגם. מלבד ההבדל בפונקציית המעברים, מודל  $OR$  זהה למודל הבסיסי של מכונת טיורינג.

נגדיר מודל מכונת טיורינג חדש שנקרא  $TS$ . במודל זה, בכל מעבר, מלבד האפשרות לזרז שמאליה או ימינה, הרأس יכול גם להישאר במקום (באותה המשבצת בסרט). לעומת פונקציית המעברים במודל זה מוגדרת כך:

$$\delta : (Q \times \Gamma) \rightarrow (Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}) ,$$

כאשר המשמעות של  $S$  היא הישארת במקום (stay). מלבד ההבדל בפונקציית המעברים, מודל  $TS$  זהה למודל הבסיסי של מכונת טיורינג.

הוכיחו כי המודל  $OR$  והמודל  $TS$  שקולים חישובית.

### שאלה 3: התזה של צ'רצ' טיורינג 20 נקודות

#### סעיף א' 10 נקודות

נתון הדקוק הבא. מהי השפה שהדקוק יוצר? כמובן, מהי  $L(G)$ ? כתבו את השפה בצורה פורמלית, ברורה ומוגדרת היבר. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של השפה.

$$\begin{aligned}
 G = & (V, \Sigma, R, S) \\
 V = & \{S, B\} \\
 \Sigma = & \{a, b, c\} \\
 R = & \{ \\
 & \quad S \rightarrow aBSc \\
 & \quad S \rightarrow \varepsilon \\
 & \quad Ba \rightarrow aB \\
 & \quad Bc \rightarrow bc \\
 & \quad Bb \rightarrow bb \\
 & \}
 \end{aligned}$$

#### סעיף ב' 10 נקודות

נתון הדקוק הבא. מהי השפה שהדקוק יוצר? כמובן, מהי  $L(G)$ ? כתבו את השפה בצורה פורמלית,

ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של השפה.

$$\begin{aligned}
 G &= (V, \Sigma, R, S) \\
 V &= \{S, B\} \\
 \Sigma &= \{a, b, c\} \\
 R &= \{ \\
 &\quad S \rightarrow ABCS \\
 &\quad S \rightarrow \varepsilon \\
 &\quad AB \rightarrow BA \\
 &\quad BC \rightarrow CB \\
 &\quad AC \rightarrow CA \\
 &\quad BA \rightarrow AB \\
 &\quad CA \rightarrow AC \\
 &\quad CB \rightarrow BC \\
 &\quad A \rightarrow a \\
 &\quad B \rightarrow b \\
 &\quad C \rightarrow c \quad \}
 \end{aligned}$$

#### שאלה 4: אי-כריעות 20 נקודות

הוכחו שהשפה הבאה אינה כריעה. כתבו הוכחה המלאה הומופורתית. אל תدلגו על שלבים. בשאלת זו ניתן להניח כי  $M_1, M_2$  הן מכונות טירונג.

$$L_{M_1 \cup M_2} = \{\langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \cup L(M_2)\}$$

#### שאלה 5: סיבוכיות זמן 20 נקודות

בහינתן גраф לא מכוון  $(V, E) = G$ . קבוצת קדקודים  $V \subseteq U$  תקרא קבוצת בלתי תלולה אם לכל זוג קדקודים  $u_1, u_2$  ב-  $U$  מתקיים ש-  $(u_1, u_2) \notin E$ .

בහינתן גраф לא מכוון  $(V, E) = G$ . קבוצת קדקודים  $V \subseteq U$  תקרא **כיסוי קדקודים** ב-  $G$  אם לכל צלע  $u_1 \in U$  ו-  $u_2 \in U$  מתקיים ש-  $(u_1, u_2) \in E$ . נתבונן בשפטות הפורמליות הבאות:

$$IS = \{\langle G, k \rangle \mid \text{קיימת בלתי תלולה בגודל } k \text{ לפחות } k \text{ נקודות.}\}$$

$$VC = \{\langle G, k \rangle \mid \text{קיים כיסוי קודקודים בגודל } k \text{ לכל היותר.}\}$$

הוכחו כי

$$IS \leqslant_P VC.$$

כולם, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה  $IS$  לשפה  $VC$ .  
ש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומילי.