

## שיעור 2

# מודלים חישוביים שקולית

### הגדירה 2.1 מודל חישובי

מודל חישובי הוא אוסף של מכונות טיורינג שעבורן מוגדרים המושגים של הכרעה וקבלת של שפות.

### הגדירה 2.2 מודלים שקולים חישובית

יהיו  $A$  ו-  $B$  מודלים חישוביים. אומרים כי  $A$  ו-  $B$  שקולים אם לכל שפה  $L$  התנאים הבאים מתקיימים:

- 1) קיימת מ"ט במודל  $A$  שמכריעה את  $L$  אם ו רק אם קיימת מ"ט במודל  $B$  שמכריעת את  $L$ .
- 2) קיימת מ"ט במודל  $A$  שמקבלת את  $L$  אם ו רק אם קיימת מ"ט במודל  $B$  שמקבלת את  $L$ .

### דוגמה 2.1

**נסמן ב-** $T$  את מודל המכונה הטיורינג הבסיסי.

במודל זה בכלל צעד ניתן לוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לשני הצדדים. בתחילת החישוב הראש נמצא בתחילת הקלט.

**נסמן ב-** $O$  את מודל המכונה הטיורינג עם סרט ימינה בלבד.

במודל זה בכלל צעד ניתן לוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לכיוון אחד בלבד - ימינה. בתחילת החישוב, הקלט ממוקם בקצתה השמאלי של הסרט והראש נמצא בתחילת הקלט. החישוב מתנהל כמו במכונה במודל  $T$ , למעט כאשר הראש נמצא באותה המשבצת השמאלית ביותר הסרט וצריך לוז שמאלה - במקרה זה הראש נשאר במקום ולא זו.

הוכיחו כי המודל  $T$  והמודל  $O$  שקולים חישובית.

**פתרון:**

יש להוכיח ש:

- לכל מ"ט במודל  $O$  קיימת מ"ט שcolaה במודל  $T$ .
- לכל מ"ט במודל  $T$  קיימת מ"ט שcolaה במודל  $O$ .

#### כיוון ראשון

נווכיח כי לכל מ"ט במודל  $O$  קיימת מ"ט שcolaה במודל  $T$ . כלומר:

נתונה  $(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, acc^O, rej^O)$  במודל  $O$ .

نبנה  $M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, acc^T, rej^T)$ .

- רכיבי המ"ט  $M^T$  זהים לאלו של המ"ט  $M^O$ , מלבד מהתוכנה שהראש של  $M^O$  לעולם לא זו מעבר לказחה השמאלי של הקלט.
- נבודד רק עם צד ימין של הסרט האינסופי של  $M^T$  ואז  $M^T$  תהיהcolaה ל-  $M^O$ .

- כדי לדאוג שהראש של המוכונה הדו-כיוונית  $M^T$  לא יעבור לכמה השמאלי של הקלט, נוסיף מצבים חדשים וגם מעברים חדשים לפונקציית המעברים של  $M^T$ , שmbטיחים שהראש של  $M^T$  לא יעבור לכמה השמאלי של הקלט, באופן הבא.
- בתחילת כל חישוב, המוכונה  $M^T$  מסמנת את המשבצת מצד שמאל וליד המשבצת הראשונה של הקלט בסימן מיוחד \$.  
לכן, המוכונה  $M^T$  השקולה למוכונה  $M^O$  היא
- ונדר את הפונקציית המעברים של  $M^T$  כך שכל פעם שהראש מגע למשבצת המסומנת \$, הראש חוזר ימינה למשבצת הראשונה של הקלט, כמפורט בטבלה המעברים למטה.

$$Q^T = Q^O \cup \{q_0^T, q_\$^T\}, \quad \Sigma^T = \Sigma^O, \quad \Gamma^T = \Gamma^O \cup \{\$\}, \quad q_{acc}^T = q_{acc}^O, \quad q_{rej}^T = q_{rej}^O$$

והפונקציית המעברים מתוארת בטבלה למטה.

| מצב      | סימון    | מצב חדש  | כתיבה       | позזה | תנאי                |
|----------|----------|----------|-------------|-------|---------------------|
| $q_0^T$  | $\sigma$ | $q_\$^T$ | $\emptyset$ | $L$   |                     |
| $q_\$^T$ | -        | $q_0^O$  | \$          | $R$   |                     |
| $q$      | \$       | $q$      | \$          | $R$   | $\forall q \in Q^O$ |

הוכחנו את הכיוון הראשון:  
ראינו מוכנה דו-כיוונית השקולה למוכנה חד-כיוונית.

כעת נוכיח את הטענה בכיוון השני:  
נראה מוכנה חד-כיוונית השקולה למוכנה דו-כיוונית.

### כיוון שני

נוכיח כי לכל מ"ט במודול  $T$  קיימת מ"ט שקופה במודול  $O$ . כלומר:

נתונה  $M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, acc^T, rej^T)$  במודול  $T$ .

נבנה  $M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, acc^O, rej^O)$  שקופה במודול  $O$ .

- נסמן "קו המפריד" על הסרט של המוכנה הדו-כיוונית  $M^T$ .



- נסמן את המשבצת הראשונה של הסרט של המוכנה החד-כיוונית  $M^O$  עם \$.
- כל שאר המשבצות של הסרט של  $M^O$  נחלק לשני צאים: חצי העליון  $U$  וחצי התחתון  $D$ .
- תוכן הסרט של המוכנה הדו-כיוונית  $M^T$  נכתב על סרטה של המוכנה החד-כיוונית  $M^O$  כך:
  - \* החלק של הסרט שמצד שמאל של קו המפריד נכתב בשורה העליונה של סרט  $M^O$  בכיוון ההפוך (מיימין לשמאל).

- \* החלק של הסרט שמצד ימין של קו המפריד נכתב בשורה התחתונה של סרט  $M^O$  בכוון הרגיל (משמאל לימין).

|     |   |   |   |   |   |   |   |     |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| \$  | b | b | a | — | — | — | — | ... |
| b   | c | c | a | b | — | — | — | ... |
| ... |   |   |   |   |   |   |   |     |

- \* תזוזה ימינה של  $M^T$  **מצד ימין של קו המפריד**  $\Leftarrow$  תזוזה ימינה בשורה התחתונה של  $M^O$ .
- \* תזוזה ימינה של  $M^T$  **מצד שמאל של קו המפריד**  $\Leftarrow$  תזוזה שמאלה בשורה העליונה של  $M^O$ .

תזוזה ימינה ב-  $M^T$ :

|   |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| — | a → | b → | b → | b → | c → | c → | a → | — → |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

תזוזה שකולה ב-  $M^O$ :

|     |     |     |     |     |     |   |   |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|---|
| \$  | ← b | ← b | ← a | —   | —   | — | — |
| b → | c → | c → | a → | b → | — → | — | — |

- \* תזוזה שמאלה של  $M^T$  **מצד ימין של קו המפריד**  $\Leftarrow$  תזוזה שמאלה בשורה התחתונה של  $M^O$ .
- \* תזוזה שמאלה של  $M^T$  **מצד שמאל של קו המפריד**  $\Leftarrow$  תזוזה ימינה בשורה העליונה של  $M^O$ .

תזוזה שמאלה ב-  $M^T$ :

|   |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| — | a ← | b ← | b ← | b ← | c ← | c ← | a ← | — ← |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

תזוזה שකולה ב-  $M^O$ :

|     |     |     |     |     |     |   |   |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|---|
| \$  | → b | → b | → a | —   | —   | — | — |
| b ← | c ← | c ← | a ← | b ← | — ← | — | — |

לכן, המכונה  $M^O$  השקולה למוכנה  $M^T$  היא

$$M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, q_{\text{acc}}^O, q_{\text{rej}}^O) ,$$

סביר את כל הרכיבים של  $M^O$ :

- \* לכל מצב  $q \in Q^T$  נגיד  $q_U$  ו-  $q_D$  של  $Q^O$ , כדי לבדוק בין המ מצבים שבהם הראש נמצא בחלק העליון לבין המ מצבים שבהם הראש נמצא בחלק התיכון של הסרט.

$$\cdot \Sigma^O = \Sigma^T \bullet$$

$$\cdot \Gamma^O \subseteq (\Gamma^T \times \Gamma^T) \cup \{\$\} \bullet$$

$$\cdot q_{\text{acc}}^O = q_{\text{acc}}^T \bullet$$

$$\cdot q_{\text{rej}}^O = q_{\text{rej}}^T \bullet$$

- \* הפונקציות המעבירים  $\delta^O$  מותוארכות בטבלה המעבירים למטה. בטבלה, הסימנים  $\pi, \sigma, \tau$  מסמנים כל תוארכותם בalfa ב-  $\Gamma^T$ :

| תנאי                        | תזואה             | כתיבה             | מצב חדש         | סימון | מצב  |
|-----------------------------|-------------------|-------------------|-----------------|-------|--|
| <b>אותחול</b>               |                   |                   |                 |       |  |
| $q_0^O$                     | $\tau$            | $q_\tau$          | \$              | $R$   | $\tau \in \Sigma \cup \{\_\}$<br>$\sigma \in \Sigma$           |
| $q_\sigma$                  | $\tau$            | $q_\tau$          | $\_\sigma$      | $R$   |  |
| $q.\_$                      | $\_$              | back              | $\_$<br>$\_$    | $L$   |  |
| $q_{\text{back}}$           | $\_\tau$          | $q_{\text{back}}$ | $\cap$          | $L$   |  |
| $q_{\text{back}}$           | \$                | $q_0^T.D$         | $\cap$          | $R$   |  |
| <b>תזואה מקורית שמאלתית</b> |                   |                   |                 |       |  |
| $q_D$                       | $\pi$<br>$\sigma$ | $p_D$             | $\pi$<br>$\tau$ | $L$   | תזואה שמאלתית:<br>$(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$ |
| $q_U$                       | $\sigma$<br>$\pi$ | $p_U$             | $\tau$<br>$\pi$ | $R$   |  |
| $q_D$                       | $\_$              | $p_D$             | $\_$<br>$\tau$  | $L$   | תזואה שמאלתית:<br>$(q, \_) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$     |
| $q_U$                       | $\_$              | $p_U$             | $\tau$<br>$\_$  | $R$   |  |
| <b>תזואה מקורית ימינה</b>   |                   |                   |                 |       |  |
| $q_D$                       | $\pi$<br>$\sigma$ | $p_D$             | $\pi$<br>$\tau$ | $R$   | תזואה ימינה:<br>$(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$   |
| $q_U$                       | $\sigma$<br>$\pi$ | $p_U$             | $\tau$<br>$\pi$ | $L$   |  |
| $q_D$                       | $\_$              | $p_D$             | $\_$<br>$\tau$  | $R$   | תזואה ימינה:<br>$(q, \_) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$       |
| $q_U$                       | $\_$              | $p_U$             | $\tau$<br>$\_$  | $L$   |  |
| <b>פגיעה בקצתה</b>          |                   |                   |                 |       |  |
| $q_D$                       | \$                | $q_U$             | $\cap$          | $R$   |  |
| $q_U$                       | \$                | $q_D$             | $\cap$          | $R$   |  |
| כל השאר עוברים ל-rej        |                   |                   |                 |       |  |