שעור 2
בסיסים אורתוגונליים

2.1 בסיסים אורתוגונליים

הגדרה 2.1 קבוצת ווקטורים אורתוגונלית

נתון המרחב מכפלה פנימית V ונתונה הקבוצה של ווקטורים

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_k .\} \ .$$

הקבוצה נקראת **אורתוגונלית** אם כל שני ווקטורים שלה אורתוגונליים. כלומר:

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \ , \qquad i \neq j \ .$$

הגדרה 2.2 קבוצת ווקטורים ואורתונורמלית

נתון המרחב מכפלה פנימית V ונתונה הקבוצה של ווקטורים

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_k \ \} \ .$$

הקבוצה נקראת **אורתונורמלית** אם:

א) כל שני ווקטורים שלה אורתוגונליים, כלומר

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \ , \qquad i \neq j \ ,$$

ב) כל ווקטור הוא ווקטור יחידה, כלומר

$$\|u_i\| = 1 \ .$$

דוגמה 2.1

נתון הבסיס הסטנדרטי $\{e_1, \ldots, e_n\}$ של $\mathbb{R}^n$ עם המכפלה הסקלרית. בדקו אם הקבוצה אורתונורמלית.

פתרון:

תזכורת: נתונים שני ווקטורים $\in \mathbb{R}^n$ $\text{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, המכפלה הסקלרית מוגדרת

$$(u, \text{v}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \ .$$

נרשום את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$:

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, , \ldots , e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

א)

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} ,$$

כלומר כל שני וקטורים אורתוגונליים.

ב)

$$\|e_i\| = \sqrt{(e_i, e_i)} = 1 ,$$

כלומר כל וקטור בקבוצה הוא וקטור יחידה.

לכן הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$ הוא קבוצה אורתונורמלי.

דוגמה 2.2

נתונה הקבוצה

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 3+i \\ 4+3i \\ 5i \end{pmatrix} \right\}$$

של וקטורים ב- $\mathbb{C}^3$ עם המ"פ הסטנדרטית.

א) הוכיחו שהקבוצה אורתוגונלית.

ב) מצאו את הקבוצה האורתנורומלית המתאימה לקבוצה זו.

פתרון:

א)

$$\langle u_1, u_2 \rangle = (1+i)\bar{i} - 1 \cdot 1 + 1(-\bar{i}) = (1+i)(-i) - 1 + 1(i) \quad = -i + 1 - 1 + i \qquad = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 \perp u_2 \ .$$

$$\langle u_1, u_3 \rangle = (1+i)(3-i) - 1(4-3i) + 1(-5i) \quad = 4 + 2i - 4 + 3i - 5i \quad = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 \perp u_3 \ .$$

$$\langle u_2, u_3 \rangle = i(3-i) + 1(4-3i) - i(-5i) \quad = 1 + 3i + 4 - 3i - 5 \quad = 0 \quad \Rightarrow \quad u_2 \perp u_3 \ .$$

לכן הקבוצה אורתוגונלית.

ב)

$$\|u_1\|^2 = \langle u_1, u_1 \rangle = (1+i)(1-i) + (-1)(-1) + 1 \cdot 1 \qquad = 4$$

$$\|u_2\|^2 = \langle u_2, u_2 \rangle = i(-i) + 1 \cdot 1 + (-i) \cdot i \qquad = 3 \ .$$

$$\|u_3\|^2 = \langle u_3, u_3 \rangle = (3+i)(3-i) + (4+3i)(4-3i) + 5i(-5i) \quad = 10 + 25 + 25 \quad = 60 \ .$$

לכן קבוצת הווקטורים

$$\left\{ \frac{1}{2} u_1 \ , \frac{1}{\sqrt{3}} u_2, \frac{1}{\sqrt{60}} u_3 \right\}$$

היא קבוצה אורתונורמלית.

משפט 2.1 קבוצת אורתוגונלית בת"ל

קבוצת אורתוגונלית במרחב מכפלה פנימית שלא מכילה את ווקטור האפס היא בלתי תלויה ליניארית.

הוכחה: תהי $\{u_1,\ldots,u_k\}$ קבוצה אורתוגונלית. נניח ש

$$\alpha_1 u_1+\ldots+\alpha_k u_k=0 \ .$$

אז לכל $1\leq j\leq k$

$$\left\langle \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i \, , \, u_j \right\rangle = \langle 0\, , \, u_j\rangle =0 \ .$$

מצד שני

$$\left\langle \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i \, , \, u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle u_i\, , \, u_j\rangle \ .$$

הקבוצה אורתוגונלית, אז $\langle u_i,u_j\rangle=0$ אם $i\neq j$, לכן בהסכום לעיל כל האיברים מתאפסים חוץ מהאיבר של $i=j$. לכן נקבל

$$\left\langle \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i \, , \, u_j \right\rangle = \alpha_j \langle u_j\, , \, u_j\rangle \ .$$

לכן

$$\alpha_j \langle u_j\, , \, u_j\rangle =0 \ .$$

$u_j\neq 0$ (נתון), אז $\langle u_j\, , \, u_j\rangle\neq 0$.
לכן בהכרח

$$\alpha_j=0$$

לכל $1\leq j\leq k$.

■

משפט 2.2 קבוצת אורתוגונלית היא בסיס

נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית כך ש $\dim(V)=n$.

כל קבוצה אורתוגונלית של n ווקטורים ב- V מהווה בסיס של V.

הוכחה: נניח ש V מרחב מכפלה פנימית, $\dim(V)=n$.
נניח ש $U=\{u_1,\ldots,u_n\}\in V$ קבוצה אורתוגונלית.
כל קבוצה אורתוגונלית היא בת"ל, לכן הקבוצה בת"ל.
בקבוצה יש n ווקטורים, לכן $\dim(U)=\dim(V)$.
לכן הקבוצה מהווה בססי של V.

■

הגדרה 2.3 בסיס אורתוגונלי ובסיס אורתונורמלי

- בסיס של V המורכב מווקטורים אורתוגונליים נקרא **בסיס אורתוגונלי.**
- בסיס של V המורכב מווקטורים אורתונורמליים נקרא **בסיס אורתונורמלי.**

דוגמה 2.3

עבור כל אחד של הקבוצות ווקטורים הבאות של $\mathbb{R}^3$ עם מ"פ סטנדרטית. בדקו אם הקבוצה היא בסיס אורתוגונלי, ובסיס אורתנורמלי.

א)
$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ב)
$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

פתרון:

א) $\langle u_1, u_2 \rangle = 1 \neq 0$

לכן הקבוצה לא אורתוגונלית.

ב)
$$\begin{aligned} \langle u_1, u_2 \rangle &= 0 \\ \langle u_1, u_3 \rangle &= 0 \\ \langle u_2, u_3 \rangle &= 0 \end{aligned}$$

לכן הקבוצה אורתוגונלית, ולכן הקבוצה בת"ל ולכן הקבוצה בסיס של $\mathbb{R}^3$.

$$\|u_1\| = \sqrt{1+4+4} = 3 \ , \quad \|u_2\| = \sqrt{2} \ , \quad \|u_3\| = \sqrt{18} \ .$$

לכן הקבוצה לא בסיס אורתונורמלי.

נבנה בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{ \frac{1}{3}u_1, \frac{1}{\sqrt{2}}u_2, \frac{1}{\sqrt{18}}u_3 \right\}$$

דוגמה 2.4

במרחב $\mathbb{C}^4$ עם מ"פ סטנדרטית, נתונה קבוצת ווקטורים הבאה:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2}i \\ \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i \end{pmatrix}, \right\}$$

בדקו אם הקבוצה אורתוגונלית ואורתונורמלית.

פתרון:

$$\langle u_1, u_2 \rangle = 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}i\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) \cdot 0 = \frac{-i}{\sqrt{2}} \neq 0$$

לכן הקבוצה אינה אורתוגונלית.

דוגמה 2.5

קבעו אם הקבוצות הבאות אורתוגונליות ואורתונורמליות במרחב $\mathbb{R}_3[x]$ עם מ"פ האינטגרלית בקטע $[0,1]$:

א) $\{1,x,x^2\}$

ב) $\left\{1,x-\frac{1}{2},x^2-x+\frac{1}{6}\right\}$

פתרון:

א)

$$u_1-1\ ,\quad u_2=x\ ,\quad u_3=x^2\ .$$

$$\langle u_1,u_2\rangle=\int_0^1 1\cdot x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\neq 0$$

לכן B_1 קבוצה לא אורתוגונלית.

ב)

$$u_1-1\ ,\quad u_2=x-\frac{1}{2}\ ,\quad u_3=x^2-x+\frac{1}{6}\ .$$

$$\langle u_1,u_2\rangle=\int_0^1 1\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right]_0^1=0$$

$$\langle u_1,u_3\rangle=\int_0^1 1\cdot\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}\right]_0^1=0$$

$$\begin{aligned}\langle u_2,u_3\rangle&=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\,dx&&=\int_0^1\left(x^3-x^2+\frac{x}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-\frac{1}{12}\right)dx\\&=\int_0^1\left(x^3-\frac{3x^2}{2}+\frac{2x}{3}-\frac{1}{12}\right)\,dx&&=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x}{12}\right]_0^1&&=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=0\end{aligned}$$

לכן הקבוצה אורתוגונלית.

$$\|u_1\|^2=\langle u_1,u_1\rangle=\int_0^1 1\cdot 1\,dx=[x]_0^1=1$$

$$\|u_2\|^2=\langle u_2,u_2\rangle=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\,dx=\int_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\ .$$

$$\begin{aligned}
\|u_3\|^2 &= \langle u_3, u_3\rangle \\
&= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 \, dx \\
&= \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{x^2}{3} + x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{36}\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{4x^2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{1}{36}\right) dx \\
&= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^3}{9} - \frac{x^2}{6} + \frac{x}{36}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} \\
&= \frac{36}{180} - \frac{90}{180} + \frac{80}{180} - \frac{30}{180} + \frac{5}{180} \\
&= \frac{1}{180} \ .
\end{aligned}$$

לסיכום:

$$\|u_1\| = 1, \quad \|u_2\| = \frac{1}{12}, \quad \|u_3\| = \frac{1}{180} \ .$$

לכן הקבוצה אינה אורתונורמלית.

נבנה קבוצה אורתונורמלית:

$$\left\{u_1, \sqrt{12}\cdot u_2, \sqrt{180}\cdot u_3\right\} \ .$$

דוגמה 2.6

נתונה הקבוצה

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

במרחב $\mathbb{R}^{3\times 3}$ עם מ"פ הסטנדרטית. בדקו אם הקבוצה אורתוגונלית ואורתונורמלית.

פתרון:

$$\langle A_1, A_2\rangle = \mathrm{tr}\left(A_2^t \cdot A_1\right) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0 \ .$$

$$\langle A_1, A_3\rangle = \mathrm{tr}\left(A_3^t \cdot A_1\right) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = 1 + 3 - 4 = 0 \ .$$

$$\langle A_2, A_3\rangle = \mathrm{tr}\left(A_3^t \cdot A_2\right) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0 \ .$$

לכן הקבוצה אורתוגונלית.

$$\|A_1\|^2=\langle A_1,A_1\rangle=\operatorname{tr}\left(A_1^t\cdot A_1\right)=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\right)=\operatorname{tr}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&8\\3&8&14\end{pmatrix}=20\ .$$

$$\|A_2\|^2=\langle A_2,A_2\rangle=\operatorname{tr}\left(A_2^t\cdot A_2\right)=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right)=\operatorname{tr}\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&-0&0\end{pmatrix}=4+4=8\ .$$

$$\|A_3\|^2=\langle A_3,A_3\rangle=\operatorname{tr}\left(A_3^t\cdot A_3\right)=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right)=\operatorname{tr}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&-2\\-1&-2&3\end{pmatrix}=6\ .$$

לכן הקבוצה לא אורתונורמלית. אבל הקבוצה הבאה

$$\left\{\frac{1}{\|A_1\|}A_1,\frac{1}{\|A_2\|}A_2,\frac{1}{\|A_3\|}A_3\right\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{20}}A_1,\frac{1}{\sqrt{8}}A_2,\frac{1}{\sqrt{6}}A_3\right\}$$

כן קבוצה אורתונומלית.

קודם הגדרנו מושג של היטל אורתוגונלי של ווקטור על תת מרחב. ניסחנו משפט שטוען את הדבר הבא:

אם V מרחב מכפלה פנימית, $U\subseteq V$ תת מרחב נוצר סופית, אז לכל ווקטור $\mathrm{v}\in V$ קיים ווקטור יחיד $u_0\in V$ כך ש-

$$(\mathrm{v}-u_0)\perp U\ .$$

לווקטור u_0 קוראים ההיטל של v על U, אבל לא הוכחנו את קיומו.

נוכיח בהתחלה את קיומו של היטל בתנאי שלתת מרחב U קיים בסיס אורתונורמלי.

הגדרה 2.4 הגדרת ההיטל האורתוגונלי

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית ונניח ש $U\subseteq V$ תת מרחב נוצר סופית של V. נניח ש

$$\{u_1,\ldots,u_k\}$$

בסיס אורתוגונלי של U. אז לכל ווקטור $\mathrm{v}\in V$, ההיטל האורתוגונלי של v מסומן ב- $P_U(\mathrm{v})$ ומוגדר

$$P_U(\mathrm{v})=\sum_{i=1}^{k}\frac{\langle \mathrm{v},u_i\rangle}{\|u_i\|^2}u_i\ .$$

האופרטור P_U נקרא **אופרטור ההטלה האורתוגונלי על** U .

משפט 2.3 משפט ההיטל האורתוגונלי

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית, ו- $U\subseteq V$ תת מרחב נוצר סופית של V. נסמן את ההיטל האורתוגונלי של כל ווקטור $\mathrm{v}\in V$ על U ב- $P_U(\mathrm{v})$. הווקטור

$$\mathrm{v}-P_U(\mathrm{v})$$

אורתוגונלי לכל ווקטור ב- U.

כלומר

$$\langle \mathrm{v} - P_U(\mathrm{v}), u \rangle = 0$$

לכל $V \ni \mathrm{v}$ ולכל $u \in U$.
נסמן את האורתוגונליות של הווקטור $\mathrm{v} - P_U(\mathrm{v})$ ביחס לתת מרחב U כך:

$$(\mathrm{v} - P_U(\mathrm{v})) \perp U \ .$$

הוכחה: לפי הגדרת היטל אורתוגונלי, צריך להוכיח שווקטור

$$(\mathrm{v} - P_U(\mathrm{v})) \perp U \ .$$

נניח ש $\{u_1, \ldots, u_k\}$ בסיס אורתוגונלי של U. לכל $1 \leq j \leq k$,

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{v} - P_U(\mathrm{v}), u_j \rangle &= \left\langle \mathrm{v} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{v}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i, u_j \right\rangle \\
&= \langle \mathrm{v}, u_j \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{v}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i, u_j \right\rangle \\
&= \langle \mathrm{v}, u_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{v}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} \cdot \langle u_i, u_j \rangle \\
&= \langle \mathrm{v}, u_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{v}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} \langle u_i, u_j \rangle \, \delta_{ij} \\
&= \langle \mathrm{v}, u_j \rangle - \frac{\langle \mathrm{v}, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} \langle u_j, u_j \rangle \\
&= \langle \mathrm{v}, u_j \rangle - \frac{\langle \mathrm{v}, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} \cdot \|u_j\|^2 \\
&= \langle \mathrm{v}, u_j \rangle - \langle \mathrm{v}, u_j \rangle \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

הוכחנו ש $(\mathrm{v} - P_U(\mathrm{v})) \perp U$.

■

2.2 אופרטור הטלה האורתוגונלי

משפט 2.4 תכונות של אופרטור הטלה האורתוגונלי

נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ו- $U \subset V$ תת-מרחב של V.
נסמן את המשלים האורתוגונלי של U ב- $U^{\perp}$.

אופרטור ההטלה האורתוגונלי P_U מקיים את התכונות הבאות:

(1 P_U העתקה ליניארית.

(2 לכל $u \in U$ מתקיים $P_U(u) = u$, ולכל $w \in U^{\perp}$ מתקיים $P_U(w) = 0$.

3) $\mathrm{Im}(P_U) = U$ וגם $\mathrm{Ker}(P_U) = U^{\perp}$.

4) $V = U \oplus U^{\perp}$

5) $P_U \circ P_U = P_U$

6) לכל $\mathrm{v} \in V$ מתקיים כי
$$(\mathrm{v} - P_U(\mathrm{v})) \in U^{\perp}$$

הוכחה:

1) P_U העתקה לינארית.

לכל $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in V$

$$\begin{aligned}
P_U\left(\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2\right) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{(\mathrm{v}_1, u_i) + (\mathrm{v}_2, u_i)}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{v}_1, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i + \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= P_U(\mathrm{v}_1) + P_U(\mathrm{v}_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_U\left(\alpha \mathrm{v}\right) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \alpha \mathrm{v}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha \left\langle \mathrm{v}, u_i \right\rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{v}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \alpha P_U(\mathrm{v})
\end{aligned}$$

לכן P_U אופרטור לינארי.

2) נניח ש- $\{u_1, \ldots, u_k\}$ בסיס של U. אז לכל $u \in U$ קיימים סקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ כך ש $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k$. אז

$$P_U(u) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i P_U(u_i)$$

לכל $1 \leq j \leq k$,

$$\begin{aligned}
P_U(u_j) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle u_j, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \frac{\langle u_j, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} u_j \\
&= u_j \ .
\end{aligned}$$

לכן
$$P_U(u)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i u_i=u\ .$$
לכל $w\in U^{\perp}$ מתקיים $\langle w,u_i\rangle=0$ לכל $1\le i\le k$. לכן
$$P_U(w)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\langle w,u_i\rangle}{\|u_i\|^2}u_i=0$$

3) לכל $a\in U$, לפי תנאי 2 $a=P_U(a)\in \mathrm{Im}\left(P_U\right)$, לכן $U\subseteq \mathrm{Im}\left(P_U\right)$.

לפי ההגדרה של ההיטל אם $\{u_1,\ldots,u_k\}$ בסיס אורתוגונלי של U, אז לכל ווקטור $a\in V$,
$$P_U(a)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\langle a,u_i\rangle}{\|u_i\|^2}u_i$$
לכן $P_U(a)\in \mathrm{span}\{u_1,\ldots,u_k\}$ לכן $P_U(a)\in U$ לכל $a\in V$. לכן $\mathrm{Im}\left(P_U\right)\subseteq U$.

לכן $\mathrm{Im}(P_U)=U$.

בסעיף 2 הוכחנו כי $U^{\perp}\subseteq \ker(P_U)$.
נוכיח כי $\ker(P_U)\subseteq U^{\perp}$.

נניח ש $\mathrm{v}\in \ker(P_U)$. ז"א

$P_U(\mathrm{v})=\sum_{i=1}^{k}\frac{\langle \mathrm{v},u_i\rangle}{\|u_i\|^2}u_i=0$.

מכיוון ש- $\{u_1,\ldots,u_k\}$ בת"ל אז בהכרח $\langle \mathrm{v},u_i\rangle=0$ לכל $1\le i\le k$.
לכן $\mathrm{v}\in U^{\perp}$.

4) $\dim(V)=\dim(\ker P_U)+\dim(\mathrm{Im}P_U)$ לכן
$$\dim(V)=\dim\left(U^{\perp}\right)+\dim\left(U\right)$$
מכאן נובע כי
$$U\cap U^{\perp}=\{0\}\ .$$

5) לכל $\mathrm{v}\in V$,
$$P_U(\mathrm{v})=u\in U\ .$$
לכן
$$\left(P_U\circ P_U\right)(\mathrm{v})=P_U\left(P_U(\mathrm{v})\right)=P_U(u)=u\ ,$$
כלומר
$$P_U\circ P_U=P_U\ .$$

6) הוכחנו במשפט 2.3 כי
$$(\mathrm{v}-P_U(\mathrm{v}))\perp U$$
לכן
$$\mathrm{v}-P_U(\mathrm{v})\in U^{\perp}\ .$$

■

משפט 2.5 משפט הפיכות האורתוגונלי

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית ו- $U\subset V$ תת מרחב של V. אז

א) $V=U\oplus U^{\perp}$

ב) $\left(U^{\perp}\right)^{\perp}=U$

הוכחה:

א) $V=U\oplus U^{\perp}$ הוכחנו במשפט 2.4.

ב)

1) נוכיח כי $U\subseteq\left(U^{\perp}\right)^{\perp}$.

נקח $u\in U$.
צ"ל $u\in\left(U^{\perp}\right)^{\perp}$.

לכל $\mathrm{v}\in U^{\perp}$, $\langle u,\mathrm{v}\rangle=0$ $\Leftarrow$ $u\in\left(U^{\perp}\right)^{\perp}$.

2) צ"ל $\left(U^{\perp}\right)^{\perp}\subseteq U$.
נקח $\mathrm{v}\in\left(U^{\perp}\right)^{\perp}$. לפי סעיף א' קיימים $u\in U$, $w\in U^{\perp}$ כך ש

$$\mathrm{v}=u+w\ .$$

נשים לב כי $\langle u,w\rangle=0$.

$$\begin{aligned}\langle\mathrm{v},w\rangle&=\langle u+w,w\rangle\\&=\langle u,w\rangle+\langle w,w\rangle\\&=\langle w,w\rangle\end{aligned}$$

מכיוון ש $\mathrm{v}\in\left(U^{\perp}\right)^{\perp}$ ו- $w\in U^{\perp}$, אז נקבל כי $\langle\mathrm{v},w\rangle=0$. לכן $\langle w,w\rangle=0$ ולכן $w=0$.
לכן $\mathrm{v}=u\in U$.
הוכחנו כי $(U^{\perp})^{\perp}=U$.

■

2.3 תהליך גרם שמידט

משפט 2.6 תהליך גרם שמידט

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית ו- $U\subset V$ תת-מרחב של V. נניח שהקבוצה

$$\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_k\ .\}$$

היא בסיס של U. נסמן בסיס אורתוגונלי של U כך:

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \ .$$

ניתן למצוא את כל הווקטורים בבסיס האורתוגונלי, באמצעות התהליך גרם שמידט:

$$\begin{aligned}
u_1 =& \mathrm{v}_1 \\
u_2 =& \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}\cdot u_1 \\
u_3 =& \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}\cdot u_1 \ - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}\cdot u_2 \\
&\vdots \\
u_k =& \mathrm{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \mathrm{v}_k, u_i\rangle}{\|u_i\|^2}\cdot u_i \\
&\vdots
\end{aligned}$$

דוגמה 2.7

$V = \mathbb{R}^4$ עם מכפלה פנימית סטנדרטית.

$$U = \mathrm{span}\left\{ \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 0\\-1\\0\\1 \end{pmatrix}, \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 0\\0\\-1\\1 \end{pmatrix} \right\}$$

מצאו בסיס אורתוגונלי ל- U.

פתרון:

נגדיר $u_1 = \mathrm{v}_1$. $V_1 = \mathrm{span}(u_1)$.

$$\mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}\cdot u_1 = \begin{pmatrix} 0\\-1\\0\\1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\\-2\\0\\1 \end{pmatrix} \ .$$

אפשר לבחור $u_2 = \begin{pmatrix} 1\\-2\\0\\1 \end{pmatrix}$.

$$V_2 = \mathrm{span}\{u_1, u_2\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\-2\\0\\1 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{v}_3 - P_{V_2}(\mathrm{v}_3) =& \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}\cdot u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}\cdot u_2 \\
=& \begin{pmatrix} 0\\0\\-1\\1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1\\-2\\0\\1 \end{pmatrix} \\
=& \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1\\1\\-3\\1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

נגדיר $u_3 = \begin{pmatrix} 1\\1\\-3\\1 \end{pmatrix}$. בסיס אורתוגונלי:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\\-2\\0\\1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\\1\\-3\\1 \end{pmatrix} \right\}$$

נבנה בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}}u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{-2}{\sqrt{6}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{12}}u_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}}\\\frac{1}{\sqrt{12}}\\\frac{-3}{\sqrt{12}}\\\frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix} \right\}$$

דוגמה 2.8

במרחב $\mathbb{R}_2[x]$ עם מכפלה פנימית אינטגרלית בקטע $[0,1]$. נתון הבסיס סטנדרטית

$$\left\{ e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2 \right\} \ .$$

מצאו בסיס אורתוגונלי.

פתרון:

$V_1 = \mathrm{span}(1)$, $u_1 = e_1 = 1$.

$$u_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 = x - \frac{1}{2}$$

$$\langle e_2, u_1\rangle = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\ , \qquad \|u_1\|^2 = \int_0^1 1^2 dx = 1\ .$$

$$V_2 = \mathrm{span}\left(1, x - \frac{1}{2}\right)\ .$$

$$u_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{\langle e_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2$$

$$\langle e_3,u_1\rangle=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}\ ,\qquad \langle e_3,u_2\rangle=\int_0^1 x^2\left(x-\frac{1}{2}\right)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{6}\right]_0^1=\frac{1}{12}\ .$$

$$\|u_2\|^2=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\,dx=\int_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}\right]_0^1=\frac{1}{12}\ .$$

לכן

$$u_3=x^2-\frac{1}{3}-u_2=x^2-x+\frac{1}{6}\ .$$

בסיס אורתוגונלי:

$$u_1=1\ ,\qquad u_2=x-\frac{1}{2}\ ,\qquad u_3=x^2-x+\frac{1}{6}\ .$$

נמצא בסיס אורתונורמלי:

$$\|u_1\|^2=1\ ,\qquad \|u_2\|^2=\frac{1}{12}\ ,$$

$$\begin{aligned}\|u_3\|^2&=\int_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)^2\,dx\\&=\int_0^1\left(x^4-2x^3+\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}\right)\,dx\\&=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+\frac{4}{9}x^3-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{36}x\right]_0^1\\&=\frac{1}{180}\ .\end{aligned}$$

בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{u_1,\ \sqrt{12}\,u_2,\ \sqrt{180}u_3\right\}\ .$$

דוגמה 2.9

מצאו בסיס אורתונורמלי למרחב $U=\text{span}(1,x,x^2)$ ביחס למכפלה פנימית אינטגרלית בקטע $[-1,1]$.

פתרון:

נסמן $\text{v}_1=1,\text{v}_2=x,\text{v}_3=x^2$.

$$u_1=1\ ,\qquad u_2=\text{v}_2-\frac{\langle \text{v}_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1$$

$$\langle \text{v}_2,u_1\rangle=\int_{-1}^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1=0\ .$$

לכן

$$u_2=x\ .$$

$$u_3=\text{v}_3-\frac{\langle \text{v}_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{\langle \text{v}_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2\ .$$

$$\|u_1\|^2=\int_{-1}^1 1\,dx=[x]_{-1}^1=2\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle = 0 \ .$$

$$\|u_2\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \ .$$

לכן

$$u_3 = x^2 - \frac{1}{3} \ .$$

בסיס אורתוגונלי:

$$u_1 = 1 \ , \qquad u_2 = x \ , \qquad u_3 = x^2 - \frac{1}{3} \ .$$

נחפש בסיס אורתונורמלי:

$$\|u_1\|^2 = 2 \ , \qquad \|u_2\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \ .$$

$$\begin{aligned}\|u_3\|^2 &= \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right) dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{8}{45} \ .\end{aligned}$$

בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} \ , \quad \sqrt{\frac{3}{2}}x \ , \quad \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\right\} \ .$$

דוגמה 2.10

מצאו בסיס אורתונורמלי למרחב $U = \mathrm{span}\left\{\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix}, \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 2+2i \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{C}^3$.

פתרון:

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle = (2+2i)\cdot 2 + 0 + 8 = 12 + 4i$$

$$\|u_1\|^2 = 12 \ .$$

$$\|u_2\|^2 = \frac{16}{9} + \frac{4}{9} + 4 + 4 + \frac{4}{9} = \frac{32}{3} \ .$$

לכן

$$u_2 = \begin{pmatrix} 2+2i \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \left(1 + \frac{1}{3}i\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4i}{3} \\ \frac{2}{3} - 2i \\ 2 - \frac{2}{3}i \end{pmatrix}$$

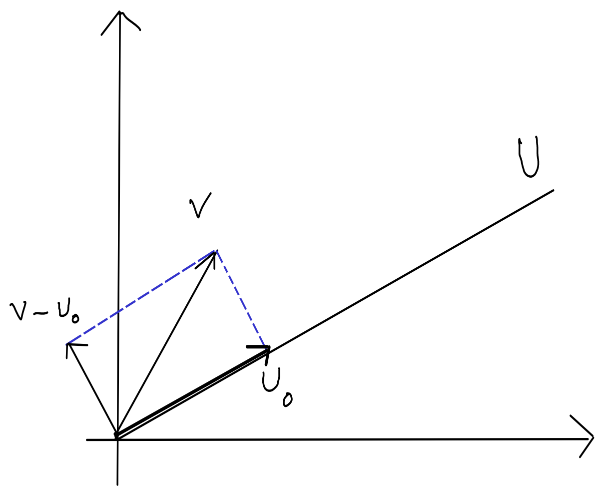
בסיס אורתונורמלי:

$$\frac{1}{\sqrt{12}} u_1 \ , \qquad \sqrt{\frac{3}{32}} u_2 \ .$$

2.4 *הערה: משמעות גיאומטרית של ההיטל

יהי U ישר במישור, ותהי v נקודה כלשהי במישור שאינה על U. בגיאומטריה מוכיחים כי אפשר להוריד אנך מ- v על U, ואורך אנך זה הוא המרחק הקצר ביותר בין הנקודה v לנקודה כלשהי בישר. מרחק זה נקרא גם המרחק בין v ל- U. קיים טענה דומה גם במרחב מכפלה פנימית.

נגדיר כעת אנך מוקטור v לתת-מרחב U. צריך למצוא וקטור $u_0 \in U$ המקיים $(\mathrm{v} - u_0) \perp U$.



יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $U \subset V$ תת-מרחב נוצר סופית של V. יהי $\mathrm{v} \in V$ שאינו שייך ל- U, כלומר $\mathrm{v} \notin U$.

א) נגדיר את ההיטל האורתוגונלי של וקטור v על תת מרחב U ע"י התנאי הבא:

$$(\mathrm{v} - u_0) \perp U \ .$$

ב) המרחק בין v ל U מוגדר להיות $d(\mathrm{v}, u_0)$, כלומר המרחק בין v להיטל של v על U.

2.5 * הערה: משפט קיום בסיס אורתוגונלז

הגדרה 2.5 קיום בסיס אורתוגונלי

לכל מרחב מכפלה פנימית V ממימד סופי קיים בסיס אורתוגונלי.

הוכחה: נניח

$$\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\}$$

בסיס של V. נגדיר סדרת מרחבים ווקטורים

$$V_1=\mathrm{span}\left(\mathrm{v}_1\right)\subset V_2=\mathrm{span}\left(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\right)\subset\ldots\subset V_n=\mathrm{span}\left(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n\right)=V$$

לכל $1\leq i\leq n$.
נגדיר

$$u_i=\mathrm{v}_i-P_{V_{i-1}}(\mathrm{v}_i)\ .$$

נוכיח באינדוקציה כי $u_1,u_2,\ldots,u_n$ בסיס אורתוגונלי.
עבור $i=1$ הקבוצה $\{u_1\}$ בסיס אורתוגונלי של V_1.
נניח שעבור i, קבוצת הווקטורים $\{u_1,\ldots,u_i\}$ אורתוגונלית.
נוכיח כי $u_j\perp u_{i+1}$ לכל $1\leq j\leq i$, כאשר $u_{i+1}=\mathrm{v}_{i+1}-P_{V_i}(\mathrm{v}_{i+1})$.
הוכחנו במשפט 2.3 כי

$$\left(\mathrm{v}_{i+1}-P_{V_i}(\mathrm{v}_{i+1})\right)\perp V_i\ .$$

■