חדו"א 1 סמסטר א' תשפד
דף חזרה

1 קבוצות של מספרים

קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

קבוצת המספרים השלמים: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

קבוצת המספרים הרציונלים: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | n \neq 0, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}\}$

קטע סגור	$[a,b]$	$=$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$
קטע פתוח	(a,b)	$=$	$\{x \mid a < x < b\}$
קטע חצי פתוח	$[a,b)$	$=$	$\{x \mid a \leq x < b\}$
קטע חצי פתוח	$(a,b]$	$=$	$\{x \mid a < x \leq b\}$
קטע חצי פתוח	$[a,\infty)$	$=$	$\{x \mid x \geq a\}$
קטע פתוח	(a,∞)	$=$	$\{x \mid x > a\}$
קטע חצי פתוח	$(-\infty,b]$	$=$	$\{x \mid x \leq b\}$
קטע פתוח	$(-\infty,b)$	$=$	$\{x \mid x < b\}$
קטע פתוח	$(-\infty,\infty)$	$=$	$\{x \mid -\infty < x < \infty\} = \mathbb{R}$

הגדרה 1.1 אי-שוויונים

יהיו $a, A \in \mathbb{R}$ מספרים ממשיים. נגדיר את הסימונים הבאים:

- $a < b$ אם ורק אם המספר $b - a$ חיובי.
- $a \leq b$ אם ורק אם המספר $b - a$ חיובי או שווה ל- 0.
- $a > b$ אם ורק אם המספר $a - b$ חיובי.
- $a \geq b$ אם ורק אם המספר $a - b$ חיובי או שווה ל- 0.

למה 1.1 חוק העברה של אי-השוויונים

יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$. אם $a > b$ ו- $b > c$ אז $a > c$.

משפט 1.1

יהיו b, B מספרים ממשיים כך ש- $b < B$.

א) יהי m מספר ממשי.

אם m חיובי אז

$$mb < mB \ .$$

אם m שלילי אז

$$mb > mB \ .$$

ב) לכל מספר ממשי N חיובית שלילי או 0.

$$N + b < N + B$$

ו-

$$N - b > N - B \ .$$

ג) יהיו a, A מספרים ממשיים חיוביים.

אם $a < A$ אז $\frac{1}{a} > \frac{1}{A}$.

אם $\frac{1}{A} < \frac{1}{a}$ אז $A > a$.

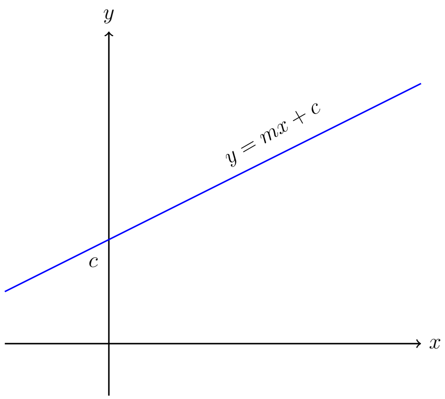
2 פונקציות אלמנטריות

כלל 2.1 גרף של קו ישר

הפונקציה הניתנת ע"י הנוסחה

$$y = mx + c$$

הינה קו ישר עם שיפוע m שחותכת את ציר ה- y בנקודה $(0, c)$.



לכן ככל ש- m גדול יותר, השיפוע גבוה יותר (ולהפך).

משפט 2.1 נוסחאות של $\log_a x$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

הגדרה 2.1 הלוגריתם הטבעי

כאשר הבסיס של הלוגריתם הוא e מסמנים $\log_e x = \ln x$.

כלל 2.2 ערכים חשובים של $\sin x$

ערכים עיקריים:

$$\sin(0) = 0\ , \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1\ , \qquad \sin(\pi) = 0\ , \qquad \sin(\tfrac{3\pi}{2}) = 1\ , \qquad \sin(2\pi) = 0\ .$$

$\sin x$ פונקציה אי-זוגית:

$$\sin(-x) = -\sin(x)\ .$$

$\sin x$ פונקציה מחזורית עם מחזור $T = 2\pi$:

$$\sin(x + 2\pi n) = \sin(x)\ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

ערכים מחזוריים:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1\ , \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1\ , \quad \sin(n\pi) = 0\ , \quad \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n\ ,$$

כאשר $n \in \mathbb{Z}$ מספר שלם. ערכים שיקופיים:

$$\sin(\pi - x) = \sin x\ , \qquad \sin(x - \pi) = -\sin x \qquad \sin(x + \pi) = -\sin(x)\ .$$

כלל 2.3 ערכים חשובים של $\cos x$

ערכים עיקריים:

$$\cos(0) = 1\ , \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\ , \qquad \cos(\pi) = -1\ , \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\ , \qquad \cos(2\pi) = 0\ .$$

$\cos x$ פונקציה זוגית:

$$\cos(-x) = \cos(x)\ .$$

$\cos x$ פונקציה מחזורית עם מחזור $T = 2\pi$:

$$\cos(x + 2\pi n) = \cos(x)\ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

ערכים מחזוריים:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0\ , \qquad \cos(2\pi n) = 1\ , \qquad \cos(\pi + 2\pi n) = -1\ , \qquad \cos(n\pi) = (-1)^n\ , \qquad n \in \mathbb{Z}\ .$$

ערכים שיקופיים:

$$\cos(\pi - x) = -\cos x\ , \qquad \cos(x - \pi) = -\cos x \qquad \cos(x + \pi) = -\cos(x)\ .$$

כלל 2.4 ערכים חשבוים של $\tan x$

תחום הגדרה:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\ , \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ .$$

ערכים עיקריים:

$$\tan(0) = 0\ , \qquad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\ , \qquad \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1\ , \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \to \infty\ , \qquad \tan\left(-\frac{\pi}{2}\right) \to -\infty\ .$$

$\tan x$ פונקציה אי-זוגית:

$$\tan(-x) = -\tan(x)\ .$$

$\tan x$ פונקציה מחזורית עם מחזור $T=\pi$:

$$\tan(x+\pi n)=\tan(x)\ , \quad n\in\mathbb{Z}$$

ערכים מחזוריים:

$$\tan\left(\frac{|n|\pi}{2}\right)\to\infty\ , \qquad \tan\left(-\frac{|n|\pi}{2}\right)\to-\infty\ , \qquad \tan(n\pi)=0\ , \qquad n\in\mathbb{Z}\ .$$

ערכים שיקופיים:

$$\tan(\pi-x)=-\tan x\ , \qquad \tan(x-\pi)=\tan x \qquad \tan(x+\pi)=\tan(x)\ .$$

הגדרה 2.2 פונקציית ערך מוחלט

$$|x|=\begin{cases} x & \text{אם } x\geq 0 \\ -x & \text{אם } x<0\ . \end{cases}$$

הגדרה 2.3 פונקציית מקסימום

$$\max(x_1,x_2)=\begin{cases} x_1 & \text{אם } x_1\geq x_2 \\ x_2 & \text{אם } x_2\geq x_1\ . \end{cases}$$

לדוגמה,

הגדרה 2.4 פונקציית מינימום

$$\min(x_1,x_2)=\begin{cases} x_1 & \text{אם } x_1\leq x_2 \\ x_2 & \text{אם } x_2\leq x_1\ . \end{cases}$$

הגדרה 2.5 פונקציות רציונליות

פונקציה מצורה

$$y(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}\ ,$$

כאשר $P(x)$ ו- $Q(x)$ פולינונים, נקראת **פונקציה רציונלית**.

נסמן הסדר של $P(x)$ ב- $\deg(P)$, והסדר של $Q(x)$ ב- $\deg(Q)$.

א) אם $\deg(P)<\deg(Q)$ אז אומרים כי $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **פונקציה רציונלית אמיתית**.

ב) אם $\deg(P)\geq\deg(Q)$ אז אומרים כי $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **פונקציה רציונלית לא אמיתית**.

משפט 2.2 תכונות של פונקציה רציונלית

תהי $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ פונקציה רציונלית.

1) אם $\deg(P)>\deg(Q)$, אז $f(x)$ ישאף לאינסוף כאשר x שואף לאינסוף.

2) אם $\deg(P)=\deg(Q)$, אז תהיה אסימפטוטה אופקית ב- $x\to\infty$ וב- $x\to-\infty$.

3) אם $\deg(P)<\deg(Q)$ אז הציר ה- x הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה ב- $x\to\infty$ וב- $x\to-\infty$.

4) במקרה שאין ל- $Q(x)$ שורשים אז הגרף הוא קו רציף.

5) אם יש ל- $Q(x)$ שורשים, תהיה אסימפטוטה אנכית בכל ערך של x השווה לאחד השורשים של Q המתאימות להשורשים.

משפט 2.3 גרף של פולינום

יהי $P(x)$ פולינום.

א) בשורש בעל ריבוי אי-זוגי, הגרף חותך את ציר ה- x, והפונקציה $P(x)$ מחליפה סימנה בנקודה זו.

ב) בשורש בעל ריבוי זוגי, הגרף רק משיק לציר ה- x, והפונקציה $P(x)$ לא משנה סימן בנקודה זו.

ג) שורש x_i בעל ריבוי m_i זוגי הוא תמיד נקודת קיצון של רב-האיבר.

ד) במידה שריבוי השורש x_i הוא אי-זוגי וגדול מ- 1, גרף של רב-איבר גם חותך וגם משיק את ציר ה- x בנקודה x_i. במקרה זה הנקודה $x=x_i$ היא נקודת **פיתול** של הגרף.

משפט 2.4 טרנספורמציות של הגרפים במערכת הצירים

תהי f פונקציה כלשהי. להלן מתואר מה יקרה עם הגרף $y=f(x)$ תחת הטרנספורמציות הבאות:

1	$f(x)+a$	הזזת הגרף ב- $\lvert a\rvert$ יחידות למעלה אם $a>0$ או למטה אם $a<0$.
2	$f(x+a)$	הזזת הגרף ב- $\lvert a\rvert$ יחידות שמאלה אם $a>0$ או ימינה אם $a<0$.
3	$-f(x)$	היפוך של הגרף לעומת ציר ה- x (שיקוף הגרף ביחס לציר ה-x).
4	$f(-x)$	היפוך של הגרף לעומת ציר ה- y (שיקוף הגרף ביחס לציר ה-y).
5	$k\cdot f(x)$	$(k>0)$ מתיחה, אם $k>1$, או כיווץ, אם $0<k<1$, של הגרף בכיוון של ציר ה- y.
6	$f(k\cdot x)$	$(k>0)$ כיווץ, אם $k>1$, או מתיחה, אם $0<k<1$, של הגרף בכיוון של ציר ה- x.
7	$\lvert f(x)\rvert$	שיקוף של חלקי הגרף הנמצאים מתחת לציר ה-x לעומת ציר ה- x
8	$f(\lvert x\rvert)$	החלפת חלק הגרף הנמצא משמאל לציר y בשיקופו של החלק הימין של הגרף לעומת ציר ה- y
9	$f(-\lvert x\rvert)$	החלפת חלק הגרף הנמצא מימין לציר y לשיקוף של החלק השמאלי של הגרף לעומת ציר ה- y
10	$\lvert f(x)-a\rvert+a$	שיקוף לעומת ישר $y=a$ של חלקי הגרף הנמצאים מתחת לישר זה
11	$f(\lvert x-a\rvert+a)$	ההחלפת החלק הגרף הנמצא משמאל לישר $x=a$ לשיקוף לעומת ישר זה של חלק הגרף אשר מימין לישר $x=a$

משפט 2.5 משפט החילוק

יהיו $f(x)$, $g(x)$ פולינומים כך ש- $\deg(f)\le\deg(g)$. קיימים פולינומים יחידים, $q(x)$, $r(x)$, כך ש-

$$g(x)=q(x)f(x)+r(x)$$

כאשר $\deg(r)\le\deg(f)$.

משפט 2.6 משפט השארית

השארית המתקבלת לאחר חילוק של $g(x)$ ב- $(x-k)$ היא $g(k)$ לכל מספר ממשי k.

משפט 2.7 משפט גורם של פולינום

יהי $f(x)$ פולינום.
$g(k)=0$ אם ורק אם $(x-k)$ גורם של הפולינום.

הגדרה 2.6 ריבוי אלגברי של שורש

יהי $g(x)$ פולינום. נניח כי $g(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים בצורה

$$g(x)=(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}(x-x_3)^{m_3}\ldots\ .$$

אומרים כי הריבוי האלגברי של השורש x_1 הוא m_1, הריבוי אלגברי של השורש x_2 הוא m_2, וכו'.

אם הריבוי אלגברי של שורש של פולינום הוא $m=1$ אז אומרים כי השרוש הוא **שורש פשוט**.

אם הריבוי אלגברי של שורש של פולינום הוא $m>1$ אז אומרים כי השרוש הוא **שורש חוזר**.

משפט 2.8 משפט היסודי של אלגברה (גאוס)

יהי $P(x)$ פולינום מסדר n. אז קיים פירוק מצורה

$$P(x)=a(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\ldots(x-x_k)^{m_k}Q(x)$$

כאשר $Q(x)$ פולינום מסדר m שאין לו שורשים ממשיים, ו- $m_1+m_2+\cdots+m_k+m=n$ ו- $x_1,x_2,\ldots,x_k$ שורשים ממשיים שונים של $P(x)$.

3 תכונות של פונקציות

הגדרה 3.1 פונקציה

פונקציה מקבוצה X לקבוצה Y שמסומנת ע"י

$$f:X\to Y\ ,$$

היא כלל שמתאימה לכל איבר $x\in X$ איבר יחיד $y\in Y$.

כלל 3.1 כמויות הלא מוגדרות

- $\frac{1}{0}$ לא מוגדר.
- $\sqrt{a}$, כאשר $a<0$, לא מוגדר.

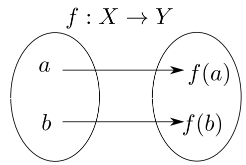
הגדרה 3.3 פונקצית חד חד ערכית

תהי $f:X\to Y$ פונקציה.
אומרים כי f חד חד ערכית אם לכל $a,b\in X$,

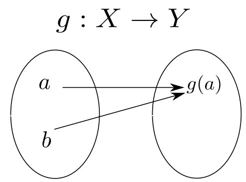
$$a\neq b \qquad \Rightarrow \qquad f(a)\neq f(b) \ ,$$

או, באותה מידה,

$$f(a)=f(b) \qquad \Rightarrow \qquad a=b \ .$$



פונקציה חח"ע

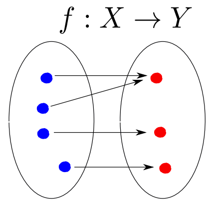


פונקציה לא חח"ע

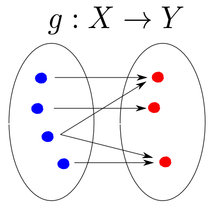
משפט 3.1 גרף של פונקציה חד חד ערכית

אם $f(x)$ פונקציה חד חד ערכית, אז הגרף של $y=f(x)$ עובר דרך כל ערך של y שבתמונה שלה פעם אחת בלבד.

<u>דוגמשאות של גרפים של פונקציות חד חד ערכיות</u>



פונקציה



לא פונקציה

הקבוצה X נקראת **תחום ההגדרה** של f.

הקבוצה Y נקראת **הטווח** של f.

הטווח Y אחד מהקבוצות מספרים, $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

הגדרה 3.2 תחום הגדרה ותמונה של פונקציה

תהי f הפונקציה $f:X\to Y$ מקבוצה X לקבוצה Y.

א) הקבוצה X נקראת **תחום ההגדרה** של f. תחום ההגדרה היא הקבוצה של כל הערכים האפשריים של x אשר ניתנים להציב ב- $f(x)$.

נסמן את תחום ההגדרה ב- $\mathrm{Dom}(f)$.

ז"א $\mathrm{Dom}(f)=X$.

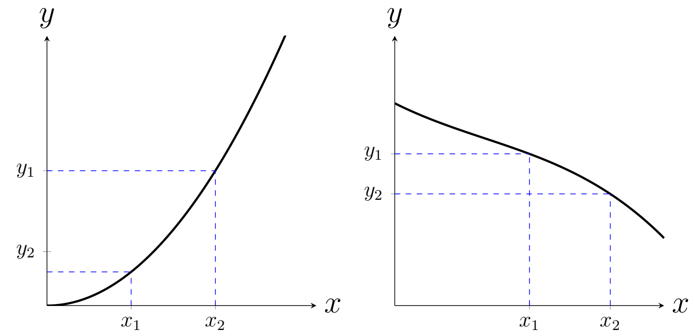
ב) הקבוצה Y נקראת **הטווח** של f. נסמן את הטווח ב- $\mathrm{Rng}(f)$.

ז"א $\mathrm{Rng}(f)=Y$.

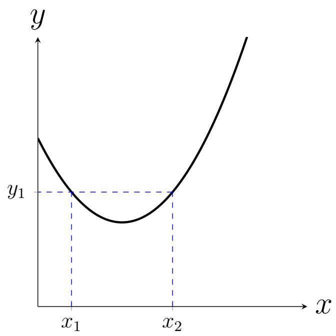
ג) **התמונה** של f היא הקבוצה שמכילה את כל הערכים של f.

נסמן את התמונה ב- $\mathrm{Im}(f)$.

התמונה תת-קבוצה של הטווח: $\mathrm{Im}(f)\subseteq Y$.



דוגמה של גרף של פונקציה לא חד חד ערכית



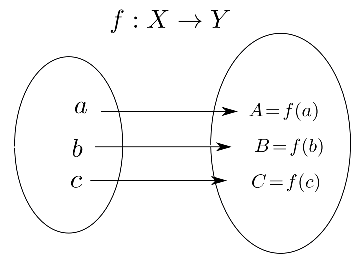
הגדרה 3.4 פונקצית על

תהי $f : X \to Y$ פונקציה. אומרים כי f פונקציית על Y, אם לכל $y \in Y$ קיים $x \in X$ כך ש-

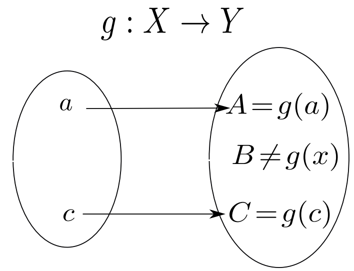
$$f(x) = y \ .$$

במילים אחרות, $\mathrm{Im}(f) = Y$.

פונקציה על



פונקציה לא על



הגדרה 3.5 פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית

פונקציה $f(x)$ נקראת זוגית אם לכל $x \in \mathrm{Dom}(f)$ מתקיים:

$$f(-x) = f(x) \ .$$

גרף של פונקציה זוגית סימטרי ביחס לציר ה-y.

$f(x)$ נקראת אי-זוגית אם לכל $x \in \mathrm{Dom}(f)$ מתקיים:

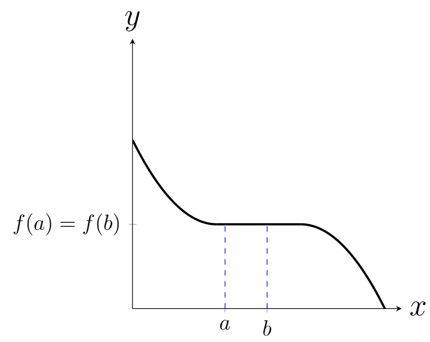
$$f(-x) = -f(x) \ .$$

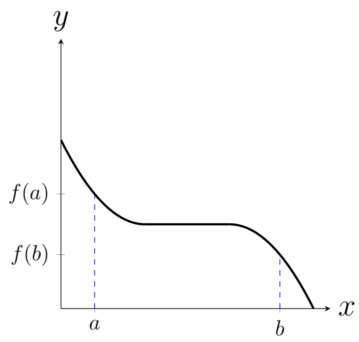
הגדרה 3.6 מונוטוניות של פונקציה

תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת בקטע I.

- אומרים כי f עולה מונוטונית אם לכל $a, b \in I$,

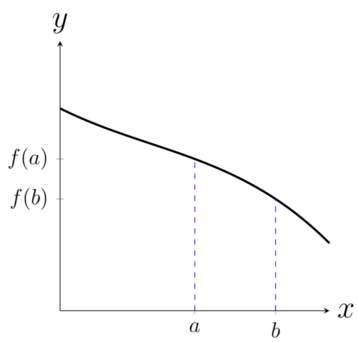
$$a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) \leq f(b) \ .$$





• אומרים כי f יורדת מונוטונית ממש אם לכל $a, b \in I$,

$$a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) > f(b) \ .$$



משפט 3.2 פונקציה מונוטונית אם"ם היא חח"ע

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה.

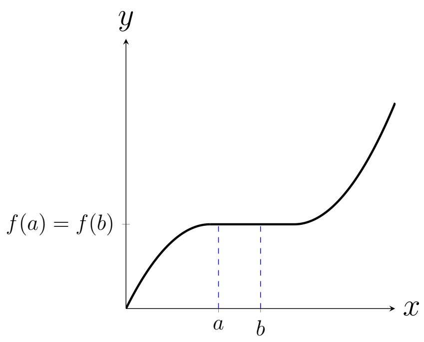
f עולה ממש או יורדת ממש בטע I אם ורק אם היא חח"ע בקטע I.

הגדרה 3.7 פונקציה חסומה

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע I.

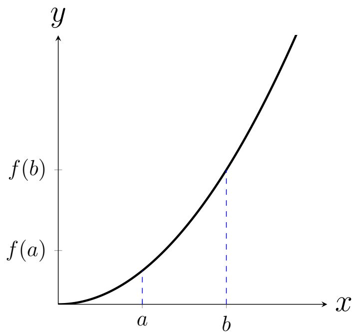
• אומרים כי f **חסומה מלמעלה** אם קיים מספר $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in I$ מתקיים

$$f(x) < M \ .$$



• אומרים כי f עולה מונוטונית ממש אם לכל $a, b \in I$,

$$a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) < f(b) \ .$$



• אומרים כי f יורדת מונוטונית אם לכל $a, b \in I$,

$$a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) \geq f(b) \ .$$

- אומרים כי f **חסומה מלמטה** אם קיים מספר $m \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in I$ מתקיים
$$f(x) > m \ ,$$
- אומרים כי f **חסומה** אם f חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה.

ז"א f חסומה אם קיימים מספרים $m, M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in I$ מתקיים
$$m < f(x) < M \ .$$
אפשר לנסח את התנאי זו גם כך:

f חסומה בקטע I אם קיים $K \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in I$ מתקיים
$$|f(x)| < K \ .$$

הגדרה 3.8 פונקציה מחזורית

פונקציה $f(x)$ נקראת מחזורית אם קיים מספר $T > 0$ כך שלכל $x \in \mathrm{Dom}(f)$ וגם $x \pm T \in \mathrm{Dom}(f)$,
$$f(x+T) = f(x) \ , \qquad f(x-T) = f(x) \ .$$
מספר $T > 0$ כזה הקטן ביותר נקרא **המחזור** של f.

משפט 3.3 מחזור של פונקציה טריגונומטרית עם פקטור והזזה בארגומנט

לכל $k \in \mathbb{R} \neq 0$ ו- $a \in \mathbb{R}$.

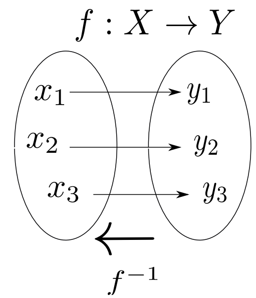
- הפונקציה $\sin(kx+a)$ מחזורית עם מחזור $T = \dfrac{2\pi}{k}$.
- הפונקציה $\cos(kx+a)$ מחזורית עם מחזור $T = \dfrac{2\pi}{k}$.
- הפונקציה $\tan(kx+a)$ מחזורית עם מחזור $T = \dfrac{\pi}{k}$.

לכל $k \in \mathbb{R} \neq 0$ ו- $a \in \mathbb{R}$.

- הפונקציה $\sin\left(\frac{x}{k}+a\right)$ מחזורית עם מחזור $T = 2k\pi$.
- הפונקציה $\cos\left(\frac{x}{k}+a\right)$ מחזורית עם מחזור $T = 2k\pi$.
- הפונקציה $\tan\left(\frac{x}{k}+a\right)$ מחזורית עם מחזור $T = k\pi$.

הגדרה 3.9 פונקציה הפוכה

נניח ש- $f : X \to Y$ פונקציה.
אם $f(x)$ חד חד ערכית ועל אז ניתן להגדיר הפונקציה ההפוכה, $f^{-1}(x)$ באופן הבא:
$$f(x) = y \qquad \Leftrightarrow \qquad x = f^{-1}(y) \ .$$



$$f^{-1}(y_1) = x_1 \ ,$$
$$f^{-1}(y_2) = x_2 \ ,$$
$$f^{-1}(y_3) = x_3 \ .$$

משפט 3.4

הגרפים של שתי פונקציות הפוכות אחד לשניה סימטריים ביחס לקו $y = x$.

משפט 3.5 תחום ההגדרה ותמונתה של פונקציה הפוכה

תהי $f(x)$ פונקציה ותהי $f^{-1}(x)$ הפונקציה ההפוכה.

- תחום ההגדרה של הפונקציה ההפוכה שווה לתמונתה של הפונקציה המקורית.
ז"א $\mathrm{Dom}\left(f^{-1}\right) = \mathrm{Im}\left(f\right)$.
- התמונה של הפונקציה ההפוכה שווה לתחום ההגדרה של הפונקציה המקורית.
ז"א $\mathrm{Im}\left(f^{-1}\right) = \mathrm{Dom}\left(f\right)$.

הגדרה 3.10 פונקציה מורכבת

נניח ש $y = f(u)$ ו- $u = g(x)$, אז לפונקציה $y = f(g(x))$ קוראים **פונקציה מורכבת**.

4 גבול של פונקציה

הגדרה 4.1 גבול של פונקציה

אומרים כי $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ אם לכל סביבה $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ של L קיימת סביבה $(a-\delta, a+\delta)$ של a כך שלכל $x \neq a$ השייך לסביבה של a מתקיים:
$f(x)$ שייך לסביבה של L.

במילים פשוטות, כאשר x מתקרב ל- a, $f(x)$ מתקרב ל- L. עד עכשיו הסתכלנו אל דוגמאות של גבול של פונקציה בנקודה a בה הפונקציה מוגדרת. הכלל הבא יעזור לנו לחשב גבולות של פונקציות בנקודות בהן הפונקציה מוגדרת:

הגדרה 4.2 גבול חד צדדי

<u>**גבול מצד שמאול**</u>

הגבול משמאול של פונקציה $f(x)$ בנקודה a שווה ל- A אם לכל סביבה של A קיימת סביבה של a כך שלכל $x < a$ מהסביבה של a, גם $f(x)$ שייך לסביבה של A. סימון:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = A \ .$$

<u>**גבול מצד ימין**</u>

הגבול מימין של פונקציה $f(x)$ בנקודה a שווה ל- B אם לכל סביבה של B קיימת סביבה של a כך שלכל $x > a$ מהסביבה של a, גם $f(x)$ שייך לסביבה של B. סימון:

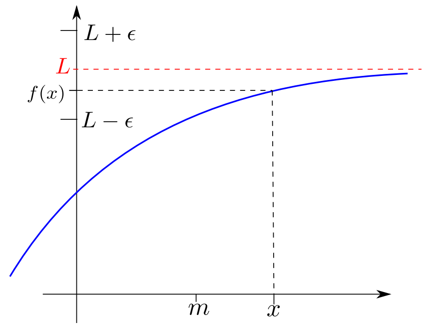
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = B \ .$$

משפט 4.1 קיום של גבול דו-צדדי

הגבול $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ קיים אם ורק אם $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$.

הגדרה 4.3 גבול של פונקציה כאשר $x\to\infty$

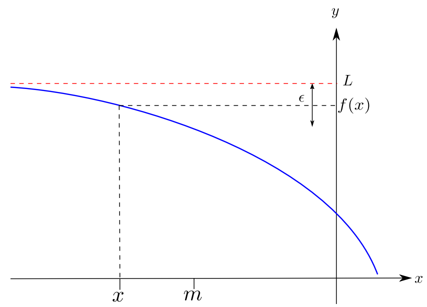
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ אם לכל סביבה של L קיים מספר m כך שלכל $x > m$ מתקיים: $f(x)$ שייך לסביבה של L.



במילים: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ אם לכל סביבה $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ של L קיים מספר m כך שלכל $x > m$ מתקיים:
$f(x)$ שייך לסביבה $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ של L.

הגדרה 4.4 גבול של פונקציה כאשר $x\to-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ אם לכל סביבה של L קיים מספר m כך שלכל $x < m$ מתקיים: $f(x)$ שייך לסביבה של L.



הגדרה 4.5 גבול אינסופי של פונקציה בנקודה

$\lim\limits_{x\to a} f(x) \to \infty$ אם לכל m קיימת סביבה של נקודה a, כך שלכל x השייך לסביבה של a, $f(x) > m$.

משפט 4.2 כללים של גבולות

כלל 1) גבול של פונקציה קבועה

$$\lim_{x\to a}(c)=c$$

c קבוע.

כלל 2) כללים הקשורים לפעולות חשבון

אם קיימים הגבולות הסופיים $\lim_{x\to a} f(x)$ ו- $\lim_{x\to a} g(x)$ אז

א) מכפלה בסקלר

$$\lim_{x\to a} c\cdot f(x)=c\cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

ב) סכום (הפרש)

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\pm \lim_{x\to a} g(x)$$

ג) כפל

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

ד) חילוק

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

אם $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$.

כלל 3) גבול של פונקציה מורכבת

$$\lim_{x\to a} f\left(g(x)\right)=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

כלל 4) אם בסביבה מסוימת של נקודה a (פרט אולי לנקודה a עצמה) מתקיים $f(x)=g(x)$, אז

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)\ .$$

כלל 5) כלל הסנדוויץ'

אם בסביבה מסוימת של נקודה a (פרט אולי לנקודה a עצמה) מתקיים

$$f(x)\leq h(x)\leq g(x)$$

וקיימים גבולות של פונקצות f ו- g בנקודה a והם שווים אחד לשני, קרי

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=A\ ,$$

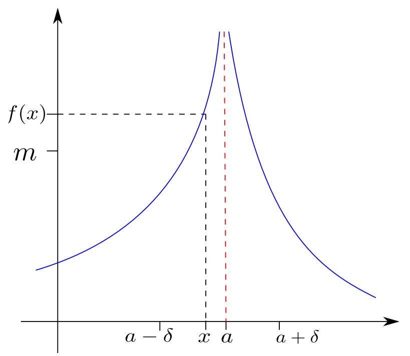
אז קיים הגבול של $h(x)$ בנקודה זו ו-

$$\lim_{x\to a} h(x)=A\ .$$

כלל 6) אם $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ אז

$$\lim_{x\to a}\frac{c}{f(x)}=0\ ,$$

c קבוע.

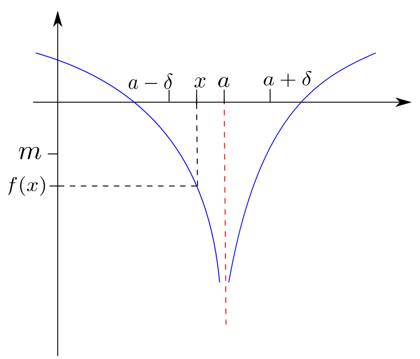


במילים: $\lim_{x\to a} f(x)\to\infty$ אם לכל מספר m קיימת סביבה $(a-\delta,a+\delta)$ של הנקודה a כך שלכל x השייך לסביבה זו, $f(x)>m$.

הגדרה 4.6 גבול מינוס אינסופי של פונקציה בנקודה

$$\lim_{x\to a} f(x)\to-\infty$$

אם לכל m קיימת סביבה של a כך שלכל x השייך לסביבה של a, $f(x)<m$.



במילים: $\lim_{x\to a} f(x)\to-\infty$ אם לכל מספר m קיימת סביבה $(a-\delta,a+\delta)$ של הנקודה a כך שלכל x השייך לסביבה זו, $f(x)<m$.

כלל 7) אם $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ ופונקציה $g(x)$ חסומה בסביבה מסוימת של נקודה a, אז

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0\ .$$

ניסוח אחר של המשפט:

אם $\lim_{x\to a} h(x)=0$ ו $g(x)$ פונקציה חסומה, אז

$$\lim_{x\to a} h(x)\cdot g(x)=0\ .$$

כלל 8) אם מתקיים $\lim_{x\to a} f(x)=0$ אז מתקיים גם

$$\lim_{x\to a} |f(x)|=0$$

ולהיפך.

כלל 9) אם $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ ופונקציה $g(x)$ חסומה בסביבה מסוימת של נקודה a, אז

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\infty\ .$$

כלל 10) אם קיים גבול של פונקציה $f(x)$ בנקודה a אז היא חסומה בסביבה מסוימת של נקודה זו.

כלל 11) אם $\lim_{x\to a} f(x)=c>0$, אז קיימת סביבה מסוימת של הנקודה a כך שבה $f(x)>0$.

משפט 4.3 גבולות מסוימים

א) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

ב) $\lim_{x\to\infty} p^x=\begin{cases}0 & (0<p<1)\\ \infty & p>1\end{cases}$

ג) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=1\ ,\qquad (p>0)\ .$

ד) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\ .$

למה 4.1 גבולות של פונקציות רציונליות

נתונה פונקיה $f(x)$ רציונלית:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

א) אם $\deg(P)<\deg(Q)$ אז $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ ו- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$.

ב) אם $\deg(P)>\deg(Q)$ אז $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ (הגבול לא מודזר).

ג) אם $\deg(P)=\deg(Q)=n$. נניח ש- $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n}$. אז $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{a_n}{b_n}$.

.1 $\left[\frac{a}{\infty}\right]=0$ לכל מספר a.

$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ לא מוגדר.

.2 לכל לכל מספר $a>0$, $\left[\frac{a}{0^+}\right]=\infty$, $\qquad\left[\frac{a}{0^-}\right]=-\infty$

$\left[\frac{0}{0}\right]$ לא מוגדר.

$\left[\frac{\infty}{0^+}\right]=\infty$, $\qquad\left[\frac{\infty}{0^-}\right]=-\infty$.

.3 $[\infty\cdot\infty]=\infty$, $\qquad a\cdot\infty=\infty$ לכל מספר $a>0$.

$[0\cdot\infty]$ לא מוגדר.

.4 $[a+\infty]=\infty$, $\qquad[a-\infty]=-\infty$ לכל מספר a.

$[\infty+\infty]=\infty$.

$[\infty-\infty]$ לא מוגדר.

.5 $[a^{\infty}]=\infty$, $\qquad[a^{-\infty}]=0$ לכל מספר $a>1$.

$[a^{\infty}]=0$, $\qquad[a^{-\infty}]=\infty$ לכל מספר $0<a<1$.

$[0^{\infty}]=0$, $\qquad[\infty^{\infty}]=\infty$.

1^{∞} לא מוגדר, 0^0 לא מוגדר, ∞^0 לא מוגדר.

משפט 4.4

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

משפט 4.5

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\ .$$

הגבול המופלא השני פותר את הגבולות במצב 1^{∞}. נקבל את הצורה האחרת של הגבול ע"י ההצבה $\alpha=\frac{1}{x}$. כך נקבל

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e\ .$$

הגדרה 4.7 גבול של פונקציה

אומרים כי $\lim_{x\to a} f(x)=L$ אם התנאי הבא מתקיים:
לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש-

$$a-\delta<x<a+\delta \qquad\Rightarrow\qquad L-\epsilon<f(x)<L+\epsilon\ .$$

הגדרה 4.8 גבול חד צדדי

גבול מצד שמאול

A נקרא גבול של $f(x)$ בנקודה a **מצד שמאול** אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שהתנאי הבא מתקיים:

$$a-\delta<x<a \qquad\Rightarrow\qquad A-\epsilon<f(x)<A+\epsilon\ .$$

גבול מצד ימין

B נקרא גבול של $f(x)$ בנקודה a **מצד ימין** אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שהתנאי הבא מתקיים:

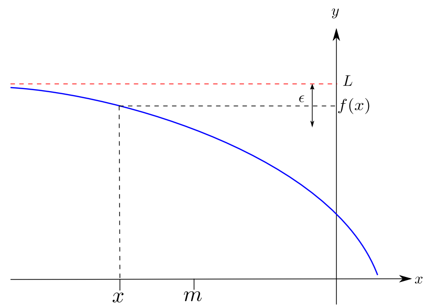
$$a<x<a+\delta \qquad\Rightarrow\qquad B-\epsilon<f(x)<B+\epsilon\ .$$

הגדרה 4.9

$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ אם לכל $\epsilon>0$ קיים $m>0$ כך שאם $x>m$ אז $L-\epsilon<f(x)<L+\epsilon$.

הגדרה 4.10

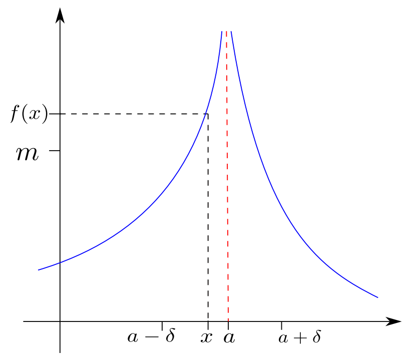
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ אם לכל $\epsilon>0$ קיים $m>0$ כך שאם $x<m$ אז $L-\epsilon<f(x)<L+\epsilon$.



במילים: $\lim_{x\to-\infty}=L$ אם לכל סביבה $(L-\epsilon,L+\epsilon)$ של L קיים מספר m כך שלכל $x<m$ מתקיים: $f(x)$ שייך לסביבה $(L-\epsilon,L+\epsilon)$ של L.

הגדרה 4.11 גבול אינסופי של פונקציה בנקודה

$\lim_{x\to a} f(x)\to\infty$ אם לכל m קיים $\delta>0$ כך שאם $a-\delta<x<a+\delta$ אז $f(x)>m$.



במילים: $\lim_{x\to a} f(x)\to\infty$ אם לכל מספר m קיימת סביבה $(a-\delta,a+\delta)$ של הנקודה a כך שלכל x השייך לסביבה זו, $f(x)>m$.

הגדרה 4.12 גבול מינוס אינסופי של פונקציה בנקודה

$\lim_{x\to a} f(x)\to-\infty$

אם לכל m קיים $\delta>0$ כך שלכל $|x-a|<\delta$ אז $f(x)<m$.

5 רציפות בנקודה

הגדרה 5.1 רציפות בנקודה

נניח ש- $f(x)$ פונקציה המוגדרת בנקודה a ובסביבה של a. הפונקציה $f(x)$ נקראת רציפה בנקודה a אם

.1

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) \ ,$$

(כלומר הגבול הדו-צדדי $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ קיים)

.2

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \ .$$

משפט 5.1 תכונות של פונקציה רציפה

1) אם פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפות בנקודה a, אז הפונקציות $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ רציפות בנקודה a. הפונקציה $\dfrac{f}{g}$ רציפה בנקודה a בתנאי $g(a)\neq 0$.

2) נניח ש $y=f(u)$, $u=g(x)$, $g(a)=b$, פונקציה g רציפה בנקודה a ופונקציה f רציפה בנקודה b, אז הפונקציה $y=f(g(x))$ רציפה בנקודה a.

3) כל פונקציה אלמנטרית רציפה בכל נקודה פנימית של תחום הגדרתה.

הגדרה 5.2 אי-רציפות בנקודה

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה a אבל לא בהכרח בנקודה a עצמה.

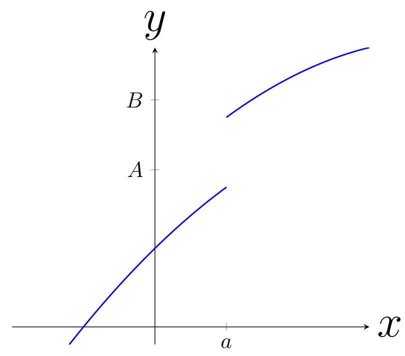
א) אם קיימים הגבולות החד-צדדים הסופיים ו-

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \neq f(a)$$

או ש $f(a)$ לא מוגדר, אומרים כי a היא נקודת אי-רציפות סליקה של $f(x)$.

ב) נקודה a היא נקודת אי-רציפות ממין ראשון של $f(x)$ אם קיימים הגבולות החד-צדדים הסופיים $\lim_{x\to a^-} f(x)=A$, ו- $\lim_{x\to a^+} f(x)=B$ אבל $A\neq B$, כלומר

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x) \ .$$



ג) נקודה a נקראת אי רציפות ממין שני של פונקציה $f(x)$ אם לפחות אחד הגבולות החד צדדיים $\lim_{x\to a^-} f(x)$ או $\lim_{x\to a^+} f(x)$ שווה ל- ∞ או $-\infty$ או לא קיים.

הגדרה 5.3 רציפות בקטע פתוח

פונקציה $f(x)$ נקראת רציפה בקטע פתוח (a,b) אם f רציפה בכל נקודה $c\in(a,b)$ בקטע. ז"א

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$$

לכל $a<c<b$.

הגדרה 5.4 רציפות בקטע סגור

פונקציה $f(x)$ נקראת רציפה בקטע סגור $[a,b]$ אם f רציפה בכל נקודה פנימית הקטע וגם

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \ , \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b) \ .$$

הגדרה 5.5 הנגזרת

הנגזרת של פונקציה $f(x)$ בנקודה x תסומן $f'(x)$ ותוגדר

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \ .$$

למה 5.1 משיק ונורמל של גרף

משוואת הישר המשיק לקו $y=f(x)$ בנקודה x_0 היא

$$y-y_0 = f'(x_0)(x-x_0)$$

משוואת הישר הנורמל לקו $y=f(x)$ בנקודה x_0 היא

$$y-y_0=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

הגדרה 5.6 נגזרת חד-צדדי

תהי f פונקציה. הנגזרת חד-צדדי מצד שמאל של f בנקודה a מוגדרת

$$f'_-(a)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\ .$$

הנגזרת חד-צדדי מצד ימין של f בנקודה a מוגדרת

$$f'_+(a)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\ .$$

הגדרה 5.7 פונקציה גזירה

פונקציה נקראת גזירה בנקודה a אם הגבול $f'(a)$ קיימת (שווה למספר ממשי סופי). כלומר, f גזירה בנקודה a אם הגבול החד-צדדי

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

קיים.

משפט 5.2 קשר בין גזירות ורציפות

פונקציה $f(x)$ שהיא גזירה בנקודה a רציפה בנקודה זו.

שים לב, $f(x)$ רציפה בנקודה a לא בהכרח גזירה ב- a.

משפט 5.3 כללים יסודיים של נגזרות

1. סכום של פונקציות

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)\ .$$

2. מכפלת פונקציה בסקלר

$$(\alpha f(x))'=\alpha f'(x)\ .$$

3. כלל הכפל

$$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\ .$$

4. כלל המנה

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}\ .$$

5. כלל השרשרת

$$[f\left(g(x)\right)]'=f\left(g\right)'_g\cdot g(x)'_x\ .$$

6 נגזרת של פונקציה הפוכה סתומה ופרמטרית, נגזרת מסדר גבוה, שיטת ניוטון

משפט 6.1 נגזרת של פונקציה הפוכה

נניח ש $y=f^{-1}(x)$ אז $x=f(y)$. כלומר

$$y=f^{-1}(x)\qquad\Leftrightarrow\qquad x=f(y)\ .$$

להיעזר בכלל השרשרת נגזור את שני הצדדים של $x=f(y(x))$

$$x'=f(y)'_y\cdot y(x)'_x\qquad\Rightarrow\qquad 1=f(y)'_y\cdot y(x)'_x\qquad\Rightarrow\qquad y(x)'_x=\frac{1}{f(y)'_y}$$

שים לב $y(x)=f^{-1}(x)$ לפי ההגדרה לעיל אז נקבל היחס

$$f^{-1}(x)'_x=\frac{1}{f(y)'_y}\ .$$

הגדרה 6.1 פונקציה פרמטרית

פונקציה פרמטרית היא פונקציה הנתונה בצורה

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$$

באמצעות פרמטר t.

משפט 6.2 נגזרת של פונקציה פרמטרית

נתונה פונקציה בצורה פרמטרית

$$y=f(t)\ ,\qquad x=g(t)\ .$$

הנגזרת ניתנת ע"י הנוסחה

$$y'_x=\frac{f(t)'_t}{g(t)'_t}\ .$$

משפט 6.3 נגזרת מסדר גבוה של פונקציה פרמטרית

נתונה פונקציה פרמטרית

$$y=y(t)\ ,\qquad x=x(t)\ .$$

אז הנגזרת השנייה ניתנת ע"י הנוסחה

$$y''_{xx} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} \ .$$

7 פולינום מקלורן וטיילור, כלל לופיטל

משפט 7.1 משפט טיילור

תהי f פונקציה מוגדרת בסביבה של נקודה a וגזירה לפחות $n+1$ פעמים בנקודה a. אז לכל x בסביבה לנקודה a קיימת נקודה c בין a ל- x כך ש-

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

הנוסחה זו נקראת נוסחת טיילור. האיבר הסופי

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

נקרא השארית. זאת אומרת

$$f(x) = \overbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}^{n \text{ פולינום טיילור מסדר}} + R_n(x)$$

משפט 7.2 מקלורן

תהי f פונקציה מוגדרת בסביבה של נקודה 0 וגזירה לפחות $n+1$ פעמים בנקודה 0. אז לכל x בסביבה לנקודה 0 קיימת נקודה c בין 0 ל- x כך ש-

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

כאשר

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \ .$$

משפט 7.3 כלל לופיטל

יהיו $f(x)$, $g(x)$ פונקציות רציפות וגזירות בסביבה של נקודה a. אם התנאים הבאים מתקיימים:

.1

$$\lim_{x\to a} f(a) = 0 \ , \qquad \lim_{x\to a} g(a) = 0$$

או

$$\lim_{x\to a} f(a) = \pm\infty \ , \qquad \lim_{x\to a} g(a) = \pm\infty$$

.2 $g'(x) \neq 0$ בסביבה של a,

.3 הגבול $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים וסופי,

אז

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

8 תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, קמירות, אסימפטוטות ודוגמאות לחקירה

משפט 8.1 תנאי הכרחי למונוטוניות

א) נניח שפונקציה $f(x)$ גזירה בקטע (a,b) ועולה ממש בקטע הזה. אז $f'(x) \geq 0$ לכל $x \in (a,b)$.

ב) נניח שפונקציה $f(x)$ גזירה בקטע (a,b) ויורדת ממש בקטע הזה. אז $f'(x) \leq 0$ לכל $x \in (a,b)$.

משפט 8.2 תנאי המספיק למונוטוניות

א) נניח שפונקציה $f(x)$ גזירה בקטע (a,b) לכל $x \in (a,b)$, $f'(x) > 0$. אז $f(x)$ עולה מונוטונית בקטע (a,b).

ב) נניח שפונקציה $f(x)$ גזירה בקטע (a,b) לכל $x \in (a,b)$, $f'(x) < 0$. אז $f(x)$ יורדת מונוטונית בקטע (a,b).

הגדרה 8.1 נקודת מקסימום

נקודה a נקראת נקודת מקסימום מקומי של פונקציה $f(x)$ אם קיימת סביבה של a כך שלכל $x \neq a$ השייך לסביבה, מתקיים

$$f(x) < f(a) \ .$$

הגדרה 8.2 נקודת מינימום

נקודה a נקראת נקודת מינימום מקומי של פונקציה $f(x)$ אם קיימת סביבה של a כך שלכל $x \neq a$ השייך לסביבה, מתקיים

$$f(x) > f(a) \ .$$

נקודות מקסימום ומינימום נקראות **נקודות קיצון** או גם **נקודות אקסטרמום.**

משפט 8.3 משפט פרמה (תנאי הכרחי לאקסטרמום)

אם פונקציה $f(x)$ גזירה בסביבה של נקודה a ו- $x=a$ נקודת קיצון של $f(x)$. אז $f'(a)=0$.

המשמעות הגאומטרית: בנקודהת קיצון המשיק מקביל לציר ה- x.

למה 8.1 נקודת קריטית

נקודות אקסטרמום של פונקציה יכולות להיות בין הנקודות שבהן הנגזרת שווה ל- 0 או לא קיימת.

נקודות האלה נקראים **נקודות קריטיות** (או **נקודות חשודות לאקסטרמום**).

משפט 8.4 תנאי המספיק לאקסטרמום

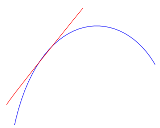
נניח שפונקציה $f(x)$ מוגדרת בנקודה a וגזירה בסביבה של a אבל לא בהכרח גזירה ב- a. נניח ש- a היא נקודה חשודה לקיצון. אזי:

1) אם במעבר דרך הנקודה a משמאל לימין $f'(x)$ משנה את הסימן מ $+$ ל- $-$ אז a נקודת מקסימום מקומי.

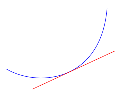
2) אם במעבר דרך הנקודה a משמאל לימין $f'(x)$ משנה את הסימן מ $-$ ל- $+$ אז a נקודת מינימום מקומי.

הגדרה 8.3 פונקציה קמורה

פונקציה $f(x)$ שגזירה בקטע (a,b) נקראת קמורה כלפי מטה אם בכל נקודה $x\in(a,b)$ המשיק לגרף הפונקציה נמצא מעל הגרף.



פונקציה $f(x)$ שגזירה בקטע (a,b) נקראת קמורה כלפי מעלה אם בכל נקודה $x\in(a,b)$ המשיק לגרף הפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה



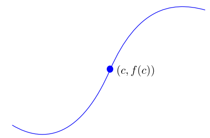
משפט 8.5

אם $f''(x)<0$ לכל $x\in(a,b)$ אז $f(x)$ קמורה כלפי מטה בקטע (a,b).

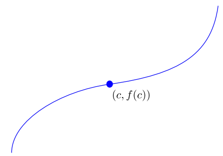
אם $f''(x)>0$ לכל $x\in(a,b)$ אז $f(x)$ קמורה כלפי מעלה בקטע (a,b).

הגדרה 8.4 נקודת פיתול

נקודה בגרף $(c,f(c))$ נקראת נקודת פיתול של הפונקציה אם היא נמצאת בין שני תחומי קמירות שונים.



או



משפט 8.6

אם $f''(c)=0$ או $f''(c)$ לא קיימת ובמעבר דרך נקודה c, $f''(c)$ מחליף סימן, אז הנקודה $(c,f(c))$ היא נקודת פיתול.

הגדרה 8.5 אסימפטוטה אנכית

קו ישר $x=a$ נקרא אסימפטוטה אנכית של פונקציה $f(x)$ אם לפחות אחד הגבולות החד צדדיים $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ או $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ שווה ל- $+\infty$ או $-\infty$.

הגדרה 8.6 אסימפטוטה אופקית

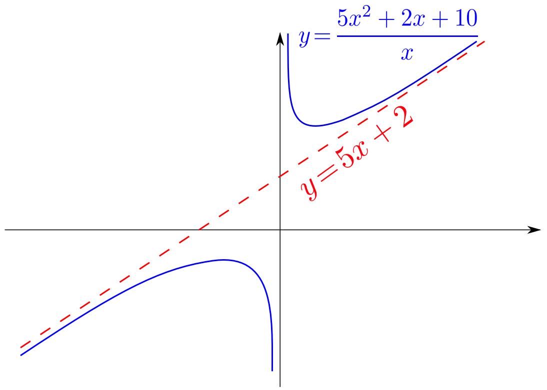
קו ישר $y=b$ נקרא אסימפטוטה אופקית של פונקציה $f(x)$ אם $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ או $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$.

הגדרה 8.7 אסימפטוטה משופעת

קו ישר $y=m\cdot x+n$ נקרא אסימפטוטה משופעת של פונקציה $f(x)$ אם המרחק בין גרף הפונקציה לבין הקו $y=m\cdot x+n$ שואף ל- 0 כאשר x שואף ל ∞ או $-\infty$. ז"א

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(mx+n)\right)=0 \qquad \text{או} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(mx+n)\right)=0$$

.



כלל 8.1 נוסחאות למציאת אסימפטוטה משופעת

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\ , \qquad n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$$

(אותו דבר עבור $x\to-\infty$). אם m,n מספרים סופיים, אז קיימת אסימפטוטה משופעת.

כלל 8.2 שלבים לחקירה מלאה של פונקציה

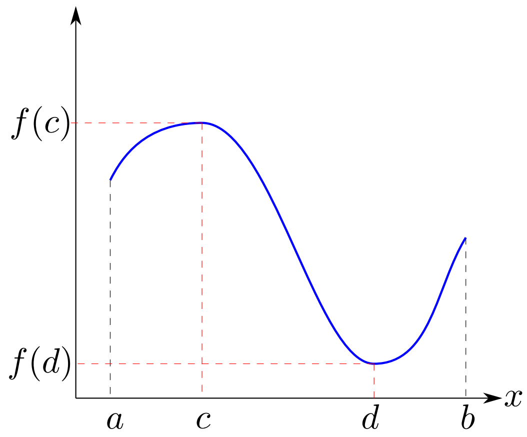
1. תחום הגדרה
2. נקודות חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה
3. התנהגות סביב נקודות אי הגדרה, אסימפטוטות אנכיות.
4. התנהגות באינסוף, אסימפטוטות אופקיות.
5. אסימפטוטות משופעות.
6. תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון
7. תחומי קמירות, נקודות פיתול.
8. גרף הפונקציה.

9 משפטים יסודיים של פונקציות גזירות

משפט 9.1 פונקציה רציפה בקטע סגור מקבלת ערכי מינימום ומקסימום (ויירשטראס)

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$. אז $f(x)$ מקבלת בקטע זו את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר עבור קטע זו. ז"א קיים מספרים c ו- d בקטע $[a,b]$ כך ש

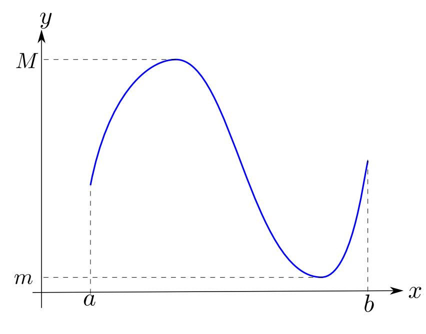
$$f(d)\le f(x)\le f(c) \qquad \forall x\in[a,b]\ .$$



למה 9.1 חסימות של פוקציה רציפה בקטע סגור

אם פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$, אז $f(x)$ חסומה בקטע זו. ז"א קיימים מספרים m ו- M כך ש

$$m\le f(x)\le M \qquad \forall x\in[a,b]\ .$$



9.1 משפט רול

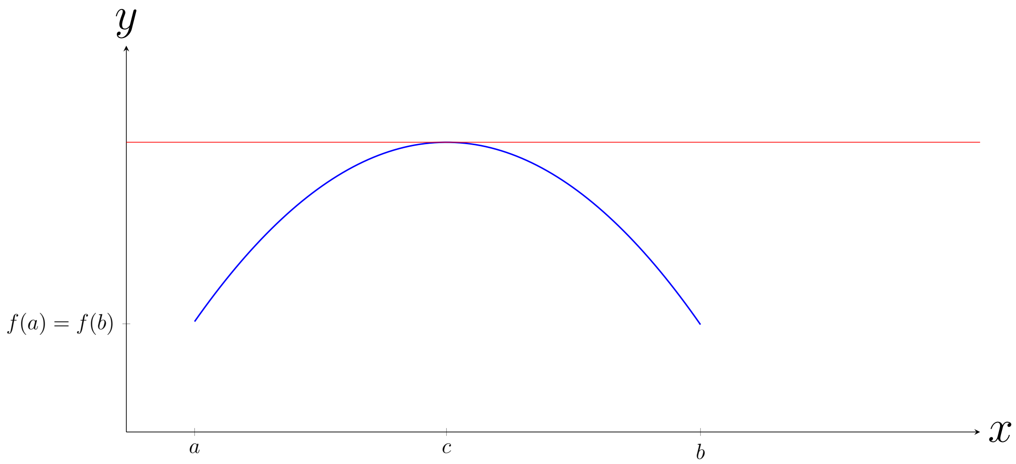
משפט 9.4 רול

נניח ש- $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה בקטע פתוח (a,b).

אם $f(a)=f(b)$, אז קיימת לפחות נקודה אחד $c\in(a,b)$ כך ש-

$$f'(c)=0 \ .$$

בגרף של פונקציה קיימת נקודה c שבה המשיק מקביל לציר ה- x.



משפט 9.5 משפט ערך הממוצע המוכלל של קושי

נניח ש- $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות רציפות בקטע סגור $[a,b]$ וגזירות בקטע פתוח (a,b), ו- $g'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$.

אז קיימת לפחות נקודה אחת $c\in(a,b)$ כך ש-

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \ .$$

או שקול

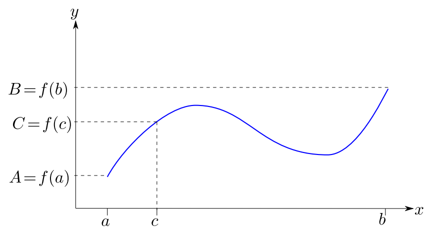
$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(c)=\big(g(b)-g(a)\big)f'(c) \ .$$

משפט 9.2 משפט ערך הביניים

תהי פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$. נניח ש $f(x)$ מקבלת בקצוות של הקטע ערכים שונים:

$$f(a)=A \ , \qquad f(b)=B \ , \qquad A\neq B \ .$$

אז f מקבלת בקטע זו את כל הערכים בין A ו- B.



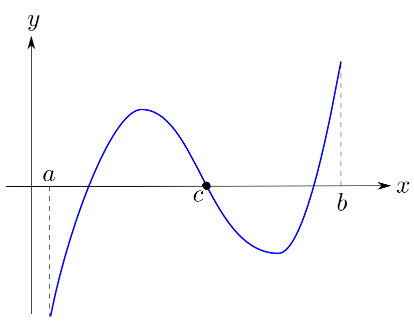
למה 9.2 משפט בולזנו

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$. נניח שבקצוות הקטע, f מקבלת ערכים עם סימנים שונים. כלומר

$$f(a)>0, f(b)<0 \ , \qquad \text{או} \qquad f(a)<0, f(b)>0 \ .$$

זאת אומרת $f(a)\cdot f(b)<0$. אז קיימת לפחות נקודה אחד c, בקטע $a<c<b$ שבה

$$f(c)=0 \ .$$



משפט 9.3 משפט פרמה

נניח ש- $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה בקטע פתוח (a,b).

אם c נקודת קיצון (מקסימום או מינימום) פנימית של פונקציה $f(x)$ אז

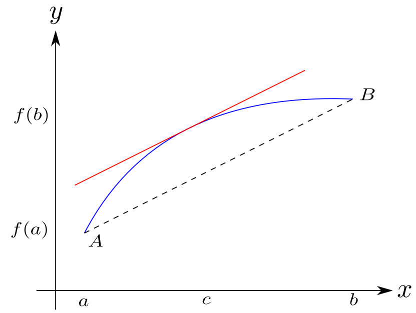
$$f'(c)=0 \ .$$

למה 9.3 משפט ערך הממוצע של לגרנז'

לכל פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b), קיימת לפחות נקודה אחת $c \in (a,b)$ כך ש-

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \ .$$

למה 9.4 המשמעות של משפט לגרנז



הביטוי $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ הוא השיפוע של הקו AB. המשיק בנקודה c מקביל לקו AB.

למה 9.5

אם $f'(x) = 0$ לכל $x \in (a,b)$ אז $f(x)$ פונקציה קבועה בקטע (a,b).

למה 9.6

אם $f'(x) = g'(x)$ לכל $x \in (a,b)$ אז קיים c כך ש- $f(x) = g(x) + c$.

10 אינטגרלים לא מסויימים

הגדרה 10.1 הפרדה

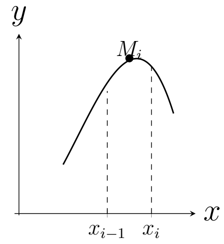
הפרדה של הקטע $[a,b]$ הינה קבוצת נקודות

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{m-1} \leq x_n = b \ .$$

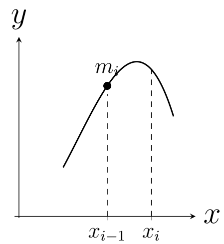
נגדיר $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

הגדרה 10.2

נניח כי $f(x)$ פונקציה חסומה הקטע $[a,b]$. לכל הפרדה P של $[a,b]$. נגדיר $M_i = \max\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

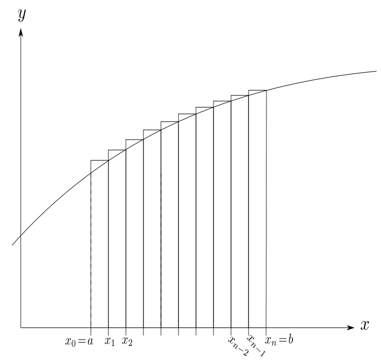


ונגדיר $m_i = \min\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$



הגדרה 10.3

נניח כי f פונקציה שרציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). נניח כי P הפרדה מסוימת של הקטע $[a,b]$.
נגדיר $U(P,f) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$. המשמעות הגאומטרי מתואר בגרף להלן.



משפט 10.1 המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי I

נניח כי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$. הפונקציה $g(x)$ שמוגדרת

$$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt\ ,\qquad a\le x\le b\ .$$

רציפה בקטע $[a,b]$, גזירה בקטע (a,b), ו-

$$g'(x)=f(x)\ .$$

ז"א $g(x)$ הפונקציה הקדומה של $f(x)$.

משפט 10.2 המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי II

נניח כי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$. אז

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$$

כאשר $F(x)$ פונקציה הקדומה של $f(x)$.

הגדרה 10.7 פונקציה קדומה

אם $F'(x)=f(x)$ אז אומרים כי $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$.

משפט 10.3 פונקציה קדומה

אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$, אז $F(x)+C$ (לכל $C\in\mathbb{R}$ קבוע) היא גם פונקציה קדומה של $f(x)$.

ז"א אם פונקציה קדומה של $f(x)$ קיימת, בהכרח ישנם אינסוף פונקציות קדומות של $f(x)$.

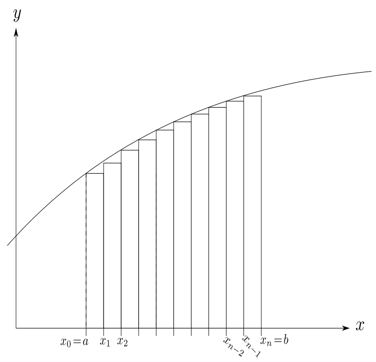
הגדרה 10.8 האינטגרל הלא מסויים

האוסף של כל הפונקציות הקדומות של $f(x)$, נקרא האינטגרל הלא מסויים של $f(x)$, מסומן $\int f(x)dx$.
ז"א

$$\int f(x)dx = F(x)+C \qquad \Leftrightarrow \qquad (F(x)+C)'=f(x)\ .$$

dx נקרא הדיפרנציאל של x.

נגדיר $L(P,f)=\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i$. המשמעות הגאומטרי מתואר בגרף להלן.



הגדרה 10.4 סכום רימן העליון וסכון רימן התחתון

נניח כי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע $(a.b)$. ה **סכום רימן העליון** מוגדר

$$\int_a^{\bar b} f\,dx = \inf_P U(P,f)\ ,$$

וה **סכום רימן התחתון** מוגדר

$$\int_{\bar a}^b f\,dx = \sup_P L(P,f)\ ,$$

הגדרה 10.5 פונקציה אינטגרבילית

נניח כי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע $(a.b)$. אומרים כי f **אינטגרבילית** בקטע $[a,b]$ אם

$$\int_a^{\bar b} f\,dx = \int_{\bar a}^b f\,dx\ .$$

הגדרה 10.6

נניח כי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע $(a.b)$. **פונקציה הקדומה** F של f מוגדרת לפי

$$f(x)=F'(x)\ .$$

הגדרה 10.9 לינאריות של אינטגרל לא מסויים

נתונות פונקציות $f(x)$, $g(x)$ וסקלר a.

(i) $\int a\cdot f(x)\,dx = a\cdot\int f(x)\,dx$.

(ii) $\int [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

משפט 10.4 אינטגרציה ע"י הצבה

נתון אינטגרל מצורה

$$\int f\left(t(x)\right)\cdot u'(x)\,dx$$

כאשר $f\left(u(x)\right)$ פונקציה של הפונקציה $u(x)$ ו- $u'(x)$ הנגזרת של $u(x)$. אז

$$\int f\left(u(x)\right)\cdot u'(x)\,dx = \int f(u)\,du\ .$$

משפט 10.5 אינטגרציה בחלקים

יהיו $u(x)$ $\mathrm{v}(x)$ פונקציות של משתנה x.

$$\int u\mathrm{v}'\,dx = u\mathrm{v} - \int u'\mathrm{v}\,dx$$

למה 10.1 מקרים נפוצים של שימוש באינטגרציה בחלקים

1) במקרה

א $\int p(x)\cdot e^{kx}\,dx$,

ב $\int p(x)\cdot \sin(kx)\,dx$,

ג $\int p(x)\cdot \cos(kx)\,dx$

כאשר $p(x)$ פולינום, מגדירים $u=p(x)$.

2) במקרה

א $\int p(x)\cdot \arcsin(kx)\,dx$,

ב $\int p(x)\cdot \arccos(kx)\,dx$,

ג $\int p(x)\cdot \arctan(kx)\,dx$,

ד $\int p(x)\cdot \ln|kx|\,dx$,

ה $\int p(x)\cdot \operatorname{arccot}(kx)\,dx$,

כאשר $p(x)$ פולינום, מגדירים $\mathrm{v}'=p(x)$.

3) במקרה

א $\int e^{ax}\cdot \sin(bx)\,dx$,

ב $\int e^{ax}\cdot \cos(bx)\,dx$,

מגדירים $u=e^{ax}$.

11 אינטגרלים מסויימים

הגדרה 11.1 פונקציה רציונלית

פונקציה רציונלית (שבר אלגברי) זאת פונקציה מהצורה

$$y=\frac{P(x)}{Q(x)}\ ,$$

כאשר $P(x)$, $Q(x)$ פולינומים.

הגדרה 11.2 פונקציה רציונלית אמיתי

שבר אלגברי

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

נקרא אמיתי אם

$$\deg(P)<\deg(Q)\ .$$

אם שבר אלגברי לא אמיתי, יש לעשות חילוק פולינומים.

האגף הימין הוא האינטגרל המסויים של $f(x)$ בקטע $[a,b]$.

משפט 11.1 קיום אינטגרל מסוים

אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ אז האינטגרל מסויים $\int_a^b f(x)\,dx$ קיים.

משפט 11.2 משמעות הגיאומטרית של אינטגרל מסוים

אם $f(x) \geq 0$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)\,dx$ שווה לשטח הטרפז העקום החסום ע"י הקווים $y=0$, $y=f(x)$ מלמעלה ו- $x=a$, $x=b$ בצדדים.

משפט 11.3 נוסחת ניוטון לייבניץ

אם $\int f(x)dx = F(x)+C$ אז $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

משפט 11.4 תכונות של אינטגרל מסויים

.1 $\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$.

.2 $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$.

.3 $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

.4 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ עבור $a<c<b$.

.5 $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x)$.

למה 11.2 אינטגרציה בחלקים באינטגרל מסויים

$$\int_a^b u\,d\mathrm{v} = [u\mathrm{v}]_a^b - \int_a^b \mathrm{v}du$$
$$\int_a^b u\,\mathrm{v}'\,dx = [u\mathrm{v}]_a^b - \int_a^b \mathrm{v}u'\,dx$$

למה 11.1 שלבים באינטגרציה של שברים אלגבריים

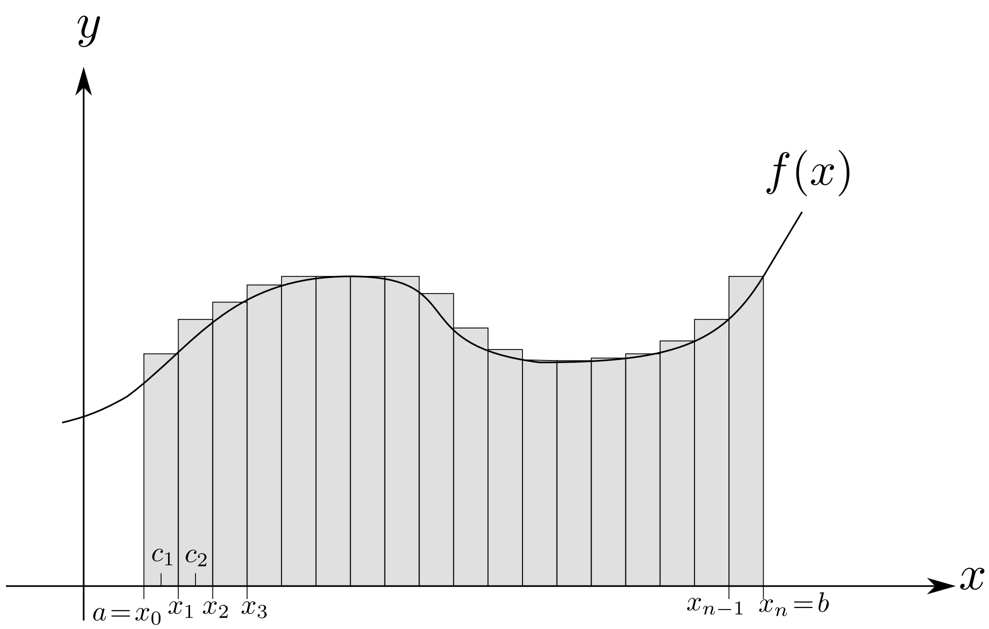
שלב 1. לחלק במכנה (חילוק פולינומי) במידה ש $\deg(P)\geq\deg(Q)$.

שלב 2. להציב שבר אלגברי אמיתי כסכום של שברים פשוטים.

שלב 3. לבצע אינטגרציה של כל שבר סשוט.

הגדרה 11.3 אינטגרל מסוים

נניח שפונקציה $y=f(x)$ מוגדרת בקטע $[a,b]$. נחלק את הקטע $[a,b]$ לקטעים קטנים על ידי נקודות
$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\ .$$

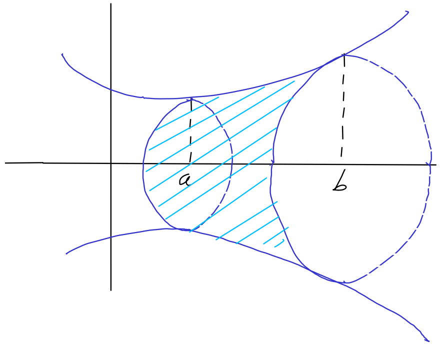


מכל קטע $[x_i,x_{i+1}]$ נבחר נקודה c_i באופן שרירותי. נבנה סכום אינטגרלי:
$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\cdot(x_i-x_{i-1})\ .$$
נסמן $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. נפעיל את הגבול כאשר $\max(\Delta x_i)\to 0$. נקבל
$$\lim_{\max(\Delta x_i)\to 0}\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx\ .$$

משפט 11.5 חישוב נפח גוף סיבוב סביב ציר ה- x

בהינתן גרף של פונקציה $y=f(x)$ בקטע $[a,b]$. הנפח של גוף סיבוב סביב ציר ה- x הוא

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx\ .$$



12 אינטגרציה של פונקציות טריגונומטריות ואי רציאונליות

כלל 12.1

בהינתן אינטגרל מצורה

$$\int f(\sin x,\cos x)\,dx$$

כאשר f פונקציה רציונלית, לדוגמה

$$\int \frac{2\sin x+3\cos x+2}{4\cos^2 x+3}\,dx$$

קיימת הצבה אוניברסלית:

$$t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$\Leftarrow$

$$t'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}(1+t^2)\ .$$

ניתן לבטא הפונקציות הטריגונומטריות באמצעות t כפי רשום בטבלה:

$\sin x$	$\dfrac{2t}{1+t^2}$
$\cos x$	$\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
$\tan x$	$\dfrac{2t}{1-t^2}$
t'	$\dfrac{1}{2}(1+t^2)$

כלל 12.2

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx$$

(1 אם $n\in\mathbb{N}$ מספר אי זוגי, מגדירים $t=\sin x$.

(2 אם $m\in\mathbb{N}$ מספר אי זוגי, מגדירים $t=\cos x$.

(3 אם $n,m\geq 0\in\mathbb{N}$ זוגיים, משתמשים בזהויות טריגונומטריות:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\ ,\qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\ ,\qquad \sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}\ .$$

כלל 12.3

בהינתן אינטגרל מצורה

$$\int f(x,\sqrt{a^2-x^2})\ ,\qquad \int f(x,\sqrt{a^2+x^2})\ ,\qquad \int f(x,\sqrt{x^2-a^2})$$

כאשר f פונקציה רציונלית, קיימת הצבה אוניברסלית:

מקרה 1) $\sqrt{a^2-x^2}$

$x=a\cdot\sin t$

מקרה 2) $\sqrt{a^2+x^2}$

$x=a\cdot\tan t$

מקרה 3) $\sqrt{x^2-a^2}$

$$x=\frac{a}{\sin t}$$

13 אינטגריה של שברים אלגבריים (פונקציות רצינליות)

הגדרה 13.1 פונקציה רציונלית

פונקציה רציונלית (שבר אלגברי) זאת פונקציה מהצורה

$$y=\frac{P(x)}{Q(x)}\ ,$$

כאשר $P(x)$, $Q(x)$ פולינומים.

הגדרה 13.2 פונקציה רציונלית אמיתי

שבר אלגברי

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

נקרא אמיתי אם

$$\deg(P)<\deg(Q)\ .$$

אם שבר אלגברי לא אמיתי, יש לעשות חילוק פולינומים.

למה 13.1 שלבים באינטגרציה של שברים אלגבריים

שלב 1. לחלק במכנה (חילוק פולינומי) במידה ש $\deg(P)\geq\deg(Q)$.

שלב 2. להציב שבר אלגברי אמיתי כסכום של שברים פשוטים.

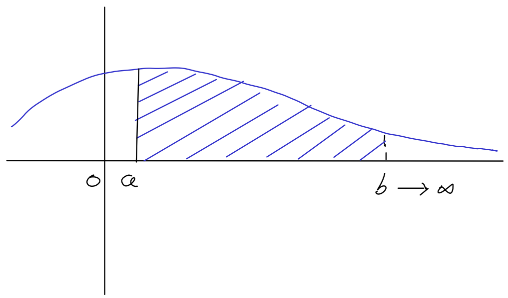
שלב 3. לבצע אינטגרציה של כל שבר סשוט.

14 אינטגרל לא אמיתי והערכת סכומים בעזרת אינטגרל מסוים

הגדרה 14.1 אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

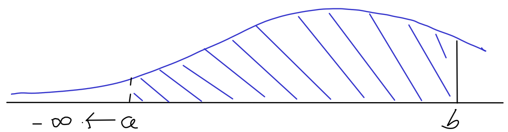
1. נניח שפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע (a,∞). אז

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$



2. נניח שפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $(-\infty,b)$. אז

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$



3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx+\int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

לכל $-\infty<c<\infty$.

אם התשובה של האינטגרל הלא אמיתי היא מספר סופי אז אומרים שהאינטגרל מתכנס, אחרת אומרים שהאינטגרל מתבדר.

משפט 14.1 מבחן השוואה הראשון

נניח שפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפות בקטע $[a,\infty)$ ולכל x השייך לקטע מתקיים

$$0\leq f(x)\leq g(x)\ .$$

אז

1. אם $\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתכנס אז גם $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס.
2. אם $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתבדר אז גם $\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתבדר.

משפט 14.2 מבחן השוואה השני

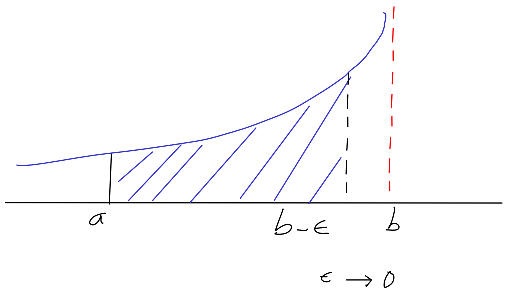
נניח שפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפות בקטע. $[a,\infty)$, $f(x)>0$, $g(x)>0$, וגם

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$$

כאשר $0<k<\infty$. אז $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ו- $\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתכנסים או מתבדרים בו זמנים.

הגדרה 14.2 אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

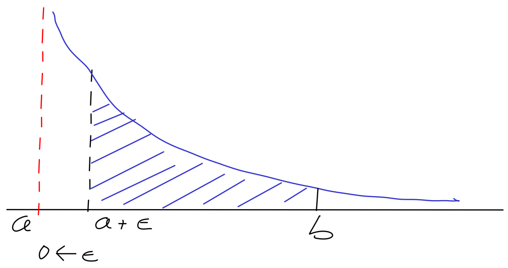
מצב 1. פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ ו- $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$



אז

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\epsilon\to0}\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx\ .$$

מצב 2. פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ ו- $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$



אז

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\epsilon\to0}\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx\ .$$

אם התשובה של האינטגרל הלא אמיתי היא מספר סופי אז אומרים שהאינטגרל מתכנס, אחרת אומרים שהאינטגרל מתבדר.

משפט 14.3 אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

תהי $f(x)$ פונקציה חיובית, יורדת מונוטונית ורציפה בחצי הישר $x\geq1$. אזי מתקיים

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx<\sum_{k=1}^n f(k)<\int_1^{n+1} f(x)\,dx+f(1)\ .$$

תהי $f(x)$ פונקציה חיובית, עולה מונוטונית ורציפה בחצי הישר $x\geq0$. אזי מתקיים

$$\int_0^{n} f(x)\,dx<\sum_{k=1}^n f(k)<\int_0^{n} f(x)\,dx+f(n)\ .$$