שיעור 9
מימד ובסיס

9.1 בסיס של מרחב ווקטורי

הגדרה 9.1 בסיס

קבוצת ווקטורים $V \ni \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n$ נקראת בסיס של V אם היא מקיימת:

1) $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n$ בלתי תלוים לינארית.

2) $\mathrm{span}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n) = V$.

דוגמה 9.1

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} , \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} .$$

בסיס של $\mathbb{F}^n$ (בסיס הסטנדרטי).

הוכחה:

1) צ"ל $e_1, \ldots, e_n$ בת"ל.

$$k_1 e_1 + k_2 e_2 + \ldots + k_n e_n = \bar{0}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + k_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad k_1 = 0, k_2 = 0, \quad k_n = 0 \ .$$

לכן $e_1, \ldots, e_n$ בת"ל.

2) צ"ל כי $\mathrm{span}(e_1, \ldots, e_n) = \mathbb{F}^n$.

נקח וקטור שרירותי $\mathbb{F}^n \ni \mathrm{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. **צ"ל** $\mathrm{v} = \mathrm{span}(e_1, \ldots, e_n)$.

$$k_1 e_1 + \ldots k_n e_n = \mathrm{v}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad k_1 = x_1, k_2 = x_2, \quad \ldots, \quad k_n = x_n \ .$$

■

דוגמה 9.2

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \ldots, \quad E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad .$$

בסיס של $\mathbb{F}^{2\times 3}$ (הבסיס הסטנדרטי).

הוכחה:

1) נוכיח כי $E_1, \ldots, E_6$ בת"ל.

$$k_1 E_1 + k_2 E_2 + \ldots + k_6 E_6 = \bar{0}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots + k_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad k_1 = 0, k_2 = 0, \quad k_6 = 0 \ .$$

לכן $E_1, \ldots, E_6$ בת"ל.

2) נוכיח כי $\mathrm{span}(E_1, \ldots, E_6) = \mathbb{F}^{2\times 3}$.

לכל וקטור $\mathbb{F}^{2\times 3} \ni \mathrm{v} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$,

$$\mathrm{v} = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 + eE_5 + fE_6 \ .$$

ז"א

$\mathrm{v} \in \mathrm{span}(E_1, \ldots, E_6)$.

■

דוגמה 9.3

וקטורים
$$e_1=1\ ,\quad e_2=x\ ,\quad \ldots\ ,\quad e_n=x^n$$
מהווים בסיס (הבסיס הסטנדרטי) של המרחב $\mathbb{F}_n[x]$.

הוכחה:

1) צ"ל $1,x,\ldots,x^n$ בת"ל.
$$k_1\cdot 1+k_2x+\ldots+k_nx^n=\bar{0}=0\cdot 1+0\cdot x+\ldots+0\cdot x^n$$
לכל x כאשר
$$k_1=0,k_2=0,\quad \ldots,\quad k_n=0\ .$$
לכן $1,x,\ldots,x^n$ בת"ל.

2) נוכיח כי $\mathrm{span}(1,x,\ldots,x^n)=\mathbb{F}_n[x]$.

לכל $p(x)=a_1+a_2x+\ldots+a_nx^n\in\mathbb{F}_n[x]$ מתקיים
$$p(x)=a_1e_1+a_2e_2+\ldots+a_ne_n$$
ז"א $p(x)=\mathrm{span}(e_1,\ldots,e_n)$.

■

דוגמה 9.4

בדקו כי הווקטורים
$$\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}\ ,\qquad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\ .$$
מהווה בסיס של $\mathbb{R}^3$.

פתרון:

1) צ"ל u_1,u_2,u_3 בת"ל.
$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=\bar{0}$$
זאת מערכת משוואות הומוגניות:
$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&2&0\\0&1&1&0\\5&1&4&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3+5R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&2&0\\0&1&1&0\\0&6&14&0\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_3\to R_3-6R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&2&0\\0&1&1&0\\0&0&8&0\end{array}\right)$$
למערכת יש פתרון יחיד: $k_1=0,k_2=0,k_3=0$

לכן u_1,u_2,u_3 בת"ל.

2) צ"ל $\text{span}(u_1,u_2,u_3)=\mathbb{R}^3$.

נקח $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ $\text{v}=$. צ"ל $\text{v}=\text{span}(u_1,u_2,u_3)$.

<u>דרך 1:</u>

$$xu_1+yu_2+zu_3=\text{v}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&2&a\\0&1&1&b\\5&1&4&c\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3+5R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&2&a\\0&1&1&b\\0&6&14&5a+c\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_3\to R_3-6R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&2&0\\0&1&1&0\\0&0&8&5a+c-6b\end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון, לכן $\text{v}\in\text{span}(u_1,u_2,u_3)$.

<u>דרך 2:</u>

למערכת $A\cdot X=0$ יש פתרון יחיד, לכן מטריצה A הפיכה. מכאן נובע שלכל $\text{v}\in\mathbb{R}^3$, למערכת $A\cdot X=\text{v}$ יש פתרון יחיד, ז"א $\text{v}\in\text{span}(u_1,u_2,u_3)$.

משפט 9.1

אם במרחב וקטורי V יש בסיס סופי, אז לכל בסיס של V יש את אותו מספר הווקטורים.

הגדרה 9.2

נניח ש V מרחב וקטורי. למספר הווקטורים בבסיס של V קוראים המימד של V.
המימד של מרחב וקטורי יסומן
$\dim(V)$.

דוגמה 9.5

$$\begin{aligned}\dim(\mathbb{F}^n)&=n\\ \dim(\mathbb{F}^n[x])&=n+1\\ \dim(\mathbb{F}^{m\times n})&=m\cdot n\ .\end{aligned}$$

משפט 9.2 מימד ובסיס של קבוצת ווקטורים

נניח כי V מרחב וקטורי, $\dim(V)=n$. אז

1) כל $n+1$ ווקטורים של V הם תלוים לינארית.

2) כל קבוצה של n ווקטורים בלתי תלויה לינארית, היא בסיס של V.

3) כל קבוצה של ווקטורים שהיא בלתי תלויה לינארית , ניתן להשלים לבסיס של V.

דוגמה 9.6

הוכיחו שהווקטורים

$$u_1=1+x+x^2\ ,\qquad u_2=2x+3x^2\ ,\qquad u_3=-3x-4x^2$$

מהווים בסיס של מרחב $\mathbb{R}_2[x]$.

פתרון:

נוכיח כי u_1,u_2,u_3 בת"ל.

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=\bar{0}$$
$$k_1(1+x+x^2)+k_2(2x+3x^2)+k_3-3x-4x^2=0+0x+0x^2$$
$$k_1(k_1+2k_2-3k_3)x+(k_1+3k_2-4k_3)x^2=0+0x+0x^2$$
$$\left.\begin{array}{rl} k_1 & =0\\ k_1+2k_2-3k_3 & =0\\ k_1+3k_2-4k_3 & =0\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad k_1=0\ ,k_2=0,k_3=0$$

לכן u_1,u_2,u_3 בת"ל.

$\dim(\mathbb{R}_2[x])=3$, לכן שלושה ווקטורים בת"ל מהווים בסיס של $\dim(\mathbb{R}_2[x])$.

9.2 מציאת בסיס ומימד של תת מרחב

הגדרה 9.3 עמודה מובילה ושורה מובילה

נניח כי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ותהי B המטריצה המדורגת המתקבלת מ- A.

(1 אומרים כי עמודה ה- i של A **עמודה מובילה** אם בעמודה ה- i של B יש איבר מוביל.

(2 אומרים כי שורהה ה- i של A **שורה מובילה** אם בשורה ה- i של B יש איבר מוביל.

משפט 9.3 עמודות מובילות מהוות בסיס של תת-מרחב

נניח כי $S=\{u_1,\ldots,u_k\}\in\mathbb{F}^n$ קבוצת ווקטורים של מרחב ווקטורי $\mathbb{F}^n$.

נגדיר $A=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_k \\ | & | & & | \end{pmatrix}$.

(1 כל העמודות של A עמודות מובילות אם ורק אם הקבוצת ווקטורים S בת"ל.

(2 העמודות המובילות של A מהווים בסיס של S.

(3 מספר עמודות מובילות ב- A שווה למימד של S.

הוכחה: (להעשרה בלבד)

נרשום

$$x_1u_1+\cdots+x_ku_k=\bar{0}\qquad (*1)$$

כאשר $x_1,\cdots,x_k\in\mathbb{F}$ סקלרים. ונגדיר $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_k\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^k$. נניח ש- B המטריצה המדורגת המתקבלת מ- A.

1) נניח כי S בת"ל.

$\Leftarrow$ אז $x_1=x_2=\cdots=x_k=0$.

$\Leftarrow$ למערכת $AX=0$ יש פתרון יחיד: $X=0$.

$\Leftarrow$ יש איבר מוביל בכל עמודה של B.

$\Leftarrow$ כל העמודות של A מובילות.

נניח שכל העמודות של A מובילות.

$\Leftarrow$ יש איבר מוביל בכל עמודה של B.

$\Leftarrow$ הפתרון היחיד הינו $X=0$.

$\Leftarrow$ עבור הסקלרים ב- (1*) נקבל $x_1=\cdots=x_k=0$ $\Leftarrow$ S בת"ל.

2) קבוצת העמודות המובילות של A תהיה בסיס של S אם **(א)** היא בת"ל ו **(ב)** היא פורשת S.

א) תהי A' המטריצה המתקבלת מהעמודות המובילות של A. לפי (1) כל העמודות של A' בת"ל.

ב) נניח שמתוך ה k ווקטורים של S יש p ווקטורים בת"ל: $\{u_1,\ldots,u_p\}$.
לכן, אפשר לרשום כל ווקטור של S כצירוף ליניארי של הווקטרים $\{u_1,\ldots,u_p\}$.
לכן S נפרש ע"י הווקטורים $\{u_1,\ldots,u_p\}$.
נרשום $A=\begin{pmatrix}| & & | & | & & |\\ u_1 & \cdots & u_p & u_{p+1} & \cdots & u_k\\ | & & | & | & & |\end{pmatrix}$.
הווקטורים $u_1,\cdots,u_p$ בת"ל לכן ה- p עמודות הראשונות של A מובילות.
(אין יותר מ-p עמודות מובילות כי אז יהיו יותר מ- p ווקטורין בת"ל ונגיע לסתירה).
לפיכך העמודות המובילות פורשות S.

3) לפי (2) העמודות המובילות של A מהווה בסיס של S.

מימד שווה למספר ווקטורים בבסיס.

לפיכך המימד שווה למספר עמודות המובילות ב- A.

■

דוגמה 9.7

מצאו בסיס ומימד של הקבוצה $S=\text{span}\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3\}$ כאשר

1)

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\ .$$

2)

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\ .$$

פתרון:

1)

$$A=\begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן $\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3\}$ בסיס של S.

$\dim(S)=3$.

2)

$$A=\begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עמודות 1 ו- 2 מובילות. לכן הווקטורים $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2$ מהווים בסיס של S.

$\dim(S)=2$.

דוגמה 9.8

מצאו בסיס ואת המימד של תת מרחב הנפרש ע"י הווקטורים

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_4=\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

בטאו את וקטור $u=\begin{pmatrix} 4 & -14 \\ -13 & 11 \end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של הבסיס שמצאתם.

פתרון:

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+k_3\mathrm{v}_3+k_4\mathrm{v}_4=\bar{0}$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & -4 & -7 \\ -4 & -1 & -5 & -5 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2+5R_1 \\ R_3\to R_3+4R_1 \\ R_4\to R_4-2R_1}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עמודות 1 ו- 2 מובילות, לפיכך הווקטורים v_1, v_2 מהווים בסיס של S.

$\dim(S)=2$.

נרשום u כצירוף ליניארי של הבסיס המתקבל:

$$u=x\mathrm{v}_1+y\mathrm{v}_2\ .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 14 \\ -4 & -1 & -13 \\ 2 & 5 & 11 \end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2+5R_1 \\ R_3\to R_3+4R_1 \\ R_4\to R_4-2R_1}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$k_1=3,k_2=1 \Leftarrow$

$$u=3\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\ .$$

דוגמה 9.9

במרחב $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ נתונים ווקטורים

$$p_1(x)=2-x+x^2\ ,\quad p_2(x)=2x-3x^2+x^3\ ,\quad p_3(x)=1-x^2\ ,\quad p_4(x)=3x-6x^2+x^3\ .$$

א) בדקו אם הווקטורים $p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x)$ תלוים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם ששווה לווקטור האפס.

ב) מצאו בסיס ואת המימד של תת מרחב הנפרש ע"י הווקטורים $p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x)$.

ג) בטאו כל ווקטור מתוך $p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x)$ כצירוף לינרי של הבסיס המצאתם בסעיף ב'.

פתרון:

א) נרשום את הווקטורים לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$, $E=\{e_1=1,e_2=x,e_3=x^2,e_4=x^3\}$:

$$p_1(x)=2e_1-e_2+e_3+0e_4 \quad =\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}_E\ ,$$

$$p_2(x)=0e_1+2e_2-3e_3+e_4 \quad =\begin{pmatrix}0\\2\\-3\\1\end{pmatrix}_E\ ,$$

$$p_3(x)=1e_1+0e_2-e_3+0e_4 \quad =\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}_E\ ,$$

$$p_4(x)=0e_1+3e_2-6e_3+e_4 \quad =\begin{pmatrix}0\\3\\-6\\1\end{pmatrix}_E\ .$$

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1&0\\-1&2&0&3\\1&-3&-1&-6\\0&1&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&4&1&6\\0&6&3&12\\0&1&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&1&0&1\\0&2&1&4\\0&4&1&6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&0&0&-2\\0&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לא כל העמודות מובילות, לכן $p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x)$ ת"ל.

נרשום את הצירוף הליניארי

$$k_1p_1+k_2p_2+k_3p_3+k_4p_4=\bar{0}\ .$$

לפי המדורגת שמצאנו הפתרון הינו

$$k_1=k_4\ ,\quad k_2=-k_4\ ,\quad k_3=-2k_4\ ,\qquad k_4\in\mathbb{R}\ .$$

נציב $k_4=1$ $\Leftarrow$

$$k_1=1\ ,\quad k_2=-1\ ,\quad k_3=-2\ .$$

$$p_1-p_2-2p_3+p_4=\bar{0}$$

ב)

$$\dim(\text{span}\{p_1,p_2,p_3,p_4\}=\text{מספר העמודות המובילות}=3\ .$$

העמודות 1, 2 ו- 3 מובילות לפיכך הווקטורים p_1,p_2,p_3 מהווים בסיס.

ג)

$$\begin{aligned}
p_1 &=1\cdot p_1+0\cdot p_2+0\cdot p_3\\
p_2 &=0\cdot p_1+1\cdot p_2+0\cdot p_3\\
p_3 &=0\cdot p_1+0\cdot p_2+1\cdot p_3\\
p_4 &=-p_1+p_2+2\cdot p_3\ .
\end{aligned}$$

משפט 9.4

יהי $U\subset V$ תת מרחב של המרחב וקטורי V. נניח כי $\dim(U)=m$ ותהי $B=\{u_1,\cdots,u_m\}$ קבוצה של m וקטורים.

B בת"ל אם ורק אם B פורשת את U.

הוכחה:

נניח כי B בת"ל ו- B לא פורשת את U.
אז ניתן להשלים B לבסיס של U, בסתירה לכך ש- $\dim(U)=m$.

נניח כי B פורשת את U אבל B לא בת"ל.
אז ניתן להקטין את B לבסיס של פחות מ-m ווקטורים בסתירה לכך ש- $\dim(U)=m$.

■