אלגברה לינארית

תוכן העניינים

שעור 1
מערכות ליניאריות

1.1 מערכות של משוואות ליניאריות

הגדרה 1.1 משוואה ליניארית

משוואה ליניארית במשתנים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ היא משוואה שניתנת לרשום בצורה

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

כאשר $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$.

דוגמה 1.1

קבעו מי בין המשוואות הבאות היא ליניארית:

$$\begin{aligned} 7x_1 + 3x_2 &= 34 \\ 3x + 7y + \sqrt{2} &= 4 \\ 3x + 7y + \sqrt{2}z &= 3 \\ 3x + 7y + \sqrt{z} &= 1 \\ 3xy + 7y &= 5 \end{aligned}$$

פתרון:

$$\begin{aligned} 7x_1 + 3x_2 &= 34 & \checkmark \\ 3x + 7y + \sqrt{2} &= 4 & \checkmark \\ 3x + 7y + \sqrt{2}z &= 3 & \checkmark \\ 3x + 7y + \sqrt{z} &= 1 & \text{✖} \\ 3xy + 7y &= 5 & \text{✖} \end{aligned}$$

הגדרה 1.2 מערכת ליניארית

מערכת ליניארית היא אוסף של m משוואות ב- n משתנים.

דוגמה 1.2

במערכת הבאה

$$\begin{aligned} x+y=&4\\ x-y=&2 \end{aligned}$$

יש 2 משוואות ו-2 משתנים, (x ו-y):

משתנה 1		משתנה 2			
↓		↓			
x	$+$	y	$=$	4	משוואה 1
x	$-$	y	$=$	2	משוואה 2

דוגמה 1.3

במערכת הבאה

$$\begin{aligned} x+y-z=&4\\ x-2y+3z=&7 \end{aligned}$$

יש 2 משוואות ו- 3 משתנים (x,y,z):

משתנה 1		משתנה 2		משתנה 3			
↓		↓		↓			
x	$+$	y	$-$	z	$=$	4	משוואה 1
x	$-$	$2y$	$+$	$3z$	$=$	7	משוואה 2

דוגמה 1.4

במערכת הבאה

$$\begin{aligned} x+y-z+w=&3\\ x-2y+8z-7w=&7\\ x-2y+3z+2w=&7\\ x-2y+3z-9w=&10 \end{aligned}$$

יש 4 משוואות ו- 4 משתנים (x, y, z, w):

משתנה 1		משתנה 2		משתנה 3		משתנה 4		
↓		↓		↓		↓		
x	$+$	y	$-$	z	$+$	$w=$	4	משוואה 1
x	$-$	$2y$	$+$	$8z$	$-$	$7w=$	7	משוואה 2
x	$-$	$2y$	$+$	$3z$	$+$	$2w=$	7	משוואה 3
x	$-$	$2y$	$+$	$3z$	$-$	$9w=$	10	משוואה 4

באופן כללי, מערכת של m משוואות ב- n משתנים נרשום בצורה

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=&b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=&b_2\\ &\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=&b_m \end{aligned}$$

הגדרה 1.3 פתרון של מערכת ליניארית

נתונה מערכת ליניארית של n משתנים:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2\\ &\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

נגדיר פתרון של המערכת להיות רשימה מסודרת מספרים

$$(s_1,s_2,\ldots,s_n)$$

כך שהצבתם במשתנים המתאימים תהפוך כל משוואה לאמת.

דוגמה 1.5

למערכת

$$\begin{aligned} x+y &= 4\\ x-y &= 2 \end{aligned}$$

יש פתרון

$$(x,y)=(3,1)\ .$$

במילים אחרות אם נציב $x=3$ ו- $y=1$ במערכת, הרי האגף השמאול יהיה שווה לאגף הימין בכל משוואה:

$$\begin{aligned} 3+1 &= 4 \quad \text{אמת}\\ 3-1 &= 2 \quad \text{אמת} \end{aligned}$$

1.2 פתרון של מערכות ליניאריות

דוגמה 1.6

פתרו את המערכת הליניארית הבאה:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2 &= 4\\ 3x_1+4x_2 &= 2 \end{aligned}$$

פתרון:

כותבים את המערכת בצורה:

$$\begin{array}{rrcrl} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & =4\\ R_2: & 3x_1 & + & 4x_2 & =2 \end{array}$$

R_1 מסמן את שורה 1 של המערכת ו- R_2 מסמן את שורה 2 שך המערכת.

כדי לחלץ את x_1 מהמשוואה השנייה, נבצע את הפעולה R_2-3R_1. כך נקבל

$$\begin{array}{rrcrl} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & =4\\ R_2: & & - & 2x_2 & =-10 \end{array}$$

מחלקים את המשוואה השנייה ב- -2, כלומר $R_2 \to -\dfrac{1}{2}R_2$:

$$\begin{array}{rcccl} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & =4 \\ R_2: & & & x_2 & =5 \end{array}$$

קיבלנו $x_2=5$. עכשיו מציבים $x_2=5$ בהמשוואה הראשונה ונקבל

$$x_1+2\cdot 5=4 \quad \Rightarrow \quad x_1=-6 \ .$$

לכן הפתרון הוא

$$(x_1,x_2)=(-6,5) \ .$$

דוגמה 1.7

פתרו את המערכת הליניארית הבאה:

$$\begin{aligned} 5x_1+10x_2 &=45 \\ 20x_1-5x_2 &=90 \end{aligned}$$

פתרון:

כותבים את המערכת בצורה:

$$\begin{array}{rcccl} R_1: & 5x_1 & + & 10x_2 & =45 \\ R_2: & 20x_1 & - & 5x_2 & =90 \end{array}$$

במשוואה הראשונה, נהפוך את המקדם של x_1 ל- 1 ע"י הפעולה $R_1 \to \frac{1}{5}R_1$:

$$\begin{array}{rcccl} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & =9 \\ R_2: & 20x_1 & - & 5x_2 & =90 \end{array}$$

כדי לחלץ את x_1 מהמשוואה השנייה, מבצעים את הפעולה $R_2 \to R_2-20R_1$ כך שנקבל

$$\begin{array}{rcccl} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & =9 \\ R_2: & & & -45x_2 & =-90 \end{array}$$

מחלקים את משוואה השנייה ב- -45, כלומר $R_2 \to -\dfrac{1}{45}R_2$:

$$\begin{array}{rcccl} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & =9 \\ R_2: & & & x_2 & =2 \end{array}$$

קיבלנו $x_2=2$. עכשיו מציבים $x_2=2$ בהמשוואה הראשונה ונקבל

$$x_1+2\cdot 2=4 \quad \Rightarrow \quad x_1=5 \ .$$

לכן הפתרון הוא

$$(x_1,x_2)=(5,2) \ .$$

דוגמה 1.8

פתרו את המערכת הליניארית הבאה:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3 &=6 \\ 3x_1+x_2-x_3 &=-2 \\ 2x_1-3x_2+2x_3 &=14 \end{aligned}$$

פתרון:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ R_2: & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ R_3: & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 14 \end{array}$$

מבצעים את הפעולה $R_2 \to R_2 - 3R_1$ ומקבלים

$$\begin{array}{rrcrcrcr} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ R_2: & & - & 5x_2 & - & 10x_3 & = & -20 \\ R_3: & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 14 \end{array}$$

מבצעים את הפעולה $R_3 \to R_3 - 2R_1$ ומקבלים

$$\begin{array}{rrcrcrcr} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ R_2: & & - & 5x_2 & - & 10x_3 & = & -20 \\ R_3: & & - & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \end{array}$$

מכפילים את השורה R_2 ב- $-\frac{1}{5}$, כלומר $R_2 \to -\frac{1}{5}R_2$:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ R_2: & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ R_3: & & - & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \end{array}$$

מבצעים את הפעולה $R_3 \to R_3 + 7R_2$ ומקבלים

$$\begin{array}{rrcrcrcr} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ R_2: & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ R_3: & & & & & 10x_3 & = & 30 \end{array}$$

$R_3 \to \frac{1}{10}R_3$:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ R_2: & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ R_3: & & & & & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$R_1 \to R_1 - 3R_3$:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & & & = & -3 \\ R_2: & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ R_3: & & & & & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_3$:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & & & = & -3 \\ R_2: & & & x_2 & & & = & -2 \\ R_3: & & & & & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$R_1 \to R_1 - 2R_2$:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} R_1: & x_1 & & & & & = & 1 \\ R_2: & & & x_2 & & & = & -2 \\ R_3: & & & & & x_3 & = & 3 \end{array}$$

לפי זה, הפתרון שקיבלנו הוא

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -2, 3) \ .$$

בדיקה:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2\cdot(-2) & + & 3\cdot 3 & = & 6 \\ 3\cdot 1 & + & (-2) & - & 3 & = & -2 \\ 2\cdot 1 & - & 3\cdot(-2) & + & 2\cdot 3 & = & 14 \end{array}$$

דוגמה 1.9

פתרו את המערכת הליניארית הבאה:

$$\begin{aligned} 4x_1-6x_2+11x_3 &=10 \\ 2x_1-x_2+10x_3 &=-10 \\ x_1-2x_2+2x_3 &=4 \end{aligned}$$

פתרון:

$$\begin{array}{lccccccc} R_1: & 4x_1 & - & 6x_2 & + & 11x_3 & = & 10 \\ R_2: & 2x_1 & - & x_2 & + & 10x_3 & = & -10 \\ R_3: & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

מחליפים שורות R_1 ו- R_3 (כלומר מבצעים את פעולת החלפה $R_1 \leftrightarrow R_3$):

$$\begin{array}{lccccccc} R_1: & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ R_2: & 2x_1 & - & x_2 & + & 10x_3 & = & -10 \\ R_3: & 4x_1 & - & 6x_2 & + & 11x_3 & = & 10 \end{array}$$

מבצעים את הפעולה $R_2 \to R_2 - 2R_1$ ומקבלים

$$\begin{array}{lccccccc} R_1: & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ R_2: & & & 3x_2 & + & 6x_3 & = & -18 \\ R_3: & 4x_1 & & -6x_2 & + & 11x_3 & = & 10 \end{array}$$

מבצעים את הפעולה $R_3 \to R_3 - 4R_1$ ומקבלים

$$\begin{array}{lccccccc} R_1: & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ R_2: & & & 3x_2 & + & 6x_3 & = & -18 \\ R_3: & & & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -6 \end{array}$$

מכפילים את השורה R_2 ב- $\frac{1}{3}$, כלומר $R_2 \to \frac{1}{3}R_2$:

$$\begin{array}{lccccccc} R_1: & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ R_2: & & & x_2 & + & 2x_3 & = & -6 \\ R_3: & & & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -6 \end{array}$$

מבצעים את הפעולה $R_3 \to R_3 - 2R_2$ ומקבלים

$$\begin{array}{lccccccc} R_1: & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ R_2: & & & x_2 & + & 2x_3 & = & -6 \\ R_3: & & & & - & x_3 & = & 6 \end{array}$$

$R_3 \to -R_3$:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} R_1: & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ R_2: & & & x_2 & + & 2x_3 & = & -6 \\ R_3: & & & & & x_3 & = & -6 \end{array}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_3$:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} R_1: & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ R_2: & & & x_2 & & & = & 6 \\ R_3: & & & & & x_3 & = & -6 \end{array}$$

$R_1 \to R_1 + 2R_2$:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} R_1: & x_1 & & & + & 2x_3 & = & 16 \\ R_2: & & & x_2 & & & = & 6 \\ R_3: & & & & & x_3 & = & -6 \end{array}$$

$R_1 \to R_1 - 2R_3$:

$$\begin{array}{rrrrrr} R_1: & x_1 & & & = & 28 \\ R_2: & & x_2 & & = & 6 \\ R_3: & & & x_3 & = & -6 \end{array}$$

לפי זה, הפתרון שקיבלנו הוא
$$(x_1, x_2, x_3) = (28, 6, -6) \ .$$

בדיקה:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4 \cdot 28 & - & 6 \cdot 6 & + & 11 \cdot (-6) & = & 10 \\ 2 \cdot 28 & - & 6 & + & 10 \cdot (-6) & = & -10 \\ 28 & - & 2 \cdot 6 & + & 2 \cdot (-6) & = & 4 \end{array}$$

1.3 מטריצת המקדמים ומטריצה המורחבת

דוגמה 1.10

נחזור לדוגמה 1.8:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 14 \end{aligned}$$

ונפתור אותה בשיטה יותר מהרה: דירוד המטריצה המורחבת.

פתרון:

למערכת
$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 14 \end{aligned} \right.$$
נתאים שתי מטריצות:

- המטריצה המורחבת של המערכת $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \end{array}\right)$
- המטריצה המקדמים של המערכת $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

נפתור את התרגיל לעיל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{5}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+7R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to \frac{1}{10}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-3\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-2\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

לפי זה הפתרון הוא $(x_1,x_2,x_3)=(1,-2,3)$. הפתרון מסכים עם התשובה שקיבלנו בדוגמה 1.8 לעיל.

דוגמה 1.11

נחזור לדוגמה 1.9:

$$\begin{aligned} 4x_1-6x_2+11x_3 &= 10 \\ 2x_1-x_2+10x_3 &= -10 \\ x_1-2x_2+2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ונפתור אותה ע"י דירוג המטירצה המורחבת.

פתרון:
נרשום את המטריצה המדורגת ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{5}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 11 & 10 \\ 2 & -1 & 10 & -10 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 10 & -10 \\ 4 & -6 & 11 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-2\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -18 \\ 4 & -6 & 11 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-4\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -18 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to \frac{1}{3}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 28 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

לפי זה הפתרון הוא $(x_1, x_2, x_3) = (28, 6, -6)$. הפתרון מסכים עם התשובה שקיבלנו בדוגמה 1.9 לעיל.

הגדרה 1.4 פעולות אלמנטריות

קיימות שלוש פעולות אלמנטריות:

פעולה 1: החלפת שתי שורות $R_i \leftrightarrow R_j$

פעולה 2: הכפלת שורה בסקלר $\alpha \neq 0$ $R_i \to \alpha \cdot R_i$

פעולה 3: הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת $R_i \to R_i + \alpha \cdot R_j$

הגדרה 1.5 איבר המוביל

בהינתן מטריצה (ללא קשר למערכת ליניארית), האיבר הראשון משמאל השונה מאפס בכל שורה, נקרא איבר מוביל.

דוגמה 1.12

במטריצה

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- האיבר המוביל של השורה הראשונה הוא 3,
- האיבר המוביל של השורה השנייה הוא 4,
- ולשורה השלילשית אין איבר מוביל מכיוון שהשורה השלילשית כולה אפסים.

הגדרה 1.6 מטריצה מדורגת

מטריצה תיקרא מדורגת אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1) שורות שכולן 0, אם ישנן, נמצאות מתחת השורות שלא כולן 0.

2) מספר האפסים לפני איבר מוביל הולך וגדל משורה לשורה עד שמגיעים לשורות אפסים, אם ישנן.

דוגמה 1.13 מטריצות מדורגות

1 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ מדורגת

2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ מדורגת

3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ לא מדורגת

4 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ לא מדורגת

5 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ לא מדורגת

הגדרה 1.7 מטריצה מדורגת קנונית

מטריצה A תיקרא <u>מדורגת קנונית</u> אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

1) שורות שכולן 0 נמצאות מתחת השורות שלא כולן 0.

2) מספר האפסים לפני איבר מוביל הולך וגדל משורה לשורה עד שמגיעים לשורות אפסים.

3) כל איבר מוביל $=1$.

4) כל איבר המוביל (שחייב שווה 1) הוא האיבר היחיד האינו שווה ל 0 בעמודה שלו.

שימו לב, לפי תנאים 1 ו- 2 מטריצה חייבת להיות מדורגת כדי להיות גם מדורגת קנונית.

דוגמה 1.14 מטריצות מדורגות קנוניות

המטריצות הבאות מדורגות קנוניות:

$$\begin{pmatrix}1&3&0&9\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&7\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&7\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&6\\0&0&1&9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

המטריצות הבאות לא מדורגות קנוניות:

$\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$ תנאי 1 לא מתקיים.

$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ תנאי 2 לא מתקיים.

$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ תנאי 3 לא מתקיים.

$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\end{pmatrix}$ תנאי 4 לא מתקיים.

1.4 אלגוריתם הדירוג של גאוס-ג'ורדן

בהסבר הבא נשתמש בפעולה 1, פעולה 2 ופעולה 3 מן הפעולות האלמנטריות בהגדרה 1.4. כדי להפוך מטריצה למטריצה מדורגת קנונית יש לעקוב את השלבים הבאים, קרי האלגוריתם הדרוג של גאוס-ג'ורדן:

משפט 1.1 אלגוריתם הדירוג של גאוס ז'ורדן

שלב 1 אם המטריצה היא מטריצה האפס, אז סיימנו.

שלב 2 מחפשים את העמודה הרשאשונה שאיננה כולה אפס, נבחר איבר בעמודה זו ששונה מאפס, נחלק את השורה שלו בערכו (פעולה 2) על מנת לקבל 1.

שלב 3 נעביר את השורה הזו לשורה ראשונה (פעולה 1).

שלב 4 ע"י פעולות מסוג של פעולה 3, נאפס את כל האיברים שמתחת ה 1 באותה העמודה.

שלב 5 נבצע את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת (לאחר השמטת שורה ראשונה, ו"חלק שמאלי" של אפסים).

עד עכשיו המטריצה מדובר בצורה מדורגת. על מנת לקבל מטריצה מדורגת קנונית, נבצע את שלב האחרון:

שלב 6 נאפס את כל האיברים מעל כל 1 המוביל ל 0 בעזרת פעולה 3.

דוגמה 1.15 אלגורתם הדירוג של גאוס-ג'ורדן

פתרו את המערכת

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 1\\ 2x_1-x_2+3x_3 &= 3\\ 3x_1-3x_2+6x_3 &= 5 \end{aligned}$$

פתרון:

כותבים את המטריצה המורחבת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 3\\ 3 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right)$$

נפתור את המערכת ע"י האלגוריתם.

שלב 1 המטריצה איננה מטריצה האפס (יש בה איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2 העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס היא העמודה הרשאשונה. האיבר המוביל הוא 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 3\\ 3 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right)$$

אז נמשיך לשלב 3.

שלב 3 השורה הזו (עם 1 המוביל) הוא כבר נמצא בשורה הראשונה אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4 נאפס כל איבר באותה עמודה של ה-1 המוביל שמתחת ה 1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 3\\ 3 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 1 & 1\\ 3 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 1 & 1\\ 0 & -6 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

עכשיו כל איבר בעמודה של ה-1 המוביל, כלומר כל איבר שמתחת ה-1 המוביל, שווה 0.

שלב 5 חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת (שמוקפת בכחול להלן)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 1 & 1\\ 0 & -6 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

שלב 1' המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2' העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס היא העמודה השנייה. נבחר את האיבר "-3" בשורה השנייה ונחלק את שורה השנייה ב -3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -6 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

שלב 3' שורה השנייה כבר בשורה הראשונה של המטריצה החלקית אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4' נאפס כל איבר באותה עמודה של ה-1 המוביל שמתחת ה-1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -6 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

עכשיו כל איבר בעמודה של ה-1 המוביל (שמתחת ה-1 המוביל) שווה ל-0.

שלב 5' אין צורך לחזור לשלבים 1-4 מפני שבשורה הסופית האיבר המוביל כבר שווה 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

שלב 6' מבצעים הצבת אחורה: המערכת המתאימה הינה

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 1 \\ & & x_2 & -\frac{1}{3} & x_3 & = -\frac{1}{3} \\ & & & & x_3 & = 0 \end{array}$$

מהמשוואה השלישית:

$$x_3 = 0 \ .$$

נציב $x_3 = 0$ במשוואה השנייה:

$$x_2 - \frac{1}{3} \cdot (0) = -\frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = -\frac{1}{3} \ .$$

נציב $x_3 = 0$ ו- $x_2 = -\frac{1}{3}$ במשוואה הראשונה:

$$x_1 - \frac{1}{3} + 0 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \frac{4}{3} \ .$$

לכן הפתרון הוא

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) \ .$$

דוגמה 1.16

פתרו את המערכת הליניארית הבאה ע"י השיטה של גאוס-ג'ורדן:

$$\begin{array}{rcrcrl} 4x & + & 3y & - & z & = 24 \\ 6x & - & y & + & 2z & = -9 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = -3 \ . \end{array}$$

פתרון:

המטריצה המורחבת של המערכת הינה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & 24 \\ 6 & -1 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

שלב 1 המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2 העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס היא העמודה הראשונה.

נחלק את שורה הראשונה ב 4:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & 24 \\ 6 & -1 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{4} R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 6 & -1 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

שלב 3 ה- 1 המוביל כבר בשורה הראשונה אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4 נאפס כל איבר באותה עמודה של ה-1 המוביל שמתחת ה- 1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 6 & -1 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 6 \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2 \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -15 \end{array}\right)$$

עכשיו כל איבר בעמודה של ה1 המוביל (שמתחת ה-1 המוביל) שווה 0 .

שלב 5 חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת (מוקפת בכחול להלן)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -15 \end{array}\right)$$

שלב 1' המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2' העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא העמודה השנייה.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -15 \end{array}\right)$$

נבחור את האיבר "$\frac{1}{2}$" -ונכפיל שורה השלישית ב 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \end{array}\right)$$

שלב 3' מחליפים שורות R_2 ו- R_3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \end{array}\right)$$

שלב 4' נאפס כל איבר שמתחת ה 1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + \frac{11}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & 42 & -210 \end{array}\right)$$

שלב 5' חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת : (המוקפת בכחול להלן):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & 42 & -210 \end{array}\right)$$

שלב 1" המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2" העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא העמודה השלישית.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & \boxed{42} & -210 \end{array}\right)$$

נחלק שורה השלישית ב- 42:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & \boxed{42} & -210 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{42}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

שלב 3" השורה עם ה- 1 המוביל כבר בשורה הראשונה של המטריצה החלקית אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4" אין איברים מתחת ה-1 המוביל כי הגענו לשורה האחרונה אז נמשיל לשלב 6.

שלב 5" אין לנו עוד שורות אז נמשיך לשלב 6

שלב 6" נאפס את כל איבר מעל ה- 1 המוביל (הצבת אחור):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + \frac{1}{4} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{19}{4} \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 7 \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{19}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - \frac{3}{4} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

קיבלנו מטריצה מדורגת קנונית.

המערכת המתאימה היא

$$\begin{array}{cccl} x_1 & & & = 1 \\ & x_2 & & = 5 \\ & & x_3 & = -5 \ . \end{array}$$

כך נקבל את הפתרון

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 5, -5) \ .$$

דוגמה 1.17 פתרון מערכת ע"י שיטת גאוס

פתרו את המערכת ליניארית הבאה ע"י השיטה של גאוס-ג'ורדן:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & & = 3 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & = 18 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = 10 \ . \end{array}$$

פתרון:

המטריצה המורחבת של המערכת היא

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & -2 & 4 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

שלב 1 המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2 העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס היא העמודה הראשונה.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & -2 & 4 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

האיבר המוביל של שורה הראשונה שווה ל- 1 אז נמשיך לשלב 3.

שלב 3 השורה כבר בשורה הראשונה, כלומר

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & -2 & 4 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4 נאפס כל איבר באותה עמודה של ה1 המוביל שמתחת ה 1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & -2 & 4 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2 \cdot R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

עכשיו כל איבר בעמודה של ה-1 המוביל (שמתחת ה 1 המוביל) שווה ל- 0.

שלב 5 חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת (שמוקפת בכחול להלן):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

שלב 1' המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2' העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא העמודה השנייה.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

שלב 3' מחליפים שורות R_2 ו- R_3:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

שלב 4' כל איבר שמתחת ה- 1 המוביל כבר שווה ל- 0 אז נמשיך לשלב 5.

שלב 5' חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת שמוקפת בכחול להלן:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

שלב 1" המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2" העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא העמודה השלישית.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

נחלק שורה השלישית ב- 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{2}\cdot R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

שלב 3" השורה עם ה- 1 המוביל בשורה ראשונה של המטריצה החלקית אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4" הגענו לשורה האחרונה אז נמשיך לשלב 6.

שלב 5" אין לנו עוד שורות אז נמשיך לשלב 6

שלב 6" נאפס את כל איבר שנמצא מעל 1 המוביל (הצבת אחור):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

בסופו של התהליך קיבלנו מטריצה בצורה מדורגת קנונית. לכן סיימנו.

המערכת המתאימה היא

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & + & x_4 & = 3 \\ & x_2 & & + & x_4 & = 4 \\ & & x_3 & + & 2x_4 & = 6\ . \end{array}$$

- המשתנים x_1, x_2 ו- x_3 נקראים **משתנים תלויים**, בגלל שהם המשתנים שמתאימים ל- איברי מובילים במטריצה המדורגת.
- המשתנה x_4 נקרא **משתנה חופשי**, מפני שהוא מתאים לאיבר שלא מוביל במטריצה המדורגת.

בתשובה יש משתנה חופשי, x_4. נרשום את הפתרון כך:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - x_4\ , \\ x_2 &= 4 - x_4\ , \\ x_3 &= 6 - 2x_4\ . \end{aligned}$$

כאשר x_4 יכול לקבל כל מספר ממשי. בדרך כלל מייצגים את הפתרון בצורה הבאה:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3-t, 4-t, 6-2t, t)\ , \qquad t \in \mathbb{R}\ .$$

1.5 קיום וכמות פתרונות למערכת ליניארית

הגדרה 1.8 משתנה תלוי ומשתנה חופשי

נתונה מטריצה מורחבת מדורגת של מערכת ליניארית:

- משתנה שמתאים לו איבר מוביל יקרא משתנה **תלוי** .
- משתנה שלא מתאים לו איבר מוביל יקרא משתנה **חופשי** .

דוגמה 1.18 משתנה תלוי ומשתנה חופשי

נתונה המערכת

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+5x_3 &= 0 \\ x_1+14x_2-2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

שנתאים לו מטריצה מורחבת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 14 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

נדרג אותו עד שנקבל את המטריצה המדורגת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 14 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

עכשיו נרשום את המערכת המתאימה של המטירצה המדורגת המתקבלת:

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+5x_3 &= 0 \\ 11x_2-7x_3 &= 0 \end{aligned}$$

הרי המשתנים x_1 ו- x_2 משתנים תלויים מפני שמתאים להם איברי מובילים. בפרט המקדם של x_1, 1 הוא האיבר המוביל בשורה הרשונה של המטריצה המדורגת. המקדם של x_2, 11 הוא האיבר המוביל בשורה הרשונה של המטריצה המדורגת. המשתנה x_3 משתנה חופשי כי לא מתאים לו איבר מוביל.

משפט 1.2 קיום וכמות פתרונות למערכת ליניארית

1 למערכת ליניארית יש פתרון אם ורק אם במטריצה מורחבת מדורגת של המערכת אין שורת סתירה:

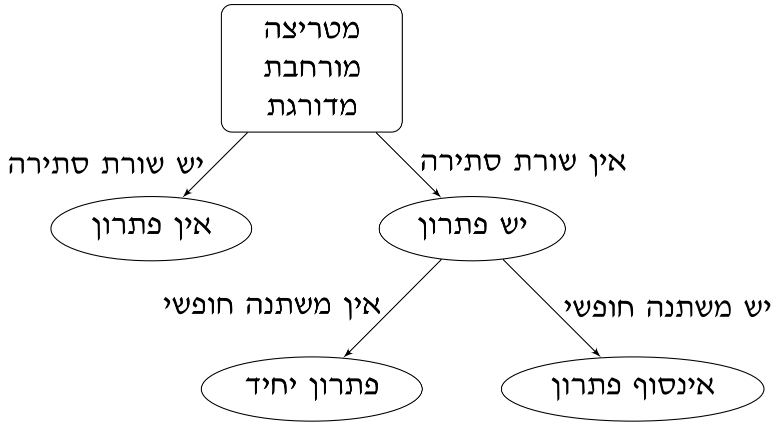
$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right)$$

2 אם למערכת יש פתרון אז יתכנו 2 אפשרויות:

א) אם במערכת המורחבת המדורגת יש משתנה חופשי אז למערכת יש אינסוף פתרונות.

ב) אם במערכת המורחבת המדורגת אין משתנה הופשי אז למערכת יש פתרון יחיד.

נסכם בעזרת עץ:



דוגמה 1.19

נתונה המטריצה המורחבת הבאה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

האם למערכת הליניארית המתאימה יש פתרון? אם כן, כמה?

פתרון:

נשים לב שהמטריצה המורחבת בצורה מדורגת.
אין במטירצה המורחבת המדורגת שורת סתירה לכן קיים פתרון.
מאחר ויש משתנה חופשי, z, אז יהיו למערכת אינסוף פתרונות.
בפרט:

$$\left.\begin{aligned} 2x &= 6 \\ 3y+z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x &= 3 \\ 3y &= -z \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= \tfrac{-z}{3} \end{aligned}\right\}$$

z יכול לקבל כל מספר ממשי, ז"א $z \in \mathbb{R}$. נרשום את הפתרונות בצורה:

$$\left(3, -2, \frac{z}{3}\right) \quad z \in \mathbb{R} \; .$$

דוגמה 1.20

נתונה המטריצה המורחבת הבאה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 33 & 44 & 234 & 1122 & 343 \\ 0 & 23 & 44 & 667 & 87 \\ 0 & 0 & 0 & 2344 & 5767 \end{array}\right)$$

האם למערכת הליניארית המתאימה יש פתרון? אם כן, כמה?

פתרון:

המטריצה המורחבת של המערכת בצורה מדורגת.
מפני שאין שורת סתירה אז אפשר להסיק שקיים פתרון.
יש משתנה חופשי לכן למערכת יהיו אינסוף פתרונות.
נוכל להשתמש ברעיון של "הבצה לאחור":

$$\begin{array}{ccccccccc} 33x_1 & + & 44x_2 & + & 234x_3 & + & 1122x_4 & = 343 \\ & & 23x_2 & + & 44x_3 & + & 667x_4 & = 87 \\ & & & & & & 23554x_4 & = 5767 \end{array}$$

שימו לב, קיבלנו שלמערכת יש אינסוף פתרונות, לא בגלל שכמות המשתנים גדולה מכמות השוואות.

דוגמה 1.21

תנו דוגמה למערכת בה כמות המשתנים גדולה מכמות המשוואות ואן לה אינסוף פתרונות.

פתרון:

כאשר תהיה שורה סתירה. למשל,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

דוגמה 1.22

נתונה המערכת הליניארית הבאה:

$$\begin{aligned} x + (a-1)y - z =& 4 \\ (a+1)x + (2a-2)y + (a-4)z =& a+10 \\ (a+2)x + (3a-3)y + (2a-7)z =& a+17 \end{aligned}$$

עבור אילו ערכי הפרמטר a למערכת יש

1. פתרון יחיד
2. אין פתרון
3. אינסוף פתרונות?

במקרה של אינסוף פתרונות רשמו את הפתרון הכללי.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ a+1 & 2a-2 & a-4 & a+10 \\ a+2 & 3a-3 & 2a-7 & a+17 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2-(a+1)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ 0 & -a^2+2a-1 & 2a-3 & 6-3a \\ a+2 & 3a-3 & 2a-7 & a+17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3-(a+2)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ 0 & -a^2+2a-1 & 2a-3 & 6-3a \\ 0 & -a^2+2a-1 & 3a-5 & 9-3a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ 0 & -a^2+2a-1 & 2a-3 & 6-3a \\ 0 & 0 & a-2 & 3 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ 0 & -(a-1)^2 & 2a-3 & 6-3a \\ 0 & 0 & a-2 & 3 \end{array}\right)$$

לא יהיה משתנה חופשי אם $a \neq 2$ וגם $(a-1)^2 \neq 0$.
לפיכך קיים פתרון יחיד אם ורק אם $a \neq 2$ וגם $a \neq 1$.

עבור $a=1$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_2\to -R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

לכן למערכת אינסוף פתרונות. מתקבל

$$x=1\ ,\ y\in\mathbb{R}\ ,\ z=-3\ .$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$(1,y,-3)$$

כאשר $y\in\mathbb{R}$.
עבור $a=2$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

וקיבלנו שורת סתירה לכן אין פתרון.

דוגמה 1.23

מצאו את כמות הפתרונות של המערכת הבאה:

$$\begin{aligned} x+\left(\sqrt{\pi^2+e}-1\right)y-z &=4 \\ \left(\sqrt{\pi^2+e}+1\right)x+\left(2\sqrt{\pi^2+e}-2\right)y+\left(\sqrt{\pi^2+e}-4\right)z &=\sqrt{\pi^2+e}+10 \\ \left(\sqrt{\pi^2+e}+2\right)x+\left(3\sqrt{\pi^2+e}-3\right)y+\left(2\sqrt{\pi^2+e}-7\right)z &=\sqrt{\pi^2+e}+17 \end{aligned}$$

פתרון:
המטריצה המורחבת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \left(\sqrt{\pi^2+e}-1\right) & -1 & 4 \\ \left(\sqrt{\pi^2+e}+1\right) & \left(2\sqrt{\pi^2+e}-2\right) & \left(\sqrt{\pi^2+e}-4\right) & \sqrt{\pi^2+e}+10 \\ \left(\sqrt{\pi^2+e}+2\right) & \left(3\sqrt{\pi^2+e}-3\right) & \left(2\sqrt{\pi^2+e}-7\right) & \sqrt{\pi^2+e}+17 \end{array}\right)$$

מבצעים הפעולות האלמנטריות הבאות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \left(\sqrt{\pi^2+e}-1\right) & -1 & 4 \\ \left(\sqrt{\pi^2+e}+1\right) & \left(2\sqrt{\pi^2+e}-2\right) & \left(\sqrt{\pi^2+e}-4\right) & \sqrt{\pi^2+e}+10 \\ \left(\sqrt{\pi^2+e}+2\right) & \left(3\sqrt{\pi^2+e}-3\right) & \left(2\sqrt{\pi^2+e}-7\right) & \sqrt{\pi^2+e}+17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-\left(\sqrt{\pi^2+e}+1\right)R_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \sqrt{e+\pi^2}-1 & -1 & 4 \\ 0 & -e+2\sqrt{e+\pi^2}-\pi^2-1 & 2\sqrt{e+\pi^2}-3 & 6-3\sqrt{e+\pi^2} \\ \sqrt{e+\pi^2}+2 & 3\sqrt{e+\pi^2}-3 & 2\sqrt{e+\pi^2}-7 & \sqrt{e+\pi^2}+17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-\left(\sqrt{\pi^2+e}+2\right)R_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \sqrt{e+\pi^2}-1 & -1 & 4 \\ 0 & -e+2\sqrt{e+\pi^2}-\pi^2-1 & 2\sqrt{e+\pi^2}-3 & 6-3\sqrt{e+\pi^2} \\ 0 & -e+2\sqrt{e+\pi^2}-\pi^2-1 & 3\sqrt{e+\pi^2}-5 & 9-3\sqrt{e+\pi^2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \sqrt{e+\pi^2}-1 & -1 & 4 \\ 0 & -e+2\sqrt{e+\pi^2}-\pi^2-1 & 2\sqrt{e+\pi^2}-3 & 6-3\sqrt{e+\pi^2} \\ 0 & 0 & \sqrt{e+\pi^2}-2 & 3 \end{array}\right)$$

שימו לב, $e+\pi^2>0$ וגם $e+\pi^2$ מספר אי-רציונלי, לפיכך $e+\pi^2\notin\mathbb{N}$ לכן $\sqrt{e+\pi^2}\neq 2$ לכן $\sqrt{e+\pi^2}-2\neq 0$.
באותה מידה ניתן להסיק כי $-e+2\sqrt{e+\pi^2}-\pi^2-1\neq 0$.
לכן אין משתנה חופשי במערכת המורחבת המדורגת, כך שקיים פתרון יחיד.

משפט 1.3

אם ניתן להגיע ממטריצה A למטריצה B ע"י ביצוע מספר סופי של פעולות שורה אלמנטריות, אז ניתן להגיע מהמטריצה B למטריצה A ע"י ביצוע הפעולות ההפוכות.

הוכחה: לכל פעולה יש את הפעולה ההפוכה לה.

- ההפוכה ל $R_i\leftrightarrow R_j$ היא $R_i\leftrightarrow R_j$.
- ההפוכה ל $R_i\to\alpha\cdot R_i$ היא $R_i\to\frac{1}{\alpha}R_i$
- ההפוכה ל $R_i\to R_i+\alpha R_j$ היא $R_i\to R_i-\alpha R_j$.

■

הגדרה 1.9 שקולות שורה

תהיינה A ו- B מטריצות. נאמר שהן שקולות שורה אם ניתן להגיע מאחת לשניה ע"י ביצוע מספר סופי פעולות שורה אלמנטריות.

משפט 1.4

אם המטריצות המורחבות של שתי מערכות ליניאריות הן שקולות, אז לשתי המערכות יש אותה קבוצת פתרון. כלומר, כל פתרון של המערכת הראשונה הוא פתרון של השניה, ולהיפך.

דוגמה 1.24

האם המערכות $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 12 & 21 \\ 15 & -10 & 30 & 5 \end{array}\right)$ ו- $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 14 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & 6 & 1 \end{array}\right)$ שקולות שורה?

פתרון:

אם נכתוב את המערכות בצורה

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 12 & 21 \\ 15 & -10 & 30 & 5 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} {R_1}' \\ {R_2}' \\ {R_3}' \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 14 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

קל לראות כי $R_1' = 2R_2$, $R_2' = \frac{1}{3}R_2$, ו- $R_3' = \frac{1}{5}R_3$. לכן, מכיוון שאפשר להגיע ממטריצה הראשונה למטריצה השנייה דרך פעולות אלמנטריות, אז המטריצות הן שקולות שורה.

שעור 2
שדות

2.1 מספרים מרוכבים

"

הגדרה 2.1 מספר מרוכב

זוג סדור $z=(x,y)$ של מספרים ממשיים נקרא מספר מרוכב.

אם $y=0$ נקבל זוג $(x,0)$. נסמן $(x,0)=x$. נגדיר את הפעולות הבאות בין מספרים מרוכבים:

הגדרה 2.2 פעולות בינאריות של מספרים מרוכבים

נניח $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)$. אז

1) **חיבור**

$$z_1+z_2=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

2) **כפל**

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1)$$

קל לראות:

1) לכל מספר ממשי $x=(x,0)$ ולכל מספר מרוכב $z_1=(x_1,y_1)$ מתקיים

$$x\cdot z_1=(x\cdot x_1,x\cdot y_1)$$

2) לכל מספרים ממשיים $(x_1,0)$ ו- $(x_2,0)$ מתקיים

$$(x_1,0)\cdot(x_2,0)=(x_1x_2,0)=x_1x_2$$

הגדרה 2.3 i

נסמן

$$i=(0,1)\ .$$

i היא

$$i^2=i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1\ ,\ 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)=-1\ .$$

משפט 2.1 הצגה אלגברית שך מספר מרוכב

תוך שימוש במספר i כל מספר מרוכב $z=(x,y)$ ניתן לרשום

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(y,0)\cdot(0,1)=x+iy\ .$$

$x+iy$ נקרא הצגה אלגברית של מספר מרוכב.

ל- x קוראים החלק הממשי של z. מסמנים $x = \text{Re}(z)$.

ל- y קוראים החלק המדומה של z. מסמנים $y = \text{Im}(z)$.

צורת הכתיבה $x + iy$ מאפשרת לחבר ולהכפיל מספרים רוכבים בקלות בהתחשב ב- $i^2 = -1$.

דוגמה 2.1

א

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 - y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \ .$$

דוגמה 2.2

$$(3 - 5i) \cdot (2 + 3i) = 6 + 9i - 10i + 15 = 21 - i \ .$$

הגדרה 2.4 הצמוד

המספר הרוכב $x - iy$ נקרא צוד למפר $z = x + iy$. מסנים:

$$\bar{z} = x - iy \ .$$

משפט 2.2

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \ .$$

המספר הזה נקרא ה **הערך המוחלט** או **הגודל** של המספר מספר המרוכב z.

דוגמה 2.3

$$\frac{3 + 4i}{1 - i} = \frac{(3 + 4i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{3 + 3i + 4u - 4}{2} = \frac{-1 + 7i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$$

דוגמה 2.4

מצאו את המספר z המקיים את המשוואה

$$\frac{1 - iz}{1 + iz} = -2i \ .$$

פתרון:

$$1 - iz = -2i(1 + iz) = 2z - 2i \quad \Rightarrow \quad z(2 + i) = 1 + 2i$$

$$z = \frac{1 + 2i}{2 + i} = \frac{(1 + 2i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{2 - i + 4i + 2}{5} = \frac{4 + 3i}{5} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$$

קבוצת המספרים המרוכבים מסומנת ב- $\mathbb{C}$.

אפשר לראות בקלות ש- $\mathbb{C}$ יחד עם שתי הפעולות שהגדרנו בהגדרה 2.7 מקיימת את כל האקסיומות של שדה, כאשר

$$0 = (0,0)$$

$$1 = (1,0)$$

ועבור $z = x + iy \neq 0$,

$$z^{-1} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2+y^2} \ .$$

2.2 $\mathbb{Z}_p$ - קבוצת השאריות בחלוקה ב p

הגדרה 2.5 פונקציית שארית

עבור מספרים שלמים k,p הפונקצית השארית $\text{rem}(k,p)$ מוגדרת להיות השארית של k בחילוק ב- p.

דוגמה 2.5

- השארית של 3 בחילוק ב- 2 היא 1. לכן

$$\text{rem}(3,2) = 1 \ .$$

- השארית של 7 בחילוק ב- 4 היא 3. לכן

$$\text{rem}(7,4) = 3 \ .$$

- השארית של 11 בחילוק ב- 8 היא 3. לכן

$$\text{rem}(11,8) = 3 \ .$$

הגדרה 2.6 $\mathbb{Z}_p$ - קבוצת השארית בחלוקה ב-p

נניח ש p מספר ראשוני. הקבוצה $\mathbb{Z}_p$ היא קבוצת הסימנים

$$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{p-1}\} \ .$$

הקבוצה מוגדרת לפי התנאים הבאים:

(1) כל איבר הוא מספר שלם וחיובי.

(2) מספרים עם אותה השאריות בחילוק ב- p שווים זה לזה.

(3) לכל מספר שלם k נתאים איבר ב- $\mathbb{Z}_p$ שנסמן $\bar{k}$ ונגדיר

$$\bar{k} = \overline{\text{rem}(k,p)} \ .$$

דוגמה 2.6

לקבוצה $\mathbb{Z}_3$ יש 3 איברים:

$$\{\mathbb{Z}_3 = \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} \ .$$

$$\begin{aligned}
\bar{0} &= \overline{\text{rem}(0,3)} &&= \bar{0}\\
\bar{1} &= \overline{\text{rem}(1,3)} &&= \bar{1}\\
\bar{2} &= \overline{\text{rem}(2,3)} &&= \bar{2}\\
\\
\bar{3} &= \overline{\text{rem}(3,3)} &&= \bar{0}\\
\bar{4} &= \overline{\text{rem}(4,3)} &&= \bar{1}\\
\bar{5} &= \overline{\text{rem}(5,3)} &&= \bar{2}\\
\\
\bar{6} &= \overline{\text{rem}(6,3)} &&= \bar{0}\\
\bar{7} &= \overline{\text{rem}(7,3)} &&= \bar{1}\\
\bar{8} &= \overline{\text{rem}(8,3)} &&= \bar{2}\\
&\vdots\\
\overline{122} &= \overline{\text{rem}(122,3)} &&= \bar{2}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

ובן הלאה.

הגדרה 2.7 פעולות בינאריות של $\mathbb{Z}_p$ איברי

יהי $p \in \mathbb{N}$ מספר ראשוני ותהי $\mathbb{Z}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$, קבוצת השאריות בחלוקה ב- p. לכל $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_p$ נגדיר את הפעולות חיבור וכפל כך:

1) <u>**חיבור**</u>

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$$

2) <u>**כפל**</u>

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b} \ .$$

דוגמה 2.7

חשבו ב- $\mathbb{Z}_5$ את

א) $\bar{2} + \bar{4}$.

ב) $\bar{3} \cdot \bar{3}$.

פתרון:

א) $\bar{2} + \bar{4} = \overline{2+4} = \bar{6} = \bar{1}$.

ב) $\bar{3} \cdot \bar{3} = \overline{3 \cdot 3} = \bar{9} = \bar{4}$.

דוגמה 2.8

חשבון ב- $\mathbb{Z}_{11}$ את

א) $\bar{3}\cdot\bar{7}$.

ב) $\bar{2}\cdot\bar{8}$.

פתרון:

א) $\bar{3}\cdot\bar{7}=\overline{3\cdot 7}=\overline{21}=\overline{10}$.

ב) $\bar{2}\cdot\bar{8}=\overline{16}=\bar{5}$.

דוגמה 2.9

לוח החיבור של איברים ב- $\mathbb{Z}_3$:

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

לוח הכפל של איברים ב- $\mathbb{Z}_3$:

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

דוגמה 2.10

לוח החיבור של איברים של $\mathbb{Z}_5$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

לוח הכפל של איברים של $\mathbb{Z}_5$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

נחזור לממשיים. הנגדי של 7 הוא -7 כי $-7+7=0$.

ההופכי של 7 הוא 7^{-1}, (או $\frac{1}{7}$) כי $\frac{1}{7}\cdot 7=1$.

ושוב ל- $\mathbb{Z}_3$, מתקיים $\bar{2}+\bar{1}=\bar{0}$ ולכן $\bar{2}$ הוא הנגדי של $\bar{1}$. כלומר :

$$-\bar{1}=\bar{2}\ .$$

באופן דומה, $\bar{1}$ הוא הנגדי של $\bar{2}$. כלומר $-\bar{2}=\bar{1}$.

מתקיים $\bar{2}\cdot\bar{2}=\bar{1}$ ולכן $\bar{2}$ הוא ההופכי של $\bar{2}$. כלומר $(\bar{2})^{-1}=\bar{2}$.

משפט 2.3 איבר ההופכי ואיבר הנגדי בקבוצה $\mathbb{Z}_p$

יהי p מספר ראשוני ותהי $\mathbb{Z}_p$ הקבוצה השאריות בחלוקה ב- p.

א) איבר הנגדי

לכל איבר $a\in\mathbb{Z}_p$ קיים איבר יחיד $-a\in\mathbb{Z}_p$ כך ש-

$$a+(-a)=\bar{0}\ .$$

האיבר $-a$ נקרא האיבר הנגדי של a.

ב) איבר ההופכי

לכל איבר $a\in\mathbb{Z}_p$ שונה מאפס (כלומר $a\neq\bar{0}$) קיים איבר יחיד $a^{-1}\in\mathbb{Z}_p$ כך ש-

$$a\cdot a^{-1}=\bar{1}\ .$$

האיבר a^{-1} נקרא האיבר ההופכי של a.

דוגמה 2.11

מצאו את האיבר הנגדי של $\bar{1}$ ב- $\mathbb{Z}_3$.

פתרון:

נשים לב ש-

$$\bar{1}+\bar{2}=\bar{3}=\bar{0}$$

ולכן

$$-\bar{1}=\bar{2}\ .$$

דוגמה 2.12

מצאו את האיבר הנגדי של $\bar{2}$ ב- $\mathbb{Z}_3$.

פתרון:

נשים לב ש-

$$\bar{2}+\bar{1}=\bar{3}=\bar{0}$$

ולכן

$$-\bar{2}=\bar{1}\ .$$

דוגמה 2.13

מצאו את האיבר הנגדי של $\bar{3}$ ב- $\mathbb{Z}_3$.

פתרון:
נשים לב ש-
$$\bar{3}+\bar{0}=\bar{3}=\bar{0}$$
ולכן
$$-\bar{3}=\bar{3}\ .$$

דוגמה 2.14

איברים הנגדיים של איברים של $\mathbb{Z}_3$:
$$\begin{aligned}
-\bar{1} &= \bar{2}\\
-\bar{2} &= \bar{1}\\
\\
-\bar{3} &= \bar{0}\\
-\bar{4} &= \bar{2}\\
-\bar{5} &= \bar{1}\\
\\
-\bar{6} &= \bar{0}\\
-\bar{7} &= \bar{2}\\
-\bar{8} &= \bar{1}\\
&\vdots\\
-\bar{59} &= \bar{1}\ .
\end{aligned}$$

דוגמה 2.15

מצאו את האיבר ההופכי של $\bar{2}$ ב- $\mathbb{Z}_3$.

פתרון:
$$\bar{2}\cdot\bar{2}=\bar{4}=\bar{1}$$
לכן $\bar{2}^{-1}=\bar{2}$.

דוגמה 2.16

מצאו את האיבר ההופכי של $\bar{1}$ ב- $\mathbb{Z}_3$.

פתרון:
$$\bar{1}\cdot\bar{1}=\bar{1}$$
לכן $\bar{1}^{-1}=\bar{1}$.

דוגמה 2.17

מצאו את האיבר ההופכי של $\bar{3}$ ב- $\mathbb{Z}_5$.

פתרון:

$$\bar{3}\cdot\bar{2}=\bar{6}=\bar{1}$$

לכן $\bar{3}^{-1}=\bar{2}$.

דוגמה 2.18

חשבו את האיבר ההופכי של כל האיברים הבאים ב- $\mathbb{Z}_5$

(א) $\bar{1}$

(ב) $\bar{2}$

(ג) $\bar{3}$

(ד) $\bar{4}$

פתרון:

(א)

$$\bar{1}\cdot\bar{1}=\bar{1}\quad\Rightarrow\quad\bar{1}^{-1}=\bar{1}$$

(ב)

$$\bar{2}\cdot\bar{3}=\bar{6}=\bar{1}\quad\Rightarrow\quad 2^{-1}=\bar{1}$$

(ג)

$$\bar{3}\cdot\bar{2}=\bar{6}=\bar{1}\quad\Rightarrow\quad\bar{3}^{-1}=\bar{1}$$

(ד)

$$\bar{4}\cdot\bar{4}=\overline{16}=\bar{1}\quad\Rightarrow\quad\bar{4}^{-1}=\bar{1}$$

דוגמה 2.19

חשבו ב- $\mathbb{Z}_{11}$:

(א) $\bar{3}\cdot\bar{7}$

(ב) $\bar{2}\cdot\bar{8}$

(ג) $-\bar{3}$

(ד) $(\bar{3})^{-1}$

פתרון:

(א) $\bar{3}\cdot\bar{7}=\overline{21}=\overline{10}$

(ב) $\bar{2} \cdot \bar{8} = \overline{16} = \bar{5}$

(ג) . $-\bar{3} = \bar{8} \quad \Rightarrow \quad \bar{3} + \bar{8} = \overline{11} = \bar{0}$

(ד) . $(\bar{3})^{-1} = \bar{4} \quad \Rightarrow \quad \bar{3} \cdot \bar{4} = \overline{12} = \bar{1}$

משפט 2.4

עבור $p \in \mathbb{N}$ ראשוני, לכל איבר השונה מאפס בקבוצה $\mathbb{Z}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \cdots \overline{p-1}\}$ יש הופכי.

2.3 שדות

הגדרה 2.8 שדה

קבוצה לא ריקה $\mathbb{F}$, שבה פעולת חיבור "+" ופעולת כפל "·" (הפעולות הדו-מקומיות) מוגדרות על הקבוצה, נקראת שדה אם התנאים הבאים מתקיימים. לכל איבר $a \in \mathbb{F}$ ולכל איבר $b \in \mathbb{F}$ ולכל איבר $c \in \mathbb{F}$:

(1 $\mathbb{F}$ סגורה תחת חיבור:
$$a + b \in \mathbb{F} \ .$$

(2 $\mathbb{F}$ סגורה תחת כפל:
$$a \cdot b \in \mathbb{F} \ .$$

(3 חוק החילוף I:
$$a + b = b + a$$

(4 חוק החילוף II:
$$a \cdot b = b \cdot a$$

(5 חוק הקיבוץ I:
$$(a + b) + c = a + (b + c) \ .$$

(6 חוק הקיבוץ II:
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

(7 חוק הפילוג:
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \ .$$

(8 קיום איבר ניוטרלי:

קיים איבר $0 \in \mathbb{F}$ כך ש-
$$a + 0 = a \ .$$

(9 קיום איבר יחיד (האיבר ניוטרל לגבי כפל):

קיים איבר $1 \in \mathbb{F}$ כך ש-
$$a \cdot 1 = a \ , \qquad \text{ו} \qquad 1 \cdot a = a \ .$$

10) קיום איבר נגדי:

לכל $a \in \mathbb{F}$ קיים איבר נגדי $(-a) \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$a + (-a) = 0 \ .$$

11) קיום איבר הופכי:

לכל $a \in \mathbb{F}$ כך ש $a \neq 0$ קיים איבר $a^{-1} \in \mathbb{F}$ המקיים

$$a \cdot a^{-1} = 1 \ , \qquad \text{ו} \qquad a^{-1} \cdot a = 1 \ .$$

משפט 2.5

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

1) עבור $a \in \mathbb{F}$, האיבר הנגדי החיבורי $-a$ הוא יחיד.

2) עבור $a \in \mathbb{F}$ $(a \neq 0)$, האיבר ההפכי הכפלי a^{-1} הוא יחיד.

דוגמה 2.20

א) הקבוצה $\mathbb{R}$ של מספרים ממשיים שדה.

ב) הקבוצה $\mathbb{C}$ של מספרים מרובכים שדה.

דוגמה 2.21

קבעו אם הקבוצה $\mathbb{N}$ שדה.

פתרון:

$\mathbb{N}$ לא שדה. כדי להראות זאת די למצוא דוגמה נגדית לאחת התכונות.:
נבחור $a = 3 \in \mathbb{N}$. לא קיים איבר נגדי שב- $\mathbb{N}$. הרי

$$-3 + 3 = 0$$

אבל $-3 \notin \mathbb{N}$.

משפט 2.6

יהי $\mathbb{F}$ שדה יהיו $a, b \in \mathbb{F}$, יהי 0 האיבר הניוטרלי הכפלי ו- -1 האיבר הנגדי לאיבר הניוטרלי החיבורי.

1) $a \cdot 0 = 0$

2) $a \cdot (-1) = -a$

3) אם $a \cdot b = 0$ ו- $a \neq 0$ אז $b = 0$.

הוכחה: תרגיל בית! ■

2.4 מערכות ליניאריות מעל $\mathbb{C}$

דוגמה 2.22

פתרו את המערכת $\begin{cases}(1+i)z_1+(1-i)z_2 &=3i \\ 3z_1+(2-i)z_2 &=4\ .\end{cases}$ מעל $\mathbb{C}$.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+i & 1-i & 3i \\ 3 & 2-i & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to(1-i)R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2i & 3+3i \\ 3 & 2-i & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to 2R_2-3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2i & 3+3i \\ 0 & 4+4i & -1-9i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to(4-4i)R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2i & 3+3i \\ 0 & 32 & -40-32i \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to 16R_1+iR_2} \left(\begin{array}{cc|c} 32 & 0 & 80+8i \\ 0 & 32 & -40-32i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{32}R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2}+\frac{1}{4}i \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4}-i \end{array}\right)$$

פתרון:

$$z_1=\frac{5}{2}+\frac{1}{4}i\ , \qquad z_2=-\frac{5}{4}-i$$

2.5 מערכות ליניאריות מעל $\mathbb{Z}_p$

דוגמה 2.23

פתור את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_3$:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &=\bar{0} \\ x_1-x_2-x_3 &=\bar{0} \\ x_1+\bar{2}x_2+x_3 &=\bar{1} \end{aligned}$$

פתרון:

המטריצה המורחבת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & -\bar{1} & -\bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \end{array}\right)$$

נבצע שיטת גאוס:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{1} & \bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right)$$

נכפיל את השורה השלישית ב $\bar{2}^{-1} = \bar{2}$. מכיוון לכן נבצע את הפעולה הבאה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to \bar{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

עכשיו נאפס כל איבר מעל ה $\bar{1}$ המוביל בעזרת הפעולות הבאות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & -\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & -\bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

לכן למערכת יש פתרון יחיד:

$$(x_1, x_2, x_3) = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}) \ .$$

דוגמה 2.24

פתור את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 =& \bar{0} \ , \\ x_1 - x_2 - x_3 =& \bar{1} \ . \end{aligned}$$

פתרון:

המטריצה המורחבת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & -\bar{1} & -\bar{1} & \bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{1} \end{array}\right) \ .$$

שיטת גאוס:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{1} \end{array}\right) \ .$$

נכפיל את השורה השלישית באיבר ההופכי של $\bar{3}$ ב- $\mathbb{Z}_5$. נגלה כי

$$\bar{3}\cdot\bar{2} = \bar{6} = \bar{1} \quad \Rightarrow \quad (\bar{3})^{-1} = \bar{2} \ ,$$

ולכן

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to\bar{2}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) .$$

המערכת המתאימה היא

$$x_1 = \bar{3} \ ,$$
$$x_2 + x_3 = \bar{2}$$

ולכן הפתרון הוא

$$x_1 = \bar{3} \ ,$$
$$x_2 = \bar{2} - x_3 \ .$$

כלומר,

$$(x_1, x_2, x_3) = (\bar{3}, \bar{2} - x_3, x_3) \ , \qquad x_3 \in \mathbb{Z}_5$$

נשים לב שלמערכת יש חמישה פתרונות:

פתרון 1: $x_3 = \bar{0} \ \Rightarrow \ (\bar{3}, \bar{2}, \bar{0})$

פתרון 2: $x_3 = \bar{1} \ \Rightarrow \ (\bar{3}, \bar{1}, \bar{1})$

פתרון 3: $x_3 = \bar{2} \ \Rightarrow \ (\bar{3}, \bar{0}, \bar{2})$

פתרון 4: $x_3 = \bar{3} \ \Rightarrow \ (\bar{3}, -\bar{1}, \bar{3}) = (\bar{3}, \bar{4}, \bar{3})$

פתרון 5: $x_3 = \bar{4} \ \Rightarrow \ (\bar{3}, -\bar{2}, \bar{4}) = (\bar{3}, \bar{3}, \bar{3})$

דוגמה 2.25

פתור את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_7$:

$$x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{4}x_3 = \bar{0} \ ,$$
$$\bar{2}x_1 - \bar{3}x_2 + x_3 = \bar{0} \ .$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{2} & -\bar{3} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-\bar{2}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{7} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

המערכת המתאימה הינה

$$x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{4}x_3 = \bar{0} \ , \qquad x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_7$$

והפתרון הוא

$$x_1 = -\bar{2}x_2 - \bar{4}x_3 = \bar{5}x_2 + \bar{3}x_3 \ , \qquad x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_7 \ .$$

כלומר

$$(x_1, x_2, x_3) = (\bar{5}x_2 + \bar{3}x_3, x_2, x_3) \ , \qquad x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_7 \ .$$

נשים לב שלמערכת יש $7^2 = 49$ פתרונות.

דוגמה 2.26

תנו דוגמה למערכת לינארית בעלת 27 פתרונות.

פתרון:

מערכת 1 : המערכת

$$\bar{0}x = \bar{0} \ .$$

מעל $\mathbb{Z}_{27}$.

<u>הסבר:</u> זוהי מערכת של משוואה אחת במשתנה אחד, וכל איבר של $\mathbb{Z}_{27}$ מהווה פתרון של המערכת.

מערכת 2 :

$$x + y + z + w = \bar{0}$$

מעל $\mathbb{Z}_3$.

<u>הסבר:</u> זוהי מערכת של משוואה אחת בארבעה משתנים. למערכת יש שלושה משתני חופשיים ולכן 3^3 פתרונות.

דוגמה 2.27

פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} x + \bar{3}y + \bar{2}z &= \bar{1} \ , \\ \bar{2}x + \bar{4}y + z &= \bar{3} \ , \\ \bar{3}x + \bar{3}z &= \bar{2} \ . \end{aligned}$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - \bar{3}\cdot R_1]{R_2 \to \bar{R}_2 - \bar{2}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{2} & -\bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{9} & -\bar{3} & -\bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \bar{3}^{-1} R_2 = \bar{2} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{2} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to \bar{3}^{-1} R_3 = \bar{2} R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - \bar{4} R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & -\bar{1}\bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - \bar{3} R_2 - \bar{2} R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\overline{10} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array}\right)$$

לפיכך $(x_1, x_2, x_3) = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{4})$.

דוגמה 2.28

פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} x + \bar{4}y + z &= \bar{1} \ , \\ \bar{3}x + \bar{2}y + \bar{3}z &= \bar{2} \ , \\ \bar{4}x + y + \bar{4}z &= \bar{3} \ . \end{aligned}$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{4}&\bar{1}&\bar{1}\\ \bar{3}&\bar{2}&\bar{3}&\bar{2}\\ \bar{4}&\bar{1}&\bar{4}&\bar{3}\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-\bar{4}R_1]{R_2\to R_2-\bar{3}R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{4}&\bar{1}&\bar{1}\\ \bar{0}&-\overline{10}&\bar{0}&-\bar{1}\\ \bar{0}&-\overline{15}&\bar{0}&-\bar{1}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{4}&\bar{1}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{0}&\bar{4}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{0}&\bar{4}\end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה לכן למערכת אין פתרון.

דוגמה 2.29

פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned}\bar{2}x+\bar{3}y+\bar{4}z&=\bar{1}\ ,\\ x+\bar{2}y+\bar{3}z&=\bar{0}\ ,\\ \bar{3}x+\bar{2}z&=\bar{1}\ .\end{aligned}$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{2}&\bar{3}&\bar{4}&\bar{1}\\ \bar{1}&\bar{2}&\bar{3}&\bar{0}\\ \bar{3}&\bar{0}&\bar{2}&\bar{1}\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{3}&\bar{0}\\ \bar{2}&\bar{3}&\bar{4}&\bar{1}\\ \bar{3}&\bar{0}&\bar{2}&\bar{1}\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-\bar{3}\cdot R_1]{R_2\to R_2-\bar{2}\cdot R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{3}&\bar{0}\\ \bar{0}&-\bar{1}&-\bar{2}&\bar{1}\\ \bar{0}&-\bar{6}&-\bar{7}&\bar{1}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{3}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{4}&\bar{3}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{4}&\bar{3}&\bar{1}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{3}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{4}&\bar{3}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{R_2\to\bar{4}^{-1}R_2\\ =\bar{4}\cdot R_2}}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{3}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}&\overline{12}&\bar{4}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{3}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{2}&\bar{4}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\bar{2}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{0}&-\bar{1}&-\bar{8}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{2}&\bar{4}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{0}&\bar{4}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{2}&\bar{4}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\quad\left.\begin{aligned}x&=-\bar{4}z+\bar{2}&&=z+\bar{2}\\ y&=-\bar{2}z+\bar{4}&&=\bar{3}z+\bar{4}\end{aligned}\right\}$$

תשובה סופית:

$$(x,y,z)=(z+\bar{2},\bar{4}+\bar{3}z,z)\qquad ,z\in\mathbb{Z}_5\ .$$

ישנם 5 פתרונות.

שעור 3
כפל מטריצות וייצוג מערכת באמצעות $AX=b$

3.1 מושג של מטריצה

מטריצה זאת טבלה של מספרים. הצורה הכללית של מטריצה:

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

A מטריצה מסדר $m\times n$ (m שורות ו- n עמודות).

אם כל האיברים מספרים ממשיים אומרים כי A מטריצה מעל השדה $\mathbb{R}$ בעלת m שורות ו- n עמודות.
סימון: $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

האיבר בשורה i בעמודה j מסומן

$$A_{ij}$$

האינדקס הראשון, "i" מסמן את משורה, והאינדקס השני "j" מסמן את העמודה.
מפתח לזכור האינדקסים:

$$A_{\text{שע}}$$

כאשר ה- ""ש" מסמן את השורה וה-"ע" מסממן את העמודה.

דוגמה 3.1

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 23 & 45 & 2 \\ 12 & 34 & 67 & 87 & 55 \\ 22 & 33 & 66 & 89 & 19 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 5}\ .$$

האיבר בשורה 3 בעמודה 4 הוא 89. נסמן

$$A_{34}=89$$

האיבר בשורה 1 בעמודה 5 הוא 2. נסמן

$$A_{15}=2$$

האיבר בשורה 2 בעמודה 3 הוא 67. נסמן

$$A_{23}=67$$

■

אם $m=n$ למטריצה קוראים מטריצה ריבועית.

3.2 מטריצות ריבועיות מיוחדות

מטריצה אלכסונית:
$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

מטריצה משולשית עליונה
$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

מטריצה משולשית תחתונה
$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

מטריצת האפס
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

מטריצה היחידה
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.2

1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית.

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית.

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית.

(4 $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ לא מטריצה אלכסונית.

3.3 חיבור מטריצות וכפל מטריצות בסקלר

הגדרה 3.1 חיבור מטריצות

לכל מטריצות A,B מסדר $m\times n$ מוגדרת מטריצה $A+B$:

$$A+B=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{m1}&A_{m2}&\cdots&A_{mn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}&\cdots&B_{1n}\\B_{21}&B_{22}&\cdots&B_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\B_{m1}&B_{m2}&\cdots&B_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A_{11}+B_{11}&A_{12}+B_{12}&\cdots&A_{1n}+B_{1n}\\A_{21}+B_{21}&A_{22}+B_{22}&\cdots&A_{2n}+B_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{m1}+B_{m1}&A_{m2}+B_{m2}&\cdots&A_{mn}+A_{mn}\end{pmatrix}$$

במילים אחרות, האיבר ה- ij של המטריצה $A+B$ ניתן ע"י

$$(A+B)_{ij}=A_{ij}+B_{ij}\ .$$

אפשר לחבר מטריצות של אותו גודל בלבד!

לדוגמה $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&5\\3&4&0\end{pmatrix}$ לא מוגדר!

הגדרה 3.2 כפל מטריצה בסקלר

לכל מטריצות A מסדר $m\times n$:

$$\alpha\cdot A=\alpha\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{m1}&A_{m2}&\cdots&A_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha A_{11}&\alpha A_{12}&\cdots&\alpha A_{1n}\\\alpha A_{21}&\alpha A_{22}&\cdots&\alpha A_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\alpha A_{m1}&\alpha A_{m2}&\cdots&\alpha A_{mn}\end{pmatrix}$$

במילים אחרות, האיבר ה- ij של המטריצה $\alpha\cdot A$ ניתן ע"י

$$(\alpha\cdot A)_{ij}=\alpha\cdot A_{ij}\ .$$

דוגמה 3.3 חיבור מטריצות

$$\begin{pmatrix}1&2&5\\3&4&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&8&9\\11&5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+6&2+8&5+9\\3+11&4+5&0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&10&14\\14&9&4\end{pmatrix}$$

דוגמה 3.4 כפל מטריצה בסקלר

$$7\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\cdot 1&7\cdot 2\\7\cdot 3&7\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&14\\21&28\end{pmatrix}$$

■

משפט 3.1 תכונות של חיבור מטריצות וכפל מטריצות

יהיו $A,B,C\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו- $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. אזי:

1) חוק החילוף של חיבור מטריצות:

$$A+B=B+A\ .$$

2) חוק הקיבוץ של חיבור מטריצות:

$$(A+B)+C=A+(B+C)\ .$$

3)

$$A+0=A\ .$$

4)

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B\ .$$

5)

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A\ .$$

6)

$$\alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\cdot\beta)\cdot A\ .$$

הוכחה מיידית מההגדרות.

3.4 מטריצה משוחלפת

הגדרה 3.3 מטריצה משוחלפת

בהינתן מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ (מטריצה בעלת m שורות ו- n עמודות):

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{m1}&A_{m2}&\cdots&A_{mn}\end{pmatrix}$$

המטריצה המשוחלפת של A מסומנת ב- A^t והיא מטריצה בעלת n שורות ו- m עמודות המתקבלת מהמטריצה A ע"י להחליף שורות עם עמודות:

$$A^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

במילים אחורות, האיבר ה- i, j של המטריצה המשוחלפת של A ניתן ע"י

$$A^t_{ij} = A_{ji} \ .$$

דוגמה 3.5 מטריצה משוחלפת

נתונה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ מצאו את המשוחלפת שלה, כלומר A^t.

פתרון:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

משפט 3.2 תכונות של מטריצה משוחלפת

תהיינה A, B מטריצה כך שהסכומים והמכפלות מוגדרים ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. מתקיים:

.1
$$\left(A^t\right)^t = A$$

.2
$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

.3
$$(\alpha A)^t = \alpha A^t$$

.4
$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

שימו לב, הסדר השתנה.

הוכחה: תרגיל בית. ■

3.5 כפל מטריצה בווקטור

הגדרה 3.4 מכפלה של מטריצה בוקטור

תהי $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה מסדר $m \times n$ ו- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$ וקטור מסדר n. המכפלה של המטריצה A עם הווקטור X, שמסומנת $A \cdot X$, נותנת וקטור מסדר m שמוגדר

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n \\ \vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} A_{1j}x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} A_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} A_{mj}x_j \end{pmatrix} .$$

במילים אחרות, האיבר ה- i של הווקטור $A \cdot X$ ניתן ע"י

$$(A \cdot X)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j .$$

כללים של כפל מטריצה בווקטור:

1) כפל של מטטריצה $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ עם ווקטור $X \in \mathbb{F}^n$ מחזירה ווקטור ב- $\mathbb{F}^m$.

2) אפשר להכפיל מטריצה עם ווקטור רק אם מספר העמודות של המטריצה שווה למספר השורות של הווקטור.

דוגמה 3.6 כפל מטריצה בווקטור

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cdot 1 + 8\cdot 2 + 9\cdot 3 \\ 7\cdot 4 + 8\cdot 5 + 9\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 122 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.7

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 6 \\ 1\cdot 3 + 2\cdot 6 \\ 4\cdot 3 + 5\cdot 6 \\ 7\cdot 3 + 8\cdot 6 \\ 10\cdot 3 + 11\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 42 \\ 79 \\ 96 \end{pmatrix}$$

3.6 כפל מטריצות

הגדרה 3.5 מכפלה של שתי מטריצות

$\mathbb{F}^{m\times k} \ni \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mk} \end{pmatrix} = A$ מטריצה מסדר $m \times k$ ו- $\in \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kn} \end{pmatrix} = B$ $\mathbb{F}^{k\times n}$ מטריצה מסדר $k \times n$. המכפלה של השתי מטריצות A, B מסומנת $A \cdot B$ ומוגדרת

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + \cdots + A_{1k}B_{k1} & A_{11}B_{12} + \cdots + A_{1k}B_{k2} & \cdots & A_{11}B_{1n} + \cdots + A_{1k}B_{kn} \\ A_{21}B_{11} + \cdots + A_{2k}B_{k1} & A_{21}B_{12} + \cdots + A_{2k}B_{k2} & \cdots & A_{21}B_{1n} + \cdots + A_{2k}B_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B_{11} + \cdots + A_{mk}B_{k1} & A_{m1}B_{12} + \cdots + A_{mk}B_{k2} & \cdots & A_{m1}B_{1n} + \cdots + A_{mk}B_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{p=1}^{k} A_{1p}B_{p1} & \sum_{p=1}^{k} A_{1p}B_{p2} & \cdots & \sum_{p=1}^{k} A_{1p}B_{pn} \\ \sum_{p=1}^{k} A_{2p}B_{p1} & \sum_{p=1}^{k} A_{2p}B_{p2} & \cdots & \sum_{p=1}^{k} A_{2p}B_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{p=1}^{k} A_{mp}B_{p1} & \sum_{p=1}^{k} A_{mp}B_{p2} & \cdots & \sum_{p=1}^{k} A_{mp}B_{pn} \end{pmatrix}$$

במילים אחרות, האיבר ה- ij של המכפלה $A \cdot B$ ניתנת ע"י הנוסחה:

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{p=1}^{k} A_{ip}B_{pj} \ .$$

כללים של כפל מטריצות:

1) ניתן להכפיל מטריצה A במטריצה B רק כאשר A מטריצה מסדר $m \times k$ ו- B מטריצה מסדר $k \times n$. זאת אומרת מספר עמודות של A שווה למספר השורות של B.

2) אם A מסדר $m \times k$ ו- B מסדר $k \times n$ אז $A \cdot B$ היא מטריצה מסדר $m \times n$.

דוגמה 3.8

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 & 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 & 3\cdot 6 + 8\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.9

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 3\cdot 8 + 1\cdot 1 & 2\cdot 5 + 3\cdot 7 + 1\cdot 1 \\ -1\cdot 2 + 0\cdot 8 + 4\cdot 1 & -1\cdot 5 + 0\cdot 7 + 4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 32 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.10

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 11 + 2\cdot 5 + 3\cdot 21 & 1\cdot 12 + 2\cdot 6 + 3\cdot 22 & 1\cdot 13 + 2\cdot 7 + 3\cdot 23 & 1\cdot 14 + 2\cdot 8 + 3\cdot 24 \\ 0\cdot 11 + 7\cdot 5 + 8\cdot 21 & 0\cdot 12 + 7\cdot 6 + 8\cdot 22 & 0\cdot 13 + 7\cdot 7 + 8\cdot 23 & 0\cdot 14 + 7\cdot 8 + 8\cdot 24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 84 & 90 & 96 & 102 \\ 203 & 218 & 233 & 248 \end{pmatrix}$$

הגדרה 3.6 מטריצה היחידה

למטריצה ריבועית מסדר $n \times n$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

קוראים מטריצת היחידה.

דוגמה 3.11

המטריצה $I \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה $I \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה $I \in \mathbb{R}^{4\times 4}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

משפט 3.3 כפל מטריצה במטריצה היחידה

(1 תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו- $I\in\mathbb{F}^{n\times n}$. אז

$$A\cdot I=A\ .$$

(2 תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו- $I\in\mathbb{F}^{m\times m}$. אז

$$I\cdot A=A\ .$$

הוכחה: תרגיל בית! ■

דוגמה 3.12

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0&1\cdot2+0\cdot7&1\cdot3+0\cdot8\\0\cdot1+1\cdot0&0\cdot2+1\cdot7&0\cdot3+1\cdot8\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}$$

דוגמה 3.13

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+3\cdot0&1\cdot0+2\cdot1+3\cdot0&1\cdot0+2\cdot0+3\cdot1\\0\cdot1+7\cdot0+8\cdot0&0\cdot0+7\cdot1+8\cdot0&0\cdot0+7\cdot0+8\cdot1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}$$

משפט 3.4 תכונות של כפל מטריצות

תהיינה A,B,C מטריצות כך שהסכומים והמכפלות מוגדרים ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$. אזי

א) חוק הקיבוץ:

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$$

ב) חוק הפילוג:

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

ג) חוק הפילוג:

$$(B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A$$

ד) $\alpha(A\cdot B)=(\alpha\cdot A)\cdot B=A\cdot(\alpha\cdot B)$

ה) אם $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ו- $I_{n\times n}$ מטריצת היחידה מסדר $n\times n$ ו- $I_{m\times m}$ מטריצת היחידה מסדר $m\times m$ אז

$$I_{m\times m}\cdot A=A=A\cdot I_{n\times n}\ .$$

הוכחה: תרגיל בית! ■

כלל 3.1 כפל מטריצות לא קומוטטיבית

נתונות $A \in \mathbb{F}^{m\times k}$ ו- $B \in \mathbb{F}^{k\times n}$. באופן כללי, $A \cdot B$ לא בהכרח שווה ל- $B \cdot A$. כלומר

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

באופן כללי.

דוגמה 3.14

אם A מטריצה מסדר 3×2 ו- B מטריצה מסדר 4×3, אז $A \cdot B$ מוגדר, אבל $B \cdot A$ לא מוגדר.

דוגמה 3.15

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ -13 & 27 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 19 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$$

ז"א $A \cdot B \neq B \cdot A$.

דוגמה 3.16 כפל מטריצה אינה קומוטטיבית

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. חשבו $A \cdot B$ ו- $B \cdot A$. האם A ו- B מתחלפות (קומוטטיביות)?

פתרון:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 27 \end{pmatrix}$$

אבל

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 22 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$ לכן A ו- B לא מתחלפות.

כלל 3.2 מטריצות דומות

נתונות מטריצות A, B, C ו- $A \neq 0$.

אם $AB = AC$ אז B לא בהכרח שווה ל- C. ז"א $B \neq C$ באופן כללי.

דוגמה 3.17

תנו דוגמה של $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש- $AB = AC$ ו- $A \neq 0$ אבל $B \neq C$.

פתרון:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

הרי $AB=AC$ ו- $A\neq 0$ אבל $B\neq C$.

כלל 3.3 מכפלה מטריצות המתאפסת

נתונות מטריצות A,B.

אם $AB=0$ אז A לא בהכרח מטריצה האפס ו- B לא בהכרח מטריצה האפס.

ז"א אם קיימות $A\neq 0$ ו- $B\neq 0$ כך ש- $A\cdot B=0$.

דוגמה 3.18

תנו דוגמה של $A,B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש- $A,B\neq 0$ אבל $A\cdot B=0$.

פתרון:

דוגמה 1) $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

דוגמה 2) $a\in\mathbb{R}\neq 0$, $A=\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix}$,

$b\in\mathbb{R}\neq 0$ $B=\begin{pmatrix}b&0\\0&0\end{pmatrix}$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

הגדרה 3.7 העלאה מטריצה בחזקה

תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ויהי $k\in\mathbb{N}$. נגדיר

$$A^k=\overbrace{A\cdot A\cdot\dots\cdot A}^{\text{פעמים } k}$$

אם $A\neq 0$, ונגדיר

$$A^0=I_{n\times n}\ .$$

3.7 מטריצה הפוכה

הגדרה 3.8 מטריצה הפוכה

נניח ש- A מטריצה ריבועית מסדר $n \times n$. מטריצה ריבועית B מסדר $n \times n$ נקראת ההופכית של A (המטריצה ההפוכה של A) אם מתקיים

$$A \cdot B = B \cdot A = I \ .$$

סימון: במקום B רושמים A^{-1}. ז"א

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \ .$$

דוגמה 3.19

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \ , \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.8 שיטה למציאת מטריצה הופכית

נתונה מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. כדי למצוא את המטריצה ההופכית A^{-1} רושמים

$$(A|I)$$

כאשר $I \in \mathbb{F}^{n\times n}$ המטריצה היחידה מסדר $n \times n$ ונדרג עד שנקבל המטריצה היחידה בצד שמאול:

$$(A|I) \xrightarrow{\text{פעולות אלמנטריות של דירוג}} (I|A^{-1}) \ .$$

דוגמה 3.20

נתונה המטריצה $A =\in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ .$$

מצאו את A^{-1}.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

לפיכך

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \ .$$

דוגמה 3.21

נתונה $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \ .$$

מצאו את A^{-1}.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_1}$$

$$\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_2}$$

$$\xrightarrow{R_2\to -R_2}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+6R_2}$$

$$\xrightarrow{R_3\to -\frac{1}{14}R_3}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2+2R_3}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-3R_3}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

משפט 3.5 ההופכית של מטריצה יחידה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם ל- A קיימת מטריצה ההופכית אז היא יחידה.

הוכחה:

נניח ש B הופכית של A ו- C הופכית של A, ו- $B \neq C$. אז

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B \ ,$$

בסתירה לכך ש- $B \neq C$. ∎

משפט 3.6 לא כל מטריצה הפיכה

במספרים, אם מספר $a \in \mathbb{R}$ ו- $a \neq 0$ אז קיים a^{-1}.

במטריצות זה לא המצב. ז"א לא לכל מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ קיימת מטריצה הופכית $A^{-1} \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

אם למטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ קיימת $A^{-1} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ אומרים כי A **הפיכה**.
אם לא קיימת מטריצה הופכית אז אומרים כי A **לא הפיכה**.

דוגמה 3.22

נתונה $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

מצאו את A^{-1}.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2\cdot R_1}$$

אי אפשר לקבל מטריצה היחידה בצד שמאול ולכן המטריצה לא הפיכה.

דוגמה 3.23

מצאו מטריצה X המקיימת את המשוואה

א) $XA = B$

ב) $AX = B$

כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

פתרון:

א)

$$XA = B \quad \Rightarrow \quad XAA^{-1} = BA^{-1} \quad \Rightarrow \quad X = BA^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3+5R_1]{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_2-8R_3]{R_1\to R_1+2R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -19 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

לפיכך
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -19 & -7 & -8 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = B\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -19 & -7 & -8 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 \\ -7 & -3 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ב)

$$A\cdot X = B \quad\Rightarrow\quad A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \quad\Rightarrow\quad X = A^{-1}\cdot B\ .$$

לפיכך

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -19 & -7 & -8 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 \\ -15 & -11 & 15 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

דוגמה 3.24

מצאו מטריצה X המקיימת

$$A\cdot X = B\ ,$$

כאשר $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

פתרון:

$$A\cdot X = B \quad\Rightarrow\quad A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \quad\Rightarrow\quad X = A^{-1}\cdot B\ .$$

נחפש את A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)\ .$$

לא נוכל להגיע ל- I בצד שמאול, לכן A^{-1} לא קיימת. לכן נפתור בדרך אחרת: נסמן $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. אז

$$A\cdot X=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+2z & 3y+2w \\ 6x+4z & 6y+4w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{cases} 3x+2z &= 1 \\ 3y+2w &= -2 \\ 6x+4z &= 2 \\ 6y+4w &= -4 \end{cases}$$

נרשום את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 6 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4\to R_4-2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2\to\frac{1}{3}\cdot R_2]{R_1\to\frac{1}{3}\cdot R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון:

$$x=-\frac{2}{3}z+\frac{1}{3}\ , \qquad y=-\frac{2}{3}w-\frac{2}{3}\ , \qquad ,z,w\in\mathbb{R}\ .$$

לכן

$$X=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}z+\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}w-\frac{2}{3} \\ z & w \end{pmatrix}\ ,$$

לכל $z,w\in\mathbb{R}$.

משפט 3.7 תכונות של מטריצה הפוכה

א) $(A^{-1})^{-1}=A$

ב) $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

ג) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

הוכחה: תרגיל בית. ■

3.9 הצגת מערכת משוואות באמצעות כפל מטריצות

נתונה מערכת משוואות ליניאריות:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

נגדיר את המטריצה של מקדמים $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, את הווקטור $b \in \mathbb{F}^m$ ואת המווקטור של משתנים $X \in \mathbb{F}^n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} , \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} .$$

אז ניתן לרשום את המערכת בתורה

$$A \cdot X = b$$

כלומר

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} .$$

דוגמה 3.25

אם נתונה המערכת $\left\{ \begin{array}{ll} 5x + y - z & = 3 \\ x + 2y + z & = 1 \end{array} \right.$ ניתן לרשום אותה בצורה $AX = b$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

דוגמה 3.26

אם נתונה המערכת $\left\{ \begin{array}{ll} 7x - y & = 1 \\ 2x + 3y & = 5 \end{array} \right.$ ניתן לרשום אותה בצורה $AX = b$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

דוגמה 3.27

פתרו את המערכת $\left\{ \begin{array}{ll} 7x - y & = 1 \\ 2x + 3y & = 5 \end{array} \right.$ ע"י מציאת המטריצה ההופכית של מטריצת המקדמים של המערכת.

פתרון:

נרשום את המערכת בצורה $AX = b$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

$$AX = b \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot b \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot b$$

נחפש את A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to\frac{1}{7}R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{23}{7} & -\frac{2}{7} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{7}{23}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{23} & \frac{7}{23} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+\frac{1}{7}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{23} & \frac{1}{23} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{23} & \frac{7}{23} \end{array}\right)$$

לכן

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{23} & \frac{1}{23} \\ -\frac{2}{23} & \frac{7}{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{23}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\cdot b = \frac{1}{23}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{23}\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ 33 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$(x,y) = \left(\frac{8}{23},\frac{33}{23}\right) \ .$$

דוגמה 3.28

פתרו את המערכת $\begin{cases} x+2y &= 2 \\ 3x+4y &= 4 \end{cases}$ ע"י מציאת המטריצה ההופכית של מטריצת המקדמים של המערכת.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

התשובה היא

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\cdot b = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$(x,y) = (0,1) \ .$$

דוגמה 3.29

$$\begin{aligned} x+2y+3z &=1 \\ 2x-2y+4z &=2 \\ x+y+5z &=3 \end{aligned}$$

$$AX=b \quad \Rightarrow \quad X=A^{-1}b$$

כאשר

$$A=\begin{pmatrix}2&2&3\\2&-2&4\\1&1&5\end{pmatrix}\ ,\qquad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ ,\qquad b=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&-2&4&0&1&0\\1&1&5&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_1}$$

$$\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_2}$$

$$\xrightarrow{R_2\to -R_2}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+6R_2}$$

$$\xrightarrow{R_3\to -\frac{1}{14}R_3}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2+2R_3}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-3R_3}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-1\\\frac{3}{7}&-\frac{1}{7}&-\frac{1}{7}\\-\frac{2}{7}&-\frac{1}{14}&\frac{3}{7}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-1\\\frac{3}{7}&-\frac{1}{7}&-\frac{1}{7}\\-\frac{2}{7}&-\frac{1}{14}&\frac{3}{7}\end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-1\\\frac{3}{7}&-\frac{1}{7}&-\frac{1}{7}\\-\frac{2}{7}&-\frac{1}{14}&\frac{3}{7}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-\frac{2}{7}\\\frac{6}{7}\end{pmatrix}$$

משפט 3.8 קיום ומספר פתרונות של מערכת משוואות

נתונה מערכת משוואות

$$A\cdot X=b$$

כאשר $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית של המקדמים, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ הווקטור של המשתנים ו- $b\neq 0\in\mathbb{F}^n$ הווקטור של הצד ימין של המערכת.

א) אם A הפיכה אז למערכת קיים פתרון אחד והוא יחיד.

במקרה ש- A לא הפיכה, אז למערכת יש אינסוף פתרונות או לא קיים פתרון.

ב) אם $\text{rank}(A)=\text{rank}(A|b)<n$ אז למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

ג) אם $\text{rank}(A)\neq\text{rank}(A|b)$ אז למערכת לא קיים פתרון.

הוכחה:

1. תרגיל בית.
2. נלמד את ההוכחה בהמשך הקורס.
3. נלמד את ההוכחה בהמשך הקורס.

■

שעור 4
דטרמיננטות וכלל קרמר

4.1 הגדרה של דטרמיננטה של מטריצה ריבועית

נדון רק במטריצה ריבועית.

הדטרמיננטה של מטריצה $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, תסומן $\det A$ או $|A|$, היא מספר ממשי. באופן דומה, הדטרמיננטה של מטריצה $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, היא מספר מורכב.

הגדרה 4.1 דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר 2×2

נתוונה מטריצה $A\in\mathbb{F}^{2\times 2}$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

הדטרמיננטה של A מוגדרת

$$|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\ .$$

דוגמה 4.1 דטרמיננטה

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\ ,\qquad |A|=1\cdot 4-2\cdot 3=-2\ .$$

■

הגדרה 4.2 דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר 3×3

נתוונה מטריצה $A\in\mathbb{F}^{3\times 3}$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

ניצן לחשב את הדטרמיננטה של A ע"י כל אחת מהשורות או ע"י כל אחת מהעמודות:

שורה 1:

$$|A|=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\ .$$

שורה 2:

$$|A|=-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\ .$$

שורה 3:

$$|A|=a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}-a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}+a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\ .$$

עמודה 1:

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} .$$

עמודה 2:

$$|A| = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} .$$

עמודה 3:

$$|A| = a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} .$$

דוגמה 4.2 דטרמיננטה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{aligned} |A| =& 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} . \\ =& 1\cdot(4\cdot 7 - 5\cdot 0) - 2(0\cdot 7 - 5\cdot 6) + 3\cdot(0\cdot 0 - 4\cdot 6) \\ =& 28 + 60 - 72 , \\ =& 16 . \end{aligned}$$

הגדרה 4.3 המינור

נתונה מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. המינור ה- (i,j) של A מסומן ב- M_{ij} ומוגדר להיות הדטרמיננטה של המטריצה הריבועית המתקבלת מ- A ע"י מחיקת שורה i ועמודה j. את המינור ה- (i,j) נסמן ב- M_{ij}.

דוגמה 4.3

עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ מצאו את M_{11}, M_{12}, M_{23}, M_{32}.

פתרון:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 28 ,$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -30 ,$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -12 ,$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 .$$

הגדרה 4.4 הקופקטור

נתונה מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הקופקטור ה- (i,j) של A מסומן ב- C_{ij} ומוגדר להיות המינור ה- (i,j) כפול $(-1)^{i+j}$:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \ .$$

דוגמה 4.4

עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ מצאו את C_{11}, C_{12}, C_{23}, C_{32}.

פתרון:

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^2 \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} &= 28 \ , \\ C_{12} &= (-1)^3 \cdot M_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} &= 30 \ , \\ C_{23} &= (-1)^5 \cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} &= 12 \ , \\ C_{32} &= (-1)^5 \cdot M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} &= -5 \ . \end{aligned}$$

הגדרה 4.5 דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר $n \times n$

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \ .$$

הדטרמיננטה של A, מסומנת ב- $|A|$.
ניתן לחשב את הדטרמיננטה לפי שורה i:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \ ,$$

כאשר M_{ij} המינור ה- (i,j) של A ו- C_{ij} הקופקטור ה- (i,j) של המטריצה A.
ניתן לחשב את הדטרמיננטה לפי עמודה j:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \ .$$

למעשה, ניתן לחשב את $|A|$ לפי שורה כלשהי או לפי עמודה כלשהי.

דוגמה 4.5

נסמן $A=\begin{pmatrix}1&5&0\\2&4&-1\\0&-2&0\end{pmatrix}$, מצאו את הדטרמיננטה של המטריצה.

פתרון:

$$\begin{aligned}|A| \overset{\text{שורה ראשונה}}{=} & 1\cdot M_{11}-5\cdot M_{12}+0\cdot M_{13}\\ =&1\cdot\begin{vmatrix}4&-1\\-2&0\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\0&0\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}2&4\\0&-2\end{vmatrix}\\ =&-2\ .\end{aligned}$$

נשתעשע....

$$\begin{aligned}|A| \overset{\text{שורה שנייה}}{=} & -2\cdot M_{21}+4\cdot M_{22}-(-1)\cdot M_{23}\\ =&-2\cdot\begin{vmatrix}5&0\\-2&0\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1&5\\0&-2\end{vmatrix}\\ =&-2\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|A| \overset{\text{עמודה שלישית}}{=} & 0\cdot M_{13}-(-1)\cdot M_{23}+0\cdot M_{33}\\ =&0\cdot\begin{vmatrix}2&4\\0&-2\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1&5\\0&-2\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}1&5\\2&4\end{vmatrix}\\ =&-2\ .\end{aligned}$$

הערה:

סימני האיברים הם כך:

$$A=\begin{pmatrix}+&-&+&\dots\\-&+&-&\dots\\+&-&+&\\\vdots&&&\ddots\end{pmatrix}$$

דוגמה 4.6

חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix}3&-7&8&9&-6\\0&2&-5&7&3\\0&0&1&5&0\\0&0&2&4&-1\\0&0&0&-2&0\end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{aligned}
|A| &\stackrel{\text{עמודה ראשונה}}{=} 3\cdot M_{11} - 0\cdot M_{21} + 0\cdot M_{31} - 0\cdot M_{41} + 0\cdot M_{51} - 0\cdot M_{61}\\
&= 3\cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 & 3\\ 0 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 2 & 4 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}\\
&= 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}\\
&= 6\cdot(-2) = -12\ .
\end{aligned}$$

משפט 4.1 דטרמיננטה של מטריצה משולשית

אם $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה משולשית אז $|A| = a_{11}\cdot a_{22}\cdot\dots\cdot a_{nn}$, כלומר מכפלת איברי האלכסון הראשי.

הוכחה: תרגיל בית. ■

דוגמה 4.7

חשבו

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7\\ 0 & 2 & 19\\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}\ .$$

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7\\ 0 & 2 & 19\\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & 19\\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3 = 6\ .$$

משפט 4.2

אם $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית ו- B מטריצה המתקבלת מ- A ע"י הפעולה האלמנטרית:

(1) החלפת 2 שורות, אז
$$|B| = -|A|.$$

(2) הכפלת שורה בסקלר $\alpha\neq 0$, אז
$$|B| = \alpha|A|.$$

(3) הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת, אז
$$|B| = |A|\ .$$

הוכחה: תרגיל בית. ■

דוגמה 4.8

חשבו את $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$.

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 12 \cdot \big(1 \cdot 1 - 2 \cdot 2\big) = 12 \cdot (-3) = -36 \ .$$

דוגמה 4.9

חשבו את $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 12 & 15 & 18 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix}$

פתרון:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 12 & 15 & 18 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 15 & 18 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1} 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 7R_1} 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 24 \cdot (-3) = -72 \ .
\end{aligned}$$

דוגמה 4.10

חשבו את $\begin{vmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 28 & 35 & 42 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix}$

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 28 & 35 & 42 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 28 & 35 & 42 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix} = 7 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix} = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 7^3 \cdot \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \right)$$

$$= 7^3 \cdot \left(1 \cdot (50 - 48) - 2 \cdot (40 - 42) + 3 \cdot (32 - 35)\right)$$

$$= 7^3 \cdot (-3) = -1029. \ .$$

משפט 4.3

$$|\alpha A| = \alpha^n \cdot |A|$$

כאשר A מסדר $n \times n$.

הוכחה: תרגיל בית. ■

הערה:

כל מטריצה ריבועית A (מסדר $n \times n$) ניתן להעביר למטריצה מדורגת B ע"י ביצוע מספר סופי של פעולות שורה אלמנטריות מסוג החלפת 2 שורות והוספת שורה אחת לשורה אחרת (בלי פעולת הכפלת שורה בסקלר $\alpha \neq 0$).
לכן

$$|A| = (-1)^k |B|$$

כאשר k הוא מספר החלפות השורות שביצענו. כמו כן מאחר ו- B משולשית עליונה,

$$|B| = b_{11} \cdot b_{22} \cdot \dots \cdot b_{nn} \ .$$

משפט 4.4

תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. מתקיים:

$$|A^t| = |A| \ .$$

הוכחה: תרגיל בית. ■

דוגמה 4.11

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ , \quad |A| = -2 \ ,$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \ , \quad |A^t| = -2 \ .$$

משפט 4.5 משפט המכפלה

תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. מתקיים:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \ .$$

הוכחה: תרגיל בית. ■

דוגמה 4.12

נסמן $A=\begin{pmatrix}6&1\\3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&3\\1&2\end{pmatrix}$. מצאו את המטריצה AB ואת הדטרמיננות הבאות: $|A|$, $|B|$, $|AB|$.

פתרון:

$$\begin{aligned} AB=&\begin{pmatrix}6&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3\\1&2\end{pmatrix} &&=\begin{pmatrix}25&20\\14&13\end{pmatrix}\ ,\\ |A|=&12-3 &&=9\ ,\\ |B|=&8-3 &&=5\ ,\\ |AB|=&25\cdot 13-20\cdot 14 &&=45\ . \end{aligned}$$

משפט 4.6

תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ויהי $k\in\mathbb{N}$. מתקיים:

$$|A^k|=|A|^k\ .$$

הוכחה: תרגיל בית. ■

דוגמה 4.13

נתונה $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ ו- $|A|=-2$ מהי A^{2020}?

פתרון:

$$|A^{2020}|=|\underbrace{A\cdot A\cdot\cdots\cdot A}_{\text{פעמים }2020}|=\underbrace{|A|\cdot|A|\cdot\cdots\cdot|A|}_{\text{פעמים }2020}=|A|^{2020}$$

ולכן $|A^{2020}|=(-2)^{2020}$.

הגדרה 4.6 המטריצה של קופקטורים

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נגדיר את המטריצה של קופקטורים מסדר $n\times n$:

$$C=\begin{pmatrix}C_{11}&\cdots&C_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ C_{n1}&\cdots&C_{nn}\end{pmatrix}$$

כאשר C_{ij} הקופקטור ה- (i,j) של A.

הגדרה 4.7 המטריצה המצורפת

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. המטריצה המצורפת של A היא מטריצה מסדר $n\times n$ שמסומנת $\mathrm{adj}(A)$ ומוגדרת

$$\mathrm{adj}(A) = C^t$$

כאשר C המטריצה של קופקטורים של A.

משפט 4.7 נוסחת קיילי המילטון

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. נניח ש- A הפיכה. אז

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot C^t = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{adj}(A) \ .$$

הוכחה: מעבר לקורס הזה. ∎

דוגמה 4.14

נתונה $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ חשבו את A^{-1}.

פתרון:

$$\begin{array}{ll}
M_{11} = -15 & C_{11} = 15 \\
M_{12} = -3 & C_{12} = 3 \\
M_{13} = 6 & C_{13} = 6 \\
M_{21} = -20 & C_{21} = 20 \\
M_{22} = -4 & C_{22} = -4 \\
M_{23} = 2 & C_{23} = -2 \\
M_{31} = -7 & C_{31} = -7 \\
M_{32} = -5 & C_{32} = 5 \\
M_{33} = -2 & C_{33} = -2
\end{array}$$

$$C = \begin{pmatrix} -15 & 3 & 6 \\ 20 & -4 & -2 \\ -7 & 5 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} -15 & 20 & -7 \\ 3 & -4 & 5 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \ .$$

$$|A| = 1 \cdot (-15) + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 18 \ .$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -15 & 20 & -7 \\ 3 & -4 & 5 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \ .$$

משפט 4.8 מטריצה הפיכה

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

$|A| \neq 0$ אם ורק אם A הפיכה.

הוכחה: נניח ש- A הפיכה. אז קיימת A^{-1} כך ש-

$$A \cdot A^{-1} = I \ .$$

לכן לפי משפט 4.5:

$$|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \ .$$

כלומר $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$. לכן $|A| \neq 0$.

נניח ש- $|A| \neq 0$. נסמן את הסקלר $a = |A| \in \mathbb{F}$. מכיוון ש- $a \neq 0$ אז ההופכית קיים. זאת אומרת $a^{-1} = \dfrac{1}{|A|}$ קיים. לכן לפי נוסחת קיילי המילטון(משסט 4.7) A^{-1} קיימת. לכן A הפיכה.

■

דוגמה 4.15

היעזרו במשפט 4.8 לעיל וקבעו האם המטריצה הבאה הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_1} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

$$=0 \ .$$

לכן A לא הפיכה.

משפט 4.9

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה, אז

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \ .$$

הוכחה: מתקיים $A^{-1}\cdot A = I$ ולכן $|A\cdot A^{-1}| = |I|$. לפי משפט המכפלה, $|A|\cdot|A^{-1}| = 1$. נחלק ב- $|A|\neq 0$ ונקבל

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}\ .$$

■

דוגמה 4.16

נתונה $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ המקיימת $A^3 = 2A^{-1}B$, כאשר $B = \begin{pmatrix} -2 & 3e & \pi \\ 0 & 1 & 23 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. מצאו את $|A|$.

פתרון:

דרך א:
לפי הנתון $A^3 = 2A^{-1}B$, ולכן $|A^3| = |2A^{-1}B|$. לפי משפט המכפלה, $|A|^3 = |2A^{-1}|\cdot|B|$. מאחר ו- $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$, נקבל $|A|^3 = 2^3\cdot|A^{-1}|\cdot|B|$. מכאן,

$$|A|^3 = 2^3\cdot\frac{1}{|A|}\cdot|B|\ ,$$

ולכן

$$|A|^4 = 8\cdot|B| = 8\cdot 2 = 16\ ,$$

ונקבל $|A| = \pm 2$.

דרך ב:

$$A\cdot(2A^{-1}B) = A\cdot A^3 \quad\Rightarrow\quad A^4 = (A\cdot 2A^{-2})B \quad\Rightarrow\quad A^4 = (2\cdot AA^{-2})B \quad\Rightarrow\quad A^4 = (2\cdot I)B$$
$$A^4 = 2B \quad\Rightarrow\quad |A^4| = |2B| \quad\Rightarrow\quad |A|^4 = 2^3\cdot|B| \quad\Rightarrow\quad |A|^4 = 8\cdot 2 = 16\ .$$

דוגמה 4.17

תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכח או הפרך:

$$|A+B| = |A| + |B|\ .$$

פתרון:
הטענה איננה נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,$$

$$|A| = 0\ ,\qquad |B| = 0\ ,$$

$$|A+B| = |I| = 1\ ,$$

$$|A+B| \neq |A| + |B|\ .$$

דוגמה 4.18

תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{5\times 5}$ הפיכות, כך שמתקיים $A+3B^t=0$. חשבו את $|A^{-1}B^2(B^t)^{-1}|$.

פתרון:

נשים לב שלא נכון לכתוב

$$A+3B^t=0 \quad\Rightarrow\quad |A+3B^t|=|0| \quad\Rightarrow\quad |A|+|3B^t|=0 \ .$$

נחשב

$$|A^{-1}B^2(B^t)^{-1}|=|A^{-1}|\cdot|B^2|\cdot|(B^t)^{-1}|=\frac{1}{|A|}\cdot|B|^2\cdot\frac{1}{|B^t|}=\frac{1}{|A|}\cdot|B|^2\cdot\frac{1}{|B|}=\frac{|B|}{|A|} \ .$$

לפי הנתון $A+3B^t=0$ ולכן

$$A=-3B^t \quad\Rightarrow\quad |A|=|-3B^t| \quad\Rightarrow\quad |A|=(-3)^5|B^t| \quad\Rightarrow\quad |A|=-243|B| \quad\Rightarrow\quad \frac{|B|}{|A|}=-\frac{1}{243} \ .$$

דוגמה 4.19

תהיינה $X,Y\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ המקיימות

$$XY=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

(א) האם X הפיכה?

(ב) עבור $X=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&-1&0\\4&0&-6\end{pmatrix}$ מצאו את Y.

פתרון:

(א) נסמן $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$. לפי הנתון $A=XY$. נשים לב ש- $|A|=-6$ ולפי משפט המכפלה, $|A|=|XY|=|X|\cdot|Y|$. בפרט, $|X|\neq 0$, ולכן X הפיכה.

(ב) לפי הנתון $A=XY$. הוכחנו ש- X הפיכה, נכפול את שני האגפים משמאל בהופכית של X. נקבל $Y=X^{-1}A$. לאחר חישוב, נקבל ש-

$$X^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-2&0\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

לכן

$$Y=X^{-1}A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-2&0\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&0\\1&-6&0\\\frac{2}{3}&-2&\frac{1}{3}\end{pmatrix} \ .$$

4.2 כלל קרמר

משפט 4.10 כלל קרמר

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית הפיכה ויהי $X \in \mathbb{F}^n$ ווקטור של משתנים:

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} , \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

לכל $b \in \mathbb{F}^n$ הפתרון היחיד למערכת $AX = b$ ניתן ע"י

$$x_i = \frac{|A_{ib}|}{|A|}$$

כאשר

$$A_{ib} = \begin{pmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{i-1} & b & a_{i+1} & \ldots & a_n \\ | & | & & | & | & | & & | \end{pmatrix} ,$$

כלומר המטריצה המתקבלת מ- A ע"י החלפת העמודה ה- i ב- b.

הוכחה: תרגיל בית. ■

דוגמה 4.20

פתרו את המערכת הבאה בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 2 \ . \end{aligned}$$

פתרון:

$$\begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 = & 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = & 2 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b}$$

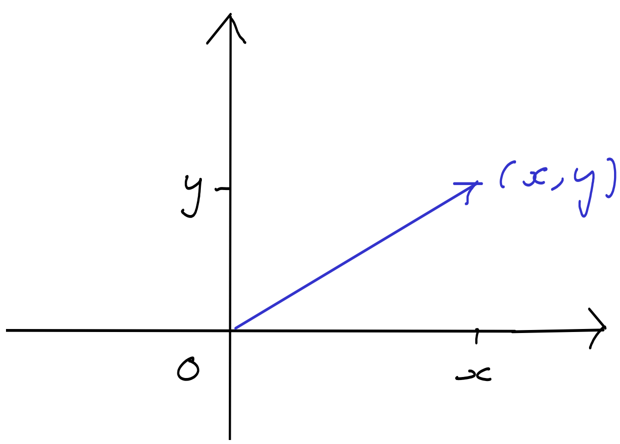
$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$, ולכן המטריצה הפיכה.

$$\begin{aligned}
|A_1(b)| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} &= 0 \ , \\
x_1 = \frac{|A_1(b)|}{|A|} &= \frac{0}{-2} = 0 \ , \\
|A_2(b)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} &= -1 \ , \\
x_2 = \frac{|A_2(b)|}{|A|} &= \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \ .
\end{aligned}$$

שעור 5
מרחבים ווקטורי

5.1 מרחבים ווקטורים

באלגברה ווקטור במישור תמיד מתחיל בנקודה $(0,0)$. לכן כל ווקטור במישור נקבע ע"י הנקודה הסופית שלו (x,y).



לקבוצת כל הווקטורים במישור מסמנים $\mathbb{R}^2$.

פעולות ב- $\mathbb{R}^2$

1) חיבור ווקטורים:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

2) כפל של ווקטור בסקלר:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

באופן דומה ניתן להגדיר פעולות בין ווקטורים ב- $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) | x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

1) חיבור ווקטורים:

$$(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$$

2) כפל של ווקטור בסקלר:

$$\alpha \cdot (x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

באופן כללי נגדיר מרחב ווקטורי $\mathbb{R}^n$:

הגדרה 5.1 מרחב ווקטורי $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ מוגדר להיות הקבוצה של כל הסטים מ n מספרים ממשיים:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\} \ .$$

הפעולות הבאות מוגדרות בין ווקטורים ב- $\mathbb{R}^n$:

1) חיבור ווקטורים:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

2) כפל של ווקטור בסקלר:

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

בדוגמאות האלה הסקלרים שייכים לשדה $\mathbb{R}$.

באופן דומה הסקלרים יכולים להשתייך לשדה אחר, למשל $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$.

ניתן הגדרה כללית של מרחב ווקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$:

הגדרה 5.2 מרחב ווקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$

קבוצה לא ריקה V נקראת מרחב ווקטורי (מ"ו) מעל שדה $\mathbb{F}$ אם מתקיימים התנאים הבאים (האיברים של V נקראים ווקטורים ואיברי $\mathbb{F}$ נקראים סקלרים). לכל ווקטורים $u, \mathrm{v}, w \in V$ וסקלרים $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$:

(1) $u + \mathrm{v} \in V$

(2) קיים ווקטור $\alpha\, u \in V$

(3) $u + v = v + u$ (חוק החילוף).

(4) $(u + \mathrm{v}) + w = u + (\mathrm{v} + w)$ (חוק הקיבוץ).

(5) קיים ווקטור $\bar{0} \in V$ (הנקרא ווקטור האפס) כך שלכל $u \in V$, מתקיים $u + \bar{0} = \bar{0} + u = u$.

(6) לכל $u \in V$ קיים $-u \in V$ כך ש- $u + (-u) = \bar{0}$.

(7) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

(8) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$.

(9) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha \mathrm{v}$.

(10) $1 \cdot u = u$ (כאשר $1 \in \mathbb{F}$).

5.2 דוגמאות מרכזיות של מרחבים ווקטורים

דוגמה 5.1 $\mathbb{F}^n$

מרחב הווקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$.

דוגמה 5.2 $\mathbb{R}^{m\times n}$

קבוצת כל המטריצות מסדר $m\times n$ עם איברים ממשיים היא מרחב וקטורי.

לכל שתי מטריצות מסדר $m\times n$ מוגדרת פעולת חיבור וכל מטריצה ניתן להכפיל בסקלר השייך ל $\mathbb{R}$.

קל לבדוק שכל האקסיומות של מרחב ווקטורי מתקיימות. לכן זה מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{R}$.

דוגמה 5.3 $\mathbb{C}^{m\times n}$

באופן דומה קבוצת כל המטריצות מסדר $m\times n$ עם איברים מרוכבים היא מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{C}$.

דוגמה 5.4 $\mathbb{F}^{m\times n}$

באופן כללי קבוצת כל המטריצות מסדר $m\times n$ עם איברים משדה $\mathbb{F}$ היא מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{F}$.

דוגמה 5.5

$\mathbb{F}[x]$ קבוצת כל הפולינומים עם מקדמים השייכים לשדה $\mathbb{F}$, שמסומנת ב- $\mathbb{F}[x]$ היא מרחב וקטורי.

מוגדרות פעולות חיבור פולינומים וכפל של פולינומים בסקלר השייך ל- $\mathbb{F}$.

כל האקסיומות של מרחב ווקטורי מתקיימות.

דוגמה 5.6 $F(\mathbb{R})$

קבוצת הפונקציות הממשיות שמסומנת ב-

$$F(\mathbb{R})=\{f:f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}\}$$

היא מרחב ווקטורי.

מוגדרות פעולות חיבור פונקציות וכפל פונקציה בסקלר מתוך $\mathbb{R}$.

נגדיר חיבור וכפל בסקלר כפי שהוגדרו בחדו"א. לכל $f,g\in F(\mathbb{R})$ ולכל $\alpha\in\mathbb{R}$ נגדיר

$$\begin{aligned}(f+g)(x)=&f(x)+g(x)\ ,\quad \forall x\in\mathbb{R}\ ,\\ (\alpha\cdot f)(x)=&\alpha\cdot f(x)\ ,\qquad \forall x\in\mathbb{R}\ ,\end{aligned}$$

ווקטור האפס הוא הפונקציה $f(x)=0$.

קבוצה זו עם הפעולות הללו היא מרחב ווקטורי.

דוגמה 5.7

נתונים הפולינומים של $P_1,P_2\in\mathbb{R}[x]$:

$$P_1=7+5x+3x^3+4x^7\in\mathbb{R}[x]\ ,\qquad P_2=6+4x+8x^2+3x^7+9x^{13}\in\mathbb{R}[x]\ ,$$

ונתון הסקלר $\alpha=3$, חשבו את P_1+P_2 ו- $\alpha\cdot P_1$.

פתרון:

אז

$$\begin{aligned} P_1+P_2 &= \left(7+5x+3x^3+4x^7\right)+\left(6+4x+8x^2+3x^7+9x^{13}\right) \\ &=(7+6)+(5+4)x+(0+8)x^2+(3+0)x^3+(4+3)x^7+(0+9)x^{13} \qquad \in \mathbb{R}[x]\ , \end{aligned}$$

נתון הסקלר $\alpha=3$:

$$\begin{aligned} \alpha\cdot P_1 &=13+9x+8x^2+3x^3+7x^6+9x^{13} \\ &=3\cdot\left(7+5x+3x^3+4x^7\right) \\ &=(3\cdot 7)+(3\cdot 5)x+(3\cdot 3)x^3+(3\cdot 4)x^7 \\ &=21+15x+9x^3+12x^7 \qquad \in \mathbb{R}[x]\ . \end{aligned}$$

■

דוגמה 5.8

נתונות הפונקציות $f,g\in F(\mathbb{R})$:

$$f(x)=\sin x\ , \qquad g(x)=2x+19\ ,$$

חשבו את $(7\cdot f)(x)$ ו- $(f+g)(x)$.

פתרון:

שתיהן פונקציות השייכות ל- $F(\mathbb{R})$.

$$(f+g)(x)=\sin x+2x+19\ .$$

מתקיים:

$$(7\cdot f)(x)=7\cdot\sin x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

דוגמה 5.9 מ

יהו ווקטור האפס של $F(\mathbb{R})$?

פתרון:

פונקצית האפס: פונקציית האפס,

$$O(x)=0\ ,\quad \forall x\in\mathbb{R}\ .$$

שימו לב שאכן לכל $f\in V$ מתקיים $f+O=f$ כי

$$(f+O)(x)=f(x)+O(x)=f(x)+0=f(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}\ .$$

הנגדי של f זו הפונקציה $-f$ שפעולתה

$$((-1)\cdot f)(x)=(-1)\cdot f(x)=-f(x)\ , \qquad \forall x\in\mathbb{R}\ .$$

■

שעור 6
תת מרחב

הגדרה 6.1 תת מרחב

נניח כי V מרחב ווקטורי מעל שדה, $\mathbb{F}$.

תת קבוצה W של V נקראת תת מרחב (ת"מ) של V אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

(1) $\bar{0} \in W$.

(2) לכל $u, \mathrm{v}, \in W$,
$$u + \mathrm{v} \in W \ .$$

(3) לכל $u \in W$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים
$$\alpha \cdot u \in W \ .$$

דוגמה 6.1

נגדיר $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, $W \subseteq \mathbb{R}^2$. האם W תת מרחב של $\mathbb{R}^2$?

פתרון:

לא. דוגמה נגדית:
$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \notin W \ .$$

לכן W לא תת מרחב של $\mathbb{R}^2$.

דוגמה 6.2

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \middle| k \in \mathbb{R} \right\} \ .$$

$W \subseteq \mathbb{R}^2$. האם W תת מרחב של $\mathbb{R}^2$?

פתרון:

(1 לכל $u = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \in W$, $v = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \in W$,
$$u + v = \begin{pmatrix} k+t \\ 2(k+t) \end{pmatrix} \in W \ ,$$

(2 לכל $u = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \in W$, ולכל סקלר $t \in \mathbb{R}$,
$$tu = \begin{pmatrix} tk \\ 2(tk) \end{pmatrix} \in W \ ,$$

(3

$$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \in W \ .$$

לכן השלושה התנאים של תת מרחב בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W תת מרחב של $\mathbb{R}^2$.

דוגמה 6.3

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+2 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\} \ .$$

האם W תת מרחב של $\mathbb{R}^2$?

פתרון:

$W \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{0} \notin W$ לכן W לא תת מרחב של $\mathbb{R}^2$.

דוגמה 6.4

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x \geq 0, x, y \in \mathbb{R} \right\} \ .$$

האם W תת מרחב של $\mathbb{R}^2$?

פתרון:

לא. דוגמה נגדית:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in W \ , \qquad (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \notin W \ .$$

דוגמה 6.5

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x^2 - y^2 = 0 \right\} \ .$$

האם W תת מרחב של $\mathbb{R}^2$?

פתרון:

לא. דוגמה נגדית:

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in W \ , \qquad \mathrm{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \in W \ , \qquad u + \mathrm{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \notin W \ .$$

דוגמה 6.6

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{rl} x - 2y + z & = 0 \\ y - z & = 0 \end{array} \right\} \ .$$

האם W תת מרחב של $\mathbb{R}^3$?

פתרון:

כן:

1) צריך להוכיח כי $W \in \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \bar{0}$:

$$\left\{\begin{array}{rl} 0-2\cdot 0+0 & =0 \\ 0-0 & =0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \bar{0}\in W \ .$$

2) נניח $W \in \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = u$. ז"א מתקיים $\left\{\begin{array}{rl} x-2y+z & =0 \\ y-z & =0 \end{array}\right.$. נקח סקלר k. צריך להוכיח: $ku\in W$.

$$ku=\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rll} kx-2ky+kz & =k(x-2y+z) & =0 \\ ky-kz & =k(y-z) & =0 \end{array}\right.$$

לכן $ku\in W$.

3) נקח $W \in \begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix} = u$, $W \in \begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} = \mathrm{v}$. ז"א מתקיים

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1-2y_1+z_1 & =0 \\ y_1-z_1 & =0 \end{array}\right. \text{וגם} \left\{\begin{array}{rl} x_2-2y_2+z_2 & =0 \\ y_2-z_2 & =0 \end{array}\right.$$

אז

$$u+\mathrm{v}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix} \ .$$

נבדוק אם $u+\mathrm{v}\in W$.

$$(x_1+x_2)-2(y_1+y_2)+(z_1+z_2)=(x_1-2y_1+z_1)+(x_2-2y_2+z_2)=0 \ ,$$

$$(y_1+y_2)-(z_1+z_2)=(y_1-z_1)+(y_2-z_2)=0 \ ,$$

לכן $u+\mathrm{v}\in W$. לכן השלושה התנאים של תת מרחב בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

דוגמה 6.7

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\middle| a+b+c=d\right\} \ .$$

האם W תת מרחב של $\mathbb{F}^{2\times 2}$?

פתרון:

1)

$$\bar{0}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in W$$

כי $0+0+0=0$.

2) נקח
$$u=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in W\ .$$
ז"א מתקיים $a+b+c=d$. נקח סקלר k. אז
$$ku=\begin{pmatrix}ka&kb\\kc&kd\end{pmatrix}\in W\ .$$
$ka+kb+kc=k(a+b+c)=kd$. לכן $ku\in W$.

3)
$$u=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}\in W\ ,\qquad \mathrm{v}=\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}\in W\ .$$
צריך להוכיח $u+\mathrm{v}\in W$.

$u\in W \Leftarrow a_1+b_1+c_1=d_1$.

$\mathrm{v}\in W \Leftarrow a_2+b_2+c_2=d_2$.
$$u+\mathrm{v}=\begin{pmatrix}a_1+a_2&b_1+b_2\\c_1+c_2&d_1+d_2\end{pmatrix}$$
$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)=(a_1+b_1+c_1)+(a_2+b_2+c_2)=d_1+d_2$ ז"א $u+\mathrm{v}\in W$.

לכן השלושה התנאים של תת מרחב בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W תת מרחב של $\mathbb{F}^{2\times 2}$.

דוגמה 6.8

תהי
$$W=\left\{p(x)\middle|\deg(p(x))=2\ ,p(x)\in\mathbb{F}[x]\right\}$$
קבוצת כל הפולינומים במעלה 2 בדיוק עם מקדמים מתוך שדה $\mathbb{F}$. קבעו אם W תת מרחב של $\mathbb{F}[x]$.

פתרון:
W לא תת מרחב של $\mathbb{F}[x]$. הסבר:

$\bar{0}\notin W$.

דוגמה 6.9

נסמן
$$\mathbb{F}_2[x]=\left\{p(x)\in\mathbb{F}[x]\middle|\deg(p(x))\leq 2\right\}$$
קבוצת כל הפולינומים של $\mathbb{F}[x]$ מסדר 2 לכל היותר.

$\mathbb{F}_2[x]$ תת מרחב של $\mathbb{F}[x]$.

דוגמה 6.10

$$W=\left\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}\middle|f(3)=0\right\}$$
$W\subseteq F(\mathbb{R})$. קבעו האם W תת מרחב של $F(\mathbb{R})$.

פתרון:

1) האיבר $\bar{0}$ הינו הפונקציה $f(x)=0$. לכן $\bar{0}(3)=0 \Leftarrow \bar{0}\in W$.

2) אם $f\in W$ ו- $k\in\mathbb{R}$, אז $f(3)=0$ לכן

$$(kf)(3)=k(f(3))=k\cdot 0=0\ .$$

ז"א $kf\in W$.

3) נניח $f,g\in W$, ז"א $f(3)=0$, $g(3)=0$. אז

$$(f+g)(3)=f(3)+g(3)=0+0=0\ ,$$

כלומר $f+g\in W$.

לכן השלושה התנאים של תת מרחב בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W תת מרחב של $F(\mathbb{R})$.

דוגמה 6.11

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle|\ \begin{array}{rl}3x+y-z&=1\\2x+5y&=0\\-x+10y-z&=5\end{array}\right\}$$

קבעו האם W תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

פתרון:
W לא תת מרחב של $\mathbb{R}^3$, $\bar{0}\notin W$.

משפט 6.1 מרחב האפס הוא תת מרחב

לכל מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, אוסף הפתרונות של מערכת הומוגנית $A\cdot X=0$ הוא תת מרחב של $\mathbb{F}^n$.

הוכחה: נסמן

$$\text{Nul}(A)=\left\{X\middle|A\cdot X=0, X\in\mathbb{F}^n\right\}$$

נוכיח כי $\text{Nul}(A)$ תת מרחב של $\mathbb{F}^n$ ע"י להוכיח כי כל השלושה תנאים של תת מרחב מתקיימים עבור $\text{Nul}(A)$.

1) צריך להוכיח $\bar{0}\in\text{Nul}(A)$, כאשר $\bar{0}$ מטריצה האפס.

$$A\cdot\bar{0}=0\ ,$$

לכן $\bar{0}\in\text{Nul}(A)$.

2) נניח $u,\text{v}\in\text{Nul}(A)$. צריך להוכיח $u+\text{v}\in\text{Nul}(A)$.

$u\in\text{Nul}(A) \Leftarrow A\cdot u=0$.

$\text{v}\in\text{Nul}(A) \Leftarrow A\cdot\text{v}=0$.

לכן

$$A(u+\text{v})=Au+A\text{v}=0+0=0 \quad\Rightarrow\quad u+\text{v}\in\text{Nul}(A)$$

3) נקח $u \in \text{Nul}(A)$ וסקלר $k \in \mathbb{F}$. צריך להוכיח $ku \in \text{Nul}(A)$.

$u \in \text{Nul}(A) \Leftarrow A \cdot u = 0$. אז

$$A(ku) = k(Au) = k \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad ku \in \text{Nul}(A) \ .$$

מש"ל.

■

שעור 7
צירוף לינארי ופרישה לינארית

7.1 הגדרה של צרוף לינארי

הגדרה 7.1 צרוף לינארי

נניח כי V מרחב ווקטורי מעל שדה, $\mathbb{F}$. יהיו $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n\in V$ ווקטוים של V, ו- $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ סקלרים של $\mathbb{F}$. הווקטור

$$\alpha_1\mathrm{v}_1+\alpha_2\mathrm{v}_2+\ldots\alpha_n\mathrm{v}_n$$

נקרא **צירוף לינארי (צ"ל)** של הווקטורים $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n$ עם מקדמים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

דוגמה 7.1

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}\quad,\qquad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$2\mathrm{v}_1-5\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}-8\\-19\\8\end{pmatrix}$$

ווקטור $\begin{pmatrix}-8\\-19\\8\end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של v_1, v_2.

דוגמה 7.2

האם ווקטור $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של הווקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\quad,\qquad u_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\quad,\qquad u_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

? אם כן, רשמו את הצירוף הלינארי.

פתרון:

$$\mathrm{v}=xu_1+yu_2+zu_3\qquad\rightsquigarrow\qquad \begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\ .$$

$$\begin{aligned} x+2y &= 0 \\ x-y+z &= 4 \\ x+2z &= 4 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to 3\cdot R_3+2\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to\frac{1}{4}\cdot R_3]{R_2\to -\frac{1}{3}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2+\frac{1}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$x=2$, $y=-1$, $z=1$,

$$\mathrm{v} = 2u_1 - u_2 + u_3 \ .$$

דוגמה 7.3

האם ווקטור $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של הווקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\-5\\7\end{pmatrix} \ , \qquad u_2=\begin{pmatrix}2\\-4\\-1\end{pmatrix} \ , \qquad u_3=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$$

? אם כן, רשמו את הצירוף הלינארי.

פתרון:

$$\mathrm{v}=xu_1+yu_2+zu_3 \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\-5\\7\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\-4\\-1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} \ .$$

$$\begin{aligned} x+2y+z &= 1 \\ -5x-4y-3z &= -2 \\ 7x-y+2z &= 5 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -5 & -4 & -3 & -2 \\ 7 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-7R_1]{R_2\to R_2+5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -5 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to \frac{1}{6}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & -15 & -5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+15R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{2} \end{array}\right)$$

אין פתרון ולכן v הוא לא צירוף לינארי של u_1, u_2, u_3.

דוגמה 7.4

בדקו אם ווקטור $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}0\\4\\7\end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של הווקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}\ ,\qquad u_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad u_3=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$$

? אם כן, רשמו את הצירוף הלינארי.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3+3R_1]{R_2\to R_2+2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-\frac{7}{4}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

למערכת ∞ פתרונות, לכן v הוא צירוף לינארי של u_1, u_2, u_3.

הפתרון הכללי:

$$(x,y,z)=(2-z,1-z,z)\ ,\qquad (z\in\mathbb{R})\ .$$

נציב $z=1$, ונקבל

$$\mathrm{v}=u_1+0\cdot u_2+u_3\ .$$

דוגמה 7.5

בטאו את הפולינום $p(x)=-3+4x+x^2$ כצירוף לינארי של

$$p_1(x)=5-2x+x^2\ ,\qquad p_2(x)=-3x+2x^2\ ,\qquad p_3(x)=3+x\ .$$

פתרון:

$$-3+4x+x^2=\alpha_1(5-2x+x^2)+\alpha_2(-3x+2x^2)+\alpha_3(3+x)$$

השוויון אמור להתקיים לכל $x\in\mathbb{R}$. לכן

$$\left\{\begin{array}{rl} 5\alpha_1+3\alpha_3 &=-3\ ,\\ -2\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3 &=4\ ,\\ \alpha_1+2\alpha_2 &=1\ .\end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5&0&3&-3\\ -2&-3&1&4\\ 1&2&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&0&1\\ -2&-3&1&4\\ 5&0&3&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-5R_1]{R_2\to R_2+2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&0&1\\ 0&1&1&6\\ 0&-10&3&-8\end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+10R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&0&1\\ 0&1&1&6\\ 0&0&13&52\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to\frac{1}{13}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&0&1\\ 0&1&1&6\\ 0&0&1&4\end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&0&1\\ 0&1&0&2\\ 0&0&1&4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&-3\\ 0&1&0&2\\ 0&0&1&4\end{array}\right)$$

$\alpha_1=-3$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=4$.

$$p(x)=-3p_1(x)+2p_2(x)+4p_3(x)\ .$$

דוגמה 7.6

רשמו מטריצה $D=\begin{pmatrix}3&1\\1&-1\end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של המטריצות

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}0&2\\0&-1\end{pmatrix}\ .$$

פתרון:

$$\alpha_1A+\alpha_2B+\alpha_3C=D$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 + 2\alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 - \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 &= 3 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_2 - \alpha_3 &= -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 3 \ , \alpha_2 = -2 \ , \alpha_3 = -1 \ .$$

ז"א

$$3A - 2B - C = D \ .$$

דוגמה 7.7

קבעו אם הפונקציה $y = \sin(2x)$ צירוף ליניארי של $\sin x$ ו- $\cos x$?

פתרון:

נניח שקיימים α_1,α_2 כך ש

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = \sin(2x) \ .$$

השוויון אמור להתקיים לכל $x \in \mathbb{R}$.

נציב $x = 0$ ואז נקבל $\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 = 0 \Leftarrow \alpha_2 = 0$. לכן

$$\sin(2x) = \alpha_1 \sin x \ .$$

כעת נציב $x = \frac{\pi}{2}$ ונקבל $\sin(\pi) = \alpha_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, כלומר

$$\alpha_1 = \sin\pi = 0 \ .$$

לכן $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. נציב את הערכים בצירוף ליניארי המקורי $\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = \sin(2x)$ ונקבל כי $\sin 2x = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$. סתירה.

לכן לא קיימים α_1, α_2 כך ש

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = \sin(2x) \ .$$

7.2 פרישה ליניארי

הגדרה 7.2 פרישה ליניארי

נניח כי V מרחב ווקטורי מעל שדה, $\mathbb{F}$. יהיו $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n \in V$. הקבוצה

$$\{\alpha_1 \mathrm{v}_1 + \alpha_2 \mathrm{v}_2 + \ldots \alpha_n \mathrm{v}_n | \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}\}$$

נקראת פרישה ליניארית של $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n$.

הפרישה של ווקטורים מסומן ב $\mathrm{span}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$.

ז"א פרישה ליניארית זה אוסף כל הצירופים הליניאריים של $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n$.

משפט 7.1 פרישה היא תת מרחב

לכל מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$ ולכל $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n\in V$,

$$\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$$

הוא תת מרחב של V.

הוכחה: נוכיח את הטענה ע"י להראות כי כל פרישה מקיימת את כל התנאים של תת מרחב.

1) צריך להוכיח כי $\bar{0}\in\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$.

הרי

$$\bar{0}=0\cdot\mathrm{v}_1+\ldots+0\cdot\mathrm{v}_n$$

ז"א וקטור האפס צירוף ליניארי עם מקדמים כולם אפסים. לפיכך $\bar{0}\in\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$.

2) נניח $u_1,u_2\in\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$. צריך להוכיח כי $u_1+u_2\in\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$.

$u_1,u_2\in\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$. ז"א קיימים סקלרים כך ש:

$$u_1=k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_n\mathrm{v}_n\ ,\qquad u_2=t_1\mathrm{v}_1+\ldots+t_n\mathrm{v}_n\ .$$

מכאן

$$u_1+u_2=(k_1+t_1)\mathrm{v}_1+\ldots+(k_n+t_n)\mathrm{v}_n\ ,$$

ז"א $u_1+u_2\in\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$.

3) נניח $u\in\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$, $t\in\mathbb{F}$. צריך להוכיח $tu\in\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$.

$$u=k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_n\mathrm{v}_n\quad\Rightarrow\quad tu=(tk_1)\mathrm{v}_1+\ldots+(tk_n)\mathrm{v}_n\in\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)\ .$$

מש"ל. ■

דוגמה 7.8

בדקו אם וקטור $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}-1&3&4\\0&-1&8\end{pmatrix}$ במרחב וקטורי $\mathbb{R}^{2\times3}$ שייך לפרישה ליניארית של

$$u_1=\begin{pmatrix}2&1&4\\-1&0&3\end{pmatrix}\ ,\quad u_2=\begin{pmatrix}-3&2&0\\1&-1&5\end{pmatrix}\ ,\quad u_3=\begin{pmatrix}1&4&8\\-1&-1&11\end{pmatrix}\ .$$

פתרון:

$\mathrm{v}\in\mathrm{span}(u_1,u_2,u_3)$ אם ורק אם קיימים סקלרים k_1, k_2, k_3 כך ש

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=\mathrm{v}\ .$$

לכן

$$k_1\begin{pmatrix}2&1&4\\-1&0&3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-3&2&0\\1&-1&5\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1&4&8\\-1&-1&11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3&4\\0&-1&8\end{pmatrix}\ .$$

מקבלים מערכת משוואות:

$$\left\{\begin{aligned}2k_1-3k_2+k_3&=-1\\k_1+2k_2+4k_3&=3\\4k_1+8k_3&=4\\-k_1+k_2-k_3&=0\\3k_1+5k_2+11k_3&=8\end{aligned}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-2R_1\\ R_3\to R_3-4R_1\\ R_4\to R_4+R_1\\ R_5\to R_5-3R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון כללי:

$$k_1 = 1-2k_3 \ , \qquad k_2 = 1-k_3 \ , \qquad k_3 \in \mathbb{R} \ .$$

נציב $k_3 = 1 \Leftarrow k_2 = 0$, $k_1 = -1$. נקבל

$$\mathrm{v} = -u_1 + 0\cdot u_2 + u_3 \ .$$

לכן

$$\mathrm{v} \in \mathrm{span}(u_1,u_2,u_3) \ .$$

יש שתי דרכים להגדיר תת מרחב:

1) ע"י פרישה לינארית

2) ע"י מערכת הומוגנית.

ניתן לעבור מדרך אחת לשניה.

דוגמה 7.9

נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

הציגו את $\mathrm{Nul}(A)$ בצורת פרישה לינארית.

פתרון:

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן למערכת ההומוגנית $AX=0$ יש ∞ פתרונות. הפתרון הכללי:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2x_2+x_4-3x_5 \\ x_3 &= -2x_4+2x_5 \end{aligned}\right\} x_2,x_4,x_5\in\mathbb{R}$$

ז"א

$$u=\begin{pmatrix} 2x_2+x_4-3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4+2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}\in \mathrm{Nul}(A)$$

הצורת הכללית של ווקטור ב $\mathrm{Nul}(A)$:

$$u=\begin{pmatrix} 2x_2+x_4-3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4+2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}-3\\0\\2\\0\\1\end{pmatrix}$$

קיבלנו צירוף ליניארי של ווקטורים

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

לכן $u\in\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3)$. ז"א $\mathrm{Nul}(A)=\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3)$.

דוגמה 7.10

נתונה מטריצה

$$u_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\\1\end{pmatrix},\qquad u_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\\5\end{pmatrix},\ u_3=\begin{pmatrix}3\\-5\\18\\21\end{pmatrix}$$

הציגו את $\mathrm{span}(u_1,u_2,u_3)$ באוסף של פתרונות של מערכת הומוגנית.

פתרון:

ווקטור $\mathrm{v}\in\mathrm{span}(u_1,u_2,u_3)$ אם ורק אם קיימים סקלירם k_1,k_2,k_3 כך ש

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=\mathrm{v}\ .$$

ז"א למערכת הזאת קיים פתרון. נסמן $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ ונפתור את המערכת המשוואות

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & x \\ 3 & -2 & -5 & y \\ 2 & 4 & 18 & z \\ 1 & 5 & 21 & w \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & 4 & 3x+y \\ 0 & 0 & 0 & -16x-6y+z \\ 0 & 0 & 0 & x+z-w \end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון כאשר

$$\begin{cases} -16x-6y+z &= 0 \\ x+z-w &= 0 \end{cases}$$

שעור 8
תלות לינארית

8.1 הגדרה של תלות לינארית

הגדרה 8.1 תלות לינארית

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ונניח ש- $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\in V$. וקטורים של V.

- $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ נקראים תלוים לינארית אם קיימים סקלרים $k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{F}$ שלא כולם אפסים כך ש-
$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+\ldots+k_n\mathrm{v}_\mathrm{n}=\bar{0}\ .$$
- $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ נקראים בלי תלוים לינארית אם
$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+\ldots+k_n\mathrm{v}_\mathrm{n}=\bar{0}\ ,$$
מתקיים רק אם $k_1=k_2=\ldots=k_n=0$ כלומר המקדמים כולם אפסים.

דוגמה 8.1

$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\ ,\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ תלוים לינארית כי $3\mathrm{v}_1-\mathrm{v}_2=\bar{0}$.

דוגמה 8.2

$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1+i\\-2\end{pmatrix}\ ,\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}1-i\\2i\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$ תלוים לינארית כי $i\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2=\bar{0}$.

דוגמה 8.3

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\ ,\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2=\bar{0}\qquad\Rightarrow\qquad\left.\begin{array}{ll}2k_1+6k_2&=0\\k_1+4k_2&=0\end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}2&6&0\\1&4&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\to R_2-2R_1}\left(\begin{array}{cc|c}2&6&0\\0&-2&0\end{array}\right)$$

$k_1=0$, $k_2=0$ לכן v_1, v_2 בלתי תלוים לינארית.

דוגמה 8.4

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\ ,\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}\ ,\mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

תלוים לינארית כי

$$0\cdot \mathrm{v}_1+0\cdot \mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3=\bar{0} \ .$$

דוגמה 8.5

בדקו אם הווקטורים

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\ ,\qquad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

תלוים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם ששווה לווקטור האפס.

פתרון:

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+k_3\mathrm{v}_3=\bar{0}$$

קיבלנו מערכת משוואות הומוגנית:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&2&0\\2&5&1&0\\3&6&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&2&0\\0&-3&-3&0\\0&-6&-6&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{3}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&2&0\\0&1&1&0\\0&-6&-6&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3+6R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-4R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$(k_1,k_2,k_3)=(2k_3,-k_3,k_3)\ ,\qquad k_3\in\mathbb{R}\ .$$

למערכת יש פתרון, לכן הווקטורים ת"ל.
נציב $k_3=1$ ונקבל

$$(k_1,k_2,k_3)=(2,-1,1)\ ,$$

ונקבל

$$2\mathrm{v}_1-\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3=\bar{0}$$

משפט 8.1

נניח ש- $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$.
העמודות של A בלתי תלויות לינארית אם ורק אם למערכת $A\cdot X=0$ יש רק פיתרון טריויאלי.

(ז"א למטריצה המדורגת כל העמודות מובילות.)

הוכחה: נרשום A בצורה

$$A=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \ , \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ .$$

$$AX=0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1u_1+x_2u_2+\cdots x_nu_n=0 \ .$$

X פתרון הטריוויאלי, כלומר $X=0$ אם ורק אם $x_1,x_2,\cdots x_n=0$, ולכן $u_1,u_2,\cdots u_n$ בת"ל.

■

דוגמה 8.6

האם הווקטורים של מרחב $P_2(\mathbb{R})$

$$p_1(x)=3-x+x^2 \ , \qquad p_2(x)=x+5x^2 \ , \qquad p_3(x)=1 \ ,$$

הם תלוים לינארית? אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם שווה לווקטור האפס.

פתרון:

$$k_1p_1(x)+k_2p_2(x)+k_3p_3(x)=\bar{0} \ ,$$
$$k_1\left(3-x+x^2\right)+k_2\left(x+5x^2\right)+k_3\cdot 1=0+0\cdot x+0\cdot x^2 \ ,$$

לכן

$$(3k_1+k_3)+(-k_1+k_2)x+(k_1+5k_2)x^2=0+0\cdot x+0\cdot x^2$$

השוויון אמור להתקיים לכל x, לכן

$$\left.\begin{aligned} 3k_1+k_3 &=0 \\ -k_1+k_2 &=0 \\ k_1+5k_2 &=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_1-3R_3]{R_2\to R_1+3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון יחיד $k_1=0,k_2=0,k_3=0$. לכן הווקטורים בת"ל.

דוגמה 8.7

במרחב ווקטורי $\mathbb{R}^{2\times 2}$ נתונים שלושה ווקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \quad u_2=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \ , \quad u_3=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

בדקו אם הווקטורים u_1,u_2,u_3 תלוים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם שווה לווקטור האפס.

פתרון:

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \bar{0} \ ,$$
$$k_1 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \bar{0} \ ,$$

לכן

$$\begin{pmatrix} -2k_1 + 5k_2 - k_3 & k_1 - k_2 + 4k_3 \\ 4k_2 + 4k_3 & -k_1 - 3k_2 - 6k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

השוויון אמור להתקיים לכל x, לכן

$$\left. \begin{aligned} -2k_1 + 5k_2 - k_3 &= 0 \\ k_1 - k_2 + 4k_3 &= 0 \\ 4k_2 + 4k_3 &= 0 \\ -k_1 - 3k_2 - 6k_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_1 - 2R_4]{R_2 \to R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 11 & 11 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_2 - 3R_4]{R_3 \to R_2 - 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

למערכת ההומוגנית יש פתרון יחיד, טריוויאלי, לכן u_1, u_2, u_3 בת"ל.

דוגמה 8.8

נתונים ווקטורים $\mathrm{v}_1 = x, \mathrm{v}_2 = e^x, \mathrm{v}_3 = x^2$ במרחב ווקטורי $f(\mathbb{R})$. בדקו אם הווקטורים תלוים לינארית.

פתרון:
<u>שיטה 1</u>

$$k_1 \mathrm{v}_1 + k_2 \mathrm{v}_2 + k_3 \mathrm{v}_3 = \bar{0}$$

ז"א

$$k_1 x + k_2 e^x + k_3 x^2 = 0$$

לכל $x \in \mathbb{R}$.
נציב $x = 0 \Leftarrow k_2 = 0$.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{נציב } x=1 & \Rightarrow & k_1+k_3=0 \\ \text{נציב } x=-1 & \Rightarrow & -k_1+k_3=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad k_1=0\ ,k_3=0\ .$$

לכן הווקטורים בת"ל.

שיטה 2: וורונסקיאן

$$W(x)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & e^x & x^2 \\ 1 & e^x & 2x \\ 0 & e^x & 2 \end{vmatrix}=0$$

$W(x)=0$ לכל x לכן הווקטורים בת"ל.

דוגמה 8.9

במרחב ווקטורי ${\mathbb{Z}_5}^3$ נתונים ווקטורים

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{3} \\ \bar{1} \end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{4} \\ \bar{2} \end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \end{pmatrix}\ .$$

בדקו אם הווקטורים תלוים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם שווה לווקטור האפס.

פתרון:

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+k_3\mathrm{v}_3=\bar{0}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & 0 \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} & 0 \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_1+3R_3]{R_1\to R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & 0 \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & 0 \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & 0 \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & 0 \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{rl} \bar{2}k_1+k_3 & =\bar{0} \\ \bar{4}k_2+\bar{3}k_3 & =0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rl} \bar{2}k_1 & =\bar{4}k_3 \\ \bar{4}k_2 & =\bar{2}k_3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rl} k_1 & =\bar{2}k_3 \\ k_2 & =\bar{3}k_3 \end{array}\right\}$$

פתרון

$$(k_1,k_2,k_3)=(\bar{2}k_3,\bar{3}k_3,k_3)\ ,\qquad k_3\in\mathbb{Z}_5\ .$$

נציב $k_3=\bar{1}$ ונקבל $(k_1,k_2,k_3)=(\bar{2},\bar{3},\bar{1})$. ז"א

$$\bar{2}\mathrm{v}_1+\bar{3}\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3=\bar{0}\ .$$

8.2 תכונות של תלות לינארית

משפט 8.2 תכונות בסיסיות של תלות לינארית

1) ווקטור יחיד, u, תלוי לינארית אם ורק אם $u=\bar{0}$.

2) שני ווקטורים תלוים לינארית אם ורק אם אחד מהם הוא צירוף לינארי של הווקטור השני.

3) ווקטורים $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ תלוים לינארית אם ורק אם לפחות אחד מהם הוא צירוף לינארי של שאר הווקטורים.

4) כל קבוצת ווקטורים שמכילה את ווקטור האפס, היא תלויה לינארית.

5) אם $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\in V$ תלוים לינארית, אז כל קבוצת הווקטורים שמכילה את $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ היא תלויה לינארית.

6) אם קבוצת ווקטורים $\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\}$ בת"ל, אז כל תת קבוצה שלה היא בת"ל.

הוכחה:

1)

u ת"ל אם ורק אם קיים סקלר $k\in\mathbb{F}$ כך ש $ku=\bar{0}\Leftrightarrow u=\bar{0}$.

2)

v_1, v_2 ת"ל $\Leftrightarrow$ קיימים סקלרים k_1, k_2 שלא כולם אפסים כך ש

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2=\bar{0}$$

נניח בלי הגבלת הכלליות ש $k_1\neq 0$, אז

$$\mathrm{v}_1=\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\mathrm{v}_2\ .$$

3)

$\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ ת"ל $\Leftrightarrow$ קיימים $k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{F}$ שלא כולם אפסים כך ש

$$k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_n\mathrm{v}_n=\bar{0}\ .$$

נניח ש $k_i\neq 0$. אז זה מתקיים אם ורק אם

$$\mathrm{v}_i=\left(-\frac{k_1}{k_i}\right)\mathrm{v}_1+\ldots+\left(-\frac{k_{i-1}}{k_i}\right)\mathrm{v}_{i-1}+\left(-\frac{k_{i+1}}{k_i}\right)\mathrm{v}_{i+1}+\ldots+\left(-\frac{k_n}{k_i}\right)\mathrm{v}_n$$

4)

לכל $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\in V$,

$$0\cdot\mathrm{v}_1+\ldots+0\cdot\mathrm{v}_n+1\cdot\bar{0}=\bar{0}$$

לכן $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n,\bar{0}$ ת"ל.

5)

נניח ש $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ ת"ל. אז קיימים סקלרים $k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{F}$ שלא כולם אפסים כך ש

$$k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_n\mathrm{v}_n=\bar{0}\ .$$

אז לכל $u_1,\ldots,u_m\in V$ מתקיים:

$$k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_n\mathrm{v}_n+0\cdot u_1+\ldots+0\cdot u_m=\bar{0}$$

לכן $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n,u_1,\ldots,u_m$ ת"ל.

6)

נוכיח את הטענה בדרך השלילית.

$\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\}$ בת"ל. ז"א הצירוף לינארי הבא

$$k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_n\mathrm{v}_n=\bar{0}$$

מתקיים אם ורק אם $k_1=k_2=\ldots=k_n=0$. נניח שקיימת תת קבוצה של $\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\}$ שהיא תלויה לינארית. כלומר קיימת קבוצה $\{\mathrm{v}_1,\ldots\mathrm{v}_m\}$ שהיא ת"ל. ז"א הצירוף לינארי

$$k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_m\mathrm{v}_m=\bar{0}$$

מתקיים כאשר לפחות אחד של הסקלרים $k_1,\ldots,k_m$ לא שווה אפס. לכן

$$k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_m\mathrm{v}_m+0\cdot\mathrm{v}_{m+1}+\ldots+0\cdot\mathrm{v}_n=\bar{0}$$

מתקיים כאשר לפחות אחד של הסקלרים $k_1,\ldots,k_m$ לא שווה אפס. ז"א מצאנו צירוף לינארי של $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ שבו אחד של הסקלרים לא שווה אפס, ז"א $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ ת"ל. סתירה.

■

דוגמה 8.10

נניח שווקטורים $u,\mathrm{v},w\in V$ בת"ל. הוכיחו כי הווקטורים

$$u+v+w,\quad 2u-4v,\quad u+v-w$$

בת"ל.

פתרון:

נבנה צ"ל של ווקטורים $u+v+w,2u-4v,u+v-w$.

$$k_1(u+\mathrm{v}+w)+k_2(2u-4\mathrm{v})+k_3(u+\mathrm{v}-w)=\bar{0}\ .$$

מכאן

$$(k_1+2k_2+k_3)u+(k_1-4k_2+k_3)\mathrm{v}+(k_1-k_3)w=\bar{0}\ .$$

u,v,w בת"ל, לכן

$$\left.\begin{aligned} k_1+2k_2+k_3&=0\\ k_1-4k_2+k_3&=0\\ k_1-k_3&=0\end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_2 - 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

יש פתרון יחיד למערכת: $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. לכן הווקטורים $u + v + w, 2u - 4v, u + v - w$ בת"ל.

שעור 9
מימד ובסיס

9.1 בסיס של מרחב ווקטורי

הגדרה 9.1 בסיס

קבוצת ווקטורים $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n \in V$ נקראת בסיס של V אם היא מקיימת:

1) $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ בלתי תלוים לינארית.

2) $\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)=V$.

דוגמה 9.1

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\ ,\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\ ,\quad \ldots,e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix}\ .$$

בסיס של $\mathbb{F}^n$ (בסיס הסטנדרטי).

הוכחה:

1) צ"ל $e_1,\ldots,e_n$ בת"ל.

$$k_1e_1+k_2e_2+\ldots+k_ne_n=\bar{0}$$

$$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}+\ldots+k_n\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\ \vdots\\k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad k_1=0,k_2=0,\quad k_n=0\ .$$

לכן $e_1,\ldots,e_n$ בת"ל.

2) צ"ל כי $\mathrm{span}(e_1,\ldots,e_n)=\mathbb{F}^n$.

נקח ווקטור שרירותי $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$ .v $=$ צ"ל .v $= \text{span}(e_1, \ldots, e_n)$.

$$k_1 e_1 + \ldots k_n e_n = \text{v}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad k_1 = x_1, k_2 = x_2, \quad \ldots, \quad k_n = x_n \ .$$

■

דוגמה 9.2

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \ldots, \quad E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad .$$

בסיס של $\mathbb{F}^{2\times 3}$ (הבסיס הסטנדרטי).

הוכחה:

1) נוכיח כי $E_1, \ldots, E_6$ בת"ל.

$$k_1 E_1 + k_2 E_2 + \ldots + k_6 E_6 = \bar{0}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots + k_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad k_1 = 0, k_2 = 0, \quad k_6 = 0 \ .$$

לכן $E_1, \ldots, E_6$ בת"ל.

2) נוכיח כי $\text{span}(E_1, \ldots, E_6) = \mathbb{F}^{2\times 3}$.

לכל ווקטור $\text{v} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 3}$,

$$\text{v} = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 + eE_5 + fE_6 \ .$$

ז"א

$\text{v} \in \text{span}(E_1, \ldots, E_6)$.

■

דוגמה 9.3

וקטורים
$$e_1=1\ ,\quad e_2=x\ ,\quad \ldots\ ,\quad e_n=x^n$$
מהווים בסיס (הבסיס הסטנדרטי) של המרחב $\mathbb{F}_n[x]$.

הוכחה:

1) צ"ל $1,x,\ldots,x^n$ בת"ל.
$$k_1\cdot 1+k_2x+\ldots+k_nx^n=\bar{0}=0\cdot 1+0\cdot x+\ldots+0\cdot x^n$$
לכל x כאשר
$$k_1=0,k_2=0,\quad \ldots,\quad k_n=0\ .$$
לכן $1,x,\ldots,x^n$ בת"ל.

2) נוכיח כי $\text{span}(1,x,\ldots,x^n)=\mathbb{F}_n[x]$.

לכל $p(x)=a_1+a_2x+\ldots+a_nx^n\in\mathbb{F}_n[x]$ מתקיים
$$p(x)=a_1e_1+a_2e_2+\ldots+a_ne_n$$
ז"א $p(x)=\text{span}(e_1,\ldots,e_n)$.

■

דוגמה 9.4

בדקו כי הווקטורים
$$\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}\ ,\qquad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\ .$$
מהווה בסיס של $\mathbb{R}^3$.

פתרון:

1) צ"ל u_1,u_2,u_3 בת"ל.
$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=\bar{0}$$
זאת מערכת משוואות הומוגניות:
$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&2&0\\0&1&1&0\\5&1&4&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3+5R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&2&0\\0&1&1&0\\0&6&14&0\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_3\to R_3-6R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&2&0\\0&1&1&0\\0&0&8&0\end{array}\right)$$
למערכת יש פתרון יחיד: $k_1=0,k_2=0,k_3=0$

לכן u_1,u_2,u_3 בת"ל.

2) צ"ל $\text{span}(u_1,u_2,u_3)=\mathbb{R}^3$.

נקח $\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ $\text{v}=$. צ"ל $\text{v}=\text{span}(u_1,u_2,u_3)$.

<u>דרך 1:</u>

$$xu_1+yu_2+zu_3=\text{v}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & a\\ 0 & 1 & 1 & b\\ 5 & 1 & 4 & c\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3+5R_1}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & a\\ 0 & 1 & 1 & b\\ 0 & 6 & 14 & 5a+c\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-6R_2}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 5a+c-6b\end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון, לכן $\text{v}\in\text{span}(u_1,u_2,u_3)$.

<u>דרך 2:</u>

למערכת $A\cdot X=0$ יש פתרון יחיד, לכן מטריצה A הפיכה. מכאן נובע שלכל $\text{v}\in\mathbb{R}^3$, למערכת $A\cdot X=\text{v}$ יש פתרון יחיד, ז"א $\text{v}\in\text{span}(u_1,u_2,u_3)$.

משפט 9.1

אם במרחב וקטורי V יש בסיס סופי, אז לכל בסיס של V יש את אותו מספר הווקטורים.

הגדרה 9.2

נניח ש V מרחב וקטורי. למספר הווקטורים בבסיס של V קוראים המימד של V.
המימד של מרחב וקטורי יסומן
$\dim(V)$.

דוגמה 9.5

$$\begin{aligned}\dim(\mathbb{F}^n)&=n\\ \dim(\mathbb{F}^n[x])&=n+1\\ \dim(\mathbb{F}^{m\times n})&=m\cdot n\ .\end{aligned}$$

משפט 9.2 מימד ובסיס של קבוצת וקטורים

נניח כי V מרחב וקטורי, $\dim(V)=n$. אז

1) כל $n+1$ ווקטורים של V הם תלוים לינארית.

2) כל קבוצה של n ווקטורים בלתי תלויה לינארית, היא בסיס של V.

3) כל קבוצה של ווקטורים שהיא בלתי תלויה לינארית , ניתן להשלים לבסיס של V.

דוגמה 9.6

הוכיחו שהווקטורים

$$u_1=1+x+x^2\ ,\qquad u_2=2x+3x^2\ ,\qquad u_3=-3x-4x^2$$

מהווים בסיס של מרחב $\mathbb{R}_2[x]$.

פתרון:
נוכיח כי u_1,u_2,u_3 בת"ל.

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=\bar{0}$$
$$k_1(1+x+x^2)+k_2(2x+3x^2)+k_3-3x-4x^2=0+0x+0x^2$$
$$k_1(k_1+2k_2-3k_3)x+(k_1+3k_2-4k_3)x^2=0+0x+0x^2$$
$$\left.\begin{array}{rl} k_1 &=0\\ k_1+2k_2-3k_3 &=0\\ k_1+3k_2-4k_3 &=0\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad k_1=0\ ,k_2=0,k_3=0$$

לכן u_1,u_2,u_3 בת"ל.
$\dim(\mathbb{R}_2[x])=3$, לכן שלושה ווקטורים בת"ל מהווים בסיס של $\dim(\mathbb{R}_2[x])$.

9.2 מציאת בסיס ומימד של תת מרחב

הגדרה 9.3 עמודה מובילה ושורה מובילה

נניח כי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ותהי B המטריצה המדורגת המתקבלת מ- A.

1) אומרים כי עמודה ה- i של A **עמודה מובילה** אם בעמודה ה- i של B יש איבר מוביל.

2) אומרים כי שורהה ה- i של A **שורה מובילה** אם בשורה ה- i של B יש איבר מוביל.

משפט 9.3 עמודות מובילות מהוות בסיס של תת-מרחב

נניח כי $S=\{u_1,\ldots,u_k\}\in\mathbb{F}^n$ קבוצת ווקטורים של מרחב ווקטורי $\mathbb{F}^n$.

נגדיר $A=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_k \\ | & | & & | \end{pmatrix}$.

1) כל העמודות של A עמודות מובילות אם ורק אם הקבוצת ווקטורים S בת"ל.

2) העמודות המובילות של A מהווים בסיס של S.

3) מספר עמודות מובילות ב- A שווה למימד של S.

הוכחה: (להעשרה בלבד)
נרשום

$$x_1u_1+\cdots+x_ku_k=\bar{0}\qquad (*1)$$

כאשר $x_1,\cdots,x_k\in\mathbb{F}$ סקלרים. ונגדיר $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_k\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^k$. נניח ש- B המטריצה המדורגת המתקבלת מ- A.

1) נניח כי S בת"ל.

$\Leftarrow$ אז $x_1=x_2=\cdots=x_k=0$.

$\Leftarrow$ למערכת $AX=0$ יש פתרון יחיד: $X=0$.

$\Leftarrow$ יש איבר מוביל בכל עמודה של B.

$\Leftarrow$ כל העמודות של A מובילות.

נניח שכל העמודות של A מובילות.

$\Leftarrow$ יש איבר מוביל בכל עמודה של B.

$\Leftarrow$ הפתרון היחיד הינו $X=0$.

$\Leftarrow$ עבור הסקלרים ב- (1*) נקבל $x_1=\cdots=x_k=0$ $\Leftarrow$ S בת"ל.

2) קבוצת העמודות המובילות של A תהיה בסיס של S אם **(א)** היא בת"ל ו **(ב)** היא פורשת S.

א) תהי A' המטריצה המתקבלת מהעמודות המובילות של A. לפי (1) כל העמודות של A' בת"ל.

ב) נניח שמתוך ה k ווקטורים של S יש p ווקטורים בת"ל: $\{u_1,\ldots,u_p\}$.
לכן, אפשר לרשום כל ווקטור של S כצירוף ליניארי של הווקטרים $\{u_1,\ldots,u_p\}$.
לכן S נפרש ע"י הווקטורים $\{u_1,\ldots,u_p\}$.
נרשום $A=\begin{pmatrix}| & & | & | & & |\\ u_1 & \cdots & u_p & u_{p+1} & \cdots & u_k\\ | & & | & | & & |\end{pmatrix}$.
הווקטורים $u_1,\cdots,u_p$ בת"ל לכן ה- p עמודות הראשונות של A מובילות.
(אין יותר מ-p עמודות מובילות כי אז יהיו יותר מ- p ווקטורין בת"ל ונגיע לסתירה).
לפיכך העמודות המובילות פורשות S.

3) לפי (2) העמודות המובילות של A מהווה בסיס של S.

מימד שווה למספר ווקטורים בבסיס.

לפיכך המימד שווה למספר עמודות המובילות ב- A.

■

דוגמה 9.7

מצאו בסיס ומימד של הקבוצה $S=\mathrm{span}\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3\}$ כאשר

1)

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\ .$$

2)

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\ .$$

פתרון:

1)

$$A=\begin{pmatrix}| & | & |\\ \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3\\ | & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן $\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3\}$ בסיס של S.

$\dim(S)=3$.

2)

$$A=\begin{pmatrix}| & | & |\\ \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3\\ | & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

עמודות 1 ו- 2 מובילות. לכן הווקטורים $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2$ מהווים בסיס של S.

$\dim(S)=2$.

דוגמה 9.8

מצאו בסיס ואת המימד של תת מרחב הנפרש ע"י הווקטורים

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -4 & 2\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 5\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -5 & 7\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_4=\begin{pmatrix}1 & -7\\ -5 & 1\end{pmatrix}\ .$$

בטאו את וקטור $u=\begin{pmatrix}4 & -14\\ -13 & 11\end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של הבסיס שמצאתם.

פתרון:

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+k_3\mathrm{v}_3+k_4\mathrm{v}_4=\bar{0}$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ -5 & 1 & -4 & -7\\ -4 & -1 & -5 & -5\\ 2 & 5 & 7 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2+5R_1\\ R_3\to R_3+4R_1\\ R_4\to R_4-2R_1}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 6 & 6 & -2\\ 0 & 3 & 3 & -1\\ 0 & 3 & 3 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

עמודות 1 ו- 2 מובילות, לפיכך הווקטורים v_1, v_2 מהווים בסיס של S.

$\dim(S)=2$.

נרשום u כצירוף ליניארי של הבסיס המתקבל:

$$u=x\mathrm{v}_1+y\mathrm{v}_2\ .$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ -5 & 1 & 14\\ -4 & -1 & -13\\ 2 & 5 & 11\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2+5R_1\\ R_3\to R_3+4R_1\\ R_4\to R_4-2R_1}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 0 & 6 & 6\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$k_1=3,k_2=1 \Leftarrow$

$$u=3\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\ .$$

דוגמה 9.9

במרחב $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ נתונים ווקטורים

$$p_1(x)=2-x+x^2\ ,\quad p_2(x)=2x-3x^2+x^3\ ,\quad p_3(x)=1-x^2\ ,\quad p_4(x)=3x-6x^2+x^3\ .$$

א) בדקו אם הווקטורים $p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x)$ תלוים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם ששווה לווקטור האפס.

ב) מצאו בסיס ואת המימד של תת מרחב הנפרש ע"י הווקטורים $p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x)$.

ג) בטאו כל ווקטור מתוך $p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x)$ כצירוף לינרי של הבסיס המצאתם בסעיף ב'.

פתרון:

א) נרשום את הווקטורים לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$, $E=\{e_1=1,e_2=x,e_3=x^2,e_4=x^3\}$:

$$p_1(x)=2e_1-e_2+e_3+0e_4 \quad = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}_E ,$$

$$p_2(x)=0e_1+2e_2-3e_3+e_4 \quad = \begin{pmatrix}0\\2\\-3\\1\end{pmatrix}_E ,$$

$$p_3(x)=1e_1+0e_2-e_3+0e_4 \quad = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}_E ,$$

$$p_4(x)=0e_1+3e_2-6e_3+e_4 \quad = \begin{pmatrix}0\\3\\-6\\1\end{pmatrix}_E .$$

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1&0\\-1&2&0&3\\1&-3&-1&-6\\0&1&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&4&1&6\\0&6&3&12\\0&1&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&1&0&1\\0&2&1&4\\0&4&1&6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&0&0&-2\\0&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לא כל העמודות מובילות, לכן $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ ת"ל.

נרשום את הצירוף הליניארי

$$k_1 p_1 + k_2 p_2 + k_3 p_3 + k_4 p_4 = \bar{0} \ .$$

לפי המדורגת שמצאנו הפתרון הינו

$$k_1 = k_4 \ , \quad k_2 = -k_4 \ , \quad k_3 = -2k_4 \ , \qquad k_4 \in \mathbb{R} \ .$$

נציב $k_4 = 1 \Leftarrow$

$$k_1 = 1 \ , \quad k_2 = -1 \ , \quad k_3 = -2 \ .$$

$$p_1 - p_2 - 2p_3 + p_4 = \bar{0}$$

ב)

$$\dim(\text{span}\{p_1, p_2, p_3, p_4\} = \text{מספר העמודות המובילות} = 3 \ .$$

העמודות 1, 2 ו- 3 מובילות לפיכך הווקטורים p_1, p_2, p_3 מהווים בסיס.

ג)

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3 \\ p_2 &= 0 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3 \\ p_3 &= 0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 \\ p_4 &= -p_1 + p_2 + 2 \cdot p_3 \ . \end{aligned}$$

משפט 9.4

יהי $U \subset V$ תת מרחב של המרחב ווקטורי V. נניח כי $\dim(U) = m$ ותהי $B = \{u_1, \cdots, u_m\}$ קבוצה של m ווקטורים.

B בת"ל אם ורק אם B פורשת את U.

הוכחה:
נניח כי B בת"ל ו- B לא פורשת את U.
אז ניתן להשלים B לבסיס של U, בסתירה לכך ש- $\dim(U) = m$.

נניח כי B פורשת את U אבל B לא בת"ל.
אז ניתן להקטין את B לבסיס של פחות מ-m ווקטורים בסתירה לכך ש- $\dim(U) = m$.

■

שעור 10
מרחב האפס, מרחב העמודות ומרחב השורות

10.1 דרגת המטריצה

הגדרה 10.1

נתונה מטריצה
$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מעל שדה $\mathbb{F}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

למטריצה מקושרים 3 תת מרחבים:

(1) מרחב האפס של A שמסומן $\text{Nul}(A)$ ומוגדר

$$\text{Nul}(A) = \left\{ X \in \mathbb{F}^n \middle| A \cdot X = \bar{0} \right\} \ .$$

(2) מרחב העמודות של A שמסומן $\text{Col}(A)$ ומוגדר

$$\text{Col}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \cdots , \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\} .$$

$\text{Col}(A)$ הוא התת מרחב הנפרש ע"י עמודות המטריצה.

(3) מרחב השורות של A שמסומן $\text{Row}(A)$ ומוגדר

$$\text{Row}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}, \cdots , \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \right\} \ .$$

$\text{Row}(A)$ הוא התת מרחב הנפרש ע"י שורות המטריצה.

דוגמה 10.1

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 4 & -11 & 23 & 18 & 11 \end{pmatrix}$. מצאו את בסיס ואת המימד של $\text{Col}(A)$ ו- $\text{Row}(A)$.

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 4 & -11 & 23 & 18 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to 2R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 6 & 7 \\ 0 & -3 & 7 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עמודות 1 ו- 2 של המדורגת מובילות, לפיכך עמודות 1 ו- 2 של A מהווים בסיס של $\text{col}(A)$:

$$\text{col}(A) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$$

שורות 1 ו- 2 של המדורגת מובילות, לפיכך שורות 1 ו- 2 של A מהווים בסיס של $\text{row}(A)$:

$$\text{row}(A) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim\left(\text{Col}(A)\right) = 2$, מספר העמודות המובילות.

$\dim\left(\text{Row}(A)\right) = 2$, מספר השורות שלא אפסים.

משפט 10.1 בסיס ומימד של $\text{col}(A)$

תהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

(1 העמודות המובילות של A מהווים בסיס של $\text{Col}\, A$.

(2 השורות המובילות של A מהווים בסיס של $\text{Row}\, A$.

(3 $\dim\left(\text{Col}(A)\right) = \dim\left(\text{Row}(A)\right)$

הוכחה:

(1 משפט 9.3.

(2 תרגיל בית.

(3 $\dim\left(\text{Col}(A)\right)$ הוא מספר העמודות המובילות במטריצה המדורגת של A.

ז"א $\dim\left(\text{Col}(A)\right)$ הוא מספר האיברים המובילים במטריצה המדורגת של A.

$\dim\left(\text{Row}(A)\right)$ הוא מספר השורות שלא אפסים במטריצה המדורגת של A.

ז"א $\dim\left(\text{Row}(A)\right)$ הוא מספר האיברים המובילים במטריצה המדורגת של A.

■

הגדרה 10.2 דרגה

למספר $\dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A))$ קוראים דרגת המטריצה. סימון: $\text{rank}(A)$. ז"א

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A)) \ .$$

משפט 10.2 מימד של $\text{Nul}(A)$

תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ונניח כי $\text{rank}(A) = r$. אז

$$\dim(\text{Nul}(A)) = n - r = (\text{מספר עמודות הלא מובילות}) \ .$$

הוכחה: (להעשרה בלבד!)

נניח כי $\{u_1, \cdots, u_k\}$ בסיס של $\text{Nul}(A)$.

נשלים אותו לבסיס של $\mathbb{R}^n$: $\{u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}, \cdots u_n\}$.

הקבוצה $\{u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}, \cdots u_n\}$ פורשת את $\mathbb{R}^n$ לפיכך הקבוצה $\{Au_1, \cdots, Au_k, Au_{k+1}, \cdots Au_n\}$ פורשת את $\text{col}(A)$.

אבל $\{u_1, \cdots, u_k\} \in \text{Nul}(A) \Leftarrow Au_1 = 0, \cdots, Au_k = 0$.

לפיכך $\{Au_{k+1}, \cdots Au_n\}$ פורשת את $\text{col}(A)$.

כעת נוכיח כי $\{Au_{k+1}, \cdots Au_n\}$ בת"ל: נרשום

$$s_{k+1}Au_{k+1} + \cdots + s_nAu_n = \bar{0}$$

כאשר $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ וקטור האפס ו- $s_{k+1}, \ldots, s_n$ סקלרים. מכאן

$$A(s_{k+1}u_{k+1} + \cdots + s_nu_n) = \bar{0}$$

ז"א $s_{k+1}u_{k+1} + \cdots + s_nu_n \in \text{Nul}(A)$. לפיכך ניתן לרשום אותו כצירוף ליניארי של הבסיס $\{u_1, \cdots, u_k\}$:

$$s_{k+1}u_{k+1} + \cdots + s_nu_n = t_1u_1 + \cdots + t_ku_k$$

$t_1, \ldots, t_k$ סקלרים. נעביר אגפים ונקבל:

$$-t_1u_1 - \cdots - t_ku_k + s_{k+1}u_{k+1} + \cdots + s_nu_n = \bar{0} \ .$$

הקבוצה $\{u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}, \cdots u_n\}$ בסיס לכן היא בת"ל לכן $t_1 = \cdots = t_k = s_{k+1} = \cdots = s_n = 0$.

לפיכך הקבוצה $\{Au_{k+1}, \cdots, Au_n\}$ בת"ל.

מצאנו כי $\{Au_{k+1}, \cdots, Au_n\}$ בת"ל ופורשת $\text{col}(A)$ לכן היא בסיס של $\text{col}(A)$.
נניח כי $\dim(\text{col}(A)) = r$.

$$\Rightarrow \quad n - k = r \quad \Rightarrow \quad k = n - r \ .$$

לפיכך

$$\text{Dim}(\text{Nul}(A)) = n - r = (\text{מספר עמודות}) - (\text{מספר עמודות מובילות}) = (\text{מספר עמודות הלא מובילות}) \ .$$

■

משפט 10.3 בסיס של $\mathrm{Nul}(A)$

תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$. נניח שהפתרון הכללי למערכת $AX=0$ הוא

$$X_0=y_1u_1+\cdots+y_ku_k$$

כאשר $y_1,\cdots,y_k$ המשתנים החופשיים של המערכת ו- $u_1,\cdots,u_k\in\mathbb{F}^n$.

אז הקבוצת וקטורים $B=\{u_1,\cdots,u_k\}$ בסיס של $\mathrm{Nul}(A)$.

הוכחה: ***להעשרה בלבד!***
נניח כי $\mathrm{rank}(A)=r$. אז יש $n-r$ משתנים חופשיים, לכן יש $k=n-r$ וקטורים בקבוצה B.

$\dim\left(\mathrm{Nul}(A)\right)=n-r$ והקבוצת וקטורים $B=\{u_1,\cdots,u_{n-r}\}$ פורשת את $\mathrm{Nul}(A)$.

לכן לפי משפט 9.4 הקבוצה B בת"ל לכן B מהווה בסיס של $\mathrm{Nul}(A)$. ∎

דוגמה 10.2

במרחב $\mathbb{R}^{2\times 2}$ נתונים וקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix}1&3\\1&3\end{pmatrix}\ ,\qquad u_2=\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}\ ,\qquad u_3=\begin{pmatrix}1&5\\-1&3\end{pmatrix}\ ,\qquad \mathrm{v}=\begin{pmatrix}a+2&1\\-5&a\end{pmatrix}$$

א) עבור אילו ערכי a וקטור v שייך לפרישה ליניארית של u_1,u_2,u_3?

ב) עבור כל ערך של a שמצאתם בסעיף א', בטאו את וקטור v כצירוף ליניארי של u_1,u_2,u_3 בשתי דרכים שונות.

ג) לכל ערך של a מצאו את המימד ובסיס של $\mathrm{span}\,\{u_1,u_2,u_3,\mathrm{v}\}$.

ד) האם קיימים ערכי a עבורם
$\mathrm{span}\,\{u_1,u_2,u_3,\mathrm{v}\}=\mathbb{R}^{2\times 2}$.

פתרון:

א) נרשום v כצירוף ליניארי של u_1,u_2,u_3:

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=\mathrm{v}$$

נחשב את המקדמים:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a+2\\3&1&5&1\\3&1&5&1\\3&3&3&a\end{array}\right)\xrightarrow[R_4\to R_4-3R_1]{\substack{R_2\to R_2-3R_1\\R_3\to R_3-R_1}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a+2\\0&-2&2&-3a-5\\0&2&-2&-a-7\\0&0&0&-2a-6\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a+2\\0&-2&2&-3a-5\\0&0&0&-4a-12\\0&0&0&-2a-6\end{array}\right)$$

אם $a=-3$ לה יהיו שורת סתירה וקיים פתרון ואז $\mathrm{v}\in\mathrm{span}\{u_1,u_2,u_3\}$.

ב) $\underline{a=-3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&-1\\ 0&-2&2&4\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&-1\\ 0&1&-1&-2\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&2&1\\ 0&1&-1&-2\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{array}\right)$$

$$k_1=1-2k_3\ , \qquad k_2=-2+k_3\ , \qquad k_3\in\mathbb{R}\ .$$

נציב $k_3=1 \Leftarrow$

$$k_1=-1\ , \qquad k_2=-1\ , \qquad k_3=1$$

ונקבל

$$-u_1-u_2+u_3=\mathrm{v}\ .$$

נציב $k_3=0 \Leftarrow$

$$k_1=1\ , \qquad k_2=-2\ , \qquad k_3=0$$

ונקבל

$$u_1-2u_2+0\cdot u_3=\mathrm{v}\ .$$

ג) עבור $\underline{a=-3}$:

מסעיף (ב), עמודה 1 ועמודה 2 של $A=\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & \mathrm{v} \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$ מובילות, לכן הווקטורים u_1,u_2 מהווים בסיס.

עבור $\underline{a\neq -3}$:

מסעיף (ב), עמודה 1 עמודה 2 ועמודה 4 של $A=\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & \mathrm{v} \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$ מובילות, לכן הווקטורים u_1,u_2,v מהווים בסיס.

ד) הווקטורים u_1,u_2,u_3,v ת"ל לכל ערכי a, לכן לא קיימים ערכי a עבורם $\mathrm{span}\{u_1,u_2,u_3,\mathrm{v}\}=\mathbb{R}^{2\times 2}$.

דוגמה 10.3

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} a&1&1\\ 1&a&1\\ 1&1&a \end{pmatrix}$. לכל ערך של a מצאו את המימד ובסיס של $\mathrm{Nul}(A)$.

פתרון:

$$\begin{pmatrix} a&1&1\\ 1&a&1\\ 1&1&a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1&1&a\\ 1&a&1\\ a&1&1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-aR_1]{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1&1&a\\ 0&a-1&1-a\\ 0&1-a&1-a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1&1&a\\ 0&a-1&1-a\\ 0&0&-a^2-a+2 \end{pmatrix}$$

$a=1,-2 \Leftarrow -a^2-a+2=0$

עבור $\underline{a=1}$: מקבלים

$$\begin{pmatrix} 1&1&1\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\dim(\mathrm{Nul}(A))=\text{ מספר העמודות הלא מובילות }=2\ .$$

הפתרון הכללי הינו

$$x=-y-z\ ,\qquad y\in\mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix}-y-z\\ y\\ z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Nul}(A)$:

$$\left\{\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

עבור $a=-2$: מקבלים

$$\begin{pmatrix}1&1&-2\\ 0&-3&3\\ 0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2\\ 0&1&-1\\ 0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\ 0&1&-1\\ 0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\dim(\text{Nul}(A))=\text{מספר העמודות הלא מובילות}=1\ .$$

הפתרון הכללי הינו

$$x=z\ ,y=z\ ,\qquad y\in\mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix}z\\ z\\ z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Nul}(A)$:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

משפט 10.4 משפט הדרגה

לכל מרטיצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מסדר $m\times n$:

$$\text{rank}(A)+\dim\left(\text{Nul}(A)\right)=n\ .$$

הוכחה:

$\text{rank}(A)$ שווה למספר העמודות המובילות.

$\dim\left(\text{Nul}(A)\right)$ שווה למספר העמודות הלא המובילות.

לכן $\text{rank}(A)+\dim\left(\text{Nul}(A)\right)$ שווה למספר העמודות של A.

■

דוגמה 10.4

עבור מטריצה $A\in\mathbb{R}^{5\times 7}$ ידוע כי $\dim(\text{Nul}(A))=2$. מצאו את דרגת A.

פתרון:

$\dim(\text{Nul}(A))=2$ לכן $\text{rank}(A)=5$.

דוגמה 10.5

האם למטריצה $A\in\mathbb{R}^{6\times 9}$ יכול להיות $\dim(\text{Nul}(A))=2$? מצאו את דרגת A.

פתרון:

נניח שקיימת מטריצה $A\in\mathbb{R}^{6\times 9}$ שעבורה $\dim(\text{Nul}(A))=2$.

אז $\text{rank}(A)=9-2=7$.

אבל $\text{rank}(A)$ שווה למספר השורות שלא אפסים במטריצה המדורגת. במטריצה A יש 6 שורות.

לכן $\text{rank}(A)\leq 6$.

קיבלנו סתירה. לכן לא קיימת מטריצה A המקיימת הת תנאי התרגיל.

למה 10.1 סיכום של המימדים של מטריצה

תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה בעלת m שורות ו- n עמודות. נסמן $r=\text{rank}(A)$. אז

$$\begin{aligned}\dim\left(\text{col}(A)\right)=&r &&= (\text{מספר עמודות מובילות})\\ \dim\left(\text{row}(A)\right)=&r &&= (\text{מספר שורות מובילות})\\ \dim\left(\text{Nul}(A)\right)=&n-r &&= (\text{מספר עמודות הלא מובילות})\end{aligned}$$

משפט 10.5 תנאים שקולים של מטריצה הפיכה

עבור מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ התנאים הבאים שקולים זה לזה.

(1 $\text{rank}(A)=n$.

(2 A הפיכה.

(3 למערכת $A\cdot X=0$ יש פתרון יחיד.

(4 $|A|\neq 0$.

(5 כל השורות של A בת"ל.

(6 כל העמודות של A בת"ל.

הוכחה:

תרגיל בית. ■

10.2 ווקטור קואורדינטות לפי בסיס

משפט 10.6 קואורדינטות של ווקטור לפי בסיס מסוים יחיד

נניח כי $u_1,\cdots,u_n\in V$ בסיס של המרחב ווקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$. אז כל ווקטור $a\in V$ ניתן לרשום כצירוף ליניארי יחיד של $u_1,\cdots,u_n\in V$.

הוכחה:

$u_1,\cdots,u_n\in V$ בסיס של V, לכן $\text{span}\{u_1,\cdots,u_n\}=V$.

מכאן נובע שלכל $a\in V$,

$$a\in\text{span}\{u_1,\cdots,u_n\}$$

ז"א קיימים סקלרים $k_1,\cdots,k_n$ כך ש-

$$a=k_1u_1+\cdots+k_nu_n\ .$$

נוכיח שהצירוף הלינארי הוא יחיד בדרך השלילה:
נניח שקיים צירוף ליניארי אחר:

$$a=t_1u_1+\cdots+t_nu_n\ .$$

כך ש- $k_i\neq t_i$.

לכן

$$(k_1-t_1)u_1+\cdots+(k_i-t_i)u_i\cdots+(k_n-t_n)u_n=\bar{0}$$

ו- $t_i-k_i\neq 0$. ז"א ווקטורים $\{u_1,\cdots,u_n\}$ תלוים ליניארית. סתירה.

■

הגדרה 10.3 ווקטור הקואורדינטות

אם $B=\{u_1,\cdots,u_n\}\in V$ בסיס של מרחב ווקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$ ו- $a\in V$ אז

$$a=k_1u_1+\cdots+k_nu_n\ .$$

לווקטור

$$\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}$$

קוראים **ווקטור הקואורדינטות** של ווקטור a לפי בסיס $B=\{u_1,\cdots,u_n\}$.
סימון:

$$[a]_B=\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}\ .$$

דוגמה 10.6

$E=\{e_1,e_2,e_3\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$. $u=\begin{pmatrix}2\\-1\\10\end{pmatrix}$.

$$u=2e_1-e_2+10e_3\ .$$

לכן

$$[u]_E=\begin{pmatrix}2\\-1\\10\end{pmatrix}$$

דוגמה 10.7

$E=\{1,x,x^2\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$. $p(x)=1+8x-5x^2$.

$$p(x)=1\cdot 1+8\cdot x-5\cdot x^2=1e_1+8e_2-5e_3\ .$$

לכן

$$[p]_E=\begin{pmatrix}1\\8\\-5\end{pmatrix}$$

דוגמה 10.8

הראו כי קבוצת הווקטורים

$$B=\left\{b_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

מהווה בסיס של $\mathbb{R}^3$ ומצאו את $[u]_B$ עבוטר הווקטור $u=\begin{pmatrix}2\\-1\\10\end{pmatrix}$.

פתרון:

$$\begin{pmatrix}1&1&3\\-2&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+2R_1}\begin{pmatrix}1&1&3\\0&3&6\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_2-2R_3}\begin{pmatrix}1&1&3\\0&3&6\\0&0&3\end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות לכן b_1,b_2,b_3 בסיס של $\mathbb{R}^3$. נמצא את הקואורדינטות של ווקור u לפי בסיס B.

$$u=xb_1+yb_2+zb_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2+2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_2-2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -27 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to\frac{1}{3}R_3]{R_2\to\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right)$$

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

דוגמה 10.9 (מרחב האפס ובסיסו)

מצאו את בסיס ומימד של מרחב האפס של המטריצה $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.

פתרון:

כדי למצוא את המרחב האפס יש למצוא את הפתרונות של המערכת

$$AX = \bar{0}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2+3R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to\frac{1}{5}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

המערכת המתאימה היא

$$\begin{array}{cccccccccl} x_1 & - & 2x_2 & & & - & x_4 & + & 3x_5 & = 0 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & - & 2x_5 & = 0 \end{array}$$

ולכן הפתרון הוא

$$x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5 \ , \qquad x_3 = -2x_4 + 2x_5 \ , \qquad x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

ובצורה וקטורית

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \ , \qquad x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

נרשום את הפתרון בצורה צ"ל של וקטורים ב $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_2+x_4-3x_5\\x_2\\-2x_4+2x_5\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_2\\x_2\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_4\\0\\-2x_4\\x_4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3x_5\\0\\2x_5\\0\\x_5\end{pmatrix}=x_2\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{\mathrm{v}_1}+x_4\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}}_{\mathrm{v}_2}+x_5\underbrace{\begin{pmatrix}-3\\0\\2\\0\\1\end{pmatrix}}_{\mathrm{v}_3}$$

כאשר $x_2,x_4,x_5\in\mathbb{R}$. לכן

$$\mathrm{Nul}(A)=\mathrm{span}\left\{\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\ .$$

$\mathrm{Dim}\left(\mathrm{Nul}(A)\right)=3$.

משפט 10.7

נניח ש- $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ותהי A^t המשוחלפת של A. אז

$$\mathrm{Row}\ A=\mathrm{Col}\ A^t\ ,\qquad \mathrm{Col}\ A=\mathrm{Row}\ A^t\ .$$

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 10.8

נניח ש- $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$. אם ניתן להגיע מ- A ל- B ע"י ביצוע מספר סופי של פעולות שורה אלמנטריות אז

$$\mathrm{row}\,A=\mathrm{row}\,B\ .$$

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 10.9

נניח ש- $A\in R^{m\times n}$ ונניח ש- B המטריצה המדורגת המתקבלת מ- A. אז

$$\mathrm{Row}\,A=\mathrm{Row}\,B\ ,\qquad \mathrm{Nul}\,A=\mathrm{Nul}\,B\ .$$

הוכחה: תרגיל בית. ■

דוגמה 10.10

עבור המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&2&5\\-2&-5&1&-1&-8\\0&-3&3&4&1\\3&6&0&-7&2\end{pmatrix}$$

מצאו בסיס ל-

(א) Row A

(ב) Nul A

(ג) .Col A

פתרון:

(א)

$$\xrightarrow[R_4\to R_4-3R_1]{R_2\to R_2+2R_1}\begin{pmatrix}1&2&0&2&5\\0&-1&1&3&2\\0&-3&3&4&1\\0&0&0&-13&-13\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-3R_2]{R_2\to -R_2}\begin{pmatrix}1&2&0&2&5\\0&1&-1&-3&-2\\0&0&0&-5&-5\\0&0&0&-13&-13\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_4-\frac{5}{13}R_3}\begin{pmatrix}1&2&0&2&5\\0&1&-1&-3&-2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+3R_3}\begin{pmatrix}1&2&0&2&5\\0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_2-2R_2-2R_3}\begin{pmatrix}1&0&2&0&1\\0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן הוקטורים הלא כולה אפסים

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1&0&2&0&1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}0&1&-1&0&1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1\end{pmatrix}\ .$$

מהווה בסיס של Row A.

(ב) בכדי למצוא בסיס של Nul A נפתור את המערכת ההומגנית $AX=0$. ע"י המטריצה המדורגת הנמצאת לעיל מקבלים את המערכת המתאימה

$$\begin{array}{rl}x_1+2x_3+x_5&=0\\ x_2-x_3+x_5&=0\\ x_4+x_5&=0\end{array}\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{rcl}x_1&=&-2x_3-x_5\\ x_2&=&x_3-x_5\\ x_4&=&-x_5\end{array}$$

כך ש-

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2s-t\\s-t\\s\\-t\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

הקבוצה

$$\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

הינה בסיס של Nul A.

(ג) שיטה 1

לפי משפט 10.7 ניתן למצוא בסיס של $\mathrm{Col}\,A$ ע"ל למצוא בסיס של $\mathrm{Row}\,A^t$:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & -7 \\ 5 & -8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

המדורגת של A^t היא

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$B_{\mathrm{Row}\,A^t} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & -13 \end{pmatrix} \right\}$$

ואז לפי משפט 10.7:

$$B_{\mathrm{Col}\,A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ -13 \end{pmatrix} \right\}$$

שיטה 2

לפי 10.1 העמודות של A המתאימות לעמודות של המדורגת U עם איבר מוביל, מהוות בסיס. מכיוון שיש איבר מוביל בעמודה ה-1 עמודה ה- 2 ועמודה ה- 4 בהמדורגת U, אז עמודה ה-1 עמודה ה- 2 ועמודה ה- 4 של A מהווה בסיס:

$$B_{\mathrm{Col}\,A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}, \right\}$$

שעור 11
מטריצה המעבר מבסיס לבסיס וטנרספורמציות

משפט 11.1

נניח כי $V \in \mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ בסיס של מ"ו V מעל שדה $\mathbb{F}$. אז כל ווקטור $u \in V$ ניתן לרשום כצ"ל יחיד של $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$.

הוכחה: $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ בסיס של V, לכן $V = \mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$. מכאן נובע שלכל $u \in V$, $u \in \mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$. ז"א קיימים סקלרים $k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{F}$ כך ש

$$u = k_1\mathrm{v}_1 + \ldots + k_n\mathrm{v}_n \ .$$

נוכיח שהצ"ל הוא יחיד בדרך השלילה:
נניח שקיים צ"ל אחר:

$$u = t_1\mathrm{v}_1 + \ldots + t_n\mathrm{v}_n \ .$$

אש קיים $1 \leq i \leq n$ כך ש $k_i \neq t_i$. לכן

$$(k_1 - t_1)\mathrm{v}_1 + \ldots + (k_i - t_i)\mathrm{v}_i + \ldots + (k_n - t_n)\mathrm{v}_n = \bar{0}$$

ו $k_i - t_i \neq 0$. ז"א ווקטורים $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ ת"ל. סתירה. ■

הגדרה 11.1

אם $V \in \mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ בסיס של מ"ו V מעל שדה $\mathbb{F}$ ו $u \in V$ אז

$$u = k_1\mathrm{v}_1 + \ldots + k_n\mathrm{v}_n \ .$$

לווקטור

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

קוראים ווקטור הקואורדינטות של ווקטור u לפי בסיס $B = \{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\}$.
סימון:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \ .$$

דוגמה 11.1

$E = \{e_1,e_2,e_3\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$, $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$

$$u = 2e_1 + (-1)e_2 + 10e_3$$

$$[u]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

דוגמה 11.2

$E = \{1, x, x^2\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$, $p(x) = 1 + 8x - 5x^2$. אז

$$p(x) = 1 \cdot 1 + 8x - 5x^2 = 1e_1 + 8e_2 - 5e_3$$

$$[p(x)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

דוגמה 11.3

הראו כי קבוצת הווקטורים

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מצאו את $[u]_B$ עבור ווקטור $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$.

פתרון:

נבדוק אם B בת"ל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן b_1, b_2, b_3 בת"ל.
$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, לכן $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ בסיס של $\mathbb{R}^3$.
נמצא את הקואורדינטות של ווקטור u לפי בסיס B.

$$u = k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array} \right)$$

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ -9 \end{pmatrix}$$

דוגמה 11.4

נתונים שני בסיסים של מרחב V, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ ו $C = \{c_1, \dots, c_n\}$. נתון $[u]_B$. מהו $[u]_C$?

פתרון:

נרשום את u כצ"ל של בסיס B.

$$u = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n \qquad \Rightarrow \qquad [u]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

כל ווקטור b_i $(1 \leq i \leq n)$ הוא צ"ד של בסיס C

$$\begin{aligned} b_1 &= b_{11} c_1 + b_{21} c_2 + \ldots + b_{n1} c_n \\ b_2 &= b_{12} c_1 + b_{22} c_2 + \ldots + b_{n2} c_n \\ &\vdots \\ b_n &= b_{1n} c_1 + b_{2n} c_2 + \ldots + b_{nn} c_n \end{aligned}$$

מכאן מקבלים

$$\begin{aligned} u =& x_1(b_{11}c_1 + b_{21}c_2 + \ldots + b_{n1}c_n) + x_2(b_{12}c_1 + b_{22}c_2 + \ldots + b_{n2}c_n) + \ldots + x_n(b_{1n}c_1 + b_{2n}c_2 + \ldots + b_{nn}c_n) \\ =& (x_1 b_{11} + x_2 b_{12} + \ldots + x_n b_{1n}) c_1 + (x_1 b_{21} + x_2 b_{22} + \ldots + x_n b_{2n}) c_2 + \ldots + (x_1 b_{n1} + x_2 b_{n2} + \ldots + x_n b_{nn}) c_n \end{aligned}$$

לפיכך

$$[u]_C = \begin{pmatrix} x_1 b_{11} + x_2 b_{12} + \ldots + x_n b_{1n} \\ x_1 b_{21} + x_2 b_{22} + \ldots + x_n b_{2n} \\ \vdots \\ x_1 b_{n1} + x_2 b_{n2} + \ldots + x_n b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & & \ldots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & & \ldots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot [u]_B$$

למטריצה

$$P_{B \to C} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & & \ldots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

קוראים מטריצה המעבר מבסיס B לבסיס C. ז"א קיבלנו נוסחה :

$$[u]_C = P_{B \to C} [u]_B$$

כאשר

$$P_{B \to C} = ([b_1]_C \ldots [b_2]_C)$$

דוגמה 11.5

נתונים שני בסיסים של $\mathbb{R}^3$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ כאשר

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

נתון $[u]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. מצאו את $[u]_C$.

פתרון:

נשתמש בנוסחה

$$[u]_C = P_{B\to C} \cdot [u]_B \ .$$

כדי למצוא את $P_{B\to C}$ צריך לפתור את המערכת:

$$\begin{aligned} C \cdot X &= b_1 \\ C \cdot X &= b_2 \\ C \cdot X &= b_3 \end{aligned}$$

כאשר מטריצה C מורכבת מווקטורים c_1,c_2,c_3 העומדים בעמודות.

מכיוון ש c_1,c_2,c_3 בסיס, למערכת $C \cdot X = b_i$ יש פתרון יחיד, לכן בדירוג ניתן להגיע למטירצה היחידה I. ז"א בתהליך גאווס נגיע למצבים:

$$(C|b_1) \to \ldots \to (I|P_{B\to C} \text{ העמודה הראשונה של})$$

$$\vdots$$

$$(C|b_n) \to \ldots \to (I|P_{B\to C} \text{ העמודה ה} n \text{ של})$$

מכיוון שבדירוג מבצעים את אותן הפעולות האלמנטריות, אפשר לפתור את כל המעכות בבת אחת!

$$(C|B) \to \ldots \to (I|P_{B\to C})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -7 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$P_{B\to C} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[u]_C = P_{B\to C} \cdot [u]_B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix}$$

דוגמה 11.6

נתון

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad b_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \qquad C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} , \quad c_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$$

שני בסיסים סדורים של $\mathbb{R}^2$.

מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס C.

יהי $V \in \mathbb{R}^2$ כך ש- $(V)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. מצאו את $(V)_C$.

מצאו את מטריצת המעבר מהבסיס C לבסיס B.

הגדרה 11.2 המרחב של פולינומים מסדר n

המרחב של פולינומים מסדר n יסומן $\mathbb{R}_n[x]$ או $P_n[x]$ ויוגדר- הקבוצה של כל הפולינומים מסדר n לכל היותר:

$$P_n[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n | a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

דוגמה 11.7

$$1 + 2x \in P_1[x] \ , \qquad 1 + 5x^2 \notin P_1[x] \ .$$

$$1 + 2x \in P_3[x] \ , \qquad 1 + 4x + 3x^2 \in P_3[x] \ , \qquad 3 + 8x + 7x^3 \in P_3[x] \ , \qquad 6x + 5x^4 \notin P_3[x] \ .$$

$$1 - 3x^4 + 6x^7 \in P_7[x] \ , \qquad 1 - 3x^4 + 6x^7 + 6x^8 - x^9 \notin P_7[x] \ .$$

משפט 11.2 תלות ליניארית של פולינומים

קבוצת פולינומים מסדר n

$$S = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n \ \ldots\}$$

בת"ל אם"ם קבוצת הווקטורים של המקדמים בת"ל, כלומר אם הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \ldots \right\}$$

בת"ל.

אם נגדיר המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & \\ a_1 & b_1 & \\ \vdots & \vdots & \cdots \\ a_n & b_n & \end{pmatrix}$$

אז הפולינומים בת"ל אם"ם

$$\det\left(A^t A\right) \neq 0 \ .$$

משפט 11.3 בסיס הסטנדרטי של פולינומים

הקבוצה

$$E = \{e_1 = 1, \quad e_2 = x, \quad e_3 = x^2, \quad \ldots, \quad e_{n+1} = x^n\}$$

הינה בסיס של המרחב ווקטורי של פולינומים מסדר n ונקרא הבסיס הסטנדרטי של $P_n[x]$.

משפט 11.4 הוורונסקיאן

נתון קבוצה
$$F = \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$$
של n פונקציות במרחב V של כל הפונקציות מעל $\mathbb{R}$. נגדיר את הוורונסקיאן
$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} .$$
אם קיים $x_0 \in \mathbb{R}$ כך ש-
$$W(x_0) \neq 0$$
אז F בת"ל.

הוכחה: יהיו
$$F = \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$$
קבוצה של n פונקציות במרחב V של כל הפונקציות מעל $\mathbb{R}$. הקבוצה בת"ל אם"ם הצ"ל
$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$
לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים רק אם $c_i = 0$ לכל $i = 1, 2, \ldots, n$. נגזור את הצ"ל $n-1$ פעמים כדי לקבל
$$c_1 f_1^{(i)}(x) + c_2 f_2^{(i)}(x) + \cdots + c_n f_n^{(i)}(x) = 0$$
לכל $x \in \mathbb{R}$. כמשוואה מטריציאלית
$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} .$$
הדטרמיננטה של המטריצה המקדמים נקראת **הוורונסקיאן** של הקבוצה $\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ ומסומן ב $W(x)$. לכן אם קיים נקודה $x_0 \in \mathbb{R}$ כך ש $W(x_0) \neq 0$ אז המטריצה המקדמים איננה אפס בנקודה $x = x_0$ ולכן כל המקדמים $c_i = 0$. לכן, אם הוורונסקיאן אינו שווה אפס בנקודה $x_0 \in \mathbb{R}$, אז הקבוצה $F = \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ בת"ל.

■

דוגמה 11.8

עבור המרחב $P_2[x]$,
מצאו מטריצת מעבר מהבסיס הסדור
$$B = \left\{b_1 = 1 - 2x + x^2, \quad b_2 = 3 - 5x + 4x^2, \quad b_3 = 2x + 3x^2\right\}$$
לבסיס הסטנדרטי
$$E = \left\{e_1 = 1, \quad e_2 = x, \quad e_3 = x^2\right\}$$
ומצאו את הווקטור $-1 + 2x$ לפי הבסיס B.

פתרון:

נחשב את $P_{B\to E}$:

$$(E|B)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&3&0\\ 0&1&0&-2&-5&2\\ 0&0&1&1&4&3\end{array}\right)$$

וסיימנו.

$$P_{B\to E}=\begin{pmatrix}1&3&0\\-2&-5&2\\1&4&3\end{pmatrix}$$

$$[u]_B=P_{E\to B}[u]_E\ .$$

$$P_{E\to B}=P^{-1}_{B\to E}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&3&0&1&0&0\\ -2&-5&2&0&1&0\\ 1&4&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2+2R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&3&0&1&0&0\\ 0&1&2&2&1&0\\ 0&1&3&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&3&0&1&0&0\\ 0&1&2&2&1&0\\ 0&0&1&-3&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&3&0&1&0&0\\ 0&1&0&8&3&-2\\ 0&0&1&-3&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-3R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&-23&-9&6\\ 0&1&0&8&3&-2\\ 0&0&1&-3&-1&1\end{array}\right)$$

לכן $P_{E\to B}=\begin{pmatrix}-23&-9&6\\8&3&-2\\-3&-1&1\end{pmatrix}$.

$$[u]_B=P_{E\to B}[u]_E=\begin{pmatrix}-23&-9&6\\8&3&-2\\-3&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}_B$$

בדיקה:

$$\begin{aligned}5b_1-2b_2+1b_3 =&5\left(1-2x+x^2\right)-2\left(3-5x+4x^2\right)+1\left(2x+3x^2\right)\\ =&5-6-10x+10x+2x+5x^2-8x^2+3x^2\\ =&-1+2x\ .\end{aligned}$$

שעור 12
העתקות לינאריות

12.1 תחום, מול-תחום, גרעין ותמונה

הגדרה 12.1 התחום והטווח של פונקציה

תהיינה A ו- B קבוצות. **פונקציה** f מ- A ל- B היא כלל המתאים לכל איבר $a \in A$ איבר יחיד $f(a) \in B$.
נסמן

$$f : A \to B \ .$$

הקבוצה A נקראת התחום של f, הקבוצה B נקראת הטווח של f.

הגדרה 12.2 פונקציה

פונקציה $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ מ- $\mathbb{R}^n$ ל- $\mathbb{R}^m$ היא כלל המתאים לכל ווקטור $X \in \mathbb{R}^n$ ווקטור יחיד $T(X) \in \mathbb{R}^m$.

לווקטור $T(X)$ קוראים התמונה של X תחת T.

X יקרא המקור של $T(X)$.

הגדרה 12.3 גרעין ותמונה של פונקציה

תהי

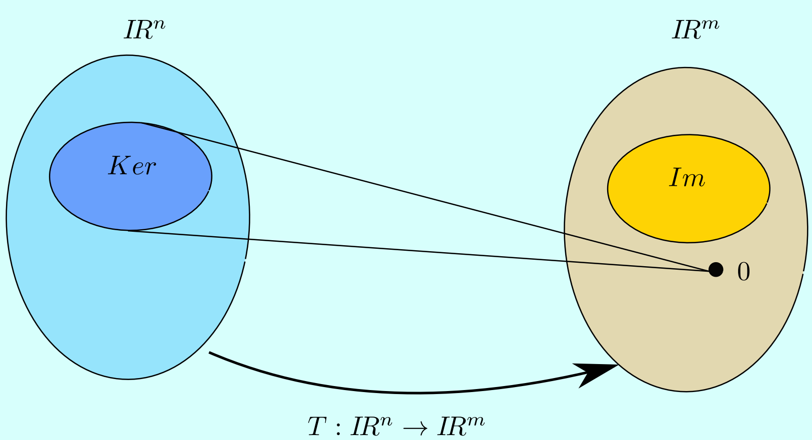
$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ .$$

התמונה של T, מסומנת $\text{Im}(T)$ ומוגדרת

$$\text{Im}(T) = \{T(X) | X \in \mathbb{R}^n\}$$

הגרעין של T מסומן $\text{Ker}(T)$ ומוגדר

$$\text{Ker}(T) = \{X \in \mathbb{R}^n | T(X) = 0\}$$



דוגמה 12.1

נסמן
$$A=\begin{pmatrix}1&-3\\3&5\\-1&7\end{pmatrix}\ ,\qquad u=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\ ,\qquad b=\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}\ ,\qquad c=\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}\ .$$
נגדיר $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ ע"י
$$T(X)=A\cdot X\qquad \forall X\in\mathbb{R}^2\ .$$

(א) מצאו נוסחה ל- T. כלומר, לכל $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ מצאו $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$.

(ב) מצאו את $T(u)$.

(ג) מצאו $X\in\mathbb{R}^2$ כך ש- $T(X)=b$. במילים אחרות, מצאו ווקטור מקור ל- b. האם יש יותר מאחד?

(ד) האם $c\in\mathrm{Im}(T)$? במילים אחרות, האם קיים $X\in\mathbb{R}^2$ כך ש- $T(X)=c$?

(ה) מצאו $T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

(ו) האם $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}(T)$?

(ז) האם $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}(T)$?

(ח) מצאו $\mathrm{Ker}(T)$.

פתרון:

(א) יהי $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$.
$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3\\3&5\\-1&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-3x_2\\3x_1+5x_2\\-x_1+7x_2\end{pmatrix}$$

(ב) לפי הנוסחה שמצאנו בסעיף הקודם
$$T(u)=T\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-3(-1)\\3\cdot2+5(-1)\\-2+7\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\-9\end{pmatrix}$$
כמובן אפשר גם לכפול את A ב- u:
$$T(u)=A\cdot u=T\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3\\3&5\\-1&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\-9\end{pmatrix}$$

(ג) דרוש $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ כך ש- $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b$. נראה זאת בשתי דרכים:

דרך רשאונה:

נדרוש

$$\begin{pmatrix} x_2 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 5x_2 &= 2 \\ -x_1 + 7x_2 &= -5 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3+R_1]{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-4R_2]{R_2\to \frac{1}{14}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+3R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ולכן נמצא כי $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ כך ש-

$$T\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

דרך שניה:

נדרוש

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b$$

נדרג את המטריצה המורחבת הבאה:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{array}\right)$$

(ד) סעיף זה דומה לסעיף הקודם, אבל בסעיף זה אנו לא מתבקשים למצוא מקור ל- c אלא לענות האם יש מקור. במילים אחרות, האם יש פתרון למשוואה

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c.$$

נקבל

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3+R_1]{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to \frac{1}{2}R_3]{R_2\to \frac{1}{14}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-R_2]{R_1\to R_1+3R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

למערכת אין פתרון, ולכן אין מקור לווקטור c.

(ה) נשים לב ש- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, ולכן $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ לא מוגדר.

(ו) כמו קודם, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, ולכן $\mathrm{Ker}(T) \subseteq \mathbb{R}^2$. בפרט

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Ker}(T)\ .$$

(ז) קל לראות שהתשובה חיובית, שכן

$$T\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-3\cdot 0\\3\cdot 0+5\cdot 0\\-0+7\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\ ,$$

ולכן

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in \text{Ker}(T)\ .$$

(ח) למציאות $\text{Ker}(T)$, עלינו למצוא את כל המקורות ב- $\mathbb{R}^2$ של וקטור האפס ב- $\mathbb{R}^3$, כלומר לפתור את המשוואה

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

ניתן להשתמש בחישובים לעיל:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-3&0\\3&5&0\\-1&7&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3+R_1]{R_2\to R_2-3R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&-3&0\\0&14&0\\0&4&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to \frac{1}{2}R_3]{R_2\to \frac{1}{14}R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&-3&0\\0&1&0\\0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-R_2]{R_1\to R_1+3R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

ולמערכת יש רק את הפתרון הטריוויאלי. כלומר, המקור של וקטור האפס ב- $\mathbb{R}^3$ הוא רק וקטור האפס ב- $\mathbb{R}^2$. במילים אחרות,

$$\text{Ker}(T)=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

12.2 הגדרה של העתקה לינארית

הגדרה 12.4 העתקה לינארית

פונקציה $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ נקראת **העתקה לינארית** אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

(1)

$$T(u+w)=T(u)+T(w)$$

לכל $u,w\in\mathbb{R}^n$ (T שומרת על סכום).

(2)

$$T(\alpha\cdot u)=\alpha\cdot T(u)$$

לכל $u\in\mathbb{R}^n$ ולכל $\alpha\in\mathbb{R}$ (T שומרת על כפל בסקלר).

דוגמה 12.2

האם הפונקציה $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}1&-3\\3&5\\-1&7\end{pmatrix}$$

העתקה לינארית?

פתרון:
נבדוק את שני התנאיים ההרכחים:

(1) יהיו $X, Y \in \mathbb{R}^2$ כך ש-

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad , \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$T(X+Y) = A \cdot (X+Y) = \begin{pmatrix} 1(x_1+y_1) - 3(x_2+y_2) \\ 3(x_1+y_1) + 5(x_2+y_2) \\ -(x_1+y_1) + 7(x_2+y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 - 3y_2 \\ 3y_1 + 5y_2 \\ -y_1 + 7y_2 \end{pmatrix} = A \cdot X + A \cdot Y$$

(2) יהיו $X \in \mathbb{R}^2$ ו $\alpha \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot X) = \begin{pmatrix} 1(\alpha x_1) - 3(\alpha x_2) \\ 3(\alpha x_1) + 5(\alpha x_2) \\ -(\alpha x_1) + 7(\alpha x_2) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix} = \alpha A \cdot X$$

משפט 12.1

(עיין משפט 3.4). נניח ש- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ו- $u, w \in \mathbb{R}^n$, ו- $\alpha \in \mathbb{R}$. מתקיים:

(1)

$$A \cdot (u+w) = A \cdot u + A \cdot w$$

(2)

$$A \cdot (\alpha \cdot u) = \alpha \cdot (A \cdot u)$$

משפט 12.2

תהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. ההעתקה $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ המוגדרת ע"י

$$T(x) = A \cdot x$$

לכל $x \in \mathbb{R}^n$ היא העתקה ליניארית.

הוכחה:
יהיו $u, w \in \mathbb{R}^n$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. לפי משפט 12.1 מתקיים

(1)

$$T(u+v) = A \cdot (u+w) = A \cdot u + A \cdot w = T(u) + T(w)$$

(2)

$$T(\alpha \cdot u) = A \cdot (\alpha \cdot u) = \alpha \cdot (A \cdot u) \alpha \cdot T(u)$$

■

משפט 12.3 " 2 תכונות חשובות של העתקה ליניארית "

תהי $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית. מתקיים:

(1)

$$T(0)=0$$

(2)

$$T(\alpha v+\beta u)=\alpha T(v)+\beta T(u)$$

לכל $u,v\in\mathbb{R}^n$ ולכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(3) מכאן נובע כי עבור T העתקה ליניארית, מתקיים

$$T(\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_n v_n)=\alpha_1 T(v_1)+\cdots+\alpha_n T(v_n)\ .$$

בקצרה, תכונה יסודית של העתקה ליניארית:

$$T \text{ העתקה ליניארית} \quad \Rightarrow \quad T(0)=0$$

דוגמה 12.3

נגדיר $T:\mathbb{R}^7\to\mathbb{R}^7$ ע"י

$$T(w)=5w \qquad \forall w\in\mathbb{R}^7\ .$$

האם T העתקה ליניארית?

פתרון:
כן. הוכחה:

יהיו $u,w\in\mathbb{R}^7$ ויהיו $\alpha\in\mathbb{R}$. מתקיים:

(1) $T(u+w)=5\cdot(u+w)=5\cdot u+5\cdot w=T(u)+T(w)$

(2) $T(\alpha\cdot u)=5\cdot(\alpha\cdot u)=\alpha\cdot(5\cdot u)=\alpha\cdot T(u)$

דוגמה 12.4

נגדיר $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+1\\0\end{pmatrix} \qquad \forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\ .$$

האם T העתקה ליניארית?

פתרון:
לא. כל העתקה ליניארית S מקיימת $S(0)=0$. בדוגמה הזו

$$T\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

ולכן T איננה העתקה ליניארית.

דוגמה 12.5

נגדיר $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-3y\\0\\5x+2y\end{pmatrix}\qquad\forall\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\ .$$

האם T העתקה ליניארית?

פתרון:

כן. הוכחה:

יהיו $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ $\alpha\in\mathbb{R}$.

נבדוק האם שני התנאים של הגדרה 12.4 מתקיימים:

(1)

$$T\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(x_1+x_2)-3(y_1+y_2)\\0\\5(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1+2x_2-3y_1-3y_2\\0\\5x_1+5x_2+2y_1+2y_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2x_1-3y_1\\0\\5x_1+2y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2x_2-3y_2\\0\\5x_2+2y_2\end{pmatrix}$$

$$=T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$$

לכן $T\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ מתקיים.

(2)

$$T\left(\alpha\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}\alpha x_1\\\alpha y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(\alpha x_1)-3(\alpha y_1)\\0\\5(\alpha x_1)+2(\alpha y_1)\end{pmatrix}$$

$$=\alpha\cdot\begin{pmatrix}2x_1-3y_1\\0\\5x_1+2y_1\end{pmatrix}$$

$$=\alpha\cdot T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$$

לכן $T\left(\alpha\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\right)=\alpha\cdot T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ מתקיים.

דוגמה 12.6

נגדיר $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2\\9x+5y\\x+7y\end{pmatrix}\qquad\forall\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\ .$$

האם T העתקה ליניארית?

פתרון:
לא. ניקח למשל

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\9\\1\end{pmatrix}$$

אמת כי

$$T\left(2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\18\\2\end{pmatrix}$$

אבל

$$2\cdot T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\9\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\18\\2\end{pmatrix}$$

כך ש-

$$T\left(2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\neq 2\cdot T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

ולכן בגלל שמצאנו דוגמה המקיימת

$$T(\alpha\cdot u)\neq\alpha\cdot T(u)$$

אז התכונה ההכרחית $T(\alpha\cdot u)=\alpha\cdot T(u)$ איננה מתקיימת בכללי.

דוגמה 12.7

תהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$ העתקה ליניארית המקיימת

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\ ,\qquad T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}\ .$$

(א) מצאו את $T\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$.

(ב) מצאו את $T\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$.

(ג) מצאו את $T\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

(ד) מצאו נוסחה ל T. כלומר, לכל $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ מצאו $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

פתרון:

(א)

$$T\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = T\left(3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = 3\cdot T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\9\\12\end{pmatrix}$$

(ב)

$$T\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} = T\left(5\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = 5\cdot T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 5\cdot\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}25\\30\\35\\40\end{pmatrix}$$

(ג)

$$T\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\9\\12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}25\\30\\35\\40\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}28\\36\\44\\52\end{pmatrix}$$

(ד)

$$\begin{aligned}T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= T\left(\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} = T\left(x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+T\left(y\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\\ &= x\cdot T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\cdot T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\2x\\3x\\4x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5y\\6y\\7y\\8y\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}x+5y\\2x+6y\\3x+7y\\4x+8y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

במילים אחרות:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&5\\2&6\\3&7\\4&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

12.3 מטריצה המייצגת הסטנדרטית

משפט 12.4 מטריצה המייצגת הסטנדרטית

תהי $T:\mathbb{R}^n\to R^m$ העתקה ליניארית. אז קיימת מטריצה אחת ויחידה $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ כך ש-

$$T(X) = A\cdot X$$

לכל $X \in \mathbb{R}^n$. מתקיים

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ T(e_1)_E & T(e_2)_E & \cdots & T(e_n)_E \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

כאשר $e_1, e_2, \cdots, e_n$ הווקטורים של הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$ ו- E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^m$.

A נקראת **המטריצה המייצגת הסטנדרטית (ממ"ס)** של ההעתקה ליניארית T.

משפט 12.5 תנאי מספיק של העתקה ליניארית

(i) נתונה $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. אם $T(X) = A \cdot X$ לכל $X \in \mathbb{R}^n$ אז

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

הינו העתקה ליניארית.

(ii) אם $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית אז קיימת $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ כך ש-

$$T(X) = A \cdot X$$

לכל $X \in \mathbb{R}^n$.

דוגמה 12.8

נתונה פונקציה $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y \\ 0 \\ 5x+2y \end{pmatrix} \qquad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

המהווה העתקה ליניארית. מצאו ממ"ס שלה.

פתרון:

ווקטורי היחידה של $\mathbb{R}^2$ הינם

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

לכן, הממ"ס של T היא:

$$A = \left(T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\; T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

12.4 פונקציה על ופונקציה חח"ע

הגדרה 12.5 פונקציה על ופונקציה חח"ע

נתונה פונקציה $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$.

(i) T **על** $\mathbb{R}^m$ אם לכל $b\in\mathbb{R}^m$ קיים (לפחות אחד) $X\in\mathbb{R}^n$ כך ש-

$$T(X)=b\ .$$

(ii) T **חד-חד ערכית (חח"ע)** אם לכל $b\in\mathbb{R}^m$ קיים לכל היותר $X\in\mathbb{R}^n$ אחד כך ש-

$$T(X)=b\ .$$

דוגמה 12.9

תהי $T_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ מוגדרת ע"י

$$T_1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-2y+z\\x+|y|-z\end{pmatrix}\qquad\forall\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

תהי

$$T_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$$

מוגדרת ע"י

$$T_2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+z\\x+y\\z\end{pmatrix}\qquad\forall\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

תהי

$$T_3:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$$

מוגדרת ע"י

$$T_3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x^2\end{pmatrix}\qquad\forall\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

(א) הוכיחו או הפריכו:

T_1 העתקה ליניארית.

(ב) הוכיחו או הפריכו:

T_2 העתקה ליניארית.

(ג) הוכיחו או הפריכו:

T_3 העתקה ליניארית.

לכל אחת מההעתקות הליניאריות שמצאת,

(ד) מצא מטריצה מייצגת סטנדרטית.

(ה) האם ההעתקה על?

(ו) האם ההעתקה חח"ע?

פתרון:

(א) T_1 איננה העתקה ליניארית. ניקח למשל

$$T_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 0 \\ 0 + |1| - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1 \left(-1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = T_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) + 0 \\ 0 + |-1| - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אבל

$$-1 \cdot T_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$T_1 \left(-1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \neq -1 \cdot T_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ב)

$$T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

מוגדרת ע"י

$$T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y \\ z \end{pmatrix} \qquad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

נתבונן במטריצה

$$A = \left(T_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נשים לב שלכל $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ מתקיים:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y \\ z \end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

כלומר, לכל $X \in \mathbb{R}^3$ מתקיים

$$T_2(X) = AX$$

ולכן, לפי משפט 12.5 (i), T_2 העתקה ליניארית.

שימו לב ש- A הינה הממ"ס של T.

(ג) T_3 איננה העתקה ליניארית בדומה לדוגמה של T_1. ניקח למשל

$$T_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$T_3\left(2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=T_3\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$$

אבל

$$2\cdot T_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

ולכן

$$T_3\left(2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\neq 2\cdot T_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

(ד) עיין סעיף **(ב)**

(ה) נזכיר שההעתקה היא על אם לכל $b\in\mathbb{R}^3$ קיים (לפחות אחד) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ כך ש-

$$T_2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=b\ ,$$

כלומר, אם"ם לכל $b\in\mathbb{R}^3$ למערכת

$$A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=b$$

יש פתרון.

נדרג את המטריצה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&b_1\\1&1&0&b_2\\0&0&1&b_3\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&b_1\\0&0&-1&b_2-b_1\\0&0&1&b_3\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&b_1\\0&0&-1&b_2-b_1\\0&0&0&b_3+b_2-b_1\end{array}\right)$$

על סמך הדרוג, קיים $b\in\mathbb{R}^3$ כך שלמערכת $A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=b$ אין פתרון (כי תיתכן שורת סתירה) , ולכן ההעתקה איננה על.

(ו) נזכיר שההעתקה היא חח"ע אם לכל $b\in\mathbb{R}^3$ קיים לכל היותר $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ אחד כך ש-

$$T_2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=b\ ,$$

כלומר, אם"ם לכל $b\in\mathbb{R}^3$ למערכת

$$A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=b$$

יש לכל היותר פתרון אחד.

על סמך הדרוג, קיים $b\in\mathbb{R}^3$ (למשל, ווקטור האפס) כך שלמערכת

$$A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=b$$

יש אינסוף פתרונות (כי יש משתנה חופשי), ולכן ההעתקה איננה חח"ע.

משפט 12.6

תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית ותהי $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T. התנאים הבאים שקולים:

(א) T על $(\mathbb{R}^m)$.

(ב) במדורגת המתקבלת מ- A קיים איבר מוביל בכל **שורה.**

(ג) עמודות A פורשות את $\mathbb{R}^m$.

משפט 12.7

תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית ותהי $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T. התנאים הבאים שקולים:

(א) T חח"ע.

(ב) במדורגת המתקבלת מ- A קיים איבר מוביל בכל **עמודה**

(ג) עמודות A בת"ל.

12.5 הצגת העתקה לינארית בבסיסים שונים

משפט 12.8

יהי V מרחב ווקטורי עם בסיס סדור

$$B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}\ ,$$

יהי W מרחב ווקטורי עם בסיס סדור

$$C=\{c_1,c_2,\ldots,c_m\}$$

ותהי

$$T:V\to W$$

העתקה לינארית. אזי, לכל $X\in V$ מתקיים

$$[T(X)]_C = [T]_C^B \cdot [X]_B$$

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(b_1)\ ]_C & [T(b_2)\ ]_C & \ldots & [T(b_n)\ ]_C \\ | & | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n} \ .$$

$[T]_C^B$ נקראת המטריצה המייצגת של ההעתקה T ביחס לבסיסים B ו- C.

דוגמה 12.10

נתון

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

העתקה לינארית המוגדרת ע"י

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-4y \\ 4x+5y \\ 6y \end{pmatrix}$$

לכל $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, ונתון

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

בסיס של $\mathbb{R}^2$.

(א) מהי המטריצה המייצגת הסטנדרטית ?

(ב) מהי המטריצה המייצגת ביחס לבסיס B?

(ג) נתון הווקטור X בעל קואורדינטות $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ביחס לבסיס הסטנדרטית E של $\mathbb{R}^2$. מהו הווקטור X_B ביחס לבסיס B?

(ד) הוכיחו כי

$$[T]_{\bar{E}}^E \, [X]_E = [T]_{\bar{E}}^B \, [X]_B$$

כאשר $\bar{E}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.

פתרון:

נתון ווקטור

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$$

ביחס לבסיס הסטנדרטית $E = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ של $\mathbb{R}^2$. אז ההעתקה לינארית T מחזירה ווקטור

$$(3x-4y)\cdot e_1 + (4x+5y)\cdot e_2 + 6y \cdot e_3$$

ביחס לבסיס הסטנדרטית $\bar{E} = \left\{ \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ של $\mathbb{R}^3$.

(א) ניתן לכתוב את ההעתקה לינארית באמצעות המטריצה המייצגת הסטנדרטית בצורה

$$[T(X)]_{\bar{E}} = [T]^{E}_{\bar{E}} \cdot [X]_E$$

כאשר

$$[T]^{E}_{\bar{E}} = \begin{pmatrix} | & | \\ T(e_1) & T(e_2) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

המטריצה המייצגת הסטנדרטית.

(ב) המטריצה המייצגת ביחס לבסיס B ניתנת ע"י

$$[T]^{B}_{\bar{E}} = \begin{pmatrix} | & | \\ T(b_1) & T(b_2) \\ | & | \end{pmatrix} \ .$$

שים לב,

$$b_1 = e_1 + e_2 \ , \quad b_2 = e_1 - e_2 \ , \qquad \Leftrightarrow \qquad e_1 = \frac{1}{2} \cdot b_1 + \frac{1}{2} \cdot b_2 \ , \quad e_2 = \frac{1}{2} \cdot b_1 - \frac{1}{2} \cdot b_2 \ ,$$

כך ש-

$$T(b_1) = T(e_1) + T(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$T(b_2) = T(e_1) - T(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$[T]^{B}_{\bar{E}} = \begin{pmatrix} | & | \\ T(b_1) & T(b_2) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 9 & -1 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \ .$$

(ג)

$$[X]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_E = 2 \cdot e_1 + 4 \cdot e_2 = 2\left(\frac{1}{2} \cdot b_1 + \frac{1}{2} \cdot b_2\right) + 4\left(\frac{1}{2} \cdot b_1 - \frac{1}{2} \cdot b_2\right) = 3 \cdot b_1 - 1 \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_B$$

(ד)

$$[T]^{E}_{\bar{E}} \cdot [X]_E = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} -10 \\ 28 \\ 24 \end{pmatrix}_{\bar{E}}$$

ו-

$$[T]^{B}_{\bar{E}} \cdot [X]_B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 9 & -1 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -10 \\ 28 \\ 24 \end{pmatrix}_{\bar{E}}$$

דוגמה 12.11

נתון

$$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$$

העתקה לינאירת המוגדרת ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x+y\\2x-y\\3y\end{pmatrix}$$

לכל $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, ונתון

$$C=\left\{c_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\ c_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\ c_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\ .$$

בסיס של $\mathbb{R}^3$.

(א) מהי המטריצה המייצגת הסטנדרטית ?

(ב) מהי המטריצה המייצגת ביחס לבסיס C?

(ג) נתון הווקטור $X_E=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}_E$ ביחס לבסיס הסטנדרטית E, הוכיחו כי הווקטור המתקבל מההעתקה לינארית

$$[T]_C^E\,X_E$$

הוא שקול לווקטור המתקבל מההעתקה לינארית

$$[T]_{\bar{E}}^E\,X_E$$

פתרון:

(א) נתון בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$, קרי $E=\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, והבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$, קרי $\bar{E}=\left\{\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\bar{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\bar{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, אז

$$[T(e_1)\ ]_{\bar{E}}=\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}_{\bar{E}}\qquad =4\cdot\bar{e}_1+2\cdot\bar{e}_2+0\cdot\bar{e}_3$$

$$[T(e_2)\ ]_{\bar{E}}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}_{\bar{E}}\qquad =1\cdot\bar{e}_1-1\cdot\bar{e}_2+3\cdot\bar{e}_3$$

כך ש-

$$[T]_{\bar{E}}^E=\begin{pmatrix}| & |\\ [T(e_1)\ ]_{\bar{E}} & [T(e_2)\ ]_{\bar{E}}\\ | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1\\2&-1\\0&3\end{pmatrix}$$

(ב) שים לב

$$\begin{aligned} c_1 &= \bar{e}_1 \\ c_2 &= \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \\ c_3 &= \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \bar{e}_1 &= c_1 \\ \bar{e}_2 &= c_2 - c_1 \\ \bar{e}_3 &= c_3 - c_2 \end{aligned}$$

כך ש-

$$[T(e_1)]_C = 4 \cdot c_1 + 2 \cdot (c_2 - c_1) = 2 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_C$$

$$[T(e_2)]_C = 1 \cdot c_1 - 1 \cdot (c_2 - c_1) + 3 \cdot (c_3 - c_2) = 2 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 1 \cdot c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}_C$$

ולכן

$$[T]_C^E = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(e_1)\ ]_C & [T(e_2)\ ]_C \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(ג)

$$[\ T\,(X)\ ]_{\bar{E}} = [T]_{\bar{E}}^E \cdot [X]_E = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}_{\bar{E}}$$

$$[\ T\,(X)\ ]_C = [T]_C^E \cdot [X]_E = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}_C$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}_C = 6 \cdot c_1 - 6 \cdot c_2 + 6 \cdot c_3 = 6 \cdot \bar{e}_1 - 6\,(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + 6 \cdot (\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3) = 6 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + 6 \cdot \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}_{\bar{E}} .$$

דוגמה 12.12

נתונה העתקה לינארית

$$T : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$$

המוגדרת ע"י

$$T(a + bx + cx^2) = a + 2b + 3c + (2a + 4b + 5c)x + (3a + 6b + 9c)x^2 + (4a + 8b + 12c)x^3$$

(א) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית A של T.

(ב) מצאו את המימד ובסיס של $\mathrm{Im}\ T$.

(ג) מצאו את המימד ובסיס של $\ker\ T$.

(ד) מצאו את המטריצה המייצגת של ההעתק ביחס לבסיסים הסדורים

$$B = \{b_1 = 1 + x\ ,\ b_2 = x^2\ ,\ b_3 = x\}$$

של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ וביחס לבסיס

$$C = \{c_1 = x^3\ ,\ c_2 = x^2\ ,\ c_3 = x\ ,\ c_4 = 1\}$$

של $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

(ה) מצאו את

$$\left[T\left(1+x+x^2+x\right)\right]_C$$

פתרון:

(א) נסמן

$$E=\left\{e_1=1,e_2=x,e_3=x^2\right\}$$

הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ ו-

$$\bar{E}=\left\{\bar{e}_1=1,\bar{e}_2=x,\bar{e}_3=x^2,\bar{e}_4=x^3\right\}$$

הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$. המטריצה המייצגת הסטנדרטית היא

$$A=\begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(e_1)]_{\bar{E}} & [T(e_2)]_{\bar{E}} & [T(e_3)]_{\bar{E}} \\ | & | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(1)]_{\bar{E}} & [T(x)]_{\bar{E}} & [T(x^2)]_{\bar{E}} \\ | & | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

(ב) מתקיים:

$$\text{Im }T=\text{Col}A\ .$$

נדרג את המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל ש-

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}\right\}$$

מהווה בסיס של $\text{Col }A$, ולכן $\dim\left(\text{Col }A\right)=2$.

מכאן בסיס של $\text{Im }T$ הוא

$$\left\{1+2x+3x^2+4x^3\ ,\ 3+5x+9x^2+12x^3\right\}$$

ולכן $\dim\left(\text{Im }T\right)=2$

(ג) מתקיים

$$\text{Ker } T \approx \text{Nul } A \ .$$

$$\text{Nul } A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

על סמך החישוב לעיל נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \\ 4 & 8 & 12 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

כך ש-

$$\text{Nul } A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b \in \mathbb{R} \ .$$

לכן בסיס של $\text{Nul } A$ הוא

$$B_{\text{Nul } A} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_E \right\}$$

ו-

$$\text{Dim} \left(\text{Nul } A \right) = 1 \ .$$

מכאן נקבל

$$B_{\text{Ker } T} = \{-2 + x\}$$

ו-

$$\text{Dim} \left(\text{Ker } T \right) = 1 \ .$$

(ד) נחשב את התמונות של ווקטורי הבסיס,

$$T(1+x) = 3+6x+9x^2+12x^3 \ , \qquad T(x^2) = 3+5x+9x^2+12x^3 \ , \qquad T(x) = 2+4x+6x^2+8x^3 \ .$$

נזכיר ש-

$$C = \left\{ c_1 = x^3 \ , \ c_2 = x^2 \ , \ c_3 = x \ , \ c_4 = 1 \right\}$$

ולכן המטריצה המבוקשת היא

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(b_1) \ ]_C & [T(b_2) \ ]_C & [T(b_3) \ ]_C \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 8 \\ 9 & 9 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(ה)

$$\left[T \left(1 + x + x^2 + x \right) \ \right]_C = [T]_C^B \cdot \left[T \left(1 + x + x^2 + x \right) \ \right]_B = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 8 \\ 9 & 9 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 24 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}$$

12.6 קשר בין מרחב העמודות ומרחב האפס להעתקות ליניאריות

משפט 12.9 קשר בין מרחב העמודות ומרחב האפס להעתקות ליניאריות

עבור מרחבים ווקטורים V ו- U והעתקה ליניארית

$$T : U \to V$$

כך ש-

$$\text{Im } T = \left\{ T(u) \in V \middle| u \in U \right\}$$

ו-

$$\text{Ker } T = \left\{ u \in U \middle| T(u) = 0 \right\} .$$

נשים לב שאם

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

אז T מוגדרת ע"י כפל במטריצה, כלומר

$$T(X) = A \cdot X$$

עבור מטריצה מסדר $m \times n$. במקרה זה,

$$\text{Im } T = \text{Col } A$$

ו-

$$\text{Ker } T = \text{Nul } A$$

12.7 הגדרה של איזומורפיזם

משפט 12.10

יהי V מ"ו ויהי

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

בסיס סדור של V. ההעתקה

$$T : V \to \mathbb{R}^n$$

הנתונה ע"י

$$T(X) = [X]_B \qquad \forall \ X \in V$$

היא העתקה ליניארית חח"ע ועל.

הגדרה 12.6 איזומורפיזם בין מרחבים ווקטורים

יהיו U, V מ"ו מעל $\mathbb{R}$. אם קיימת העתקה לינאירת חח"ע ועל

$$T:U\to V\ ,$$

נאמר ש- T איזומורפיזם. בנוסף, נאמר שהמרחבים U ו- V איזומורפיים ונסמן $V\approx U$.

12.8 האיזומורפיזמים הטבעיים

(1) נתון העתקה לינארית

$$T:\mathbb{R}_{\leq 3}[x]\to\mathbb{R}^4$$

ובסיס

$$E=\{1,x,x^2,x^3\}$$

של $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ כך ש- T מוגדרת ע"י

$$T(a+bx+cx^2+dx^3)=\left[a+bx+cx^2+dx^3\right]_E=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}_E\ .$$

אז

$$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]\approx\mathbb{R}^4$$

ע"י האיזומורפיזם הטבעי

$$a+bx+cx^2+dx^3\to\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\ .$$

(2) נתון העתקה לינארית

$$T:\mathbb{R}^{2\times 3}\to\mathbb{R}^6$$

ובסיס

$$\bar{E}=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

של $\mathbb{R}^{2\times 3}$ כך ש- T מוגדרת ע"י

$$T\left(\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}\right)=\left[\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}\right]_{\bar{E}}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{pmatrix}_{\bar{E}}\ .$$

אז

$$\mathbb{R}^{2\times 3}\approx\mathbb{R}^6$$

ע"י האיזומורפיזם הטבעי

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}_{\bar{E}} .$$

משפט 12.11 ע

ל מנת להכריע שאלות במ"ו מסוים (מעל $\mathbb{R}$) ניתן לעבור ל- $\mathbb{R}^n$ המתאים (ע"י ההעתקה לעיל ובחירת הבסיס הסטנדרטי).

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rrr, "T"] \arrow[ddd, "\phi"'] & & & V \arrow[ddd, "\psi"] \\
& X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & T(X) \arrow[d, mapsto] & \\
& {[X]_B} \arrow[r, mapsto] & {[T(X)]_C} & \\
\mathbb{R}^n \arrow[rrr] & & & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

$$[T(X)]_C = [T]_C^B \cdot [X]_B$$

דוגמה 12.13

נתונה טרנספורמציה לינארית

$$T : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$$

המוגדרת ע"י

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+2b+3c & 2a+4b+5c \\ 3a+6b+9c & 4a+8b+12c \end{pmatrix}$$

(א) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

(ב) מצאו את המימד ובסיס של $\text{Im } T$.

(ג) מצאו את המימד ובסיס של $\text{Ker } T$.

(ד) מצאו את המטריצה המייצגת של ההעתקה ביחס לבסיס הסדור

$$B = \{b_1 = 1+x \ , b_2 = x^2 \ , \ b_3 = x\}$$

של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ וביחס לבסיס

$$C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ c_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ c_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

פתרון:

(א)

$$[T]_{\bar{E}}^{E}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}_E=\begin{pmatrix}a+2b+3c\\2a+4b+5c\\3a+6b+9c\\4a+8b+12c\end{pmatrix}_{\bar{E}}$$

$$[T]_{\bar{E}}^{E}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&6&9\\4&8&12\end{pmatrix}=:A$$

(ב)

$$\text{Im }T=\text{Col }A$$

.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&6&9\\4&8&12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

כך שבסיס של $\text{Col }A$ הינו

$$B_{\text{Col }A}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\5\\9\\12\end{pmatrix}\right\}$$

ומימדו 2. מכאן בסיס של $\text{Im }T$ הוא

$$B_{\text{Im }T}=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&5\\9&12\end{pmatrix}\right\}$$

(ג)

$$\text{Ker }T\approx\text{Nul }A\ .$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\2&4&5&0\\3&6&9&0\\4&8&12&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

ולכן

$$\text{Nul }A=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\middle|b\in\mathbb{R}\right\}$$

ומימדו 1. מכאן

$$B_{\text{Ker }T}=\{-2+x\}$$

(ד)

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix}|&|&|\\ [T(b_1)\ ]_C&[T(b_2)\ ]_C&[T(b_3)\ ]_C\\ |&|&|\end{pmatrix}$$

לפי ההגדרה של T:

$$T(b_1)=\begin{pmatrix}3&6\\9&12\end{pmatrix}=12c_1+9c_2+6c_3+3c_4=\begin{pmatrix}12\\9\\6\\3\end{pmatrix}_C$$

$$T(b_2)=\begin{pmatrix}3&5\\9&12\end{pmatrix}=12c_1+9c_2+5c_3+3c_4=\begin{pmatrix}12\\9\\5\\3\end{pmatrix}_C$$

$$T(b_3)=\begin{pmatrix}2&4\\6&8\end{pmatrix}=8c_1+6c_2+4c_3+2c_4=\begin{pmatrix}8\\6\\4\\2\end{pmatrix}_C$$

כך ש-

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix}12&12&8\\9&9&6\\6&5&4\\3&3&2\end{pmatrix}\ .$$

דוגמה 12.14

$$T:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^3$$

המוגדרת ע"י

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b+3c\\2b+3c+4d\\5a+3c+4d\end{pmatrix}$$

(א) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

(ב) מצאו את המימד ובסיס של $\mathrm{Im}\,T$.

(ג) מצאו את המימד ובסיס של $\mathrm{Ker}\,T$.

פתרון:

(א) שימו לב, ביחס לבסיס הסטנדרטית

$$E=\left\{e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\ e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\ ,\ e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\ ,\ e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

של $\mathbb{R}^{2\times2}$ וביחס לבסיס

$$\bar{E}=\left\{\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\ \bar{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\ \bar{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

של $\mathbb{R}^3$, אז

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=ae_1+be_2+ce_3+de_4=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}_E$$

$$[T]_{\bar{E}}^{E}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} a+2b+3c\\ 2b+3c+4d\\ 5a+3c+4d \end{pmatrix}_{\bar{E}}$$

$$[T]_{\bar{E}}^{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = A \ .$$

(ב) $\text{Im } T = \text{Col } A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2\\ 0 & -10 & -12 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2\\ 0 & 0 & 3 & 24 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2\\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2\\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -10\\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

ולכן העמודות

$$B_{\text{Col}A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 5 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} 2\\ 2\\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} 3\\ 3\\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

מהווה בסיס של $\text{Im } T$ ומימדו 3.

(ג) $\text{Ker } T = \text{Nul } A$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0\\ 5 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -10 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 8 & 0 \end{array} \right)$$

ולכן

$$\text{Nul } A = \left\{ \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 4\\ 10\\ -8\\ 1 \end{pmatrix} \ \middle| \ d \in \mathbb{R} \right\}$$

כך ש-

$$B_{\text{Nul } A} = \left\{ \begin{pmatrix} 4\\ 10\\ -8\\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ומימדו 1.

מכאן

$$B_{\text{Ker } T} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & 10\\ -8 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

שעור 13
חיתוך וסכום תת מרחב

13.1 הגדרה של חיתוך וסכום של תתי מרחבים

משפט 13.1 חיתוך של תת מרחב

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, V_1, V_2 תתי מרחבים של V. אז $V_1 \cap V_2$ היא תת מרחב של V.

הוכחה:

1) V_1, V_2 תת מרחבים $\Leftarrow$ $\bar{0} \in V_1$ וגם $\bar{0} \in V_2$ $\Leftarrow$ $\bar{0} \in V_1 \cap V_2$.

2) נניח $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in V_1 \cap V_2$.
אז $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in V_1$ וגם $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in V_2$.
V_1 תת מרחב $\Leftarrow$ $\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \in V_1$.
V_2 תת מרחב $\Leftarrow$ $\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \in V_2$.
ז"א $\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \in V_1 \cap V_2$.

3) נניח $\mathrm{v} \in V_1 \cap V_2$ ו $k \in \mathbb{F}$ סקלר.
אז $\mathrm{v} \in V_1$ ו $\mathrm{v} \in V_2$.
V_1 תת מרחב לכן $k \cdot \mathrm{v} \in V_1$.
V_2 תת מרחב לכן $k \cdot \mathrm{v} \in V_2$.
ז"א $k \cdot \mathrm{v} \in V_1 \cap V_2$.

■

דוגמה 13.1

עבור V_1,V_2 תתי מרחבים של מרחב ווקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$, האם $V_1 \cup V_2$ בהכרח תת מרחב של V?

פתרון:

<u>דוגמה נגדית:</u>

$V = \mathbb{R}^2$.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} , \qquad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} .$$

אז $\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1$, $\mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_2$, אבל $\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \notin V_1 \cup V_2$.

משפט 13.2 תת מרחב הקטן ביותר

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, V_1, V_2 תתי מרחבים של V. אז הקבוצה

$$W = \{\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 | \mathrm{v}_1 \in V_1, \mathrm{v}_2 \in V_2\}$$

היא תת מרחב הקטן ביותר שמכיל את V_1 ו V_2.
ז"א לכל תת מרחב W' שמכיל את V_1 ו V_2, מתקיים $W \subseteq W'$.

הוכחה:

1) נוכיח ש W תת מרחב של V.

א) $\bar{0} \in V_1$ וגם $\bar{0} \in V_2$. לכן

$$\bar{0} = \bar{0} + \bar{0} \in W \ .$$

ב) נניח $w_1 = u_1 + u_2 \in W$, $w_2 = \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \in W$.
אז $u_1, \mathrm{v}_1 \in V_1$ וגם $u_2, \mathrm{v}_2 \in V_2$.
V_1, V_2 תתי מרחבים.
לכן $u_1 + \mathrm{v}_1 \in V_1$, וגם $u_2 + \mathrm{v}_2 \in V_2$.
מכאן

$$w_1 + w_2 = (u_1 + u_2) + (\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2) = (u_1 + \mathrm{v}_1) + (u_2 + \mathrm{v}_2) \in W \ .$$

ג) נניח $w = u_1 + u_2 \in W$ ו $k \in \mathbb{F}$. אז $u_1 \in V_1$ ו $u_2 \in V_2$. V_1, V_2 תתי מרחבים, לכן $ku_1 \in V_1$, $ku_2 \in V_2$. מכאן

$$kw = k(u_1 + u_2) = ku_1 + ku_2 \in W$$

2) נוכיח כי W התת מרחב הקטן ביותר

ברור כי W מכיל את V_1 ו V_2 כי
לכל $u \in V_1$, $u = u + \bar{0} \in W$
וגם לכל $u \in V_2$, $u = \bar{0} + u \in W$.
נוכיח ש W הוא תת מרחב הקטן ביותר שמכיל את V_1 ו V_2.
נניח ש W' איזשהו תת מרחב שמכיל את V_1 ו V_2.
נוכיח כי $W \subseteq W'$.
נקח וקטור $w \in W$. אז $w = u_1 + u_2$, כאשר $u_1 \in V_1$, $u_2 \in V_2$.
$V_1 \in W' \Leftarrow u_1 \in W'$.
$V_2 \in W' \Leftarrow u_2 \in W'$.
W' תת מרחב, לכן $w = u_1 + u_2 \in W'$.
מש"ל.

■

למה 13.1

למרחב W של משפט 13.2 (המשפט הקודם) נקרא הסכום של V_1 ו V_2 ומסומן ב V_1+V_2.

משפט 13.3 סכום של תת מרחב שווה לפרישה של האיחוד

$$V_1+V_2=\text{span}\left(V_1\cup V_2\right) \ .$$

הוכחה: נוכיח כי $V_1+V_2\subseteq \text{span}\left(V_1\cup V_2\right)$:

$V_1,V_2\subseteq \text{span}\left(V_1\cup V_2\right)$
לכן, לפי משפט 13.2,
$$V_1+V_2\subseteq \text{span}\left(V_1\cup V_2\right) \ .$$

נוכיח כי $\text{span}\left(V_1\cup V_2\right)\subseteq V_1+V_2$:

נניח $w\in \text{span}\left(V_1\cup V_2\right)$. אז קיימים $u_1,\ldots,u_k\in V_1$ ו $\text{v}_1,\ldots,\text{v}_n\in V_2$ וסקלרים $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{F}$, $\beta_1,\ldots,\beta_n\in\mathbb{F}$ כך ש
$$w=\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_ku_k+\beta_1\text{v}_1+\cdots+\beta_n\text{v}_n \ .$$
אז $\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_ku_k\in V_1$ וגם $\beta_1\text{v}_1+\cdots+\beta_n\text{v}_n\in V_2$.
לכן $w\in V_1+V_2$.

הוכחנו כי $V_1+V_2\subseteq \text{span}\left(V_1\cup V_2\right)$ וגם $\text{span}\left(V_1\cup V_2\right)\subseteq V_1+V_2$ $\Leftarrow$
$$V_1+V_2=\text{span}\left(V_1\cup V_2\right) \ .$$

■

דוגמה 13.2

נקח את המרחב ווקטורי $V=\mathbb{R}^3$. נקח את התתי מרחבים $\mathbb{R}^3$: $V_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}$, ו $V_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}\middle| y\in\mathbb{R}\right\}$, קווים ישרים ב $\mathbb{R}^3$. אז הסכום שלהם הינו
$$V_1+V_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\middle| x,y\in\mathbb{R}\right\} ,$$
ומהווה את המישור $z=0$ ב $\mathbb{R}^3$.

13.2 משפט המימדים של סכום וחיתוך

משפט 13.4 משפט המימדים

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, V_1, V_2 תתי מרחבים של V. אז

$$\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1\cap V_2)$$

הוכחה: נסמן $\dim(V_1)=k$, $\dim(V_2)=n$, $\dim(V_1\cap V_2)=m$.

$V_1\cap V_2\subseteq V_1$ לכן $m\leq k$.

$V_1\cap V_2\subseteq V_2$ לכן $m\leq n$.

נבחר בסיס $u_1,\ldots,u_m$ של $V_1\cap V_2$.

נשלים אותו לבסיס של V_1 ונקבל

$u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m}$.

נשלים אותו גם לבסיס של V_2:

$u_1,\ldots,u_m,b_1,\ldots,b_{n-m}$.

<u>נוכיח כי $V_1+V_2=\text{span}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}.\right)$:</u>

נניח $w=\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\in V_1+V_2$. אז

$$\mathrm{v}_1=\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_mu_m+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}\in V_1\ ,$$
$$\mathrm{v}_2=\alpha'_1u_1+\ldots+\alpha'_mu_m+\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}\in V_2\ .$$

אז

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2=&\left(\alpha_1+\alpha'_1\right)u_1+\ldots+\left(\alpha_m+\alpha'_m\right)u_m\\&+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}\\&+\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}\end{aligned}$$

ז"א

$$\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\in\text{span}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\right)$$

<u>נוכיח את ההכלה ההפוכה, כלומר $\text{span}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\right)\in V_1+V_2$:</u>

נניח

$$w\in\text{span}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\right)$$

אז קיימים סקלרים $\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots,\beta_{k-m},\gamma_1,\ldots,\gamma_{n-m}$ כך ש

$$w=\alpha_1u_1+\ldots\alpha_mu_m+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}+\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}$$

נסמן

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_1=&\alpha_1u_1+\ldots\alpha_mu_m+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}\\\mathrm{v}_2=&\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}\end{aligned}$$

אז

$$\mathrm{v}_1\in V_1,\qquad \mathrm{v}_2\in V_2,\qquad w=\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2$$

כלומר $w\in V_1+V_2$.

<u>נשאר להוכיח שוקטורים $\{u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\}$ בת"ל:</u>

נניח:

$$\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k-m} a_{k-m} + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{n-m} b_{n-m} = \bar{0} \ . \qquad (*1)$$

אז

$$\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k-m} a_{k-m} = -\gamma_1 b_1 - \ldots - \gamma_{n-m} b_{n-m} := \mathrm{v}. \qquad (*2)$$

הוקטור באגף השמאל שייך ל V_1.
הוקטור באגף הימין שייך ל V_2.
לכן, לפי (*2) $\mathrm{v} \in V_1 \cap V_2$. $u_1, \ldots, u_m$ בסיס של $V_1 \cap V_2$ (נתון) . לכן קיימים סקלרים $\delta_1, \ldots, \delta_m$ כך ש

$$\mathrm{v} = \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m \ .$$

לכן

$$\begin{aligned} \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{n-m} b_{n-m} =& \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m - (-\gamma_1 b_1 - \ldots - \gamma_{n-m} b_{n-m}) \\ =& \mathrm{v} - \mathrm{v} \\ =& \bar{0} \ , \end{aligned}$$

ז"א

$$\delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{n-m} b_{n-m} = \bar{0} \ . \qquad (*3)$$

$u_1, \ldots u_m, b_1, \ldots, b_{n-m}$ בסיס של V_2 (נתון) . לכן הם בת"ל. לכן (*3) מתקיים רק אם

$$\delta_1 = \ldots = \delta_m = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{n-m} = 0 \ . \qquad (*4)$$

מכאן מקבלים מ (*1) כי

$$\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k-m} a_{k-m} = \bar{0} \ . \qquad (*5)$$

$u_1, \ldots u_m, a_1, \ldots, a_{k-m}$ בסיס של V_1 (נתון) , לכן הם בת"ל.
לכן (*5) מתקיים רק אם

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \beta_1 = \ldots = \beta_{k-m} = 0. \qquad (*6)$$

לכן, בגלל שהמקדמים ב (*1) כולם שווים ל 0, כפי שהוכחנו ב (*4) ו (*6), אז הוקטורים $u_1, \ldots u_m, a_1, \ldots, a_{k-m}, b_1, \ldots . b_{n-m}$ בת"ל. כלומר הם מהווים בסיס של $V_1 + V_2$.
מכאן

$$\dim(V_1 + V_2) = m + (k - m) + (n - m) = k + n - m = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

מש"ל. ■

מסקנה 13.1

נניח $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ תתי מרחבים ממימד 2, אז $\dim(V_1 \cap V_2) > 0$.

הוכחה: V_1, V_2 תתי מרחבים של $\mathbb{R}^3$, לכן $\dim(V_1 + V_2) \leq 3$. לפי משפט **??**,

$$4 = \dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) \leq 3 + \dim(V_1 \cap V_2)$$

■

13.3 כיצד למצוא בסיס ומימד של סכום וחיתוך תת מרחב

נניח כי U, V תתי מרחבים של $\mathbb{R}^n$. ונניח ש

$$\{\mathrm{u}_1,\ldots,\mathrm{u}_k\}$$

בסיס של U ו

$$\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_l\}$$

בסיס של V. כדי למצוא בסיס של $V+W$, נרשום מטריצה Q מסדר $n\times(k+l)$ המורכב מהבסיסים של U ו V:

$$Q=\begin{pmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ \mathrm{u}_1 & \mathrm{u}_2 & \ldots & \mathrm{u}_k & \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \ldots & \mathrm{v}_l \\ | & | & & | & | & | & & | \end{pmatrix}$$

אז המרחב העמודות של $U+V$ שווה למרחב העמודות של Q:

$$\mathrm{col}(Q)=\mathrm{col}(U+V)$$

ובסיס של $\mathrm{col}(Q)$ שווה גם לבסיס של $U+V$:

$$B(Q)=B(U+V)\ .$$

בסיס של $U\cap V$ ניתן למצוא ע"י המרחב האפס של Q, $\mathrm{Nul}(Q)$. נניח כי הוקטור x במרחב האפס של Q, כלומר $\mathrm{x}\in\mathrm{Nul}(Q)\subseteq\mathbb{R}^{k+1}$. נניח כי הרכיבים של x הם

$$\mathrm{x}=\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_k\\ b_1\\ \vdots\\ b_l\end{pmatrix}\ .$$

כיוון שוקטור x ב $\mathrm{Nul}(Q)$ אז

$$Q\cdot\mathrm{x}=\begin{pmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ \mathrm{u}_1 & \mathrm{u}_2 & \ldots & \mathrm{u}_k & \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \ldots & \mathrm{v}_l \\ | & | & & | & | & | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_k\\ b_1\\ \vdots\\ b_l\end{pmatrix}=a_1\mathrm{u}_1+\ldots+a_k\mathrm{u}_k+b_1\mathrm{v}_1+\ldots+b_l\mathrm{v}_l=\bar{0}\ . \qquad (1*)$$

עכשיו נעביר את כל האיברים של הבסיס $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_l$ לאגף הימין ונקבל

$$a_1\mathrm{u}_1+\ldots+a_k\mathrm{u}_k=-b_1\mathrm{v}_1-\ldots-b_l\mathrm{v}_l\ . \qquad (*2)$$

שימו לב הצירוף לינארי באגף השמאל הוא וקטור של U והצירוף לינארי באגף הימין הוא וקטור של V. נקרא הוקטור הזה y:

$$\text{y} := a_1\text{u}_1 + \ldots + a_k\text{u}_k = -b_1\text{v}_1 - \ldots - b_l\text{v}_l \ . \tag{*3}$$

כך קיבלנו וקטור y השייך גם ל U וגם ל V, או במילים אחרות

$$\text{y} \in U \cap V \ .$$

דוגמה 13.3

נתונים וקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix} , \qquad u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} , \qquad u_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} , \qquad u_4 = \begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix} .$$

נסמן

$$V_1 = \text{span}(u_1, u_2) \ , \qquad V_2 = \text{span}(u_3, u_4) \ .$$

מצאו בסיס ומימד של V_1,V_2 ו $V_1 \cap V_2$.

פתרון:

בסיס של V_1:

$$\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\0&1\\0&-1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

בסיס של V_1:

$$B(V_1) = \{\text{u}_1, \text{u}_2\}$$

$\dim(V_1) = 2$.

בסיס של V_2:

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&3\\1&0\\0&1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1\\0&3\\0&-1\\0&1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1\\0&3\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

בסיס של V_2:

$$B(V_2) = \{\text{u}_3, \text{u}_4\}$$

$\dim(V_2) = 2$.

$$Q = (\text{u}_1, \text{u}_2, \text{u}_3, \text{u}_4) = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&1&0&3\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\rightarrow R_4-R_1]{R_2\rightarrow R_2-2R_1} \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&1\\0&1&1&0\\0&-1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4\rightarrow R_4-R_2]{R_3\rightarrow R_2+R_3} \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&1\\0&0&-1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\rightarrow R_3+R_4} \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

העמודות 1, 2, 3 מובילות לכן בסיס של V_1+V_2 הוא

$$B(V_1+V_2)=\{\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2,\mathrm{u}_3\}$$

ו $\dim(V_1+V_2)=3$.

לפי משפט המימדים:

$$\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1\cap V_2)$$

כיוון ש $\dim(V_1)=2$, $\dim(V_2)=2$, ו $\dim(V_1+V_2)=3$, אז

$$\dim(V_1\cap V_2)=1\ .$$

כדי למצוא בסיס של $V_1\cap V_2$ נמצא את $\mathrm{Nul}Q$. מסעיף הקודם המדורגת של Q היא:

$$Q\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית $Q\mathrm{x}=0$ הוא

$$\left.\begin{aligned}x+y+z+w&=0\\-y-2z+w&=0\\-z+w&=0\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\left.\begin{aligned}x&=-y-z-w\\y&=-2z+w\\z&=w\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\left.\begin{aligned}x&=-w\\y&=-w\\z&=w\end{aligned}\right\}$$

כלומר

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}w$$

לכן בסיס של $\mathrm{Nul}Q$ הוא מורכב וקטור אחד:

$$B\left(\mathrm{Nul}(Q)\right)=\left\{\mathrm{x}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\ .$$

הוקטור x מקיים את משוואת ההומוגנית של Q, לכן

$$Q\cdot\mathrm{x}=\bar{0}\qquad\Rightarrow\qquad(\mathrm{u}_1\ \mathrm{u}_2\ \mathrm{u}_3\ \mathrm{u}_4)\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\bar{0}$$

לכן נקבל

$$-1\cdot\mathrm{u}_1-1\cdot\mathrm{u}_2+1\cdot\mathrm{u}_3+1\cdot\mathrm{u}_4=\bar{0}\qquad\Rightarrow\qquad\mathrm{u}_1+\mathrm{u}_2=\mathrm{u}_3+\mathrm{u}_4\ .$$

נגדיר את שני האגפים להיות הוקטור y:

$$\mathrm{y}:=\mathrm{u}_1+\mathrm{u}_2=\mathrm{u}_3+\mathrm{u}_4$$

נציב את הוקטורים ונמצא כי

$$\mathrm{y}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\end{pmatrix}\ .$$

לכן בסיס של $V\cap U$ הוא

$$B(V\cap U)=\{\mathrm{y}\}=\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

דוגמה 13.4

נניח כי $U\in\mathbb{R}^5$ תת מרחב עם בסיס

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\\2\\3\end{pmatrix}\ ,\quad u_2=\begin{pmatrix}1\\4\\-3\\4\\2\end{pmatrix}\ ,\quad u_3=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\2\\3\end{pmatrix}\ ,$$

ונניח כי $W\in\mathbb{R}^5$ תת מרחב עם בסיס

$$w_1=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\\-2\\9\end{pmatrix}\ ,\quad w_2=\begin{pmatrix}1\\5\\-6\\6\\1\end{pmatrix}\ ,\quad w_3=\begin{pmatrix}2\\4\\4\\2\\8\end{pmatrix}\ .$$

מצאו המימד והבסיס של $U\cap W$.

פתרון:

$$Q=\begin{pmatrix}1&1&1&2&1&2\\3&4&3&3&5&4\\-2&-3&0&-1&-6&4\\2&4&2&-2&6&2\\3&2&3&9&1&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&5&0&0\\0&1&0&-3&2&0\\0&0&1&0&-1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

מכאן נקבל בסיס של $\mathrm{Nul}(Q)$

$$B_{\mathrm{Nul}(Q)}=\left\{b_1=\begin{pmatrix}-5\\3\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{aligned}Qb_1=&0\quad\Rightarrow\quad -5u_1+3u_2+w_1=0\ ,\\ Qb_2=&0\quad\Rightarrow\quad -2u_1+u_3+w_2=0\ .\end{aligned}$$

מכאן נקבל בסיס של $U\cap W$:

$$B_{U\cap W}=\{x_1,x_2\}$$

כאשר

$$x_1 = 5u_1 - 3u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} = w_1 \ , \qquad x_2 = 2u_1 - u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = w_2 \ .$$

שעור 14
סכום ישר

דוגמה 14.1 סכום ישר

נניח ש

$$U_1=\left\{\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}\middle|y,z\in\mathbb{R}\right\}$$

תת מרחב של $\mathbb{R}^3$ ו

$$U_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix}\middle|x,z\in\mathbb{R}\right\}$$

תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.
אז $\dim\left(U_1\right)=\dim\left(U_2\right)=2$.

$$U_1\cap U_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}\middle|z\in\mathbb{R}\right\}\ ,\dim\left(U_1\cap U_2\right)=1\ .$$

$$U_1+U_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\0\\z_2\end{pmatrix}\middle|y_1,z_1,x_2,z_2\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x_2\\y_1\\z_1+z_2\end{pmatrix}\middle|x_2,y_1,z_1+z_2\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}^3\ .$$

אז כל וקטור $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in U_1+U_2$ ניתן להציג כסכום של וקטורים של U_1 ו U_2 באינסוף דרכים שונות:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}\ ,$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\\z-z_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\0\\z_0\end{pmatrix}$$

לכל $z_0\in\mathbb{R}$.

דוגמה 14.2

$$U_1=\left\{\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}\middle|y,z\in\mathbb{R}\right\}$$
$$U_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}\middle|x\in\mathbb{R}\right\}$$

U_1, U_2 תת מרחבים של U_1, U_2.

$$\dim(U_1) = 2 \ , \qquad \dim(U_2) = 1 \ .$$

$$U_1 \cap U_2 = \{\bar{0}\} \ ,$$

$$U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3 \ ,$$

ולכל וקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ יש דרך יחידה להציג אותו כסכום של וקטורים של U_1 ו U_2:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

דוגמה **??** היא דוגמה של סכום ישר של תת מרחבים.

הגדרה 14.1 סכום ישר

יהיו U_1 ו U_2 שני תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$.
תת מרחב W של מרחב וקטורי V נקרא סכום ישר של U_1 ו U_2 אם ורק אם מתקיימים:

א) $W = U_1 + U_2$

ב) לכל וקטור של W יש הצגה יחידה כסכום של וקטורים ב U_1 וב U_2.

סימון:

$$W = U_1 \oplus U_2$$

הסכום הישר של U_1, U_2.

משפט 14.1

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, U ו W תת מרחבים של V. אז $V = U \oplus W$ אם ורק אם

א) $V = U + W$

ב) $U \cap W = \{\bar{0}\}$.

הוכחה:

1) נניח כי $V = U \oplus W$. אז לפי הגדרה **??**, סכום ישר $V = U + W$. נשאר להוכיח כי $U \cap W = \{\bar{0}\}$.
נניח $\mathrm{v} \in U \cap W$, אז $\mathrm{v} \in U$ וגם $\mathrm{v} \in W$. לכן אפשר לרשום

$$\mathrm{v} = \underset{\in U}{\mathrm{v}} + \underset{\in W}{\bar{0}}$$

וגם

$$\mathrm{v} = \underset{\in U}{\bar{0}} + \underset{\in W}{\mathrm{v}}$$

מכיוון שהסכום הוא ישר, יש רק דרך יחידה לרשום את v כססכום של וקטורים של U ו W. לכן $\mathrm{v} = \bar{0}$.

2) נניח כי $V = U + W$ וגם $U \cap W = \{\bar{0}\}$.

נוכיח כי $V = U \oplus W$.

לפי הגדרת סכום ישר **??**, נשאר להוכיח כי כל וקטור $\mathrm{v} \in V$ ניתן להציג בדרך יחידה כסכום של וקטורים של U ו W.

נקח $\mathrm{v} \in V$. נניח כי $\mathrm{v} = u_1 + \mathrm{w}_1$ וגם $\mathrm{v} = u_2 + \mathrm{w}_2$ כאשר $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$.

אז

$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \qquad \Rightarrow \qquad u_1 - u_2 = w_2 - w_1$$

(כאשר $u_1 - u_2 \in U$ ו $w_2 - w_1 \in W$. לכן

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{\bar{0}\} \ .$$

מכאן, $u_1 - u_2 = \bar{0}$ וגם $w_2 - w_1 = \bar{0}$.

לכן $u_1 = u_2$ וגם $w_1 = w_2$.

■

דוגמה 14.3

נסמן

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{F} \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{F} \right\}$$

U קבוצת כל המטריצות הסימטריות מסדר 2×2,

W קבוצת כל המטריצות האנטי-סימטריות מסדר 2×2.

U, W תת מרחבים של מרחב וקטורי $\mathbb{F}^{2\times 2}$. הראו כי $\mathbb{F}^{2\times 2} = U \oplus W$.

הוכחה:

1) <u>צריך להוכיח:</u> $U \cap W = \{\bar{0}\}$.

נניח $\mathrm{v} \in U \cap W$. $\Leftarrow$

$$\mathrm{v} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ -b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

מכאן, $a_1 = 0$, $c_1 = 0$, $b_1 = b_2$ ו $b_1 = -b_2$.

לכן $b_1 = b_2 = 0$.

ז"א $\mathrm{v} = \bar{0}$.

2) <u>נוכיח כי:</u> $\mathbb{F}^{2\times 2} = U + W$.

לכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{2\times 2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. נגדיר מטריצות $B = A + A^t$ ו $C = A - A^t$, ז"א

$$B = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix} \in U$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} \in W$$

אז

$$A = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C \in U + W \ .$$

■

משפט 14.2

נניח ש V מרחב וקטורי ממיד n, U תת מרחב של V ממימד m, אז קיים תת מרחב W ממימד $n-m$ כך ש $V = U \oplus W$.

הוכחה: נבחר בסיס כלשהו של U:

$$u_1, \ldots, u_m$$

ונשלים אותו לבסיס של V:

$$u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n$$

אז

$$U = \text{span}(u_1, \ldots, u_m)$$

$$V = \text{span}(u_1, \ldots, u_n)$$

נגדיר

$$W = \text{span}(u_{m+1}, \ldots, u_n)$$

נוכיח כי $V = U \oplus W$.

1) לכל $V \in V$ קיימים סקלרים $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{F}$ כך ש

$$\text{v} = k_1 u_1 + \ldots + k_m u_m + k_{m+1} u_{m+1} + \ldots + k_n u_n$$

נסמן

$$u = k_1 u_1 + \ldots + k_m u_m \in U \ , \qquad w = k_{m+1} u_{m+1} + \ldots + k_n u_n \in W \ .$$

אז $\text{v} = u + w \Leftarrow V = U + W$.

2) <u>נוכיח כי:</u> $U \cap W = \{\bar{0}\}$.

נניח $\text{v} \in U \cap W \Leftarrow \text{v} \in U$ ו $\text{v} \in W$.

לכן

$$\text{v} = k_1 u_1 + \ldots + k_m u_m$$

וגם

$$\mathrm{v} = k_{m+1}u_{m+1} + \ldots + k_n u_n$$

מכאן:

$$k_1u_1 + \ldots + k_m u_m - k_{m+1}u_{m+1} - \ldots - k_n u_n = \bar{0} \ .$$

$u_1, \ldots, u_n$ בת"ל לכן

$$k_1 = 0, \ldots, k_n = 0 \ .$$

מכאן מקבלים כי $\mathrm{v} = \bar{0}$.

משל.

■