1 דוגמא. מטילים 2 קוביות. נסמן ב- X את סכום התוצאות שהתקבלו. כמו כן

$$\begin{aligned} &\omega=\{(1,1)\}, && X(\omega)=2,\\ &\omega=\{(2,1),(1,2)\}, && X(\omega)=3,\\ &\omega=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}, && X(\omega)=4,\\ &\vdots\\ &\omega=\{(6,6)\}, && X(\omega)=12. \end{aligned}$$

זו דוגמה של מ"מ כאשר X הוא המשתנה המקרי.

2 דוגמא. מטילים 3 קוביות הוגנות. נגדיר משתנה מקרי X להיות התוצאה המקסימלית מבין ההטלות. כמו כן

$$\begin{aligned} &\omega=\{(1,1,1)\}, && X(\omega)=1,\\ &\omega=\{(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}, && X(\omega)=2,\\ &\vdots\\ &\omega=\{(3,2,1),(2,3,1),(1,2,3),\dots\}, && X(\omega)=3,\\ &\vdots\\ &\omega=\{(6,6,6)\}, && X(\omega)=6. \end{aligned}$$

זו דוגמה של מ"מ כאשר X הוא המשתנה המקרי.

3 דוגמא. נטיל קוביה הוגנת ונניח כי X מחזיר את תוצאת ההטלה. אזי

$$\text{Supp}(X)=\{1,2,3,4,5,6\}$$

וההתפלגות של X היא

$$f_X(k)=\begin{cases}\frac{1}{6} & k\in\text{supp}(X)\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

במילים, $f_X(k)=\frac{1}{6}$ לכל k בתומך, ו- 0 אחרת. חשוב לזכור שהתפלגות היא פונקציה ולכן יש צורך לתאר אותה בכל נקודה. משמע, זה לא מספיק לציין את ערכי הפונקציה רק על התומך, אלא בכל נקודה $k\in\mathbb{R}$.

4 דוגמא. אלון הוא סוחר ממולח בשוק ההון. הוא משקיע סכום של $\$1000$ במכשיר פיננסי אשר בכל שנה מכפיל את הכסף בסיכוי $\frac{2}{3}$ או מפסיד חצי מההשקעה בסיכוי $\frac{1}{3}$. השנים הן בלתי תלויות. נגדיר את X להיות שווי ההשקעה של אלון לאחר שנתיים. התומך של X כעת הוא

$$\text{supp}(X)=\{250,1000,4000\}\ ,$$

על כן, ההתפלגות של X היא

$$f_X(1000)=\frac{4}{9},\quad f_X(4000)=\frac{4}{9},\quad f_X(250)=\frac{1}{9}$$

ו - 0 אחרת.

5 דוגמא. מטילים 2 קוביות. נסמן ב- X את סכום התוצאות שהתקבלו. מצאו את ההתפלגות של X.

פיתרון. נתחיל מהתומך. התוצאות האפשרויות בסכום של 2 קוביות הן המספרים הטבעיים מ- 2 עד 12. בכדי לחשב את ההסתברות לכל ערך נשתמש במרחב מדגם סימטרי: גודל מרחב המדגם הוא $6^2 = 36$, ככמות האפשרויות לבחור תוצאה לקוביה הראשונה מתוך 6 ותוצאה לקוביה השניה מתוך 6. נחשב את ההסתברות של כל תוצאה בנפרד:

$$\begin{aligned}
P(X=2) &= \frac{|\{(1,1)\}|}{6^2} &&= \frac{1}{36},\\
P(X=3) &= \frac{|\{(2,1),(1,2)\}|}{6^2} &&= \frac{2}{36},\\
P(X=4) &= \frac{|\{(1,3),(2,2),(3,1)\}|}{6^2} &&= \frac{3}{36},\\
&\vdots\\
P(X=7) &= \frac{|\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}|}{6^2} &&= \frac{6}{36},\\
P(X=8) &= \frac{|\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}|}{6^2} &&= \frac{5}{36},\\
P(X=9) &= \frac{|\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}|}{6^2} &&= \frac{4}{36},\\
&\vdots\\
P(X=12) &= \frac{|\{(6,6)\}|}{6^2} &&= \frac{1}{36},
\end{aligned}$$

ובאופן דומה ממשיכים לחשב את האפשרויות לכל הערכים האפשריים בתומך. באופן כללי קל לראות שהנוסחא, כאשר p זו הסכום של ה 2 הקוביות, היא (עיין משוואה (**??**) לעייל)

$$P(X=p) = \frac{1}{36} \times \begin{cases} (p-1) & p<8 \\ (p-1)-2(p-7) & 8 \le p < 14 \end{cases}$$

■

6 הגדרה. (פונקצית התפלגות מצטברת) פונקצית התפלגות מצטברת מסומנת ע"י $F_X(x)$ של מ"מ בדיד X בעל פונקצית התפלגות $f_X(k)$ מוגדרת להיות

$$F_X(x) = \sum_{\substack{k\in X\\ k\le x}} f_X(k)\ .$$

במילים אחרות, פונקצית התפלגות מצטברת $F_X(x)$ מוגדרת להיות הפונקציה שתחומה הוא הישר הממשי וטווחה הקטע $[0,1]$ ומקיימת

$$F_X(x) = P(X \le x) \qquad \forall x \in X\ .$$

7 דוגמא. אלון הוא סוחר ממולח בשוק ההון. הוא משקיע סכום של $\$1000$ במכשיר פיננסי אשר בכל שנה מכפיל את הכסף בסיכוי $\frac{2}{3}$ או מפסיד חצי מההשקעה בסיכוי $\frac{1}{3}$. השנים הן בלתי תלויות. נגדיר את X להיות שווי ההשקעה של אלון לאחר שנתיים. מצאו את פונקצית ההתפלגות המצטברת של X וציירו אותה.

פיתרון. כפי שציינו בדוגמה 4, התומך של X כעת הוא

$$\mathrm{supp}(X) = \{250, 1000, 4000\}\ .$$

על כן, פונקצית ההתפלגות המצטברת של X היא

$$F_X(k) = P(X \le k) = \begin{cases} 0 & k < 250, \\ \frac{1}{9} & 250 \le k < 1000, \\ \frac{5}{9} & 1000 \le k < 4000, \\ 1 & 4000 \le k. \end{cases}$$

■

8 דוגמא. התוחלת של הטלת קוביה היא

$$E[X] = \sum_{k=1}^{6} k\frac{1}{6} = \frac{7}{2} \ .$$

9 דוגמא. בן הוא סוחר מתוחכם ולכן הוא מציע לאלון להפקיד אצלו 100 שקלים בתחילת השנה. בסיכוי של $\frac{2}{5}$ הסכום יוכפל, ובסיכוי $\frac{2}{5}$ הסכום יצטמצם בחצי בסוף השנה. מה תהיה תוחלת הכסף של אלון לאחר קבלת ההצעה? נסמן ב- X את שווי כסף של אלון בסוף השנה.

$$E[X] = 200.\frac{2}{5} + 50.\frac{3}{5} = 110.$$

זאת אומרת שהצעתו של בן מגלמת תוחלת רווח של 10%!

10 דוגמא. בחנות ירקות קטנה ישנם 3 תפוחים ו-4 אגסים. אלון קונה 2 פירות באקראי. בן המוכר מרוויח על כל תפוח 2 ש"ח ועל כל אגס 4 ש"ח. מצאו את תוחלת הרווח של בן.

פיתרון. נגדיר מ"מ Q עבור הרווח של בן, ומשתנה מקרי X כמספר התפוחים שאלון קנה. על כן,

$$Q = 2X + 4(2 - X) = 8 - 2X$$

$$P(X = 1) = \frac{4}{7}, \qquad P(X = 2) = \frac{3}{7}.\frac{2}{6} = \frac{1}{7}, \qquad P(X = 0) = \frac{4}{7}.\frac{3}{6} = \frac{2}{7} \ .$$

מכאן נובע ש

$$E[X] = 0.\frac{2}{7} + 1.\frac{4}{7} + 2.\frac{1}{7} = \frac{6}{7} \ .$$

נשתמש בתכונת הליניאריות לחישוב התוחלת של

$$E[Q] = 8 - 2E[X] = 8 - \frac{12}{7} = \frac{44}{7} \ .$$

■

דוגמא. בוחרים קוד באורך 10 תווים, כאשר כל תו נבחר באקראי מתוך הספרות 9 – 0 ללא קשר לתווים האחרים שנבחרו. נסמן ב- X מ"מ הסופרים את מספר הרצפים 11 בקוד. חשבו את $E[X]$.

פיתרון. נגדיר מ"מ $X_i, \ i = 1, \ldots, 9$ כאשר X_i מקבל את הערך 1 אם ורק אם במקום ה- i מתחיל רצף של 11. לכן

$$X = \sum^{9} X$$

$$\begin{aligned}
E[X] =& E\left[\sum_{i=1}^{9} X_i\right] \\
=& \sum_{i=1}^{9} E\left[X_i\right] \\
=& \sum_{i=1}^{9} \left[1.P(X_i=1)+0.P(X_i=0)\right] \\
=& \sum_{i=1}^{9} P(X_i=1) \\
=& \sum_{i=1}^{9} \frac{1}{10}.\frac{1}{10} \\
=& \frac{9}{100}\ .
\end{aligned}$$

■

11 דוגמא. ניקח משתנה מקרי X בעל התפלגות

$$P(X=k)=\begin{cases}\frac{1}{3} & k=-1,\\ \frac{1}{6} & k=0,\\ \frac{1}{2} & k=1.\end{cases}$$

חשבו את $E[X]$ ואת $E[X^4]$.

פיתרון. נשתמש בהגדרת התוחלת ונקבל

$$\begin{aligned}
E[X] =& (-1).\frac{1}{3}+0.\frac{1}{6}+1.\frac{1}{2} &= \frac{1}{6},\\
E[X^4] =& (-1)^4.\frac{1}{3}+0^4.\frac{1}{6}+1^4.\frac{1}{2} &= \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

■

12 דוגמא. נניח ש X הוא המספר של רכבים אשר עוברים דרך השתיפת רכב בין השעות $16:00$ ו- $17:00$. ל- X יש את ההתפלגות

k	4	5	6	7	8	9
$P(X=k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

הפונקציה $g(X)=2X-1$ מציינ את הרווח ב \$ עבור X. מצאו את תוחלת הרווח בין השעות $16:00$ ו- $17:00$.

פיתרון.

$$\begin{aligned}
E[g(X)] =& E[2X-1] \\
=& \sum_{k=4}^{9}(2x-1)f_X(k) \\
=& 7.\frac{1}{12}+9.\frac{1}{12}+11.\frac{1}{4}+13.\frac{1}{4}+15.\frac{1}{6}+17.\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

■

13 דוגמא. בר היא בנקאית השקעות מתוחכמת המציעה ללקוחותיה את ההגרלה הבאה: בסיכוי $\frac{2}{5}$ תקבלו רווח של 10. בסיכוי $\frac{1}{5}$ לא תרוויחו ולא תפסידו דבר, ובסיכוי $\frac{3}{5}$ תפסידו 5. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של X המייצג את הרווח מהשקעה אצל בר.

פיתרון. תוחלת הרווח היא חיובית שכן

$$
\begin{aligned}
E[X] &= 10.\frac{2}{5} + 0.\frac{1}{5} - 5.\frac{2}{5} && = 2, \\
(E[X])^2 &= 100.\frac{2}{5} + 0^2.\frac{1}{5} + 25.\frac{2}{5} && = 50, \\
V(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 && = 50 - 4 = 46, \\
\Rightarrow \quad \sigma_X &= \sqrt{46}\ .
\end{aligned}
$$

■