שיעור 3
כפל מטריצות וייצוג מערכת באמצעות $AX = b$

3.1 מושג של מטריצה

מטריצה זאת טבלה של מספרים. הצורה הכללית של מטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

A מטריצה מסדר $m \times n$ (m שורות ו- n עמודות).

אם כל האיברים מספרים ממשיים אומרים כי A מטריצה מעל השדה $\mathbb{R}$ בעלת m שורות ו- n עמודות.
סימון: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

האיבר בשורה i בעמודה j מסומן

$$A_{ij}$$

האינדקס הראשון, "i" מסמן את משורה, והאינדקס השני "j" מסמן את העמודה.
מפתח לזכור האינדקסים:

$$A_{\text{שע}}$$

כאשר ה- ""ש" מסמן את השורה וה-"ע" מסממן את העמודה.

דוגמה 3.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 23 & 45 & 2 \\ 12 & 34 & 67 & 87 & 55 \\ 22 & 33 & 66 & 89 & 19 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5} .$$

האיבר בשורה 3 בעמודה 4 הוא 89. נסמן

$$A_{34} = 89$$

האיבר בשורה 1 בעמודה 5 הוא 2. נסמן

$$A_{15} = 2$$

האיבר בשורה 2 בעמודה 3 הוא 67. נסמן

$$A_{23} = 67$$

■

אם $m = n$ למטריצה קוראים מטריצה ריבועית.

3.2 מטריצות ריבועיות מיוחדות

מטריצה אלכסונית:
$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

מטריצה משולשית עליונה
$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

מטריצה משולשית תחתונה
$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

מטריצת האפס
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

מטריצה היחידה
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.2

1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית.

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית.

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית.

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ לא מטריצה אלכסונית.

3.3 חיבור מטריצות וכפל מטריצות בסקלר

הגדרה 3.1 חיבור מטריצות

לכל מטריצות A,B מסדר $m\times n$ מוגדרת מטריצה $A+B$:

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1n}+B_{1n} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2n}+B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}+B_{m1} & A_{m2}+B_{m2} & \cdots & A_{mn}+A_{mn} \end{pmatrix}$$

במילים אחרות, האיבר ה- ij של המטריצה $A+B$ ניתן ע"י

$$(A+B)_{ij}=A_{ij}+B_{ij}\ .$$

אפשר לחבר מטריצות של אותו גודל בלבד!

לדוגמה $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ לא מוגדר!

הגדרה 3.2 כפל מטריצה בסקלר

לכל מטריצות A מסדר $m\times n$:

$$\alpha\cdot A=\alpha\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \cdots & \alpha A_{1n} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} & \cdots & \alpha A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha A_{m1} & \alpha A_{m2} & \cdots & \alpha A_{mn} \end{pmatrix}$$

במילים אחרות, האיבר ה- ij של המטריצה $\alpha\cdot A$ ניתן ע"י

$$(\alpha\cdot A)_{ij}=\alpha\cdot A_{ij}\ .$$

דוגמה 3.3 חיבור מטריצות

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 11 & 5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+6 & 2+8 & 5+9 \\ 3+11 & 4+5 & 0+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 10 & 14 \\ 14 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.4 כפל מטריצה בסקלר

$$7\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\cdot 1&7\cdot 2\\7\cdot 3&7\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&14\\21&28\end{pmatrix}$$

■

משפט 3.1 תכונות של חיבור מטריצות וכפל מטריצות

יהיו $A,B,C\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו- $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. אזי:

(1 חוק החילוף של חיבור מטריצות:

$$A+B=B+A\ .$$

(2 חוק הקיבוץ של חיבור מטריצות:

$$(A+B)+C=A+(B+C)\ .$$

(3

$$A+0=A\ .$$

(4

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B\ .$$

(5

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A\ .$$

(6

$$\alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\cdot\beta)\cdot A\ .$$

הוכחה מיידית מההגדרות.

3.4 מטריצה משוחלפת

הגדרה 3.3 מטריצה משוחלפת

בהינתן מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ (מטריצה בעלת m שורות ו- n עמודות):

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{m1}&A_{m2}&\cdots&A_{mn}\end{pmatrix}$$

המטריצה המשוחלפת של A מסומנת ב- A^t והיא מטריצה בעלת n שורות ו- m עמודות המתקבלת מהמטריצה A ע"י להחליף שורות עם עמודות:

$$A^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

במילים אחורת, האיבר ה- i,j של המטריצה המשוחלפת של A ניתן ע"י

$$A^t_{ij} = A_{ji} \ .$$

דוגמה 3.5 מטריצה משוחלפת

נתונה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ מצאו את המשוחלפת שלה, כלומר A^t.

פתרון:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

משפט 3.2 תכונות של מטריצה משוחלפת

תהיינה A,B מטריצה כך שהסכומים והמכפלות מוגדרים ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. מתקיים:

.1
$$\left(A^t\right)^t = A$$

.2
$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

.3
$$(\alpha A)^t = \alpha A^t$$

.4
$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

שימו לב, הסדר השתנה.

הוכחה: תרגיל בית. ■

3.5 כפל מטריצה בווקטור

הגדרה 3.4 מכפלה של מטריצה בוקטור

תהי $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה מסדר $m \times n$ ו- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$ וקטור מסדר n. המכפלה של המטריצה A עם הווקטור X, שמסומנת $A \cdot X$, נותנת וקטור מסדר m שמוגדר

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n \\ \vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} A_{1j}x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} A_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} A_{mj}x_j \end{pmatrix} .$$

במילים אחרות, האיבר ה- i של הווקטור $A \cdot X$ ניתן ע"י

$$(A \cdot X)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j \ .$$

כללים של כפל מטריצה בווקטור:

1) כפל של מטטריצה $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ עם ווקטור $X \in \mathbb{F}^n$ מחזירה ווקטור ב- $\mathbb{F}^m$.

2) אפשר להכפיל מטריצה עם ווקטור רק אם מספר העמודות של המטריצה שווה למספר השורות של הווקטור.

דוגמה 3.6 כפל מטריצה בווקטור

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 3 \\ 7 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 122 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.7

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \\ 4 \cdot 3 + 5 \cdot 6 \\ 7 \cdot 3 + 8 \cdot 6 \\ 10 \cdot 3 + 11 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 42 \\ 79 \\ 96 \end{pmatrix}$$

3.6 כפל מטריצות

הגדרה 3.5 מכפלה של שתי מטריצות

$$\mathbb{F}^{m\times k} \ni A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mk} \end{pmatrix}$$ מטריצה מסדר $m\times k$ ו- $$\in B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kn} \end{pmatrix}$$
$\mathbb{F}^{k\times n}$ מטריצה מסדר $k\times n$. המכפלה של השתי מטריצות A,B מסומנת $A\cdot B$ ומוגדרת

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+\cdots+A_{1k}B_{k1} & A_{11}B_{12}+\cdots+A_{1k}B_{k2} & \cdots & A_{11}B_{1n}+\cdots+A_{1k}B_{kn} \\ A_{21}B_{11}+\cdots+A_{2k}B_{k1} & A_{21}B_{12}+\cdots+A_{2k}B_{k2} & \cdots & A_{21}B_{1n}+\cdots+A_{2k}B_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B_{11}+\cdots+A_{mk}B_{k1} & A_{m1}B_{12}+\cdots+A_{mk}B_{k2} & \cdots & A_{m1}B_{1n}+\cdots+A_{mk}B_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{p=1}^{k} A_{1p}B_{p1} & \sum\limits_{p=1}^{k} A_{1p}B_{p2} & \cdots & \sum\limits_{p=1}^{k} A_{1p}B_{pn} \\ \sum\limits_{p=1}^{k} A_{2p}B_{p1} & \sum\limits_{p=1}^{k} A_{2p}B_{p2} & \cdots & \sum\limits_{p=1}^{k} A_{2p}B_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{p=1}^{k} A_{mp}B_{p1} & \sum\limits_{p=1}^{k} A_{mp}B_{p2} & \cdots & \sum\limits_{p=1}^{k} A_{mp}B_{pn} \end{pmatrix}$$

במילים אחרות, האיבר ה- ij של המכפלה $A\cdot B$ ניתנת ע"י הנוסחה:

$$(A\cdot B)_{ij} = \sum_{p=1}^{k} A_{ip}B_{pj} \ .$$

כללים של כפל מטריצות:

1) ניתן להכפיל מטריצה A במטריצה B רק כאשר A מטריצה מסדר $m\times k$ ו- B מטריצה מסדר $k\times n$. זאת אומרת מספר עמודות של A שווה למספר השורות של B.

2) אם A מסדר $m\times k$ ו- B מסדר $k\times n$ אז $A\cdot B$ היא מטריצה מסדר $m\times n$.

דוגמה 3.8

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+8\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.9

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2+3\cdot 8+1\cdot 1 & 2\cdot 5+3\cdot 7+1\cdot 1 \\ -1\cdot 2+0\cdot 8+4\cdot 1 & -1\cdot 5+0\cdot 7+4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 32 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.10

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 11+2\cdot 5+3\cdot 21 & 1\cdot 12+2\cdot 6+3\cdot 22 & 1\cdot 13+2\cdot 7+3\cdot 23 & 1\cdot 14+2\cdot 8+3\cdot 24 \\ 0\cdot 11+7\cdot 5+8\cdot 21 & 0\cdot 12+7\cdot 6+8\cdot 22 & 0\cdot 13+7\cdot 7+8\cdot 23 & 0\cdot 14+7\cdot 8+8\cdot 24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 84 & 90 & 96 & 102 \\ 203 & 218 & 233 & 248 \end{pmatrix}$$

הגדרה 3.6 מטריצה היחידה

למטריצה ריבועית מסדר $n \times n$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

קוראים מטריצת היחידה.

דוגמה 3.11

המטריצה $I \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה $I \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה $I \in \mathbb{R}^{4\times 4}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

משפט 3.3 כפל מטריצה במטריצה היחידה

1) תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו- $I\in\mathbb{F}^{n\times n}$. אז

$$A\cdot I=A\ .$$

2) תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו- $I\in\mathbb{F}^{m\times m}$. אז

$$I\cdot A=A\ .$$

הוכחה: תרגיל בית! ■

דוגמה 3.12

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0&1\cdot2+0\cdot7&1\cdot3+0\cdot8\\0\cdot1+1\cdot0&0\cdot2+1\cdot7&0\cdot3+1\cdot8\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}$$

דוגמה 3.13

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+3\cdot0&1\cdot0+2\cdot1+3\cdot0&1\cdot0+2\cdot0+3\cdot1\\0\cdot1+7\cdot0+8\cdot0&0\cdot0+7\cdot1+8\cdot0&0\cdot0+7\cdot0+8\cdot1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&8\end{pmatrix}$$

משפט 3.4 תכונות של כפל מטריצות

תהיינה A,B,C מטריצות כך שהסכומים והמכפלות מוגדרים ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$. אזי

א) חוק הקיבוץ:

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$$

ב) חוק הפילוג:

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

ג) חוק הפילוג:

$$(B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A$$

ד) $\alpha(A\cdot B)=(\alpha\cdot A)\cdot B=A\cdot(\alpha\cdot B)$

ה) אם $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ו- $I_{n\times n}$ מטריצת היחידה מסדר $n\times n$ ו- $I_{m\times m}$ מטריצת היחידה מסדר $m\times m$ אז

$$I_{m\times m}\cdot A=A=A\cdot I_{n\times n}\ .$$

הוכחה: תרגיל בית! ■

כלל 3.1 כפל מטריצות לא קומוטטיבית

נתונות $A \in \mathbb{F}^{m\times k}$ ו- $B \in \mathbb{F}^{k\times n}$. באופן כללי, $A\cdot B$ לא בהכרח שווה ל- $B\cdot A$. כלומר

$$A\cdot B \neq B\cdot A$$

באופן כללי.

דוגמה 3.14

אם A מטריצה מסדר 3×2 ו- B מטריצה מסדר 4×3, אז $A\cdot B$ מוגדר, אבל $B\cdot A$ לא מוגדר.

דוגמה 3.15

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$,

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ -13 & 27 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 19 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$$

ז"א $A\cdot B \neq B\cdot A$.

דוגמה 3.16 כפל מטריצה אינה קומוטטיבית

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. חשבו $A\cdot B$ ו- $B\cdot A$. האם A ו- B מתחלפות (קומוטטיביות)?

פתרון:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 27 \end{pmatrix}$$

אבל

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 22 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

$A\cdot B \neq B\cdot A$ לכן A ו- B לא מתחלפות.

כלל 3.2 מטריצות דומות

נתונות מטריצות A, B, C ו- $A \neq 0$.

אם $AB = AC$ אז B לא בהכרח שווה ל- C. ז"א $B \neq C$ באופן כללי.

דוגמה 3.17

תנו דוגמה של $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש- $AB = AC$ ו- $A \neq 0$ אבל $B \neq C$.

פתרון:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

הרי $AB=AC$ ו- $A\neq 0$ אבל $B\neq C$.

כלל 3.3 מכפלה מטריצות המתאפסת

נתונות מטריצות A,B.

אם $AB=0$ אז A לא בהכרח מטריצה האפס ו- B לא בהכרח מטריצה האפס.

ז"א אם קיימות $A\neq 0$ ו- $B\neq 0$ כך ש- $A\cdot B=0$.

דוגמה 3.18

תנו דוגמה של $A,B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש- $A,B\neq 0$ אבל $A\cdot B=0$.

פתרון:

דוגמה 1) $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

דוגמה 2) $a\in\mathbb{R}\neq 0$, $A=\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix}$,

$b\in\mathbb{R}\neq 0$ $B=\begin{pmatrix}b&0\\0&0\end{pmatrix}$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

הגדרה 3.7 העלאה מטריצה בחזקה

תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ויהי $k\in\mathbb{N}$. נגדיר

$$A^k=\overbrace{A\cdot A\cdot\dots\cdot A}^{k\ \text{פעמים}}$$

אם $A\neq 0$, ונגדיר

$$A^0=I_{n\times n}\ .$$

3.7 מטריצה הפוכה

הגדרה 3.8 מטריצה הפוכה

נניח ש- A מטריצה ריבועית מסדר $n \times n$. מטריצה ריבועית B מסדר $n \times n$ נקראת ההופכית של A (המטריצה ההפוכה של A) אם מתקיים

$$A \cdot B = B \cdot A = I \ .$$

סימון: במקום B רושמים A^{-1}. ז"א

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \ .$$

דוגמה 3.19

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \ , \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.8 שיטה למציאת מטריצה הופכית

נתונה מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. כדי למצוא את המטריצה ההופכית A^{-1} רושמים

$$(A|I)$$

כאשר $I \in \mathbb{F}^{n\times n}$ המטריצה היחידה מסדר $n \times n$ ונדרג עד שנקבל המטריצה היחידה בצד שמאול:

$$(A|I) \xrightarrow{\text{פעולות אלמנטריות של דירוג}} (I|A^{-1}) \ .$$

דוגמה 3.20

נתונה המטריצה $A =\in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ .$$

מצאו את A^{-1}.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

לפיכך

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \ .$$

דוגמה 3.21

נתונה $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \ .$$

מצאו את A^{-1}.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_1}$$

$$\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_2}$$

$$\xrightarrow{R_2\to -R_2}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+6R_2}$$

$$\xrightarrow{R_3\to -\frac{1}{14}R_3}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2+2R_3}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-3R_3}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

משפט 3.5 ההופכית של מטריצה יחידה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם ל- A קיימת מטריצה ההופכית אז היא יחידה.

הוכחה:

נניח ש B הופכית של A ו- C הופכית של A, ו- $B \neq C$. אז

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B ,$$

בסתירה לכך ש- $B \neq C$. ■

משפט 3.6 לא כל מטריצה הפיכה

במספרים, אם מספר $a \in \mathbb{R}$ ו- $a \neq 0$ אז קיים a^{-1}.

במטירצות זה לא המצב. ז"א לא לכל מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ קיימת מטרצה הופכית $A^{-1} \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

אם למטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ קיימת $A^{-1} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ אומרים כי A **הפיכה**.
אם לא קיימת מטריצה הופכית אז אומרים כי A **לא הפיכה**.

דוגמה 3.22

נתונה $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

מצאו את A^{-1}.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2\cdot R_1}$$

אי אפשר לקבל מטריצה היחידה בצד שמאול ולכן המטריצה לא הפיכה.

דוגמה 3.23

מצאו מטריצה X המקיימת את המשוואה

א) $XA = B$

ב) $AX = B$

כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

פתרון:

א)

$$XA = B \quad \Rightarrow \quad XAA^{-1} = BA^{-1} \quad \Rightarrow \quad X = BA^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3+5R_1]{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_2-8R_3]{R_1\to R_1+2R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -19 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

לפיכך $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -19 & -7 & -8 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$X = B\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -19 & -7 & -8 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 \\ -7 & -3 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ב)

$$A\cdot X = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}\cdot B\ .$$

לפיכך

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -19 & -7 & -8 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 \\ -15 & -11 & 15 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

דוגמה 3.24

מצאו מטריצה X המקיימת

$$A\cdot X = B\ ,$$

כאשר $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

פתרון:

$$A\cdot X = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}\cdot B\ .$$

נחפש את A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)\ .$$

לא נוכל להגיע ל- I בצד שמאול, לכן A^{-1} לא קיימת. לכן נפתור בדרך אחרת: נסמן $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. אז

$$A\cdot X=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+2z & 3y+2w \\ 6x+4z & 6y+4w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{cases} 3x+2z &=1 \\ 3y+2w &=-2 \\ 6x+4z &=2 \\ 6y+4w &=-4 \end{cases}$$

נרשום את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 6 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4\to R_4-2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2\to\frac{1}{3}\cdot R_2]{R_1\to\frac{1}{3}\cdot R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון:

$$x=-\frac{2}{3}z+\frac{1}{3}\ , \qquad y=-\frac{2}{3}w-\frac{2}{3}\ , \qquad ,z,w\in\mathbb{R}\ .$$

לכן

$$X=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}z+\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}w-\frac{2}{3} \\ z & w \end{pmatrix}\ ,$$

לכל $z,w\in\mathbb{R}$.

משפט 3.7 תכונות של מטריצה הפוכה

א) $(A^{-1})^{-1}=A$

ב) $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

ג) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

הוכחה: תרגיל בית. ■

3.9 הצגת מערכת משוואות באמצעות כפל מטריצות

נתונה מערכת משוואות ליניאריות:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

נגדיר את המטריצה של מקדמים $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, את הווקטור $b \in \mathbb{F}^m$ ואת המווקטור של משתנים $X \in \mathbb{F}^n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ , \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \ .$$

אז ניתן לרשום את המערכת בתורה

$$A \cdot X = b$$

כלומר

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \ .$$

דוגמה 3.25

אם נתונה המערכת $\begin{cases} 5x + y - z &= 3 \\ x + 2y + z &= 1 \end{cases}$ ניתן לרשום אותה בצורה $AX = b$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ , \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

דוגמה 3.26

אם נתונה המערכת $\begin{cases} 7x - y &= 1 \\ 2x + 3y &= 5 \end{cases}$ ניתן לרשום אותה בצורה $AX = b$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \ , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \ .$$

דוגמה 3.27

פתרו את המערכת $\begin{cases} 7x - y &= 1 \\ 2x + 3y &= 5 \end{cases}$ ע"י מציאת המטריצה ההופכית של מטריצת המקדמים של המערכת.

פתרון:

נרשום את המערכת בצורה $AX = b$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \ , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \ .$$

$$AX = b \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot b \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot b$$

נחפש את A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to\frac{1}{7}R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{23}{7} & -\frac{2}{7} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{7}{23}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{23} & \frac{7}{23} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+\frac{1}{7}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{23} & \frac{1}{23} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{23} & \frac{7}{23} \end{array}\right)$$

לכן

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{23} & \frac{1}{23} \\ -\frac{2}{23} & \frac{7}{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{23}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\cdot b = \frac{1}{23}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{23}\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ 33 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$(x,y) = \left(\frac{8}{23}, \frac{33}{23}\right) \ .$$

דוגמה 3.28

פתרו את המערכת $\left\{\begin{array}{rl} x+2y & =2 \\ 3x+4y & =4 \end{array}\right.$ ע"י מציאת המטריצה ההופכית של מטריצת המקדמים של המערכת.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

התשובה היא

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\cdot b = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$(x,y) = (0,1) \ .$$

דוגמה 3.29

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= 1 \\ 2x-2y+4z &= 2 \\ x+y+5z &= 3 \end{aligned}$$

$$AX = b \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}b$$

כאשר

$$A=\begin{pmatrix}2&2&3\\2&-2&4\\1&1&5\end{pmatrix}\quad,\qquad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\quad,\qquad b=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&-2&4&0&1&0\\1&1&5&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_1}$$

$$\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_2}$$

$$\xrightarrow{R_2\to -R_2}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+6R_2}$$

$$\xrightarrow{R_3\to -\frac{1}{14}R_3}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2+2R_3}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-3R_3}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-1\\\frac{3}{7}&-\frac{1}{7}&-\frac{1}{7}\\-\frac{2}{7}&-\frac{1}{14}&\frac{3}{7}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-1\\\frac{3}{7}&-\frac{1}{7}&-\frac{1}{7}\\-\frac{2}{7}&-\frac{1}{14}&\frac{3}{7}\end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-1\\\frac{3}{7}&-\frac{1}{7}&-\frac{1}{7}\\-\frac{2}{7}&-\frac{1}{14}&\frac{3}{7}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-\frac{2}{7}\\\frac{6}{7}\end{pmatrix}$$

משפט 3.8 קיום ומספר פתרונות של מערכת משוואות

נתונה מערכת משוואות

$$A\cdot X=b$$

כאשר $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית של המקדמים, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ הווקטור של המשתנים ו- $b\neq 0\in\mathbb{F}^n$ הווקטור של הצד ימין של המערכת.

א) אם A הפיכה אז למערכת קיים פתרון אחד והוא יחיד.

במקרה ש- A לא הפיכה, אז למערכת יש אינסוף פתרונות או לא קיים פתרון.

ב) אם $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A|b)<n$ אז למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

ג) אם $\mathrm{rank}(A)\neq\mathrm{rank}(A|b)$ אז למערכת לא קיים פתרון.

הוכחה:

1. תרגיל בית.
2. נלמד את ההוכחה בהמשך הקורס.
3. נלמד את ההוכחה בהמשך הקורס.

■