

קריפטוגרפיה

תוכן העניינים

3	1 תורת המספרים
3	משפט החילוק של אוקלידס
8	מספרים ראשוניים
10	המחלק המשותף הגדול ביותר
14	האלגוריתם של אוקלידס
19	יחס השקילות המודולרית
23	2 חוגים מתמטיים
23	הפונקציה אוילר
25	החוג \mathbb{Z}_m
28	הפיכת מטריצות בחוג \mathbb{Z}_m
32	3 הצפנים הבסיסיים
32	מושג של קריפטו-מערכת
33	צופן ההזזה
35	צופן האפיני
41	צופן ויז'נר
45	צופן היל
54	4 תמורות וצופן אניגמה
54	תמורות
57	פירוק למחזורים של תמורה
59	תמורות צמודות
60	5 קריפטו-אנליזה
60	סוגים של התקפת סייבר
60	קבוצות אותיות הנפוצים ביותר בטקסט גלוי
62	קריפטו-אנליזה של צופן האפיני
67	קריפטו-אנליזה של צופן היל
70	מדד צירוף המקרים
71	קריפטו-אנליזה של צופן ויז'נר - מבחן פרידמן
76	6 צופן RSA
76	משפט השאריות הסיני
77	משפטים של מספרים ראשוניים
80	אלגוריתם RSA
88	7 הבעיית הפירוק של מספרים וצופן רבין
88	הבעיית פירוק מספרים
88	צופן רבין

89	8	צופן אל-גמאל
91	9	תורת שאנון
91		סודיות מושלמת
98		המושג של מידע
102		הגדרה של מידע
107		הצפנת האפמן
112		תכונות של אנטרופיה
116		משפט האנטרופיה לקריפטו-מערכת
120	10	צפנים בלוקים ו- DES
120		רשת החלפה-תמורה
124		רשת פייסטל
127		תקן הצפנת מידע (DES)
128		הפונקציית ליבה של DES
129		התזמון המפתח של DES
131		הבלוקים של ההחלפות של DES
131		דוגמאות
135		IDEA
135		תת מפתחות של IDEA
136		אלגוריתם ההצפנה
137		דוגמאות
140	11	פונקציות תמצות קריפטוגרפיות
140		פונקציות תמצות
140		אמינות המידע
141	12	פונקציות תמצות קריפטוגרפיות המשך
141		פונקציות תמצות איטרטיביות
142	13	שיטות חתימה
142		דרישות בטיחות משיטות חתימה
142		שיטות חתימה של אל-גמאל
143	14	סכמות לשיתוף סודות
143		סכמת הסף של שמיר
143		סכמת סף (t, t) פשוטה

שיעור 1

תורת המספרים

1.1 משפט החילוק של אוקלידס

הגדרה 1.1 מספר שלם שמחלק מספר שלם אחר

יהיו a, b מספרים שלמים. אומרים כי " b מחלק את a " אם קיים מספר שלם q כך ש-

$$a = qb.$$

כלומר $\frac{a}{b}$ שווה למספר שלם q .

הסימון $b \mid a$ אומר כי " b מחלק את a ".

1.1 דוגמה

(א) $3 \mid 6$ בגלל שקיים מספר שלם $q = 2$ כך ש- $6 = 3q$.

(ב) $7 \nmid 42$ בגלל שקיים מספר שלם $q = 6$ כך ש- $42 = 7q$.

(ג) $5 \nmid 8$ בגלל שלא קיים מספר שלם q כך ש- $8 = 5q$.

משפט 1.1 תכונות של חילוק שלמים

יהיו a, b, d שלמים.

(1) אם $d \mid a$ ו- $d \mid b$ אזי $d \mid (a + b)$.

(2) יהיו x, y שלמים. אם $d \mid a$ ו- $d \mid b$ אזי $d \mid (xa + yb)$.

(3) אם $a \mid b$ ו- $a \mid a$ אזי $a = \pm b$.

הוכחה:

(1)

$$\left. \begin{array}{l} d \mid a \Rightarrow a = a'd \\ d \mid b \Rightarrow b = b'd \end{array} \right\} \Rightarrow a \pm b = d(a' \pm b') \Rightarrow d \mid (a \pm b).$$

(2)

$$\left. \begin{array}{l} d \mid a \Rightarrow a = a'd \\ d \mid b \Rightarrow b = b'd \end{array} \right\} \Rightarrow ax + by = d(a'x + b'y) \Rightarrow d \mid (ax + by).$$

(3)

$$\left. \begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow b = ca \\ b \mid a \Rightarrow a = c'b \end{array} \right\} \Rightarrow b = ca = cc'b \Rightarrow cc' = 1.$$

c ו- c' הם שלמים לכן $cc' = 1$ אם ורק אם $c = 1 = c'$ או $c = -1 = c'$. לפיכך

$$b = \pm a.$$

הגדרה 1.2 השארית

יהיו $a, b > 0$ שלמים. השארית של a בחלוקה ב- b מסומנת $a \bmod b$ ומוגדרת

$$a \bmod b = a - b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor.$$

סימון חלופי לשארית בחלוקת a ב- b : $a \% b$.

הערה: השארית מוגדרת באופן חד משמעי עובר שלמים חיוביים בלבד!

דוגמה 1.2

$$43 \bmod 10 = 43 - 10 \cdot \left\lfloor \frac{43}{10} \right\rfloor = 43 - 10(4) = 3,$$

$$13 \bmod 4 = 13 - 4 \cdot \left\lfloor \frac{13}{4} \right\rfloor = 13 - 4(3) = 1,$$

$$8 \bmod 2 = 8 - 2 \cdot \left\lfloor \frac{8}{2} \right\rfloor = 8 - 2(4) = 0.$$

משפט 1.2 משפט החילוק של אוקלידס

יהיו a, b מספרים שלמים. אם $b \neq 0$ ו- $a \geq b$ אז קיימים מספרים שלמים q, r יחודיים כך ש-

$$a = qb + r \quad (1.1)$$

כאשר $0 \leq r < |b|$. השלם q נקרא **המנה** של a בחלוקה ב- b ו- r נקרא **השארית** של a בחלוקה ב- b . המשוואה (1.1) נקרא **הפירוק מנה-שארית** של השלמים a ו- b .

ההוכחה עצמה היא לא חלק של הקורס.

דוגמה 1.3

יהיו $a = 46, b = 8$. המנה והשארית הם $q = 5, r = 6$ והפירוק מנה-שארית הוא

$$46 = 5(8) + 6.$$

דוגמה 1.4

יהיו $a = -46, b = 8$. המנה והשארית הם $q = -6, r = 2$ והפירוק מהנ-שארית הוא

$$-46 = (-6)(8) + 2.$$

משפט 1.3 שיטה מעשית לחישוב הפירוק מנה-שארית

יהיו a, b שלמים (עם $b \neq 0$). אזי המנה q והשארית r במשפט החילוק של אוקלידס ניתנים כך:

$$(1) \text{ אם } a > 0, b > 0 \text{ אז } q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \text{ ו- } r = a \bmod b$$

$$(2) \text{ אם } a > 0, b < 0 \text{ אז } q = -\left\lfloor \frac{a}{|b|} \right\rfloor \text{ ו- } r = a \bmod |b|$$

$$(3) \text{ אם } a < 0, b > 0 \text{ אז } q = -\left\lfloor \frac{|a|}{b} \right\rfloor - 1 \text{ ו- } r = b - |a| \bmod b$$

$$(4) \text{ אם } a < 0, b < 0 \text{ אז } q = \left\lfloor \frac{|a|}{|b|} \right\rfloor + 1 \text{ ו- } r = |b| - |a| \bmod |b|$$

הוכחה: נוכיח בכל אחד מארבעת המקרים.

מצב 1 נניח $a > 0, b > 0$. לפי משפט החילוק של אוקלידס קיימים שלמים q, r כך ש-

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < b. \quad (*)$$

נחלק ב- b :

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}.$$

מכיוון ש- $0 \leq r < b$, מתקיים $0 \leq \frac{r}{b} < 1$, ולכן

$$q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor.$$

הצבה חזרה ב- $(*)$ נותנת

$$r = a - b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = a \bmod b.$$

מצב 2 נניח $a > 0, b < 0$. לפי משפט החילוק של אוקלידס עבור הלשמים $a, |b|$ קיימים שלמים \bar{q}, \bar{r} כך ש:

$$a = \bar{q}|b| + \bar{r}, \quad 0 \leq \bar{r} < |b|.$$

$$\text{מהמקרה הראשון: } \bar{q} = \left\lfloor \frac{a}{|b|} \right\rfloor \text{ ו- } \bar{r} = a \bmod |b|. \text{ נציב } |b| = -b$$

$$a = \bar{q}(-b) + \bar{r} \Rightarrow a = -\bar{q}b + \bar{r}. \quad (\#)$$

מצד שני ממשפט החילוק עבור השלמים a, b (כלומר b בלי הערך מוחלט) קיימים שלמים q, r כך ש:

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

השוואה של משוואה $(\#)$ ל- $a = qb + r$ נותנת

$$q = -\bar{q} = -\left\lfloor \frac{a}{|b|} \right\rfloor, \quad r = \bar{r} = a \bmod |b|.$$

מצב 3 נניח $a < 0, b > 0$. ממשפט החילוק עבור השלמים $b, |a|$ קיימים שלמים \bar{q}, \bar{r} כך ש:

$$|a| = \bar{q}b + \bar{r}, \quad 0 \leq \bar{r} < b.$$

מהמקרה הראשון:

$$\bar{q} = \left\lfloor \frac{|a|}{b} \right\rfloor, \quad \bar{r} = |a| \bmod b.$$

נציב $|a| = -a$:

$$-a = \bar{q}b + \bar{r} \Rightarrow a = -\bar{q}b - \bar{r}.$$

כעת השארית $-\bar{r}$ שלילית, ואינה עומדת בתנאי $0 \leq r < b$. לכן נוסיף ונחסר מנה אחת שלמה b :

$$a = -\bar{q}b - \bar{r} = -(\bar{q} + 1)b + (b - \bar{r}). \quad (**)$$

כך קיבלנו את הצורה הנדרשת. מצד שני עבור השלמים b, a (כלומר a בלי הערך מוחלט) ממשפט החילוק קיימים שלמים q, r עבורם

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < b.$$

השוואה של זה עם משוואה (**) נותנת:

$$q = -\left\lfloor \frac{|a|}{b} \right\rfloor - 1, \quad r = b - |a| \bmod b.$$

מצב 4 נניח $a < 0, b < 0$. לפי ממשפט החילוק עבור $|a|, |b|$ קיימים שלמים \bar{q}, \bar{r} כך ש:

$$|a| = \bar{q}|b| + \bar{r}, \quad 0 \leq \bar{r} < |b|.$$

מ-(1) נקבל

$$\bar{q} = \left\lfloor \frac{|a|}{|b|} \right\rfloor, \quad \bar{r} = |a| \bmod |b|.$$

נציב $|a| = -a, |b| = -b$:

$$-a = -\bar{q}b + \bar{r} \Rightarrow a = \bar{q}b - \bar{r}.$$

כמו קודם נוסיף ונחסר $|b|$ כדי להפוך את השארית לחיובית:

$$a = \bar{q}b - |b| + |b| - \bar{r}$$

$$\Rightarrow a = \bar{q}b + b + |b| - \bar{r}$$

$$\Rightarrow a = (\bar{q} + 1)b + |b| - \bar{r}. \quad (***)$$

מצד שני ממשפט החילוק עבור השלמים b, a (לא הערכים מוחלטים שלהם) קיימים שלמים q, r עבורם:

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

השוואה של $a = qb + r$ למשוואה (***) נותנת:

$$q = \bar{q} + 1 = \left\lfloor \frac{|a|}{|b|} \right\rfloor + 1, \quad r = |b| - \bar{r} = |b| - |a| \bmod |b|.$$

לסיכום, מתקבלת הטבלה הבאה:

מצב	סימן a	סימן b	מנה q	שארית r
1	+	+	$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$	$a \bmod b$
2	+	-	$-\left\lfloor \frac{a}{ b } \right\rfloor$	$a \bmod b $
3	-	+	$-\left\lfloor \frac{ a }{b} \right\rfloor - 1$	$b - a \bmod b$
4	-	-	$\left\lfloor \frac{ a }{ b } \right\rfloor + 1$	$ b - a \bmod b $

■

1.5 דוגמה

מצאו את הפירוק מנה-שארית של השלמים הבאים:

- א) $a = 46, b = 8$
- ב) $a = -46, b = 8$
- ג) $a = 101, b = -7$
- ד) $a = -151, b = -12$

פתרון:

א) במקרה זה $a > 0, b > 0$ אז

$$q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{46}{8} \right\rfloor = 5, \quad r = a \bmod b = a - b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = 46 - 8 \left\lfloor \frac{46}{8} \right\rfloor = 6,$$

לכן:

$$46 = (5)(8) + 5.$$

ב) במקרה זה $a < 0, b > 0$ אז

$$q = -\left\lfloor \frac{|a|}{b} \right\rfloor - 1 = -\left\lfloor \frac{46}{8} \right\rfloor - 1 = -6$$

-1

$$\begin{aligned} r &= b - |a| \bmod b \\ &= b - \left(|a| - b \left\lfloor \frac{|a|}{b} \right\rfloor \right) \\ &= 8 - \left(46 - 8 \left\lfloor \frac{46}{8} \right\rfloor \right) \\ &= 8 - (46 - 8(5)) \\ &= 2. \end{aligned}$$

לכן:

$$-46 = (-6)(8) + 2.$$

ג) במקרה זה $a > 0, b < 0$ אז

$$q = - \left\lfloor \frac{a}{|b|} \right\rfloor = - \left\lfloor \frac{101}{7} \right\rfloor = -14 .$$

ו-

$$r = a \bmod |b| = a - |b| \left\lfloor \frac{a}{|b|} \right\rfloor = 101 - 7 \left\lfloor \frac{101}{7} \right\rfloor = 101 - 7(14) = 3 .$$

לכן:

$$101 = (-14)(-7) + 3 .$$

ד) במקרה זה $a < 0, b < 0$ אז

$$q = \left\lfloor \frac{|a|}{|b|} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{151}{12} \right\rfloor + 1 = 12 + 1 = 13 .$$

ו-

$$\begin{aligned} r &= |b| - |a| \bmod |b| \\ &= |b| - \left(|a| - |b| \left\lfloor \frac{|a|}{|b|} \right\rfloor \right) \\ &= 12 - \left(151 - 12 \left\lfloor \frac{151}{12} \right\rfloor \right) \\ &= 12 - (151 - 12(12)) \\ &= 12 - 7 \\ &= 5 . \end{aligned}$$

לכן:

$$-151 = (13)(-12) + 5 .$$



1.2 מספרים ראשוניים

הגדרה 1.3 מספר ראשוני

מספר ראשוני הוא מספר שלם וחיובי $p \geq 2$ עבורו המחלקים היחידים שלו הם 1 ו- p בלבד. ז"א p ראשוני אם התנאי הבא מתקיים:

$$a \mid p \iff a = 1 \vee p .$$

משפט 1.4 משפט הפירוק לראשוניים

כל מספר טבעי $a \geq 2$ הוא מספר ראשוני או שווה למכפלה של מספרים ראשוניים. ז"א לכל מספר טבעי $a \geq 2$ קיימים טבעיים e_1, \dots, e_n עבורם

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n}$$

כאשר p_1, \dots, p_n מספרים ראשוניים.

1.6 דוגמה

הפירוק לראשוניים של 60 הוא:

$$60 = 2^2 \times 3^2 \times 5 ,$$

1.7 דוגמה

הפירוק לראשוניים של 98 הוא:

$$98 = 2^1 \times 7^2 .$$

הוכחה:

• נניח בשלילה שהטענה לא נכונה. אזי קיים לפחות מספר טבעי אחד שלא ראשוני וגם לא שווה למכפלה של ראשוניים.

• יהי $m \geq 2$ הטבעי הקטן ביותר שלא מקיים הטענה זו. (הוא הדוגמה הנגדית הקטנה ביותר).

• אזי m לא ראשוני וגם לא שווה למכפלת ראשוניים.

• לכן m פריק, ז"א קיימים טבעיים $2 \leq a < m$, $2 \leq b < m$ כך ש:

$$m = ab .$$

• m הוא הטבעי הקטן ביותר מסוג זה שמפריך את הטענה בעוד a, b הם קטנים ממש מ- m אז a ו- b בהכרח מקיימים את הטענה: ז"א a הוא או ראשוני או שווה למכפלת ראשוניים, ואותו דבר עבור b .

• לכן קיימים טבעיים e_1, \dots, e_n עבורם

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n}$$

כאשר p_1, \dots, p_n מספרים ראשוניים וקיימים טבעיים f_1, \dots, f_n עבורם

$$b = q_1^{f_1} q_2^{f_2} \dots q_n^{f_n}$$

כאשר q_1, \dots, q_n מספרים ראשוניים.

• מכאן

$$m = ab = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n} q_1^{f_1} q_2^{f_2} \dots q_n^{f_n} .$$

לכן m שווה למכפלה של מספרים ראשוניים, בסתירה לכך ש- m לא שווה למכפלה של ראשוניים!

■

משפט 1.5 קיימים אינסוף מספרים ראשוניים

קיימים אינסוף מספרים ראשוניים.

הוכחה: נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח כי $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ הוא הקבוצה של כל הראשוניים שקיימים וקבוצה זו נוצרת סופי.

נגדיר השלם $m = p_1 p_2 \dots p_n + 1$.

לפי משפט הפירוק לראשוניים (ראו משפט 1.4) m הוא ראשוני או שווה למכפלה של ראשוניים.

לפי ההנחה ההתחלתית שלנו, אין מצב ש- m יכול להיות מספר ראשוני בגלל ש- m גדול ממש מכל הראשוניים

בקבוצת כל ראשוניים P . כלומר, $m > p_i$ לכל $1 \leq i \leq n$.

גם לא קיים מספק ראשוני p_i אשר מחלק את m . הרי

$$m \pmod{p_i} = 1 \Rightarrow p_i \nmid m .$$

הגענו לסתירה להמשפט הפירוק לראשוניים. לכן קיימים אינסוף מספרים ראשוניים.

■

1.3 המחלק המשותף הגדול ביותר

הגדרה 1.4 המחלק המשותף הגדול ביותר (gcd).

יהיו a, b שלמים. המחלק המשותף הגדול ביותר של a ו- b מסומן $\gcd(a, b)$ ומוגדר להיות השלם החיובי הגדול ביותר שמחלק גם a וגם b .

הסימון \gcd מנובע מהשם אנגלית "greatest common divisor".

דוגמה 1.8

$$\gcd(2, 6) = 2 ,$$

$$\gcd(3, 6) = 3 ,$$

$$\gcd(24, 5) = 1 ,$$

$$\gcd(20, 10) = 10 ,$$

$$\gcd(14, 12) = 2 ,$$

$$\gcd(8, 12) = 4 .$$

הגדרה 1.5 כפולה המשותפת הקטנה ביותר

יהיו a, b שלמים. הכפולה המשותפת הקטנה ביותר מסומנת $\text{lcm}(a, b)$ ומוגדרת להיות השלם החיובי הקטן ביותר עבורו גם a וגם b מחלקים אותו.

הסימון lcm מנובע מהשם אנגלית "lowest common multiple".

דוגמה 1.9

$$\text{lcm}(6, 21) = 42 ,$$

$$\text{lcm}(3, 6) = 6 ,$$

$$\text{lcm}(24, 5) = 120 ,$$

$$\text{lcm}(20, 10) = 20 ,$$

$$\text{lcm}(14, 12) = 84 ,$$

$$\text{lcm}(8, 12) = 24 .$$

הגדרה 1.6 מספרים זרים

יהיו a, b שלמים. אומרים כי a ו- b מספרים זרים אם

$$\gcd(a, b) = 1 \text{ .}$$

כלומר, אין אף מספר גדול מאחד שמחלק את שניהם.

משפט 1.6 שיטת פירוק לראשוניים לחישוב gcd

יהיו a, b שלמים חיוביים כך שהפירוק לראשוניים שלהם הם:

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n}, \quad b = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_n^{f_n}$$

אז ה- $\gcd(a, b)$ הינו

$$\gcd(a, b) = p_1^{\min(e_1, f_1)} p_2^{\min(e_2, f_2)} \cdots p_k^{\min(e_n, f_n)}.$$

הוכחה: נסמן $d = p_1^{\min(e_1, f_1)} p_2^{\min(e_2, f_2)} \dots p_n^{\min(e_n, f_n)}$. ראשית נראה כי $d \mid a$ וגם $d \mid b$.

$$\begin{aligned} a &= p_1^{e_1} \dots p_i^{e_i} \dots p_n^{e_n} \\ &= (p_1^{e_1 - \min(e_1, f_1)} \dots p_i^{e_i - \min(e_i, f_i)} \dots p_n^{e_n - \min(e_n, f_n)}) (p_1^{\min(e_1, f_1)} \dots p_i^{\min(e_i, f_i)} \dots p_n^{\min(e_n, f_n)}) \\ &= qd \end{aligned}$$

כאשר $q = p_1^{e_1 - \min(e_1, f_1)} \dots p_i^{e_i - \min(e_i, f_i)} \dots p_n^{e_n - \min(e_n, f_n)}$ החזקה $e_i - \min(e_i, f_i) \geq 0$ אז q הוא מספר שלם. אזי $a \mid d$.

באופן דומה אפשר להוכיח שגם $d \mid b$.

הוכחנו כי d הוא מחלק משותף של a ו- b . כעת נראה כי d הוא המחלק המשותף הגדול ביותר.

נניח בשלילה שקיים c שלם כך ש- $a \mid c$ ו- $b \mid c$ ו- $c > d$. כלומר נניח שקיים מחלק משותף c של a ושל b שגדול יותר מ- d . מכיוון ש- $a \mid c$ ו- $b \mid c$ אז בפירוק הראשוניים של c מופיע רק אותם ראשוניים $\{p_1, \dots, p_n\}$ שמופיעים בפירוקים של a ושל b . לכן יש לנו:

$$c = p_1^{g_1} \dots p_i^{g_i} \dots p_n^{g_n}.$$

מכיוון ש- $a \mid c$ אז $e_i \leq g_i$ לכל i , ומכיוון ש- $b \mid c$ אז $f_i \leq g_i$ לכל i . לכן

$$q_i \leq \min(e_i, f_i) \quad i \text{ לכל} .$$

לפיכך

$$c = p_1^{g_1} \dots p_i^{g_i} \dots p_n^{g_n} \leq p_1^{\min(e_1, f_1)} \dots p_i^{\min(e_i, f_i)} \dots p_n^{\min(e_n, f_n)} = d$$

ז"א $c < d$ בסתירה לכך ש- $c > d$.

1.10 דוגמה

מצאו את $\gcd(19200, 320)$

הפירוקים לראשוניים של 19200 ושל 320 הם

$$19200 = 2^8 3^1 5^2, \quad 320 = 2^6 5^1 = 2^6 3^0 5^1.$$

לכן

$$\gcd(19200, 320) = 2^{\min(8,6)} 3^{\min(1,0)} 5^{\min(2,1)} = 2^6 3^0 5^1 = 320.$$



דוגמה 1.11

מצאו את $\gcd(154, 36)$.

פתרון:

הפירוקים לראשוניים של 154 ושל 36 הם

$$154 = 2^1 7^1 11^1, \quad 36 = 2^2 3^2.$$

נרשום את 154 ו-36 כמכפלות של אותם ראשוניים על ידי הוספת חזקות של 0:

$$154 = 2^1 3^0 7^1 11^1, \quad 36 = 2^2 3^2 7^0 11^0.$$

$$\gcd(154, 36) = 2^{\min(1,2)} 3^{\min(0,2)} 7^{\min(1,0)} 11^{\min(1,0)} = 2^1 3^0 7^0 11^0 = 2.$$



משפט 1.7 \gcd של מספרים ראשוניים

יהיו p, q שני מספרים ראשוניים שונים ($p \neq q$). מתקיים

$$\gcd(p, q) = 1.$$

הוכחה:

שיטה 1: הוכחה ישירה

p הוא ראשוני אז הפירוק לראשוניים שלו הוא

$$p = p^1 q^0.$$

q הוא ראשוני אז הפירוק לראשוניים שלו הוא

$$q = p^0 q^1.$$

לפי משפט 1.6,

$$\gcd(p, q) = p^{\min(1,0)} q^{\min(0,1)} = p^0 q^0 = 1.$$

שיטה 2: הוכחה בשלילה

יהי $d = \gcd(p, q)$ ונניח כי $q < p$. אז נמצא בטווח של שלמים האפשריים $1 \leq d \leq q$ נניח בשלילה כי $d > 1$.

מכיוון ש- d מחלק משותף של p ושל q אז $d \mid p$ וגם $d \mid q$.

q הוא ראשוני אז $d \mid q$ רק אם $d = q$. לכן אם גם $d \mid p$ אז זה גורר ל- $q \mid p$, בסתירה לכך ש- p ראשוני.



משפט 1.8 שיטת פירוק לראשוניים לחישוב lcm

יהיו a, b שלמים חיוביים כך שהפירוק לראשוניים שלהם הם:

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n}, \quad b = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_n^{f_n}.$$

ה- $\text{lcm}(a, b)$ נתונה על ידי הנוסחה

$$\text{lcm}(a, b) = p_1^{\max(e_1, f_1)} p_2^{\max(e_2, f_2)} \dots p_n^{\max(e_n, f_n)}$$

הוכחה: נסמן $D = p_1^{\max(e_1, f_1)} p_2^{\max(e_2, f_2)} \dots p_n^{\max(e_n, f_n)}$. ראשית נראה כי $a \mid D$ וגם $b \mid D$.

$$\begin{aligned} D &= p_1^{\max(e_1, f_1)} p_2^{\max(e_2, f_2)} \dots p_n^{\max(e_n, f_n)} \\ &= (p_1^{\max(e_1, f_1) - e_1} \dots p_i^{\max(e_i, f_i) - e_i} \dots p_n^{\max(e_n, f_n) - e_n}) (p_1^{e_1} \dots p_i^{e_i} \dots p_n^{e_n}) \\ &= qa \end{aligned}$$

כאשר $q = p_1^{\max(e_1, f_1) - e_1} \dots p_i^{\max(e_i, f_i) - e_i} \dots p_n^{\max(e_n, f_n) - e_n}$. החזיקה $\max(e_i, f_i) - e_i \geq 0$ אז q הוא מספר שלם. אזי $a \mid D$.

באופן דומה אפשר להוכיח שגם $b \mid D$.

הוכחנו כי D הוא כפולה של a ושל b . כעת נראה כי D הוא הכפולה של a ושל b הקטנה ביותר.

נניח בשלילה שקיים C שלם כך ש- $a \mid C$ ו- $b \mid C$ ו- $C < D$. כלומר נניח שקיים C אשר כפולה של a ושל b שקונה יותר מ- D . מכיוון ש- $a \mid C$ ו- $b \mid C$ אז כל הראשוניים בקבוצה $\{p_1, \dots, p_n\}$ אשר בפירוקים של a ושל b חייבים להופיע גם בפירוק לראשוניים של C . לכן יש לנו:

$$C = p_1^{g_1} \dots p_i^{g_i} \dots p_n^{g_n} \dots$$

מכיוון ש- $a \mid C$ אז $e_i \leq g_i$ לכל i , ומכיוון ש- $b \mid C$ אז $f_i \leq g_i$ לכל i . לכן

$$\max(e_i, f_i) \leq g_i \quad \text{לכל } i.$$

לפיכך

$$C = p_1^{g_1} \dots p_i^{g_i} \dots p_n^{g_n} \geq p_1^{\max(e_1, f_1)} \dots p_i^{\max(e_i, f_i)} \dots p_n^{\max(e_n, f_n)} = D$$

ז"א $C \geq D$ בסתירה לכך ש- $C < D$.

משפט 1.9

יהיו a, b שלמים חיוביים. אזי

$$\gcd(a, b) \text{lcm}(a, b) = ab.$$

הוכחה: יהיו הירוקים לראשוניים של a ושל b :

$$a = p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n}, \quad b = p_1^{f_1} \dots p_n^{f_n}.$$

אזי ממשפט 1.6 וממשפט 1.8:

$$\begin{aligned} \gcd(a, b) \operatorname{lcm}(a, b) &= p_1^{\min(e_1, f_1)} \dots p_n^{\min(e_n, f_n)} p_1^{\max(e_1, f_1)} \dots p_n^{\max(e_n, f_n)} \\ &= p_1^{\min(e_1, f_1) + \max(e_1, f_1)} \dots p_n^{\min(e_n, f_n) + \max(e_n, f_n)} \\ &= p_1^{e_1 + f_1} \dots p_n^{e_n + f_n} \\ &= p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n} p_1^{f_1} \dots p_n^{f_n} \\ &= ab, \end{aligned}$$

כאשר נעזרנו בהזהות

$$\min(e, f) + \max(e, f) = e + f.$$

1.4 האלגוריתם של אוקלידס

משפט 1.10 האלגוריתם של אוקלידס

יהיו a, b מספרים שלמים חיוביים. קיים אלגוריתם אשר נותן את $d = \gcd(a, b)$ כדלקמן. ראשית מתחילים r_0 ו- r_1 :

$$r_0 = a, \quad r_1 = b.$$

אם $r_1 = b \neq 0$ אז מתחילים את הלולאה. בשלב $i = 1$ מחשבים את q_1 ו- r_2 כך:

$$q_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor, \quad r_2 = r_0 - q_1 r_1 = r_0 - \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor r_1.$$

אם $r_2 \neq 0$ ממשיכים לשלב $i = 2$ שבו מחשבים את q_2 ו- r_3 כך:

$$q_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor, \quad r_3 = r_1 - q_2 r_2 = r_1 - \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor r_2.$$

התהליך ממשיך עד שנקבל $r_{n+1} = 0$ בשלב ה- n . כל השלבים של התהליך הם כדלקמן:

$$\begin{array}{lll} q_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor & r_2 = r_0 - q_1 r_1 = r_0 - \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor r_1 & \text{שלב } i = 1 \\ q_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor & r_3 = r_1 - q_2 r_2 = r_1 - \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor r_2 & \text{שלב } i = 2 \\ q_3 = \left\lfloor \frac{r_2}{r_3} \right\rfloor & r_4 = r_2 - q_3 r_3 = r_2 - \left\lfloor \frac{r_2}{r_3} \right\rfloor r_3 & \text{שלב } i = 3 \\ & & \vdots \\ q_{n-1} = \left\lfloor \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} \right\rfloor & r_n = r_{n-2} - q_{n-1} r_{n-1} = r_{n-2} - \left\lfloor \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} \right\rfloor r_{n-1} & \text{שלב } i = n-1 \\ q_n = \left\lfloor \frac{r_{n-1}}{r_n} \right\rfloor & r_{n+1} = 0 & \text{שלב } i = n \end{array}$$

התהליך מסתיים בשלב ה- n אם $r_{n+1} = 0$ ואז הפלט של האלגוריתם הוא $r_n = \gcd(a, b)$.

למטה רשום ייצוג פסאודו-קוד של האלגוריתם של אוקלידס:

Algorithm 1 האלגוריתם של אוקלידס

```

1: Input: Integers  $a, b$  .
2:  $r_0 \leftarrow a$ 
3:  $r_1 \leftarrow b$ 
4:  $n \leftarrow 1$ 
5: while  $r_n \neq 0$  do
6:    $q_n \leftarrow \left\lfloor \frac{r_{n-1}}{r_n} \right\rfloor$ 
7:    $r_{n+1} \leftarrow r_{n-1} - q_n r_n$ 
8:    $n \leftarrow n + 1$ 
9: end while
10:  $n \leftarrow n - 1$ 
11: Output:  $r_n = \gcd(a, b)$ 

```

דוגמה 1.12מצאו את ה- $\gcd(1071, 462)$.**פתרון:** $a = 1071, b = 462$ נאתחל $r_0 = a = 1071$ ו- $r_1 = b = 462$ נבצע את האלגוריתם של אוקלידס:

r_i	q_i	שלב
$r_2 = r_0 - q_1 r_1$ $= 1071 - (2)(462) = 147$	$q_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1071}{462} \right\rfloor = 2$	$i = 1$
$r_3 = r_1 - q_2 r_2$ $= 462 - (3)(147) = 21$	$q_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{462}{147} \right\rfloor = 3$	$i = 2$
$r_4 = r_2 - q_3 r_3$ $= 147 - (7)(21) = 0$	$q_3 = \left\lfloor \frac{r_2}{r_3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{147}{21} \right\rfloor = 7$	$i = 3$

לפיכך $\gcd(1071, 462) = r_3 = 21$.**דוגמה 1.13**מצאו את $\gcd(26, 11)$.**פתרון:** $a = 26, b = 11$ נאתחל $r_0 = a = 26$ ו- $r_1 = b = 11$ נבצע את האלגוריתם של אוקלידס:

שלב	q_i	r_i
$i = 1$	$q_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{26}{11} \right\rfloor = 2$	$r_2 = r_0 - q_1 r_1 = 26 - (2)(11) = 4$
$i = 2$	$q_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{11}{4} \right\rfloor = 2$	$r_3 = r_1 - q_2 r_2 = 11 - (2)(4) = 3$
$i = 3$	$q_3 = \left\lfloor \frac{r_2}{r_3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 1$	$r_4 = r_2 - q_3 r_3 = 4 - (1)(3) = 1$
$i = 5$	$q_4 = \left\lfloor \frac{r_3}{r_4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3}{1} \right\rfloor = 3$	$r_5 = r_3 - q_4 r_4 = 3 - (3)(1) = 0$

לפיכך $\gcd(26, 11) = r_4 = 1$.



משפט 1.11 משפט בזו (Bezout's identity)

יהיו a, b . קיימים שלמים s, t, d עבורם

$$sa + tb = d, \quad (1.2)$$

כאשר $d = \gcd(a, b)$. משוואה (1.2) נראת הפירוק אוקלידס של a ו- b .

משפט 1.12 האלגוריתם המוכלל של אוקלידס

יהיו a, b שלמים חיוביים. קיים אלגוריתם אשר נותן שלמים s, t, d עבורם

$$d = sa + tb$$

כאשר $d = \gcd(a, b)$, כדלקמן. ראשית מאתחלים:

$$r_0 = a, \quad r_1 = b, \quad s_0 = 1, \quad s_1 = 0, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 1.$$

אם $r_1 = b \neq 0$ אז מבצעים האיטרציה הראשונה של הלולאה. בשלב $i = 1$ מחשבים את q_1, r_2, s_2, t_2 כך:

$$q_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor, \quad r_2 = r_0 - q_1 r_1, \quad s_2 = s_0 - q_1 s_1, \quad t_2 = t_0 - q_1 t_1.$$

אם $r_2 \neq 0$ אז עוברים לאיטרציה $i = 2$ שבה מחשבים את q_2, r_3, s_3, t_3 כך:

$$q_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor, \quad r_3 = r_1 - q_2 r_2, \quad s_3 = s_1 - q_2 s_2, \quad t_3 = t_1 - q_2 t_2.$$

התהליך ממשיך עד השלב ה- n שבו מקבלים r_{n+1} , ואז פולטים $d = r_n = \gcd(a, b)$, $s = s_n$, $t = t_n$. כל השלבים של האלגוריתם הם כדלקמן:

$q_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor$	$r_2 = r_0 - q_1 r_1$	$s_2 = s_0 - q_1 s_1$	$t_2 = t_0 - q_1 t_1$	שלב 1:
$q_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor$	$r_3 = r_1 - q_2 r_2$	$s_3 = s_1 - q_2 s_2$	$t_3 = t_1 - q_2 t_2$	שלב 2:
				⋮
$q_i = \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor$	$r_{i+1} = r_{i-1} - q_i r_i$	$s_{i+1} = s_{i-1} - q_i s_i$	$t_{i+1} = t_{i-1} - q_i t_i$	שלב i:
				⋮
$q_{n-1} = \left\lfloor \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} \right\rfloor$	$r_n = r_{n-2} - q_{n-1} r_{n-1}$	$s_n = s_{n-2} - q_{n-1} s_{n-1}$	$t_n = t_{n-2} - q_{n-1} t_{n-1}$	שלב n-1:
$q_n = \left\lfloor \frac{r_{n-1}}{r_n} \right\rfloor$	$r_{n+1} = r_{n-1} - q_n r_n$	$s_{n+1} = s_{n-1} - q_n s_n$	$t_{n+1} = t_{n-1} - q_n t_n$	שלב n:

$$d = \gcd(a, b) = r_n, \quad s = s_n, \quad t = t_n.$$

למטה רשום ייצוג פסאודו-קוד של האלגוריתם:

Algorithm 2 אוקלידס של המוכלל האלגוריתם

```

1: Input: Integers  $a, b$ .
2:  $r_0 \leftarrow a$ 
3:  $r_1 \leftarrow b$ 
4:  $s_0 \leftarrow 1$ 
5:  $s_1 \leftarrow 0$ 
6:  $t_0 \leftarrow 0$ 
7:  $t_1 \leftarrow 1$ 
8:  $n \leftarrow 1$ 
9: while  $r_n \neq 0$  do
10:    $q_n \leftarrow \left\lfloor \frac{r_{n-1}}{r_n} \right\rfloor$ 
11:    $r_{n+1} \leftarrow r_{n-1} - q_n r_n$ 
12:    $s_{n+1} \leftarrow s_{n-1} - q_n s_n$ 
13:    $t_{n+1} \leftarrow t_{n-1} - q_n t_n$ 
14:    $n \leftarrow n + 1$ 
15: end while
16:  $n \leftarrow n - 1$ 
17: Output:  $r_n, s_n, t_n$ 

```

$\triangleright d = r_n = \gcd(a, b)$ and $d = sa + tb$ where $s = s_n, t = t_n$.

דוגמה 1.14 (אלגוריתם המוכלל של אוקלידס)

מצאו את $d = \gcd(240, 46)$ ומצאו שלמים s, t עבורם $d = 240s + 46t$.

פתרון:

מאתחלים:

$$\begin{aligned} r_0 &= a = 240, & r_1 &= b = 46, \\ s_0 &= 1, & s_1 &= 0, \\ t_0 &= 0, & t_1 &= 1. \end{aligned}$$

$q_1 = \left\lfloor \frac{240}{46} \right\rfloor = 5$	$r_2 = 240 - 5 \cdot 46 = 10$	$s_2 = 1 - 5 \cdot 0 = 1$	$t_2 = 0 - 5 \cdot 1 = -5$	שלב $i = 1$:
$q_2 = \left\lfloor \frac{46}{10} \right\rfloor = 4$	$r_3 = 46 - 4 \cdot 10 = 6$	$s_3 = 0 - 4 \cdot 1 = -4$	$t_3 = 1 - 4 \cdot (-5) = 21$	שלב $i = 2$:
$q_3 = \left\lfloor \frac{10}{6} \right\rfloor = 1$	$r_4 = 10 - 1 \cdot 6 = 4$	$s_4 = 1 - 1 \cdot (-4) = 5$	$t_4 = -5 - 1 \cdot (21) = -26$	שלב $i = 3$:
$q_4 = \left\lfloor \frac{6}{4} \right\rfloor = 1$	$r_5 = 6 - 1 \cdot 4 = 2$	$s_5 = -4 - 1 \cdot 5 = -9$	$t_5 = 21 - 1 \cdot (-26) = 47$	שלב $i = 4$:
$q_5 = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor = 2$	$r_6 = 4 - 2 \cdot 2 = 0$	$s_6 = 5 - 2 \cdot (-9) = 23$	$t_6 = -26 - 2 \cdot (47) = -120$	שלב $i = 5$:

$$\gcd(a, b) = r_5 = 2, \quad s = s_5 = -9, \quad t = t_5 = 47.$$

$$sa + tb = -9(240) + 47(46) = 2.$$

■

דוגמה 1.15 (אלגוריתם המוכלל של איוקלידס)

מצאו את $d = \gcd(326, 78)$ ומצאו שלמים s, t עבורם $d = 326s + 78t$.

פתרון:

מאתחלים:

$$\begin{aligned} r_0 &= a = 326, & r_1 &= b = 78, \\ s_0 &= 1, & s_1 &= 0, \\ t_0 &= 0, & t_1 &= 1. \end{aligned}$$

$q_1 = \left\lfloor \frac{326}{78} \right\rfloor = 4$	$r_2 = 326 - 4 \cdot 78 = 14$	$s_2 = 1 - 4 \cdot 0 = 1$	$t_2 = 0 - 4 \cdot 1 = -4$	שלב $i = 1$:
$q_2 = \left\lfloor \frac{78}{14} \right\rfloor = 5$	$r_3 = 78 - 5 \cdot 14 = 8$	$s_3 = 0 - 5 \cdot 1 = -5$	$t_3 = 1 - 5 \cdot (-4) = 21$	שלב $i = 2$:
$q_3 = \left\lfloor \frac{14}{8} \right\rfloor = 1$	$r_4 = 14 - 1 \cdot 8 = 6$	$s_4 = 1 - 1 \cdot (-5) = 6$	$t_4 = -4 - 1 \cdot (21) = -25$	שלב $i = 3$:
$q_4 = \left\lfloor \frac{8}{6} \right\rfloor = 1$	$r_5 = 8 - 1 \cdot 6 = 2$	$s_5 = -5 - 1 \cdot 6 = -11$	$t_5 = 21 - 1 \cdot (-25) = 46$	שלב $i = 4$:
$q_5 = \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor = 3$	$r_6 = 6 - 3 \cdot 2 = 0$			שלב $i = 5$:

$$\gcd(a, b) = r_5 = 2, \quad s = s_5 = -11, \quad t = t_5 = 46.$$

$$sa + tb = -11(326) + 46(78) = 2.$$

1.5 יחס השקילות המודולרית

הגדרה 1.7 שקילות מודולרית

יהיו a, b, n שלמים ($n \neq 0$). היחס:

$$a \equiv b \pmod{n}$$

אומר כי " n מחלק את ההפרש $a - b$ ".
כלומר:

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \text{אם ורק אם} \quad n \mid a - b.$$

דוגמה 1.16

הוכיחו כי

$$5 \equiv 2 \pmod{3} \quad (\text{א})$$

$$43 \equiv 23 \pmod{10} \quad (\text{ב})$$

$$7 \not\equiv 2 \pmod{4} \quad (\text{ג})$$

פתרון:

(א)

$$5 - 2 = 3 = 1 \cdot 3 \Rightarrow 3 \mid 5 - 2 \Rightarrow 5 \equiv 2 \pmod{3}.$$

(ב)

$$43 - 23 = 20 = 2 \cdot 10 \Rightarrow 10 \mid 43 - 23 \Rightarrow 43 \equiv 23 \pmod{10}.$$

$$7 - 2 = 5 \quad (\text{ג})$$

לא קיים שלם q כך ש- $7 - 2 = 4q$ לכן $7 - 2 \nmid 4$

$$7 \not\equiv 2 \pmod{4}.$$

ההגדרה 1.7 של שקילות מודולרית בין שלמים גוררת למשפט הבא באופן טבעי:

משפט 1.13

יהיו a, b, r שלמים, $b \neq 0$.

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \text{אם ורק אם} \quad n \mid a - b \quad \text{אם ורק אם} \quad \text{קיים שלם } q \text{ עבורו } a = qn + b.$$

הוכחה:

הגרירה הראשונה $a \equiv r \pmod{b} \Leftrightarrow b \mid a - r$ נובעת ישר מההגדרה 1.7 של יחס שקילות. נראה את הגרירה השנייה:

$$a \equiv b \pmod{n} \iff a - b = qn \iff a = qn + b$$

משפט 1.14 תכונות של יחס השקילות המודולרית

יהיו a, b שלמים ו- $n \neq 0$ שלם.

(1) רפלקסיבי: $a \equiv a \pmod{n}$.

(2) סימטרי: $a \equiv b \pmod{n}$ אם ורק אם $b \equiv a \pmod{n}$.

(3) טרנזיטיבי: אם $a \equiv b \pmod{n}$ וכן $b \equiv c \pmod{n}$ אזי $a \equiv c \pmod{n}$.

הוכחה:

(1) רפלקסיבי:

לכל שלם $n \neq 0$ מתקיים $n \mid a - a$ או במילים אחרות $a = 0 \cdot n + a$, לכן $a \equiv a \pmod{n}$.

(2) סימטרי:

נניח ש- $a \equiv b \pmod{n}$. אזי קיים שלם q עבורו

$$a = qn + b \iff b = (-q)n + a$$

ז"א קיים שלם $\bar{q} = -q$ עבורו $b = \bar{q}n + a$ לכן $b \equiv a \pmod{n}$.

(3) טרנזיטיבי: נניח ש- $a \equiv b \pmod{n}$ וכן $b \equiv c \pmod{n}$.

$$\left. \begin{array}{l} a = qn + b \\ b = \bar{q}n + c \end{array} \right\} \Rightarrow a = qn + \bar{q}n + c = (q + \bar{q})n + c$$

ז"א קיים שלם $Q = q + \bar{q}$ עבורו $a = Qn + c$ לכן $a \equiv c \pmod{n}$.

משפט 1.15 הקשר בין יחס שקילות מודולרית והשאריט

יהיו $a, b, n > 0$ שלמים.

$$a \equiv b \pmod{n} \iff a \bmod n = b \bmod n$$

הוכחה:

כיוון \Leftarrow

נניח ש- $a \equiv b \pmod{n}$. אזי קיים שלם Q כך ש:

$$a = qn + b.$$

לפי משפט החילוק של אוקלידס,

$$b = \bar{q}n = r_1, \quad r_1 = b \bmod n.$$

לכן

$$a = (q + \bar{q})n + r_1 = Qn + r_1$$

כאשר $Q = q + \bar{q}$ שלם ו- $0 \leq r_1 < b$ הוא השארית $r_1 = b \bmod n$. מכאן נובע ש:

$$a \bmod n = a - n \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor = Qn + r_1 - Qn = r_1$$

$$a \bmod n = r_1 = \bmod n$$

כיוון \Rightarrow

נניח ש- $a \bmod n = b \bmod n$. אזי

$$a - n \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor = b - n \left\lfloor \frac{b}{n} \right\rfloor \Rightarrow a = \left(\left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b}{n} \right\rfloor \right) n + b \Rightarrow a = qn + b$$

כלומר קיים שלם $q = \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b}{n} \right\rfloor$ עבורו $a = qn + b$ ולכן $a \equiv b \pmod{n}$. ■

משפט 1.16 חיבור וכפל של שלמים השקולים מודולריים

יהיו a, b, c, d שלמים ו- $n \neq 0$ שלם.

(1) חיבור:

אם $a \equiv b \pmod{n}$ וכן $c \equiv d \pmod{n}$ אזי $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.

(2) כפל:

אם $a \equiv b \pmod{n}$ וכן $c \equiv d \pmod{n}$ אזי $ac \equiv bd \pmod{n}$.

הוכחה:

(1) חיבוריות:

אם $a \equiv b \pmod{n}$ אזי קיים שלם q עבורו $a = qn + b$ וכן אם $c \equiv d \pmod{n}$ אזי קיים שלם q עבורו $c = \bar{q}n + d$ לפיכך

$$a + c = (q + \bar{q})n + b + d \Rightarrow a + c = Qn + (b + d),$$

כאשר $Q = q + \bar{q}$. הוכחנו שקיים שלם Q עבורו $a + c = Qn + b + d$ לכן $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.

(2) כפל:

אם $a \equiv b \pmod{n}$ אזי קיים שלם q עבורו $a = qn + b$ וכן אם $c \equiv d \pmod{n}$ אזי קיים שלם q עבורו $c = \bar{q}n + d$ לפיכך

$$ac = (qn + b)(\bar{q}n + d) \Rightarrow ac = (q\bar{q}n + dq + b\bar{q})n + bd \Rightarrow ac = Qn + bd,$$

כאשר $Q = (q\bar{q}n + dq + b\bar{q})$. הוכחנו שקיים שלם Q עבורו $ac = Qn + bd$ לכן $ac \equiv bd \pmod{n}$.



שיעור 2

חוגים מתמטיים

2.1 הפונקציה אוילר

הגדרה 2.1 פונקציה אוילר

יהי m מספר שלם. הפונקציה אוילר מסומנת $\phi(m)$ ומוגדרת להיות כמות השלמים שקטנים ממש m וזרים ביחס ל- m .

$$\phi(m) := |\{a \in \mathbb{N} \mid \gcd(a, m) = 1, a < m\}|.$$

דוגמה 2.1

מכיוון ש- $26 = 2 \times 13$, הערכים של a עבורם $\gcd(a, 26) = 1$ הם

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25\}.$$

ז"א יש בדיוק 12 ערכים של a עבורם $\gcd(a, 26) = 1$.

$$\phi(26) = 12.$$

משפט 2.1 הפירוק לראשוניים של פונקציה אוילר

יהי $m \geq 2$ מספר שלם ונניח כי הפירוק למספרים ראשוניים שלו הוא

$$m = \prod_{i=1}^n p_i^{e_i}.$$

אזי

$$\phi(m) = \prod_{i=1}^n (p_i^{e_i} - p_i^{e_i-1}).$$

דוגמה 2.2

מצאו את $\phi(60)$.

פתרון:

$$60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \text{ לכן}$$

$$\phi(60) = (2^2 - 2^1) (3^1 - 3^0) (5^1 - 5^0) = (2)(2)(4) = 16.$$

דוגמה 2.3

חשבו את $\phi(24)$

פתרון:

$$24 = 2^3 3^1 .$$

לכן

$$\phi(24) = (2^3 - 2^2)(3^1 - 3^0) = (8 - 4)(3 - 1) = 8 .$$

משפט 2.2

אם p מספר ראשוני אז

$$\phi(p) = p - 1 .$$

הוכחה: תרגיל בית.

משפט 2.3

אם p מספר ראשוני אז

$$\phi(p^n) = p^n - p^{n-1} .$$

הוכחה: תרגיל בית.

משפט 2.4

אם a, b שלמים זרים (כלומר $\gcd(a, b) = 1$) אז

$$\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b) .$$

הוכחה:

• נניח ש- a, b זרים.• נניח שהפירוקים לראשוניים של a ו- b הם:

$$a = p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n} , \quad b = q_1^{f_1} \dots q_m^{f_m} .$$

• ו- a זרים לכן הראשוניים בין השני הפירוקים כולם שונים, כלומר $p_i \neq q_j$ לכל $1 \leq i, j \leq \min n, m$.• לכן אם הפירוק לראשוניים של ab הוא

$$ab = p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n} q_1^{f_1} \dots q_m^{f_m} .$$

• מכאן

$$\phi(ab) = (p_1^{e_1} - p_1^{e_1-1}) \dots (p_n^{e_n} - p_n^{e_n-1}) (q_1^{f_1} - q_1^{f_1-1}) \dots (q_m^{f_m} - q_m^{f_m-1}) = \phi(a)\phi(b) .$$

משפט 2.5

אם p ו- q מספרים ראשוניים שונים אז

$$\phi(p \cdot q) = (p - 1)(q - 1) .$$

הוכחה: תרגיל בית.

2.2 החוג \mathbb{Z}_m

הגדרה 2.2 החוג \mathbb{Z}_m

החוג \mathbb{Z}_m מוגדר להיות להיות הקבוצה של מספרים שלמים

$$\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m - 1\}$$

יחד עם הפעולות \oplus ו- \odot המוגדרות כך:

לכל $a, b \in \mathbb{Z}_m$,

$$a \oplus b = (a + b) \bmod m \quad a \odot b = ab \bmod m .$$

במילים אחרות, \mathbb{Z}_m היא קבוצת השארית בחלוקה ב- m .

מכאן ואילך נסמן חיבור וכפל ב- \mathbb{Z}_m עם הסימנים הרגילים $+$ ו- \times או \cdot .

דוגמה 2.4

חשבו את 11×13 ב- \mathbb{Z}_{16} .

פתרון:

$$11 \times 13 = 143 . \text{ נמצא את השארית בחלוקה ב- } 16 :$$

$$(11 \times 13) \bmod 16 = 143 \bmod 16 = 15 .$$

לפיכך $11 \times 13 = 15$ ב- \mathbb{Z}_{16} .

משפט 2.6 תכונות של החוג \mathbb{Z}_m

לכל $a, b, c \in \mathbb{Z}_m$ התנאים הבאים מתקיימים.

1. סגירה תחת חיבור:

$$a + b \in \mathbb{Z}_m .$$

2. חוק החילוף לחיבור:

$$a + b = b + a .$$

3. חוק הקיבוץ לחיבור:

$$(a + b) + c = a + (b + c) .$$

4. קיום איבר הניטרלי ביחס לחיבור:

$$a + 0 = 0 + a = a .$$

5. האיבר הנגדי של a הוא $m - a$, ז"א $-a = m - a$. הסבר:

$$a + (m - a) = (m - a) + a = m = 0$$

ב- \mathbb{Z}_m .

6. סגירה תחת כפל:

$$ab \in \mathbb{Z}_m.$$

7. חוק החילוף לכפל:

$$ab = ba.$$

8. חוק הקיבוץ לכפל:

$$(ab)c = a(bc).$$

9. קיום איבר הניטרלי ביחס לכפל:

$$a \times 1 = 1 \times a = a.$$

10. חוק הפילוג:

$$(a + b)c = (ac) + (bc).$$

תכונות 1, 3-5 אומרות כי \mathbb{Z}_m הינו "חבורה מתמטית".

יחד עם תכונה 2, \mathbb{Z}_m הוא חבורה אָבֵלִית.

כל התכונות 1-10 אומרות כי \mathbb{Z}_m הוא חוג מתמטי.

הגדרה 2.3 איבר ההופכי ב- \mathbb{Z}_m

יהי $a \in \mathbb{Z}_m$. האיבר ההופכי של a מסומן ב- a^{-1} ומקיים את התנאי

$$aa^{-1} \equiv 1 \pmod{m} \quad \text{וגם} \quad a^{-1}a \equiv 1 \pmod{m}.$$

משפט 2.7

נתון היחס שקילות

$$ax \equiv y \pmod{m}.$$

יש פתרון יחיד $x \in \mathbb{Z}_m$ לכל $y \in \mathbb{Z}_m$ אם ורק אם $\gcd(a, m) = 1$.

הוכחה:

כיוון \Leftarrow

נניח בשלילה כי למשוואה $ax \equiv y \pmod{m}$ יש פתרון יחיד $x = x_1$ אבל $\gcd(a, m) = d > 1$.

אזי $ax_1 \equiv y \pmod{m}$ ולכן קיים q שלם עבורו $ax_1 = qm + y$.

לכן $\frac{am}{d}$ הוא שלם ולכן $ax_1 + \frac{am}{d} = qm + y + \frac{am}{d}$.

מכאן $a\left(x_1 + \frac{m}{d}\right) = \left(q + \frac{a}{d}\right)m + y$, ז"א קיים שלם $Q = q + \frac{a}{d}$ כך ש-

$$a\left(x_1 + \frac{m}{d}\right) = Qm + y \Rightarrow a\left(x_1 + \frac{m}{d}\right) \equiv y \pmod{m}$$

ולכן $ax_2 \equiv y \pmod{m}$ כאשר $x_2 = x_1 + \frac{m}{d}$.

לכן x_2 הוא גם פתרון, בסתירה לכך שיש רק פתרון יחיד.

כיוון \Rightarrow

ננחית ש: $\gcd(a, m) = 1$ ונניח בשלילה כי יש שני פתרונות $x_1 \not\equiv x_2 \pmod{26}$. כלומר:

$$ax_1 \equiv y \pmod{m} \quad \text{ו-} \quad ax_2 \equiv y \pmod{m} .$$

לפי טרנזיטיביות $ax_1 \equiv ax_2 \pmod{m}$ ולכן $m \mid a(x_1 - x_2)$.

■ $\gcd(a, m) = 1$ ולכן $m \nmid a$ ולכן $m \mid x_1 - x_2$ לכן $x_1 \equiv x_2 \pmod{26}$, בסתירה לכך ש- $x_1 \not\equiv x_2 \pmod{26}$.

מסקנה 2.1

יהי $a \in \mathbb{Z}_m$. קיים איבר הופכי $a^{-1} \in \mathbb{Z}_m$ כך ש- 2.3 מקיים את התנאי

$$aa^{-1} \equiv 1 \pmod{m} ,$$

אם ורק אם $\gcd(a, m) = 1$.

הוכחה:

כיוון \Leftarrow

נניח ש- $\gcd(a, m) = 1$. לכן לפי משפט בזו קיימים שלמים x, y כך ש- $xa + ym = 1$. נבעיר אגפים ונקבל: $xa \equiv 1 \pmod{m}$ ולכן $xa = 1 - ym$.

כיוון \Rightarrow

נניח ש- $ax \equiv 1 \pmod{m}$. אזי קיים שלם q עבורו $ax = qm + 1$. נעביר אגפים ונקבל: $ax + (-q)m = 1$. לכן קיימים שלמים x ו- $y = -q$ כך ש: $ax + ym = 1$. לכן לפי משפט בזו, $\gcd(a, m) = 1$.

דוגמה 2.5

הוכיחו שקיים איבר הופכי ל- 11 ב- \mathbb{Z}_{26} ואם כן מצאו אותו.

פתרון:

קיים איבר הופכי של a ב- \mathbb{Z}_m אם ורק אם $\gcd(a, m) = 1$. לכן נבדוק את ה- $\gcd(26, 11)$ באמצעות האלגוריתם של אוקליד המוכלל. יהיו $a = 26, b = 11$.

$$\begin{aligned} r_0 &= a = 26 , & r_1 &= b = 11 , \\ s_0 &= 1 , & s_1 &= 0 , \\ t_0 &= 0 , & t_1 &= 1 . \end{aligned}$$

$q_1 = 2$	$r_2 = 26 - 2 \cdot 11 = 4$	$s_2 = 1 - 2 \cdot 0 = 1$	$t_2 = 0 - 2 \cdot 1 = -2$	שלב $i = 1$
$q_2 = 2$	$r_3 = 11 - 2 \cdot 4 = 3$	$s_3 = 0 - 2 \cdot 1 = -2$	$t_3 = 1 - 2 \cdot (-2) = 5$	שלב $i = 2$
$q_3 = 1$	$r_4 = 4 - 1 \cdot 3 = 1$	$s_4 = 1 - 1 \cdot (-2) = 3$	$t_4 = -2 - 1 \cdot (5) = -7$	שלב $i = 3$
$q_4 = 3$	$r_5 = 3 - 3 \cdot 1 = 0$	$s_5 = -2 - 3 \cdot (3) = -11$	$t_5 = 5 - 3 \cdot (-7) = 28$	שלב $i = 4$

$$\gcd(a, b) = r_4 = 1, \quad x = s_4 = 3, \quad y = t_4 = -7.$$

$$ax + by = 3(26) - 7(11) = 1.$$

מכאן אנחנו רואים כי $\gcd(26, 11) = 1$ ולכן לפי משפט 2.7 ההופכי של 11 קיים ב- \mathbb{Z}_{26} . מחשבים את האיבר ההופכי לפי השיטה הבאה:

$$-7(11) = 1 - 9(26) \Rightarrow -7(11) \equiv 1 \pmod{26} \Rightarrow 19(11) \equiv 1 \pmod{26} \Rightarrow 11^{-1} \equiv 19 \pmod{26}.$$

■

כלל 2.1

האיברים של \mathbb{Z}_{26} שעבורם קיימים איברים הופכיים הינם

1^{-1}	3^{-1}	5^{-1}	7^{-1}	9^{-1}	11^{-1}	15^{-1}	17^{-1}	19^{-1}	21^{-1}	23^{-1}	25^{-1}
1	9	21	15	3	19	7	23	11	5	17	25

הגדרה 2.4 פונקציית אוילר $\phi(m)$

נתון החוג \mathbb{Z}_m כאשר $m \geq 2$ מספר טבעי.

$\phi(m)$ תוגדר להיות הפונקציה הנותנת את מספר איברים ב- \mathbb{Z}_m אשר זרים ל- m .

(שימו לב ההגדרה הזאת זהה להגדרה 2.1).

מסקנה 2.2 מספר איברים הפיכיים ב- \mathbb{Z}_m

מספר האיברים של החוג \mathbb{Z}_m שעבורם קיימים איברים הופכיים שווה ל- $\phi(m)$.

הוכחה: $\phi(m)$ שווה למספר איברים $a \in \mathbb{Z}_m$

עבורם $\gcd(a, m) = 1$, ולפי משפט 2.1 אותם האיברים הם האיברים ההפיכיים של \mathbb{Z}_m .

■

2.3 הפיכת מטריצות בחוג \mathbb{Z}_m

הגדרה 2.5 המטריצה של קופקטורים

תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

הקופקטור ה- (i, j) של A מוגדר להיות הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת מ- A ע"י מחיקת שורה i ועמודה j , כפול $(-1)^{i+j}$.

המטריצה של קופקטורים של המטריצה A מוגדרת

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

כאשר C_{ij} הקופקטור ה- (i, j) של A .

הגדרה 2.6 המטריצה המצורפת

תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. המטריצה המצורפת של A היא מטריצה מסדר $n \times n$ שמסומנת $\text{adj}(A)$ ומוגדרת

$$\text{adj}(A) = C^t$$

כאשר C המטריצה של קופקטורים של A .

משפט 2.8 נוסחת למטריצה ההופכית

נניח כי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית. אם A הפיכה, (כלומר אם $|A| \neq 0$) אז המטריצה ההופכית נתונה ע"י נוסחת קיילי המילטון:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A),$$

כאשר $\text{adj}(A)$ המטריצה המצורפת של A .

דוגמה 2.6

מצאו את ההופכית של

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{2 \times 2}.$$

פתרון:

$$|A| = 11 \cdot 7 - 8 \cdot 3 = 53 = 1 \pmod{26}.$$

$\gcd(1, 26) = 1$ לכן המטריצה הפיכה ב- \mathbb{Z}_{26} .

$$\begin{pmatrix} \cancel{11} & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{11} = (-1)^{1+1} 7 = 7$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{11} & \cancel{8} \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{12} = (-1)^{1+2} 3 = -3$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ \cancel{3} & \cancel{7} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{21} = (-1)^{2+1} 8 = -8$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & \cancel{7} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{22} = (-1)^{2+2} 11 = 11$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = C^t = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = |A|^{-1} \text{adj}(A) .$$

$$|A|^{-1} = 1^{-1} = 1 \in \mathbb{Z}_{26}$$

לפיכך

$$A^{-1} = |A|^{-1} \text{adj}(A) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 22 \\ 23 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{2 \times 2} .$$

■

2.7 דוגמה

מצאו את ההופכית של

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3 \times 3} .$$

פתרון:

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 15 + 1 \cdot (-10) = 5 .$$

$$\gcd(15, 26) = 1 \text{ לכן המטריצה הפיכה ב- } \mathbb{Z}_{26} .$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & 0 & \cancel{1} \\ 0 & 5 & 0 \\ \cancel{2} & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 15 .$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 .$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & 0 & \cancel{1} \\ 0 & 5 & \cancel{0} \\ 2 & 0 & \cancel{3} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -10 .$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & 0 & 1 \\ \cancel{0} & 5 & \cancel{0} \\ \cancel{2} & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{0} \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} \\ \cancel{0} & 5 & \cancel{0} \\ 2 & 0 & \cancel{3} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

$$\begin{pmatrix} \overset{1}{1} & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ \underset{2}{2} & \underset{0}{0} & \underset{3}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \overset{0}{0} & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ \underset{2}{2} & \underset{0}{0} & \underset{3}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \overset{1}{1} \\ 0 & 5 & 0 \\ \underset{2}{2} & \underset{0}{0} & \underset{3}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 .$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = C^t = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -10 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 21 \\ 0 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3 \times 3} .$$

$$A^{-1} = |A|^{-1} \text{adj}(A) .$$

$$|A|^{-1} = 5^{-1} = 21 \in \mathbb{Z}_{26}$$

לפיכך

$$A^{-1} = |A|^{-1} \text{adj}(A) = 21 \cdot \begin{pmatrix} 15 & 0 & 21 \\ 0 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 315 & 0 & 441 \\ 0 & 21 & 0 \\ 336 & 0 & 105 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3 \times 3} .$$

$$315 \% 26 = 315 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{315}{26} \right\rfloor = -23 \equiv 3 \pmod{26} \Rightarrow 315 \equiv 3 \pmod{26} .$$

$$441 \% 26 = 441 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{441}{26} \right\rfloor = 25 \Rightarrow 441 \equiv 25 \pmod{26} .$$

$$336 \% 26 = 336 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{336}{26} \right\rfloor = 24 \Rightarrow 336 \equiv 24 \pmod{26} .$$

$$105 \% 26 = 105 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{105}{26} \right\rfloor = 1 \Rightarrow 105 \equiv 1 \pmod{26} .$$

לפיכך

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 25 \\ 0 & 21 & 0 \\ 24 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3 \times 3} .$$

בדיקה:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 25 \\ 0 & 21 & 0 \\ 24 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 26 \\ 0 & 105 & 0 \\ 78 & 0 & 53 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{26} .$$

שיעור 3

הצפנים הבסיסיים

3.1 מושג של קריפטו-מערכת

אליס ובוב, לתקשר מעל גבי ערוץ תקשורת בלתי אמין (נאמר קו טלסון או דואר אלקרוני), ומבקשים ליהנות מסודיות. כלומר, הם מעוניינים ש שום גורם עוין, אוסקר, שעלול לצותת לשיחתם, לא יוכל להבין את תוכנה.

לשם כך משתמשים אליס ובוב בצופן (cryptosystem). אליס ובוב מסכימים ביניהם מראש על שיטה מסויימת להצפנה ועל מפתח, (key) שהוא ערך מספרי (או כמה ערכים מספריים). כעת, נניח שאליס מעוניינת לשלוח לבוב הודעה מסוימת. היא מצפינה encrypt את ההודעה בשיטה שהיא ובוב בחרו בה תוך כדי שימוש במפתח שהם קבעו. לאחר ההצפנה, ההודעה שינתה את צורתה. להודעה המקורית אנו קוראים טקסט גלוי (plaintext) ואילו ההודעה לאחר ההצפנה נקראת טקסט מוצפן (ciphertext). אליס שולחת את הטקסט המוצפן לבוב. בוב מפענח (decrypt) אותו ומשחזר את הטקסט הגלוי, המקורי. אוסקר, המצותת לערוץ, איננו יודע את ערכו של המפתח שנעשה בו שימוש (למרות ש י יתכן בהחלט ואף סביר להניח שהוא י ודע מהו הצופן ש השתמשו בו אליס ובוב).

הגדרה 3.1 צופן

צופן, (או לעתים קריפטו-מערכת) מוצג באמצעות קבוצה (P, C, K, E, D) , כאשר:

(1) E מסמן קבוצה של טקסט גלוי plaintext,

(2) C מסמן קבוצה של טקסט מוצפן ciphertext,

(3) K מסמן את מרחב המפתח keyspace,

(4) לכל $k \in K$ יש שתי פונקציות: כלל מצפין $e \in E$ וכלל מפענח $d \in D$:

$$e : P \rightarrow C, \quad d : C \rightarrow P,$$

כך ש-

$$d(e(x)) = x$$

לכל איבר של מרחב הטקסט גלוי $x \in P$.

נניח כי ההודעה הנשלחה על ידי אליס לבוב היא הרצף האותיות

$$X = x_1 x_2 \cdots x_n$$

עבור $n \geq 1$ טבעי, כאשר כל אות הוא אות של טקסט גלוי $x_i \in P, 1 \leq i \leq n$. כל x_i מוצפן באמצעות הכלל הצפנה e_k אשר נקבעת מראש על ידי המפתח k הנבחר. ז"א אליס מחשבת

$$y_i = e_k(x_i)$$

$1 \leq i \leq n$ ומקבלת את רצף אותיות מוצפנות

$$Y = y_1 y_2 \cdots y_n.$$

הרצף הזה נשלח מעל גבי הערוץ. כאשר בוב מקבל את Y הוא מפענח אותו באמצעות הפונקציה d_k וכך הוא מקבל הרצף האותיות של טקסט גלוי המקורי

$$X = x_1 x_2 \cdots x_n.$$

פונקציה הצפנה e_k חד-חד ערכית. אחרת לא יהיה אפשרי לפענח את הרצף אותיות מוצפנות. הרי אם e_k לא חד-חד ערכית אזי יכול להיות מצב ש-

$$y = e_k(x_1) = e_k(x_2)$$

כאשר $x_1 \neq x_2$ ואז לבוב לא יכול לדעת אם y ההפענחה של x_1 או x_2 .

3.2 צופן ההזזה

הגדרה 3.2 צופן ההזזה

יהיו $P = C = K = \mathbb{Z}_{26}$. עבור $0 \leq k \leq 25$ נגדיר

$$e_k(x) = (x + k) \bmod 26, \quad x \in \mathbb{Z}_{26}$$

-1

$$d_k(y) = (y - k) \bmod 26, \quad y \in \mathbb{Z}_{26}.$$

צופן ההזזה מוגדר מעל \mathbb{Z}_{26} בגלל שיש 26 אותיות באלפבית.

במטרה להשתמש בצופן ההזזה כדי להצפין טקסט גלוי, קודם כל נגדיר התאמה בין אותיות של האלפבית ומספרים של \mathbb{Z}_{26} :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

3.1 דוגמה

נתון טקסט גלוי

shamoon

נניח כי המפתח בשביל צופן הזזה הוא $k = 11$. מצאו את הטקסט מוצפן.

פתרון:

שלב 1 נמיר את הטקסט גלוי לרצף מספרים לפי הסדר של האלפבית:

$x \in P$	s	h	a	m	o	o	n
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	7	0	12	14	14	13

שלב 2 נוסיף 11 לכל ערך ולעבור את הערך המתקבל לאיבר ב- \mathbb{Z}_{26} :

$x \in P$	s	h	a	m	o	o	n
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	7	0	12	14	14	13
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	3	18	11	23	25	25	24

שלב 3) נעבור את הרצף מספרים לטקסט מוצפן:

$x \in P$	s	h	a	m	o	o	n
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	7	0	12	14	14	13
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	3	18	11	23	25	25	24
$y \in C$	D	S	L	X	Z	Z	Y

הטקסט מוצפן המתקבל הוא

DSLXZZY



דוגמה 3.2

נתון הטקסט מוצפן על ידי צופן קיסר (צופן הזהה):

UJCNQO

מצאו את הטקסט גלוי.

פתרון:

ננסה לפענח את הטקסט מוצפן בעזרת הצופן הזהה עם המפתחות $d_0 = 0, d_1 = 1, d_2 = 2 \dots$ בתור.

$y \in C$	U	J	C	N	Q	O
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	20	9	2	13	16	14
$y - d_1 \in \mathbb{Z}_{26}$	19	8	1	12	15	13
$x \in P$	t	i	b	m	p	n
$y - d_2 \in \mathbb{Z}_{26}$	18	7	0	11	14	12
$x \in P$	s	h	a	l	o	m



דוגמה 3.3

נתון הטקסט מוצפן הבא:

QRQXFJANH XD

מצאו את הטסטק גלוי

פתרון:

ננסה לפענח את הטקסט מוצפן בעזרת הצופן הזהה עם המפתחות d_0, d_1, \dots בתור.

d_0 qrqxfjanhxd
 d_1 pqpweizmgwc
 d_2 opovdhylfvb
 d_3 nonucgxkeua
 d_4 mnmtbfwjdtz
 d_5 lmlsaevicsy
 d_6 klkrzduhbrx
 d_7 jkjqyctgaqw
 d_8 ijipxbsfzpv
 d_9 hihowareyou

בשלב זה מצאנו את הטקסט גלוי:

hihowareyou .

המפתח הוא $k = 9$.

משפט 3.1 צופן הזהה ניתן לפענוח

צופן הזהה ניתן לפענוח. כלומר, אם $e_k(x) = x + k \bmod 26$ ו- $d_k(x) = x - k \bmod 26$ אזי

$$d_k(e_k(x)) = x \bmod 26 .$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
 d_k(e_k(x)) &= (e_k(x) - k) \bmod 26 \\
 &= ((x + k) \bmod 26 - k) \bmod 26 .
 \end{aligned}$$

נציב $q = \left\lfloor \frac{x+k}{26} \right\rfloor = x + k - 26q$ כאשר $(x + k) \bmod 26 = x + k - 26q$ ונקבל

$$\begin{aligned}
 d_k(e_k(x)) &= (x + k - 26q - k) \bmod 26 \\
 &= (x - 26q) \bmod 26
 \end{aligned}$$

מכיוון ש- q הוא מספר שלם אזי $(x - 26q) \bmod 26 \equiv x \bmod 26$ לכן לפי משפט :

$$d_k(e_k(x)) = (x - 26q) \bmod 26 = x \bmod 26 .$$

3.3 צופן האפיני

באופן כללי, בצופן האפיני הכלל מצפין נתון ע"י הפונקציה מצורה

$$e(x) = (ax + b) \% 26 .$$

עבור $a, b \in \mathbb{Z}_{26}$. פונקציה מסוג זה נקראת **פונקציה אפינית**.

כדי שפענוח יהיה אפשרי נדרוש כי הפונקציה הזאת חד-חד-ערכית. במילים אחרות, נדרוש כי לביטוי (יחס שקילות)

$$ax + b \equiv y \pmod{26}$$

יש פתרון יחיד ל- x .

למטה נוכיח כי אכן יש פתרון יחיד אם ורק אם $\gcd(a, 26) = 1$.

משפט 3.2

ליחס שקילות

$$ax + b \equiv y \pmod{26}$$

יש פתרון יחיד בשביל x אם ורק אם $\gcd(a, 26) = 1$.

הוכחה:

כיוון \Leftarrow

נניח ש- $\gcd(a, 26) = 1$. לכן לפי משפט בזו קיימים שלמים x, y כך ש- $xa + y(26) = 1$. נעביר אגפים ונקבל:
 $xa \equiv 1 \pmod{26}$ ולכן $xa = 1 - y(26)$.

כיוון \Rightarrow

נניח ש- $ax \equiv 1 \pmod{26}$. אזי קיים שלם q עבורו $ax = q(26) + 1$. נעביר אגפים ונקבל: $ax + (-q)(26) = 1$.
 לכן קיימים שלמים x ו- $y = -q$ כך ש: $ax + y(26) = 1$. לכן לפי משפט בזו, $\gcd(a, 26) = 1$.
 ■

דוגמה 3.4

בדקו אם הפונקציה

$$e(x) = 4x + 7 \pmod{26}$$

כלל מצפין תקין, כלומר בדקו אם קיים כלל מפענח.

פתרון:

אז הפונקציה $e(x) = 4x + 7 \pmod{26}$ אינה כלל מצפין תקין, בגלל שהיא לא חד-חד-ערכית ולכן לא יכולה להיות כלל מצפין.

למשל, הפונקציה הזאת מחזירה הערכים הבאים בשביל x ו- $x + 13$:

$$e(x) = 4x + 7 \pmod{26}$$

בעוד

$$\begin{aligned} e(x+13) &= 4(x+13) + 7 \pmod{26} \\ &= 4x + 52 + 7 \pmod{26} \\ &= 4x + 2 \cdot 26 + 7 \pmod{26} \\ &= 4x + 7 \pmod{26} \end{aligned}$$

ז"א $e(x)$ מצפין את x ו- $x+13$ לאותו אות מוצפן.

הגדרה 3.3 צופן האפיני

יהי $P = C = \mathbb{Z}_{26}$ ויהי

$$K = \{a, b \in \mathbb{Z}_{26} \mid \gcd(a, 26) = 1\}.$$

עבור $k = (a, b) \in K$ ועבור $x \in \mathbb{Z}_{26}$ נגדיר כלל המצפין

$$e_k(x) = (ax + b) \pmod{26},$$

ועבור $y \in \mathbb{Z}_{26}$ נגדיר כלל המענח

$$d_k(y) = a^{-1}(y - b) \pmod{26}.$$

כלל 3.1

הפירוק לראשוניים של 26 הינו

$$26 = 2^1 13^2.$$

לכן האיברים $a \in \mathbb{Z}_{26}$ עבורם $\gcd(a, 26) = 1$ הם

$$a = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25.$$

ז"א יש בדיוק 12 ערכים של a עבורם $\gcd(a, 26) = 1$.

המספר איברים ב- \mathbb{Z}_{26} עבורם $\gcd(a, 26) = 1$ נובע מנוסחת אוילר (הגדרה 2.4):

$$\phi(26) = (2^1 - 2^0)(13^1 - 13^0) = 12.$$

הפרמטר b מקבל כל איבר של \mathbb{Z}_{26} .

לפיכך לצופן האפיני יש $12 \times 26 = 312$ מפתחות אפשריות.

דוגמה 3.5

נתון כלל מצפין של צופן אפיני בעל המפתח $k = (7, 3)$ ($a = 7, b = 3$).

(1) רשמו את כלל המצפין.

(2) רשמו את כלל המפענח.

(3) בדקו כי התנאי

מתקיים.

פתרון:

(1) כלל המצפין הוא

$$e_k(x) = 7x + 3 \pmod{26},$$

(2) כלל המפענח הוא

$$\begin{aligned} d_k(y) &= 7^{-1}(y - 3) \pmod{26} \\ &= 15(y - 3) \pmod{26} \\ &= 15y - 45 \pmod{26} \\ &= 15y - 19 \\ &= 15y + 7. \end{aligned}$$

(3) נבדוק כי הכלל מפענח המתקבל מקיים $d_k(e_k(x)) = x$

$$\begin{aligned} d_k(e_k(x)) &= d_k(7x + 3) \pmod{26} \\ &= 15(7x + 3) + 7 \pmod{26} \\ &= 105x + 45 + 7 \pmod{26} \\ &= 104x + x + 52 \pmod{26} \\ &= 4 \times 26x + x + 52 \pmod{26} \\ &= x. \end{aligned}$$

דוגמה 3.6

בעזרת הצופן של דוגמה 3.5:

(1) מצאו את הטקסט מוצפן של הטקסט גלוי

hot .

(2) בדקו שהפעולה של הכלל מפענח על הטקסט מוצפן מחזיר את טקסט גלוי

hot .

פתרון:

סעיף (1) נעביר את הוואתיות של hot לערכים של \mathbb{Z}_{26} :

$x \in P$	h	o	t
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	7	14	19

נפעיל את הכלל מצפין על הערכים x :

$$\begin{aligned} e_k(7) &= 7 \times 7 + 3 \pmod{26} \\ &= 52 \pmod{26} \\ &= 2 \times 26 \pmod{26} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_k(14) &= 7 \times 14 + 3 \pmod{26} \\
 &= 101 \pmod{26} \\
 &= 3 \times 26 + 23 \pmod{26} \\
 &= 23 .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_k(19) &= 7 \times 19 + 3 \pmod{26} \\
 &= 136 \pmod{26} \\
 &= 5 \times 26 + 6 \pmod{26} \\
 &= 6 .
 \end{aligned}$$

מכאן נקבל

$x \in P$	h	o	t
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	7	14	19
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	0	23	6
$y \in C$	A	X	G

לכן הטקסט מוצפן המתקבל הוא

AXG

סעיף 2 הכלל מפענח הוא

$$d_k(y) = 15y + 7 .$$

נעביר את הוואתיות של AXG לערכים של \mathbb{Z}_{26} :

$y \in P$	A	X	G
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	1	23	6

נפעיל את הכלל מפענח על הערכים y :

$$\begin{aligned}
 d_k(1) &= 15 \times 1 + 7 \pmod{26} \\
 &= 22 \pmod{26} \\
 &= 22 .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_k(23) &= 15 \times 23 + 7 \pmod{26} \\
 &= 352 \pmod{26} \\
 &= 338 + 14 \pmod{26} \\
 &= 13 \times 26 + 14 \pmod{26} \\
 &= 14 .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_k(6) &= 15 \times 6 + 7 \pmod{26} \\
 &= 97 \pmod{26} \\
 &= 3 \times 26 + 19 \pmod{26} \\
 &= 19 .
 \end{aligned}$$

$y \in C$	A	X	G
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	1	23	6
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	22	14	19
$x \in P$	h	o	t

לכן הטקסט גלוי המתקבל הוא

hot

כנדרש.

דוגמה 3.7

נתון הטקסט מוצפן

ACSE

והמפתח $(23, 2)$ של צופן אפיני. מצאו את הטקסט גלוי.

פתרון:

$$\begin{aligned}
 d_k(y) &= 23^{-1}(y - 2) \pmod{26} \\
 &= 17(y - 2) = 17y - 34 \pmod{26} \\
 &= 17y - 26 - 8 \pmod{26} \\
 &= 17y - 8 \pmod{26} \\
 &= 17y + 18 .
 \end{aligned}$$

נעביר את הוואטיות של ACSE לערכים של \mathbb{Z}_{26} :

$y \in C$	A	C	S	E
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	0	2	18	4

$$\begin{aligned}
 d_k(0) &= 18 \pmod{26} \\
 &= 18 .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_k(2) &= 17 \times 2 + 18 \pmod{26} \\
 &= 52 \pmod{26} \\
 &= 0 .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_k(18) &= 17 \times 18 + 18 \pmod{26} \\
 &= 324 \pmod{26} \\
 &= 12 \times 26 + 12 \pmod{26} \\
 &= 12 .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_k(4) &= 17 \times 4 + 18 \pmod{26} \\
 &= 86 \pmod{26} \\
 &= 3 \times 26 + 8 \pmod{26} \\
 &= 8 .
 \end{aligned}$$

$y \in C$	A	C	S	E
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	0	2	18	4
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	0	12	8
$x \in P$	s	a	m	i

3.4 צופן ויז'נר

צופן ההזזה וצופן ההחלפה דוגמאות של צופן מונואלפביתי: כל תו אלפביתי ב- P נתאים לתו אלפביתי יחיד ב- C . צופן ויז'נר הוא צופן פוליאלפביתי: אין מצפינים כל אות בנפרד, אלא בלוקים, או קבוצות של כמה אותיות באורך קבוע m .

הגדרה 3.4 צופן ויז'נר (Vigenere Cipher)

יהי m מספר שלם חיובי.

נגדיר $P = C = K = \mathbb{Z}_{26}^m$.

עבור מפתח $k = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ נגדיר כלל מצפין

$$e_k(x_1, x_2, \dots, x_m) = (x_1 + k_1, x_2 + k_2, x_3 + k_3, \dots, x_m + k_m)$$

ונגדיר כלל מפענח

$$d_k(y_1, y_2, \dots, y_m) = (y_1 - k_1, y_2 - k_2, y_3 - k_3, \dots, y_m - k_m),$$

כאשר כל הפעולות נבצעות ב- \mathbb{Z}_{26} .

3.8 דוגמה

נתון הטקסט גלוי

string

והמפתח $k =$ AND

(1) מצאו את הכלל מצפין והכלל מפענח.

(2) מצאו את הטקסט מצפון.

(3) בדקו כי הכלל מפענח מחזיר את הטקסט גלוי.

פתרון:

(1) והמפתח הוא

AND.

הערכים המתאימים ב- \mathbb{Z}_{26} הינם

$$k = (0, 13, 3).$$

לכן $m = 3$.

הכלל מצפין הוא

$$e_k(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + 13, x_3 + 3),$$

והכלל מפענח הוא

$$d_k(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2 - 13, y_3 - 3).$$

(2) נעביר את האותיות של הטקסט גלוי לערכים של \mathbb{Z}_{26} :

$x \in P$	s	t	r	i	n	g
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	19	17	8	13	6

נפרק את הטבלה של התווים של הטקסט גלוי יחד עם הערכים המתאימים של \mathbb{Z}_{26} לתת-קבוצות של $m = 3$ תווים:

$x \in P$	s	t	r	i	n	g
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	19	17	8	13	6

בכל תת-קבוצה, נתאים לכל תו ערך של המפתח $k = (0, 13, 3)$:

$x \in P$	s	t	r	i	n	g
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	19	17	8	13	6
$k_i \in k$	0	13	3	0	13	3

על כל שלישיה (x_1, x_2, x_3) בב्लוק אחד, נפעיל את כלל המצפין

$$e_k(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + k_1, x_2 + k_2, x_3 + k_3) \mod 26.$$

לדוגמה בב्लוק הראשון נקבל

$$\begin{aligned} e_k(18, 19, 17) &= (18 + 0, 19 + 13, 17 + 3) \mod 26 \\ &= (18, 32, 20) \mod 26 \\ &= (18, 6, 20). \end{aligned}$$

בב्लוק השני נקבל

$$\begin{aligned} e_k(8, 13, 6) &= (8 + 0, 13 + 13, 6 + 3) \mod 26 \\ &= (8, 26, 9) \mod 26 \\ &= (8, 0, 9). \end{aligned}$$

$x \in P$	s	t	r	i	n	g
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	19	17	8	13	6
$k_i \in k$	0	13	3	0	13	3
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	6	20	8	0	9

נעבור את הערכים $y \in \mathbb{Z}_{26}$ לאותיות של הטקסט מוצפן:

$x \in P$	s	t	r	i	n	g
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	19	17	8	13	6
$k_i \in k$	0	13	3	0	13	3
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	18	6	20	8	0	9
$y \in C$	S	G	U	I	A	J

הטקסט מוצפן המתקבל הוא

SGUIAJ .

(3) נעביר את האותיות של הטקסט מוצפן לערכים של \mathbb{Z}_{26} :

$y \in C$	S	G	U	I	A	J
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	18	6	20	8	0	9

נפרק את הטבלה של התווים של הטקסט גלוי יחד עם הערכים המתאימים של \mathbb{Z}_{26} לתת-קבוצות של $m = 3$ תווים:

$y \in C$	S	G	U	I	A	J
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	18	6	20	8	0	9

בכל תת-קבוצה, נתאים לכל תו ערך של המפתח $k = (0, 13, 3)$:

$x \in P$	S	G	U	I	A	J
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	18	6	20	8	0	9
$k_i \in k$	0	13	3	0	13	3

על כל שלישייה (y_1, y_2, y_3) בב्लוק אחד, נפעיל את כלל המצפין

$$d_k(y_1, y_2, y_3) = (y_1 - k_1, y_2 - k_2, y_3 - k_3) \mod 26.$$

לדוגמה בב्लוק הראשון נקבל

$$\begin{aligned} d_k(18, 6, 20) &= (18, -7, 17) \mod 26 \\ &= (18, 19, 17). \end{aligned}$$

בב्लוק השני נקבל

$$\begin{aligned} d_k(8, 0, 9) &= (8 + 0, -13, 6) \mod 26 \\ &= (8, 13, 6). \end{aligned}$$

$y \in C$	s	t	r	i	n	g
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	18	6	20	8	0	9
$k_i \in k$	0	13	3	0	13	3
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	19	17	8	13	6

נעבור את הערכים $x \in \mathbb{Z}_{26}$ לאותיות של הטקסט גלוי:

$y \in C$	S	G	U	I	A	J
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	18	6	20	8	0	9
$k_i \in k$	0	13	3	0	13	3
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	18	19	17	8	13	6
$x \in P$	s	t	r	i	n	g

הטקסט גלוי המתקבל הוא

string.



3.9 דוגמה

נניח כי $m = 6$ והמפתח הוא

CIPHER.

הערכים המתאימים ב- \mathbb{Z}_{26} הינם

$$k = (2, 8, 15, 7, 4, 17).$$

נתון הטקסט גלוי

thiscryptosystemisnotsecure.

מצאו את הטקסט מוצפן.

פתרון:

שלב 1:

נעביר את האותיות של הטקסט גלוי לערכים של \mathbb{Z}_{26} :

$x \in P$	t	h	i	s	c	r	y	p	t	o	s	y	s	t	e	m	i	s
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	19	7	8	18	2	17	24	15	19	14	18	24	18	19	4	12	8	18

$x \in P$	n	o	t	s	e	c	u	r	e
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	13	14	19	18	4	2	20	17	4

שלב 2:

נפרק את הטבלה של התווים של הטקסט גלוי יחד עם הערכים המתאימים של \mathbb{Z}_{26} לתת-קבוצות של $m = 6$ תווים:

$x \in P$	t	h	i	s	c	r	y	p	t	o	s	y	s	t	e	m	i	s
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	19	7	8	18	2	17	24	15	19	14	18	24	18	19	4	12	8	18

$x \in P$	n	o	t	s	e	c	u	r	e
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	13	14	19	18	4	2	20	17	4

שלב 3:

בכל תת-קבוצה, נתאים לכל תו ערך של המפתח $k = (2, 8, 15, 7, 4, 17)$:

$x \in P$	t	h	i	s	c	r	y	p	t	o	s	y	s	t	e	m	i	s
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	19	7	8	18	2	17	24	15	19	14	18	24	18	19	4	12	8	18
$k_i \in k$	2	8	15	7	4	17	2	8	15	7	4	17	2	8	15	7	4	17

$x \in P$	n	o	t	s	e	c	u	r	e
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	13	14	19	18	4	2	20	17	4
$k_i \in k$	2	8	15	7	4	17	2	8	15

שלב 3:

על כל ששיה $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ בבלוק אחד, נפעיל את כלל המצפין

$$e_k(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_1 + k_1, x_2 + k_2, x_3 + k_3, x_4 + k_4, x_5 + k_5, x_6 + k_6) \mod 26.$$

לדוגמה בבלוק הראשון נקבל

$$\begin{aligned} e_k(19, 7, 8, 18, 2, 17) &= (19 + 2, 7 + 8, 8 + 15, 18 + 7, 2 + 4, 17 + 17) \mod 26 \\ &= (21, 15, 23, 25, 6, 34) \mod 26 \\ &= (21, 15, 23, 25, 6, 8). \end{aligned}$$

$x \in P$	t	h	i	s	c	r	y	p	t	o	s	y	s	t	e	m	i	s
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	19	7	8	18	2	17	24	15	19	14	18	24	18	19	4	12	8	18
$k_i \in k$	2	8	15	7	4	17	2	8	15	7	4	17	2	8	15	7	4	17
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	21	15	23	25	6	8	0	23	34	21	22	15	20	1	19	19	12	9

$x \in P$	n	o	t	s	e	c	u	r	e
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	13	14	19	18	4	2	20	17	4
$k_i \in k$	2	8	15	7	4	17	2	8	15
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	15	22	8	25	8	19	22	25	19

שלב 4:

נעבור את הערכים $y \in \mathbb{Z}_{26}$ לאותיות של הטקסט מוצפן:

$x \in P$	t	h	i	s	c	r	y	p	t	o	s	y	s	t	e	m	i	s
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	19	7	8	18	2	17	24	15	19	14	18	24	18	19	4	12	8	18
$k_i \in k$	2	8	15	7	4	17	2	8	15	7	4	17	2	8	15	7	4	17
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	21	15	23	25	6	8	0	23	8	21	22	15	20	1	19	19	12	9
$y \in \mathbb{C}$	V	P	X	Z	G	I	A	X	I	V	W	P	U	B	T	T	M	J

$x \in P$	n	o	t	s	e	c	u	r	e
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	13	14	19	18	4	2	20	17	4
$k_i \in k$	2	8	15	7	4	17	2	8	15
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	15	22	8	25	8	19	22	25	19
$y \in \mathbb{C}$	P	W	I	Z	I	T	W	Z	T

הטקסט מוצפן המתקבל הוא

VPXZGIA XIVWPUBTTMJPWIZITWZT

3.5 צופן היל

הגדרה 3.5 צופן היל

נניח כי $m \geq 2$ מספר שלם.יהי $P = C = \mathbb{Z}_{26}^m$ ויהי

$$k = \mathbb{Z}_{26}^{m \times m}$$

מטריצה בחוג \mathbb{Z}_{26} מסדר $m \times m$.עבור מפתח $k \in K$ נגדיר כלל מצפין

$$e_k(x) = x \cdot k,$$

ונגדיר כלל מפענח

$$d_k(y) = y \cdot k^{-1},$$

כאשר כל פעולות נצצעות ב- \mathbb{Z}_{26} .

הגדרה 3.6 המטריצה של קופקטורים

תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

הקופקטור ה- (i, j) של A מוגדר להיות הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת מ- A ע"י מחיקת שורה i ועמודה j , כפול $(-1)^{i+j}$.

המטריצה של קופקטורים של המטריצה A מוגדרת

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

כאשר C_{ij} הקופקטור ה- (i, j) של A .

הגדרה 3.7 המטריצה המצורפת

תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. המטריצה המצורפת של A היא מטריצה מסדר $n \times n$ שמסומנת $\text{adj}(A)$ ומוגדרת

$$\text{adj}(A) = C^t$$

כאשר C המטריצה של קופקטורים של A .

משפט 3.3 נוסחת קיילי המילטון

נניח כי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית. אם A הפיכה, כלומר אם $|A| \neq 0$ אז המטריצה ההופכית נתונה ע"י נוסחת קיילי המילטון:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) ,$$

כאשר $\text{adj}(A)$ המטריצה המצורפת של A .

דוגמה 3.10

נתון רצף טקסט גלוי

july

ונתון המפתח

$$k = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

של צופן היל. מצאו את הטקסט מוצפן.

פתרון:
שלב 1:

נעביר את האותיות של הטקסט גלוי לערכים של \mathbb{Z}_{26} :

$x \in P$	j	u	l	y
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	9	20	11	24

שלב 2:

נפרק את הטבלה של התווים של הטקסט גלוי יחד עם הערכים המתאימים של \mathbb{Z}_{26} לתת-קבוצות של $m = 2$ תווים:

$x \in P$	j	u	1	y
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	9	20	11	24

שלב 3:

עבור כל תת-קבוצה המתקבל נחשב

$$\begin{aligned}(y_1 \ y_2) &= (x_1 \ x_2) k \pmod{26} \\ &= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \pmod{26}\end{aligned}$$

עבור התת-קבוצה הראשונה נקבל

$$\begin{aligned}(y_1 \ y_2) &= (9 \ 20) \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \pmod{26} \\ &= (99 + 60 \ 72 + 140) \pmod{26} \\ &= (159 \ 212) \pmod{26} \\ &= (3 \ 4)\end{aligned}$$

עבור התת-קבוצה השנייה נקבל

$$\begin{aligned}(y_1 \ y_2) &= (11 \ 24) \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \pmod{26} \\ &= (121 + 72 \ 88 + 168) \pmod{26} \\ &= (193 \ 256) \pmod{26} \\ &= (11 \ 22)\end{aligned}$$

$x \in P$	j	u	1	y
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	9	20	11	24
$x \cdot k \in \mathbb{Z}_{26}$	3	4	11	22

שלב 4:

נעבור את הערכים $y \in \mathbb{Z}_{26}$ לאותיות של הטקסט מוצפן:

$x \in P$	j	u	1	y
$x \in \mathbb{Z}_{26}$	9	20	11	24
$x \cdot k \in \mathbb{Z}_{26}$	3	4	11	22
$y \in C$	D	E	L	W

הטקסט מוצפן המתקבל הוא

DELW

דוגמה 3.11

נתון רצף טקסט מוצפן

DELW

ונתון המפתח

$$k = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

של צופן היל. מצאו את הטקסט גלוי.

פתרון:

שלב 0:

נחשב את ההופכית k^{-1} :

$$|k| = 11 \cdot 7 - 8 \cdot 3 \mod 26 = 77 - 24 \mod 26 = 53 \mod 26 = 1 .$$

$\gcd(1, 26) = 1$ לכן המטריצה הפיכה ב- \mathbb{Z}_{26} .

$$\begin{pmatrix} \cancel{11} & \cancel{8} \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{11} = (-1)^{1+1}(7) = 7 .$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{11} & \cancel{8} \\ 3 & \cancel{7} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{12} = (-1)^{2+1}(3) = -3 .$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{11} & 8 \\ \cancel{3} & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{21} = (-1)^{1+2}(8) = -8 .$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ \cancel{3} & \cancel{7} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{22} = (-1)^{2+2}(11) = 11 .$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = C^t = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} \mod 26 = \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 23 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{2 \times 2} .$$

$$A^{-1} = |A|^{-1} \text{adj}(A) .$$

$$|A|^{-1} = 1^{-1} = 1 \in \mathbb{Z}_{26}$$

לפיכך

$$A^{-1} = |A|^{-1} \text{adj}(A) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 23 & 11 \end{pmatrix}$$

שלב 1:

נעביר את האותיות של הטקסט גלוי לערכים של \mathbb{Z}_{26} :

$y \in C$	D	E	L	W
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	3	4	11	22

שלב 2:

נפרק את הטבלה של התווים של הטקסט מוצפן יחד עם הערכים המתאימים של \mathbb{Z}_{26} לתת-קבוצות של $m = 2$ תווים:

$y \in C$	D	E	L	W
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	3	4	11	22

שלב 3:

עבור כל תת-קבוצה המתקבל נחשב

$$\begin{aligned}(x_1 \ x_2) &= (y_1 \ y_2) k^{-1} \pmod{26} \\ &= (y_1 \ y_2) \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 23 & 11 \end{pmatrix} \pmod{26}\end{aligned}$$

עבור התת-קבוצה הראשונה נקבל

$$\begin{aligned}(x_1 \ x_2) &= (3 \ 4) \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 23 & 11 \end{pmatrix} \pmod{26} \\ &= (21 + 92 \ 54 + 44) \pmod{26} \\ &= (113 \ 98) \pmod{26} \\ &= (9 \ 20)\end{aligned}$$

עבור התת-קבוצה השנייה נקבל

$$\begin{aligned}(x_1 \ x_2) &= (11 \ 22) \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 23 & 11 \end{pmatrix} \pmod{26} \\ &= (77 + 468 \ 198 + 242) \pmod{26} \\ &= (583 \ 440) \pmod{26} \\ &= (11 \ 24)\end{aligned}$$

$y \in C$	D	E	L	W
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	3	4	11	22
$y \cdot k^{-1} \in \mathbb{Z}_{26}$	9	20	11	24

שלב 5:

נעבור את הערכים $y \in \mathbb{Z}_{26}$ לאותיות של הטקסט מוצפן:

$y \in C$	D	E	L	W
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	3	4	11	22
$y \cdot k^{-1} \in \mathbb{Z}_{26}$	9	20	11	24
$x \in P$	j	u	l	y

הטקסט גלוי המתקבל הוא

july

דוגמה 3.12

נתון רצף טקסט מוצפן

ונתון המפתח

$$k = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

של צופן היל. מצאו את הטקסט גלוי.

פתרון:שלב 0:נחשב את ההופכית k^{-1} :

$$\begin{aligned} |k| &= 3 \cdot (13 \cdot 10 - 11 \cdot 8) - 2 \cdot (5 \cdot 13 - 8 \cdot 6) + 5 \cdot (5 \cdot 11 - 6 \cdot 10) \pmod{26} \\ &= 3 \cdot 42 - 2 \cdot 17 + 5 \cdot (-5) \pmod{26} \\ &= 126 - 34 - 25 \pmod{26} \\ &= 67 \pmod{26} \\ &= 15. \end{aligned}$$

 $\gcd(1, 26) = 1$ לכן המטריצה הפיכה ב- \mathbb{Z}_{26} .

$$\begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{5} \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 11 & 13 \end{vmatrix} = 42 \pmod{26} = 16.$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{5} \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 13 \end{vmatrix} = -17 \pmod{26} = 9.$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{5} \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = -5 \pmod{26} = 21.$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{5} \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 11 & 13 \end{vmatrix} = -29 \pmod{26} = 23.$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{5} \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 13 \end{vmatrix} = 9.$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{5} \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = -21 \pmod{26} = 5.$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{5} \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = -34 \pmod{26} = 18.$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{5} \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 8 \\ 6 & 11 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 20 .$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 9 & 21 \\ 3 & 9 & 5 \\ 18 & 1 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = C^t = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 18 \\ 9 & 9 & 1 \\ 21 & 5 & 20 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3 \times 3} .$$

$$k^{-1} = |k|^{-1} \text{adj}(k) .$$

$$|k|^{-1} = 15^{-1} = 7 \in \mathbb{Z}_{26}$$

לפיכך

$$\begin{aligned} k^{-1} &= |k|^{-1} \text{adj}(k) \\ &= 7 \cdot \begin{pmatrix} 16 & 3 & 18 \\ 9 & 9 & 1 \\ 21 & 5 & 20 \end{pmatrix} \pmod{26} \\ &= \begin{pmatrix} 112 & 21 & 126 \\ 63 & 63 & 7 \\ 147 & 35 & 140 \end{pmatrix} \pmod{26} \end{aligned}$$

$$112 \% 26 = 112 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{112}{26} \right\rfloor = 8 .$$

$$63 \% 26 = 63 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{63}{26} \right\rfloor = 11 .$$

$$147 \% 26 = 147 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{147}{26} \right\rfloor = 17 .$$

$$35 \% 26 = 35 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{35}{26} \right\rfloor = 9 .$$

$$140 \% 26 = 140 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{140}{26} \right\rfloor = 10 .$$

לפיכך

$$k^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 21 & 22 \\ 11 & 11 & 7 \\ 17 & 9 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3 \times 3} .$$

שלב 1:נעביר את האותיות של הטקסט גלוי לערכים של \mathbb{Z}_{26} :

$y \in C$	P	G	R	F	G	G	C	S	Y
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	15	6	17	5	6	6	2	18	24

שלב 2:

נפרק את הטבלה של התווים של הטקסט מוצפן יחד עם הערכים המתאימים של \mathbb{Z}_{26} לתת-קבוצות של $m = 3$ תווים:

$y \in C$	P	G	R	F	G	G	C	S	Y
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	15	6	17	5	6	6	2	18	24

שלב 3:

עבור כל תת-קבוצה המתקבל נחשב

$$\begin{aligned}(x_1 \ x_2 \ x_3) &= (y_1 \ y_2 \ y_3) k^{-1} \pmod{26} \\ &= (y_1 \ y_2 \ y_3) \begin{pmatrix} 8 & 21 & 22 \\ 11 & 11 & 7 \\ 17 & 9 & 10 \end{pmatrix} \pmod{26}\end{aligned}$$

עבור התת-קבוצה הראשונה נקבל

$$\begin{aligned}(x_1 \ x_2 \ x_3) &= (15 \ 6 \ 17) \begin{pmatrix} 8 & 21 & 22 \\ 11 & 11 & 7 \\ 17 & 9 & 10 \end{pmatrix} \pmod{26} \\ &= (475 \ 534 \ 542) \pmod{26} \\ &= (7 \ 14 \ 22)\end{aligned}$$

עבור התת-קבוצה השנייה נקבל

$$\begin{aligned}(x_1 \ x_2 \ x_3) &= (5 \ 6 \ 6) \begin{pmatrix} 8 & 21 & 22 \\ 11 & 11 & 7 \\ 17 & 9 & 10 \end{pmatrix} \pmod{26} \\ &= (208 \ 225 \ 212) \pmod{26} \\ &= (0 \ 17 \ 4)\end{aligned}$$

עבור התת-קבוצה השלישית נקבל

$$\begin{aligned}(x_1 \ x_2 \ x_3) &= (2 \ 18 \ 24) \begin{pmatrix} 8 & 21 & 22 \\ 11 & 11 & 7 \\ 17 & 9 & 10 \end{pmatrix} \pmod{26} \\ &= (622 \ 456 \ 410) \pmod{26} \\ &= (24 \ 14 \ 20)\end{aligned}$$

$y \in C$	P	G	R	F	G	G	C	S	Y
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	15	6	17	5	6	6	2	18	24
$y \cdot k^{-1} \in \mathbb{Z}_{26}$	7	14	22	0	17	4	24	14	20

שלב 5:

נעבור את הערכים $y \in \mathbb{Z}_{26}$ לאותיות של הטקסט מוצפן:

$y \in C$	P	G	R	F	G	G	C	S	Y
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	15	6	17	5	6	6	2	18	24
$y \cdot k^{-1} \in \mathbb{Z}_{26}$	7	14	22	0	17	4	24	14	20
$x \in P$	h	o	w	a	r	e	y	o	u

הטקסט גלוי המתקבל הוא

howareyou



שיעור 4

תמורות וצופן אניגמה

4.1 תמורות

הגדרה 4.1 תמורה

תמורה על קבוצה סופית $\Sigma = \{x_1, \dots, x_n\}$ היא פונקציה $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ אשר היא חד-חד ערכית ו"על" Σ . בהינתן $x_i \in \Sigma$ ותמורה π , אזי

$$\pi(x_i) = x_j \in \Sigma.$$

תזכורת:

• π חד-חד ערכית. ז"א אם $x_i \neq x_j$ אזי $\pi(x_i) \neq \pi(x_j)$.

• π "על" Σ . ז"א לכל $y \in \Sigma$ קיים $x \in \Sigma$ כך ש- $\pi(x) = y$.

כתוצאה מכך, אם π פועלת על כל האיברים של Σ אזי נקבל אותה קבוצה Σ רק לא באותו בסדר של הסדר המקורי:

$$\{\pi(x_1), \pi(x_2), \dots, \pi(x_n)\}.$$

דוגמה 4.1

x	1	2	3	4	5	6
$\pi(x)$	4	1	6	5	2	3

דוגמה 4.2

x	1	2	3	4	5	6
$\sigma(x)$	2	1	5	4	6	3

דוגמה 4.3

תהי Σ קבוצה סופית ותהי $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ פונקציה. הוכיחו: אם π חד-חד ערכית אז היא תמורה.

פתרון:

נתון לנו הפונקציה $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ כאשר Σ קבוצה נוצר סופית. כדי להוכיח כי π תמורה יש להראות כי π חד-חד ערכית ו"על" Σ . כבר נתון לנו ש- π חד-חד ערכית אז נשאר רק להראות כי π על Σ .

Σ היא קבוצה סופית לכן קיים שלם $n \geq 0$ עבורו $|\Sigma| = n$. תהי $\pi(\Sigma)$ התמונה של π . מכיוון ש- π היא פונקציה מהקבוצה Σ אל הקבוצה Σ , אזי התמונה שלה היא תת-קבוצה של Σ , כלומר:

$$\pi(\Sigma) \subseteq \Sigma.$$

לכן

$$|\pi(\Sigma)| \leq |\Sigma| = n.$$

נראה כי $|\pi(\Sigma)| = |\Sigma|$. נניח בשלילה כי $|\pi(\Sigma)| < |\Sigma|$. אז בהכרח קיימים איברים $x_1, x_2 \in \Sigma$ כך ש:

$\Sigma(x_1) = \Sigma(x_2)$, בסתירה לכך ש: π חד-חד-ערכית. לכן הוכחנו דרך השלילה כי

$$|\pi(\Sigma)| = |\Sigma| = n.$$

הוכחנו כי $\pi(\Sigma) \subseteq \Sigma$ וגם $|\pi(\Sigma)| = |\Sigma|$ אז בהכרח

$$\pi(\Sigma) = \Sigma$$

ולפיכך $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ היא פונקציה "על".



הגדרה 4.2 הרכבה של תמורות

תהי Σ קבוצה נוצר סופית ותהי $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ ו- $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ תמורות על הקבוצה Σ . ההרכבה של π ו- σ מוגדרת להיות הפונקציה שמסומנת $\sigma\pi$ ומוגדרת לפי התנאי:
לכל $x \in \Sigma$, אם $\pi(x) = y \in \Sigma$ ואם $\sigma(y) = z \in \Sigma$ אזי

$$\sigma\pi(x) = z.$$

הסימון $\sigma\pi(x)$ אומר "קודם π פועלת על x ואז σ פועלת על $\pi(x)$ ".

דוגמה 4.4

נתון התמורות π ו- σ :

x	1	2	3	4	5	6
$\pi(x)$	4	1	6	5	2	3

x	1	2	3	4	5	6
$\sigma(x)$	3	5	4	2	6	1

אזי ההרכבה $\sigma\pi$ היא:

x	1	2	3	4	5	6
$\sigma\pi(x)$	2	3	1	6	5	4

לעומת זאת ההרכבה ההפוכה $\pi\sigma$ היא:

x	1	2	3	4	5	6
$\pi\sigma(x)$	6	2	5	1	3	4

כלומר $\pi\sigma \neq \sigma\pi$.

משפט 4.1 הרכבה של תמורות היא תמורה

תהי Σ קבוצה נוצר סופית ותהי $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ ו- $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ תמורות על הקבוצה Σ . ההרכבה $\sigma\pi$ היא תמורה על Σ .

הוכחה: מספיק להוכיח כי $\sigma\pi$ היא פונקציה חד-חד-ערכית ו"על".

• חח"ע

נניח בשלילה כי $\sigma\pi$ לא חח"ע. אזי קיימים $x_1, x_2 \in \Sigma$ כך ש- $\sigma(\pi(x_1)) = \sigma(\pi(x_2))$. נסמן $y_1 = \pi(x_1)$ ו- $y_2 = \pi(x_2)$. מכיוון ש- π תמורה אז π חח"ע ולכן $y_1 \neq y_2$. ומכיוון ש- σ תמורה אזי $\sigma(y_1) \neq \sigma(y_2)$.
לכן

$$\sigma(\pi(x_1)) \neq \sigma(\pi(x_2)),$$

בסתירה לכך ש- $\sigma(\pi(x_1)) = \sigma(\pi(x_2))$.

לכן הוכחנו דרך השלילה כי $\sigma\pi$ פונקציה חח"ע.

• על

נניח בשלילה כי $\sigma\pi$ לא פונקצית "על". נסמן $\sigma\pi(\Sigma)$ התמונה של $\sigma\pi$. אזי

$$\sigma\pi(\Sigma) \neq \Sigma.$$

ראשית מכיוון ש- $\sigma\pi(\Sigma)$ הוא התמונה של $\sigma\pi$ אזי $\sigma\pi(\Sigma) \subseteq \Sigma$. לכן אם $\sigma\pi(\Sigma) \neq \Sigma$ אז $\sigma\pi(\Sigma) \subset \Sigma$. מכאן

$$|\sigma\pi(\Sigma)| < |\Sigma|.$$

לכן בהכרח קיים לפחות שני איברים $x_1, x_2 \in \Sigma$ עבורם $\sigma\pi(x_1) = \sigma\pi(x_2)$. זאת בסתירה לכך ש- $\sigma\pi$ חח"ע, שמוכח בסעיף הקודם.

לכן הוכחנו דרך השלילה כי הפונקציה $\sigma\pi$ היא "על". Σ .



הגדרה 4.3 תמורות מתחלפות

תהיינה σ, π תמורות. אומרים כי π ו- σ מתחלפות אם

$$\pi\sigma = \sigma\pi.$$

הגדרה 4.4 תמורות מתחלפות

תהי $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ תמורה על הקבוצה Σ . התמורה ההופכית של π מסומנת π^{-1} ומוגדרת:

$$\pi\pi^{-1}(x) = x = \pi^{-1}\pi(x)$$

לכל $x \in \Sigma$.

דוגמה 4.5

נתונה התמורה π :

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(x)$	6	3	5	1	2	4	8	7

התמורה ההופכית היא:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi^{-1}(x)$	4	5	2	6	3	1	8	7

הגדרה 4.5 נקודת שבת ונקודת זזה

תהי $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ תמורה.

- אם קיימת נקודה $x \in \Sigma$ כך ש: $\Sigma(x) = x$ אז אומרים כי x היא **נקודת שבת** של π .
- אם קיימת נקודה $x \in \Sigma$ כך ש: $\Sigma(x) \neq x$ אז אומרים כי x היא **נקודה זזה** של π .

הגדרה 4.6 תמורה הזהות

התמורה הזהות מסומנת $\text{id} : \Sigma \rightarrow \Sigma$ ומוגדרת כך שלכל $x \in \Sigma$:

$$\text{id}(x) = x.$$

במילים אחרות אם $\text{id} : \Sigma \rightarrow \Sigma$ היא התמורה הזהות אזי כל נקודה $x \in \Sigma$ היא נקודת שבת של id .

משפט 4.2 תמורה ההופכית של תמורה מורכבת

תהיינה π_1, \dots, π_t תמורות על הקבוצה Σ . אזי

$$(\pi_1 \cdots \pi_t)^{-1} = \pi_t^{-1} \cdots \pi_1^{-1}.$$

הוכחה: נוכיח את הטענה באינדוקציה.

שלב הבסיס

עבור $t = 2$, לכל $x \in \Sigma$ יש לנו:

$$\pi_2^{-1} \pi_1^{-1} \pi_1 \pi_2(x) = \pi_2^{-1} \text{id } \pi_2(x) = \pi_2^{-1} \pi_2(x) = \text{id}(x) = x.$$

לכן הוכחנו כי $(\pi_1 \pi_2)^{-1} = \pi_2^{-1} \pi_1^{-1}$.

שלב האינדוקציה

נניח כי הטענה מתקיימת עבור $t = k > 2$ (זאת היא ההנחת האינדוקציה). אז נראה כי הטענה נכונה גם כן עבור $t = k + 1$ באופן הבא. נתבונן על ההתמורה המורכבת $\pi_1 \cdots \pi_k \pi_{k+1}$. נסמן התמורה המורכבת מ- k תמורות כך: $\sigma = \pi_1 \cdots \pi_k$. הסימון הזה מאפשר לנו להביע את התמורה המורכבת מ- $k + 1$ תמורות כתמורה המורכבת מ-2 תמורות באופן הבא:

$$\pi_1 \cdots \pi_k \pi_{k+1} = \sigma \pi_{k+1}.$$

מכאן ולפי השלב הבסיס מהופכית היא

$$(\sigma \pi_{k+1})^{-1} = \pi_{k+1}^{-1} \sigma^{-1}.$$

כעת נחזיר את ההגדרה $\sigma = \pi_1 \cdots \pi_k$ ונשתמש בהנחת האינדוקציה שלנו כדי להוכיח את הטענה עבור $t = k + 1$:

$$(\pi_1 \cdots \pi_k \pi_{k+1})^{-1} = \pi_{k+1}^{-1} (\pi_1 \cdots \pi_k)^{-1} = \pi_{k+1}^{-1} \pi_k^{-1} \cdots \pi_1^{-1}$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בהנחת האינדוקציה.

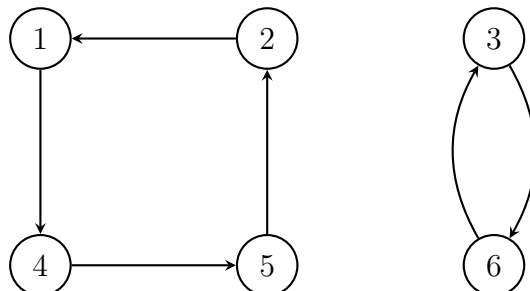
■

4.2 פירוק למחזורים של תמורה

עד כה ראינו תמורות בייצוג של טבלה. אבל המבנה האמיתי של תמורה נגלה עם נציג תמורה כגרף. לדוגמה, תהי π תמורה הבאה על $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

x	1	2	3	4	5	6
$\pi(x)$	4	1	6	5	2	3

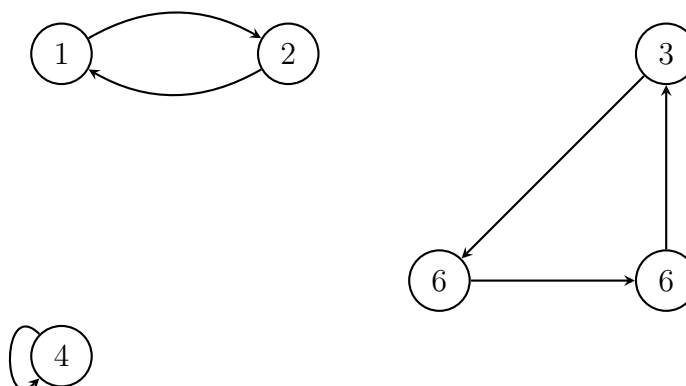
נגדיר הגרף המכוון $G_\pi = (V, E)$ כאשר הקבוצת הקודקודים היא $V = \Sigma$, ולכל $x \in \Sigma$ נגידר צלע מ- x ל- $\pi(x)$. אז $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ כאשר $e_i = x_i \pi(x_i)$ היא הצלע מקודקוד x_i לקודקוד $\pi(x_i)$. על פי ההגדרה הזאת הגרף G_π של התמורה π היא כמתוארת באיור למטה.



כדוגמה נוספת אם σ היא התמורה

x	1	2	3	4	5	6
$\sigma(x)$	2	1	5	4	6	3

אזי הגרף G_σ הינו:



בגרף של תמורה, כל קודקוד שייך לבדיק מעגל מכוון אחד (שייתכן הוא עובר דרך קודקוד אחד בלבד). הרי קיים התאמה אחת-אחת בין תמורה על Σ לבין גרף שמכסה כל המעגלים המכוונים של Σ . התופעה זו היא המוטיבציה לסימון מחזורים של תמורות.

הגדרה 4.7 מחזור

תהי $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ תמורה על הקבוצה Σ ויהיו $\Sigma = \{x_1, \dots, x_n\}$ אם

$$\pi(x_1) = x_{i_1}, \pi(x_{i_1}) = x_{i_2}, \dots, \pi(x_{i_{k-1}}) = x_k$$

אז אומרים שבתמורה π קיים מחזור באורך k , מסומן

$$(x_{i_1} \ x_{i_2} \ \dots \ x_{i_k}).$$

משפט 4.3 פירוק למחזורים של תמורה

תהי $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ תמורה על קבוצה סופית Σ . ניתן לרשום את π כהרכבה של מחזורים זרים.

דוגמה 4.6

נתונה התמורה π :

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(x)$	4	5	2	6	3	1	8	7

הפירוק למחזורים הוא:

$$\pi = (1 \ 4 \ 6) (2 \ 5 \ 3) (8 \ 7)$$

הגדרה 4.8 המחלקה של תמורה

תהי $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ תמורה. אומרים כי π שייכת למחלקה $[1^{z_1} 2^{z_2} \dots n^{z_n}]$ אם בפירוק למחזורים של π יש בדיק z_1 מחזורים באורך-1, z_2 מחזורים באורך-2, z_3 מחזורים באורך-3, וכן הלאה.

במילים אחרות:

$$\pi \in [1^{z_1} 2^{z_2} \dots n^{z_n}]$$

אם לכל $i = 1, \dots, n$ בפירוק למחזורים של π יש z_i מחזורים באורך i .

דוגמה 4.7

תהי $\Sigma = \{A, B, C, D, E, F\}$

- התמורה $(A B)(C D)(E F) \in [2^3]$
- התמורה $(A B C D) \in [1^2 4^1]$
- התמורה $(A D C)(E F) \in [1^1 2^1 3^1]$

4.3 תמורות צמודות

הגדרה 4.9 תמורות צמודות

תהיינה π, σ תמורות על הקבוצה סופית Σ . התמורה הצמודה של σ על ידי π היא המורה המורכבת $\pi\sigma\pi^{-1}$.

משפט 4.4 פירוקים למחזורים של תמורות צמודות שווים

תהי $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ תמורה ונניח כי הפירוק למחזורים שלה הוא

$$\sigma = (a_1 \ a_2 \ \dots a_k) (b_1 \ b_2 \ \dots b_l) \dots$$

אזי להתמורה הצמודה $\pi\sigma\pi^{-1}$ יש אותו פירוק למחזורים:

$$\pi\sigma\pi^{-1} = (\pi(a_1) \ \pi(a_2) \ \dots \ \pi(a_k)) (\pi(b_1) \ \pi(b_2) \ \dots \ \pi(b_l)) \dots$$

בלשון אחר, הצמודה של σ על ידי π פועלת על הפירוק למחזורים המקורי של σ על ידי להפעיל π על האיברים של המחזורים בנפרד.

הוכחה: אם $\sigma(x) = y$ אזי $\pi\sigma\pi^{-1}(\pi(x)) = \pi(y)$ באופן הבא:

$$\pi\sigma\pi^{-1}(\pi(x)) = \pi\sigma\pi^{-1}\pi(x) = \pi\sigma(x) = \pi(y)$$

■

משפט 4.5 תמוקות צמודות שייכות לאותה מחלקה

תהיינה π, σ תמורות כלשהן על הקבוצה סופית Σ . אזי התמורה σ והתמורה הצמודה $\pi\sigma\pi^{-1}$ שייכות לאותה מחלקה.

שיעור 5

קריפטו-אנליזה

5.1 סוגים של התקפת סייבר

נניח שאליס שולחת הודעה מוצפנת לבוב. ויש גורם עוין, אוסקר, שמנסה לצותת לשיחתם. אנחנו מניחים כי אוסקר מודע לקריפטו-מערכת (הצופן) שבאמצעותה אליס הצפינה את ההודעה. ההנחה הזאת נקראת עקרון קירשוף *Kercheoff's principle*.

המטרה בהרכבת צופן היא שהצופן מספיק בטוח כך שאוסקר לא יכול לפענח אפילו אם הוא יודע את הסוג של הצופן בשימוש.

ישנם 4 סוגים של התקפת סייבר.

(1) **התקפת טקסט מוצפן בלבד.**

למתקיף (אוסקר) יש מחרוזת של טקסט מוצפן y .

(2) **התקפת טקסט גלוי ידוע**

למתקיף יש מחרוזת של טקסט גלוי x יחד עם הטקסט מוצפן המתאים y .

(3) **התקפת טקסט גלוי נבחר**

למתקיף היכולת להשיג טקסטים גלויים x של טקסטים מוצפנים y כלשהם חפי בחירתו, שהוצפנו באמצעות הקריפטו-מערכת המותקפה.

(4) **התקפת טקסט מוצפן נבחר**

למתקיף היכולת להשיג טקסטים מוצפנים y של טקסטים גלויים x כלשהם חפי בחירתו, שהוצפנו באמצעות הקריפטו-מערכת המותקפה.

החלק הבא מתעסק עם התקפת טקסט מוצפן.

5.2 קבוצות אותיות הנפוצים ביותר בטקסט גלוי

התקפת טקסט מוצפן בלבד מבוסס על ההתדיקויות של אותיות בקטסט גלוי בשפה אנגלית.

כלל 5.1 פונקצית הסתברות של האותיות של האלפיבית

אות	הסתברות	אות	הסתברות
a	0.082	n	0.067
b	0.015	o	0.075
c	0.028	p	0.019
d	0.043	q	0.001
e	0.127	r	0.06
f	0.022	s	0.063
g	0.02	t	0.091
h	0.061	u	0.028
i	0.07	v	0.01
j	0.002	w	0.023
k	0.008	x	0.001
l	0.04	y	0.02
m	0.024	z	0.001

Becker ו- Piper סדרו את האותיות לחמש קבוצות שונות, לפי הסדר גודל של התדירות של האותיות בטקסט גלוי.

כלל 5.2 קבוצות תדירות של אותיות בטקסט גלוי

	אות	הסתברות
1.	e	$p = 0.127$
2.	t, a, o, i, n, s, h, r	$0.06 \lesssim p \lesssim 0.09$
3.	d, l	$p \approx 0.04$
4.	c, u, m, w, f, g, y, p, b	$0.015 \lesssim p \lesssim 0.028$
5.	v, k, j, x, q, z	$p < 0.01$

כלל 5.3 זוגות אותיות הנפוצים ביותר בטקסט גלוי

השלושים זוגות אותיות הנפוצים ביותר בטקסט גלוי רשומים בטבלה למטה:

th	he	in	er	an	re	ed	on	es	st
en	at	to	nt	ha	nd	ou	ea	ng	as
or	ti	is	et	it	ar	te	se	hi	of

כלל 5.4 קבוצות שלשת אותיות הנפוצים ביותר בטקסט גלוי

ה-12 שלשות של אותיות הנפוצים ביותר בטקסט גלוי רשומים בטבלה למטה:

the	ing	and	her	ere	ent
tha	nth	was	eth	for	dth

5.3 קריפטו-אנליזה של צופן האפיני

זו דוגמה של התקפת טקסט מוצפן בלבד.

5.1 דוגמה

נניח כי אליס שלחה הודעה מוצפנת לבוב ואוסקר השיג את ההודעה. הטקסט מוצפן הוא

KARSRROHVUKARPFSSZFERXERFKREKAFSKARSRROHVUKARURTVEKARVSR

אוסקר יודע כי אליס הצפינה את ההודעה באמצעות צופן איפיני אבל הוא לא יודע את המפתח. כעת הוא מנסה לפענח אותה. מצאו את הטקסט גלוי.

פתרון:

שלב 1 נרשום את התדירויות של האותיות המופיעות בטקסט מוצפן:

A	6	N	0
B	0	O	2
C	0	P	1
D	0	Q	0
E	4	R	14
F	4	S	5
G	0	T	1
H	2	U	3
I	0	V	4
J	0	W	0
K	7	X	1
L	0	Y	0
M	0	Z	1

שלב 2) נרשום את האותיות הנפוצות ביותר:

- R מופיעה 14 פעמים.
- K מופיעה 7 פעמים.
- A מופיעה 6 פעמים.
- S מופיעה 5 פעמים.
- E, F, V מופיעות 4 פעמים.
- U מופיעה 3 פעמים.

שלב 3) ננסה למצוא את המפתח $k = (a, b)$ של $(a, b \in \mathbb{Z}_{26})$ של הכלל מצפין של הצופן אפיני

$$e_k(x) = ax + b ,$$

לכל $x \in \mathbb{Z}_{26}$ על ידי התאמת אותיות הכי נפוצים.

- נניח כי

$$e \xrightarrow{e_k} R , \quad t \xrightarrow{e_k} K .$$

- ז"א

$$e_k(4) = 17$$

$$e_k(19) = 10 .$$

- נציב $e_k = ax + b$ ונקבל

$$4a + b = 17 ,$$

$$19a + b = 10 .$$

כעת נפתור את המערכת מעל \mathbb{Z}_{26} :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 19 & 1 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 15 & 0 & -7 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 15 & 0 & 19 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow 15^{-1}R_2 = 7R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 1 & 0 & 133 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 1 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 4R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$$.a = 3, b = 5$$

$$\gcd(a, 26) = 1 \text{ אז המפתח } k = (3, 5) \text{ תקין.}$$

• נבנה את הכלל מפענח עם המפתח המתקבל:

$$\begin{aligned} d_k(y) &= a^{-1}(y - b) \pmod{26} \\ &= 3^{-1}(y - 5) \\ &= 9(y - 5) \pmod{26} \\ &= 9y - 45 \pmod{26} \\ &= 9y + 7. \end{aligned}$$

שלב 4 ננסה לפענח את הטקסט מצפון עם הכלל מפענח

$y \in C$	K	A	R	S	R	R	O	H	V	U	K	A	R	P	F	S	Z	F	E	R
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	10	0	17	18	17	17	14	7	21	20	10	0	17	15	5	18	25	5	4	17
$x = d_k(y) \in \mathbb{Z}_{26}$	19	7	4	13	4	4	3	18	14	5	19	7	4	12	0	13	24	0	17	4
$x \in P$	t	h	e	n	e	e	d	s	o	t	t	h	e	m	a	n	y	a	r	e

$y \in C$	X	E	R	F	K	R	E	K	A	F	S	K	A	R	S	R	R	O	H
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	23	4	17	5	10	17	4	10	0	5	18	10	0	17	18	17	17	14	7
$x = d_k(y) \in \mathbb{Z}_{26}$	6	17	4	0	19	4	17	19	7	0	13	19	7	4	13	4	4	3	18
$x \in P$	g	r	e	a	t	e	r	t	h	a	n	t	h	e	n	e	e	d	s

$y \in C$	V	U	K	A	R	U	R	T	V	E	K	A	R	V	S	R
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	21	20	10	0	17	20	17	19	21	4	10	0	17	21	18	17
$x = d_k(y) \in \mathbb{Z}_{26}$	14	5	19	7	4	5	4	22	14	17	19	7	4	14	13	4
$x \in P$	o	f	t	h	e	f	e	w	o	r	t	h	e	o	n	e

■

דוגמה 5.2

נניח כי אליס שלחה הודעה מוצפנת לבוב ואוסקר השיג את ההודעה. הטקסט מוצפן הוא

FMXVEDKAPHFERBNDKRXRSREFMORUDSDKDVSHVUFEDKAPRKDLYEVLRRHHRH

אוסקר יודע כי אליס השתמשה בצופן איפניי אבל אינו יודע את המפתח. כעת הוא מנסה לפענח אותה. מצאו את הטקסט גלוי.

פתרון:

שלב 1 נרשום את התדירויות של האותיות המופיעות בטקסט מוצפן:

A	2	N	1
B	1	O	1
C	0	P	2
D	7	Q	0
E	5	R	8
F	4	S	3
G	0	T	0
H	5	U	2
I	0	V	4
J	0	W	0
K	5	X	2
L	2	Y	1
M	2	Z	0

שלב 2 נרשום את האותיות הנפוצות ביותר:

- R מופיעה 8 פעמים.
- D מופיעה 7 פעמים.
- E, H, K מופיעות 5 פעמים.
- F, V מופיעה 4 פעמים.

שלב 3 ננסה למצוא את המפתח $k = (a, b)$ של הכלל מצפין של הצופן אפיני

$$e_k(x) = ax + b ,$$

לכל $x \in \mathbb{Z}_{26}$ על ידי התאמת אותיות הכי נפוצים.

- נניח כי

$$e \xrightarrow{e_k} R , \quad t \xrightarrow{e_k} D .$$

- ז"א

$$e_k(4) = 17$$

$$e_k(19) = 3 .$$

- נציב $e_k = ax + b$ ונקבל

$$4a + b = 17 ,$$

$$19a + b = 3 .$$

כעת נפתור את המערכת מעל \mathbb{Z}_{26} :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 19 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 15 & 0 & -14 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 15 & 0 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow 15^{-1}R_2 = 7R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 1 & 0 & 84 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 1 & 0 & 6 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 4R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 6 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 19 \\ 1 & 0 & 6 \end{array} \right)$$

ז"א $a = 6, b = 19$ המפתח הזה לא תקין בגלל ש- $\gcd(a, 26) = 2 \neq 1$.

- עכשיו נחזור וננסה

$$e \xrightarrow{e_k} R , \quad t \xrightarrow{e_k} E .$$

- ז"א

$$e_k(4) = 17$$

$$e_k(19) = 4 .$$

• נציב $e_k = ax + b$ ונקבל

$$\begin{aligned} 4a + b &= 17, \\ 19a + b &= 4. \end{aligned}$$

כעת נפתור את המערכת מעל \mathbb{Z}_{26} :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 19 & 1 & 4 \end{array} \right) &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 15 & 0 & -13 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 15 & 0 & 13 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow 15^{-1}R_2 = 7R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 1 & 0 & 91 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 1 & 0 & 13 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 4R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -35 \\ 1 & 0 & 13 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 17 \\ 1 & 0 & 13 \end{array} \right) \end{aligned}$$

ז"א $a = 13, b = 17$ המפתח הזה גם לא תקין בגלל ש- $\gcd(a, 26) = 2 \neq 1$.

עכשיו נחזור וננסה

$$e \xrightarrow{e_k} R, \quad t \xrightarrow{e_k} H.$$

• ז"א

$$\begin{aligned} e_k(4) &= 17 \\ e_k(19) &= 7. \end{aligned}$$

• נציב $e_k = ax + b$ ונקבל

$$\begin{aligned} 4a + b &= 17, \\ 19a + b &= 7. \end{aligned}$$

כעת נפתור את המערכת מעל \mathbb{Z}_{26} :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 19 & 1 & 7 \end{array} \right) &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 15 & 0 & -10 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 15 & 0 & 16 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow 15^{-1}R_2 = 7R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 1 & 0 & 112 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 1 & 0 & 8 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 4R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -15 \\ 1 & 0 & 8 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & 13 \end{array} \right) \end{aligned}$$

ז"א $a = 8, b = 11$ המפתח הזה גם לא תקין בגלל ש- $\gcd(a, 26) = 2 \neq 1$.

עכשיו נחזור וננסה

$$e \xrightarrow{e_k} R, \quad t \xrightarrow{e_k} K.$$

• ז"א

$$\begin{aligned} e_k(4) &= 17 \\ e_k(19) &= 10. \end{aligned}$$

• נציב $e_k = ax + b$ ונקבל

$$\begin{aligned} 4a + b &= 17, \\ 19a + b &= 10. \end{aligned}$$

כעת נפתור את המערכת מעל \mathbb{Z}_{26} :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 19 & 1 & 10 \end{array} \right) &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 15 & 0 & -7 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 15 & 0 & 19 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow 15^{-1}R_2 = 7R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 1 & 0 & 133 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 17 \\ 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 4R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

ז"א $a = 3, b = 5$.

$\gcd(a, 26) = 1$ אז המפתח $k = (3, 5)$ תקין.

• נבנה את הכלל מפענח עם המפתח המתקבל:

$$\begin{aligned} d_k(y) &= a^{-1}(y - b) \pmod{26} \\ &= 3^{-1}(y - 5) \\ &= 9(y - 5) \pmod{26} \\ &= 9y - 45 \pmod{26} \\ &= 9y + 7. \end{aligned}$$

שלב 4 ננסה לפענח את הטקסט מציפון עם הכלל מפענח

$y \in C$	F	M	X	V	E	D	K	A	P	H	F	E	R	B	N	D	K	R	X	R
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	5	12	23	21	4	3	10	0	15	7	5	4	17	1	13	3	10	17	23	17
$x = d_k(y) \in \mathbb{Z}_{26}$	0	11	6	14	17	8	19	7	12	18	0	17	4	16	20	8	19	4	6	4
$x \in P$	a	l	g	o	r	i	t	h	m	s	a	r	e	q	u	i	t	e	g	e

$y \in C$	S	R	E	F	M	O	R	U	D	S	D	K	D	V	S	H	V	U	F	E
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	18	17	4	5	12	14	17	20	3	18	3	10	3	21	18	7	21	20	5	4
$x = d_k(y) \in \mathbb{Z}_{26}$	13	4	17	0	11	3	4	5	8	13	8	19	8	14	13	18	14	5	0	17
$x \in P$	n	e	r	a	l	d	e	f	i	n	i	t	i	o	n	s	o	f	a	r

$y \in C$	D	K	A	P	R	K	D	L	Y	E	V	L	R	H	H	R	H
$y \in \mathbb{Z}_{26}$	3	10	0	15	17	10	3	11	24	4	21	11	17	7	7	17	7
$x = d_k(y) \in \mathbb{Z}_{26}$	8	19	7	12	4	19	8	2	15	17	14	2	4	18	18	4	18
$x \in P$	i	t	h	m	e	t	i	c	p	r	o	c	e	s	s	e	s

■

5.4 קריפטו-אנליזה של צופן היל

זו דוגמה של התקפת טקסט גלוי ידוע.

משפט 5.1

נניח שלמתקין יש מחרוזת טקסט גלוי x ומחרוזת טקסט מוצפן שלו. נניח כי המתקין יודע כי הטקסט הוצפן באמצעות צופן היל עם מפתח של סדר m .

נניח שיש למתקין לפחות m טקסטים גלויים וטקסטים מוצפנים. של הטקסט גלוי:

$$x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})$$

-1

$$y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{mj})$$

$1 \leq j \leq m$ כך ש-

$$y_j = e_k(x_j).$$

נגדיר שתי מטריצות

$$X = (x_{i,j}), \quad Y = (y_{i,j}).$$

אם X הפיכה אז

$$Y = XK \Leftrightarrow K = X^{-1}Y.$$

כאשר $K \in \mathbb{Z}_{26}^{m \times m}$ המפתח של הצופן היל.

דוגמה 5.3

נתון הטקסט גלוי

friday

אשר הוצפן באמצעות צופן היל עם מפתח של סדר $m = 2$. נניח כי הטקסט מוצפן הינו

PQCFKU

מצאו את המפתח של הצופן.

פתרון:

$$(f, r) \xrightarrow{e_k} (P, Q), \quad (i, d) \xrightarrow{e_k} (C, F), \quad (a, y) \xrightarrow{e_k} (K, U)$$

ז"א

$$e_k(5, 17) = (15, 16), \quad e_k(8, 3) = (2, 5), \quad e_k(0, 24) = (10, 20).$$

נקח את שני טקסטים גלויים וטקסטים מוצפנים המתאימים נגדיר את המטריצות

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 17 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

אזי

$$K = X^{-1}Y.$$

נחשב את ההופכית X^{-1} באמצעות נוסחת קיילי $X^{-1} = |X|^{-1} \text{adj}(X)$.

$$\begin{aligned} |X| &= 15 - 136 \pmod{26} \\ &= -121 \pmod{26} \\ &= -4(26) - 17 \pmod{26} \\ &= -17 \pmod{26} \\ &= 9 \pmod{26}. \end{aligned}$$

לכן

$$|K|^{-1} \pmod{26} = 9^{-1} \pmod{26} = 3.$$

המטריצת הקופקטורים של X היא $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$ כאשר

$$C_{11} = 3, \quad C_{12} = -8, \quad C_{21} = -17, \quad C_{22} = 5.$$

לכן

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -17 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(X) = C^t = \begin{pmatrix} 3 & -17 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \pmod{26} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 18 & 5 \end{pmatrix}.$$

לבסוף נקבל

$$X^{-1} = 3 \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 18 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 27 \\ 54 & 15 \end{pmatrix} \pmod{26} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 15 \end{pmatrix}.$$

לפיכך

$$\begin{aligned}
 K &= \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \pmod{26} \\
 &= \begin{pmatrix} 137 & 149 \\ 60 & 107 \end{pmatrix} \pmod{26} \\
 &= \begin{pmatrix} 7 & 19 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

■

5.4 דוגמה

נתון הטקסט גלוי

theresnoplacelikehome

אשר הוצפן באמצעות צופן היל עם מפתח של סדר $m = 3$. נניח כי הטקסט מוצפן הינו

FHVTUTGQVRWPCPSFGGAMG

מצאו את המפתח של הצופן.

פתרון:

$$(t, h, e) \xrightarrow{e_k} (F, H, V), \quad (r, e, s) \xrightarrow{e_k} (T, U, T), \quad (n, o, p) \xrightarrow{e_k} (G, Q, V)$$

ז"א

$$e_k(19, 7, 4) = (5, 7, 21), \quad e_k(17, 4, 18) = (19, 20, 19), \quad e_k(13, 14, 15) = (6, 16, 21).$$

נקח את שני טקסטים גלויים וטקסטים מוצפנים המתאימו נגדיר את המטריצות

$$X = \begin{pmatrix} 19 & 7 & 4 \\ 17 & 4 & 18 \\ 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 21 \\ 19 & 20 & 19 \\ 6 & 16 & 21 \end{pmatrix}.$$

אזי

$$K = X^{-1}Y.$$

נחשב את ההופכית X^{-1} באמצעות נוסחת קיילי $X^{-1} = |X|^{-1} \text{adj}(X)$.

$$\begin{aligned}
 |X| &= 15 - 136 \pmod{26} \\
 &= -3051 \pmod{26} \\
 &= 17.
 \end{aligned}$$

לכן

$$|K|^{-1} \pmod{26} = 17^{-1} \pmod{26} = 23.$$

המטריצת הקופקטורים של X היא

$$C = \begin{pmatrix} -192 & -21 & 186 \\ -49 & 233 & -175 \\ 110 & -274 & -43 \end{pmatrix} \pmod{26} = \begin{pmatrix} 16 & 5 & 4 \\ 3 & 25 & 7 \\ 6 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

לכן

$$\text{adj}(X) = C^t = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 6 \\ 5 & 25 & 12 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

לבסוף נקבל

$$X^{-1} = 23 \begin{pmatrix} 16 & 3 & 6 \\ 5 & 25 & 12 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 368 & 69 & 138 \\ 115 & 575 & 276 \\ 92 & 161 & 207 \end{pmatrix} \bmod 26 = \begin{pmatrix} 4 & 17 & 8 \\ 11 & 3 & 16 \\ 14 & 5 & 25 \end{pmatrix}.$$

לפיכך

$$\begin{aligned} K &= X^{-1} \cdot Y \bmod 26 \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 17 & 8 \\ 11 & 3 & 16 \\ 14 & 5 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & 21 \\ 19 & 20 & 19 \\ 6 & 16 & 21 \end{pmatrix} \bmod 26 \\ &= \begin{pmatrix} 391 & 496 & 575 \\ 208 & 393 & 624 \\ 315 & 598 & 914 \end{pmatrix} \bmod 26 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

5.5 מדד צירוף המקרים

הגדרה 5.1 מדד צירוף המקרים I_c

נתון מחרוזת של טקסט גלוי $x = x_1x_2 \cdots x_n$ של אורך n .

המדד צירוף המקרים של x מסומן $I_c(x)$ ומוגדר להיות ההסתברות ששתי אותיות הנבחרות באקראי מתוך x יהיו זהות.

משפט 5.2 נוסחה לחישוב המדד צירוף המקרים

נתון מחרוזת של טקסט גלוי $x = x_1x_2 \cdots x_n$ של אורך n .
יהי f_k מספר הפעמים שהאות מספר k באלפבית מופיעה במחרוזת x . למשל, f_0 מסמן את מספר הפעמים שהאות a מופיעה, f_1 מסמן את מספר הפעמים שהאות b מופיעה, וכן הלאה.

מספר הדרכים לבחור שתי אותיות מתוך n אותיות של x ללא החזרה ניתן על ידי

$$\binom{n}{2}.$$

לכן לכל $0 \leq k \leq 25$ יש $\binom{f_k}{2}$ דרכים לבחור שתי אותיות k מתוך x .

המדד צירוף המקרים של הטקסט גלוי x נתון על ידי הנוסחה

$$I_c(x) = \frac{\sum_{k=0}^{25} \binom{f_k}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{\sum_{k=0}^{25} f_k (f_k - 1)}{n(n-1)} .$$

משפט 5.3 מדד צירוף המקרים בטקסט גלוי

נניח כי $x = x_1 x_2 \dots x_n$ הוא טקסט של n אותיות. נסמן ב- p_0, p_1, \dots, p_{25} ההסתברויות של האותיות כמפורט למטה:

אות	p_i
a	0.082
b	0.015
c	0.028
d	0.043
e	0.127
f	0.022

אות	p_i
g	0.02
h	0.061
i	0.07
j	0.002
k	0.008
l	0.04

אות	p_i
m	0.024
n	0.067
o	0.075
p	0.019
q	0.001
r	0.06

אות	p_i
s	0.063
t	0.091
u	0.028
v	0.01
w	0.023
x	0.001
y	0.02
z	0.001

המדד צירוף המקרים מצופה להיות

$$I_c(x) \approx \sum_{k=0}^{25} p_k^2 = 0.065 .$$

5.6 קריפטו-אנליזה של צופן ויז'נר - מבחן פרידמן

5.5 דוגמה

נתון הטקסט מוצפן

MOKSMNXBIUCMQXGCAXOFXMUWLNRRNSFMIQBHNCF CGDTAHANTTIJNIERGCHURYHOGGSWTMP
CCOYISKOGXLQAFMVXNFEDAEMHQTNAAQXUDIXXRSILCIZKGWEFLAWGUJAOAUPLXRQTGATPS
MKLQSWRGTXJNPXEUNSYIACRGWLQEIMDUBQQGAEEYULEEWXDLIIDUHQOFXWEAZJTUOFXWKS
MTNAAFXTTMFPMUWLNRRNSFMOBIIJTUSFPRMRVBLMQXXRURKCAZGWCWAAGADECGDMMMCZJVQS
NNRTISADILALHOEFWOF TGBSUF DHMZWNK WAPNUJALAZGWCOKSMXRMRQXNQMFHOGVGAGMR
AIAFMGWC MRQXUMJXXRPXGCAWILQAFGZJNOIQXUMVWZUUXWAISSLVIE XWABARVHOG EJNWAV
LQMAVWCOYISUIHIK

שהוצפן באמצעות צופן ויז'נר עם מפתח של אורך 5. מצאו את המפתח ואת הטקסט גלוי.

פתרון:

שלב 1: נפרק את הטקסט לעמודות של 3 אותיות

Y_1	M	N	C	C	X	N	M	N	D	N	N	C	H	W	C	K	Q	X	A	T	X	X	C	W	W	O	X	A	K	R	...
Y_2	O	X	M	A	M	R	I	C	T	T	I	H	O	T	O	O	A	N	E	N	U	R	I	E	G	A	R	T	L	G	...
Y_3	K	B	Q	X	U	N	Q	F	A	T	E	U	G	M	Y	G	F	F	M	A	D	S	Z	F	U	U	Q	P	Q	T	...
Y_4	S	I	X	O	W	S	B	C	H	I	R	R	G	P	I	X	M	E	H	A	I	I	K	L	J	P	T	S	S	X	...
Y_5	M	U	G	F	L	F	H	G	A	J	G	Y	S	C	S	L	V	D	Q	Q	X	L	G	A	A	L	G	M	W	J	...

שלב 2: נחשב את המדד המשותף של כל שורה

יהיו f_i התדירויות של האותיות במחרוזת Y_i ונניח כי האורך של Y_i הוא n . אזי הפונקציות הסתברות של האותיות ב- Y_i הן

$$\frac{f_0}{n}, \dots, \frac{f_{25}}{n}.$$

כל רצף אותיות Y_i מתקבל על ידי הזזה קבועה של k_i מקומות של הטקסט גלוי. לפי זה, הפונקציות הסתברות של האותיות המוזזות,

$$\frac{f_{k_i}}{n}, \dots, \frac{f_{25+k_i}}{n},$$

תהיו קרובות להסתברויות p_0, \dots, p_{25} של אותיות בטקסט גלוי. כעת נגדיר את המדד המשותף

$$M_g(Y_i) = \sum_{i=0}^{25} \frac{p_i f_{i+g}}{n}.$$

לכל $0 \leq g \leq 25$. אם $g = k_i$ אז

$$M_g(Y_i) \approx \sum_{i=0}^{25} p_i^2 = 0.065.$$

על פי זה נבדוק את המדד המשותף לכל Y_i ולכל $0 \leq g \leq 25$:

Y_1

a	0.0336437	b	0.0285977	c	0.0381264	d	0.0335977
e	0.0374943	f	0.0414023	g	0.0374138	h	0.034046
i	0.0388046	j	0.0647931	k	0.0382184	l	0.0352414
m	0.0347586	n	0.0328391	o	0.0302759	p	0.0468161
q	0.0384253	r	0.0272184	s	0.0344828	t	0.0484253
u	0.0454598	v	0.0395747	w	0.0457011	x	0.0391839
y	0.0390345	z	0.0374253				

Y_2

a	0.0602644	b	0.0361839	c	0.0321264	d	0.0373333
e	0.0423333	f	0.0316092	g	0.0397816	h	0.0383333
i	0.0391954	j	0.0425057	k	0.0407586	l	0.0352759
m	0.037	n	0.0468046	o	0.0396092	p	0.0426207
q	0.0327931	r	0.0309655	s	0.0317816	t	0.0412529
u	0.0371609	v	0.0383218	w	0.0422989	x	0.0324828
y	0.0340575	z	0.0381494				

Y₃

a	0.0396092	b	0.046931	c	0.0417011	d	0.0312299
e	0.0352069	f	0.0387701	g	0.0417816	h	0.0348161
i	0.0475402	j	0.0337356	k	0.0285977	l	0.030977
m	0.0625517	n	0.0407816	o	0.0315977	p	0.029931
q	0.0469885	r	0.0332989	s	0.0376782	t	0.042977
u	0.041954	v	0.0300115	w	0.036069	x	0.0395287
y	0.039931	z	0.0368046				

Y₄

a	0.0459655	b	0.0364483	c	0.0323908	d	0.0362184
e	0.0632644	f	0.0395747	g	0.0334598	h	0.0316092
i	0.0438276	j	0.0342414	k	0.0386437	l	0.0336092
m	0.0323333	n	0.0371379	o	0.045092	p	0.0466207
q	0.0363448	r	0.0403678	s	0.0388851	t	0.0392874
u	0.035954	v	0.0374253	w	0.0336207	x	0.0362069
y	0.0372529	z	0.0352184				

Y₅

a	0.0288046	b	0.0362529	c	0.0446322	d	0.0437586
e	0.037069	f	0.0421839	g	0.0347931	h	0.0410805
i	0.0387126	j	0.036977	k	0.0274253	l	0.0331839
m	0.0445172	n	0.0405172	o	0.0408391	p	0.0345977
q	0.0306897	r	0.0342759	s	0.064046	t	0.0436322
u	0.0348161	v	0.0311494	w	0.0374368	x	0.0362414
y	0.0438046	z	0.0395632				

ננסה לפענח את הטקסט מוצפן עם המפתח

JAMES

ונקבל את התשובה

doyouexpectmetotalknomisterbondiexpectyoutodiethereisnothingyoucantalk
 tomeaboutthatidontalreadyknowyoureforgettingonethingififailtoreportdou
 bleoeightreplacesmeitrusthewilllbemoresuccessfulwellheknowswhatiknowyou
 knownothingmisterbondoperationgrandslamforinstancetwowordsyoumayhaveov
 erheardwhichcannotpossiblyhaveanysignificancetoyouoranyoneinyourorgani
 zationcanyouaffordtotakethatchanceyouarequiterightmisterbondyouarewort
 hmoretomealives

עם רווחים וסימני פיסוק:

Do you expect me to talk? No, Mister Bond, I expect you to die. There
 is nothing you can talk to me about that I don't already know. You're
 forgetting one thing: if I fail to report, Double-O Eight replaces me.
 I trust he will be more successful. Well, he knows what I know. You
 know nothing, Mister Bond. Operation Grand Slam, for instance. Two
 words you may have overheard, which cannot possibly have any
 significance to you or anyone in your organization. Can you afford to
 take that chance? You are quite right, Mister Bond. You are worth more
 to me alive.

```

1 def letterToZ26(a):
2     if a.isalpha():
3         if a.isupper():
4             return ord(a) - 65
5         if a.islower():
6             return ord(a) - 97
7
8 def Z26ToUpperLetter(a):
9     return chr(a+65)
10
11 def Z26ToLowerLetter(a):
12     return chr(a+97)
13
14 probabilities = [0.082, 0.015, 0.028, 0.043, 0.127, 0.022, 0.02, 0.061, 0.07, 0.002,
15                 0.008, 0.04, 0.024, 0.067, 0.075, 0.019, 0.001, 0.06, 0.063, 0.091, 0.028, 0.01,
16                 0.023, 0.001, 0.02, 0.001]
17
18 alphabetLower = ['a', 'b', 'c', 'd', 'e', 'f', 'g', 'h', 'i', 'j', 'k', 'l', 'm', 'n', 'o', 'p', 'q',
19                 'r', 's', 't', 'u', 'v', 'w', 'x', 'y', 'z']
20 alphabetUpper = ['A', 'B', 'C', 'D', 'E', 'F', 'G', 'H', 'I', 'J', 'K', 'L', 'M', 'N', 'O', 'P', 'Q',
21                 'R', 'S', 'T', 'U', 'V', 'W', 'X', 'Y', 'Z']
22
23 def P(a):
24     i = alphabetLower.index(a)
25     return probabilities[i]
26
27 cipherText = "
28     MOKSMNXBIUCMQXGCAXOFXMUWLNRRNSFMIQBHNCFCGDTAHANTTIJNIERGCHURYHOGGSWTMPCCOYISKOGXLQAFMVXNFEDAE
29     "
30
31 cipherTextList = list(cipherText)
32
33 y= [None]*5
34 for i in range(0,6):
35     y[i] = cipherTextList[i::5]
36

```

```
31 print( len(y[0]) == len(y[1]) == len(y[2]) == len(y[3]) == len(y[4]) )
32
33 f = [None]*26
34
35 n = len(y[0])
36
37 My = [None]*5
38
39 for k, yi in enumerate(y):
40     for i,X in enumerate(alphabetUpper):
41         f[i] = yi.count(X)
42
43     A = [None]*26
44
45     for g in range(0,26):
46         Sum = 0;
47         b = alphabetLower[g]
48
49         for i in range(0,26):
50             a = alphabetLower[i]
51             Sum += P(a)*f[(i+g) % 26]
52
53         Sum = Sum / n
54
55         A[g] = [b , Sum ]
56
57     My[k] = A
58
59 keyWord = 'james'
60
61 keyZ26 = [letterToZ26(a) for a in list(keyWord)]
62
63 Y = [letterToZ26(a) for a in cipherTextList]
64
65 X = []
66
67 for i,y in enumerate(Y):
68     x = ( y - keyZ26[ i%5 ] ) % 26
69     X.append(x)
70
71 plainTextList = [Z26ToLowerLetter(a) for a in X]
72 plainText = ''.join(plainTextList)
```



שיעור 6

צופן RSA

6.1 משפט השאריות הסיני

משפט 6.1 משפט השאריות הסיני

יהיו m_1, m_2, \dots, m_r שלמים אשר זרים בזוגות ויהיו a_1, a_2, \dots, a_r שלמים. למערכת של יחסים שקילות

$$x = a_1 \pmod{m_1},$$

$$x = a_2 \pmod{m_2},$$

$$\vdots$$

$$x = a_r \pmod{m_r},$$

קיים פתרון יחיד מודולו $M = m_1 m_2 \cdots m_r$ שניתן על ידי

$$x = \sum_{i=1}^r a_i M_i y_i \pmod{M}$$

כאשר $M_i = \frac{M}{m_i}$ ו- $y_i = M_i^{-1} \pmod{m_i}$ לכל $1 \leq i \leq r$.

דוגמה 6.1

היעזרו במשפט השאריות הסיני כדי לפתור את המערכת

$$x = 22 \pmod{101},$$

$$x = 104 \pmod{113}.$$

פתרון:

$$a_1 = 22, \quad a_2 = 104, \quad m_1 = 101, \quad m_2 = 113.$$

$$M = m_1 m_2 = 11413, \quad M_1 = \frac{M}{m_1} = 113, \quad M_2 = \frac{M}{m_2} = 101.$$

$$y_1 = M_1^{-1} \pmod{m_1} = 113^{-1} \pmod{101}, \quad y_2 = M_2^{-1} \pmod{m_2} = 101^{-1} \pmod{113}.$$

כדי לחשב את האיברים ההופכיים נשתמש בהאלגוריתם המוכלל של אוקליד.

נסמן $a = 113, b = 101$.

$$r_0 = a = 113, \quad r_1 = b = 101,$$

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 0,$$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 1.$$

$q_1 = 1$	$t_2 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$	$s_2 = 1 - 1 \cdot 0 = 1$	$r_2 = 113 - 1 \cdot 101 = 12$	שלב $k = 1$
$q_2 = 4$	$t_3 = 1 - 8 \cdot (-1) = 9$	$s_3 = 0 - 8 \cdot 1 = -8$	$r_3 = 101 - 8 \cdot 12 = 5$	שלב $k = 2$
$q_3 = 2$	$t_4 = -1 - 2 \cdot (9) = -19$	$s_4 = 1 - 2 \cdot (-8) = 17$	$r_4 = 12 - 2 \cdot 5 = 2$	שלב $k = 3$
$q_4 = 2$	$t_5 = 9 - 2 \cdot (-19) = 47$	$s_5 = -8 - 2 \cdot 17 = -42$	$r_5 = 5 - 2 \cdot 2 = 1$	שלב $k = 4$
$q_5 = 2$	$t_6 = -19 - 2 \cdot (47) = -113$	$s_6 = 17 - 2 \cdot (-42) = 101$	$r_6 = 2 - 2 \cdot 1 = 0$	שלב $k = 5$

$$\gcd(a, b) = r_5 = 1, \quad s = s_5 = -42, \quad t = t_5 = 47.$$

$$ta + sb = -42(113) + 47(101) = 1.$$

מכאן

$$101^{-1} \equiv 47 \pmod{113}$$

ו-

$$113^{-1} \equiv -42 \pmod{101} = 59 \pmod{101}$$

לכן

$$y_1 = M_1^{-1} \pmod{m_1} = 113^{-1} \pmod{101} = 59$$

ו-

$$y_2 = M_2^{-1} \pmod{m_2} = 101^{-1} \pmod{113} = 47$$

$$\begin{aligned} x &= a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 \pmod{M} \\ &= 22 \cdot 113 \cdot 59 + 104 \cdot 111 \cdot 47 \pmod{11413} \\ &= 640362 \pmod{11413} \\ &= 1234. \end{aligned}$$

■

6.2 משפטים של מספרים ראשוניים

משפט 6.2 קיימים אינסוף מספרים ראשוניים

קיימים אינסוף מספרים ראשוניים.

הוכחה: נוכיח הטענה דרך השלילה.

נניח כי $\{p_1, \dots, p_n\}$ הוא הקבוצה של כל הראשוניים שקיימים וקבוצה זו נוצרת סופי.

נגדיר השלם $M = (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n) + 1$.

לפי משפט הפירוק לראשוניים (ראו משפט 1.4 למעלה או משפט 6.3 למטה) M הוא מספר ראשוני או שווה למכפלה של ראשוניים.

M לא מספר ראשוני בגלל ש- $M > p_i$ לכל $1 \leq i \leq n$.

גם לא קיים מספק ראשוני p_i אשר מחלק את M . הרי

$$M \% p_i = 1 \quad \Rightarrow \quad p_i \nmid M.$$

הגענו לסתירה של המשפט הפירוק לראשוניים, לכן קיימים אינסוף מספרים ראשוניים.

משפט 6.3 משפט הפירוק לראשוניים

(ראו משפט 1.4) לכל מספר שלם n קיימים שלמים e_i וראשוניים p_i כך ש-

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$$

הוכחה: אינדוקציה.

משפט 6.4

אם a, b שלמים זרים (כלומר $\gcd(a, b) = 1$) אז

$$\phi(m \cdot n) = \phi(m) \cdot \phi(n).$$

הוכחה: (להעשרה בלבד)

משפט 6.5

אם p מספר ראשוני אז

$$\phi(p^n) = p^n - p^{n-1}.$$

הוכחה: נתבונן על $\gcd(p^n, m)$ כאשר m שלם ו- p ראשוני.

האפשרויות היחידות של המחלק המשותף הגדול ביותר $\gcd(p^n, m)$ הן $1, p, p^2, \dots, p^n$. בסה"כ יש p^n אפשרויות.

$\gcd(p^n, m) > 1$ רק אם $m \in \{p, 2p, 3p, \dots, p^{n-1}p\}$, כלומר רק אם m שווה לכפולה של p .

מכאן קיימים $p^n - p^{n-1}$ שלמים עבורם $\gcd(p^n, m) = 1$.

משפט 6.6 נוסחה לפונקצית אוילר

(ראו משפט ??) לכל מספר שלם n בעל פירוק לראשוניים

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$$

פונקציית אוילר ניתנת על ידי

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^k (p_i^{e_i} - p_i^{e_i-1}) = (p_1^{e_1} - p_1^{e_1-1}) (p_2^{e_2} - p_2^{e_2-1}) \cdots (p_k^{e_k} - p_k^{e_k-1})$$

הוכחה: משפט 6.4 ו- 6.5.

דוגמה 6.2

חשבו את $\phi(24)$

פתרון:

$$24 = 2^3 3^1 .$$

לכן

$$\phi(24) = (2^3 - 2^2)(3^1 - 3^0) = (8 - 4)(3 - 1) = 8 .$$

משפט 6.7

אם p מספר ראשוני אז

$$\phi(p) = p - 1 .$$

הוכחה: משפט 6.4 ו- 6.5.

משפט 6.8

אם p ו- q מספרים ראשוניים שונים אז

$$\phi(p \cdot q) = (p - 1)(q - 1) .$$

הוכחה: תרגיל בית.

משפט 6.9 המשפט הקטן של פרמה

אם p מספר ראשוני ו- $a \in \mathbb{Z}_p$. אז התנאים הבאים מתקיימים:

$$1. \quad a^p \equiv a \pmod{p}$$

$$2. \quad a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$3. \quad a^{-1} \equiv a^{p-2} \pmod{p}$$

הוכחה:

טענה 1. נוכיח באינדוקציה.

בסיס:עבור $a = 0$ הטענה $0^p \equiv 0 \pmod{p}$ מתקיימת.מעבר:נניח כי הטענה מתקיימת עבור a .

$$(a + 1)^p = a^p + pa^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2}a^{p-2} + \dots + pa + 1 \equiv a^p + 1 \pmod{p}$$

ההנחת האינדוקציה אומרת ש- $a^p \equiv a \pmod{p}$ לכן

$$(a+1)^p \pmod{p} \equiv a^p + 1 \pmod{p} \equiv (a+1) \pmod{p}$$

כנדרש.

טענה 2. $\gcd(a, p) = 1$ לפיכך קיים איבר הופכי $a^{-1} \in \mathbb{Z}_p$. נכפיל ב- a^{-1} אשר הוכחנו בסעיף הקודם:

$$a^{-1}a^p \equiv a^{-1} \cdot a \pmod{p} \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

טענה 3.

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Leftrightarrow 1 \equiv a^{p-1} \pmod{p} \Rightarrow a^{-1} \equiv a^{p-2} \pmod{p}.$$

משפט 6.10 משפט אוילר

אם a, n שלמים ו- $\gcd(a, n) = 1$ אז

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

משפט 6.11

אם a, n שלמים ו- $\gcd(a, n) = 1$ אז

$$a^{-1} \equiv a^{\phi(n)-1} \pmod{n}.$$

דוגמה 6.3

חשבו את האיבר ההופכי ל- 5 ב- \mathbb{Z}_{11} .

פתרון:

לפי משפט פרמט 6.9:

$$5^{-1} = 5^{11-2} \pmod{11} = 5^9 \pmod{11}.$$

לפי הנוסחת לשארית ?? :

$$5^9 \% 11 = 5^9 - 11 \left\lfloor \frac{5^9}{11} \right\rfloor = 9$$

לכן $5^{-1} \in \mathbb{Z}_{11} = 9$.

6.3 אלגוריתם RSA

צופן RSA הומצא בשנה 1977 על ידי Ron Rivest, Adi Shamir and Len Adleman.

הגדרה 6.1 צופן RSA

יהי $n = pq$ כאשר p, q מספרים ראשוניים שונים. תהי הקבוצת טקסט גלוי $P = \mathbb{Z}_n$, והקבוצת טקסט מוצפן $C = \mathbb{Z}_n$. נגדיר קבוצת המפתחות

$$K = \left\{ (n, p, q, a, b) \mid ab = 1 \pmod{\phi(n)} \right\}$$

לכל $k = (n, p, q, a, b) \in K$, ולכל $x \in P$ ו- $y \in C$ נגדיר כלל מצפין

$$e_k(x) = x^b \mod n ,$$

ונגדיר כלל מפענח

$$d_k(x) = y^a \mod n .$$

הערכים של n ו- b הם ערכים ציבוריים בעוד p, q, a ערכים סודיים.

משפט 6.12 קריפטו-מערכת RSA ניתן לפענוח

יהי $n = pq$ מספרים ראשוניים שונים, $a, b \in \mathbb{Z}$ שלמים חיוביים כך ש- $ab = 1 \mod \phi(n)$.

אם $x \in \mathbb{Z}_n$ אז

$$(x^b)^a = x \mod n .$$

הוכחה: נתון כי $ab = 1 \mod \phi(n)$

לפי משפט 6.8, $\phi(n) = \phi(pq) = (p-1)(q-1)$, $\phi(n) = \phi(pq)$ ז"א

$$ab = 1 \mod \phi(n) = 1 \mod (p-1)(q-1)$$

לכן קיים $t \in \mathbb{Z}$ כך ש-

$$ab - 1 = t(p-1)(q-1) .$$

לכל $z \neq 0 \in \mathbb{Z}$ לפי משפט 6.9, $z^{p-1} = 1 \mod p$. בפרט

$$x^{ab-1} = x^{t(p-1)(q-1)} = (x^{t(q-1)})^{p-1} = y^{p-1}$$

כאשר $y = x^{t(q-1)}$. מכאן $x^{ab-1} = 1 \mod p$

משיקולות של סיימטריה באותה מידה $x^{ab-1} = 1 \mod q$

לכן $x^{ab-1} - 1 = 0 \mod p$ ו- $x^{ab-1} - 1 = 0 \mod q$

מכיוון ש- p ו- q זרים אז

$$x^{ab-1} - 1 = 0 \mod (pq) .$$

לפיכך

$$x^{ab-1} = 1 \mod (pq) .$$

נכפיל ב- x ונקבל

$$(x^a)^b = x \mod (pq) .$$

ז"א הוכחנו כי לכל טקסט גלוי x , אם נצפין אותו ואז אחר כך נפענח את הטקסט מוצפן המתקבל מאלגוריתם RSA, נקבל אותו טקסט גלוי המקורי בחזרה. ■

הגדרה 6.2 אלגוריתם RSA

שלב הרכבת המפתח

נניח שאלים (A) שולחת הודעה לבוב (B) .

[1] יוצר B שני מספרים ראשוניים גדולים שונים, p ו- q בסדר גודל של 100 ספרות דצמליות.

[2] B מחשב $n = pq$ ו- $\phi(n) = (p-1)(q-1)$

[3] בוחר במספר שלם באופן מקרי $(0 \leq b \leq \phi(n))$ כך ש- $\gcd(b, \phi(n)) = 1$.

[4] מחשב a כך ש- $a = b^{-1} \mod \phi(n)$ בעזרת האלגוריתם של אוקלידס, (ראו כלל 1.12) ולכן $0 \leq a < \phi(n)$.

[5] שומר את המפתח ציבורי (b, n) בכתובת קובץ ציבורי, ושומר על המפתח פענוח הפרטי (a, p, q) סודי.

בניית מפתח עשוי פעם אחת.

שלב הצפנה

[6] אליס (A) קוראת את המפתח הצפנה (הציבורי) (b, n) $k = (b, n)$ מכתובת קובץ הציבורי.

[7] בכדי להצפין הודעה x , $(0 \leq x < n)$ אליס (A) מחשבת $y = x^b \mod n$.

[8] A שולחת טקסט מוצפן ל- B .

[9] בכדי לפענח את הטקסט מוצפן y , בוב (B) משמש במפתח הפרטי שלו $k^{-1} = (a, p, q)$ ומחשב $x = y^a \mod n$.

דוגמה 6.4

בוב בונה צופן RSA עם המפתח ציבורי $(b = 47, p = 127, q = 191)$.

(א) חשבו את n , $\phi(n)$ ו- a .

(ב) אליס קוראת את המפתח ציבורי (b, n) ומשתמשת בה כדי להצפין את המסר 2468. מהי הטקסט מוצפן שהיא שולחת לבוב?

(ג) כעת בוב מפענח את הטקסט מוצפן שהוא קיבל מאליס בעזרת המפתח (a, p, q) . בדקו כי הפענוח של הטקסט מוצפן מסעיף ב' זהה לטקסט גלוי אשר אליס שלחה.

פתרון:

סעיף א)

$$n = pq = 191 \times 127 = 24257$$

$$\phi(n) = \phi(pq) = (p-1)(q-1) = 190 \times 126 = 23940$$

$$a = 47^{-1} \mod 23940 \text{ נשתמש באלגוריתם של אוקלידס:}$$

שיטה 1

$$a = 23940, b = 47$$

$$r_0 = a = 23940, \quad r_1 = b = 47,$$

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 0,$$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 1.$$

$q_1 = 509$	$t_2 = 0 - 509 \cdot 1 = -509$	$s_2 = 1 - 509 \cdot 0 = 1$	$r_2 = 23940 - 509 \cdot 47 = 17$	שלב $k = 1$:
$q_2 = 2$	$t_3 = 1 - 2 \cdot (-509) = 1019$	$s_3 = 0 - 2 \cdot 1 = -2$	$r_3 = 47 - 2 \cdot 17 = 13$	שלב $k = 2$:
$q_3 = 1$	$t_4 = -509 - 1 \cdot (1019) = -1528$	$s_4 = 1 - 1 \cdot (-2) = 3$	$r_4 = 17 - 1 \cdot 13 = 4$	שלב $k = 3$:
$q_4 = 3$	$t_5 = 1019 - 3 \cdot (-1528) = 5603$	$s_5 = -2 - 3 \cdot (3) = -11$	$r_5 = 13 - 3 \cdot 4 = 1$	שלב $k = 4$:
$q_5 = 4$	$t_6 = -1528 - 4 \cdot (5603) = -23940$	$s_6 = 3 - 4 \cdot (-11) = 47$	$r_6 = 4 - 4 \cdot 1 = 0$	שלב $k = 5$:

$$\gcd(a, b) = r_5 = 1, \quad x = s_5 = -11, \quad y = t_5 = 5603.$$

$$sa + tb = -11(23940) + 5603(47) = 1.$$

מכאן

$$5603(47) = 1 + 11(23940) \Rightarrow 5603(47) = 1 \pmod{23940} \Rightarrow 47^{-1} = 5603 \pmod{23940}.$$

שיטה 2

$$23940 = 509(47) + 17$$

$$47 = 2(17) + 13$$

$$17 = 13 + 4$$

$$13 = 3(4) + 1$$

$$4 = 4(1) + 0.$$

$$1 = 13 - 3(4)$$

$$= 13 - 3(17 - 13)$$

$$= 4(13) - 3(17)$$

$$= 4(47 - 2(17)) - 3(17)$$

$$= 4(47) - 11(17)$$

$$= 4(47) - 11(23940 - 509(47))$$

$$= 5603(47) - 11(23940)$$

$$.a^{-1} = 5603 \text{ לכן}$$

סעיף ב) אליס שולחת את ההודעה $2468^{47} \pmod{24257}$. כדי לחשב זה נשתמש בשיטת ריבועים:

$$.47 = 32 + 8 + 4 + 2 + 1$$

$$(2468)^2 = 2517 \pmod{24257}$$

$$(2468)^4 = (2517)^2 = 4212 \pmod{24257}$$

$$(2468)^8 = (4212)^2 = 9077 \pmod{24257}$$

$$(2468)^{16} = (9077)^2 = 15157 \pmod{24257}$$

$$(2468)^{32} = (15157)^2 = 20859 \pmod{24257}$$

לכן

$$\begin{aligned}
 246847 &= (2468)^{32} \times (2468)^8 \times (2468)^4 \times (2468)^2 \times 2468 \pmod{24257} \\
 &= 20859 \times 9077 \times 4212 \times 2517 \times 2468 \pmod{24257} \\
 &= 10642 \pmod{24257}.
 \end{aligned}$$

לכן הטקסט מוצפן הוא $y = 10642$.סעיף ג) $y = 10642$

$$y \pmod{p} = 10642 \pmod{127} = 101, \quad a \pmod{(p-1)} = 5603 \pmod{126} = 59.$$

לכן

$$\begin{aligned}
 x_1 &= (y \pmod{p})^{a \pmod{(p-1)}} \pmod{p} = 101^{59} \pmod{127} = 55 \\
 &\quad (\text{ניתן לחשב זה לפי } 101^{32} \times 101^{16} \times 101^8 \times 101^2 \times 101)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (101)^2 &\equiv 41 \pmod{127} \\
 (101)^4 &\equiv (41)^2 \pmod{127} \equiv 30 \pmod{127} \\
 (101)^8 &\equiv (30)^2 \pmod{127} \equiv 11 \pmod{127} \\
 (101)^{16} &\equiv (11)^2 \pmod{127} \equiv 121 \pmod{127} \\
 (101)^{32} &\equiv (121)^2 \pmod{127} \equiv 36 \pmod{127}
 \end{aligned}$$

לכן

$$101^{59} \pmod{127} = (101)(41)(11)(121)(36) \pmod{127} = 55.$$

$$y \pmod{q} = 10642 \pmod{191} = 137, \quad a \pmod{(p-1)} = 5603 \pmod{190} = 93.$$

לכן

$$\begin{aligned}
 x_2 &= (y \pmod{q})^{a \pmod{(q-1)}} \pmod{q} = 137^{93} \pmod{191} = 176 \\
 &\quad (\text{ניתן לחשב זה לפי } 137^{64} \times 137^{16} \times 137^8 \times 137^4 \times 137)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (137)^2 &\equiv 51 \pmod{191} \\
 (137)^4 &\equiv (51)^2 \pmod{191} \equiv 118 \pmod{191} \\
 (137)^8 &\equiv (118)^2 \pmod{191} \equiv 172 \pmod{191} \\
 (137)^{16} &\equiv (172)^2 \pmod{191} \equiv 170 \pmod{191} \\
 (137)^{32} &\equiv (170)^2 \pmod{191} \equiv 59 \pmod{191} \\
 (137)^{64} &\equiv (59)^2 \pmod{191} \equiv 43 \pmod{191}
 \end{aligned}$$

לכן

$$137^{93} \pmod{191} = (137)(118)(172)(170)(43) \pmod{191} = 176.$$

בנוסף

$$y \pmod{q} = 9625 \pmod{127} = 100, \quad a \pmod{(q-1)} = 5603 \pmod{126} = 59.$$

לכן

$$x_2 = (y \pmod{q})^{a \pmod{(q-1)}} \pmod{q} = 100^{59} \pmod{127} = 87$$

לכן עלינו לפתור את המערכת

$$x = x_1 \pmod{p} = 55 \pmod{127}$$

$$x = x_2 \pmod{q} = 176 \pmod{191}$$

בעזרת המשפט השאריות הסיני. נסמן $m_2 = 191, a_2 = 176, m_1 = 127, a_1 = 55$.

$$M = m_1 m_2 = (191)(127) = 24257, \quad M_1 = \frac{M}{m_1} = 191, \quad M_2 = \frac{M}{m_2} = 127.$$

כעת נחשב $y_2 = M_2^{-1} \pmod{m_2} = 127^{-1} \pmod{191}$ ו- $y_1 = M_1^{-1} \pmod{m_1} = 191^{-1} \pmod{127}$.

שיטה 1

$$.a = 191, b = 127$$

$$r_0 = a = 191, \quad r_1 = b = 127,$$

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 0,$$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 1.$$

$q_1 = 1$	$t_2 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$	$s_2 = 1 - 1 \cdot 0 = 1$	$r_2 = 191 - 1 \cdot 127 = 64$	שלב $k = 1$:
$q_2 = 1$	$t_3 = 1 - 1 \cdot (-1) = 2$	$s_3 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$	$r_3 = 127 - 1 \cdot 64 = 63$	שלב $k = 2$:
$q_3 = 1$	$t_4 = -1 - 1 \cdot (2) = -3$	$s_4 = 1 - 1 \cdot (-1) = 2$	$r_4 = 64 - 1 \cdot 63 = 1$	שלב $k = 3$:
$q_4 = 63$	$t_5 = 2 - 63 \cdot (-3) = 191$	$s_5 = -1 - 63 \cdot (2) = -127$	$r_5 = 63 - 63 \cdot 1 = 0$	שלב $k = 4$:

$$\gcd(a, b) = r_4 = 1, \quad s = s_4 = 2, \quad t = t_4 = -3.$$

$$sa + tb = 2(191) - 3(127) = 1.$$

לכן

$$191^{-1} \equiv 2 \pmod{127}$$

$$127^{-1} \equiv (-3) \pmod{191} \equiv 188 \pmod{191}.$$

שיטה 2

נחשב $y_2 = 127^{-1} \pmod{191}$ ו- $y_1 = 191^{-1} \pmod{127}$ בעזרת האלגוריתם של אוקליד:

$$191 = 127 \cdot 1 + 64$$

$$127 = 64 \cdot 1 + 63$$

$$64 = 63 \cdot 1 + 1$$

$$63 = 1 \cdot 63 + 0.$$

$$\gcd(191, 127) = 1 \text{ לכן}$$

$$\begin{aligned}
 1 &= 64 - 63 \cdot 1 \\
 &= 64 - (127 - 64 \cdot 1) \\
 &= 64 \cdot 2 - 127 \cdot 1 \\
 &= (191 - 127 \cdot 1) \cdot 2 - 127 \\
 &= 191 \cdot 2 + 127 \cdot (-3) .
 \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}
 y_1 &= M_1^{-1} \bmod m_1 = 127^{-1} \bmod 191 \equiv 188 \bmod 191 \\
 y_2 &= M_2^{-1} \bmod m_2 = 191^{-1} \bmod 127 \equiv 2 \bmod 127 .
 \end{aligned}$$

נחשב

$$y_1 = M_1^{-1} \bmod m_1 = 127^{-1} \bmod 191 = 188, \quad y_2 = M_2^{-1} \bmod m_2 = 191^{-1} \bmod 127 = 2 .$$

לכן

$$\begin{aligned}
 y &= a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 \\
 &= 55(191)(2) + 176(127)(188) \bmod 24257 \\
 &= 4223186 \bmod 24257 \\
 &= 2468 .
 \end{aligned}$$

משפט 6.13

יהיו p, q מספרים ראשוניים ויהי $n = pq$. יהי

$$\lambda(n) = \frac{(p-1)(q-1)}{\gcd(p-1, q-1)} .$$

נגדיר צופן חדש אשר זהה ל-RSA אלא $\phi(n)$ הוחלף עם $\lambda(n)$ כך ש- $ab \equiv 1 \bmod \lambda(n)$. אזי הקריפטו- מערכת ניתן לפענח.

הוכחה:

(שלב 1) רושמים את הצופן:

$$\left. \begin{aligned} e_k(x) &= x^b \bmod n \\ d_k(y) &= y^a \bmod n \end{aligned} \right\} \quad n = pq, \quad ab \equiv 1 \bmod \lambda(n) .$$

(שלב 2) נתון כי $d = \gcd(p-1, q-1)$. ז"א שקיים p' שלם כך ש-

$$p-1 = p'd \Leftrightarrow \frac{p-1}{d} = p' \Leftrightarrow d = \frac{p-1}{p'} . \quad (\#1)$$

באותה מידה קיים q' שלם כך ש-

$$q-1 = q'd \Leftrightarrow \frac{q-1}{d} = q' \Leftrightarrow d = \frac{q-1}{q'} . \quad (\#2)$$

(שלב 3)

$$\lambda(n) = \frac{(p-1)(q-1)}{\gcd(p-1, q-1)} = \frac{(p-1)(q-1)}{d} .$$

$$\lambda(n) \stackrel{(\#1)}{=} \frac{(p-1)(q-1)}{\left(\frac{p-1}{p'}\right)} = p'(q-1) . \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{p-1}{p'} . \quad (1*)$$

$$\lambda(n) \stackrel{(\#2)}{=} \frac{(p-1)(q-1)}{\left(\frac{q-1}{q'}\right)} = q'(p-1) . \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{p-1}{p'} . \quad (2*)$$

שלב 4 $ab \equiv 1 \pmod{\lambda(n)}$ (נתון) לכן קיים t שלם כך ש-

$$ab = 1 + t\lambda(n) \stackrel{(2*)}{=} 1 + t(p-1)q' .$$

לכן

$$ab - 1 = t(p-1)q' .$$

מכאן

$$x^{ab-1} x^{tq'(p-1)} = y^{p-1} \stackrel{\text{פרמה}}{\equiv} 1 \pmod{p}$$

כאשר $y = x^{tq'}$ והשוויון השני מתקיים בגלל ש- p מספר ראשוני. לפיכך

$$x^{ab-1} \equiv 1 \pmod{p} .$$

שלב 5 $ab \equiv 1 \pmod{\lambda(n)}$ (נתון) לכן קיים t שלם כך ש-

$$ab = 1 + t\lambda(n) \stackrel{(1*)}{=} 1 + t(q-1)p' .$$

לכן

$$ab - 1 = t(q-1)p' .$$

מכאן

$$x^{ab-1} x^{tp'(q-1)} = z^{q-1} \stackrel{\text{פרמה}}{\equiv} 1 \pmod{q}$$

כאשר $z = x^{tp'}$ והשוויון השני מתקיים בגלל ש- q מספר ראשוני. לפיכך

$$x^{ab-1} \equiv 1 \pmod{q} .$$

שלב 6 מכיוון ש- p, q ראשוניים אז

$$\left. \begin{array}{l} x^{ab-1} \equiv 1 \pmod{q} \\ x^{ab-1} \equiv 1 \pmod{p} \end{array} \right\} \Rightarrow x^{ab-1} \equiv 1 \pmod{pq}$$

לפיכך

$$x^{ab-1} \equiv 1 \pmod{n} \Rightarrow (x^b)^a \equiv x \pmod{n}$$

כנדרש.



שיעור 7

הבעיית הפירוק של מספירם וצופן רבין

7.1 הבעיית פירוק מספרים

7.2 צופן רבין

שיעור 8

צופן אל-גמאל

הגדרה 8.1 צופן אל-גמאל

יהי p מספר ראשוני (גדול), α יוצר של $(\mathbb{Z}_p^*, \times_p)$ ויהי $a \in \{2, 3, \dots, p-2\}$.
יהי הקבוצת טקסט גלוי $P = \mathbb{Z}_p^*$ והקבוצת טקסט מוצפן $C = \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p^*$. נגדיר קבוצת מפתחות

$$K = \{(p, \alpha, a, \beta) \mid \beta = \alpha^a \pmod{p}\}.$$

לכל $d = \{2, 3, \dots, p-2\}$ ו- $(y_1, y_2) \in P, x \in P, k = (p, \alpha, a, \beta) \in K$ נגדיר

$$e_k(x, d) = (y_1, y_2)$$

כאשר $y_2 = \beta^d x \pmod{p}, y_1 = \alpha^d \pmod{p}$ ו-

$$d_k(y_1, y_2) = (y_1^a)^{-1} y_2 \pmod{p}.$$

(p, α, β) מפתח ציבורי ו- a מפתח סודי.

משפט 8.1 צופן אל-גמאל צופן חוקי

אם p מספר ראשוני ו- α יוצר של $(\mathbb{Z}_p^*, \times_p)$, $a \in \{2, 3, \dots, p-2\}$, $\beta = \alpha^a \pmod{p}$ ו- $x \in \mathbb{Z}_p^*$ אז לכל $d \in \{2, 3, \dots, p-2\}$

$$((\alpha^d)^a)^{-1} \beta^d x = x \pmod{p}.$$

הוכחה: תרגיל בית.

כלל 8.1 אלגוריתם הצפנת אל-גמאל

נניח שאליס (A) שולחת הודעה לבוב (B) .

שלב הרכבת המפתח

1 B יוצר מספר ראשוני גדול p , ויוצר α של החבורה $(\mathbb{Z}_p^*, \times_p)$.

2 B בוחר באקראי שלם $a \in \{2, 3, \dots, p-2\}$,

3 B מחשב β כך ש- $\beta = \alpha^a \pmod{p}$.

4 B שומר את המפתח ציבורי (p, α, β) בכתובת ציבורית ושומר על a כמפתח סודי.

שלב הצפנה

5 אליס (A) קוראת את המפתח ציבורי (p, α, β) מהכתובת ציבורית.

6 A בוחרת באקראי שלם $d \in \{2, 3, \dots, p-2\}$.

7 כדי להצפין הודעה x כאשר $0 \leq x < p$, אליס (A) מחשבת $y_1 = \alpha^d \pmod{p}$ ו- $y_2 = \beta^d x \pmod{p}$.

8 A שולחת הטקסט מוצפן (y_1, y_2) ל- B .

9 כדי לפענח את הטקסט מוצפן (y_1, y_2) ב- B משמש המפתח הסודי a כדי לחשב את $x = ((y_1)^a)^{-1} y_2 \pmod p$.

דוגמה 8.1 הצפנת אל-גמאל

נניח כי אליס שולחת הטקסט גלוי $x = 123$. בוב בוחר במספר ראשוני $p = 727$, יוצר $\alpha = 80$ ומפתח סודי $a = 6$. אליס בוחרת ב- $d = 7$. מצאו את הטקסט מוצפן.

פתרון:

$$\beta = \alpha^a \pmod p = 80^6 \pmod{727} = 514.$$

$$y_1 = \alpha^d \pmod p = 80^7 \pmod{727} = 408, \quad y_2 = \beta^d x \pmod p = 514^7 \cdot 123 \pmod{727} = 390.$$

דוגמה 8.2 הצפנת אל-גמאל

נניח כי בוב מקבל את הטקסט מוצפן $(y_1, y_2) = (408, 390)$. בוב בחר במספר ראשוני $p = 727$, יוצר $\alpha = 80$ ומפתח סודי $a = 6$. ואליס בחרה ב- $d = 7$. פענחו את הטקסט מוצפן.

פתרון:

$$\beta = \alpha^a \pmod p = 80^6 \pmod{727} = 514.$$

$$x = ((y_1^a)^{-1}) y_2 \pmod p = ((408^6)^{-1}) \cdot 390 \pmod{727}$$

בעזרת משפט פרמה,

$$(408^6)^{-1} \pmod{727} = 408^{727-1-6} \pmod{727} = 408^{720} \pmod{727} = 375.$$

שיעור 9

תורת שאנון

9.1 סודיות מושלמת

נתונה קריפטו-מערכת

$$(X, Y, K, E, D)$$

כאשר X הקבוצה של כל טקסטים גלויים האפשריים, Y הקבוצה של כל טקסטים מוצפנים האפשריים, K הקבוצה של כל המפתחות האפשריים, E הקבוצה של כל כללי מצפין האפשריים ו- D הקבוצה של כל כללי מפענח האפשריים.

אנחנו נתייחס לטקסטים גלויים

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

כמשתנה מקרי (מ"מ) בדיד, אשר ערכו שווה לתוצאה של בחירת טקסט גלוי. כמו כן נתייחס למפתחות

$$K = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$$

כמשתנה מקרי בדיד אשר ערכו שווה למפתח הנבחר.

נסמן את הפונקציית הסתברות של הטקסט גלוי ב-

$$P_X(x_i) = P(X = x_i) .$$

כלומר $P(X = x_i)$ מסמן את ההסתברות לבחור את הטקסט גלוי x מתוך X .
נסמן את הפונקציית הסתברות של המפתחות ב-

$$P_K(k_i) = P(K = k_i) .$$

כלומר $P(K = k_i)$ הוא ההסתברות לבחור את המפתח k_i מתוך K .

הטקסט מוצפן $Y = y$ המתקבל באמצעות הטקסט גלוי $X = x$ הנבחר והמפתח $K = k$ הנבחר הוא גם משתנה מקרי בדיד שמוגדר

$$Y(k) = \{e_k(x) \mid x \in X\} .$$

ז"א $Y(k)$ מייצג את קבוצת כל הטקסטעם המוצפנים האפשריים המתקבלים על ידי המפתח $k \in K$.
לפיכך, ההסתברות ש- $Y = y$ כאשר y מתקבל על ידי להצפין הטקסט גלוי x באמצעות המפתח k היא

$$P(Y = y) = \sum_{k \in K} P(K = k) P(X = d_k(y)) . \quad (9.1)$$

ההסתברות מותנית $P(Y = y \mid X = x)$, כלומר ההסתברות לקבל הטקסט מוצפן y בידיעה כי הטקסט גלוי הוא x , היא בדיוק ההסתברות לבחור מפתח מסוים k אשר באמצעותו מקבלים y על ידי להצפין x עם המפתח זה k .

$$P(Y = y \mid X = x) = \sum_{\substack{k \in K \\ x = d_k(y)}} P(K = k) . \quad (9.2)$$

מכאן, לפי נוסחת בייס, $P(X = x|Y = y) = \frac{P(Y = y|X = x)P(X = x)}{P(Y = y)}$, נציב את משוואת (9.1) ומשוואות (9.2) ונקבל את הביטוי

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x) \sum_{\substack{k \in K \\ x = d_k(y)}} P(K = k)}{\sum_{k \in K} P(K = k)P(X = d_k(y))} . \quad (9.3)$$

9.1 דוגמה

נתונה קבוצת טקסט גלוי $X = \{a, b\}$ עם פונקצית הסתברות

$$P(X = a) = \frac{1}{4} , \quad P(X = b) = \frac{3}{4} ,$$

נתונה קבוצת מפתחות $K = \{k_1, k_2, k_3\}$ עם פונקצית הסתברות

$$P(K = k_1) = \frac{1}{2} , \quad P(K = k_2) = P(K = k_3) = \frac{1}{4} .$$

ונתונה קבוצת טקסט מוצפן

$$Y = \{1, 2, 3, 4\} .$$

נניח כי הכלל מצפין מוגדר כך ש-

$$e_{k_1}(a) = 1 , \quad e_{k_1}(b) = 2 , \quad e_{k_2}(a) = 2 , \quad e_{k_2}(b) = 3 , \quad e_{k_3}(a) = 3 , \quad e_{k_3}(b) = 4 .$$

מצאו את $P(X = x|Y = y)$ לכל $x \in X$ ולכל $y \in Y$.

פתרון:

אפשר לייצג את הקריפטו-מערכת כמטריצת הצפנה:

$X \backslash K$	a	b
k_1	1	2
k_2	2	3
k_3	3	4

נחשב את הפונקציה ההסתברות של Y :

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= P(K = k_1)P(X = d_{k_1}(1)) + P(K = k_2)P(X = d_{k_2}(1)) + P(K = k_3)P(X = d_{k_3}(1)) \\ &= P(K = k_1)P(X = a) + P(K = k_2)P(X = \emptyset) + P(K = k_3)P(X = \emptyset) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 0 + 0 \\ &= \frac{1}{8} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(Y = 2) &= P(K = k_1)P(X = d_{k_1}(2)) + P(K = k_2)P(X = d_{k_2}(2)) + P(K = k_3)P(X = d_{k_3}(2)) \\
&= P(K = k_1)P(X = b) + P(K = k_2)P(X = a) + P(K = k_3) \cdot P(X = \emptyset) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \\
&= \frac{7}{16} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(Y = 3) &= P(K = k_1)P(X = d_{k_1}(3)) + P(K = k_2)P(X = d_{k_2}(3)) + P(K = k_3)P(X = d_{k_3}(3)) \\
&= P(K = k_1) \cdot P(X = \emptyset) + P(K = k_2)P(X = b) + P(K = k_3) \cdot P(X = a) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(Y = 4) &= P(K = k_1)P(X = d_{k_1}(4)) + P(K = k_2)P(X = d_{k_2}(4)) + P(K = k_3)P(X = d_{k_3}(4)) \\
&= P(K = k_1) \cdot P(X = \emptyset) + P(K = k_2) \cdot P(X = \emptyset) + P(K = k_3) \cdot P(X = b) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \\
&= \frac{3}{16} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X = a|Y = 1) &= \frac{P(Y = 1|X = a)P(X = a)}{P(Y = 1)} \\
&= \frac{P(Y = 1|X = a) \left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{8}\right)} \\
&= 2 \sum_{\substack{k \in K \\ a = d_k(1)}} P(K = k) \\
&= 2P(K = k_1) \\
&= 1 .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X = b|Y = 1) &= \frac{P(Y = 1|X = b)P(X = b)}{P(Y = 1)} \\
&= \frac{P(Y = 1|X = b) \left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{1}{8}\right)} \\
&= 6 \sum_{\substack{k \in K \\ b = d_k(1)}} P(K = k) \\
&= 6 \cdot 0 \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X = a|Y = 2) &= \frac{P(Y = 2|X = a)P(X = a)}{P(Y = 2)} \\
&= \frac{P(Y = 2|X = a) \left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{7}{16}\right)} \\
&= \frac{4}{7} \sum_{\substack{k \in K \\ a=d_k(2)}} P(K = k) \\
&= \frac{4}{7} P(K = k_2) \\
&= \frac{1}{7} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X = b|Y = 2) &= \frac{P(Y = 2|X = b)P(X = b)}{P(Y = 2)} \\
&= \frac{P(Y = 2|X = b) \left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{7}{16}\right)} \\
&= \frac{12}{7} \sum_{\substack{k \in K \\ b=d_k(2)}} P(K = k) \\
&= \frac{12}{7} P(K = k_1) \\
&= \frac{6}{7} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X = a|Y = 3) &= \frac{P(Y = 3|X = a)P(X = a)}{P(Y = 3)} \\
&= \frac{P(Y = 3|X = a) \left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)} \\
&= \sum_{\substack{k \in K \\ a=d_k(3)}} P(K = k) \\
&= P(K = k_3) \\
&= \frac{1}{4} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X = b|Y = 3) &= \frac{P(Y = 3|X = b)P(X = b)}{P(Y = 3)} \\
&= \frac{P(Y = 3|X = b) \left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)} \\
&= 3 \sum_{\substack{k \in K \\ b=d_k(3)}} P(K = k) \\
&= 3P(K = k_2) \\
&= \frac{3}{4} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = a|Y = 4) &= \frac{P(Y = 4|X = a)P(X = a)}{P(Y = 4)} \\ &= \frac{P(Y = 4|X = a) \left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{3}{16}\right)} \\ &= \frac{4}{3} \sum_{\substack{k \in K \\ a=d_k(4)}} P(K = k) \\ &= \frac{4}{3} \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = b|Y = 4) &= \frac{P(Y = 4|X = b)P(X = b)}{P(Y = 4)} \\ &= \frac{P(Y = 4|X = b) \left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{3}{16}\right)} \\ &= 4 \sum_{\substack{k \in K \\ b=d_k(4)}} P(K = k) \\ &= 4P(K = k_3) \\ &= \frac{1}{4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

הגדרה 9.1 סודיות מושלמת

אומרים כי לקריפטו-מערכת יש סודיות מושלמת אם

$$P(X = x|Y = y) = P(X = x)$$

לכל $y \in Y, x \in X$.

ז"א ההסתברות כי הטקסט גלוי $X = x$, בידיעה כי הטקסט מוצפן $Y = y$ שווה רק להסתברות כי הטקסט גלוי הוא $X = x$ והבחירה של המפתח שבאמצעותו מתקבל הטקסט מוצפן y לא משפיע על ההסתברות כי הטקסט גלוי $X = x$.

משפט 9.1 תנאי לסודיות מושלמת של צופן קיסר

אם לכל מפתח $k \in K$ בצופן קיסר יש הסתברות שווה, כלומר

$$P(K = k) = \frac{1}{26}.$$

אז לצופן קיסר יש סודיות מושלמת.

הוכחה: תחילה נחשב את ההסתברות $P(Y = y)$ באמצעות (9.1). הקבוצת מפתחות בצופן קיסר היא

$$K = \{0, 1, \dots, 25\} = \mathbb{Z}_{26}.$$

לכן

$$P(Y = y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{26}} P(K = k) P(X = d_k(y)) .$$

אם ההסתברות של כל מפתח שווה אז $P(K = k) = \frac{1}{26}$ ולכן

$$P(Y = y) = \frac{1}{26} \sum_{k \in \mathbb{Z}_{26}} P(X = d_k(y)) .$$

הכלל מצפין והכלל מפענח של צופן קיסר מוגדרים

$$e_k(x) = x + k \mod 26 , \quad d_k(y) = y - k \mod 26 .$$

כאשר $k \in \mathbb{Z}_{26}$. לכן $P(X = d_k(y)) = P(X = y - k \mod 26)$. לפיכך

$$P(Y = y) = \frac{1}{26} \sum_{k \in \mathbb{Z}_{26}} P(X = y - k \mod 26) .$$

הסכום בצד הימין הוא רק סכום של $P(X = k)$ מעל כל האיברים k ב- \mathbb{Z}_{26} . לכן

$$P(Y = y) = \frac{1}{26} \sum_{k \in \mathbb{Z}_{26}} P(X = k) = \frac{1}{26} \cdot 1 = \frac{1}{26} .$$

כאשר בשוויון השני השתמשנו בתכונת הנרמול של הפונקציה הסתברות של המ"מ X .

מצד שני, לפי (9.2),

$$P(Y = y|X = x) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_{26} \\ x = d_k(y)}} P(K = k)$$

האילוץ על הסכום $x = d_k(y)$ אומר ש-

$$x = k - y \mod 26 \quad \Rightarrow \quad k = x + y \mod 26 .$$

לכל $x \in X$ ולכל $y \in Y$ קיים רק מפתח אחד אשר מקיים תנאי זה. ז"א רק איבר אחד של הסכום נשאר ולפיכך

$$P(Y = y|X = x) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_{26} \\ x = d_k(y)}} P(K = k) = P(K = y - x \mod 26) .$$

אם ההסתברות של כל מפתח שווה, כלומר אם $P_K(k) = \frac{1}{26}$ לכל $k \in K$, אז

$$P(Y = y|X = x) = P(K = y - x \mod 26) = \frac{1}{26} .$$

לכן

$$P(Y = y) = \frac{1}{26} = P(Y = y|X = x)$$

ז"א לצופן קיסר יש סודיות מושלמת.

במילים פשוטות צופן קיסר אינו ניתן לפענח בתנאי שמשתמשים במפתח מקרי חדש כל פעם שמצפינים אות אחד של טקסט גלוי.



למה 9.1 תנאי חילופי לסודיות מושלמת

לפי נוסחת בייס אם לקריפטו-מערכת יש סודיות מושלמת אז מתקיים גם

$$P(Y = y|X = x) = P(Y = y) . \quad (9.4)$$

למה 9.2

נתונה קריפטו-מערכת בעלת סודיות מושלמת.

אם $P(Y = y) > 0$ אז

(1) קיים לפחות מפתח אחד $k \in K$ כך ש- $e_k(x) = y$

(2) $|K| \geq |Y|$.

הוכחה:

(1) לפי 9.4,

$$P(Y = y|X = x) = P(Y = y) > 0 \quad (\#1)$$

נציב (9.2) בצד שמאל ונקבל

$$\sum_{\substack{k \in K \\ x=d_k(y)}} P(K = k) = P(Y = y) > 0 \quad (\#2)$$

ז"א

$$\sum_{\substack{k \in K \\ x=d_k(y)}} P(K = k) > 0 \quad (\#3)$$

לכן קיים לפחות מפתח אחד, k עבורו $x = d_k(y)$.

ז"א קיים לפחות מפתח אחד, k עבורו $y = e_k(x)$.

(2) לפי (#1) ו- (#3), לכל $y \in Y$ קיים לפחות מפתח אחד, k עבורו $y = e_k(x)$, לכן בהכרח

$$|K| \geq |Y| . \quad (\#4)$$

משפט 9.2 משפט שאנון

נתונה קריפטו-מערכת (X, Y, K, E, D) כך ש- $|K| = |X| = |Y|$. למערכת יש סודיות מושלמת אם ורק אם

(1) לכל $x \in X$ ולכל $y \in Y$ קיים מפתח k יחיד עבורו $y = e_k(x)$.

(2) לכל מפתח יש הסתברות שווה, כלומר $P(K = k) = \frac{1}{|K|}$.

הוכחה:

(1) נניח כי $|Y| = |K|$. כלומר

$$|\{e_k(x) | x \in X\}| = |K|.$$

ז"א לא קיימים שני מפתחות $k_1 \neq k_2$ כך ש- $e_{k_1}(x) = y = e_{k_2}(x)$.

לכן לכל $x \in X$ ולכל $y \in Y$ קיים מפתח k יחיד עבורו $e_k(x) = y$.

(2) נסמן אורך של קבוצת מפתחות ב- $n = |K|$. נרשום את הקבוצת טקסטים גלויים כ-

$$X = \{x_i | 1 \leq i \leq n\}.$$

נתון $y \in Y$ קבוע. נמספר את המפתחות כ- k_1, k_2, \dots, k_n כך ש- $e_{k_i}(x_i) = y$. לפי נוסחת בייס,

$$P(X = x_i | Y = y) = \frac{P(Y = y | X = x_i)P(X = x_i)}{P(Y = y)}$$

$$\stackrel{\text{לפי (9.2)}}{=} \frac{P(K = k_i)P(X = x_i)}{P(Y = y)}$$

אם למערכת יש סודיות מושלמת אז $P(X = x_i | Y = y) = P(X = x_i)$ לכן

$$P(X = x_i) = \frac{P(K = k_i)P(X = x_i)}{P(Y = y)} \Rightarrow P(K = k_i) = P(Y = y)$$

לכל $1 \leq i \leq n$. ז"א לכל מפתח יש הסתברות שווה

$$P(K = k_i) = \frac{1}{|K|}.$$

■

9.2 המושג של מידע

נניח נניח ש- X משתנה מקרי אשר יכול לקבל אחת מארבע אפשרויות:

$$X \in \{a, b, c, a\}.$$

X ידוע לבוב (B) אבל לא ידוע לאלים (A). כל שאלים יודעת הוא ש- X יכול להיות אחת האותיות $\{a, b, c, a\}$ בהסתברות שווה. אנחנו אומרים כי לאלים יש אי-ודאות על הערך של X . כדי שאלים תמצא את הערך של X אלים שואלת סדרת שאלות בינאריות (שאלות כן/לא) לבוב כדי לקבל מידע על המ"מ X עד שהיא תדע את הערך של X עם אי-ודאות אפס.

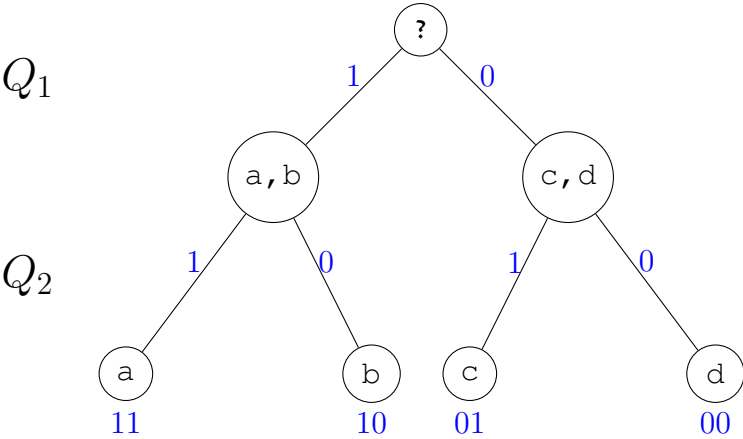
אפשרות אחת לסדרת שאלות היא כך:

$$Q_1: \text{האם } X \in \{a, b\}?$$

לפי התשובה אחר כך אלים שואלת

$$Q_2: \text{אם } X \in \{a, b\} \text{ האם } X = a?$$

אחרת אם $X \notin \{a, b\}$ האם $X = c$?



הסדרה של שאלות בינאריות שמאפשרת לאליס למצוא את X ללא שופ אי-ודאות מתוארת בעץ-שאלות למעלה. מספר השאלות הבינאריות $N_Q[X]$, שנדרשות כדי למצוא X ללא אי-ודאות הוא $N_Q[X] = 2$.

כל שאלה היא בינארית, כלומר התשובה היא כן או לא אנחנו מצפינים תשובה כן עם "1" ותשובה לא עם "0". לפי התשובות אנחנו מצפינים את האותיות כך:

$$a \rightarrow 11, \quad b \rightarrow 10, \quad c \rightarrow 01, \quad d \rightarrow 00.$$

מכיוון ששתי תשובות בינאריות נדרשות כדי למצוא את X , אנחנו אורמים כי נדרש שני ביטים (bits) של מידע נדרשים כדי למצוא את X .

במילים אחרות, שתי ספרות בינאריות $X = d_1 d_2$ נדרשות כדי להצפין את X , שערכן הן התשובות לשתי שאלות בינאריות, לכן המידע המתקבל על מציאת הערך של X הוא 2 bit.

אליס הייתה יכולה לשנות את הסדרת שאלות שלה כך:

$$Q'_1 \text{ האם } X = a?$$

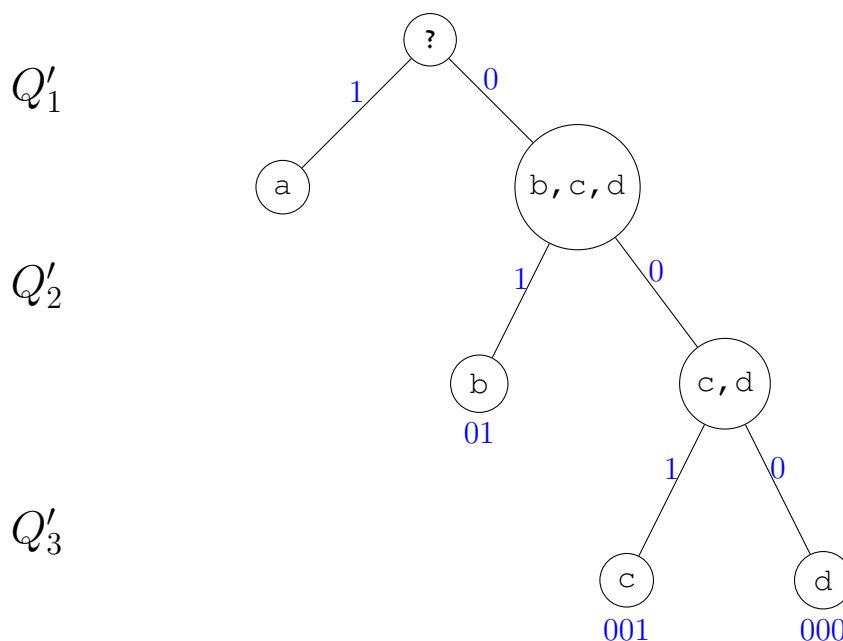
רק אם התשובה היא "לא" אז היא צריכה לשאול שאלה נוספת:

$$Q'_2 \text{ האם } X = b?$$

ורק אם השתובה היא "לא" אז היא צריכה לשאול שאלה נוספת:

$$Q'_3 \text{ האם } X = c?$$

מספר השאלות הבינאריות הנדרשות למצוא את X תלוי על הערך של X : $N_Q(a) = 1$, $N_Q(b) = 2$ או $N_Q(c) = N_Q(d) = 3$.



X הוא משתנה מקרי בדיד ולכן בהינתן מערכת שאלות, $N_Q(X)$ הוא פונקציה של משתנה מקרי בדיד, ולכן $N_Q[X]$ הוא בעצמו משתנה מקרי בדיד.

כעת נשאל שאלה. נניח כי אליס מעוניינת למצוא מערכת שאלות Q , אשר נותנת את מספר השאלות הממוצע המינימלי. כלומר, כיצד נמצא מערכת שאלות $N_Q[X]$ עבורה התוחלת

$$E[N_Q[X]] = \sum_{k \in X} P_X(k) N_Q[k]$$

תהיה מינימלית.

לפני שנענה על שאלה הזאת נתן דוגמה.

נתון המשתנה מקרי $X = \{a, b, c, d\}$ בעל פונקציה ההסתברות

$$P_X(a) = \frac{1}{2}, \quad P_X(b) = \frac{1}{4}, \quad P_X(c) = P_X(d) = \frac{1}{8}.$$

עבור ההצפנה הראשונה Q , מספר השאלות הנדרשות כדי למצוא כל ערך של X הוא $N_Q[k] = 2$, לכן אז התוחלת תהיה

$$E_Q[N_Q[X]] = \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{4}(2) + \frac{1}{8}(2) + \frac{1}{8}(2) = 2,$$

כלומר תוחלת המספר השאלות הוא 2.

עבור ההצפנה השנייה Q' תוחלת מספר השאלות היא

$$E_{Q'}[N_{Q'}[X]] = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{4}(2) + \frac{1}{8}(3) + \frac{1}{8}(3) = \frac{7}{4}.$$

אשר פחות מהתוחלת עבור ההצפנה Q . מכאן אנחנו רואים כי יש קשר בין התוחלת של מספר השאלות הבינאריות לבין מערכת השאלות שאנחנו שואלים.

אליס שואלת סדרת שאלות ולכל שאלה נשים ערך בינארי 0 אם התשובה לא ו-1 אם התשובה כן. כך אנחנו נשים לכל ערך של X מספר בינארי $d_1 \dots d_k$ המורכב מספרות בינאריות 0, 1. $d_i = 0, 1$. טרנספורמציה כזאת בין ערכים של X לבין מספרים בינארים נקראת הצפנה. שימו לב כי אורך ההצפנה $\ell_Q[X]$ של כל ערך של X שווה למספר השאלות בינאריות הנדרשות כדי למצוא את X ללא אי-ודאות:

$$\ell_Q[X] = N_Q[X].$$

משפט 9.3

יהי $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ משתנה מקרי בדיד כך ש-

$$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_k$$

כאשר $p_i = P(X = x_i)$. תהי $\ell_Q[X]$ הצפנה כך ש- $\ell_Q(x_i) = n_i$, כלומר x_i מוצפן על ידי מספר בינארי עם n_i ספרות בינאריות. התוחלת המינימלית מתקבלת על ידי ההצפנה שמקיימת

$$n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k.$$

הוכחה: נניח בשלילה שקיימת תמורה $\{p_{i_1}, \dots, p_{i_k}\}$ של $\{p_1, \dots, p_k\}$. כך שהתוחלת

$$E = n_1 p_{i_1} + \dots + n_{j-1} p_{i_{j-1}} + n_j p_{i_j} + \dots + n_k p_{i_k}.$$

היא מינימלית. ללא הגבלת הכלליות נניח כי $p_1 = p_{i_j}$. אזי

$$E = n_1 p_{i_1} + \dots + n_{j-1} p_{i_{j-1}} + n_j p_1 + \dots + n_k p_{i_k}.$$

$p_1 = \max(p_1, \dots, p_n)$ אז בהכרח $p_{i_{j-1}} \leq 1$. לכן אם נחליף p_1 עם שכנו נקבל את התוחלת החדשה

$$E' = n_1 p_{i_1} + \dots + n_{j-1} p_1 + n_j p_{i_{j-1}} + \dots + n_k p_{i_k}.$$

$E' < E$ בסתירה לכך כי E התוחלת המינימלית המתקבלת עבור התמורה $(p_{i_1}, \dots, p_{i_k})$.

■

במשפט הבא אנחנו נוכיח כי אפשר לגזור ביטוי בשביל התוחלת המינימלית באמצעות הפונקציה ההסתברות של המשתנה מקרי X בלבד. נסמן

$$p_x = P_X(X = x).$$

אנחנו ראינו למעלה כי אורך ההצפנה של $X = x$ בהצפנה אופטימלית Q^* הוא פונקציה של ההסתברות p_x , כלומר

$$\ell_{Q^*}(x) = f(p_x). \quad (\#\#)$$

משפט 9.4 אנטרופיה של שאנון

נתון משתנה מקרי X בעל פונקציה ההסתברות $P_X(x)$. התוחלת המינימלית של אורך ההצפנה של X מסומן ב- $H[X]$ ונתונה על ידי הנוסחה

$$H[X] = - \sum_{x \in X} P_X(x) \log_2 P_X(x).$$

$H[X]$ נקרא **האנטרופיה של X** .

הוכחה: נניח כי $X = Y \cap Z$, כאשר Y, Z משתנים מקרים בלתי תלויים. לפי משוואה $(\#\#)$:

$$\ell_Q(x) = f(p_x).$$

$$H[X] = \sum p_x \ell_Q(x) = \sum p_x f(p_x).$$

תהיינה $P_Y(y)$ ו- $P_Z(z)$ פונקציות ההסתברות של Y ושל Z בהתאמה. נסמן $p_y = P_Y(y)$ ו- $p_z = P_Z(z)$.

מכיוון ש- Y ו- Z משתנים בלתי תלויים אז

$$P(X = Y \cap Z) = P_Y(y)P_Z(z) = p_y p_z .$$

נשים לב שידיעה של Y לא נותנת שום מידע על הערך של Z , לכן

$$\ell_Q[Y \cap Z] = \ell_Q[Y] + \ell_Q[Z] .$$

לפיכך

$$H[X] = \sum p_x \ell_Q(x) = \sum p_y p_z [\ell_Q(y) + \ell_Q(z)]$$

מכאן

$$H[X] = \sum p_y p_z f(p_y p_z) = \sum p_y p_z [f(p_y) + f(p_z)]$$

לכל p_y ו- p_z . לכן

$$f(p_y p_z) = f(p_y) + f(p_z) .$$

$$f(p) = C \log(p) .$$

כעת נניח כי יש לנו משתנה מקרי $X = \{a, b\}$ בעל פונקצית ההסתברות $P_X(a) = \frac{1}{2}, P_X(b) = \frac{1}{2}$. ההצפנה של X צריכה ספרה אחת, לכן $\ell_{Q^*}(a) = \ell_{Q^*}(b) = 1$. לכן נשים $f(\frac{1}{2}) = 1$ ונקבל $f(p) = -\log_2(p)$. ■

9.3 הגדרה של מידע

הגדרה 9.2 מידע של מאורע (שאנון)

נתון משתנה מקרי X . המידע של ערך מסוים של X מסומן $I_X(x)$ ומוגדר להיות

$$I(X = x) = \log_2 \left(\frac{1}{P_X(x)} \right) = -\log_2 (P_X(x))$$

כאשר $P_X(x)$ פונקצית ההסתברות של המשתנה מקרי X .

דוגמה 9.2 המידע המתקבל על קבלת תוצאה של הטלת מטבע

נטיל מטבע הוגנת ונגדיר משתנה מקרי X להיות התוצאה. X מקבל את הערכים

$$X = \{H, T\} .$$

מצאו את המידע של המאורע $X = H$.

פתרון:

$$P(X = H) = \frac{1}{2} . \text{ לכן}$$

$$I(X = H) = -\log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = 1 .$$

כלומר על קבלת התוצאה " H " אנחנו מקבלים ביט אחד של מידע.

הסבר:

במקום הסימנים "H" ו-"T" בשביל המ"מ X ניתן להצפין את הערכים האפשריים בספרות בינאריות "0" או "1". כלומר

ערך של X	הצפנה בספרות בינאריות
H	0
T	1

ז"א כדי להצפין את הערכים של X אנחנו צריכים ספרה בינארית אחת:

$d_1 \in \{0, 1\}$.

אשר יכול להחזיק את הערכים 0 או 1. ספרה בינארית אחת נדרשת להצפין את הערך של X לכן המידע של ערך כלשהו של X הוא 1 bit (ביט אחד).

דוגמה 9.3 שליפת קלף מחבילת קלפים תיקנית

בניסוי שליפת קלף אחד מחבילת קלפים תיקנית. נגדיר משתנה מקרי X להיות הסוג של הקלף (תלתן, עלה, לב או יהלום). חשבו את המידע של המאורע ששלפנו קלף מסוג לב.

פתרון:

ההסתברות לשלוף קלף של הסוג לב מחבילת קלפים סטנדרטית היא

$P(X = \heartsuit) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

לכן

$I(X = \heartsuit) = -\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \text{ bits}$

הסבר:

יש 4 ערכים אפשריים של X:

$X = \{\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$

כל ספרה בינארית מחזיקה 2 ערכים אפשריים: 0 או 1 לכן ידרש שתי ספרות בינאריות כדי להצפין את ה-4 ערכים האפשריים של X:

$d_1d_2, \quad d_1, d_2 \in \{0, 1\}$.

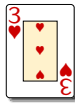
ההצפנה עצמה מתוארת בטבלא למטה:

ערך של X	הצפנה בספרות בינאריות
	00
	01
	10
	11

אורך המספר d_1d_2 הוא 2 לכן המידע של המשתנה מקרי X הוא 2 bits (שני ביטים).



דוגמה 9.4 שליפת קלף מחבילת קלפים תיקנית



בניסוי שליפת קלף אחד מחבילת קלפים תיקנית. מצאו את המידע המתקבל אם הקלף נשלף.

צורה	מספרים	תמונות
עלה		
תלתן		
לב		
יהלום		

פתרון:

יהי X המ"מ שמסמן את הקלף הנשלף. ההסתברות לשלוף הקלף שלוש מסוג לב מחבילת קלפים סטנדרטית היא

$$P\left(X = \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \heartsuit \\ \hline \end{array}\right) = \frac{1}{52}.$$

לכן

$$I\left(X = \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \heartsuit \\ \hline \end{array}\right) = -\log_2\left(\frac{1}{52}\right) = 5.7 \text{ bits}$$

הסבר:

כדי להצפין את כל הערכים האפשריים של X כמספר בינארי, נדרש רצף סיביות אשר מקבל לפחות 52 ערכים שונים. מספר בעל 5 סיביות לא מספיק מסיבה שיש לו רק $2^5 = 32$ ערכים שונים. אבל מספר בעל 6 סיביות נותן $2^6 = 64$ ערכים שונים, שמספיק להצפין את כל הערכים האפשריים של X .

$$d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6$$

האורך של מספר זה הוא 6 ולכן הוא מחזיק 6 bits של מידע. לכל סיבית יש 2 ערכים אפשריים ולכן 64 ערכים שונים בסה"כ.

נשים לב שרק 52 מתוך ה-64 צירופים נדרשים כדי להצפין את הערכים האפשריים של X לכן אפשר להוריד את החלק של הערכים המיותרים. הקבוצת המספרים הנשארת מכילה 5.7 bits של מידע. ■

ככל שההסתברות של מאורע יותר קטנה אז המידע המתקבל יותר גבוהה.

כלומר, ככל שהמידע של מאורע יותר גבוהה אז ההסתברות שלו יותר קטנה

דוגמה 9.5 (המשך של דוגמה 9.1)

$$\begin{aligned}
 H(X) &= -P(X = a) \log_2 P(X = a) - P(X = b) \log_2 P(X = b) \\
 &= -\frac{1}{4} \log_2 \left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4} \log_2 \left(\frac{3}{4}\right) \\
 &= -\frac{1}{4} (-2) - \frac{3}{4} (\log_2 3 - \log_2 4) \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \log_2 3 + \frac{6}{4} \\
 &= 2 - \frac{3}{4} \log_2 3 \\
 &\approx 0.81 .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H(K) &= -P(K = k_1) \log_2 P(K = k_1) - P(K = k_2) \log_2 P(K = k_2) - P(K = k_3) \log_2 P(K = k_3) \\
 &= -\frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} \log_2 \left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} \log_2 \left(\frac{1}{4}\right) \\
 &= -\frac{1}{2} (-1) - \frac{1}{4} (-2) - \frac{1}{4} (-2) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{3}{2} .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H(Y) &= -P(Y = 1) \log_2 P(Y = 1) - P(Y = 2) \log_2 P(Y = 2) - P(Y = 3) \log_2 P(Y = 3) \\
 &\quad - P(Y = 4) \log_2 P(Y = 4) \\
 &= -\frac{1}{8} \log_2 \left(\frac{1}{8}\right) - \frac{7}{16} \log_2 \left(\frac{7}{16}\right) - \frac{1}{4} \log_2 \left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{16} \log_2 \left(\frac{3}{16}\right) \\
 &= \frac{27}{8} - \frac{7}{16} \log_2 7 - \frac{3}{16} \log_2 3 \\
 &\approx 1.85 .
 \end{aligned}$$

■

במקרה שההסתברות של כל תוצאה שווה, כלומר

$$P(X = x_i) = \frac{1}{|X|} = \frac{1}{N}$$

אז

$$H(X) = -\sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \log_2 \left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log_2 N = \log_2 N .$$

לכן

$$N = 2^{H(X)} .$$

ניתן להוכיח ש- $\log_2 N$ הוא הערך המקסימלי האפשרי של $H(X)$.

משפט 9.5

נתון מ"מ בדיד X אשר מקבל N ערכים שונים

$$X = \{x_1, \dots, x_N\}$$

בהסתברות שווה, כלומר

$$P(X = x_i) = \frac{1}{N}$$

אז האנטרופיה מקבלת ערך מקסימלי שניתנת על ידי

$$H_{\max}(X) = \log_2 N .$$

ערך זה הוא הערך המקסימלי האפשרי של האנטרופיה.

דוגמה 9.6 אנטרופיה בהטלת מטבע

נניח כי נטיל מטבע עם הסתברות p ($0 \leq p \leq 1$) לקבל "H". יהי X משתנה מקרי ששווה לתוצאת הניסוי. מצאו את האנטרופיה של המ"מ מקרי X .

פתרון:

נסמן $X = \{0, 1\}$ כאשר $X = 0$ מסמן תוצאת H ו- $X = 1$ מסמן תוצאת T. פונקצית ההסתברות היא

$$P_X(0) = p, \quad P_X(1) = 1 - p .$$

לכן המידע של המאורע לקבל תוצאת H הוא

$$I(X = 0) = -\log_2 (P_X(0)) = -\log_2 (p)$$

והמידע של המאורע לקבל תוצאת H הוא

$$I(X = 1) = -\log_2 (P_X(1)) = -\log_2 (1 - p)$$

נשים לב שאם המטבע הוגנת אז $p = \frac{1}{2}$ ו- $I(X = 0) = I(X = 1) = 1$. כעת נחשב את האנטרופיה של X :

$$H(X) = -P_X(0) \log_2 P_X(0) - P_X(1) \log_2 P_X(1) = -p \log_2 p - (1 - p) \log_2 (1 - p) .$$

נרשום את האנטרופיה כפונקציה של ההסתברות p :

$$H(X) = -p \log_2 p - (1 - p) \log_2 (1 - p) =: h(p) .$$

ל- $h(p)$ יש נקודת מקסימום ב- $p = \frac{1}{2}$:

$$h'(p) = -\frac{1}{\ln 2} - \log_2 p + \frac{1}{\ln 2} + \log_2 (1 - p) = -\log_2 p + \log_2 (1 - p) = \log_2 \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2} .$$

ז"א הערך המקסימלי של האנטרופיה מתקבל כאשר לכל הערכים של X יש הסתברות שווה, $P_X(0) = P_X(1) = \frac{1}{2}$.
אכן

$$h(p = \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2 = 1 .$$

דוגמה 9.7

בניסוי הטלת מטבע לא מאוזנת, ההסתברות לקבל תוצאה H היא $p = \frac{1}{1024}$. מצאו את האנטרופיה של X .

פתרון:

נסמן $X = \{0, 1\}$, כאשר $X = 0$ מסמן תוצאת H ו- $X = 1$ מסמן תוצאת T .

$$I(X = 0) = -\log_2 \frac{1}{1024} = 10 \text{ bits}, \quad I(X = 1) = -\log_2 (1 - p) = -\log_2 \frac{1023}{1024} = 0.00141 \text{ bits}.$$

לפי זה

$$H(X) = -p \log_2 p - (1 - p) \log_2 (1 - p) = -\frac{1}{1024} \log_2 \frac{1}{1024} - \frac{1023}{1024} \log_2 \frac{1023}{1024} = 0.0112 \text{ bits}.$$



המשמעות של התשובה לדוגמה הקודמת היא כך. נניח שנטיל אותה מטבע הלא מאוזנת 100,000 פעמים. בכדי להצפין את כל התוצאות נדרש מספר בינארי עם 100,000 סיביות, כאשר כל ספרה נותנת התוצאה של ניסוי אחד. ז"א 10^5 bits של מידע נדרש כדי להצפין את כל התוצאות.

מצד שני מצאנו כי התוחלת של המידע המתקבל לניסוי (כמות מידע פר ניסוי) הוא 0.0112 bit פר ניסוי. במילים אחרות, ב- 10^5 ניסויים רק 1120 bit של מידע נדרש בממוצע כדי להצפין את כל התוצאות של רצף ההטלות.

9.4 הצפנת האפמן

נסביר הצפנת האפמן בעזרת הדוגמה הבאה. נתון הטקסט גלוי

$$X = \{a, b, c, d\}$$

ונניח כי פונקצית ההסתברות של X נתונה בטבלה הבאה:

בחירת אות של $x_i \in X$	$p_i = P_X(x_i)$	$I(X = x_i) = -\log_2(p_i)$
a	$\frac{1}{3}$	1.58 bit
b	$\frac{1}{2}$	1 bit
c	$\frac{1}{12}$	3.58 bit
d	$\frac{1}{12}$	3.58 bit

נשאל את השאלה: כמה ביטים של מידע נדרשים כדי להצפין (בסיביות) רצף של 1000 אותיות של טקסט גלוי X ?

יש 4 אותיות ב- X , כלומר 4 ערכים אפשריים של המ"מ בדיד X . לפיכך נדרש רצף של 2 סיביות כדי להצפין טקסט גלוי של תו אחד בהצפנת סיביות קבועה. לדוגמה:

בחירת אות של $x_i \in X$	הצפנה
a	00
b	01
c	10
d	11

ז"א להצפין תו אחד של הטקסט גלוי X נדרש 2 bit. לכן להצפין רצף אותיות של טקסט גלוי נדרש $2 \times 1000 = 2000$ bit, כלומר 2000 סיביות.

האנטרופיה של X היא

$$H(X) = -p_1 \log_2(p_1) - p_2 \log_2(p_2) - p_3 \log_2(p_3) - p_4 \log_2(p_4) = 1.62581 \text{ bit}.$$

ז"א לכל ניסוי המידע הממוצע הנדרש כדי להצפין תו אחד של טקסט גלוי הוא 1.62581 bit. לכן המידע הממוצע הנדרש כדי להצפין רצף אותיות של טקסט גלוי הוא

$$1000 \times 1.62581 = 1625.81 \text{ bit}.$$

לכן, רצף סיביות של אורך 1626 בממוצע יהיה מספיק כדי להעביר את ההודעה.

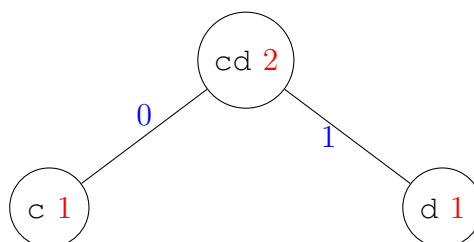
כעת נבנה הצפנה של הטקסט גלוי על ידי האלגוריתם של האפמן.

שלב 1

	c	d	a	b
	1	1	4	6

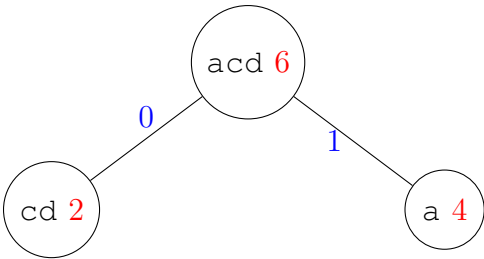
שלב 2

	c	d	a	b
	1	1	4	6
	0	1		
	2		4	6



שלב 3

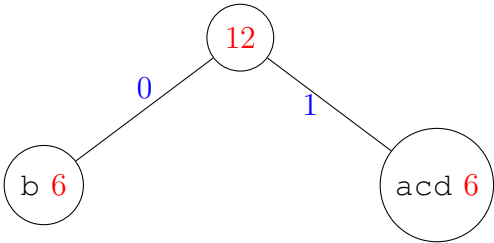
	cd	a	b
	2	4	6
	0	1	
	6		6



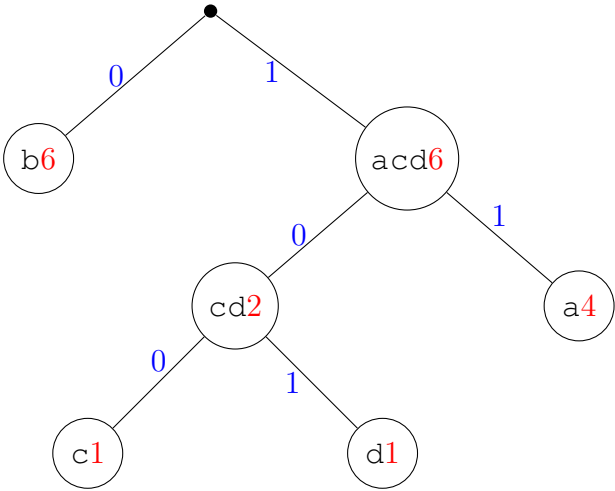
שלב 4)

שלב 5)

	acd	b
	6	6
	0	1
	12	



שלב 6)



בסוף של התהליך האותיות של הטקסט גלוי יהיו בעלים של העץ וההצפנה ניתנת על ידי הרצף סיביות על הענפים במסלול מהנקודת התחלתית של העץ עד העלה בו רשום האות בשאלה.

בחירת אות של $x_i \in X$	הצפנת האפמן
a	11
b	100
c	110
d	101

דוגמה 9.8

נתון הטקסט גלוי הבא

$$X = \{a, b, c, d, e\}$$

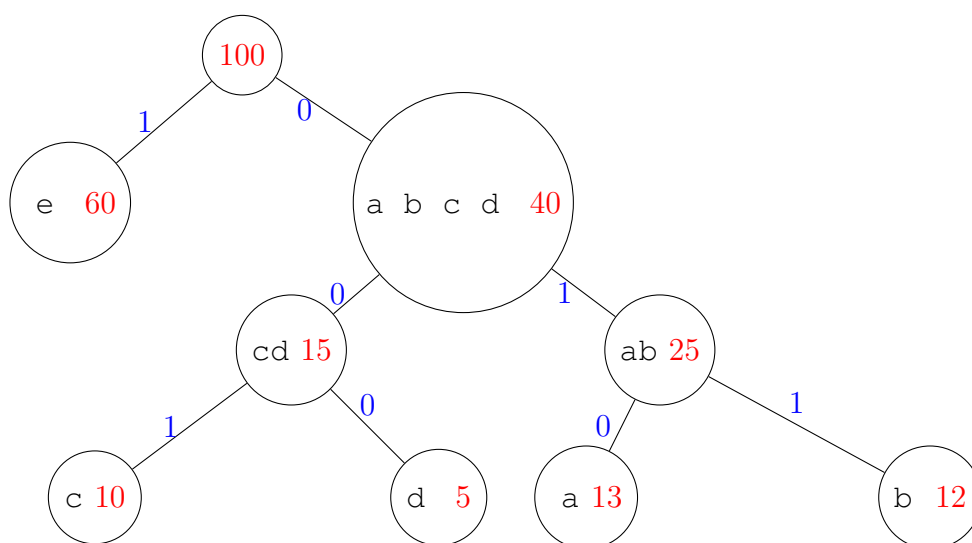
והפונקציה הסתברות

$$P(X = a) = \frac{13}{100} = 0.13, \quad P(X = b) = \frac{3}{25} = \frac{12}{100} = 0.12, \quad P(X = c) = \frac{1}{10} = \frac{10}{100} = 0.1,$$

$$P(X = d) = \frac{1}{20} = \frac{5}{100} = 0.05, \quad P(X = e) = \frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 0.6.$$

מצאו את העץ הצפנה וההצפנת האפמן של כל תו של X .

פתרון:



בחירת אות של $x_i \in X$	הצפנת האפמן
a	010
b	011
c	001
d	000
e	1

פורמלי הצפנת האפמן מוגדרת לפי ההגדרה הבאה:

הגדרה 9.3 הצפנת האפמן

נתון משתנה מקרי X . נגדיר הצפנת האפמן של X להיות הפונקציה (כלל מצפין)

$$f : X \rightarrow \{0, 1\}^*$$

כאשר $\{0, 1\}^*$ קבוצת רצפים של סיביות סופיים.

נתון רצף מאורעות x_1, \dots, x_n . נגדיר

$$f(x_1 \dots x_n) = f(x_1) || \dots || f(x_n)$$

כאשר "||" מסמן שרשור (concatenation).

הגדרה 9.4 תוחלת האורך של הצפנת האפמן

נתונה הצפנת האפמן f . תוחלת האורך של ההצפנה מוגדרת

$$l(f) = \sum_{x \in X} P(X = x) |f(x)| .$$

משפט 9.6 אי שוויון האפמן

נתון קבוצת אותיות של טקסט גלוי X והצפנת האפמן f . נניח כי $l(f)$ תוחלת האורך של ההצפנה ו- $H(X)$ האנטרופיה של הטקסט גלוי. מתקיים

$$H(X) \leq l(f) \leq H(X) + 1 .$$

דוגמה 9.9 (המשך של דוגמה 9.8)

נתון הטקסט גלוי הבא

$$X = \{a, b, c, d, e\}$$

והפונקציה הסתברות

$$P(X = a) = \frac{13}{100} = 0.13, \quad P(X = b) = \frac{3}{25} = 0.12, \quad P(X = c) = \frac{1}{10} = 0.1, \quad P(X = d) = \frac{1}{20} = 0.05,$$

$$P(X = e) = \frac{3}{5} = 0.6 .$$

(1) מצאו את תוחלת האורך של ההצפנת האפמן.

(2) מצאו את האנטרופיה.

(3) הוכיחו כי אי-שוויון האפמן של ההצפנה שמצאתם בדוגמה 9.8 למעלה מתקיים.

פתרון:

סעיף (1)

$$\begin{aligned} l(f) &= \frac{5}{100} \cdot 3 + \frac{10}{100} \cdot 3 + \frac{12}{100} \cdot 3 + \frac{13}{100} \cdot 3 + \frac{60}{100} \cdot 1 \\ &= \frac{15 + 30 + 36 + 39 + 60}{100} \\ &= \frac{180}{100} \\ &= 1.8 \end{aligned}$$

סעיף 2)

$$\begin{aligned}
 H(X) &= -P(X=a) \log_2 P(X=a) - P(X=b) \log_2 P(X=b) - P(X=c) \log_2 P(X=c) \\
 &\quad - P(X=d) \log_2 P(X=d) - P(X=e) \log_2 P(X=e) \\
 &= 1.74018 .
 \end{aligned}$$

סעיף 3) $H(X) = 1.74018$, $H(X) + 1 = 1.84018$, $l(f) = 1.8$. לכן

$$H(X) \leq l(f) \leq H(X) + 1$$

מתקיים.

9.5 תכונות של אנטרופיה

הגדרה 9.5 פונקציה קעורה

פונקציה ממשית $f(x)$ נקראת **פונקציה קעורה** בתחום I אם

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

לכל $x_1, x_2 \in I$.

פונקציה ממשית $f(x)$ נקראת **פונקציה קעורה ממש** בתחום I אם

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

לכל $x_1, x_2 \in I$.

משפט 9.7 אי-שוויון ינסן

נניח כי f פונקציה רציפה וקעורה ממש בקטע I . נתון מספרים ממשיים $a_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ כך ש-
 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ אז

$$\sum_{i=1}^n a_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right)$$

לכל $x \in I$. אם $x_1 = \dots = x_n$ ורק אם $\sum_{i=1}^n a_i f(x_i) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right)$.

משפט 9.8

יהי

$$X = \{x_1, \dots, x_n\}$$

משתנה מקרי בדיד בעל פונקצית הסתברות

$$P_X(x_1) = p_1, \dots, P_X(x_n) = p_n,$$

$$0 < p_i \leq 1 \text{ לכל } 1 \leq i \leq n \text{ אז}$$

$$H(X) \leq \log_2 n$$

אם ורק אם

$$p_i = \frac{1}{n}$$

$$\text{לכל } 1 \leq i \leq n.$$

הוכחה: לפי אי-שוויון ינסן:

$$\begin{aligned} H(X) &= - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \log_2 \left(\frac{1}{p_i} \right) \\ &\leq \log_2 \left(\sum_{i=1}^n p_i \cdot \frac{1}{p_i} \right) \\ &= \log_2 \left(\sum_{i=1}^n 1 \right) \\ &= \log_2 n. \end{aligned}$$

בנוסף $H(X) = \log_2 n$ אם ורק אם $p_i = \frac{1}{n}$ לכל $1 \leq i \leq n$.

משפט 9.9

יהי $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ משתנה מקרי בדיד בעל פונקצית הסתברות

$$P_X(x_1) = p_1, \dots, P_X(x_m) = p_m,$$

$0 < p_i \leq 1$ לכל $1 \leq i \leq m$, ויהי $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ משתנה מקרי בדיד בעל פונקצית הסתברות

$$P_Y(y_1) = q_1, \dots, P_Y(y_n) = q_n,$$

$$0 < q_i \leq 1 \text{ לכל } 1 \leq i \leq n \text{ אז}$$

$$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$$

ו- $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$ אם ורק אם X ו- Y בלתי תלויים.

הוכחה: (*להעשרה בלבד)

פונקצית הסתברות של X היא $P_X(x_i) = p_i$ ופונקצית הסתברות של Y היא $P_Y(y_i) = q_i$. נגדיר הפונקציות הסתברות של המשתנה מקרי דו-ממדי:

$$r_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j).$$

אז הפונקציה הסתברות שולית של X היא

$$p_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} , \quad \forall 1 \leq i \leq m$$

והפונקציה הסתברות שולית של Y היא

$$q_j = \sum_{i=1}^m r_{ij} , \quad \forall 1 \leq j \leq m .$$

מכאן

$$\begin{aligned} H(X) + H(Y) &= - \sum_{i=1}^m p_i \log_2 p_i - \sum_{j=1}^n q_j \log_2 q_j \\ &= - \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n r_{ij} \right) \log_2 p_i - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m r_{ij} \right) \log_2 q_j \\ &= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} \log_2 p_i - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m r_{ij} \log_2 q_j \\ &= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} (\log_2 p_i + \log_2 q_j) \\ &= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} \log_2 (p_i q_j) . \end{aligned}$$

מצד שני:

$$H(X, Y) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} \log_2 r_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} \log_2 \frac{1}{r_{ij}} .$$

לכן

$$\begin{aligned} H(X, Y) - H(X) - H(Y) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} \log_2 \frac{1}{r_{ij}} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} \log_2 (p_i q_j) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} \log_2 \left(\frac{p_i q_j}{r_{ij}} \right) \\ &\leq \log_2 \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j \right) \quad (\text{אי-שוויון ינסון}) \\ &= \log_2 1 \\ &= 0 . \end{aligned}$$

לכן

$$H(X, Y) - H(X) - H(Y) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad H(X, Y) \leq H(X) + H(Y) .$$



הגדרה 9.6 אנטרופיה מותנית

יהיו X, Y משתנים מקריים בדידים. נגדיר

$$H(X|Y = y) = - \sum_{x \in X} P(X = x|Y = y) \log_2 P(X = x|Y = y) .$$

האנטרופיה מותנית תסומן $H(X|y)$ ותוגדר הממוצע המשוקללת של $H(X|Y = y)$ ביחס להתברויות $P(Y = y)$, כלומר התוחלת של $H(X|Y = y)$:

$$H(X|Y) = - \sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} P(Y = y) P(X = x|Y = y) \log_2 P(X = x|Y = y) .$$

האנטרופיה המותנית $H(X|Y)$ מכמתת המידע הממוצע של המ"מ X המועברת אשר לא מוגלה באמצעות Y .

משפט 9.10

$$H(X, Y) = H(Y) + H(X|Y) .$$

הוכחה: (*להעשרה בלבד)

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(Y = y_j) P(X = x_i|Y = y_j) \log_2 P(X = x_i|Y = y_j) \\ &= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(X = x_i \cap Y = y_j) \log_2 \frac{P(X = x_i \cap Y = y_j)}{P(Y = y_j)} \\ &= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} \log_2 \frac{r_{ij}}{q_j} . \end{aligned}$$

מצד שני

$$H(Y) = - \sum_{j=1}^n q_j \log_2 q_j = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} \log_2 q_j$$

-1

$$H(X, Y) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} \log_2 r_{ij} .$$

לכן

$$\begin{aligned} H(Y) + H(X|Y) &= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} \log_2 \frac{r_{ij}}{q_j} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} \log_2 q_j \\ &= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} \left(\log_2 \frac{r_{ij}}{q_j} + \log_2 q_j \right) \\ &= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} \log_2 \left(\frac{r_{ij}}{q_j} \cdot q_j \right) \\ &= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} \log_2 r_{ij} \\ &= H(X, Y) . \end{aligned}$$

משפט 9.11

$$H(X|Y) \leq H(X)$$

ו- $H(X|Y) = H(X)$ אם ורק אם X ו- Y משתנים מקיים בלתי-תלויים.

הוכחה: (*להעשרה בלבד)

לפי משפט 9.9, $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$. נציב משפט 9.10 ונקבל

$$H(Y) + H(X|Y) \leq H(X) + H(Y) \quad \Rightarrow \quad H(X|Y) \leq H(X) .$$

בנוסף לפי משפט 9.9, $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$ אם ורק אם X, Y משתנים בלתי תלויים, לכן

$$H(X|Y) = H(X)$$

אם ורק אם X, Y משתנים בלתי תלויים.

9.6 משפט האנטרופיה לקריפטו-מערכת

משפט 9.12 משפט האנטרופיה לקריפטו-מערכת

תהי (P, C, K, E, D) קריפטו-מערכת. אז

$$H(K|C) = H(K) + H(P) - H(C) .$$

הוכחה: (*להעשרה בלבד)

לפי משפט 9.10,

$$H(K, P, C) = H(K, P) + H(C|K, P) .$$

בגלל שהכלל מצפין $y = e_k(x)$ הוא פונקציה חד-חד-ערכית, אז המפתח והטקסט גלוי קובעים את הטקסט מוצפן בדרך יחידה. ז"א

$$H(C|K, P) = 0 .$$

לכן

$$H(K, P, C) = H(K, P) . \quad (*)1$$

המשתנים מקריים K ו- P בלתי-תלויים. לכן לפי משפט 9.9, $H(K, P) = H(K) + H(P)$ ולפיכך נקבל

$$H(K, P, C) = H(K) + H(P) . \quad (*)2$$

באותה מידה, לפי משפט 9.10,

$$H(K, P, C) = H(K, C) + H(P|K, C) . \quad (*)3$$

מכיוון שהכלל מפענח $x = d_k(y)$ פונקציה חד-חד ערכית, אז המפתח והטקסט מוצפן קובעים את הטקסט גלוי בדרך יחידה. לכן

$$H(P|K, C) = 0 .$$

ומכאן

$$H(K, P, C) = H(K, C) . \quad (*)4$$

לפי משפט 9.10, $H(K, C) = H(C) + H(K|C)$. לכן

$$\begin{aligned} H(K|C) &= H(K, C) - H(C) \\ &= H(K, P, C) - H(C) && \text{(לפי *4)} \\ &= H(K) + H(P) - H(C) && \text{(לפי *2)} \end{aligned} \quad (9.5)$$

כנדרש.



דוגמה 9.10 (המשך של דוגמה 9.1 והמשך של דוגמה 9.5)

עבור דוגמה 9.1 מצאו את $H(K|C)$ ובדקו כי הערך המתקבל תואם עם $H(K|C) = H(K) + H(P) - H(C)$.

פתרון:

בדוגמה 9.5 מצאנו כי $H(P) = 0.81$, $H(K) = 1.5$ ו- $H(C) = 1.85$. אז

$$H(K|C) = H(K) + H(P) - H(C) = 0.46$$

כעת נחשב את $H(K|C)$ בעזרת התוצאות של דוגמה 9.1:

$$P(K = k_1|C = 1) = \frac{P(C = 1|K = k_1) P(K = k_1)}{P(C = 1)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{8}\right)} = 1 ,$$

$$P(K = k_2|C = 1) = \frac{P(C = 1|K = k_2) P(K = k_2)}{P(C = 1)} = \frac{0 \left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{8}\right)} = 0 ,$$

$$P(K = k_3|C = 1) = \frac{P(C = 1|K = k_3) P(K = k_3)}{P(C = 1)} = \frac{0 \left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{8}\right)} = 0 ,$$

$$P(K = k_1|C = 2) = \frac{P(C = 2|K = k_1) P(K = k_1)}{P(C = 2)} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{7}{16}\right)} = \frac{6}{7} ,$$

$$P(K = k_2|C = 2) = \frac{P(C = 2|K = k_2) P(K = k_2)}{P(C = 2)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{7}{16}\right)} = \frac{1}{7} ,$$

$$P(K = k_3|C = 2) = \frac{P(C = 2|K = k_3) P(K = k_3)}{P(C = 2)} = \frac{0 \left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{7}{16}\right)} = 0 ,$$

$$P(K = k_1|C = 3) = \frac{P(C = 3|K = k_1) P(K = k_1)}{P(C = 3)} = \frac{(0) \left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)} = 0 ,$$

$$P(K = k_2|C = 3) = \frac{P(C = 3|K = k_2) P(K = k_2)}{P(C = 3)} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{4} ,$$

$$P(K = k_3|C = 3) = \frac{P(C = 3|K = k_3) P(K = k_3)}{P(C = 3)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4} ,$$

$$P(K = k_1|C = 4) = \frac{P(C = 4|K = k_1) P(K = k_1)}{P(C = 4)} = \frac{(0) \left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{16}\right)} = 0 ,$$

$$P(K = k_2|C = 4) = \frac{P(C = 4|K = k_2) P(K = k_2)}{P(C = 4)} = \frac{0 \left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{3}{16}\right)} = 0 ,$$

$$P(K = k_3|C = 4) = \frac{P(C = 4|K = k_3) P(K = k_3)}{P(C = 4)} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{3}{16}\right)} = 1 .$$

מכאן

$$\begin{aligned}
H(K|C) &= - \sum_{y=1}^4 \sum_{k \in \{k_1, k_2, k_3, k_4\}} P(C=y) P(K=k|C=y) \log_2 P(K=k|C=y) \\
&= - P_C(1) P_{K|C}(k_1|1) \log_2 P_{K|C}(k_1|1) - P_C(2) P_{K|C}(k_1|2) \log_2 P_{K|C}(k_1|2) \\
&\quad - P_C(3) P_{K|C}(k_1|3) \log_2 P_{K|C}(k_1|3) - P_C(4) P_{K|C}(k_1|4) \log_2 P_{K|C}(k_1|4) \\
&\quad - P_C(1) P_{K|C}(k_2|1) \log_2 P_{K|C}(k_2|1) - P_C(2) P_{K|C}(k_2|2) \log_2 P_{K|C}(k_2|2) \\
&\quad - P_C(3) P_{K|C}(k_2|3) \log_2 P_{K|C}(k_2|3) - P_C(4) P_{K|C}(k_2|4) \log_2 P_{K|C}(k_2|4) \\
&\quad - P_C(1) P_{K|C}(k_3|1) \log_2 P_{K|C}(k_3|1) - P_C(2) P_{K|C}(k_3|2) \log_2 P_{K|C}(k_3|2) \\
&\quad - P_C(3) P_{K|C}(k_3|3) \log_2 P_{K|C}(k_3|3) - P_C(4) P_{K|C}(k_3|4) \log_2 P_{K|C}(k_3|4) \\
&= - \frac{1}{8} \log_2 1 - \frac{7}{16} \cdot \frac{6}{7} \log_2 \frac{6}{7} - \frac{1}{4} \cdot 0 \log_2 0 - \frac{3}{16} \cdot 0 \log_2 0 \\
&\quad - \frac{1}{8} 0 \cdot \log_2 0 - \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{7} \log_2 \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \log_2 \frac{3}{4} - \frac{3}{16} \cdot 0 \log_2 0 \\
&\quad - \frac{1}{8} \cdot 0 \log_2 0 - \frac{7}{16} \cdot 0 \log_2 0 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{3}{16} \cdot 1 \cdot \log_2 1 \\
&= 0.461676 .
\end{aligned}$$

הרי

$$H(K|C) = 0.46 = H(K) + H(P) - H(C)$$

כנדרש.

■

שיעור 10

צפנים בלוקים ו-DES

10.1 רשת החלפה-תמורה

הגדרה 10.1 רשת החלפה-תמורה

נתון טקסט גלוי $x = \{0, 1\}^n$ כרצף סיביות. מחלקים x ל- m קבוצות של אורך ℓ :

$$x = x_{<1>} || x_{<2>} || \dots || x_{<m>}$$

כאשר

$$x_{<1>} = x_1 x_2 \dots x_\ell, \quad x_{<2>} = x_{\ell+1} x_{\ell+2} \dots x_{2\ell}, \quad x_{<m>} = x_{(m-1)\ell+1} x_{(m-1)\ell+2} \dots x_{m\ell}.$$

ברשת החלפה-תמורה יש 4 מרכיבים:

- החלפה של אורך m , שנסמן $\pi_S : \{0, 1\}^\ell \rightarrow \{0, 1\}^\ell$
- תמורה של אורך $n = \ell m$ שנסמן $\pi_P : \{1, \dots, \ell m\} \rightarrow \{1, \dots, \ell m\}$
- מפתח התחלתי k .
- תזמון המפתחות (k^1, \dots, k^{N+1}) , אחד לכל שלב של ההצפנה.

האלגוריתם של ההצפנה הוא כמפורט להלן:

(1) מגדירים $w^0 = x$.

(2) מחשבים $u^1 = w^0 \oplus k^1$ כאשר \oplus האופרטור XOR.

(3) מבצעים את ההחלפה π_S על כל תת-קבוצה $u_{<i>}^1$ לכל $1 \leq i \leq m$: $v_{<i>}^1 = \pi_S(u_{<i>}^1)$

(4) מבצעים את התמורה π_P על תת-קבוצה v^1 : $w_i^1 = v_{\pi_P(i)}^1$

כעת חוזרים על שלבים 2-4):

(2') מחשבים $u^2 = w^1 \oplus k^2$ כאשר \oplus האופרטור XOR.

(3') מבצעים את ההחלפה π_S על כל תת-קבוצה $u_{<i>}^2$ לכל $1 \leq i \leq m$: $v_{<i>}^2 = \pi_S(u_{<i>}^2)$

(4') מבצעים את התמורה π_P על תת-קבוצה v^2 : $w_i^2 = v_{\pi_P(i)}^2$

התהליך ממשיך עד שמגיעים לסוף שלב ה- N -ית. בשלב N לא משחבים את w^N אלא מקבלים את הטקסט מוצפן לפי

$$y = v^N \oplus k^{N+1}.$$

דוגמה 10.1

נתון הטקסט גלוי

$x = 00100110$.

נתונה ההחלפה $\pi_S : \{0, 1\}^4 \rightarrow \{0, 1\}^4$ שמוגדרת

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
$\pi_S(z)$	D	4	3	1	2	F	B	8	3	A	6	C	5	9	0	7

נתונה התמורה $\pi_P\{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 8\}$ שמוגדרת

z	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi_P(z)$	8	5	4	2	3	6	1	7

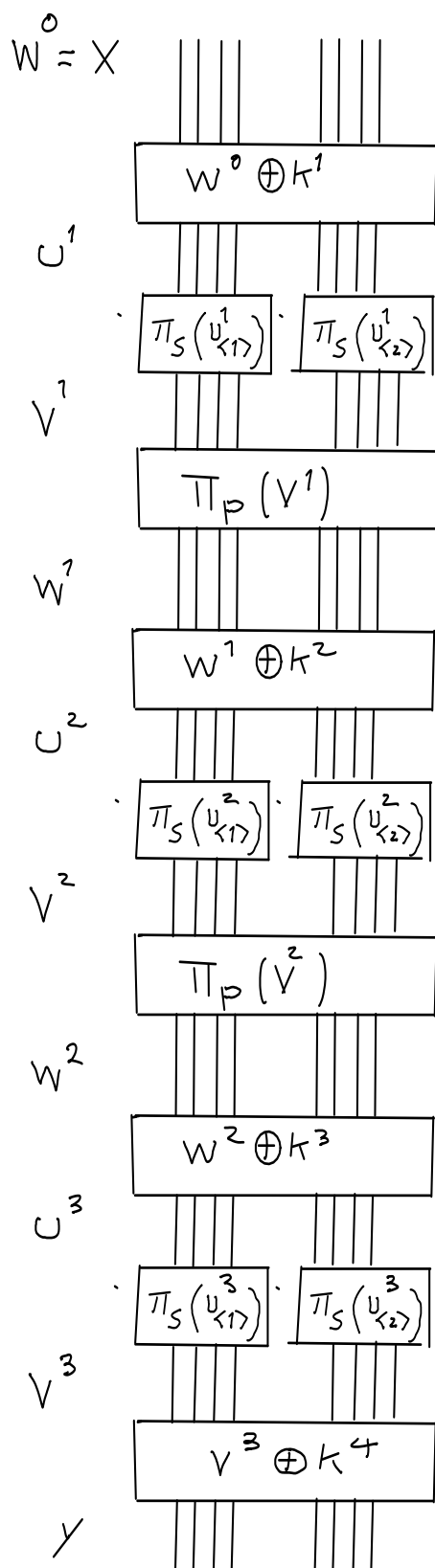
או בסימון מחזורי

$(1\ 8\ 7)(2\ 5\ 3\ 4)(6)$

ונתון מפתח התחלתי

$k = 0011\ 1010\ 1001\ 0100\ 1111$.

מספר השלבים בהצפנה הוא $N + 1$ כאשר $N = 2$. נגדיר תזמון המפתחות (k^1, k^2, k^3) כאשר המפתח k^i רצף סיביות של אורך 8 אשר מתחיל עם הסיבית ה- $(4i - 3)$ ית של k . מצטו את הטקסט מוצפן.



פתרון:

המפתחות של כל שלב של ההצפנה הם

$$\begin{aligned}k^1 &= 0011 \ 1010, \\k^2 &= 1010 \ 1001, \\k^3 &= 1001 \ 0100, \\k^4 &= 0100 \ 1111.\end{aligned}$$

שלב (1)

$$\begin{aligned}w^0 &= 0010 \ 0110 \\k^1 &= 0011 \ 1010 \\u^1 &= w^0 \oplus k^1 = 0001 \ 1100 \\u^1 &= u_{<1>} || u_{<2>} = 0001 || 1100\end{aligned}$$

בבסיס הקסדצימלי:

$$u^1 = u_{<1>} || u_{<2>} = 1 || C$$

$$v^1 = \pi_S(u_{<1>}) || \pi_S(u_{<2>}) = \pi_S(1) || \pi_S(C) = 4 || 5$$

בבסיס בינארי:

$$v^1 = 0100 || 0101$$

$$w^1 = \pi_P(0100 \ 0101) = 1001 \ 0100$$

שלב (2)

$$\begin{aligned}w^1 &= 1001 \ 0100 \\k^2 &= 1010 \ 1001 \\u^2 &= w^1 \oplus k^2 = 0011 \ 1101 \\u^2 &= u_{<1>}^2 || u_{<2>}^2 = 0011 || 1101\end{aligned}$$

בבסיס הקסדצימלי:

$$u^2 = u_{<1>}^2 || u_{<2>}^2 = 3 || D$$

$$v^2 = \pi_S(u_{<2>}^2) || \pi_S(u_{<2>}^2) = \pi_S(3) || \pi_S(D) = 1 || 9$$

בבסיס בינארי:

$$v^2 = 0001 || 1001$$

$$w^2 = \pi_P(0001 \ 1001) = 1110 \ 0000$$

שלב (3)

$$\begin{aligned}
 w^2 &= 1110 \ 0000 \\
 k^3 &= 1001 \ 0100 \\
 u^3 &= w^2 \oplus k^3 = 0111 \ 0100 \\
 u^3 &= u_{<1>}^3 || u_{<2>}^3 = 0111 || 0100
 \end{aligned}$$

בבסיס הקסדצימלי:

$$u^3 = u_{<1>}^3 || u_{<2>}^3 = 7 || 4$$

$$v^3 = \pi_S(u_{<2>}^3) || \pi_S(u_{<1>}^3) = \pi_S(7) || \pi_S(4) = 8 || 2$$

בבסיס בינארי:

$$v^3 = 1000 || 0010$$

$$\begin{aligned}
 v^3 &= 1000 \ 0010 \\
 k^4 &= 0100 \ 1111 \\
 y &= v^3 \oplus k^4 = 1100 \ 1101
 \end{aligned}$$

10.2 רשת פייסטל**הגדרה 10.2 רשת פייסטל (Feistel)**נתון טקסט גלוי $x = \{0, 1\}^{2n}$ כרצף סיביות.מחלקים את x לשני חצאים שנסמן L_0 ו- R_0 :

$$x = \underbrace{x_1 \dots x_n}_{L_0} \underbrace{x_{n+1} \dots x_{2n}}_{R_0}$$

ברשת פייסטל יש 4 מרכיבים:

- מספר שלם N אשר קובע את המספר השלבים בתהליך הצפנה.
- מפתח התחלתי k .
- מערכת של N תת-מפתחות (k_1, \dots, k_N) , אחד לכל שלב של התהליך הצפנה.
- פונקציית ליבה $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$.

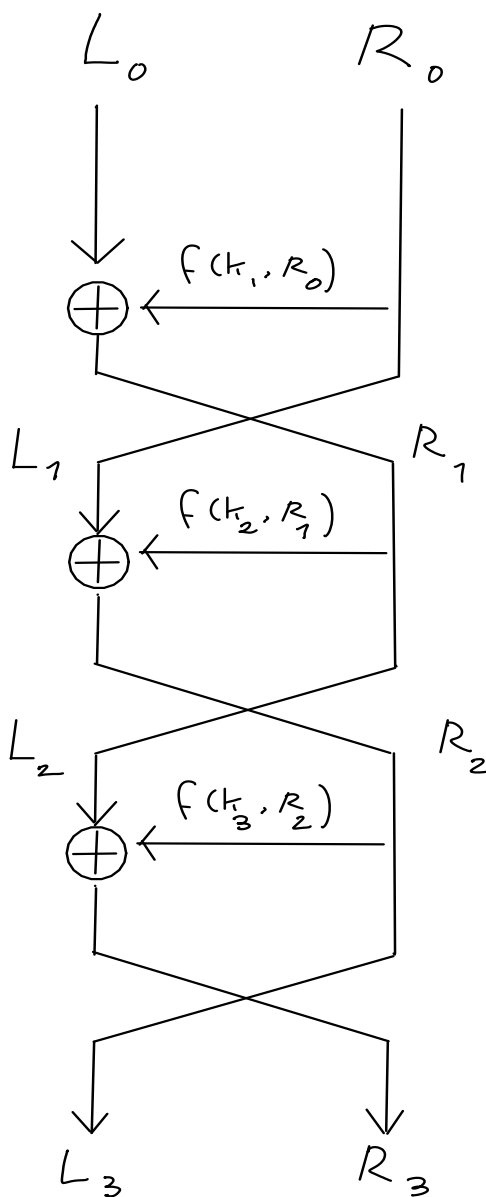
$$(1) \text{ מגדירים } R_0 = x_{n+1} \dots x_{2n}, L_0 = x_1 \dots x_n$$

$$(2) \text{ בשלב ה- } i \text{ ית } (1 \leq i \leq N): R_i = L_{i-1}, \quad L_i = L_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, k_i)$$

$$(3) \text{ בשלב ה- } N \text{ נקבל את הטקסט מוצפן לפי } y = R_N L_N$$

לדוגמה, עבור תהליך הצפנה עם $N = 3$ שלבים:

$$L_1 = R_0, \quad L_2 = R_1, \quad L_3 = R_2, \\ R_1 = L_0 \oplus f(R_0, k_1), \quad R_2 = L_1 \oplus f(R_1, k_2), \quad R_3 = L_2 \oplus f(R_2, k_3).$$



10.2 דוגמה

נתון צופן פייסטל שמוגדר עם הפונקציית ליבה $f(x_1x_2x_3x_4x_5, \pi) = x_{\pi(1)}x_{\pi(2)}x_{\pi(3)}x_{\pi(4)}x_{\pi(5)}$ המפתח ההתחלתי הוא התמורה $(135)(24)$. כל תת-מפתח k_i הוא התמורה המתקבלת על ידי לבצע i פעמים את התמורה π . מצאו את טקסט מוצפן של הטקסט גלוי 0010111001.

פתרון:

$L_0 = 00101$ ו- $R_0 = 11001$. התת מפתחות הם

$$k_1 = (135)(24), \quad k_2 = (153)(2)(4), \quad k_3 = (1)(3)(5)(24).$$

מכאן

$$\begin{aligned} L_1 &= R_0 = 11001 . \\ R_1 &= L_0 \oplus f(R_0, k_1) = 00101 \oplus 00111 = 00010 . \\ L_2 &= R_1 = 00010 . \\ R_2 &= L_1 \oplus f(R_1, k_2) = 11001 \oplus 00010 = 11011 . \\ L_3 &= R_2 = 11011 . \\ R_3 &= L_2 \oplus f(R_2, k_3) = 00010 \oplus 11011 = 11001 . \\ y &= R_3 L_3 = 1100111011 \end{aligned}$$

משפט 10.1 משוואות פייסטל

משוואות פייסטל להצפנה:

נתון טקסט גלוי $x = L_0 R_0$ לכל $1 \leq i \leq N$:

$$L_i = R_{i-1} , \quad R_i = L_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, k_i) , \quad y = R_N L_N$$

משוואות פייסטל לפענוח:

נתון טקסט גלוי $y = R_N L_N$ לכל $1 \leq i \leq N$:

$$R_i = L_{i+1} , \quad L_i = R_{i+1} \oplus f(R_{i+1}, k_{i+1}) , \quad x = L_0 R_0$$

דוגמה 10.3 פענוח של צופן פייסטל

טקסט גלוי של 10 bit היה מוצפן באמצעות צופן פייסטל עם מפתח התחלתי $k = (124)(35)$. כל תת מפתח k_i מתקבל על ידי לבצע התמורה ההתחלתית i פעמים. הטקסט מוצפן הוא 1100001010. מצאו את הטקסט גלוי.

פתרון:

התת מפתחות הם:

$$k_1 = (124)(35) , \quad k_2 = (142)(3)(5) , \quad k_3 = (1)(2)(4)(35) .$$

הטקסט מוצפן התקבל על ידי להפוך את השני חצאים, $L_3 = 01010$, $R_3 = 11000$. לכן, השלב 1 הוא:

$$R_2 = L_3 = 01010$$

-1

$$L_2 = R_3 \oplus f(R_2, k_3) = 11000 \oplus 01010 = 10010 .$$

שלב 2:

$$R_1 = L_2 = 10010 .$$

$$L_1 = R_2 \oplus f(R_1, k_2) = 01010 \oplus 11000 = 10010$$

שלב 3:

$$R_0 = L_1 = 10010 .$$

$$L_0 = R_1 \oplus f(R_0, k_1) = 10010 \oplus 01010 = 11000$$

לכן הטקסט גלוי הוא

$$X = L_0 R_0 = 1100010010 .$$

■

10.3 תקן הצפנת מידע (DES)

התקן הצפנת מידע, באנגלית Data Encryption Standard (DES), הוא צופן בלוקים סימטרי שפותח ב-1974 במרכז המחקר של IBM בשיתוף פעולה עם הסוכנות לביטחון לאומי של ממשלת ארצות הברית.

שלב (1) נתון טקסט גלוי $x = x_1 \dots x_{64}$ כרצף סיביות של 64 ביטים. בונים רצף סיביות x_0 באמצעות תמורה של הביטים של x לפי תמורה סטטית הנקראת IP (initial permutation):

$$IP = \begin{pmatrix} 58 & 50 & 42 & 34 & 26 & 18 & 10 & 2 & 60 & 52 & 44 & 36 & 28 & 20 & 12 & 4 \\ 62 & 54 & 46 & 38 & 30 & 22 & 14 & 6 & 64 & 56 & 48 & 40 & 32 & 24 & 16 & 8 \\ 57 & 49 & 41 & 33 & 25 & 17 & 9 & 1 & 59 & 51 & 43 & 35 & 27 & 19 & 11 & 3 \\ 61 & 53 & 45 & 37 & 29 & 21 & 13 & 5 & 63 & 55 & 47 & 39 & 31 & 23 & 15 & 7 \end{pmatrix}$$

ז"א, לפי הטבלה,

$$IP \left(\begin{array}{l} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, \\ x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{26}, x_{27}, x_{28}, x_{29}, x_{30}, x_{31}, x_{32}, \\ x_{33}, x_{34}, x_{35}, x_{36}, x_{37}, x_{38}, x_{39}, x_{40}, x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44}, x_{45}, x_{46}, x_{47}, x_{48}, \\ x_{49}, x_{50}, x_{51}, x_{52}, x_{53}, x_{54}, x_{55}, x_{56}, x_{57}, x_{58}, x_{59}, x_{60}, x_{61}, x_{62}, x_{63}, x_{64} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} &= x_{58}, x_{50}, x_{42}, x_{34}, x_{26}, x_{18}, x_{10}, x_2, x_{60}, x_{52}, x_{44}, x_{36}, x_{28}, x_{20}, x_{12}, x_4 \\ & \quad x_{62}, x_{54}, x_{46}, x_{38}, x_{30}, x_{22}, x_{14}, x_6, x_{64}, x_{56}, x_{48}, x_{40}, x_{32}, x_{24}, x_{16}, x_8 \\ & \quad x_{57}, x_{49}, x_{41}, x_{33}, x_{25}, x_{17}, x_9, x_1, x_{59}, x_{51}, x_{43}, x_{35}, x_{27}, x_{19}, x_{11}, x_3 \\ & \quad x_{61}, x_{53}, x_{45}, x_{37}, x_{29}, x_{21}, x_{13}, x_5, x_{63}, x_{55}, x_{47}, x_{39}, x_{31}, x_{23}, x_{15}, x_7 \end{aligned}$$

שלב (2) מחלקים $x_0 = IP(x)$ לשני חצאים:

$$x_0 = IP(x) = L_0 R_0 ,$$

כאשר L_0 ה-32 ביטים הראשונים של x_0 ו- R_0 ה-32 ביטים האחרונים:

$$\begin{aligned} L_0 &= x_{58}, x_{50}, x_{42}, x_{34}, x_{26}, x_{18}, x_{10}, x_2, x_{60}, x_{52}, x_{44}, x_{36}, x_{28}, x_{20}, x_{12}, x_4 \\ & \quad x_{62}, x_{54}, x_{46}, x_{38}, x_{30}, x_{22}, x_{14}, x_6, x_{64}, x_{56}, x_{48}, x_{40}, x_{32}, x_{24}, x_{16}, x_8 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_0 &= x_{57}, x_{49}, x_{41}, x_{33}, x_{25}, x_{17}, x_9, x_1, x_{59}, x_{51}, x_{43}, x_{35}, x_{27}, x_{19}, x_{11}, x_3 \\ & \quad x_{61}, x_{53}, x_{45}, x_{37}, x_{29}, x_{21}, x_{13}, x_5, x_{63}, x_{55}, x_{47}, x_{39}, x_{31}, x_{23}, x_{15}, x_7 . \end{aligned}$$

שלב (3) מבצעים 16 מחזורים של אלגוריתם פייסטל מסוים. מחשבים את L_i, R_i $1 \leq i \leq 16$ לפי הכלל

$$L_i = R_{i-1}, \quad R_i = L_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, k_i)$$

כאשר \oplus מסמן XOR ו- k_1, \dots, k_{16} התת-מפתחות שבנויים מרצפי סיביות, כל אחד של אורך 48 שמתקבלים ממפתח התחלתי k .

שלב (4) בסוף מפעילים התמורה ההופכית IP^{-1} על הרצף סיביות $R_{16}L_{16}$ כדי לקבל הטקסט מוצפן הסופי y . ז"א

$$y = IP^{-1}(R_{16}L_{16}).$$

כאשר

$$IP^{-1} = \begin{pmatrix} 40 & 8 & 48 & 16 & 56 & 24 & 64 & 32 & 39 & 7 & 47 & 15 & 55 & 23 & 63 & 31 \\ 38 & 6 & 46 & 14 & 54 & 22 & 62 & 30 & 37 & 5 & 45 & 13 & 53 & 21 & 61 & 29 \\ 36 & 4 & 44 & 12 & 53 & 20 & 60 & 28 & 35 & 3 & 43 & 11 & 51 & 19 & 59 & 27 \\ 34 & 2 & 42 & 10 & 50 & 18 & 58 & 26 & 33 & 1 & 41 & 9 & 49 & 17 & 57 & 25 \end{pmatrix}$$

הפונקציית ליבה של DES

בכל מחזור של DES מבצעים את הפונקציית ליבה

$$R_i = L_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, k_i).$$

f מקבלת ארגומנט ראשון A אשר הוא רצף סיביות של אורך 32, וארגומנט שני J אשר רצף סיביות של אורך 48, ומחזירה רצף סיביות של אורך 32.

$$f : \{0, 1\}^{32} \times \{0, 1\}^{48} \rightarrow \{0, 1\}^{32}.$$

שלב (1) ראשית הפונקציית ליבה f הופכת A לרצף סיביות של אורך 48 באמצעות הפונקציה

$$E : \{0, 1\}^{32} \rightarrow \{0, 1\}^{48}.$$

$E(A)$ היא תמורה של הסיביות של A עבורה 16 ספרות מופיעות פעמיים.

$$E = \begin{pmatrix} 32 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 1 \end{pmatrix}$$

שלב (2) מחשבים $E(A) \oplus J$ ורושמים התוצאה כשירשור של שמונה רצפי סיביות של 6 ביטים

$$B = B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8.$$

שלב (3) בשלב זה משתמשים בקופסאות ההחלפות $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8$.

כל S_i היא מטריצה 4×16 אשר איבריה הם שלמים $0, 1, \dots, 15$.

כל S_i עובדת כפונקציה

$$S_j : \{0, 1\}^2 \times \{0, 1\}^4 \rightarrow \{0, 1\}^4 .$$

ספציפי, נתון רצף סיביות של אורך 6, $B_j = b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$, אז

$$S_j(B_j) = S_j(r, c)$$

כאשר $S_j(r, c)$ הוא האיבר בשורה ה- r ועמודה ה- c של המטריצה S_j .

הביטים $b_1 b_6$ קובעים את היצוג הבינארי של שורה r של S_j , והביטים $b_2 b_3 b_4 b_5$ קובעים את היצוג הבינארי של עמודה c של S_j .

מגדירים

$$C_j = S_j(B_j) , \quad 1 \leq j \leq 8 .$$

שלב (4) מבצעים תמורה הסטטי P על הרצף $C = C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6 C_7 C_8$ כאשר התמורה P נתונה בטבלה למטה:

$$P = \begin{pmatrix} 16 & 7 & 20 & 21 \\ 29 & 12 & 28 & 17 \\ 1 & 15 & 23 & 26 \\ 5 & 18 & 31 & 10 \\ 2 & 8 & 24 & 14 \\ 32 & 27 & 3 & 9 \\ 19 & 13 & 30 & 6 \\ 22 & 11 & 4 & 25 \end{pmatrix}$$

הרצף סיביות המתקבל $P(C)$ מוגדר להיות $f(A, J)$.

התזמון המפתח של DES

נתון מפתח התחלתי k של 64 ביטים. משתמשים ב- 56 סיביות של k בהרכב התת-מפתחות k_1 .

שלב (1) מבצעים התמורה

$$PC_1 = \begin{pmatrix} 57 & 49 & 41 & 33 & 25 & 17 & 9 \\ 1 & 58 & 50 & 42 & 34 & 26 & 18 \\ 10 & 2 & 59 & 51 & 43 & 35 & 27 \\ 19 & 11 & 3 & 60 & 52 & 44 & 36 \\ 63 & 55 & 47 & 39 & 31 & 23 & 15 \\ 7 & 62 & 54 & 46 & 38 & 30 & 22 \\ 14 & 6 & 61 & 53 & 45 & 37 & 29 \\ 21 & 13 & 5 & 28 & 20 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

שלב (2) נסמן

$$PC_1(k) = C_0 D_0$$

כאשר C_0 ה- 28 סיביות הראשונות ו- D_0 ה- 28 סיביות האחרונות.

שלב (3) לכל $1 \leq i \leq 16$, מחשבים

$$C_i = LS_i(C_{i-1}) , \quad D_i = LS_i(D_{i-1}) .$$

ו-

$$k_i = PC_2(C_i D_i) .$$

LS_i הוא הזזה של מקום אחד או שתי מקומות שמאולה:

$$LS_i = \begin{cases} \text{הזזה מקום אחת שמאולה} & i = 1, 2, 9, 16, \\ \text{הזזה שתי מקומות שמאולה} & i = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15 . \end{cases}$$

התמורה PC_2 היא

$$PC_2 = \begin{pmatrix} 14 & 17 & 11 & 24 & 1 & 5 \\ 3 & 28 & 15 & 6 & 21 & 10 \\ 23 & 19 & 12 & 4 & 26 & 8 \\ 16 & 7 & 27 & 20 & 13 & 2 \\ 41 & 52 & 31 & 37 & 47 & 55 \\ 30 & 40 & 51 & 45 & 33 & 48 \\ 44 & 49 & 39 & 56 & 34 & 53 \\ 46 & 42 & 50 & 36 & 29 & 32 \end{pmatrix}$$

הבלוקים של ההחלפות של DES

S_1	14	4	13	1	2	15	11	8	3	10	6	12	5	9	0	7
	0	15	7	4	14	2	13	1	10	6	12	11	9	5	3	8
	4	1	14	8	13	6	2	11	15	12	9	7	3	10	5	0
	15	12	8	2	4	9	1	7	5	11	3	14	10	0	6	13
S_2	15	1	8	14	6	11	3	4	9	7	2	13	12	0	5	10
	3	13	4	7	15	2	8	14	12	0	1	10	6	9	11	5
	0	14	7	11	10	4	13	1	5	8	12	6	9	3	2	15
	13	8	10	1	3	15	4	2	11	6	7	12	0	5	14	9
S_3	10	0	9	14	6	3	15	5	1	13	12	7	11	4	2	8
	13	7	0	9	3	4	6	10	2	8	5	14	12	11	15	1
	13	6	4	9	8	15	3	0	11	1	2	12	5	10	14	7
	1	10	13	0	6	9	8	7	4	15	14	3	11	5	2	12
S_4	7	13	14	3	0	6	9	10	1	2	8	5	11	12	4	15
	13	8	11	5	6	15	0	3	4	7	2	12	1	10	14	9
	10	6	9	0	12	11	7	13	15	1	3	14	5	2	8	4
	3	15	0	6	10	1	13	8	9	4	5	11	12	7	2	14
S_5	2	12	4	1	7	10	11	6	8	5	3	15	13	0	14	9
	14	11	2	12	4	7	13	1	5	0	15	10	3	9	8	6
	4	2	1	11	10	13	7	8	15	9	12	5	6	3	0	14
	11	8	12	7	1	14	2	13	6	15	0	9	10	4	5	3
S_6	12	1	10	15	9	2	6	8	0	13	3	4	14	7	5	11
	10	15	4	2	7	12	9	5	6	1	13	14	0	11	3	8
	9	14	15	5	2	8	12	3	7	0	4	10	1	13	11	6
	4	3	2	12	9	5	15	10	11	14	1	7	6	0	8	13
S_7	4	11	2	14	15	0	8	13	3	12	9	7	5	10	6	1
	13	0	11	7	4	9	1	10	14	3	5	12	2	15	8	6
	1	4	11	13	12	3	7	14	10	15	6	8	0	5	9	2
	6	11	13	8	1	4	10	7	9	5	0	15	14	2	3	12
S_8	13	2	8	4	6	15	11	1	10	9	3	14	5	0	12	7
	1	15	13	8	10	3	7	4	12	5	6	11	0	14	9	2
	7	11	4	1	9	12	14	2	0	6	10	13	15	3	5	8
	2	1	14	7	4	10	8	13	15	12	9	0	3	5	6	11

דוגמאות

10.4 דוגמה

בצעו את האלגוריתם ליצירת תת-מפתחות לחשב k_1 מהמפתח ההתחלתי

$$k = 133457799BBCDFF1$$

פתרון:

hex	1	3	3	4	5	7	7	9
binary	0001	0011	0011	0100	0101	0111	0111	1001

hex	9	B	B	C	D	F	F	1
binary	1001	1011	1011	1100	1101	1111	1111	0001

מכאן

$$k = 0001 \ 0011 \ 0011 \ 0100 \ 0101 \ 0111 \ 0111 \ 1001 \\ 1001 \ 1011 \ 1011 \ 1100 \ 1101 \ 1111 \ 1111 \ 0001 .$$

$$PC_1(k) = C_0 D_0$$

כאשר

$$C_0 = 1111 \ 0000 \ 1100 \ 1100 \ 1010 \ 1010 \ 1111$$

$$D_0 = 0101 \ 0101 \ 0110 \ 0110 \ 0111 \ 1000 \ 1111 .$$

נבצע הזזה של ספרה אחד לשמאל לקבל

$$C_1 = 111 \ 0000 \ 1100 \ 1100 \ 1010 \ 1010 \ 1111 \ 1$$

$$D_1 = 101 \ 0101 \ 0110 \ 0110 \ 0111 \ 1000 \ 1111 \ 0 .$$

$$PC_2(C_1 D_1) = k_1 = 0001 \ 1011 \ 0000 \ 0010 \ 1110 \ 1111 \ 1111 \ 1100 \ 0111 \ 0000 \ 0111 \ 0010 .$$

■

דוגמה 10.5

מצאו את ההצפנה אחרי מחזור אחד של קריפטו-מערכת DES של הטקסט גלוי

0123456789ABCDEF

עם מפתח התחלתי

133457799BBCDF1

פתרון:

תחילה נרשום את הטקסט מוצפן בסיביות:

hex	0	1	2	3	4	5	6	7
binary	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111

hex	8	9	A	B	C	D	E	F
binary	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

אנחנו כבר חישבנו את התת-מפתח k_1 בדוגמה 10.4:

$$k_1 = 0001 \ 1011 \ 0000 \ 0010 \ 1110 \ 1111 \ 1111 \ 1100 \ 0111 \ 0000 \ 0111 \ 0010 .$$

נפעיל תמורה הסטטית IP על הרצף סיביות 64 ביטים ונקבל

$$IP(x) = L_0 R_0$$

כאשר

$$L_0 = 1100 \ 1100 \ 0000 \ 0000 \ 1100 \ 1100 \ 1111 \ 1111 ,$$

ו-

$$R_0 = 1111 \ 0000 \ 1010 \ 1010 \ 1111 \ 0000 \ 1010 \ 1010 ,$$

כעת נחשב את $f(R_0, k_1)$:

(1) שלב

$$E(R_0) = 0111 \ 1010 \ 0001 \ 0101 \ 0101 \ 0101 \ 0111 \ 1010 \ 0001 \ 0101 \ 0101 \ 0101 ,$$

(2) שלב

$$E(R_0) \oplus k_1 = 011000 \ 010001 \ 011110 \ 111010 \ 100001 \ 100110 \ 010100 \ 100111 ,$$

שלב (3) בעזרת הקופסאות S_i נחליף כל רצף 6- ביטים אם רצף 4- ביטים.

שלב (4) עבור הרצף 6- ביטים הראשון:

$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 = 011000 ,$$

נקח שורה $b_1 b_6 = 00$ ועמודה $b_2 b_3 b_4 b_5 = 1100$ של הקופסה S_2 . זוהי 5, אשר הוא 0101 בבסיס בינארי. חוזרים ומבצעים אותו חישוב על כל רצף 6 - ביטים של $E(R_0) \oplus k_1$ כדי לקבל הרצף 32- ביטים:

$$C = 0101 \ 1100 \ 1000 \ 0010 \ 1011 \ 0101 \ 1001 \ 0111$$

שלב (5) מפעילים התמורה P על C :

$$f(R_0, k_1) = P(C) = 0010 \ 0011 \ 0100 \ 1010 \ 1010 \ 1001 \ 1011 \ 1011$$

בסוף $L_1 = R_0$ ו-

$$R_1 = L_0 \oplus f(R_0, k_1) = 1110 \ 1111 \ 0100 \ 1010 \ 0110 \ 0101 \ 0100 \ 0100$$



דוגמה 10.6

נתון הטקסט גלוי

02468ACE13579BDF ,

נתון המפתח ההתחלתי

$$k = 010145458989\text{CDCD} ,$$

ונתון כי התת-מפתח הראשון של קריפטו-מערכת DES הוא

$$k_1 = 0000 \ 1011 \ 0000 \ 0010 \ 0100 \ 0011 \ 1001 \ 1001 \ 0100 \ 1000 \ 0010 \ 0100 .$$

בצעו את המחזור הראשון של הצפנת DES.

פתרון:

hex	0	2	4	6	8	A	C	E
binary	0000	0010	0100	0110	1000	1010	1100	1110
hex	1	3	5	7	9	B	D	F
binary	0001	0011	0101	0111	1001	1011	1101	1111

$$IP(x) = L_0 R_0 \text{ כאשר}$$

$$L_0 = 1010 \ 1010 \ 1111 \ 0000 \ 1010 \ 1010 \ 1111 \ 0000$$

$$R_0 = 1100 \ 1100 \ 0000 \ 0000 \ 1100 \ 1100 \ 1111 \ 1111$$

כדי

להשתמש במשוואות פייסטל נצטרך לחשב את הפונקציית ליבה $f(R_0, k_1)$. תחילה משחבים את

$$E(R_0) = 1111 \ 1111 \ 0111 \ 1001 \ 0101 \ 0110 \ 0001 \ 0000 \ 0000 \ 1000 \ 0101 \ 1110.$$

מבצעים XOR של $E(R_0)$ עם k_1 ורושמים את התוצאה בקבוצות של 6 ביטים:

$$E(R_0) \oplus k_1 = 111011 \ 101000 \ 001001 \ 000010 \ 111111 \ 001101 \ 111111 \ 011011.$$

קופסה החלפה S1 שורה 11, עמודה 1101, ומקבלים את האיבר 0.

קופסה החלפה S2 שורה 10, עמודה 0100, ומקבלים את האיבר 10.

קופסה החלפה S3 שורה 01, עמודה 0100, ומקבלים את האיבר 3.

קופסה החלפה S4 שורה 00, עמודה 0001, ומקבלים את האיבר 13.

קופסה החלפה S5 שורה 11, עמודה 1111, ומקבלים את האיבר 3.

קופסה החלפה S6 שורה 01, עמודה 0110, ומקבלים את האיבר 9.

קופסה החלפה S7 שורה 11, עמודה 1111, ומקבלים את האיבר 12.

קופסה החלפה S8 שורה 01, עמודה 1101, ומקבלים את האיבר 14.

לכן

$$C = 0000 \ 1010 \ 0011 \ 1101 \ 0011 \ 1001 \ 1100 \ 1110$$

מבצעים את התמורה הסטטית C :

$$P(C) = f(R_0, k_1) = 1111 \ 1100 \ 0001 \ 1010 \ 0011 \ 0000 \ 1110 \ 0101$$

לבסוף אנחנו מקבלים

$$L_1 = R_0 = 1100 \ 1100 \ 0000 \ 0000 \ 1100 \ 1100 \ 1111 \ 1111$$

$$R_1 = L_0 \oplus f(R_0, k_1) = 0101 \ 0110 \ 1110 \ 1010 \ 1001 \ 1010 \ 0001 \ 0101$$

■

IDEA 10.4

הגדרה 10.3 פעולות בינאריות של IDEA

\oplus	או מוציא XOR
\boxplus	חיבור מודולו 2^n כאשר n שלם השווה לאורך של הבלוקים
\odot	כפל מודולו $2^n + 1$

דוגמה 10.7

$$0110 \oplus 1011 = 1101 .$$

דוגמה 10.8

$$0110 \boxplus 1011 \xrightarrow{\text{ספרות דצימליות}} 6 \boxplus 11 = 6 + 11 \mod 2^4 = 1 \xrightarrow{\text{סיביות}} 0001 .$$

דוגמה 10.9

$$0110 \odot 1011 \xrightarrow{\text{ספרות דצימליות}} 6 \odot 11 = 6 \cdot 11 \mod 2^4 + 1 = 66 \mod 17 = 15 \xrightarrow{\text{סיביות}} 1111 .$$

דוגמה 10.10

$$0000 \odot 1011 \xrightarrow{\text{ספרות דצימליות}} 2^4 \odot 11 = 16 \cdot 11 \mod 2^4 + 1 = 176 \mod 17 = 6 \xrightarrow{\text{סיביות}} 0110 .$$

תת מפתחות של IDEA

נתון מפתח התחלתי k של IDEA של אורך 128 ביטים. כל הצפנה משתמשת ב-6 תת מפתחות, וכל תפוקה משתמשת ב-4 תת מפתחות. התת מפתחות מסומנות ב- $k_i^{(r)}$, $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq r \leq 8$, ו- $k_i^{(9)}$, $1 \leq i \leq 4$. התת מפתחות מתקבלים על ידי לחלק k לשמונה תת-מפתחות, כל אחד של אורך 16 ביטים, ואחר כך להזיז k 25 מקומות שמאלה. התת מפתחות המתקבלים מתוארים בטבלה למטה.

r	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
1	0 – 15	16 – 31	32 – 47	48 – 63	64 – 79	80 – 95
2	96 – 111	112 – 127	25 – 40	41 – 56	57 – 72	73 – 88
3	89 – 104	105 – 120	121 – 8	9 – 24	50 – 65	66 – 81
4	82 – 97	98 – 113	114 – 1	2 – 17	18 – 33	34 – 49
5	75 – 90	91 – 106	107 – 122	123 – 10	11 – 26	27 – 42
6	43 – 58	59 – 74	100 – 115	116 – 3	4 – 19	20 – 35
7	36 – 51	52 – 67	68 – 83	84 – 99	125 – 12	13 – 28
8	29 – 44	45 – 60	61 – 76	77 – 92	93 – 108	109 – 124
9	22 – 37	38 – 53	54 – 69	70 – 85	–	–

אלגוריתם ההצפנה

• נתון טקסט גלוי P של אורך 64 ביטים.

• מחלקים X לארבע בלוקים, כל אחד של אורך 16 ביטים:

$$P = P_1 P_2 P_3 P_4 .$$

• בתחילה של מחזור ה- r , $1 \leq r \leq 9$, נסמן את הטקסט מוצפן המתקבל ממחזור הקודם (מחזור $r-1$) ב- $C^{(r)}$, מלבד מ- $C^{(1)} = P$.

• כל מחזור r מורכב מהשלבים הבאים:

$$Y_1 = C_1^{(r)} \odot k_1^{(r)} = C_1^{(r)} \cdot k_1^{(r)} \mod (2^{16} + 1) \quad [1]$$

$$Y_2 = C_2^{(r)} \boxplus k_2^{(r)} = C_2^{(r)} + k_2^{(r)} \mod 2^{16} \quad [2]$$

$$Y_3 = C_3^{(r)} \boxplus k_3^{(r)} = C_3^{(r)} + k_3^{(r)} \mod 2^{16} \quad [3]$$

$$Y_4 = C_4^{(r)} \odot k_4^{(r)} = C_4^{(r)} \cdot k_4^{(r)} \mod (2^{16} + 1) \quad [4]$$

$$Y_5 = Y_1 \oplus Y_3 \quad [5]$$

$$Y_6 = Y_2 \oplus Y_4 \quad [6]$$

$$Y_7 = Y_5 \odot k_5^{(r)} = Y_5 \cdot k_5^{(r)} \mod (2^{16} + 1) \quad [7]$$

$$Y_8 = Y_6 \boxplus Y_7 = Y_6 + Y_7 \mod 2^{16} \quad [8]$$

$$Y_9 = Y_8 \odot k_6^{(r)} = Y_8 \cdot k_6^{(r)} \mod 2^{16} + 1 \quad [9]$$

$$Y_{10} = Y_7 \boxplus Y_9 = Y_7 + Y_9 \mod 2^{16} \quad [10]$$

$$C_1^{(r+1)} = Y_1 \oplus Y_9 \quad [11]$$

$$C_2^{(r+1)} = Y_3 \oplus Y_9 \quad [12]$$

$$C_3^{(r+1)} = Y_2 \oplus Y_{10} \quad [13]$$

$$C_4^{(r+1)} = Y_4 \oplus Y_{10} \quad [14]$$

הערכים Y_i נקראים הערכים הביניים. התפוקות $C_i^{(r)}$, $1 \leq i \leq 4$ נקראות הטקסטים מוצפנים הביניים.

• בכדי לקבל את הטקסט מוצפן הסופי, אחרי השלבים של כל מחזור r מבצעים את השלב התפוקה:

$$C_1 = C_1^{(9)} \odot k_1^{(9)} = C_1^{(9)} \cdot k_1^{(9)} \mod 2^{16} + 1 \quad [1]$$

$$C_2 = C_3^{(9)} \boxplus k_2^{(9)} = C_3^{(9)} + k_2^{(9)} \mod 2^{16} \quad [2]$$

$$C_3 = C_2^{(9)} \boxplus k_3^{(9)} = C_2^{(9)} + k_3^{(9)} \pmod{2^{16}} \quad [3]$$

$$C_4 = C_4^{(9)} \odot k_4^{(9)} = C_4^{(9)} \cdot k_4^{(9)} \pmod{2^{16}} + 1 \quad [4]$$

• לבסוף הטקסט מוצפן ב-64 ביטים מתקבל מהארבע בלוקים 16- ביטים

$$C = C_1 C_2 C_3 C_4 .$$

דוגמאות

דוגמה 10.11

נתון מפתח התחלתי

$$k = 01010303030301010123cdef00110011$$

בצעו את המחזור הראשון של הצפנת IDEA על הטקסט גלוי

$$P = 000f11111111000f$$

פתרון:

רושמים את המפתח במונחי סיביות:

hex	0	1	0	1	0	3	0	3
binary	0000	0001	0000	0001	0000	0011	0000	0011
hex	0	3	0	3	0	1	0	1
binary	0000	0011	0000	0011	0000	0001	0000	0001
hex	0	1	2	3	c	d	e	f
binary	0000	0001	0010	0011	1100	1101	1110	1111
hex	0	0	1	1	0	0	1	1
binary	0000	0000	0001	0001	0000	0000	0001	0001

יוצרים את התת מתחות למחזור הראשון:

$$k_1^{(1)} = 0000000100000001 = 257$$

$$k_2^{(1)} = 0000001100000011 = 771$$

$$k_3^{(1)} = 0000001100000011 = 771$$

$$k_4^{(1)} = 0000000100000001 = 257$$

$$k_5^{(1)} = 0000000100100011 = 291$$

$$k_6^{(1)} = 1100110111101111 = 52719$$

רושמים את הטקסט גלוי במונחי סיביות:

hex	0	0	0	f	1	1	1	1
binary	0000	0000	0000	1111	0001	0001	0001	0001
hex	1	1	1	1	0	0	0	f
binary	0001	0001	0001	0001	0000	0000	0000	1111

מבצעים מחזור ראשון של ההצפנה:

$$\begin{aligned}
 P_1 = C_1^{(1)} &= 00000000000001111 = 15, \\
 P_2 = C_2^{(1)} &= 0001000100010001 = 4369, \\
 P_3 = C_3^{(1)} &= 0001000100010001 = 4369, \\
 P_4 = C_4^{(1)} &= 00000000000001111 = 15,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_1 = C_1^{(1)} \odot k_1^{(1)} &= 15 \cdot 257 \mod 65537 = 3855 \Rightarrow Y_1 = 0000 \ 1111 \ 0000 \ 1111, \\
 Y_2 = C_2^{(1)} \boxplus k_2^{(1)} &= 4369 + 771 \mod 65536 = 5140 \Rightarrow Y_2 = 0001 \ 0100 \ 0001 \ 0100, \\
 Y_3 = C_3^{(1)} \boxplus k_3^{(1)} &= 4369 + 771 \mod 65536 = 5140 \Rightarrow Y_3 = 0001 \ 0100 \ 0001 \ 0100, \\
 Y_4 = C_4^{(1)} \odot k_4^{(1)} &= 15 \cdot 257 \mod 65537 = 3855 \Rightarrow Y_4 = 0000 \ 1111 \ 0000 \ 1111, \\
 Y_5 = Y_1 \oplus Y_3 &= 0001 \ 1011 \ 0001 \ 1011 = 6939, \\
 Y_6 = Y_2 \oplus Y_4 &= 0001 \ 1011 \ 0001 \ 1011 = 6939, \\
 Y_7 = Y_5 \odot k_5^{(1)} &= 6939 \cdot 291 \mod 65537 = 53139 \Rightarrow Y_7 = 1100 \ 1111 \ 1001 \ 0011, \\
 Y_8 = Y_6 \boxplus Y_7 &= 6939 + 53139 \mod 65536 = 60078 \Rightarrow Y_8 = 1110 \ 1010 \ 1010 \ 1110, \\
 Y_9 = Y_8 \odot k_6^{(1)} &= 60078 \cdot 52719 \mod 65537 = 45483 \Rightarrow Y_9 = 1011 \ 0001 \ 1010 \ 1011, \\
 Y_{10} = Y_7 \boxplus Y_9 &= 53139 + 45483 \mod 65536 = 33086 \Rightarrow Y_{10} = 1000 \ 0001 \ 0011 \ 1101.
 \end{aligned}$$

התפוקה של מחזור הראשון הינה

$$\begin{aligned}
 C_1^{(2)} = Y_1 \oplus Y_9 &= 1011111010100100 \\
 C_2^{(2)} = Y_3 \oplus Y_9 &= 1010010110111111 \\
 C_3^{(2)} = Y_2 \oplus Y_{10} &= 1001010100101010 \\
 C_4^{(2)} = Y_4 \oplus Y_{10} &= 1000111000110001
 \end{aligned}$$

דוגמה 10.12

מצאו את המפתחות פענוח של המחזור הראשון של פענוח IDEA בעזרת המפתח ההתחלתי

$$k = 00112233445566778899aabbccddeeff.$$

פתרון:

המפתחות לפענוח הם

$$\begin{aligned}
 DK_1^{(1)} &= \left(K_1^{(9)}\right)^{-1}, \\
 DK_2^{(1)} &= -\left(K_2^{(9)}\right), \\
 DK_3^{(1)} &= -\left(K_3^{(9)}\right), \\
 DK_4^{(1)} &= \left(K_4^{(9)}\right)^{-1}, \\
 DK_5^{(1)} &= K_5^{(8)}, \\
 DK_6^{(1)} &= K_6^{(8)}.
 \end{aligned}$$

hex	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
binary	0000	0000	0001	0001	0010	0010	0011	0011	0100	0100	0101

hex	5	6	6	7	7	8	8	9	9	a	a
binary	0101	0110	0110	0111	0111	1000	1000	1001	1001	1010	1010

hex	b	b	c	c	d	d	e	e	f	f
binary	1011	1011	1100	1100	1101	1101	1110	1110	1111	1111

$$k_1^{(9)} = 0100\ 0110\ 0110\ 1000 = 18024 . \quad \text{ביטים } 22 - 37$$

$$k_2^{(9)} = 1000\ 1010\ 1010\ 1100 = 35500 . \quad \text{ביטים } 38 - 53$$

$$k_3^{(9)} = 1100\ 1110\ 1111\ 0001 = 52977 . \quad \text{ביטים } 54 - 69$$

$$k_4^{(9)} = 0001\ 0011\ 0011\ 0101 = 4917 . \quad \text{ביטים } 70 - 85$$

$$k_5^{(8)} = 1011\ 1100\ 1100\ 1101 . \quad \text{ביטים } 93 - 108$$

$$k_6^{(8)} = 1101\ 1110\ 1110\ 1111 . \quad \text{ביטים } 109 - 124$$

$$DK_1^{(1)} = \left(K_1^{(9)}\right)^{-1} = (18024)^{-1} \bmod 65537 = 45753 = 1011\ 0010\ 1011\ 1001 ,$$

$$DK_2^{(1)} = -\left(K_2^{(9)}\right) = -35500 \bmod 65536 = 30036 = 0111\ 0101\ 0101\ 0100 .$$

$$DK_3^{(1)} = -\left(K_3^{(9)}\right) = -52977 \bmod 65536 = 12559 = 0011\ 0001\ 0000\ 1111 .$$

$$DK_4^{(1)} = \left(K_4^{(9)}\right)^{-1} = (4917)^{-1} \bmod 65537 = 18047 = 0100\ 0110\ 0111\ 1111 .$$

$$DK_5^{(1)} = K_5^{(8)} = 1011\ 1100\ 1100\ 1101 .$$

$$DK_6^{(1)} = K_6^{(8)} = 1101\ 1110\ 1110\ 1111 .$$

■

שיעור 11

פונקציות תמצות קריפטוגרפיות

11.1 פונקציות תמצות

11.2 אמינות המידע

שיעור 12

פונקציות תמצות קריפטוגרפיות המשך

12.1 פונקציות תמצות איטרטיביות

שיעור 13

שיטות חתימה

13.1 דרישות בטיות משיטות חתימה

13.2 שיטות חתימה של אל-גמאל

שיעור 14

סכמות לשיתוף סודות

14.1 סכמת הסף של שמיר

14.2 סכמת סף (t, t) פשוטה