מחלקה למדעי המחשב

ט' בתמוז תשפ"ד 15/07/24
$09:00 - 12:00$

אלגברה ליניארית 1 למדמ"ח

מועד מיוחד

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר .

תשפ"ד סמסטר א'

השאלון מכיל 11 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.
- יש לציין את השאלות שעניתם עליהן בתחילת המחברת.

==

שאלה 1 **(25 נקודות)** נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+k & -2 \\ 2 & 2 & -k-4 \\ 3 & 3-k & 3k^2-7 \end{pmatrix}$ וגם ווקטור $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11-k \\ 3k^2+7k+23 \end{pmatrix}$.

א) (16 נק') לכל ערך של פרמטר k מצאו את המימד והבסיס של $\mathrm{col}(A)$.

ב) (3 נק') עבור אילו ערכי k עמודות המטריצה פורשות את המרחב $\mathbb{R}^3$? נמקו את תשובתכם.

ג) (6 נק') עבור אילו ערכי k הווקטור v אינו שייך לתת המרחב הנפרש על ידי עמודות המטריצה? נמקו את תשובתכם.

שאלה 2 **(25 נקודות)**

א) (13 נק') נתונים שלושה ווקטורים בלתי תלויים לינארית $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. יהיו

$$\begin{cases} w_1 &= \mathrm{v}_1 + 3\mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_3 \\ w_2 &= 2\mathrm{v}_1 + 4\mathrm{v}_2 \\ w_3 &= -\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 + (k^2+2)\,\mathrm{v}_3 \end{cases}$$

מצאו לאילו ערכי k הווקטורים w_1, w_2, w_3 תלויים לינארית ועבור ערכים אלו מצאו צרוף ליניארי לא טריוויאלי שלהם השווה לווקטור האפס.

ב) (12 נק') פתרו את המערכת הבאה באמצעות כלל קרמר.

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 6\ , \\ 3x - y &= 1\ , \\ 4x + 3y + z &= 9\ . \end{aligned}$$

שאלה 3

א) (17 נק') נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ שמוגדרת

$$T\left(a + bx + cx^2 + dx^3\right) = (3a - b + kd) + (b - kc)x + ax^2 + (a + b - kc + d)x^3\ .$$

א) (3 נק') מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של ההעתקה.

ב) (6 נק') עבור אילו ערכי הפרמטר k ההעתקה תהיה "על" $\mathbb{R}_3[x]$? נמקו את תשובתכם.

ג) (8 נק') לכל ערך של k מצאו את המימד ובסיס של התמונה והגרעין של ההעתקה.

ב) **(8 נק')** תהי $\{u_1,\ldots,u_k\}$ קבוצת ווקטוירם של מרחב ווקטורי V ותהי $S:V\to V$ העתקה. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענותת הבאות.

א) **(4 נק')** אם $\{u_1,\ldots,u_k\}$ בלתי תלויה ליניארית אז $\{S(u_1),\ldots,S(u_k)\}$ בלתי תלויה ליניארית.

ב) **(4 נק')** אם $\{u_1,\ldots,u_k\}$ תלויה ליניארית אז $\{S(u_1),\ldots,S(u_k)\}$ תלויה ליניארית.

שאלה 4

א) **(15 נק')**

א) **(8 נק')** מצאו את המימד ובסיס של תת המרחב הנפרש על ידי הווקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix}1&3\\-1&4\end{pmatrix}\ ,\quad u_2=\begin{pmatrix}3&3\\3&1\end{pmatrix}\ ,\quad u_3=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}\ ,\quad u_4=\begin{pmatrix}-1&2\\4&5\end{pmatrix}\ ,\quad u_5=\begin{pmatrix}1&13\\14&24\end{pmatrix}\ .$$

ב) **(7 נק')** בטאו את הווקטורים מתוך u_1,u_2,u_3,u_4,u_5 שלא שיכים לבסיס שמצאת בסעיף א', כצירוף לינארי של הבסיס.

ב) **(10 נק')** הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א) **(5 נק')** אם $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ו- $A=A^2$ אז $A=I$ או $A=0$.

ב) **(7 נק')** אם $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ וקיים $b\in\mathbb{R}^n$ שעבורו למערכת $AX=b$ אין פתרון אז למערכת $AX=0$ יש אינסוף פתרונות.

שאלה 5

א) **(11 נק')** נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix}k&k&0\\1&k^2-k+2&1\\1&2&1\end{pmatrix}$.

א) **(8 נק')** לכל ערך של k קבעו את דרגת המטריצה A.

ב) **(3 נק')** עבור אילו ערכי k למערכת $AX=b$ יהיה פתרון יחיד לכל b? נמקו את תשובתכם.

ב) **(14 נק')** נתון E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$ וקבוצה

$$B=\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-5\\-7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$$

א) (6 נק') הוכיחו ש- B בסיס של $\mathbb{R}^3$.

ב) (5 נק') מצאו את מטריצה המעבר מהבסיס E ל- B.

ג) (3 נק') נסמן $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. מצאו את $[u]_B$, כלומר מצאו את ווקטור הקואורדינאטות של u ביחס לבסיס B.