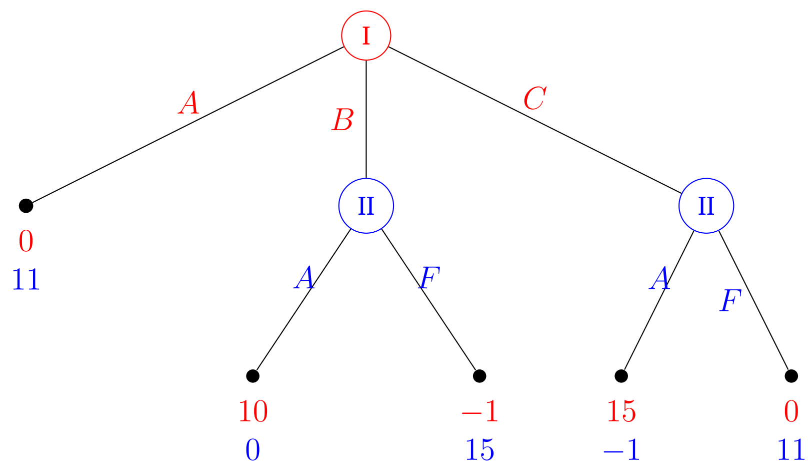
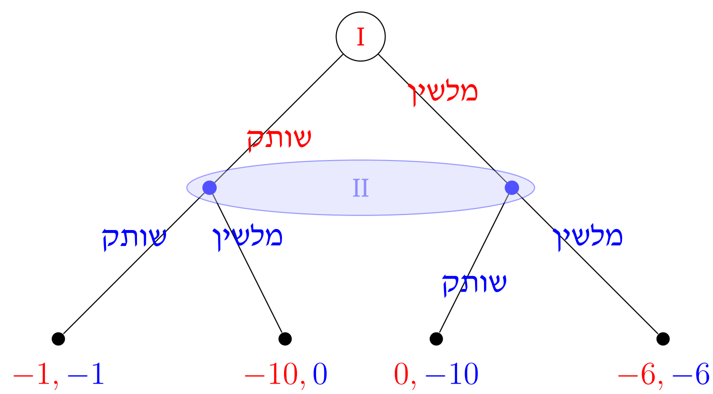
תרגילים שונים: תורת המשחקים

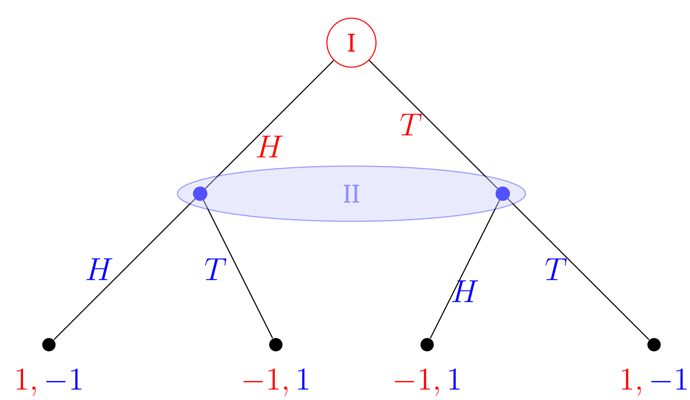
שאלה 1 מצאו את שווי המשקל נאש במשחק הבא:



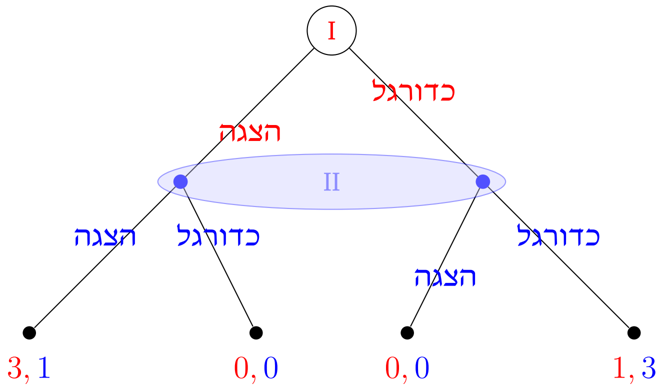
שאלה 2 מצאו את שווי המשקל נאש במשחק הבא:



שאלה 3 מצאו את שווי המשקל נאש במשחק הבא:



שאלה 4 מצאו את שווי המשקל נאש במשחק הבא:



שאלה 5 שני יצרנים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתרחים על שוק הקונים הפוטנציאלים. היצרנים מחליטים על הכמות שהם ייצרו, וההיצע הכולל קובע את מחיר המוצר, שהוא זהה לשני היצרנים. נסמן ב- q_1 וב- q_2 את הכמויות שמיצרים היצרנים 1 ו- 2 בהתאמה. אזי הכמות הכוללת של המוצרים בשוק הוא q_1+q_2. נניח כי המחיר של יחידה שווה ל- $P=a-q_1-q_2$ כאשר $a=2$ פרמטר הביקוש. עלות הייצור של יחידה ליצרן הראשון הוא ידיעה משותפת בין שני היצרנים ושווה ל- $c_1=1$. עלות הייצור של יחידה ליצרן השני ידוע ליצרן השני אך אינה ידוע ליצרן הראשון. כל שיצרן זה יודע הוא שהעלות שווה ל- $c_2^L=\frac{3}{4}$ (עלות יצור נמוך) בהסתברות $\theta=\frac{1}{2}$ או $c_2^H=\frac{5}{4}$ (עלות יצור גבוהה) בהסתברות $1-\theta=\frac{1}{2}$.

האם קיים שיווי משקל בייסיאני במשחק זה? אם כן, מה הוא?

שאלה 6 לכל אחד של המשחקים שני שחקנים סכום אפס הבאים. מצאו את הערך של המשחק והאסטרטגיות האופטימליות.

א)

$II \backslash I$	L	R
T	-1	-4
B	-3	3

ב)

$II \backslash I$	L	R
T	5	8
B	5	1

ג)

I \ II	L	R
T	5	4
B	2	3

ד)

I \ II	L	R
T	4	2
B	2	9

ה)

I \ II	L	R
T	5	4
B	5	6

ו)

I \ II	L	R
T	7	7
B	3	10

שאלה 7 נתון המשחק הבא בצורה אסטרטגית.

I \ II	L	R
T	$1, 0$	$-1, 1$
B	$0, 1$	$0, 0$

הוכיחו כי השיווי משקל היחיד של המשחק הוא $\left[\frac{1}{2}(T), \frac{1}{2}(B)\right]$, $\left[\frac{1}{2}(L), \frac{1}{2}(R)\right]$.

שאלה 8 מצאו את כל ווקטורי האסטרטגיות הרציונליים במשחקים הבאים:

א)

II \ I	L	R
T	$9, 5$	$5, 3$
B	$8, 6$	$8, 4$

ב)

I \ II	a	b	c	d
T	$6,2$	$5,3$	$7,6$	$2,8$
B	$8,5$	$6,9$	$4,6$	$4,7$

ג)

I \ II	a	b	c	d
T	$-1,-20$	$-7,-7$	$-1,2$	$-5,8$
M	$27,20$	$13,-2$	$21,2$	$13,-1$
B	$-5,20$	$-3,5$	$7,-1$	$3,-4$

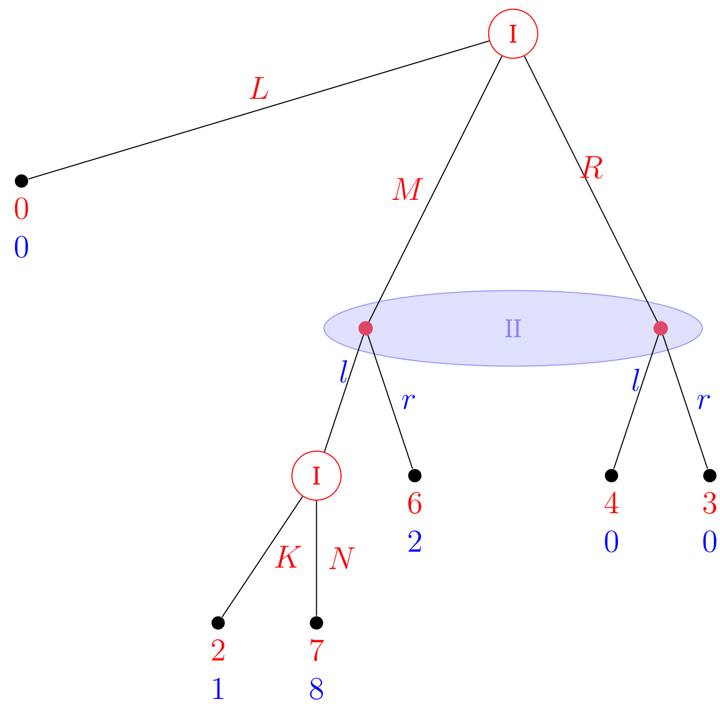
ד)

I \ II	a	b	c	d
α	$3,7$	$0,13$	$4,5$	$5,3$
β	$5,3$	$4,8$	$4,3$	$3,7$
γ	$4,5$	$3,7$	$4,5$	$5,3$
δ	$4,-1$	$2,5$	$1,2$	$3,2$

שאלה 9

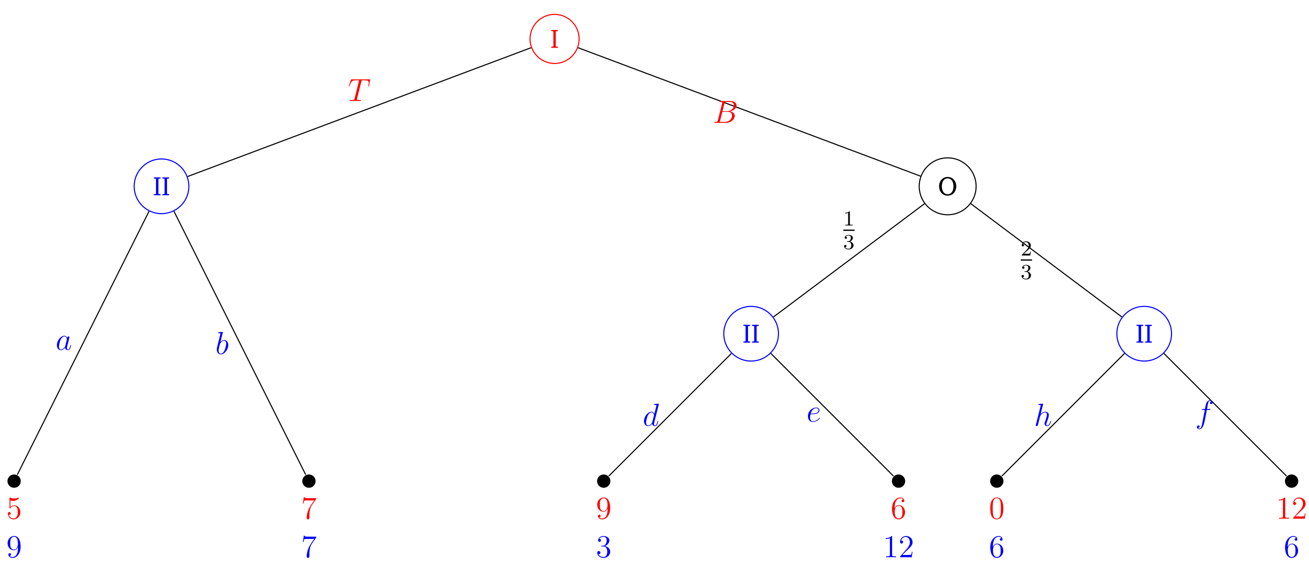
מצאו את שיווי משקל במשחק הבאים:

א)



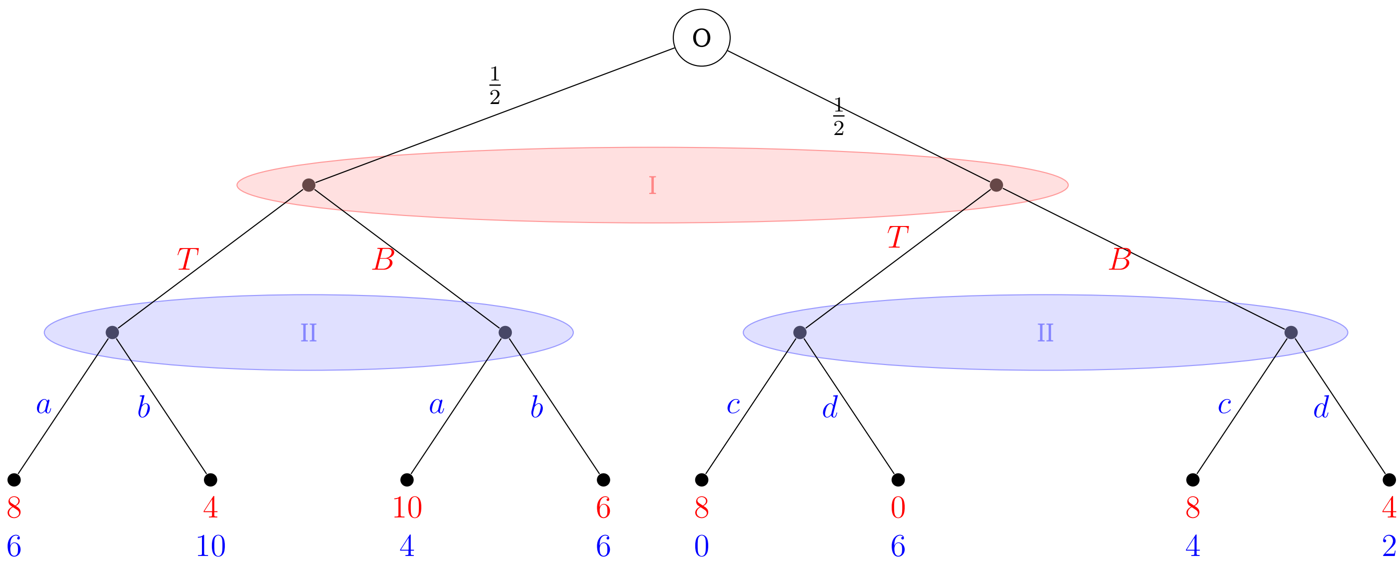
I
L
M
R
0
0
II
l
r
l
r
I
6
2
4
0
3
0
K
N
2
1
7
8

ב)



I
T
B
II
O
$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$
a
b
II
II
d
e
h
f
5
9
7
7
9
3
6
12
0
6
12
6

ג)



שאלה 10 בכל אחד של המשחקים סכום אפס הבאים מצאו את הערך של המשחק והאסטרטגיות אופטימליות.

א)

I \ II	L	R
T	5	8
B	5	1

ב)

I \ II	L	R
T	2	6
M	5	5
B	7	4

ג)

I \ II	L	M	R
T	6	4	3
B	3	7	9

שאלה 11 לכל אחד של המשחקים הבאים (שחקן I הוא שחקן השורות ושחקן II שחקן העמודות) מצאו את השיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

א)

$I \backslash II$	L	R
T	$1,1$	$4,0$
B	$2,10$	$3,5$

ב)

$I \backslash II$	L	R
T	$1,2$	$2,2$
B	$0,3$	$1,1$

ג)

$I \backslash II$	L	M	R
T	$1,1$	$0,2$	$2,0$
B	$0,0$	$1,0$	$-1,3$

שאלה 12 נתון משחק שני שחקנים. הוכיחו: אם כל שחקן משחק אסטרטגיה שיווי משקל, התשלום לכל שחקון גדול או שווה לערך המקסמין שלו(ה).

פתרונות

<u>שאלה 1</u>

<u>שאלה 2</u>

<u>שאלה 3</u>

<u>שאלה 4</u>

<u>שאלה 5</u> כמות של יצרן 1: q_1. כמות של יצרן 2: q_2.

מחיר ליחדה אחת של המוצר: $P=a-q_1-q_2$.

עלות ליחידה לשחקן 1: $c_1=1$ והוא ידיעה משותפת.

עלות ליחידה לשחקן 2: $c_2=c_2^H$ או $c_2=c_2^L$ והוא ידוע לשחקו 2 ולא לשחקן 1.

עבור שחקן 1: $c_2=c_2^L$ בהסתברות θ ו- $c_2=c_2^H$ בהסתברות $1-\theta$.

צורה בייסיאנית של המשחק:

- $N=\{1,2\}$.
- $T_1=\{1\}$, $T_2=\{c_2^H,c_2^L\}$.
- $p_I\left(t_2=c_2^L|t_1=1\right)=p_I\left(t_2=c_2^L\right)=\theta$.
- $p_I\left(t_2=c_2^H|t_1=1\right)=p_I\left(t_2=c_2^H\right)=1-\theta$.
- $A_1=\{q_1\}$, $A_2=\{q_2^H,q_2^L\}$.
- פורנצית תשלום לשחקן 1:
$$u_1\left(s_1(t_1),s_2(t_2),t_1=1\right)$$
פורנצית תשלום לשחקן 2:
$$u_2\left(s_1(t_1),s_2(t_2),t_2\right)$$
- $$s_1(t=1)=q_1\ ,\qquad s_2(t_2=c_2^L)=q_2^L\ ,\qquad s_2(t_2=c_2^H)=q_2^H\ .$$

לשחקן 1, $s_2(t_2=c_2^L)=q_2^L$ בהסתברות θ ו- $s_2(t_2=c_2^H)=q_2^H$ בהסתברות $1-\theta$.

$$u_1\left(s_1(t_1),s_2(t_2),t_1=1\right)=u_1\left(q_1,q_2^H,q_2^L\right))=q_1\left(a-q_1-\theta q_2^L-(1-\theta)q_2^H-c_1\right)$$

לשחקן 2, אם $c_2=c_2^L$:

$$u_2\left(s_1(t_1),s_2(t_2=c_2^L),t_2=c_2^L\right)=u_2\left(q_1,q_2^L\right)=q_2^L\left(a-q_1-q_2^L-c_2^L\right)\ .$$

אם $c_2=c_2^H$:

$$u_2\left(s_1(t_1),s_2(t_2=c_2^H),t_2=c_2^H\right)=u_2\left(q_1,q_2^H\right)=q_2^H\left(a-q_1-q_2^H-c_2^H\right)\ .$$

$q_2^{H*}=\operatorname{argmax}_{q_2^H\in[0,\infty)}u_2\left(q_1^*,q_2^H\right)$.

$$(u_2)'_{q_2^H}=a-c_2^H-q_1^*-2q_2^H\stackrel{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad q_2^{H*}=\frac{a-c_2^H-q_1^*}{2}\ .$$

$$(u_2)'_{q_2^L}=a-c_2^L-q_1^*-2q_2^L\stackrel{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad q_2^{L*}=\frac{a-c_2^L-q_1^*}{2}\ .$$

$$(u_1)'_{q_1}=a-2q_1-\theta q_2^{L*}-(1-\theta)\theta q_2^{H*}-c_1\stackrel{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad q_1{}^*=\frac{a-\theta q_2^{L*}-(1-\theta)q_2^{H*}-c_1}{2}\ .$$

נציב $a=2$, $c_2^L=\frac{3}{4}$, $c_2^H=\frac{5}{4}$ ו- $c_1=1$ במערכת זו ונקבל

$$q_1^*=\frac{1}{3}\ ,\qquad q_2^{H*}=\frac{5}{24},\qquad q_2^{L*}=\frac{11}{24}\ .$$

התשלומים הם:

$$u_1\left(q_1^*=\frac{1}{3},q_2^{H*}=\frac{5}{24},q_2^{L*}=\frac{11}{24}\right)=\frac{1}{9}\ ,$$
$$u_2^H\left(q_1^*=\frac{1}{3},q_2^{H*}=\frac{5}{24},q_2^{L*}=\frac{11}{24}\right)=\left(\frac{5}{24}\right)^2\ ,$$
$$u_2^L\left(q_1^*=\frac{1}{3},q_2^{H*}=\frac{5}{24},q_2^{L*}=\frac{11}{24}\right)=\left(\frac{11}{24}\right)^2\ .$$

שאלה 6

א) ערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות: $\text{v}=-\frac{5}{3}$.

אסטרטגיות אופטימלית של שחקן 1: $\left[\frac{2}{3}(T),\frac{1}{3}(B)\right]$.

אסטרטגיות אופטימלית של שחקן 2: $\left[\frac{7}{9}(L),\frac{2}{9}(R)\right]$.

ב) ערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות: $\mathrm{v}=5$.

אסטרטגיות אופטימלית של שחקן 1: $\left[x^*(T),(1-x^*)(B)|x^*\in\left[\frac{4}{7},1\right]\right]$.

אסטרטגיות אופטימלית של שחקן 2: L.

ג)

ערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות: $\mathrm{v}=4$.

אסטרטגיות אופטימלית של שחקן 1: T.

אסטרטגיות אופטימלית של שחקן 2: R.

ד)

ערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות: $\mathrm{v}=\frac{32}{9}$.

אסטרטגיות אופטימלית של שחקן 1: $\left[\frac{7}{9}(T),\frac{2}{9}(B)\right)\big]$.

אסטרטגיות אופטימלית של שחקן 2: $\left[\frac{7}{9}(L),\frac{2}{9}(R)\right)\big]$.

ה)

ערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות: $\mathrm{v}=5$.

אסטרטגיות אופטימלית של שחקן 1: $\left[x^*(T),(1-x^*)(B)|x^*\in[0,\frac{1}{2}]\right]$.

אסטרטגיות אופטימלית של שחקן 2: L.

ו)

ערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות: $\mathrm{v}=7$.

אסטרטגיות אופטימלית של שחקן 1: T.

אסטרטגיות אופטימלית של שחקן 2: $\left[y^*(L),(1-y^*)(R)|y^*\in[\frac{3}{7},1]\right]$.

שאלה 7 פונקצית הועלת של שחקן 1:

$$U_1(x,y)=xy-x(1-y)=2xy-x\ .$$

$$U_2(x,y)=x(1-y)+(1-x)y=-2xy+x+y\ .$$

$$s_1^*(y) = \{x \in [0,1] \big| U_1(x,y) \geq U_1(z,y) \forall z \in [0,1]\} \ .$$

$U_1(x,y) = x(2y-1)$.

לכל y קבוע כפונקציה ליניארית של x:

אם $y > \frac{1}{2}$ ⇐ השיפוע חיובי ⇐ לפונקציה יש מקסימום ב- $x = 1$.

אם $y < \frac{1}{2}$ ⇐ השיפוע שלילי ⇐ לפונקציה יש מקסימום ב- $x = 0$.

אם $y = \frac{1}{2}$ ⇐ השיפוע שווה אפס ⇐ לפונקציה יש מקסימום בכל $x \in [0,1]$.

לכן

$$s_1^*(y) = \begin{cases} 1 & y > \frac{1}{2} \\ 0 & y < \frac{1}{2} \\ [0,1] & y = \frac{1}{2} \end{cases} \ .$$

$$s_2^*(x) = \{y \in [0,1] \big| U_2(x,y) \geq U_2(x,z) \forall z \in [0,1]\} \ .$$

$U_2(x,y) = -2xy + x + y = y(-2x+1) + x$.

לכל x קבוע כפונקציה ליניארית של y:

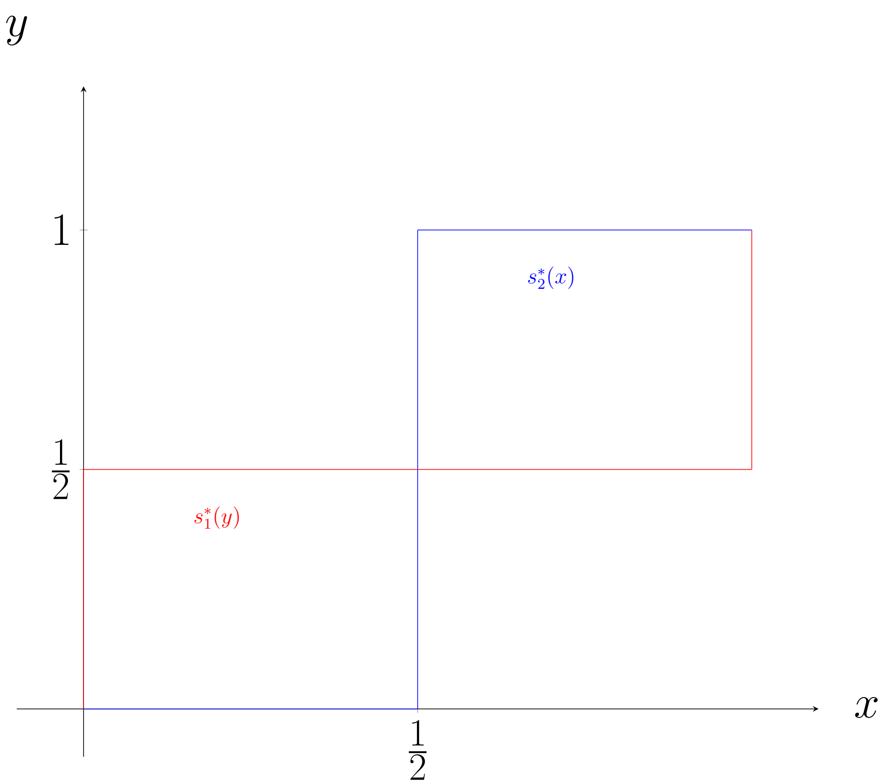
אם $x < \frac{1}{2}$ ⇐ השיפוע חיובי ⇐ לפונקציה יש מקסימום ב- $y = 1$.

אם $x > \frac{1}{2}$ ⇐ השיפוע שלילי ⇐ לפונקציה יש מקסימום ב- $y = 0$.

אם $x = \frac{1}{2}$ ⇐ השיפוע שווה אפס ⇐ לפונקציה יש מקסימום בכל $y \in [0,1]$.

לכן

$$s_2^*(x) = \begin{cases} 1 & x > \frac{1}{2} \\ 0 & x < \frac{1}{2} \\ [0,1] & x = \frac{1}{2} \ . \end{cases}$$



(x^*, y^*) שיווי משקל אם ורק אם $x^* \in s_1^*(y)$ ו- $y^* \in s_2^*(x)$. הרי, לי הגרף, $x^* = \frac{1}{2} \in s_1^*(y)$ ו- $y^* = \frac{1}{2} \in s_2^*(x)$ לכן $s^* = (x^* = \frac{1}{2}, y^* = \frac{1}{2})$ נקודת שיווי משקל.

שאלה 8

א)

$$\begin{array}{c|cc} I \backslash II & L & R \\ \hline T & 9,5 & \cancel{5,3} \\ B & 8,6 & \cancel{8,4} \end{array} \xrightarrow{R\prec L} \begin{array}{c|c} I \backslash II & L \\ \hline T & 9,5 \\ B & \cancel{8,6} \end{array} \xrightarrow{B\prec T} \begin{array}{c|c} I \backslash II & L \\ \hline T & 9,5 \end{array}$$

פתרון באסטרטגיות שולטות חזק: TL.

ב)

$$\begin{array}{c|cccc} I \backslash II & a & b & c & d \\ \hline T & \cancel{6,2} & 5,3 & \cancel{7,6} & 2,8 \\ B & \cancel{8,5} & 6,9 & \cancel{4,6} & 4,7 \end{array} \xrightarrow{\substack{c\prec d \\ a\prec d}} \begin{array}{c|cc} I \backslash II & b & d \\ \hline T & \cancel{5,3} & \cancel{2,8} \\ B & 6,9 & 4,7 \end{array} \xrightarrow{T\prec B} \begin{array}{c|cc} I \backslash II & b & d \\ \hline B & 6,9 & \cancel{4,7} \end{array} \xrightarrow{d\prec b} \begin{array}{c|c} I \backslash II & b \\ \hline B & 6,9 \end{array}$$

פתרון באסטרטגיות שולטות חזק: Bb.

ג)

I \ II	a	b	c	d
T	$-1,20$	~~$-7,-7$~~	~~$-1,2$~~	~~$-5,8$~~
M	$27,20$	~~$13,-2$~~	~~$21,2$~~	~~$13,-1$~~
B	$-5,20$	~~$-3,5$~~	~~$7,-1$~~	~~$3,-4$~~

$\xrightarrow{b\prec a,\ c\prec a,\ d\prec a}$

I \ II	a
T	~~$-1,20$~~
M	$27,20$
B	~~$-5,20$~~

$\xrightarrow{T\prec M,\ B\prec M}$

I \ II	a
M	$27,20$

פתרון באסטרטגיות שולטות חזק: Ma.

ד)

I \ II	a	b	c	d
α	~~$3,7$~~	$0,13$	~~$4,5$~~	~~$5,3$~~
β	~~$5,3$~~	$4,8$	~~$4,3$~~	~~$3,7$~~
γ	~~$4,5$~~	$3,7$	~~$4,5$~~	~~$5,3$~~
δ	~~$4,-1$~~	$2,5$	~~$1,2$~~	~~$3,2$~~

$\xrightarrow{c\prec b,\ d\prec b,\ a\prec b}$

I \ II	b
α	~~$0,13$~~
β	$4,8$
γ	~~$3,7$~~
δ	~~$2,5$~~

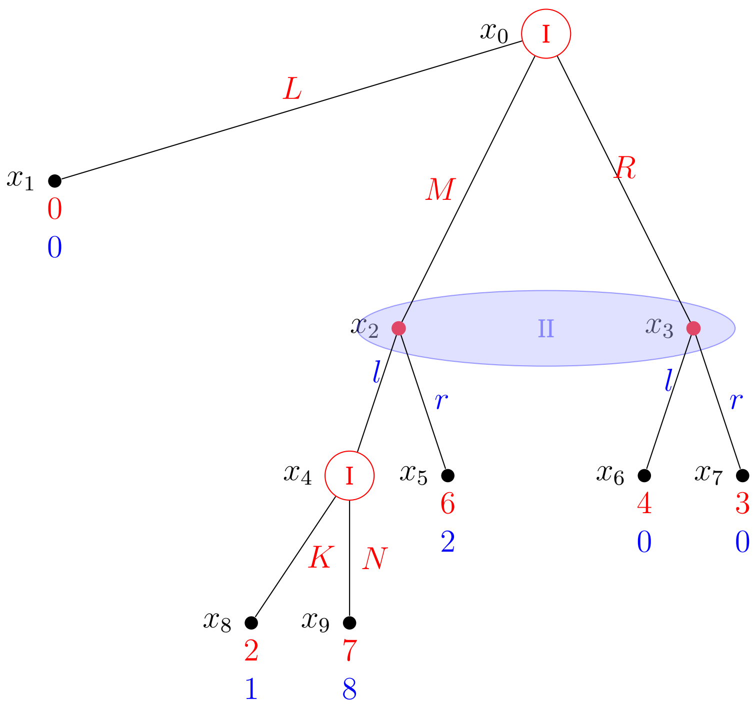
$\xrightarrow{\alpha\preceq\gamma}$

I \ II	b
β	$4,8$

פתרון באסטרטגיות שולטות חלש: βb.

שאלה 9

א)



קבוצות ידיעה של שחקן I:

$$x_0 : (L, M, R)\ , \qquad x_4 : (K, N)\ .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I = (L/K, M/K, R/K, L/N, M/N, R/N)\ .$$

קבוצות ידיעה של שחקן II:

$$x_2 x_3 : (l, r)\ .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן II:

$$S_{II} = (l, r)\ .$$

צורה אסטרטגית של המשחק:

$I \backslash II$	l	r
L/K	$0,0$	$0,0$
M/K	$2,1$	$6,2$
R/K	$4,0$	$3,0$
L/N	$0,0$	$0,0$
M/N	$7,8$	$6,2$
R/N	$4,0$	$3,0$

נמצא את התשובה הטובה ביותר של שחקן I לכל אסטרטגיה של שחקן II :

$I \backslash II$	l	r
L/K	$0,0$	$0,0$
M/K	$2,1$	$6,2$
R/K	$4,0$	$3,0$
L/N	$0,0$	$0,0$
M/N	$7,8$	$6,2$
R/N	$4,0$	$3,0$

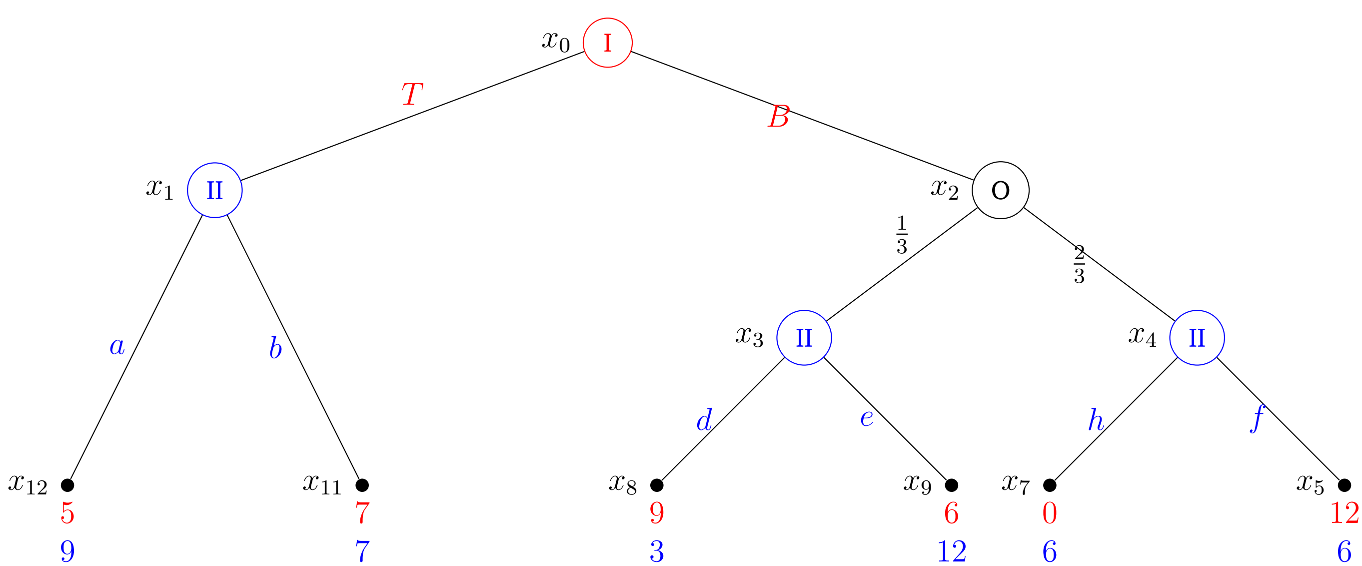
נמצא את התשובה הטובה ביותר של שחקן II לכל אסטרטגיה של שחקן I :

$I \backslash II$	l	r
L/K	$0,0$	$0,0$
M/K	$2,1$	$6,2$
R/K	$4,0$	$3,0$
L/N	$0,0$	$0,0$
M/N	$7,8$	$6,2$
R/N	$4,0$	$3,0$

שיווי משקל נאש:

$$s^* = (M/N, l)\ , \qquad s^* = (M/K, r)\ .$$

ב)



קבוצות ידיעה של שחקן I:

$$x_0 : (T, B)\ .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I = (T, B) \ .$$

קבוצות ידיעה של שחקן II:

$$x_1 : (a, b) \ , \qquad x_3 : (d, e) \ , \qquad x_4 : (h, f) \ .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן II:

$$S_{II} = (a/d/h \ , \ a/d/f \ , \ a/e/h \ , \ a/e/f \ , \ b/d/h \ , \ b/d/f \ , \ b/e/h \ , \ b/e/f) \ .$$

$I \backslash II$	$a/d/h$	$a/d/f$	$a/e/h$	$a/e/f$
T	$5, 9$	$5, 9$	$5, 9$	$5, 9$
B	$\frac{1}{3}(9,3) + \frac{2}{3}(0,6)$	$\frac{1}{3}(9,3) + \frac{2}{3}(12,6)$	$\frac{1}{3}(6,12) + \frac{2}{3}(0,6)$	$\frac{1}{3}(6,12) + \frac{2}{3}(12,6)$

$I \backslash II$	$b/d/h$	$b/d/f$	$b/e/h$	$b/e/f$
T	$7, 7$	$7, 7$	$7, 7$	$7, 7$
B	$\frac{1}{3}(9,3) + \frac{2}{3}(0,6)$	$\frac{1}{3}(9,3) + \frac{2}{3}(12,6)$	$\frac{1}{3}(6,12) + \frac{2}{3}(0,6)$	$\frac{1}{3}(6,12) + \frac{2}{3}(12,6)$

$I \backslash II$	$a/d/h$	$a/d/f$	$a/e/h$	$a/e/f$	$b/d/h$	$b/d/f$	$b/e/h$	$b/e/f$
T	$5, 9$	$5, 9$	$5, 9$	$5, 9$	$7, 7$	$7, 7$	$7, 7$	$7, 7$
B	$3, 5$	$11, 5$	$2, 8$	$10, 8$	$3, 5$	$11, 5$	$2, 8$	$10, 8$

נמצא את התשובה הטובה ביותר של שחקן I לכל אסטרטגיה של שחקן II :

$I \backslash II$	$a/d/h$	$a/d/f$	$a/e/h$	$a/e/f$	$b/d/h$	$b/d/f$	$b/e/h$	$b/e/f$
T	$5, 9$	$5, 9$	$5, 9$	$5, 9$	$7, 7$	$7, 7$	$7, 7$	$7, 7$
B	$3, 5$	$11, 5$	$2, 8$	$10, 8$	$3, 5$	$11, 5$	$2, 8$	$10, 8$

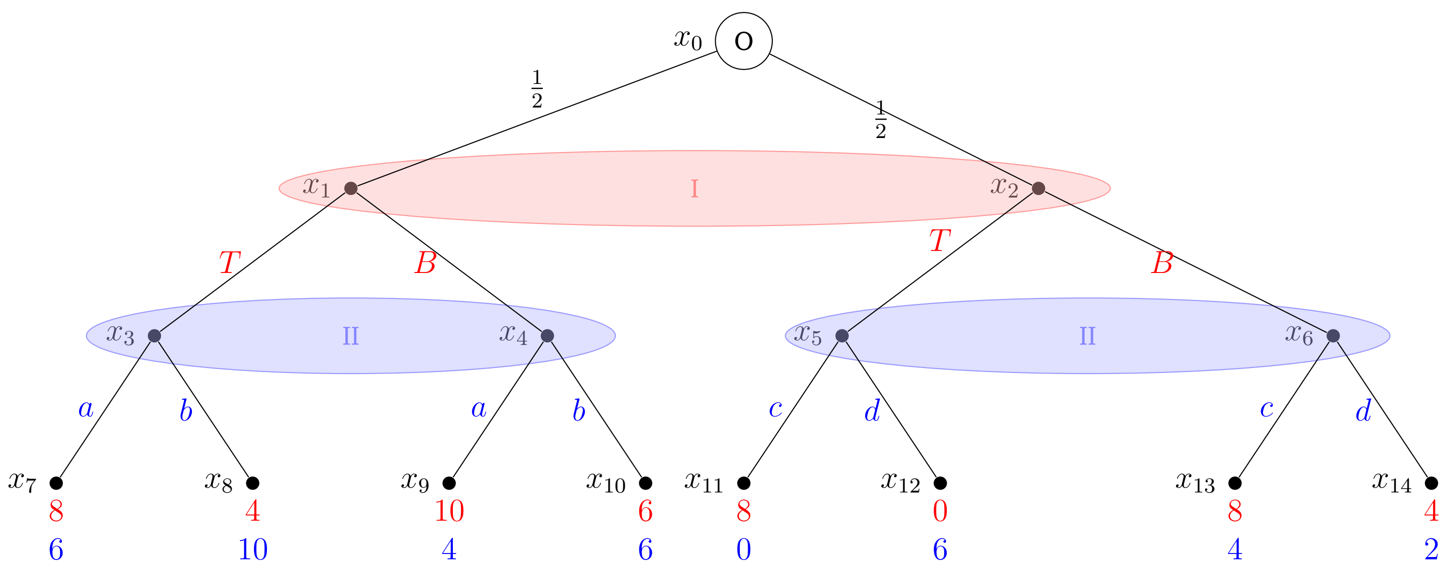
נמצא את התשובה הטובה ביותר של שחקן II לכל אסטרטגיה של שחקן I :

$I \backslash II$	$a/d/h$	$a/d/f$	$a/e/h$	$a/e/f$	$b/d/h$	$b/d/f$	$b/e/h$	$b/e/f$
T	$5, 9$	$5, 9$	$5, 9$	$5, 9$	$7, 7$	$7, 7$	$7, 7$	$7, 7$
B	$3, 5$	$11, 5$	$2, 8$	$10, 8$	$3, 5$	$11, 5$	$2, 8$	$10, 8$

שיווי משקל נאש:

$$s^*=(T,a/d/h)\ ,\qquad s^*=(T,a/e/h)\ ,\qquad s^*=(B,a/e/f)\ ,\qquad s^*=(B,b/e/f)\ .$$

ג)



קבוצות ידיעה של שחקן I:

$$x_1x_2:(T,B)\ .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I=(T,B)\ .$$

קבוצות ידיעה של שחקן II:

$$x_3x_4:(a,b)\ ,\qquad x_5x_6:(c,d)\ .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן II:

$$S_{II}=(a/c\ ,\ a/d\ ,\ b/c\ ,\ b/d)\ .$$

I \ II	a/c	a/d	b/c	b/d
T	$\frac{1}{2}(8,6)+\frac{1}{2}(8,0)$	$\frac{1}{2}(8,6)+\frac{1}{2}(0,6)$	$\frac{1}{2}(4,10)+\frac{1}{2}(8,0)$	$\frac{1}{2}(4,10)+\frac{1}{2}(0,6)$
B	$\frac{1}{2}(10,4)+\frac{1}{2}(8,4)$	$\frac{1}{2}(10,4)+\frac{1}{2}(4,2)$	$\frac{1}{2}(6,6)+\frac{1}{2}(8,4)$	$\frac{1}{2}(6,6)+\frac{1}{2}(4,2)$

I \ II	a/c	a/d	b/c	b/d
T	$(4,3)$	$(4,6)$	$(6,5)$	$(2,8)$
B	$(9,6)$	$(7,3)$	$(7,5)$	$(5,4)$

נמצא את התשובה הטובה ביותר של שחקן I לכל אסטרטגיה של שחקן II :

$I \backslash II$	a/c	a/d	b/c	b/d
T	$(4,3)$	$(4,6)$	$(6,5)$	$(2,8)$
B	$(9,6)$	$(9,3)$	$(9,5)$	$(5,4)$

נמצא את התשובה הטובה ביותר של שחקן II לכל אסטרטגיה של שחקן I :

$I \backslash II$	a/c	a/d	b/c	b/d
T	$(4,3)$	$(4,6)$	$(6,5)$	$(2,8)$
B	$(9,6)$	$(9,3)$	$(9,5)$	$(5,4)$

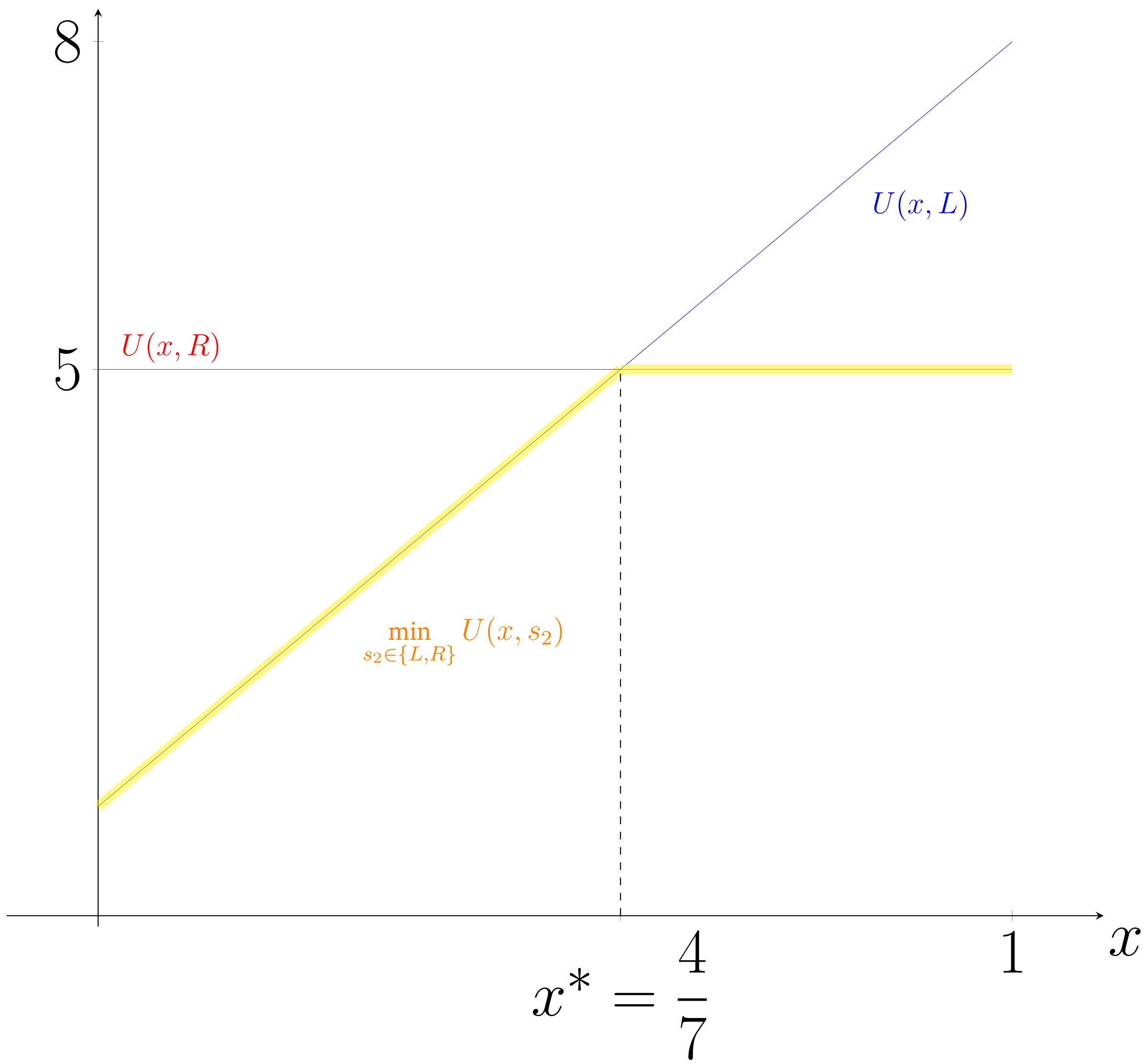
שיווי משקל נאש:

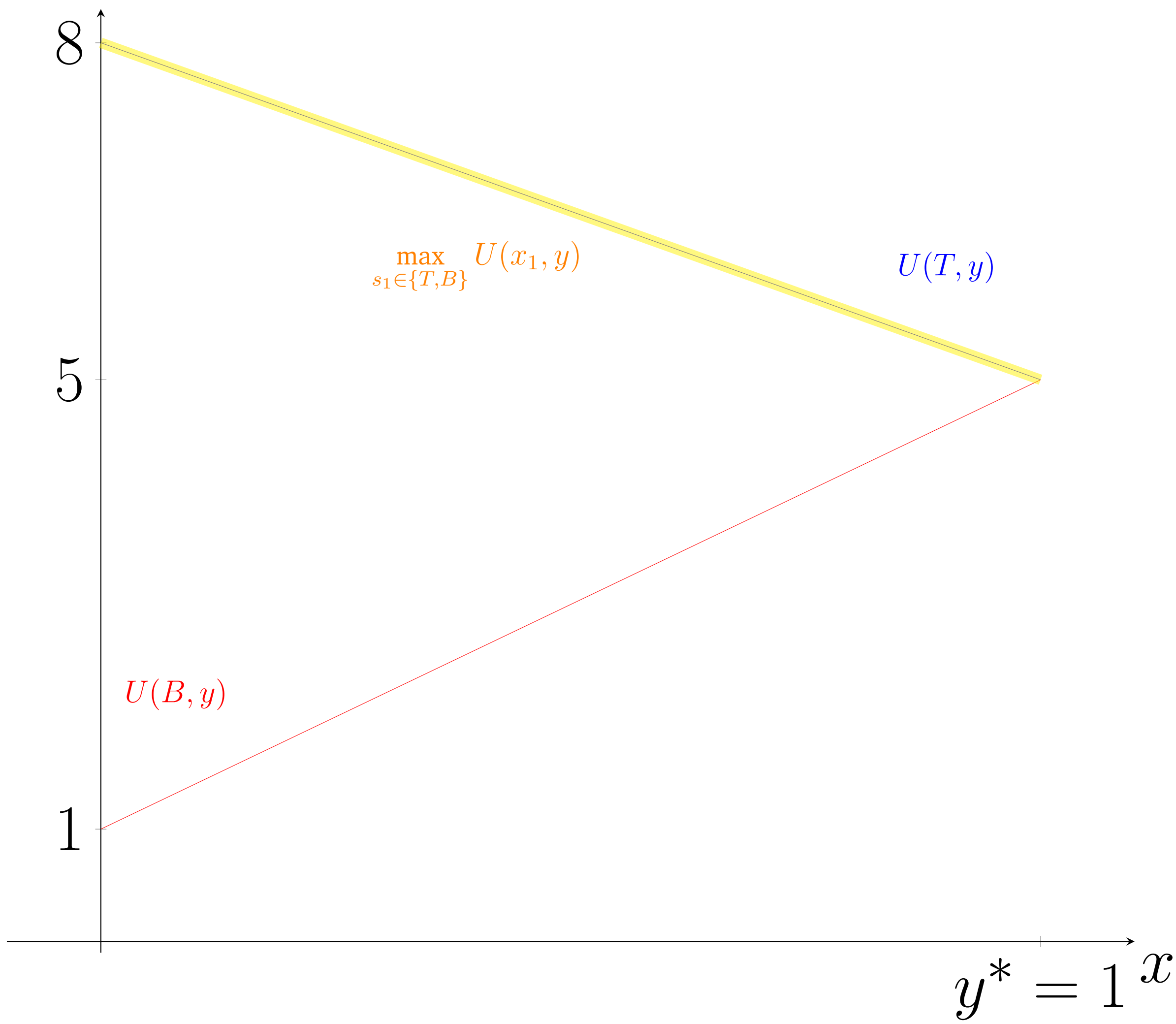
$$s^* = (B, a/c) \ .$$

שאלה 10

א)

$I \backslash II$	L	R	
T	5	8	$U(T,y) = -3y+8$
B	5	1	$U(B,y) = 4y+1$
	$U(x,L) = 5$	$U(x,R) = 7x+1$	


8
5
$U(x, L)$
$U(x, R)$
$\min_{s_2 \in \{L,R\}} U(x, s_2)$
x
1
$x^* = \frac{4}{7}$



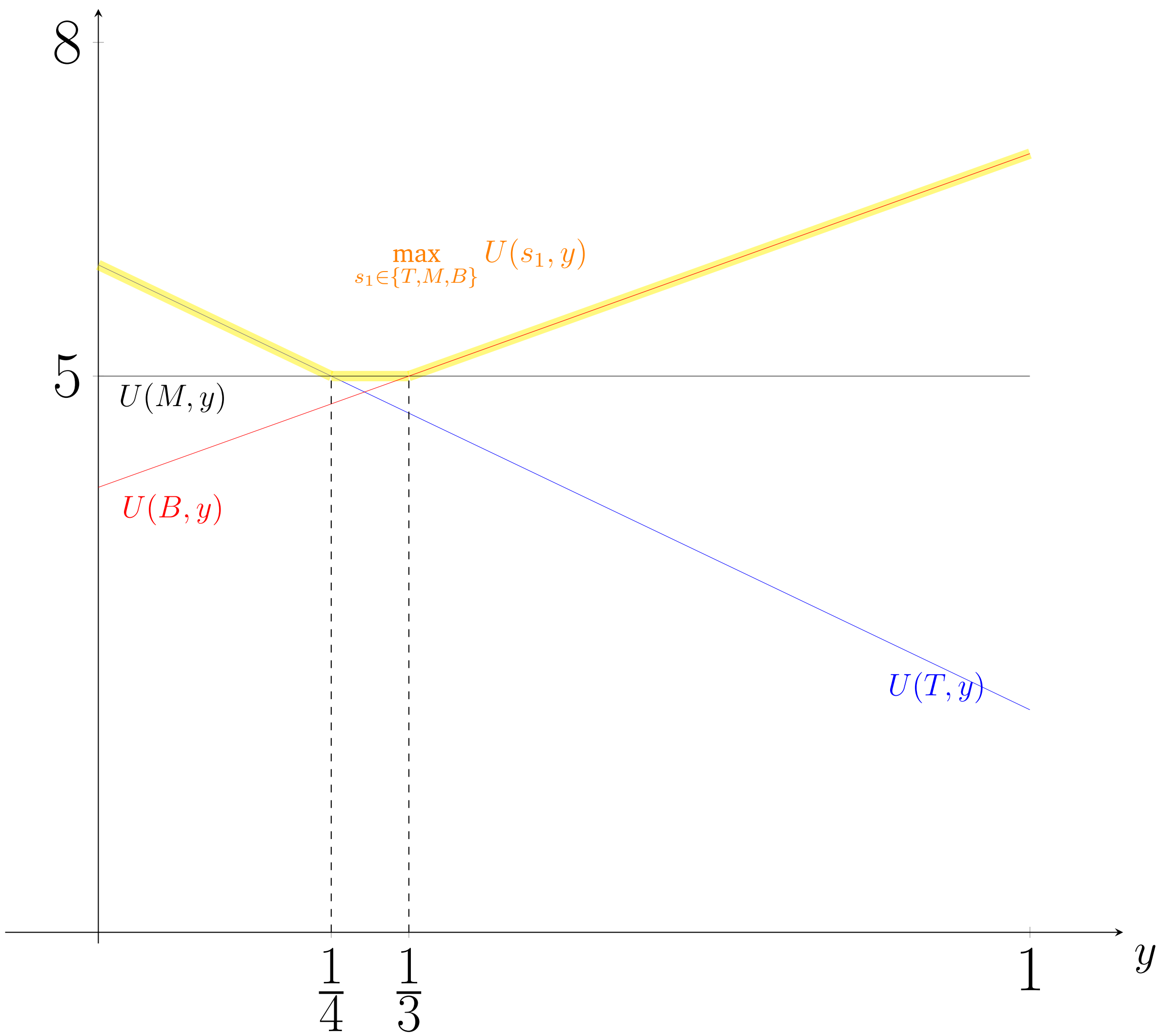
ערך של המשחק: $\mathrm{v} = 5$.

אסטרטגיה אופטימלית לשחקן I: $\{x^*(T), (1-x^*)(B) \mid x^* \in [\frac{4}{7}, 1]\}$.

אסטרטגיה אופטימלית לשחקן II: L.

ב)

$I \backslash II$	L	R	
T	2	6	$U(T,y) = 6 - 4y$
M	5	5	$U(M,y) = 5$
B	7	4	$U(B,y) = 3y + 4$
	$U(x,L) = 2x_1 + 5x_2 + 7x_3$	$U(x,R) = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3$	



הקבוצת אסטרטגיות אופטימליות של שחקן II: $\{y^*(L),(1-y^*)(B)\,|\,y^*\in[\frac{1}{4},\frac{1}{3}]\}$.

אם s_1^* אסטרטגיה אופטימלית לשלחקן I אז $U(s_1^*,y)\geq 5\,\forall y\in[0,1]$.

לפי הגרף, $U\left(T,y\right)<5$ לכל $y\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$ ו- $U\left(B,y\right)<5$ לכל $y\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$. לכן בהכרח s^* שיווי משקל אם ההסתברות של T ו- B היא אפס.

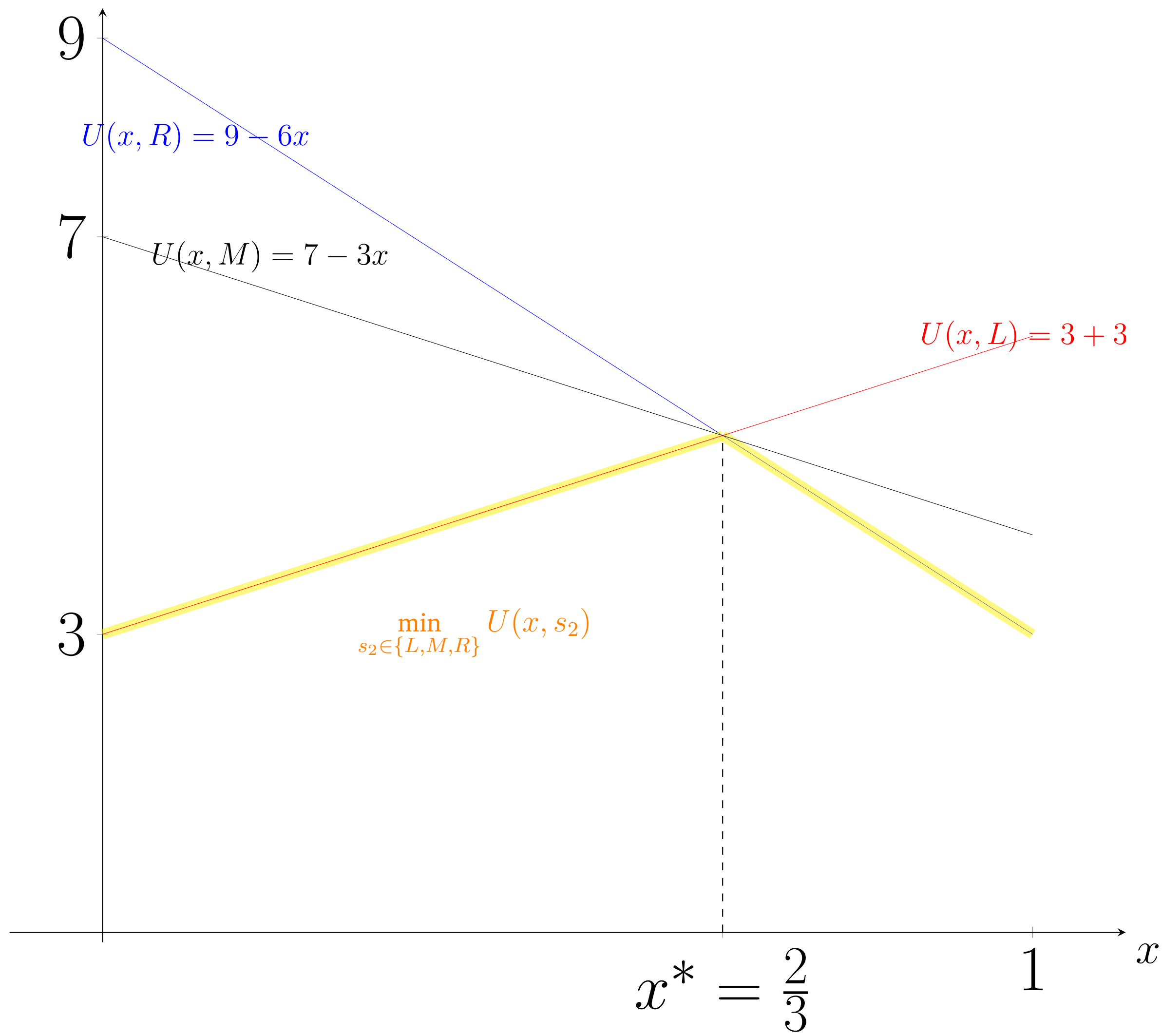
ערך של המשחק: $\mathrm{v}=5$.

אסטרטגיה אופטימלית לשחקן I: $s_1^*=M$.

אסטרטגיה אופטימלית לשחקן II: $\{y^*(L),(1-y^*)(R)\,|\,y^*\in[\frac{1}{4},\frac{1}{3}]\}$.

ג)

II \ I	L	M	R	
T	6	4	3	$3+(3y_1+y_2)$
B	3	7	9	$9-(6y_1+2y_2)$
	$3+3x$	$7-3x$	$9-6x$	



האסטרטגיה אופטימליות של שחקן I: $[\frac{2}{3}(T),\frac{1}{3}(B)]$

ערך של המשחק: $v=5$.

נשאר למצוא האסטרטגיה האופטימלית של שחקן II.

$$\max\{3+(3y_1+y_2),9-(3y_1+y_2)\} \quad\Leftrightarrow\quad 3y_1+y_2=2 \quad\Leftrightarrow\quad y_2=2-3y_1\ .$$

בנוסף,

$$0\leq y_2\leq 1 \quad\Rightarrow\quad 0\leq 2-3y_1\leq 1 \quad\Rightarrow\quad -2\leq -3y_1\leq -1 \quad\Rightarrow\quad 1\leq 3y_1\leq 2 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{3}\leq y_1\leq\frac{2}{3}\ .$$

לכן הקבוצת אסטרטגיות אופטימליות של שחקן II: $\left\{y_1(L), y_2(M), (1-y_1-y_2)(R)] \,\middle|\, \frac{1}{3} \le y_1 \le \frac{2}{3}, y_2 = 2-3y_1\right\}$.

שאלה 11

א) השיווי משקל היחיד של המשחק הוא (L, B) באסטרטגיות טהורות. איו שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

ב) שיווי משקל:

$$s_1^* = T \ , \qquad s_2^* = \{y(L), (1-y)(R) \,|\, y \in [0,1]\} \ .$$

ג) נשים לב כי M נשלטת חלש על ידי L לכן בשיווי משקל שחקן II משחק אסטרטגיה L בהסתברות 0.

לפי עקרון אדישות, בשיווי משקל שחקן I אדיש בין T לבין B, ושחקן II אדיש בין M לבין R.

$$u_1(T, y^*) = u_1(B, y^*) \quad \Rightarrow \quad 2(1-y^*) = y^* - (1-y^*) \quad \Rightarrow \quad 2-2y^* = y^* - 1 + y^* \quad \Rightarrow \quad 4y^* = 3 \quad \Rightarrow \quad y^* = \frac{3}{4} \ .$$

$$u_2(x^*, M) = u_2(x^*, R) \quad \Rightarrow \quad 2x^* = 3(1-x^*) \quad \Rightarrow \quad 5x^* = 3 \quad \Rightarrow \quad x^* = \frac{3}{5} \ .$$

לכן השיווי משקל הוא

$$[0.6(T), 0.4(B)] \ , \ [0.75(M), 0.25(R)] \ .$$

שאלה 12 יהי $s = (s_1^*, s_2^*)$ שיווי משקל של המשחק. יהי $\underline{\mathrm{v}}_1$ נמקסמין של שחקן 1 ותהי σ_1 האסטרטגיה המקסמין שלו. כמו כן יהי $\underline{\mathrm{v}}_2$ נמקסמין של שחקן 2 ותהי σ_2 האסטרטגיה המקסמין שלו. מכיוון ש- s_1^* אסטרטגיה שיווי משקל של שחקן 1 אז היא תשובה טובה ביותר ל- s_2^* לכן

$$u_1(s_1^*, s_2^*) \ge u_1(\sigma_1, s_2^*)$$

בנוסף כיוון ש- σ_1 אסטרטגיה מקסמין אז בהכרח

$$u_1(s_1^*, s_2^*) \ge u_1(\sigma_1, s_2^*) \ge \underline{\mathrm{v}}_1 \ .$$

באותה מידה עבור שחקן II נקבל

$$u_2(s_1^*, s_2^*) \ge u_2(s_2^*, \sigma_2) \ge \underline{\mathrm{v}}_2 \ .$$

בגלל שח