

עבודה 4: ערכים עצמיים, מרחבים עצמיים, לכסון #2.

שאלה 1 יהי $T : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ אופרטור שמוגדר ע"י

$$T(a + bx) = a + b + 2ax.$$

האם T לכסין? אם כן מצאו בסיס U של $\mathbb{R}_1[x]$ כך ש- $[T]_U$ מטריצה אלכסונית.

שאלה 2 יהי $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ אופרטור שמוגדר ע"י

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a & 2b \\ a+c & 4d \end{pmatrix}.$$

מצאו בסיס U של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ כך ש- $[T]_U$ מטריצה אלכסונית.

שאלה 3 מצאו את הערכים עצמיים והמרחבים עצמיים של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ ותנו את הריבוי אלגברי

והריבוי גאומטרי שלהם.

שאלה 4 תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. נגדיר

$$A_1 = A - \alpha I$$

כאשר $\alpha \in \mathbb{F}$ סקלר. הוכיחו כי λ ערך עצמי של A אם ורק אם $\lambda - \alpha$ ערך עצמי של A_1 .

שאלה 5 תהי I המטריצה היחידה של $\mathbb{R}^{n \times n}$. הוכיחו שקיים ערך עצמי אחד של I ומצאו את כל הוקטורים עצמיים של I .

שאלה 6 הוכיחו או הפריכו: תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. אם A לכסינה ו- B לכסינה אז $A + B$ לכסינה.

שאלה 7 תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) אם הסכום של האיברים בכל שורה שווה ל- $s \in \mathbb{R}$ אז s הוא ערך עצמי של A .

(ב) אם הסכום של האיברים בכל עמודה שווה ל- $s \in \mathbb{R}$ אז s הוא ערך עצמי של A .

שאלה 8 תהיינה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ לכסינה ו- $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ לכסינה. עבור כל אחד של הטענות הבאות, הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית.

(א) A^k לכסינה $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$.

(ב) $A + I$ לכסינה.

(ג) αA לכסינה, $\alpha \in \mathbb{F}$ סקלר.

(ד) $A \cdot B$ לכסינה.

(ה) $p(A)$ לכסינה, כאשר $p(x)$ פולינום.

(ו) $U^{-1}AU$ לכסינה, $U \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כל מטריצה הפיכה.

(ז) $A + \alpha I$ הפיכה, $\alpha \in \mathbb{F}$ סקלר ו- I המטריצה היחידה של $\mathbb{F}^{n \times n}$.

שאלה 9 הוכיחו: אם A לכסינה והערכים עצמיים היחידים של A הם $\lambda = 1$ ו $\lambda = -1$, אז $A^{-1} = A$.

שאלה 10 תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. הוכיחו: אם A לכסינה ו- $\lambda \geq 0$ לכל ערך עצמי λ , אז קיימת $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך ש-
 $A = B^2$.

שאלה 11 תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. נניח כי קיים $k \geq 1 \in \mathbb{N}$ כך ש- $A^k = 0$. מצאו את כל האפשרויות של A כך ש- A לכסינה.
 רמז: לכל D אלכסונית ו- P הפיכה: $(PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$.

שאלה 12 תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מצורה

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

כאשר B ו- C מטריצות ריבועיות.

(א) הוכיחו כי $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)p_C(\lambda)$.

(ב) אם b וקטור עצמי של B ו- c וקטור עצמי של C . הוכיחו כי $\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$ וקטורים עצמיים של A .

שאלה 13 תהי $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ לכסינה. נניח כי קיים $k \geq 1 \in \mathbb{N}$ כך ש- $A^k = I$ כאשר I המטריצה היחידה של $\mathbb{R}^{n \times n}$. הוכיחו:

(א) $A^2 = I$

(ב) אם k אי-זוגי, אז $A = I$.

רמז: אם $k \geq 1$ מספר טבעי, ה- k השורשים של אחד (כלומר הפתרונות של $z^k = 1$) הם $z = e^{2\pi mi/k}$ $m = 0, 1, 2, \dots, k-1$.

שאלה 14 נניח ש- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. נניח ש- $\lambda \in \mathbb{C}$ ערך עצמי של A ששייך לוקטור עצמי u . הוכיחו כי $\bar{\lambda}$ ערך עצמי של A ששייך לוקטור עצמי \bar{u} .

תשובות

שאלה 1 נבחר בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_1[x]$:

$$E = \{1, x\}.$$

מטריצה המייצגת הסטנדרטי של T :

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

הערכים עצמיים:

$$\lambda_1 = 2 \text{ מריבוי אלגברי 1.}$$

$$\lambda_2 = -1 \text{ מריבוי אלגברי 1.}$$

הוקטורי עצמיים הם:

$$[u_1]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_E = 1 + x, \quad [u_2]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_E = -1 + 2x.$$

קיימים 2 וקטורים עצמיים בת"ל לכן T לכסין. נבנה את הבסיס

$$U = \{u_1 = 1 + x, \quad u_2 = -1 + 2x\}.$$

המטריצה המייצגת $[T]_U$ לפי הבסיס U אלכסונית:

$$[T]_U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

שאלה 2

נבחר בסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_1[x]$:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

מטריצה המייצגת הסטנדרטי של T :

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

הערכים עצמיים:

$$\lambda_1 = 5 \text{ מריבוי אלגברי 1.}$$

$$\lambda_2 = 4 \text{ מריבוי אלגברי 1.}$$

$$\lambda_3 = 2 \text{ מריבוי אלגברי 1.}$$

$$\lambda_4 = 1 \text{ מריבוי אלגברי 1.}$$

הוקטורי עצמיים הם:

$$\begin{aligned} [u_1]_E &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ [u_2]_E &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ [u_3]_E &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ [u_4]_E &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

קיימים 4 וקטורים עצמיים בת"ל לכן T לכסין. נבנה את הבסיס

$$U = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

המטריצה המייצגת $[T]_U$ לפי הבסיס U אלכסונית:

$$[T]_U = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

שאלה 3 ערכים עצמיים:

$\lambda_1 = i$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda_2 = 1$ מריבוי אלגברי 1.

המרחב עצמי השייך של $\lambda = i$ הוא

$$V_i = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(V_i) = 1.$$

המרחב עצמי של $\lambda = 1$:

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(V_1) = 1.$$

שאלה 4 נניח ש λ ע"ע של A ששייך לו"ע u :

$$Au = \lambda u.$$

אז

$$(A - \alpha I)u = (\lambda - \alpha)u .$$

ז"א $\lambda - \alpha$ ערך עצמי של $A - \alpha I$.

נניח ש $\lambda - \alpha$ ע"ע של $A - \alpha I$ ששייך לו"ע w :

$$(A - \alpha I)w = (\lambda - \alpha)w .$$

ז"א

$$Aw - \alpha w = \lambda w - \alpha w . \quad (1*)$$

$w \neq \bar{0}$ בי הוא וקטור עצמי, לכן מ $(1*)$ נובע כי

$$Aw = \lambda w ,$$

ז"א λ ערך עצמי של A .

שאלה 5 פולינום אופייני של I :

$$p_I(\lambda) = |\lambda I - I| = |(\lambda - 1) \cdot I| = (\lambda - 1)^n |I| = (\lambda - 1)^n .$$

השורש היחיד הוא $\lambda = 1$ מריבוי אלגברי n לכן ל- I יש ערך עצמי 1.

לכל וקטור ב- \mathbb{R}^n u אשר לא שווה לוקטור האפס:

$$I \cdot u = 1 \cdot u$$

כלומר כל וקטור ב- \mathbb{R}^n חוץ מהוקטור האפס הוא וקטור עצמי של I .

שאלה 6 טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

A משולשית לכן הערכים עצמיים שווים לאיברי האלכסון: $\lambda = 2$ ו- $\lambda = -1$. הערכים עצמיים ממשיים ושונים לכן A לכסינה מעל \mathbb{R} . B אלכסונית.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הפולינום אופייני של $A + B$ הוא. $p_{A+B}(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ לכן ל- $A + B$ יש ערך עצמי אחד: $\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 2. המרחב עצמי הוא:

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim V_1 = 1 < 2$, כלומר הריבוי גיאומרטי פחות מהריבוי אלגברי, לכן $A + B$ לא לכסינה.

שאלה 7

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{נרשום}$$

$$\text{א) נגדיר } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \text{ אז}$$

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nn} \end{pmatrix}$$

נתון כי סכום האיברים בכל שורה שווה ל- s , כלומר

$$a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} = s, \quad a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n} = s, \quad \dots \quad a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nn} = s.$$

לכן

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ \vdots \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ז"א קיבלנו כי $Au = su$. לכן u וקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי s .

$$\text{ב) נגדיר } w = (1 \ 1 \ \dots \ 1) \in \mathbb{F}^{1 \times n} \text{ אז}$$

$$w \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1} \\ a_{12} + a_{22} + \dots + a_{n2} \\ \vdots \\ a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{nn} \end{pmatrix}$$

נתון כי סכום האיברים בכל עמודה שווה ל- s , כלומר

$$a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1} = s, \quad a_{12} + a_{22} + \dots + a_{n2} = s, \quad \dots \quad a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{nn} = s.$$

לכן

$$w \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1} \\ a_{12} + a_{22} + \dots + a_{n2} \\ \vdots \\ a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{nn} \end{pmatrix} = (s \ s \ \dots \ s) = s(1 \ 1 \ \dots \ 1).$$

ז"א קיבלנו כי

$$wA = sw.$$

נשחלף:

$$(wA)^t = s \cdot w^t \Rightarrow A^t \cdot w^t = s \cdot w^t.$$

$$w^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ אם } s \text{ ערך עצמי של } A \text{ אז } s \text{ גם ערך קיבלנו ש-} s \text{ ערך עצמי של } A^t \text{ ששייך לוקטור עצמי}$$

עצמי של A , כנדרש.

שאלה 9 A לכסינה אז קיימת P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש-

$$A = PDP^{-1}$$

ובפרט האיברים באלכסון של D הם הערכים עצמיים של A ועמודות P הן הוקטורים עצמיים של A . הערכים עצמיים היחידים של A הם 1 ו-1, לכן

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

כאשר $\lambda_i = \pm 1$. נקח את ההופכית של A :

$$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}. \quad (*)$$

ההופכית של מטריצה אלכסונית היא פשוט

$$D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right).$$

$$\frac{1}{\lambda_i} = \lambda_i \text{ לכן } \lambda_i = \pm 1 \text{ ולכן}$$

$$D^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = D.$$

נציב ב- (*) ונקבל

$$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

שאלה 10 A לכסינה, לכן קיימת D אלכסונית ו- P הפיכה כך ש-

$$A = PDP^{-1} \quad (1*)$$

בפרט $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ כאשר $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ הערכים עצמיים של A . $\lambda_i \geq 0$ לכל $1 \leq i \leq n$ לכן השורש $\sqrt{\lambda_i}$ קיים לכל $1 \leq i \leq n$, לכן המטריצה $D' = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ קיימת, ו-

$$D'^2 = D. \quad (2*)$$

נגדיר

$$B = PD'P^{-1}$$

כאשר P אותה מטריצה שמופיע ב- (1*). P הפיכה ו- D' אלכסונית, לכן לפי הנוסחה $(PD'P^{-1})^k = PD'^kP^{-1}$,

$$B^2 = PD'^2P^{-1}$$

נציב $D'^2 = D$ ונקבל

$$B^2 = PDP^{-1} = A.$$

לכן מצאנו $B = PD'P^{-1}$ כך ש- $B^2 = A$.

שאלה 14

$$A \cdot u = \lambda u$$

נקח את הצמוד ונקבל

$$\bar{A} \cdot \bar{u} = \bar{\lambda} \bar{u}.$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ אז $\bar{A} = A$ ונקבל

$$A \cdot \bar{u} = \bar{\lambda} \bar{u}.$$

מש"ל.