דף סיכום של סדרות וטורים

סדרות

סדרה היא רשימה מסודרת של מספרים ממשיים: $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$.

סדרה קבועה:	$a_n = 1$.	$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, \ldots$
	$a_n = n$.	$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, \ldots$
הסדרה ההרמונית:	$a_n = \frac{1}{n}$.	$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \ldots$
	$a_n = (-1)^n$.	$a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, \ldots$
	$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.	$a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{5}, a_3 = -\frac{1}{10}, \ldots$

* L הוא הגבול של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם לכל $0 < \epsilon$ $\exists$ $0 < N$ כך שלכל $n > N$, מתקיים $|a_n - L| < \epsilon$.
סימון: $L = \lim_{n\to\infty} a_n$.

אם הגבול של (a_n) קיים אז אומרים כי הסדרה **מתכנסת**.
אם הגבול של (a_n) לא קיים אז אומרים כי הסדרה **מתבדרת**.

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$	$(-1)^n$ מתבדרת	$(-1)^n n$ מתבדרת

יחידות של גבול: אם לסדרה קיים גבול אז הוא יחיד.

אריתמטיקה / חשבון של גבולות: נתון סדרות a_n, b_n אשר גבולותן $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ ונתון $c \in \mathbb{R}$.

1. $\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} (a_n) = c \cdot A$
2. $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = A \pm B$.
3. $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = A \cdot B$
4. אם $B \neq 0$ (ולכן $b_n \neq 0$ עבור n מספיק גדול) אז $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$.

כלל הסנדוויץ' (squeeze theorem): תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות כך ש $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$.
אם קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n \leq b_n \leq c_n$. אז $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

סדרות חסומות:

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **חסומה מלמעלה** אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל n מתקיים $a_n \leq M$.
M תקרא **חסם עליון של הסדרה**.

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **חסומה מלמטה** אם קיים $m \in \mathbb{R}$ כך שלכל n מתקיים $a_n \geq m$.
m תקרא **חסם תחתון של הסדרה**.

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **חסומה** אם היא חסומה מלמעלה וגם מלמטה. כלומר אם קיים $K > 0$ כך שלכל n, $|a_n| \leq K$.
כל מספר K כזה נקרא **חסם מוחלט**.

מונוטוניות:

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **מונוטונית עולה** אם קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $a_{n+1} \geq a_n$.

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **מונוטונית עולה ממש** אם קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $a_{n+1} > a_n$.

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **מונוטונית יורדת** אם קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $a_{n+1} \leq a_n$.

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **מונוטונית יורדת ממש** אם קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $a_{n+1} < a_n$.

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **מונוטונית** אם היא מונוטונית עולה או יורדת.

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **מונוטונית ממש** אם היא מונוטונית עולה ממש או יורדת ממש.

לכל $n \geq 1$: $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

לכל $n \geq 3$: $2^n \leq n! \leq n^n$.

גבול של סדרה שווה לגבול של הפונקציה:

תהי $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה. אם $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ כאשר $a_n = f(n)$ סדרה ו- n שלם.

מונוטוניות של סדרה והפוקנציה:

תהי $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה. אם $f(x)$ מונוטונית (עולה או יורדת) אז גם $a_n = f(n)$ מונוטונית (עולה או יורדת בהתאמה).

אם סדרה מתכנסת אז היא חסומה.

אם סדרה חסומה ומונוטונית אז היא מתכנסת.

סדרה שואפת ל- 0 **אם ורק אם הערך מוחלט שואף ל-** 0: $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

סדרות שימושיות:

סדרה	עולה	יורדת	מונוטונית	חסומה	מתכנסת למספר סופי L
$a_n = 1$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\Leftarrow \checkmark$
$a_n = n$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	$\times$	$\Leftarrow \times$
$a_n = \frac{1}{n}$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\Leftarrow \checkmark$
$a_n = (-1)^n$	$\times$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\Leftarrow \times$
$a_n = \frac{(-1)^n}{n^1+1}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\Leftarrow \times$
$a_n = 1 - \frac{1}{n}$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\Leftarrow \checkmark$

סדרה חשבונית: $a_n = a_1 + (n-1)d$ כאשר a_1 איבר הראשון ו- d הפרש הסדרה.

סכום של סדרה חשבונית: $\sum_{n=1}^{N} a_n = \frac{1}{2}(a_1 + a_N) = \frac{1}{2}(2a_1 + (N-1)d)$.

סדרה הנדסית: $a_n = a_1 q^{n-1}$ כאשר a_1 איבר הראשון ו- q מנת הסדרה.

סכום של סדרה חנדסית: $\sum_{n=1}^{N} a_n = \frac{a_1(1-q^N)}{1-q}$.

הסכום אינסופי של סדרה הנדסית:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \lim_{N\to\infty} \frac{a_1(1-q^N)}{1-q} = \begin{cases} \text{מתבדר} & |q| > 1 \\ \frac{a_1}{1-q} & |q| < 1 \end{cases}.$$

טורים חיוביים

תנאי הכרחי להתכנסות טור: אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס, אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

תנאי מספיק להתבדרות טור: אם $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ אז הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

סדרה שואפת ל- 0 אם ורק אם הערך מוחלט שואף ל- 0 : $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

אריתמטיקה / חשבון של טורים:

יהי $c \neq 0 \in \mathbb{R}$. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ מתכנס.

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אז $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ מתבדר.

$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים, אז $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ מתכנס.

מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

אם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס (ואומרים כי הטור מתכנס בהחלט).

מבחן האינטגרל להתכנסות של טורים חיוביים:

אם $f(x)$ חיובית ומונוטונית יורדת לכל $x \geq 1$.

אם $\int_1^{\infty} dx\, f(x)$ מתכנס אז $S = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ מתכנס ומתקיים $\int_1^{\infty} dx\, f(x) \leq S \leq \int_1^{\infty} dx\, f(x) + f(1)$.

אם $\int_1^{\infty} dx\, f(x)$ מתבדר אז $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ מתבדר.

התכנסות של טור ההרמוניה הכללי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^k} \begin{cases} k > 1 & \text{מתכנס} \\ k \leq 1 & \text{מתבדר} \end{cases}$$

מבחן השוואה:

יהיו a_n, b_n סדרות חיוביות כך ש- $a_n \leq b_n$ לכל $n \geq k$.

אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

מבחן השוואה הגבולי:

יהיו a_n, b_n סדרות חיוביות כך ש- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0$ עבור L סופי.

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס,

ו- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

מבחן דלמבר: נתון הטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. וקיים הגבול $q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

אם $q < 1$ הטור מתסנס. אם $q > 1$ הטור מתבדר. אם $q = 1$ המבחן לא נותן תשובה.

מבחן קושי: נתון הטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. וקיים הגבול $q = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n}$.

אם $q < 1$ הטור מתסנס. אם $q > 1$ הטור מתבדר. אם $q = 1$ המבחן לא נותן תשובה.

טור כללי

התכנסות של טורים כלליים:

אם $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ מתכנס אז $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס, ואומרים שהטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ **מתכנס בהחלט** (absolutely convergent).

אם $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ מתבדר אבל $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$ יש להמשיך לחקור את הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ ע"י מבחן לייבניץ (Leibniz).

אם $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ מתבדר אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, אומרים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **מתכנס בתנאי** (conditionally convergent).

מבחן לייבניץ (Leibniz): נתון טור מחליף סימן $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$. אם הסדרה מקיימת את התנאים הבאים:
(1) $a_n>0$, (2) $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת, (3) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, אז הטור מתכנס.

טור חזקות

טור חזקות הוא טור מצורה: $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$.

רדיוס התכנסות: לכל טור חזקות $\exists\ R\geq 0$ עבורו הטור מתכנס לכל $-R<x<R$
ומתבדר לכל $x>R$ ו- $x<-R$.

נוסחת דלמבר לרדיוס התכנסות: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

נוסחת קושי לרדיוס התכנסות: $R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)^{1/n}$.