שיעור 2
מכונות טיורינג מרובת סרטים

2.1 מודלים שקולים חישובית

הגדרה 2.1 מודל חישובי

מודל חישובי הוא אוסף של מכונות טיורינג שעבורם מוגדרים המושגים של הכרעה וקבלה של שפות.

הגדרה 2.2 מודלים שקולים חישובית

יהיו A ו- B מודלים חישוביים. אומרים כי A ו- B שקולים אם לכל שפה L התנאים הבאים מתקיימים:

1) קיימת מ"ט במודל A שמכריעה את L אם"ם קיימת מ"ט במודל B שמכריעה את L.

2) קיימת מ"ט במודל A שמקבלת את L אם"ם קיימת מ"ט במודל B שמקבלת את L.

דוגמה 2.1

נסמן ב-T את מודל מכונת הטיורינג הבסיסי.
במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת בסרט.
במודל זה, הסרט הוא אינסופי לשני הכיוונים. ב תחילת החישוב הראש נמצא בתחילת הקלט.

נסמן ב-O את מודל מכונת הטיורינג עם סרט ימינה בלבד.
במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן לה ישאר במקום, באותה המשבצת בסרט.
במודל זה, הסרט הוא אינסופי לכיוון אחד בלבד - ימינה. בתחילת החישוב, הקלט ממוקם בקצה השמאלי של הסרט והראש נמצאת בתחילת הקלט. החישוב מתנהל כמו במכונה במודל, T למעט כאשר הראש נמצא במשבצת השמאלית ביותר בסרט וצריך לזוז ש מאלה– במקרה כזה הראש נשאר במקום ולא זז.

הוכיחו כי המודל T והמודל O שקולים חישובית.

פתרון:
יש להוכיח ש:

- לכל מ"ט במודל O קיימת מ"ט שקולה במודל T.
- לכל מ"ט במודל T קיימת מ"ט שקולה במודל O.

<u>כיוון ראשון</u>

נוכיח כי לכל מ"ט במודל O קיימת מ"ט שקולה במודל T. כלומר:

נתונה $M^O = \left(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O\right)$ במודל O.

נבנה , $M^T = \left(Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T\right)$ שקולה במודל T.

נעבוד רק עם צד ימין של הסרט האינסופי של M^T ואז M^T תהיה שקולה ל- M^O.

רכיבי המ"ט M^T זהים לאלו של המ"ט M^O, מלבד מהתכונה שהראש של M^O לא זז מעבר לקצה השמאולי של הקלט.

לכן כדי ש- M^T תהיה שקולה ל- M^O נוסיף מעברים לפונקצית המעברים של M^T כדי שהראש של M^T לא זז מעבר לקצה השמאולי של הקלט.

הרעיון הוא לסמן את המשבצת שמשמאול לתחילת הקלט עם סימן מיוחד \$, ואז להוסיף מעברים לפונקצית המעברים של M^T שמבטיחים שאם הראש נמצא למשבצת שמסומנת \$ אז הוא מיד חוזר ו- M^T חוזרת למצב ההתחתי של המ"ט M^O. זה מתבצע על ידי הוספת השורות הבאות לטבלת המעברים של M^T:

מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
q_0^T	σ	$q_\$$	$\circlearrowleft$	L	
$q_\$$	$\sqcup$	q_0^O	\$	R	
q	\$	q	\$	R	$\forall q \in Q^O$

$$Q^T = Q^O \cup \{q_0^T, q_\$\}\ , \qquad \Sigma^T = \Sigma^O\ , \qquad \Gamma^T = \Gamma^O \cup \{\$\}\ , \qquad \mathrm{acc}^T = \mathrm{acc}^O\ , \qquad \mathrm{rej}^T = \mathrm{rej}^O\ .$$

<u>כיוון שני</u>

נוכיח כי לכל מ"ט במודל T קיימת מ"ט שקולה במודל O. כלומר:

נתונה $M^T = \left(Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \mathrm{acc}^T, \mathrm{rej}^T\right)$ במודל T.

נבנה $M^O = \left(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \mathrm{acc}^O, \mathrm{rej}^O\right)$ שקולה במודל O.

הרעיון הוא לסמן קו על הסרט במשבת באמצע הקלט, ואז לקפל את הסרט בקו הזה. באופן הזה נקבל סרט עם קצה שמאולי ואינסופי ימינה. במשבצות של הסרט החדש המקופל יש שני תווים, אחד למעלה (U) ואחד למטה (D), מלבד מנקודת הקיפול שבו יש משבצת אחת שמסומנת \$.

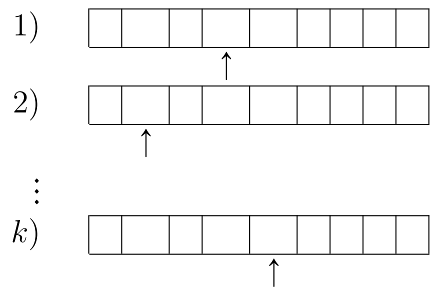
באופן הזה אפשר לסמלץ את המכונה M^T במכונה M^O על ידי הוספת המעברים הבאים לטבלת המעברים של M^T. לכל $\tau, \sigma, \pi \in \Gamma^T$:

תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון	מצב
תזוזה שמאלה: $(q,\sigma) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,L)$	L	π τ	$p.D$	π σ	$q.D$
	R	τ π	$p.U$	σ π	$q.U$
תזוזה שמאלה: $(q,\textvisiblespace) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,L)$	L	$\textvisiblespace$ τ	$p.D$	$\textvisiblespace$	$q.D$
	R	τ $\textvisiblespace$	$p.U$	$\textvisiblespace$	$q.U$
תזוזה ימינה: $(q,\sigma) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,R)$	R	π τ	$p.D$	π σ	$q.D$
	L	τ π	$p.U$	σ π	$q.U$
תזוזה ימינה: $(q,\textvisiblespace) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,R)$	R	$\textvisiblespace$ τ	$p.D$	$\textvisiblespace$	$q.D$
	L	τ $\textvisiblespace$	$p.U$	$\textvisiblespace$	$q.U$
	R	$\circlearrowleft$	$q.U$	$\$$	$q.D$
	R	$\circlearrowleft$	$q.D$	$\$$	$q.U$
אתחול					
$\tau \in \Sigma \cup \{\textvisiblespace\}$ $\sigma \in \Sigma$	R	$\$$	$q.\tau$	τ	q_0^O
	R	$\textvisiblespace$ σ	$q.\tau$	τ	$q.\sigma$
	L	$\textvisiblespace$ $\textvisiblespace$	back	$\textvisiblespace$	$q.\textvisiblespace$
	L	$\circlearrowleft$	back	$\textvisiblespace$ τ	back
	R	$\circlearrowleft$	$q_0^T.D$	$\$$	back
סיום					
			acc^O	הכל	$\mathrm{acc}^T.D$
			acc^O	הכל	$\mathrm{acc}^T.U$
			rej^O	הכל	$\mathrm{rej}^T.D$
			rej^O	הכל	$\mathrm{rej}^T.U$
כל השאר עוברים ל-rej					

$$\Gamma^O \supseteq \left(\Gamma^T \times \Gamma^T\right) \cup \{\$\}\ .$$

2.2 מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה היוריסטית

מכונת טיורינג מרובת סרטים (מטמ"ס) היא הכללה של מ"ט עם סרט יחיד. ההבדל הוא שלמטמ"ס ישנו מספר סופי של סרטים, נניח $k > 1$ סרטים.



- לכל סרט יש ראש שלו.
- בתחילת העבודה הקלט w כתוב בתחילת הסרט הראשון וכל שאר הסרטים ריקים. הראשים בכל סרט מצביעים על התא הראשון בסרט, והמכונה נמצאת במצב התחלתי q_0.
- בכל צעד חישוב, לפי המצב הנוכחי ול- k התווים שמתחת ל- k הראשים, המכונה מחליטה לאיזה מצב לעבור, מה לכתוב מתחת לכל אחד מ-k הראשים ולאן להזיז את הראש בכל אחד מ-k סרטים.
- הראשים של הסרטים יכולים לזוז באופן בלתי-תלוי בהתאם לפונקצית המעברים של המטמ"ס.

2.3 מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה פורמלית

הגדרה 2.3 מכונט טיורינג מרובת סרטים

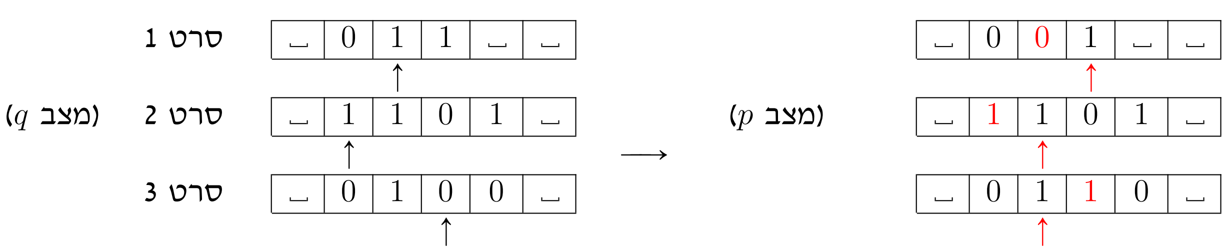
מכונת טיורינג מרובת סרטים היא שביעייה:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר Q, Σ, Γ, q_0, q_{acc},q_{rej} מוגדרים כמו מ"ט עם סרט יחיד (ראו הגדרה 1.2).
ההבדל היחיד בין מ"ט עם סרט יחיד לבין מטב"ס הוא הפונקצית המעברים. עבור מטמ"ס הפונקצית המעברים היא מצורה הבאה:

$$\delta_k : (Q \backslash \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$$

דוגמה 2.2



$$\delta_k\left(q, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \left(p, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}R\\R\\L\end{pmatrix}\right) .$$

2.4 קונפיגורציה של מטמ"ס

הכללה של קונפיגורציה של מ"ט עם סרט יחיד:

$$\begin{pmatrix} u_1 q \ \mathrm{v}_1 \\ u_2 q \ \mathrm{v}_2 \\ \vdots \\ u_k q \ \mathrm{v}_k \end{pmatrix}$$

דוגמה 2.3

בנו מטמ"ס שמכריעה את השפה:

$$L_{w^R} = \left\{ w = \{a,b\}^* \ \middle| \ w = w^R \ .\right\}$$

כלומר שפת הפלינדרומים.

פתרון:

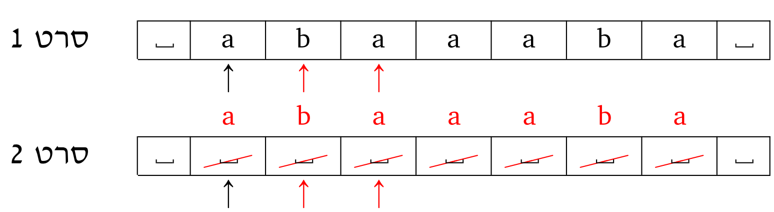
נבנה מ"ט עם שני סרטים:

<u>תאור המכונה:</u>

נסמן M_2 המ"ט עם 2 סרטים שמכריעה את השפה L_{w^R}.

$M_2 =$ על הקלט w:

(1) מעתיקה את w לסרט 2.



(2) מזיזה את הראש בסרט 1 לתו הראשון ב- w ואת הראש בסרט 2 לתו האחרון ב- w.

(3) משווה בין התווים שמתחת לראשים:

- אם התו שמתחת לראש בסרט 1 הוא $\sqcup$ $\Leftarrow$ acc.
- אם התווים שמתחת לראשים שונים $\Leftarrow$ rej.
- אחרת מזיזה את הראש בסרט 1 ימינה ואת הראש בסרט 2 שמאלה, וחוזרת לשלב (3).

הפונקצית המעברים של M_2 היא:

$$\delta\left(q_0, \begin{pmatrix} a \\ \sqcup \end{pmatrix}\right) = \left(q_0, \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}\right) \quad ,$$

$$\delta\left(q_0, \begin{pmatrix} b \\ \sqcup \end{pmatrix}\right) = \left(q_0, \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}\right) \quad ,$$

$$\delta\left(q_0, \begin{pmatrix} \sqcup \\ \sqcup \end{pmatrix}\right) = \left(q_{\text{back}}, \begin{pmatrix} \sqcup \\ \sqcup \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ L \end{pmatrix}\right) \quad .$$

נשים לב כי הסיבוכיות זמן של המכונה עם שני סרטים, M_2 היא $O(|w|)$, כאשר w האורך של המילה.

כעת נבנה מ"ט עם סרט יחיד שמכריעה את השפה L_{W^R}.

<u>תאור המכונה:</u>

נסמן M_1 המכונה עם סרט יחיד שמכריעה את השפה L_{w^R}.

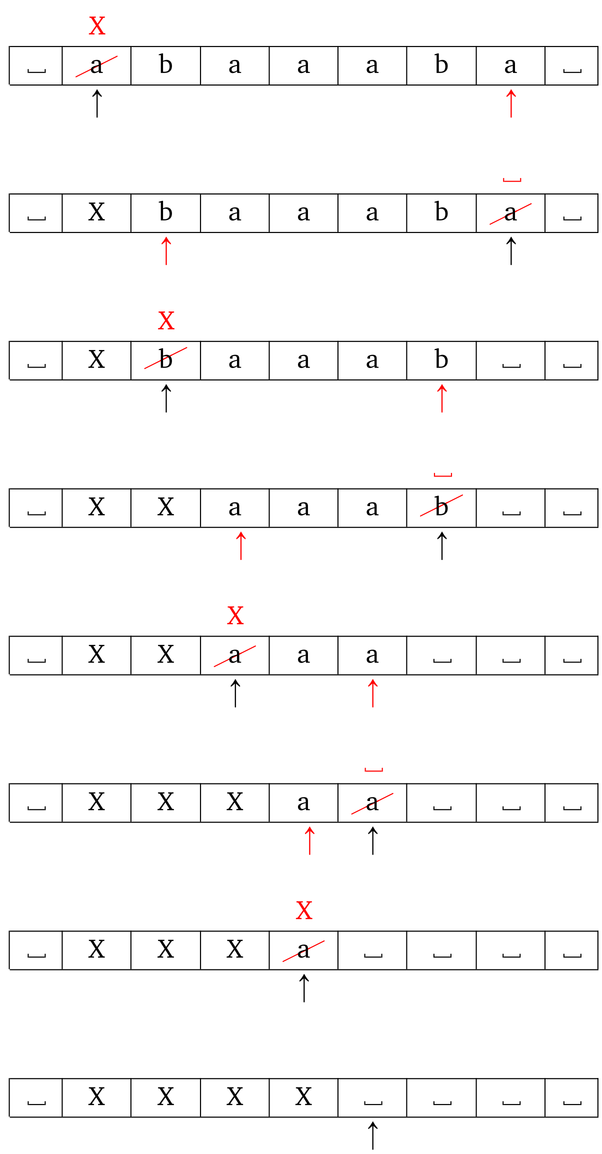
$M_1 =$ על הקלט w:

(1) אם התו שמתחת לראש הוא $\sqcup$ אז $M_1 \leftarrow$ acc.

(2) זוכרת את התו שמתחת לראש ומוחקת אותו ע"י X.

(3) מזיזה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאול ל- $\sqcup$.

- אם התו שמתחת לראש הוא $X \Leftarrow$ acc.
- אם התו שונה מהתו שזכרנו $\Leftarrow$ rej.
- מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י $\sqcup$, מזיזה את הראש שמאולה עד התו הראשון מימין ל- X וחוזרת לשלב (1).



2.5 שקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

מ"ט עם סרט יחיד היא מקרה פרטי של מטמ"ס.

משפט 2.1 שקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

לכל מטמ"ס M קיימת מ"ט עם סרט יחיד M' השקולה ל- M.

כלומר, לכל קלט $w \in \Sigma^*$:

- אם M מקבלת את w $\Leftarrow$ M' מקבלת את w.
- אם M דוחה את w $\Leftarrow$ M' דוחה את w.
- אם M לא עוצרת על w $\Leftarrow$ M' עוצרת על w.

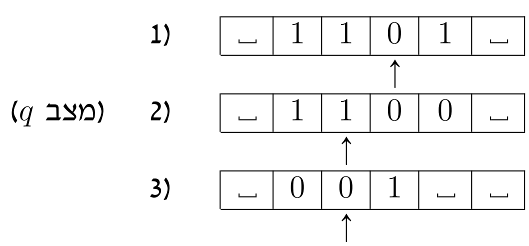
הוכחה:

בהינתן מטמ"ס $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ עם k סרטים, נבנה מ"ט עם סרט יחיד $M' = \left(Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q'_0, q'_{\text{acc}}, q'_{\text{rej}}\right)$ השקולה ל- M באופן הבא:

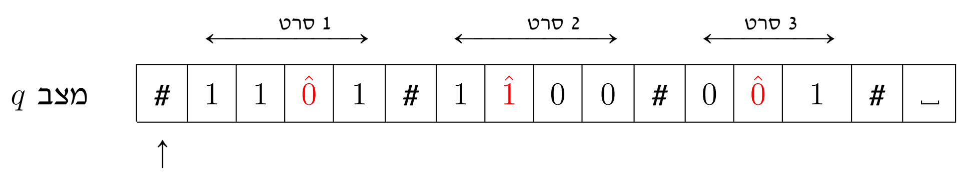
<u>רעיון הבנייה:</u>

בהינתן קלט $w \in \Sigma^*$, M' תבצע "סימולציה" של ריצה M על w.

<u>ב- M</u>



<u>ב- M'</u>



- M' תשמור את התוכן של k הסרטים של M על הסרט, רק שהתוכן של סרט i יופיע בין $\#_i$ ל- $\#_{i+1}$.
- M' תשמור את המיקום של הראשים של M ע"י הכפלת הא"ב Γ.

כלומר, לכל אות $\alpha \in \Gamma$, M' תשמור שתי אותיות α ו- $\hat{\alpha}$ ב- Γ', כך ש- $\hat{\alpha}$ תסמן את התו שמתחת לראש בכל סרט.

- בכל צעד חישוב, M' סורקת את הסרט שלה משמאל לימין כדי ללמוד מהם התווים שמתחת לראשים (התווים שמסומנים ב- $\hat{\alpha}$).
- M' משתמשת בפונקצית המעברים δ_k של M כדי לחשב את המעבר הבא.
- M' סורקת את הסרט שלה משמאל לימין כדי לעדכן את הסרטים ואת המיקום הראשים בהם.

<u>תאור הבנייה של M':</u>

1) <u>שלב האיתחול</u>

בהינתן קלט $w=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$, M' מאתחלת את הקונפיגורציה ההתחלתית של M על הסרט שלה.

<u>ב- M</u>

1)	$\sqcup$	σ_1	σ_2	$\cdots$	σ_n	$\sqcup$	
		$\uparrow$					
2)	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\cdots$	$\sqcup$	$\sqcup$	(מצב q_0)
		$\uparrow$					
3)	$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$	$\cdots$	$\sqcup$	$\sqcup$	
		$\uparrow$					

<u>ב- M'</u>

מצב q'_0	σ_1	σ_2	$\cdots$	σ_n	$\sqcup$	$\cdots$

$\Downarrow$

מצב q_0	#	$\hat{\sigma}_1$	σ_2	$\cdots$	σ_n	#	$\hat{\sqcup}$	#	$\hat{\sqcup}$	#	$\cdots$	#	$\sqcup$	$\sqcup$
	$\uparrow$													

2) <u>תאור צעד חישוב של M</u>

<u>ב- M</u>

	1)	$\sqcup$	1	1	0	1	$\sqcup$
					$\uparrow$		
(מצב q)	2)	$\sqcup$	1	1	0	0	$\sqcup$
				$\uparrow$			
	3)	$\sqcup$	0	0	1	$\sqcup$	$\sqcup$
				$\uparrow$			

$$\delta_k\left(q,\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\left(p,\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}L\\R\\L\end{pmatrix}\right)$$

	1)	$\sqcup$	1	1	1	1	$\sqcup$
				$\uparrow$			
(מצב p)	2)	$\sqcup$	1	0	0	0	$\sqcup$
					$\uparrow$		
	3)	$\sqcup$	0	0	1	$\sqcup$	$\sqcup$
			$\uparrow$				

ב- M'

מצב q	#	1	1	$\hat{0}$	1	#	1	$\hat{1}$	0	0	#	0	$\hat{0}$	1	#	$\sqcup$
	$\uparrow$															

$$\Downarrow$$

מצב p	#	1	$\hat{1}$	1	1	#	1	0	$\hat{0}$	0	#	$\hat{0}$	0	1	#	$\sqcup$
	$\uparrow$															

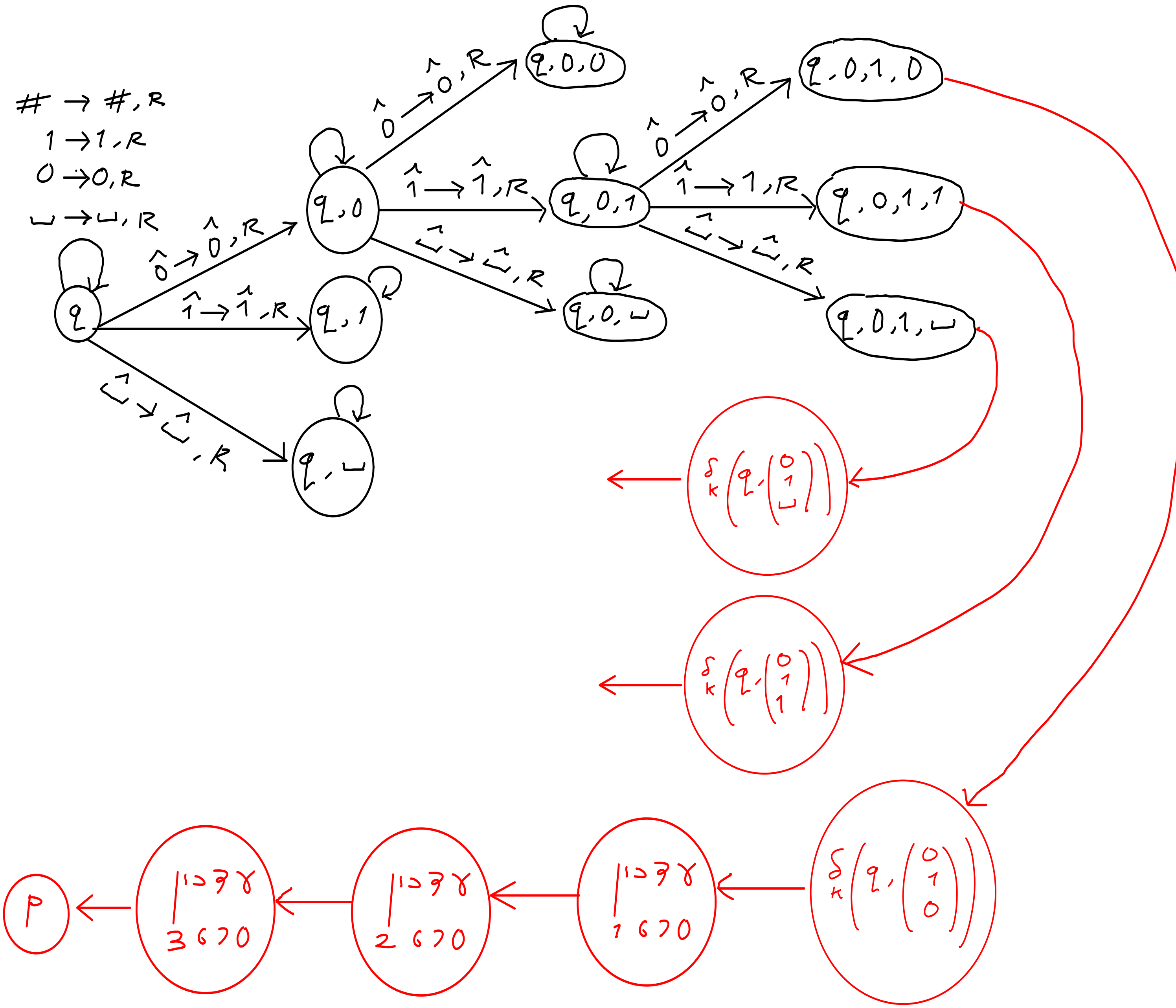
- איסוף מידע
- M' סורקת את הסרט שלה משמאל לימין ומזהה את התווים שמסומנים ב- $\hat{\alpha}$.
  מידע זה ניתן לשמור במצבים. לדוגמה:

$$q\ ,\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\ .$$

זה אפשרי מכיוון שמספר המצבים הנדרש הוא סופי:

$$|Q|\times|\Gamma|^k\ .$$

מצב q	#	1	1	$\hat{0}$	1	#	1	$\hat{1}$	0	0	#	0	$\hat{0}$	1	#	$\sqcup$
	$\uparrow$															



#	1	$\hat{1}$	1	1	#	1	0	$\hat{0}$	0	#	$\hat{0}$	0	1	#	␣
↑															

מצב p

- <u>עדכון הסרטים</u>

M' סורקת את הסרט שלה פעם נוספת כדי לפעול על פי פונקצית המעברים, כלומר, לעדכן את התאים שמתחת לראשים ולעדכן את מיקום הראשים.

■

2.6 מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

הגדרה 2.4 מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית (מ"ט א"ד) היא שביעייה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}$ מוגדרים כמו במ"ט דטרמיניסטי.

Δ היא פונקצית המעברים

$$\Delta : (Q \backslash \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma \to P\left(Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}\right) \ .$$

$$\Delta(q, a) = \{(q_1, a, S) \ \ , \ \ (q_2, b, L) \ \ , \ \ \ldots\} \ .$$

כלומר, לכל זוג $q \in Q, \alpha \in \Gamma$ ייתכן מספר מעברים אפשריים, 0, 1 או יותר.

- קונפיגורציה של מ"ט א"ד זהה לקונפיגורציה של מ"ט דטרמיניסטית.
- לכל קונפיגורציה ייתכן מספר קונפיגורציות עוקבות.
- לכל מילה $w \in \Sigma^*$ חחתכן מססר ריצות שונות:
  - ריצות שמגיעות ל- q_{acc}.
  - ריצות שמגיעות ל- q_{rej}.
  - ריצות שלא עוצרות.
  - ריצות שנתקעות.

הגדרה 2.5

מילה $w \in \Sigma^*$ מתקבלת במ"ט א"ד M אם קיימת לפחות ריצה אחת שמגיעה ל- q_{acc}.

השפה של מ"ט א"ד M היא

$$L(M) = \left\{ w \in \Sigma^* \ \middle| \ \exists u, \text{v} \in \Gamma^* \ \ : \ \ q_0 w \vdash_* \ u \ q_{\text{acc}} \ \text{v} \right\}$$

כלומר,
$w \in L(M)$ אם קיימת ריצה אחת שבה M מקבלת את w.

$w \notin L(M)$ אם בכל ריצה של M על w, M דוחה או לא עוצרת, או נתקעת.

בדומה למ"ט דטרמיניסטית, אומרים כי מ"ט א"ד M מכריעה שפה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $w \in L \Leftarrow$ M מקבלת את w.
- אם $w \notin L \Leftarrow$ M דוחה את w או M נתקעת על w.

אומרים כי מ"ט א"ד M מקבלת שפה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $w \in L$ $\Leftarrow$ M מקבלת את w.
- אם $w \notin L$ $\Leftarrow$ M דוחה את w, M לא עוצרת על w או M נתקעת על w.