שעור 8
אסטרטגיות מעורבות

8.1 אסטרטגיות מעורבות

הגדרה 8.1 אסטרטגיה מעורבת

נתון משחק בצורה אסטרטגית $G=((S_1,\ldots,S_n),(u_1,\ldots,u_n))$. אסטרטגיה מעורבת היא פונקצית הסתברות על כל קבוצות האסטרטגיותת של השחקנים.
כלומר, אם $S_1=(s_{11},s_{12},\ldots,s_{1k_1})$ אז נגדיר פונקצית הסתברות

$$P_{S_1}(s_{11})=p_{11}\ ,\quad P_{S_1}(s_{12})=p_{12}\ ,\quad \ldots\quad P_{S_1}(s_{1k_1})=p_{1k_1}\ .$$

אם $S_2=(s_{21},s_{22},\ldots,s_{2k_2})$ אז נגדיר פונקצית הסתברות

$$P_{S_2}(s_{21})=p_{21}\ ,\quad P_{S_2}(s_{22})=p_{22}\ ,\quad \ldots\quad P_{S_2}(s_{2k_2})=p_{2k_2}\ .$$

אם $S_n=(s_{n1},s_{n2},\ldots,s_{nk_n})$ אז נגדיר פונקצית הסתברות

$$P_{S_n}(s_{n1})=p_{n1}\ ,\quad P_{S_n}(s_{n2})=p_{n2}\ ,\quad \ldots\quad P_{S_n}(s_{nk_n})=p_{nk_n}\ .$$

דוגמה 8.1 ()

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס.

I \ II	L	R
T	4	1
B	2	3

א) מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות טהורות.

ב) מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

א)

I \ II	L	R	$\min_{s_2\in S_2}$
T	4	1	1
B	2	3	2
$\max_{s_1\in S_1}$	4	3	2, 3

ערך המקסמין של שחקן 1:

$$\underline{v}=\max_{s_1\in\{T,B\}}\ \min_{s_2\in\{L,R\}}=2\ .$$

ז"א שחקן 1 יכול להבטיח שיקבל לפחות 2 אם הוא ישחק B.

ערך המינמקס של שחקן 2:

$$\bar{\mathrm{v}} = \min_{s_2\in\{L,R\}} \max_{s_1\in\{T,B\}} = 3 \ .$$

ז"א שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר 3 אם הוא ישחק R.

$$\bar{\mathrm{v}} = 3 > 2 = \underline{\mathrm{v}} \ .$$

למשחק אין ערך.

ב) כאשר לשחקן 1 יש שתי אסטרטגיות טהורות T ו- B, נזהה את האסטרטגיה המעורבת

$$[x(T) \ , \ (1-x)(B)]$$

עם ההסתברות x שבה נבחרת האסטרטגיה הטהורה T.

באופן דומה, כאשר יש לשחקן 2 יש שתי אסטרטגיות טהורות L ו- R, נזהה את האסטרטגיה המעורבת

$$[y(L) \ , \ (1-y)(R)]$$

עם ההסתברות y שבה נבחרת האסטרטגיה הטהורה L.

לכל זוג אסטרטגיות מעורבות התשלום ניתן על ידי פונקצית התועלת

$$U(x,y) = 4xy + 1x(1-y) + 2(1-x)y + 3(1-x)(1-y) = 4xy - 2x - y + 3 \ .$$

ראשית נחשב לכל $x \in [0,1]$ את

$$\min_{y\in[0,1]} U(x,y) = \min_{y\in[0,1]} (4xy - 2x - y + 3) = \min_{y\in[0,1]} (y(4x-1) - 2x + 3)$$

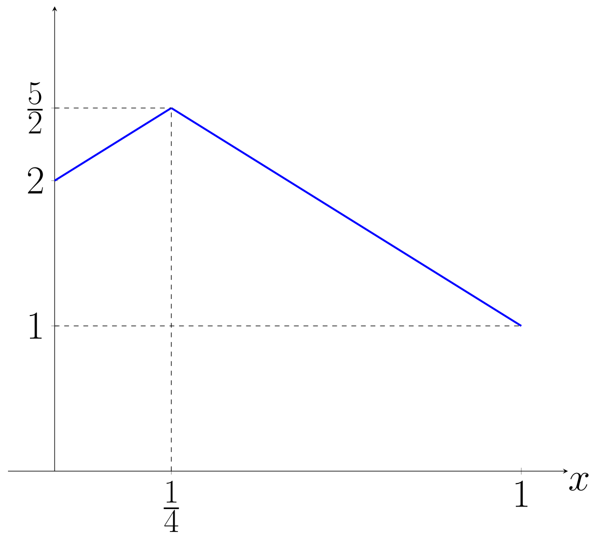
עבור x קבוע זוהי פונקציה לינארית ב- y, ולכן הנקודה שבה המינימום מתקבל נקבעת לפי השיפוע $4x-1$.

אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה והמינימום מתקבל ב- $y=0$.

אם השיפוע שלילי הפונקציה יורדת והמינימום מתקבל ב- $y=1$.

אם השיפוע 0 הפונקציה קבועה וכל הנקודות הן נקודות מינימום. לכן

$$\min_{y\in[0,1]} u(x,y) = \begin{cases} 2x+2 & x \leq \dfrac{1}{4} \ , \\ -2x+3 & x \geq \dfrac{1}{4} \ , \end{cases}$$

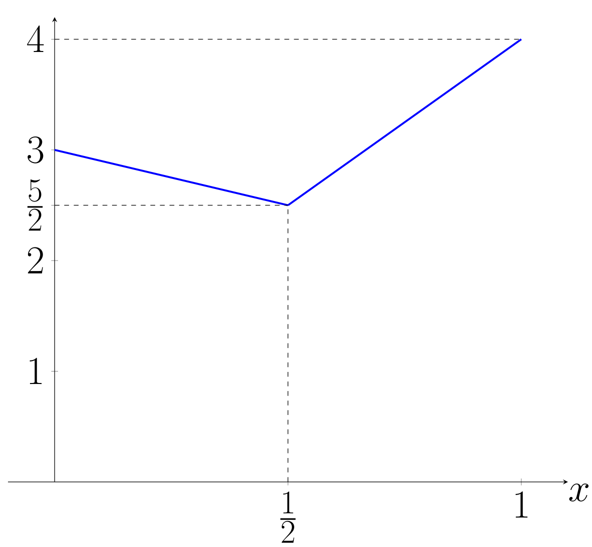


לפונקציה זו של x יש מקסימום יחיד ב- $x=\frac{1}{4}$ וערכו $\frac{5}{2}$. לכן

$$\underline{\mathrm{v}} = \max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} U(x,y) = \frac{5}{2} \ .$$

באופן דומה נחשב:

$$\begin{aligned}\max_{x\in[0,1]} U(x,y) &= \max_{x\in[0,1]} \left[4xy-2x-y+3\right] \\ &= \max_{x\in[0,1]} \left[x\left(4y-2\right)-y+3\right] \\ &= \begin{cases} -y+3 & y\leq \frac{1}{2} \ , \\ 3y+1 & y\geq \frac{1}{2} \ , \end{cases}\end{aligned}$$



לפונקציה זו של y יש מינימום יחיד ב- $y=\frac{1}{2}$ וערכו $\frac{5}{2}$. לכן

$$\bar{\mathrm{v}} = \min_{y\in[0,1]} \max_{x\in[0,1]} U(x,y) = \frac{5}{2} \ .$$

כלומר, למשחק יש ערך $\mathrm{v} = \underline{\mathrm{v}} = \overline{\mathrm{v}} = \dfrac{5}{2}$, והאסטרטגיות האופטימליות הן $x^* = \dfrac{1}{4},\ y^* = \dfrac{1}{2}$.

מכיוון ש- x^* ו- y^* הן אסטרטגיות האופטימליות היחיודת של השחקנים, אז (x^*, y^*) הוא שיווי המשקל נאש היחיד במשחק.

■

דוגמה 8.2 ()

נתון משחק שני שחקנים (שאינו סכום אפס) בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

$I \backslash II$	L	R
T	$1,-1$	$0,2$
B	$0,1$	$2,0$

מצאו התשלום מקסמין והתשלום מינמקס באסטרטגיות מעורבות.

מצאו שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

ראשית נחשב את התשלום מקסמין של השחקנים.

קבוצות האסטרטגיות של שחקן 1:

$$S_1 = \{[x(T), (1-x)(B)] \ \ , \ x \in [0,1]\} \ \ .$$

המזוהה עם הקטע $[0,1]$.

קבוצות האסטרטגיות של שחקן 2:

$$S_2 = \{[y(L), (1-y)(R)] \ \ , \ y \in [0,1]\} \ \ .$$

פונקצית התועלת של שחקן 1:

$$U_1(x,y) = xy + 2(1-x)(1-y) = 3xy - 2x - 2y + 2 \ .$$

פונקצית התועלת של שחקן 2:

$$U_2(x,y) = -xy + 2x(1-y) + y(1-x) = -4xy + 2x + y \ .$$

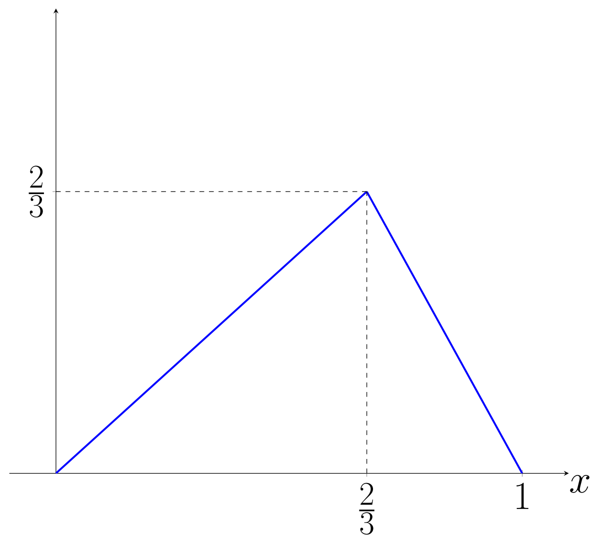
התשלום מקסמין של שחקן 1 הינו:

$$\underline{\mathrm{v}}_1 = \max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} U_1(x,y) \ .$$

התשלום מקסמין של שחקן 2 הינו:

$$\underline{\mathrm{v}}_2 = \max_{y\in[0,1]} \min_{x\in[0,1]} U_2(x,y) \ .$$

$$\begin{aligned}
\min_{y\in[0,1]} U_1(x,y) &= \min_{y\in[0,1]} 3xy-2x-2y+2\\
&= \min_{y\in[0,1]} y\,(3x-2)-2x+2\\
&= \begin{cases} x & x\leq \frac{2}{3}\\ \\ -2x+2 & x\geq \frac{2}{3}\end{cases}
\end{aligned}$$



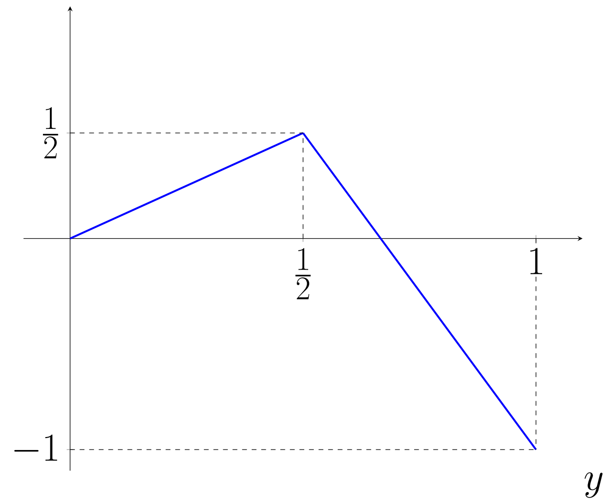
לפונקציה זו יש מקסימום ב- $x=\frac{2}{3}$. לפיכך

$$\underline{\mathrm{v}}_1=\max_{x\in[0,1]}\min_{y\in[0,1]} U_1(x,y)=\frac{2}{3}\ .$$

התשלום מקסמין של שחקן 2 הינו:

$$\underline{\mathrm{v}}_2=\max_{y\in[0,1]}\min_{x\in[0,1]} U_2(x,y)\ .$$

$$\begin{aligned}
\min_{x\in[0,1]} U_2(x,y) &= \min_{x\in[0,1]} 3xy-2x-2y+2\\
&= \min_{x\in[0,1]} x\,(2-4y)+y\\
&= \begin{cases} y & y\leq \frac{1}{2}\\ \\ 2-3y & y\geq \frac{1}{2}\end{cases}
\end{aligned}$$



לפונקציה זו יש מקסימום ב- $y = \frac{1}{2}$. לפיכך

$$\underline{\mathrm{v}}_2 = \max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} U_2(x,y) = \frac{1}{2} \ .$$

כעת נחשב את השיווי משקל של המשחק באסטרטגיות מעורבות. נסמן תשובה טובה ביותר של שחקן 2 לאסטרטגיה x של שחקן 1 כ:

$$\sigma_2(x) = \operatorname*{argmax}_{y\in[0,1]} U_2(x,y) = \{y \in [0,1], U_2(x,y) \geq U_2(x,z) \forall z \in [0,1]\}$$

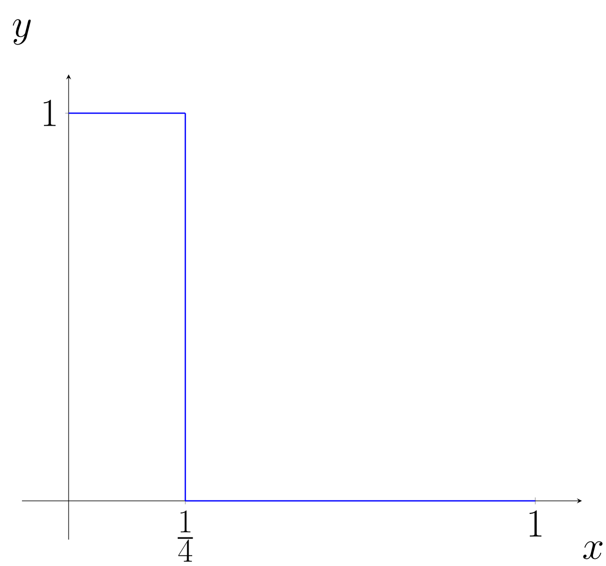
במילים פשוטות $\sigma_2(x)$ הוא אוסף של כל הערכים של y עבורם ל- $U_2(x,y)$ יש מקסימום.

כדי לחשב את $\sigma_2(x)$ רושמים $U_2(x,y)$ בצורה

$$U_2(x,y) = y(1-4x) + 2x \ .$$

עבור x קבוע זוהי פונקציה לינארית ב- y, ולכן הנקודה שבה המינימום מתקבל נקבעת לפי השיפוע $1-4x$.
אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה והמקסימום מתקבל ב- $y=1$.
אם השיפוע שלילי הפונקציה יורדת והמקסימום מתקבל ב- $y=0$.

אם השיפוע 0 הפונקציה קבועה וכל הנקודות הן נקודות מקסימום. הסימן של השיפוע משתנה ב- $x = \frac{1}{4}$. הגרף של $\sigma_2(x)$ מתואר להלן.



שימו לב ש- $\sigma_2(x)$ לא פונקציה בגלל ש- $\sigma_2\left(\frac{1}{4}\right)$ לא שווה לנקודה אלא לתחום $[0,1]$.

נסמן תשובה טובה ביותר של שחקן 1 לאסטרטגיה y של שחקן 2 כ:

$$\sigma_1(y) = \underset{x\in[0,1]}{\operatorname{argmax}}\, U_1(x,y) = \{x \in [0,1], U_1(x,y) \geq U_1(x,z) \forall z \in [0,1]\}$$

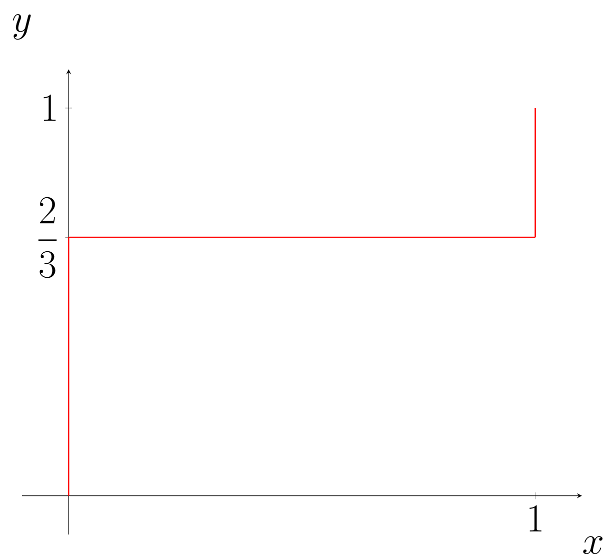
במילים פשוטות $\sigma_1(y)$ הוא אוסף של כל הערכים של x עבורם ל- $U_1(x,y)$ יש מקסימום.

כדי לחשב את $\sigma_1(y)$ רושמים $U_1(x,y)$ בצורה

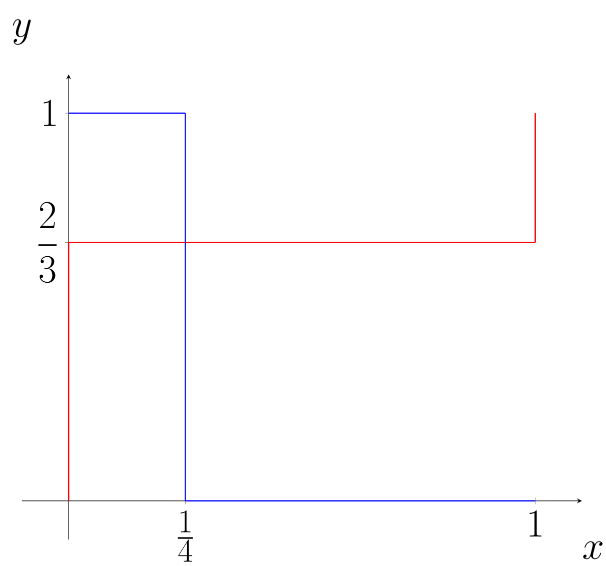
$$U_1(x,y) = x(3y-2) - 2y + 2 \ .$$

עבור y קבוע זוהי פונקציה לינארית ב- x, ולכן הנקודה שבה המינימום מתקבל נקבעת לפי השיפוע $3y-2$.
אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה והמקסימום מתקבל ב- $x=1$.
אם השיפוע שלילי הפונקציה יורדת והמקסימום מתקבל ב- $x=0$.

אם השיפוע 0 הפונקציה קבועה וכל הנקודות הן נקודות מקסימום. הסימן של השיפוע משתנה ב- $y=\frac{2}{3}$. הגרף של $\sigma_1(y)$ מתואר להלן.



הצמד אסטרטגיות (x^*,y^*) נקודת שיווי משקל אם ורק אם $x^* \in \sigma_1(y^*)$ ו- $y^* \in \sigma_2(x^*)$. במילים אחרות נדרש כי הנקודה (x^*,y^*) תהיה על שני הגרפים של $\sigma_2(x)$ ו- $\sigma_1(y)$. הנקודה היחידה שמקיימת את התנאי הזה היא $\left(x^*=\frac{1}{4}, y^*=\frac{2}{3}\right)$.



לכן השיווי משקל היחיד של המשחק הוא $\left(x^*=\frac{1}{4}, y^*=\frac{2}{3}\right)$ והתשלומים לשחקן 1 ולשחקן 2 של השיווי משקל הם

$$U_1\left(x^*, y^*\right)=\frac{2}{3}\ , \qquad U_2\left(x^*, y^*\right)=\frac{1}{2}\ .$$

■

8.2 שיטה ישירה למציאת אסטרטגיה אופטימלית

דוגמה 8.3 ()

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

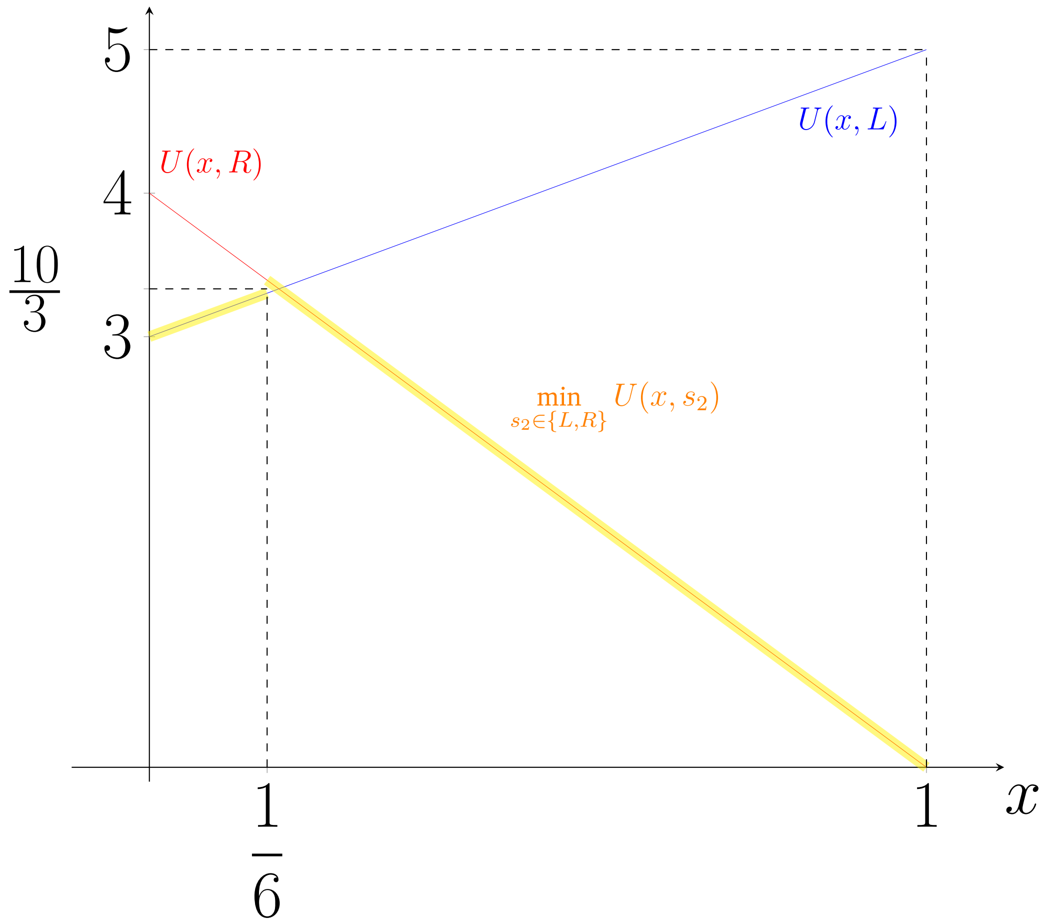
$I \backslash II$	L	R
T	5	0
B	3	4

מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:
תחילה נחשב את המקסמין של שחקן 1. אם שחקן 1 משחק את האסטרטגיה המעורבת $[x(T), (1-x)(B)]$ התשלום שלו כפונקציה של x תלוי על האסטרטגיה של שחקן 2:

- אם שחקן 2 משחק L אז $U(x, L)=5x+3(1-x)=2x+3.$
- אם שחקן 2 משחק R אז $U(x, R)=4(1-x)=-4x+4.$

הגרף למטה מראה את הגרפים של הפונקציות האלו. הקו של $\min\limits_{s_2\in\{L,R\}} U(x, s_2)$ מראה את התשלום המינימלי ששחקן 1 יקבל אם הוא משחק x. הקו הזה נקרא **מעטפת תחתונה** של התשלומים.



הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות שווה ל- $\max_{x\in[0,1]} \min_{s_2\in\{L,R\}} U(x,s_2)$, אשר מתקבל בנקודת מקסימום של המעטפת התחתונה. המקסימום מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של שתי הפונקציות, כלומר בנקודה

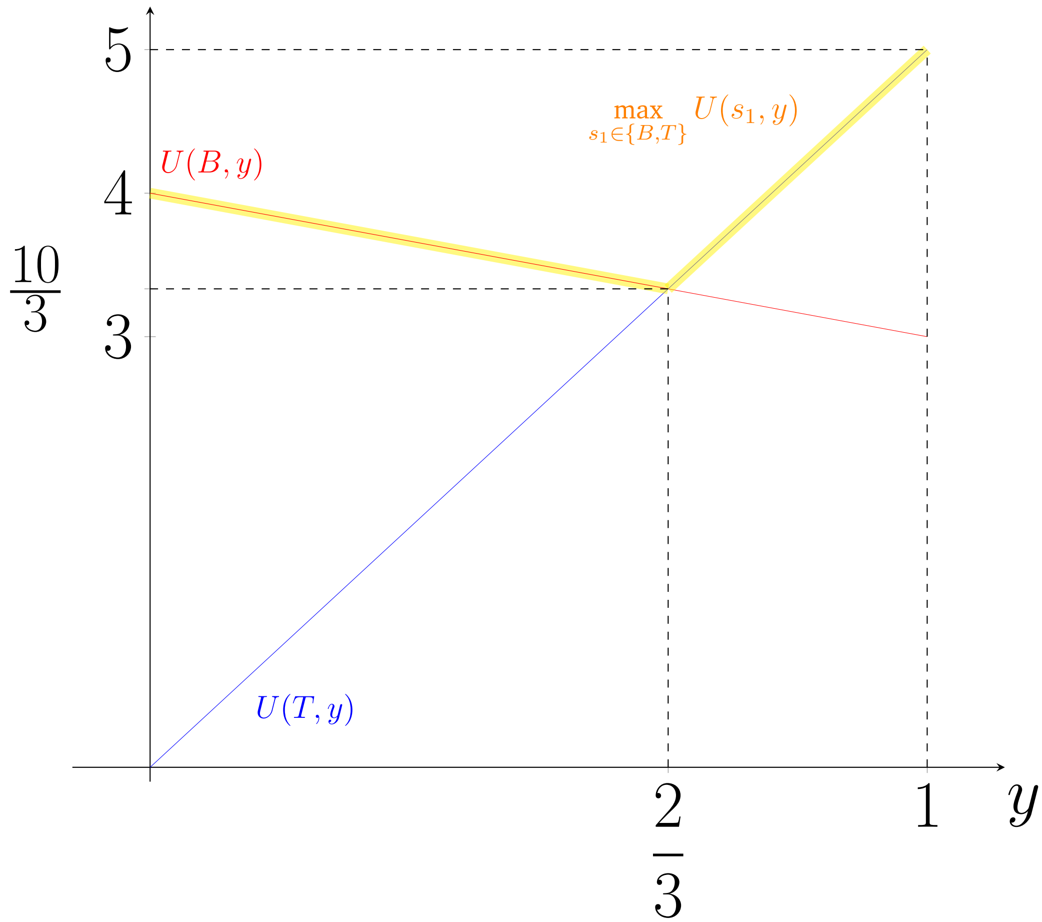
$$2x+3=-4x+4 \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{1}{6} \ .$$

מכאן האסטרטגיה האופטימלית של שחקן 1 היא $x^*=\left(\frac{1}{6}(T),\frac{5}{6}(B)\right)$. הערך של המשחק שווה לגובה של הנקודת חיתוך: $\mathrm{v}=\frac{10}{3}$.

כעת נחשב את המינמקס של שחקן 2. אם שחקן 2 משחק את האסטרטגיה המעורבת $[y(L),(1-y)(R)]$ התשלום שלו כפונקציה של y תלוי על האסטרטגיה של שחקן 1:

- אם שחקן 1 משחק T אז $U(T,y)=5y.$
- אם שחקן 1 משחק B אז $U(B,y)=4-y.$

הגרף למטה מראה את הגרפים של הפונקציות האלו. הקו של $\max_{s_1\in\{B,T\}} U(s_1,y)$ מראה את התשלום המקסימלי ששחקן 2 יקבל אם הוא משחק y. הקו הזה נקרא **מעטפת עליונה** של התשלומים.



הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות שווה ל- $\min_{y\in[0,1]}\max_{s_1\in\{B,T\}} U(s_1,y)$, אשר מתקבל בנקודת מינימום של המעטפת העליונה. המינימום מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של שתי הפונקציות, כלומר בנקודה

$$5y = 4 - y \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{2}{3} \ .$$

מכאן האסטרטגיה האופטילית של שחקן 2 היא $y^* = \left(\frac{2}{3}(L), \frac{1}{3}(R)\right)$. הערך של המשחק שווה לגובה של הנקודת חיתוך: $\mathrm{v} = \frac{10}{3}$. ■

דוגמה 8.4 ()

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

I \ II	L	M	R
T	2	5	-1
B	1	-2	5

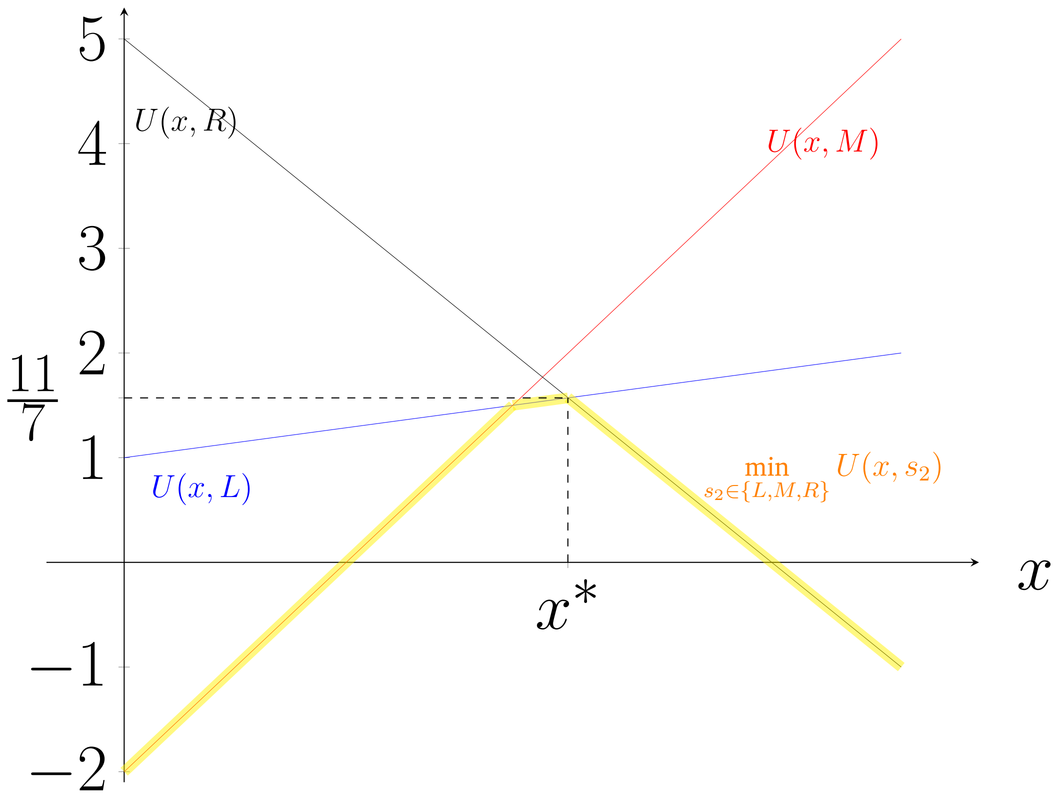
מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:
נחשב את המקסמין של שחקן 1. אם שחקן 1 משחק את האסטרטגיה המעורבת $[x(T), (1-x)(B)]$ התשלום שלו כפונקציה של x תלוי על האסטרטגיה של שחקן 2:

- אם שחקן 2 משחק L אז $U(x,L) = 2x + (1-x) = 1 + x.$

- אם שחקן 2 משחק M אז $U(x,M)=5x-2(1-x)=7x-2.$
- אם שחקן 2 משחק R אז $U(x,R)=-x+5(1-x)=-6x+5.$

התרשים למטה מתאר את הגרפים של שלוש פונקציות אלו.



המקסימום של המעטפת התחתונה מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של $U(x,L)$ ו- $U(x,R)$:

$$1+x \overset{!}{=} -6x+5 \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{4}{7}$$

■

8.3 חישוב נקודות שיווי משקל באסטרטגיות מערבות

דוגמה 8.5 ()

נתון משחק שני שחקנים בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

$I \backslash II$	F	C
F	$2,1$	$0,0$
C	$0,0$	$1,2$

מצאו שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

לכל אסטרטגיה מעורבת, $[x(F),(1-x)(C)]$ של שחקן 1, הקבוצת תשובות טובות ביותר של שחקן 2 הן

$$\sigma_2(x)=\operatorname*{arg\,max}_{y\in[0,1]} u_2(x,y)=\left\{y\in[0,1]\,\middle|\,u_2(x,y)\geq u_2(x,z)\forall z\in[0,1]\right\}\ .$$

כדי לחשב את $\sigma_2(x)$, נרשום את $U_2(x,y)$:

$$U_2(x,y)=xy+2(1-x)(1-y)=3xy-2x-2y+2=y(3x-2)-2x+2\ .$$

לכל x קבוע זוהי פונקציה לינארית של y.

- $x>\dfrac{2}{3}$ $\Leftarrow$ השיפוע חיובי ויש מקסימום ב- $y=1$.
- x$x<\dfrac{2}{3}$ $\Leftarrow$ השיפוע שלילי ויש מקסימום ב- $y=0$.
- $x=\dfrac{2}{3}$ $\Leftarrow$ השיפוע שווה אפס והפונקציה קבוע וכל נקודה $y\in[0,1]$ נקודת מקסימום.

השיפוע משתנה מחיובי לשלילי ב- $x=\dfrac{2}{3}$. הגרף של $\sigma_2(x)$ מתואר בתרשים למטה.

באותה מידה, לכל אסטרטגיה מעורבת, $[y(F),(1-y)(C)]$ של שחקן 2, הקבוצת תשובות טובות ביותר של שחקן 1 הן

$$\sigma_1(y)=\operatorname*{arg\,max}_{x\in[0,1]} u_1(x,y)=\left\{x\in[0,1]\,\middle|\,u_1(x,y)\geq u_1(z,y)\forall z\in[0,1]\right\}\ .$$

כדי לחשב את $\sigma_1(y)$, נרשום את $U_1(x,y)$:

$$U_1(x,y)=2xy+(1-x)(1-y)=3xy-x-y+1=x(3y-1)-y+1\ .$$

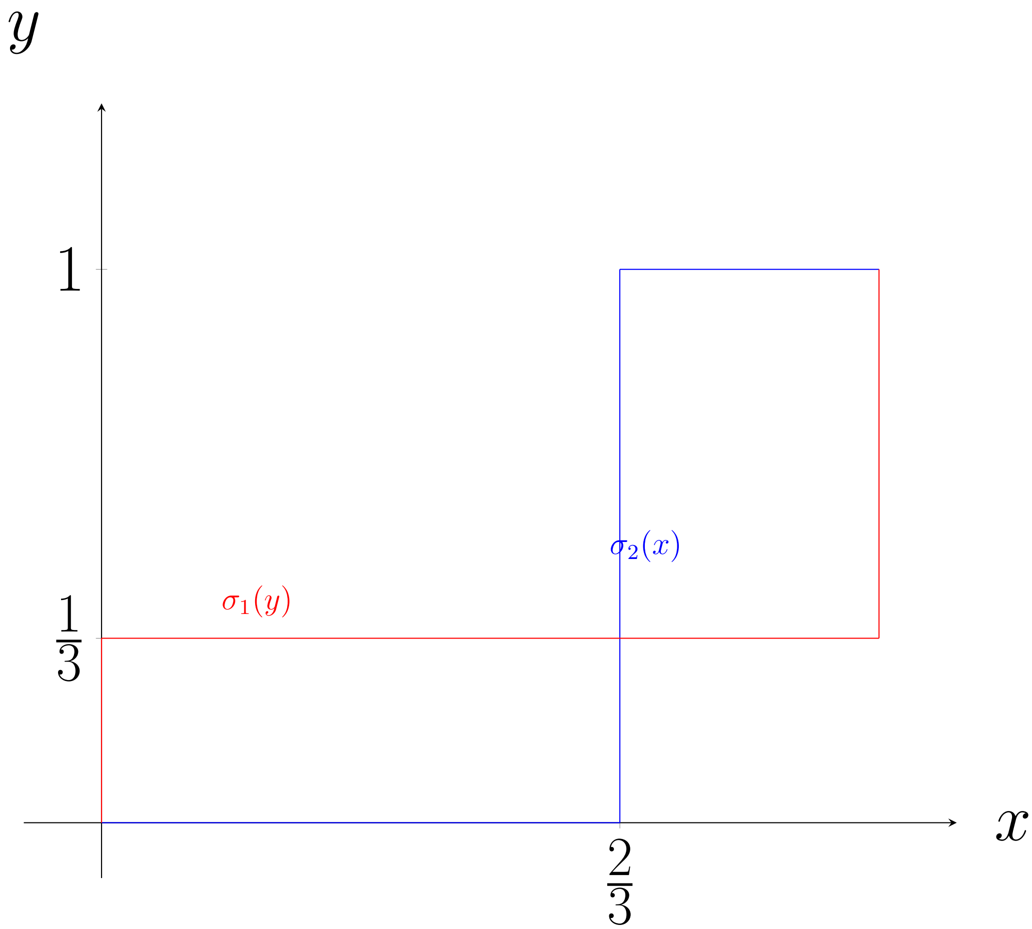
לכל y קבוע זוהי פונקציה לינארית של x.

- $y>\dfrac{1}{3}$ $\Leftarrow$ השיפוע חיובי ויש מקסימום ב- $x=1$.
- $y<\dfrac{1}{3}$ $\Leftarrow$ השיפוע שלילי ויש מקסימום ב- $x=0$.
- $y=\dfrac{1}{3}$ $\Leftarrow$ השיפוע שווה אפס והפונקציה קבוע וכל נקודה $x\in[0,1]$ נקודת מקסימום.

השיפוע משתנה מחיובי לשלילי ב- $y=\dfrac{1}{3}$. הגרף של $\sigma_1(y)$ מתואר בתרשים למטה.

לסיכום, עבור משחק זה,

$$\sigma_2(x)=\begin{cases}0 & x<\dfrac{2}{3}\ ,\\[1ex] [0,1] & x=\dfrac{2}{3}\ ,\\[1ex] 1 & x>\dfrac{2}{3}\ ,\end{cases}\ ,\qquad \sigma_1(y)=\begin{cases}0 & y<\dfrac{1}{3}\ ,\\[1ex] [0,1] & x=\dfrac{1}{3}\ ,\\[1ex] 1 & y>\dfrac{1}{3}\ ,\end{cases}$$



נקודה (x^*,y^*) היא שיווי משקל אם ורק אם $x^*\in\sigma_1(y^*)$ ו- $y^*\in\sigma_2(x^*)$. ז"א (x^*,y^*) נקודת שיווי משקל אם ורק אם היא נקודת חיתוך של הגרפים של $\sigma_1(y)$ ו- $\sigma_2(x)$. יש 3 נקודות חיתוך:

- $(x^*,y^*)=(0,0)$ אשר מתאימה לאסטרטגיה טהורה (C,C).
- $(x^*,y^*)=(1,1)$ אשר מתאימה לאסטרטגיה טהורה (F,F).
- $(x^*,y^*)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ אשר היא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות

$$x^*=\left[\frac{2}{3}(F),\frac{1}{3}(C)\right]\ ,\qquad y^*=\left[\frac{1}{3}(F),\frac{2}{3}(C)\right]\ ,$$

■

8.4 תחרות דואפול על פי קורנוט

דוגמה 8.6 ()

שני יצרניים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאלים. היצרנים מחליטים סימולטנית על הכמות שהם ייצרו, וההיצע הכולל קובע את מחיר המוצר, שהוא זהה לשני היצרנים. נסמן ב- q_1 וב- q_2 את הכמויות שמייצרים היצרנים 1 ו- 2 בהתאמה. אזי הכמות הכוללת של מוצרים בשוק היא q_1+q_2. נניח כי המחיר של יחידה שווה ל-

$$2-q_1-q_2\ .$$

עלות הייצור של יחידה ליצרן הראשון היא $c_1>0$ וליצרן השני היא $c_2>0$. האם קיים שיווי משקל במשחק

זה, ואם כן, מה הוא?

פתרון:
זהו משחק שני שחקנים (היצרנים 1 ו- 2) שבו קבוצת האסטרטגיות של כל שחקן היא $[0,\infty)$. אם שחקן 1 בוחר באסטרטגיה q_1 ושחקן q_2 בוחר באסטרטגיה q_2, התשלום לשחקן 1 הוא

$$u_1(q_1,q_2) = q_1(2-q_1-q_2) - q_1c_1 = q_1(2-c_1-q_1-q_2) \ , \tag{*}$$

והתשלום לשחקן 2 הוא

$$u_2(q_1,q_2) = q_2(2-q_1-q_2) - q_1c_2 = q_2(2-c_2-q_1-q_2) \ .$$

התשובה בטובה ביותר של שחקן 1 לאסטרטגיה q_2 של שחקן 2 הוא ערך q_1 המביא למקסימום את $u_1(q_1,q_2)$. הפונקציה $q_1 \mapsto u_1(q_1,q_2)$ היא פונקציה ריבועית עם מקסימום בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_1(q_1,q_2)}{\partial q_1} = 0 \ .$$

על ידי גזירה של אגף ימין של משוואה (*) נקבל את התנאי $2-c_1-2q_1-q_2=0$ או

$$q_1 = \frac{2-c_1-q_2}{2} \ . \tag{1*}$$

באותו אופן, התשובה הטובה ביותר של שחקן 2 לאסטרטגיה q_1 של שחקן 1 היא ערך q_2 שבו הנגדרת של $u_2(q_1,q_2)$ לפי q_2 מתאפסת. על ידי גזירה נקבל

$$q_2 = \frac{2-c_2-q_1}{2} \ . \tag{2*}$$

פתרון המשוואות (1*) ו- (2*) נותן

$$q_1^* = \frac{2-2c_1+c_2}{3} \ , \qquad q_2^* = \frac{2-2c_2+c_1}{3} \ .$$

זה אמנם שיווי משקל וזהו שיווי משקל היחיד של המשחק. התשלומים של השחקנים בשיווי משקל זה הם

$$u_1\left(q_1^*,q_2^*\right) = \left(\frac{2-2c_1+c_2}{3}\right)^2 = (q_1^*)^2 \ , \qquad u_2\left(q_1^*,q_2^*\right) = \left(\frac{2-2c_2+c_1}{3}\right)^2 = (q_2^*)^2 \ .$$

כעת נוכיח כי הצמד אסטרטגיות (q_1^*,q_2^*) מהווה נקודת שיווי משקל. יש להוכיח כי q_1^* תשובה טובה ביותר לשחקן 1 ביחס ל- q_2^* ולהפך.

$$u(q_1,q_2^*) = q_1(2-c_1-q_1-q_2^*) = -q_1^2 + (2-c_1-q_2^*)q_1 \ .$$

לכן $u(q_1,q_2^*)$ פולינום מסדר 2 של q_1, כאשר המקדם של q_1^2 הוא -1. לכן המקסימום המתקבל הוא

$$q_1 = \frac{(2-c_1-q_2^*)}{2} = \frac{\left(2-c_1-\frac{2-2c_2+c_1}{3}\right)}{2} = q_1^* \ .$$

בפרט q_1^* תשובה טובה ביותר של שחקן 2 ביחס ל- q_2^*.

■