שיעור 5
רציפות בקטע והגדרת הנגזרת

רציפות פונקציה בקטע

5.1 הגדרה: (רציפות בקטע בקטע פתוח)
פונקציה $f(x)$ נקראת רציפה בקטע פתוח (a,b) אם היא רציפה בכל נקודה $c\in(a,b)$ ז"א לכל $a<c<b$

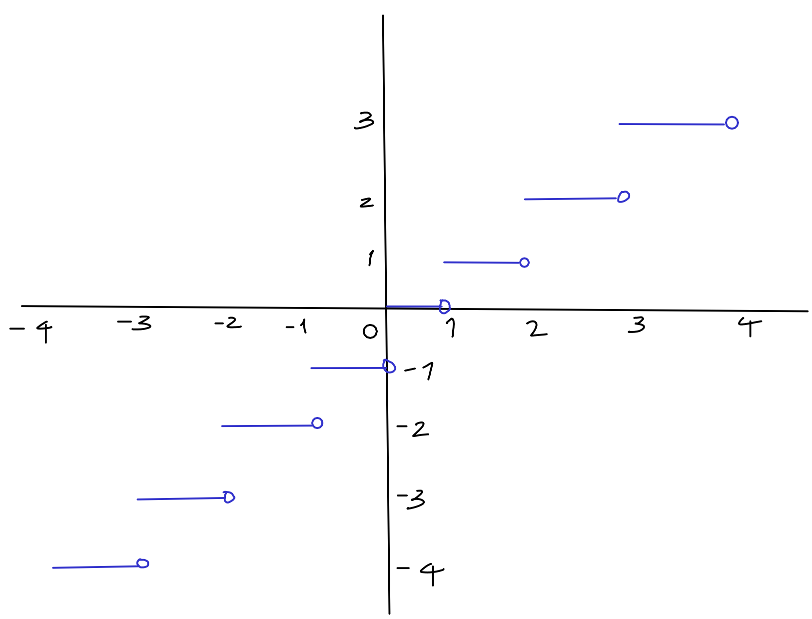
$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)\ .$$

5.2 הגדרה: (רציפות בקטע בקטע סגור)
פונקציה $f(x)$ נקראת רציפה בקטע פתוח $[a,b]$ אם היא רציפה בכל נקודה פנימית של הקטע, כלומר לכל $c\in(a,b)$, וגם

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)\ ,\qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)\ .$$

5.3 דוגמא. $f(x)=[x]$

הערך השלם של x (ז"א המספר השלם הקרוב ביותר ל x שלא גדול מ x).



נבדוק אם $f(x)$ רציפה בקטע $[1,2]$.

בקטע הסגור $(1,2)$ הפונקציה היא $y=1$ - רציפה.

$$\lim_{x\to 1^+}[x]=1\ ,\qquad \lim_{x\to 2^-}[x]=1\ ,\qquad f(2)=2.$$

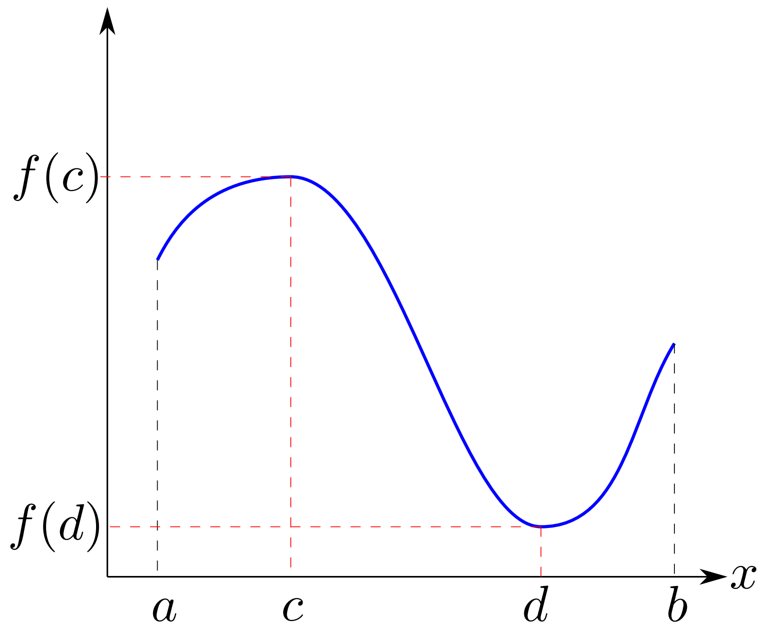
לכן $f(x)$ לא רציפה משמאל בנקודה $x=2$, ו- $f(x)$ רציפה מימים בנקודה $x=1$.

כלומר $f(x)$ לא רציפה בקטע סגור $[1,2]$. $f(x)$ רציפה בקטע $[1,2)$.

משפטים היסודיים של רציפות פונקציה בקטע סגור

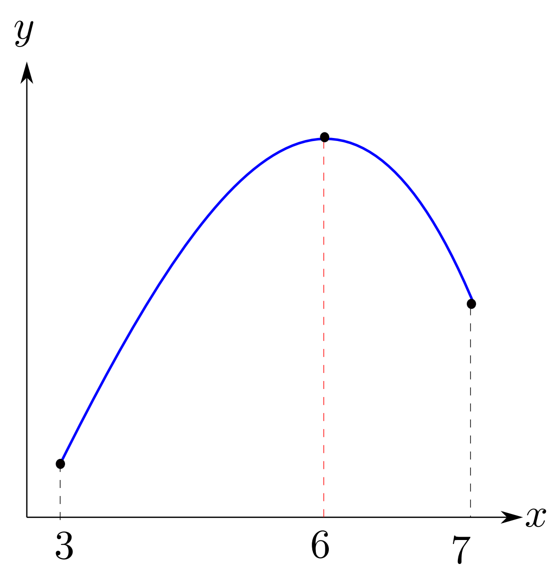
5.4 תורת. (משפט ויירשטראס - ערך גדול ביותר וקטן ביותר של פונקציה)
אם פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$, אז $f(x)$ מקבלת בקטע הזה את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר. ז"א קיים מספרים c ו- d בקטע $[a,b]$ כך ש

$$f(d) \leq f(x) \leq f(c) \qquad \forall x \in [a,b] \ .$$



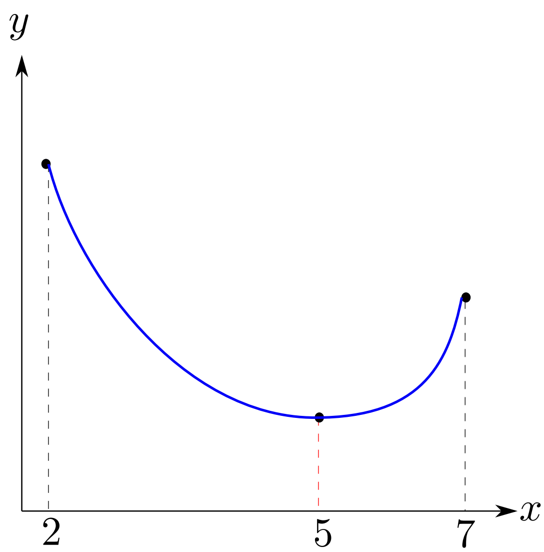
דוגמאות.

1 $f(x) = -(x-2)(x-10)$ רציפה קטע $[3,7]$.



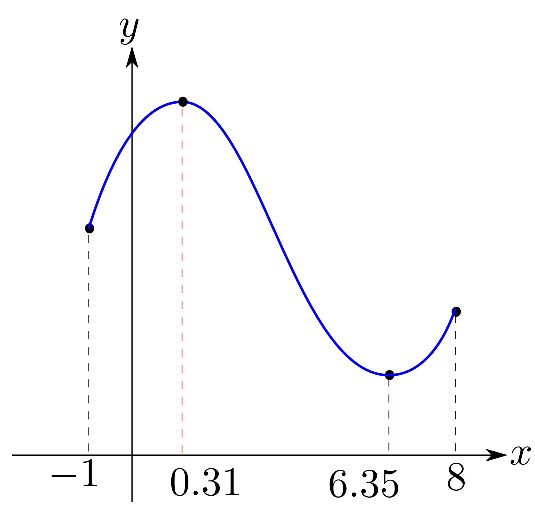
מינימום	$f(3)$
מקסימום	$f(6)$

2 $f(x) = x^2 - 10x + 30$ רציפה קטע $[2,7]$.



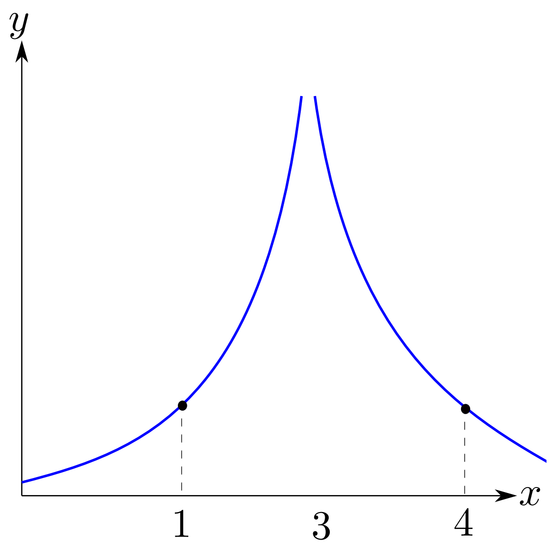
מינימום	$f(5)$
מקסימום	$f(2)$

3 $f(x) = x^3 - 10x^2 + 6x + 150$ רציפה קטע $[2,7]$.



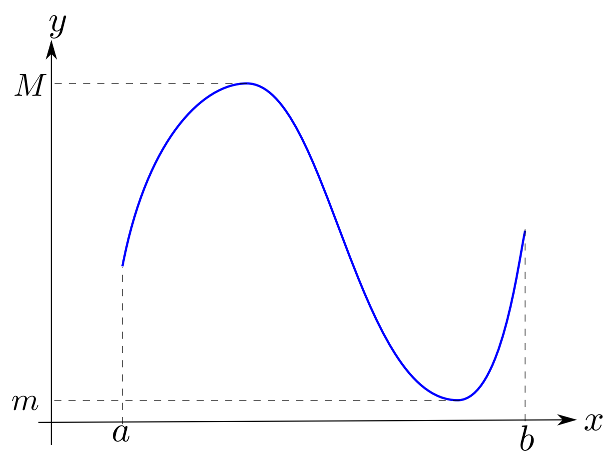
מינימום	$f(0.31)$
מקסימום	$f(6.35)$

4 $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$ בקטע $I = [1,4]$. f לא רציפה בקטע I ולכן לא מקבלת ערך מינימום.

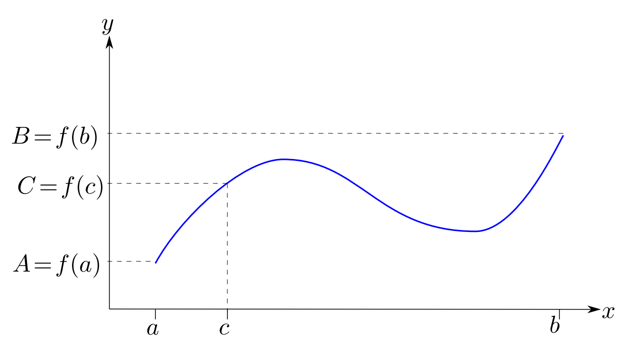


5.5 תורת. (משפט חסימות של פוקציה של ויירשטראס)
אם פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$, אז היא חסומה בקטע הזה. ז"א קיימים מספרים m ו- M כך ש

$$m \le f(x) \le M \qquad \forall x \in [a,b] \ .$$

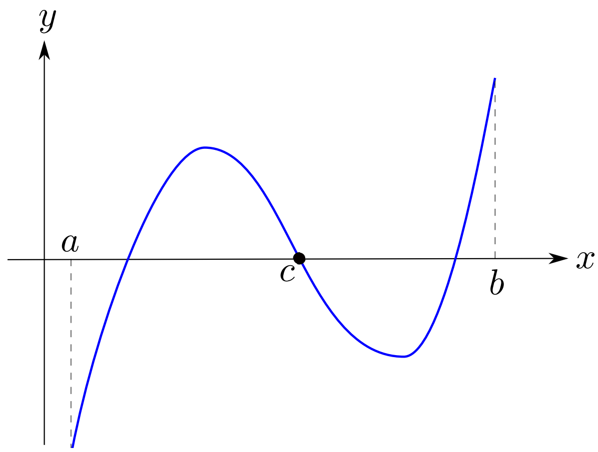


5.6 משפט. (1 משפט ערך הביניים)
אם פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ ומקבלת בקצוות הקטע ערכים שונים (ז"א $A = f(a)$, $B = f(b)$, $A \neq B$), אז $f(x)$ מקבלת בקטע הזה את כל הערכים בין A ו- B.



5.7 משפט. (משפט ערך הביניים 2 (משפט בולזנו))
נניח ש $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ ובקצוות הקטע $f(x)$ מקבלת ערכים מסימנים שונים, כלומר (ז"א $f(a)\cdot f(b)<0$) אז קיימת לפחות נקודה אחד c, כך ש $a<c<b$ ו-

$$f(c)=0\ .$$



5.8 דוגמא. הוכח כי למשוואה

$$e^{2x+1}+x^2-5=0$$

יש שורש ממשי אחת ומצא אותו עם דיוק של שתי ספרות.

פיתרון.
נגדיר פונקציה

$$f(x)=e^{2x+1}+x^2-5\ .$$

שים לב

$$f(0)=-5+e<0\ ,\qquad f(1)=-4+e^3>0\ .$$

מכיוון ש- $f(x)$ פונקציה אלמנטרית ומוגדרת בקטע $[0,1]$, אז f רציפה בקטע זו. $f(0)<0$ ו- $f(1)>0$
לכן לפי משפט בולזנו (משפט 5.7) קיים c בתחום $0<c<1$ כך ש- $f(c)=0$.

בנוסף f חח"ע בקטע $I=[0,1]$ ולכן f עולה ממש או יורדת ממש (ומכיין ש $f(0)<f(1)$ אז f עולה ממש).
לכן הנקודה שבה $f(c)=0$, יחידה.

$f(0)$	$-2.281<0$
$f(0.1)$	$-1.669<0$
$f(0.2)$	$-0.904<0$
$f(0.3)$	$0.043>0$

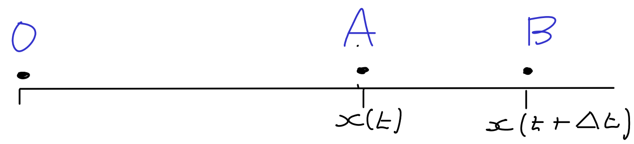
לכן $0.2<c<0.3 \Leftarrow c\approx 0.2$.

$f(0.29)$	$-0.06<0$
$f(0.3)$	$0.043>0$

$0.29<c<0.3 \Leftarrow c\approx 0.29$. ■

מושג הנגזרת

1 המשמעות הפיזית של נגזרת



נניח שגוף הנמצא בנקודה $x(t)$ בזמן התחלתי t, נע לנקודה $x(t+\Delta t)$ ומסתיים שם בזמן סופי $t+\Delta t$. המהירות הממוצעת היא

$$\bar{\mathrm{v}} = \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \ .$$

מכאן המהירות הרגעית בנקודה A היא

$$\mathrm{v} = \lim_{\Delta t\to 0} \bar{\mathrm{v}} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = x'(t) \ .$$

ז"א המשמעות הפיזית של הנגזרת היא מהירות.

2 הגדרת הנגזרת

5.9 הגדרה: (הנגזרת)
הנגזרת של פונקציה $f(x)$ בנקודה x תסומן $f'(x)$ ותוגדר

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \ .$$

דוגמאות.

.1 $\underline{f(x)=c}$

$$c' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = 0 \ .$$

.2 $\underline{f(x)=x}$

$$x' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x} = 1 \ .$$

.3 $\underline{f(x)=x^2}$

$$\begin{aligned}(x^2)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2\Delta x\cdot x+\Delta x^2-x^2}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x\cdot x+\Delta x^2}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}(2\cdot x+\Delta x)\\ &=2x\ .\end{aligned}$$

.4 $\underline{f(x)=x^n}$

$$\begin{aligned}(x^n)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2+\cdots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^{n-k}\Delta x^k+\cdots+\Delta x^n-x^n}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2+\cdots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^{n-k}\Delta x^k+\cdots+\Delta x^n}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x+\cdots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^{n-k}\Delta x^{k-1}+\cdots+\Delta x^{n-1}\right)\\ &=nx^{n-1}\ .\end{aligned}$$

.5 $\underline{f(x)=\ln x}$

$$\begin{aligned}(\ln x)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\ln\left[\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x}\right]\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x}}\right]\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]\\ &=\frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]\\ &=\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\lim_{\Delta x\to 0}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]\right)\\ &=\frac{1}{x}\cdot\ln(e)\\ &=\frac{1}{x}\ .\end{aligned}$$

.6 $f(x) = \frac{1}{x}$

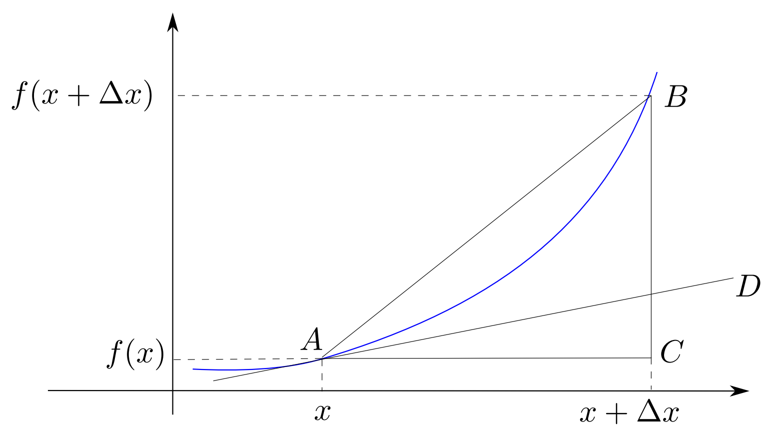
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{x \cdot (x+\Delta x) \cdot \Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x \cdot (x+\Delta x)} = \frac{-1}{x^2} \ .$$

.7 $\sqrt{x}$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ .$$

---

3 משמעות הגאומטרית של נגזרת



השיפוע של הגרף בנגודה A מוגדרת להיות השיפוע של המשיק לגרף בנקודה A - ז"א השיפוע של הישר AD. יהי A הנקודה $(x, f(x))$ ו- B הנקודה $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$. אז המיתר AB מתלכד עם המשיק AD בגבול כאשר B מתקרב לנקודה A, וזה מתרחש כאשר $\Delta x \to 0$. לכן ניתן לחשב השיפוע של המשיק ע"י השיפוע של הישר AB בגבול ש- $\Delta x \to 0$. נקבל

$$\text{שיפוע של המשיק} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{BC}{AC} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

אבל אגף הימין הוא דווקא הנגזרת של $f(x)$ בנקודה A, לכן מצאנו כי השיפוע של גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה-x שווה להנגזרת בנקודה הזאת.

משוואת משיק ונורמל

5.10 כלל: (משיק ונורמל של גרף)
משוואת הישר המשיק לקו $y=f(x)$ בנקודה x_0 היא

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

משוואת הישר הנורמל לקו $y=f(x)$ בנקודה x_0 היא

$$y-y_0=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

5.11 דוגמא. $f(x)=x^2$. מצא את משוואת המשיק ומשוואת הנורמל בנקודה $x=2$.

פיתרון.
משוואת המשיק:

$$y-2^2=2\cdot 2(x-2) \qquad \Rightarrow \qquad y-4=4(x-2)\ .$$

ומשוואת הנורמל:

$$y-2^2=\frac{-1}{2\cdot 2}(x-2) \qquad \Rightarrow \qquad y-4=-\frac{1}{4}(x-2)\ .$$

■

גזירות

5.12 הגדרה: (נגזרת החד צדדי)
הנגזרת החד-צדדי מצד שמאל של $f(x)$ בנקודה a מוגדרת להיות הגבול

$$f'(a^-)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

והנגזרת החד-צדדי מצד ימין של $f(x)$ בנקודה a מוגדרת להיות הגבול

$$f'(a^+)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\ .$$

5.13 הגדרה: (גזורית)
$f(x)$ נקראת גזירה בנקודה a אם הנגזרת מצד שמאל שווה לנגזרת מצד ימין בנקודה a , כלומר

$$f'(a^-)=f'(a^+)\ .$$

5.14 משפט. (קשר בין גזירות ורציפות)
אם פונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה a אז היא רציפה בנקודה הזאת.

בכיוון ההפוך זה לא מתקיים, ז"א אם פונקציה רציפה בנקודה a, היא לא בהכרח גזירה בה.

5.15 דוגמא.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} .$$

נבדוק אם $f(x)$ רציפה בנקודה $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0 , \qquad \lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0 .$$

לכן $f(x)$ רציפה בנקודה $x = 0$.

נבדוק אם $f(x)$ גזירה בנקודה $x = 0$:

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 ,$$
$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 .$$

לכן מכיוון ש- $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ אז f אינה גזירה ב- $x = 0$. ז"א לא קיים משיק בנקודה $x = 0$.

5.16 דוגמא.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} .$$

נבדוק אם $f(x)$ רציפה בנקודה $x = 0$. שים לב $\sin(\frac{1}{x})$ חסומה ולפיו

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 .$$

שים לב $f(0) = 0$ ולכן $f(x)$ רציפה ב- $x = 0$.

נבדוק אם $f(x)$ גזירה בנקודה $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(0+\Delta x)\sin\left(\frac{1}{0+\Delta x}\right) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x \cdot \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)}{\Delta x} .$$

הגבול לא קיים ולכן $f(x)$ אינה גזירה ב- $x = 0$.

כללי הנגזרת

5.17 משפט. (כללים יסודיים של נגזרות)

1. <u>סכום של פונקציות</u>
$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x) \ .$$
2. <u>מכפלת פונקציה בסקלר</u>
$$(\alpha f(x))' = \alpha f'(x) \ .$$
3. <u>כלל הכפל</u>
$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \ .$$
4. <u>כלל המנה</u>
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2} \ .$$
5. <u>כלל השרשרת</u>
$$[f\left(g(x)\right)]' = f\left(g\right)'_g \cdot g(x)'_x \ .$$

דוגמאות

5.18 דוגמא.
$$\left[\ln\left(x^4-2x^2+6\right)\right]' = \frac{1}{x^4-2x^2+6}\cdot\left(4x^3-4x\right)$$

5.19 דוגמא.
$$\left[7^{x^2-4x}\right]' = 7^{x^2-4x}\cdot\ln 7\cdot(2x-4) \ .$$

5.20 דוגמא. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ בנקודה $A(\pi/2,2)$.

פיתרון.
$$f'(x) = 8\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{2} \ .$$
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -8\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} = -8\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = -2 \ .$$
משוואת המשיק:
$$y-2 = -2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$
משוואת הנורמל:
$$y-2 = \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$
■

זווית ביו קווים עקומים

5.21 דוגמא. מצא את הזווית בין הקווים $y=\frac{x}{2}$ ו- $y=\frac{1}{1+x}$ בנקודת החיתוך שלהם שבה $x>0$. צייר את הסקיצה המתאימה.

פיתרון.
נקודת חיתוך:

$$\frac{x}{2}=\frac{1}{x+1} \qquad \Rightarrow \qquad x(x+1)=2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2+x-2=0 \qquad \Rightarrow \qquad x=1 \ .$$

נקודת חיתוך: $(1,0.5)$

שיפוע של y_1:

$$y_1=\frac{x}{2} \ , \qquad y_1'=\frac{1}{2} \ , \qquad y_1'(1)=\frac{1}{2}=m_1 \ .$$

שיפוע של y_2:

$$y_2=\frac{1}{x+1} \ , \qquad y_2'=\frac{-1}{(x+1)^2} \ , \qquad y_1'(1)=\frac{-1}{4}=m_2 \ .$$

חישוב הזווית בין y_1 ו- y_2:

$$\tan\alpha=\frac{|m_1-m_2|}{1+m_1\cdot m_2}=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{6}{7}$$

כך ש-

$$\alpha=40.6^\circ \ .$$

■

נגזרת של פונקציה סתומה

5.22 דוגמא. נתונה הפונקציה $y(x)$ הניתנת ע"י

$$x^2+y^2=1 \ .$$

מצא את הנגזרת $y'(x)$.
