

חדו"א 2

מועד א'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר,

תשפ"ג סמסטר ב'

השאלון מכיל עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (עמודים בפורמט A4), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות בלבד מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** בלבד מתוך **שתיים**.

שאלות 1-2 חובה

שאלה 1 (20 נק')

נתונה הפונקציה

$$f(x, y) = 2x^2 + y^3 - 2xy + 10$$

(א) (10 נק') מצאו את נקודות המקסימום והמינימום המקומי של הפונקציה $f(x, y)$.

(ב) (10 נק') מצאו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימאלי אותם מקבלת הפונקציה $f(x, y)$ בתחום החסום על ידי הקווים $x = 0, y = 1, x - y = 0$.

שאלה 2 (22 נק')

(א) (10 נק') מצאו את תחום ההתכנסות של טור החזקות

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-x)^n}{3^n \sqrt{n}}$$

וקבעו האם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר בנקודה $x = 6$.

(ב) (12 נק') סרטטו את תחום האינטגרציה, החליפו את סדר האינטגרציה וחשבו:

$$\int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt{-x}}^1 \cos(\pi y^3) dy + \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 \cos(\pi y^3) dy$$

שימו לב: את האינטגרל תוכלו לחשב רק לאחר החלפת סדר האינטגרציה.

יש לפתור 3 שאלות מבין השאלות 3-6

שאלה 3 (16 נק')

נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^2 y^3 - xy^2 + 3xy - 4$ והנקודה $M(1, 1)$.

(א) (12 נק') הראו כי לכל וקטור יחידה \hat{a} מתקיים כי

$$\frac{df}{d\hat{a}}(M) \leq \sqrt{32}$$

(ב) (4 נק') מצאו וקטור $\bar{b} \neq \bar{0}$ הניצב לוקטור $(1, 1, 8)$ ומקביל למישור המשיק לגרף הפונקציה $f(x, y)$ בנקודה M .

שאלה 4 (16 נק')

(א) (12 נק') מצאו את משוואת המישור המכיל את הישרים

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y + 2z + 4 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$$

וקבעו עבור איזה ערך של הפרמטר a תהיה הנקודה $P(2, -2, a)$ שייכת למישור זה.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

(ב) (4 נק') הוכיחו או הפריכו באמצעות דוגמא נגדית: אם הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת אז הסדרה $(a_n^2)_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת.

שאלה 5 (16 נק')

(א) (10 נק') חשבו את נפח הגוף החסום על ידי המשטחים

$$x = 0, y = 0, y + x = 2, z = 0, z = 8 - 2x^2$$

וסרטטו אותו במערכת הצירים xyz .

(ב) (6 נק') פתרו את בעיית קושי

$$\begin{cases} y' = xy + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

שאלה 6 (16 נק')

(א) (12 נק') סרטטו את רבע הטבעת

$$D : \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

ומצאו את המסה שלה, בהינתן צפיפות המסה $\mu(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

(ב) (4 נק') הגדירו מהו טור מתכנס בתנאי ותנו דוגמא לטור כזה.

יש לפתור שאלה 1 מבין השאלות 7-8

שאלה 7 (10 נק')

על המשטח $z = \sqrt{y+2}$ מצאו את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $A(-1, 1, 0)$.

שאלה 8 (10 נק')

קבעו עבור אילו ערכים של הפרמטר z יתכנס הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n^{\frac{1}{z}}}$$

פתרונות

שאלה 1

א) תחילה, נמצא את הנקודות הקריטיות של הפונקציה

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4x - 2y \\ 3y^2 - 2x \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 3y^2 = 2x \end{cases}$$

על ידי הצבה של המשוואה הראשונה במשוואה השנייה נקבל

$$6x^2 = x \Rightarrow x = 0, \frac{1}{6}$$

כלומר, מתקבלות הנקודות הקריטיות הבאות

$$P_1(0, 0), P_2\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$$

בכדי לסווג את הנקודות הקריטיות, נחשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני ונשתמש במבחן הנגזרת השנייה

$$f''_{xx} = 4, f''_{yy} = 6y, f''_{xy} = f''_{yx} = -2$$

ולכן

$$\Delta(P_1) = 4 \cdot 0 - (-2)^2 = -4 < 0$$

$$\Delta(P_2) = 4 \cdot \frac{6}{3} - (-2)^2 = 4 > 0$$

ולכן, הנקודה P_1 היא נקודת אוכף ו- P_2 היא נקודת קיצון ומכיוון ש- $f''_{xx}(P_2) > 0$ וגם $f''_{yy}(P_2) > 0$ מדובר בנקודת מינימום.

ב) תחילה, נשים לב שהנקודה P_2 נמצאת בפנים התחום והנקודה P_1 היא אחד הקודקודים ולכן P_2 היא הנקודה הקריטית הפנימית היחידה בתחום. נסמן את הקודקודים הנוספים ב-

$$P_3(0, 1), P_4(1, 1)$$

כעת נבדוק נקודות קריטיות על השפה ומכיוון שהיא מורכבת משלושה קווים, נפריד למקרים

• הישר האנכי נתון על ידי

$$\begin{cases} x = 0 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

ועל ידי הצבה של $x = 0$ בפונקציה נקבל

$$g_1(y) = f(0, y) = y^3 + 10$$

שהנקודות הקריטיות שלו מתקבלות כאשר

$$g_1'(y) = 3y^2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow y = 0$$

כלומר, בנקודה $A = P_1$.

• הישר האופקי נתון על ידי

$$\begin{cases} y = 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ועל ידי הצבה של $y = 1$ בפונקציה נקבל

$$g_2(x) = f(x, 1) = 2x^2 + 1 - 2x + 10 = 2x^2 - 2x + 11$$

שהנקודות הקריטיות שלו מתקבלות כאשר

$$g_2'(x) = 4x - 2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

כלומר, נקודה קריטית מתקבלת בנקודה $P_5 \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

• הישר האלכסוני נתון על ידי

$$\begin{cases} y = x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ועל ידי הצבה של $x = 0$ בפונקציה נקבל

$$g_3(x) = f(x, x) = x^3 + 10$$

שהנקודות הקריטיות שלו מתקבלות כאשר

$$g_3'(x) = 3x^2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0$$

כלומר, בנקודה $A = P_1$.

כאשר נציב את כל הנקודות הקריטיות שהתקבלו ואת הקודקודים של המשולש, נקבל את הערכים הבאים

$$f(P_1) = g_1(0) = 10$$

$$f(P_2) = \frac{539}{54} \approx 9.98$$

$$f(P_3) = g_1(1) = 11$$

$$f(P_4) = g_3(1) = 11$$

$$f(P_5) = g_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{2} = 10.5$$

לכן, המקסימום של הפונקציה בתחום הוא $f(P_3) = f(P_4) = 11$ והמינימום הוא $f(P_2) = \frac{539}{54}$.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245,84 | www.sce.ac.il | חייג: *מפספס

שאלה 2

א) נציב $z = 3 - x$ ונקבל את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n \sqrt{n}}$$

את רדיוס ההתכנסות של הטור נחשב באמצעות נוסחאת קושי

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (3 \sqrt[n]{n}) = 3$$

כלומר, הטור מתכנס בהחלט עבור $|z| < 3$ ומתבדר עבור $|z| > 3$. כעת נבדוק את התכנסות הטור בקצוות הקטע. אם נציב את הערך $z = 3$ נקבל את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

שהוא טור p -הרמוני מתבדר (כאן $\frac{1}{2} < p$). אם, לעומת זאת, נציב $z = -3$ נקבל את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

שהוא טור מתכנס, לפי מבחן לייבניץ (פירוט בהמשך), ומכאן שהטור מתכנס בתנאי עבור $z = -3$ (שכן טור הערכים המוחלטים מתבדר לפי המקרה $z = 3$).

שימו לב: בדיקת ההתכנסות לפי מבחן לייבניץ מוכיחה התכנסות אבל לא התכנסות בתנאי, את זו ניתן להסיק רק מכך שהטור מתכנס אבל לא מתכנס בהחלט.

כעת, נבצע בדיקת התכנסות לטור עבור $z = -3$. בכדי להראות כי הטור מתכנס לפי מבחן לייבניץ, מספיק לשים לב כי הסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ היא סדרה חיובית, יורדת (שכן הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ פונקציה יורדת בתחום $(0, \infty)$) ושואפת ל-0.

אם כן, תחום ההתכנסות הוא $3 \leq z < -3$ מהצבה של $z = 3 - x$ נקבל $-3 \leq 3 - x < 3$, כלומר תחום ההתכנסות של הטור הוא הקטע $0 < x \leq 6$ כאשר ההתכנסות היא בהחלט עבור $0 < x < 6$ וההתכנסות ב- $x = 6$ היא בתנאי.

ב) נרשום

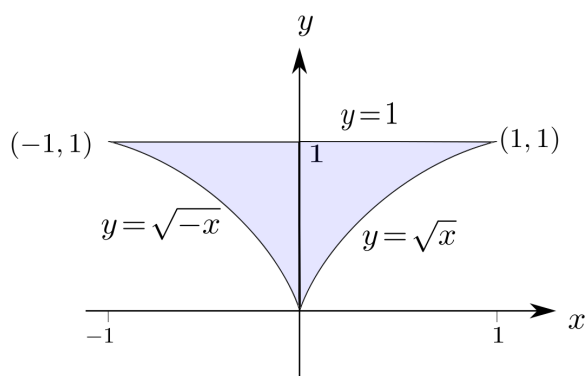
$$I = \int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt{-x}}^1 \cos(\pi y^3) dy + \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 \cos(\pi y^3) dy = \iint_D \cos(\pi y^3) dx dy$$

כאשר התחום D נתון על ידי

$$D = \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{-x} \leq y \leq 1 \end{array} \right\} \cup \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} \leq y \leq 1 \end{array} \right\} = \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 \\ -y^2 \leq x \leq y^2 \end{array} \right\}$$

ולכן,

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \cos(\pi y^3) dx dy \\ &= \int_0^1 dy \int_{-y^2}^{y^2} \cos(\pi y^3) dx \\ &= \int_0^1 2y^2 \cos(\pi y^3) dy \\ &= \left(\frac{2}{3\pi} \sin(\pi y^3) \right) \Big|_{y=0}^1 = 0 \end{aligned}$$



שאלה 3

א) נחשב, תחילה, את הגרדיאנט של הפונקציה בנקודה

$$\begin{aligned} \nabla f &= \begin{pmatrix} 2xy^3 - y^2 + 3y \\ 3x^2y^2 - 2xy + 3x \end{pmatrix} \\ \nabla f(M) &= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לכן, לכל וקטור יחידה \hat{a} מתקיים

$$\frac{df}{d\hat{a}}(M) = \nabla f(M) \cdot \hat{a} = |\nabla f(M)| |\hat{a}| \cos \theta$$

כאשר θ היא הזווית בין שני הוקטורים. מכיוון ש- $|\nabla f(M)| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$ וגם $|\hat{a}| = 1$ ומכיוון ש- $\cos \theta \leq 1$ מתקיים כי

$$\frac{df}{d\hat{a}}(M) \leq \sqrt{32}$$

ב) בכדי שהוקטור יהיה מקביל למישור המשיק, עליו להיות מאונך לנומרל שלו $\bar{N} = (4, 4, -1)$ (שכן הנורמל למישור המשיק לגרף הפונקציה $z = f(x, y)$ בנקודה M הוא $(f'_x(M), f'_y(y), -1)$). מצד שני, על הוקטור להיות מאונך לוקטור $(1, 1, 8)$ ועל כן, ניתן לבחור את הוקטור

$$\bar{b} = (4, 4, -1) \times (1, 1, 8) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = (33, -33, 0)$$

כל וקטור אחר המקיים את דרישות השאלה, מתקבל ככפל בסקלר של הוקטור הזה.

שאלה 4

א) נזכור כי וקטור הכיוון של ישר הנתון כחיתוך של שני מישורים, צריך להיות ניצב לנומרלים שלהם, על כן נחשב את וקטורי הכיוון של הישרים הללו

$$\bar{a} = (1, 1, 0) \times (0, 1, 2) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2, -2, 1)$$

$$\bar{b} = (2, 1, 0) \times (1, 0, 1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, -1)$$

הישרים אינם מקבילים או מתלכדים אך בשאלה נאמר כי ישנו מישור המכיל את שני הישרים, כלומר הם אינם מצטלבים. נוודא זאת על ידי כך שנבדוק כי המרחק ביניהם הוא 0 (כלומר, הם נחתכים). נבחר נקודה על כל אחד מהישרים (על ידי הצבה של $y = 0$ במערכת אחת ו- $x = 0$ במערכת השניה) $Q(1, 0, -2)$ ו- $R(0, 2, -1)$ ונחשב את המכפלה הוקטורית בין כיווני הישרים

$$\bar{a} \times \bar{b} = (2, -2, 1) \times (1, -2, -1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (4, 3, -2)$$

המרחק בין הישרים נתון על ידי

$$d = \frac{|\vec{QR} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})|}{|\bar{a} \times \bar{b}|} = \frac{|(-1, 2, 1) \cdot (4, 3, -2)|}{|(4, 3, -2)|} = \frac{(-1) \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{4^2 + 3^2 + (-2)^2}} = 0$$

נעיר כי החישוב למעלה לא היה לשווא מכיוון שברוב התוצאות שלו נשתמש בהמשך. תחילה, הנורמל למישור המכיל את שני הישרים נתון על ידי המכפלה הוקטורית בין וקטורי הכיוון $\bar{N} = \bar{a} \times \bar{b} = (4, 3, -2)$ ומשוואת המישור מתקבלת על ידי (לאחר הצבה של הנקודה Q)

$$4(x - 1) + 3(y - 0) - 2(z + 2) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 2z - 8 = 0$$

בכדי לבדוק עבור איזה פרמטר a הנקודה $P(2, -2, a)$ תהיה מוכלת במישור, נציב את הנקודה במשוואת המישור

$$8 - 6 - 2a - 8 = 0 \Rightarrow a = 3$$

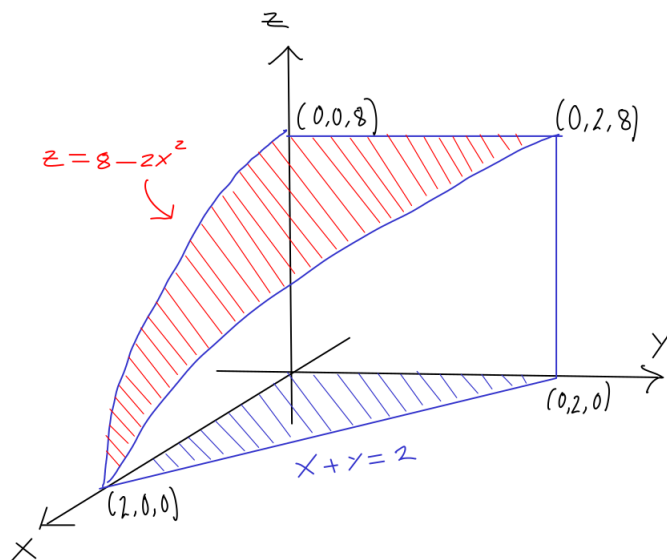
(ב) הטענה לא נכונה. כדוגמא נגדית, ניקח את הסדרה $a_n = (-1)^n$, שהיא סדרה מתבדרת למרות שהסדרה $a_n^2 = 1$ היא סדרה מתכנסת (קבועה).

שאלה 5

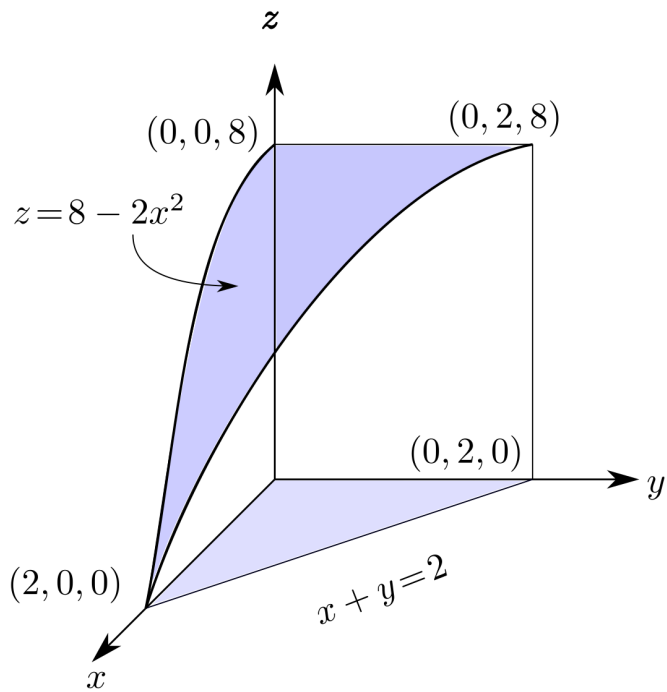
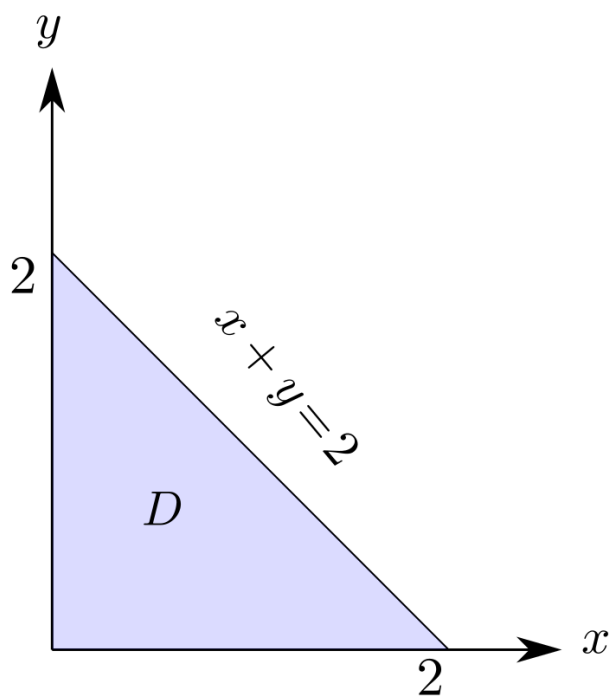
(א) הגוף בשאלה הוא הנפח החסום מתחת לגרף הפונקציה $z = 8 - 2x^2$ מעלה המשולש במישור שקודקודיו הם $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$. לכן, הנפח נתון על ידי

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (8 - 2x^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (8 - 2x^2) \, dy \\ &= \int_0^2 (8 - 2x^2) (2 - x) \, dx \\ &= \int_0^2 (16 - 8x - 4x^2 + 2x^3) \, dx \\ &= \left(16x - 4x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 \right) \Big|_{x=0}^2 = \frac{40}{3} \end{aligned}$$

סרטוט ידני:



סרטוט ממוחשב:



(ב) זו משוואה הניתנת להפרדת משתנים

$$\begin{aligned} y' &= xy + x = x(y + 1) \\ \Rightarrow \int \frac{dy}{y + 1} &= \int x dx \\ \Rightarrow \ln |y + 1| &= \frac{x^2}{2} + C \\ \Rightarrow y(x) &= Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1 \end{aligned}$$

ואם נציב את תנאי ההתחלה, נקבל

$$1 = y(0) = Ce^0 - 1 \Rightarrow C = 2$$

ולכן, הפתרון לבעית קשוי זו הוא

$$y(x) = 2e^{\frac{x^2}{2}} - 1$$

שאלה 6

(א) אם נרשום

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

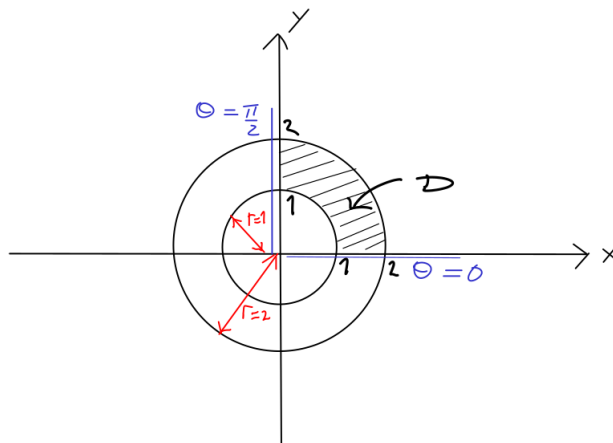
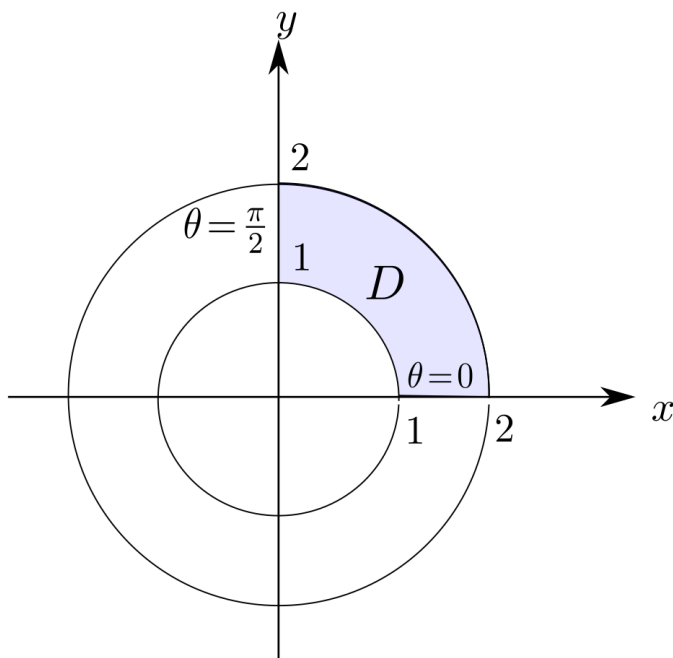
נראה שאי השיויון הראשון שקול לכך ש- $1 \leq \rho \leq 2$. מאי השיויון האחרים מקבלים

$$x = \rho \cos \varphi \geq 0 \Rightarrow \cos \varphi \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \text{ or } \frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$y = \rho \sin \varphi \geq 0 \Rightarrow \sin \varphi \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \pi$$

ולכן, ניתן לתאר את התחום בקואורדינטות קוטביות על ידי

$$D : \begin{cases} 1 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \rho(x, y) dx dy \\ &= \iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \iint_D \frac{\rho \cos \varphi}{\rho^2} \rho d\rho d\varphi \\ &= \iint_D \cos \varphi d\rho d\varphi \\ &= \int_1^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \\ &= (2 - 1) \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \right) = 1 \end{aligned}$$


שאלה 7

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

פי משוואת המישור אבל גם $x = -1$ שכן המרחק שלה מהנקודה A הוא

$$d(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + [(y-1)^2 + y + 2]}$$

מכיוון שהמשטח מקביל לציר ה- x , ניתן לשנות את קואורדינטה זו מבלי "לצאת" מהמשטח ולכן קל לראות שבנקודה שבה המרחק הוא מינימאלי, הגורם $(x-1)^2$ יתאפס, כלומר $x = 1$. לכן,

$$d(A, B) = \sqrt{(y-1)^2 + y + 2} = \sqrt{y^2 - y + 3} = \sqrt{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}}$$

יהיה מינימאלי כאשר הגורם $\left(y - \frac{1}{2}\right)^2$ יתאפס, כלומר כאשר $y = \frac{1}{2}$ (ניתן היה לחילופין לגזור את הפונקציה לפי y ולהסביר מדוע הנקודה הקריטית היא מינימום). לסיכום, הקואורדינטות של הנקודה הקרובה ביותר ל- A המשטח נתונות על ידי

$$B\left(-1, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$$

שאלה 8

תחילה, נזכור כי $\cos(\pi n) = (-1)^n$ ולכן, ניתן לכתוב טור זה בצורה הבאה

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{z}}}$$

כעת, נשים לב שכל עוד $z < 0$, החזקה של n במכנה שלילית ולכן האיבר הכללי של הטור לא יקיים את התנאי ההכרחי להתכנסות

$$\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{z}}} \not\rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

שכן

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{z}}} \right| = n^{\frac{1}{|z|}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

לכן, נניח כי מעתה $z > 0$ (ונשים לב שעבור $z = 0$ הטור לא מוגדר כלל). נבדוק מתי טור זה מתכנס בהחלט

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{z}}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{z}}}$$

זהו טור p -הרמוני ומתכנס כאשר $\frac{1}{z} > 1$, כלומר כאשר $0 < z < 1$ הטור שלנו מתכנס בהחלט. עבור $0 < \frac{1}{z} \leq 1$ לעומת זאת, טור הערכים המוחלטים מתבדר (מאותה הסיבה), אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{z}}}$ יתכנס בכל זאת (בתנאי) לפי מבחן לייבניץ, שכן הסדרה $\frac{1}{n^{\frac{1}{z}}}$ הינה סדרה חיובית, יורדת ושואפת ל-0 עבור ערכים אלו של z .

לסיכום, הטור שלנו מתכנס בהחלט עבור $0 < z < 1$ ומתכנס בתנאי עבור $1 \leq z$.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון