

חישוביות וסיבוכיות

מועד ב'

ד"ר יוחאי טוויטו, ד"ר ירמיהו מילר .

סמסטר א, תשפ"ה

מספר העמוד הנוכחי ומספר העמודים הכולל בשאלון מופיעים בתחתית כל עמוד. בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות

שאלוני בחינה

- ☒ לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ☐ לשאלון הבחינה יש לצרף כריכה בלבד.
- ☐ יש להחזיר את השאלון ביחד עם המחברת/כריכה.

שימוש במחשבוני

- ☐ ניתן להשתמש במחשבון.
- ☒ לא ניתן להשתמש במחשבון.

חומר עזר

- ☒ לא ניתן להשתמש בחומר עזר כלל.
- ☐ ניתן להשתמש בחומר עזר/דף נוסחאות, כמפורט:
- ☐ הבחינה עם חומר פתוח ☑ מותר להשתמש בכל חומר עזר מודפס או כתוב.

עמוד 1 מתוך 6

הנחיות

נא קראו בעיון את ההנחיות הבאות בטרם תתחילו לפתור את הבחינה. מומלץ לקרוא בקצרה את כלל השאלות לפני שמתחילים לפתור את הבחינה. ניתן לענות על השאלות בכל סדר שתרצו.

1. המבחן כולל 5 שאלות. יש לענות על כולן.
2. שאלות הבחינה שוות משקל - כל שאלה 20 נקודות.
3. כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תדלגו על שלבים.
4. המבחן כולל נספחים, לשימושכם. הסתייעו בהם במידת הצורך.
5. הקפידו על כתב יד ברור וקריא.
6. הקפידו לרשום בגדול ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
7. כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבלתם. רק הן נבדקות!
8. ניתן לקחת את השאלון כאשר הבחינה מסתיימת.

בהצלחה!

הבחינה

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

נתון אלפבית הקלט $\Sigma = \{a, b, c\}$ ונתונה השפה הבאה:

$$L = \{a^i b^j c^{2i+3j} \mid i, j \in \mathbb{N}^+\}$$

תארו מכונת טיורינג סטנדרטית (כלומר, במודל הבסיסי) שמכריעה את השפה.

בסעיף זה עליכם לתאר את המכונה בצורה גרפית בעזרת תרשים דיאגרמת מצבים בלבד, ולא בדרכים אחרות. כלומר, לא בעזרת טבלת מעברים, לא בעזרת פסאודו-קוד, וכיוצא באלו.

תזכורת, \mathbb{N}^+ היא קבוצת הטבעיים החיוביים (כלומר, ללא המספר אפס).

סעיף ב' (10 נקודות)

בנומכונת טיורינג סטנדרטית (כלומר, במודל הבסיסי) שמכריעה את השפה הבאה:

$$L = \{x_1 \dots x_k \# y_1 \dots y_k \# z_1 \dots z_k \mid x_i, y_i, z_i \in \{0, \dots, 9\} \wedge \forall_i (z_i \neq x_i \wedge z_i \neq 2y_i \wedge z_i \geq x_i + y_i)\}$$

אתהמכונה יש לתאר בעזרת טבלת המעברים בלבד. אין לתאר את המכונה בעזרת תרשים ו/או פסאודו-קוד (תיאור מילולי).

שאלה 2: וריאציות על מכונות טיורינג (20 נקודות)

נסמן ב- T את מודל מכונת הטיורינג הבסיסי. במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לשני הכיוונים. בתחילת החישוב הראש נמצא בתחילת הקלט.

נסמן ב- O את מודל מכונת הטיורינג עם סרט ימינה בלבד. במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לכיוון אחד בלבד - ימינה. בתחילת החישוב, הקלט ממוקם בקצה השמאלי של הסרט והראש נמצאת בתחילת הקלט. החישוב מתנהל כמו במכונה במודל T למעט כאשר הראש נמצא במשבצת השמאלית ביותר בסרט וצריך לזוז שמאלה - במקרה כזה הראש נשאר במקום ולא זז.

הוכיחו כי המודל T והמודל O שקולים חישובית. כיתבו הוכחה מלאה ומפורטת. אל תדלגו על שלבים. תארו באופן מפורט את פונקציית המעברים בשני כיווני ההוכחה. העזרו בטבלת מעברים בכדי לתאר באופן מלא את פונקציית המעברים.

שאלה 3: התזה של צ'רץ'-טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

נתון הדקדוק הבא. מהי השפה שהדקדוק יוצר? כלומר, מהי $L(G)$? כיתבו את השפה בצורה פורמלית, ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של השפה.

$$\begin{aligned} G &= (V, \Sigma, R, S) , \\ V &= \{S, C, D, E, \$, \#\}, \\ \Sigma &= \{a\} , \\ R &= \{ \end{aligned}$$

$$S \rightarrow \$Ca\# ,$$

$$S \rightarrow a ,$$

$$S \rightarrow \varepsilon ,$$

$$Ca \rightarrow aaC ,$$

$$\$D \rightarrow \$C ,$$

$$C\# \rightarrow D\# ,$$

$$C\# \rightarrow E ,$$

$$aD \rightarrow Da ,$$

$$aE \rightarrow Ea ,$$

$$\$E \rightarrow \varepsilon .$$

}

סעיף ב' (10 נקודות)

נתון הדקדוק הבא. מהי השפה שהדקדוק יוצר? כלומר, מהי $L(G)$? כיתבו את השפה בצורה פורמלית,

ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של השפה.

$$G = (V, \Sigma, R, S) ,$$

$$V = \{S, B, C, H\},$$

$$\Sigma = \{a, b, c\} ,$$

$$R = \{$$

$$S \rightarrow aSBC ,$$

$$S \rightarrow aBC ,$$

$$CB \rightarrow HB ,$$

$$HB \rightarrow HC ,$$

$$HC \rightarrow BC ,$$

$$aB \rightarrow ab ,$$

$$bB \rightarrow bb ,$$

$$bC \rightarrow bc ,$$

$$cC \rightarrow cc .$$

}

שאלה 4: אי כריעות (20 נקודות)

נתונה השפה הבאה:

$$L_{\geq 3} = \{ \langle M \rangle \mid |L(M)| \geq 3 \}$$

$L_{\geq 3}$ מכילה קידודים של מכונות טיורינג שמקבלות לפחות k מילים שונות.

סעיף א' (10 נקודות)

הוכיחו כי $L_{\geq 3}$ שפה קבילה.

סעיף ב' (10 נקודות)

הוכיחו כי $L_{\geq 3}$ לא כריעה.

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

עמוד 5 מתוך 6

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

בעיית סכום התת קבוצה $SUBSETSUM$: בהינתן קבוצת מספרים שלמים $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ומספר שלם t , האם קיימת תת קבוצה $Y \subseteq S$ שסכום איבריה הוא בדיוק t .
בעיית סכום התת קבוצה כשפה פורמלית:

$$SUBSETSUM = \left\{ \langle S, t \rangle \mid t = \sum_{y \in Y} Y \text{ כך ש-} Y \subseteq S \text{ קבוצת תת-קבוצה } S \text{ שלם וקיימת תת-קבוצה } Y \subseteq S \text{ כך ש-} t = \sum_{y \in Y} y \right\}$$

בעיית החלוקה ($PARTITION$) מוגדרת באופן הבא:

בהינתן קבוצת מספרים שלמים $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ האם קיימת חלוקה לשתי קבוצות A_1 ו- A_2 כך ש:

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \bullet$$

$$A_1 \cup A_2 = A \bullet$$

$$\sum_{a_i \in A_1} a_i = \sum_{a_i \in A_2} a_i = \frac{1}{2} \sum_{a_i \in A} a_i \bullet$$

בעיית החלוקה כשפה פורמלית:

$$PARTITION = \left\{ A \mid \begin{array}{l} \text{קבוצת שלמים וקיימות } A_1, A_2 \subset A \text{ כך ש:} \\ A_1 \cup A_2 = A \text{ וגם } A_1 \cap A_2 = \emptyset \text{ וגם } \sum_{a \in A_1} a = \sum_{a \in A_2} a = \frac{1}{2} \sum_{a \in A} a \end{array} \right\}$$

הוכיחו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה $SUBSETSUM$ לשפה $PARTITION$. כלומר:

$$SUBSETSUM \leq_P PARTITION.$$

בשאלה זו עליכם:

סעיף א' (8 נקודות)

להגדיר במפורש את הרדוקציה.

סעיף ב' (6 נקודות)

להראות שהרדוקציה היא רדוקציית התאמה.

סעיף ג' (6 נקודות)

להראות שהרדוקציה פולינומיאלית.