שעור 8
העתקות נורמליות

8.1 ערכים עצמיים של העתקות במרחבי מכפלות פנימיות

משפט 8.1 ערכים עצמיים של העתקה צמודה לעצמה ממשיים

כל הערכים עצמיים של העתקה (מטריצה) צמודה לעצמה הם ממשיים.

הוכחה: נניח $T:V\to V$ העתקה צמודה לעצמה, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v})=\lambda\mathrm{v}$. אז

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \lambda\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &=\lambda\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית})\end{aligned}\ .$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \mathrm{v},\bar{T}(\mathrm{v})\rangle && (\text{הגדרה של העתקה צמודה})\\ &=\langle \mathrm{v},T(\mathrm{v})\rangle && (T \text{ צמודה לעצמה})\\ &=\langle \mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &=\bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית})\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=\bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \quad\Rightarrow\quad (\lambda-\bar{\lambda})\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=0\ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v}\neq 0 \Leftarrow \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\neq 0 \Leftarrow (\lambda-\bar{\lambda})=0 \Leftarrow \lambda=\bar{\lambda}$.

■

משפט 8.2 ערכים עצמיים של העתקה אנטי-הרמיטית מדומים

אם T העתקה אנטי-הרמיטית אז כל הערכים העצמיים של T הם מספרים מדומים.

הוכחה:
נניח $T:V\to V$ העתקה צמודה לעצמה, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v})=\lambda\mathrm{v}$.
אז

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \lambda\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &=\lambda\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית})\end{aligned}\ .$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \mathrm{v},\bar{T}(\mathrm{v})\rangle && (\text{הגדרה של העתקה צמודה})\\ &=\langle \mathrm{v},-T(\mathrm{v})\rangle && (T \text{ אנטי-הרמיטית})\\ &=-\langle \mathrm{v},T(\mathrm{v})\rangle \\ &=-\langle \mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &=-\bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית})\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle = -\bar{\lambda} \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle \quad \Rightarrow \quad (\lambda + \bar{\lambda}) \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle = 0 \ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v} \neq 0 \Leftarrow \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle \neq 0 \Leftarrow (\lambda+\bar{\lambda}) = 0 \Leftarrow \lambda = -\bar{\lambda}$.

■

משפט 8.3 פולינום אופייני של העתקה צמודה לעצמה מתפרק לגורמים ליניארים ממשיים

תהי T העתקה (מטריצה) צמודה לעצמה.

(1 הפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים ליניאריים.

(2 השורשים של הפולינום האופייני של T ממשיים.

הוכחה: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T : V \to V$ העתקה ליניארית. תהי $[T]_B$ המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס B. עם $\dim(V) = n$ אז $[T]_B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אז הפולינום האופייני של $[T]_B$ הוא פולינום מסדר n אם מקדמים מרוכבים:

$$m_T(x) = a_0 + a_1 x + \ldots x^n \ ,$$

כאשר $a_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n$.
לפי המשפט היסודי של האלגברה יש לפולינום הזה פירוק לגורמים ליניאריים:

$$m_T(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + x^n = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n) \ ,$$

$\lambda_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n$.
השורשים של m_T הם הערכים העצמיים של T. לפי משפט 8.1, אם T צמודה לעצמה אז כל הערכים העצמיים של T הם מספרים ממשיים.
כלומר, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$.

אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז הפולינום האופייני של $[T]_B$ הוא פולינום מסדר n עם מקדמים ממשיים:

$$m_T(x) = a_0 + a_1 x + \ldots x^n \ ,$$

כאשר $a_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. מכאן ההוכחה היא אותה דבר של המקרה של $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. ■

משפט 8.4 ערך מוחלט של כל ערך עצמי של העתקה אוניטרית שווה 1

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbb{C}$, ויהי T העתקה $T : V \to V$ אוניטרית. אז הערך מוחלט של כל ערך עצמי של T שווה ל 1.

הוכחה:
נניח $T : V \to V$ העתקה אוניטרית, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v}) = \lambda \mathrm{v}$.
אז

$$\begin{aligned} \langle T(\mathrm{v}), T(\mathrm{v})\rangle &= \langle \lambda \mathrm{v}, \lambda \mathrm{v}\rangle && \text{(v וקטור עצמי של } T\text{)} \\ &= \lambda \langle \mathrm{v}, \lambda \mathrm{v}\rangle && \text{(ליניאריות של מכפלה פנימית)} \\ &= \lambda\bar{\lambda} \langle \mathrm{v}, \lambda \mathrm{v}\rangle && \text{(ליניאריות חלקית של מכפלה פנימית)} \end{aligned} .$$

מצד שני

$$\begin{aligned} \langle T(\mathrm{v}), T(\mathrm{v})\rangle &= \langle \mathrm{v}, \bar{T} T(\mathrm{v})\rangle && \text{(הגדרה של העתקה צמודה)} \\ &= \langle \mathrm{v}, I(\mathrm{v})\rangle && \text{(} T \text{ אוניטרית)} \\ &= \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle \end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\bar{\lambda}\,\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle = \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \quad \Rightarrow \quad (\lambda\cdot\bar{\lambda}-1)\,\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle = 0\ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v}\neq 0 \Leftarrow \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \neq 0 \Leftarrow (\lambda\cdot\bar{\lambda}-1)=0 \Leftarrow \lambda\bar{\lambda}=1 \Leftarrow |\lambda|^2=1$.

■

8.2 העתקות ומטריצות נורמליות

הגדרה 8.1 העתקה נורמלית

1) העתקה $T:V\to V$ במרחב מכפלה פנימית נקראת העתקה נורמלית אם

$$T\cdot\bar{T}=\bar{T}\cdot T\ .$$

2) מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת מטריצה נורמלית אם

$$A\cdot\bar{A}=\bar{A}\cdot A\ .$$

8.3 דוגמאות של העתקות נורמליות

דוגמה 8.1

הוכיחו: העתקה (מטריצה) צמודה לעצמה היא נורמלית.

פתרון:

אם T צמודה לעצמה אז $\bar{T}=T$, לכן

$$T\cdot\bar{T}=T^2=\bar{T}\cdot T\ .$$

דוגמה 8.2

העתקה (מטריצה) אנטי-הרמיטית היא נורמלית.

פתרון:

אם T אנטי-הרמיטית, אז $\bar{T}=-T$, לכן

$$T\cdot\bar{T}=T\cdot(-T)=(-T)\cdot T=\bar{T}\cdot T\ .$$

דוגמה 8.3

העתקה (מטריצה) אוניטרית היא נורמלית.

פתרון:

אם T אוניטרית, אז

$$T\cdot\bar{T}=I\ . \tag{\#1}$$

נכפיל (#1) מצד ימין ב- T:

$$T\cdot \bar{T}\cdot T = I\cdot T \qquad \Rightarrow \qquad T\cdot \left(\bar{T}\cdot T\right) = T\ . \tag{\#2}$$

מכאן

$$\bar{T}\cdot T = I\ . \tag{\#3}$$

לכן מ- (#1) ו- (#3):

$$T\cdot \bar{T} = I = \bar{T}\cdot T\ .$$

דוגמה 8.4

קבעו אם המטריצה $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$

א) אורתוגונלית,

ב) סימטרית,

ג) אנטי-סימטרית,

ד) נורמלית.

פתרון:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

א) A אינה אורתוגונלית.

ב) A אינה סימטרית.

ג) A אינה אנטי-סימטרית.

ד)

$$A\cdot A^t = A^t\cdot A = \begin{pmatrix} 12 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

לכן A נורמלית.

דוגמה 8.5

מטריצה $A=\begin{pmatrix} 2 & 2i \\ 2 & 4+2i \end{pmatrix}$ אינה אוניטרית, אינה הרמיטית, ואינה אנטי-הרמיטית, אבל היא נורמלית כי $\bar{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2i & 4-2i \end{pmatrix}$ ולכן

$$A\cdot \bar{A} = \bar{A}\cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 8+8i \\ 8-8i & 24 \end{pmatrix}$$

דוגמה 8.6

מטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ אינה נורמלית כי $\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -i & 3\end{pmatrix}$ ולכן

$$A\cdot\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -i & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3i\\ -3i & 9\end{pmatrix}$$

$$\bar{A}\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -i & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 10\end{pmatrix}$$

ראינו קודם (במשפט 8.5) כי הנומרליות היא תנאי הכרחי ללכסינות אונטריות. האם זה תנאי מספיק?

במקרה של $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ זה לא נכון.

דוגמה נגדית: $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ מטריצה נומרלית כי $AA^t=A^tA$ אבל A אינה לכסינה כי

$$p_A(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+2$$

אינו מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{R}$. לכן A גם לא לכסינה אורתוגונלית.

אותה המטריצה מעל $\mathbb{C}$ היא לכסינה אוניטרית באמצעות המטריצה האוניטרית $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. אנחנו נוכיח בהמשך שנומרליות היא תנאי הכרחי ומספיק ללכסון אוניטרי מעל $\mathbb{C}$.

דוגמה 8.7

הוכיחו או הפריכו: כל מטריצה סימטרית (לאו דווקא ממשית) היא נורמלית.

פתרון:

דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 2\end{pmatrix}$$

סימטרית (לא הרמיטית).

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 2\end{pmatrix}$$

$$A\cdot\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 5\end{pmatrix}$$

$$\bar{A}\cdot A=\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -i\\ i & 5\end{pmatrix}$$

$A\cdot\bar{A}\neq\bar{A}\cdot A$, לכן A לא נורמלית.

דוגמה 8.8

תהי A מטריצה נורמלית ו- Q מטריצה אוניטרית. הוכיחו כי $\bar{Q}\cdot A\cdot Q$ היא מטריצה נורמלית.

פתרון:
נסמן $B=\bar{Q}AQ$. אז

$$\begin{aligned} B\cdot\bar{B} &= \left(\bar{Q}AQ\right)\cdot\overline{\left(\bar{Q}AQ\right)} \\ &= \left(\bar{Q}AQ\right)\cdot\left(\bar{Q}\bar{A}Q\right) \\ &= \bar{Q}A\underbrace{Q\bar{Q}}_{=I}\bar{A}Q \\ &= \bar{Q}A\bar{A}Q \\ &= \bar{Q}\bar{A}AQ \qquad \text{(כי } A \text{ נורמללית)}\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{B}\cdot B &= \overline{\left(\bar{Q}AQ\right)}\cdot\left(\bar{Q}AQ\right) \\ &= \left(\bar{Q}\bar{A}Q\right)\cdot\left(\bar{Q}AQ\right) \\ &= \bar{Q}\bar{A}\underbrace{Q\bar{Q}}_{=I}AQ \\ &= \bar{Q}\bar{A}AQ\ . \end{aligned}$$

ז"א $B\cdot\bar{B}=\bar{B}\cdot B$ ולכן B נורמלית.

דוגמה 8.9

תהי T העתקה נורמלית ב- V. אז $T-\lambda I$ היא העתקה נורמלית לכל סקלר λ.

פתרון:

$$\begin{aligned} (T-\lambda I)\cdot\overline{(T-\lambda I)} &= (T-\lambda I)\cdot\left(\bar{T}-\bar{\lambda}I\right) \\ &= T\bar{T}-\bar{\lambda}T-\lambda\bar{T}+(\lambda\bar{\lambda})I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{(T-\lambda I)}\cdot(T-\lambda I) &= \left(\bar{T}-\bar{\lambda}I\right)\cdot(T-\lambda I) \\ &= \bar{T}T-\lambda\bar{T}-\bar{\lambda}T+(\lambda\bar{\lambda})I \end{aligned}$$

T נרומלית, לכן $T\cdot\bar{T}=\bar{T}\cdot T$. מכאן

$$(T-\lambda I)\cdot\overline{(T-\lambda I)}=\overline{(T-\lambda I)}\cdot(T-\lambda I)$$

לכן $T-\lambda I$ העתקה נורמלית.
ראינו קודם (במשפט 8.5) שנורמליות היא תנאי הכרחי ללכסינות אוניטריות. ז"א אם מטריצה לכסינה אוניטרית, אז היא נורמלית. נוכיח בהמשך שבמקרה של מרוכבים, שנורמליות היא גם תנאי מספיק ללכסינות אוניטריות. כלומר אם מטריצה נורמלית אז היא לכסינה אוניטרית מעל $\mathbb{C}$.

במקרה של $\mathbb{R}$, התנאי הזה לא מספיק. ראינו קודם דוגמה (דוגמה 8.7) נגדית. דרוש תנאי נוסף.

8.4 העתקה לכסינה אוניטרית ומטריצה לכסינה אוניטרית

הגדרה 8.2 העתקה לכסינה אוניטרית

(1) תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. A נקראת לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה אוניטרית Q כך ש-

$$D = Q^{-1}AQ$$

כאשר D מטריצה אלכסונית.

(2) תהי העתקה ליניארית $T : V \to V$, כאשר V מרחב מכפלה פנימית n ממדי מעל שדה $\mathbb{F}$. T נקראת העתקה לכסינה אוניטרית אם קיים בסיס אורתונורמלי $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ של V, שבו T מיוצגת ע"י מטריצה אלכסונית.

במקרה של $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ למטריצה (העתקה) לכסינה אוניטרית קוראים גם לכסינה אורתוגונלית.

משפט 8.5 העתקה לכסינה אוניטרית היא נורמלית

תהי $T : V \to V$ במרחב מכפלה פנימית V לכסינה אוניטרית. אז T העתקה נורמלית, כלומר

$$T \cdot \bar{T} = \bar{T} \cdot T \ .$$

הוכחה: נניח כי $T : V \to V$ היא העתקה לכסינה אוניטרית. לכן (משפט 7.8) קיים בסיס אורתונורמלי B של V כך ש- $[T]_B$ אלכסונית. נרשום

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

אזי

$$\left[\bar{T}\right]_B = \overline{[T]_B} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

גם מטריצה אלכסונית. מטריצות אלכסוניות מתחלפות, (ראו דוגמה 7.10), לכן $\left[\bar{T}\right]_B \cdot [T]_B = [T]_B \cdot \left[\bar{T}\right]_B$, לכן

$$\left[T \cdot \bar{T}\right]_B = \left[\bar{T} \cdot T\right]_B \quad \Rightarrow \quad T \cdot \bar{T} = \bar{T} \cdot T \ .$$

זה תנאי הכרחי לכך ש- T לכסינה אוניטרית. תוצאה מקבילה מתקיימת גם עבור מטריצות:

אם מטריצה ריבועית A לכסינה אוניטרית, אז

$$A \cdot \bar{A} = \bar{A} \cdot A$$

■

משפט 8.6 העתקה לכסינה אורתוגונלית היא נורמלית וסימטרית

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ותהי $T:V\to V$ העתקה לכסינה אורתוגונלית מעל שדה $\mathbb{R}$.

1) T העתקה נורמלית.

2) T העתקה סימטרית.

תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה לכסינה אורתוגונלית מעל שדה $\mathbb{R}$.

3) A העתקה נורמלית.

4) A העתקה סימטרית.

הוכחה:

1) כבר הוכחנו זאת למעלה במשפט 8.5. T לכסין אורתוגונלי אז קיים בסיס אורתוגונלי B של V כך שהמטריצה המייצגת $[T]_B$ לפי בסיס B אלכסונית:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\ .$$

מכאן

$$[\bar{T}]_B=\overline{[T]_B}=\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1&&&\\&\bar{\lambda}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\bar{\lambda}_n\end{pmatrix}$$

אלכסונית. מטריצות אלכסוניות מתחלפות לכן

$$[\bar{T}]_B\cdot[T]_B=[T]_B\cdot[\bar{T}]_B$$

ולכן T נורמלי.

2) T לכסין אורתוגונלי אז קיים בסיס אורתוגונלי B של V כך שהמטריצה המייצגת $[T]_B$ לפי בסיס B אלכסונית:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\ .$$

T אופרטור ממרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ למרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ לכן $[T]_B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, כלומר האיברים של המטריצה $[T]_B$ ממשיים, כלומר $\lambda_1,\cdots\lambda_n,\in\mathbb{R}$, ובפרט $\bar{\lambda}_1=\lambda_1,\cdots,\bar{\lambda}_n=\lambda_n$. לכן $[\bar{T}]_B=\overline{[T]_B}=[T]_B^t$. המטריצה $[T]_B$ אלכסונית לכן $[T]_B^t=[T]_B$ לכן T סימטרי.

3) נניח ש- $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ לכסינה אורתוגונלית. אז קיימת Q אורתוגונלית ו- D אלכסונית כך ש-

$$A=Q\cdot D\cdot Q^t\ .$$

$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ לכן $\bar{A}=A^t$. מכאן

$$\begin{aligned}
A\cdot\bar{A}=A\cdot A^t&=\left(QDQ^t\right)\left(QDQ^t\right)^t\\
&=QD\underbrace{Q^tQ}_{=I}D^tQ^t && \text{(הגדרה של השיחלוף)}\\
&=QDID^tQ^t && (Q \text{ א"ג אז } Q^tQ=I)\\
&=QDD^tQ^t\\
&=QDDQ^t && (D \text{ אלכסונית אז } D^t=D)\ .
\end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned}
\bar{A}\cdot A=A^t\cdot A&=\left(QDQ^t\right)^t\cdot\left(QDQ^t\right)\\
&=QD^t\underbrace{Q^tQ}_{=I}DQ^t && \text{(הגדרה של השיחלוף)}\\
&=QD^tIDQ^t && (Q \text{ א"ג אז } Q^tQ=I)\\
&=QD^tDQ^t\\
&=QDDQ^t && (D \text{ אלכסונית אז } D^t=D)\ .
\end{aligned}$$

לכן $A\cdot\bar{A}=\bar{A}\cdot A$.

4) נניח ש- $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ לכסינה אורתוגונלית. אז קיימת Q אורתוגונלית ו- D אלכסונית כך ש-

$$A=Q\cdot D\cdot Q^t\ .$$

$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ לכן $\bar{A}=A^t$. מכאן

$$\begin{aligned}
\bar{A}=A^t&=\left(QDQ^t\right)^t\\
&=QD^tQ^t && \text{(הגדרה של השיחלוף)}\\
&=QDQ^t && (D \text{ אלכסונית אז } D^t=D)\\
&=A\ .
\end{aligned}$$

■

דוגמה 8.10

תהי T העתקה לכסינה אוניטרית. הוכיחו כי $\bar{T}$ לכסינה אוניטרית.

פתרון:

T לכסינה אוניטרית לכן לפי משפט 7.8, קיים בסיס אורתונורמלי B כך ש-

$$[T]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\ .$$

מכאן

$$[\bar{T}]_B=\overline{[T]_B}=\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1 &&&\\ &\bar{\lambda}_2&&\\ &&\ddots&\\ &&&\bar{\lambda}_n\end{pmatrix} .$$

קיבלנו כי בבסיס אורתונורמלי B, המטריצה המייצגת של $\bar{T}$ אלכסונית. ז"א קיים בסיס אורתונורמלי שבו המטריצה המייצגת של $\bar{T}$ אלכסונית, לכן $\bar{T}$ לכסינה אוניטרית (לפי הגדרה 8.2).

8.5 משפט לכסון אוניטרי

משפט 8.7 משפט לכסון אוניטרי

(1 תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית במרחב מכפלה פנימית אוניטרי נוצר סופית.
T לכסינה אוניטרית אם"ם היא נורמלית.

(2 תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית במרחב מכפלה פנימית אוקלידי נוצר סופית.
T לכסינה אורתונורמלית מעל $\mathbb{R}$ אם"ם היא סימטרית.

(3 תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית (ממשית או מרוכבת).
A לכסינה אוניטרית אם"ם היא נורמלית.

(4 תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית ממשית. A לכסינה אורתוגונלית אם"ם היא סימטרית.

למה 8.1 ווקטור עצמי וערך עצמי של העתקה וצמודתה

אם v וקטור עצמי של העתקה נורמלית T, השייך לערך עצמי λ.
אז $\bar{\lambda}$ הוא ערך עצמי של $\bar{T}$ ו- v הוא גם וקטור עצמי של $\bar{T}$ השייך ל- $\bar{\lambda}$.

הוכחה: נוכיח קודם שלכל $\mathrm{v}\in V$ מתקיים $\|T(\mathrm{v})\|=\|\bar{T}(\mathrm{v})\|$.

$$\begin{aligned}\|T(\mathrm{v})\|&=\langle T(\mathrm{v}),T(\mathrm{v})\rangle\\ &=\langle \mathrm{v},\bar{T}T(\mathrm{v})\rangle\\ &=\langle \mathrm{v},T\bar{T}(\mathrm{v})\rangle\\ &=\langle \bar{T}(\mathrm{v}),\bar{T}(\mathrm{v})\rangle\\ &=\|\bar{T}(\mathrm{v})\|^2 .\end{aligned}$$

נניח כעת ש- v וקטור עצמי:

$$T(\mathrm{v})=\lambda\mathrm{v} .$$

אז

$$(T-\lambda I)(\mathrm{v})=0 .$$

לכן

$$\|(T-\lambda I)(\mathrm{v})\|=0 .$$

הוכחנו קודם כי $T-\lambda I$ העתקה נורמלית (ראו דוגמה 8.9). לכן

$$\|(T-\lambda I)(\mathrm{v})\|=\|\overline{(T-\lambda I)}(\mathrm{v})\| ,$$

ז"א
$$\|\overline{(T-\lambda I)}(\mathrm{v})\| = \|\bar{T}(\mathrm{v}) - \bar{\lambda} I \mathrm{v}\| = 0 \ .$$
לכן
$$\bar{T}(\mathrm{v}) - \bar{\lambda}\mathrm{v} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{T}(\mathrm{v}) = \bar{\lambda}\mathrm{v} \ .$$
ז"א v הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי $\bar{\lambda}$.

■

משפט 8.8 וקטורים עצמיים של העתקה נורמלית של ערכים עצמיים שונים אורתוגונליים

תהי T העתקה נורמלית במרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{F}$. וקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים שונים, אורתוגונליים זה מזה.

הוכחה: יהיו $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ וקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים λ_1, λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
$$T(\mathrm{v}_1) = \lambda_1 \mathrm{v}_1 \ , \qquad T(\mathrm{v}_2) = \lambda_2 \mathrm{v}_2 \ .$$
אז
$$\langle T(\mathrm{v}_1), \mathrm{v}_2 \rangle = \langle \lambda_1 \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \rangle = \lambda_1 \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \rangle$$
וגם
$$\langle T(\mathrm{v}_1), \mathrm{v}_2 \rangle = \langle \mathrm{v}_1, \bar{T}(\mathrm{v}_2) \rangle = \langle \mathrm{v}_1, \bar{\lambda}_2 \mathrm{v}_2 \rangle = \lambda_2 \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \rangle$$
ז"א
$$\lambda_1 \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \rangle = \lambda_2 \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \rangle \qquad \Rightarrow \qquad (\lambda_1 - \lambda_2) \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \rangle = 0 \ .$$
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ לכן $\langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \rangle = 0$.

■

8.6 שיטה המעשית ללכסון אוניטרי

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה נורמלית. במקרה ש $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ נניח גם ש- A סימטרית. אז A לכסינה אוניטרית, בפרט היא לכסינה. לכן הפולינום האופייני מתפרק לגורמים ליניאריים וריבוי אלגברי של כל ערך עצמי שווה לריבוי הגאומטרי. כלומר אם
$$|A - \lambda I| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$$
כאשר $\lambda_1, \cdots \lambda_k$ הם השורשים השונים של הפולינום האופייני, אז
$$\dim(V_{\lambda_i}) = n_i$$
כאשר $V_i = \{\mathrm{v} \in \mathbb{F}^n | A \cdot \mathrm{v} = \lambda_i \mathrm{v}\}$.

בעזרת תהליך גרם-שמידט, נבנה ב- V_{λ_i} בסיס אורתונורמלי B_i. בסיס כזה מכיל n_i וקטורים אורתונורמליים זה לזה.

נתבונן בקבוצת וקטורין
$$B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k \ .$$
הקבוצה הזאת היא בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$. האיברים של B הם וקטורים עצמיים.

דוגמה 8.11

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

פתרון:

נבדוק אם A מטריצה נורמלית:

$$A\cdot A^t=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$$

$$A^t\cdot A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$$

ז"א $AA^t=A^tA$.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1\\1&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2+1=\lambda^2-2\lambda+2=0$$

ערכים עצמיים: $\lambda_1=1+i,\lambda_2=1-i$. נמצא את המרחב עצמי V_{λ_1}:

$$A\mathrm{v}-\lambda_1\mathrm{v}=0\quad\Rightarrow\quad(A-(1+i))\,\mathrm{v}=0\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}-i&1\\-1&-i\end{pmatrix}\mathrm{v}=0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}-i&-1&0\\1&-i&0\end{array}\right)\xrightarrow{iR_2+R_1}\left(\begin{array}{cc|c}-i&-1&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

פתרון: $-ix=y$ לכן $x=iy$.

$$V_{\lambda_1}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס אורתונורמלי של V_{λ_1}:

$$B_{\lambda_1}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}\frac{i}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\}$$

נמצא את המרחב עצמי V_{λ_2}:

$$A\mathrm{v}-\lambda_2\mathrm{v}=0\quad\Rightarrow\quad(A-(1-i))\,\mathrm{v}=0\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}i&1\\-1&i\end{pmatrix}\mathrm{v}=0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}i&-1&0\\1&i&0\end{array}\right)\xrightarrow{iR_2-R_1}\left(\begin{array}{cc|c}i&-1&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

פתרון: $ix=y$ לכן $x=-iy$.

$$V_{\lambda_2}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס אורתונורמלי של V_{λ_2}:

$$B_{\lambda_2}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}\frac{-i}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\}$$

לכן

$$B=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}\frac{i}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{-i}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^2$. לכן

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1+i & 0\\ 0 & 1-i\end{pmatrix}$$

$$D=\bar{Q}\cdot A\cdot Q$$

דוגמה 8.12

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

פתרון:
נבדוק אם A מטריצה נורמלית:

$$A\cdot\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\bar{A}\cdot A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ז"א $A\bar{A}=\bar{A}A$. לכן A נורמלית.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ -1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\left((1-\lambda)^2+1\right)=(\lambda-1)\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)=(1-\lambda)(\lambda-1-i)(\lambda-1+i)$$

ערכים עצמיים: $\lambda_1=1,\lambda_2=1+i,\lambda_3=1-i$. נמצא את המרחב עצמי $\lambda=1$:

$$A\mathrm{v}-\lambda_1\mathrm{v}=0\quad\Rightarrow\quad(A-1)\,\mathrm{v}=0\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\mathrm{v}=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

פתרון: $x=0,y=0,z\in\mathbb{C}$. לכן

$$V_1=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נמצא את המרחב עצמי $\lambda=1+i$:

$$A\mathrm{v}-\lambda_2\mathrm{v}=0\quad\Rightarrow\quad(A-(1+i))\,\mathrm{v}=0\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}-i & 1 & 0\\ -1 & -i & 0\\ 0 & 0 & -i\end{pmatrix}\mathrm{vv}=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -i & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to iR_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to iR_1, R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $x=-iy, z=0$.

$$V_{1+i} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

נמצא את המרחב עצמי $\lambda=1-i$:

$$A\text{v}-\lambda_3\text{v}=0 \quad \Rightarrow \quad (A-(1-i))\,\text{v}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}\text{vv}=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & 1 & 0 & 0 \\ -1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to iR_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to -iR_1, R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $x=iy, z=0$.

$$V_{1-i} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

הבסיס אורתונורמלי:

$$B = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^2$. לכן

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

$$D = \bar{Q}\cdot A\cdot Q$$

דוגמה 8.13

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ מטריצה סימטרית, לכן היא לכסינה אורתוגונלית.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(\lambda-6)^2(\lambda-3)=0 \ .$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 6$ מריבוי אלגברי 2.

$\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 1.

נמצא את המרחב עצמי $\lambda = 6$:

$$A\mathrm{v} - \lambda_1 \mathrm{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - 6I)\,\mathrm{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mathrm{v} = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $x = -y - z$, $y, z \in \mathbb{R}$. לכן

$$\begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

$$V_6 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

נמצא את המרחב עצמי $\lambda = 3$:

$$A\mathrm{v} - 3\mathrm{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - 3I)\,\mathrm{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathrm{v} = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $x = z, y = z, z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_3 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס של וקטורים עצמיים:

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נבנה בסיס אורתוגונלי של V_6:

$$w_1 = \mathrm{v}_1 \ .$$

$$w_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

נבנה בסיס אורתוגונלי של V_3:

$$w_3 = \mathrm{v}_3 \ .$$

לכן בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^3$:

$$u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\quad u_2=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\ \frac{-1}{2}\\ 1\end{pmatrix}\ ,\quad u_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0&\frac{1}{2\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$D=\bar{Q}\cdot A\cdot Q$$

8.7 שימושים של משפט הלכסון האוניטרי

הוכחנו כי אם T העתקה צמודה לעצמה, אז כל השורשים של הפולינום האופייני הם ממשיים (משפט 8.1), וגם אם T אוניטרית אז הערך המוחלט של כל ערך עצמי שווה ל- 1 (משפט 8.4).

ניתן גם להוכיח את המשפט ההפוך.

משפט 8.9 אם שורשי פולינום אופייני ממשיים אז ההעתרה צמודה לעצמה

תהי T העתקה נורמלית במרחב מכפלה פנימית V נוצר סופית.

אם כל שורשי הפולינום האופייני של T ממשיים, אז T העתקה צמודה לעצמה.

הוכחה: T נורמלית לכן היא לכסינה אוניטרית. ז"א אם $[T]_B$ המטריצה המייצגת לפי כל בסיס B, קיימת Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש-

$$[T]_B=QDQ^{-1}\quad\Rightarrow\quad [T]_BQ=QD\ .$$

כאשר $Q=\begin{pmatrix}|&&|\\u_1&\cdots&u_n\\|&&|\end{pmatrix}$ ו- $D=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$. העמודות של Q הם הווקטורים עצמיים של $[T]_B$ והיאברים של D הם הערכים עצמיים.

$$[\bar{T}]_B=\overline{[T]_B}=\overline{QD\bar{Q}}=Q\bar{D}\bar{Q}\ .$$

אם הערכים עצמיים של T ממשיים אז $\bar{D}=D$ ונקבל

$$[\bar{T}]_B=QD\bar{Q}=[T]_B\ ,$$

כלומר $\bar{T}=T$ ולכן T צמודה לעצמה.

■

משפט 8.10 אם ערך מוחלט של שורשי פולינום אופייני שווה 1 אז ההעתקה אוניטרית

תהי T העתקה נורמלית במרחב מכפלה פנימית V נוצר סופית.

אם כל שורשי הפולינום האופייני של T שווים בערכם ל- 1, אז T העתקה אוניטרית.

הוכחה: T נורמלית לכן היא לכסינה אוניטרית, לכן $\exists Q$ אוניטרית ו- D אלכסונית. ז"א אם $[T]_B$ המטריצה המייצגת לפי כל בסיס B, קיימת Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש-

$$[T]_B = QD\bar{Q} \ .$$

כאשר $Q = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ ו- $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. העמודות של Q הם הווקטורים העצמיים של $[T]_B$ והאיברים של D הם הערכים עצמיים. נניח ש $|\lambda_1| = \cdots = |\lambda_n| = 1$. לכן

$$D\cdot\bar{D} = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} = I \ .$$

לכן

$$[T]_B[\bar{T}]_B = \left(QD\bar{Q}\right)\cdot\left(\overline{QD\bar{Q}}\right) = QD\underbrace{\bar{Q}Q}_{=I}\bar{D}\bar{Q} = Q\underbrace{D\bar{D}}_{=I}\bar{Q} = Q\bar{Q} = I \ .$$

לכן T אוניטרית.

■

דוגמה 8.14

תהי H העתקה הרמיטית ו- U העתקה אוניטרית במרחב מכפלה פנימית. הוכיחו כי אם H ו- U מתחלפות אז $T = H\cdot U$ נורמלית.

הוכחה: נתון:

H הרמיטית לכן $\bar{H} = H$.
U אוניטרית, לכן $\bar{U}\cdot U = U\cdot\bar{U} = I$.

צריך להוכיח:

$T = H\cdot U = U\cdot H$ נורמלית.

הוכחה:

$$\begin{aligned} T\cdot\bar{T} =& (H\cdot U)\cdot(\bar{U}\cdot\bar{H}) && (\text{הגדרה של הצמודה}) \\ =& H\cdot U\cdot\bar{U}\cdot\bar{H} && (U \text{ ו } H \text{ מתחלפות}) \\ =& H\cdot\bar{H} && (U \text{ אוניטרית}) \\ =& H^2 && (H \text{ צמודה לעצמה}) \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}\cdot T =& \overline{(H\cdot U)}\cdot (U\cdot H) & \\
=& \bar{U}\cdot\bar{H}\cdot U\cdot H && \text{(הגדרה של הצמודה)}\\
=& \bar{U}\cdot\bar{H}\cdot H\cdot U && (U \text{ ו } H \text{ מתחלפות})\\
=& \bar{U}\cdot H\cdot H\cdot U && (H \text{ צמודה לעצמה})\\
=& \bar{U}\cdot U\cdot H\cdot H && (U \text{ ו } H \text{ מתחלפות})\\
=& H\cdot H && (U \text{ אוניטרית})\\
=& H^2 \ .
\end{aligned}$$

לכן $T\cdot\bar{T}=\bar{T}\cdot T$ ולכן T נורמלית.

■

8.8 *הוכחת המשפט: A לכסינה אוניטרית אם"ם קבוצת ו"ע שלה בסיס א"נ

משפט 8.11 A לכסינה אוניטרית אם"ם קבוצת ווקטורים עצמיים שלה בסיס אורתונורמלי

מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אוניטרית אם"ם קיים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{F}^n$), שכל איבריו הם ווקטורים עצמיים של A.

ווקטורי הבסיס הזה, הרשומים כעמודות, יוצרים מטריצה המלכסנת אוניטרית את A.

הוכחה: נניח ש- A לכסינה אוניטרית. אז קיימת Q אוניטרית ו D אלכסונית כך ש-

$$A=QDQ^{-1} \qquad\Leftrightarrow\qquad AQ=QD$$

נרשום $Q=\begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ ו- $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$.

מכאן

$$\begin{pmatrix} A\cdot u_1 & \cdots & A\cdot u_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \cdots & \lambda_n u_n\end{pmatrix}$$

לכן נקבל כי

$$A\cdot u_1=\lambda_1 u_1,\qquad \cdots \qquad ,A\cdot u_n=\lambda_n u_n \ .$$

בנוסף Q אוניטירת לכן הקבוצה של העמודות של Q, $\{u_1,\cdots,u_n\}$ היא בסיס אורתונורמלי של V.
לכן מצאנו בסיס אורתונורמלי $\{u_1,\cdots,u_n\}$ שמורכב מווקטורים עצמיים של A.

נניח שקיים בסיס אורתונורמלי $U=\{u_1,\cdots,u_n\}$ של V המורכב מווקטורים עצמיים של A:

$$A\cdot u_1=\lambda_1 u_1,\qquad \cdots \qquad ,A\cdot u_n=\lambda_n u_n \ .$$

U בסיס של V, לכן $\dim U=\dim V$.

לכן A לכסינה.

נרשום $Q = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix}$. הקבוצה של העמודות של Q היא בסיס אורתונורמלי לכן Q אוניטרית. ברפט:

$$AQ = \begin{pmatrix} | & & | \\ Au_1 & \cdots & Au_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 u_1 & \cdots & \lambda_n u_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

נגדיר $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$. קיבלנו כי

$$AQ = QD \quad \Rightarrow \quad A = QDQ^{-1} .$$

לכן A לכסינה אוניטרית.

■

משפט 8.12 T לכסין אוניטרי אם"ם קבוצת ווקטורים עצמיים שלו בסיס אורתונורמלי

תהי העתקה לינארית $T : V \to V$, כאשר V מרחב מכפלה פנימית n ממדי מעל $\mathbb{F}$. T לכסינה אוניטרית אם"ם קיים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{F}^n$), שכל איבריו הם ווקטורים עצמיים של T.

זהו בסיס שבו T מיוצגת ע"י מטריצה אלכסונית.

הוכחה: נניח ש- T לכסינה אוניטרית. אז קיימת בסיס אורתונורמלי $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ כך שהמטריצה המייצגת לפי בסיס B, $[T]_B$ אלכסונית. נסמן

$$[T]_B = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

נרשום המטריצה המייצגת של T, $[T]_E$ לפי הבסיס הסטנדרטי E של $\mathbb{F}^n$:

$$[T]_E = Q[T]_B Q^{-1} ,$$

כאשר $Q = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix}$, (עם הווקטורים u_i לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$) המטריצה המעבר מבסיס B לבסיס E ($Q = P_{B\to E}$). לכן

$$[T]_E Q = Q[T]_B \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} | & & | \\ [T]_E[u_1]_E & \cdots & [T]_E[u_n]_E \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1[u_1]_E & \cdots & \lambda_n[u_n]_E \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(u_1)]_E & \cdots & [T(u_n)]_E \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1[u_1]_E & \cdots & \lambda_n[u_n]_E \\ | & & | \end{pmatrix} .$$

מצאנו כי
$$T(u_1)=\lambda_1 u_1\ ,\qquad \cdots\qquad ,T(u_n)=\lambda_n u_n\ .$$
לכן הבסיס האורתונורמלי $B=\{u_1,\cdots,u_n\}$ מורכב מווקטורים עצמיים של T.

נניח שקיים בסיס אורתונורמלי $B=\{u_1,\cdots,u_n\}$ של V המורכב מווקטורים עצמיים של T:
$$T(u_1)=\lambda_1 u_1,\qquad \cdots\qquad ,T(u_n)=\lambda_n u_n\ ,$$
לכן
$$[T]_E\cdot[u_1]_E=\lambda_1[u_1]_E,\qquad \cdots\qquad ,[T]_E\cdot[u_n]_E=\lambda_1[u_n]_E\ .$$
B בסיס של V, לכן $\dim U=\dim V$.

לכן T לכסינה.

נרשום $Q=\begin{pmatrix}| & & |\\ u_1 & \cdots & u_n\\ | & & |\end{pmatrix}$. הקבוצה של העמודות של Q היא בסיס אורתונורמלי לכן Q אוניטרית. ברפט:
$$[T]_EQ=\begin{pmatrix}| & & |\\ [T]_E[u_1]_E & \cdots & [T]_E[u_n]_E\\ | & & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}| & & |\\ \lambda_1u_1 & \cdots & \lambda_nu_n\\ | & & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}| & & |\\ u_1 & \cdots & u_n\\ | & & |\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}.$$
נגדיר $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$. מצאנו כי
$$[T]_EQ=QD\quad\Rightarrow\quad [T]_E=QDQ^{-1}\ .$$
Q המטריצה המעבר מבסיס B לבסיס הסנדרטי E. לכן מהטריצה D היא המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס B. נסמן $[T]_B=D$: מצאני כי קיים בסיס B כך ש $[T]_B$ אלכסונית. B בסיס אורתונורמלי לכן T לכסינה אוניטרית.

■

8.9 הוכחת משפט שור

משפט 8.13 תזכורת: מטריצה ניתנת לשילוש

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. A דומה למטריצה משולשית מעל $\mathbb{F}$ אם"ם הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים ליניאריים בשדה $\mathbb{F}$.

הוכחה: ההוכחה נתונה במשפט 10.10. ■

משפט 8.14 משפט שור

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ויהיו $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ ערכים עצמיים של A (לא בהכרח שונים זה מזה).
$\exists$ מטריצה Q אוניטרית כך ש-

$$A=QB\bar{Q}$$

כאשר

$$B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

ובפרט B משולשית עליונה.

במילים פשוטות, כל מטריצה ריבועית A דומה אוניטרית למטריצה משולשית עליונה שבו איברי האלכסון הראשי הם הערכים עצמיים של A.

הוכחה: נשים לב כי $A=QB\bar{Q}\Leftrightarrow B=\bar{Q}AQ.$

יהי q_1 וקטור עצמי של A עם נורמה 1 ששייך לערך עצמי λ_1 ויהיו $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ שאר הערכים עצמיים של A.

יהיו $q_2,\ldots,q_n$ כל וקטורים אורתונורמליים אשר אורתוגונליים ל- q_1. נגדיר

$$Q_1=\begin{pmatrix}| & & |\\ q_1 & \cdots & q_n\\ | & & |\end{pmatrix}\ .$$

מכאו $\bar{Q}_1Q_1=I$ ז"א Q_1 אוניטרית.

$$AQ_1=\begin{pmatrix}| & | & & |\\ Aq_1 & Aq_2 & \cdots & Aq_n\\ | & | & & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}| & | & & |\\ \lambda_1q_1 & Aq_2 & \cdots & Aq_n\\ | & | & & |\end{pmatrix}=Q_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$$

לכן

$$\bar{Q}_1AQ_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & A_2\end{pmatrix} \qquad (*)$$

כעת נוכיח כי הערכים עצמיים של A_2 הם $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$.

$$|\lambda I-A|=|\bar{Q}_1(\lambda I-A)Q_1|=|\lambda\bar{Q}_1Q_1-\bar{Q}_1AQ_1|=\begin{vmatrix}\lambda-\lambda_1 & *\\ 0 & \lambda I-A_2\end{vmatrix}$$

ומכאן הערכים עצמיים של A_2 הם $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$.

שאר ההוכחה היא באינדוקציה.

<u>בסיס</u>: עבור $n=1$ הטענה מתקיימת.

<u>מעבר</u>: נניח כי הטענה מתקיים עבור k. נוכיח אותה עבור $k+1$.

תהי $A\in\mathbb{F}^{k\times k}$. לפי (*),

$$\bar{Q}_1AQ_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$$

כאשר $A_2\in\mathbb{F}^{k\times k}$. לפי ההנחת האינדוקציה $\exists\, Q_2$ אוניטרית ו- $B_2=\begin{pmatrix}\lambda_2 & * & \cdots & *\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & *\\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$ משולשית עליונה כך ש-

$$A_2=Q_2B_2\bar{Q}_2\ .$$

נגדיר

$$Q=Q_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q_2\end{pmatrix}\ .$$

$$\begin{aligned}AQ=&AQ_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q_2\end{pmatrix}=Q_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q_2\end{pmatrix}=Q_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & A_2Q_2\end{pmatrix}=Q_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & Q_2B_2\end{pmatrix}\\ =&Q_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & B_2\end{pmatrix}=QB\end{aligned}$$

לפיכך $A=QB\bar{Q}$.

■

8.10 הוכחת המשפט: נורמליות נשמרת תחת דמיון אוניטרי

למה 8.2 נורמליות נשמרת תחת דמיון אוניטרי

תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית במרחב מכפלה פנימית נוצר-סופית V מעל שדה $\mathbb{F}$.
תהי Q העתקה אוניטרית.
T נורמלית אם"ם $QT\bar{Q}$ נורמלית.

הוכחה: נגדיר $S=QT\bar{Q}$. Q אוניטרית אז $T=\bar{Q}SQ$.

$$\begin{aligned}T\bar{T}=&\bar{T}T\\ \Rightarrow\quad (\bar{Q}SQ)\cdot\overline{(\bar{Q}SQ)}=&\overline{(\bar{Q}SQ)}\cdot(\bar{Q}SQ)\\ \Rightarrow\quad \bar{Q}S\underbrace{Q\bar{Q}}_{=I}\bar{S}Q=&\bar{Q}\bar{S}\underbrace{Q\bar{Q}}_{=I}SQ\\ \Rightarrow\quad \bar{Q}S\bar{S}Q=&\bar{Q}\bar{S}SQ\\ \Rightarrow\quad S\bar{S}=&\bar{S}S\ .\end{aligned}$$

■

8.11 הוכחת המשפט: מטריצה נורמלית ומשולשית היא אלכסונית

למה 8.3 מטריצה נורמלית ומשולשית היא אלכסונית

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית.
אם A מטריצה משולשית וגם נורמלית אז A אלכסונית.

הוכחה: נוכיח ע"י אינדוקציה.

בסיס: עבור $n=1$ הטענה נכונה באופן טריוויאלי.

הנחת האינדוקציה:

נניח שהטענה נכונה עבור $n-1$, $n\geq 2$. נוכיח אותה עבור $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נניח ש- A נורמלית ומשולשית עליונה. אז

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & 0 \\ \hline \mathrm{x} & \bar{A}' \end{array}\right) , \qquad A = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & \bar{\mathrm{x}} \\ \hline 0 & A' \end{array}\right)$$

כאשר $A' \in \mathbb{F}^{n-1\times n-1}$ משולשית עליונה.

$$\bar{A}\cdot A = \left(\begin{array}{c|c} |a_{11}|^2 & \mathrm{y} \\ \hline \mathrm{y} & \mathrm{x}\bar{\mathrm{x}} + \bar{A}'\cdot A' \end{array}\right) , \qquad A\cdot\bar{A} = \left(\begin{array}{c|c} |a_{11}|^2 + \|\mathrm{x}\|^2 & \mathrm{y} \\ \hline \mathrm{y} & A'\cdot\bar{A}' \end{array}\right)$$

אם $A\cdot\bar{A}=\bar{A}\cdot A$ אז $\mathrm{x}=\bar{0}$ ו- $A'\cdot\bar{A}'=\bar{A}'\cdot A$. כלומר A' נורמלית. גם, A' משולישת עליונה, לכן לפי ההנחת האינדוקציה A' אלכסונית. לכן A אלכסונית.

■

8.12 הוכחת משפט לכסון אוניטרי

משפט 8.15 משפט לכסון אוניטרי

1) תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית במרחב מכפלה פנימית אוניטרי נוצר סופית. T לכסינה אוניטרית אם"ם היא נורמלית.

2) תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית במרחב מכפלה פנימית אוקלידי נוצר סופית. T לכסינה אורתונורמלית מעל $\mathbb{R}$ אם"ם היא סימטרית.

3) תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית (ממשית או מרוכבת). A לכסינה אוניטרית אם"ם היא נורמלית.

4) תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית ממשית. A לכסינה אורתוגונלית אם"ם היא סימטרית.

הוכחה:

רק אם:

לכל הטענות $1-4$, את הכיוון "רק אם" הוכחנו כבר לעיל. נשאר להוכיח את הכיוון השני "אם".

רק אם:

1) כעת נוכיח כי אם T נורמלית אז היא לכסינה אוניטרית:

T נורמלית ⟵ (למה 8.14: כל מטריצה דומה אוניטרית למטריצה משולשית) $T=QS\bar{Q}$, כאשר Q אונטרית ו- S משולשית

⟵ (למה 8.2: נורמליות נשמרת תחת שוויון אוניטרי) S נורמלית

⟵ (למה 8.3: מטריצה נורמלית ומשולשית היא אלכסונית) S אלכסונית

⟵ T דומה אוניטרי למטריצה אלכסונית.

2) נניח ש $T:V\to V$ כאשר T מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{R}$. נניח כי T נורמלית, כלומר $\bar{T}T=T\bar{T}$. בסעיף **1)** (סעיף הקודם) הוכחנו שאם T נורמלית אז היא לכסינה אוניטרית. ז"א $\exists\, Q$ אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $[T]=QD\bar{Q}$. במקרה פרטי ש T אופרטור במרחב אוקלידי, אז $[T]\in\mathbb{R}$ ו- $Q\in\mathbb{R}$ כך ש- $\bar{Q}=Q^t$. בפרט, T תהיה לכסינה אורתוגונלית:

$$[T]=QD\bar{Q}=QDQ^t\ ,$$

כאשר Q אורתוגונלית, כלומר

$$QQ^t=I\ .$$

לכן

$$[T]^t=\left(QDQ^t\right)^t=QD^tQ^t=QDQ^t=[T]\ .$$

לכן T סימטרית.

3) מקרה פרטי של **(1)** כאשר $T(u)=A\cdot u$, $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ נורמלית.

4) מקרה פרטי של **(2)** כאשר $T(u) = A \cdot u$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ סימטרית.

■