

אלגברה לינארית סמסטר סתו 2022-23  
עבודה עצמית 4

שאלות

שאלה 1 חשבו את הדטרמיננטות הבאות:

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} \quad \text{(א)}$$

$$\begin{vmatrix} 3m-2 & 4 \\ 5m+3 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{(ב)}$$

$$\begin{vmatrix} -4 & -5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{(ג)}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(ד)}$$

$$\begin{vmatrix} 2m-3 & m-4 & 3m-1 \\ 1 & -2 & 1 \\ m & 4m+1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{(ה)}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & -2 \\ -1 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{(ו)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \quad \text{(ז)}$$

$$\begin{vmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{vmatrix} \quad \text{(ח)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{ט})$$

$$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} \quad (\text{י})$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \quad (\text{יא})$$

**שאלה 2** פתרו את המשוואות הבאות:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{א})$$

$$\begin{vmatrix} x & 3x-8 \\ x-2 & 2x-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & x-1 \\ x+1 & 2x-4 \end{vmatrix} \quad (\text{ב})$$

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 3x & 3y & 3z \\ -p & -q & -r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = t \quad \text{נתון ש-} \quad \text{חשבו את}$$

**שאלה 4** תהינה  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ , ונניח ש-  $|A| = a$ ,  $|B| = b \neq 0$ . מצאו את:

$$|AB| \quad (\text{א})$$

$$|7A| \quad (\text{ב})$$

$$|7AB^{-1}A^2| \quad (\text{ג})$$

$$|A+A| \quad (\text{ד})$$

$$|4A^t B^3 A^2 (B^t)^{-1}| \quad (\text{ה})$$

**שאלה 5** פתרו את המערכות הבאות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{cases} -3x - 6y + 2z = -1 \\ x + 8y - z = 12 \\ -5x - 9y + 3z = 0 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$\begin{cases} -5x + y - 4z = 1 \\ -4x - y = 8 \\ 5x + 2z = -5 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$\begin{cases} -5x - 4y + 5z - 2t = -2 \\ 4x - y - 5z - 2t = -9 \\ 4x - y - 4z - t = -10 \\ 2x - y - 3z - 2t = -5 \end{cases} \quad (ג)$$

## שאלה 6

$$\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 1 \\ x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \end{cases} \quad (א)$$

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases} \quad (ב)$$

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ x + 5y - z = 7 \\ 3x + ky + 4z = k^2 \end{cases} \quad (ג)$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = -2 \end{cases} \quad (ד)$$

## שאלה 7 תהינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . הוכח או הפרד:

$$|A + B| = |B + A| \quad (א)$$

$$|B| = |C| \text{ אם } AB + AC \quad (ב)$$

$$\text{אם קיים } v \neq 0 \in \mathbb{R}^n \text{ כך ש- } (AB) \cdot v = 0 \text{ אז } |A| = 0 \text{ או } |B| = 0. \quad (ג)$$

$$|A + B| = |A| + |B| \quad (ד)$$

$$|AB| = |BA| \quad (ה)$$

$$|A^t B| = |B^t A| \quad (ו)$$

$$|A^{-1}| = |A| \text{ אז } A = I \quad (ז)$$

$$A^2 = I \text{ אז לפחות אחת מהמטריצות } A + I \text{ או } A - I \text{ איננה הפיכה.} \quad (ח)$$

## פתרונות

### שאלה 1

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = 15 \quad (\text{א})$$

■

$$\begin{vmatrix} 3m-2 & 4 \\ 5m+3 & 7 \end{vmatrix} = -26 + m \quad (\text{ב})$$

■

$$\begin{vmatrix} -4 & -5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \quad (\text{ג})$$

■

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{ד})$$

■

$$\begin{vmatrix} 2m-3 & m-4 & 3m-1 \\ 1 & -2 & 1 \\ m & 4m+1 & 2 \end{vmatrix} = 11m^2 - 7m + 22 \quad (\text{ה})$$

■

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & -2 \\ -1 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad (\text{ו})$$

■

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{ז})$$

■

$$\begin{vmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{vmatrix} = t^3 - 12t - 16 \quad (\text{ח})$$

■

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{ט})$$

■

$$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{י})$$

■

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = -(a-b)(a-c)(b-c) \quad (\text{יא})$$

■

**שאלה 2** המשוואה היא  $x^2 - 7 = -x^2 + 9x - 16$ , או שקול  $2x^2 + 9 = 9x$ . פתרון:  $x = 3, \frac{3}{2}$ .

■

### שאלה 3

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 3x & 3y & 3z \\ -p & -q & -r \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 3x & 3y & 3z \\ p & q & r \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3t.$$

■

**שאלה 4**  $|A| = a, |B| = b \neq 0$ ,  $A, B$  מסדר  $n \times n$ .

$$|AB| = |A| \cdot |B| = ab \quad (\text{א})$$

■

$$|7A| = 7^n |A| = 7^n a \quad (\text{ב})$$

■

$$|7AB^{-1}A^2| = 7^n |A| |B^{-1}| |A|^2 = 7^n \cdot a \cdot \frac{1}{b} \cdot a^2 = 7^n \frac{a^3}{b} \quad (\text{ג})$$

■

$$|A + A| = |2A| = 2^n |A| = 2^n \cdot a \quad (\text{ד})$$

■

$$|4A^t B^3 A^2 (B^t)^{-1}| = 4^n |A^t| |B|^3 |A|^2 |B^t|^{-1} = 4^n \cdot a \cdot b^3 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{b} = 4^n a^3 b^2. \quad (\text{ה})$$

■

## שאלה 5

(א)

$$\begin{cases} -3x - 6y + 2z = -1 \\ x + 8y - z = 12 \\ -5x - 9y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 1 & 8 & -1 \\ -5 & -9 & 3 \end{vmatrix} = 5 ,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -6 & 2 \\ 12 & 8 & -1 \\ 0 & -9 & 3 \end{vmatrix} = -15 ,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 1 & 12 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 10 ,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & -6 & -1 \\ 1 & 8 & 12 \\ -5 & -9 & 0 \end{vmatrix} = 5 .$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -3 , \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2 , \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1 .$$

■

(ב)

$$\begin{cases} -5x + y - 4z = 1 \\ -4x - y = 8 \\ 5x + 2z = -5 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 \\ -4 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 ,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 8 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 ,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 \\ -4 & 8 & 0 \\ 5 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 8 ,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 8 \\ 5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0 .$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1 , \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -4 , \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0 .$$

■

ג)

$$\begin{cases} -5x - 4y + 5z - 2t = -2 \\ 4x - y - 5z - 2t = -9 \\ 4x - y - 4z - t = -10 \\ 2x - y - 3z - 2t = -5 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & -5 & -2 \\ 4 & -1 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 5 & -2 \\ -9 & -1 & -5 & -2 \\ -10 & -1 & -4 & -1 \\ -5 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & -2 & 5 & -2 \\ 4 & -9 & -5 & -2 \\ 4 & -10 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -16$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & -4 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -9 & -2 \\ 4 & -1 & -10 & -1 \\ 2 & -1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & -5 & -9 \\ 4 & -1 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 8$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1 , \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 4 , \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1 , \quad w = \frac{\Delta_4}{\Delta} = -2 .$$

■

## שאלה 6

$$\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & k \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = k - 5 \quad (\text{א})$$

$$k \neq 5$$

■

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^3 - 3k + 2 = (k - 1)^2(k + 2) \quad (\text{ב})$$

$$k \neq 1, -2$$

■

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & k & 4 \end{vmatrix} = k + 62 \quad (\text{ג})$$

$$k \neq -62$$

■

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 2k + 1 = (k - 1)^2 \quad (\text{ד})$$

$$k \neq 1$$

■

## שאלה 7

$$\underline{|A + B| = |B + A|} \quad (\text{א})$$

טענה נכונה. הוכחה:

$$A + B = B + A \quad \Rightarrow \quad |A + B| = |B + A| .$$

■

$$\underline{\text{אם } AB = AC \text{ אז } |B| = |C|} \quad (\text{ב})$$



טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$AB = AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|C| = 4, |B| = 1$$

■

אם קיים  $v \neq 0 \in \mathbb{R}^n$  כך ש-  $(AB) \cdot v = 0$  אז  $|A| = 0$  או  $|B| = 0$ .

(ג)

טענה נכונה. הוכחה:

אם קיים וקטור  $v \neq 0$  כך ש-  $(AB) \cdot v = 0$  אז  $v$  הוא פתרון לא טריוויאלי של המערכת ההומוגנית  $(AB)X = 0$ . לכן למערכת יש אינסוף פתרונות. לכן  $|AB| = 0$  ולכן  $|AB| = |A| \cdot |B| = 0$ . מכאן  $|A| = 0$  או  $|B| = 0$ .

■

$|A + B| = |A| + |B|$

(ד)

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|A + B| = 1, \quad |A| + |B| = 0.$$

■

$|AB| = |BA|$

(ה)

טענה נכונה. הוכחה:

$$|AB| = |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A| = |BA|.$$

■

$$\underline{|A^t B| = |B^t A|} \quad (ז)$$

טענה נכונה. הוכחה:

$$\begin{aligned} |A^t B| &= |A^t| \cdot |B| = |A| \cdot |B|, \\ |B^t A| &= |B^t| \cdot |A| = |B| \cdot |A| = |A| \cdot |A|. \end{aligned}$$

לכן

$$|A^t B| = |B^t A|.$$

■

$$\underline{|A^{-1}| = |A| \text{ או } A = I} \quad (ז)$$

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & A^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \\ |A| &= |A^{-1}|. \end{aligned}$$

■

$$\underline{A^2 = I \text{ אז לפחות אחת מהמטריצות } A - I \text{ או } A + I \text{ איננה הפיכה.}} \quad (ח)$$

טענה נכונה. הוכחה:

$$A^2 - I = 0 \Rightarrow (A - I)(A + I) = 0 \Rightarrow |A - I| = 0 \wedge |A + I| = 0$$

לכן  $A - I$  או  $A + I$  איננה הפיכה.

■