

שיעור 1

מכונות טיורינג

1.1 הגדרה של מכונית טיריניג

הגדרה 1.1 מבנות טיריניג (הגדרה היוריסטית)

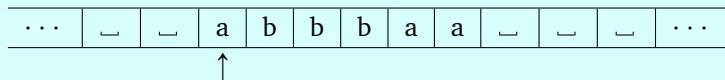
הקלט והסרט

- מוכנות טיריניג (מ"ט) קורא קלט.
 - הקלט עצמו נמצא על סרט אינסופי מחולק למשבצות.
 - כל תו של הקלט כתוב במשבצת אחת של הסרט.
 - במכונות טיריניג אנחנו מניחים שהסרט אינסופי לשני הצדדים.
 - * משמאלי לתחילת הקלט יש רצף אינסופי של תווי רוח "—".
 - * מימין לסוף הקלט יש רצף אינסופי של תווי רוח "—".



הראש

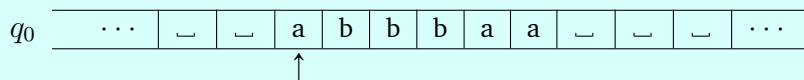
- במצב ההתחלתי הראש בקצת השמאלי של הקלט.



- הראש יכול לזרז ימינה על הסרט וגם שמאלה על הסרט.
 - הראש קורא את התוכן של המשבצת שבה הוא נמצא.
 - הראש יכול לכתוב על משבצת, אבל רק על המשבצת שבה הראש נמצא.

תאור העבודה של המכונה

- בהרבה החלטות השרות נמצאו רצף אינסופי של תווים ים.
 - בראש מכתב על התא הריאון בשרות והמכונה נמצאת במצב התחלתי q_0 .



- בכל צעד חישוב, בהתקас למספר הנוכחי ולאות שמתוחת לראש (הטו הנקרה), המכונה מחליטה:
 - * לאיזה מצב לעבור מה כתוב מתחת לראש (הטו הנכתב)
 - * لأن להזיז את הראש (תא אחד ימינה, או תא אחד שמאלה, או להישאר במקום).
 - המכונה ישנים שני מצבים מיוחדים:
 - * q_{acc} : אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל- q_{acc} היא עוברת ומקבלת.
 - * q_{rej} : אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל- q_{rej} היא עוברת ודוחה.
 - אם המכונה לא מגיעה ל- q_{rej} או q_{acc} היא תמשיך לרוץ לנצח.

הגדרה 1.2 מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כasher:

| | |
|------------------|-----------------------------|
| Q | קובוצת מצבים סופית ולא ריקה |
| Σ | אלפבית הקלט |
| Γ | אלפבית הסרט |
| δ | פונקציית המעברים |
| q_0 | מצב התחלתי |
| q_{acc} | מצב מקבל יחיד |
| q_{rej} | מצב דוחה יחיד |

דוגמה 1.1

בנייה מכונת טיורינג אשר מקבלת מילה אם היא בשפה

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#a_w = \#b_w\}.$$

ז"א השפט כל המילים עם מספר שווה אותיות a ו b . הפאודו-קוד של המכונה, כדלקמן.**פאודו-קוד**

1) סורקים את הקלט משמאול לימין.

- אם לא מצאנו a וגם לא מצאנו $b \Leftarrow$ מקבלת.
- אם האות הראשונה שהראש הוא מצא היא a , כתובים עליו ✓, וועברים לשלב (2).
- אם האות הראשונה שהראש הוא מצא היא b , כתובים עליו ✓, וועברים לשלב (3).

2) ממשיכים לוז ימינה עד שנמצא b תואם.

- אם לא מצאנו $b \Leftarrow$ דוחה.
- אם מצאנו b כתובים עליו ✓, חוזרים לתחלת הקלט וחוזרים לשלב (1).

3) ממשיכים לוז ימינה עד שנמצא a תואם.

- אם לא מצאנו $a \Leftarrow$ דוחה.
- אם מצאנו a כתובים עליו ✓, חוזרים לתחלת הקלט וחוזרים לשלב (1).

כעת נתן הגדרה פורמלית של המכונה טיורינג שמבצעת את האלגוריתם זהה.

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כasher Q הקבוצה המכנים הבא:

$$Q = \{q_0, q_a, q_b, q_{\text{back}}, q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}\}.$$

המשמעותם של כל המצבים נרשומים בטבלה למטה:

| | |
|-------------------|---|
| q_0 | המצב ההתחלתי. אליו נחזיר אחרי כל סבב התאמת של זוג אותיות. |
| q_a | מצב שבו ראיינו a ומחפשים b תואם. |
| q_b | מצב שבו ראיינו b ומחפשים a תואם. |
| q_{back} | מצב ששנשתמש בו כדי לחזור לказה השמאלי של הקלט ולהתחל את הסריקה הבאה (סבב ההתאמת הבא). |
| q_{acc} | מצב מקבל. |
| q_{rej} | מצב דוחה. |

האלפבית של הקלט, Σ , והלפבית של השרת, Γ , הינם:

$$\Sigma = \{a, b\}, \quad \Gamma = \{a, b, _, \checkmark\}.$$

הפונקציית המעברים δ היא מוגדרת כדלקמן.

$$\begin{aligned}\delta(q_0, a) &= (q_a, \checkmark, R), \\ \delta(q_0, b) &= (q_b, \checkmark, R), \\ \delta(q_0, _) &= (q_{\text{acc}}, _, R), \\ \delta(q_a, \checkmark) &= (q_a, \checkmark, R), \\ \delta(q_a, a) &= (q_a, a, R), \\ \delta(q_a, b) &= (q_{\text{back}}, \checkmark, L), \\ \delta(q_b, \checkmark) &= (q_b, \checkmark, R), \\ \delta(q_b, b) &= (q_a, b, R), \\ \delta(q_b, a) &= (q_{\text{back}}, \checkmark, L).\end{aligned}$$

לעתים קל יותר לרשום את פונקציית המעברים δ בטבלה:

| $\Gamma \setminus Q$ | a | b | $_$ | \checkmark |
|----------------------|------------------------------------|------------------------------------|---------------------------|------------------------------------|
| q_0 | (q_a, \checkmark, R) | (q_b, \checkmark, R) | $(q_{\text{acc}}, _, R)$ | (q_0, \checkmark, R) |
| q_a | (q_a, a, R) | $(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$ | $(q_{\text{rej}}, _, L)$ | (q_a, \checkmark, R) |
| q_b | $(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$ | (q_a, b, R) | $(q_{\text{rej}}, _, L)$ | (q_b, \checkmark, R) |
| q_{back} | (q_{back}, a, L) | (q_{back}, b, L) | $(q_0, _, R)$ | $(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$ |

תרשים מצבוי



דוגמה 1.2

בדקו אם המכוון טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה `aab`.

פתרון:

| | | | | | |
|------------|------------|-------|------------|-------|---|
| - | q_0 | a | a | b | - |
| - | ✓ | q_a | a | b | - |
| - | ✓ | a | q_a | b | - |
| - | ✓ | | q_{back} | a | ✓ |
| - | q_{back} | ✓ | a | ✓ | - |
| q_{back} | - | ✓ | a | ✓ | - |
| - | q_0 | ✓ | a | ✓ | - |
| - | ✓ | q_0 | a | ✓ | - |
| - | ✓ | ✓ | q_a | ✓ | - |
| - | ✓ | ✓ | ✓ | q_a | - |
| - | ✓ | ✓ | rej | ✓ | - |

דוגמה 1.3

בדקו אם המכוון טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה `.abbbbaaa`.

פתרון:

| | | | | | | | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|-------|---|---|
| - | q_0 | a | b | b | b | a | a | - |
| - | ✓ | q_a | b | b | b | a | a | - |
| - | q_{back} | ✓ | ✓ | b | b | a | a | - |
| q_{back} | - | ✓ | ✓ | b | b | a | a | - |
| - | q_0 | ✓ | ✓ | b | b | a | a | - |
| - | ✓ | q_0 | ✓ | b | b | a | a | - |
| - | ✓ | ✓ | q_0 | b | b | a | a | - |
| - | ✓ | ✓ | ✓ | q_b | b | a | a | - |
| - | ✓ | ✓ | ✓ | b | q_b | a | a | - |
| - | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | q_{back} | b | ✓ | a |
| - | ✓ | ✓ | q_{back} | ✓ | b | ✓ | a | - |
| - | ✓ | q_{back} | ✓ | ✓ | b | ✓ | a | - |
| q_{back} | - | ✓ | ✓ | ✓ | b | ✓ | a | - |
| - | q_0 | ✓ | ✓ | ✓ | b | ✓ | a | - |
| - | ✓ | q_0 | ✓ | ✓ | b | ✓ | a | - |
| - | ✓ | ✓ | q_0 | ✓ | b | ✓ | a | - |
| - | ✓ | ✓ | ✓ | q_0 | b | ✓ | a | - |
| - | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | q_b | ✓ | a | - |
| - | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | q_b | a | - |
| - | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | q_{back} | ✓ | ✓ | - |
| - | ✓ | ✓ | ✓ | q_{back} | ✓ | ✓ | ✓ | - |

| | | | | | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------|-------|-------|------------------|---|
| — | ✓ | ✓ | q_{back} | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | — |
| — | ✓ | q_{back} | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | — |
| — | q_{back} | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | — |
| q_{back} | — | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | — |
| — | q_0 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | — |
| — | ✓ | q_0 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | — |
| — | ✓ | ✓ | q_0 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | — |
| — | ✓ | ✓ | ✓ | q_0 | ✓ | ✓ | ✓ | — |
| — | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | q_0 | ✓ | ✓ | — |
| — | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | q_0 | ✓ | — |
| — | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | q_{acc} | — |

הגדרה 1.3 קונפיגורציה

תהי $M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיריניג. **קונפיגורציה** של M הינה מחרוזת

$uq\sigma v$

כאשר משמעות:

$$u, v \in \Gamma^*, \quad \sigma \in \Gamma, \quad q \in Q.$$

| | |
|------------------------|----------|
| מצב המכוונה, | q |
| הסימן במקומות הראש | σ |
| תוכן הסרט משמאלי לראש, | u |
| תוכן הסרט מימין לראש. | v |

דוגמה 1.4 (המשך של דוגמה 1.2)

| u | q | σ | v |
|---------|-------------------|----------|---------|
| — | q_0 | a | a b — |
| — ✓ | q_a | a | b — |
| — ✓ a | q_a | b | — |
| — ✓ | q_{back} | a | ✓ — |
| — | q_{back} | ✓ | a ✓ — |
| — | q_{back} | — | ✓ a ✓ — |
| — | q_0 | ✓ | a ✓ — |
| — ✓ | q_0 | a | ✓ — |
| — ✓ ✓ | q_a | ✓ | — |
| — ✓ ✓ ✓ | q_a | — | — |
| — ✓ ✓ ✓ | q_{rej} | ✓ | — |

דוגמה 1.5

בנו מכונת טיריניג אשר מקבלת כל מילה בשפה

$$L = \{a^n \mid n = 2^k, k \in \mathbb{N}\}$$

ז"א מילים בעלי מספר אותיות n אשר חזקה של 2.

פתרונות:

ראשית נשים לב למשפט הבא:

משפט 1.1

מספר שלם n שווה לחזקה אי-שלילית של 2, כלומר $n = 2^k$ ($k \geq 0$) אם ורק אם קיימים שלם m עבורו חילוק של n ב- 2 בדוק m פעמיים נתון 1.

הוכחה:כיון

$$\text{אם } \frac{n}{2^k} = 1 \text{ או } n = 2^k \text{ } (k \geq 0)$$

כיון

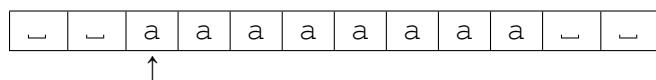
$$\text{אם קיימים } 0 \geq m \text{ עבורו } 1 = 2^m \text{ או } n = 2^m = \frac{n}{2^m}$$

לאור המשפט הזה נבנה אלגוריתם אשר מחלק את מספר האותיות במילה ב- 2 שוב ושוב בצורה איטרטיבית.

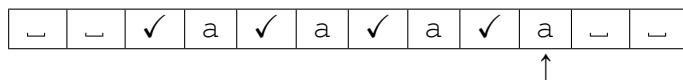
- אם אחרי סיבוב מסוים קיבל מספר אי-זוגי שונה מ- 1, אז אין מצב שמספר האותיות a הוא חזקה של 2.
- בצד שני אם אחרי סיבוב כלשהו קיבל בדיקות a אחת הנשארת, "א" אחרי מספר מסוים של חילוקים של המספר אותיות a קיבלו 1, אי מובטח לנו שהמספר של אותיות a הוא שווה לחזקה של 2.

כעת נסביר כיצד המכונה טיריניג מבצעת את השיטה הזאת בפועל כלהלן.

1) במצב ההתחלתי יש מהירות של רצף אותיות a כתובה על הסרט והראש נמצא מתחת האות הראשונה.



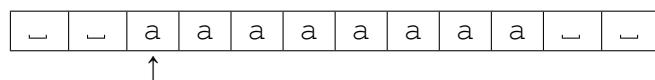
2) עוברים על הקלט משמאלי לימין ובמציעים מחיקה לシリוגין של האות a . כלומר, אותן אחת נמחק ואומות אותן נשאיר וכן הלאה, עד שמנגנים לכמה הימין של המילה.



3) אחרי שהראש הגיע לסוף המילה:

- אם מצאנו אותן אחת בדיקות \leftarrow המכונה מקבל.
- אם כתוב ✓ בתו האחרון \leftarrow המכונה תדחה.
- אחרת, אם כתוב a בתו האחרון הרושן חוזר לתחילת המחרוזת וחוזרים לשלב 2).

כדוגמה של מילה המתבקשת על ידי האלגוריתם, למטה רשומות האיטרציות של האלגוריתם זה על המילה $w = aaaaaaaaaa$ (8 אותיות a). במצב ההתחלתי הסרט נראה כדלקמן.



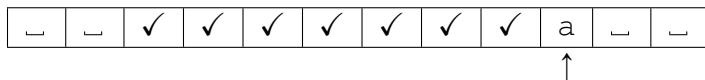
איטרציה 1) לבסוף האיטרציה $i = 1$ הסרט נראה כך:

התו האחרון a iaz ממשיכים לאיטרציה הבאה.



איטרציה 2) בסוף האיטרציה $i = 2$ הסדרת נראית כך:

התו הראשון הוא a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

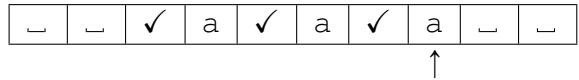
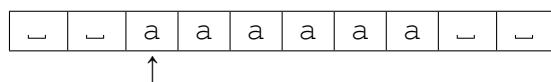


איטרציה 3) לאחר האיטרציה $i = 3$ הסדרת נראית כך:

התו האחרון הוא a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

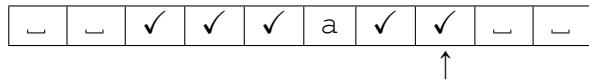
איטרציה 4) באיטרציה $i = 4$ יש אות a אחת בדיק איז המוכנה מקבלת.

כדוגמה של מילה הלא המתבלת על ידי האלגוריתם, למטה רשומות האיטרציות של האלגוריתם זהה על המילה $w = aaaaaa$ (6 אותיות a). במצב ההתחלתי הסרט נראה כדלקמן.



איטרציה 1) לבסוף האיטרציה $i = 1$ הסדרת נראית כך:

התו האחרון a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.



איטרציה 2) בסוף האיטרציה $i = 2$ הסדרת נראית כך:

התו הראשון הוא \checkmark אז דוחה.

כעת נתן הגדרה פורמלית של המוכנות טיורנג שמקבלת השפה הזאת:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}) ,$$

כאשר $Q = \{q_0, \text{one}, \text{even}, \text{odd}, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}$, $\Gamma = \{a, _, \checkmark\}$, $\Sigma = \{a\}$ כאשר המשמעותם הם מפורטים למטה:

מצב `none`: מצב ההתחלתי. עדין לא קראנו a כתוצאה זה.

מצב `one`: קראנו a בודד.

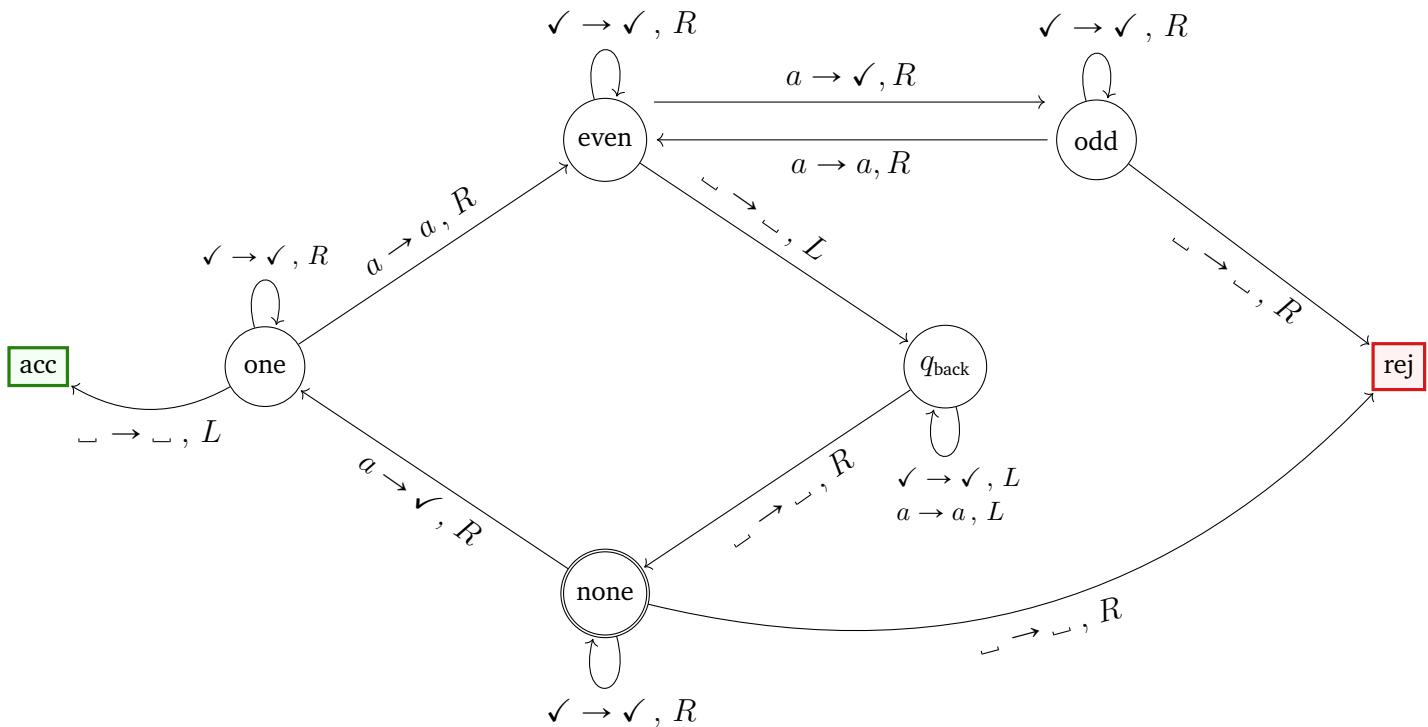
הfonקציית המעברים מתוארת על ידי התרשים

מצב `even`: קראנו מספר זוגי של a .

מצב `odd`: קראנו מספר אי-זוגי של a .

מצב q_{back} : חזרה שלמהלה.

מצבים למטה.

**דוגמה 1.6**

בדקו אם המילה $aaaa$ מתקבלת על ידי המכונת טירינג בדוגמה 1.5.

פתרונות:

| | | | | | | |
|---|------|------|------|------|------|---|
| [| none | a | a | a | a |] |
|] | ✓ | one | a | a | a |] |
|] | ✓ | a | even | a | a |] |
|] | ✓ | a | ✓ | odd | a |] |
|] | ✓ | a | ✓ | a | even |] |
|] | ✓ | a | ✓ | back | a |] |
|] | ✓ | a | back | ✓ | a |] |
|] | ✓ | back | ✓ | a | ✓ |] |
|] | back | ✓ | a | ✓ | a |] |
|] | none | ✓ | a | ✓ | a |] |
|] | ✓ | none | a | ✓ | a |] |
|] | ✓ | ✓ | one | ✓ | a |] |
|] | ✓ | ✓ | ✓ | one | a |] |
|] | ✓ | ✓ | ✓ | a | even |] |
|] | ✓ | ✓ | ✓ | back | a |] |
|] | ✓ | ✓ | back | ✓ | a |] |
|] | back | ✓ | ✓ | ✓ | a |] |
|] | none | ✓ | ✓ | ✓ | a |] |
|] | ✓ | none | ✓ | ✓ | a |] |
|] | ✓ | ✓ | none | ✓ | a |] |

| | | | | | |
|---|---|---|------|-----|---|
| ✓ | ✓ | ✓ | none | a | — |
| ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | one | — |
| ✓ | ✓ | ✓ | acc | ✓ | — |

| <i>u</i> | <i>q</i> | σ | v |
|-----------|----------|----------|-----------|
| — | none | a | aaa — |
| — ✓ | one | a | aa — |
| — ✓ a | even | a | a — |
| — ✓ a ✓ | odd | a | — |
| — ✓ a ✓ a | even | — | — |
| — ✓ a ✓ | back | a | — |
| — ✓ a | back | ✓ | a — |
| — ✓ | back | a | ✓ a — |
| — | back | ✓ | a ✓ a — |
| — | back | — | ✓ a ✓ a — |
| — | none | ✓ | a ✓ a — |
| — ✓ | none | a | ✓ a — |
| — ✓ ✓ | one | ✓ | a — |
| — ✓ ✓ ✓ | one | a | — |
| — ✓ ✓ ✓ a | even | — | — |
| — ✓ ✓ ✓ | back | a | — |
| — ✓ ✓ | back | ✓ a | — |
| — ✓ | back | ✓ | ✓ a — |
| — | back | ✓ | ✓✓ a — |
| — | back | — | ✓✓✓ a — |
| — | none | ✓ | ✓✓ a — |
| — ✓ | none | ✓ | ✓ a — |
| — ✓ ✓ | none | ✓ | a — |
| — ✓ ✓ ✓ | none | a | — |
| — ✓ ✓ ✓ ✓ | one | — | — |
| — ✓ ✓ ✓ | acc | ✓ | — |

דוגמה 1.7

בדקו אם המילה aaa מתקבלת על ידי המכונת טיריניג בדוגמה 1.5.

פתרונות:

| | | | | |
|------|-----|------|-----|-----|
| none | a | a | a | — |
| ✓ | one | a | a | — |
| ✓ | a | even | a | — |
| ✓ | a | ✓ | odd | — |
| ✓ | a | ✓ | — | rej |

| <i>u</i> | <i>q</i> | σ | v |
|----------|----------|----------|------|
| — | none | a | aa — |

| | | | |
|---|------|-------------|---------------|
| $\sqsubset \checkmark$ | one | a | a \sqsubset |
| $\sqsubset \checkmark a$ | even | a | \sqsubset |
| $\sqsubset \checkmark a \checkmark$ | odd | \sqsubset | \sqsubset |
| $\sqsubset \checkmark a \checkmark \sqsubset$ | rej | \sqsubset | \sqsubset |

דוגמה 1.8

מהי השפה של המוכנה למטה:

**פתרון:**

1) סורקים את הקלט משמאל לימין.

- אם הtau הנקרא a או b עוברים לtau ימינה הבא וחוזרים לשלב 1).
- אם הtau הנקרא \sqsubset אז הגענו לסוף הקלט, ועוברים לשלב 2).

2) עוברים שמאלה לtau הארון של המילה.

- אם הtau הנקרא $a \leftarrow$ מקבל.
- אחרת דוחה.

לכן המוכנה מקבלת שפת המילים המסתויימות באוט a .**דוגמה 1.9**

מהי השפה של המוכנה למטה:

**פתרונות:****1)** במצב ההתחלתי:

- אם התו הנקרא $_$ \Leftarrow מקבל.
- אם התו הנקרא a מורידים אותו על ידי $_$ וועברים לשלב 2).
- אחרת \Leftarrow דוחה.

2) עוברים ימינה עד שמנגנים לסוף המילה.

- אם התו האחרון הוא b , מורידים אותו על ידי $_$, חוזרים לתחילת המילה וחוזרים לשלב 1).
- אחרת דוחה.

בכל איטרציה המכונה מורידה תו a בתחילת המילה וחזרת ומורידה תו b תואם בסוף המילה. בכל איטרציה אם המכונה לא מוצאת b תואם בסוף המילה היא דוחה המילה. אחרת אם המכונה לא דוחה המילה וכל האותיות נמחקoot או המילה מתתקבלת. לכן המכונה מקבלת שפת המילים

$$\{a^n b^n | n \geq 0\} .$$

הגדרה 1.4 גירה בצעד אחד

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיריניג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M . נסמן

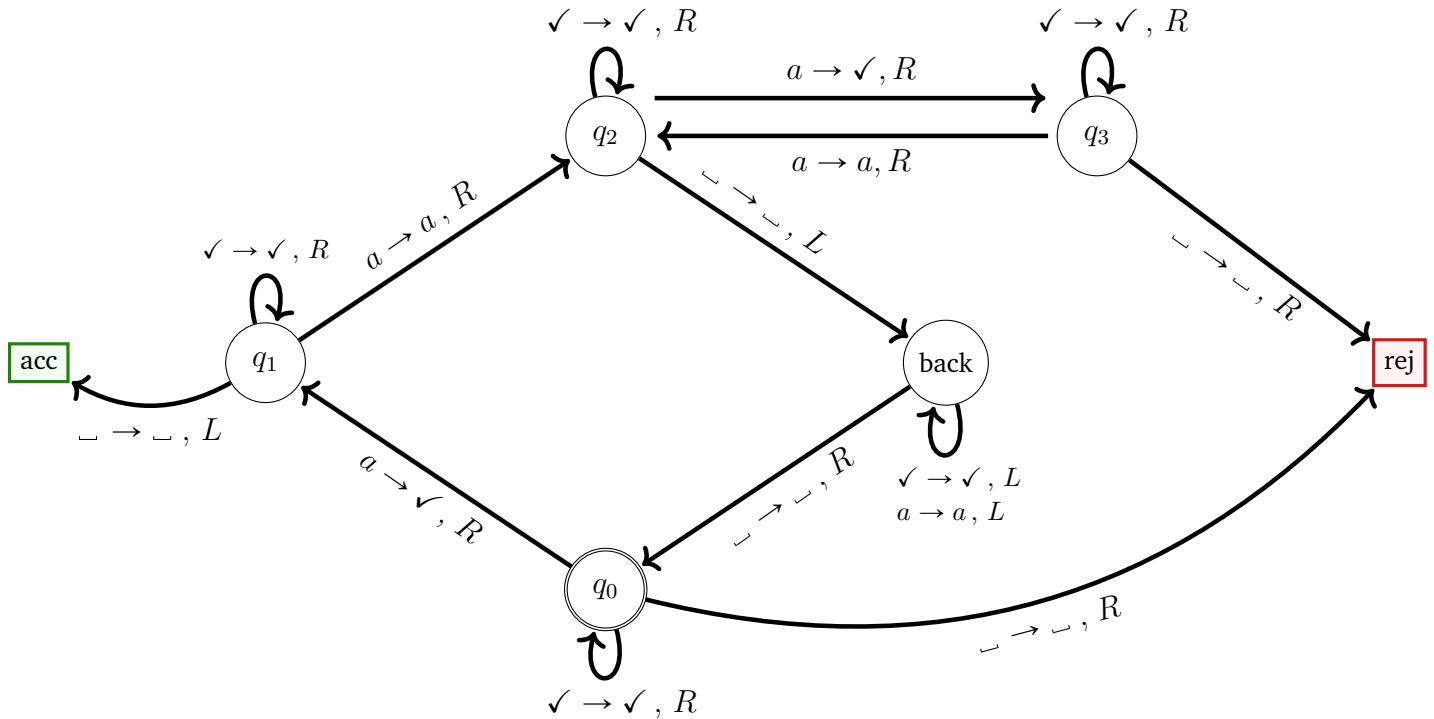
$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם כשמצאים ב- c_1 עוברים ל- c_2 בצעד בודד.

דוגמה 1.10 (המשך של דוגמה 1.5)

עבור המكونת טיורינג שמתוארת בתרשים למטה מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$

**הגדרה 1.5 גירירה בכללי**

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מكونת טיורינג, ותהינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M
נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

אם ניתן לעבור מ- c_1 ל- c_2 ב- 0 או יותר צעדים.

דוגמה 1.11 (המשך של דוגמה 1.5)

עבור המكونת טיורинг שמתוארת בתרשים למטה מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M^* \checkmark \checkmark \checkmark q_4 a$$

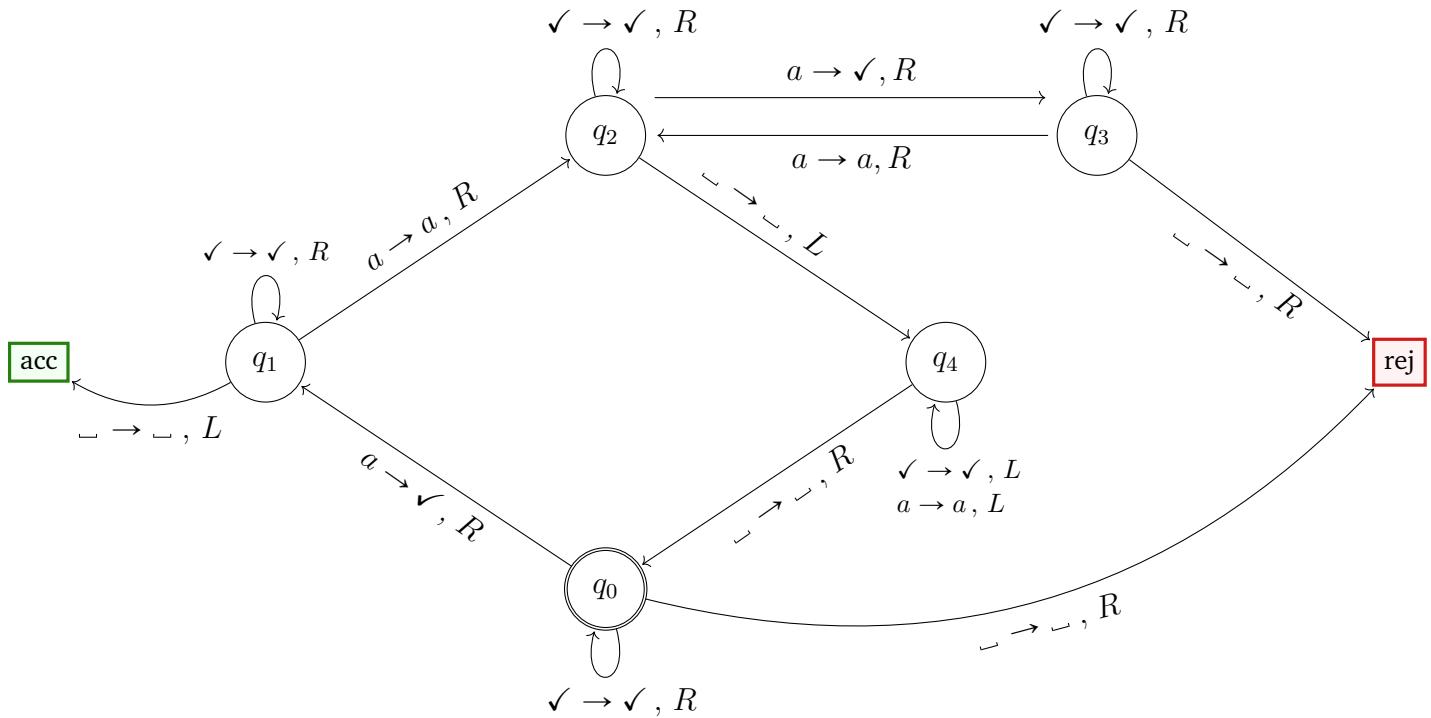
בגלל ש:

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark q_1 a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark a q_2 _$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark q_4 a .$$



הגדירה 1.6 קבלת ודוחיה של מחרוזות

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $w \in \Sigma^*$ מחרוזת. אומרים כי:

- **מקבלת את w אם**

$$q_0 w \vdash_M^* u q_{\text{acc}} \sigma v$$

כאשר $\Gamma^* v \in \Gamma$, $u, \sigma \in \Sigma$ כלשהם.

- **דוחה את w אם**

$$q_0 w \vdash_M^* u q_{\text{rej}} \sigma v$$

כאשר $\Gamma^* v \in \Gamma$, $u, \sigma \in \Sigma$ כלשהם.

הגדירה 1.7 הכרעה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מכריעה** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים:

- M מקבלת את w .

- M דוחה את w .

הגדירה 1.8 קבלת של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מקבלת** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים:

- אם $w \in L$ מקבלת את w .

- אם $w \notin L$ לא מקבלת את w .

במקרה זה כאשר M מקבלת את השפה L , נכתב ש-

$$L(M) = L .$$

1.2 טבלת המעברים

דוגמה 1.12

בנו מכונה טיורינג שמכריעת את השפה

$$L = \{w = \{a, b, c\}^* \mid \#a_w = \#b_w = \#c_w\}$$

פתרון:

נתאר את המכונה על ידי הטבלת המעברים של המכונה. הסימן S מסמן כל זוג אותיות שונות מהקבוצה $\{a, b, c\}$ ללא חשיבות לסדר. ככלומר:

$$S = \{a, b\} , \quad S = \{b, c\} , \quad S = \{a, c\} .$$

| מצב | מצב | סימון בסרט | מצב חדש | כתיבה | позזה | תנאי |
|-------------------|-----------------------|--------------------|----------|-------|--|------|
| q_0 | σ | $q.\sigma$ | ✓ | R | $\sigma \in \{a, b, c\}$ | |
| $q.\sigma$ | σ | $q.\sigma$ | ✗ | R | $\sigma \in \{a, b, c\}$ | |
| $q.\sigma$ | τ | $q.\{\sigma\tau\}$ | ✓ | R | $\sigma, \tau \in \{a, b, c\} \wedge \sigma \neq \tau$ | |
| $q.S$ | σ | $q.S$ | σ | R | $\sigma \in S$ | |
| $q.S$ | σ | q_{back} | ✓ | L | $\sigma \notin S$ | |
| q_{back} | a, b, c, \checkmark | q_{back} | ✗ | L | | |
| q_0 | — | q_{acc} | ✗ | R | | |
| q_{back} | a, b, c, \checkmark | q_{back} | ✗ | L | | |
| q_{back} | — | q_0 | ✗ | R | | |

כעת נתאר את המכונה על ידי תרשימים המצביעים של המכונה:



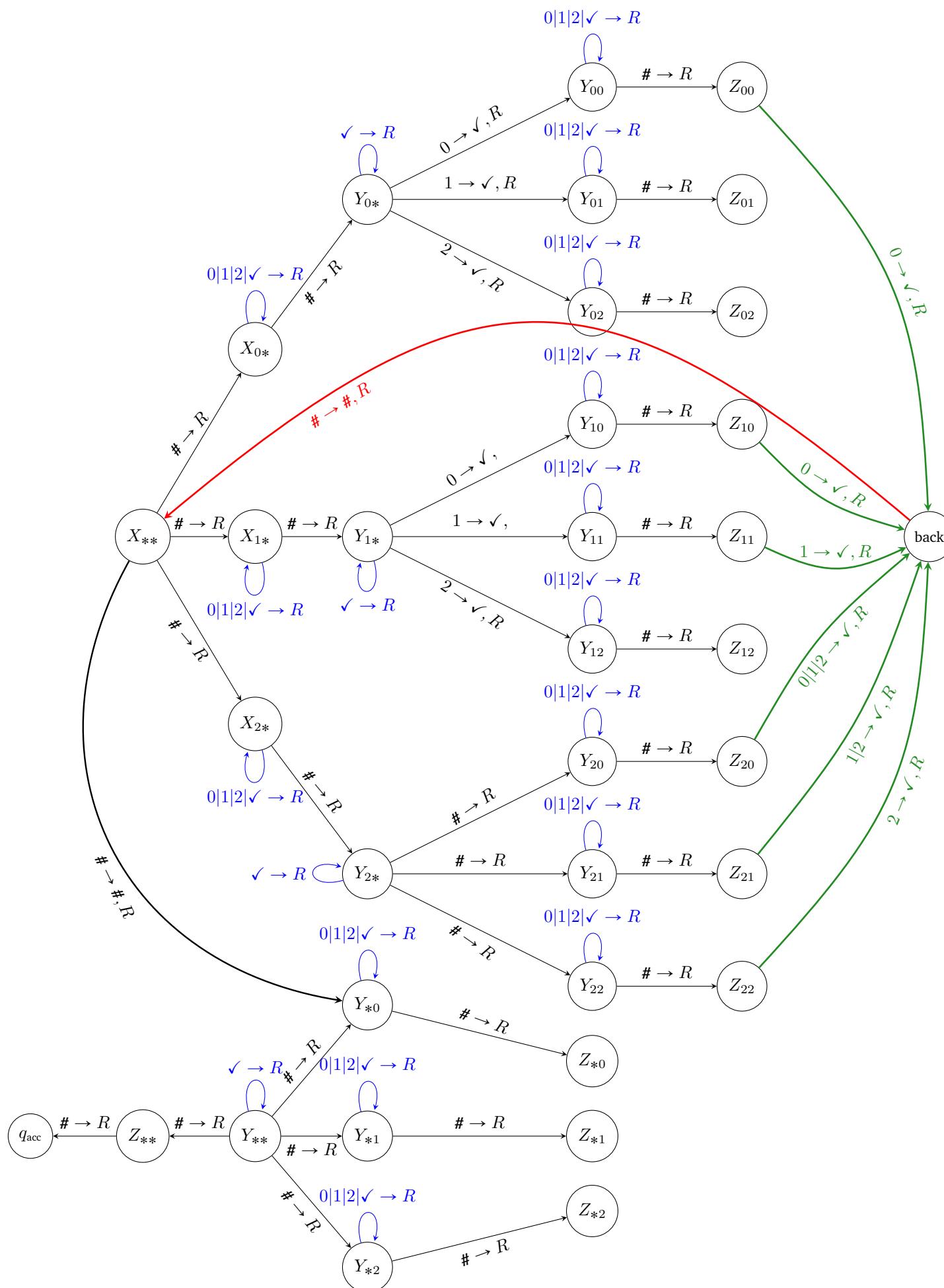
דוגמה 1.13

בנו מכונת טיורינג שמקreira את השפה

$$\{x_1 \dots x_k \# y_1 \dots y_k \# z_1 \dots z_k \mid x_i, y_i, z_i \in \{0, 1, 2\}, \forall i, x_i \geq y_i \geq z_i\}$$

פתרונות:

| מצב | סימון בסרט | מצב חדש | כתיבה | תזואה | תנאי |
|-------------------|------------|-------------------|-------|-------|----------------------------------|
| $X * *$ | σ | $X\sigma*$ | ✓ | R | |
| $X * *$ | ✓ | $X * *$ | ✓ | R | |
| $X\sigma*$ | 0, 1, 2, ✓ | $X\sigma*$ | ∅ | R | |
| $X\tau*$ | # | $Y\tau*$ | ∅ | R | |
| $Y\tau*$ | σ | $Y\tau\sigma$ | ∅ | R | |
| $Y\tau*$ | ✓ | $Y\tau*$ | ∅ | R | |
| $Y\tau\sigma$ | 0, 1, 2, ✓ | $Y\tau\sigma$ | ∅ | R | |
| $Y\tau_1\tau_2$ | # | $Z\tau_1\tau_2$ | ∅ | R | |
| $Z\tau_1\tau_2$ | ✓ | $Z\tau_1\tau_2$ | ∅ | R | |
| $Z\tau_1\tau_2$ | σ | q_{back} | ✓ | L | |
| $Z * *$ | — | q_{acc} | ∅ | R | $\tau_1 \geq \sigma \geq \tau_2$ |
| q_{back} | 0, 1, 2, ✓ | q_{back} | ∅ | L | |
| q_{back} | — | $X * *$ | ∅ | R | |



1.3 חישוב פונקציות

הגדרה 1.9 מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה f

תהי $\Sigma_2^* \rightarrow \Sigma_1^*$ ותהי $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ מכונת טיורינג $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מוחשבת את f אם:

- $\Sigma_2 \subset \Gamma$ ו- $\Sigma = \Sigma_1$.
- לכל $q_0 w \vdash q_{\text{acc}}, f(w) \in \Sigma_1^*$ מתקיים.

דוגמה 1.14 חיבור אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i \# 1^j$$

ומחזירה את פלט

$$1^{i+j}.$$

פתרונות:



דוגמה 1.15 כפל אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i \# 1^j$$

ומחזירה את פלט

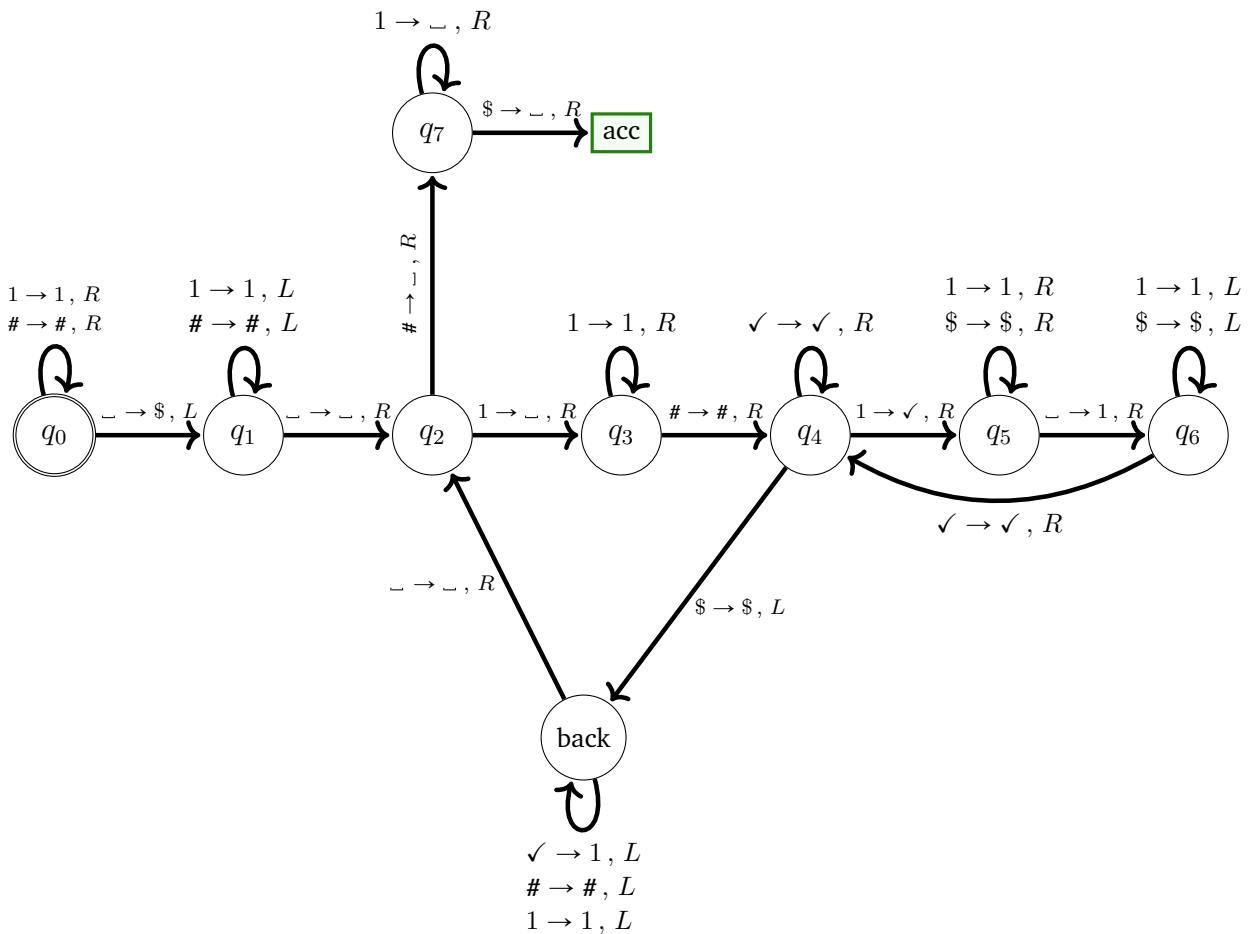
$$1^{i \cdot j}.$$

פתרונות:

- לדוגמה, נניח שהקלט הוא 2 כפול 2.

הקלט הוא 11#11.

- נרצה להבדיל בין הקלט לבין הפלט.
לכן בתחילת הריצה, נתקדם ימינה עד סוף הקלט ונוסף שם את התו \$.
לאחר מכן נחזור לתחילת הקלט.
- על כל אות 1 במילה השמאלית נעתק את המילה הימנית לאחר סימן ה- \$.
- לאחר מכן נשאיר רק את התווים שלאחר סימן ה \$. כמובן, נמחק את כל מה שאינו פלט.



| μ | q | σ | ν |
|---|-------|---------------------|--------------------------|
| $\underline{\quad}$ | q_0 | 1 | $1\#11\underline{\quad}$ |
| $\underline{\quad}11\#11$ | q_1 | $\underline{\quad}$ | $\underline{\quad}$ |
| $\underline{\quad}11\#11$ | q_1 | \$ | $\underline{\quad}$ |
| $\underline{\quad}$ | q_1 | $\underline{\quad}$ | $11\#11\$$ |
| $\underline{\quad}$ | q_2 | 1 | $1\#11\$$ |
| $\underline{\quad}\underline{\quad}$ | q_3 | 1 | $\#11\$$ |
| $\underline{\quad}\underline{\quad}1\#$ | q_4 | 1 | $1\$$ |
| $\underline{\quad}\underline{\quad}1\#\checkmark$ | q_5 | 1 | \$ |
| $\underline{\quad}\underline{\quad}1\#\checkmark 1\$$ | q_5 | $\underline{\quad}$ | $\underline{\quad}$ |
| $\underline{\quad}\underline{\quad}1\#\checkmark 1\1 | q_6 | $\underline{\quad}$ | $\underline{\quad}$ |
| $\underline{\quad}\underline{\quad}1\#$ | q_6 | \checkmark | $1\$1\underline{\quad}$ |
| $\underline{\quad}\underline{\quad}1\#\checkmark$ | q_4 | 1 | $\$1\underline{\quad}$ |
| $\underline{\quad}\underline{\quad}1\#\checkmark\checkmark$ | q_5 | \$ | $1\underline{\quad}$ |
| $\underline{\quad}\underline{\quad}1\#\checkmark\checkmark\1 | q_5 | $\underline{\quad}$ | $\underline{\quad}$ |
| $\underline{\quad}\underline{\quad}1\#\checkmark\checkmark\11 | q_6 | $\underline{\quad}$ | $\underline{\quad}$ |

| | | | | |
|--|-------|--------------|-----------|----------|
| $\sqcup \sqcup 1\# \checkmark$ | q_6 | \checkmark | \$11 | \sqcup |
| $\sqcup \sqcup 1\#\checkmark\checkmark$ | q_4 | \$ | 11 | \sqcup |
| $\sqcup \sqcup 1\#\checkmark$ | back | \checkmark | \$11 | \sqcup |
| $\sqcup \sqcup$ | back | \sqcup | 1#11\$11 | \sqcup |
| $\sqcup \sqcup$ | q_2 | 1 | #11\$11 | \sqcup |
| $\sqcup \sqcup \sqcup$ | q_3 | # | 11\$11 | \sqcup |
| $\sqcup \sqcup \sqcup \#$ | q_4 | 1 | 1\$11 | \sqcup |
| $\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark$ | q_5 | 1 | \$11 | \sqcup |
| $\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark 1\11 | q_5 | \sqcup | \sqcup | \sqcup |
| $\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark 1\111 | q_6 | \sqcup | \sqcup | \sqcup |
| $\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark$ | q_6 | \checkmark | 1\\$111 | \sqcup |
| $\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark$ | q_4 | 1 | \$111 | \sqcup |
| $\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark \checkmark$ | q_5 | \$ | 111 | \sqcup |
| $\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark \checkmark \111 | q_5 | \sqcup | \sqcup | \sqcup |
| $\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark \checkmark \1111 | q_6 | \sqcup | \sqcup | \sqcup |
| $\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark$ | q_4 | \checkmark | \$1111 | \sqcup |
| $\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark \checkmark$ | q_4 | \$ | 1111 | \sqcup |
| $\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark$ | back | \checkmark | \$1111 | \sqcup |
| $\sqcup \sqcup \sqcup$ | back | \sqcup | #11\$1111 | \sqcup |
| $\sqcup \sqcup \sqcup$ | q_2 | # | 11\$1111 | \sqcup |
| $\sqcup \sqcup \sqcup$ | q_7 | 1 | 1\$1111 | \sqcup |
| $\sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup$ | q_7 | \$ | 1111 | \sqcup |
| $\sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup$ | acc | 1 | 111 | \sqcup |