המחלקה למתמטיקה

$03-22$
$9:10-10:40$

אלגברה ליניארית 1 להנדסת תוכנה

בוחן אמצע סמסטר

מרצים: ד'ר ירמיהו מילר

תשפ"ב סמסטר ב'

השאלון מכיל עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דף נוסחאות של הקורס (עמוד אחד $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לענות על כל השאלות 1-3.

==

שאלה מס' 1 (40 נקודות)

שים לב בשאלה הזאת: דירוג המטריצה שווה 8 נקודות. סעיף (א) שווה 8 נקודות, שווה (ב) שווה 8 נקודות וסעיף (ג) שווה 8 נקודות. חלק 2 שווה 8 נקודות.

1. נתונה המערכת הלינארית הבאה מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} ax+y+2z &= 0 \\ ax+(a-2)y+5z &= -5 \\ 2ax+(a-1)y+(a^2-6a+15)z &= a-9 \end{aligned}$$

א. מצאו את ערכי הפרמטר a עבורם למערכת אין פתרון.

ב. מצאו את הערכים של a עבורם למערכת יש פתרון יחיד.

ג. מצאו את הערכים של a עבורם למערכת יש אינסוף פתרונות. עבור ערך a הגדול מבין אלו שמצאת, רשום את הפתרון הכללי.

2. נתונה הקבוצה $S=\left\{\begin{pmatrix}a\\a\\2a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\a-2\\a-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\20\\10-4a+a^2\end{pmatrix}\right\}$ מצאו את ערכי הפרמטר a עבורם הקבוצה בת"ל.

<u>שאלה מס' 2</u> (30 נקודות)

1. (20) נתונה המערכת הבאה:

$$\begin{aligned} x+\bar{3}y+z &= \bar{1} \\ \bar{3}x+y+\bar{2}z &= \bar{2} \\ \bar{2}x+\bar{2}y+\bar{3}z &= \bar{4} \end{aligned}$$

פתור את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$. רשום את כל הפתרונות בצורה מפורשת. כמה פתרונות יש למערכת?

2. (10) בהינתן מערכת לינארית בעלת 2 משוואות ו-3 משתנים מעל $\mathbb{Z}_3$, רשום את כל האפשרויות למספר הפתרונות של המשוואה.

<u>שאלה מס' 3</u> (30 נקודות)

1. תהיינה $A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ו- $A\neq 0$. הוכיחו או הפריכו :
   א. (6) אם $AB=AC$ אז $B=C$.
   ב. (6) אם $AB=0$ אז $A=0$ או $B=0$.

   תהיינה $Y\subseteq X$ קבוצות של וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$. הוכיחו או הפריכו :
   ג. (6) אם X בת"ל אז Y בת"ל.
   ד. (6) אם Y בת"ל אז X בת"ל.

2. (6) נתונה הקבוצה

$$S=\left\{\begin{pmatrix}5\\a+4\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\a-5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\a^2+\sqrt{5}\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\8a\\9a-4\end{pmatrix}\right\}$$

מצאו לאילו ערכי a הקבוצה היא בת"ל.

פתרונות

שאלה מס' 1 1. נדרג את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 0 \\ a & a-2 & 5 & -5 \\ 2a & a-1 & a^2-6a+15 & a-9 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-2\cdot R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & 3 & -5 \\ 0 & a-3 & a^2-6a+11 & a-9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & a^2-6a+8 & a-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & (a-4)(a-2) & a-4 \end{pmatrix}$$

לכן, למערכת יש פתרון יחיד אם"ם $a \neq 0,2,3,4$.

כאשר $a=4$ נקבל $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולמערכת יהיו אינסוף פתרונות בגלל שיש משתנה חופשי.

הפתרון הכללי הוא $(x,y,z)=((5+z)/4,-5-3z,z)$

כאשר $a=2$ נקבל $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ולמערכת אין פתרון (שורה סתירה).

כאשר $a=3$ נקבל $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\cdot R_3\to R_3+\cdot R_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ ולמערכת אין פתרון (שורה סתירה).

כאשר $a=0$ נקבל

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2+3R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to \frac{9}{8}\cdot R_3-R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

כך שלמערכת אין פתרון בגלל שקיבלנו שורת סתירה.

לסיכום,

א. אין פתרון כאשר $a=0,2,3$.
ב. יש פתרון יחיד כאשר $a\neq 0,2,3,4$.
ג. אינסוף פתרונות כאשר $a=4$ מצורה $(x,y,z)=\left(\frac{z+5}{4},-5-3z,z\right)$

2. לבדוק לאיזה ערכי הפרמטר a יש לצרוף לינארי הבא רק הפתרון הטריוויאלי:

$$x\begin{pmatrix}a\\a\\2a\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\a-2\\a-1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2\\20\\10-4a+a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

נדרג את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a&1&2&0\\a&a-2&20&0\\2a&a-1&a^2-4a+10&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-2\cdot R_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}a&1&2&0\\0&a-3&18&0\\0&a-3&a^2-4a+6&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\begin{pmatrix}a&1&2&0\\0&a-3&18&0\\0&0&a^2-4a-12&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&1&2&0\\0&a-3&18&0\\0&0&(a-6)(a+2)&0\end{pmatrix}$$

נקבל את הפתרון הטריוויאלי, $(x,y,z)=(0,0,0)$ אס"ם $a\neq-2,0,3,6$. לכן הקבוצה בת"ל אס"ם $a\neq-2,0,3,6$.

<u>שאלה מס' 2</u>

.1

$$\begin{aligned}x+\bar{3}y+z&=\bar{1}\\ \bar{3}x+y+\bar{2}z&=\bar{2}\\ \bar{2}x+\bar{2}y+\bar{3}z&=\bar{4}\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - \bar{2}R_1]{R_2 \to R_2 - \bar{3}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & 3 & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{2} & -\bar{1} & -\bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{4} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \bar{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \bar{3} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - \bar{3} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$(x, y, z) = (\bar{0}, \bar{2}, \bar{0})$$

פתרון יחיד.

2. • אם יש שורה סתירה אז למערכת 0 פתרונות. אחרת, יתכנו המקרי הבאים:
   • משתנה חופשי אחד ואז למערכת יש 3 פתרונות.
   • 2 משתנים חופשיים ואז למערכת יש 3^2 פתרונות.

<u>שאלה מס' 3</u>

.1

א. לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&a\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}b&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}0&c\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad a,b,c\in\mathbb{R}\ ,\quad a,b,c\neq 0\ .$$

ב. לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&a\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}b&0\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

ג. לא נכונה. דוגמה נגדית: יהי

$$X=\{v_1\dots v_n\}$$

קבוצה של n וקטורים מעל $\mathbb{R}^n$ כך ש X בת"ל ויהי

$$Y=\{v_1\dots v_n,v_{n+1},\dots v_p\}$$

קבוצה של p וקטורים מעל $\mathbb{R}^n$.

$p>n$ כך ש $X\subset Y$. הקבוצה Y ת"ל מסיבה שישנם יותר וקטורים ב- Y מן המימד של המרחב $\mathbb{R}^n$. (קבוצת p וקטורים מעל $\mathbb{R}^n$ היא ת"ל אם $p>n$).

ד. נכונה. יהי

$$X=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$$

קבוצה של m וקטורים מעל $\mathbb{R}^n$ ו-

$$Y=\{v_1,v_2,\dots,v_m,v_{m+1},\dots,v_p\}$$

קבוצה של p וקטורים מעל $\mathbb{R}^n$, כאשר $p\geq m$. נתון כי Y בת"ל. בכדי להוכיח ש X בת"ל צריך להראות כי למשוואה הבאה

$$a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_mv_m=0 \qquad (*)$$

יש רק את הפתרון $a_1=0,a_2=0,\dots a_m=0$ והפתרון הזה יחיד. שים לב שישנם $p-m$ וקטורים ב- Y, כלומר $v_{m+1},\dots,v_p$ הלא מופיעים במשוואה (*). נוסיף 'אפס' לאגף השמאל של (*) ע"י להוסיף את $0\cdot v_{m+1}+\cdots+0\cdot v_p$ לאגף השמאל ונקבל

$$a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_mv_m+0\cdot v_{m+1}+\cdots+0\cdot v_p=0 \qquad (\#)$$

שים לב, פתרון של (#) הוא גם פתרון של (*). אבל Y בת"ל, ולפיו הפתרון <u>היחיד</u> למשוואה (#) הוא

$$a_1=0,\ a_2=0,\ \dots,a_m=0\ .$$

הפתרון הזה גם פתרון של (*) והוא יחיד. לכן X בת"ל.

2. אף a. קבוצה של 4 וקטורים מעל $\mathbb{R}^3$ תמיד ת"ל, ובאופן כללי קבוצה של m וקטורים מעל $\mathbb{R}^n$ ת"ל כאשר $m>n$.