

שיעור 5

רציפות בנקודה

הגדרה 5.1 רציפות בנקודה

נניח ש- $f(x)$ פונקציה המוגדרת בנקודה a ובסביבה של a . הפונקציה $f(x)$ נקראת רציפה בנקודה a אם

1.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x),$$

(כלומר הגבול הדו-צדדי $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ קיים)

2.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

מכיוון ש $\lim_{x \rightarrow a} x = a$, מקבלים $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right)$, ז"א סימן של \lim נכנס לתוך הפונקציה.

דוגמה 5.1

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = e^1 = e \quad \text{דוגמא 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln[(1+x)^{1/x}] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \right] = \ln e = 1 \quad \text{דוגמא 2}$$

משפט 5.1 תכונות של פונקציה רציפה

(1) אם פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפות בנקודה a , אז הפונקציות $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ רציפות בנקודה

a . הפונקציה $\frac{f}{g}$ רציפה בנקודה a בתנאי $g(a) \neq 0$.

(2) נניח ש $y = f(u)$, $u = g(x)$, $g(a) = b$, פונקציה g רציפה בנקודה a ופונקציה f רציפה בנקודה b , אז הפונקציה $y = f(g(x))$ רציפה בנקודה a .

(3) כל פונקציה אלמנטרית רציפה בכל נקודה פנימית של תחום הגדרתה.

הגדרה 5.2 אי-רציפות בנקודה

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה a אבל לא בהכרח בנקודה a עצמה.

(א) אם קיימים הגבולות החד-צדדים הסופיים ו-

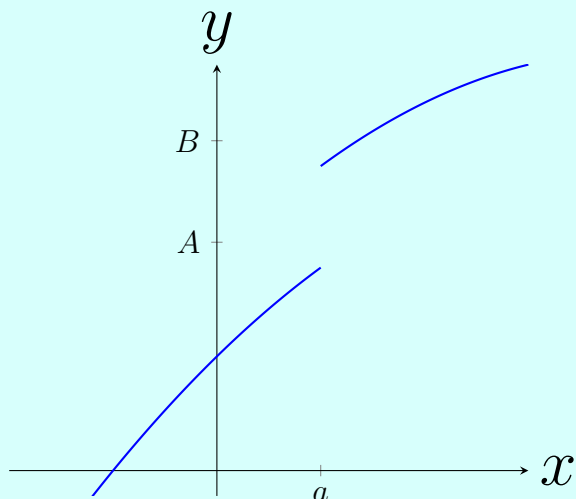
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a)$$

או ש $f(a)$ לא מוגדר, אומרים כי a היא נקודת אי-רציפות סליקה של $f(x)$.

(ב) נקודה a היא נקודת אי-רציפות ממין ראשון של $f(x)$ אם קיימים הגבולות החד-צדדים הסופיים

כלומר, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = B$ אבל $A \neq B$,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$



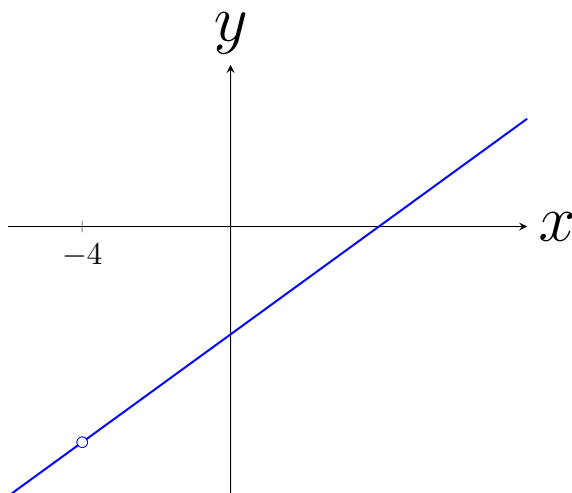
ג) נקודה a נקראת אי רציפות ממין שני של פונקציה $f(x)$ אם לפחות אחד הגבולות החד צדדיים $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ או $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ שווה ל- ∞ או $-\infty$ או לא קיים.

5.2 דוגמה

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x + 4} \text{ לא מוגדרת בנקודה } x = -4.$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x + 4)(x - 4)}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow -4} (x - 4) = -8$$

הגבול של $f(x)$ קיים בנקודה $x = -4$. לכן $x = -4$ נקודת אי-רציפות סליקה.

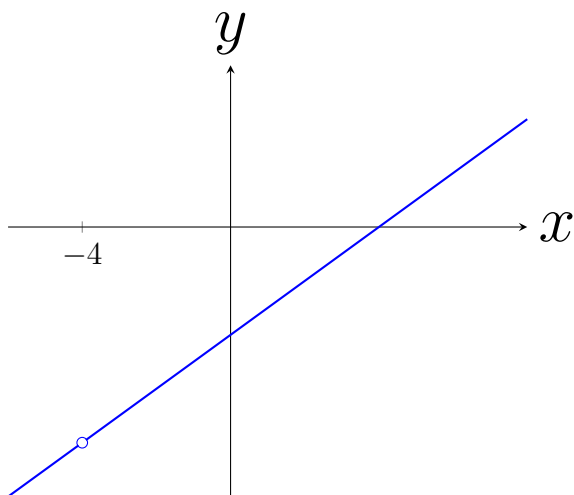


5.3 דוגמה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0, \\ 2 & x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

אבל $f(0) = 2$. ז"א $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$ לכן הנקודה $x = 0$ נקודת אי-רציפות סליקה.



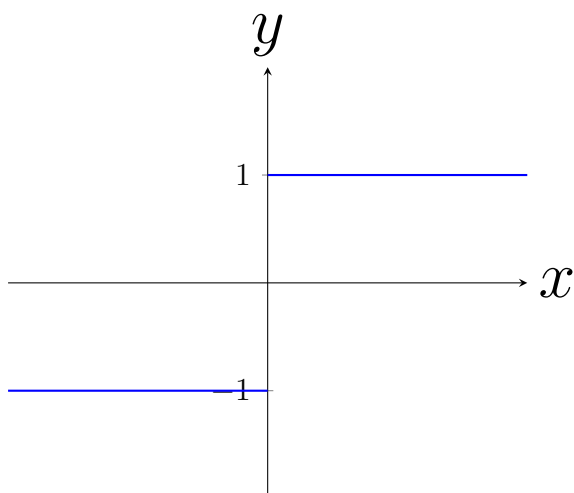
5.4 דוגמה

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

$x = 0$ נקודת אי-רציפות.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = -1$$

לכן $x = 0$ נקודת אי-רציפות ממין ראשון.



דוגמה 5.5

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & -1 < x < 2, \\ 2 - x & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2 - x) = 0.$$

לכן $x = 2$ נקודת אי-רציפות ממין ראשון.

דוגמה 5.6

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan\left(\frac{2}{x-1}\right) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan\left(\frac{2}{x-1}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$x = 1$ נקודת אי רציפות ממין ראשון.

דוגמה 5.7

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$$

לכן $x = 2$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

דוגמה 5.8

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

לא קיים. לכן $x = 0$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

דוגמה 5.9

מצאו את נקודות אי הרציפות של הפונרציה הבאה וברר את סוגן:

$$f(x) = \frac{x}{x+3} + 2^{-1/x^2}$$

$$\underline{x = -3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \left(\frac{x}{x+3} + 2^{-1/x^2} \right) = \infty$$

$x = -3$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

$$\underline{x = 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x+3} + 2^{-1/x^2} \right) = 0 + 0 = 0$$

$x = 0$ נקודת אי-רציפות סליקה.

דוגמה 5.10

מצאו את נקודות אי הרציפות של הפונרציה הבאה וברר את סוגן:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} + \frac{\tan x}{x}$$

פתרון:

נקודות אי רציפות: $x = -1, 3, 0$, $\frac{\pi}{2} + n\pi$.

$$\underline{x = -1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} + \frac{\tan x}{x} \right) = -\infty$$

$x = -1$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

$$\underline{x = 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} + \frac{\tan x}{x} \right) = \frac{3}{2} + \frac{\tan 3}{3} = 0$$

$x = 3$ נקודת אי-רציפות סליקה.

$$\underline{x = 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} + \frac{\tan x}{x} \right) = 3 + 1 = 4$$

$x = 0$ נקודת אי-רציפות סליקה.

$$\underline{x = \frac{\pi}{2} + n\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + n\pi)^-} \left(\frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} + \frac{\tan x}{x} \right) = \infty .$$

$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

5.11 דוגמה

נתונה פונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & x \leq 1 \\ ax^2 & -1 < x \leq 1 \\ \sqrt{x+b} & x > 1 \end{cases}$$

עבור אילו ערכי a, b רציפה לכל $x \in \mathbb{R}$?

פתרון:

אי-רציפות בנקודה $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f = 2^{-(-1)} = 2 , \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f = a(-1)^2 = a .$$

לכן f רציפה ב- $x = -1$ אם $a = 2$.

אי-רציפות בנקודה $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f = a1^2 = a (= 2) , \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f = \sqrt{1+b} .$$

לכן f רציפה ב- $x = 1$ אם

$$\sqrt{1+b} = 2 \Rightarrow b = 3 .$$

5.12 דוגמה

לאילו ערכי פרמטר a הפונקציה $f(x) = \frac{x}{a + \sin x}$ תהיה רציפה לכל x ממשי?

פתרון:

$f(x)$ רציפה לכל x ממשי כאשר $a + \sin x \neq 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$. שים לב $-1 \leq \sin x \leq 1$ לכן $a + \sin x \neq 0$ עבור $a > 1$ ו- $a < -1$.

5.13 דוגמה

נתונה פונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(\sqrt{a^2+1} \cdot x)}{2x^2} & x < 0 \\ b & x = 0 \\ x+5 & x > 0 \end{cases}$$

א. עבור אילו ערכי a, b רציפה ב- $x = 0$?

ב. עבור אילו ערכי a, b הנקודה $x = 0$ נקודת אי-רציפות ממין ראשון?

ג. עבור אילו ערכי a, b הנקודה $x = 0$ נקודת אי-רציפות סליקה?

פתרון:

א.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2(\sqrt{a^2 + 1} \cdot x)}{2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a^2 + 1}{2} \frac{\sin^2(\sqrt{a^2 + 1} \cdot x)}{(\sqrt{a^2 + 1} \cdot x)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a^2 + 1}{2},\end{aligned}$$

ו-

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 5) \\ &= 5,\end{aligned}$$

ו- $f(0) = b$. כדי ש- f תהיה רציפה נדרש כי $\lim_{x \rightarrow 0^-} f = \lim_{x \rightarrow 0^+} f = f(0)$ וזה מתקיים אם $\frac{a^2+1}{2} = 5 = b$ או שקול

$$b = 5, \quad a = \pm 3.$$

ב. הגבול $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 5$ קיים לכל $b \in \mathbb{R}$ והגבול $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{a^2+1}{2}$ קיים לכל $b \in \mathbb{R}$. לכן $x = 0$ תהיה נקודת אי-רציפות ממין ראשון אם

$$\frac{a^2 + 1}{2} \neq 5 \quad \Rightarrow \quad a \neq \pm 3$$

לכל $b \in \mathbb{R}$.

ג. הגבולות $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f$ זהים אם $a = \pm 3$ ו-

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f \neq f(0) = b$$

אם $b \neq 5$.

