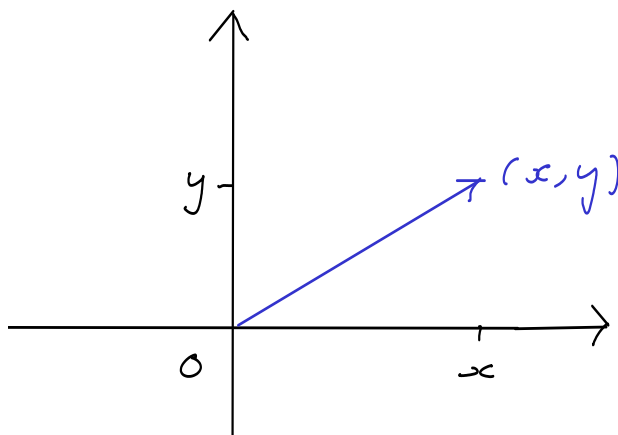


# שיעור 5

## מרחבים ווקטוריים

### 5.1 מרחבים ווקטוריים

באלגברה ווקטור במישור תמיד מתחיל בנקודה  $(0, 0)$ . לכן כל ווקטור במישור נקבע ע"י הנקודה הסופית שלו  $(x, y)$ .



לקבוצת כל הווקטורים במישור מסמנים  $\mathbb{R}^2$ .

פעולות ב-  $\mathbb{R}^2$

(1) חיבור ווקטורים:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

(2) כפל של ווקטור בסקלר:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

באופן דומה ניתן להגדיר פעולות בין ווקטורים ב-  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

(1) חיבור ווקטורים:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

(2) כפל של ווקטור בסקלר:

$$\alpha \cdot (x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

באופן כללי נגדיר מרחב ווקטורי  $\mathbb{R}^n$ :

## הגדרה 5.1 מרחב ווקטורי $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$  מוגדר להיות הקבוצה של כל הסטים מ  $n$  מספרים ממשיים:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

הפעולות הבאות מוגדרות בין ווקטורים ב-  $\mathbb{R}^n$ :

(1) חיבור ווקטורים:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

(2) כפל של ווקטור בסקלר:

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

בדוגמאות האלה הסקלרים שייכים לשדה  $\mathbb{R}$ .

באופן דומה הסקלרים יכולים להשתייך לשדה אחר, למשל  $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$ .

ניתן הגדרה כללית של מרחב ווקטורי מעל שדה  $\mathbb{F}$ :

## הגדרה 5.2 מרחב ווקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$

קבוצה לא ריקה  $V$  נקראת מרחב ווקטורי (מ"ו) מעל שדה  $\mathbb{F}$  אם מתקיימים התנאים הבאים (האיברים של  $V$  נקראים ווקטורים ואיברי  $\mathbb{F}$  נקראים סקלרים). לכל ווקטורים  $u, v, w \in V$  וסקלרים  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ :

$$u + v \in V \quad (1)$$

$$\alpha u \in V \quad (2) \text{ קיים ווקטור } \alpha u \in V$$

$$u + v = v + u \quad (3) \text{ (חוק החילוף)}$$

$$(u + v) + w = u + (v + w) \quad (4) \text{ (חוק הקיבוץ)}$$

$$\bar{0} \in V \quad (5) \text{ קיים ווקטור } \bar{0} \in V \text{ (הנקרא ווקטור האפס) כך שלכל } u \in V, \text{ מתקיים } \bar{0} + u = u + \bar{0} = u$$

$$u \in V \quad (6) \text{ לכל } u \in V \text{ קיים } -u \in V \text{ כך ש- } u + (-u) = \bar{0}$$

$$(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u) \quad (7)$$

$$(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u \quad (8)$$

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v \quad (9)$$

$$1 \cdot u = u \quad (10) \text{ (כאשר } 1 \in \mathbb{F})$$

## 5.2 דוגמאות מרכזיות של מרחבים ווקטורים

**דוגמה 5.1  $\mathbb{F}^n$** 

מרחב הווקטורים מעל שדה  $\mathbb{F}$ .

**דוגמה 5.2  $\mathbb{R}^{m \times n}$** 

קבוצת כל המטריצות מסדר  $m \times n$  עם איברים ממשיים היא מרחב ווקטורי.

לכל שתי מטריצות מסדר  $m \times n$  מוגדרת פעולת חיבור וכל מטריצה ניתן להכפיל בסקלר השייך ל  $\mathbb{R}$ .

קל לבדוק שכל האקסיומות של מרחב ווקטורי מתקיימות. לכן זה מרחב ווקטורי מעל  $\mathbb{R}$ .

**דוגמה 5.3  $\mathbb{C}^{m \times n}$** 

באופן דומה קבוצת כל המטריצות מסדר  $m \times n$  עם איברים מרוכבים היא מרחב ווקטורי מעל השדה  $\mathbb{C}$ .

**דוגמה 5.4  $\mathbb{F}^{m \times n}$** 

באופן כללי קבוצת כל המטריצות מסדר  $m \times n$  עם איברים משדה  $\mathbb{F}$  היא מרחב ווקטורי מעל השדה  $\mathbb{F}$ .

**דוגמה 5.5**

$\mathbb{F}[x]$  קבוצת כל הפולינומים עם מקדמים השייכים לשדה  $\mathbb{F}$ , שמסומנת ב-  $\mathbb{F}[x]$  היא מרחב ווקטורי.

מוגדרות פעולות חיבור פולינומים וכפל של פולינומים בסקלר השייך ל-  $\mathbb{F}$ .

כל האקסיומות של מרחב ווקטורי מתקיימות.

**דוגמה 5.6  $F(\mathbb{R})$** 

קבוצת הפונקציות הממשיות שמסומנת ב-

$$F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}\}$$

היא מרחב ווקטורי.

מוגדרות פעולות חיבור פונקציות וכפל פונקציה בסקלר מתוך  $\mathbb{R}$ .

נגדיר חיבור וכפל בסקלר כפי שהוגדרו בחדו"א. לכל  $f, g \in F(\mathbb{R})$  ולכל  $\alpha \in \mathbb{R}$  נגדיר

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ (\alpha \cdot f)(x) &= \alpha \cdot f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

ווקטור האפס הוא הפונקציה  $f(x) = 0$ .

קבוצה זו עם הפעולות הללו היא מרחב ווקטורי.

## דוגמה 5.7

נתונים הפולינומים של  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[x]$ :

$$P_1 = 7 + 5x + 3x^3 + 4x^7 \in \mathbb{R}[x], \quad P_2 = 6 + 4x + 8x^2 + 3x^7 + 9x^{13} \in \mathbb{R}[x],$$

ונתון הסקלר  $\alpha = 3$ , חשבו את  $P_1 + P_2$  ו-  $\alpha \cdot P_1$ .

### פתרון:

אז

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= (7 + 5x + 3x^3 + 4x^7) + (6 + 4x + 8x^2 + 3x^7 + 9x^{13}) \\ &= (7 + 6) + (5 + 4)x + (0 + 8)x^2 + (3 + 0)x^3 + (4 + 3)x^7 + (0 + 9)x^{13} \in \mathbb{R}[x], \end{aligned}$$

נתון הסקלר  $\alpha = 3$ :

$$\begin{aligned} \alpha \cdot P_1 &= 13 + 9x + 8x^2 + 3x^3 + 7x^6 + 9x^{13} \\ &= 3 \cdot (7 + 5x + 3x^3 + 4x^7) \\ &= (3 \cdot 7) + (3 \cdot 5)x + (3 \cdot 3)x^3 + (3 \cdot 4)x^7 \\ &= 21 + 15x + 9x^3 + 12x^7 \in \mathbb{R}[x]. \end{aligned}$$

■

## דוגמה 5.8

נתונות הפונקציות  $f, g \in F(\mathbb{R})$ :

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = 2x + 19,$$

חשבו את  $(7 \cdot f)(x)$  ו-  $(f + g)(x)$ .

### פתרון:

שתיהן פונקציות השייכות ל-  $F(\mathbb{R})$ .

$$(f + g)(x) = \sin x + 2x + 19.$$

מתקיים:

$$(7 \cdot f)(x) = 7 \cdot \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

## דוגמה 5.9 מ

יהו ווקטור האפס של  $F(\mathbb{R})$ ?

### פתרון:

פונקצית האפס: פונקציית האפס,

$$O(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

שימו לב שאכן לכל  $f \in V$  מתקיים  $f + O = f$  כי

$$(f + O)(x) = f(x) + O(x) = f(x) + 0 = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$