תוכן העניינים

1 הגדרות

1.1 סימון

בבלה למטה A היא מטריצה כלשהי ו- T הוא אופרטור $T: V \to V$ כלשהו במרחב וקטורי V.

סימון	שם	הסבר
A^t	הטרנספוז (המשוחלפת) של A	המטריצה המתקבלת ע"י להחליף שורות ועמודות של A: $(A^t)_{ij} = A_{ji}$
A^* (סימון חלופי: $\bar{A}$)	המטירצה הצמודה של A	טרנספוז של הצמודה מרוכבת של A.
T^* (סימון חלופי: $\bar{T}$)	האופרטור הצמוד של T	לכל $u, w \in V$: $\langle T(u), w\rangle = \langle u, T^*(w)\rangle$

1.2 מכפלה פנימית

הגדרה 1: מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. מכפלה פנימית על V היא פונקציה $\langle,\rangle : V\times V\to\mathbb{R}$ המתאימה לכל $u,\mathrm{v}\in V$ סקלר ממשי מסומן $\langle u,\mathrm{v}\rangle$ כך שמתקיימות התכונות הבאות. לכל $u,\mathrm{v},w\in V$ וסקלר $\lambda\in\mathbb{R}$:

1) **סימטריות:** $\langle u,\mathrm{v}\rangle=\langle \mathrm{v},u\rangle$.

2) **ליניאריות בוקטור הראשון:** **א)** $\langle u+\mathrm{v},w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle \mathrm{v},w\rangle$. **ב)** $\langle \lambda u,\mathrm{v}\rangle=\lambda\langle u,\mathrm{v}\rangle$.

3) **חיוביות:** $\langle u,u\rangle\geq 0$ וגם $\langle u,u\rangle=0$ אם ורק אם $u=0$.

הגדרה 2: מרחב אווקלידי

מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{R}$ יחד עם מכפלה פנימית מסויימת נקרא מרחב אוקלידי.

הגדרה 3: מכפלה פנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^n$

בהינתן שני וקטורים $u,\mathrm{v}\in\mathbb{R}^n$. נניח כי בבסיס הסטנדרטי $u=\sum\limits_{i=1}^n x_ie_i$ ו- $\mathrm{v}=\sum\limits_{i=1}^n y_ie_i$.

המכפלה פנימית הסטנדרטית היא

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i\ .$$

הגדרה 4: העקבה של מטריצה ריבועית

לכל מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ העקבה של A זה סכום איברי האלכסון של A. העקבה מסומנת $\mathrm{tr}\,(A)$.

הגדרה 5: המכפלה הפנימית הסטנדרטית של מטריצות

תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$. המכפלה הפנימית הסטנדרטית של מטריצות היא פונקציה $\langle,\rangle:\mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}$ המוגדרת

$$\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}\left(B^t\cdot A\right)\ .$$

הגדרה 6: המכפלה הפנימית הסטנדרטית של פונקציות

תהיינה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו- $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות שמוגדרות בקטע $[a,b]\in\mathbb{R}$. המכפלה הפנימית הסטנדרטית של פונקציות מוגדרת

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\,dx\ .$$

הגדרה 7: מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$. מכפלה פנימית על V היא פונקציה $\langle,\rangle : V\times V\to\mathbb{R}$ המתאימה לכל $u,\mathrm{v}\in V$ סקלר ב- $\mathbb{C}$ מסומן $\langle u,\mathrm{v}\rangle$ כך שמתקיימים התנאים הבאים. לכל וקטורים $u,\mathrm{v},w\in V$ וסקלר $\lambda\in\mathbb{C}$:

1) **הרמיטיות:** $\langle u,\mathrm{v}\rangle=\overline{\langle \mathrm{v},u\rangle}$.

2) **ליניאריות ברכיב הראשון:** **א)** $\langle u+\mathrm{v},w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle \mathrm{v},w\rangle$ **ב)** $\langle \lambda u,\mathrm{v}\rangle=\lambda\langle u,\mathrm{v}\rangle$

3) **<u>חיוביות:</u>** $\langle u,u\rangle$ הוא מספר ממשי אי-שללי. $\langle u,u\rangle=0$ אם ורק אם $u=0$.

הגדרה 8: מרחב אוניטרי

מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{C}$ יחד עם מכפלה פנימית מסויימת נקרא מרחב אוניטרי.

הגדרה 9: הנורמה

יהי V מרחב מכפלה פנימית. הנורמה $\|u\|$ של וקטור $u\in V$ היא מספר ממשי אי-שללי הניתנת ע"י

$$\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}$$

במרחבים $\mathbb{R}^2$ ו- $\mathbb{R}^3$ הנורמה היא בעצם האורך של וקטור.

הגדרה 10: המרחק

יהיו u ו- v שני וקטורים במרחב מכפלה פנימית. המרחק בין u ו- v הוא מספר ממשי אי-שלילי המוגדר ע"י

$$d(u,\mathrm{v})=\|u-\mathrm{v}\|$$

הגדרה 11: ווקטורים אורתוגונליים

וקטורים u,v במרחב מכפלה פנימית נקראים אורתוגונליים זה לזה (או מאונכים זה לזה) אם

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle=0\ .$$

סימון: $u\perp\mathrm{v}$.

1) אם $\langle u,\mathrm{v}\rangle=0$ אז $\langle\mathrm{v},u\rangle=\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}=\bar{0}=0$. כלומר יחס האורתוגונליות הוא סימטרי.

2) וקטור האפס אורתוגונלי לכל וקטור v.

3) במרחב $\mathbb{R}^n$ עם המכפלה פנימית הסטנדרטית, מושג האורתוגונליות מתלכד עם מושג האורתוגונליות המוגדר על סמך המכפלה סלקרית.

הגדרה 12: ווקטור האורתוגונלי לתת-מרחב

יהי V מרחב מכפלה פנימית ו- $U\subseteq V$ תת-מרחב של V. יהי $\mathrm{v}\in V$. אומרים כי v אורתוגונלי ל- U אם v אורתוגונלי לכל וקטור $u\in U$.

כלומר, אם $\langle\mathrm{v},u\rangle=0$ לכל $u\in U$, אז הווקטור v אורתוגונלי לתת-מרחב U.

סימון: $\mathrm{v}\perp U$.

הגדרה 13: המשלים האורתוגונלי

יהי V מרחב מכפלה פנימית ו- $U\subseteq V$

תת-מרחב של V. **המשלים האורתוגנלי** של U מסומן $U^{\perp}$ ומוגדר לפי התנאי שכל ווקטור ב- $U^{\perp}$ אורתגונלי לכל ווקטור ב U.

כלומר: $\langle a,b\rangle=0$ לכל $a\in U$ ולכל $b\in U^{\perp}$.

1.3 בסיס אורתוגונלי

הגדרה 14: קבוצת ווקטורים אורתוגונלית

יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ קבוצת וקטורים של V. הקבוצה נקראת **אורתוגונלית** אם כל שני ווקטורים שלה אורתוגונליים. כלומר: $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ לכל $i \neq j$.

הגדרה 15: קבוצת ווקטורים ואורתונורמלית

יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ קבוצת וקטורים של V. הקבוצה נקראת **אורתונורמלית** אם:

א) כל שני ווקטורים שלה אורתוגונליים, כלומר $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ לכל $i \neq j$.

ב) כל וקטור הוא וקטור יחידה, כלומר $\|u_i\| = 1$.

הגדרה 16: בסיס אורתוגונלי ובסיס אורתונורמלי

- בסיס של V המורכב מווקטורים אורתוגונליים נקרא **בסיס אורתוגונלי.**
- בסיס של V המורכב מווקטורים אורתונורמליים נקרא **בסיס אורתונורמלי.**

הגדרה 17: הגדרת ההיטל האורתוגונלי

יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $U \subseteq V$ תת מרחב נוצר סופית של V. יהי $\{u_1, \ldots, u_k\}$ בסיס אורתוגונלי של U. אז לכל ווקטור $w \in V$, ההיטל האורתוגונלי של w מסומן ב- $P_U(w)$ ומוגדר

$$P_U(w) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle w, u_i\rangle}{\|u_i\|^2} u_i \ .$$

האופרטור P_U נקרא **אופרטור ההטלה האורתוגונלי על** U .

1.4 ערכים עצמיים ווקטוירם עצמיים

הגדרה 18: ערך עצמי ווקטור עצמי של מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$. וקטור $\mathrm{v} \in F^n$ שלא שווה לוקטור האפס $(\mathrm{v} \neq \bar{0})$ יקרא וקטור עצמי של A אם קיים סקלר $\lambda \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$A \cdot \mathrm{v} = \lambda \mathrm{v} \ .$$

λ נקרא ערך עצמי של A ששייך לוקטור עצמי v. המשוואה הזאת נקראת משוואת ערך עצמי של A.

הגדרה 19: ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי של ערך עצמי של מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, ויהי u_i וקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ_i.

- **הריבוי אלגברי** של λ_i הוא הריבוי של λ_i בפולינום האופייני של A. כלומר אם
$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \quad \cdots \quad (\lambda - \lambda_i)^{m_i} \quad \cdots \quad (\lambda - \lambda_l)^{m_l} \ ,$$
אז הריבוי אלגברי של λ_i הוא m_i. סימון: $\mathrm{alg}(\lambda_i) = m_i$.

- **הריבוי גיאומטרי** של λ_i הוא המימד של המרחב עצמי שלו. כלומר אם
$$V_{\lambda_i} = \{u_1, \ldots, u_k\}$$
אז ל- λ_i יש k וקטורים עצמיים ואומרים כי הריבוי גיאומטרי של λ_i הוא k. סימון: $\mathrm{geo}(\lambda_i) = k$.

הגדרה 20: לכסינות של מרטיצות

מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ תקרא לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית. כלומר אם קיימת מטריצה הפיכה $P\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ומטריצה אלכסונית $D\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש-

$$A=PDP^{-1}\ . \qquad \Leftrightarrow \qquad D=P^{-1}AP$$

הגדרה 21: אופרטור לינארי

העתקה לינארית $T:V\to V$ נקראת אופרטור לינארי אם התחום והטווח הם אותו מרחב וקטורי V.

הגדרה 22: אופרטור לכסין

אופרטור לינארי $T:V\to V$ נקרא לכסין אם קיים בסיס של V כך שהמטריצה המייצגת $[T]_B$ לפי הבסיס B היא מטריצה אלכסונית. ז"א קיים בסיס $B=\{b_1,\ldots,b_n\}$ של V כך ש-

$$T(b_1)=\lambda_1 b_1\ , \qquad T(b_2)=\lambda_2 b_2, \quad \ldots \quad , T(b_n)=\lambda_n b_n\ ,$$

ולכן

$$[T]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

הערה: לא כל ה- $\{\lambda_i\}$ בהכרח שונים זה מזה.

הגדרה 23: ערך עצמי ווקטור עצמי של אופרטור לינארי

יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי ו- λ סקלר. λ נקרא **ערך עצמי** של T אם קיים וקטור $u\neq 0$ כך ש-

$$T(u)=\lambda u\ .$$

u נקרא **וקטור עצמי** ששייך לערך עצמי λ.

הגדרה 24: פולינום האופייני של אופרטור לינארי

יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי ותהי $A=[T]_B$ המטריצה המייצגת של T לפי בסיס B. הפולינום האופייני של T הוא

$$p_T(\lambda)=|\lambda I-A|\ .$$

הגדרה 25: הגדרת דמיון בין מטריצות

תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נאמר ש- A ו- B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה $P\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש-

$$B=P^{-1}AP\ .$$

1.5 משפט קיילי-המילטון ופולינום מינימלי

הגדרה 26: הצבה של מטריצה ריבועית בפולינם

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$. יהי

$$p(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_k x^k$$

פולינים כאשר $\alpha_i \in \mathbb{F}$ סקלרים. ההצבה של A בפולינים p מוגדרת להיות
$$p(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_k A^k$$
כאשר I_n המטריצה היחידה של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

הגדרה 27: הצבה של העתקה לינארית בפולינום

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$. יהי
$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots \alpha_k x^k$$
פולינום. האופרטור הלינארי $p(T) : V \to V$ מוגדר
$$p(T) = \alpha_0 I_V + \alpha_1 T + \ldots \alpha_k T^k$$
כאשר I_V האופרטור הזהות (שמוגדר $I_V(u) = u$ לכל $u \in V$).
$p(T)$ נקרא ההצבה של T ב- p.

הגדרה 28: איפוס פולינום ע"י מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ויהי $p(x) \in \mathbb{F}[x]$. אומרים כי A מאפסת את הפולינום $p(x)$ אם $p(A) = 0_{n\times n}$ כאשר $0_{n\times n}$ מטריצה האפס של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

הגדרה 29: איפוס פולינום על ידי אופרטור

יהי $T : V \to V$ אופרטור ויהי $p(x) \in \mathbb{F}[x]$. אומרים כי T מאפס את $p(x)$ אם $p(T) = 0$ כאשר 0 מסמן את האופרטור האפס.

הגדרה 30: פולינום המינימלי

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. הפולינום המינימלי של A מסומן $m_A(x)$ הוא פולינום מתוקן:
$$m_A(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{k-1} x^{k-1} + x^k \qquad (k \geq 1)$$
אשר הוא הפולינום המתוקן מדרגה הנמומה ביותר המתאפס על ידי A, כלומר $m_A(A) = 0$.

1.6 שילוש מטריצה

הגדרה 31: מטריצה ניתנת לשילוש

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. אומרים ש- A ניתנת לשילוש מעל $\mathbb{F}$ אם A דומה למטריצה משולשית עליונה, כלומר אם קיימת מטריצה P הפיכה ו- M מטירצה משולשית עליונה כך ש-
$$M = P^{-1} A P \qquad \Leftrightarrow \qquad A = P M P^{-1} \ .$$

הגדרה 32: אופרטור ניתן לשילוש

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$. אומרים כי T ניתן לשילוש אם קיים בסיס B של V שעבורו המטריצה המייצגת $[T]_B$ היא מטריצה משולשית עליונה. הבסיס נקרא בסיס משלש עבור B.

1.7 תת מרחב שמור

הגדרה 33: תת מרחב T שמור
יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$. אומרים כי התת-מרחב $W\subseteq V$ הוא תת-מרחב T- שמור אם לכל $w\in W$ מתקיים
$$T(w)\in W\ .$$

1.8 צורת ז'ורדן

הגדרה 34: מטריצת ז 'ורדן נילפוטנטית יסודית מסדר n
יהי $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad\cdots\quad,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\}=E=\{e_1,\ldots,e_n\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. המטריצה
$$J_n(0)=\begin{pmatrix}|&|&|&&|\\\bar{0}&e_1&e_2&\ldots&e_{n-1}\\|&|&|&&|\end{pmatrix}$$
שהעמודה הראשונה שלה היא וקטור האפס ושלכל $2\leq i\leq n$ העמודה ה- i שלה היא e_{i-1}, נקראת מטריצת ז'ורדן נילפוטנטית יסודית מסדר n. כלומר:
$$J_n(0)=\begin{pmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&1\\&&&&0\end{pmatrix}$$

הגדרה 35: בלוק ז'ורדן
בלוק ז'ורדן $J_k(\lambda)$, $k\in\mathbb{N}$, $\lambda\in\mathbb{F}$ הוא מטריצה מסדר $k\times k$ מהצורה
$$J_k(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda&1&0&0&\ldots&0\\0&\lambda&1&0&\ldots&0\\0&0&\lambda&1&\ldots&0\\\vdots&&&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&&&\ddots&1\\0&0&0&0&\ldots&\lambda\end{pmatrix}$$

הגדרה 36: צרות ז'ורדן
צורת ז'ורדן היא מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ שעל האלכסון הראשי יש בלוקים ז'ורדן ו- 0 בכל מקום אחר:
$$J=J_{k_1}(\lambda_1)\oplus J_{k_2}(\lambda_2)\oplus\quad\cdots\quad\oplus J_{k_l}(\lambda_l)=\begin{pmatrix}J_{k_1}(\lambda_1)&0&\ldots&0\\0&J_{k_2}(\lambda_2)&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&\ldots&J_{k_l}(\lambda_l)\end{pmatrix}$$

1.9 אופרטור הצמוד

הגדרה 37: אופרטור הצמוד

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V. האופרטור הצמוד מוגדר כך שלכל $u, w \in V$ מתקיים

$$\langle T(u), w\rangle = \langle u, T^*(w)\rangle$$

הגדרה 38: אופרטור צמוד לעצמו

אופרטור $T : V \to V$ במרחב מכפלה פנימית V נקרא אופרטור צמוד לעצמו אם

$$T^* = T \ ,$$

כלומר אם לכל u, v:

$$\langle T(u), \mathrm{v}\rangle = \langle u, T(\mathrm{v})\rangle \ .$$

- אופרטור צמוד לעצמו במרחב אוקלידי ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$) נקרא גם אופרטור סימטרי.
- אופרטור צמוד לעצמו במרחב אוניטרי ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$) נקרא גם אופרטור הרמיטי.

הגדרה 39: מטריצה צמודה לעצמה

מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ או $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) נקראת מטריצה צמודה לעצמה אם

$$A = A^* \ .$$

- כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ מטריצה כזו נקראת סימטרית.
- כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ מטריצה כזו נקראת הרמיטית.

הגדרה 40: אופרטור אנטי-סימטרי

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב אוקלידי V.

אם $T^* = -T$ אז T נקרא **אנטי-סימטרית**.

הגדרה 41: אופרטור אנטי-הרמיטי

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב אוניטרי V.

אם $T^* = -T$ אז T נקרא **אנטי-הרמיטי**.

הגדרה 42: אופרטור אוניטרי

אופרטור $T : V \to V$ במרחב מכפלה פנימית V נוצר סופית, נקרא אופרטור אוניטרי אם

$$T \cdot T^* = T^* \cdot T = I_V$$

כאשר I_V אופרטור הזהות.

הגדרה 43: מטריצה אוניטרית

תהי A מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$. ל-A קוראים מטריצה אוניטרית אם

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A = I$$

(תנאי שקול $A^{-1} = A^*$.)

1.10 אופרטור נורמלי

הגדרה 44: אופרטור נורמלי

(1 אופרטור $T:V\to V$ במרחב מכפלה פנימית V נקרא אופרטור נורמלי אם
$$T\cdot T^* = T^*\cdot T\ .$$

(2 מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת מטריצה נורמלית אם
$$A\cdot A^* = A^*\cdot A\ .$$

הגדרה 45: אופרטור לכסינה אוניטרית

(1) מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה אוניטרית Q ומטריצה אלכסונית D כך ש-
$$D=Q^{-1}AQ \quad\Leftrightarrow\quad A=QDQ^{-1}\ .$$
כאשר D מטריצה אלכסונית.

(2) יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית n- ממדי V מעל שדה $\mathbb{F}$. אומרים כי T לכסין אוניטרי אם קיים בסיס אורתונורמלי $B=\{u_1,\ldots,u_n\}$ של V, שבו T מיוצגת ע"י מטריצה אלכסונית.

1.11 משפט הפירוק הפרימרי

הגדרה 46:

יהיו $V_1,V_2\subseteq V$ תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל השדה $\mathbb{F}$. התת מרחב V_1+V_2 מוגדר
$$V_1+V_2=\{u_1+u_2|u_1\in V_1,u_2\in V_2\}\ .$$

הגדרה 47: סכום ישר

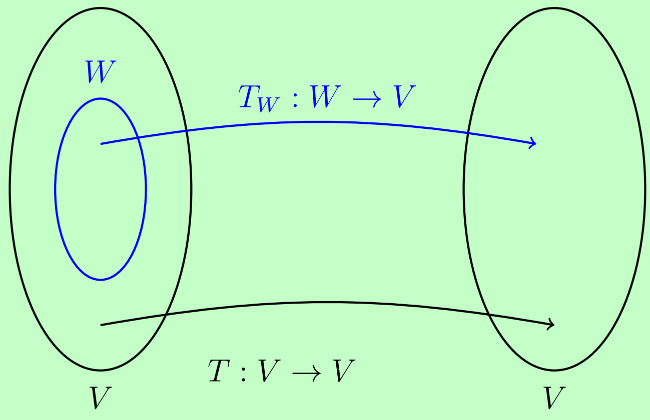
יהיו V_1,V_2 תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$. אומרים כי התת מרחב $W\subseteq V$ הוא סכום ישר אם

(1 $W=V_1+V_2$

(2 לכל וקטור של W $w\in W$ קיימים וקטורים יחידים $u_1\in V_1$ ו- $u_2\in V_2$ עבורם $w=u_1+u_2$ץ
סימון: $W=V_1\oplus V_2$.

הגדרה 48: צמצום של אופרטור

יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$. יהי $W\subseteq V$ תת מרחב של V. הצמצום של T ל- W מסומן T_W ומוגדר להיות
$$T_W:V=T:W\to V\ .$$
במילים אחרות, בצמצום של T ל- W אנחנו מצמצמים את התחום הכדרה מ- V ל- W.



2 משפטים

2.1 מכפלה פנימית

משפט 1: תכונת ליניאריות של מכפלה פנימית בוקטור השני במרחב V מעל $\mathbb{R}$

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ו $\langle , \rangle$ מכפלה פנימית. אזי:

1) לכל $u, \mathrm{v}, w \in V$:

$$\langle u, \mathrm{v} + w \rangle = \langle u, \mathrm{v} \rangle + \langle u, w \rangle$$

2) לכל $u, \mathrm{v} \in V$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\langle u, \lambda \mathrm{v} \rangle = \lambda \langle u, \mathrm{v} \rangle \ .$$

הוכחה:

1)

$$\langle u, \mathrm{v} + w \rangle = \langle \mathrm{v} + w, u \rangle = \langle \mathrm{v}, u \rangle + \langle w, u \rangle = \langle u, \mathrm{v} \rangle + \langle u, w \rangle$$

2)

$$\langle u, \lambda \mathrm{v} \rangle = \langle \lambda \mathrm{v}, u \rangle = \lambda \langle \mathrm{v}, u \rangle = \lambda \langle u, \mathrm{v} \rangle \ .$$

■

משפט 2: תכונות של העקבה

לכל $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$:

1) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

2) $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}(A)$ לכל $\lambda \in \mathbb{F}$.

3) $\mathrm{tr}(A^t) = \mathrm{tr}(A)$.

משפט 3: תכונת ליניאריות של מכפלה פנימית בוקטור השני במרחב V מעל $\mathbb{C}$

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. אזי:

א) לכל $u,\mathrm{v},w\in V$,

$$\langle u,\mathrm{v}+w\rangle=\langle u,\mathrm{v}\rangle+\langle u,w\rangle\ .$$

ב) לכל $u,\mathrm{v}\in V$ ולכל סקלר $\lambda\in\mathbb{C}$:

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle=\bar{\lambda}\langle u,\mathrm{v}\rangle\ .$$

הוכחה:

א)

$$\langle u,\mathrm{v}+w\rangle=\overline{\langle \mathrm{v}+w,u\rangle}=\overline{\langle \mathrm{v},u\rangle}+\overline{\langle w,u\rangle}=\overline{\langle \mathrm{v},u\rangle}+\overline{\langle w,u\rangle}=\langle u,\mathrm{v}\rangle+\langle u,w\rangle\ .$$

ב)

$$\langle u,\lambda\mathrm{v}\rangle=\overline{\lambda\langle \mathrm{v},u\rangle}=\bar{\lambda}\overline{\langle \mathrm{v},u\rangle}=\bar{\lambda}\langle u,\mathrm{v}\rangle\ .$$

■

משפט 4: משפט פיתגורס המוכלל של וקטורים במרחב מכפלה פנימית

לכל שני וקטורים u,v במרחב מכפלה פנימית מתקיים:

1)

$$\|u\pm\mathrm{v}\|^2=\|u\|^2\pm 2\mathrm{Re}\langle u,\mathrm{v}\rangle+\|v\|^2$$

2)

$$\|u+\mathrm{v}\|^2+\|u-\mathrm{v}\|^2=2\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)$$

הוכחה:

1)

$$\begin{aligned}\|u+\mathrm{v}\|^2&=\langle u+\mathrm{v},u+\mathrm{v}\rangle && \text{(הגדרה של המכפלה פנימית)}\\&=\langle u,u+\mathrm{v}\rangle+\langle \mathrm{v},u+\mathrm{v}\rangle && \text{(ליניאריות)}\\&=\langle u,u\rangle+\langle u,\mathrm{v}\rangle+\langle \mathrm{v},u\rangle+\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && \text{(ליניאריות חלקית)}\\&=\langle u,u\rangle+\langle u,\mathrm{v}\rangle+\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}+\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && \text{(הרמיטיות)}\\&=\|u\|^2+\langle u,\mathrm{v}\rangle+\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}+\|\mathrm{v}\|^2 && \text{(הגדרה של הנורמה)}\\&=\|u\|^2+2\mathrm{Re}\langle u,\mathrm{v}\rangle+\|\mathrm{v}\|^2 && \text{(ראו הסבר למטה)}\ .\end{aligned}$$

הסבר של שלב האחרון: לכל מספר $z=a+bi$:

$$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=2\mathrm{Re}\ z\ .$$

2)

$$\begin{aligned}\|u+\mathrm{v}\|^2+\|u-\mathrm{v}\|^2&=\|u\|^2+2\mathrm{Re}\langle u,\mathrm{v}\rangle+\|\mathrm{v}\|^2+\|u\|^2-2\mathrm{Re}\langle u,\mathrm{v}\rangle+\|\mathrm{v}\|^2\\&=2\left(\|u\|^2+\|\mathrm{v}\|^2\right)\end{aligned}$$

השוויון האחרון במרחב $\mathbb{R}^2$ מבטא את משפט גאומרטי: במקבילית, סכום ריבועי האלכסונים שווה לסכום ריבועי הצלעות.

■

משפט 5: אי-שוויון קושי-שוורץ

לכל וקטורים u ו- v במרחב מכפלה פנימית מתקיים $|\langle u,\mathrm{v}\rangle| \leq \|u\|\cdot\|\mathrm{v}\|$.

הוכחה: אם $u=\bar{0}$ אז מקבלים $0\leq 0$.

נניח ש- $u\neq\bar{0}$. לכל סקלר λ מתקיים

(#)
$$\langle \lambda u+\mathrm{v},\lambda u+\mathrm{v}\rangle \geq 0\ ,$$

לפי משפט הקיטוב האגף השמאל הוא

$$\begin{aligned}\langle \lambda u+\mathrm{v},\lambda u+\mathrm{v}\rangle =&\|\lambda u\|^2+2\mathrm{Re}\,\langle \lambda u,\mathrm{v}\rangle+\|\mathrm{v}\|^2\\ =&\|\lambda u\|^2+\langle \lambda u,\mathrm{v}\rangle+\overline{\langle \lambda u,\mathrm{v}\rangle}+\|\mathrm{v}\|^2\\ =&\lambda\bar{\lambda}\|u\|^2+\lambda\langle u,\mathrm{v}\rangle+\bar{\lambda}\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}+\|\mathrm{v}\|^2\end{aligned}$$

נציב זה באגף השמאל של (#) ונקבל

$$\lambda\bar{\lambda}\|u\|^2+\lambda\langle u,\mathrm{v}\rangle+\bar{\lambda}\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}+\|\mathrm{v}\|^2\geq 0$$

נציב $\lambda=\dfrac{-\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}}{\|u\|^2}$, $\bar{\lambda}=\dfrac{-\langle u,\mathrm{v}\rangle}{\|u\|^2}$ ונקבל

$$\frac{\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}\langle u,\mathrm{v}\rangle}{\|u\|^2}-\frac{\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}\langle u,\mathrm{v}\rangle}{\|u\|^2}-\frac{\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}\langle u,\mathrm{v}\rangle}{\|u\|^2}+\|\mathrm{v}\|^2\geq 0$$

נכפיל ב- $\|u\|^2$:

$$-\langle u,\mathrm{v}\rangle\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}+\|u\|^2\|\mathrm{v}\|^2\geq 0$$

נציב $\langle u,\mathrm{v}\rangle\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}=|\langle u,\mathrm{v}\rangle|^2$ ונקבל

$$|\langle u,\mathrm{v}\rangle|^2\leq\|u\|^2\|\mathrm{v}\|^2$$

מש"ל. ■

משפט 6: תכונות של המרחק ואי-שוויון המשולש

(1 $d(u,\mathrm{v})=d(\mathrm{v},u)$.

(2 $d(u,\mathrm{v})\geq 0$. $d(u,\mathrm{v})=0$ אם ורק אם $u=\mathrm{v}$.

(3 $d(u,\mathrm{v})\leq d(u,w)+d(w,\mathrm{v})$. זאת תכונה הנקראת **אי-שוויון המשולש**.

הוכחה:

טענה 1) $d(u,\mathrm{v})=\|u-\mathrm{v}\|=\|(-1)(\mathrm{v}-u)\|=1\cdot\|\mathrm{v}-u\|=d(\mathrm{v},u)$

טענה 2)

טענה 3) לכל שני וקטורים u,v, לפי משפט הקיטוב,

(#1)
$$\|u+\mathrm{v}\|^2=\|u\|^2+2\mathrm{Re}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle+\|\mathrm{v}\|^2\leq\|u\|^2+2|\langle u,\mathrm{v}\rangle|+\|\mathrm{v}\|^2$$

<u>הסבר:</u>

נסמן $z=\langle u,\mathrm{v}\rangle=a+ib$,

$\bar{z}=a-ib$.

נרשום $|\langle u,\mathrm{v}\rangle|^2=z\bar{z}=a^2+b^2$,

לכן $|\langle u,\mathrm{v}\rangle| = \sqrt{a^2+b^2}$.

מצד שני $2\mathrm{Re}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle = 2\mathrm{Re}z = 2a$,

לכן נקבל $2\mathrm{Re}(u,\mathrm{v}) = 2a \leq 2\sqrt{a^2+b^2} = 2|\langle u,\mathrm{v}\rangle|$.

נציב אי -שוויון קושי-שוורץ ב- (#1) ונקבל
$$\|u+\mathrm{v}\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\cdot\|\mathrm{v}\| + \|\mathrm{v}\|^2 = (\|u\|+\|\mathrm{v}\|)^2$$

נציב את $-\mathrm{v}$ במקום v:
$$\|u-\mathrm{v}\|^2 \leq (\|u\|+\|\mathrm{v}\|)^2 \ .$$

לכן
$$\|u-\mathrm{v}\| \leq \|u\|+\|\mathrm{v}\| \ .$$

נציב כעת את $u-w$ במקום u ו $\mathrm{v}-w$ במקום v:
$$\|(u-w)-(\mathrm{v}-w)\| \leq \|u-w\|+\|\mathrm{v}-w\| \ .$$

ז"א
$$\|u-\mathrm{v}\| \leq \|u-w\|+\|\mathrm{v}-w\| \ .$$

קיבלנו את אי-שוויון המשולש: $d(u,\mathrm{v}) \leq d(u,w)+d(\mathrm{v},w)$.

■

2.2 בסיס אורתוגונלי

משפט 7: קבוצת אורתוגונלית בת"ל

קבוצת אורתוגונלית במרחב מכפלה פנימית שלא מכילה את וקטור האפס היא בלתי תלויה לינארית.

הוכחה: תהי $\{u_1,\ldots,u_k\}$ קבוצה אורתוגונלית. נניח ש- $\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_ku_k=0$. אז לכל $1\leq j\leq k$
$$\left\langle \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i \,,\, u_j \right\rangle = \langle 0\,,\,u_j\rangle = 0 \ .$$

מצד שני
$$\left\langle \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i \,,\, u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle u_i\,,\,u_j\rangle \ .$$

הקבוצה אורתוגונלית, אז $\langle u_i,u_j\rangle=0$ אם $i\neq j$, לכן בהסכום לעיל כל האיברים מתאפסים חוץ מהאיבר של $i=j$. לכן נקבל
$$\left\langle \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i \,,\, u_j \right\rangle = \alpha_j \langle u_j\,,\,u_j\rangle \ .$$

לכן
$$\alpha_j\langle u_j\,,\,u_j\rangle = 0 \ .$$

$u_j\neq 0$ (נתון), אז $\langle u_j\,,\,u_j\rangle\neq 0$.
לכן בהכרח
$$\alpha_j = 0$$

לכל $1\leq j\leq k$.

■

משפט 8: קבוצת אורתוגונלית היא בסיס

יהי V מרחב מכפלה פנימית כך ש $\dim(V)=n$.
אזי כל קבוצה אורתוגונלית של n וקטורים ב- V מהווה בסיס של V.

הוכחה: נניח ש V מרחב מכפלה פנימית, $\dim(V)=n$.
נניח ש $U=\{u_1,\ldots,u_n\}\in V$ קבוצה אורתוגונלית.
כל קבוצה אורתוגונלית היא בת"ל, לכן הקבוצה בת"ל.
בקבוצה יש n וקטורים, לכן $\dim(U)=\dim(V)$.
לכן הקבוצה מהווה בססי של V.
■

משפט 9: משפט ההיטל האורתוגונלי

יהי V מרחב מכפלה פנימית, ו- $U\subseteq V$ תת מרחב נוצר סופית של V. נסמן את ההיטל האורתוגונלי של כל וקטור $\mathrm{v}\in V$ על U ב- $P_U(\mathrm{v})$. הוקטור $\mathrm{v}-P_U(\mathrm{v})$ אורתוגונלי לכל וקטור ב- U. כלומר:

$$\langle \mathrm{v}-P_U(\mathrm{v}),u\rangle=0$$

לכל $\mathrm{v}\in V$ ולכל $u\in U$.

הוכחה: לפי ההגדר של היטל אורתוגונלי, צריך להוכיח כי $U\perp(\mathrm{v}-P_U(\mathrm{v}))$. נניח ש- $\{u_1,\ldots,u_k\}$ הוא בסיס אורתוגונלי של U. לכל $1\le j\le k$,

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{v}-P_U(\mathrm{v}),u_j\rangle &=\left\langle \mathrm{v}-\sum_{i=1}^{k}\frac{\langle \mathrm{v},u_i\rangle}{\|u_i\|^2}u_i,u_j\right\rangle\\ &=\langle \mathrm{v},u_j\rangle-\left\langle \sum_{i=1}^{k}\frac{\langle \mathrm{v},u_i\rangle}{\|u_i\|^2}u_i,u_j\right\rangle\\ &=\langle \mathrm{v},u_j\rangle-\sum_{i=1}^{k}\frac{\langle \mathrm{v},u_i\rangle}{\|u_i\|^2}\cdot\langle u_i,u_j\rangle\\ &=\langle \mathrm{v},u_j\rangle-\sum_{i=1}^{k}\frac{\langle \mathrm{v},u_i\rangle}{\|u_i\|^2}\langle u_i,u_j\rangle\,\delta_{ij}\\ &=\langle \mathrm{v},u_j\rangle-\frac{\langle \mathrm{v},u_j\rangle}{\|u_j\|^2}\langle u_j,u_j\rangle\\ &=\langle \mathrm{v},u_j\rangle-\frac{\langle \mathrm{v},u_j\rangle}{\|u_j\|^2}\cdot\|u_j\|^2\\ &=\langle \mathrm{v},u_j\rangle-\langle \mathrm{v},u_j\rangle\\ &=0\ .\end{aligned}$$

הוכחנו ש $U\perp(\mathrm{v}-P_U(\mathrm{v}))$.

■

משפט 10: תכונות של אופרטור הטלה האורתוגונלי

יהי V מרחב מכפלה פנימית ו- $U \subseteq V$ תת-מרחב של V.
נסמן את המשלים האורתוגונלי של U ב- $U^{\perp}$.

האופרטור ההטלה האורתוגונלי P_U מקיים את התכונות הבאות:

(1 P_U אופרטור ליניארי.

(2 לכל $u \in U$ מתקיים $P_U(u) = u$, ולכל $w \in U^{\perp}$ מתקיים $P_U(w) = 0$.

(3 $\mathrm{Im}(P_U) = U$ וגם $\mathrm{Ker}(P_U) = U^{\perp}$.

(4 $V = U \oplus U^{\perp}$

(5 $P_U \circ P_U = P_U$

(6 לכל $\mathrm{v} \in V$ מתקיים כי $(\mathrm{v} - P_U(\mathrm{v})) \in U^{\perp}$.

הוכחה:

(1 P_U העתקה לינארית.

לכל $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in V$

$$\begin{aligned}
P_U(\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{(\mathrm{v}_1, u_i) + (\mathrm{v}_2, u_i)}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{v}_1, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i + \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= P_U(\mathrm{v}_1) + P_U(\mathrm{v}_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_U(\alpha \mathrm{v}) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \alpha \mathrm{v}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha \langle \mathrm{v}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{v}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \alpha P_U(\mathrm{v})
\end{aligned}$$

לכן P_U אופרטור לינארי.

(2 נניח ש- $\{u_1, \ldots, u_k\}$ בסיס של U. אז לכל $u \in U$ קיימים סקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ כך ש $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k$. אז

$$P_U(u) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i P_U(u_i)$$

לכל $1 \leq j \leq k$,

$$\begin{aligned} P_U(u_j) =& \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle u_j, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\ =& \frac{\langle u_j, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} u_j \\ =& u_j \ . \end{aligned}$$

לכן

$$P_U(u) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i = u \ .$$

לכל $w \in U^\perp$ מתקיים $\langle w, u_i \rangle = 0$ לכל $1 \leq i \leq k$. לכן

$$P_U(w) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle w, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i = 0$$

(3 לכל $a \in U$, לפי תנאי 2 $a = P_U(a) \in \text{Im}\,(P_U)$, לכן $U \subseteq \text{Im}\,(P_U)$.

לפי ההגדרה של ההיטל אם $\{u_1, \ldots, u_k\}$ בסיס אורתוגונלי של U, אז לכל וקטור $a \in V$,

$$P_U(a) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle a, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i$$

לכן $P_U(a) \in \text{span}\{u_1, \ldots, u_k\}$ לכן $P_U(a) \in U$ לכל $a \in V$. לכן $\text{Im}\,(P_U) \subseteq U$.

לכן $\text{Im}(P_U) = U$.

בסעיף 2 הוכחנו כי $U^\perp \subseteq \ker(P_U)$.
נוכיח כי $\ker(P_U) \subseteq U^\perp$.

נניח ש $\mathrm{v} \in \ker(P_U)$. ז"א

$$P_U(\mathrm{v}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{v}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i = 0 .$$

מכיוון ש- $\{u_1, \ldots, u_k\}$ בת"ל אז בהכרח $\langle \mathrm{v}, u_i \rangle = 0$ לכל $1 \leq i \leq k$.
לכן $\mathrm{v} \in U^\perp$.

(4 $\dim(V) = \dim(\ker P_U) + \dim(\text{Im} P_U)$ לכן

$$\dim(V) = \dim\left(U^\perp\right) + \dim\left(U\right)$$

מכאן נובע כי

$$U \cap U^\perp = \{0\} \ .$$

5) לכל $\mathrm{v} \in V$,
$$P_U(\mathrm{v}) = u \in U \ .$$
לכן
$$\left(P_U \circ P_U\right)(\mathrm{v}) = P_U\left(P_U(\mathrm{v})\right) = P_U(u) = u \ ,$$
כלומר
$$P_U \circ P_U = P_U \ .$$

6) הוכחנו במשפט 9 כי
$$\left(\mathrm{v} - P_U(\mathrm{v})\right) \perp U$$
לכן
$$\mathrm{v} - P_U(\mathrm{v}) \in U^{\perp} \ .$$

■

משפט 11: משפט הפיכות האורתוגונלי

יהי V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית ו- $U \subseteq V$ תת מרחב של V. אז

א) $V = U \oplus U^{\perp}$

ב) $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$

הוכחה:

א) $V = U \oplus U^{\perp}$ הוכחנו במשפט 10.

ב)

1) נוכיח כי $U \subseteq \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$.

נקח $u \in U$.
צ"ל $u \in \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$.

לכל $\mathrm{v} \in U^{\perp}$, $\langle u, \mathrm{v}\rangle = 0$ $\Leftarrow$ $u \in \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$.

2) צ"ל $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} \subseteq U$.

נקח $\mathrm{v} \in \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$. לפי סעיף א' קיימים $u \in U$, $w \in U^{\perp}$ כך ש
$$\mathrm{v} = u + w \ .$$
נשים לב כי $\langle u, w\rangle = 0$.
$$\begin{aligned}\langle \mathrm{v}, w\rangle &= \langle u + w, w\rangle \\ &= \langle u, w\rangle + \langle w, w\rangle \\ &= \langle w, w\rangle\end{aligned}$$
מכיוון ש $\mathrm{v} \in \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$ ו- $w \in U^{\perp}$, אז נקבל כי $\langle \mathrm{v}, w\rangle = 0$. לכן $\langle w, w\rangle = 0$ ולכן $w = 0$.
לכן $\mathrm{v} = u \in U$.

הוכחנו כי $(U^{\perp})^{\perp}=U$.

■

משפט 12: תהליך גרם שמידט

יהי V מרחב מכפלה פנימית ו- $U\subseteq V$ תת-מרחב של V. תהי $\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_k\}$ בסיס של U.
נסמן בסיס אורתוגונלי של U $\{u_1,u_2,\ldots,u_k\}$.
ניתן לבנות בסיס אורתגונלי באמצעות האלגוריתם של גרם שמידט כמפורט להלן:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \mathrm{v}_1\\
u_2 &= \mathrm{v}_2-\frac{\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}\cdot u_1\\
u_3 &= \mathrm{v}_3-\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}\cdot u_1 \quad -\frac{\langle \mathrm{v}_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}\cdot u_2\\
&\vdots\\
u_k &= \mathrm{v}_k-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\langle \mathrm{v}_k,u_i\rangle}{\|u_i\|^2}\cdot u_i\\
&\vdots
\end{aligned}$$

2.3 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

משפט 13: המשוואה האופייני של מטריצה

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ויהי v וקטור עצמי של A ששייך לערך עמצי λ. אז לפי ההגדרה 18:
$$A\cdot\mathrm{v}=\lambda\mathrm{v}\ .$$
נעביר אגפים:
$$\bar{0}=\lambda\mathrm{v}-A\mathrm{v}\qquad\Rightarrow\qquad\bar{0}=(\lambda I-A)\,\mathrm{v}$$
כאשר I המטריצה היחידה של $\mathbb{F}^{n\times n}$. קיבלנו את המשוואה
$$(\lambda I-A)\,\mathrm{v}=\bar{0}\ .$$
v וקטור עצמי $0\neq\mathrm{v}$. לכן הדטרמיננטה של המטריצה $(\lambda I-A)$ שווה ל- 0. כלומר:
$$|\lambda I-A|=0\ .$$
המשוואה הזאת נקראת **משוואת האופייני של** A.
הצד שמאל נקרא **הפולינום האופייני של** A, מסומן $p_A(\lambda)$. כלומר:
$$p_A(\lambda)=|\lambda I-A|\ \ .$$

משפט 14: סדר של פולינום האופייני

אם $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, אז הפולינום האופייני $p_A(x)$ של A הוא פולינום מתוקן מסדר n.

משפט 15: מרחב עצמי של ערך עצמי λ שווה למרחב האפס של $A-\lambda I$

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, יהי λ ערך עצמי של A ויהי V_λ מרחב העצמי של A. אז
$$V_\lambda=\mathrm{Nul}\,(A-\lambda I)\,/\{0\}\ .$$

הוכחה: נוכיח כי $V_\lambda \subseteq \text{Nul}\,(A-\lambda I)$.

יהי u וקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי A. ז"א u מקיים את משוואת הערך עצמי:
$$A \cdot u = \lambda u \qquad \Rightarrow \qquad (A-\lambda I)\cdot u = \bar{0}$$
כאשר $\bar{0} \in \mathbb{F}^n$ וקטור האפס. לכן $u \in \text{Nul}(A-\lambda I)$ לכל וקטור $u \in V_\lambda$. לכן
$$V_\lambda \subseteq \text{Nul}\,(A-\lambda I)\ .$$
נוכיח כי $\text{Nul}\,(A-\lambda I) \subseteq V_\lambda$.

יהי $u \in \text{Nul}\,(A-\lambda I)$. ז"א
$$(A-\lambda I)\, u = \bar{0} \qquad \Rightarrow \qquad A\cdot u = \lambda u\ .$$
ז"א u וקטור עצמי של u ששייך לערך עצמי λ. לכן $u \in V_\lambda$ לכל $u \in \text{Nul}\,(A-\lambda I)$. לכן
$$\text{Nul}(A-\lambda I) \subseteq V_\lambda\ .$$
■

משפט 16: מרחב עצמי

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ויהי λ ערך עצמי של A.
המרחב עצמי של הערך עצמי λ (מסומן V_λ), בתוספת הוקטור האפס הוא תת-מרחב של $\mathbb{F}^n$.

משפט 17: לכסינות של מרטיצות

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם הוקטורים עצמיים של A מהווה בסיס של $\mathbb{F}^n$ אז A לכסינה.

נסמן הוקטורים עצמיים ב- $\{u_1,\ldots,u_n\}$ ששייכים לערכים עצמיים $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ בהתאמה (הערכים עצמיים לא בהכרח שונים זה מזה). מכאן נובע ש-
$$D = P^{-1}AP \qquad \Leftrightarrow \qquad A = PDP^{-1}$$
כאשר $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית ו- $P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ מטריצה הפיכה.

הוכחה: $A\cdot u_i = \lambda_i u_i$ לכל $1 \leq i \leq n$. לכן
$$\begin{aligned} A\cdot P &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A\cdot u_1 & A\cdot u_2 & \ldots & A\cdot u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \ldots & \lambda_n u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= PD\ . \end{aligned}$$
כלומר $AP = PD$. נתון כי הוקטורים עצמיים מהווים בסיס, אז $\{u_1,\ldots,u_n\}$ ולכן P הפיכה. לכן P^{-1} קיימת

ומותר להכפיל מצד שמאל ב- P^{-1}. נקבל

$$A = P^{-1}PD \ .$$

■

משפט 18: קריטירון 1 ללכסינות של מטריצה

אם למטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ יש n ערכים עצמיים **שונים** ב- $\mathbb{F}$, אז A לכסינה מעל $\mathbb{F}$.

משפט 19: קריטירון 2 ללכסינות של מטריצה: סכום המימדים של מרחבים העצמיים

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אם"ם סכום המימדים של המרחבים העצמיים השונים שווה ל- n.

משפט 20: קריטירון 3 ללכסינות של מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם:

1) הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$, לא בהכרח שונים, ו-

2) עבור כל ערך עצמי הריבוי האלגברי שווה להריבוי גיאומטרי,

אז A לכסינה מעל $\mathbb{F}$.

משפט 21:

אופרטור לינארי $T : V \to V$ לכסין אם"ם קיים בסיס של V המורכב מוקטורים עצמיים.

הוכחה: $\Rightarrow$

נניח ש T לכסינה. ז"א קיים בסיס $U = \{u_1, \ldots , u_n\}$ כך ש-

$$T(u_1) = \lambda_1 u_1 \ , \qquad T(u_2) = \lambda_2 u_2, \quad \ldots \quad , T(u_n) = \lambda_n u_n \ .$$

אז

$$[T]_U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(לא כל ה- λ בהכרח שונים זה מזה).

$\Leftarrow$

נניח שקיים בסיס $U = \{u_1, \ldots , u_n\}$ שמורכב מוקטורים עצמיים. ז"א קיימים סקלרים $\lambda_1, \ldots , \lambda_n$ כך ש-

$$T(u_1) = \lambda_1 u_1 \ , \quad \ldots \quad , T(u_n) = \lambda_n u_n \ .$$

לכן

$$[T]_U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

אלכסונית. ■

משפט 22:
יהי $T:V\to V$ אופרטור לכסין במרחב וקטורי V- מעל $\mathbb{F}$. לכסיו.
יהי $[T]_B$ המטריצה המייצגת של T לפי בסיס B.
יהיו $u_1,\ldots,u_n$ הוקטורים עצמיים של T לפי בסיס B, ששייכים לערכים עצמיים $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ (הם לא בהכרח שונים זה מזה). אז

$$[T]_B=PDP^{-1}\quad\Leftrightarrow\quad P^{-1}[T]_BP=D$$

כאשר $P=\begin{pmatrix}| & | & & |\\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n\\ | & | & & |\end{pmatrix}$ ו- $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}[T]_BP=&[T]_B\begin{pmatrix}| & | & & |\\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n\\ | & | & & |\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}| & | & & |\\ [T]_Bu_1 & [T]_Bu_2 & \ldots & [T]_Bu_n\\ | & | & & |\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}| & | & & |\\ \lambda_1u_1 & \lambda_2u_2 & \ldots & \lambda_nu_n\\ | & | & & |\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}| & | & & |\\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n\\ | & | & & |\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}\\
=&PD\ ,\end{aligned}$$

כלומר, $[T]_BP=PD$. הוקטורים עצמיים $u_1,\ldots,u_n$ בת״ל, אז P הפיכה לכן P^{-1} קיימת. לכן מותר להכפיל מצד ימין ב- P^{-1}. נקבל: ולכן

$$[T]_B=PDP^{-1}$$

ומכאן נובע כי

$$P^{-1}[T]_BP=D$$

■

משפט 23:
יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי ויהי λ ערך עצמי. אם $\text{alg}(\lambda)$ הריבוי האלגברי ו- $\text{geo}(\lambda)$ הריבוי הגיאומטרי של λ, אז

$$1\leq\text{geo}(\lambda)\leq\text{alg}(\lambda)\ .$$

במילים: הריבוי הגיאומטרי קטן או שווה לריבוי האלגברי.

הוכחה: נניח ש- λ_0 ערך עצמי מריבוי אלגברי m וריבוי גיאומטרי k.
ז"א קיימים k וקטורים בת"ל $u_1,\ldots,u_k$ ששייכים לערך עצמי λ_0.
נשלים אותו לבסיס של V:

$$B=\{u_1,\ldots,u_k,u_{k+1},\ldots,u_n\}\ .$$

נחשב את המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס B:

$$T(u_1)=\lambda_0 u_1\ ,\quad \ldots\quad ,T(u_k)=\lambda_0 u_k$$

לכן

$$[T]_B=\left(\begin{array}{cccc|c}\lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & A' \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right)$$

הפולינום הופייני של A הוא

$$p_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\left|\left(\begin{array}{cccc|c}\lambda-\lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda-\lambda_0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-\lambda_0 & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \lambda I-A' \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right)\right|$$

נחשב את הדטרמיננטה דרך העמודה הראשונה:

$$p_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)\cdot\left|\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda-\lambda_0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & * \\ 0 & \cdots & \lambda-\lambda_0 & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \lambda I-A' \\ 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right)\right|$$

עד שנקבל

$$p_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k\,|\lambda I-A'|=(\lambda-\lambda_0)^k p_{A'}(\lambda)$$

לכן הריבוי האלגברי גדול או שווה ל- k. ■

משפט 24: קריטירון 1 ללכסינות של אופרטור

יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב וקטורי V מעל $\mathbb{F}$. אם $\dim(V)=n$ ול- T יש n ערכים עצמיים **שונים** ב- $\mathbb{F}$, אז T לכסין.

משפט 25: קריטירון 2 ללכסינות של אופרטור: סכום המימדים של מרחבים העצמיים

יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב וקטורי V מעל $\mathbb{F}$ עבורו $\dim(V)=n$.
T לכסין אם"ם סכום המימדים של המרחבים העצמיים השונים שווה ל- n.

משפט 26: קריטירון 3 ללכסינות של אופרטור

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב וקטורי V מעל $\mathbb{F}$. אם:

1) הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$, (לא בהכרח שונים), ו-

2) עבור כל ערך עצמי של T, הריבוי האלגברי שווה להריבוי הגיאומטרי,

אז T לכסין מעל $\mathbb{F}$.

משפט 27: וקטורים עצמיים ששייכים לערכים עצמיים שונים בת"ל

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב וקטורי V מעל $\mathbb{F}$. וקטורים עצמיים של T ששייכים לערכים עצמיים שונים הם בת"ל.

הוכחה: נתון:

$T : V \to V$ אופרטוא ליניארי,

$\lambda_1, \ \ldots \ ,\lambda_n$ ערכים עצמיים שונים ששייכים לוקטורים עצמיים $u_1, \ \ldots \ ,u_n$ של T.

צריך להוכיח:

$u_1, \ \ldots \ ,u_n$ בת"ל.

הוכחה:

נוכיח את הטענה ע"י אינדוקציה על n.

שלב הבסיס:

עבור $n = 1$: $u_1 \neq \bar{0}$, לכן הוא בת"ל.

שלב האינדוקציה:

נניח שעבור $n > 1$, n וקטורים עצמיים ששייכים ל n ערכים עצמיים שונים בת"ל. נניח $u_1, \ldots, u_{n+1}$ וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$. נרשום

(*)
$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1} u_{n+1} = \bar{0}$$

אז

$$\alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \ldots + \alpha_n T(u_n) + \alpha_{n+1} T(u_{n+1}) = \bar{0}$$

(*1)
$$\alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n u_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} u_{n+1} = \bar{0}$$

נכפיל (*) ב λ_{n+1}:

(*2)
$$\alpha_1 \lambda_{n+1} u_1 + \alpha_2 \lambda_{n+1} u_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_{n+1} u_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} u_{n+1} = \bar{0}$$

נחסיר (*2) מ (*1):

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})u_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{n+1})u_2 + \ldots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{n+1})u_n + \alpha_{n+1}\cancelto{0}{(\lambda_{n+1} - \lambda_{n+1})}u_n = \bar{0}$$

(*3) $$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_{n+1})u_1+\alpha_2(\lambda_2-\lambda_{n+1})u_2+\ldots+\alpha_n(\lambda_n-\lambda_{n+1})u_n=\bar{0}$$
לפי ההנחת האינדוקציה הוקטורים $u_1,\ldots,u_n$ בת"ל. לכן

(*4) $$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_{n+1})=0\ ,\quad \ldots\quad ,\alpha_n(\lambda_n-\lambda_{n+1})=0\ .$$
כל הערכים העצמיים שונים זה מזה, כלומר $\lambda_i-\lambda_{n+1}\neq 0$ לכל $i=1,\ldots,n$. לכן

(*5) $$\alpha_1=0\ ,\quad \ldots\quad ,\alpha_n=0\ .$$
נציב (*5) ב- (*) ונקבל

$$\alpha_1u_1=\bar{0}$$

$u_1\neq 0$ כי הוא וקטור עצמי לכן $\alpha_1=0$. לכן (*) מצקיים רק אם כל המקודמים $\alpha_1,\quad\ldots\quad,\alpha_{n+1}=0$ לכן הוקטורים עצמיים $u_1,\quad\ldots\quad,u_{n+1}$ בת"ל.

■

משפט 28: חזקה של מטריצה הדומה למטריצה אלכסונית

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה לכסינה. אז קיימת מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך שלכל מספר טבעי $n\geq 1$:
$$A^n=PD^nP^{-1}\ .$$

הוכחה: נוכיח את הטענה ע"י אינדוקציה.

<u>שלב הבסיס:</u>

עבור $n=1$, $D=P^{-1}AP \Leftarrow A=PDP^{-1}$.

<u>שלב האינדוקציה:</u>

נניש שעבור n מתקיים $A^n=PD^nP^{-1}$. אז
$$A^{n+1}=(PD^nP^{-1})\cdot PDP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$$

■

משפט 29:

אם u וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי λ, אז לכל $n\geq 1$ טבעי: $A^nu=\lambda^nu$.

הוכחה: נוכיח את הטענה ע"י אינדוקציה.

<u>שלב הבסיס:</u>

עבור $n=1$, $A\cdot u=\lambda u$ מתקיים כי נתון ש- u וקטור עצמי של A.

<u>שלב האינדוקציה:</u>

נניח שעבור $n>1$, $A^n u=\lambda^n u$. אז

$$A^{n+1}u=A\left(A^n u\right)=A\lambda^n u=\lambda^n A u=\lambda^n\cdot\lambda u=\lambda^{n+1}u\ .$$

■

משפט 30: דטרמיננטה של מטריצה משולשית שווה למכפלה של איברי האלכסון הראשי

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה משולשית עליונה או משולשית תחתונה. הדטרמיננטה של A שווה למכפלה של האיברים על האלכסון הראשי. כלומר

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}\ ,\qquad |A|=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\ldots a_{nn}\ .$$

הוכחה: אידוקציה על n.

<u>שלב הבסיס:</u>

עבור $n=1$ הטענה נכונה באופן טריוויאלי.

כלומר נתון $A\in\mathbb{F}^{1\times 1}$. נסמן $A=(a)$ כאשר a האיבר היחיד במטריצה A.

$$|A|=a\ .$$

A מטריצה משולשית, והאיבר היחיד על האלכסון הראשי הוא a. לכן המכפלה של האיברים על האלכסון ראשי פשוט שווה ל- a. לכן $|A|$ שווה למכפלה של האיברים על האלכסון הראשי של A.

<u>שלב האינקודציה:</u>

נניח שהטענה נכונה עבור $n=N$ (הנחת האינדוקציה). נוכיח אותה עבור $n=N+1$.

תהי $A\in\mathbb{F}^{N\times N}$ מטריצה משולשית עליונה:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1,N} & a_{1,N+1}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2,N} & a_{2,N+1}\\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3,N} & a_{3,N+1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{N,N} & a_{N,N+1}\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{N+1,N+1}\end{pmatrix}$$

נחשב הדטרמיננטה על השורה האחרונה:

$$|A|=a_{N+1,N+1}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1,N}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2,N}\\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3,N}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{N,N}\end{vmatrix}$$

לפי ההנחת האינדוקציה הדטרמיננטה של מטריצה $N\times N$ משולשית עליחונה שווה למכפלה של האיברים על האלכסון הראשי, לכן

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,N} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,N} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N,N} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{N,N} \ .$$

לכן

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{N,N} \cdot a_{N+1,N+1}$$

■

משפט 31: ערכים העצמיים של מטריצה משולשית

הערכים העצמיים של מטריצה משולשית הם האיברים הנמצאים על האלכסון הראשי.

הוכחה: תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ משולשית, ויהיו $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ האיברים על האלכסון הראשי. אז
$\lambda I - A$
גם מטריצה משולשית והאיברים על האלכסון הראשי הם $\{\lambda - \alpha_1, \lambda - \alpha_2, \dots, \lambda - \alpha_n\}$. הדטרמיננטה של מטריצה משולשית היא המכפלה של האיברים על האלכסון הראשי, לכן לכן

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \alpha_1) \cdot (\lambda - \alpha_2) \dots (\lambda - \alpha_n)$$

לכן הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1) \cdot (\lambda - \alpha_2) \dots (\lambda - \alpha_n) = 0 \ .$$

השורשים הם

$$\lambda = \alpha_1, \quad \lambda = \alpha_2, \quad \dots \quad \lambda = \alpha_n \ .$$

ז"א הערכים עצמיים שווים לאיברים על האלכסון הראשי. ■

משפט 32: פולינום האופייני של מטריצות דומות

אם A ו- B דומות אז יש להן אותו פולינום אופייני, ולכן אותם ערכים עצמיים.

הוכחה:

$$\begin{aligned} f_B(x) &= |xI - B| \\ &= \left|xI - P^{-1}AP\right| \\ &= \left|P^{-1}xIP - P^{-1}AP\right| \\ &= \left|P^{-1}(xI - A)P\right| \\ &= \left|P^{-1}\right| |xI - A| |P| \\ &= |P|^{-1} |xI - A| |P| \\ &= |xI - A| |P|^{-1} |P| \\ &= |xI - A| \\ &= f_A(x) \end{aligned}$$

■

משפט 33: קיום וקטור עצמי של אופרטור לינארית

יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב וקטורי V נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$. קיים לפחות וקטור עצמי אחד של T.

הוכחה: נניח ש- $\dim(V)=n$. יהי $u_1\neq\bar{0}\in V$. הקבוצה
$$\left\{u_1,T\left(u_1\right),T^2\left(u_1\right),\ldots,T^n\left(u_1\right)\right\}$$
תלויה לינארית כי יש בה $n+1$ וקטורים. לכן הצירוף לינארי הבא מתקיים רק אם אחד המקדמים $a_0,\ldots,a_n$ שונה מאפס:
$$a_0u_1+a_1T\left(u_1\right)+a_2T^2\left(u_1\right)+\ldots+a_nT^n\left(u_1\right)=\bar{0}\ . \tag{*1}$$
נרשום את זה בצורה
$$\left(a_0+a_1T+a_2T^2+\ldots+a_nT^n\right)u_1=\bar{0}\ .$$
בצד שמאל יש הצבת האופרטור בפולינום מסדר n. לפי המשפט היסודי של האלגברה יש לפולינום הזה פירוק לגורמים לינאריים:
$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n=c(z-\lambda_1)\ldots(z-\lambda_n)$$
$c\neq0\in\mathbb{C}$, $\lambda_i\in\mathbb{C}$, $1\leq i\leq n$. לכן ניתן לפרק את (*1) כ:
$$a_0u_1+a_1T\left(u_1\right)+a_2T^2\left(u_1\right)+\ldots+a_nT^n\left(u_1\right)=c\left(T-\lambda_1I\right)\ldots\left(T-\lambda_nI\right)u_1=\bar{0}\ . \tag{*2}$$
$c\neq0\in\mathbb{C}$. אם קיים פתרון $u_1\neq0$ למשוואה הומוגונית ב- (*2) אז בהכרח הדטרמיננטה של המטריצה שמכפילה u_1 שווה לאפס. לפיכך
$$\left|c\left(T-\lambda_1I\right)\ldots\left(T-\lambda_nI\right)\right|=c\left|T-\lambda_1I\right|\ldots\left|T-\lambda_nI\right|=0\ . \tag{*3}$$
לכן קיים i ($1\leq i\leq n$) עבורו $|T-\lambda_iI|=0$ לכן ל- T יש לפחות ערך עצמי אחד.

■

2.4 משפט קיילי-המילטון ופולינום מינימלי

משפט 34:

תהי $D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\ldots&0\\0&\lambda_2&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&\lambda_n\end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית ויהי $p(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינום. אז
$$p(D)=\begin{pmatrix}p(\lambda_1)&0&\ldots&0\\0&p(\lambda_2)&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&p(\lambda_n)\end{pmatrix}$$

משפט 35:

תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. אם B הפיכה אז: $(BAB^{-1})^k=BA^kB^{-1}$.

הוכחה: נוכיח ע"י אינדוקציה.

<u>בסיס:</u> עבור $k=1$

$$(BAB^{-1})^1 = BA^1B^{-1} \ .$$

<u>מעבר:</u>

נניח ש- $(BAB^{-1})^k = BA^kB^{-1}$. (ההנחת האינדוקציה). נוכיח ש- $(BAB^{-1})^{k+1} = BA^{k+1}B^{-1}$.

$$\begin{aligned}
(BAB^{-1})^{k+1} =&(BAB^{-1})^k \cdot BAB^{-1} \\
=&BA^kB^{-1} \cdot BAB^{-1} \qquad (\text{ההנחת האינדוקציה}) \\
=&BA^k \cdot \underbrace{(B^{-1}B)}_{=I} \cdot AB^{-1} \\
=&BA^k \cdot I \cdot AB^{-1} \\
=&BA^k \cdot AB^{-1} \\
=&BA^{k+1}B^{-1} \ .
\end{aligned}$$

■

משפט 36:
אם $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות (קיימת P הפיכה כך ש- $B=PAP^{-1}$) ואם $Q(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינום אז

$$Q(A) = PQ(B)P^{-1} \ .$$

הוכחה: נסמן $Q(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\ldots+\alpha_kx^k$.

$$\begin{aligned}
Q(A) =&\alpha_0I+\alpha_1A+\ldots+\alpha_kA^k \\
=&\alpha_0I+\alpha_1(PBP^{-1})+\ldots+\alpha_k(PBP^{-1})^k \\
=&\alpha_0PP^{-1}+\alpha_1(PBP^{-1})+\ldots+\alpha_k(PBP^{-1})^k
\end{aligned}$$

$(PBP^{-1})^k = PB^kP^{-1}$ (לפי משפט 35) לכן נקבל

$$\begin{aligned}
Q(A) =&\alpha_0PP^{-1}+\alpha_1PBP^{-1}+\ldots+\alpha_kPB^kP^{-1} \\
=&P\left(\alpha_0I+\alpha_1B+\ldots+\alpha_kB^k\right)P^{-1} \\
=&PQ(B)P^{-1} \ .
\end{aligned}$$

■

משפט 37:
תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה, (כלומר קיימת P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $A=PDP^{-1}$). נסמן $D=\mathrm{diag}\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$. אם $q(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינום אז

$$q(A) = P\begin{pmatrix} q(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & q(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1}$$

הוכחה: נסמן $D=P^{-1}AP$. לפי משפט 36:

$$P^{-1}q(A)P = q(P^{-1}AP) = q(D) \ .$$

לפי משפט 34:

$$q(D) = \begin{pmatrix} q(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & q(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

לכן נקבל

$$P^{-1}q(A)P = \begin{pmatrix} q(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & q(\lambda_n) \end{pmatrix} ,$$

מכאן נובע כי

$$q(A) = P \begin{pmatrix} q(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & q(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1} .$$

■

משפט 38:
תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ סקלר. יהי $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום.
$p(A) = \lambda I_n$ אם"ם $p(B) = \lambda I_n$.

הוכחה: $\Leftarrow$

A, B דומות לכן קיימת $C \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה כך ש $B = C^{-1}AC$. לכן לפי 36,

$$p(B) = p\left(C^{-1}AC\right) = C^{-1}p(A)C$$

אם $p(A) = \lambda I_n$ אז

$$p(B) = C^{-1}\lambda I_n C = \lambda I_n .$$

$\Rightarrow$

$A = CBC^{-1}$ לכן לפי 36,

$$p(A) = p\left(CBC^{-1}\right) = Cp(B)C^{-1} .$$

לכן אם $p(B) = \lambda I_n$ אז

$$p(A) = C\lambda I_n C^{-1} = \lambda I_n .$$

■

משפט 39:
יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$. אם $p \in \mathbb{F}[x]$ פולינום ואם $u \in V$ וקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי λ, אז u וקטור עצמי של $p(T)$ ששייך לערך עצמי $p(\lambda)$.
כלומר, אם $T(u) = \lambda u$ אז $p(T)(u) = p(\lambda)u$.

הוכחה: ראו משפט 29 למעלה:

$$\begin{aligned} p(T)(u) &= \left(\alpha_0 + \alpha_1 T + \ldots + \alpha_k T^k\right)(u) \\ &= \left(\alpha_0 + \alpha_1 T(u) + \ldots + \alpha_k T^k(u)\right) \\ &= \left(\alpha_0 + \alpha_1 \lambda u + \ldots + \alpha_k \lambda^k u\right) \\ &= \left(\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \ldots + \alpha_k \lambda^k\right) u \\ &= p(\lambda) u \ . \end{aligned}$$

■

משפט 40: מטריצות דומות מאפסות אותו פולינום

אם A ו- B מטריצות דומות, אז הפולינום f מתאפס ע"י A אם"ם הוא מתאפס ע"י B.

הוכחה: נניח ש $f(A)=0$. נוכיח ש $f(B)=0$:
נסמן

$$f(x) = \alpha_k x^k + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 \ ,$$

אז

$$f(A) = \alpha_k A^k + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0 \ .$$

A ו B מטריצות דומות לכן קיימת מטריצה הפיכה C כך ש
$A = C^{-1}BC$.

לכן

$$\alpha_k (C^{-1}BC)^k + \ldots + \alpha_1 (C^{-1}BC) + \alpha_0 I = 0 \ .$$

$(C^{-1}BC)^k = C^{-1}B^kC$ (לפי משפט 35) לכן נקבל
$$C^{-1}\left(\alpha_k B^k + \ldots + \alpha_1 B + \alpha_0 I\right) C = 0 \ .$$
C הפיכה אז נכפיל מצד שמאל ב- C ומצד ימין ב- C^{-1} ונקבל
$$\alpha_k B^k + \ldots + \alpha_1 B + \alpha_0 I = 0 \ .$$

קיבלנו ש

$$f(B) = 0 \ .$$

■

משפט 41:

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

א. $A^n \in \text{sp}\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\}$ אם"ם קיים פולינום $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ מסדר n כך ש $p(A)=0$.

ב. הקבוצה $\{I_n, A, A^2, \ldots, A^n\}$ ת"ל אם"ם קיים פולינום שונה מאפס $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ מסדר n לכל היותר כך ש- $p(A)=0$.

הוכחה:

סעיף א. נניח ש $A^n \in \text{sp}\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\}$. אז קיימים סקלרים כך ש-
$$A^n = \alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_{n-1} A^{n-1}$$

ז"א

$$A^n - \alpha_{n-1}A^{n-1} - \alpha_{n-2}A^{n-2} - \ldots - \alpha_1 A - \alpha_0 I_n = 0$$

לכן A מאפסת את

$$p(x) = x^n - \alpha_{n-1}x^{n-1} - \ldots - \alpha_1 x - \alpha_0 \in \mathbb{F}[x] \ .$$

נניח ש- A מאפסת את הפולינויום

$$Q(x) = \beta_n x^n + \beta_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0 \in \mathbb{F}[x]$$

מסדר n, כלומר $Q(A)=0$. נניח ש $\beta_n \neq 0$. אז

$$\beta_n A^n = -\left(\beta_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \beta_1 A + \beta_0 I_n\right)$$

נחלק שני האגפים ב β_n:

$$A^n = -\left(\frac{\beta_{n-1}}{\beta_n}A^{n-1} + \ldots + \frac{\beta_1}{\beta_n}A + \frac{\beta_0}{\beta_n}I_n\right)$$

קיבלנו כי $A^n \in \text{sp}\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\}$.

סעיף ב. נניח ש- $\{I_n, A, A^2, \ldots, A^n\}$ ת"ל. אז קיימים סקלירם שאינם כולם אפסים כך ש-

$$\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \alpha_n A^n = 0$$

מכאן A מאפסת $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$ שהוא פולינום שונה מאפס מסדר n לכל היותר.

להיפך, נניח ש- $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$ אינו פולינום האפס כך ש $p(A)=0$. אז

$$\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_n A^n = 0$$

הוא צירוף לנארי לא טריוויאלי.

■

משפט 42: משפט קיילי-המילטון

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם $p_A(x)$ הוא הפולינום האופייני של A אז $p_A(A) = 0_{n\times n}$ כאשר $0_{n\times n}$ מטריצה האפס של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

משפט 43: משפט קיילי-המילטון עבור העתקות

יהי $T: V \to V$ אופרטור במרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$. האופרטור T מאפס את הפולינום האופייני. כלומר אם $p_T(x)$ הפולינום האופייני של T אז $p_T(T) = 0$.

משפט 44: פולינום מינימלי של טריצה אלכסונית

אם $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה אלכסונית:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

אם $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ האיברים השונים על האלכסון ($k\leq n$) אז הפולינום המינימלי של D הוא
$$m_D(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_k)\ .$$

משפט 45: ל- $m_A(x)$ ול- $p_A(x)$ יש בדיוק אותם גורמים אי-פריקים.

ל- $m_A(x)$ ול- $p_A(x)$ יש בדיוק אותם גורמים אי-פריקים. כלומר
$$m_A(\lambda)=0\quad\Leftrightarrow\quad p_A(\lambda)=0\ .$$

הוכחה:

נניח ש $m_A(\lambda)=0$.

אז $m_A(x)=q(x)(x-\lambda)$ כאשר $\deg\, q(x)<\deg\, m_A(x)$ (נוסחת איוקליד לחיוק פולינומים).

$m_A(x)$ הוא הפולינים המינימלי של A לכן $q(A)\neq 0$.

נגדיר וקטורים v ו- w כך ש- $\mathrm{w}=q(A)\mathrm{v}\neq\bar{0}$.
$$\bar{0}=m_A(A)\mathrm{v}=(A-\lambda I)q(A)\mathrm{v}=(A-\lambda I)\mathrm{w}\ ,$$
לכן
$$A\mathrm{w}=\lambda\mathrm{w}\ .$$
ז"א w וקטור עצמי של A ששייך לערך עצמי λ של A.

לכן $p_A(\lambda)=0$.

נניח ש $p_A(\lambda)=0$.

אז λ ערך עצמי של A.

נניח ש- w הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ. אז
$$A\mathrm{w}=\lambda\mathrm{w}\ .$$
לכן
$$m_A(A)\mathrm{w}=m_A(\lambda)\mathrm{w}\ .$$
$m_A(A)=0$ לכן $m(\lambda)\mathrm{w}=0$.

w וקטור עצמי אז $\mathrm{w}\neq\bar{0}$, לכן $m_A(\lambda)=0$. ■

משפט 46: מטריצה מאפסת הפולינום המינימלי של מטריצה שאליה היא דומה

תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות ריבועיות. יהי $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A ויהי $m_B(x)$ הפולינום המינימלי של B. אם A,B מטריצות דומות אז
$$m_A(B)=0$$
ו-
$$m_B(A)=0\ .$$

הוכחה: A ו- B דומות לכן קיימת P הפיכה כך ש- $A=PBP^{-1}$. לפי משפט 36:
$$m_A(A)=P\cdot m_A(B)\cdot P^{-1}$$
P הפיכה אז נכפיל מצד ימין ב- P ומצד שמאל ב- P^{-1}:
$$P^{-1}\cdot m_A(A)\cdot P=m_A(B)\ .$$
$m_A(A)=0$ לכן $m_A(B)=0$. ■

משפט 47: למטריצות דומות יש אותו פולינום מינימלי

תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות. ל-A ו- B יש אותו פולינום מינימלי.

הוכחה: A ו- B דומות $\Leftarrow$ ל- A ו- B יש אותם ערכים עצמיים (לפי משפט 32).
יהי $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A ו- $m_B(x)$ הפולינום המינימלי של B.
כיוון של- A ו- B אותם ערכים עצמיים אז $m_A(x)$ ו- $m_B(x)$ מתפרקים לאותם גורמים לינאריים:
$m_A(x)=(x-\lambda_1)^{d_1}\ldots(x-\lambda_k)^{d_k}\ ,\qquad m_B(x)=(x-\lambda_1)^{e_1}\ldots(x-\lambda_k)^{e_k}\ .$
A ו- B דומות אז $m_A(B)=0$ ו- $m_B(A)=0$ (לפי משפט 46 למעלה).

כעת נוכיח דרך השלילה כי $d_i=e_i$ לכל $1\le i\le k$ ולכן הפולינומים m_A ו- m_B זהים.

נניח כי עבור אחד הגורמים, $d_i\neq e_i$.

אם $d_i<e_i$, כיוון ש- $m_A(B)=0$ אז מתקיים ש- B מאפסת פולינום מדרגה נמוכה יותר מ- $m_B(x)$. בסתירה לכך כי $m_B(x)$ הוא הפולינום המינימלי של B.

אם $e_i<d_i$, כיוון ש- $m_B(A)=0$, אז מתקיים ש- A מאפסת פולינום מדרגה נמוכה יותר מ- $m_A(x)$. בסתירה לכך כי $m_A(x)$ הוא הפולינום המינימלי של A.

■

משפט 48: A לכסינה אא"ם לפולינום מינימלי יש גורמים לינאריים שונים

יהי $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של המטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. המטריצה A לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אם"ם כל הגורמים האי-פריקים של $m_A(x)$ הם לינאריים ושונים. כלומר A לכסינה אם"ם $m_A(x)$ מתפרק ל-
$m_A(x)=(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_i)\ldots(x-\lambda_k)\ ,$
כאשר $\lambda_i\neq\lambda_j$ לכל $1\le i,j\le k$.

הוכחה: נניח ש- A לכסינה.
יהיו $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ הערכים עצמיים השונים של A.
קיימת P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש-

$$A=PDP^{-1}\ .$$

לפי משפט 47 הפולינום המינימלי של A שווה לפולינום המינימלי של D ולפי מסקנה 44 $m_D(x)=(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_k)$ לכן

$$m_A(x)=m_D(x)=(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_k)\ .$$

■

2.5 שילוש מטריצה

משפט 49: ערכים עצמיים ופולינום אופייני של מטאיצה משולשית

תהי A מטריצה משולשית מעל שדה $\mathbb{F}$. כלומר

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \ldots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

אז:

1) $p_A(x) = (x - a_{11})(x - a_{22}) \ldots (x - a_{nn})$, כלומר, הפולינום האופייני מתפרק לגורמים ליניאריים (לא בהכרח שונים) מעל $\mathbb{F}$.

2) איברי האלכסון של מטריצה משולשית עליונה הם הערכים עצמיים.

המספר הפעמים שכל ערך עצמי מופיע באלכסון הוא הריבוי האלגברי של הערך עצמי.

הוכחה:

1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \ldots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}-\lambda & \ldots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda) \qquad (*)$$

2) לפי (*), $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$ הם הערכים עצמיים של A. כל איבר על האלכסון הראשי מופיע בפולינום האופייני. לכן המספר הפעמים שאיבר מסוים מופיע על האלכסון הראשי שווה למספר הפעמים שהוא מופיע בפולינום האופייני. מאותה מידה המספר הפעמים שאיבר מסוים מופיע על האלכסון הראשי שווה לריבוי אלגברי של הערך עצמי.

■

משפט 50: תנאי לשילוש

אם מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ניתנת לשילוש מעל $\mathbb{F}$ אז הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים ליניאריים (לא בהכרח שונים) מעל $\mathbb{F}$.

הוכחה: נניח ש- A ניתנת לשילוש. אז קיימת P הפיכה ו-M משולשית כך ש- $M = P^{-1}AP$. למטריצות דומות יש אותו פולינום האופייני, לכן

$$p_A(x) = p_M(x) \ .$$

הגורמים של $p_M(x)$ ליניאריים (לא בהכרח שונים) כי M מטריצה משולשית, לכן הגורמים של $p_A(x)$ ליניאריים (לא בהכרח שונים). ■

משפט 51: תנאי לקיום שילוש מטריצה

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב וקטורי V נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$. אם T ניתן לשילוש אז הפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים ליניאריים (לא בהכרח שונים) מעל $\mathbb{F}$.

משפט 52: קיום שילוש

לכל מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{C}$ ולכל $T \in \mathrm{Hom}(V)$, T ניתנת לשילוש.

הוכחה: כל פולינום מתפרק לגורמים ליניאריים מעל $\mathbb{C}$. ■

2.6 תת מרחב שמור

משפט 53: אופרטור ניתן לשילוש אא"ם קיימת סדרת תת מרחבים T שמורים

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב וקטורי V נוצר סופית n- ממדי מעל שדה $\mathbb{F}$. T ניתן לשילוש אס"ם קיימת סדרה של תת מרחבים $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$ כך ש- V_i הוא תת מרחב T שמור וגם $\dim(V_i) = i$ לכל $1 \leq i \leq n$.

הוכחה: <u>נוכיח אם</u>

נניח ש T ניתנת לשילוש. אז קיים בסיס $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ שעבורו $[T]_U$ משולשית. ז"א

$$[T]_U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \ldots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{aligned} T(u_1) =& a_{11}u_1 \ , \\ T(u_2) =& a_{12}u_1 + a_{22}u_2 \ , \\ & \vdots \\ T(u_n) =& a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{nn}u_n \ . \end{aligned}$$

נסמן $V_i = \mathrm{span}(u_1, \ldots, u_i)$. אז $\dim(V_i) = i$.

לכן, $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = V$,
בנוסף $T(u_1), \ldots, T(u_i) \in V_i$.

יהי $u \in V_i$. אז $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_i u_i$. לכן לכל $u \in V_i$:

$$T(u) = \alpha_1 T(u_1) + \ldots + \alpha_i T(u_i) \in V_i$$

ז"א V_i תת מרחב T שמור.

<u>נוכיח רק אם</u>

נניח שקיימת סדרת תת מרחבים T שמורים $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$ כך ש

$\dim(V_i) = i \ \forall i$.

נבנה בסיס $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ של V כך שלכל $1 \leq i \leq n$, $\{u_1, \ldots, u_i\}$ הוא בסיס של V_i. את הבסיס U נבנה ע"י אינדוקציה על n.

<u>עבור $n = 1$</u>:

$\dim(V_1) = 1$ לכן קיים וקטור $u_1 \in V_1$. הוקטור $\{u_1\}$ מהווה בסיס של V_1.

<u>הנחת אינדוקציה:</u>
נניח שעבור $1 < i < n$ בנינו בסיס $\{u_1, \ldots, u_i\}$ של V_i.

$\dim(V_{i+1}) = \dim(V_i) + 1$.

לכן, קיים $u_{i+1} \in V_{i+1}/V_i$. אז $u_1, \ldots, u_i, u_{i+1} \in V_{i+1}$ בת"ל. לכן $\{u_1, \ldots, u_i, u_{i+1}\}$ בסיס של V_{i+1}.
הוכחנו דרך אינדוקציה כי קיים בסיס $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ של V כך שלכל $1 \leq i \leq n$, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ בסיס של V_i.

כעת, כיוון ש- V_i תת מרחבים T שמורים, מקבלים

$$\begin{aligned} T(u_1) =& a_{11}u_1 \ , \\ T(u_2) =& a_{12}u_1 + a_{22}u_2 \ , \\ T(u_3) =& a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3 \ , \\ & \vdots \\ T(u_n) =& a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + a_{3n}u_3 + \ldots + a_{nn}u_n \ . \end{aligned}$$

לכן

$$[T]_U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \ldots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

מטריצה משולשית. ■

2.7 צורת ז'ורדן

משפט 54: בלוק ז'ורדן לא לכסין

$J_k(\lambda)$ לא לכסין.

הוכחה:

$$J_k(\lambda_1)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & & \ddots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1\end{pmatrix}$$

$J_k(\lambda_1)$ משולשית עליונה. לכן הפולינום האופייני מתפרק לגורמים ליניאריים, והערכים עצמיים נמצאים על האלכסון הראשי (משפט 30).

$$p_{J_k(\lambda_1)}(\lambda)=\underbrace{(\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_1)}_{k\text{ פעמים}}=(\lambda-\lambda_1)^k$$

יש ערך עצמי יחיד: $\lambda=\lambda_1$ מריבוי אלגברי k. נחשב את המרחב עצמי V_{λ_1}:

$$(A-\lambda_1 I_{k\times k})=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & & \ddots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

נקבל כי $\dim V_{\lambda_1}=k-1$. ז"א הריבוי גאומרטי פחות מהריבוי אלגברי, ולכן המטריצה לא לכסינה. ■

2.8 אופרטור הצמוד

משפט 55: וקטור בבסיס אורתונורמי

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ ויהי $u\in V$ וקטור של V.

אם $\{b_1,\quad\dots\quad,b_n\}$ בסיס אורתנורמלי אז

$$u=\sum_{i=1}^n \langle u,b_i\rangle\, b_i \qquad (*1)$$

הוכחה: כל וקטור u ניתן לרשום כצרוף ליניארי של וקטורים של בסיס. לכן נרשום u כצרוף ליניארי של הוקטורים של הבסיס האורתונורמלי הנתון:

$$u=\alpha_1 b_1+\dots+\alpha_n b_n=\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \qquad (\#)$$

כאשר $\alpha_i \in \mathbb{C}$ סקלרים. כעת נקח את המכפלה הפנימית של u עם הוקטור b_j:

$$\langle u, b_j \rangle \quad = \quad \langle \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n \ , \ b_j \rangle \quad = \quad \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \ , \ b_j \right\rangle$$

המכפלה הפנימית ליניארית (כלומר למכפלה פנימית יש תכונות הליניאריות $\langle u+\mathrm{v}, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle \mathrm{v}, w \rangle$ ולכל בסקלר α: $\langle \alpha u, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle$) לכן ניתן לרשום הביטוי הזה בצורה

$$\langle u, b_j \rangle \quad = \quad \alpha_1 \langle b_1, b_j \rangle + \cdots + \alpha_n \langle b_n \ , \ b_j \rangle \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle b_i \ , \ b_j \rangle$$

מכיוון שהבסיס אורתונורמלי, אז מתקיים $\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$. לכן כל האיברים בהסכום הזה שווים ל-0 פרט לאיבר $i = j$. לכן

$$\langle u, b_j \rangle = \alpha_j \ .$$

נציב $\alpha_j = \langle u, b_j \rangle$ במשוואה (#) ונקבל

$$u = \sum_{j=1}^{n} \langle u, b_i \rangle \, b_i \ .$$

■

מסקנה 1:

דרך שקולה לרשום משוואה (1*) עבור וקטור u בבסיס אורתונורמלי $\{b_1, \quad \cdots \quad , b_n\}$ היא:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \langle u, b_1 \rangle \\ \langle u, b_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_i \rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_n \rangle \end{pmatrix}_B \ . \qquad (*2)$$

משפט 56: מטריצה המייצגת של אופרטור על פי בסיס אורתונורמלי

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V. אם $\{b_1, \quad \cdots \quad , b_n\}$ בסיס אורתונורמלי אז המטריצה המייצגת של T על פי בסיס B, מסומן $[T]$, היא

$$[T] = \begin{pmatrix} \langle T(b_1), b_1 \rangle & \langle T(b_2), b_1 \rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_1 \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_1 \rangle \\ \langle T(b_1), b_2 \rangle & \langle T(b_2), b_2 \rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_2 \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_i \rangle & \langle T(b_2), b_i \rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_i \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_i \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_n \rangle & \langle T(b_2), b_n \rangle & \cdots & \langle T(b_j), b_n \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_n \rangle \end{pmatrix} ,$$

כלומר האיבר ה- ij של $[T]$ הוא

$$[T]_{ij} = \langle T(b_j), b_i \rangle \ . \qquad (3*)$$

הוכחה: המטריצה המייצגת של האופרטור T על פי הבסיס $B=\{b_1, \quad \cdots \quad , b_n\}$ נתונה על ידי הנוסחה

$$[T]=\begin{pmatrix} | & | & & | & & | \\ [T(b_1)]_B & [T(b_2)]_B & \cdots & [T(b_j)]_B & \cdots & [T(b_n)]_B \\ | & | & & | & & | \end{pmatrix}$$

כל עמודה של המטריצה היא וקטור $T(b_j)$ ($1\leq j\leq n$) על פי הבסיס האורתונורמלי B. אפשר לרשום כל עמודה כמו משוואה (2*) אך עם הוקטור $T(b_j)$ במקום הוקטור u:

$$[T(b_j)]_B=\begin{pmatrix} \langle T(b_j),b_1\rangle \\ \langle T(b_j),b_2\rangle \\ \vdots \\ \langle T(b_j),b_i\rangle \\ \vdots \\ \langle T(b_j),b_n\rangle \end{pmatrix} , \qquad 1\leq j\leq n \ .$$

אחרי הצבה של הביטוי הזה בכל עמודה של $[T]$, לכל $1\leq j\leq n$ בהתאמה, נקבל

$$[T]=\begin{pmatrix} \langle T(b_1),b_1\rangle & \langle T(b_2),b_1\rangle & \cdots & \langle T(b_j),b_1\rangle & \cdots & \langle T(b_n),b_1\rangle \\ \langle T(b_1),b_2\rangle & \langle T(b_2),b_2\rangle & \cdots & \langle T(b_j),b_2\rangle & \cdots & \langle T(b_n),b_2\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1),b_i\rangle & \langle T(b_2),b_i\rangle & \cdots & \langle T(b_j),b_i\rangle & \cdots & \langle T(b_n),b_i\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1),b_n\rangle & \langle T(b_2),b_n\rangle & \cdots & \langle T(b_j),b_n\rangle & \cdots & \langle T(b_n),b_n\rangle \end{pmatrix} ,$$

מכאן הרכיב הכללי בשורה ה- i בעמודה j הוא

$$[T]_{ij}=\langle T(b_j),b_i\rangle \ .$$

■

משפט 57:
יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V. אם T^* הצמוד של T אז לכל $u,w\in V$ מתקיים

$$\langle T^*(u),w\rangle=\langle u,T(w)\rangle \qquad (*5)$$

הוכחה:

$$\langle T^*(u),w\rangle \overset{\text{תכונת הרמיטיות}}{=} \overline{\langle w,T^*(u)\rangle} \overset{\text{הגדרת הצמוד}}{=} \overline{\langle T(w),u\rangle} \overset{\text{תכונת הרמיטיות}}{=} \langle u,T(w)\rangle$$

■

משפט 58: נוסחה של אופרטור ואופטור הצמוד על פי בסיס אורתונורמלי
אם $T:V\to V$ אופרטור במרחב V ויהי u וקטור של V. אם $\{b_1,\cdots,b_n\}$ בסיס אורתונומרלי של V אז

$$T(u)=\sum_{i=1}^n \langle T(u),b_i\rangle\, b_i \ , \qquad (6*)$$

$$T^*(u)=\sum_{i=1}^n \langle u,\ T(b_i)\rangle\, b_i \ . \qquad (7*)$$

הוכחה:

הוכחה של (6*):

במקום u במשוואה (1*) מציבים $T(u)$ ונקבל משוואה (6*).

הוכחה של (7*):

במשוואה (6*) במקום האופרטור $T(u)$ מציבים האופרטור הצמוד $T^*(u)$ ואז נשתמש במשוואה (5*):

$$T^*(u) \overset{(6*)}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle T^*(u), b_i \rangle \, b_i \overset{(*5)}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle u, T(b_i) \rangle \, b_i \ .$$

■

משפט 59: מטריצה המייצגת של אופרטור הצמוד

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V.
אם $[T]$ המטריצה המייצגת של T אז המטריצה המייצגת של הצמוד T^* היא $\overline{[T]}$.
כלומר:

$$[T^*] = \overline{[T]}^{\,*} \ . \qquad (8*)$$

הוכחה: ממשוואה (3*) האיבר ה- ij של המטריצה המייצגת של T הוא $[T]_{ij} = \langle T(b_j), b_i \rangle$. במקום T נציב T^* ונקבל

$$[T^*]_{ij} \overset{(3*)}{=} \langle T^*(b_j), b_i \rangle \overset{(*5)}{=} \langle b_j, T(b_i) \rangle \overset{\text{תכונת הרמטיות}}{=} \overline{\langle T(b_i), b_j \rangle} = \overline{[T]_{ji}}$$

קיבלנו ש- $[T^*]_{ij} = \overline{[T]_{ji}}^{\,*}$ (שימו לב לסדר הפוך של האינדקסים).
במילים: האיבר ה- ij של $[T^*]$ שווה לצמוד של האיבר ji של $[T]$.
לכן $[T^*]$ שווה להמשוחלפת של המטריצה של הצמודים של האיברים של $[T]$. כלומר:

$$[T^*] = \overline{[T]}^{\,*} \ .$$

■

משפט 60: אופרטור צמודו לעצמו אם"ם המטריצה המייצגת צמודה לעצמה

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V. האופרטור T צמוד לעצמו אם"ם המטריצה המייצגת של T בבסיס אורתונורמלי כלשהו של V היא צמודה לעצמה.

משפט 61:

יהי $T : V \to V$ אופרטור כלשהו. T שווה לסכום של שני אופרטורים, שאחת מהם צמוד לעצמו והשני אנטי-סימטרי או אנטי-הרמיטי:

$$T = T_1 + T_2$$

כאשר $T_1 = {T^*}_1$ צמוד לעצמו ו- $T_2 = -{T^*}_2$ אניטי הרמיטי או אנטי סימרטרי.

הוכחה: יהי $T : V \to V$ אופרטור. נתבונן בהעתקות

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(T + T^*\right) \ , \qquad T_2 = \frac{1}{2}\left(T - T^*\right) \ .$$

אז

$$T = T_1 + T_2 \ .$$

$$T^*{}_1 = \frac{1}{2}\left(T + T^{**}\right) = \frac{1}{2}\left(T^* + T^{**}\right) = \frac{1}{2}\left(T^* + T\right) = T_1 \ .$$

ז"א T_1 צמוד לעצמו.

$$T^*{}_2 = \frac{1}{2}\left(T - T^{**}\right) = \frac{1}{2}\left(T^* - T^{**}\right) = \frac{1}{2}\left(T^* - T\right) = -\frac{1}{2}\left(T - T^*\right) = -T_2 \ .$$

ז"א T_2 אנטי-הרמיטית.

■

משפט 62:

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V.

1) אם $\langle T(u), \mathrm{v}\rangle = 0$ לכל $u, \mathrm{v} \in V$. אז $T = 0$.

2) אם $\langle T(u), u\rangle = 0$ לכל $u \in V$. אז $T = 0$.

הוכחה:

1)

$$\langle T(u), \mathrm{v}\rangle = 0$$

לכל $u, \mathrm{v} \in V$. נבחר $\mathrm{v} = T(u)$. אז

$$\langle T(u), T(u)\rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T(u) = 0$$

לכל $u \in V$. לכן $T = 0$.

2) לפי הנתון לכל $u, \mathrm{v} \in V$,

$$\langle T(u + \mathrm{v}), u + \mathrm{v}\rangle = 0 \ , \qquad \langle T(\mathrm{v}), \mathrm{v}\rangle = 0 \ , \qquad \langle T(u), u\rangle = 0 \ .$$

מצד שני,

$$\begin{aligned}\langle T(u + \mathrm{v}), u + \mathrm{v}\rangle &= \langle T(u), u\rangle + \langle T(u), \mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}), u\rangle + \langle T(\mathrm{v}), \mathrm{v}\rangle \\ 0 &= 0 + \langle T(u), \mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}), u\rangle + 0 \\ 0 &= \langle T(u), \mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}), u\rangle\end{aligned}$$

לכן לכל $u, \mathrm{v} \in V$,

$$\langle T(u), \mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}), u\rangle = 0$$

א) במקרה של מרחב אוקלידי (ז"א $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) נקבל

$$\begin{aligned}\langle T(u), \mathrm{v}\rangle &= \langle u, T(\mathrm{v})\rangle && \text{(כי } T \text{ צמוד לעצמו)} \\ &= \langle T(\mathrm{v}), u\rangle && \text{(לפי הסימטריות של מכפלה פנימית במרחב אוקלידי)}\end{aligned}$$

לכן

$$\langle T(u), \mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}), u\rangle = 2\langle T(u), \mathrm{v}\rangle = 0$$

לכן $\langle T(u), \mathrm{v}\rangle = 0$ לכל $u, \mathrm{v} \in V$. לכן לפי סעיף (1), $T = 0$.

ב) במקרה של מרחב אוניטרי (ז"א $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) נציב בשוויון שקיבלנו קודם iu במקום u:

$$\langle T(iu), \mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}), iu\rangle = 0$$

לכן

$$i\langle T(u), \mathrm{v}\rangle - i\langle T(\mathrm{v}), u\rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \langle T(u), \mathrm{v}\rangle - \langle T(\mathrm{v}), u\rangle = 0$$

וגם

$$\langle T(u), \mathrm{v}\rangle + \langle T(\mathrm{v}), u\rangle = 0$$

נחבר את שני השוויונים ונקבל:

$$2\langle T(u), \mathrm{v}\rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T = 0$$

■

משפט 63:
יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית נוצר סופית V. התנאים הבאים שקולים:
(1) T אופרטור אוניטרי.
(2) לכל u, v: $\langle T(u), T(\mathrm{v})\rangle = \langle u, \mathrm{v}\rangle$.
(3) לכל $u \in V$: $\|T(u)\| = \|u\|$.

הוכחה: $\underline{(1) \Rightarrow (2)}$

נניח ש- T אוניטרית. נבחר $u, \mathrm{v} \in V$. אז

$$\langle T(u), T(\mathrm{v})\rangle = \langle u, T^* \cdot T(\mathrm{v})\rangle = \langle u, I(\mathrm{v})\rangle = \langle u, \mathrm{v}\rangle \ .$$

$\underline{(2) \Rightarrow (3)}$

נתון שלכל u, v, $\langle T(u), T(\mathrm{v})\rangle = \langle u, \mathrm{v}\rangle$. בפרט:

$$\|T(u)\|^2 = \langle T(u), T(u)\rangle = \langle u, u\rangle = \|u\|^2 \ .$$

$\underline{(3) \Rightarrow (1)}$

$$\begin{aligned} 0 =& \|T(u)\|^2 - \|u\|^2 \\ &= \langle T(u), T(u)\rangle - \langle u, u\rangle \\ &= \langle T^* \cdot T(u), u\rangle - \langle u, u\rangle \end{aligned}$$

לכן

$$\langle T^* \cdot T(u), u\rangle = \langle u, u\rangle$$

לכן $T^* \cdot T = I$.

■

משפט 64:
יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית נוצר סופית V. התנאים הבאים שקולים:
(1 לכל $u \in V$: $\|T(u)\| = \|u\|$.
(2 לכל $u, \mathrm{v} \in V$: $\|T(u) - T(\mathrm{v})\| = \|u - \mathrm{v}\|$.

הוכחה:
(1 נניח $\|T(u)\| = \|u\|$ לכל $u \in V$. נקח $u, \mathrm{v} \in V$. אז

$$\|T(u - \mathrm{v})\| = \|u - \mathrm{v}\| \qquad \Rightarrow \qquad \|T(u) - T(\mathrm{v})\| = \|u - \mathrm{v}\| \ .$$

2) נניח $\|T(u)-T(\mathrm{v})\| = \|u-\mathrm{v}\|$ לכל $u,\mathrm{v}\in V$. נגדיר $\mathrm{v}=0$. אז
$$\|T(u)-T(0)\| = \|T(u)\| = \|u-0\| = \|u\| \ .$$

■

משפט 65:
יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית נוצר סופית V.

א) אם T אוניטרי ואם $B=\{b_1,\ldots,b_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V, אז גם $\{T(b_1),\ldots,T(b_n)\}$ בסיס אורתונורמלי.

ב) אם $B=\{b_1,\ldots,b_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V, ואם $\{T(b_1),\ldots,T(b_n)\}$ בסיס אורתונורמלי של V אז, T אוניטרי.

הוכחה:

א)
$$\langle T(b_i),T(b_j)\rangle = \langle b_i,b_j\rangle = \begin{cases} 0 & i\neq j \ , \\ 1 & i=j \ . \end{cases}$$
לכן $\{T(b_1),\ldots,T(b_n)\}$ בסיס אורתונורמלי.

ב) נניח ש- $B=\{b_1,\ldots,b_n\}$ ו- $B'=\{T(b_1),\ldots,T(b_n)\}$ בסיסים אורתונורמליים. לכל $u,\mathrm{v}\in V$,
$$u=\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \ , \qquad \mathrm{v}=\sum_{i=1}^n \beta_i b_i \ .$$
אז
$$\langle u,\mathrm{v}\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i\bar{\beta}_i \ .$$
$$\langle T(u),T(\mathrm{v})\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i T(b_i), \sum_{i=1}^n \beta_i T(b_i)\right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i\bar{\beta}_i$$
ז"א $\langle T(u),T(\mathrm{v})\rangle = \langle u,\mathrm{v}\rangle$. לכן T אופרטור אוניטרי.

■

משפט 66:

1) אם A מטריצה אוניטרית מסדר n מעל שדה $\mathbb{F}$, אז גם שורותיה וגם עמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{F}^n$.

2) אם שורות (או עמודות) של מטריצה ריבועית מסדר n מעל $\mathbb{F}$ מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית אז המטריצה אוניטרית.

הוכחה: נסמן
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} \ , \qquad \bar{A}=\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \cdots & \bar{a}_{n1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{nn}\end{pmatrix} \ .$$

1) נניח ש A אוניטרית. אז $A\cdot\bar{A}=I$ וגם $\bar{A}\cdot A=I$. אז האיבר (i,j) של המטריצה $A\cdot\bar{A}$ הוא:

$$\left(A\bar{A}\right)_{ij}=\begin{pmatrix}a_{i1} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\bar{a}_{j1}\\ \vdots\\ \bar{a}_{jn}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\bar{a}_{jk}$$

לכן מטריצה A אוניטרית כאשר

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\bar{a}_{jk}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

הביטוי $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\bar{a}_{jk}$ הוא המכפלה פנימית ב- $\mathbb{F}^n$ של השורה ה- i והשורה ה- j של מטריצה A. לכן, אם A אוניטרית, אז שורות A הן בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$.

באופן דומה, האיבר ה- (i,j) של המטריצה $\bar{A}A$:

$$\left(\bar{A}A\right)_{ij}=\begin{pmatrix}\bar{a}_{1i} & \cdots & \bar{a}_{ni}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_{ki}a_{kj}$$

זאת המכפלה הפנימית הסטנדרטית של עמודות מטריצה A.

המכפלה הזאת שווה ל- 1 עבור $i=j$ ושווה ל- 0 עבור $i\neq j$.

לכן עמודות A מהוות בסיס אורתונורמלי של A.

2) נניח ששורות מטריצה A מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$. אז האיבר (i,j) של $A\cdot\bar{A}$:

$$\left(A\bar{A}\right)_{ij}=\begin{pmatrix}a_{i1} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\bar{a}_{j1}\\ \vdots\\ \bar{a}_{jn}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\bar{a}_{jk}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}.$$

ז"א $A\bar{A}=I \Leftarrow A$ אוניטרית.

נניח כעת, שעמודות A מהוות בסיס אורתונורמלי. אז

$$\left(\bar{A}A\right)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_{ki}a_{kj}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}.$$

ז"א $\bar{A}\cdot A=I \Leftarrow A$ אוניטרית.

■

משפט 67:

יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית נוצר סופית V. התנאים הבאים שקולים:

(א) T אוניטרית, ז"א $T^*\cdot T=T\cdot T^*=1$.

(ב) לכל $u,\mathrm{v}\in V$: $\langle T(u),T(\mathrm{v})\rangle=\langle u,\mathrm{v}\rangle$.

(ג) לכל $u\in V$: $\|T(u)\|=\|u\|$.

(ד) לכל $u,\mathrm{v}\in V$: $\|T(u)-T(\mathrm{v})\|=\|u-\mathrm{v}\|$.

(ה) T מעבירה בסיס אורתונורמלי כלשהו של V לבסיס אורתונורמלי .

(ו) המטריצה המייצגת של T לפי בסיס אורתונורמלי מסוים של V היא אוניטרית.

2.9 אופרטור נורמלי

משפט 68: ערכים עצמיים של אופרטור צמוד לעצמו ממשיים

כל הערכים עצמיים של אופרטור הצמוד לעצמו (מטריצה צמודה לעצמה) הם ממשיים.

הוכחה: נניח $T : V \to V$ אופרטור צמודו לעצמו, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v}) = \lambda\mathrm{v}$. אז

$$\begin{aligned} \langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \lambda\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &=\lambda \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית}) \end{aligned} .$$

מצד שני

$$\begin{aligned} \langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \mathrm{v},T^*(\mathrm{v})\rangle && (\text{הגדרה של אופרטור הצמוד [הגדרה 37]})\\ &= \langle \mathrm{v},T(\mathrm{v})\rangle && (T \text{ צמוד לעצמו})\\ &= \langle \mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &=\bar{\lambda} \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית}) \end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle = \bar{\lambda} \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \quad \Rightarrow \quad (\lambda-\bar{\lambda}) \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle = 0 \ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v}\neq 0 \Leftarrow \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \neq 0 \Leftarrow (\lambda-\bar{\lambda})=0 \Leftarrow \lambda=\bar{\lambda}$.

■

משפט 69: ערכים עצמיים של אופרטור אנטי-הרמיטי מדומים

אם T אופרטור אנטי-הרמיטי אז כל הערכים העצמיים של T הם מספרים מדומים.

הוכחה: נניח ש- $T : V \to V$ אופרטור צמוד לעצמו, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v}) = \lambda\mathrm{v}$. אז

$$\begin{aligned} \langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \lambda\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &=\lambda \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית}) \end{aligned} .$$

מצד שני

$$\begin{aligned} \langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle \mathrm{v},T^*(\mathrm{v})\rangle && (\text{הגדרה של אופרטור הצמוד})\\ &= \langle \mathrm{v},-T(\mathrm{v})\rangle && (T \text{ אנטי-הרמיטי})\\ &= -\langle \mathrm{v},T(\mathrm{v})\rangle \\ &= -\langle \mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &= -\bar{\lambda} \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית}) \end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle = -\bar{\lambda} \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \quad \Rightarrow \quad (\lambda+\bar{\lambda}) \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle = 0 \ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v}\neq 0 \Leftarrow \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \neq 0 \Leftarrow (\lambda+\bar{\lambda})=0 \Leftarrow \lambda=-\bar{\lambda}$.

■

משפט 70: פולינום אופייני של אופרטור צמוד לעצמו מתפרק לגורמים לינארים ממשיים

יהי T אופרטור צמוד לעצמו (מטריצה צמודה לעצמה).

(1) הפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים.

(2) השורשים של הפולינום האופייני של T ממשיים.

הוכחה: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $T : V \to V$ אופרטור. תהי $[T]_B$ המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס B. עם $\dim(V) = n$ אז $[T]_B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אז הפולינום האופייני של $[T]_B$ הוא פולינום מסדר n אם מקדמים מרוכבים:

$$m_T(x) = a_0 + a_1 x + \ldots x^n \ ,$$

כאשר $a_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n$.

לפי המשפט היסודי של האלגברה יש לפולינום הזה פירוק לגורמים לינאריים:

$$m_T(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + x^n = (x - \lambda_1)\ldots(x - \lambda_n) \ ,$$

$\lambda_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n$.

השורשים של m_T הם הערכים העצמיים של T. לפי משפט 68, אם T צמוד לעצמו אז כל הערכים העצמיים של T הם מספרים ממשיים.

כלומר, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$.

אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז הפולינום האופייני של $[T]_B$ הוא פולינום מסדר n עם מקדמים ממשיים:

$$m_T(x) = a_0 + a_1 x + \ldots x^n \ ,$$

כאשר $a_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. מכאן ההוכחה היא אותה דבר של המקרה של $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. ■

משפט 71: ערך מוחלט של כל ערך עצמי של אופרטור אוניטרי שווה 1

יהי $T : V \to V$ אופרטור אוניטרי ברמחב מבפלה פנינית V מעל שדה $\mathbb{C}$. אז הערך מוחלט של כל ערך עצמי של T שווה ל- 1.

הוכחה: נניח ש- $T : V \to V$ אופרטור אוניטרי, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v}) = \lambda \mathrm{v}$. אז

$$\begin{aligned} \langle T(\mathrm{v}), T(\mathrm{v})\rangle &= \langle \lambda \mathrm{v}, \lambda \mathrm{v}\rangle && (\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &= \lambda \langle \mathrm{v}, \lambda \mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית})\\ &= \lambda\bar{\lambda} \langle \mathrm{v}, \lambda \mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית}) \end{aligned}$$

.

מצד שני

$$\begin{aligned} \langle T(\mathrm{v}), T(\mathrm{v})\rangle &= \langle \mathrm{v}, T^* T(\mathrm{v})\rangle && (\text{הגדרה של אופרטור הצמוד})\\ &= \langle \mathrm{v}, I(\mathrm{v})\rangle && (T \text{ אוניטרי})\\ &= \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle \end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\bar{\lambda} \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle = \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle \quad \Rightarrow \quad (\lambda \cdot \bar{\lambda} - 1) \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle = 0 \ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v} \neq 0 \Leftarrow \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle \neq 0 \Leftarrow (\lambda \cdot \bar{\lambda} - 1) = 0 \Leftarrow \lambda\bar{\lambda} = 1 \Leftarrow |\lambda|^2 = 1$.

■

משפט 72: משפט הלכסון אוניטרי

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה.
A לכסינה אוניטרית אם ורק אם A נורמלית. כלומר קיימת Q מטריצה אוניטרית ($QQ^* = I = Q^*Q$) ו-
D אלכסונית כך ש-

$$A = QDQ^* \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot A^* = A^* \cdot A \ .$$

משפט 73: משפט הלכסון אוניטרי

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V מעל שדה $\mathbb{C}$. T לכסין אוניטרי אם ורק אם T נורמלי.
כלומר קיימת Q מטריצה אוניטרית ($QQ^* = I = Q^*Q$) ו- D אלכסונית כך ש-

$$[T] = QDQ^* \quad \Leftrightarrow \quad T \cdot T^* = T^* \cdot T \ .$$

הוכחה:

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

נניח כי $T : V \to V$ הוא אופרטור לכסין אוניטרי. לכן (משפט 66) קיים בסיס אורתונורמלי B של V כך ש-
$[T]_B$ אלכסונית. נרשום

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \ .$$

אזי

$$[T^*]_B = [T]_B^* = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

גם מטריצה אלכסונית. מטריצות אלכסוניות מתחלפות, (ראו דוגמה **??**), לכן $[T^*]_B \cdot [T]_B = [T]_B \cdot [T^*]_B$, לכן

$$[T \cdot T^*]_B = [T^* \cdot T]_B \quad \Rightarrow \quad T \cdot T^* = T^* \cdot T \ .$$

זה תנאי הכרחי לכך ש- T לכסינה אוניטרית. תוצאה מקבילה מתקיימת גם עבור מטריצות:

אם מטריצה ריבועית A לכסינה אוניטרית, אז

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A \ .$$

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

■

משפט 74: משפט הלכסון אוניטרי

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ממשית.
A לכסינה אורתוגונלית אם ורק אם A נורמלית. כלומר קיימת Q מטריצה אורתוגונלית ($QQ^t = I = Q^tQ$)
ו- D אלכסונית כך ש-

$$A = QDQ^t \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot A^t = A^t \cdot A \ .$$

משפט 75: משפט הלכסון אוניטרי

יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב מבפלה פנינית V מעל שדה $\mathbb{R}$. T לכסין אורתוגונלי אם ורק אם T נורמלי. כלומר קיימת Q מטריצה אורתוגונלית ($QQ^t=I=Q^tQ$) ו- D אלכסונית כך ש-

$$[T]=QDQ^t \quad \Leftrightarrow \quad T\cdot T^t=T^t\cdot T \ .$$

משפט 76: וקטור עצמי וערך עצמי של אופרטור הצמוד לעצמו

אם v וקטור עצמי של אופרטור נורמלי T, השייך לערך עצמי λ.
אז $\bar{\lambda}$ הוא ערך עצמי של T^* ו- v הוא גם וקטור עצמי של T^* השייך ל- $\bar{\lambda}$.

הוכחה: נוכיח קודם שלכל $\mathrm{v}\in V$ מתקיים $\|T(\mathrm{v})\|=\|T^*(\mathrm{v})\|$.

$$\begin{aligned}\|T(\mathrm{v})\| &=\langle T(\mathrm{v}),T(\mathrm{v})\rangle\\ &=\langle \mathrm{v},T^*T(\mathrm{v})\rangle\\ &=\langle \mathrm{v},TT^*(\mathrm{v})\rangle\\ &=\langle T^*(\mathrm{v}),T^*(\mathrm{v})\rangle\\ &=\|T^*(\mathrm{v})\|^2 \ .\end{aligned}$$

נניח כעת ש- v וקטור עצמי:

$$T(\mathrm{v})=\lambda\mathrm{v} \ .$$

אז

$$(T-\lambda I)(\mathrm{v})=0 \ .$$

לכן

$$\|(T-\lambda I)(\mathrm{v})\|=0 \ .$$

הוכחנו קודם כי $T-\lambda I$ אופרטור נורמלי (ראו דוגמה **??**). לכן

$$\|(T-\lambda I)(\mathrm{v})\|=\|(T-\lambda I)^*(\mathrm{v})\| \ ,$$

ז"א

$$\|(T-\lambda I)^*(\mathrm{v})\|=\|T^*(\mathrm{v})-\bar{\lambda}I\mathrm{v}\|=0 \ .$$

לכן

$$T^*(\mathrm{v})-\bar{\lambda}\mathrm{v}=0 \qquad \Rightarrow \qquad T^*(\mathrm{v})=\bar{\lambda}\mathrm{v} \ .$$

ז"א v הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי $\bar{\lambda}$.

■

משפט 77: וקטורים עצמיים של אופרטור נורמלי של ערכים עצמיים שונים הם אורתוגונליים

יהי $T:V\to V$ אופרטור נורמלי במרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{F}$. וקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים שונים, אורתוגונליים זה לזה.

הוכחה: יהיו $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2$ וקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים λ_1,λ_2, $\lambda_1\neq\lambda_2$.

$$T(\mathrm{v}_1)=\lambda_1\mathrm{v}_1 \ , \qquad T(\mathrm{v}_2)=\lambda_2\mathrm{v}_2 \ .$$

אז
$$\langle T(\mathrm{v}_1), \mathrm{v}_2 \rangle = \langle \lambda_1 \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \rangle = \lambda_1 \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \rangle$$
וגם
$$\langle T(\mathrm{v}_1), \mathrm{v}_2 \rangle = \langle \mathrm{v}_1, T^*(\mathrm{v}_2) \rangle = \langle \mathrm{v}_1, \bar{\lambda}_2 \mathrm{v}_2 \rangle = \lambda_2 \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \rangle$$
ז"א
$$\lambda_1 \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \rangle = \lambda_2 \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \rangle \qquad \Rightarrow \qquad (\lambda_1 - \lambda_2) \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \rangle = 0 \ .$$
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ לכן $\langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \rangle = 0$.

■

2.10 משפט הפירוק הפרימרי

משפט 78: סכום של תת מרחב שווה לפרישה של האיחוד
יהיו $V_1, V_2 \subseteq V$ תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל השדה $\mathbb{F}$. אזי
$$V_1 + V_2 = \mathrm{span}\,(V_1 \cup V_2) \ .$$

הוכחה:
נוכיח כי $V_1 + V_2 \subseteq \mathrm{span}\,(V_1 \cup V_2)$:

לכל $u_1 \in V_1$ ו- $u_2 \in V_2$ מתקיים $u_1 + u_2 \in \mathrm{span}\,(V_1 \cup V_2)$ אזי $V_1 + V_2 \subseteq (V_1 \cup V_2)$.

נוכיח כי $\mathrm{span}\,(V_1 \cup V_2) \subseteq V_1 + V_2$:

יהי $w \in \mathrm{span}\,(V_1 \cup V_2)$. אז קיימים $u_1, \ldots, u_k \in V_1$ ו $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n \in V_2$ וסקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$ כך ש
$$w = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k + \beta_1 \mathrm{v}_1 + \cdots + \beta_n \mathrm{v}_n \ .$$
אז $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k \in V_1$ וגם $\beta_1 \mathrm{v}_1 + \cdots + \beta_n \mathrm{v}_n \in V_2$.
לכן $w \in V_1 + V_2$.

הוכחנו ש- $V_1 + V_2 \subseteq \mathrm{span}\,(V_1 \cup V_2)$ וגם $\mathrm{span}\,(V_1 \cup V_2) \subseteq V_1 + V_2$ $\Leftarrow$ $V_1 + V_2 = \mathrm{span}\,(V_1 \cup V_2)$ כנדרש.

■

משפט 79:
יהיו V_1, V_2 תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$.
$W = V_1 \oplus V_2$ אם ורק אם
א) $W = V_1 + V_2$
ב) $V_1 \cap V_2 = \{\bar{0}\}$.

הוכחה:
כיוון $\Leftarrow$:
נניח כי $W = V_1 \oplus V_2$.

1) לפי ההגדרה 47, $W=V_1+V_2$.

2) יהי $u\in V_1\cap V_2$. לכן קיים צרוף ליניארי יחיד כך ש-
$$u=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2$$
כאשר $u_1\in V_1, u_2\in V_2$ ו- $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{F}$ סקלרים.

הביטוי הזה מסופק על ידי ההשמה $u_1=u, u_2=0, \alpha_1=1$,

ועל ידי ההשמה $u_1=0, u_2=u, \beta_1=1$.

הצרוף ליניארי יחיד לכן בהכרח שתי ההשמות זהות.

הדרך היחידה לקיים שתיהן היא אם $u=0$.

כיוון $\Rightarrow$:

נניח שמתקיימים התנאים

1) $W=V_1+V_2$

2) $V_1\cap V_2=\{\bar{0}\}$.

אזי התנאי (1) של ההגדרה 47 מתקיים.

נותר להוכיח התנאי (2) של ההגדרה 47.

יהי $w\in W$. מכיוון ש- $W=V_1+V_2$ אזי קיימים $u_1\in V_1, u_2\in V_2$ עבורם $w=u_1+u_2$.

נוכיח כי הוקטורים u_1,u_2 יחידים.

נניח בשלילה ש-
$$w=u_1+u_2\ ,\qquad w=u_1'+u_2'$$
כאשר $u_1\neq u_1'\in V_1$ וקטורים שונים $(u_1\neq u_1')$ ו- $u_2,u_2'\in V_2$ וקטורים שונים $(u_2\neq u_2')$. אזי
$$u_1-u_1'=u_2-u_2'\ .$$
לכן $u_1-u_1'\in V_1$ וגם $u_1-u_1'\in V_2$.

$\Leftarrow$ $u_1-u_1'\in V_1\cap V_2$.

מכיוון ש- $V_1\cap V_2=\{0\}$ אז $u_1=u_1'$, בסתירה לכך ש- $u_1\neq u_1'$.

■

משפט 80:

יהיו V_1,V_2 תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$.

אם התנאים הבאים מתקיימים:

1) $W=V_1+V_2$

2) לכל $u_1\in V_1$, ו- $u_2\in V_1$ הקבוצה $\{u_1,u_2\}$ בלתי תלויה ליניארית

אזי $W=V_1\oplus V_2$.

הוכחה:

נוכיח כי התנאים (1) ו- (2) של משפט 79.

תנאי (1) שהוא $W=V_1+V_2$, מתקיים כי הוא אחד מההנחות של משפט זה.

נותר רק להוכיח שהתנאי (2) מתקיים, כלומר ש- $V_1\cap V_2=\{0\}$:

יהי $u\in V_1\cap V_2$. נגדיר $u_1=u\in V_1$ ונגדיר $u_2=-u\in V_2$.

אזי
$$u_1+u_2=u+(-u)=0\ .$$
$\{u_1,u_2\}$ בלתי-תלויים ליניארית לכן הדרך היחידה שזה מתקיים היא אם $u_1=0$ ו- $u_2=0$.

לכן $u=0$ ולכן $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

■

משפט 81: משפט הפירוק הפרימרי

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב וקטורי V מעל $\mathbb{F}$. יהי $m_T(x)$ הפולינום המינימלי של T ונניח של-$m_T(x)$ יש את הפירוק הבא:

$$m_T(x) = m_1^{b_1}(x) \quad \cdots \quad m_k^{b_k}(x) \ ,$$

כאשר $m_i(x)$ הוא פולינום מתוקן אי-פריק מעל $\mathbb{F}$.

יהי W_i המרחב האפס של $m_i^{b_i}(T)$. אזי התנאים הבאים מתקיימים:

1) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \quad \cdots \quad \oplus W_k$.

2) התת-מרחב W_i הוא T שמור.

3) נסמן $T_i = T_{W_i}$ הצמצום של T ל- W_i. אז $m_i^{b_i}(x)$ הוא הפולינום המינימלי של T_i.

4) יהי B_i בסיס של W_i ונסמן $B = B_1 \cup B_2 \cup \quad \cdots \quad \cup B_k$ בסיס של V. אזי

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T_1]_{B_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [T_2]_{B_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [T_k]_{B_k} \end{pmatrix}$$