

תרגילים: אי-כריעות

**שאלה 1** נתונה השפה הבאה:  $L = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| \geq 3\}$ . כלומר  $L$  מכילה קידודים של מכונות שמקבלות לפחות 3 מילים שונות. הוכיחו כי  $L \notin R$  ע"י רדוקציה מ-  $L_{acc}$ .

**שאלה 2** קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה:  
לכל שלוש שפות  $L_1, L_2, L_3$  אם  $L_1 \leq L_2$  וגם  $L_1 \leq L_3$  אזי  $L_1 \leq (L_2 \cap L_3)$ .

## תשובות

שאלה 1פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M_\emptyset$  היא מ"ט הדוחה כל קלט ו-  $M'$  היא מ"ט שעל כל קלט  $y$ , מתעלמת מ-  $y$  ומריצה את  $M$  על  $w$  ועונה כמוה.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

נכונות הרדוקציה:

נוכיח כי

$$x \in L_{\text{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L_{\geq 3}.$$

אם  $x \in L_{\text{acc}} \Leftrightarrow x = \langle M, w \rangle$  ו-  $w \in L(M) \Leftrightarrow f(x) = \langle M' \rangle \Leftrightarrow f(x) \in L_{\geq 3}$  ולכן  $|L(M')| = \infty$

אם  $x \notin L_{\text{acc}}$  שני מקרים:

מקרה 1:  $x \neq \langle M, w \rangle \Leftrightarrow f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \Leftrightarrow |L(M_\emptyset)| = 0 \Leftrightarrow f(x) \notin L_{\geq 3}$

מקרה 2:  $x \neq \langle M, w \rangle$  ו-  $w \notin L(M) \Leftrightarrow f(x) = \langle M' \rangle \Leftrightarrow L(M') = \emptyset$  ולפי האבחנה  $|L(M')| = 0 \Leftrightarrow f(x) \notin L_{\geq 3}$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $L_{\text{acc}} \leq L_{\geq 3}$  ולכן ממשפט הרדוקציה, מכיוון ש-  $L_{\text{acc}} \notin R$ , מתקיים  $L_{\geq 3} \notin R$ .

שאלה 2

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$L_1 = L_{\text{halt}}, \quad L_2 = L_{\text{acc}}, \quad L_3 = \overline{L_{\text{acc}}}.$$

מתקיים  $L_{\text{halt}} \leq L_{\text{acc}}$  לכן  $L_1 \leq L_2$ .בנוסף  $L_{\text{halt}} \leq \overline{L_{\text{acc}}}$  לכן  $L_1 \leq L_3$ .

מצד שני:  $L_2 \cap L_3 = \emptyset$  ולכן  $L_1 \not\leq L_3$  (אחרת  $L_{\text{halt}} \leq \emptyset$  ומכיוון ש-  $\emptyset \in R$  אזי  $L_{\text{halt}} \in R$  בסתירה לכך ש-  $L_{\text{halt}} \notin R$ ).