

המחלקה למדעי המחשב

29/09/24 כ"ו באלול תשפ"ד  
09 : 00 – 12 : 00

## אלגברה 2

מועד ב'

מרצים: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר.

תשפ"ד סמסטר ב'

השאלון מכיל 5 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

**בהצלחה!**

### הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

### חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (2 עמודים בפורמט A4), מצורפים לשאלון.

### אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.

## שאלה 1 (25 נקודות)

(א) (7 נק') תהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  מטריצה ריבועית ממשית המקיימת  $A^2 + A + I = 0$ . הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית: אין ל- $A$  ערך עצמי ממשי.

(ב) (18 נק') תהי  $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . קבעו אם  $A$  לכסינה מעל  $\mathbb{R}$  ואם  $A$  לכסינה מעל  $\mathbb{C}$ ?

במידה וכן, מצאו מטריצה הפיכה  $P$  ומטריצה אלכסונית  $D$  כך ש- $D = P^{-1}AP$ .  
במידה והמטריצה לא לכסינה, מצאו צורת ז'ורדן  $J$  ומטריצה הפיכה  $P$  כך ש- $P^{-1}AP = J$ .

## שאלה 2 (25 נקודות)

תהי  $A \in \mathbb{C}^{7 \times 7}$  מטריצה בעלת פולינום אופייני

$$p_A(t) = t^2(1+t)^4(2-t)$$

ופולינום מינימלי

$$m_A(t) = t(t+1)^2(t-2).$$

מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של  $A$ .

## שאלה 3 (25 נקודות)

יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $\mathbb{F}$  ויהיו  $T: V \rightarrow V$  אופרטור ו- $S: V \rightarrow V$  אופרטור. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את כל הטענות הבאות:

(א) (5 נק') אם  $T$  אוניטרי אז  $T^k$  אוניטרי לכל  $k \geq 2$ .

(ב) (5 נק') אם  $\lambda$  ערך עצמי של  $T$  אז  $\bar{\lambda}$  ערך עצמי של  $\bar{T}$ .

(ג) (5 נק') אם  $S$  צמוד לעצמו,  $T$  צמוד לעצמו ו- $S \cdot T$  צמוד לעצמו אז  $ST = TS$ .

(ד) (5 נק') נתון כי  $ST = TS$ .  $\lambda$  ערך עצמי של  $S$  אם ורק אם  $\lambda$  ערך עצמי של  $T$ .

(ה) (5 נק') אם  $ST = TS$  ואם  $u$  ווקטור עצמי של  $S$  אז  $u$  ווקטור עצמי של  $T$ .

## שאלה 4 (25 נקודות)

תהי  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  מטריצה ממשית מסדר  $3 \times 3$ , כך ש- $\det(A) = 1$ . בנוסף כל הערכים העצמיים של  $A$  שונים זה מזה, ואחד מהם הוא  $\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ .

(א) (6 נקודות) מצאו את כל הערכים העצמיים של  $A$ .

**(6 נקודות)** נתון כי  $A$  מקיימת  $A^3 = aA^2 + bA + cI$  כאשר  $a, b, c \in \mathbb{R}$  סקלרים. מצאו את  $a, b, c$ . נמקו את תשובתכם.

**(7 נקודות)** נתון כי  $A$  מקיימת  $A^{100} = dA^2 + eA + fI$  כאשר  $d, e, f \in \mathbb{R}$  סקלרים. מצאו את  $d, e, f$ . נמקו את תשובתכם.

**(3 נקודות)** האם יתכן כי  $A$  מטריצה אוניטרית? נמקו את תשובתכם.

**(3 נקודות)** האם יתכן כי  $A$  צמודה לעצמה? נמקו את תשובתכם.

## שאלה 5 (25 נקודות)

**(17 נק')** נתונה קבוצת ווקטורים במרחב מכפלה פנימית הסטנדרטי של  $\mathbb{F}^{2 \times 2}$ :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{F}^{2 \times 2}.$$

בנו בסיס אורתונורמלי של  $S$ .

**(4 נק')** תהינה  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  מטריצות כאשר  $A = I$  ו-  $B \neq I$ . הוכיחו או הפריכו:  $A$  ו-  $B$  דומות.

**(4 נק')** תהינה  $C, D \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  כך ש-  $0$  ערך עצמי של  $C$  ו-  $D$  מטריצה אוניטרית. הוכיחו או הפריכו:  $C$  ו-  $D$  דומות.

## פתרונות

### שאלה 1

א) (7 נק')  $A$  מאפסת את הפולינום  $f(x) = x^2 + x + 1$  אשר מתפרק לגורמים לינארים באופן הבא:

$$f(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$$

כאשר  $\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$  ו-  $\lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ . מכיון ש-  $A$  מאפסת את הפולינום אזי האפשרויות לפולינום המינימלי של  $A$  הן:

$$x - \lambda_1, \quad x - \lambda_2, \quad (x - \lambda_1)(x - \lambda_2).$$

$\lambda$  הוא שורש של הפולינום המינימלי אם ורק אם הוא גם ערך עצמי של  $A$ .  
לכן הערכים העצמיים האפשריים של  $A$  הם:  $\lambda = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$  ו-  $\lambda = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ .  
לכן לא קיים ערך עצמי של  $A$  אשר הוא ממשי ולכן הטענה נכונה.

ב) (18 נק')

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |xI - A| &= \begin{vmatrix} x-6 & -1 & -4 \\ -3 & x-7 & -7 \\ 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= (x-6) \begin{vmatrix} x-7 & -7 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 0 & x-2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -3 & x-7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (x-6)(x^2 - 9x + 21) - 3x + 6 + 12 \\ &= (x-6)(x^2 - 9x + 21) - 3x + 18 \\ &= (x-6)(x^2 - 9x + 21) - 3(x-6) \\ &= (x-6)(x^2 - 9x + 21 - 3) \\ &= (x-6)(x^2 - 9x + 18) \\ &= (x-6)(x-3)(x-6) \\ &= (x-3)(x-6)^2. \end{aligned}$$

לכן הפולינום האופייני הוא  $p_A(x) = (x-6)^2(x-3)$ .

ערכים עצמיים:

$\lambda = 6$  מריבוי אלגברי 2,

$\lambda = 3$  מריבוי אלגברי 1.

$$m_A(x) = (x - 6)^2(x - 3) .$$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(6) & \\ & J_1(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

מרחב עצמי של  $\lambda = 6$ :

$$\begin{aligned} (A - 6I) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{3}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

פתרון  $(x, y, z) = z(-1, -4, 1)$ .

$$V_6 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

נסמן את הוקטור עצמי ב-  $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

וקטור עצמי מוכלל:

$$u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(A - 6I)u_2 = u_1 , \quad \Rightarrow \quad (A - 6I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

נרשום את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\begin{aligned} (A - 6I) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 7 & -4 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{3}R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

פתרון:  $(x, y, z) = (-z - 1, -4z - 1, z) \in \mathbb{R}$ . נציב  $z = 0$  ונקבל

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

**המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון**

מרחב עצמי של  $\lambda = 3$ :

$$\begin{aligned}
 (A - 3I) &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow 3R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{3}3R_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{3}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

פתרון:  $z \in \mathbb{R} (x, y, z) = (-z, -z, z)$  ווקטור עצמי ששייך לערך עצמי  $\lambda = 3$ :

$$u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(6) & \\ & J_1(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{6} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{6} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}, \quad P = (u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**שאלה 2 (25 נקודות)**

$$J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_2(-1) \oplus J_2(-1) \oplus J_1(2)$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

$$J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_2(-1) \oplus J_1(-1) \oplus J_1(-1) \oplus J_1(2)$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

**המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון**

## שאלה 3

א) (5 נק')  $T$  אוניטרי  $T\bar{T} = I$

נוכיח את הטענה באינדוקציה.

בסיס:

עבור  $k = 2$ :

$$T^2(\overline{T^2}) = TTT\bar{T} = TIT = T\bar{T} = I.$$

מעבר:

נניח כי הטענה מתקיימת עבור  $k$ . אז

$$\begin{aligned} T^{k+1}(\overline{T^{k+1}}) &= TT^k\bar{T}^k\bar{T} \\ &= TIT^k \quad (\text{ההנחת האינדוקציה, } T^k \text{ אוניטרי}) \\ &= T\bar{T} \\ &= I \quad (T \text{ אוניטרי}) \end{aligned}$$

ב) (5 נק') יהי  $u$  ווקטור עצמי של  $T$  ששייך לערך עצמי  $\lambda$ .

$$\begin{aligned} \langle T(u), u \rangle &= \langle \lambda u, u \rangle \quad (u \text{ ווקטור עצמי}) \\ &= \lambda \langle u, u \rangle \quad (\text{תכונת ליניאריות של מכפלה פנימית}) \end{aligned}$$

מצד שני,

$$\begin{aligned} \langle T(u), u \rangle &= \langle u, \bar{T}(u) \rangle \quad (\text{הגדרה של הצמוד}) \\ &= \langle u, \bar{\mu} u \rangle \quad (u \text{ ווקטור עצמי של } \bar{T}) \\ &= \bar{\mu} \langle u, u \rangle. \end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda \langle u, u \rangle = \bar{\mu} \langle u, u \rangle \Rightarrow (\lambda - \bar{\mu}) \langle u, u \rangle = 0.$$

$$\lambda = \bar{\mu} \Leftarrow (\lambda - \bar{\mu}) = 0 \Leftarrow \langle u, u \rangle \neq 0 \Leftarrow u \neq 0 \text{ לכן } u \text{ ווקטור עצמי לכן } \lambda = \bar{\mu}$$

ג) (5 נק')

$$\begin{aligned} TS &= \bar{T}\bar{S} \quad (S \text{ צמוד לעצמו, } T \text{ צמוד לעצמו}) \\ &= \overline{ST} \\ &= ST \quad (ST \text{ צמוד לעצמו}). \end{aligned}$$

**(ד) (5 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:**

$$T = 2I, S = I$$

הערכים עצמיים של  $S$ :  $\lambda = 1$

הערכים עצמיים של  $T$ :  $\lambda = 2$

**(ה) (5 נק') הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:**

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, S = I$$

## שאלה 4

**(א) (6 נקודות) מכיוון ש- $A$  מטריצה ממשית ו- $\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$  ערך עצמי מרוכב, אז הצמוד  $\lambda_2 =$**

**גם ערך עצמי של  $A$ . כל הערכים עצמיים שונים לכן ל- $A$  יש ערך עצמי נוסף  $\lambda_3$ . המכפלה של כל הערכים עצמיים שווה לדטרמיננטה של  $A$ . לפיכך,**

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right) \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right) \lambda_3 = \det(A) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = 1.$$

הפתרון לזה הוא  $\lambda_3 = 1$ .

**(ב) (6 נקודות) הפולינום אופייני של  $A$  הוא**

$$p(x) = \left(x - \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)\right) \left(x - \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)\right) (x - 1) = x^3 - 1.$$

**(ג) (7 נקודות) לפי משפט קיילי-המילטון**

$$p(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad A^3 - I = 0 \quad \Rightarrow \quad A^3 = I \quad \Rightarrow \quad (A^3)^{33} = I^{33} = I \quad \Rightarrow \quad A^{100} = A^{99}A = IA = A.$$

$$\text{לכן } a = 0, b = 1, c = 0$$

**(ד) (3 נקודות) הערך מוחלט של כל ערך עצמי שווה ל-1 לכן יתכן כי  $A$  אוניטרית.**

**(ה) (3 נקודות) הערכים עצמיים של מטריצה צמודה לעצמה ממשיים. לא כל הערכים עצמיים ממשיים לכן לא יתכן כי  $A$  צמודה לעצמה.**

## שאלה 5 (25 נקודות)



**(א) (17 נק')**

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

נשים לב כי

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 4R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & -6 & -8 \\ 0 & -12 & -9 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 3R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \rightarrow 2R_4 - 3R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן הבסיס מורכב מהווקטורים  $v_1, v_2, v_3$

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1.$$

$$\|u_1\|^2 = \langle u_1, u_1 \rangle = \text{tr}(u_1^t \cdot u_1) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \text{tr}\begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix} = 30.$$

$$\langle v_2, u_1 \rangle = \text{tr}(u_1^t \cdot v_2) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{tr}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} = 10.$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{10}{30} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2.$$

$$\langle v_3, u_1 \rangle = \text{tr}(u_1^t \cdot v_3) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \text{tr}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = -2.$$

$$\langle v_3, u_2 \rangle = \text{tr}(u_2^t \cdot v_3) = \frac{1}{3} \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3} \text{tr}\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \frac{20}{3}.$$

**המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון**

$$\|u_2\|^2 = \langle u_2, u_2 \rangle = \text{tr}(u_2^t \cdot u_2) = \frac{1}{9} \text{tr} \left( \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{9} \text{tr} \begin{pmatrix} 64 & 32 \\ 32 & 32 \end{pmatrix} = \frac{96}{9} = \frac{32}{3}.$$

$$\begin{aligned} u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{30} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \frac{\left(\frac{20}{3}\right)}{\left(\frac{32}{3}\right)} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

בסיס אורתוגונלי:

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\|u_3\|^3 = \text{tr}(u_3^t u_3) = \frac{1}{100} \text{tr} \left( \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{100} \text{tr} \begin{pmatrix} 20 & -26 \\ -26 & 50 \end{pmatrix} = \frac{7}{10}.$$

בסיס אורתונורמלי:

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{u}_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2 = \sqrt{\frac{1}{96}} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{u}_3 = \frac{1}{\|u_3\|} u_3 = \sqrt{\frac{1}{70}} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**(ב) (4 נק')**

הטענה לא נכונה. הוכחה:

נניח ש-  $A = I$  ו-  $B \neq I$  דומות.

אז קיימת  $P$  הפיכה כך ש-

$$B = CAC^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$$

ז"א  $B = I$  בסתירה לכך ש-  $B \neq I$ .

**(ג) (4 נק')**

הטענה לא נכונה. הוכחה:

$D$  אוניטרית  $\Leftrightarrow D \Leftarrow$  הפיכה  $\Leftrightarrow |D| \neq 0$ .

**המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון**

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245,84 | [www.sce.ac.il](http://www.sce.ac.il) | חייג: \*מפנסנס

0 ערך עצמי של  $C \Leftrightarrow |C| = 0$ .  
נניח כי  $C$  ו- $D$  דומות.  
אז קיימת  $P$  הפיכה כך ש-

$$D = PCP^{-1} \Rightarrow |D| = |PCP^{-1}| \Rightarrow |D| = |C| = 0.$$

בסתירה לכך ש-  $D \neq 0$ .