

אלגברה לינארית 2 למדמ"ח

מועד א'

מרצים: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר .

תשפ"ה סמסטר ב'

השאלון מכיל 6 עמודים (כולל עמוד זה).

בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (3 עמודים בפורמט A4) מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- יש לרשום בראש המחברת איזה שאלות לבדוק.

שאלה 1 (25 נקודות)

(א) (16 נק')

נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ מצאו צורת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $J = P^{-1}AP$.

(ב) (3 נק')

תהי $B \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ מטריצה עבורה הפולינום האופייני הוא $p_B(x) = (x-1)^3(x-2)^3$ והפולינום המינימלי הוא $m_B(x) = (x-1)^2(x-2)$. מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של B .

(ג) (3 נק')

הוכיחו או הפריכו: קיימת מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ הרמיטית המקיימת $\text{trace}(A) = i$.

(ד) (3 נק')

הוכיחו או הפריכו: אם $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ לכסינה וכל הערכים העצמיים שלה הם 1 או -1 אז $A^2 = I$.

שאלה 2 (25 נקודות)

(א) (16 נק') נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ המוגדרת ע"י

$$T(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} A$$

לכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

האם ההעתקה ניתנת ללכסון? במידה וכן, מצאו בסיס שבו המטריצה המייצגת של ההעתקה היא מטריצה אלכסונית. במידה ולא, נמקו מדוע.

יהי V מקחב מכפלה פנימית מעל \mathbb{R} ויהיו שלושה וקטורים שונים $u_1, u_2, u_3 \in V$ בת"ל. ענו על הסעיפים ב' וג' הבאים:

(ב) (5 נק') יהי $w \neq 0 \in V$ המקיים $\langle u_k, w \rangle = 0$ לכל $k = 1, 2, 3$. הוכיחו כי הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3, w\}$ בת"ל.

(ג) (4 נק') נתון כי $\langle u_1 - u_3, u_2 \rangle = \langle u_1 + u_2, u_1 \rangle$. הוכיחו כי הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ אינה אורתוגונלית.

שאלה 3 (25 נקודות)

(א) (16 נק') הוכיחו כי המטריצה $A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ לכסינה אורתוגונלית ומצאו מטריצה אורתוגונלית P ומטריצה אלכסונית D כך ש- $P^t A P = D$. נמקו היטב את תשובתכם.

(ב) (9 נק') הוכיחו כי מטריצה $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ היא צמודה לעצמה ואוניטרית אם ורק אם B לכסינה אוניטרית ומקיימת $B^2 = I$.

שאלה 4 (25 נקודות)

(א) (7 נקודות) תהי $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ מטריצה המקיימת $A^3 = 4A$. מצאו את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של A .

(ב) (6 נקודות) תהי $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ מטריצה המקיימת $A^3 = 4A$. מצאו את כל האפשרויות עבור $|A|$.

(ג) (6 נקודות) תהי $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ מטריצה הרמיטית ונניח כי $A^k = I$ עבור $k \geq 1$ כלשהו. הוכיחו כי $A^2 = I$.

(ד) (6 נקודות) תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ סימטרית והיו $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ערכים עצמיים שונים של A וכן u_1, u_2 וקטורים עצמיים המתאימים ל- λ_1, λ_2 . הוכיחו כי u_1, u_2 אורתוגונליים.

שאלה 5 (25 נקודות) יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור במרחב וקטורי V .

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הענות הבאות:

(א) (6 נק') אם T אוניטרי אז הערך מוחלט של כל ערך עצמי של T שווה ל- 1.

(ב) (6 נק') אם T נורמלי אז T צמוד לעצמו.

(ג) (6 נק') יהי λ ערך עצמי של T , אז המרחב העצמי V_λ הוא $-T$ שמור.

(ד) (7 נק') אם T אנטי הרמיטי, אז כל ערך עצמי של T מדומה טהור.

מרחב אוקלידי: מרחב מכפלה פנימית מעל \mathbb{R} .

מרחב אוניטרי: מרחב מכפלה פנימית מעל \mathbb{C} .

הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי V מעל \mathbb{R} :
לכל $u, v, w \in V$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(1) \quad \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \text{סימטריות:}$$

$$(2) \quad \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad \text{ליניאריות:}$$

$$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

$$(3) \quad \langle u, u \rangle \geq 0. \quad \text{חיוביות:}$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי V מעל \mathbb{C} :
לכל $u, v, w \in V$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$(1) \quad \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} \quad \text{הרמיטיות:}$$

$$(2) \quad \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad \text{ליניאריות:}$$

$$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

$$(3) \quad \langle u, u \rangle \geq 0 \quad \text{חיוביות:}$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

אי-שוויון קושי שוורץ:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

אי-שוויון המשולש:

היטל אורתוגונלי של וקטור v על תת מרחב בעל בסיס אורתוגונלי u_1, \dots, u_n :

$$P_U(v) = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 + \dots + \frac{\langle v, u_n \rangle}{\|u_n\|^2} u_n.$$

תהליך גרם שמידט לבניית בסיס אורתוגונלי:

$$u_1 = v_1,$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

\vdots

$$u_n = v_n - \frac{\langle v_n, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_n, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \dots - \frac{\langle v_n, u_{n-1} \rangle}{\|u_{n-1}\|^2} u_{n-1}.$$

$\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי ו- $u \in \mathbb{F}^n$ ווקטור עצמי ($u \neq 0$) של מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ אם: $Au = \lambda u$

$\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי ו- $u \in V$ ווקטור עצמי ($u \neq 0$) של אופרטור $T : V \rightarrow V$ אם: $T(u) = \lambda u$

פולינום אופייני של מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$: $p_A(\lambda) = |\lambda I - A|$

מרחב עצמי של מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ששייך לערך עצמי λ הוא כל וקטור $u \in \mathbb{F}^n$ כאשר $u \neq 0$ כך ש: $Au = \lambda u$.

מרחב עצמי של אופרטור $T : V \rightarrow V$ ששייך לערך עצמי λ הוא כל וקטור $u \in V$ כאשר $u \neq 0$ כך ש: $T(u) = \lambda u$.

בסיס אורתונורמלי:

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל \mathbb{C} . בסיס אורתונורמלי, מסומן $\{b_1, \dots, b_n\}$, מקיים את התנאי

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

כל וקטור $u \in V$ ניתן לרשום בבסיס אורתונורמלי:

$$u = \sum_{i=1}^n \langle u, b_i \rangle b_i$$

סימון חלופי:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \langle u, b_1 \rangle \\ \langle u, b_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_i \rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_n \rangle \end{pmatrix}_B$$

יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור. המצרטצה המייצגת על פי בסיס B היא

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \langle T(b_1), b_1 \rangle & \langle T(b_2), b_1 \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_1 \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_1 \rangle \\ \langle T(b_1), b_2 \rangle & \langle T(b_2), b_2 \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_2 \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_i \rangle & \langle T(b_2), b_i \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_i \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_i \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_n \rangle & \langle T(b_2), b_n \rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_n \rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_n \rangle \end{pmatrix}.$$

כלומר האיבר ה- ij של המטריצה המייצגת של T על פי הבסיס B היא $[T]_{ij} = \langle T(b_j), b_i \rangle$.

ההגדרה של אופרטור הצמוד:

אם $T : V \rightarrow V$ אופרטור, ו- $u, w \in V$ שני וקטורים כלשהם של V , אזי האופרטור הצמוד של T מוגדר כך שמתקיים

$$\langle T(u), w \rangle = \langle u, T^*(w) \rangle. \quad (*)1$$

מההגדרה (*)1 נובע:

$$\langle T^*(u), w \rangle = \langle u, T(w) \rangle \quad (*)2$$

נוסחה ל- $T(u)$ ו- $T^*(u)$ במונחי בסיס אורתונורמלי $\{b_1, \dots, b_n\}$:

$$T(u) = \sum_{i=1}^n \langle T(u), b_i \rangle b_i \quad (*)3$$

$$T^*(u) = \sum_{i=1}^n \langle u, T(b_i) \rangle b_i \quad (*)4$$

משפט:

$$T^{**} = T \quad (*)5$$

משפט: המטריצה המייצגת של אופרטור צמוד T^* נתונה ע"י

$$[T^*] = [T]^* \quad (*)6$$

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית.

$$\begin{array}{ll} A = A^* & A \text{ הרמיטית} \\ A^* = -A & A \text{ אנטי-הרמיטית} \\ AA^* = I = A^*A & A \text{ אוניטרית} \\ AA^t = I = A^tA & A \text{ אורתוגונלית} \\ AA^* = A^*A & A \text{ נורמלית} \end{array}$$

יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור מעל מרחב וקטורי V . נסמן המטריצה המייצגת $A = [T]$.

$$\begin{array}{lll} T = T^* & \Leftrightarrow & A = A^* \quad T \text{ צמוד לעצמו} \\ T^* = -T & \Leftrightarrow & A^* = -A \quad T \text{ אנטי-הרמיטי} \\ TT^* = I_V = T^*T & \Leftrightarrow & AA^* = I = A^*A \quad T \text{ אוניטרי} \\ TT^* = T^*T & \Leftrightarrow & AA^* = A^*A \quad T \text{ נורמלי} \end{array}$$

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה Q אוניטרית ומטריצה D אלכסונית כך ש:

$$A = QDQ^* \Leftrightarrow D = Q^*AQ.$$

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ לכסינה אורתוגונלית אם קיימת מטריצה P אורתוגונלית ומטריצה D אלכסונית כך ש:

$$A = PDP^t \Leftrightarrow D = P^tAP.$$

פתרונות

שאלה 1

(א) (16 נק') הפולינום האופייני של A הוא:

$$p_A(x) =$$

(ב) (3 נק')

(ג) (3 נק') הטענה לא נכונה.

נניח בשלילה שקיימת מטריצה הרמיטית, כלומר $A = A^*$, עבורה $\text{trace}(A) = i$.
ז"א

$$\text{trace}(A^*) = \overline{\text{trace}(A)} = \bar{i} = -i. \quad (*)$$

מצד שני, מכיוון ש- $A = A^*$ אזי

$$\text{trace}(A^*) = \text{trace}(A) = i, \quad (**)$$

בסתירה לזה שמצאנו במשוואה (*). ש: $\text{trace}(A^*) = -i$.
לכן הוכחנו שלא קיימת מטריצה הרמיטית עבורה $\text{trace}(A) = i$.

(ד) (3 נק') הטענה נכונה. A לכסינה אזי קיימת P הפיכה ו- D אלכסונית:

$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow D = P^{-1}AP.$$

כל הערכים עצמיים שלה הם 1 או -1 לפיכך

$$D = \text{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_n),$$

כאשר $1 \leq i \leq n, \lambda_i = \pm 1$. לכן

$$D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I.$$

מכאן

$$A^2 = PD^2P^{-1} = PIP^{-1} = I$$

כנדרש.

שאלה 2

(א)

$$\begin{aligned}
 T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow [T(e_1)]_E &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} &\Rightarrow [T(e_2)]_E &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow [T(e_3)]_E &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} &\Rightarrow [T(e_4)]_E &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

לכן המטריצה המייצגת הסנדרטית היא

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

הפולינום האופייני של T הוא:

$$\begin{aligned}
 p_T(x) &= \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & x+2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & x+2 \end{vmatrix} \\
 &= (x-1)^2(x+2)^2 + 2(x-1)(x+2) + 2((x-1)(x+2) + 2) \\
 &= (x-1)(x+2)[(x-1)(x+2) + 2] + 2[(x-1)(x+2) + 2] \\
 &= [(x-1)(x+2) + 2]^2 \\
 &= [x^2 + x]^2 \\
 &= [x(x+1)]^2 \\
 &= x^2(x+1)^2.
 \end{aligned}$$

מרחב עצמי של $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} \text{Nul}(A - 0 \cdot I) &= \text{Nul} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ V_0 &= \text{span} \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

מרחב עצמי של $\lambda = -1$

$$\begin{aligned} \text{Nul}(A + I) &= \text{Nul} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - R_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ V_{-1} &= \text{span} \left\{ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

לכן בסיס שבו במטריצה המייצגת של ההעתקה היא אלכסונית הוא:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ב) נוכיח כי

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 w = 0 \quad (\#)$$

מתקיים אם ורק אם $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. ראשית נקח את המכפלה פנימית עם w ונקבל

$$\langle w, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 w \rangle = \langle w, 0 \rangle = 0.$$

נשתמש בתכונת ליניאריות של המכפלה פנימית כדי להרחיב את האגף השמאול באפן הבא:

$$\langle w, \alpha_1 u_1 \rangle + \langle w, \alpha_2 u_2 \rangle + \langle w, \alpha_3 u_3 \rangle + \langle w, \alpha_4 w \rangle = 0 \quad (*1)$$

כעת נוציא את הסקלר החוץ בכל מכפלה פנימית, בהתאם עם התכונת ליניאריות ונקבל ש:

$$\alpha_1 \langle w, u_1 \rangle + \alpha_2 \langle w, u_2 \rangle + \alpha_3 \langle w, u_3 \rangle + \alpha_4 \langle w, w \rangle = 0 \quad (*2)$$

$\langle u_k, w \rangle = 0$ לכל $k = 1, 2, 3$ לכן השלוש איברים הראשונים בצד שמאל של (*2) שווים ל-0 ולכן

$$\alpha_4 \langle w, w \rangle = 0 \quad (*)3$$

נתון בשאלה כי $w \neq 0 \Leftrightarrow \langle w, w \rangle \neq 0 \Leftrightarrow$ נובע ממשוואה (*3) ש- $\alpha_4 = 0$. נציב $\alpha_4 = 0$ במשוואה (#) ונקבל ש-

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0 \quad (*)4$$

אבל נתון בשאלה כי השלושה וקטורים u_1, u_2, u_3 הם בלתי תלויים ליניארית לכן (*4) מתקיים אם ורק אם $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

הוכחנו כי (#) מתקיים אם ורק אם $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ ולכן הווקטורים u_1, u_2, u_3, w הם בלתי תלויים ליניארית.

ג) נתון ש-

$$\langle u_1 - u_3, u_2 \rangle = \langle u_1 + u_2, u_1 \rangle .$$

לפי התכונת הליניאריות של המכפלה פנימית, אפשר להרחיב את המכפלות הפנימיות בשני האגפים ונקבל ש:

$$\langle u_1, u_2 \rangle - \langle u_3, u_2 \rangle = \langle u_1, u_1 \rangle + \langle u_2, u_1 \rangle .$$

נעביר את $\langle u_2, u_1 \rangle$ מהאגף הימין לאגף השמאל:

$$\langle u_1, u_2 \rangle - \langle u_3, u_2 \rangle - \langle u_2, u_1 \rangle = \langle u_1, u_1 \rangle .$$

מכיוון שהמכפלה פנימית היא מוגדרת במרחב וקטורי מעל השדה \mathbb{R} , אזי התכונת סימטריות תוקפת: $\langle u_2, u_1 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$. לכן שתי מכפלות פנימיות באגף השמאל מתבטלות ונקבל ש:

$$-\langle u_3, u_2 \rangle = \langle u_1, u_1 \rangle .$$

עכשיו נוכיח בשלילה שהקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ אינה אורתוגונלית.

נניח בשלילה כי הקבוצה כן אורתוגונלית. אזי $\langle u_3, u_2 \rangle = 0$. ז"א

$$\langle u_3, u_2 \rangle = \langle u_1, u_1 \rangle = 0 .$$

נתון בשאלה כי הקבוצת וקטורים $\{u_1, u_2, u_3\}$ היא בלתי תלויה ליניארית ולכן אף וקטור בקבוצה הזו לא שווה לווקטור האפס (כי קבוצת וקטורים המכילה וקטור האפס היא תלויה ליניארית, בסתירה לכך כי הקבוצה בת"ל).

לפיכך קיבלנו ש- $\langle u_1, u_1 \rangle = 0$ ו- $u_1 \neq 0$, וזאת סותרת את התכונת חיוביות של מכפלה פנימית.

בגלל שהגענו לסתירה אזי הקבוצת וקטורים $\{u_1, u_2, u_3\}$ אינה אורתוגונלית.

שאלה 3

(א) (16 נק')

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} = A$$

ז"א $A = A^t = A$ סימטרית $A \Leftarrow A$ לכסינה אורתוגונלית.

$$\begin{aligned} p_A(x) &= |xI - A| \\ &= \begin{vmatrix} x-11 & 8 & -4 \\ 8 & x+1 & 2 \\ -4 & 2 & x+4 \end{vmatrix} \\ &= (x-11) \begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ 2 & x+4 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -4 & x+4 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 8 & x+1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (x-11)(x^2+5x) - 8(8x+40) - 4(4x+20) \\ &= x(x-11)(x+5) - 64(x+5) - 16(x+5) \\ &= x(x-11)(x+5) - 80(x+5) \\ &= (x^2-11x-80)(x+5) \\ &= (x-16)(x+5)(x+5) \\ &= (x-16)(x+5)^2 \end{aligned}$$

מרחב עצמי של $\lambda = 16$

$$\begin{aligned} \text{Nul}(A - 16I) &= \begin{pmatrix} -5 & -8 & 4 \\ -8 & -17 & -2 \\ 4 & -2 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow 5R_2 - 8R_1 \\ R_3 \rightarrow 5R_3 + 4R_1}} \begin{pmatrix} -5 & -8 & 4 \\ 0 & -21 & -42 \\ 0 & -42 & -84 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} -5 & -8 & 4 \\ 0 & -21 & -42 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{-1}{21}R_2} \begin{pmatrix} -5 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 8R_2} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{-1}{5}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$V_{16} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \setminus \{0\}$$

מרחב עצמי של $\lambda = -5$

$$\text{Nul}(A + 5I) = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ -8 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow 4R_3 - R_1]{R_2 \rightarrow 2R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{4}R_1} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{-5} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \setminus \{0\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \setminus \{0\}$$

נסמן

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

נפעיל האלגוריתם של גרם שמידט כדי למצוא בסיס אורתוגונלי:

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{0}{21} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0}{21} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{17} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ 4 \end{pmatrix}$$

לכן מצאנו בסיס אורתוגונלי:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

בסיס אורתונורמלי:

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{357}} \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ב) כיוון \Leftarrow

נניח כי B צמודה לעצמה וגם B אוניטרית.

$$(1) \quad B = B^* \Leftarrow BB^* = I$$

(2) מכיוון ש- B צמודה לעצמה $B \Leftarrow B$ נורמלית \Leftarrow ממשפט הלכסון אוניטרית $B \Leftarrow$ לכסינה אוניטרית.

(3)

$$BB \stackrel{(1)}{=} B \stackrel{(1)}{=} BB^* \stackrel{(1)}{=} I$$

לכן $B^2 = I$, כנדרש.

כנדרש.

כיוון \Rightarrow

נניח כי $B^2 = I$ וגם B לכסינה אוניטרית.

$$(1) \quad B^2 = I \Leftarrow B \text{ וגם קיימת } Q \text{ אוניטרית ו- } D \text{ אלכסונית כך ש- } B = QDQ^*.$$

(2)

$$I = B^2 = QDQ^*QDQ^* = QD^2Q^* \Rightarrow D^2 = Q^*IQ = Q^*Q = I.$$

לכן $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ כאשר $\lambda_i = \pm 1$

$$(3) \quad D = D^* \Leftarrow D \text{ ממשית ואלכסונית}$$

(4) לכן

$$B^* \stackrel{(1)}{=} (QDQ^*)^* = QD^*Q^* \stackrel{(3)}{=} QDQ^* = B$$

לכן $B = B^*$ ולכן B לעצמה, כנדרש.

(5)

$$BB^* \stackrel{(1)}{=} QDQ^*(QDQ^*)^* = QDQ^*QD^*Q = QDD^*Q \stackrel{(3)}{=} QD^2Q^* \stackrel{(2)}{=} QQ^* = I$$

לכן B אוניטרית, כנדרש.

שאלה 4**א) (7 נקודות)**

$$A^3 = 4A \Leftarrow A^3 - 4A = 0 \Leftarrow A(A^2 - 4I) = 0 \Leftarrow A(A + 2I)(A - 2I) = 0$$

מכאן האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של A הן:

- x •
- $x - 2$ •
- $x + 2$ •
- $(x + 2)(x - 2)$ •
- $x(x + 2)$ •
- $x(x - 2)$ •
- $x(x + 2)(x - 2)$ •

(ב) (6 נקודות)

(ג) (6 נקודות) יש 3 מקרים: $k = 1, k = 2, k > 2$.

אם $k = 1$ אזי $A^k = I \Leftarrow A = I$.

אם $k = 2$ אזי $A^2 = I$. כנדרש.

נניח שקיים $k > 2$ עבורו $A^k = I$.
נתון ש- A הרמיטית

$\Leftarrow A$ לכסינה אוניטרית וכל ערך עצמי שלה ממשי

\Leftarrow קיימת Q אוניטרית ו- D אדכסונית כך ש- $A = QDQ^{-1}$ ו- $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ממשית.

\Leftarrow

$$A^k = QD^kQ^{-1} \Rightarrow D^k = QA^kQ^{-1} = QIQ^{-1} = I$$

$$D^k = I \text{ אזי}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftarrow \text{כאשר } \lambda_i = \pm 1$$

$$A^2 = QD^2Q^{-1} = QIQ^{-1} = I \Leftarrow$$

כנדרש.

(ד) (6 נקודות) תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ סימטרית ויהיו $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ערכים עצמיים שונים של A וכן u_1, u_2 וקטורים עצמיים המתאימים ל- λ_1, λ_2 .

$$\begin{aligned} \langle Au_1, u_2 \rangle &= \langle \lambda_1 u_1, u_2 \rangle \\ &= \lambda_1 \langle u_1, u_2 \rangle. \end{aligned} \quad (\#1)$$

מצד שני:

$$\begin{aligned}
\langle Au_1, u_2 \rangle &= \langle u_1, A^* u_2 \rangle \\
&= \langle u_1, A^t u_2 \rangle \\
&= \langle u_1, Au_2 \rangle \\
&= \langle u_1, \lambda_2 u_2 \rangle \\
&= \overline{\lambda_2} \langle u_1, u_2 \rangle \\
&= \lambda_2 \langle u_1, u_2 \rangle .
\end{aligned}
\tag{#2}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda_1 \langle u_1, u_2 \rangle = \lambda_2 \langle u_1, u_2 \rangle \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \langle u_1, u_2 \rangle = 0 .$$

נתון לנו בשאלה כי הערכים עצמיים שונים, ז"א: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0 \Leftrightarrow \langle u_1, u_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow u_1, u_2 \perp$ אורתוגונליים.

שאלה 5

(א) נניח ש- $T : V \rightarrow V$ אופרטור אוניטרי, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v . ז"א $T(v) = \lambda v$.

$$\begin{aligned}
\langle T(v), T(v) \rangle &= \langle \lambda v, \lambda v \rangle \quad (v \text{ וקטור עצמי של } T) \\
&= \lambda \langle v, \lambda v \rangle \quad (\text{לינאריות של מכפלה פנימית}) \\
&= \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle \quad (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית})
\end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned}
\langle T(v), T(v) \rangle &= \langle v, T^* T(v) \rangle \quad (\text{הגדרה של אופרטור הצמוד}) \\
&= \langle v, I(v) \rangle \quad (T \text{ אוניטרי}) \\
&= \langle v, v \rangle
\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\begin{aligned}
\lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle &= \langle v, v \rangle \Rightarrow (\lambda \cdot \bar{\lambda} - 1) \langle v, v \rangle = 0 . \\
|\lambda|^2 \langle v, v \rangle &= \langle v, v \rangle \Leftrightarrow \lambda \bar{\lambda} = 1 \Leftrightarrow (\lambda \cdot \bar{\lambda} - 1) = 0 \Leftrightarrow \langle v, v \rangle \neq 0 \Leftrightarrow v \neq 0 \Leftrightarrow v \text{ וקטור עצמי}
\end{aligned}$$

(ב) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:
האופרטור $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדר:

$$T(u) = Au, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לכל $u \in \mathbb{R}^2$.

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [T]^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T][T]^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [T]^*[T]$$

לכן T נורמלי אבל $[T]^* \neq [T]$ לכן T לא צמוד לעצמו.

(ג) (6 נק') אם λ ערך עצמי של T אזי לכל וקטור עצמי $u \in V_\lambda$ מתקיים

$$T(u) = \lambda u \in \text{span}\{u\} \subseteq V_\lambda$$

לכן לכל $u \in V_\lambda$ מתקיים $T(u) \in V_\lambda$.

(ד) (7 נק')

נניח ש- $T : V \rightarrow V$ אופרטור צמוד לעצמו, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v . ז"א $T(v) = \lambda v$ אז

$$\begin{aligned} \langle T(v), v \rangle &= \langle \lambda v, v \rangle && (v \text{ וקטור עצמי של } T) \\ &= \lambda \langle v, v \rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית}) \end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned} \langle T(v), v \rangle &= \langle v, T^*(v) \rangle && (\text{הגדרה של אופרטור הצמוד}) \\ &= \langle v, -T(v) \rangle && (T \text{ אנטי-הרמיטי}) \\ &= -\langle v, T(v) \rangle \\ &= -\langle v, \lambda v \rangle && (v \text{ וקטור עצמי של } T) \\ &= -\bar{\lambda} \langle v, v \rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית}) \end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda \langle v, v \rangle = -\bar{\lambda} \langle v, v \rangle \Rightarrow (\lambda + \bar{\lambda}) \langle v, v \rangle = 0.$$

$$\lambda = -\bar{\lambda} \Leftrightarrow (\lambda + \bar{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \langle v, v \rangle \neq 0 \Leftrightarrow v \neq 0 \Leftrightarrow v \text{ וקטור עצמי}$$