המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

מחלקה למדעי המחשב

19 – 09 – 23
9 : 00 – 12 : 00

אלגברה ליניארית 1 למדעי המחשב

מועד ג'

מרצים: ד"ר שי סרוסי

תשפ"ג סמסטר א'

השאלון מכיל 11 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.
- יש לציין את השאלות שעניתם עליהן בתחילת המחברת.

==

שאלה 1

א) (12 נק')
נתונה המערכת משוואות הבאה:

$$\begin{aligned} x+2y+(k-1)z &= 1 \\ 2x+y+(2k-6)z &= -k \\ kx+2ky+2z &= -1 \end{aligned}$$

מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין פתרון, יש פתרון יחיד, ויש אינסוף פתרונות. במקרה של אינסוף פתרונות רשמו את הפתרון הכללי.

ב) (13 נק')
א) (4 נק') נניח כי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית שמקיימת את המשוואה $A^2+2A+I=0$. הוכיחו כי A הפיכה.
ב) (4 נק') נניח ש- $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ מטריצה שמקיימת $A^3+A=0$. הוכיחו כי A לא הפיכה.
ג) (5 נק') נניח כי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ו- $u \in \mathbb{R}^n$ ווקטור שמקיים את המשוואה ההומוגנית $A\cdot u=\bar{0}$. הוכיחו שאם $u \neq \bar{0}$ אז $|A|=0$.

שאלה 2

א) (10 נק') במרחב ווקטורי $\mathbb{R}^{2\times 2}$ נתונים הווקטורים

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix},\quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}3&4\\1&1\end{pmatrix},\quad \mathrm{v}_4=\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix},\quad \mathrm{v}_5=\begin{pmatrix}2&2\\3&0\end{pmatrix},\quad \mathrm{v}_6=\begin{pmatrix}3&-2\\5&1\end{pmatrix}.$$

ב) נגדיר $U=\mathrm{span}\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3\}$, $W=\mathrm{span}\{\mathrm{v}_4,\mathrm{v}_5,\mathrm{v}_6\}$.
א) (5 נק') מצאו בסיס ומימד של U ו- W.
ב) (5 נק') מצאו בסיס ומימד של $U\cap W$.

ג) (15 נק') תהיינה $X\subseteq Y$ קבוצות של ווקטורים במרחב ווקטורי V מממד n. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות:
א) (5 נק') אם X בלתי תלויה לינארית אז Y בלתי תלויה לינארית.
ב) (5 נק') אם Y בלתי תלויה לינארית אז X בלתי תלויה לינארית.
ג) (5 נק') אם מספר הווקטורים ב- X קטן מ- n אז X בלתי תלויה לינארית.

שאלה 3

א) (15 נק') נתונה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ שמוגדרת ע"י

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=\begin{pmatrix}a+2b+3c & 2a+4b+5c\\ 3a+6b+9c & 4a+8b+12c\end{pmatrix}.$$

א) (3 נק') מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.
ב) (3 נק') מצאו את המימד והבסיס של $\mathrm{Im}T$.
ג) (3 נק') מצאו את המימד והבסיס של $\mathrm{Ker}T$.
ד) (6 נק') נתון הבסיס

$$B = \left\{1, 1+x, 1+x^2\right\}$$

של $\mathbb{R}_2[x]$ והבסיס

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

של $\mathbb{R}^{2\times 2}$. מצאו את המטריצה המייצגת $[T]_C^B$ לפי בסיס B ובסיס C.

ב) (10 נק') הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות:
א) (5 נק') נתונה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. אם $m>n$ אז $\mathrm{Ker}(T)=\{\bar{0}\}$.
ב) (5 נק') נתונה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. אם $m<n$ אז $\mathrm{Ker}(T)\neq\{\bar{0}\}$.

שאלה 4

א) (13 נק') נתונה שלושה וקטורים בלתי תלויים לינארית $\{u_1,u_2,u_3\}\in\mathbb{R}^{2\times 3}$. יהיו

$$w_1 = u_1+3u_2+u_3\ , \quad w_2 = 2u_1+4u_2\ , \quad w_3 = -u_1+u_2+(k^2+2)u_3\ .$$

לאילו ערכי k הווקטורים w_1,w_2,w_3 תלויים לינארית. עבור הערכים האלה מצאו צירוף לינארי לא טריוויאלי השווה לווקטור האפס.

ב) (12 נק')
א) (6 נק')
יהיו $U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\middle| a,b,c\in\mathbb{F}\right\}$ תת-מרחב של $\mathbb{F}^{2\times 2}$ של כל המטריצות הסימטריות מסדר 2×2,
ו- $W=\left\{\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{F}\right\}$ תת-מרחב של $\mathbb{F}^{2\times 2}$ של כל המטריצות האנטי-סימטריות מסדר 2×2. הוכיחו כי

$$U\oplus W = \mathbb{F}^{2\times 2}\ .$$

ב) (6 נק') הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:
יהיו U,W תתי מרחבים של מרחב ווקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$, אז $U\cup W$ תת מרחב של V.

שאלה 5

א) (15 נק') נתונה מטריצה

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & k & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

לכל ערך של הפרמטר k מצאו

א) (6 נק') המימד והבסיס של $\text{col}(A)$.

ב) (9 נק') המימד והבסיס של $\text{Nul}(A)$.

ב) (10 נק') הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות:
תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה לינארית ותהי $\{u_1,\dots,u_k\}$ קבוצה בלתי תלויה לינארית של ווקטורים ב-$\mathbb{R}^n$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

א) (5 נק') אם T על אז $\{T(u_1),\dots,T(u_k)\}$ בת"ל.

ב) (5 נק') אם T חד חד ערכית אז $\{T(u_1),\dots,T(u_k)\}$ בת"ל.

פתרונות

שאלה 1

א)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k-1 & 1 \\ 2 & 1 & 2k-6 & -k \\ k & 2k & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-kR_1]{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k-1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -k-2 \\ 0 & 0 & -k^2+k+2 & -k-1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k-1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -(k+2) \\ 0 & 0 & -(k-2)(k+1) & -(k+1) \end{array}\right)$$

אם $k=-1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to 3R_1+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -8 & 5 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יהיו אינסוף פתרונות:

שאלה 2

שאלה 3

שאלה 4

שאלה 5