

אלגברה לינארית סמסטר סתו 2022-23
עבודה עצמית 2

שאלה 1 פתרו

(א)

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & -3 & -10 & 8 \\ 9 & -3 & 7 & 7 \\ 5 & -10 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

(ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -14 & 0 & 5 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(ג)

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(ד)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(ה)

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & -5 \\ 4 & 1 & -7 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

שאלה 2

נסמן $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$. מצאו את $A^2 - 5A + 2I$.

שאלה 3

נתונות המטריצות A, B . חשב את המטריצה AB ו- BA אם הן קיימות

(א)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(ב)

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

שאלה 4 מטריצות A ו- B נקראות מתחלפות אם $AB = BA$. מצאו את כל המצטריות $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ המתחלפות

עם המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

שאלה 5 נתונות $A = \begin{pmatrix} 3 & -k \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & k \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. מצאו את כל ערכי של הפרמטר k כך ש- $AB = BA$.

שאלה 6 תהינה $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$. הוכח או הפרד:

(א) אם $AB = AC$ אז $B = C$.

(ב) אם $AB = 0$ אז $A = 0$ או $B = 0$.

(ג) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

(ד) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

(ה) $(AB)^t = A^t B^t$.

(ו) $(A + B)^t = A^t + B^t$.

שאלה 7 לכל $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ נגדיר $E_{ij} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ המטריצה אשר כולה אפסים מלבד הרכיב

בשורה ה- i והעמודה ה- j שערכו 1. למשל $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} \in M_{3 \times 2}$. נסמן $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$

ויהיו $E_{43}, E_{23} \in M_{5 \times 5}$. מצאו את $B = E_{43} A E_{23}$.

פתרונות

שאלה 1

(א)

$$\begin{aligned} & 3 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & -3 & -10 & 8 \\ 9 & -3 & 7 & 7 \\ 5 & -10 & -12 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -12 & 0 & 3 & -6 \\ 15 & -9 & -3 & 6 \\ -3 & 0 & -9 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -4 & -20 & 12 \\ 0 & 8 & 16 & 4 \\ 12 & -4 & -8 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 & -8 \\ -9 & 3 & -7 & -7 \\ -5 & 10 & 12 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 & -2 \\ 6 & 2 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & -5 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

(ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -14 & 0 & 5 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 16 & 9 \end{pmatrix}$$

■

(ג)

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

■

(ד)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

■

(ה)

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & -5 \\ 4 & 1 & -7 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -1 & 2 \\ 9 & -10 \end{pmatrix}$$

■

שאלה 2

$$\begin{aligned} A^2 - 5A + 2I &= \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 20 & 5 & -35 \\ 0 & -5 & 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 32 & 8 & -49 \\ -4 & -7 & 43 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 20 & 5 & -35 \\ 0 & -5 & 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 12 & 5 & -14 \\ -4 & -2 & 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

שאלה 3

(א)

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -8 & -8 \\ 20 & 8 \end{pmatrix}.$$

■

(ב) AB לא קיים.

$$BA = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 6 \\ 12 & 18 & 6 \end{pmatrix}.$$

■

שאלה 4

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}. \\ A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ x+z & w+y \end{pmatrix}, \\ B \cdot A &= \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & y \\ w+z & w \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} A \cdot B = B \cdot A &\Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ x+z & w+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & y \\ w+z & w \end{pmatrix} \\ \begin{cases} x &= x+y \\ x+z &= z+w \\ y+w &= w \end{cases} &\Rightarrow y=0, x=w. \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} w & 0 \\ z & w \end{pmatrix}, z, w \in \mathbb{R}.$$

■

שאלה 5

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 21 - 5k & -6k \\ -30 & 9 - 5k \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 21 - 5k & -6k \\ -30 & 9 - 5k \end{pmatrix}.$$

לכן $AB = BA$ לכל $k \in \mathbb{R}$.

■

שאלה 6

תהייה $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$. הוכח או הפרך:

(א) אם $AB = AC$ אז $B = C$

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = A \cdot C = 0, \quad B \neq C.$$

■

(ב) אם $AB = 0$ אז $A = 0$ או $B = 0$

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = 0, \quad A \neq 0, B \neq 0.$$

■

(ג) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

טענה לא נכונה. הסבר:

$$(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

עבור מטריצות A, B לא מתחלפות.

דוגמה נגדית:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2 \text{ לכן } AB \neq BA$$

■

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \quad (\text{ד})$$

טענה לא נכונה. הסבר:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$$

רק עבור מטריצות מתחלפות, ז"א $AB = BA$.

דוגמה נגדית:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2 \text{ לכן } AB \neq BA$$

■

$$(AB)^t = A^t B^t \quad (\text{ה})$$

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}, \quad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}.$$

$$B^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 18 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$(AB)^t \neq A^t B^t \text{ ז"א}$$

■

$$\underline{:(A + B)^t = A^t + B^t} \quad \text{ו}$$

טענה נכונה. הוכחה:

נוכיח את הטענה לכל איבר A_{ij} של A וכל איבר B_{ij} של B $(i, j = 1, \dots, n)$.

$$((A + B)^t)_{ij} = A_{ji} + B_{ji} = (A^t)_{ij} + (B^t)_{ij} = (A^t + B^t)_{ij}$$

לכל $i, j = 1, \dots, n$

■

שאלה 7

$$A \cdot E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 22 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{43} \cdot A \cdot E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■