

עבודה עצמית 10

שאלה 1 לכל אחת מהפונקציות הבאות $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow V$ קבעו אם היא העתקה ליניארית:

(א) $T, V = \mathbb{R}^4$ מוגדרת ע"י $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \\ 0 \\ 2x+z \end{pmatrix}$

(ב) $T, V = \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x - y - z$

(ג) $T, V = \mathbb{R}^2$ מוגדרת ע"י $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ z+1 \end{pmatrix}$

(ד) $T, V = \mathbb{R}^2$ מוגדרת ע"י $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ xz \end{pmatrix}$

(ה) $T, V = \mathbb{R}^3$ מוגדרת ע"י $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y \\ z \end{pmatrix}$

(ו) $T, V = \mathbb{R}^2$ מוגדרת ע"י $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$

(ז) $T, V = \mathbb{R}^3$ מוגדרת ע"י $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ |x| \\ x+y \end{pmatrix}$

שאלה 2 לכל אחת מההעתקות הליניאריות שמצאתם בשאלה 1,

(א) מצאו מטריצה מייצגת סטנדרטית.

(ב) האם ההעתקה חח"ע?

(ג) האם ההעתקה על?

(ד) מצאו את הגרעין של ההעתקה.

(ה) מצאו את התמונה של ההעתקה.

(ו) מצאו את $W = \{x \in \mathbb{R}^3 | T(x) = T(e_1)\}$ כאשר $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

שאלה 3 נתונה פונקציה $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ 4x + 3y - 2z \\ kx + 3y + (k-3)z \end{pmatrix}$$

(א) הוכיחו כי T העתקה ליניארית.

(ב) מצאו את ערכי k עבורם T חח"ע.

(ג) מצאו את ערכי k עבורם T על.

(ד) עבור ערכי k שמצאתם בסעיף ב', מצאו את $T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

שאלה 4 נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י:

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad T(e_3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

כאשר e_1, e_2, e_3 הינם וקטורי היחידה ב- \mathbb{R}^3 .

(א) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T .

(ב) האם T חח"ע?

(ג) האם T על?

שאלה 5 נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ המקיימת:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T .

שאלה 6 תהי $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית ותהי $\{v_1, v_2, v_3\}$ קבוצה ת"ל ב- \mathbb{R}^n . נסמן

$S = \{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$. הוכיחו או הפריכו: אם ב- S יש 3 וקטורים אז S ת"ל.

שאלה 7 נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ המקיימת:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T ואת הנוסחא של T .

שאלה 8 תהי $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ טרנספורמציה ליניארית ותהי $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ קבוצה בלתי תלויה ליניארית של וקטורים ב- \mathbb{R}^n . הוכיחו או הפריכו:

(א) אם T על אז $\{T(v_1), \dots, T(v_k)\}$ בת"ל.

(ב) אם T חח"ע אז $\{T(v_1), \dots, T(v_k)\}$ בת"ל.

שאלה 9 נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ המוגדרת ע"י:

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 6x_3 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(א) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T .

(ב) האם T היא על \mathbb{R}^5 ? האם T חח"ע?

(ג) האם קיים $x \in \mathbb{R}^3$ כך ש- $T(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ רמז: ניתן לענות על שאלה זו מבלי לבצע חישובים. האם קיים

יותר ממקור אחד לוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

(ד) האם קיים $x \in \mathbb{R}^3$ כך ש- $T(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

שאלה 10 נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ המקיימת:

$$T(e_1) + T(e_3) = T(e_2), \quad T(e_1) + T(e_2) + T(e_3) = 0.$$

הוכיחו ש- $e_1 \in \text{Ker}(T)$.

שאלה 11 נתונה טרנספורמציה ליניארית $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b + 3c \\ 2b + 3c + 4d \\ 5a + 3c + 4d \end{pmatrix}.$$

(א) מצאו את המטריצה הסטנדרטית של A של הטרנספורמציה.

(ב) מצאו בסיס ואת המימד של $\text{Im}(T)$ ו $\text{Ker}(T)$.

(ג) מצאו בסיס ואת המימד של $\text{Row}(A)$.

(ד) האם T חד-חד ערכית? האם T על?

(ה) האם

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \in \text{Im}(T) ?$$

שאלה 12

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות הוכיחו שהיא טרנספורמציה ליניארית ובדקו האם הטרנספורמציה היא חד-חד ערכית? האם היא טרנספורמציה "על"?

(א) $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ המוגדרת ע"י $T(M) = A \cdot M$, כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(ב) $T : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ המוגדרת ע"י

$$T(p) = p'$$

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[x]$$

שאלה 13 נתונה טרנספורמציה ליניארית $T : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ המוגדרת באמצעות המטריצה הסטנדרטית

:A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(א) מצאו את $T(p(t))$ כאשר

$$p(t) = 3p_1(t) - p_2(t), \quad p_1(t) = t - 2t^3, \quad p_2(t) = 1 - t^2,$$

(ב) מצאו בסיס ואת הממד של $\text{Ker}(T)$.

(ג) האם T היא טרנספורמציה חד-חד ערכית? האם T היא טרנספורמציה על?

שאלה 14 נגדיר $V = \text{sp}\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$ ופונקציה $D : V \rightarrow V$ ע"י $D(f) = f'$.

(א) בדקו אם D טרנספורמציה ליניארית.

(ב) רשמו את המטריצה סטנדרטית של A של הטרנספורמציה ביחס לבסיס $B = \{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$.

(ג) חשבו $D(3e^x - 5e^{2x} + e^{3x})$.

(ד) האם D היא טרנספורמציה חד-חד-ערכית? האם D היא טרנספורמציה על?

(ה) מצאו בסיס ואת הממד של $\text{Ker}(D)$ ו $\text{Im}(D)$.

שאלה 15 נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ המקיימת:

$$T(e_1) + T(e_3) = T(e_2), \quad T(e_1) + T(e_2) + T(e_3) = 0.$$

(א) הוכיחו ש- $e_1 \in \text{Ker}(T)$.

(ב) $\dim(\text{Ker}(T))$.

שאלה 16 נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ המקיימת:

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + 3x^2, T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 + x + 7x^2, T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 4 + 3x + 6x^2, T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -3 - 2x - 5x^2.$$

(א) רשמו את הנוסחא ל T . כלומר $T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \dots$

(ב) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T .

(ג) מצאו את כל המטריצות $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ כך ש- $T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 + 2x - x^2$.

(ד) מצאו את המימד ובסיס של $\text{Im}(T)$.

(ה) מצאו את המימד ובסיס של $\text{Ker}(T)$.

(ו) האם T חד-חד-ערכית? האם T על?

(ז) מצאו את המטריצה המייצגת של ההעתקה ביחס לבסיסים הסדורים

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ו-

$$E = \{1, x, x^2\}$$

של $\mathbb{R}_2[x]$ בהתאמה.

שאלה 17

(א) נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a + 3b + 4c \\ 2a + 5b + c \\ ka - 2b + 3c \end{pmatrix}$$

- (1) רשמו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T .
- (2) עבור אילו ערכי הפרמטר k ההעתקה T היא איזומורפיזם?
- (3) לכל ערך של הפרמטר k מצאו את המימד ובסיס של הגרעין.
- (4) עבור כל ערך של k קבעו את המספר המקסימלי של וקטורים בלתי תלויים לינארית השייכים לגרעין. נמקו את תשובתכם.
- (5) לכל ערך של הפרמטר k מצאו ואת המימד ובסיס של $\text{Im}(T)$.
- (6) עבור אילו ערכי k כל שלושה וקטורים של התמונה הם תלויים לינארית? נמקו את תשובתכם.

שאלה 18

נתונה העתקה לינארית $T : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 3}$ המוגדרת ע"י:

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} a + b + 2c + d & a + 2b + 3c + d & 2a + 4b \\ b + c & -a + 3c - d & 5c + 4d \end{pmatrix}$$

לכל $a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x]$

(א) מצאו את המטריצה הייצגת הסטנדרטית של T .

(ב) מצאו בסיס ומימד של $\text{Im}(T)$.

(ג) מצאו בסיס ומימד של $\text{Ker}(T)$.

(ד) מצאו את המטריצה המייצגת של ההעתקה ביחס לבסיס

$$B = \{b_1 = x, b_2 = 1 - x, b_3 = x + x^2, b_4 = x - x^2 + x^3\}$$

של $\mathbb{R}_3[x]$ וביחס לבסיס

$$C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, c_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, c_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

של $\mathbb{R}^{3 \times 2}$.

שאלה 19

הוכיחו את הטענות הבאות או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

(א) נתונה העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ אם $m > n$ אז $\text{Ker}(T) = \{\bar{0}\}$.

(ב) נתונה העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ אם $m < n$ אז $\text{Ker}(T) \neq \{\bar{0}\}$.

(ג) נתונה העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. יהי B בסיס של \mathbb{R}^n , ויהי C בסיס של \mathbb{R}^m . אזי T חח"ע אם ורק אם המרחב האפס של $[T]_C^B$ הוא $\{\bar{0}\}$, כאשר $[T]_C^B$ המטריצה המייצגת ביחס לבסיסים C ו B .

פתרונות

שאלה 1

$$: T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \\ 0 \\ 2x+z \end{pmatrix} \quad \text{א)}$$

T העתקה לינארית.

$$: T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x - y - z \quad \text{ב)}$$

T העתקה לינארית.

$$: T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ z+1 \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ג)}$$

דוגמה נגדית:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T(2u) \neq 2 \cdot T(u).$$

$$: T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ xz \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ד)}$$

דוגמה נגדית:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T(u) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T(2u) \neq 2 \cdot T(u).$$

$$: T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ה)}$$

T העתקה לינארית.

$$: T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ו)}$$

דוגמה נגדית:

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad T(3u) \neq 3 \cdot T(u).$$

$$: T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ |x| \\ x+y \end{pmatrix} \quad (ז)$$

דוגמה נגדית:

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(-2 \cdot u) \neq -2 \cdot T(u).$$

שאלה 2 הטרנספורמציות הלינאריות הן (1), (2) ו (5).

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \\ 0 \\ 2x+z \end{pmatrix} \quad (1)$$

(א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ב) נמצאו את המדורגת של המטריצה המייצגת הסטנדרטית A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

T לא חח"ע כי לא כל העמודות מובילות.

(ג) T לא על כי יש שורות אפסים.

(ד)

$$x = -\frac{1}{2}z, \quad y = \frac{1}{2}z, \quad z \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\dim(\text{Ker}(T)) = 1$$

בסיס של $\text{Ker}(T)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(ה)

$$\text{Im}(T) = \text{sp} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(\text{Im}(T)) = 2$ בסיס של $\text{Im}(T)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(ו)

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$W = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \mid T(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$x = 1 - \frac{1}{2}z, \quad y = \frac{1}{2}z, \quad z \in \mathbb{R}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x - y - z \quad \mathbf{(2)}$$

(א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(ב) T לא חח"ע כי לא כל העמודות מובילות.

(ג) T על \mathbb{R} כי אין שורות אפסים.

(ד)

$$x = y + z, \quad y, z \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker}(T) = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\dim(\text{Ker}(T)) = 2. \text{ בסיס של } \text{Ker}(T):$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(ה)

$$\text{Im}(T) = \text{sp}(1).$$

$$\dim(\text{Im}(T)) = 1$$

בסיס של $\text{Im}(T)$ הוא 1

(ו)

$$T(e_1) = 1 \quad \Rightarrow \quad W = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid T(u) = 1\} = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot u = 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - y - z = 1 \right\}$$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y \\ z \end{pmatrix} \quad (5)$$

(א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ב) נמצאו את המדורגת של המטריצה המייצגת הסטנדרטית A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

T לא חח"ע כי לא כל העמודות מובילות.

ג) T לא על \mathbb{R}^3 כי יש שורת אפסים.

ד) $y \in \mathbb{R}, z = 0, x = -y$

$$\begin{pmatrix} -y \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim(\text{Ker}(T)) = 1$$

$\dim(\text{Ker}(T)) = 1$ בסיס של $\text{Ker}(T)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ה)

$$\text{Im}(T) = \text{sp} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(\text{Im}(T)) = 2$$

בסיס של $\text{Im}(T)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ו)

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$W = \left\{ u \mid A \cdot u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$y, z \in \mathbb{R} \quad x = 1 - y$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1-y \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

שאלה 3

א)

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ 4x + 3y - 2z \\ kx + 3y + (k-3)z \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + 2(z_1 + z_2) \\ 4(x_1 + x_2)x + 3(y_1 + y_2) - 2(z_1 + z_2) \\ k(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) + (k - 3)(z_1 + z_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 2z_1 \\ 4x_1 + 3y_1 - 2z_1 \\ kx_1 + 3y_1 + (k - 3)z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + y_2 + 2z_2 \\ 4x_2 + 3y_2 - 2z_2 \\ kx_2 + 3y_2 + (k - 3)z_2 \end{pmatrix} \\ &= T(u_1) + T(u_2) \end{aligned}$$

לכל $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ וסקלר m :

$$\begin{aligned} T(mu) &= T \begin{pmatrix} mx \\ my \\ mz \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} mx + my + 2(mz) \\ 4(mx)x + 3(my) - 2(mz) \\ k(mx) + 3(my) + (k - 3)(mz) \end{pmatrix} \\ &= m \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ 4x + 3y - 2z \\ kx + 3y + (k - 3)z \end{pmatrix} \\ &= mT(u) \end{aligned}$$

לכן T ליניארית.

(ב) המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \\ k & 3 & k - 3 \end{pmatrix}$$

נמצאו את המדורגת של המטריצה המייצגת הסטנדרטית A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \\ k & 3 & k - 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 9k - 33 \end{pmatrix}$$

T חח"ע עבור $k \neq \frac{11}{3}$.

(ג) T על עבור $k \neq \frac{11}{3}$.

(ד) $k = \frac{11}{3}$.

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ \frac{53}{3} \end{pmatrix}$$

שאלה 4 $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad T(e_3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

(א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

(ב) נמצאו את המדורגת של המטריצה המייצגת הסטנדרטית A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

T לא חח"ע כי יש עמודה לא מובילה.

(ג) T על \mathbb{R}^2 כי אין שורת אפסים.

שאלה 5 $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T(e_3) = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

לכן המטריצה המייצגת הסטנדרטית הינה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

שאלה 6

נתון:

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \text{ העתקה ליניארית,}$$

$$\{v_1, v_2, v_3\} \in \mathbb{R}^n \text{ ת"ל.}$$

צריך להוכיח:

$$S = \{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\} \text{ ת"ל.}$$

הוכחה:

$$\{v_1, v_2, v_3\} \text{ ת"ל, לכן קיימים סקלרים } k_1, k_2, k_3 \text{ שלא כולם אפסים כך ש}$$

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = \bar{0}.$$

אז

$$T(k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3) = T(\bar{0})$$

$$k_1 T(v_1) + k_2 T(v_2) + k_3 T(v_3) = \bar{0}$$

קיבלנו צירוף לינארי לא טריוויאלי. ז"א $T(v_3), T(v_2), T(v_1)$ ת"ל.

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \textbf{שאלה 7}$$

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{הוקטורים } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ו } v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ בת"ל, } \dim(\mathbb{R}^2) = 2, \text{ לכן } v_1, v_2 \text{ מהווה בסיס של } \mathbb{R}^2.$$

אז

$$e_1 = x_1 v_1 + y_1 v_2,$$

$$e_2 = x_2 v_1 + y_2 v_2,$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow 3R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{3}R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$y_1 = -2, x_1 = 1$$

לכן

$$e_1 = v_1 - 2v_2.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow 3R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{3}R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array} \right)$$

$$y_2 = \frac{3}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$$

לכן

$$e_2 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{3}{2}v_2.$$

לכן

$$T(e_1) = T(v_1) - 2T(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = -\frac{1}{2}T(v_1) + \frac{3}{2}T(v_2) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 7 \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

לכן המטריצה המייצגת הסטנדרטית היא

$$A = \begin{pmatrix} -7 & \frac{5}{2} \\ -8 & 7 \\ -9 & \frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

שאלה 8 $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ טרנספורמציה ליניארית

$S = \{v_1, \dots, v_k\}$ בת"ל.

(א) דוגמה נגדית:

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(u) = \bar{0}$ לכל $u \in \mathbb{R}^2$.

$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בת"ל.

$$T(v_1) + T(v_2) = \bar{0}$$

$$T(v_1), T(v_2) \Leftarrow T \text{ ת"ל.}$$

(ב) נתון:

T חח"ע.

$$x_1 T(v_1) + \dots + x_k T(v_k) = \bar{0}$$

\Leftarrow

$$T(x_1 v_1 + \dots + x_k v_k) = \bar{0}$$

\Leftarrow

$$x_1 v_1 + \dots + x_k v_k \in \text{Ker}(T) .$$

T חח"ע לכן $\text{Ker}(T) = \{\bar{0}\}$. מכאן נובע:

$$x_1 v_1 + \dots + x_k v_k = \bar{0} .$$

v_1, \dots, v_k בת"ל $\Leftarrow x_1 = 0, \dots, x_k = 0$. אז $T(v_1), \dots, T(v_k)$ בת"ל.

שאלה 9 $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 6x_3 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ב) נמצאו את המדורגת שת המטריצה המייצגת הסטנדרטית A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

T לא על \mathbb{R}^5 כי יש שורות אפסים. T לא חח"ע כי לא כל העמודות מובילות.

(ג)

$$T(u) = A \cdot u = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{זאת העמודה הראשונה של } A, \text{ לכן}$$

$$T \text{ לא חח"ע, לכן לוקטור } \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ יש אינסוף מקורות.}$$

(ד)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

$$\text{אין פתרון, לכן לוקטור } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ אין מקור.}$$

שאלה 10נתון: $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית,

$$T(e_1) + T(e_3) = T(e_2) , \quad T(e_1) + T(e_2) + T(e_3) .$$

צריך להוכיח: $e_1 \in \text{Ker}(T)$ הוכחה:

$$T(e_1) = T(e_2) - T(e_3) = T(e_2) - (T(e_1) + T(e_2)) = -T(e_1)$$

לכן

$$2T(e_1) = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad T(e_1) = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad e_1 \in \text{Ker}(T) .$$

שאלה 11 $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b + 3c \\ 2b + 3c + 4d \\ 5a + 3c + 4d \end{pmatrix} .$$

(א) מטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 5R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -10 & -12 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Im}(T)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(\text{Im}(T)) = 3$$

פתרון למערכת הומוגנית:

$$x_1 = 4x_4 , \quad x_2 = 10x_4 , \quad x_3 = -8x_4 .$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Ker}(T)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -8 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(\text{Ker}(T)) = 1$$

(ג) $\dim(\text{Row}(A)) = 3$ - מספר השורות השונות מ 0.

בסיס של $\text{Row}(A)$:

$$\{(1 \ 0 \ 0 \ 4), (0 \ 1 \ 0 \ -10), (0 \ 0 \ 1 \ 8), \}$$

(ד) T לא חח"ע כי לא כל העמודות מובילות. T על \mathbb{R}^3 כי אין שורות אפסים.

(ה)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \in \text{Im}(T)$$

כי T טרנספורמציה על \mathbb{R}^3 .

שאלה 12 $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$

(א)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(M) = A \cdot M$$

לכל $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

(1) לכל $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$,

$$T(M_1 + M_2) = A \cdot (M_1 + M_2) = A \cdot M_1 + A \cdot M_2 = T(M_1) + T(M_2) .$$

(2) לכל $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ולכל סקלר k ,

$$T(kM) = A \cdot (kM) = kA \cdot M = kT(M) .$$

לכן T ליניארית.

$$T(E_1) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(E_2) = T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T(E_3) = T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(E_4) = T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

T חח"ע ועל.

$$T : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x] \quad (\text{ב})$$

$$T(p) = p'$$

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[x]$$

$$p_1, p_2 \in \mathbb{R}_3[x] \quad (1)$$

$$T(p_1 + p_2) = (p_1 + p_2)' = p_1' + p_2' = T(p_1) + T(p_2) .$$

$$p \in \mathbb{R}_3[x] \text{ ולכל סקלר } k, \quad (2)$$

$$T(kp) = (kp)' = kp' = kT(p) .$$

T לינארית.

$$T(1) = 0 , \quad T(t) = 1 , \quad T(t^2) = 2t , \quad T(t^3) = 3t^2 .$$

מטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

T לא חח"ע כי לא כל העמודות מובילות.
 T על $\mathbb{R}_3[x]$ כי אין שורות אפסים.

שאלה 13

(א)

$$p(t) = 3p_1(t) - p_2(t) , \quad p_1(t) = t - 2t^3 , \quad p_2(t) = 1 - t^2 ,$$

$$T(p(t)) = 3T(p_1(t)) - T(p_2(t))$$

$$T(p_1(t))_E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow T(p_1(t)) = -7t - t^2$$

$$T(p_2(t))_E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow T(p_2(t)) = 1 - t + 2t^2$$

$$T(p(t)) = 3(-7 - t^2) - (1 - t + 2t^2) = 1 - 20t - 5t^2 .$$

(ב)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -\frac{4}{3}x_4, \quad x_2 = \frac{13}{3}x_4, \quad x_3 = \frac{8}{3}x_4, \quad x_4 \in \mathbb{R} .$$

בסיס של $\text{Ker}(T)$:

$$-\frac{4}{3} + \frac{13}{3}t + \frac{8}{3}t^2 + t^3$$

(ג) T לא חח"ע כי יש עמודה לא מובילה. $\mathbb{R}_2[x]$ על T

כי אין שורת אפסים.

שאלה 14

$$V = \text{sp}\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$$

$$D : V \rightarrow V$$

$$D(f) = f' .$$

(א) **(1)** לכל $f_1, f_2 \in V$,

$$D(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)' = f_1' + f_2' = D(f_1) + D(f_2) .$$

(ב) **(2)** לכל $f \in V$ ולכל סקלר k ,

$$D(kf) = (kf)' = kf' = kD(f) .$$

לכן T ליניארית.

(ב)

$$D(e^x) = e^x = 1 \cdot e^x + 0 \cdot e^{2x} + 0 \cdot e^{3x}$$

$$D(e^{2x}) = 2e^{2x} = 0 \cdot e^x + 2 \cdot e^{2x} + 0 \cdot e^{3x}$$

$$D(e^{3x}) = 3e^{3x} = 0 \cdot e^x + 0 \cdot e^{2x} + 3 \cdot e^{3x}$$

$$D_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(ג)

$$[3e^x - 5e^{2x} + e^{3x}]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D_B \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$D(3e^x - 5e^{2x} + e^{3x}) = 3e^x - 10e^{2x} + 3e^{3x}.$$

(ד) D חח"ע ועל כי כל העמודות מובילות ואין שורות אפסים.

(ה) בסיס של $\text{Im}(T)$

$$\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}.$$

$$\dim(\text{Im}(T)) = 3$$

$$\dim(\text{Nul}(T)) = 0, \text{ אין בסיס.}$$

שאלה 15 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$T(e_1) + T(e_3) = T(e_2), \quad T(e_1) + T(e_2) + T(e_3).$$

(א)

$$T(e_1) + T(e_3) = T(e_2), \quad T(e_1) + T(e_2) + T(e_3), \quad \Rightarrow \quad 2T(e_1) + T(e_3) + T(e_2) = T(e_2) + T(e_3)$$

\Leftarrow

$$T(e_1) = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad e_1 \in \text{Ker}(T).$$

(ב)

$$T(e_3) - T(e_2) = T(e_2) - T(e_3) \quad \Rightarrow \quad T(e_3 - e_2) = -T(e_3 - e_2) \quad \Rightarrow \quad 2T(e_3 - e_2) = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad e_3 - e_2 \in \text{Ker}(T)$$

$$e_3 - e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

בת"ל.

שאלה 16 $T: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ המקיימת:

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + 3x^2, \quad T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 + x + 7x^2, \quad T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 4 + 3x + 6x^2, \quad T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -3 - 2x - 5x^2.$$

המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

(א)

$$A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 3b + 4c - 3d \\ b + 3c - 2d \\ 3a + 7b + 6c - 5d \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + 3b + 4c - 3d) + (b + 3c - 2d)x + (3a + 7b + 6c - 5d)x^2$$

(ב)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

(ג)

$$A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 7 & 6 & -5 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} a = 5c - 3d - 5 \\ b = -3c + 3d + 2 \end{cases}, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

$$\dim(\operatorname{Im}(T)) = 2. \text{ בסיס של } \operatorname{Im}(T): \quad \text{(ד)}$$

$$\{1 + 3x^2, 3 + x + 7x^2\}.$$

$$\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 2. \quad \text{(ה)}$$

$$\begin{cases} a = 5c - 3d \\ b = -3c + 3d \end{cases}, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

$$c \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{בסיס של } \operatorname{Ker}(T):$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$T \text{ לא חח"ע כי יש עמודה לא מובילה.} \quad \text{(ו)}$$

(ז) T לא על כי יש שורת אפסים.

(ח)

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E = \{1, x, x^2\}$$

$$T(b_1) = 1+3x^2, \quad T(b_2) = 4+x+10x^2, \quad T(b_3) = 8+4x+16x^2, \quad T(b_4) = 5+2x+11x^2.$$

$$[T]_B^E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 10 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

שאלה 17

(א 1) רשמו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T .
המטריצה המייצגת הסטנדרטית מוגדרת להיות

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

כאשר $e = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$. לפי הנסוחה הנתונה בשביל T :

$$T(e_1) = T(1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = T(0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$T(e_3) = T(0 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

לכן המטריצה המייצגת הסטנדרטית היא

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

□

(2) עבור אילו ערכי הפרמטר k ההעתקה T היא איזומורפיזם?
נדרג את המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - kR_1 - R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 3k+2 & 4k-3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 3k+2 & 4k-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - (2+3k)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -17(k+1) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow -\frac{1}{17}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

ההעתקה T איזומורפיזם אם היא חח"ע ועל.

T על אם במדורגת המתקבלת מהמטריצה המייצגת הסטנדרטית A קיים איבר מוביל בכל שורה.

T חח"ע אם במדורגת המתקבלת מהמטריצה המייצגת הסטנדרטית A קיים איבר מוביל בכל עמודה.

לכן T איזומורפיזם לכל $k \neq -1$.

□

(3) לכל ערך של הפרמטר k מצאו את המימד ובסיס של הגרעין.

$$\underline{k \neq -1}$$

$$\text{Ker}(T) \cong \text{Nul}(A)$$

לפי המדורגת של A מסעיף הקודם, $\text{Nul}(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, לכן

$$\text{Ker}(T) = \{0 \cdot x^0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2\} = \{\bar{0}\}$$

$$\dim(\text{Ker}(T)) = 0$$

$$\underline{k = -1}$$

$\text{Ker}(T) \cong \text{Nul}(A)$. המדורגת של A היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הפתרון של המערכת ההומוגנית של A הוא

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 0 \\ y + 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3y - 4z \\ y = -7z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 17z \\ y = -7z \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} z$$

ז"א הבסיס של $\text{Nul}(A)$ הוא

$$B(\text{Nul}(A)) = \left\{ \begin{pmatrix} 17 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

לכן

$$B(\ker(T)) = \{17 - 7x + x^2\}.$$

$$\dim(\ker(T)) = 1$$

□

(4) עבור כל ערך של k קבעו את המספר המקסימלי של וקטורים בלתי תלויים לינארית השייכים לגרעין. נמקו את תשובתכם.

□

(5) לכל ערך של הפרמטר k מצאו את המימד ובסיס של $\text{Im } T$.

$$\underline{k \neq -1}$$

$$\text{Im}(T) \cong \text{Col}(A)$$

המדורגת של A היא $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$. כל העמודות מובילות לכן בסיס של $\text{Col}(A)$ הינו

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

לכן בסיס של $\text{Im}(T)$ הינו

$$\{1 + 2x + kx^2, 3 + 5x - 2x^2, 4 + x + 3x^2\}$$

$$\dim(\text{Im}(T)) = 3$$

$$\underline{k = -1}$$

$\text{Im}(T) \cong \text{Col}(A)$ המדורגת של A היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עמודות 1 ו 2 מובילות לכן בסיס של $\text{Col}(A)$ הינו

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k = -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

לכן בסיס של $\text{Im}(T)$ הינו

$$\{1 + 2x - x^2, 3 + 5x - 2x^2\}$$

$$\dim(\text{Im}(T)) = 2$$

□

6) עבור אילו ערכי k כל שלושה וקטורים של התמונה הם תלויים לינארית ? נמקו את תשובתכם.

□

שאלה 18

(א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T היא:

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \\ [T(e_1)]_E & [T(e_2)]_E & [T(e_3)]_E & [T(e_4)]_E \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

כאשר $\{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_3[x]$ ו E הבסיס הסטנדרטית של $\mathbb{R}^{2 \times 3}$.

$$[T(e_1)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [T(e_2)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [T(e_3)]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad [T(e_4)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

לכן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Im}(T) \sim \text{col}(A) \quad (\text{ב})$$

נדרג את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_2 \\ R_5 \rightarrow R_5 - R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow -\frac{1}{6}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\begin{matrix} R_4 \rightarrow R_4 - 4R_3 \\ R_5 \rightarrow R_5 - 5R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כל ה-4 עמודות מובילות לכן $\dim(\text{col}(A)) = 4$. בסיס של $\text{Im}(T)$:

$$B(\text{Im}(T)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

כיוון ש (ג)

$$\dim(\text{col}(A)) + \dim(\text{Nul}(A)) = 4$$

אז

$$\dim(\text{Nul}(A)) = 0$$

ולכן

$$\text{Ker}(T) = \{\bar{0}\}.$$

(ד) נרשום הבסיס $\{b_1 = x, b_2 = 1 - x, b_3 = x + x^2, b_4 = x - x^2 + x^3\}$ ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_3[x]$, $\{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3\}$ כך ש

$$b_1 = e_2, \quad b_2 = e_1 - e_2, \quad b_3 = e_2 + e_3, \quad b_4 = e_2 - e_3 + e_4.$$

לכן

$$T(b_1) = T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(b_2) = T(e_1) - T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(b_3) = T(e_2) + T(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$T(b_4) = T(e_2) - T(e_3) + T(e_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

נרשום הבסיס

$$C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, c_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, c_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

במונחי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{2 \times 3}$:

$$E = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

:

$$E_1 = c_5, \quad E_2 = c_1, \quad E_3 = c_2, \quad E_4 = c_6, \quad E_5 = c_3, \quad E_6 = c_4 - c_3.$$

לכן

$$T(b_1) = E_1 + 2E_2 + 4E_3 + E_4 = c_5 + 2c_1 + 4c_2 + c_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C,$$

$$T(b_2) = -E_2 - 2E_3 - E_4 - E_5 = -c_1 - 2c_2 - c_6 - c_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_C,$$

$$T(b_3) = 3E_1 + 5E_2 + 4E_3 + 2E_4 + 3E_5 + 5E_6 = 3c_5 + 5c_1 + 4c_2 + 2c_6 + 3c_3 + 5(c_4 - c_3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_C,$$

$$T(b_4) = 4E_3 - 4E_5 - E_6 = 4c_2 - 4c_3 - (c_4 - c_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C.$$

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [T(b_1)]_C & [T(b_2)]_C & [T(b_3)]_C & [T(b_4)]_C \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 19

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Ker}(T)$ הוא $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(ב) תהי $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית. אם $n > m$ אז $\text{ker}(T) \neq \{\bar{0}\}$.

הוכחה:

המטריצה המייצגת הסטנדרטית $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ מסדר $m \times n$ עבור $m < n$. כלומר, כמות העמודות יותר מכמות השורות. לכן

$$\dim(\text{col}(A)) < n.$$

כיוון ש

$$\dim(\text{col}(A)) + \dim(\text{Nul}(A)) = n$$

אז

$$\dim(\text{Nul}(A)) \geq 1.$$

לכן

$$\dim(\text{Ker}(T)) \geq 1,$$

ז"א

$$\text{Ker}(T) \neq \{\bar{0}\}.$$

הוכחה:

(ג)

נניח כי T חח"ע.

יהי v וקטור השייך ל $\text{Ker}(T)$. אז $T(v) = \bar{0}$, אז

$$T(v) = \bar{0} = T(\bar{0}).$$

לכן $v = 0$ בגלל ש T חח"ע. לכן $\text{Ker}(T) = \{\bar{0}\}$.

נניח כי $\text{Ker}(T) = \{\bar{0}\}$.

יהי $T(v_1) = T(v_2)$ עבור $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$. אז

$$T(v_1 - v_2) = T(v_1) - T(v_2) = \bar{0}$$

לכן

$$v_1 - v_2 \in \text{Ker}(T) = \{\bar{0}\}.$$

ז"א

$$v_1 - v_2 = \bar{0} \Rightarrow v_1 = v_2$$

ולכן T חח"ע.