## עבודה עצמית 6

**שאלה 1** לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבעו האם היא תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

**א)** $$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|x=y=-z\right\}$$

**ב)** $$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|x=3y\right\}$$

**ג)** $$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|y=z^2\right\}$$

**ד)** $$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|x+y-z=0\right\}$$

**ה)** $$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|x+y\geq 0\right\}$$

**ו)** $$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|x=0\right\}$$

**ז)** $$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|x+y=-z\right\}$$

**ח)** $$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|x\geq 0,y\geq 0\right\}$$

**ט)** $$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|x+y-z=1\right\}$$

**י)** $$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|x^2+y^2+z^2=0\right\}$$

**שאלה 2** לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבעו האם היא תת מרחב של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ (מרחב הפולינומים ממעלה עד 2).

**א)** $W=\left\{ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_{\le 2}[x]\;\middle|\;b=0\right\}$

**ב)** $W=\left\{ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_{\le 2}[x]\;\middle|\;a+b+c=0\right\}$

**ג)** $W=\left\{ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_{\le 2}[x]\;\middle|\;a>b>c\right\}$

**ד)** $W=\left\{ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_{\le 2}[x]\;\middle|\;a=b=c\right\}$

**ה)** $W=\left\{p(x)\in\mathbb{R}_{\le 2}[x]\;\middle|\;p(1)=0\right\}$

**ו)** $W=\left\{p(x)\in\mathbb{R}_{\le 2}[x]\;\middle|\;p(1)=1\right\}$

**ז)** $W=\left\{ax^2+bx+c\in\mathbb{C}_{\le 2}[x]]\;\middle|\;a,b,c\in\mathbb{C},a+b=\bar{c}\right\}$

## שאלה 3

לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבעו האם היא תת מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

**א)** $W=\left\{A\in\mathbb{R}^{2\times 2}\;\middle|\;A=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix},a,b\in\mathbb{R}\right\}$

**ב)** $W=\left\{A\in\mathbb{R}^{2\times 2}\;\middle|\;A=\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix},a,b,c\in\mathbb{R},c\neq 0\right\}$

**ג)** $W=\left\{A\in\mathbb{R}^{2\times 2}\;\middle|\;|A|=0\right\}$

**ד)** $W=\left\{A\in\mathbb{R}^{2\times 2}\;\middle|\;|A|\neq 0\right\}$

**ה)** $W=\left\{A\in\mathbb{R}^{2\times 2}\middle|A\cdot B=0,B=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}\right\}$

## שאלה 4

לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבעו האם היא תת מרחב של $\{f|f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}\}$.

**א)** $W=\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}|f(1)=0\}$

**ב)** $W=\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}|f(1)+f(2)=0\}$

**ג)** $W=\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}|\forall x\in\mathbb{R},f(x)=f(-x)\}$

**ד)** $W=\left\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}|\forall x\in\mathbb{R},f(x^2)=(f(x))^2\right\}$

## שאלה 5

יהי $V$ מרחב וקטורי ויהיו $W_1$, $W_2$ תת מרחבים של $V$.

**א)** הוכיחו:

$$W_1\cap W_2=\{x\in V|x\in W_1\wedge x\in W_2\}$$

הינו תת-מרחב של $V$.

**ב)** הוכיחו:

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1 \ , \ w_2 \in W_2\}$$

הינו תת-מרחב של $V$.

**ג)** הפריכו:

$$W_1 \cup W_2 = \{x \in V | x \in W_1 \vee x \in W_2\}$$

הינו תת-מרחב של $V$.

**שאלה 6** לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבעו האם היא תת מרחב של $\mathbb{R}[x]$ (מרחב הפולינומים עם מקדמים ממשיים):

**א)** $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | \deg(p) = 3\}$

**ב)** $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | \deg(p) \text{ even} \cup \{\bar{0}\}\}$

**ג)** $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | p(0) \in \mathbb{Z}\}$

# פתרונות

## שאלה 1

**א)**
$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|x=y=-z\right\}$$

דוגמה: $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\in W$.

**תנאי 1)** הווקטור האפס $\bar{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ מקיים את התנאי $x=y=-z$ לכן $\bar{0}\in W$.

**תנאי 2)** נניח ש- $u_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\in W$ וגם $u_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\in W$. לפי זה $u_1$, $u_2$ מקיימים את התנאי של $W$:

**(*)**
$$x_1=y_1=-z_1\ ,\qquad x_2=y_2=-z_2\ .$$

נבדוק אם הווקטור $u_1+u_2=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix}$ שייך ל- $W$. נובע מ- (*) כי

$$x_1+x_2=y_1+y_2=-z_1-z_2=-(z_1+z_2)\ .$$

כלומר $u_1+u_2$ מקיים את התנאי של $W$, ולכן $u_1+u_2\in W$.

**תנאי 3)** נניח $u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in W$ ו- $k$ סקלר. כיוון ש- $u\in W$ אז

**(#)**
$$x=y=-z\ .$$

נבדוק אם הווקטור $ku=\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$ שייך ל- $W$. מ- (#) נובע כי $kx=ky=k(-z)=-(kz)$,
כלומר $ku$ מקיים את התנאי של $W$ ולכן $ku\in W$.

הוכחנו ש- $W$ מקיים את כל התנאים של תת-מרחב לפיכך $W$ תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

**ב)**
$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|x=3y\right\}$$

דוגמה: $\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\in W$.

**תנאי 1)** הווקטור האפס $\bar{0} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ מקיים את התנאי $x = 3y$ לכן $\bar{0} \in W$.

**תנאי 2)** נניח ש- $W \ni u_1 = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ וגם $W \ni u_2 = \begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$. אז

**(*)**
$$x_1 = 3y_1 \ , \qquad x_2 = 3y_2 \ .$$

מתקיים. נבדוק אם הווקטור $u_1 + u_2 = \begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix}$ שייך ל- $W$. מ- **(*)** נובע כי

$$x_1 + x_2 = 3y_1 + 3y_2 = 3(y_1 + y_2) \ .$$

ז"א $u_1 + u_2$ מקיים את התנאי של $W$, ולפיו $u_1 + u_2 \in W$.

**תנאי 3)** נניח $W \ni u = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ו- $k$ סקלר. כיוון ש- $u \in W$ אז

**(#)**
$$x = 3y \ .$$

נבדוק אם הווקטור $ku = \begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$ שייך ל- $W$. מ- **(#)** נקבל $k \cdot x = k \cdot (3y) = 3 \cdot (ky)$, ולפי זה $ku$ מקיים את התנאי של $W$, ז"א $ku \in W$.

הוכחנו ש- $W$ מקיים את כל התנאים של תת-מרחב לפיכך $W$ תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

**ג)**
$$W = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| y = z^2 \right\}$$

**לדוגמה:** $u = \begin{pmatrix}1\\9\\3\end{pmatrix}$.

$W$ אינו תת-מרחב. דוגמה נגדית:

$W \ni u = \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$ כי $2^2 = 4$ אבל $3u = \begin{pmatrix}0\\6\\12\end{pmatrix}$ ו- $6^2 \neq 12$. לכן $u \notin W$.

**ד)**
$$W = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + y - z = 0 \right\}$$

**לדוגמה:** $W \ni u = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

**תנאי 1)** הווקטור האפס $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \bar{0}$ מקיים את התנאי $x+y-z=0$ לכן $\bar{0} \in W$.

**תנאי 2)** נניח ש- $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix} = u_1 \in W$ וגם $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} = u_2 \in W$. זאת אומרת

**(*)** $$x_1+y_1-z_1=0\ , \qquad x_2+y_2-z_2=0\ .$$

מתקיים. נבדוק אם הווקטור $u_1+u_2 \in W$:

$$u_1+u_2 = \begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix}\ .$$

נבדוק אם $u_1+u_2$ מקיים את התנאי של $W$:

$$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-(z_1+z_2) == \underbrace{x_1+y_1-z_1}_{=0}+\underbrace{x_2+y_2-z_2}_{=0}=0$$

כאשר $x_1+y_1-z_1=0$ מכיוון ש- $u_1 \in W$ ו- $x_2+y_2-z_2=0$ מכיוון ש- $u_2 \in W$. לכן $u_1+u_2$ מקיים את התנאי של $W$, ז"א $u_1+u_2 \in W$.

**תנאי 3)** נניח $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = u \in W$ ו- $k$ סקלר. כיוון ש- $u \in W$ אז

**(#)** $$x+y-z=0\ .$$

נבדוק אם הווקטור $\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix} = ku \in W$. כתוצאה של **(#)** נקבל

$$k\cdot(x+y-z)=0 \qquad \Rightarrow \qquad = k\cdot x+k\cdot y-k\cdot z=0\ ,$$

לכן $ku$ מקיים את התנאי של $W$, ז"א $ku \in W$.

הוכחנו ש- $W$ מקיים את כל התנאים של תת-מרחב לפיכך $W$ תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

**ה)** $$\underline{W = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x+y\geq 0 \right\}}$$

לדוגמה: $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in W$.

$W$ אינו תת-מרחב. דוגמה נגדית:

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = u \in W$ כי $1+2+3\geq 0$. נבחר $k=-1$.

$W \notin \begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix} = k\cdot u$ בגלל ש- $-1-2<0$.

**ו)** $$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \middle| x=0\right\}$$

לדוגמה: $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\in W$.

**תנאי 1)** הווקטור האפס $\bar{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ מקיים את התנאי $x=0$ לכן $\bar{0}\in W$.

**תנאי 2)** נניח ש- $u_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\in W$ וגם $u_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\in W$. אז

**(*)** $$x_1=0\ ,\qquad x_2=0\ .$$

מתקיים. נבדוק אם הווקטור $u_1+u_2=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix}$ שייך ל- $W$.

מ- (*) נובע כי $(x_1+x_2)=0$. לכן $u_1+u_2$ מקיים את התנאי של $W$, ז"א $u_1+u_2\in W$.

**תנאי 3)** נניח $u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in W$ ו- $k$ סקלר. כיוון ש- $u\in W$ אז

**(#)** $$x=0\ .$$

נבדוק אם הווקטור $ku=\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$ שייך ל- $W$.

מ- (#) נקבל

$$k\cdot(x)=0 \qquad\Rightarrow\qquad kx=0\ ,$$

אזי $ku$ מקיים את התנאי של $W$, ז"א $ku\in W$.

הוכחנו ש- $W$ מקיים את כל התנאים של תת-מרחב לפיכך $W$ תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

**ז)** $$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \middle| x+y=-z\right\}$$

לדוגמה $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\in W$.

**תנאי 1)** $\bar{0}=\begin{pmatrix}0,0,0\end{pmatrix}$, $0+0=-0 \Leftarrow \bar{0}\in W$.

**תנאי 2)** נניח ש- $W \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = u_1$, וגם $W \ni \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = u_2$.

ז"א $x_1 + y_1 = -z_1$, $x_2 + y_2 = -z_2$. נבדוק אם הווקטור

$$u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

מקיים את התנאי של $W$:

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = -z_1 - z_2 = -(z_1 + z_2)$$

לכן $u_1 + u_2 \in W$.

**תנאי 3)** נניח $W \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u$, $k \in \mathbb{R}$. נבדוק אם הווקטור $ku \in W$:

$$ku = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix} \qquad , \qquad kx + ky = k(x+y) = k(-z) = -kz$$

לכן $ku$ מקיים את התנאי של $W$ לפיכך $ku \in W$.

הוכחנו ש- $W$ מקיים את כל התנאים של תת-מרחב לפיכך $W$ תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

**ח)** $$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

לדוגמה: $W \ni \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$W$ אינו תת-מרחב. דוגמה נגדית:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$$

אבל

$$-1 \cdot u = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin W \ .$$

**ט)** $$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + y - z = 1 \right\}$$

דוגמה: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in W$.

אינו תת-מרחב בגלל ש- $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \notin W$ $= \bar{0}$ כי $0+0-0 \neq 1$. לכן $W$ לא תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

**י)** $$\underline{W = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2+y^2+z^2=0 \right\}}$$

הווקטור היחידי שמקיים את התנאי הוא ווקטור האפס: $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \bar{0}$, ז"א $W = \{\bar{0}\}$.

**1)** $\bar{0} \in W$.

**2)** $\bar{0}+\bar{0} = \bar{0} \in W$.

**3)** $k \cdot \bar{0} = \bar{0}$

הוכחנו ש- $W$ מקיים את כל התנאים של תת-מרחב לפיכך $W$ תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

## <u>שאלה 2</u>

**א)** $W = \left\{ ax^2+bx+c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \;\middle|\; b=0 \right\}$.

לדוגמה: $x^2+1 \in W$ .

**תנאי 1)** $\bar{0} = 0x^2+0x+0 \in W$.

**תנאי 2)** נניח $u_1 = a_1x^2+c_1 \in W$, $u_2 = a_2x^2+c_2 \in W$. אזי

$$u_1+u_2 = (a_1+a_2)x^2 + (c_1+c_2) \in W$$

**תנאי 3)** נקח $u = ax^2+c \in W$. אז לכל $k \in \mathbb{R}$

$$k \cdot u = (ka_1)x^2 + kc \in W\ .$$

מסקנה: $W$ תת-מרחב של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

**ב)** $W = \left\{ ax^2+bx+c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \;\middle|\; a+b+c=0 \right\}$

לדוגמה: $x^2+x-2 \in W$ .

**תנאי 1)** $\bar{0} = 0x^2+0x+0 \in W$.

**תנאי 2)** נניח $u_1 = a_1x^2+b_1x+c_1 \in W$, $u_2 = a_2x^2+b_2x+c_2 \in W$.

אז $a_1+b_1+c_1=0$ וגם $a_2+b_2+c_2=0$.

$$u_1+u_2 = (a_1+a_2)x^2 + (b_1+b_2)x + (c_1+c_2)\ .$$

$$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2) = (a_1+b_1+c_1)+(a_2+b_2+c_2) = 0+0 = 0\ .$$

לכן $u_1+u_2 \in W$.

**תנאי 3)** נקח $u=ax^2+bx+c\in W$. ז"א $a+b+c=0$. אז לכל $k\in\mathbb{R}$

$$k\cdot u=(ka)x^2+(kb)x+(kc)\ .$$

$$ka+kb+kc=k(a+b+c)=k\cdot 0=0\ .$$

לכן $ku\in W$.

מסקנה: $W$ תת-מרחב של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

**ג)** $W=\left\{ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_{\leq 2}[x]\ \middle|\ a>b>c\right\}$

$W$ לא תת-מרחב. דוגמה נגדית: $u=3x^2+2x+1\in W$ בגלל ש- $3>2>1$.

אבל $(-1)\cdot u=-3x^2-2x-1\notin W$ בגלל ש- $-3<-2<-1$.

**ד)** $W=\left\{ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_{\leq 2}[x]\ \middle|\ a=b=c\right\}$.

לדוגמה: $x^2+x+1\in W$.

ז"א ניתן לרשום $W$ בצורה $W=\{ax^2+ax+a\in\mathbb{R}_{\leq 2}[x]\ |\ a\in\mathbb{R}\}$.

**תנאי 1)** $\bar{0}=0x^2+0x+0\in W$. (עבור $a=0$).

**תנאי 2)** נניח $u_1=a_1x^2+a_1x+a_1\in W$ ו- $u_2=a_2x^2+a_2x+a_2\in W$.

אז $u_1+u_2=(a_1+a_2)x^2+(a_1+a_2)x+(a_1+a_2)\in W$.

**תנאי 3)** נניח $u=ax^2+ax+a\in W$ ו- $k$ סקלר. אז

$$ku=k(ax^2+ax+a)=(ka)x^2+(ka)x+ka\in W$$

מסקנה: $W$ תת מרחב של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

**ה)** $W=\left\{p\in\mathbb{R}_{\leq 2}[x]\ \middle|\ p(1)=0\right\}$.

לדוגמה: $x^2+x-2\in W$.

נסמן $p(x)=ax^2+bx+c$.

$$p(1)=0\quad\Rightarrow\quad a+b+c=0\ .$$

ז"א ניתן לרשום $W$ כך:

$$W=\{ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_{\leq 2}[x]\ \middle|\ a+b+c=0\}\ .$$

הוכחנו בסעיף ב' שזה תת מרחב של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

**ו)** $W=\left\{p\in\mathbb{R}_{\leq 2}[x]\ \middle|\ p(1)=1\right\}$

$\bar{0}=0x^2+0x+0\notin W$ בגלל ש- $\bar{0}(1)=0\cdot 1^2+0\cdot 1+0\neq 1$.

לפיכך $W$ לא תת-מרחב.

**ז)** $W=\left\{ax^2+bx+c\in\mathbb{P}_2(\mathbb{C})\ \middle|\ a,b,c\in\mathbb{C},a+b=\bar{c}\right\}$

$W$ לא תת-מרחב. דומגה נגדית: $p(x)=x^2+ix+(1-i)\in W$

$(1+i)\cdot p = (1+i)x^2 + (-1+i)x + 2$

$(1+i) + (-1+i) = 2i \neq 2$.

מסקנה, $W$ לא תת-מרחב של $P_2(\mathbb{C})$.

## שאלה 3

**א)** $W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \middle| A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

**תנאי 1)** $W \ni \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \bar{0}$ (עבור $a = 0$, $b = 0$)

**תנאי 2)** נניח $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$.

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} \in W$$

**תנאי 3)** נניח $W \ni A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. אז לכל $k \in \mathbb{R}$, $W \ni k \cdot A = \begin{pmatrix} ka & 0 \\ 0 & kb \end{pmatrix}$.

לכן $W$ תת מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

**ב)** $W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \middle| A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0 \right\}$

דומגה: $W \ni A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$0_{2\times 2} \notin W$ בגלל ש- $0_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ($c = 0$). לכן $W$ לא תת מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

**ג)** $W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; |A| = 0 \right\}$.

לא תת מרחב. דוגמה נגדית: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

אז $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin W$. לכן $W$ לא תת מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

**ד)** $W = \{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;|\; |A| \neq 0 \}$.

$0_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W$ כי $|0_{2\times 2}| = 0$.

לכן $W$ לא תת מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

**ה)** $W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} | A \cdot B = 0, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \right\}$

דוגמה: $W \ni \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**תנאי 1)** $0_{2\times 2} \in W$ כי $0_{2\times 2}\cdot B = 0$

**תנאי 2)** נניח $A_1, A_2 \in W$. ז"א $A_1 \cdot B = 0$ ו- $A_2 \cdot B = 0$. אז

$$(A_1 + A_2)\cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B = 0 + 0 = 0$$

לכן $A_1 + A_2 \in W$.

**תנאי 3)** נניח $A \in W$ ז"א $A \cdot B = 0$.
אז לכל סקלר $k$ מתקיים $(kA)\cdot B = k(A\cdot B) = k \cdot 0 = 0$.
לכן $kA \in W$.

לכן $W$ תת מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

## שאלה 4

**א)** $W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | f(1) = 0\}$
לדוגמה: $f(x) = x - 1$.

**תנאי 1)**

$$\bar{0}(x) = 0 \;\Rightarrow\; \bar{0}(1) = 0 \;\Rightarrow\; \bar{0} \in W \ .$$

**תנאי 2)** נניח $f, g \in W$. ז"א $f(1) = 0$ וגם $g(1) = 0$.
אז $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$.
לכן $f + g \in W$.

**תנאי 3)** נניח $f \in W$ ז"א $f(1) = 0$. אז לכל $k \in \mathbb{R}$,

$$(k\cdot f)(1) = k \cdot (f(1)) = k \cdot 0 = 0 \ .$$

לכן $kf \in W$.

מסקנה: $W$ ת"מ של $F(\mathbb{R})$.

**ב)** $W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | f(1) + f(2) = 0\}$
דוגמה: $f(x) = (x-1)(x-2)$.

**תנאי 1)**

$$\bar{0}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{0}(1) = 0 \ , \ \bar{0}(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{0}(1) + \bar{0}(2) = 0$$

לכן $\bar{0} \in W$.

**תנאי 2)** נניח $f_1, f_2 \in W$. ז"א $f_1(1) + f_1(2) = 0$ וגם $f_2(1) + f_2(2) = 0$.
אז

$$(f_1 + f_2)(1) + (f_1 + f_2)(2) = [f(1) + f_1(2)] + [f_2(1) + f_2(2)] = 0 + 0 = 0 \ .$$

לכן $f_1 + f_2 \in W$.

**תנאי 3)** נניח $f \in W \Leftarrow f(1) + f(2) = 0$. אז לכל $k \in \mathbb{R}$,

$$(k\cdot f)(1) + (k \cdot f)(2) = k \cdot (f(1) + f(2)) = k \cdot 0 = 0 \ .$$

לכן $kf \in W$.

מסקנה: $W$ ת"מ של $F(\mathbb{R})$.

**ג)** $W=\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}|\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(-x)\}$

דוגמה: $f(x)=x^2$.

**תנאי 1)**

$$\bar{0}(x)=\bar{0}(-x)=0$$

לכל $x\in\mathbb{R}$ לפיכך $\bar{0}\in W$.

**תנאי 2)** נניח $f,g\in W$ ז"א $f(x)=f(-x)$, $g(x)=g(-x)$.
אז

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=f(-x)+g(-x)=(f+g)(-x)$$

לכן $f+g\in W$.

**תנאי 3)** נניח $f\in W$, $k\in\mathbb{R}$. אז $f(x)=f(-x)$. לכן

$$(kf)(x)=k(f(x))=kf(-x)=(kf)(-x)$$

לכן $kf\in W$.

מסקנה: $W$ ת"מ של $F(\mathbb{R})$.

**ד)** $W=\left\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}|\forall x\in\mathbb{R}, f(x^2)=(f(x))^2\right\}$

$W$ לא תת-מרחב. דוגמה נגדית: $f(x)=x^2\in W$, $g(x)=1\in W$,

$$(f+g)(x)=x^2+1\notin W\ .$$

מסקנה: $W$ לא ת"מ של $F(\mathbb{R})$.

## שאלה 5

**א)** נתון: $W_1$,$W_2$ תת מרחבים של $V$.
צריך להוכיח: $W_1\cap W_2$ תת מרחבים של $V$.
<u>הוכחה:</u>

**תנאי 1)** צריך להוכיח: $\bar{0}\in W_1\cap W_2$.

$$\left.\begin{cases}W_1 \text{ תת-מרחב, לכן } \bar{0}\in W_1\\ W_2 \text{ תת-מרחב, לכן } \bar{0}\in W_2\end{cases}\right\} \Rightarrow \bar{0}\in W_1\cap W_2.$$

**תנאי 2)** נקח $u_1,u_2\in W_1\cap W_2 \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_1\in W_1, & u_1\in W_2, & \text{וגם}\\ u_2\in W_1, & u_2\in W_2 & \end{Bmatrix}$

$$\begin{cases}W_1 \text{ תת-מרחב, לכן } u_1+u_2\in W_1\\ W_2 \text{ תת-מרחב, לכן } u_1+u_2\in W_2\end{cases} \Rightarrow u_1+u_2\in W_1\cap W_2.$$

**תנאי 3)** נניח $u\in W_1\cap W_2$, $k\in\mathbb{R}$.
אז $u\in W_1$, $u\in W_2$.

$$\begin{cases}W_1 \text{ תת-מרחב, לכן } ku\in W_1\\ W_2 \text{ תת-מרחב, לכן } ku\in W_2\end{cases} \Rightarrow ku\in W_1\cap W_2.$$

מסקנה: $W_1 \cap W_2$ תת-מרחב של $V$.

**ב)** $\underline{W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1 \ , \ w_2 \in W_2\}}$

צריך להוכיח: $W_1 + W_2$ תת מרחב של $V$.

**תנאי 1)** $W_1$ תת-מרחב $\Leftarrow$ $\bar{0} \in W_1$, ו- $W_2$ תת-מרחב $\Leftarrow$ $\bar{0} \in W_2$.

$\bar{0} = \bar{0} + \bar{0} \Leftarrow \bar{0} \in W_1 + W_2$.

**תנאי 2)** נקח $u, \mathrm{v} \in W_1 + W_2$. $\Leftarrow$ $\left\{ \begin{array}{lll} u = w_1 + w_2, & w_1 \in W_1, & w_2 \in W_2 \\ \mathrm{v} = w_1' + w_2', & w_1' \in W_1, & w_2' \in W_2 \end{array} \right\}$

$W_1$ תת מרחב, לכן $w_1 + w_1' \in W_1$,

$W_2$ תת מרחב, לכן $w_2 + w_2' \in W_2$,

אז

$$u + \mathrm{v} = (w_1 + w_2) + (w_1' + w_2') = \overbrace{(w_1 + w_1')}^{\in W_1} + \overbrace{(w_2 + w_2')}^{\in W_2}$$

לכן $u + \mathrm{v} \in W_1 + W_2$.

**תנאי 3)** נניח כי $u \in W_1 + W_2$. $\Leftarrow$ $u = w_1 + w_2$, $w_1 \in W_1$ ו- $w_2 \in W_2$.

אז לכל $k \in \mathbb{R}$,

$$ku = k(w_1 + w_2) = kw_1 + kw_2 \ .$$

$\left\{ \begin{array}{l} W_1 \text{ ת"מ, לכן } kw_1 \in W_1 \\ W_2 \text{ ת"מ, לכן } kw_2 \in W_2 \end{array} \right. \Leftarrow ku \in W_1 + W_2$.

מסקנה: $W_1 + W_2$ תת-מרחב של $V$.

**ג)** $\underline{W_1 \cup W_2 = \{x \in V | x \in W_1 \vee x \in W_2\}}$

דוגמה נגדית:

$$W_1 = \{(x,y) | y = x\} \ , \qquad W_2 = \{(x,y) | y = 2x\}$$

$W_1$, $W_2$ תת-מרחבים של $\mathbb{R}^2$.

$u = (1,1) \in W_1$ אז $u = W_1 \cup W_2$.

$\mathrm{v} = (1,2) \in W_2$ אז $\mathrm{v} = W_1 \cup W_2$.

$u + \mathrm{v} = (2,3)$, $u + \mathrm{v} \notin W_1$ וגם $u + \mathrm{v} \notin W_2$.
לכן $u + \mathrm{v} \notin W_1 \cup W_2$.

## שאלה 6

**א)** $W = \{p \in \mathbb{R}[x] | \deg(p) = 3\}$

דוגמה: $p = x^3 + x^2 + x + 1 \in W$.

$\bar{0} \notin W$ כי $\deg(\bar{0}) = 0$

לכן $W$ לא תת-מרחב של $p(\mathbb{R})$.

**ב)** $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | \deg(p) \text{ even} \cup \{\bar{0}\}\}$

דוגמה: $p(x) = x^2 + 1 \in W$.

$W$ לא תת-מרחב. דוגמה נגדית: $p(x) = x^2 + x + 1 \in W$, $q(x) = -x^2 + x \in W$,

$p(x) + q(x) = 2x + 1 \notin W$ כי $\deg(p+q) = 1$.

לכן $W$ לא תת-מרחב של $\mathbb{R}[x]$.

**ג)** $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | p(0) \in \mathbb{Z}\}$

דוגמה: $p(x) = x + 1 \in W$ כי $1 \in \mathbb{Z}$.

$W$ לא תת-מרחב של $\mathbb{R}[x]$.

דוגמה נגדית: $p(x) = x + 1 \in W$,

$\pi \cdot p = \pi \cdot x + \pi \notin W$ בגלל ש- $\pi \notin \mathbb{Z}$.