חדו"א 1
סמסטר א' תשפד
תרגילים שונים

שאלה 1 הוכיחו כי לכל $n \geq 10$

$$2^n > n^3 \ .$$

שאלה 2

שאלה 3

שאלה 4

שאלה 5

פתרונות

שאלה 1 נוכיח ע"י אינדוקציה.

שלב הבסיס

עבור $n = 10$:

$$2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$$

הטענה מתקיימת.

שלב האינדוקציתי

נניח כי $2^m > m^3$ לכל $m > 10$. אז

$$2 \cdot 2^m > 2m^3 \qquad \Rightarrow \qquad 2^{m+1} > m^3 + m^3$$

$m > 10$ לכן

$$m^3 = m \cdot m^2 > 10m^2 = 3m^2 + 7m^2 > 3m^2 + 7 \cdot 10 \cdot m = 3m^2 + 3m + 67m > 3m^2 + 3m + 67 \cdot 10 > 3m^2 + 3m + 1$$

לפיכך

$$2^{m+1} > m^3 + 3m^2 + 3m + 1 \qquad \Rightarrow \qquad 2^{m+1} > (m+1)^3 \ .$$

שאלה 2 לגרנז':

קיימת $c \in (a,b)$ כך ש

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

נתון: $f(-2) = 5$ $f'(x) \leq 3$ לכל x.

נציב $a = -2$, $b = 1$ בלגרנז':

$$\frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = f'(c) \qquad (*)$$

נתון כי $f'(x) \leq 3$. נציב (*) באגף הימין של האי-שוויון ונקבל

$$\frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} \leq 3 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{f(1) - f(-2)}{3} \leq 3$$

נציב $f(-2) = 5$:

$$\frac{f(1) - 5}{3} \leq 3$$
$$f(1) - 5 \leq 9$$
$$f(1) \leq 9 + 5$$
$$f(1) \leq 14 \ .$$

שאלה 3

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} &= \frac{2^{ax^2+4}-16}{3x^2} \\
&= \left[\frac{0}{0}\right] \\
&\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\left(2^{ax^2+4}-16\right)'}{(3x^2)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln 2 \cdot \left(2^{ax^2+4}\right) \cdot (ax^2+4)'}{6x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln 2 \cdot \left(2^{ax^2+4}\right) \cdot (2ax)}{6x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln 2 \cdot 2^{a\cdot x^2+4} \cdot 2ax}{6x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln 2 \cdot 2^{a\cdot x^2+4} \cdot 2a}{6} \\
&= \frac{\ln 2 \cdot 2^{a\cdot 0^2+4} \cdot 2a}{6} \\
&= \frac{\ln 2 \cdot 2^{4} \cdot 2a}{6} \\
&= \frac{32a\ln 2}{6} \\
&= \frac{16a\ln 2}{3}
\end{aligned}
$$

שאלה 4

$$x = 3t^3 - 3 \ , \qquad y = 3\ln t + 5t^2 \qquad (*)$$

שלב 1 :

נציב $x=0$:

$$0 = 3t^3 - 3 \qquad \Rightarrow \qquad t = 1 \ . \qquad (*1)$$

שלב 2 :

נציב $x=0$ ב y

$$y(x=0) = y(t=1) = 3\ln 1 + 5\cdot 1^2 = 5 \ . \qquad (*2)$$

שלב 3 :

גוזרים (*):

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t} \\ x'_t &= 9t^2 \\ y'_t &= \frac{3}{t} + 10t = \frac{3+10t^2}{t} \\ y'_x &= \frac{\frac{3+10t^2}{t}}{9t^2} = \frac{3+10t^2}{9t^3} \end{aligned} \quad (*3)$$

שלב 4 :

נציב $x = 0$ ב (3*):

$$y'(x=0) = y'(t=1) = \frac{13}{9} \quad (4*)$$

שלב 5 :

נחשב y''_{xx}:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)_t}{x'_t}$$

נציב y'_x ו x'_t מ (3*):

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)_t}{x'_t}$$

$$y'_x = \frac{u}{\mathrm{v}} \ , \qquad u = 3+10t^2 \ , \qquad \mathrm{v} = 9t^3 \ , \qquad u' = 20t \ , \qquad \mathrm{v}' = 27t^2 \ .$$

$$(y'_x)'_t = \frac{u'\mathrm{v} - u\mathrm{v}'}{\mathrm{v}^2} = \frac{20t \cdot 9t^3 - 27t^2 \cdot (3+10t^2)}{81t^6} \ .$$

שלב 6 :

נציב $t = 1$:

$$y''_{xx}(x=0) = y''_{xx}(t=1) = \frac{(y'_x)'_t\,(t=1)}{x'_t(t=1)} \ .$$

$$(y'_x)'_t\,(t=1) = \frac{-171}{81} \ ,$$

$$x'_t(t=1) = 9 \ ,$$

$$y''_{xx}(x=0) = y''_{xx}(t=1) = \frac{(y'_x)'_t\,(t=1)}{x'_t(t=1)} = \frac{-171}{81 \cdot 9} = -\frac{19}{81} \ . \qquad (*6)$$

<u>שלב 7</u> :

נוסחת מקלורן מסדר 2 הוא

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \ .$$

נציב (2*), (4*) ו (6*) ונקבל

$$P_2(x) = 5 + \frac{13}{9}x - \frac{19}{162}x^2$$

<u>שאלה 5</u>

דף נוסחאות: $\int \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\text{arctan}\left(\frac{x}{a}\right)$. לכן

$$\begin{aligned}
\int_3^\infty \frac{1}{9+x^2}\,dx &= \left[\frac{1}{3}\,\text{arctan}\left(\frac{x}{3}\right)\right]_3^\infty \\
&= \left[\frac{1}{3}\,\text{arctan}\left(\frac{\infty}{3}\right) - \frac{1}{3}\,\text{arctan}\left(\frac{3}{3}\right)\right] \\
&= \left[\frac{1}{3}\,\text{arctan}\left(\infty\right) - \frac{1}{3}\,\text{arctan}\left(1\right)\right] \\
&= \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4}\right] \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} \\
&= \frac{\pi}{12} \ .
\end{aligned}$$