שיעור 6
אי-כריעות משפט הרדוקציה

הגדרה 6.1 L_{acc}

$$L_{\text{acc}} = \{\langle M, w\rangle \mid w \in L(M)\} \in RE\backslash R$$

הגדרה 6.2 L_{halt}

$$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w\rangle \mid \text{עוצרת על } w \ M\} \in RE\backslash R$$

הגדרה 6.3 L_{d}

$$L_{\text{d}} = \{\langle M\rangle \mid \langle M\rangle \notin L(M)\} \notin RE$$

משפט 6.1 $L_{\text{acc}} \in RE$

$$L_{\text{acc}} \in RE\ .$$

הוכחה: מכיוון ש- $L(U) = L_{\text{acc}}$, כאשר U המכונת טיורינג האוניברסלית אשר מקבלת את L_{acc}, לכן $L_{\text{acc}} \in RE$. ■

משפט 6.2 $L_{\text{halt}} \in RE$

$$L_{\text{halt}} \in RE\ .$$

הוכחה: נבנה מ"ט U' שהיא למעשה U פרט למקום שבו U עצרה ודחתה, U' תעצור ותקבל.

נוכיח כי U' מקבלת את L_{halt}:

אם $x \in L_{\text{halt}}$

$\Leftarrow$ $x = \langle M, w\rangle$ ו- M עוצרת על w

$\Leftarrow$ U' עוצרת ומקבלת את x.

אם $x \notin L_{\text{halt}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

- $x \neq \langle M, w\rangle$ $\Leftarrow$ U' דוחה את x.
- $x = \langle M, w\rangle$ ו- M לא עוצרת על w $\Leftarrow$ U' לא עוצרת על x.

■

משפט 6.3 $L_{\mathrm{d}} \notin RE$

$$L_{\mathrm{d}} \notin RE \ .$$

הוכחה:
נניח בשלילה כי $L_{\mathrm{d}} \in RE$.

$\Leftarrow$ $\exists$ מ"ט M_{d} המקבלת את L_{d}.

$\Leftarrow$ $L(M_{\mathrm{d}}) = L_{\mathrm{d}}$.

נבדוק ריצה של M_d על $\langle M_d \rangle$:

- אם $\langle M_{\mathrm{d}} \rangle \in L(M_{\mathrm{d}})$ $\Leftarrow$ $\langle M_{\mathrm{d}} \rangle \notin L_{\mathrm{d}}$ $\Leftarrow$ $L(M_{\mathrm{d}}) \neq L_{\mathrm{d}}$.
- אם $\langle M_{\mathrm{d}} \rangle \notin L(M_{\mathrm{d}})$ $\Leftarrow$ $\langle M_{\mathrm{d}} \rangle \in L_{\mathrm{d}}$ $\Leftarrow$ $L(M_{\mathrm{d}}) \neq L_{\mathrm{d}}$.

בשני המקרים קיבלנו סתירה לכך ש- $L(M_{\mathrm{d}}) = L_{\mathrm{d}}$ ולכן $L_{\mathrm{d}} \notin RE$. ■

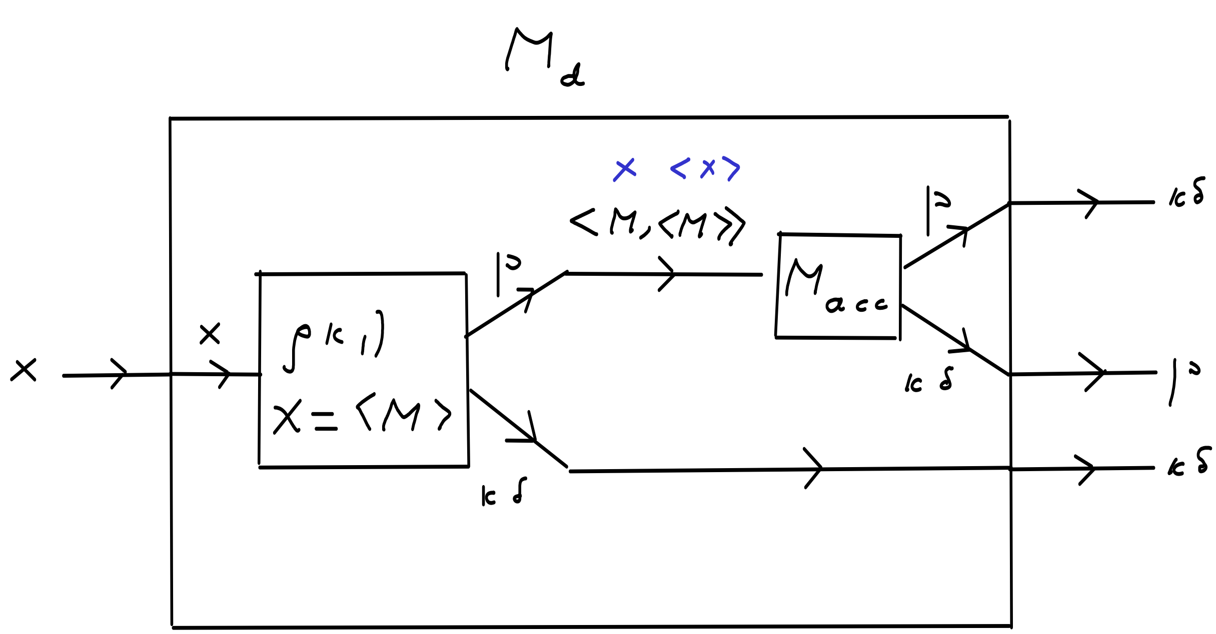
משפט 6.4 L_{acc} **לא כריעה**

$$L_{\mathrm{acc}} = \left\{ \langle M, w \rangle \;\middle|\; w \in L(M) \right\} \notin R \ .$$

הוכחה:
נניח בשלילה כי $L_{\mathrm{acc}} \in R$ ותהי M_{acc} המ"ט המכריעה את L_{acc}.

נשתמש ב- M_{acc} כדי לבנות מ"ט M_{d} המכריעה את L_{d} (בסתירה לכך ש- $L_{\mathrm{d}} \notin RE$ כפי שהוכחנו במשפט 6.3).

$$L_{\mathrm{d}} = \left\{ \langle M, w \rangle \;\middle|\; \langle M \rangle \notin L(M) \right\} \ .$$



<u>התאור של $M_{\rm d}$</u>

$M_{\rm d} =$ על קלט x:

(1 בודקת האם $x=\langle M\rangle$. אם לא $\Leftarrow$ דוחה.

(2 מחשבת את $\langle x\rangle = \langle\langle M\rangle\rangle$.

(3 מריצה את $M_{\rm acc}$ על הזוג $\langle M,\langle M\rangle\rangle$:

- אם $M_{\rm acc}$ מקבלת $\Leftarrow$ $M_{\rm d}$ דוחה.
- אם $M_{\rm acc}$ דוחה $\Leftarrow$ $M_{\rm d}$ מקבלת.

כעת נוכיח כי $M_{\rm d}$ מכריעה את $L_{\rm d}$:

אם $x\in L_{\rm d}$

$\Leftarrow$ $x=\langle M\rangle$ ו- $\langle M\rangle\notin L(M)$

$\Leftarrow$ $M_{\rm acc}$ דוחה את הזוג $\langle M,\langle M\rangle\rangle$

$\Leftarrow$ $M_{\rm d}$ מקבלת את x.

אם $x\notin L_{\rm d}$ שני מקרים:

מקרה (1): $x\neq\langle M\rangle$ $\Leftarrow$ $M_{\rm d}$ דוחה את x.

מקרה (2): $x=\langle M\rangle$ ו- $\langle M\rangle\in L(M)$

$\Leftarrow$ $M_{\rm acc}$ מקבלת את זוג $\langle M,\langle M\rangle\rangle$

$\Leftarrow$ $M_{\rm d}$ דוחה את x.

■

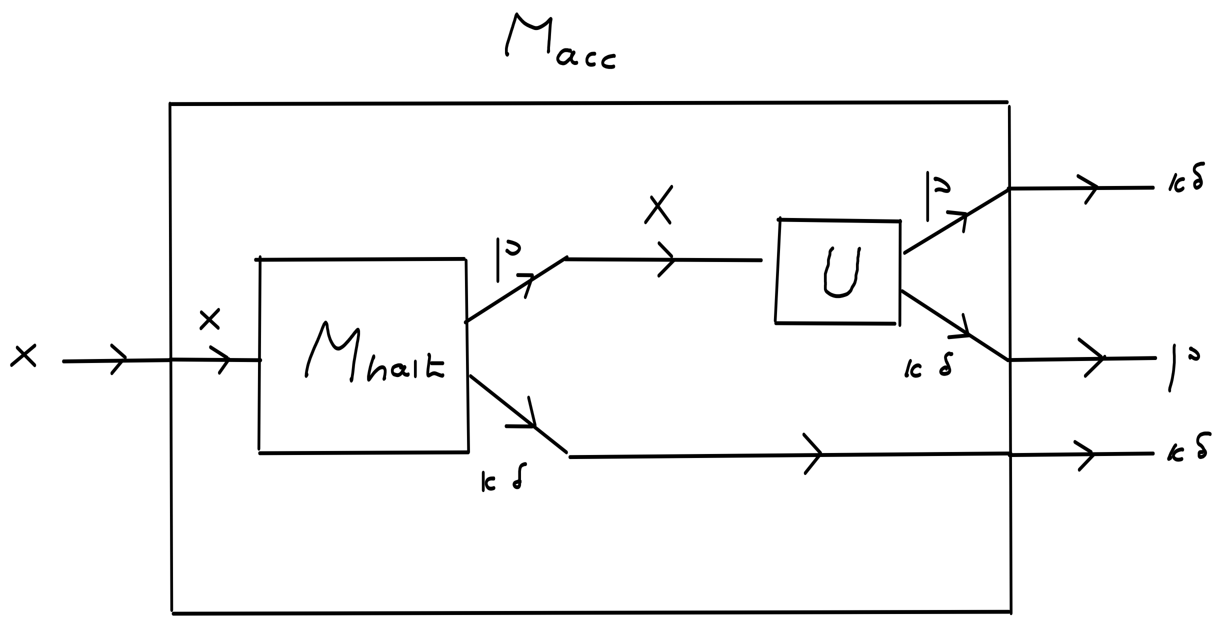
משפט 6.5 $L_{\rm halt}$ לא כריעה

$$L_{\rm halt}=\left\{\langle M,w\rangle \ \middle|\ M \text{ עוצרת על } w\right\}\notin R\ .$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי $L_{\rm halt}\in R$ ותהי $M_{\rm halt}$ מ"ט המכריעה את $L_{\rm halt}$.

נשתמש ב- $M_{\rm halt}$ כדי לבנות מ"ט $M_{\rm acc}$ המכריעה את $L_{\rm acc}$ (בסתירה לכך ש- $L_{\rm acc}\notin R$ כפי שהוכחנו במשפט 6.4).



<u>התאור של M_{acc}</u>

$M_{\text{acc}}=$ על קלט x:

1) מריצה את M_{acc} על x.

- אם M_{halt} דוחה $\Leftarrow$ M_{acc} דוחה.
- אם M_{halt} מקבלת $\Leftarrow$ M_{acc} מריצה את U על x ועונה כמוה.

<u>אבחנה</u>

נוכיח כי M_{acc} מכריעה את L_{acc}:

אם $x \in L_{\text{acc}}$

$\Leftarrow$ $x=\langle M,w\rangle$ ו- $\langle w\rangle \in L(M)$

$\Leftarrow$ M_{halt} מקבלת את x וגם U מקבלת את x

$\Leftarrow$ M_{acc} מקבלת את x.

אם $x \notin L_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

מקרה (1): $x \neq \langle M,w\rangle$

$\Leftarrow$ M_{halt} דוחה את x

$\Leftarrow$ M_{acc} דוחה את x.

מקרה (2): $x=\langle M,w\rangle$ ו- $\langle w\rangle \notin L(M)$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

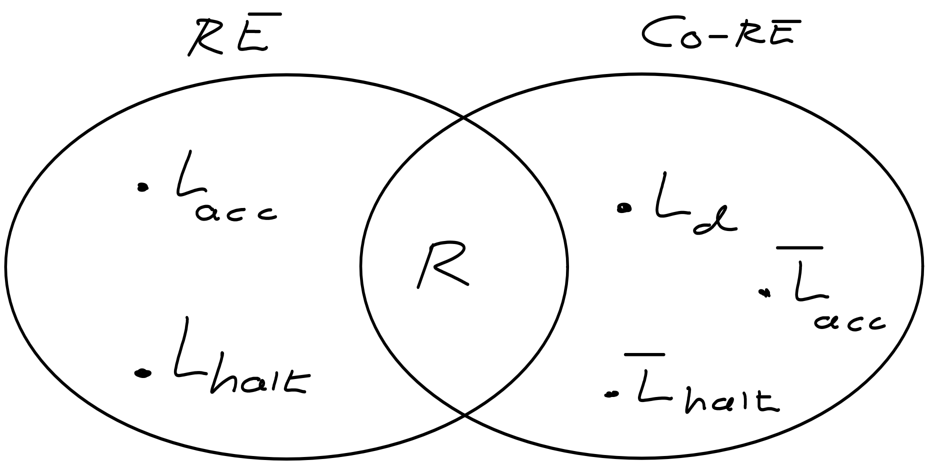
מקרה (א): M לא עוצרת על w $\Leftarrow$ M_{halt} דוחה את x $\Leftarrow$ M_{acc} דוחה את x.

מקרה (ב): M דוחה את w $\Leftarrow$ M_{halt} מקבלת את x אבל U דוחה את x $\Leftarrow$ M_{acc} דוחה את x.

הראנו כי M_{acc} מכריעה את L_{acc} בסתירה לכך ש- $L_{\text{acc}} \notin R$.
לכן $L_{\text{halt}} \notin R$. ■

משפט 6.6

$$L_{\text{acc}} \in RE \backslash R \quad \Rightarrow \quad \bar{L}_{\text{acc}} \notin RE \ ,$$
$$L_{\text{halt}} \in RE \backslash R \quad \Rightarrow \quad \bar{L}_{\text{halt}} \notin RE \ ,$$
$$L_{\text{d}} \notin RE \backslash R \ .$$



6.1 מ"ט המחשבת את פונקציה

הגדרה 6.4 מ"ט המחשבת פונקציה

בהינתן פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ אומרים כי מ"ט M מחשבת את f אם לכל $x \in \Sigma^*$:

- M מגיעה ל- q_{acc} בסוף החישוב של $f(x)$ וגם
- על סרט הפלט של M רשום $f(x)$.

הערה 6.1

מ"ט שמחשבת פונקציה עוצרת תמיד.

הגדרה 6.5 מ"ט המחשבת פונקציה

בהינתן פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ אומרים כי f חישבה אם קיימת מ"ט המחשבת את f.

דוגמה 6.1

$$f_1(x) = xx \ . \tag{6.1}$$

$f_1(x)$ חשיבה.

דוגמה 6.2

$$f_2(x) = \begin{cases} x & \text{זוגי}\ |x| \\ xx & \text{אי-זוגי}\ |x| \end{cases} \ . \qquad (6.2)$$

$f_2(x)$ חשיבה.

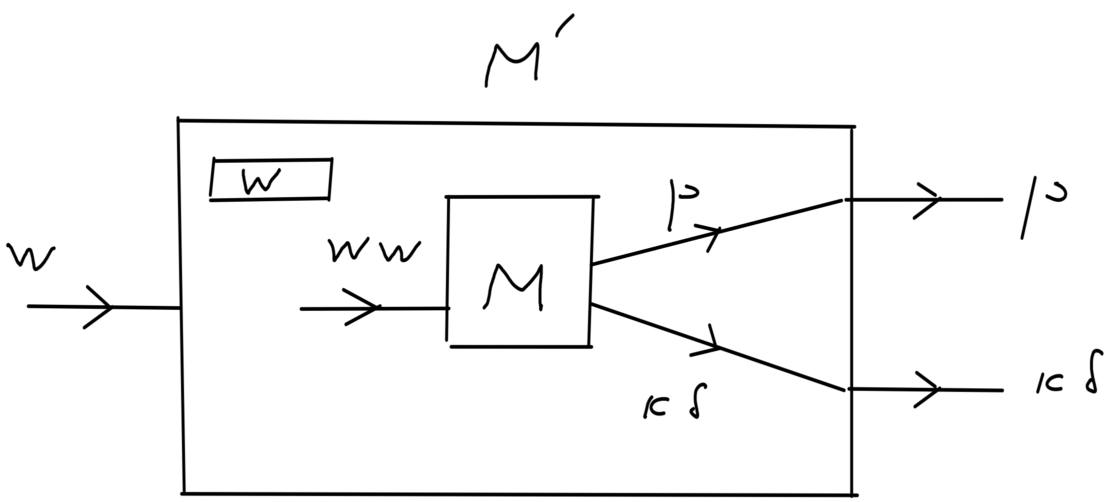
דוגמה 6.3

$$f_3(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M \rangle \\ \langle M^* \rangle & x \neq \langle M \rangle \end{cases} \ . \qquad (6.3)$$

כאשר

- M^* מ"ט שמקבלת כל קלט.
- M' מ"ט המקבלת את השפה

$$L(M') = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; ww \in L(M) \ . \right\}$$



$f_3(x)$ חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שבודקת האם $x = \langle M \rangle$. אם לא, מחזירה קידוד קבוע $\langle M^* \rangle$. ואם כן, מחזירה קידוד $\langle M' \rangle$ ע"י הוספת מעברים המשכפלים את הקלט בתחילת הקידוד $\langle M \rangle$.

דוגמה 6.4

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & x = \langle M \rangle \wedge \langle M \rangle \in L(M) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \qquad (6.4)$$

$f_4(x)$ לא חשיבה כי ייתכנו קלטים $x = \langle M \rangle$ ו- M לא עוצרת על $\langle M \rangle$.

6.2 רדוקציות

הגדרה 6.6 רדוקציות

בהינתן שתי שפות $L_1,L_2\subseteq \Sigma^*$ אומרים כי L_1 ניתנת לרדוקציה ל- L_2, ומסמנים

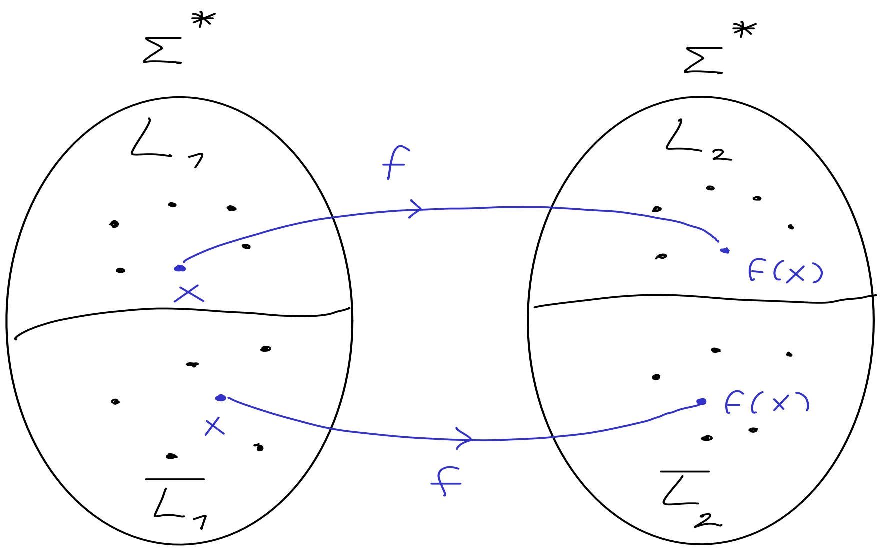
$$L_1\leqslant L_2 \ ,$$

אם $\exists$ פונקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ המקיימת:

1) f חשיבה

2) לכל $x\in\Sigma^*$:

$$x\in L_1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)\in L_2 \ .$$



דוגמה 6.5

נתונות השפות

$$L_1=\left\{x\in\{0,1\}^* \ \middle| \ \text{זוגי } |x|\right\} \ ,$$
$$L_2=\left\{x\in\{0,1\}^* \ \middle| \ \text{אי-זוגי } |x|\right\} \ .$$

הוכיחו כי

$$L_1\leqslant L_2 \ .$$

פתרון:

נגדיר את הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{זוגי } |x|,\\ 10 & \text{אי-זוגי } |x|\end{cases}$$

<u>הוכחת הנכונות:</u>

$x\in L_1 \Leftarrow$ $|x|$ זוגי $\Leftarrow f(x)=1 \Leftarrow |f(x)|$ אי-זוגי $f(x)\in L_2$.

$x \notin L_1 \Leftarrow$ $|x|$ אי-זוגי $\Leftarrow f(x)=10 \Leftarrow |f(x)|$ זוגי $f(x)\notin L_2$.

משפט 6.7 משפט הרדוקציה

לכל שתי שפות $L_1,L_2\subseteq\Sigma^*$, אם קיימת רדוקציה

$$L_1 \leqslant L_2$$

אזי התנאים הבאים מתקיימים:

$$\begin{array}{llll} (1) & L_2\in R & \Rightarrow & L_1\in R \\ (2) & L_2\in RE & \Rightarrow & L_1\in RE \\ (3) & L_1\notin R & \Rightarrow & L_2\notin R \\ (4) & L_1\notin RE & \Rightarrow & L_2\notin RE \end{array}$$

הוכחה: מכיוון ש-

$$L_1\leqslant L_2$$

קיימת פונקציה f חשיבה המקיימת:

$$x\in L_1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)\in L_2$$

לכל $x\in\Sigma^*$.

תהי M_f מ"ט המחשבת את f.

(1) <u>נוכיח $L_2\in R \Rightarrow L_1\in R$</u>

תהי M_2 מ"ט המכריעה את L_2.

נבנה מ"ט M_1 המכריעה את L_1.

<u>התאור של M_1</u>

$M_1 =$ על קלט x:

1. מחשבת את $f(x)$ בעזרת M_f.
2. מריצה את M_2 על $f(x)$ ועונה כמוה.

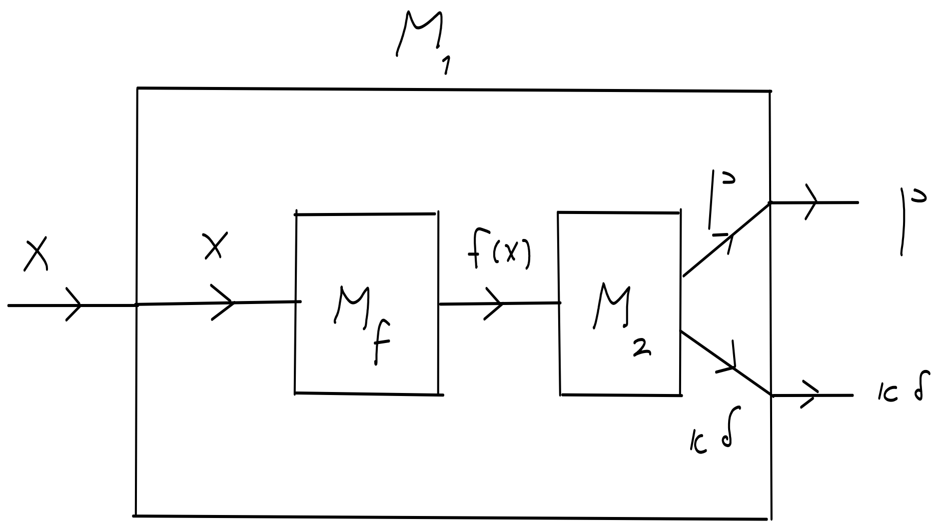
נוכיח כי M_1 מכריעה את L_1.

- אם $x\in L_1 \Leftarrow f(x)\in L_2 \Leftarrow M_2$ מקבלת את $f(x) \Leftarrow M_1$ מקבלת את x.
- אם $x\notin L_1 \Leftarrow f(x)\notin L_2 \Leftarrow M_2$ דוחה את $f(x) \Leftarrow M_1$ דוחה את x.

(2) <u>נוכיח $L_2\in RE \Rightarrow L_1\in RE$</u>

תהי M_2 מ"ט המקבלת את L_2.

נבנה מ"ט M_1 המקבלת את L_1.



<u>התאור של M_1</u>

$M_1 =$ על קלט x:

1. מחשבת את $f(x)$ בעזרת M_f.
2. מריצה את M_2 על $f(x)$ ועונה כמוה.

נוכיח כי M_1 מקבלת את L_1:

- אם $x \in L_1 \Leftarrow f(x) \in L_2 \Leftarrow M_2$ מקבלת את $f(x) \Leftarrow M_1$ מקבלת את x.
- אם $x \notin L_1 \Leftarrow f(x) \notin L_2 \Leftarrow M_2$ לא מקבלת את $f(x) \Leftarrow M_1$ לא מקבלת את x.

(3)

■

כלל 6.1

- אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי $L \in RE$, בוחרים שפה אחרת $L' \in RE$ ומראים שקיימת רדוקציה

$$L \leqslant L' \ .$$

לדודמה:

$$L \leqslant L_{\text{acc}}$$

(כנ"ל לגבי R)

- אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי $L \notin RE$ בוחרים שפה אחרת $L' \notin RE$ ומראים שקיימת רדוקציה

$$L' \leqslant L \ .$$

לדוגמה

$$L_{\mathrm{d}} \leqslant L$$

(כנ"ל לגבי R).