

שעור 10

פולינומים

10.1 חילוק פולינומים, פולינום המינימלי ופולינומים שמתאפסים ע"י מטריצה

משפט 10.1

הפולינום המינימלי הוא יחיד.

הוכחה: נניח שיש שני פולינומים $f_1(x)$ ו- $f_2(x)$, $f_1(x) \neq f_2(x)$ מאותו סדר, כלומר

$$f_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{k-1} x^{k-1} + x^k,$$

$$f_2(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_{k-1} x^{k-1} + x^k.$$

כך ש $f_1(A) = 0$ ו- $f_2(A) = 0$, אז

$$(f_1 - f_2)(A) = 0.$$

$(f_1 - f_2)(x)$ פולינום מסדר קטן מ- k . סתירה.

משפט 10.2 משפט חילוק של פולינומים

יהיו $f(x), g(x)$ פולינומים כך ש- $\deg g \leq \deg f$. אז קיימים פולינומים $r(x), q(x)$ יחידים כך ש

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

כאשר

$$\deg r(x) < \deg g(x), \quad \deg g(x) \leq \deg f(x).$$

משפט 10.3 פולינום שמתאפס ע"י A מחלק את הפולינום המינימלי

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית ויהי $f(x)$ פולינום. אם $f(A) = 0$ אז

$$m_A(x) \mid f(x).$$

הוכחה: נחלק את $f(x)$ ב- $m_A(x)$. לפי משפט חילוק פולינומים,

$$f(x) = m_A(x) \cdot q(x) + r(x)$$

כאשר $\deg r(x) < \deg m_A(x)$. אז

$$f(A) = q(A)m_A(A) + r(A).$$

$$f(A) = 0 \text{ ו- } m_A(A) = 0 \text{ לכן } r(A) = 0.$$

ז"א או $r(x)$ הוא הפולינום האפס או הוא לא פולינום האפס אבל $r(x)$ מתאפס ע"י A .
 $m_A(x)$ הוא הפולינום המינימלי ו $\deg r(x) < \deg m_A(x)$, כלומר $m_A(x)$ הוא הפולינום מדרגה הכי נמוכה המתאפס ע"י A .

לכן $r(A) = 0$ אם $r(x) = 0$, כלומר $r(x)$ פולינום האפס.
 כלומר קיבלנו ש- $f(x) = q(x) \cdot m_A(x)$ ולכן $f(x) \mid m_A(x)$.

מסקנה 10.1 פולינום המינימלי מחלק את הפולינום האופייני

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית. אם $p_A(x)$ הפולינום האופייני ו- $m_A(x)$ הפולינום המינימלי של A , אז

$$m_A(x) \mid p_A(x).$$

הוכחה: לפי משפט קיילי המילטון, $p_A(A) = 0$. הפולינום המינימלי מחלק כל פולינום המתאפס ע"י A , לכן $m_A(x) \mid p_A(x)$.

משפט 10.4 $p_A(x)$ מחלק כל פולינום המתאפס ע"י A בחזקת הסדר של A .

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית. יהי $p_A(x)$ הפולינום האופייני של A . אם A מאפסת את הפולינום $f(x)$, כלומר אם $f(A) = 0$, אז

$$p_A(x) \mid f^n(x).$$

הוכחה: $\deg p_A(x) = n$. $f(A) = 0$ אז $f(x)$ אינו פולינום קבוע, ז"א $\deg f(x) \geq 1$, ולכן $\deg p_A(x) \leq \deg f^n(x)$. נחלק $f^n(x)$ ב- $p_A(x)$ ע"י האלגוריתם איוקלידי:

$$f^n(x) = q(x)p_A(x) + r(x), \quad (*)1$$

$$\deg r(x) < \deg p_A(x) \leq \deg f^n(x)$$

$m_A(x) \mid p_A(x)$ אז $p_A(x) = q_1(x)m_A(x)$. נציב זה ב- $(*)1$ ונקבל

$$f^n(x) = q_1(x)q(x)m_A(x) + r(x). \quad (*)2$$

$f(A) = 0$ לכן $f^n(A) = 0$ לכן $f^n(x) \mid m_A(x)$. נניח ש- $r(x) \neq 0$ ב- $(*)2$. אז $m_A(x) \nmid f^n(x)$. סתירה.

משפט 10.5 גורם אי-פריק של הפולינום האופייני מחלק כל פולינום המתאפס ע"י A .

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית. יהי $p_A(x)$ הפולינום האופייני של A . אם $(x - \lambda_0)$ גורם אי פריק של $p_A(x)$ ו- $f(x)$ פולינום המתאפס ע"י A , כלומר אם $f(A) = 0$, אז

$$(x - \lambda_0) \mid f(x).$$

הוכחה:

אם $(x - \lambda_0)$ גורם אי-פריק של $p_A(x)$, אז λ_0 ערך עצמי של A . נחלק $f(x)$ ב- $(x - \lambda_0)$. כלומר לפי משפט חילוק פולינומים קיימים פולינומים יחידים $q(x), r(x)$ כך ש-

$$f(x) = q(x)(x - \lambda_0) + r(x)$$

כאשר $\deg r(x) < \deg (x - \lambda_0) \leq \deg f(x)$.
 $\deg r(x) = 0$ אז $\deg (x - \lambda_0) = 1$.
 ז"א $r(x)$ פולינום קבוע: $r(x) = c \in \mathbb{F}$ כאשר c סקלר.
 יהי v וקטור עצמי השייך ל- λ_0 . אז

$$0 = f(A)v = q(A)(A - \lambda_0 I)v + cv$$

v הוא הוקטור עצמי השייך ל- λ_0 , אז
 $(A - \lambda_0 I)v = Av - \lambda_0 v = \lambda_0 v - \lambda_0 v = 0$.
 לכן $c = 0$, ואז נקבל

$$f(x) = q(x)(x - \lambda_0),$$

ז"א $(x - \lambda_0) \mid f(x)$.

10.2 מחלק משותף

הגדרה 10.1 מחלק משותף

יהיו $p_1(x), \dots, p_k(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינומים מעל שדה \mathbb{F} . פולינום $h(x) \in \mathbb{F}[x]$ נקרא **מחלק משותף של** $p_1(x), \dots, p_k(x)$ אם לכל $1 \leq i \leq k$ מחלק את $p_i(x)$.

הגדרה 10.2 מחלק משותף מקסימלי

יהיו $p_1(x), \dots, p_k(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינומים שונים מאפס מעל שדה \mathbb{F} . פולינום מתוקן $h(x) \in \mathbb{F}[x]$ נקרא **מחלק משותף מקסימלי של** $p_1(x), \dots, p_k(x)$ אם:

(1) $h(x)$ מחלק משותף של $p_1(x), \dots, p_k(x)$.

(2) אם $q(x)$ הוא מחלק משותף של $p_1(x), \dots, p_k(x)$ אז $q(x)$ מחלק גם את $h(x)$.

מחלק משותף מקסימלי מסומן ב- $\gcd(p_1, p_2, \dots, p_k)$ (greatest common divisor).

משפט 10.6

יהיו $p_1(x), \dots, p_k(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינומים שונים מאפס מעל שדה \mathbb{F} . נגדיר

$$I = \{q_1 p_1 + q_2 p_2 + \dots + q_k p_k \mid q_1, q_2, \dots, q_k \in \mathbb{F}[x]\}$$

כלומר, I הוא אוסף כל "הצירופים הליניאריים" של $p_1(x), \dots, p_k(x)$ כאשר ה"מקדמים" הם הפולינומים $q_1(x), q_2(x), \dots, q_k(x)$. מתקיים:

(1) $p_1(x), \dots, p_k(x) \in I$

(2) אם $L(x) \in I$ ואם $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ אז $q(x)L(x) \in I$

(3) I תת-מרחב ליניארי של $\mathbb{F}[x]$

משפט 10.7

יהיו $p_1(x), \dots, p_k(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינומים שזים מאפס מעל שדה \mathbb{F} . נגדיר

$$I = \{q_1(x)p_1(x) + q_2(x)p_2(x) + \dots + q_k(x)p_k(x) \mid q_1(x), q_2(x), \dots, q_k(x) \in \mathbb{F}[x]\}$$

נניח גם שלפחות אחד מהפולינומים $p_1(x), \dots, p_k(x)$ אינו פולינום האפס.

(1) קיים פולינום מתוקן $h(x) \in I$ כך שזום פולינום שמעלתו קטנה ממעלתו של $h(x)$ סרט לפולינום האפס אינו שייך ל- I .

(2) $h(x)$ הוא מחלק משותף של $p_1(x), p_2(x), \dots, p_k(x)$.

(3) אם $k(x) \in \mathbb{F}[x]$ הוא מחלק משותף של $p_1(x), p_2(x), \dots, p_k(x)$ אז $k(x)$ מחלק גם את $h(x)$.

הוכחה:

(1) לפחות אחד מהפולינומים $p_1(x), p_2(x), \dots, p_k(x)$ אינו פולינום האפס, נסיק מחלק (1) של טענה 10.6 שיש ב- I לפחות פולינום אחד שאינו אפס כלומר פולינום שמעלתו אי-שלילית. לכל קבוצה לא ריקה של מספרים שלמים אי-שליליים קיים מינימום, נובע שקיים פולינום $\hat{h}(x) \in I$ ממעלה מינימלית. כלומר, שום פולינום שמעלתו קטנה ממעלתו של $\hat{h}(x)$ פרט לפולינום האפס אינו שייך ל- I . אם נסמן ב- $a \neq 0 \in \mathbb{F}$ את המקדם העליון של $\hat{h}(x)$ אז הפולינום $h(x) = a^{-1}\hat{h}(x)$ הוא פולינום מתוקן. ממשפט 10.6 סעיף (3) נובע ש- $h(x) \in I$. מעלתו של $h(x)$ שווה למעלתו של $\hat{h}(x)$. נובע שזום פולינום שמעלתו קטנה ממעלתו של $h(x)$ פרט לפולינום האפס, אינו שייך ל- I .

(2) יהי $L(x) \in I$. נוכיח שקיים $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ כך ש- $L(x) = q(x)h(x)$. מכיוון ש- $h(x)$ אינו פולינום האפס ניתן לחלק את $L(x)$ ב- $h(x)$ עם שארית:

$$L(x) = q(x)h(x) + r(x)$$

כאשר $\deg(r) < \deg(h)$. מכיוון ש- $h(x), L(x) \in I$ אזי מסעיפים (2) ו-(3) של משפט 10.6 $r(x) = L(x) - h(x)q(x) \in I$. מכיוון ש- $\deg(r) < \deg(h)$ נסיק מתכונת מינימליות של $h(x)$ ש- $r(x) = 0$.

לכן $L(x) = q(x)h(x)$ ולכן $h(x)$ מחלק $L(x)$.

(3) יהיו $g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינומים המקיימים

$$p_1(x) = g_1(x)k(x), \quad p_2(x) = g_2(x)k(x), \quad \dots \quad p_k(x) = g_k(x)k(x).$$

מכיוון ש- $h(x) \in I$ נובע שקיימים $q_1(x), q_2(x), \dots, q_k(x) \in \mathbb{F}[x]$ שעבורם

$$h(x) = q_1p_1(x) + \dots + q_kp_k(x).$$

לכן

$$h(x) = q_1(x)g_1(x)k(x) + \dots + q_k(x)g_k(x)k(x) = \left(q_1(x)g_1(x) + \dots + q_k(x)g_k(x)\right)k(x)$$

כלומר $k(x)$ מחלק את $h(x)$.

משפט 10.8

יהיו $p_1(x), \dots, p_k(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינומים שונים מאפס מעל שדה \mathbb{F} . נניח גם שלפחות אחד מהפולינומים $p_1(x), \dots, p_k(x)$ אינו פולינום האפס.

(1) קיים מחלק משותף מקסימלי יחיד $h(x) \in \mathbb{F}[x]$ ל- $p_1(x), \dots, p_k(x)$.

(2) קיימים $q_1(x), \dots, q_k(x) \in \mathbb{F}[x]$ שעבורם $h = q_1 p_1 + q_2 p_2 + \dots + q_k p_k$.

הוכחה: קיומו של מחלק משותף מקסימלי נובע משפט ?? והגדרה 10.2. במהלך ההוכחה של חלק (3) של טענה ?? הוכחנו גם את קיומו של $q_1(x), \dots, q_k(x) \in \mathbb{F}[x]$ כנדרש.

נותרנו עם הוכחת היחידות.

אם $h(x), h'(x)$ הם מחלקים משותפים מקסימליים של $p_1(x), \dots, p_k(x)$ אז מתכונת (2) בהגדרה 10.2 נובע שהם מחלקים זה את זה. שני פולינומים מתוקנים שמחלקים זה את זה הם שווים. ■

הגדרה 10.3 פולינומים זרים

יהיו $p_1(x), p_2(x)$ פולינומים מעל שדה \mathbb{F} .

אומרים כי p_1 ו- p_2 זרים אם אין להם מחלקים משותפים פרט לפולינומי הקבועים.

במילים אחרות, p_1 ו- p_2 זרים אם $\gcd(p_1, p_2) = 1$.

משפט 10.9 פולינומים זרים

יהיו $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינומים שאינם אפס.

p_1 ו- p_2 זרים אם ורק אם קיימים פולינומים $q_1(x), q_2(x)$ שעבורם $q_1(x)p_1(x) + q_2(x)p_2(x) = 1$.

הוכחה:

כיוון אם

אם $\gcd(p_1, p_2) = 1$ אז ממשפט 10.8 נובע שקיימים $q_1(x), q_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ שעבורם $q_1(x)p_1(x) + q_2(x)p_2(x) = 1$.

כיוון רק אם

נניח שקיימים $q_1(x), q_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ שעבורם $q_1(x)p_1(x) + q_2(x)p_2(x) = 1$. יהי $k(x)$ מחלק משותף של p_1 ו- p_2 . עלינו להוכיח ש- $\deg(k) = 0$. לשם כך, די להוכיח ש- $k(x)$ מחלק את 1. ואמנם קיימים פולינומים $g_1, g_2 \in \mathbb{F}[x]$ כך ש-

$$p_1(x) = g_1(x)k(x), \quad p_2(x) = g_2(x)k(x).$$

לכן,

$$1 = q_1(x)p_1(x) + q_2(x)p_2(x) = (q_1(x)g_1(x) + q_2(x)g_2(x))k(x).$$

בפרט, $k(x)$ מחלק את 1.

10.3 כפולה משותפת

הגדרה 10.4 כפולה משותפת

יהיו $p_1(x), \dots, p_k(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינומים שונים מאפס מעל שדה \mathbb{F} . פולינום $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ נקרא **כפולה משותפת של** $p_1(x), \dots, p_k(x)$ אם לכל $1 \leq i \leq k$ מחלק את $q(x)$.

הגדרה 10.5 כפולה משותפת מינימלית

יהיו $p_1(x), \dots, p_k(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינומים שונים מאפס. פולינום מתוקן $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ נקרא **כפולה משותפת מינימלית של** $p_1(x), \dots, p_k(x)$ אם:

(1) $q(x)$ הוא כפולה משותפת של $p_1(x), \dots, p_k(x)$.

(2) שום פולינום שמעלתו קטנה ממעלתו של $q(x)$ פרט לפולינום האפס, אינו כפולה משותפת של $p_1(x), \dots, p_k(x)$.