

## חדו"א 1 סמסטר א' תשפד

### עבודת בית 7: חקירת פונקציות

#### שאלה 1

הגדר מהי אסימפטוטה משופעת של פונקציה ומצא את האסימפטוטות המשופעות של הפונקציות הבאות:

(א)  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

(ב)  $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$

(ג)  $f(x) = x - e^x$

**שאלה 2** שרטטו את הפונקציה  $f(x) = -(x + 2)^2$ .

**שאלה 3** שרטטו את הפונקציה  $f(x) = x^2(x - 2)^2$ .

**שאלה 4** שרטטו את הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 9}$ .

#### שאלה 5

חקרו באופן מלא את הפונקציה  $f(x) = \frac{x - 1}{(x + 1)^2}$ .

#### שאלה 6

חקרו באופן מלא את הפונקציה  $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 4}$ .

#### שאלה 7

חקרו באופן מלא את הפונקציה  $f(x) = x^2 e^{1-x}$ .

#### שאלה 8

חקרו באופן מלא את הפונקציה  $f(x) = \frac{e^x}{x + 1}$ .

#### שאלה 9

חקרו באופן מלא את הפונקציה  $f(x) = (x + 2)e^{1/x}$ .

**שאלה 10**

חקרו באופן מלא את הפונקציה  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}$

**שאלה 11**

חקרו באופן מלא את הפונקציה  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

**שאלה 12** שרטטו את הגרף של הפונקציה  $f(x) = \frac{x^4 - x^3 - 2x^2}{(x - 3)^2}$ .

**שאלה 13 ( סמסטר ב תשע"ח מועד ב שאלה 1 )**

חקרו באופן מלא את הפונקציה

$$f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$$

(תחום הגדרה, חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וצייר את סקיצת הגרף של הפונקציה.

**שאלה 14 ( סמסטר א תשע"ח מועד א שאלה 1 )**

חקרו באופן מלא את הפונקציה

$$f(x) = \frac{(x + 2)^2}{x - 2}$$

(תחום הגדרה, חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וצייר את סקיצת הגרף של הפונקציה.

**שאלה 15 ( סמסטר א תשע"ט מועד ב שאלה 1 )**

חקרו באופן מלא את הפונקציה

$$f(x) = \frac{2 - x^2}{e^x}$$

(תחום הגדרה, חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וצייר את סקיצת הגרף של הפונקציה.

**שאלה 16** שרטטו את הפונקציה  $f(x) = \frac{x^4}{x^2 + 9}$

**שאלה 17** שרטטו את הפונקציה  $f(x) = \frac{2 - x}{x - 1}$

**שאלה 18** שרטטו את הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}$  כאשר  $a > 0$

**שאלה 19** שרטטו את הפונקציה  $f(x) = \frac{x^4}{\sqrt{x^2 - a^2}}$  כאשר  $a > 0$

**שאלה 20** שרטטו את הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 3a^2}}$  כאשר  $a > 0$

**שאלה 21** שרטטו את הפונקציה  $f(x) = \frac{4}{x^2 - 4a^2}$  כאשר  $a > 0$

**שאלה 22**

חקרו באופן מלא את הפונקציה  $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x^2 + 4x}$  (תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וציירו את סקיצת הגרף של הפונקציה.

**שאלה 23** שרטטו את הפונקציה  $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$  כאשר  $a > 0$

**שאלה 24**

חקרו באופן מלא את הפונקציה  $f(x) = \frac{(x+4)^2}{x-3}$  (תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וציירו את סקיצת הגרף של הפונקציה.

**שאלה 25** שרטטו את הפונקציה  $y = \frac{x^2}{x^2 - a^2}$  כאשר  $a > 0$ .

**שאלה 26** ( סמסטר א תש"ף מועד א שאלה 1 ) חקור באופן מלא את הפונקציה

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$$

(תחום הגדרה, חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וצייר את סקיצת הגרף של הפונקציה.

## תשובות

### שאלה 1

קו ישר  $y = m \cdot x + n$  נקרא אסימפטוטה משופעת של פונקציה  $f(x)$  אם המרחק בין גרף הפונקציה לבין הקו  $y = m \cdot x + n$  שואף ל-0 כאשר  $x$  שואף ל  $\infty$  או  $-\infty$ .  
במידה ש  $y = mx + n$  אסימפטוטה משופעת של  $f(x)$ , אז  $m$  ו  $n$  ניתנים ע"י הנוסחאות

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$$

(אותו דבר עבור  $x \rightarrow -\infty$ ). אם  $m, n$  מספרים סולפיים, אז קיימת אסימפטוטה משופעת.

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{א)}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1} - 2x) = 0.$$

לכן  $y = 2x$  אסימפטוט המשופעת ב-  $\pm\infty$ .

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \quad \text{ב)}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2}{x-1} - x \right) = 1.$$

לכן  $y = x + 1$  אסימפטוט המשופעת ב-  $\pm\infty$ .

$$f(x) = x - e^x \quad \text{ג)}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - e^x}{x} = -\infty$$

אין אסימפטוט המשופעת ב-  $+\infty$ .

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - e^x}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^x - x) = 0.$$

לכן  $y = x$  אסימפטוט המשופעת ב-  $-\infty$ .

### שאלה 2

שלב 1 תחום הגדרה: כל  $x$ .

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה- $x$ :

$y = 0$  כאשר  $x = -2$  ולכן נקודת חיתוך עם ציר  $x$  היא  $(-2, 0)$ .

נקודת חיתוך עם ציר ה- $y$ :

$y = -4$  כאשר  $x = 0$  ולכן נקודת חיתוך עם ציר  $y$  היא  $(0, -4)$ .

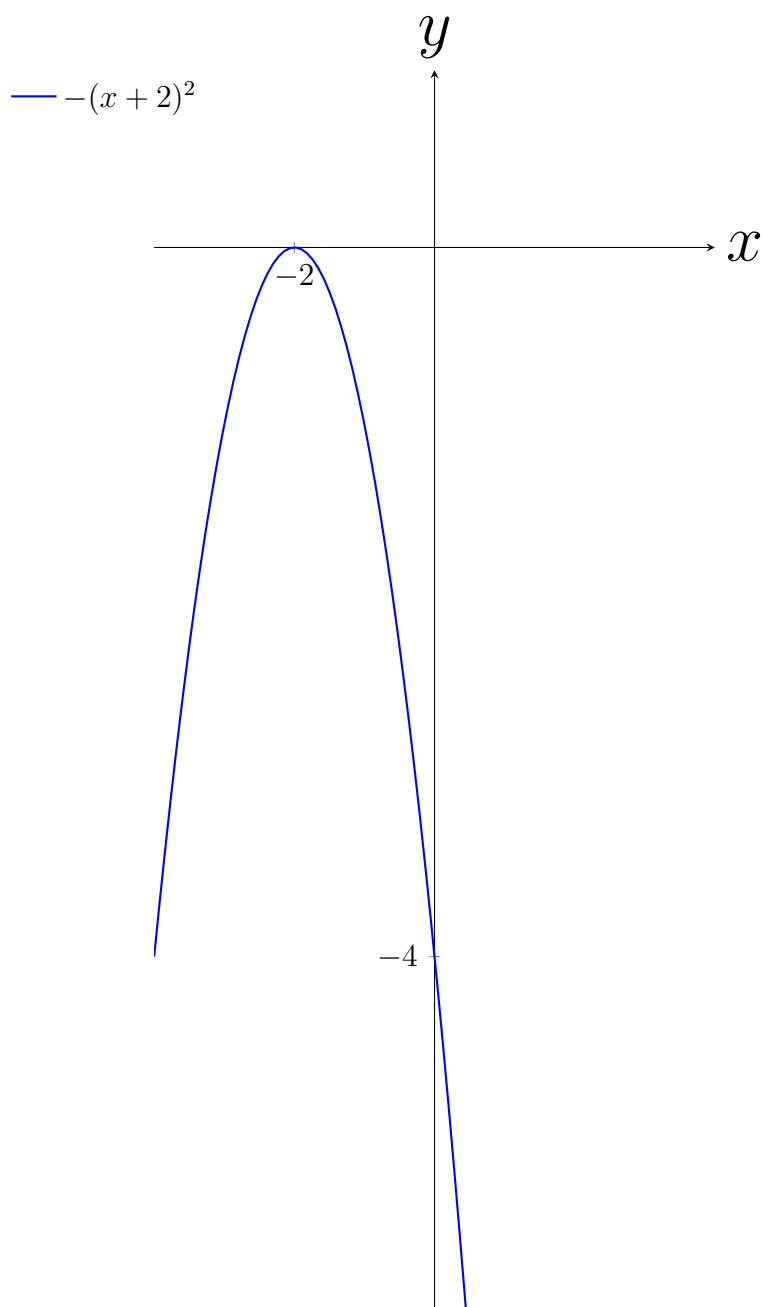
$y \leq 0$  בכל מקום בתחום.

שלב 3 הפונקציה מוגדרת בכל נקודה בתחום.

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \{-(x+2)^2\} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \{-(x+2)^2\} = -\infty.$$

שלב 5



### שאלה 3

שלב 1 תחום הגדרה: כל  $x$ .

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה- $x$ :

$y = 0$  כאשר  $x = 0$  או  $x = 2$ . ולכן נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$  הן  $(0, 0)$  ו- $(2, 0)$ .

נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :

$y = 0$  כאשר  $x = 0$  ולכן נקודת חיתוך עם ציר ה- $y$  היא  $(0, 0)$ .

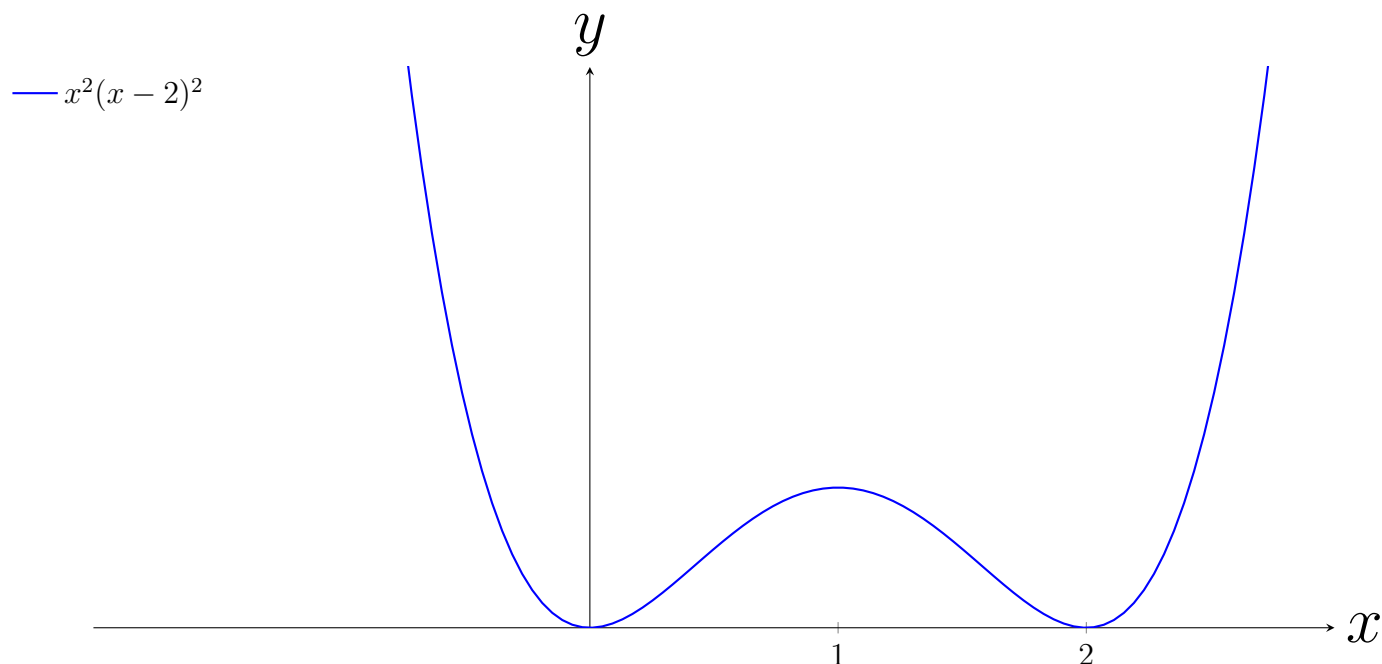
$y \geq 0$  בכל מקום בתחום.

שלב 3 הפונקציה מוגדרת בכל נקודה בתחום.

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \{x^2(x-2)^2\} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \{x^2(x-2)^2\} = +\infty.$$

שלב 5



### שאלה 4

שלב 1 תחום הגדרה: כל  $x$ .

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה- $x$ :

$y = 0$  כאשר  $x = 0$ . ולכן נקודת חיתוך עם ציר ה- $x$  היא  $(0, 0)$ .

נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :

נציב  $x = 0$  בפונקציה ונקבל  $y = 0$ . לכן נקודת חיתוך עם ציר ה- $y$  היא  $(0, 0)$ .

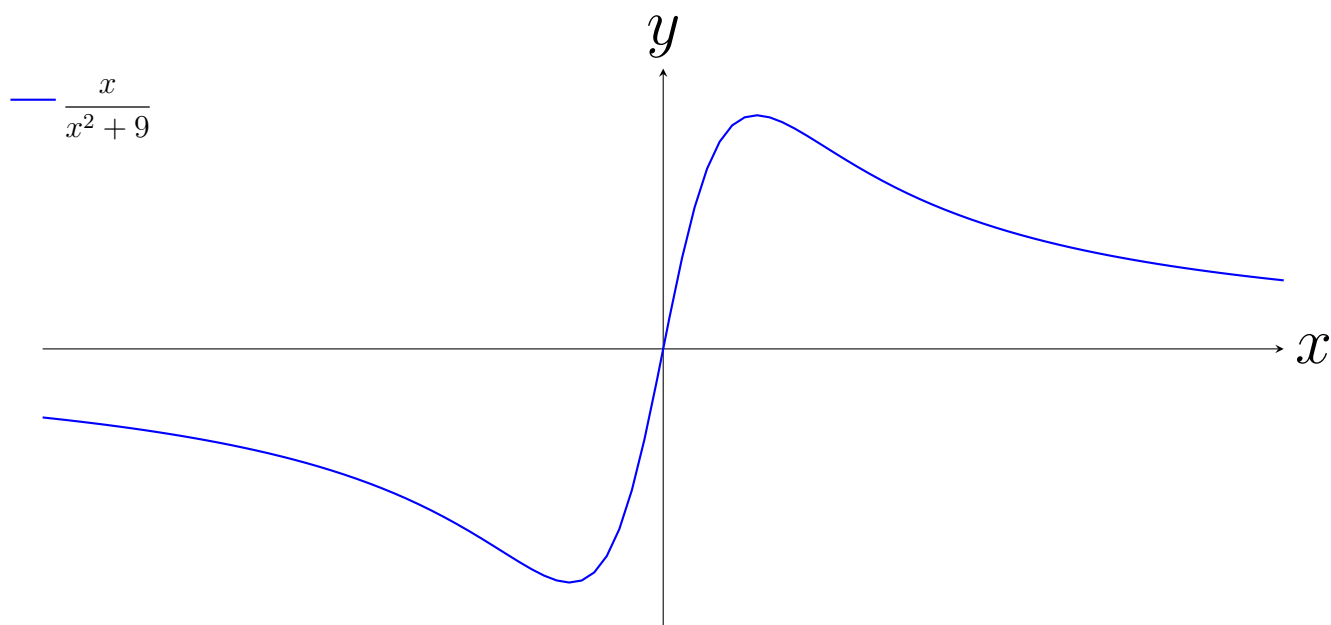
$y$	$x$
$y > 0$	$x > 0$
$y < 0$	$x < 0$
$y = 0$	$x = 0$

שלב 3 אינן נקודות בהן הפונקציה לא מוגדרת.

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

שלב 5



שאלה 5

$$f(x) = \frac{x - 1}{(x + 1)^2}$$

שלב 1 תחום הגדרה:  $x \neq -1$ .

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה:  $(0, -1), (1, 0)$ .

$x$	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

**שלב 3** אסימפטוטה אנכית:  $x = -1$

**שלב 4** אסימפטוטה אופקית:  $y = 0$  ב  $\pm\infty$ .

**שלב 5** אסימפטוטה משופעת: אין.

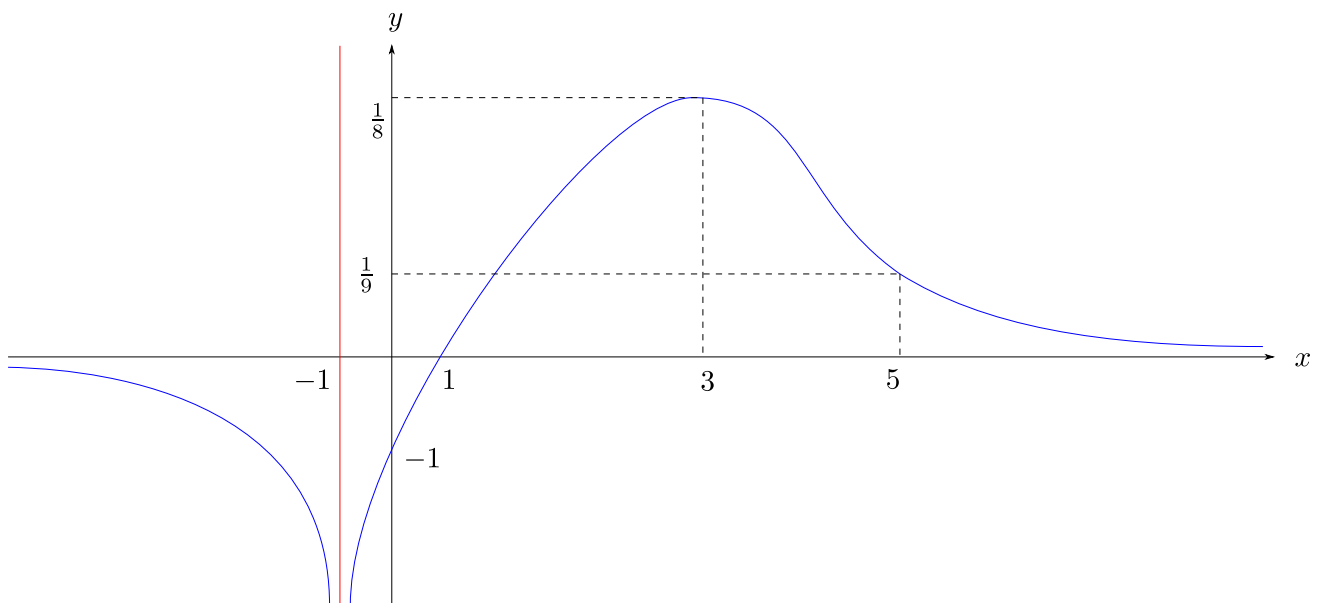
**שלב 6** נקודות קריטיות:  $f'(x) = \frac{3-x}{(1+x)^3}$ . יש נקודת קריטית ב-  $\left(3, \frac{1}{8}\right)$ .

$x$	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	לא מוגדר	$\nearrow$	מקסימום	$\searrow$

**שלב 7** תחומי קמירות:  $f''(x) = \frac{2(x-5)}{(x+1)^4}$ . נקודות פיתול:  $\left(5, \frac{1}{9}\right)$ .

$x$	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 5$	$x = 5$	$x > 5$
$f''(x)$	$-$	לא מוגדר	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	קמורה $\downarrow$	לא מוגדר	קמורה $\downarrow$	נקודת פיתול	קמורה $\uparrow$

**שלב 8** שרטוט:





## שאלה 6

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 4} .$$

**שלב 1** תחום הגדרה:  $x \neq \pm 2$ .

**שלב 2** נקודות חיתוך וסימני הפונקציה:  $(0, 0)$ .

$x$	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
$f(x)$	-	+	-	+

**שלב 3** אסימפטוטה אנכית:  $x = -2$  ו-  $x = 2$ .

**שלב 4** אסימפטוטה אופקית: אין.

**שלב 5** אסימפטוטה משופעת:

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = 2 ,$$

$$n_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m_1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^3}{x^2 - 4} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = 0 .$$

לכן  $y = 2x$  אסימפטוטה משופעת ב-  $x = \infty$ .

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = 2 ,$$

$$n_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m_2 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x^3}{x^2 - 4} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 2x(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = 0 .$$

$y = 2x$  אסימפטוטה משופעת ב-  $x = -\infty$ .

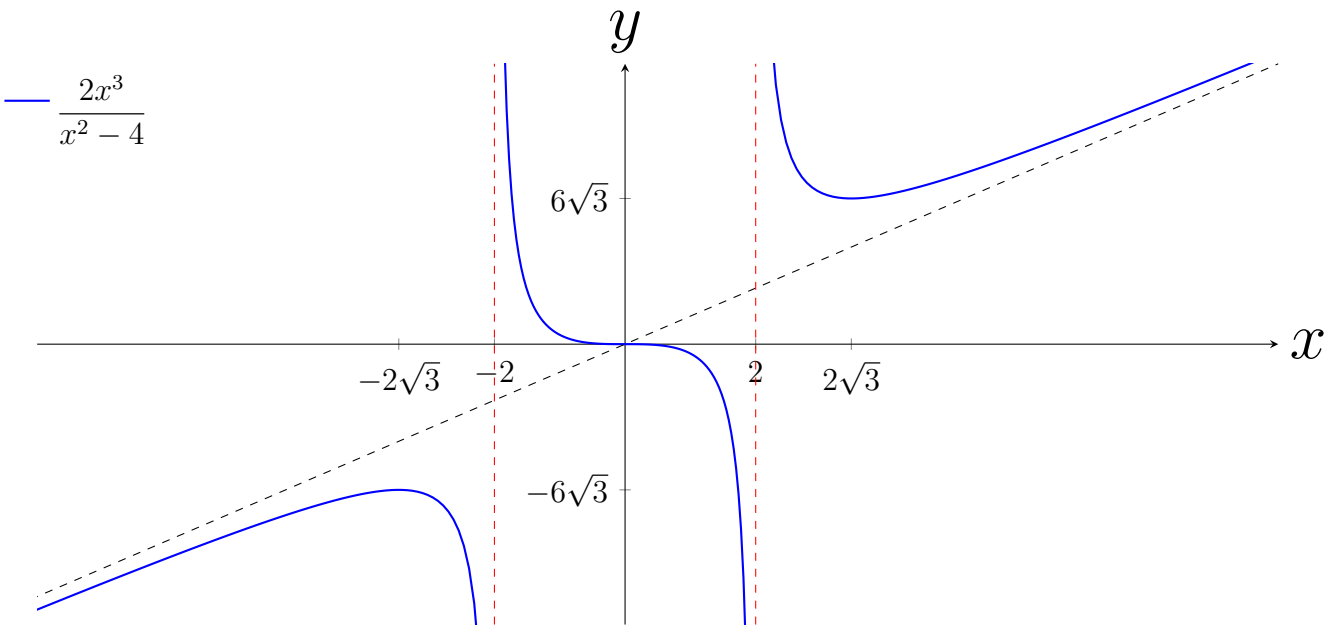
**שלב 6** תחומי עליה וירידה:  $f'(x) = \frac{2x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$ . ישנן נקודות קריטיות ב-  $(0, 0)$ ,  $(-2\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$  ו-  $(2, \sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ .

$x$	$< -2\sqrt{3}$	$x = -2\sqrt{3}$	$\in (-2\sqrt{3}, -2)$	$\in (-2, 0)$	$x = 0$	$\in (0, 2)$	$\in (2, 2\sqrt{3})$	$x = 2\sqrt{3}$	$x > 2\sqrt{3}$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	-	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	מקס	$\searrow$	$\searrow$	פיתול	$\searrow$	$\searrow$	מינימום	$\nearrow$

**שלב 7** תחומי קמירות:  $f''(x) = \frac{16x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$  נקודות פיתול ב-  $(0, 0)$ .

$x$	$x < -2$	$x \in (-2, 0)$	$x \in (0, 2)$	$x > 2$
$f''(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	קמורה ↓	קמורה ↑	קמורה ↓	קמורה ↑

**שלב 8** שרטוט:



**שאלה 7**

$$f(x) = x^2e^{1-x} \; .$$

**שלב 1** תחום הגדרה:  $x \in (-\infty, \infty)$ .

**שלב 2** נקודות חיתוך וסימני הפונקציה:  $(0, 0)$ .

$$f(x) \geq 0 \text{ לכל } x.$$

**שלב 3** אסימפטוטה אנכית: איו.

**שלב 4** אסימפטוטה אופקית: הישר  $y = 0$  אסימפטוטה אופקית ב-  $x = +\infty$ . ב-  $x = -\infty$  אין אסימפטוטה אופקית.

**שלב 5** אסימפטוטה משופעת: אין.

**שלב 6** תחומי עליה וירידה:  $f'(x) = -e^{1-x}(x-2)x$ . ישנו נקודות קריטיות ב-  $(0, 0)$  ו-  $(2, 4/e)$

$x$	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	מינימום	$\nearrow$	מקסימום	$\searrow$

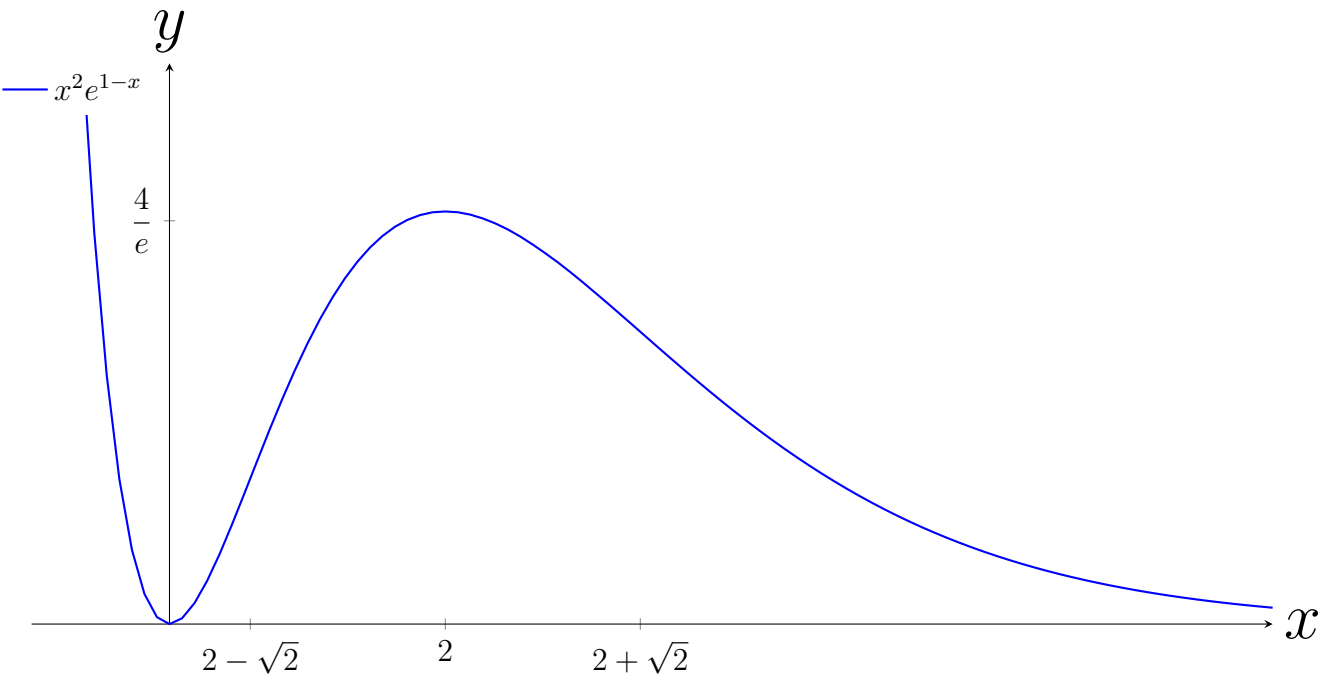
**שלב 7** תחומי קמירות:

$$f''(x) = e^{1-x} (x^2 - 4x + 2) = e^{1-x} (x - 2 + \sqrt{2}) (x - 2 - \sqrt{2})$$

יש נקודת פיתול ב-  $x = 2 - \sqrt{2}$  ו-  $x = 2 + \sqrt{2}$ .

$x$	$x < 2 - \sqrt{2}$	$x \in (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$	$x > 2 + \sqrt{2}$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	קמורה $\uparrow$	קמורה $\downarrow$	קמורה $\uparrow$

**שלב 8** שרטוט:



## שאלה 8

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

שלב 1 תחום הגדרה:  $x \neq -1$ .

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה:  $(0, 1)$ .

$x$	$x < -1$	$x > -1$
$f(x)$	-	+

שלב 3 אסימפטוטה אנכית:  $x = -1$ .

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: ב-  $x = +\infty$  אין אסימפטוטה אופקית. הישר  $y = 0$  אסימפטוטה אופקית ב-  $x = -\infty$ .

שלב 5 אסימפטוטה משופעת: אין.

שלב 6 תחומי עליה וירידה:  $f'(x) = \frac{e^x x}{(x+1)^2}$ . ישנו נקודות קריטיות ב-  $(0, 1)$

$x$	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	מינימום	$\nearrow$

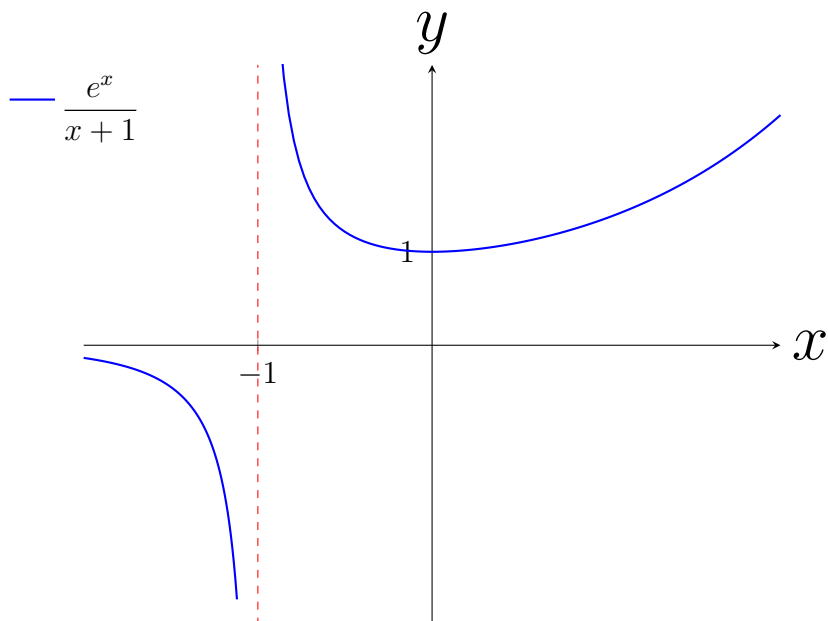
שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{e^x (x^2 + 1)}{(x+1)^3}$$

נקודת פיתול: אין.

$x$	$x < -1$	$x < -1$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	קמורה $\downarrow$	קמורה $\uparrow$

שלב 8 שרטוט:



## שאלה 9

$$f(x) = (x + 2)e^{1/x}.$$

**שלב 1** תחום הגדרה:  $x \neq 0$ .

**שלב 2** נקודות חיתוך וסימני הפונקציה:  $(0, 1)$ .

$x$	$x < -2$	$x > -2$
$f(x)$	–	+

**שלב 3** אסימפטוטה אנכית:  $x = 0$ .

**שלב 4** אסימפטוטה אופקית: אין.

**שלב 5** אסימפטוטה משופעת: הישר  $y = x + 3$  אסימפטוטה משופעת ב-  $x = +\infty$  וב-  $x = -\infty$ .

**שלב 6** תחומי עליה וירידה:  $f'(x) = \frac{e^{1/x}(x^2 - x - 2)}{x^2}$ . ישנו נקודות קריטיות ב-

$$\left(-1, \frac{1}{e}\right) \text{ ו- } (2, 4\sqrt{e})$$

$x$	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	+	0	–	–	0	+
$f(x)$	↗	מקסימום	↘	↘	מינימום	↗

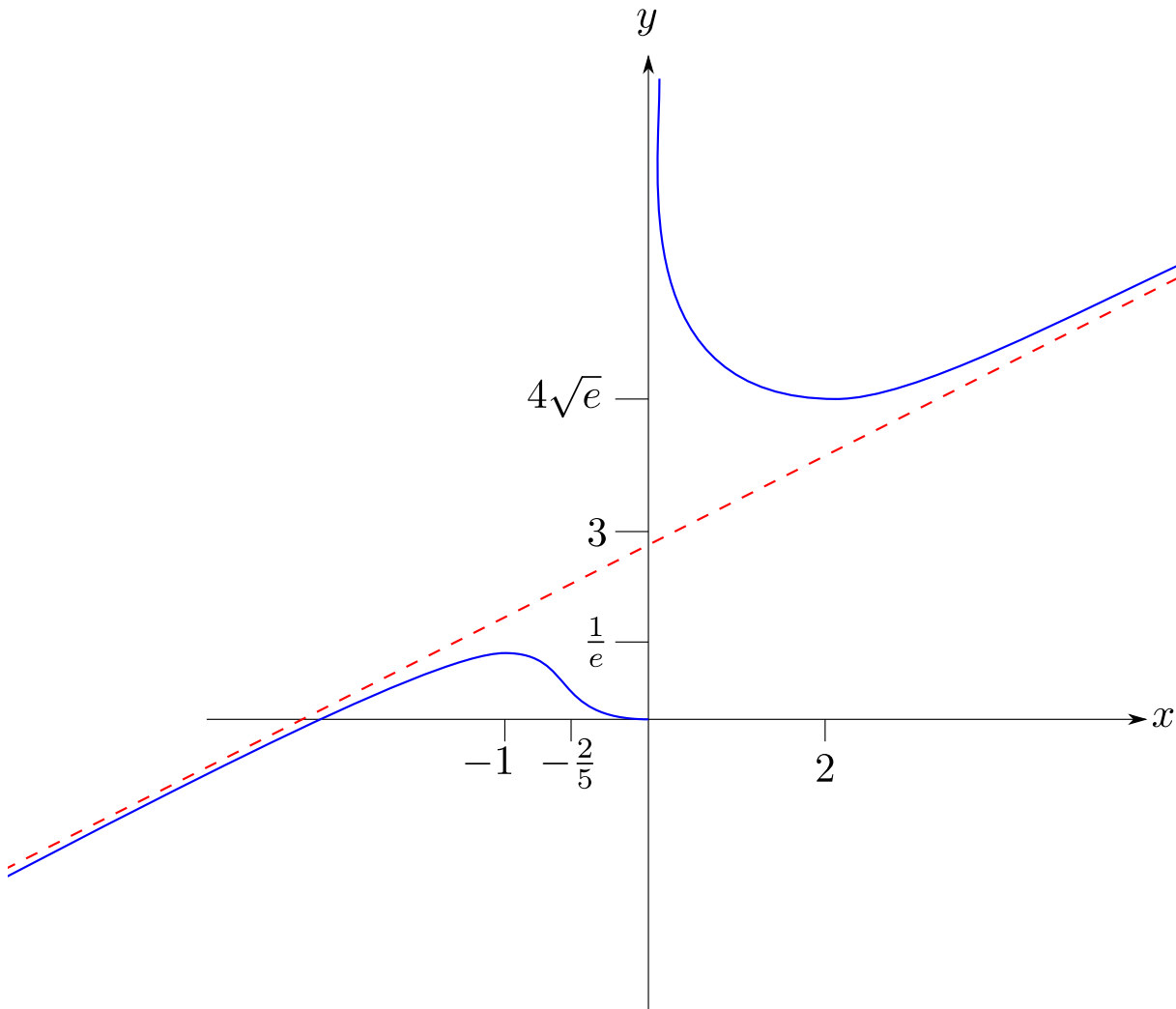
**שלב 7** תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{e^{1/x}(5x + 2)}{x^4}$$

נקודת פיתול ב-  $\left(-\frac{2}{5}, \frac{8}{5e^{5/2}}\right)$  אין.

$x$	$x < -\frac{2}{5}$	$x = -\frac{2}{5}$	$x > -\frac{2}{5}$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	קמורה ↓	נקודת פיתול	קמורה ↑

**שלב 8** שרטוט:



## שאלה 10

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}.$$

**שלב 1** תחום הגדרה:  $(-\infty, -3]$  ו  $[3, \infty)$ .

**שלב 2** נקודות חיתוך וסימני הפונקציה:  $(-3, 0)$  ו  $(3, 0)$ .

$x$	$x < -3$	$-3 < x < 3$	$x > 3$
$f(x)$	$-$	$\nexists$	$+$

**שלב 3** אסימפטוטה אנכית: אין.

**שלב 4** אסימפטוטה אופקית:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

ולפיו הקו  $y = 1$  אסימפטוטה אופקית ב  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

ולפיו הקו  $y = -1$  אסימפטוטה אופקית ב  $-\infty$ .

**שלב 5** אסימפטוטה משופעת: אין.

**שלב 6** תחומי עליה וירידה:  $f'(x) = \frac{9}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}}$ . אין נקודות קריטיות.

$x$	$x < -3$	$-3 < x < 3$	$x > 3$
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

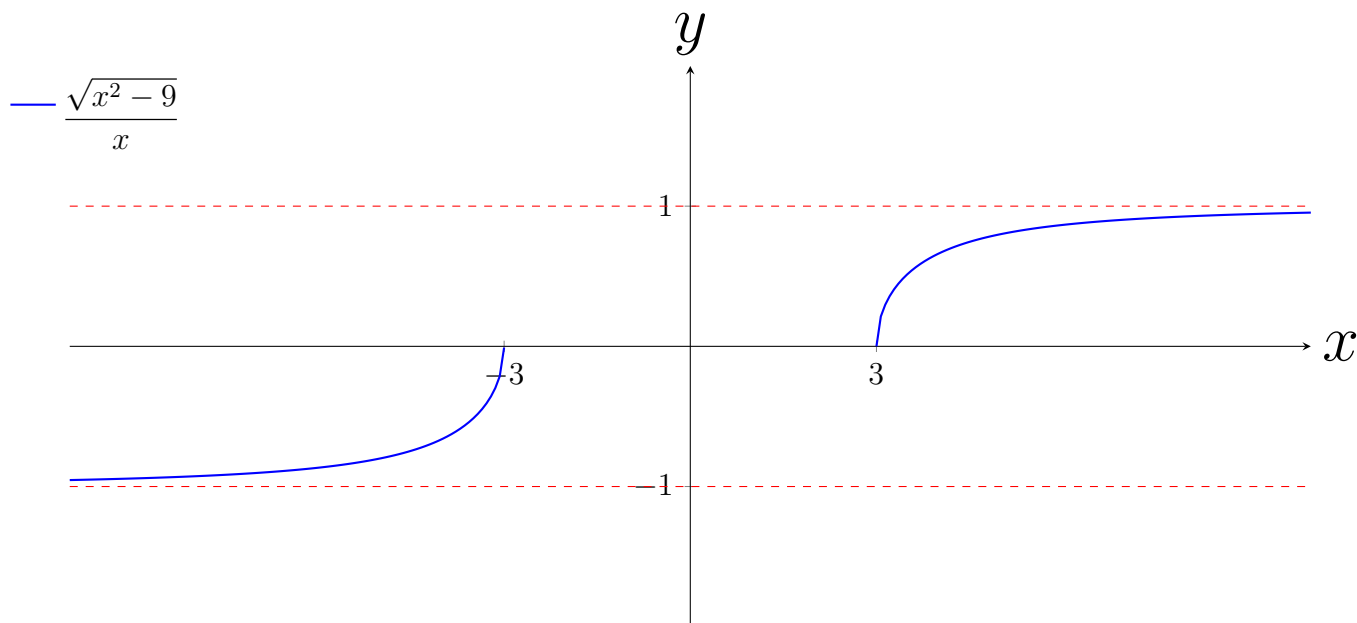
**שלב 7** תחומי קמירות:

$$f''(x) = -\frac{27(x^2 - 6)}{x^3(x^2 - 9)^{3/2}}$$

אינו נקודות פיתול בתופ הגדרתה של הפונקציה.

$x$	$x < -3$		$x > 3$
$f''(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	קמורה $\uparrow$		קמורה $\downarrow$

**שלב 8** שרטוט:



## **שאלה 11**

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

**שלב 1** תחום הגדרה:  $x > 0$ .

**שלב 2** נקודות חיתוך וסימני הפונקציה:  $(1, 0)$ .

$x$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f(x)$	—	0	+

**שלב 3** אסימפטוטה אנכית:  $x = 0$ .

**שלב 4** אסימפטוטה אופקית:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

ולפיו הקו  $y = 0$  אסימפטוטה אופקית.

**שלב 5** אסימפטוטה משופעת: אין.

**שלב 6** תחומי עליה וירידה:  $f'(x) = \frac{2 - \log(x)}{2x \cdot \sqrt{x}}$ . יש נקודת קריטית ב-  $(e^2, \frac{2}{e})$ .



$x$	$0 < x < e^2$	$x = e^2$	$x > e^2$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	מקסימום	$\searrow$

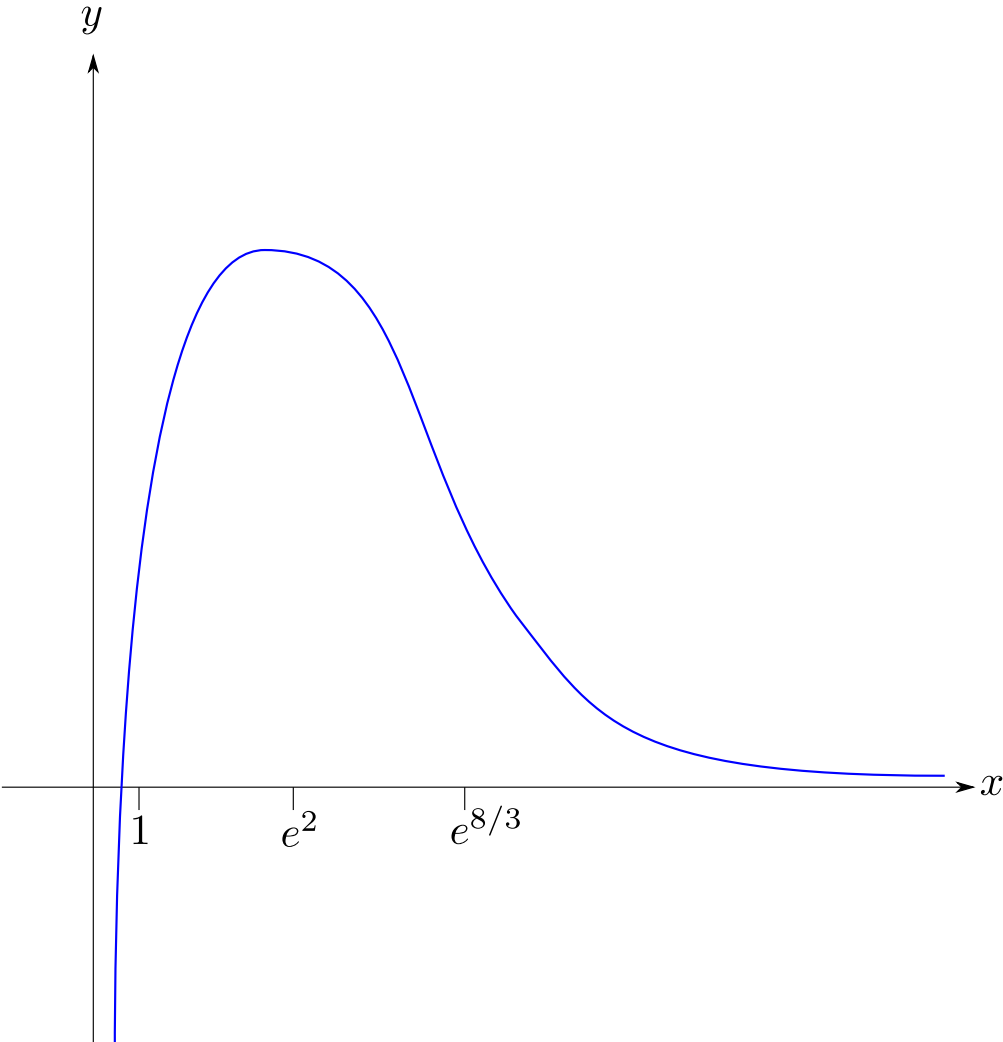
**שלב 7** תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{3\log(x) - 8}{4x^{5/2}}$$

יש נקודת פיתול ב-  $(e^{8/3}, \frac{8}{3e^{4/3}})$ .

$x$	$0 < x < e^{8/3}$	$x = e^{8/3}$	$x > e^{8/3}$
$f''(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	קמורה $\downarrow$	נקודת פיתול	קמורה $\uparrow$

**שלב 8** שרטוט:



## שאלה 12

**שלב 1)** תחום הגדרה:

$$x \neq 3$$

**שלב 2)** נקודות חיתוך:

שים לב,

$$f(x) = \frac{x^2(x+1)(x-2)}{(x-3)^3}$$

ולכן קל לראות שהנקודות חיתוך הן  $(0, 0)$ ,  $(-1, 0)$  ו-  $(2, 0)$ .

סימני הפונקציה

$y$	$x$
$y < 0$	$x < -1$
$y > 0$	$-1 < x < 0$
$y > 0$	$0 < x < 2$
$y < 0$	$2 < x < 3$
$y > 0$	$x > 3$

**שלב 3)** אסימפטוטות אנכיות

$$x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty.$$

**שלב 4)** אסימפטוטות אופקיות

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

**שלב 5)** אסימפטוטות משופעת

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

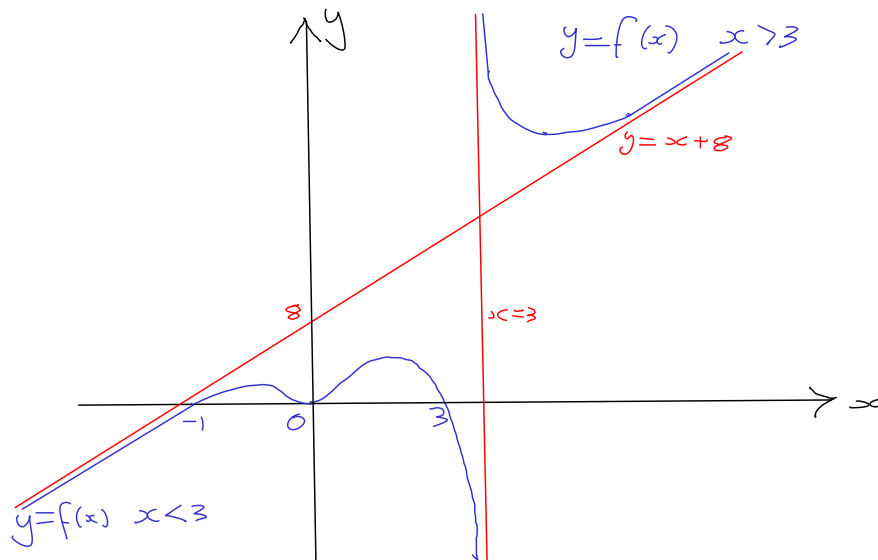
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = 8$$

לכן הישר  $y = x + 8$  הוא אסימפטוטה משופעת כאשר  $x \rightarrow +\infty$ .

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = 8$$

לכן הישר  $y = x + 8$  הוא אסימפטוטה משופעת כאשר  $x \rightarrow -\infty$ .



### שאלה 13

שלב 1 תחום הגדרה:  $x \neq -1$ .

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה:  $(0, 0)$ .

$x$	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x > 0$
$f(x)$	-	+	+

שלב 3 אסימפטוטה אנכית:  $x = -1$

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: אין.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m \cdot x) = -1.$$

לכן הקו  $y = x - 1$  אסימפטוטה משופעת בתהליך כאשר  $x \rightarrow \infty$ .

ב-  $x \rightarrow -\infty$  אותו הדבר.

שלב 6 תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

נקודות קריטיות:  $(-2, -4)$  ו-  $(0, 0)$ .

$x$	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	+	0	–	–	0	+
$f(x)$	↗	מקס	↘	↘	מינימום	↗

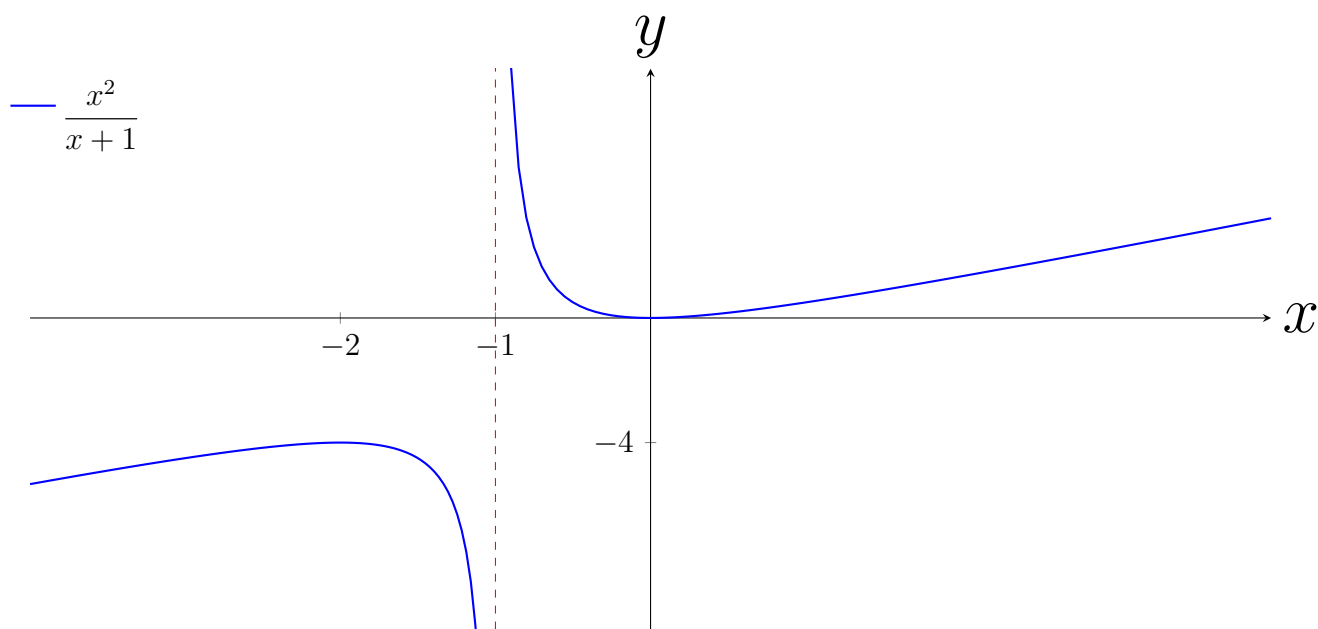
**שלב 7** תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$$

נקודות פיתול: אין.

$x$	$x < -1$	$x > -1$
$f''(x)$	–	+
$f(x)$	↓ קמורה	↑ קמורה

**שלב 8** שרטוט:



## שאלה 14

**שלב 1** תחום הגדרה:  $x \neq -2$ .

**שלב 2** נקודות חיתוך וסימני הפונקציה:  $(-2, 0)$  ו-  $(0, -2)$ .

$x$	$x < -2$	$-2 < x < 2$	$x > 2$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

**שלב 3** אסימפטוטה אנכית:  $x = 2$

**שלב 4** אסימפטוטה אופקית: אין.

**שלב 5** אסימפטוטה משופעת:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m \cdot x) = 6.$$

לכן הקו  $y = x + 6$  אסימפטוטה משופעת בתהליך כאשר  $x \rightarrow \infty$ .

ב-  $x \rightarrow -\infty$  אותו הדבר.

**שלב 6** תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = \frac{(x-6)(x+2)}{(x-2)^2}$$

נקודות קריטיות:  $(-2, 0)$  ו-  $(6, 16)$ .

$x$	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < 6$	$x = 6$	$x > 6$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	מקס	$\searrow$	$\searrow$	מינימום	$\nearrow$

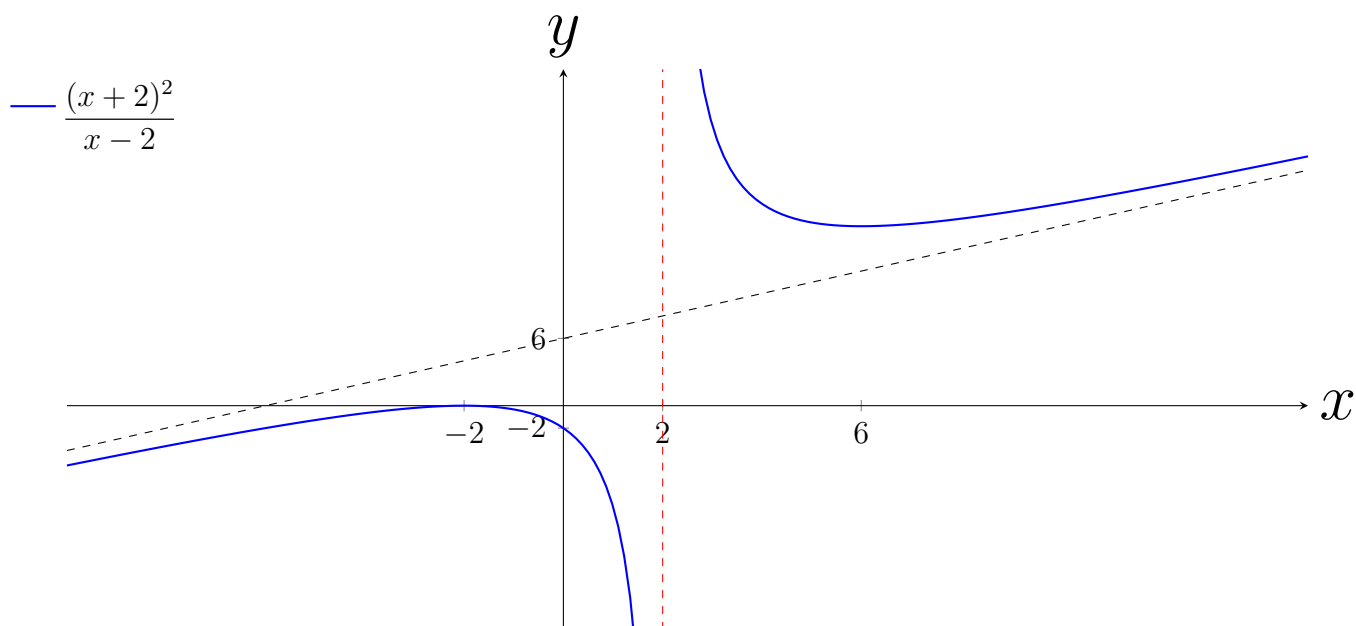
**שלב 7** תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{32}{(x-2)^3}$$

נקודות פיתול: אין.

$x$	$x < 2$	$x > 2$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	קמורה $\downarrow$	קמורה $\uparrow$

**שלב 8** שרטוט:



## שאלה 15

**שלב 1** תחום הגדרה: כל  $x$ .

**שלב 2** נקודות חיתוך וסימני הפונקציה:  $(0, 2), (-\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 0)$ .

$x$	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x > 0$
$f(x)$	-	+	+

**שלב 3** אסימפטוטה אנכית: אין.

**שלב 4** אסימפטוטה אופקית:  $y = 0$ .

**שלב 5** אסימפטוטה משופעת: אין.

**שלב 6** תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{e^x}$$

נקודות קריטיות:

$$(1 - \sqrt{3}, 3.04437) = (-0.732051, 3.04437)$$

$$(1 + \sqrt{3}, -0.355635) = (2.73205, -0.355635) .$$

$x$	$x < 1 - \sqrt{3}$	$x = 1 - \sqrt{3}$	$1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$	$x = 1 + \sqrt{3}$	$x > 1 + \sqrt{3}$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	מקס	$\searrow$	מינימום	$\nearrow$

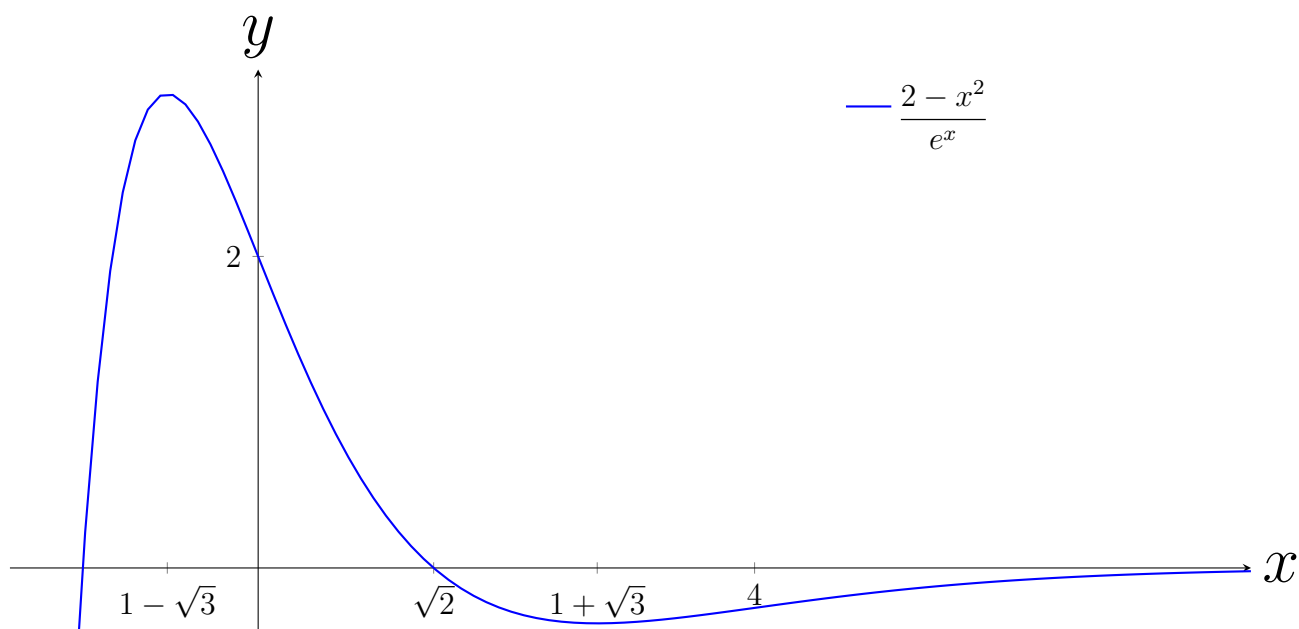
**שלב 7** תחומי קמירות:

$$f''(x) = -\frac{x(x-4)}{e^x}$$

נקודות פיתול:  $(0, 2)$  ו-  $(4, -0.256419)$ .

$x$	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$f''(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	קמורה $\downarrow$	פיתול	קמורה $\uparrow$	פיתול	קמורה $\downarrow$

**שלב 8** שרטוט:



## שאלה 16

**שלב 1** תחום הגדרה: כל  $x$ .

**שלב 2** נקודת חיתוך עם ציר ה- $x$ :

$y = 0$  כאשר  $x = 0$ . ולכן נקודת חיתוך עם ציר  $x$  היא  $(0, 0)$ .

נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :

נציב  $x = 0$  בפונקציה ונקבל  $y = 0$ . לכן נקודת חיתוך עם ציר  $y$  היא  $(0, 0)$ .

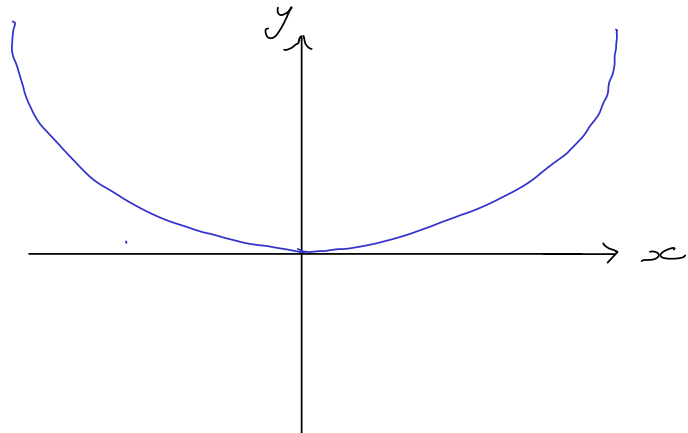
$y$	$x$
$y > 0$	$x > 0$
$y > 0$	$x < 0$
$y = 0$	$x = 0$

שלב 3 אינן נקודות בהן הפונקציה לא מוגדרת.

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^2 + 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x^2 + 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty.$$

שלב 5



## שאלה 17

שלב 1 תחום הגדרה: כל  $x \neq 1$ .

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה- $x$ :

$y = 0$  כאשר  $x = 2$ . ולכן נקודת חיתוך עם ציר  $x$  היא  $(2, 0)$ .

נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :

נציב  $x = 0$  בפונקציה ונקבל  $y = -2$ . לכן נקודת חיתוך עם ציר  $y$  היא  $(0, -2)$ .

$y$	$x$
$y > 0$	$1 < x < 2$
$y < 0$	$x > 2$
$y < 0$	$x < 1$
$y = 0$	$x = 2$



שלב 3 בנקודה  $x = 1$  הפונקציה לא מוגדרת ולכן קיימת אסימפטוטה אנכית ב-  $x = 1$ .

מצד ימין:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2-x}{x-1} = +\infty .$$

מצד שמאל:

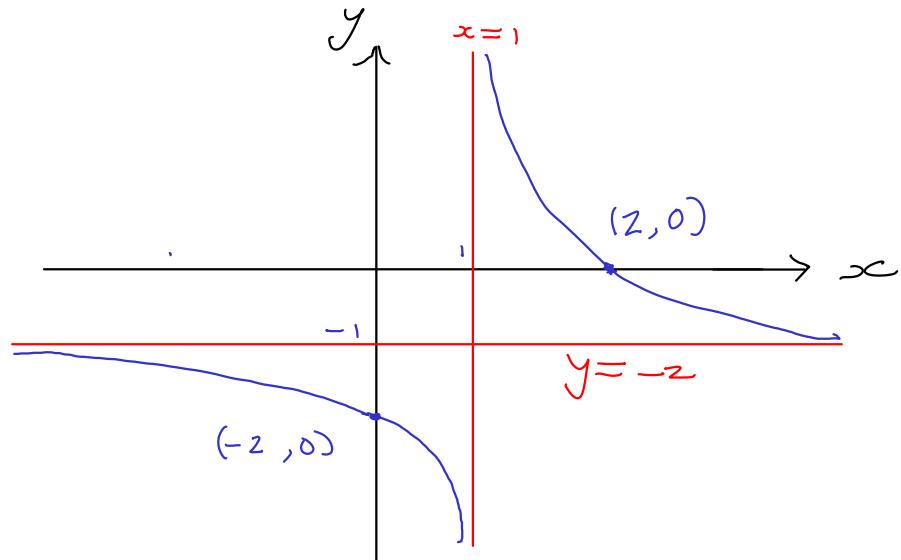
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2-x}{x-1} = -\infty .$$

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x} = -1 , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1 .$$

לכן קיימת אסימפטוטה אופקית ב-  $x = -1$ .

שלב 5



שאלה 18

שלב 1 תחום הגדרה:  $\{x > a \cap x < -a\}$ .

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה- $x$ :  $(0,0)$ .

נקודת חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין

$y$  חיובי בכל נקודה בתחום הגדרת הפונקציה.

שלב 3 בקטע  $-a \leq x \leq a$  הפונקציה לא מוגדרת ולפיו קיימות אסימפטוטות אנכיות בשפות  $x = -a$  ו-  $x = +a$ .

מצד שמאל של  $x = -a$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty .$$

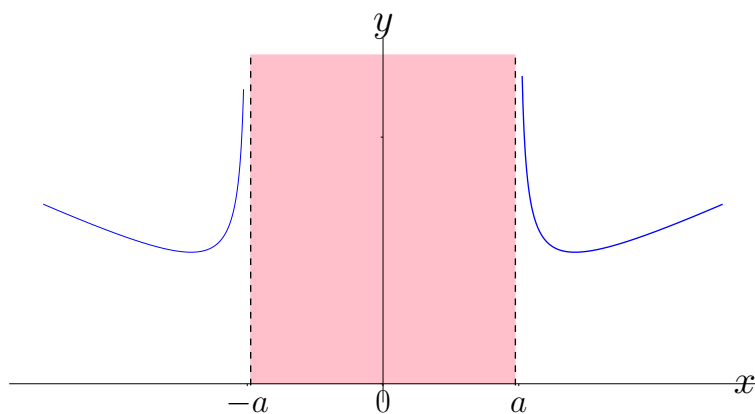
מצד ימין של  $x = +a$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty .$$

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty.$$

שלב 5



### שאלה 19

שלב 1 תחום הגדרה:  $\{x > a \cap x < -a\}$ .

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה- $x$ :  $(0, 0)$ .

נקודת חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין

$y$  חיובי בכל נקודה בתחום הגדרת הפונקציה.

שלב 3 בקטע  $-a \leq x \leq a$  הפונקציה לא מוגדרת ולפיו קיימות אסימפטוטות אנכיות בשפות  $x = -a$  ו-  $x = +a$ .

מצד שמאל של  $x = -a$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -a^-} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty.$$

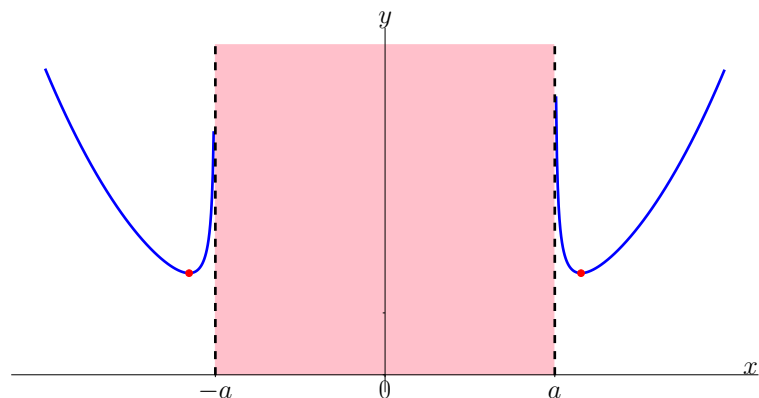
מצד ימין של  $x = +a$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty.$$

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty.$$

שלב 5



## שאלה 20

שלב 1 תחום הגדרה:  $\{x > \sqrt{a} \cap x < -\sqrt{3a}\}$

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה- $x$ : אין

נקודת חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין

בכל  $y > 0$  נקודה בתחום הגדרת הפונקציה.

שלב 3 בקטע  $-\sqrt{3a} \leq x \leq \sqrt{3a}$  הפונקציה לא מוגדרת ולפיו קיימות אסימפטוטות אנכיות בשפות  $x = +\sqrt{3a}$  ו-  $x = -\sqrt{3a}$ .

מצד שמאל של  $x = -\sqrt{3a}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3a}^-} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 3a^2}} = +\infty .$$

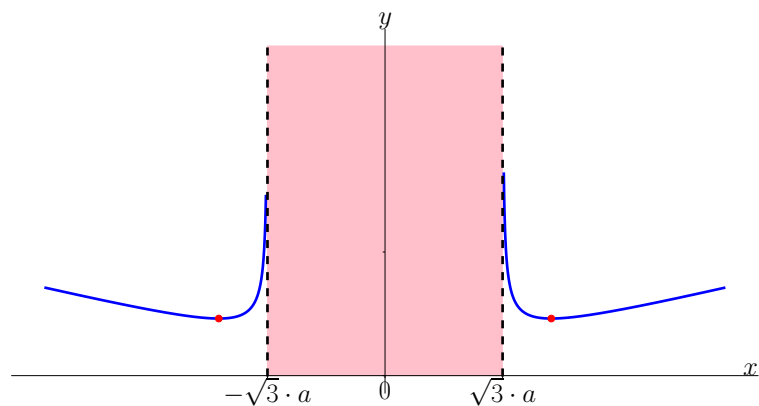
מצד ימין של  $x = +\sqrt{a}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3a}^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 3a^2}} = +\infty .$$

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 3a^2}} = +\infty , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 3a^2}} = +\infty .$$

שלב 5



## שאלה 21

שלב 1 תחום הגדרה:  $\{x \neq 2a \cap x \neq -2a\}$ .

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה- $x$ : אין.

נקודת חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $\left(0, -\frac{1}{a^2}\right)$ .

$y > 0$	$x < -2a$
$y < 0$	$-2a < x < 2a$
$y > 0$	$x > 2a$

שלב 3 בנקודות  $x = \pm 2a$  הפונקציה לא מוגדרת ולפיו קיימת אסימפטוטות אנכיות בנקודות  $x = +2a$  ו- $x = -2a$ .

מצד שמאל של  $x = -2a$ :

$$\lim_{x \rightarrow -2a^-} \frac{4}{x^2 - 4a^2} = \lim_{x \rightarrow -2a^-} \frac{4}{(x+2a)(x-2a)} = \left( \lim_{x \rightarrow -2a^-} \frac{2}{x+2a} \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow -2a^-} \frac{2}{x-2a} \right) = +\infty$$

מצד ימין של  $x = -2a$ :

$$\lim_{x \rightarrow -2a^+} \frac{4}{x^2 - 4a^2} = \lim_{x \rightarrow -2a^+} \frac{4}{(x+2a)(x-2a)} = \left( \lim_{x \rightarrow -2a^+} \frac{2}{x+2a} \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow -2a^+} \frac{2}{x-2a} \right) = -\infty$$

מצד שמאל של  $x = +2a$ :

$$\lim_{x \rightarrow 2a^-} \frac{4}{x^2 - 4a^2} = \lim_{x \rightarrow 2a^-} \frac{4}{(x+2a)(x-2a)} = \left( \lim_{x \rightarrow 2a^-} \frac{2}{x+2a} \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow 2a^-} \frac{2}{x-2a} \right) = -\infty$$

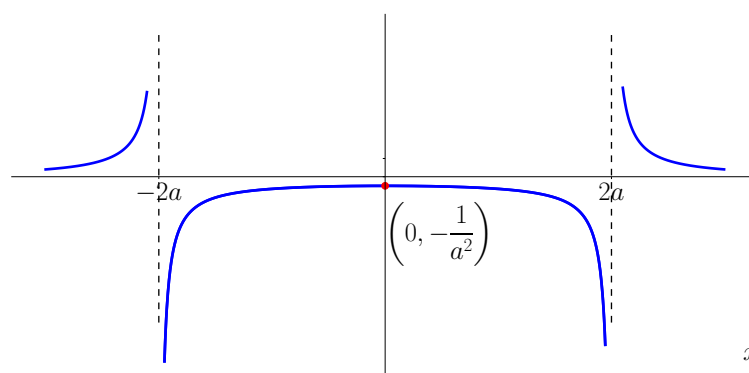
מצד ימין של  $x = +2a$ :

$$\lim_{x \rightarrow 2a^+} \frac{4}{x^2 - 4a^2} = \lim_{x \rightarrow 2a^+} \frac{4}{(x+2a)(x-2a)} = \left( \lim_{x \rightarrow 2a^+} \frac{2}{x+2a} \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow 2a^+} \frac{2}{x-2a} \right) = +\infty$$

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty.$$

שלב 5



## שאלה 22

**שלב 1** תחום הגדרה:  $x \neq 0, -4$ .

**שלב 2** נקודות חיתוך וסימני הפונקציה:  $(-2, 0)$ .

$x$	$x < -4$	$-4 < x < 0$	$x > 0$
$f(x)$	+	-	+

**שלב 3** אסימפטוטה אנכית:  $x = -4$  ו-  $x = 0$ .

**שלב 4** אסימפטוטה אופקית: אין.

**שלב 5** אסימפטוטה משופעת:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m \cdot x) = 1.$$

לכן הקו  $y = 1$  אסימפטוטה משופעת בתהליך כאשר  $x \rightarrow \infty$ .

ב-  $x \rightarrow -\infty$  אותו הדבר.

**שלב 6** תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = -\frac{8(x+2)}{x^2(x+4)^2}$$

נקודות קריטיות:  $(-2, 0)$ .

$x$	$x < -4$	$-4 < x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x > 0$
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$	↗	↗	מקסימום	↘	↘

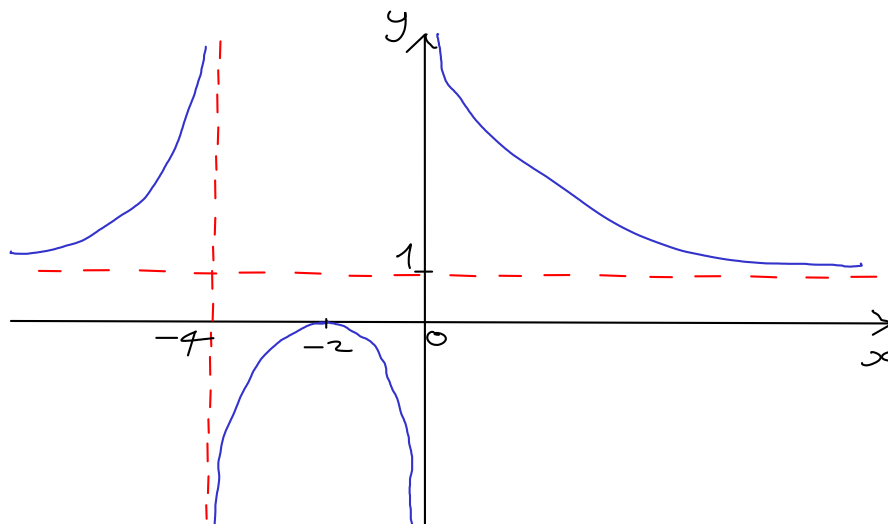
**שלב 7** תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{8(3x^2 + 12x + 16)}{x^3(x+4)^3}$$

נקודות פיתול: אין.

$x$	$x < -4$	$-4 < x < 0$	$x > 0$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	קמורה ↑	קמורה ↓	קמורה ↑

שלב 8 שרטוט:



שאלה 23

שלב 1 תחום הגדרה:  $\{x \leq -a \cap x \geq a\}$ .

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה-x:  $x = \pm a$ .  
נקודת חיתוך עם ציר ה-y: אין.

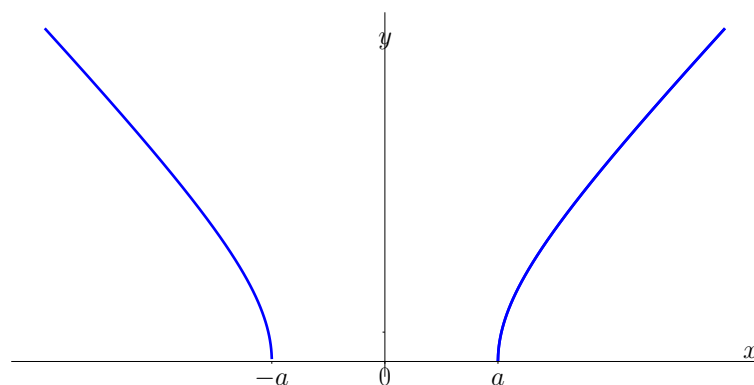
$y > 0$	$x < -a$
$y > 0$	$x > a$

שלב 3 בקטע  $-a < x < a$  הפונקציה לא מוגדרת, אבל אינן אסימפטוטות בשפות מכיוון שהפונקציה כן מוגדרת בנקודות  $x = -a$  ו-  $x = +a$ .

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - a^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - a^2} = +\infty.$$

שלב 5



## שאלה 24

**שלב 1** תחום הגדרה:  $x \neq 3$ .

**שלב 2** נקודות חיתוך וסימני הפונקציה:  $(-4, 0)$  ו-  $(0, -\frac{16}{3})$ .

$x$	$x < -4$	$-4 < x < 3$	$x > 3$
$f(x)$	-	-	+

**שלב 3** אסימפטוטה אנכית:  $x = 3$

**שלב 4** אסימפטוטה אופקית: אין.

**שלב 5** אסימפטוטה משופעת:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m \cdot x) = 11.$$

לכן הקו  $y = x + 11$  אסימפטוטה משופעת בתהליך כאשר  $x \rightarrow \infty$ .

ב-  $x \rightarrow -\infty$  אותו הדבר.

**שלב 6** תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = \frac{(x-10)(x+4)}{(x-3)^2}$$

נקודות קריטיות:  $(-4, 0)$  ו-  $(10, 28)$ .

$x$	$x < -4$	$x = -4$	$-4 < x < 3$	$3 < x < 10$	$x = 10$	$x > 10$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	↗	מקס	↘	↘	מינימום	↗

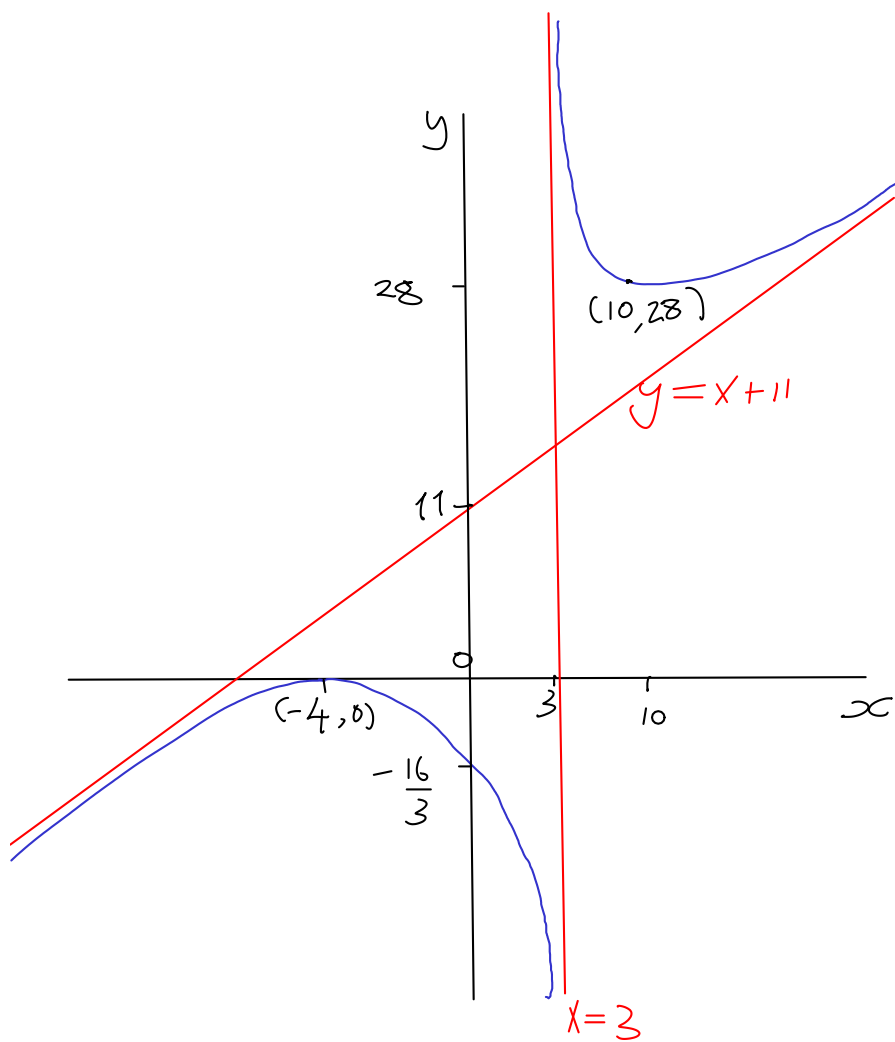
**שלב 7** תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{98}{(x-3)^3}$$

נקודות פיתול: אין.

$x$	$x < 3$	$x > 3$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	קמורה ↓	קמורה ↑

**שלב 8** שרטוט:



## שאלה 25

שלב 1 תחום הגדרה:  $\{x \leq -a \cap x \geq a\}$ .

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה- $x$ :  $(0, 0)$ .

נקודת חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $(0, 0)$ .

$y > 0$	$x < -a$
$y < 0$	$-a < x < a$
$y > 0$	$x > a$

שלב 3 בנקודות  $x = \pm a$  הפונקציה לא מוגדרת.

מצד שמאל של  $x = -a$ :

$$\lim_{x \rightarrow -a^-} \frac{x^2}{x^2 - a^2} = +\infty$$



מצד ימין של  $x = -a^+$ :

$$\lim_{x \rightarrow -a^+} \frac{x^2}{x^2 - a^2} = -\infty$$

מצד שמאל של  $x = +a$ :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{x^2}{x^2 - a^2} = -\infty$$

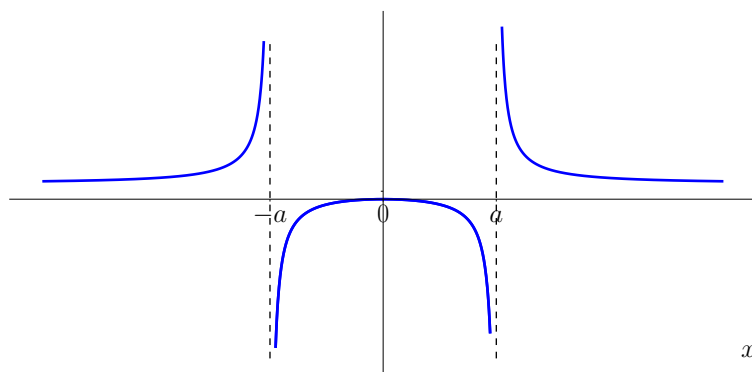
מצד ימין של  $x = +a$ :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x^2}{x^2 - a^2} = +\infty$$

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\infty.$$

שלב 5



שאלה 26 שים לב

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} = f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x - 2}$$

שלב 1 תחום הגדרה:  $x \neq 2$ .

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה:  $(0, -\frac{1}{2}), (1, 0)$ .

$x$	$x < 1$	$1 < x < 2$	$x > 2$
$f(x)$	-	-	+

שלב 3 אסימפטוטה אנכית:  $x = 2$

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: אין.

**שלב 5** אסימפטוטה משופעת:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{x(x-2)} = 1 .$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{(x-1)^2}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2 - x(x-2)}{x-2} = 0 .$$

לכן  $y = x$  אסימפטוטה משופעת ב-  $x = \infty$ .

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^2}{x(x-2)} = 1 .$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{(x-1)^2}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^2 - x(x-2)}{x-2} = 0 .$$

$y = x$  אסימפטוטה משופעת ב-  $x = -\infty$ .

**שלב 6** תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$$

נקודות קריטיות:

(1, 0) ו- (3, 4)

$x$	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	↗	מקס	↘	↘	מינימום	↗

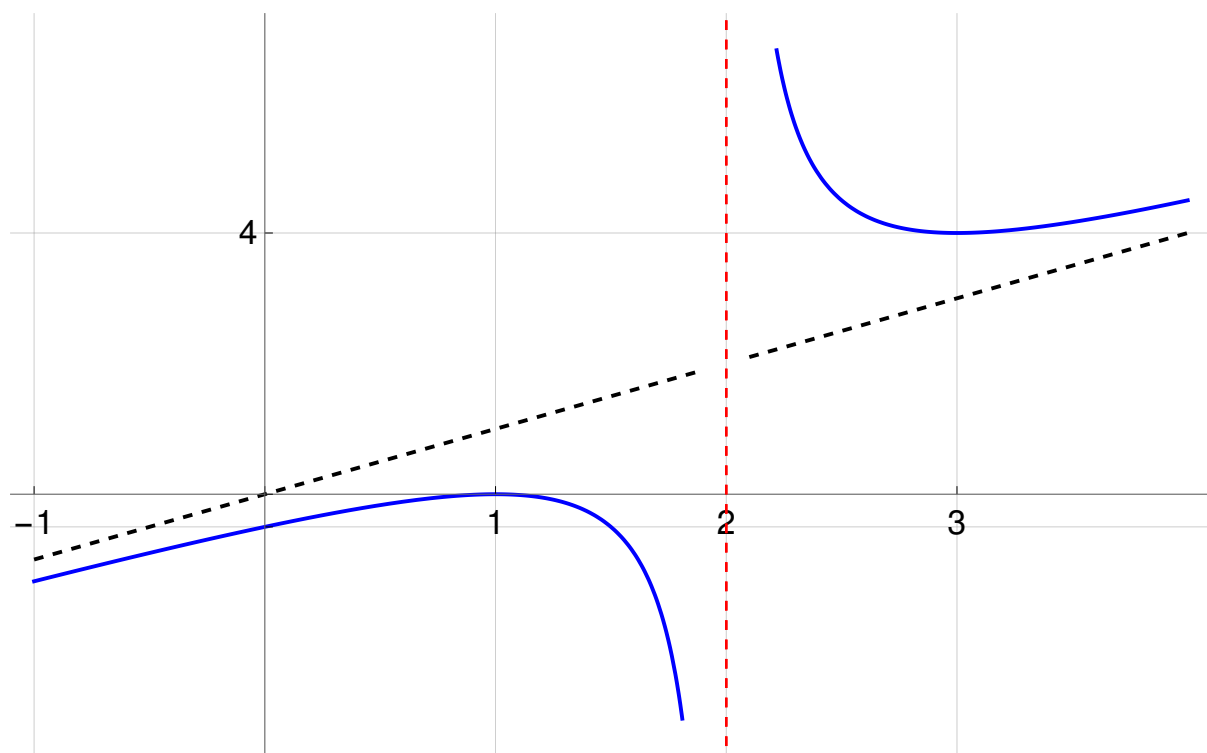
**שלב 7** תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}$$

נקודות פיתול: אין.

$x$	$x < 2$	$x > 2$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	קמורה ↓	קמורה ↑

**שלב 8** שרטוט:



$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$      $y = x$