אלגברה ליניארית 1
סמסטר א' תשפ"ד
שאלות חזרה

משפט חוקים של דטרמיננטות

1) כלל הכפל: $|AB| = |A| \cdot |B|$.

2) כלל ההפוכה: אם A הפיכה אז $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

3) כלל המשוחלפת: $|A^t| = |A|$.

4) כלל החזרה: $|A^k| = |A|^k$.

5) כלל כפל בסקלר: $|\alpha A| = \alpha^n |A|$.

6) משפט הפיכות:

A הפיכה $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

A לא הפיכה $\Leftrightarrow |A| = 0$.

7) כלל החיבור: $|A+B| \neq |A| + |B|$ באופן כללי.

8) אם ב- A יש שורה של אפסים או עמודה של אפסים אז $|A| = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0 \ , \qquad A = \begin{pmatrix} * & 0 & * & * \\ * & 0 & * & * \\ * & 0 & * & * \\ * & 0 & * & * \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0 \ .$$

9) נניח ש- U המטריצה המדורגת של A:

$$|U| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |A| = 0 \ .$$

$$|U| \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |A| \neq 0 \ .$$

10) אם שורה של A שווה לכפולה של שורה אחרת אז $|A| = 0$.
אם עמודה של A שווה לכפולה של עמודה אחרת אז $|A| = 0$.

11) אם A משולשית עליונה או משולשית תחתונה או אלכסונית אז $|A|$ שווה למכפלה של האיברים על האלכסון.

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ * & b & 0 & 0 \\ * & * & c & 0 \\ * & * & * & d \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=a\cdot b\cdot c\cdot d, \qquad \begin{pmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=a\cdot b\cdot c\cdot d$$

12) תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ו- B המטריצה המתקבלת ע"י פעולה אלמנטרית:

$$A \xrightarrow{\text{הוצאת גורם משותף של שורה } \alpha} B, \qquad |A|=\alpha|B|$$
$$A \xrightarrow{\text{החלפת שתי שורות צמודות}} B, \qquad |A|=-|B|$$
$$A \xrightarrow{\text{הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת}} B, \qquad |A|=|B|$$

משפט מטריצה הפיכה

נניח ש- $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n$ וקטור המשתנים ו- $b\neq 0\in\mathbb{F}^n$ וקטור של הצד ימין של מערכת.

A הפיכה $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$ $\Leftrightarrow$ למערכת $AX=b$ קיים פתרון יחיד.

הוכחה בקובץ "שבע חוקים של מטריצה הפיכ באתר המודל" להעשרה בלבד.

משפט מטריצה לא הפיכה

נניח ש- $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n$ וקטור המשתנים ו- $b\neq 0\in\mathbb{F}^n$ וקטור של הצד ימין של מערכת.

A לא הפיכה $\Leftrightarrow$ $|A|=0$ $\Leftrightarrow$ ל- $AX=b$ $\nexists$ פתרון יחיד $\Leftrightarrow$ ל- $AX=0$ $\exists$ פתרון $X\neq 0$.

הוכחה בקובץ "שבע חוקים של מטריצה הפיכ באתר המודל" להעשרה בלבד.

משפט כלל השרשרת לקיום ויחידות פתרון

נניח ש- $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n$ וקטור המשתנים ו- $b\neq 0\in\mathbb{F}^n$ וקטור של הצד ימין של מערכת.

אם למערכת $ABX=b$ קיים פתרון יחיד אז למערכת $AX=b$ קיים פתרון יחיד.

הוכחה בקובץ "שבע חוקים של מטריצה הפיכ באתר המודל" להעשרה בלבד.

משפט תנאים של שדה

שדה $\mathbb{F}$- קבוצה לא ריקה שבה פעולות חיבור "$+$" וכפל "$\cdot$" מוגדרות המקיימת את התנאים הבאים:
לכל איברים $a,b,c\in\mathbb{F}$:

1) $a+b\in\mathbb{F}$.
2) $a\cdot b\in\mathbb{F}$.
3) $a+b=b+a$
4) $a\cdot b=b\cdot a$.
5) $(a+b)+c=a+(b+c)$.
6) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$.
7) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.
8) קיים איבר $0\in\mathbb{F}$ כך ש- $a+0=a$.
9) קיים איבר $1\in\mathbb{F}$ כך ש- $a\cdot 1=1\cdot a=a$.
10) קיים $(-a)\in\mathbb{F}$ כך ש- $a+(-a)=0$.
11) לכל $a\neq 0\in\mathbb{F}$ קיים $a^{-1}\in\mathbb{F}$ המקיים $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$.

לוח החיבור של איברים ב- $\mathbb{Z}_3$:

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

$-\bar{0}=\bar{0}$
$-\bar{1}=\bar{2}$
$-\bar{2}=\bar{1}$

לוח הכפל של איברים ב- $\mathbb{Z}_3$:

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$\bar{1}^{-1}=\bar{1}$
$\bar{2}^{-1}=\bar{2}$

לוח החיבור של איברים ב- $\mathbb{Z}_5$:

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

$-\bar{0}=\bar{0}$
$-\bar{1}=\bar{4}$
$-\bar{2}=\bar{3}$
$-\bar{3}=\bar{2}$
$-\bar{4}=\bar{1}$

לוח הכפל של איברים ב- $\mathbb{Z}_5$:

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$\bar{1}^{-1}=\bar{1}$
$\bar{2}^{-1}=\bar{3}$
$\bar{3}^{-1}=\bar{2}$
$\bar{4}^{-1}=\bar{4}$

לוח החיבור של איברים ב- $\mathbb{Z}_7$:

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$

$-\bar{0}=\bar{0}$
$-\bar{1}=\bar{6}$
$-\bar{2}=\bar{5}$
$-\bar{3}=\bar{4}$
$-\bar{4}=\bar{3}$
$-\bar{5}=\bar{2}$
$-\bar{6}=\bar{1}$

לוח הכפל של איברים ב- $\mathbb{Z}_7$:

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$

$\bar{1}^{-1}=\bar{1}$
$\bar{2}^{-1}=\bar{4}$
$\bar{3}^{-1}=\bar{5}$
$\bar{4}^{-1}=\bar{2}$
$\bar{5}^{-1}=\bar{3}$
$\bar{6}^{-1}=\bar{6}$

שאלה 1 נתונה המערכת הלינארית הבאה:

$$\begin{aligned} x-3z &= 0 \\ x+y+kz &= 0 \\ 2x+ky+(2k^2+6k-16)z &= -2k^3+10k^2+82k-90 \end{aligned}$$

עבור אילו ערכי הפרמטר k למערכת:

א) פתרון יחיד

ב) אין פתרון

ג) אינסוף פתרונות?
במקרה של אינסוף פתרונות רשום את הפתרון הכללי.

שאלה 2 נתונה המערכת הלינארית הבאה מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x+y &= -3 \\ x+ky &= -3 \\ x+y+2kz &= 1 \end{aligned}$$

א) מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין פתרון.

ב) מצאו את הערכים של k עבורם למערכת יש פתרון יחיד.

ג) מצאו את הערכים של k עבורם למערכת יש אינסוף פתרונות. לכל אחד מערכי k שמצאות, רשמו את הפתרון הכללי.

שאלה 3 נתונה המערכת

$$\begin{aligned} x+3y+z &= 3 \\ (k-1)x+(k+1)y-z &= 4k-2 \\ kx+3ky-3z &= 4k+3 \end{aligned}$$

מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין פתרון, יש פתרון יחיד, יש אינסוף פתרונות. במקרה של אינסוף פתרונות רשמו את הפתרון הכללי.

שאלה 4

נתונה המערכת הליניארית הבאה מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lclclcl}
(k+1)x & + & (k^2+2k-2)y & + & (2k^2+7k+7)z & = & k^3+k^2+k-2 \\
kx & + & (k^2+k-2)y & + & (k^2+2k+3)z & = & k^3-5 \\
x & + & ky & + & (k+1)z & = & k^2 \\
(k-1)x & + & (k^2-2)y & + & (k^2+k+2)z & = & k^3-k^2-5
\end{array}$$

א) מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין פתרון.

ב) מצאו את הערכים של k עבורם למערכת יש פתרון יחיד.

ג) מצאו את הערכים של k עבורם יהיו אינסוף פתרונות. לכל אחד מערכי k שמצאתם , רשמו את הפתרון הכללי.

שאלה 5

נתונה המערכת הליניארית הבאה מעל $\mathbb{R}$: $\left.\begin{aligned} x+y+z &= a \\ bx+y+z &= b \\ x+y+az &= b \end{aligned}\right\}$

א) מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b עבורם למערכת אין פתרון.

ב) מצאו את הערכים של הפרמטרים a ו- b עבורם למערכת יש פתרון יחיד.

ג) מצאו את הערכים של הפרמטרים a ו- b עבורם יש אינסוף פתרונות. לכל אחד מערכי a ו- b שמצאתם , רשמו את הפתרון הכללי.

שאלה 6

נתונה המערכת הליניארית הבאה: $\left.\begin{aligned} x+2y+z &= -1 \\ 2x+4y+(k+1)z+w &= 0 \\ 2x+4y+2kz+(k^2-1)w &= k-1 \end{aligned}\right\}$

א) מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין אף פתרון

ב) מצאו את הערכים של k עבורם למערכת ישנו פתרון יחיד

ג) מצאו את הערכים של k עבורם ישנן אינסוף פתרונות.

שאלה 7

נתונה המערכת הליניארית הבאה: $\left.\begin{aligned} x+(k-4)y &= 3 \\ 2x+(k^2-4k)y &= 2-k \\ -3x+6y+kz &= 1 \end{aligned}\right\}$

א) מצאו את ערכי הפרמטר k עבורם למערכת אין אף פתרון

ב) מצאו את הערכים של k עבורם למערכת יש פתרון יחיד

ג) מצאו את הערכים של k עבורם יהיו אינסוף פתרונות.

שאלה 8 נתונה המערכת הלינארית הבאה מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} ax + y + 2z &= 0 \\ ax + (a-2)y + 5z &= -5 \\ 2ax + (a-1)y + (a^2 - 6a + 15)z &= a - 9 \end{aligned}$$

א) מצאו את ערכי הפרמטר a עבורם למערכת אין פתרון.

ב) מצאו את הערכים של a עבורם למערכת יש פתרון יחיד.

ג) מצאו את הערכים של a עבורם למערכת יש אינסוף פתרונות. עבור ערך a הגדול מבין אלו שמצאות, רשמו את הפתרון הכללי.

שאלה 9 נתונה מערכת משוואות לינאריות:

$$\begin{cases} x + ay + 2z &= 6 - a^2 \\ ax + 2y + z &= 2 \\ (1-a)x + (a-2)y + z &= 0 \\ (1-2a)x + (a-4)y &= 8 - 5a \end{cases}$$

א) מצאו את ערכי הפרמטר a עבורם למערכת יש לפחות פתרון אחד.

ב) עבור כל אחד מערכי a שמצאתם בסעיף א', מצאו את פתרון המערכת (יחיד או כללי).

שאלה 10 רשמו את האיברים הבאים ב- $\mathbb{Z}_3$:

א) $\overline{12}$

ב) $\overline{23}$

ג) $\overline{57}$

ד) $\overline{46}$

ה) $\overline{19}$

ו) $\overline{-7}$

ז) $\bar{2} + \bar{1}$

ח) $\bar{2} + \bar{2}$

ט) $\bar{1}+\bar{1}$

י) $\bar{2}\cdot\bar{2}$

יא) $\bar{2}\cdot\bar{0}$

יב) $\bar{2}\cdot\bar{1}$

שאלה 11 רשמו את האיברים הבאים ב- $\mathbb{Z}_5$:

א) $\overline{11}$

ב) $\overline{24}$

ג) $\overline{56}$

ד) $\overline{98}$

ה) $\overline{22}$

ו) $\overline{-8}$

ז) $\bar{2}+\bar{2}$

ח) $\bar{2}+\bar{3}$

ט) $\bar{1}+\bar{4}$

י) $\bar{2}\cdot\bar{4}$

יא) $\bar{3}\cdot\bar{2}$

יב) $\bar{4}\cdot\bar{3}$

שאלה 12 רשמו את האיברים הבאים ב- $\mathbb{Z}_7$:

א) $\overline{13}$

ב) $\overline{33}$

ג) $\overline{74}$

ד) $\overline{16}$

ה) $\overline{12}$

ו) $\overline{-9}$

ז) $\bar{2}+\bar{6}$

ח) $\bar{3}+\bar{5}$

ט) $\bar{6}+\bar{3}$

י) $\bar{2}\cdot\bar{6}$

יא) $\bar{3}\cdot\bar{5}$

יב) $\bar{4}\cdot\bar{6}$

שאלה 13 פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{Z}_3$:

$$\begin{aligned} x+\bar{2}y&=\bar{2}\\ \bar{2}x-y&=\bar{1}\end{aligned}$$

שאלה 14 פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{Z}_3$:

$$\begin{aligned} \bar{2}x+\bar{2}y&=\bar{2}\\ x+y&=\bar{1}\end{aligned}$$

שאלה 15 פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} \bar{4}x+\bar{2}y&=\bar{3}\\ \bar{3}x-y&=\bar{2}\end{aligned}$$

שאלה 16 פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} \bar{3}x+y&=\bar{2}\\ \bar{3}x+\bar{4}y&=\bar{3}\end{aligned}$$

שאלה 17 פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} \bar{2}x+\bar{3}y&=\bar{0}\\ x-\bar{3}y&=\bar{4}\end{aligned}$$

שאלה 18 פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{aligned} \bar{5}x+\bar{2}y&=\bar{3}\\ \bar{4}x-\bar{3}y&=\bar{4}\end{aligned}$$

שאלה 19 פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$. כמה פתרונות יש למערכת?

$$\begin{aligned} x+\bar{3}y+z &= \bar{1} \\ \bar{3}x+y+\bar{4}z &= \bar{2} \\ \bar{2}x+\bar{4}y+\bar{4}z &= \bar{3} \end{aligned}$$

שאלה 20 נתונה המערכת הבאה:

$$\begin{aligned} x+\bar{3}y+z &= \bar{1} \\ \bar{3}x+y+\bar{2}z &= \bar{2} \\ \bar{2}x+\bar{2}y+\bar{3}z &= \bar{4} \end{aligned}$$

פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$. רשמו את כל הפתרונות בצורה מפורשת. כמה פתרונות יש למערכת?

שאלה 21 פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_7$. כמה פתרונות יש למערכת?

$$\begin{aligned} x+\bar{2}y+z &= \bar{2} \\ \bar{3}x+y+\bar{4}z &= \bar{3} \\ \bar{2}x+\bar{4}y+\bar{4}z &= \bar{3} \end{aligned}$$

שאלה 22 פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$. כמה פתרונות יש למערכת?

$$\begin{aligned} x+\bar{3}y+z &= \bar{1} \\ \bar{3}x+y+\bar{2}z &= \bar{2} \\ \bar{2}x+\bar{2}y+\bar{3}z &= \bar{4} \end{aligned}$$

שאלה 23 פתרו את מערכת המשוואות הבאה מעל שדה $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} \bar{3}x+\bar{2}y+z &= \bar{4} \\ \bar{4}x+\bar{2}y+z &= \bar{1} \\ x+y+\bar{3}z &= \bar{1} \end{cases}$$

רשמו את כל הפתרונות שלה.

שאלה 24 פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_7$.

$$\begin{aligned} \bar{2}x+\bar{3}y+\bar{3}z &= \bar{5} \\ \bar{3}x+\bar{4}y+z &= \bar{1} \\ x+y+\bar{6}z &= \bar{2} \end{aligned}$$

שאלה 25 פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$.

$$\begin{aligned} x+\bar{2}y+z &= \bar{2} \\ \bar{3}x+y+\bar{4}z &= \bar{3} \\ \bar{2}x+\bar{4}y+\bar{4}z &= \bar{3} \end{aligned}$$

שאלה 26 הוכיחו שלמערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_p$, יש פתרון יחיד עם $p \geq 7$ מספר ראשוני.

$$\begin{aligned} x + \bar{2}y + z &= \bar{2} \\ \bar{3}x + y + \bar{4}z &= \bar{3} \\ \bar{2}x + \bar{4}y + \bar{4}z &= \bar{3} \end{aligned}$$

שאלה 27

פתרו את המערכת משוואות הבאה מעל $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 =& 1+i \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 =& 1+3i \end{aligned}$$

שאלה 28 חשבו את המטריצה ההפוכה של A ובדקו כי מתקיים $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

א) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

ב) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$

ג) $A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

ד) $A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 0 \\ -5 & 9 & 1 \\ -4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

ה) פתרו את המערכת $\left.\begin{aligned} -5x + 8y \quad &= 1 \\ -5x + 9y + z \quad &= 2 \\ -4x + 7y + 2z \quad &= 3 \end{aligned}\right\}$ בעזרת סעיף ד.

שאלה 29 פתרו את המשוואות המטריציאליות הבאות:

א)

$$A \cdot X = B\ , \qquad A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad B = \begin{pmatrix} -13 & -9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ב)

$$A \cdot X = B\ , \qquad A = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad B = \begin{pmatrix} -11 & 5 & -15 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ג)

$$A \cdot X = B\ , \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\ , \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

ד)

$$X \cdot A = B \ , \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} -9 & 9 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

ה)

$$A \cdot X \cdot B = C \ , \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \ , \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 12 \end{pmatrix}$$

שאלה 30 נתונות המטריצות:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \ , \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

פתרו את המשוואות הבאות:

א) $AX = C$

ב) $XB = C$

ג) $AXB = C$

שאלה 31 נתונה מטריצות $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש- A ו- C הפיכות. נתון ש- $BC = C(2A - 3X)A$ כאשר $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$. מצאו את X.

שאלה 32 עבור אילו ערכים של הפרמטר k המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1-k & 2 \\ k+5 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & k \end{pmatrix}$ הפיכה?

שאלה 33 מצאו את המטריצה A המקיימת $(2I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

שאלה 34 תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ המקיימת

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ , \qquad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \ , \qquad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

מצאו את A.

שאלה 35 תהיינה $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצות הפיכות. מצאו את ההופכית של $7B^{-1}CA^{-1}B^2$.

שאלה 36 נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

א) מצאו את A^{-1}.

ב) מצאו $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ כך ש- $AXA + A = A^2$.

שאלה 37 תהיינה $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו:

א) אם A הפיכה ו- $BA = CA$ אז $B = C$.

ב) אם $AB = AC$ אז $B = C$.

ג) אם $AB = 0$ אז A ו- B אינן הפיכות.

ד) אם $AB = 0$ ו- $A \neq 0$ אז B איננה הפיכה.

ה) אם AB הפיכה אז A ו- B הפיכות.

ו) אם A הפיכה אז AB הפיכה.

ז) אם A הפיכה ו- B הפיכה אז $A + B$ הפיכה.

ח) אם A הפיכה ו- B לא הפיכה אז $A + B$ לא הפיכה.

ט) תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ויהי $f(x) = 2x^4 - x^2 + 3x - 2$ פולינום כך ש- $f(A) = 0$. אזי A הפיכה.

י) אם A הפיכה אז $A + A^t$ הפיכה.

שאלה 38 הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם A הפיכה ו- $A + B$ הפיכה אז

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(A + B)^{-1} \ .$$

שאלה 39 תהי $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. אומרים כי A מטריצה סטוקסטית אם הסכום של האיברים בכל עמודה שווה 1.
הוכיחו כי המכפלה של כל שתי מטריצות סטוקסטיות שווה למטריצה סטוקסטית.

שאלה 40 נניח ש- $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצת המקדמים, ו- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$ ווקטור המשתנים של המערכת

הוכיחו: אם A הפיכה אז הפתרון היחיד למערכת $AX = 0$ הוא $X = 0$ (ווקטור האפס).

שאלה 41 תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ונניח ש- $|A| = a$, $|B| = b \neq 0$. מצאו את:

א) $|AB|$

ב) $|7A|$

ג) $|7AB^{-1}A^2|$

ד) $|A+A|$

ה) $|4A^tB^3A^2(B^t)^{-1}|$

שאלה 42 עבור אילו ערכים של k קיים פתרון יחיד למערכות הבאות:

א)
$$\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 1 \\ x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \end{cases}$$

ב)
$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$$

ג)
$$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ x + 5y - z = 7 \\ 3x + ky + 4z = k^2 \end{cases}$$

ד)
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = -2 \end{cases}$$

שאלה 43

תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו:

א) $|A+B| = |B+A|$.

ב) אם $AB + AC$ אז $|B| = |C|$.

ג) אם קיים $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ כך ש- $(AB)\cdot X = 0$ אז $|A| = 0$ או $|B| = 0$.

ד) $|A+B| = |A| + |B|$.

ה) $|AB| = |BA|$.

ו) $|A^tB| = |B^tA|$.

ז) $|A^{-1}| = |A|$ אז $A = I$.

ח) $A^2 = I$ אז לפחות אחת מהמטריצות $A - I$ או $A + I$ איננה הפיכה.

שאלה 44 תהיינה A, B מטריצות מסדר 4×4. נתונות הדטרמיננטות $|A| = a$, $|B| = b$, ($b \neq 0$). מצאו את $|25A^3B^{-1}A^2B^2|$.

שאלה 45 הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות ע"י דוגמה נגדית:

א) $\mathbb{N}$ שדה.

ב) $F=\{A\in\mathbb{R}^{2\times 2}\}$, הקבוצה של מטריצות עם הפעולות חיבור מטריצות וכפל מטריצות, $n\times n$, שדה.

ג) $F=\{a\in\mathbb{R}\}$ עם הפעולות חיבור וכפל מוגדרות:

$$a\oplus b=a+2b\ ,\qquad a\odot b=a\ ,$$

שדה.

ד) קבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$ עם פעולות החיבור והכפל הרגילות שדה.

ה) קבוצת המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$ עם פעולות $a\oplus b=\dfrac{a-b}{3}$ ו- $a\odot b=3ab$ שדה.

ו) הקבוצה $\left\{a+b\sqrt{2}|a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ ביחס לפעולות החיבור והכפל הרגילות, כלומר,

$$\begin{aligned}(a+b\sqrt{2})\oplus(c+d\sqrt{2})=&(a+c)+(b+d)\sqrt{2}\\(a+b\sqrt{2})\odot(c+d\sqrt{2})=&(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\end{aligned}$$

שדה.

פתרונות

שאלה 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 2 & k & 2k^2+6k-16 & -2k^3+10k^2+82k-90 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & k+3 & 0 \\ 0 & k & 2k^2+6k-10 & -2k^3+10k^2+82k-90 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-kR_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & k+3 & 0 \\ 0 & 0 & k^2+3k-10 & -2k^3+10k^2+82k-90 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & k+3 & 0 \\ 0 & 0 & (k+5)(k-2) & -2k^3+10k^2+82k-90 \end{array}\right)$$

עבור $k=2$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 98 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה ולכן אין פתרון.

עבור $k=-5$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש משתנה חופשי אבל אין שורת סתירה ולכן יהיו אינסוף פתרונות. הפתרון הכללי:

$$(x,y,z)=(3z,2z,z)\ , \qquad z\in\mathbb{R}\ .$$

עבור $k=-3$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -192 \end{array}\right)$$

אין משתנה חופשי ואין שורת סתירה ולכן למערכת יש פתרון יחיד.

עבור $k\neq -3,2,-5$, כלומר לכל שאר ערכים של k, אין משתנה חופשי ואין שרות סתירה לכן יהיה למערכת פתרון יחיד.

לסיכום:

א) $k=2$ אין אף פתרון.

ב) $k=-5$ יש ∞ פתרונות.

ג) עבור $k\neq 2,-5$ למערכת יש פתרון יחיד.

שאלה 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & k & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2k & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k & 4 \end{array}\right)$$

א) אם $k=0$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$.
קיבלנו שורה סתירה ואז אין פתרון.

אם $k=1$ אז נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to\frac{1}{2}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש משתנה חופשי ואין שורת סתירה לכן למערכת יהיו אינסוף פתרונות:

$$(x,y,z)=(-3-y,y,2)\ ,\qquad y\in\mathbb{R}\ .$$

ג) אם $k\neq 0,1$ אין משתנה חופדשי ואז יהיה פתרון יחיד.

ד) אם $k=1$ יהיו אינסוף פתרונות מצורה

$$(x,y,z)=(-3-y,y,2),\qquad y\in\mathbb{R}\ .$$

שאלה 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ k-1 & k+1 & -1 & 4k-2 \\ k & 3k & -3 & 4k+3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-kR_1]{R_2\to R_2-(k-1)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -2(k-2) & -k & k+1 \\ 0 & 0 & -k-3 & k+3 \end{array}\right)$$

$\underline{k=-3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש משתנה חופשי ואין שורת סתירה לכן יהיו ∞ פתרונות.

$$\left.\begin{aligned} x+3y+z &= 3 \\ 10y+3z &= -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= -3y-z+3 \\ 10y &= -3z-2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= -3y-z+3 \\ y &= \tfrac{-3}{10}z-\tfrac{2}{10} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{9}{10}z+\tfrac{6}{10}-z+3 \\ y &= \tfrac{-3}{10}z-\tfrac{2}{10} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \tfrac{-1}{10}z+\tfrac{18}{5} \\ y &= \tfrac{-3}{10}z-\tfrac{2}{10} \end{aligned}\right\}.$$

$\underline{k=2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to 2R_3-5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

שורת סתירה: אין פתרון.

$\underline{k=0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to 3R_1+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 9 & 0 & 12 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to 4R_1-9R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 0 & 0 & 39 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

פתרון יחיד:

$$(x,y,z)=\left(\frac{13}{4},\frac{1}{4},-1\right)$$

$\underline{k=-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to 2R_1-R_2-2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$(x,y,z)=\left(4,\frac{1}{6},-1\right)$$

שאלה 4

נרשום את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (k+1) & (k^2+2k-2) & (2k^2+7k+7) & k^3+k^2+k-2 \\ k & (k^2+k-2) & (k^2+2k+3) & k^3-5 \\ 1 & k & (k+1) & k^2 \\ (k-1) & (k^2-2) & (k^2+k+2) & k^3-k^2-5 \end{array}\right).$$

נדרג:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} (k+1) & (k^2+2k-2) & (2k^2+7k+7) & k^3+k^2+k-2 \\ k & (k^2+k-2) & (k^2+2k+3) & k^3-5 \\ 1 & k & (k+1) & k^2 \\ (k-1) & (k^2-2) & (k^2+k+2) & k^3-k^2-5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & (k^2+5k+4) & k^2+k+3 \\ k & (k^2+k-2) & (k^2+2k+3) & k^3-5 \\ 1 & k & (k+1) & k^2 \\ (k-1) & (k^2-2) & (k^2+k+2) & k^3-k^2-5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-kR_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & (k^2+5k+4) & k^2+k+3 \\ 0 & (k-2) & (k+3) & -5 \\ 1 & k & (k+1) & k^2 \\ (k-1) & (k^2-2) & (k^2+k+2) & k^3-k^2-5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_4-(k-1)R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & (k^2+5k+4) & k^2+k+3 \\ 0 & (k-2) & (k+3) & -5 \\ 1 & k & (k+1) & k^2 \\ 0 & (k-2) & (k+3) & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to -R_3+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & (k^2+5k+4) & k^2+k+3 \\ 0 & (k-2) & (k+3) & -5 \\ 0 & 0 & (k^2+4k+3) & k+3 \\ 0 & (k-2) & (k+3) & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_4-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & (k^2+5k+4) & k^2+k+3 \\ 0 & (k-2) & (k+3) & -5 \\ 0 & 0 & (k^2+4k+3) & k+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & k+1 & k^2 \\ 0 & (k-2) & (k+3) & -5 \\ 0 & 0 & (k^2+4k+3) & k+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & k+1 & k^2 \\ 0 & (k-2) & (k+3) & -5 \\ 0 & 0 & (k+3)(k+1) & k+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

עבור $k=-1$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. יש בה שורת סתירה ולכן אין למערכת אף פתרון.

עבור $k=2$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש בה שורת סתירה ולכן אין למערכת אף פתרון.

עבור $k=-3$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 9 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש בהמטריצה המורחבת המדורגת משתנה חופי ולכן יהיו אינסוף פתרונות. בפרט

$$(x,y,z) = (12+2z, 1, z) \ , \quad z \in \mathbb{R} \ .$$

עבור $k \neq -1, 2, -3$ אין שורת סתירה במטריצה המורחבת המדורגת ואין משתנים חופשיים לכן למערכת יהיה פתרון יחיד.

שאלה 5

המטריצה המורחבת של המערכת הינה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ b & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b \end{array}\right) \ .$$

נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ b & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - bR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1-b & 1-b & b(1-a) \\ 0 & 0 & a-1 & b-a \end{array}\right)$$

כאשר $a=1, b\neq 1$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-b & 1-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right)$. יש בה שורת סתירה ולכן לא קיים פתרון.

עבור $a \neq 1, b=1$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & (1-a) \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{array}\right)$. יש בה שורת סתירה ולכן לא קיים פתרון.

כאשר $a=1, b=1$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. יש בה משתנים חופשיים ולכן למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

בפרט

$$(x,y,z) = (x, y, 1-x-y) \ , \quad x,y \in \mathbb{R} \ .$$

כאשר $a \neq 1, b \neq 1$ המטריצה המורחבת המדורגת מצורה $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-b & 1-b & b(1-a) \\ 0 & 0 & a-1 & b-1 \end{array}\right)$. עבור הערכים האלה אין שורת סתירה ואין משתנים חופשיים ולכן קיים פתרון יחיד. בפרט:

$$(x, y, z) = \left(\frac{b-a}{b-1}, -\frac{-a^2b + a(b+1) + (b-2)b}{(a-1)(b-1)}, \frac{b-a}{a-1}\right)$$

<u>שאלה 6</u> נדרג את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & k+1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2k & k^2-1 & k-1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2k-2 & k^2-1 & k+1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-3 & k-3 \end{array}\right)$$

עבור $k = 1$ המטריצה המדורגת הינה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה לפיכך למערכת אין פתרון.

עבור $k = \pm\sqrt{3}$ נקבל: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{3}-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm\sqrt{3}-3 \end{array}\right)$. קיבלנו שורת סתירה אז למערכת אין פתרון.

כאשר $k \neq 1, \pm\sqrt{3}$ אין שורת סתירה אבל עדיין יהיה משתנה חופשי, ולכן יהיו אינסוף פתרונות. באותה סיבה יש 4 משתנים ורק 3 משוואות, אז לא ייתכן שיהיה פתרון יחיד.

סיכום:

א) עבור $k = 1$ או $k = \pm\sqrt{3}$ אין למערכת אף פתרון.

ב) פתרון יחיד- ודאי אין כי יש 3 משוואות בארבע משתנים.

ג) עבור $k \neq 1$ וגם $k \neq \pm\sqrt{3}$ יהיו למערכת אינסוף פתרונות.

<u>שאלה 7</u> נדרג את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 2 & k^2-4k & 0 & 2-k \\ -3 & 6 & k & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3+3R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 0 & k^2-6k+8 & 0 & -k-4 \\ 0 & 3k-6 & k & 10 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 0 & (k-4)(k-2) & 0 & -k-4 \\ 0 & 3(k-2) & k & 10 \end{array}\right)$$

כאשר $k=2$ המטריצה המדורגת הינה: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right)$. קיבלנו שורת סתירה אז לא קיים פתרון. עבור $k=4$ המטריצה המדורגת הינה: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 6 & 4 & 10 \end{array}\right)$. קיבלנו שורת סתירה אז למערכת אין פתרון.

עבור $k=0$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 0 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to 8R_3+6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 56 \end{array}\right) .$$

קיבלנו שורת סתירה אז למערכת אין פתרון. עבור $k\neq 0,2,4$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 0 & (k-4)(k-2) & 0 & -k-4 \\ 0 & 3(k-2) & k & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to(k-4)R_3]{R_2\to 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 0 & 3(k-4)(k-2) & 0 & -3k-12 \\ 0 & 3(k-4)(k-2) & k(k-4) & 10(k-4) \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-4 & 0 & 3 \\ 0 & 3(k-4)(k-2) & 0 & -3k-12 \\ 0 & 0 & k(k-4) & 13k-28 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to 3(k-2)R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3(k-2) & 0 & 0 & 12k+6 \\ 0 & 3(k-4)(k-2) & 0 & -3k-12 \\ 0 & 0 & k(k-4) & 13k-28 \end{array}\right)$$

אין שורת סתירה וגם אין משתנה חופשי במטריצה המורחבת המדורגת ולכן קיים פתרון יחיד.

סיכום:

א) עבור $k=0,2,4$ אין למערכת אף פתרון.

ב) עבור $k\neq 0,2,4$ יש למערכת פתרון יחיד.

ג) אין ערכי k עבורם יהיו למערכת אינסוף פתרונות.

שאלה 8 נדרג את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 0 \\ a & a-2 & 5 & -5 \\ 2a & a-1 & a^2-6a+15 & a-9 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-2\cdot R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & 3 & -5 \\ 0 & a-3 & a^2-6a+11 & a-9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & a^2-6a+8 & a-4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & (a-4)(a-2) & a-4 \end{array}\right)$$

כאשר $a = 4$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. יש משתנים חופשיים ולפיכך למערת יהיו אינסוף פתרונות. בפרט הפתרון הכללי הוא $(x,y,z) = \left(\frac{5+z}{4}, -5-3z, z\right)$

כאשר $a = 2$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$. קיבלנו שורת סתירה ולכן לא קיים פתרון.

כאשר $a = 3$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to 3\cdot R_3+\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right).$$

קיבלנו שורת סתירה ולכן למערכת אין פתרון.

כאשר $a = 0$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2+3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to 9\cdot R_3-8R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה ולפיכך למערכת אין אף פתרון.

לסיכום,

א) עבור $a = 0,2,3$ אין פתרון.

ב) עבור $a \neq 0,2,3,4$ יש פתרון יחיד.

ג) עבור $a = 4$ יהיו אינסוף פתרונות. בפרט: $(x,y,z) = \left(\frac{z+5}{4}, -5-3z, z\right)$

שאלה 9

נרשום את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 6-a^2 \\ a & 2 & 1 & 2 \\ 1-a & a-2 & 1 & 0 \\ 1-2a & a-4 & 0 & 8-5a \end{array}\right) \xrightarrow[R_4\to R_4+(2a-1)R_1]{\substack{R_2\to R_1-aR_1 \\ R_3\to R_3+(a-1)R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 6-a^2 \\ 0 & 2-a^2 & 1-2a & a^3-6a+2 \\ 0 & a^2-2 & 2a-1 & -a^3+a^2+6a-6 \\ 0 & 2a^2-4 & 4a-2 & -2a^3+a^2+7a+2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4\to R_4+2R_2]{R_3\to R_2+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 6-a^2 \\ 0 & 2-a^2 & 1-2a & a^3-6a+2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-4 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-5a+6 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 6-a^2 \\ 0 & 2-a^2 & 1-2a & a^3-6a+2 \\ 0 & 0 & 0 & (a+2)(a-2) \\ 0 & 0 & 0 & (a-2)(a-3) \end{array}\right)$$

לכל $a \neq 2,-2,3$ תהיה שורת סתירה ממטריצה המורחבת המדורגת. לכל שאר הערכים לא תהיה שורת סתירה.
לכן עבור $a \neq 2,-2,3$ לא קיים פתרון.

עבור $a=3$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ יש שורת סתירה לפיכך לא קיים פתרון.

עבור $a=-2$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right)$ יש שורת סתירה לפיכך לא קיים פתרון.

עבור $a=2$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to \frac{-1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

אין שורת סתירה אך יש משתנים חופשיים לכן יהיו אינסוף פתרונות. בפרט:

$$(x,y,z) = \left(z, -\frac{3}{2}z+1, z\right) \ , \qquad z \in \mathbb{R} \ .$$

לסיכום:

א) עבור $a=2$ למערכת יש לפחות פתרון אחד.

ב) עבור $a=2$:

$$(x,y,z) = \left(z, -\frac{3}{2}z+1, z\right) \ , \qquad z \in \mathbb{R} \ .$$

<u>שאלה 10</u>

א)

$$\overline{12} = \overline{\text{rem}(12,3)} = \bar{0}$$

ב)

$$\overline{23} = \overline{\text{rem}(23,3)} = \bar{2}$$

ג)

$$\overline{57} = \overline{\text{rem}(57,3)} = \bar{0}$$

ד)

$$\overline{46} = \overline{\text{rem}(46,3)} = \bar{1}$$

ה)

$$\overline{19} = \overline{\text{rem}(19,3)} = \bar{1}$$

ו)

$$\bar{2} + \bar{7} = \bar{9} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad -\bar{7} = \bar{2} \ .$$

ז)

$$\bar{2} + \bar{1} = \bar{3} = \bar{0}$$

ח)

$$\bar{2} + \bar{2} = \bar{4} = \bar{1}$$

ט)

$$\bar{1} + \bar{1} = \bar{2}$$

י)

$$\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{4} = \bar{1}$$

יא)

$$\bar{2} \cdot \bar{0} = \bar{0}$$

יב)

$$\bar{2} \cdot \bar{1} = \bar{2}$$

<u>שאלה 11</u>

(א

$$\overline{11}=\overline{\text{rem}(11,5)}=\bar{1}$$

(ב

$$\overline{24}=\overline{\text{rem}(24,5)}=\bar{4}$$

(ג

$$\overline{56}=\overline{\text{rem}(56,5)}=\bar{1}$$

(ד

$$\overline{98}=\overline{\text{rem}(98,5)}=\bar{3}$$

(ה

$$\overline{22}=\overline{\text{rem}(22,5)}=\bar{2}$$

(ו

$$\bar{8}+\bar{2}=\overline{10}=\bar{0} \quad \Rightarrow \quad -\bar{8}=\bar{2}\ .$$

(ז

$$\bar{2}+\bar{2}=\bar{4}\ .$$

(ח

$$\bar{2}+\bar{3}=\bar{5}=\bar{0}$$

(ט

$$\bar{1}+\bar{4}=\bar{5}=\bar{0}$$

(י

$$\bar{2}\cdot\bar{4}=\bar{8}=\bar{3}$$

(יא

$$\bar{3}\cdot\bar{2}=\bar{6}=\bar{1}$$

(יב

$$\bar{4}\cdot\bar{3}=\overline{12}=\bar{2}\ .$$

שאלה 12

א)

$$\overline{13} = \overline{\text{rem}(13,7)} = \bar{6}$$

ב)

$$\overline{33} = \overline{\text{rem}(33,7)} = \bar{5}$$

ג)

$$\overline{74} = \overline{\text{rem}(74,7)} = \bar{4}$$

ד)

$$\overline{16} = \overline{\text{rem}(16,7)} = \bar{2}$$

ה)

$$\overline{12} = \overline{\text{rem}(12,7)} = \bar{5}$$

ו)

$$\bar{9} + \bar{5} = \overline{14} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad -\bar{9} = \bar{5} \ .$$

ז)

$$\bar{2} + \bar{6} = \bar{8} = \bar{1} \ .$$

ח)

$$\bar{3} + \bar{5} = \bar{8} = \bar{1}$$

ט)

$$\bar{6} + \bar{3} = \bar{9} = \bar{2}$$

י)

$$\bar{2} \cdot \bar{6} = \overline{12} = \bar{5}$$

יא)

$$\bar{3} \cdot \bar{5} = \overline{15} = \bar{1}$$

יב)

$$\bar{4} \cdot \bar{6} = \overline{24} = \bar{3} \ .$$

שאלה 13

$$\left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & -\bar{1} & \bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2+R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x,y) = (\bar{2},\bar{0}) \ .$$

שאלה 14

$$\left(\begin{array}{cc|c} \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-\bar{2}\cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

יש משתנה חופשי ואין שורת סתירה לכן יהיו 3 פתרונות:

$$x+y=\bar{1} \quad \Rightarrow \quad x=\bar{1}-\bar{1}\cdot y=\bar{1}+\bar{2}\cdot y \ .$$

לפיכך הפתרון הכללי הינו

$$(x,y) = (\bar{1}+\bar{2}y, y) \ .$$

יש 3 פתרונות:

$y=\bar{0}$: $(x,y)=(\bar{1},\bar{0})$.

$y=\bar{1}$: $(x,y)=(\bar{3},\bar{1})=(\bar{0},\bar{1})$.

$y=\bar{2}$: $(x,y)=(\bar{5},\bar{2})=(\bar{2},\bar{2})$.

שאלה 15

$$\left(\begin{array}{cc|c} \bar{4} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{3} & -\bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{4} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to \bar{4}R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \overline{16} & \bar{8} & \overline{12} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-\bar{3}\cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{0} & -\bar{5} & -\bar{4} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{array}\right)$$

קיבלנו שרות סתירה לכן למערכת אין פתרון.

שאלה 16

$$\left(\begin{array}{cc|c} \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to\bar{2}\cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{6} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-\bar{3}\cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & -\bar{2} & -\bar{9} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to\bar{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{6} & \bar{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\bar{2}\cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x,y)=(\bar{0},\bar{2})\ .$$

שאלה 17

$$\left(\begin{array}{cc|c} \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{1} & -\bar{3} & \bar{4} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-\bar{2}\cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & -\bar{1} & -\bar{8} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to\bar{4}\cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \overline{16} & \bar{8} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\bar{2}\cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & -\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x,y)=(\bar{3},\bar{3})\ .$$

שאלה 18

$$\left(\begin{array}{cc|c} \bar{5} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{4} & -\bar{3} & \bar{4} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{5} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{4} & \bar{4} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to\bar{3}\cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \overline{15} & \bar{6} & \bar{9} \\ \bar{4} & \bar{4} & \bar{4} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{4} & \bar{4} & \bar{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-\bar{4}\cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{0} & -\overline{20} & -\bar{4} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-\bar{6}\cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & -\overline{14} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x,y)=(\bar{0},\bar{3})\ .$$

שאלה 19

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{8} & \bar{1} & -\bar{1} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & -\bar{2} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & -\bar{3} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \bar{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{1} & -\bar{5} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \bar{4} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - \bar{3} \cdot R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

תשובה סופית:

$$(x, y, z) = (\bar{0}, \bar{2}, \bar{0}) \ .$$

שאלה 20

$$\begin{aligned} x + \bar{3}y + z &= \bar{1} \\ \bar{3}x + y + \bar{2}z &= \bar{2} \\ \bar{2}x + \bar{2}y + \bar{3}z &= \bar{4} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - \bar{2}R_1]{R_2 \to R_2 - \bar{3}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{8} & -\bar{1} & -\bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{4} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \bar{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \bar{3} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - \bar{3} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$(x, y, z) = (\bar{0}, \bar{2}, \bar{0})$$

פתרון יחיד.

שאלה 21

$$\begin{aligned} x + \bar{2}y + z &= \bar{2} \\ \bar{3}x + y + \bar{4}z &= \bar{3} \\ \bar{2}x + \bar{4}y + \bar{4}z &= \bar{3} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3 \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & -\bar{5} & \bar{1} & -\bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2 \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & -\bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{6} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \bar{4} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{8} & \bar{4} & \bar{16} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{6} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{6} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \bar{4} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{8} & \overline{24} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - \bar{4} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & -\overline{10} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - \bar{2} \cdot R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{9} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{array}\right)$$

$$(x, y, z) = (\bar{5}, \bar{4}, \bar{3})$$

פתרון יחיד.

<u>שאלה 22</u> פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_5$. כמה פתרונות יש למערכת?

$$\begin{aligned} x + \bar{3}y + z &= \bar{1} \\ \bar{3}x + y + \bar{2}z &= \bar{2} \\ \bar{2}x + \bar{2}y + \bar{3}z &= \bar{4} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + \bar{3}R_1]{R_2 \to R_2 + \bar{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{7} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \overline{11} & \bar{6} & \bar{7} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \bar{3} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{6} & \overline{12} & \overline{12} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \bar{4} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \overline{16} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - \bar{2} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - \bar{3}R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right)$$

תשובה סופית:

$$(x, y, z) = (\bar{0}, \bar{2}, \bar{0})$$

פתרון יחיד.

שאלה 23

שיטה 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - \bar{3} \cdot R_1]{R_2 \to R_2 - \bar{4} \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{2} & -\overline{11} & -\bar{3} \\ \bar{0} & -\bar{1} & -\bar{8} & \bar{1} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \bar{2} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{6} & \bar{8} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \bar{4} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\overline{10} & -\overline{15} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

פתרון:

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{2} \\ y + \bar{3}z &= \bar{4} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x &= \bar{2} \\ y &= \bar{4} + (-\bar{3})z = \bar{4} + \bar{2}z \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x &= \bar{2} \\ y &= \bar{4} + \bar{2}z \end{aligned}\right\} \quad z \in \mathbb{Z}_5 \ .$$

יש 5 פתרונות למערכת:

$$\begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{4} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{3} \\ \bar{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{2} \\ \bar{4} \end{pmatrix} .$$

שיטה 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_1 + \bar{2}R_3]{R_2 \to \bar{2}R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + \bar{3} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

פתרון:

$$\left.\begin{aligned} \bar{3}x &= \bar{1} \\ y + \bar{3}z &= \bar{4} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \bar{2} \cdot \bar{3}x &= \bar{2} \cdot \bar{1} \\ y &= \bar{4} + (-\bar{3})z = \bar{4} + \bar{2}z \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x &= \bar{2} \\ y &= \bar{4} + \bar{2}z \end{aligned}\right\} \quad z \in \mathbb{Z}_5 \ .$$

יש 5 פתרונות למערכת:

$$\begin{pmatrix}\bar{2}\\\bar{4}\\\bar{0}\end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix}\bar{2}\\\bar{1}\\\bar{1}\end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix}\bar{2}\\\bar{3}\\\bar{2}\end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix}\bar{2}\\\bar{0}\\\bar{3}\end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix}\bar{2}\\\bar{2}\\\bar{4}\end{pmatrix} .$$

שאלה 24

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{2}&\bar{3}&\bar{3}&\bar{5}\\\bar{3}&\bar{4}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{6}&\bar{2}\end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{6}&\bar{2}\\\bar{3}&\bar{4}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{2}&\bar{3}&\bar{3}&\bar{5}\end{array}\right) \xrightarrow[R_2\to R_2-\bar{2}\cdot R_1]{R_2\to R_2-\bar{3}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{6}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{1}&-\overline{17}&-\bar{5}\\\bar{0}&\bar{1}&-\bar{9}&\bar{1}\end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{6}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{4}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{5}&\bar{1}\end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{6}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{4}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&-\bar{1}\end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{6}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{4}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{6}\end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-\bar{4}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{6}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&-\overline{22}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{6}\end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{1}&\bar{6}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&\bar{6}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{6}\end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2-\bar{6}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}&-\overline{40}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&\bar{6}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{6}\end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&\bar{6}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{6}\end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x,y,z)=(\bar{2},\bar{6},\bar{6}) .$$

שאלה 25

שיטה 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{2}\\\bar{3}&\bar{1}&\bar{4}&\bar{3}\\\bar{2}&\bar{4}&\bar{4}&\bar{3}\end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-\bar{2}\cdot R_1]{R_2\to R_2-\bar{3}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{2}\\\bar{0}&-\bar{5}&\bar{1}&-\bar{3}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{2}&-\bar{1}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{2}&\bar{4}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-\bar{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{1}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c}\bar{1}&\bar{2}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x,y,z)=(-\bar{2}y,y,\bar{2})=(\bar{3}y,y,\bar{2}) , \qquad y\in\mathbb{Z}_5 .$$

למערכת יש 5 פתרונות:

$$(\bar{0},\bar{0},\bar{2})\ ,\quad (\bar{3},\bar{1},\bar{2})\ ,\quad (\bar{1},\bar{2},\bar{2})\ ,\quad (\bar{4},\bar{3},\bar{2})\ ,\quad (\bar{2},\bar{4},\bar{2})\ .$$

שיטה 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{3} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to\bar{3}R_1+R_3]{R_2\to\bar{2}\cdot R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{5} & \bar{5} & \bar{6} & \bar{7} \\ \bar{5} & \overline{10} & \bar{7} & \bar{9} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to\bar{3}\cdot R_2+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

פתרון:

$$(x,y,z)=(-\bar{2}y,y,\bar{2})=(\bar{3}y,y,\bar{2})\ ,\qquad y\in\mathbb{Z}_5\ .$$

למערכת יש 5 פתרונות:

$$(\bar{0},\bar{0},\bar{2})\ ,\quad (\bar{3},\bar{1},\bar{2})\ ,\quad (\bar{1},\bar{2},\bar{2})\ ,\quad (\bar{4},\bar{3},\bar{2})\ ,\quad (\bar{2},\bar{4},\bar{2})\ .$$

שאלה 27

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+i & 1-i & 1+i \\ 1-i & 1+i & 1+3i \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to(1-i)R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2i & 2 \\ 1-i & 1+i & 1+3i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 1 \\ 1-i & 1+i & 1+3i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-(1-i)R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 1 \\ 0 & 2+2i & 4i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to(2-2i)R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 1 \\ 0 & 8 & 8+8i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to\frac{1}{8}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 1 \\ 0 & 1 & 1+i \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+iR_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1+i \end{array}\right)$$

פתרון: $(z_1,z_2)=(i,1+i)$.

שאלה 28

א)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to\frac{-1}{7}\cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to -R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-4}{7} & \frac{-1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

ב)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 2 & 1 & 0 \\ -9 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3\cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to -\frac{1}{3}\cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{-2}{3} \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$$

ג)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to 4\cdot R_1 + 5\cdot R_3]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -25 & -7 & 4 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to 7\cdot R_3 + 25\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -7 & -49 & -70 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{7}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 5\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & -3 & -4 & -35 & -50 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + 3\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 5 & 40 & 55 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{5}\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 8 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 25 & 35 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 11 \\ -1 & -7 & -10 \\ 3 & 25 & 35 \end{pmatrix}$$

ד) $A=\begin{pmatrix}-5&8&0\\-5&9&1\\-4&7&2\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-5&8&0&1&0&0\\-5&9&1&0&1&0\\-4&7&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to4\cdot R_1-5\cdot R_3]{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-5&8&0&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&-3&-10&4&0&-5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+3\cdot R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-5&8&0&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&0&-7&1&3&-5\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to7\cdot R_2+R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-5&8&0&1&0&0\\0&7&0&-6&10&-5\\0&0&-7&1&3&-5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to7R_1-8R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-35&0&0&55&-80&40\\0&7&0&-6&10&-5\\0&0&-7&1&3&-5\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{5}\cdot R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-7&0&0&11&-16&8\\0&7&0&-6&10&-5\\0&0&-7&1&3&-5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to\frac{-1}{7}\cdot R_3]{R_1\to\frac{-1}{7}\cdot R_1,\ R_2\to\frac{1}{7}\cdot R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{-11}{7}&\frac{16}{7}&\frac{-8}{7}\\0&1&0&\frac{-6}{7}&\frac{10}{7}&\frac{-5}{7}\\0&0&1&\frac{-1}{7}&\frac{-3}{7}&\frac{5}{7}\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-11}{7}&\frac{16}{7}&\frac{-8}{7}\\\frac{-6}{7}&\frac{10}{7}&\frac{-5}{7}\\\frac{-1}{7}&\frac{-3}{7}&\frac{5}{7}\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-11&16&-8\\-6&10&-5\\-1&-3&5\end{pmatrix}$$

ה) פתרו את המערכת $\left.\begin{array}{rl}-5x+8y&=1\\-5x+9y+z&=2\\-4x+7y+2z&=3\end{array}\right\}$ בעזרת סעיף ד.

$$A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-11}{7}&\frac{16}{7}&\frac{-8}{7}\\\frac{-6}{7}&\frac{10}{7}&\frac{-5}{7}\\\frac{-1}{7}&\frac{-3}{7}&\frac{5}{7}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{7}\\-\frac{1}{7}\\\frac{8}{7}\end{pmatrix}\ .$$

$$x=-\frac{3}{7}\ ,\qquad y=-\frac{1}{7}\ ,\qquad z=\frac{8}{7}\ .$$

שאלה 29

א)

$$A\cdot X=B\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}6&-1\\-1&0\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}-13&-9\\2&1\end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B \ , \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \ .$$

לכן

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -13 & -9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

ב)

$$A \cdot X = B \ , \qquad A = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} -11 & 5 & -15 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B \ , \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \ .$$

לכן

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 & 5 & -15 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \ .$$

ג)

$$A \cdot X = B \ , \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B \ , \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 3 & -5 & 7 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \ .$$

לכן

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 3 & -5 & 7 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

ד)

$$X \cdot A = B \ , \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} -9 & 9 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = B \cdot A^{-1} \ , \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \\ -12 & 28 & 27 \end{pmatrix} \ .$$

לכן

$$X = \begin{pmatrix} -9 & 9 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \\ -12 & 28 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

ה)

$$A \cdot X \cdot B = C \ , \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \ , \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 12 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \ .$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & \frac{3}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\ ,\qquad B^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{3} & 2\\ -\frac{2}{3} & 1\end{pmatrix}\ .$$

$$X=\begin{pmatrix}2 & \frac{3}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & -4\\ -12 & 12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{5}{3} & 2\\ -\frac{2}{3} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}\ .$$

שאלה 30

$$A=\begin{pmatrix}5 & -4\\ -8 & 6\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\ .$$

פתרו את המשוואות הבאות:

א)

$$AX=C\qquad\Rightarrow\qquad X=A^{-1}\cdot C$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ -4 & -\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot C=\begin{pmatrix}-5 & 5\\ -\frac{13}{2} & \frac{13}{2}\end{pmatrix}\ .$$

ב)

$$XB=C\qquad\Rightarrow\qquad X=C\cdot B^{-1}$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}$$

$$X=C\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}7 & -5\\ 7 & -5\end{pmatrix}\ .$$

ג)

$$AXB=C\qquad\Rightarrow\qquad X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}-35 & 25\\ -\frac{91}{2} & \frac{65}{2}\end{pmatrix}\ .$$

שאלה 31

$$BC=C(2A-3X)A\ \Rightarrow\ C^{-1}BC=(2A-3X)A\ \Rightarrow\ C^{-1}BCA^{-1}=2A-3X$$

$$\Rightarrow\ C^{-1}BCA^{-1}-2A=-3X\ \Rightarrow\ X=-\tfrac{1}{3}\left(C^{-1}BCA^{-1}-2A\right)\ .$$

שאלה 32

A הפיכה $\Leftarrow$ $|A|\neq 0$.

תהי

$$\begin{vmatrix}0 & 1-k & 2\\ k+5 & 0 & 5\\ 0 & -1 & k\end{vmatrix}=-(1-k)\begin{vmatrix}k+5 & 5\\ 0 & k\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}k+5 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=-(1-k)k(k+5)+2(-1)(k+5)\\ &=(k+5)\left(-(1-k)k-2\right)\\ &=(k+5)\left(-k+k^2-2\right)\\ &=(k+5)(k-2)(k+1)\ .\end{aligned}$$

$|A| \neq 0$ לכל $k \neq -5, 2, -1$ לכן A הפיכה לכל $k \neq -5, 2, -1$.

שאלה 33

$$\begin{aligned}
(2I-A)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\
2I-A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \qquad\qquad = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
A &= 2I - \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
A &= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

שאלה 34 נגדיר את המטריצות

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

אז

$$A \cdot B = C , \qquad A = C \cdot B^{-1} .$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

לכן

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

שאלה 35 תהי $X = (7B^{-1}CA^{-1}B^2)^{-1}$. אז

$$\begin{aligned}
X \cdot 7B^{-1}CA^{-1}B^2 &= I \\
X \cdot B^{-1}CA^{-1}B^2 &= \frac{1}{7} \cdot I \\
X \cdot B^{-1}CA^{-1} &= \frac{1}{7} B^{-2} \\
X \cdot B^{-1}C &= \frac{1}{7} B^{-2} \cdot A \\
X \cdot B^{-1} &= \frac{1}{7} B^{-2} \cdot A \cdot C^{-1} \\
X &= \frac{1}{7} B^{-2} \cdot A \cdot C^{-1} \cdot B .
\end{aligned}$$

שאלה 36 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

א) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ב)

$$AXA + A = A^2 \qquad \Rightarrow \qquad AX + I = A \qquad \Rightarrow \qquad X = A^{-1} \cdot (A - I) = I - A^{-1}$$

לכן

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>שאלה 37</u>

א) <u>אם A הפיכה ו- $BA = CA$ אז $B = C$.</u>

טענה נכונה. הוכחה:

A הפיכה לכן קיימת A^{-1}. נכפיל מצד ימין ב- A^{-1}:

$$B \cdot A \cdot A^{-1} = C \cdot A \cdot A^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad B = C\ .$$

ב) <u>אם $AB = AC$ אז $B = C$.</u>

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\ , \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}\ .$$

$AB = AC = 0$, $B \neq C$.

ג) <u>אם $AB = 0$ אז A ו- B אינן הפיכות.</u>

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

$A \cdot B = 0$ ו- B הפיכה.

ד) <u>אם $AB = 0$ ו- $A \neq 0$ אז B איננה הפיכה.</u>

טענה נכונה. הוכחה:
נוכיח בדרך השלילה. נניח ש- $A \cdot B = 0$ ו- $A \neq 0$ ו- B הפיכה.
אז קיימת B^{-1}. נכפיל את $AB = 0$ מצד ימין ב- B^{-1}:

$$A \cdot B \cdot B^{-1} = 0 \cdot B^{-1} \quad \Rightarrow \quad A \cdot I = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0\ ,$$

בסתירה דכך ש- $A \neq 0$.

ה) <u>אם AB הפיכה אז A ו- B הפיכות.</u>

טענה נכונה. הוכחה:
AB הפיכה $\Leftarrow |AB| \neq 0 \Leftarrow |A|\cdot|B| \neq 0 \Leftarrow |A| \neq 0$ וגם $|B| \neq 0$. לפיכך A הפיכה וגם B הפיכה.

ו) <u>אם A הפיכה אז AB הפיכה.</u>

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

A הפיכה אבל AB לא הפיכה.

ז) <u>אם A הפיכה ו- B הפיכה אז $A+B$ הפיכה.</u>

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + I_{2\times 2} \ , \qquad B = -I \ , \qquad A+B = I_{2\times 2} - I_{2\times 2} = 0_{2\times 2} \ .$$

$|A| = |I| = 1$,

$|B| = |-I| = (-1)^2|I| = 1$,

$|A+B| = 0$.

ז"א A הפיכה, B הפיכה, $A+B$ לא הפיכה.

ח) <u>אם A הפיכה ו- B לא הפיכה אז $A+B$ לא הפיכה.</u>

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

$|A| = 1$, $|B| = 0$, $|A+B| = 2$.
ז"א A הפיכה, B לא הפיכה, $A+B$ הפיכה.

ט) <u>תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ויהי $f(x) = 2x^4 - x^2 + 3x - 2$ פולינום כך ש- $f(A) = 0$. אזי A הפיכה.</u>

טענה נכונה. הוכחה:
לפי הנתון,

$$f(A) = 2A^4 - A^2 + 3A - 2I = 0 \quad \Rightarrow \quad A\cdot(2A^3 - A + 3) = 2I \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{2}\left(2A^3 - A + 3I\right)$$

ז"א A^{-1} קיימת לכן A הפיכה.

י) <u>אם A הפיכה אז $A+A^t$ הפיכה.</u>

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad A^t=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\ ,\qquad A+A^t=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\ .$$

$|A|=1 \Leftarrow A$ הפיכה.

$|A+A^t|=0 \Leftarrow A+A^t$ לא הפיכה.

שאלה 38 הטענה נכונה. הוכחה:

נכפיל מצד ימין ב- $A+B$:

$$(A+B)^{-1}(A+B)=A^{-1}(A+B)-A^{-1}B(A+B)^{-1}(A+B)=I_{n\times n}+A^{-1}B-A^{-1}BI_{n\times n}=I_{n\times n}\ .$$

שאלה 39

$$A_1=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}\ ,\qquad A_2=\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}\ .$$

$$A_1A_2=\begin{pmatrix}a_1a_2+b_1c_2&a_1b_2+b_1d_2\\c_1a_2+d_1c_2&c_1b_2+d_1d_2\end{pmatrix}$$

$$a_1a_2+b_1c_2+c_1a_2+d_1c_2=a_2(a_1+c_1)+c_2(b_1+d_1)=a_2+c_2=1\ ,$$

$$a_1b_2+b_1d_2+c_1b_2+d_1d_2=b_2(a_1+c_1)+d_2(b_1+d_1)=b_2+d_2=1\ .$$

שאלה 40 נוכיח דרך השלילה. נניח ש A הפיכה ו קיים פתרון $X\neq 0$.

A הפיכה אז A^{-1} קיימת.

$$AX=0\quad\Rightarrow\quad A^{-1}AX=A^{-1}\cdot 0\quad\Rightarrow\quad IX=0\quad\Rightarrow\quad X=0$$

בסתירה לכך ש- $X\neq 0$.

שאלה 41 נתון: $|A|=a$, $|B|=b\neq 0$.

A,B מסדר $n\times n$.

א) $|AB|=|A|\cdot|B|=ab$.

ב) $|7A|=7^n|A|=7^na$.

ג) $|7AB^{-1}A^2|=7^n|A||B^{-1}||A^2|=7^n|A||B^{-1}||A|^2=7^n\cdot a\cdot\frac{1}{b}\cdot a^2=\frac{7^na^3}{b}$.

ד) $|A+A|=|2A|=2^n|A|=2^n\cdot a$

ה) $|4A^tB^3A^2(B^t)^{-1}|=4^n|A^t||B^3||A^2||B^t|^{-1}=4^n|A||B|^3|A|^2|B|^{-1}=4^n\cdot a\cdot b^3\cdot a^2\cdot\frac{1}{b}=4^n\,(ab)^3\ .$

שאלה 42

למערכת $AX=b$ יש פתרון יחיד $\Leftrightarrow$ A הפיכה $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$.

א)

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & k \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$|A|=k-5$. לכן $|A|\neq 0$ לכל $k\neq 5$.
לכן A הפיכה לכל $k\neq 5$.
לכן למערכת יש פתרון יחיד לכל $k\neq 5$.

ב)

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

$|A|=(k-1)^2(k+2)$. לכן $|A|\neq 0$ לכל $k\neq 1,-2$.
לכן A הפיכה לכל $k\neq 1,-2$.
לכן יש פתרון יחיד לכל $k\neq 1,-2$.

ג)

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & k & 4 \end{pmatrix}.$$

$|A|=k+62$.

לכן $|A|\neq 0$ לכל $k\neq -62$.
לכן A הפיכה לכל $k\neq -62$. לכן יש פתרון יחיד לכל $k\neq -62$.

ד)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

$|A|=k^2-2k+1=(k-1)^2$.

$A\neq 0$ לכל $k\neq 1$.
לכן A הפיכה לכל $k\neq 1$.
לכן למערכת יש פתרון יחיד לכל $k\neq 1$.

שאלה 43

א) <u>$|A+B|=|B+A|$.</u>

טענה נכונה. הוכחה: הקבוצה של מטריצות שדה לכן חוק החילוף מתקיים, ז"א

$$A+B=B+A \qquad \Rightarrow \qquad |A+B|=|B+A| \ .$$

ב) <u>אם $AB=AC$ אז $|B|=|C|$.</u>

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\ ,\qquad AB=AC=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

$|B|=1\neq|C|=4$.

ג) <u>אם קיים $X\neq 0\in\mathbb{R}^n$ כך ש- $(AB)\cdot X=0$ אז $|A|=0$ או $|B|=0$.</u>

טענה נכונה. הוכחה:

למערכת $(AB)\cdot X=0$ קיים פתרון לא טריוויאלי, כלומר $X\neq 0$.

לכן AB לא הפיכה.

$$\Rightarrow\quad |AB|\neq 0\quad\Rightarrow\quad |A|\cdot|B|\neq 0\quad\Rightarrow\quad |A|\neq 0,\ |B|\neq 0\ .$$

ד) <u>$|A+B|=|A|+|B|$.</u>

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad A+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ .$$

$$|A+B|=1\ ,\qquad |A|+|B|=0\ .$$

ה) <u>$|AB|=|BA|$.</u>

טענה נכונה. הוכחה:

$$|AB|=|A|\cdot|B|=|B|\cdot|A|=|BA|\ .$$

ו) <u>$|A^tB|=|B^tA|$.</u>

טענה נכונה. הוכחה:

$$|A^tB|=|A^t|\cdot|B|=|A|\cdot|B|=|A|\cdot|B^t|=|B^t|\cdot|A|=|B^tA|\ .$$

ז) <u>אם $|A^{-1}|=|A|$ אז $A=I$.</u>

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\ .$$

$$|A|=-1=|A^{-1}|\ .$$

ח) <u>אם $A^2=I$ אז לפחות אחת מהמטריצות $A-I$ או $A+I$ איננה הפיכה.</u>

טענה נכונה. הוכחה:

$$A^2-I=0\quad\Rightarrow\quad (A-I)(A+I)=0\quad\Rightarrow\quad |(A-I)(A+I)|=0\quad\Rightarrow\quad |A-I|\cdot|A+I|=0$$

מכאן $|A-I|=0$ או $|A+I|=0$.
לכן $A+I$ לא הפיכה או $A-I$ לא הפיכה.

שאלה 44

$$|25A^3B^{-1}A^2B^2| = 25^4|A^3|\cdot|B^{-1}|\cdot|A^2|\cdot|B^2| = 25^4|A|^3\cdot\frac{1}{|B|}\cdot|A|^2\cdot|B|^2 = 25^4\cdot a^3\cdot\frac{1}{b}\cdot a^2\cdot b^2 = 25^4\cdot a^5\cdot b\ .$$

שאלה 45

א) <u>לא שדה.</u>
דוגמה נגדית: לאיבר $3\in\mathbb{N}$ האיבר הנגדי הינו -3 אשר לא שייך $\mathbb{N}$.

ב) <u>לא שדה.</u>
דוגמה נגדית: $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}$.

$$AB=\begin{pmatrix}7&2\\9&0\end{pmatrix}\ ,\qquad BA=\begin{pmatrix}1&8\\3&6\end{pmatrix}\ ,\qquad AB\neq BA\ .$$

ז"א חוק החילוף לא מתקיים.

ג) <u>לא שדה.</u>
דוגמה נגדית:
$$1\oplus2=1+2\cdot2=5\ ,\qquad 2\oplus1=2+2\cdot1=3\ ,$$
ז"א $1\oplus2\neq2\oplus1$ לכן חוק החילוף של חיבור לא מתקיים.

עוד דוגמה נגדית:
$$2\odot3=2\ ,\qquad 3\odot2=3\ ,$$
$2\odot3\neq3\odot2$ לכן חוק החילוף של כפל לא מתקיים.

ד) <u>לא שדה</u>

דוגמה נגדית: $a=2\in\mathbb{Z}$ אבל לא קיים $a^{-1}\in\mathbb{Z}$ כך ש- $aa^{-1}=1$.

ה) <u>לא שדה</u>

חוק החילוף לא מתקיים: $a\oplus b=\frac{a-b}{3}$, $b\oplus a=\frac{b-a}{3}$. לכן $a\oplus b\neq b\oplus a$.

ו) <u>לא שדה</u>

נשים לב שלאיבר 3, למשל, אין הופכי ב - $\mathbb{F}$. אכן, נניח שקיים $a+b\sqrt{2}$ כך ש-
$$3\odot(a+b\sqrt{2})=1\ .$$
מכאן $b=0$, $a=\frac{1}{3}$. בסתירה לכך ש - $a\in\mathbb{Z}$.