שיעור 4
רציפות בנקודה

4.1 הגדרה: (רציפות בנקודה)
נניח ש- $f(x)$ פונקציה המוגדרת בנקודה a ובסביבה של a.
נקרא רציפה בנקודה a אם

1. $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$, כלומר הגבול הדו-צדדי $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ קיים,
2. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

מכיוון ש $\lim_{x\to a} x = a$, מקבלים $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = f\left(\lim_{x\to a} x\right)$, ז"א סימן של $\lim$ נכנס לתוך הפונקציה.

דוגמאות.

דוגמא 1) $\lim_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e^1 = e$

דוגמא 2) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln\left[(1+x)^{1/x}\right] = \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right] = \ln e = 1$.

4.2 משפט. (תכונות של פונקציה רציפה)

1) אם פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפות בנקודה a, אז הפונקציות $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ רציפות בנקודה a.
הפונקציה $\frac{f}{g}$ רציפה בנקודה a בתנאי $g(a)\neq 0$.

2) נניח ש $y=f(u)$, $u=g(x)$, $g(a)=b$, פונקציה g רציפה בנקודה a ופונקציה f רציפה בנקודה b, אז הפונקציה $y=f(g(x))$ רציפה בנקודה a.

3) כל פונקציה אלמנטרית רציפה בכל נקודה פנימית של תחום הגדרתה.

4.3 הגדרה: (אי-רציפות בנקודה)
תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה a אבל לא בהכרח בנקודה a עצמה.

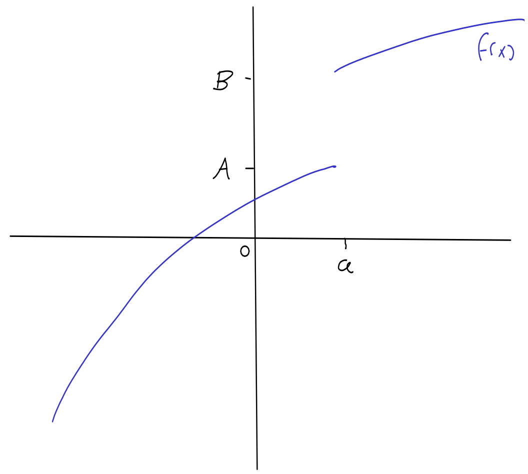
א) אם קיימים הגבולות החד-צדדים הסופיים ו-

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \neq f(a)$$

או ש $f(a)$ לא מוגדר, אומרים כי a היא נקודת אי-רציפות סליקה של $f(x)$.

ב) נקודה a היא נקודת אי-רציפות ממין ראשון של $f(x)$ אם קיימים הגבולות החד-צדדים הסופיים $\lim_{x\to a^-} f(x) = A$, ו- $\lim_{x\to a^+} f(x) + B$ אבל $A\neq B$, כלומר

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)\ .$$

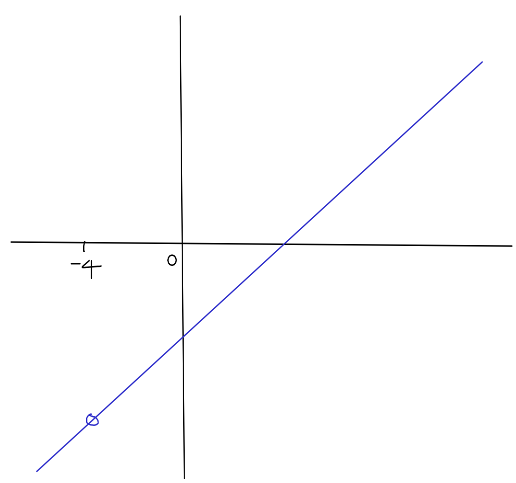


ג) נקודה a נקראת אי רציפות ממין שני של פונרציה $f(x)$ אם לפ[חות אחד הגבולות החד צדדיים $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ או $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ שווה ל- ∞ או $-\infty$ או לא קיים.

4.4 דוגמא. $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+4}$ לא רציפה בנקודה $x=-4$.

$$\lim_{x\to -4}\frac{x^2-16}{x+4}=\lim_{x\to -4}\frac{(x+4)(x-4)}{x+4}=\lim_{x\to -4}(x-4)=-8$$

$f(x)$ לא מוגדרת בנקודה $x=-4$. לכן $x=-4$ נקודת אי-רציפות סליקה.



4.5 דוגמא. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\ ,\\ 2 & x=0\ .\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ ,$$

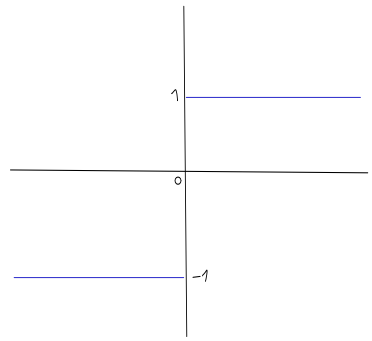
אבל $f(0)=2$. ז"א $\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$ $\Leftarrow$ נקודת אי-רציפות סליקה.

4.6 דוגמא. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

$x = 0$ נקודת אי-רציפות.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \ , \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{-x} = -1$$

לכן $x = 0$ נקודת אי-רציפות ממין ראשון.



4.7 דוגמא. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & -1 < x < 2 \ , \\ 2 - x & 2 \le x \le 4 \ . \end{cases}$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x - 1) = 1 \ , \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (2 - x) = 0 \ .$$

לכן $x = 2$ נקודת אי-רציפות ממין ראשון.

4.8 דוגמא. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{2}{x-1}\right)$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \arctan\left(\frac{2}{x-1}\right) = -\frac{\pi}{2} \ , \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \arctan\left(\frac{2}{x-1}\right) = \frac{\pi}{2} \ .$$

$x = 1$ נקודת אי רציפות ממין ראשון.

4.9 דוגמא.

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$$

לכן $x = 2$ נקודת אי-רציפות ממים שני.

4.10 דוגמא.

$$f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

לא קיים. לכן $x=0$ נקודת אי-רציפות ממים שני.

4.11 דוגמא.

מצאו את נקודות אי הרציפות של הפונרציה הבאה וברר את סוגן:

$$f(x)=\frac{x}{x+3}+2^{-1/x^2}$$

פיתרון. נקודות אי רציפות: $x=0,-3$.

$\underline{x=-3}$

$$\lim_{x\to -3^+}\left(\frac{x}{x+3}+2^{-1/x^2}\right)=\infty$$

$x=-3$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

$\underline{x=0}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x+3}+2^{-1/x^2}\right)=0+0=0$$

$x=0$ נקודת אי-רציפות סליקה. ■

4.12 דוגמא.

מצאו את נקודות אי הרציפות של הפונרציה הבאה וברר את סוגן:

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}+\frac{\tan x}{x}$$

פיתרון.

נקודות אי רציפות: $x=-1,3,0$, $\frac{\pi}{2}+n\pi$.

$\underline{x=-1}$

$$\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}+\frac{\tan x}{x}\right)=-\infty$$

$x=-1$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

<u>$x=3$</u>

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}+\frac{\tan x}{x}\right)=\frac{3}{2}+\frac{\tan 3}{3}=0$$

$x=3$ נקודת אי-רציפות סליקה.

<u>$x=0$</u>

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}+\frac{\tan x}{x}\right)=3+1=4$$

$x=0$ נקודת אי-רציפות סליקה.

<u>$x=\frac{\pi}{2}+n\pi$</u>

$$\lim_{x\to \left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^-}\left(\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}+\frac{\tan x}{x}\right)=\infty\ .$$

$x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

■

4.13 דוגמא.

נתונה פונקציה

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x} & x\leq 1\\ ax^2 & -1<x\leq 1\\ \sqrt{x+b} & x>1\end{cases}$$

עבור אילו ערכי a,b $f(x)$ רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$?

פיתרון.

<u>אי-רציפות בנקודה $x=-1$</u>

$$\lim_{x\to -1^-} f=2^{-(-1)}=2\ ,\qquad \lim_{x\to -1^+} f=a(-1)^2=a\ .$$

לכן f רציפה ב- $x=-1$ אם $a=2$.

אי-רציפות בנקודה $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f = a1^2 = a(=2) \ , \qquad \lim_{x\to 1^+} f = \sqrt{1+b} \ .$$

לכן f רציפה ב- $x=1$ אם

$$\sqrt{1+b} = 2 \quad \Rightarrow \quad b=3 \ .$$

■

דוגמא.

נתונה פונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2\left(\sqrt{a^2+1}\cdot x\right)}{2x^2} & x<0 \\ b & x=0 \\ x+5 & x>0 \end{cases}$$

א. עבור אילו ערכי a,b $f(x)$ רציפה ב- $x=0$?

ב. עבור אילו ערכי a,b $f(x)$ הנקודה $x=0$ נקודת אי-רציפות ממין ראשון?

ג. עבור אילו ערכי a,b $f(x)$ הנקודה $x=0$ נקודת אי-רציפות סליקה?

פיתרון.

א.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2\left(\sqrt{a^2+1}\cdot x\right)}{2x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{a^2+1}{2} \frac{\sin^2\left(\sqrt{a^2+1}\cdot x\right)}{\left(\sqrt{a^2+1}\cdot x\right)^2} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{a^2+1}{2} \ ,\end{aligned}$$

ו-

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} (x+5) \\ &= 5 \ ,\end{aligned}$$

ו- $f(0)=b$. כדי ש- f תהיה רציפה נדרש כי $\lim\limits_{x\to 0^-} f = \lim\limits_{x\to 0^+} f = f(0)$ וזה מתקיים אם $\frac{a^2+1}{2} = 5 = b$ או שקול

$$b=5 \ , \qquad a=\pm 3 \ .$$

ב. הגבול $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 5$ קיים לכל $b\in\mathbb{R}$ והגבול $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \frac{a^2+1}{2}$ קיים לכל $b\in\mathbb{R}$. לכן $x=0$ תהיה נקודת אי-רציפות ממין ראשון אם

$$\frac{a^2+1}{2} \neq 5 \qquad \Rightarrow \qquad a\neq \pm 3$$

לכל $b\in\mathbb{R}$.