

## שיעור 7

### רדוקציה

#### 7.1 טבלה של רדוקציות

##### טבלה של רדוקציות

רדוקציה	עמוד
$L_{\text{HALT}} \leq L_{\text{acc}}$	דוגמה 7.6 עמוד 71
$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{\text{NOTREG}}$	דוגמה 7.11 עמוד 75
$L_{\text{acc}} \leq L_{\text{NOTREG}}$	דוגמה 7.12 עמוד 76
$L_{\text{HALT}} \leq L_{\text{NOTREG}}$	דוגמה 7.13 עמוד 77
$L_{\text{acc}} \leq L_{\text{REG}}$	דוגמה 7.15 עמוד 79
$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{\text{REG}}$	דוגמה 7.14 עמוד 78
$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \neg M_2}$ כאשר $L_{M_1 \neg M_2} = \{\langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2)\}$	דוגמה 7.16 עמוד 80
$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \subset M_2}$ כאשר $L_{M_1 \subset M_2} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) \subset L(M_2)\}$	דוגמה 7.17 עמוד 80

#### 7.2 מ"ט המחשבת את פונקציה

##### הגדרה 7.1 מ"ט המחשבת פונקציה

בהינתן פונקציה  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  אומרים כי מ"ט  $M$  מחשבת את  $f$  אם לכל  $x \in \Sigma^*$ :

- $M$  מגיעה ל-  $q_{\text{acc}}$  בסוף החישוב של  $f(x)$  וגם
- על סרט הפלט של  $M$  רשום  $f(x)$ .

##### הערה 7.1

מ"ט שמחשבת פונקציה עוצרת תמיד.

##### הגדרה 7.2 מ"ט המחשבת פונקציה

בהינתן פונקציה  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  אומרים כי  $f$  חשיבה אם קיימת מ"ט המחשבת את  $f$ .

## דוגמה 7.1

$$f_1(x) = xx. \quad (7.1)$$

$f_1(x)$  חשיבה.

## דוגמה 7.2

$$f_2(x) = \begin{cases} x & |x| \text{ זוגי} \\ xx & |x| \text{ אי-זוגי} \end{cases}. \quad (7.2)$$

$f_2(x)$  חשיבה.

## דוגמה 7.3

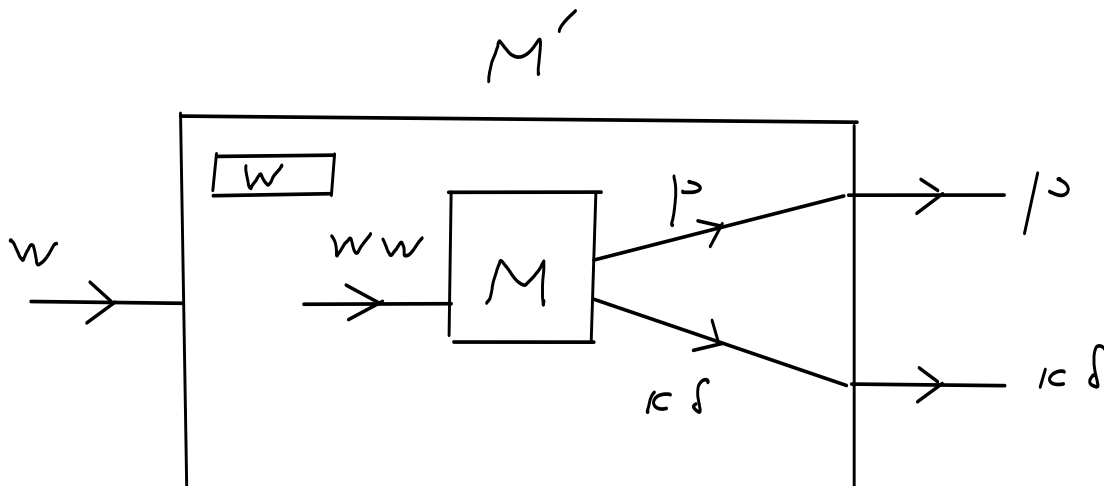
$$f_3(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M \rangle \\ \langle M^* \rangle & x \neq \langle M \rangle \end{cases}. \quad (7.3)$$

כאשר

•  $M^*$  מ"ט שמקבלת כל קלט.

•  $M'$  מ"ט המקבלת את השפה

$$L(M') = \{w \in \Sigma^* \mid ww \in L(M)\}.$$



$f_3(x)$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שבודקת האם  $x = \langle M \rangle$ . אם לא, מחזירה קידוד קבוע  $\langle M^* \rangle$ . ואם כן, מחזירה קידוד  $\langle M' \rangle$  ע"י הוספת מעברים המשכפלים את הקלט בתחילת הקידוד  $\langle M \rangle$ .

## דוגמה 7.4

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & x = \langle M \rangle \wedge \langle M \rangle \in L(M) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad (7.4)$$

$f_4(x)$  לא חשיבה כי ייתכנו קלטים  $x = \langle M \rangle$  ו- $M$  לא עוצרת על  $\langle M \rangle$ .

## 7.3 רדוקציות

## הגדרה 7.3 רדוקציות

בהינתן שתי שפות  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$  אומרים כי  $L_1$  ניתנת לרדוקציה ל- $L_2$ , ומסמנים

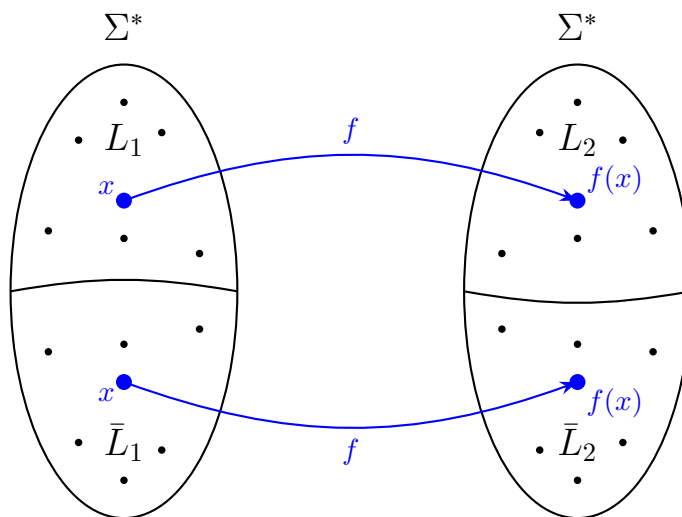
$$L_1 \leq L_2 ,$$

אם  $\exists$  פונקציה  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  המקיימת:

(1)  $f$  חשיבה

(2) לכל  $x \in \Sigma^*$

$$x \in L_1 \iff f(x) \in L_2 .$$



## דוגמה 7.5

נתונות השפות

$$L_1 = \{x \in \{0, 1\}^* \mid |x| \text{ זוגי} \} ,$$

$$L_2 = \{x \in \{0, 1\}^* \mid |x| \text{ אי-זוגי} \} .$$

הוכיחו כי

$$L_1 \leq L_2 .$$

פתרון:

נגדיר את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \text{ זוגי} \\ 10 & |x| \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

$$f(x) \in L_2 \text{ אי-זוגי } |f(x)| \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow |x| \text{ זוגי } \Leftrightarrow x \in L_1$$

$$f(x) \notin L_2 \text{ זוגי } |f(x)| \Leftrightarrow f(x) = 10 \Leftrightarrow |x| \text{ אי-זוגי } \Leftrightarrow x \notin L_1$$

**משפט 7.1 משפט הרדוקציה**לכל שתי שפות  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ , אם קיימת רדוקציה

$$L_1 \leq L_2$$

אזי התנאים הבאים מתקיימים:

$$L_1 \in R \Leftrightarrow L_2 \in R \quad (1)$$

$$L_1 \in RE \Leftrightarrow L_2 \in RE \quad (2)$$

$$L_1 \notin R \Rightarrow L_2 \notin R \quad (3)$$

$$L_1 \notin RE \Rightarrow L_2 \notin RE \quad (4)$$

**הוכחה:** מכיוון ש-

$$L_1 \leq L_2$$

קיימת פונקציה  $f$  חשיבה המקיימת:

$$x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$$

לכל  $x \in \Sigma^*$ .תהי  $M_f$  מ"ט המחשבת את  $f$ .

$$(1) \quad \underline{L_1 \in R \Leftrightarrow L_2 \in R} \text{ נוכיח}$$

תהי  $M_2$  מ"ט המכריעה את  $L_2$ .נבנה מ"ט  $M_1$  המכריעה את  $L_1$ .התאור של  $M_1$ 

$$M_1 = \text{על קלט } x:$$

1. מחשבת את  $f(x)$  בעזרת  $M_f$ .2. מריצה את  $M_2$  על  $f(x)$  ועונה כמוה.נוכיח כי  $M_1$  מכריעה את  $L_1$ .

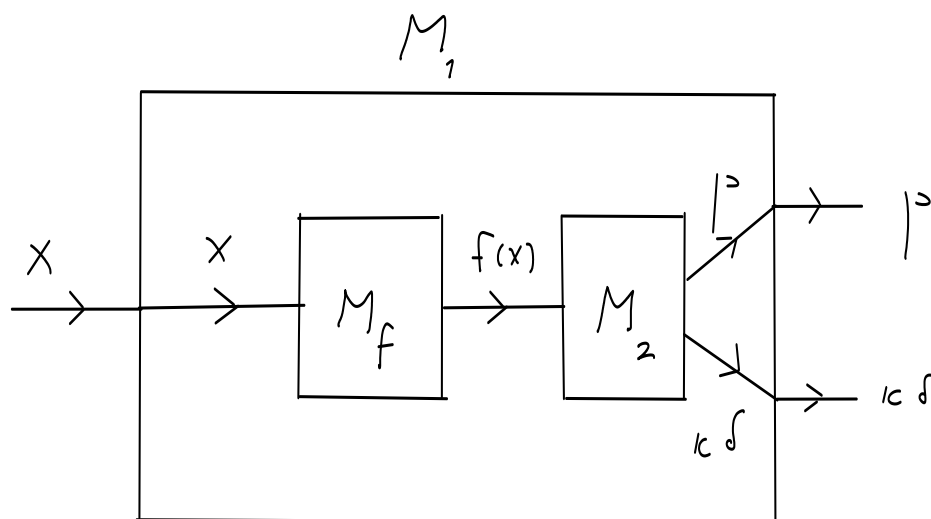
$$\bullet \text{ אם } x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2 \Leftrightarrow M_2 \text{ מקבלת את } f(x) \Leftrightarrow M_1 \text{ מקבלת את } x.$$

• אם  $x \notin L_1 \Leftrightarrow f(x) \notin L_2 \Leftrightarrow M_2$  דוחה את  $f(x) \Leftrightarrow M_1$  דוחה את  $x$ .

(2) נוכיח  $L_1 \in RE \Leftrightarrow L_2 \in RE$

תהי  $M_2$  מ"ט המקבלת את  $L_2$ .

נבנה מ"ט  $M_1$  המקבלת את  $L_1$ .



התאור של  $M_1$

$M_1 =$  על קלט  $x$ :

1. מחשבת את  $f(x)$  בעזרת  $M_f$ .

2. מריצה את  $M_2$  על  $f(x)$  ועונה כמוה.

נוכיח כי  $M_1$  מקבלת את  $L_1$ :

• אם  $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2 \Leftrightarrow M_2$  מקבלת את  $f(x) \Leftrightarrow M_1$  מקבלת את  $x$ .

• אם  $x \notin L_1 \Leftrightarrow f(x) \notin L_2 \Leftrightarrow M_2$  לא מקבלת את  $f(x) \Leftrightarrow M_1$  לא מקבלת את  $x$ .

(3)

(4)

## כלל 7.1

• אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי  $L \in RE$ , בוחרים שפה אחרת  $L' \in RE$  ומראים שקיימת רדוקציה

$$L \leq L'.$$

לדוגמה:

$$L \leq L_{\text{acc}}$$

(כנ"ל לגבי  $R$ )

- אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי  $L \notin RE$  בוחרים שפה אחרת  $L' \notin RE$  ומראים שקיימת רדוקציה

$$L' \leq L.$$

לדוגמה

$$L_d \leq L$$

(כנ"ל לגבי  $R$ ).

## דוגמה 7.6

נתונות השפות  $L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\}$  ו-  $L_{\text{halt}} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ עוצרת על } w\}$ .  
הוכיחו כי  $L_{\text{acc}} \notin R$  ע"י רדוקציה  $L_{\text{acc}} \leq L_{\text{halt}}$ .

### פתרון:

נבנה פונקציה  $f$  חשיבה ומקיימת

$$x \in L_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{\text{halt}}.$$

$$M \text{ מקבלת את } w \iff M' \text{ תעצור על } w'.$$

$$M \text{ דוחה את } w \iff M' \text{ לא תעצור על } w'.$$

$$M \text{ לא עוצרת את } w \iff M' \text{ לא תעצור על } w'.$$

$$f(x) = \begin{cases} \langle M', w \rangle & : x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\text{loop}}, \varepsilon \rangle & : x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- $M_{\text{loop}}$  מ"ט שלא עוצרת על אף קלט.

- $M'$  מ"ט המתנהגת כמו  $M$  פרט למקומות בהם  $M$  עצרה ודחתה,  $M'$  תיכנס ללולאה אינסופית.

### נכונות הרדוקציה

$f$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם  $x = \langle M, w \rangle$ .

אם לא, תחזיר קידוד קבוע  $\langle M_{\text{loop}}, w \rangle$

ואם כן, תחזיר קידוד  $\langle M', w \rangle$  ע"י ביצוע שינויים לוקלים בקידוד של  $M$ .

$$x \in L_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{\text{halt}}$$

אם  $x \in L_{\text{acc}}$

$$w \in L(M) \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$$

$$w \text{ עוצרת ומקבלת את } M' \text{ ו- } f(x) = \langle M', w \rangle \Leftarrow$$

$$f(x) \in L_{\text{halt}} \Leftarrow$$

אם  $x \notin L_{\text{acc}}$  אז שני מקרים:

מקרה 1:

$$f(x) \notin L_{\text{halt}} \Leftarrow \varepsilon \text{ לא עוצרת על } M_{\text{loop}} \text{ ו- } f(x) = \langle M_{\text{loop}}, \varepsilon \rangle \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$$

מקרה 2:

$$\text{שני מקרים:} \quad \Leftarrow f(x) = \langle M', w \rangle \Leftarrow w \notin L(M) \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle$$

$$\text{מקרה א:} \quad M \text{ לא עוצרת על } w \Leftarrow M' \text{ לא עוצרת על } w \Leftarrow f(x) \notin L_{\text{halt}}$$

$$\text{מקרה ב:} \quad M \text{ דוחה את } w \Leftarrow M' \text{ לא עוצרת על } w \Leftarrow f(x) \notin L_{\text{halt}}$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $L_{\text{acc}} \leq L_{\text{halt}}$ . ומכיוון ש-  $L_{\text{acc}} \notin R$  (משפט 6.4) אז ממשט הרדוקציה 7.1, מתקיים  $L_{\text{halt}} \notin R$ .

## 7.7 דוגמה

נתונה השפה

$$L_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^* \}$$

ונתונה השפה

$$\bar{L}_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \neq \Sigma^* \} \cup \{ x \neq \langle M \rangle \}.$$

הוכיחו כי:

$$\text{א) } L_{\Sigma^*} \notin RE$$

$$\text{ב) } L_{\Sigma^*} \notin R$$

$$\text{ג) } \bar{L}_{\Sigma^*} \notin RE$$

**פתרון:**

נוכיח כי  $L_{\Sigma^*} \notin R$  ע"י רדוקציה

$$L_{\text{acc}} \leq L_{\Sigma^*}.$$

נבנה פונקציה חשיבה  $f$  המקיימת

$$x \in L_{\text{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L_{\Sigma^*}.$$

$$L(M') = \Sigma^* \Leftarrow w \in L(M)$$

$$L(M') \neq \Sigma^* \Leftarrow w \notin L(M)$$

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & : x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\emptyset} \rangle & : x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

- $M_\emptyset$  מ"ט שדוחה כל קלט.
- $M'$  היא מ"ט שעל כל קלט  $x$ , מתעלמת מ- $x$  ומריצה את  $M$  על  $w$  ועונה כמוה.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & : w \in L(M) \\ \emptyset & : w \notin L(M) \end{cases}$$

נכונות הרדוקציה:

$f$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם  $x = \langle M, w \rangle$ .

אם לא תחזיר קידוד קבוע  $\langle M_\emptyset \rangle$ .

אם כן, תחזיר קידוד  $\langle M' \rangle$  ע"י הוספת קוג ל- $M$  שמוחק את הקלט מהסרט וכותב  $w$  במקומו.

נוכיח כי

$$x \in L_{\text{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L_{\Sigma^*}$$

$$\Leftrightarrow L(M') = \Sigma^* \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M' \rangle \Leftrightarrow w \in L(M) \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle \Leftrightarrow x \in L_{\text{acc}} \text{ אם } f(x) \in L_{\Sigma^*}$$

$$\Leftrightarrow x \in L_{\text{acc}} \text{ שני מקרים:}$$

$$\text{מקרה 1: } f(x) \notin L_{\Sigma^*} \Leftrightarrow L(M_\emptyset) = \emptyset \text{ ו- } f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \Leftrightarrow x \neq \langle M, w \rangle$$

$$\text{מקרה 2: } f(x) \notin L_{\Sigma^*} \Leftrightarrow L(M') = \emptyset \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M' \rangle \Leftrightarrow w \notin L(M) \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $L_{\text{acc}} \leq L_{\Sigma^*}$ . ומכיוון ש- $L_{\text{acc}} \notin R$  (משפט 6.4) אז ממשט הרדוקציה 7.1, מתקיים  $L_{\Sigma^*} \notin R$ .

## 7.8 דוגמה

נתונה השפה

$$L_d = \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \}$$

ונתונה השפה

$$\bar{L}_{\text{acc}} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \notin L(M) \} \cup \{ x \neq \langle M, w \rangle \}.$$

הוכיחו כי

$$\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE \text{ ע"י רדוקציה}$$

$$L_d \leq \bar{L}_{\text{acc}}.$$

**פתרון:**

נבנה פונקציה חשיבה  $f$  המקיימת

$$x \in L_d \Leftrightarrow f(x) \in L_{\text{acc}}.$$

$$w' \notin L(M') \Leftrightarrow \langle M \rangle \notin L(M)$$

$$w' \in L(M') \Leftrightarrow \langle M \rangle \in L(M)$$



$$f(x) = \begin{cases} \langle M, \langle M \rangle \rangle & : x = \langle M \rangle \\ \langle M^*, \varepsilon \rangle & : x \neq \langle M \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M^*$  המ"ט שמקבלת כל קלט.

נכונות הרדוקציה:

$f$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם  $x = \langle M, w \rangle$

אם לא תחזיר קידוד קבוע  $\langle M^*, \varepsilon \rangle$ .

אם כן, תחשב  $\langle M, \langle M \rangle \rangle$ .

נוכיח כי

$$\begin{aligned} x \in L_d &\Leftrightarrow f(x) \in \bar{L}_{acc} \\ \Leftrightarrow \langle M \rangle \notin L(M) \text{ ו- } f(x) = \langle M, \langle M \rangle \rangle &\Leftrightarrow \langle M \rangle \notin L(M) \text{ ו- } x = \langle M \rangle \Leftrightarrow \begin{aligned} &x \in L_d \text{ אם } \\ &f(x) \in \bar{L}_{acc} \end{aligned} \end{aligned}$$

אם  $x \notin L_d$  שני מקרים:

$$\text{מקרה 1: } f(x) \notin \bar{L}_{acc} \Leftrightarrow \varepsilon \in L(M^*) \text{ ו- } f(x) = \langle M^*, \varepsilon \rangle \Leftrightarrow x \neq \langle M \rangle$$

$$\text{מקרה 2: } f(x) \notin \bar{L}_{acc} \Leftrightarrow \langle M \rangle \in L(M) \text{ ו- } f(x) = \langle M, \langle M \rangle \rangle \Leftrightarrow \langle M \rangle \in L(M) \text{ ו- } x = \langle M \rangle$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $L_d \leq \bar{L}_{acc}$ , ומכיוון ש-  $L_d \notin RE$  (משפט 6.3) אז ממשט הרדוקציה 7.1, מתקיים  $\bar{L}_{acc} \notin RE$ .

## משפט 7.2 משפט הרדוקציה בין שפות משלימות

אם קיימת רדוקציה  $L_1 \leq L_2$ , אזי קיימת רדוקציה  $\bar{L}_1 \leq \bar{L}_2$ .

**הוכחה:**

אם  $\exists$  רדוקציה

$$L_1 \leq L_2$$

אזי  $\exists$  פונקציה חשיבה  $f$  המקיימת

$$x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$$

ולכן עבור אותה פונקציה  $f$  היא גם חשיבה וגם מקיימת

$$x \in \bar{L}_1 \Leftrightarrow f(x) \in \bar{L}_2$$

ולכן

$$\bar{L}_1 \leq \bar{L}_2 .$$

## 7.4 דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה בין שפות משלימות (משפט 7.2)

### 7.9 דוגמה

הוכחנו בדוגמה 7.7 רדוקציה

$$L_{acc} \leq L_{\Sigma^*}.$$

לכן לפי משפט 7.2 קיימת רדוקציה

$$\bar{L}_{acc} \leq \bar{L}_{\Sigma^*}.$$

מכיוון ש-  $\bar{L}_{acc} \notin RE$ , אזי ממשפט הרדוקציה 7.1 מתקיים  $\bar{L}_{\Sigma^*} \notin RE$ .

### 7.10 דוגמה

הוכחנו בדוגמה 7.8 רדוקציה

$$L_d \leq \bar{L}_{acc}.$$

לכן לפי משפט 7.2 קיימת רדוקציה

$$\bar{L}_d \leq L_{acc}.$$

מכיוון ש-  $L_{acc} \in RE$ , אזי ממשפט הרדוקציה 7.1 מתקיים  $\bar{L}_d \in RE$ .

## 7.5 דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה (משפט 7.1)

### 7.11 דוגמה $\bar{L}_{acc} \leq L_{NOTREG}$

תהי  $L_{NOTREG}$  השפה

$$L_{NOTREG} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית} \}.$$

הוכיחו כי השפה  $L_{NOTREG}$  לא כריעה על ידי רדוקציה מ-  $\bar{L}_{acc}$ .

### פתרון:

השפה  $\bar{L}_{acc}$  מוגדרת

$$\bar{L}_{acc} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \text{ לא מקבלת } M \} \cup \{ x \neq \langle M, w \rangle \}.$$

והשפה  $L_{NOTREG}$  מוגדרת

$$L_{NOTREG} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית} \}.$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ w' \in PAL & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M'$  מ"ט הבאה:

$M' =$  על כל קלט  $y$ :

(1) אם  $y \in PAL \Leftarrow$  מקבלת.

**(2)** אחרת מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוה.

### הוכחת נכונות הרדוקציה

אם  $x \in \bar{L}_{acc}$   $\Leftarrow$  שני מקרים:

מקרה 1:  $x = \langle M, w \rangle$

$\Leftarrow M$  לא מקבלת  $w$

$\Leftarrow L(M') \in PAL$

$\Leftarrow \langle M' \rangle \in PAL$

$\Leftarrow f(x) \in PAL$

$\Leftarrow f(x) \in L_{NOTREG}$

מקרה 2:  $x \neq \langle M, w \rangle$   $\Leftarrow f(x) \in PAL \Leftarrow f(x) \in L_{NOTREG}$

אם  $x \notin \bar{L}_{acc}$   $\Leftarrow M$  מקבלת  $w$   $\Leftarrow L(M') = \Sigma^*$   $\Leftarrow f(x) \in \Sigma^*$   $\Leftarrow f(x) \in L_{NOTREG}$ .

לכן הוכחנו כי  $x \in \bar{L}_{acc} \Leftrightarrow f(x) \in NOTERG$ , ז"א  $f(x)$  היא רדוקציה מ- $L_{acc}$  ל- $L_{NOTREG}$ .

השפה  $\bar{L}_{acc}$  לא כריעה. לפיכך, לפי משפט הרדוקציה גם  $L_{NOTREG}$  לא כריעה.

### **7.12 דוגמה** $L_{acc} \leq L_{NOTREG}$

תהי  $L_{NOTREG}$  השפה

$$L_{NOTREG} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית} \}.$$

הוכיחו כי השפה  $L_{NOTREG}$  לא כריעה על ידי רדוקציה מ- $L_{acc}$ .

### **פתרון:**

השפה  $L_{acc}$  מוגדרת

$$L_{acc} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ מקבלת } w \}.$$

והשפה  $L_{NOTREG}$  מוגדרת

$$L_{NOTREG} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית} \}.$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\emptyset} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M'$  מ"ט הבאה:

$M' =$  על כל קלט  $y$ :

**(1)**  $M'$  מריצה  $M$  על  $w$ .

**(2)** • אם  $M$  דוחה  $\Leftarrow$  דוחה.

• אם  $M$  מקבלת  $\Leftarrow M'$  בודקת אם  $y$  פלינדרום.

\* אם כן  $\Leftarrow$  מקבלת.

\* אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

### הוכחת נכונות הרדוקציה

אם  $x \in L_{acc}$   $\Leftarrow M$  מקבלת  $w$   $\Leftarrow L(M') = PAL$   $\Leftarrow f(x) \in PAL$   $\Leftarrow f(x) \in L_{NOTREG}$ .

$x \notin L_{acc}$   $\Leftarrow$  שני מקרים.

מקרה 1:  $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow f(x) = \langle M_\emptyset \rangle$  ו-  $L(M_\emptyset) = \emptyset \Leftarrow \langle M_\emptyset \rangle \notin L_{NOTREG}$   $\Leftarrow f(x) \notin L_{NOTREG}$ .

מקרה 2:  $x = \langle M, w \rangle$  ו-  $M$  לא מקבלת  $w$   $\Leftarrow L(M') = \emptyset \Leftarrow \langle M' \rangle \notin L_{NOTREG}$   $\Leftarrow f(x) \notin L_{NOTREG}$ .

### **7.13 דוגמה** $L_{HALT} \leq L_{NOTREG}$

תהי  $L_{NOTREG}$  השפה

$$L_{NOTREG} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית} \}.$$

הוכיחו כי השפה  $L_{NOTREG}$  לא כריעה על ידי רדוקציה מ-  $L_{HALT}$ .

### **פתרון:**

השפה  $L_{HALT}$  מוגדרת

$$L_{HALT} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ עוצרת על } w \}.$$

והשפה  $L_{NOTREG}$  מוגדרת

$$L_{NOTREG} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית} \}.$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}.$$

כאשר  $M'$  מ"ט הבאה:

$M' =$  על כל קלט  $y$ :

(1)  $M'$  מריצה  $M$  על  $w$ .

(2) אם  $M$  דוחה  $\Leftarrow$  דוחה.

• אם  $M$  מקבלת  $\Leftarrow$  ממשיכה לשלב (3).

(3)  $M'$  בודקת אם  $y \in PAL$ .

• אם כן  $\Leftarrow$  מקבלת.

• אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

הוכחת הנכונות

$$L(M') \in L_{\text{NOTREG}} \iff L(M') \in PAL \iff x \in L_{\text{HALT}}$$

$$\text{שני מקרים:} \iff x \notin L_{\text{HALT}}$$

$$\langle M_\emptyset \rangle \notin L_{\text{NOTREG}} \iff L(M_\emptyset) = \emptyset \text{ ו- } f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle \quad \text{מקרה 1:}$$

$$f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} \iff$$

$$\langle M_\emptyset \rangle \notin L_{\text{NOTREG}} \iff L(M_\emptyset) = \emptyset \iff w \text{ לא עוצרת על } M \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle \quad \text{מקרה 2:}$$

$$f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} \iff$$

**דוגמה 7.14**  $\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{\text{REG}}$ תהי  $L_{\text{REG}}$  השפה

$$L_{\text{REG}} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ רגולרית} \}.$$

הוכיחו כי השפה  $L_{\text{REG}}$  לא כריעה על ידי רדוקציה מ- $\bar{L}_{\text{acc}}$ .**פתרון:**השפה  $\bar{L}_{\text{acc}}$  מוגדרת

$$\bar{L}_{\text{acc}} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \text{ לא מקבלת } M \} \cup \{ x \mid x \neq \langle M, w \rangle \}.$$

והשפה  $L_{\text{REG}}$  מוגדרת

$$L_{\text{REG}} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ רגולרית} \}.$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M_\emptyset$  המ"ט שדוחה כל קלט ו- $M'$  מ"ט הבאה:

$$M' = \text{על כל קלט } y:$$

(1) מריצה  $M$  על  $w$ .(2) אם  $M$  דוחה  $\Leftarrow$  דוחה.• אם  $M$  מקבלת  $\Leftarrow$  בודקת אם  $y$  פלינדרום:• אם כן  $\Leftarrow$  מקבלת.• אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.אבחנה

$$L(M') = \begin{cases} PAL & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

הוכחת נכונות הרדוקציה

אם  $x \in \bar{L}_{acc}$  שני מקרים:  $\Leftarrow$

מקרה 1:  $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow f(x) = \langle M_{\emptyset} \rangle \Leftarrow L(M_{\emptyset}) = \emptyset \Leftarrow \langle M_{\emptyset} \rangle \in L_{REG} \Leftarrow f(x) \in L_{REG}$

מקרה 2:  $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow x \notin L(M) \Leftarrow f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow L(M') = \emptyset$  ולפי האבחנה  $\langle M_{\emptyset} \rangle \in L_{REG} \Leftarrow f(x) \in L_{REG}$

אם  $x \notin \bar{L}_{acc} \Leftarrow w \in L(M) \Leftarrow f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow L(M') \in PAL$  ולפי האבחנה  $f(x) \in PAL \Leftarrow f(x) \notin L_{REG}$

## דוגמה 7.15 $L_{acc} \leq L_{REG}$

תהי  $L_{REG}$  השפה

$$L_{REG} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ רגולרית} \}.$$

הוכיחו כי השפה  $L_{REG}$  לא כריעה על ידי רדוקציה מ- $L_{acc}$ .

## פתרון:

השפה  $L_{acc}$  מוגדרת

$$L_{acc} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ מקבלת } w \}.$$

והשפה  $L_{REG}$  מוגדרת

$$L_{REG} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ רגולרית} \}.$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{PAL} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M_{PAL}$  המ"ט שמכריעה את השפה של פלינדרומים, ו- $M'$  מ"ט הבאה:

$$M' = \text{על כל קלט } y:$$

(1)  $M'$  בודקת אם  $y$  פלינדרום:

- אם כן  $\Leftarrow$  מקבלת.
- אם לא מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמזה.

## הוכחת נכונות הרדוקציה

אם  $x \in L_{acc} \Leftarrow M \text{ מקבלת } w \Leftarrow L(M') = \Sigma^* \Leftarrow f(x) \in REG$

$x \notin L_{acc} \Leftarrow$  שני מקרים:

מקרה 1:  $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow f(x) = \langle M_{PAL} \rangle \Leftarrow L(M_{PAL}) = PAL \Leftarrow \langle M_{PAL} \rangle \notin L_{REG}$

מקרה 2:  $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow M \text{ לא מקבלת } w \Leftarrow L(M') = PAL \Leftarrow \langle M' \rangle \notin L_{REG}$

**דוגמה 7.16**  $\bar{L}_{acc} \leq L_{M_1 \neg M_2}$ 

נתונה השפה הבאה:

$$L = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2) \} .$$

הוכיחו כי  $L \notin RE$  ע"י רדוקציה מ- $\bar{L}_{acc}$ .**פתרון:**פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M^*, M, w \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

•  $M^*$  היא מ"ט שמקבלת כל קלט•  $M_\emptyset$  היא מ"ט שדוחה כל קלט.נכונת הרדוקציה:

ראשית,  $f$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם  $x = \langle M, w \rangle$ . אם לא, תחזיר קידוד קבוע  $\langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle$  ואם כן, תחזיר קידוד  $\langle M^*, M, w \rangle$ .

נוכיח כי

$$x \in \bar{L}_{acc} \iff f(x) \in L_{M_1 \neg M_2} .$$

אם  $x \in \bar{L}_{acc}$  שני מקרים:

$$\text{מקרה 1: } x \neq \langle M, w \rangle \iff f(x) = \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle \iff \varepsilon \notin L(M_\emptyset) \text{ ו- } \varepsilon \in L(M^*) \iff f(x) \in L_{M_1 \neg M_2} .$$

$$\text{מקרה 2: } x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } w \notin L(M) \iff f(x) = \langle M^*, M, w \rangle \iff w \in L(M^*) \text{ ו- } w \notin L(M) \iff f(x) \in L_{M_1 \neg M_2} .$$

$$\text{אם } x \notin \bar{L}_{acc} \iff x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } w \in L(M) \iff f(x) = \langle M^*, M, w \rangle \iff w \in L(M^*) \text{ ו- } w \in L(M) \iff f(x) \notin L_{M_1 \neg M_2} .$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $\bar{L}_{acc} \leq L_{M_1 \neg M_2}$ , ומכיוון ש- $\bar{L}_{acc} \notin RE$  ממשפט הרדוקציה מתקיים  $L_{M_1 \neg M_2} \notin RE$ .

**דוגמה 7.17**  $L_{acc} \leq L_{M_1 \subset M_2}$ 

נתונה השפה הבאה:

$$L = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2) \} .$$

הוכיחו כי  $L \notin RE$  ע"י רדוקציה מ- $L_{acc}$ .**פתרון:**פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M_\emptyset, M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset, M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

•  $M_\emptyset$  היא מ"ט שדוחה כל קלט.•  $M'$  היא מ"ט שעל קלט  $y$  מתעלמת מ- $y$  ומריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוה.אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}.$$

נכונת הרדוקציה:

ראשית,  $f$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם  $x = \langle M, w \rangle$ . אם לא, תחזיר קידוד קבוע  $\langle M_\emptyset, M_\emptyset \rangle$  ואם כן, תחזיר קידוד  $\langle M^*, M' \rangle$ , כאשר  $M_\emptyset$  היא קידוד קבוע ו- $M'$  נוצר ע"י הוספת קוד ל- $\langle M \rangle$  המוחק את הקלט  $y$  ורושם  $w$  במקומו.

נוכיח כי

$$x \in L_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{M_1 \subset M_2}.$$

$$L(M') = \Sigma^* \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M_\emptyset, M' \rangle \iff x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } w \in L(M) \iff x \in L_{\text{acc}} \\ f(x) \in L_{M_1 \subset M_2} \iff L(M_\emptyset) \subset L(M') \iff$$

$$x \notin L_{\text{acc}} \iff \text{שני מקרים:}$$

$$\text{מקרה 1: } x \neq \langle M, w \rangle \iff f(x) = \langle M_\emptyset, M_\emptyset \rangle \text{ ו- } L(M_\emptyset) = L(M_\emptyset) \iff f(x) \notin L_{M_1 \subset M_2}.$$

$$\text{מקרה 2: } x = \langle M, w \rangle \text{ ו- } w \notin L(M) \iff f(x) = \langle M_\emptyset, M' \rangle \text{ ולפי האבחנה } L(M') = \emptyset \\ f(x) \notin L_{M_1 \subset M_2} \iff L(M') = L(M_\emptyset) \iff$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $L_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \subset M_2}$ , ומכיוון ש- $L_{\text{acc}} \notin R$  ממשפט הרדוקציה מתקיים  $L_{M_1 \subset M_2} \notin R$ .