

שיעור 13

חיתוך וסכום תת מרחב

13.1 הגדרה של חיתוך וסכום של תתי מרחבים

משפט 13.1 חיתוך של תת מרחב

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} , V_1, V_2 תתי מרחבים של V . אז $V_1 \cap V_2$ היא תת מרחב של V .

הוכחה:

$$(1) \quad V_1, V_2 \text{ תת מרחבים} \Leftrightarrow \bar{0} \in V_1 \text{ וגם } \bar{0} \in V_2 \Leftrightarrow \bar{0} \in V_1 \cap V_2$$

$$(2) \quad \text{נניח } v_1, v_2 \in V_1 \cap V_2$$

$$\text{אז } v_1, v_2 \in V_1 \text{ וגם } v_1, v_2 \in V_2$$

$$V_1 \text{ תת מרחב} \Leftrightarrow v_1 + v_2 \in V_1$$

$$V_2 \text{ תת מרחב} \Leftrightarrow v_1 + v_2 \in V_2$$

$$\text{ז"א } v_1 + v_2 \in V_1 \cap V_2$$

$$(3) \quad \text{נניח } v \in V_1 \cap V_2 \text{ ו } k \in \mathbb{F} \text{ סקלר.}$$

$$\text{אז } v \in V_1 \text{ ו } v \in V_2$$

$$V_1 \text{ תת מרחב לכן } k \cdot v \in V_1$$

$$V_2 \text{ תת מרחב לכן } k \cdot v \in V_2$$

$$\text{ז"א } k \cdot v \in V_1 \cap V_2$$

13.1 דוגמה

עבור V_1, V_2 תתי מרחבים של מרחב וקטורי V מעל שדה \mathbb{F} , האם $V_1 \cup V_2$ בהכרח תת מרחב של V ?

פתרון:

דוגמה נגדית:
 $V = \mathbb{R}^2$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\text{אז } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_2, \text{ אבל } v_1 + v_2 \notin V_1 \cup V_2.$$

משפט 13.2 תת מרחב הקטן ביותר

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} , V_1, V_2 תתי מרחבים של V . אז הקבוצה

$$W = \{v_1 + v_2 | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

היא תת מרחב הקטן ביותר שמכיל את V_1 ו V_2 .
ז"א לכל תת מרחב W' שמכיל את V_1 ו V_2 , מתקיים $W \subseteq W'$.

הוכחה:

(1) נוכיח ש W תת מרחב של V .

א) $\bar{0} \in V_1$ וגם $\bar{0} \in V_2$. לכן

$$\bar{0} = \bar{0} + \bar{0} \in W.$$

ב) נניח $w_1 = u_1 + u_2 \in W$, $w_2 = v_1 + v_2 \in W$

אז $u_1, v_1 \in V_1$ וגם $u_2, v_2 \in V_2$.

V_1, V_2 תתי מרחבים.

לכן $u_1 + v_1 \in V_1$ וגם $u_2 + v_2 \in V_2$.

מכאן

$$w_1 + w_2 = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \in W.$$

ג) נניח $w = u_1 + u_2 \in W$ ו $k \in \mathbb{F}$. אז $u_1 \in V_1$ ו $u_2 \in V_2$. V_1, V_2 תתי מרחבים, לכן $ku_1 \in V_1$, $ku_2 \in V_2$. מכאן

$$kw = k(u_1 + u_2) = ku_1 + ku_2 \in W$$

(2) נוכיח כי W התת מרחב הקטן ביותר

ברור כי W מכיל את V_1 ו V_2 כי

$$u = u + \bar{0} \in W, u \in V_1$$

$$\text{וגם לכל } u \in V_2, u = \bar{0} + u \in W.$$

נוכיח ש W הוא תת מרחב הקטן ביותר שמכיל את V_1 ו V_2 .

נניח ש W' איזושהו תת מרחב שמכיל את V_1 ו V_2 .

נוכיח כי $W \subseteq W'$.

נקח וקטור $w \in W$. אז $w = u_1 + u_2$, כאשר $u_1 \in V_1, u_2 \in V_2$.

$$u_1 \in W' \Leftarrow V_1 \subseteq W'$$

$$u_2 \in W' \Leftarrow V_2 \subseteq W'$$

W' תת מרחב, לכן $w = u_1 + u_2 \in W'$.

מש"ל.

למה 13.1

למרחב W של משפט 13.2 (המשפט הקודם) נקרא הסכום של V_1 ו V_2 ומסומן ב $V_1 + V_2$.

משפט 13.3 סכום של תת מרחב שווה לפרישה של האיחוד

$$V_1 + V_2 = \text{span}(V_1 \cup V_2) .$$

הוכחה: נוכיח כי $V_1 + V_2 \subseteq \text{span}(V_1 \cup V_2)$:

$$V_1, V_2 \subseteq \text{span}(V_1 \cup V_2)$$

לכן, לפי משפט 13.2,

$$V_1 + V_2 \subseteq \text{span}(V_1 \cup V_2) .$$

נוכיח כי $\text{span}(V_1 \cup V_2) \subseteq V_1 + V_2$:

נניח $w \in \text{span}(V_1 \cup V_2)$. אז קיימים $u_1, \dots, u_k \in V_1$ ו $v_1, \dots, v_n \in V_2$ וסקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$, $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{F}$ כך ש

$$w = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n .$$

אז $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k \in V_1$ וגם $\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \in V_2$.
לכן $w \in V_1 + V_2$.

הוכחנו כי $V_1 + V_2 \subseteq \text{span}(V_1 \cup V_2)$ וגם $\text{span}(V_1 \cup V_2) \subseteq V_1 + V_2$

$$V_1 + V_2 = \text{span}(V_1 \cup V_2) .$$

דוגמה 13.2

נקח את המרחב ווקטורי $V = \mathbb{R}^3$. נקח את התתי מרחבים \mathbb{R}^3 : $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$, $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$.

קווים ישרים ב \mathbb{R}^3 . אז הסכום שלהם הינו

$$V_1 + V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} ,$$

ומהווה את המישור $z = 0$ ב \mathbb{R}^3 .

13.2 משפט המימדים של סכום וחיתוך

משפט 13.4 משפט המימדים

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} , V_1, V_2 תתי מרחבים של V . אז

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

הוכחה: נסמן $\dim(V_1) = k$, $\dim(V_2) = n$, $\dim(V_1 \cap V_2) = m$.

$$V_1 \cap V_2 \subseteq V_1 \text{ לכן } m \leq k$$

$$V_1 \cap V_2 \subseteq V_2 \text{ לכן } m \leq n$$

נבחר בסיס u_1, \dots, u_m של $V_1 \cap V_2$.
נשלים אותו לבסיס של V_1 ונקבל

$$u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}$$

נשלים אותו גם לבסיס של V_2 :

$$u_1, \dots, u_m, b_1, \dots, b_{n-m}$$

נוכיח כי $V_1 + V_2 = \text{span}(u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m})$.

נניח $w = v_1 + v_2 \in V_1 + V_2$. אז

$$v_1 = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} \in V_1,$$

$$v_2 = \alpha'_1 u_1 + \dots + \alpha'_m u_m + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m} \in V_2.$$

אז

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= (\alpha_1 + \alpha'_1) u_1 + \dots + (\alpha_m + \alpha'_m) u_m \\ &\quad + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} \\ &\quad + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m} \end{aligned}$$

ז"א

$$v_1 + v_2 \in \text{span}(u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m})$$

נוכיח את ההכלה ההפוכה, כלומר $\text{span}(u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m}) \subseteq V_1 + V_2$.

נניח

$$w \in \text{span}(u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m})$$

אז קיימים סקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_{k-m}, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-m}$ כך ש

$$w = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m}$$

נסמן

$$v_1 = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m}$$

$$v_2 = \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m}$$

אז

$$v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2, \quad w = v_1 + v_2$$

כלומר $w \in V_1 + V_2$.

נשאר להוכיח שוקטורים $\{u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m}\}$ בת"ל:

נניח:

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m} = \bar{0}. \quad (*)1$$

אז

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} = -\gamma_1 b_1 - \dots - \gamma_{n-m} b_{n-m} := v. \quad (*)2$$

הוקטור באגף השמאל שייך ל V_1 .

הוקטור באגף הימין שייך ל V_2 .

לכן, לפי (*)2 $v \in V_1 \cap V_2$. u_1, \dots, u_m בסיס של $V_1 \cap V_2$ (נתון). לכן קיימים סקלרים $\delta_1, \dots, \delta_m$ כך ש

$$v = \delta_1 u_1 + \dots + \delta_m u_m.$$

לכן

$$\begin{aligned} \delta_1 u_1 + \dots + \delta_m u_m + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m} &= \delta_1 u_1 + \dots + \delta_m u_m - (-\gamma_1 b_1 - \dots - \gamma_{n-m} b_{n-m}) \\ &= v - v \\ &= \bar{0}, \end{aligned}$$

ז"א

$$\delta_1 u_1 + \dots + \delta_m u_m + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m} = \bar{0}. \quad (*)3$$

$u_1, \dots, u_m, b_1, \dots, b_{n-m}$ בסיס של V_2 (נתון). לכן הם בת"ל. לכן (*)3 מתקיים רק אם

$$\delta_1 = \dots = \delta_m = \gamma_1 = \dots = \gamma_{n-m} = 0. \quad (*)4$$

מכאן מקבלים מ (*)1 כי

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} = \bar{0}. \quad (*)5$$

$u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}$ בסיס של V_1 (נתון), לכן הם בת"ל. לכן (*)5 מתקיים רק אם

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \beta_1 = \dots = \beta_{k-m} = 0. \quad (*)6$$

לכן, בגלל שהמקדמים ב (*)1 כולם שווים ל 0, כפי שהוכחנו ב (*)4 ו (*)6, אז הוקטורים $u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m}$ כלומר הם מהווים בסיס של $V_1 + V_2$. מכאן

$$\dim(V_1 + V_2) = m + (k - m) + (n - m) = k + n - m = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

מש"ל. ■

מסקנה 13.1

נניח $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ תתי מרחבים ממימד 2, אז $\dim(V_1 \cap V_2) > 0$.

הוכחה: V_1, V_2 תתי מרחבים של \mathbb{R}^3 , לכן $\dim(V_1 + V_2) \leq 3$. לפי משפט ??,

$$4 = \dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) \leq 3 + \dim(V_1 \cap V_2)$$

■

13.3 כיצד למצוא בסיס ומימד של סכום וחיתוך תת מרחב

נניח כי U, V תתי מרחבים של \mathbb{R}^n . ונניח ש

$$\{u_1, \dots, u_k\}$$

בסיס של U ו

$$\{v_1, \dots, v_l\}$$

בסיס של V . כדי למצוא בסיס של $U + V$, נרשום מטריצה Q מסדר $n \times (k + l)$ המורכב מהבסיסים של U ו V :

$$Q = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} | & | & & | & | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_k & v_1 & v_2 & \dots & v_l \\ | & | & & | & | & | & & | \end{array} \right)$$

אז המרחב העמודות של $U + V$ שווה למרחב העמודות של Q :

$$\text{col}(Q) = \text{col}(U + V)$$

ובסיס של $\text{col}(Q)$ שווה גם לבסיס של $U + V$:

$$B(Q) = B(U + V) .$$

בסיס של $U \cap V$ ניתן למצוא ע"י המרחב האפס של Q , $\text{Nul}(Q)$. נניח כי הוקטור x במרחב האפס של Q , כלומר $x \in \text{Nul}(Q) \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$. נניח כי הרכיבים של x הם

$$x = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ b_1 \\ \vdots \\ b_l \end{pmatrix} .$$

כיוון שוקטור x ב $\text{Nul}(Q)$ אז

$$Q \cdot x = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} | & | & & | & | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_k & v_1 & v_2 & \dots & v_l \\ | & | & & | & | & | & & | \end{array} \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ b_1 \\ \vdots \\ b_l \end{pmatrix} = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_l v_l = \bar{0} . \quad (1*)$$

עכשיו נעביר את כל האיברים של הבסיס v_1, \dots, v_l לאגף הימין ונקבל

$$a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = -b_1 v_1 - \dots - b_l v_l . \quad (*2)$$

שימו לב הצירוף לינארי באגף השמאל הוא וקטור של U והצירוף לינארי באגף הימין הוא וקטור של V . נקרא הוקטור הזה y :

$$y := a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = -b_1 v_1 - \dots - b_l v_l . \quad (*)$$

כך קיבלנו וקטור y השייך גם ל U וגם ל V , או במילים אחרות

$$y \in U \cap V .$$

דוגמה 13.3

נתונים וקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

נסמן

$$V_1 = \text{span}(u_1, u_2) , \quad V_2 = \text{span}(u_3, u_4) .$$

מצאו בסיס ומימד של V_1, V_2 ו $V_1 \cap V_2$.

פתרון:

בסיס של V_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של V_1 :

$$B(V_1) = \{u_1, u_2\}$$

$$\dim(V_1) = 2$$

בסיס של V_2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של V_2 :

$$B(V_2) = \{u_3, u_4\}$$

$$\dim(V_2) = 2$$

$$Q = (u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_2 + R_3 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_3 + R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

העמודות 1, 2, 3 מובילות לכן בסיס של $V_1 + V_2$ הוא

$$B(V_1 + V_2) = \{u_1, u_2, u_3\}$$

ו $\dim(V_1 + V_2) = 3$.
לפי משפט המימדים:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

כיוון ש $\dim(V_1) = 2$, $\dim(V_2) = 2$, $\dim(V_1 + V_2) = 3$, אז

$$\dim(V_1 \cap V_2) = 1.$$

כדי למצוא בסיס של $V_1 \cap V_2$ נמצא את $\text{Nul } Q$. מסעיף הקודם המדורגת של Q היא:

$$Q \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית $Qx = 0$ הוא

$$\left. \begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ -y - 2z + w &= 0 \\ -z + w &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= -y - z - w \\ y &= -2z + w \\ z &= w \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= -w \\ y &= -w \\ z &= w \end{aligned} \right\}$$

כלומר

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} w$$

לכן בסיס של $\text{Nul } Q$ הוא מורכב וקטור אחד:

$$B(\text{Nul}(Q)) = \left\{ x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

הוקטור x מקיים את משוואת ההומוגנית של Q , לכן

$$Q \cdot x = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad (u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{0}$$

לכן נקבל

$$-1 \cdot u_1 - 1 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 + 1 \cdot u_4 = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad u_1 + u_2 = u_3 + u_4.$$

נגדיר את שני האגפים להיות הוקטור y :

$$y := u_1 + u_2 = u_3 + u_4$$

נציב את הוקטורים ונמצא כי

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

לכן בסיס של $V \cap U$ הוא

$$B(V \cap U) = \{y\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

13.4 דוגמה

נניח כי $U \in \mathbb{R}^5$ תת מרחב עם בסיס

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

ונניח כי $W \in \mathbb{R}^5$ תת מרחב עם בסיס

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

מצאו המימד והבסיס של $U \cap W$.

פתרון:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ -2 & -3 & 0 & -1 & -6 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 9 & 1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מכאן נקבל בסיס של $\text{Nul}(Q)$

$$B_{\text{Nul}(Q)} = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$Qb_1 = 0 \Rightarrow -5u_1 + 3u_2 + w_1 = 0,$$

$$Qb_2 = 0 \Rightarrow -2u_1 + u_3 + w_2 = 0.$$

מכאן נקבל בסיס של $U \cap W$:

$$B_{U \cap W} = \{x_1, x_2\}$$

כאשר

$$x_1 = 5u_1 - 3u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} = w_1 \text{ ,} \quad x_2 = 2u_1 - u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = w_2 \text{ .}$$