שיעור 10
אינטגרלים לא מסויימים

אינטגרלים לא מסויימים

10.1 הגדרה: (פונקציה קדומה)
אם $F'(x)=f(x)$ אז אומרים כי $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$.

דוגמא.

$$(x^2)'=2x\ ,$$

לכן $F(x)=x^2$ פונקציה קדומה של $f(x)=2x$

10.2 משפט. (פונקציה קדומה)
אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$, אז $F(x)+C$ (לכל $C\in\mathbb{R}$ קבוע) היא גם פונקציה קדומה של $f(x)$.

ז"א אם פונקציה קדומה של $f(x)$ קיימת, בהכרח ישנם אינסוף פונקציות קדומות של $f(x)$.

דוגמא.

$$(x^2+C)'=2x\ ,$$

לכן לפונקציה $f(x)=2x$ יש אינסוף פונקציות קדומות מהצורה $F(x)=x^2+C$.

10.3 הגדרה: (האינטגרל הלא מסויים)
האוסף של כל הפונקציות הקדומות של $f(x)$, נקרא האינטגרל הלא מסויים של $f(x)$, מסומן $\int f(x)dx$.
ז"א

$$\int f(x)dx=F(x)+C \qquad \Leftrightarrow \qquad (F(x)+C)'=f(x)\ .$$

dx נקרא הדיפרנציאל של x.

דוגמאות

1) $\displaystyle\int 2x\,dx=x^2+C$

2) $\displaystyle\int \cos x\,dx=\sin x+C$

3) $\displaystyle\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C$

4) $\displaystyle\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C$

ליניאריות של אינטגרל לא מסויים

10.4 הגדרה: (ליניאריות של אינטגרל לא מסויים)

נתונות פונקציות $f(x)$, $g(x)$ וסקלר a.

(i) $\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$.

(ii) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

הוכחה.

(i) אם $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$, ז"א $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, אז $F'(x) = f(x)$. לפיו ולפי משפט **??** (מספר 2),

$$a \cdot f(x) = a \cdot F'(x) = (aF(x))' \ .$$

נפעיל אינטגרל לא מסויים על שני הצדדים ונקבל

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot F(x) + C \ .$$

■

טבלת האינטגרלים חלקית

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C\ , \qquad (a \neq -1)$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C\ ,$$
$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ ,$$
$$\int e^x\,dx = e^x + C\ ,$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C\ ,$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + C\ ,$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C\ ,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C\ ,$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C\ ,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C\ ,$$

תרגילים

(1

$$\begin{aligned}\int \left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^2 dx &= \int \left(1+2x^{2/3}+x^{4/3}\right) dx \\ &= x + 2\frac{x^{2/3}}{5/3} + \frac{x^{4/3}}{7/3} + C \\ &= x + \frac{6x^{2/3}}{5} + \frac{3x^{4/3}}{7} + C\end{aligned}$$

(2

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\,dx &= \int x^{-2/5} dx \\ &= \frac{5}{3}x^{1-2/5} + C \\ &= \frac{5}{3}x^{3/5} + C\end{aligned}$$

(3

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x}\,dx &= \int \left(1+\frac{1}{x}\right) dx \\ &= x + \ln|x| + C\end{aligned}$$

החלפת משתנה / אינטגרציה ע"י הצבה

10.5 משפט. (אינטגרציה ע"י הצבה)

נתון אינטגרל מצורה

$$\int f\left(t(x)\right)\cdot u'(x)\,dx$$

כאשר $f\left(u(x)\right)$ פונקציה של הפונקציה $u(x)$ ו- $u'(x)$ הנגזרת של $u(x)$. אז

$$\int f\left(u(x)\right)\cdot u'(x)\,dx = \int f(u)\,du\ .$$

10.6 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \sin(2x)dx$$

פיתרון.

$$u=2x\ ,\qquad u'(x)=2\ ,\qquad \frac{1}{2}u'(x)=1\ .$$

$$\begin{aligned}\int \sin(2x)dx =&\frac{1}{2}\int \sin u\cdot u'\,dx\\ =&-\frac{1}{2}\cos u+C\\ =&-\frac{1}{2}\cos(2x)+C\end{aligned}$$

■

10.7 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int e^{ax}dx$$

פיתרון.

$$u=ax\ ,\qquad u'(x)=a\ ,\frac{1}{a}u'(x)=1\ .$$

$$\begin{aligned}\int e^{ax}dx =&\int e^{u(x)}\cdot\frac{1}{a}\cdot u'(x)\,dx\\ =&\frac{1}{a}\int e^{u}\,du\\ =&\frac{1}{a}e^{u}+C\\ =&\frac{1}{a}e^{ax}+C\end{aligned}$$

■

10.8 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{1}{x^2+8}\,dx$$

פיתרון.

$$u(x) = \frac{x}{\sqrt{8}}\ , \qquad u'(x) = \frac{1}{\sqrt{8}}\ , \qquad \Rightarrow \qquad 1 = \sqrt{8}\,u'(x).$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+8}\,dx = &\int \frac{1}{8u^2+8}\,\sqrt{8}u'(x)\ \ ,dx\\ =&\sqrt{8}\int \frac{1}{8u^2+8}\,du\\ =&\frac{\sqrt{8}}{8}\int \frac{1}{u^2+1}\,du\\ =&\frac{1}{\sqrt{8}}\arctan(u)+C\\ =&\frac{1}{\sqrt{8}}\arctan\left(\frac{x}{8}\right)+C\end{aligned}$$

באופן כללי,

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C\ .$$

■

10.9 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{1}{5x+2}\,dx$$

פיתרון.

$$u(x) = 5x+2\ , \qquad u'(x) = 5\ , \qquad \frac{1}{5}u'(x) = 1\ .$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{5x+2}\,dx = &\int \frac{1}{u(x)}\cdot\frac{u'(x)}{5}\,dx\\ =&\frac{1}{5}\int \frac{1}{u(x)}\,du\\ =&\frac{1}{5}\ln|u|+C\\ =&\frac{1}{5}\ln|5x+2|+C\end{aligned}$$

באופן כללי,

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+C\ .$$

■

10.10 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים
$$\int (3x-1)^{24}\ dx$$

פיתרון.
$$u(x)=3x-1\ , \qquad u'=3\ , \qquad \frac{1}{3}u'(x)=1$$
$$\begin{aligned}\int (3x-1)^{24}\ dx &= \int u^{24}\cdot\frac{u'(x)}{3}\,dx\\ &=\frac{1}{3}\int u^{24}\,du\\ &=\frac{1}{3}\cdot\frac{u^{25}}{25}+C\\ &=\frac{1}{75}(3x-1)^{25}+C\end{aligned}$$
■

10.11 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים
$$\int \tan x\,dx$$

פיתרון.
$$\int \tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$
$$u=\cos x\ , \qquad u'=-\sin x\ .$$
$$\begin{aligned}\int \tan x\,dx &= \int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx\\ &=-\int\frac{1}{u}\,u'(x)dx\\ &=-\int\frac{1}{u}\,du\\ &=-\ln|u|+C\\ &=-\ln|\cos x|+C\end{aligned}$$
■

10.12 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים
$$\int \cot x\,dx$$

פיתרון.

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$u(x) = \sin x\ , \qquad u'(x) = \cos x\ .$$

$$\begin{aligned}\int \cot x\,dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \\ &= \int \frac{1}{u}\,u'(x)dx \\ &= \int \frac{1}{u}\,du \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|\sin x| + C\end{aligned}$$

■

10.13 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int x(x+2)^{69}\,dx$$

פיתרון.

$$u = (x+2)\ , \qquad u'(x) = 1\ , \qquad x = u-2$$

$$\begin{aligned}\int x(x+2)^{69}\,dx &= \int (u-2)u^{69}\,u'(x)\,dx \\ &= \int (u-2)u^{69}\,du \\ &= \int \left(u^{70} - 2u^{69}\right)\,du \\ &= \frac{u^{71}}{71} - \frac{2u^{70}}{70} + C \\ &= \frac{(x+2)^{71}}{71} - \frac{(x+2)^{70}}{35} + C\end{aligned}$$

■

10.14 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{1}{\cot^5 x\cdot\sin^2 x}\,dx$$

פיתרון.

$$u = \cot x\ , \qquad u'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\int \frac{1}{\cot^5 x \cdot \sin^2 x}\,dx = -\int \frac{1}{u^5} u'(x)\,dx$$
$$= -\int \frac{1}{u^5}\,du$$
$$= -\int u^{-5}\,du$$
$$= -\frac{u^{-4}}{-4} + C$$
$$= \frac{1}{4\cot^4 x} + C$$

■

10.15 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים
$$\int \frac{\cos x}{3+\sin x}\,dx$$

פיתרון.
$$u = \sin x\ , \qquad u'(x) = \cos x\ .$$
$$\int \frac{\cos x}{3+\sin x}\,dx = \int \frac{1}{u+3}\,u'(x)\,dx$$
$$= \int \frac{1}{u+3}\,du$$
$$= \ln|u+3| + C$$
$$= \ln|\sin x + 3| + C$$

■

10.16 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים
$$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$$

פיתרון.
$$u = e^x\ , \qquad u'(x) = e^x\ , \qquad u'(x)e^{-x} = \frac{1}{u}\cdot u'(x)\ .$$
$$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = \int \frac{1}{u(u+1)}\,u'(x)\,dx$$
$$= \int \frac{1}{u(u+1)}\,du$$
$$= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)\,du$$
$$= \ln|u| - \ln|u+1| + C$$
$$= \ln(e^x) - \ln(e^x+1) + C$$
$$= x - \ln(e^x+1) + C$$

■

אינטגרציה בחלקים

10.17 משפט. (אינטגרציה בחלקים)
יהיו $u(x)$ $\mathrm{v}(x)$ פונקציות של משתנה x.

$$\int u\mathrm{v}'\,dx = u\mathrm{v} - \int u'\mathrm{v}\,dx$$

הוכחה.
לפי כלל הכפל של נגזרות (עיין משפט **??** מספר 3)

$$(u\mathrm{v})' = u'\mathrm{v} + u\mathrm{v}' \qquad \Rightarrow \qquad u\mathrm{v}' = (u\mathrm{v})' - u'\mathrm{v}$$

נפעיל אינטגרל על שני הצדדים:

$$\int u\mathrm{v}'\,dx = \int (u\mathrm{v})'\,dx - \int u'\mathrm{v}\,dx\ . \qquad (*)$$

לפי משפט 10.5 ניתן לכתוב אגף השמאל של (*) כ

$$\int u\mathrm{v}'(x)\,dx = \int u\,d\mathrm{v} \qquad (\#1)$$

האיבר הראשון באגף הימין של (*) הוא

$$\int (u\mathrm{v})'dx = u\mathrm{v} + C \qquad (\#2)$$

לפי משפט 10.5 האיבר השני באגף הימין של (*) הוא

$$\int u'\mathrm{v}\,dx = \int \mathrm{v}\,du \qquad (\#3)$$

נציב (#1), (#2), ו- (#3) לתוך (*) ונקבל

$$\int u\,d\mathrm{v} = u\mathrm{v} - \int \mathrm{v}\,du$$

ז"א

$$\int u\mathrm{v}'\,dx = \int (u\mathrm{v})'\,dx - \int u'\mathrm{v}\,dx$$

■

10.18 דוגמא.
חשב את האינטגרל

$$\int x \cdot e^x\,dx$$

פיתרון. $u=x$ $\text{v}'=e^x$ $u'(x)=1$ $v=e^x$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

■

10.19 כלל: (מקרים נפוצים של שימוש באינטגרציה בחלקים)

1) במקרה

א $\int p(x)\cdot e^{kx}\,dx$,

ב $\int p(x)\cdot \sin(kx)\,dx$,

ג $\int p(x)\cdot \cos(kx)\,dx$

כאשר $p(x)$ פולינום, מגדירים $u=p(x)$.

2) במקרה

א $\int p(x)\cdot \arcsin(kx)\,dx$,

ב $\int p(x)\cdot \arccos(kx)\,dx$,

ג $\int p(x)\cdot \arctan(kx)\,dx$,

ד $\int p(x)\cdot \ln|kx|\,dx$,

ה $\int p(x)\cdot \text{arccot}(kx)\,dx$,

כאשר $p(x)$ פולינום, מגדירים $\text{v}'=p(x)$.

3) במקרה

א $\int e^{ax}\cdot \sin(bx)\,dx$,

ב $\int e^{ax}\cdot \cos(bx)\,dx$,

מגדירים $u=e^{ax}$.

דוגמאות

10.20 דוגמא. חשב את האינטגרל

$$\int (2x+1)e^{3x}\,dx$$

פיתרון.

$$u=2x+1\ ,\qquad \text{v}'=e^{3x}\qquad u'=2\qquad \text{v}=\frac{1}{3}\cdot e^{3x}$$

$$\int (2x+1)e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3}\int e^{3x}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C$$

■

10.21 דוגמא. חשב את האינטגרל
$$\int \ln(x)\,dx$$

פיתרון.
$$u = \ln(x)\ , \qquad \mathrm{v}' = dx\ , \qquad u' = \frac{1}{x}\ , \qquad \mathrm{v} = x$$
$$\int \ln x\,dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C$$

■

10.22 דוגמא. חשב את האינטגרל
$$\int \arctan(x)\,dx$$

פיתרון.
$$u = \arctan(x)\ , \qquad \mathrm{v}' = 1\ , \qquad u' = \frac{1}{1+x^2}\ , \qquad \mathrm{v} = x$$
$$\int \arctan x\,dx = x \cdot \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$u = x^2+1\ , \qquad u' = 2x$$
$$\int \arctan x\,dx = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$$
$$= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\int \ln|u| + C$$
$$= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\int \ln|x^2+1| + C$$

■

10.23 דוגמא. חשב את האינטגרל
$$I = \int x^2 \sin(2x)\,dx$$

פיתרון.

$$u = x^2 \ , \qquad \mathrm{v}' = \sin(2x) \ , \qquad u' = 2x \ , \qquad \mathrm{v} = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2}x^2 \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2}\int 2x \cdot \cos(2x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2 \cdot \cos(2x) + \int x \cdot \cos(2x)\,dx \end{aligned}$$

$$u = x \ , \qquad \mathrm{v}' = \cos(2x) \ , \qquad u' = 1 \ , \qquad \mathrm{v} = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2}x^2 \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2}x \cdot \sin(2x) - \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2 \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2}x \cdot \sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C \end{aligned}$$

■

10.24 דוגמא. חשב את האינטגרל

$$I = \int e^x \sin x\,dx$$

פיתרון.

$$u = e^x \ , \qquad \mathrm{v}' = \sin(x) \ , \qquad u' = e^x \ , \qquad \mathrm{v} = -\cos(x)$$

$$I = -e^x \cos x + \int e^x \cdot \cos(x)\,dx$$

$$u = e^x \ , \qquad \mathrm{v}' = \cos(x) \ , \qquad u' = e^x \ , \qquad \mathrm{v} = \sin(x)$$

$$\begin{aligned} I &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cdot \sin(x)\,dx \\ &= -e^x \cos x + e^x \sin x - I \end{aligned}$$

לכן

$$2I = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

ז"א

$$I = \frac{1}{2}\left(-e^x \cos x + e^x \sin x\right) + C$$

■

10.25 דוגמא. חשב את האינטגרל

$$I = \int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$$

פיתרון.

$$u = x \ , \qquad \mathrm{v}' = \frac{1}{\cos^2(x)} \ , \qquad u' = 1 \ , \qquad \mathrm{v} = \tan(x)$$

$$\begin{aligned} I &= x \tan x - \int \tan(x)\,dx \\ &= x \tan x + \ln|\cos x| + C \end{aligned}$$

■