08/02/2017
09 : 00 – 12 : 00

חדו"א להנדסת תוכנה

מועד א'

מרצה:

תשע"ח סמסטר א'

השאלון מכיל עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

<u>הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה</u>

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

<u>חומר עזר</u>

- דף נוסחאות מצורף לשאלון (עמודים בפורמט $A4$).

<u>אחר / הערות</u>

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות <u>בלבד</u> מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** <u>בלבד</u> מתוך **שתיים**.

==

שאלות 1 ו- 2 - חובה!

שאלה 1 חקרו באופן מלא את הפונקציה

$$f(x) = \frac{(x+2)^2}{x-2}$$

(תחום הגדרה, חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) ציירו את סקיצת הגרף של הפונקציה.

שאלה 2 הוכיחו: לפונקציה $f(x)$ קיים גבול בנקודה $x = a$ אם ורק אם קיימים ומתלכדים הגבולות החד צדדיים של $f(x)$ בנקודה זו.

שאלה 3

א) מצאו את משוואת המשיק ומשוואת הנורמל לקו

$$\begin{cases} x = 1 - \dfrac{1}{e^t} \\ y = \sqrt{e^t} - 1 \end{cases}$$

בנקודה שבה $x = 0$.

ב) הגדר את הפונקציה $\arctan(t)$ וחשבו ללא מחשבון $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{6}{8}\right)\right)$.

שאלה 4

א) חשבו את הגבולות הבאים:

(1 $\lim_{x\to\infty} (1 - e^{-x})^x$

(2 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(2x)}{x}$

ב) הוכיחו כי לא קיימת פונקציה אי-זוגית המוגדרת לכל מספר ממשי ואינה עוברת בראשית.

שאלה 5

א) פתור את האינטגרלים הבאים:

(1) $\int_0^1 \frac{1 + \arctan(x)}{x^2+1}\,dx$

(2) $\int \frac{x+4}{x^2+8x}\,dx$

ב) חשבו על סמך המשמעות הגיאומטרית את

$$\int_{-1}^{4} |\min(x, 2x)|\, dx$$

שאלה 6

א) הוכיחו כי למשוואה $\tan(x) = x$ יש בדיוק פתרון אחד בקטע $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

ב) חשבו לפי ההגדרה את הנגזרת של $f(x) = \ln(x)$.

שאלה 7

הוכיחו כי לכל $-1 < a < b$ מתקיים

$$1 - \frac{a+1}{b+1} < \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right) < \frac{b+1}{a+1} - 1 \ .$$

שאלה 8

מצאו על הקו $y = \sqrt{\frac{\arccos(x)}{2}}$ נקודה הקרובה ביותר לראשית הצירים (שימו לב לתחום ההגדרה).

פתרונות

שאלה 1

שלב 1 תחום הגדרה: $x \neq 2$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(-2,0)$ ו- $(0,-2)$.

x	$x<-2$	$-2<x<2$	$x>2$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x=2$

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: אין.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1\ , \qquad n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-m\cdot x)=6\ .$$

לכן הקו $y=x+6$ אסימפטוטה משופעת בתהליך כאשר $x\to\infty$.

ב- $x\to-\infty$ אותו הדבר.

שלב 6 תחומי עליה וירידה:

$$f'(x)=\frac{(x-6)(x+2)}{(x-2)^2}$$

נקודות קריטיות: $(-2,0)$ ו- $(6,16)$.

x	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<2$	$2<x<6$	$x=6$	$x>6$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	מקס	$\searrow$	$\searrow$	מינימום	$\nearrow$

שלב 7 תחותמי קמירות:

$$f''(x) = \frac{32}{(x-2)^3}$$

נקודות פיתול: אין.

x	$x<2$	$x>2$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	קמורה $\downarrow$	קמורה $\uparrow$

שלב 8 שרטוט:

שאלה 2 $\Leftarrow$

נתון כי $\lim_{x\to a} f(x) = L$, אז לפי ההגדרה $\forall\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם

$$|x-a|<\delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)-L|<\epsilon\ .$$

שים לב

$$0<|x-a|<\delta \quad \rightsquigarrow \quad -\delta<x-a<0 \quad \text{או} \quad 0<x-a<\delta$$
$$\rightsquigarrow \quad a-\delta<x<a \quad \text{או} \quad a<x<a+\delta$$
$$\rightsquigarrow \quad x\in(a-\delta,a) \quad \text{או} \quad x\in(a,a+\delta)$$

כלומר, $\forall\epsilon$, $\exists\delta>0$ כך ש-

(1*) $$x\in(a-\delta,a)\Rightarrow \qquad |f(x)-L|<\epsilon$$

(2*) $$x\in(a,a+\delta)\Rightarrow \qquad |f(x)-L|<\epsilon$$

אזי, בהינתן ערך מסוים ל- ϵ, ניתן למצוא ערך של δ כך שהתנאים (1*) ן- (2*) מתקיימים. אבל (1*) דווקא התנאי ההכרחי לקיום הגבול $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$, ו- (2*) דווקא התנאי ההכרחי לקיום הגבול $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$,

לכן הוכיחונו כי

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = L \quad \text{-ו} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = L\ .$$

$\Rightarrow$

אם $\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$, אז $\forall \epsilon > 0$ קיים $\delta_1 > 0$ כך ש-

$$x \in (a-\delta_1, a) \qquad \Rightarrow \qquad |f-L| < \epsilon \ , \tag{\#1}$$

ו- $\forall \epsilon > 0$ קיים $\delta_2 > 0$ כך ש-

$$x \in (a, a+\delta_2) \qquad \Rightarrow \qquad |f-L| < \epsilon \ . \tag{\#2}$$

נגדיר $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$. אז

$$\begin{aligned} x \in (a-\delta_1, a) \ \text{ ו- } \ x \in (a, a+\delta_2) &\rightsquigarrow \qquad x \in (a-\delta_1, a+\delta_2) \\ &\rightsquigarrow \qquad x \in (a-\delta, a+\delta) \\ &\rightsquigarrow \qquad 0 < |x-a| < \delta \ . \end{aligned} \tag{\#3}$$

לכן על-סמך (#3) והתנאים (#1) ו- (#2) הנתונים, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ כך ש-

$$0 < |x-a| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon \ .$$

אבל זה דווקא התנאי ההכרחי לקיום הגבול $\lim_{x\to a} f(x) = L$. לכן הוכיחונו כי

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \ \text{ ו- } \lim_{x\to a^+} f(x) = L \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to a} f(x) = L \ .$$

<u>שאלה 3</u>

א) בנקודה $x=0$,

$$1 - \frac{1}{e^t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e^t = 1 \qquad \Rightarrow \qquad t = 0 \ ,$$

ו-

$$y(t=0) = 0 \ .$$

השיפוע של המשיק ב- $x=0$ ניתן ע"י $y'_x(t=0)$.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1}{2} e^t \sqrt{e^t} \ ,$$

ולכן

$$y'_x(t=0) = \frac{1}{2} \ .$$

לכן משוואת המשיק בנקודה $(0,0)$ היא

$$y = \frac{1}{2} x \ ,$$

ומשוואת הנומרל בנקודה $(0,0)$ היא

$$y = -2x \ .$$

ב) $y=\arctan(t)$ היא הפונקציה כך ש- $\tan(y)=t$ לכל $y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{6}{8}\right)\right)=\sin\left(\arctan\left(\frac{6}{8}\right)\right)=\frac{6}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}\ .$$

שאלה 4

א) **1)** $\lim_{x\to\infty}(1-e^{-x})^x=1$ **2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(2x)}{x}=0$

ב) נניח הטענה השלילית: קיימת $f(x)$ המוגדרת לכל מספר ממשי, ובנוסף $f(x)$ אי זוגית ועוברת בראשית הצירים. מכיוון ש f אי-זוגית אז

(*) $$f(-x)=-f(x)\ .$$

f מוגדרת לכל x, ובפרט $x=0$. לכן ניתן להציב $x=0$ במשוואה (*) ונקבל

(#) $$f(0)=-f(0)\ .$$

(#) מתקיימת רק אם $f(0)=0$. סתירה!

שאלה 5

א) **(1)** $\int_0^1\frac{1+\arctan(x)}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{32}\pi(8+\pi)$ **(2)** $\int\frac{x+4}{x^2+8x}\,dx=\frac{1}{2}(\log(x)+\log(x+8))$

ב)

השטח שווה לשטח של המשולש ΔOAB ועוד השטח של המשולש ΔOCD:

$$S=S_{\Delta OAB}+S_{\Delta OCD}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2+\frac{1}{2}\cdot4\cdot4=9\ .$$

שאלה 6

א) נגדיר . $f(x)=x-\tan x$ f רציפה בקטע $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$. לכן ניתן להשתמש במשפט ערך ביניים של בולנזו.

$$f(\tfrac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}-1<0\ ,\qquad f(-\tfrac{\pi}{4})=-\frac{\pi}{4}+1>0\ ,$$

לכן במשפט ערך ביניים של בולנזו קיימת c כך ש- $f(c)=0$. נוכיח שהוא יחיד:

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2+1}\ .$$

בקטע $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ הנגזת $f'(x)\geq 0$ לכן $f(x)$ עולה מונוטונית, לכן השורש יחיד. מש"ל.

ב)

$$\begin{aligned}
(\ln x)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\ln\left[\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x}\right]\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x}}\right]\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]\\
&=\frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]\\
&=\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\lim_{\Delta x\to 0}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]\right)\\
&=\frac{1}{x}\cdot\ln(e)\\
&=\frac{1}{x}\ .
\end{aligned}$$

<u>שאלה 7</u> נגדיר $f(x)=\ln(x+1)$. f רציפה וגזירה לכל $x>-1$. לכן לפי משפט לגרנזי, לכל $-1<a<b$ קיימת $c\in(a,b)$ כך ש-

$$\frac{\ln(b+1)-\ln(a+1)}{b-a}=\ln(c+1)'=\frac{1}{c+1}\qquad\Rightarrow\qquad \ln(b+1)-\ln(a+1)=\frac{b-a}{c+1}\ . \qquad (*)$$

שים לב, $-1<a<c<b$ אזי $0<a+1<c+1<b+1$, לכן

$$\frac{1}{b+1}<\frac{1}{c+1}<\frac{1}{a+1}\ .$$

כיוון ש- $b-a>0$ חיובי, אם נכפיל את האי-השוויון הזה ב- $b-a$ נקבל:

$$\frac{b-a}{b+1}<\frac{b-a}{c+1}<\frac{b-a}{a+1}\ ,$$

או שקול

$$\frac{b+1-(a+1)}{b+1}<\frac{b-a}{c+1}<\frac{b+1-(a+1)}{a+1}\qquad\Rightarrow\qquad 1-\frac{a+1}{b+1}<\frac{b-a}{c+1}<\frac{b+1}{a+1}-1\ .$$

נציב את היחס (*) ונקבל

$$1-\frac{a+1}{b+1}<\ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)<\frac{b+1}{a+1}-1\ .$$

מש"ל

<u>שאלה 8</u> תחום ההגדרה: $x\in[-1,1]$.

$$d^2=x^2+y^2=x^2+\frac{\arccos(x)}{2}\ .$$

יש למזער את d^2:

$$\left(d^2\right)'_x=2x+\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)}{\sqrt{1-x^2}}=0\qquad\Rightarrow\qquad x=\frac{1}{4\sqrt{1-x^2}}$$

$$\begin{aligned}2x+\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)}{\sqrt{1-x^2}}&=0\\ x&=\frac{1}{4\sqrt{1-x^2}}\\ x^2&=\frac{1}{16}\frac{1}{1-x^2}\\ 16x^2&=\frac{1}{1-x^2}\\ 16x^2(1-x^2)&=1\\ 16x^2-16x^4-1&=0\\ 16x^4-16x^2+1&=0\\ 16t^2-16t+1&=0\end{aligned}$$

כאשר $t=x^2$.

$$t=\frac{16\pm\sqrt{256-128}}{32}=0.853553,0.146447$$

ולכן