עבודה עצמית אינטגרלים משולשים

שאלה 1 חשבו את האינטגרל המשולש הבא:

$$\iiint\limits_V 4xy\,dx\,dy\,dz$$

כאשר V הוא התחום

$$V=\left\{0\le x\le 1,\quad 0\le x^2\le y\le x,\quad 0\le z\le 2-x-y\right\}\ .$$

שאלה 2

מצאו את נפח הגוף המגבל ע"י המשטחים הנתונים:

$$z=2x^2+2y^2\ ,\quad z=x^2+y^2\ ,\quad y=x\ ,\quad y=x^2\ .$$

שאלה 3

$$I=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\ \left(x^2+y^2+z\right)^3$$

כאשר

$$V=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2=1\ ,\ z=0\ ,\ z=1\right\}$$

שאלה 4

$$I=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\ \left(x^2+y^2\right)^2$$

כאשר

$$V=\left\{(x,y,z)\mid z=2\ ,\ z=\frac{x^2+y^2}{2}\right\}$$

שאלה 5 חשבו את

$$\int\limits_0^2 dx\int\limits_{-x}^{x} dy\int\limits_0^{x-y+2} x\,dz$$

ושרטטו את התחום האינטגרציה במערכת הצירים xyz. כאשר

שאלה 6 חשבו את מסה הגוף החסום ע"י המשטחים $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=49-x^2$, $x+y=7$ עם צפיפות המסה $\rho=\dfrac{1}{42+6x}$.

שאלה 7

א) חשבו אתצ האינטגרל

$$\iiint\limits_D \frac{1}{(x+y+z+1)^3}$$

בתחום החסום ע"י המישורים $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

ב) חשבו את

$$\iiint\limits_D x\,dx\,dy\,dz$$

מעל התחום

$$D=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\leq 9\ ,\ \ x\leq 0\ ,z\geq 0\right\}\ \ .$$

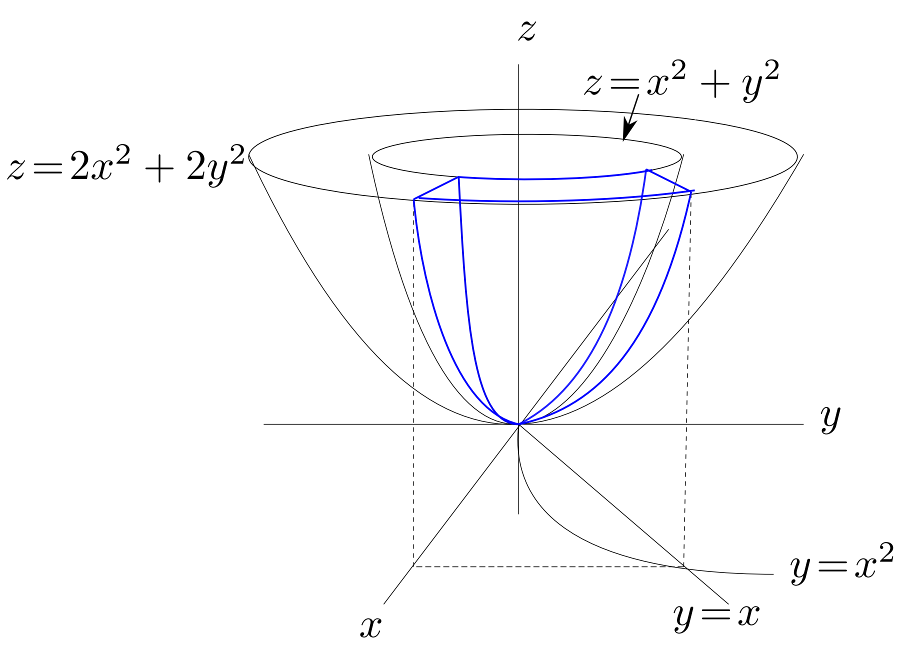
פתרונות

שאלה 1

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V 4xy\,dx\,dy\,dz =&4\int_0^1 x\,dx\int_{x^2}^x y\,dy\int_0^{2-x-y}dz\\ =&4\int_0^1 x\,dx\int_{x^2}^x (2-x-y)y\,dy\\ =&4\int 1_0^x\,dx\left(y-\frac{x^5}{2}-\frac{xy^4}{2}\right)=4\int x\left(y-\frac{x^5}{2}-\frac{xy^4}{2}\right)\,dx\\ =&4\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{14}-\frac{x^6y}{6}-\frac{x^8y}{8}\right)\Bigg|_0^1=\frac{5}{21}-\frac{1}{8}\approx 0.24\end{aligned}$$

שאלה 2

התרשים מראה את הגוף במרחב xyz הנוצר ע"י המשטחים הנתונים:



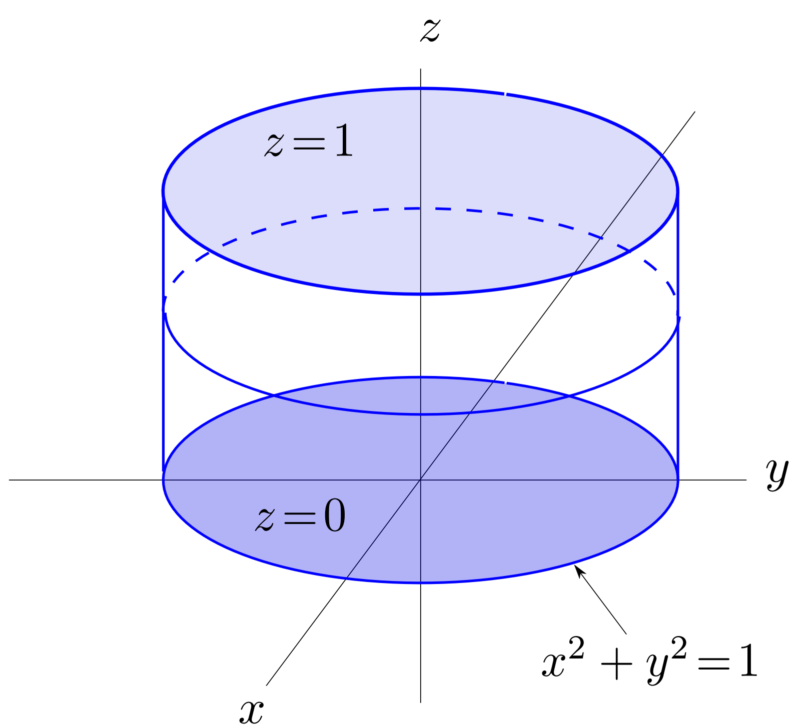
שים לב: הקווים $y=x$ ו- $y=x^2$ נחתכים בנקודות $x=0$ ו- $x=1$, כך שהאינטגרל הנותן את הנפח בשאלה

הוא מצורה

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz \\
&= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \left[z \right]_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} \\
&= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \left(x^2+y^2 \right) \\
&= \int_0^1 dx \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{x} \\
&= \int_0^1 dx \left(x^3 + \frac{x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) \\
&= \int_0^1 dx \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) \\
&= \left[\frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21} \\
&= \frac{35}{105} - \frac{21}{105} - \frac{5}{105} \\
&= \frac{9}{105} \\
&= \frac{3}{35} \ .
\end{aligned}$$

שאלה 3

התרשים מראה שרטוט של התחום T: גליל בין המישורים $z=0$ ו- $z=1$ עם קו המדריך המעגל מרדיוס 1.



על סמך הצורה של T ניתן לכתוב את האינטגרל עם גבולות מתאימות כ-

$$I=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\,\left(x^2+y^2+z\right)^3=\int_0^1 dz\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\,\left(x^2+y^2+z\right)^3\ .$$

בכדי לבצע את האינטגרל של x ו- y ניתן לעבור לקואורדינטות פולריות, כלומר

$$I=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\,r\cdot\left(r^2+z\right)^3$$

ואז ניתן לעבור למשתנה $w=r^2$, אשר עבורו $w'_r=2r$ כך שהאינטגרל הופך ל-

$$I=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\,\frac{1}{2}\cdot w'_r\cdot(w+z)^3=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_{w=0}^{w=1}dw\,(w+z)^3$$

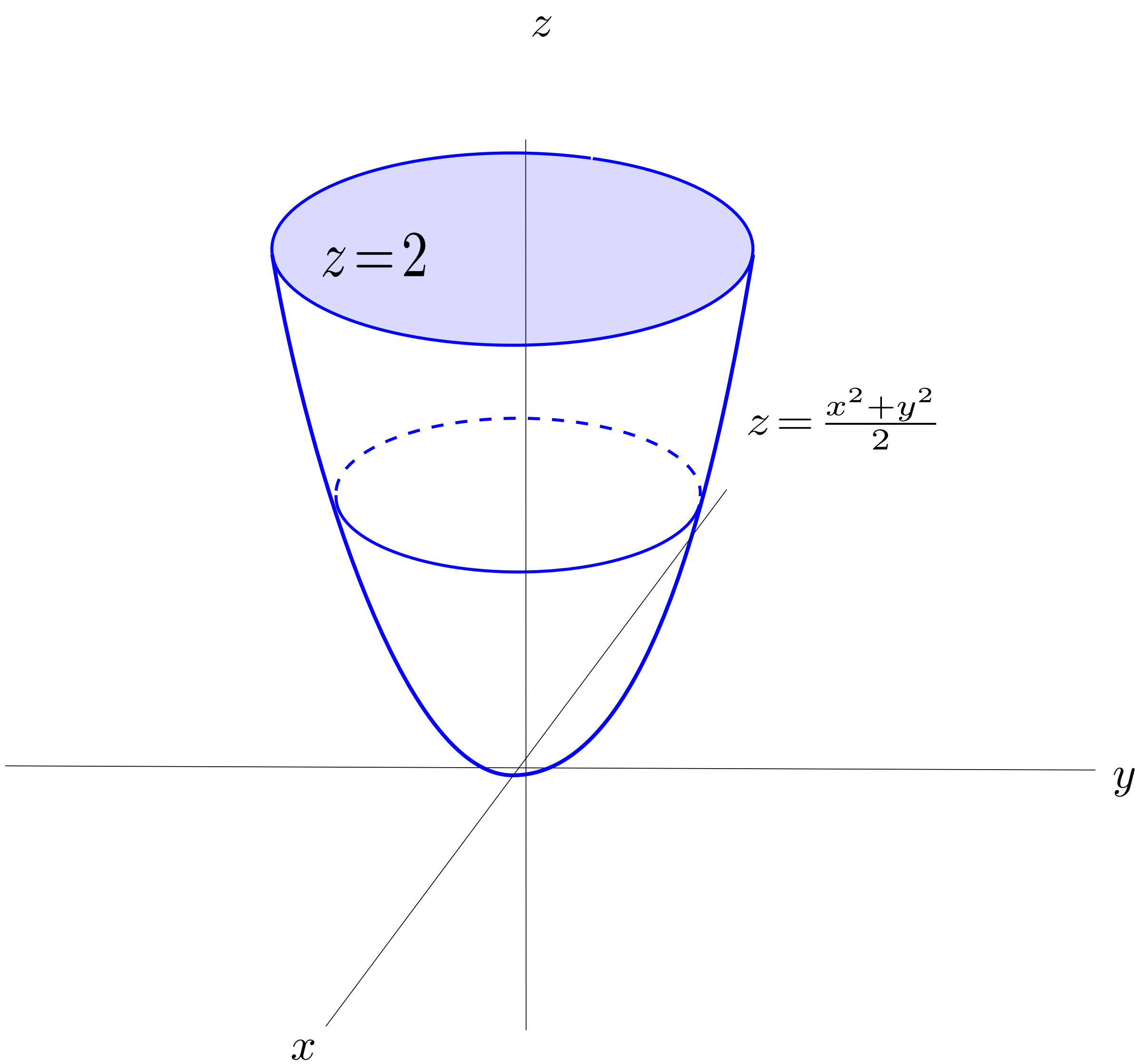
כאשר השתמשנו בשיטת אינטגרציה בהצבה. בצורה הזאת האינטגרלים של w ו- θ טריוויאלים ונקבל

$$
\begin{aligned}
I =& \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{1}{4} \left[(w+z)^4\right]_{w=0}^{w=1} \\
=& \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \, \left((1+z)^4 - z^4\right) \\
=& \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \int_0^1 dz \big[\theta\big]_0^{2\pi} \, \left((1+z)^4 - z^4\right) \\
=& \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \int_0^1 dz \; 2\pi \cdot \left((1+z)^4 - z^4\right) \\
=& \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^1 dz \left((1+z)^4 - z^4\right) \\
=& \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^1 dz \left(4z^3 + 6z^2 + 4z + 1\right)
\end{aligned}
$$

רק נשאר האינטגרל של z:

$$
\begin{aligned}
I =& \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^1 dz \left(4z^3 + 6z^2 + 4z + 1\right) \\
=& \frac{\pi}{4} \cdot \left[z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2\right]_0^1 \\
=& \frac{7\pi}{4} \\
=& \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}
$$

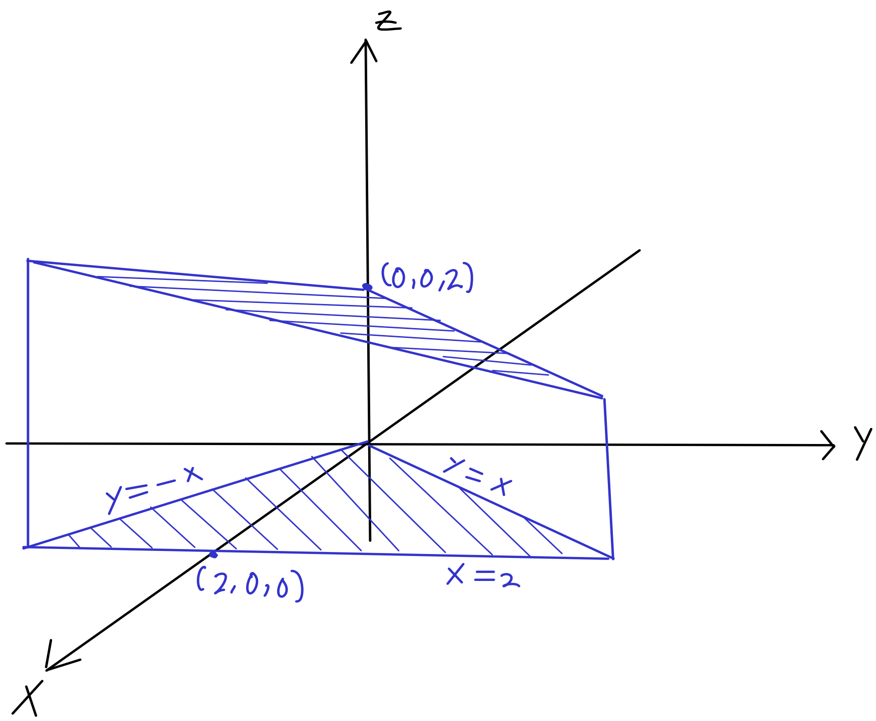
שאלה 4



T

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{2z}} dr \int_0^{2\pi} d\theta \; r \cdot r^4 \\
&= \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{2z}} dr \int_0^{2\pi} d\theta \; r^5 \\
&= \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \; \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^{\sqrt{2z}} \\
&= \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \; \frac{8z^3}{6} \\
&= \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{2z}} \; [\theta]_0^{2\pi} \; \frac{8z^3}{6} \\
&= \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{2z}} 2\pi \cdot \frac{8z^3}{6} \\
&= \frac{16\pi}{6} \int_0^2 dz \, z^3 \\
&= \frac{16\pi}{6} \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^2 \\
&= \frac{16\pi}{6} \cdot 4 \\
&= \frac{32\pi}{3}
\end{aligned}
$$

<u>שאלה 5</u>



$$
\begin{aligned}
\int_0^2 dx \int_{-x}^{x} dy \int_0^{x-y+2} x\,dz &= \int_0^2 dx \int_{-x}^{x} dy x(x-y+2) \\
&= \int_0^2 dx\, x \int_{-x}^{x} dy (x-y+2) \\
&= \int_0^2 dx\, x \left[xy - \frac{y^2}{2} + 2y\right]_{y=-x}^{y=x} \\
&= \int_0^2 dx\, x \left[2x^2 + 4x\right] \\
&= \int_0^2 dx\, \left(2x^3 + 4x^2\right) \\
&= \left[\frac{2x^4}{4} + \frac{4x^3}{3}\right]_0^2 \\
&=8 + \frac{32}{3} \\
&=\frac{56}{3}\ .
\end{aligned}
$$

שאלה 7

א) $\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \approx 0.034$.

ב) $\frac{15\pi}{4} \approx 11.78$.