

עבודה 8: צורת ז'ורדן של מטריצה.

שאלה 1 תהי $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ מטריצה המקיימת $p_A(x) = (x-1)^3(x-2)^3$. מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A .

שאלה 2 תהי $A \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ מטריצה המקיימת $m_A(x) = (x+3)^3(x-2)^2$, $p_A(x) = (x+3)^6(x-2)^2$. מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A .

שאלה 3 תהי $A \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ מטריצה המקיימת $m_A(x) = (x+3)^3(x-6)^2$. מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A .

שאלה 4 נתונה $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ המקיימת

$$2A = A^2 + I.$$

מצאו את כל הצורות ז'ורדן האפשריות של A .

שאלה 5 מצאו את הפולינום האופייני והמינימלי של מטריצה A ואת צורות ז'ורדן האפשריות.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{א})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ב})$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{ג})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{ד})$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ה})$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{ו})$$

שאלה 6 תהי $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ מטריצה המקיימת

$$m_A(x) = (x-4)^2(x-2)(x-1), \quad p_A(x) = (x-4)^4(x-2)(x-1),$$

כאשר $p_A(x)$ הפולינום האופייני של A ו- $m_A(x)$ הפולינום המינימלי שלה. מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A .

שאלה 7 הביאו את מטריצה $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ לצורת ז'ורדן J ומצאו מטריצה הפיכה P כך ש $J = P^{-1}AP$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(א)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{(ב)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{(ג)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix} \quad \text{(ד)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(ה)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(ו)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(ז)}$$

שאלה 8

(א) תהי $A \in M_{7 \times 7}(\mathbb{R})$ מטריצה המקיימת

$$m_A(x) = (x-3)^3(x-1), \quad p_A(x) = (x-3)^5(x-1)^2.$$

מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A .

(ב) מצאו את צורת ז'ורדן של A אם ידוע שהריבוי הגאומטרי של ערך עצמי $\lambda = 3$ שווה ל-2.

תשובות

שאלה 1

$$p_A(x) = (x-1)^3(x-2)^3, A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$$

האפשרויות לפולינום המינימלי:

$$1. (x-1)(x-2)$$

$$2. (x-1)^2(x-2)$$

$$3. (x-1)^3(x-2)$$

$$4. (x-1)(x-2)^2$$

$$5. (x-1)^2(x-2)^2$$

$$6. (x-1)^3(x-2)^2$$

$$7. (x-1)(x-2)^3$$

$$8. (x-1)^2(x-2)^3$$

$$9. (x-1)^3(x-2)^3$$

האפשרויות צורת ז'ורדן:

$$1. \underline{(x-1)(x-2)}$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1(1) & & & & & \\ & J_1(1) & & & & \\ & & J_1(1) & & & \\ & & & J_1(2) & & \\ & & & & J_1(2) & \\ & & & & & J_1(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2. \underline{(x-1)^2(x-2)}$$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(1) & & & & & \\ & J_1(1) & & & & \\ & & J_1(2) & & & \\ & & & J_1(2) & & \\ & & & & J_1(2) & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{(x-1)^3(x-2)} \quad .3$$

$$J = \begin{pmatrix} J_3(1) & & & \\ & J_1(2) & & \\ & & J_1(2) & \\ & & & J_1(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{(x-1)(x-2)^2} \quad .4$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1(1) & & & & \\ & J_1(1) & & & \\ & & J_1(1) & & \\ & & & J_2(2) & \\ & & & & J_1(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{(x-1)^2(x-2)^2} \quad .5$$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(1) & & & \\ & J_1(1) & & \\ & & J_2(2) & \\ & & & J_1(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{(x-1)^3(x-2)^2} \quad .6$$

$$J = \begin{pmatrix} J_3(1) & & \\ & J_2(2) & \\ & & J_1(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{(x-1)(x-2)^3} \quad .7$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1(1) & & & \\ & J_1(1) & & \\ & & J_1(1) & \\ & & & J_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{(x-1)^2(x-2)^3} \quad .8$$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(1) & & \\ & J_1(1) & \\ & & J_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{(x-1)^3(x-2)^3} \quad .9$$

$$J = \begin{pmatrix} J_3(1) & \\ & J_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

שאלה 2

$A \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ מטריצה המקיימת $p_A(x) = (x+3)^6(x-2)^2$, $m_A(x) = (x+3)^3(x-2)^2$

האפשרויות לצורת ז'ורדן:

$$\begin{pmatrix} J_3(-3) & & \\ & J_3(-3) & \\ & & J_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{-3} & \boxed{1} & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-3} & \boxed{1} & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} J_3(-3) & & & \\ & J_2(-3) & & \\ & & J_1(-3) & \\ & & & J_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} J_3(-3) & & & \\ & J_1(-3) & & \\ & & J_1(-3) & \\ & & & J_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{-3} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

שאלה 3

האפשרויות לפולינום האופייני: $m_A(x) = (x+3)^3(x-6)^2, A \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$

1. $p_A(x) = (x+3)^3(x-6)^5$

2. $p_A(x) = (x+3)^4(x-6)^4$

3. $p_A(x) = (x+3)^5(x-6)^3$

4. $p_A(x) = (x+3)^6(x-6)^2$

האפשרויות לצורת זיורדן:

1. $m_A(x) = (x+3)^3(x-6)^2, p_A(x) = (x+3)^3(x-6)^5$

$$\begin{pmatrix} J_3(-3) & & & \\ & J_2(6) & & \\ & & J_2(6) & \\ & & & J_1(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 6 \\ 6 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

או

$$\begin{pmatrix} J_3(-3) & & & & \\ & J_1(-3) & & & \\ & & J_1(-3) & & \\ & & & J_2(6) & \\ & & & & J_1(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{-3} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 & \boxed{-3} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{matrix}} & 0 \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 & 0 & 0 & \boxed{6} \end{pmatrix}$$

$$:p_A(x) = (x+3)^6(x-6)^2, m_A(x) = (x+3)^3(x-6)^2 \text{ .4}$$

$$\begin{pmatrix} J_3(-3) & & \\ & J_3(-3) & \\ & & J_2(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

או

$$\begin{pmatrix} J_3(-3) & & & & \\ & J_2(-3) & & & \\ & & J_1(-3) & & \\ & & & J_2(6) & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 & \boxed{-3} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

או

$$\begin{pmatrix} J_3(-3) & & & & \\ & J_1(-3) & & & \\ & & J_1(-3) & & \\ & & & J_1(-3) & \\ & & & & J_2(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{-3} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 & \boxed{-3} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 & 0 & \boxed{-3} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

שאלה 4

$$2A = A^2 + I \quad \Rightarrow \quad A^2 - 2A + I = 0$$

לכן A מאפסת את הפולינום

$$Q(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2.$$

הפולינום המינימלי מחלק כל פולינום שמתאפס ע"י A . בפרט, הפולינום המינימלי מחלק את $Q(x)$. לכן האפשרויות ל- $m_A(x)$ הן $x - 1$ ו- $(x - 1)^2$.
 $m_A(x) = x - 1$

$$J = \begin{pmatrix} J_1(1) & & \\ & J_1(1) & \\ & & J_1(1) \end{pmatrix}$$

$$\underline{m_A(x) = (x - 1)^2}$$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(1) & \\ & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 5

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{א})$$

$$\begin{aligned} p_A(x) = |xI - A| &= \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1-x & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2-x & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -x \end{vmatrix} \\ &= (-1) \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 0 \\ -4 & -1-x & 0 \\ -17 & -6 & -1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 0 \\ -4 & -1-x & 0 \\ 7 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \\ &= (-1) \cdot (-1) \begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ -4 & -1-x \end{vmatrix} - x(2-x) \begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ -4 & -1-x \end{vmatrix} \\ &= (3-x)(-1-x) + 4 - x(2-x)((3-x)(-1-x) + 4) \\ &= -3 + x - 3x + x^2 + 4 - x(2-x)(-3 + x - 3x + x^2 + 4) \\ &= x^2 - 2x + 1 - x(2-x)(-2x + x^2 + 1) \\ &= (x-1)^2 - x(2-x)(x-1)^2 \\ &= (x-1)^2(1 - x(2-x)) \\ &= (x-1)^2(x^2 - 2x + 1) \\ &= (x-1)^4. \end{aligned}$$

לכן $p_A(x) = (x - 1)^4$ אפשרויות לפולינום המינימלי:

$$(x - 1), \quad (x - 1)^2, \quad (x - 1)^3, \quad (x - 1)^4.$$

נבדוק $(x - 1)$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0_{4 \times 4} .$$

נבדוק $(x-1)^2$:

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 0_{4 \times 4} .$$

לכן $m_A(x) = (x-1)^2$.

$$J = \begin{pmatrix} J_2(1) & \\ & J_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

או

$$J = \begin{pmatrix} J_2(1) & & \\ & J_1(1) & \\ & & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

(ב) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ המטריצה משולשית לכן הערכים עצמיים הם האיברים על האלכסון: $\lambda = 1$ מריבוי

אלגברי 4. לכן: $p_A(x) = (x-1)^4$.
אפשרויות לפולינום המינימלי:

$$(x-1), \quad (x-1)^2, \quad (x-1)^3, \quad (x-1)^4 .$$

נבדוק $(x-1)$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_{4 \times 4} .$$

נבדוק $(x-1)^2$:

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_{4 \times 4}.$$

נבדוק $(x-1)^3$:

$$(A - I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_{4 \times 4}$$

לכן $m_A(x) = (x-1)^4$.

$$J = J_4(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{a}$$

$$\begin{aligned} p_A(x) = |xI - A| &= \begin{vmatrix} -2-x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-x & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -x & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \\ &= (-2-x) \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ -1 & -x & -1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \\ &= (-2-x)(1-x) \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} \\ &= (-2-x)(1-x)(-x(2-x)+1) \\ &= (-2-x)(1-x)(x-1)^2 \\ &= (x+2)(x-1)^3. \end{aligned}$$

לכן $p_A(x) = (x+2)(x-1)^3$ האפשרויות לפולינום המינימלי:

$$(x+2)(x-1), \quad (x+2)(x-1)^2, \quad (x+2)(x-1)^3.$$

נבדוק $(x+2)(x-1)$:

$$(A + 2I)(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

נבדוק $:(x+2)(x-1)^2$

$$(A+2I)(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $m_A(x) = (x+2)(x-1)^2$ האפשרויות לצורת ז'ורדן:

$$J = \begin{pmatrix} J_2(1) & & \\ & J_1(1) & \\ & & J_1(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{המטריצה משולשית עליונה לכן} \quad (ד)$$

$$p_A(x) = (x-1)^2(x-2)^2.$$

האפשרויות לפולינום המינימלי:

$$(x-1)(x-2), \quad (x-1)^2(x-2), \quad (x-1)(x-2)^2, \quad (x-1)^2(x-2)^2.$$

נבדוק $:(x-1)(x-2)$

$$(A-I)(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נבדוק $:(x-1)^2(x-2)$

$$(A-I)^2(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נבדוק $:(x-1)(x-2)^2$

$$(A-I)(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$m_A(x) = (x-1)^2(x-2)^2.$$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(1) & \\ & J_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (ה)$$

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} x+1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & x+1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+1)^3(x-1)$$

נבדוק $:(x+1)(x-1)$

$$A - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(A + I)(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

נבדוק $:(x+1)^2(x-1)$

$$(A + I)^2(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

לכן

$$m_A(x) = (x+1)^3(x-1)$$

$$J = \begin{pmatrix} J_3(-1) & \\ & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{¶}$$

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (x+2)(x-1)(x^2-2x+1) = (x+2)(x-1)^3.$$

נבדוק $:(x-1)(x+2)$

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A - I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A - I)(A + 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

נבדוק $:(x-1)^2(x+2)$

$$(A - I)^2(A + 2I) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$m_A(x) = (x-1)^2(x+2).$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1(-2) & & \\ & J_2(1) & \\ & & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

שאלה 6

$$\begin{pmatrix} J_2(4) & & & \\ & J_2(4) & & \\ & & J_1(2) & \\ & & & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{4} & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

או

$$\begin{pmatrix} J_2(4) & & & & \\ & J_1(4) & & & \\ & & J_1(4) & & \\ & & & J_1(2) & \\ & & & & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{4} & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

שאלה 7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{א)}$$

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 2 & 2 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1) \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x+1)(x-1)(x-2).$$

לכן

$$m_A(x) = (x+1)(x-1)(x-2).$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = -1$ מריבוי אלגברי 1,

$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1,

$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 1.

כל הערכים עצמים שונים לכן A לכסינה.

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

מרחב עצמי של $\lambda = -1$:

$$(A + I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון $(x, y, z) = (0, 0, z) = z(0, 0, 1)$. לכן

$$V_{-1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ נסמן את הוקטור עצמי ב-}$$

מרחב עצמי של $\lambda = 1$:

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow -\frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון $(x, y, z) = (-z, 0, z) = z(-1, 0, 1)$ לכן

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ נסמן את הוקטור עצמי ב-}$$

מרחב עצמי של $\lambda = 2$:

$$(A - 2I) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון $(x, y, z) = (-z, -\frac{1}{2}z, z) = z(-1, -\frac{1}{2}, 1)$ לכן

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ נסמן את הוקטור עצמי ב-}$$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = (u_1 \ u_2 \ u_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{ב)}$$

$$\begin{aligned}
|xI - A| &= \begin{vmatrix} x-13 & -16 & -16 \\ 5 & x+7 & 6 \\ 6 & 8 & x+7 \end{vmatrix} \\
&= (x-13) \begin{vmatrix} x+7 & 6 \\ 8 & x+7 \end{vmatrix} + 16 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & x+7 \end{vmatrix} - 16 \begin{vmatrix} 5 & x+7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \\
&= (x-13)(x^2 + 14x + 1) + 16(5x - 1) - 16(-6x - 2) \\
&= x^3 + 14x^2 + x - 13x^2 - 182x - 13 + 80x - 16 + 96x + 32 \\
&= x^3 + x^2 - 7x - 182x + 91 + 80x - 16 + 96x + 32 \\
&= x^3 + x^2 - 5x + 3 \\
&= (x-1)^2(x+3)
\end{aligned}$$

לכן הפולינום האופייני הוא $p_A(x) = (x-1)^2(x+3)$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 2,

$\lambda = -3$ מריבוי אלגברי 1.

$$m_A(x) = (x-1)^2(x+3) .$$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(1) & \\ & J_1(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & \boxed{-3} \end{pmatrix}$$

מרחב עצמי של $\lambda = 1$:

$$(A - I) = \left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 16 & 16 & 0 \\ -5 & -8 & -6 & 0 \\ -6 & -8 & -8 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

פתרון $(x, y, z) = z(-2, \frac{1}{2}, 1)$.

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} .$$

נסמן את הוקטור עצמי ב- $u_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

וקטור עצמי מוכלל:

$$u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(A - I)u_2 = u_1 , \quad \Rightarrow \quad (A - I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

נרשום את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 16 & 16 & -4 \\ -5 & -8 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & -8 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

פתרון: $z \in \mathbb{R}$ נציב $z = 1$ ונקבל $(x, y, z) = (-2z - 1, \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, z)$

$$u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

מרחב עצמי של $\lambda = 3$:

$$(A + 3I) = \begin{pmatrix} 10 & 16 & 16 \\ -5 & -10 & -6 \\ -6 & -8 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $z \in \mathbb{R}$ נציב $z = 1$ ונקבל $(x, y, z) = (-2z, z, z)$

$$u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(1) & \\ & J_1(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} u_1, u_2, u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{ג}$$

$$\begin{aligned} p_A(x) = |xI - A| &= \begin{vmatrix} x-3 & 0 & -8 \\ -3 & x+1 & -6 \\ 2 & 0 & x+5 \end{vmatrix} \\ &= (x+1) \begin{vmatrix} x-3 & -8 \\ 2 & x+5 \end{vmatrix} \\ &= (x+1)(x^2 + 2x + 1) \\ &= (x+1)^3. \end{aligned}$$

לכן $p_A(x) = (x+1)^3$ ערכים עצמיים:
 $\lambda = -1$ מריבוי אלגברי 3.

$$m_A(x) = (x+1)^2.$$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(-1) & \\ & J_1(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & \boxed{1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

מרחב עצמי של $\lambda = -1$:

$$(A + I) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow 2R_3 + R_1]{R_2 \rightarrow 4R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $y, z \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ לכן בסיס של המרחב עצמי V_{-1} הוא

$$V_{-1} = \text{span} \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

וקטור עצמי מוכלל של $\lambda = 1$:
נגדיר וקטור כפרישה של הבסיס של V_{-1}

$$w_1 = \alpha u_1 + \beta u_2 = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ נסמן}$$

$$(A + I) \cdot w_2 = w_1 \quad \Rightarrow \quad (A + I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 8 & -2\alpha \\ 3 & 0 & 6 & \beta \\ -2 & 0 & -4 & \alpha \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow 2R_3 + R_1]{R_2 \rightarrow 4R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 8 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 4\beta + 6\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta + 3\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

למערכת יש פתרון כאשר $2\beta + 3\alpha = 0$ נציב $\alpha = -2, \beta = 3$ ונקבל $w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ והמערכת הופכת ל-

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

הפתרון הוא $(x, y, z) = (1 - 2z, y, z)$ נציב $y = 1, z = 1$ ונקבל

$$w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

כעת אנחנו צריכים וקטור עצמי שני של $\lambda = -1$. נקח $w_3 = u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$P = (w_1 \ w_2 \ w_3) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} J_2(-1) & \\ & J_1(-1) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix} \quad (ד)$$

$$\begin{aligned} p_A(x) &= |xI - A| = \begin{vmatrix} x & -3 & -3 \\ 1 & x-8 & -6 \\ -2 & 14 & x+10 \end{vmatrix} \\ &= x(x^2 + 2x + 4) + 3(x-2) - 3(2x-2) \\ &= x(x^2 + 2x + 4) - 3x \\ &= x(x^2 + 2x + 1) \\ &= x(x+1)^2. \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

1. $\lambda = 0$ מריבוי אלגברי 1.2. $\lambda = -1$ מריבוי אלגברי 2.

נמצא את הפולינום המינימלי:

$$A(A+I) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 9 & 6 \\ 2 & -14 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -15 & -9 \\ 3 & -15 & -9 \\ -4 & 20 & 12 \end{pmatrix} \neq 0$$

לכן

$$m_A(x) = x(x+1)^2.$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1(0) & \\ & J_2(-1) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & -1 & \end{array} \right)$$

מרחב עצמי של $\lambda = 0$:

$$(A - 0I) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 8 & 6 & 0 \\ 2 & -14 & -10 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -14 & -10 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \rightarrow \frac{1}{3} \cdot R_2 \\ R_3 \rightarrow \frac{1}{2} R_3 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -14 & -10 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \\ R_1 \rightarrow -R_1 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 8R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} z, z \in \mathbb{R} \text{ פתרון:}$$

$$V_0 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$.u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ נסמן}$$

מרחב עצמי של $\lambda = -1$:

$$(A + I) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 9 & 6 & 0 \\ 2 & -14 & -9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1]{R_2 \rightarrow R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 12 & 9 & 0 \\ 0 & -20 & -15 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -20 & -15 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{4}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} z, z \in \mathbb{R} \text{ פתרון:}$$

$$V_{-1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$.u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ נסמן}$$

כעת נמצא ווקטור עצמי מוכלל של הערך עצמי $\lambda = -1$:

$$u_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ נסמן ונפתור את המערכת}$$

$$(A + I)u_3 = u_2 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 9 & 6 \\ 2 & -14 & -9 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(A + I) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -3 \\ -1 & 9 & 6 & -3 \\ 2 & -14 & -9 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1]{R_2 \rightarrow R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 12 & 9 & -6 \\ 0 & -20 & -15 & 10 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & -20 & -15 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{4}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

פתרון: $z \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} z$, נציב $z = 0$:

$$u_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P = (u_1 \quad u_2 \quad u_3) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} J_1(0) & \\ & J_2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ה)}$$

$$\begin{aligned} p_A(x) &= |xI - A| = \begin{vmatrix} x-4 & -5 & 2 \\ x+2 & x+2 & -1 \\ x+1 & x+1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (x-4)(x^2+x-1) + 5(2x-1) + 2(-x) \\ &= (x-4)(x^2+x-1) + 8x-5 \\ &= x^3+x^2-x-4x^2-4x+4+8x-5 \\ &= x^3-3x^2+3x-1 \\ &= (x-1)^3. \end{aligned}$$

ערכים עצמיים: $\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 3.

פולינום מינימלי:

נבדוק $x-1$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

נבדוק $x - 1$:

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

לכן $m_A(x) = (x - 1)^3$.

$$J = (J_3(1)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

מרחב עצמי של $\lambda = 1$:

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{לכן נסמן את הוקטור עצמי ב-}$$

וקטור עצמי מוכלל:

$$u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{נסמן}$$

$$(A - I)u_2 = u_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - I) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ -3 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} -2 - \alpha \\ 1 + \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{פתרון:}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{נסמן}$$

$$(A - I)u_3 = u_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - \alpha \\ 1 + \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$(A - I) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -2 & -2 - \alpha \\ -2 & -3 & 1 & 1 + \alpha \\ -1 & -1 & 0 & \alpha \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\alpha \\ 2 & 3 & -1 & -1 - \alpha \\ -3 & -5 & 2 & 2 + \alpha \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & -1 & -1 + \alpha \\ 0 & -2 & 2 & 2 - 2\alpha \end{array} \right) \\ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & -1 & -1 + \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 - 2\alpha \\ 0 & 1 & -1 & -1 + \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

לכל α קיים פתרון. נציב $\alpha = 0$ ונקבל $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו- $u_3 = \begin{pmatrix} 1 - \beta \\ -1 + \beta \\ \beta \end{pmatrix}$ לכל $\beta \in \mathbb{R}$. לכל β קיים פתרון.

נציב $\beta = 0$ ונקבל $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$P = (u_1 \quad u_2 \quad u_3) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = J_3(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{¶}$$

$$\begin{aligned} p_A(x) &= |xI - A| = \begin{vmatrix} x-3 & -7 & 3 \\ 2 & x+5 & -2 \\ 4 & 10 & x-3 \end{vmatrix} \\ &= (x-3)(x^2 + 2x + 5) + 7(2x + 2) + 3(-4x) \\ &= (x-3)(x^2 + 2x + 5) + 2x + 14 \\ &= x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 6x + 5x - 15 + 2x + 14 \\ &= x^3 - x^2 + x - 1 \\ &= (x-1)(x^2 + 1) \\ &= (x-1)(x+i)(x-i) \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

1. $\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.

1. $\lambda = i$ מריבוי אלגברי 1.

1. $\lambda = -i$ מריבוי אלגברי 1.

פולינום מינימלי:

$$m_A(x) = (x-1)(x+i)(x-i).$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1(1) & & \\ & J_1(i) & \\ & & J_1(-i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

מרחב עצמי של $\lambda = 1$:

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ -2 & -6 & 2 \\ -4 & -10 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מרחב עצמי של $\lambda = i$:

$$(A - iI) = \begin{pmatrix} 3-i & 7 & -3 \\ -2 & -5-i & 2 \\ -4 & -10 & 3-i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-2i \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_i = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1-2i \\ 1-i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

לכן

$$V_{-i} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1+2i \\ 1+i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$P = (u_1 \quad u_2 \quad u_3) = \begin{pmatrix} -2 & 1-2i & 1+2i \\ 1 & 1-i & 1+i \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} J_1(1) & & \\ & J_1(i) & \\ & & J_1(-i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

פולינום אופייני:

(ז)

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ x+3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)(x^2+x) + 3x - 2x$$

$$= x(x^2-1) + x$$

$$= x^3.$$

ערכים עצמיים:

 $\lambda = 0$ מריבוי אלגברי 3.

$$m_A(x) = x^2.$$

$$J = \begin{pmatrix} J_2(0) & 0 \\ 0 & J_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

מרחב עצמי של $\lambda = 0$:

$$\left((A - 0I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2]{R_2 \rightarrow -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right)$$

הפתרון הוא $(x, y, z) = (-y + z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(1, 0, 1)$ $y, z \in \mathbb{R}$. הבסיס של המרחב עצמי הוא

$$V_0 = \text{span} \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

וקטור עצמי מוכלל:

נרשום וקטור עצמי כפרישה של הבסיס של V_0 :

$$w_1 = \alpha u_1 + \beta u_2 = \begin{pmatrix} -\alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$(A - 0 \cdot I) \cdot w_2 = w_1$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} -\alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{matrix} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow 2R_1 + R_2]{R_2 \rightarrow 3R_1 + R_2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} -\alpha + \beta \\ -2\alpha + 3\beta \\ -2\alpha + 3\beta \end{matrix} \right)$$

יש פתרון כאשר $-2\alpha + 3\beta = 0$. נציב $\beta = 2, \alpha = 3$ ונקבל

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

המערכת נהפכת ל-

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right)$$

הפתרון של המערכת הוא $x + y - z = -1 \Leftrightarrow x = -y + z - 1$. נציב $y = 1, z = 1$ ונקבל

$$w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כעת אנחנו צריכים וקטור עצמי שני של $\lambda = -1$. נקח $w_3 = u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$P = (w_1 \ w_2 \ w_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} J_2(0) & 0 \\ 0 & J_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

שאלה 8

(א)

$$\begin{pmatrix} J_3(3) & & & \\ & J_2(3) & & \\ & & J_1(1) & \\ & & & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

או

$$\begin{pmatrix} J_3(3) & & & & & \\ & J_1(3) & & & & \\ & & J_1(3) & & & \\ & & & J_1(1) & & \\ & & & & J_1(1) & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

(ב) ריבוי גאומטרי שווה למספר הבלוקים של אותו ערך עצמי, לכן, עבור $\lambda = 3$ צריך להיות שני בלוקים. לכן הצורת ז'ורדן היא:

$$\begin{pmatrix} J_3(3) & & & \\ & J_2(3) & & \\ & & J_1(1) & \\ & & & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$