

שיעור 5

סטרטגיות מעורבות

5.1 הגדרה של אסטרטגיות מעורבות

הגדירה 5.1 אסטרטגיות מעורבות

יהי $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ משחק בצורה אסטרטגית שבו קבוצות האסטרטגיות של השחקנים סופיות.

נניח כי $S_1 = (s_1^1, s_1^2, \dots, s_1^n)$ קבוצת אסטרטגיות של שחקן 1, ונניח כי σ_1 היא פונקציית ההסתברות של הקבוצה אסטרטגיות S_1 :

$$\sigma_1 : S_1 \rightarrow [0, 1] .$$

קבוצת אסטרטגיה מעורבת של שחקן 1 מסומן σ ומוגדר להיות הקבוצה

$$\sigma(S_1) = \{\sigma_1(s_1^1), \sigma_1(s_1^2), \dots, \sigma_1(s_1^n)\}$$

כאשר:

$\sigma_1(s_1^1)$ = הסתברות לשחקן 1 לשחק לפי האסטרטגיה s_1^1 , $\sigma_1(s_1^2)$ = הסתברות לשחקן 1 לשחק לפי האסטרטגיה s_1^2 , ... וכן הלא.

באופן כללי, נניח כי $S_i = (s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^m)$ קבוצת אסטרטגיות של שחקן i .

קבוצת אסטרטגיה מעורבת של שחקן i מסומן σ ומוגדר להיות הקבוצה

$$\sigma_i(S_i) = \{\sigma_i(s_i^1), \sigma_i(s_i^2), \dots, \sigma_i(s_i^m)\}$$

כאשר:

$\sigma_i(s_i^1)$ = הסתברות לשחקן i לשחק לפי האסטרטגיה s_i^1 , $\sigma_i(s_i^2)$ = הסתברות לשחקן i לשחק לפי האסטרטגיה s_i^2 , ... וכן הלא.

סימון: ניתן לסמן אסטרטגיה מעורבת עם אותיות גדולות, ולסמן את הסתברויות עצמן עם אותיות קטנות. למשל

$$\sigma(S_1) = \{\sigma(s_1^1), \sigma(s_1^2), \dots, \sigma(s_1^n)\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

ז"א $x_1 = \sigma(s_1^1)$ מסמן את הסתברות לשחקן 1 לשחק לפי אסטרטגיה s_1^1 , ו- $x_2 = \sigma(s_1^2)$ מסמן את הסתברות לשחקן 2 לשחק לפי אסטרטגיה s_1^2 .

לפי תכונת החיובית של פונקציית הסתברות,

$$0 \leq \sigma(s_i) \leq 1 \quad (*)$$

לכל $s_i \in S_i$ ולפי תכונת הנרמול של פונקציית הסתברות, אם σ אסטרטגיה מעורבת של שחקן i אז מתקיים

$$\sigma(s_i^1) + \sigma(s_i^2) + \dots + \sigma(s_i^n) = 1 . \quad (**)$$

תכונות (*1) ו- (*2) אומירות כי הקבוצה σ היא **סימפלקס**.

דוגמה 5.1 (סטרטגיה מעורבת)

דוגמה 1) נניח שקבוצת האסרווגיות הטהורות של שחקן היא 1

$$S_1 = \{A, B, C\} .$$

את האסטרטגיות המעורבות σ שבה הוא בוחר כל אסטרטגיה טהורה בהסתברות $\frac{1}{3}$ נסמן על ידי

$$\begin{aligned}\sigma(S_1) &= \{\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C)\} \\ &= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

דוגמה 2 אם $S_1 = \{H, T\}$ אז אוסף של כל האסטרטגיות המעורבות, X של שחקן 1 מסומן

$$\Sigma_1 = \left\{ \{\sigma_1(H), \sigma_1(T)\} = (x_1 \quad x_2) \mid 0 \leq x_1, x_2 \leq 1, x_1 + x_2 = 1 \right\} .$$

במקרה זה הקבוצה Σ_1 שකולה לקטע ב- \mathbb{R}^2 המחבר את $(0, 1)$ עם $(1, 0)$.

דוגמה 3 אם $S_2 = \{L, M, R\}$, אוסף של כל האסטרטגיות המעורבות Y של שחקן 2 מסומן

$$\Sigma_2 = \left\{ \{\sigma_2(L), \sigma_2(M), \sigma_2(R)\} = (y_1 \quad y_2 \quad y_3) \mid 0 \leq y_1, y_2, y_3 \leq 1, y_1 + y_2 + y_3 = 1 \right\} .$$

במקרה זה Σ_2 שකולה למשולש ב- \mathbb{R}^3 שקדקודיו הם הנקודות $(0, 0, 1)$ ו- $(0, 1, 0)$ ו- $(1, 0, 0)$.

דוגמה 5.2 (וקטור אסטרטגיות מעורב)

נתון המשחק G באסטרטגיות טהורות הנתון למטה:

		<i>II</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>I</i>				
α		1, 1	2, -7	
β		3, -2	5, 6	

נניח כי באסטרטגיות מעורבות שחקן 1 משחק לפי אסטרטגיה A בהסתברות $\frac{1}{3}$ ולפי אסטרטגיה B בהסתברות $\frac{2}{5}$, שחקן 2 משחק לפי אסטרטגיה α בהסתברות $\frac{3}{5}$ ולפי אסטרטגיה β בהסתברות $\frac{2}{5}$. וקטור האסטרטגיות המעורב של שחקן 1 הוא

$$x = (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

וקטור האסטרטגיות המעורב של שחקן 2 הוא

$$y = (y_1, y_2) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) .$$

המשחק בצורה אסטרטגית מעורבת הינה

		<i>II</i>	$\frac{1}{3}(A)$	$\frac{2}{3}(B)$
<i>I</i>				
$\frac{2}{5}(\alpha)$		1, 1	2, -7	
$\frac{3}{5}(\beta)$		3, -2	5, 6	

שיםו לב X ו- Y הם סימפלקסים, בגלל ש- $x_1 + x_2 = 1$ ו- $y_1 + y_2 = 1$.

דוגמה 5.3 (וקטור אסטרטגיות מעורב)

נתון המשחק G באסטרטגיות טהורות הנטו למטה:

		<i>II</i>	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>R</i>
		<i>I</i>			
<i>t</i>		0, 2	2, -7	3, 2	
<i>m</i>		3, -2	5, 4	2, 9	
<i>b</i>		3, -2	5, 6	7, -8	

נניח כי באסטרטגיות מעורבות שחקן 1 משחק לפי אסטרטגיה L בהסתברות $\frac{1}{7}$, לפि אסטרטגיה C בהסתברות $\frac{2}{7}$, ולפי אסטרטגיה R בהסתברות $\frac{4}{7}$, ושחקן 2 משחק לפי אסטרטגיה t בהסתברות $\frac{1}{9}$, לפি אסטרטגיה m בהסתברות $\frac{5}{9}$, ולפי אסטרטגיה b בהסתברות $\frac{4}{9}$. וקטור האסטרטגיות המעורב של שחקן 1 הוא

$$x = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7} \right)$$

וקטור האסטרטגיות המעורב של שחקן 2 הוא

$$y = (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9} \right).$$

המשחק בצורה אסטרטגית מעורבת הינה

		<i>II</i>	$\frac{1}{7}(L)$	$\frac{2}{7}(C)$	$\frac{4}{7}(R)$
		<i>I</i>			
$\frac{1}{9}(t)$		0, 2	2, -7	3, 2	
$\frac{4}{9}(m)$		3, -2	5, 4	2, 9	
$\frac{5}{9}(b)$		3, -2	5, 6	7, -8	

שימו לב X ו- Y הם סימפלקסים, בגלל ש- $1 = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{7} + \frac{3}{7} + \frac{4}{7}$

הגדה 5.2 ההרחבה של משחק לאסטרטגיות מעורבות

יהי $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ משחק בצורה אסטרטגית. ההרחבה של G לאסטרטגיות מעורבות הוא המשחק

$$\Gamma = (N, (\Sigma_i)_{i \in N}, (U_i)_{i \in N}) \quad (5.1)$$

כאשר:

Σ_i מסמן את האוסף של כל האסורוגיות המעורבות (S_i) של שחקן i , ו- U_i מסמן את פונקציית התשלום של שחקן i אשר מוגדרת

$$U_i(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = \sum_{s_1 \in S_1, \dots, s_N \in S_N} u_i(s_1, \dots, s_N) \sigma_1(s_1) \sigma_2(s_2) \dots \sigma_N(s_N). \quad (5.2)$$

דוגמה 5.4 (פונקציית התשלום של משחק באסטרטגיות מעורבות)נתון המשחק G באסטרטגיות טהורות:

		II	a	b
		α	1, 1	2, -7
		β	3, -2	5, 6

ונתנו הווקטור האסטרטגיות המעורבות של שחקן 1:

$$x = (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

והווקטור אסטרטגיות מעורבות של שחקן 2:

$$y = (y_1, y_2) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right).$$

ההרחבה של המשחק לאסטרטגיות מעורבות הינה

		II	$x_1(a)$	$x_2(b)$		II	$\frac{1}{3}(a)$	$\frac{2}{3}(b)$
		$y_1(\alpha)$	1, 1	2, -7	=	$\frac{2}{5}(\alpha)$	1, 1	2, -7
		$y_2(\beta)$	3, -2	5, 6		$\frac{3}{5}(\beta)$	3, -2	5, 6

פונקציית התשלום של שחקן i היא התוחלת התשלום של שחקן i :

$$U_1(x, y) = 1x_1x_2 + 2x_2y_1 + 3x_1y_2 + 5x_2y_2 = \frac{59}{15}.$$

$$U_2(x, y) = 1x_1x_2 - 7x_2y_1 - 2x_1y_2 + 6x_2y_2 = \frac{4}{15}.$$

ניתן לרשום את פונקציית התשלום במונחי המטריצות התשלומיים של שחקן 1 ו- שחקן 2 בנפרד. המטריצת התשלומיים של המשחק הינה

$$U = \begin{pmatrix} (1, 1) & (2, -7) \\ (3, -2) & (5, 6) \end{pmatrix}$$

ומטריצת התשלומיים של השחקנים הנפרדים הינה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

 A המטריצת התשלומיים של שחקן 1 ו- B המטריצת התשלומיים של שחקן 2. במונחי A ו- B הפונקציות התשלומיים שלהם באסטרטגיות מעורבות הן

$$U_1(x, y) = x^t A y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$U_2(x, y) = x^t B y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

דוגמה 5.5 (וקטור אסטרטגיות מעורב)נתון המשחק G באסטרטגיות טהורות:

		II	L	C	R
		I	\diagdown		
		t	0, 2	2, -7	3, 2
		m	3, -2	5, 4	2, 9
		b	3, -2	5, 6	7, -8

ונתנו וקטור האסטרטגיות המעורבות של שחקן 1:

$$x = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7} \right)$$

וקטור האסטרטגיות המעורבות של שחקן 2:

$$y = (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9} \right).$$

המשחק בצורה אסטרטגית מעורבת הינה

		II	$x_1(L)$	$x_2(C)$	$x_3(R)$		II	$\frac{1}{7}(L)$	$\frac{2}{7}(C)$	$\frac{4}{7}(R)$
		I	\diagdown				$\frac{1}{9}(t)$	0, 2	2, -7	3, 2
		$y_1(t)$	0, 2	2, -7	3, 2		$\frac{4}{9}(m)$	3, -2	5, 4	2, 9
		$y_2(m)$	3, -2	5, 4	2, 9		$\frac{5}{9}(b)$	3, -2	5, 6	7, -8
		$y_3(b)$	3, -2	5, 6	7, -8					

פונקציית התשלומים של שחקן i היא התוחלת התשלומים של שחקן i :

$$U_1(x, y) = 0 \cdot x_1 x_2 + 2 x_2 y_1 + 3 x_1 y_2 + 3 x_3 y_1 + 3 x_1 y_2 + 5 x_2 y_2 + 2 x_3 y_2 + 3 x_1 y_3 + 5 x_2 y_3 + 7 x_3 y_3 = \frac{107}{21}.$$

$$U_2(x, y) = 2 x_1 y_1 - 7 x_1 y_2 + 2 x_1 y_3 - 2 x_2 y_1 + 4 x_2 y_2 + 9 x_2 y_3 - 2 x_3 y_1 + 6 x_3 y_2 - 8 x_3 y_3 = \frac{10}{21}.$$

נition לרשום את פונקציית התשלומים במונחי המטריצות התשלומיים של שחקן 1 ו- שחקן 2 בנפרד. המטריצת התשלומיים של המשחק הינה

$$U = \begin{pmatrix} (0, 2) & (2, -7) & (3, 2) \\ (3, -2) & (5, 4) & (2, 9) \\ (3, -2) & (5, 6) & (7, -8) \end{pmatrix}$$

ומטריצת התשלומיים של השחקנים הנפרדים הינה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 2 \\ -2 & 4 & 9 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

 A המטריצת התשלומיים של שחקן 1 ו- B המטריצת התשלומיים של שחקן 2. במונחי A ו- B הפונקציות התשלומיים שלהם באסטרטגיות מעורבות הן

$$U_1(x, y) = x^t A y = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$U_2(x, y) = x^t B y = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 2 & -7 & 2 \\ -2 & 4 & 9 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

5.2 שיווי משקל נאש ועקרון האדישות

הגדרה 5.3 שיווי משקל נאש באסטרטגיות מעורבות

יהי $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ משחק N שחקנים באסטרטגיות טהורות ויהי $\Gamma = (N, (\Sigma_i)_{i \in N}, (U_i)_{i \in N})$ ההכרבה שלו לאסטרטגיות מעורבות. ויהי σ^* השיווי משקל באסטרטגיות מעורבות אם התנאי הבא מתקיים

$$U_i(\sigma^*) \geq U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) . \quad (5.3)$$

משפט 5.1 עקרון האדישות

יהי σ^* שיווי משקל במשחק בצורה אסטרטגית, ותהיינה s_i ו- \hat{s}_i שתי אסטרטגיות טהורות של שחקן i . אם $0 > \sigma_i^*(\hat{s}_i)$ וכן $0 > \sigma_i^*(s_i)$

$$U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = U_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*) \quad (5.4)$$

הוכחה: נניח בsvilleה כי מושוואה (5.4) אינה מתקיימת ובלי הגבלת הכלליות נניח כי

$$U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) > U_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*) . \quad (5.5)$$

תהי σ_i האסטרטגיה של שחקן i המוגדרת באופן הבא:

$$\sigma_i(t_i) \triangleq \begin{cases} \sigma_i^*(t_i) & t_i \notin \{s_i, \hat{s}_i\} , \\ 0 & t_i = \hat{s}_i , \\ \sigma_i^*(s_i) + \sigma_i^*(\hat{s}_i) & t_i = s_i . \end{cases}$$

$$U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) = \sum_{t_i \in S_i} \sigma(t_i) U_i(t_i, \sigma_{-i}^*) \quad (5.6)$$

$$= \sum_{t_i \notin \{s_i, \hat{s}_i\}} \sigma^*(t_i) U_i(t_i, \sigma_{-i}^*) + (\sigma^*(s_i) + \sigma^*(\hat{s}_i)) U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \quad (5.7)$$

$$> \sum_{t_i \notin \{s_i, \hat{s}_i\}} \sigma^*(t_i) U_i(t_i, \sigma_{-i}^*) + \sigma^*(s_i) U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) + \sigma^*(\hat{s}_i) U_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*) \quad (5.8)$$

$$= \sum_{t_i \in S_i} \sigma^*(t_i) U_i(t_i, \sigma_{-i}^*) \quad (5.9)$$

$$= U_i(\sigma^*) . \quad (5.10)$$

קיבלנו כי $U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) > U_i(\sigma^*)$ בסתיו לכך ש- X^* שיווי משקל.

דוגמה 5.6 ()

נתון משחק שני שחקנים (שאינו סכום אפס) בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>L</i>	<i>R</i>
<i>T</i>	1, 8	9, 2	
<i>B</i>	7, 1	2, 5	

מצאו את השוויי משקל באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

<i>I</i>	<i>II</i>	$y(L)$	$(1 - y)(R)$
$x(T)$	1, 8	9, 2	
$(1 - x)(B)$	7, 1	2, 5	

$$U_1(x, y) = (2(1 - x) + 9x)(1 - y) + (7(1 - x) + x)y = -13xy + 7x + 5y + 2 .$$

$$U_2(x, y) = (5(1 - x) + 2x)(1 - y) + (7x + 1)y = 10xy - 3x - 4y + 5 .$$

לפי עקרון האדישות:

$$\begin{aligned} U_1(T, y^*) &= U_1(B, y^*) \\ \Rightarrow U_1(1, y^*) &= U_1(0, y^*) \\ \Rightarrow 9 - 8y^* &= 2 + 5y^* \\ \Rightarrow y^* &= \frac{7}{13} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2(x^*, L) &= U_2(x^*, R) \\ \Rightarrow U_2(x^*, 1) &= U_2(x^*, 0) \\ \Rightarrow 1 + 7x^* &= 5 - 3x^* \\ \Rightarrow x^* &= \frac{2}{5} . \end{aligned}$$

לכן השוויי משקל הוא

$$x^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) , \quad y^* = \left(\frac{7}{13}, \frac{6}{13}\right) .$$

■

דוגמה 5.7 ()

נתון משחק שני שחקנים (שאינו סכום אפס) בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>L</i>	<i>R</i>
<i>T</i>	5, 5	-2, -2	
<i>B</i>	4, 4	3, 3	

מצאו את השוויי משקל באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

	<i>II</i>	$y(L)$	$(1-y)(R)$
<i>I</i>			
$x(T)$	5, 5	-2, -2	
<i>B</i>	4, 4	3, 3	

$$U_1(x, y) = (3(1-x) - 2x)(1-y) + (4(1-x) + 5x)y = 6xy - 5x + y + 3 .$$

$$U_2(x, y) = (3(1-x) - 2x)(1-y) + (4(1-x) + 5x)y = 6xy - 5x + y + 3 .$$

לפי עקרון האדישות:

$$\begin{aligned} U_1(T, y^*) &= U_1(B, y^*) \\ \Rightarrow U_1(1, y^*) &= U_1(0, y^*) \\ \Rightarrow -2 + 7y^* &= 3 + y^* \\ \Rightarrow y^* &= \frac{5}{6} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2(x^*, L) &= U_2(x^*, R) \\ \Rightarrow U_2(x^*, 1) &= U_2(x^*, 0) \\ \Rightarrow 4 + x^* &= 3 - 5x^* \\ \Rightarrow x^* &= -\frac{1}{6} \notin [0, 1] . \end{aligned}$$

אין השיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

משפט 5.2 נוסחאות שיווי משקל למשחק שני-שחקנים ריבועי

יהי $G = (\{1, 2\}, \{S_1, S_2\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני שחקנים ריבועי שבו לכל שחקן יש n אסטרטגיות טהורות.

יהי x^* וקטור אסטרטגיות שיווי משקל של שחקן 1, $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

יהי y^* וקטור אסטרטגיות שיווי משקל של שחקן 2 $y^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה התשלומים של שחקן 1, תהי $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה התשלומים של שחקן 2

ויהו U_1^* ו- U_2^* התשלומי שיווי משקל של שחקן 1 ושחקן 2 בהתאמה.

אז

$$\begin{aligned} x^{*t} &= \frac{e^t B^{-1}}{\langle e, B^{-1}e \rangle} , & U_1^* &= \langle x^*, Ay^* \rangle = \frac{1}{\langle e, A^{-1}e \rangle} \\ y^* &= \frac{A^{-1}e}{\langle e, A^{-1}e \rangle} , & U_2^* &= \langle x^*, By^* \rangle = \frac{1}{\langle e, B^{-1}e \rangle} . \end{aligned}$$

כאשר $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ וקטור של \mathbb{R}^n שבו כל איבר שווה ל-1.

הוכחה:

- לפי עקרון האדישות, אם שחקן 1 משחק לפि האסורוגיה המעורבת x^* של שווי המשקל אז שחקן 2 יהיה אדיש בין האסטרטגיות הטהורות שלו. ז"א

$$x^{*t}B = U_2e^t .$$

לכן

$$x^{*t} = U_2e^t B^{-1} .$$

מכיוון שהסכום של ההסתברויות שווה ל- 1 אז

$$1 = x^{*t}e = U_2e^t B^{-1}e \Rightarrow U_2 = \frac{1}{e^t B^{-1}e} = \frac{1}{\langle e, B^{-1}e \rangle} .$$

על ידי הצבה בביטוי הקודם קיבל

$$x^{*t} = \frac{e^t B^{-1}}{\langle e, B^{-1}e \rangle} .$$

- באותו מידה לפי עקרון האדישות, אם שחקן 2 משחק לפि האסורוגיה המעורבת y^* של שווי המשקל אז שחקן 1 יהיה אדיש בין האסטרטגיות הטהורות שלו. ז"א

$$Ay^* = U_1e .$$

לכן

$$y^* = U_1A^{-1}e .$$

מכיוון שהסכום של ההסתברויות שווה ל- 1 אז

$$1 = e^t y^* = U_1e^t A^{-1}e \Rightarrow U_1 = \frac{1}{e^t A^{-1}e} = \frac{1}{\langle e, A^{-1}e \rangle} .$$

על ידי הצבה בביטוי הקודם קיבל

$$y^* = \frac{A^{-1}e}{\langle e, A^{-1}e \rangle} .$$

$$\begin{aligned} U_1^* &= \langle x^*, Ay^* \rangle = x^{*t}Ay^* \\ &= \frac{e^t B^{-1}AA^{-1}e}{\langle e, A^{-1}e \rangle \langle e, B^{-1}e \rangle} \\ &= \frac{e^t B^{-1}e}{\langle e, A^{-1}e \rangle \langle e, B^{-1}e \rangle} \\ &= \frac{\langle e, B^{-1}e \rangle}{\langle e, A^{-1}e \rangle \langle e, B^{-1}e \rangle} \\ &= \frac{1}{\langle e, A^{-1}e \rangle} . \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} U_2^* &= \langle x^*, By^* \rangle = x^{*t}By^* \\ &= \frac{e^t B^{-1}BA^{-1}e}{\langle e, A^{-1}e \rangle \langle e, B^{-1}e \rangle} \\ &= \frac{e^t A^{-1}e}{\langle e, A^{-1}e \rangle \langle e, B^{-1}e \rangle} \\ &= \frac{\langle e, A^{-1}e \rangle}{\langle e, A^{-1}e \rangle \langle e, B^{-1}e \rangle} \\ &= \frac{1}{\langle e, B^{-1}e \rangle} . \end{aligned}$$

•

דוגמה 5.8 ()

		<i>II</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>I</i>					
α		1, 1	1, 2	2, 1	
β		1, 2	3, 1	0, 1	
γ		2, -1	1, 1	1, 2	

פתרונות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

לכן

$$U_1^* = \frac{1}{\langle e, A^{-1}e \rangle} = \frac{4}{3}.$$

$$U_2^* = \frac{1}{\langle e, B^{-1}e \rangle} = \frac{6}{5}.$$

$$x^* = U_2^* B^{-1} e = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5} \right).$$

$$y^* = U_1^* e^t A^{-1} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right),$$

מסקנה 5.1 נסחאות שיווי משקל למשחק שני-שחקנים סכום-אפס ריבועי

במשחק סכום אפס ריבועי שבו לכל שחקן יש n אסטרטגיות טהורות. אם A המטריצת המשחק איז הווקטורית אסטרטגיות שיווי משקל x^* ו- y^* של שחקן 1 (שחקן השורות) ושחקן 2 (שחקן העמודות), והתשלום שיווי משקל נתונים על ידי

$$x^{*t} = \frac{e^t A^{-1}}{\langle e, A^{-1}e \rangle}, \quad y^* = \frac{A^{-1}e}{\langle e, B^{-1}e \rangle}, \quad U = \langle x^*, A y^* \rangle = \frac{1}{\langle e, A^{-1}e \rangle}.$$

משפט 5.3

יהי $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ משחק בצורה אסטרטגית ו- Γ הרחבה שלו לאסטרטגיות מעורבות. וקטור אסטרטגיות מעורבות σ הוא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות במשחק Γ אם ורק אם לכל שחקן $i \in N$ ולכל אסטרטגיה טהורה $s_i \in S_i$ מתקיים

$$U_i(\sigma^*) \geq U_i(s_i, \sigma_{-i}^*). \quad (5.11)$$

הוכחה: σ^* שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות במשחק Γ איזה

$$U_i(\sigma^*) \geq U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$$

לכל שחקן i ולכל אסטרטגיה מעורבת $\sigma_i \in \Sigma_i$.

כל אסטרטגיה טהורה היא אסטרטגיה מעורבת, איזה

$$U_i(\sigma^*) \geq U_i(s_i, \sigma_{-i}^*)$$

לכל שחקן i ולכל אסטרטגיה טהורה $s_i \in S_i$.

להוכיח הכוון הפוך, נניח כי וקטור האסטרטגיות המעורבות σ^* מקיים את המשוואה (5.11) לכל שחקן $i \in N$ ולכל אסטרטגיה טהורה $s_i \in S_i$. איזה לכל אסטרטגיה מעורבת σ_i של שחקן i :

$$U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \quad (5.12)$$

$$\leq \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) U_i(\sigma^*) \quad (5.13)$$

$$= U_i(\sigma^*) \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = U_i(\sigma^*) , \quad (5.14)$$

כasher השווינו (5.12) נובע לכך ש- U_i היא פונקציה מולטי-LINEARIT והאי-שוויון (5.13) נובע מהאי-שוויון (5.11). בפרט, σ^* הוא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות ב- Γ . ■

מסקנה 5.2

יהי σ^* שיווי משקל במשחק בצורה אסטרטגית, ותהיינה s_i ו- \hat{s}_i שתי אסטרטגיות טהורות של שחקן i .

$$\sigma_i^*(s_i) = 0 \text{ איזה } U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) < U_i(\sigma^*) \quad (1)$$

$$\sigma_i^*(s_i) = 0 \text{ איזה } U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) < U_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*) \quad (2)$$

$$U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = U_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*) \text{ איזה } \sigma_i^*(\hat{s}_i) > 0 \text{ ו- } \sigma_i^*(s_i) > 0 \quad (3)$$

$$\sigma_i^*(s_i) = 0 \text{ איזה } \hat{s}_i \text{ נשלtot חזק על ידי } \hat{s}_i \quad (4)$$

הוכחה:

$$(1) \text{ נניח } U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) < U_i(\sigma^*)$$

נניח בשיילה כי $\sigma_i^*(\hat{s}_i) > 0$. לפי עקרתו האדישות לכל אסטרטגיה טהורה \hat{s}_i עבורה 0 מתקיים $U_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*) = U_i(s_i, \sigma_{-i}^*)$

$$U_i(\sigma^*) = \sum_{\hat{s}_i \in S_i} \sigma_i^*(\hat{s}_i) U_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*)$$

$$= \sum_{\hat{s}_i \in S_i} \sigma_i^*(\hat{s}_i) U_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*)$$

$$\sigma_i^*(\hat{s}_i) > 0$$

$$= \sum_{\hat{s}_i \in S_i} \sigma_i^*(\hat{s}_i) U_i(s_i, \sigma_{-i}^*)$$

$$\sigma_i^*(\hat{s}_i) > 0$$

$$= U_i(s_i, \sigma_{-i}^*)$$

בסתירה לכך ש- $U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) < U_i(\sigma^*)$

(2)

$$\begin{aligned} U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) &< U_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*) \stackrel{\text{נ"ש}}{=} U_i(\sigma^*) \\ \sigma_i^*(s_i) &= 0 \text{ וכן לפי סעיף א' } U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) < U_i(\sigma^*) \end{aligned}$$

(3) עקרון האדישות (משפט 5.1).

(4) נניח כי s_i נשלט חזק על ידי \hat{s}_i . אז

$$u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(\hat{s}_i, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

מכאן

$$\begin{aligned} U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) &= \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_{-i}^*(s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i}) \\ &< \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_{-i}^*(s_{-i}) u_i(\hat{s}_i, s_{-i}) \\ &= U_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*) \end{aligned}$$

נ"א

$$\begin{aligned} U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) &< U_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*) \\ \text{ולכן לפי סעיף ב'} \quad \sigma_i^*(s_i) &= 0 \end{aligned}$$



5.3 דוגמאות

דוגמה 5.9 (מלחמות המינים)

המשחק הבא נקרא "מלחמות המינים". זוג מתכווןobilio לערב שבת. האפשרויות העומדות לרשותם הן קונצרט (C) או צפייה שמשחק כדורגל (F). הגבר מעדייף צפייה במשחק הכדורגל, בעוד האישה מעדייפה את הוקנרט, אך שניהם מעדייפים להיות יחד גם אם הבילוי המשותף הוא הפחות עדיף בעיניהם. מצאו את כל שיווי המשקל של המשחק.

I	II	F	C
F	2, 1	0, 0	
C	0, 0	1, 2	

מצאו את שיווי המשקל של המשחק.

פתרון:

קודם כל נשים לב שיש למשחק שוויי משקל באסטרטגיות טהורות:

I	II	F	C
F	2, 1	0, 0	
C	0, 0	1, 2	

כעת נבדוק אם יש שווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

<i>I</i>	<i>II</i>	
<i>x(F)</i>	$y(F)$	$(1-y)C$
$(1-x)(C)$	$\underline{2}, \underline{1}$	$0, 0$
	$0, 0$	$\underline{1}, \underline{2}$

לפי עקרון האדישות:

$$U_1(F, y^*) = U_1(C, y^*) \Rightarrow 2y^* = (1 - y^*) \Rightarrow y^* = \frac{1}{3} .$$

$$U_2(x^*, F) = U_2(x^*, C) \Rightarrow x^* = 2(1 - x^*) \Rightarrow x^* = \frac{2}{3} .$$

לכן הוקטור אסטרטגיות $\sigma^* = (X^*, Y^*)$ כאשר

$$\sigma_1^* = \left(\frac{2}{3}(F), \frac{1}{3}(C) \right) , \quad \sigma_2^* = \left(\frac{1}{3}(F), \frac{2}{3}(C) \right)$$

הוא שווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

■

דוגמה 5.10 ()

במשחק הבא מצאו את כל שוויי המשקל של המשחק.

<i>I</i>	<i>II</i>	
<i>T</i>	L	R
<i>M</i>	$4, -4$	$-4, 4$
<i>B</i>	$-4, 4$	$4, 3$

פתרונות:

נבדוק אם קיים שווי משקל באסטרטגיות טהורות לפי שיטת תשובות הטובות ביותר:

<i>I</i>	<i>II</i>	
<i>T</i>	$4, -4$	$-4, 4$
<i>M</i>	$-4, 4$	$4, 3$
<i>B</i>	$-4, 2$	$3, 1$

לפיכך לא קיים שווי משקל באסטרטגיות טהורות.

לפי משפט נASH בהכרח קיים שווי משקל באסטרטגיות מעורבות. אסטרטגייה *B* נשלטה על ידי *M* שכן שחקן 1 ישחק לפי אסטרטגיה *B* בהסתברות 0. שכן המשחק באסטרטגיות מעורבות הינו

<i>I</i>	<i>II</i>	
<i>x(T)</i>	$y(L)$	$(1-y)(R)$
$(1-x)(M)$	$4, -4$	$-4, 4$
$0(B)$	$-4, 2$	$3, 1$

לפי עקרון האדישות אם x^* שווי משקל אז שחקן 2 אديש בין האסטרטגייה L לבין האסטרטגייה R :

$$U_2(x^*, L) = U_2(x^*, R) \Rightarrow -4x^* + 4(1 - x^*) = 4x^* + 3(1 - x^*) \Rightarrow -7x^* = -1 \Rightarrow x^* = \frac{1}{7}.$$

לפי עקרון האדישות אם y^* שווי משקל אז 1 אדיש בין האסטרטגייה T לבין האסטרטגייה M :

$$U_1(T, y^*) = U_1(M, y^*) \Rightarrow 4y^* - 4(1 - y^*) = -4y^* + 4(1 - y^*) \Rightarrow 16y^* = 8 \Rightarrow y^* = \frac{1}{2}.$$

לכן $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*) = (\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ שווי משקל של המשחק באסטרטגיות מעורבות כאשר

$$\sigma_1^* = \left(\frac{1}{7}, \frac{6}{7}\right), \quad \sigma_2^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

■

דוגמה 5.11 ()

נתון המשחק הבא.

		<i>II</i>	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>R</i>
		<i>I</i>			
<i>T</i>		0, 0	7, 6	6, 7	
<i>M</i>		6, 7	0, 0	7, 6	
<i>B</i>		7, 6	6, 7	0, 0	

מצאו את כל שוויי המשקל של המשחק.

פתרון:

המטריצת התשלומים של שחקן *I* היא

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 \\ 6 & 0 & 7 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $|A| = 559$

$$A^{-1} = \frac{1}{559} \begin{pmatrix} -42 & 49 & 36 \\ 36 & -42 & 49 \\ 49 & 36 & -42 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{559} \begin{pmatrix} -42 & 36 & 49 \\ 49 & -42 & 36 \\ 36 & 49 & -42 \end{pmatrix}.$$

המטריצת התשלומים של שחקן *II* היא

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 \\ 7 & 0 & 6 \\ 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $|B| = 559$

$$B^{-1} = \frac{1}{559} \begin{pmatrix} -42 & 36 & 49 \\ 49 & -42 & 36 \\ 36 & 49 & -42 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{559} \begin{pmatrix} -42 & 49 & 36 \\ 36 & -42 & 49 \\ 49 & 36 & -42 \end{pmatrix}.$$

מכאן

$$\langle e, A^{-1}e \rangle = \frac{1}{559} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 43 \\ 43 \\ 43 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{129}{559}.$$

לכן התשלום בשוויי משקל לשחקן 1 הוא:

$$U_1^* = \frac{1}{\langle e, A^{-1}e \rangle} = \frac{559}{129}$$

$$\langle e, B^{-1}e \rangle = \frac{1}{559} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 43 \\ 43 \\ 43 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{129}{559} .$$

לכן התשלום בשוויי משקל לשחקן 2 הוא:

$$U_2^* = \frac{1}{\langle e, B^{-1}e \rangle} = \frac{559}{129}$$

$$y^* = \frac{e^t A^{-1}}{\langle e, A^{-1}e \rangle} = \frac{559}{129} \cdot \frac{1}{559} \begin{pmatrix} 43 & 43 & 43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$x^* = \frac{B^{-1}e}{\langle e, B^{-1}e \rangle} = \frac{559}{129} \cdot \frac{1}{559} \begin{pmatrix} 43 \\ 43 \\ 43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

