חישוביות וסיבוכיות תשפ"ה סמסטר א'
שיעור 4
סגירות תחת חיתוך ואיחוד

תוכן העניינים

משפט 4.1: קיום מכונת טיורינג שמכריע את חיתוך שפות כריעות

תהיינה M^A מ"ט שמכריעה את השפה A ו- M^B מכונט טיורינג שמכריע האת השפה B.
אז קיים מכונת טיורינג M^C שמכריעה עת הפשה $A \cap C$.

הוכחה: ? ■

4.1 הגדרה של מכונת טיורינג שמכריעה את חיתוך השפות $A\cap B$

תהי
$$M^A=\left(Q^A,\Sigma,\Gamma^A,\delta^A,q_0^A,\text{acc}^A,\text{rej}^A\right)$$
המכונת טיורינג שמכריעה את השפה A ותהי
$$M^B=\left(Q^B,\Sigma,\Gamma^B,\delta^B,q_0^B,\text{acc}^B,\text{rej}^B\right)$$
המכונת טיורינג שמכריעה את השפה B.
נגדיר את מכונת טיורינג חדש M^C אשר מכריעה את חיתוך השפות $A\cap B$ באופן הבא:
$$M^C=\left(Q^C,\Sigma,\Gamma^C,\delta^C,q_0^C,\text{acc}^C,\text{rej}^C\right)\ .$$
האלפיבית של הסרט של M^C מוגדר להיות
$$\Gamma^C=\Gamma^A\cup\Gamma^B\ ,$$
כלומר האלפיבית של M^C מכילה את הא"ב של M^A והא"ב של M^B.

הקבוצת מצבים של M^C מוגדרת להיות
$$Q^C=Q^A\cup Q^B\cup\left\{q_0^C,q_1^C,\text{acc}^C,\text{rej}^C\right\}$$
כאן
Q^A היא הקבוצת מצבים של המ"ט M^A,
Q^B היא הקבוצת מצבים של המ"ט M^B,
acc^C המצב קבלה של M^C,
rej^C המצב דחייה של M^C,
q_0^C ו- q_1^C הם מצבים אשר שייכים ל- M^C אבל לא ל- M^A או ל- M^B. למטה נסביר את הפעולות של M^C בשלבים של הכרעה של $A\cap B$, שמתוארים במשפט 4.1, וספציבי בשלב 1 נסביר את התפקיד של המצבים q_0^C ו- q_1^C.

שלב 1) העתק את הקלט w של M^A לסרט השני של M^B והחזר את הראש לתחילת הקלט בשני הסרטים.

למטרה זה נשתמש במעברים הבאים:
$$\delta^C\left(q_0^C,\sigma,\sqcup\right)=\left(q_0^C,\sigma,R,\sigma,R\right)$$
במילים, במצב q_0^C, אם הראש של M^A קורא אות σ והראש של M^B קורא $\sqcup$, כותבים σ על ה- $\sqcup$ בסרט השני של M^B, ושני הראשים זזים ימינה.

כאשר השני ראשים מגיעים לסוף הקלט של M^A, שני הראשים קוראים $\sqcup$ ואז M^C מבצעת את המעבר הבא:
$$\delta^C\left(q_0^C,\sqcup,\sqcup\right)=\left(q_0^C,\sqcup,L,\sqcup,L\right)$$
במילים M^C עוברת למצב q_1^C ושני הראשים זזים שמאלה.
כל עוד ש- M^C במצב q_1^C והראשים עדיין לא הכיעו לתחילת הקלט של M^A, היא ממשיכה להזיז את הראשים שמאלה צעד צעד, אשר מתוארת על ידי המעבר הבא:
$$\delta^C\left(q_1^C,\sigma,\sigma\right)=\left(q_0^C,\sigma,L,\sigma,L\right)\ .$$
ברגע שהראשים של M^A ו- M^B קוראים $(\sqcup,\sqcup)$, כלומר תו רווח בסרט של M^A וגם תו רווח בסרט של M^B, ז"א ששני הראשים של M^C מגיעה לתחילת הקלט היא עוברת למצב ההתחלתי של M^A, (שבו M^A מוכן להתחיל לסרוק שת הקלט, אשר בשלב 2 של ההכרעה):
$$\delta^C\left(q_1^C,\sqcup,\sqcup\right)=\left(q_0^A,\sqcup,R,\sqcup,R\right)\ .$$

שלב 2) הרץ את M^A על w בסרט הראשון. אם דחתה אז M^c עוברת ל- rej^C.

כעת אנחנו מריצים את M^A על הסרט הראשון. M^A ועוברת בין המצבים $q \in Q^A$ שלה לפי הפונקצית המעברים שלה, δ^A. בפרט נניח שבמצב $q \in Q^A$, M^A כותבת τ על σ_1 וזזה $m(= L/R)$, ועוברת ממצב q למצב q'. כלומר $\delta^A(q, \sigma_1) = (q', \tau, m)$. אז המעבר המתאים ב- M^C הוא

$$\forall q \in Q^A \qquad \delta^C\left(q, (\sigma_1, \sigma_2)\right) = (q', \tau, m, \sigma_2, S) \ .$$

שימו לב: לא שנינו את האות σ_2 על הסרט השני והראש של M^B נשאר במקומו.

היוצא דופן הוא **אם** M^A **דוחה את** w **אז** M^C **דוחה את המילה.**

לכן

$$\delta^C\left(\text{rej}^A, (\sigma_1, \sigma_2)\right) = \left(\text{rej}^C, \sigma_1, S, \sigma_2, S\right) \ .$$

אם M^A **קיבלה את המילה אז עוברים לשלב** 3.

שלב 3) הרץ את M^B על w בסרט השני.

כעת אנחנו מריצים את M^B על הסרט הראשון. M^B ועוברת בין המצבים $q \in Q^B$ שלה לפי הפונקצית המעברים שלה, δ^B. בפרט נניח שבמצב $q \in Q^B$, M^B כותבת τ על σ_2 וזזה $m(= L/R)$, ועוברת ממצב q למצב q'. כלומר $\delta^B(q, \sigma_2) = (q', \tau, m)$. אז המעבר המתאים ב- M^C הוא

$$\forall q \in Q^B \qquad \delta^C\left(q, (\sigma_1, \sigma_2)\right) = (q', \sigma_1, S, \tau, m) \ .$$

שימו לב: לא שנינו את האות σ_1 על הסרט הראשון והראש של M^A נשאר במקומו.

נטפל במקרה ש **אם** M^B **דוחה את המילה אז** M^C **עוברת ל-** rej^C על יד המעבר

$$\delta^C\left(\text{rej}^B, (\sigma_1, \sigma_2)\right) = \left(\text{rej}^C, \sigma_1, S, \sigma_2, S\right) \ .$$

לבסוף **אם** M^B **מקבלת את המילה אז** M^C **עוברת ל-** acc^C :

$$\delta^C\left(\text{acc}^B, (\sigma_1, \sigma_2)\right) = \left(\text{acc}^C, \sigma_1, S, \sigma_2, S\right) \ .$$

4.2 מודל דו-ממדי

הגדרה 4.1: סרט דו ממדי

בסרט דו ממדי הסרט כמו טבלה אינסופי (כמתואר בתרשים למטה) עם

- אינסוף שורות כלפי מעלה,
- אינסוף עמודות לכיוון ימין.
- הסרט חסום מצד שמאל ומלמטה.
- בתחילת הריצה הקלט מופיע בשורה התחתונה וצמוד לשמאל.
- הראש יכול לוז ימינה, שמאלה למעלה ולמטה.

הפונקצית המעברים של מכונת טיורינג דו ממדי מוגדר:

$$\delta : (Q \ \{\text{acc}, \text{rej}\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, U, D\} \ .$$

␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣
a	b	a	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣	␣