

פתרונות

חישוביות וסיבוכיות

מועד א'

פתרון לדוגמא

ד"ר יוחאי טוויטו, ד"ר ירמיהו מילר, .

סמסטר א, תשפ"ה

מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הינן פתרונות לדוגמא. ניתן לפתור חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

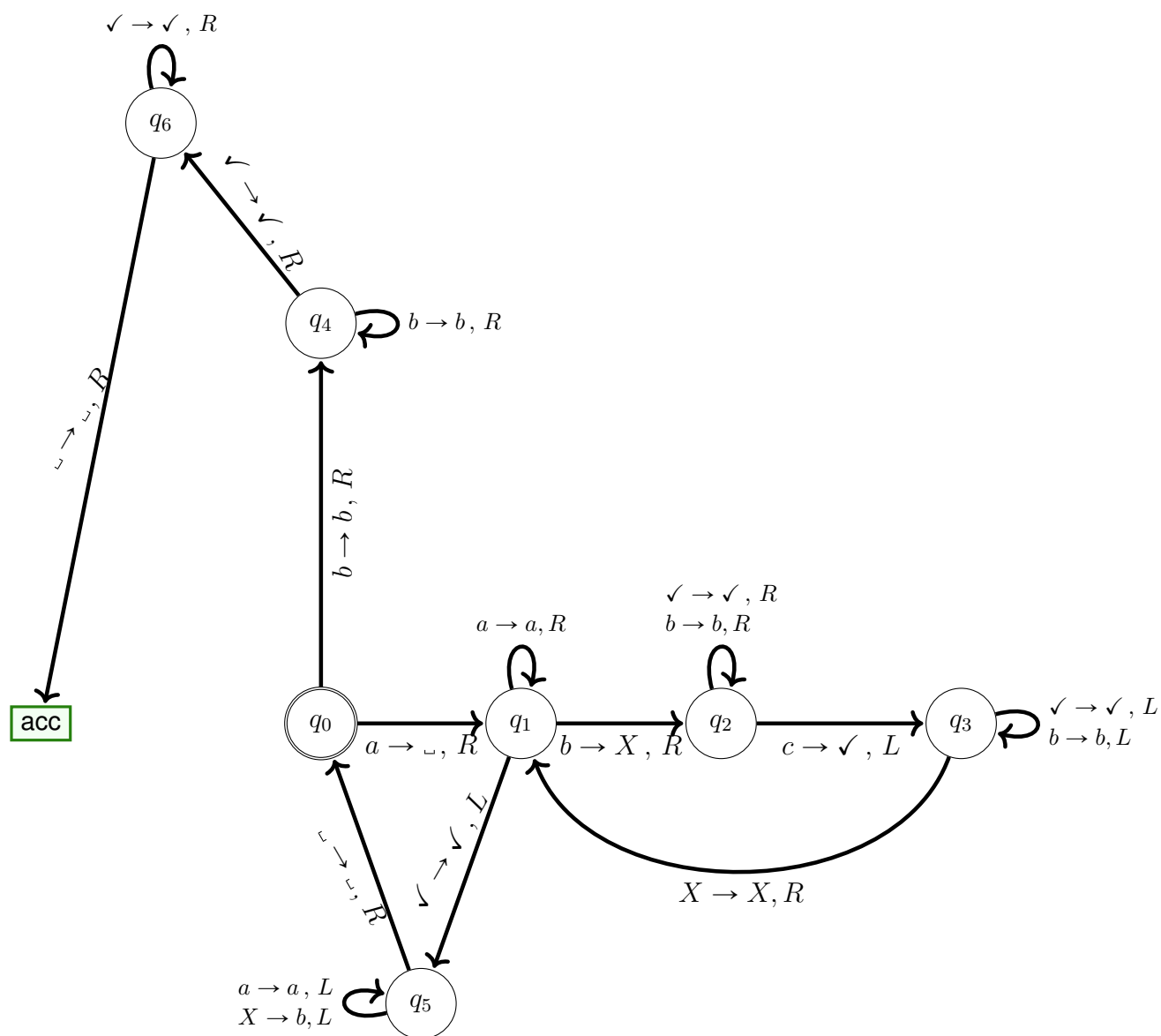
עמוד 1 מתוך 9

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245,84 | www.sce.ac.il | חייג: ☎ 052-7724584

שאלה 1: מכונת טיורינג 20 נקודות

סעיף א'



עמוד 2 מתוך 9

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245,84 | www.sce.ac.il | חייג: 08-9400700

פתרונות

סעיף ב' הפונקציה שאותה המכונה מחשבת היא הפונקציה:

$$f(x) = x \mod 3.$$

כלומר, המכונה מחשבת את שארית החלוקה ב-3 של המספר האונרי הנתון כקלט.

סעיף ג' הפונקציה שאותה המכונה מחשבת היא הפונקציה:

$$f(1^i \# 1^j) = 1^{|i-j|}.$$

כלומר, המכונה מחשבת את הערך המוחלט של ההפרש בין שני מספרים $1^i, 1^j$, הנתונים בקלט. הסבר:

$$q_0 \ 1 \# 1 \vdash q_1 \# 1 \vdash_* \# 1 q_1 \vdash \# q_2 1 \vdash_* q_{\text{back}} \sqcup \# \vdash q_0 \# \vdash \text{acc}.$$

לכן $f(1 \# 1) = 0$.

$$q_0 \ 11 \# 1 \vdash q_1 \ 1 \# 1 \vdash_* 1 \# 1 q_1 \vdash 1 \# q_2 1 \vdash_* q_{\text{back}} \sqcup 1 \# \vdash q_0 \ 1 \#$$

$$\vdash q_1 \# \vdash \# q_1 \sqcup \vdash q_2 \# \sqcup \vdash q_4 \sqcup 1 \vdash \sqcup \text{acc} \ 1$$

לכן $f(11 \# 1) = 1$.

נסתכל על קלט כללי $1^i \# 1^j$ כאשר $i \geq j$:

$$q_0 \ 1^i \# 1^j \vdash_* 1^{i-1} \# q_1 1^j \vdash_* 1^{i-1} \# 1^j q_1 \sqcup \vdash 1^{i-1} \# 1^{j-1} q_2 1 \vdash 1^{i-1} \# 1^{j-2} q_{\text{back}} 1 \sqcup$$

$$\vdash_* q_{\text{back}} \sqcup 1^{i-1} \# 1^{j-1} \vdash q_0 \ 1^{i-1} \# 1^{j-1}$$

⋮

$$\vdash_* q_0 \ 1^{i-j} \# \sqcup \vdash_* 1^{i-j-1} \# q_1 \sqcup \vdash 1^{i-j-1} q_2 \# \vdash 1^{i-j-2} q_4 \ 11 \vdash_* q_4 \sqcup 1^{i-j}$$

$$\vdash \text{acc} \ 1^{i-j}$$

לכן

$$f(1^i \# 1^j) = 1^{i-j}, \quad i \geq j. \quad (*)$$

נסתכל על קלט כללי $1^i \# 1^j$ כאשר $i < j$:

עמוד 3 מתוך 9

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245, 84 | www.sce.ac.il | חייג: 052-7724584

פתרונות

$$\begin{aligned}
 q_0 1^i \# 1^j &\vdash_* 1^{i-1} \# q_1 1^j & \vdash_* 1^{i-1} \# 1^j q_1 \sqsubset & \vdash 1^{i-1} \# 1^{j-1} q_2 1 & \vdash 1^{i-1} \# 1^{j-2} q_{\text{back}} 1 \sqsubset \\
 &\vdash_* q_{\text{back}} \sqsubset 1^{i-1} \# 1^{j-1} & \vdash q_0 1^{i-1} \# 1^{j-1} & & \\
 &\vdots & & & \\
 &\vdash_* q_0 \# 1^{j-i} \sqsubset & \vdash \text{acc } 1^{j-i} \sqsubset & &
 \end{aligned}$$

לכן

$$f(1^i \# 1^j) = 1^{j-i}, \quad i < j. \quad (*)2$$

המשוואות (*1) ו-(*2) אומרות ש:

$$f(1^i \# 1^j) = 1^{|i-j|}. \quad (*)3$$

שאלה 2: וריאציות על מכונת טיורינג 20 נקודות

כיוון ראשון: לכל מכונה ממודל OR קיימת מכונה שקולה ממודל TS

תהי $M_{OR} = (Q^{OR}, \Sigma^{OR}, \Gamma^{OR}, \delta^{OR}, q_0^{OR}, q_{\text{acc}}^{OR}, q_{\text{rej}}^{OR})$ מכונה ממודל OR .
 נבנה מכונה שקולה $M_{TS} = (Q^{TS}, \Sigma^v, \Gamma^{TS}, \delta^{TS}, q_0^{TS}, q_{\text{acc}}^{TS}, q_{\text{rej}}^{TS})$ ממודל TS .
 כל הרכיבים של המכונה M_{TS} יהיו זהים לרכיבים של המכונה M_{OR} מלבד פונקציית המעברים.
 נגדיר את פונקציית המעברים δ^{TS} .

מעברי תנועה

נניח ש δ^{OR} מכילה את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q, \sigma) = (p, \text{move})$$

כאשר:

$$p, q \in Q^{OR}, \quad \sigma \in \Gamma^{OR}, \quad \text{move} \in \{L, R\}.$$

אז ב- δ^{TS} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{TS}(q, \sigma) = (p, \sigma, \text{move})$$

מעברי כתיבה

נניח ש δ^{OR} מכילה את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q, \sigma) = (p, \tau)$$

עמוד 4 מתוך 9

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245, 84 | חייג: 08-9999999 | www.sce.ac.il

פתרונות

כאשר:

$$p, q \in Q^{OR}, \quad \sigma, \tau \in \Gamma^{OR}.$$

אז ב- δ^{TS} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{TS}(q, \sigma) = (p, \tau, S)$$

כיוון שני: לכל מכונה ממודל TS קיימת מכונה שקולה ממודל OR

תהי $M_{TS} = (Q^{TS}, \Sigma^{TS}, \Gamma^{TS}, \delta^{TS}, q_0^{TS}, q_{acc}^{TS}, q_{rej}^{TS})$ מכונה ממודל TS .

נבנה מכונה שקולה $M_{OR} = (Q^{OR}, \Sigma^{OR}, \Gamma^{OR}, \delta^{OR}, q_0^{OR}, q_{acc}^{OR}, q_{rej}^{OR})$ ממודל OR .

במעברים בהן המכונה M_{TS} כותבת אות וגם זזה ימינה או שמאלה, לא יתכן מעבר שקול יחיד במכונה ממודל OR . לכן נמיר חלק מהמעברים במכונה M_{TS} לשני מעברים עוקבים במכונה M_{OR} . במעבר הראשון נכתוב אות ובמעבר השני נבצע את התזוזה.

לשם כך, נצטרך מצבי ביניים חדשים, שיחברו בין המעברים. לכלמצב \square נגדיר שני מצבי ביניים ייחודיים q^L ו- q^R . כלומר:

$$Q^{OR} = Q^{TS} \cup \{q^L \mid q \in Q^{TS}\} \cup \{q^R \mid q \in Q^{TS}\}.$$

נגדיר כעת את δ^{OR} תוך שימוש במצבי ביניים.

מצבי הביניים תמיד יבצעו תזוזה שמאלה או ימינה בלבד, לכל אות שבסרט. פורמלית:

$$\begin{aligned} \forall q \in Q^{TS}, \sigma \in \Gamma^{TS} : \quad & \delta^{OR}(q^R, \sigma) = (q, R), \\ \forall q \in Q^{TS}, \sigma \in \Gamma^{TS} : \quad & \delta^{OR}(q^L, \sigma) = (q, L). \end{aligned}$$

עבור מעברים בהן מתבצעת כתיבה ותנועה, נגדיר את δ^{OR} תוך שימוש במצבי ביניים.

בהינתן מעבר עם תנועה ימינה:

$$\delta^{TS}(q, \sigma) = (p, \tau, R).$$

כאשר:

$$q, p \in Q^{TS}, \quad \sigma, \tau \in \Gamma^{TS}$$

אז ב- δ^{OR} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q, \sigma) = (p^R, \tau).$$

באופן דומה, בהינתן מעבר עם תנועה שמאלה:

$$\delta^{TS}(q, \sigma) = (p, \tau, L).$$

כאשר:

$$q, p \in Q^{TS}, \quad \sigma, \tau \in \Gamma^{TS}$$

אז ב- δ^{OR} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q, \sigma) = (p^L, \tau).$$

פתרונות

במעברים בהם המכונה M_{TS} אינה מבצעת תנועה (נשארת במקום) לא נשתמש במצבי הביניים. כלומר, בהינתן מעבר בו המכונה נשארת במקום:

$$\delta^{TS}(q, \sigma) = (p, \tau, S)$$

כאשר:

$$q, p \in Q^{TS}, \quad \sigma, \tau \in \Gamma^{TS}$$

אז ב δ^{OR} נכניס את המעבר הבא:

$$\delta^{OR}(q, \sigma) = (p, \tau).$$

שאלה 3: התזה של צ'רץ' טיורינג 20 נקודות

סעיף א' השפה שהדקדוק G יוצר היא:

$$L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

סעיף ב'

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$$

כלומר, שפת כל המילים בהן מספר שווה של אותיות a , אותיות b , ואותיות c .

שאלה 4: אי-כריעות 20 נקודות

נתון: השפה $L_{M_1 \cup M_2}$ מוגדרת:

$$L_{M_1 \cup M_2} = \{\langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \cup L(M_2)\}$$

ז"א $L_{M_1 \cup M_2}$ השפה שכוללת כל המחרוזות $\langle M_1, M_2, w \rangle$ כאשר w שייך לאחת השפות $L(M_1)$ או $L(M_2)$ לפחות.

צריך להוכיח: קיימת רדוקציה התאמה בין השפה A_{TM} לשפה $L_{M_1 \cup M_2}$, כלומר

$$A_{TM} \leq L_{M_1 \cup M_2}.$$

הגדרת הרדוקציה:

בהינתן $\langle M, w \rangle$ קלט של A_{TM} ניצור $\langle M_1, M_2, w \rangle$ קלט של $L_{M_1 \cup M_2}$ כך שמתקיים התנאי הבא:

$$\begin{aligned} \langle M, w \rangle \in A_{TM} &\Rightarrow \langle M_1, M_2, w \rangle \in L_{M_1 \cup M_2}, \\ \langle M, w \rangle \notin A_{TM} &\Rightarrow \langle M_1, M_2, w \rangle \notin L_{M_1 \cup M_2}. \end{aligned}$$

נגדיר את פונקציית הרוקציה באופן הבא:

$$M_1 = \text{"על כל קלט } x \text{ } M_1 \leftarrow \text{rej."}$$

$$M_2 = \text{"על כל קלט } x \text{ } M_2$$

פתרונות

- מריצה M על w ועונה כמוה.

נכונות הרדוקציה:

כיוון \Leftarrow

אם $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$

$$w \in L(M) \Leftarrow$$

$$.w \in L(M_2) \Leftarrow$$

$$w \in L(M_2) \cup \emptyset \Leftarrow$$

$$w \in L(M_2) \cup L(M_1) \Leftarrow$$

$$.\langle M_1, M_2, w \rangle \in L_{M_1 \cup M_2} \Leftarrow$$

כיוון \Rightarrow

אם $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$

$$.w \notin L(M) \Leftarrow$$

$$.w \notin L(M_2) \Leftarrow$$

$$w \notin L(M_2) \text{ וגם } w \notin L(M_1) \text{ (כי השפה של } M_1 \text{ היא } \emptyset).$$

$$.\langle M_1, M_2, w \rangle \notin L_{M_1 \cup M_2} \Leftarrow$$

שאלה 5: סיבוכיות זמן 20 נקודות

פונקציית הרדוקציה:

נגדיר פונקציית הרדוקציה f שבהינתן זוג $\langle G, k \rangle \in IS$, (הקלט של IS), יוצרת $\langle G', k' \rangle \in VC$, (הקלט של VC), אשר מקיימת את התנאי:

$$\langle G, k \rangle \in IS \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in VC. \quad (*)$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

עמוד 7 מתוך 9

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245, 84 | www.sce.ac.il | חייג: 08-9888888

פתרונות

(1) בהינתן הגרף $G = (V, E)$, אז הגרף G' הוא אותו גרף $G = (V, E)$.

$$(2) \quad k' = |V| - k$$

נכונות הרדוקציה

כעת נוכיח שמתקיים: $\langle G, k \rangle \in IS \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in VC$

כיוון \Leftarrow

בהינתן גרף $G = (V, E)$ ושלם k .

נניח כי $\langle G, k \rangle \in IS$.

\Leftarrow מכיל קבוצה בלתי תלויה S בגודל k לפחות: $|S| \geq k$.

\Leftarrow אם $u_1, u_2 \in S$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

כלומר, כל שני קדקודים ב- S לא מחוברים בצלע ב- G .

\Leftarrow השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \notin S$ או $u_2 \notin S$.

\Leftarrow אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \in V \setminus S$ או $u_2 \in V \setminus S$.

\Leftarrow התת-קבוצה $V \setminus S$ היא כיסוי קדקודים של G .

$|S| \geq k$ ו- $|V \setminus S| = |V| - |S| \leq |V| - k$ לכן $|V \setminus S| \leq |V| - k$.

\Leftarrow $G' = G$ מכיל כיסוי קדקודים U בגודל $k' = |V| - k$ לכל היותר.

$\Leftarrow \langle G', k' \rangle \in VC$

כיוון \Rightarrow

בהינתן גרף $G' = (V, E)$ ושלם k' .

נניח כי $\langle G', k' \rangle \in VC$.

\Leftarrow $G' = (V, E)$ מכיל כיסוי קדקודים U בגודל k' לכל היותר: $|U| \leq k'$.

\Leftarrow אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \in U$ או $u_2 \in U$.

\Leftarrow השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם $u_1 \notin U$ וגם $u_2 \notin U$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

\Leftarrow השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם $u_1 \in V \setminus U$ וגם $u_2 \in V \setminus U$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

פתרונות

\Leftarrow התת-קבוצה $S = V \setminus U$ היא קבוצה בלתי תלויה.

$|S| = |V| - |U|$ ו- $|U| \leq k'$ אז $|S| \geq |V| - k'$.

\Leftarrow $G' = G$ מכיל קבוצה בלתי תלויה S בגודל $|V| - k' = k$ לפחות.

$\Leftarrow \langle G, k \rangle \in IS$