

עבודה עצמית 2 טורים מספריים

שאלה 1 רשמו בעזרת סימן \sum את הסכומים הבאים:

(א) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

(ב) $\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \dots$

(ג) $1 + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} + \dots$

שאלה 2 חשבו את הסכומים הבאים:

(א) $\sum_{n=2}^5 (-1)^n (n+1)^3$

(ב) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

(ג) $\sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k}$

(ד) $\sum_{k=1}^5 \tan\left(\frac{\pi k}{100}\right)$

שאלה 3 הגדירו מהי סדרת הסכומים החלקיים של טור מספרי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ומהו הסכום של הטור. הוכיחו על סמך

הגדרת הסכום של טור מספרי כי

(א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} = \frac{3}{2}$

שאלה 4 נסחו את התנאי ההכרחי להתכנסות של טור מספרי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. תנו דוגמה של טור שעבורו

(א) התנאי ההכרחי להתכנסות אינו מתקיים.

(ב) התנאי ההכרחי להתכנסות מתקיים והטור מתכנס.

(ג) התנאי ההכרחי להתכנסות מתקיים והטור מתבדר.

שאלה 5 הגדירו מהי השארית R_n של טור מספרי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ומצאו את R_n של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n}$.

שאלה 6 הגדירו מהי התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי. תנו דוגמה של טור מספרי שהוא:

(א) מתכנס בהחלט.

(ב) מתכנס בתנאי.

שאלה 7 בררו את התכנסות הטורים הבאים:

(א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}$

(ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(ד) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$

(ה) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2 + 2}{3n^2 + 5}\right)^n$

(ו) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 3}{n^3 + n + 1}$

(ז) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(3n+1)!}$

(ח) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n^3}{n^5 \sqrt{n}}$

שאלה 8 בררו את התכנסות הטורים הבאים (מתכנס בהחלט או בתנאי, מתבדר):

(א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n \cdot (n+1)}$

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(13n)}{n^3 + n^2 + \sin^4 n}$

(ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n^{4/3}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)}{n!} \quad (\text{ד})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \quad (\text{ה})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^5}{n^5 + 7} \quad (\text{ו})$$

שאלה 9 (30 נקודות)

בדקו את ההתכנסות של

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

פתרונות

שאלה 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad (\text{א})$$

(ב)

(ג)

שאלה 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \quad (\text{א})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} = \frac{3}{2} \quad (\text{ב})$$

שאלה 7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}} \quad (\text{א})$$

נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$. הטור מתכנס כי $\frac{7}{6} > 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}} \right)}{\left(\frac{1}{n^{7/6}} \right)} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} \cdot n^{7/6}}{(n+1)\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1/3} \cdot n^{7/6}}{(n+1)n^{1/2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{9/6}}{(n+1)n^{1/2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/2}}{(n+1)n^{1/2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

לכן לפי מבחן השוואה גבולי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$ מתכנס.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1} \quad (\text{ב})$$

שיטה 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n + 1} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n + 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2 \cdot 2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

מתבדר. לכן לפי מבחן השוואה, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}$ מתבדר.

שיטה 2:

לפי מבחן דלמבר,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(2^n+1)}{(2^{n+1}+1)n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)}{\left(2 + \frac{1}{2^n}\right)} = \infty$$

לכן הטור מתבדר.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{ג) מתכנס.}$$

נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. הטור הזה מתכנס. נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 \neq 0$$

לכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ מתכנס.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} \quad \text{ד) מתכנס.}$$

נשתמש במבחן האינטגרל: נגדיר $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$ יורדת בקטע $[2, \infty)$:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$t' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow t = \ln x$$

$t = \ln 2$	$x = 2$
$t = \ln \infty = \infty$	$x = \infty$

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{1}{t^2} \cdot t' dx &= \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{t^2} dt \\ &= \left[\frac{1}{t} \right]_{\ln 2}^\infty \\ &= \left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\ln 2} \right] \\ &= -\frac{1}{\ln 2}.\end{aligned}$$

האינטגרל מתכנס, לכן גם הטור מתכנס.

$$(ה) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2 + 2}{3n^2 + 5} \right)^n \text{ מתבדר.}$$

לפי מבחן קושי,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{5n^2 + 2}{3n^2 + 5} \right)^n \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 2}{3n^2 + 5} = \frac{5}{3} > 1$$

לכן הטור מתבדר.

$$(ו) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 3}{n^3 + n + 1} \text{ מתבדר.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3}{n^3 + n + 1} = 1.$$

לכן לפי התנאי ההכרחי להתכנסות טור, הטור מתבדר.

$$(ז) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(3n+1)!} \text{ מתכנס.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}(3n+1)!}{(3(n+1)+1)! \cdot 3^n} = 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)!}{(3n+4)!} = 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(3n+2)(3n+3)(3n+4)} = 0 < 1.$$

לכן לפי מבחן דלמבר הטור מתכנס.

$$(ח) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n^3}{n^5 \sqrt{n}} \text{ מתבדר.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n^3}{n^5 \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^{11/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^{11/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^{11/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$$

$$\text{הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}} \text{ מתכנס כי } \frac{5}{2} > 1.$$

$$\text{נבדוק התכנסות הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^{11/2}} \text{ לסי מבחן דלמבר:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}n^{11/2}}{(n+1)^{11/2} \cdot 3^n} = 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{11/2}}{(n+1)^{11/2}} = 3 > 1$$

לכו הטור מתבדר.
סכום שני טורים מתבדרים הוא טור מתבדר.

שאלה 8

$$(א) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n \cdot (n+1)} \text{ מתכנס בתנאי.}$$

$$\text{נבדוק התכנסות בהחלט.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n \cdot (n+1)}$$

$$\text{נתבונן בטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{(2n+1)}{n \cdot (n+1)}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)n}{n \cdot (n+1)} = 2 \neq 0$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר, לכן לפי מבחן השוואה גבולי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n \cdot (n+1)}$ מתבדר.
כלומר הטור הנתון לא מתכנס בהחלט.

נבדוק את התכנסות בתנאי לפי מבחן לייבניץ:

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{n+1} = 0.$$

(2) נבדוק שהסדרה $\left\{ \frac{2n+1}{n^2+n} \right\}$ יורדת מונוטונית:

$$a_n = \frac{2n+1}{n^2+n} = \frac{2+\frac{1}{n}}{n+1},$$

$$a_{n+1} = \frac{2+\frac{1}{n+1}}{n+2} < \frac{2+\frac{1}{n+1}}{n+1} < \frac{2+\frac{1}{n}}{n+1} = a_n$$

ז"א $a_{n+1} < a_n$ לכן הסדרה יורדת.

לפיכך לפי מבחן לייבניץ הטור מתכנס בתנאי.

$$(ב) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(13n)}{n^3+n^2+\sin^4 n} \text{ מתכנס בהחלט.}$$

$$\left| \frac{\cos(13n)}{n^3+n^2+\sin^4 n} \right| \leq \frac{1}{n^3}$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ מתכנס, לכן הטור הנתון מתכנס בהחלט.

$$(ג) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n^{4/3}} \text{ מתכנס בהחלט.}$$

$$\left| \frac{\cos(\pi n)}{n^{4/3}} \right| \leq \frac{1}{n^{4/3}}$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ מתכנס, לכן הטור הנתון מתכנס בהחלט.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)}{n!} \quad \text{(ד)}$$

$$\left| \frac{\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)}{n!} \right| \leq \frac{1}{n!}$$

נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ לפי מבחן דלמבר:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)}{\left(\frac{1}{n!}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

לכן הטור מתכנס.
לפי מבחן השוואה הטור הנתון מתכנס בהחלט.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \quad \text{(ה)}$$

לא קיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$ לכן לפי התנאי ההכרחי להתכנסות טורים, הטור מתבדר.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^5}{n^5 + 7} \quad \text{(ו)}$$

לכן לפי התנאי ההכרחי להתכנסות טורים, הטור מתבדר.

שאלה 9

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{n!}{n^n}.$$

נשתמש מבחן דלמבר לבדוק התכנסות:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)!} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1) \cdot (n+1)^n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \cancel{(n+1)} \cdot \frac{n^n}{\cancel{(n+1)} \cdot (n+1)^n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{n}{n+1} &= 1 + \frac{1}{\alpha} \\ \frac{n}{n+1} - 1 &= \frac{1}{\alpha} \\ \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} &= \frac{1}{\alpha} \\ \frac{n - (n+1)}{n+1} &= \frac{1}{\alpha} \\ \frac{-1}{n+1} &= \frac{1}{\alpha} \\ \frac{n+1}{-1} &= \alpha.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)^{\alpha \cdot \frac{n}{\alpha}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)^{\alpha \cdot \left(\frac{-n}{n+1} \right)} \\&= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)^\alpha \right]^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n}{n+1} \right)} \\&= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n}{n+1} \right)} \\&= e^{-1} \\&= \frac{1}{e} < 1.\end{aligned}$$

לכן לפי מבחן דלמבר הטור מתכנס.