

## שיעור 2

### חוגים מתמטיים

#### 2.1 החוג $\mathbb{Z}_m$

##### הגדרה 2.1 החוג $\mathbb{Z}_m$

החוג  $\mathbb{Z}_m$  מוגדר להיות הקבוצה של מספרים שלמים

$$\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$$

יחד עם הפעולות  $\oplus$  ו-  $\odot$  המוגדרות כך:

לכל  $a, b \in \mathbb{Z}_m$

$$a \oplus b = (a + b) \% m, \quad a \odot b = ab \% m.$$

במילים אחרות,  $\mathbb{Z}_m$  היא קבוצת השארית בחלוקה ב- $m$ .

מכאן ואילך נסמן חיבור וכפל ב-  $\mathbb{Z}_m$  עם הסימנים הרגילים  $+$  ו-  $\times$  או  $\cdot$ .

##### 2.1 דוגמה

חשבו את  $11 \times 13$  ב-  $\mathbb{Z}_{16}$ .

##### פתרון:

$11 \times 13 = 143$ . נמצא את השארית בחלוקה ב- 16:

$$(11 \times 13) \% 16 = 143 \% 16 = 15.$$

לפיכך  $11 \times 13 = 15$  ב-  $\mathbb{Z}_{16}$ .

##### משפט 2.1 תכונות של החוג $\mathbb{Z}_m$

לכל  $a, b, c \in \mathbb{Z}_m$  התנאים הבאים מתקיימים.

1. סגירה תחת חיבור:

$$a + b \in \mathbb{Z}_m.$$

2. חוק החילוף לחיבור:

$$a + b = b + a.$$

3. חוק הקיבוץ לחיבור:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

4. קיום איבר הניטרלי ביחס לחיבור:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

5. האיבר הנגדי של  $a$  הוא  $m - a$ , ז"א  $-a = m - a$ . הסבר:

$$a + (m - a) = (m - a) + a = m = 0$$

ב-  $\mathbb{Z}_m$ .

6. סגירה תחת כפל:

$$ab \in \mathbb{Z}_m .$$

7. חוק החילוף לכפל:

$$ab = ba .$$

8. חוק הקיבוץ לכפל:

$$(ab)c = a(bc) .$$

9. קיום איבר הניטרלי ביחס לכפל:

$$a \times 1 = 1 \times a = a .$$

10. חוק הפילוג:

$$(a + b)c = (ac) + (bc) .$$

תכונות 1, 3-5 אומרות כי  $\mathbb{Z}_m$  הינו "חבורה מתמטית".

יחד עם תכונה 2,  $\mathbb{Z}_m$  הוא חבורה אָבֵלִית.

כל התכונות 1-10 אומרות כי  $\mathbb{Z}_m$  הוא חוג מתמטי.

## הגדרה 2.2 איבר ההופכי ב- $\mathbb{Z}_m$

יהי  $a \in \mathbb{Z}_m$ . האיבר ההופכי של  $a$  מסומן ב-  $a^{-1}$  ומקיים את התנאי

$$a^{-1}a \equiv 1 \pmod{m} \quad \text{וגם} \quad aa^{-1} \equiv 1 \pmod{m} .$$

## משפט 2.2

נתון היחס שקילות

$$ax \equiv y \pmod{m} .$$

יש פתרון יחיד  $x \in \mathbb{Z}_m$  לכל  $y \in \mathbb{Z}_m$  אם ורק אם  $\gcd(a, m) = 1$ .

הוכחה:

ללא הגבלת כלליות נניח כי  $a > m$ .

נניח כי יש פתרון יחיד. נוכיח דרך השלילה כי ו-  $\gcd(a, m) = 1$ .

כלומר, נניח כי יש פתרון יחיד אך  $\gcd(a, m) = d > 1$ .

יהי  $x_1 = a^{-1}y$  פתרון ל-  $ax \equiv y \pmod{m}$ .

נשים לב ש-  $ax_1 + \frac{am}{d} = ax_1 + km \equiv ax_1 \pmod{m}$ , כאשר  $k = \frac{a}{d}$  שלם.

ז"א גם  $x_1 + \frac{m}{d}$  פתרון.

זאת בסתירה לכך שהפתרון יחיד.

נניח כי  $\gcd(a, m) = 1$ . נוכיח בשלילה כי הפתרון יחיד.

נניח כי  $\gcd(a, m) = 1$  וקיימים שני פתרונות שונים:  $x_1 \not\equiv x_2 \pmod{m}$ .

ז"א

$ax_1 \equiv y \pmod{m}$  , וגם  $ax_2 \equiv y \pmod{m}$  .

לכן

$ax_1 \equiv ax_2 \pmod{m}$  .

לכן

$m \mid ax_1 - ax_2$  .

$\gcd(a, m) = 1$  לפיכך

$m \mid x_1 - x_2$  ,

ז"א

$x_1 \equiv x_2 \pmod{m}$  ,

בסתירה לכך ש-  $x_1 \not\equiv x_2 \pmod{m}$ .



מסקנה 2.1

יהי  $a \in \mathbb{Z}_m$ . קיים איבר הופכי  $a^{-1} \in \mathbb{Z}_m$  אשר לפי הגדרתו 2.2 מקיים את התנאי

$aa^{-1} \equiv 1 \pmod{m}$  ,

אם ורק אם  $\gcd(a, m) = 1$ .



הוכחה: משפט 2.2.

דוגמה 2.2

הוכיחו שקיים איבר הופכי ל- 11 ב-  $\mathbb{Z}_{26}$  ואם כן מצאו אותו.

פתרון:

קיים איבר הופכי של  $a$  ב-  $\mathbb{Z}_m$  אם ורק אם  $\gcd(a, m) = 1$ . לכן נבדוק את ה-  $\gcd(26, 11)$  באמצעות האלגוריתם של אוקליד המוכלל. יהיו  $a = 26, b = 11$ .

$r_0 = a = 26$  ,  $r_1 = b = 11$  ,  
 $s_0 = 1$  ,  $s_1 = 0$  ,  
 $t_0 = 0$  ,  $t_1 = 1$  .

$q_1 = 2$	$t_2 = 0 - 2 \cdot 1 = -2$	$s_2 = 1 - 2 \cdot 0 = 1$	$r_2 = 26 - 2 \cdot 11 = 4$	שלב $i = 1$
$q_2 = 2$	$t_3 = 1 - 2 \cdot (-2) = 5$	$s_3 = 0 - 2 \cdot 1 = -2$	$r_3 = 11 - 2 \cdot 4 = 3$	שלב $i = 2$
$q_3 = 1$	$t_4 = -2 - 1 \cdot (5) = -7$	$s_4 = 1 - 1 \cdot (-2) = 3$	$r_4 = 4 - 1 \cdot 3 = 1$	שלב $i = 3$
$q_4 = 3$	$t_5 = 5 - 3 \cdot (-7) = 28$	$s_5 = -2 - 3 \cdot (3) = -11$	$r_5 = 3 - 3 \cdot 1 = 0$	שלב $i = 4$

$$\gcd(a, b) = r_4 = 1, \quad x = s_4 = 3, \quad y = t_4 = -7.$$

$$ax + by = 3(26) - 7(11) = 1.$$

מכאן אנחנו רואים כי  $\gcd(26, 11) = 1$  ולכן לפי משפט 2.2 ההופכי של 11 קיים ב- $\mathbb{Z}_{26}$ . מחשבים את האיבר ההופכי לפי השיטה הבאה:

$$-7(11) = 1 - 9(26) \Rightarrow -7(11) = 1 \pmod{26} \Rightarrow 19(11) = 1 \pmod{26} \Rightarrow 11^{-1} = 19 \pmod{26}.$$

■

## כלל 2.1

האיברים של  $\mathbb{Z}_{26}$  שעבורם קיימים איברים הופכיים הינם

$1^{-1}$	$3^{-1}$	$5^{-1}$	$7^{-1}$	$9^{-1}$	$11^{-1}$	$15^{-1}$	$17^{-1}$	$19^{-1}$	$21^{-1}$	$23^{-1}$	$25^{-1}$
1	9	21	15	3	19	7	23	11	5	17	25

## הגדרה 2.3 פונקציית אוילר $\phi(m)$

נתון החוג  $\mathbb{Z}_m$  כאשר  $m \geq 2$  מספר טבעי.  $\phi(m)$  תוגדר להיות הפונקציה הנותנת את מספר איברים ב- $\mathbb{Z}_m$  אשר זרים ל- $m$ .

(שימו לב להגדרה הזאת זהה להגדרה 1.7).

## מסקנה 2.2 מספר איברים הפיכים ב- $\mathbb{Z}_m$

מספר האיברים של החוג  $\mathbb{Z}_m$  שעבורם קיימים איברים הופכיים שווה ל- $\phi(m)$ .

**הוכחה:**  $a \in \mathbb{Z}_m$  שווה למספר איברים  $\phi(m)$

עבורם  $\gcd(a, m) = 1$ , ולפי משפט 2.1 אותם האיברים הם האיברים ההפיכים של  $\mathbb{Z}_m$ .

■

## 2.2 הפיכת מטריצות בחוג $\mathbb{Z}_m$

### הגדרה 2.4 המטריצה של קופקטורים

תהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

הקופקטור ה- $(i, j)$  של  $A$  מוגדר להיות הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת מ- $A$  ע"י מחיקת שורה  $i$  ועמודה  $j$ , כפול  $(-1)^{i+j}$ .

המטריצה של קופקטורים של המטריצה  $A$  מוגדרת

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

כאשר  $C_{ij}$  הקופקטור ה- $(i, j)$  של  $A$ .

**הגדרה 2.5 המטריצה המצורפת**

תהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . המטריצה המצורפת של  $A$  היא מטריצה מסדר  $n \times n$  שמסומנת  $\text{adj}(A)$  ומוגדרת

$$\text{adj}(A) = C^t$$

כאשר  $C$  המטריצה של קופקטורים של  $A$ .

**משפט 2.3 נוסחת למטריצה ההופכית**

נניח כי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  מטריצה ריבועית. אם  $A$  הפיכה, (כלומר אם  $|A| \neq 0$ ) אז המטריצה ההופכית נתונה ע"י נוסחת קיילי המילטון:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) ,$$

כאשר  $\text{adj}(A)$  המטריצה המצורפת של  $A$ .

**דוגמה 2.3**

מצאו את ההופכית של

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{2 \times 2} .$$

**פתרון:**

$$|A| = 11 \cdot 7 - 8 \cdot 3 = 53 = 1 \pmod{26} .$$

$\gcd(1, 26) = 1$  לכן המטריצה הפיכה ב-  $\mathbb{Z}_{26}$ .

$$\begin{pmatrix} \cancel{11} & 8 \\ 3 & \cancel{7} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{11} = (-1)^{1+1} 7 = 7$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{11} & \cancel{8} \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{12} = (-1)^{1+2} 7 = -3$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ \cancel{3} & \cancel{7} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{21} = (-1)^{2+1} 8 = -8$$

$$\begin{pmatrix} 11 & \cancel{8} \\ 3 & \cancel{7} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{22} = (-1)^{2+2} 11 = 11$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = C^t = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = |A|^{-1} \text{adj}(A) .$$

$$|A|^{-1} = 1^{-1} = 1 \in \mathbb{Z}_{26}$$

לפיכך

$$A^{-1} = |A|^{-1} \text{adj}(A) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 22 \\ 23 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{2 \times 2}.$$

■

## 2.4 דוגמה

מצאו את ההופכית של

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3 \times 3}.$$

פתרון:

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 15 + 1 \cdot (-10) = 5.$$

 $\gcd(15, 26) = 1$  לכן המטריצה הפיכה ב- $\mathbb{Z}_{26}$ .

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & 0 & \cancel{1} \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 15.$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & 0 & \cancel{1} \\ 0 & 5 & \cancel{0} \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -10.$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & 0 & 1 \\ \cancel{0} & 5 & \cancel{0} \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cancel{0} & 1 \\ 0 & \cancel{5} & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} \\ \cancel{0} & 5 & \cancel{0} \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{3} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cancel{0} & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{3} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5.$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = C^t = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -10 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 21 \\ 0 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3 \times 3}.$$

$$A^{-1} = |A|^{-1} \text{adj}(A).$$

$$|A|^{-1} = 5^{-1} = 21 \in \mathbb{Z}_{26}$$

לפיכך

$$A^{-1} = |A|^{-1} \text{adj}(A) = 21 \cdot \begin{pmatrix} 15 & 0 & 21 \\ 0 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 315 & 0 & 441 \\ 0 & 21 & 0 \\ 336 & 0 & 105 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3 \times 3}.$$

$$315 \% 26 = 315 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{315}{26} \right\rfloor = -23 \equiv 3 \pmod{26} \Rightarrow 315 \equiv 3 \pmod{26}.$$

$$441 \% 26 = 441 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{441}{26} \right\rfloor = 25 \Rightarrow 441 \equiv 25 \pmod{26}.$$

$$336 \% 26 = 336 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{336}{26} \right\rfloor = 24 \Rightarrow 336 \equiv 24 \pmod{26}.$$

$$105 \% 26 = 105 - 26 \cdot \left\lfloor \frac{105}{26} \right\rfloor = 1 \Rightarrow 105 \equiv 1 \pmod{26}.$$

לפיכך

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 25 \\ 0 & 21 & 0 \\ 24 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{26}^{3 \times 3}.$$

בדיקה:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 25 \\ 0 & 21 & 0 \\ 24 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 26 \\ 0 & 105 & 0 \\ 78 & 0 & 53 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{26}.$$

## 2.3 תמורות

### הגדרה 2.6 תמורה

נתונה קבוצה מסודרת נוצר סופית  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ללא חזרות. תמורה היא פונקציה חד-חד-ערכית ועל  $\pi: X \rightarrow X$  שמקבלת  $X$  ומחזירה הקבוצה  $X$  ומשנה את הסדר של האיברים.

## דוגמה 2.5

- תמורות של הקבוצה  $(a, b)$ :

$$\pi_1(a, b) = (a, b), \quad \pi_2(a, b) = (b, a).$$

הראשון הוא מקרה פרטי של תמורה, אשר הוא פונקצית הזהות. קיימים  $2!$  תמורות. תמורות.

- תמורות של הקבוצה  $(a, b, c)$ :

$$\begin{aligned} \pi_1(a, b, c) &= (a, b, c), & \pi_2(a, b, c) &= (c, a, b), & \pi_3(a, b, c) &= (b, c, a), \\ \pi_4(a, b, c) &= (b, a, c), & \pi_5(a, b, c) &= (a, c, b), & \pi_6(a, b, c) &= (c, b, a). \end{aligned}$$

קיימים  $3!$  תמורות.

- תמורות של הקבוצה  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ :

$$\pi_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\delta, \alpha, \gamma, \beta), \dots$$

קיימים  $4!$

- תמורות של הקבוצה  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ :

$$\pi_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\delta, \alpha, \gamma, \beta), \quad \pi_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\beta, \gamma, \delta, \alpha), \dots$$

קיימים  $4!$  תמורות.

## משפט 2.4

יהי  $X$  קבוצה מסודרת נוצר סופית ללא חזרות של אורך  $n$ . קיימות  $n!$  תמורות.

הוכחה: תרגיל בית.

## הגדרה 2.7 סימון אינדקס של תמורה

יהי  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  ויהי  $\pi : X \rightarrow X$  תמורה. נניח שאחרי ביצוע של התמורה  $\pi$  על  $X$ , האיבר שהיה במיקום ה- $i$  עכשיו במיקום ה- $j$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ). אז אנחנו כותבים

$$\pi(i) = j.$$

הביטוי הזה נקרא **סימון אינדקס**.

## דוגמה 2.6

(א) נתונה התמורה

$$\pi(a, b) = (b, a).$$

בסימון אינדקס,

$$\pi(1) = 2, \quad \pi(2) = 1.$$

(ב) נתונה התמורה

$$\pi(a, b, c) = (b, c, a).$$



בסימון אינדקס,

$$\pi(1) = 3, \quad \pi(2) = 1, \quad \pi(3) = 2.$$

ג) נתונה התמורה

$$\pi(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\beta, \gamma, \delta, \alpha).$$

בסימון אינדקס,

$$\pi(1) = 4, \quad \pi(2) = 1, \quad \pi(3) = 2, \quad \pi(4) = 3.$$

## הגדרה 2.8 הצגת שתי-שורות והצגת שורת-אחת

יהי  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  ויהי  $\pi : X \rightarrow X$  תמורה שמוגדרת

$$\pi(X) = (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)}).$$

• ההצגה שתי-שורות של התמורה הזאת הינה

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(i) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

• ההצגה שורת-אחת של התמורה הזאת הינה

$$\pi = (\pi(1) \quad \pi(2) \quad \dots \quad \pi(i) \quad \dots \quad \pi(n))$$

## דוגמה 2.7

א) נתונה התמורה

$$\pi(a, b) = (b, a).$$

$$\pi(1) = 2, \quad \pi(2) = 1.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(2 \quad 1).$$

בסימון אינדקס:

הצגת שתי-שורות:

הצגת שורה-אחת:

ב) נתונה התמורה

$$\pi(a, b, c) = (b, c, a).$$

$$\pi(1) = 3, \quad \pi(2) = 1, \quad \pi(3) = 2.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(3 \quad 1 \quad 2).$$

בסימון אינדקס:

הצגת שתי-שורות:

הצגת שורה-אחת:

ג) נתונה התמורה

$$\pi(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\beta, \gamma, \delta, \alpha).$$

$$\pi(1) = 4, \quad \pi(2) = 1, \quad \pi(3) = 2, \quad \pi(4) = 3.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(4 \quad 1 \quad 2 \quad 3).$$

בסימון אינדקס:

הצגת שתי-שורות:

הצגת שורה-אחת:

## דוגמה 2.8 הרכבה של תמורות

תהיינה  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  ו-  $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . חשבו את  $\alpha \circ \beta$  ו-  $\beta \circ \alpha$ .

**פתרון:**

$$\alpha \circ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha(\beta(1)) & \alpha(\beta(2)) & \alpha(\beta(3)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha(2) & \alpha(1) & \alpha(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta \circ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \beta(\alpha(1)) & \beta(\alpha(2)) & \beta(\alpha(3)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \beta(2) & \beta(3) & \beta(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

■