11 תרגילים משתנה מקרי רציף 3-8

11.1 סיכום נוסחאות: משתני מקרי רציפים

11.1 חוק. () עבור משתנה מקרי בדיד כלשהו

$$F_X(b) - F_X(a) = P(a < X < b) = \sum_{k>a}^{b} P_X(k),$$

בעוד עבור משתנה מקרי רציף כלשהו מתקבל השוויון הבא:

$$F_X(b) - F_X(a) = P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\,dx\ .$$

זאת אומרת, בשני המיקרים ניתן לסכום על פונקציית ההתפלגות הצפיפות בכדי לקבל את פונקציית ההתפלגות המצטברת. במקרה הבדיד מדובר בסכום ובמקרה הרציף מדובר באינטגרל.

11.2 הגדרה. (פונקציית צפיפות של מ"מ רציף אחיד) נתון קטע סופי $[A, B]$, משתנה מקרי רציף X מתפלג אחיד בקטע זה, $X \sim U(A, B)$ אם ורק אם

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B-A} & A \le x \le B, \\ 0 & \text{אחרת.} \end{cases}$$

במילים, **משתנה מקרי אחיד רציף הוא משתנה בעלת צפיפות קבועה** על קטע כלשהו $[A, B]$, וביתר הנקודות הצפיפות שווה לאפס.

11.3 הגדרה. (פונקציית ההתפלגות המצטברת של מ"מ רציף אחיד) פונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי X מתפלג אחיד על הקטע $[A, B]$ היא ליניארית (קו ישר), ניתנת על ידי

$$F_X(k) = \begin{cases} 0, & k < A, \\ \dfrac{k-A}{B-A}, & 0 \le k \le B, \\ 1, & k > B. \end{cases}$$

11.4 מסקנה. (תוחלת ושונות של מ"מ רציף אחיד) עבור משתנה מקרי מתפלג אחיד על הקטע $[A, B]$, כלומר $X \sim U(A, B)$:

$$f_X(x) \equiv P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B-A} & A < x < B \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}, \qquad E[X] = \frac{A+B}{2}\ , \qquad V(X) = \frac{(B-A)^2}{12}\ .$$

11.5 הגדרה. (פונקציית צפיפות של מ"מ רציף מעריכי) משתנה מקרי מעריכי X מסומן ב

$$X \sim \exp(\lambda)$$

כאשר λ הוא הפרמטר של התפלגות פואסון המתאימה, זאת אומרת קצב האירועים הממוצה ליחדת זמן (או ליחידת שטח). הצפיפות של X היא

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0. \end{cases}$$

11.6 מסקנה. (פונקציית התפלגות המצטברת של מ"מ רציף מעריכי) פונקציית התפלגות המצטברת של משתנה מקרי רציף מעריכי X הוא

$$F_X(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1 - e^{-\lambda k} & k \geq 0 \end{cases}$$

11.7 הגדרה. (תוחלת ושונות של מ"מ רציף מעריכי) עבור משתנה מקרי מתפלג מעריכי עם פרמטר λ, כלומר $X \sim \exp(\lambda)$:

פונקציית צפיפות:
$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0. \end{cases}$$

פונקציית התפלגות מצטברת:
$$F_X(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1 - e^{-\lambda k} & k \geq 0 \end{cases}$$

תוחלת:
$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

שונות:
$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

11.2 תרגילים

11.8 דוגמא. מכונה במפעל ברגים אמורה לייצר ברגים בקוטר 3 מ"מ. בפועל, קוטר הברגים אינו מדויק והצפיפות שלו נתונה על ידי איור להלן אשר מראה את צפיפות קוטר הברגים.

רשמו במדויק את פונקצית הצפיפות. מה ההסתברות שקוטר בורג יעלה על 3 מ"מ? על 4 מ"מ?

פיתרון. יש צורך למצוא את פונקצית הצפיפות בצורה מדוייקת. נשתמש תחילה בתנאי הנרמול. אנחנו יודעים כי השטח שבין הגרף לציר x שווה ל-1 כי כלל השטח מייצג את כל ההסתברות,

$$\int_1^5 f_X(x)\,dx = P(1 \leq X \leq 5) = 1.$$

נשתמש בנוסחה לשטח משולש (שטח משולש שווה למכפלת הבסיס בחצי הגובה) ונקבל שגובה המשולש h מקיים

$$\frac{4h}{2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad h = 0.5\ .$$

עם כן, יש לנו את הנקודות

$$(1,0), \quad (5,0), \quad (3,0.5)\ .$$

ונוכל למצוא את משוואות הקווים בהתאם. לכן הצפיפות נתונה על ידי

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 \le x \le 3, \\ & \\ -\frac{1}{4}(x-5), & 3 \le x \le 5, \\ 0, & x > 5. \end{cases} ,$$

בעזרת הצפיפות נוכל לחשב ישירות את ההסתברויות המבוקשות.

$$P(X > 3) = \int_3^5 \left(-\frac{1}{4}(x-5)\right) dx \quad = -\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_3^5 = \frac{1}{2},$$
$$P(X > 4) = \int_4^5 \left(-\frac{1}{4}(x-5)\right) dx \quad = -\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_4^5 = \frac{1}{8}.$$

■

11.9 דוגמא. מספר טיפות הגשם הנופלות ביחידת שטח נתונה מתפלגות על פי התפלגות פואסון. ניקח מטר אחד ונניח כי בממוצע נפלו לאורכו 10 טיפות:

$$\lambda = 10 \ \text{טיפות למטר} \ .$$

המרחק X (במטרים) בין טיפות מתפלג פואסונית

$$X \sim \exp(\lambda = 10).$$

ההסתברות שטיפה אחד תיפול לתוך 10 ס"מ (0.1 [m]) כלשהו היא

$$P(X \le 2) = F_X(20) = 1 - e^{-0.1\lambda} = 1 - e^{-1} = 0.63 \ .$$

11.10 דוגמא. משתנה מקרי רציף X בעל פונקציית צפיפות

$$f_X(x) = \begin{cases} cx, & 0 \le x \le 2, \\ 0, \ \text{אחרת} & \end{cases}$$

חשבו את c, ומצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת F_X.

פיתרון. בכדי למצוא את הקבוע c נשתמש בתנאי הנרמול. ידוע כי

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f_X(x) = \int_0^2 dx\, cx = c\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2c,$$

לכן

$$c = \frac{1}{2}.$$

עבור $k < 0$, ההסתברות

$$P(X \le k) = 0$$

כי המשתנה נע בין 0 ל- 2. עבור $k \geq 2$, ההסתברות

$$P(X \leq k) = 1$$

מאותה הסיבה בדיוק. כעת נותר למצוא את הערך עבור $k \in (0,2)$.

$$\begin{aligned} F_X(k) &= \int_{-\infty}^{k} f_X(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx + \int_{0}^{k} f_X(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{k} \frac{x}{2}\,dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^k = \frac{k^2}{4}. \end{aligned}$$

לסיכום, פונקצית ההתפלגות המצטברת היא

$$F_X(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ \dfrac{k^2}{4}, & 0 \leq k \leq 2, \\ 1, & k > 2. \end{cases}$$

■

11.11 דוגמא. נתונה פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f_X(x) = \begin{cases} -x & -1 \leq x \leq 0, \\ cx^2 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

1. מצאו את ערכו של c.
2. חשבו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X.
3. חשבו את ההסתברויות:
   (א) $P(X \leq -0.5)$
   (ב) $P(X < -0.5)$
   (ג) $P(X \leq 0.5)$
   (ד) $P(-0.2 \leq X \leq 0.3)$

פיתרון. 1. מתכונת הנרמול נקבל

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f_X(x) = \int_{-1}^{0} (-x)dx + \int_{0}^{1} cx^2\,dx \\ &= \frac{1}{2} + c\left(\frac{1}{3} - 0\right) \end{aligned}$$

ולכן

$$c = 1.5\ .$$

.2

$$F_X(k)=\int_{-\infty}^{k} f_X(x)\,dx=\begin{cases}0 & k<-1\\ \frac{1}{2}-\frac{k^2}{2} & -1\le k<0\\ \frac{1}{2}+\frac{k^3}{2} & 0\le k\le 1\\ 1 & k>1.\end{cases}$$

3. נחשב את ההסתברויות באמצעות הצבה בפונקציית ההתפלגות המצטברת:

(א) $P(X\le -0.5)=F_X(-0.5)=0.375$

(ב) $P(X<0.5)=P(X\le -0.5)=0.375$ שכן כזכור, נקודה אחת אינה משפיעה על תוצאת אינטגרל וההסתברות להיות שווה בדיוק ל- 0.5 היא אפס.

(ג) $P(X\le 0.5)=F_X(0.5)=0.5625$

(ד) $P(-0.2\le X\le 0.3)=F_X(0.3)-F_X(-0.2)=0.0335$

■

דוגמא. אספקת הדלק למאגר של תחנת דלק מתבצעת אחת לשבוע. כמות הדלק (באלפי ליטרים) שתחנה זו מוכרת בשבוע היא משתנה מקרי המתפלג בהתאם לפונקציית הצפיפות:

$$f_X(x)=\begin{cases}c(1-x)^4 & x\in[0,1]\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

1. חשבו את c.
2. מה צריכה להיות קיבולת המאגר כדי שההסתברות שהוא יתרוקן בשבוע תהיה קטנה מ 5%?

פיתרון. 1. מתכונת הנרמול נקבל

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\ dx=c\int_0^1 (1-x)^4\ dx=-\frac{c}{5}(1-x)^5\bigg|_{x=0}^{x=1}=\frac{c}{5}\ ,$$

ולכן

$$c=5.$$

2. סמן את קיבולת המאגר ב M. אנו דורשים שההסתברות שצריכת הדלק תהיה גדולה מהקיבולת תהיה קטנה מ- 5%, כלומר

$$P(X>M)\le 5\%\ .$$

$$P(X>M)=\int_M^1 f_X(x)\,dx=\int_M^1 c(1-x)^4\,dx=-\frac{c}{5}(1-x)^5\bigg|_M^1=(1-M)^5\le 0.05\ ,$$

ולכן

$$M\ge 0.4507\ .$$

המספר שקיבלנו הוא בדיוק האחוזון ה- 95% מהשבועות צריכת הדלק נמוכה ממספר זה.

■

11.12 דוגמא. תרבית חיידקים מפוזרת באופן אחיד על פני צלחת שרדיוסה 10 ס"מ. יהא R המרחק של חיידק אקראי ממרכז הצלחת.

1. מה ההסתברות שהמרחק הוא בדיוק 3 ס"מ?
2. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של R.
3. מהי ההסתברות שהמרחק הוא 3 ס"מ לפחות אם ידוע שהוא 6 ס"מ לכל היותר?

4. מצאו את פונקציית הצפיפות של R.

פיתרון. 1. מאחר וזהו משתנה מקרי רציף, ההסתברות שיקבל בדיוק ערך מסוים היא אפס.

2. מאחר והחיידקים מפולגים באופן אחיד על הצלחת, הסיכוי שחיידק מסוים נמצא במרחק קטן מ-r היא היחס בין השטח של האזורים שנמצאים במרחק קטן מ-r ביחס לשטח הכולל. לכן

$$F_R(r) = \begin{cases} 0, & r < 0, \\ \frac{r^2}{10^2}, & 0 \le r \le 10, \\ 1, & r > 10. \end{cases}$$

3.

$$P(R > 3 | R > 6) = \frac{P(3 < R < 6)}{P(R < 6)} = \frac{F_R(6) - F_R(3)}{F_R(6)} = 0.75 \ .$$

4.

$$f_R(r) = \frac{dF_R}{dr} = \begin{cases} \frac{r}{50}, & 0 \le r \le 10, \\ 0, & \text{אחרת} \ . \end{cases}$$

■

11.13 דוגמא. בתחנת כיבוי האש של אשדוד מתקבלת שיחה אחת בממוצע בכל 3 דקות.

1. מה הסיכוי שהשיחה הראשונה תגיע בין הדקה השנייה לדקה הרביעית?
2. מה הסיכוי שהשיחה הראשונה תגיע אחרי 5 דקות?
3. בהנחה שבחמש הדקות הראשונות לא התקבלה שיחה, מה הסיכוי שנמתין לפחות עוד דקה עד לשיחה הראשונה?

פיתרון. הזמן עד השיחה הראשונה מתפלג פואסונית $Y \sim \exp\left(\frac{1}{3}\right)$ כאשר הזמן נמדד בדקות.

1.

$$P(2 \le Y \le 4) = F_Y(4) - F_Y(2) = 1 - e^{-4/3} - (1 - e^{-2/3}) \approx 0.25.$$

2.

$$P(Y > 5) = 1 - P(Y \le 5) = 1 - F_Y(5) = 1 - (1 - e^{-5/3}) \approx 0.189.$$

3.

$$P(Y > 5+1 | Y > 5) = \frac{P(Y > 6 \cap Y > 5)}{P(Y > 5)} = \frac{P(Y > 6)}{P(Y > 5)} = \frac{1 - F_Y(6)}{1 - F_Y(5)} = \frac{e^{-6/3}}{e^{-5/3}} = e^{-1/3} = P(Y > 1) \ .$$

בחישוב האחרון קיבלנו תכונה מוכרת: חוסר זיכרון. הסיכוי שנמתין 6 דקות לפחות עד לשיחה הראשונה, בהנחה שכבר המתנו 5 דקות ללא שיחה, היא בדיוק הסיכוי שנמתין דקה אחת נוספת - זו תכונת חוסר הזיכרון שראינו עבור משתנה מקרי גיאומטרי. נסכם בטענה הבאה. ■

11.14 מסקנה. (תכונת חוסר זיכרון) עבור משתנה מקרי מעריכי $X \sim \exp(\lambda)$, וכל צמד מספרים $s, t > 0$, מתקיים

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t).$$