המחלקה למדעי המחשב

10/09/24 ז' באלול תשפ"ד
09 : 00 – 12 : 00

אלגברה 2

מועד א'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר, ד"ר זהבה צבי.

תשפ"ד סמסטר ב'

השאלון מכיל 5 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

<u>הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה</u>

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

<u>חומר עזר</u>

- דפי נוסחאות של הקורס (2 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

<u>אחר / הערות</u> יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.

==

שאלה 1 **(25 נקודות)**

א) (20 נקודות) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -16 & -8 & 2 \end{pmatrix}$ מצאו צורת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $J=P^{-1}AP$.

ב) (5 נקודות) תהי $B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ עם ערכים עצמיים $\lambda_1=1$ ו- $\lambda_2=-1$. הוכיחו כי $B^n=I$ לכל n טבעי זוגי.

יהי T אופרטור $T:V\to V$ במרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

ג) אם T צמוד לעצמו אז T נורמלי.

ד) אם T נורמלי אז T צמוד לעצמו.

שאלה 2 **(25 נקודות)**

א) (15 נקודות) נתון מרחב ווקטורי $\mathbb{R}_3[x]$ עם מכפלה פנימית אינטגרלית בקטע $[-1,1]$:

$$\langle f(x),g(x)\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)\cdot g(x)\ .$$

מצאו בסיס אורתוגונלי למרחב $V=\operatorname{span}\left\{1+x,2+3x-x^2,x+2x^2,1-4x+5x^2\right\}$.

נניח כי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

ב) (5 נקודות) אם $T:V\to V$ אופרטור הרמיטי (צמוד לעצמו) אז כל ערך עצמי של T ממשי.

ג) (5 נקודות) אם $T:V\to V$ אופרטור אוניטרי אז הערך מוחלט של כל ערך עצמי של T שווה ל- 1.

ד) (5 נקודות) אם $T:V\to V$ אופרטור נורמלי אז T צמודה לעצמה.

שאלה 3

א) (10 נקודות) תהי $C\in\mathbb{R}^{4\times 4}$ המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. הוכיחו כי $C^{-2}=-\frac{1}{4}\left(C^2-5I\right)$

תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו את הטענות הבאות:

ב) (5 נקודות) אם λ ערך עצמי של A אז λ ערך עצמי של A^t.

ג) (5 נקודות) אם A הפיכה אז $A^{-1} \in \text{span}\,\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\}$.

ד) (5 נקודות) $A^m \in \text{span}\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{m-1}\}$ אם ורק אם קיים פולינום $p(x) \in \mathbb{R}_m[x]$ כך ש- $p(A) = 0$.

שאלה 4 (25 נקודות)

תהי $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ המטקיצה שמוגדרת $A = \begin{pmatrix} i & i & 0 \\ i & i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}$.

א) (5 נקודות) האם A נורמלית? האם A אוניטרית? האם A צמודה לעצמה? נמקו את תשובתכם.

ב) (20 נקודות) האם A לכסינה אוניטרית? אם כן מצאו Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $A = QDQ^{-1}$.

שאלה 5 (25 נקודות)

א) (15 נקודות) תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. נניח כי $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ערכים עצמיים של A וכולם שונים זה מזה. יהי u_1 וקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ_1, u_2 וקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ_2, ו- u_3 וקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ_3. הוכיחו כי u_1, u_2, u_3 בת"ל.

ב) (5 נקודות) בנוסף נניח כי A אוניטרית. הוכיחו כי הווקטורים u_1, u_2, u_3 אורתוגונלים.

ג) (5 נקודות) אם A אוניטרית, האם ייתכן ש- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ יהיו כולם ממשיים? נמקו את תשובתכם.

פתרונות

שאלה 1 (25 נקודות)

א) (20 נקודות) $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -16 & -8 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} p_A(x) = & |xI-A| = \begin{vmatrix} x-6 & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & -2 \\ 16 & 8 & x-2 \end{vmatrix} \\ = & (x-6)\left((x-2)^2+16\right)+16\left(4-(x-2)\right) \\ = & (x-6)\left(x^2-4x+20\right)+16\left(6-x\right) \\ = & (x-6)\left(x^2-4x+20\right)+16\left(6-x\right) \\ = & (x-6)\left(x^2-4x+20-16\right) \\ = & (x-6)\left(x^2-4x+4\right) \\ = & (x-6)(x-2)^2 \ . \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=2$ מריבוי אלגברי 2.

$\lambda=6$ מריבוי אלגברי 1.

<u>פולינום מינימלי:</u>

נבדוק $(x-2)(x-6)$:

$$(A-2I)(A-6I)=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -16 & -8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ -16 & -8 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -32 & -16 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\neq 0$$

לכן

$$m_A(x)=(x-2)^2(x-6)$$

$$J=\begin{pmatrix} J_2(2) & \\ & J_1(6) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} .$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda=2$:</u>

$$(A-2I)=\begin{pmatrix}4&2&-1\\0&0&2\\-16&-8&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3+4R_1}\begin{pmatrix}4&2&-1\\0&0&2\\0&0&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3+2R_2}\begin{pmatrix}4&2&-1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to 2R_1+R_2}\begin{pmatrix}8&4&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2\to\frac{1}{2}R_2]{R_1\to\frac{1}{4}R_1}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z)=(-\frac{1}{2}y,y,0)=y(-\frac{1}{2},1,0)$, $y\in\mathbb{R}$. לכן $V_2=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$.

נסמן את הווקטור עצמי ב- $u_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$.

<u>וקטור עצמי מוכלל:</u>

נסמן $u_2=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$$(A-2I)u_2=u_1\qquad\Rightarrow\qquad\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$(A-2I)=\left(\begin{array}{ccc|c}4&2&-1&-1\\0&0&2&2\\-16&-8&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3+4R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}4&2&-1&-1\\0&0&2&2\\0&0&-4&-4\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3+2R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}4&2&-1&-1\\0&0&2&2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to 2R_1+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}8&4&0&0\\0&0&2&2\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_2\to\frac{1}{2}R_2]{R_1\to\frac{1}{4}R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

פתרון: $y\in\mathbb{R}$, $u_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}y\\y\\1\end{pmatrix}$. נבחר $y=0$ ונקבל $u_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

<u>מרחב עצמי של $\lambda=6$:</u>

$$(A-6I)=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&-4&2\\-16&-8&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}-16&-8&-4\\0&2&-1\\0&-4&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3+2R_2}\begin{pmatrix}-16&-8&-4\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_1\to R_1+4R_2}\begin{pmatrix}-16&0&-8\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to -\frac{1}{8}R_1}\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z)=(-\frac{1}{2}z,\frac{1}{2}z,z)=z(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1),z\in\mathbb{R}$. לכן

$$V_3=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

נסמן את הווקטור עצמי $u_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$.

$$P=\begin{pmatrix}|&|&|\\u_1&u_2&u_3\\|&|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\2&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}\quad,\quad J=\begin{pmatrix}J_2(2)&\\&J_1(6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}.$$

ב) (5 נקודות) $B\in\mathbb{R}^{2\times2}$ ויש לו שני ערכים עצמיים שונים, לכן B לכסינה. לכן $\exists P$ הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $B=PDP^{-1}$:

$$B^n=\left(PDP^{-1}\right)^n=PD^nP^{-1}\ .$$

אם n זוגי אז קיימת k טבעי עבורו $n=2k$. לכן

$$B^n=PD^{2k}P^{-1}=P\left(D^2\right)^kP^{-1}$$

נשים לב $D=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ לכן $D^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$ כאשר I המטריצה היחידה של 2×2. לפיכך

$$B^n=PI^kP^{-1}=PIP^{-1}=PP^{-1}=I\ .$$

ג) אם T צמוד לעצמו אז T נורמלי.

הטענה נכונה. הוכחה:

אם T צמוד לעצמו אז $T=\bar{T}\Leftarrow$

$$T\bar{T}\overset{T\text{ צמוד לעצמו}}{=}TT\overset{T\text{ צמוד לעצמו}}{=}\bar{T}T$$

ז"א $T\bar{T}=\bar{T}T$ לכן T נורמלי.

ד) אם T נורמלי אז T צמוד לעצמו .
הטענה לא נכונה. דוגמנה נגדית:

$T:\mathbb{C}^2\mapsto\mathbb{C}^2$ שמוגדר

$$T\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

כאשר

$$A=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}\ .$$

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}\neq A$$

לכן A לא צמודה לעצמה.

$$\bar{A}A=\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}=I\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}=A\bar{A}\ .$$

לכן A נורמלית.

שאלה 2 **(25 נקודות)**

א) (15 נקודות) נסמן

$$\mathrm{v}_1=1+x,\quad \mathrm{v}_2=2+3x-x^2\ ,\quad \mathrm{v}_3=x+2x^2\ ,\quad \mathrm{v}_4=1-4x+5x^2\ .$$

תחילה נמצא מימד ובסיס של המרחב. $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]\cong\mathbb{R}^3$ אז נעוד עם הווקטורים

$$w_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\quad w_2=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\\0\end{pmatrix}\ ,\quad w_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}\ ,\quad w_4=\begin{pmatrix}1\\-4\\5\\0\end{pmatrix}\ .$$

$$\begin{pmatrix}|&|&|&|\\w_1&w_2&w_3&w_4\\|&|&|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\1&3&1&-4\\0&-1&2&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&5\\0&-1&2&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&5\\0&0&3&10\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן המימד 4 והבסיס מורכב מהווקטורים $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3$. נסמן

$$\mathrm{v}_1=1+x,\quad \mathrm{v}_2=2+3x-x^2\ ,\quad \mathrm{v}_3=x+2x^2\ .$$

$$u_1=\mathrm{v}_1=1+x\ .$$

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\|u_1\|^2 = \int_{-1}^{1} dx\,(1+x)^2 = \left[\frac{(1+x)^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} dx\,(2+3x-x^2)(1+x) = \int_{-1}^{1} \left(-x^3+2x^2+5x+2\right) dx = \left[-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{3}\ .$$

לכן

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = 2+3x-x^2 - \frac{\left(\frac{16}{3}\right)}{\left(\frac{8}{3}\right)}(1+x) = 2+3x-x^2-2(1+x) = -x^2+x\ .$$

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} dx\ \left(x+2x^2\right)(1+x) = \int_{-1}^{1} dx\ \left(2x^3+3x^2+x\right) = \left[\frac{x^4}{2}+x^3+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 2\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle = \int_{-1}^{1} dx\ \left(x+2x^2\right)\left(-x^2+x\right) = \int_{-1}^{1} dx\ \left(-2x^4+x^3+x^2\right) = \left[\frac{-2x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = -\frac{4}{5}+\frac{2}{3} = \frac{-2}{15}\ .$$

$$\|u_2\|^2 = \int_{-1}^{1} dx\ \left(x-x^2\right)^2 = \int_{-1}^{1} \left(x^4-2x^3+x^2\right) dx = \left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{15}\ .$$

לכן

$$\begin{aligned} u_3 =&\mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = x+2x^2-\frac{6}{8}(1+x) - \frac{\left(\frac{-2}{15}\right)}{\left(\frac{16}{15}\right)}\left(x-x^2\right) = x+2x^2-\frac{3}{4}(1+x)+\frac{1}{8}\left(x-x^2\right) \\ =& -\frac{6}{8}+\frac{3}{8}x+\frac{15}{8}x^2 = \frac{3}{8}\left(-2+x+5x^2\right) \end{aligned}$$

בסיס אורתונוגונלי:

$$U = \left\{ u_1 = 1+x, \quad u_2 = -x^2+x\ , \quad u_3 = \frac{3}{8}\left(-2+x+5x^2\right) \right\}\ .$$

ב) (5 נקודות) טענה נכונה. הוכחה:
נניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי u. ז"א $T(u)=\lambda u$. אז

$$\begin{aligned}\langle T(u),u\rangle &= \langle \lambda u,u\rangle && (\text{וקטור עצמי של } T\ u)\\ &=\lambda\langle u,u\rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית})\end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(u),u\rangle &= \langle u,\bar{T}(u)\rangle && (\text{הגדרה של העתקה צמודה})\\ &=\langle u,-T(u)\rangle && (\text{אנטי-הרמיטית } T)\\ &=-\langle u,T(u)\rangle\\ &=-\langle u,\lambda u\rangle && (\text{וקטור עצמי של } T\ u)\\ &=-\bar{\lambda}\langle u,u\rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית})\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\langle u,u\rangle=-\bar{\lambda}\langle u,u\rangle \quad\Rightarrow\quad (\lambda+\bar{\lambda})\langle u,u\rangle=0\ .$$

u וקטור עצמי $\Leftarrow u\neq 0 \Leftarrow \langle u,u\rangle\neq 0 \Leftarrow (\lambda+\bar{\lambda})=0 \Leftarrow \lambda=-\bar{\lambda}$.

ג) (5 נקודות) טענה נכונה. הוכחה:
נניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי u. ז"א $T(u)=\lambda u$. אז

$$\begin{aligned}\langle T(u),T(u)\rangle &= \langle \lambda u,\lambda u\rangle && (\text{וקטור עצמי של } T\ u)\\ &=\lambda\langle u,\lambda u\rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית})\\ &=\lambda\bar{\lambda}\langle u,\lambda u\rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית})\end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(u),T(u)\rangle &= \langle u,\bar{T}T(u)\rangle && (\text{הגדרה של העתקה צמודה})\\ &=\langle u,I(u)\rangle && (\text{אוניטרית } T)\\ &=\langle u,u\rangle\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\bar{\lambda}\langle u,u\rangle=\langle u,u\rangle \quad\Rightarrow\quad (\lambda\cdot\bar{\lambda}-1)\langle u,u\rangle=0\ .$$

u וקטור עצמי $\Leftarrow u\neq 0 \Leftarrow \langle u,u\rangle\neq 0 \Leftarrow (\lambda\cdot\bar{\lambda}-1)=0 \Leftarrow \lambda\bar{\lambda}=1 \Leftarrow |\lambda|^2=1$.

ד) (5 נקודות) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A=[T]=\begin{pmatrix}1&i\\i&1\end{pmatrix} \Leftarrow \bar{A}=\begin{pmatrix}1&-i\\-i&1\end{pmatrix}$. הרי

$$A\cdot\bar{A}=\begin{pmatrix}1&i\\i&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-i\\-i&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\ ,\qquad \bar{A}\cdot A=\begin{pmatrix}1&-i\\-i&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&i\\i&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$$

$A\cdot\bar{A}=\bar{A}\cdot A$ נורמלית ו- $A\neq\bar{A}$ לא צמודה לעצמה.

שאלה 3

א) המטריצה משולשית לכן הערכים עצמיים הם האיברים על האלכסון הראשי: $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, $\lambda = -2$, $\lambda = -1$. לכן הפולינום האופייני הוא

$$p_C(x) = (x+1)(x-1)(x+2)(x-2) = (x^2-1)(x^2-4) = x^4 - 5x^2 + 4 \ .$$

הדטרמיננטה שווה למכפלה של הערכים עצמיים. ז"א

$$|C| = 1 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot (-1) = 4 \ .$$

$|C| \neq 0 \Leftarrow C$ הפיכה.

לפי המשפט קיילי-המילטון, C מאפסת את הפולינום האופייני שלה, כלומר $p_C(C) = 0$ לכן

$$C^4 - 5C^2 + 4I = 0 \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{-1}{4}\left(C^4 - 5C^2\right) = C \cdot \left(\frac{-1}{4}\left(C^3 - 5C\right)\right)$$

C הפיכה לכן קיימת C^{-1} כך ש- $CC^{-1} = I$. נכפיל מצד שמאל ב- C^{-1} ונקבל:

$$C^{-1} = \frac{-1}{4}\left(C^3 - 5C\right) = \frac{-1}{4}C\left(C^2 - 5I\right) \ .$$

נכפיל מצד שמאל ב- C^{-1} ונקבל:

$$C^{-2} = \frac{-1}{4}\left(C^2 - 5I\right) \ .$$

ב) נניח כי λ ערך עצמי של מטריצה A. ז"א

$$|\lambda I - A| = 0 \ .$$

הדטרמיננטה נשמרת ע"י שיחלוף לכן

$$\left|(\lambda I - A)^t\right| = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left|\lambda I - A^t\right| = 0$$

לכן λ שורש של הפולינום האופייני של A^t לכן λ ערך עצמי של A^t.

ג) הפולינום האופייני הוא פולינום מתוקן לכן יש לו את הצורה

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + x^n \ .$$

לפי המשפט קיילי-המילטון, A מאפסת את הפולינום האופייני שלה. ז"א

$$\alpha_0 I + \alpha_1 A + \ldots + A^n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_0 I = -\alpha_1 A - \ldots - A^n = A\left((-\alpha_1)I + (-\alpha_2)A + \ldots + (-1)A^{n-1}\right)$$

הקבוע α_0 בהפולינום האופייני שווה ל- $|A|$. A הפיכה (נתון) לכן $|A|\neq 0$ לכן $\alpha_0\neq 0$ לכן ההופכית α_0^{-1} קיימת. נכפיל ב- α_0^{-1} ונקבל:

$$I=A\left(\left(\frac{-\alpha_1}{\alpha_0}\right)I+\left(\frac{-\alpha_2}{\alpha_0}\right)A+\ldots+\left(\frac{-1}{\alpha_0}\right)A^{n-1}\right)$$

מכאן נקבל כי

$$A^{-1}=\left(\frac{-\alpha_1}{\alpha_0}\right)I+\left(\frac{-\alpha_2}{\alpha_0}\right)A+\ldots+\left(\frac{-1}{\alpha_0}\right)A^{n-1}$$

ולפיכך

$$A^{-1}\in \text{span}\left\{I,A,\cdots,A^{n-1}\right\}\ .$$

ד) נניח ש $A^m\in\text{span}\{I_n,A,A^2,\ldots,A^{m-1}\}$. אז קיימים סקלרים שך ש

$$A^m=\alpha_0I_n+\alpha_1A+\alpha_2A^2+\ldots+\alpha_{m-1}A^{m-1}$$

ז"א

$$A^m-\alpha_{m-1}A^{m-1}-\alpha_{m-2}A^{m-2}-\ldots-\alpha_1A-\alpha_0I_n=0$$

לכן A מאפסת את

$$P(x)=x^m-\alpha_{m-1}x^{m-1}-\ldots-\alpha_1x-\alpha_0\in\mathbb{F}[x]\ .$$

נניח ש- A מאפסת את הפולינום

$$Q(x)=\beta_mx^m+\beta_{m-1}x^{m-1}+\ldots+\beta_1x+\beta_0\in\mathbb{F}[x]$$

כאשר $Q(x)\in\mathbb{R}_m[x]$. כיוון ש הסדר של $Q(x)$ הוא m אז $\beta_m\neq 0$. נעביר אגפים:

$$\beta_mA^m=-\left(\beta_{m-1}A^{m-1}+\ldots+\beta_1A+\beta_0I_n\right)$$

נחלק שני האגפים ב β_m:

$$A^m=-\left(\frac{\beta_{m-1}}{\beta_m}A^{m-1}+\ldots+\frac{\beta_1}{\beta_m}A+\frac{\beta_0}{\beta_m}I_n\right)$$

קיבלנו כי $A^m\in\text{span}\{I_n,A,A^2,\ldots,A^{m-1}\}$.

שאלה 4

א)

$$A=\begin{pmatrix} i & i & 0\\ i & i & 0\\ 0 & 0 & 2i\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \bar{A}=\begin{pmatrix} -i & -i & 0\\ -i & -i & 0\\ 0 & 0 & -2i\end{pmatrix}\neq A$$

לכן A לא צמודה לעצמה.

$$A\bar{A}=\begin{pmatrix} i & i & 0 \\ i & i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -i & -i & 0 \\ -i & -i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A\bar{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\neq I$$

לכן A לא אוניטרית.

$$\bar{A}A=\begin{pmatrix} -i & -i & 0 \\ -i & -i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} i & i & 0 \\ i & i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A\bar{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\bar{A}A$$

לכן A נורמלית.

ב) A נורמלית לכן היא לכסינה אוניטרית. נמצא את הפולינום אופייני:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda)&=\left|\lambda I-A\right| \\ &=\begin{vmatrix} \lambda-i & -i & 0 \\ -i & \lambda-i & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2i \end{vmatrix} \\ &=(\lambda-2i)\left[(\lambda-i)^2+1\right] \\ &=(\lambda-2i)\left(\lambda^2-2i\lambda\right) \\ &=\lambda(\lambda-2i)^2 \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=2i$ ריבוי אלגברי 2 .

$\lambda=0$ ריבוי אלגברי 1 .

<u>מרחב עצמי של $\lambda=2i$:</u>

$$(A-2iI)=\begin{pmatrix} -i & i & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+R_1}\begin{pmatrix} -i & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to iR_1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}y+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}z$, $y,z\in\mathbb{R}$.

$$V_{2i} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נסמן את הווקטורין עצמיים:

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda = 0$:</u>

$$(A - 0I) = \begin{pmatrix} i & i & 0 \\ i & i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} i & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to \frac{-i}{2} R_3]{R_1 \to -iR_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון: $y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R}$.

$$V_0 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

נסמן את הווקטור עצמי:

$$\mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$A = PDP^{P}-1 .$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

נחשב בסיס אורתוגונלי באמצעות התהליך גרם שמידט:

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

לכן מצאנו את הבסיס אורתוגונלי

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} , \qquad u_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} , \qquad u_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} .$$

ננרמל:

$$\hat{u}_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} , \qquad \hat{u}_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} , \qquad \hat{u}_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} .$$

$$A = QD\bar{Q} = QDQ^{-1} , \quad D = \begin{pmatrix}2i&0&0\\0&2i&0\\0&0&0\end{pmatrix} , \qquad Q = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\end{pmatrix} .$$

שאלה 5

א) נוכיח כי u_1, u_2 בת"ל. נרשום

(*1)
$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0$$

כאשר α_1, α_2 סקלרים. נכפיל ב- A:

(*2)
$$A\alpha_1 u_1 + A\alpha_2 u_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1\lambda_1 u_1 + \alpha_2\lambda_2 u_2 = 0 .$$

נכפיל (*1) ב- λ_1:

(*3)
$$\lambda_1\alpha_1 u_1 + \lambda_1\alpha_2 u_2 = 0$$

נקח את החיסור (*3)-(*2):

$$\lambda_1\alpha_2 u_2 - \lambda_2\alpha_2 u_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_2 u_2 = 0 .$$

u_2 וקטור עצמי $\Leftarrow$ $u_2 \neq 0$.

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ (נתון) $\Leftarrow$ $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, לכן

$$\alpha_2 = 0 .$$

נציב זה ב- (1*) ונקבל

$$\alpha_1 u_1 = 0 \ .$$

u_1 ווקטור עצמי $\Leftarrow u_1 \neq 0$ לפיכך

$$\alpha_1 = 0 \ .$$

לכן (1*) מתקיים רק אם $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ לפיכך u_1, u_2 בת"ל.

נוכיח כי u_1, u_2, u_3 בת"ל. נרשום

$$\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 = 0 \qquad (\#1)$$

כאשר $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ סקלרים. נכפיל ב- A:

$$A\beta_1 u_1 + A\beta_2 u_2 + A\beta_3 u_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1\beta_1 u_1 + \lambda_2\beta_2 u_2 + \lambda_3\beta_3 u_3 = 0 \ . \qquad (\#2)$$

נכפיל (1#) ב- λ_3:

$$\lambda_3\beta_1 u_1 + \lambda_3\beta_2 u_2 + \lambda_3\beta_3 u_3 = 0 \qquad (\#3)$$

נקח את החיסור (3#)-(2#):

$$(\lambda_3 - \lambda_1)\beta_1 u_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)\beta_2 u_2 = 0 \ .$$

u_1 ו- u_2 בת"ל אז זה מתקיים רק אם

$$(\lambda_3 - \lambda_1)\beta_1 = 0 \ , \qquad (\lambda_3 - \lambda_2)\beta_2 = 0 \ .$$

u_1, u_2 ווקטורים עצמיים לכן $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$.
$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \Leftarrow \lambda_3 - \lambda_1 \neq 0$ ו- $\lambda_3 - \lambda_2 \neq 0$.
לכן $\beta_1 = 0$ ו- $\beta_2 = 0$.
נציב זה ב- (1#):

$$\beta_3 u_3 = 0 \ .$$

u_3 ווקטור עצמי $\Leftarrow u_3 \neq 0$ לכן

$$\beta_3 = 0 \ .$$

מצאנו כי (3#) מתקיים רק אם $\beta_1, \beta_2, \beta_3 = 0$ לכן u_1, u_2, u_3 בת"ל.

ב) ווקטורים עצמיים של המטריצה אוניטרית מהווים בסיס אורתוגונלי.
לפי זה, אם A אוניטרית אז הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ מהווה בסיס אורתוגונלי.

ג) לא.
אם A אוניטרית אז הערך מוחלט של על ערך עצמי יהיה 1.
יש לנו 3 ערכים עצמיים שונים, אז כדי שהערך מוחלט של כל אחד ייה שווה ל- 1. אז בהכרך לפחות אחד יהיה מספר מרוכב.