המחלקה למדעי המחשב

24/07/2025
09 : 00 – 12 : 00

חדו"א 2 למדמ"ח

מועד ב'

ד"ר מרינה ברשדסקי ד"ר ירמיהו מילר ד"ר זהבה צבי

תשפ"ה סמסטר ב'

בהצלחה!

השאלון מכיל 6 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

סדר התשובות הינו חשוב. הסבירו היטב את מהלך הפתרון.

תשובה ללא הסבר (גם נכונה) לא תתקבל.

חומר עזר:

- מחשבון (ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן).
- דפי הנוסחאות המצורפים לשאלון המבחן.

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- שאלות 1,2,3 - יש לענות על כל השאלות.
- שאלות 4,5,6 - יש לענות שתי שאלות בלבד מתוך שלוש.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה אחת בלבד מתוך שתיים.

שאלות $1-3$ **חובה**

שאלה 1 **(24 נקודות)** נתונה הפונקציה

$$z(x,y)=\frac{x^3}{3}+xy^2+5$$

א) (12 נק') מצאו אקסטרמומים לוקליים של פונקציה זו ובררו את סוגן.

ב) (12 נק') בתחום החסום ע"י עיגול ברדיוס 2

$$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 4\}$$

מצאו את הערך הגודל ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה הנתונה.

שאלה 2 **(18 נקודות)**

א) (9 נק') שרטטו את תחום האינטגרציה, שנו את סדר האינטגרציה באינטגרל

$$\int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{x+9}xy\,dy$$

ב) (9 נק') חשבו אינטגרל של סעיף א' בשני דרכים לפי נתון ואחרי שינוי סדר האינטגרציה. (כך בדקו תשובה נכונה).

שאלה 3 **(18 נקודות)**

א) (9 נק') מצאו פתרון כללי של המשוואה הבא:

$$\begin{cases}(2x-1)dy=(y+1)dx,\\ y(5)=0\end{cases}$$

ב) (9 נק') מצאו תחום התכנסות של טור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n}$$

תענו על 2 **מתוך** 3 **השאלות** $4-6$

שאלה 4 (12 נקודות)

א) (6 נק') חשבו בעזרת אינטגרל כפול את נפח הגוף החסום ע"י המשטחים:

$$x+y+z=3, \quad x^2+y^2=1, \quad z=0 \ .$$

ב) (6 נק') פתרו את המשוואה הדיפרנציאלית:

$$y' \cot x + y - 2 = 0 \ .$$

שאלה 5 (12 נקודות) נתונה פונקציה:

$$z = \frac{xy}{x^2-y}$$

א) (6 נק') רשום משוואת המישור המשיק לגרף של פונקציה זו בנקודה שבה $x=2, \ \ y=3$.

ב) (6 נק') האם קיים כיוון a היוצא מנקודה $M(2,3)$ כך ש-

$$\frac{dz}{da}(M) = 25 \ ?$$

מתכנס.

שאלה 6 (12 נקודות) מצאו את תחום ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{2^n+1} \ .$$

פתור אחת מבין השאלות $7-8$

שאלה 7 (16 נקודות) מצאו את הנקודות על המשטח

$$x^2+y^2+z^2=55$$

כך שמישורים המשיקים למשטח זה בנקודות האלה יהיו מקבילים למישור הנתון על ידי המשוואה

$$2x - \frac{1}{3}y - \sqrt{2}z - 2 = 0 \ .$$

שאלה 8 (16 נקודות) על המישור $x+y-z=2$ מצאו את הנקודה P אשר קרובה ביותר למשטח

$$x^2+y^2+z^2+4y+3=0 \ .$$

פתרונות

שאלה 1

א) (12 נק') התנאי ההכרחי לנקודת קיצון הוא:

$$\left.\begin{array}{c} f_x = x^2 + y^2 \stackrel{!}{=} 0, \\ f_y = 2xy \stackrel{!}{=} 0, \end{array}\right\}$$

נקבל את נקודות קריטיות $(0,0)$. כעת נבדוק את המבחן הדלטה:

$$f''_{xx} = 2x \ , \quad f''_{yy} = 2y \ , \quad f''_{xy} = 2y \ .$$

לכן בנקודה $(0,0)$:

$$f''_{xx}(0,0) = 0 \ , \quad f''_{yy}(0,0) = 0 \ , \quad f''_{xy}(0,0) = 0 \ , \quad \Rightarrow \quad \Delta(0,0) = 0$$

לפיכך המבחן דלטה לא נותן תשובה ז"א לא אפשרי להסיק אם סוגה של הנקודת קריטית $(0,0)$.

ב) (12 נק')
נמצא את הנקודות המועמדות לקיצון של פונקצית המטרה בכפוף לאילוץ
$x^2 + y^2 - 4 = 0.$ פונקציה לגרנז' המתאימה הינה

$$L(x,y,\lambda) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + 5 - \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

$$\left\{\begin{array}{c} f_x = x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0, \\ f_y = 2xy - 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{array}\right.$$

פתרון של מערכת נותנת נקודות הבאות:
$(-\sqrt{2},\sqrt{2}), (\sqrt{2},-\sqrt{2}), (-2,0), (2,0), (-\sqrt{2},-\sqrt{2}), (\sqrt{2},-\sqrt{2})$
קביעת נקודות הקיצון המוחלט נעשה ע"י חיפוש ערך של פונקציה.

$$z(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = 1.23, \quad z(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 8.77, \quad z(-2,0) = 2.33, \quad z(2,0) = 7.67,$$

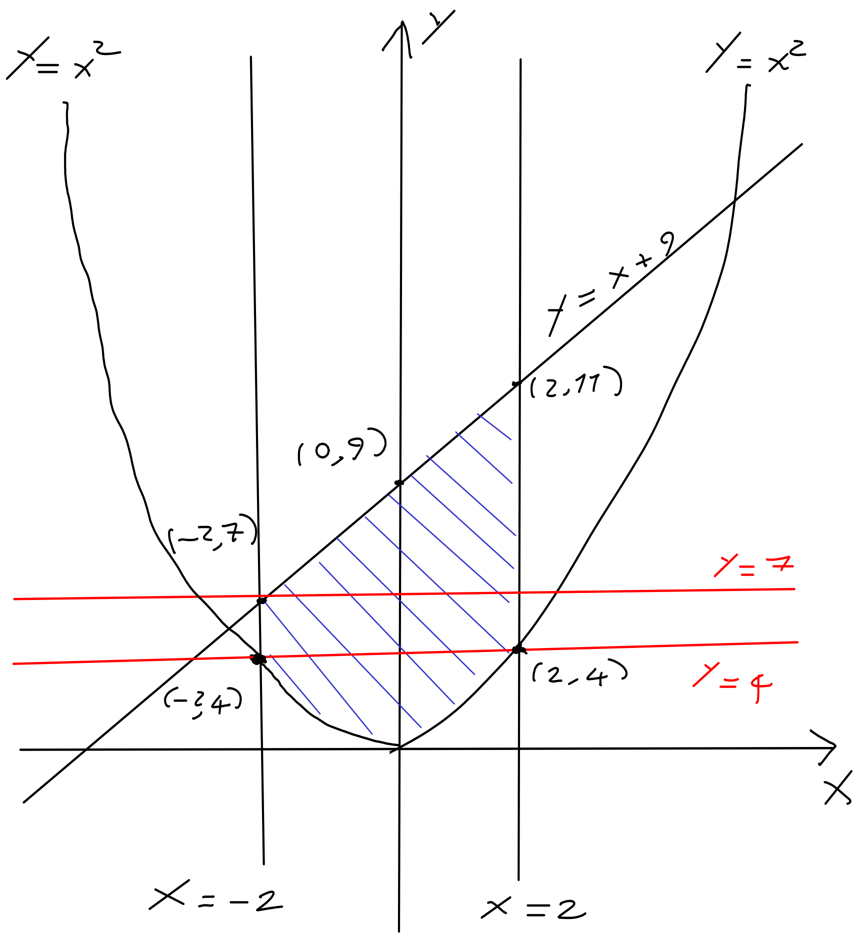
$$z(0,0) = 5, \ \ z(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 1.23 \quad , \quad z(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 8.77$$

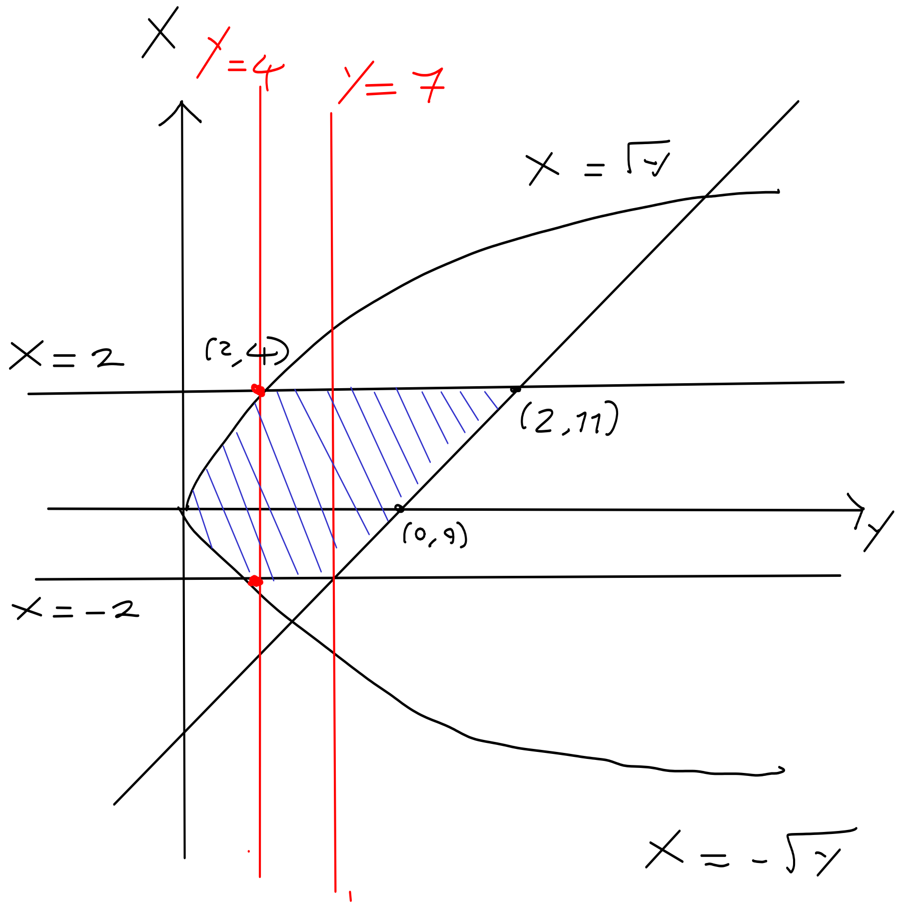
תשובה:

$$z_{max}(\sqrt{2},\sqrt{2}) = z_{max}(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 8.77$$
$$z_{min}(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = z_{min}(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 1.23$$

שאלה 2

א) (9 נק')





התחום, ביחס לצירים הפוכים מתחלק ל-3 תחומים: $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, כאשר:

$$D_1 = \{0 \le y \le 4 \ , \ -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}\}$$
$$D_2 = \{4 \le y \le 7 \ , \ -2 \le x \le 2\}$$
$$D_3 = \{7 \le y \le 11 \ , \ y-9 \le x \le 2\}$$

לכן האינטגרל, בסדר ההפוך של המשתנים x, y הוא

$$\iint_D xy\,dxdy = \iint_{D_1} xy\,dxdy + \iint_{D_2} xy\,dxdy + \iint_{D_3} xy\,dxdy$$
$$= \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xydx + \int_4^7 dy \int_{-2}^{2} xydx + \int_7^{11} dy \int_{y-9}^{2} xydx$$

ב) (9 נק')

חישוב של האינטגרל:

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{x+9} xy \ , dy = \int_{-2}^{2} dxx \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x+9}$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} dx \left(x\left(x+9\right)^2 - x^5\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} dx \left(x^3 + 18x^2 + 81x - x^5\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} + 6x^3 + \frac{81}{2}x^2 - \frac{x^6}{6}\right]_{-2}^{2}$$
$$= \frac{1}{2}(2)(6)(2^3)$$
$$= 48 \ .$$

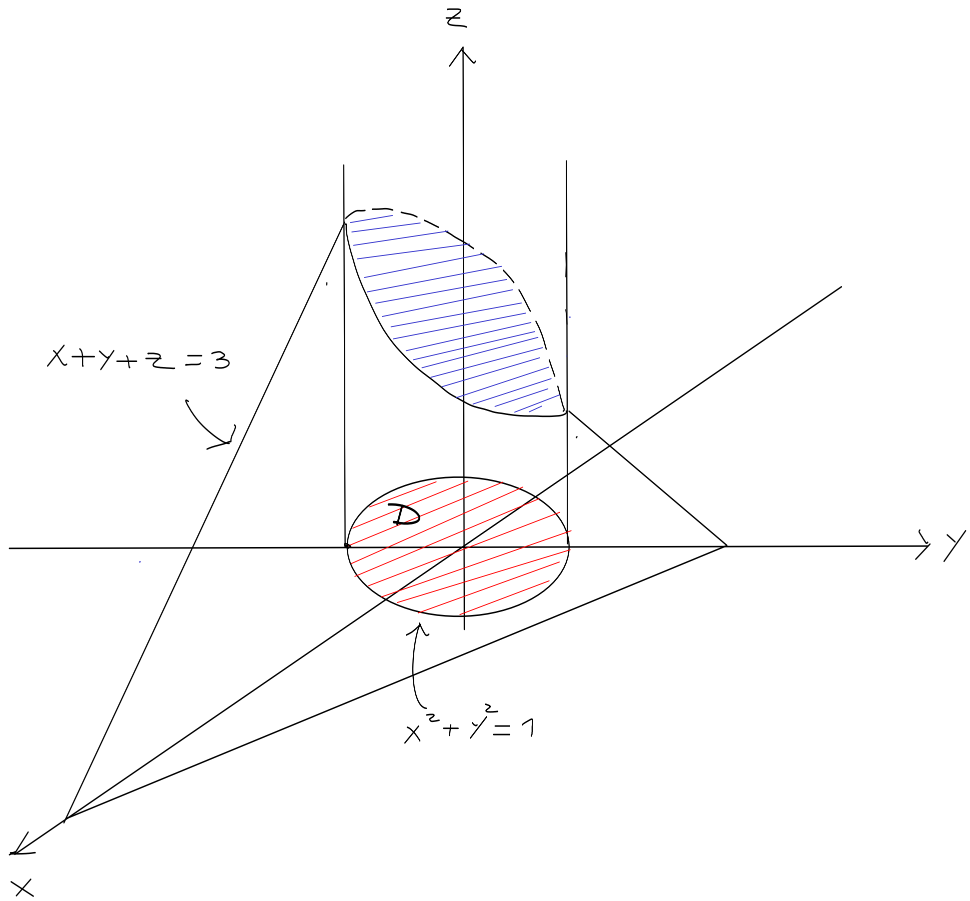
שאלה 3

א) (9 נק')

ב) (9 נק')

שאלה 4 (12 נקודות)

א) (6 נק')



בחינה של המשוואות מראה שמדובר בשטח שחסום מתחת לגרף הפונקציה $f(x,y)=3-x-y$ מעל לתחום $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2\leq 1\right\}$. מאחר ומדובר בתחום מעגלי מומלץ לעבור לחישוב בקואורדינטות פולריות כאשר חשוב לא לשכוח את היעקוביאן:

$$
\begin{aligned}
V &= \iint\limits_D (3-x-y)\,dx\,dy \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr\, r\,(3r - r\cos\theta - r\sin\theta) \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{3}{2}r^2 - \frac{r^3}{3}(\cos\theta+\sin\theta)\right] \\
&= 3\pi \ .
\end{aligned}
$$

כאשר השוויון האחרון הסתמך על כך שהאינטגרל של סינוס וקוסינוס לאורך מחזור שלם הוא אפס.

ב) (6 נק')

$$\begin{aligned}
y'\cot x =& 2-y\\
\frac{1}{2-y}y' =& \frac{1}{\cot x} = \tan x\\
\int \frac{1}{2-y}y'\,dx =& \int \tan x\,dx\\
\int \frac{1}{2-y}dy =& \int \tan x\,dx\\
-\ln|2-y| =& -\ln(\cos x)+C\\
\ln|2-y| =& \ln(\cos x)-C\\
2-y =& e^{-C}\cos x\\
y =& 2-e^{-C}\cos x\\
y =& A\cos x+2\ ,
\end{aligned}$$

כאשר $A\in\mathbb{R}$ קבוע.

<u>שאלה 5</u> <u>**(12 נקודות)**</u>

א) (6 נק') הנוסחה למשוואת המישור המשיק למשטח רמה $z(x,y)=C$ בנקודה $M(x_0,y_0)$ היא

$$z'_x(M)(x-x_0)+z'_y(M)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

הנגזרות הן

$$z'_x=\frac{y}{x^2-y}-\frac{2x^2y}{\left(x^2-y\right)^2}=-\frac{y\left(x^2+y\right)}{\left(x^2-y\right)^2}\quad\Rightarrow\quad z'_x(M)=-21\ ,$$

ו-

$$z'_y=\frac{xy}{\left(x^2-y\right)^2}+\frac{x}{x^2-y}=\frac{x^3}{\left(x^2-y\right)^2}\quad\Rightarrow\quad z'_y(M)=8\ ,$$

ובנקודה M הערך של הפונקציה עצמה הוא

$$z_0=z(2,3)=6\ .$$

משוואת המישור המשיק לגרף של פונקציה זו בנקודה שבה $x=2,\ y=3$ היא:

$$-21(x-2)+8(y-3)-(z-6)=0\quad\Rightarrow\quad -21x+8y-z+24=0\ .$$

ב) (6 נק') ראשית, נזכיר כי לכל וקטור $a\neq 0$ ובכל נקודה M מתקיים

$$-\left|\nabla z(M)\right|\le\frac{dz(M)}{d\vec{a}}\le\left|\nabla z(M)\right|$$

□ נחשב את $|\nabla z(M)|$ ונבדוק האם תנאי זה מתריים עבור הוקטור $\vec{a}$. מהסעיף הקודם:

$$\nabla z(M) = \left(z'_x(M), z'_y(M)\right) = (-21, 8) \quad \Rightarrow \quad |\nabla z(M)| = |(-21, 8)| = \sqrt{505} \ .$$

ז"א

$$-\sqrt{505} \leq \frac{dz(M)}{d\vec{a}} \leq \sqrt{505}$$

לכל וקטור $\vec{a} \neq 0$ ולכל נקודה M. בפרט, $25 > \sqrt{505}$. לכן לא קיים וקטור $\vec{a}$ עבורו $\frac{dz(M)}{d\vec{a}} = 25$, כי הערך הזה לא בתחום המותר.

שאלה 6 (12 נקודות)

נרשום את הטור בצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \ , \qquad a_n = \frac{3^n}{2^n + 1} \ .$$

רדיוס התכנסות:

לפי הנוסחת דלמבר לרדיוס התכנסות:

$$\begin{aligned}
R &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3^n}{2^n+1}\right)}{\left(\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}+1}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^n}{3^{n+1}}\right) \left(\frac{2^{n+1}+1}{2^n+1}\right) \\
&= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(\frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}}\right)}{\left(\frac{2^n+1}{2^{n+1}}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{3}(2) = \frac{2}{3} \ .
\end{aligned}$$

לכן הטור מתכנס לכל $-\frac{2}{3} < x < \frac{3}{3}$.

קצה $x = \frac{2}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n}{2^n+1}\right)x^n \overset{x=\frac{2}{3}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{2^n+1}\right) > \sum_{n=1}^{n}\left(\frac{2^n}{2^n+2^n}\right) = \sum_{n=1}^{n}\frac{1}{2}$$

אשר מתבדר, לכן לפי מבחן השוואה הטור מתבדר בקצה $x=\frac{2}{3}$.

<u>קצה $x=\frac{-2}{3}$:</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n}{2^n+1}\right)x^n \overset{x=\frac{-2}{3}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-2)^n}{2^n+1}\right) = \sum_{n=1}^{n}a_n\ , \quad a_n=\frac{(-1)^n2^n}{2^n+1}\ .$$

$\lim_{n\to\infty}|a_n|\neq 0 \Leftarrow \lim_{n\to\infty}a_n\neq 0 \Leftarrow$ הטור מתבדר בקצה $x=-\frac{2}{3}$.

<u>תשובה סופית:</u>

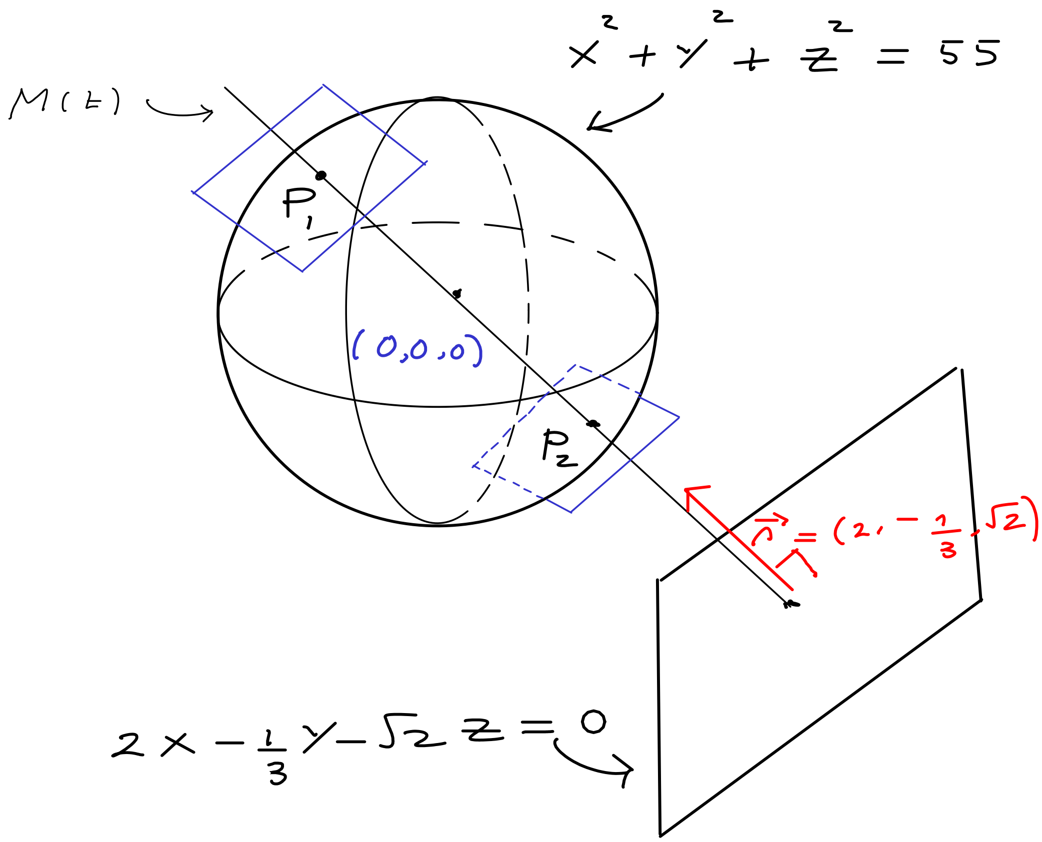
תחום התכנסות: $x\in\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

<u>שאלה 7</u> <u>(16 נקודות)</u>

המשטח $x^2+y^2+z^2=55$ הוא כדור מרדיוס $\sqrt{55}$ שמרכזו בראשית הצירים $P(0,0,0)$.

תהיינה P_1,P_2 הנקודות על המשטח שבהן המישורים המשיקים מקבילים למישור הנתון $2x-\frac{1}{3}y-\sqrt{2}z-2=0$.

אזי הוקטור הנורמל של המישור הוא $\vec{n}=\left(2,-\frac{1}{3},-\sqrt{2}\right)$.



יהי $M(t)$ הישר המחבר בין הנקודות P_1 ו- P_2.

הישר הזה עובר דרך מרכז הכדור ומקביל לוקטור הנומרל של המישור הנתון π:

$$M(t)=(0,0,0)+t\vec{n}=\left(2t,-\frac{1}{3}t,-\sqrt{2}t\right) .$$

הנקודות P_1,P_2 הן הנקודות חיתוך של הישר $M(t)$ עם המשטח. כדי למצוא אותם אנחנו נציב את משוואת הישר במשוואת המשטח:

$$(2t)^2+\frac{t^2}{9}+2t^2=55 \quad\Rightarrow\quad 55t^2=55 \quad\Rightarrow\quad t=\pm 1 .$$

מכאן

$$P_1=M(t=1)=\left(2,-\frac{1}{3},-\sqrt{2}\right) , \qquad P_2=M(t=-1)=\left(-2,\frac{1}{3},\sqrt{2}\right) .$$

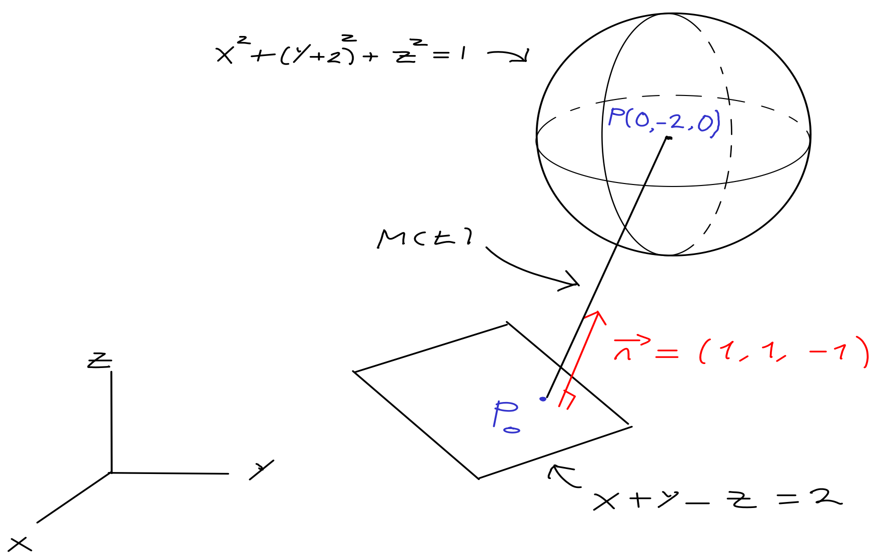
שאלה 8 (16 נקודות)

ניתן לרשום את המשטח בצורה קנונית:

$$x^2 + (y+2)^2 + z^2 = 1$$

שהיא כדור מרדיוס 1 שמרכזו בנקודה $P(0,-2,0)$.

אותה נקודה על המישור הקרובה ביותר למשטח היא גם הנקודה על המישור הקרובה ביותר למרכז הכדור $P(0,-2,0)$, אשר היא ההיטל של הנקודה $P(0,-2,0)$ ביחס למישיר הזה.



נסמן את ההיטל P_0. הנומרל של המישור הוא $\vec{n} = (1,1,-1)$ לכן המשוואת הישר העובר דרך הנקודות P, P_0 היא

$$M(t) = P + t\vec{n} = (0,-2,0) + t(1,1,-1)\ ,$$

כלומר

$$x = t, \quad y = -2+t, \quad z = -t\ .$$

כדי למצוא את P_0 נציב את משוואת הישיר במשוואת המישור:

$$t + (-2+t) - (-t) = 2 \quad \Rightarrow \quad 3t = 4 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{4}{3}\ .$$

לכן $P_0 = M\left(t_0 = \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-4}{3}\right)$