

אלגברה לינארית

תוכן העניינים

3	1 מערכות לינאריות
3	מערכות של משוואות לינאריות
5	פתרון של מערכות לינאריות
10	מטריצת המקדמים ומטריצה המורחבת
15	אלגוריתם הדירוג של גאוס-ג'ורדן
22	קיום וכמות פתרונות למערכת לינארית
29	2 שדות
29	מספרים מרוכבים
31	\mathbb{Z}_p - קבוצת השאריות בחלוקה ב p
37	שדות
39	מערכות לינאריות מעל \mathbb{C}
40	מערכות לינאריות מעל \mathbb{Z}_p
45	3 כפל מטריצות וייצוג מערכת באמצעות $AX = b$
45	מושג של מטריצה
46	מטריצות ריבועיות מיוחדות
47	חיבור מטריצות וכפל מטריצות בסקלר
48	מטריצה משוחלפת
50	כפל מטריצה בווקטור
51	כפל מטריצות
56	מטריצה הפוכה
57	שיטה למציאת מטריצה הופכית
61	הצגת מערכת משוואות באמצעות כפל מטריצות
66	4 דטרמיננטות וכלל קרמר
66	הגדרה של דטרמיננטה של מטריצה ריבועית
78	כלל קרמר
80	5 מרחבים ווקטוריים
80	מרחבים ווקטוריים
81	דוגמאות מרכזיות של מרחבים ווקטוריים
85	6 תת מרחב
91	7 צירוף לינארי ופרישה לינארית
91	הגדרה של צירוף לינארי
95	פרישה לינארי

100	8 תלות לינארית
100	הגדרה של תלות לינארית
104	תכונות של תלות לינארית
108	9 מימד ובסיס
108	בסיס של מרחב ווקטורי
112	מציאת בסיס ומימד של תת מרחב
118	10 מרחב האפס, מרחב העמודות ומרחב השורות
118	דרגת המטריצה
125	ווקטור קואורדינטות לפי בסיס
131	11 מטריצה המעבר מבסיס לבסיס וטנרספורמציות
138	12 העתקות לינאריות
138	תחום, מול-תחום, גרעין ותמונה
141	הגדרה של העתקה לינארית
147	מטריצה המייצגת הסטנדרטית
148	פונקציה על ופונקציה חח"ע
152	הצגת העתקה לינארית בבסיסים שונים
158	קשר בין מרחב העמודות ומרחב האפס להעתקות לינאריות
159	הגדרה של איזומורפיזם
159	האיזומורפיזמים הטבעיים
165	13 חיתוך וסכום תת מרחב
165	הגדרה של חיתוך וסכום של תתי מרחבים
167	משפט המימדים של סכום וחיתוך
170	כיצד למצוא בסיס ומימד של סכום וחיתוך תת מרחב
174	14 סכום ישר

שיעור 1

מערכות לינאריות

1.1 מערכות של משוואות לינאריות

הגדרה 1.1 משוואה ליניארית

משוואה ליניארית במשתנים x_1, x_2, \dots, x_n היא משוואה שניתנת לרשום בצורה

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

כאשר $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$.

1.1 דוגמה

קבעו מי בין המשוואות הבאות היא ליניארית:

$$7x_1 + 3x_2 = 34$$

$$3x + 7y + \sqrt{2} = 4$$

$$3x + 7y + \sqrt{2}z = 3$$

$$3x + 7y + \sqrt{z} = 1$$

$$3xy + 7y = 5$$

פתרון:

$$7x_1 + 3x_2 = 34 \quad \checkmark$$

$$3x + 7y + \sqrt{2} = 4 \quad \checkmark$$

$$3x + 7y + \sqrt{2}z = 3 \quad \checkmark$$

$$3x + 7y + \sqrt{z} = 1 \quad \times$$

$$3xy + 7y = 5 \quad \times$$

הגדרה 1.2 מערכת ליניארית

מערכת ליניארית היא אוסף של m משוואות ב- n משתנים.

1.2 דוגמה

במערכת הבאה

$$x + y = 4$$

$$x - y = 2$$

יש 2 משוואות ו-2 משתנים, (x, y) :

משתנה 1		משתנה 2			
↓		↓			
x	+	y	=	4	משוואה 1
x	-	y	=	2	משוואה 2

1.3 דוגמה

במערכת הבאה

$$x + y - z = 4$$

$$x - 2y + 3z = 7$$

יש 2 משוואות ו-3 משתנים (x, y, z) :

משתנה 1		משתנה 2		משתנה 3			
↓		↓		↓			
x	+	y	-	z	=	4	משוואה 1
x	-	$2y$	+	$3z$	=	7	משוואה 2

1.4 דוגמה

במערכת הבאה

$$x + y - z + w = 3$$

$$x - 2y + 8z - 7w = 7$$

$$x - 2y + 3z + 2w = 7$$

$$x - 2y + 3z - 9w = 10$$

יש 4 משוואות ו-4 משתנים (x, y, z, w) :

משתנה 1		משתנה 2		משתנה 3		משתנה 4		
↓		↓		↓		↓		
x	+	y	-	z	+	w	=	4
x	-	$2y$	+	$8z$	-	$7w$	=	7
x	-	$2y$	+	$3z$	+	$2w$	=	7
x	-	$2y$	+	$3z$	-	$9w$	=	10

באופן כללי, מערכת של m משוואות ב- n משתנים נרשום בצורה

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

הגדרה 1.3 פתרון של מערכת ליניארית

נתונה מערכת ליניארית של n משתנים:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

נגדיר פתרון של המערכת להיות רשימה מסודרת מספרים

$$(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

כך שהצבתם במשתנים המתאימים תהפוך כל משוואה לאמת.

דוגמה 1.5

למערכת

$$x + y = 4$$

$$x - y = 2$$

יש פתרון

$$(x, y) = (3, 1).$$

במילים אחרות אם נציב $x = 3$ ו- $y = 1$ במערכת, הרי האגף השמאול יהיה שווה לאגף הימין בכל משוואה:

$$3 + 1 = 4 \quad \text{אמת}$$

$$3 - 1 = 2 \quad \text{אמת}$$

1.2 פתרון של מערכות לינאריות**דוגמה 1.6**

פתרו את המערכת הליניארית הבאה:

$$x_1 + 2x_2 = 4$$

$$3x_1 + 4x_2 = 2$$

פתרון:

כותבים את המערכת בצורה:

$$R_1: x_1 + 2x_2 = 4$$

$$R_2: 3x_1 + 4x_2 = 2$$

R_1 מסמן את שורה 1 של המערכת ו- R_2 מסמן את שורה 2 של המערכת. כדי לחלץ את x_1 מהמשוואה השנייה, נבצע את הפעולה $R_2 - 3R_1$. כך נקבל

$$R_1: x_1 + 2x_2 = 4$$

$$R_2: \quad \quad - 2x_2 = -10$$

מחלקים את המשוואה השנייה ב- -2 , כלומר $R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2$:

$$\begin{array}{l} R_1: x_1 + 2x_2 = 4 \\ R_2: x_2 = 5 \end{array}$$

קיבלנו $x_2 = 5$. עכשיו מציבים $x_2 = 5$ בהמשוואה הראשונה ונקבל

$$x_1 + 2 \cdot 5 = 4 \Rightarrow x_1 = -6.$$

לכן הפתרון הוא

$$(x_1, x_2) = (-6, 5).$$

דוגמה 1.7

פתרו את המערכת הליניארית הבאה:

$$5x_1 + 10x_2 = 45$$

$$20x_1 - 5x_2 = 90$$

פתרון:

כותבים את המערכת בצורה:

$$R_1: 5x_1 + 10x_2 = 45$$

$$R_2: 20x_1 - 5x_2 = 90$$

במשוואה הראשונה, נהפוך את המקדם של x_1 ל-1 ע"י הפעולה $R_1 \rightarrow \frac{1}{5}R_1$:

$$R_1: x_1 + 2x_2 = 9$$

$$R_2: 20x_1 - 5x_2 = 90$$

כדי לחלץ את x_1 מהמשוואה השנייה, מבצעים את הפעולה $R_2 \rightarrow R_2 - 20R_1$ כך שנקבל

$$R_1: x_1 + 2x_2 = 9$$

$$R_2: -45x_2 = -90$$

מחלקים את משוואה השנייה ב- -45 , כלומר $R_2 \rightarrow -\frac{1}{45}R_2$:

$$R_1: x_1 + 2x_2 = 9$$

$$R_2: x_2 = 2$$

קיבלנו $x_2 = 2$. עכשיו מציבים $x_2 = 2$ בהמשוואה הראשונה ונקבל

$$x_1 + 2 \cdot 2 = 9 \Rightarrow x_1 = 5.$$

לכן הפתרון הוא

$$(x_1, x_2) = (5, 2).$$

1.8 דוגמה

פתרו את המערכת הליניארית הבאה:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 = -2$$

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14$$

פתרון:

$$R_1: x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$R_2: 3x_1 + x_2 - x_3 = -2$$

$$R_3: 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14$$

מבצעים את הפעולה $R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1$ ומקבלים

$$R_1: x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$R_2: -5x_2 - 10x_3 = -20$$

$$R_3: 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14$$

מבצעים את הפעולה $R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1$ ומקבלים

$$R_1: x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$R_2: -5x_2 - 10x_3 = -20$$

$$R_3: -7x_2 - 4x_3 = 2$$

מכפילים את השורה R_2 ב- $-\frac{1}{5}$, כלומר $R_2 \rightarrow -\frac{1}{5}R_2$

$$R_1: x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$R_2: x_2 + 2x_3 = 4$$

$$R_3: -7x_2 - 4x_3 = 2$$

מבצעים את הפעולה $R_3 \rightarrow R_3 + 7R_2$ ומקבלים

$$R_1: x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$R_2: x_2 + 2x_3 = 4$$

$$R_3: 10x_3 = 30$$

$$:R_3 \rightarrow \frac{1}{10}R_3$$

$$R_1: x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$R_2: x_2 + 2x_3 = 4$$

$$R_3: x_3 = 3$$

$$:R_1 \rightarrow R_1 - 3R_3$$

$$R_1: x_1 + 2x_2 = -3$$

$$R_2: x_2 + 2x_3 = 4$$

$$R_3: x_3 = 3$$

$$:R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3$$

$$R_1: x_1 + 2x_2 = -3$$

$$R_2: x_2 = -2$$

$$R_3: x_3 = 3$$

$$:R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2$$

$$\begin{array}{lcl} R_1 : & x_1 & = 1 \\ R_2 : & x_2 & = -2 \\ R_3 : & x_3 & = 3 \end{array}$$

לפי זה, הפתרון שקיבלנו הוא

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -2, 3) .$$

בדיקה:

$$\begin{array}{rclcl} 1 & + & 2 \cdot (-2) & + & 3 \cdot 3 & = & 6 \\ 3 \cdot 1 & + & (-2) & - & 3 & = & -2 \\ 2 \cdot 1 & - & 3 \cdot (-2) & + & 2 \cdot 3 & = & 14 \end{array}$$

1.9 דוגמה

פתרו את המערכת הליניארית הבאה:

$$\begin{array}{l} 4x_1 - 6x_2 + 11x_3 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 = -10 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \end{array}$$

פתרון:

$$\begin{array}{lcl} R_1 : & 4x_1 & - 6x_2 + 11x_3 = 10 \\ R_2 : & 2x_1 & - x_2 + 10x_3 = -10 \\ R_3 : & x_1 & - 2x_2 + 2x_3 = 4 \end{array}$$

מחליפים שורות R_1 ו- R_3 (כלומר מבצעים את פעולת החלפה $(R_1 \leftrightarrow R_3)$):

$$\begin{array}{lcl} R_1 : & x_1 & - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ R_2 : & 2x_1 & - x_2 + 10x_3 = -10 \\ R_3 : & 4x_1 & - 6x_2 + 11x_3 = 10 \end{array}$$

מבצעים את הפעולה $R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$ ומקבלים

$$\begin{array}{lcl} R_1 : & x_1 & - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ R_2 : & & 3x_2 + 6x_3 = -18 \\ R_3 : & 4x_1 & - 6x_2 + 11x_3 = 10 \end{array}$$

מבצעים את הפעולה $R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1$ ומקבלים

$$\begin{array}{lcl} R_1 : & x_1 & - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ R_2 : & & 3x_2 + 6x_3 = -18 \\ R_3 : & & 2x_2 + 3x_3 = -6 \end{array}$$

מכפילים את השורה R_2 ב- $\frac{1}{3}$, כלומר $R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2$

$$R_1 : x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4$$

$$R_2 : x_2 + 2x_3 = -6$$

$$R_3 : 2x_2 + 3x_3 = -6$$

מבצעים את הפעולה $R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2$ ומקבלים

$$R_1 : x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4$$

$$R_2 : x_2 + 2x_3 = -6$$

$$R_3 : -x_3 = 6$$

$$:R_3 \rightarrow -R_3$$

$$R_1 : x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4$$

$$R_2 : x_2 + 2x_3 = -6$$

$$R_3 : x_3 = -6$$

$$:R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3$$

$$R_1 : x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4$$

$$R_2 : x_2 = 6$$

$$R_3 : x_3 = -6$$

$$:R_1 \rightarrow R_1 + 2R_2$$

$$R_1 : x_1 + 2x_3 = 16$$

$$R_2 : x_2 = 6$$

$$R_3 : x_3 = -6$$

$$:R_1 \rightarrow R_1 - 2R_3$$

$$R_1 : x_1 = 28$$

$$R_2 : x_2 = 6$$

$$R_3 : x_3 = -6$$

לפי זה, הפתרון שקיבלנו הוא

$$(x_1, x_2, x_3) = (28, 6, -6) .$$

בדיקה:

$$4 \cdot 28 - 6 \cdot 6 + 11 \cdot (-6) = 10$$

$$2 \cdot 28 - 6 + 10 \cdot (-6) = -10$$

$$28 - 2 \cdot 6 + 2 \cdot (-6) = 4$$

1.3 מטריצת המקדמים ומטריצה המורחבת

1.10 דוגמה

נחזור לדוגמה 1.8:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 = -2$$

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14$$

ונפתור אותה בשיטה יותר מהירה: דירוד המטריצה המורחבת.

פתרון:

$$\text{נתאים שתי מטריצות:} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14 \end{cases} \quad \text{למערכת}$$

$$\bullet \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \end{array} \right) \quad \text{המטריצה המורחבת של המערכת}$$

$$\bullet \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{array} \right) \quad \text{המטריצה המקדמים של המערכת}$$

נפתור את התרגיל לעיל:

$$\begin{array}{ccc}
 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \end{array} \right) \\
 & & \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array} \right) \\
 & & \\
 & \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{5} \cdot R_2} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array} \right) \\
 & & \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 7R_2} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{array} \right) \\
 & & \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow \frac{1}{10} \cdot R_3} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \\
 & & \\
 & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3 \cdot R_3} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \\
 & & \\
 & \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2 \cdot R_3} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \\
 & & \\
 & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2 \cdot R_2} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)
 \end{array}$$

לפי זה הפתרון הוא $(x_1, x_2, x_3) = (1, -2, 3)$. הפתרון מסכים עם התשובה שקיבלנו בדוגמה 1.8 לעיל.

דוגמה 1.11

נחזור לדוגמה 1.9:

$$4x_1 - 6x_2 + 11x_3 = 10$$

$$2x_1 - x_2 + 10x_3 = -10$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4$$

ונפתור אותה ע"י דירוג המטריצה המורחבת.

פתרון:

נרשום את המטריצה המדורגת ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{5} \cdot R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 11 & 10 \\ 2 & -1 & 10 & -10 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 10 & -10 \\ 4 & -6 & 11 & 10 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2 \cdot R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -18 \\ 4 & -6 & 11 & 10 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 4 \cdot R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -18 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{3} \cdot R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2 \cdot R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow -R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 2R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 28 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array} \right)$$

לפי זה הפתרון הוא $(x_1, x_2, x_3) = (28, 6, -6)$. הפתרון מסכים עם התשובה שקיבלנו בדוגמה 1.9 לעיל.

הגדרה 1.4 פעולות אלמנטריות

קיימות שלוש פעולות אלמנטריות:

- פעולה 1:** החלפת שתי שורות
 - פעולה 2:** הכפלת שורה בסקלר $\alpha \neq 0$
 - פעולה 3:** הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת
- $$R_i \leftrightarrow R_j$$
- $$R_i \rightarrow \alpha \cdot R_i$$
- $$R_i \rightarrow R_i + \alpha \cdot R_j$$

הגדרה 1.5 איבר המוביל

בהינתן מטריצה (ללא קשר למערכת ליניארית), האיבר הראשון משמאל השונה מאפס בכל שורה, נקרא איבר מוביל.

דוגמה 1.12

במטריצה

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- האיבר המוביל של השורה הראשונה הוא 3,
- האיבר המוביל של השורה השנייה הוא 4,
- ולשורה השלישית אין איבר מוביל מכיוון שהשורה השלישית כולה אפסים.

הגדרה 1.6 מטריצה מדורגת

מטריצה תיקרא מדורגת אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

- (1) שורות שכולן 0, אם ישנן, נמצאות מתחת השורות שלא כולן 0.
- (2) מספר האפסים לפני איבר מוביל הולך וגדל משורה לשורה עד שמגיעים לשורות אפסים, אם ישנן.

דוגמה 1.13 מטריצות מדורגות

$$\text{מדורגת} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\text{מדורגת} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad 2$$

$$\text{לא מדורגת} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad 3$$

$$\text{לא מדורגת} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad 4$$

$$\text{לא מדורגת} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad 5$$

הגדרה 1.7 מטריצה מדורגת קנונית

מטריצה A תיקרא מדורגת קנונית אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

- (1) שורות שכולן 0 נמצאות מתחת השורות שלא כולן 0.
 - (2) מספר האפסים לפני איבר מוביל הולך וגדל משורה לשורה עד שמגיעים לשורות אפסים.
 - (3) כל איבר מוביל $= 1$.
 - (4) כל איבר המוביל (שחייב שווה 1) הוא האיבר היחיד האיננו שווה ל 0 בעמודה שלו.
- שימו לב, לפי תנאים 1 ו-2 מטריצה חייבת להיות מדורגת כדי להיות גם מדורגת קנונית.

דוגמה 1.14 מטריצות מדורגות קנוניות

המטריצות הבאות מדורגות קנוניות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המטריצות הבאות לא מדורגות קנוניות:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{תנאי 1 לא מתקיים.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{תנאי 2 לא מתקיים.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{תנאי 3 לא מתקיים.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{תנאי 4 לא מתקיים.}$$

1.4 אלגוריתם הדירוג של גאוס-ג'ורדן

בהסבר הבא נשתמש בפעולה 1, פעולה 2 ופעולה 3 מן הפעולות האלמנטריות בהגדרה 1.4. כדי להפוך מטריצה למטריצה מדורגת קנונית יש לעקוב את השלבים הבאים, קרי האלגוריתם הדרוג של גאוס-ג'ורדן:

משפט 1.1 אלגוריתם הדירוג של גאוס-ג'ורדן

שלב 1 אם המטריצה היא מטריצה האפס, אז סיימנו.

שלב 2 מחפשים את העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס, נבחר איבר בעמודה זו, נחלק את השורה שלו בערכו (פעולה 2) על מנת לקבל 1.

שלב 3 נעביר את השורה הזו לשורה ראשונה (פעולה 1).

שלב 4 ע"י פעולות מסוג של פעולה 3, נאפס את כל האיברים שמתחת ה 1 באותה העמודה.

שלב 5 נבצע את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת (לאחר השמטת שורה ראשונה, ו"חלק שמאלי" של אפסים).

עד עכשיו המטריצה מדובר בצורה מדורגת. על מנת לקבל מטריצה מדורגת קנונית, נבצע את שלב האחרון:

שלב 6 נאפס את כל האיברים מעל כל 1 המוביל ל 0 בעזרת פעולה 3.

דוגמה 1.15 אלגוריתם הדירוג של גאוס-ג'ורדן

פתרו את המערכת

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\3x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= 5\end{aligned}$$

פתרון:

כותבים את המטריצה המורחבת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 6 & 5 \end{array} \right)$$

נפתור את המערכת ע"י האלגוריתם.

שלב 1 המטריצה איננה מטריצה האפס (יש בה איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2 העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס היא העמודה הראשונה. האיבר המוביל הוא 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 6 & 5 \end{array} \right)$$

אז נמשיך לשלב 3.

שלב 3 השורה הזו (עם 1 המוביל) הוא כבר נמצא בשורה הראשונה אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4 נאפס את כל האיבר באותה עמודה של ה-1 המוביל שמתחת ה 1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 6 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 6 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

עכשיו כל איבר בעמודה של ה-1 המוביל, כלומר כל איבר שמתחת ה-1 המוביל, שווה 0.

שלב 5 חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת (שמוקפת בכחול להלן)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

שלב 1' המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2' העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס היא העמודה השנייה. נבחר את האיבר "3" בשורה השנייה ונחלק את שורה השנייה ב -3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -6 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

שלב 3' שורה השנייה כבר בשורה הראשונה של המטריצה החלקית אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4' נאפס כל איבר באותה עמודה של ה-1 המוביל שמתחת ה-1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -6 & 3 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

עכשיו כל איבר בעמודה של ה-1 המוביל (שמתחת ה-1 המוביל) שווה ל-0.

שלב 5' אין צורך לחזור לשלבים 1-4 מפני שבשורה הסופית האיבר המוביל כבר שווה 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

שלב 6' מבצעים הצבת אחורה: המערכת המתאימה הינה

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & - & \frac{1}{3}x_3 & = & -\frac{1}{3} \\ & & & & x_3 & = & 0 \end{array}$$

מהמשוואה השלישית:

$$x_3 = 0 .$$

נציב $x_3 = 0$ במשוואה השנייה:

$$x_2 - \frac{1}{3} \cdot (0) = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{3} .$$

נציב $x_2 = -\frac{1}{3}$ ו- $x_3 = 0$ במשוואה הראשונה:

$$x_1 - \frac{1}{3} + 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{4}{3} .$$

לכן הפתרון הוא

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0 \right) .$$

דוגמה 1.16

פתרו את המערכת הליניארית הבאה ע"י השיטה של גאוס-ג'ורדן:

$$\begin{aligned} 4x + 3y - z &= 24 \\ 6x - y + 2z &= -9 \\ 2x + 2y + 3z &= -3. \end{aligned}$$

פתרון:

המטריצה המורחבת של המערכת הינה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & 24 \\ 6 & -1 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array} \right)$$

שלב 1 המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2 העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס היא העמודה הראשונה.

נחלק את שורה הראשונה ב 4:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & 24 \\ 6 & -1 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{4}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 6 & -1 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array} \right)$$

שלב 3 ה-1 המוביל כבר בשורה הראשונה אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4 נאפס כל איבר באותה עמודה של ה-1 המוביל שמתחת ה-1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 6 & -1 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 6 \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2 \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -15 \end{array} \right)$$

עכשיו כל איבר בעמודה של ה-1 המוביל (שמתחת ה-1 המוביל) שווה 0.

שלב 5 חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת (מוקפת בכחול להלן)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -15 \end{array} \right)$$

שלב 1' המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2' העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא העמודה השנייה.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -15 \end{array} \right)$$

נבחר את האיבר " $\frac{1}{2}$ " -ונכפיל שורה השלישית ב 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & \textcircled{1} & 7 & -30 \end{array}\right)$$

שלב 3' מחליפים שורות R_2 ו- R_3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & \textcircled{1} & 7 & -30 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \end{array}\right)$$

שלב 4' נאפס כל איבר שמתחת ה 1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & \textcircled{1} & 7 & -30 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + \frac{11}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & \textcircled{1} & 7 & -30 \\ 0 & 0 & 42 & -210 \end{array}\right)$$

שלב 5' חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת : (המוקפת בכחול להלן):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & \textcircled{1} & 7 & -30 \\ 0 & 0 & \boxed{42} & \boxed{-210} \end{array}\right)$$

שלב 1" המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2" העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא העמודה השלישית.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & \textcircled{1} & 7 & -30 \\ 0 & 0 & \boxed{42} & -210 \end{array}\right)$$

נחלק שורה השלישית ב- 42:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & \textcircled{1} & 7 & -30 \\ 0 & 0 & \boxed{42} & -210 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow \frac{1}{42}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & \textcircled{1} & 7 & -30 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -5 \end{array}\right)$$

שלב 3" השורה עם ה- 1 המוביל כבר בשורה הראשונה של המטריצה החלקית אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4" אין איברים מתחת ה-1 המוביל כי הגענו לשורה האחרונה אז נמשיל לשלב 6.

שלב 5" אין לנו עוד שורות אז נמשיך לשלב 6

שלב 6 נאפס את כל איבר מעל ה- 1 המוביל (הצבת אחור):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & \textcircled{1} & 7 & -30 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + \frac{1}{4} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & \frac{3}{4} & 0 & \frac{19}{4} \\ 0 & \textcircled{1} & 7 & -30 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 7 \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & \frac{3}{4} & 0 & \frac{19}{4} \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - \frac{3}{4} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -5 \end{array}\right)$$

קיבלנו מטריצה מדורגת קנונית.

המערכת המתאימה היא

$$\begin{array}{rcl} x_1 & & = 1 \\ & x_2 & = 5 \\ & & x_3 = -5. \end{array}$$

כך נקבל את הפתרון

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 5, -5).$$

דוגמה 1.17 פתרון מערכת ע"י שיטת גאוס

פתרו את המערכת ליניארית הבאה ע"י השיטה של גאוס-ג'ורדן:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & = & 3 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 18 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 10. \end{array}$$

פתרון:

המטריצה המורחבת של המערכת היא

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & -2 & 4 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

שלב 1 המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2 העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס היא העמודה הראשונה.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & -2 & 4 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

האיבר המוביל של שורה הראשונה שווה ל- 1 אז נמשיך לשלב 3.

שלב 3 השורה כבר בשורה הראשונה, כלומר

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & -2 & 4 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4 נאפס כל איבר באותה עמודה של ה-1 המוביל שמתחת ה-1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & -2 & 4 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2 \cdot R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array} \right)$$

עכשיו כל איבר בעמודה של ה-1 המוביל (שמתחת ה-1 המוביל) שווה ל-0.

שלב 5 חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת (שמוקפת בכחול להלן):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array} \right)$$

שלב 1' המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2' העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא העמודה השנייה.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array} \right)$$

שלב 3' מחליפים שורות R_2 ו- R_3 :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array} \right)$$

שלב 4' כל איבר שמתחת ה-1 המוביל כבר שווה ל-0 אז נמשיך לשלב 5.

שלב 5' חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת שמוקפת בכחול להלן):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array} \right)$$

שלב 1'' המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2'' העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא העמודה השלישית.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array} \right)$$

נחלק שורה השלישית ב-2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 & 6 \end{array}\right)$$

שלב 3 השורה עם ה-1 המוביל בשורה ראשונה של המטריצה החלקית אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4 הגענו לשורה האחרונה אז נמשיך לשלב 6.

שלב 5 אין לנו עוד שורות אז נמשיך לשלב 6

שלב 6 נאפס את כל איבר שנמצא מעל 1 המוביל (הצבת אחור):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 2R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & 0 & 4 & 15 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 & 6 \end{array}\right)$$

בסופו של התהליך קיבלנו מטריצה בצורה מדורגת קנונית. לכן סיימנו.

המערכת המתאימה היא

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & x_4 = 3 \\ x_2 & + & x_4 = 4 \\ x_3 & + & 2x_4 = 6. \end{array}$$

• המשתנים x_1, x_2 ו- x_3 נקראים **משתנים תלויים**, בגלל שהם המשתנים שמתאימים ל- איברי מובילים במטריצה המדורגת.

• המשתנה x_4 נקרא **משתנה חופשי**, מפני שהוא מתאים לאיבר שלא מוביל במטריצה המדורגת.

בתשובה יש משתנה חופשי, x_4 . נרשום את הפתרון כך:

$$\begin{array}{l} x_1 = 3 - x_4, \\ x_2 = 4 - x_4, \\ x_3 = 6 - 2x_4. \end{array}$$

כאשר x_4 יכול לקבל כל מספר ממשי. בדרך כלל מייצגים את הפתרון בצורה הבאה:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3 - t, 4 - t, 6 - 2t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.5 קיום וכמות פתרונות למערכת ליניארית

הגדרה 1.8 משתנה תלוי ומשתנה חופשי

נתונה מטריצה מורחבת מדורגת של מערכת ליניארית:

- משתנה שמתאים לו איבר מוביל יקרא משתנה **תלוי**.
- משתנה שלא מתאים לו איבר מוביל יקרא משתנה **חופשי**.

דוגמה 1.18 משתנה תלוי ומשתנה חופשי

נתונה המערכת

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\x_1 + 14x_2 - 2x_3 &= 0\end{aligned}$$

שנתאים לו מטריצה מורחבת

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 5 & 0 \\1 & 14 & -2 & 0\end{array}\right)$$

נדרג אותו עד שנקבל את המטריצה המדורגת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 5 & 0 \\1 & 14 & -2 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 5 & 0 \\0 & 11 & -7 & 0\end{array}\right)$$

עכשיו נרשום את המערכת המתאימה של המטריצה המדורגת המתקבלת:

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\11x_2 - 7x_3 &= 0\end{aligned}$$

הרי המשתנים x_1 ו- x_2 משתנים תלויים מפני שמתאים להם איברי מובילים. בפרט המקדם של x_1 הוא 1 הוא האיבר המוביל בשורה הרשונה של המטריצה המדורגת. המקדם של x_2 הוא 11 הוא האיבר המוביל בשורה הרשונה של המטריצה המדורגת. המשתנה x_3 משתנה חופשי כי לא מתאים לו איבר מוביל.

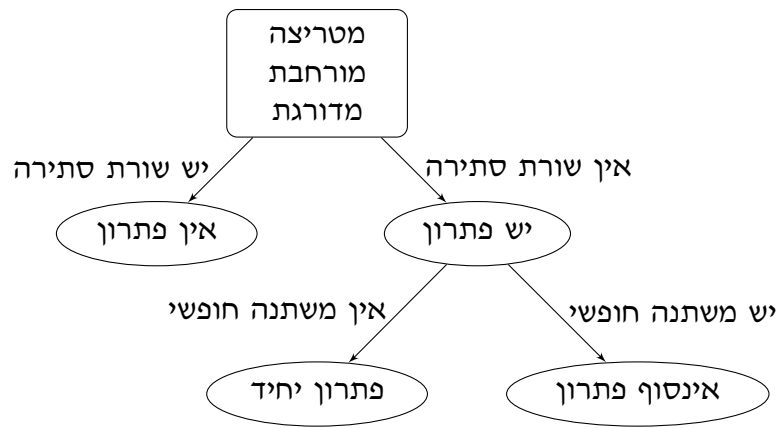
משפט 1.2 קיום וכמות פתרונות למערכת ליניארית

1 למערכת ליניארית יש פתרון אם ורק אם במטריצה מורחבת מדורגת של המערכת אין שורת סתירה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\0 & 0 & \cdots & 0 & b\end{array}\right)$$

2 אם למערכת יש פתרון אז יתכנו 2 אפשרויות:

- (א)** אם במערכת המורחבת המדורגת יש משתנה חופשי אז למערכת יש אינסוף פתרונות.
- (ב)** אם במערכת המורחבת המדורגת אין משתנה חופשי אז למערכת יש פתרון יחיד.



דוגמה 1.19

נתונה המטריצה המורחבת הבאה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

האם למערכת הליניארית המתאימה יש פתרון? אם כן, כמה?

פתרון:

נשים לב שהמטריצה המורחבת בצורה מדורגת.

אין במטריצה המורחבת המדורגת שורת סתירה לכן קיים פתרון.

מאחר ויש משתנה חופשי, z , אז יהיו למערכת אינסוף פתרונות.

בפרט:

$$\left. \begin{array}{l} 2x = 6 \\ 3y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 3 \\ 3y = -z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 3 \\ y = \frac{-z}{3} \end{array} \right\}$$

z יכול לקבל כל מספר ממשי, $z \in \mathbb{R}$. נרשום את הפתרונות בצורה:

$$\left(3, -2, \frac{z}{3} \right) \quad z \in \mathbb{R}.$$

דוגמה 1.20

נתונה המטריצה המורחבת הבאה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 33 & 44 & 234 & 1122 & 343 \\ 0 & 23 & 44 & 667 & 87 \\ 0 & 0 & 0 & 2344 & 5767 \end{array} \right)$$

האם למערכת הליניארית המתאימה יש פתרון? אם כן, כמה?

פתרון:

המטריצה המורחבת של המערכת בצורה מדורגת.

מפני שאין שורת סתירה אז אפשר להסיק שקיים פתרון.

יש משתנה חופשי לכן למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

נוכל להשתמש ברעיון של "הבצה לאחר":

$$\begin{aligned} 33x_1 + 44x_2 + 234x_3 + 1122x_4 &= 343 \\ 23x_2 + 44x_3 + 667x_4 &= 87 \\ 23554x_4 &= 5767 \end{aligned}$$

שימו לב, קיבלנו שלמערכת יש אינסוף פתרונות, לא בגלל שכמות המשתנים גדולה מכמות השוואות.

דוגמה 1.21

תנו דוגמה למערכת בה כמות המשתנים גדולה מכמות המשוואות ואן לה אינסוף פתרונות.

פתרון:

כאשר תהיה שורה סתירה. למשל,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

דוגמה 1.22

נתונה המערכת הליניארית הבאה:

$$\begin{aligned} x + (a-1)y - z &= 4 \\ (a+1)x + (2a-2)y + (a-4)z &= a+10 \\ (a+2)x + (3a-3)y + (2a-7)z &= a+17 \end{aligned}$$

עבור אילו ערכי הפרמטר a למערכת יש

1. פתרון יחיד

2. אין פתרון

3. אינסוף פתרונות?

במקרה של אינסוף פתרונות רשמו את הפתרון הכללי.

פתרון:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ a+1 & 2a-2 & a-4 & a+10 \\ a+2 & 3a-3 & 2a-7 & a+17 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - (a+1)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ 0 & -a^2+2a-1 & 2a-3 & 6-3a \\ a+2 & 3a-3 & 2a-7 & a+17 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - (a+2)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ 0 & -a^2+2a-1 & 2a-3 & 6-3a \\ 0 & -a^2+2a-1 & 3a-5 & 9-3a \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ 0 & -a^2+2a-1 & 2a-3 & 6-3a \\ 0 & 0 & a-2 & 3 \end{array} \right) \\ & = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ 0 & -(a-1)^2 & 2a-3 & 6-3a \\ 0 & 0 & a-2 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

לא יהיה משתנה חופשי אם $a \neq 2$ וגם $(a-1)^2 \neq 0$.
לפיכך קיים פתרון יחיד אם ורק אם $a \neq 2$ וגם $a \neq 1$.

עבור $a = 1$ נקבל

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right) &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

לכן למערכת אינסוף פתרונות. מתקבל

$$x = 1, y \in \mathbb{R}, z = -3.$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$(1, y, -3)$$

כאשר $y \in \mathbb{R}$.

עבור $a = 2$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

וקיבלנו שורת סתירה לכן אין פתרון.

דוגמה 1.23

מצאו את כמות הפתרונות של המערכת הבאה:

$$\begin{aligned} x + (\sqrt{\pi^2 + e} - 1)y - z &= 4 \\ (\sqrt{\pi^2 + e} + 1)x + (2\sqrt{\pi^2 + e} - 2)y + (\sqrt{\pi^2 + e} - 4)z &= \sqrt{\pi^2 + e} + 10 \\ (\sqrt{\pi^2 + e} + 2)x + (3\sqrt{\pi^2 + e} - 3)y + (2\sqrt{\pi^2 + e} - 7)z &= \sqrt{\pi^2 + e} + 17 \end{aligned}$$

פתרון:

המטריצה המורחבת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & (\sqrt{\pi^2 + e} - 1) & -1 & 4 \\ (\sqrt{\pi^2 + e} + 1) & (2\sqrt{\pi^2 + e} - 2) & (\sqrt{\pi^2 + e} - 4) & \sqrt{\pi^2 + e} + 10 \\ (\sqrt{\pi^2 + e} + 2) & (3\sqrt{\pi^2 + e} - 3) & (2\sqrt{\pi^2 + e} - 7) & \sqrt{\pi^2 + e} + 17 \end{array} \right)$$

מבצעים הפעולות האלמנטריות הבאות:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & (\sqrt{\pi^2+e}-1) & -1 & 4 \\ (\sqrt{\pi^2+e}+1) & (2\sqrt{\pi^2+e}-2) & (\sqrt{\pi^2+e}-4) & \sqrt{\pi^2+e}+10 \\ (\sqrt{\pi^2+e}+2) & (3\sqrt{\pi^2+e}-3) & (2\sqrt{\pi^2+e}-7) & \sqrt{\pi^2+e}+17 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - (\sqrt{\pi^2+e}+1)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \sqrt{e+\pi^2}-1 & -1 & 4 \\ 0 & -e+2\sqrt{e+\pi^2}-\pi^2-1 & 2\sqrt{e+\pi^2}-3 & 6-3\sqrt{e+\pi^2} \\ \sqrt{e+\pi^2}+2 & 3\sqrt{e+\pi^2}-3 & 2\sqrt{e+\pi^2}-7 & \sqrt{e+\pi^2}+17 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - (\sqrt{\pi^2+e}+2)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \sqrt{e+\pi^2}-1 & -1 & 4 \\ 0 & -e+2\sqrt{e+\pi^2}-\pi^2-1 & 2\sqrt{e+\pi^2}-3 & 6-3\sqrt{e+\pi^2} \\ 0 & -e+2\sqrt{e+\pi^2}-\pi^2-1 & 3\sqrt{e+\pi^2}-5 & 9-3\sqrt{e+\pi^2} \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \sqrt{e+\pi^2}-1 & -1 & 4 \\ 0 & -e+2\sqrt{e+\pi^2}-\pi^2-1 & 2\sqrt{e+\pi^2}-3 & 6-3\sqrt{e+\pi^2} \\ 0 & 0 & \sqrt{e+\pi^2}-2 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

שימו לב, $e+\pi^2 > 0$ וגם $e+\pi^2 \notin \mathbb{N}$ לפיכך $e+\pi^2 \neq 2$ לכן $\sqrt{e+\pi^2} - 2 \neq 0$.
באותה מידה ניתן להסיק כי $-e+2\sqrt{e+\pi^2}-\pi^2-1 \neq 0$.
לכן אין משתנה חופשי במערכת המורחבת המדורגת, כך שקיים פתרון יחיד.

משפט 1.3

אם ניתן להגיע ממטריצה A למטריצה B ע"י ביצוע מספר סופי של פעולות שורה אלמנטריות, אז ניתן להגיע מהמטריצה B למטריצה A ע"י ביצוע הפעולות ההפוכות.

הוכחה: לכל פעולה יש את הפעולה ההפוכה לה.

- ההפוכה ל $R_i \leftrightarrow R_j$ היא $R_i \leftrightarrow R_j$.
- ההפוכה ל $R_i \rightarrow \alpha \cdot R_i$ היא $R_i \rightarrow \frac{1}{\alpha} R_i$.
- ההפוכה ל $R_i \rightarrow R_i + \alpha R_j$ היא $R_i \rightarrow R_i - \alpha R_j$.

הגדרה 1.9 שקולות שורה

תהינה A ו- B מטריצות. נאמר שהן שקולות שורה אם ניתן להגיע מאחת לשניה ע"י ביצוע מספר סופי פעולות שורה אלמנטריות.

משפט 1.4

אם המטריצות המורחבות של שתי מערכות לינאריות הן שקולות, אז לשתי המערכות יש אותה קבוצת פתרון. כלומר, כל פתרון של המערכת הראשונה הוא פתרון של השנייה, ולהיפך.

דוגמה 1.24

האם המערכות $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 14 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & 6 & 1 \end{array} \right)$ ו- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 12 & 21 \\ 15 & -10 & 30 & 5 \end{array} \right)$ שקולות שורה?

פתרון:

אם נכתוב את המערכות בצורה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} R_1' & 2 & -4 & 6 \\ R_2' & 1 & 3 & 4 \\ R_3' & 3 & -2 & 6 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} R_1 & 1 & -2 & 3 \\ R_2 & 3 & 9 & 12 \\ R_3 & 15 & -10 & 30 \end{array} \right)$$

קל לראות כי $R_1' = 2R_2$, $R_2' = \frac{1}{3}R_2$, ו- $R_3' = \frac{1}{5}R_3$. לכן, מכיוון שאפשר להגיע ממטריצה הראשונה למטריצה השנייה דרך פעולות אלמנטריות, אז המטריצות הן שקולות שורה.

שיעור 2

שדות

2.1 מספרים מרוכבים

”

הגדרה 2.1 מספר מרוכב

זוג סדור $z = (x, y)$ של מספרים ממשיים נקרא מספר מרוכב.

אם $y = 0$ נקבל זוג $(x, 0)$. נסמן $x = (x, 0)$. נגדיר את הפעולות הבאות בין מספרים מרוכבים:

הגדרה 2.2 פעולות בינאריות של מספרים מרוכבים

נניח $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$. אז

(1) חיבור

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

(2) כפל

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

קל לראות:

(1) לכל מספר ממשי $x = (x, 0)$ ולכל מספר מרוכב $z_1 = (x_1, y_1)$ מתקיים

$$x \cdot z_1 = (x \cdot x_1, x \cdot y_1)$$

(2) לכל מספרים ממשיים $(x_1, 0)$ ו- $(x_2, 0)$ מתקיים

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0) = x_1 x_2$$

הגדרה 2.3 i

נסמן

$$i = (0, 1).$$

i היא

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

משפט 2.1 הצגה אלגברית שך מספר מרוכב

תוך שימוש במספר i כל מספר מרוכב $z = (x, y)$ ניתן לרשום

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + iy.$$

$x + iy$ נקרא הצגה אלגברית של מספר מרוכב.

ל- x קוראים החלק הממשי של z . מסמנים $x = \operatorname{Re}(z)$.

ל- y קוראים החלק המדומה של z . מסמנים $y = \operatorname{Im}(z)$.

צורת הכתיבה $x + iy$ מאפשרת לחבר ולהכפיל מספרים רוכבים בקלות בהתחשב ב- $i^2 = -1$.

2.1 דוגמה

א

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 - y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

2.2 דוגמה

$$(3 - 5i) \cdot (2 + 3i) = 6 + 9i - 10i + 15 = 21 - i.$$

2.4 הגדרה הצמוד

המספר הרוכב $x - iy$ נקרא צוד למפר $z = x + iy$. מסנים:

$$\bar{z} = x - iy.$$

2.2 משפט

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2.$$

המספר הזה נקרא ה הערך המוחלט או הגודל של המספר המרוכב z .

2.3 דוגמה

$$\frac{3 + 4i}{1 - i} = \frac{(3 + 4i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{3 + 3i + 4i - 4}{2} = \frac{-1 + 7i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$$

2.4 דוגמה

מצאו את המספר z המקיים את המשוואה

$$\frac{1 - iz}{1 + iz} = -2i.$$

פתרון:

$$1 - iz = -2i(1 + iz) = 2z - 2i \Rightarrow z(2 + i) = 1 + 2i$$

$$z = \frac{1+2i}{2+i} = \frac{(1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i+4i+2}{5} = \frac{4+3i}{5} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$$

קבוצת המספרים המרוכבים מסומנת ב- \mathbb{C} .

אפשר לראות בקלות ש- \mathbb{C} יחד עם שתי הפעולות שהגדרנו בהגדרה 2.7 מקיימת את כל האקסיומות של שדה, כאשר

$$0 = (0, 0)$$

$$1 = (1, 0)$$

ועבור $z = x + iy \neq 0$

$$z^{-1} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2+y^2}.$$

2.2 \mathbb{Z}_p - קבוצת השאריות בחלוקה ב p

הגדרה 2.5 פונקציית שארית

עבור מספרים שלמים k, p הפונקציית השארית $\text{rem}(k, p)$ מוגדרת להיות השארית של k בחילוק ב- p .

דוגמה 2.5

- השארית של 3 בחילוק ב- 2 היא 1. לכן

$$\text{rem}(3, 2) = 1.$$

- השארית של 7 בחילוק ב- 4 היא 3. לכן

$$\text{rem}(7, 4) = 3.$$

- השארית של 11 בחילוק ב- 8 היא 3. לכן

$$\text{rem}(11, 8) = 3.$$

הגדרה 2.6 \mathbb{Z}_p - קבוצת השאריות בחלוקה ב- p

נניח ש p מספר ראשוני. הקבוצה \mathbb{Z}_p היא קבוצת הסימנים

$$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{p-1}\}.$$

הקבוצה מוגדרת לפי התנאים הבאים:

(1) כל איבר הוא מספר שלם וחיובי.

(2) מספרים עם אותה השאריות בחילוק ב- p שווים זה לזה.

(3) לכל מספר שלם k נתאים איבר ב- \mathbb{Z}_p שנסמן \bar{k} ונגדיר

$$\bar{k} = \overline{\text{rem}(k, p)} .$$

2.6 דוגמה

לקבוצה \mathbb{Z}_3 יש 3 איברים:

$$\{\mathbb{Z}_3 = \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} .$$

$$\bar{0} = \overline{\text{rem}(0, 3)} = \bar{0}$$

$$\bar{1} = \overline{\text{rem}(1, 3)} = \bar{1}$$

$$\bar{2} = \overline{\text{rem}(2, 3)} = \bar{2}$$

$$\bar{3} = \overline{\text{rem}(3, 3)} = \bar{0}$$

$$\bar{4} = \overline{\text{rem}(4, 3)} = \bar{1}$$

$$\bar{5} = \overline{\text{rem}(5, 3)} = \bar{2}$$

$$\bar{6} = \overline{\text{rem}(6, 3)} = \bar{0}$$

$$\bar{7} = \overline{\text{rem}(7, 3)} = \bar{1}$$

$$\bar{8} = \overline{\text{rem}(8, 3)} = \bar{2}$$

\vdots

$$\bar{122} = \overline{\text{rem}(122, 3)} = \bar{2}$$

\vdots

ובן הלאה.

2.7 הגדרה פעולות בינאריות של \mathbb{Z}_p איברי

יהי $p \in \mathbb{N}$ מספר ראשוני ותהי $\mathbb{Z}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}$ קבוצת השאריות בחלוקה ב- p . לכל $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_p$ נגדיר את הפעולות חיבור וכפל כך:

(1) חיבור

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$$

(2) כפל

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b} .$$

2.7 דוגמה

חשבו ב- \mathbb{Z}_5 את

$$\bar{2} + \bar{4} \quad (\text{א})$$

(ב) $\bar{3} \cdot \bar{3}$

פתרון:

(א) $\bar{2} + \bar{4} = \overline{2+4} = \bar{6} = \bar{1}$

(ב) $\bar{3} \cdot \bar{3} = \overline{3 \cdot 3} = \bar{9} = \bar{4}$

2.8 דוגמה

חשבו ב- \mathbb{Z}_{11} את

(א) $\bar{3} \cdot \bar{7}$

(ב) $\bar{2} \cdot \bar{8}$

פתרון:

(א) $\bar{3} \cdot \bar{7} = \overline{3 \cdot 7} = \overline{21} = \overline{10}$

(ב) $\bar{2} \cdot \bar{8} = \overline{16} = \bar{5}$

2.9 דוגמה

לוח החיבור של איברים ב- \mathbb{Z}_3 :

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

לוח הכפל של איברים ב- \mathbb{Z}_3 :

·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

2.10 דוגמה

לוח החיבור של איברים של \mathbb{Z}_5

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

לוח הכפל של איברים של \mathbb{Z}_5

·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

נחזור לממשיים. הנגדי של 7 הוא -7 כי $-7 + 7 = 0$.

ההופכי של 7 הוא 7^{-1} , (או $\frac{1}{7}$) כי $\frac{1}{7} \cdot 7 = 1$.

ושוב ל- \mathbb{Z}_3 , מתקיים $\bar{0} = \bar{1} + \bar{2}$ ולכן $\bar{2}$ הוא הנגדי של $\bar{1}$. כלומר:

$$-\bar{1} = \bar{2}.$$

באופן דומה, $\bar{1}$ הוא הנגדי של $\bar{2}$. כלומר $-\bar{2} = \bar{1}$.

מתקיים $\bar{1} = \bar{2} \cdot \bar{2}$ ולכן $\bar{2}$ הוא ההופכי של $\bar{2}$. כלומר $(\bar{2})^{-1} = \bar{2}$.

משפט 2.3 איבר ההופכי ואיבר הנגדי בקבוצה \mathbb{Z}_p

יהי p מספר ראשוני ותהי \mathbb{Z}_p הקבוצה השאריות בחלוקה ב- p .

(א) איבר הנגדי

לכל איבר $a \in \mathbb{Z}_p$ קיים איבר יחיד $-a \in \mathbb{Z}_p$ כך ש-

$$a + (-a) = \bar{0}.$$

האיבר $-a$ נקרא האיבר הנגדי של a .

(ב) איבר ההופכי

לכל איבר $a \in \mathbb{Z}_p$ שונה מאפס (כלומר $a \neq \bar{0}$) קיים איבר יחיד $a^{-1} \in \mathbb{Z}_p$ כך ש-

$$a \cdot a^{-1} = \bar{1}.$$

האיבר a^{-1} נקרא האיבר ההופכי של a .

דוגמה 2.11

מצאו את האיבר הנגדי של $\bar{1}$ ב- \mathbb{Z}_3 .

פתרון:

נשים לב ש-

$$\bar{1} + \bar{2} = \bar{3} = \bar{0}$$

ולכן

$$-\bar{1} = \bar{2}.$$

דוגמה 2.12

מצאו את האיבר הנגדי של $\bar{2}$ ב- \mathbb{Z}_3 .

פתרון:

נשים לב ש-

$$\bar{2} + \bar{1} = \bar{3} = \bar{0}$$

ולכן

$$-\bar{2} = \bar{1}.$$

דוגמה 2.13

מצאו את האיבר הנגדי של $\bar{3}$ ב- \mathbb{Z}_3 .

פתרון:

נשים לב ש-

$$\bar{3} + \bar{0} = \bar{3} = \bar{0}$$

ולכן

$$-\bar{3} = \bar{3}.$$

דוגמה 2.14

איברים הנגדיים של איברים של \mathbb{Z}_3 :

$$-\bar{1} = \bar{2}$$

$$-\bar{2} = \bar{1}$$

$$-\bar{3} = \bar{0}$$

$$-\bar{4} = \bar{2}$$

$$-\bar{5} = \bar{1}$$

$$-\bar{6} = \bar{0}$$

$$-\bar{7} = \bar{2}$$

$$-\bar{8} = \bar{1}$$

⋮

$$-\bar{59} = \bar{1}.$$

2.15 דוגמה

מצאו את האיבר ההופכי של $\bar{2}$ ב- \mathbb{Z}_3 .

פתרון:

$$\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{4} = \bar{1}$$

$$\bar{2}^{-1} = \bar{2} \text{ . לכן}$$

2.16 דוגמה

מצאו את האיבר ההופכי של $\bar{1}$ ב- \mathbb{Z}_3 .

פתרון:

$$\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$$

$$\bar{1}^{-1} = \bar{1} \text{ . לכן}$$

2.17 דוגמה

מצאו את האיבר ההופכי של $\bar{3}$ ב- \mathbb{Z}_5 .

פתרון:

$$\bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{6} = \bar{1}$$

$$\bar{3}^{-1} = \bar{2} \text{ . לכן}$$

2.18 דוגמה

חשבו את האיבר ההופכי של כל האיברים הבאים ב- \mathbb{Z}_5

(א) $\bar{1}$

(ב) $\bar{2}$

(ג) $\bar{3}$

(ד) $\bar{4}$

פתרון:

(א)

$$\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1} \Rightarrow \bar{1}^{-1} = \bar{1}$$

(ב)

$$\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{6} = \bar{1} \Rightarrow \bar{2}^{-1} = \bar{3}$$

(ג)

$$\bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{6} = \bar{1} \Rightarrow \bar{3}^{-1} = \bar{1}$$

(ד)

$$\bar{4} \cdot \bar{4} = \bar{16} = \bar{1} \Rightarrow \bar{4}^{-1} = \bar{1}$$

דוגמה 2.19

חשבו ב- \mathbb{Z}_{11} :

(א) $\bar{3} \cdot \bar{7}$

(ב) $\bar{2} \cdot \bar{8}$

(ג) $-\bar{3}$

(ד) $(\bar{3})^{-1}$

פתרון:

(א) $\bar{3} \cdot \bar{7} = \bar{21} = \bar{10}$

(ב) $\bar{2} \cdot \bar{8} = \bar{16} = \bar{5}$

(ג) $\bar{3} + \bar{8} = \bar{11} = \bar{0} \Rightarrow -\bar{3} = \bar{8}$

(ד) $\bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{12} = \bar{1} \Rightarrow (\bar{3})^{-1} = \bar{4}$

משפט 2.4

עבור $p \in \mathbb{N}$ ראשוני, לכל איבר השונה מאפס בקבוצה $\mathbb{Z}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}$ יש הופכי.

2.3 שדות

הגדרה 2.8 שדה

קבוצה לא ריקה \mathbb{F} , שבה פעולת חיבור "+" ופעולת כפל "." (הפעולות הדו-מקומיות) מוגדרות על הקבוצה, נקראת שדה אם התנאים הבאים מתקיימים. לכל איבר $a \in \mathbb{F}$ ולכל איבר $b \in \mathbb{F}$ ולכל איבר $c \in \mathbb{F}$:

(1) \mathbb{F} סגורה תחת חיבור:

$$a + b \in \mathbb{F}.$$

(2) \mathbb{F} סגורה תחת כפל:

$$a \cdot b \in \mathbb{F}.$$

(3) חוק החילוף I:

$$a + b = b + a$$

(4) חוק החילוף II:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

(5) חוק הקיבוץ I:

$$(a + b) + c = a + (b + c) .$$

(6) חוק הקיבוץ II:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

(7) חוק הפילוג:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c .$$

(8) קיום איבר ניוטרלי:

קיים איבר $0 \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$a + 0 = a .$$

(9) קיום איבר יחיד (האיבר ניוטרל לגבי כפל):

קיים איבר $1 \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$a \cdot 1 = a , \quad 1 \cdot a = a .$$

(10) קיום איבר נגדי:

לכל $a \in \mathbb{F}$ קיים איבר נגדי $(-a) \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$a + (-a) = 0 .$$

(11) קיום איבר הופכי:

לכל $a \in \mathbb{F}$ כך ש $a \neq 0$ קיים איבר $a^{-1} \in \mathbb{F}$ המקיים

$$a \cdot a^{-1} = 1 , \quad a^{-1} \cdot a = 1 .$$

משפט 2.5

יהי \mathbb{F} שדה.

(1) עבור $a \in \mathbb{F}$, האיבר הנגדי החיבורי $-a$ הוא יחיד.

(2) עבור $a \in \mathbb{F}$ ($a \neq 0$), האיבר ההפכי הכפלי a^{-1} הוא יחיד.

דוגמה 2.20

(א) הקבוצה \mathbb{R} של מספרים ממשיים שדה.

(ב) הקבוצה \mathbb{C} של מספרים מרוכבים שדה.

דוגמה 2.21

קבעו אם הקבוצה \mathbb{N} שדה.

פתרון:

\mathbb{N} לא שדה. כדי להראות זאת די למצוא דוגמה נגדית לאחת התכונות:
נבחר $a = 3 \in \mathbb{N}$. לא קיים איבר נגדי שב- \mathbb{N} . הרי

$$-3 + 3 = 0$$

אבל $-3 \notin \mathbb{N}$.

משפט 2.6

יהי \mathbb{F} שדה יהיו $a, b \in \mathbb{F}$, יהי 0 האיבר הנייטרלי הכפלי ו-1 האיבר הנגדי לאיבר הנייטרלי החיבורי.

$$a \cdot 0 = 0 \quad (1)$$

$$a \cdot (-1) = -a \quad (2)$$

$$(3) \quad \text{אם } a \cdot b = 0 \text{ ו- } a \neq 0 \text{ אז } b = 0.$$

הוכחה: תרגיל בית!

2.4 מערכות ליניאריות מעל \mathbb{C}

דוגמה 2.22

$$\text{פתרו את המערכת } \begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 3i \\ 3z_1 + (2-i)z_2 = 4 \end{cases} \text{ מעל } \mathbb{C}.$$

פתרון:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 1+i & 1-i & 3i \\ 3 & 2-i & 4 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_1 \rightarrow (1-i)R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2i & 3+3i \\ 3 & 2-i & 4 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_2 \rightarrow 2R_2-3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2i & 3+3i \\ 0 & 4+4i & -1-9i \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_2 \rightarrow (4-4i)R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2i & 3+3i \\ 0 & 32 & -40-32i \end{array} \right) & \xrightarrow{R_1 \rightarrow 16R_1+iR_2} \left(\begin{array}{cc|c} 32 & 0 & 80+8i \\ 0 & 32 & -40-32i \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{32}R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} + \frac{1}{4}i \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} - i \end{array} \right) \end{aligned}$$

פתרון:

$$z_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{4}i, \quad z_2 = -\frac{5}{4} - i$$

2.5 מערכות ליניאריות מעל \mathbb{Z}_p

2.23 דוגמה

פתור את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_3 :

$$x_1 + x_2 + x_3 = \bar{0}$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = \bar{0}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = \bar{1}$$

פתרון:

המטריצה המורחבת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & -\bar{1} & -\bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right)$$

נבצע שיטת גאוס:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right) &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{1} & \bar{1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right) \end{aligned}$$

נכפיל את השורה השלישית ב $\bar{2}^{-1} = \bar{2}$: מכיוון לכן נבצע את הפעולה הבאה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow \bar{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right)$$

עכשיו נאפס כל איבר מעל ה $\bar{1}$ המוביל בעזרת הפעולות הבאות:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & -\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & -\bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

לכן למערכת יש פתרון יחיד:

$$(x_1, x_2, x_3) = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}) .$$

2.24 דוגמה

פתור את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_5 :

$$x_1 + x_2 + x_3 = \bar{0} ,$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = \bar{1} .$$

פתרון:

המטריצה המורחבת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & -\bar{1} & -\bar{1} & \bar{1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{1} \end{array} \right) .$$

שיטת גאוס:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{1} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{1} \end{array} \right) .$$

נכפיל את השורה השלישית באיבר ההופכי של $\bar{3}$ ב- \mathbb{Z}_5 . נגלה כי

$$\bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{6} = \bar{1} \quad \Rightarrow \quad (\bar{3})^{-1} = \bar{2} ,$$

ולכן

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{1} \end{array} \right) & \xrightarrow{R_3 \rightarrow \bar{2} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) . \end{aligned}$$

המערכת המתאימה היא

$$x_1 = \bar{3} ,$$

$$x_2 + x_3 = \bar{2}$$

ולכן הפתרון הוא

$$x_1 = \bar{3} ,$$

$$x_2 = \bar{2} - x_3 .$$

כלומר,

$$(x_1, x_2, x_3) = (\bar{3}, \bar{2} - x_3, x_3) , \quad x_3 \in \mathbb{Z}_5$$

נשים לב שלמערכת יש חמישה פתרונות:

$x_3 = \bar{0} \Rightarrow (\bar{3}, \bar{2}, \bar{0})$	פתרון 1:
$x_3 = \bar{1} \Rightarrow (\bar{3}, \bar{1}, \bar{1})$	פתרון 2:
$x_3 = \bar{2} \Rightarrow (\bar{3}, \bar{0}, \bar{2})$	פתרון 3:
$x_3 = \bar{3} \Rightarrow (\bar{3}, -\bar{1}, \bar{3}) = (\bar{3}, \bar{4}, \bar{3})$	פתרון 4:
$x_3 = \bar{4} \Rightarrow (\bar{3}, -\bar{2}, \bar{4}) = (\bar{3}, \bar{3}, \bar{4})$	פתרון 5:

2.25 דוגמה

פתור את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_7 :

$$x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{4}x_3 = \bar{0} ,$$

$$\bar{2}x_1 - \bar{3}x_2 + x_3 = \bar{0} .$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{2} & -\bar{3} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{2} \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{7} & \bar{0} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right)$$

המערכת המתאימה הינה

$$x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{4}x_3 = \bar{0}, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_7$$

והפתרון הוא

$$x_1 = -\bar{2}x_2 - \bar{4}x_3 = \bar{5}x_2 + \bar{3}x_3, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_7.$$

כלומר

$$(x_1, x_2, x_3) = (\bar{5}x_2 + \bar{3}x_3, x_2, x_3), \quad x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_7.$$

נשים לב שלמערכת יש $7^2 = 49$ פתרונות.

2.26 דוגמה

תנו דוגמה למערכת ליניארית בעלת 27 פתרונות.

פתרון:

מערכת 1 : המערכת

$$\bar{0}x = \bar{0}.$$

מעל \mathbb{Z}_{27} .

הסבר: זוהי מערכת של משוואה אחת במשתנה אחד, וכל איבר של \mathbb{Z}_{27} מהווה פתרון של המערכת.

מערכת 2 :

$$x + y + z + w = \bar{0}$$

מעל \mathbb{Z}_3 .

הסבר: זוהי מערכת של משוואה אחת בארבעה משתנים. למערכת יש שלושה משתני חופשיים ולכן 3^3 פתרונות.

2.27 דוגמה

פתרו את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_5 :

$$x + \bar{3}y + \bar{2}z = \bar{1},$$

$$\bar{2}x + \bar{4}y + z = \bar{3},$$

$$\bar{3}x + \bar{3}z = \bar{2}.$$

פתרון:

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} \end{array} \right) & \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow \bar{2} \cdot R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - \bar{3} \cdot R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{2} & -\bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{9} & -\bar{3} & -\bar{1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_2 \rightarrow \bar{3}^{-1} R_2 = \bar{2} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{2} & \bar{2} \end{array} \right) \\
 & = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow \bar{3}^{-1} R_3 = \bar{2} R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{4} R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & -\bar{14} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - \bar{3} R_2 - \bar{2} R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{10} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

לפיכך $(x_1, x_2, x_3) = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{4})$.

דוגמה 2.28

פתרו את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_5 :

$$\begin{aligned}
 x + \bar{4}y + z &= \bar{1}, \\
 \bar{3}x + \bar{2}y + \bar{3}z &= \bar{2}, \\
 \bar{4}x + y + \bar{4}z &= \bar{3}.
 \end{aligned}$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{4} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{3} \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{3} R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - \bar{4} R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{10} & \bar{0} & -\bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{15} & \bar{0} & -\bar{1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} \end{array} \right)$$

קיבלנו שורת סתירה לכן למערכת אין פתרון.

דוגמה 2.29

פתרו את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_5 :

$$\begin{aligned}
 \bar{2}x + \bar{3}y + \bar{4}z &= \bar{1}, \\
 x + \bar{2}y + \bar{3}z &= \bar{0}, \\
 \bar{3}x + \bar{2}z &= \bar{1}.
 \end{aligned}$$

פתרון:

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right) & \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - \bar{3} \cdot R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{2} \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & -\bar{1} & -\bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{6} & -\bar{7} & \bar{1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{1} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right) \xrightarrow[= \bar{4} \cdot R_2]{R_2 \rightarrow \bar{4}^{-1} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{12} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - \bar{2} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & -\bar{1} & -\bar{8} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right) \\
 & \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\bar{4}z + \bar{2} = z + \bar{2} \\ y = -\bar{2}z + \bar{4} = \bar{3}z + \bar{4} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

תשובה סופית:

$$(x, y, z) = (z + \bar{2}, \bar{4} + \bar{3}z, z) \quad , z \in \mathbb{Z}_5 .$$

ישנם 5 פתרונות.

שיעור 3

כפל מטריצות וייצוג מערכת באמצעות $AX = b$

3.1 מושג של מטריצה

מטריצה זאת טבלה של מספרים. הצורה הכללית של מטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

A מטריצה מסדר $m \times n$ (m שורות ו- n עמודות).

אם כל האיברים מספרים ממשיים אומרים כי A מטריצה מעל השדה \mathbb{R} בעלת m שורות ו- n עמודות. סימון: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

האיבר בשורה i בעמודה j מסומן

$$A_{ij}$$

האינדקס הראשון, " i " מסמן את משורה, והאינדקס השני " j " מסמן את העמודה. מפתח לזכור האינדקסים:

$$A_{xy}$$

כאשר ה- " x " מסמן את השורה וה- " y " מסמן את העמודה.

3.1 דוגמה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 23 & 45 & 2 \\ 12 & 34 & 67 & 87 & 55 \\ 22 & 33 & 66 & 89 & 19 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 5}.$$

האיבר בשורה 3 בעמודה 4 הוא 89. נסמן

$$A_{34} = 89$$

האיבר בשורה 1 בעמודה 5 הוא 2. נסמן

$$A_{15} = 2$$

האיבר בשורה 2 בעמודה 3 הוא 67. נסמן

$$A_{23} = 67$$



אם $m = n$ למטריצה קוראים מטריצה ריבועית.

3.2 מטריצות ריבועיות מיוחדות

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{מטריצה אלכסונית:}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{מטריצה משולשית עליונה}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{מטריצה משולשית תחתונה}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{מטריצת האפס}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{מטריצה היחידה}$$

דוגמה 3.2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(1) מטריצה אלכסונית.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(2) מטריצה אלכסונית.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(3) מטריצה אלכסונית.}$$

$$(4) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ לא מטריצה אלכסונית.}$$

3.3 חיבור מטריצות וכפל מטריצות בסקלר

הגדרה 3.1 חיבור מטריצות

לכל מטריצות A, B מסדר $m \times n$ מוגדרת מטריצה $A + B$:

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1n} + B_{1n} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2n} + B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} + B_{m1} & A_{m2} + B_{m2} & \cdots & A_{mn} + B_{mn} \end{pmatrix}$$

במילים אחרות, האיבר ה- ij של המטריצה $A + B$ ניתן ע"י

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}.$$

אפשר לחבר מטריצות של אותו גודל בלבד!

לדוגמה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ לא מוגדר!

הגדרה 3.2 כפל מטריצה בסקלר

לכל מטריצות A מסדר $m \times n$:

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \cdots & \alpha A_{1n} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} & \cdots & \alpha A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha A_{m1} & \alpha A_{m2} & \cdots & \alpha A_{mn} \end{pmatrix}$$

במילים אחרות, האיבר ה- ij של המטריצה $\alpha \cdot A$ ניתן ע"י

$$(\alpha \cdot A)_{ij} = \alpha \cdot A_{ij}.$$

דוגמה 3.3 חיבור מטריצות

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 11 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+8 & 5+9 \\ 3+11 & 4+5 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 14 \\ 14 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.4 כפל מטריצה בסקלר

$$7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 & 7 \cdot 2 \\ 7 \cdot 3 & 7 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \end{pmatrix}$$

■

משפט 3.1 תכונות של חיבור מטריצות וכפל מטריצות

יהיו $A, B, C \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ו- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. אזי:

(1) חוק החילוף של חיבור מטריצות:

$$A + B = B + A .$$

(2) חוק הקיבוץ של חיבור מטריצות:

$$(A + B) + C = A + (B + C) .$$

(3)

$$A + 0 = A .$$

(4)

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B .$$

(5)

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A .$$

(6)

$$\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A .$$

הוכחה מיידית מההגדרות.

3.4 מטריצה משוחלפת

הגדרה 3.3 מטריצה משוחלפת

בהינתן מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ (מטריצה בעלת m שורות ו- n עמודות):

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

המטריצה המשוחלפת של A מסומנת ב- A^t והיא מטריצה בעלת n שורות ו- m עמודות המתקבלת מהמטריצה A ע"י להחליף שורות עם עמודות:

$$A^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

במילים אחרות, האיבר ה- i, j של המטריצה המשוחלפת של A ניתן ע"י

$$A_{ij}^t = A_{ji}.$$

דוגמה 3.5 מטריצה משוחלפת

נתונה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ מצאו את המשוחלפת שלה, כלומר A^t .

פתרון:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

משפט 3.2 תכונות של מטריצה משוחלפת

תהינה A, B מטריצה כך שהסכומים והמכפלות מוגדרים ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. מתקיים:

1.

$$(A^t)^t = A$$

2.

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

3.

$$(\alpha A)^t = \alpha A^t$$

4.

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

שימו לב, הסדר השתנה.

הוכחה: תרגיל בית.

3.5 כפל מטריצה בווקטור

הגדרה 3.4 מכפלה של מטריצה בווקטור

תהי $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ מטריצה מסדר $m \times n$ ו- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$ ווקטור מסדר n . המכפלה של המטריצה A עם הווקטור X , שמשומנת $A \cdot X$, נותנת ווקטור מסדר m שמוגדר

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n \\ \vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n A_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n A_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n A_{mj}x_j \end{pmatrix}.$$

במילים אחרות, האיבר ה- i של הווקטור $A \cdot X$ ניתן ע"י

$$(A \cdot X)_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j.$$

כללים של כפל מטריצה בווקטור:

(1) כפל של מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ עם ווקטור $X \in \mathbb{F}^n$ מחזירה ווקטור ב- \mathbb{F}^m .

(2) אפשר להכפיל מטריצה עם ווקטור רק אם מספר העמודות של המטריצה שווה למספר השורות של הווקטור.

דוגמה 3.6 כפל מטריצה בווקטור

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 3 \\ 7 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 122 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.7

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \\ 4 \cdot 3 + 5 \cdot 6 \\ 7 \cdot 3 + 8 \cdot 6 \\ 10 \cdot 3 + 11 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 42 \\ 79 \\ 96 \end{pmatrix}$$

3.6 כפל מטריצות

הגדרה 3.5 מכפלה של שתי מטריצות

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kn} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{m \times k} \text{ מטריצה מסדר } m \times k \text{ ו-} A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mk} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{m \times k}$$

מטריצה מסדר $k \times n$. המכפלה של השתי מטריצות A, B מסומנת $A \cdot B$ ומוגדרת

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + \cdots + A_{1k}B_{k1} & A_{11}B_{12} + \cdots + A_{1k}B_{k2} & \cdots & A_{11}B_{1n} + \cdots + A_{1k}B_{kn} \\ A_{21}B_{11} + \cdots + A_{2k}B_{k1} & A_{21}B_{12} + \cdots + A_{2k}B_{k2} & \cdots & A_{21}B_{1n} + \cdots + A_{2k}B_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B_{11} + \cdots + A_{mk}B_{k1} & A_{m1}B_{12} + \cdots + A_{mk}B_{k2} & \cdots & A_{m1}B_{1n} + \cdots + A_{mk}B_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{p=1}^k A_{1p}B_{p1} & \sum_{p=1}^k A_{1p}B_{p2} & \cdots & \sum_{p=1}^k A_{1p}B_{pn} \\ \sum_{p=1}^k A_{2p}B_{p1} & \sum_{p=1}^k A_{2p}B_{p2} & \cdots & \sum_{p=1}^k A_{2p}B_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{p=1}^k A_{mp}B_{p1} & \sum_{p=1}^k A_{mp}B_{p2} & \cdots & \sum_{p=1}^k A_{mp}B_{pn} \end{pmatrix}$$

במילים אחרות, האיבר ה- ij של המכפלה $A \cdot B$ ניתנת ע"י הנוסחה:

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{p=1}^k A_{ip}B_{pj}.$$

כללים של כפל מטריצות:

(1) ניתן להכפיל מטריצה A במטריצה B רק כאשר A מטריצה מסדר $m \times k$ ו- B מטריצה מסדר $k \times n$. זאת אומרת מספר עמודות של A שווה למספר השורות של B .

(2) אם A מסדר $m \times k$ ו- B מסדר $k \times n$ אז $A \cdot B$ היא מטריצה מסדר $m \times n$.

דוגמה 3.8

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.9

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 8 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 + 0 \cdot 8 + 4 \cdot 1 & -1 \cdot 5 + 0 \cdot 7 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 32 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.10

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 11 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 21 & 1 \cdot 12 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 22 & 1 \cdot 13 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 23 & 1 \cdot 14 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 24 \\ 0 \cdot 11 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 21 & 0 \cdot 12 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 22 & 0 \cdot 13 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 23 & 0 \cdot 14 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & 90 & 96 & 102 \\ 203 & 218 & 233 & 248 \end{pmatrix}$$

הגדרה 3.6 מטריצה היחידה

למטריצה ריבועית מסדר $n \times n$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

קוראים מטריצת היחידה.

דוגמה 3.11

המטריצה $I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה $I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה $I \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

משפט 3.3 כפל מטריצה במטריצה היחידה

(1) תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ו- $I \in \mathbb{F}^{n \times n}$ אז

$$A \cdot I = A.$$

(2) תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ו- $I \in \mathbb{F}^{m \times m}$ אז

$$I \cdot A = A.$$

הוכחה: תרגיל בית!

דוגמה 3.12

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 7 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 8 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 7 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 8 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.13

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

משפט 3.4 תכונות של כפל מטריצות

תהינה A, B, C מטריצות כך שהסכומים והמכפלות מוגדרים ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. אזי

(א) חוק הקיבוץ:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

(ב) חוק הפילוג:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

(ג) חוק הפילוג:

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$$

$$\alpha(A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B) \quad (ד)$$

(ה) אם $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ו- $I_{n \times n}$ מטריצת היחידה מסדר $n \times n$ ו- $I_{m \times m}$ מטריצת היחידה מסדר $m \times m$ אז

$$I_{m \times m} \cdot A = A = A \cdot I_{n \times n}.$$

הוכחה: תרגיל בית!

כלל 3.1 כפל מטריצות לא קומוטטיבית

נתונות $A \in \mathbb{F}^{m \times k}$ ו- $B \in \mathbb{F}^{k \times n}$. באופן כללי, $A \cdot B$ לא בהכרח שווה ל- $B \cdot A$. כלומר

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

באופן כללי.

דוגמה 3.14

אם A מטריצה מסדר 2×3 ו- B מטריצה מסדר 3×4 , אז $A \cdot B$ מוגדר, אבל $B \cdot A$ לא מוגדר.

דוגמה 3.15

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ -13 & 27 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 19 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$$

ז"א $A \cdot B \neq B \cdot A$.

דוגמה 3.16 כפל מטריצה אינה קומוטטיבית

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. חשבו $A \cdot B$ ו- $B \cdot A$. האם A ו- B מתחלפות (קומוטטיביות)?

פתרון:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 27 \end{pmatrix}$$

אבל

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 22 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$ לכן A ו- B לא מתחלפות.

כלל 3.2 מטריצות דומות

נתונות מטריצות A, B, C ו- $A \neq 0$.

אם $AB = AC$ אז B לא בהכרח שווה ל- C . ז"א $B \neq C$ באופן כללי.

דוגמה 3.17

תנו דוגמה של $A, B, C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ כך ש- $AB = AC$ ו- $A \neq 0$ אבל $B \neq C$.

פתרון:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הרי $AB = AC$ ו- $A \neq 0$ אבל $B \neq C$.

כלל 3.3 מכפלה מטריצות המתאפסת

נתונות מטריצות A, B .

אם $AB = 0$ אז A לא בהכרח מטריצה האפס ו- B לא בהכרח מטריצה האפס.

ז"א אם קיימות $A \neq 0$ ו- $B \neq 0$ כך ש- $A \cdot B = 0$.

דוגמה 3.18

תנו דוגמה של $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ כך ש- $A, B \neq 0$ אבל $A \cdot B = 0$.

פתרון:

דוגמה (1) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

דוגמה (2) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \neq 0$

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} b \in \mathbb{R} \neq 0$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

הגדרה 3.7 העלאה מטריצה בחזקה

תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ויהי $k \in \mathbb{N}$. נגדיר

$$A^k = \overbrace{A \cdot A \cdots A}^{k \text{ פעמים}}$$

אם $A \neq 0$, ונגדיר

$$A^0 = I_{n \times n}.$$

3.7 מטריצה הפוכה

הגדרה 3.8 מטריצה הפוכה

נניח ש- A מטריצה ריבועית מסדר $n \times n$. מטריצה ריבועית B מסדר $n \times n$ נקראת ההופכית של A (המטריצה ההפוכה של A) אם מתקיים

$$A \cdot B = B \cdot A = I.$$

סימון: במקום B רושמים A^{-1} . ז"א

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

דוגמה 3.19

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.8 שיטה למציאת מטריצה הופכית

נתונה מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. כדי למצוא את המטריצה ההופכית A^{-1} רושמים

$$(A|I)$$

כאשר $I \in \mathbb{F}^{n \times n}$ המטריצה היחידה מסדר $n \times n$ ונדרג עד שנקבל המטריצה היחידה בצד שמאול:

$$(A|I) \xrightarrow{\text{פעולות אלמנטריות של דירוג}} (I|A^{-1}).$$

3.20 דוגמה

נתונה המטריצה $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

מצאו את A^{-1} .

פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

לפיכך

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3.21 דוגמה

נתונה $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

מצאו את A^{-1} .

פתרון:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \\
 & \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \\
 & \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 6R_2} \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow -\frac{1}{14}R_3} \\
 & \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_3} \\
 & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3R_3} \\
 & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} & & & \end{array} \right) \\
 & A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

משפט 3.5 ההופכית של מטריצה יחידה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. אם ל- A קיימת מטריצה ההופכית אז היא יחידה.

הוכחה:

נניח ש B הופכית של A ו- C הופכית של A , ו- $B \neq C$. אז

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B,$$

בסתירה לכך ש- $B \neq C$.

משפט 3.6 לא כל מטריצה הפיכה

במספרים, אם מספר $a \in \mathbb{R}$ ו- $a \neq 0$ אז קיים a^{-1} .

במטריצות זה לא המצב. ז"א לא לכל מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ קיימת מטריצה הופכית $A^{-1} \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

אם למטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ קיימת $A^{-1} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ אומרים כי A הפיכה.
אם לא קיימת מטריצה הופכית אז אומרים כי A לא הפיכה.

דוגמה 3.22

נתונה $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

מצאו את A^{-1} .

פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2 \cdot R_1}$$

אי אפשר לקבל מטריצה היחידה בצד שמאל ולכן המטריצה לא הפיכה.

דוגמה 3.23

מצאו מטריצה X המקיימת את המשוואה

$$XA = B \quad (\text{א})$$

$$AX = B \quad (\text{ב})$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{כאשר}$$

פתרון:

(א)

$$XA = B \Rightarrow XAA^{-1} = BA^{-1} \Rightarrow X = BA^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 5R_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow -R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow R_1 + 2R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 + 8R_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -19 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -19 & -7 & -8 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ לפיכך}$$

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -19 & -7 & -8 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 \\ -7 & -3 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(ב)

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B .$$

לפיכך

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -19 & -7 & -8 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 \\ -15 & -11 & 15 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

דוגמה 3.24

מצאו מטריצה X המקיימת

$$A \cdot X = B ,$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ כאשר}$$

פתרון:

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B .$$

נחפש את A^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) .$$

לא נוכל להגיע ל- I בצד שמאול, לכן A^{-1} לא קיימת. לכן נפתור בדרך אחרת: נסמן $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ אז

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2z & 3y + 2w \\ 6x + 4z & 6y + 4w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{cases} 3x + 2z = 1 \\ 3y + 2w = -2 \\ 6x + 4z = 2 \\ 6y + 4w = -4 \end{cases}$$

נרשום את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & | & -2 \\ 6 & 0 & 4 & 0 & | & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - 2R_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow \frac{1}{3} \cdot R_1 \\ R_2 \rightarrow \frac{1}{3} \cdot R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & | & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & | & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$x = -\frac{2}{3}z + \frac{1}{3}, \quad y = -\frac{2}{3}w - \frac{2}{3}, \quad , z, w \in \mathbb{R}.$$

לכן

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}z + \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}w - \frac{2}{3} \\ z & w \end{pmatrix},$$

לכל $z, w \in \mathbb{R}$.

משפט 3.7 תכונות של מטריצה הפוכה

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad \text{א)}$$

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \quad \text{ב)}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \quad \text{ג)}$$

הוכחה: תרגיל בית.

3.9 הצגת מערכת משוואות באמצעות כפל מטריצות

נתונה מערכת משוואות ליניאריות:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

נגדיר את המטריצה של מקדמים $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, את הווקטור $b \in \mathbb{F}^m$ ואת המווקטור של משתנים $X \in \mathbb{F}^n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

אז ניתן לרשום את המערכת בתורה

$$A \cdot X = b$$

כלומר

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

דוגמה 3.25

אם נתונה המערכת $\begin{cases} 5x + y - z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$ ניתן לרשום אותה בצורה $AX = b$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

דוגמה 3.26

אם נתונה המערכת $\begin{cases} 7x - y = 1 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ ניתן לרשום אותה בצורה $AX = b$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

דוגמה 3.27

פתרו את המערכת $\begin{cases} 7x - y = 1 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ ע"י מציאת המטריצה ההופכית של מטריצת המקדמים של המערכת.

פתרון:

נרשום את המערכת בצורה $AX = b$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$AX = b \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot b \Rightarrow X = A^{-1} \cdot b$$

נחפש את A^{-1} :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{7}R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{23}{7} & -\frac{2}{7} & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{7}{23}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{23} & \frac{7}{23} \end{array} \right) & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + \frac{1}{7}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{23} & \frac{1}{23} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{23} & \frac{7}{23} \end{array} \right) \end{aligned}$$

לכן

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{23} & \frac{1}{23} \\ -\frac{2}{23} & \frac{7}{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 33 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$(x, y) = \left(\frac{8}{23}, \frac{33}{23} \right) .$$

דוגמה 3.28

פתרו את המערכת $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + 4y = 4 \end{cases}$ ע"י מציאת המטריצה ההופכית של מטריצת המקדמים של המערכת.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

התשובה היא

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$(x, y) = (0, 1) .$$

דוגמה 3.29

$$x + 2y + 3z = 1$$

$$2x - 2y + 4z = 2$$

$$x + y + 5z = 3$$

$$AX = b \Rightarrow X = A^{-1}b$$

כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \\
 & \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \\
 & \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 6R_2} \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow -\frac{1}{14}R_3} \\
 & \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_3} \\
 & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3R_3} \\
 & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} & & & \end{array} \right) \\
 & A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

משפט 3.8 קיום ומספר פתרונות של מערכת משוואות

נתונה מערכת משוואות

$$A \cdot X = b$$

$$\text{כאשר } A \in \mathbb{F}^{n \times n} \text{ מטריצה ריבועית של המקדמים, } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ הווקטור של המשתנים ו- } b \neq 0 \in \mathbb{F}^n$$

הווקטור של הצד ימין של המערכת.

(א) אם A הפיכה אז למערכת קיים פתרון אחד והוא יחיד.

במקרה ש- A לא הפיכה, אז למערכת יש אינסוף פתרונות או לא קיים פתרון.

(ב) אם $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) < n$ אז למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

(ג) אם $\text{rank}(A) \neq \text{rank}(A|b)$ אז למערכת לא קיים פתרון.

הוכחה:

1. תרגיל בית.

2. נלמד את ההוכחה בהמשך הקורס.

3. נלמד את ההוכחה בהמשך הקורס.



שיעור 4

דטרמיננטות וכלל קרמר

4.1 הגדרה של דטרמיננטה של מטריצה ריבועית

נדון רק במטריצה ריבועית.

הדטרמיננטה של מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, תסומן $\det A$ או $|A|$, היא מספר ממשי. באופן דומה, הדטרמיננטה של מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, היא מספר מורכב.

הגדרה 4.1 דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר 2×2

נתונה מטריצה $A \in \mathbb{F}^{2 \times 2}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

הדטרמיננטה של A מוגדרת

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

דוגמה 4.1 דטרמיננטה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad |A| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

■

הגדרה 4.2 דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר 3×3

נתונה מטריצה $A \in \mathbb{F}^{3 \times 3}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ניצן לחשב את הדטרמיננטה של A ע"י כל אחת מהשורות או ע"י כל אחת מהעמודות:
שורה 1:

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

שורה 2:

$$|A| = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

שורה 3:

$$|A| = a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

עמודה 1:

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} .$$

עמודה 2:

$$|A| = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} .$$

עמודה 3:

$$|A| = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} .$$

דוגמה 4.2 דטרמיננטה

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} , \\ |A| &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (4 \cdot 7 - 5 \cdot 0) - 2(0 \cdot 7 - 5 \cdot 6) + 3 \cdot (0 \cdot 0 - 4 \cdot 6) \\ &= 28 + 60 - 72 , \\ &= 16 . \end{aligned}$$

הגדרה 4.3 המינור

נתונה מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. המינור ה- (i, j) של A מסומן ב- M_{ij} ומוגדר להיות הדטרמיננטה של המטריצה הריבועית המתקבלת מ- A ע"י מחיקת שורה i ועמודה j . את המינור ה- (i, j) נסמן ב- M_{ij} .

דוגמה 4.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ עבור } M_{32}, M_{23}, M_{12}, M_{11} \text{ מצאו את}$$

פתרון:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 28 ,$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -30 ,$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -12 ,$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 .$$

הגדרה 4.4 הקופקטור

נתונה מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הקופקטור ה- (i, j) של A מסומן ב- C_{ij} ומוגדר להיות המינור ה- (i, j) כפול $(-1)^{i+j}$:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} .$$

דוגמה 4.4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ עבור } C_{32}, C_{23}, C_{12}, C_{11} \text{ מצאו את } .$$

פתרון:

$$C_{11} = (-1)^2 \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 28 ,$$

$$C_{12} = (-1)^3 \cdot M_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 30 ,$$

$$C_{23} = (-1)^5 \cdot M_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 12 ,$$

$$C_{32} = (-1)^5 \cdot M_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5 .$$

הגדרה 4.5 דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר $n \times n$

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

הדטרמיננטה של A , מסומנת ב- $|A|$. ניתן לחשב את הדטרמיננטה לפי שורה i :

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij} ,$$

כאשר M_{ij} המינור ה- (i, j) של A ו- C_{ij} הקופקטור ה- (i, j) של המטריצה A .

ניתן לחשב את הדטרמיננטה לפי עמודה j :

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij} .$$

למעשה, ניתן לחשב את $|A|$ לפי שורה כלשהי או לפי עמודה כלשהי.

דוגמה 4.5

נסמן $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, מצאו את הדטרמיננטה של המטריצה.

פתרון:

$$\begin{aligned} |A| &\stackrel{\text{שורה ראשונה}}{=} 1 \cdot M_{11} - 5 \cdot M_{12} + 0 \cdot M_{13} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -2 . \end{aligned}$$

נשתעשע....

$$\begin{aligned} |A| &\stackrel{\text{שורה שנייה}}{=} -2 \cdot M_{21} + 4 \cdot M_{22} - (-1) \cdot M_{23} \\ &= -2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -2 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A| &\stackrel{\text{עמודה שלישית}}{=} 0 \cdot M_{13} - (-1) \cdot M_{23} + 0 \cdot M_{33} \\ &= 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -2 . \end{aligned}$$

הערה:

סימני האיברים הם כך:

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

דוגמה 4.6

חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{aligned} |A| &\stackrel{\text{עמודה ראשונה}}{=} 3 \cdot M_{11} - 0 \cdot M_{21} + 0 \cdot M_{31} - 0 \cdot M_{41} + 0 \cdot M_{51} - 0 \cdot M_{61} \\ &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 6 \cdot (-2) = -12. \end{aligned}$$

משפט 4.1 דטרמיננטה של מטריצה משולשית

אם $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה משולשית אז $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$, כלומר מכפלת איברי האלכסון הראשי.

הוכחה: תרגיל בית.

דוגמה 4.7

חשבו

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 19 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 19 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 19 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

משפט 4.2

אם $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית ו- B מטריצה המתקבלת מ- A ע"י הפעולה האלמנטרית:

(1) החלפת 2 שורות, אז

$$|B| = -|A|.$$

(2) הכפלת שורה בסקלר $\alpha \neq 0$, אז

$$|B| = \alpha |A|.$$

(3) הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת, אז

$$|B| = |A|.$$

הוכחה: תרגיל בית.

דוגמה 4.8

$$\text{חשבו את } \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 12 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) = 12 \cdot (-3) = -36.$$

דוגמה 4.9

$$\text{חשבו את } \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 12 & 15 & 18 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 12 & 15 & 18 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 15 & 18 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 28 & 32 & 40 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1} 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 7R_1} 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2} 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 24 \cdot (-3) = -72.$$

דוגמה 4.10

$$\begin{vmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 28 & 35 & 42 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix} \text{ חשבו את}$$

פתרון:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 28 & 35 & 42 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix} &= 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 28 & 35 & 42 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix} = 7 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 49 & 56 & 70 \end{vmatrix} = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} \\ &= 7^3 \cdot \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \right) \\ &= 7^3 \cdot (1 \cdot (50 - 48) - 2 \cdot (40 - 42) + 3 \cdot (32 - 35)) \\ &= 7^3 \cdot (-3) = -1029. \end{aligned}$$

משפט 4.3

$$|\alpha A| = \alpha^n \cdot |A|$$

כאשר A מסדר $n \times n$.

הוכחה: תרגיל בית.

הערה:

כל מטריצה ריבועית A (מסדר $n \times n$) ניתן להעביר למטריצה מדורגת B ע"י ביצוע מספר סופי של פעולות שורה אלמנטריות מסוג החלפת 2 שורות והוספת שורה אחת לשורה אחרת (בלי פעולת הכפלת שורה בסקלר $\alpha \neq 0$). לכן

$$|A| = (-1)^k |B|$$

כאשר k הוא מספר החלפות השורות שביצענו. כמו כן מאחר ו- B משולשית עליונה,

$$|B| = b_{11} \cdot b_{22} \cdot \dots \cdot b_{nn}.$$

משפט 4.4

תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. מתקיים:

$$|A^t| = |A|.$$

הוכחה: תרגיל בית.

דוגמה 4.11

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad |A| = -2,$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad |A^t| = -2.$$

משפט 4.5 משפט המכפלה

תהינה $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. מתקיים:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

הוכחה: תרגיל בית.

דוגמה 4.12

נסמן $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. מצאו את המטריצה AB ואת הדטרמיננטה הבאות: $|AB|$, $|B|$, $|A|$.

פתרון:

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 20 \\ 14 & 13 \end{pmatrix},$$

$$|A| = 12 - 3 = 9,$$

$$|B| = 8 - 3 = 5,$$

$$|AB| = 25 \cdot 13 - 20 \cdot 14 = 45.$$

משפט 4.6

תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ויהי $k \in \mathbb{N}$. מתקיים:

$$|A^k| = |A|^k.$$

הוכחה: תרגיל בית.

דוגמה 4.13

נתונה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $|A| = -2$ מהי A^{2020} ?

פתרון:

$$|A^{2020}| = \underbrace{|A \cdot A \cdots A|}_{2020 \text{ פעמים}} = \underbrace{|A| \cdot |A| \cdots |A|}_{2020 \text{ פעמים}} = |A|^{2020}$$

ולכן $|A^{2020}| = (-2)^{2020}$.

הגדרה 4.6 המטריצה של קופקטורים

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. נגדיר את המטריצה של קופקטורים מסדר $n \times n$:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

כאשר C_{ij} הקופקטור ה- (i, j) של A .

הגדרה 4.7 המטריצה המצורפת

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. המטריצה המצורפת של A היא מטריצה מסדר $n \times n$ שמסומנת $\text{adj}(A)$ ומוגדרת

$$\text{adj}(A) = C^t$$

כאשר C המטריצה של קופקטורים של A .

משפט 4.7 נוסחת קיילי המילטון

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. נניח ש- A הפיכה. אז

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot C^t = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A).$$

הוכחה: מעבר לקורס הזה.

דוגמה 4.14

נתונה $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ חשבו את A^{-1} .

פתרון:

$$M_{11} = -15 \quad C_{11} = 15$$

$$M_{12} = -3 \quad C_{12} = 3$$

$$M_{13} = 6 \quad C_{13} = 6$$

$$M_{21} = -20 \quad C_{21} = 20$$

$$M_{22} = -4 \quad C_{22} = -4$$

$$M_{23} = 2 \quad C_{23} = -2$$

$$M_{31} = -7 \quad C_{31} = -7$$

$$M_{32} = -5 \quad C_{32} = 5$$

$$M_{33} = -2 \quad C_{33} = -2$$

$$C = \begin{pmatrix} -15 & 3 & 6 \\ 20 & -4 & -2 \\ -7 & 5 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} -15 & 20 & -7 \\ 3 & -4 & 5 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = 1 \cdot (-15) + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 18.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -15 & 20 & -7 \\ 3 & -4 & 5 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

משפט 4.8 מטריצה הפיכה

תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$|A| \neq 0$ אם ורק אם A הפיכה.

הוכחה: נניח ש- A הפיכה. אז קיימת A^{-1} כך ש-

$$A \cdot A^{-1} = I.$$

לכן לפי משפט 4.5:

$$|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 1.$$

כלומר $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$. לכן $|A| \neq 0$.

נניח ש- $|A| \neq 0$. נסמן את הסקלר $a = |A| \in \mathbb{F}$. מכיוון ש- $a \neq 0$ אז ההופכית קיים. זאת אומרת $a^{-1} = \frac{1}{|A|}$

קיים. לכן לפי נוסחת קיילי המילטון (משפט 4.7) A^{-1} קיימת. לכן A הפיכה.



דוגמה 4.15

היעזרו במשפט 4.8 לעיל וקבעו האם המטריצה הבאה הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\left| \begin{array}{cccc} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{array} \right| \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1} \left| \begin{array}{cccc} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{array} \right|$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left| \begin{array}{cccc} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{array} \right|$$

$$= 0.$$

לכן A לא הפיכה.

משפט 4.9

תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ הפיכה, אז

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

הוכחה: מתקיים $A^{-1} \cdot A = I$ ולכן $|A \cdot A^{-1}| = |I|$. לפי משפט המכפלה, $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$. נחלק ב- $|A| \neq 0$ ונקבל

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

דוגמה 4.16

נתונה $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ המקיימת $A^3 = 2A^{-1}B$, כאשר $B = \begin{pmatrix} -2 & 3e & \pi \\ 0 & 1 & 23 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. מצאו את $|A|$.

פתרון:

דרך א:

לפי הנתון $A^3 = 2A^{-1}B$, ולכן $|A^3| = |2A^{-1}B|$. לפי משפט המכפלה, $|A|^3 = |2A^{-1}| \cdot |B|$. מאחר ו- $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, נקבל $|A|^3 = 2^3 \cdot |A^{-1}| \cdot |B|$. מכאן,

$$|A|^3 = 2^3 \cdot \frac{1}{|A|} \cdot |B| ,$$

ולכן

$$|A|^4 = 8 \cdot |B| = 8 \cdot 2 = 16 ,$$

ונקבל $|A| = \pm 2$.

דרך ב:

$$\begin{aligned} A \cdot (2A^{-1}B) &= A \cdot A^3 \Rightarrow A^4 = (A \cdot 2A^{-2})B \Rightarrow A^4 = (2 \cdot AA^{-2})B \Rightarrow A^4 = (2 \cdot I)B \\ A^4 &= 2B \Rightarrow |A^4| = |2B| \Rightarrow |A|^4 = 2^3 \cdot |B| \Rightarrow |A|^4 = 8 \cdot 2 = 16 . \end{aligned}$$

דוגמה 4.17

תהינה $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. הוכח או הפרך:

$$|A + B| = |A| + |B| .$$

פתרון:

הטענה איננה נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$|A| = 0 , \quad |B| = 0 ,$$

$$|A + B| = |I| = 1 ,$$

$$|A + B| \neq |A| + |B| .$$

דוגמה 4.18

תהינה $A, B \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$, הפיכות, כך שמתקיים $A + 3B^t = 0$. חשבו את $|A^{-1}B^2(B^t)^{-1}|$.

פתרון:

נשים לב שלא נכון לכתוב

$$A + 3B^t = 0 \Rightarrow |A + 3B^t| = |0| \Rightarrow |A| + |3B^t| = 0 .$$

נחשב

$$|A^{-1}B^2(B^t)^{-1}| = |A^{-1}| \cdot |B^2| \cdot |(B^t)^{-1}| = \frac{1}{|A|} \cdot |B|^2 \cdot \frac{1}{|B^t|} = \frac{1}{|A|} \cdot |B|^2 \cdot \frac{1}{|B|} = \frac{|B|}{|A|} .$$

לפי הנתון $A + 3B^t = 0$ ולכן

$$A = -3B^t \Rightarrow |A| = |-3B^t| \Rightarrow |A| = (-3)^5 |B^t| \Rightarrow |A| = -243 |B| \Rightarrow \frac{|B|}{|A|} = -\frac{1}{243} .$$

דוגמה 4.19

תהינה $X, Y \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ המקיימות

$$XY = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(א) האם X הפיכה?

(ב) עבור $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ מצאו את Y .

פתרון:

(א) נסמן $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. לפי הנתון $XY = A$. נשים לב ש- $|A| = -6$ ולפי משפט המכפלה, $|A| = |XY| = |X| \cdot |Y|$. בפרט, $|X| \neq 0$, ולכן X הפיכה.

(ב) לפי הנתון $XY = A$. הוכחנו ש- X הפיכה, נכפול את שני האגפים משמאל בהופכית של X . נקבל $Y = X^{-1}A$. לאחר חישוב, נקבל ש-

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

לכן

$$Y = X^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ \frac{2}{3} & -2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

4.2 כלל קרמר

משפט 4.10 כלל קרמר

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית הפיכה והי $X \in \mathbb{F}^n$ ווקטור של משתנים:

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

לכל $b \in \mathbb{F}^n$ הפתרון היחיד למערכת $AX = b$ ניתן ע"י

$$x_i = \frac{|A_{ib}|}{|A|}$$

כאשר

$$A_{ib} = \begin{pmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{i-1} & b & a_{i+1} & \dots & a_n \\ | & | & & | & | & | & & | \end{pmatrix},$$

כלומר המטריצה המתקבלת מ- A ע"י החלפת העמודה ה- i ב- b .

הוכחה: תרגיל בית.

דוגמה 4.20

פתרו את המערכת הבאה בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 2. \end{aligned}$$

פתרון:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 2 \end{aligned} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_b$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \text{ ולכן המטריצה הפיכה.}$$

$$|A_1(b)| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x_1 = \frac{|A_1(b)|}{|A|} = \frac{0}{-2} = 0,$$

$$|A_2(b)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

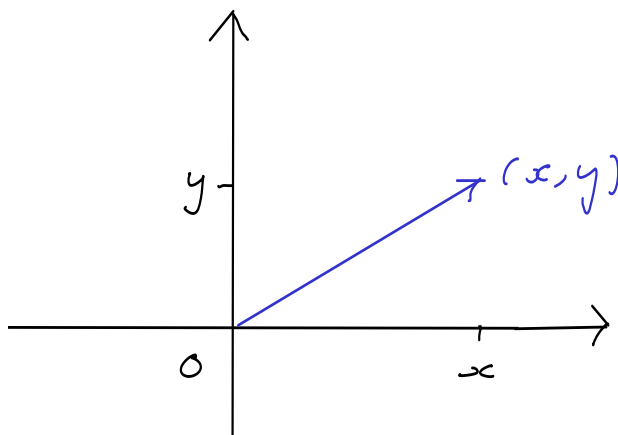
$$x_2 = \frac{|A_2(b)|}{|A|} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

שיעור 5

מרחבים ווקטוריים

5.1 מרחבים ווקטוריים

באלגברה ווקטור במישור תמיד מתחיל בנקודה $(0, 0)$. לכן כל ווקטור במישור נקבע ע"י הנקודה הסופית שלו (x, y) .



לקבוצת כל הווקטורים במישור מסמנים \mathbb{R}^2 .

פעולות ב- \mathbb{R}^2

(1) חיבור ווקטורים:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

(2) כפל של ווקטור בסקלר:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

באופן דומה ניתן להגדיר פעולות בין ווקטורים ב- \mathbb{R}^3 :

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

(1) חיבור ווקטורים:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

(2) כפל של ווקטור בסקלר:

$$\alpha \cdot (x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

באופן כללי נגדיר מרחב ווקטורי \mathbb{R}^n :

הגדרה 5.1 מרחב ווקטורי \mathbb{R}^n

\mathbb{R}^n מוגדר להיות הקבוצה של כל הסטים מ n מספרים ממשיים:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

הפעולות הבאות מוגדרות בין ווקטורים ב- \mathbb{R}^n :

(1) חיבור ווקטורים:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

(2) כפל של ווקטור בסקלר:

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

בדוגמאות האלה הסקלרים שייכים לשדה \mathbb{R} .

באופן דומה הסקלרים יכולים להשתייך לשדה אחר, למשל $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$.

ניתן הגדרה כללית של מרחב ווקטורי מעל שדה \mathbb{F} :

הגדרה 5.2 מרחב ווקטורי מעל שדה \mathbb{F}

קבוצה לא ריקה V נקראת מרחב ווקטורי (מ"ו) מעל שדה \mathbb{F} אם מתקיימים התנאים הבאים (האיברים של V נקראים ווקטורים ואיברי \mathbb{F} נקראים סקלרים). לכל ווקטורים $u, v, w \in V$ וסקלרים $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$:

$$u + v \in V \quad (1)$$

$$\alpha u \in V \quad (2) \text{ קיים ווקטור } \alpha u \in V$$

$$u + v = v + u \quad (3) \text{ (חוק החילוף)}$$

$$(u + v) + w = u + (v + w) \quad (4) \text{ (חוק הקיבוץ)}$$

$$\bar{0} \in V \quad (5) \text{ קיים ווקטור } \bar{0} \in V \text{ (הנקרא ווקטור האפס) כך שלכל } u \in V, \text{ מתקיים } \bar{0} + u = u + \bar{0} = u$$

$$-u \in V \quad (6) \text{ לכל } u \in V \text{ קיים } -u \in V \text{ כך ש- } u + (-u) = \bar{0}$$

$$(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u) \quad (7)$$

$$(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u \quad (8)$$

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v \quad (9)$$

$$1 \cdot u = u \quad (10) \text{ (כאשר } 1 \in \mathbb{F})$$

5.2 דוגמאות מרכזיות של מרחבים ווקטורים

דוגמה 5.1 \mathbb{F}^n

מרחב הווקטורים מעל שדה \mathbb{F} .

דוגמה 5.2 $\mathbb{R}^{m \times n}$

קבוצת כל המטריצות מסדר $m \times n$ עם איברים ממשיים היא מרחב ווקטורי.

לכל שתי מטריצות מסדר $m \times n$ מוגדרת פעולת חיבור וכל מטריצה ניתן להכפיל בסקלר השייך ל \mathbb{R} .

קל לבדוק שכל האקסיומות של מרחב ווקטורי מתקיימות. לכן זה מרחב ווקטורי מעל \mathbb{R} .

דוגמה 5.3 $\mathbb{C}^{m \times n}$

באופן דומה קבוצת כל המטריצות מסדר $m \times n$ עם איברים מרוכבים היא מרחב ווקטורי מעל השדה \mathbb{C} .

דוגמה 5.4 $\mathbb{F}^{m \times n}$

באופן כללי קבוצת כל המטריצות מסדר $m \times n$ עם איברים משדה \mathbb{F} היא מרחב ווקטורי מעל השדה \mathbb{F} .

דוגמה 5.5

$\mathbb{F}[x]$ קבוצת כל הפולינומים עם מקדמים השייכים לשדה \mathbb{F} , שמסומנת ב- $\mathbb{F}[x]$ היא מרחב ווקטורי.

מוגדרות פעולות חיבור פולינומים וכפל של פולינומים בסקלר השייך ל- \mathbb{F} .

כל האקסיומות של מרחב ווקטורי מתקיימות.

דוגמה 5.6 $F(\mathbb{R})$

קבוצת הפונקציות הממשיות שמסומנת ב-

$$F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}\}$$

היא מרחב ווקטורי.

מוגדרות פעולות חיבור פונקציות וכפל פונקציה בסקלר מתוך \mathbb{R} .

נגדיר חיבור וכפל בסקלר כפי שהוגדרו בחדו"א. לכל $f, g \in F(\mathbb{R})$ ולכל $\alpha \in \mathbb{R}$ נגדיר

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ (\alpha \cdot f)(x) &= \alpha \cdot f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ווקטור האפס הוא הפונקציה $f(x) = 0$.

קבוצה זו עם הפעולות הללו היא מרחב ווקטורי.

דוגמה 5.7

נתונים הפולינומים של $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[x]$:

$$P_1 = 7 + 5x + 3x^3 + 4x^7 \in \mathbb{R}[x], \quad P_2 = 6 + 4x + 8x^2 + 3x^7 + 9x^{13} \in \mathbb{R}[x],$$

ונתון הסקלר $\alpha = 3$, חשבו את $P_1 + P_2$ ו- $\alpha \cdot P_1$.

פתרון:

אז

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= (7 + 5x + 3x^3 + 4x^7) + (6 + 4x + 8x^2 + 3x^7 + 9x^{13}) \\ &= (7 + 6) + (5 + 4)x + (0 + 8)x^2 + (3 + 0)x^3 + (4 + 3)x^7 + (0 + 9)x^{13} \in \mathbb{R}[x], \end{aligned}$$

נתון הסקלר $\alpha = 3$:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot P_1 &= 13 + 9x + 8x^2 + 3x^3 + 7x^6 + 9x^{13} \\ &= 3 \cdot (7 + 5x + 3x^3 + 4x^7) \\ &= (3 \cdot 7) + (3 \cdot 5)x + (3 \cdot 3)x^3 + (3 \cdot 4)x^7 \\ &= 21 + 15x + 9x^3 + 12x^7 \in \mathbb{R}[x]. \end{aligned}$$

■

דוגמה 5.8

נתונות הפונקציות $f, g \in F(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = 2x + 19,$$

חשבו את $(7 \cdot f)(x)$ ו- $(f + g)(x)$.

פתרון:

שתיהן פונקציות השייכות ל- $F(\mathbb{R})$.

$$(f + g)(x) = \sin x + 2x + 19.$$

מתקיים:

$$(7 \cdot f)(x) = 7 \cdot \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

דוגמה 5.9 מ

יהו ווקטור האפס של $F(\mathbb{R})$?

פתרון:

פונקצית האפס: פונקציית האפס,

$$O(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

שימו לב שאכן לכל $f \in V$ מתקיים $f + O = f$ כי

$$(f + O)(x) = f(x) + O(x) = f(x) + 0 = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

הנגדי של f זו הפונקציה $-f$ שפעולתה

$$((-1) \cdot f)(x) = (-1) \cdot f(x) = -f(x) , \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$



שיעור 6

תת מרחב

הגדרה 6.1 תת מרחב

נניח כי V מרחב ווקטורי מעל שדה, \mathbb{F} .

תת קבוצה W של V נקראת תת מרחב (ת"מ) של V אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

$$(1) \quad \bar{0} \in W$$

$$(2) \quad \text{לכל } u, v \in W,$$

$$u + v \in W.$$

$$(3) \quad \text{לכל } u \in W \text{ ולכל } \alpha \in \mathbb{F} \text{ מתקיים}$$

$$\alpha \cdot u \in W.$$

דוגמה 6.1

נגדיר $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, W \subseteq \mathbb{R}^2$. האם W תת מרחב של \mathbb{R}^2 ?

פתרון:

לא. דוגמה נגדית:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \notin W.$$

לכן W לא תת מרחב של \mathbb{R}^2 .

דוגמה 6.2

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{R} \right\}.$$

$W \subseteq \mathbb{R}^2$. האם W תת מרחב של \mathbb{R}^2 ?

פתרון:

$$(1) \quad \text{לכל } u = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \in W, v = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \in W,$$

$$u + v = \begin{pmatrix} k + t \\ 2(k + t) \end{pmatrix} \in W,$$

(2) לכל $u = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \in W$, ולכל סקלר $t \in \mathbb{R}$,

$$tu = \begin{pmatrix} tk \\ 2(tk) \end{pmatrix} \in W ,$$

(3)

$$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \in W .$$

לכן השלושה התנאים של תת מרחב בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W תת מרחב של \mathbb{R}^2 .

דוגמה 6.3

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+2 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} .$$

האם W תת מרחב של \mathbb{R}^2 ?

פתרון:

$$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W \text{ לכן } W \text{ לא תת מרחב של } \mathbb{R}^2 .$$

דוגמה 6.4

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x \geq 0, x, y \in \mathbb{R} \right\} .$$

האם W תת מרחב של \mathbb{R}^2 ?

פתרון:

לא. דוגמה נגדית:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in W , \quad (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \notin W .$$

דוגמה 6.5

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 - y^2 = 0 \right\} .$$

האם W תת מרחב של \mathbb{R}^2 ?

פתרון:

לא. דוגמה נגדית:

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in W , \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \in W , \quad u + v = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \notin W .$$

דוגמה 6.6

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right\}.$$

האם W תת מרחב של \mathbb{R}^3 ?

פתרון:

כן:

$$(1) \quad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W \text{ צריך להוכיח כי}$$

$$\begin{cases} 0 - 2 \cdot 0 + 0 = 0 \\ 0 - 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{0} \in W.$$

$$(2) \quad \text{נניח } u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \text{ וז"א מתקיים } \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}. \text{ נקח סקלר } k. \text{ צריך להוכיח: } ku \in W.$$

$$ku = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} kx - 2ky + kz = k(x - 2y + z) = 0 \\ ky - kz = k(y - z) = 0 \end{cases}$$

לכן $ku \in W$.

$$(3) \quad \text{נקח } u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in W, v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in W \text{ וז"א מתקיים}$$

$$\begin{cases} x_2 - 2y_2 + z_2 = 0 \\ y_2 - z_2 = 0 \end{cases} \text{ וגם } \begin{cases} x_1 - 2y_1 + z_1 = 0 \\ y_1 - z_1 = 0 \end{cases}$$

אז

$$u + v = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}.$$

נבדוק אם $u + v \in W$.

$$(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 - 2y_1 + z_1) + (x_2 - 2y_2 + z_2) = 0,$$

$$(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = (y_1 - z_1) + (y_2 - z_2) = 0,$$

לכן $u + v \in W$. לכן השלושה התנאים של תת מרחב בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W תת מרחב של \mathbb{R}^3 .

דוגמה 6.7

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + b + c = d \right\}.$$

האם W תת מרחב של $\mathbb{F}^{2 \times 2}$?

פתרון:

(1)

$$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

$$.0 + 0 + 0 = 0$$

(2) נקח

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W .$$

ז"א מתקיים $a + b + c = d$. נקח סקלר k . אז

$$ku = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} \in W .$$

$$.ku \in W \text{ לכן } ka + kb + kc = k(a + b + c) = kd$$

(3)

$$u = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in W , \quad v = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in W .$$

צריך להוכיח $u + v \in W$.

$$.a_1 + b_1 + c_1 = d_1 \Leftarrow u \in W$$

$$.a_2 + b_2 + c_2 = d_2 \Leftarrow v \in W$$

$$u + v = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

$$.u + v \in W \text{ ז"א } (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) = (a_1 + b_1 + c_1) + (a_2 + b_2 + c_2) = d_1 + d_2$$

לכן השלושה התנאים של תת מרחב בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W תת מרחב של $\mathbb{F}^{2 \times 2}$.

דוגמה 6.8

תהי

$$W = \{p(x) \mid \deg(p(x)) = 2, p(x) \in \mathbb{F}[x]\}$$

קבוצת כל הפולינומים במעלה 2 בדיוק עם מקדמים מתוך שדה \mathbb{F} . קבעו אם W תת מרחב של $\mathbb{F}[x]$.

פתרון:

W לא תת מרחב של $\mathbb{F}[x]$. הסבר:

$$.\bar{0} \notin W$$

דוגמה 6.9

נסמן

$$\mathbb{F}_2[x] = \{p(x) \in \mathbb{F}[x] \mid \deg(p(x)) \leq 2\}$$

קבוצת כל הפולינומים של $\mathbb{F}[x]$ מסדר 2 לכל היותר.

$\mathbb{F}_2[x]$ תת מרחב של $\mathbb{F}[x]$.

דוגמה 6.10

$$W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid f(3) = 0\}$$

$W \subseteq F(\mathbb{R})$. קבעו האם W תת מרחב של $F(\mathbb{R})$.

פתרון:

(1) האיבר $\bar{0}$ הינו הפונקציה $f(x) = 0$. לכן $\bar{0}(3) = 0$ ולכן $\bar{0} \in W$.

(2) אם $f \in W$ ו- $k \in \mathbb{R}$, אז $f(3) = 0$ לכן

$$(kf)(3) = k(f(3)) = k \cdot 0 = 0.$$

ז"א $kf \in W$.

(3) נניח $f, g \in W$, ז"א $f(3) = 0$, $g(3) = 0$. אז

$$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = 0 + 0 = 0,$$

כלומר $f+g \in W$.

לכן השלושה התנאים של תת מרחב בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן W תת מרחב של $F(\mathbb{R})$.

דוגמה 6.11

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 3x + y - z = 1 \\ 2x + 5y = 0 \\ -x + 10y - z = 5 \end{array} \right\}$$

קבעו האם W תת מרחב של \mathbb{R}^3 .

פתרון:

$\bar{0} \notin W$, לכן W לא תת מרחב של \mathbb{R}^3 .

משפט 6.1 מרחב האפס הוא תת מרחב

לכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, אוסף הפתרונות של מערכת הומוגנית $A \cdot X = 0$ הוא תת מרחב של \mathbb{F}^n .

הוכחה: נסמן

$$\text{Nul}(A) = \{X \mid A \cdot X = 0, X \in \mathbb{F}^n\}$$

נוכיח כי $\text{Nul}(A)$ תת מרחב של \mathbb{F}^n ע"י להוכיח כי כל השלושה תנאים של תת מרחב מתקיימים עבור $\text{Nul}(A)$.

(1) צריך להוכיח $\bar{0} \in \text{Nul}(A)$, כאשר $\bar{0}$ מטריצה האפס.

$$A \cdot \bar{0} = 0,$$

לכן $\bar{0} \in \text{Nul}(A)$.

(2) נניח $u, v \in \text{Nul}(A)$. צריך להוכיח $u + v \in \text{Nul}(A)$.

$$A \cdot u = 0 \Leftrightarrow u \in \text{Nul}(A)$$

$$A \cdot v = 0 \Leftrightarrow v \in \text{Nul}(A)$$

לכן

$$A(u + v) = Au + Av = 0 + 0 = 0 \Rightarrow u + v \in \text{Nul}(A)$$

(3) נקח $u \in \text{Nul}(A)$ וסקלר $k \in \mathbb{F}$. צריך להוכיח $ku \in \text{Nul}(A)$.

$$A \cdot u = 0 \Leftrightarrow u \in \text{Nul}(A)$$

$$A(ku) = k(Au) = k \cdot 0 = 0 \Rightarrow ku \in \text{Nul}(A).$$

מש"ל.



שיעור 7

צירוף לינארי ופרישה לינארית

7.1 הגדרה של צירוף לינארי

הגדרה 7.1 צירוף לינארי

נניח כי V מרחב ווקטורי מעל שדה \mathbb{F} . יהיו $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ ווקטורים של V , ו- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ סקלרים של \mathbb{F} . הווקטור

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

נקרא **צירוף לינארי (צ"ל)** של הווקטורים v_1, v_2, \dots, v_n עם מקדמים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

דוגמה 7.1

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$2v_1 - 5v_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ -19 \\ 8 \end{pmatrix}$$

ווקטור $\begin{pmatrix} -8 \\ -19 \\ 8 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של v_2, v_1 .

דוגמה 7.2

האם ווקטור $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של הווקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

? אם כן, רשמו את הצירוף הלינארי.

פתרון:

$$v = xu_1 + yu_2 + zu_3 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ x - y + z &= 4 \\ x + 2z &= 4 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow 3 \cdot R_3 + 2 \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow \frac{1}{4} \cdot R_3]{R_2 \rightarrow -\frac{1}{3} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + \frac{1}{3} R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$, z = 1, y = -1, x = 2$$

$$v = 2u_1 - u_2 + u_3 .$$

דוגמה 7.3

האם ווקטור $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של הווקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} , \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} , \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

? אם כן, רשמו את הצירוף הלינארי.

פתרון:

$$v = xu_1 + yu_2 + zu_3 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -5x - 4y - 3z &= -2 \\ 7x - y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -5 & -4 & -3 & -2 \\ 7 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + 5R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 7R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -5 & -2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{6} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & -15 & -5 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 15R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{2} \end{array} \right)$$

אין פתרון ולכן v הוא לא צירוף לינארי של u_3, u_2, u_1 .

7.4 דוגמה

בדקו אם ווקטור $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של הווקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

? אם כן, רשמו את הצירוף הלינארי.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 3R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - \frac{7}{4}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

למערכת ∞ פתרונות, לכן v הוא צירוף לינארי של u_3, u_2, u_1 .

הפתרון הכללי:

$$(x, y, z) = (2 - z, 1 - z, z), \quad (z \in \mathbb{R}).$$

נציב $z = 1$, ונקבל

$$v = u_1 + 0 \cdot u_2 + u_3.$$

דוגמה 7.5

בטאו את הפולינום $p(x) = -3 + 4x + x^2$ כצירוף לינארי של

$$p_1(x) = 5 - 2x + x^2, \quad p_2(x) = -3x + 2x^2, \quad p_3(x) = 3 + x.$$

פתרון:

$$-3 + 4x + x^2 = \alpha_1(5 - 2x + x^2) + \alpha_2(-3x + 2x^2) + \alpha_3(3 + x)$$

השוויון אמור להתקיים לכל $x \in \mathbb{R}$. לכן

$$\begin{cases} 5\alpha_1 + 3\alpha_3 = -3, \\ -2\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 4, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & -3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 5R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -10 & 3 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 10R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 52 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow \frac{1}{13}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

$$\alpha_3 = 4, \alpha_2 = 2, \alpha_1 = -3$$

$$p(x) = -3p_1(x) + 2p_2(x) + 4p_3(x).$$

דוגמה 7.6

רשמו מטריצה $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של המטריצות

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

פתרון:

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C = D$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 + 2\alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 - \alpha_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} \alpha_1 &= 3 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_2 - \alpha_3 &= -1 \end{cases} &\Rightarrow \alpha_1 = 3, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = -1. \end{aligned}$$

ז"א

$$3A - 2B - C = D.$$

7.7 דוגמה

קבעו אם הפונקציה $y = \sin(2x)$ צירוף לינארי של $\sin x$ ו- $\cos x$?

פתרון:

נניח שקיימים α_2, α_1 כך ש

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = \sin(2x).$$

השוויון אמור להתקיים לכל $x \in \mathbb{R}$.

נציב $x = 0$ ואז נקבל $0 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 = 0$. לכן $\alpha_2 = 0$.

$$\sin(2x) = \alpha_1 \sin x.$$

כעת נציב $x = \frac{\pi}{2}$ ונקבל $\sin(\pi) = \alpha_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, כלומר

$$\alpha_1 = \sin \pi = 0.$$

לכן $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. נציב את הערכים בצירוף לינארי המקורי $\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = \sin(2x)$ ונקבל כי $\sin 2x = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$. סתירה.

לכן לא קיימים α_2, α_1 כך ש

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = \sin(2x).$$

7.2 פרישה לינארי

הגדרה 7.2 פרישה לינארי

נניח כי V מרחב ווקטורי מעל שדה, \mathbb{F} . יהיו $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. הקבוצה

$$\{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}\}$$

נקראת פרישה לינארית של v_1, v_2, \dots, v_n .

הפרישה של ווקטורים מסומן ב $\text{span}(v_1, \dots, v_n)$.

ז"א פרישה לינארית זה אוסף כל הצירופים הלינאריים של v_1, v_2, \dots, v_n .

משפט 7.1 פרישה היא תת מרחב

לכל מרחב ווקטורי V מעל שדה \mathbb{F} ולכל $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n)$$

הוא תת מרחב של V .

הוכחה: נוכיח את הטענה ע"י להראות כי כל פרישה מקיימת את כל התנאים של תת מרחב.

(1) צריך להוכיח כי $\bar{0} \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$

הרי

$$\bar{0} = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n$$

ז"א ווקטור האפס צירוף לינארי עם מקדמים כולם אפסים. לפיכך $\bar{0} \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$

(2) נניח $u_1, u_2 \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$. צריך להוכיח כי $u_1 + u_2 \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$

ז"א קיימים סקלרים כך ש:

$$u_1 = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n, \quad u_2 = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n.$$

מכאן

$$u_1 + u_2 = (k_1 + t_1)v_1 + \dots + (k_n + t_n)v_n,$$

ז"א $u_1 + u_2 \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$

(3) נניח $u \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$, $t \in \mathbb{F}$. צריך להוכיח $tu \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$

$$u = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n \Rightarrow tu = (tk_1)v_1 + \dots + (tk_n)v_n \in \text{span}(v_1, \dots, v_n).$$

מש"ל. ■

דוגמה 7.8

בדקו אם ווקטור $v = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ במרחב ווקטורי $\mathbb{R}^{2 \times 3}$ שייך לפרישה לינארית של

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 11 \end{pmatrix}.$$

פתרון:

$v \in \text{span}(u_1, u_2, u_3)$ אם ורק אם קיימים סקלרים k_1, k_2, k_3 כך ש

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = v.$$

לכן

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

מקבלים מערכת משוואות:

$$\begin{cases} 2k_1 - 3k_2 + k_3 = -1 \\ k_1 + 2k_2 + 4k_3 = 3 \\ 4k_1 + 8k_3 = 4 \\ -k_1 + k_2 - k_3 = 0 \\ 3k_1 + 5k_2 + 11k_3 = 8 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 8 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_1 \\ R_5 \rightarrow R_5 - 3R_1 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

פתרון כללי:

$$k_1 = 1 - 2k_3, \quad k_2 = 1 - k_3, \quad k_3 \in \mathbb{R}.$$

נציב $k_1 = -1, k_2 = 0 \Leftarrow k_3 = 1$. נקבל

$$v = -u_1 + 0 \cdot u_2 + u_3.$$

לכן

$$v \in \text{span}(u_1, u_2, u_3).$$

יש שתי דרכים להגדיר תת מרחב:

(1) ע"י פרישה לינארית

(2) ע"י מערכת הומוגנית.

ניתן לעבור מדרך אחת לשנייה.

דוגמה 7.9

נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

הציגו את $\text{Nul}(A)$ בצורת פרישה לינארית.

פתרון:

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן למערכת ההומוגנית $AX = 0$ יש ∞ פתרונות. הפתרון הכללי:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_3 &= -2x_4 + 2x_5 \end{aligned} \right\} x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

ז"א

$$u = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \text{Nul}(A)$$

הצורת הכללית של וקטור ב $\text{Nul}(A)$:

$$u = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

קיבלנו צירוף ליניארי של וקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

לכן $u \in \text{span}(v_1, v_2, v_3)$. ז"א $\text{Nul}(A) = \text{span}(v_1, v_2, v_3)$.

דוגמה 7.10

נתונה מטריצה

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 18 \\ 21 \end{pmatrix}$$

הציגו את $\text{span}(u_1, u_2, u_3)$ באוסף של פתרונות של מערכת ההומוגנית.

פתרון:

וקטור $v \in \text{span}(u_1, u_2, u_3)$ אם ורק אם קיימים סקלרים k_1, k_2, k_3 כך ש

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = v.$$

ז"א למערכת הזאת קיים פתרון. נסמן $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ ונפתור את המערכת המשוואות

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & x \\ 3 & -2 & -5 & y \\ 2 & 4 & 18 & z \\ 1 & 5 & 21 & w \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & 4 & 3x + y \\ 0 & 0 & 0 & -16x - 6y + z \\ 0 & 0 & 0 & x + z - w \end{array} \right)$$

למערכת יש פתרון כאשר

$$\begin{cases} -16x - 6y + z = 0 \\ x + z - w = 0 \end{cases}$$

שיעור 8

תלות לינארית

8.1 הגדרה של תלות לינארית

הגדרה 8.1 תלות לינארית

נניח ש V מרחב ווקטורי מעל שדה \mathbb{F} , ונניח ש- $v_1, \dots, v_n \in V$. ווקטורים של V .

• v_1, \dots, v_n נקראים תלויים לינארית אם קיימים סקלרים $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{F}$ שלא כולם אפסים כך ש-

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n = \bar{0}.$$

• v_1, \dots, v_n נקראים בלי תלויים לינארית אם

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n = \bar{0},$$

מתקיים רק אם $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ כלומר המקדמים כולם אפסים.

8.1 דוגמה

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad 3v_1 - v_2 = \bar{0} \text{ תלויים לינארית כי}$$

8.2 דוגמה

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2. \quad i v_1 + v_2 = \bar{0} \text{ תלויים לינארית כי}$$

8.3 דוגמה

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} 2k_1 + 6k_2 = 0 \\ k_1 + 4k_2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$k_2 = 0, k_1 = 0$ לכן v_2, v_1 בלתי תלויים לינארית.

8.4 דוגמה

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

תלויים לינארית כי

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + v_3 = \bar{0}.$$

8.5 דוגמה

בדקו אם הווקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

תלויים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם ששווה לווקטור האפס.

פתרון:

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = \bar{0}$$

קיבלנו מערכת משוואות הומוגנית:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 4R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$(k_1, k_2, k_3) = (2k_3, -k_3, k_3), \quad k_3 \in \mathbb{R}.$$

למערכת יש פתרון, לכן הווקטורים ת"ל.

נציב $k_3 = 1$ ונקבל

$$(k_1, k_2, k_3) = (2, -1, 1),$$

ונקבל

$$2v_1 - v_2 + v_3 = \bar{0}$$

משפט 8.1

נניח ש- $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$

העמודות של A בלתי תלויות לינארית אם ורק אם למערכת $A \cdot X = 0$ יש רק פיתרון טריוויאלי.

(ז"א למטריצה המדורגת כל העמודות מובילות).

הוכחה: נרשום A בצורה

$$A = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$$AX = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots x_n u_n = 0.$$

X פתרון הטריוויאלי, כלומר $X = 0$ אם ורק אם $x_1, x_2, \dots, x_n = 0$, ולכן u_1, u_2, \dots, u_n בת"ל.

8.6 דוגמה

האם הווקטורים של מרחב $P_2(\mathbb{R})$

$$p_1(x) = 3 - x + x^2, \quad p_2(x) = x + 5x^2, \quad p_3(x) = 1,$$

הם תלויים לינארית? אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם שווה לווקטור האפס.

פתרון:

$$k_1 p_1(x) + k_2 p_2(x) + k_3 p_3(x) = \bar{0},$$

$$k_1 (3 - x + x^2) + k_2 (x + 5x^2) + k_3 \cdot 1 = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2,$$

לכן

$$(3k_1 + k_3) + (-k_1 + k_2)x + (k_1 + 5k_2)x^2 = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

השוויון אמור להתקיים לכל x , לכן

$$\begin{cases} 3k_1 + k_3 = 0 \\ -k_1 + k_2 = 0 \\ k_1 + 5k_2 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_1 - 3R_3]{R_2 \rightarrow R_1 + 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

למערכת יש פתרון יחיד $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$. לכן הווקטורים בת"ל.

8.7 דוגמה

במרחב ווקטורי $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ נתונים שלושה ווקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

בדקו אם הווקטורים u_1, u_2, u_3 תלויים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם שווה לווקטור האפס.

פתרון:

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \bar{0},$$

$$k_1 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \bar{0},$$

לכן

$$\begin{pmatrix} -2k_1 + 5k_2 - k_3 & k_1 - k_2 + 4k_3 \\ 4k_2 + 4k_3 & -k_1 - 3k_2 - 6k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

השוויון אמור להתקיים לכל x , לכן

$$\left. \begin{aligned} -2k_1 + 5k_2 - k_3 &= 0 \\ k_1 - k_2 + 4k_3 &= 0 \\ 4k_2 + 4k_3 &= 0 \\ -k_1 - 3k_2 - 6k_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & -6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_1 + 2R_2 \\ R_4 \rightarrow R_1 - 2R_4}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 11 & 11 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_2 - 3R_3 \\ R_4 \rightarrow R_2 - 3R_4}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

למערכת ההומוגנית יש פתרון יחיד, טריוויאלי, לכן u_1, u_2, u_3 בת"ל.

8.8 דוגמה

נתונים ווקטורים $v_1 = x, v_2 = e^x, v_3 = x^2$ במרחב ווקטורי $f(\mathbb{R})$. בדקו אם הווקטורים תלויים לינארית.

פתרון:

שיטה 1

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = \bar{0}$$

ז"א

$$k_1 x + k_2 e^x + k_3 x^2 = 0$$

לכל $x \in \mathbb{R}$.

נציב $x = 0 \Leftrightarrow k_2 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{נציב } x = 1 \Rightarrow k_1 + k_3 = 0 \\ \text{נציב } x = -1 \Rightarrow -k_1 + k_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow k_1 = 0, k_3 = 0.$$

לכן הווקטורים בת"ל.

שיטה 2: וורונסקיאן

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 \\ u''_1 & u''_2 & u''_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & e^x & x^2 \\ 1 & e^x & 2x \\ 0 & e^x & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$W(x) = 0$ לכל x לכן הווקטורים בת"ל.

8.9 דוגמה

במרחב ווקטורי \mathbb{Z}_5^3 נתונים ווקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{3} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{4} \\ \bar{2} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \end{pmatrix}.$$

בדקו אם הווקטורים תלויים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם שווה לווקטור האפס.

פתרון:

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = \bar{0}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & 0 \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} & 0 \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_1 + 3R_3]{R_1 \rightarrow R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & 0 \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & 0 \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & 0 \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & 0 \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{2}k_1 + k_3 = \bar{0} \\ \bar{4}k_2 + \bar{3}k_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{2}k_1 = \bar{4}k_3 \\ \bar{4}k_2 = \bar{2}k_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k_1 = \bar{2}k_3 \\ k_2 = \bar{3}k_3 \end{array} \right\}$$

פתרון

$$(k_1, k_2, k_3) = (\bar{2}k_3, \bar{3}k_3, k_3), \quad k_3 \in \mathbb{Z}_5.$$

נציב $k_3 = \bar{1}$ ונקבל $(k_1, k_2, k_3) = (\bar{2}, \bar{3}, \bar{1})$. ז"א

$$\bar{2}v_1 + \bar{3}v_2 + v_3 = \bar{0}.$$

8.2 תכונות של תלות לינארית

משפט 8.2 תכונות בסיסיות של תלות לינארית

- (1) ווקטור יחיד, u , תלוי לינארית אם ורק אם $u = \bar{0}$.
- (2) שני ווקטורים תלויים לינארית אם ורק אם אחד מהם הוא צירוף לינארי של הווקטור השני.
- (3) ווקטורים v_1, \dots, v_n תלויים לינארית אם ורק אם לפחות אחד מהם הוא צירוף לינארי של שאר הווקטורים.
- (4) כל קבוצת ווקטורים שמכילה את ווקטור האפס, היא תלויה לינארית.
- (5) אם $v_1, \dots, v_n \in V$ תלויים לינארית, אז כל קבוצת הווקטורים שמכילה את v_1, \dots, v_n היא תלויה לינארית.
- (6) אם קבוצת ווקטורים $\{v_1, \dots, v_n\}$ בת"ל, אז כל תת קבוצה שלה היא בת"ל.

הוכחה:

(1)

$$u \text{ ת"ל אם ורק אם קיים סקלר } k \in \mathbb{F} \text{ ש } ku = \bar{0} \Leftrightarrow u = \bar{0}.$$

(2)

$$v_2, v_1 \text{ ת"ל } \Leftrightarrow \text{קיימים סקלרים } k_2, k_1 \text{ שלא כולם אפסים כך ש}$$

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 = \bar{0}$$

נניח בלי הגבלת הכלליות ש $k_1 \neq 0$, אז

$$v_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right) v_2.$$

(3)

$$v_1, \dots, v_n \text{ ת"ל } \Leftrightarrow \text{קיימים } k_1, \dots, k_n \in \mathbb{F} \text{ שלא כולם אפסים כך ש}$$

$$k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = \bar{0}.$$

נניח ש $k_i \neq 0$. אז זה מתקיים אם ורק אם

$$v_i = \left(-\frac{k_1}{k_i}\right) v_1 + \dots + \left(-\frac{k_{i-1}}{k_i}\right) v_{i-1} + \left(-\frac{k_{i+1}}{k_i}\right) v_{i+1} + \dots + \left(-\frac{k_n}{k_i}\right) v_n$$

(4)

$$\text{לכל } v_1, \dots, v_n \in V$$

$$0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n + 1 \cdot \bar{0} = \bar{0}$$

$$\text{לכן } v_1, \dots, v_n, \bar{0} \text{ ת"ל.}$$

(5)

נניח ש v_1, \dots, v_n ת"ל. אז קיימים סקלרים $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{F}$ שלא כולם אפסים כך ש

$$k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = \bar{0}.$$

אז לכל $u_1, \dots, u_m \in V$ מתקיים:

$$k_1 v_1 + \dots + k_n v_n + 0 \cdot u_1 + \dots + 0 \cdot u_m = \bar{0}$$

לכן $v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m$ ת"ל.

(6)

נוכיח את הטענה בדרך השלילית.

$\{v_1, \dots, v_n\}$ בת"ל. ז"א הצירוף לינארי הבא

$$k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = \bar{0}$$

מתקיים אם ורק אם $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$. נניח שקיימת תת קבוצה של $\{v_1, \dots, v_n\}$ שהיא תלויה לינארית. כלומר קיימת קבוצה $\{v_1, \dots, v_m\}$ שהיא ת"ל. ז"א הצירוף לינארי

$$k_1 v_1 + \dots + k_m v_m = \bar{0}$$

מתקיים כאשר לפחות אחד של הסקלרים k_1, \dots, k_m לא שווה אפס. לכן

$$k_1 v_1 + \dots + k_m v_m + 0 \cdot v_{m+1} + \dots + 0 \cdot v_n = \bar{0}$$

מתקיים כאשר לפחות אחד של הסקלרים k_1, \dots, k_m לא שווה אפס. ז"א מצאנו צירוף לינארי של v_1, \dots, v_n שבו אחד של הסקלרים לא שווה אפס, ז"א v_1, \dots, v_n ת"ל. סתירה.

■

8.10 דוגמה

נניח שווקטורים $u, v, w \in V$ בת"ל. הוכיחו כי הווקטורים

$$u + v + w, \quad 2u - 4v, \quad u + v - w$$

בת"ל.

פתרון:

נבנה צ"ל של ווקטורים $u + v + w, 2u - 4v, u + v - w$.

$$k_1(u + v + w) + k_2(2u - 4v) + k_3(u + v - w) = \bar{0}.$$

מכאן

$$(k_1 + 2k_2 + k_3)u + (k_1 - 4k_2 + k_3)v + (k_1 - k_3)w = \bar{0}.$$

u, v, w בת"ל, לכן

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 - 4k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 - k_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\underline{R_3 \rightarrow R_3 - R_1}]{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_2 - 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

יש פתרון יחיד למערכת: $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. לכן הווקטורים $u + v + w, 2u - 4v, u + v - w$ בת"ל.

שיעור 9

מימד ובסיס

9.1 בסיס של מרחב ווקטורי

הגדרה 9.1 בסיס

קבוצת ווקטורים $v_1, \dots, v_n \in V$ נקראת בסיס של V אם היא מקיימת:

(1) v_1, \dots, v_n בלתי תלויים לינארית.

(2) $\text{span}(v_1, \dots, v_n) = V$.

דוגמה 9.1

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

בסיס של \mathbb{F}^n (בסיס הסטנדרטי).

הוכחה:

(1) צ"ל e_1, \dots, e_n בת"ל.

$$k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_n e_n = \bar{0}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + k_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

\Downarrow

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 0.$$

לכן e_1, \dots, e_n בת"ל.

(2) צ"ל כי $\text{span}(e_1, \dots, e_n) = \mathbb{F}^n$.

$$v = \text{span}(e_1, \dots, e_n) \text{ צ"ל } v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \text{ נקח ווקטור שרירותי}$$

$$k_1 e_1 + \dots k_n e_n = v$$

\Downarrow

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow k_1 = x_1, k_2 = x_2, \dots, k_n = x_n.$$

דוגמה 9.2

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad .$$

בסיס של $\mathbb{F}^{2 \times 3}$ (הבסיס הסטנדרטי).

הוכחה:

(1) נוכיח כי E_1, \dots, E_6 בת"ל.

$$k_1 E_1 + k_2 E_2 + \dots + k_6 E_6 = \bar{0}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + k_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\Downarrow

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 0, \quad k_6 = 0.$$

לכן E_1, \dots, E_6 בת"ל.

(2) נוכיח כי $\text{span}(E_1, \dots, E_6) = \mathbb{F}^{2 \times 3}$.

$$v = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2 \times 3} \text{ לכל ווקטור}$$

$$v = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 + eE_5 + fE_6.$$

ז"א

$$v \in \text{span}(E_1, \dots, E_6)$$

דוגמה 9.3

ווקטורים

$$e_1 = 1, \quad e_2 = x, \quad \dots, \quad e_n = x^n$$

מהווים בסיס (הבסיס הסטנדרטי) של המרחב $\mathbb{F}_n[x]$.

הוכחה:

(1) צ"ל $1, x, \dots, x^n$ בת"ל.

$$k_1 \cdot 1 + k_2 x + \dots + k_n x^n = \bar{0} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \dots + 0 \cdot x^n$$

לכל x כאשר

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \quad \dots, \quad k_n = 0.$$

לכן $1, x, \dots, x^n$ בת"ל.

(2) נוכיח כי $\text{span}(1, x, \dots, x^n) = \mathbb{F}_n[x]$

לכל $p(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^n \in \mathbb{F}_n[x]$ מתקיים

$$p(x) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$$

$$p(x) = \text{span}(e_1, \dots, e_n).$$

■

דוגמה 9.4

בדקו כי הווקטורים

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

מהווה בסיס של \mathbb{R}^3 .

פתרון:

(1) צ"ל u_1, u_2, u_3 בת"ל.

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \bar{0}$$

זאת מערכת משוואות הומוגניות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 14 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array} \right)$$

למערכת יש פתרון יחיד: $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$

לכן u_1, u_2, u_3 בת"ל.

$$(2) \text{צ"ל } \mathbb{R}^3 = \text{span}(u_1, u_2, u_3).$$

$$\text{נקח } v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ צ"ל } v = \text{span}(u_1, u_2, u_3).$$

דרך 1:

$$\begin{aligned} xu_1 + yu_2 + zu_3 &= v \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 5 & 1 & 4 & c \end{array} \right) &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 6 & 14 & 5a + c \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5a + c - 6b \end{array} \right) \end{aligned}$$

למערכת יש פתרון, לכן $v \in \text{span}(u_1, u_2, u_3)$.

דרך 2:

למערכת $A \cdot X = 0$ יש פתרון יחיד, לכן מטריצה A הפיכה. מכאן נובע שלכל $v \in \mathbb{R}^3$, למערכת $A \cdot X = v$ יש פתרון יחיד, ז"א $v \in \text{span}(u_1, u_2, u_3)$.

משפט 9.1

אם במרחב ווקטורי V יש בסיס סופי, אז לכל בסיס של V יש את אותו מספר הווקטורים.

הגדרה 9.2

נניח ש V מרחב ווקטורי. למספר הווקטורים בבסיס של V קוראים המימד של V .
המימד של מרחב ווקטורי יסומן

$$\dim(V).$$

דוגמה 9.5

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{F}^n) &= n \\ \dim(\mathbb{F}^n[x]) &= n + 1 \\ \dim(\mathbb{F}^{m \times n}) &= m \cdot n. \end{aligned}$$

משפט 9.2 מימד ובסיס של קבוצת ווקטורים

נניח כי V מרחב ווקטורי, $\dim(V) = n$. אז

(1) כל $n + 1$ ווקטורים של V הם תלויים לינארית.

(2) כל קבוצה של n ווקטורים בלתי תלויה לינארית, היא בסיס של V .

(3) כל קבוצה של ווקטורים שהיא בלתי תלויה לינארית, ניתן להשלים לבסיס של V .

דוגמה 9.6

הוכיחו שהווקטורים

$$u_1 = 1 + x + x^2, \quad u_2 = 2x + 3x^2, \quad u_3 = -3x - 4x^2$$

מהווים בסיס של מרחב $\mathbb{R}_2[x]$.

פתרון:

נוכיח כי u_1, u_2, u_3 בת"ל.

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \bar{0}$$

$$k_1(1 + x + x^2) + k_2(2x + 3x^2) + k_3(-3x - 4x^2) = 0 + 0x + 0x^2$$

$$k_1(k_1 + 2k_2 - 3k_3)x + (k_1 + 3k_2 - 4k_3)x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

$$\left. \begin{array}{l} k_1 = 0 \\ k_1 + 2k_2 - 3k_3 = 0 \\ k_1 + 3k_2 - 4k_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$$

לכן u_1, u_2, u_3 בת"ל.

$\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$, לכן שלושה ווקטורים בת"ל מהווים בסיס של $\dim(\mathbb{R}_2[x])$.

9.2 מציאת בסיס ומימד של תת מרחב

הגדרה 9.3 עמודה מובילה ושורה מובילה

נניח כי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ותהי B המטריצה המדורגת המתקבלת מ- A .

(1) אומרים כי עמודה ה- i של A **עמודה מובילה** אם בעמודה ה- i של B יש איבר מוביל.

(2) אומרים כי שורה ה- i של A **שורה מובילה** אם בשורה ה- i של B יש איבר מוביל.

משפט 9.3 עמודות מובילות מהוות בסיס של תת-מרחב

נניח כי $S = \{u_1, \dots, u_k\} \in \mathbb{F}^n$ קבוצת ווקטורים של מרחב ווקטורי \mathbb{F}^n .

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & \cdots & | \\ u_1 & u_2 & & u_k \\ | & | & & | \end{array} \right) \text{ נגדיר}$$

(1) כל העמודות של A עמודות מובילות אם ורק אם הקבוצת ווקטורים S בת"ל.

(2) העמודות המובילות של A מהווים בסיס של S .

(3) מספר עמודות מובילות ב- A שווה למימד של S .

הוכחה: (להעשרה בלבד)

נרשום

$$x_1 u_1 + \cdots + x_k u_k = \bar{0} \quad (*)$$

כאשר $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{F}$ סקלרים. ונגדיר $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^k$. נניח ש- B המטריצה המדורגת המתקבלת מ- A .

(1) נניח כי S בת"ל.

$$\Leftarrow \text{אז } x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$$

$$\Leftarrow \text{למערכת } AX = 0 \text{ יש פתרון יחיד: } X = 0$$

$$\Leftarrow \text{יש איבר מוביל בכל עמודה של } B$$

$$\Leftarrow \text{כל העמודות של } A \text{ מובילות.}$$

נניח שכל העמודות של A מובילות.

$$\Leftarrow \text{יש איבר מוביל בכל עמודה של } B$$

$$\Leftarrow \text{הפתרון היחיד הינו } X = 0$$

$$\Leftarrow \text{עבור הסקלרים ב- } (*) \text{ נקבל } x_1 = \cdots = x_k = 0 \Leftarrow S \text{ בת"ל.}$$

(2) קבוצת העמודות המובילות של A תהיה בסיס של S אם (א) היא בת"ל ו (ב) היא פורשת S .

(א) תהי A' המטריצה המתקבלת מהעמודות המובילות של A . לפי (1) כל העמודות של A' בת"ל.

(ב) נניח שמתוך ה- k ווקטורים של S יש p ווקטורים בת"ל: $\{u_1, \dots, u_p\}$.

לכן, אפשר לרשום כל ווקטור של S כצירוף ליניארי של הווקטורים $\{u_1, \dots, u_p\}$.

לכן S נפרש ע"י הווקטורים $\{u_1, \dots, u_p\}$.

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & | & | \\ u_1 & \cdots & u_p & u_{p+1} & \cdots & u_k \\ | & & | & | & & | \end{array} \right) \text{ נרשום}$$

הווקטורים u_1, \dots, u_p בת"ל לכן ה- p עמודות הראשונות של A מובילות.

(אין יותר מ- p עמודות מובילות כי אז יהיו יותר מ- p ווקטורים בת"ל ונגיע לסתירה).

לפיכך העמודות המובילות פורשות S .

(3) לפי (2) העמודות המובילות של A מהווה בסיס של S .

מימד שווה למספר ווקטורים בבסיס.

לפיכך המימד שווה למספר עמודות המובילות ב- A .

דוגמה 9.7

מצאו בסיס ומימד של הקבוצה $S = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ כאשר

(1)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

פתרון:

(1)

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

כל העמודות מובילות, לכן $\{v_1, v_2, v_3\}$ בסיס של S .

$$\dim(S) = 3$$

(2)

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

עמודות 1 ו-2 מובילות. לכן הווקטורים v_1, v_2 מהווים בסיס של S .

$$\dim(S) = 2$$

דוגמה 9.8

מצאו בסיס ואת המימד של תת מרחב הנפרש ע"י הווקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

בטאו את ווקטור $u = \begin{pmatrix} 4 & -14 \\ -13 & 11 \end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של הבסיס שמצאתם.

פתרון:

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + k_4 v_4 = \bar{0}$$

\Downarrow

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & -4 & -7 \\ -4 & -1 & -5 & -5 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_4 \rightarrow R_4 - 2R_1]{R_2 \rightarrow R_2 + 5R_1, R_3 \rightarrow R_3 + 4R_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

עמודות 1 ו-2 מובילות, לפיכך הווקטורים v_1, v_2 מהווים בסיס של S .
 $\dim(S) = 2$.
 נרשום u כצירוף ליניארי של הבסיס המתקבל:

$$u = xv_1 + yv_2 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 14 \\ -4 & -1 & -13 \\ 2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + 5R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 4R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow k_1 = 3, k_2 = 1$$

$$u = 3v_1 + v_2 .$$

9.9 דוגמה

במרחב $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ נתונים ווקטורים

$$p_1(x) = 2 - x + x^2, \quad p_2(x) = 2x - 3x^2 + x^3, \quad p_3(x) = 1 - x^2, \quad p_4(x) = 3x - 6x^2 + x^3 .$$

(א) בדקו אם הווקטורים $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ תלויים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם ששווה לווקטור האפס.

(ב) מצאו בסיס ואת המימד של תת מרחב הנפרש ע"י הווקטורים $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$.

(ג) בטאו כל ווקטור מתוך $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ כצירוף ליניארי של הבסיס המצאתם בסעיף ב'.

פתרון:

(א) נרשום את הווקטורים לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$, $E = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3\}$:

$$p_1(x) = 2e_1 - e_2 + e_3 + 0e_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_E,$$

$$p_2(x) = 0e_1 + 2e_2 - 3e_3 + e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}_E,$$

$$p_3(x) = 1e_1 + 0e_2 - e_3 + 0e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_E,$$

$$p_4(x) = 0e_1 + 3e_2 - 6e_3 + e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}_E.$$

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לא כל העמודות מובילות, לכן $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ ת"ל.

נרשום את הצירוף הליניארי

$$k_1p_1 + k_2p_2 + k_3p_3 + k_4p_4 = \bar{0}.$$

לפי המדורגת שמצאנו הפתרון הינו

$$k_1 = k_4, \quad k_2 = -k_4, \quad k_3 = -2k_4, \quad k_4 \in \mathbb{R}.$$

נציב $k_4 = 1 \Leftarrow$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = -2.$$

$$p_1 - p_2 - 2p_3 + p_4 = \bar{0}$$

(ב)

$$\dim(\text{span}\{p_1, p_2, p_3, p_4\}) = \text{מספר העמודות המובילות} = 3.$$

העמודות 1, 2 ו-3 מובילות לפיכך הווקטורים p_1, p_2, p_3 מהווים בסיס.

(ג)

$$p_1 = 1 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3$$

$$p_2 = 0 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3$$

$$p_3 = 0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3$$

$$p_4 = -p_1 + p_2 + 2 \cdot p_3.$$

משפט 9.4

יהי $U \subset V$ תת מרחב של המרחב ווקטורי V . נניח כי $\dim(U) = m$ ותהי $B = \{u_1, \dots, u_m\}$ קבוצה של m ווקטורים.

B בת"ל אם ורק אם B פורשת את U .

הוכחה:

נניח כי B בת"ל ו- B לא פורשת את U . אז ניתן להשלים B לבסיס של U , בסתירה לכך ש- $\dim(U) = m$.

נניח כי B פורשת את U אבל B לא בת"ל. אז ניתן להקטין את B לבסיס של פחות מ- m ווקטורים בסתירה לכך ש- $\dim(U) = m$.



שיעור 10

מרחב האפס, מרחב העמודות ומרחב השורות

10.1 דרגת המטריצה

10.1 הגדרה

נתונה מטריצה

 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ מעל שדה \mathbb{F} :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

למטריצה מקושרים 3 תת מרחבים:

(1) מרחב האפס של A שמסומן $\text{Nul}(A)$ ומוגדר

$$\text{Nul}(A) = \{X \in \mathbb{F}^n \mid A \cdot X = \bar{0}\}.$$

(2) מרחב העמודות של A שמסומן $\text{Col}(A)$ ומוגדר

$$\text{Col}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}.$$

 $\text{Col}(A)$ הוא התת מרחב הנפרש ע"י עמודות המטריצה.(3) מרחב השורות של A שמסומן $\text{Row}(A)$ ומוגדר

$$\text{Row}(A) = \text{span} \{ (a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n}), \cdots, (a_{m1} \ a_{m2} \ \cdots \ a_{mn}) \}.$$

 $\text{Row}(A)$ הוא התת מרחב הנפרש ע"י שורות המטריצה.

10.1 דוגמה

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 4 & -11 & 23 & 18 & 11 \end{pmatrix}$. מצאו את בסיס ואת המימד של $\text{Col}(A)$ ו- $\text{Row}(A)$.

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 4 & -11 & 23 & 18 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow 2R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 6 & 7 \\ 0 & -3 & 7 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עמודות 1 ו-2 של המדורגת מובילות, לפיכך עמודות 1 ו-2 של A מהווים בסיס של $\text{col}(A)$:

$$\text{col}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$$

שורות 1 ו-2 של המדורגת מובילות, לפיכך שורות 1 ו-2 של A מהווים בסיס של $\text{row}(A)$:

$$\text{row}(A) = \text{span} \{ (1 \ -2 \ 4 \ 3 \ 1), (-2 \ 1 \ -1 \ 0 \ 5) \}$$

$\dim(\text{Col}(A)) = 2$, מספר העמודות המובילות.

$\dim(\text{Row}(A)) = 2$, מספר השורות שלא אפסים.

משפט 10.1 בסיס ומימד של $\text{col}(A)$

תהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

(1) העמודות המובילות של A מהווים בסיס של $\text{Col } A$.

(2) השורות המובילות של A מהווים בסיס של $\text{Row } A$.

(3) $\dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A))$

הוכחה:

(1) משפט 9.3.

(2) תרגיל בית.

(3) $\dim(\text{Col}(A))$ הוא מספר העמודות המובילות במטריצה המדורגת של A .

ז"א $\dim(\text{Col}(A))$ הוא מספר האיברים המובילים במטריצה המדורגת של A .

$\dim(\text{Row}(A))$ הוא מספר השורות שלא אפסים במטריצה המדורגת של A .

ז"א $\dim(\text{Row}(A))$ הוא מספר האיברים המובילים במטריצה המדורגת של A .



הגדרה 10.2 דרגה

למספר $\dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A))$ קוראים דרגת המטריצה. סימון: $\text{rank}(A)$. ז"א

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A)) .$$

משפט 10.2 מימד של $\text{Nul}(A)$

תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ונניח כי $\text{rank}(A) = r$. אז

$$\dim(\text{Nul}(A)) = n - r = (\text{מספר עמודות הלא מובילות}) .$$

הוכחה: (להעשרה בלבד!)

נניח כי $\{u_1, \dots, u_k\}$ בסיס של $\text{Nul}(A)$.

נשלים אותו לבסיס של \mathbb{R}^n : $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$.

הקבוצה $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ פורשת את \mathbb{R}^n לפיכך הקבוצה $\{Au_1, \dots, Au_k, Au_{k+1}, \dots, Au_n\}$ פורשת את $\text{col}(A)$.

אבל $Au_1 = 0, \dots, Au_k = 0 \Leftrightarrow \{u_1, \dots, u_k\} \in \text{Nul}(A)$

לפיכך $\{Au_{k+1}, \dots, Au_n\}$ פורשת את $\text{col}(A)$.

כעת נוכיח כי $\{Au_{k+1}, \dots, Au_n\}$ בת"ל: נרשום

$$s_{k+1}Au_{k+1} + \dots + s_nAu_n = \bar{0}$$

כאשר $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ ווקטור האפס ו- s_{k+1}, \dots, s_n סקלרים. מכאן

$$A(s_{k+1}u_{k+1} + \dots + s_nu_n) = \bar{0}$$

ז"א $s_{k+1}u_{k+1} + \dots + s_nu_n \in \text{Nul}(A)$. לפיכך ניתן לרשום אותו כצירוף לינארי של הבסיס $\{u_1, \dots, u_k\}$:

$$s_{k+1}u_{k+1} + \dots + s_nu_n = t_1u_1 + \dots + t_ku_k$$

t_1, \dots, t_k סקלרים. נעביר אגפים ונקבל:

$$-t_1u_1 - \dots - t_ku_k + s_{k+1}u_{k+1} + \dots + s_nu_n = \bar{0} .$$

הקבוצה $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ בסיס לכן היא בת"ל לכן $t_1 = \dots = t_k = s_{k+1} = \dots = s_n = 0$.

לפיכך הקבוצה $\{Au_{k+1}, \dots, Au_n\}$ בת"ל.

מצאנו כי $\{Au_{k+1}, \dots, Au_n\}$ בת"ל ופורשת $\text{col}(A)$ לכן היא בסיס של $\text{col}(A)$.
נניח כי $\dim(\text{col}(A)) = r$.

$$\Rightarrow n - k = r \quad \Rightarrow k = n - r .$$

לפיכך

$$\dim(\text{Nul}(A)) = n - r = (\text{מספר עמודות הלא מובילות}) - (\text{מספר עמודות מובילות}) .$$

משפט 10.3 בסיס של $\text{Nul}(A)$

תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$. נניח שהפתרון הכללי למערכת $AX = 0$ הוא

$$X_0 = y_1 u_1 + \cdots + y_k u_k$$

כאשר y_1, \dots, y_k המשתנים החופשיים של המערכת ו- $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{F}^n$.

אז הקבוצת ווקטורים $B = \{u_1, \dots, u_k\}$ בסיס של $\text{Nul}(A)$.

הוכחה: להעשרה בלבד!

נניח כי $\text{rank}(A) = r$. אז יש $n - r$ משתנים חופשיים, לכן יש $k = n - r$ ווקטורים בקבוצה B .

$\dim(\text{Nul}(A)) = n - r$ והקבוצת ווקטורים $B = \{u_1, \dots, u_{n-r}\}$ פורשת את $\text{Nul}(A)$.

לכן לפי משפט 9.4 הקבוצה B בת"ל לכן B מהווה בסיס של $\text{Nul}(A)$.

דוגמה 10.2

במרחב $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ נתונים ווקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ -5 & a \end{pmatrix}$$

(א) עבור אילו ערכי a ווקטור v שייך לפרישה לינארית של u_1, u_2, u_3 ?

(ב) עבור כל ערך של a שמצאתם בסעיף א', בטאו את ווקטור v כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 בשתי דרכים שונות.

(ג) לכל ערך של a מצאו את המימד ובסיס של $\text{span}\{u_1, u_2, u_3, v\}$.

(ד) האם קיימים ערכי a עבורם

$$\text{span}\{u_1, u_2, u_3, v\} = \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

פתרון:

(א) נרשום v כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 :

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = v$$

נחשב את המקדמים:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & a \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 3R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 0 & -2 & 2 & -3a-5 \\ 0 & 2 & -2 & -a-7 \\ 0 & 0 & 0 & -2a-6 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 0 & -2 & 2 & -3a-5 \\ 0 & 0 & 0 & -4a-12 \\ 0 & 0 & 0 & -2a-6 \end{array} \right)$$

אם $a = -3$ לה יהיו שורת סתירה וקיים פתרון ואז $v \in \text{span}\{u_1, u_2, u_3\}$.

(ב) $a = -3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$k_1 = 1 - 2k_3, \quad k_2 = -2 + k_3, \quad k_3 \in \mathbb{R}.$$

נציב $k_3 = 1$

$$k_1 = -1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 1$$

ונקבל

$$-u_1 - u_2 + u_3 = v.$$

נציב $k_3 = 0$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 0$$

ונקבל

$$u_1 - 2u_2 + 0 \cdot u_3 = v.$$

(ג) עבור $a = -3$:

מסעיף (ב), עמודה 1 ועמודה 2 של $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & v \\ | & | & | & | \end{array} \right)$ מובילות, לכן הווקטורים u_1, u_2 מהווים בסיס.

עבור $a \neq -3$:

מסעיף (ב), עמודה 1 עמודה 2 ועמודה 4 של $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & v \\ | & | & | & | \end{array} \right)$ מובילות, לכן הווקטורים u_1, u_2, v מהווים בסיס.

(ד) הווקטורים u_1, u_2, u_3, v ת"ל לכל ערכי a , לכן לא קיימים ערכי a עבורם $\text{span}\{u_1, u_2, u_3, v\} = \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

10.3 דוגמה

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. לכל ערך של a מצאו את המימד ובסיס של $\text{Nul}(A)$.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - aR_1}} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & -a^2 - a + 2 \end{array} \right)$$

$$a = 1, -2 \Leftarrow -a^2 - a + 2 = 0$$

עבור $a = 1$ מקבלים

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\dim(\text{Nul}(A)) = 2 = \text{מספר העמודות הלא מובילות}$$

הפתרון הכללי הינו

$$\begin{aligned} x &= -y - z, & y &\in \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} &= y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

בסיס של $\text{Nul}(A)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

עבור $a = -2$: מקבלים

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim(\text{Nul}(A)) = 1 = \text{מספר העמודות הלא מובילות}$$

הפתרון הכללי הינו

$$\begin{aligned} x &= z, y = z, & y &\in \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} &= z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

בסיס של $\text{Nul}(A)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

משפט 10.4 משפט הדרגה

לכל מרטיצה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ מסדר $m \times n$:

$$\text{rank}(A) + \dim(\text{Nul}(A)) = n.$$

הוכחה:

$\text{rank}(A)$ שווה למספר העמודות המובילות.

$\dim(\text{Nul}(A))$ שווה למספר העמודות הלא המובילות.

לכן $\text{rank}(A) + \dim(\text{Nul}(A))$ שווה למספר העמודות של A .

דוגמה 10.4

עבור מרטיצה $A \in \mathbb{R}^{5 \times 7}$ ידוע כי $\dim(\text{Nul}(A)) = 2$. מצאו את דרגת A .



פתרון:

$$\dim(\text{Nul}(A)) = 2 \text{ לכו } \text{rank}(A) = 5$$

דוגמה 10.5

האם למטריצה $A \in \mathbb{R}^{6 \times 9}$ יכול להיות $\dim(\text{Nul}(A)) = 2$? מצאו את דרגת A .

פתרון:

נניח שקיימת מטריצה $A \in \mathbb{R}^{6 \times 9}$ שעבורה $\dim(\text{Nul}(A)) = 2$.

$$\text{rank}(A) = 9 - 2 = 7$$

אבל $\text{rank}(A)$ שווה למספר השורות שלא אפסים במטריצה המדורגת. במטריצה A יש 6 שורות.

$$\text{rank}(A) \leq 6$$

קיבלנו סתירה. לכן לא קיימת מטריצה A המקיימת את תנאי התרגיל.

למה 10.1 סיכום של המימדים של מטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ מטריצה בעלת m שורות ו- n עמודות. נסמן $r = \text{rank}(A)$ אז

$$\begin{aligned} \dim(\text{col}(A)) = r &= (\text{מספר עמודות מובילות}) \\ \dim(\text{row}(A)) = r &= (\text{מספר שורות מובילות}) \\ \dim(\text{Nul}(A)) = n - r &= (\text{מספר עמודות הלא מובילות}) \end{aligned}$$

משפט 10.5 תנאים שקולים של מטריצה הפיכה

עבור מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ התנאים הבאים שקולים זה לזה.

$$\text{rank}(A) = n \quad (1)$$

A הפיכה. (2)

$$A \cdot X = 0 \text{ יש פתרון יחיד.} \quad (3)$$

$$|A| \neq 0 \quad (4)$$

כל השורות של A בת"ל. (5)

כל העמודות של A בת"ל. (6)

הוכחה:

תרגיל בית.

10.2 ווקטור קואורדינטות לפי בסיס

משפט 10.6 קואורדינטות של ווקטור לפי בסיס מסוים יחיד

נניח כי $u_1, \dots, u_n \in V$ בסיס של המרחב ווקטורי V מעל שדה \mathbb{F} . אז כל ווקטור $a \in V$ ניתן לרשום כצירוף ליניארי יחיד של $u_1, \dots, u_n \in V$.

הוכחה:

$u_1, \dots, u_n \in V$ בסיס של V , לכן $\text{span}\{u_1, \dots, u_n\} = V$.

מכאן נובע שלכל $a \in V$,

$$a \in \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$$

ז"א קיימים סקלרים k_1, \dots, k_n כך ש-

$$a = k_1 u_1 + \dots + k_n u_n.$$

נוכיח שהצירוף הלינארי הוא יחיד בדרך השלילה:

נניח שקיים צירוף לינארי אחר:

$$a = t_1 u_1 + \dots + t_n u_n.$$

כך ש- $k_i \neq t_i$.

לכן

$$(k_1 - t_1)u_1 + \dots + (k_i - t_i)u_i + \dots + (k_n - t_n)u_n = \bar{0}$$

ו- $t_i - k_i \neq 0$. ז"א ווקטורים $\{u_1, \dots, u_n\}$ תלויים ליניארית. סתירה.

■

הגדרה 10.3 ווקטור הקואורדינטות

אם $B = \{u_1, \dots, u_n\} \in V$ בסיס של מרחב ווקטורי V מעל שדה \mathbb{F} ו- $a \in V$ אז

$$a = k_1 u_1 + \dots + k_n u_n.$$

לוקטור

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

קוראים ווקטור הקואורדינטות של ווקטור a לפי בסיס $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ סימון:

$$[a]_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

10.6 דוגמה

$$E = \{e_1, e_2, e_3\} \text{ הבסיס הסטנדרטי של } \mathbb{R}^3. u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$u = 2e_1 - e_2 + 10e_3.$$

לכן

$$[u]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

10.7 דוגמה

$$E = \{1, x, x^2\} \text{ הבסיס הסטנדרטי של } \mathbb{R}_2[x]. p(x) = 1 + 8x - 5x^2$$

$$p(x) = 1 \cdot 1 + 8 \cdot x - 5 \cdot x^2 = 1e_1 + 8e_2 - 5e_3.$$

לכן

$$[p]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

10.8 דוגמה

הראו כי קבוצת הווקטורים

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ מהווה בסיס של } \mathbb{R}^3 \text{ ומצאו את } [u]_B \text{ עבוטר הווקטור}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_2 - 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות לכן b_1, b_2, b_3 בסיס של \mathbb{R}^3 . נמצא את הקואורדינטות של ווקור u לפי בסיס B .

$$u = xb_1 + yb_2 + zb_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 2 \\ -2 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 3 & 6 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_2 - 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 3 & 6 & | & 3 \\ 0 & 0 & 3 & | & -27 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2 \\ R_3 \rightarrow \frac{1}{3}R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 10 \\ 0 & 1 & 0 & | & 19 \\ 0 & 0 & 1 & | & -9 \end{pmatrix}$$

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ -9 \end{pmatrix}$$

דוגמה 10.9 (מרחב האפס ובסיס)

מצאו את בסיס ומימד של מרחב האפס של המטריצה $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

פתרון:

כדי למצוא את המרחב האפס יש למצוא את הפתרונות של המערכת

$$AX = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & | & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & | & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & | & 0 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & | & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + 3R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{5}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

המערכת המתאימה היא

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_4 + 3x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

ולכן הפתרון הוא

$$x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5, \quad x_3 = -2x_4 + 2x_5, \quad x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

ובצורה וקטורית

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

נרשום את הפתרון בצורה צ"ל של וקטורים ב \mathbb{R}^5 :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_4 \\ 0 \\ -2x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3x_5 \\ 0 \\ 2x_5 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + x_4 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} + x_5 \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3}$$

כאשר $x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$. לכן

$$\text{Nul}(A) = \text{span} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\dim(\text{Nul}(A)) = 3$$

משפט 10.7

נניח ש- $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ותהי A^t המשוחלפת של A . אז

$$\text{Row } A = \text{Col } A^t, \quad \text{Col } A = \text{Row } A^t.$$

הוכחה: תרגיל בית.

משפט 10.8

נניח ש- $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$. אם ניתן להגיע מ- A ל- B ע"י ביצוע מספר סופי של פעולות שורה אלמנטריות אז

$$\text{row } A = \text{row } B.$$

הוכחה: תרגיל בית.

משפט 10.9

נניח ש- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ונניח ש- B המטריצה המדורגת המתקבלת מ- A . אז

$$\text{Row } A = \text{Row } B, \quad \text{Nul } A = \text{Nul } B.$$

הוכחה: תרגיל בית.

דוגמה 10.10

עבור המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

מצאו בסיס ל-

Row A (א)

Nul A (ב)

Col A (ג)

פתרון:

(א)

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow -R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - \frac{5}{13}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2 - 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ולכן הוקטורים הלא כולה אפסים

$$v_1 = (1 \ 0 \ 2 \ 0 \ 1) , \quad v_2 = (0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 1) , \quad v_3 = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1) .$$

מהווה בסיס של Row A .

(ב) בכדי למצוא בסיס של Nul A נפתור את המערכת ההומוגנית $AX = 0$. ע"י המטריצה המדורגת הנמצאת לעיל מקבלים את המערכת המתאימה

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_5 &= 0 & x_1 &= -2x_3 - x_5 \\ x_2 - x_3 + x_5 &= 0 & x_2 &= x_3 - x_5 \\ x_4 + x_5 &= 0 & x_4 &= -x_5 \end{aligned} \Rightarrow$$

כך ש-

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s - t \\ s - t \\ s \\ -t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

הינה בסיס של $\text{Nul } A$.

(ג) שיטה 1

לפי משפט 10.7 ניתן למצוא בסיס של $\text{Col } A$ ע"ל למצוא בסיס של $\text{Row } A^t$:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & -7 \\ 5 & -8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

המדורגת של A^t היא

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$B_{\text{Row } A^t} = \{(1 \ -2 \ 0 \ 3), (0 \ 1 \ 3 \ 0), (0 \ 0 \ -5 \ -13)\}$$

ואז לפי משפט 10.7:

$$B_{\text{Col } A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ -13 \end{pmatrix} \right\}$$

שיטה 2

לפי 10.1 העמודות של A המתאימות לעמודות של המדורגת U עם איבר מוביל, מהוות בסיס. מכיוון שיש איבר מוביל בעמודה ה-1 עמודה ה-2 ועמודה ה-4 בהמדורגת U , אז עמודה ה-1 עמודה ה-2 ועמודה ה-4 של A מהווה בסיס:

$$B_{\text{Col } A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$$

שיעור 11

מטריצה המעבר מבסיס לבסיס וטנרספורמציות

משפט 11.1

נניח כי $v_1, \dots, v_n \in V$ בסיס של מ"ו V מעל שדה \mathbb{F} . אז כל ווקטור $u \in V$ ניתן לרשום כצ"ל יחיד של v_1, \dots, v_n .

הוכחה: v_1, \dots, v_n בסיס של V , לכן $\text{span}(v_1, \dots, v_n) = V$. מכאן נובע שלכל $u \in V$, $u \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$.
ז"א קיימים סקלרים $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{F}$ כך ש

$$u = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n.$$

נוכיח שהצ"ל הוא יחיד בדרך השלילה:
נניח שקיים צ"ל אחר:

$$u = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n.$$

אם קיים $1 \leq i \leq n$ כך ש $k_i \neq t_i$. לכן

$$(k_1 - t_1)v_1 + \dots + (k_i - t_i)v_i + \dots + (k_n - t_n)v_n = \bar{0}$$

ו $k_i - t_i \neq 0$. ז"א ווקטורים v_1, \dots, v_n ת"ל. סתירה. ■

הגדרה 11.1

אם $v_1, \dots, v_n \in V$ בסיס של מ"ו V מעל שדה \mathbb{F} ו $u \in V$ אז

$$u = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n.$$

לוקטור

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

קוראים ווקטור הקואורדינטות של ווקטור u לפי בסיס $B = \{v_1, \dots, v_n\}$.
סימון:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

11.1 דוגמה

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}, \mathbb{R}^3 \text{ הבסיס הסטנדרטי של } E = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$u = 2e_1 + (-1)e_2 + 10e_3$$

$$[u]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

11.2 דוגמה

$$\text{אז } p(x) = 1 + 8x - 5x^2, \mathbb{R}_2[x] \text{ הבסיס הסטנדרטי של } E = \{1, x, x^2\}$$

$$p(x) = 1 \cdot 1 + 8x - 5x^2 = 1e_1 + 8e_2 - 5e_3$$

$$[p(x)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

11.3 דוגמה

הראו כי קבוצת הווקטורים

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$.u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ מצאו את } [u]_B \text{ עבור ווקטור}$$

פתרון:

נבדוק אם B בת"ל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן b_3, b_2, b_1 בת"ל.

$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, לכן $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ בסיס של \mathbb{R}^3 .

נמצא את הקואורדינטות של ווקטור u לפי בסיס B .

$$u = k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array} \right)$$

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ -9 \end{pmatrix}$$

11.4 דוגמה

נתונים שני בסיסים של מרחב V , $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ ו $C = \{c_1, \dots, c_n\}$. נתון $[u]_B$. מהו $[u]_C$?

פתרון:

נרשום את u כצ"ל של בסיס B .

$$u = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n \quad \Rightarrow \quad [u]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

כל ווקטור b_i ($1 \leq i \leq n$) הוא צ"ך של בסיס C

$$\begin{aligned} b_1 &= b_{11}c_1 + b_{21}c_2 + \dots + b_{n1}c_n \\ b_2 &= b_{12}c_1 + b_{22}c_2 + \dots + b_{n2}c_n \\ &\vdots \\ b_n &= b_{1n}c_1 + b_{2n}c_2 + \dots + b_{nn}c_n \end{aligned}$$

מכאן מקבלים

$$\begin{aligned} u &= x_1(b_{11}c_1 + b_{21}c_2 + \dots + b_{n1}c_n) + x_2(b_{12}c_1 + b_{22}c_2 + \dots + b_{n2}c_n) + \dots + x_n(b_{1n}c_1 + b_{2n}c_2 + \dots + b_{nn}c_n) \\ &= (x_1b_{11} + x_2b_{12} + \dots + x_nb_{1n})c_1 + (x_1b_{21} + x_2b_{22} + \dots + x_nb_{2n})c_2 + \dots + (x_1b_{n1} + x_2b_{n2} + \dots + x_nb_{nn})c_n \end{aligned}$$

לפיכך

$$[u]_C = \begin{pmatrix} x_1b_{11} + x_2b_{12} + \dots + x_nb_{1n} \\ x_1b_{21} + x_2b_{22} + \dots + x_nb_{2n} \\ \vdots \\ x_1b_{n1} + x_2b_{n2} + \dots + x_nb_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot [u]_B$$

למטריצה

$$P_{B \rightarrow C} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

קוראים מטריצה המעבר מבסיס B לבסיס C . ז"א קיבלנו נוסחה:

$$[u]_C = P_{B \rightarrow C} [u]_B$$

כאשר

$$P_{B \rightarrow C} = ([b_1]_C \dots [b_n]_C)$$

דוגמה 11.5

נתונים שני בסיסים של \mathbb{R}^3 , $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ כאשר

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ מצאו את } [u]_C.$$

פתרון:

נשתמש בנוסחה

$$[u]_C = P_{B \rightarrow C} \cdot [u]_B.$$

כדי למצוא את $P_{B \rightarrow C}$ צריך לפתור את המערכת:

$$C \cdot X = b_1$$

$$C \cdot X = b_2$$

$$C \cdot X = b_3$$

כאשר מטריצה C מורכבת מווקטורים c_3, c_2, c_1 העומדים בעמודות.

מכיוון ש c_3, c_2, c_1 בסיס, למערכת $C \cdot X = b_i$ יש פתרון יחיד, לכן בדירוג ניתן להגיע למטריצה היחידה I .
ז"א בתהליך גאוס נגיע למצבים:

$$(C|b_1) \rightarrow \dots \rightarrow (I|P_{B \rightarrow C} \text{ של } (C|b_1))$$

\vdots

$$(C|b_n) \rightarrow \dots \rightarrow (I|P_{B \rightarrow C} \text{ של } (C|b_n))$$

מכיוון שבדירוג מבצעים את אותן הפעולות האלמנטריות, אפשר לפתור את כל המעקות בבת אחת!

$$(C|B) \rightarrow \dots \rightarrow (I|P_{B \rightarrow C})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -7 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$P_{B \rightarrow C} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[u]_C = P_{B \rightarrow C} \cdot [u]_B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix}$$

דוגמה 11.6

נתון

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$$

שני בסיסים סדורים של \mathbb{R}^2 .מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס C .יהי $V \in \mathbb{R}^2$ כך ש- $(V)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. מצאו את $(V)_C$.מצאו את מטריצת המעבר מהבסיס C לבסיס B .הגדרה 11.2 המרחב של פולינומים מסדר n

המרחב של פולינומים מסדר n יסומן $\mathbb{R}_n[x]$ או $P_n[x]$ ויוגדר- הקבוצה של כל הפולינומים מסדר n לכל היותר:

$$P_n[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

דוגמה 11.7

$$1 + 2x \in P_1[x], \quad 1 + 5x^2 \notin P_1[x].$$

$$1 + 2x \in P_3[x], \quad 1 + 4x + 3x^2 \in P_3[x], \quad 3 + 8x + 7x^3 \in P_3[x], \quad 6x + 5x^4 \notin P_3[x].$$

$$1 - 3x^4 + 6x^7 \in P_7[x], \quad 1 - 3x^4 + 6x^7 + 6x^8 - x^9 \notin P_7[x].$$

משפט 11.2 תלות ליניארית של פולינומים

קבוצת פולינומים מסדר n

$$S = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \dots\}$$

בת"ל אם"ם קבוצת הווקטורים של המקדמים בת"ל, כלומר אם הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \dots \right\}$$

בת"ל.

אם נגדיר המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & \cdots \\ a_1 & b_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ a_n & b_n & \cdots \end{pmatrix}$$

אז הפולינומים בת"ל אס"ם

$$\det(A^t A) \neq 0.$$

משפט 11.3 בסיס הסטנדרטי של פולינומים

הקבוצה

$$E = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, \dots, e_{n+1} = x^n\}$$

הינה בסיס של המרחב ווקטורי של פולינומים מסדר n ונקרא הבסיס הסטנדרטי של $P_n[x]$.

משפט 11.4 הוורונסקיאן

נתון קבוצה

$$F = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$$

של n פונקציות במרחב V של כל הפונקציות מעל \mathbb{R} . נגדיר את הוורונסקיאן

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

אם קיים $x_0 \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$W(x_0) \neq 0$$

אז F בת"ל.

הוכחה: יהיו

$$F = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$$

קבוצה של n פונקציות במרחב V של כל הפונקציות מעל \mathbb{R} . הקבוצה בת"ל אס"ם הצ"ל

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים רק אם $c_i = 0$ לכל $i = 1, 2, \dots, n$. נגזור את הצ"ל $n - 1$ פעמים כדי לקבל

$$c_1 f_1^{(i)}(x) + c_2 f_2^{(i)}(x) + \dots + c_n f_n^{(i)}(x) = 0$$

לכל $x \in \mathbb{R}$. כמשוואה מטריציאלית

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

הדטרמיננטה של המטריצה המקדמים נקראת הוורונסקיאן של הקבוצה $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ ומסומן ב $W(x)$. לכן אם קיים נקודה $x_0 \in \mathbb{R}$ כך ש $W(x_0) \neq 0$ אז המטריצה המקדמים איננה אפס בנקודה x_0 ולכן כל המקדמים $c_i = 0$. לכן, אם הוורונסקיאן אינו שווה אפס בנקודה $x_0 \in \mathbb{R}$, אז הקבוצה $F = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ בת"ל.



11.8 דוגמה

עבור המרחב $P_2[x]$,
מצאו מטריצת מעבר מהבסיס הסדור

$$B = \{b_1 = 1 - 2x + x^2, \quad b_2 = 3 - 5x + 4x^2, \quad b_3 = 2x + 3x^2\}$$

לבסיס הסטנדרטי

$$E = \{e_1 = 1, \quad e_2 = x, \quad e_3 = x^2\}$$

ומצאו את הווקטור $-1 + 2x$ לפי הבסיס B .

פתרון:

נחשב את $P_{B \rightarrow E}$:

$$(E|B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right)$$

וסיימנו.

$$P_{B \rightarrow E} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{array} \right)$$

$$[u]_B = P_{E \rightarrow B} [u]_E .$$

$$P_{E \rightarrow B} = P_{B \rightarrow E}^{-1}$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -23 & -9 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$P_{E \rightarrow B} = \left(\begin{array}{ccc} -23 & -9 & 6 \\ 8 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad \text{לכן}$$

$$[u]_B = P_{E \rightarrow B} [u]_E = \left(\begin{array}{ccc} -23 & -9 & 6 \\ 8 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

בדיקה:

$$\begin{aligned} 5b_1 - 2b_2 + 1b_3 &= 5(1 - 2x + x^2) - 2(3 - 5x + 4x^2) + 1(2x + 3x^2) \\ &= 5 - 6 - 10x + 10x + 2x + 5x^2 - 8x^2 + 3x^2 \\ &= -1 + 2x . \end{aligned}$$

שיעור 12

העתקות לינאריות

12.1 תחום, מול-תחום, גרעין ותמונה

הגדרה 12.1 התחום והטווח של פונקציה

תהינה A ו- B קבוצות. פונקציה f מ- A ל- B היא כלל המתאים לכל איבר $a \in A$ איבר יחיד $f(a) \in B$.
נסמן

$$f : A \rightarrow B.$$

הקבוצה A נקראת התחום של f , הקבוצה B נקראת הטווח של f .

הגדרה 12.2 פונקציה

פונקציה $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ מ- \mathbb{R}^n ל- \mathbb{R}^m היא כלל המתאים לכל וקטור $X \in \mathbb{R}^n$ ווקטור יחיד $T(X) \in \mathbb{R}^m$.
לוקטור $T(X)$ קוראים התמונה של X תחת T .
 X יקרא המקור של $T(X)$.

הגדרה 12.3 גרעין ותמונה של פונקציה

תהי

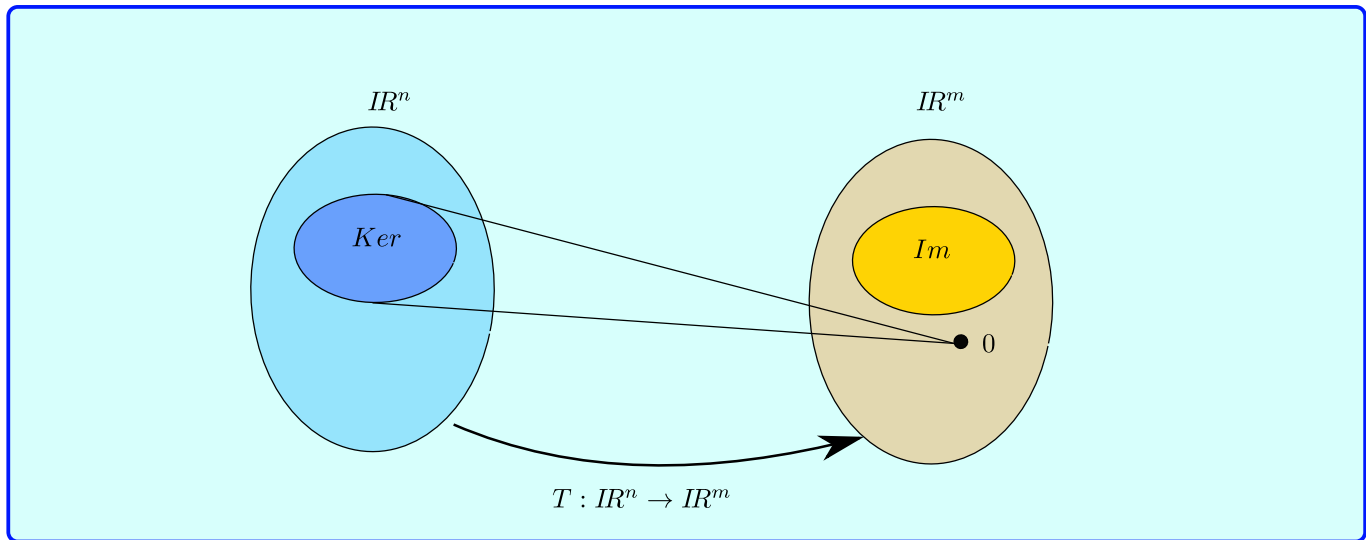
$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

התמונה של T , מסומנת $\text{Im}(T)$ ומוגדרת

$$\text{Im}(T) = \{T(X) | X \in \mathbb{R}^n\}$$

הגרעין של T מסומן $\text{Ker}(T)$ ומוגדר

$$\text{Ker}(T) = \{X \in \mathbb{R}^n | T(X) = 0\}$$



דוגמה 12.1

נסמן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

נגדיר $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ע"י

$$T(X) = A \cdot X \quad \forall X \in \mathbb{R}^2.$$

(א) מצאו נוסחה ל- T . כלומר, לכל $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ מצאו $T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$.

(ב) מצאו את $T(u)$.

(ג) מצאו $X \in \mathbb{R}^2$ כך ש- $T(X) = b$. במילים אחרות, מצאו ווקטור מקור ל- b . האם יש יותר מאחד?

(ד) האם $c \in \text{Im}(T)$? במילים אחרות, האם קיים $X \in \mathbb{R}^2$ כך ש- $T(X) = c$?

(ה) מצאו $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.

(ו) האם $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(T)$?

(ז) האם $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(T)$?

(ח) מצאו $\text{Ker}(T)$.

פתרון:

$$(א) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ יהי}$$

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}$$

(ב) לפי הנוסחה שמצאנו בסעיף הקודם

$$T(u) = T \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3(-1) \\ 3 \cdot 2 + 5(-1) \\ -2 + 7 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

כמובן אפשר גם לכפול את A ב- u :

$$T(u) = A \cdot u = T \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

(ג) דרוש $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ כך ש- $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b$. נראה זאת בשתי דרכים:

דרך ראשונה:

נדרוש

$$\begin{pmatrix} x_2 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$x_1 - 3x_2 = 3$$

$$3x_1 + 5x_2 = 2$$

$$-x_1 + 7x_2 = -5$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 + R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - 4R_2]{R_2 \rightarrow \frac{1}{14}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 3R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ולכן נמצא כי $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{3}{2}$ כך ש-

$$T \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

דרך שניה:

נדרוש

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b$$

נדרג את המטריצה המורחבת הבאה:

$$(A \mid b)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{array} \right)$$

(ד) סעיף זה דומה לסעיף הקודם, אבל בסעיף זה אנו לא מתבקשים למצוא מקור ל- c אלא לענות האם יש מקור. במילים אחרות, האם יש פתרון למשוואה

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c.$$

נקבל

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow \frac{1}{14}R_2 \\ R_3 \rightarrow \frac{1}{2}R_3}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow R_1 + 3R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{array} \right)$$

למערכת אין פתרון, ולכן אין מקור לוקטור c .

(ה) נשים לב ש- $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ולכן $T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ לא מוגדר.

(ו) כמו קודם, $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ולכן $\text{Ker}(T) \subseteq \mathbb{R}^2$. בפרט

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \text{Ker}(T).$$

(ז) קל לראות שהתשובה חיובית, שכן

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \\ -0 + 7 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(T).$$

(ח) למציאות $\text{Ker}(T)$, עלינו למצוא את כל המקורות ב- \mathbb{R}^2 של ווקטור האפס ב- \mathbb{R}^3 , כלומר לפתור את המשוואה

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ניתן להשתמש בחישובים לעיל:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow \frac{1}{14}R_2 \\ R_3 \rightarrow \frac{1}{2}R_3}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow R_1 + 3R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ולמערכת יש רק את הפתרון הטריוויאלי. כלומר, המקור של ווקטור האפס ב- \mathbb{R}^3 הוא רק ווקטור האפס ב- \mathbb{R}^2 . במילים אחרות,

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

12.2 הגדרה של העתקה ליניארית

הגדרה 12.4 העתקה ליניארית

פונקציה $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ נקראת **העתקה ליניארית** אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

(1)

$$T(u + w) = T(u) + T(w)$$

לכל $u, w \in \mathbb{R}^n$ (שומרת על סכום).

(2)

$$T(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot T(u)$$

לכל $u \in \mathbb{R}^n$ ולכל $\alpha \in \mathbb{R}$ (שומרת על כפל בסקלר).

דוגמה 12.2

האם הפונקציה $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

העתקה ליניארית?

פתרון:

נבדוק את שני התנאים ההרכחיים:

(1) יהיו $X, Y \in \mathbb{R}^2$ כך ש-

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$T(X+Y) = A \cdot (X+Y) = \begin{pmatrix} 1(x_1+y_1) - 3(x_2+y_2) \\ 3(x_1+y_1) + 5(x_2+y_2) \\ -(x_1+y_1) + 7(x_2+y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 - 3y_2 \\ 3y_1 + 5y_2 \\ -y_1 + 7y_2 \end{pmatrix} = A \cdot X + A \cdot Y$$

(2) יהי $X \in \mathbb{R}^2$ ו $\alpha \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot X) = \begin{pmatrix} 1(\alpha x_1) - 3(\alpha x_2) \\ 3(\alpha x_1) + 5(\alpha x_2) \\ -(\alpha x_1) + 7(\alpha x_2) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix} = \alpha A \cdot X$$

משפט 12.1

(עיין משפט 3.4.) נניח ש- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ו- $u, w \in \mathbb{R}^n$ ו- $\alpha \in \mathbb{R}$. מתקיים:

(1)

$$A \cdot (u + w) = A \cdot u + A \cdot w$$

(2)

$$A \cdot (\alpha \cdot u) = \alpha \cdot (A \cdot u)$$

משפט 12.2

תהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. ההעתקה $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ המוגדרת ע"י

$$T(x) = A \cdot x$$

לכל $x \in \mathbb{R}^n$ היא העתקה ליניארית.

הוכחה:

יהיו $u, w \in \mathbb{R}^n$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. לפי משפט 12.1 מתקיים

(1)

$$T(u + w) = A \cdot (u + w) = A \cdot u + A \cdot w = T(u) + T(w)$$

(2)

$$T(\alpha \cdot u) = A \cdot (\alpha \cdot u) = \alpha \cdot (A \cdot u) = \alpha \cdot T(u)$$

■

משפט 12.3 "2 תכונות חשובות של העתקה ליניארית"

תהי $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית. מתקיים:

(1)

$$T(0) = 0$$

(2)

$$T(\alpha v + \beta u) = \alpha T(v) + \beta T(u)$$

לכל $u, v \in \mathbb{R}^n$ ולכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(3) מכאן נובע כי עבור T העתקה ליניארית, מתקיים

$$T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_n T(v_n).$$

בקצרה, תכונה יסודית של העתקה ליניארית:

$$T(0) = 0 \iff T \text{ העתקה ליניארית}$$

דוגמה 12.3

נגדיר $T : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$ ע"י

$$T(w) = 5w \quad \forall w \in \mathbb{R}^7.$$

האם T העתקה ליניארית?

פתרון:

כן. הוכחה:

יהיו $u, w \in \mathbb{R}^7$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. מתקיים:

$$T(u + w) = 5 \cdot (u + w) = 5 \cdot u + 5 \cdot w = T(u) + T(w) \quad (1)$$

$$T(\alpha \cdot u) = 5 \cdot (\alpha \cdot u) = \alpha \cdot (5 \cdot u) = \alpha \cdot T(u) \quad (2)$$

12.4 דוגמה

נגדיר $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ע"י

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

האם T העתקה ליניארית?

פתרון:

לא. כל העתקה ליניארית S מקיימת $S(0) = 0$. בדוגמה הזו

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן T איננה העתקה ליניארית.

12.5 דוגמה

נגדיר $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ע"י

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y \\ 0 \\ 5x+2y \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

האם T העתקה ליניארית?

פתרון:

כן. הוכחה:

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

נבדוק האם שני התנאים של הגדרה 12.4 מתקיימים:

(1)

$$\begin{aligned} T \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) &= T \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1+x_2)-3(y_1+y_2) \\ 0 \\ 5(x_1+x_2)+2(y_1+y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1+2x_2-3y_1-3y_2 \\ 0 \\ 5x_1+5x_2+2y_1+2y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x_1-3y_1 \\ 0 \\ 5x_1+2y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2-3y_2 \\ 0 \\ 5x_2+2y_2 \end{pmatrix} \\ &= T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{לכן } T \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ מתקיים.}$$

(2)

$$\begin{aligned} T\left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) &= T\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\alpha x_1) - 3(\alpha y_1) \\ 0 \\ 5(\alpha x_1) + 2(\alpha y_1) \end{pmatrix} \\ &= \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2x_1 - 3y_1 \\ 0 \\ 5x_1 + 2y_1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha \cdot T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לכן $T\left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = \alpha \cdot T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ מתקיים.

דוגמה 12.6

נגדיר $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ע"י

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ 9x + 5y \\ x + 7y \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

האם T העתקה ליניארית?

פתרון:

לא. ניקח למשל

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אמת כי

$$T\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix}$$

אבל

$$2 \cdot T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix}$$

כך ש-

$$T\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \neq 2 \cdot T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן בגלל שמצאנו דוגמה המקיימת

$$T(\alpha \cdot u) \neq \alpha \cdot T(u)$$

אז התכונה ההכרחית $T(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot T(u)$ איננה מתקיימת בכללי.

דוגמה 12.7

תהי $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ העתקה ליניארית המקיימת

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(א) מצאו את $T \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ב) מצאו את $T \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(ג) מצאו את $T \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(ד) מצאו נוסחה ל T . כלומר, לכל $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ מצאו $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

פתרון:

(א)

$$T \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = T \left(3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 3 \cdot T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

(ב)

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = T \left(5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 5 \cdot T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 35 \\ 40 \end{pmatrix}$$

(ג)

$$T \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = T \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = T \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 35 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 36 \\ 44 \\ 52 \end{pmatrix}$$

(ד)

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= T \left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \right) = T \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = T \left(x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + T \left(y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= x \cdot T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x \\ 4x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5y \\ 6y \\ 7y \\ 8y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x + 5y \\ 2x + 6y \\ 3x + 7y \\ 4x + 8y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

במילים אחרות:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

12.3 מטריצה המייצגת הסטנדרטית

משפט 12.4 מטריצה המייצגת הסטנדרטית

תהי $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית. אז קיימת מטריצה אחת ויחידה $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ כך ש-

$$T(X) = A \cdot X$$

לכל $X \in \mathbb{R}^n$. מתקיים

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ T(e_1)_E & T(e_2)_E & \cdots & T(e_n)_E \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

כאשר e_1, e_2, \dots, e_n הווקטורים של הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^n ו- E הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^m .

A נקראת **המטריצה המייצגת הסטנדרטית (ממ"ס)** של ההעתקה ליניארית T .

משפט 12.5 תנאי מספיק של העתקה ליניארית

(i) נתונה $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. אם $T(X) = A \cdot X$ לכל $X \in \mathbb{R}^n$ אז

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

הינו העתקה ליניארית.

(ii) אם $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית אז קיימת $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ כך ש-

$$T(X) = A \cdot X$$

לכל $X \in \mathbb{R}^n$.

12.8 דוגמה

נתונה פונקציה $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ 0 \\ 5x + 2y \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

המהווה העתקה ליניארית. מצאו ממ"ס שלה.

פתרון:ווקטורי היחידה של \mathbb{R}^2 הינם

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

לכן, הממ"ס של T היא:

$$A = \left(T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

12.4 פונקציה על ופונקציה חח"ע**הגדרה 12.5 פונקציה על ופונקציה חח"ע**נתונה פונקציה $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (i) T על \mathbb{R}^m אם לכל $b \in \mathbb{R}^m$ קיים (לפחות אחד) $X \in \mathbb{R}^n$ כך ש-

$$T(X) = b.$$

(ii) T חד-חד ערכית (חח"ע) אם לכל $b \in \mathbb{R}^m$ קיים לכל היותר $X \in \mathbb{R}^n$ אחד כך ש-

$$T(X) = b.$$

12.9 דוגמהתהי $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ מוגדרת ע"י

$$T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y + z \\ x + |y| - z \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

תהי

$$T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

מוגדרת ע"י

$$T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y \\ z \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

תהי

$$T_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

מוגדרת ע"י

$$T_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

(א) הוכיחו או הפריכו:

T_1 העתקה ליניארית.

(ב) הוכיחו או הפריכו:

T_2 העתקה ליניארית.

(ג) הוכיחו או הפריכו:

T_3 העתקה ליניארית.

לכל אחת מההעסקות הליניאריות שמצאת,

(ד) מצא מטריצה מייצגת סטנדרטית.

(ה) האם ההעסקה על?

(ו) האם ההעסקה חח"ע?

פתרון:

(א) T_1 איננה העסקה ליניארית. ניקח למשל

$$T_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 0 \\ 0 + |1| - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1 \left(-1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = T_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) + 0 \\ 0 + |-1| - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אבל

$$-1 \cdot T_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$T_1 \left(-1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \neq -1 \cdot T_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ב)

$$T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

מוגדרת ע"י

$$T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y \\ z \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

נתבונן במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} T_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & T_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & T_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נשים לב שלכל $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ מתקיים:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y \\ z \end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

כלומר, לכל $X \in \mathbb{R}^3$ מתקיים

$$T_2(X) = AX$$

ולכן, לפי משפט 12.5 (i), העתקה ליניארית.

שימו לב ש- A הינה הממ"ס של T .

(ג) T_3 איננה העתקה ליניארית בדומה לדוגמה של T_1 . ניקח למשל

$$T_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T_3 \left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = T_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

אבל

$$2 \cdot T_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$T_3 \left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \neq 2 \cdot T_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ד) עיין סעיף (ב)

(ה) נזכיר שההעתקה היא על אם לכל $b \in \mathbb{R}^3$ קיים (לפחות אחד) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ כך ש-

$$T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b,$$

כלומר, אם"ס לכל $b \in \mathbb{R}^3$ למערכת

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$$

יש פתרון.

נדרג את המטריצה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - b_1 \end{array} \right)$$

על סמך הדרוג, קיים $b \in \mathbb{R}^3$ כך שלמערכת $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$ אין פתרון (כי תיתכן שורת סתירה), ולכן ההעתקה איננה על.

(ו) נזכיר שההעתקה היא חח"ע אם לכל $b \in \mathbb{R}^3$ קיים לכל היותר $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ אחד כך ש-

$$T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b,$$

כלומר, אם"ם לכל $b \in \mathbb{R}^3$ למערכת

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$$

יש לכל היותר פתרון אחד.

על סמך הדרוג, קיים $b \in \mathbb{R}^3$ (למשל, ווקטור האפס) כך שלמערכת

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$$

יש אינסוף פתרונות (כי יש משתנה חופשי), ולכן ההעתקה איננה חח"ע.

משפט 12.6

תהי $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית ותהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T . התנאים הבאים שקולים:

(א) T על (\mathbb{R}^m) .

(ב) במדורגת המתקבלת מ- A קיים איבר מוביל בכל שורה.

(ג) עמודות A פורשות את \mathbb{R}^m .

משפט 12.7

תהי $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית ותהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T . התנאים הבאים שקולים:

(א) T חח"ע.

(ב) במדורגת המתקבלת מ- A קיים איבר מוביל בכל עמודה

(ג) עמודות A בת"ל.

12.5 הצגת העתקה ליניארית בבסיסים שונים

משפט 12.8

יהי V מרחב ווקטורי עם בסיס סדור

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\},$$

יהי W מרחב ווקטורי עם בסיס סדור

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$$

ותהי

$$T : V \rightarrow W$$

העתקה ליניארית. אזי, לכל $X \in V$ מתקיים

$$[T(X)]_C = [T]_C^B \cdot [X]_B$$

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(b_1)]_C & [T(b_2)]_C & \dots & [T(b_n)]_C \\ | & | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

$[T]_C^B$ נקראת המטריצה המייצגת של ההעתקה T ביחס לבסיסים B ו- C .

דוגמה 12.10

נתון

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

העתקה ליניארית המוגדרת ע"י

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 4y \\ 4x + 5y \\ 6y \end{pmatrix}$$

לכל $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, ונתון

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

בסיס של \mathbb{R}^2 .

(א) מהי המטריצה המייצגת הסטנדרטית ?

(ב) מהי המטריצה המייצגת ביחס לבסיס B ?

(ג) נתון הווקטור X בעל קואורדינטות $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ביחס לבסיס הסטנדרטית E של \mathbb{R}^2 . מהו הווקטור X_B ביחס לבסיס B ?

(ד) הוכיחו כי

$$[T]_{\bar{E}}^E [X]_E = [T]_{\bar{E}}^B [X]_B$$

כאשר \bar{E} הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^3 .

פתרון:

נתון ווקטור

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$$

ביחס לבסיס הסטנדרטית $E = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ של \mathbb{R}^2 . אז ההעתקה ליניארית T מחזירה ווקטור

$$(3x - 4y) \cdot e_1 + (4x + 5y) \cdot e_2 + 6y \cdot e_3$$

ביחס לבסיס הסטנדרטית $\bar{E} = \left\{ \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ של \mathbb{R}^3 .

(א) ניתן לכתוב את ההעתקה ליניארית באמצעות המטריצה המייצגת הסטנדרטית בצורה

$$[T(X)]_{\bar{E}} = [T]_{\bar{E}}^E \cdot [X]_E$$

כאשר

$$[T]_{\bar{E}}^E = \begin{pmatrix} | & | \\ T(e_1) & T(e_2) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

המטריצה המייצגת הסטנדרטית.

(ב) המטריצה המייצגת ביחס לבסיס B ניתנת ע"י

$$[T]_{\bar{E}}^B = \begin{pmatrix} | & | \\ T(b_1) & T(b_2) \\ | & | \end{pmatrix}.$$

שים לב,

$$b_1 = e_1 + e_2, \quad b_2 = e_1 - e_2, \quad \Leftrightarrow \quad e_1 = \frac{1}{2} \cdot b_1 + \frac{1}{2} \cdot b_2, \quad e_2 = \frac{1}{2} \cdot b_1 - \frac{1}{2} \cdot b_2,$$

כך ש-

$$T(b_1) = T(e_1) + T(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$T(b_2) = T(e_1) - T(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$[T]_{\bar{E}}^B = \begin{pmatrix} | & | \\ T(b_1) & T(b_2) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 9 & -1 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

(ג)

$$[X]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_E = 2 \cdot e_1 + 4 \cdot e_2 = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot b_1 + \frac{1}{2} \cdot b_2 \right) + 4 \left(\frac{1}{2} \cdot b_1 - \frac{1}{2} \cdot b_2 \right) = 3 \cdot b_1 - 1 \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_B$$

(ד)

$$[T]_{\bar{E}}^E \cdot [X]_E = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} -10 \\ 28 \\ 24 \end{pmatrix}_{\bar{E}}$$

-ו

$$[T]_{\bar{E}}^B \cdot [X]_B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 9 & -1 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -10 \\ 28 \\ 24 \end{pmatrix}_{\bar{E}}$$

12.11 דוגמה

נתון

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

העתקה ליניארית המוגדרת ע"י

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + y \\ 2x - y \\ 3y \end{pmatrix}$$

לכל $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, ונתון

$$C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

בסיס של \mathbb{R}^3 .

(א) מהי המטריצה המייצגת הסטנדרטית ?

(ב) מהי המטריצה המייצגת ביחס לבסיס C ?

(ג) נתון הווקטור $X_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_E$ ביחס לבסיס הסטנדרטית E , הוכיחו כי הווקטור המתקבל מההעתקה לינארית

$$[T]_C^E X_E$$

הוא שקול לווקטור המתקבל מההעתקה לינארית

$$[T]_E^E X_E$$

פתרון:

(א) נתון בסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^2 , קרי $E = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, והבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^3 , קרי $\bar{E} = \left\{ \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{aligned} [T(e_1)]_{\bar{E}} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\bar{E}} = 4 \cdot \bar{e}_1 + 2 \cdot \bar{e}_2 + 0 \cdot \bar{e}_3 \\ [T(e_2)]_{\bar{E}} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\bar{E}} = 1 \cdot \bar{e}_1 - 1 \cdot \bar{e}_2 + 3 \cdot \bar{e}_3 \end{aligned}$$

כך ש-

$$[T]_{\bar{E}}^E = \left(\begin{array}{c|c} [T(e_1)]_{\bar{E}} & [T(e_2)]_{\bar{E}} \\ \hline \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(ב) שים לב

$$\begin{aligned} c_1 &= \bar{e}_1 & \bar{e}_1 &= c_1 \\ c_2 &= \bar{e}_1 + \bar{e}_2 & \Rightarrow \bar{e}_2 &= c_2 - c_1 \\ c_3 &= \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 & \bar{e}_3 &= c_3 - c_2 \end{aligned}$$

כך ש-

$$[T(e_1)]_C = 4 \cdot c_1 + 2 \cdot (c_2 - c_1) = 2 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_C$$

$$[T(e_2)]_C = 1 \cdot c_1 - 1 \cdot (c_2 - c_1) + 3 \cdot (c_3 - c_2) = 2 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}_C$$

ולכן

$$[T]_C^E = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(e_1)]_C & [T(e_2)]_C \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(ג)

$$[T(X)]_{\bar{E}} = [T]_{\bar{E}}^E \cdot [X]_E = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}_{\bar{E}}$$

$$[T(X)]_C = [T]_C^E \cdot [X]_E = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}_C$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}_C = 6 \cdot c_1 - 6 \cdot c_2 + 6 \cdot c_3 = 6 \cdot \bar{e}_1 - 6(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + 6 \cdot (\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3) = 6 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + 6 \cdot \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}_{\bar{E}}.$$

דוגמה 12.12

נתונה העתקה ליניארית

$$T : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$$

המוגדרת ע"י

$$T(a + bx + cx^2) = a + 2b + 3c + (2a + 4b + 5c)x + (3a + 6b + 9c)x^2 + (4a + 8b + 12c)x^3$$

(א) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T .

(ב) מצאו את המימד ובסיס של $\text{Im } T$.

(ג) מצאו את המימד ובסיס של $\text{ker } T$.

(ד) מצאו את המטריצה המייצגת של ההעתק ביחס לבסיסים הסדורים

$$B = \{b_1 = 1 + x, b_2 = x^2, b_3 = x\}$$

של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ וביחס לבסיס

$$C = \{c_1 = x^3, c_2 = x^2, c_3 = x, c_4 = 1\}$$

של $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

(ה) מצאו את

$$[T(1 + x + x^2 + x)]_C$$

פתרון:

(א) נסמן

$$E = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2\}$$

הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ ו-

$$\bar{E} = \{\bar{e}_1 = 1, \bar{e}_2 = x, \bar{e}_3 = x^2, \bar{e}_4 = x^3\}$$

הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$. המטריצה המייצגת הסטנדרטית היא

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} [T(e_1)]_{\bar{E}} & [T(e_2)]_{\bar{E}} & [T(e_3)]_{\bar{E}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} [T(1)]_{\bar{E}} & [T(x)]_{\bar{E}} & [T(x^2)]_{\bar{E}} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

(ב) מתקיים:

$$\text{Im } T = \text{Col } A .$$

נדרג את המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל ש-

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$$

מהווה בסיס של $\text{Col } A$, ולכן $\dim(\text{Col } A) = 2$.

מכאן בסיס של $\text{Im } T$ הוא

$$\{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3, 3 + 5x + 9x^2 + 12x^3\}$$

ולכן $\dim(\text{Im } T) = 2$

(ג) מתקיים

$$\text{Ker } T \approx \text{Nul } A .$$

$$\text{Nul } A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

על סמך החישוב לעיל נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \\ 4 & 8 & 12 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

כך ש-

$$\text{Nul } A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b \in \mathbb{R} .$$

לכן בסיס של $\text{Nul } A$ הוא

$$B_{\text{Nul } A} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_E \right\}$$

-1

$$\dim(\text{Nul } A) = 1 .$$

מכאן נקבל

$$B_{\text{Ker } T} = \{-2 + x\}$$

-1

$$\dim(\text{Ker } T) = 1 .$$

(ד) נחשב את התמונות של ווקטורי הבסיס,

$$T(1+x) = 3+6x+9x^2+12x^3, \quad T(x^2) = 3+5x+9x^2+12x^3, \quad T(x) = 2+4x+6x^2+8x^3 .$$

נזכיר ש-

$$C = \{c_1 = x^3, c_2 = x^2, c_3 = x, c_4 = 1\}$$

ולכן המטריצה המבוקשת היא

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} [T(b_1)]_C & [T(b_2)]_C & [T(b_3)]_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 8 \\ 9 & 9 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(ה)

$$[T(1+x+x^2+x)]_C = [T]_C^B \cdot [T(1+x+x^2+x)]_B = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 8 \\ 9 & 9 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 24 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}$$

12.6 קשר בין מרחב העמודות ומרחב האפס להעתקות לינאריות

משפט 12.9 קשר בין מרחב העמודות ומרחב האפס להעתקות לינאריות

עבור מרחבים ווקטוריים U ו- V והעתקה לינארית

$$T : U \rightarrow V$$

כך ש-

$$\text{Im } T = \left\{ T(u) \in V \mid u \in U \right\}$$

-1

$$\text{Ker } T = \left\{ u \in U \mid T(u) = 0 \right\} .$$

נשים לב שאם

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

אז T מוגדרת ע"י כפל במטריצה, כלומר

$$T(X) = A \cdot X$$

עבור מטריצה מסדר $m \times n$. במקרה זה,

$$\text{Im } T = \text{Col } A$$

-1

$$\text{Ker } T = \text{Nul } A$$

12.7 הגדרה של איזומורפיזם

משפט 12.10

יהי V מ"ו ויהי

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

בסיס סדור של V . ההעתקה

$$T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

הנתונה ע"י

$$T(X) = [X]_B \quad \forall X \in V$$

היא העתקה לינארית חח"ע ועל.

הגדרה 12.6 איזומורפיזם בין מרחבים ווקטורים

יהיו U, V מ"ו מעל \mathbb{R} . אם קיימת העתקה לינארית חח"ע ועל

$$T : U \rightarrow V,$$

נאמר ש- T איזומורפיזם. בנוסף, נאמר שהמרחבים U ו- V איזומורפיים ונסמן $U \approx V$.

12.8 האיזומורפיזמים הטבעיים

(1) נתון העתקה לינארית

$$T : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \rightarrow \mathbb{R}^4$$

ובסיס

$$E = \{1, x, x^2, x^3\}$$

של $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ כך ש- T מוגדרת ע"י

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = [a + bx + cx^2 + dx^3]_E = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_E.$$

אז

$$\mathbb{R}_{\leq 3}[x] \approx \mathbb{R}^4$$

ע"י האיזומורפיזם הטבעי

$$a + bx + cx^2 + dx^3 \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

(2) נתון העתקה ליניארית

$$T : \mathbb{R}^{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^6$$

ובסיס

$$\bar{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

של $\mathbb{R}^{2 \times 3}$ כך ש- T מוגדרת ע"י

$$T \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \right) = \left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \right]_{\bar{E}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}_{\bar{E}}.$$

אז

$$\mathbb{R}^{2 \times 3} \approx \mathbb{R}^6$$

ע"י האיזומורפיזם הטבעי

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}_{\bar{E}}.$$

משפט 12.11 ע

ל מנת להכריע שאלות במ"ו מסוים (מעל \mathbb{R}) ניתן לעבור ל- \mathbb{R}^n המתאים (ע"י ההעתקה לעיל ובחירת הבסיס הסטנדרטי).

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{T} & V \\
 \downarrow \phi & \begin{array}{c} X \mapsto T(X) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ [X]_B \mapsto [T(X)]_C \end{array} & \downarrow \psi \\
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

$$[T(X)]_C = [T]_C^B \cdot [X]_B$$

דוגמה 12.13

נתונה טרנספורמציה ליניארית

$$T : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

המוגדרת ע"י

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a + 2b + 3c & 2a + 4b + 5c \\ 3a + 6b + 9c & 4a + 8b + 12c \end{pmatrix}$$

(א) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T .

(ב) מצאו את המימד ובסיס של $\text{Im } T$.

(ג) מצאו את המימד ובסיס של $\text{Ker } T$.

(ד) מצאו את המטריצה המייצגת של ההעתקה ביחס לבסיס הסדור

$$B = \{b_1 = 1 + x, b_2 = x^2, b_3 = x\}$$

של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ וביחס לבסיס

$$C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, c_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

פתרון:

(א)

$$[T]_{\bar{E}}^E \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} a + 2b + 3c \\ 2a + 4b + 5c \\ 3a + 6b + 9c \\ 4a + 8b + 12c \end{pmatrix}_{\bar{E}}$$

$$[T]_{\bar{E}}^E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} =: A$$

(ב)

$$\text{Im } T = \text{Col } A$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כך שבסיס של $\text{Col } A$ הינו

$$B_{\text{Col } A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$$

ומימדו 2. מכאן בסיס של $\text{Im } T$ הוא

$$B_{\text{Im } T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} \right\}$$

(ג)

$$\text{Ker } T \approx \text{Nul } A .$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \\ 4 & 8 & 12 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ולכן

$$\text{Nul } A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$$

ומימדו 1. מכאן

$$B_{\text{Ker } T} = \{-2 + x\}$$

(ד)

$$[T]_C^B = \left(\begin{array}{c|c|c} | & | & | \\ [T(b_1)]_C & [T(b_2)]_C & [T(b_3)]_C \\ | & | & | \end{array} \right)$$

לפי ההגדרה של T :

$$\begin{aligned} T(b_1) &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} = 12c_1 + 9c_2 + 6c_3 + 3c_4 = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}_C \\ T(b_2) &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} = 12c_1 + 9c_2 + 5c_3 + 3c_4 = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}_C \\ T(b_3) &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = 8c_1 + 6c_2 + 4c_3 + 2c_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}_C \end{aligned}$$

כך ש-

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 8 \\ 9 & 9 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

12.14 דוגמה

$$T: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

המוגדרת ע"י

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b + 3c \\ 2b + 3c + 4d \\ 5a + 3c + 4d \end{pmatrix}$$

(א) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T .

(ב) מצאו את המימד ובסיס של $\text{Im } T$.

(ג) מצאו את המימד ובסיס של $\text{Ker } T$.

פתרון:

(א) שימו לב, ביחס לבסיס הסטנדרטית

$$E = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ וביחס לבסיס

$$\bar{E} = \left\{ \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

של \mathbb{R}^3 , אז

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_E$$

$$[T]_{\bar{E}}^E \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} a + 2b + 3c \\ 2b + 3c + 4d \\ 5a + 3c + 4d \end{pmatrix}_{\bar{E}}$$

$$[T]_{\bar{E}}^E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = A .$$

(ב) $\text{Im } T = \text{Col } A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -10 & -12 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 24 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

ולכן העמודות

$$B_{\text{Col } A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

מהווה בסיס של $\text{Im } T$ ומימדו 3.

(ג) $\text{Ker } T = \text{Nul } A$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 0 \end{array} \right)$$

ולכן

$$\text{Nul } A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \mid d \in \mathbb{R} \right\}$$

כך ש-

$$B_{\text{Nul } A} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ומימדו 1.

מכאן

$$B_{\text{Ker } T} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -8 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

שיעור 13

חיתוך וסכום תת מרחב

13.1 הגדרה של חיתוך וסכום של תתי מרחבים

משפט 13.1 חיתוך של תת מרחב

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} , V_1, V_2 תתי מרחבים של V . אז $V_1 \cap V_2$ היא תת מרחב של V .

הוכחה:

$$(1) \quad V_1, V_2 \text{ תת מרחבים} \Leftrightarrow \bar{0} \in V_1 \text{ וגם } \bar{0} \in V_2 \Leftrightarrow \bar{0} \in V_1 \cap V_2$$

$$(2) \quad \text{נניח } v_1, v_2 \in V_1 \cap V_2$$

$$\text{אז } v_1, v_2 \in V_1 \text{ וגם } v_1, v_2 \in V_2$$

$$V_1 \text{ תת מרחב} \Leftrightarrow v_1 + v_2 \in V_1$$

$$V_2 \text{ תת מרחב} \Leftrightarrow v_1 + v_2 \in V_2$$

$$\text{ז"א } v_1 + v_2 \in V_1 \cap V_2$$

$$(3) \quad \text{נניח } v \in V_1 \cap V_2 \text{ ו } k \in \mathbb{F} \text{ סקלר.}$$

$$\text{אז } v \in V_1 \text{ ו } v \in V_2$$

$$V_1 \text{ תת מרחב לכן } k \cdot v \in V_1$$

$$V_2 \text{ תת מרחב לכן } k \cdot v \in V_2$$

$$\text{ז"א } k \cdot v \in V_1 \cap V_2$$

דוגמה 13.1

עבור V_1, V_2 תתי מרחבים של מרחב וקטורי V מעל שדה \mathbb{F} , האם $V_1 \cup V_2$ בהכרח תת מרחב של V ?

פתרון:

דוגמה נגדית:
 $V = \mathbb{R}^2$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$v_1 + v_2 \notin V_1 \cup V_2. \text{ אבל } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_2, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1 \text{ אז}$$

משפט 13.2 תת מרחב הקטן ביותר

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} , V_1, V_2 תתי מרחבים של V . אז הקבוצה

$$W = \{v_1 + v_2 | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

היא תת מרחב הקטן ביותר שמכיל את V_1 ו V_2 .
ז"א לכל תת מרחב W' שמכיל את V_1 ו V_2 , מתקיים $W \subseteq W'$.

הוכחה:

(1) נוכיח ש W תת מרחב של V .

א) $\bar{0} \in V_1$ וגם $\bar{0} \in V_2$. לכן

$$\bar{0} = \bar{0} + \bar{0} \in W.$$

ב) נניח $w_1 = u_1 + v_1 \in W$, $w_2 = u_2 + v_2 \in W$

אז $u_1, v_1 \in V_1$ וגם $u_2, v_2 \in V_2$.

V_1, V_2 תתי מרחבים.

לכן $u_1 + v_1 \in V_1$ וגם $u_2 + v_2 \in V_2$.

מכאן

$$w_1 + w_2 = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \in W.$$

ג) נניח $w = u_1 + u_2 \in W$ ו $k \in \mathbb{F}$. אז $u_1 \in V_1$ ו $u_2 \in V_2$. V_1, V_2 תתי מרחבים, לכן $ku_1 \in V_1$,

$ku_2 \in V_2$. מכאן

$$kw = k(u_1 + u_2) = ku_1 + ku_2 \in W$$

(2) נוכיח כי W התת מרחב הקטן ביותר

ברור כי W מכיל את V_1 ו V_2 כי

$$u = u + \bar{0} \in W, u \in V_1$$

$$\text{וגם לכל } u \in V_2, u = \bar{0} + u \in W.$$

נוכיח ש W הוא תת מרחב הקטן ביותר שמכיל את V_1 ו V_2 .

נניח ש W' איזשהו תת מרחב שמכיל את V_1 ו V_2 .

נוכיח כי $W \subseteq W'$.

נקח וקטור $w \in W$. אז $w = u_1 + u_2$, כאשר $u_1 \in V_1, u_2 \in V_2$.

$$u_1 \in W' \Leftarrow V_1 \subseteq W'$$

$$u_2 \in W' \Leftarrow V_2 \subseteq W'$$

W' תת מרחב, לכן $w = u_1 + u_2 \in W'$.

מש"ל.

למה 13.1

למרחב W של משפט 13.2 (המשפט הקודם) נקרא הסכום של V_1 ו V_2 ומסומן ב $V_1 + V_2$.

משפט 13.3 סכום של תת מרחב שווה לפרישה של האיחוד

$$V_1 + V_2 = \text{span}(V_1 \cup V_2) .$$

הוכחה: נוכיח כי $V_1 + V_2 \subseteq \text{span}(V_1 \cup V_2)$:

$$V_1, V_2 \subseteq \text{span}(V_1 \cup V_2)$$

לכן, לפי משפט 13.2,

$$V_1 + V_2 \subseteq \text{span}(V_1 \cup V_2) .$$

נוכיח כי $\text{span}(V_1 \cup V_2) \subseteq V_1 + V_2$:

נניח $w \in \text{span}(V_1 \cup V_2)$. אז קיימים $u_1, \dots, u_k \in V_1$ ו $v_1, \dots, v_n \in V_2$ וסקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$, $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{F}$ כך ש

$$w = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n .$$

אז $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k \in V_1$ וגם $\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \in V_2$.
לכן $w \in V_1 + V_2$.

הוכחנו כי $V_1 + V_2 \subseteq \text{span}(V_1 \cup V_2)$ וגם $\text{span}(V_1 \cup V_2) \subseteq V_1 + V_2$

$$V_1 + V_2 = \text{span}(V_1 \cup V_2) .$$

דוגמה 13.2

נקח את המרחב ווקטורי $V = \mathbb{R}^3$. נקח את התתי מרחבים \mathbb{R}^3 : $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$, $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$

קווים ישרים ב \mathbb{R}^3 . אז הסכום שלהם הינו

$$V_1 + V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} ,$$

ומהווה את המישור $z = 0$ ב \mathbb{R}^3 .

13.2 משפט המימדים של סכום וחיתוך

משפט 13.4 משפט המימדים

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} , V_1, V_2 תתי מרחבים של V . אז

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

הוכחה: נסמן $\dim(V_1) = k$, $\dim(V_2) = n$, $\dim(V_1 \cap V_2) = m$.

$$V_1 \cap V_2 \subseteq V_1 \text{ לכן } m \leq k$$

$$V_1 \cap V_2 \subseteq V_2 \text{ לכן } m \leq n$$

נבחר בסיס u_1, \dots, u_m של $V_1 \cap V_2$.

נשלים אותו לבסיס של V_1 ונקבל

$$u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}$$

נשלים אותו גם לבסיס של V_2 :

$$u_1, \dots, u_m, b_1, \dots, b_{n-m}$$

נוכיח כי $V_1 + V_2 = \text{span}(u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m})$.

נניח $w = v_1 + v_2 \in V_1 + V_2$. אז

$$v_1 = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} \in V_1,$$

$$v_2 = \alpha'_1 u_1 + \dots + \alpha'_m u_m + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m} \in V_2.$$

אז

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= (\alpha_1 + \alpha'_1) u_1 + \dots + (\alpha_m + \alpha'_m) u_m \\ &\quad + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} \\ &\quad + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m} \end{aligned}$$

ז"א

$$v_1 + v_2 \in \text{span}(u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m})$$

נוכיח את ההכלה ההפוכה, כלומר $\text{span}(u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m}) \subseteq V_1 + V_2$.

נניח

$$w \in \text{span}(u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m})$$

אז קיימים סקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_{k-m}, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-m}$ כך ש

$$w = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m}$$

נסמן

$$v_1 = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m}$$

$$v_2 = \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m}$$

אז

$$v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2, \quad w = v_1 + v_2$$

כלומר $w \in V_1 + V_2$.

נשאר להוכיח שוקטורים $\{u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m}\}$ בת"ל:

נניח:

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m} = \bar{0} . \quad (*)1$$

אז

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} = -\gamma_1 b_1 - \dots - \gamma_{n-m} b_{n-m} := v. \quad (*)2$$

הוקטור באגף השמאל שייך ל V_1 .

הוקטור באגף הימין שייך ל V_2 .

לכן, לפי $(*)2$ $v \in V_1 \cap V_2$. בסיס של $V_1 \cap V_2$ (נתון). לכן קיימים סקלרים $\delta_1, \dots, \delta_m$ כך ש

$$v = \delta_1 u_1 + \dots + \delta_m u_m .$$

לכן

$$\begin{aligned} \delta_1 u_1 + \dots + \delta_m u_m + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m} &= \delta_1 u_1 + \dots + \delta_m u_m - (-\gamma_1 b_1 - \dots - \gamma_{n-m} b_{n-m}) \\ &= v - v \\ &= \bar{0} , \end{aligned}$$

ז"א

$$\delta_1 u_1 + \dots + \delta_m u_m + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n-m} b_{n-m} = \bar{0} . \quad (*)3$$

$u_1, \dots, u_m, b_1, \dots, b_{n-m}$ בסיס של V_2 (נתון). לכן הם בת"ל. לכן $(*)3$ מתקיים רק אם

$$\delta_1 = \dots = \delta_m = \gamma_1 = \dots = \gamma_{n-m} = 0 . \quad (*)4$$

מכאן מקבלים מ $(*)1$ כי

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-m} a_{k-m} = \bar{0} . \quad (*)5$$

$u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}$ בסיס של V_1 (נתון), לכן הם בת"ל. לכן $(*)5$ מתקיים רק אם

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \beta_1 = \dots = \beta_{k-m} = 0. \quad (*)6$$

לכן, בגלל שהמקדמים ב $(*)1$ כולם שווים ל 0, כפי שהוכחנו ב $(*)4$ ו $(*)6$, אז הוקטורים $u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_{n-m}$ בת"ל. כלומר הם מהווים בסיס של $V_1 + V_2$. מכאן

$$\dim(V_1 + V_2) = m + (k - m) + (n - m) = k + n - m = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

מש"ל.

מסקנה 13.1

נניח $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ תתי מרחבים ממימד 2, אז $\dim(V_1 \cap V_2) > 0$.

הוכחה: V_1, V_2 תתי מרחבים של \mathbb{R}^3 , לכן $\dim(V_1 + V_2) \leq 3$. לפי משפט ??,

$$4 = \dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) \leq 3 + \dim(V_1 \cap V_2)$$

13.3 כיצד למצוא בסיס ומימד של סכום וחיתוך תת מרחב

נניח כי U, V תתי מרחבים של \mathbb{R}^n . ונניח ש

$$\{u_1, \dots, u_k\}$$

בסיס של U ו

$$\{v_1, \dots, v_l\}$$

בסיס של V . כדי למצוא בסיס של $U + V$, נרשום מטריצה Q מסדר $n \times (k + l)$ המורכב מהבסיסים של U ו V :

$$Q = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} | & | & & | & | & | & & | \\ \hline u_1 & u_2 & \dots & u_k & v_1 & v_2 & \dots & v_l \\ \hline | & | & & | & | & | & & | \end{array} \right)$$

אז המרחב העמודות של $U + V$ שווה למרחב העמודות של Q :

$$\text{col}(Q) = \text{col}(U + V)$$

ובסיס של $\text{col}(Q)$ שווה גם לבסיס של $U + V$:

$$B(Q) = B(U + V) .$$

בסיס של $U \cap V$ ניתן למצוא ע"י המרחב האפס של Q , $\text{Nul}(Q)$. נניח כי הוקטור x במרחב האפס של Q , כלומר $x \in \text{Nul}(Q) \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$. נניח כי הרכיבים של x הם

$$x = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ b_1 \\ \vdots \\ b_l \end{pmatrix} .$$

כיוון שוקטור x ב $\text{Nul}(Q)$ אז

$$Q \cdot x = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} | & | & & | & | & | & & | \\ \hline u_1 & u_2 & \dots & u_k & v_1 & v_2 & \dots & v_l \\ \hline | & | & & | & | & | & & | \end{array} \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ b_1 \\ \vdots \\ b_l \end{pmatrix} = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_l v_l = \bar{0} . \quad (1*)$$

עכשיו נעביר את כל האיברים של הבסיס v_1, \dots, v_l לאגף הימין ונקבל

$$a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = -b_1 v_1 - \dots - b_l v_l . \quad (*2)$$

שימו לב הצירוף לינארי באגף השמאל הוא וקטור של U והצירוף לינארי באגף הימין הוא וקטור של V . נקרא הוקטור הזה y :

$$y := a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = -b_1 v_1 - \dots - b_l v_l . \quad (*3)$$

כך קיבלנו וקטור y השייך גם ל U וגם ל V , או במילים אחרות

$$y \in U \cap V .$$

דוגמה 13.3

נתונים וקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

נסמן

$$V_1 = \text{span}(u_1, u_2) , \quad V_2 = \text{span}(u_3, u_4) .$$

מצאו בסיס ומימד של V_1, V_2 ו $V_1 \cap V_2$.

פתרון:

בסיס של V_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של V_1 :

$$B(V_1) = \{u_1, u_2\}$$

$$\dim(V_1) = 2$$

בסיס של V_2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של V_2 :

$$B(V_2) = \{u_3, u_4\}$$

$$\dim(V_2) = 2$$

$$Q = (u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_2 + R_3 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_3 + R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

העמודות 1, 2, 3 מובילות לכן בסיס של $V_1 + V_2$ הוא

$$B(V_1 + V_2) = \{u_1, u_2, u_3\}$$

ו $\dim(V_1 + V_2) = 3$.
לפי משפט המימדים:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

כיון ש $\dim(V_1) = 2$, $\dim(V_2) = 2$, $\dim(V_1 + V_2) = 3$, אז

$$\dim(V_1 \cap V_2) = 1.$$

כדי למצוא בסיס של $V_1 \cap V_2$ נמצא את $\text{Nul } Q$. מסעיף הקודם המדורגת של Q היא:

$$Q \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית $Qx = 0$ הוא

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z + w = 0 \\ -y - 2z + w = 0 \\ -z + w = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -y - z - w \\ y = -2z + w \\ z = w \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -w \\ y = -w \\ z = w \end{array} \right\}$$

כלומר

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} w$$

לכן בסיס של $\text{Nul } Q$ הוא מורכב וקטור אחד:

$$B(\text{Nul}(Q)) = \left\{ x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

הוקטור x מקיים את משוואת ההומוגנית של Q , לכן

$$Q \cdot x = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad (u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{0}$$

לכן נקבל

$$-1 \cdot u_1 - 1 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 + 1 \cdot u_4 = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad u_1 + u_2 = u_3 + u_4.$$

נגדיר את שני האגפים להיות הוקטור y :

$$y := u_1 + u_2 = u_3 + u_4$$

נציב את הוקטורים ונמצא כי

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

לכן בסיס של $V \cap U$ הוא

$$B(V \cap U) = \{y\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

דוגמה 13.4

נניח כי $U \in \mathbb{R}^5$ תת מרחב עם בסיס

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

ונניח כי $W \in \mathbb{R}^5$ תת מרחב עם בסיס

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

מצאו המימד והבסיס של $U \cap W$.

פתרון:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ -2 & -3 & 0 & -1 & -6 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 9 & 1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מכאן נקבל בסיס של $\text{Nul}(Q)$

$$B_{\text{Nul}(Q)} = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$Qb_1 = 0 \Rightarrow -5u_1 + 3u_2 + w_1 = 0,$$

$$Qb_2 = 0 \Rightarrow -2u_1 + u_3 + w_2 = 0.$$

מכאן נקבל בסיס של $U \cap W$:

$$B_{U \cap W} = \{x_1, x_2\}$$

כאשר

$$x_1 = 5u_1 - 3u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} = w_1, \quad x_2 = 2u_1 - u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = w_2.$$

שיעור 14

סכום ישר

דוגמה 14.1 סכום ישר

נניח ש

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

תת מרחב של \mathbb{R}^3 ו

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

תת מרחב של \mathbb{R}^3 .

אז $\dim(U_1) = \dim(U_2) = 2$.

$$U_1 \cap U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}, \dim(U_1 \cap U_2) = 1.$$

$$U_1 + U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix} \mid y_1, z_1, x_2, z_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_1 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \mid x_2, y_1, z_1 + z_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^3.$$

אז כל וקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U_1 + U_2$ ניתן להציג כסכום של וקטורים של U_1 ו U_2 באינסוף דרכים שונות:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z - z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

לכל $z_0 \in \mathbb{R}$.

דוגמה 14.2

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

U_2, U_1 תת מרחבים של U_2, U_1 .

$$\dim(U_1) = 2, \quad \dim(U_2) = 1.$$

$$U_1 \cap U_2 = \{\bar{0}\},$$

$$U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3,$$

ולכל וקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ יש דרך יחידה להציג אותו כסכום של וקטורים של U_2 ו U_1 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

דוגמה ?? היא דוגמה של סכום ישיר של תת מרחבים.

הגדרה 14.1 סכום ישיר

יהיו U_1 ו U_2 שני תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל שדה \mathbb{F} .
תת מרחב W של מרחב וקטורי V נקרא סכום ישיר של U_1 ו U_2 אם ורק אם מתקיימים:

$$W = U_1 + U_2 \quad (\text{א})$$

(ב) לכל וקטור של W יש הצגה יחידה כסכום של וקטורים ב U_1 וב U_2 .

סימון:

$$W = U_1 \oplus U_2$$

הסכום הישיר של U_2, U_1 .

משפט 14.1

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} , U ו W תת מרחבים של V . אז $V = U \oplus W$ אם ורק אם

$$V = U + W \quad (\text{א})$$

$$U \cap W = \{\bar{0}\} \quad (\text{ב})$$

הוכחה:

(1) נניח כי $V = U \oplus W$. אז לפי הגדרה ??, סכום ישר $V = U + W$. נשאר להוכיח כי $U \cap W = \{\bar{0}\}$.
נניח $v \in U \cap W$, אז $v \in U$ וגם $v \in W$. לכן אפשר לרשום

$$v = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}$$

וגם

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$$

מכיוון שהסכום הוא ישר, יש רק דרך יחידה לרשום את v כסכום של וקטורים של U ו W . לכן $v = \bar{0}$.

(2) נניח כי $V = U + W$ וגם $U \cap W = \{\bar{0}\}$.
נוכיח כי $V = U \oplus W$.

לפי הגדרת סכום ישר ??, נשאר להוכיח כי כל וקטור $v \in V$ ניתן להציג בדרך יחידה כסכום של וקטורים של U ו W .

נקח $v \in V$. נניח כי $v = u_1 + w_1$ וגם $v = u_2 + w_2$ כאשר $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$. אז

$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \Rightarrow u_1 - u_2 = w_2 - w_1$$

(כאשר $u_1 - u_2 \in U$ ו $w_2 - w_1 \in W$). לכן

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{\bar{0}\}.$$

מכאן, $u_1 - u_2 = \bar{0}$ וגם $w_2 - w_1 = \bar{0}$.
לכן $u_1 = u_2$ וגם $w_1 = w_2$.

דוגמה 14.3

נסמן

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F} \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{F} \right\}$$

U קבוצת כל המטריצות הסימטריות מסדר 2×2 ,

W קבוצת כל המטריצות האנטי-סימטריות מסדר 2×2 .
 U , W תת מרחבים של מרחב וקטורי $\mathbb{F}^{2 \times 2}$. הראו כי $\mathbb{F}^{2 \times 2} = U \oplus W$.

הוכחה:

(1) צריך להוכיח: $U \cap W = \{\bar{0}\}$.

נניח $v \in U \cap W$.

$$v = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ -b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

מכאן, $a_1 = 0, c_1 = 0, b_1 = b_2$ ו $b_1 = -b_2$.

לכן $b_1 = b_2 = 0$.

ז"א $v = \bar{0}$.

(2) נוכיח כי: $\mathbb{F}^{2 \times 2} = U + W$.

לכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{2 \times 2}$. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$. נגדיר מטריצות $B = A + A^t$ ו $C = A - A^t$, ז"א

$$B = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix} \in U$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} \in W$$

אז

$$A = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C \in U + W.$$

משפט 14.2

נניח ש V מרחב וקטורי ממיד n , U תת מרחב של V ממיד m , אז קיים תת מרחב W ממיד $n - m$ כך ש $V = U \oplus W$.

הוכחה: נבחר בסיס כלשהו של U :

$$u_1, \dots, u_m$$

ונשלים אותו לבסיס של V :

$$u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n$$

אז

$$U = \text{span}(u_1, \dots, u_m)$$

$$V = \text{span}(u_1, \dots, u_n)$$

נגדיר

$$W = \text{span}(u_{m+1}, \dots, u_n)$$

נוכיח כי $V = U \oplus W$.

(1) לכל $v \in V$ קיימים סקלרים $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{F}$ כך ש

$$v = k_1 u_1 + \dots + k_m u_m + k_{m+1} u_{m+1} + \dots + k_n u_n$$

נסמן

$$u = k_1 u_1 + \dots + k_m u_m \in U, \quad w = k_{m+1} u_{m+1} + \dots + k_n u_n \in W.$$

$$V = U + W \Leftarrow v = u + w$$

(2) נוכיח כי: $U \cap W = \{\bar{0}\}$.

$$v \in W \cap U \Leftarrow v \in U \cap W$$

לכן

$$v = k_1 u_1 + \dots + k_m u_m$$

וגם

$$v = k_{m+1} u_{m+1} + \dots + k_n u_n$$

מכאן:

$$k_1 u_1 + \dots + k_m u_m - k_{m+1} u_{m+1} - \dots - k_n u_n = \bar{0}.$$

$$u_1, \dots, u_n \text{ בת"ל לכן}$$

$$k_1 = 0, \dots, k_n = 0.$$

$$v = \bar{0} \text{ מכאן מקבלים כי}$$

משל.

