

## שעור 9

# משפט הפירוק הספקטרלי

ניתן לסכם את כל המושגים הנלמדים על העתקות נורמליות במשפט הבא:

### משפט 9.1 סכום ישר של מרחבים עצמיים של העתקה נורמלית

תהי  $T$  העתקה נורמלית במרחב מכפלה אוניטרי  $V$  והיו  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  כל הערכים העצמיים השונים של  $T$ . אם  $V_1, \dots, V_k$  הם התת-מרחבים העצמיים השייכים ל- $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  בהתאמה, אזי

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k \quad (1)$$

$$V_i \perp V_j \quad \text{לכל } i \neq j \quad (2)$$

הוכחה:

(1)  $T$  נורמלית ולכן לכסינה אוניטרי (משפט לכסון אוניטרי 8.15). לכן סכום המימדים של כל התת-מרחביים העצמיים שווה למימד של  $V$ , כלומר

$$\dim(V) = \dim(V_1) + \dots + \dim(V_k).$$

נסמן  $\dim(V_i) = n_i$  ו-

$$\{v_{i1}, \dots, v_{in_i}\}$$

בסיס של  $V_i$ . אז הקבוצה

$$\bigcup_{i=1}^k \{v_{i1}, \dots, v_{in_i}\}$$

היא בסיס של  $V$ . ז"א כל וקטור של  $V$  הוא צירוף לינארי של הוקטורים העצמיים. לכן לכל  $u \in V$ ,

$$u \in V_1 + V_2 + \dots + V_k.$$

אפשר להראות כי  $V_i \cap V_j = \{0\}$  דרך השלילה. נניח ש  $u \neq 0 \in V_i \cap V_j$  כאשר  $V_i$  המרחב עצמי של  $\lambda_i$  ו- $V_j$  המרחב עצמי של  $\lambda_j$  ו  $\lambda_i \neq \lambda_j$ . אז  $T(u) = \lambda_i \cdot u$  וגם  $T(u) = \lambda_j \cdot u$ , ומכאן

$$\lambda_i u = \lambda_j u \Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j)u = 0$$

$u \neq 0$  כי הוא וקטור עצמי לכן  $\lambda_i = \lambda_j$ , סתירה.

לכן

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k.$$

(2) עבור  $T$  נורמלית, וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים הם אורתוגונלים (משפט 8.8), לכן  $\forall i \neq j, V_i \perp V_j$ .



המטרה שלנו היא לנסח משפט שקול הידוע בשם "משפט הפירוק הספקטרלי". אנחנו נראה כי כל עתקה נורמלית במרחב מכפלה פנימית נוצר סופית היא צירוף לינארי של הטלת אורתוגונליות על המרחבים העצמיים שלה. המקדמים של הצירוף הלינארי הם הערכים העצמיים של ההעתקה. נראה את זה קודם בדוגמה.

## 9.1 דוגמה

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(v) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot v$$

$T$  העתקה סימטרית במרחב אוקלידי, לכן היא נורמלית.

$$T - \lambda I = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0$$

ערכים עצמיים:  $\lambda_2 = -1, \lambda_1 = 4$ .

$$\underline{\lambda = 4}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow -R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \in \mathbb{R}, x = 2y$$

$$V_4 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ בסיס של } V_4$$

$$\underline{\lambda = -1}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{4} \cdot R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \in \mathbb{R}, x = -\frac{1}{2}y$$

$$V_{-1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ בסיס של } V_{-1}$$

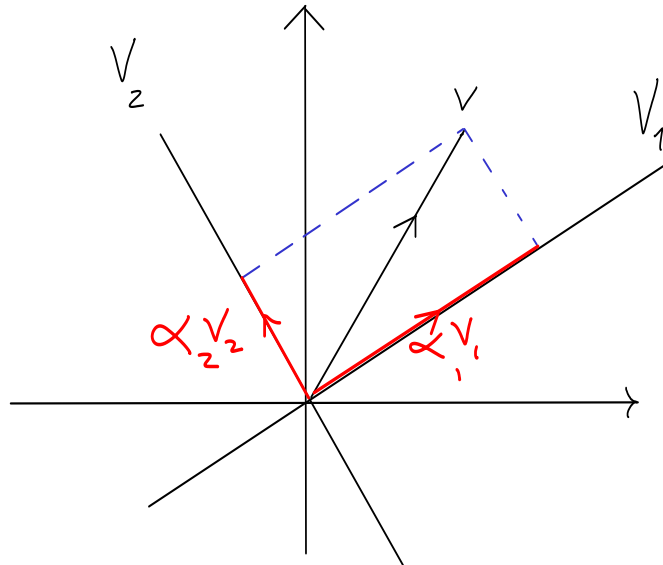
לכן  $v_1, v_2$  בסיס של  $\mathbb{R}^2$ . לכן לכל  $v \in \mathbb{R}^2$ ,

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2.$$

מכאן

$$v = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 = 4\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2.$$

נשים לב ש-  $\alpha_1 v_1$  הוא ההיטל האורתוגונלי (ראו הגדרה 2.4) של  $v$  על  $V_1$  ו-  $-\alpha_2 v_2$  ההיטל האורתוגונלי של  $v$  על  $V_2$ .



אם נסמן ב-  $P_i$  ( $i = 1, 2$ ) את העתקת ההטלה האורתוגונלית על תת המרחב  $V_i$ , נוכל לרשום

$$P_1(v) = \alpha_1 v_1, \quad P_2(v) = \alpha_2 v_2.$$

מכאן

$$T(v) = 4P_1(v) + (-1)P_2(v) = (4P_1 - P_2)(v).$$

$$T = 4P_1 - P_2 \text{ כלומר}$$

ז"א ההעתקה  $T$  היא צירוף לינארי של הטלות אורתוגונליות  $P_1$  ו-  $P_2$  על המרחבים העצמיים של  $T$  ומקדמי הצירוף הם הערכים העצמיים המתאימים.

במילים אחרות, כדי להפעיל את  $T$  על וקטור  $v$ , צריך להטיל אותו על המרחבים  $V_1$  ו-  $V_2$ , לכפול את ההטלות ב-  $\lambda_1, \lambda_2$  בהתאמה, ולחבר את הוקטורים המתקבלים.

נשים לב: ההטלות  $P_1$  ו-  $P_2$  מקיימות שתי תכונות נוספות:

$$P_1 + P_2 = I \quad (1)$$

$$P_1 \cdot P_2 = P_2 \cdot P_1 = 0 \quad (2)$$

הוכחה:

$$(1) \text{ לכל } v \in V,$$

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = P_1(v) + P_2(v) = (P_1 + P_2)(v)$$

$$\text{לכן } P_1 + P_2 = I$$

$$(2)$$

$$(P_1 \cdot P_2)(v) = P_2(P_1(v)) = P_2(\alpha_1 v_1) = 0$$

$$\text{כי } \alpha_1 v_1 \perp V_2.$$

$$P_1 \cdot P_2 = P_2 \cdot P_1 = 0 \quad (3)$$

המשפט הבא הנקרא "המשפט הפירוק הספקטרלי" מכליל את הדוגמה האחרונה.

## משפט 9.2 משפט הפירוק הספקטרלי

תהי  $T$  העתקה נורמלית במרחב אוניטרי  $V$  נוצר סופית יהיו  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  כל הערכים העצמיים השונים של  $T$  ויהיו  $V_1, \dots, V_k$  המרחבים העצמיים המתאימים. לכל  $1 \leq i \leq k$  נסמן ב-  $P_i$  את ההעתקה ההטלה האורתוגונלית על  $V_i$ . אזי

$$T = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k \quad (1)$$

$$I = P_1 + \dots + P_k \quad (2)$$

$$P_i \cdot P_j = 0, i \neq j \quad (3)$$

$$P_i^2 = P_i, i \quad (4)$$

$$\bar{P}_i = P_i, i \quad (5)$$

הוכחה:

(1) לפי משפט 9.1,  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$  וגם  $V_i \perp V_j$  עבור  $i \neq j$  לכן כל וקטור  $v \in V$  ניתן להציג בצורה

$$v = v_1 + \dots + v_k$$

כאשר  $v_i \in V_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ). אז

$$T(v) = T(v_1) + \dots + T(v_k) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \lambda_1 P_1(v) + \dots + \lambda_k P_k(v) = (\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k)(v).$$

לכן

$$T = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k.$$

(2) לכל  $v \in V$ ,

$$(P_1 + \dots + P_k)(v) = P_1(v) + \dots + P_k(v) = v_1 + \dots + v_k = v$$

לכן  $P_1 + \dots + P_k = I$ .

(3) לכל  $i \neq j$  ולכל  $v \in V$ ,

$$(P_i P_j)(v) = P_i(P_j(v)) = P_i(v_j) = 0$$

כי  $V_i \perp V_j$  לכן  $P_i P_j = 0$  לכל  $i \neq j$ .

(4) לכל  $v \in V$ ,

$$P_i^2(v) = P_i(P_i(v)) = P_i(v_i) = v_i = P_i(v)$$

לכן  $P_i^2 = P_i$ .

(5) לכל  $u, v \in V$ ,

$$u = u_1 + \dots + u_k, \quad v = v_1 + \dots + v_k$$

כאשר  $u_i, v_i \in V_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ). אז

$$\langle P_i(v), u \rangle = \langle v_i, u_1 + \dots + u_k \rangle = \langle v_i, u_i \rangle$$

מצד שני:

$$\langle v, P_i(u) \rangle = \langle v_1 + \dots + v_k, u_i \rangle = \langle v_i, u_i \rangle$$

ז"א

$$\langle P_i(v), u \rangle = \langle v, P_i(u) \rangle$$

לכל  $u, v \in V$ . לכן  $\bar{P}_i = P_i$ .

# 9.1 שימושים של הפירוק הספקטלי

## 9.2 דוגמה

נתונה העתקה  $T = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$  אזי

$$\begin{aligned} T^2 &= \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \lambda_i \lambda_j P_i P_j \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda_i^2 P_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda_i^2 P_i \end{aligned}$$

קל להוכיח באינדוקציה:

$$T^n = \sum_{i=1}^k \lambda_i^n P_i$$

## 9.3 דוגמה

במקרה של  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \overline{\left( \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i \right)} \\ &= \sum_{i=1}^k \bar{\lambda}_i \bar{P}_i \\ &= \sum_{i=1}^k \bar{\lambda}_i P_i \end{aligned}$$

לכן, אם כל העריכים עצמיים הם ממשיים, אז

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \sum_{i=1}^k \bar{\lambda}_i P_i \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i = T \end{aligned}$$

כלומר  $T$  צמודה לעצמה.

## דוגמה 9.4

אם כל הערכים העצמיים מקיימים  $|\lambda_i| = 1$  נקבל

$$\begin{aligned} T \cdot \bar{T} &= \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^k \bar{\lambda}_i P_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \lambda_i \bar{\lambda}_j P_i P_j \\ &= \sum_{i=1}^k |\lambda_i|^2 P_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^k P_i \\ &= I \end{aligned}$$

לכן  $T$  אוניטרית.