המחלקה למדעי המחשב

01/09/2024 כ"ח באב תשפ"ד
$09:00 - 12:00$

חדוא 2

מועד א'

מרצים: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר,

תשפ"ד סמסטר ב'

השאלון מכיל 12 **עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).**

בהצלחה!

==

<u>הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה</u>

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

<u>חומר עזר</u>

- דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

<u>אחר / הערות</u>

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות <u>בלבד</u> מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** <u>בלבד</u> מתוך **שתיים**.

==

שאלות $1-2$ חובה

שאלה 1 **(20 נקודות)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^2+xy+y^2$.

א) (10 נק')
מצאו ומיינו את כל נקודות האקסטרמום (נקודות קיצון ואוכף) המקומיות של הפונקציה.

ב) (10 נק')
מצאו את הערך הקטן ביותר ואת הערך הגדול ביותר של $f(x,y)$ בתחום $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$.

שאלה 2 **(22 נקודות)** תהי a_n סדרה המקיימת לכל n כי $a_{n+1}=\sqrt{3a_n-2}$ וכן $a_1=6$.

א) (6 נק') הוכיחו כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים: $a_n>1$.

ב) (6 נק') הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

ג) (10 נק') תהי a_n סדרה חיובית. הוכיחו או הפריכו את על ידי דוגמה נגדית את הטענות הבאות: אם $a_n^2\le a_n-a_{n+1}$ לכל $n\in\mathbb{N}$, אז a_n מתכנסת.

תענו על 3 מתוך 4 השאלות $3-6$

שאלה 3 **(16 נקודות)**

א) (12 נק')

שרטטו את תחום האינטגרציה, שנו את סדר האינטגרציה באינטגרל: $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$ וחשבו אותו.

ב) (4 נק') רשמו את משוואת המישור המשיק למשטח $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ בנקודה $M(1,2,2)$.

שאלה 4 **(16 נקודות)**

א) (10 נק') מצאו את הנפח הגוף החסום על ידי המשטחים:

$$x=0,\quad y=0,\quad ,x+y=2\ ,\quad z=0\ ,\quad z=5-x^2\ .$$

ב) (6 נק') פתרו את בעיית קושי הבא:

$$y' + x^2y' = y + 2 \ , \quad y(1) = e^{\pi/4} - 2 \ .$$

שאלה 5 (16 נקודות) אין קשר בין הסעיפים בשאלה זו.

א) (6 נק') עבור אילו ערכי $\alpha > 0$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha n)^n}{n!}$ מתכנס?

ב) (5 נק') קבעו האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר. נמקו את תשובתכם.

ג) (5 נק') מצאו את תחום ההתכנסות של הטור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[3]{n}}$.

שאלה 6 (16 נקודות)

א) (10 נק') עבור הפונקציה $f(x,y) = e^{1+x^2+y^2}$ והנקודה $A(2,3)$ מצאו את הנגזרת המכוונת בנקודה A בכיוון ממנה אל הראשית $O(0,0)$.

ב) (6 נק') מצאו את משוואת המישור שעובר דרך הנקודות $A(1,1,1)$, $B(2,1,2)$, $C(0,0,3)$.

פתור אחת מבין השאלות $7 - 8$

שאלה 7 (10 נקודות) מצאו את המרחק בין הנקודה $P(2,2,4)$ למישור $3x + y - 3z + 5 = 0$. מצאו את הנקודה במישור הקרובה ביותר לנקודה $(2,2,4)$.

שאלה 8 (10 נקודות)

במישור $y = 0$ מצאו את מיקום הנקודה P כך שסכום המרחקים ממנה לנקודות $M(4,3,1)$ ו- $N(-12,4,6)$ יהיה מינימלי.

פתרונות

שאלה 1

א) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$.

תנאי הכרחי לנקודת קיצון:

$$\left.\begin{array}{lll} f'_x = 2x + y \overset{!}{=} 0 & \Rightarrow & y = -2x\ , \\ f'_y = 2y + x \overset{!}{=} 0 & \Rightarrow & x = -2y\ , \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad y = 4y \quad \Rightarrow \quad y = 0\ .$$

מכאן נקבל את הנקודה: $P_0(0,0)$.

תנאי מספיק לנקודת קיצון:

$$f''_{xx} = 2\ , \qquad f''_{yy} = 2\ , \qquad f''_{xy} = 1\ .$$

לכן

$$\Delta = f''_{xx} f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3\ .$$

$f''_{xx} > 0$ ו- $\Delta > 0$ לכן $P_0(0,0)$ נקודת מינימום מקומי.

ב) על השפה $y = \left|\sqrt{1-x^2}\right|$.

$$f_1(x) = 1 + x\left|\sqrt{1-x^2}\right|\ .$$

$$f'_1(x) = \left|\sqrt{1-x^2}\right| + x\left(\frac{-2x}{2\left|\sqrt{1-x^2}\right|}\right) = \frac{1}{\left|\sqrt{1-x^2}\right|}\left(1 - x^2 - x^2\right) = \frac{1-2x^2}{\left|\sqrt{1-x^2}\right|} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

קיבלנו את השתי נקודות $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$f(P_1) = f_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}\ , \qquad f(P_2) = f_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\ .$$

על השפה $y = -\left|\sqrt{1-x^2}\right|$.

$$f_2(x) = 1 - x\left|\sqrt{1-x^2}\right|\ .$$

$$f'_2(x) = -\left|\sqrt{1-x^2}\right| - x\left(\frac{-2x}{2\left|\sqrt{1-x^2}\right|}\right) = \frac{1}{\left|\sqrt{1-x^2}\right|}\left(-1 + x^2 + x^2\right) = \frac{-1+2x^2}{\left|\sqrt{1-x^2}\right|} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

קיבלנו את השתי נקודות $P_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $P_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$f(P_3) = f_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\ , \qquad f(P_4) = f_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}\ .$$

נקודה	$f(x,y)$
$P_0(0,0)$	0
$P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{3}{2}$
$P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{2}$
$P_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{2}$
$P_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{3}{2}$
$(1,0)$	1
$(0,1)$	1
$(-1,0)$	1
$(0,-1)$	1

$\max\limits_D f(x,y)=\frac{3}{2}$ בנקודה P_1 ו- P_4.

$\min\limits_D f(x,y)=0$ בנקודה P_2 ו- P_3.

שאלה 2

א) ניתן להוכיח את הטענה דרך אינדוקציה.

<u>שלב הבסיס:</u>

עבור $n=1$ נתון כי $a_1=6>1$, ז"א הטענה מתקיימת.

<u>שלב המעבר:</u>

ראשית נרשום את ההנחת האינדוקציה: עבור $n>1$ יהי $a_n>1$.

$$a_{n+1}=\sqrt{3a_n-2}>\sqrt{3\cdot 1-2}=\sqrt{1}=1\ .$$

לפיכך $a_{n+1}>1$.

ב) נשים לב כי $a_2=\sqrt{3a_1-2}=\sqrt{16}=4<6=a_1$, כלומר $a_2<a_1$.

כעת נוכיח כי $a_{n+1}<a_n$ לכל $n\geq 1$ באינדוקציה.

<u>שלב הבסיס:</u>

עבור $n=1$, $a_2<a_1$ מתקיים.

<u>שלב המעבר:</u>

מניחים כי $a_{n+1}<a_n$.

$$a_{n+2}=\sqrt{3a_{n+1}-2}<\sqrt{3a_n-2}=a_{n+1}\ ,$$

ז"א $a_{n+2}<a_{n+1}$.

לכן הסדרה מונוטונית יורדת.

נשאר להראות כי הסדרה חסומה. כבר הוכחנו בסעיף הקודם כי $a_n>1$ $\forall n\geq 1$.

בנוסף ומאחר ש- a_n יורדת מונוטונית, אז

$$a_n < a_{n-1} < \ldots < a_1 = 6$$

לכל $n \geq 1$. לפיכך $a_n < 6$ לכל n.
לכן a_n חסומה: $1 < a_n < 6$.
הוכחנו כי a_n חסומה ויורדת מונוטונית ולכן היא בהכרח מתכנסת.

נקח את הגבול של הסדרה מסוגה:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3a_n - 2} = \sqrt{3\lim_{n\to\infty} a_n - 2}$$

נסמן $L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$. מכאן

$$L = \sqrt{3L-2} \quad \Rightarrow \quad L^2 = 3L - 2 \quad \Rightarrow \quad L^2 - 3L + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (L-2)(L-1) = 0\ .$$

מכאן $L = 1$ או 2. הוכחנו כי $1 < a_n < 6$ לכן $L \neq 1$ לכן $L = 2$.

ג) אם סדרה חסומה ומונוטונית אז היא מתכנסת.
נוכיח כי הסדרה חסומה:
הסדרה חיובית לכן $a_n > 0$ לכל n.

נניח כי $a_n^2 \leq a_n - a_{n+1}$.

$a_n > 0$ ובפרט $a_n \neq 0$ לכן ניתן לחלק ב- a_n ונקבל $a_n \leq 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.
לפיכך

$$0 < a_n < 1\ .$$

הוכחנו כי a_n חסומה. כעת נוכיח כי a_n מונוטונית:

$$a_n^2 \leq a_n - a_{n+1} \quad \Rightarrow \quad a_n^2 + a_{n+1} \leq a_n$$

בנוסף $a_n > 0$ לכן $a_n^2 + a_{n+1} > a_{n+1}$. נציב זה בביטוי הקודם ונקבל כי

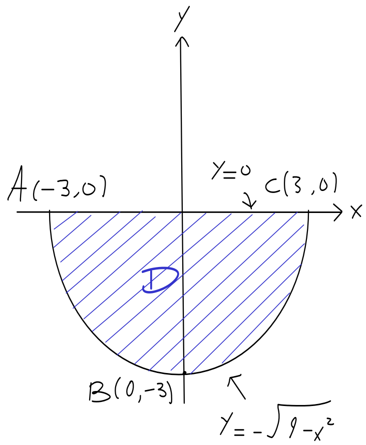
$$a_{n+1} < a_n^2 + a_{n+1} \leq a_n$$

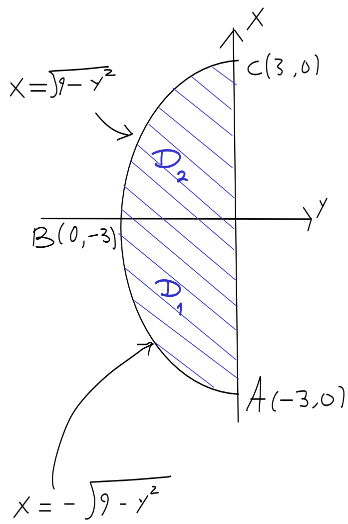
ז"א $a_{n+1} < a_n$ ולכן הסדרה יורדת מונוטונית.
הוכחנו כי הסדרה חסומה ויורדת ולכן מתכנסת.

שאלה 3 (16 נקודות)

א) (12 נק')

$$D = \{-3 \leq x \leq 3\ , -\sqrt{9-x^2} \leq y \leq 0\}$$





לפי השרטוט:

$$D_1=\left\{-3\le y\le 0,-\sqrt{9-y^2}\le x\le 0\right\}\ ,\qquad D_2=\left\{-3\le y\le 0,0\le x\le\sqrt{9-y^2}\right\}\ .$$

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dy\,dx=\iint\limits_{D_1} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

$$\int\limits_{-3}^{3}dx\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0}dy\,e^{x^2+y^2}=\int\limits_{-3}^{0}dy\int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{0}dx\,e^{x^2+y^2}+\int\limits_{-3}^{0}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{9-y^2}}dx\,e^{x^2+y^2}$$

נעבור למשתנים פולריים:

$$\int\limits_{\pi}^{2\pi}d\theta\int\limits_{0}^{3}dr\,r\,e^{r^2}=\int\limits_{\pi}^{2\pi}d\theta\int\limits_{0}^{9}dt\,\frac{1}{2}\,e^t=\int\limits_{\pi}^{2\pi}d\theta\frac{1}{2}\left[e^9-1\right]=[\theta]_{\pi}^{2\pi}\,\frac{1}{2}\left[e^9-1\right]=\frac{\pi}{2}\left[e^9-1\right]\ .$$

ב) (4 נק') המשטח:

$$f(x,y,z)=\sqrt{9-x^2-y^2}-z\ .$$

$$\nabla f=\left(\frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}},-1\right)\ .$$

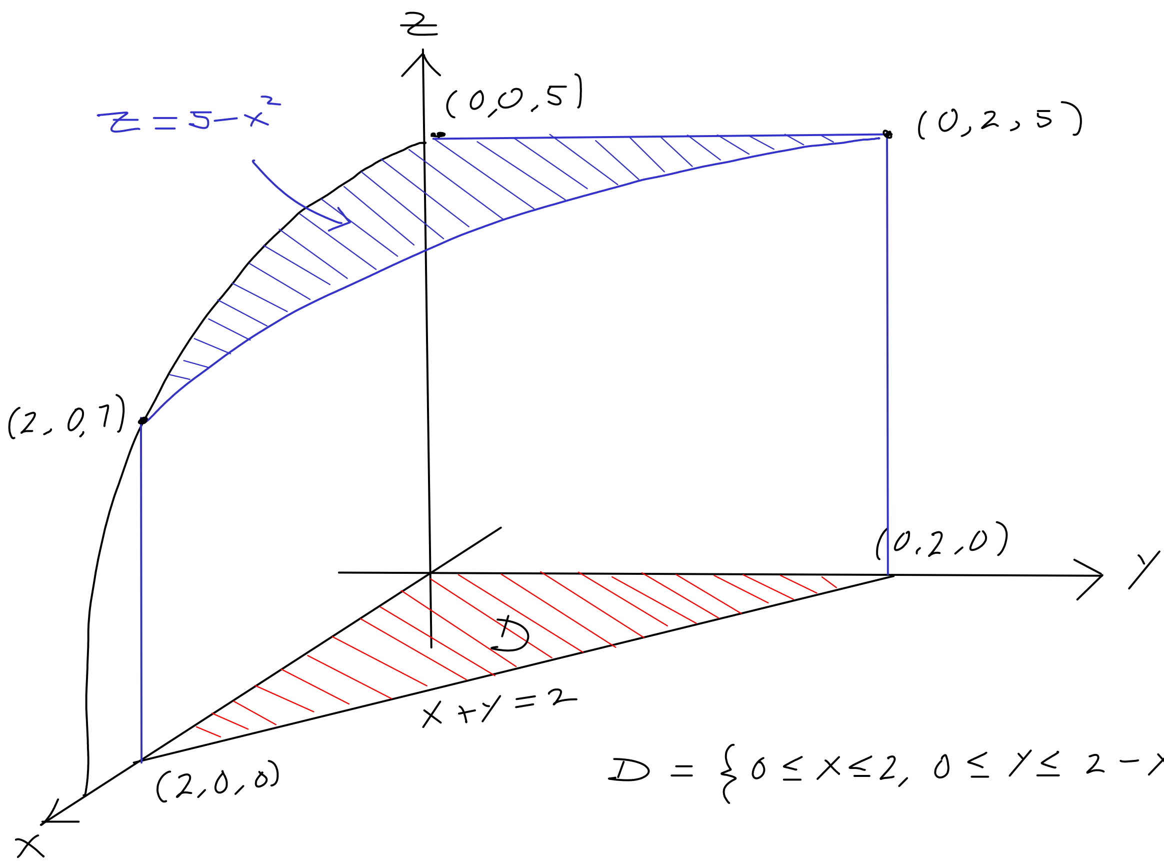
$$\nabla f(1,2,2)=\left(\frac{-1}{2},-1,-1\right)\ .$$

משוואת המישור המשיק למשטח:

$$-\frac{1}{2}(x-1)-(y-2)-(z-2)=0 \quad \Rightarrow \quad x-1+2y-4+2z-4=0 \quad \Rightarrow \quad x+2y+z-12=0\ .$$

<u>שאלה 4</u> **<u>(16 נקודות)</u>**

א)



$D=\{0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2-x\}$

$$
\begin{aligned}
V =& \iint_D z(x,y) \\
=& \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \left(5-x^2\right) \\
=& \int_0^2 dx \left(5-x^2\right) [y]_{y=0}^{y=2-x} \\
=& \int_0^2 dx \left(5-x^2\right)(2-x) \\
=& \int_0^2 dx \left(10-2x^2-5x+x^3\right) \\
=& \left[10x-\frac{2}{3}x^3-\frac{5x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right]_0^2 \\
=& 20-\frac{16}{3}-10+4 \\
=& \frac{26}{3} \ .
\end{aligned}
$$

ב)

$$
\begin{aligned}
y'(1+x^2) =& y+2 \\
\Rightarrow \quad \frac{y'}{y+2} =& \frac{1}{1+x^2} \\
\Rightarrow \quad \int \frac{y'}{y+2} dx =& \int \frac{1}{1+x^2} dx \\
\Rightarrow \quad \int \frac{1}{y+2} dy =& \int \frac{1}{1+x^2} dx \\
\ln|y+2| =& \arctan(x) + C \ . \\
\Rightarrow \quad y =& Ae^{\arctan x} - 2 \ .
\end{aligned}
$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y = Ae^{\arctan x} - 2 \ .$$

נציב את התנאי ההתחלתי כדי לקבל פתרון פרטי:

$$y(1) = e^{\pi/4} - 2 \quad \Rightarrow \quad Ae^{\arctan(1)} - 2 = e^{\pi/4} - 2 \quad \Rightarrow \quad Ae^{\pi/4} - 2 = e^{\pi/4} - 2 \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

לכן הפתרון הפרטי הוא

$$y_p(x) = e^{\arctan x} - 2 \ .$$

שאלה 5 (16 נקודות)

א) $\alpha > 0$ לכן הטור חיובי לכן מותר להשתמש התכנסות באמצעות מבחן דלמבר:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}(n+1)^{n+1}n!}{\alpha^n n^n (n+1)!}\\ &= \lim_{n\to\infty}\alpha\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\frac{n+1}{n+1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\alpha\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\ &= \alpha e\ .\end{aligned}$$

לפי מבחן דלמבר הטור מתכנס אם $\alpha e < 1 \Leftarrow \alpha < \frac{1}{e}$.

ב) נבדוק התכנסות של הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+2} > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

אשר מתבדר לכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$ לפי מבחן השוואה.

נבדוק התכנסות של הטור המחליף סימן $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$ באמצעות מבחן לייבניץ:

- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- $a_n > 0$ לכל $n \geq 1$.
- $f(n) = \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$ אז

$$f'(n) = \frac{\frac{n+2}{2\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+1}}{(n+2)^2} = \frac{1}{2\sqrt{n+1}(n+2)^2}(n+2-2(n+1)) = \frac{1}{2\sqrt{n+1}(n+2)^2}(-n) < 0$$

לכל $n \geq 1$ לכן $f(n)$ יורדת מונוטונית.

לכן לפי בחן לייבניץ הטור מתכנס בתנאי.

ג)

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{1/3}}{n^{1/3}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1/3} = 1\ .$$

לכן הטור מתכנס לכל $-1 < x < 1$.

<u>$x = 1$</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt[3]{n}}\overset{x=1}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/3}}$$

אשר מתבדר.

$\underline{x=-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt[3]{n}}\overset{x=-1}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{1/3}}$$

נבדוק התכנסות לפי מבחן לייבניץ:

$a_n=\frac{1}{n^{1/3}}$.

- $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.
- $a_n>0$ לכל $n\geq 1$.
- $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^{1/3}}<\frac{1}{n^{1/3}}=a_n$. לכן a_n יורדת מונוטונית.

לכן לפי מבחן לייבניץ הטור מתכנס (בתנאי) ב- $x=-1$.

תשובה סופית לתחום התכנסות: $x\in[-1,1)$.

שאלה 6 (16 נקודות)

א) (12 נק')

$$\nabla f=\left(2xe^{x^2+y^2+1},2ye^{x^2+y^2+1}\right)\ ,\qquad \nabla f(A)=e^{14}(4,6)\ .$$

$$\frac{df}{d\vec{AO}}=\frac{\nabla f(A)\cdot\vec{AO}}{|\vec{AO}|}=\frac{e^{14}(4,6)\cdot(-2,-3)}{|(-2,-3)|}=\frac{-26e^{14}}{\sqrt{13}}=-2\sqrt{13}e^{14}\ .$$

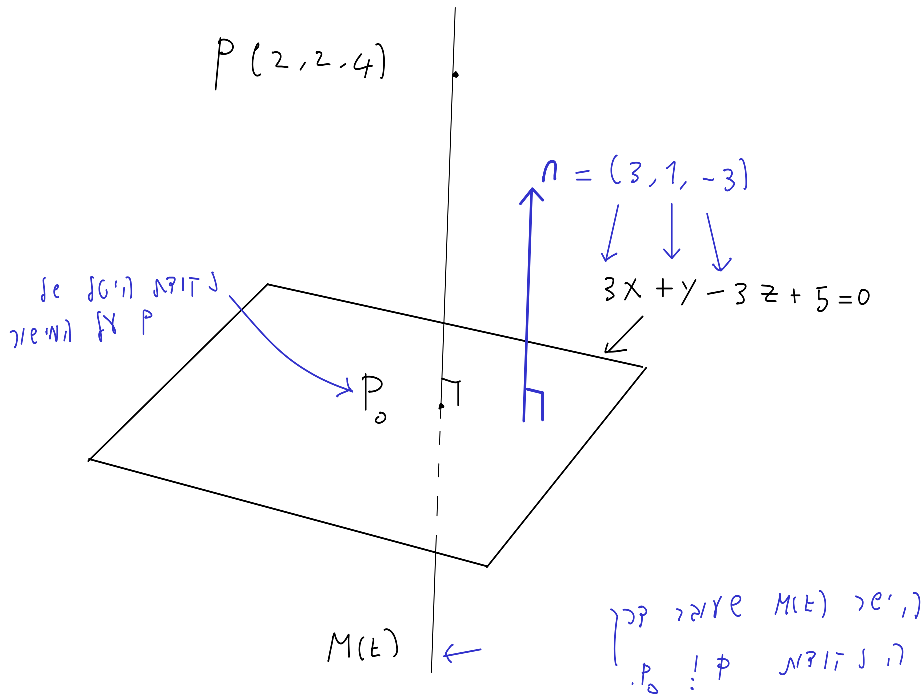
ב) $A(1,1,1)$, $B(2,1,2)$, $C(0,0,3)$. נורמל

$$n=\overline{AB}\times\overline{AC}=(1,0,1)\times(-1,-1,2)=(1,-3,-1)$$

$$(x-1)-3(y-1)-(z-1)=0\quad\Rightarrow\quad x-3y-z+3=0\ .$$

שאלה 7

הנקודה על המישור הקרובה לנקודה P היא ההיטל של P על המישור. נסמן את ההיטל ב- P_0 (ראו תרשים למטה).



יהי $M(t)$ הישר שעובר דרך הנקודות P ו- P_0. הישר הזה יהיה מאונך למישור ולכן מקביל לווקטור הנורמל של המישור, אשר הוא $n = (3, 1, -3)$. לכן המשוואת הפרמטרית של $M(t)$ היא

$$M(t) = P + tn = (2, 2, 4) + t(3, 1, -3)$$

כלומר

$$x = 2 + 3t, \quad y = 2 + t, \quad z = 4 - 3t\ .$$

הנקודת היטל היא הנקודת חיתוך של הישר עם המישור. נציב את משוואת הישר במשוואת המישור כדי לקבל את הערך של הפרמטר של הישר בנקודת חיתוך זו:

$$3(2 + 3t) + 2 + t - 3(4 - 3t) + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 19t + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = -\frac{1}{19}\ .$$

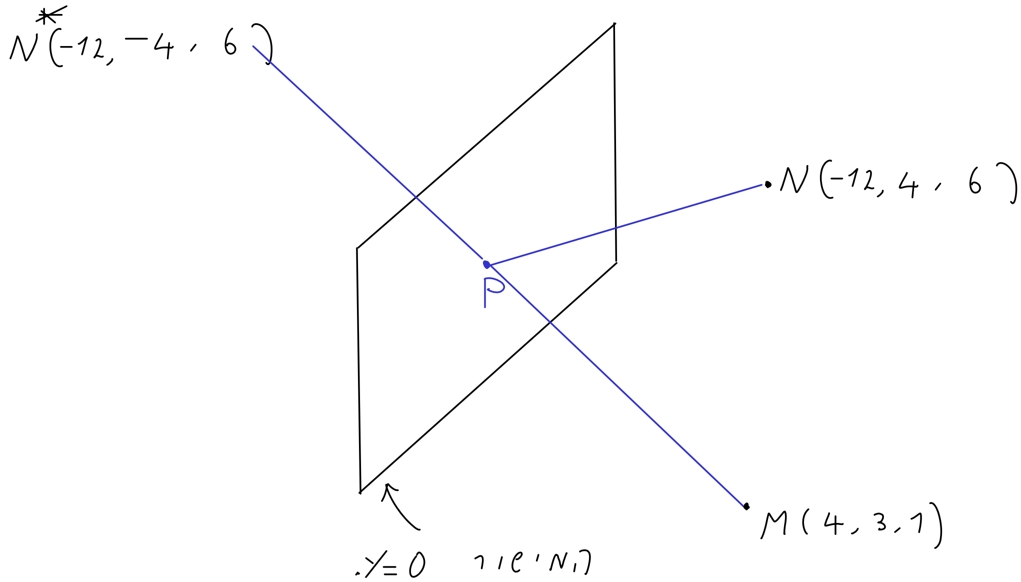
לכן נקודת ההיטל של P על המישור הוא

$$P_* = M\left(t_0 = -\frac{1}{19}\right) = \left(2 - \frac{3}{19}, 2 - \frac{1}{19}, 4 - \frac{3}{19}\right) = \left(\frac{35}{19}, \frac{37}{19}, \frac{79}{19}\right)\ .$$

המרחק של P ממישור מוגדר להיות המרחק של P מהנקודה על המישור הקרבה ביותר ל- P, דהיינו ההיטל. לכן המרחק של P מהמישור הוא המרחק בין P לביו הנקודת היטל P_0:

$$d = \sqrt{\left(2 - \frac{35}{19}\right)^2 + \left(2 - \frac{37}{19}\right)^2 + \left(4 - \frac{79}{19}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{19}\right)^2 + \left(\frac{1}{19}\right)^2 + \left(\frac{-3}{19}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{19}}\ .$$

שאלה 8



מישור xz נתון על ידי המשוואה $y=0$, נשים לב ששתי הנקודות M ו- N אינן על המישור ושתיהן נמצאות "מימין" למישור (כן ערך ה- y של שתיהן חיובי). נשים לב גם שאם $N^*(-12,-4,6)$ היא השיקוף של B ביחס למישור xz, אז לכל נקודה $P(x,y,z)$ על המישור מתקיים שהמרחק $d(P,N)=d(P,N^*)$. כלומר, ניתן לנסח את הבעיה מחדש כך: מצאו את הנקודה על מישור xz שסכום מרחקיה מהנקודות M ו- N^* הוא מינימאלי. מצד שני, אם P היא נקודת החיתוך של הקטע MN^* עם מישור xz אז

$$d(P,M)+d(P,N^*)=d(M,N^*)$$

ולכל נקודה אחרת על המישור, Q, מתקבל משולש MN^*Q במרחב ומאי-שיוויון המשולש מתקיים

$$d(M,N^*)\leq d(Q,M)+d(Q,N^*)$$

כלומר, הנקודה המבוקשת P היא נקודת החיתוך בין הקטע MN^* לבין מישור xz. אם נרשום הצגה פרמטרית של הישר נקבל

$$M(t)=M+t\overrightarrow{MN^*}=(4,3,1)+t(-16,-7,5)=(4-16t,3-7t,1+5t)$$

ומהצבה במשוואת המישור נקבל

$$3-7t=0\Rightarrow t=\frac{3}{7}$$

ולכן נקודת החיתוך היא

$$P=M\left(\frac{3}{7}\right)=\left(-\frac{20}{7},0,\frac{22}{7}\right)$$

ומתקיים

$$d\left(P,M\right)+d\left(P,N^{*}\right)=\sqrt{\left(\frac{48}{7}\right)^{2}+3^{2}+\left(-\frac{15}{7}\right)^{2}}+\sqrt{\left(\frac{-64}{7}\right)^{2}+4^{2}+\left(\frac{20}{7}\right)^{2}}$$
$$=\frac{3\sqrt{330}}{7}+\frac{4\sqrt{330}}{7}=\sqrt{330}$$

ו-

$$d\left(M,N^{*}\right)=\sqrt{\left(-16\right)^{2}+(-7)^{2}+5^{2}}$$
$$=\sqrt{256+49+25}=\sqrt{330}$$

לפיכך $d\left(P,M\right)+d\left(P,N^{*}\right)=d\left(M,N^{*}\right)$
כנדרש.