חישוביות וסיבוכיות

מועד א'

ד"ר יוחאי טוויוטו, ד"ר ירמיהו מילר .

סמסטר א, תשפ"ו'

מספר העמוד הנוכחי ומספר העמודים הכולל בשאלון מופיעים בתחתית כל עמוד. בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות

שאלוני בחינה

☑ לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.

☐ לשאלון הבחינה יש לצרף כריכה בלבד.

☐ יש להחזיר את השאלון ביחד עם המחברת/כריכה.

שימוש במחשבונים

☐ ניתן להשתמש במחשבון.

☑ לא ניתן להשתמש במחשבון.

חומר עזר

☑ לא ניתן להשתמש בחומר עזר כלל.

☐ ניתן להשתמש בחומר עזר/דף נוסחאות, כמפורט:

☐ הבחינה עם חומר פתוח ⍰ מותר להשתמש בכל חומר עזר מודפס או כתוב.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מהנדס

הנחיות

נא קראו בעיון את ההנחיות הבאות בטרם תתחילו לפתור את הבחינה. מומלץ לקרוא בקצרה את כלל השאלות לפני שמתחילים לפתור את הבחינה. ניתן לענות על השאלות בכל סדר שתרצו.

1. המבחן כולל 5 שאלות. יש לענות על כולן.
2. שאלות הבחינה שוות משקל - כל שאלה 20 נקודות.
3. כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תדלגו על שלבים.
4. המבחן כולל נספחים, לשימושכם. הסתייעו בהם במידת הצורך.
5. הקפידו על כתב יד ברור וקריא.
6. הקפידו לרשום בגדול ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
7. כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבלתם. רק הן נבדקות !
8. ניתן לקחת את השאלון כאשר הבחינה מסתיימת.

בהצלחה!

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | **קמפוס אשדוד** ז'בוטינסקי 84, 77245 | **www.sce.ac.il** | **חייג:** *מטמנטם

הבחינה

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

נתון אלפבית הקלט $\Sigma = \{a, b, c\}$ ונתונה השפה הבאה:

$$L = \left\{a^i b^j c^{i+2j} \;\middle|\; i, j \in \mathbb{N}^+\right\}$$

תארו מכונת טיורינג סטנדרטית (כלומר,במודל הבסיסי) שמכריעה את השפה .

בסעיף זה עליכם לתאר את המכונה בצורה גרפית בעזרת תרשים /דיאגרמת מצבים בלבד ,ולא בדרכים אחרות. כלומר, לא בעזרת טבלת מעברים ,לא בעזרת פסאודו -קוד,וכיוצא באלו.

תזכורת: $\mathbb{N}^+$ היא קבוצת הטבעיים החיוביים (כלומר, ללא המספר אפס).

שאלה 2: וריאציות על מכונות טיורינג (20 נקודות)

נסמן ב T את המודל הבסיסי/סטנדרטי של מכונת טיורינג, שבו יש סרט אינסופי לשני הכיוונים. כזכור, במודל זה בכל צעד ניתן לזוז שמאלה או ימינה בלבד.

נסמן ב O את המודל של מכונת טיורינג, שבו יש סרט אינסופי לכיוון ימין בלבד. כזכור, מודל זה זהה למודל הבסיסי בכל שאר הדברים, למעט היותו של הסרט אינסופי לימין בלבד, ולמעט העובדה שכאשר הראש נמצא במשבצת השמאלית ביותר וצריך לזוז שמאלה, הראש נשאר במקום.

הוכיחו כי שני המודלים שקולים חישובית.

שימו לב שבהוכחת השקילות יש להוכיח שני כיוונים:

1. **כיוון א':** לכל מכונה במודל O יש מכונה שקולה במודל T.
2. **כיוון ב':** לכל מכונה במודל T יש מכונה שקולה במודל O.

על ההוכחה לכלול טבלת מעברים מלאה בכל כיוון.

לנוחיותכם, האיור הבא ממחיש את שני המודלים, זה לצד זה.

שאלה 3: התזה של צ'רץ' טיורינג (20 נקודות)

נתון האלפבית $\Sigma = \{a, b\}$, ונתונה השפה הבאה המוגדרת מעל Σ:

$$L = \left\{uu \;\middle|\; u \in \Sigma^*\right\} \ .$$

בנו דקדוק $G = (V, \Sigma, R, S)$ היוצר את השפה L.

תארו את הדקדוק באופן מלא. כלומר, תארו באופן מלא את כל ארבעת רכיבי הדקדוק.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מטמנמם

שאלה 4: אי כריעות (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

נתונה השפה הבאה:

$$L = \{\langle M \rangle \mid \varepsilon \notin L(M)\} \ .$$

הוכיחו כי $L \notin R$.

סעיף ב' (10 נקודות)

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענה הבאה:
לכל שתי שפות L_1 ו- L_2 אם $L_1 \in RE$ וגם $L_2 \in RE$ אזי $L_1 \cup \bar{L}_2 \in RE$.

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

בהינתן בגרף לא מכוון $G = (V, E)$. קבוצת שולטת היא קבוצת קודקודים $D \subseteq V$ המקיימת התנאי הבא:

לכל קודקוד $u \in V \backslash D$ קיים לפחות קודקוד אחד $w \in D$ כך ש: $uw \in E$.

כלומר, כל קודקוד שלא ב - D מחובר בקשת לקודוד אחד ב- D.

הבעיית DS מוגדרת באופן הבא:

<u>פלט</u>: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר שלם k.

<u>קלט</u>: האם קיימת קבוצה שולטת $D \subseteq V$ כך ש- $|D| \leqslant k$?

ניתן להגדיר הבעיית DS כשפה פורמלית באופן הבא:

$$DS = \{\langle G, k \rangle \mid \text{גרף לא מכוון שמכיל קבוה שולטת } D \subseteq V \text{ בגודל } k \text{ לפחות } G\}$$

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$. **כיסוי קדקודים** היא קבוצת קדקודים $C \subseteq V$ כך שלכל צלע $(u, w) \in E$ מתקיים: $u \in C \ \vee \ w \in C$.

הבעיית VC מוגדרת באופן הבא:

<u>פלט</u>: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר שלם k.

<u>קלט</u>: האם G מכיל כיסוי קודקודים בגודל k לכל היותר.

הבעיית VC ניתנת להכדיר כשפה פורמלית באופן הבא:

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מטמנמם

$VC = \{\langle G, k\rangle \mid$ G גרף לא מכוון המכיל כיסוי קודקודים בגודל k לכל היותר. $\}$

הוכיחו:

$$VC \leqslant_P DS \ .$$

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מטנטס

חישוביות וסיבוכיות

מועד א'

פתרון לדוגמא

ד"ר יוחאי טוויוטו , ד"ר ירמיהו מילר .

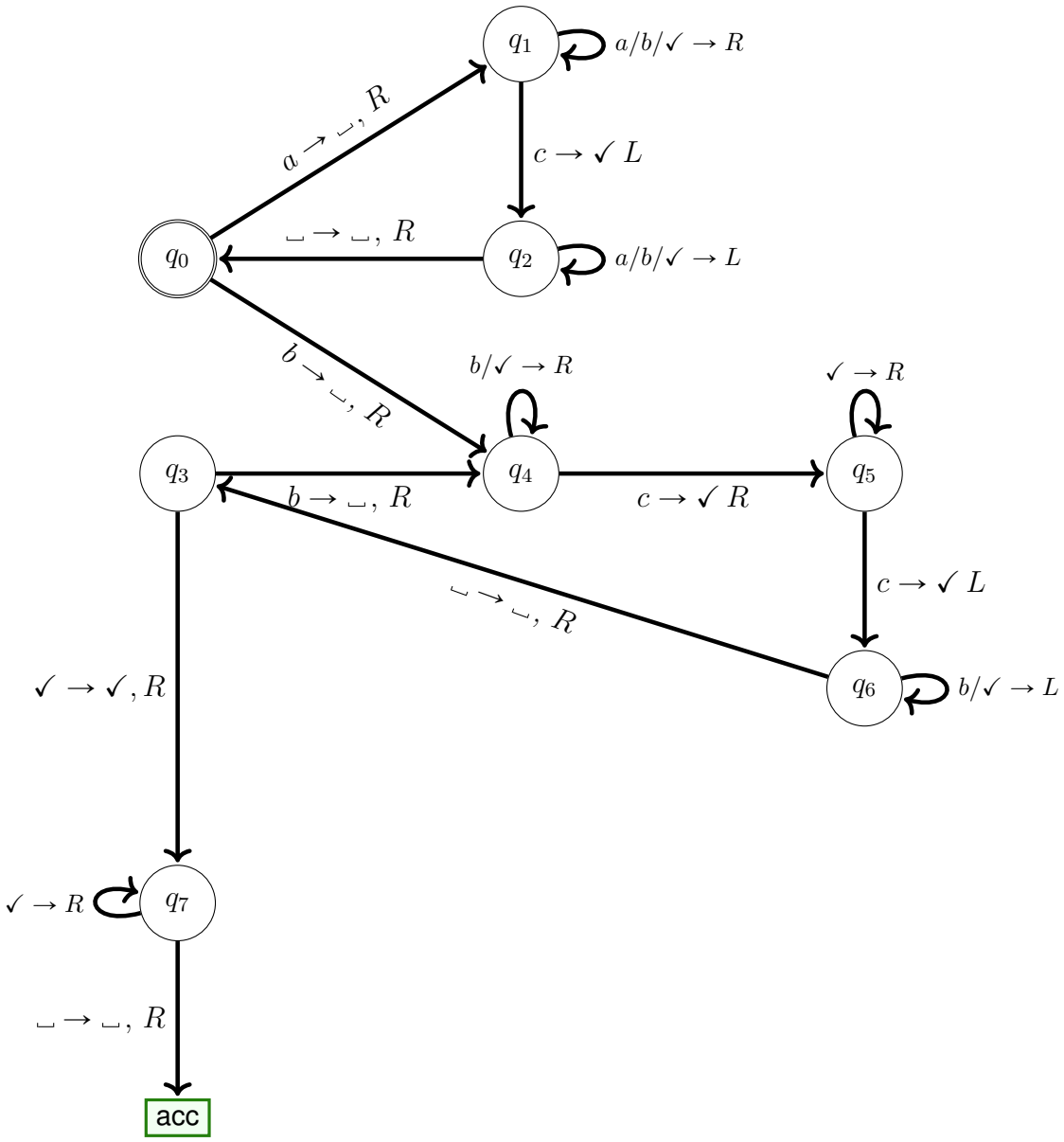
סמסטר א, תשפ"ו'

מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הינן פתרונות לדוגמא. ניתן לפתור חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מהנדס

פתרונות

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)



שאלה 2: וריאציות על מכונות טיורינג (20 נקודות)

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מהנדס

פתרונות

כיוון ראשון

תהי

$$M^O = \left(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O\right) \ ,$$

במודל O החד כיווני. נבנה מכונה

$$M^T = \left(Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T\right) \ ,$$

שקולה במודל הדו כיווני T.

רכיבי המ"ט M^T זהים לאלו של המ"ט M^O, מלבד מהתכונה שהראש של M^O לא זז מעבר לקצה השמאולי של הקלט.

לכן כדי ש- M^T תהיה שקולה ל- M^O יש להוסיף מעברים לפונקצית המעברים של M^T כדי שהראש של M^T לא זז מעבר לקצה השמאולי של הקלט.

הרעיון הוא לסמן את המשבצת שמשמאול לתחילת הקלט עם סימן מיוחד $\$$, ואז להוסיף מעברים לפונקצית המעברים של M^T שמבטיחים שאם הראש נמצא למשבצת שמסומנת $\$$ אז הוא מיד חוזר ו- M^T חוזרת למצב ההתחתי של המ"ט M^O. זה מתבצע על ידי הוספת השורות האלו למטה לטבלת המעברים של M^T:

מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
q_0^T	σ	$q_\$$	$\circlearrowleft$	L	
$q_\$$	$\sqcup$	q_0^O	$\$$	R	
q	$\$$	q	$\$$	R	$\forall q \in Q^O$

$$Q^T = Q^O \cup \{q_0^T, q_\$\} \ , \qquad \Sigma^T = \Sigma^O \ , \qquad \Gamma^T = \Gamma^O \cup \{\$\} \ , \qquad \text{acc}^T = \text{acc}^O \ , \qquad \text{rej}^T = \text{rej}^O \ .$$

כיוון שני

תהי

$$M^T = \left(Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T\right) \ ,$$

במודל T הדו כיווני. נבנה

$$M^O = \left(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O\right) \ ,$$

במודל O החד כיווני.

נתאר סימולציה של הככונה החד-כיוונית במודל הדו-כיוונית.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מהנדס

פתרונות

הרעיון הוא לסמן קו על הסרט במשבת באמצע הקלט, ואז לקפל את הסרט בקו הזה. באופן הזה נקבל סרט עם קצה שמאולי ואינסופי ימינה. במשבצות של הסרט החדש המקופל יש שני תווים, אחד למעלה (U) ואחד למטה (D), מלבד מנקודת הקיפול שבו יש משבצת אחת שמסומנת $\$$.

באופן הזה אפשר לסמלץ את המכונה M^O במכונה M^T על ידי הוספת המעברים הבאים לטבלת המעברים של M^T. **לכל** $\tau, \sigma, \pi \in \Gamma^T$:

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | **קמפוס אשדוד** ז'בוטינסקי 84, 77245 | **www.sce.ac.il** | **חייג:** *מהנייד

פתרונות

תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון	מצב
תזוזה שמאלה: $(q,\sigma) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,L)$	L	π τ	$p.D$	π σ	$q.D$
	R	τ π	$p.U$	σ π	$q.U$
תזוזה שמאלה: $(q,\sqcup) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,L)$	L	$\sqcup$ τ	$p.D$	$\sqcup$	$q.D$
	R	τ $\sqcup$	$p.U$	$\sqcup$	$q.U$
תזוזה ימינה: $(q,\sigma) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,R)$	R	π τ	$p.D$	π σ	$q.D$
	L	τ π	$p.U$	σ π	$q.U$
תזוזה ימינה: $(q,\sqcup) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,R)$	R	$\sqcup$ τ	$p.D$	$\sqcup$	$q.D$
	L	τ $\sqcup$	$p.U$	$\sqcup$	$q.U$
	R	$\circlearrowleft$	$q.U$	$\$$	$q.D$
	R	$\circlearrowleft$	$q.D$	$\$$	$q.U$
אתחול					
$\tau \in \Sigma \cup \{\sqcup\}$ $\sigma \in \Sigma$	R	$\$$	$q.\tau$	τ	q_0^O
	R	$\sqcup$ σ	$q.\tau$	τ	$q.\sigma$
	L	$\sqcup$ $\sqcup$	back	$\sqcup$	$q.\sqcup$
	L	$\circlearrowleft$	back	$\sqcup$ τ	back
	R	$\circlearrowleft$	$q_0^T.D$	$\$$	back
סיום					
			acc^O	הכל	$\text{acc}^T.D$
			acc^O	הכל	$\text{acc}^T.U$
			rej^O	הכל	$\text{rej}^T.D$
			rej^O	הכל	$\text{rej}^T.U$
כל השאר עוברים ל-rej					

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מטמטם

$$\Gamma^O \supseteq \left(\Gamma^T \times \Gamma^T\right) \cup \{\$\} .$$

שאלה 3: התזה של צ'רץ' טיורינג (20 נקודות)

דוגמא זאת תמחיש ביצד דקדוק כללי יכול "לפעול בדומה" למכונת טיורינג.
בדקדוק נשתמש במשתנים וכללי גזירה שיאפשרו מעין תנועה על גבי המחרוזת הנגזרת, בדומה לתנועת הראש של מכונת טיורינג על גבי הסרט.

1	כלל גזירה יחיד מהמשתנה ההתחלתי. המשתנה H ידמה את הראש של המ"ט ש"יזוז" מצד לצד על המחרוות הנגזרות. הסוגר המרובע] מסמן את הקצה השמאלי של המילה השמאלית. הסוגר המסולסל } מסמן את הקצה השמאלי של המילה הימינית.	$S \to [H\{$
2	כלל זה מאפשר הוספת אות a לקצה השמאלי של המילה השמאלית. המשתנה H מוחלף במשתנה H_a כדי "לזכור" שיש עכשיו להוסיף a גם במחרוזת הימינית. (בדומה לזיכרונות של מ"ט).	$[H \to [aH_a$
3	כלל זה מאפשר לראש "לזוז" ימינה.	$H_a a \to aH_a$
4	כאשר המשתנה H_a "יגיע" לסוגר המסולסל, הוא יגזור אות a נוספת מימין לסוגר, שהוא הקצה השמאלי של המחרוזת הימינית. כך אפשרנו להוסיף שתי אותיות a: אחת מימין לסוגר] ואחת תואם ימין לסוגר }. כלומר אות a בקצה השמאלי של כל אחת המחרוזות.	$H_a\{ \to H\{a$
5	כעת צריך לאפשר למשתנה H לחזור שמאלה על גבי האותיות שבין הסוגרים, עד הסוגר].	$aH \to Ha$

ברגע "שהראש" H חזר לתחילת המחרוזת ועומד ליד הסוגר] עוברים על השלבים 2-5 שוב. בסבב הבא נחק בחשבון גם יצירה של שתי אותיות b.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מהנדס

2'	כלל זה מאפשר הוספת אות b לקצה השמאלי של המילה השמאלית. המשתנה H מוחלף במשתנה H_b כדי "לזכור" שיש עכשיו להוסיף b גם במחרוזת הימינית.	$[H \to [bH_b$
3'	כללים האלה מאפשרים לראש "לזוז" ימינה.	$H_a a \to aH_a$ $H_a b \to bH_a$ $H_b a \to aH_b$ $H_b b \to bH_b$
4'	כאשר המשתנה H_b "יגיע" לסוגר המסולסל, הוא יגזור אות b נוספת מימין לסוגר, שהוא הקצה השמאלי של המחרוזת הימינית. כך אפשרנו להוסיף שתי אותיות b: אחת מימין לסוגר] ואחת תואם ימין לסוגר }. כלומר אות b בקצה השמאלי של כל אחת המחרוזות.	$H_b\{ \to H\{b$
5'	כעת צריך לאפשר למשתנה H לחזור שמאלה על גבי האותיות שבין הסוגרים, עד הסוגר].	$bH \to Hb$

בכדי לסיים את הגזירה יש להפטר ממשתני העזר על ידי הכללים הבאים:

6	הכללים האלה מאפשרים להעלים את המשתנים H, [, {	$H \to \varepsilon$ $[\to \varepsilon$ $\{ \to \varepsilon$

למשל:

$$S \xrightarrow{1} [H\{ \xrightarrow{2} [aH_a\{ \xrightarrow{4} [\ aH\{a \xrightarrow{5} [\ Ha\{a$$

$$\xrightarrow{2} [aH_aa\{a \xrightarrow{3} [aaH_a\{a \xrightarrow{4} [aa\ H\{aa \xrightarrow{5} [Haa\ \{aa$$

$$\xrightarrow{2} [bH_baa\{aa \xrightarrow{3} [baaH_b\{aa \xrightarrow{4} [baa\ H\{baa \xrightarrow{5} [Hbaa\ \{baa$$

$$\xrightarrow{6} baabaa$$

שאלה 4: אי כריעות (20 נקודות)

סעיף א' נראה רדוקציה $\overline{L_{\text{acc}}} \leqslant L$.

בניית הרדוקציה

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מהנדס

$$f(x) = \begin{cases} \langle M_\varnothing \rangle & : x \neq \langle M, w \rangle \ , \\ \langle M_w \rangle & : x = \langle M, w \rangle \ . \end{cases}$$

כאשר:

- $M_\varnothing$ היא מכונת טיורינג הדוחה כל קלט.
- M_w היא מכונת טיורינג של כל קלט y, מתעלמת מ- y, מריצה את M על w ועונה כמוה.

<u>אבחנה</u>

$$L\left(M_w\right) = \begin{cases} \Sigma^* & : w \in L(M) \ , \\ \varnothing & : w \notin L(M) \ . \end{cases}$$

<u>הוכחת הנכונות</u>

f חשיבה כי ניתן לבנות מכונת טיורינכ שבודקת האם $x = \langle M, w \rangle$. אם לא מחזירה קידוד קבוע $\langle M_\varnothing \rangle$, ואם כן מחזירה קידוד של M_w ע"י שינויים בקידוד של $\langle M \rangle$.

נוכיח כי:

$$x \in \overline{L_{\text{acc}}} \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \in L \ .$$

<u>הוכחה לכיוון $\Leftarrow$</u>

אם $x \in \overline{L_{\text{acc}}} \Leftarrow$ שני מקרים.

1) $x \neq \langle M, w \rangle \Leftarrow f(x) = \langle M_\varnothing \rangle \Leftarrow \varepsilon \notin L\left(M_\varnothing\right) \Leftarrow f(x) \in L$.

2) $x = \langle M, w \rangle$ ו- $w \notin L(M)$.

$\Leftarrow f(x) = \langle M_w \rangle$ ולפי האבחנה $L(M_w) = \varnothing$

$\Leftarrow \varepsilon \notin L(M_w)$

$\Leftarrow f(x) \in L$.

<u>הוכחה לכיוון $\Rightarrow$</u>

אם $x \notin \overline{L_{\text{acc}}}$

$\Leftarrow x = \langle M_w \rangle$ ו- $w \in L(M)$.

$\Leftarrow f(x) = \langle M_w \rangle$ ולפי האבחנה $L(M_w) = \Sigma^*$

$\Leftarrow \varepsilon \in L(M_w)$

$\Leftarrow f(x) \notin L$.

לפיכך הוכחנו רדוקציה

$$\overline{L_{\text{acc}}} \leqslant L$$

ולכן מכיוון ש- $\overline{L_{\text{acc}}} \notin RE$ ממשפט הרדוקציה מתקיים $L \notin RE$.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מהנדס

סעיף ב' הטענה לא נכונה.
דוגמה נגדית: $L_1 = \varnothing$, $L_2 = L_{\text{acc}}$.

ראשית, קיימת מכונת טיורינג M_1 שמקבלת את השפה $L_1 = \varnothing$:

$M_1 =$ " על קלט x דוחה."

הוכחנו בכיתה כי השפה $L_{\text{acc}} \in RE$.

מצד שני $\bar{L}_2 = \overline{L_{\text{acc}}} \notin RE$ לפיכך

$$L_1 \cup \bar{L}_2 = \varnothing \cup \overline{L_{\text{acc}}} = \overline{L_{\text{acc}}} \notin RE \ .$$

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

סעיף א' (12 נקודות)

בניית הרדוקציה

נגדיר פונקציית הרדוקציה f באופן הבא:

$$f\left(\langle G, k\rangle\right) = \langle G', k'\rangle \ .$$

כאשר $k' = k$ ו- G' יהיה כמו G פרט לכך שאם ב- G קיימים קודקודים בודדים נוריד אותם ונוסיף קודקוד w_e לכל צלע $e = uv \in E$ ונחבר אותו בצלע ל- u ול- v.

פורמלי: אם $G = (V, E)$ גרף לא מכוון ואם $S \subseteq V$ הקבוצה של הקודקודים הבודדים של G (הקודקודים שאינם מחוברים לאף קודקוד אחר בצלע) אז $G' = (V', E')$ כאשר

- $V' = (V \backslash S) \cup \left\{w_e \middle| e \in E\right\}$,
- $E' = E \cup \left\{\{w_e u, w_e v\} \ \middle| \ e = uv \in E\right\}$.

הערה

לא מספיק לבנות רדוקציה שמקבלת כקלט גרף לא מכוון G וטבעי k ופולטת גרף G' שהוא אותו גרף G בלי קודקודים בודדים וטבעי k. דוגמה נגדית:

המשולש קשיר $G = K_3$ ו- $k = 1$. G מכיל קבוצה שולטת בגודל $k = 1$ אבל ב- G לא קיים כיסוי בקודקודים בגודל $k = 1$.
ז"א $\langle G, 1\rangle \notin VC$ אבל $\langle G, 1\rangle \in DS$.

הוכחת הנכונות

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מבנים

נוכיח את התנאי הרדוקיצה:

$$\langle G,k\rangle \in VC \quad \Longleftrightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in DS\ .$$

כיוון $\Leftarrow$

אם $\langle G,k\rangle \in VC$

$\Leftarrow$ $G=(V,E)$ גרף לא מכוון וקיים כיסוי בקודקודים $C \subseteq V$, $|C| \leqslant k$.

$\Leftarrow$ לכל $w \in V' \backslash C$ אז שני מקרים:

1) $w \in V$ ומכיוון ש- w לא קודקוד בודד אז קיים $uw \in E$
$\Leftarrow$ מכיוון ש- C כיסוי בקודקודים אז $u \in C$.

2) $w \in V_e$ $\Leftarrow$ קיים $e = uv \in E$ כך ש: w מחובר ל- u ול- v בצלע.

$\Leftarrow$ לכל $w \in V' \backslash C$ קיים $u \in C$ כך ש: w מחובר ל-u בצלע.

$\Leftarrow$ C קבוצה שולטת בגרף G' כאשר $|C| \leqslant k$.

$\Leftarrow$ G' מכיל קבוצה שולטת בגודל k לכל היותר.

$\Leftarrow$ $\langle G',k\rangle \in DS$.

כיוון $\Rightarrow$

אם $\langle G,k\rangle \notin VC$.

$\Leftarrow$ G לא מכיל כיסוי בקודקודים C בגודל k לכל היותר.

$\Leftarrow$ אחרי הסרת הקודקודים הבודדים ב- G לא תהיה קבוצה שולטת של קודקודים ב- G קטן מ- $k+1$.

$\Leftarrow$ אחרי הוספת קודקודים ביניים V_e והצלעות ביניים, הגרף המתקבל, G' גם לא יכיל קבוצה שולטת של קודקודים קטן מ- $k+1$.

$\Leftarrow$ $\langle G',k'\rangle \in DS$.

סיבוכיות זמן

נוכיח כי הפונקציית הרדוקציה f חשיבה בזמן פולינומיאלית. כלומר נבנה אלגוריתם M_f שמחשבת את f ונראה כי המכונה רצה בזמן פולינומיאלי.

$M_f =$ "על קלט $\langle G,k\rangle$ כאשר $G=(V,E)$ גרף לא מכוון ו- k מספר טבעי:

1) מעתיק את הגרף $G=(V,E)$.

2) מוריד את הקודקודים הבודדים שלא צמודים לאף צלע של G.

3) לכל צלע $e \in E$ מוסיף קודקוד w_e כדי לקבל קבוצה של קודקודים מוספים $V_e = \{w_e \mid e \in E\}$.

4) לכל $e=(u,v) \in E$ מחבר את w_e ל- u בצלע ואת w_e ל- v עם צלע."

- שלב (1) עולה $O(|V|)+O(|E|)$.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מטמנטם

- שלב (2) עולה $O(|V|)$ צעדים.
- שלב (3) עולה $O(|E|)$ צעדים.
- שלב (4) עולה $O(|V'|) = O(|E|)$ צעדים.

לכן M_f רצה בזמן $O(|V|) + O(|E|) = O(n)$ כאשר $n = |\langle G, k\rangle|$ הוא האורך של הקלט.

לכן f היא הרדוקיצה פולינומיאלית מ- VC ל- DS ולכן

$$VC \leqslant_P DS \ .$$

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מהנדס