

# שיעור 14

## אינטגרציה של שברים אלגבריים (פונקציות רציונליות)

### הגדרה 14.1 פונקציה רציונלית

פונקציה רציונלית (שבר אלגברי) זאת פונקציה מהצורה

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

כאשר  $P(x), Q(x)$  פולינומים.

### דוגמה 14.1 פונקציה רציונלית

$f(x) = \frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2}$  פונקציה רציונלית:  $P(x) = x^4 - 5x + 9$   $Q(x) = x - 2$ .

### הגדרה 14.2 פונקציה רציונלית אמיתית

שבר אלגברי

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

נקרא אמיתי אם

$$\deg(P) < \deg(Q).$$

אם שבר אלגברי לא אמיתי, יש לעשות חילוק פולינומים.

### דוגמה 14.2 חילוק פולינומים

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2}.$$

### פתרון:

שלב ראשון בחישוב אינטגרל של שבר אלגברי לא אמיתי, להגיע לשבר אלגברי אמיתי ע"י חילוק פולינומים. ע"י חילוק ארוך:

שלב 1:

$$x - 2 \overline{) x^4 - 5x + 9}$$

שלב 2:

$$\begin{array}{r} x^3 \\ x-2 \overline{) x^4 \phantom{-2x^3} - 5x + 9} \\ \underline{x^4 - 2x^3} \phantom{+ 9} \\ 2x^3 - 5x + 9 \end{array}$$

שלב 3:

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 \\ x-2 \overline{) x^4 \phantom{-2x^3} - 5x + 9} \\ \underline{x^4 - 2x^3} \phantom{+ 9} \\ 2x^3 - 5x + 9 \end{array}$$

שלב 4:

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 \\ x-2 \overline{) x^4 \phantom{-2x^3} - 5x + 9} \\ \underline{x^4 - 2x^3} \phantom{+ 9} \\ 2x^3 - 5x + 9 \\ \underline{2x^3 - 4x^2} \phantom{+ 9} \\ 4x^2 - 5x + 9 \end{array}$$

שלב 5:

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 + 4x \\ x-2 \overline{) x^4 \phantom{-2x^3} - 5x + 9} \\ \underline{x^4 - 2x^3} \phantom{+ 9} \\ 2x^3 - 5x + 9 \\ \underline{2x^3 - 10x^2} \phantom{+ 9} \\ 4x^2 - 5x + 9 \\ \underline{4x^2 - 8x} \phantom{+ 9} \\ 3x + 9 \end{array}$$

שלב 6:

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 2x^2 + 4x + 3 \\
 x - 2 \overline{) x^4 \phantom{+ 2x^3} - 5x + 9} \\
 \underline{x^4 - 2x^3} \phantom{+ 4x + 3} \\
 2x^3 \phantom{+ 4x + 3} - 5x + 9 \\
 \underline{2x^3 - 10x^2} \phantom{+ 3} \\
 4x^2 - 5x + 9 \\
 \underline{4x^2 - 8x} \phantom{+ 9} \\
 3x + 9 \\
 \underline{3x - 6} \\
 15
 \end{array}$$

תשובה סופית:

$$\frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \frac{15}{x - 2}$$

לכן

$$\int \frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = \int \left( x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \frac{15}{x - 2} \right) = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 15 \ln |x - 2| + C .$$

ז"א שלב ראשון בחישוב אינטגרל של שבר אלגברי:

ע"י חילוק ארוך פולינומים להגיע לשבר אלגברי אמיתי. כל שבר אלגברי אמיתי ניתן להציג כסכום של שברים פשוטים. ■

יש 4 סוגים של שברים אלגבריים פשוטים:

שבר אלגברי		שבר פשוט
סוג 1:	$\frac{m}{x-a}$	
סוג 2:	$\frac{m}{(x-a)^2}$	
	$\frac{m}{(x-a)^n}$	$n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$
סוג 3:	$\frac{mx+n}{x^2+px+q}$	כאשר ל- $x^2+px+q$ אין שורשים.
סוג 4:	$\frac{mx+b}{(x^2+px+q)^2}$	כאשר ל- $x^2+px+q$ אין שורשים.
	$\frac{mx+b}{(x^2+px+q)^n}$	$n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$ כאשר ל- $x^2+px+q$ אין שורשים.

דוגמה 14.3 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את  $\int \frac{2x+1}{x^2-3x+1}$

פתרון:

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+1} = \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$
$$A(x-2) + B(x-1) = 2x+1$$

$$\begin{aligned} x=2 &\Rightarrow B=5 \\ x=1 &\Rightarrow A=-3 \end{aligned}$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+1} dx = \int \left( \frac{-3}{x-1} + \frac{5}{x-2} \right) dx = -3 \ln|x-1| + 5 \ln|x-2| + C .$$



#### דוגמה 14.4 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את  $\int \frac{x^2 + 4}{(x-2)(x-3)^2}$

**פתרון:**

$$\frac{x^2 + 4}{(x-2)(x-3)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x-3} .$$

$$A(x-3)^2 + B(x-2) + C(x-3)(x-2) = x^2 + 4$$

$$\begin{aligned} x=3 &\Rightarrow B=13 \\ x=2 &\Rightarrow A=8 \\ x=0 &\Rightarrow 9A-2B+6C=4 \Rightarrow C=-7 \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^2 + 4}{(x-2)(x-3)^2} dx = \int \left( \frac{8}{x-2} + \frac{13}{(x-3)^2} - \frac{7}{x-3} \right) dx = 8 \ln|x-2| - \frac{13}{x-3} - 7 \ln|x-3| + C .$$



#### דוגמה 14.5 אינטגרל של פונקציה רציונלית

חשבו את  $\int \frac{x^3 + 1}{x^2(x^2 + 1)}$

**פתרון:**

$$\frac{x^3 + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} .$$

$$A(x^2 + 1)^2 + Bx(x^2 + 1) + (Cx + D)x^2 = x^3 + 1$$

$$\begin{aligned} x^3 : & B + C = 1 \\ x^2 : & A + D = 0 \\ x : & B = 0 \\ x^0 : & A = 1 \end{aligned}$$

לכן

$$D = -1 , \quad C = 1 .$$

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^2(x^2 + 1)} dx = \int \left( \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1} \right) dx = \int \left( \frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln|x^2+1| - \arctan(x) + C .$$



## דוגמה 14.6 אינטגרל של פונקציה רציונלית

$$I = \int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} dx \quad \text{חשבו את}$$

**פתרון:**

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 5} .$$

$$A(x^2 - 2x + 5) + (Bx + C)(x-1) = 2x^2 - 3x - 3$$

$$\begin{aligned} x^2 : \quad & A + B = 2 \\ x : \quad & -2A + C - B = -3 \\ x^0 : \quad & 5A - C = -3 \end{aligned}$$

לכן

$$A = -1 , \quad B = 3 , \quad C = -2 .$$

$$I = \int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} dx = \int \left( -\frac{1}{x-1} + \frac{3x-2}{x^2 - 2x + 5} \right) dx = -\ln|x-1| + \int \left( \frac{3x-2}{(x-1)^2 + 4} \right) dx .$$

נגדיר  $u = x - 1$ :

$$\begin{aligned} I &= \ln|x-1| + \int \frac{3(u+1)-2}{u^2+4} du \\ &= \ln|x-1| + \int \frac{3(u+1)-2}{u^2+4} du \\ &= \ln|x-1| + 3 \int \frac{u}{u^2+4} du - \int \frac{1}{u^2+4} du \\ &= \ln|x-1| + \frac{3}{2} \ln|u^2+4| - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{u}{2}\right) \\ &= \ln|x-1| + \frac{3}{2} \ln|(x-1)^2+4| - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) \end{aligned}$$



### למה 14.1 שלבים באינטגרציה של שברים אלגבריים

**שלב 1.** לחלק במכנה (חילוק פולינומי) במידה ש  $\deg(P) \geq \deg(Q)$ .

**שלב 2.** להציב שבר אלגברי אמיתי כסכום של שברים פשוטים.

**שלב 3.** לבצע אינטגרציה של כל שבר פשוט.

## דוגמה 14.7 אינטגרל של פונקציה רציונלית

$$I = \int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx \quad \text{חשבו את}$$

## פתרון:

### שלב 1:

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 \overline{) x^5 + 2x^3 + 4x + 4}$$

### שלב 2:

$$\begin{array}{r} x \\ x^4 + 2x^3 + 2x^2 \overline{) x^5 + 2x^3 + 4x + 4} \\ \underline{x^5 + 2x^4 + 2x^3} \phantom{+ 4x + 4} \\ -2x^4 \phantom{+ 4x + 4} \end{array}$$

### שלב 3:

$$\begin{array}{r} x - 2 \\ x^4 + 2x^3 + 2x^2 \overline{) x^5 + 2x^3 + 4x + 4} \\ \underline{x^5 + 2x^4 + 2x^3} \phantom{+ 4x + 4} \\ -2x^4 \phantom{+ 4x + 4} \\ \underline{-2x^4 - 4x^3 - 4x^2} \phantom{+ 4x + 4} \\ 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \end{array}$$

לכן ע"י חילוק ארוך קיבלנו

$$\frac{x^5 + 2x + 4x + 4}{x^4 + x^3 + 2x^2} = x - 2 + \frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = x - 2 + 4 \left( \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} \right)$$

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2}$$

$$A(x^2 + 2x + 2) + Bx(x^2 + 2x + 2) + (Cx + D)x^2 = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\begin{array}{lcl} x^3 : & B + C & = 1 \\ x^2 : & 2A + 2B + D & = 1 \\ x : & 2A + 2B & = 1 \\ x^0 : & 2A & = 1 \end{array}$$

לכן

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad D = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} I &= \int \left( x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2} \right) dx \\ &= \int \left( x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{(x + 1)^2 + 1} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 4 \int \frac{x + \frac{1}{2}}{(x + 1)^2 + 1} dx . \end{aligned}$$

נגדיר  $u = x + 1$ :

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 4 \int \frac{u - \frac{1}{2}}{u^2 + 1} du \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2 \ln |u^2 + 1| - 2 \arctan(u) + C \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2 \ln |(x + 1)^2 + 1| - 2 \arctan(x + 1) + C \end{aligned}$$

