שיעור 1
מערכות ליניאריות

1.1 מערכות של משוואות ליניאריות

הגדרה 1.1 משוואה ליניארית

משוואה ליניארית במשתנים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ היא משוואה שניתנת לרשום בצורה

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

כאשר $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$.

דוגמה 1.1

קבעו מי בין המשוואות הבאות היא ליניארית:

$$\begin{aligned}
7x_1 + 3x_2 =& 34 \\
3x + 7y + \sqrt{2} =& 4 \\
3x + 7y + \sqrt{2}z =& 3 \\
3x + 7y + \sqrt{z} =& 1 \\
3xy + 7y =& 5
\end{aligned}$$

פתרון:

$$\begin{aligned}
7x_1 + 3x_2 =& 34 & \checkmark \\
3x + 7y + \sqrt{2} =& 4 & \checkmark \\
3x + 7y + \sqrt{2}z =& 3 & \checkmark \\
3x + 7y + \sqrt{z} =& 1 & \text{✖} \\
3xy + 7y =& 5 & \text{✖}
\end{aligned}$$

הגדרה 1.2 מערכת ליניארית

מערכת ליניארית היא אוסף של m משוואות ב- n משתנים.

דוגמה 1.2

במערכת הבאה

$$\begin{aligned} x+y=&4\\ x-y=&2 \end{aligned}$$

יש 2 משוואות ו-2 משתנים, (x ו-y):

$$\begin{array}{ccccccc} \text{משתנה 1} & & \text{משתנה 2} & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ x & + & y & = & 4 & & \text{משוואה 1} \\ x & - & y & = & 2 & & \text{משוואה 2} \end{array}$$

דוגמה 1.3

במערכת הבאה

$$\begin{aligned} x+y-z=&4\\ x-2y+3z=&7 \end{aligned}$$

יש 2 משוואות ו- 3 משתנים (x,y,z):

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{משתנה 1} & & \text{משתנה 2} & & \text{משתנה 3} & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ x & + & y & - & z & = & 4 & & \text{משוואה 1} \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 7 & & \text{משוואה 2} \end{array}$$

דוגמה 1.4

במערכת הבאה

$$\begin{aligned} x+y-z+w=&3\\ x-2y+8z-7w=&7\\ x-2y+3z+2w=&7\\ x-2y+3z-9w=&10 \end{aligned}$$

יש 4 משוואות ו- 4 משתנים (x, y, z, w):

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{משתנה 1} & & \text{משתנה 2} & & \text{משתנה 3} & & \text{משתנה 4} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ x & + & y & - & z & + & w = & 4 & \text{משוואה 1} \\ x & - & 2y & + & 8z & - & 7w = & 7 & \text{משוואה 2} \\ x & - & 2y & + & 3z & + & 2w = & 7 & \text{משוואה 3} \\ x & - & 2y & + & 3z & - & 9w = & 10 & \text{משוואה 4} \end{array}$$

באופן כללי, מערכת של m משוואות ב- n משתנים נרשום בצורה

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=&b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=&b_2\\ &\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=&b_m \end{aligned}$$

הגדרה 1.3 פתרון של מערכת ליניארית

נתונה מערכת ליניארית של n משתנים:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n =& b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n =& b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n =& b_m \end{aligned}$$

נגדיר פתרון של המערכת להיות רשימה מסודרת מספרים

$$(s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

כך שהצבתם במשתנים המתאימים תהפוך כל משוואה לאמת.

דוגמה 1.5

למערכת

$$\begin{aligned} x+y =& 4 \\ x-y =& 2 \end{aligned}$$

יש פתרון

$$(x, y) = (3, 1) \ .$$

במילים אחרות אם נציב $x = 3$ ו- $y = 1$ במערכת, הרי האגף השמאול יהיה שווה לאגף הימין בכל משוואה:

$$\begin{aligned} 3+1 =& 4 \quad \text{אמת} \\ 3-1 =& 2 \quad \text{אמת} \end{aligned}$$

1.2 פתרון של מערכות לינאריות

דוגמה 1.6

פתרו את המערכת הליניארית הבאה:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 =& 4 \\ 3x_1 + 4x_2 =& 2 \end{aligned}$$

פתרון:

כותבים את המערכת בצורה:

$$\begin{array}{lccccc} R_1 : & x_1 & + & 2x_2 & = 4 \\ R_2 : & 3x_1 & + & 4x_2 & = 2 \end{array}$$

R_1 מסמן את שורה 1 של המערכת ו- R_2 מסמן את שורה 2 שך המערכת.

כדי לחלץ את x_1 מהמשוואה השנייה, נבצע את הפעולה $R_2 - 3R_1$. כך נקבל

$$\begin{array}{lccccc} R_1 : & x_1 & + & 2x_2 & = 4 \\ R_2 : & & - & 2x_2 & = -10 \end{array}$$

מחלקים את המשוואה השנייה ב- -2, כלומר $R_2 \to -\frac{1}{2}R_2$:

$$\begin{array}{rcccl} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & =4 \\ R_2: & & & x_2 & =5 \end{array}$$

קיבלנו $x_2=5$. עכשיו מציבים $x_2=5$ בהמשוואה הראשונה ונקבל

$$x_1+2\cdot 5=4 \quad \Rightarrow \quad x_1=-6 \ .$$

לכן הפתרון הוא

$$(x_1,x_2)=(-6,5) \ .$$

דוגמה 1.7

פתרו את המערכת הליניארית הבאה:

$$\begin{aligned} 5x_1+10x_2 &=45 \\ 20x_1-5x_2 &=90 \end{aligned}$$

פתרון:

כותבים את המערכת בצורה:

$$\begin{array}{rcccl} R_1: & 5x_1 & + & 10x_2 & =45 \\ R_2: & 20x_1 & - & 5x_2 & =90 \end{array}$$

במשוואה הראשונה, נהפוך את המקדם של x_1 ל- 1 ע"י הפעולה $R_1 \to \frac{1}{5}R_1$:

$$\begin{array}{rcccl} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & =9 \\ R_2: & 20x_1 & - & 5x_2 & =90 \end{array}$$

כדי לחלץ את x_1 מהמשוואה השנייה, מבצעים את הפעולה $R_2 \to R_2-20R_1$ כך שנקבל

$$\begin{array}{rcccl} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & =9 \\ R_2: & & & -45x_2 & =-90 \end{array}$$

מחלקים את משוואה השנייה ב- -45, כלומר $R_2 \to -\frac{1}{45}R_2$:

$$\begin{array}{rcccl} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & =9 \\ R_2: & & & x_2 & =2 \end{array}$$

קיבלנו $x_2=2$. עכשיו מציבים $x_2=2$ בהמשוואה הראשונה ונקבל

$$x_1+2\cdot 2=4 \quad \Rightarrow \quad x_1=5 \ .$$

לכן הפתרון הוא

$$(x_1,x_2)=(5,2) \ .$$

דוגמה 1.8

פתרו את המערכת הליניארית הבאה:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3 &= 6 \\ 3x_1+x_2-x_3 &= -2 \\ 2x_1-3x_2+2x_3 &= 14 \end{aligned}$$

פתרון:

$$\begin{array}{lcccccccc} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ R_2: & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ R_3: & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 14 \end{array}$$

מבצעים את הפעולה $R_2 \to R_2 - 3R_1$ ומקבלים

$$\begin{array}{lcccccccc} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ R_2: & & - & 5x_2 & - & 10x_3 & = & -20 \\ R_3: & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 14 \end{array}$$

מבצעים את הפעולה $R_3 \to R_3 - 2R_1$ ומקבלים

$$\begin{array}{lcccccccc} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ R_2: & & - & 5x_2 & - & 10x_3 & = & -20 \\ R_3: & & - & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \end{array}$$

מכפילים את השורה R_2 ב- $-\frac{1}{5}$, כלומר $R_2 \to -\frac{1}{5}R_2$:

$$\begin{array}{lcccccccc} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ R_2: & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ R_3: & & - & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \end{array}$$

מבצעים את הפעולה $R_3 \to R_3 + 7R_2$ ומקבלים

$$\begin{array}{lcccccccc} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ R_2: & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ R_3: & & & & & 10x_3 & = & 30 \end{array}$$

$R_3 \to \frac{1}{10}R_3$:

$$\begin{array}{lcccccccc} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ R_2: & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ R_3: & & & & & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$R_1 \to R_1 - 3R_3$:

$$\begin{array}{lcccccccc} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & & & = & -3 \\ R_2: & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ R_3: & & & & & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_3$:

$$\begin{array}{lcccccccc} R_1: & x_1 & + & 2x_2 & & & = & -3 \\ R_2: & & & x_2 & & & = & -2 \\ R_3: & & & & & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$R_1 \to R_1 - 2R_2$:

$$\begin{array}{lcccl} R_1: & x_1 & & & = 1 \\ R_2: & & x_2 & & = -2 \\ R_3: & & & x_3 & = 3 \end{array}$$

לפי זה, הפתרון שקיבלנו הוא

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -2, 3)\ .$$

בדיקה:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2\cdot(-2) & + & 3\cdot 3 & = & 6 \\ 3\cdot 1 & + & (-2) & - & 3 & = & -2 \\ 2\cdot 1 & - & 3\cdot(-2) & + & 2\cdot 3 & = & 14 \end{array}$$

דוגמה 1.9

פתרו את המערכת הליניארית הבאה:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 6x_2 + 11x_3 &= 10 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 &= -10 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

פתרון:

$$\begin{array}{lccccccc} R_1: & 4x_1 & - & 6x_2 & + & 11x_3 & = & 10 \\ R_2: & 2x_1 & - & x_2 & + & 10x_3 & = & -10 \\ R_3: & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

מחליפים שורות R_1 ו- R_3 (כלומר מבצעים את פעולת החלפה $R_1 \leftrightarrow R_3$):

$$\begin{array}{lccccccc} R_1: & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ R_2: & 2x_1 & - & x_2 & + & 10x_3 & = & -10 \\ R_3: & 4x_1 & - & 6x_2 & + & 11x_3 & = & 10 \end{array}$$

מבצעים את הפעולה $R_2 \to R_2 - 2R_1$ ומקבלים

$$\begin{array}{lccccccc} R_1: & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ R_2: & & & 3x_2 & + & 6x_3 & = & -18 \\ R_3: & 4x_1 & & -6x_2 & + & 11x_3 & = & 10 \end{array}$$

מבצעים את הפעולה $R_3 \to R_3 - 4R_1$ ומקבלים

$$\begin{array}{lccccccc} R_1: & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ R_2: & & & 3x_2 & + & 6x_3 & = & -18 \\ R_3: & & & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -6 \end{array}$$

מכפילים את השורה R_2 ב- $\frac{1}{3}$, כלומר $R_2 \to \frac{1}{3}R_2$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} R_1: & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ R_2: & & & x_2 & + & 2x_3 & = & -6 \\ R_3: & & & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -6 \end{array}$$

מבצעים את הפעולה $R_3 \to R_3 - 2R_2$ ומקבלים

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} R_1: & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ R_2: & & & x_2 & + & 2x_3 & = & -6 \\ R_3: & & & & - & x_3 & = & 6 \end{array}$$

$R_3 \to -R_3$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} R_1: & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ R_2: & & & x_2 & + & 2x_3 & = & -6 \\ R_3: & & & & & x_3 & = & -6 \end{array}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_3$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} R_1: & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ R_2: & & & x_2 & & & = & 6 \\ R_3: & & & & & x_3 & = & -6 \end{array}$$

$R_1 \to R_1 + 2R_2$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} R_1: & x_1 & & & + & 2x_3 & = & 16 \\ R_2: & & & x_2 & & & = & 6 \\ R_3: & & & & & x_3 & = & -6 \end{array}$$

$R_1 \to R_1 - 2R_3$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} R_1: & x_1 & & & & & = & 28 \\ R_2: & & & x_2 & & & = & 6 \\ R_3: & & & & & x_3 & = & -6 \end{array}$$

לפי זה, הפתרון שקיבלנו הוא

$$(x_1, x_2, x_3) = (28, 6, -6)\ .$$

בדיקה:

$$\begin{array}{ccccccc} 4 \cdot 28 & - & 6 \cdot 6 & + & 11 \cdot (-6) & = & 10 \\ 2 \cdot 28 & - & 6 & + & 10 \cdot (-6) & = & -10 \\ 28 & - & 2 \cdot 6 & + & 2 \cdot (-6) & = & 4 \end{array}$$

1.3 מטריצת המקדמים ומטריצה המורחבת

דוגמה 1.10

נחזור לדוגמה 1.8:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3 &= 6 \\ 3x_1+x_2-x_3 &= -2 \\ 2x_1-3x_2+2x_3 &= 14 \end{aligned}$$

ונפתור אותה בשיטה יותר מהרה: דירוד המטריצה המורחבת.

פתרון:

למערכת $\left\{\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3 &= 6 \\ 3x_1+x_2-x_3 &= -2 \\ 2x_1-3x_2+2x_3 &= 14 \end{aligned}\right.$ נתאים שתי מטריצות:

- המטריצה המורחבת של המערכת $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \end{array}\right)$
- המטריצה המקדמים של המערכת $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

נפתור את התרגיל לעיל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{5} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 7R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{10} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3 \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2 \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2 \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

לפי זה הפתרון הוא $(x_1, x_2, x_3) = (1, -2, 3)$. הפתרון מסכים עם התשובה שקיבלנו בדוגמה 1.8 לעיל.

דוגמה 1.11

נחזור לדוגמה 1.9:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 6x_2 + 11x_3 &= 10 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 &= -10 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ונפתור אותה ע"י דירוג המטירצה המורחבת.

פתרון:

נרשום את המטריצה המדורגת ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{5} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 11 & 10 \\ 2 & -1 & 10 & -10 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 10 & -10 \\ 4 & -6 & 11 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2 \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -18 \\ 4 & -6 & 11 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 4 \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -18 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2 \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 28 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

לפי זה הפתרון הוא $(x_1, x_2, x_3) = (28, 6, -6)$. הפתרון מסכים עם התשובה שקיבלנו בדוגמה 1.9 לעיל.

הגדרה 1.4 פעולות אלמנטריות

קיימות שלוש פעולות אלמנטריות:

פעולה 1: החלפת שתי שורות $R_i \leftrightarrow R_j$

פעולה 2: הכפלת שורה בסקלר $\alpha \neq 0$ $R_i \rightarrow \alpha \cdot R_i$

פעולה 3: הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת $R_i \rightarrow R_i + \alpha \cdot R_j$

הגדרה 1.5 איבר המוביל

בהינתן מטריצה (ללא קשר למערכת ליניארית), האיבר הראשון משמאל השונה מאפס בכל שורה, נקרא איבר מוביל.

דוגמה 1.12

במטריצה

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- האיבר המוביל של השורה הראשונה הוא 3,
- האיבר המוביל של השורה השנייה הוא 4,
- ולשורה השלילשית אין איבר מוביל מכיוון שהשורה השלילשית כולה אפסים.

הגדרה 1.6 מטריצה מדורגת

מטריצה תיקרא מדורגת אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1) שורות שכולן 0, אם ישנן, נמצאות מתחת השורות שלא כולן 0.

2) מספר האפסים לפני איבר מוביל הולך וגדל משורה לשורה עד שמגיעים לשורות אפסים, אם ישנן.

דוגמה 1.13 מטריצות מדורגות

1 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ מדורגת

2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ מדורגת

3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ לא מדורגת

4 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ לא מדורגת

5 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ לא מדורגת

הגדרה 1.7 מטריצה מדורגת קנונית

מטריצה A תיקרא <u>מדורגת קנונית</u> אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

1) שורות שכולן 0 נמצאות מתחת השורות שלא כולן 0.

2) מספר האפסים לפני איבר מוביל הולך וגדל משורה לשורה עד שמגיעים לשורות אפסים.

3) כל איבר מוביל $= 1$.

4) כל איבר המוביל (שחייב שווה 1) הוא האיבר היחיד האינו שווה ל 0 בעמודה שלו.

שימו לב, לפי תנאים 1 ו- 2 מטריצה חייבת להיות מדורגת כדי להיות גם מדורגת קנונית.

דוגמה 1.14 מטריצות מדורגות קנוניות

המטריצות הבאות מדורגות קנוניות:

$$\begin{pmatrix}1&3&0&9\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&7\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&7\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&6\\0&0&1&9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

המטריצות הבאות לא מדורגות קנוניות:

$\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$ תנאי 1 לא מתקיים.

$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ תנאי 2 לא מתקיים.

$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ תנאי 3 לא מתקיים.

$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\end{pmatrix}$ תנאי 4 לא מתקיים.

1.4 אלגוריתם הדירוג של גאוס-ג'ורדן

בהסבר הבא נשתמש בפעולה 1, פעולה 2 ופעולה 3 מן הפעולות האלמנטריות בהגדרה 1.4. כדי להפוך מטריצה למטריצה מדורגת קנונית יש לעקוב את השלבים הבאים, קרי האלגוריתם הדרוג של גאוס-ג'ורדן:

משפט 1.1 אלגוריתם הדירוג של גאוס ז'ורדן

שלב 1 אם המטריצה היא מטריצה האפס, אז סיימנו.

שלב 2 מחפשים את העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס, נבחר איבר בעמודה זו , נחלק את השורה שלו בערכו (פעולה 2) על מנת לקבל 1.

שלב 3 נעביר את השורה הזו לשורה ראשונה (פעולה 1).

שלב 4 ע"י פעולות מסוג של פעולה 3, נאפס את כל האיברים שמתחת ה 1 באותה העמודה.

שלב 5 נבצע את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת (לאחר השמטת שורה ראשונה, ו"חלק שמאלי" של אפסים).

עד עכשיו המטריצה מדובר בצורה מדורגת. על מנת לקבל מטריצה מדורגת קנונית, נבצע את שלב האחרון:

שלב 6 נאפס את כל האיברים מעל כל 1 המוביל ל 0 בעזרת פעולה 3.

דוגמה 1.15 אלגורתם הדירוג של גאוס-ג'ורדן

פתרו את המערכת

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &=1 \\ 2x_1-x_2+3x_3 &=3 \\ 3x_1-3x_2+6x_3 &=5 \end{aligned}$$

פתרון:

כותבים את המטריצה המורחבת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right)$$

נפתור את המערכת ע"י האלגוריתם.

שלב 1 המטריצה איננה מטריצה האפס (יש בה איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2 העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס היא העמודה הראשונה. האיבר המוביל הוא 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right)$$

אז נמשיך לשלב 3.

שלב 3 השורה הזו (עם 1 המוביל) הוא כבר נמצא בשורה הראשונה אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4 נאפס כל איבר באותה עמודה של ה-1 המוביל שמתחת ה 1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

עכשיו כל איבר בעמודה של ה-1 המוביל, כלומר כל איבר שמתחת ה-1 המוביל, שווה 0.

שלב 5 חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת (שמוקפת בכחול להלן)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

שלב 1' המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2' העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס היא העמודה השנייה. נבחר את האיבר "-3" בשורה השנייה ונחלק את שורה השנייה ב -3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -6 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

שלב 3' שורה השנייה כבר בשורה הראשונה של המטריצה החלקית אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4' נאפס כל איבר באותה עמודה של ה-1 המוביל שמתחת ה-1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -6 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

עכשיו כל איבר בעמודה של ה-1 המוביל (שמתחת ה-1 המוביל) שווה ל-0.

שלב 5' אין צורך לחזור לשלבים 1-4 מפני שבשורה הסופית האיבר המוביל כבר שווה 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

שלב 6' מבצעים הצבת אחורה: המערכת המתאימה הינה

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 1 \\ & & x_2 & -\frac{1}{3} & x_3 & = -\frac{1}{3} \\ & & & & x_3 & = 0 \end{array}$$

מהמשוואה השלישית:

$$x_3 = 0 \ .$$

נציב $x_3 = 0$ במשוואה השנייה:

$$x_2 - \frac{1}{3} \cdot (0) = -\frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = -\frac{1}{3} \ .$$

נציב $x_3 = 0$ ו- $x_2 = -\frac{1}{3}$ במשוואה הראשונה:

$$x_1 - \frac{1}{3} + 0 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \frac{4}{3} \ .$$

לכן הפתרון הוא

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) \ .$$

דוגמה 1.16

פתרו את המערכת הליניארית הבאה ע"י השיטה של גאוס-ג'ורדן:

$$\begin{array}{rcrcrl} 4x &+& 3y &-& z &= 24 \\ 6x &-& y &+& 2z &= -9 \\ 2x &+& 2y &+& 3z &= -3\ . \end{array}$$

פתרון:

המטריצה המורחבת של המערכת הינה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & 24 \\ 6 & -1 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

שלב 1 המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2 העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס היא העמודה הראשונה.

נחלק את שורה הראשונה ב 4:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & 24 \\ 6 & -1 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{4}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 6 & -1 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

שלב 3 ה- 1 המוביל כבר בשורה הראשונה אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4 נאפס כל איבר באותה עמודה של ה-1 המוביל שמתחת ה- 1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 6 & -1 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 6\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2\cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -15 \end{array}\right)$$

עכשיו כל איבר בעמודה של ה1 המוביל (שמתחת ה-1 המוביל) שווה 0 .

שלב 5 חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת (מוקפת בכחול להלן)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -15 \end{array}\right)$$

שלב 1' המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2' העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא העמודה השנייה.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -15 \end{array}\right)$$

נבחור את האיבר "$\frac{1}{2}$" -ונכפיל שורה השלישית ב 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \end{array}\right)$$

שלב 3' מחליפים שורות R_2 ו- R_3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\leftrightarrow 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \end{array}\right)$$

שלב 4' נאפס כל איבר שמתחת ה 1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -45 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+\frac{11}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & 42 & -210 \end{array}\right)$$

שלב 5' חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת : (המוקפת בכחול להלן):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & 42 & -210 \end{array}\right)$$

שלב 1" המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2" העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא העמודה השלישית.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & \boxed{42} & -210 \end{array}\right)$$

נחלק שורה השלישית ב- 42:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & \boxed{42} & -210 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to \frac{1}{42}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

שלב 3" השורה עם ה- 1 המוביל כבר בשורה הראשונה של המטריצה החלקית אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4" אין איברים מתחת ה-1 המוביל כי הגענו לשורה האחרונה אז נמשיל לשלב 6.

שלב 5" אין לנו עוד שורות אז נמשיך לשלב 6

שלב 6" נאפס את כל איבר מעל ה- 1 המוביל (הצבת אחור):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+\frac{1}{4}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{19}{4} \\ 0 & 1 & 7 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-7\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{19}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{3}{4}\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

קיבלנו מטריצה מדורגת קנונית.

המערכת המתאימה היא

$$\begin{array}{lllr} x_1 & & & = 1 \\ & x_2 & & = 5 \\ & & x_3 & = -5\ . \end{array}$$

כך נקבל את הפתרון

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 5, -5)\ .$$

דוגמה 1.17 פתרון מערכת ע"י שיטת גאוס

פתרו את המערכת ליניארית הבאה ע"י השיטה של גאוס-ג'ורדן:

$$\begin{array}{rcrcrcrr} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & & = 3 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & = 18 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = 10\ . \end{array}$$

פתרון:

המטריצה המורחבת של המערכת היא

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & -2 & 4 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

שלב 1 המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2 העמודה הראשונה שאיננה כולה אפס היא העמודה הראשונה.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & -2 & 4 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

האיבר המוביל של שורה הראשונה שווה ל- 1 אז נמשיך לשלב 3.

שלב 3 השורה כבר בשורה הראשונה, כלומר

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & -2 & 4 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4 נאפס כל איבר באותה עמודה של ה1 המוביל שמתחת ה 1 המוביל:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & -2 & 4 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2\cdot R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

עכשיו כל איבר בעמודה של ה-1 המוביל (שמתחת ה 1 המוביל) שווה ל- 0.

שלב 5 חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת (שמוקפת בכחול להלן):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

שלב 1' המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2' העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא העמודה השנייה.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

שלב 3' מחליפים שורות R_2 ו- R_3:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

שלב 4' כל איבר שמתחת ה- 1 המוביל כבר שווה ל- 0 אז נמשיך לשלב 5.

שלב 5' חוזרים ומבצעים את אותו התהליך על המטריצה החלקית שמתקבלת שמוקפת בכחול להלן):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

שלב 1" המטריצה איננה מטריצה האפס (יש איברים שלא שווים לאפס) אז נמשיך לשלב 2.

שלב 2" העמודה הבאה שאיננה כולה אפס היא העמודה השלישית.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

נחלק שורה השלישית ב- 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{2}\cdot R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

שלב 3" השורה עם ה- 1 המוביל בשורה ראשונה של המטריצה החלקית אז נמשיך לשלב 4.

שלב 4" הגענו לשורה האחרונה אז נמשיך לשלב 6.

שלב 5" אין לנו עוד שורות אז נמשיך לשלב 6

שלב 6" נאפס את כל איבר שנמצא מעל 1 המוביל (הצבת אחור):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

בסופו של התהליך קיבלנו מטריצה בצורה מדורגת קנונית. לכן סיימנו.

המערכת המתאימה היא

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & + & x_4 & = 3 \\ & x_2 & & + & x_4 & = 4 \\ & & x_3 & + & 2x_4 & = 6 \ . \end{array}$$

- המשתנים x_1, x_2 ו- x_3 נקראים **משתנים תלויים**, בגלל שהם המשתנים שמתאימים ל- איברי מובילים במטריצה המדורגת.
- המשתנה x_4 נקרא **משתנה חופשי**, מפני שהוא מתאים לאיבר שלא מוביל במטריצה המדורגת.

בתשובה יש משתנה חופשי, x_4. נרשום את הפתרון כך:

$$\begin{aligned} x_1 =& 3 - x_4 \ , \\ x_2 =& 4 - x_4 \ , \\ x_3 =& 6 - 2x_4 \ . \end{aligned}$$

כאשר x_4 יכול לקבל כל מספר ממשי. בדרך כלל מייצגים את הפתרון בצורה הבאה:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3 - t, 4 - t, 6 - 2t, t) \ , \qquad t \in \mathbb{R} \ .$$

1.5 קיום וכמות פתרונות למערכת ליניארית

הגדרה 1.8 משתנה תלוי ומשתנה חופשי

נתונה מטריצה מורחבת מדורגת של מערכת ליניארית:

- משתנה שמתאים לו איבר מוביל יקרא משתנה **תלוי** .
- משתנה שלא מתאים לו איבר מוביל יקרא משתנה **חופשי** .

דוגמה 1.18 משתנה תלוי ומשתנה חופשי

נתונה המערכת

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 + 14x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

שנתאים לו מטריצה מורחבת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 14 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

נדרג אותו עד שנקבל את המטריצה המדורגת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 14 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

עכשיו נרשום את המערכת המתאימה של המטירצה המדורגת המתקבלת:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 11x_2 - 7x_3 &= 0 \end{aligned}$$

הרי המשתנים x_1 ו- x_2 משתנים תלויים מפני שמתאים להם איברי מובילים. בפרט המקדם של x_1, 1 הוא האיבר המוביל בשורה הרשונה של המטריצה המדורגת. המקדם של x_2, 11 הוא האיבר המוביל בשורה הרשונה של המטריצה המדורגת. המשתנה x_3 משתנה חופשי כי לא מתאים לו איבר מוביל.

משפט 1.2 קייום וכמות פתרונות למערכת ליניארית

1 למערכת ליניארית יש פתרון אם ורק אם במטריצה מורחבת מדורגת של המערכת אין שורת סתירה:

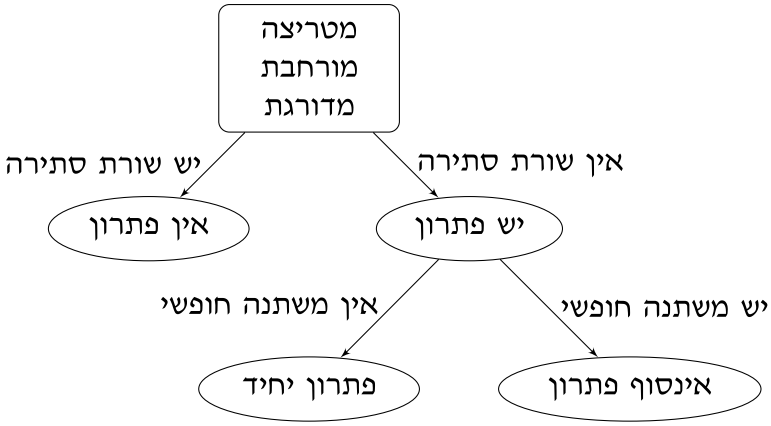
$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boxed{0} & 0 & \cdots\cdots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right)$$

2 אם למערכת יש פתרון אז יתכנו 2 אפשרויות:

א) אם במערכת המורחבת המדורגת יש משתנה חופשי אז למערכת יש אינסוף פתרונות.

ב) אם במערכת המורחבת המדורגת אין משתנה הופשי אז למערכת יש פתרון יחיד.

נסכם בעזרת עץ:



דוגמה 1.19

נתונה המטריצה המורחבת הבאה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

האם למערכת הליניארית המתאימה יש פתרון? אם כן, כמה?

פתרון:

נשים לב שהמטריצה המורחבת בצורה מדורגת.
אין במטירצה המורחבת המדורגת שורת סתירה לכן קיים פתרון.
מאחר ויש משתנה חופשי, z, אז יהיו למערכת אינסוף פתרונות.
בפרט:

$$\left.\begin{aligned} 2x &= 6 \\ 3y+z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 3 \\ 3y &= -z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= \tfrac{-z}{3} \end{aligned}\right\}$$

z יכול לקבל כל מספר ממשי, ז"א $z \in \mathbb{R}$. נרשום את הפתרונות בצורה:

$$\left(3, -2, \frac{z}{3}\right) \quad z \in \mathbb{R}\ .$$

דוגמה 1.20

נתונה המטריצה המורחבת הבאה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 33 & 44 & 234 & 1122 & 343 \\ 0 & 23 & 44 & 667 & 87 \\ 0 & 0 & 0 & 2344 & 5767 \end{array}\right)$$

האם למערכת הליניארית המתאימה יש פתרון? אם כן, כמה?

פתרון:

המטריצה המורחבת של המערכת בצורה מדורגת.
מפני שאין שורת סתירה אז אפשר להסיק שקיים פתרון.
יש משתנה חופשי לכן למערכת יהיו אינסוף פתרונות.
נוכל להשתמש ברעיון של "הבצה לאחור":

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 33x_1 & + & 44x_2 & + & 234x_3 & + & 1122x_4 & = 343 \\ & & 23x_2 & + & 44x_3 & + & 667x_4 & = 87 \\ & & & & & & 23554x_4 & = 5767 \end{array}$$

שימו לב, קיבלנו שלמערכת יש אינסוף פתרונות, לא בגלל שכמות המשתנים גדולה מכמות השוואות.

דוגמה 1.21

תנו דוגמה למערכת בה כמות המשתנים גדולה מכמות המשוואות ואן לה אינסוף פתרונות.

פתרון:

כאשר תהיה שורה סתירה. למשל,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

דוגמה 1.22

נתונה המערכת הליניארית הבאה:

$$\begin{aligned} x + (a-1)y - z =& 4 \\ (a+1)x + (2a-2)y + (a-4)z =& a+10 \\ (a+2)x + (3a-3)y + (2a-7)z =& a+17 \end{aligned}$$

עבור אילו ערכי הפרמטר a למערכת יש

1. פתרון יחיד
2. אין פתרון
3. אינסוף פתרונות?

במקרה של אינסוף פתרונות רשמו את הפתרון הכללי.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ a+1 & 2a-2 & a-4 & a+10 \\ a+2 & 3a-3 & 2a-7 & a+17 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2-(a+1)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ 0 & -a^2+2a-1 & 2a-3 & 6-3a \\ a+2 & 3a-3 & 2a-7 & a+17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3-(a+2)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ 0 & -a^2+2a-1 & 2a-3 & 6-3a \\ 0 & -a^2+2a-1 & 3a-5 & 9-3a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ 0 & -a^2+2a-1 & 2a-3 & 6-3a \\ 0 & 0 & a-2 & 3 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ 0 & -(a-1)^2 & 2a-3 & 6-3a \\ 0 & 0 & a-2 & 3 \end{array}\right)$$

לא יהיה משתנה חופשי אם $a \neq 2$ וגם $(a-1)^2 \neq 0$.
לפיכך קיים פתרון יחיד אם ורק אם $a \neq 2$ וגם $a \neq 1$.

עבור $a=1$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

לכן למערכת אינסוף פתרונות. מתקבל

$$x=1\ ,\ y\in\mathbb{R}\ ,\ z=-3\ .$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$(1,y,-3)$$

כאשר $y\in\mathbb{R}$.

עבור $a=2$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

וקיבלנו שורת סתירה לכן אין פתרון.

דוגמה 1.23

מצאו את כמות הפתרונות של המערכת הבאה:

$$\begin{aligned} x+\left(\sqrt{\pi^2+e}-1\right)y-z &=4 \\ \left(\sqrt{\pi^2+e}+1\right)x+\left(2\sqrt{\pi^2+e}-2\right)y+\left(\sqrt{\pi^2+e}-4\right)z &=\sqrt{\pi^2+e}+10 \\ \left(\sqrt{\pi^2+e}+2\right)x+\left(3\sqrt{\pi^2+e}-3\right)y+\left(2\sqrt{\pi^2+e}-7\right)z &=\sqrt{\pi^2+e}+17 \end{aligned}$$

פתרון:

המטריצה המורחבת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & (\sqrt{\pi^2+e}-1) & -1 & 4 \\ (\sqrt{\pi^2+e}+1) & (2\sqrt{\pi^2+e}-2) & (\sqrt{\pi^2+e}-4) & \sqrt{\pi^2+e}+10 \\ (\sqrt{\pi^2+e}+2) & (3\sqrt{\pi^2+e}-3) & (2\sqrt{\pi^2+e}-7) & \sqrt{\pi^2+e}+17 \end{array}\right)$$

מבצעים הפעולות האלמנטריות הבאות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \left(\sqrt{\pi^2+e}-1\right) & -1 & 4 \\ \left(\sqrt{\pi^2+e}+1\right) & \left(2\sqrt{\pi^2+e}-2\right) & \left(\sqrt{\pi^2+e}-4\right) & \sqrt{\pi^2+e}+10 \\ \left(\sqrt{\pi^2+e}+2\right) & \left(3\sqrt{\pi^2+e}-3\right) & \left(2\sqrt{\pi^2+e}-7\right) & \sqrt{\pi^2+e}+17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-\left(\sqrt{\pi^2+e}+1\right)R_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \sqrt{e+\pi^2}-1 & -1 & 4 \\ 0 & -e+2\sqrt{e+\pi^2}-\pi^2-1 & 2\sqrt{e+\pi^2}-3 & 6-3\sqrt{e+\pi^2} \\ \sqrt{e+\pi^2}+2 & 3\sqrt{e+\pi^2}-3 & 2\sqrt{e+\pi^2}-7 & \sqrt{e+\pi^2}+17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-\left(\sqrt{\pi^2+e}+2\right)R_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \sqrt{e+\pi^2}-1 & -1 & 4 \\ 0 & -e+2\sqrt{e+\pi^2}-\pi^2-1 & 2\sqrt{e+\pi^2}-3 & 6-3\sqrt{e+\pi^2} \\ 0 & -e+2\sqrt{e+\pi^2}-\pi^2-1 & 3\sqrt{e+\pi^2}-5 & 9-3\sqrt{e+\pi^2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \sqrt{e+\pi^2}-1 & -1 & 4 \\ 0 & -e+2\sqrt{e+\pi^2}-\pi^2-1 & 2\sqrt{e+\pi^2}-3 & 6-3\sqrt{e+\pi^2} \\ 0 & 0 & \sqrt{e+\pi^2}-2 & 3 \end{array}\right)$$

שימו לב, $e+\pi^2>0$ וגם $e+\pi^2$ מספר אי-רציונלי, לפיכך $e+\pi^2\notin\mathbb{N}$ לכן $\sqrt{e+\pi^2}\neq 2$ לכן $\sqrt{e+\pi^2}-2\neq 0$.
באותה מידה ניתן להסיק כי $-e+2\sqrt{e+\pi^2}-\pi^2-1\neq 0$.
לכן אין משתנה חופשי במערכת המורחבת המדורגת, כך שקיים פתרון יחיד.

משפט 1.3

אם ניתן להגיע ממטריצה A למטריצה B ע"י ביצוע מספר סופי של פעולות שורה אלמנטריות, אז ניתן להגיע מהמטריצה B למטריצה A ע"י ביצוע הפעולות ההפוכות.

הוכחה: לכל פעולה יש את הפעולה ההפוכה לה.

- ההפוכה ל $R_i\leftrightarrow R_j$ היא $R_i\leftrightarrow R_j$.
- ההפוכה ל $R_i\to\alpha\cdot R_i$ היא $R_i\to\frac{1}{\alpha}R_i$
- ההפוכה ל $R_i\to R_i+\alpha R_j$ היא $R_i\to R_i-\alpha R_j$.

■

הגדרה 1.9 שקולות שורה

תהיינה A ו- B מטריצות. נאמר שהן שקולות שורה אם ניתן להגיע מאחת לשניה ע"י ביצוע מספר סופי פעולות שורה אלמנטריות.

משפט 1.4

אם המטריצות המורחבות של שתי מערכות ליניאריות הן שקולות, אז לשתי המערכות יש אותה קבוצת פתרון. כלומר, כל פתרון של המערכת הראשונה הוא פתרון של השניה, ולהיפך.

דוגמה 1.24

האם המערכות $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 12 & 21 \\ 15 & -10 & 30 & 5 \end{array}\right)$ ו- $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 14 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & 6 & 1 \end{array}\right)$ שקולות שורה?

פתרון:
אם נכתוב את המערכות בצורה

$$\left(\begin{array}{cccc|c} R_1 & 1 & -2 & 3 & 7 \\ R_2 & 3 & 9 & 12 & 21 \\ R_3 & 15 & -10 & 30 & 5 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} R_1' & 2 & -4 & 6 & 14 \\ R_2' & 1 & 3 & 4 & 7 \\ R_3' & 3 & -2 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

קל לראות כי $R_1' = 2R_2$, $R_2' = \frac{1}{3}R_2$, ו- $R_3' = \frac{1}{5}R_3$. לכן, מכיוון שאפשר להגיע ממטריצה הראשונה למטריצה השנייה דרך פעולות אלמנטריות, אז המטריצות הן שקולות שורה.