

שינוי סדר של אינטגרלים באינטגרלים כפולים

1 השיטה

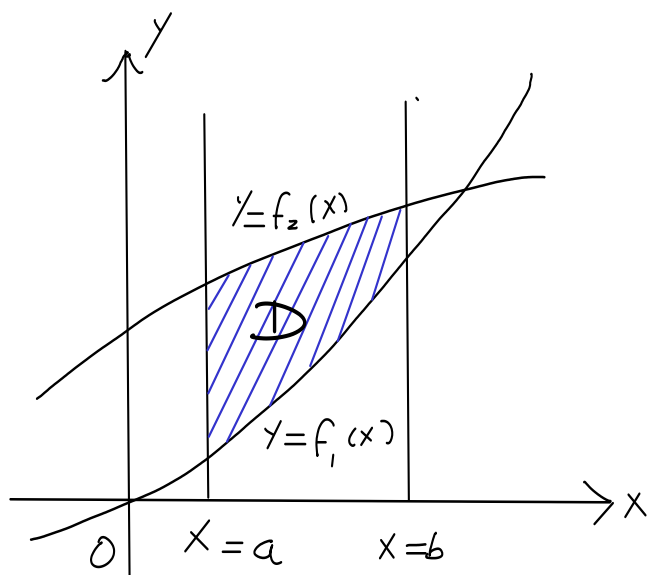
נתון האינטגרל

$$\int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy g(x, y)$$

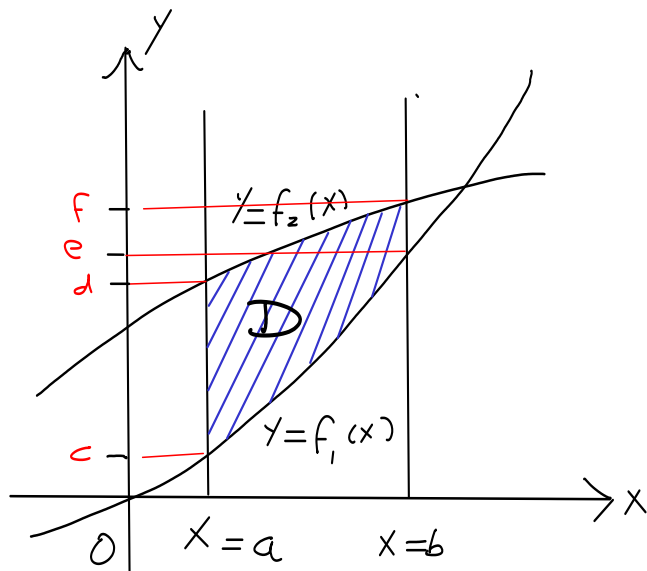
שלב 1: לרשום את התחום D עם הגבולות של x קבועים והגבולות של y פונקציות:

$$D = \{a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

שלב 2: לשרטט את התחום D



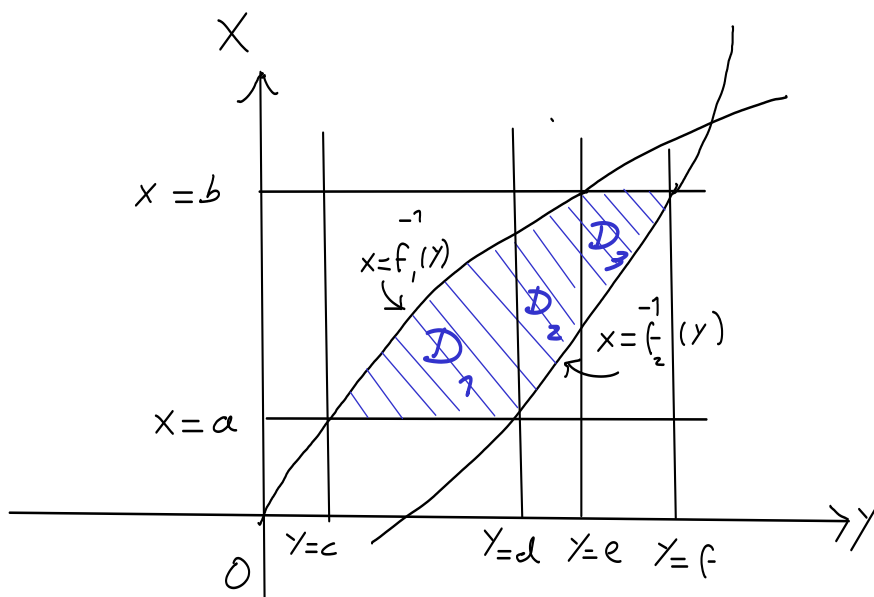
שלב 3: לסמן נקודות חיתוך של השפות על צירי x ו- y



שלב 4: להפוך את השפות מפונקציות של x לפונקציות של y

$$y = f_1(x) \rightarrow x = f_1^{-1}(y), \quad y = f_2(x) \rightarrow x = f_2^{-1}(y).$$

שלב 5: לשרטט את התחום על צירים הנהפכים



שלב 6: לרשום את התחום לפי השרטוט עם צירים הנהפכים

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$$

$$D_1 = \{c \leq y \leq d, a \leq x \leq f_1^{-1}(y)\},$$

$$D_2 = \{d \leq y \leq e, f_2^{-1}(y) \leq x \leq f_1^{-1}(y)\},$$

$$D_3 = \{e \leq y \leq f, f_2^{-1}(y) \leq x \leq b\}.$$

שלב 7: לרשום את האינטגרל לפי התחום המתקבל בשלב 6

$$\begin{aligned} \iint_D dx dy g(x, y) &= \iint_{D_1} dx dy g(x, y) + \iint_{D_2} dx dy g(x, y) + \iint_{D_3} dx dy g(x, y) \\ &= \int_c^d dy \int_a^{f_1^{-1}(y)} dx g(x, y) + \int_d^e dy \int_{f_2^{-1}(y)}^{f_1^{-1}(y)} dx g(x, y) + \int_e^f dy \int_{f_2^{-1}(y)}^b dx g(x, y) \end{aligned}$$

2 דוגמה (תשס"ז סמסטר ב' מועד א')

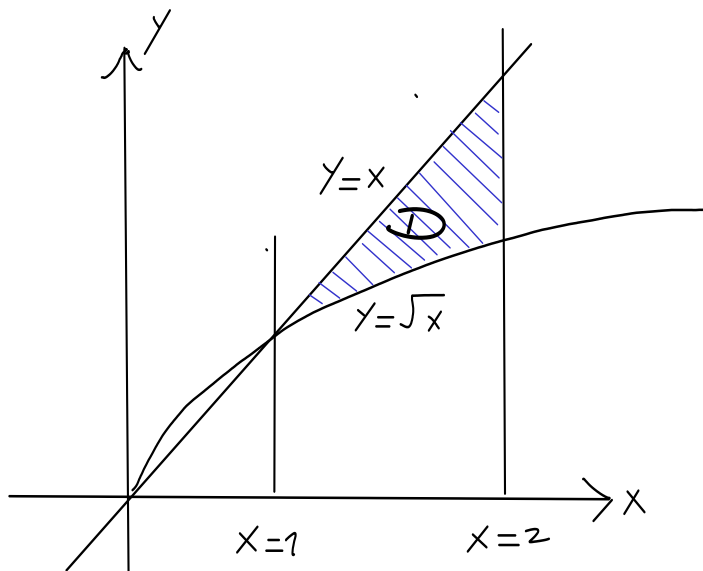
ציירו את תחום האינטגרציה, שנו את הסדר וחשבו

$$I = \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x (2x + y) dy$$

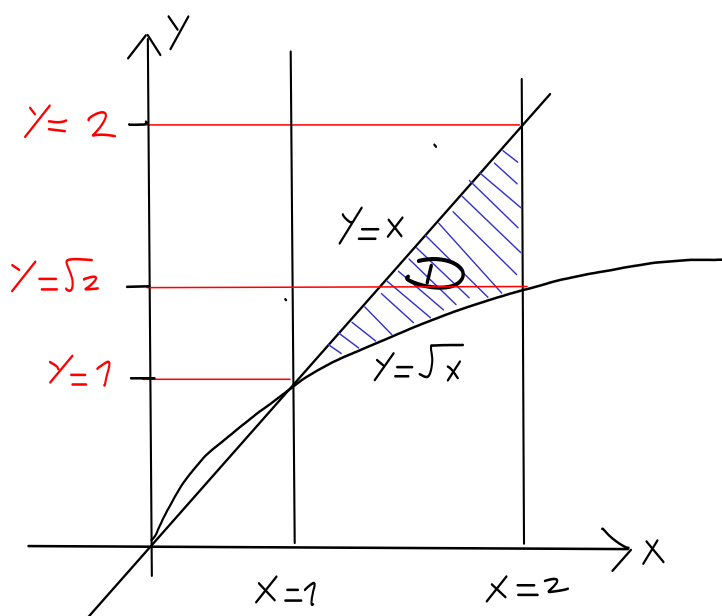
שלב 1: לרשום את התחום D עם הגבולות של x קבועים והגבולות של y פונקציות:

$$D = \{1 \leq x \leq 2, \sqrt{x} \leq y \leq x\}$$

שלב 2: לשרטט את התחום D



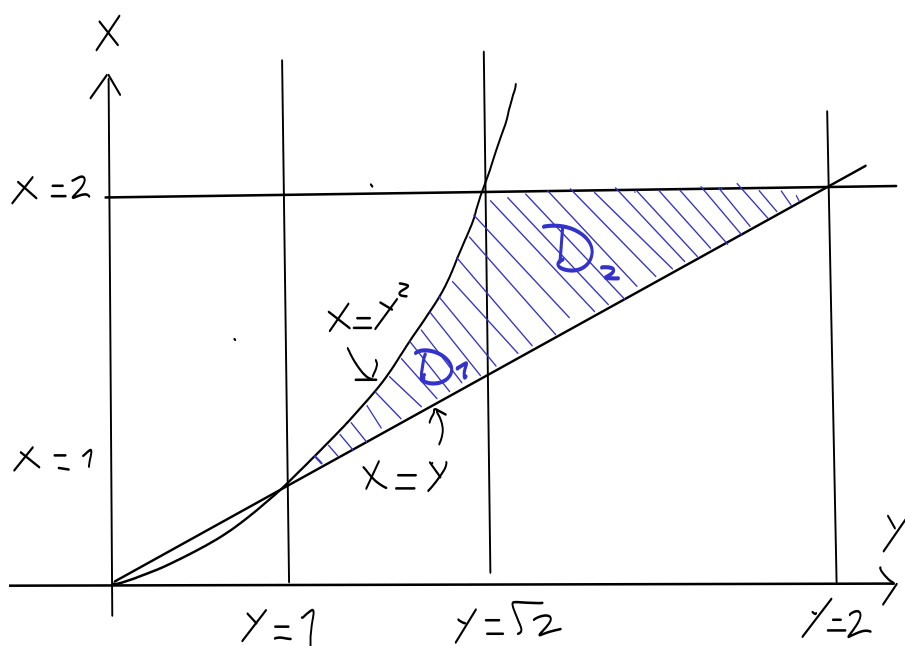
שלב 3: לסמן נקודות חיתוך של השפות על צירי x ו- y



שלב 4: להפוך את השפות מפונקציות של x לפונקציות של y

$$y = \sqrt{x} \rightarrow x = y^2, \quad y = x \rightarrow x = y.$$

שלב 5: לשרטט את התחום על צירים הנהפכים



שלב 6: לרשום את התחום לפי השרטוט עם צירים הנהפכים

$$D = D_1 \cup D_2$$

$$D_1 = \left\{ 1 \leq y \leq \sqrt{2}, y \leq x \leq y^2 \right\},$$

$$D_2 = \left\{ \sqrt{2} \leq y \leq 2, y \leq x \leq 2 \right\}.$$

שלב 7: לרשום את האינטגרל לפי התחום המתקבל בשלב 6

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} dx dy g(x, y) + \iint_{D_2} dx dy g(x, y) \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_y^{y^2} dx (2x + y) + \int_{\sqrt{2}}^2 dy \int_{y^2}^2 dx (2x + y) \end{aligned}$$