מחלקה למדעי המחשב

10/02/25 י"ב בשבט תשפ"ה
$09:00 - 12:00$

אלגברה לינארית 1 למדמ"ח

מועד א'

מרצים: ד'ר זהבה צבי, ד'ר מרינה ברשדסקי, ד'ר ירמיהו מילר.

תשפ"ה סמסטר א'

השאלון מכיל 11 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.
- יש לציין את השאלות שעניתם עליהן בתחילת המחברת.

==

שאלה 1 (25 נקודות)

תהי $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$. נגדיר

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ -b \\ a-b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad , \qquad U = \left\{ \mathrm{v} \in \mathbb{R}^3 \middle| A\mathrm{v} = -\mathrm{v} \right\} \ .$$

א) (7 נק') הוכיחו כי U, W תתי מרחבים של $\mathbb{R}^3$.

ב) (7 נק') מצאו בסיס ומימד של U, W.

ג) (7 נק') מצאו בסיסים ומימדים ל- $U + W$ ול- $U \cap W$.

ד) (4 נק') יהי $\mathbb{F}$ שדה יהיו U, V מרחבים וקטורים מעל $\mathbb{F}$.
תהי $T : U \to V$ העתקה לינארית. $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ קבוצת וקטורים ב U. הוכיחו או הפריכו:
אם הקבוצה $\{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_k)\}$ בלתי תלויה לינארית אז הקבוצה $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ בלתי תלויה לינארית. (אין קשר לסעיפים קודמים).

שאלה 2 (25 נקודות)

יהי $a \in \mathbb{R}$ פרמטר. נתבונן במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -a & a+2 & 2a \\ 2a+1 & -a-2 & -a^2-3a+6 \\ a & -a-2 & a^2-2a-4 \end{pmatrix}$$

א) (7 נק') מצאו את כל ערכי הפרמטר a שעבורם המטריצה אינה הפיכה.

ב) (7 נק') עבור $a = -1$ מצאו בסיס ומימד של $\mathrm{col}(A)$ ול- $\mathrm{Nul}(A)$.

ג) (6 נק') עבור $a = -1$ מצאו בסיס ומימד של $\mathrm{col}(A) \cap \mathrm{Nul}(A)$.

ד) (5 נק')
יהי $\mathbb{F}$ שדה. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך שלכל מטריצה $0 \neq B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים $AB \neq 0$.
הוכיחו כי A הפיכה. (אין קשר לסעיפים קודמים).

שאלה 3 (25 נקודות)

א) (7 נק') במרחב $\mathbb{R}_3[x]$ נתונים וקטורים

$$u_1 = 1+2x+x^2+3x^3 \ , \quad u_2 = 2-x+x^2+2x^3 \ , \quad u_3 = -1+8x+x^2+5x^3 \ , \quad w = a+x+bx^2+5x^3 \ .$$

עבור אילו ערכי a, b הוקטור w שייך לתת המרחב הנפרש על ידי הוקטורים u_1, u_2, u_3?

ב) (7 נק') עבור הערכים של a, b שמצאתם בסעיף א', בטאו את הוקטור w כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3.

ג) (5 נק') האם הוקטורים u_1, u_2, u_3, w פורשים את המרחב $\mathbb{R}_3[x]$? נמקו את תשובתכם.

ד) (3 נק') הוכיחו או הפריכו:
לכל $A \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ קיים $b \in \mathbb{R}^5$ כך שלמשוואה $AX = b$ אין פתרון.
(אין קשר לסעיפים קודמים).

ה) (3 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה הפיכה ויהי $b \in \mathbb{R}^n$. הוכיחו או הפריכו:
למערכת $Ax = b$ יש יותר מפתרון אחד.
(אין קשר לסעיפים קודמים).

שאלה 4 (25 נקודות)

א) (8 נק') פתרו את המערכת הליניארית הבאה מעל $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} 2ix + (4-2i)y + 4z = 6-4i \ , \\ 2x + (-2-4i)y + (1-2i)z = 1-i \ , \\ (1+i)x + (1-3i)y + (3+i)z = 7+3i \ . \end{cases}$$

ב) (7 נק') קבעו לאילו ערכים של a הוקטורים הבאים תלויים ליניארית מעל $\mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a+1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix} \ .$$

ג) (5 נק') יהי $\mathbb{F}$ שדה. תהיינה מטריצות $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$. הוכיחו או הפריכו:
אם ב- A יש שורת אפסים אז $\dim(\mathrm{col}(A)) < n$. (אין קשר לסעיפים קודמים).

ד) (5 נק') תהיינה מטריצות $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו:
אם $AB = B$ ו- $B \neq 0$ אז A מטריצה היחידה. (אין קשר לסעיפים קודמים).

שאלה 5 **(25 נקודות)**

נתונה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ המוגדרת ע"י:

$$T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=\begin{pmatrix} a+3b+4c-3d & b+3c-2d \\ a+c & 3a+7b+6c-5d \end{pmatrix}$$

לכל $a+bx+cx^2+dx^3\in\mathbb{R}_3[x]$.

א) (5 נק') מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.

ב) (5 נק') האם T על? האם T חד-חד ערכית? נמקו תשובתכם.

ג) (5 נק') מצאו בסיס ואת המימד של $\mathrm{Im}T$ ותנו דוגמה לאיבר בתמונה של T פרט מאיברי הבסיס.

ד) (5 נק') מצאו בסיס ואת המימד של $\mathrm{Ker}T$. תנו דוגמה לאיבר בגרעין של T פרט איברי הבסיס.

ה) (5 נק') מצאו את כל הוקטורים $a+bx+cx^2+dx^3\in\mathbb{R}_3[x]$ כך ש-

$$T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

פתרונות

שאלה 1

א) נוכיח כי U תת-מרחב:

שיטה 1

$$U=\left\{\mathrm{v}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; A\mathrm{v}=-\mathrm{v}\right\} \quad\Rightarrow\quad U=\left\{\mathrm{v}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; A\mathrm{v}+\mathrm{v}=0\right\} \quad\Rightarrow\quad U=\left\{\mathrm{v}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; (A+I)\mathrm{v}=0\right\}$$

ז"א $U=\mathrm{Nul}(A+I)$. מרחב האפס של כל מרטיצה היא תת-מרחב לכן U תת-מרחב.

שיטה 2

נבדוק שכל ה-3 תנאים של תת-מרחב מתקיים:

1) יהיו $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\in\mathbb{R}^3$ שני וקטורים שונים אשר שייכים ל- U.
ז"א $A\mathrm{v}_1=-\mathrm{v}_1$ וגם $A\mathrm{v}_2=-\mathrm{v}_2$ לכן

$$A\left(\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\right)=-\left(\mathrm{v}_1\right)+\mathrm{v}_2)$$

לכן $\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\in U$.

2) יהי $\mathrm{v}_1\in\mathbb{R}^3$ וקטור ששייך ל- U ו- $\alpha\in\mathbb{R}$ סקלר.
ז"א

$$A\mathrm{v}_1=-\mathrm{v}_1 \quad\Rightarrow\quad \alpha A\mathrm{v}_1=-\alpha\mathrm{v}_1 \quad\Rightarrow\quad A\left(\alpha\mathrm{v}_1\right)=-\alpha\mathrm{v}_1$$

לכן $\alpha\mathrm{v}_1\in U$.

3) יהי 0 וקטור האפס של $\mathbb{R}^3$.

$$A\cdot 0=-0$$

לכן $0\in U$.

נוכיח כי W תת-מרחב:

שיטה 1

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a+b\\-b\\a-b\end{pmatrix}\middle|\, a,b\in\mathbb{R}\right\} \quad\Rightarrow\quad W=\left\{a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\middle|\, a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

ז"א $W=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$.
כל פרישה היא תת-מרחב לכן W תת-מרחב.

<u>שיטה 2</u>

נבדוק שכל ה-3 תנאים של תת-מרחב מתקיימים:

1) יהיו $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\in\mathbb{R}^3$ שני וקטורים שונים אשר שייכים ל- U.

ז"א $\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\-b_1\\a_1-b_1\end{pmatrix}$ כאשר $a_1,b_1\in\mathbb{R}$ וגם $\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}a_2+b_2\\-b_2\\a_2-b_2\end{pmatrix}$ כאשר $a_2,b_2\in\mathbb{R}$ לכן

$$\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}a_1+a_2+b_1+b_2\\-b_1-b_2\\a_1+a_2-b_1-b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\-b\\a-b\end{pmatrix},$$

כאשר $a=a_1+a_2$, $b=b_1+b_2$ לכן $\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\in W$.

2) יהי $\mathrm{v}_1\in\mathbb{R}^3$ וקטור ששייך ל- W ו- $\alpha\in\mathbb{R}$ סקלר.

ז"א

$$\alpha\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}\alpha a_1+\alpha b_1\\-\alpha b_1\\\alpha a_1-\alpha b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\-b\\a-b\end{pmatrix},$$

כאשר $a=\alpha a_1$, $b=\alpha b_1$. לכן $\alpha\mathrm{v}_1\in U$.

3) יהי $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ וקטור האפס של $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\-b\\a-b\end{pmatrix}$$

כאשר $a=0$, $b=0$. לכן $0\in W$.

ב)

ג)

ד) נניח בשלילה כי יש שני פתרונות $x_1\neq x_2$. אז

$$Mx_1=b \qquad Mx_2=b$$

ז"א

$$Mx_1-Mx_2=b-b=0\ .$$

מכאו

$$M\left(x_1-x_2\right)=0\ .$$

M הפכיה לכן קיימת M^{-1} כך ש-

$$M^{-1}M\left(x_1-x_2\right)=0 \quad\Rightarrow\quad I(x_1-x_2)=0x_1-x_2=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=x_2$$

בסתירה לכך ש- $x_1\neq x_2$ לכן קיים רק פתרון יחיד.

שאלה 2

א)

ב)

ג)

ד) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$.

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=B$$

הרי $AB=B$ ו- $A\neq I$.

שאלה 3

א)

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&a\\2&-1&8&1\\1&1&1&b\\3&2&5&5\end{array}\right)\xrightarrow[R_4-3R_1]{\substack{R_2-2R_1\\R_3-R_1}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&a\\0&-5&10&1-2a\\0&-1&2&b-a\\0&-4&8&5-3a\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&a\\0&-1&2&b-a\\0&-5&10&1-2a\\0&-4&8&5-3a\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&a\\0&1&-2&a-b\\0&-5&10&1-2a\\0&-4&8&5-3a\end{array}\right)\xrightarrow[R_4\to R_4+4R_2]{R_3\to R_3+5R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&a\\0&1&-2&a-b\\0&0&0&1-5b+3a\\0&0&0&5+a-4b\end{array}\right)$$

לכל $1-5b+3a=0$, $5+a-4b=0$ יש פתרון
w צירוף ליניארי של u_1,u_2,u_3.

ז"א לכל $a=3$, $b=2$ יש פתרון ואז w צירוף ליניארי של u_1,u_2,u_3.
נציב $a=3$, $b=2$:

ב)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & -2 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 1-5b+3a \\ 0 & 0 & 0 & 5+a-4b \end{array}\right) \xrightarrow{a=3,b=2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

הפתרון למערכת זו היא

$$\begin{pmatrix} 1-3t \\ 1+2t \\ t \end{pmatrix} , \quad t \in \mathbb{R}$$

לכן

$$(1-3t)u_1 + (1+2t)u_2 + tu_3 = w$$

לכל $t \in \mathbb{R}$. למשל אם נציב $t = 0$:

$$u_1 + u_2 = w$$

למשל אם נציב $t = 1$:

$$-2u_1 + 3u_2 + u_3 = w$$

ג) $\dim \{u_1, u_2, u_3, w\} = 2$ ו- $\dim \mathbb{R}_3[x] = 4$ לכן לא אפשרי שוקטורים $\{u_1, u_2, u_3, w\}$ פורשים $\mathbb{R}_3[x]$.

ד) טענה נכונה.
אם $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_k$ תלויים לינארית אז קיימים סקלרים לא כולם אפסים עבורם

$$\alpha_1 \mathrm{v}_1 + \ldots + \alpha_k \mathrm{v}_k = 0$$

לכן

$$T\left(\alpha_1 \mathrm{v}_1 + \ldots + \alpha_k \mathrm{v}_k\right) = T(0) \ .$$

T העתקה ליניארית לכן $T(0) = 0$ ולפי התכונת הליניאריות של העתקה ליניארית נקבל

$$\alpha_1 T\left(\mathrm{v}_1\right) + \ldots + \alpha_k T\left(\mathrm{v}_k\right) = 0 \ .$$

מכיוון שמובטח שלא כל המקדמים אפסים אז נקבל כי $T(\mathrm{v}_1), \ldots, T(\mathrm{v}_k)$ תלויים ליניארית.

שאלה 4

א) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ לכל $b \in \mathbb{R}^3$ למשוואה $Ax = b$ יש פתרון.

ב) טענה נכונה.
אם $A \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ אז ל-A יש 5 שורות ו- 3 עמודות.
לכן במדורגת יש לכל היותר 3 עמודות מובילות ולכן 2 שורות האחרונות הן שורות אפסים.
לכן קיים וקטור $b \in \mathbb{R}^5$ שאיננו צירוף ליניארי של העמודות של A, כי ייתכן שורת סתירה.

ג) נניח בשלילה כי A לא הפיכה.
אז קיים וקטור $\mathrm{v} \neq 0 \in \mathbb{F}^n$ עבורו $A\mathrm{v} = 0$.
לכן קיים ווקטור $B = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathrm{v} & \mathrm{v} & \cdots & \mathrm{v} \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}$ כך ש- $AB = 0$ ו- $B \neq 0$. בסתירה לכך שלכל $B \neq 0$ מתקיים $AB \neq 0$.

ד) יהי $\mathrm{v} \in V$.
T "על" ולכן קיים $u \in U$ כך ש- $T(u) = \mathrm{v}$.
$\{u_1, \ldots, u_k\}$ פורשת את U ולכן קיימים סקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ עבורם

$$u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k \ .$$

מכיוון ש- T העתקה ליניארית אז

$$\mathrm{v} = T(u) = T\left(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k\right) = \alpha_1 T(u_1) + \ldots + \alpha_k T(u_k)$$

ז"א הקבוצה $\{T(u_1), \ldots, T(u_k)\}$ פורשת את V.

שאלה 5

א) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

ב) נדרג את A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 6 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לא כל השורות מובילות לכן T לא "על".
לא כל העמודות מובילות לכן T לא "חד-חד-ערכית".

ג)

$$\text{col}(A)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\0\\7\end{pmatrix}$$

$$\text{Im}(T)=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&1\\0&7\end{pmatrix}$$

$\text{dim Im}(T)=2$.

ד)

$$\text{Nul}(A)=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}5\\-3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\ .$$

$$\text{Ker}(T)=\text{span}\left\{5-3x+x^2,-3+2x+x^3\right\}\ .$$

$\text{dim ker}(T)=2$.

ה) יש לפתור את המערכת

$$A\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&4&-3&1\\0&1&3&-2&0\\0&0&0&0&1\\3&7&6&-5&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&4&-3&1\\0&1&3&-2&0\\3&7&6&-5&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3-3R_1}\left(\begin{array}{cccc}1&3&4&-3\\0&1&3&-2\\0&-2&-6&4\\0&0&0&0\end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+2R_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&4&-3&1\\0&1&3&-2&0\\0&0&0&0&-3\\0&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_4\to 3R_4+R_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&4&-3&1\\0&1&3&-2&0\\0&0&0&0&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

יש שורת סתירה במדורגת ולכן למערכת הזאת לא קיים פתרון.