המחלקה למדעי המחשב

28/03/25 כ"ו באדר תשפ"ה
09 : 00 – 12 : 00

אלגברה ליניארית 2

מועד ב'

מרצה: ד"ר ירמיהו מילר .

תשפ"ה סמסטר א'

השאלון מכיל 6 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (2 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.

==

שאלה 1 (25 נקודות)

א) (10 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ מטקיצה שמוגדרת $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
מצאו צורת ז'רדן J ומטריצה P הפיכה כך ש- $A = PJP^{-1}$.

ב) (5 נק') תהי $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענה הבאה:
אם הסכום של האיברים בכל עמודה של B שווה ל- $p \in \mathbb{R}$ אז $\lambda = p$ הוא ערך עצמי של B.

ג) (5 נק') תהיינה $C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטירצות שמתחלפות, כלומר $CD = DC$.
הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענה הבאה:
λ ערך עצמי של C אם ורק אם λ ערך עצמי של D.

ד) (5 נק') תהיינה $C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטירצות שמתחלפות, כלומר $CD = DC$.
הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענה הבאה:
u ערך עצמי של C אם ורק אם u ערך עצמי של D.

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$.

א) (7 נק') חשבו את A^{10}.

ב) (8 נק') חשבו את A^{-3}.

ג) (5 נק') תהיינה $B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:
אם B ו- C דומות אז יש להן אותו פולינום מינימלי.

ד) (5 נק') תהיינה $B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:
אם $BC = CB$ אז קיימת מטריצה P הפיכה וקיימות מטריצות D_1, D_2 אלכסוניות כך שמתקיים:

$$B = PD_1P^{-1}\ , \qquad C = PD_2P^{-1}\ .$$

שאלה 3 (25 נקודות)

א) (5 נקודות) הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:
לכל $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ הנוסחה

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$$

מהווה מכפלה פנימית.

ב) (5 נקודות) הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:
לכל $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות ממשיות הנוסחה

$$\langle f, g\rangle = \int_1^2 f(x)g^2(x)\,dx$$

מהווה מכפלה פנימית.

ג) (5 נקודות) יהיו u, w וקטורים של המרחב וקטורי V מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:
אם $u \perp w$ אז $\|u + w\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2$.

ד) (5 נקודות) יהיו u, w וקטורים של המרחב וקטורי V מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:
אם $\|u + w\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2$ אז $u \perp w$.

ה) (5 נקודות) יהיו U, W מרחבים וקטורים. הוכיחו את הטענה הבאה:
אם $U \perp W$ אז $U \cap W$ מכילה וקטור האפס בלבד.

שאלה 4 (25 נקודות)

א) (13 נק') תהי $A \in \mathbb{C}^{3\times3}$ מטריצה שמוגדרת $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & i \\ 2 & 0 & 2 \\ -i & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
האם A^{100} לכסינה אוניטרית? נמקו את תשובתכם. אם כן מצאו D אלכסונית ו- Q אוניטרית כך ש- $A^{100} = QD\bar{Q}$.

ב) (12 נק') תהי $B \in \mathbb{R}^{2\times2}$ בעלת ערכים עצמיים $\lambda = -1$ ו- $\lambda = 3$.
הוכיחו כי לכל n טבעי קיימים סקלרים ממשיים $b_n, c_n \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$B^n = b_n B + c_n I$$

כאשר $b_{n+1} = 2b_n + c_n$, $c_{n+1} = 3b_n$ ו- $I \in \mathbb{R}^{2\times2}$ המטריצה היחידה.

שאלה 5 (25 נקודות)

א) (6 נק') יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב וקטורי V. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:
אם T אנטי-הרמיטי אז כל ערך עצמי של T מדומה.

ב) (6 נק') יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב וקטורי V. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:
אם T אוניטרי אז כל ערך עצמי של T שווה ל- 1.

ג) (6 נק') יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב וקטורי V. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:
קיים לפחות ערך עצמי אחד של T.

ד) (7 נק') יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב בוקטורי V.
יהיו $u_1,\ldots,u_k$ וקטורים עצמיים שונים של T, ויהי λ_i הערך עצמי של הוקטור עצמי u_i.
הוכיחו את הטענה הבאה:
אם $\lambda_i\neq\lambda_j$ לכל $1\leq i,j\leq k$ אז הוקטורים עצמיים $u_1,\ldots,u_k$ בלתי תלויים ליניארית.

פתרונות

שאלה 1

א) פולינום אופייני של A:
$$p_A(x) = (x-4)^2(x+2) \ .$$
פולינום המינימלי של A:
$$m_A(x) = (x-4)^2(x+2) \ .$$
לכן הצורת ז'ורדן של A הינה
$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \ .$$
מרחב עצמי של $\lambda = -2$:
$$V_{-2} = \text{span}\left\{ u_{-2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
מרחב עצמי של $\lambda = -2$:
$$V_4 = \text{span}\left\{ u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
וקטור עצמי מוכלל של $\lambda = 4$:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \ , \qquad \alpha \in \mathbb{R} \ .$$
נציב $\alpha = 0$ ונקבל $u_4' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. לפיכך
$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \ , \qquad P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_{-2} & u_4 & u_4' \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

ב) טענה נכונה.
ראשית, אם סכום האיברים בכל עמודה של B שווה ל- p אז סכום האיברים בכל שורה במטריצה המשוחלפת B^t הוא p.

יהי $\in \mathbb{R}^n$ $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ (וקטור שבו כל רכיב שווה 1). יהי b_{ij} הרכיב בשורה i בעמודה j של המטריצה המשוחלפת B^t. אזי

$$B^t u = \begin{pmatrix} b_{11} + b_{12} + \ldots + b_{1n} \\ b_{21} + b_{22} + \ldots + b_{2n} \\ \vdots \\ b_{n1} + b_{n2} + \ldots + b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n b_{1j} \\ \sum_{j=1}^n b_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n b_{nj} \end{pmatrix}$$

ז"א כל איבר של הוקטור $B^t u$ הוא הסכום של האיברים בשורה המתאימה. לכן אם הסכום האיברים בכל שורה שווה p אזי

$$B^t u = \begin{pmatrix} p \\ p \\ \vdots \\ p \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = pu$$

ז"א p ערך עצמי של B^t ששייך לוקטור עצמי u. לכן p גם ערך עצמי של B.

ג) טענה נכונה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$C = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

הרי $CD = DC$.
מצד שני $\lambda = 2$ ערך עצמי של D אבל $\lambda = 2$ לא ערך עצמי של C.

ד) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$C = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

הרי $CD = DC$.
מצד שני הוקטור $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ וקטור עצמי של C אבל הוא לא וקטור עצמי של D. אבל

שאלה 2

א) פולינום אופייני:

$$p_A(x) = (x-2)^2(x-1) \ .$$

ערכים עצמיים:
$\lambda = 2$ מריבוי אלגברי 2.
$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.

<u>מרחב עצמי של $\lambda = 2$</u>

$$V_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda = 1$</u>

$$V_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}\right\}$$

לכן

$$A = PDP^{-1}\ , \qquad D = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ , \qquad P = \begin{pmatrix}3&2&2\\-1&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\ .$$

לכל n טבעי: $A^n = PD^nP^{-1}$. נסמן הערכים עצמיים $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. אז $D = \begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_2\end{pmatrix}$ ו- $D^{10} = \begin{pmatrix}\lambda_1^{10}&0&0\\0&\lambda_2^{10}&0\\0&0&\lambda_2^{10}\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}A^{10} =& PD^{10}P^{-1}\\ =& \begin{pmatrix}2&2&3\\0&1&-1\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^{10}&0&0\\0&\lambda_2^{10}&0\\0&0&\lambda_2^{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&2\\-1&3&2\\3&-6&-5\end{pmatrix}\\ =& \begin{pmatrix}4\lambda_2^{10}-3\lambda_1^{10} & 6\lambda_1^{10}-6\lambda_2^{10} & 6\lambda_1^{10}-6\lambda_2^{10}\\ \lambda_1^{10}-\lambda_2^{10} & 3\lambda_2^{10}-2\lambda_1^{10} & 2\lambda_2^{10}-2\lambda_1^{10}\\ 3\lambda_2^{10}-3\lambda_1^{10} & 6\lambda_1^{10}-6\lambda_2^{10} & 6\lambda_1^{10}-5\lambda_2^{10}\end{pmatrix}\\ =& \begin{pmatrix}4093&-6138&-6138\\-1023&3070&2046\\3069&-6138&-5114\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ב) הפולינום האופייני של המטריצה A הוא

$$p_A(x) = (x-1)(x-2)^2 = x^3 - 5x^2 + 8x - 4\ .$$

לפי משפט קיילי המילטון:

$$A^3 - 5A^2 + 8A - 4I = 0$$

מכאן

$$I = \frac{1}{4}A^3 - \frac{5}{4}A^2 + 2A = A\left(\frac{1}{4}A^2 - \frac{5}{4}A + 2I\right)$$

ולכן
$$A^{-1}=\frac{1}{4}A^2-\frac{5}{4}A+2I\ .$$

נכפיל בצד שמאול ובצד ימין ב- A^{-1}:
$$A^{-2}=\frac{1}{4}A-\frac{5}{4}I+2A^{-1}=\frac{1}{2}A^2-\frac{9}{4}A+\frac{11}{4}I\ .$$

נכפיל שוב בצד שמאול ובצד ימין ב- A^{-1}:
$$A^{-3}=\frac{1}{2}A-\frac{9}{4}I+\frac{11}{4}A^{-1}=\frac{11}{16}A^2-\frac{47}{16}A+\frac{13}{4}I\ .$$

ג) B ו- C דומות אז קיימת P הפיכה כך ש- $B=PCP^{-1}$.
לכל פולינום $f(x)$ מתקיים $f(B)=Pf(C)P^{-1}$ ו- $f(C)=Pf(B)P^{-1}$.
לכן אם $m_B(x)$ הוא הפולינום המינימלי של B ואם $m_C(x)$ הוא הפולינום המינימלי של C אז
$$m_B(C)=Pm_B(B)P^{-1}=0\ ,\qquad m_C(B)=Pm_C(C)P^{-1}=0\ ,$$

ז"א $m_B(C)=0$ ו- $m_C(B)=0$.
אם $\deg(m_B)>\deg(m_C)$ $\Leftarrow$ B מאפסת פולינום מדרגה יותר קטנה מ- m_B, בסתירה לכך ש- m_B הפולינום מינמימלי של B.

אם $\deg(m_B)<\deg(m_C)$ $\Leftarrow$ C מאפסת פולינום מדרגה יותר קטנה מ- m_C, בסתירה לכך ש- m_C הפולינום מינמימלי של C.

לכן $\deg(m_B)=\deg(m_C)$.

נניח ש-
$$m_B(x)=\beta_0+\beta_1x+\ldots+\beta_{k-1}x^{k-1}+x^k\ ,\qquad m_C(x)=\gamma_0+\gamma_1x+\ldots+\gamma_{k-1}x^{k-1}+x^k\ .$$

עבור כל המקדמים: $\beta_i=\gamma_i$ אחרת B מאפסת שני פולינומים שונים מאותה דרגה, בסתירה לכך שהפולינום המינימלי יחיד.
לכן $m_B(x)=m_C(x)$.

ד) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:
$$B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad C=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\ ,\qquad BC=\begin{pmatrix}2&3\\0&2\end{pmatrix}=CB\ .$$

מצד שני B לא לכסינה ו- C לא לכסינה:

הערך עצמי היחיד של B הוא $\lambda = 1$ מריבוי אלגבר $\text{alg}(1) = 2$.

$$V_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \setminus \{0\}$$

$1 = \text{geo}(1) \neq \text{alg}(1) = 2$ לכן B לא לכסינה.

הערך עצמי היחיד של C הוא $\lambda = 2$ מריבוי אלגבר $\text{alg}(2) = 2$.

$$V_2 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \setminus \{0\}$$

$1 = \text{geo}(2) \neq \text{alg}(2) = 2$ לכן C לא לכסינה.

<u>שאלה 3</u>

א) הנוסחה לא מהווה מכפלה פנימית. דוגמה נגדית: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\langle A, A \rangle = 2\text{Tr}(A) = -4 < 0 \ .$$

הגענו לסתירה של התכונת חיוביות של מכפלה פנימית.

ב) הנוסחה לא מהווה מכפלה פנימית. דוגמה נגדית: $f = 1, g = 2$:

$$\langle f, g \rangle = \int_1^2 (1)(2)^2 \, dx = 4 \ , \quad \langle g, f \rangle = \int_1^2 (2)(1)^2 \, dx = 2 \ , \qquad \Rightarrow \quad \langle f, g \rangle \neq \langle g, f \rangle \ ,$$

בסתירה לתכונת סימטריות של מכפלה פנימית.

ג) טענה נכונה. אם $w \perp u$ אז $\langle u, w \rangle = 0$ ואז לפי פיתגורס:

$$\|u + w\|^2 = \|u\|^2 + 2\text{Re}\,\langle u, w \rangle + \|w\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 \ .$$

ד) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\|u\|^2 = 1 \ , \qquad \|w\|^2 = 1 \ , \qquad \|u + w\|^2 = 2 \ .$$

ז"א

$$\|u\|^2 + \|w\|^2 = 2 = \|u + w\|^2 \, .$$

אבל $\langle u, w \rangle = -i \neq 0$ כלומר $w \not\perp u$.

ה) הטענה נכונה. הוכחה:
$W\perp U$, ז"א המרחבים U ו- W אורתוגונליים. לכן $U=W^{\perp}$.
יהי w וקטור ששייך ל- $W\cap U$. אז $w\in W\cap W^{\perp}$.
לכן

$$\langle w,w\rangle=0 \quad \Rightarrow \quad w=0\ .$$

שאלה 4

א) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & i \\ 2 & 0 & 2 \\ -i & 2 & 0 \end{pmatrix}=\bar{A}$ לכן A צמודה לעצמה לכן היא נורמלית לכן היא לכסינה אוניטרית. פולינום אופייני:

$$p_A(x)=(x-3)x(x+3)\ .$$

ערכים עצמיים: $\lambda=0$, $\lambda=3$, $\lambda=-3$ כולם מריבוי אלגברי 1.

<u>מרחב עצמי של $\lambda=0$</u>

$$V_0=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\-i\\2\end{pmatrix}\right\}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda=3$</u>

$$V_3=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}4+3i\\6+2i\\5\end{pmatrix}\right\}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda=-3$</u>

$$V_{-3}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}4-3i\\-6+2i\\5\end{pmatrix}\right\}$$

לכן

$$A=PDP^{-1}\ ,\qquad D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}\ ,\qquad P=\begin{pmatrix}-2&4+3i&4-3i\\-i&6+2i&-6+2i\\2&5&5\end{pmatrix}\ .$$

$$A = QD\bar{Q}\ , \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\ , \qquad Q = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{\frac{4}{3}+i}{\sqrt{10}} & \frac{\frac{4}{3}-i}{\sqrt{10}} \\ -\frac{i}{3} & \left(1+\frac{i}{3}\right)\sqrt{\frac{2}{5}} & \left(-1+\frac{i}{3}\right)\sqrt{\frac{2}{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3} & \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3} \end{pmatrix}\ .$$

מכאן

$$A^{100} = QD^{100}\bar{Q} = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{100} \end{pmatrix} \bar{Q}\ .$$

ב) הפולינום האופייני של B הוא:

$$p_B(x) = (x-3)(x+1) = x^2 - 2x - 3\ .$$

נוכיח את הטענה דרך אינדוקציה.

<u>שלב הבסיס $n=1$:</u>

לפי משפט קיילי המילטון:

$$B^2 = 2B + 3I = b_1 B + c_1 I\ .$$

כאשר $b_1 = 2, c_1 = 3$. נכפיל ב- B:

$$B^3 = 2B^2 + 3B = 4B + 6I + 3B = 7B + 6I = b_2 B + c_2 I$$

כאשר $b_2 = 7 = 2b_1 + c_1$ ו- $c_2 = 6 = 3b_1$.

<u>שלב המעבר:</u>

נניח כי $B^n = b_n B + c_n I$ כאשר $b_{n+1} = 2b_n + c_n$, $c_{n+1} = 3b_n$ (ההנחת האינדוקציה).
אזי

$$B^{n+1} = b_n B^2 + c_n B = b_n(2B + 3I) + c_n B = (2b_n + c_n)B + 3b_n I$$

ז"א

$$B^{n+1} = b_{n+1} B + c_{n+1} I$$

כאשר $b_{n+1} = 2b_n + c_n$ ו- $c_{n+1} = 3b_n$.

<u>שאלה 5</u> (25 נקודות)

א) טענה נכונה. הוכחה:

נניח $T:V\to V$ העתקה צמודה לעצמה, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v})=\lambda\mathrm{v}$. אז

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle\lambda\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && \text{(v וקטור עצמי של } T)\\ &=\lambda\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && \text{(לינאריות של מכפלה פנימית)}\end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle\mathrm{v},\bar{T}(\mathrm{v})\rangle && \text{(הגדרה של העתקה צמודה)}\\ &=\langle\mathrm{v},-T(\mathrm{v})\rangle && \text{(} T \text{ אנטי-הרמיטית)}\\ &=-\langle\mathrm{v},T(\mathrm{v})\rangle\\ &=-\langle\mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && \text{(v וקטור עצמי של } T)\\ &=-\bar{\lambda}\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && \text{(לינאריות חלקית של מכפלה פנימית)}\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=-\bar{\lambda}\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \quad\Rightarrow\quad (\lambda+\bar{\lambda})\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=0\ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v}\neq 0 \Leftarrow \langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\neq 0 \Leftarrow (\lambda+\bar{\lambda})=0 \Leftarrow \lambda=-\bar{\lambda}$.

ב) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$[T]=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}$$

הרי

$$T\bar{T}=I\ .$$

מצד שני הפולינום האופייני של T הוא

$$\lambda^2-1=0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda+1)(\lambda-1)=0$$

לכן הערכים עצמיים של $[T]$ הם $\lambda=1$ ו- $\lambda=-1$.

ג) תהי A מטריצה מייצגת של T.
יהי $p(x)$ הפולינום

$$p(x)=|A-xI|\ .$$

$p(x)$ הוא פולינום מסדר n.
לפי המשפט היסודי של אלגברה, לכל פולינום מסדר n קיים לפחות שורש אחד $\lambda\in\mathbb{C}$.
ז"א קיים $\lambda\in\mathbb{C}$ כך ש- $p(\lambda)=0$, לכן

$$p(\lambda)=|A-\lambda I|=0\ .$$

לכן קיים לפחות ערך עצמי אחד.

ד) נוכיח דרך אינדוקציה.

בסיס:

עבור $k=1$ ייש וקטור אחד בקבוצה: $u_1\neq 0$ והקבוצה בלתי תלויה לינארית.

מעבר:

תהי $u_1,\ldots,u_k$ קבוצה של k וקטורים עצמיים ששייכים לערכים עצמיים שונים.
נניח כי הקבוצה זו בלתי תלויה ליניארית (ההנחת האינדוקציה).
נוכיח כי הטענה מתקיימת עבור $k+1$ וקטורים עצמיים ששייכים לערכים עצמיים שונים.
נרשום

(1*)
$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_ku_k+\alpha_{k+1}u_{k+1}\ .$$

(2*)
$$T\left(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_ku_k+\alpha_{k+1}u_{k+1}\right)=\alpha_1\lambda_1u_1+\alpha_2\lambda_2u_2+\ldots+\alpha_k\lambda_ku_k+\alpha_{k+1}\lambda_{k+1}u_{k+1}=0\ .$$

(3*)
$$\alpha_1\lambda_{k+1}u_1+\alpha_2\lambda_{k+1}u_2+\ldots+\alpha_k\lambda_{k+1}u_k+\alpha_{k+1}\lambda_{k+1}u_{k+1}=0\ .$$

(2*)-(3*):

(4*)
$$\alpha_1\left(\lambda_{k+1}-\lambda_1\right)u_1+\alpha_2\left(\lambda_{k+1}-\lambda_2\right)u_2+\ldots+\alpha_k\left(\lambda_{k+1}-\lambda_k\right)=0\ .$$

הוקטורים $u_1,\ldots,u_k$ בת"ל (ההנחת האינדוקציה) לכן $\alpha_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i)u_i=0$ לכל $i=1,\ldots,k$. u_i וקטור עצמי אז $u_i\neq 0$. הערכים עצמיים שונים אז $\lambda_{k+1}-\lambda_i\neq 0$ לכן בהכרח $\alpha_i=0$ לכל $1\leq i\leq k$.
נציב זה במשוואה (1*) ונקבל

$$\alpha_{k+1}u_{k+1}=0\ .$$

u_{k+1} וקטור עצמי לכן $u_{k+1}\neq 0$ לכן $\alpha_{k+1}=0$.
קיבלנו כי (1*) מתקיים אם ורק אם $\alpha_1=\cdots=\alpha_{k+1}$ לכן ה- $k+1$ וקטורים עצמיים $u_1,\ldots,u_{k+1}$ בת"ל.