המחלקה למדעי המחשב

י"ח בסיון תשפ"ג $07-06-23$
$08:30-11:30$

חדו"א למדעי המחשב

מועד ג'

מרצה: ד'ר ירמיהו מילר

תשפ"ג סמסטר ב'

השאלון מכיל עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

<u>הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה</u>

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

<u>חומר עזר</u>

- דף נוסחאות מצורף לשאלון (עמודים בפורמט $A4$).

<u>אחר / הערות</u>

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות <u>בלבד</u> מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** <u>בלבד</u> מתוך **שתיים**.

==

שאלות 1 **ו-** 2 **- חובה!**

שאלה 1 (21 נקודות)

א) (18 נק') חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x)=e^{-x/2}\left(x^2-1\right)$ (תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, זוגיות, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וציירו את סקיצת הגרף של הפונקציה.

ב) (3 נק') שרטטו את הפונקציה $|f(x)|$.

שאלה 2 (24 נקודות)

פתרו 2 מתוך 3 האינטגרלים הבאים:

א) (12 נק') $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-2}{x^3+3x^2}\,dx$

ב) (12 נק') $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$

ג) (12 נק') $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{3x}\,dx$

ענו על 3 **מתוך** 4 **השאלות** $3-6$

שאלה 3 (15 נקודות)

א) (12 נק') חשבו את השטח שבין הקווים $y=-x^2+x$ ו- $y=\frac{x}{2}$, $y=0$. ציירו את הסקיצה המתאימה.

ב) (3 נק') מצאו את נקודות אי רציפות של הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sin x-1}$ וקבעו את סוגן.

שאלה 4 (15 נקודות)

א) (10 נק') חשבו את הגבולות הבאים:

1) (5 נק') $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+6}{x^2+2x-2}\right)^{x^2}$

2) **(5 נק')** $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

ב) **(5 נק')** הוכיחו שקיים פתרון למשוואה $x^{51}+2x-1=0$ והוא יחיד.

שאלה 5 **(15 נקודות)**

א) **(10 נק')** מצאו את משוואות המשיק והנומרל של הקוו $ye^{3x}+(x-1)y^2-\sin(2x)=0$ בנקודה $x=1$.

ב) **(5 נק')** קבעו אם האינטגרל $\int_4^{\infty}\frac{\sin x}{x^4+3x^3+2x+1}\,dx$ מתכנס. נמקו את התשובה שלכם.

שאלה 6 **(15 נקודות)**

א) **(10 נק')** רשמו את פולינום מקלורן מסדר 2 עבור הפונקציה $y(x)$ הנתונה כפונקציה פרמטרית:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= t^2-\tfrac{\pi}{2} \\ y(t) &= t\cdot\sin\left(t^2\right) \end{aligned}\right\} \qquad t\geq 0\ .$$

ב) **(5 נק')** הוכיחו כל לכל $x>0$ מתקיים את אי-השוויון

$$x\ln x \geq x-1\ .$$

ענו על 1 **מתוך** 2 **השאלות** $7-8$

שאלה 7 **(10 נקודות)**

יהיו $f(x),g(x)$ פונקציות גזירות לכל $x\leq x_0$. בנקודה x_0, $f(x_0)=g(x_0)$ ולכל $x\leq x_0$ מתקיים $f'(x)<g'(x)$. הוכיחו כי לכל $x<x_0$ מתקיים $f(x)<g(x)$.

שאלה 8 **(10 נקודות)**

מצאו את פולינום מקלורן של הפונקציה $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ מסדר 3 והוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים

$$\frac{1}{2}-\frac{x}{4}<\frac{1}{x+2}<\frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}\ .$$

פתרונות

שאלה 1

א) תחום הגדרה: $x \in (-\infty, \infty)$.

נקודות חיתוך: $(-1,0), (1,0), (0,-1)$.

סימני הפונקציה:

x	$x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$x>1$
$f(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

ב) אסימפטוטות אנכיות: אין

ג) אסימפטוטות אופקיות:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} e^{-x/2}\left(x^2-1\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{e^{x/2}}\right)\\ &= \frac{\infty}{\infty}\\ &\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{-\frac{1}{2}e^{x/2}}\right)\\ &= \frac{\infty}{\infty}\\ &\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\frac{1}{4}e^{x/2}}\right)\\ &= \frac{2}{\infty} = 0\end{aligned}$$

$y=0$ אסימפטוטה אופקית ב- $x\to\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x/2}\left(x^2-1\right) = \infty$$

אין אסימפטוטה אופקית ב- $x\to-\infty$.

ד) אסימפטוטות משופעת:

ב $x=\infty$ אין כי יש אסימפטוטה אופקית שם. נבדוק ב $x=-\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x/2}(x^2-1)}{x} \\ &= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \\ &\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{2xe^{-x/2}-\frac{1}{2}e^{-x/2}(x^2-1)}{1} \\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x-x^2+1}{2e^{x/2}} \\ &= \frac{-\infty}{0} \\ &= -\infty\ . \end{aligned}$$

לכן אין אסימפטוטה משופעת ב- $x=-\infty$.

ה) תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2-4x-1\right) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2\pm\sqrt{5}\ .$$

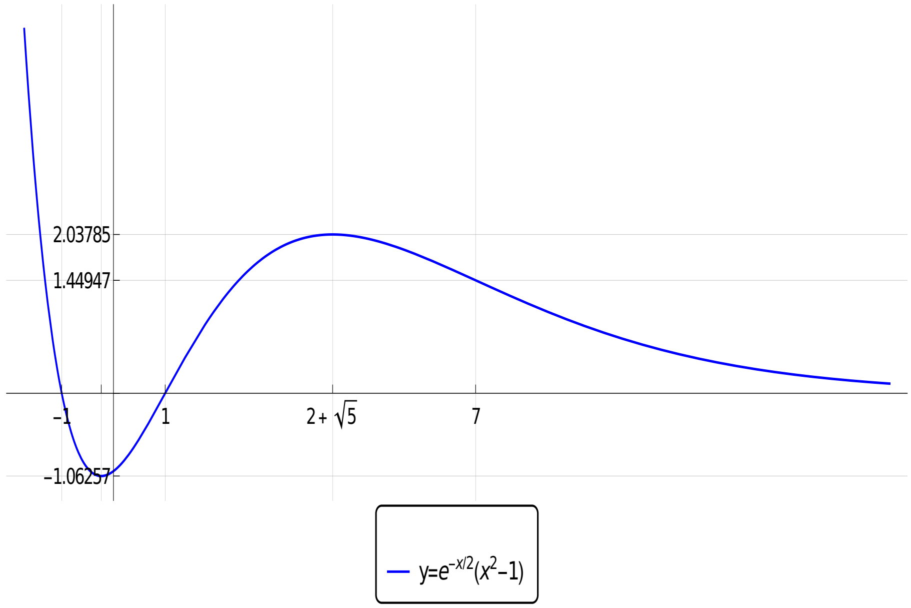
x	$x<2-\sqrt{5}$	$2-\sqrt{5}<x<2+\sqrt{5}$	$x>2+\sqrt{5}$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

ו)

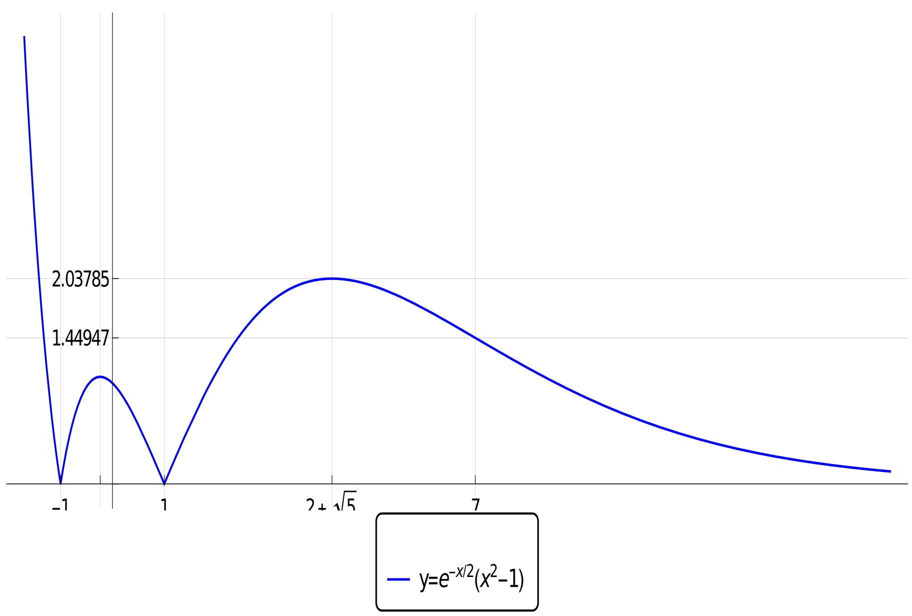
$$f''(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x-7)(x-1) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1\ \|\ 7\ .$$

x	$x<1$	$1<x<7$	$x7$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	קמורה $\uparrow$	קמורה $\downarrow$	קמורה $\uparrow$

לכן $x=1,7$ נקודות פיתול



ז)



שאלה 2

א)

$$\frac{x^2+2x-2}{x^3+3x^2}=\frac{x^2+2x-2}{x^2(x+3)}=-\frac{2}{3x^2}+\frac{1}{9(x+3)}+\frac{8}{9x}\ ,$$

$$\int \frac{x^2+2x-2}{x^3+3x^2}\,dx = \frac{2}{3x}+\frac{8\log(x)}{9}+\frac{1}{9}\log(x+3)+C\ .$$

ב) הצבה אוניברסלית:

$t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$,

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$,

$t'=\frac{1}{2}\cdot(1+t^2)$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\sin\,x}\,dx &= \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{t'}{t'}dx\\
&= \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{t'}dt\\
&= \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}(1+t^2)}dt\\
&= \int \frac{1}{1+t^2+2t}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}dt\\
&=2\int \frac{1}{(1+t)^2}dt\\
&=\frac{-2}{1+t}+C\\
&=\frac{-2}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}+C\\
&=\frac{-2}{1+\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}+C\\
&=\frac{-2\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)}+C
\end{aligned}$$

ג)

$$u=x^2\ ,\qquad \mathrm{v}'=e^{3x}\ ,\qquad u'=2x\ ,\qquad \mathrm{v}=\frac{1}{3}e^{3x}$$

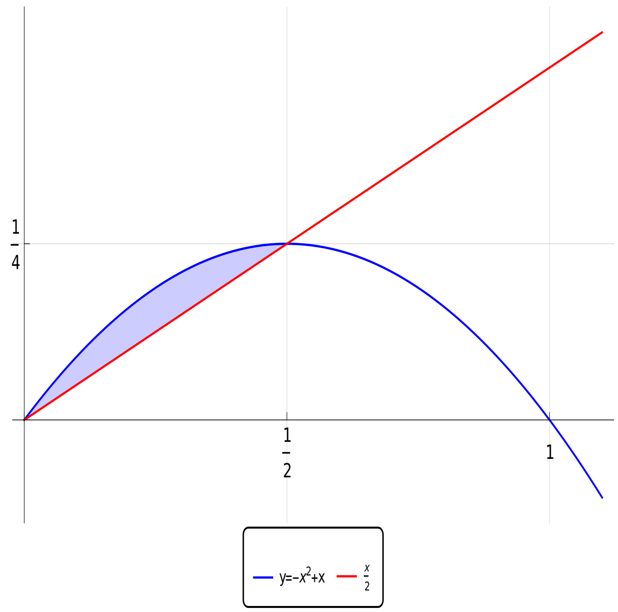
$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 \exp(3x)\, dx = \int_0^1 u\mathrm{v}'\, dx \\
&= [u\mathrm{v}]_0^1 - \int_0^1 u'\mathrm{v}\, dx \\
&= \left[x^2 \cdot \frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^1 - \int_0^1 2x \cdot \frac{1}{3}e^{3x}\, dx \\
&= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\int_0^1 x \cdot e^{3x}\, dx
\end{aligned}
$$

$$
u = x\ , \qquad \mathrm{v}' = e^{3x}\ , \qquad u' = 1\ , \qquad \mathrm{v} = \frac{1}{3}e^{3x}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\int_0^1 u\,\mathrm{v}'\, dx &= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left([u \cdot \mathrm{v}]_0^1 - \int_0^1 u' \cdot \mathrm{v}\, dx\right) \\
&= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\left[\frac{1}{3}xe^{3x}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{3}e^{3x}\, dx\right) \\
&= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3x}\, dx\right) \\
&= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^1\right) \\
&= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}\right]_0^1\right) \\
&= \frac{e^3}{3} - \frac{2e^3}{9} + \frac{2e^3}{27} - \frac{2}{27} \\
&= \frac{e^3}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{9}\right) - \frac{2}{27} \\
&= \frac{5e^3}{27} - \frac{2}{27}\ .
\end{aligned}
$$

שאלה 3

א)



$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-x^2 - \frac{x}{2} + x\right)\, dx = \frac{1}{48}$$

ב)

$$\sin x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi \ , \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

שאלה 4

א) 1)

$$\frac{x^2+2x+6}{x^2+2x-2} = 1 + \frac{1}{\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\alpha} = \frac{x^2+2x+6}{x^2+2x-2} - 1 = \frac{x^2+2x+6-(x^2+2x-2)}{x^2+2x-2} = \frac{8}{x^2+2x-2}$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{8}{x^2+2x-2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha = \frac{x^2+2x-2}{8}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+6}{x^2+2x-2}\right)^{x^2} &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{x^2\cdot\alpha}{\alpha}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{x^2}{\alpha}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{\alpha}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2}{x^2+2x-2}} \\
&= e^8 \ .
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)&=\lim_{x\to1}\left(\frac{x-1-\ln(x)}{\ln x\cdot(x-1)}\right)\\&=\left[\frac{0}{0}\right]\\&\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to1}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\cdot(x-1)+\ln(x)}\right)\\&=\lim_{x\to1}\left(\frac{x-1}{x-1+x\ln(x)}\right)\\&=\left[\frac{0}{0}\right]\\&\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1+\ln(x)+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\ .\end{aligned}$$

ב) נגדיר $f(x)=x^{51}+2x-1$. נחפש שורשים. $f(1)=2$, $f(0)=-1$ לכן לפי משפט ערך ביניים קיים שורש בקטע $(0,1)$. נוכיח יחידות:

$$f'(x)=51x^{50}+2\ .$$

$f'>0$ לכל x לכן f עולה מונוטונית, לכן f חח"ע לכן השורש יחיד.

שאלה 5

א)

$$ye^{3x}+(x-1)y^2-\sin(2x)=0$$

נציב $x=1$ ונקבל

$$y(1)=\frac{\sin(2)}{e^3}\ .$$

הנגזרת של הפונקציה הסתומה היא

$$y(x)\left(2(x-1)y'(x)+3e^{3x}\right)+e^{3x}y'(x)+y(x)^2=2\cos(2x)$$

נציב $x=1$ ונקבל

$$y'(1)=\frac{-\sin^2(2)-3e^6\sin(2)+2e^6\cos(2)}{e^9}\ .$$

משוואת המשיק:

$$y=y(1)+y'(1)(x-1)=\frac{\sin(2)}{e^3}+\left(\frac{-\sin^2(2)-3e^6\sin(2)+2e^6\cos(2)}{e^9}\right)(x-1)$$

משוואת הנורמל:

$$y = y(1) - \frac{1}{y'(1)}(x-1) = \frac{\sin(2)}{e^3} - \left(\frac{e^9}{-\sin^2(2) - 3e^6\sin(2) + 2e^6\cos(2)}\right)(x-1)$$

ב) בקטע $[4,\infty)$,

$$\frac{\sin x}{x^4+3x^3+2x+1} < \frac{1}{x^4+3x^3+2x+1} < \frac{1}{x^4}$$

$\int_4^\infty \frac{1}{x^4}$ מתכנס לכן גם $\int_4^\infty \frac{\sin x}{x^4+3x^3+2x+1}$ מתכנס.

שאלה 6

א)

שלב 1)

$$x(t) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ .$$

שלב 2)

$$y(x=0) = y\left(t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

שלב 3)

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin\left(t^2\right) + 2t^2\cos\left(t^2\right)}{2t}\ .$$

שלב 4)

$$y'_x(x=0) = y'_x\left(t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ .$$

שלב 5)

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{6t\cos\left(t^2\right) - 4t^3\sin\left(t^2\right)}{2t} - \frac{\sin\left(t^2\right)+2t^2\cos\left(t^2\right)}{2t^2}}{2t} = \frac{\cos\left(t^2\right)}{t} - \frac{\left(4t^4+1\right)\sin\left(t^2\right)}{4t^3}\ .$$

שלב 6)

$$y''_{xx}(x=0) = y''_{xx}\left(t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = -\frac{1+\pi^2}{\sqrt{2}\pi^{3/2}}\ .$$

שלב 7)

$$P_2(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2}y''(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{x}{\sqrt{2\pi}} - \frac{x^2}{2}\frac{\left(1+\pi^2\right)}{\sqrt{2}\pi^{3/2}}$$

ב) נגדיר $f(x) = x\ln x - x + 1$. נוכיח כי $f(x) \geq 0$ לכל $x > 0$.

$$f'(x) = 1 + \ln x - 1 = \ln x \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1 \ .$$

נעשה חקירה:

x	$x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

לכן $x = 1$ נקודת מינימום.

$$f(1) = 0$$

לכן הערך המינימלי של הפונקציה הוא 0 לכן $f(x) \geq 0$ לכל $x > 0$.

<u>שאלה 7</u> נגדיר הפונקציה $h(x) = f(x) - g(x)$. לכן $h(x_0) = 0$ ו- $h'(x) = f'(x) - g'(x) < 0$ לכל $x \leq x_0$.

לכן $h(x)$ יורדת מונוטונית לכל $x \leq x_0$.

כלומר,

$$\forall \quad a < b < x_0 \ , \qquad h(a) > h(b) \ .$$

לכן

$$h(x) < h(x_0) = 0$$

לכל $x < x_0$, לכן

$$h(x) < 0$$

לכל $x < x_0$, לכן

$$f(x) < g(x)$$

לכל $x < x_0$.

<u>שאלה 8</u>

$$f(x) = \frac{1}{x+2} \ , \quad f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} \ , \quad f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3} \ , \quad f'''(x) = -\frac{6}{(x+2)^4} \ .$$

$$f(0) = \frac{1}{2} \ , \quad f'(0) = -\frac{1}{4} \ , \quad f''(0) = \frac{1}{4} \ , \quad f'''(0) = -\frac{3}{8} \ .$$

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} \ .$$

נוכיח את הצד שמאל של אי-השוויון.

עבור $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{x+2} = P_1(x) + R_1(x)$$

כאשר $P_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$ הפולינום מקלורן מסדר 1, ו- $R_1(x) = \frac{f''(c)}{2}x^2 = \frac{x^2}{(c+2)^3}$ הוא השארית, כאשר $0 < c < x$. לכן $R_1(x) > 0$, ולכן

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + R_1(x) > \frac{1}{2} - \frac{x}{4} \ .$$

ז"א

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{4} < \frac{1}{x+2} \ .$$

הוכחנו את הצד שמאל.
נוכיח את הצד ימין.
עבור $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{x+2} = P_2(x) + R_2(x)$$

כאשר $P_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8}$ הפולינום מקלורן מסדר 2, ו- $R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}x^2 = \frac{-x^3}{(c+2)^4}$ הוא השארית, כאשר $0 < c < x$. לכן $R_2(x) < 0$, ולכן

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + R_2(x) < \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} \ .$$

ז"א

$$\frac{1}{x+2} < \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} \ .$$