שיעור 12
משוואות דיפרנציאליות

12.1 הגדרת משוואה דיפרציאלית

הגדרה 12.1 משוואה דיפרניאלית רגילה

משוואה
$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)$$
שקושרת בין משתנה בלתי תלוי x לבין פונקציה $y = y(x)$ ונגזרות של $y(x)$ לפי x, תיקרא משוואה דיפרניאלית רגילה (מד"ר או מישדיף).

דוגמה 12.1

1) $y' = 0$
2) $y = 2x$
3) $y' = 2xe^{x^2}$
4) $y''' + 5y'' \sin x - 17y + \tan x = 0$
5) $6y'' - 9y' = x^7$
6) אפשר גם בדיפרנציאל:
$$x \cos x \, dx + (x - 7y)dy = 0$$
זה שקול למשוואה
$$x \cos x + (x - 7y)y' = 0$$
שכן
$$y' = \frac{dy}{dx} \ .$$

למה זה מעניין? בכל מקום שכן ניתן לתאר השתנות דינמית בזמן של מערכת בעזרת קצב שינוי של הגודל הנמדד, ניתן לתאר אותה בעזרת משוואה דיפרנציאלית. למשל:
משתמשים במשידיף בתחומות כמו: פחזחקה, ביולוגיה, כימיהת הנדסה, שונות, גרפיקה, ועוד.

הגדרה 12.2 פתרון משוואו דיפרניאלית רגילה

פתרון של מד"ר
$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$
בקטע (a, b) זו פונקציה גזירה n פעמים ב- (a, b) המקיימת את המשוואה. כלומר, לאחר הצבה שלה, המשוואה הופכת לזהות לכל x בקטע.

דוגמה 12.2

הוכיחו כי הפונקציה

$$y = e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + x\right) e^x$$

מהווה פתרון למד"ר:

$$y'' - 3y' + 2y = xe^x \ .$$

פתרון:

בכדי להציב את הפונקציה במשוואה, נגזור אותה פעמיים:

$$\begin{aligned} y' &= 2e^{2x} - (x+1)e^x - \left(\frac{x^2}{2} + x\right) e^x && = 2e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 1\right) e^x \ , \\ y'' &= 4e^{2x} - (x+2)e^x - \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 1\right) e^x && = 4e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + 3x + 3\right) e^x \ , \end{aligned}$$

$$\underbrace{\left[4e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + 3x + 3\right) e^x\right]}_{y''} - 3\underbrace{\left[2e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 1\right) e^x\right]}_{y'} + 2\underbrace{\left[e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + x\right) e^x\right]}_{y}$$

$$= xe^x$$

כנדרש.

12.2 מד"ר מסדר ראשון

הגדרה 12.3 משוואה דיפרניאלית רגילה מסדר ראשון

אם ניתן להציג את המשוואה בצורה

$$y' = f(x,y)$$

אז המשוואה נקראת משוואה הפתוחה לגבי הנגזרת. משואה כזו ניתן גם להציג בצורה

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \ .$$

דוגמה 12.3

(1

$$(2x+y)dx + (x^2+y)dy = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y' + \frac{2x+y}{x^2+y} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y' = -\frac{2x+y}{x^2+y} \ .$$

(2

$$(7x+3y)dx + 7x^2 dy = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y' + \frac{7x+3y}{7x^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y' = -\frac{7x+3y}{7x^2} \ .$$

דוגמה 12.4 פ

תרו את המד"ר
$$y' = 2x \ .$$

פתרון:

$$y' = 2x \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int 2x\,dx = x^2 + C \ .$$

כלומר, יש למשוואה אינסוף פתרונות.

הגדרה 12.4 פתרון כללי למשוואה דיפרניאלית רגילה מסדר ראשון

פתרון כללי למד"ר מסדר ראשון הוא פונקציה גזירה $y = \phi(x, C)$ כאשר C הוא פרמטר כך שלכל פתרון של המשוואה (פרט אולי למקרים "מיוחדים") מתקבל ב- $\phi(x, C)$ ע"י הצבה של ערך כלשהו ב- C.

דוגמה 12.5

$y' = 2x$
$$\phi(x, C) = x^2 + C$$
הוא פתרון כללי.

הגדרה 12.5 פתרון כללי

פתרון המתקבל מהפתרון הכללי ע"י הצבה של ערך בפרמטר C נקרא פתרון פרטי.

דוגמה 12.6

$y = x^2 + 7$ הוא פתרון פרטי של המשוואה $y' = 2x$ ביחס לפתרון הכללי $\phi(x, C) = x^2 + C$.

הגדרה 12.6 פתרון פרטי

מד"ר מסדר ראשון יחד עם תנאי התחלה
$$\begin{cases} F(x, y, y') &= 0 \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$
נקראת בעית קושי.

דוגמה 12.7

נפתור את בעית קושי
$$\begin{cases} y' &= 2x \\ y(1) &= 8 \end{cases}$$

פתרון:

הפתרון הכללי שמצאנו למשוואה הוא
$$\phi(x, C) = x^2 + C \ .$$

נציב את תנאי ההתחלה:
$$y(1) = 8 \quad \Rightarrow \quad 1^2 + C = 8 \quad \Rightarrow \quad C = 7 \ .$$
ולכן מתקבל הפתרון הפרטי
$$y(x) = x^2 + 7 \ .$$

דוגמה 12.8

נתונה המד"ר
$$y' - 4(y-1)^{3/4}$$

1) מצאו פתרון אחד.

2) הוכיחו שמשפחות הפונקציות $y(x,C) = (x+C)^4 + 1$ מהווה פתרון כללי למשוואה.

3) האם קיים קבוע C שעבורו הפתרון $y = 1$ מתקבל מהפתרון הכללי $y = (x+C)^4 + 1$ כפתרון פרטי?

פתרון:

1) $y = 1$ הינו פתרון למשוואה שכן $y' = 0$ ואז
$$0 - 4(1-1)^{3/4} = 0 \ .$$

2) אם נגזור את הפונקציה $y(x,C)$ נקבל $y' = 4(x+C)^3$ ואם נציב את y במשוואה נקבל
$$4(x+C)^3 - 4\left((x+C)^4 + 1 - 1\right)^{3/4} = 4(x+C)^3 - 4(x+C)^3 = 0$$
ואכן קיבלנו זהות.

למעשה, אין לנו את הכלים להראות שזה אכן פתרון כללי. הוכיחו שמשפחות הפונקציות $y(x,C) = (x+C)^4 + 1$ מהווה פתרון כללי למשוואה.

3) לא. שכן אז $(x+C)^4 + 1 = 1$ לכל x, $\Leftarrow$ $x + C = 0$ לכל x, וזה לא יכול להיות.

הגדרה 12.7 פתרון מיוחד

פתרון של מד"ר שאינו מתקבל מהפתרון הכללי כפתרון פרטי עבור ערך כלשהו של הפרמטר C נקרא פתרון מיוחד.

דוגמה 12.9

עבור הדוגמה הקודמת, $y = 1$ פתרון מיוחד.

12.3 משוואה דיפרנציאלית הניתנת להפרדת משתנים

הגדרה 12.8 משוואה דיפרנציאלית הניתנת להפרדת משתנים

מד"ר הניתנת להפרדת משתנים הינה משוואה מצורה

$$y' = f(x)g(y)$$

או באופן שקול

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$$

משפט 12.1 כיצד לפתור משוואה דיפרנציאלית הניתנת להפרדת משתנים

נתונה מד"ר הניתנת להפרדת משתנים הינה משוואה מצורה

$$y' = f(x)g(y)$$

אז

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$$

דוגמה 12.10

פתרו את המשוואה $y' = 2xy$

פתרון:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{y} y'\,dx =& \int 2x\,dx \\
\int \frac{1}{y} dy =& \int 2x\,dx \\
\ln|y| + C_1 =& x^2 + C_2 \\
\ln|y| =& x^2 + (C_2 - C_1)
\end{aligned}$$

אין טעם בשני קבועים אינטגרציה כאן. נרשום

$$\begin{aligned}
\ln|y| =& x^2 + C_3 \\
|y(x)| =& e^{x^2 + C_3} \\
|y(x)| =& e^{x^2} \cdot e^{C_3}
\end{aligned}$$

נרשום $C_4 = e^{C_3}$ ואז

$$|y(x)| = C_4 e^{x^2}$$

מלכתחילה, $C_4 > 0$ ואם נרצה להוריד את הערך המוחלט נקבל

$$y(x) = \pm C_4 e^{x^2}\ ,$$

אבל ייותר נוח לרשום

$$y(x) = C_4 e^{x^2}$$

כאשר מאפשרים ל- C_4 להיות גם שלילי.

במקרה ש $C_4 = 0$, נקבל $y(x) = 0$. זהו גם כן פתרון. לכן,

$$y(x) = C \cdot e^{x^2}$$

הוא פתרון למשוואה לכל ערך של C.

דוגמה 12.11

העזרו בשיטת הפרדת משתנים בכדי לפתור את המשוואה

$$y' - 4(y-1)^{3/4} = 0$$

והשוו לפתרונות שכבר ראינו קודם.

פתרון:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4(y-1)^{3/4}} y' dx =& \int 1\, dx \\ (y-1)^{1/4} =& x + C\end{aligned}$$

לכן קיבלנו

$$\begin{cases} y = (x+C)^4 + 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$