3 יסודות הקומבינטוריקה 4-7

3.1 מדגם ללא החזרה: סדור ולא סדור

3.1 חוק. (מדגם סדור ללא החזרה) מספר הדרכים לסדר n איברים שונים בשורה הוא

$$n! = n(n-1)\dots(2)(1)\ . \tag{3.1}$$

מספר הדרכים לדגום k איברים מתוך n איברים שונים עם חשיבות לסדר וללא החזרה הוא

$$n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}\ . \tag{3.2}$$

3.2 חוק. (מדגם לא סדור ללא החזרה) מספר הדרכים לדגום k איברים מתוך n איברים שונים בלי חשיבות לסדר וללא החזרה הוא

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \tag{3.3}$$

3.3 הגדרה. (מקדם הבינומיאלי) הסימון

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}, \tag{3.4}$$

או לעיתים

$$_nC_k := \frac{n!}{(n-k)!k!}. \tag{3.5}$$

גם וגם נקראים המקדם הבינומיאלי.

3.4 הגדרה. ( ) הסימון

$$_nP_k := \frac{n!}{(n-k)!}\ . \tag{3.6}$$

דוגמא. לוקחים 3 אותיות שונות מתוך ה 6 אותיות (a,b,c,d,e,f). הצירופים האפשריים מפורטים להלן:

$r1$	(a,b,c)	(a,c,b)	(b,a,c)	(b,c,a)	(c,a,b)	(c,b,a)
$r2$	(a,b,d)	(a,d,b)	(b,a,d)	(b,d,a)	(d,a,b)	(d,b,a)
$r3$	(a,b,e)	(a,e,b)	(b,a,e)	(b,e,a)	(e,a,b)	(e,b,a)
$r4$	(a,b,f)	(a,f,b)	(b,a,f)	(b,f,a)	(f,a,b)	(f,b,a)
$r5$	(a,c,d)	(a,d,c)	(c,a,d)	(c,d,a)	(d,a,c)	(d,c,a)
$r6$	(a,c,e)	(a,e,c)	(c,a,e)	(c,e,a)	(e,a,c)	(e,c,a)
$r7$	(a,c,f)	(a,f,c)	(c,a,f)	(c,f,a)	(f,a,c)	(f,c,a)
$r8$	(a,d,e)	(a,e,d)	(d,a,e)	(d,e,a)	(e,a,d)	(e,d,a)
$r9$	(a,d,f)	(a,f,d)	(d,a,f)	(d,f,a)	(f,a,d)	(f,d,a)
$r10$	(a,e,f)	(a,f,e)	(e,a,f)	(e,f,a)	(f,a,e)	(f,e,a)
$r11$	(b,c,d)	(b,d,c)	(c,b,d)	(c,d,b)	(d,b,c)	(d,c,b)
$r12$	(b,c,e)	(b,e,c)	(c,b,e)	(c,e,b)	(e,b,c)	(e,c,b)
$r13$	(b,c,f)	(b,f,c)	(c,b,f)	(c,f,b)	(f,b,c)	(f,c,b)
$r14$	(b,d,e)	(b,e,d)	(d,b,e)	(d,e,b)	(e,b,d)	(e,d,b)
$r15$	(b,d,f)	(b,f,d)	(d,b,f)	(d,f,b)	(f,b,d)	(f,d,b)
$r16$	(b,e,f)	(b,f,e)	(e,b,f)	(e,f,b)	(f,b,e)	(f,e,b)
$r17$	(c,d,e)	(c,e,d)	(d,c,e)	(d,e,c)	(e,c,d)	(e,d,c)
$r18$	(c,d,f)	(c,f,d)	(d,c,f)	(d,f,c)	(f,c,d)	(f,d,c)
$r19$	(c,e,f)	(c,f,e)	(e,c,f)	(e,f,c)	(f,c,e)	(f,e,c)
$r20$	(d,e,f)	(d,f,e)	(e,d,f)	(e,f,d)	(f,d,e)	(f,e,d)

באף סדרה שום תוו לא יכול להופיע יותר מפעם אחת (זו דווקא התכונה של ללא החזרה). ישנן 120 אפשרויות עבור המדגם סדור:

$$\begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 6 & 5 & 4 \end{array} = 6.5.4 = \frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1} = \frac{6!}{(6-3)!} = {}_6C_3. \tag{3.7}$$

שימו לב שכל סדרה שבאותה שורה כוללת אותם שלושה תווים, אך הם מופיעים בסדרים שונים. בנגוד לרשימה לעיל, הרשימה להלן מופיע את כל האפשרויות אך ללא חשיבות לסדר:

$$\begin{array}{ll}
r1 & (a,b,c) \\
r2 & (a,b,d) \\
r3 & (a,b,e) \\
r4 & (a,b,f) \\
r5 & (a,c,d) \\
r6 & (a,c,e) \\
r7 & (a,c,f) \\
r8 & (a,d,e) \\
r9 & (a,d,f) \\
r10 & (a,e,f) \\
r11 & (b,c,d) \\
r12 & (b,c,e) \\
r13 & (b,c,f) \\
r14 & (b,d,e) \\
r15 & (b,d,f) \\
r16 & (b,e,f) \\
r17 & (c,d,e) \\
r18 & (c,d,f) \\
r19 & (c,e,f) \\
r20 & (d,e,f)
\end{array}$$

(לדוגמה, בשורה $r2$ כל סדרה כוללת רק התווים (a,b,d) בצירופים שונים.) בכל שורה ישנן $3!$ סדרות בנות אותם תווים:

$$\begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 3 & 2 & 1 \end{array}$$

לכן, כדי לחשב את המספר הדרכים לסדר 6 תווים שונים ב 3 מקומות אך ללא חשיבות לסדר (או במילים אחרות האורך של המדגם לא סדור ללא החזרה) יש צורך לחלק את המספר (3.7) בהמספר של צירופים של אותם שלושה תווים בכל שורה (אשר הוא דווקא $3!$). דרך זה מקבלים

$$\frac{6!}{(6-3)!3!} = {}_6P_3 \ . \tag{3.8}$$

3.2 *סימנים בקומבינטוריקה

3.5 הגדרה. (עוד סימון שכיח לקומבינטוריקה)

$$\begin{aligned}
n^{[r]} &= n(n+1)\dots(n+r-1) && = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}\ , \\
n_{[r]} &= \frac{n^{[r]}}{r!} && = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}\ , \\
n^{(r)} &= (n-r+1)^{[r]} && = (n-r+1)(n-r+2)\dots(n) && = \frac{n!}{(n-r)!}\ , \\
n_{(r)} &= \frac{n^{(r)}}{r!} && = \frac{n!}{(n-1)!r!} && = {}_nC_r\ .
\end{aligned}$$

שימו לב שלפי הגדרות האלה,

$$n^{[r]} = (n+r-1)(n+r-2)\dots(n) = \frac{(n+r-1)!}{(n+1)!} = (n+r-1)^{(r)}\ .$$

3.3 תרגיל: מדגם לא סדור ללא החזרה

דוגמא. כיתה עם 30 סטודנטים צריכים לבחור ועד של 3 סטודנטים. יתר התלמידים שלא נבחרו לועד יעסקו בפעילות אקדמית אחרת. כמה אפשרויות שונות יש לבחירת ועד? כמה אפשרויות שונות יש לבחירת התלמידים שיעסקו בפעילות אקדמית אחרת?

פיתרון.

$$\binom{30}{3} = \frac{30!}{3!27!}, \qquad \binom{30}{27} = \frac{30!}{27!3!}.$$

■

הניתוח של מדגם סדור עם החזרה זהה לעיקרון הכפל, כאשר בכל שלב יש n אפשרויות, לכן בתהליכי באורך k נקבל סה"כ n^k אפשרויות.

3.4 מדגם עם החזרה: סדור ולא סדור

3.6 חוק. (מדגם סדור עם החזרה) מספר הדרכים לדגום k איברים מתוך n איברים שונים עם חשיבות לסדר ועם החזרה הוא

$$\begin{array}{cccc}
\square & \square & \dots & \square \\
\uparrow & \uparrow & \dots & \uparrow \\
n & n & \dots & n
\end{array} = n^k. \tag{3.9}$$

3.7 חוק. (מדגם לא סדור עם החזרה) המספר הדרכים לדגום r תווים מתוך n תווים שונים ללא חשיבות לסדר ועם החזרה הוא

$$\frac{n^{[r]}}{r!} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!} \tag{3.10}$$

דוגמא. (מדגם לא סדור עם החזרה)
כמה צירופים יש בסה"כ, של קבוצות של שתי מספרים $(1,1)$ $(4,3)$, $\ldots$,$(1,2)$ עד $(6,6)$, מניסוי של לזרוק שתי קוביות, כאשר $(1,2)$ ו $(2,1)$ נחשבים כאותה תוצאות, זאת אומרת ללא חשיבות לסדר?

פיתרון. האפשרויות הן מפורטות להלן:

$$\begin{array}{llllll}
(1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\
\cancel{(2,1)}, & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\
\cancel{(3,1)}, & \cancel{(3,2)}, & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\
\cancel{(4,1)}, & \cancel{(4,2)}, & \cancel{(4,3)}, & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\
\cancel{(5,1)}, & \cancel{(5,2)}, & \cancel{(5,3)}, & \cancel{(5,4)}, & (5,5), & (5,6), \\
\cancel{(6,1)}, & \cancel{(6,2)}, & \cancel{(6,3)}, & \cancel{(6,4)}, & \cancel{(6,5)}, & (6,6).
\end{array}$$

זו בעיה של מדגם לא סדור עם החזרה ויש צורך להשתמש בהנוסחא **(3.10)** כאשר $n=6$ ו $r=2$:

$$\frac{6^{[2]}}{2!} = \frac{(6+2-1)!}{(6-1)!2!} = \frac{7!}{5!2!} = 21 \ .$$

■

3.5 תרגילים: קומבינטוריקה והסתברות

דוגמא. בבית ספר ובו 7 מורים מלמדים המורים 5 ימים בשבוע. כל מורה בחר מקרית יום בו לא יעבוד (א־ו). חשבו את ההסתברויות הבאות:

1. המורה לאנגלית והמורה למתמטיקה לא יהיו חופשיים באותו יום,
2. כל המורים בחרו ביום ו' כיום החופשי שלהם,
3. אף מורה לא בחר את יום ו' כיום החופשי שלו,
4. כל יום בשבוע נבחר כיום חופשי של לפחות אחד המורים.

פיתרון. לכל מורה יש 6 אפשרויות לבחירת היום החופשי שלו לכן כמות הצירופים הכוללת היא

$$|\Omega| = 6^7.$$

1. למורה לאנגלית יש 6 אפשרויות לבחור את היום החופשי שלו. לאחר מכן, למורה למתמטיקה יש 5 אפשרויות עבור היום החופשי 6. סה"כ $6.5 = 30$ אפשרויות. לכל המורים האחרים יש 6^5 אפשרויות. על כן צריך לכפול ב- 6^5 לתת 30.6^5. לכן
$$P = \frac{30.6^5}{6^7} = \frac{5}{6}.$$

2. יש רק דרך אחד לייצר המאורע הדרוש, לכן

$$P = \frac{1}{6^7}.$$

3. לכל מורה יש רק 5 אפשרויות. לכן כמות הצירופים הוא 5^7. לכן

$$P = \frac{5^7}{6^7} = \left(\frac{5}{6}\right)^7.$$

4. במאורע המבוקש חייב להיות 2 מורים שיבחרו את אותו היום ורק הם. יש $\binom{7}{2}$ אדרכים לבחור המורים מתוך 7. לאחר שבחרנו אותם יש 6 פריטים: (5 מורים ועוד זוג מוים) שצריכים לסדר בשורה. (כל מקום הוא היום החופשי) ולכך יש $6!$ אפשרויות. לכן ההסתברות תהיה

$$P = \frac{6!\binom{7}{2}}{6^7}.$$

■

דוגמא. מרכיבים באקראי מילה בת 4 תווים מן האותיות א' עד ו'. חשבו את ההסתברויות של המאורעות הבאים.

1. מאורע A: א' מופיע פעם אחת לפחות,
2. מאורע B: א' מופיע בדיוק פעם אחת,
3. מאורע C: אין אות שחוזרת בסיסמא.

פיתרון. לכל תו יש 6 אפשרויות ולכן

$$|\Omega| = 6^4.$$

1. $\bar{A} =$ אות א' לא נבחרה כלל. זאת אומרת כל אפשרויות מורכבת אך ורק מן התווים ב' - ו'.

$$\Rightarrow \qquad P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{5^4}{6^4}.$$

2. $B_i =$ מאורע ש א' מופיע במקום i ($i = 1, \ldots, 4$).

$$\Rightarrow \qquad B = \bigcup_{i=1}^{4} B_i,$$

והאיחוד הוא על פני מאורעות זרים. על כן

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{4} B_i\right) = \sum_{i=1}^{4} P(B_i).$$

$$P(B_i) = \frac{5^3}{6^4}.$$

$$\therefore \qquad P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(B_i) = \frac{4(5^3)}{6^4}.$$

3.
   - לתו הראשון יש 6 אפשרויות,
   - לתו שני יש 5 אפשרויות,

- לתו שלישי יש 4 אפשרויות,
- לתו רביעי יש 3 אפשרויות,

$$\therefore \qquad P=\frac{6.5.4.3}{6^4}=\frac{6!}{6^4(6-4)!}\ .$$

■

דוגמא. במחלקה לכלכלה 25 חברי סגל ־ 9 דוקטורים ו־16 פרופסורים. בוחרים באקראי ועדת הוראה בת 4 חברי סגל. מצאו את ההסתברות ש

1. בועדה יש 2 דוקטורים ו־2 פרופסורים,
2. בועדה יש לפחות 3 פרופסורים,
3. בועדה יש לפחות דוקטור אחד ולפחות פרופסור אחד.

פיתרון.

$$|\Omega|=\binom{25}{4}\ .$$

1.
$$P(A)=\frac{\binom{9}{2}\binom{16}{2}}{\binom{25}{4}}$$

2.
$$P(B)=\frac{\binom{9}{1}\binom{16}{3}+\binom{9}{0}\binom{16}{4}}{\binom{25}{4}}$$

3.
$$\begin{aligned}P(C)=&1-P(\bar{C})\\ P(\bar{C})=&\frac{\binom{9}{4}}{\binom{25}{4}}+\frac{\binom{16}{4}}{\binom{25}{4}}\ .\end{aligned}$$

■

דוגמא. בכיתה n סטודנטים. מהי ההסתברות שיש לפחות זוג אחד של סטודנטים עם אותו תאריך יום הולדת (מבלי להתייחס לשנת הלידה)?

פיתרון. גודל מרחב המדגם שלנו הוא 365^n משום שלכל סטודנט יש 365 ימים אפשריים ליום הולדת וישנם n סטודנטים. נסמן ב A המאורע בו לפחות זוג אחד של סטודנטים נולד באותו היום, ונבחן את המאורע המשלים $\bar{A}$. המאורע בו לכל הסטודנטים ימי הולדת שונים. זו דוגמה של מדגם לא סדור וללא החזרה, ולפי זה עם העזקה של 3.2 נמצא ש מספר האפשרויות במאורע $\bar{A}$ הוא

$$|\bar{A}|={}_{365}C_n=\frac{365!}{(365-n)!}\ .$$

מכאן נקבל ש

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{|A|}{|\Omega|}=1-\frac{365!}{(365-n)!365^n}\ .$$

התוצאה המפתיעה היא שעבור $n=23$ ההסתברות גדולה מ 50% (0.507 בקירוב) ועבור $n=60$ סטודנטים ההסתברות היא 0.994.

■

3.6 *מדגם סדור של קבוצות בו תת קבוצו ת של איברים זההים

נניח שיש n תווים בקבוצה Ω, אשר בתוך זה יש את

- תת קבוצה A בת a תווים זההים,
- תת קבוצה B בת b תווים זהים,
- תת קבוצה C בת c תווים זה הים.

$$\Omega = \{\overbrace{\circ,\ldots,\circ}^{a},\ \overbrace{\square,\ldots,\square}^{b},\ \overbrace{\triangle,\ldots,\triangle}^{c}\}$$

בטח מתקיים

$$a+b+c=n.$$

מסמנים את המספר הדרכים לסדר את האיברים ב Ω ב

$${}_nP_{(a,b,c)}\ .$$

כדי להגיע לנוסחא ל ${}_nP_{(a,b,c)}$ בפירוש, מחליפים את כל ה a תווים הזההים בתוך A בתווים שונים, זאת אומרת מחליפים את כל תוו של $\circ$ בתוו שונה. כך המספר הסדרים שונים הוא פי $a!$ פעמים יותר גדול מקודם. לאחר מכן מחליפים את כל ה b תווים הזההים בתוך B בתווים שונים. זאת אומרת מחליפים את כל תוו של $\square$ בתוו שונה. כך המספר הסדרים שונים הוא פי $b!$ פעמים יותר גדול מקודם. לאחר מכן מחליפים את כל ה c תווים הזההים בתוך C בתווים שונים. זאת אומרת מחליפים את כל תוו של $\triangle$ בתוו שונה. כך המספר הסדרים שונים הוא פי $c!$ פעמים יותר גדול מקודם. בסוף מקבלים סדר של n תווים שונים, אשר יש לו $n! = {}_nP_n$ צירופים שונים. לכן

$$\begin{aligned} a!b!c!\,{}_nP_{(a,b,c)} &= {}_nP_n &&= n! \\ \Rightarrow \qquad {}_nP_{(a,b,c)} &= \frac{{}_nP_n}{a!b!c!} &&= \frac{n!}{a!b!c!}\ . \end{aligned}$$

3.8 חוק. (צירופים עבור קבוצה בת תת קבוצות של תווים זההים)
המספר הדרכים לסדר n איברים שונים מתוך קבוצה של n איברים, אשר המורכב מ

- תת קבוצה A בת a איברים זההים,
- תת קבוצה B בת b איברים זההים,
- תת קבוצה C בת c איברים זההים,

$\vdots$

הוא

$${}_nP_{(a,b,c,\ldots)} = \frac{n!}{a!b!c!\ldots}\ . \tag{3.11}$$

דוגמא. כמה אפשרויות יש לסדר 6 מטבעות של ₪1 , 7 מטבעות של ₪5, 8 מטבעות של ₪10 ?

פיתרון.

$${}_{21}P_{(6,7,8)} = \frac{21!}{6!7!8!} = 349,188,840.$$

■

3.9 חוק. (מדגם מתוך קבוצה בת תת קבוצות של תווים זההים עם החזרה)
נתון קבוצה Ω בו יש

- תת קבוצה A בת a איברים זההים,
- תת קבוצה B בת b איברים זההים,