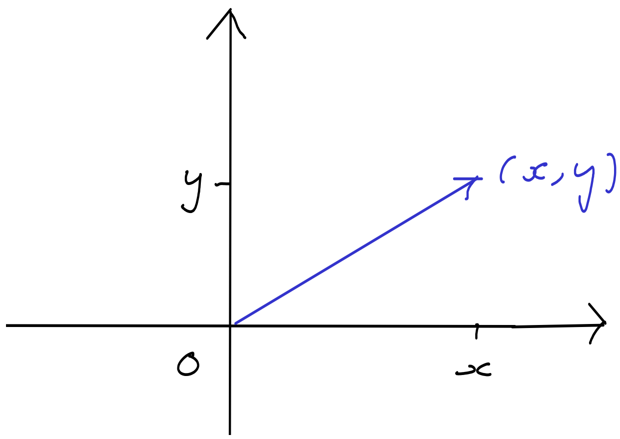
שיעור 5
מרחבים וקטורי

מרחבים וקטורים

באלגברה וקטור במישור תמיד מתחיל בנקודה $(0,0)$. לכן כל וקטור במישור נקבע ע"י הנקודה הסופית שלו (x,y).



לקבוצת כל הוקטורים במישור מסמנים $\mathbb{R}^2$.

<u>פעולות ב- $\mathbb{R}^2$</u>

1) חיבור וקטורים:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

2) כפל של וקטור בסקלר:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

באופן דומה ניתן להגדיר פעולות בין וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) | x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

1) חיבור וקטורים:

$$(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$$

2) כפל של וקטור בסקלר:

$$\alpha \cdot (x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

באופן כללי נגדיר מרחב וקטורי $\mathbb{R}^n$:

5.1 הגדרה: מרחב וקטורי $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ מוגדר להיות הקבוצה של כל הסטים מ n מספרים ממשיים:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) | x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}\} \ .$$

הפעולות הבאות מוגדרות בין וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$:

1) חיבור וקטורים:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

2) כפל של וקטור בסקלר:

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

בדוגמאות האלה הסקלרים שייכים לשדה $\mathbb{R}$.

באופן דומה הסקלרים יכולים להשתייך לשדה אחר, למשל $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$.

ניתן הגדרה כללית של מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$:

5.2 הגדרה: (מרחב וקטורי מעל שדה)
קבוצה לא ריקה V נקראת מרחב וקטורי (מ"ו) מעל שדה $\mathbb{F}$ אם מתקיימים התנאים הבאים (האיברים של V נקראים וקטורים ואיברי $\mathbb{F}$ נקראים סקלרים). לכל וקטורים $u, \mathrm{v}, w \in V$ וסקלירם $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$:

(1) $u + \mathrm{v} \in V$
(2) קיים וקטור $\alpha\, u \in V$
(3) $u + v = v + u$ (חוק החילוף).
(4) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (חוק הקיבוץ).
(5) קיים וקטור $\bar{0} \in V$ (הנקרא וקטור האפס) כך שלכל $u \in V$, מתקיים $u = \bar{0} + u = u + \bar{0}$.
(6) לכל $u \in V$ קיים $-u \in V$ כך ש- $u + (-u) = \bar{0}$.
(7) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
(8) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$.
(9) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha \mathrm{v}$.
(10) $1 \cdot u = u$ (כאשר $1 \in \mathbb{F}$).

דוגמאות מרכזיות של מרחבים וקטורים

1) **מרחב הוקטורים מעל** $\mathbb{F}^n$

מרחב הוקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$

$(\mathbb{F}^n, +, \cdot)$ עם הפעולות חיבור וקטורים וכפל בסקלר.

2) $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ **מרחב המטריצות מעל** $\mathbb{R}$

קבוצת כל המטריצות מסדר $m \times n$ עם איברים ממשיים.

לכל שתי מטריצות מסדר $m \times n$ מוגדרת פעולת חיבור וכל מטריצה ניתן להכפיל בסקלר השייך ל $\mathbb{R}$.

קל לבדוק שכל האקסיומות של מרחב וקטורי מתקיימות. לכן זה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

3) $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ מרחב המטריצות מעל $\mathbb{C}$

באופן דומה ניתן להגדיר מרחב וקטורי $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ - מרחב וקטורי של כל המטריצות מסדר $m\times n$ עם ריברים מרוכבים (מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$).

4) $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מרחב המטריצות מעל $\mathbb{F}$

באופן כללי $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ - מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.

5) $\mathbb{F}[x]$ מרחב הפולינומים

קבוצת כל הפולינומים עם מקדמים השייכים לשדה $\mathbb{F}$.

מוגדרות פעולות חיבור פולינומים וכפל של פולינומים בסקלר השייך ל- $\mathbb{F}$.

כל האקסיומות של מרחב וקטורי מתקיימות.

6) $F(\mathbb{R})$ קבוצת הפונקציות הממשיות

קבוצת כל הפונקציות הממשיות, ז"א

$$F(\mathbb{R})=\{f:f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}\}$$

מוגדרות פעולות חיבור פונקציות וכפל פונקציה בסקלר מתוך $\mathbb{R}$.

נגדיר חיבור וכפל בסקלר כפי שהוגדרו בחדו"א. לכל $f,g\in F(\mathbb{R})$ ולכל $\alpha\in\mathbb{R}$ נגדיר

$$\begin{aligned}(f+g)(x)=&f(x)+g(x)\ , \quad \forall x\in\mathbb{R}\ ,\\ (\alpha\cdot f)(x)=&\alpha\cdot f(x)\ , \qquad \forall x\in\mathbb{R}\ ,\end{aligned}$$

וקטור האפס הוא פונקציה $f(x)=0$.

קבוצה זו עם הפעולות הללו היא מרחב וקטורי.

5.3 דוגמא.
נתון

$$P_1=7+5x+3x^3+4x^7\in\mathbb{R}[x]\ ,\qquad P_2=6+4x+8x^2+3x^7+9x^{13}\in\mathbb{R}[x]\ ,$$

אז

$$\begin{aligned}P_1+P_2=&\left(7+5x+3x^3+4x^7\right)+\left(6+4x+8x^2+3x^7+9x^{13}\right)\\ =&(7+6)+(5+4)x+(0+8)x^2+(3+0)x^3+(4+3)x^7+(0+9)x^{13}\qquad\in\mathbb{R}[x]\ ,\end{aligned}$$

ונתון $\alpha=3$

$$\begin{aligned}\alpha\cdot P_1=&13+9x+8x^2+3x^3+7x^6+9x^{13}\\ =&3\cdot\left(7+5x+3x^3+4x^7\right)\\ =&(3\cdot7)+(3\cdot5)x+(3\cdot3)x^3+(3\cdot4)x^7\\ =&21+15x+9x^3+12x^7\qquad\in\mathbb{R}[x]\ .\end{aligned}$$

■
