חדו"א 1
סמסטר א' תשפ"ד
עבודה עצמית 3

שאלה 1 הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א) סכום של שתי פונקציות זוגיות נותנת פונקציה זוגית.

ב) סכום של שתי פונקציות אי-זוגיות נותנת פונקציה אי-זוגית.

ג) מכפלה או מנה של שתי פונקציות זוגיות נותנת פונקציה זוגית.

ד) מכפלה או מנה של שתי פונקציות אי-זוגיות נותנת פונקציה זוגית.

ה) מכפלה או מנה של פונקציה זוגית עם פונקציה אי-זוגית נותנת פונקציה זוגית.

שאלה 2 הוכיחו את הטענות הבאות.

א) סכום של פונקציות מונוטונות עולה (יורדת) היא פונקציות עולה (יורדת).

ב) אם $f(x)$ פונקציה מונוטונית עולה (יורדת) בתחום D, ואם $f(x) > 0$ לכל $x \in D$ אזי בתחום D הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ מונוטונית יורדת (עולה).

שאלה 3 תנו שתי דוגמאות לכל אחד מהמקרים הבאים:

א) $\frac{\infty}{\infty}$

ב) $\frac{0}{0}$

ג) $0 \cdot \infty$

ד) 1^{∞} כך שבדוגמאות הנ"ל מתקבלות תוצאות שונות.

שאלה 4 תנו הגדרה לגבול של פונקציה $f(x)$ כאשר x שואף ל מינוס אינסוף (כלומר $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.)

תנו דוגמה של פונקציה לא קבועה שמקיימת $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$.

שאלה 5 חשבו את הגבולות הבאים

א) $\lim_{x\to -2} \frac{3x+6}{x^2-4}$

ב) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-1}$

ג) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$

ד) $\lim_{x\to -1} \frac{1-x^2}{2x^2+x-1}$

ה) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+3x^2+5x-x}{x^3+4x}$

ו) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$

ז) $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2-3x+5}{x^2+6x+5}$

ח) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3-3x^2+5}{x^2+6x+5}$

ט) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-3x^2+5}{x^2+6x+5}$

י) $\lim_{x\to \infty} (x^2-4000x)$

יא) $\lim_{x\to \infty} (4000x-x^2)$

יב) $\lim_{x\to -\infty} (4000x-x^2)$

יג) $\lim_{x\to \infty} \frac{2x-x^3-x^6}{3x^6-5x^2+1}$

יד) $\lim_{x\to \infty} \frac{(2x-3)^{30}(3x+2)^{20}}{(2x+1)^{50}}$

שאלה 6

א) $\lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

ב) $\lim_{x\to 0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

ג) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{x}\right)+1}$

ד) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{x}\right)+1}$

ה) $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$

ו) $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$

ז) $\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-x-6}{|x-3|}$

ח) $\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-x-6}{|x-3|}$

ט) $\lim_{x\to 1^+} \tan^{-1}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$

י) $\lim_{x\to 1^-} \tan^{-1}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$

יא) $\lim_{x\to 0^+} \cos\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

שאלה 7 נתונה הפונקציה $f(x) = \begin{cases} x^2-2x & x\le 3 \\ 3x-4 & x>3 \end{cases}$ האם קיים $\lim_{x\to 3} f(x)$?

שאלה 8

א) $\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{x+3}-1}{2x+4}$

ב) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-7x-18}{\sqrt{x+11}-3}$

ג) $\lim_{x\to 3} \frac{x-\sqrt{x+6}}{2x-6}$

ד) $\lim_{x\to 5} \frac{2-\sqrt{x-1}}{x^2-6x+5}$

ה) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x+2}}{2x+1}$

ו) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x+2}}{2x+1}$

ז) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3x}{x-1} - \frac{2x}{x+1}\right)$

ח) $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{4^x+2^x}$

ט) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x}$

י) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\tan(x)+2x}$

יא) $\lim_{x\to 0} \frac{5x-\sin(2x)}{3x+3\sin(4x)}$

יב) $\lim_{x\to 0} (1+2x)^{1/x}$

יג) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{3x-1}$

יד) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}\right)^{x}$

טו) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\tan(x)}{1+\sin(x)}\right)^{\frac{1}{\sin(x)}}$

שאלה 9 חשבו את ערך הגבול $\lim_{x\to\infty} \frac{6x^2+5x+3}{8x^2+6x+3}$

שאלה 10 לאילו ערכים של הפרמטר a הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin x}{x} & x<0 \\ a+\tan x & x\geq 0 \end{cases}$$

תהיה רציפה בכל קטע סגור?

שאלה 11 נתונה פונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x<0 \\ a+\sin x & x\geq 0 \end{cases}.$$

אזי הפונקציה רציפה בנקודה $x=0$ עבור איזה ערך של a.

שאלה 12 פונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot e^{\frac{1}{x-2}} & x\neq 2 \\ 0 & x=2 \end{cases}\ .$$

יש לבחור תשובה אחת:

א) רציפה לכל x ממשי

ב) בעלת אי רציפות ממין ראשון בנקודה $x=2$

ג) בעלת אי רציפות סליקה בנקודה $x=2$

ד) בעלת אי רציפות ממין שני בנקודה $x=2$

שאלה 13 חשבו את גבול הבא:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+7}\right)^{3x+7}$$

שאלה 14 חשבו את גבול הבא:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(7x)-x}{\sin(2)+7x}$$

שאלה 15 אם $f(x)$ היא פונקציה חסומה בתחום $(0,\infty)$, חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+4)f(x)}{x^2+3x+2}\ .$$

שאלה 16 חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{9\arctan(3x)+6x}-\sqrt{6}\sqrt{x}\ .$$

תשובות

שאלה 1

א) נתון: f,g פונקציות זוגיות.

צריך להוכיח: $f+g$ פונקציה זוגית.

הוכחה :

$$(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)\overset{\text{כי } f,g \text{ זוגית}}{=}f(x)+g(x)=(f+g)(x)\ .$$

ב) נתון: f,g פונקציות אי-זוגיות.

צריך להוכיח: $f+g$ פונקציה אי-זוגית.

הוכחה :

$$(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)\overset{\text{כי } f,g \text{ אי-זוגית}}{=}-f(x)-g(x)=-(f(x)+g(x))=-(f+g)(x)\ .$$

ג) נתון: f,g פונקציות זוגיות.

צריך להוכיח: $f\cdot g$ פונקציה זוגית ו- $\dfrac{f}{g}$ פונקציה זוגית.

הוכחה :

$$(f\cdot g)(-x)=f(-x)\cdot g(-x)\overset{\text{כי } f,g \text{ זוגית}}{=}f(x)\cdot g(x)=(f\cdot g)(x)\ .$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-x)=\left(\frac{f(-x)}{g(-x)}\right)\overset{\text{כי } f,g \text{ זוגית}}{=}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\left(\frac{f}{g}\right)(x)\ .$$

ד) נתון: f,g פונקציות אי-זוגיות.

צריך להוכיח: $f\cdot g$ פונקציה זוגית ו- $\dfrac{f}{g}$ פונקציה זוגית.

הוכחה :

$$(f\cdot g)(-x)=f(-x)\cdot g(-x)\overset{\text{כי } f,g \text{ אי-זוגית}}{=}[-f(x)]\cdot[-g(x)]=f(x)\cdot g(x)=(f\cdot g)(x)\ .$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-x)=\left(\frac{f(-x)}{g(-x)}\right)\overset{\text{כי } f,g \text{ אי-זוגית}}{=}\left(\frac{-f(x)}{-g(x)}\right)=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\left(\frac{f}{g}\right)(x)\ .$$

ה) דוגמה נגדית:
$f(x)=x^2$ פונקציה זוגית.
$g(x)=x$ פונקציה אי-זוגית.
$(f\cdot g)(x)=x^3$ פונקציה אי-זוגית.
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=x$ פונקציה אי-זוגית.

שאלה 2

א) נתון: f,g פונקציות עולות מונוטוניות.

צ"ל: $f+g$ עולה מונוטונית.

הוכחה: נניח $a<b$, אז $f(a)<f(b)$ וגם $g(a)<g(b)$. לכן

$$(f+g)(a)=f(a)+g(a)<f(b)+g(b)=(f+g)(b)\ .$$

נתון: f,g פונקציות יורדות מונוטוניות.

צ"ל: $f+g$ יורדת מונוטונית.

הוכחה: נניח $a<b$, אז $f(a)>f(b)$ וגם $g(a)>g(b)$. לכן

$$(f+g)(a)=f(a)+g(a)>f(b)+g(b)=(f+g)(b)\ .$$

ב) נתון: $f(x)$ עולה מונוטונית בתחום D, $f(x)>0$ לכל $x\in D$.

צ"ל: $\frac{1}{f(x)}$ יורדת מונוטונית בתחום D.

הוכחה: נקח $a<b$ בתחום D. אז $f(a)<f(b)$.
מכיוון ש- $f(a)>0$, ו- $f(b)>0$ אז

$$\left(\frac{1}{f}\right)(a)=\frac{1}{f(a)}>\frac{1}{f(b)}=\left(\frac{1}{f}\right)(b)\ .$$

שאלה 3

א)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=1$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=2$$

ב)

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

ג)

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\ .$$
$$\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)=[\infty\cdot 0]=1\ .$$

ד)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\ ,$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{1}{2}}=e^{1/2}\ .$$

שאלה 4

$\lim\limits_{x\to-\infty}=A$ אם לכל סביבה של A קיים מספר m כך שלכל $x<m$ מתקיים: $f(x)$ שייך לסביבה של A.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2+2}{x^2+1}=-3\ .$$

שאלה 5

א)

$$\lim_{x\to-2}\frac{3x+6}{x^2-4}=\lim_{x\to-2}\frac{3(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to-2}\frac{3}{(x-2)}=-\frac{3}{4}\ .$$

ב)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{(x+1)}=\frac{1}{2}\ .$$

ג)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x-3}=-1\ .$$

ד)

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{1-x^2}{2x^2+x-1}\right)=\lim_{x\to-1}\left(\frac{(1+x)(1-x)}{2(x-\frac{1}{2})(x+1)}\right)=\lim_{x\to-1}\left(\frac{1-x}{2(x-\frac{1}{2})}\right)=-\frac{2}{3}\ .$$

ה)

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3+3x^2+5x}{x^3+4x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x^2+3x+5)}{x(x^2+4)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+3x+5}{x^2+4}=\frac{5}{4}\ .$$

ו)

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\lim_{x\to3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-5)(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{x-2}{x-5}=-\frac{1}{2}\ .$$

ז)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-3x+5}{x^2+6x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{3-\frac{3}{\infty}+\frac{5}{\infty}}{1+\frac{6}{\infty}+\frac{5}{\infty}}=\frac{3+0}{1+0}=3\ .$$

ח)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+5}{x^2+6x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-3+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}=\infty\ .$$

ט)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x^2+5}{x^2+6x+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-3+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}=-\infty\ .$$

י)

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-4000x)=\lim_{x\to\infty}x(x-4000)=\infty\cdot(\infty-4000)=\infty\cdot\infty=\infty\ .$$

יא)

$$\lim_{x\to\infty}(4000x-x^2)=\lim_{x\to\infty}x(4000-x)==-\infty(4000-(-\infty))=-\infty\cdot\infty=-\infty\ .$$

יב)

$$\lim_{x\to-\infty}(4000x-x^2)=\lim_{x\to-\infty}x(4000-x)==-\infty(4000-(-\infty))=-\infty\cdot\infty=-\infty\ .$$

יג)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-x^3-x^6}{3x^6-5x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{x^5}-\frac{1}{x^3}-1}{3-\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x^6}}\right)=\frac{\frac{2}{\infty}-\frac{1}{\infty}-1}{3-\frac{5}{\infty}+\frac{1}{\infty}}=-\frac{1}{3}\ .$$

יד)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{30}(3x+2)^{20}}{(2x+1)^{50}}=\frac{2^{30}\cdot3^{20}x^{50}+\cdots}{2^{50}x^{50}+\cdots}=\frac{2^{30}3^{20}}{2^{50}}=\frac{3^{20}}{2^{20}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{20}\ .$$

שאלה 6

א)

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\infty} = \infty \ .$$

הסבר:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \ .$$

ב)

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$

הסבר: $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

ג)

הסבר:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+e^{1/0^+}} = \frac{1}{1+e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \ .$$

ד)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+e^{1/0^-}} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1 \ .$$

ה)

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{|x|}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$$

ו)

$$\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{|x|}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{-x}{x}\right) = -1$$

ז)

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-x-6}{|x-3|} = \lim_{x\to 3^+} \frac{(x+2)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} (x+2) = 5$$

הסבר:

מכיוון ש $x\to 3^+$, x נשאר גדול מ- 3. לכן $|x-3| = x-3$.

ח)

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-x-6}{|x-3|} = \lim_{x\to 3^-} \frac{(x+2)(x-3)}{-(x-3)} = \lim_{x\to 3^-} \left(\frac{x+2}{-1}\right) = -\lim_{x\to 3^-} (x+2) = -5 \ .$$

הסבר:

מכיוון ש $x\to 3^-$, x נשאר קטן מ- 3. לכן $|x-3| = -(x-3)$.

ט)

$$\lim_{x\to 1^+} \tan^{-1}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \lim_{x\to 1^+} \tan^{-1}\left(\frac{1}{(1+x)(1-x)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\cdot 0^-}\right) = \tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \ .$$

הסבר: $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x^2} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$ לכן הגבול של arctan ב- $-\infty$ שווה $-\pi/2$.

י)

$$\lim_{x\to1^-}\tan^{-1}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to1^-}\tan^{-1}\left(\frac{1}{(1+x)(1-x)}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2\cdot0^+}\right)=\tan^{-1}(\infty)=\frac{\pi}{2}\ .$$

הסבר: $\lim_{x\to1^-}\frac{1}{1-x^2}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty$ לכן הגבול של arctan ב- $+\infty$ שווה $+\pi/2$.

יא)

$$\lim_{x\to0^+}\cos\left(e^{1/x}\right)=\cos\left(e^{1/0^+}\right)=\cos\left(e^{\infty}\right)=\cos(\infty)\ .$$

הגבול לא קיים. לא קיים גבול של $\cos x$ באינסוף.

שאלה 7

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x & x\le3\\ 3x-4 & x>3\end{cases}$$

$$\lim_{x\to3^-}=\lim_{x\to3^-}(x^2-2x)=9-6=3$$

$$\lim_{x\to3^+}=\lim_{x\to3^+}(x-4)=5$$

ז"א $\lim_{x\to3^+}f(x)\neq\lim_{x\to3^-}f(x)$, לכן לא קיים $\lim_{x\to3}f(x)$.

שאלה 8

א)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}\left(\frac{\sqrt{x+3}-1}{2x+4}\right)&=\left[\frac{0}{0}\right]\\ &=\lim_{x\to-2}\left(\frac{\sqrt{x+3}-1}{2x+4}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{x+3}+1}\right)\\ &=\lim_{x\to-2}\left(\frac{(x+3)-1}{(2x+4)(\sqrt{x+3}+1)}\right)\\ &=\lim_{x\to-2}\left(\frac{x+2}{2(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}\right)\\ &=\lim_{x\to-2}\left(\frac{1}{2(\sqrt{x+3}+1)}\right)\\ &=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

ב)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^2-7x-18}{\sqrt{x+11}-3}\right) &= \left[\frac{0}{0}\right] \\
&= \lim_{x\to -2}\left(\frac{x^2-7x-18}{\sqrt{x+11}-3}\cdot\frac{\sqrt{x+11}+3}{\sqrt{x+11}+3}\right) \\
&= \lim_{x\to -2}\left(\frac{(x^2-7x-18)(\sqrt{x+11}+3)}{x+2}\right) \\
&= \lim_{x\to -2}\left(\frac{(x-9)(x+2))(\sqrt{x+11}+3)}{x+2}\right) \\
&= \lim_{x\to -2}\left(\frac{(x-9)(\sqrt{x+11}+3)}{1}\right) \\
&=(-11)\cdot(6) = -66
\end{aligned}
$$

ג)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\frac{x-\sqrt{x+6}}{2x-6} &= \left[\frac{0}{0}\right] \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{x-\sqrt{x+6}}{2x-6}\cdot\frac{x+\sqrt{x+6}}{x+\sqrt{x+6}} \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{x^2-(x+6)}{2(x-3)(x+\sqrt{x+6})} \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{2(x-3)(x+\sqrt{x+6})} \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{x+2}{2(x+\sqrt{x+6})} \\
&=\frac{5}{12}
\end{aligned}
$$

ד)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x^2-6x+5} &= \left[\frac{0}{0}\right] \\
&= \lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x^2-6x+5}\cdot\frac{2+\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}} \\
&= \lim_{x\to 5}\frac{4-(x-1)}{(x^2-6x+5)(2+\sqrt{x-1})} \\
&= \lim_{x\to 5}\frac{5-x}{(x-5)(x-1)(2+\sqrt{x-1})} \\
&= \lim_{x\to 5}\frac{-1}{(x-1)(2+\sqrt{x-1})} \\
&=\frac{-1}{4(2+2)} \\
&=\frac{-1}{16}\ .
\end{aligned}
$$

ה)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+4x+2}}{2x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{\sqrt{x^2+4x+2}}{x}\right)}{\left(\frac{2x+1}{x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{\frac{x^2+4x+2}{x^2}}}{\left(\frac{2x+1}{x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}}{\left(2+\frac{1}{x}\right)}$$
$$=\frac{-1}{2}\ .$$

הסבר: מכיוון ש $x<0$ אז

$$\sqrt{x^2}=|x|=-x\ .$$

ו)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+4x+2}}{2x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{\sqrt{x^2+4x+2}}{x}\right)}{\left(\frac{2x+1}{x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2+4x+2}{x^2}}}{\left(\frac{2x+1}{x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}}{\left(2+\frac{1}{x}\right)}$$
$$=\frac{1}{2}\ .$$

ז)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x}{x-1}-\frac{2x}{x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x(x+1)-2x(x-1)}{x^2-1}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+5x}{x^2-1}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1+\frac{5}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}\right)$$
$$=1$$

ח)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2^x}{4^x+2^x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2^x}{4^x}}{\frac{4^x}{4^x}+\frac{2^x}{4^x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{2}{4}\right)^x}{1+\left(\frac{2}{4}\right)^x}\right)$$

$$=\frac{0}{1+0}$$

$$=0$$

ט)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}=\lim_{x\to 0}3\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)=3\ .$$

י)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{\tan(x)+2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin(x)}{x}}{\frac{\tan(x)}{x}+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin(x)}{x}}{\frac{\sin(x)}{x\cdot\cos x}+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin(x)}{x}}{\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin(x)}{x}+2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1+2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\ .$$

יא)

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{5x-\sin(2x)}{3x+3\sin(4x)}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{5-\dfrac{\sin(2x)}{x}}{3+3\cdot\dfrac{\sin(4x)}{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{5-2\cdot\dfrac{\sin(2x)}{2x}}{3+3\cdot\dfrac{4\sin(4x)}{4x}}\right)$$

$$=\frac{5-2}{3+12}$$

$$=\frac{1}{5}$$

יב)

$$\lim_{x\to0}(1+2x)^{1/x}=\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot2x\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left((1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^2=\left(\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^2=e^2$$

יג) שיטה 1

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1}{3x+2}-1\right)^{3x-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1-3x-2}{3x+2}\right)^{3x-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{3x+2}\right)^{3x-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-3}\cdot\frac{-3}{3x+2}(3x-1)}$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-3}}\right]^{\lim_{x\to\infty}\frac{-3(3x-1)}{3x+2}}$$

$$=e^{-3}=\frac{1}{e^3}\ .$$

שיטה 2: החלפת משתנים

$$\frac{3x-1}{3x+2}=1+\frac{1}{\alpha}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{\alpha}=\frac{3x-1}{3x+2}-1=\frac{3x-1-3x-2}{3x+2}=\frac{-3}{3x+2}\quad\Rightarrow\quad\alpha=\frac{3x+2}{-3}\ .$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{3x-1} = \lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha(3x-1)}{\alpha}}$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}\right)^{\frac{(3x-1)}{\alpha}}$$

$$= \left(\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}\right)^{\lim_{x\to\infty}\frac{(3x-1)}{\alpha}}$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{(3x-1)}{\alpha}}$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-3(3x-1)}{3x+2}}$$

$$= e^{-3} \ .$$

יד) שיטה 1

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}-1\right)^{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+2x+2-x^2-3}{x^2+3}\right)^{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-1}\cdot\frac{2x-1}{x^2+3}\cdot x}$$

$$= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-1}}\right]^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^2+3}\cdot x}$$

$$= [e]^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+3}}$$

$$= e^{2} \ .$$

שיטה 2: החלפת משתנים

$$1+\frac{1}{\alpha} = \frac{x^2+2x+2}{x^2+3} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\alpha} = \frac{x^2+2x+2}{x^2+3}-1 = \frac{x^2+2x+2-x^2-3}{x^2+3} = \frac{2x-1}{x^2+3} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \frac{x^2+3}{2x-1} \ .$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}\right)^x &= \lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha\cdot x/\alpha} \\
&= \lim_{\alpha\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}\right)^{x/\alpha} \\
&= \left(\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}\right)^{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\alpha}} \\
&= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\alpha}} \\
&= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{x(2x-1)}{x^2+3}} \\
&= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+3}} \\
&= e^2\ .
\end{aligned}$$

טו) שיטה 1

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan(x)}{1+\sin(x)}\right)^{\dfrac{1}{\sin(x)}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1+\tan(x)}{1+\sin(x)}-1\right)^{\dfrac{1}{\sin(x)}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1+\tan(x)-1-\sin x}{1+\sin(x)}\right)^{\dfrac{1}{\sin(x)}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\tan(x)-\sin x}{1+\sin(x)}\right)^{\dfrac{1}{\sin(x)}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\tan(x)-\sin x}{1+\sin(x)}\right)^{\dfrac{1+\sin(x)}{\tan(x)-\sin x}\cdot\dfrac{\tan(x)-\sin x}{1+\sin(x)}\cdot\dfrac{1}{\sin(x)}}$$

$$= \left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\tan(x)-\sin x}{1+\sin(x)}\right)^{\dfrac{1+\sin(x)}{\tan(x)-\sin x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)-\sin x}{1+\sin(x)}\cdot\dfrac{1}{\sin(x)}}$$

$$= [e]^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\tan(x)-\sin x)}{\sin x(1+\sin x)}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\frac{1}{\cos x}-1)}{1+\sin(x)}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\frac{1}{\cos 0}-1)}{1+\sin(0)}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-1)}{1}}$$

$$= e^0 = 1\ .$$

שיטה 2: החלפת משתנים

$$1+\alpha = \frac{1+\tan(x)}{1+\sin(x)} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \frac{1+\tan(x)}{1+\sin(x)} - 1 = \frac{1+\tan(x)-1-\sin(x)}{1+\sin(x)} = \frac{\tan(x)-\sin(x)}{1+\sin(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan(x)}{1+\sin(x)}\right)^{\dfrac{1}{\sin(x)}} = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\dfrac{\alpha}{\alpha\sin(x)}}$$
$$= \lim_{\alpha\to 0}\left((1+\alpha)^{1/\alpha}\right)^{\dfrac{\alpha}{\sin(x)}}$$
$$= \left(\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{\sin(x)}}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{\sin(x)}}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{\sin(x)}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin x\,(1+\sin(x))} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan(x)}{\sin x}-1}{1+\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{1+\sin(x)} = \frac{\frac{1}{\cos 0}-1}{1+\sin(0)} = \frac{1-1}{1+\sin(0)} = 0\ .$$

לפיכך

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan(x)}{1+\sin(x)}\right)^{\dfrac{1}{\sin(x)}} = e^0 = 1\ .$$

<u>שאלה 9</u> תשובה סופית: $\frac{3}{4}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+5x+3}{8x^2+6x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{6x^2+5x+3}{x^2}\right)}{\left(\frac{8x^2+6x+3}{x^2}\right)}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{6x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{3}{x^2}\right)}{\left(\frac{8x^2}{x^2}+\frac{6x}{x^2}+\frac{3}{x^2}\right)}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{8+\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{5}{\infty}+\frac{3}{\infty}}{8+\frac{6}{\infty}+\frac{3}{\infty}}$$
$$= \frac{6+0+0}{8+0+0}$$
$$= \frac{6}{8}$$
$$= \frac{3}{4}\ .$$

שאלה 10 הפונקציה רציפה ב- $x=0$ אם

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \ .$$

$f(0)=a+\tan(0)=a$,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x}{x} = 2 \ .$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = a+\tan x = a+\tan(0) = a \ .$$

לכן

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \qquad \Rightarrow \qquad a=2 \ .$$

שאלה 11

הפונקציה רציפה ב- $x=0$ אם

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \ .$$

$f(0)=a+\sin(0)=a$,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \ .$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = a+\sin x = a+\sin(0) = a \ .$$

לכן

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \qquad \Rightarrow \qquad a=1 \ .$$

שאלה 12

$$\lim_{x\to 2^-} = \lim_{x\to 2^-} xe^{\frac{1}{x-2}} = 2e^{\frac{1}{2-2^-}} = 2e^{\frac{1}{0^+}} = 2e^{\infty} = \infty \ .$$

$$\lim_{x\to 2^+} = \lim_{x\to 2^+} xe^{\frac{1}{x-2}} = 2e^{\frac{1}{2-2^+}} = 2e^{\frac{1}{0^-}} = 2e^{-\infty} = 0 \ .$$

$$f(0)=2 \ .$$

קיבלנו כי

$$\lim_{x\to 2^-} \neq \lim_{x\to 2^+} = f(2=0)$$

לכן הנקודה $x=2$ היא נקודת אי רציפות ממין שני.

שאלה 13

$$\Rightarrow \quad \frac{x+1}{x+7} = 1+\frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+1}{x+7} - 1 = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+1}{x+7} - \frac{x+7}{x+7} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+1-(x+7)}{x+7} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-6}{x+7} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{x+7}{-6} \ .$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+7}\right)^{3x+7} &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha\cdot\frac{3x+7}{\alpha}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{3x+7}{\alpha}} \\
&= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+7}{\alpha}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6(3x+7)}{x+7}} \\
&= e^{-18} \ .
\end{aligned}$$

<u>שאלה 14</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(7x)-x}{\sin(2x)+7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan(7x)}{\sin(2x)}-\frac{x}{\sin(2x)}}{\frac{\sin(2x)}{\sin(2x)}+\frac{7x}{\sin(2x)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan(7x)}{\sin(2x)}-\frac{x}{\sin(2x)}}{1+\frac{7x}{\sin(2x)}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(7x)}{\sin(2x)}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin(2x)}}{1+\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x}{\sin(2x)}}$$

$$=\frac{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}}{1+\frac{7}{2}}$$

$$=\frac{\frac{6}{2}}{\frac{9}{2}}$$

$$=\frac{6}{9}$$

$$=\frac{2}{3}\ .$$

שאלה 15

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+4)f(x)}{x^2+3x+2}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x+4}{x^2+3x+2}\right)\cdot\left(\lim_{x\to\infty}f(x)\right)$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+4}{x^2+3x+2}=0$ כי גבול ב- ∞ של פונקציה רציונלית אמיתית שווה 0.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$ כאשר $c\in\mathbb{R}$ מספר סופי כי הגבול ב- ∞ של פונקציה חסומה שווה למשפר סופי. לכן

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+4)f(x)}{x^2+3x+2}=0\cdot c=0\ .$$

שאלה 16 הפונקציה בהגבול היא $\sqrt{9\arctan(3x)+6x}-\sqrt{6}\sqrt{x}$. נכפיל אותה ב $\frac{\sqrt{9\arctan(3x)+6x}+\sqrt{6}\sqrt{x}}{\sqrt{9\arctan(3x)+6x}+\sqrt{6}\sqrt{x}}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9\arctan(3x)+6x}-\sqrt{6}\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{9\arctan(3x)+6x}-\sqrt{6}\sqrt{x}\right)}{\sqrt{9\arctan(3x)+6x}+\sqrt{6}\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{9\arctan(3x)+6x-6x}{\sqrt{9\arctan(3x)+6x}+\sqrt{6}\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{9\arctan(3x)}{\sqrt{9\arctan(3x)+6x}+\sqrt{6}\sqrt{x}}$$

$$=\frac{9\lim\limits_{x\to\infty}\arctan(3x)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}9\arctan(3x)+\lim\limits_{x\to\infty}6x}+\sqrt{6}\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}}$$

$$=\frac{9\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+\infty}+\sqrt{6}\sqrt{\infty}}$$

$$=\frac{9\frac{\pi}{2}}{\infty}$$

$$=0$$