1 שאלה.
מספר תלונות שמקבל משרד מתפלג פואסונית בקצב של 5 תלונות ביום.

(א) מהו הסיכוי שביום מסוים תתקבל לפחות תלונה אחת.

(ב) אחראית המשרד מעוניינת לחשב את הסיכוי כי בשבוע הכולל רק 6 ימי עבודה תתקבל בכל יום לפחות תלונה אחת. חשבו סיכוי זה.

פיתרון.

(א) מגדירים X להיות " מספר תלונות ביום ". $X \sim P(\lambda = 5)$. עבור התפלגות זו,

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \ .$$

לכן

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{e^{-5}5^0}{0!} = 0.993 \ .$$

(ב) מדובר בעצם בהתפלגות בינומית:

$$Y \sim \text{Bin}(n = 6, p = 0.993) \ .$$

הנוסחאה להסתברות כי $Y = k$ היא

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \ ,$$

כאשר $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ ורוצים

$$P(Y = 6) = \binom{6}{6} (0.993)^6 (0.007)^0 = (0.993)^6.$$

■

2 שאלה.
נתונה הפונקציה הסתברות של משתנה מקרי בדיד שמקבל את הערכים

k	0	1	2
$P(X = k)$	0.859375	p^3	p^6

(א) מצאו את p.

(ב) חשבו את $E[2X-1]$ ו- $V[2X-1]$.

פיתרון.

(א) סכום ההסתברויות שווה 1:

$$\sum_k P(X = k) = 1 \quad \Rightarrow \quad 0.859375 + p^3 + p^6 = 1$$

יהי $t = p^3$ כך ש $p^6 = t^2$. אזי

$$0.859375 + t + t^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad t^2 + t - \frac{9}{64} = 0 \quad \Rightarrow \quad (t - \tfrac{1}{8})(t + \tfrac{9}{8}) = 0 \ .$$

לכן $t = \frac{1}{8}$ והשורש השני נדחה בגלל הוא שלילי ואף ערך של הסתברות חייב להיות חיובי! מקבלים

$$p^3 = \frac{1}{8} \ \Rightarrow \ p = \frac{1}{2} \ .$$

(ב) ע"י התכונה הליניארית של התוחלת, קרי $E[aX+b]=aE[X]+b$ מקבלים $E[2X-1]=2E[X]-1$, אזי הבעיה היא לחשב את $E[X]$:

$$E[X]=0\times 0.859375+1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{64}=\frac{5}{32}\ ,$$

ולכן

$$E[2X-1]=\frac{2\times 5}{32}-1=\frac{-22}{32}=-\frac{11}{16}\ .$$

להיעזר מהתכונה $V[aX+b]=a^2V[X]$ מקבלים

$$V[2X-1]=4V[X]\ .$$

ניתן לחשב ההשונות על ידי

$$V[X]=E[X^2]-(E[X])^2\ .$$

מקבלים

$$E[X^2]=\sum_k k^2P(X=k)=0^2\times 0.859372+1^2p^3+2^2p^6=\frac{1}{8}+\frac{4}{64}=\frac{3}{16}\ ,$$

ומהתשובה של הסעיף הקודם, $(E[X])^2=\frac{25}{1024}$. לכן

$$V[X]=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{3}{16}-\frac{25}{1024}=\frac{192-25}{1024}=\frac{167}{1024}\ ,$$

ו-

$$V[2X-1]=4V[X]=\frac{167}{256}\ .$$

■

3 שאלה.

שיר עובדת בבנק והיא מציגה ללקוחות שלה אפיקי השקעה.

- עבור אפיק א' תקבלו רווח של 10 ₪ בסיכוי $\frac{2}{5}$ להיות באפיק זה.
- עבור אפיק ב' לא תרוויחו כלום בסיכוי $\frac{1}{5}$ להיות באפיק זה.
- עבור אפיק ג' תפסידו 5 ₪ בסיכוי $\frac{2}{5}$ להיות באפיק זה.

האם תוחלת הרווח של ההצעה של שיר חיובית או שלילית.

פיתרון.

פתרון

נבנה פונקציית הסתברות:

k	10	0	-5
$P(X=k)$	$2/5$	$1/5$	$2/5$

$$\Rightarrow\quad E[X]=10\times\frac{2}{5}+0\times\frac{1}{5}-5\times\frac{2}{5}=2>0$$

קבלנו תוחלת חיובית. ■

4 שאלה.

בין 2 אתרים באזור הצפון ישנם 5 מסלולי טיול שונים. קבוצת מטיילים יוצאת בבוקר מאתר א' לאתר ב' ובערב שבה בחזרה אל אתר א'.

(א) על מנת שיוכלו להינות מנוף שונה, הקבוצה לא שבה באותה הדרך בדרך חזרה. כמה אפשריות של מסלולי טיול שונים ניתן להציע לקבוצה המטיילים כך שהיא תשוב בערב לאתר א'?

(ב) בעת הארוחה במקום הלינה אשר נמצא באתר א', המדריך סיפר כי בדרך חזרה הנוף נראה אחרת, ועל כן ניתן לחזור גם באותה הדרך שבה הם הגיעו. כעת כמה אפשרויות שונות של מסלולי טיול ניתן להציע לקבוצת המטיילים כך שהיא תשוב בערב לאתר א?

פיתרון.

(א) התשובה ניתנת ע"י הנוסחאה ללא החזרה עם חשיבות לסדר היא $\frac{n!}{(n-k)!}$. במקרה זה $n=5$ ו- $k=2$, לכן המספר הדרכים הוא

$$\frac{5!}{(5-2)!}=\frac{5!}{3!}=20\ .$$

(ב) התשובה ניתנת ע"י הנוסחאה עם החזרה עם חשיבות לסדר היא n^k. במקרה זה $n=5$ ו- $k=2$, לכן המספר הדרכים הוא

$$5^2=25\ .$$

■

5 שאלה.

נתונה ההסתברויות הבאות,

$$P(X)=0.75,\quad P(Y)=0.5,\quad P(Y|\bar{X})=0.4,$$

חשבו

(א) $P(X|\bar{Y})$

(ב) $P(X\cup Y)$

(ג) $P(X\cap Y)$

(ד) האם X ו- Y הינם מאורעות תלויים?

פיתרון.

לפי החוק של בייס $P(A|B)=\dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$ לכן

$$P(Y|\bar{X})=\frac{P(\bar{X}|Y)P(Y)}{P(\bar{X})}=0.4\quad\Rightarrow\quad 0.4=\frac{P(\bar{X}|Y)0.5}{0.25}\quad\Rightarrow\quad P(\bar{X}|Y)=0.2\ .$$

הכלל הכפל אומר ש

$$P(\bar{X}\cap Y)=P(\bar{X}|Y)P(Y)=0.2\times 0.5=0.1\ .$$

אבל

$$P(\bar{X}\cap Y)=P(Y)-P(X\cap Y)$$

לכן

$$P(X\cap Y)=P(Y)-P(\bar{X}\cap Y)=0.5-0.1=0.4\qquad\blacksquare$$

עם תוצאה זו ניתן לחשב את $P(X\cup Y)$ ע"י

$$P(X\cup Y)=P(X)+P(Y)-P(X\cap Y)=0.75+0.5-0.4=0.85\qquad\blacksquare\ .$$

לחשב $P(X|\bar{Y})$ שימו לב כי

$$P(X\cap\bar{Y})=P(X)-P(X\cap Y)=0.75-0.4=0.35\ ,$$

אזי

$$P(X|\bar{Y}) = \frac{P(X \cap \bar{Y})}{P(\bar{Y})} = \frac{0.35}{0.5} = 0.7 \ .$$

כדי לבדוק מאורעות תלויים נבדוק

$$P(X).P(Y) \stackrel{?}{=} P(X \cap Y)$$

קיבלנו

$$0.75 \times 0.5 \neq 0.4$$

לכן X ו- Y הינם מאורעות תלויים! ■

6 שאלה.
חלקיקים נפלטים מחומר רדיואקטיבי בתהליך פואסון עם קצב של 0.5 חלקיקים לשנייה. חשבו את ההסתברויות הבאות:

(א) ייפלט לפחות חלקיק אחד בשנייה נתונה.

(ב) ייפלטו יותר מ-3 חלקיקים ב-5 שניות.

פיתרון.
התהליך בשאלה הוא תהליך פואסון בעל פרמטר $\lambda = 0.5$ לכן

(א)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - e^{-0.5}\frac{0.5^0}{0!} = 0.393 \ .$$

(ב) כעת בשאלה הוא תהליך פואסון שונה בעל פרמטר $\lambda = 5 \times 0.5 = 2.5$:

$$\begin{aligned} P(X_5 > 3) =& 1 - P(X_5=0) - P(X_5=1) - P(X_5=2) - P(X_5=3) \\ =& 1 - e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^0}{0!} - e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^1}{1!} - e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^2}{2!} - e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^3}{3!} \\ =& 1 - e^{-2.5}\frac{(2.5)^0}{0!} - e^{-2.5}\frac{(2.5)^1}{1!} - e^{-2.5}\frac{(2.5)^2}{2!} - e^{-2.5}\frac{(2.5)^3}{3!} \\ =& 0.242 \end{aligned}$$

■

7 שאלה.
נתונה פונקציה צפיפות של משתנה מקרי רציף X:

$$f(X) = \begin{cases} 0 & X < -1 \\ c(1-X^4) & -1 \leq X \leq 0 \\ c(1-X^3) & 0 \leq X \leq 1 \\ 0 & X > 1 \end{cases}$$

(א) מצאו את c

(ב) חשבו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של $f(X)$.

פיתרון.

(א)

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dX\, f(X) = \int_{-1}^{0} dX\, c(1-X^4) + \int_0^1 dX\, c(1-X^3) = 1,\\
\Rightarrow\quad & c\left[X - \frac{X^5}{5}\right]_{-1}^{0} + c\left[X - \frac{X^4}{4}\right]_0^1 = 1,\\
\Rightarrow\quad & -c\left((-1) - \frac{(-1)^5}{5}\right) + c\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 1,\\
\Rightarrow\quad & \frac{4}{5}c + \frac{3}{4}c = 1,\\
\Rightarrow\quad & \frac{31}{20}c = 1,\\
\Rightarrow\quad & c = \frac{20}{31}\ .
\end{aligned}
$$

(ב) פונקציית התפלגות מצטברת מוגדרת להיות

$$F_X(k) = \int_{-\infty}^{k} dX\, f(X)\ .$$

יש 4 אופציות המתאימות ל4 קטעים של הטווח האינטרציה:

(1) עבור $k < -1$:

$$F_X(k) = \int_{-\infty}^{k} dX\, f(X) = \int_{-\infty}^{k} dX\, 0 = 0$$

בגלל ש $f(X) = 0$ בכל הקטע כולו אשר בו $X < -1$.

(2) עבור $-1 \le k \le 0$, שימו לב, לפי ההגדרה של פונקציית התפלגות מצטברת, אף על פי שאנחנו רוצים לחשב אותו בקטע ש $-1 \le k \le 0$, עדיין יש צורך לכלול הערכו בקטע לפני גם, שבו $k < -1$:

$$
\begin{aligned}
F_X(k) &= \int_{-\infty}^{k} dX\, f(X) = \int_{-\infty}^{-1} dX\, f(X) + \int_{-1}^{k} dX\, f(X)\\
&= \int_{-\infty}^{-1} dX\, 0 + \int_{-1}^{k} c(1-X^4)\\
&= c\left[X - \frac{X^5}{5}\right]_{-1}^{k}\\
&= c\left(k - \frac{k^5}{5}\right) - c\left((-1) - \frac{(-1)^5}{5}\right)\\
&= c\left(k - \frac{k^5}{5}\right) - \frac{4}{5}c
\end{aligned}
$$

(3) עבור $0 \le k \le 1$, אף על פי שאנחנו רוצים לחשב אותו בקטע ש $0 \le k \le 1$, עדיין יש צורך לכלול

הערכו בקטעים לפני גם, שבהם $k < -1$ ו- $-1 \leq k \leq 0$:

$$\begin{aligned}
F_X(k) &= \int_{-\infty}^{k} dX\, f(X) = \int_{-\infty}^{-1} dX\, f(X) + \int_{-1}^{0} dX\, f(X) + \int_{0}^{k} dX\, f(X) \\
&= \int_{-\infty}^{-1} dX\, 0 + \int_{-1}^{0} c(1-X^4) + \int_{0}^{k} dX\, c(1-X^3) \\
&= c\left[X - \frac{X^5}{5}\right]_{-1}^{0} + c\left[X - \frac{X^4}{4}\right]_{0}^{k} \\
&= -c\left((-1) - \frac{(-1)^5}{5}\right) + c\left(k - \frac{k^4}{4}\right) \\
&= \frac{4}{5}c + c\left(k - \frac{k^4}{4}\right) \ .
\end{aligned}$$

כאשר $c = \frac{21}{30}$.

$$F_X(k) = \begin{cases} 0 & k < -1 \\ \frac{20}{31}\left(k - \frac{k^5}{5} - \frac{4}{5}\right) & -1 \leq k \leq 0 \\ \frac{20}{31}\left(\frac{4}{5} + k - \frac{k^4}{4}\right) & 0 \leq k \leq 1 \\ 1 & k > 1 \end{cases}$$

(ג) כאשר $k > 1$,

$$F_X(k) = \int_{-\infty}^{-1} dX\, f(X) + \int_{1}^{k} dX\, f(X) + \int_{0}^{1} dX\, f(X) + \int_{-1}^{0} dX\, f(X) = 1$$

■

8 שאלה.
כמות המשקעים השנתית בעיר מסוימת מתפלגת נורמלית עם תוחלת של 500 מ"מ וסטיית התקן של 129 מ"מ

(א) מהי ההסתברות שירדו למעלה מ-600 מ"מ משקעים בשנה?

(ב) שנה מוגדרת כבצורת אם כמות המשקעים ממקמת אותה ב 15% התחתונים של התפלגות המשקעים. כמה מ"מ משקעים צריכים לרדת בעיר בשנה על מנת שהשנה תוגדר כשנה בצורת?

(ג) אם ידוע כי שנה מסוימת הייתה שנת בצורת, מהי ההסתברות שירדו בה יותר מ 350 מ"מ משקעים?

פיתרון.

(א) $X \sim N(500, 129^2)$.

$$P(X > 600) = P\left(Z > \frac{600-500}{129}\right) = P(Z > 0.78) = 1 - P(Z \leq 0.78) = 1 - \Phi(0.78) = 1 - 0.7823 = 0.2177\ .$$

(ב) $P(X < \alpha) = 0.15$.

$$\begin{aligned}
P(X < \alpha) &= 0.15. \quad \alpha = ? \\
P\left(Z < \frac{\alpha - 500}{129}\right) &= 0.15 \\
\Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{\alpha - 500}{129}\right) &= 0.15
\end{aligned}$$

לפי כלל $1-\Phi(\alpha)=\Phi(-\alpha)$ אזי

$$\begin{aligned}
1-\Phi\left(\frac{\alpha-500}{129}\right) =& 1-0.15\\
\Phi\left(\frac{500-\alpha}{129}\right) =& 0.85\\
\frac{500-\alpha}{129} =& Z=1.04
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad 500-\alpha=129\times 1.04=365.84$ מ"מ

(ג)

$$\begin{aligned}
P(X>350|X<365.84) =& \frac{P(X>350\cap X<365.84)}{P(X<365.84)}\\
=& \frac{P(350<X<365.84)}{P(X<365.84)}\\
=& \frac{\Phi\left(\frac{365.84-500}{129}\right)-\Phi\left(\frac{350-500}{129}\right)}{0.15}\\
=& \frac{\Phi\left(-1.04\right)-\Phi\left(-1.16\right)}{0.15}\\
=& \frac{1-\Phi\left(1.04\right)-\left(1-\Phi\left(1.16\right)\right)}{0.15}\\
=& \frac{\Phi\left(1.16\right)-\Phi\left(1.04\right)}{0.15}\\
=& \frac{0.8770-0.85}{0.15}\\
=& 0.175\ .
\end{aligned}$$

■