

שעור 6

הרצאה 6: מקסמין באסטרטגיות מעורבות

דוגמה 6.1 (ערך המקסמין של משחק סכום אפס באסטרטגיות מעורבות)

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס.

| $I \backslash II$ | L | R |
|-------------------|-----|-----|
| T | 4 | 1 |
| B | 2 | 3 |

(א) מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות טהורות.

(ב) מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

(א)

| $I \backslash II$ | L | R | $\min_{s_2 \in S_2}$ |
|----------------------|-----|-----|----------------------|
| T | 4 | 1 | 1 |
| B | 2 | 3 | 2 |
| $\max_{s_1 \in S_1}$ | 4 | 3 | 2, 3 |

ערך המקסמין של שחקן 1:

$$\underline{v} = \max_{s_1 \in \{T, B\}} \min_{s_2 \in \{L, R\}} = 2.$$

ז"א שחקן 1 יכול להבטיח שיקבל לפחות 2 אם הוא ישחק B .

ערך המינימקס של שחקן 2:

$$\bar{v} = \min_{s_2 \in \{L, R\}} \max_{s_1 \in \{T, B\}} = 3.$$

ז"א שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר 3 אם הוא ישחק R .

$$\bar{v} = 3 > 2 = \underline{v}.$$

למשחק אין ערך.

(ב) כאשר לשחקן 1 יש שתי אסטרטגיות טהורות T ו- B , נזהה את האסטרטגיה המעורבת

$$[x(T), (1-x)(B)]$$

עם ההסתברות x שבה נבחרת האסטרטגיה הטהורה T .
באופן דומה, כאשר יש לשחקן 2 יש שתי אסטרטגיות טהורות L ו- R , נזהה את האסטרטגיה המעורבת

$$[y(L), (1-y)(R)]$$

עם ההסתברות y שבה נבחרת האסטרטגיה הטהורה L .

לכל זוג אסטרטגיות מעורבות התשלום ניתן על ידי פונקצית התועלת

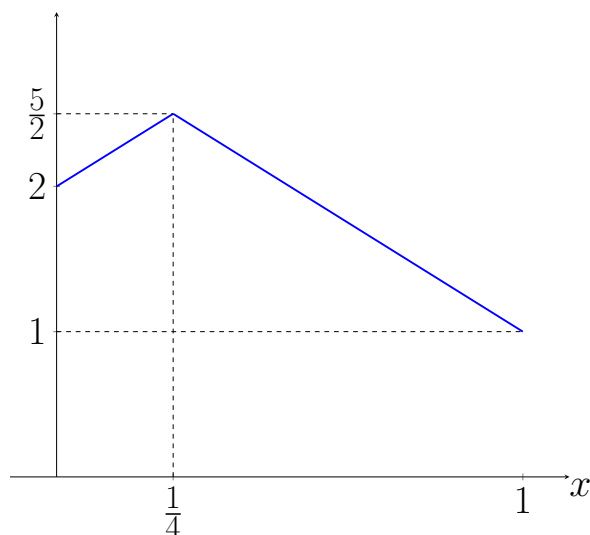
$$U(x, y) = 4xy + 1x(1-y) + 2(1-x)y + 3(1-x)(1-y) = 4xy - 2x - y + 3.$$

ראשית נחשב לכל $x \in [0, 1]$ את

$$\min_{y \in [0,1]} U(x, y) = \min_{y \in [0,1]} (4xy - 2x - y + 3) = \min_{y \in [0,1]} (y(4x - 1) - 2x + 3)$$

עבור x קבוע זוהי פונקציה לינארית ב- y , ולכן הנקודה שבה המינימום מתקבל נקבעת לפי השיפוע $4x - 1$.
אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה והמינימום מתקבל ב- $y = 0$.
אם השיפוע שלילי הפונקציה יורדת והמינימום מתקבל ב- $y = 1$.
אם השיפוע 0 הפונקציה קבועה וכל הנקודות הן נקודות מינימום. לכן

$$\min_{y \in [0,1]} u(x, y) = \begin{cases} 2x + 2 & x \leq \frac{1}{4}, \\ -2x + 3 & x \geq \frac{1}{4}, \end{cases}$$

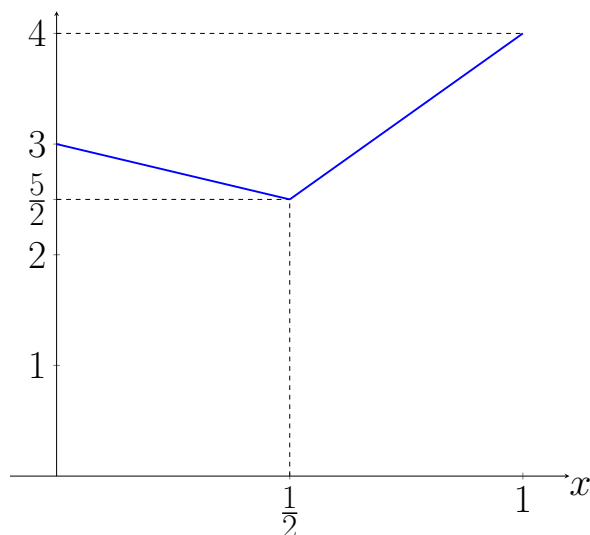


לפונקציה זו של x יש מקסימום יחיד ב- $x = \frac{1}{4}$ וערכו $\frac{5}{2}$. לכן

$$\underline{v} = \max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} U(x, y) = \frac{5}{2}.$$

באופן דומה נחשב:

$$\begin{aligned}\max_{x \in [0,1]} U(x, y) &= \max_{x \in [0,1]} [4xy - 2x - y + 3] \\ &= \max_{x \in [0,1]} [x(4y - 2) - y + 3] \\ &= \begin{cases} -y + 3 & y \leq \frac{1}{2}, \\ 3y + 1 & y \geq \frac{1}{2}, \end{cases}\end{aligned}$$



לפונקציה זו של y יש מינימום יחיד ב- $y = \frac{1}{2}$ וערכו $\frac{5}{2}$. לכן

$$\bar{v} = \min_{y \in [0,1]} \max_{x \in [0,1]} U(x, y) = \frac{5}{2}.$$

כלומר, למשחק יש ערך $\bar{v} = \underline{v} = v = \frac{5}{2}$, והאסטרטגיות האופטימליות הן $x^* = \frac{1}{4}$, $y^* = \frac{1}{2}$.

מכיוון ש- x^* ו- y^* הן אסטרטגיות האופטימליות היחידות של השחקנים, אז (x^*, y^*) הוא שיווי המשקל נאש היחיד במשחק.

■

דוגמה 6.2 (מקסמין של משחק שני שחקנים באסטרטגיות מעורבות)

נתון משחק שני שחקנים (שאינו סכום אפס) בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

| $I \backslash II$ | L | R |
|-------------------|---------|--------|
| T | $1, -1$ | $0, 2$ |
| B | $0, 1$ | $2, 0$ |

מצאו התשלום מקסמין והתשלום מינקס באסטרטגיות מעורבות.

ראשית נחשב את התשלום מקסמין של השחקנים.

קבוצות האסטרטגיות של שחקן 1:

$$\Sigma_1 = \{[x(T), (1-x)(B)] \text{ , } x \in [0, 1]\} \text{ .}$$

המזוהה עם הקטע $[0, 1]$.

קבוצות האסטרטגיות של שחקן 2:

$$\Sigma_2 \{[y(L), (1-y)(R)] \text{ , } y \in [0, 1]\} \text{ .}$$

פונקצית התועלת של שחקן 1:

$$U_1(x, y) = xy + 2(1-x)(1-y) = 3xy - 2x - 2y + 2 \text{ .}$$

פונקצית התועלת של שחקן 2:

$$U_2(x, y) = -xy + 2x(1-y) + y(1-x) = -4xy + 2x + y \text{ .}$$

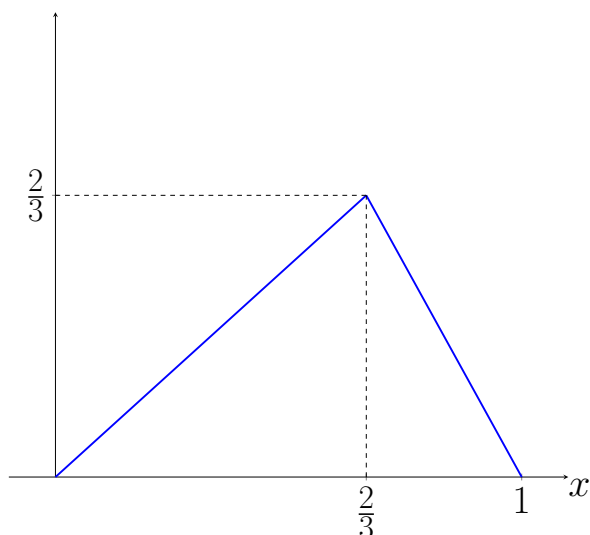
התשלום מקסמין של שחקן 1 הינו:

$$\underline{v}_1 = \max_{x \in [0, 1]} \min_{y \in [0, 1]} U_1(x, y) \text{ .}$$

התשלום מקסמין של שחקן 2 הינו:

$$\underline{v}_2 = \max_{y \in [0, 1]} \min_{x \in [0, 1]} U_2(x, y) \text{ .}$$

$$\begin{aligned} \min_{y \in [0, 1]} U_1(x, y) &= \min_{y \in [0, 1]} 3xy - 2x - 2y + 2 \\ &= \min_{y \in [0, 1]} y(3x - 2) - 2x + 2 \\ &= \begin{cases} x & x \leq \frac{2}{3} \\ -2x + 2 & x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \end{aligned}$$



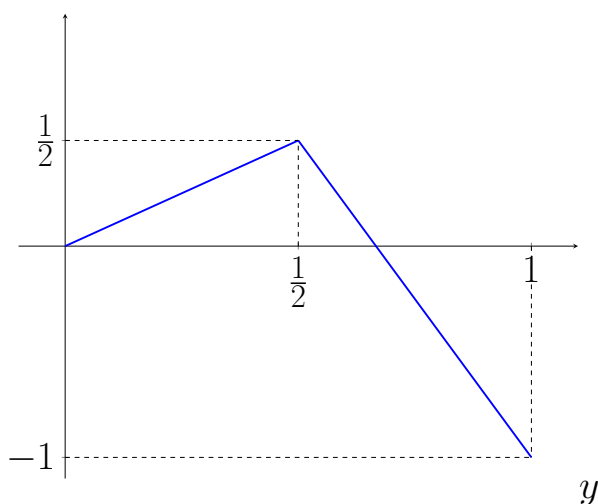
לפונקציה זו יש מקסימום ב- $x = \frac{2}{3}$. לפיכך

$$\underline{v}_1 = \max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} U_1(x, y) = \frac{2}{3}.$$

התשלום מקסמין של שחקן 2 הינו:

$$\underline{v}_2 = \max_{y \in [0,1]} \min_{x \in [0,1]} U_2(x, y).$$

$$\begin{aligned} \min_{x \in [0,1]} U_2(x, y) &= \min_{x \in [0,1]} 3xy - 2x - 2y + 2 \\ &= \min_{x \in [0,1]} x(2 - 4y) + y \\ &= \begin{cases} y & y \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 3y & y \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$



לפונקציה זו יש מקסימום ב- $y = \frac{1}{2}$. לפיכך

$$\underline{v}_2 = \max_{y \in [0,1]} \min_{x \in [0,1]} U_2(x, y) = \frac{1}{2}.$$

■

דוגמה 6.3 (ערך ואסטרטגיה אופטימלית של משחק סכום אפס באסטרטגיות מעורבות)

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

| $I \backslash II$ | | L | R |
|-------------------|--|-----|-----|
| | | | |
| T | | 5 | 0 |
| B | | 3 | 4 |

מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

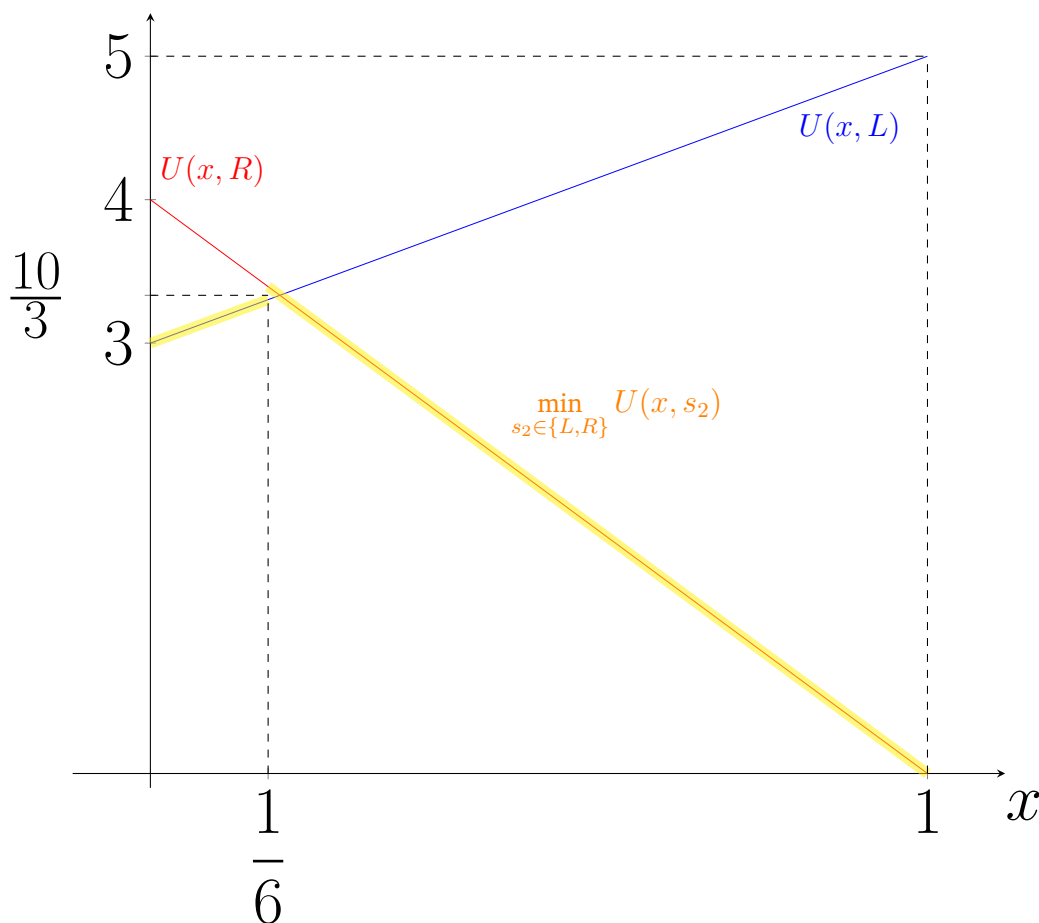
פתרון:

תחילה נחשב את המקסמין של שחקן 1. אם שחקן 1 משחק את האסטרטגיה המעורבת $[x(T), (1-x)(B)]$ התשלום שלו כפונקציה של x תלוי על האסטרטגיה של שחקן 2:

• אם שחקן 2 משחק L אז $U(x, L) = 5x + 3(1-x) = 2x + 3$.

• אם שחקן 2 משחק R אז $U(x, R) = 4(1-x) = -4x + 4$.

הגרף למטה מראה את הגרפים של הפונקציות האלו. הקו של $\min_{s_2 \in \{L, R\}} U(x, s_2)$ מראה את התשלום המינימלי ששחקן 1 יקבל אם הוא משחק x . הקו הזה נקרא **מעטפת תחתונה** של התשלומים.



הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות שווה ל- $\max_{x \in [0, 1]} \min_{s_2 \in \{L, R\}} U(x, s_2)$, אשר מתקבל בנקודת מקסימום של המעטפת התחתונה. המקסימום מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של שתי הפונקציות, כלומר בנקודה

$$2x + 3 = -4x + 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{6}.$$

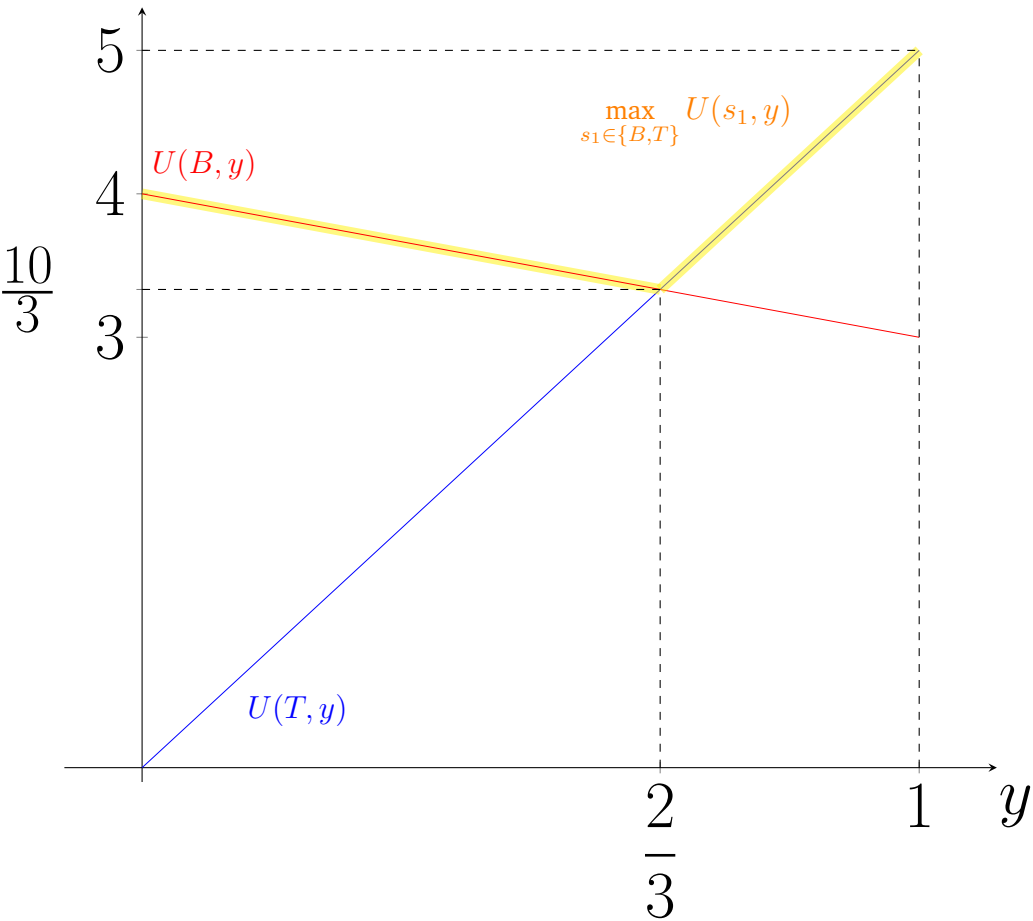
מכאן האסטרטגיה האופטימלית של שחקן 1 היא $x^* = \left(\frac{1}{6}(T), \frac{5}{6}(B)\right)$. הערך של המשחק שווה לגובה של הנקודת חיתוך: $v = \frac{10}{3}$.

כעת נחשב את המינימקס של שחקן 2. אם שחקן 2 משחק את האסטרטגיה המעורבת $[y(L), (1-y)(R)]$ התשלום שלו כפונקציה של y תלוי על האסטרטגיה של שחקן 1:

• אם שחקן 1 משחק T אז $U(T, y) = 5y$.

• אם שחקן 1 משחק B אז $U(B, y) = 4 - y$.

הגרף למטה מראה את הגרפים של הפונקציות האלו. הקו של $\max_{s_1 \in \{B, T\}} U(s_1, y)$ מראה את התשלום המקסימלי ששחקן 2 יקבל אם הוא משחק y . הקו הזה נקרא **מעטפת עליונה** של התשלומים.



הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות שווה ל- $\min_{y \in [0, 1]} \max_{s_1 \in \{B, T\}} U(s_1, y)$, אשר מתקבל בנקודת מינימום של המעטפת העליונה. המינימום מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של שתי הפונקציות, כלומר בנקודה

$$5y = 4 - y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}.$$

מכאן האסטרטגיה האופטימלית של שחקן 2 היא $y^* = \left(\frac{2}{3}(L), \frac{1}{3}(R)\right)$. הערך של המשחק שווה לגובה של הנקודת

חיתוך: $v = \frac{10}{3}$. ■

דוגמה 6.4 ()

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

| $I \backslash II$ | L | M | R |
|-------------------|-----|-----|-----|
| T | 2 | 5 | -1 |
| B | 1 | -2 | 5 |

מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

נחשב את המקסימין של שחקן 1. אם שחקן 1 משחק את האסטרטגיה המעורבת $[x(T), (1-x)(B)]$ התשלום שלו כפונקציה של x תלוי על האסטרטגיה של שחקן 2:

$$U(x, L) = 2x + (1-x) = 1 + x.$$

• אם שחקן 2 משחק L אז

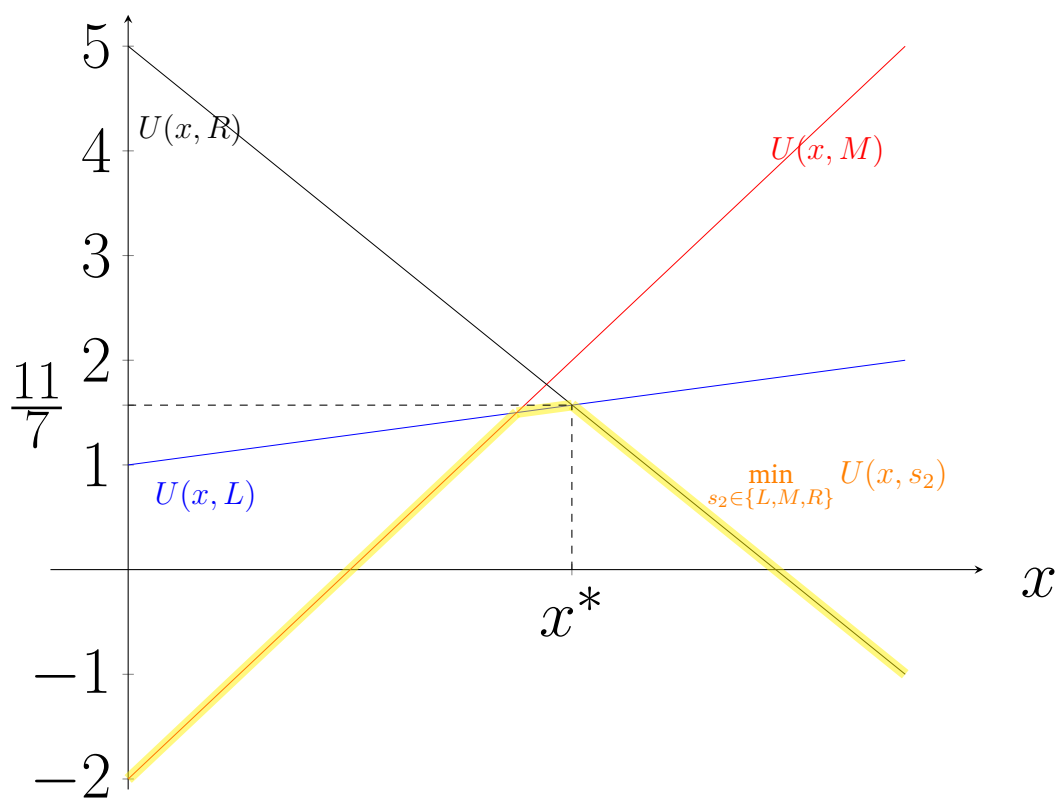
$$U(x, M) = 5x - 2(1-x) = 7x - 2.$$

• אם שחקן 2 משחק M אז

$$U(x, R) = -x + 5(1-x) = -6x + 5.$$

• אם שחקן 2 משחק R אז

התרשים למטה מתאר את הגרפים של שלוש פונקציות אלו.



המקסימום של המעטפת התחתונה מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של $U(x, L)$ ו- $U(x, R)$:

$$1 + x \stackrel{!}{=} -6x + 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{7}$$

■