

## שיעור 9

### מבוא לסיבוכיות

## 9.1 הגדרה של סיבוכיות

### 9.1 הערה

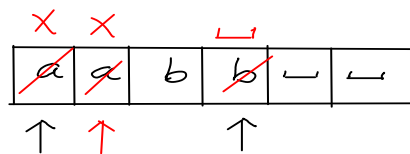
זמן ריצה של מ"ט  $M$  על קלט  $w$ , נמדד ביחס לגודל הקלט  $w$ , כלומר  $f(|w|)$ .

### 9.1 הגדרה

נאמר כי ניתן להכריע שפה  $L$  בזמן  $f(n)$ , אם קיימת מ"ט  $M$  המכריעה את  $L$  ולכן קלט  $w \in \Sigma^*$ , זמן הריצה של  $M$  על  $w$  חסום ע"י  $f(|w|)$ .

### 9.1 דוגמה

נבנה מ"ט  $M$  המכריעה השפה  $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ .



התאור של  $M$ :

על קלט  $w$ :

- (1) אם התו שמתחת לראש הוא  $\_$   $\Leftarrow$  מקבלת.
  - (2) אם התו שמתחת לראש הוא  $b$   $\Leftarrow$  דוחה.
  - (3) מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י  $X$ .
  - (4) מזיזה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאל ל- $\_$ .
- אם התו הוא  $a$  או  $X$   $\Leftarrow$  דוחה.
  - מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י  $\_$ , מזיזה את הראש שמאלה עד התו הראשון מימין ל- $X$  וחוזרת ל- (1).

זמן הריצה

•  $\frac{|w|}{2}$  איטרציות.

• בכל איטרציה מבצעים  $O(|w|)$  צעדים.

$$\frac{|w|}{2} \cdot O(|w|) = O(|w|^2).$$

**הגדרה 9.2 זמן הריצה**

זמן הריצה של מ"ט  $M$  על קלט  $w$  היא פונקציה  $f(|w|)$  השווה למספר הצעדים הנדרש בחישוב של  $M$  על  $w$ .

**הערה 9.2**

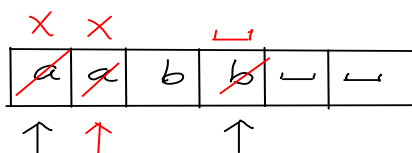
זמן הריצה של מ"ט נמדד ביחס לגודל הקלט  $|w|$ .

**הגדרה 9.3**

אומרים כי ניתן להכריעה שפה  $L$  בזמן  $f(n)$  אם קיימת מ"ט  $M$  המכריעה את  $L$  כך שלכל  $w \in \Sigma^*$ , זמן הריצה של  $M$  על  $w$  חסום ע"י  $f(|w|)$ .

**דוגמה 9.2**

נבנה מ"ט  $M$  עם סרט יחיד שמכריעה את השפה  $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ .



התאור של  $M$ :

על קלט  $w$ :

(1) אם התו שמתחת לראש הוא  $\_$  מקבלת.

(2) אם התו שמתחת לראש הוא  $b$  דוחה.

(3) מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י  $X$ .

(4) מזיזה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאל ל-  $\_$ .

• אם התו הוא  $a$  או  $X$  דוחה.

• מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י  $\_$ , מזיזה את הראש שמאלה עד התו הראשון מימין ל-  $X$  וחוזרת ל- (1).

זמן הריצה

•  $M$  מבצעת  $\frac{|w|}{2}$  איטרציות.

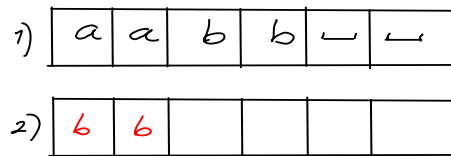
• בכל איטרציה  $M$  סורקת את הסרט פעמיים וזה עולה  $O(|w|)$ .

• לכן סה"כ זמן הריצה של  $M$  חסום ע"י

$$\frac{|w|}{2} \cdot O(|w|) = O(|w|^2).$$

### דוגמה 9.3

נבנה מ"ט מרובת סרטים  $M'$  שמכריעה את השפה  $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ .



התאור של  $M'$ :

על קלט  $w$ :

- (1) מעתיקה את ה- $b$  ים לסרט 2 (ותוך כדי בודקת האם  $w$  מהצורה  $a^*b^*$ ).  $O(|w|)$
- (2) מזיזה את הראשים לתחילת הסרטים.  $O(|w|)$
- (3) אם שני הראשען מצביעים על  $\_$  מקבלת.
- (4) אם אחד הראשים מצביע על  $\_$  והשני לא  $\Leftarrow$  לא.
- (5) מזיזה את שהע הראשים ימינה וחוזרת לשלב (3). שלבים (3-5):  $O(|w|)$ .

זמן הריצה

זמן הריצה של  $M'$  הוא  $O(|w|)$ .

## 9.2 יחס בין הסיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס

### משפט 9.1

לכל מ"ט מרובת סרטים  $M$  הרצה בזמן  $f(n)$  קיימת מ"ט סרט יחיד  $M'$  השקולה ל- $M$  ורצה בזמן  $O(f^2(n))$ .

הוכחה:

בהינתן מ"ט מרובת סרטים  $M$ , הרצה בזמן  $f(n)$ , נבנה מ"ט עם סרט יחיד  $M'$  באותו אופן כמו בהוכחת השקילות במשפט 3.1.

כלומר,  $M'$  שומרת את התוכן של  $k$  סרטים של  $M$  על הסרט היחיד שלה (עם הפרדה ע"י #), ובכל צעד חישוב,  $M'$  סורקת את הסרט שלה כדי לזהות שת האותיות שמתחת לראשים (שמסומנות ב- $\hat{a}$ ) ואחרי זה, משתמשת בפונקצית המעברים של  $M$ , וסורקת את הסרט פעם נוספת כדי לעדכן את התוכן בכל אחד מהסרטים ואת מיקום הראש בכל אחד מהסרטים.

1) 2) 

⋮

k) 

|   |                  |   |                  |   |                  |   |  |
|---|------------------|---|------------------|---|------------------|---|--|
| # | $\hat{\alpha}_1$ | # | $\hat{\alpha}_2$ | # | $\hat{\alpha}_3$ | # |  |
|---|------------------|---|------------------|---|------------------|---|--|

כמה לוקח ל-  $M'$  לסרוק את הסרט שלה? מכיוון שהסרט של  $M'$  מכיל את התוכן של  $k$  הסרטים של  $M$ , והגודל של כל אחד מהסרטים של  $M$  חסום ע"י  $f(n)$ , גודל הסרט של  $M'$  חסום ע"י

$$k \cdot f(n) = O(f(n)) .$$

העלות של הסריקה של  $M'$  לסרט שלה היא  $O(f(n))$  וזה עלות של צעד חישוב בריצה של  $M'$  על הקלט.

מכיוון ש-  $M$  רצה בזמן  $f(n)$ , זמן היצרה של  $M'$  חסום ע"י

$$f(n) \cdot O(f(n)) = O(f^2(n)) .$$

■

## 9.3 יחס בין הסיבוכיות של מ"ט דטרמיניסטית ומ"ט א"ד

### הגדרה 9.4

בהינתן מ"ט א"ד  $M$ , זמן הריצה של  $M$  על קלט  $w$ , היא פונקציה  $f(|w|)$  השווה למספר הצעדים בחישוב המקסימלי של  $M$  על  $w$ .

### משפט 9.2

לכל מ"ט א"ד  $N$  הרצה בזמן  $f(n)$ , קיימת מ"ט דטרמיניסטית  $D$  השקולה ל-  $N$  ורצה בזמן  $2^{(f(n))}$ .

## הוכחה:

בהינתן מ"ט א"ד  $N$  הרצה בזמן  $f(n)$  מ"ט דטרמיניסטית  $D$  באותו אופן כמו בהוכחת השקילות במשפט 4.1.

כלומר, בהינתן קלט  $w$ ,  $D$  תסרו' את עץ החישוב של  $N$  ו-  $w$  לרוחב ותקבל כל אחד החישובים של  $N$  המסתיים ב-  $q_{acc}$ .

בהינתן קלט  $w$  באורך  $n$ :

- כל מסלול בעץ החישוב של  $N$  על  $w$  חסום ע"י  $f(n)$ .
- מספר החישובים ש-  $D$  מבצעת חסום ע"י מספר הקודקודים בעץ החישוב של  $N$  ו-  $w$ .
- מכיוון שמספר הבנים של כל קודקוד בעץ החישוב חסום ע"י

$$C = 3|Q| \cdot |\Gamma|$$

מספר הקודקודים בעץ החישוב חסום ע"י

$$C^0 + C^2 + \dots + C^{f(n)} \leq C^{f(n)+1} = C \cdot C^{f(n)}.$$

ולכן זמן הריצה של  $D$  חסום ע"י

$$f(n) \cdot C \cdot C^{f(n)} \leq C^{f(n)} \cdot C^{f(n)} = C^{2f(n)} = (C^2)^{f(n)} = 2^{C' \cdot f(n)} = 2^{O(f(n))}.$$

נתייחס כאן לשני החסמים הבאים:



(1) חסם פולינומיאלי הוא חסם מהצורה  $n^c$  עבור  $c > 0$  כלשהו.

(2) חסם אקספוננציאלי הוא חסם מהצורה  $2^{n^c}$  עבור  $c > 0$  כלשהו.

### הגדרה 9.5 בעיית הכרעה

בעיית הכרעה מוגדרת באופן הבא:

"בהינתן קלט כלשהו, האם הקלט מקיים תנאי מסוים"

### דוגמה 9.4

בהינתן מספר  $n$ , האם  $n$  ראשוני?

כל בעיית הכרעה ניתן לתאר כפשה שקולה:

$$L_{\text{prime}} = \{ \langle n \rangle \mid n \text{ ראשוני} \}.$$

### משפט 9.3

. שפה  $\equiv$  בעיית הכרעה

**הגדרה 9.6 אלגוריתם זמן פולינומיאלי**

אומרים כי אלגוריתם  $A$  מכריעה בעייה בזמן פולינומיאלי אם קיים קבוע  $c > 0$  כך שזמן הריצה של  $A$  על כל קלט  $w$  חסום ע"י  $O(|w|^c)$ .

**משפט 9.4 התזה של צירץ' (Church Thesis)**

אם קיים אלגוריתם המכריע בעייה בזמן פולינומיאלי, אז קיימת מ"ט דטרמיניסטית המכריעה את השפה השקולה לבעייה זו בזמן פולינומיאלי.

. מכונת טיורינג  $\equiv$  אלגוריתם מכריעה

**9.4 המחלקה  $P$** **הגדרה 9.7 המחלקה  $P$** 

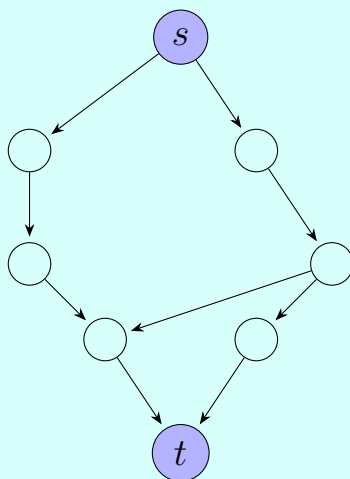
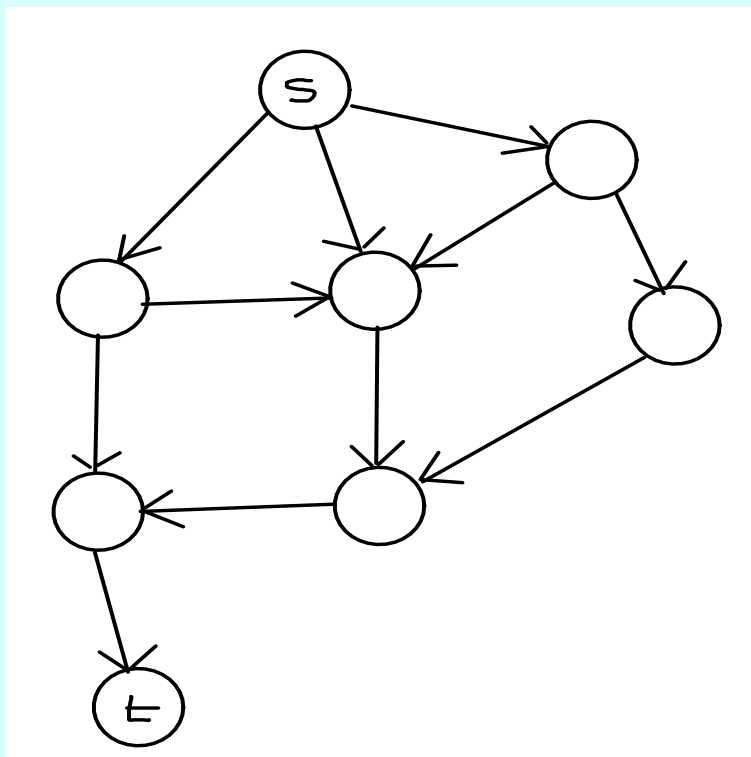
המחלקה  $P$  היא אוסף כל הבעיות (השפות) שקיים עבורן אלגוריתם (מכונת טיורינג דטרמיניסטית) המכריע אותן בזמן פולינומיאלי.

**דוגמה 9.5**

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \in P.$$

**9.5 בעיית PATH**

## הגדרה 9.8 בעיית המסלול בגרף מכוון



קלט: גרף מכוון  $G = (V, E)$  ושני קודקודים  $s, t \in V$ .

פלט: האם קיים מסלול ב- $G$  מ- $s$  ל- $t$ ?

$$PATH = \{ \langle G, s, t \rangle \mid t \text{ ל-} s \text{ ב-} G \}$$

## משפט 9.5

$$PATH \in P.$$

הוכחה: נבנה אלגוריתם  $A$  עבור הבעיה  $PATH$ .

$A = \langle G, s, t \rangle$  על קלט

(1) צובע את  $s$ .

(2) מבצע  $|V| - 1$  פעמים:

• לכל  $(u, v) \in E$  צלע

\* אם  $u$  צבוע  $\Leftarrow$  צבע את  $v$ .

(3) • אם  $t$  צבוע  $\Leftarrow$  החזיר "כן".

• אחרת  $\Leftarrow$  החזיר "לא".

זמן ריצה של האלגוריתם הוא  $O(|V| \cdot |E|)$  פולינומיאלי במספר הקודקודים  $|V|$ .

האם זה פולינומיאלי בגודל הקלט  $|\langle G \rangle|$ ?

איך נקודד את  $G$ ?

• נניח כי  $|V| = n$  ו-  $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

• נניח כי הצלעות נתונות ע"י מטריצה  $M$  בגודל  $n \times n$  כך ש-

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & (i, j) \in E \\ 0 & (i, j) \notin E \end{cases}.$$

• נניח כי מספרים מקודדים בבסיס ביניארי.

• אזי גודל הקידוד של  $G$  שווה  $n^2 + n \log_2 n$ , כלומר

$$|\langle G \rangle| = \Omega(|V|^2) \Rightarrow |V| = O(|\langle G \rangle|).$$

ולכן כל אלגוריתם הרץ בזמן פולינומיאלי במספר הקודקודים  $|V|$  ירוץ בזמן פולינומיאלי בגודל הקידוד  $|\langle G \rangle|$ .



ולכן  $A$  רץ בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט.

## 9.6 בעיית RELPRIME

### הגדרה 9.9 מספרים זרים (Relatively prime)

שני מספרים  $x, y$  זרים אם המחלק המשותף הגדול ביותר, מסומן  $\gcd(x, y)$ , שווה 1.

### הגדרה 9.10 בעיית RELPRIME

קלט: שני מספרים  $x$  ו-  $y$ .

פלט: האם  $x$  ו-  $y$  זרים?

$$RELPRIME = \{ \langle x, y \rangle \mid \gcd(x, y) = 1 \}.$$



## משפט 9.6

$$RELPRIME \in P.$$

**הוכחה:** נבנה אלגוריתם  $A$  המכריע את  $RELPRIME$  בזמן פולינומיאלי.

האלגוריתם מבוסס על העובדה ש-

$$\gcd(x, y) = 1 \iff \langle x, y \rangle \in RELPRIME.$$

ולכן נשתמש באלגוריתם האוקלידי לחישוב  $\gcd$ :

$$\gcd(x, y) = \begin{cases} x & y = 0 \\ \gcd(y, x \bmod y) & y \neq 0 \end{cases}.$$

**הוכחה:** נסמן  $d = \gcd(x, y)$ . אזי קיימים שלמים  $s, t$  כך ש- $dx + ty = d$ . נסמן  $r = x \bmod y$ . אז  $x = qy + r$ . לכן

$$s(qy + r) + ty = d \implies sr + (t + sq)y = d \implies \gcd(x, y) = d = \gcd(y, r).$$

לדוגמה:

$$\gcd(18, 32) = \gcd(32, 18) = \gcd(18, 14) = \gcd(14, 4) = \gcd(4, 2) = \gcd(2, 0) = 2.$$

האלגוריתם האוקלידי:

על קלט  $x$  ו- $y$ :

(1) כל עוד  $y \neq 0$

$$x \bmod y \rightarrow x$$

$$\text{swap}(x, y)$$

(כלומר מחליפים בין  $x$  ו- $y$ ).

(2) מחזירים את  $x$ .

האלגוריתם  $A$  המכריע  $RELPRIME$ :

$$A = \text{על קלט } \langle x, y \rangle$$

(1) מריץ את האלגוריתם האוקלידי על  $x$  ו- $y$ .

• אם האלגוריתם האוקלידי החזיר 1 מקבל.

• אחרת דוחה.

נכונות האלגוריתם נובעת מנכונות האלגוריתם האוקלידי.

נוכיח כי  $A$  רץ בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט.

טענת עזר:

$$\text{אם } x > y \text{ אזי } x \bmod y < \frac{x}{2}.$$

הוכחה:

יש שתי אפשרויות:

• אם  $y \leq \frac{x}{2}$  אזי

$$x \bmod y < y \leq \frac{x}{2}.$$

• נניח ש-  $\frac{x}{2} < y < x$ 

מכיוון ש-  $x = qy + (x \bmod y)$ , וגם  $x < 2y$  אז בהכרח  $q < 2$  ולכן  $x = y + (x \bmod y)$  ולכן  $x - y = x \bmod y$ .

לפיכך

$$x \bmod y = x - y < \frac{x}{2}.$$

■

לפי טענת העזר, אחרי כל איטרציה  $x$  קטן בלפחות חצי.מכיוון שבכל איטרציה מחליפים בין  $x$  ו-  $y$ , אחרי כל שתי איטרציות גם  $x$  וגם  $y$  קטנים בלפחות חצי.ולכן לאחר  $\log_2 x + \log_2 y$  איטרציות לפחות  $x$  או  $y$  שווים ל-0.ולכן מספר האיטרציות באלגוריתם האוקלידי חסום ע"י  $\log_2 x + \log_2 y$ , וזה בדיוק זמן הריצה של האלגוריתם  $A$ .ולכן  $A$  רץ בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט.

ולכן

$$RELPRIME \in P.$$

■