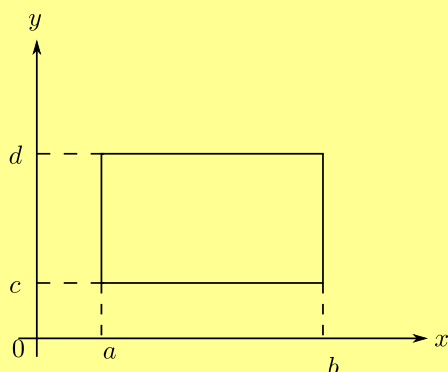


שיעור 10

אינטגרלים כפולים

משפט 10.1 אינטגרל כפול בתחום מלבני

במקרה של התחום המלבני



$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

הסדר של האינטגרלים מעל x ו- y לא משנה את הערך של האינטגרל הכפול, כלומר

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y) = \int_c^d dy \int_a^b dx f(x, y) . \quad (*)$$

דוגמה 10.1

חשבו את האינטגרל של הפונקציה $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 + 6xy$ בתחום

$$D = \{(x, y) | -3 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 8\}$$

פתרון:

נבדוק שהסדר של האינטגרלים אינו משנה את הערך של האינטגרל:

נבצע האינטגרל מעל x ואחר כך האינטגרל מעל y :

$$\begin{aligned} \iint_D dx dy f(x, y) &= \int_2^8 dy \int_{-3}^3 dx (3x^2 + 2y^2 + 6xy) \\ &= \int_2^8 dy [x^3 + 2xy^2 + 3x^2y]_{x=-3}^{x=3} \\ &= \int_2^8 dy (54 + 12y^2) \\ &= \int_2^8 dy [54y + 4y^3]_{y=2}^{y=8} \\ &= (432 - 108 + 2048 - 32) \\ &= 2340 . \end{aligned}$$

נבצע האינטגרל מעל y ואחר כך האינטגרל מעל x :

$$\begin{aligned}\iint_D dx dy f(x, y) &= \int_{-3}^3 dx \int_2^8 dy (3x^2 + 2y^2 + 6xy) \\ &= \int_{-3}^3 dx \left[3x^2 y + \frac{2}{3} y^3 + 3xy^2 \right]_{y=2}^{y=8} \\ &= \int_{-3}^3 dx (18x^2 + 180x + 336) \\ &= [6x^3 + 90x^2 + 336x]_{x=-3}^{x=3} \\ &= 2340 .\end{aligned}$$

10.2 דוגמה

חשבו את האינטגרל $\iint_D (x^2 - y) dx dy$ על המלבן

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4\}$$

פתרון:

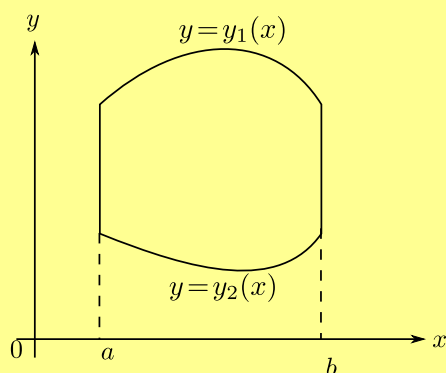
נבצע האינטגרל של y ואז האינטגרל של x :

$$\begin{aligned}\iint_D dx dy f(x, y) &= \int_0^3 dx \int_0^4 dy (x^2 - y) \\ &= \int_0^3 dx \left[x^2 y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=4} \\ &= \int_0^3 dx (4x^2 - 8) \\ &= \left[\frac{4x^3}{3} - 8x \right]_{x=0}^{x=3} \\ &= (36 - 24) \\ &= 12 .\end{aligned}$$

נבצע האינטגרל של x ואז האינטגרל של y :

$$\begin{aligned}\iint_D dx dy f(x, y) &= \int_0^4 dy \int_0^3 dx (x^2 - y) \\ &= \int_0^4 dy \left[\frac{x^3}{3} - xy \right]_{x=0}^{x=3} \\ &= \int_0^4 dy [9 - 3y]_{x=0} \\ &= \left[9y - \frac{3y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=4} \\ &= (36 - 24) \\ &= 12 .\end{aligned}$$

משפט 10.2 אינטגרל כפול של פונקציה בתחום בין שני קווים



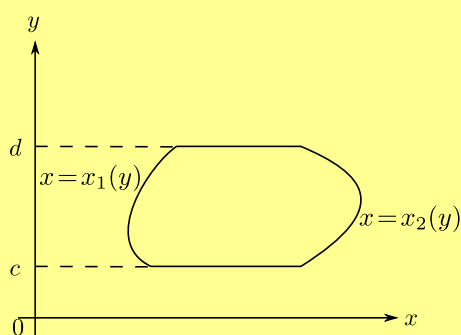
נתון אינטגרל כפול של פונקציה $f(x, y)$ מצורה

$$\iint_D dx dy f(x, y) = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy f(x, y)$$

בתחום

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\},$$

אי-אפשר להחליף את סדר האינטגרלים. במקרה זה מבצעים את האינטגרל של y בין הקווים $y_1(x)$ ו- $y_2(x)$, ואחר כך מבצעים את האינטגרל של x .



נתון אינטגרל כפול של פונקציה $f(x, y)$ מצורה

$$\iint_D dx dy f(x, y) = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx f(x, y)$$

בתחום

$$D = \{(x, y) | x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\},$$

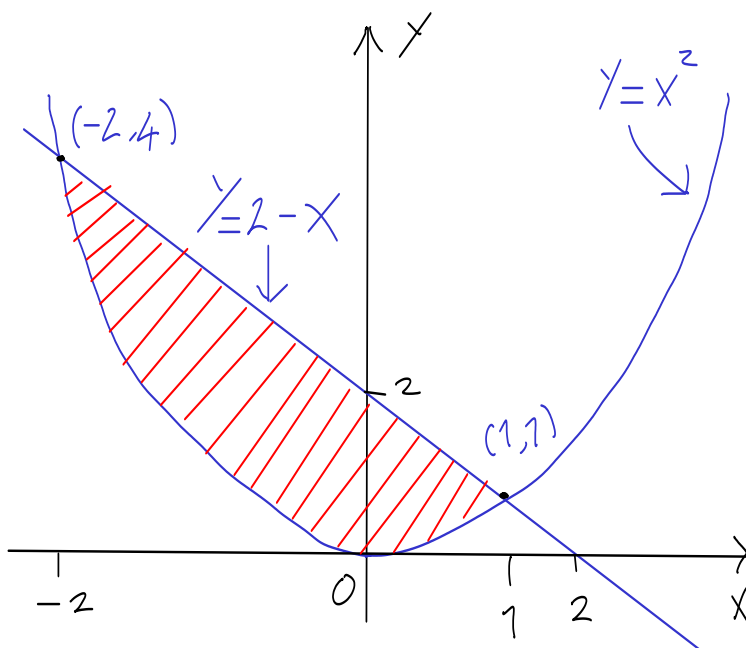
אי-אפשר להחליף את סדר האינטגרלים. מבצעים את האינטגרל של x בין הקווים $x_1(y)$ ו- $x_2(y)$, ואחר כך מבצעים את האינטגרל של y .

דוגמה 10.3

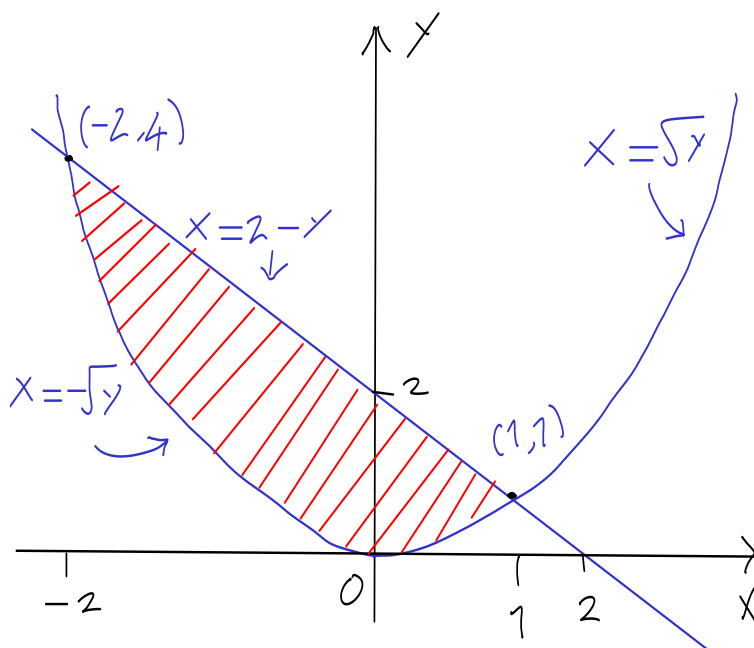
חשבו את $\iint_D y dx dy$ כאשר D הוא התחום החסום על ידי הווים $y = x^2$, $y = 2 - x$.

פתרון:

שיטה 1



$$\begin{aligned}
 \iint_D y \, dx \, dy &= \int_{-2}^1 dx \int_{x^2}^{2-x} y \, dy \\
 &= \int_{-2}^1 dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{2-x} \\
 &= \int_{-2}^1 dx \left(\frac{(2-x)^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) \\
 &= \left[\frac{-(2-x)^3}{6} - \frac{x^5}{10} \right]_{x=-2}^1 \\
 &= \left[\frac{-1}{6} - \frac{1}{10} \right] - \left[\frac{4^3}{6} - \frac{(-2)^5}{10} \right] \\
 &= \frac{-1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{64}{6} - \frac{32}{10} \\
 &= \frac{63}{6} - \frac{33}{10} \\
 &= \frac{432}{60} \\
 &= \frac{72}{10} = 7.2
 \end{aligned}$$



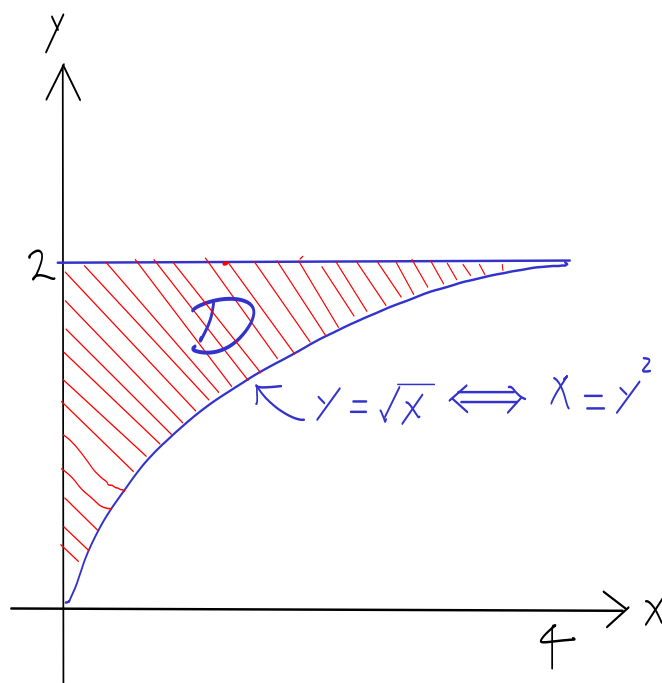
$$\begin{aligned}
 \iint_D y \, dx \, dy &= \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} y \, dx + \int_1^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} y \, dx \\
 &= \int_0^1 dy [yx]_{x=-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} + \int_1^4 dy [yx]_{x=-\sqrt{y}}^{2-y} \\
 &= \int_0^1 dy 2y\sqrt{y} + \int_1^4 dy (y(2-y) + y\sqrt{y}) \\
 &= \int_0^1 dy 2y^{3/2} + \int_1^4 dy (2y - y^2 + y^{3/2}) \\
 &= [5y^{5/2}]_0^1 + \left[y^2 - \frac{y^3}{3} + \frac{2}{5}y^{5/2} \right]_1^4 \\
 &= 5 + \left(16 - \frac{64}{3} + \frac{64}{5} \right) - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \right) \\
 &= 5 + 64 \cdot \frac{7}{15} - \frac{16}{15} \\
 &= 5 - \frac{7}{60} - \frac{64}{60} \\
 &= 5 - \frac{71}{60} \\
 &= \frac{300 - 71}{60} \\
 &= \frac{229}{60}
 \end{aligned}$$

10.4 דוגמה

חשבו את $\int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 dy e^{x/y}$

פתרון:

לא ניתן להחליף את האינטגרל הפנימי בעזרת פונקציה אלמנטריות.



$$\begin{aligned}
 \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 dx e^{x/y} &= \int_0^2 dy \int_0^{y^2} dx e^{x/y} \\
 &= \int_0^2 dy [ye^{x/y}]_{x=0}^{y^2} \\
 &= \int_0^2 dy (ye^y - y) \\
 &= \left[ye^y - e^y - \frac{y^2}{2} \right]_0^2 \\
 &= 2e^2 - e^2 - 2 - (-1) \\
 &= e^2 - 1
 \end{aligned}$$

דוגמה 10.5

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_0^{x^2} dy \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) dy \quad \text{חשבו את האינטגרל}$$

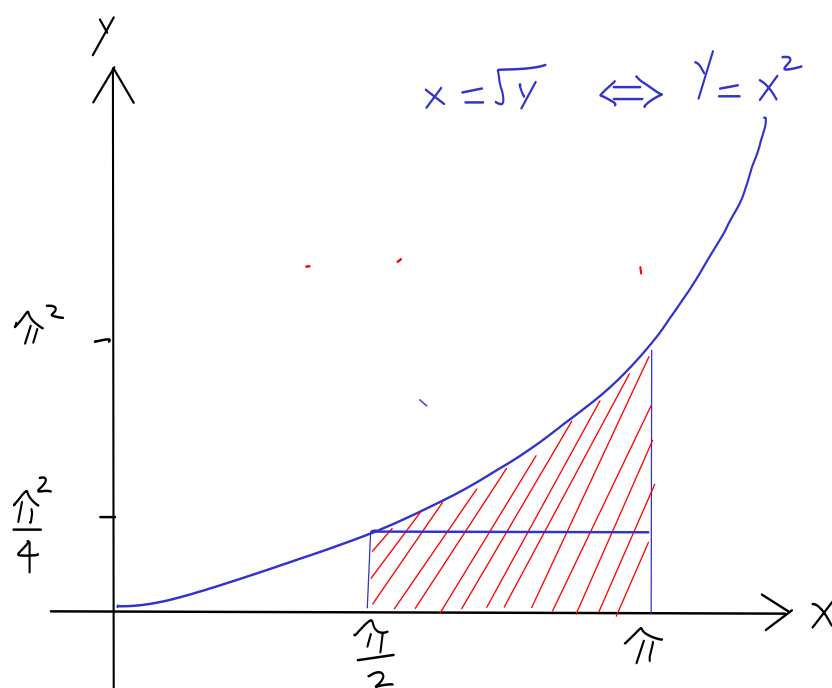
(2) שרטטו את תחום האינטגרציה ושנו את סדר האינטגרציה

פתרון:

(1)

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_0^{x^2} dy \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \\
 &= \int_{\pi/2}^{\pi} dx \left[\sin\left(\frac{y}{x}\right) \right]_0^{x^2} \\
 &= \int_{\pi/2}^{\pi} dx (\sin x - \sin(0)) \\
 &= \int_{\pi/2}^{\pi} dx \sin x \\
 &= [-\cos x]_{\pi/2}^{\pi} \\
 &= -\cos \pi + \cos \frac{\pi}{2} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

(2)



$$I = \int_0^{\pi^2/4} dy \int_{\pi/2}^{\pi} dx \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \int_{\pi^2/4}^{\pi} dy \int_{\sqrt{y}}^{\pi} dx \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

דוגמה 10.6 שינוי סדר של אינטגרלים

חשב את האינטגרל

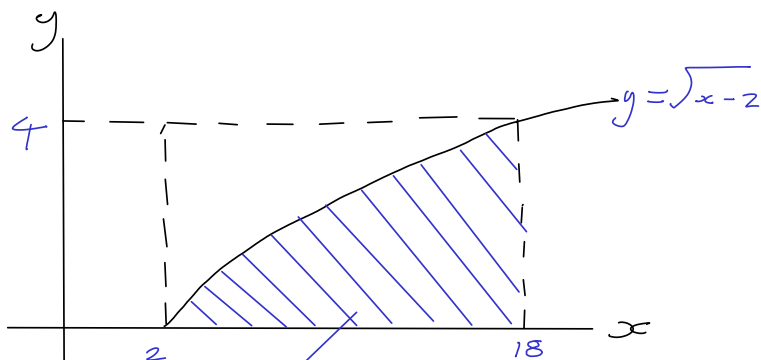
$$I = \int_2^{18} dx \int_{\sqrt{x-2}}^4 dy e^{-5(x-2)/y}$$

פתרון:

התחום של האינטגרל הוא

$$D = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 18, \sqrt{x-2} \leq y \leq 4\}$$

כמתואר בתרשים.

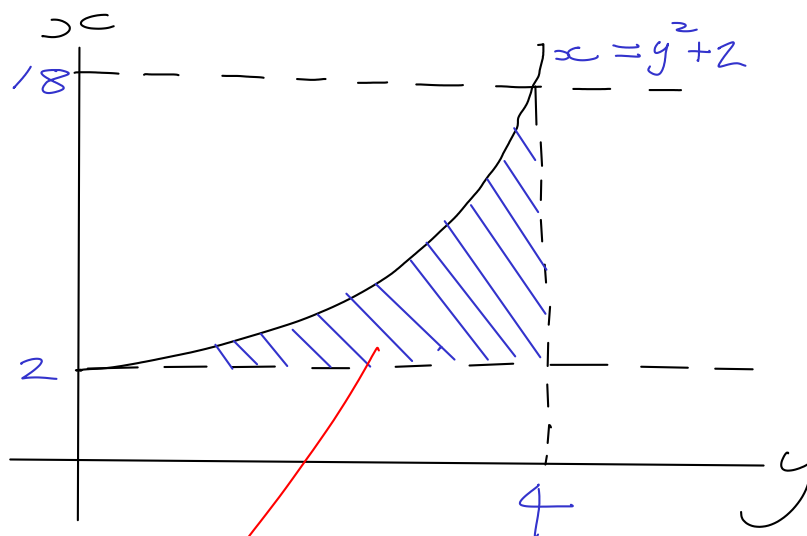


$$D = \{(x, y) \mid \sqrt{x-2} \leq y \leq 4, 2 \leq x \leq 18\}$$

ניתן לשנות את הסדר של האינטגרלים של x ו- y כך שהתחום הוא

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4, 2 \leq x \leq y^2 + 2\}$$

כמתואר בתרשים



$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4, 2 \leq x \leq y^2 + 2\}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^4 dy \int_2^{y^2+2} dx e^{-5(x-2)/y} \\
 &= \int_0^4 dy \left[-\frac{y}{5} \cdot e^{-5(x-2)/y} \right]_2^{y^2+2} \\
 &= -\frac{1}{5} \int_0^4 dy \left[y \cdot e^{-5(x-2)/y} \right]_2^{y^2+2} \\
 &= -\frac{1}{5} \int_0^4 dy \left(y \cdot e^{-5(y^2+2-2)/y} - y \cdot e^{-5(0)/y} \right) \\
 &= -\frac{1}{5} \int_0^4 dy (ye^{-5y} - y) \\
 &= -\frac{1}{5} \left[-\frac{1}{5} ye^{-5y} + \frac{1}{25} e^{-5y} - \frac{y^2}{2} \right]_0^4 \\
 &= -\frac{1}{5} \left(-\frac{4}{5} e^{-20} + \frac{1}{25} e^{-20} - \frac{4^2}{2} + \frac{1}{25} \right)
 \end{aligned}$$

10.1 תכונות חשובות של האינטגרל הכפול

משפט 10.3 תכונות האינטגרל הכפול

בהינתן אינטגרל כפולה מצורה

$$\iint_D dx dy f(x, y)$$

בתחום D בהמישור xy .

(1) אם הפונקציה $f(x, y) = 1$ האינטגרל שווה לשטח התחום $S(D)$:

$$\iint_D dx dy = S(D) .$$

(2) נתון קבוע $c \in \mathbb{R}$, אז מתקיים

$$\iint_D dx dy c \cdot f(x, y) = c \cdot \iint_D dx dy f(x, y) .$$

(3) הפעולה של אינטגרציה כפולה שומרת סכום:

$$\iint_D dx dy (f_1(x, y) + f_2(x, y)) = \iint_D dx dy f_1(x, y) + \iint_D dx dy f_2(x, y)$$

(4) נתון שני תחומים D_1 ו- D_2 . אם $D = D_1 \cup D_2$ ו- $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ אזי

$$\iint_D dx dy f(x, y) = \iint_{D_1} dx dy f(x, y) + \iint_{D_2} dx dy f(x, y)$$

(5) אם $f(x, y) \geq 0$ בכל התחום D אז

$$\iint_D dx dy f(x, y) \geq 0 .$$

(6) אם $m \leq f(x, y) \leq M$ בתחום D אז

$$m \cdot S(D) \leq \iint_D dx dy f(x, y) \leq M \cdot S(D) .$$

(7)

$$\left| \iint_D dx dy f(x, y) \right| \leq \iint_D dx dy |f(x, y)| .$$

10.2 שטח של תחום ע"י אינטגרל כפול

משפט 10.4 שטח התחום

במקרה שבתוך האינטגרל הכפול בנוסחא (*1) הפונקציה $f(x, y) = 1$, אז האינטגרל הכפול שווה לשטח של התחום D :

$$\iint_D dx dy (1) = S(D) .$$

כאשר $S(D)$ מסמן את שטח התחום D .

דוגמה 10.7

חשבו את שטח המלבן המוגדר ע"י התחום

$$D = \{(x, y) | 2 \leq x \leq 5, 3 \leq y \leq 6\}$$

באמצעות אינטגרציה כפולה.

פתרון:

$$\begin{aligned}
 S(D) &= \int_2^5 dx \int_3^6 dy \\
 &= \int_2^5 dx [y]_3^6 \\
 &= \int_2^5 dx (6 - 3) \\
 &= \int_2^5 dx 3 \\
 &= 3 \int_2^5 dx \\
 &= 3[x]_2^5 \\
 &= 3(5 - 2) = 9 .
 \end{aligned}$$

10.8 דוגמה

חשבו את הערך של האינטגרל של הפונקציה $z(x, y) = 3x^2 + 4y^2$ בין הקווים $y_2 = -x + 2$ $y_1 = x + 4$ בקטע $1 \leq x \leq 2$.

פתרון:

$$\begin{aligned}
 \iint_D dx dy z(x, y) &= \int_1^2 dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy (3x^2 + 4y^2) \\
 &= \int_1^2 dx \left[3x^2 y + \frac{4}{3} y^3 \right]_{y_1}^{y_2} \\
 &= \int_1^2 dx \left(3x^2 y_2 + \frac{4}{3} y_2^3 - 3x^2 y_1 - \frac{4}{3} y_1^3 \right) \\
 &= \int_1^2 dx \left(3x^2 (x + 4) + \frac{4}{3} (x + 4)^3 - 3x^2 (2 - x) - \frac{4}{3} (2 - x)^3 \right) \\
 &= \int_1^2 dx \left(3x^3 + 12x^2 + \frac{4}{3} (x + 4)^3 - 6x^2 + 3x^3 - \frac{4}{3} (2 - x)^3 \right) \\
 &= \int_1^2 dx \left(6x^3 + 6x^2 + \frac{4}{3} (x + 4)^3 - \frac{4}{3} (2 - x)^3 \right) \\
 &= \left[\frac{3}{2} x^4 + 2x^3 + \frac{1}{3} (x + 4)^4 + \frac{1}{3} (2 - x)^4 \right]_1^2 \\
 &= \left(24 + 16 + 432 - \frac{3}{2} - 2 - \frac{625}{3} - \frac{1}{3} \right) \\
 &= \left(470 - \frac{3}{2} - \frac{626}{3} \right) \\
 &= \frac{1559}{6}
 \end{aligned}$$

10.9 דוגמה

מהו השטח של האליפסה הנתון ע"י

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

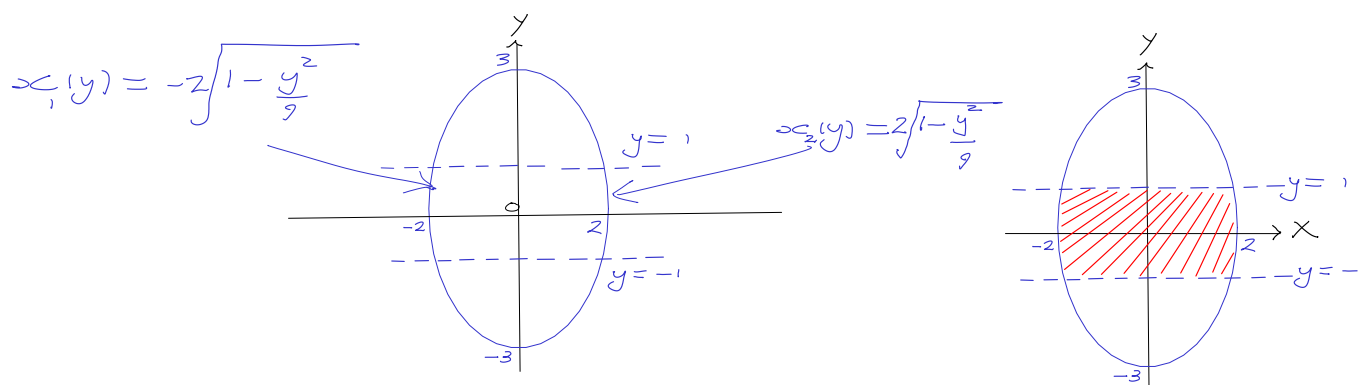
בשטח התחום

$$-1 \leq y \leq 1.$$

פתרון:

הקו של האליפסה מוצג בתרשים ואתחום D מוצג בתרשים בצבע אדום. שים לב:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}$$

במונחים של x .

הקו של האליפסה בצד שמאל ניתן ע"י

$$x_1(y) = -2\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}$$

והקו של האליפסה בצד ימין ניתן ע"י

$$x_2(y) = +2\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}$$

השטח ניתן באמצעות האינטגרל הכפול

$$\begin{aligned} A &= \iint_D dx dy \\ &= \int_{-1}^1 dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \\ &= \int_{-1}^1 dy [x]_{x_1(y)}^{x_2(y)} \\ &= \int_{-1}^1 dy \left(2\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}} - (-2)\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}} \right) \\ &= \int_{-1}^1 dy 4\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}} \end{aligned}$$

בכדי לחשב את האינטגרל של y ניתן להשתמש בהטבלה של אינטגרלים הסטנדרטים להלן:

$$A = 4 \left[\frac{1}{2} \left(y \sqrt{1 - \frac{y^2}{9}} + 3 \sin^{-1} \left(\frac{y}{3} \right) \right) \right]_{-1}^1$$

$$= 2 \left(\sqrt{\frac{8}{9}} + 3 \sin^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) - (-1) \sqrt{\frac{8}{9}} - 3 \sin^{-1} \left(\frac{-1}{3} \right) \right) = 7.84928 .$$

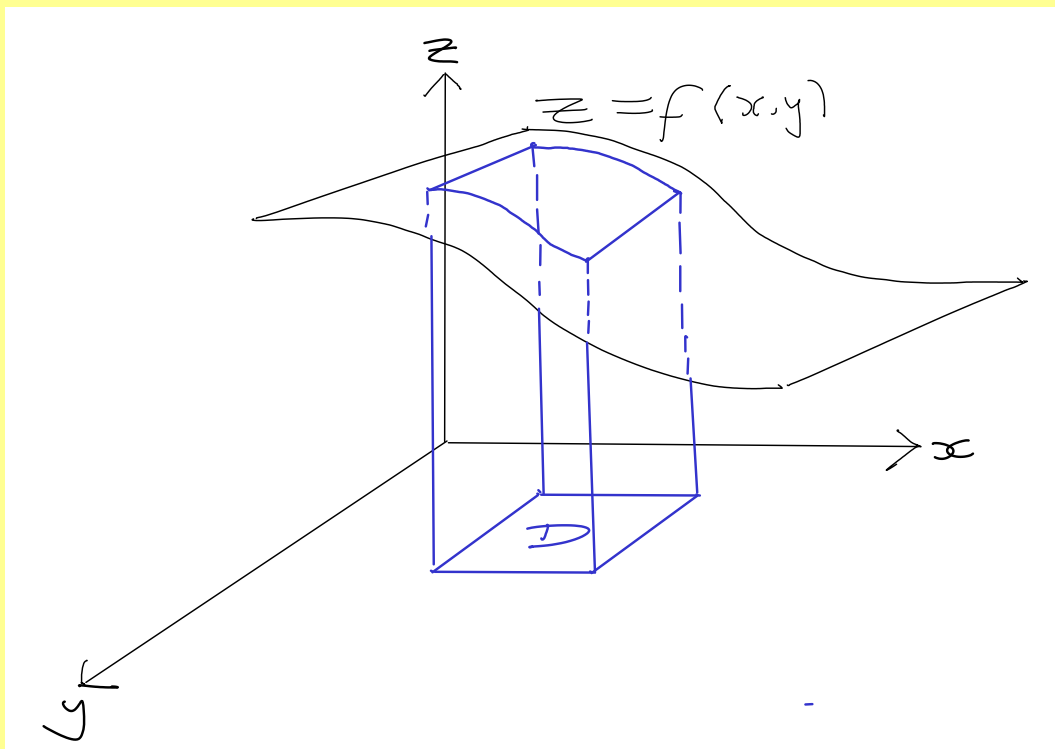
10.3 נפח מתחת משטח בתחום ע"י אינטגרל כפול

משפט 10.5 נפח תחת משטח בתחום D

נתון פונקציה $f(x, y)$ האי-שלילית ותחום D במישור xy (כלומר $f(x, y) \geq 0$ בכל נקודה בתחום D). הנפח מתחת המשטח $z = f(x, y)$ בתוך התחום D ניתן ע"י האינטגרל הכפול

$$V = \iint_D dx dy f(x, y) .$$

הנפח מדובר מוצג בתרשים להלן בכחול.



דוגמה 10.10 נפח פירמידה

מהו הנפח מתחת המישור הניתן ע"י המשוואה

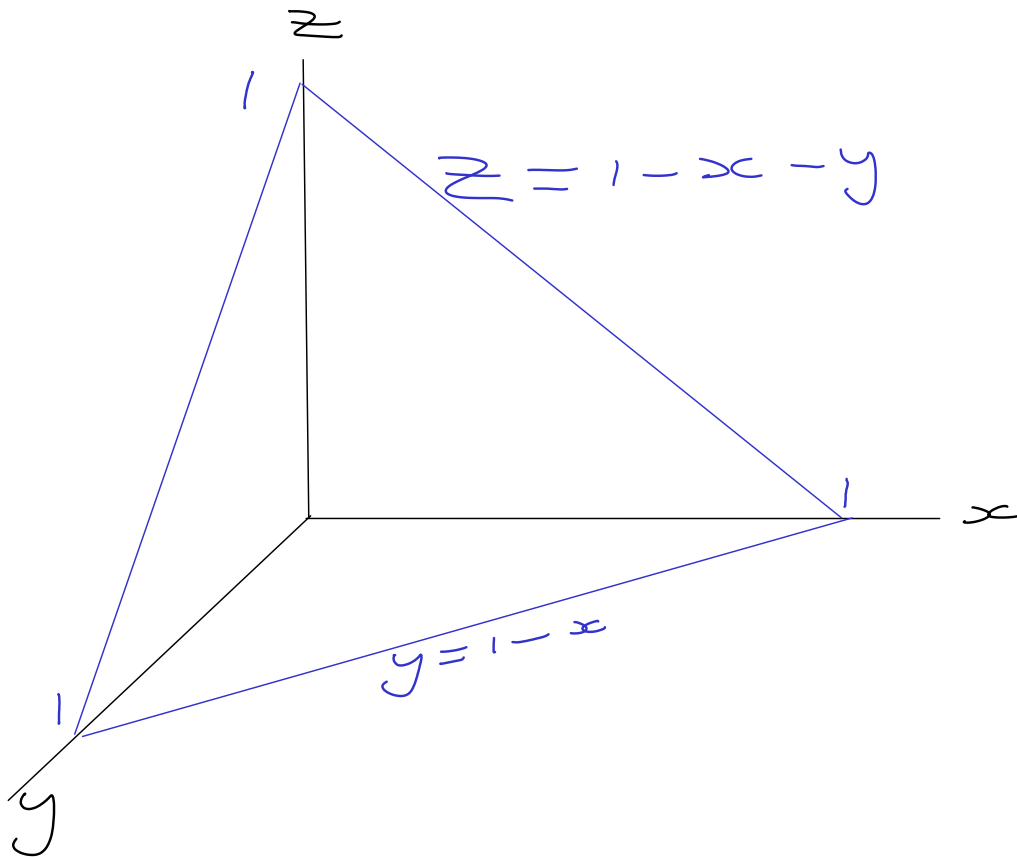
$$z = f(x, y) := 1 - x - y$$

בתחום

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

פתרון:

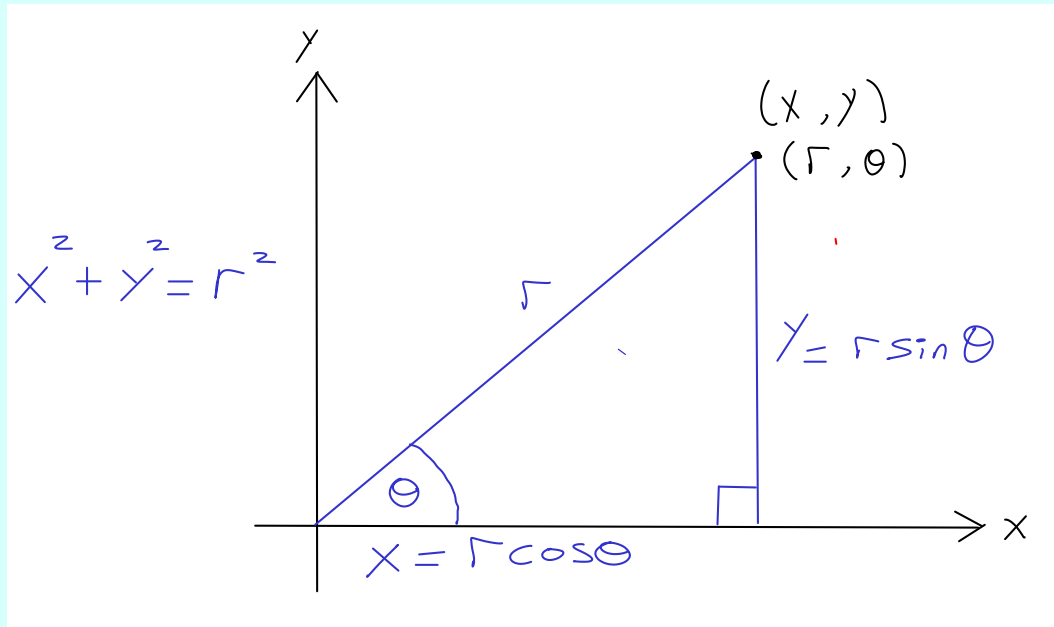
שים לב, הנפח מדובר הינו נפח של פירמידה משולשית, כמתואר בתרשים להלן.



$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D dx \, dy \, f(x, y) \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{y=1-x} dy (1 - x - y) \\
 &= \int_0^1 dx \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} \\
 &= \int_0^1 dx \left((1-x) - x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2 \right) \\
 &= \int_0^1 dx \left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right) \\
 &= \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \\
 &= \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

10.4 קואורדינטות קוטביות

הגדרה 10.1 קואורדינטות קוטביות



מקואורדינטות קרטיזיות לקואורדינטות קוטביות:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

מקואורדינטות קוטביות לקואורדינטות קרטיזיות:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right).$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

דוגמה 10.11

חשבו את האינטגרל

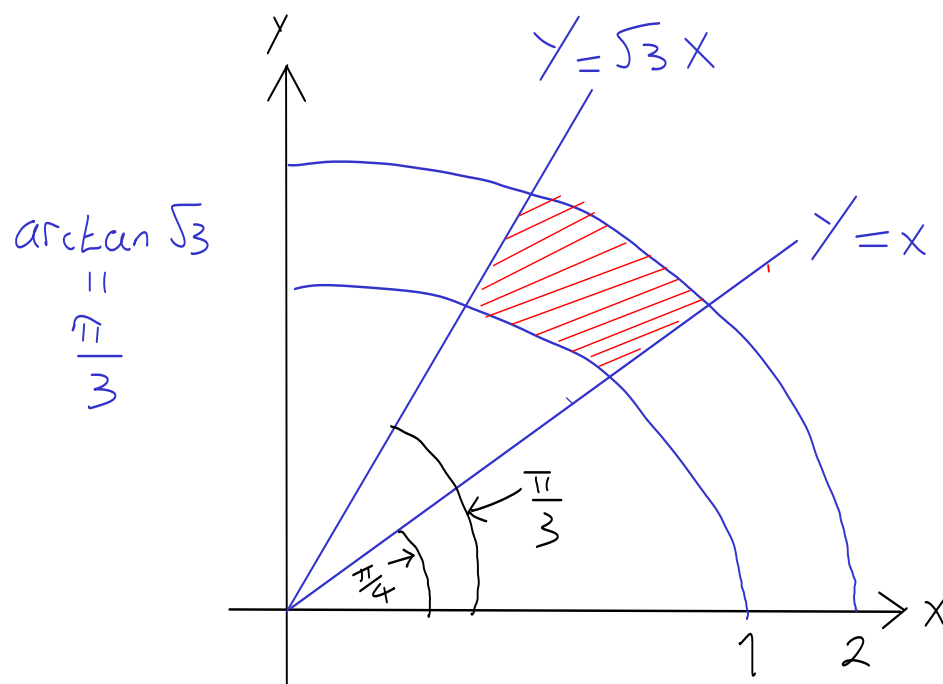
$$\iint_D \arctan \left(\frac{y}{x} \right) dx dy$$

כאשר

$$D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq \sqrt{3} \cdot y\}$$

פתרון:

$$D = \{(r, \theta) | \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, 1 \leq r \leq 2.\}$$

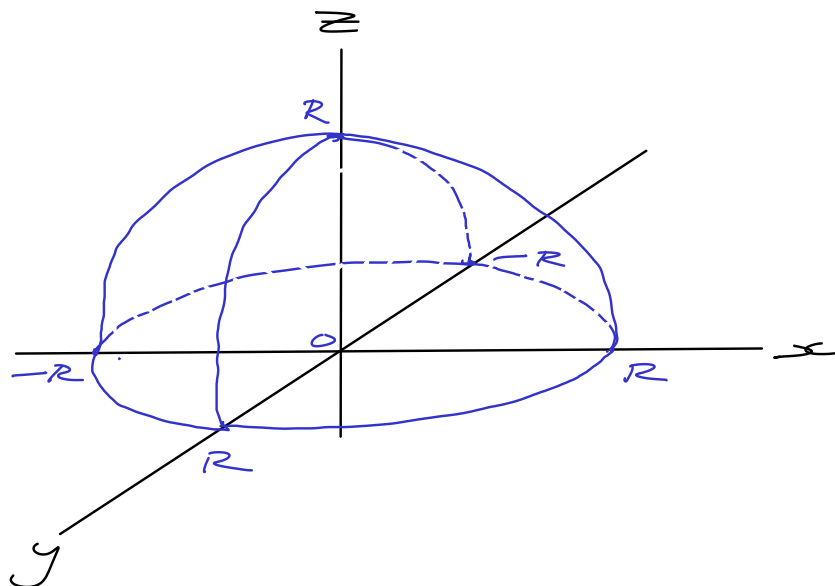


$$\begin{aligned}
 \iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dx dy &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_1^2 \arctan\left(\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta}\right) r dr \\
 &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_1^2 \arctan(\tan \theta) r dr \\
 &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \theta \int_1^2 r dr \\
 &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \theta \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 \\
 &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \theta \left[\frac{3}{2}\right] \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \int_{\pi/4}^{\pi/3} \theta d\theta \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{\theta^2}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/3} \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{16}\right] \\
 &= \frac{3}{4} \cdot \frac{7\pi^2}{144} \\
 &= \frac{7\pi^2}{192}
 \end{aligned}$$

דוגמה 10.12 נפח של ספירה

מהו הנפח של ספירה מרדיוס R ?

פתרון:



$$f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$V = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta r \sqrt{R^2 - r^2}$$

יהי $w = r^2$ משתנה חדש. שים לב:

$$w' = 2r$$

כך ש-

$$V = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \frac{w'}{2} \sqrt{R^2 - w}$$

לפי שיטת אינטגרציה ע"י הצבה ניתן לחשב את האינטגרל של r באמצעות אינטגרל של w :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_{w=0}^{w=R^2} dw \int_0^\pi d\theta \sqrt{R^2 - w} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \left[-\frac{2}{3} \cdot (R^2 - w)^{3/2} \right]_{w=0}^{w=R^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \frac{2R^3}{3} \\ &= \frac{R^3}{3} \int_0^\pi d\theta \\ &= \frac{\pi R^3}{3} . \end{aligned}$$

10.5 החלפת משתנים - קואורדינטות עקומות

משפט 10.6 החלפת משתנים באינטגרל כפול והיעקוביאן

נניח שקואורדינטות u, v מוגדרות באמצעי קואורדינטות קרטיזיות x, y ע"י הביטויים

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v).$$

נתון אינטגרל כפול $\iint_D f(x, y) dx dy$. ניתן לעבור לאינטגרל של הקואורדינטות u, v דרך היחס

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv,$$

כאשר

$$J = \det \begin{pmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{pmatrix}.$$

J נקרא היעקוביאן.

דוגמה 10.13

קואורדינטות קוטביות:

$$J = \det \begin{pmatrix} x'_r & y'_r \\ x'_\theta & y'_\theta \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

דוגמה 10.14

קואורדינטות פרבוליות:

$$x = u \cdot v, \quad y = \frac{1}{2} (u^2 - v^2)$$

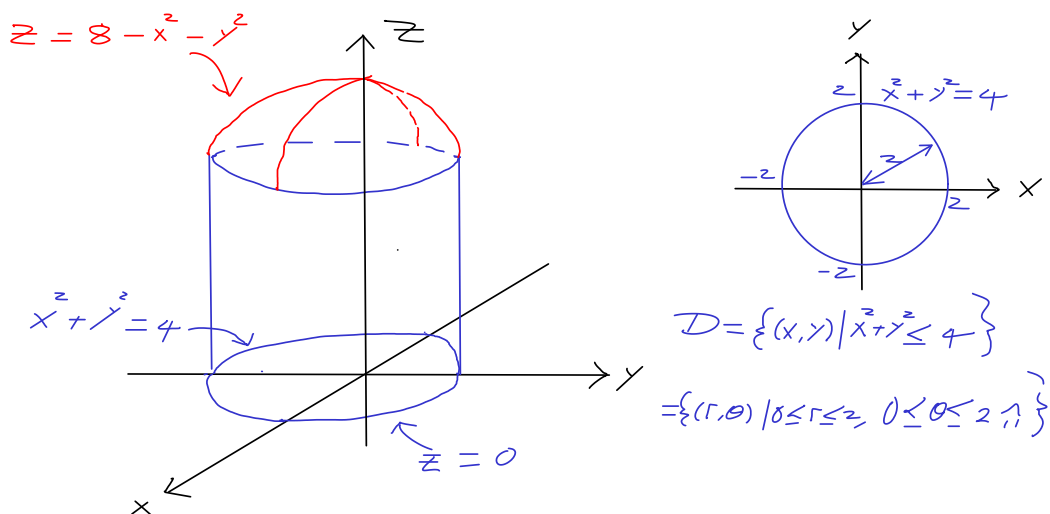
$$J = \det \begin{pmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v & u \\ u & -v \end{pmatrix} = -v^2 - u^2.$$

דוגמה 10.15

חשבו בעזרת אינטגרל כפול את נפח הגוף החסום ע"י המשטחים:

$$x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0, \quad z = 8 - x^2 - y^2.$$

פתרון:



$$V = \iint_D (8 - x^2 - y^2) dx dy, \quad D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\} = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

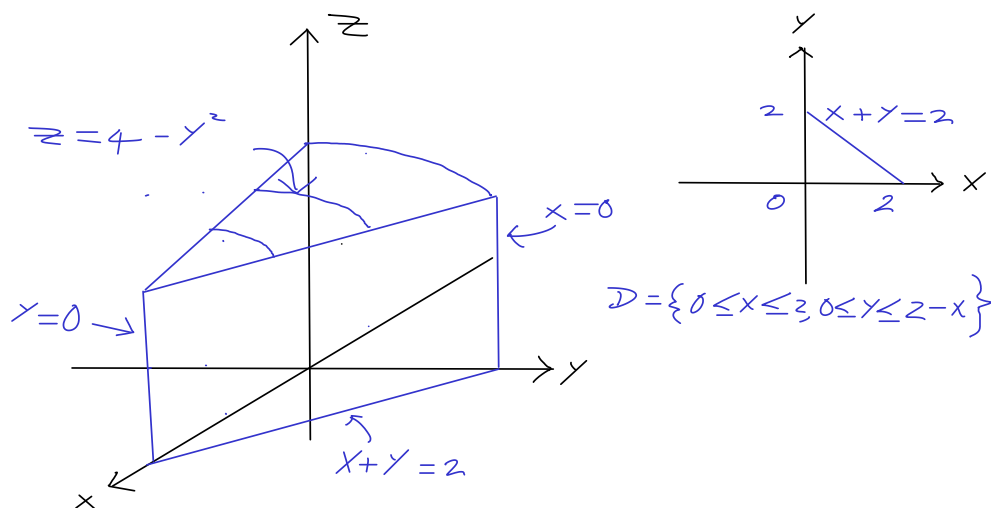
$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta r(8 - r^2) \\ &= \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta (8r - r^3) \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \left[4r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta (16 - 4) \\ &= 12 \cdot [\theta]_0^{2\pi} = 24\pi. \end{aligned}$$

דוגמה 10.16

חשבו בעזרת אינטגרל כפול את נפח הגוף החסום ע"י המשטחים:

$$z = -y^2 + 4, \quad z = 0, \quad x + y = 2, \quad y = 0, \quad x = 0.$$

פתרון:



$$V = \iint_D (4 - y^2) dx dy, \quad D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (4 - y^2) dy \\ &= \int_0^2 dx \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{2-x} \\ &= \int_0^2 dx \left(4(2-x) - \frac{(2-x)^3}{3} \right) \\ &= \left[-2(2-x)^2 + \frac{(2-x)^4}{12} \right]_{x=0}^2 \\ &= 8 - \frac{16}{12} \\ &= 8 - \frac{4}{3} \\ &= \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

10.6 מרכז מסה

משפט 10.7 מרכז מסה

נתון תחום D ופונקציה $\rho(x, y) \geq 0$ לכל $x, y \in D$. המסה של התחום D עם צפיפות $\rho(x, y)$ מוגדרת

$$M = \iint_D \rho(x, y) dx dy.$$

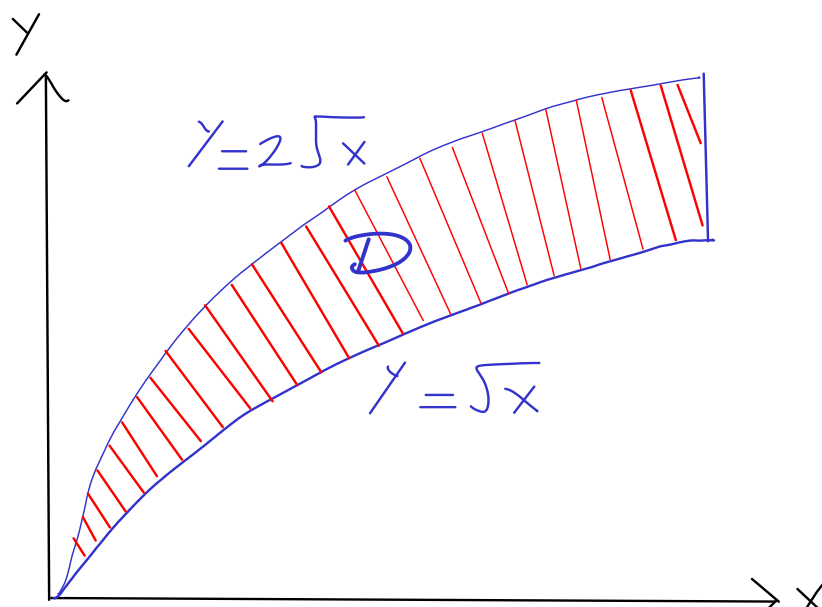
המרכז מסה של D היא נקודה $(x_c, y_c) \in D$ שניתנת ע"י

$$x_c = \frac{\iint_D x \rho(x, y) dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint_D y \rho(x, y) dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy}.$$

דוגמה 10.17

מצאו את המסה של הגוף מישורי המוגדר ע"י הקווים $x = 4, y = 2\sqrt{x}, y = \sqrt{x}$ כאשר הצפיפות החומר היא $\rho(x, y) = 4 - x$.

פתרון:



$$\begin{aligned}
 M &= \iint_D (4-x) dx dy \\
 &= \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4-x) dy \\
 &= \int_0^4 dx (4-x) [y]_{y=\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \\
 &= \int_0^4 (4-x) \sqrt{x} dx \\
 &= \int_0^4 (4x^{1/2} - x^{3/2}) dx \\
 &= \left[4 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{5} \cdot x^{5/2} \right]_0^4 \\
 &= \frac{64}{3} - \frac{64}{5} \\
 &= \frac{320-192}{15} \\
 &= \frac{128}{15} .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_D x \cdot \rho(x, y) dx dy &= \iint_D (4x - x^2) dx dy \\
 &= \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4x - x^2) dy \\
 &= \int_0^4 dx (4x - x^2) [y]_{y=\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \\
 &= \int_0^4 (4x - x^2) \sqrt{x} dx \\
 &= \int_0^4 (4x^{3/2} - x^{5/2}) dx \\
 &= \left[4 \cdot \frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{2}{7} \cdot x^{7/2} \right]_0^4 \\
 &= \frac{256}{5} - \frac{256}{7} \\
 &= \frac{512}{35} .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_D y \cdot \rho(x, y) dx dy &= \iint_D (4 - x)y dx dy \\
 &= \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4 - x)y dy \\
 &= \int_0^4 dx (4 - x) \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \\
 &= \int_0^4 dx (4 - x) \left(2x - \frac{x}{2} \right) \\
 &= \int_0^4 dx (4 - x) \cdot \frac{3}{2}x \\
 &= \frac{3}{2} \int_0^4 dx (4x - x^2) \\
 &= \frac{3}{2} \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^4 \\
 &= \frac{3}{2} \left(32 - \frac{64}{3} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{64}{6} \\
 &= 16 .
 \end{aligned}$$

$$x_c = \frac{\iint_D x \cdot \rho(x, y) dx}{M} = \frac{\frac{512}{35}}{\frac{128}{15}} = \frac{3}{7} \cdot \frac{512}{128} = \frac{3}{7} \cdot 4 = \frac{12}{7} .$$

$$y_c = \frac{\iint_D y \cdot \rho(x, y) dx}{M} = \frac{16}{\frac{128}{15}} = 15 \cdot \frac{16}{128} = 15 \cdot \frac{1}{8} = \frac{15}{8} .$$