עבודת בית 1: מכפלות פנימיות

שאלה 1 האם הנוסחה $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 + y_2$ מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$?

שאלה 2 האם הנוסחה $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_2 + x_2y_1$ מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$?

שאלה 3 יהיו $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} \mathrm{v}_1 \\ \mathrm{v}_2 \end{pmatrix}$. הוכיחו שהנוסחה

$$\langle u, \mathrm{v} \rangle = u_1\mathrm{v}_1 + 2u_1\mathrm{v}_2 + 2u_2\mathrm{v}_1 + u_2\mathrm{v}_2$$

מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$.

שאלה 4 במרחב $\mathbb{R}^{n\times n}$ נגדיר $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(B^tA)$ לכל $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

א) הוכיחו כי הנוסחה מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^{n\times n}$.

ב) חשבו את הזווית בין המטריצות $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ביחס המכפלה הפנימית הנ"ל.

שאלה 5 יהיו $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} \mathrm{v}_1 \\ \mathrm{v}_2 \end{pmatrix}$. האם הנוסחאות הבאות מגדירות מכפלות פנימיות ב- $\mathbb{R}^2$?

א) $\langle u, \mathrm{v} \rangle = \mathrm{v}^tAu$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

ב) $\langle u, \mathrm{v} \rangle = 4u_1\mathrm{v}_1 + u_2\mathrm{v}_1 + u_1\mathrm{v}_2 + 4u_2\mathrm{v}_2$.

שאלה 6 יהי V ממ"פ ויהיו $\mathrm{v}, \mathrm{v}' \in V$ כך ש- $\mathrm{v} \neq \mathrm{v}'$. הוכיחו כי תמיד קיים ווקטור $w \in V$ המקיים

$$\langle \mathrm{v}, w \rangle \neq \langle \mathrm{v}', w \rangle \ .$$

שאלה 7 יהי V ממ"פ ויהיו $u, \mathrm{v} \in V$ וקטורים המקיימים:

$$\|u\| = 3 \ , \qquad \|u + \mathrm{v}\| = 4 \ , \qquad \|u - \mathrm{v}\| = 6 \ .$$

מצאו את $\|\mathrm{v}\|$.

שאלה 8 הוכיחו או הפריכו: יהיו u_1, u_2 וקטורים במרחב מכפלה פנימית ממשי המקיימים:

$$\|u_1\| = \|u_2\| = 2 \ , \qquad \langle u_1, u_2 \rangle = 1 \ .$$

אזי מתקיים:

$$\|u_1 - 2u_2\| = 4 \ .$$

שאלה 9 יהי V מרחב מכפלה פנימית ממשי. הוכיחו כי עבור כל $u, \mathrm{v} \in V$ מתקיימת הזהות הפולרית

$$\langle u, \mathrm{v} \rangle = \frac{1}{4} \left(\|u + \mathrm{v}\|^2 - \|u - \mathrm{v}\|^2 \right) \ .$$

שאלה 10 הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k \cdot 2^k} \leq \sqrt{(n^2 + n) \cdot (2^n - 1)} \ .$$

שאלה 11 בעזרת אי -שוויון קושי -שוורץ הוכיחו כי

$$(a \cos\theta + b \sin\theta)^2 \leq a^2 + b^2$$

לכל $a, b, \theta \in \mathbb{R}$.

שאלה 12 עבור אילו ערכי $k \in \mathbb{R}$, הוקטורים $u = \begin{pmatrix} k \\ k \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{v} = \begin{pmatrix} k \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ הם אורתוגונליים?

שאלה 13 נתונים 2 הוקטורים ב - $\mathbb{R}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית:

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

א) בדקו כי הוקטורים אורתוגונליים.

ב) נרמלו את שני הוקטורים.

ג) ודאו כי מתקיים השוויון שלמדנו בהרצאה:

$$\|u + \mathrm{v}\|^2 = \|u\|^2 + \|\mathrm{v}\|^2$$

שאלה 14 במרחב מכפלה פנימית $\mathbb{R}^{2\times2}$ עם המכפלה פנימית הסטנדרטית $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(B^t A)$ לכל $A, B \in \mathbb{R}^{2\times2}$.

א) הראו כי הקבוצה

$$\left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מהווה מערכת אורתונורמלית ב - $\mathbb{R}^{2\times2}$ ביחס למכפלה ה פנימית הנ"ל.

ב) חשבו את הנורמה של $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

שאלה 15 במרחב של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[0,1]$ עם המכפלה פנימית האינטגרלי הסטנדרטית שמוגדרת

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx \ .$$

חשבו את הזווית בין $f(x)=x$ ו- $g(x)=\sqrt{x}$.

שאלה 16 חשבו את ההיטל של $u=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ על $\mathrm{v}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

שאלה 17 חשבו את ההיטל של $\mathrm{v}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ על $u=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

שאלה 18 תהי $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ קבוצה אורתוגונלית של ווקטורים במרחב מכפלה פנימית. הוכיחו כי מתקיים

$$\|u_1 + u_2 + \ldots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \ldots + \|u_n\|^2 \ .$$

תשובות

שאלה 1 לא. הסבר: נסמן $u=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$. אז

$$\langle\alpha\cdot u,\mathrm{v}\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}\alpha\cdot x_1\\\alpha\cdot x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right\rangle=\alpha x_1+y_2\ ,$$

$$\alpha\left\langle\alpha\cdot u,\mathrm{v}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right\rangle=\alpha\left(x_1+y_2\right)\ ,$$

לכן

$$\langle\alpha\cdot u,\mathrm{v}\rangle\neq\alpha\left\langle\alpha\cdot u,\mathrm{v}\right\rangle\ .$$

שאלה 2 הפונקציה לא מכפלה פנימית. דוגמה נגדית:

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right\rangle=1\cdot(-2)+1\cdot(-2)=-4\ngeq 0\ .$$

שאלה 3

(1

(2 **סימטריות:**

$$\langle u,\mathrm{v}\rangle=u_1\mathrm{v}_1+2u_1\mathrm{v}_2+2u_2\mathrm{v}_1+u_2\mathrm{v}_2=\left(u_1+u_2\right)\left(\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\right)=\left(\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\right)\left(u_1+u_2\right)=\langle\mathrm{v},u\rangle\ .$$

(3 **לינאריות:**

שאלה 6

$$\|u+\mathrm{v}\|^2-\|u-\mathrm{v}\|^2=4\mathrm{Re}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle\ .$$

נציב

שאלה 7

$$\|u+\mathrm{v}\|^2-\|u-\mathrm{v}\|^2=4\mathrm{Re}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle\ .$$

נציב $\|u+\mathrm{v}\|=4$ ו- $\|u-\mathrm{v}\|=6$:

$$16-36=4\mathrm{Re}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle\qquad\Rightarrow\qquad\langle u,\mathrm{v}\rangle=-\frac{4}{20}=-\frac{1}{5}\ .\ .$$

ז"א

$$16=\|u+\mathrm{v}\|^2=\|u\|^2+\|\mathrm{v}\|^2+2\mathrm{Re}\,\langle u,\mathrm{v}\rangle=9+\|\mathrm{v}\|^2-\frac{2}{5}\ .$$

לכן

$$\|\mathrm{v}\|^2=7+\frac{2}{5}=\frac{37}{5}\ .$$

שאלה 9

$$\begin{aligned}\|u+\mathrm{v}\|^2-\|u-\mathrm{v}\|^2 =&\|u\|^2+\|\mathrm{v}\|^2+\langle u,\mathrm{v}\rangle+\langle \mathrm{v},u\rangle-\|u\|^2-\|\mathrm{v}\|^2+\langle u,\mathrm{v}\rangle+\langle \mathrm{v},u\rangle\\ =&2\langle u,\mathrm{v}\rangle+2\langle \mathrm{v},u\rangle\end{aligned}$$

המרחב ממשי לכן $\langle \mathrm{v},u\rangle=\overline{\langle u,\mathrm{v}\rangle}=\langle u,\mathrm{v}\rangle$. נציב ונקבל:

$$\|u+\mathrm{v}\|^2-\|u-\mathrm{v}\|^2=4\langle u,\mathrm{v}\rangle \qquad\Rightarrow\qquad \langle u,\mathrm{v}\rangle=\frac{1}{4}\left(\|u+\mathrm{v}\|^2-\|u-\mathrm{v}\|^2\right)\ .$$

מש"ל.

שאלה 10

יהי V המרחב המכפלה פנימית הסטנדרטית מעל הדה $\mathbb{R}$. נגדיר את שני ווקטורים $a,b\in V$:

$$a=\begin{pmatrix}\sqrt{1}\\ \sqrt{2}\\ \sqrt{3}\\ \vdots\\ \sqrt{n}\end{pmatrix}\ ,\qquad b=\begin{pmatrix}2^{1/2}\\ 2^{2/2}\\ 2^{3/2}\\ \vdots\\ 2^{n/2}\end{pmatrix}\ .$$

לפי אי-השוויון קושי שוורץ:

$$|\langle a,b\rangle|=\|a\|\cdot\|b\|\ .$$

$$\langle a,b\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}\sqrt{1}\\ \sqrt{2}\\ \sqrt{3}\\ \vdots\\ \sqrt{n}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2^{1/2}\\ 2^{2/2}\\ 2^{3/2}\\ \vdots\\ 2^{n/2}\end{pmatrix}\right\rangle=2^{1/2}\cdot\sqrt{1}+2^{2/2}\cdot\sqrt{2}+2^{3/2}\cdot\sqrt{3}+\cdots+2^{n/2}\cdot\sqrt{n}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\cdot 2^{k/2}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k\cdot 2^k}\ .$$

$$\|a\|=\sqrt{\langle a,a\rangle}=\sqrt{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}k}\ .$$

נציב $\sum\limits_{k=1}^{n}=\frac{1}{2}n\cdot(n+1)$ ונקבל

$$\|a\|=\sqrt{\frac{1}{2}n\cdot(n+1)}\ .$$

$$\|b\|=\sqrt{\langle b,b\rangle}=\sqrt{2^{1/2}\cdot 2^{1/2}+2^{2/2}\cdot 2^{2/2}+2^{3/2}\cdot 2^{3/2}+\cdots+2^{n/2}\cdot 2^{n/2}}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}2^k}$$

נציב $\sum\limits_{k=1}^{n}2^k=\frac{2\left(2^n-1\right)}{2-1}=2\left(2^n-1\right)$ ונקבל

$$\|b\|=\sqrt{2\left(2^n-1\right)}\ .$$

לפיכך לפי אי-השוויון קושי שוורץ:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \cdot 2^{k/2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k \cdot 2^k} \leq \sqrt{\frac{1}{2} n \cdot (n+1)} \cdot \sqrt{2\left(2^n-1\right)} = \sqrt{\left(n^2+n\right) \cdot \left(2^n-1\right)} \ .$$

שאלה 16

$$\mathrm{v}_0 = P_{\mathrm{v}}(u) = \frac{\langle \mathrm{v}, u\rangle}{\|\mathrm{v}\|^2}\mathrm{v} = \frac{1}{14} \cdot \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \frac{7}{14}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \ .$$

בדיקה:

$$u - \mathrm{v}_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3/2\\1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1/2\\3/2\end{pmatrix} \ .$$

$$\langle u - \mathrm{v}_0, \mathrm{v}_0\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}0\\-1/2\\3/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3/2\\1/2\end{pmatrix} \right\rangle = 0 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0 \ .$$

שאלה 17

$$u_0 = P_u(\mathrm{v}) = \frac{\langle u, \mathrm{v}\rangle}{\|u\|^2}u = \frac{1}{4} \cdot \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\4\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{7}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \ .$$

בדיקה:

$$\mathrm{v} - u_0 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\4\end{pmatrix} - \frac{7}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/4\\-3/4\\-7/4\\9/4\end{pmatrix} \ .$$

$$\langle \mathrm{v} - u_0, u_0\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1/4\\-3/4\\-7/4\\9/4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7/4\\7/4\\7/4\\7/4\end{pmatrix} \right\rangle = \frac{7}{16} - \frac{21}{16} - \frac{49}{16} + \frac{63}{16} = 0 \ .$$

שאלה 18

נוכיח לפי אינדוקציה. עבור $n=2$:

$$\|u_1+u_2\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + 2\mathrm{Re}\cancelto{0}{\langle u_1, u_2\rangle} = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 \ .$$

נניח שהטענה נכונה עבור $n=N$. נוכיח אותה עבור $n=N+1$. נגדיר $\mathrm{v} = u_1 + u_2 + \ldots + u_N$. לפי משפט פיתגורס:

$$\|\mathrm{v} + u_{N+1}\|^2 = \|\mathrm{v}\|^2 + \|u_{N+1}\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle \mathrm{v}, u_{N+1}\rangle \ .$$

כל הווקטורים אורתוגונליים זה לזה לכן

$$\langle \mathrm{v}, u_{N+1}\rangle = \langle u_1, u_{N+1}\rangle + \langle u_2, u_{N+1}\rangle + \ldots + \langle u_N, u_{N+1}\rangle = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0 \ .$$

נציב ונקבל כי
$$\|\mathrm{v} + u_{N+1}\|^2 = \|\mathrm{v}\|^2 + \|u_{N+1}\|^2 \ .$$
לפי ההנחת האינדוקציה
$$\|\mathrm{v}\|^2 = \|u_1 + \ldots + u_N\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \ldots + \|u_N\|^2 \ ,$$
לכן
$$\|u_1 + \ldots + u_N + u_{N+1}\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \ldots + \|u_N\|^2 + \|u_{N+1}\|^2 \ .$$
מש"ל.