שיעור 4
מטריצה הפוכה

4.1 מטריצה הפוכה

הגדרה 4.1 מטריצה הפוכה

נניח ש- A מטריצה ריבועית מסדר $n\times n$. מטריצה ריבועית B מסדר $n\times n$ נקראת ההופכית של A (המטריצה ההפוכה של A) אם מתקיים

$$A\cdot B=B\cdot A=I\ .$$

סימון: במקום B רושמים A^{-1}. ז"א

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I\ .$$

דוגמה 4.1

$$A=\begin{pmatrix}2&5\\-3&-7\end{pmatrix}\ ,\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-7&-5\\3&2\end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2&5\\-3&-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7&-5\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}-7&-5\\3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&5\\-3&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

4.2 שיטה למציאת מטריצה הופכית

נתונה מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. כדי למצוא את המטריצה ההופכית A^{-1} רושמים

$$(A|I)$$

כאשר $I\in\mathbb{F}^{n\times n}$ המטריצה היחידה מסדר $n\times n$ ונדרג עד שנקבל המטריצה היחידה בצד שמאול:

$$(A|I)\xrightarrow{\text{פעולות אלמנטריות של דירוג}}(I|A^{-1})\ .$$

דוגמה 4.2

נתונה המטריצה $A=\in\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\ .$$

מצאו את A^{-1}.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

לפיכך

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \ .$$

דוגמה 4.3

נתונה $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \ .$$

מצאו את A^{-1}.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_1}$$

$$\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_2}$$

$$\xrightarrow{R_2\to -R_2}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+6R_2}$$

$$\xrightarrow{R_3\to -\frac{1}{14}R_3}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2+2R_3}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-3R_3}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

משפט 4.1 ההופכית של מטריצה יחידה

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. אם ל- A קיימת מטריצה ההופכית אז היא יחידה.

הוכחה:

נניח ש B הופכית של A ו- C הופכית של A, ו- $B\neq C$. אז

$$C=CI=C(AB)=(CA)B=IB=B\ ,$$

בסתירה לכך ש- $B\neq C$. ■

משפט 4.2 לא כל מטריצה הפיכה

במספרים, אם מספר $a\in\mathbb{R}$ ו- $a\neq 0$ אז קיים a^{-1}.

במטירצות זה לא המצב. ז"א לא לכל מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ קיימת מטריצה הופכית $A^{-1}\in\mathbb{F}^{n\times n}$.

אם למטריצה ריבועית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ קיימת $A^{-1}\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אומרים כי A **הפיכה**.
אם לא קיימת מטריצה הופכית אז אומרים כי A **לא הפיכה**.

דוגמה 4.4

נתונה $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A=\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}\ .$$

מצאו את A^{-1}.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&0&1\\0&0&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-2\cdot R_1}$$

אי אפשר לקבל מטריצה היחידה בצד שמאול ולכן המטריצה לא הפיכה.

דוגמה 4.5

מצאו מטריצה X המקיימת את המשוואה

א) $XA=B$

ב) $AX=B$

כאשר $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&-2\\-5&-1&-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&-2\\-1&0&1\\-2&-1&2\end{pmatrix}$.

פתרון:

א)

$$XA=B\quad\Rightarrow\quad XAA^{-1}=BA^{-1}\quad\Rightarrow\quad X=BA^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3+5R_1]{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_2-8R_3]{R_1\to R_1+2R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -19 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

לפיכך
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -19 & -7 & -8 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = B\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -19 & -7 & -8 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 \\ -7 & -3 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ב)

$$A\cdot X = B \quad\Rightarrow\quad A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \quad\Rightarrow\quad X = A^{-1}\cdot B\ .$$

לפיכך

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -19 & -7 & -8 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 \\ -15 & -11 & 15 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

דוגמה 4.6

מצאו מטריצה X המקיימת

$$A\cdot X = B\ ,$$

כאשר $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

פתרון:

$$A\cdot X = B \quad\Rightarrow\quad A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \quad\Rightarrow\quad X = A^{-1}\cdot B\ .$$

נחפש את A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)\ .$$

לא נוכל להגיע ל- I בצד שמאול, לכן A^{-1} לא קיימת. לכן נפתור בדרך אחרת: נסמן $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. אז

$$A\cdot X=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+2z & 3y+2w \\ 6x+4z & 6y+4w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{cases} 3x+2z &= 1 \\ 3y+2w &= -2 \\ 6x+4z &= 2 \\ 6y+4w &= -4 \end{cases}$$

נרשום את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 6 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4\to R_4-2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2\to\frac{1}{3}\cdot R_2]{R_1\to\frac{1}{3}\cdot R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון:

$$x=-\frac{2}{3}z+\frac{1}{3}\ , \qquad y=-\frac{2}{3}w-\frac{2}{3}\ , \qquad ,z,w\in\mathbb{R}\ .$$

לכן

$$X=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}z+\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}w-\frac{2}{3} \\ z & w \end{pmatrix}\ ,$$

לכל $z,w\in\mathbb{R}$.

משפט 4.3 תכונות של מטריצה הפוכה

א) $(A^{-1})^{-1}=A$

ב) $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

ג) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

הוכחה: תרגיל בית. ■

4.3 הצגת מערכת משוואות באמצעות כפל מטריצות

נתונה מערכת משוואות ליניאריות:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

נגדיר את המטריצה של מקדמים $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, את הווקטור $b\in\mathbb{F}^m$ ואת המווקטור של משתנים $X\in\mathbb{F}^n$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} , \qquad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} .$$

אז ניתן לרשום את המערכת בתורה

$$A\cdot X=b$$

כלומר

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} .$$

דוגמה 4.7

אם נתונה המערכת $\left\{\begin{array}{ll} 5x+y-z & =3 \\ x+2y+z & =1 \end{array}\right.$ ניתן לרשום אותה בצורה $AX=b$ כאשר

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} , \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} , \quad b=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

דוגמה 4.8

אם נתונה המערכת $\left\{\begin{array}{ll} 7x-y & =1 \\ 2x+3y & =5 \end{array}\right.$ ניתן לרשום אותה בצורה $AX=b$ כאשר

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} , \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} , \quad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

דוגמה 4.9

פתרו את המערכת $\left\{\begin{array}{ll} 7x-y & =1 \\ 2x+3y & =5 \end{array}\right.$ ע"י מציאת המטריצה ההופכית של מטריצת המקדמים של המערכת.

פתרון:

נרשום את המערכת בצורה $AX=b$ כאשר

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} , \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} , \quad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

$$AX=b \quad \Rightarrow \quad A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot b \quad \Rightarrow \quad X=A^{-1}\cdot b$$

נחפש את A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to\frac{1}{7}R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{23}{7} & -\frac{2}{7} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{7}{23}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{23} & \frac{7}{23} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+\frac{1}{7}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{23} & \frac{1}{23} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{23} & \frac{7}{23} \end{array}\right)$$

לכן

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{23} & \frac{1}{23} \\ -\frac{2}{23} & \frac{7}{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{23}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\cdot b = \frac{1}{23}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{23}\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ 33 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$(x,y) = \left(\frac{8}{23},\frac{33}{23}\right) \ .$$

דוגמה 4.10

פתרו את המערכת $\left\{\begin{array}{rl} x+2y & =2 \\ 3x+4y & =4 \end{array}\right.$ ע"י מציאת המטריצה ההופכית של מטריצת המקדמים של המערכת.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

התשובה היא

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\cdot b = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$(x,y) = (0,1) \ .$$

דוגמה 4.11

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= 1 \\ 2x-2y+4z &= 2 \\ x+y+5z &= 3 \end{aligned}$$

$$AX=b \quad \Rightarrow \quad X=A^{-1}b$$

כאשר

$$A=\begin{pmatrix}2&2&3\\2&-2&4\\1&1&5\end{pmatrix}\ ,\qquad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ ,\qquad b=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&-2&4&0&1&0\\1&1&5&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_1}$$

$$\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_2}$$

$$\xrightarrow{R_2\to -R_2}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+6R_2}$$

$$\xrightarrow{R_3\to -\frac{1}{14}R_3}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2+2R_3}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-3R_3}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-1\\\frac{3}{7}&-\frac{1}{7}&-\frac{1}{7}\\-\frac{2}{7}&-\frac{1}{14}&\frac{3}{7}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-1\\\frac{3}{7}&-\frac{1}{7}&-\frac{1}{7}\\-\frac{2}{7}&-\frac{1}{14}&\frac{3}{7}\end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-1\\\frac{3}{7}&-\frac{1}{7}&-\frac{1}{7}\\-\frac{2}{7}&-\frac{1}{14}&\frac{3}{7}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-\frac{2}{7}\\\frac{6}{7}\end{pmatrix}$$

משפט 4.4 קיום ומספר פתרונות של מערכת משוואות

נתונה מערכת משוואות

$$A\cdot X=b$$

כאשר $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית של המקדמים, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ הווקטור של המשתנים ו- $b\neq 0\in\mathbb{F}^n$ הווקטור של הצד ימין של המערכת.

א) אם A הפיכה אז למערכת קיים פתרון אחד והוא יחיד.

במקרה ש- A לא הפיכה, אז למערכת יש אינסוף פתרונות או לא קיים פתרון.

ב) אם $\text{rank}(A)=\text{rank}(A|b)<n$ אז למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

ג) אם $\text{rank}(A)\neq\text{rank}(A|b)$ אז למערכת לא קיים פתרון.

הוכחה:

1. תרגיל בית.
2. נלמד את ההוכחה בהמשך הקורס.
3. נלמד את ההוכחה בהמשך הקורס.

■

4.4 מטריצות אלמנטריות

אנחנו למדנו את הפעולות אלמנטריות הבאות שמותרות להשתמש בהן בתהליך דירוג מטריצה:

1) החלפת שורה i בשורה j $\quad R_i \leftrightarrow R_j$
2) הכפלת שורה i במספר k (ששונה מאפס) $\quad R_i \to kR_i$
3) החסרה k פעמים של שורה j משורה i $\quad R_i \to R_i - kR_j$

הגדרה 4.2 מטריצות אלמנטריות

מטריצה אלמנטרית היא מטריצה המתקבלת מהמטריצה יחידה I כתוצאה מפעולות אלמנטריות. בפרט:

1) $R_i(k) =$ מטריצה המתקבלת מ- I על ידי הכפלה של שורה i במספר k.

2) $R_{ij} =$ מטריצה המתקבלת מ- I על ידי החלפה של שורה i עם שורה j.

3) $R_{ij}(k) =$ מטריצה המתקבלת מ- I על ידי החסרה k פעמים של שורה j משורה i.

דוגמה 4.12

רשמו את המטריצות אלמנטריות הבאות מסדר 4×4:

א) $R_{31}(2)$

ב) $R_{42}(7)$

ג) $R_{12}(6)$

ד) $R_3(5)$

ה) R_{14}

ו) R_{31}

ז) $R_{24}(5)$

ח) $R_{23}(-10)$

ט) $R_{43}(-5)$

י) $R_4\left(\frac{1}{2}\right)$

פתרון:

סעיף א)

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad R_{31}(2)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\ .$$

סעיף ב)

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\to R_4-7R_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&-7&0&1\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad R_{42}(7)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&-7&0&1\end{pmatrix}\ .$$

סעיף ג)

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-6R_2}\begin{pmatrix}1&-6&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad R_{12}(6)=\begin{pmatrix}1&-6&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\ .$$

סעיף ד)

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to 5R_3}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad R_3(5)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\ .$$

סעיף ה)

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_4}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad R_{14}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\ .$$

סעיף ו)

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_1}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad R_{31}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\ .$$

סעיף ז)

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-5R_4}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-5\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad R_{24}(5)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-5\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\ .$$

סעיף ח)

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+10R_3}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&10&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad R_{23}(-10)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&10&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\ .$$

סעיף ט)

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\to R_4+5R_3}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&5&1\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad R_{43}(-5)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&5&1\end{pmatrix}\ .$$

סעיף י)

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\to\frac{1}{2}R_4}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad R_4\left(\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\ .$$

דוגמה 4.13

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}$

א) מצאו את המטריצה המדורגת B של A.

ב) מצאו מטריצה P כך ש- $B=PA$ כאשר P מכפלה של מטריצות אלמנטריות.

פתרון:

סעיף א)

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-5R_1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-4&-8&-12\\9&10&11&12\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-9R_1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-4&-8&-12\\0&-8&-16&-24\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-4&-8&-12\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

מכאן המדורגת של A היא $B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-4&-8&-12\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

סעיף ב)

$$B=R_{32}(2)R_{31}(9)R_{21}(5)\ .$$

לכן $B=PA$ כאשר P המכפלה של מטריצות אלמנטריות:

$$P=R_{32}(2)R_{31}(9)R_{21}(5)\ .$$

דוגמה 4.14

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&3&4\\2&7&3\\3&1&-1\end{pmatrix}$

א) מצאו את המטריצה המדורגת B של A.

ב) מצאו מטריצה P כך ש- $B=PA$ כאשר P מכפלה של מטריצות אלמנטריות.

פתרון:

סעיף א)

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4\\2&7&3\\3&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&3&4\\0&1&-5\\3&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-3R_1}\begin{pmatrix}1&3&4\\0&1&-5\\0&-8&-13\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+8R_2}\begin{pmatrix}1&3&4\\0&1&-5\\0&0&-53\end{pmatrix}=B$$

מכאן המדורגת של A היא $B=\begin{pmatrix}1&3&4\\0&1&-5\\0&0&-53\end{pmatrix}$

סעיף ב)

$$B=R_{32}(-8)R_{31}(3)R_{21}(2)\ .$$

לכן $B=PA$ כאשר P המכפלה של מטריצות אלמנטריות:

$$P=R_{32}(-8)R_{31}(3)R_{21}(2)\ .$$

דוגמה 4.15

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&0&1\\2&1&1\end{pmatrix}$

א) מצאו את המטריצה ההופכית של A.

ב) רשמו את A^{-1} כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

פתרון:

סעיף א)

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&0&1&0&0\\ 3&0&1&0&1&0\\ 2&1&1&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&0&1&0&0\\ 0&-6&1&-3&1&0\\ 2&1&1&0&0&1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&0&1&0&0\\ 0&-6&1&-3&1&0\\ 0&-3&1&-2&0&1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{6}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&0&1&0&0\\ 0&1&-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}&0\\ 0&-3&1&-2&0&1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+3R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&0&1&0&0\\ 0&1&-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}&0\\ 0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&0&1&0&0\\ 0&1&-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}&0\\ 0&0&1&-1&-1&2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2+\frac{1}{6}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&0&1&0&0\\ 0&1&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ 0&0&1&-1&-1&2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{-2}{3}\\ 0&1&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ 0&0&1&-1&-1&2 \end{array}\right)$$

לכן

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{-2}{3}\\ \frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ -1&-1&2 \end{pmatrix}$$

סעיף ב)

$$I=R_{12}(2)R_{23}\left(-\frac{1}{6}\right)R_3(2)R_{32}(-3)R_2\left(-\frac{1}{6}\right)R_{31}(2)R_{21}(3)\ A\ .$$

לכן

$$A^{-1}=R_{12}(2)R_{23}\left(-\frac{1}{6}\right)R_3(2)R_{32}(-3)R_2\left(-\frac{1}{6}\right)R_{31}(2)R_{21}(3)$$

משפט 4.5 הופכיות של מטריצות אלמנטריות

$$R_{ij}(k)^{-1}=R_{ij}(-k)\ ,$$
$$R_i(k)^{-1}=R_i\left(\frac{1}{k}\right)\ ,$$
$$R_{ij}^{-1}=R_{ij}\ .$$

דוגמה 4.16

רשמו את המטריצות האלמנטריות הבאות וההופכיות שלהן מסדר 3×3:

א) $R_{12}(3)$

ב) $R_{32}(4)$

ג) $R_2(5)$

ד) $R_{13}(-2)$

ה) R_{31}

ו) R_{12}

ז) $R_3(-4)$

פתרון:

סעיף א) $R_{12}(3) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$R_{12}(3)^{-1} = R_{12}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

סעיף ב) $R_{32}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$R_{32}(4)^{-1} = R_{32}(-4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

סעיף ג) $R_2(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$R_2(5)^{-1} = R_2\left(\frac{1}{5}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

סעיף ד) $R_{13}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$R_{13}(-2)^{-1} = R_{13}\left(2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

סעיף ה) $R_{31}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

$$R_{31}^{-1}=R_{31}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\ .$$

סעיף ו) $R_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$R_{12}^{-1}=R_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ .$$

סעיף ז) $R_3(-4)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$

$$R_3(-4)^{-1}=R_3\left(\frac{-1}{4}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{-1}{4}\end{pmatrix}$$

דוגמה 4.17

נתונה המרטיצה $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&1&4\\1&0&3\end{pmatrix}$.

א) רשמו את A^{-1} כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

ב) רשמו את A כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

פתרון:

סעיף א)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{5} R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{9}{5} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} & 1 \end{array}\right)$$

לכן $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{9}{5} & -2 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} & 1 \end{pmatrix}$.

$$I = R_{13}(2) R_{12}(3) R_{32}(-3) R_2\left(-\frac{1}{5}\right) R_{31}(1) R_{21}(2) A \ .$$

לכן

$$A^{-1} = R_{13}(2) R_{12}(3) R_{32}(-3) R_2\left(-\frac{1}{5}\right) R_{31}(1) R_{21}(2) \ .$$

כדי למצוא את A כמכפלה של מטריצות אלמנטריות נהפוך את המכפלת מטריצות זאת. (שימו לב כאשר נהפוך מכפלה של מטריצות הסדר נהפוך, למשל $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ו- $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$)

$$\begin{aligned} A =& \left(R_{13}(2) R_{12}(3) R_{32}(-3) R_2\left(-\frac{1}{5}\right) R_{31}(1) R_{21}(2)\right)^{-1} \\ =& R_{21}(2)^{-1} R_{31}(1)^{-1} R_2\left(-\frac{1}{5}\right)^{-1} R_{32}(-3)^{-1} R_{12}(3)^{-1} R_{13}(2)^{-1} \\ =& R_{21}(-2) R_{31}(-1) R_2(-5) R_{32}(3) R_{12}(-3) R_{13}(-2) \ . \end{aligned}$$