חישוביות וסיבוכיות

מועד ב׳

ד"ר יוחאי טוויטו, ד"ר ירמיהו מילר .

סמסטר א, תשפ"ה׳

מספר העמוד הנוכחי ומספר העמודים הכולל בשאלון מופיעים בתחתית כל עמוד. בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות

שאלוני בחינה

☑ לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.

☐ לשאלון הבחינה יש לצרף כריכה בלבד.

☐ יש להחזיר את השאלון ביחד עם המחברת/כריכה.

שימוש במחשבונים

☐ ניתן להשתמש במחשבון.

☑ לא ניתן להשתמש במחשבון.

חומר עזר

☑ לא ניתן להשתמש בחומר עזר כלל.

☐ ניתן להשתמש בחומר עזר/דף נוסחאות, כמפורט:

☐ הבחינה עם חומר פתוח ⍰ מותר להשתמש בכל חומר עזר מודפס או כתוב.

הנחיות

נא קראו בעיון את ההנחיות הבאות בטרם תתחילו לפתור את הבחינה. מומלץ לקרוא בקצרה את כלל השאלות לפני שמתחילים לפתור את הבחינה. ניתן לענות על השאלות בכל סדר שתרצו.

1. המבחן כולל 5 שאלות. יש לענות על כולן.
2. שאלות הבחינה שוות משקל - כל שאלה 20 נקודות.
3. כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תדלגו על שלבים.
4. המבחן כולל נספחים, לשימושכם. הסתייעו בהם במידת הצורך.
5. הקפידו על כתב יד ברור וקריא.
6. הקפידו לרשום בגדול ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
7. כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבלתם. רק הן נבדקות !
8. ניתן לקחת את השאלון כאשר הבחינה מסתיימת.

בהצלחה!

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *

הבחינה

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

נתון אלפבית הקלט $\Sigma = \{a,b,c\}$ ונתונה השפה הבאה:

$$L = \{a^i b^j c^{2i \cdot 3j} \mid i,j \in \mathbb{N}^+\}$$

תארו מכונת טיורינג סטנדרטית (כלומר, במודל הבסיסי) שמכריעה את השפה.

בסעיף זה **עליכם לתאר את המכונה בצורה גרפית בעזרת תרשים** $\setminus$ **דיאגרמת מצבים בלבד**, ולא בדרכים אחרות. כלומר, לא בעזרת טבלת מעברים, לא בעזרת פסאודו -קוד,וכיוצא באלו.

תזכורת, $\mathbb{N}^+$ היא קבוצת הטבעיים החיוביים (כלומר, ללא המספר אפס).

סעיף ב' (10 נקודות)

בנומכונת טיורינג סטנדרטית (כלומר, במודל הבסיסי) **שמכריעה** את השפה הבאה:

$$L = \left\{x_1 \dots x_k \# y_1 \dots y_k \# z_1 \dots z_k \;\middle|\; x_i, y_i, z_i \in \{0,\dots,9\} \wedge \forall_i \left(z_i \neq x_i \wedge z_i \neq 2y_i \wedge z_i \geqslant x_i + y_i\right)\right\}$$

אתהמכונה יש לתאר בעזרת **טבלת המעברים בלבד**. אין לתאר את המכונה בעזרת תרשים ו/או פסאודו-קוד(תיאור מילולי).

שאלה 2: וריאציות על מכונות טיורינג (20 נקודות)

נסמן ב-T את מודל מכונת הטיורינג הבסיסי. במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לשני הכיוונים. ב תחילת החישוב הראש נמצא בתחילת הקלט.

נסמן ב-O את מודל מכונת הטיורינג עם סרט ימינה בלבד. במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן לה ישאר במקום, באותה המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לכיוון אחד בלבד - ימינה. בתחילת החישוב, הקלט ממוקם בקצה השמאלי של הסרט והראש נמצאת בתחילת הקלט. החישוב מתנהל כמו במכונה במודל, T למעט כאשר הראש נמצא במשבצת השמאלית ביותר בסרט וצריך לזוז ש מאלה במקרה כזה הראש נשאר במקום ולא זז.

הוכיחו כי המודל T והמודל O שקולים חישובית. כיתבו הוכחה מלאה ומפורטת. אל תדלגו על שלבים .תארו באופן מפורט את פונקציית המעברים בשני כיווני ההוכחה. העזרו בטבלת מעברים בכדי לתאר באופן מלא את פונקציית המעברים.

שאלה 3: התזה של צ'רץ'-טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

נתון הדקדוק הבא. מהי השפה שהדקדוק יוצר? כלומר, מהי $L(G)$? כיתבו את השפה בצורה פורמלית, ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של השפה.

$$
\begin{aligned}
G &= (V, \Sigma, R, S)\ , \\
V &= \{S, C, D, E, \$, \#\}, \\
\Sigma &= \{a\}\ , \\
R &= \{ \\
&\begin{array}{ccc}
S & \rightarrow & \$Ca\#\ , \\
S & \rightarrow & a\ , \\
S & \rightarrow & \varepsilon\ , \\
Ca & \rightarrow & aaC\ , \\
\$D & \rightarrow & \$C\ , \\
C\# & \rightarrow & D\#\ , \\
C\# & \rightarrow & E\ , \\
aD & \rightarrow & Da\ , \\
aE & \rightarrow & Ea\ , \\
\$E & \rightarrow & \varepsilon\ .
\end{array} \\
&\}
\end{aligned}
$$

סעיף ב' (10 נקודות)

נתון הדקדוק הבא. מהי השפה שהדקדוק יוצר? כלומר, מהי $L(G)$? כיתבו את השפה בצורה פורמלית, ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של השפה.

$$
\begin{aligned}
G &= (V, \Sigma, R, S)\ , \\
V &= \{S, B, C, H\}, \\
\Sigma &= \{a, b, c\}\ , \\
R &= \{ \\
&\begin{array}{ccc}
S & \rightarrow & aSBC\ , \\
S & \rightarrow & aBC\ , \\
CB & \rightarrow & HB\ , \\
HB & \rightarrow & HC\ , \\
HC & \rightarrow & BC\ , \\
aB & \rightarrow & ab\ , \\
bB & \rightarrow & bb\ , \\
bC & \rightarrow & bc\ , \\
cC & \rightarrow & cc\ .
\end{array} \\
&\}
\end{aligned}
$$

שאלה 4: אי כריעות (20 נקודות)

נתונה השפה הבאה:

$$L_{\geqslant 3}=\left\{\langle M\rangle \;\middle|\; |L(M)|\geqslant 3\right\}$$

$L_{\geqslant 3}$ מכילה קידודים של מכונות טיורינג שמקבלות לפחות k מילים שונות.

סעיף א' (10 נקודות)

הוכיחו כי $L_{\geqslant 3}$ שפה קבילה.

סעיף ב' (10 נקודות)

הוכיחו כי $L_{\geqslant 3}$ לא כריעה.

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

בעיית סכום התת קבוצה (subsetSum): בהינתן קבוצת מספרים שלמים $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ ומספר שלם t, האם קיימת תת קבוצה $Y\subseteq S$ שסכום איבריה הוא בדיוק t.
בעיית סכום התת קבוצה כשפה פורמלית:

$$\text{SubsetSum}=\left\{\langle S,t\rangle \;\middle|\; t=\sum_{y\in Y}Y \text{ כך ש- } Y\subseteq S \text{ שלם וקיימת תת-קבוצה } t \text{ קבוצת שלמים, } S\right\}$$

בעיית החלוקה (Partition): בהינתן קבוצת מספרים שלמים $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ האם קיימת תת-קבוצה $Y\subseteq S$ כך ש- $\sum_{y\in S\setminus Y} y=\sum_{y\in Y} y$.
בעיית החלוקה כשפה פורמלית:

$$\text{partition}=\left\{S \;\middle|\; \sum_{y\in Y}y=\sum_{y\in S\setminus Y} y \text{ כך ש- } Y\subseteq S \text{ קבוצת שלמים, וקיימת תת-קבוצה } S\right\}$$

הוכיחו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה SubsetSum לשפה partition. כלומר:

$$\text{SubsetSum}\leqslant_P \text{Partition}\ .$$

בשאלה זו עליכם:

סעיף א' (8 נקודות)

להגדיר במפורש את הרדוקציה.

סעיף ב' (6 נקודות)

להראות שהרדוקציה היא רדוקציית התאמה.

סעיף ג' (6 נקודות)

להראות שהרדוקציה פולינומיאלית.

חישוביות וסיבוכיות

מועד ב'

פתרון לדוגמא

ד"ר יוחאי טוויטו , ד"ר ירמיהו מילר .

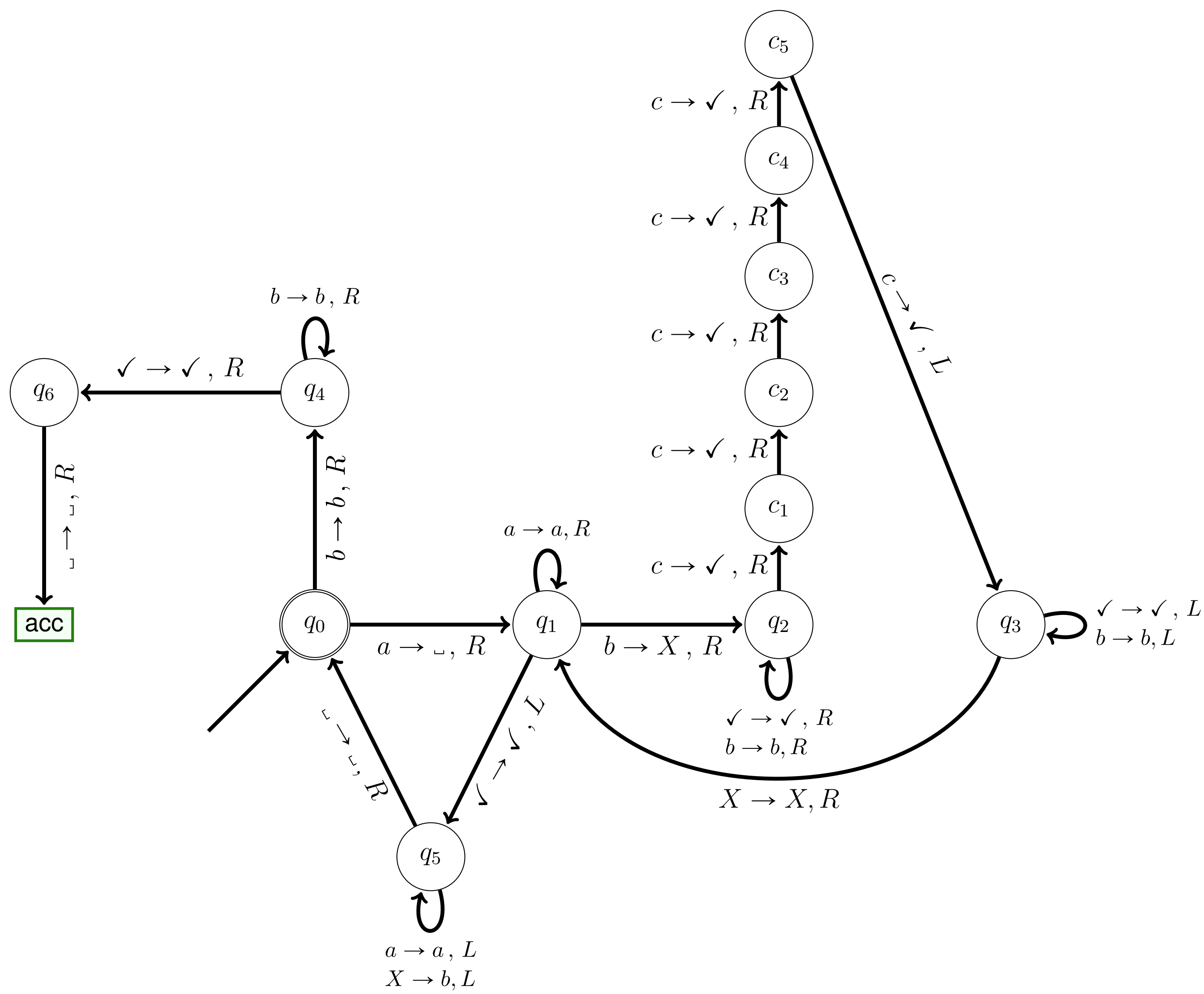
סמסטר א, תשפ"ה'

מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הינן פתרונות לדוגמא. ניתן לפתור חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

כל מעברים לא מופיעים בתרשים, עוברים למצב rej.



סעיף ב' (10 נקודות)

$$\sigma \in \{0,\ldots,9\}\ , \qquad \tau \in \{0,\ldots,9,*\}\ .$$

מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
$X.*.*$	σ	$X.\sigma.*$	$\checkmark$	R	
$X.*.*$	$\checkmark$	$X.*.*$	$\circlearrowleft$	R	
$X.\sigma.*$	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	$X.\sigma.*$	$\circlearrowleft$	R	
$X.\tau.*$	#	$Y.\tau.*$	$\circlearrowleft$	R	
$Y.\tau.*$	σ	$Y.\tau.\sigma$	$\checkmark$	R	
$Y.\tau.*$	$\checkmark$	$Y.\tau.*$	$\circlearrowleft$	R	
$Y.\tau.\sigma$	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	$Y.\tau.\sigma$	$\circlearrowleft$	R	
$Y.\tau_1.\tau_2$	#	$Z.\tau_1.\tau_2$	$\circlearrowleft$	R	
$Z.\tau_1.\tau_2$	$\checkmark$	$Z.\tau_1.\tau_2$	$\circlearrowleft$	R	
$Z.\tau_1.\tau_2$	σ	back	$\checkmark$	L	$\sigma \neq \tau_1 \ \wedge\ \sigma \neq 2\tau_2 \ \wedge \sigma \geqslant \tau_1 + \tau_2$
$Z**$	␣	acc	$\circlearrowleft$	R	
back	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	back	$\circlearrowleft$	L	
back	␣	$X.*.*$	$\circlearrowleft$	R	

כל שאר המעברים עוברים ל rej.

שאלה 2: וריאציות על מכונות טיורינג (20 נקודות)

כיוון ראשון

תהי

$$M^O = \left(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \mathsf{acc}^O, \mathsf{rej}^O\right)\ ,$$

במודל O החד כיווני. נבנה מכונה

$$M^T = \left(Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \mathsf{acc}^T, \mathsf{rej}^T\right)\ ,$$

שקולה במודל הדו כיווני T.

רכיבי המ"ט M^T זהים לאלו של המ"ט M^O, מלבד מהתכונה שהראש של M^O לא זז מעבר לקצה השמאולי של הקלט.

לכן כדי ש- M^T תהיה שקולה ל- M^O יש להוסיף מעברים לפונקצית המעברים של M^T כדי שהראש של M^T לא זז מעבר לקצה השמאולי של הקלט.

הרעיון הוא לסמן את המשבצת שמשמאול לתחילת הקלט עם סימן מיוחד $\$$, ואז להוסיף מעברים לפונקצית המעברים של M^T שמבטיחים שאם הראש נמצא למשבצת שמסומנת $\$$ אז הוא מיד חוזר ו- M^T חוזרת למצב ההתחלתי של המ"ט M^O. זה מתבצע על ידי הוספת השורות האלו למטה לטבלת המעברים של M^T:

תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון	מצב
	L	$\circlearrowleft$	$q_\$$	σ	q_0^T
	R	$\$$	q_0^O	$\sqcup$	$q_\$$
$\forall q \in Q^O$	R	$\$$	q	$\$$	q

$$Q^T = Q^O \cup \{q_0^T, q_\$\} \ , \qquad \Sigma^T = \Sigma^O \ , \qquad \Gamma^T = \Gamma^O \cup \{\$\} \ , \qquad \mathsf{acc}^T = \mathsf{acc}^O \ , \qquad \mathsf{rej}^T = \mathsf{rej}^O \ .$$

כיוון שני

תהי
$$M^T = \left(Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \mathsf{acc}^T, \mathsf{rej}^T\right) \ ,$$
במודל T הדו כיווני. נבנה
$$M^O = \left(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \mathsf{acc}^O, \mathsf{rej}^O\right) \ ,$$
במודל O החד כיווני.

נתאר סימולציה של הכוונה החד-כיוונית במודל הדו-כיוונית.

הרעיון הוא לסמן קו על הסרט במשבת באמצע הקלט, ואז לקפל את הסרט בקו הזה. באופן הזה נקבל סרט עם קצה שמאולי ואינסופי ימינה. במשבצות של הסרט החדש המקופל יש שני תווים, אחד למעלה (U) ואחד למטה (D), מלבד מנקודת הקיפול שבו יש משבצת אחת שמסומנת $\$$.

באופן הזה אפשר לסמלץ את המכונה M^O במכונה M^T על ידי הוספת המעברים הבאים לטבלת המעברים של M^T. **לכל** $\tau, \sigma, \pi \in \Gamma^T$:

תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון	מצב
תזוזה שמאלה: $(q,\sigma) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,L)$	L	π τ	$p.D$	π σ	$q.D$
	R	τ π	$p.U$	σ π	$q.U$
תזוזה שמאלה: $(q,\sqcup) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,L)$	L	$\sqcup$ τ	$p.D$	$\sqcup$	$q.D$
	R	τ $\sqcup$	$p.U$	$\sqcup$	$q.U$
תזוזה ימינה: $(q,\sigma) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,R)$	R	π τ	$p.D$	π σ	$q.D$
	L	τ π	$p.U$	σ π	$q.U$
תזוזה ימינה: $(q,\sqcup) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,R)$	R	$\sqcup$ τ	$p.D$	$\sqcup$	$q.D$
	L	τ $\sqcup$	$p.U$	$\sqcup$	$q.U$
	R	$\circlearrowleft$	$q.U$	$\$$	$q.D$
	R	$\circlearrowleft$	$q.D$	$\$$	$q.U$
אתחול					
$\tau \in \Sigma \cup \{\sqcup\}$ $\sigma \in \Sigma$	R	$\$$	$q.\tau$	τ	q_0^O
	R	$\sqcup$ σ	$q.\tau$	τ	$q.\sigma$
	L	$\sqcup$ $\sqcup$	back	$\sqcup$	$q.\sqcup$
	L	$\circlearrowleft$	back	$\sqcup$ τ	back
	R	$\circlearrowleft$	$q_0^T.D$	$\$$	back
סיום					
			acc^O	הכל	acc$^T.D$
			acc^O	הכל	acc$^T.U$
			rej^O	הכל	rej$^T.D$
			rej^O	הכל	rej$^T.U$
כל השאר עוברים ל-rej					

$$\Gamma^O \supseteq \left(\Gamma^T \times \Gamma^T\right) \cup \{\$\} \ .$$

שאלה 3: התזה של צ'רץ'-טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

$$S \rightarrow \$Ca\# \rightarrow \$aaC\# \rightarrow \$aaE \rightarrow \$aEa \rightarrow \$Eaa \rightarrow aa$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \$Ca\# \rightarrow \$aaC\# \rightarrow \$aaD\# \rightarrow \$aDa\# \rightarrow \$Daa\# \rightarrow \$Caa\# \\ &\rightarrow \$aaCa\# \rightarrow \$aaaaC\# \rightarrow \$aaaaE \rightarrow \$aaaEa \rightarrow \$aaEaa \rightarrow \$aEaaa \rightarrow \$Eaaaa \\ &\rightarrow aaaa \end{aligned}$$

באמצעות אינדוקציה על k ניתן להוכיח כי

$$L(G) = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; w = \varepsilon \vee \left(w = a^{2^n} \ , \ n \in \mathbb{N}\right) \right\} \ .$$

סעיף ב' (10 נקודות)

$$S \rightarrow aBC \rightarrow abC \rightarrow abc$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSBC \rightarrow aaBCBC \rightarrow aaBHBC \rightarrow aaBBCC \rightarrow aabBCC \rightarrow aabbCC \\ &\rightarrow aabbcC \rightarrow aabbcc \ . \end{aligned}$$

אפשר להוכיח, ע"י אינדוקציה על n, כי

$$L(G) = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; w = a^n b^n c^n \ , \ n \in \mathbb{N}^+ \right\} \ .$$

שאלה 4: אי כריעות (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

נבנה מ"ט אי-דטרמיניסטית $M_{L_{\geqslant 3}}$ המכריעה את $L_{\geqslant 3}$.

התיאור הבא הוא תיאור של תוכנית אי-דטרמיניסטית של המכונת טיורינג $M_{L_{\geqslant 3}}$.

$M_{L_{\geqslant 3}} =$ על קלט x:

1. $M_{L_{\geqslant 3}}$ בודקת האם הקלט x הוא מכונת טיורינג.
אם לא אז $M_{L_{\geqslant 3}}$ דוחה.
2. $M_{L_{\geqslant 3}}$ בוחרת באופן אי-דטרמיניטי 3 מילים w_1, w_2, w_3.
   - מריצה את M על w_1.
     - אם M דוחה $\Leftarrow$ $M_{L_{\geqslant 3}}$ דוחה.
   - מריצה את M על w_2.
     - אם M דוחה $\Leftarrow$ $M_{L_{\geqslant 3}}$ דוחה.
   - מריצה את M על w_3 ועונה כמוה.

<u>נכונות.</u>

$x \in L_{\geqslant 3} \Leftarrow x = \langle M \rangle$ ו- $|L(M)| \geqslant 3$.

$\Leftarrow$ $\exists$ 3 מילים w_1, w_2, w_3 המתקבלים ב- M.

$\Leftarrow$ $\exists$ ריצה של $M_{L_{\geqslant 3}}$ בה תבחר את w_1, w_2, w_3 ותריץ עליהם את M ותקבל

$\Leftarrow$ $M_{L_{\geqslant 3}}$ מקבלת את x.

$x \notin L_{\geqslant 3} \Leftarrow$ שני מקרים:

מצב 1. $x \neq \langle M \rangle \Leftarrow$ $M_{L_{\geqslant 3}}$ דוחה את L.

מצב 2. $x = \langle M \rangle$ ו- $|L(M)| < 3$

$\Leftarrow$ לכל 3 מילים שונות w_1, w_2, w_3 לפחות אחת מהן לא מתקבלת ב- M.

$\Leftarrow$ בכל ריצה של $M_{L_{\geqslant 3}}$ בה היא תבחר 3 מילים w_1, w_2, w_3 השונות זו מזו, ולפחות אחת הריצות של M על מילים אלו תדחה או לא תעצור

$\Leftarrow$ בכל ריצה של $M_{L_{\geqslant 3}}$ על x, $M_{L_{\geqslant 3}}$ תדחה או לא תעצור

$\Leftarrow$ $M_{L_{\geqslant 3}}$ לא מקבלת את x.

סעיף ב' (10 נקודות)

נבנה רדוקציה מ- A_{TM}.
הפונקצית הרדוקציה היא:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\varnothing} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר $M_{\varnothing}$ היא מ"ט הדוחה כל קלט ו- M' היא מ"ט שעל כל קלט x מריצה את M ועונה כמוה.

<u>אבחנה</u>

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \varnothing & w \notin L(M) \end{cases}$$

נכונות הרדוקציה

נניח ש- $x \in A_{TM}$.

$\Leftarrow$ $x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \in L(M)$.

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M'\rangle$.

$\Leftarrow$ $L(M') = \Sigma^*$.

$\Leftarrow$ $|L(M')| = \infty$.

$\Leftarrow$ $f(x) \in L_{\geqslant 3}$.

נניח ש- $x \notin A_{TM}$.
אז יש שני מקרים:

מצב 1: $x \neq \langle M, w\rangle$.

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M_{\varnothing}\rangle$ ו- $|L(M_{\varnothing})| = 0$

$\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\geqslant 3}$.

מצב 2: $x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \notin L(M)$.

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M'\rangle$

$\Leftarrow$ $L(M') = \varnothing$.

$\Leftarrow$ $|L(M')| = 0$.

$\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\geqslant 3}$.

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

סעיף א' (8 נקודות)

נבנה פונקצית הרדוקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ שמוגדרת

$$f(\langle S, t\rangle) = \langle S'\rangle$$

כאשר $\langle S, t\rangle$ קלט של SubsetSum ו- $\langle S'\rangle$ קלט של Partition.

1) יהי $s = \sum_{x \in S} x$.

2) נגדיר את הקבוצה החדשה S' על ידי הוספת האיבר $s - 2t$ לקבוצה S:

$$S' = S \cup \{s - 2t\} .$$

סעיף ב' (6 נקודות)

__כיוון $\Leftarrow$__

נניח ש- $\langle S,t\rangle \in$ SubsetSum.

$\Leftarrow$ קיימת תת-קבוצה $Y\subseteq S$ כך ש- $t=\sum\limits_{y\in Y} y$.

לכן:

$$\begin{aligned}\sum_{y\in(Y\cup\{s-2t\})} y &= |Y|+s-2t\\ &= t+s-2t\\ &= s-t\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{y\in S'\backslash(Y\cup\{s-2t\})} y &= |S'|-(|Y|+s-2t)\\ &= |S'|-|Y|-s+2t\\ &= |S|+s-2t-|Y|-s+2t\\ &= |S|-|Y|\\ &= s-t\ .\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ התת-קבוצה $Y\cup\{s-2t\}$ והתת-קבוצה $S'\backslash\big(Y\cup\{s-2t\}\big)$ מהוות חלקוה של הקבוצה S'.

$\Leftarrow$ $\langle S'\rangle \in$ Partition.

__כיוון $\Rightarrow$__

נניח ש- $\langle S'\rangle \in$ Partition.

$\Leftarrow$ קיימות תת-קבוצות $S_1',S_2'\subseteq S'$ כך שמתקיים

$$S_1'\cup S_2' = S' \tag{1*}$$

-ו

$$\sum_{x\in S_1'} x = \sum_{x\in S_2'} x\ . \tag{2*}$$

הקבוצה S קשור לקבוצה S' על ידי היחס $S'=S\cup\{s-2t\}$.

לכן

$$S_1'\cup S_2' = S\cup\{s-2t\} \tag{3*}$$

ללא הגבלת כלליות אנחנו נגדיר את התת-קבוצה $S_1 \subseteq S$ של הקבוצה S להיות

$$S_1 = S_1' \cup \{s-2t\} \ ,$$

ואנחנו נגדיר את התת-קבוצה $S_2 \subseteq S$ של הקבוצה S להיות

$$S_2 = S_2' \ .$$

מכאן מנובע מהמשוואה (3*) ש:

$$S_1 \cup S_2 = S_1' \cup S_2' + \{s-2t\} = S \cup \{s-2t\} \qquad \Rightarrow \qquad S_1 \cup S_2 = S \ . \tag{4*}$$

$\Leftarrow$ ניתן לרשום משוואה (2*) בצורה הבאה:

$$\sum_{x\in(S_1\cup\{s-2t\})} x = \sum_{x\in S_2} x \ . \tag{5*}$$

ניתן לחלק את הסכום בצד השמאול של המשווה (5*) ולרשום אותה בצורה הבאה:

$$\sum_{x\in S_1} x + s - 2t = \sum_{x\in S_2} x \ . \tag{6*}$$

נוסיף את הסכום $\sum\limits_{x\in S_1} x$ לשני האגפים של משוואה של (6*) ונקבל

$$\sum_{x\in S_1} x + \sum_{x\in S_1} x + s - 2t = \sum_{x\in S_2} x + \sum_{x\in S_1} x \ . \tag{7*}$$

הסכום בצד הימין של משוואה (7*) הוא הסכום $\sum\limits_{x\in(S_1\cup S_2)} x$.

לפי המשוואה (4*), $S_1 \cup S_2 = S$ לכן $\sum\limits_{x\in S} x = \sum\limits_{x\in(S_1\cup S_2)} x$.

לכן הסכום בצד הימין של משוואה (7*) הוא הסכום של כל האיברים אשר בקבוצה S.
אנחנו מסמנים את הסכום הזה כ- $\sum\limits_{x\in S} x = s$. לכן ניתן לרשום את משוואה (7*) בצורה הבאה:

$$\sum_{x\in S_1} x + \sum_{x\in S_1} x + s - 2t = s \ . \tag{8*}$$

אפשר לבטל s בצד שמאול ובצד ימין ולהעביר את ה- $2t$ לצד ימין ולקבל את המשוואה:

$$\sum_{x\in S_1} x + \sum_{x\in S_1} x = 2t \ , \tag{9*}$$

זאת אומרת

$$2\sum_{x\in S_1} x = 2t \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{x\in S_1} x = t \ . \tag{10*}$$

$\Leftarrow$ קיימת תת קבוצה $S_1 \subseteq S$ של S שמקיימת את התנאי $\sum\limits_{x \in S_1} x = t$.

$\Leftarrow$ SubsetSum $\langle S,t\rangle \in$.

סעיף ג' (6 נקודות)

הפונקצית הרדוקציה f, על קלט $\langle S,t\rangle$ מחזירה את הפלט $\langle S'\rangle$ כאשר $S'=S\cup\{s-2t\}$.

לכן הפונקציה מחשבת את הסכום s של כל האיברים שבקבוצה S ואז מחשבת את החיסור $s-2t$.

נסמן $n=|S|$ האורך של הקבוצה S.

אפשר לתאר את f בפסאודו-קוד באופן הבא:

שלב 1. הפונקציה f מאתחלת משתנה $s=0$.

שלב 2. הפונקציה נכנסת ללואה מעל כל האיברים שבקבוצה S ומחברת האיבר הנוכחי לערך של s כל איטרציה.

שלב 3. בסוף הפונקציה מחשבת את החיסור $s-2t$.

שלב 4. הפונקציה מחזירה את הקבוצה החדשה $S'=S\cup\{s-2t\}$.

- שלב 1 דורש צעד אחד. לכן הסיבוכיות של שלב 1 הוא $O(1)$.
- שלב 2 דורש n צעדים. לכן הסיבוכיות של שלב 2 הוא $O(n)$.
- שלב 3 דורש צעד אחד. לכן הסיבוכיות של שלב 3 הוא $O(1)$.
- שלב 4 דורש צעד אחד. לכן הסיבוכיות של שלב 4 הוא $O(1)$.

בסך הכל הסיבוכיות של הפונקציה f היא

$$O(1)+O(n)+O(1)+O(1)=O(n) .$$