$26-10-23$
$09:00-12:00$

חדו"א 1

מועד ב'

מרצה: ד"ר ירמיהו מילר

תשפ"ג סמסטר קיץ'

השאלון מכיל עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דף נוסחאות מצורף לשאלון (עמודים בפורמט $A4$).

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות בלבד מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** בלבד מתוך **שתיים**.

==

שאלות 1 ו-2 חובה!

שאלה 1 (21 נקודות)

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+4x}$ (תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וציירו את סקיצת הגרף של הפונקציה.

שאלה 2 (24 נקודות)

פתרו 2 מתוך 3 האינטגרלים הבאים:

1) $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(5x+4)\,dx$

3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+4x}dx$

ענה על 3 מתוך 4 השאלות 3-6:

שאלה 3 (15 נקודות)

א) (12 נק') מצאו את משוואת המשיק ומשוואת הנורמל לקו $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = e^{-3t} + t^2 \end{cases}$ בנקודה שבה $x = 1$.

ב) (3 נק') הוכיחו כי לא קיימת פונקציה אי זוגית המוגדרת לכל מספר ממשי ואינה עוברת בראשית הצירים.

שאלה 4 (15 נקודות)

א) (12 נק') חשבו את הגבולות הבאים:

1) (6 נק') $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2(2x)-\sin(2x)}{2\sin(x)-\cos(2x)+1}\right)$

2) (6 נק') $\displaystyle\lim_{x\to 6}(x-5)^{\frac{x}{x-6}}$

ב) (3 נק') הוכיחו כי אם $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ עבור פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[0,1]$, אז קיימת נקודה $c \in (0,1)$ כך ש- $f(c) = 0$.

שאלה 5 (15 נקודות)

א) **(12 נק')** חשבו את שטח התחום החסום על ידי הקווים $y=\ln x$, $x=4e$, $y=2$.

ב) **(3 נק')** הוכיחו כי למשוואה $\tan x = x$ יש בדיוק פתרון אחד בקטע $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$.

שאלה 6 **(15 נקודות)**

א) **(12 נק')** רשמו את פולינום מקלורן מסדר 2 עבור הפונקציה $y^3+4xy-e^x=0$.

ב) **(3 נק')** הגדירו גבול דו-צדדי של פונקציה.

ענה על 1 מתוך 2 השאלות 7-8:

שאלה 7 **(10 נקודות)**

הוכיחו שלכל $-1<a<b$ מתקיים

$$1-\frac{a+1}{b+1}<\ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)<\frac{b+1}{a+1}-1\ .$$

שאלה 8 **(10 נקודות)**

מצאו את הנקודה על המעגל $x^2+y^2=16$ הקרובה ביותר לנקודה $A(6,5)$.

1 פתרונות

שאלה 1 (21 נקודות)

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x^2+4x}$ (תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וציירו את סקיצת הגרף של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{(x+2)^2}{x^2+4x} = \frac{(x+2)^2}{x(x+4)}$$

שלב 1 תחום הגדרה: $x \neq 0, -4$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(-2, 0)$.

x	$x < -4$	$-4 < x < 0$	$x > 0$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x = -4$ ו- $x = 0$.

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: אין.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\ , \qquad n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - m\cdot x) = 1\ .$$

לכן הקו $y = 1$ אסימפטוטה משופעת בתהליך כאשר $x \to \infty$.

ב- $x \to -\infty$ אותו הדבר.

שלב 6 תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = -\frac{8(x+2)}{x^2(x+4)^2}$$

נקודות קריטיות: $(-2, 0)$.

x	$x < -4$	$-4 < x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x > 0$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	מקסימום	$\searrow$	$\searrow$

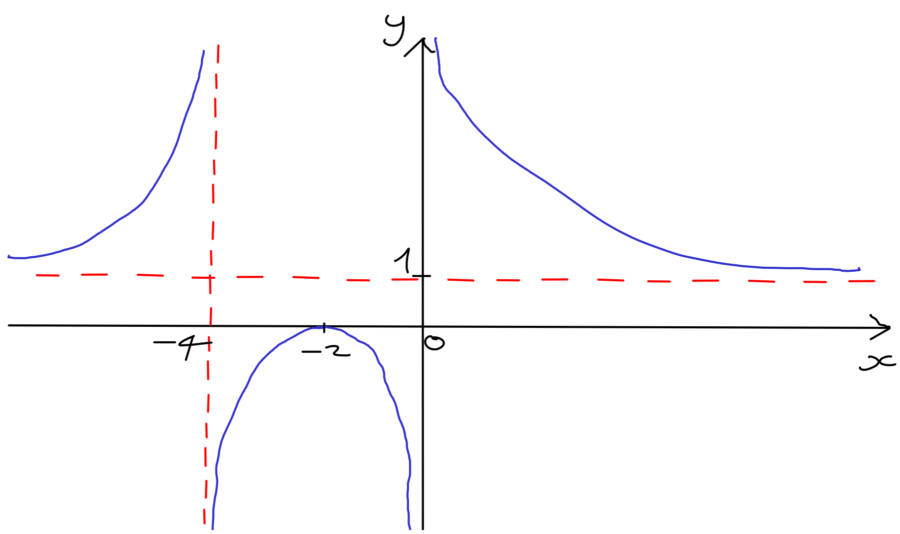
<u>שלב 7</u> תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{8\,(3x^2+12x+16)}{x^3(x+4)^3}$$

נקודות פיתול: אין.

x	$x<-4$	$-4<x<0$	$x>0$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	קמורה $\uparrow$	קמורה $\downarrow$	קמורה $\uparrow$

<u>שלב 8</u> שרטוט:



<u>שאלה 2</u> <u>(24 נקודות)</u>

1) $I = \int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$.

נגדיר

$$u := \sin x\ , \qquad \rightsquigarrow \qquad u' = \cos x\ .$$

$$I = -\cot x + \int \frac{u'}{u^2}dx = -\cot x + \int \frac{1}{u^2}\,du = -\cot x - \frac{1}{u} + C = -\cot x - \frac{1}{\sin x} + C\ .$$

2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot (5x+4)dx$.

נגדיר

$$u' = \cos x \ , \qquad \text{v} = 5x+4 \ , \qquad \rightsquigarrow \qquad u = \sin x \ , \qquad , \text{v}' = 5$$

ונחשב את האינטגרל ע"י אינטגרציה בחלקים:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u' \cdot \text{v} dx = [u \cdot \text{v}]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u \cdot \text{v}' dx \\ &= [\sin x \cdot (5x+4)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot (5) dx \\ &= [\sin x \cdot (5x+4)]_0^{\pi/2} + [5\cos x]_0^{\pi/2} \\ &= [\sin(\pi/2) \cdot (5\pi/2+4) - \sin(0) \cdot (5 \cdot 0 + 4)] + [5\cos(\pi/2) - 5 \cdot \cos(0)] \\ &= 5\pi/2 + 4 - 5 \\ &= 5\pi/2 - 1 \ . \end{aligned}$$

3) $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+4x} dx$.

$$\frac{x+1}{x^2+4x} = \frac{x+1}{x(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4)+Bx}{x(x+4)}$$

נציב $x=-4$ ונקבל $B = 3/4$. נציב $x=0$ ונקבל $A = 1/4$, לכן

$$\frac{x+1}{x^2+4x} = \frac{1}{4x} + \frac{3}{4(x+4)} \ .$$

מכאן

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{x+1}{x^2+4x} dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{4x} + \frac{3}{4(x+4)}\right] \\ &= \frac{1}{4}[\ln x]_1^2 + \frac{3}{4}[\ln(x+4)]_1^2 \\ &= \frac{1}{4}[\ln 2 - \ln 1] + \frac{3}{4}[\ln 6 - \ln 5] \\ &= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2}{1}\right) + \frac{3}{4}\ln\left(\frac{6}{5}\right) \\ &= 0.310028 \ . \end{aligned}$$

<u>שאלה 3</u> <u>(15 נקודות)</u>

א) (12 נק') מצאו את משוואת המשיק ומשוואת הנורמל לקו $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = e^{-3t} + t^2 \end{cases}$ בנקודה שבה $x=1$.

$$x=1 \quad \rightsquigarrow \quad e^{2t}=1 \quad \rightsquigarrow \quad t=0.$$

על הנקודה שבה $t=0$,

$$y(t=0)=1\ .$$

נגזור את הפונקציה $y(x)$:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{-3e^{-3t}+2t}{2e^{2t}}\ .$$

בנקודה $t=0$:

$$y'_x(t=0)=\frac{-3}{2}\ .$$

משוואת המשיק בנקודה הינה (x_0,y_0) ניתנת ע"י הנוסחה $y-y_0=y'(x_0)\cdot(x-x_0)$. נציב $(x_0,y_0)=(1,1)$ ונקבל

$$y=1-\frac{3}{2}(x-1)\ .$$

משוואת הנורמל בנקודה הינה (x_0,y_0) ניתנת ע"י הנוסחה $y-y_0=-\frac{1}{y'(x_0)}\cdot(x-x_0)$. נציב $(x_0,y_0)=(1,1)$ ונקבל

$$y=1+\frac{2}{3}(x-1)\ .$$

ב) (3 נק') נוכיח דרך השליליה. נניח כי קיימת פונקציה f אי-זוגית המוגדרת לכל מספר ממשי שאינה עוברת בראשית הצירים. $f(x)$ אי-זוגית לכן

$$f(-x)=-f(x)\ .$$

התחום ההגדרה של f הוא כל x כולל $x=0$. נציב $x=0$ ונקבל

$$f(0)=-f(0)\ .$$

ביטוי זה מתקיים רק אם $f(0)=0$. סתירה!

שאלה 4

א) 1) (6 נק') שימו לב המונה והמחנה של השבר מתאפסים ב- $x=0$ ולכן מותר להשתמש בכלל לופיטל:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2(2x)-\sin(2x)}{2\sin(x)-\cos(2x)+1}\right)&=\lim_{x\to0}\left(\frac{(\sin^2(2x)-\sin(2x))'}{(2\sin(x)-\cos(2x)+1)'}\right)\\&=\lim_{x\to0}\left(\frac{4\sin(2x)\cos(2x)-2\cos(2x)}{2\cos(x)+2\sin(2x)}\right)\\&=\frac{4\sin(0)\cos(0)-2\cos(0)}{2\cos(0)+2\sin(0)}\\&=\frac{-2}{2}\\&=-1\ .\end{aligned}$$

2) (6 נק')

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 6}(x-5)^{\frac{x}{x-6}} \\ &= \lim_{x\to 6}(x-6+1)^{\frac{x}{x-6}} \\ &= \lim_{x\to 6}\left[(x-6+1)^{\frac{1}{x-6}}\right]^{x} \\ &= \left(\lim_{x\to 6}\left[(x-6+1)^{\frac{1}{x-6}}\right]\right)^{\lim\limits_{x\to 6} x} \end{aligned}$$

נגדיר $y=x-6$.

$$L=\left(\lim_{y\to 0}\left[(y+1)^{\frac{1}{y}}\right]\right)^{\lim\limits_{x\to 6} x}=(e)^{\lim\limits_{x\to 6} x}=e^6\ .$$

ב) תהי $F(x)$ פונקציה הקדומה של $f(x)$. אז

$$F(1)-F(0)=0 \qquad \Rightarrow \qquad F(1)=F(0)\ .$$

לפי משפט רול קיימת נקודה $c\in[0,1]$ שבה $F'(c)=0$ ולכן $f(c)=0$. מש"ל.

<u>שאלה 5</u> א) (12 נק')

ב) (3 נק') נגדיר

$$f(x)=\tan x-x\ .$$

$f(\pi/4)=1-\pi/4>0$ ו- $f(-\pi/4)=-1+\pi/4<0$. לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה $1-\pi/4<c<-1+\pi/4$ שבה

$$f(c)=0\ .$$

נוכיח כי הנקודה הזאת יחידה:

$f(x)$ חח"ע, לכן השורש של $f(x)$ יחיד. מש"ל.

<u>שאלה 6</u> <u>(15 נקודות)</u>

א) (12 נק')

$$y^3+4xy-e^x=0\ . \qquad (*)$$

נציב $x=0$ בביטוי (*) ונקבל:

$$y(0)^3+4\cdot 0\cdot y(0)-e^0=0 \qquad \Rightarrow \qquad y(0)^3-1=0 \qquad \Rightarrow \qquad y(0)=1\ . \qquad (1*)$$

נגזור (*):

$$3y^2\cdot y'+4y+4xy'-e^x=0\ . \qquad (2*)$$

נציב $x=0$ ו- $y(0)=1$ בביטוי (2*) ונקבל:

$$3y(0)^2y'(0)+4y(0)+4\cdot 0\cdot y'(0)-e^0=0 \qquad \Rightarrow \qquad y'(0)=-1\ . \tag{3*}$$

נגזור (2*):

$$6y\cdot(y')^2+3y^2y''+8y'+4xy''-e^x=0\ . \tag{4*}$$

נציב $x=0$ ו- $y(0)=1$ ו- $y'(0)=-1$ בביטוי (4*) ונקבל:

$$6y(0)\cdot y'(0)^2+3y(0)^2y''(0)+8y'(0)+4\cdot 0\cdot y''(0)-1=0 \qquad \Rightarrow \qquad y''(0)=1\ . \tag{5*}$$

נציב (1*), (3*) ו- (5*) בתוך הנוסחה של מקלורן מסדר 2

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2}x^2$$

ונקבל

$$y(x)=1-x+\frac{x^2}{2}\ .$$

ב) (3 נק')

L נקרא גבול של פונקציה $f(x)$ בנקודה a אם לכל מספר $\epsilon>0$ קיים מספר $\delta>0$ כך ש- $|f(x)-L|<\epsilon$ מתקיים לכל $x\in(a-\delta,a+\delta)$.

שאלה 7

נגדיר $f(x)=\ln(x+1)$. f רציפה וגזירה לכל $x>-1$. לכן לפי משפט לגרנזי, לכל $-1<a<b$ קיימת $c\in(a,b)$ כך ש-

$$\frac{\ln(b+1)-\ln(a+1)}{b-a}=\ln(c+1)'=\frac{1}{c+1} \qquad \Rightarrow \qquad \ln(b+1)-\ln(a+1)=\frac{b-a}{c+1}\ . \tag{*}$$

שים לב, $-1<a<c<b$ אזי $0<a+1<c+1<b+1$, לכן

$$\frac{1}{b+1}<\frac{1}{c+1}<\frac{1}{a+1}\ .$$

כיוון ש- $b-a>0$ חיובי, אם נכפיל את האי-השוויון הזה ב- $b-a$ נקבל:

$$\frac{b-a}{b+1}<\frac{b-a}{c+1}<\frac{b-a}{a+1}\ ,$$

או שקול

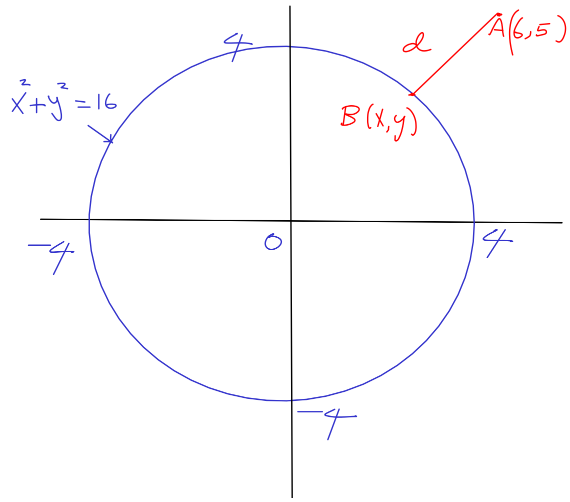
$$\frac{b+1-(a+1)}{b+1}<\frac{b-a}{c+1}<\frac{b+1-(a+1)}{a+1} \qquad \Rightarrow \qquad 1-\frac{a+1}{b+1}<\frac{b-a}{c+1}<\frac{b+1}{a+1}-1\ .$$

נציב את היחס (*) ונקבל

$$1-\frac{a+1}{b+1}<\ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)<\frac{b+1}{a+1}-1\ .$$

מש"ל

שאלה 8



תהי $B(x,y)$ הנקודה על המעגל הקרובה ביותר לנקודה A. המרחק בריבוע בין A ל- B הוא

$$d^2 = (6-x)^2 + (5-y)^2 \ .$$

יש למזער את d^2 לפי x.

נפתח סוגריים ונקבל:

$$d^2 = x^2 - 12x + y^2 - 10y + 61$$

נציב את $y^2 = 16 - x^2$ ממשוואת המעגל ונקבל:

$$d^2 = -12x - 10y + 77$$

ואז נציב $y = \pm\sqrt{16-x^2}$ ממשוואת המעגל:

$$d^2 = \mp 10\sqrt{16-x^2} - 12x + 77 \ .$$

יש למזער d^2 לפי x:

$$\left(d^2\right)'_x = \mp\frac{10x}{\sqrt{16-x^2}} - 12 = 0$$

הפתרון הוא

$$x_B = \frac{24}{\sqrt{61}} = \mp 3.07289 \ ,$$

וכדי לקבל ה- y המתאים נציב במשוואת המעגל ונקבל $y_B = \dfrac{20}{\sqrt{61}} = 2.56074$. הנקודה הקרובה ביותר ל $A(6,5)$ היא $(3.07289, 2.56074)$ בעוד הנקודה הרחוקה ביותר היא $(-3.07289, 2.56074)$. לכן התשובה הסופית היא $B = (3.07289, 2.56074)$.