תרגילים 1 - שיווי משקל ואסטרטגיות שולטות

שאלה 1 משה ואהרון משתתפים במשחק טלוויזיה, שבו על כל אחד מהם להגיש בכתב בתוך מעטפה סגורה אחת משתי הבקשות הבאות והבקשות של שניהם תתבצענה:

- תן לי 1,000 ₪.
- .№4,000 תן לו
- א) רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית.
- ב) כיצד השחקנים ינהגו במשחק ומדוע? ו

שאלה 2 האם במשחקים הבאים סילוק חוזר של אסטרטגיות נשלטות חזק מסתיים בווקטור אסטרטגיות יחיד? אם כן, מה הוא ווקטור זה?

(N

$$II$$
 שחקן שחקן L R I שחקן H $egin{array}{c|c} 4,2&0,1\\ T&3,3&1,1 \end{array}$

(2

$$II$$
 שחקן שחקן L R I שחקן H $\begin{bmatrix} 2,3 & 1,4 \\ T & 0,2 & 0,4 \end{bmatrix}$

()

שאלה 3 מצאו את כל ווקטורי האסטרטגיות הרציונליים במשחקים הבאים.

(N

$$\begin{array}{c|cccc}
II & L & R \\
\hline
T & 9,5 & 5,3 \\
B & 8,6 & 8,4
\end{array}$$

I	a	b	c	d
T	6, 2	6,3	7,6	2,8
B	8,5	6,9	4,6	4,7

(1

()

I	a	b	c	d
α	3, 7	0, 13	4,5	5,3
β	5, 3	4, 5	4,5	3,7
γ	4, 5	3, 7	4, 5	5, 3
δ	4, 5	4,5	4, 5	4, 5

שאלה 4 במשחקים הבאים, מצאו את השיווי משקל נאש של המשחק.

$$\begin{array}{c|cccc}
II & L & R \\
\hline
H & 4,8 & 5,10
\end{array}$$

$$T \mid 3,7 \mid 6,20$$

$$\begin{array}{c|cccc}
II & L & R \\
\hline
H & 2,3 & 1,5 \\
T & 0,0 & 4,1
\end{array}$$

()

(a

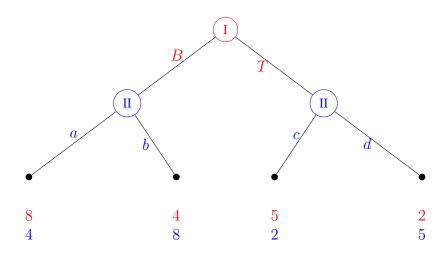
I	a	b	c	d
α	2, 13	4,8	6, 5	8, 2
β	6, 4	2,3	3,8	8,4
γ	0,9	7, 7	2,7	14, 10
δ	4,0	0,4	4,6	6,0

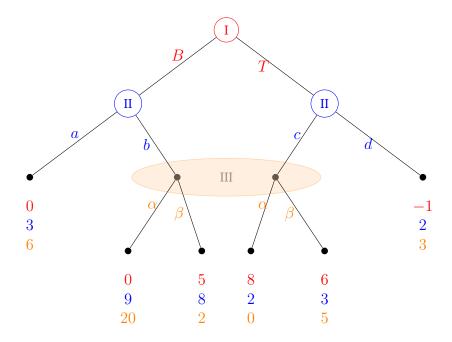
(7

I	a	b	c	d
α	-5, 5	-4, 4	-5, 1	0, 4
β	-4, 1	-3, 3	-2, 2	1, 1
γ	0,0	1, -1	-4, 4	-3, 3
δ	-1, 6	2, -2	7, 11	5, 2

שאלה 5 רשמו את המשחקים הבאים כמשחקים בצורה אסטרטגית (במשחקי שלושה שחקנים, שחקן I בוחר שאלה 5 רשמו את השיווי משקל אם יש. שורה, שחקן II בוחר עמודה, ושחקן III בוחר במטריציה). בכל משחק מצאו את השיווי משקל אם יש.

(N

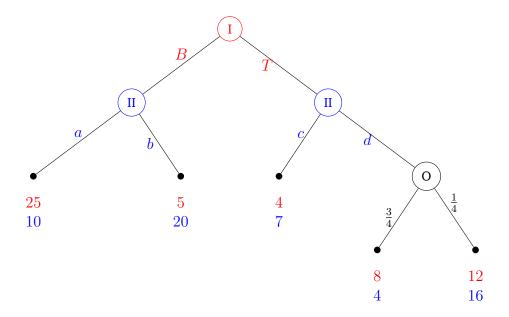




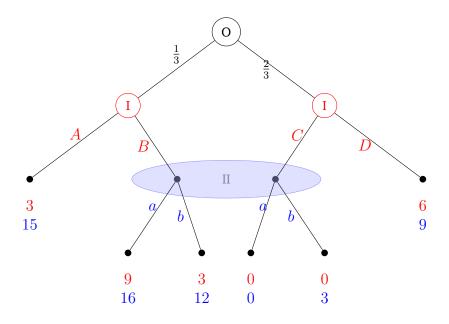
שאלה 6 מצאו את השיווי משקל נאש במשחקים הבאים:

(N

()



שאלה **7** מצאו את השייוי משקל נאש במשחק הבא:



שאלה 8 יהי

$$G = \left(N, \left(S_i\right)_{i \in N}, \left(u_i\right)_{i \in N}\right)$$

משחק בצורה אסטרטגית ויהי

$$\hat{G} = \left(N, \left(\hat{S}_i\right)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$$

משחק המתקבל מ-G על ידי השמטת חלק מהאסורוגיות של השחקנים.

.i לכל שחקן $\hat{S}_i \subseteq S_i$

הוכיחו:

 \hat{G} במשחק משקח שיווי משקל אזי s^* הוא לכל שחקן לכל אזי $s_i^* \in \hat{S}_i$ ואם המשחק משקל משקל הוא שיווי משקל אזי אם אם

 $S_1=S_2$ משחק שני שחקנים נקרא משחק סימטרי אם לשני השחקנים אותה קבוצת משחק שאלה פונקצית מתקיימים מתקיימים $u_1(s_1,s_2)=u_2(s_2,s_1)$ לכל ופונקצית התשלומים מתקיימים

היא שיווי המשקל במשחק סימטרי היא קבוצת סימטרי, כלומר אם הוכיחו שקבוצת שיווי המשקל במשחק סימטרי היא קבוצת סימטרי, כלומר אם $(s_1=s_1^*,s_2=s_2^*)$ היא שיווי משקל, אז גם $(s_1=s_2^*,s_2=s_1^*)$ הוא שיווי משקל.

פתרונות

שאלה 1

אסטרטגית הינה: I נקרא משה שחקן ונקרא אהרון אהרון ונקרא ונקרא I נקרא משה נקרא נקרא אחרון ונקרא אהרון אחרון ונקרא אחרון ונקרא אחרון וונקרא ווונקרא אחרון וונקרא וונקרא אחרון וונקרא אחר

(2

$$1000 = u_I(A, A) > u_I(B, A) = 0,$$

$$5000 = u_I(A, B) > u_I(B, B) = 4000$$

. אולטת חזק שולטת $s_I=A$ לכן האסטרטגיה

$$1000 = u_{II}(A, A) > u_{II}(A, B) = 0,$$

$$5000 = u_{II}(B, A) > u_{II}(B, B) = 4000$$

לכן האסטרטגיה $s_{II}=A$ שולטת חזק.

A על פי ההנחות של שני השחקנים רציונלים, אז שניהם ישחקו לפי אסטרטגיה

שאלה 2

(N

(4,2) תשלום סופי:

(H,L) :פתרון באסטרטגיות שולטות חזק:

(1

(1,4) תשלום סופי:

(H,R) :פתרון באסטרטגיות שולטות חזק

()

תשלום סופי: (2,1). פתרון באסטרטגיות שולטות חזק: פתרון באסטרטגיות שולטות חזק:

שאלה 3

(N

(T,L) :פתרון באסטרטגיות שולטות באסטרטגיות

(a

I	a	b	c	d		I^{II}	a			
\overline{T}	-1,20	-7, -7	-1, 2	-5, 8	$ \begin{vmatrix} b \prec a \\ c \prec a \\ d \prec a \end{vmatrix} $	T	-1, 20	$T \prec M \\ B \prec M$	I^{II}	a
M	27, 20	13, -1	21, 2	13, -1		M	27, 20	 →	$M \mid 2'$	7, 20
B	-5,20	-3, 5	7, -1	3, -4		B	-5, 20			

M,a) :פתרון באסטרטגיות שולטות באסטרטגיות

()

I	a	b	c	d
α	3,7	0, 13	4,5	5,3
β	5, 3	4, 5	4, 5	3,7
γ	4,5	3, 7	4, 5	5,3
δ	4, 5	4, 5	4, 5	4,5

	I	a	b	d
$\alpha \preceq \gamma$	β	5, 3	4,5	3,7
\longrightarrow	γ	4, 5	3,7	5,3
	δ	4, 5	4,5	4, 5

$$\begin{array}{c|cccc}
& I & b & d \\
\hline
\beta & 4,5 & 3,7 \\
& \gamma & 3,7 & 5,3 \\
& \delta & 4,5 & 4,5 \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
& II & b & d \\
\hline
\gamma & 3,7 & 5,3 \\
\delta & 4,5 & 4,5
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}
II & d \\
\hline
I & 5,3 \\
\hline
\delta & 4,5
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} II & d \\ \hline \gamma & 5,3 \end{array}$$

 $.(\gamma,d)$:פתרון שולטות שולטוניות פתרון באסטרטגיות

<u>שאלה 4</u>

(N

$$\begin{array}{c|cccc}
II & L & R \\
\hline
H & 4,8 & 5,10 \\
T & 3,7 & 6,20
\end{array}$$

:שיווי משקל נאש

$$(s_I^*, s_{II}^*) = (T, R)$$
.

$$\begin{array}{c|cccc}
II & L & R \\
\hline
H & 2,3 & 1,5 \\
T & 0,0 & 4,1
\end{array}$$

 $(s_I^*, s_{II}^*) = (T, R)$.

:שיווי משקל נאש

()

(†

 $(s_I^*, s_{II}^*) = (\gamma, d)$.

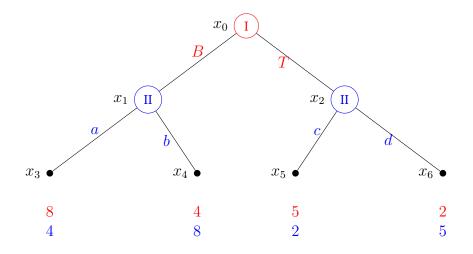
:שיווי משקל נאש

 $(s_I^*, s_{II}^*) = (\delta, c)$.

:שיווי משקל נאש

שאלה 5

(N



$$S_I = (B, T)$$

:II קבוצת אסטרטגיות של אסטרטגיות

$$S_{II} = (a/c, a/d, b/c, b/d) .$$

צורת אסטרטגיה של המשחק:

I	a/c	a/d	b/c	b/d
B	8,4	8,4	4,8	4,8
T	5, 2	2, 5	5,2	2,5

:II נמצא את התשובה הטובה ביותר של שחקן לכל לכל הטובה הטובה נמצא נמצא את התשובה הטובה ביותר אחקן

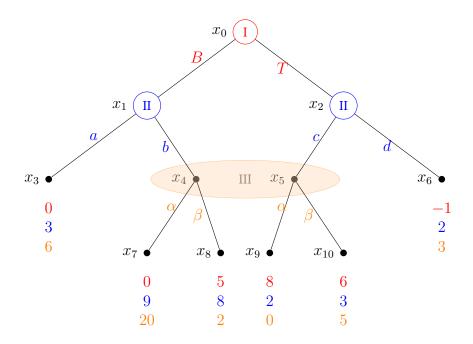
I	a/c	a/d	b/c	b/d
В	8,4	8,4	4,8	4 , 8
T	5,2	2, 5	5 , 2	2,5

:I ממצא את התשובה הטובה ביותר של שחקן וול לכל אסטרטגיה של נמצא נמצא את

I	a/c	a/d	b/c	b/d
B	8,4	8,4	4, 8	4, 8
T	5, 2	2, 5	5 , 2	2, 5

:שיווי משקל נאש

$$s^* = (B, b/d) .$$



$$S_I = (B, T)$$

:II קבוצת אסטרטגיות של

$$S_{II} = (a/c, a/d, b/c, b/d)$$
.

:III קבוצת אסטרטגיות של

$$S_{III} = (\alpha, \beta)$$
.

צורת אסטרטגיה של המשחק:

α							
II I	a/c	a/d	b/c	b/d			
B	0, 3, 6	0, 3, 6	0, 9, 20	0, 9, 20			
T	8, 2, 0	-1, 2, 3	8, 2, 0	-1, 2, 3			

		β		
I	a/c	a/d	b/c	b/d
B	0, 3, 6	0, 3, 6	5, 8, 2	5, 8, 2
T	6, 3, 5	-1, 2, 3	6, 3, 5	-1, 2, 3

נמצא את התשובה הטובה ביותר של שחקן Iלכל אסטרטגיה של שחקן ולכל אסטרטגיה של שחקן נמצא ולכל ווובה ביותר של שחקן III

		α		
I	a/c	a/d	b/c	b/d
B	0, 3, 6	0, 3, 6	0, 9, 20	0, 9, 20
T	8, 2, 0	-1, 2, 3	8, 2, 0	-1, 2, 3

		β		
II I	a/c	a/d	b/c	b/d
В	0, 3, 6	0 , 3, 6	5, 8, 2	5, 8, 2
T	6 , 3, 5	-1, 2, 3	6 , 3, 5	-1, 2, 3

נמצא את התשובה הטובה ביותר של שחקן II לכל אסטרטגיה של שחקן ולכל אסטרטגיה של שחקן II:

		α		
I	a/c	a/d	b/c	b/d
B	0, 3, 6	0, 3, 6	0, 9, 20	0, 9, 20
T	8, 2, 0	-1, 2, 3	8 , 2 , 0	-1, 2, 3

		β		
I	a/c	a/d	b/c	b/d
B	0, 3, 6	0, 3, 6	5, 8, 2	5 , 8 , 2
T	6 , 3 , 5	-1, 2, 3	6 , 3, 5	1, 2, 3

נמצא את התשובה הטובה ביותר של שחקן IIIלכל אסטרטגיה של שחקן ולכל אסטרטגיה של שחקן נוצר III

		α		
II I	a/c	a/d	b/c	b/d
B	0, 3, 6	0, 3, 6	0, 9, 20	0, 9, 20
T	8 , 2 , 0	$-1, \frac{2}{3}$	8 , 2 , 0	-1, 2, 3

		β		
I	a/c	a/d	b/c	b/d
B	0, 3, 6	0, 3, 6	5, 8, 2	5, 8, 2
T	6, 3, 5	-1, 2, 3	8, 2, 5	-1, 2, 3

שיווי משקל נאש:

()

$$s^* = (T, a/c, \beta) .$$

 x_0 M x_3 III (II x_2 x_4 $x_5 \mathbf{\bullet}$ *x*₆ • x_{10} 27 2 8 4 9 4 1 3 x_7 x_8 x_9 0 5

 $:\!\!I$ קבוצת אסטרטגיות של אסטרטגיות

$$S_I = (T, B, M)$$

:II קבוצת אסטרטגיות של אסטרטגיות

$$S_{II} = (a/c, a/d, b/c, b/d)$$
.

:III קבוצת אסטרטגיות של

$$S_{III} = (\alpha/\gamma, \alpha/\delta, \beta/\gamma, \beta/\delta)$$
.

צורת אסטרטגיה של המשחק:

			α/γ						α/δ			
I		a/c	a/d	b/c	b/d		II I	a/c	a/d	b/c	b/d	
T	2	7, 9, 3	27, 9, 3	27, 9, 3	27, 9,	3	T	27, 9, 3	27, 9, 3	27, 9, 3	27, 9, 3	3
M		1, 1, 1	1, 1, 1	4, 0, 5	4, 0, 5	5	M	1, 1, 1	1, 1, 1	2, 7, 3	2, 7, 3	;
В	4	2, 4, 5	3, 8, 2	2, 4, 5	3, 8, 2	2	В	2, 4, 5	3, 8, 2	2, 4, 5	3, 8, 2	,
	·		β/γ				$-eta/\delta$					
I	II	a/c	a/d	b/c	b/d		I	a/c	a/d	b/c	b/d	
T		2, 4, 8	2, 4, 8	2, 4, 8	2, 4, 8		T	2,4,8	2, 4, 8	2, 4, 8	2, 4, 8	
M		1, 1, 1	1, 1, 1	4, 0, 5	4, 0, 5		M	1, 1, 1	1, 1, 1	2, 7, 3	2, 7, 3	
B		2, 4, 5	3, 8, 2	2, 4, 5	3, 8, 2		B	2, 4, 5	3, 8, 2	2, 4, 5	3, 8, 2	

נמצא את התשובה הטובה ביותר של שחקן Iלכל אסטרטגיה של שחקן ולכל אסטרטגיה של שחקן נמצא ולכל ווובה ביותר של שחקן וולכל ווובה ביותר II

		α/γ						α/δ		
I	a/c	a/d	b/c	b/d		I	a/c	a/d	b/c	b/d
T	27 , 9, 3	27 , 9, 3	27 , 9, 3	27 , 9,	3	T	27 , 9, 3			
M	1, 1, 1	1, 1, 1	4, 0, 5	4, 0, 5	5	M	1, 1, 1	1, 1, 1	2, 7, 3	2, 7, 3
B	2, 4, 5	3, 8, 2	2, 4, 5	3, 8, 2	2	B	2, 4, 5	3, 8, 2	2, 4, 5	3, 8, 2
		β/γ				eta/δ				
I	a/c	a/d	b/c	b/d		I	a/c	a/d	b/c	b/d
T	2, 4, 8	2,4,8	2,4,8	2, 4, 8		T	2, 4, 8	2, 4, 8	2 , 4, 8	2, 4, 8
M	1, 1, 1	1, 1, 1	4 , 0, 5	4 , 0, 5		M	1, 1, 1	1, 1, 1	2 , 7, 3	2, 7, 3
B	2 , 4, 5	3, 8, 2	2, 4, 5	3, 8, 2		В	2 , 4, 5	3, 8, 2	2 , 4, 5	3, 8, 2

נמצא את התשובה הטובה ביותר של שחקן II לכל אסטרטגיה של שחקן ולכל אסטרטגיה של נמצא ולכל II:

		α/γ						α/δ		
I	a/c	a/d	b/c	b/d		II	a/c	a/d	b/c	b/d
T	27 , 9 , 3	27 , 9 , 3	27, 9, 3	27, 9, 3	3	T	27 , 9 , 3			
M	1, 1, 1	1, 1, 1	4, 0, 5	4, 0, 5		M	1, 1, 1	1, 1, 1	2, 7, 3	2, 7, 3
B	2, 4, 5	3, 8, 2	2, 4, 5	3,8,2		B	2, 4, 5	3, 8, 2	2, 4, 5	3, 8, 2
		β/γ				eta/δ				
I	a/c	a/d	b/c	b/d		I	a/c	a/d	b/c	b/d
T	2, 4, 8	2,4,8	2, 4, 8	2, 4, 8		T	2, 4, 8	2, 4, 8	2 , 4 , 8	2, 4, 8
M	1, 1, 1	1, 1, 1	4 , 0, 5	4 , 0, 5		M	1, 1, 1	1, 1, 1	2 , 7 , 3	2, 7, 3
B	2 , 4, 5	3 , 8 , 2	2, 4, 5	3, 8, 2		B	2 , 4, 5	3 , 8 , 2	2 , 4, 5	3, 8, 2

נמצא את התשובה הטובה ביותר של שחקן III לכל אסטרטגיה של שחקן ולכל אסטרטגיה של שחקן נוצר ולכל ולכל אחקן וולכל ווור של דוור ביותר של ווור שחקן וולכל אחקן וולכל אולכ

		α/γ						α/δ		
I	a/c	a/d	b/c	b/d		II I	a/c	a/d	b/c	b/d
T	27, 9, 3	27, 9, 3	27 , 9 , 3	27, 9, 3	3	T	27, 9, 3	27 , 9 , 3	27 , 9 , 3	27 , 9 , 3
M	1, 1, 1	1, 1, 1	4, 0, 5	4, 0, 5		M	1, 1, 1	1, 1, 1	2, 7, 3	2, 7, 3
В	2, 4, 5	3, 8, 2	2, 4, 5	3, 8, 2		В	2, 4, 5	3, 8, 2	2, 4, 5	3, 8, 2
		β/γ						β/δ		
I	a/c	a/d	b/c	b/d		I	a/c	a/d	b/c	b/d
T	2, 4, 8	2, 4, 8	2, 4, 8	2, 4, 8		T	2, 4, 8	2, 4, 8	2, 4, 8	2, 4, 8
M	1, 1, 1	1, 1, 1	4, 0, 5	4, 0, 5		M	1, 1, 1	1, 1, 1	2, 7, 3	2, 7, 3
В	2, 4, 5	3, 8, 2	2, 4, 5	3, 8, 2		В	2, 4, 5	3, 8, 2	2, 4, 5	3, 8, 2

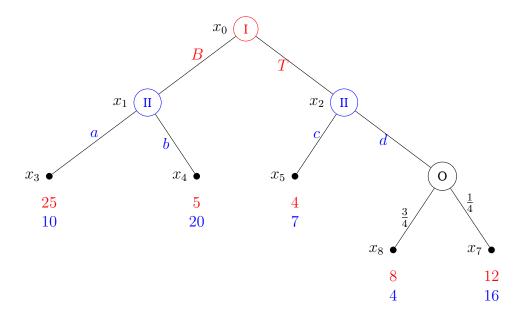
שיווי משקל נאש:

$$s^* = (T, a/c, \beta/\gamma) \quad s^* = (T, a/c, \beta/\delta) , \quad s^* = (B, a/d, \beta/\gamma) \quad s^* = (B, a/d, \beta/\delta) , \quad s^* = (B, b/d, \beta/\gamma) .$$

-1

שאלה 6

(N



$$S_I = (T, B)$$

:II קבוצת אסטרטגיות של אסטרטגיות

$$S_{II} = (a/c, a/d, b/c, b/d) .$$

I	a/c	a/d	b/c	b/d
T	4,7	9,7	4,7	9,7
B	25, 10	25, 10	5, 20	5, 20

:II ממצא את התשובה הטובה ביותר של שחקן לכל לכל אסטרטגיה של נמצא נמצא את

I	a/c	a/d	b/c	b/d
T	4,7	9,7	4, 7	9,7
B	25, 10	25, 10	5 , 20	5, 20

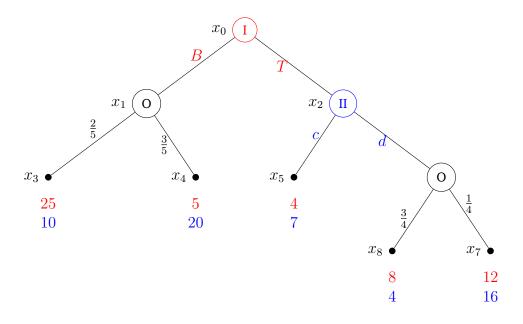
:I פחקן שחקן לכל אסטרטגיה של פחקן נמצא את התשובה הטובה ביותר של שחקן

I	a/c	a/d	b/c	b/d
T	4, 7	9, 7	4, 7	9, 7
B	25, 10	25 , 10	5,20	5, 20

:שיווי משקל נאש

$$s^* = (T, b/d)$$
 $s^* = (B, b/c)$.

-1



$$S_I = (T, B)$$

:II קבוצת אסטרטגיות של אסטרטגיות

$$S_{II} = (c, d)$$
.

I	c	d
T	4, 7	9,7
B	13, 16	13, 16

:II ממצא את התשובה הטובה ביותר של שחקן לכל לכל אסטרטגיה של נמצא נמצא את

I	c	d
T	4,7	9,7
B	13 , 16	13 , 16

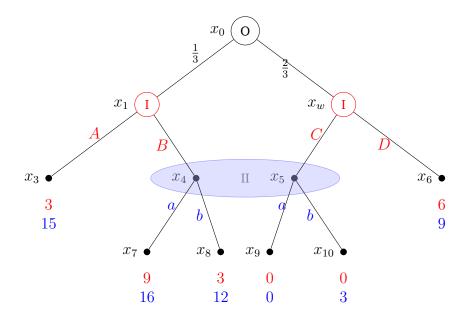
:I פחקן שחקן אסטרטגיה אל לכל ביותר של שחקן ביותר הטובה הטובה מצא נמצא את התשובה ביותר של

I	c	d
T	4, 7	9,7
B	13, 16	13, 16

:שיווי משקל נאש

$$s^* = (B, c) , \quad s^* = (B, d) .$$

שאלה 7



$$S_I = (A/C, A/D, B/C, B/D)$$

:II קבוצת אסטרטגיות של אסטרטגיות

$$S_{II} = (a, b)$$
.

I	a	b
A/C	1,5	1, 7
A/D	5, 11	5,11
B/C	$3, \frac{16}{3}$	1,6
B/D	13, 16	5, 10

:II ממצא את התשובה הטובה ביותר של שחקן לכל לכל אסטרטגיה של נמצא נמצא את החשובה ביותר של

I	a	b
A/C	1, 5	1,7
A/D	5, 11	5, 11
B/C	$3, \frac{16}{3}$	1,6
B/D	13, 16	5 , 10

:I פחקן שחקן אסטרטגיה אל לכל לכל ביותר של ביותר ביותר התשובה הטובה נמצא את נמצא את התשובה ביותר של

II I	a	b
A/C	1,5	1, 7
A/D	5, 11	5, 11
B/C	$3, \frac{16}{3}$	1, 6
B/D	13, 16	5 , 10

שיווי משקל נאש:

$$s^* = (A/D, b) , \quad s^* = (B/D, a) .$$

 $i \in N$ שיווי משקל במשחק G. לכן לכל שחקן s^* מתקיים s^*

$$u_i(s_i, s_{-i}^*) \le u_i(s^*) \quad \forall s_i \in S_i .$$

מכיוון שלכל שחקן $\hat{S}_i \subseteq S_i$, בפרט מתקיים גם

$$u_i(s_i, s_{-i}^*) \le u_i(s^*) \quad \forall s_i \in \hat{S}_i .$$

. מכיוון ש- s^* ווקטור אסטרטגיות במשחק, נובע מכאן ני הוא איווי משקל משחק אה.

שאלה 9