שיעור 10
חיתוך וסכום תת מרחב

הגדרה של חיתוך וסכום של תתי מרחבים

10.1 משפט. (חיתוך של ת"מ)
נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, V_1, V_2 תתי מרחבים של V. אז $V_1 \cap V_2$ היא תת מרחב של V.

הוכחה.

1) V_1, V_2 תתי מרחבים, לכן $\bar{0} \in V_1$ וגם $\bar{0} \in V_2$. לכן $\bar{0} \in V_1 \cap V_2$.

2) נניח $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in V_1 \cap V_2$ $\Leftarrow$ $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in V_1$ וגם $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in V_2$.
V_1 ת"מ, לכן $\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \in V_1$.
V_2 ת"מ, לכן $\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \in V_2$.
ז"א $\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \in V_1 \cap V_2$.

3) נניח $\mathrm{v} \in V_1 \cap V_2$ ו $k \in \mathbb{F}$.
אז $\mathrm{v} \in V_1$ ו $\mathrm{v} \in V_2$.
V_1 ת"מ לכן $k \cdot \mathrm{v} \in V_1$.
V_2 ת"מ לכן $k \cdot \mathrm{v} \in V_2$.
ז"א $k \cdot \mathrm{v} \in V_1 \cap V_2$.

■

10.2 דוגמא.
עבור V_1,V_2 תתי מרחבים של מ"ו V מעל שדה $\mathbb{F}$, האם $V_1 \cup V_2$ בהכרח ת"מ של V?

פיתרון.
<u>דוגמה נגדית:</u>
$V = \mathbb{R}^2$.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \ , \qquad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \ .$$

אז $\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1$, $\mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_2$, אבל . $\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \notin V_1 \cup V_2$ ■

10.3 משפט. (ת"מ הקטן ביותר)
נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, V_1, V_2 תתי מרחבים של V. אז הקבוצה

$$W = \{\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 | \mathrm{v}_1 \in V_1, \mathrm{v}_2 \in V_2\}$$

היא ת"מ הקטן ביותר שמכיל את V_1 ו V_2.

ז"א לכל ת"מ W' שמכיל את V_1 ו V_2, מתקיים $W \subseteq W'$.

הוכחה.

1) נוכיח ש W ת"מ של V.

א) $\bar{0} \in V_1$ וגם $\bar{0} \in V_2$. לכן
$$\bar{0} = \bar{0} + \bar{0} \in W \ .$$

ב) נניח $w_1 = u_1 + u_2 \in W$, $w_2 = \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \in W$.
אז $u_1, \mathrm{v}_1 \in V_1$ וגם $u_2, \mathrm{v}_2 \in V_2$.
V_1, V_2 תתי מרחבים.
לכן $u_1 + \mathrm{v}_1 \in V_1$, וגם $u_2 + \mathrm{v}_2 \in V_2$.
מכאן
$$w_1 + w_2 = (u_1 + u_2) + (\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2) = (u_1 + \mathrm{v}_1) + (u_2 + \mathrm{v}_2) \in W \ .$$

ג) נניח $w = u_1 + u_2 \in W$ ו $k \in \mathbb{F}$. אז $u_1 \in V_1$ ו $u_2 \in V_2$. V_1, V_2 תתי מרחבים, לכן $ku_1 \in V_1$, $ku_2 \in V_2$. מכאן
$$kw = k(u_1 + u_2) = ku_1 + ku_2 \in W$$

2) נוכיח כי W התת מרחב הקטן ביותר

ברור כי W מכיל את V_1 ו V_2 כי
לכל $u \in V_1$, $u = u + \bar{0} \in W$
וגם לכל $u \in V_2$, $u = \bar{0} + u \in W$.
נוכיח ש W הוא ת"מ הקטן ביותר שמכיל את V_1 ו V_2.
נניח ש W' איזשהו ת"מ שמכיל את V_1 ו V_2.
נוכיח כי $W \subseteq W'$.
נקח וקטור $w \in W$. אז $w = u_1 + u_2$, כאשר $u_1 \in V_1$, $u_2 \in V_2$.
$V_1 \in W' \Leftarrow u_1 \in W'$.
$V_2 \in W' \Leftarrow u_2 \in W'$.
W' ת"מ, לכן $w = u_1 + u_2 \in W'$.
מש"ל.

■

10.4 הערה.
למרחב W של משפט 10.3 (המשפט הקודם) נקרא הסכום של V_1 ו V_2 ומסומן ב $V_1 + V_2$. ■

10.5 משפט. (סכום של ת"מ שווה לפרישה של האיחוד)

$$V_1 + V_2 = \mathrm{sp}\left(V_1 \cup V_2\right) \ .$$

הוכחה.
נוכיח כי $V_1 + V_2 \subseteq \mathrm{sp}\left(V_1 \cup V_2\right)$:

$V_1, V_2 \subseteq \text{sp}(V_1 \cup V_2)$

לכן, לפי משפט 10.3,

$$V_1 + V_2 \subseteq \text{sp}(V_1 \cup V_2) \ .$$

<u>נוכיח כי $\text{sp}(V_1 \cup V_2) \subseteq V_1 + V_2$:</u>

נניח $w \in \text{sp}(V_1 \cup V_2)$. אז קיימים $u_1, \ldots, u_k \in V_1$ ו $\text{v}_1, \ldots, \text{v}_n \in V_2$ וסקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$ כך ש

$$w = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k + \beta_1 \text{v}_1 + \cdots + \beta_n \text{v}_n \ .$$

אז $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k \in V_1$ וגם $\beta_1 \text{v}_1 + \cdots + \beta_n \text{v}_n \in V_2$.

לכן $w \in V_1 + V_2$.

הוכחנו כי $V_1 + V_2 \subseteq \text{sp}(V_1 \cup V_2)$ וגם $\text{sp}(V_1 \cup V_2) \subseteq V_1 + V_2$ $\Leftarrow$

$$V_1 + V_2 = \text{sp}(V_1 \cup V_2) \ .$$

■

10.6 דוגמא.

נקח את המ"ו $V = \mathbb{R}^3$. נקח את התתי מרחבים $\mathbb{R}^3$: $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$, ו $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{R} \right\}$,

קווים ישרים ב $\mathbb{R}^3$. אז הסכום שלהם הינו

$$V_1 + V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\} \ ,$$

ומהווה את המישור $z = 0$ ב $\mathbb{R}^3$.

משפט המימדים של סכום וחיתוך

10.7 משפט. (משפט המימדים)

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, V_1, V_2 תתי מרחבים של V. אז

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

10.8 הוכחה.

נסמן $\dim(V_1) = k$, $\dim(V_2) = n$, $\dim(V_1 \cap V_2) = m$.

$V_1 \cap V_2 \subseteq V_1$ לכן $m \leq k$.

$V_1 \cap V_2 \subseteq V_2$ לכן $m \leq n$.

נבחר בסיס $u_1, \ldots, u_m$ של $V_1 \cap V_2$.

נשלים אותו לבסיס של V_1 ונקבל

$u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m}$.

נשלים אותו גם לבסיס של V_2:

$u_1,\ldots,u_m,b_1,\ldots,b_{n-m}$.

נוכיח כי $V_1+V_2=\mathrm{sp}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}.\right)$:

נניח $w=\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\in V_1+V_2$. אז

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_1&=\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_mu_m+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}\in V_1\ ,\\ \mathrm{v}_2&=\alpha_1'u_1+\ldots+\alpha_m'u_m+\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}\in V_2\ .\end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2=&\left(\alpha_1+\alpha_1'\right)u_1+\ldots+\left(\alpha_m+\alpha_m'\right)u_m\\ &+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}\\ &+\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}\end{aligned}$$

ז"א

$$\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\in\mathrm{sp}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\right)$$

נוכיח את ההכלה ההפוכה, כלומר $\mathrm{sp}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\right)\in V_1+V_2$:

נניח

$w\in\mathrm{sp}\left(u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\right)$

אז קיימים סקלרים $\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots,\beta_{k-m},\gamma_1,\ldots,\gamma_{n-m}$ כך ש

$$w=\alpha_1u_1+\ldots\alpha_mu_m+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}+\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}$$

נסמן

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_1=&\alpha_1u_1+\ldots\alpha_mu_m+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}\\ \mathrm{v}_2=&\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}\end{aligned}$$

אז

$$\mathrm{v}_1\in V_1,\qquad \mathrm{v}_2\in V_2,\qquad w=\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2$$

כלומר $w\in V_1+V_2$.

נשאר להוכיח שוקטורים $\{u_1,\ldots,u_m,a_1,\ldots,a_{k-m},b_1,\ldots,b_{n-m}\}$ בת"ל:

נניח:

$$\alpha_1u_1+\ldots\alpha_mu_m+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}+\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_{n-m}b_{n-m}=\bar{0}\ . \tag{*1}$$

אז

$$\alpha_1u_1+\ldots\alpha_mu_m+\beta_1a_1+\ldots+\beta_{k-m}a_{k-m}=-\gamma_1b_1-\ldots-\gamma_{n-m}b_{n-m}:=\mathrm{v}. \tag{*2}$$

הוקטור באגף השמאל שייך ל V_1.

הוקטור באגף הימין שייך ל V_2.

לכן, לפי (2*) $\mathrm{v} \in V_1 \cap V_2$. $u_1, \ldots, u_m$ בסיס של $V_1 \cap V_2$ (נתון) . לכן קיימים סקלרים $\delta_1, \ldots, \delta_m$ כך ש

$$\mathrm{v} = \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m \ .$$

לכן

$$\begin{aligned} \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{n-m} b_{n-m} =& \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m - (-\gamma_1 b_1 - \ldots - \gamma_{n-m} b_{n-m}) \\ =& \mathrm{v} - \mathrm{v} \\ =& \bar{0} \ , \end{aligned}$$

ז"א

$$\delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{n-m} b_{n-m} = \bar{0} \ . \tag{*3}$$

$u_1, \ldots u_m, b_1, \ldots, b_{n-m}$ בסיס של V_2 (נתון) . לכן הם בת"ל. לכן (3*) מתקיים רק אם

$$\delta_1 = \ldots = \delta_m = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{n-m} = 0 \ . \tag{*4}$$

מכאן מקבלים מ (1*) כי

$$\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k-m} a_{k-m} = \bar{0} \ . \tag{*5}$$

$u_1, \ldots u_m, a_1, \ldots, a_{k-m}$ בסיס של V_1 (נתון) , לכן הם בת"ל.
לכן (5*) מתקיים רק אם

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \beta_1 = \ldots = \beta_{k-m} = 0. \tag{*6}$$

לכן, בגלל שהמקדמים ב (1*) כולם שווים ל 0, כפי שהוכחנו ב (4*) ו (6*), אז הוקטורים $u_1, \ldots u_m, a_1, \ldots, a_{k-m}, b_1, \ldots . b_{n-m}$ בת"ל. כלומר הם מהווים בסיס של $V_1 + V_2$.
מכאן

$$\dim(V_1 + V_2) = m + (k-m) + (n-m) = k + n - m = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

מש"ל. ■

10.9 מסקנה. ( )
נניח $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ תתי מרחבים ממימד 2, אז $\dim(V_1 \cap V_2) > 0$.

הוכחה.
V_1, V_2 תתי מרחבים של $\mathbb{R}^3$, לכן $\dim(V_1 + V_2) \leq 3$. לפי משפט 10.7,

$$4 = \dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) \leq 3 + \dim(V_1 \cap V_2)$$

לכן

$$\dim(V_1 \cap V_2) \geq 4 - 3 = 1 \ .$$

■

כיצד למצוא בסיס ומימד של סכום וחיתוך ת"מ

נניח כי U, V תתי מרחבים של $\mathbb{R}^n$. ונניח ש

$$\{\mathrm{u}_1,\ldots,\mathrm{u}_k\}$$

בסיס של U ו

$$\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_l\}$$

בסיס של V. כדי למצוא בסיס של $V+W$, נרשום מטריצה Q מסדר $n\times(k+l)$ המורכב מהבסיסים של U ו V:

$$Q=\begin{pmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ \mathrm{u}_1 & \mathrm{u}_2 & \ldots & \mathrm{u}_k & \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \ldots & \mathrm{v}_l \\ | & | & & | & | & | & & | \end{pmatrix}$$

אז המרחב העמודות של $U+V$ שווה למרחב העמודות של Q:

$$\mathrm{col}(Q)=\mathrm{col}(U+V)$$

ובסיס של $\mathrm{col}(Q)$ שווה גם לבסיס של $U+V$:

$$B(Q)=B(U+V)\ .$$

בסיס של $U\cap V$ ניתן למצוא ע"י המרחב האפס של Q, $\mathrm{Nul}(Q)$. נניח כי הוקטור x במרחב האפס של Q, כלומר $\mathrm{x}\in\mathrm{Nul}(Q)\subseteq\mathbb{R}^{k+1}$. נניח כי הרכיבים של x הם

$$\mathrm{x}=\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_k\\ b_1\\ \vdots\\ b_l\end{pmatrix}\ .$$

כיוון שוקטור x ב $\mathrm{Nul}(Q)$ אז

$$Q\cdot\mathrm{x}=\begin{pmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ \mathrm{u}_1 & \mathrm{u}_2 & \ldots & \mathrm{u}_k & \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \ldots & \mathrm{v}_l \\ | & | & & | & | & | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_k\\ b_1\\ \vdots\\ b_l\end{pmatrix}=a_1\mathrm{u}_1+\ldots+a_k\mathrm{u}_k+b_1\mathrm{v}_1+\ldots+b_l\mathrm{v}_l=\bar{0}\ . \qquad (1*)$$

עכשיו נעביר את כל האיברים של הבסיס $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_l$ לאגף הימין ונקבל

$$a_1\mathrm{u}_1+\ldots+a_k\mathrm{u}_k=-b_1\mathrm{v}_1-\ldots-b_l\mathrm{v}_l\ . \qquad (*2)$$

שימו לב הצירוף לינארי באגף השמאל הוא וקטור של U והצירוף לינארי באגף הימין הוא וקטור של V. נקרא הוקטור הזה y:

$$\mathrm{y}:=a_1\mathrm{u}_1+\ldots+a_k\mathrm{u}_k=-b_1\mathrm{v}_1-\ldots-b_l\mathrm{v}_l\ . \qquad (*3)$$

כך קיבלנו וקטור y השייך גם ל U וגם ל V, או במילים אחרות

$$\mathrm{y}\in U\cap V\ .$$

10.10 דוגמא.
נתונים וקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad u_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad u_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad u_4=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix}\ .$$

נסמן

$$V_1=\mathrm{sp}(u_1,u_2)\ ,\qquad V_2=\mathrm{sp}(u_3,u_4)\ .$$

מצאו בסיס ומימד של V_1,V_2 ו $V_1\cap V_2$.

פיתרון.

בסיס של V_1:

$$\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\0&1\\0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

בסיס של V_1:

$$B(V_1)=\{\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2\}$$

$\dim(V_1)=2$.
בסיס של V_2:

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&3\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&3\\0&-1\\0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&3\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

בסיס של V_2:

$$B(V_2)=\{\mathrm{u}_3,\mathrm{u}_4\}$$

$\dim(V_2)=2$.

$$Q=(\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2,\mathrm{u}_3,\mathrm{u}_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&1&0&3\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-2R_1\\R_4\to R_4-R_1}}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&1\\0&1&1&0\\0&-1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3\to R_2+R_3\\R_4\to R_4-R_2}}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&1\\0&0&-1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\to R_3+R_4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

העמודות 1, 2, 3 מובילות לכן בסיס של V_1+V_2 הוא

$$B(V_1+V_2)=\{\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2,\mathrm{u}_3\}$$

ו $\dim(V_1+V_2)=3$.