# שיעור 10
# מרחב האפס, מרחב העמודות ומרחב השורות

## 10.1 דרגת המטריצה

**הגדרה 10.1**

נתונה מטריצה
$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מעל שדה $\mathbb{F}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

למטריצה מקושרים 3 תת מרחבים:

**(1)** מרחב האפס של $A$ שמסומן $\text{Nul}(A)$ ומוגדר

$$\text{Nul}(A) = \left\{ X \in \mathbb{F}^n \middle| A \cdot X = \bar{0} \right\} \ .$$

**(2)** מרחב העמודות של $A$ שמסומן $\text{Col}(A)$ ומוגדר

$$\text{Col}(A) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\} .$$

$\text{Col}(A)$ הוא התת מרחב הנפרש ע"י עמודות המטריצה.

**(3)** מרחב השורות של $A$ שמסומן $\text{Row}(A)$ ומוגדר

$$\text{Row}(A) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \right\} \ .$$

$\text{Row}(A)$ הוא התת מרחב הנפרש ע"י שורות המטריצה.

**דוגמה 10.1**

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 4 & -11 & 23 & 18 & 11 \end{pmatrix}$. מצאו את בסיס ואת המימד של $\text{Col}(A)$ ו- $\text{Row}(A)$.

**פתרון:**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 4 & -11 & 23 & 18 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to 2R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 6 & 7 \\ 0 & -3 & 7 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עמודות 1 ו- 2 של המדורגת מובילות, לפיכך עמודות 1 ו- 2 של $A$ מהווים בסיס של $\text{col}(A)$:

$$\text{col}(A) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$$

שורות 1 ו- 2 של המדורגת מובילות, לפיכך שורות 1 ו- 2 של $A$ מהווים בסיס של $\text{row}(A)$:

$$\text{row}(A) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim\left(\text{Col}(A)\right) = 2$, מספר העמודות המובילות.

$\dim\left(\text{Row}(A)\right) = 2$, מספר השורות שלא אפסים.

**משפט 10.1 בסיס ומימד של $\text{col}(A)$**

תהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

**1)** העמודות המובילות של $A$ מהווים בסיס של $A$ Col.

**2)** השורות המובילות של $A$ מהווים בסיס של $A$ Row.

**3)** $\dim\left(\text{Col}(A)\right) = \dim\left(\text{Row}(A)\right)$

**הוכחה:**

**1)** משפט 9.3.

**2)** תרגיל בית.

**3)** $\dim\left(\text{Col}(A)\right)$ הוא מספר העמודות המובילות במטריצה המדורגת של $A$.

ז"א $\dim\left(\text{Col}(A)\right)$ הוא מספר האיברים המובילים במטריצה המדורגת של $A$.

$\dim\left(\text{Row}(A)\right)$ הוא מספר השורות שלא אפסים במטריצה המדורגת של $A$.

ז"א $\dim\left(\text{Row}(A)\right)$ הוא מספר האיברים המובילים במטריצה המדורגת של $A$.

■

## הגדרה 10.2 דרגה

למספר $\dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A))$ קוראים דרגת המטריצה. סימון: $\text{rank}(A)$. ז"א

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A)) \ .$$

## משפט 10.2 מימד של $\text{Nul}(A)$

תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ונניח כי $\text{rank}(A) = r$. אז

$$\dim(\text{Nul}(A)) = n - r = (\text{מספר עמודות הלא מובילות}) \ .$$

**הוכחה: (להעשרה בלבד!)**
נניח כי $\{u_1, \cdots, u_k\}$ בסיס של $\text{Nul}(A)$.

נשלים אותו לבסיס של $\mathbb{R}^n$: $\{u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}, \cdots u_n\}$.

הקבוצה $\{u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}, \cdots u_n\}$ פורשת את $\mathbb{R}^n$ לפיכך הקבוצה $\{Au_1, \cdots, Au_k, Au_{k+1}, \cdots Au_n\}$ פורשת את $\text{col}(A)$.

אבל $\{u_1, \cdots, u_k\} \in \text{Nul}(A) \Leftarrow Au_1 = 0, \cdots, Au_k = 0$.

לפיכך $\{Au_{k+1}, \cdots Au_n\}$ פורשת את $\text{col}(A)$.

כעת נוכיח כי $\{Au_{k+1}, \cdots Au_n\}$ בת"ל: נרשום

$$s_{k+1}Au_{k+1} + \cdots + s_nAu_n = \bar{0}$$

כאשר $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ ווקטור האפס ו- $s_{k+1}, \ldots, s_n$ סקלרים. מכאן

$$A(s_{k+1}u_{k+1} + \cdots + s_nu_n) = \bar{0}$$

ז"א $s_{k+1}u_{k+1} + \cdots + s_nu_n \in \text{Nul}(A)$. לפיכך ניתן לרשום אותו כצירוף לינארי של הבסיס $\{u_1, \cdots, u_k\}$:

$$s_{k+1}u_{k+1} + \cdots + s_nu_n = t_1u_1 + \cdots + t_ku_k$$

$t_1, \ldots, t_k$ סקלרים. נעביר אגפים ונקבל:

$$-t_1u_1 - \cdots - t_ku_k + s_{k+1}u_{k+1} + \cdots + s_nu_n = \bar{0} \ .$$

הקבוצה $\{u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}, \cdots u_n\}$ בסיס לכן היא בת"ל לכן $t_1 = \cdots = t_k = s_{k+1} = \cdots = s_n = 0$.

לפיכך הקבוצה $\{Au_{k+1}, \cdots, Au_n\}$ בת"ל.

מצאנו כי $\{Au_{k+1}, \cdots, Au_n\}$ בת"ל ופורשת $\text{col}(A)$ לכן היא בסיס של $\text{col}(A)$.
נניח כי $\dim(\text{col}(A)) = r$.

$$\Rightarrow \quad n - k = r \quad \Rightarrow \quad k = n - r \ .$$

לפיכך

$$\text{Dim}(\text{Nul}(A)) = n - r = (\text{מספר עמודות}) - (\text{מספר עמודות מובילות}) = (\text{מספר עמודות הלא מובילות}) \ .$$

■

## משפט 10.3 בסיס של $\mathrm{Nul}(A)$

תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. נניח שהפתרון הכללי למערכת $AX=0$ הוא

$$X_0 = y_1 u_1 + \cdots + y_k u_k$$

כאשר $y_1,\cdots,y_k$ המשתנים החופשיים של המערכת ו- $u_1,\cdots,u_k \in \mathbb{F}^n$.

אז הקבוצת וקטורים $B=\{u_1,\cdots,u_k\}$ בסיס של $\mathrm{Nul}(A)$.

**הוכחה: להעשרה בלבד!**
נניח כי $\mathrm{rank}(A)=r$. אז יש $n-r$ משתנים חופשיים, לכן יש $k=n-r$ וקטורים בקבוצה $B$.

$\dim\left(\mathrm{Nul}(A)\right)=n-r$ והקבוצת וקטורים $B=\{u_1,\cdots,u_{n-r}\}$ פורשת את $\mathrm{Nul}(A)$.

לכן לפי משפט 9.4 הקבוצה $B$ בת"ל לכן $B$ מהווה בסיס של $\mathrm{Nul}(A)$. $\blacksquare$

## דוגמה 10.2

במרחב $\mathbb{R}^{2\times 2}$ נתונים וקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix}1&3\\1&3\end{pmatrix}\ ,\qquad u_2=\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}\ ,\qquad u_3=\begin{pmatrix}1&5\\-1&3\end{pmatrix}\ ,\qquad \mathrm{v}=\begin{pmatrix}a+2&1\\-5&a\end{pmatrix}$$

**א)** עבור אילו ערכי $a$ וקטור v שייך לפרישה לינארית של $u_1,u_2,u_3$?

**ב)** עבור כל ערך של $a$ שמצאתם בסעיף א', בטאו את וקטור v כצירוף לינארי של $u_1,u_2,u_3$ בשתי דרכים שונות.

**ג)** לכל ערך של $a$ מצאו את המימד ובסיס של $\mathrm{span}\{u_1,u_2,u_3,\mathrm{v}\}$.

**ד)** האם קיימים ערכי $a$ עבורם
$\mathrm{span}\{u_1,u_2,u_3,\mathrm{v}\}=\mathbb{R}^{2\times 2}$ .

**פתרון:**

**א)** נרשום v כצירוף לינארי של $u_1,u_2,u_3$:

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=\mathrm{v}$$

נחשב את המקדמים:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a+2\\3&1&5&1\\3&1&5&1\\3&3&3&a\end{array}\right)\xrightarrow[R_4\to R_4-3R_1]{\substack{R_2\to R_2-3R_1\\R_3\to R_3-R_1}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a+2\\0&-2&2&-3a-5\\0&2&-2&-a-7\\0&0&0&-2a-6\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a+2\\0&-2&2&-3a-5\\0&0&0&-4a-12\\0&0&0&-2a-6\end{array}\right)$$

אם $a=-3$ לה יהיו שורת סתירה וקיים פתרון ואז $\mathrm{v}\in\mathrm{span}\{u_1,u_2,u_3\}$.

ב) $\underline{a=-3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$k_1 = 1 - 2k_3 \ , \qquad k_2 = -2 + k_3 \ , \qquad k_3 \in \mathbb{R} \ .$$

נציב $k_3 = 1 \Leftarrow$

$$k_1 = -1 \ , \qquad k_2 = -1 \ , \qquad k_3 = 1$$

ונקבל

$$-u_1 - u_2 + u_3 = \mathrm{v} \ .$$

נציב $k_3 = 0 \Leftarrow$

$$k_1 = 1 \ , \qquad k_2 = -2 \ , \qquad k_3 = 0$$

ונקבל

$$u_1 - 2u_2 + 0 \cdot u_3 = \mathrm{v} \ .$$

ג) $\underline{\text{עבור } a=-3}$:

מסעיף (ב), עמודה 1 ועמודה 2 של $A = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & \mathrm{v} \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$ מובילות, לכן הווקטורים $u_1, u_2$ מהווים בסיס.

$\underline{\text{עבור } a \neq -3}$:

מסעיף (ב), עמודה 1 עמודה 2 ועמודה 4 של $A = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & \mathrm{v} \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$ מובילות, לכן הווקטורים $u_1, u_2, \mathrm{v}$ מהווים בסיס.

ד) הווקטורים $u_1, u_2, u_3, \mathrm{v}$ ת"ל לכל ערכי $a$, לכן לא קיימים ערכי $a$ עבורם $\mathrm{span}\{u_1, u_2, u_3, \mathrm{v}\} = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

## דוגמה 10.3

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. לכל ערך של $a$ מצאו את המימד ובסיס של $\mathrm{Nul}(A)$.

**פתרון:**

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - aR_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 \end{pmatrix}$$

$a = 1, -2 \Leftarrow -a^2 - a + 2 = 0$

$\underline{\text{עבור } a=1}$: מקבלים

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim(\mathrm{Nul}(A)) = \text{מספר העמודות הלא מובילות} = 2 \ .$$

הפתרון הכללי הינו

$$x=-y-z\ ,\qquad y\in\mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix}-y-z\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Nul}(A)$:

$$\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

<u>עבור $a=-2$</u>: מקבלים

$$\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\dim(\text{Nul}(A))=\text{מספר העמודות הלא מובילות}=1\ .$$

הפתרון הכללי הינו

$$x=z\ ,y=z\ ,\qquad y\in\mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{Nul}(A)$:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

**משפט 10.4 משפט הדרגה**

לכל מרטיצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מסדר $m\times n$:

$$\text{rank}(A)+\dim\left(\text{Nul}(A)\right)=n\ .$$

**הוכחה:**

$\text{rank}(A)$ שווה למספר העמודות המובילות.

$\dim\left(\text{Nul}(A)\right)$ שווה למספר העמודות הלא המובילות.

לכן $\text{rank}(A)+\dim\left(\text{Nul}(A)\right)$ שווה למספר העמודות של $A$.

■

### דוגמה 10.4

עבור מטריצה $A\in\mathbb{R}^{5\times 7}$ ידוע כי $\dim(\text{Nul}(A))=2$. מצאו את דרגת $A$.

**פתרון:**

$\dim(\text{Nul}(A))=2$ לכן $\text{rank}(A)=5$.

### דוגמה 10.5

האם למטריצה $A \in \mathbb{R}^{6\times 9}$ יכול להיות $\dim(\mathrm{Nul}(A))=2$? מצאו את דרגת $A$.

**פתרון:**

נניח שקיימת מטריצה $A \in \mathbb{R}^{6\times 9}$ שעבורה $\dim(\mathrm{Nul}(A))=2$.

אז $\mathrm{rank}(A)=9-2=7$.

אבל $\mathrm{rank}(A)$ שווה למספר השורות שלא אפסים במטריצה המדורגת. במטריצה $A$ יש 6 שורות.

לכן $\mathrm{rank}(A)\leq 6$.

קיבלנו סתירה. לכן לא קיימת מטריצה $A$ המקיימת הת תנאי התרגיל.

**למה 10.1 סיכום של המימדים של מטריצה**

תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה בעלת $m$ שורות ו- $n$ עמודות. נסמן $r=\mathrm{rank}(A)$. אז

$$\begin{aligned}
\dim\left(\mathrm{col}(A)\right) =& r && = (\text{מספר עמודות מובילות}) \\
\dim\left(\mathrm{row}(A)\right) =& r && = (\text{מספר שורות מובילות}) \\
\dim\left(\mathrm{Nul}(A)\right) =& n-r && = (\text{מספר עמודות הלא מובילות})
\end{aligned}$$

**משפט 10.5 תנאים שקולים של מטריצה הפיכה**

עבור מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ התנאים הבאים שקולים זה לזה.

**(1** $\mathrm{rank}(A)=n$.

**(2** $A$ הפיכה.

**(3** למערכת $A\cdot X=0$ יש פתרון יחיד.

**(4** $|A|\neq 0$.

**(5** כל השורות של $A$ בת"ל.

**(6** כל העמודות של $A$ בת"ל.

**הוכחה:**

תרגיל בית. ■

## 10.2 ווקטור קואורדינטות לפי בסיס

**משפט 10.6 קואורדינטות של ווקטור לפי בסיס מסוים יחיד**

נניח כי $u_1,\cdots,u_n\in V$ בסיס של המרחב ווקטורי $V$ מעל שדה $\mathbb{F}$. אז כל ווקטור $a\in V$ ניתן לרשום כצירוף ליניארי יחיד של $u_1,\cdots,u_n\in V$.

**הוכחה:**

$u_1,\cdots,u_n\in V$ בסיס של $V$, לכן $\text{span}\{u_1,\cdots,u_n\}=V$.

מכאן נובע שלכל $a\in V$,

$$a\in\text{span}\{u_1,\cdots,u_n\}$$

ז"א קיימים סקלרים $k_1,\cdots,k_n$ כך ש-

$$a=k_1u_1+\cdots+k_nu_n\ .$$

נוכיח שהצירוף הלינארי הוא יחיד בדרך השלילה:
נניח שקיים צירוף ליניארי אחר:

$$a=t_1u_1+\cdots+t_nu_n\ .$$

כך ש- $k_i\neq t_i$.

לכן

$$(k_1-t_1)u_1+\cdots+(k_i-t_i)u_i\cdots+(k_n-t_n)u_n=\bar{0}$$

ו- $t_i-k_i\neq 0$. ז"א ווקטורים $\{u_1,\cdots,u_n\}$ תלוים ליניארית. סתירה.

■

**הגדרה 10.3 ווקטור הקואורדינטות**

אם $B=\{u_1,\cdots,u_n\}\in V$ בסיס של מרחב ווקטורי $V$ מעל שדה $\mathbb{F}$ ו- $a\in V$ אז

$$a=k_1u_1+\cdots+k_nu_n\ .$$

לווקטור

$$\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}$$

קוראים **ווקטור הקואורדינטות** של ווקטור $a$ לפי בסיס $B=\{u_1,\cdots,u_n\}$.
סימון:

$$[a]_B=\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}\ .$$

### דוגמה 10.6

$E=\{e_1,e_2,e_3\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$. $u=\begin{pmatrix}2\\-1\\10\end{pmatrix}$.

$$u=2e_1-e_2+10e_3\ .$$

לכן

$$[u]_E=\begin{pmatrix}2\\-1\\10\end{pmatrix}$$

### דוגמה 10.7

$E=\{1,x,x^2\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$. $p(x)=1+8x-5x^2$.

$$p(x)=1\cdot 1+8\cdot x-5\cdot x^2=1e_1+8e_2-5e_3\ .$$

לכן

$$[p]_E=\begin{pmatrix}1\\8\\-5\end{pmatrix}$$

### דוגמה 10.8

הראו כי קבוצת הווקטורים

$$B=\left\{b_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

מהווה בסיס של $\mathbb{R}^3$ ומצאו את $[u]_B$ עבוטר הווקטור $u=\begin{pmatrix}2\\-1\\10\end{pmatrix}$.

**פתרון:**

$$\begin{pmatrix}1&1&3\\-2&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+2R_1}\begin{pmatrix}1&1&3\\0&3&6\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_2-2R_3}\begin{pmatrix}1&1&3\\0&3&6\\0&0&3\end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות לכן $b_1,b_2,b_3$ בסיס של $\mathbb{R}^3$. נמצא את הקואורדינטות של ווקור $u$ לפי בסיס $B$.

$$u=xb_1+yb_2+zb_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_2 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -27 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to \frac{1}{3}R_3]{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right)$$

$.[u]_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ -9 \end{pmatrix}$

### דוגמה 10.9 (מרחב האפס ובסיסו)

מצאו את בסיס ומימד של מרחב האפס של המטריצה $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$

**פתרון:**

כדי למצוא את המרחב האפס יש למצוא את הפתרונות של המערכת

$$AX = \bar{0}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 + 3R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{5} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

המערכת המתאימה היא

$$\begin{array}{ccccccccl} x_1 & - & 2x_2 & & & - & x_4 & + & 3x_5 = 0 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & - & 2x_5 = 0 \end{array}$$

ולכן הפתרון הוא

$$x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5 \ , \qquad x_3 = -2x_4 + 2x_5 \ , \qquad x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

ובצורה וקטורית

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} , \qquad x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

נרשום את הפתרון בצורה צ"ל של וקטורים ב $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_4 \\ 0 \\ -2x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3x_5 \\ 0 \\ 2x_5 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathrm{v}_1} + x_4 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathrm{v}_2} + x_5 \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{v}_3}$$

כאשר $x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$. לכן

$$\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{span}\left\{ \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

$\mathrm{Dim}\left(\mathrm{Nul}(A)\right) = 3$.

**משפט 10.7**

נניח ש- $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ותהי $A^t$ המשוחלפת של $A$. אז

$$\mathrm{Row}\ A = \mathrm{Col}\ A^t\ , \qquad \mathrm{Col}\ A = \mathrm{Row}\ A^t\ .$$

**הוכחה:** תרגיל בית. ∎

**משפט 10.8**

נניח ש- $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. אם ניתן להגיע מ- $A$ ל- $B$ ע"י ביצוע מספר סופי של פעולות שורה אלמנטריות אז

$$\mathrm{row}\, A = \mathrm{row}\, B\ .$$

**הוכחה:** תרגיל בית. ∎

**משפט 10.9**

נניח ש- $A \in R^{m\times n}$ ונניח ש- $B$ המטריצה המדורגת המתקבלת מ- $A$. אז

$$\mathrm{Row}\, A = \mathrm{Row}\, B\ , \qquad \mathrm{Nul}\, A = \mathrm{Nul}\, B\ .$$

**הוכחה:** תרגיל בית. ∎

### דוגמה 10.10

עבור המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

מצאו בסיס ל-

**(א)** Row $A$

**(ב)** Nul $A$

**(ג)** Col $A$.

## פתרון:

**(א)**

$$\xrightarrow[R_4\to R_4-3R_1]{R_2\to R_2+2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-3R_2]{R_2\to -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_4-\frac{5}{13}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2+3R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_2-2R_2-2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן הוקטורים הלא כולה אפסים

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

מהווה בסיס של Row $A$.

**(ב)** בכדי למצוא בסיס של Nul $A$ נפתור את המערכת ההומגנית $AX=0$. ע"י המטריצה המדורגת הנמצאת לעיל מקבלים את המערכת המתאימה

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & +\ 2x_3 & & +\ x_5 & =0 \\ & x_2 & -\ x_3 & & +\ x_5 & =0 \\ & & & x_4 & +\ x_5 & =0 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{rcl} x_1 &=& -2x_3-x_5 \\ x_2 &=& x_3-x_5 \\ x_4 &=& -x_5 \end{array}$$

כך ש-

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s-t \\ s-t \\ s \\ -t \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

הינה בסיס של Nul $A$.

**(ג) שיטה 1**

לפי משפט 10.7 ניתן למצוא בסיס של $\text{Col}\, A$ ע"ל למצוא בסיס של $\text{Row}\, A^t$:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & -7 \\ 5 & -8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

המדורגת של $A^t$ היא

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$B_{\text{Row}\, A^t} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & -13 \end{pmatrix} \right\}$$

ואז לפי משפט 10.7:

$$B_{\text{Col}\, A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ -13 \end{pmatrix} \right\}$$

**שיטה 2**

לפי 10.1 העמודות של $A$ המתאימות לעמודות של המדורגת $U$ עם איבר מוביל, מהוות בסיס. מכיוון שיש איבר מוביל בעמודה ה-1 עמודה ה- 2 ועמודה ה- 4 בהמדורגת $U$, אז עמודה ה-1 עמודה ה- 2 ועמודה ה- 4 של $A$ מהווה בסיס:

$$B_{\text{Col}\, A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}, \right\}$$