מחלקה למדעי המחשב

$20-02-23$
$9:00-12:00$

אלגברה ליניארית 1 למדעי המחשב

מועד ב'

מרצים: ד"ר יבגניה אקרמן ד"ר חזי חלאי ד"ר ירמיהו מילר

תשפ"ג סמסטר א'

השאלון מכיל 11 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.
- יש לציין את השאלות שעניתם עליהן בתחילת המחברת.

==

שאלה 1

א) (17 נקודות)
במרחב הווקטורי $\mathbb{R}^{2\times 2}$ נתונים הווקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix}1&-2\\1&0\end{pmatrix}\ ,\quad u_2=\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}\ ,\quad u_3=\begin{pmatrix}0&4\\-1&2\end{pmatrix}\ ,\quad u_4=\begin{pmatrix}0&-3\\1&-1\end{pmatrix}\ .$$

א) (8 נק')
בדקו אם הווקטורים u_1,u_2,u_3,u_4 תלויים ליניאריים. אם כן, מצאו צירוף ליניארילא טריוויאלי שלהם ששווה לוקטור האפס.

ב) (6 נק') מצאו בסיס ואת המימד של תת המרחב הנפרש על ידי הווקטורים u_1,u_2,u_3,u_4.

ג) (3 נק') האם הווקטור u_2 שייך לתת המרחב הנפרש על ידי הוקטורים u_1,u_3,u_4? נמקו את תשובותיכם.

ב) (8 נק') עבור מטריצה A מסדר 3×5 ומטריצה B מסדר 4×3 נסמן $C=AB$.

א) (4 נק') האם יתכן $\dim\left(\text{Col}(B)\right)=4$? נמקו את תשובותיכם.

ב) (4 נק') נתון $B\neq 0$ ו- $\text{rank}(A)=3$. האם יתכן $\dim\left(\text{Nul}(C)\right)=4$? נמקו את תשובותיכם.

שאלה 2

נתונה טרנספורמציה ליניארית $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix}a+2b+5c\\2b+2c\\-a-3c\end{pmatrix}$

לכל $a+bx+cx^2\in\mathbb{R}_2[x]$.

א) (3 נק') מצאו את המטריצה הסטנדרטית של הטרנספורמציה.

ב) (9 נק') מצא ובסיס ואת המימד של $\text{Im}(T)$ ו- $\text{Ker}(T)$.

ג) (3 נק') האם T חד חד ערכית? האם T על? נמק ואת תשובותיכם.

ד) (10 נק') יהיו $B=\{b_1=1+x+x^2, b_2=-x, b_3=2-x^2\}$ בסיס של מרחב $\mathbb{R}_2[x]$,
$C=\left\{c_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, c_2=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, c_3=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של מרחב $\mathbb{R}^3$.

א) (7 נק') מצאו את המטריצה המייצגת של טרנספורמציה T לפי הבסיסים B ו- C.

ב) (3 נק') השתמשו במטריצה המייצגת שמצאתם בסעיף הקודם למציאת את $[T(u)]_C$

כאשר $[u]_B = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

שאלה 3

א) (13 נק') נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\3 & 3 & -1\\5 & -3 & 1\end{pmatrix}$ מעל שדה $\mathbb{R}$. עבוראילו ערכי הפרמטרים a,b,c הווקטור $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ שייך בו זמנית ל $\mathrm{Nul}(A)$ ו- $\mathrm{Col}(A)$?

ב) (12 נק') נתונה מערכת משוואות לינאריות

$$\begin{cases} x+\bar{2}y+z &= \bar{2}\\ x+y+z &= \bar{0}\\ \bar{2}x+y+\bar{2}z &= \bar{1}\end{cases}$$

א) פתרו את המערכת הבאה מעל שדה $\mathbb{Z}_3$. מה מספר הפתרונות למערכת?

ב) פתרו את המערכת הבאה מעל שדה $\mathbb{Z}_5$. מה מספר הפתרונות למערכת?

שאלה 4

במרחב ווקטורי $\mathbb{R}^4$ נתונים תת מרחבים

$$U = \left\{ \begin{pmatrix}t\\t+2s\\-s\\t-s\end{pmatrix} \middle|\, t,s\in\mathbb{R} \right\}, \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \middle|\, \begin{matrix} a-b+c+d &= 0\\ a-d &= 0\end{matrix} \right\}$$

א) (10 נק') מצאו בסיס ומימד של U ו- W.

ב) (7 נק') מצאו בסיס ומימד של $U+W$.

ג) (4 נק') האם $U+W=\mathbb{R}^4$? נמקו את תשובתכם.

ד) (4 נק') האם $U\oplus W=\mathbb{R}^4$? נמקו את תשובתכם.

שאלה 5

א) (9 נק') נתונה המטריצה: $\begin{pmatrix}a & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\-1 & a & 1\end{pmatrix}$.

א) (6 נק') עבור אילו ערכי a המטריצה A הפיכה?
ב) (3 נק') עבור אילו ערכי a למערכת ההומוגנית $A \cdot u = \bar{0}$ יש אינסוף פתרונות?

ב) (10 נק') מצאו מטריצה X המקיימת את השוויון $A^{-1}XA = B$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} ,$$

ג) (6 נק') תהיינה A, B, C מטריצות ריבועיות מאותו סדר המקיימות $AB + C = AC + B$. הוכ יחו שאם $|A - I| \neq 0$ אז $B = C$.

פתרונות

שאלה 1

א) (17 נקודות)

א) (8 נק')
נבצע איזומורפיזם הטבעי:

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\quad u_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix}\ ,\quad u_3=\begin{pmatrix}0\\4\\-1\\2\end{pmatrix}\ ,\quad u_4=\begin{pmatrix}0\\-3\\1\\-1\end{pmatrix}\ .$$

$$\begin{pmatrix}1&3&0&0\\-2&0&4&-3\\1&1&-1&1\\0&2&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to 2R_1+R_2}\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&6&4&-3\\0&-2&-1&1\\0&2&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to R_2-3R_4]{R_3\to R_2+3R_3}\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&6&4&-3\\0&0&1&0\\0&0&-2&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&6&4&-3\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-4R_3}\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&6&0&-3\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לא כל העמודות מובילות לכן u_1,u_2,u_3,u_4 ת"ל.

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3+\alpha_4u_4=0$$

$$\alpha_1=-\frac{3}{2}\alpha_4\ ,\quad \alpha_2=\frac{1}{2}\alpha_4\ ,\quad \alpha_3=0\ ,\quad \alpha_4\in\mathbb{R}\ .$$

נציב $\alpha_4=2 \Leftarrow$

$$\alpha_1=-3,\quad \alpha_2=1,\quad \alpha_3=0$$

:

$$-3u_1+u_2+0u_3+2u_4=0\ .$$

ב) (6 נק') $\dim\left(\text{span}\{u_1,u_2,u_3,u_4\}\right)=3$ לפי המספר העמודות המובילות.
הווקטורים u_1,u_2,u_3 מהווים בסיס של $\text{span}\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$.

ג) (3 נק') הווקטורים u_1, u_3, u_4 בת"ל (רואים לפי המטריצה המדורגת).
לכן u_1, u_3, u_4 בסיס של $\text{span}\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.
לכן $u_2 \in \text{span}\{u_1, u_3, u_4\}$.

ב) (8 נק') A מטריצה מסדר 3×5, B מטריצה מסדר 3×4, $C = AB$.

א) (4 נק') האם יתכן

$$\dim\left(\text{Col}(B)\right) = \text{rank}(B) = \dim\left(\text{row}(B)\right) \leq 3$$

כי במטירצה B יש רק 3 שורות.

ב) (4 נק') נתון: $B \neq 0$ ו- $\text{rank}(A) = 3$.

C מטריצה מסדר 5×4.

נניח ש- $\dim\left(\text{Nul}(C)\right) = 4$.

מכיוון ש- $\text{rank}(C) + \dim\left(\text{Nul}(C)\right) = 4$ מקבלים $\text{rank}(C) = 0 \Leftarrow C = 0 \Leftarrow AB = 0$.

נסמן $B = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$ כאשר b_1, b_2, b_3, b_4 העמודות של B.

$$AB = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ Ab_1 & Ab_2 & Ab_3 & Ab_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = 0 \ .$$

$B \neq 0$ לכן קיים i כך ש- $b_i \neq 0$.
ז"א למערכת $Ab_i = 0$ יש פתרון לא טריוויאלי $\Leftarrow$ יש ∞ פתרונות $\Leftarrow$ $r(A) < 3$ בסתירה לכך ש-
$r(A) = 3$.
לפיכך לא ייתכן כי $\dim\left(\text{Nul}(C)\right) = 4$.

שאלה 2

א) (3 נק') $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$,

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a + 2b + 5c \\ 2b + 2c \\ -a - 3c \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

ב) (9 נק')

$$\begin{pmatrix}1&2&5\\0&2&2\\-1&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&5\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\dim\left(\mathrm{Im}(T)\right)=2$ לפי המספר העמודות המובילות.
בסיס של $\mathrm{Im}(T)$:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim\left(\mathrm{Ker}(T)\right)=1$ לפי המספר העמודות הלא המובילות. $x=-3x, y=-z, z\in\mathbb{R}$. $=\begin{pmatrix}-3z\\-z\\z\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}z$. בסיס של $\mathrm{Ker}(T)$:

$$\left\{-3-x+x^2\right\}$$

ג) (3 נק') T לא חד חד ערכית כי לא כל העמודות מובילות.
T לא על כי לא כל השורות מובילות.

ד) (10 נק')
א) (7 נק')

$$T(b_1)=T\left(1+x+x^2\right)=\begin{pmatrix}8\\4\\-4\end{pmatrix}=8c_1-2c_2-4c_3\ .$$

$$T(b_2)=T\left(-x\right)=\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}=-2c_1+0c_2+0c_3$$

$$T(b_3)=T\left(2-x^2\right)=\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}=-3c_1+\frac{1}{2}c_2-c_3$$

$$[T]_B^C=\begin{pmatrix}8&-2&-3\\-2&0&\frac{1}{2}\\-4&0&-1\end{pmatrix}$$

ב) (3 נק')

$$[T(u)]_C=[T]_B^C\cdot[u]_B=\begin{pmatrix}8&-2&-3\\-2&0&\frac{1}{2}\\-4&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-6\end{pmatrix}\ .$$

שאלה 3

א) (13 נק') $A=\begin{pmatrix}1&3&-1\\3&3&-1\\5&-3&1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in \mathrm{Nul}(A)$ לכן $A\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1&3&-1\\3&3&-1\\5&-3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+3b-c\\3a+3b-c\\5a-3b+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

לכן $\begin{cases}a+3b-c&=0\\3a+3b-c&=0\\5a-3b+c&=0\end{cases}$

$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in \mathrm{Col}(A)$ לכן למערכת $AX=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ יש פתרון.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&a\\3&3&-1&b\\5&-3&1&c\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&a\\0&-6&2&b-3a\\0&-18&6&c-5a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&a\\0&-6&2&b-3a\\0&0&0&4a-3b+c\end{array}\right)$$

לכן $4a-3b+c=0$. כלומר:

$$\begin{cases}a+3b-c&=0\\3a+3b-c&=0\\5a-3b+c&=0\\4a-3b+c&=0\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&-1\\3&3&-1\\5&-3&1\\4&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-6&2\\0&-18&6\\0&-15&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-3&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$a=0, b=\frac{1}{3}c, c\in\mathbb{R}$.

ב) (12 נק')

א)

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\bar1&\bar2&\bar1&\bar2\\\bar1&\bar1&\bar1&\bar0\\\bar2&\bar1&\bar2&\bar1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_1+R_3]{R_2\to\bar2R_1+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar1&\bar2&\bar1&\bar2\\\bar0&\bar2&\bar0&\bar1\\\bar0&\bar0&\bar0&\bar0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to\bar2R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar1&\bar2&\bar1&\bar2\\\bar0&\bar1&\bar0&\bar2\\\bar0&\bar0&\bar0&\bar0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}\bar1&\bar0&\bar1&\bar1\\\bar0&\bar1&\bar0&\bar2\\\bar0&\bar0&\bar0&\bar0\end{array}\right)$$

פתרון כללי: $\begin{cases} x &= \bar{z}+1 \\ y &= \bar{2} \end{cases}$, $z\in\mathbb{Z}_3$. למערכת 3 פתרונות.

ב)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to\bar{3}R_1+R_3]{R_2\to\bar{4}R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to\bar{2}R_2+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} \end{array}\right)$$

למערכת אין פתרון.

שאלה 4

א) (10 נק')

$$U=\left\{\begin{pmatrix} t \\ t+2s \\ -s \\ t-s \end{pmatrix} \middle| t,s\in\mathbb{R}\right\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

הווקטורים $\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ בת"ל לכן הם מהווים בסיס של U.

$\dim(U)=2$.

$$W=\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{rl} a-b+c+d &= 0 \\ a-d &= 0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$a=d, b=c+2d, c,d\in\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} d \\ c+2d \\ c \\ d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

בסיס של W:

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(W)=2$.

ב) (7 נק')

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&2&1&2\\0&-1&1&0\\1&-1&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&1&1\\0&-1&1&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&1&1\\0&0&3&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&1&1\\0&0&3&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

$\dim(U+W)=4$. בסיס של $U+W$:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ג) $U+W\subseteq\mathbb{R}^4$.

$$\dim(U+W)=\dim(\mathbb{R}^4)=4.$$

לכן $U+W=\mathbb{R}^4$.

ד)

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)\ .$$

לכן

$$\dim(U\cap W)=2+2-4=0\ .$$

מכאן $U\cap W=\{\bar{0}\}$. לכן $\mathbb{R}^4=U\oplus W$.

שאלה 5

א) (9 נק')
א) (6 נק')

$$\begin{vmatrix}a&0&1\\0&1&2\\-1&a&1\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}1&2\\a&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&1\\-1&a\end{vmatrix}=a(1-2a)+1=-2a^2+a+1=0$$

$a=1,-\frac{1}{2}$. עבור $a\neq 1,-\frac{1}{2}$ מטריצה A הפיכה.
ב) (3 נק') עבור $a=1$ או $a=-\frac{1}{2}$ $|A|=0$ לכן למערכת $AX=0$ יש אינסוף פתרונות.

ב) (6 נק')

$$A^{-1}XA=B\quad\Rightarrow\quad X=ABA^{-1}\ .$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to 2R_3-5R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_2+2R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -10 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2\to R_2-R_3]{R_1\to R_1-R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 11 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -10 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -10 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 11 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -10 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 16 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -10 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

$$.A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -5 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 & 4 & 10 \\ -38 & 5 & 16 \\ -38 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

ג) נניח כי $AB + C = AC + B$, ו- $|A - I| \neq 0$.

$$A(B-C) = B - C \quad \Rightarrow \quad (A-I)(B-C) = 0 \ .$$

$|A - I| \neq 0$ לכן $A - I$ הפיכה. לכן

$$(A-I)^{-1}(A-I)(B-C) = 0 \quad \Rightarrow \quad B - C = 0 \quad \Rightarrow \quad B = C \ .$$