חישוביות וסיבוכיות

מועד ב'

פתרון לדוגמא

ד"ר יוחאי טוויטו ,   ד"ר ירמיהו מילר .

סמסטר א, תשפ"ה'

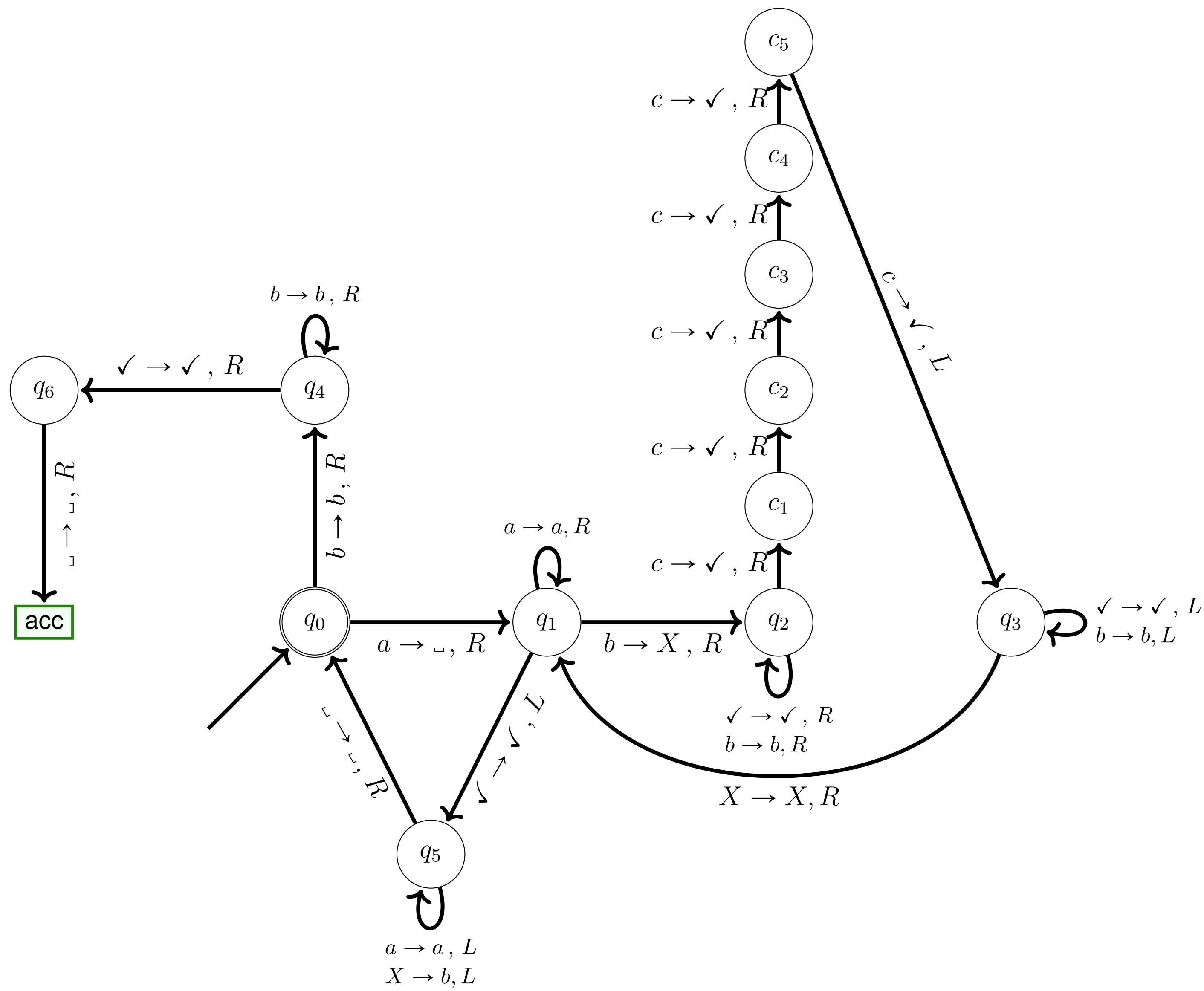
מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הינן פתרונות לדוגמא. ניתן לפתור חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

פתרונות

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

כל מעברים לא מופיעים בתרשים, עוברים למצב rej.



פתרונות

סעיף ב' (10 נקודות)

$$\sigma \in \{0,\ldots,9\}\ , \qquad \tau \in \{0,\ldots,9,*\}\ .$$

מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
$X.*.*$	σ	$X.\sigma.*$	$\checkmark$	R	
$X.*.*$	$\checkmark$	$X.*.*$	$\circlearrowleft$	R	
$X.\sigma.*$	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	$X.\sigma.*$	$\circlearrowleft$	R	
$X.\tau.*$	#	$Y.\tau.*$	$\circlearrowleft$	R	
$Y.\tau.*$	σ	$Y.\tau.\sigma$	$\checkmark$	R	
$Y.\tau.*$	$\checkmark$	$Y.\tau.*$	$\circlearrowleft$	R	
$Y.\tau.\sigma$	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	$Y.\tau.\sigma$	$\circlearrowleft$	R	
$Y.\tau_1.\tau_2$	#	$Z.\tau_1.\tau_2$	$\circlearrowleft$	R	
$Z.\tau_1.\tau_2$	$\checkmark$	$Z.\tau_1.\tau_2$	$\circlearrowleft$	R	
$Z.\tau_1.\tau_2$	σ	back	$\checkmark$	L	$\tau_1,\tau_2 \neq \sigma \wedge \tau_1+\tau_2 \leqslant \sigma \wedge \tau_1,\tau_2 \neq *$
$Z**$	$\sqcup$	acc	$\circlearrowleft$	R	
back	$0,1,\ldots,9,\checkmark$	back	$\circlearrowleft$	L	
back	$\sqcup$	$X.*.*$	$\circlearrowleft$	R	

כל שאר המעברים עוברים ל rej.

שאלה 2: וריאציות על מכונות טיורינג (20 נקודות)

כיוון ראשון

פתרונות

תהי

$$M^O = \left(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O\right) \ ,$$

במודל O החד כיווני. נבנה מכונה

$$M^T = \left(Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T\right) \ ,$$

שקולה במודל הדו כיווני T.

רכיבי המ"ט M^T זהים לאלו של המ"ט M^O, מלבד מהתכונה שהראש של M^O לא זז מעבר לקצה השמאולי של הקלט.

לכן כדי ש- M^T תהיה שקולה ל- M^O יש להוסיף מעברים לפונקצית המעברים של M^T כדי שהראש של M^T לא זז מעבר לקצה השמאולי של הקלט.

הרעיון הוא לסמן את המשבצת שמשמאול לתחילת הקלט עם סימון מיוחד $\$$, ואז להוסיף מעברים לפונקצית המעברים של M^T שמבטיחים שאם הראש נמצא למשבצת שמסומנת $\$$ אז הוא מיד חוזר ו- M^T חוזרת למצב ההתחתי של המ"ט M^O. זה מתבצע על ידי הוספת השורות האלו למטה לטבלת המעברים של M^T:

מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
q_0^T	σ	$q_\$$	$\circlearrowleft$	L	
$q_\$$	$\sqcup$	q_0^O	$\$$	R	
q	$\$$	q	$\$$	R	$\forall q \in Q^O$

$$Q^T = Q^O \cup \{q_0^T, q_\$\} \ , \qquad \Sigma^T = \Sigma^O \ , \qquad \Gamma^T = \Gamma^O \cup \{\$\} \ , \qquad \text{acc}^T = \text{acc}^O \ , \qquad \text{rej}^T = \text{rej}^O \ .$$

<u>כיוון שני</u>

תהי

$$M^T = \left(Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T\right) \ ,$$

במודל T הדו כיווני. נבנה

$$M^O = \left(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O\right) \ ,$$

במודל O החד כיווני.

נתאר סימולציה של הכבונה החד-כיוונית במודל הדו-כיוונית.

הרעיון הוא לסמן קו על הסרט במשבת באמצע הקלט, ואז לקפל את הסרט בקו הזה. באופן הזה נקבל סרט עם קצה שמאולי ואינסופי ימינה. במשבצות של הסרט החדש המקופל יש שני תווים, אחד למעלה (U) ואחד למטה (D), מלבד מנקודת הקיפול שבו יש משבצת אחת שמסומנת $\$$.

באופן הזה אפשר לסמלץ את המכונה M^O במכונה M^T על ידי הוספת המעברים הבאים לטבלת המעברים של M^T. **לכל** $\tau, \sigma, \pi \in \Gamma^T$:

פתרונות

תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון	מצב
תזוזה שמאלה: $(q,\sigma) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,L)$	L	π τ	$p.D$	π σ	$q.D$
	R	τ π	$p.U$	σ π	$q.U$
תזוזה שמאלה: $(q,\sqcup) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,L)$	L	$\sqcup$ τ	$p.D$	$\sqcup$	$q.D$
	R	τ $\sqcup$	$p.U$	$\sqcup$	$q.U$
תזוזה ימינה: $(q,\sigma) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,R)$	R	π τ	$p.D$	π σ	$q.D$
	L	τ π	$p.U$	σ π	$q.U$
תזוזה ימינה: $(q,\sqcup) \xrightarrow{M^T} (p,\tau,R)$	R	$\sqcup$ τ	$p.D$	$\sqcup$	$q.D$
	L	τ $\sqcup$	$p.U$	$\sqcup$	$q.U$
	R	$\circlearrowleft$	$q.U$	$\$$	$q.D$
	R	$\circlearrowleft$	$q.D$	$\$$	$q.U$
אתחול					
$\tau \in \Sigma \cup \{\sqcup\}$ $\sigma \in \Sigma$	R	$\$$	$q.\tau$	τ	q_0^O
	R	$\sqcup$ σ	$q.\tau$	τ	$q.\sigma$
	L	$\sqcup$ $\sqcup$	back	$\sqcup$	$q.\sqcup$
	L	$\circlearrowleft$	back	$\sqcup$ τ	back
	R	$\circlearrowleft$	$q_0^T.D$	$\$$	back
סיום					
			acc^O	הכל	acc$^T.D$
			acc^O	הכל	acc$^T.U$
			rej^O	הכל	rej$^T.D$
			rej^O	הכל	rej$^T.U$
כל השאר עוברים ל-rej					

$$\Gamma^O \supseteq \left(\Gamma^T \times \Gamma^T\right) \cup \{\$\} .$$

שאלה 3: התזה של צ'רץ'-טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

$$S \to \$Ca\# \to \$aaC\# \to \$aaE \to \$aEa \to \$Eaa \to aa$$

$$\begin{aligned} S &\to \$Ca\# \to \$aaC\# \to \$aaD\# \to \$aDa\# \to \$Daa\# \to \$Caa\# \\ &\to \$aaCa\# \to \$aaaaC\# \to \$aaaaE \to \$aaaEa \to \$aaEaa \to \$aEaaa \to \$Eaaaa \\ &\to aaaa \end{aligned}$$

באמצעות אינדוקציה על k ניתן להוכיח כי

$$L(G) = \left\{ w \in \Sigma^* \mid w = \varepsilon \vee \left(w = a^{2^n} , n \in \mathbb{N}\right) \right\} .$$

סעיף ב' (10 נקודות)

$$S \to aBC \to abC \to abc$$

$$\begin{aligned} S &\to aSBC \to aaBCBC \to aaBHBC \to aaBBCC \to aabBCC \to aabbCC \\ &\to aabbcC \to aabbcc . \end{aligned}$$

אפשר להוכיח, ע"י אינדוקציה על n, כי

$$L(G) = \left\{ w \in \Sigma^* \mid w = a^n b^n c^n , n \in \mathbb{N}^+ \right\} .$$

שאלה 4: אי כריעות (20 נקודות)

פתרונות

סעיף א' (10 נקודות)

נבנה מ"ט אי-דטרמיניסטית $M_{L_{\geqslant 3}}$ המכריעה את $L_{\geqslant 3}$.

התיאור הבא הוא תיאור של תוכנית אי-דטרמיניסטית של המכונת טיורינג $M_{L_{\geqslant 3}}$.

$M_{L_{\geqslant 3}} =$ על קלט x:

1. $M_{L_{\geqslant 3}}$ בודקת האם הקלט x הוא מכונת טיורינג.
   אם לא אז $M_{L_{\geqslant 3}}$ דוחה.
2. $M_{L_{\geqslant 3}}$ בוחרת באופן אי-דטרמיניטי 3 מילים w_1, w_2, w_3.
   - מריצה את M על w_1.
     * אם M דוחה $\Leftarrow$ $M_{L_{\geqslant 3}}$ דוחה.
   - מריצה את M על w_2.
     * אם M דוחה $\Leftarrow$ $M_{L_{\geqslant 3}}$ דוחה.
   - מריצה את M על w_3 ועונה כמוה.

<u>נכונות.</u>

$x \in L_{\geqslant 3} \Leftarrow x = \langle M \rangle$ ו- $|L(M)| \geqslant 3$.

$\Leftarrow$ $\exists$ 3 מילים w_1, w_2, w_3 המתקבלים ב- M.

$\Leftarrow$ $\exists$ ריצה של $M_{L_{\geqslant 3}}$ בה תבחר את w_1, w_2, w_3 ותריץ עליהם את M ותקבל

$\Leftarrow$ $M_{L_{\geqslant 3}}$ מקבלת את x.

$x \notin L_{\geqslant 3} \Leftarrow$ שני מקרים:

מצב 1. $x \neq \langle M \rangle \Leftarrow M_{L_{\geqslant 3}}$ דוחה את L.

מצב 2. $x = \langle M \rangle$ ו- $|L(M)| < 3$

$\Leftarrow$ לכל 3 מילים שונות w_1, w_2, w_3 לפחות אחת מהן לא מתקבלת ב- M.

$\Leftarrow$ בכל ריצה של $M_{L_{\geqslant 3}}$ בה היא תבחר 3 מילים w_1, w_2, w_3 השונות זו מזו, ולפחות אחת הריצות של M על מילים אלו תדחה או לא תעצור

$\Leftarrow$ בכל ריצה של $M_{L_{\geqslant 3}}$ על x, $M_{L_{\geqslant 3}}$ תדחה או לא תעצור

$\Leftarrow$ $M_{L_{\geqslant 3}}$ לא מקבלת את x.

סעיף ב' (10 נקודות)

נבנה רדוקציה מ- A_{TM}.
הפונקצית הרדוקציה היא:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\varnothing} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

פתרונות

כאשר $M_\varnothing$ היא מ"ט הדוחה כל קלט ו- M' היא מ"ט שעל כל קלט x מריצה את M ועונה כמוה.

<u>אבחנה</u>

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \varnothing & w \notin L(M) \end{cases}$$

<u>נכונות הרדוקציה</u>

נניח ש- $x \in A_{TM}$.

$\Leftarrow$ $x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \in L(M)$.

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M'\rangle$.

$\Leftarrow$ $L(M') = \Sigma^*$.

$\Leftarrow$ $|L(M')| = \infty$.

$\Leftarrow$ $f(x) \in L_{\geqslant 3}$.

נניח ש- $x \notin A_{TM}$.
אז יש שני מקרים:

מצב 1: $x \neq \langle M, w\rangle$.

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M_\varnothing\rangle$ ו- $|L(M_\varnothing)| = 0$

$\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\geqslant 3}$.

מצב 2: $x = \langle M, w\rangle$ ו- $w \notin L(M)$.

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M'\rangle$

$\Leftarrow$ $L(M') = \varnothing$.

$\Leftarrow$ $|L(M')| = 0$.

$\Leftarrow$ $f(x) \notin L_{\geqslant 3}$.

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

סעיף א' (8 נקודות)

נבנה פונקצית הרדוקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ שמוגדרת

$$f(\langle S, t\rangle) = \langle S'\rangle$$

כאשר $\langle S, t\rangle$ קלט של SubsetSum ו- $\langle S'\rangle$ קלט של Partition.

1) יהי $s = \sum_{x \in S} x$.

2) נגדיר את הקבוצה החדשה S' על ידי הוספת האיבר $s-2t$ לקבוצה S:

$$S' = S \cup \{s-2t\} \ .$$

סעיף ב' (6 נקודות)

<u>כיוון ⇐</u>

נניח ש- $\langle S, t\rangle \in$ SubsetSum.

⇐ קיימת תת-קבוצה $S \subseteq Y$ כך ש- $t = \sum_{y \in Y} y$.

לכן:

$$\sum_{y \in (Y \cup \{s-2t\})} y = |Y| + s - 2t$$
$$= t + s - 2t$$
$$= s - t \ .$$

$$\sum_{y \in S' \backslash (Y \cup \{s-2t\})} y = |S'| - (|Y| + s - 2t)$$
$$= |S'| - |Y| - s + 2t$$
$$= |S| + s - 2t - |Y| - s + 2t$$
$$= |S| - |Y|$$
$$= s - t \ .$$

⇐ התת-קבוצה $Y \cup \{s-2t\}$ והתת-קבוצה $S' \backslash \big(Y \cup \{s-2t\}\big)$ מהוות חלקוה של הקבוצה S'.

⇐ $\langle S' \rangle \in$ Partition.

<u>כיוון ⇒</u>

נניח ש- $\langle S' \rangle \in$ Partition.

⇐ קיימות תת-קבוצות $S'_1, S'_2 \subseteq S'$ כך שמתקיים

(1*) $$S'_1 \cup S'_2 = S'$$

-ו

(2*) $$\sum_{x \in S'_1} x = \sum_{x \in S'_2} x \ .$$

הקבוצה S קשור לקבוצה S' על ידי היחס $S' = S \cup \{s-2t\}$.
לכן

$$S'_1 \cup S'_2 = S \cup \{s-2t\} \qquad (3^*)$$

ללא הגבלת כלליות אנחנו נגדיר את התת-קבוצה $S_1 \subseteq S$ של הקבוצה S להיות

$$S_1 = S'_1 \cup \{s-2t\} \ ,$$

ואנחנו נגדיר את התת-קבוצה $S_2 \subseteq S$ של הקבוצה S להיות

$$S_2 = S'_2 \ .$$

מכאן מנובע מהמשוואה (3*) ש:

$$S_1 \cup S_2 = S'_1 \cup S'_2 + \{s-2t\} = S \cup \{s-2t\} \qquad \Rightarrow \qquad S_1 \cup S_2 = S \ . \qquad (4^*)$$

$\Leftarrow$ ניתן לרשום משוואה (2*) בצורה הבאה:

$$\sum_{x\in(S_1\cup\{s-2t\})} x = \sum_{x\in S_2} x \ . \qquad (5^*)$$

ניתן לחלק את הסכום בצד השמאול של המשווה (5*) ולרשום אותה בצורה הבאה:

$$\sum_{x\in S_1} x + s - 2t = \sum_{x\in S_2} x \ . \qquad (6^*)$$

נוסיף את הסכום $\sum\limits_{x\in S_1} x$ לשני האגפים של משוואה של (6*) ונקבל

$$\sum_{x\in S_1} x + \sum_{x\in S_1} x + s - 2t = \sum_{x\in S_2} x + \sum_{x\in S_1} x \ . \qquad (7^*)$$

הסכום בצד הימין של משוואה (7*) הוא הסכום $\sum\limits_{x\in(S_1\cup S_2)} x$.

לפי המשוואה (4*), $S_1 \cup S_2 = S$ לכן $\sum\limits_{x\in(S_1\cup S_2)} x = \sum\limits_{x\in S} x$.

לכן הסכום בצד הימין של משוואה (7*) הוא הסכום של כל האיברים אשר בקבוצה S.
אנחנו מסמנים את הסכום הזה כ- $\sum\limits_{x\in S} x = s$. לכן ניתן לרשום את משוואה (7*) בצורה הבאה:

$$\sum_{x\in S_1} x + \sum_{x\in S_1} x + s - 2t = s \ . \qquad (8^*)$$

אפשר לבטל s בצד שמאול ובצד ימין ולהעביר את ה- $2t$ לצד ימין ולקבל את המשוואה:

$$\sum_{x\in S_1} x + \sum_{x\in S_1} x = 2t \ , \tag{9*}$$

זאת אומרת

$$2\sum_{x\in S_1} x = 2t \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{x\in S_1} x = t \ . \tag{10*}$$

$\Leftarrow$ קיימת תת קבוצה $S_1 \subseteq S$ של S שמקיימת את התנאי $\sum\limits_{x\in S_1} x = t$.

$\Leftarrow$ $\langle S,t\rangle \in$ SubsetSum.

סעיף ג' (6 נקודות)

הפונקצית הרדוקציה f, על קלט $\langle S,t\rangle$ מחזירה את הפלט $\langle S'\rangle$ כאשר $S' = S\cup\{s-2t\}$.

לכן הפונקציה מחשבת את הסכום s של כל האיברים שבקבוצה S ואז מחשבת את החיסור $s-2t$.

נסמן $n=|S|$ האורך של הקבוצה S.

אפשר לתאר את f בפסאודו-קוד באופן הבא:

שלב 1. הפונקציה f מאתחלת משתנה $s=0$.

שלב 2. הפונקציה נכנסת ללואה מעל כל האיברים שבקבוצה S ומחברת האיבר הנוכחי לערך של s כל איטרציה.

שלב 3. בסוף הפונקציה מחשבת את החיסור $s-2t$.

שלב 4. הפונקציה מחזירה את הקבוצה החדשה $S' = S\cup\{s-2t\}$.

- שלב 1 דורש צעד אחד. לכן הסיבוכיות של שלב 1 הוא $O(1)$.
- שלב 2 דורש n צעדים. לכן הסיבוכיות של שלב 2 הוא $O(n)$.
- שלב 3 דורש צעד אחד. לכן הסיבוכיות של שלב 3 הוא $O(1)$.
- שלב 4 דורש צעד אחד. לכן הסיבוכיות של שלב 4 הוא $O(1)$.

בסך הכל הסיבוכיות של הפונקציה f היא

$$O(1)+O(n)+O(1)+O(1) = O(n) \ .$$