שעור 11
משפט הפירוק הפרימרי

11.1 הגדרה של חיתוך וסכום של תתי מרחבים

הגדרה 11.1

יהיו $V_1, V_2 \subseteq V$ תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל השדה $\mathbb{F}$. התת מרחב $V_1 + V_2$ מוגדר

$$V_1 + V_2 = \{u_1 + u_2 | u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\} \ .$$

משפט 11.1 סכום של תת מרחב שווה לפרישה של האיחוד

יהיו $V_1, V_2 \subseteq V$ תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל השדה $\mathbb{F}$. אזי

$$V_1 + V_2 = \text{span}\left(V_1 \cup V_2\right) \ .$$

הוכחה:

נוכיח כי $V_1 + V_2 \subseteq \text{span}\left(V_1 \cup V_2\right)$:

לכל $u_1 \in V_1$ ו- $u_2 \in V_2$ מתקיים $u_1 + u_2 \in \text{span}\left(V_1 \cup V_2\right)$ אזי $V_1 + V_2 \subseteq \left(V_1 \cup V_2\right)$.

נוכיח כי $\text{span}\left(V_1 \cup V_2\right) \subseteq V_1 + V_2$:

יהי $w \in \text{span}\left(V_1 \cup V_2\right)$. אז קיימים $u_1, \ldots, u_k \in V_1$ ו $\text{v}_1, \ldots, \text{v}_n \in V_2$ וסקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$ כך ש

$$w = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k + \beta_1 \text{v}_1 + \cdots + \beta_n \text{v}_n \ .$$

אז $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k \in V_1$ וגם $\beta_1 \text{v}_1 + \cdots + \beta_n \text{v}_n \in V_2$.
לכן $w \in V_1 + V_2$.

הוכחנו ש- $\text{span}\left(V_1 \cup V_2\right) \supseteq V_1 + V_2$ וגם $\text{span}\left(V_1 \cup V_2\right) \subseteq V_1 + V_2$ $\Leftarrow$ $V_1 + V_2 = \text{span}\left(V_1 \cup V_2\right)$ כנדרש.
■

דוגמה 11.1

נקח את המרחב ווקטורי $V=\mathbb{R}^3$. נקח את התתי מרחבים $\mathbb{R}^3$: $V_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}$, ו $V_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}\middle| y\in\mathbb{R}\right\}$, קווים ישרים ב $\mathbb{R}^3$. אז הסכום שלהם הינו

$$V_1+V_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\middle| x,y\in\mathbb{R}\right\} ,$$

ומהווה את המישור $z=0$ ב $\mathbb{R}^3$.

11.2 סכום ישר

הגדרה 11.2 סכום ישר

יהיו V_1,V_2 תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$.
אומרים כי התת מרחב $W\subseteq V$ הוא סכום ישר אם

1) $W=V_1+V_2$

2) לכל וקטור של W $w\in W$ קיימים וקטורים יחידים $u_1\in V_1$ ו- $u_2\in V_2$ עבורם

$$w=u_1+u_2\ .$$

סימון: $W=V_1\oplus V_2$.

משפט 11.2

יהיו V_1,V_2 תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$.
$W=V_1\oplus V_2$ אם ורק אם

א) $W=V_1+V_2$

ב) $V_1\cap V_2=\{\bar{0}\}$.

הוכחה:
כיוון $\Leftarrow$:
נניח כי $W=V_1\oplus V_2$.

1) לפי ההגדרה 11.2, $W=V_1+V_2$.

2) יהי $u\in V_1\cap V_2$. לכן קיים צרוף ליניארי יחיד כך ש-

$$u=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2$$

כאשר $u_1\in V_1,u_2\in V_2$ ו- $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{F}$ סקלרים.

הביטוי הזה מסופק על ידי ההשמה $u_1=u, u_2=0, \alpha_1=1$,
ועל ידי ההשמה $u_1=0, u_2=u, \beta_1=1$.
הצרוף ליניארי יחיד לכן בהכרח שתי ההשמות זהות.
הדרך היחידה לקיים שתיהן היא אם $u=0$.

כיוון $\Rightarrow$:
נניח שמתקיימים התנאים

1) $W=V_1+V_2$

2) $V_1\cap V_2=\{\bar{0}\}$.

אזי התנאי (1) של ההגדרה 11.2 מתקיים.
נותר להוכיח התנאי (2) של ההגדרה 11.2.
יהי $w\in W$. מכיוון ש- $W=V_1+V_2$ אזי קיימים $u_1\in V_1, u_2\in V_2$ עבורם $w=u_1+u_2$.
נוכיח כי הווקטורים u_1,u_2 יחידים.
נניח בשלילה ש-

$$w=u_1+u_2\ , \qquad w=u_1'+u_2'$$

כאשר $u_1\neq u_1'\in V_1$ וקטורים שונים $(u_1\neq u_1')$ ו- $u_2,u_2'\in V_2$ וקטורים שונים $(u_2\neq u_2')$. אזי

$$u_1-u_1'=u_2-u_2'\ .$$

לכן $u_1-u_1'\in V_1$ וגם $u_1-u_1'\in V_2$.

$\Leftarrow$ $u_1-u_1'\in V_1\cap V_2$.

מכיוון ש- $V_1\cap V_2=\{0\}$ אז $u_1=u_1'$, בסתירה לכך ש- $u_1\neq u_1'$.

■

משפט 11.3

יהיו V_1,V_2 תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$.
אם התנאים הבאים מתקיימים:

1) $W=V_1+V_2$

2) לכל $u_1\in V_1$, ו- $u_2\in V_1$ הקבוצה $\{u_1,u_2\}$ בלתי תלויה ליניארית

אזי $W=V_1\oplus V_2$.

הוכחה:
נוכיח כי התנאים (1) ו- (2) של משפט 11.2.
תנאי (1) שהוא $W=V_1+V_2$, מתקיים כי הוא אחד מההנחות של משפט זה.
נותר רק להוכיח שהתנאי (2) מתקיים, כלומר ש- $V_1\cap V_2=\{0\}$:
יהי $u\in V_1\cap V_2$. נגדיר $u_1=u\in V_1$ ונגדיר $u_2=-u\in V_2$.
אזי

$$u_1+u_2=u+(-u)=0\ .$$

$\{u_1,u_2\}$ בלתי-תלויים ליניארית לכן הדרך היחידה שזה מתקיים היא אם $u_1=0$ ו- $u_2=0$.
לכן $u=0$ ולכן $V_1\cap V_2=\{0\}$.

■

11.3 תת מרחב T שמור

הגדרה 11.3 תת מרחב T שמור

יהי $V\to V$: T אופרטור במרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$. אומרים כי התת-מרחב $W\subseteq V$ הוא תת-מרחב T- שמור אם לכל $w\in W$ מתקיים

$$T(w)\in W \ .$$

דוגמה 11.2

יהי $T_A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ האופרטור המוגדר:

$$T_A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}1&0&10\\0&2&3\\0&0&3\end{pmatrix}\ .$$

הוכיחו: התת-מרחב $W=\mathrm{Nul}\,(A-3I)$ הוא T_A שמור.

פתרון:

צריך להוכיח שעבור כל $u\in W$ מתקיים $T_A(u)\in W$.
הערכים העצמיים של A הם $\lambda=1$, $\lambda=2$, $\lambda=3$. (A משולשית, לכן הערכים העצמיים הם האיברים על האלכסון הראשי). ז"א כל וקטור $u\in\mathrm{Nul}(A-3I)$ הוא וקטור עצמי ששייך לערך עצמי $\lambda=3$.

$$u\in\mathrm{Nul}(A-3I)\quad\Rightarrow\quad T_A(u)=Au=3u\in\mathrm{Nul}(A-3I)\ .$$

דוגמה 11.3

יהי $T_A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ האופרטור המוגדר:

$$T_A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}\ .$$

יהי $W_1\in\mathbb{R}^3$ תת-מחרב המוגדר:

$$W_1=\mathrm{span}\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\ u_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ויהי $W_2\in\mathbb{R}^3$ תת-מחרב המוגדר:

$$W_2=\mathrm{span}\left\{u_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

א) הוכיחו כי W_1 תת-מרחב T שמור.

ב) הוכיחו כי W_2 תת-מרחב T שמור.

פתרון:

א) צריך להוכיח שלכל וקטור $u \in W_1$ מתקיים $T_A(u) \in W_1$. מספיק לאמת ש- $T_A(u_1)$ שייך ל- W_1 וש- $T_A(u_2)$ שייך ל- W_1.

$$T_A(u_1) = Au_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2u_1 \ .$$

$$T_A(u_2) = Au_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2u_2 \ .$$

לכן $T_A(u_1) \in \text{span}\{u_1, u_2\} \Leftarrow T_A(u_1) \in W_1$.

$T_A(u_2) \in \text{span}\{u_1, u_2\} \Leftarrow T_A(u_2) \in W_1$. כלומר W_1 תת מרחב T_A שמור.

ב)

$$T_A(u_3) = Au_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_3 \ .$$

לכן $T_A(u_3) \in \text{span}\{u_3\} \Leftarrow T_A(u_3) \in W_2$. כלומר W_2 תת מרחב T_A שמור.

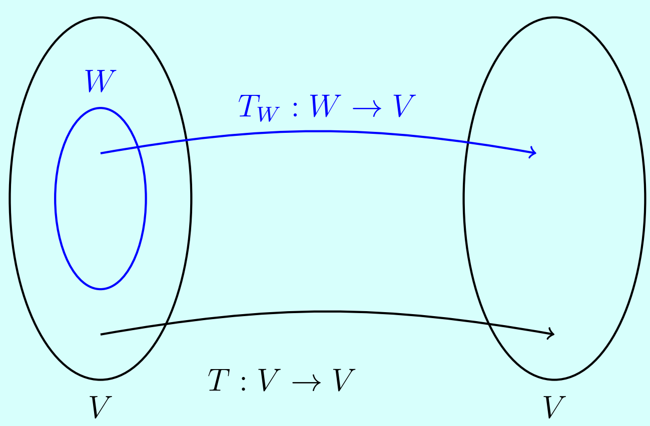
11.4 צמצום של אופרטור

הגדרה 11.4 צמצום של אופרטור

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$. יהי $W \subseteq V$ תת מרחב של V. הצמצום של T ל- W מסומן T_W ומוגדר להיות

$$T_W : V = T : W \to V \ .$$

במילים אחרות, בצמצום של T ל- W אנחנו מצמצמים את התחום הכדרה מ- V ל- W.



דוגמה 11.4

יהי $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ אופרטור המוגדר

$$T_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ , \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

יהיו W_1,W_2 תת-מרחבים של $\mathbb{R}^3$ כך ש-

$B_{W_1}=\text{span}\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\ u_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של W_1.

$B_{W_2}=\text{span}\left\{u_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של W_2.

א) חשבו את המטריצה המייצגת של הצמצום T_{W_1} לפי הבסיס B_{W_1}.

ב) חשבו את המטריצה המייצגת של הצמצום T_{W_2} לפי הבסיס B_{W_2}.

ג) חשבו את המטריצה המייצגת של T בבסיס $B=B_{W_1}\cup B_{W_2}$.

פתרון:

א) נסמן $B_{W_1}=\text{span}\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\ u_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$. ההגדרה של המטריצה המייצגת של T_{W_1} היא:

$$[T_{W_1}]_{B_{W_1}}=\begin{pmatrix}| & | \\ [T(u_1)]_{B_{W_1}} & [T(u_2)]_{B_{W_1}} \\ | & |\end{pmatrix}$$

$$T(u_1)=Au_1=\begin{pmatrix}1&4&0\\3&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=-2u_1+3u_2\ .$$

הצמצום T_{W_1} מוגדר רק על W_1 ולכן

$$T_{W_1}(u_1)=-2u_1+3u_2\qquad\Leftrightarrow\qquad [T(u_1)]_{B_{W_1}}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\ .$$

$$T(u_2)=Au_2=\begin{pmatrix}1&4&0\\3&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=0\cdot u_1+5u_2\ .$$

הצמצום T_{W_1} מוגדר רק על W_1 ולכן

$$T_{W_1}(u_2)=0\cdot u_1+5u_2\qquad\Leftrightarrow\qquad [T(u_2)]_{B_{W_1}}=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}\ .$$

לפיכך

$$[T_{W_1}]_{B_{W_1}}=\begin{pmatrix}-2&0\\3&5\end{pmatrix}\ .$$

ב) נסמן $B_{W_2}=\text{span}\left\{u_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. ההגדרה של המטריצה המייצגת של T_{W_2} היא:

$$[T_{W_2}]_{B_{W_2}}=\begin{pmatrix}| \\ [T(u_3)]_{B_{W_2}} \\ |\end{pmatrix}$$

$$T(u_3)=Au_3=\begin{pmatrix}1&4&0\\3&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=u_3\ .$$

הצמצום T_{W_2} מוגדר רק על W_2 ולכן

$$T_{W_2}(u_3)=u_3\qquad\Leftrightarrow\qquad [T(u_3)]_{B_{W_2}}=\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}\ .$$

לפיכך

$$[T_{W_2}]_{B_{W_2}}=\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}\ .$$

ג) המטירצה המייצגת לפי הבסיס $B=B_{W_1}\cup B_{W_2}$:

$$B=\{u_1,u_2,u_3\}$$

$$[T]_B=\begin{pmatrix}|&|&|\\ [T(u_1)]_B & [T(u_2)]_B & [T(u_3)]_B\\ |&|&|\end{pmatrix}$$

למעלה מצאנו ש-

$$T(u_1)=-2u_1+3u_2=-2u_1+3u_2+0\cdot u_3\qquad\Rightarrow\qquad [T(u_1)]_B=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$T(u_2)=5u_2=0\cdot u_1+5u_2+0\cdot u_3\qquad\Rightarrow\qquad [T(u_2)]_B=\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}$$

$$T(u_3)=u_3=0\cdot u_1+0\cdot u_2+3\cdot u_3\qquad\Rightarrow\qquad [T(u_3)]_B=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

לכן

$$[T]_B=\begin{pmatrix}-2&0&0\\3&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ .$$

דוגמה 11.5

יהי $T_A:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ אופרטור המוגדר

$$T_A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\ ,\qquad A=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\2&0&0&0\\0&0&1&2\\0&0&3&4\end{pmatrix}\ .$$

יהיו W_1,W_2 תת-מרחבים של $\mathbb{R}^4$ כך ש-

$B_{W_1}=\text{span}\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\ u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של W_1.

$B_{W_2} = \text{span}\left\{ u_3 = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס של W_2.

א) חשבו את המטריצה המייצגת של הצמצום T_{W_1} לפי הבסיס B_{W_1}.

ב) חשבו את המטריצה המייצגת של הצמצום T_{W_2} לפי הבסיס B_{W_2}.

ג) חשבו את המטריצה המייצגת של T בבסיס $B = B_{W_1} \cup B_{W_2}$.

פתרון:

א) נסמן $B_{W_1} = \text{span}\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \ , \ u_2 = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \right\}$. ההגדרה של המטריצה המייצגת של T_{W_1} היא:

$$[T_{W_1}]_{B_{W_1}} = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(u_1)]_{B_{W_1}} & [T(u_2)]_{B_{W_1}} \\ | & | \end{pmatrix}$$

$$T(u_1) = Au_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\\2\\0\\0 \end{pmatrix} = 4u_1 - 2u_2 \ .$$

הצמצום T_{W_1} מוגדר רק על W_1 ולכן

$$T_{W_1}(u_1) == 4u_1 - 2u_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad [T(u_1)]_{B_{W_1}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \ .$$

$$T(u_2) = Au_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\0\\0\\0 \end{pmatrix} = 3u_1 - 3u_2 \ .$$

הצמצום T_{W_1} מוגדר רק על W_1 ולכן

$$T_{W_1}(u_2) == 3u_1 - 3u_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad [T(u_2)]_{B_{W_1}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \ .$$

לפיכך

$$[T_{W_1}]_{B_{W_1}} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \ .$$

ב) נסמן $B_{W_2} = \text{span}\left\{ u_3 = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix} \right\}$. ההגדרה של המטריצה המייצגת של T_{W_2} היא:

$$[T_{W_2}]_{B_{W_2}} = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(u_3)]_{B_{W_2}} & [T(u_4)]_{B_{W_2}} \\ | & | \end{pmatrix}$$

$$T(u_3) = Au_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2u_3 + 4u_4 \ .$$

הצמצום T_{W_2} מוגדר רק על W_2 ולכן

$$T_{W_2}(u_3) = -2u_3 + 4u_4 \qquad \Leftrightarrow \qquad [T(u_3)]_{B_{W_2}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \ .$$

$$T(u_4) = Au_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 4u_3 + 3u_4 \ .$$

הצמצום T_{W_2} מוגדר רק על W_2 ולכן

$$T_{W_2}(u_4) = 4u_3 + 3u_4 \qquad \Leftrightarrow \qquad [T(u_4)]_{B_{W_2}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \ .$$

לפיכך

$$[T_{W_2}]_{B_{W_2}} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

ג) המטירצה המייצגת לפי הבסיס $B = B_{W_1} \cup B_{W_2}$:

$$B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [T(u_1)]_B & [T(u_2)]_B & [T(u_3)]_B & [T(u_4)]_B \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

למעלה מצאנו ש-

$$T(u_1) = 4u_1 - 2u_2 = 4u_1 - 2u_2 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot u_4 \qquad \Rightarrow \qquad [T(u_1)]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(u_2) = 3u_1 - 3u_2 = 3u_1 - 3u_2 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot u_4 \qquad \Rightarrow \qquad [T(u_2)]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(u_3) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 - 2u_3 + 4u_4 \qquad \Rightarrow \qquad [T(u_3)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$T(u_4) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 4u_3 + 3u_4 \qquad \Rightarrow \qquad [T(u_4)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

לכן

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} .$$

11.5 משפט הפירוק הפרימרי

משפט 11.4 משפט הפירוק הפרימרי

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב וקטורי V מעל $\mathbb{F}$. יהי $m_T(x)$ הפולינום המינימלי של T ונניח של-$m_T(x)$ יש את הפירוק הבא:

$$m_T(x) = m_1^{b_1}(x) \quad \cdots \quad m_k^{b_k}(x) ,$$

כאשר $m_i(x)$ הוא פולינום מתוקן אי-פריק מעל $\mathbb{F}$.
יהי W_i המרחב האפס של $m_i^{b_i}(T)$. אזי התאנים הבאים מתקיימים:

(1 $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \quad \cdots \quad \oplus W_k$.

(2 התת-מרחב W_i הוא T שמור.

(3 נסמן $T_i = T_{W_i}$ הצמצום של T ל- W_i. אז $m_i^{b_i}(x)$ הוא הפולינום המינימלי של T_i.

(4 יהי B_i בסיס של W_i ונסמן $B = B_1 \cup B_2 \cup \quad \cdots \quad \cup B_k$ בסיס של V. אזי

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T_1]_{B_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [T_2]_{B_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [T_k]_{B_k} \end{pmatrix}$$

דוגמה 11.6

יהי $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ האופרטור המוגדר:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} , \qquad A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

א) חשבו את הפולינום המינימלי m_T.

ב) רשמו את m_T כפירוק לגורמים אי-פריקים מעל $\mathbb{R}$:

$$m_T(x) = m_1^{b_1}(x) \quad \cdots \quad m_k^{b_k}(x)$$

ג) יהי W_i המרחב האפס של $m_i^{b_i}(T)$. מצאו בסיס B_i של W_i.

ד) חשבו את המטריצה המייצגת $A_i = [T_{W_i}]_{B_i}$.

ה) ודאו את התכונות (1)-(4) של משפט הפירוק הפרימרי.

פתרון:

א) ראשית נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned} p_T(x) =& |xI-A| = \begin{vmatrix} x-6 & 3 & 2 \\ -4 & x+1 & 2 \\ -10 & 5 & x+3 \end{vmatrix} \\ =&(x-6)\begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ 5 & x+3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -10 & x+3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -4 & x+1 \\ -10 & 5 \end{vmatrix} \\ =&(x-6)\left(x^2+4x-7\right)+12x-24+20x-20 \\ =&x^3-2x^2+x-2 \\ =&x^2(x-2)+x-2 \\ =&(x-2)\left(x^2+1\right) \ . \end{aligned}$$

מכאן

$$m_T(x) = (x-2)\left(x^2+1\right)$$

ב)

$$m_T(x) = m_1(x)m_2(x)$$

כאשר

$$m_1(x) = x-2 \ , \qquad m_2(x) = x^2+1 \ .$$

ג)

$$W_1 = \text{Nul}\,(A-2I) = \text{Nul}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 10 & -5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to 4R_3-10R_1]{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to\frac{1}{10}R_3} \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+3R_3} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to\frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הפתרון למערכת ההמוגנית הוא z $(x,y,z)=\left(\frac{1}{2}z,0,z\right)=\left(\frac{1}{2},0,1\right)$ כאשר $z\in\mathbb{R}$ משתנה חופי. לכן

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

$$W_2 = \text{Nul}\,(A^2+I) = \text{Nul}\begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & -10 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{5}R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הפתרון למערכת ההמוגנית הוא $(x,y,z)=(y,y,z)=(1,1,0)\,y+(0,0,1)\,z$ כאשר $y,z\in\mathbb{R}$ משתנים חופיים. לכן

$$B_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\ .$$

ד)

$$T\left(u_1\right)=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}=2u_1\ .$$

לכן

$$T_{W_1}\left(u_1\right)=2u_1\qquad\Rightarrow\qquad\left[T_{W_1}(u_1)\right]_{B_1}=(2)\ .$$

$$T\left(u_2\right)=\begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix}=3u_2+5u_3\quad\Rightarrow\quad T_{W_2}\left(u_2\right)=3u_2+5u_3\quad\Rightarrow\quad\left[T_{W_2}\left(u_2\right)\right]_{B_2}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\ .$$

$$T\left(u_3\right)=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-3\end{pmatrix}=-2u_2-3u_3\quad\Rightarrow\quad T_{W_2}\left(u_3\right)=-2u_2-3u_3\quad\Rightarrow\quad\left[T_{W_2}\left(u_3\right)\right]_{B_2}=\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}\ .$$

לכן:

$$\left[T_{W_2}\right]_{B_2}=\begin{pmatrix}3&-2\\5&-3\end{pmatrix}\ .$$

ה) נבדוק שכל התכונות של משפט הפירוק הפרימרי מתקיימים עבור הדוגמה הזאת:

תכונה 1) נוכיח כי $\mathbb{R}_3=W_1\oplus W_2$:

$$\begin{pmatrix}|&|&|\\u_1&u_2&u_3\\|&|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\{u_1,u_2,u_3\}$ בלתי תלויה ליניארית והמימד הוא 3 $\Leftarrow$ $W_1\oplus W_2=\mathbb{R}^3$.

תכונה 2) $T(u_1)=2u_1\in W_1$ לכן W_1 הוא תת מקחב T שמור.

$\left\{\begin{array}{lll}T(u_2)&=3u_2+5u_3&\in W_2\\T(u_3)&=-2u_2-3u_3&\in W_2\end{array}\right.$ $\Leftarrow$ W_2 הוא תת מרחב T שמור.

תכונה 3)

- נוכיח כי $m_1(x)=x-2$ הוא הפולינום המינימלי של $\left[T_{W_1}\right]_{B_1}$:

$$m_1\left(\left[T_{W_1}\right]_{B_1}\right)=\left[T_{W_1}\right]_{B_1}-2I=2-2=0\ .$$

לכן הפולינום המינימלי של $\left[T_{W_1}\right]_{B_1}$ הוא $m_1(x)=x-2$.

- נוכיח כי $m_2(x)=x^2+1$ הוא הפולינום המינימלי של $\left[T_{W_2}\right]_{B_2}$:

$$m_2\left(\left[T_{W_2}\right]_{B_2}\right)=\left(\left[T_{W_2}\right]_{B_2}\right)^2+I=\begin{pmatrix}3&-2\\5&-3\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=0$$

לכן הפולינום המינימלי של $\left[T_{W_2}\right]_{B_2}$ הוא $m_2(x)=x^2+1$.

תכונה 4)

$$[T]_B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(u_1)]_B & [T(u_2)]_B & [T(u_3)]_B \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

מסעיף א':

$$T(u_1) = 2u_1 = 2u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 \qquad \Rightarrow \quad [T(u_1)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(u_2) = 3u_2 + 5u_3 = 0 \cdot u_1 + 3u_2 + 5u_3 \qquad \Rightarrow \quad [T(u_2)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$T(u_3) = -2u_2 - 3u_3 = 0 \cdot u_1 + -2u_2 - 3u_3 \qquad \Rightarrow \quad [T(u_3)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

לכן

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [T_1]_{B_1} & 0 \\ 0 & [T_2]_{B_2} \end{pmatrix}$$