שיעור 4
תמורות וצופן אניגמה

4.1 תמורות

הגדרה 4.1 תמורה

תמורה על קבוצה סופית $\Sigma = \{x_1, \ldots, x_n\}$ היא פונקציה $\pi : \Sigma \to \Sigma$ אשר היא חד-חד ערכית ו "על" Σ.
בהינתן $x_i \in \Sigma$ ותמורה π. אזי

$$\pi(x_i) = x_j \in \Sigma \ .$$

תזכורת:

- π חד-חד ערכית. ז"א אם $x_i \neq x_j$ אזי $\Sigma(x_i) \neq \Sigma(x_j)$.
- π "על" Σ. ז"א לכל $y \in \Sigma$ קיים $x \in \Sigma$ כך ש- $\pi(x) = y$.

כתוצאה מכך, אם π פועלת על כל האיברים של Σ אזי נקבל אותה קבוצה Σ רק לא באותו בסדר של הסדר המקורי:

$$\{\pi(x_1) \ , \ \pi(x_2) \ , \quad \ldots \quad \pi(x_n)\} \ .$$

דוגמה 4.1

x	1	2	3	4	5	6
$\pi(x)$	4	1	6	5	2	3

דוגמה 4.2

x	1	2	3	4	5	6
$\sigma(x)$	2	1	5	4	6	3

דוגמה 4.3

תהי Σ קבוצה סופית ותהי $\pi : \Sigma \to \Sigma$ פונקציה. הוכיחו: אם π חד-חד ערכית אז היא תמורה.

פתרון:

נתון לנו הפונקציה $\pi : \Sigma \to \Sigma$ כאשר Σ קבוצה נוצר סופית. כדי להוכיח כי π תמורה יש להראות כי π חד-חד-ערכית ו"על" Σ. כבר נתון לנו ש- π חח"ע אז נשאר רק להראות כי π על Σ.

Σ היא קבוצה סופית לכן קיים שלם $n \geq 0$ עבורו $|\Sigma| = n$. תהי $\pi(\Sigma)$ התמונה של π. מכיוון ש- π היא פונקציה מהקבוצה Σ אל הקבוצה Σ, אזי התמונה שלה היא תת-קבוצה של Σ, כלומר:

$$\pi(\Sigma) \subseteq \Sigma \ .$$

לכן

$$|\pi(\Sigma)| \leq |\Sigma| = n \ .$$

נראה כי $|\Sigma| = |\pi(\Sigma)|$. נניח בשלילה כי $|\Sigma| < |\pi(\Sigma)|$. אז בהכרח קיימים איברים $x_1, x_2 \in \Sigma$ כך ש:

$\Sigma(x_1)=\Sigma(x_2)$, בסתירה לכך ש: π חד-חד-ערכית. לכן הוכחנו דרך השלילה כי

$$|\pi(\Sigma)|=|\Sigma|=n\ .$$

הוכחנו כי $\pi(\Sigma)\subseteq\Sigma$ וגם $|\pi(\Sigma)|=|\Sigma|$ אז בהכרח

$$\pi(\Sigma)\,\Sigma$$

ולפיכך $\pi:\Sigma\to\Sigma$ היא פונקציה "על" Σ.

■

הגדרה 4.2 הרכבה של תמורות

תהי Σ קבוצה נוצר סופית ותהיינה $\pi:\Sigma\to\Sigma$ ו- $\sigma:\Sigma\to\Sigma$ תמורות על הקבוצה Σ. ההרכבה של π ו- σ מוגדרת להיות הפונקציה שמסומנת $\sigma\pi$ ומוגדרת לפי התנאי:
לכל $x\in\Sigma$, אם $\pi(x)=y\in\Sigma$ ואם $\sigma(y)=z\in\Sigma$ אזי

$$\sigma\pi(x)=z\ .$$

הסימון $\sigma\pi(x)$ אומר " קודם π פועלת על x ואז σ פועלת על $\pi(x)$".

דוגמה 4.4

נתון התמורות π ו- σ:

x	1	2	3	4	5	6
$\pi(x)$	4	1	6	5	2	3

x	1	2	3	4	5	6
$\sigma(x)$	3	5	4	2	6	1

אזי ההרכבה $\sigma\pi$ היא:

x	1	2	3	4	5	6
$\sigma\pi(x)$	2	3	1	6	5	4

לעומת זאת ההרכבה ההפוכה $\pi\sigma$ היא:

x	1	2	3	4	5	6
$\pi\sigma(x)$	6	2	5	1	3	4

כלומר $\sigma\pi\neq\pi\sigma$.

משפט 4.1 הרכבה של תמורות היא תמורה

תהי Σ קבוצה נוצר סופית ותהיינה $\pi:\Sigma\to\Sigma$ ו- $\sigma:\Sigma\to\Sigma$ תמורות על הקבוצה Σ. ההרכבה $\sigma\pi$ היא תמורה על Σ.

הוכחה: מספיק להוכיח כי $\sigma\pi$ היא פונקציה חד-חד-ערכית ו"על" Σ.

- **חח"ע**

נניח בשלילה כי $\sigma\pi$ לא חח"ע. אזי קיימים $x_1,x_2\in\Sigma$ כך ש- $\sigma(\pi(x_1))=\sigma(\pi(x_2))$. נסמן $y_1=\pi(x_1)$ ו- $y_2=\pi(x_2)$. מכיוון ש- π תמורה אז π חח"ע ולכן $y_1\neq y_2$. ומכיוון ש- σ תמורה אזי $\sigma(y_1)\neq\sigma(y_2)$. לכן

$$\sigma(\pi(x_1))\neq\sigma(\pi(x_2))\ ,$$

בסתירה לכך ש- $\sigma(\pi(x_1))=\sigma(\pi(x_2))$.

לכן הוכחנו דרך השלילה כי $\sigma\pi$ פונקציה חח"ע.

- **על**

נניח בשלילה כי $\sigma\pi$ לא פונקצית "על". נסמן $\sigma\pi\left(\Sigma\right)$ התמונה של $\sigma\pi$. אזי

$$\sigma\pi\left(\Sigma\right) \neq \Sigma \ .$$

ראשית מכיוון ש- $\sigma\pi\left(\Sigma\right)$ הוא התמונה של $\sigma\pi$ אזי $\sigma\pi\left(\Sigma\right) \subseteq \Sigma$. לכן אם $\sigma\pi\left(\Sigma\right) \neq \Sigma$ אז $\sigma\pi\left(\Sigma\right) \subset \Sigma$. מכאן

$$\left|\sigma\pi\left(\Sigma\right)\right| < |\Sigma| \ .$$

לכן בהכרח קיים לפחות שני איברים $x_1, x_2 \in \Sigma$ עבורם $\sigma\pi\left(x_1\right) = \sigma\pi\left(x_2\right)$. זאת בסתירה לכך ש- $\sigma\pi$ חח"ע, שמוכח בסעיף הקודם.

לכן הוכחנו דרך השלילה כי הפונקציה $\sigma\pi$ היא "על" Σ.

■

הגדרה 4.3 תמורות מתחלפות

תהיינה σ, π תמורות. אומרים כי π ו- σ מתחלפות אם

$$\pi\sigma = \sigma\pi \ .$$

הגדרה 4.4 תמורות מתחלפות

תהי $\pi : \Sigma \to \Sigma$ תמורה על הקבוצה Σ. התמורה ההופכית של π מסומנת π^{-1} ומוגדרת:

$$\pi\pi^{-1}(x) = x = \pi^{-1}\pi(x)$$

לכל $x \in \Sigma$.

דוגמה 4.5

נתונה התמורה π:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(x)$	6	3	5	1	2	4	8	7

התמורה ההופכית היא:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi^{-1}(x)$	4	5	2	6	3	1	8	7

הגדרה 4.5 נקודת שבת ונקודת זזה

תהי $\pi : \Sigma \to \Sigma$ תמורה.

- אם קיימת נקודה $x \in \Sigma$ כך ש: $\Sigma(x) = x$ אז אומרים כי x היא **נקודת שבת** של π.
- אם קיימת נקודה $x \in \Sigma$ כך ש: $\Sigma(x) \neq x$ אז אומרים כי x היא **נקודה זזה** של π.

הגדרה 4.6 תמורה הזהות

התמורה הזהות מסומנת $\mathrm{id} : \Sigma \to \Sigma$ ומוגדרת כך שלכל $x \in \Sigma$:

$$\mathrm{id}(x) = x \ .$$

במילים אחרות אם $\mathrm{id} : \Sigma \to \Sigma$ היא התמורה הזהות אזי כל נקודה $x \in \Sigma$ היא נקודת שבת של id.

משפט 4.2 תמורה ההופכית של תמורה מורכבת

תהיינה $\pi_1, \cdots, \pi_t$ תמורות על הקבוצה Σ. אזי

$$(\pi_1 \cdots \pi_t)^{-1} = \pi_t^{-1} \cdots \pi_1^{-1} \ .$$

הוכחה: נוכיח את הטענה באינדוקציה.

שלב הבסיס

עבור $t = 2$, לכל $x \in \Sigma$ יש לנו:

$$\pi_2^{-1}\pi_1^{-1}\pi_1\pi_2(x) = \pi_2^{-1} \ \text{id} \ \pi_2(x) = \pi_2^{-1}\pi_2(x) = \text{id}(x) = x \ .$$

לכן הוכחנו כי $(\pi_1\pi_2)^{-1} = \pi_2^{-1}\pi_2^{-1}$.

שלב האינדוקציה

נניח כי הטעהה מתקיימת עבור $t = k > 2$ (זאת היא ההנחת האינדוקציה). אז נראה כי הטענה נכונה גם כן עבור $t = k + 1$ באופן הבא. נתבונן על ההתמורה המורכבת $\pi_1 \cdots \pi_k\pi_{k+1}$. נסמן התמורה המורכבת מ- k תמורות כך: $\sigma = \pi_1 \cdots \pi_k$. הסימון הזה מאפשר לנו להביע את התמורה המורכבת מ- $k + 1$ תמורות כתמורה המורכבת מ- 2 תמורות באופן הבא:

$$\pi_1 \cdots \pi_k\pi_{k+1} = \sigma\pi_{k+1} \ .$$

מכאן ולפי השלב הבסיס מהופכית היא

$$(\sigma\pi_{k+1})^{-1} = \pi_{k+1}^{-1}\sigma^{-1} \ .$$

כעת נחזיר את ההגדרה $\sigma = \pi_1 \cdots \pi_k$ ונשתמש בההנחת האינדוקציה שלנו כדי להוכיח את הטענה עבור $t = k+1$:

$$(\pi_1 \cdots \pi_k\pi_{k+1})^{-1} = \pi_{k+1}^{-1} (\pi_1 \cdots \pi_k)^{-1} = \pi_{k+1}^{-1}\pi_k^{-1} \cdots \pi_1^{-1}$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בההנחת האינדוקציה.

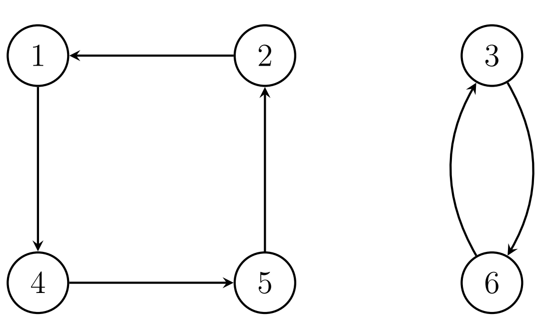
■

4.2 פירוק למחזורים של תמורה

עד כה ראינו תמורות בייצוג של טבלה. אבל המבנה האמיתי של תמורה נגלה עם נציג תמורה כגרף. לדוגמה, תהי π תמורה הבאה על $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

x	1	2	3	4	5	6
$\pi(x)$	4	1	6	5	2	3

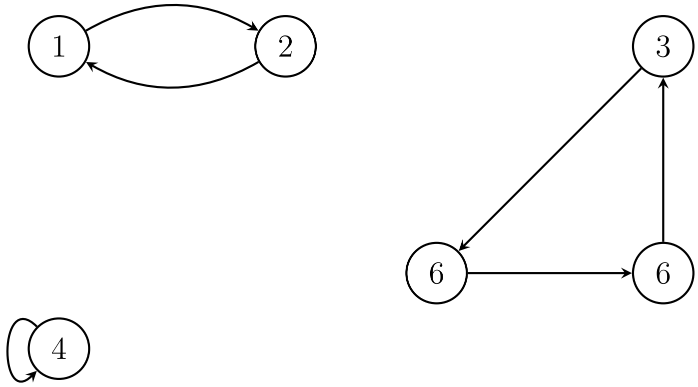
נגדיר הגרף המכוון $G_\pi = (V, E)$ כאשר הקבוצת הקודקודים היא $V = \Sigma$, ולכל $x \in \Sigma$ נגידר צלע מ- x ל- $\pi(x)$. ז"א $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ כאשר $e_i = x_i\pi(x_i)$ היא הצלע מקודקוד x_i לקודקוד $\pi(x_i)$. על פי ההגדרה הזאת הגרף G_π של התמורה π היא כמתוארת באיור למטה.



כדוגמה נוספת אם σ היא התמורה

x	1	2	3	4	5	6
$\sigma(x)$	2	1	5	4	6	3

אזי הגרף G_σ הינו:



בגרף של תמורה, כל קודקוד שייך לבדיוק מעגל מכוון אחד (שייתכן הוא עובר דרך קודקוד אחד בלבד). הרי קיים התאמה אחת-אחת בין תמורה על Σ לבין גרף שמכסה כל המעגלים המכוונים של Σ. התופעה זו היא המוטיבציה לסימון מחזורים של תמורות.

הגדרה 4.7 מחזור

תהי $\pi : \Sigma \to \Sigma$ תמורה על הקבוצה Σ ויהיו $\Sigma = \{x_1, \quad \ldots \quad, x_n\}$.
אם

$$\pi(x_1) = x_{i_1}, \ \pi(x_{i_1}) = x_{i_2}, \quad \ldots \quad, x_{i_{k-1}} = x_k$$

אז אומרים שבתמורה π קיים מחזור באורך k, מסומן

$$\begin{pmatrix} x_{i_1} & x_{i_2} & \cdots & x_{i_k} \end{pmatrix} .$$

משפט 4.3 פירוק למחזורים של תמורה

תהי $\pi : \Sigma \to \Sigma$ תמורה על קבוצה סופית Σ. ניתן לרשום את π כהרכבה של מחזורים זרים.

דוגמה 4.6

נתונה התמורה π:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(x)$	4	5	2	6	3	1	8	7

הפירוק למחזורים הוא:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 7 \end{pmatrix}$$

הגדרה 4.8 המחלקה של תמורה

תהי $\pi : \Sigma \to \Sigma$ תמורה. אומרים כי π שייכת למחלקה $[1^{z_1} 2^{z_2} \cdots n^{z_n}]$ אם בפירוק למחזורים של π יש בדיוק z_1 מחזורים באורך- 1, z_2 מחזורים באורך- 2, z_3 מחזורים באורך- 3, וכן הלה.

במילים אחרות:

$$\pi \in [1^{z_1} 2^{z_2} \cdots n^{z_n}]$$

אם לכל $i = 1, \ldots, n$ בפירוק למחזורים של π יש z_i מחזורים באורך i.

דוגמה 4.7

תהי $\Sigma = \{A, B, C, D, E, F\}$.

- התמורה $(A\ B)(C\ D)(E\ F) \in [2^3]$.
- התמורה $(A\ B\ C\ D) \in [1^2 4^1]$.
- התמורה $(A\ D\ C)(E\ F) \in [1^1 2^1 3^1]$.

4.3 תמורות צמודות

הגדרה 4.9 תמורות צמודות

תהיינה π, σ תמורות על הקבוצה סופית Σ. התמורה הצמודה של σ על ידי π היא המורה המורכבת $\pi \sigma \pi^{-1}$.

משפט 4.4 משפט ההזזה של תמורות צמודות

תהיינה $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ ו- $\pi : \Sigma \to \Sigma$ תמורות על הקוצה סופית Σ. לכל $x, y \in \Sigma$ אם $y = \sigma(x)$ אזי

$$\pi \sigma \pi^{-1} (\pi(x)) = \pi(y) \ .$$

הוכחה: נניח ש: $\sigma(x) = y$. אזי

$$\pi \sigma \pi^{-1} (\pi(x)) = \pi \sigma \pi^{-1} \pi(x) = \pi \sigma(x) = \pi (y) \ .$$

■

משפט 4.5 פירוקים למחזורים של תמורות צמודות שווים

תהיינה $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ ו- $\pi : \Sigma \to \Sigma$ תמורות על הקוצה סופית Σ. ונניח כי הפירוק למחזורים של σ הוא

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_l \end{pmatrix} \cdots \ .$$

אזי הפירוק למחזורים של $\pi \sigma \pi^{-1}$ הוא:

$$\pi \sigma \pi^{-1} = \begin{pmatrix} \pi(a_1) & \pi(a_2) & \cdots & \pi(a_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi(b_1) & \pi(b_2) & \cdots & \pi(b_l) \end{pmatrix} \cdots \ .$$

הוכחה: עבור כל מחזור $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{pmatrix}$ של σ, מתקיים

$$\sigma(a_i) = a_{i+1} \quad (1 \le i \le k-1), \qquad \sigma(a_k) = a_1 \ .$$

מנובע ממשפט כי לכל מחזור של σ מתקיים:

$$\pi \sigma \pi^{-1} (\pi(a_i)) = \pi(a_{i+1}) \quad (1 \le i \le k-1), \qquad \pi \sigma \pi^{-1} (\pi(a_k)) = \pi(a_1) \ .$$

■

משפט 4.6 המחלקה של תמורות צמודות נשמרת

תהיינה $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ ו- $\tau : \Sigma \to \Sigma$ תמורות על הקוצה סופית Σ.
τ צמודה ל- σ אם ורק אם σ ו- τ שייכות לאותה מחלקה.

הוכחה:

<u>כיוון אם:</u>

נניח ש- σ ו- τ צמודות. אזי קיימת תמורה π עבורה $\tau = \pi\sigma\pi^{-1}$.
אם הפירוק למחזורים של σ הוא

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & \pi(b_l) \end{pmatrix} \cdots$$

אזי לפי משפט 4.5 הפירוק למחזורים של $\tau = \pi\sigma\pi^{-1}$ הוא

$$\pi\sigma\pi^{-1} = \begin{pmatrix} \pi(a_1) & \pi(a_2) & \cdots & \pi(a_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi(b_1) & \pi(b_2) & \cdots & \pi(b_l) \end{pmatrix} \cdots$$

ולכן ל- τ ול- σ יש אותו מבנה של מחזורים ולכן הן שייכות לאותה מחלקה.

<u>כיוון רק אם:</u>

■

4.4 צופן אניגמה

הגלגלי האתחול של צופן אניגמה הם 3 תמורות קבועות שמוגדרות:

x	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
$\alpha_1(x)$	E	K	M	F	L	G	D	Q	V	Z	N	T	O	W	Y	H	X	U	S	P	A	I	B	R	C	J

x	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
$\alpha_2(x)$	A	J	D	K	S	I	R	U	X	B	L	H	W	T	M	C	Q	G	Z	N	P	Y	F	V	O	E

x	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
$\alpha_3(x)$	B	D	F	H	J	L	C	P	R	T	X	V	Z	N	Y	E	I	W	G	A	K	M	U	S	Q	O

המשקף הקבוע הוא תמורה הבאה:

x	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
$\rho(x)$	Y	R	U	H	Q	S	L	D	P	X	N	G	O	K	M	I	E	B	F	Z	C	W	V	J	A	T

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (AELTPHQXRU)(BKNW)(CMOY)(DFG)(IV)(JZ)(S) && \in [1^1\,2^2\,3^1\,4^2\,10^1],\\
\alpha_2 &= (A)(JB)(CDKLHUP)(ESZ)(FIXVYOMW)(GR)(NT)(Q) && \in [1^2\,2^3\,3^1\,7^1\,8^1],\\
\alpha_3 &= (ABDHPEJT)(CFLVMZOYQIRWUKXSG)(N) && \in [1^1\,8^1\,17^1],\\
\rho &= (AY)(BR)(CU)(DH)(EQ)(FS)(GL)(IP)(JX)(KN)(MO)(TZ)(VW) && \in [2^{13}].
\end{aligned}$$

הגדרה 4.10 כלל מצפין וכלל מפענח של צופן אניגמה

יהי π משקף כלשהו מעל האלפבית $A,\ldots,Z$. הבחירה של המשקף מהווה את הלוח התקעים.
יהי $w=x_1x_2\ldots x_n$ מילה של טקסט גלוי. לכל $i=1,\ldots,n$ הכלל מצפין והכלל מפענח של האות במיקום ה-i בטקסט הם:

$$e\left(x_i\right)=\Delta_i\left(x_i\right)=d\left(x_i\right)$$

כאשר Δ_i היא התמורה המורכבת

$$\Delta_i=\pi\ \left[\alpha_3^i\right]^{-1}\ \alpha_2^{-1}\ \alpha_1^{-1}\ \rho\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3^i\ \pi(x_i)$$

כאשר

$$\alpha_3^i=\sigma_{-i}\ \alpha_3\ \sigma_i\ ,\qquad \left[\alpha_3^i\right]^{-1}=\sigma_{-i}\ \alpha_3^{-1}\ \sigma_i\ .$$

אם נגדיר את התמורה המורכבת $\tau_i=\sigma_{-i}\,\alpha_3\,\sigma_i\,\alpha_2\,\alpha_1\,\pi$ אזי $\tau_i^{-1}=\pi\,\alpha_1^{-1}\,\alpha_2^{-1}\,\sigma_{-i}\,\alpha_3^{-1}\ \sigma_i$ ולכן

$$\Delta_i=\tau_i^{-1}\,\rho\,\tau_i\ .$$

ז"א לכל $i=1,\ldots,n$ התמורה המורכבת, Δ_i היא הצמודה של ρ על ידי τ_i.

דוגמה 4.8 הצפנה על ידי צופן אניגמה

נתון הטקסט גלוי

$$\texttt{hello}\ .$$

נניח כי הלוח התקעים הוא

$$\pi=(AX)\,(HF)\,(LP)\ .$$

חשבו את הטקסט מוצפן.

פתרון:

(1 $\underline{x_1=\texttt{H}}$

$$H\xrightarrow{\pi}F\xrightarrow{\sigma_1}G\xrightarrow{\alpha_3}C\xrightarrow{\sigma_{-1}}B\xrightarrow{\alpha_2}J\xrightarrow{\alpha_1}Z\xrightarrow{\rho}T$$
$$\xrightarrow{\alpha_1^{-1}}L\xrightarrow{\alpha_2^{-1}}K\xrightarrow{\sigma_1}L\xrightarrow{\alpha_3^{-1}}F\xrightarrow{\sigma_{-1}}E\xrightarrow{\pi}E$$

(2 $\underline{x_2=\texttt{E}}$

$$E\xrightarrow{\pi}E\xrightarrow{\sigma_2}G\xrightarrow{\alpha_3}C\xrightarrow{\sigma_{-2}}A\xrightarrow{\alpha_2}A\xrightarrow{\alpha_1}E\xrightarrow{\rho}Q$$
$$\xrightarrow{\alpha_1^{-1}}H\xrightarrow{\alpha_2^{-1}}L\xrightarrow{\sigma_2}N\xrightarrow{\alpha_3^{-1}}N\xrightarrow{\sigma_{-2}}L\xrightarrow{\pi}P$$

(3 $\underline{x_3=\texttt{L}}$

$$L\xrightarrow{\pi}P\xrightarrow{\sigma_3}S\xrightarrow{\alpha_3}G\xrightarrow{\sigma_{-3}}D\xrightarrow{\alpha_2}K\xrightarrow{\alpha_1}N\xrightarrow{\rho}K$$
$$\xrightarrow{\alpha_1^{-1}}B\xrightarrow{\alpha_2^{-1}}J\xrightarrow{\sigma_3}M\xrightarrow{\alpha_3^{-1}}V\xrightarrow{\sigma_{-3}}S\xrightarrow{\pi}S$$

(4 $\underline{x_4=\texttt{L}}$

$$L \xrightarrow{\pi} P \xrightarrow{\sigma_4} T \xrightarrow{\alpha_3} A \xrightarrow{\sigma_{-4}} W \xrightarrow{\alpha_2} F \xrightarrow{\alpha_1} G \xrightarrow{\rho} L$$
$$\xrightarrow{\alpha_1^{-1}} E \xrightarrow{\alpha_2^{-1}} Z \xrightarrow{\sigma_4} D \xrightarrow{\alpha_3^{-1}} B \xrightarrow{\sigma_{-4}} X \xrightarrow{\pi} A$$

(5 $\underline{x_5 = \texttt{O}}$

$$O \xrightarrow{\pi} O \xrightarrow{\sigma_5} T \xrightarrow{\alpha_3} A \xrightarrow{\sigma_{-5}} V \xrightarrow{\alpha_2} Y \xrightarrow{\alpha_1} C \xrightarrow{\rho} U$$
$$\xrightarrow{\alpha_1^{-1}} R \xrightarrow{\alpha_2^{-1}} G \xrightarrow{\sigma_5} L \xrightarrow{\alpha_3^{-1}} F \xrightarrow{\sigma_{-5}} A \xrightarrow{\pi} X$$

לפיכך הטקסט מוצפן הוא: EPSAX. ■

דוגמה 4.9 הצפנה על ידי צופן אניגמה

חשבו את הטקסט הגלוי של המילה המתקבלת בדוגמה הקודמת עם אותו לוח-התקעים.

פתרון:

(1 $\underline{y_1 = \texttt{E}}$

$$E \xrightarrow{\pi} E \xrightarrow{\sigma_1} F \xrightarrow{\alpha_3} L \xrightarrow{\sigma_{-1}} K \xrightarrow{\alpha_2} L \xrightarrow{\alpha_1} T \xrightarrow{\rho} Z$$
$$\xrightarrow{\alpha_1^{-1}} J \xrightarrow{\alpha_2^{-1}} B \xrightarrow{\sigma_1} C \xrightarrow{\alpha_3^{-1}} G \xrightarrow{\sigma_{-1}} F \xrightarrow{\pi} H$$

(2 $\underline{y_2 = \texttt{P}}$

$$P \xrightarrow{\pi} L \xrightarrow{\sigma_2} N \xrightarrow{\alpha_3} N \xrightarrow{\sigma_{-2}} L \xrightarrow{\alpha_2} H \xrightarrow{\alpha_1} Q \xrightarrow{\rho} E$$
$$\xrightarrow{\alpha_1^{-1}} A \xrightarrow{\alpha_2^{-1}} A \xrightarrow{\sigma_2} C \xrightarrow{\alpha_3^{-1}} G \xrightarrow{\sigma_{-2}} E \xrightarrow{\pi} E$$

(3 $\underline{y_3 = \texttt{S}}$

$$S \xrightarrow{\pi} S \xrightarrow{\sigma_3} V \xrightarrow{\alpha_3} M \xrightarrow{\sigma_{-3}} J \xrightarrow{\alpha_2} B \xrightarrow{\alpha_1} K \xrightarrow{\rho} N$$
$$\xrightarrow{\alpha_1^{-1}} K \xrightarrow{\alpha_2^{-1}} D \xrightarrow{\sigma_3} G \xrightarrow{\alpha_3^{-1}} S \xrightarrow{\sigma_{-3}} P \xrightarrow{\pi} L$$

(4 $\underline{y_4 = \texttt{A}}$

$$A \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{\sigma_4} B \xrightarrow{\alpha_3} D \xrightarrow{\sigma_{-4}} Z \xrightarrow{\alpha_2} E \xrightarrow{\alpha_1} L \xrightarrow{\rho} G$$
$$\xrightarrow{\alpha_1^{-1}} F \xrightarrow{\alpha_2^{-1}} W \xrightarrow{\sigma_4} A \xrightarrow{\alpha_3^{-1}} T \xrightarrow{\sigma_{-4}} P \xrightarrow{\pi} L$$

(5 $\underline{y_5 = \texttt{X}}$

$$X \xrightarrow{\pi} A \xrightarrow{\sigma_5} F \xrightarrow{\alpha_3} L \xrightarrow{\sigma_{-5}} G \xrightarrow{\alpha_2} R \xrightarrow{\alpha_1} U \xrightarrow{\rho} C$$
$$\xrightarrow{\alpha_1^{-1}} Y \xrightarrow{\alpha_2^{-1}} O \xrightarrow{\sigma_5} T \xrightarrow{\alpha_3^{-1}} J \xrightarrow{\sigma_{-5}} O \xrightarrow{\pi} O$$

לפיכך הטקסט הגלוי הוא: HELLO. ■

4.5 משפט רייבסקי וההתקפה על הצופן האניגמה

הגדרה 4.11 משקף

תהי Σ קבוצה נוצר סופית באורך זוגי. כלומר $|\Sigma| = n$ זוגי. תהי $\rho : \Sigma \to \Sigma$ תמורה. אומרים כי התמורה ρ היא משקף אם

$$\rho \in \left[2^{n/2}\right] \ .$$

משפט 4.7 תכונות של תמורה משקפת

תהי Σ קבוצה נוצר סופית באורך זוגי, ותהי $\rho : \Sigma \to \Sigma$ תמורה. אזי ρ היא משקף אם ורק אם התנאים הבאים מתקיימים:

(1 $\rho^{-1} = \rho$.

(2 לכל $x \in \Sigma$ מתקיים $\rho(x) \neq x$.

הוכחה:

כיוון אם

נניח כי ρ משקף. נראה כי $\rho = \rho^{-1}$ באופן הבא. נניח ש:

$$\rho = (x_1\ y_1)\,(x_2\ y_2)\cdots\left(x_{n/2}\ y_{n/2}\right) \ .$$

לכל מחזור $(a_1\ a_2\ \cdots\ a_k)$ המחזור ההפוכי הוא $(a_1\ a_2\ \cdots\ a_k)^{-1} = (a_k\ a_{k-1}\ \cdots\ a_1)$. לכן

$$\begin{aligned}\rho^{-1} &= (x_1\ y_1)^{-1}\,(x_2\ y_2)^{-1}\cdots\left(x_{n/2}\ y_{n/2}\right)^{-1}\\ &= (y_1\ x_1)\,(y_2\ x_2)\cdots\left(y_{n/2}\ x_{n/2}\right)\\ &= (x_1\ y_1)\,(x_2\ y_2)\cdots\left(x_{n/2}\ y_{n/2}\right)\\ &= \rho \ .\end{aligned}$$

כעת נראה שאם $x \in \Sigma$ אז $\rho(x) \neq x$. נניח בשלילה שקיימת נקודה $x \in \Sigma$ עבורה $\rho(x) = x$. אזי $\rho \in [1^{z_1} \cdots]$ כאשר $z_1 > 0$, כלומר ρ מכילה קיים לפחות מחזור אחד באורך 1, בסתירה לכך ש- ρ היא משקף.

כיוון רק אם

נניח כי $\rho : \Sigma \to \Sigma$ היא תמורה כך שלכל $x \in \Sigma$ מתקיים $\rho(x) \neq x$ ו- $\rho^{-1} = \rho$. נוכיח כי ρ היא משקף. נניח בשלילה כי ρ לא משקף. אזי ρ מכילה לפחות מחזור אחד באורך $k \neq 2$. נניח כי קיים מחזור באורך 1. אזי קיימת נקודת שבת של ρ, כלומר קיימת $x \in \Sigma$ עבורו $\rho(x) = x$. והגענו לסתירה. מצד שני נניח כי קיים מחזור באורך $k > 2$ ב- ρ. אזי ניתן לרשום ρ כהרכבה באופן הבא:

$$\rho = (x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ )\,\rho' \quad ,$$

כאשר $(x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ )$ הוא מחזור באורך $k > 2$. ז"א ההופכית של ρ היא

$$\rho^{-1} = \rho'^{-1}\,(x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ )^{-1} = \rho'^{-1}\,(\ldots x_3\ x_2\ x_1) \neq \rho \ ,$$

בסתירה לכך ש- $\rho^{-1} = \rho$. ∎

משפט 4.8 הכלל מצפין של אניגמה הוא משקף על האלפבית האנגלית

הכלל מצפין (והכלל מפענח) של צופן אניגמה הוא משקף על האלפבית האנגלית.

הוכחה: הכלל מצפין והכלל מפענח של צופן אניגמה הם

$$e(x_i) = \Delta_i(x_i) = \tau_i^{-1} \rho \tau_i(x_i)$$

כאשר $\tau_i = \sigma_{-i} \alpha_3 \sigma_i \alpha_2 \alpha_1 \pi$ ו- ρ המשקף הקבוע של צופן אניגנה.

⇐ לכל $i = 1, \ldots, n$ התמורה המורכבת Δ_i היא הצמודה של ρ על ידי τ_i.

⇐ מכיוון ש: ρ הוא משקף על האלפיבית האנגלית אזי $\rho \in [2^{13}]$.

⇐ לפי משפט 4.6 $\Delta_i \in [2^{13}]$.

⇐ לפי הגדרה 4.11 התמורה Δ_i היא משקף.

■

משפט 4.9

יהיו ρ_1 ו- ρ_2 משקפים על הקבוצה סופית Σ.
לכל $x \in \Sigma$, אם $\rho_1(x) = y_1$ וגם $\rho_2(x) = y_2$ אזי $\rho_2\rho_1(y_1) = y_2$.

הוכחה: מכיוון ש- ρ_1 משקף ו- $\rho_1(x) = y_1$ אזי

$$\rho_1(x) = y_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \rho_1^{-1}(\rho_1(x)) = \rho_1^{-1}(y_1) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \rho_1^{-1}(y_1) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \rho_1(y_1) \ .$$

ז"א הוכחנו ש- $x = \rho(y_1)$. מכאן

$$\rho_2\rho_1(y_1) = \rho_2(x) = y_2 \ ,$$

כנדרש.

■

דוגמה 4.10

נניח שיש לנו טקסט שמוצפן ע"י צופן אניגמה שמתחיל ב- ICPWLV. אזי אנחנו יודעים שקיימים $x, y, z \in \Sigma$ כך ש:

$$\texttt{ICPWLV} = \Delta_1(x)\Delta_2(y)\Delta_3(z)\Delta_4(x)\Delta_5(y)\Delta_6(z) \ ,$$

כאשר ה- Δ_i הוא הכלל מצפין של צופן אניגמה המורכב מהתמורות הנעלמות. מצד שני אנחנו כן יודעים שכל Δ_i הוא משקף על פי . לכן, בזכות משפט , אפשר להסיק כי:

$$\Delta_4\Delta_1(\texttt{I}) = \texttt{W} \ , \qquad \Delta_5\Delta_2(\texttt{C}) = \texttt{L} \ , \qquad \Delta_6\Delta_3(\texttt{P}) = \texttt{V} \ .$$

משפט 4.10 משפט רייבסקי

יהיו ρ_1 ו- ρ_2 משקפים על הקבוצה סופית Σ. אם המחזור

$$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_t)$$

מופיע בפירוק למחזורים של התמורה המורכבת $\rho_2\rho_1$, אזי בהכרח המחזור

$$\left(\rho\left(a_t\right) \quad \rho_1\left(a_{t-1}\right) \quad \cdots \quad \rho_1\left(a_2\right) \quad \rho_1\left(a_1\right)\right)$$

גם מופיע בפירוק למחזורים של התמורה המורכבת $\rho_2\rho_1$, ובנוסף הוא שונה מהחזור $\left(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_t\right)$.

דוגמה 4.11

נניח ש-

$$\Delta_4\Delta_1 = (\mathtt{OGKRYSD})(\mathtt{ZUQWFIB})(\mathtt{MJXCP})(\mathtt{HLNVE})(\mathtt{A})(\mathtt{T})$$

זה בדיוק הסוג של פירוק למחזורים הנקבע על ידי משפט רייבסקי: יש זוג מחזורים באורך 7, זוג מחזורים באורך 5, וזוג מחזורים באורך 1. מכיוון שיש רק שני מחזורים מכל אורך, אזי אנחנו יודעים כיצד להתאים אותם:

$$(\mathtt{OGKRYSD})(\mathtt{ZUQWFIB}) = (\mathtt{OGKRYSD})\left(\Delta_1(\mathtt{D})\,\Delta_1(\mathtt{S})\,\Delta_1(\mathtt{Y})\,\Delta_1(\mathtt{R})\,\Delta_1(\mathtt{K})\,\Delta_1(\mathtt{G})\,\Delta_1(\mathtt{O})\right)$$