אלגברה לינארית סמסטר סתו 2022-23
עבודה עצמית 2

שאלה 1 פתרו

א)

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & -3 & -10 & 8 \\ 9 & -3 & 7 & 7 \\ 5 & -10 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -14 & 0 & 5 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ג)

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ד)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ה)

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & -5 \\ 4 & 1 & -7 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

שאלה 2

נסמן $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$. מצאו את $A^2 - 5A + 2I$.

שאלה 3

נתונות המטריצות A, B. חשב את המטריצה AB ו- BA אם הן קיימות

א)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

ב)

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

שאלה 4 מטריצות A ו- B נקראות מתחלפות אם $AB = BA$. מצאו את כל המצטריות $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ המתחלפות עם המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

שאלה 5 נתונות $A = \begin{pmatrix} 3 & -k \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & k \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. מצאו את כל ערכי של הפרמטר k כך ש- $AB = BA$.

שאלה 6 תהיינה $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$. הוכח או הפרך:

א) אם $AB = BC$ אז $B = C$.

ב) אם $AB = 0$ אז $A = 0$ או $B = 0$.

ג) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

ד) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

ה) $(AB)^t = A^t B^t$.

ו) $(A+B)^t = A^t + B^t$.

שאלה 7 לכל $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ נגדיר $E_{ij} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ המטריצה אשר כולה אפסים מלבד הרכיב בשורה ה- i והעמודה ה- j שערכו 1. למשל $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} \in M_{3\times 2}$. נסמן $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$ ויהיו $E_{43}, E_{23} \in M_{5\times 5}$. מצאו את $B = E_{43} A E_{23}$.

פתרונות

<u>שאלה 1</u>

א)

$$3\cdot\begin{pmatrix}-4&0&1&-2\\5&-3&-1&2\\-1&0&-3&-1\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}-2&1&5&-3\\0&-2&-4&-1\\-3&1&2&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5&-3&-10&8\\9&-3&7&7\\5&-10&-12&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-12&0&3&-6\\15&-9&-3&6\\-3&0&-9&-1\end{pmatrix}+\cdot\begin{pmatrix}8&-4&-20&12\\0&8&16&4\\12&-4&-8&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&3&10&-8\\-9&3&-7&-7\\-5&10&12&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&-1&-7&-2\\6&2&6&3\\4&6&-5&9\end{pmatrix}$$

■

ב)

$$\begin{pmatrix}1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-14&0&5\\4&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&16&9\end{pmatrix}$$

■

ג)

$$\begin{pmatrix}-1&5\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9&7\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&3\\-3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$$

■

ד)

$$\begin{pmatrix}2&3&1\\-2&0&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}$$

■

ה)

$$\begin{pmatrix}7&-6&-5\\4&1&-7\\5&-1&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&4\\-1&2\\9&-10\end{pmatrix}$$

■

שאלה 2

$$
\begin{aligned}
A^2-5A+2I&=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 20 & 5 & -35 \\ 0 & -5 & 30 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 32 & 8 & -49 \\ -4 & -7 & 43 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 20 & 5 & -35 \\ 0 & -5 & 30 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 12 & 5 & -14 \\ -4 & -2 & 15 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

■

שאלה 3

א)

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}\ ,\qquad BA=\begin{pmatrix} -8 & -8 \\ 20 & 8 \end{pmatrix}\ .$$

■

ב) AB לא קיים.

$$BA=\begin{pmatrix} 12 & 18 & 6 \\ 12 & 18 & 6 \end{pmatrix}\ .$$

■

שאלה 4

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\ .$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ x+z & w+y \end{pmatrix}\ ,$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y & y \\ w+z & w \end{pmatrix}\ .$$

לכן

$$A\cdot B=B\cdot A\qquad\Rightarrow\qquad\begin{pmatrix} x & y \\ x+z & w+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y & y \\ w+z & w \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x &= x+y \\ x+z &= z+w \\ y+w &= w \end{cases}\qquad\Rightarrow\qquad y=0\ ,\ x=w\ .$$

$$B = \begin{pmatrix} w & 0 \\ z & w \end{pmatrix} \ , z, w \in \mathbb{R} \ .$$

■

שאלה 5

$$A \cdot B = \left(\begin{array}{cc} 21-5k & -6k \\ -30 & 9-5k \end{array} \right) \ , \qquad B \cdot A = \left(\begin{array}{cc} 21-5k & -6k \\ -30 & 9-5k \end{array} \right) \ .$$

לכן $AB = BA$ לכל $k \in \mathbb{R}$.

■

שאלה 6

תהיינה $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$. הוכח או הפרך:

א) אם $AB = BC$ אז $B = C$:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = A \cdot C = 0 \ , \qquad B \neq C \ .$$

■

ב) אם $AB = 0$ אז $A = 0$ או $B = 0$:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = 0 \ , \qquad A \neq 0 \ , B \neq 0 \ .$$

■

ג) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$:

טענה לא נכונה. הסבר:

$$(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

עבור מטריצות A, B לא מתחלפות.

דוגמה נגדית:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

$AB \neq BA$ לכן $A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

■

ד) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$:

טענה לא נכונה. הסבר:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$$

רק עבור מטריצות מתחלפות, ז"א $AB = BA$.

דוגמה נגדית:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

$AB \neq BA$ לכן $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq^2 -B^2$.

■

ה) $(AB)^t = A^t B^t$:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} , \qquad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} .$$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^t \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 18 & 4 \end{pmatrix} .$$

ז"א $(AB)^t \neq A^t B^t$.

■

ו) $(A+B)^t = A^t + B^t$:

טענה נכונה. הוכחה:

נוכיח את הטענה לכל איבר A_{ij} של A וכל איבר B_{ij} של B ($i,j=1,\dots n$).

$$(A_{ij}+B_{ij})^t = A_{ji}+B_{ji} = (A^t)_{ij}+(B^t)_{ij} = (A^t+B^t)_{ij}$$

לכל $i,j=1,\dots n$.

$\blacksquare$

שאלה 7

$$A \cdot E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 22 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{43} \cdot A \cdot E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$