

שיעור 9

מידע ואנטרופיה

9.1 הגדרה של מידע

הגדרה 9.1 מידע של מאורע (שאנון)

נתון משתנה מקרי X . המידע של ערך מסוים של X מסומן $I_X(x)$ ומוגדר להיות

$$I(X = x) = \log_2 \left(\frac{1}{P_X(x)} \right) = -\log_2 (P_X(x))$$

כאשר $P_X(x)$ פונקציית ההסתברות של המשתנה מקרי X .

דוגמה 9.1 המידע המתקבל בגילוי תוצאה של הטלת מטבע

נטיל מטבע הוגנת ונגדיר משתנה מקרי X להיות התוצאה של הניסוי. מכאן X מקבל את הערכים

$$X = \{H, T\}.$$

מצאו את המידע של המאורע $X = H$.

פתרון:

$$P(X = H) = \frac{1}{2} \text{ לכן}$$

$$I(X = H) = -\log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = 1.$$

כלומר על קבלת התוצאה " H " אנחנו מקבלים ביט אחד של מידע.

הסבר:

במקום הסימנים " H " ו- " T " בשביל המ"מ X ניתן להצפין את הערכים האפשריים בספרות בינאריות "0" או "1". כלומר

ערך של X	הצפנה בספרות בינאריות
H	0
T	1

ז"א כדי להצפין את הערכים של X אנחנו צריכים ספרה בינארית אחת:

$$d_1 \in \{0, 1\}.$$

אשר יכול להחזיק את הערכים 0 או 1.

■ ספרה בינארית אחת נדרשת להחזיק את הערך של X לכן המידע של ערך כלשהו של X הוא 1 bit (ביט אחד).

דוגמה 9.2 שליפת קלף מחבילת קלפים תיקנית

בניסוי שליפת קלף אחד מחבילת קלפים תיקנית. נגדיר את המשתנה מקרי X להיות הסוג של הקלף (תלתן, עלה לב או יהלום). חשבו את את המידע של המאורע ששלפני קלף מסוג לב.

פתרון:

ההסתברות לשלוף קלף של הסוג לב מחבילת קלפים סטנדרטית היא

$$P(X = \heartsuit) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

לכן

$$I(X = \heartsuit) = -\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \text{ bits}$$

הסבר:

יש 4 הערכים האפשריים של X :

$$X = \{\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$$

כל ספרה בינארית מחזיקה 2 ערכים אפשריים: 0 או 1 לכן ידרש שתי ספרות בינאריות כדי להצפין את ה-4 ערכים האפשריים של X :

$$d_1 d_2, \quad d_1, d_2 \in \{0, 1\}.$$

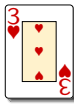
ההצפנה עצמה מתוארת בטבלא למטה:

ערך של X	הצפנה בספרות בינאריות
\spadesuit	00
\clubsuit	01
\heartsuit	10
\diamondsuit	11





















































אורך המספר $d_1 d_2$ הוא 2 לכן המידע של המשתנה מקרי X הוא 2 bits (שני ביטים).



דוגמה 9.3 שליפת קלף מחבילת קלפים תיקנית



בניסוי שליפת קלף אחד מחבילת קלפים תיקנית. מצאו את המידע המתקבל אם הקלף נשלף.

תמונות	מספרים	צורה
  	         	עלה
  	         	תלתן
  	         	לב
  	         	יהלום

פתרון:

יהי X המ"מ שמסמן את הקלף הנשלף. ההסתברות לשלוף הקלף שלוש מצורת לב מחבילת קלפים סטנדרטית היא

$$P\left(X = \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \text{♥} \\ \hline 8 \\ \hline \end{array}\right) = \frac{1}{52}.$$

לכן

$$I\left(X = \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \text{♥} \\ \hline 8 \\ \hline \end{array}\right) = -\log_2\left(\frac{1}{52}\right) = 5.7 \text{ bits}$$

הסבר:

כדי להצפין את כל הערכים האפשריים של X כרצף סיבית, נדרש רצף סיביתחם אשר מקבל לפחות 52 ערכים שונים. רצף עם 5 סיביות לא מספיק כי יש לו רק $2^5 = 32$ ערכים שונים. אבל רצף עם 6 סיביות נותן $2^6 = 64$ ערכים שונים, אשר מספיק להצפין את כל הערכים האפשריים של X .

$$d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6$$

האורך של הרצף סיביות הזה הוא 6 ולכן הרצף סיבית זה נותן 6 bits של מידע. לכל סיבית יש 2 ערכים אפשריים ולכן 64 ערכים שונים בסה"כ.

רק 52 מתוך ה- 64 צירופים נדרשים כדי להצפין את הערכים האפשריים של X לכן נוריד חלק של הסיביות. הקבוצת סיביות הנשארים מכילה 5.7 bits של מידע.



ככל שההסתברות של מאורע יותר קטנה אז המידע המתקבל יותר גבוהה.

כלומר, ככל שהמידע של מאורע יותר גבוהה אז ההסתברות שלו יותר קטנה

9.2 אנטרופיה

הגדרה 9.2 אנטרופיה של מ"מ X

נתון מ"מ בדיד X . נניח כי הערכים האפשריים של X הם

$$X = \{x_1, \dots, x_N\}.$$

האנטרופיה $H(X)$ של מ"מ X מוגדרת להיות התוחלת (הממוצע המשוקלל) של המידע המתקבל על ידי למצוא את הערך של X (כלומר על גילוי התוצאה של הניסוי):

$$H(X) = \sum_{i=1}^N P(X = x_i) I(X = x_i) = - \sum_{i=1}^N P(X = x_i) \log_2 (P(X = x_i))$$

במקרה שההסתברות של כל תוצאה שווה, כלומר

$$P(X = x_i) = \frac{1}{|X|} = \frac{1}{N}$$

אז

$$H(X) = - \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \log_2 \left(\frac{1}{N} \right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log_2 N = \log_2 N.$$

לכן

$$N = 2^{H(X)}.$$

ניתן להוכיח ש- $\log_2 N$ הוא הערך המקסימלי האפשרי של $H(X)$.

משפט 9.1

נתון מ"מ בדיד X אשר מקבל N ערכים שונים:

$$X = \{x_1, \dots, x_N\}$$

אם ההסתברות של כל ערך שווה, כלומר

$$P(X = x_i) = \frac{1}{N}$$

אז האנטרופיה מקבלת ערך מקסימלי שניתנת על ידי

$$H_{\max}(X) = \log_2 N.$$

ערך זה הוא הערך המקסימלי האפשרי של האנטרופיה.

דוגמה 9.4 אנטרופיה בהטלת מטבע

נניח כי נטיל מטבע עם הסתברות p ($0 \leq p \leq 1$). לקבל H . מצאו את האנטרופיה של המ"מ מקרי X אשר שווה לתוצאת הניסוי.

פתרון:

נסמן $X = \{0, 1\}$ כאשר $X = 0$ מסמן תוצאת H ו- $X = 1$ מסמן תוצאת T . הפונקציה הסתברות היא

$$P_X(0) = p, \quad P_X(1) = 1 - p.$$

לכן המידע של המאורע לקבל תוצאת H הוא

$$I(X = 0) = -\log_2(P_X(0)) = -\log_2(p)$$

והמידע של המאורע לקבל תוצאת H הוא

$$I(X = 1) = -\log_2(P_X(1)) = -\log_2(1 - p)$$

נשים לב שאם המטבע הוגנת אז $p = \frac{1}{2}$ ו- $I(X = 0) = I(X = 1) = 1$. כעת נחשב את האנטרופיה של X :

$$H(X) = -P_X(0) \log_2(P_X(0)) - P_X(1) \log_2(P_X(1)) = -p \log_2 p - (1 - p) \log_2(1 - p).$$

נרשום את האנטרופיה כפונקציה של ההסתברות p :

$$H(X) = -p \log_2 p - (1 - p) \log_2(1 - p) =: h(p).$$

ל- $h(p)$ יש נקודת מקסימום ב- $p = \frac{1}{2}$:

$$h'(p) = -\frac{1}{\ln 2} - \log_2 p + \frac{1}{\ln 2} + \log_2(1 - p) = -\log_2 p + \log_2(1 - p) = \log_2\left(\frac{1}{p} - 1\right) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2}.$$

ז"א הערך המקסימלי של האנטרופיה מתקבל כאשר לכל הערכים של X יש הסתברות שווה, $P_X(0) = P_X(1) = \frac{1}{2}$.
אכן

$$h(p = \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2 = 1.$$

9.5 דוגמה

בניסוי הטלת מטבע לא מאוזנת, ההסתברות לקבל תוצאה H היא $p = \frac{1}{1024}$. מצאו את האנטרופיה של X .

פתרון:

נסמן $X = \{0, 1\}$, כאשר $X = 0$ מסמן תוצאת H ו- $X = 1$ מסמן תוצאת T .

$$I(X = 0) = -\log_2 \frac{1}{1024} = 10 \text{ bits}, \quad I(X = 1) = -\log_2(1 - p) = -\log_2 \frac{1023}{1024} = 0.00141 \text{ bits}.$$

לפי זה

$$H(X) = -p \log_2 p - (1 - p) \log_2(1 - p) = -\frac{1}{1024} \log_2 \frac{1}{1024} - \frac{1023}{1024} \log_2 \frac{1023}{1024} = 0.0112 \text{ bits}.$$

המשמעות של התשובה לדוגמה הקודמת היא כך. נניח שנטיל אותה מטבע הלא מאוזנת 100,000 פעמים. בכדי להצפין את כל התוצאות נדרש רצף סיביות של אורך 100,000, כאשר כל ספרה נותנת תוצאה של ניסוי אחד. ז"א 10^5 bits של מידע נדרש כדי להצפין את כל התוצאות.

מצד שני מצאנו כי התוחלת של המידע המתקבל לניסוי (כמות מידע פר ניסוי) הוא 0.0112 bit פר ניסוי. במילים אחרות, ב- 10^5 ניסויים רק 1120 bit של מידע נדרש בממוצע כדי להצפין את כל התוצאות של הרצף הניסויים.

אנטרופיה (בביטים) אומרת לנו את כמות המידע הממוצעת (בביטים) שיש לספק על מנת להעביר את כל התוצאות של המאורע. זהו חסם תחתון על מספר הסיביות שיש להשתמש בהן, בממוצע לקודד (להצפין) את התווים של ההודעה שלנו.

9.3 הצפנת האפמן

נסביר הצפנת האפמן בעזרת הדוגמה הבאה. נתון הטקסט גלוי

$$X = \{a, b, c, d\}$$

ונניח כי הפונקציה הסתברות של X היא לפי הטבלה הבאה:

בחירת אות של $x_i \in X$	$p_i = P_X(x_i)$	$I(X = x_i) = -\log_2(p_i)$
a	$\frac{1}{3}$	1.58 bit
b	$\frac{1}{2}$	1 bit
c	$\frac{1}{12}$	3.58 bit
d	$\frac{1}{12}$	3.58 bit

נשאל את השאלה: כמה ביטים של מידע נדרשים כדי להצפין (בסיביות) רצף של 1000 אותיות של טקסט גלוי X ?

יש 4 אותיות ב- X , כלומר 4 ערכים אפשריים של המ"מ בדיד X . לפיכך נדרש רצף של 2 סיביות כדי להצפין טקסט גלוי של תו אחד בהצפנת סיביות קבועה. לדוגמה:

בחירת אות של $x_i \in X$	הצפנה
a	00
b	01
c	10
d	11

ז"א להצפין תו אחד של הטקסט גלוי X נדרש 2 bit. לכן להצפין רצף אותיות של טקסט גלוי נדרש $2 \times 1000 = 2000$ bit, כלומר 2000 סיביות.

האנטרופיה של X היא

$$H(X) = -p_1 \log_2(p_1) - p_2 \log_2(p_2) - p_3 \log_2(p_3) - p_4 \log_2(p_4) = 1.62581 \text{ bit}.$$

ז"א לכל ניסוי המידע הממוצע הנדרש כדי להצפין תו אחד של טקסט גלוי הוא 1.62581 bit. לכן המידע הממוצע הנדרש כדי להצפין רצף אותיות של טקסט גלוי הוא

$$1000 \times 1.62581 = 1625.81 \text{ bit}.$$

לכן, רצף סיביות של אורך 1626 בממוצע יהיה מספיק כדי להעביר את ההודעה.

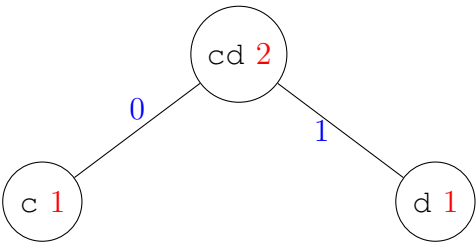
כעת נבנה הצפנה של הטקסט גלוי על ידי האלגוריתם של האפמן.

שלב 1)

	c	d	a	b
	1	1	4	6

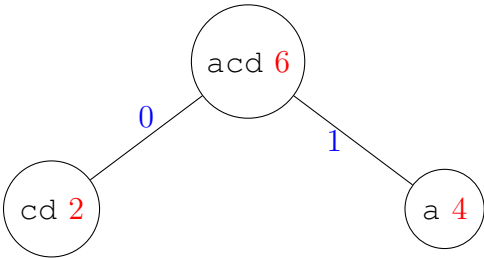
שלב 2)

	c	d	a	b
	1	1	4	6
	0	1		
	2		4	6



שלב 3)

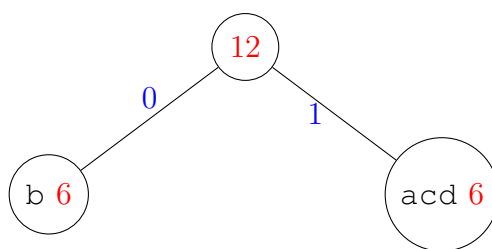
	cd	a	b
	2	4	6
	0	1	
	6		6



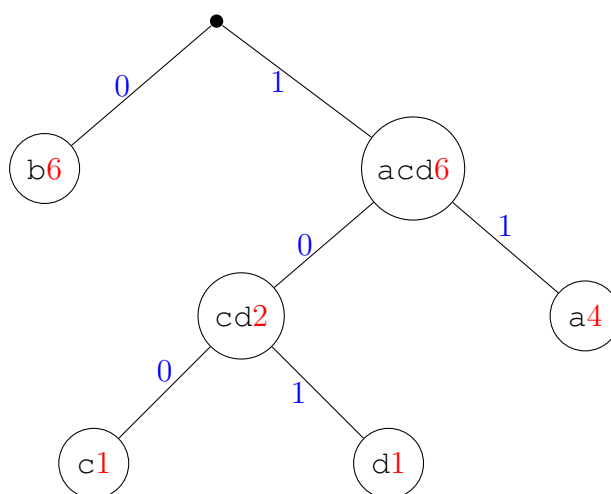
שלב 4)

שלב 5)

	acd	b
	6	6
	0	1
	12	



שלב 6)



בסוף של התהליך האותיות של הטקסט גלוי יהיו בעלים של העץ וההצפנה ניתנת על ידי הרצף סיביות על הענפים במסלול מהנקודת התחלתית של העץ עד העלה בו רשום האות בשאלה.

בחירת אות של $x_i \in X$	הצפנת האפמן
a	11
b	100
c	110
d	101

דוגמה 9.6

נתון הטקסט גלוי הבא

$$X = \{a, b, c, d, e\}$$

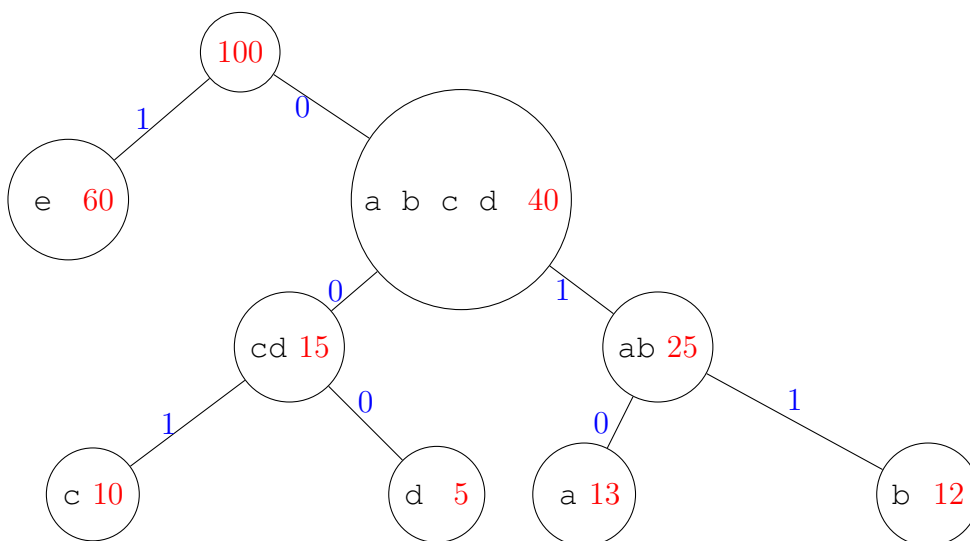
והפונקציה הסתברות

$$P(X = a) = \frac{13}{100} = 0.13, \quad P(X = b) = \frac{3}{25} = \frac{12}{100} = 0.12, \quad P(X = c) = \frac{1}{10} = \frac{10}{100} = 0.1,$$

$$P(X = d) = \frac{1}{20} = \frac{5}{100} = 0.05, \quad P(X = e) = \frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 0.6.$$

מצאו את העץ הצפנה וההצפנת האפמן של כל תו של X .

פתרון:



בחירת אות של $x_i \in X$	הצפנת האפמן
a	010
b	011
c	001
d	000
e	1

פורמלי הצפנת האפמן מוגדרת לפי ההגדרה הבאה:

הגדרה 9.3 הצפנת האפמן

נתון משתנה מקרי X . נגדיר הצפנת האפמן של X להיות הפונקציה (כלל מצפין)

$$f : X \rightarrow \{0, 1\}^*$$

כאשר $\{0, 1\}^*$ קבוצת רצפים של סיביות סופיים.

נתון רצף מאורעות x_1, \dots, x_n . נגדיר

$$f(x_1 \dots x_n) = f(x_1) || \dots || f(x_n)$$

כאשר $||$ מסמן שרשור (concatenation).

הגדרה 9.4 תוחלת האורך של הצפנת האפמן

נתונה הצפנת האפמן f . תוחלת האורך של ההצפנה מוגדרת

$$l(f) = \sum_{x \in X} P(X = x) |f(x)|.$$

משפט 9.2 אי שוויון האפמן

נתון קבוצת אותיות של טקסט גלוי X והצפנת האפמן f . נניח כי $l(f)$ תוחלת האורך של ההצפנה ו-
 $H(X)$ האנטרופיה של הטקסט גלוי. מתקיים

$$H(X) \leq l(f) \leq H(X) + 1.$$

דוגמה 9.7 (המשך של דוגמה 9.6)

נתון הטקסט גלוי הבא

$$X = \{a, b, c, d, e\}$$

והפונקציה הסתברות

$$P(X = a) = \frac{13}{100} = 0.13, \quad P(X = b) = \frac{3}{25} = 0.12, \quad P(X = c) = \frac{1}{10} = 0.1, \quad P(X = d) = \frac{1}{20} = 0.05,$$

$$P(X = e) = \frac{3}{5} = 0.6.$$

(1) מצאו את תוחלת האורך של ההצפנת האפמן.

(2) מצאו את האנטרופיה.

(3) הוכיחו כי אי-שוויון האפמן של ההצפנה שמצאתם בדוגמה 9.6 למעלה מתקיים.

פתרון:

סעיף (1)

$$\begin{aligned} l(f) &= \frac{5}{100} \cdot 3 + \frac{10}{100} \cdot 3 + \frac{12}{100} \cdot 3 + \frac{13}{100} \cdot 3 + \frac{60}{100} \cdot 1 \\ &= \frac{15 + 30 + 36 + 39 + 60}{100} \\ &= \frac{180}{100} \\ &= 1.8 \end{aligned}$$

סעיף (2)

$$\begin{aligned} H(X) &= -P(X = a) \log_2 P(X = a) - P(X = b) \log_2 P(X = b) - P(X = c) \log_2 P(X = c) \\ &\quad - P(X = d) \log_2 P(X = d) - P(X = e) \log_2 P(X = e) \\ &= 1.74018. \end{aligned}$$

סעיף (3) $H(X) = 1.74018$, $H(X) + 1 = 1.84018$, $l(f) = 1.8$. לכן

$$H(X) \leq l(f) \leq H(X) + 1$$

מתקיים.