

שיעור 2

שדות

2.1 מספרים מרוכבים

”

הגדרה 2.1 מספר מרוכב

זוג סדור $z = (x, y)$ של מספרים ממשיים נקרא מספר מרוכב.

אם $y = 0$ נקבל זוג $(x, 0)$. נסמן $x = (x, 0)$. נגדיר את הפעולות הבאות בין מספרים מרוכבים:

הגדרה 2.2 פעולות בינאריות של מספרים מרוכבים

נניח $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$. אז

(1) חיבור

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

(2) כפל

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

קל לראות:

(1) לכל מספר ממשי $x = (x, 0)$ ולכל מספר מרוכב $z_1 = (x_1, y_1)$ מתקיים

$$x \cdot z_1 = (x \cdot x_1, x \cdot y_1)$$

(2) לכל מספרים ממשיים $(x_1, 0)$ ו- $(x_2, 0)$ מתקיים

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0) = x_1 x_2$$

הגדרה 2.3 i

נסמן

$$i = (0, 1).$$

i היא

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

משפט 2.1 הצגה אלגברית שך מספר מרוכב

תוך שימוש במספר i כל מספר מרוכב $z = (x, y)$ ניתן לרשום

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + iy.$$

$x + iy$ נקרא הצגה אלגברית של מספר מרוכב.

ל- x קוראים החלק הממשי של z . מסמנים $x = \operatorname{Re}(z)$.

ל- y קוראים החלק המדומה של z . מסמנים $y = \operatorname{Im}(z)$.

צורת הכתיבה $x + iy$ מאפשרת לחבר ולהכפיל מספרים רוכבים בקלות בהתחשב ב- $i^2 = -1$.

2.1 דוגמה

א

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 - y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

2.2 דוגמה

$$(3 - 5i) \cdot (2 + 3i) = 6 + 9i - 10i + 15 = 21 - i.$$

2.4 הגדרה הצמוד

המספר הרוכב $x - iy$ נקרא צוד למפר $z = x + iy$. מסנים:

$$\bar{z} = x - iy.$$

2.2 משפט

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2.$$

המספר הזה נקרא ה הערך המוחלט או הגודל של המספר המרוכב z .

2.3 דוגמה

$$\frac{3 + 4i}{1 - i} = \frac{(3 + 4i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{3 + 3i + 4i - 4}{2} = \frac{-1 + 7i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$$

2.4 דוגמה

מצאו את המספר z המקיים את המשוואה

$$\frac{1 - iz}{1 + iz} = -2i.$$

פתרון:

$$1 - iz = -2i(1 + iz) = 2z - 2i \Rightarrow z(2 + i) = 1 + 2i$$

$$z = \frac{1+2i}{2+i} = \frac{(1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i+4i+2}{5} = \frac{4+3i}{5} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$$

קבוצת המספרים המרוכבים מסומנת ב- \mathbb{C} .

אפשר לראות בקלות ש- \mathbb{C} יחד עם שתי הפעולות שהגדרנו בהגדרה 2.7 מקיימת את כל האקסיומות של שדה, כאשר

$$0 = (0, 0)$$

$$1 = (1, 0)$$

ועבור $z = x + iy \neq 0$

$$z^{-1} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2+y^2}.$$

2.2 \mathbb{Z}_p - קבוצת השאריות בחלוקה ב p

הגדרה 2.5 פונקציית שארית

עבור מספרים שלמים k, p הפונקציית השארית $\text{rem}(k, p)$ מוגדרת להיות השארית של k בחילוק ב- p .

דוגמה 2.5

- השארית של 3 בחילוק ב-2 היא 1. לכן

$$\text{rem}(3, 2) = 1.$$

- השארית של 7 בחילוק ב-4 היא 3. לכן

$$\text{rem}(7, 4) = 3.$$

- השארית של 11 בחילוק ב-8 היא 3. לכן

$$\text{rem}(11, 8) = 3.$$

הגדרה 2.6 \mathbb{Z}_p - קבוצת השאריות בחלוקה ב- p

נניח ש p מספר ראשוני. הקבוצה \mathbb{Z}_p היא קבוצת הסימנים

$$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{p-1}\}.$$

הקבוצה מוגדרת לפי התנאים הבאים:

(1) כל איבר הוא מספר שלם וחיובי.

(2) מספרים עם אותה השאריות בחילוק ב- p שווים זה לזה.

(3) לכל מספר שלם k נתאים איבר ב- \mathbb{Z}_p שנסמן \bar{k} ונגדיר

$$\bar{k} = \overline{\text{rem}(k, p)} .$$

2.6 דוגמה

לקבוצה \mathbb{Z}_3 יש 3 איברים:

$$\{\mathbb{Z}_3 = \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} .$$

$$\bar{0} = \overline{\text{rem}(0, 3)} = \bar{0}$$

$$\bar{1} = \overline{\text{rem}(1, 3)} = \bar{1}$$

$$\bar{2} = \overline{\text{rem}(2, 3)} = \bar{2}$$

$$\bar{3} = \overline{\text{rem}(3, 3)} = \bar{0}$$

$$\bar{4} = \overline{\text{rem}(4, 3)} = \bar{1}$$

$$\bar{5} = \overline{\text{rem}(5, 3)} = \bar{2}$$

$$\bar{6} = \overline{\text{rem}(6, 3)} = \bar{0}$$

$$\bar{7} = \overline{\text{rem}(7, 3)} = \bar{1}$$

$$\bar{8} = \overline{\text{rem}(8, 3)} = \bar{2}$$

\vdots

$$\bar{122} = \overline{\text{rem}(122, 3)} = \bar{2}$$

\vdots

ובן הלאה.

הגדרה 2.7 פעולות בינאריות של \mathbb{Z}_p איברי

יהי $p \in \mathbb{N}$ מספר ראשוני ותהי $\mathbb{Z}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}$, קבוצת השאריות בחלוקה ב- p . לכל $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_p$ נגדיר את הפעולות חיבור וכפל כך:

(1) חיבור

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$$

(2) כפל

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b} .$$

2.7 דוגמה

חשבו ב- \mathbb{Z}_5 את

$$\bar{2} + \bar{4} \quad (\text{א})$$

(ב) $\bar{3} \cdot \bar{3}$

פתרון:

(א) $\bar{2} + \bar{4} = \overline{2+4} = \bar{6} = \bar{1}$

(ב) $\bar{3} \cdot \bar{3} = \overline{3 \cdot 3} = \bar{9} = \bar{4}$

2.8 דוגמה

חשבו ב- \mathbb{Z}_{11} את

(א) $\bar{3} \cdot \bar{7}$

(ב) $\bar{2} \cdot \bar{8}$

פתרון:

(א) $\bar{3} \cdot \bar{7} = \overline{3 \cdot 7} = \overline{21} = \overline{10}$

(ב) $\bar{2} \cdot \bar{8} = \overline{2 \cdot 8} = \overline{16} = \bar{5}$

2.9 דוגמה

לוח החיבור של איברים ב- \mathbb{Z}_3 :

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

לוח הכפל של איברים ב- \mathbb{Z}_3 :

·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

2.10 דוגמה

לוח החיבור של איברים של \mathbb{Z}_5

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

לוח הכפל של איברים של \mathbb{Z}_5

·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

נחזור לממשיים. הנגדי של 7 הוא -7 כי $-7 + 7 = 0$.

ההופכי של 7 הוא 7^{-1} , (או $\frac{1}{7}$) כי $\frac{1}{7} \cdot 7 = 1$.

ושוב ל- \mathbb{Z}_3 , מתקיים $\bar{0} = \bar{1} + \bar{2}$ ולכן $\bar{2}$ הוא הנגדי של $\bar{1}$. כלומר:

$$-\bar{1} = \bar{2}.$$

באופן דומה, $\bar{1}$ הוא הנגדי של $\bar{2}$. כלומר $-\bar{2} = \bar{1}$.

מתקיים $\bar{1} = \bar{2} \cdot \bar{2}$ ולכן $\bar{2}$ הוא ההופכי של $\bar{2}$. כלומר $(\bar{2})^{-1} = \bar{2}$.

משפט 2.3 איבר ההופכי ואיבר הנגדי בקבוצה \mathbb{Z}_p

יהי p מספר ראשוני ותהי \mathbb{Z}_p הקבוצה השאריות בחלוקה ב- p .

(א) איבר הנגדי

לכל איבר $a \in \mathbb{Z}_p$ קיים איבר יחיד $-a \in \mathbb{Z}_p$ כך ש-

$$a + (-a) = \bar{0}.$$

האיבר $-a$ נקרא האיבר הנגדי של a .

(ב) איבר ההופכי

לכל איבר $a \in \mathbb{Z}_p$ שונה מאפס (כלומר $a \neq \bar{0}$) קיים איבר יחיד $a^{-1} \in \mathbb{Z}_p$ כך ש-

$$a \cdot a^{-1} = \bar{1}.$$

האיבר a^{-1} נקרא האיבר ההופכי של a .

דוגמה 2.11

מצאו את האיבר הנגדי של $\bar{1}$ ב- \mathbb{Z}_3 .

פתרון:

נשים לב ש-

$$\bar{1} + \bar{2} = \bar{3} = \bar{0}$$

ולכן

$$-\bar{1} = \bar{2}.$$

דוגמה 2.12

מצאו את האיבר הנגדי של $\bar{2}$ ב- \mathbb{Z}_3 .

פתרון:

נשים לב ש-

$$\bar{2} + \bar{1} = \bar{3} = \bar{0}$$

ולכן

$$-\bar{2} = \bar{1}.$$

דוגמה 2.13

מצאו את האיבר הנגדי של $\bar{3}$ ב- \mathbb{Z}_3 .

פתרון:

נשים לב ש-

$$\bar{3} + \bar{0} = \bar{3} = \bar{0}$$

ולכן

$$-\bar{3} = \bar{3}.$$

דוגמה 2.14

איברים הנגדיים של איברים של \mathbb{Z}_3 :

$$-\bar{1} = \bar{2}$$

$$-\bar{2} = \bar{1}$$

$$-\bar{3} = \bar{0}$$

$$-\bar{4} = \bar{2}$$

$$-\bar{5} = \bar{1}$$

$$-\bar{6} = \bar{0}$$

$$-\bar{7} = \bar{2}$$

$$-\bar{8} = \bar{1}$$

⋮

$$-\bar{59} = \bar{1}.$$

2.15 דוגמה

מצאו את האיבר ההופכי של $\bar{2}$ ב- \mathbb{Z}_3 .

פתרון:

$$\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{4} = \bar{1}$$

$$\bar{2}^{-1} = \bar{2} \text{ . לכן}$$

2.16 דוגמה

מצאו את האיבר ההופכי של $\bar{1}$ ב- \mathbb{Z}_3 .

פתרון:

$$\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$$

$$\bar{1}^{-1} = \bar{1} \text{ . לכן}$$

2.17 דוגמה

מצאו את האיבר ההופכי של $\bar{3}$ ב- \mathbb{Z}_5 .

פתרון:

$$\bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{6} = \bar{1}$$

$$\bar{3}^{-1} = \bar{2} \text{ . לכן}$$

2.18 דוגמה

חשבו את האיבר ההופכי של כל האיברים הבאים ב- \mathbb{Z}_5

(א) $\bar{1}$

(ב) $\bar{2}$

(ג) $\bar{3}$

(ד) $\bar{4}$

פתרון:

(א)

$$\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1} \Rightarrow \bar{1}^{-1} = \bar{1}$$

(ב)

$$\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{6} = \bar{1} \Rightarrow \bar{2}^{-1} = \bar{3}$$

(ג)

$$\bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{6} = \bar{1} \Rightarrow \bar{3}^{-1} = \bar{1}$$

(ד)

$$\bar{4} \cdot \bar{4} = \bar{16} = \bar{1} \Rightarrow \bar{4}^{-1} = \bar{1}$$

דוגמה 2.19

חשבו ב- \mathbb{Z}_{11} :

(א) $\bar{3} \cdot \bar{7}$

(ב) $\bar{2} \cdot \bar{8}$

(ג) $-\bar{3}$

(ד) $(\bar{3})^{-1}$

פתרון:

(א) $\bar{3} \cdot \bar{7} = \bar{21} = \bar{10}$

(ב) $\bar{2} \cdot \bar{8} = \bar{16} = \bar{5}$

(ג) $\bar{3} + \bar{8} = \bar{11} = \bar{0} \Rightarrow -\bar{3} = \bar{8}$

(ד) $\bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{12} = \bar{1} \Rightarrow (\bar{3})^{-1} = \bar{4}$

משפט 2.4

עבור $p \in \mathbb{N}$ ראשוני, לכל איבר השונה מאפס בקבוצה $\mathbb{Z}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}$ יש הופכי.

2.3 שדות

הגדרה 2.8 שדה

קבוצה לא ריקה \mathbb{F} , שבה פעולת חיבור "+" ופעולת כפל "." (הפעולות הדו-מקומיות) מוגדרות על הקבוצה, נקראת שדה אם התנאים הבאים מתקיימים. לכל איבר $a \in \mathbb{F}$ ולכל איבר $b \in \mathbb{F}$ ולכל איבר $c \in \mathbb{F}$:

(1) \mathbb{F} סגורה תחת חיבור:

$$a + b \in \mathbb{F}.$$

(2) \mathbb{F} סגורה תחת כפל:

$$a \cdot b \in \mathbb{F}.$$

(3) חוק החילוף I:

$$a + b = b + a$$

(4) חוק החילוף II:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

(5) חוק הקיבוץ I:

$$(a + b) + c = a + (b + c) .$$

(6) חוק הקיבוץ II:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

(7) חוק הפילוג:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c .$$

(8) קיום איבר ניוטרלי:

קיים איבר $0 \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$a + 0 = a .$$

(9) קיום איבר יחיד (האיבר ניוטרל לגבי כפל):

קיים איבר $1 \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$a \cdot 1 = a , \quad 1 \cdot a = a .$$

(10) קיום איבר נגדי:

לכל $a \in \mathbb{F}$ קיים איבר נגדי $(-a) \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$a + (-a) = 0 .$$

(11) קיום איבר הופכי:

לכל $a \in \mathbb{F}$ כך ש $a \neq 0$ קיים איבר $a^{-1} \in \mathbb{F}$ המקיים

$$a \cdot a^{-1} = 1 , \quad a^{-1} \cdot a = 1 .$$

משפט 2.5

יהי \mathbb{F} שדה.

(1) עבור $a \in \mathbb{F}$, האיבר הנגדי החיבורי $-a$ הוא יחיד.

(2) עבור $a \in \mathbb{F}$ ($a \neq 0$), האיבר ההפכי הכפלי a^{-1} הוא יחיד.

דוגמה 2.20

(א) הקבוצה \mathbb{R} של מספרים ממשיים שדה.

(ב) הקבוצה \mathbb{C} של מספרים מרוכבים שדה.

דוגמה 2.21

קבעו אם הקבוצה \mathbb{N} שדה.

פתרון:

\mathbb{N} לא שדה. כדי להראות זאת די למצוא דוגמה נגדית לאחת התכונות:
נבחר $a = 3 \in \mathbb{N}$. לא קיים איבר נגדי שב- \mathbb{N} . הרי

$$-3 + 3 = 0$$

אבל $-3 \notin \mathbb{N}$.

משפט 2.6

יהי \mathbb{F} שדה יהיו $a, b \in \mathbb{F}$, יהי 0 האיבר הנייטרלי הכפלי ו-1 האיבר הנגדי לאיבר הנייטרלי החיבורי.

$$a \cdot 0 = 0 \quad (1)$$

$$a \cdot (-1) = -a \quad (2)$$

$$(3) \quad \text{אם } a \cdot b = 0 \text{ ו- } a \neq 0 \text{ אז } b = 0.$$

הוכחה: תרגיל בית!

2.4 מערכות ליניאריות מעל \mathbb{C}

דוגמה 2.22

$$\text{פתרו את המערכת } \begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 3i \\ 3z_1 + (2-i)z_2 = 4 \end{cases} \text{ מעל } \mathbb{C}.$$

פתרון:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 1+i & 1-i & 3i \\ 3 & 2-i & 4 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_1 \rightarrow (1-i)R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2i & 3+3i \\ 3 & 2-i & 4 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_2 \rightarrow 2R_2-3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2i & 3+3i \\ 0 & 4+4i & -1-9i \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_2 \rightarrow (4-4i)R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2i & 3+3i \\ 0 & 32 & -40-32i \end{array} \right) & \xrightarrow{R_1 \rightarrow 16R_1+iR_2} \left(\begin{array}{cc|c} 32 & 0 & 80+8i \\ 0 & 32 & -40-32i \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{32}R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} + \frac{1}{4}i \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} - i \end{array} \right) \end{aligned}$$

פתרון:

$$z_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{4}i, \quad z_2 = -\frac{5}{4} - i$$

2.5 מערכות ליניאריות מעל \mathbb{Z}_p

2.23 דוגמה

פתור את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_3 :

$$x_1 + x_2 + x_3 = \bar{0}$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = \bar{0}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = \bar{1}$$

פתרון:

המטריצה המורחבת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & -\bar{1} & -\bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right)$$

נבצע שיטת גאוס:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right) &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{1} & \bar{1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right) \end{aligned}$$

נכפיל את השורה השלישית ב $\bar{2}^{-1} = \bar{2}$: מכיוון לכן נבצע את הפעולה הבאה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow \bar{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right)$$

עכשיו נאפס כל איבר מעל ה $\bar{1}$ המוביל בעזרת הפעולות הבאות:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & -\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & -\bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

לכן למערכת יש פתרון יחיד:

$$(x_1, x_2, x_3) = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}) .$$

2.24 דוגמה

פתור את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_5 :

$$x_1 + x_2 + x_3 = \bar{0} ,$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = \bar{1} .$$

פתרון:

המטריצה המורחבת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & -\bar{1} & -\bar{1} & \bar{1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{1} \end{array} \right) .$$

שיטת גאוס:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{1} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{1} \end{array} \right) .$$

נכפיל את השורה השלישית באיבר ההופכי של $\bar{3}$ ב- \mathbb{Z}_5 . נגלה כי

$$\bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{6} = \bar{1} \quad \Rightarrow \quad (\bar{3})^{-1} = \bar{2} ,$$

ולכן

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{1} \end{array} \right) & \xrightarrow{R_3 \rightarrow \bar{2} \cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \right) . \end{aligned}$$

המערכת המתאימה היא

$$x_1 = \bar{3} ,$$

$$x_2 + x_3 = \bar{2}$$

ולכן הפתרון הוא

$$x_1 = \bar{3} ,$$

$$x_2 = \bar{2} - x_3 .$$

כלומר,

$$(x_1, x_2, x_3) = (\bar{3}, \bar{2} - x_3, x_3) , \quad x_3 \in \mathbb{Z}_5$$

נשים לב שלמערכת יש חמישה פתרונות:

$x_3 = \bar{0} \Rightarrow (\bar{3}, \bar{2}, \bar{0})$	פתרון 1:
$x_3 = \bar{1} \Rightarrow (\bar{3}, \bar{1}, \bar{1})$	פתרון 2:
$x_3 = \bar{2} \Rightarrow (\bar{3}, \bar{0}, \bar{2})$	פתרון 3:
$x_3 = \bar{3} \Rightarrow (\bar{3}, -\bar{1}, \bar{3}) = (\bar{3}, \bar{4}, \bar{3})$	פתרון 4:
$x_3 = \bar{4} \Rightarrow (\bar{3}, -\bar{2}, \bar{4}) = (\bar{3}, \bar{3}, \bar{4})$	פתרון 5:

2.25 דוגמה

פתור את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_7 :

$$x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{4}x_3 = \bar{0} ,$$

$$\bar{2}x_1 - \bar{3}x_2 + x_3 = \bar{0} .$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{2} & -\bar{3} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{0} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{2} \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{7} & \bar{0} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right)$$

המערכת המתאימה הינה

$$x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{4}x_3 = \bar{0}, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_7$$

והפתרון הוא

$$x_1 = -\bar{2}x_2 - \bar{4}x_3 = \bar{5}x_2 + \bar{3}x_3, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_7.$$

כלומר

$$(x_1, x_2, x_3) = (\bar{5}x_2 + \bar{3}x_3, x_2, x_3), \quad x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_7.$$

נשים לב שלמערכת יש $7^2 = 49$ פתרונות.

2.26 דוגמה

תנו דוגמה למערכת ליניארית בעלת 27 פתרונות.

פתרון:

מערכת 1 : המערכת

$$\bar{0}x = \bar{0}.$$

מעל \mathbb{Z}_{27} .

הסבר: זוהי מערכת של משוואה אחת במשתנה אחד, וכל איבר של \mathbb{Z}_{27} מהווה פתרון של המערכת.

מערכת 2 :

$$x + y + z + w = \bar{0}$$

מעל \mathbb{Z}_3 .

הסבר: זוהי מערכת של משוואה אחת בארבעה משתנים. למערכת יש שלושה משתני חופשיים ולכן 3^3 פתרונות.

2.27 דוגמה

פתרו את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_5 :

$$x + \bar{3}y + \bar{2}z = \bar{1},$$

$$\bar{2}x + \bar{4}y + z = \bar{3},$$

$$\bar{3}x + \bar{3}z = \bar{2}.$$

פתרון:

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} \end{array} \right) & \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow \bar{R}_2 - \bar{2} \cdot R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - \bar{3} \cdot R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{2} & -\bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{9} & -\bar{3} & -\bar{1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_2 \rightarrow \bar{3}^{-1} R_2 = \bar{2} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{2} & \bar{2} \end{array} \right) \\
 & = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow \bar{3}^{-1} R_3 = \bar{2} R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{4} R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & -\bar{14} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - \bar{3} R_2 - \bar{2} R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{10} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

לפיכך $(x_1, x_2, x_3) = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{4})$.

דוגמה 2.28

פתרו את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_5 :

$$\begin{aligned}
 x + \bar{4}y + z &= \bar{1} , \\
 \bar{3}x + \bar{2}y + \bar{3}z &= \bar{2} , \\
 \bar{4}x + y + \bar{4}z &= \bar{3} .
 \end{aligned}$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{4} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{3} \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{3} R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - \bar{4} R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{10} & \bar{0} & -\bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{15} & \bar{0} & -\bar{1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} \end{array} \right)$$

קיבלנו שורת סתירה לכן למערכת אין פתרון.

דוגמה 2.29

פתרו את המערכת הבאה מעל \mathbb{Z}_5 :

$$\begin{aligned}
 \bar{2}x + \bar{3}y + \bar{4}z &= \bar{1} , \\
 x + \bar{2}y + \bar{3}z &= \bar{0} , \\
 \bar{3}x + \bar{2}z &= \bar{1} .
 \end{aligned}$$

פתרון:

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right) & \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - \bar{3} \cdot R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - \bar{2} \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & -\bar{1} & -\bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{6} & -\bar{7} & \bar{1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{1} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right) \xrightarrow[= \bar{4} \cdot R_2]{R_2 \rightarrow \bar{4}^{-1} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{12} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - \bar{2} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & -\bar{1} & -\bar{8} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right) \\
 & \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\bar{4}z + \bar{2} = z + \bar{2} \\ y = -\bar{2}z + \bar{4} = \bar{3}z + \bar{4} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

תשובה סופית:

$$(x, y, z) = (z + \bar{2}, \bar{4} + \bar{3}z, z) \quad , z \in \mathbb{Z}_5 .$$

ישנם 5 פתרונות.