עבודה עצמית 11

שאלה 1 במרחב וקטורי $\mathbb{R}^4$ נתונים הוקטורים

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\0\\2\end{pmatrix} \ , \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\2\\0\end{pmatrix} \ , \mathrm{u}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix} \ , \mathrm{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix} \ .$$

נסמן $V = \mathrm{sp}\left(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\right)$, $U = \mathrm{sp}\left(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2\right)$

א) מצאו בסיס ומימד של V, U.

ב) מצאו בסיס ומימד של $V + U$.

ג) מצאו בסיס ומימד של $V \cap U$.

שאלה 2 במרחב וקטורי $\mathbb{R}^4$ נתונים הוקטורים

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix} \ , \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \ , \mathrm{u}_1 = \begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\end{pmatrix} \ , \mathrm{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \ .$$

נסמן $V = \mathrm{sp}\left(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\right)$, $U = \mathrm{sp}\left(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2\right)$

א) מצאו בסיס ומימד של V, U.

ב) מצאו בסיס ומימד של $V + U$.

ג) מצאו בסיס ומימד של $V \cap U$.

שאלה 3

במרחב וקטורי $\mathbb{R}^4$ נתונים וקטורים

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \ , \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix} \ , \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix} \ , \mathrm{v}_4 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix} \ , \mathrm{v}_5 = \begin{pmatrix}2\\-2\\0\\-1\end{pmatrix} \ , \mathrm{v}_6 = \begin{pmatrix}5\\-2\\3\\-1\end{pmatrix} \ .$$

נגדיר

$$W = \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3) \ , \qquad U = \mathrm{sp}(\mathrm{v}_4, \mathrm{v}_5, \mathrm{v}_6)$$

א) מצאו בסיס ומימד של U ו W.

ב) האם הוקטורים $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3, \mathrm{v}_4, \mathrm{v}_5, \mathrm{v}_6$ פורשים את $\mathbb{R}^4$? נמקו את תשובתכם.

ג) האם $U + W = \mathbb{R}^4$? מקו את תשובתכם.

ד) האם $U \oplus W = \mathbb{R}^4$? נמקו את תשובתכם.

שאלה 4

נתונים שני תתי מרחבים של $\mathbb{R}^3$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x + y + z = 0 \right\} , \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x = z, x = y \right\} ,$$

הוכיחו כי $U \oplus W = \mathbb{R}^3$.

שאלה 5 יהיו U_1, U_2 תתי מרחבים של מרחב וקטורי V בעל מימד סופי. הוכיחו כי

א) אם $\dim(V) < \dim(U_1) + \dim(U_2)$ אז $U_1 \cap U_2 \neq \{\bar{0}\}$.

ב) אם $\dim(U_1 + U_2) = 1 + \dim(U_1 \cap U_2)$ אז $U_1 + U_2$ שווה לאחד מתתי המרחבים ו $U_1 \cap U_2$ שווה לתת המרחב השני.

פתרונות

שאלה 1

א) בסיס של V:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של V:

$$B(V) = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\}$$

$\dim(V) = 2$.

בסיס של U:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס של U:

$$B(U) = \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2\}$$

$\dim(U) = 2$.

ב)

$$Q = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות לכן בסיס של $V+U$ הוא

$$B(V+U) = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2\}$$

ו $\dim(V+U) = 4$.

ג) לפי משפט המימדים:

$$\dim(V+U)=\dim(V)+\dim(U)-\dim(V\cap U)$$

כיוון ש $\dim(V)=2$, $\dim(U)=2$, ו $\dim(V+U)=4$, אז

$$\dim(V\cap U)=0\ .$$

לכן $V\cap U$ מורכב מוקטור האפס:

$$V\cap U=\{\bar{0}\}\ .$$

שאלה 2

א) בסיס של V:

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\0&1\\2&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\0&1\\0&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

בסיס של V:

$$B(V)=\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\}$$

$\dim(V)=2$.

בסיס של U:

$$\begin{pmatrix}2&1\\2&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&1\\0&0\\0&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

בסיס של U:

$$B(U)=\{\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2\}$$

$\dim(U)=2$.

ב)

$$Q=(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2)=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&1&2&1\\0&1&1&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}\ .$$

נדרג:

$$\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&1&2&1\\0&1&1&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&-2&-4&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&0\\0&-2&-4&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&0\\0&0&-2&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

העמודות 1, 2, 3 מובילות לכן בסיס של $V+U$ הוא

$$B(V+U) = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_1\}$$

ו $\dim(V+U)=3$.

ג) לפי משפט המימדים:

$$\dim(V+U) = \dim(V) + \dim(U) - \dim(V\cap U)$$

כיוון ש $\dim(V)=2$, $\dim(U)=2$, ו $\dim(V+U)=3$, אז

$$\dim(V\cap U) = 1 \ .$$

כדי למצוא בסיס של $U\cap V$ נמצא את $\mathrm{Nul}Q$. מסעיף הקודם המדורגת של Q היא:

$$Q \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית $Q\mathrm{x}=0$ הוא

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן בסיס של $\mathrm{Nul}Q$ הוא $\left\{ \mathrm{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. הווקטור x_1 מקיים את משוואת ההומוגנית של Q, לכן

$$Q\cdot \mathrm{x}_1 = \bar{0} \qquad \Rightarrow \qquad (\mathrm{v}_1 \ \mathrm{v}_2 \ \mathrm{u}_1 \ \mathrm{u}_2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \bar{0}$$

לכן נקבל

$$-1\cdot \mathrm{v}_1 + 1\cdot \mathrm{v}_2 - 1\cdot \mathrm{u}_1 + 2\cdot \mathrm{u}_2 = \bar{0} \qquad \Rightarrow \qquad -1\cdot \mathrm{v}_1 + 1\cdot \mathrm{v}_2 = 1\cdot \mathrm{u}_1 - 2\cdot \mathrm{u}_2 \ .$$

נגדיר את שני האגפים להיות הוקטור y:

$$\mathrm{y} := -1\cdot \mathrm{v}_1 + 1\cdot \mathrm{v}_2 = 1\cdot \mathrm{u}_1 - 2\cdot \mathrm{u}_2$$

נציב את הוקטורים ונמצא כי

$$\mathrm{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \ .$$

לכן בסיס של $U\cap V$ הוא

$$B(V\cap U) = \{\mathrm{y}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

שאלה 3

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix},\ \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix},\ \mathrm{v}_4=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix},\ \mathrm{v}_5=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\\-1\end{pmatrix},\ \mathrm{v}_6=\begin{pmatrix}5\\-2\\3\\-1\end{pmatrix},$$

$$W=\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3)\ ,\qquad U=\mathrm{sp}(\mathrm{v}_4,\mathrm{v}_5,\mathrm{v}_6)$$

א)

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&2\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to R_4-R_1]{\substack{R_2\to R_2-R_1\\R_3\to R_3-R_1}}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\0&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

עמודה 1 ועמודה 2 מובילות, לכן בסיס של W הינו

$$B(W)=\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\}\ .$$

$\dim(W)=2$.

$$\begin{pmatrix}1&2&5\\2&-2&-2\\3&0&3\\1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to R_4-R_1]{\substack{R_2\to R_2-2R_1\\R_3\to R_3-3R_1}}\begin{pmatrix}1&2&5\\0&-6&-12\\0&-6&-12\\0&-3&-6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4\to 2R_4-R_2]{R_3\to R_3-R_2}\begin{pmatrix}1&2&5\\0&-6&-12\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

עמודה 1 ועמודה 2 מובילות, לכן בסיס של U הינו

$$B(U)=\{\mathrm{v}_4,\mathrm{v}_5\}\ .$$

$\dim(U)=2$.

ב)

$$Q=\begin{pmatrix}1&2&1&1&2&5\\1&1&2&2&-2&-2\\1&2&1&3&0&3\\1&1&2&1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4-R_1]{\substack{R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3-R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_3+2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עמודות $1,2,4$ מובילות לכן בסיס של $U \cup W$ הינו

$$B\left(W \cup U\right) = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_4\} \ .$$

$\dim\left(W \cup U\right) = 3$ לכן הוקטורים $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3, \mathrm{v}_4, \mathrm{v}_5, \mathrm{v}_6$ לא פורשים $\mathbb{R}^4$ כי

$$\dim\left(\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3, \mathrm{v}_4, \mathrm{v}_5, \mathrm{v}_6\}\right) < 4 \ .$$

ג) האם $U + W = \mathbb{R}^4$? נמקו את תשובותיכם.
לא.

$$U + W = \mathrm{sp}\left(U \cup W\right)$$

$\dim\left(U \cup W\right) < 4$ מסעיף הקודם, לכן $U + W \neq \mathbb{R}^4$.

ד) האם $U \oplus W = \mathbb{R}^4$? נמקו את תשובותיכם.
לא. $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ רק אם $U + W = \mathbb{R}^4$ ו $U \cap W = \{\bar{0}\}$. כיוון ש $U + W \neq \mathbb{R}^4$ מסעיף הקודם אז $U \oplus W \neq \mathbb{R}^4$.

שאלה 4 נמצא מימד של W,U ושל $U \cap W$.
הפתרון הכללי הוא $x + y + z = 0 \Leftarrow x = -y - z$, $y, z \in \mathbb{R}$. לכן $\dim(U) = 2$.

$$\left.\begin{aligned} x &= z \\ x &= y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

פתרון הכללי: $(x, y, z) = z(1, 1, 1)$, $z \in \mathbb{R}$. לכן $\dim(W) = 1$.

נמצא את $\dim(U \cap W)$.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - z &= 0 \\ x - y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dim(U\cap W)=0$ בגלל שאין עמודות לא מובילות.

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)=2+1-0=3=\dim\mathbb{R}^3\ .$$

לכן $U+W=\mathbb{R}^3$. וגם $U\cap W=\{\bar{0}\}$. ז"א $U\oplus W=\mathbb{R}^3$.

<u>שאלה 5</u>

א)

$$\dim\left(U_1+U_2\right)=\dim\left(U_1\right)+\dim\left(U_2\right)-\dim\left(U_1\cap U_2\right)$$

מצד שני $U_1+U_2\subseteq V$ לכן

$$\dim\left(U_1+U_2\right)\leq\dim\left(V\right)$$

קיבלנו:

$$\dim\left(U_1\right)+\dim\left(U_2\right)-\dim\left(U_1\cap U_2\right)\leq\dim(V)\ .$$

לפי הנתון, $\dim(V)<\dim(U_1)+\dim(U_2)$ ז"א

$$\dim\left(U_1\right)+\dim\left(U_2\right)-\dim\left(U_1\cap U_2\right)<\dim(U_1)+\dim(U_2)\ .$$

מכאן

$$\dim\left(U_1\cap U_2\right)>0\ .$$

לפיכך

$$U_1\cap U_2\neq\{\bar{0}\}\ .$$

ב) הנתון, $\dim(U_1+U_2)=1+\dim(U_1\cap U_2)$. לפי משפט המימדים:

$$\dim\left(U_1+U_2\right)=\dim\left(U_1\right)+\dim\left(U_2\right)-\dim\left(U_1\cap U_2\right)$$

לכן

$$1+\dim(U_1\cap U_2)=\dim\left(U_1\right)+\dim\left(U_2\right)-\dim\left(U_1\cap U_2\right)$$

מכאן

$$1+2\dim(U_1\cap U_2)=\dim\left(U_1\right)+\dim\left(U_2\right)$$

נסמן $\dim(U_1\cap U_2)=k$. מתקיים: לכל $1\leq i\leq 2$

$$U_1\cap U_2\subseteq U_i\subseteq U_1+U_2$$

לכן

$$\dim(U_1\cap U_2)\leq\dim(U_i)\leq\dim(U_1+U_2)$$

ז"א

$$k\leq\dim(U_i)\leq k+1$$

כלומר $\dim(U_i)=k$ או $\dim(U_i)=k+1$.
קיבלנו קודם כי $\dim(U_1)+\dim(U_2)=1+2k$. לפיכך מקבלנים אחד מהמקרים הבאים:

<u>מקרה 1)</u> $\dim(U_1)=k$, $\dim(U_2)=k+1$

<u>מקרה 2)</u> $\dim(U_1) = k+1$, $\dim(U_2) = k$

<u>במקרה 1)</u> $U_1 \cap U_2 \subseteq U_1$, $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1)$ לכן

$U_1 = U_1 \cap U_2$.

$U_2 \subseteq U_1 + U_2$, $\dim(U_2) = \dim(U_1 + U_2)$ לכן

$U_2 = U_1 + U_2$.

<u>במקרה 2)</u> $U_1 \cap U_2 \subseteq U_2$, $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_2)$ לכן

$U_2 = U_1 \cap U_2$.

$U_1 \subseteq U_1 + U_2$, $\dim(U_1) = \dim(U_1 + U_2)$ לכן

$U_1 = U_1 + U_2$.