שיעור 1
מכונות טיורינג

1.1 הגדרה של מכונת טיורינג

הגדרה 1.1 מכונת טיורינג (הגדרה היוריסטית)

הקלט והסרט

- מכונת טיורינג (מ״ט) קורא קלט.
- הקלט עצמו נמצא על סרט אינסופי מחולק למשבצות.
- כל תו של הקלט כתוב במשבצת אחת של הסרט.
- במכונת טיורינג אנחנו מניחים שהסרט אינסופי לשני הכיוונים.
  - * משמאל לתחילת הקלט יש רצף אינסופי של תווי רווח "␣".
  - * מימין לסוף הקלט יש רצף אינסופי של תווי רווח "␣".

⋯	␣	␣	a	b	b	b	a	a	␣	␣	␣	⋯

הראש

- במצב ההתחלתי הראש בקצה השמאלי של הקלט.

⋯	␣	␣	a	b	b	b	a	a	␣	␣	␣	⋯
			↑									

- הראש יכול לזוז ימינה על הסרט וגם שמאלה על הסרט.
- הראש קורא את התוכן של המשבצת שבה הוא נמצא.
- הראש יכול לכתוב על משבצת, אבל רק על המשבצת שבה הראש נמצא.

תאור העבודה של המכונה

- בתחילת הריצה, הקלט כתוב התחילת הסרט כאשר מימינו נמצא רצף אינסופי של תווי ␣ -ים.
- הראש מצביע על התא הראשון בסרט והמכונה נמצאת במצב התחלתי q_0.

q_0	⋯	␣	␣	a	b	b	b	a	a	␣	␣	␣	⋯
				↑									

- בכל צעד חישוב, בהתאם למצב הנוכחי ולאות שמתחת לראש (התו הנקרא), המכונה מחליטה:
  - * לאיזה מצב לעבור
  - * מה לכתוב מתחת לראש (התו הנכתב)
  - * לאן להזיז את הראש (תא אחד ימינה, או תא אחד שמאלה, או להישאר במקום).
- למכונה ישנם שני מצבים מיוחדים:
  - * q_{acc}: אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל- q_{acc} היא עוברת ומקבלת.
  - * q_{rej}: אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל- q_{rej} היא עוברת ודוחה.
- אם המכונה לא מגיעה ל- q_{acc} או q_{rej} היא תמשיך לרוץ לנצח.

הגדרה 1.2 מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעיה

$$M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{\text{acc}},q_{\text{rej}})$$

כאשר:

Q	קבוצת מצבים סופית ולא ריקה	
Σ	אלפבית הקלט	$\text{\textvisiblespace} \notin \Sigma$
Γ	אלפבית הסרט	$\Sigma \subseteq \Gamma\ ,\ \text{\textvisiblespace} \in \Gamma$
δ	פונקצית המעברים	$\delta : (Q\backslash\{q_{\text{rej}},q_{\text{acc}}\} \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L,R\}$
q_0	מצב התחלתי	
q_{acc}	מצב מקבל יחיד	
q_{rej}	מצב דוחה יחיד	

דוגמה 1.1

נבנה מכונת טיורינג אשר מקבלת מילה אם היא בשפה

$$L=\left\{w\in\{a,b\}^*\middle|\#a_w=\#b_w\right\}\ .$$

ז"א השפת כל המילים עם מספר שווה אותיות a ו b. הפאודו-קוד של המכונה, כדלקמן.

<u>פסאודו-קוד</u>

1) סורקים את הקלט משמאול לימין.
- אם לא מצאנו a וגם לא מצאנו b $\Leftarrow$ מקבלת.
- אם האות הראשונה שהראש מצא היא a, כותבים עליו ✓, ועוברים לשלב 2).
- אם האות הראשונה שהראש מצא היא b, כותבים עליו ✓, ועוברים לשלב 3).

2) ממשיכים לזוז ימינה עד שנמצא b תואם.
- אם לא מצאנו b $\Leftarrow$ דוחה.
- אם מצאנו b כותבים עליו ✓, חוזרים לתחילת הקלט וחוזרים לשלב 1).

3) ממשיכים לזוז ימינה עד שנמצא a תואם.
- אם לא מצאנו a $\Leftarrow$ דוחה.
- אם מצאנו a כותבים עליו ✓, חוזרים לתחילת הקלט וחוזרים לשלב 1).

כעת נתן הגדרה פורמלית של המכונת טיורינג שמבצעת את האלגוריתם הזה.

$$M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{\text{acc}},q_{\text{rej}})$$

כאשר Q הקבוצת המצבנים הבאה:

$$Q=\{q_0,q_a,q_b,q_{\text{back}},q_{\text{rej}},q_{\text{acc}}\}\ .$$

המשמעותם של כל המצבים נרשמים בטבלה למטה:

q_0	המצב ההתחלתי. אליו נחזור אחרי כל סבב התאמה של זוג אותיות.
q_a	מצב שבו ראינו a ומחפשים b תואם.
q_b	מצב שבו ראינו b ומחפשים a תואם.
q_{back}	מצב שנשתמש בו כדי לחזור לקצה השמאלי של הקלט ולהתחיל את הסריקה הבאה (סבב ההתאמה הבא).
q_{acc}	מצב מקבל.
q_{rej}	מצב דוחה.

האלפבית של הקלט, Σ, והלפבית של הסרט, Γ, הינן:

$$\Sigma = \{\mathtt{a},\mathtt{b}\} \ , \qquad \Gamma = \{\mathtt{a},\mathtt{b},\llcorner\!\lrcorner,\checkmark\} \ .$$

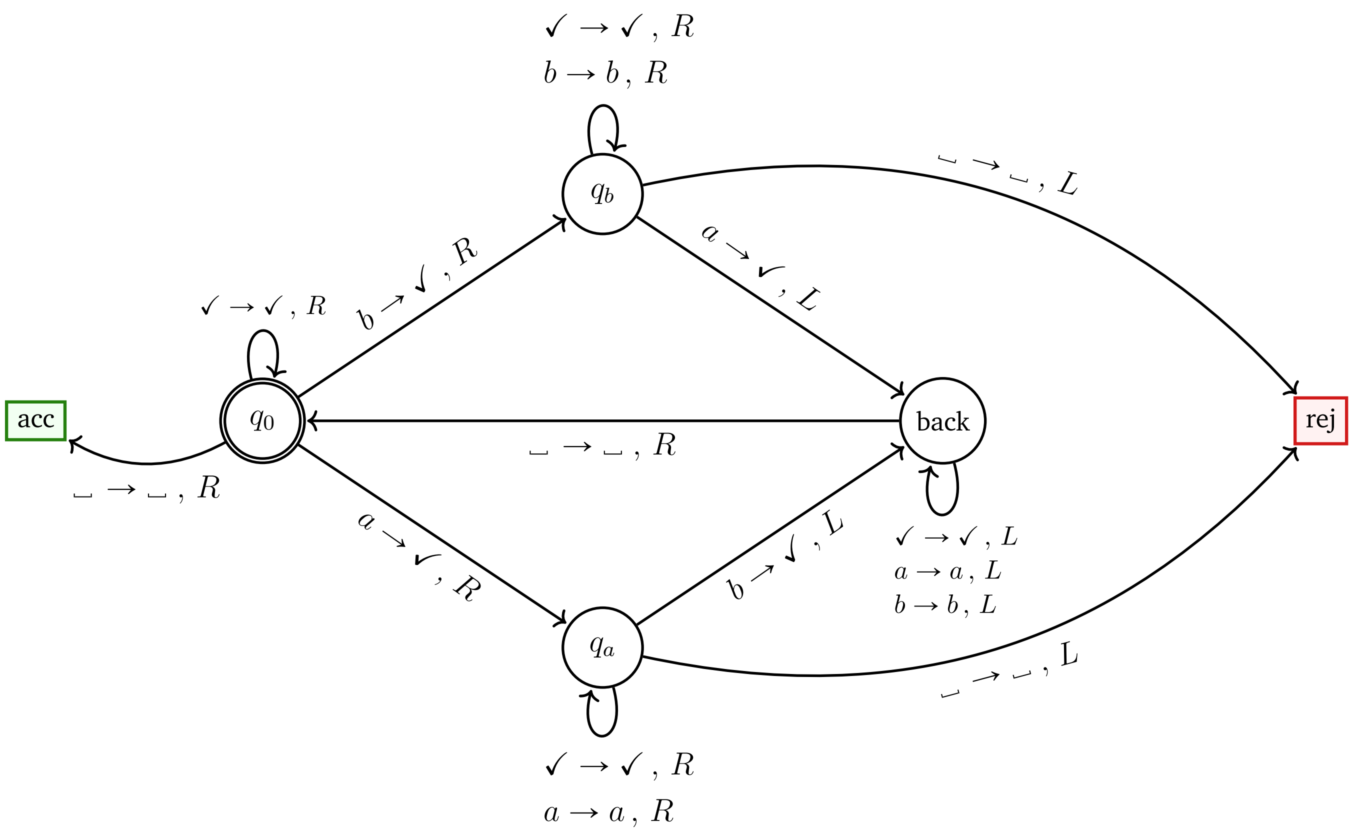
הפונקצית המעברים $\delta : Q \times \Sigma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ היא מוגדרת כדלקמן.

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, \mathtt{a}) &= (q_a, \checkmark, R) \ , \\
\delta(q_0, \mathtt{b}) &= (q_b, \checkmark, R) \ , \\
\delta(q_0, \llcorner\!\lrcorner) &= (q_{\text{acc}}, \llcorner\!\lrcorner, R) \ , \\
\delta(q_a, \checkmark) &= (q_a, \checkmark, R) \ , \\
\delta(q_a, \mathtt{a}) &= (q_a, \mathtt{a}, R) \ , \\
\delta(q_a, \mathtt{b}) &= (q_{\text{back}}, \checkmark, L) \ , \\
\delta(q_b, \checkmark) &= (q_b, \checkmark, R) \ , \\
\delta(q_b, \mathtt{b}) &= (q_a, \mathtt{b}, R) \ , \\
\delta(q_b, \mathtt{a}) &= (q_{\text{back}}, \checkmark, L) \ .
\end{aligned}$$

לעתים קל יותר לרשום את פונקציית המעבירים δ כטבלה:

$Q \backslash \Gamma$	$\mathtt{a}$	$\mathtt{b}$	$\llcorner\!\lrcorner$	$\checkmark$
q_0	$(q_a, \checkmark, R)$	$(q_b, \checkmark, R)$	$(q_{\text{acc}}, \llcorner\!\lrcorner, R)$	$(q_0, \checkmark, R)$
q_a	$(q_a, \mathtt{a}, R)$	$(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$	$(q_{\text{rej}}, \llcorner\!\lrcorner, L)$	$(q_a, \checkmark, R)$
q_b	$(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$	$(q_b, \mathtt{b}, R)$	$(q_{\text{rej}}, \llcorner\!\lrcorner, L)$	$(q_b, \checkmark, R)$
q_{back}	$(q_{\text{back}}, \mathtt{a}, L)$	$(q_{\text{back}}, \mathtt{b}, L)$	$(q_0, \llcorner\!\lrcorner, R)$	$(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$

<u>תרשים מצבים</u>



דוגמה 1.2

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה aab.

פתרון:

$\sqcup$	q_0	a	a	b	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	q_a	a	b	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	a	q_a	b	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	q_{back}	a	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	q_{back}	$\checkmark$	a	$\checkmark$	$\sqcup$
q_{back}	$\sqcup$	$\checkmark$	a	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	q_0	$\checkmark$	a	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	q_0	a	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_a	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	rej	$\checkmark$	$\sqcup$

דוגמה 1.3

בדקו אם המכונת טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה abbbaa.

פתרון:

$\sqcup$	q_0	a	b	b	b	a	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	q_a	b	b	b	a	a	$\sqcup$
$\sqcup$	q_{back}	$\checkmark$	$\checkmark$	b	b	a	a	$\sqcup$
q_{back}	$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	b	b	a	a	$\sqcup$
$\sqcup$	q_0	$\checkmark$	$\checkmark$	b	b	a	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	q_0	$\checkmark$	b	b	a	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_0	b	b	a	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_b	b	a	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	b	q_b	a	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_{back}	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_{back}	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	q_{back}	$\checkmark$	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	q_{back}	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
q_{back}	$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	q_0	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	q_0	$\checkmark$	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_0	$\checkmark$	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_0	b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_b	$\checkmark$	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_b	a	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_{back}	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$
$\sqcup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	q_{back}	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\sqcup$

␣	✓	✓	q_{back}	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	q_{back}	✓	✓	✓	✓	✓	␣
␣	q_{back}	✓	✓	✓	✓	✓	✓	␣
q_{back}	␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	␣
␣	q_0	✓	✓	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	q_0	✓	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	✓	q_0	✓	✓	✓	✓	␣
␣	✓	✓	✓	q_0	✓	✓	✓	␣
␣	✓	✓	✓	✓	q_0	✓	✓	␣
␣	✓	✓	✓	✓	✓	q_0	✓	␣
␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	q_0	␣
␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	␣	q_{acc}

הגדרה 1.3 קונפיגורציה

תהי $M=(Q,q_0,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{\text{acc}},q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג. **קונפיגורציה** של M הינה מחרוזת

$$uq\sigma \mathrm{v}$$

כאשר משמעות:

$$u,\mathrm{v}\in\Gamma^* \ , \qquad \sigma\in\Gamma \ , \qquad q\in Q \ .$$

q מצב המכונה,
σ הסימון במיקום הראש
u תוכן הסרט משמאל לראש,
v תוכן הסרט מימין לראש.

דוגמה 1.4 (המשך של דוגמה 1.2)

u	q	σ	v
␣	q_0	a	a b ␣
␣ ✓	q_a	a	b ␣
␣ ✓ a	q_a	b	␣
␣ ✓	q_{back}	a	✓ ␣
␣	q_{back}	✓	a ✓ ␣
␣	q_{back}	␣	✓ a ✓ ␣
␣	q_0	✓	a ✓ ␣
␣ ✓	q_0	a	✓ ␣
␣ ✓ ✓	q_a	✓	␣
␣ ✓ ✓ ✓	q_a	␣	␣
␣ ✓ ✓	q_{rej}	✓	␣

דוגמה 1.5

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת כל מילה בשפה

$$L=\{a^n \,|\, n=2^k \ , \ k\in\mathbb{N}\}$$

ז"א מילים בעלי מספר אותיות a אשר חזקה של 2.

פתרון:

ראשית נשים לב למשפט הבא:

משפט 1.1

מספר שלם n שווה לחזקה אי-שלילית של 2, כלומר $(k \geqslant 0) \quad n = 2^k$ אם ורק אם קיים שלם m עבורו חילוק של n ב- 2 בדיוק m פעמים נותן 1.

הוכחה:

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

אם $n = 2^k \ (k \geqslant 0)$ אז $\frac{n}{2^k} = 1$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

אם קיים $m \geqslant 0$ עבורו $\frac{n}{2^m} = 1$ אז $n = 2^m$ ולכן n שווה לחזקה אי-שלילית של 2. ■

לאור המשפט הזה נבנה אלגוריתם אשר מחלק את מספר האותיות במילה ב- 2 שוב ושוב בצורה איטרטיבית.

- אם אחרי סיבוב מסויים נקבל מספר אי-זוגי שונה מ- 1, אז אין מצב שמספר האותיות a הוא חזקה של 2.
- בצד שני אם אחרי סיבוב כלשהו נקבל בדיוק a אחת הנשארת, ז"א אחרי מספר מסוים של חילוקים של המספר אותיות a קיבלנו 1, אזי מובטח לנו שהמספר של אותיות a הוא שווה לחזקה של 2.

כעת נסביר כיצד המכונת טיורינג מבצעת את השיטה הזאת בפועל כדלקמן.

1) במצב ההתחלתי יש מחרוזת של רצף אותיות a כתובה על הסרט והראש נמצא מתחת האות הראשונה.

␣	␣	a	a	a	a	a	a	a	a	␣	␣
		↑									

2) עוברים על הקלט משמאל לימין ומבצעים מחיקה לסירוגין של האות a. כלומר, אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר וכן הלאה, עד שמגיעים לקצה הימין של המילה.

␣	␣	✓	a	✓	a	✓	a	✓	a	␣	␣
									↑		

3) אחרי שהראש הגיע לסוף המילה:

- אם מצאנו אות a אחת בדיוק $\Leftarrow$ המכונה תקבל.
- אם כתוב ✓ בתו האחרון $\Leftarrow$ המכונה תדחה.
- אחרת, אם כתוב a בתו האחרון הראש חוזר לתחילת המחרוזת וחוזרים לשלב 2).

כדוגמה של מילה המתקבלת על ידי האלגוריתם, למטה רשומות האיטרציות של האלגוריתם הזה על המילה $w = aaaaaaaa$ (8 אותיות a). במצב ההתחלתי הסרט נראה כדלקמן.

␣	␣	a	a	a	a	a	a	a	a	␣	␣
		↑									

איטרציה 1) לבסוף האיטרציה $i = 1$ הסרט נראה כך:

␣	␣	✓	a	✓	a	✓	a	✓	a	␣	␣
									↑		

התו האחרון a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

איטרציה 2 בסוף האיטרציה $i=2$ הסרט נראה כך:

␣	␣	✓	✓	✓	a	✓	✓	✓	a	␣	␣
									↑		

התו הראשון הוא a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

איטרציה 3 לאחר האיטרציה $i=3$ הסרט נראה כך:

␣	␣	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	a	␣	␣
									↑		

התו האחרון הוא a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

איטרציה 4 באיטרציה $i=4$ יש אות a אחת בדיוק אז המכונה מקבלת.

כדוגמה של מילה הלא המתקבלת על ידי האלגוריתם, למטה רשומות האיטרציות של האלגוריתם הזה על המילה $w=aaaaaa$ (6 אותיות a).
במצב ההתחלתי הסרט נראה כדלקמן.

␣	␣	a	a	a	a	a	a	␣	␣
		↑							

איטרציה 1 לבסוף האיטרציה $i=1$ הסרט נראה כך:

␣	␣	✓	a	✓	a	✓	a	␣	␣
							↑		

התו האחרון a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

איטרציה 2 בסוף האיטרציה $i=2$ הסרט נראה כך:

␣	␣	✓	✓	✓	a	✓	✓	␣	␣
							↑		

התו הראשון הוא ✓ אז דוחה.

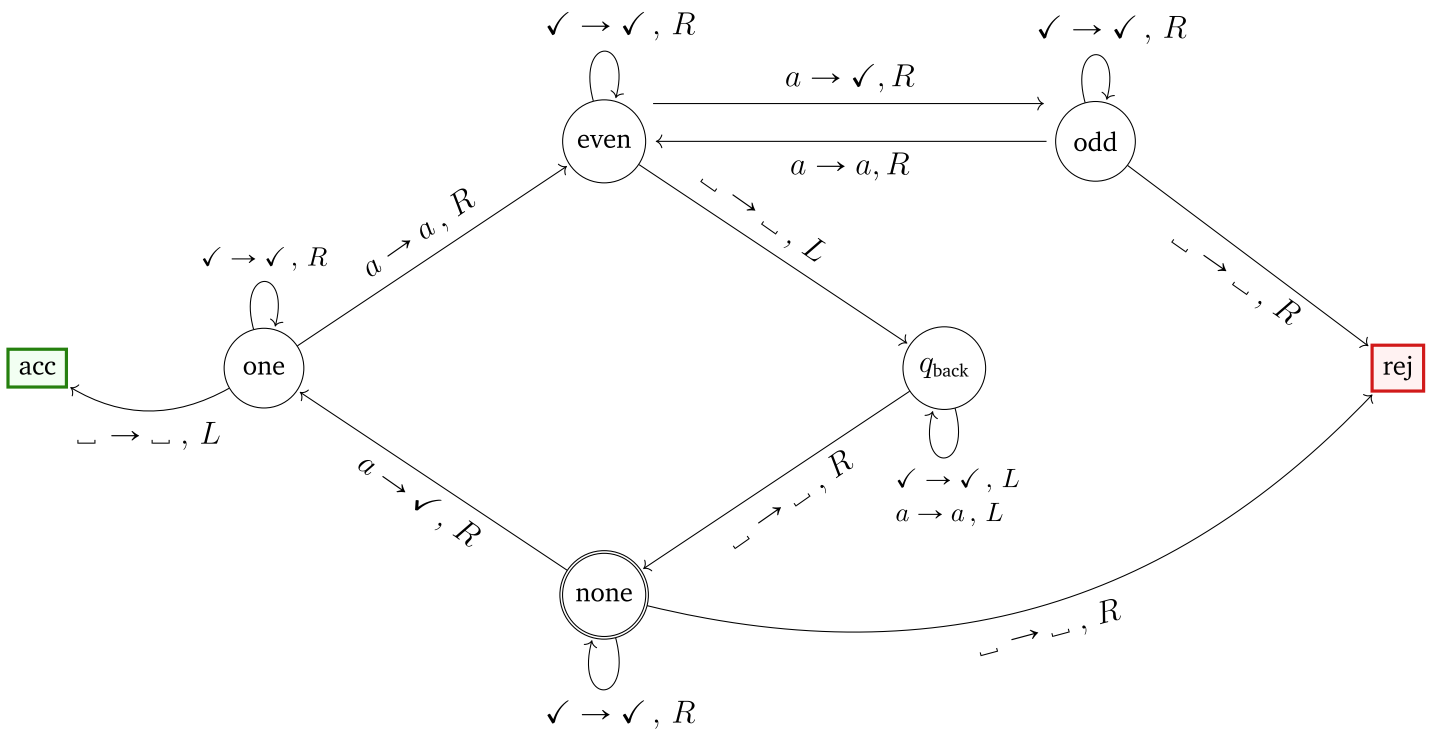
כעת נתן הגדרה פורמלית של המכונת טיורנג שמקבלת השפה הזאת:

$$M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{\text{acc}},q_{\text{rej}})\ ,$$

כאשר $\Sigma=\{a\}$, $\Gamma=\{a,\sqcup,\checkmark\}$, והקבוצת המצבים היא $Q=\{q_0,\text{one},\text{even},\text{odd},q_{\text{acc}},q_{\text{rej}}\}$ כאשר המשמעותם הם מפורטים למטה:

מצב none: מצב התחלתי. עדיין לא קראנו a בסבב סריקה זה.
מצב one: קראנו a בודד.
מצב even: קראנו מספר זוגי של a .
מצב odd: קראנו מספר אי-זוגי של a .
מצב q_{back}: חזרה שלמאלה.

הפונקצית המעברים מתוארת על ידי התרשים מצבים למטה.



דוגמה 1.6

בדקו אם המילה aaaa מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.5.

פתרון:

␣	none	a	a	a	a	␣
␣	✓	one	a	a	a	␣
␣	✓	a	even	a	a	␣
␣	✓	a	✓	odd	a	␣
␣	✓	a	✓	a	even	␣
␣	✓	a	✓	back	a	␣
␣	✓	a	back	✓	a	␣
␣	✓	back	a	✓	a	␣
␣	back	✓	a	✓	a	␣
back	␣	✓	a	✓	a	␣
␣	none	✓	a	✓	a	␣
␣	✓	none	a	✓	a	␣
␣	✓	✓	one	✓	a	␣
␣	✓	✓	✓	one	a	␣
␣	✓	✓	✓	a	even	␣
␣	✓	✓	✓	back	a	␣
␣	✓	✓	back	✓	a	␣
␣	✓	back	✓	✓	a	␣
␣	back	✓	✓	✓	a	␣
back	␣	✓	✓	✓	a	␣
␣	none	✓	✓	✓	a	␣
␣	✓	none	✓	✓	a	␣
␣	✓	✓	none	✓	a	␣

␣	✓	✓	✓	none	a	␣
␣	✓	✓	✓	✓	one	␣
␣	✓	✓	✓	acc	✓	␣

u	q	σ	v
␣	none	a	aaa ␣
␣ ✓	one	a	aa ␣
␣ ✓ a	even	a	a ␣
␣ ✓ a ✓	odd	a	␣
␣ ✓ a ✓ a	even	␣	␣
␣ ✓ a ✓	back	a	␣
␣ ✓ a	back	✓	a ␣
␣ ✓	back	a	✓ a ␣
␣	back	✓	a ✓ a ␣
␣	back	␣	✓ a ✓ a ␣
␣	none	✓	a ✓ a ␣
␣✓	none	a	✓ a ␣
␣✓✓	one	✓	a ␣
␣✓✓✓	one	a	␣
␣✓✓✓ a	even	␣	␣
␣✓✓✓	back	a	␣
␣✓✓	back	✓ a	␣
␣✓	back	✓	✓ a ␣
␣	back	✓	✓✓ a ␣
␣	back	␣	✓✓✓ a ␣
␣	none	✓	✓✓ a ␣
␣✓	none	✓	✓ a ␣
␣✓✓	none	✓	a ␣
␣✓✓✓	none	a	␣
␣✓✓✓✓	one	␣	␣
␣✓✓✓	acc	✓	␣

דוגמה 1.7

בדקו אם המילה aaa מתקבלת על ידי המכונת טיורינג בדוגמה 1.5.

פתרון:

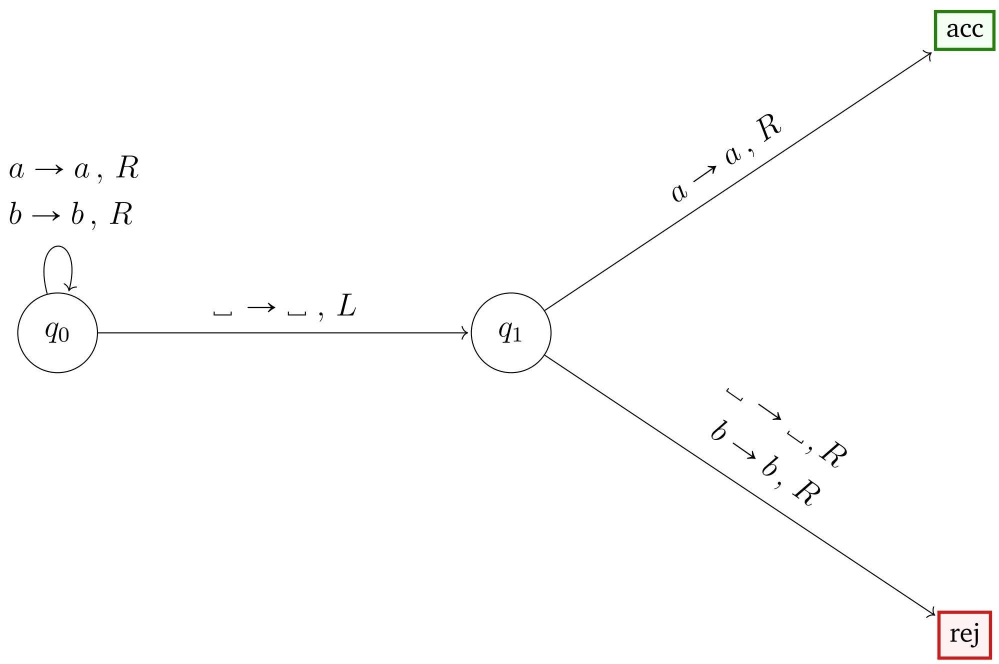
␣	none	a	a	a	␣
␣	✓	one	a	a	␣
␣	✓	a	even	a	␣
␣	✓	a	✓	odd	␣
␣	✓	a	✓	␣	rej

u	q	σ	v
␣	none	a	aa ␣

␣ ✓	one	a	a ␣
␣ ✓ a	even	a	␣
␣ ✓ a ✓	odd	␣	␣
␣ ✓ a ✓ ␣	rej	␣	␣

דוגמה 1.8

מהי השפה של המכונה למטה:



פתרון:

1) סורקים את הקלט משמאל לימין.

- אם התו הנקרא a או b עוברים לתו ימינה הבא וחוזרים לשלב 1).
- אם התו הנקרא ␣ אז הגענו לסוף הקלט, ועוברים לשלב 2).

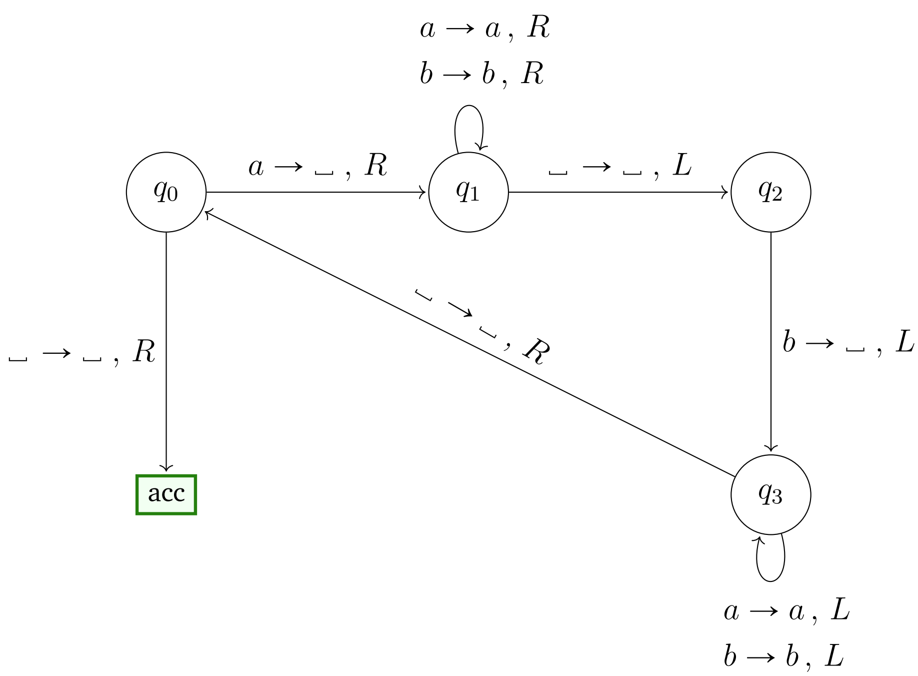
2) עוברים שמאלה לתו הארון של המילה.

- אם התו הנקרא a $\Leftarrow$ מקבל.
- אחרת דוחה.

לכן המכונה מקבלת שפת המילים המסתיימות באות a.

דוגמה 1.9

מהי השפה של המכונה למטה:



פתרון:

1) במצב ההתחלתי:

- אם התו הנקרא $\sqcup$ $\Leftarrow$ מקבל.
- אם התו הנקרא a מורידים אותו על ידי $\sqcup$ ועוברים לשלב 2).
- אחרת $\Leftarrow$ דוחה.

2) עוברים ימינה עד שמגיעים לסוף המילה.

- אם התו האחרון הוא b, מורידים אותו על ידי $\sqcup$, חוזרים לתחילת המילה וחוזרים לשלב 1).
- אחרת דוחה.

בכל איטרציה המכונה מורידה תו a בתחילת המילה וחוזרת ומורידה תו b תואם בסוף המילה. בכל איטרציה אם המכונה לא מוצאת b תואם בסוף המילה היא דוחה המילה. אחרת אם המכונה לא דחתה המילה וכל האותיות נמחקות אז המילה מתקבלת. לכן המכונה מקבלת שפת המילים

$$\left\{a^n b^n \middle| n \geqslant 0\right\}\ .$$

הגדרה 1.4 גרירה בצעד אחד

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M.
נסמן

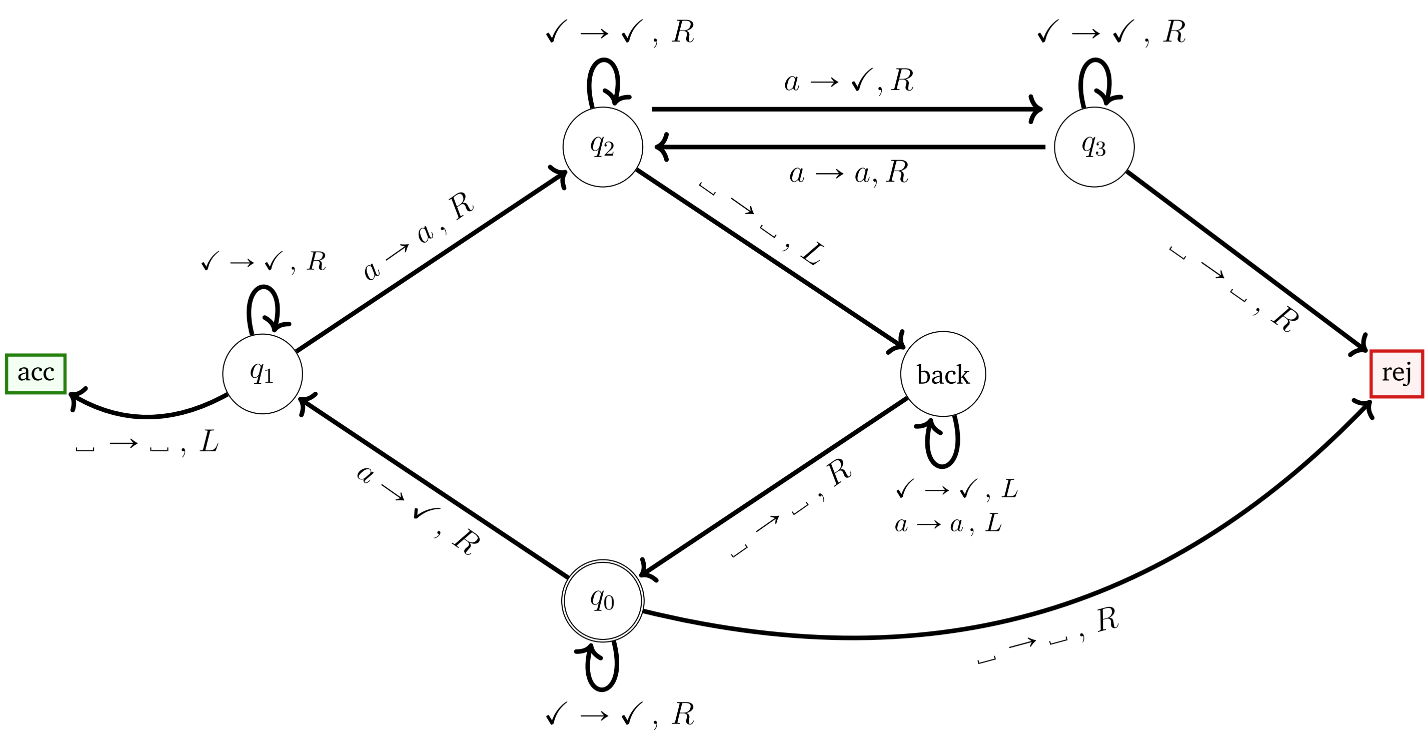
$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם כשנמצאים ב- c_1 עוברים ל- c_2 בצעד בודד.

דוגמה 1.10 (המשך של דוגמה 1.5)

עבור המכונת טיורינג שמתוארת בתרשים למטה מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \ \vdash_M \ \checkmark\checkmark q_1 \checkmark a$$



הגדרה 1.5 גרירה בכללי

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M. נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

אם ניתן לעבור מ- c_1 ל- c_2 ב- 0 או יותר צעדים.

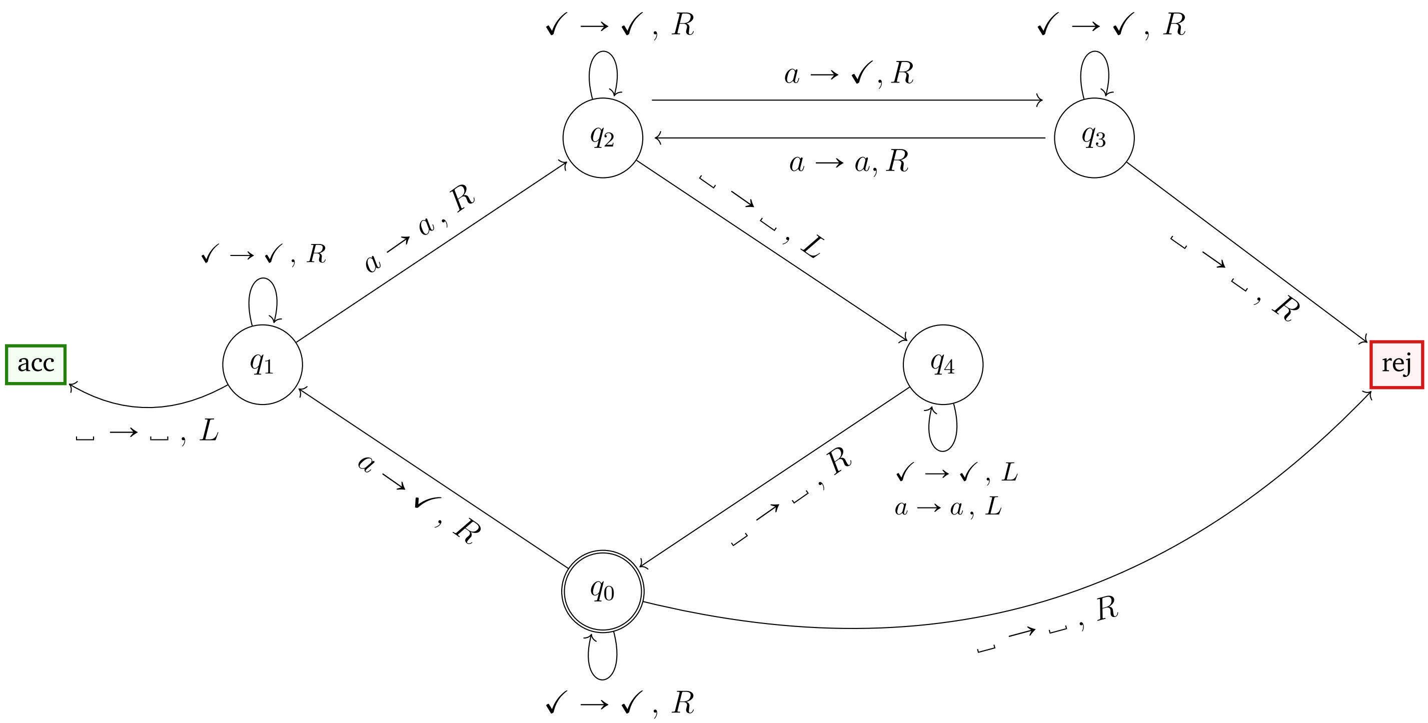
דוגמה 1.11 (המשך של דוגמה 1.5)

עבור המכונת טיורינג שמתוארת בתרשים למטה מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \ \vdash_M^* \ \checkmark\checkmark\checkmark q_4 a$$

בגלל ש:

$$\begin{aligned}
\checkmark q_0 a \checkmark a \ &\vdash_M \checkmark\checkmark q_1 \checkmark a \\
&\vdash_M \checkmark\checkmark\checkmark q_1 a \\
&\vdash_M \checkmark\checkmark\checkmark a q_2 \sqcup \\
&\vdash_M \checkmark\checkmark\checkmark q_4 a \ .
\end{aligned}$$



הגדרה 1.6 קבלה ודחייה של מחרוזת

תהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{\text{acc}}\ ,\ q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $w\in\Sigma^*$ מחרוזת. אומרים כי:

- M **מקבלת** את w אם

$$q_0 w \quad \vdash_M^* \quad u\ q_{\text{acc}}\,\sigma\,\text{v}$$

כאשר $\sigma\in\Gamma$, $u,\text{v}\in\Gamma^*$ כלשהם.

- M **דוחה** את w אם

$$q_0 w \quad \vdash_M^* \quad u\ q_{\text{rej}}\ \sigma\ \text{v}$$

כאשר $\sigma\in\Gamma$, $u,\text{v}\in\Gamma^*$ כלשהם.

הגדרה 1.7 הכרעה של שפה

תהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,\text{acc}\,,q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L\subseteq\Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מכריעה** את L אם לכל $w\in\Sigma^*$ מתקיים:

- $w\in L \Leftarrow M$ מקבלת את w.
- $w\notin L \Leftarrow M$ דוחה את w.

הגדרה 1.8 קבלה של שפה

תהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{\text{acc}}\ ,\ q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L\subseteq\Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מקבלת** את L אם לכל $w\in\Sigma^*$ מתקיים:

- אם $w\in L$ אז M מקבלת את w.
- אם $w\notin L$ אז M לא מקבלת את w.

במקרה כזה כאשר M מקבלת את השפה L, נכתוב ש-

$$L(M) = L \ .$$

1.2 טבלת המעברים

דוגמה 1.12

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

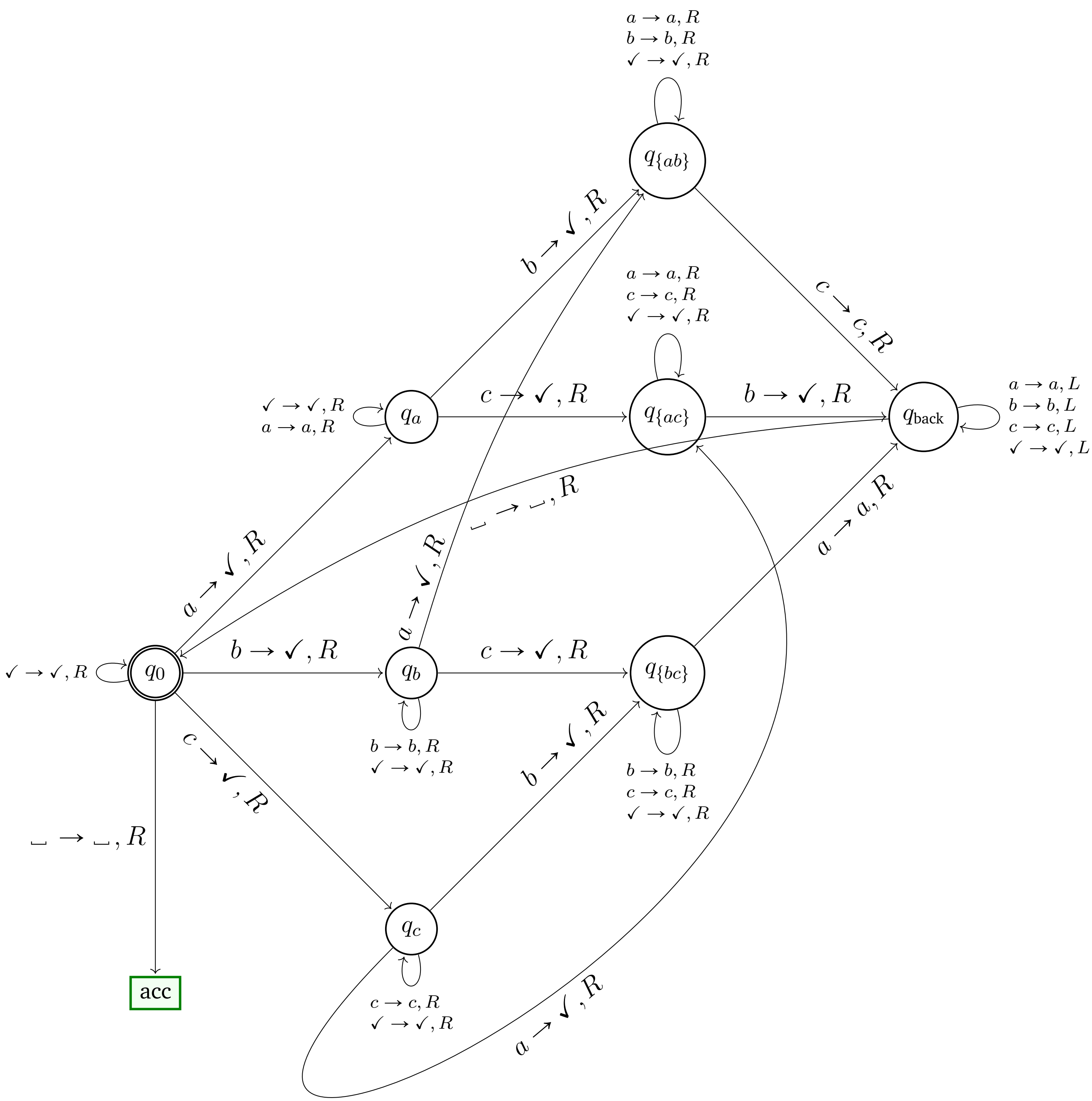
$$L = \left\{ w = \{a,b,c\}^* \middle| \#a_w = \#b_w = \#c_w \right\}$$

פתרון:
נתאר את המכונה על ידי הטבלת המעברים של המכונה. הסימן S מסמן כל זוג אותיות שונות מהקבוצה $\{a,b,c\}$ ללא חשיבות לסדר. כלומר:

$$S = \{a,b\} \ , \quad S = \{b,c\} \ , \quad S = \{a,c\} \ .$$

מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
q_0	σ	$q.\sigma$	$\checkmark$	R	$\sigma \in \{a,b,c\}$
$q.\sigma$	σ	$q.\sigma$	$\circlearrowleft$	R	$\sigma \in \{a,b,c\}$
$q.\sigma$	τ	$q.\{\sigma\tau\}$	$\checkmark$	R	$\sigma,\tau \in \{a,b,c\} \ \wedge \ \sigma \neq \tau$
$q.S$	σ	$q.S$	σ	R	$\sigma \in S$
qS	σ	q_{back}	$\checkmark$	L	$\sigma \notin S$
q_{back}	$a,b,c,\checkmark$	q_{back}	$\circlearrowleft$	L	
q_0	$\sqcup$	q_{acc}	$\circlearrowleft$	R	
q_{back}	$a,b,c,\checkmark$	q_{back}	$\circlearrowleft$	L	
q_{back}	$\sqcup$	q_0	$\circlearrowleft$	R	

כעת נתאר את המכונה על ידי תרשים המצבים של המכונה:


a → a, R
b → b, R
✓ → ✓, R
q{ab}
b → ✓, R
c → c, R
a → a, R
c → c, R
✓ → ✓, R
✓ → ✓, R
a → a, R
qa
c → ✓, R
q{ac}
b → ✓, R
qback
a → a, L
b → b, L
c → c, L
✓ → ✓, L
␣ → ␣, R
a → ✓, R
a → ✓, R
a → a, R
✓ → ✓, R
q0
b → ✓, R
qb
c → ✓, R
q{bc}
b → b, R
✓ → ✓, R
c → ✓, R
b → ✓, R
b → b, R
c → c, R
✓ → ✓, R
␣ → ␣, R
qc
acc
c → c, R
✓ → ✓, R
a → ✓, R

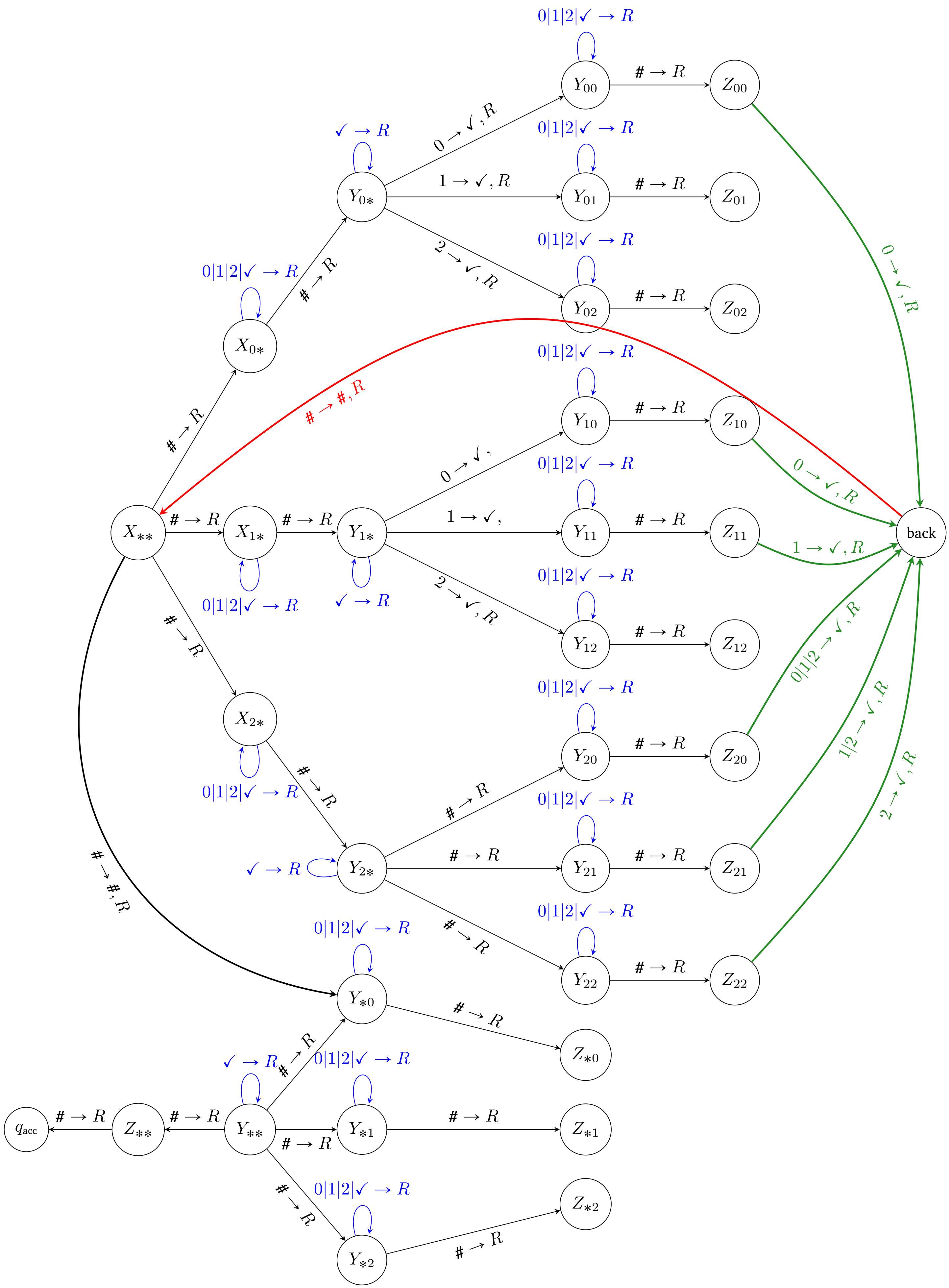
דוגמה 1.13

בנו מכונת טיורינג שמכריעה את השפה

$$\left\{x_1 \ldots x_k \# y_1 \ldots y_k \# z_1 \ldots z_k \,\middle|\, x_i, y_i, z_i \in \{0,1,2\}\ ,\ \forall i, x_i \geqslant z_i \geqslant y_i\right\}$$

פתרון:

מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
$X**$	σ	$X\sigma *$	$\checkmark$	R	
$X**$	$\checkmark$	$X**$	$\checkmark$	R	
$X\sigma *$	$0,1,2,\checkmark$	$X\sigma *$	$\circlearrowleft$	R	
$X\tau *$	$\#$	$Y\tau *$	$\circlearrowleft$	R	
$Y\tau *$	σ	$Y\tau\sigma$	$\circlearrowleft$	R	
$Y\tau *$	$\checkmark$	$Y\tau *$	$\circlearrowleft$	R	
$Y\tau\sigma$	$0,1,2,\checkmark$	$Y\tau\sigma$	$\circlearrowleft$	R	
$Y\tau_1\tau_2$	$\#$	$Z\tau_1\tau_2$	$\circlearrowleft$	R	
$Z\tau_1\tau_2$	$\checkmark$	$Z\tau_1\tau_2$	$\circlearrowleft$	R	
$Z\tau_1\tau_2$	σ	q_{back}	$\checkmark$	L	
$Z**$	$\sqcup$	q_{acc}	$\circlearrowleft$	R	$\tau_1 \geqslant \sigma \geqslant \tau_2$
q_{back}	$0,1,2,\checkmark$	q_{back}	$\circlearrowleft$	L	
q_{back}	$\sqcup$	$X**$	$\circlearrowleft$	R	


$0|1|2|\checkmark \to R$
Y_{00}
$\# \to R$
Z_{00}
$0 \to \checkmark, R$
$\checkmark \to R$
$0|1|2|\checkmark \to R$
Y_{0*}
$1 \to \checkmark, R$
Y_{01}
$\# \to R$
Z_{01}
$0 \to \checkmark, R$
$0|1|2|\checkmark \to R$
$2 \to \checkmark, R$
$0|1|2|\checkmark \to R$
$\# \to R$
Y_{02}
$\# \to R$
Z_{02}
X_{0*}
$\# \to \#, R$
$0|1|2|\checkmark \to R$
Y_{10}
$\# \to R$
Z_{10}
$\# \to R$
$0 \to \checkmark,$
$0|1|2|\checkmark \to R$
$0 \to \checkmark, R$
X_{**}
$\# \to R$
X_{1*}
$\# \to R$
Y_{1*}
$1 \to \checkmark,$
Y_{11}
$\# \to R$
Z_{11}
$1 \to \checkmark, R$
back
$0|1|2|\checkmark \to R$
$\checkmark \to R$
$2 \to \checkmark, R$
$0|1|2|\checkmark \to R$
$\# \to R$
Y_{12}
$\# \to R$
Z_{12}
$0|1|2 \to \checkmark, R$
$0|1|2|\checkmark \to R$
X_{2*}
Y_{20}
$\# \to R$
Z_{20}
$1|2 \to \checkmark, R$
$0|1|2|\checkmark \to R$
$\# \to R$
$\# \to R$
$0|1|2|\checkmark \to R$
$2 \to \checkmark, R$
$\checkmark \to R$
Y_{2*}
$\# \to R$
Y_{21}
$\# \to R$
Z_{21}
$\# \to \#, R$
$0|1|2|\checkmark \to R$
$0|1|2|\checkmark \to R$
$\# \to R$
Y_{22}
$\# \to R$
Z_{22}
Y_{*0}
$\# \to R$
Z_{*0}
$\checkmark \to R$
$\# \to R$
$0|1|2|\checkmark \to R$
q_{acc}
$\# \to R$
Z_{**}
$\# \to R$
Y_{**}
$\# \to R$
Y_{*1}
$\# \to R$
Z_{*1}
$\# \to R$
$0|1|2|\checkmark \to R$
Z_{*2}
Y_{*2}
$\# \to R$

1.3 חישוב פונקציות

הגדרה 1.9 מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה f

תהי $f:\Sigma_1^*\to\Sigma_2^*$ ותהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{\text{acc}},q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג.
אומרים כי M מחשבת את f אם:

- $\Sigma_1=\Sigma$ ו- $\Sigma_2\subset\Gamma$.
- לכל $w\in\Sigma_1^*$ מתקיים $q_0w\vdash q_{\text{acc}}f(w)$.

דוגמה 1.14 חיבור אונרי

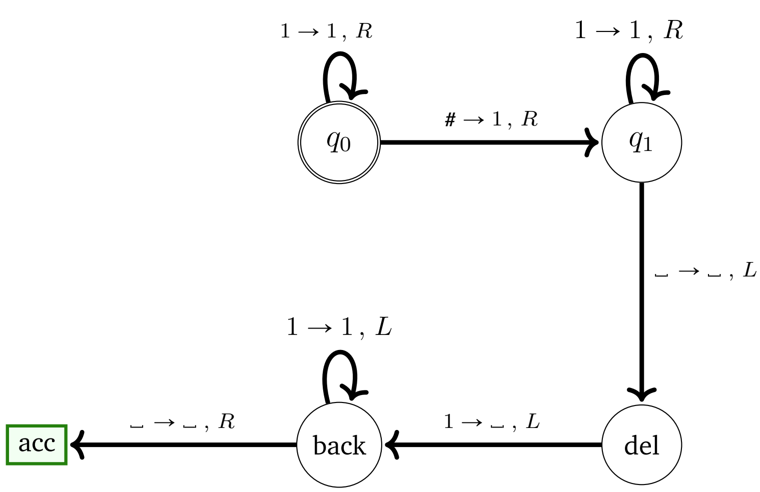
בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i\#1^j$$

ומחזירה את פלט

$$1^{i+j}\ .$$

פתרון:



דוגמה 1.15 כפל אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i\#1^j$$

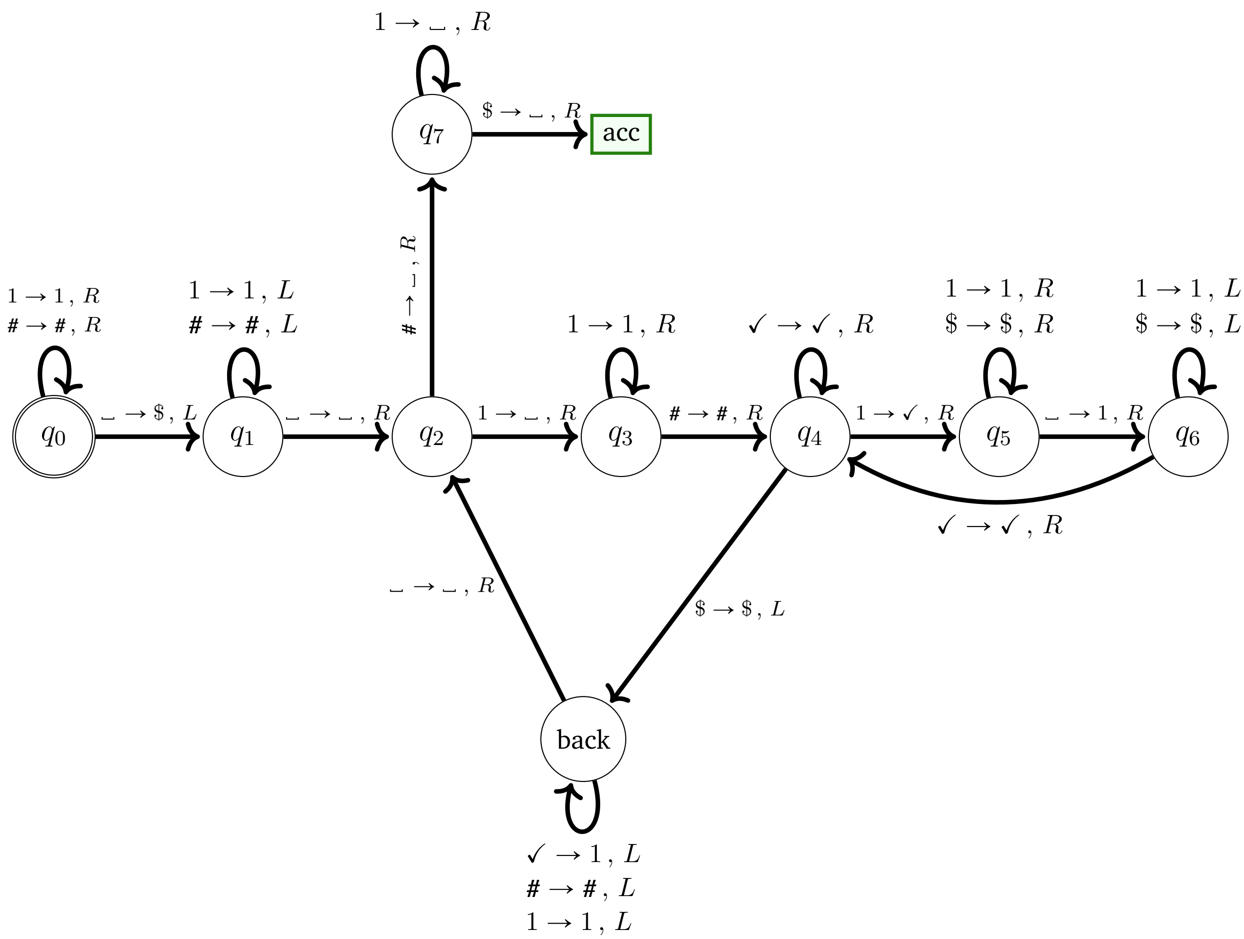
ומחזירה את פלט

$$1^{i\cdot j}\ .$$

פתרון:

- לדוגמה, נניח שהקלט הוא 2 כפול 2.
  הקלט הוא 11#11.

- נרצה להבדיל בין הקלט לבין הפלט.
  לכן בתחילת הריצה, נתקדם ימינה עד סוף הקלט ונוסיף שם את התו $.
  לאחר מכן נחזור לתחילת הקלט.
- על כל אות 1 במילה השמאלית נעתיק את המילה הימנית לאחר סימן ה- $.
- לאחר מכן נשאיר רק את התווים שלאחר סימן ה $. כלומר, נמחק את כל מה שאינו פלט.



μ	q	σ	ν
␣	q_0	1	1#11␣
␣11#11	q_1	␣	␣
␣11#11	q_1	$	␣
␣	q_1	␣	11#11$
␣	q_2	1	1#11$
␣ ␣	q_3	1	#11$
␣ ␣1#	q_4	1	1$
␣ ␣1#✓	q_5	1	$
␣ ␣1#✓1$	q_5	␣	␣
␣ ␣1#✓1$1	q_6	␣	␣
␣ ␣1#	q_6	✓	1$1 ␣
␣ ␣1#✓	q_4	1	$1 ␣
␣ ␣1#✓✓	q_5	$	1 ␣
␣ ␣1#✓✓$1	q_5	␣	␣
␣ ␣1#✓✓$11	q_6	␣	␣

$\sqcup\sqcup 1\#\checkmark$	q_6	$\checkmark$	$\$11\sqcup$
$\sqcup\sqcup 1\#\checkmark\checkmark$	q_4	$\$$	$11\sqcup$
$\sqcup\sqcup 1\#\checkmark$	back	$\checkmark$	$\$11\sqcup$
$\sqcup$	back	$\sqcup$	$1\#11\$11\sqcup$
$\sqcup\sqcup$	q_2	1	$\#11\$11\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup$	q_3	$\#$	$11\$11\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\#$	q_4	1	$1\$11\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\#\checkmark$	q_5	1	$\$11\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\#\checkmark 1\$11$	q_5	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\#\checkmark 1\$111$	q_6	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\#$	q_6	$\checkmark$	$1\$111\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\#\checkmark$	q_4	1	$\$111\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\#\checkmark\checkmark$	q_5	$\$$	$111\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\#\checkmark\checkmark\$111$	q_5	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\#\checkmark\checkmark\$1111$	q_6	$\sqcup$	$\sqcup$
$\sqcup\sqcup\sqcup\#\checkmark$	q_4	$\checkmark$	$\$1111$
$\sqcup\sqcup\sqcup\#\checkmark\checkmark$	q_4	$\$$	1111
$\sqcup\sqcup\sqcup\#\checkmark$	back	$\checkmark\$$	1111
$\sqcup\sqcup$	back	$\sqcup$	$\#11\$1111$
$\sqcup\sqcup\sqcup$	q_2	$\#$	$11\$1111$
$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$	q_7	1	$1\$1111$
$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$	q_7	$\$$	1111
$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$	acc	1	111