היחידה למתמטיקה

14/06/2022 ט"ו בסיוון תשפ"ב
09 : 00 – 12 : 00

חדו"א 2

מועד א'

מרצים: ד'ר ירמיהו מילר, ד'ר אבנר סגל

תשפ"ב סמסטר ב'

השאלון מכיל עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (עמודים בפורמט $A4$),מצורפים לשאלון.

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות בלבד מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** בלבד מתוך **שתיים**.

==

שאלות 1-2 חובה

שאלה 1 (20 נקודות)

נתונה הפונקציה $z = 2x^2 + y^2 + 4x + 5$.

א) (10 נקודות) מצאו את הנקודות הקריטיות של הפונקציה ובררו את סוגן.

ב) (10 נקודות) מצאו את הערך המקסימלי או הערך המינימאלי אותם מקבלת הפונקציה בתחום הסגור החסום ע"י המעגל $x^2 + y^2 = 9$.

שאלה 2 (22 נקודות)

א) (10 נקודות) מצאו את תחום ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(x-2)^n}{5^n(n^2+1)}$$

האם הטור מתכנס בנקודה $x = -3$? אם כן, האם זו התכנסות בהחלט או בתנאי?

ב) (12 נקודות) סרטטו את תחום האינטגרציה, החליפו את סדר האינטגרציה וחשבו:

$$\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2}\, dx$$

שאלה 3 (16 נקודות)

א) (12 נקודות) נתונים שני המישורים

$$\begin{aligned} \pi_1: \quad & -4x + 2y + 8z - 10 &= 0 \\ \pi_2: \quad & x + ky - 2z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

כאשר $k \in \mathbb{R}$ הוא פרמטר ממשי. מצאו את ערך הפרמטר k שעבורו המישורים מקבילים. עבור ערך זה של k מצאו את מרחק בין המישורים.

ב) (4 נקודות) בררו את התכנסות הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n-1)^7 \cdot n^{2022}}{n!}$$

שאלה 4 **(16 נקודות)** נתון המשטח

$$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{2}+\frac{(z-4)^2}{4}=1\ .$$

א) (12 נקודות) מצאו את משוואת המישור המשיק למשטח בנקודה $A(3,4,3)$ ומצאו את סינוס הזווית בין מישור זה לבין ציר ה- z.

ב) (4 נקודות) מצאו את משוואת המשיק למשטח בנקודה $B(4,3,4)$.

שאלה 5 **(16 נקודות)**

נתון הגוף D החסום ע"י המשטחים

$$x=0\,,\quad y=0\,,\quad x+y=4\,,\quad z=0\,,\quad z=16-y^2\ .$$

א) (4 נקודות) סרטטו את הגוף D.

ב) (12 נקודות) חשבו את נפח הגוף D.

שאלה 6 **(16 נקודות)**

א) (12 נקודות)
נתון התחום המישורי

$$D=\{4\le x^2+y^2\le 9\ ,\ x\ge 0\ ,\ y\ge 0\}$$

סרטטו את שפת התחום L וחשבו את האינטגרל

$$\oint_L\left(4\sqrt{x^2+y^2}dx+2\sqrt{x^2+y^2}dy\right)$$

כאשר L נלקחת בכיוון חיובי.

ב) (4 נקודות)
תנו דוגנא לשני ישרים מצטבלים כאשר ישר אחד עובר דרך הנקודה $A(1,0,0)$ והשני עובר דרך הנקודה $B(0,0,2)$.

שאלה 7 **10 נקודות**

על קו החיתוך בין המשטחים

$$z=0\ ,\quad x^2+y^2=4$$

מצאו את הנקודה הקרובה ביותר למישור

$$z = 2x - 4y + 20 \ .$$

שאלה 8 10 נקודות

על המשטח

$$z = x^2 + y^2$$

מצאו את הנקודה הקרובה ביותר למישור

$$2x + 2y - z - 4 = 0$$

וחשבו את המרחק ביניהם.

פתרונות

שאלה 1

א) (10 נקודות) תנאי הכרחי לקיום אקסטרמום מקומי בנקודה P הוא $\nabla z=\bar{0}$.

$$\begin{aligned} z'_x &= 4x+4 &= 0 \quad &\Rightarrow \quad x=-1 \\ z'_y &= 2y &= 0 \quad &\Rightarrow \quad y=0\ . \end{aligned}$$

מצאנו נקודה קריטית בנקודה $P_1(-1,0)$.

תנאי מספיק לקיום אקסטרמום מקומי בנקודה P הוא $\Delta(P)=f''_{xx}(P)f''_{yy}(P)-\left(f''_{xy}(P)\right)^2>0$ והנקודה תהיה מינימום מקומי אם $f''_{xx}(P)>0$ ומקסימום מקומי אם $f''_{xx}(P)<0$. נבדוק את הסימן של Δ בנקודה P_1:

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= 4 \\ f''_{yy} &= 2 \\ f''_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

ולכן

$$\Delta(P_1)=4\cdot 2-0^2=8>0$$

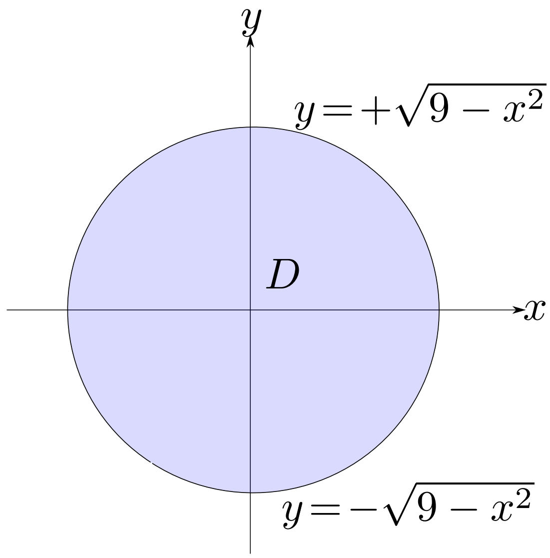
מכאן ש- P_1 היא נקודת קיצון מוקמי. מכיוון ש-

$$f''_{xx}(P_1)=4>0$$

זוהי נקודת מינימום מקומי.

ב) (10 נקודות) התחום הוא

$$D=\{(x,y)\mid -3\le x\le 3\ ,\ -\sqrt{9-x^2}\le y\le\sqrt{9-x^2}\}$$



בפנים התחום

מצאנו נקודה קריטית אחת בסעיף הקודם:

$$P_1(-1,0) \qquad z(P_1)=3\ .$$

מכיוון שנקודה זו נמצאת בפנים התחום, נוסיף אותה לרשימת הנקודות החשודות כקיצון מוחלט בתחום.

על השפה

נציב את משוואת הקו של השפה, כלומר $y^2=9-x^2$, בתוך הפונקציה z:

$$z_{\text{שפה}}=2x^2+9-x^2+4x+5=x^2+14+4x$$

ונבדוק נקודות קריטיות על השפה:

$$(z_{\text{שפה}})'_x=2x+4=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$$

וכאשר $x=-2$ על השפה אז $y=\sqrt{9-x^2}=\pm\sqrt{5}$, לכן מצאנו עוד שתי נקודות שנוסיף לרשימה:

$$P_2(-2,\sqrt{5}) \qquad z(P_2)=10$$
$$P_3(-2,-\sqrt{5}) \quad z(P_3)=10.$$

קודקודים

מכיוון שביצענו את ההצבה

$$\begin{cases} y=\sqrt{9-x^2} \\ -3\le x\le 3 \end{cases},$$

יש לקחת את קצוות הקטע כקודקודים של השפה:

$$P_4(3,0) \qquad z(P_4)=35$$
$$P_5(-3,0) \quad z(P_5)=11$$

סיכום

- הערך המקסימאלי הוא 35 המתקבל בנקודה $P_4(3,0)$.
- הערך המינימאלי הוא 3 המתקבל בנקודה $P_1(-1,0)$.

<u>חישוב אלטרנטיבי בעזרת כופלי לגרנז'</u>

במקום השלבים של חישוב נקודות חשודות על השפה וחישוב הקודקודים, ניתן להשתמש בשיטה של כופלי לגרנז' בכדי למצוא ערכי קיצון על השפה. נגדיר את פונקצית לגרנז':

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (2x^2+y^2+4x+5) - \lambda(x^2+y^2-9)$$

נרשום את מערכת המשוואות $\nabla L = \bar{0}$:

$$\begin{aligned} 4x+4 &= 2\lambda x \\ 2y &= 2\lambda y \\ x^2+y^2 &= 9 \end{aligned}$$

הפתרונות של המערכת הם:

- $y=0$ ואז $x=\pm 3$. כלומר, קיבלנו את הנקודות P_4, P_5.
- או ש- $y\neq 0$ ואז $\lambda = 1$ ואז $x=2$ ו- $y=\pm\sqrt{5}$. כלומר, קיבלנו את הנקודות P_2, P_3.

<u>שאלה 2</u>

א) (10 נקודות)

$$a_n = \frac{\sqrt{n}(x-2)^n}{5^n(n^2+1)} \ .$$

נציב $z=x-2$ ונחשב את רדיוס ההתכנסות של הטור בעזרת נוסחאת קושי

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5^n(n^2+1)}{\sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} 5\frac{\sqrt[n]{n^2+1}}{\sqrt[2n]{n}} = 5. \end{aligned}$$

נבדוק התכנסות בקצוות הקטע $z=\pm 5$.
עבור $z=5$ מתקבל הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}.$$

מכיוון ש-

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\right)} = 1$$

וגם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$$

מתכנס, נובע שהטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ גם כן מתכנס על פי מבחן ההשוואה הגבולי.
עבור $z=-5$ מתקבל הטור

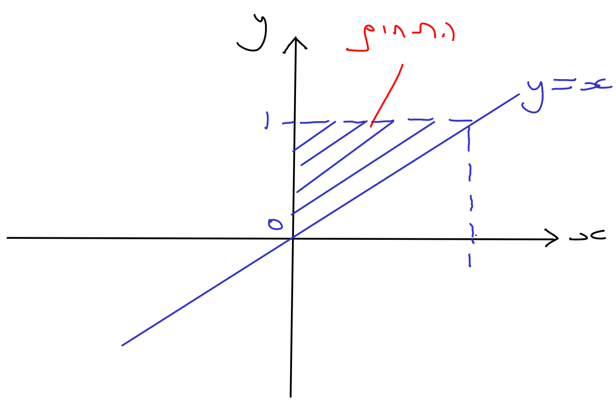
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(-1)^n.$$

הטור מתכנס בהחלט מכיוון ש-

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(-1)^n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}<\infty$$

על פי החישוב שביצענו עבור $z=5$. כלומר, הטור מתכנס בהחלט בתחום $-5\le z\le 5$, כלומר $-3\le x\le 7$. בפרט, הטור מתכנס בהחלט עבור $x=-3$.

ב) (12 נקודות)



$$\begin{aligned}\int_0^1 dy\int_y^1 dx\, e^{-x^2} &= \int_0^1 dx\int_0^x dy\, e^{-x^2}\\ &= \int_0^1 dx\,\left[ye^{-x^2}\right]_{y=0}^{y=x}\\ &= \int_0^1 dx\, xe^{-x^2}\\ &= \int_0^1 dx\,\frac{1}{2}u'e^{-u}\\ &=\frac{1}{2}\int_0^1 due^{-u}\\ &=\frac{1}{2}\left[-e^{-u}\right]_0^1\\ &=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)\ .\end{aligned}$$

שאלה 3

א) (12 נקודות) הוקטורים הנורמלים למישורים

$$\begin{aligned}\overline{N_1} =&(-4,2,8)\\ \overline{N_2} =&(1,k,-2)\end{aligned}$$

מקבילים זה לזה עבור $k=\frac{1}{2}$ ואז $\overline{N_1}=-4\overline{N_2}$.
המרחק בין שני המישורים π_1 ו- π_2 שווה למרחק בין נקודה P על π_1 לבין π_2.
נקבע (באופן שרירותי) את הנקודה $P(-2,1,0)$ על מישור π_1. בכדי לחשב את ההמרחק בין P לבין המישור π_2 נשתמש בנוסחא $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ הנותנת מרחק בין נקודה (x_0,y_0,z_0) למישור $Ax+By+Cz+D=0$. על ידי הצבה בנוסחא נקבל את המרחק

$$d=\frac{|1\cdot(-2)-\frac{1}{2}\cdot 1-2\cdot 0+3||}{\sqrt{1^2+(-\frac{1}{2})^2+(-2)^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{21}}{2}} =\frac{1}{\sqrt{21}}\approx 0.22.$$

ב) (4 נקודות)
הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5n-1)^7\cdot n^{2022}}{n!}$ הוא טור חיובי. נבדוק את התכנסותו בעזרת מבחן דלמבר. נסמן

$$a_n=\frac{(5n-1)^7\cdot n^{2022}}{n!}$$

ונחשב

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{(5n+4)^7\cdot(n+1)^{2022}}{(n+1)!}\right)}{\left(\frac{(5n-1)^7\cdot n^{2022}}{n!}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n+4}{5n-1}\right)^7 \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2022} \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n+4}{5n-1}\right)^7 \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2022} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \end{aligned}$$

ולכן, לפי מבחן דלמבר, הטור מתכנס.

שאלה 4

א) (12 נקודות)

תחילה נשים לב שהמשטח הנתון בשאלה הוא אליפסואיד. נרשום מחדש את המשוואה בצורה

$$(x-2)^2 + 2(y-3)^2 + (z-4)^2 = 4$$

ונסמן

$$F(x,y,z) = (x-2)^2 + 2(y-3)^2 + (z-4)^2$$

האליפסואיד הוא משטח הרמה $F(x,y,z) = 4$. וקטור נורמלי למישור המשיק בנקודה A נתון על ידי $\overline{N} = \nabla F(A)$ כלומר

$$\nabla F = (2(x-2), 4(y-3), 2(z-4)) \quad \Rightarrow \quad \overline{N} = \nabla F(A) = (2,4,-2).$$

על כן, משוואת המישור המשיק למשטח בנקודה A היא

$$2x + 4y - 2z = 16.$$

הוקטור $\hat{k}$ הוא וקטור כיוון של ציר ה- z ולכן, סינוס הזווית בין המישור המשיק למשטח בנקודה A ובין ציר ה- z נתון על ידי

$$\sin\alpha = \frac{|\overline{N}\cdot\hat{k}|}{|\overline{N}|\,|\hat{k}|} = \frac{|(2,4,-2)\cdot(0,0,1)|}{|(2,4,-2)|\,|(0,0,1)|} = \frac{2}{\sqrt{24}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

ב) (4 נקודות)

בעזרת החישובים בסעיף א', נקבל שהנורמל למישור המשיק בנקודה B הוא

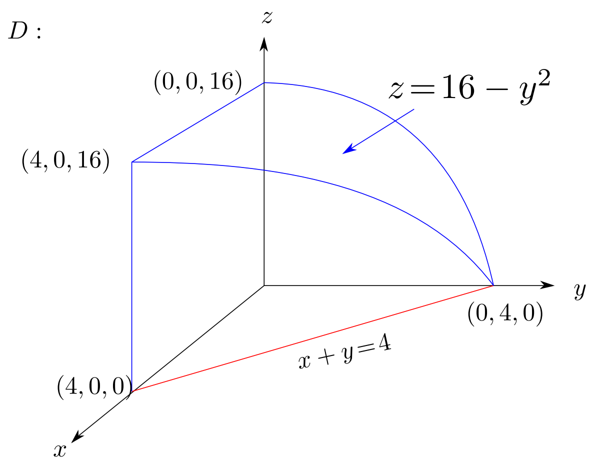
$$\overline{N} = \nabla F(B) = (4,0,0)$$

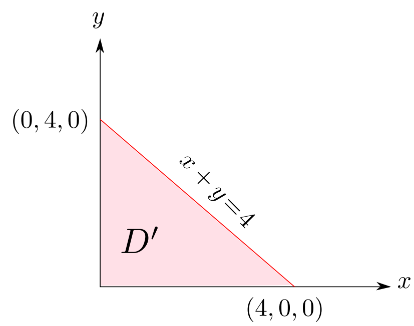
ולכן, משוואת המישור המשיק בנקודה זו היא

$$x = 5.$$

שאלה 5

א) (4 נקודות)



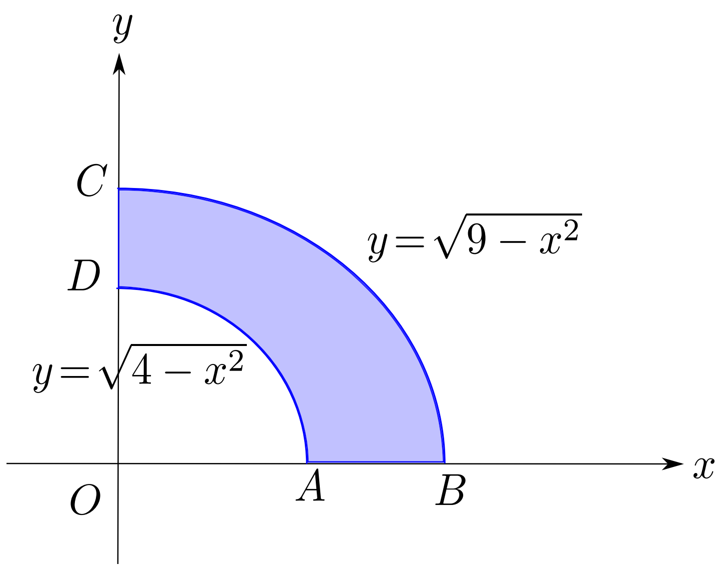


ב) (12 נקודות)

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^4 dx \int_0^{4-x} dy \int_0^{16-y^2} dz \\
&= \int_0^4 dx \int_0^{4-x} dy \left[z\right]_0^{6-y^2} \\
&= \int_0^4 dx \int_0^{4-x} \left(16-y^2\right)\, dy \\
&= \int_0^4 dx \left[16y-\frac{y^3}{3}\right]_0^{4-x} \\
&= \int_0^4 dx \left(16\cdot(4-x)-\frac{(4-x)^3}{3}\right) \\
&= \left[8\cdot(4-x)^2-\frac{(4-x)^4}{12}\right]_0^4 \\
&= \left(8\cdot 16-\frac{256}{12}\right) \\
&= \left(128-\frac{64}{3}\right) \\
&= \frac{320}{3}\ .
\end{aligned}
$$

שאלה 6

א) (12 נקודות)



מכיוון ש-L מסילה סגורה ופשוטה המקיפה את התחום D והפונקציות P ו-Q בעלות נגזרות חלקיות רציפות ב-D, ניתן להשתמש בנוסחת גרין:

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \int\int_D dx\,dy\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

מכיוון ש-

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ , \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{4y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,$$

נובע כי

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_2^3 (2\cos\theta - 4\sin\theta)\; r\,dr$$

$$= \int_0^{\pi/2} (2\cos\theta - 4\sin\theta)\; d\theta\; \left[\frac{r^2}{2}\right|_{r=2}^3$$

$$= \frac{5}{2}\left[2\sin\theta + 4\cos\theta\right]_0^{\pi/2}$$

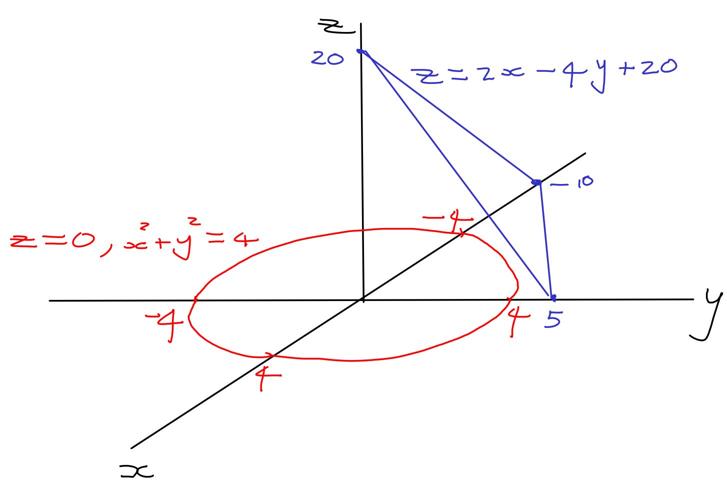
$$= \frac{5}{2}\cdot(-2)$$

$$= -5\ .$$

ב) (4 נקודות) למשל, ניתן לקחת את הישרים

$$l_1 : (x,y,z) = (t,0,0)$$
$$l_2 : (x,y,z) = (0,1+t,0)$$

שאלה 7



המרחק בין נקודה למישור נתון על-ידי

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2x-4y-z+20|}{\sqrt{2^2+4^2+1^2}}.$$

נציב $z=0$ (מכיוון שהמעגל במישור XY) ונשתמש בשיטה של כופלי לגרנז' בכדי למצוא מינימום של המרחק תחת האילוץ $x^2+y^2-4=0$ בכדי למצוא את הנקודה המבוקשת. למעשה, בכדי למצוא את הנקודה הקרובה ביותר, מספיק להשתמש בפונקצית המטרה $f(x,y)=2x-4y+20$.

נגדיר פונקצית לגרנז'

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=(2x-4y+20)-\lambda(x^2+y^2-4)$$

נרשום את מערכת המשוואות $\nabla L=\overline{0}$:

$$\begin{aligned}2&=2\lambda x\\-4&=2\lambda y\\x^2+y^2&=4\end{aligned}$$

משתי המשוואות הראשונות נובע שבנקודה קריטית מתקיים $x,y,\lambda\neq 0$. בנוסף, מתקיים כי $x=\frac{1}{\lambda}$ ו- $y=-\frac{2}{\lambda}$. על ידי הצבה במשוואת המעגל, נקבל

$$\frac{1}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^2}=4\quad\Rightarrow\quad\lambda=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

כלומר, מתקבלות שתי נקודות "חשודות"

$$P\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}},0\right),\quad Q\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{4}{\sqrt{5}},0\right).$$

על ידי הצבה בפונקצית המרחק מוצאים שהנקודה **הקרובה ביותר** היא

$$P\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}},0\right)$$

בעוד **הרחוקה ביותר** ביותר היא

$$Q\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{4}{\sqrt{5}},0\right).$$

שאלה 8

נורמל למשטח:

$$\overline{N_1}=(2x,2y,-1)$$

נורמל למישור:

$$\overline{N_2}=(2,2,-1)$$

בנקודה על המשטח הקרובה ביותר למישור הנורמלים מקבילים:

$$\overline{N_1}=t\,\overline{N_2}\,,\qquad\Rightarrow\qquad(2x,2y,-1)=t(2,2,-1).$$

מכאן $t=1$ ולכן $x=1$ ו- $y=1$. נציב במשוואת המשטח ונקבל $z=2$. לכן הנקודה על המשטח הקרובה ביותר למישור הוא

$$P(1,1,2)\ .$$

המרחק נתון על ידי

$$d=\frac{|2+2-2-4}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{6}{3}=2.$$