

עבודה עצמית 3

שאלה 1

פתרו

(א)

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & -3 & -10 & 8 \\ 9 & -3 & 7 & 7 \\ 5 & -10 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

(ב)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -14 & 0 & 5 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(ג)

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(ד)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(ה)

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & -5 \\ 4 & 1 & -7 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

שאלה 2 נסמן $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ מצאו את $A^2 - 5A + 2I$.

שאלה 3 נתונות המטריצות A, B . חשב את המטריצה AB ו- BA אם הן קיימות

(א)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(ב)

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

שאלה 4 מטריצות A ו- B נקראות מתחלפות אם $AB = BA$. מצאו את כל המצטריות $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ המתחלפות

עם המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

שאלה 5 נתונות $A = \begin{pmatrix} 3 & -k \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & k \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. מצאו את כל ערכי של הפרמטר k כך ש- $AB = BA$.

שאלה 6 תהינה $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. הוכח או הפרך:

(א) אם $AB = AC$ אז $B = C$

(ב) אם $AB = 0$ אז $A = 0$ או $B = 0$

(ג) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(ד) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

(ה) $(AB)^t = A^t B^t$

(ו) $(A + B)^t = A^t + B^t$

שאלה 7

לכל $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ נגדיר $E_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ המטריצה אשר כולה אפסים מלבד הרכיב בשורה ה-

i והעמודה ה- j שערכו 1. למשל $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$. נסמן $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$ ויהיו

$E_{43}, E_{23} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$. מצאו את $B = E_{43} A E_{23}$.

שאלה 8

(א) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, מצאו את כל מתטריצות B מסדר 2×2 המקיימות

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ב) נתונות המטריצות

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

(א) מצאו את מטריצה X המקיימת

$$AXA^{-1} = B.$$

(ב) האם X מטריצה הפיכה? נמקו את תשובתך.

שאלה 9 עבור המטריצות

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & -i \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 4-i & i \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -3i \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

פתרו את המשוואות

(א) $AX = D$

(ב) $XB = D$

(ג) $AXB = D$

(ד) $CX = E$

שאלה 10 הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

(א) אם A מטריצה משולשת עליונה ו- B מטריצה משולשת עליונה, אז $A \cdot B$ מטריצה משולשת עליונה.

(ב) אם A, B מטריצות אלכסוניות, אז $AB = BA$.

(ג) אם A, B מטריצות ריבועיות המקיימות $AB = BA$ אז $AB^2 = B^2A$.

שאלה 11 נניח ש- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ מטריצה של משתנים ו- $b \in \mathbb{R}^n$. הוכיחו כי אם למערכת

$$AX = b, \quad b \neq \bar{0}.$$

יש יותר מפתרון אחד אז A לא הפיכה.

פתרונות

שאלה 1

(א)

$$\begin{aligned}
& 3 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & -3 & -10 & 8 \\ 9 & -3 & 7 & 7 \\ 5 & -10 & -12 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -12 & 0 & 3 & -6 \\ 15 & -9 & -3 & 6 \\ -3 & 0 & -9 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -4 & -20 & 12 \\ 0 & 8 & 16 & 4 \\ 12 & -4 & -8 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 & -8 \\ -9 & 3 & -7 & -7 \\ -5 & 10 & 12 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 & -2 \\ 6 & 2 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & -5 & 9 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(ב)

$$(1 \ 4) \cdot \begin{pmatrix} -14 & 0 & 5 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (2 \ 16 \ 9)$$

(ג)

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(ד)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(ה)

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & -5 \\ 4 & 1 & -7 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -1 & 2 \\ 9 & -10 \end{pmatrix}$$

שאלה 2

$$\begin{aligned}
A^2 - 5A + 2I &= \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 20 & 5 & -35 \\ 0 & -5 & 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 32 & 8 & -49 \\ -4 & -7 & 43 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 20 & 5 & -35 \\ 0 & -5 & 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 12 & 5 & -14 \\ -4 & -2 & 15 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

שאלה 3

(א)

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -8 & -8 \\ 20 & 8 \end{pmatrix}.$$

(ב) AB לא קיים.

$$BA = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 6 \\ 12 & 18 & 6 \end{pmatrix}.$$

שאלה 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ x+z & w+y \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & y \\ w+z & w \end{pmatrix}.$$

לכן

$$A \cdot B = B \cdot A \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x & y \\ x+z & w+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & y \\ w+z & w \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x+y \\ x+z = z+w \\ y+w = w \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y=0, x=w.$$

$$B = \begin{pmatrix} w & 0 \\ z & w \end{pmatrix}, z, w \in \mathbb{R}.$$

שאלה 5

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 21-5k & -6k \\ -30 & 9-5k \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 21-5k & -6k \\ -30 & 9-5k \end{pmatrix}.$$

לכן $AB = BA$ לכל $k \in \mathbb{R}$.

שאלה 6

תהיינה $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $AB = AC$ אז $B = C$

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = A \cdot C = 0, \quad B \neq C.$$

(ב) אם $AB = 0$ אז $A = 0$ או $B = 0$:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = 0, \quad A \neq 0, B \neq 0.$$

(ג) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$:

טענה לא נכונה. הסבר:

$$(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

עבור מטריצות A, B לא מתחלפות.

דוגמה נגדית:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$AB \neq BA$ לכן

$$A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

(ד) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$:

טענה לא נכונה. הסבר:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$$

רק עבור מטריצות מתחלפות, ז"א $AB = BA$.

דוגמה נגדית:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$AB \neq BA$ לכן

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2.$$

$$\underline{:(AB)^t = A^t B^t} \quad \text{ה)}$$

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}, \quad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}.$$

$$B^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 18 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{ז"א } (AB)^t \neq A^t B^t.$$

$$\underline{:(A+B)^t = A^t + B^t} \quad \text{ו)}$$

טענה נכונה. הוכחה:

נוכיח את הטענה לכל איבר A_{ij} של A וכל איבר B_{ij} של B $(i, j = 1, \dots, n)$.

$$((A+B)^t)_{ij} = A_{ji} + B_{ji} = (A^t)_{ij} + (B^t)_{ij} = (A^t + B^t)_{ij}$$

לכל $i, j = 1, \dots, n$

שאלה 7

$$A \cdot E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 22 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{43} \cdot A \cdot E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 8

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \text{ תהי} \quad \text{א)}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} b_{11} + 2b_{21} & b_{12} + 2b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & -2b_{22} \\ -\frac{1}{2}b_{11} & b_{22} \end{pmatrix}$$

(א) (ב)

$$= A^{-1} \cdot B \cdot A$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & \frac{13}{48} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

ואז

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{103}{48} & \frac{5}{24} & \frac{41}{16} \\ \frac{43}{24} & \frac{7}{12} & -\frac{5}{8} \\ \frac{35}{16} & \frac{47}{8} & \frac{25}{16} \end{pmatrix}$$

(ב) $\text{Det}(X) = 13$, כלומר $\text{Det}(X) \neq 0$ לכן X הפיכה.

שאלה 9

(א)

$$AX = D \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}D \Rightarrow X = A^{-1}D.$$

נמצא את A^{-1} :

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 1 & 0 \\ 2i & -i & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2iR_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 2-i & -2i & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow (2+i)R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4i+2 & 2+i \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{5}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-4i}{5} + \frac{2}{5} & \frac{2}{5} + \frac{i}{5} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - iR_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i & -\frac{2i}{5} + \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-4i}{5} + \frac{2}{5} & \frac{2}{5} + \frac{i}{5} \end{array} \right)$$

לכן

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i & -\frac{2i}{5} + \frac{1}{5} \\ \frac{-4i}{5} + \frac{2}{5} & \frac{2}{5} + \frac{i}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1-2i & -2i+1 \\ -4i+2 & 2+i \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}D = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1-2i & -2i+1 \\ -4i+2 & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -3i \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2+i & -4-7i \\ 4+2i & 7-14i \end{pmatrix}$$

(ב)

$$XB = D \Rightarrow XBB^{-1} = DB^{-1} \Rightarrow X = DB^{-1}.$$

נמצא את B^{-1} :

$$\begin{aligned}
 (B|I) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1-i & 1 & 0 \\ 4-i & i & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - (4-i)R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1-i & 1 & 0 \\ 0 & -3+6i & -4+i & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{R_2 \rightarrow (-3-6i)R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1-i & 1 & 0 \\ 0 & 45 & 18+21i & -3-6i \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{45}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1-i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} + \frac{7}{15}i & -\frac{1}{15} - \frac{2}{15}i \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - (1-i)R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{15} - \frac{i}{15} & \frac{1}{5} + \frac{i}{15} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} + \frac{7}{15}i & -\frac{1}{15} - \frac{2}{15}i \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}
 B^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{15} - \frac{i}{15} & \frac{1}{5} + \frac{i}{15} \\ \frac{2}{5} + \frac{7}{15}i & -\frac{1}{15} - \frac{2}{15}i \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ 6+7i & -1-2i \end{pmatrix} \\
 X = DB^{-1} &= \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -3i \end{pmatrix} \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ 6+7i & -1-2i \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 13+16i & -3-i \\ 21-18i & -6+3i \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(ג)

$$AXB = D \Rightarrow A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}DB^{-1} \Rightarrow IXI = A^{-1}DB^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}DB^{-1}.$$

$$X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2+i & -4-7i \\ 4+2i & 7-14i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -3i \end{pmatrix} \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ 6+7i & -1-2i \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 6-14i & -1+4i \\ 30-7i & -5+2i \end{pmatrix}.$$

(ד)

$$CX = E \Rightarrow X = C^{-1}E.$$

נמצא את C^{-1} :

$$\begin{aligned}
 (C|I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 5R_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow \frac{-1}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 4R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{10}{3} & 5 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{10}{3} & 5 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -\frac{10}{3} & 5 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ לפיכך}$$

$$X = C^{-1}E = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -\frac{10}{3} & 5 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{16}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

שאלה 10

(א) טענה: אם A, B משולשית עליונה אז $A \cdot B$ משולשית עליונה.

מספיק להוכיח כי $(A \cdot B)_{ij} = 0$ לכל $i > j$.

הוכחה: נניח ש- $i > j$.

$$(A \cdot B)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots + A_{in}B_{nj}.$$

לכל איבר $A_{ik}B_{kj}$ יש 5 אפשרויות:

$$:i > j \geq k$$

A משולשית עליונה לכן $A_{ik} = 0$.

$$:i > k > j$$

A משולשית עליונה ו- B משולשית עליונה לכן $A_{ik} = 0$ ו- $B_{kj} = 0$.

$$:i = k > j$$

B משולשית עליונה לכן $B_{kj} = 0$.

$$:i > k = j$$

A משולשית עליונה לכן $A_{ik} = 0$.

$$:k > i \geq j$$

B משולשית עליונה לכן $B_{kj} = 0$.

בסה"כ עבור כל אחד מהאפשרויות, כל איבר בסכום, $A_{ik}B_{kj} = 0$. כלומר כל איבר מתאפס בגלל ש- A משולשית עליונה ו- B משולשית עליונה. לפיכך, מצאנו כי אם $i > j$ אז $(A \cdot B)_{ij} = 0$. מש"ל.

(ב) טענה: אם A, B אלכסוניות, אז $AB = BA$.

צריך להוכיח: $(A \cdot B)_{ij} = (B \cdot A)_{ij}$.

הוכחה (שיטה 1):

המכפלה של שתי מטריצות אלכסוניות A, B שווה למטריצה אלכסונית, והאיברים באלכסון של המטריצה המתקבלת שווים למכפלה של האיברים על האלכסונים של A ו- B , כלומר אם

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix},$$

אז

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22}B_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn}B_{nn} \end{pmatrix}.$$

לכן

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22}B_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn}B_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{22}A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{nn}A_{nn} \end{pmatrix} = B \cdot A$$

מש"ל.

הוכחה (שיטה 1):

אם A, B אלכסוניות, אז

$$\begin{aligned} (A \cdot B)_{ij} &= A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots + A_{ii}B_{ij} + \dots + A_{in}B_{nj} = A_{ii}B_{ij} \\ &= \begin{cases} A_{ii}B_{ii} & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

מצד שני,

$$(B \cdot A)_{ij} = \begin{cases} B_{ii}A_{ii} & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} = \begin{cases} A_{ii}B_{ii} & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

ז"א

$$(A \cdot B)_{ij} = (B \cdot A)_{ij}$$

לכן $AB = BA$. מש"ל.

שאלה 11

נוכיח דרך השלילה.

נניח ש- X_1, X_2 פתרונות למערכת $Ax = b$, כאשר $X_1 \neq X_2$ ו- $b \neq \bar{0}$.

נניח ש- A הפיכה.

אז $AX_1 = b$ ו- $AX_2 = b$.

לכן

$$A \cdot (X_1 - X_2) = b - b = \bar{0} .$$

A הפיכה אז A^{-1} קיימת. נכפיל ב- A^{-1} מצד שמאל ונקבל

$$A^{-1} \cdot A \cdot (X_1 - X_2) = A^{-1} \cdot \bar{0} \Rightarrow I \cdot (X_1 - X_2) = \bar{0} \Rightarrow X_1 - X_2 = \bar{0} \Rightarrow X_1 = X_2 ,$$

בסתירה לכך ש- $X_1 \neq X_2$. לכן A לא יכולה להיות הפיכה.