עבודה 9: העתקות במרחב מכפלה פנימית

**שאלה 1** מצאו את ההעתקה הצמודה להעתקה $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$,

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

**שאלה 2** מצאו את ההעתקה הצמודה להעתקה $T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$,

$$T\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2iz_1-5z_3\\iz_1+(1-i)z_2\\(1-i)z_1+iz_2+(i+2)z_3\end{pmatrix}$$

**שאלה 3** יהי $B=\{\mathrm{v}_1=e_1,\mathrm{v}_2=e_1+e_2\}$ בסיס של מרחב $\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, כאשר $E=\{e_1,e_2\}$ הוא הבסיס הסטנדרטי. נתונה המטריצה המייצגת של העתקה $T$ בבסיס $B$:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}\ .$$

מצאו את המטריצה המייצגת של ההעתקה הצמודה בבסיס $B$.

**שאלה 4** יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב וקטורי $V$ עם מכפלה פנימית. הוכיחו כי אם $U$ תת מרחב של $V$ אשר $T$-שמור, אז $U^{\perp}$ הוא תת מרחב $\bar{T}$- שמור.

**שאלה 5** יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית $V$. הוכיחו:

**א)** $\mathrm{Ker}\bar{T}=\left(\mathrm{Im}T\right)^{\perp}$

**ב)** $\mathrm{Im}\bar{T}=\left(\mathrm{Ker}T\right)^{\perp}$

**שאלה 6** יהי $T:V\to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית $V$. הוכיחו כי

**א)** $T$ העתקה על אס"ם $\bar{T}$ היא חד חד ערכית

**ב)** $T$ העתקה חד חד ערכית אס"ם $\bar{T}$ היא על.

**שאלה 7** נתון אופרטור $T$ במרחב מכפלה פנימית $V$. הוכיחו כי אם $u$ וקטור עצמי של העתקות $T$ ו- $\bar{T}$, עם ערכים עצמיים $\lambda$ ו- $\mu$ בהתאמה, אז $\bar{\mu}=\lambda$.

**שאלה 8** הראו כי העתקה $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ המוגדרת על ידי

$$T\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2z_1+2iz_2\\2z_1+(4+2i)z_2\end{pmatrix}$$

נורמלית.

**שאלה 9** הוכיחו כי אם $T$ אופרטור נורמלי ו $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ אז גם האופרטור $\alpha T + \beta \bar{T}$ הוא נורמלי.

**שאלה 10** עבור אילו ערכי $a, b \in \mathbb{C}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2a & a \\ i & 1 & a \end{pmatrix}$ היא הרמיטית ?

**שאלה 11** יהי $T : V \to V$ העתקה צמודה לעצמה, $S : V \to V$ אופרטור אוניטרי. הוכיחו כי $ST$ נורמלית אס"ם $S$ ו- $T^2$ מתחלפים, כלומר $S \cdot T^2 = T^2 \cdot S$.

**שאלה 12** יהי $T : V \to V$ העתקה לינארית במרחב מכפלה פנימית. הוכיחו שקיום כל שניים מתוך שלושת התנאים הבאים גורר את התנאי השלישי:

**א)** $T$ אוניטרית.

**ב)** $T$ צמודה לעצמה.

**ג)** $T^2 = I$.

**שאלה 13** הוכיחו כי אם $T : V \to V$ העתקה צמודה לעצמה כך ש $T^2 = T$ אז $T$ היא ההטלה האורטוגונלית על תת המרחב $U = \mathrm{Im} T$.

**שאלה 14** הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:
אם $T$ צמוד לעצמו ו- $S$ צמוד לעצמו, אזי גם $T \cdot S$ צמוד לעצמו.

**שאלה 15** הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:
אם $A$ נורמלית ו- $Q$ אוניטרית, אז המטריצה $\bar{Q} \cdot A \cdot Q$ היא נורמלית.

**שאלה 16** יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית $V$ מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית: אם $T$ צמוד לעצמו אז כל הערך עצמי של $T$ ממשי.

**שאלה 17** יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית $V$ מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית: אם $T$ העתקה אנטי-הרמיטית אז כל ערך עצמי של $T$ מספר מדומה.

**שאלה 18** יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית $V$ מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית: אם $T$ אוניטרי אז הערך מוחלט של כל ערך עצמי של $T$ שווה 1.

**שאלה 19** יהי $T : V \to V$ אופרטו במרחב מכפלה פנימית $V$ מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

**א)** אם $T$ צמוד לעצמו אז $T$ נורמלית.

**ב)** אם $T$ נורמלית אז $T$ צמוד לעצמו.

**ג)** אם $T$ אוניטרי אז $T$ נורמלית.

**ד)** אם $T$ נורמלית אז $T$ אוניטרי.

# תשובות

## <u>שאלה 1</u>

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^2$: $E=\{e_1,e_2\}$. לכל $\mathrm{v}\in\mathbb{R}^2$,

$$\bar{T}(\mathrm{v})=\overline{\langle T(e_1),\mathrm{v}\rangle}e_1+\overline{\langle T(e_2),\mathrm{v}\rangle}e_2$$

$$T(e_1)=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad T(e_2)=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}\ ,$$

לכל $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,

$$\langle T(e_1),\mathrm{v}\rangle=2x+y\ ,\qquad \langle T(e_2),\mathrm{v}\rangle=-x-3y\ ,$$

לכן

$$\bar{T}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y\\-x-3y\end{pmatrix}\ .$$

■

## <u>שאלה 2</u>

$T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$,

$$T\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2iz_1-5z_3\\iz_1+(1-i)z_2\\(1-i)z_1+iz_2+(i+2)z_3\end{pmatrix}$$

יהי $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ הבסיס הסטנדרטי. אז

$$[T]_E=\begin{pmatrix}2i&0&-5\\i&1-i&0\\1-i&i&i+2\end{pmatrix}$$

לכן

$$[\bar{T}]_E=\begin{pmatrix}-2i&-i&1+i\\0&1+i&-i\\-5&0&2-i\end{pmatrix}$$

■

## שאלה 3

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \{b_1 = e_1 \ , b_2 = e_1 + e_2\}$$

נמצא את המטריצה המייצגת של $T$ לפי בסיס אורתונורמלי $E = \{e_1, e_2\}$

$$T(e_1) = T(b_1) = b_1 + b_2 = 2e_1 + e_2 \ ,$$

$$T(e_2) = T(b_2 - b_1) = T(b_2) - T(b_1) = (2b_1 - b_2) - (b_1 + b_2) = (2e_1 - e_1 - e_2) - (2e_1 + e_2) = -e_1 - 2e_2 \ .$$

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \ , \qquad [\bar{T}]_E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \ .$$

נמצא את $[\bar{T}]_B$:

$$\bar{T}(b_1) = \bar{T}(e_1) = 2e_1 - e_2 = 2b_1 - b_2 + b_1 = b_1 - b_2 \ ,$$

$$\bar{T}(b_2) = \bar{T}(e_1 + e_2) = \bar{T}(e_1) + \bar{T}(e_2) = 2e_1 - e_2 + e_1 - 2e_2 = 3e_1 - 3e_2 = 3b_1 - 3(b_2 - b_1) = 6b_1 - 3b_2 \ .$$

לכן

$$[\bar{T}]_B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \ .$$

■

## שאלה 4

נתון:

$T(u) \in U$ לכל $u \in U$.

צריך להוכיח:

$\bar{T}(\mathrm{v}) \in U^\perp$ לכל $\mathrm{v} \in U^\perp$.

הוכחה:

נניח ש- $u \in U$ ו- $\mathrm{v} \in U^\perp$.
$T(u) \in U$ (נתון).
בגלל ש $\mathrm{v} \in U^\perp$ אז

$$\langle T(u), \mathrm{v} \rangle = 0 \ .$$

ז"א לכל $u \in U$,

$$\langle T(u), \mathrm{v} \rangle = \langle u, \bar{T}(\mathrm{v}) \rangle = 0 \ .$$

לכן $\bar{T}(u) \in U^\perp$.
■

## שאלה 5

**א)** נוכיח כי אם $T$ אוניטרי ו- $u \in \text{Ker}(\bar{T})$ אז $u \in (\text{Im}T)^{\perp}$.

נניח ש- $u \in \ker(\bar{T})$. אז $\bar{T}(u) = \bar{0}$.
נקח $\text{v} \in \text{Im}T$. $\Leftarrow$ קיים $w \in V$ כך ש $\text{v} = T(w)$.
לכן

$$\langle \text{v}, u \rangle = \langle T(w), u \rangle = \langle \text{v}, \bar{T}(u) \rangle = \langle \text{v}, 0 \rangle = 0 \ .$$

ז"א $\text{v} \perp u$ לכל $\text{v} \in \text{Im}T \Leftarrow u \in (\text{Im}\, T)^{\perp}$.

נוכיח כי אם $T$ אוניטרי ו- $u \in (\text{Im}T)^{\perp}$ אז $u \in \text{Ker}(\bar{T})$.

נניח $u \in (\text{Im}T)^{\perp}$. $\Leftarrow$ לכל $\text{v} \in V$, $\langle T(\text{v}), u \rangle = 0$.
מכאן

$$\langle T(\text{v}), u \rangle = \langle \text{v}, \bar{T}(u) \rangle = 0$$

לכל $\text{v} \in V$.
לכן $\bar{T}(u) = 0 \Leftarrow u \in \text{Ker}\, \bar{T}$.

**ב)** נוכיח כי אם $\text{v} \in \text{Im}\bar{T}$ אז $\text{v} \in (\text{Ker}T)^{\perp}$.

נניח ש $\text{v} \in \text{Im}\bar{T}$. $\Leftarrow$ קיים $u \in V$ כך ש $\text{v} = \bar{T}(u)$.
נקח $w \in \text{Ker}T$. $\Leftarrow T(w) = 0$. אז

$$\langle w, \text{v} \rangle = \langle w, \bar{T}(u) \rangle = \langle T(w), u \rangle = \langle 0, u \rangle = 0$$

ז"א $\langle w, \text{v} \rangle = 0$ לכל $w \in \text{Ker}T$. לכן $\text{v} \in (\text{Ker}T)^{\perp}$.

נוכיח כי אם $\text{v} \in (\text{Ker}T)^{\perp}$ אז $\text{v} \in \text{Im}\bar{T}$.
נניח כי $\text{v} \in (\text{Ker}T)^{\perp}$.
■

## שאלה 6

**א)** $T$ על $V \Leftrightarrow \text{Im}(T) = V \Leftrightarrow \left(\text{Ker}\, \bar{T}\right)^{\perp} = V$. $\text{Ker}\, \bar{T} = \{\bar{0}\}$. $\Leftrightarrow \bar{T}$ חח"ע.

**ב)** $T$ חח"ע $\Leftrightarrow \text{Ker}(T) = \{\bar{0}\} \Leftrightarrow \left(\text{Im}\bar{T}\right)^{\perp} = \{\bar{0}\} \Leftrightarrow \left(\text{Im}\bar{T}\right) = V \Leftrightarrow \bar{T}$ על $V$.
■

## שאלה 7

$\langle T(u), u \rangle = \langle \lambda u, u \rangle$ ( $u$ ווקטור עצמי )
$= \lambda \langle u, u \rangle$ (לינאריות של מכפלה פנימית) .

$$\begin{aligned}\langle T(u),u\rangle =& \langle u,\bar{T}(u)\rangle && (\text{הגדרה של העתקה צמודה } u)\\ =& \langle u,\mu u\rangle && (\bar{T} \text{ ווקטור עצמי של } u)\\ =&\bar{\mu}\langle u,u\rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית})\ .\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\langle u,u\rangle-\bar{\mu}\langle u,u\rangle=0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda-\bar{\mu})\langle u,u\rangle=0\ .$$

$u$ ווקטור עצמי לכן $u\neq\bar{0}$ לכן $\langle u,u\rangle\neq 0$ לכן $(\lambda-\bar{\mu})=0$ לכן $\lambda=\bar{\mu}$.

■

## שאלה 8

$$T\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2z_1+2iz_2\\2z_1+(4+2i)z_2\end{pmatrix}$$

נורמלית. $E=\{e_1,e_2\}$ בסיס אורתונורמלי, לכן

$$[T]_E=\begin{pmatrix}2&2i\\2&4+2i\end{pmatrix}\ ,\qquad [\bar{T}]_E=\begin{pmatrix}2&2\\-2i&4-2i\end{pmatrix}$$

אז

$$[T]_E\cdot[\bar{T}]_E=\begin{pmatrix}2&2i\\2&4+2i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2\\-2i&4-2i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&8+8i\\8-8i&24\end{pmatrix}$$

$$[\bar{T}]_E\cdot[T]_E=\begin{pmatrix}2&2\\-2i&4-2i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2i\\2&4+2i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&8+8i\\8-8i&24\end{pmatrix}$$

לכן

$$[T]_E\cdot[\bar{T}]_E=[\bar{T}]_E\cdot[T]_E\ .$$

■

## שאלה 9

$$\begin{aligned}\left(\alpha T+\beta\bar{T}\right)\cdot\overline{\left(\alpha T+\beta\bar{T}\right)} =&\alpha\bar{\alpha}T\bar{T}+\alpha\bar{\beta}TT+\beta\bar{\alpha}\bar{T}\bar{T}+\beta\bar{\beta}\bar{T}T\\ =&|\alpha|^2T\bar{T}+\alpha\bar{\beta}TT+\beta\bar{\alpha}\bar{T}\bar{T}+|\beta|^2\bar{T}T\\ =&|\alpha|^2\bar{T}T+\alpha\bar{\beta}TT+\beta\bar{\alpha}\bar{T}\bar{T}+|\beta|^2T\bar{T}\end{aligned}$$

כאשר בשוויון האחרון השתמשנו בעובדה כי $T$ נורמלי, כלומר $T\bar{T}=\bar{T}T$. מצד שני

$$\begin{aligned}\overline{\left(\alpha T+\beta\bar{T}\right)}\cdot\left(\alpha T+\beta\bar{T}\right) =&\bar{\alpha}\alpha\bar{T}T+\bar{\alpha}\ \beta\bar{T}\bar{T}+\bar{\beta}\alpha TT+\bar{\beta}\ \beta T\bar{T}\\ =&|\alpha|^2\bar{T}T+\bar{\alpha}\beta\bar{T}\bar{T}+\bar{\beta}\alpha TT+|\beta|^2T\bar{T}\end{aligned}$$

לכן

$$\left(\alpha T+\beta\bar{T}\right)\cdot\overline{\left(\alpha T+\beta\bar{T}\right)}=\overline{\left(\alpha T+\beta\bar{T}\right)}\cdot\left(\alpha T+\beta\bar{T}\right)$$

■

## שאלה 10

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2a & a \\ i & 1 & a \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 & -i \\ 0 & \bar{a} & 1 \\ \bar{b} & \bar{a} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

$A$ הרמיטית אס"ם $A = \bar{A}$ לכן $a = \bar{a} = 1$ $b = -i$.

■

## שאלה 11 נניח כי $ST^2 = T^2S$.

$$\begin{aligned}(ST)(\overline{ST}) &= ST\bar{T}\bar{S} \\ &= ST^2\bar{S} && (\text{צמודה לעצמה } T) \\ &= T^2S\bar{S} && (\text{ו- } S \text{ } T^2 \text{ מתחלפים}) \\ &= T^2 && (\text{אונירטי } S)\end{aligned}$$

מצד שני,

$$\begin{aligned}(\overline{ST})(ST) &= \bar{T}\bar{S}ST \\ &= \bar{T}T && (\text{אונירטי } S) \\ &= T^2S\bar{S} && (\text{צמודה לעצמה } T) \\ &= T^2 && (\text{אונירטי } S)\end{aligned}$$

ז"א $(\overline{ST})(ST) = (ST)(\overline{ST})$ ולכן $ST$ נורמלי.

נניח כי $ST$ נורמלי. ז"א $(\overline{ST})(ST) = (ST)(\overline{ST})$.

$$\begin{aligned}(ST)(\overline{ST}) &= ST\bar{T}\bar{S} \\ &= ST^2\bar{S} && (\text{צמודה לעצמה } T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\overline{ST})(ST) &= \bar{T}\bar{S}ST \\ &= \bar{T}T && (\text{אונירטי } S) \\ &= T^2 && (\text{צמודה לעצמה } T)\end{aligned}$$

לכן

$$ST^2\bar{S} = T^2 \quad \Rightarrow \quad ST^2\bar{S}S = T^2S \quad \Rightarrow \quad ST^2I = T^2S\ ,$$

כי $S$ אוניטרי, לכן $ST^2 = T^2S$.

■

## שאלה 12

### א) וב) $\Leftarrow$ ג)

$T : V \to V$ צמודה לעצמה, ז"א $T = \bar{T}$.
$T$ אוניטרי, אז $T\bar{T} = I \Leftarrow T^2 = I$.

### ב) וג) $\Leftarrow$ א)

$T:V\to V$ צמודה לעצמה, ז"א $T=\bar{T}$.

$T^2=I \Leftarrow T\bar{T}=I$.

**ג) וא) $\Leftarrow$ ב)**

$T:V\to V$ אוניטרי, ז"א $T\bar{T}=I \Leftarrow T^{-1}=\bar{T}$. .

$T^2=I \Leftarrow T=T^{-1}=\bar{T}$.

■

## שאלה 13

■

## שאלה 14

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ אופרטור שמוגדר

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ .$$

$S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ אופרטור שמוגדר

$$S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ .$$

$\overline{[T]}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=[T]$ לכן $T$ צמודה לעצמה.

$\overline{[S]}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=[S]$ אז $S$ צמודה לעצמה.

$$T\cdot S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ .$$

$[T\cdot S]=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $\overline{[T\cdot S]}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $\overline{[T\cdot S]}\neq[T\cdot S]$ לכן $T\cdot S$ לא צמודה לעצמה.

## שאלה 15

טענה נכונה. הוכחה:

נניח ש- $Q$ אוניטרית ו $A$ נורמלית.

$$\begin{aligned}\overline{(\bar{Q}\cdot A\cdot Q)}\cdot(\bar{Q}\cdot A\cdot Q)&=\bar{Q}\bar{A}Q\bar{Q}\cdot A\cdot Q\\&=\bar{Q}\bar{A}\cdot I\cdot A\cdot Q&&(Q\text{ אוניטרית})\\&=\bar{Q}\cdot\bar{A}A\cdot Q\\&=\bar{Q}\cdot A\bar{A}\cdot Q&&(A\text{ נורמלית})\end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned}(\bar{Q}A\cdot Q)\cdot\overline{(\bar{Q}\cdot A\cdot Q)}&=\bar{Q}\cdot A\cdot Q\bar{Q}\cdot\bar{A}Q\\&=\bar{Q}A\cdot I\cdot\bar{A}Q&&(Q\text{ אוניטרית})\\&=\bar{Q}A\bar{A}Q\ .\end{aligned}$$

לכן

$$\overline{(\bar{Q}\cdot A\cdot Q)}\cdot(\bar{Q}\cdot A\cdot Q)=(\bar{Q}\cdot A\cdot Q)\cdot\overline{(\bar{Q}\cdot A\cdot Q)}$$

לכן $\bar{Q}\cdot A\cdot Q$ נורמלית.

**שאלה 16** טענה נכונה. הוכחה:

נניח $T:V\to V$ העתקה צמודה לעצמה, ונניח ש- $\lambda$ ערך עצמי של $T$ השייך לוקטור עצמי $\mathrm{v}$. ז"א $T(\mathrm{v})=\lambda\mathrm{v}$. אז

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle\lambda\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{וקטור עצמי של } T\ \mathrm{v})\\ &=\lambda\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית})\end{aligned}.$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle\mathrm{v},\bar{T}(\mathrm{v})\rangle && (\text{הגדרה של העתקה צמודה})\\ &=\langle\mathrm{v},T(\mathrm{v})\rangle && (\text{צמודה לעצמה } T)\\ &=\langle\mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\text{וקטור עצמי של } T\ \mathrm{v})\\ &=\bar{\lambda}\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית})\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=\bar{\lambda}\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\quad\Rightarrow\quad(\lambda-\bar{\lambda})\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=0\ .$$

$\mathrm{v}$ וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v}\neq 0 \Leftarrow \langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\neq 0 \Leftarrow (\lambda-\bar{\lambda})=0 \Leftarrow \lambda=\bar{\lambda}$.

**שאלה 17** טענה נכונה. הוכחה:

נניח $T:V\to V$ העתקה צמודה לעצמה, ונניח ש- $\lambda$ ערך עצמי של $T$ השייך לוקטור עצמי $\mathrm{v}$. ז"א $T(\mathrm{v})=\lambda\mathrm{v}$. אז

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle\lambda\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{וקטור עצמי של } T\ \mathrm{v})\\ &=\lambda\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות של מכפלה פנימית})\end{aligned}.$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),\mathrm{v}\rangle &= \langle\mathrm{v},\bar{T}(\mathrm{v})\rangle && (\text{הגדרה של העתקה צמודה})\\ &=\langle\mathrm{v},-T(\mathrm{v})\rangle && (\text{אנטי-הרמיטית } T)\\ &=-\langle\mathrm{v},T(\mathrm{v})\rangle && \\ &=-\langle\mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\text{וקטור עצמי של } T\ \mathrm{v})\\ &=-\bar{\lambda}\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle && (\text{לינאריות חלקית של מכפלה פנימית})\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=-\bar{\lambda}\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\quad\Rightarrow\quad(\lambda+\bar{\lambda})\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=0\ .$$

$\mathrm{v}$ וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v}\neq 0 \Leftarrow \langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\neq 0 \Leftarrow (\lambda+\bar{\lambda})=0 \Leftarrow \lambda=-\bar{\lambda}$.

**שאלה 18** טענה נכונה. הוכחה:

נניח $T:V\to V$ העתקה אוניטרית, ונניח ש- $\lambda$ ערך עצמי של $T$ השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v})=\lambda\mathrm{v}$.

אז

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),T(\mathrm{v})\rangle &= \langle \lambda\mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\text{v וקטור עצמי של } T)\\ &=\lambda\langle \mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\text{ליניאריות של מכפלה פנימית})\\ &=\lambda\bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\lambda\mathrm{v}\rangle && (\text{ליניאריות חלקית של מכפלה פנימית})\end{aligned} .$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\langle T(\mathrm{v}),T(\mathrm{v})\rangle &= \langle \mathrm{v},\bar{T}T(\mathrm{v})\rangle && (\text{הגדרה של העתקה צמודה})\\ &=\langle \mathrm{v},I(\mathrm{v})\rangle && (T \text{ אוניטרית})\\ &=\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\bar{\lambda}\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle \quad\Rightarrow\quad (\lambda\cdot\bar{\lambda}-1)\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle=0 \ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v}\neq 0 \Leftarrow \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\neq 0 \Leftarrow (\lambda\cdot\bar{\lambda}-1)=0 \Leftarrow \lambda\bar{\lambda}=1 \Leftarrow |\lambda|^2=1$.

## שאלה 19

**א)** טענה נכונה. הוכחה:

אם $T$ צמודה לעצמה אז $\bar{T}=T$, לכן

$$T\cdot\bar{T}=T^2=\bar{T}\cdot T \ .$$

**ב)** טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \ , \qquad A=\begin{pmatrix}i&0\\0&i\end{pmatrix} \ .$$

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}-i&0\\0&-i\end{pmatrix}=-A$$

$$A\bar{A}=\bar{A}A=I \ .$$

ז"א $A$ נורמלית אבל לא צמוד לעצמה. לכן $T$ נורמלי אבל לא צמוד לעצמו.

**ג)** טענה נכונה. הוכחה:

אם $T$ אוניטרי אז

$$T\bar{T}=I \quad\Rightarrow\quad \bar{T}=T^{-1} \quad\Rightarrow\quad \bar{T}T=I$$

ז"א $T\bar{T}=\bar{T}T$ לכן $T$ צמוד לעצמו.

**ד)** טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \ , \qquad A=\begin{pmatrix}2i&0\\0&2i\end{pmatrix} \ .$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} = -A$$

$$A\bar{A} = \bar{A}A = 4I \ .$$

ז"א $A$ נורמלית אבל לא צמוד לעצמה. לכן $T$ נורמלי אבל לא צמוד לעצמו.