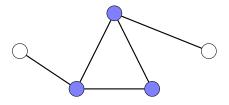
### תרגילים: סיבוכיות

### קליקה:

בהינתן גרף לא מכוון  $C\subseteq V$  בהינתן היא תת קבוצה ב- G קליקה ב- קליקה ב- קליקה ב- G=(V,E) מתקיים ב- בהינתן גרף מתקיים  $(u_1,u_2)\in E$  מתקיים  $u_1,u_2\in C$ 

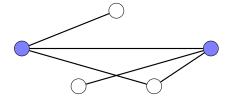
k=3 דוגמה: קליקה בגודל



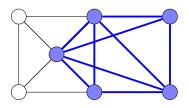
### כיסוי בקדקודים:

כך שלכל צלע כך ער קדקודים אל תת קבוצה ב- G=(V,E)כך כיסוי בהינתן בהינתן גרף א מכוון בהינתן בקדקודים ב-  $u_1\in C$  או עו $u_1\in C$  מתקיים מתקיים  $(u_1,u_2)\in E$ 

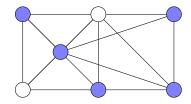
k=2 דוגמה: כיסוי בקדקודים בגודל



k=5 דוגמה: קליקה בגודל



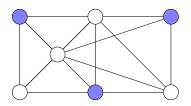
k=5 דוגמה: כיסוי בקדקודים בגודל



### קבוצה בלתי תלוייה:

בהינתן גרף לא מכוון  $S\subseteq V$  קבוצה בלתי תלויה ב- G היא תת קבוצה של קדקודים קבוצה בלתי שלכל שני G=(V,E) מתקיים מתקיים  $(u_1,u_2)\notin E$  מתקיים מתקיים

k=3 דוגמה: קבוצה בלתי תלוייה בגודל



# שאלה 1

# : (Clique) בעיית קליקה

.kטבעי טבעי ומספר G=(V,E)אמכוון גרף לא

?k מכיל קליקה בגודל G פלט: האם

 $Clique = \{\langle G, k \rangle \mid k$  מכיל קליקה בגודל  $G\}$  .

### : (Vertex-Cover) בעיית כיסוי בקדקודים

k ומספר טבעי ומספר G=(V,E) ומספר טבעי

k מכיל כיסוי בקדקודים G פלט: האם

 $VC = \{\langle G, k \rangle \mid k$  מכיל כיסוי בקדקודים בגודל  $G\}$  .

הוכיחו כי קיימת רדוקציה זמן-פולינומיאלית מבעיית Clique הוכיחו כי קיימת רדוקציה זמן-פולינומיאלית

Clique  $\leq_p$  VertexCover.

#### שאלה 2

בהינתן גרף לא מכוון G=(V,E). קבוצת קדקודים עG=(V,E) תקרא קבוצת בלתי תלויה אם לכל זוג קדקודים ש- בהינתן גרף לא מתקיים ש-  $U\subseteq V$  מתקיים ש-  $U=(u_1,u_2)\notin E$  .

Uב-  $u_1,u_2$  קדקודים אם קליקה אם תקרא קליקה הבוצת קדקודים הבוצת הבוצת הפוון גרף לא מכוון בהינתן העG=(V,E) קבוצת היים ש-

 $(u_1,u_2)\in E$ .

נתבונן בשפות הפורמליות הבאות:

 $IS = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ is an undirected graph, } k \text{ is an integer, } G \text{ includes an independent set of size at least } k \}$ 

 $CLQ = \big\{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ is an undirected graph, } k \text{ is an integer, } G \text{ includes an } \mathbf{clique} \text{ of size at least } k \big\}$ 

$$IS \leq_P CLQ$$
.

CLQ כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה IS לשפה יש להראות כי הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

#### שאלה 3

בהינתן גרף לא מכוון G=(V,E). קבוצת קדקודים עG=(V,E) תקרא קבוצת בלתי תלויה אם לכל זוג קדקודים ש- בהינתן גרף לא מכוון ע $U\subseteq V$  קבוצת קדקודים ש- ע $U=u_1,u_2$  ב-  $U=u_1,u_2$ 

בהינתן גרף לא מכוון G=(V,E) קבוצת קדקודים עG=(V,E) תקרא כיסוי קדקודים ב- G=(V,E), מתקיים ש- יים ש $(u_1,u_2)\in E$ 

נתבונן בשפות הפורמליות הבאות:

 $IS = \{\langle G, k \rangle \mid G \text{ is an undirected graph, } k \text{ is an integer, } G \text{ includes an independent set of size at least } k \}$ 

 $VC = \{\langle G, k \rangle \mid G \text{ is an undirected graph, } k \text{ is an integer, } G \text{ includes a vertex cover of size at least } k \}$ הוכיחו כי

$$IS <_P VC$$
.

NC כלומר, הראו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה וא כלומר, כלומר, הרדוקציית התאמה וכי היא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

#### תשובות

:f הקלט של VC ע"י פונקצית אוג (G,k), ניצור אוג (Clique הקלט עבור הרדוקציה אוג בהינתן אוג (G,k) בהינתן אוג

$$f(\langle G, k \rangle) = \langle G', k' \rangle$$

ונוכיח כי

$$\langle G, k \rangle \in \text{Clique} \quad \Rightarrow \quad \langle G', k' \rangle \in \text{VertexCover}$$

$$\langle G, k \rangle \in \text{Clique} \quad \Leftarrow \quad \langle G', k' \rangle \in \text{VertexCover}$$

#### הגדרת הרדוקציה

- G=(V,E) אם המשלים הגרף להיות להיות G'=(V',E') את ullet
  - $E' = \{(u_1, u_2) \mid (u_1, u_2) \notin E\}$  -ו V' = V כלומר
    - .k' = |V| k נגדיר •

### נכונות הרדוקציה

### $\Leftarrow$ כיוון

 $.\langle G,k
angle \in \mathsf{Clique}$  נניח כי

- k מכיל קליקה C בגודל  $G \Leftarrow$
- G-ב בצלע ב- מחוברים בצלע ב-  $\subset$
- .G' -ב בצלע ב- לא מחוברים בצלע ב- כל שני קדקודים ב-  $\leftarrow$
- .k' = |V| k בגודל ב- G'בקדקודים בקדקודים ייסוי  $V \backslash C \Leftarrow$ 
  - .k' מכיל מכיל בקדקודים מכיל מכיל מכיל מכיל מכיל
    - $.\langle G', k' \rangle \in VertexCover \Leftarrow$

### $\Rightarrow$ כיוון

 $.\langle G',k'
angle\in ext{VertexCover}$  נניח כי

- .k' מכיל כיסוי בקדקודים מכיל מכיל  $G' \Leftarrow$
- .G' -ב בצלע מחוברים לא  $V' \backslash S$ ש קדקודים שני כל  $\Leftarrow$ 
  - .V'=V לפי ההגדרת הרדוקציה  $\Leftarrow$

G' -ב בצלע ב- לכן לא מחוברים בצלע ל $V \setminus S$  שני קדקודים לכן כל

- .G -בעלע ב- מחוברים ע $V \backslash S$ שני קדקודים כל  $\Leftarrow$ 
  - .k = |V| k' בגודל G -ב קליקה ליקה  $V \backslash S \Leftarrow$ 
    - k מכיל קליקה בגודל  $G \Leftarrow$

שאלה 2 עלינו להוכיח כי ∃ רידוקיציית זמן-פולינומיאלית מ- IS ל- CLQ לינו

$$IS \leq_P CLQ$$
.

.IS -ו ראשית נגדיר את הבעיות נגדיר את

:CLQ הגדרת הבעיית

G=(V,E) ומספר שלם חיובי G=(V,E)

k מכיל קליקה בגודל מכיל מכיל מכיל מכיל פלט: פלט:

 $CLQ = \{ \langle G, k \rangle \mid$  מכיל קליקה בגודל k לפחות  $G \}$  .

:IS הגדרת הבעיית

A ומספר שלם חיובי G=(V,E) קלט: גרף לא מכוון

k מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל מכיל פלט: האם G מכיל פלט:

 $IS = ig\{ \langle G, k 
angle \mid$  מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל k לפחות מכיל קבוצה בלתי תלוייה ב

#### פונקצית הרדוקציה:

אנחנו נגדיר פונקצית הרדוקציה R שבהינתן זוג אוב שבהינתן תחזירה R אנחנו מחזירה אנחנו מדיר שבהינתן אוב

$$R\left(\langle G, k \rangle\right) = \langle G', k' \rangle$$
 . (\*1)

:כך ש

$$\langle G, k \rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G', k' \rangle \in CLQ \ .$$
 (\*2)

הפונקציית הרדוקציה במשוואה (1\*) מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

G=(V,E) נניח שהגרף הוא (1

G=(V,E) אז הגרף הוא הגרף המשלים של G'

כאשר  $G'=ar{G}=ig(V,ar{E}ig)$  כאשר

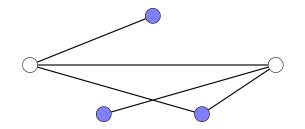
$$\bar{E} = \{(u_1, u_2) \mid (u_1, u_2) \notin E\}$$
.

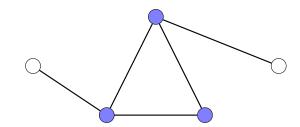
.k' = k (2

לדוגמה, בהינתן הגרף G=(V,E) שמכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל k=3, הפונקציית הרדוקציה G=(V,E) את הגרף  $\bar{G}=(V,\bar{E})$  ואת המספר k'=k=3, כמתואר בתרשים למטה:

$$G = (V, E)$$

$$\bar{G} = (V, \bar{E})$$





### נכונות הרדוקציה

כעת נוכיח שתנאי (2\*) מתקיים.

## $\Leftarrow$ כיוון

.k בהינתן גרף G=(V,E) ושלם נניח כי  $\langle G,k \rangle \in IS$  נניח כי

מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל לפחות.  $G \Leftarrow$ 

.kבגודל ע מכיל תלוייה בלתי קבוצה מכיל מכיל G

Gשלים בצלע מחוברים לא Uב- בצלע של  $\Leftarrow$ 

 $.ar{G}$  אני קדקודים ב- שמחוברים בצלע של  $\leftarrow$ 

 $.ar{G}$  של א בגודל בגודל היא קליקה הקבוצה של הקבוצה U

 $G'=ar{G}$  של k'=k של היא קליקה בגודל U הקבוצה  $\Leftarrow$ 

 $.\langle G', k' \rangle \in CLQ \Leftarrow$ 

# $\Rightarrow$ כיוון

 $.k^\prime$  ושלם  $G^\prime$  בהינתן גרף

 $.\langle G',k'
angle \in CLQ$  נניח כי

. מכיל קליקה בגודל k' לפחות מכיל קליקה מכיל

.k' מכיל קליקה ער מכיל מכיל מכיל קליקה G'

 $.G'=ar{G}:R$  על פי ההגדרה של הפונקציית הרדוקיה

.k' מכיל קליקה ע בגודל הכיל מכיל מכיל

- $ar{G}$  כל שני קדקודים ב- U' מחוברים בצלע של  $\Leftarrow$
- G באלע של המשלים של בצלע לא מחוברים באלע לא U' בהיינו G
  - G של K'=k הקבוצה בלתי תלוייה בגודל היא קבוצה בלתי של היא U'
    - $.\langle G, k \rangle \in IS \Leftarrow$

שאלה 3 עלינו להוכיח כי ∃ רידוקיציית זמן-פולינומיאלית מ- IS ל- VC.

$$IS <_P VC$$
.

.IS -ו VC ו- את הבעיות נגדיר את ראשית

### :VC הגדרת הבעיית

Aומספר שלם חיובי G=(V,E) ומספר שלם חיובי

.k בגודל לפחות ב- G בגודל כיסוי קדקודים ב-

 $VC = ig\{ \langle G, k 
angle \mid$  מכיל כיסוי קדקודים בגודל מכיל מכיל מכיל מכיל .

### :IS הגדרת הבעיית

k קלט: גרף לא מכוון G=(V,E) ומספר שלם חיובי

 $IS = \{ \langle G, k \rangle \mid$  מכיל קבוצה בלתי תלוייה בגודל  $G \}$  .

#### פונקצית הרדוקציה:

אנחנו נגדיר פונקצית הרדוקציה R,  $\langle G,k\rangle\in IS$  זוג שבהינתן שבהינת הרדוקציה פונקצית הרדוקציה אנחנו אנחנו

$$R\left(\langle G,k\rangle\right)=\langle G',k'\rangle$$
 . (\*1)

:כך ש

$$\langle G, k \rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G', k' \rangle \in VC \ .$$
 (\*2)

הפונקציית הרדוקציה במשוואה (1\*) מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

.G=(V,E) נניח שהגרף הוא (1

G=(V,E) אז הגרף G' הוא אותו גרף

$$.k' = |V| - k$$
 (2

#### נכונות הרדוקציה

כעת נוכיח שתנאי (2\*) מתקיים.

$$.k$$
 בהינתן גרף  $G=(V,E)$  ושלם נניח כי  $\langle G,k \rangle \in IS$  נניח כי

- . מכיל קבוצה בלתי תלוייה U בגודל מכיל לפחות  $G \Leftarrow$ 
  - k בגודל מכיל מכיל בלתי מלוייה מכיל קבוצה  $G \Leftarrow$
- G -ב כל שני קדקודים ב- U לא מחוברים בצלע ב-  $\Leftarrow$
- .k' = |V| k בגודל ב- ביסוי קדקודים ליסוי  $V \backslash U \Leftarrow$ 
  - - $.\langle G', k' \rangle \in VC \Leftarrow$

### $\Rightarrow$ כיוון

 $.k^\prime$  בהינתן גרף  $G^\prime$  ושלם

$$.\langle G',k'
angle \in VC$$
 נניח כי

- . מכיל כיסוי קדקודים בגודל k' לפחות מכיל כיסוי קדקודים  $G' \Leftarrow$ 
  - .k' מכיל כיסוי קדקודים U' בגודל מכיל  $G' \Leftarrow$
  - k' מכיל כיסוי קדקודים U' מכיל כיסוי קדקודים  $G \Leftarrow$
- k = |V| k' בגודל G' בלתי תלוייה ב- על היא קבוצת היא  $V \backslash U'$  בגודל  $\Leftarrow$ 
  - k מכיל קבוצה בלתי מלוייה מכיל מכיל מכיל מכיל מכיל מכיל מכיל הגרף G=G'