המחלקה למדעי המחשב

04/2025
$09:00-12:00$

חדוא-2 למדמ"ח

בוחן אמצע סמסטר

מרצים: ד"ר זהבה צבי , ד"ר ירמיהו מילר .

תשפ"ד סמסטר ב'

השאלון מכיל 9 **עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).**

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לענות על שאלות 1-4.

==

שאלה 1 **(28 נקודות)**

א) (18 נקודות) הראו שסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול סופי ומצא את הגבול

$$a_1 = 3,\ \ a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 4},\ \ n \geq 1$$

ב) (10 נקודות) מהו תנאי להתכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

כאשר a ו- b מספרים ממשיים. אם הטור מתכנס מצאו את סכומו.

שאלה 2 **(36 נקודות)**

א) (18 נקודות) מצאו את תחום ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n(n+3)^2}\ .$$

האם הטור מתכנס ב- $x=-2$? נמקו את תשובתכם.

ב) (18 נקודות)

בררו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{1+n\sqrt{n}}$.

שאלה 3 **(36 נקודות)**

קבוע האם הטורים הבאים מתכנסים או מתבדרים:

א) (18 נקודות)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(2n)!}}$$

.

ב) (18 נקודות)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln\ n)^{2n}}$$

.

פתרונות

שאלה 1

א) (18 נקודות) נמצא גבול של סדרה. נניח שגבול של סדרה קיים ושווה ל- L עבור $n \to \infty$

$$a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 4}$$

$$L^2 = 5L - 4$$

$$L^2 - 5L + 4 = 0$$

$$L_1 = 1 \quad L_2 = 4$$

משפט 1 אם יש גבול לסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אז הוא יחיד.

לפי יחידות של גבול רק אחד מהם ערך נכון. כדי לנחש ערך נציב בנוסחה רקורסיבית ונבדוק כמה איברים של סדרה.

$$3, \ 3.3166, \ 3.547, \ 3.706$$

נוכיח שסדרה חסומה ע"י 4 לפי אינדוקציה.

$$n = 1: \ a_1 = 3 < 4$$

נניח

$$n = k, \ a_k < 4$$

ונוכיח

$$n = k + 1: \ a_{k+1} < 4$$

$$a_{k+1} = \sqrt{5a_k - 4} < \sqrt{5 \cdot 4 - 4} = 4$$

נעשה כאן שימוש בהנחת האינדוקציה. קיבלנו $a_{n+1} < 4$ כלומר, חסם עליון.

לפי מה שמצאנו ב- 1, סדרה מונוטונית עולה. .נוכיח מונוטוניות (לפי אינדוקציה)

$$n = 1: \ a_1 = 3, \ a_2 = 3.3166 \ \to a_1 \leq a_2$$

נניח שעבור

$$n = k: \ a_{k-1} < a_k$$

נוכיח שעבור

$$n = k + 1: \ a_k < a_{k+1}$$

גם נכון.

$$a_{k+1} = \sqrt{5a_k - 4} > \sqrt{5a_{k-1} - 4} = a_k$$

השתמשנו הנכחת האינדוקציה $a_{k-1} < a_k$ וקיבלנו $a_k < a_{k+1}$ לכן לפי אינדוקציה סדרה מונוטונית עולה.

משפט 2 לכל סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית וחסומה , יש גבול לכל n

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

ומתקיים $M \leq L$ או $L \geq m$.

לפי משפט מתכנסת. לכן גבול

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 4$$

ד) (10 נקודות) הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n$ הינו טור הנדסי עם מנה $q = \frac{a}{b}$. טור הנדסי מתכנס אם ורק אם

$$|q| = \left|\frac{a}{b}\right| < 1 \ .$$

מנובע מכאן שהסכום של הטור שווה ל-

$$S \overset{\text{דף הנוסחאות}}{=} \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{a}{b}} = \frac{b}{b-a} \ .$$

שאלה 2

א) (18 נקודות) נרשום את הטור בצורה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ כאשר $a_n = \frac{1}{(n+3)^2 2^n}$ ו- $z = x-2$. לפי נוסחת קושי הרדיוס ההתכנסות הוא

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+3)^2 2^n} = 2 \ .$$

לכן הטור מתכנס לכל $-2 < x-2 < 2$, כלומר הטור מתכנס לכל $0 < x < 4$.
בקטע $0 < x < 4$ הטור מתכנס בהחלט.
בקטע $x > 4$ או בקטע $x < 0$ הטור מתבדר.
בנקודה $x = 4$ נקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)^2}$. לפי מבחן השוואה גבולי עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ או לפי מבחן האינטגרל ניתן להראות כי הטור הזה מתכנס.
בנקודה $x = 0$ אנחנו נקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+3)^2}$. הינו טור מחליף סימן והוא מתכנס בהחלט כי טור $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(n+3)^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)^2}$ מתכנס.

תשובה סופית: הטור מתכנס בתחום $0 \leq x \leq 4$.

בנקודה $x = -2$ הטור מתבדר.

ב) (18 נקודות)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{1+n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n\sqrt{n}}$$

נרשום את הור בצורה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ כאשר $a_n = \frac{(-1)^n}{1+n\sqrt{n}}$. מכאן

$$|a_n| = \frac{1}{1+n\sqrt{n}} < \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}} \ .$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ מתכנס כאשר $p > 1$.

לכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ מתכנס, ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{1+n\sqrt{n}}$ מתכנס בהחלט.

שאלה 3 (36 נקודות)

קבוע האם הטורים הבאים מתכנסים או מתבדרים:

א) (18 נקודות)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(2n)!}}$$

.

ב) (18 נקודות)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln\ n)^{2n}}$$

.