# שיעור 1
# תכונות של פונקציה ופונקציות אלמנטריות

## קבוצות של מספרים

קבוצה זה אוסף של עצמים. ישנן שתי דרכים להגדרת קבוצה ספציפית.

**<u>דרך 1:</u>**

לתת רשימה שלמה של איברים. לדוגמה:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

**<u>דרך 2:</u>**

לתת תנאי שמאפיין את איברי הקבוצה, בצורה

$$A = \{x | x \text{ תנאי שמאפיין את}\}$$

לגודמה:

$$A = \{x | 2 \leq x \leq 5 \text{ מספר ממשי וגם } x\}$$

אם $A = \{1, 3, 4, 5\}$ אז $1, 3, 4, 5$ שייכים לקבוצה $A$ ומספרים $1 \in A$, $3 \in A$, $4 \in A$, $5 \in A$.

סדר האיברים בקבוצה אינו חשוב, לכן

$$\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} \ .$$

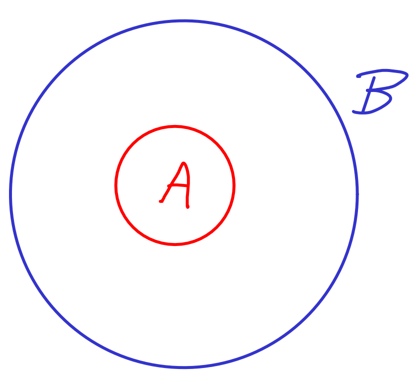
לא משנה כמה פעמים איבר מופיע ברשימה האיברים, ז"א

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 2\} \ .$$

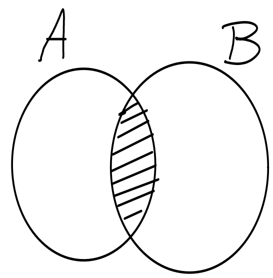
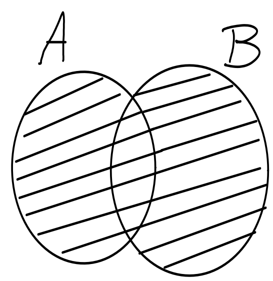
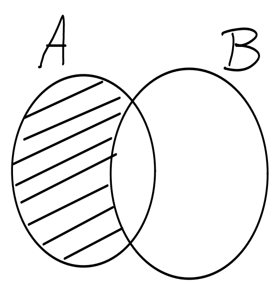
קבוצה ללא איברים מסומנת ב- $\emptyset$. כלומר

$$\emptyset = \{\} \ .$$

אומרים ש- $A$ היא תת קבוצה של $B$ אם כל איבר של $A$ שייך ל- $B$. מסמנים תת קבוצה בצורה $A \subset B$.



## פעולות בין קבוצות

| | | |
|---|---|---|
| חיתוך של קבוצות |  | $A \cap B = \{x \| x \in A \text{ וגם } x \in B\}$ |
| איחוד של קבוצות |  | $A \cup B = \{x \| x \in A \text{ או } x \in B\}$ |
| הפרש בין קבוצות |  | $A - B = \{x \| x \notin B \text{ וגם } x \in A\}$ |

## קבוצות של מספרים

קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

קבוצת המספרים השלמים: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

קבוצת המספרים הרציונלים: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | n \neq 0, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}\}$

שים לב,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \ .$$

המספרים הרציונלים מקיימים את תכונת הצפיפות. ז"א בין כל שני מספרים רציונלים יש מספר רציונלי אחר. אבל עדיין קיימות הרבה מאוד נקודות על הציר שלא מתאימות לאף מספר רציונלי.

**1.1 טענה.**
לא קיים מספר רציונלי שהריבוע שלו שווה ל-2.

---

**הוכחה.**
נוכיח בדרך השלילה. נניח שקיים מספר רציונלי $\dfrac{m}{n}$ כך ש-

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \ .$$

אפשר להניח ש- $\frac{m}{n}$ שבר מצומצם. אז

$$m^2 = 2n^2 \ ,$$

ז"א $m^2$, מספר זוגי, ולכן גם $m$ מספר זוגי. כלומר ניתן לבטא $m$ כ $m = 2k$ כאשר $k \in \mathbb{Z}$ ($k$ מספר שלם).
אז נקבל

$$m = 2k \qquad \Rightarrow \qquad 4k^2 = 2n^2 \qquad \Rightarrow \qquad n^2 = 2k^2 \ .$$

לכן $n^2$ זוגי $\Leftarrow$ $n$ זוגי. זאת אומרת $m$ ו- $n$ מספרים זוגיים. לכן אפשר לצמצם את השבר ב- 2. סתירה.
כלומר, לא קיים מספר רציונלי שריבועו שווה ל- 2. ■

---

אחרי שממלאים את כל הציר, מקבלים את קבוצת המספרים הממשיים, $\mathbb{R}$. ז"א

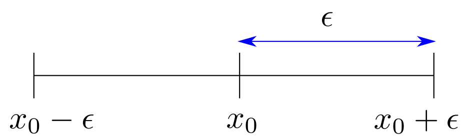
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

## סביבות וקטעים

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\{x \mid a \le x \le b\}$ | $=$ | $[a,b]$ | קטע סגור |
| $\{x \mid a < x < b\}$ | $=$ | $(a,b)$ | קטע פתוח |
| $\{x \mid a \le x < b\}$ | $=$ | $[a,b)$ | קטע חצי פתוח |
| $\{x \mid a < x \le b\}$ | $=$ | $(a,b]$ | קטע חצי פתוח |
| $\{x \mid x \ge a\}$ | $=$ | $[a,\infty)$ | קטע חד פתוח |
| $\{x \mid x > a\}$ | $=$ | $(a,\infty)$ | קטע חד פתוח |
| $\{x \mid x \le b\}$ | $=$ | $(-\infty,b]$ | קטע חד פתוח |
| $\{x \mid x < b\}$ | $=$ | $(-\infty,b)$ | קטע חד פתוח |
| $\{x \mid -\infty < x < \infty\} = \mathbb{R}$ | $=$ | $(-\infty,\infty)$ | קטע חד פתוח |

**1.2 הגדרה: (סביבה של נקודה)**

**א)** כל קטע פתוח $(a,b)$ שמכיל נקודה $x_0$ נקרא סביבה של $x_0$.
**ב)** קטע פתוח $(x_0+\epsilon, x_0-\epsilon)$ נקרא $\epsilon$- סביבה של נקודה $x_0$.




$x_0$ נמצא באמצע הקטע $\epsilon$- מרחק מהאמצע עד הקצה.

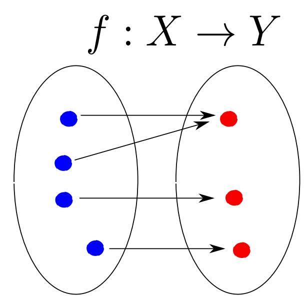
---

# מושג של פונקציה

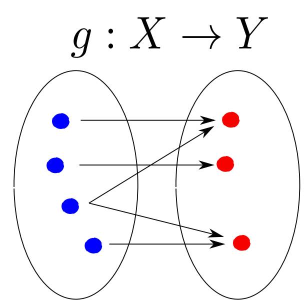
**1.1 הגדרה: (פונקציה)**
פונקציה

$$f:X\to Y$$

היא כלל המתאימה לכל איבר $x\in X$ איבר יחיד $y\in Y$.




פונקציה




לא פונקציה

---

**1.2 הגדרה: (תחום הגדרה, טווח ותמונה של פונקציה)**
תהי $f$ הפונקציה

$$f:X\to Y$$

מקבוצה $X$ לקבוצה $Y$.

**א)** הקבוצה $X$ נקראת **תחום ההגדרה** של $f$. התחום הגדרה מסומן ב- $\mathrm{dom}(f)$, כלומר

$$\mathrm{dom}(f)=X\ .$$

**ב)** הקבוצה $Y$ נקראת ה **טווח** של $f$. הטווח מסומן ב- $\text{Rng}(f)$, ז"א

$$\text{Rng}(f) = Y \ .$$

**ג)** **התמונה** של פונקציה $f$ מסומנת ב- $\text{Im}(f)$ ומוגדרת באופן הבא:

$$\text{Im}(f) = \{y | \forall y \in Y \ \exists \ x \in X \ : \ f(x) = y\}$$

או במילים פשוטות,

$\text{Im}(f)$ היא הקבוצה $\{y\}$ כך שלכל $y \in Y$ קיים $x \in X$ כך ש $f(x) = y$ מתקיים.

---

**דוגמא.**
תהי $f$ הפונקציה המוגדרת ע"י הנוסחה

$$f(x) = (x+2)^2.$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \ , \qquad \text{Rng}(f) = \mathbb{R} \ , \qquad \text{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \ .$$

כאשר $\mathbb{R}^+$ מסמן את הקבוצת המספרים הממשיים גדולים או שווים ל-0.

---

**1.3 הגדרה: (חד חד ערכית)**
תהי

$$f : X \to Y$$

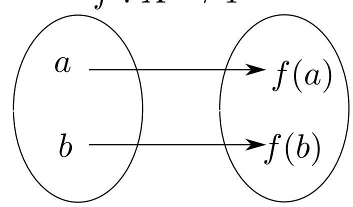
פונקציה. $f$ תקרא חד חד ערכית אם לכל $a, b \in X$,

$$a \neq b \qquad \Rightarrow \qquad f(a) \neq f(b) \ ,$$

או שקול

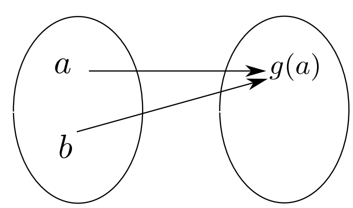
$$f(a) = f(b) \qquad \Rightarrow \qquad a = b \ .$$

$$f : X \to Y$$




פונקציה חח"ע

$$g : X \to Y$$




פונקציה לא חח"ע

---

**1.4 הגדרה: (על)**
תהי

$$f : X \to Y$$

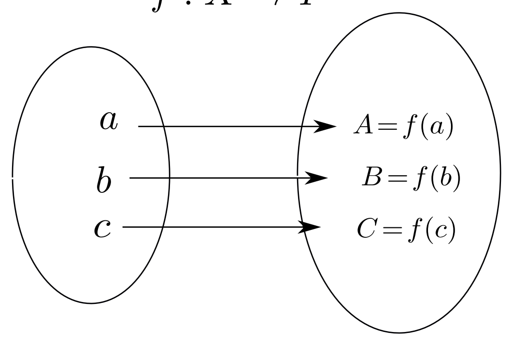
פונקציה. $f$ תקרא על $Y$, אם לכל $y \in Y$ קיים $x \in X$ כך ש-

$$f(x) = y \ .$$

במילים אחרות, $\mathrm{Im}(f) = Y$.

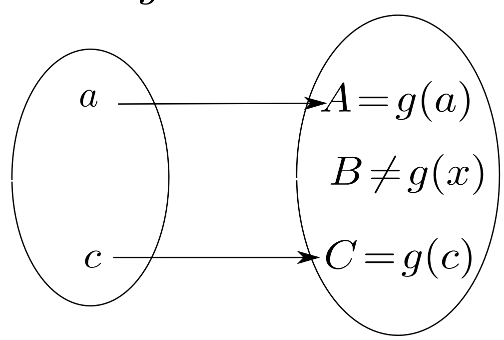
$$f : X \to Y$$

פונקציה על




$$g : X \to Y$$

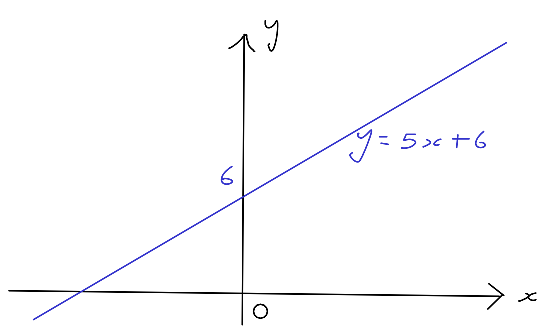
פונקציה לא על




---

**דוגמאות.**

**1.** $f(x) = 5x + 6$.

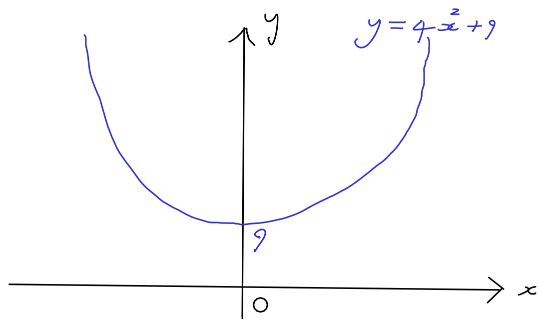



$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \ , \quad \mathrm{Rng}(f) = \mathbb{R} \ , \quad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \ .$$

$f$ חד חד ערכית ועל.

---

**2.** $f(x) = 4x^2 + 9$.

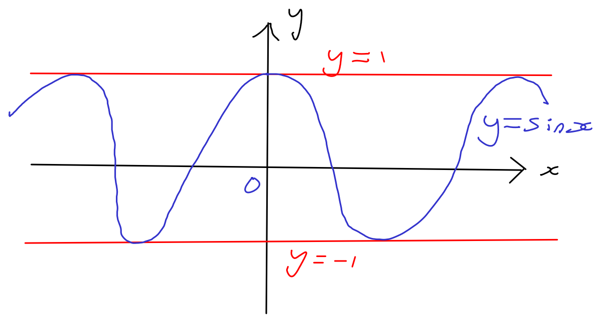



$$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}\ , \quad \mathrm{Rng}(f)=\mathbb{R}\ , \quad \mathrm{Im}(f)=[9,\infty)$$

$f$ לא חד חד ערכית ולא על.

---

**3.** $f(x)=\sin x$.

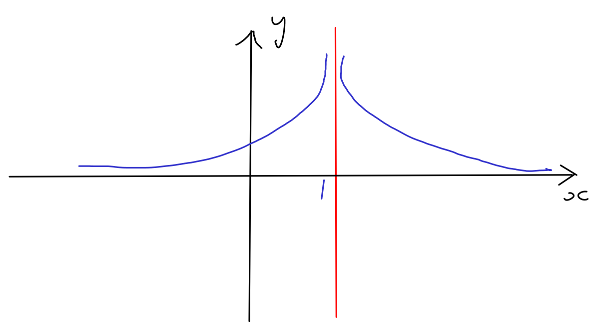



$$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}\ , \quad \mathrm{Rng}(f)=\mathbb{R}\ , \quad \mathrm{Im}(f)=[-1,1]$$

$f$ לא חד חד ערכית ולא על.

---

**4.** $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$.




$$\mathrm{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}\cap x\neq 1\}\ , \quad \mathrm{range}(f)=\mathbb{R}\ , \mathrm{Im}(f)=(0,\infty)$$

$f$ לא חד חד ערכית ולא על.

**5.** $f(x)=2x^2-3$.

$$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}\ , \quad \mathrm{Rng}(f)=\mathbb{R}\ , \quad \mathrm{Im}(f)=[-3,\infty)$$

$f$ לא חד חד ערכית ולא על.

---

**6.** $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

$$\mathrm{Dom}(f)=[-1,1] \ ,$$

$f$ לא חד חד ערכית.

---

# תכונות של פונקציות

## I זוגיות

**1.5 הגדרה: (פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית)**
נניח ש $f(x)$ פונקציה המוגדרת בתחום $D$. $f(x)$ נקראת פונקציה זוגית אם לכל $x\in D$ מתקיים:

$$f(-x)=f(x) \ .$$

גרף של פונקציה זוגית סימטרי ביחס לציר ה-$y$.

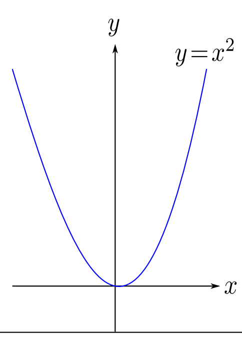
$f(x)$ נקראת פונקציה אי-זוגית אם לכל $x\in D$ מתקיים:

$$f(-x)=-f(x) \ .$$

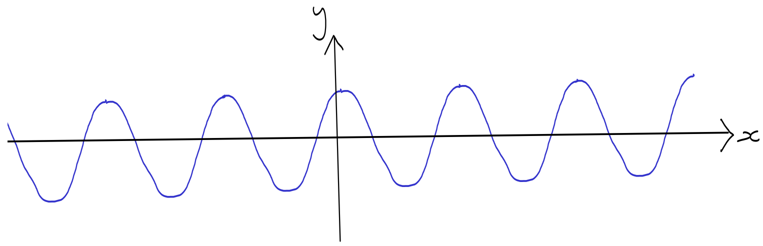
גרף של פונקציה זוגית סימטרי יחסית ראשית הצירים.

---

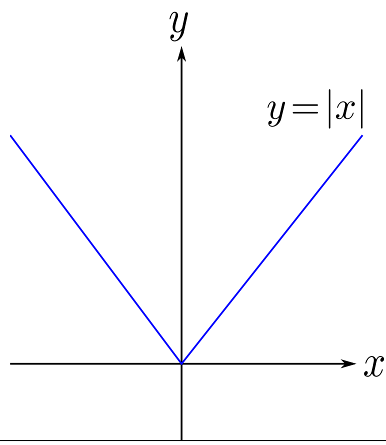
**דוגמאות.**



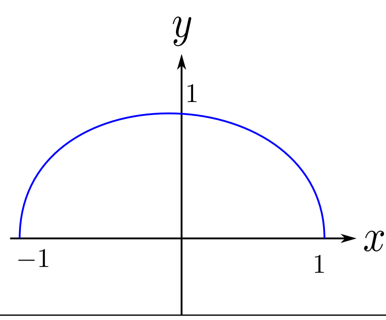

$y=x^2$ זוגית.



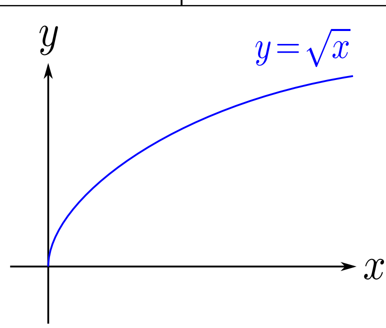

$y = \cos x$ זוגית.



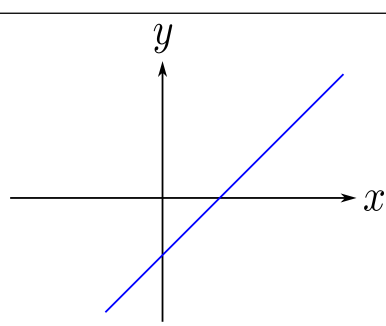

$y = |x|$ זוגית.




$y = \sqrt{1-x^2}$ זוגית.

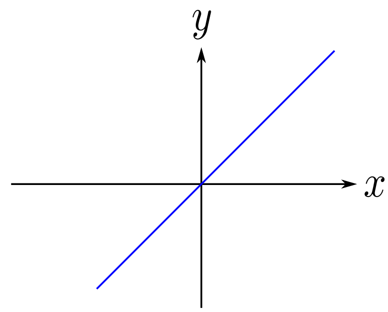



$y = \sqrt{x}$ לא זוגית.

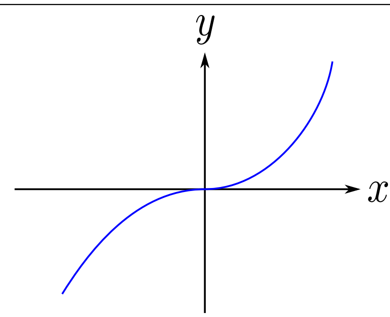



$y = x - 1$ לא זוגית.

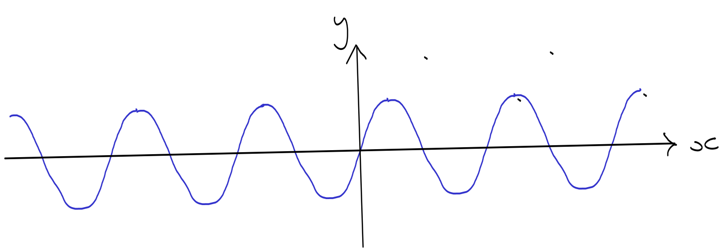
$y = x$ אי זוגית.




$y = x^3$ אי זוגית.




$y = \sin x$ אי זוגית.

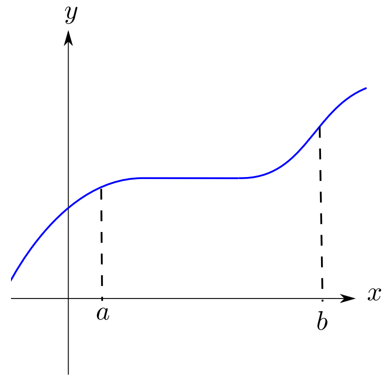



## II מונוטוניות

**1.6 הגדרה: (עלייה וירידה של פונקציה)**
תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בתחום $D$. אומרים כי:

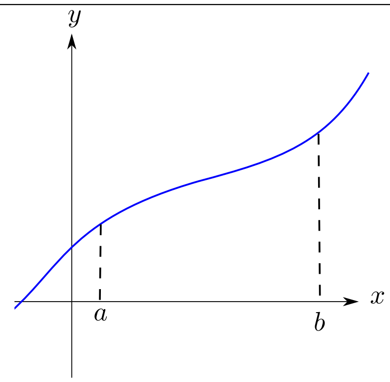
1. $f$ **עולה מונוטונית** בתחום זה אם לכל $a,b\in D$

$$b>a \quad\Rightarrow\quad f(b)\geq f(a)\ ,$$



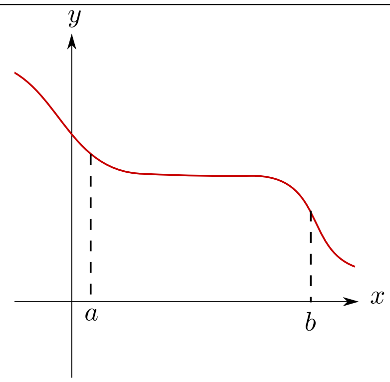

2. $f$ **עולה מונוטונית ממש** בתחום זה אם לכל $a,b\in D$

$$b>a \quad\Rightarrow\quad f(b)> f(a)\ ,$$



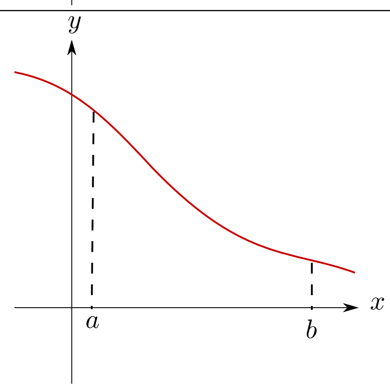

3. $f$ **יורדת מונוטונית** בתחום זה אם לכל $a,b\in D$

$$b>a \quad\Rightarrow\quad f(b)\leq f(a)\ ,$$



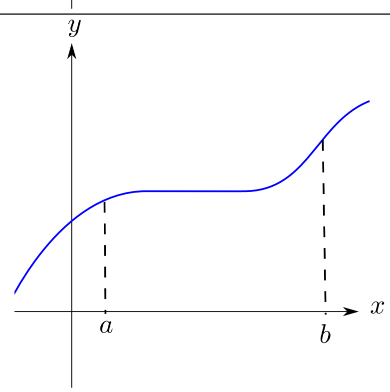

4. $f$ **יורדת מונוטונית ממש** בתחום זה אם לכל $a,b\in D$

$$b>a \quad\Rightarrow\quad f(b)< f(a)\ ,$$



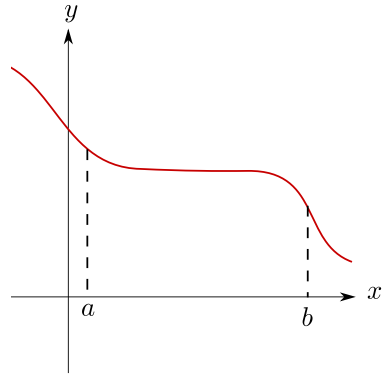

5. $f$ **לא יורדת** בתחום זה אם לכל $a,b\in D$

$$b>a \quad\Rightarrow\quad f(b)\geq f(a)\ ,$$



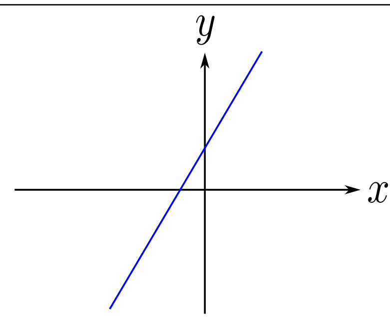
6. $f$ **לא עולה** בתחום זה אם לכל $a,b\in D$

$$b>a \quad \Rightarrow \quad f(b)\leq f(a)\ ,$$

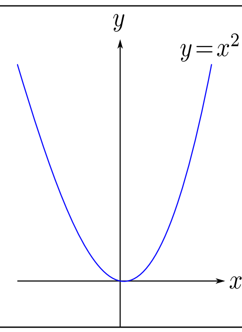



**דוגמאות.**

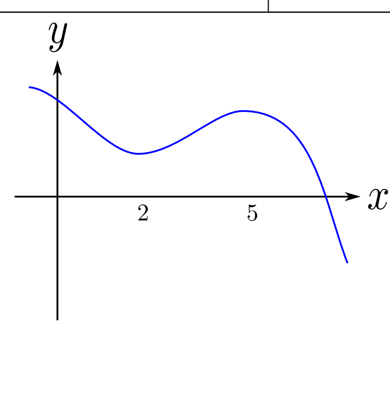
$f(x)=2x+1$ עולה מונוטונית ממש.




$f(x)=x^2$ עולה ממש בתחום $(0,\infty)$ ויורדת ממש בתחום $(-\infty,0)$.




הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחומים $(-\infty,2)$, $(5,\infty)$ ועולה בתחום $(2,5)$.




## III חסימות

**1.7 הגדרה: (חסימות של פונקציה)**
תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בתחום $D$. אומרים כי:

1) $f$ **חסומה מלמעלה** אם קיים מספר $M$ כך שלכל $x \in D$ מתקיים
$$f(x) < M ,$$

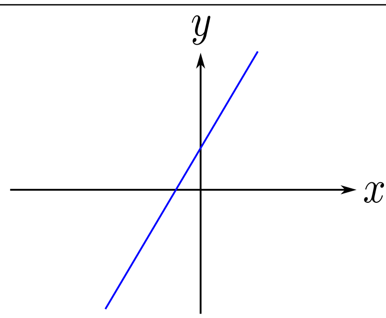
2) $f$ **חסומה מלמטה** אם קיים מספר $m$ כך שלכל $x \in D$ מתקיים
$$f(x) > m ,$$

3) $f$ **חסומה** אם קיים מספרים $m$ ו- $M$ כך שלכל $x \in D$ מתקיים
$$m < f(x) < M ,$$
או באופן שקול, אם קיים מספר $M$ כך שלכל $x \in D$ מתקיים
$$|f(x)| < M .$$

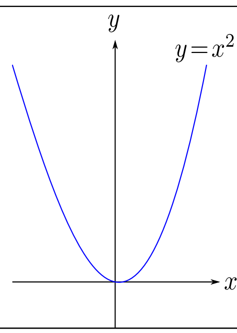
---

**דוגמאות.**

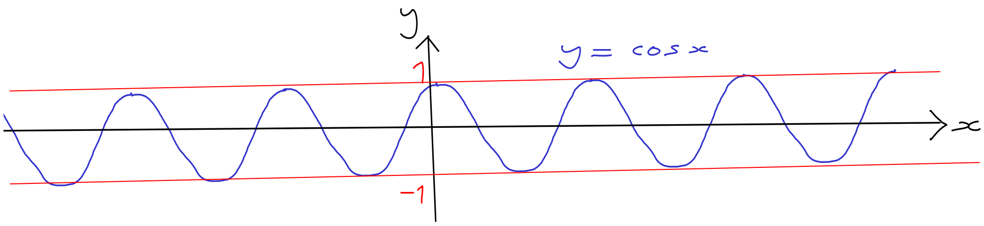
$f(x) = 2x + 1$ עולה מונוטונית ממש.

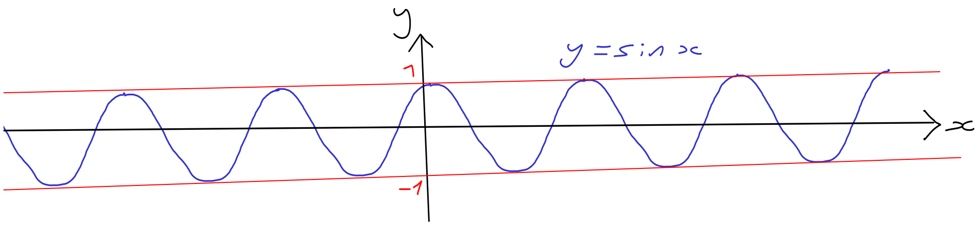



$y = x^2$ חסומה מלמטה אבל לא חסומה מלמעלה.




הפונקציות $y = \sin x$, $y = \cos x$ חסומות:
$-1 \leq \sin x \leq 1$, $-1 \leq \cos x \leq 1$.




## IV מחזוריות

**1.8 הגדרה: (פונקציה מחזורית)**
פונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $D$ נקראת מחזורית אם קיים מספר $T > 0$ כך שלכל $x \in D$ גם $x \pm T \in D$.

$$f(x+T) = f(x) \ , \qquad f(x-T) = f(x) \ .$$

מספר $T > 0$ כזה הקטן ביותר נקרא **המחזור** של $f$.

---

**דוגמאות.**

| | |
|---|---|
| $y = \sin x$ | $T = 2\pi$ |
| $y = \cos x$ | $T = 2\pi$ |
| $y = \tan x$ | $T = \pi$ |
| $y = \cot x$ | $T = \pi$ |

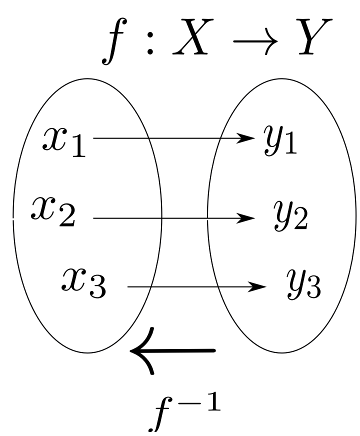
**דוגמא.**
תהי $f(x) = \sin(2x+3)$. נחפש את המחזור של $T$.

$$f(x+T) = f(x) \qquad \rightsquigarrow \qquad \sin(2(x+T)+3) = \sin((2x+3)+2T) = \sin(2x+3) \ .$$

לכן $2T = 2\pi \Leftarrow T = \pi$.

# פונקציה הפוכה

**1.9 הגדרה: (פונקציה הפוכה)**
תהי
$$f : X \to Y$$
פונקציה. אם $f(x)$ חד חד ערכית אז ניתן להגדיר פונקציה הפוכה, שתסומן $f^{-1} : \mathrm{Dom}(f) \to X$ באופן הבא.
$$f(x) = y \qquad \Leftrightarrow \qquad x = f^{-1}(y) \ .$$

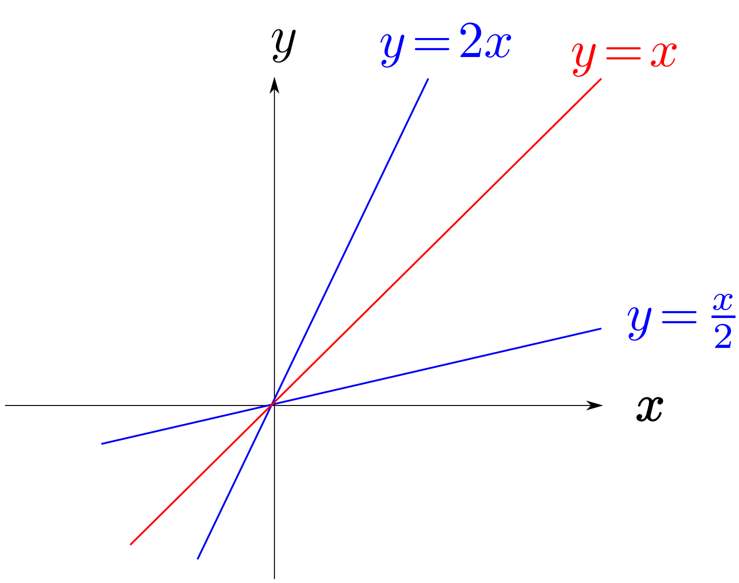



$$f^{-1}(y_1) = x_1 \ ,$$
$$f^{-1}(y_2) = x_2 \ ,$$
$$f^{-1}(y_3) = x_3 \ .$$

---

**דוגמאות.**

**1)** $f(x) = 2x$.
$$y = 2x \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{y}{2}$$
לכן
$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2} \ .$$

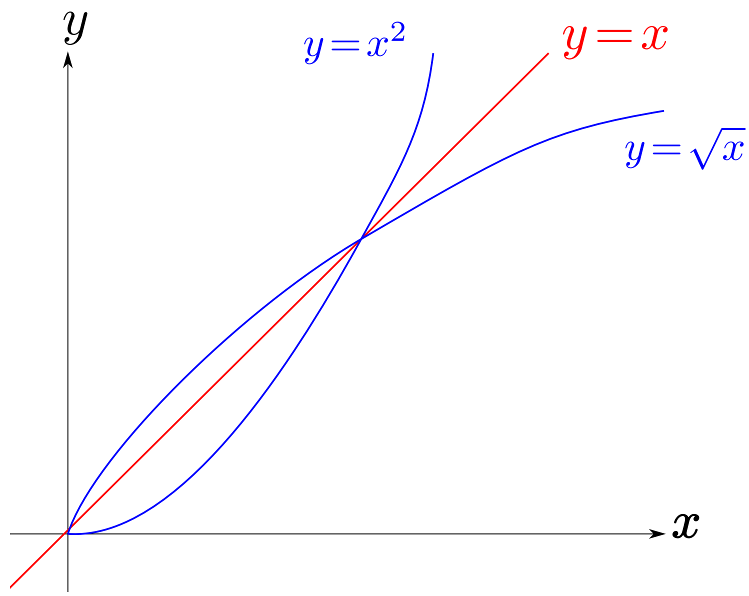


**2)** $f(x) = x^2$, $x \geq 0$.

$$y = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt{y}$$

לכן

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \ .$$




**1.10 הערה.** הגרפים של שתי פונקציות הפוכות אחד לשניה סימטריים ביחס לקו $y = x$. ■

**1.11 משפט. (תחום הגדרה ותמונה של פונקציה הפוכה)**
שים לב לפי הגדרה של פונקציה הפוכה, התמונה של $f$ שווה לתחום ההגדרה של $f^{-1}$ ולהפך.

**דוגמא.**
נתונה הפונקציה

$$y = \sqrt{x+5} - 2 \ .$$

מצאו את

**1)** תחום הגדרה ותמונה של הפונקציה

**2)** פונקציה ההפוכה

**3)** תחום הגדרה של פונקציה ההפוכה

**4)** התמונה של פונקציה ההפוכה

**5)** צייר הגרפים שלהם.

**פיתרון.**

**1)** <u>תחום ההגדרה של הפונקציה:</u>

$[-5,\infty)$.

<u>תמונה של הפונקציה:</u>

$[-2,\infty)$

**2)** <u>פונקציה ההפוכה:</u>

$$y=\sqrt{x+5}-2 \qquad \Rightarrow \qquad x=(y+2)^2-5$$

לכן פונקציה ההפוכה היא

$$f^{-1}(x)=(x+2)^2-5\ .$$

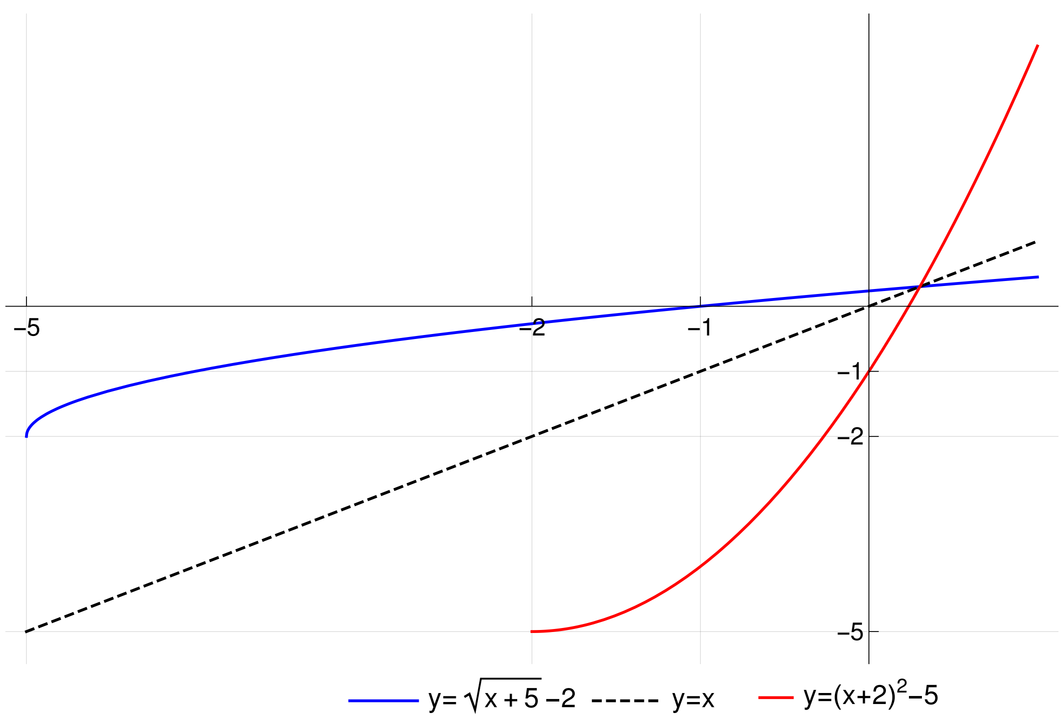
**3)** <u>תחום הגדרה של פונקציה ההפוכה: :</u>

$[-2,\infty)$.

**4)** <u>התמונה של פונקציה ההפוכה:</u>

$[-5,\infty)$.

**5)** <u>שירטוט של הגרפים של $f$ ו- $f^{-1}$:</u>




■

## פונקציה מורכבת

**1.12 הגדרה: (פונקציה מורכבת)**
נניח ש $y = f(u)$ ו- $u = g(x)$, אז לפונקציה $y = f(g(x))$ קוראים **פונקציה מורכבת**.

**דוגמאות.**

**1)**

$$y = \sin(x^2)$$

הוא פונקציה המורכבת מהפונקציה $y = \sin u$ ו- $u = x^2$.

**2)**

$$y = e^{\sqrt{x}}$$

הוא פונקציה המורכבת מהפונקציה $y = e^u$ ו- $u = \sqrt{x}$.

**3)**

$$y = \frac{1}{(x^2-3)^3}$$

הוא פונקציה המורכבת מהפונקציה $y = \frac{1}{u^3}$ ו- $u = x^2 - 3$.

## טרנספורמציות של הגרפים במערכת הצירים

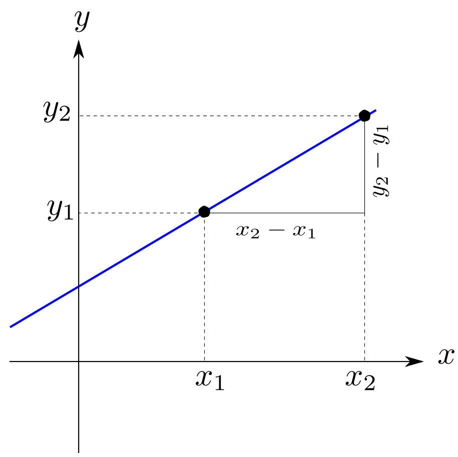
תהי $f$ פונקציה כלשהי. להלן מתואר מה יקרה עם הגרף $y = f(x)$ תחת הטרנספורמציות הבאות:

| | | |
|---|---|---|
| .1 | $f(x)+a$ | הזזת הגרף ב- $\lvert a\rvert$ יחידות למעלה אם $a>0$ או למטה אם $a<0$. |
| .2 | $f(x+a)$ | הזזת הגרף ב- $\lvert a\rvert$ יחידות שמאלה אם $a>0$ או ימינה אם $a<0$. |
| .3 | $-f(x)$ | היפוף של הגרף לעומת ציר ה- $x$ (שיקוף הגרף ביחס לציר ה-$x$). |
| .4 | $f(-x)$ | היפוף של הגרף לעומת ציר ה- $y$ (שיקוף הגרף ביחס לציר ה-$y$). |
| .5 | $k\cdot f(x)$ | $(k>0)$ מתיחה, אם $k>1$, או כיווץ, אם $0<k<1$, של הגרף בכיוון של ציר ה- $y$. |
| .6 | $f(k\cdot x)$ | $(k>0)$ כיווץ, אם $k>1$, או מתיחה, אם $0<k<1$, של הגרף בכיוון של ציר ה- $x$. |
| .7 | $\lvert f(x)\rvert$ | שיקוף של חלקי הגרף הנמצאים מתחת לציר ה-$x$ לעומת ציר ה- $x$ |
| .8 | $f(\lvert x\rvert)$ | החלפת חלק הגרף הנמצא משמאל לציר $y$ בשיקופו של החלק הימין של הגרף לעומת ציר ה- $y$ |
| .9 | $f(-\lvert x\rvert)$ | החלפת חלק הגרף הנמצא מימין לציר $y$ לשיקוף של החלק השמאלי של הגרף לעומת ציר ה- $y$ |
| .10 | $\lvert f(x)-a\rvert+a$ | שיקוף לעומת ישר $y=a$ של חלקי הגרף הנמצאים מתחת לישר זה |
| .11 | $f(\lvert x-a\rvert+a)$ | ההחלפת החלק הגרף הנמצא משמאל לישר $x=a$ לשיקוף לעומת ישר זה של חלק הגרף אשר מימין לישר $x=a$ |

# פונקציות אלמנטריות בסיסיות

## קו ישר

**1.13 כלל: (שיפוע של גרף של קו ישר)**
בהינתן גרף של קו ישר כמתואר בתרשים.




בכדי למצוא השיפוע, בוחרין כל שתי נקודות $(x_1,y_1)$ ו- $(x_2,y_2)$ והשיפוע ניתן ע"י הנוסחה:

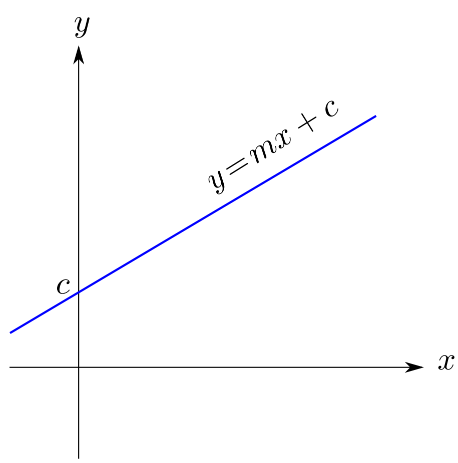
$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ .$$

---

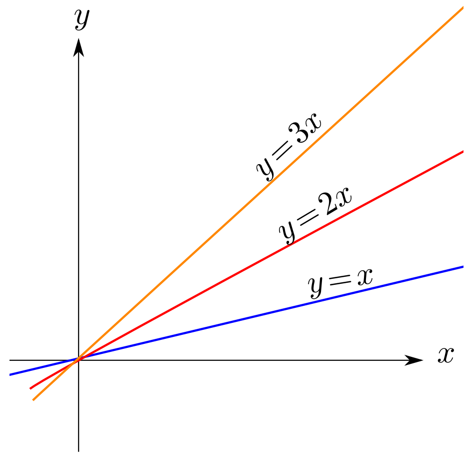
**1.14 כלל: (גרף של קו ישר)**
הפונקציה הניתנת ע"י הנוסחה

$$y=mx+c$$

הינה קו ישר עם שיפוע $m$ שחותכת את ציר ה- $y$ בנקודה $(0,c)$.



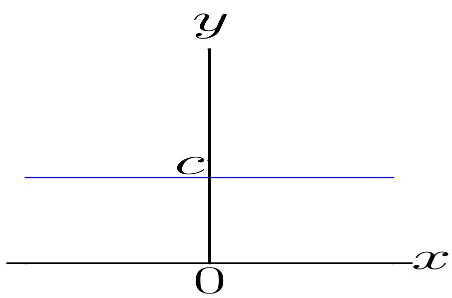

לכן ככל ש- $m$ גדול יותר, השיפוע גבוה יותר (ולהפך).




---

### 1) **פונקציה קבועה**

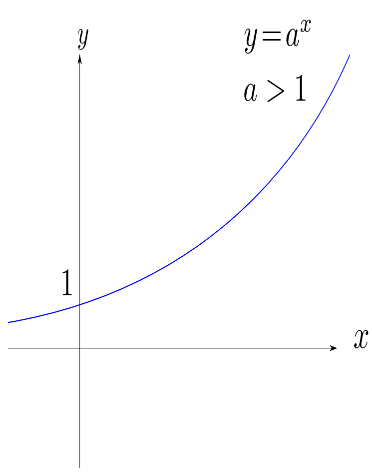
$y = c$ .

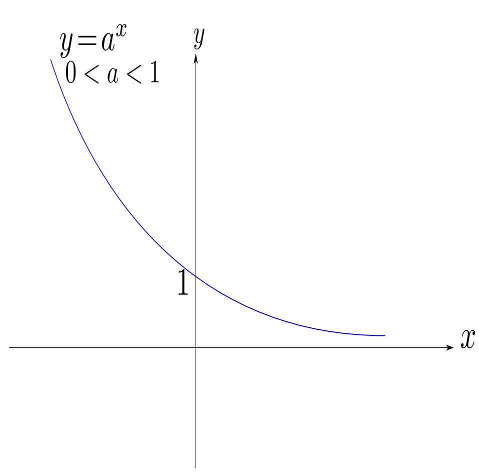



### 2) **פונקציה מעריכית**

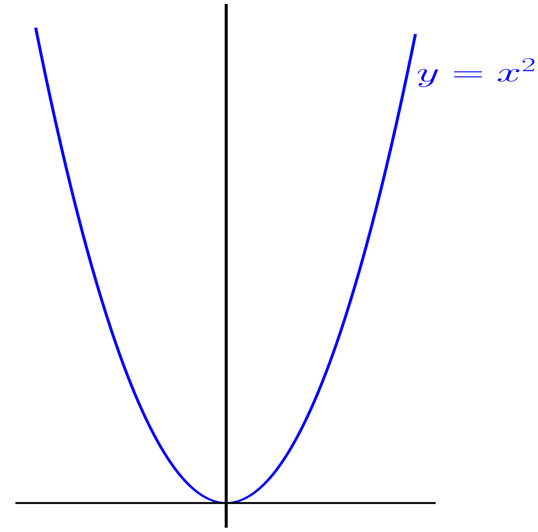
$$y = a^x \ , \qquad a \neq 1 \ , a > 0$$

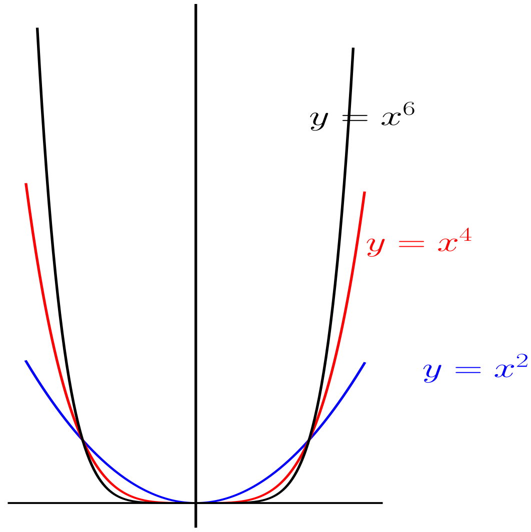
| | |
|---|---|
| תחום הגדרה: | $\mathbb{R}$ |
| התמונה: | $y \in (0,\infty)$. |

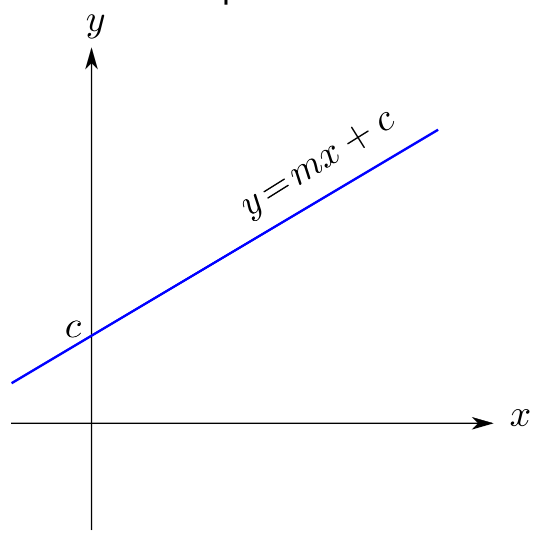


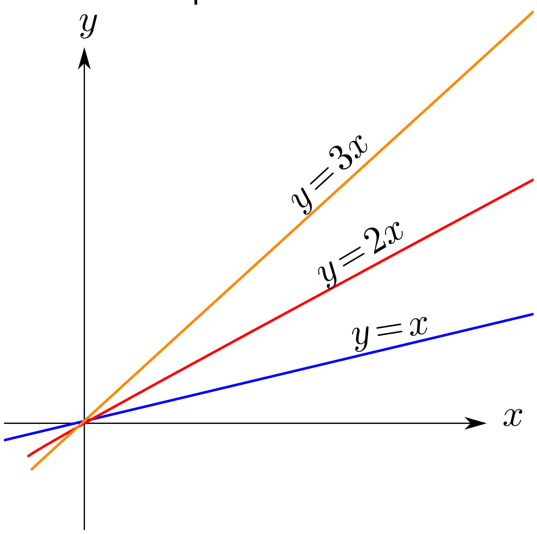



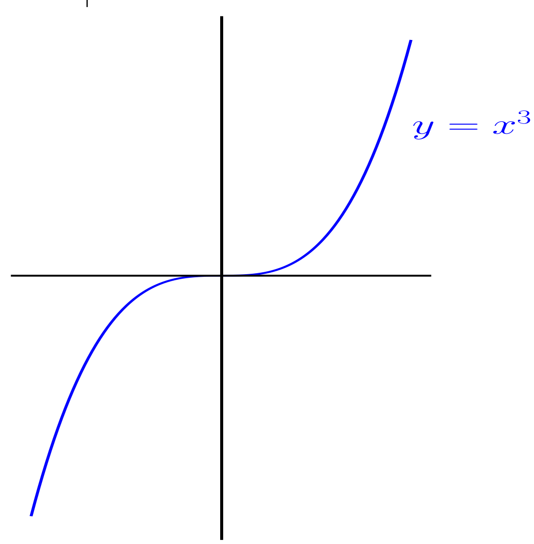

### 3) פונקציה חזקה

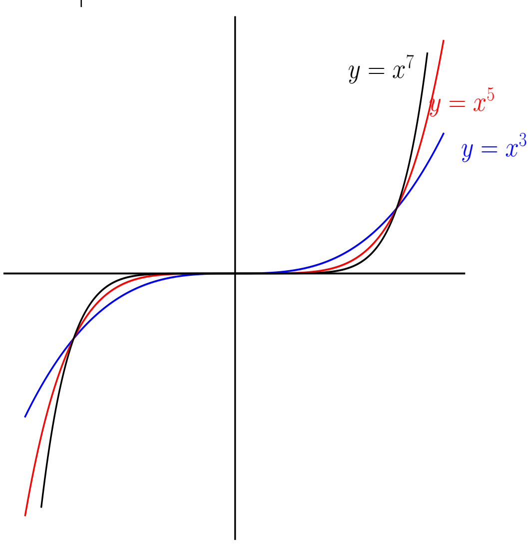

$y = x^2$

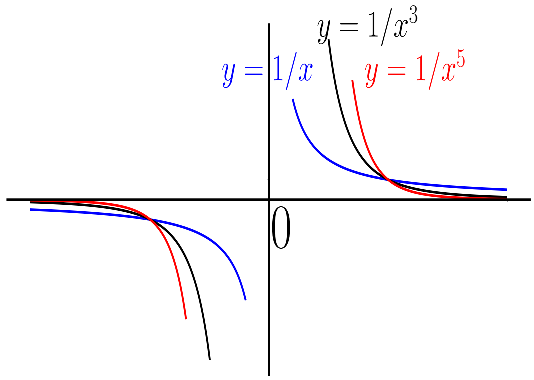

$y = x^6$
$y = x^4$
$y = x^2$

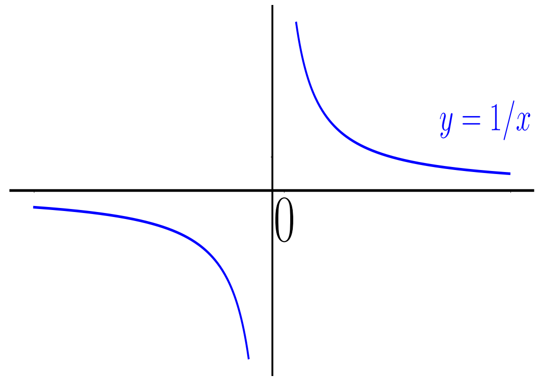

$y$
$y = mx + c$
$c$
$x$

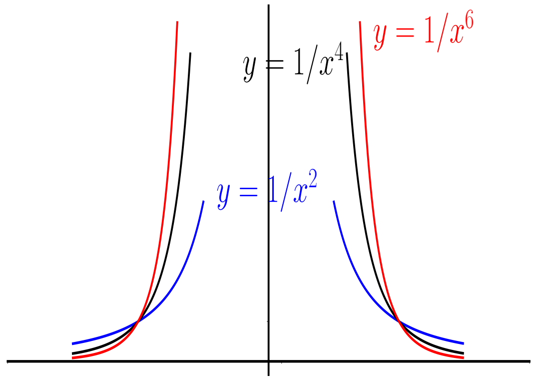

$y$
$y = 3x$
$y = 2x$
$y = x$
$x$

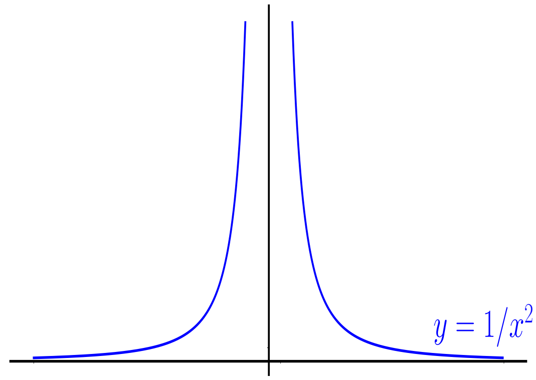

$y = x^3$

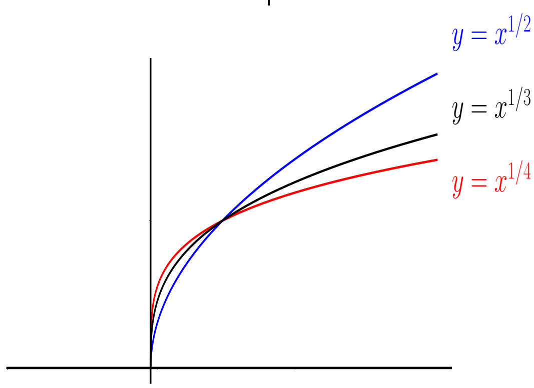

$y = x^7$
$y = x^5$
$y = x^3$

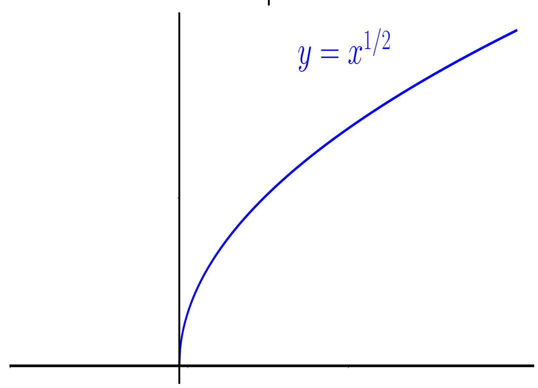



### 4) פונקציה לוגריתמית

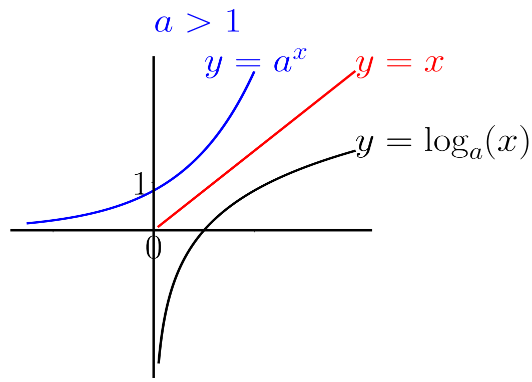
פונקציה לוגריתמית היא פונקציה הפוכה לפונקציה מעריכית. כלומר

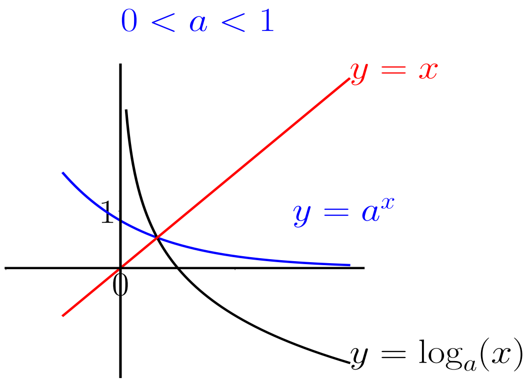
$$y=a^x$$

אם ורק אם $x=\log_a y$ . מכאן נובע

$$a^{\log_a y}=y\ .$$

מכיוון שתחום הגדרה של $y=a^x$ הוא $\mathbb{R}$ והתמונה היא $y>0$, תחום ההגדרה של פונקציה $y=\log_a x$ הוא $x>0$. קיימים שני סוגים של גרף לפונקציה $y=\log_a x$:




<u>נוסחאות של $\log_a x$</u>

**1)** $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

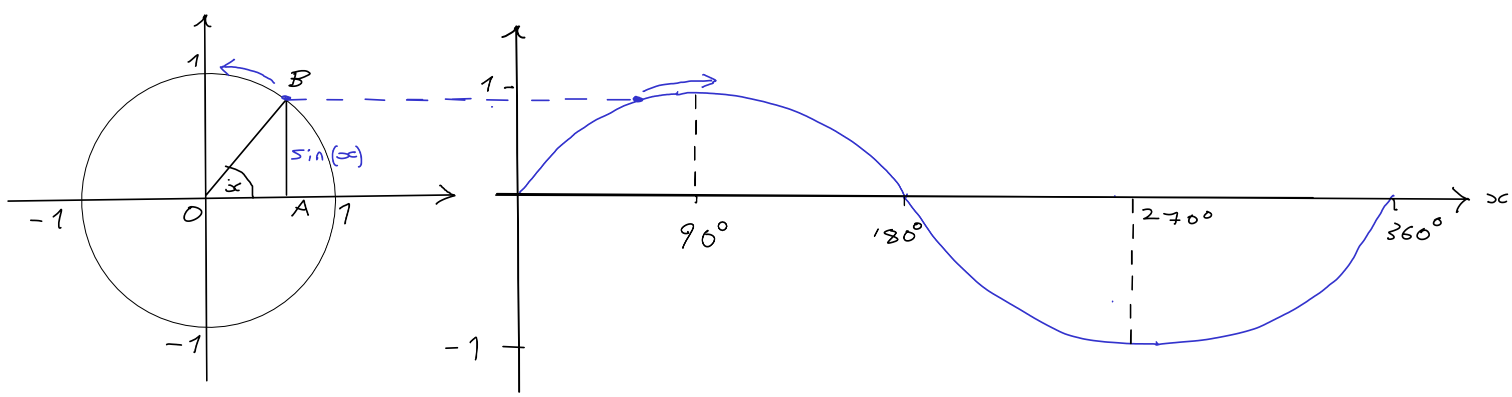
**2)** $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

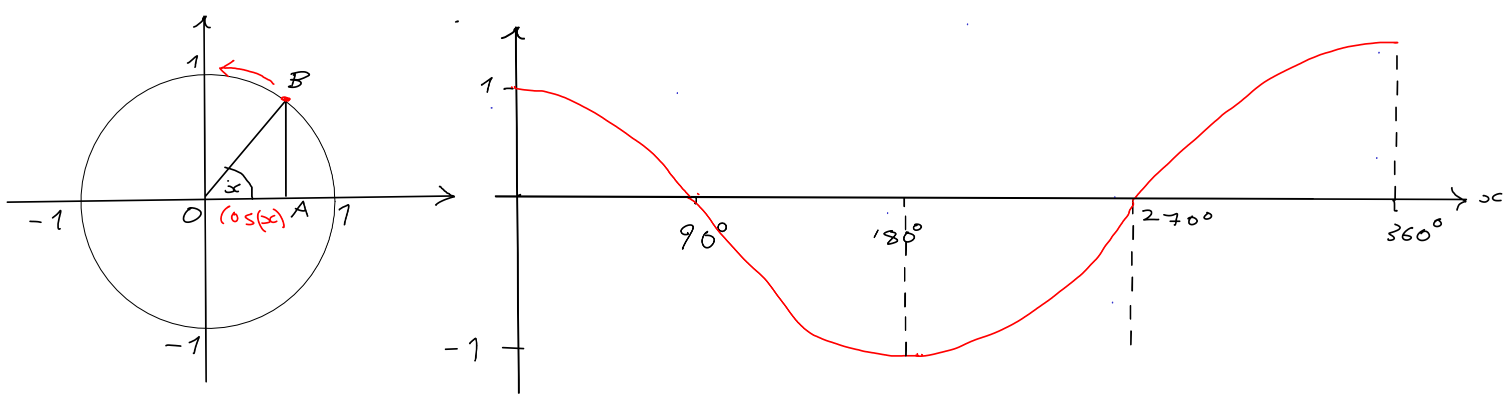
עבור $a = e$ מסמנים $\log_e x = \ln x$.

## 5) פונקציה טריגונומטריות

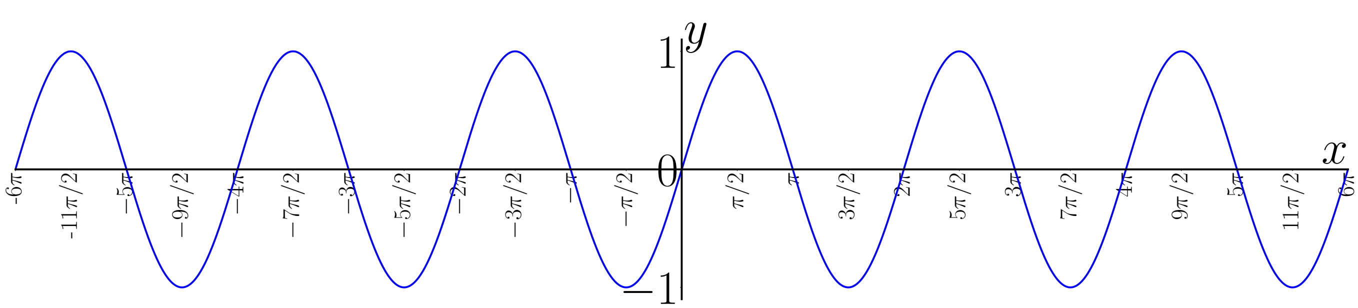
פונקציות הטריגונומטריות מוגדרות ע"י מעגל היידה:

$$\sin x = AB \ , \qquad \cos x = OA \ , \qquad \tan x = \frac{AB}{OA} = \frac{\sin x}{\cos x} \ , \qquad \cot x = \frac{OA}{AB} = \frac{\cos x}{\sin x} \ .$$




$y = \sin x$



ערכים עיקריים:

$$\sin(0) = 0 \ , \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1 \ , \qquad \sin\left(\pi\right) = 0 \ , \qquad \sin(\tfrac{3\pi}{2}) = 1 \ , \qquad \sin(2\pi) = 0 \ .$$

פונקציה אי-זוגית:

$$\sin(-x) = -\sin(x) \ .$$

פונקציה מחזורית עם מחזור $T = 2\pi$:

$$\sin(x + 2\pi n) = \sin(x) \ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

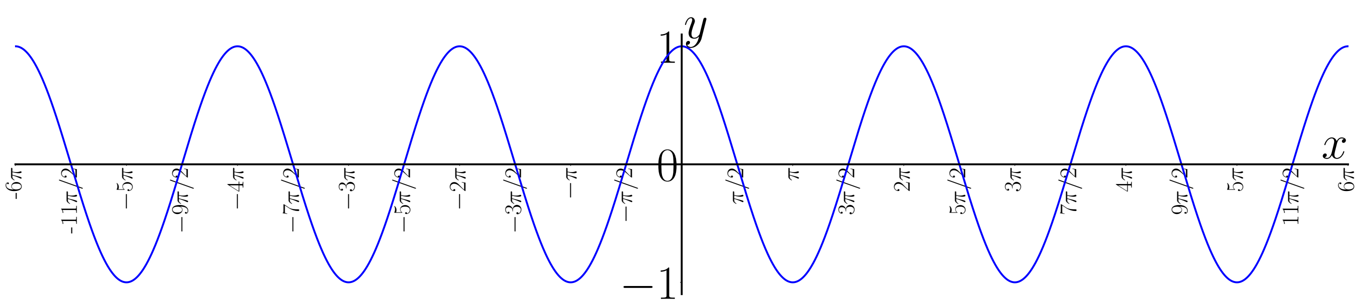
ערכים מחזוריים:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \ , \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1 \ , \quad \sin(n\pi) = 0 \ , \quad \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n \ , \quad n \in \mathbb{Z} \ .$$

ערכים שיקופיים:

$$\sin(\pi - x) = \sin x \ , \qquad \sin(x - \pi) = -\sin x \qquad \sin(x + \pi) = -\sin(x) \ .$$

<u>$y = \cos x$</u>




ערכים עיקריים:

$$\cos(0) = 1 \ , \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \ , \qquad \cos(\pi) = -1 \ , \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \ , \qquad \cos(2\pi) = 0 \ .$$

פונקציה זוגית:

$$\cos(-x) = \cos(x) \ .$$

פונקציה מחזורית עם מחזור $T = 2\pi$:

$$\cos(x + 2\pi n) = \cos(x) \ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

ערכים מחזוריים:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0 \ , \qquad \cos(2\pi n) = 1 \ , \qquad \cos(\pi + 2\pi n) = -1 \ , \qquad \cos(n\pi) = (-1)^n \ , \qquad n \in \mathbb{Z} \ .$$

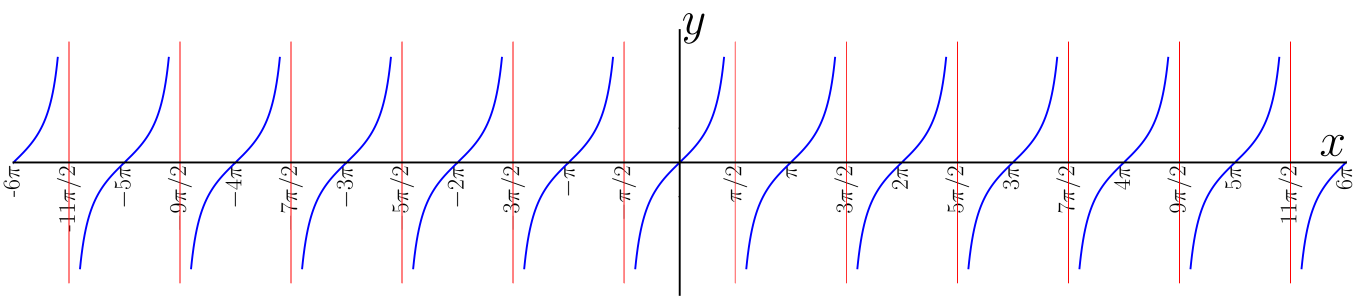
ערכים שיקופיים:

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \ , \qquad \cos(x - \pi) = -\cos x \qquad \cos(x + \pi) = -\cos(x) \ .$$

<u>$y = \tan x$</u>

תחום הגדרה:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \ , \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ .$$



ערכים עיקריים:

$$\tan(0)=0\ ,\qquad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1\ ,\qquad \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1\ ,\qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)\to\infty\ ,\qquad \tan\left(-\frac{\pi}{2}\right)\to-\infty\ .$$

פונקציה אי-זוגית:

$$\tan(-x)=-\tan(x)\ .$$

פונקציה מחזורית עם מחזור $T=\pi$:

$$\tan(x+\pi n)=\tan(x)\ ,\quad n\in\mathbb{Z}$$

ערכים מחזוריים:

$$\tan\left(\frac{|n|\pi}{2}\right)\to\infty\ ,\qquad \tan\left(-\frac{|n|\pi}{2}\right)\to-\infty\ ,\qquad \tan(n\pi)=0\ ,\qquad n\in\mathbb{Z}\ .$$

ערכים שיקופיים:

$$\tan(\pi-x)=-\tan x\ ,\qquad \tan(x-\pi)=\tan x\qquad \tan(x+\pi)=\tan(x)\ .$$

## 6) פונקציה טריגונומטריות הפוכות

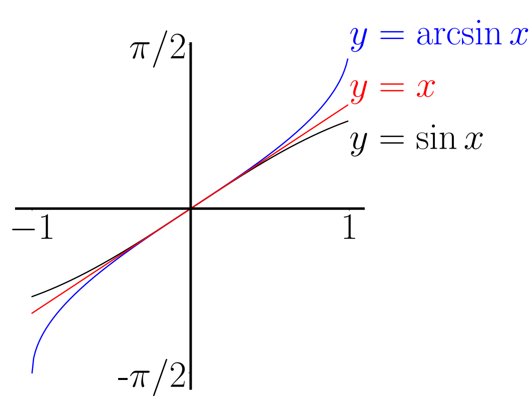
$$y=\arcsin x\ ,\qquad y=\arccos x\ ,\qquad y=\arctan x\ .$$

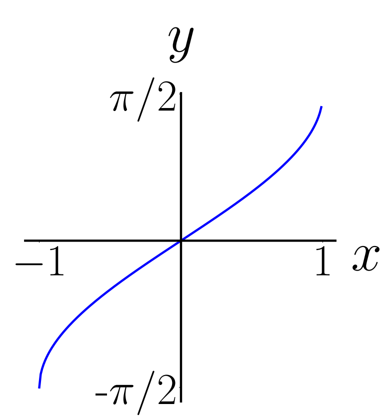
### $y=\arcsin x$

$y=\arcsin x$ היא פונקציה הפוכה ל- $y=\sin x$ בתחום $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$.

$$y=\sin x\ ,\qquad -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\ ,\qquad -1\leq y\leq 1$$

לכן תחום ההגדרה של $y=\arcsin x$ הוא $-1\leq x\leq 1$ והתמונה של $y=\arcsin x$ היא $-\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}$.



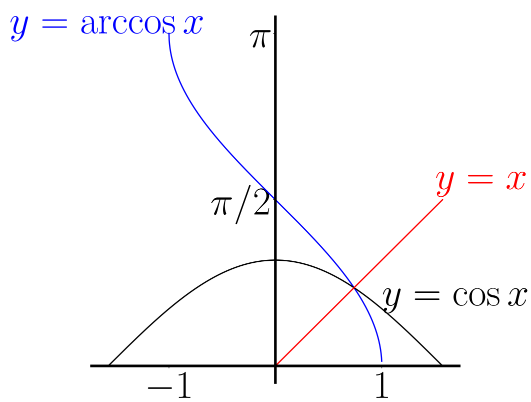
<u>$y = \arccos x$</u>

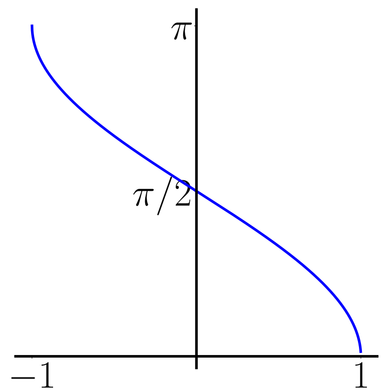
$y = \arccos x$ היא פונקציה הפוכה ל- $y = \cos x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$. זאת אומרת

$$y = \cos x \ , \qquad 0 \leq x \leq \pi \ , \qquad -1 \leq y \leq 1$$

לכן

$$y = \arccos x \ , \qquad -1 \leq x \leq 1 \ , \qquad 0 \leq y \leq \pi \ .$$




<u>$y = \arctan x$</u>

$y = \arctan x$ היא פונקציה הפוכה ל- $y = \tan x$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. זאת אומרת

$$y = \tan x \ , \qquad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \ , \qquad -\infty \leq y \leq \infty$$

לכן

$$y = \arctan x \ , \qquad -\infty \leq x \leq \infty \ , \qquad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \ .$$