

## תוכן העניינים

4	1 תורת המספרים
6	2 חוגים
7	3 צפני בסיסים
8	4 צופן RSA
9	5 צופן ElGamal
9	6 צופן אניגמה
11	7 תורת שאנון וסודיות מושלמת
12	8 צופן פייסטל
13	9 צופן IDEA
14	10 צופן DES

## 1 תורת המספרים

$a \equiv b \pmod{m}$  אם ורק אם קיים שלם  $q$  כך ש  $a = bq + m$ .

קיים שלם  $q$  כך ש:  $a = bq + m$   $\iff m \mid a - b$

אם  $a, b$  שלמים חיוביים אז השארית של  $a$  בחלוקה ב- $b$ , מסומנת  $a \bmod b$  היא

$$a \bmod b = a - b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor.$$

**משפט החילוק של אוקלידס:** לכל זוג שלמים  $a, b$  קיימים שלמים  $q, r$  כך ש:

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

אם  $a, b \geq 0$  אזי  $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$  ו-  $r = a \bmod b$ .

**האלגוריתם של אוקלידס:** לכל זוג שלמים חיוביים  $a, b$  עבורם  $a \geq b$  האלגוריתם הבא נותן את  $\gcd(a, b)$ .

### האלגוריתם של אוקלידס Algorithm 1

```

1: Input: Integers  $a, b$ .
2:  $r_0 \leftarrow a, \quad r_1 \leftarrow b, \quad n \leftarrow 1$ 
3: while  $r_n \neq 0$  do
4:    $q_n \leftarrow \left\lfloor \frac{r_{n-1}}{r_n} \right\rfloor$ 
5:    $r_{n+1} \leftarrow r_{n-1} - q_n r_n$ 
6:    $n \leftarrow n + 1$ 
7: end while
8:  $n \leftarrow n - 1$ 
9: Output:  $r_n = \gcd(a, b)$ 

```

שלב	$q_n$	$r_n$
$n = 1$	$q_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor$	$r_2 = r_0 - q_1 r_1$
$n = 2$	$q_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor$	$r_3 = r_1 - q_2 r_2$
$\vdots$		
$n - 1$	$q_{n-1} = \left\lfloor \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} \right\rfloor$	$r_n = r_{n-2} - q_{n-1} r_{n-1}$
$n$	$q_n = \left\lfloor \frac{r_{n-1}}{r_n} \right\rfloor$	$r_{n+1} = r_{n-1} - q_n r_n$

**משפט בז'ו:** לכל זוג שלמים  $a, b$  קיימים שלמים  $s, t$  כך ש:

$$sa + tb = d, \quad d = \gcd(a, b).$$

בהינתן  $a \geq b \geq 0$  האלגוריתם המוכלל של אוקלידס נותן את השלמים  $(s, t, d)$  בפירוט  $sa + tb = d$  באופן הבא:

### האלגוריתם המוכלל של אוקלידס Algorithm 2

```

1: Input: Integers  $a, b$ .
2:  $r_0 \leftarrow a, \quad r_1 \leftarrow b$ 
3:  $s_0 \leftarrow 1, \quad s_1 \leftarrow 0$ 
4:  $t_0 \leftarrow 0, \quad t_1 \leftarrow 1, \quad n \leftarrow 1$ 
5: while  $r_n \neq 0$  do
6:    $q_n \leftarrow \left\lfloor \frac{r_{n-1}}{r_n} \right\rfloor$ 
7:    $r_{n+1} \leftarrow r_{n-1} - q_n r_n$ 
8:    $s_{n+1} \leftarrow s_{n-1} - q_n s_n$ 
9:    $t_{n+1} \leftarrow t_{n-1} - q_n t_n$ 
10:   $n \leftarrow n + 1$ 
11: end while
12:  $n \leftarrow n - 1$ 
13: Output:  $d = r_n, s = s_n, t = t_n$ 

```

שלב	$q_n$	$t_n$	$s_n$	$t_n$
$n = 1$	$q_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor$	$r_2 = r_0 - q_1 r_1$	$s_2 = s_0 - q_1 s_1$	$t_2 = t_0 - q_1 t_1$
$n = 2$	$q_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor$	$r_3 = r_1 - q_2 r_2$	$s_3 = s_1 - q_2 s_2$	$t_3 = t_1 - q_2 t_2$
$\vdots$				
$n - 1$	$q_{n-1} = \left\lfloor \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} \right\rfloor$	$r_n = r_{n-2} - q_{n-1} r_{n-1}$	$s_n = s_{n-2} - q_{n-1} s_{n-1}$	$t_n = t_{n-2} - q_{n-1} t_{n-1}$
$n$	$q_n = \left\lfloor \frac{r_{n-1}}{r_n} \right\rfloor$	$r_{n+1} = r_{n-1} - q_n r_n$	$s_{n+1} = s_{n-1} - q_n s_n$	$t_{n+1} = t_{n-1} - q_n t_n$

שני מספרים שלמים  $a, b$  נקראים **מספרים זרים** אם  $\gcd(a, b) = 1$ .

**משפט הפירוק לראשוניים:**

לכל שלם חיובי  $m$  קיים מספרים ראשוניים  $p_1, p_2, \dots, p_n$  ושלמים אי-שליליים  $e_1, \dots, e_n$  כך שניתן לרשום  $m$  כפירוק לראשוניים בצורה הבאה:

$$m = p_1^{e_1} \times p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n}.$$

**פונקצית אוילר:**

אם הפירוק לראשוניים של מספר שלם  $m$  הוא  $m = \prod_{i=1}^n p_i^{e_i}$ , אז המספר של שלמים אשר זרים ביחס ל-  $m$  וקטן ממנו ניתן על ידי הנוסחה

$$\phi(m) = \prod_{i=1}^n (p_i^{e_i} - p_i^{e_i-1}).$$

אם  $p$  מספר ראשוני אז:  $\phi(p) = p - 1$ .  
 אם  $p$  מספר ראשוני אז:  $\phi(p^n) = p^n - p^{n-1}$ .  
 אם  $s, t$  שלמים זרים (כלומר  $\gcd(s, t) = 1$ ) אז:  $\phi(s \cdot t) = \phi(s)\phi(t)$ .  
 אם  $p$  ו-  $q$  מספרים ראשוניים שונים אז:  $\phi(p \cdot q) = (p - 1)(q - 1)$ .

**משפט הקטן של פרמה:**

אם  $p$  מספר ראשוני אז לכל  $a$  שלם התנאים הבאים מתקיימים:

$$a^p \equiv a \pmod{p}, \quad a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \quad a^{-1} \equiv a^{p-2} \pmod{p}.$$

**משפט אוילר:** אם  $n$  שלם חיובי ו-  $a \in \mathbb{Z}_n$  וגם  $\gcd(a, n) = 1$  אז  $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$  וגם  $a^{-1} \equiv a^{\phi(n)-1} \pmod{n}$ .

**משפט השאריות הסיני:** יהיו  $m_1, \dots, m_r$  שלמים זרים בזוגות ו-  $a_1, \dots, a_r$  שלמים. אזי למערכת

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_r \pmod{m_r} \end{aligned}$$

קיים פתרון יחיד מודולו  $M = m_1 m_2 \dots m_r$  שהוא

$$x \equiv \sum_{i=1}^r a_i M_i y_i \pmod{M}$$

כאשר  $M_i = \frac{M}{m_i}$  ו-  $y_i = M_i^{-1} \pmod{m_i}$  לכל  $1 \leq i \leq r$ .

**2 חוגים**

**חוג  $\mathbb{Z}_m$ :** אם  $m$  שלם חיובי אז החוג  $\mathbb{Z}_m$  מוגדר  $\mathbb{Z}_m \triangleq \{0, 1, \dots, m-1\}$ .  
 לכל שלם  $b$  נתאים איבר  $a \in \mathbb{Z}_m$  לפי התנאי:  $a \equiv b \pmod{m}$ .

**איבר הופכי של איבר חוג:**

לכל  $a \in \mathbb{Z}_m$  אם קיים שלם  $x$  כך ש:  $ax \equiv 1 \pmod{m}$  אז אומרים כי  $x$  האיבר ההופכי של  $a$  ב-  $\mathbb{Z}_m$ , מסומן  $a^{-1} \in \mathbb{Z}_m$ .

**תניא לקיום איבר הופכי בחוג:** נתון  $a \in \mathbb{Z}_m$  קיים איבר הופכי  $a^{-1}$  אם ורק אם  $\gcd(a, m) = 1$ .  
**הקופקטור** ה-  $ij$  של מטריצה  $A$  שווה לדטרמיננטת המטריצה המתקלת אחרי מחיקת שורת  $i$  ועמודת  $j$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**מטריצת הקופקטורים** של מטריצה  $A$  היא המטריצה שבה רכיב ה- $ij$  הוא הקופקטור ה-  $ij$  של  $A$ :

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}.$$

**נוסחת קריימר למטריצה הופכית:**  $A^{-1} = (\det A)^{-1} C^t$ .

**איברים הפיכים ב-  $\mathbb{Z}_{26}$ :**

$a$	1	3	5	7	9	11	15	17	19	21	23	25
$a^{-1}$	1	9	21	15	3	19	7	23	11	5	17	25

**3 צפני בסיסיים**

**ערכים הקריפטוגרפיים של האותיות:**

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

**לוח הכפל של 26:**

$m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$26 \times m$	26	52	78	104	130	156	182	208	234	260	286	312	338	364	390
$m$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$26 \times m$	416	442	468	494	520	546	572	598	624	650	676	702	728	754	780

צפנים בסיסיים:

צופן	כלל מצפין	כלל מפענח	מפתח
קיסר	$e_k(x) = x + k \bmod 26$	$d_k(x) = x - k \bmod 26$	$k \in \mathbb{Z}_{26}$
תמורה	$e_\pi(x_1 \dots x_m) = x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(m)} \bmod 26$	$d_\pi(y_1 \dots y_m) = y_{\pi^{-1}(1)} \dots y_{\pi^{-1}(m)} \bmod 26$	$\pi$ תמורה של אורך $m$
החלפה	$e_\pi(x) = \pi(x) \bmod 26$	$d_\pi(y) = \pi^{-1}(y) \bmod 26$	$\pi$ תמורה של אורך 26
אפיני	$e_k(x) = (ax + b) \bmod 26$	$d_k(y) = a^{-1}(y - b) \bmod 26$	$k = (a, b),$ $\gcd(a, 26) = 1.$
ויז'נר	$e_k(x_1, \dots, x_m)$ $= (x_1 + k_1, \dots, x_m + k_m) \bmod 26$	$d_k(y_1, \dots, y_m)$ $= (y_1 - k_1, \dots, y_m - k_m) \bmod 26$	$k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}_{26}^m$
היל	$e_k(x_1 \dots x_m) = (x_1 \dots x_m) \cdot k \bmod 26$	$d_k(y_1 \dots y_m) = (y_1 \dots y_m) \cdot k^{-1} \bmod 26$	$k \in \mathbb{Z}_{26}^{m \times m}$ $\gcd(\det(k), 26) = 1.$

## 4 צופן RSA

- מפתח ציבורי:  $(b, n)$  כאשר  $n = pq$  כאשר  $p, q$  מספרים ראשוניים שונים.
- מפתח סודי:  $(a, p, q)$  כאשר  $a \equiv b^{-1} \pmod{\phi(n)}$  כאשר  $\phi$  הפונקצית אוילר של  $n$ . בגלל ש-  $n = pq$  כאשר  $p, q$  מספרים שלמים אז  $\phi(n) = \phi(pq) = (p-1)(q-1)$ . לכן:  $a \equiv b^{-1} \pmod{(p-1)(q-1)}$ .

- כלל מצפין:  $e_k(x) = x^a \bmod n$  לכל מספר שלם  $x$ .
- כלל מפענח:  $d_k(y) = y^b \bmod n$  לכל מספר שלם  $y$ .

**שיטת הריבועיים לחישוב חזקה מודולרית:**

בהינתן  $y = x^b \bmod n$ . יהי  $b = b_k \dots b_1 b_0$ . אזי קיים אלגוריתם הנקרא שיטת הריבועיים שנותן ערך של  $y = x^b \bmod n$  באופן הבא:

האלגוריתם שיטת הריבועיים <b>Algorithm 3</b>
1: <b>Input:</b> Integers $x, b_0, \dots, b_k, n$ . 2: $i \leftarrow 1$ 3: $z_0 \leftarrow x$ 4: <b>while</b> $i \leq k$ <b>do</b> 5: $z_i \leftarrow z_{i-1}^2 \bmod n$ 6: <b>end while</b> 7: $i \leftarrow 1$ 8: $y \leftarrow x$ 9: <b>while</b> $i \leq k$ <b>do</b> 10: <b>if</b> $b_i = 1$ <b>then</b> 11: $y \leftarrow z_i y \bmod n$ 12: <b>end if</b> 13: <b>end while</b> 14: <b>return:</b> $y$ <span style="float: right;"><math>\triangleright y = x^b \bmod n</math></span>

**האלגוריתם לפענוח של צופן RSA :**

האלגוריתם הבא נותן את הפתרון  $x$  של הכלל מפענח  $n$  לפי השלבים הבאים:

**שלב [1]** מחשבים  $y \bmod p$  ו-  $a \bmod (p-1)$  ואז מחשבים

**שלב [2]** מחשבים  $y \bmod q$  ו-  $a \bmod (q-1)$  ואז מחשבים

**שלב [3]** בעזרת המשפט השאריות הסיני פותרים את המערכת

$$\begin{cases} x \equiv x_1 \pmod p \\ x \equiv x_2 \pmod q \end{cases}$$

## 5 צופן ElGamal

- המפתח הוא  $k = (p, a, \alpha, d)$  כאשר:

- $p$  מספר ראשוני

- $a, d, \alpha$  מספרים שלמים חיוביים עבורם  $2 \leq a, d, \alpha \leq p-2$ .

- $\beta \equiv \alpha^a \pmod p$ .

- כלל מצפין:  $y_1 = \alpha^d \pmod p$ ,  $y_2 = x\beta^d \pmod p$  לכל  $x$  שלם חיובי.

- כלל מפענח:  $x = (y_1^a)^{-1} y_2 \pmod p$  לכל שלמים חיוביים  $y_1, y_2$ .

## 6 צופן אניגמה

**תמורה** על קבוצה סופית  $\Sigma = \{x_1, \dots, x_n\}$  היא פונקציה  $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$  חד-חד ערכית ו"על"  $\Sigma$ .

- 

- על  $\Sigma$ :** לכל  $y \in \Sigma$  קיים  $x \in \Sigma$  כך ש:  $y = \Sigma(x)$ .

• **חד-חד-ערכית:** לכל  $x, y \in \Sigma$  מתקיים:

$$x \neq y \Rightarrow \Sigma(x) \neq \pi(y).$$

**התמורה הזהות** מסומנת  $\text{id} : \Sigma \rightarrow \Sigma$  ומוגדרת כך שלכל  $x \in \Sigma$  :  $\text{id}(x) = x$ .

**תמורה הופכית:** אם  $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$  תמורה על הקבוצה  $\Sigma$ , התמורה ההופכית מסומנת  $\pi^{-1}$  מקיימת את התנאי:

$$\forall x \in \Sigma \quad \pi \pi^{-1}(x) = x = \pi^{-1} \pi(x).$$

תמורה  $\rho : \Sigma \rightarrow \Sigma$  היא **תמורה משקפת** אם התנאי הזה מתקיים:

$$\forall x, y \in \Sigma : \quad \rho(x) = y \iff \rho(y) = x.$$

**הגלגלים ומשקף הקבוע של צופן אניגמה:**

$x$	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
$\alpha_1(x)$	E	K	M	F	L	G	D	Q	V	Z	N	T	O	W	Y	H	X	U	S	P	A	I	B	R	C	J
$\alpha_2(x)$	A	J	D	K	S	I	R	U	X	B	L	H	W	T	M	C	Q	G	Z	N	P	Y	F	V	O	E
$\alpha_3(x)$	B	D	F	H	J	L	C	P	R	T	X	V	Z	N	Y	E	I	W	G	A	K	M	U	S	Q	O
$\rho(x)$	Y	R	U	H	Q	S	L	D	P	X	N	G	O	K	M	I	E	B	F	Z	C	W	V	J	A	T

**כלל מצפין וכלל מפענח של צופן אניגמה:**

• בהינתן מילה  $x_1 x_2 \dots x_k$  של טקסט גלוי, הכלל מצפין של האות ה-  $i$  הוא:  $e(x_i) = \Delta_i(x_i)$

כאשר  $\Delta_i$  היא התמורה הכתובה למטה.

• בהינתן מילה  $y_1 y_2 \dots y_k$  של טקסט מוצפן הכלל מפענח של האות ה-  $i$  הוא:  $d(y_i) = \Delta_i(y_i)$

• לכל  $i$  שלם:

$$\Delta_i = \tau_i^{-1} \rho \tau_i,$$

כאשר

•  $\rho$  היא התמורה המשקפת הקבועה של צופן אניגמה,

•

$$\tau_i = \sigma_{-i} \alpha_3 \sigma_i \alpha_2 \alpha_1 \pi, \quad \tau_i^{-1} = \pi \alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1} \sigma_{-i} \alpha_3^{-1} \sigma_i$$

כאשר  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  הן התמורות של הגלגלים של צופן אניגמה הנתונות בטבלה למעלה,  $\pi$  היא תמורה המשקפת המשתנה,

•  $\sigma_i(x) = x + i \bmod 26$  :  $\sigma_i$  היא תמורה הזזה של  $i$  אותיות קדימה באלפבית:

•  $\sigma_{-i}(x) = x - i \bmod 26$  :  $\sigma_{-i}$  היא תמורה הזזה של  $i$  אותיות אחורה באלפבית:

**מילה משוכפלת** היא מילה סימטרית של טקסט גלוי באורך 6 אותיות מהצורה:

$$xyzyxzyz.$$

**מילה אופיינית** היא ההצפנה של מילה משוכפלת ע"י צופן אניגמה:

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6 = \Delta_1(x) \Delta_2(y) \Delta_3(z) \Delta_4(x) \Delta_5(y) \Delta_6(z).$$

**משפט רייבסקי I:** יהי  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6$  מילה אופיינית של צופן האניגמה. אזי:

$$\sigma_4 = \Delta_4 \Delta_1(\sigma_1), \quad \sigma_5 = \Delta_5 \Delta_2(\sigma_2), \quad \sigma_6 = \Delta_6 \Delta_3(\sigma_3).$$

**משפט רייבסקי II:**

עבור כל אחת של התמורות  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6$  של צופן אניגמה, קיים סידור של הפירוק לראשונים שנקרא **סדר רייבסקי** כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

• לכל זוג מחרוזות  $(a_1 \ a_2 \ \dots a_{k-1} \ a_k) (b_1 \ b_2 \ \dots b_{k-1} \ b_k)$  ב-  $\Delta_4 \Delta_1$ :

$$b_k = \Delta_1(a_1), \quad b_{k-1} = \Delta_1(a_2), \quad \dots, \quad b_2 = \Delta_1(a_{k-1}), \quad b_1 = \Delta_1(a_k).$$

• לכל זוג מחרוזות  $(a_1 \ a_2 \ \dots a_{k-1} \ a_k) (b_1 \ b_2 \ \dots b_{k-1} \ b_k)$  ב-  $\Delta_5 \Delta_2$ :

$$b_k = \Delta_1(a_1), \quad b_{k-1} = \Delta_1(a_2), \quad \dots, \quad b_2 = \Delta_1(a_{k-1}), \quad b_1 = \Delta_1(a_k).$$

• לכל זוג מחרוזות  $(a_1 \ a_2 \ \dots a_{k-1} \ a_k) (b_1 \ b_2 \ \dots b_{k-1} \ b_k)$  ב-  $\Delta_6 \Delta_3$ :

$$b_k = \Delta_1(a_1), \quad b_{k-1} = \Delta_1(a_2), \quad \dots, \quad b_2 = \Delta_1(a_{k-1}), \quad b_1 = \Delta_1(a_k).$$

## 7 תורת שאנון וסודיות מושלמת

**הסתברויות של האותיות:**

אות	הסתברות	אות	הסתברות	אות	הסתברות	אות	הסתברות
a	0.082	f	0.022	k	0.008	p	0.019
b	0.015	g	0.02	l	0.04	q	0.001
c	0.028	h	0.061	m	0.024	r	0.06
d	0.043	i	0.07	n	0.067	s	0.063
e	0.127	j	0.002	o	0.075	t	0.091
						u	0.028
						v	0.01
						w	0.023
						x	0.001
						y	0.02
						z	0.001

**קבוצות תדירויות של האותיות בטקסט:**

	אות	הסתברות
1.	e	$p = 0.127$
2.	t, a, o, i, n, s, h, r	$0.06 \lesssim p \lesssim 0.09$
3.	d, l	$p \approx 0.04$
4.	c, u, m, w, f, g, y, p, b	$0.015 \lesssim p \lesssim 0.028$
5.	v, k, j, x, q, z	$p < 0.01$

**זוגות האותיות הנפוצים ביותר:**

th	he	in	er	an	re	ed	on	es	st
en	at	to	nt	ha	nd	ou	ea	ng	as
or	ti	is	et	it	ar	te	se	hi	of

**שלושת של אותיות הנפוצים ביותר:**

the	ing	and	her	ere	ent	tha	nth	was	eth	for	dth
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

**מידע** של מ"מ בדיד  $X$ :

$$I_X(x) = -\log_2(P_X(x)).$$

**אנטרופיה** של מ"מ בדיד  $X$ :

$$H[X] = -\sum_{i=1}^N P_X(x_i) \log_2(P_X(x_i)).$$

$$P(X = x | Y = y) P(Y = y) = P(X = x \cap Y = y) = P(Y = y | X = x) P(X = x).$$

**נוסחת בייט:**  
**סודיות:**

נתונה קריפטו-מערכת בעלת קבוצת טקסט גלוי  $X$ , קבוצת טקסט מוצפן  $Y$  וקבוצת מפתחות  $K$ , כלל מצפין  $y = e_k(x)$  וכלל מפענח  $x = d_k(y)$ .

$$P(Y = y) = \sum_{k \in K} P(K = k) P(X = d_k(y)) ,$$

$$P(Y = y | X = x) = \sum_{\substack{k \in K \\ x = d_k(y)}} P(K = k) ,$$

$$P(X = x) = \sum_{\substack{k \in K \\ x = d_k(y)}} P(K = k)$$

$$P(X = x | Y = y) = \frac{P(K = k) P(X = d_k(y))}{\sum_{k \in K} P(K = k) P(X = d_k(y))} .$$

**סודיות מושלמת:** לקריפטו-מערכת יש סודיות מושלמת אם התנאי הבא מתקיים:

$$P(X = x | Y = y) = P(X = x) \iff P(Y = y | X = x) = P(Y = y) .$$

**אנטרופיה מותנית:**

$$H(X | Y = y) = - \sum_{x \in X} P(X = x | Y = y) \log_2 P(X = x | Y = y) ,$$

$$H(X | Y) = - \sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} P(Y = y) P(X = x | Y = y) \log_2 P(X = x | Y = y) ,$$

$$H(X, Y) = H(Y) + H(X | Y) , \quad H(X | Y) \leq H(X) .$$

**משפט האנטרופיה לקריפטו-מערכת:**

$$H(K | C) = H(K) + H(P) - H(C) .$$

**טבלת אמת:**

$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim p$	$p \oplus q$
1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	0

## 8 צופן פייסטל

**ספרות הקסדצימליות:**

hex	0	1	2	3	4	5	6	7
binary	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
hex	8	9	A	B	C	D	E	F
binary	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

**משוואות פייסטל להצפנה:**

נתון טקסט גלוי  $x = L_0 R_0$  לכל  $1 \leq i \leq N$ :

$$L_i = R_{i-1} , \quad R_i = L_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, k_i) , \quad y = R_N L_N .$$

**משוואות פייסטל לפענוח:**

נתון טקסט גלוי  $y = R_N L_N$  לכל  $1 \leq i \leq N$ :

$$R_i = L_{i+1} , \quad L_i = R_{i+1} \oplus f(R_i, k_{i+1}) , \quad x = L_0 R_0 .$$

## 9 צופן IDEA

**תזמון מפתח של IDEA**

$r$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$
1	0 – 15	16 – 31	32 – 47	48 – 63	64 – 79	80 – 95
2	96 – 111	112 – 127	25 – 40	41 – 56	57 – 72	73 – 88
3	89 – 104	105 – 120	121 – 8	9 – 24	50 – 65	66 – 81
4	82 – 97	98 – 113	114 – 1	2 – 17	18 – 33	34 – 49
5	75 – 90	91 – 106	107 – 122	123 – 10	11 – 26	27 – 42
6	43 – 58	59 – 74	100 – 115	116 – 3	4 – 19	20 – 35
7	36 – 51	52 – 67	68 – 83	84 – 99	125 – 12	13 – 28
8	29 – 44	45 – 60	61 – 76	77 – 92	93 – 108	109 – 124
9	22 – 37	38 – 53	54 – 69	70 – 85	–	–

**אלגוריתם הצפנת IDEA**

- נתון טקסט גלוי  $P \in \{0, 1\}^{64}$  של אורך 64 ביטים.
- מחלקים  $P$  לארבע בלוקים  $P_i \in \{0, 1\}^{16} : P = P_1 P_2 P_3 P_4$ .
- בתחילת מחזור ה- $r$  ( $1 \leq r \leq 9$ ) מסמנים את הטקסט מוצפן המתקבל ממחזור הקודם (מחזור  $r - 1$ ) ב- $C^{(r)}$ , מלבד מ- $C^{(1)} = X$ .
- כל מחזור  $r$  מורכב מהשלבים הבאים:

$$Y_1 = C_1^{(r)} \odot k_1^{(r)} = C_1^{(r)} \cdot k_1^{(r)} \mod (2^{16} + 1) \quad [1]$$

$$Y_2 = C_2^{(r)} \boxplus k_2^{(r)} = C_2^{(r)} + k_2^{(r)} \mod 2^{16} \quad [2]$$

$$Y_3 = C_3^{(r)} \boxplus k_3^{(r)} = C_3^{(r)} + k_3^{(r)} \mod 2^{16} \quad [3]$$

$$Y_4 = C_4^{(r)} \odot k_4^{(r)} = C_4^{(r)} \cdot k_4^{(r)} \mod (2^{16} + 1) \quad [4]$$

$$Y_5 = Y_1 \oplus Y_3 \quad [5]$$

$$Y_6 = Y_2 \oplus Y_4 \quad [6]$$

$$Y_7 = Y_5 \odot k_5^{(r)} = Y_5 \cdot k_5^{(r)} \mod (2^{16} + 1) \quad [7]$$

$$Y_8 = Y_6 \boxplus Y_7 = Y_6 + Y_7 \mod 2^{16} \quad [8]$$

$$Y_9 = Y_8 \odot k_6^{(r)} = Y_8 \cdot k_6^{(r)} \mod 2^{16} + 1 \quad [9]$$

$$Y_{10} = Y_7 \boxplus Y_9 = Y_7 + Y_9 \mod 2^{16} \quad [10]$$

$$C_1^{(r+1)} = Y_1 \oplus Y_9 \quad [11]$$

$$C_2^{(r+1)} = Y_3 \oplus Y_9 \quad [12]$$

$$C_3^{(r+1)} = Y_2 \oplus Y_{10} \quad [13]$$

$$C_4^{(r+1)} = Y_4 \oplus Y_{10} \quad [14]$$

- בכדי לקבל את הטקסט מוצפן הסופי, אחרי ביצוע של כל המחזורים  $r$  מבצעים את השלב התפוקה:

$$C_1 = C_1^{(9)} \odot k_1^{(9)} = C_1^{(9)} \cdot k_1^{(9)} \pmod{2^{16} + 1} \quad [1]$$

$$C_2 = C_3^{(9)} \boxplus k_2^{(9)} = C_3^{(9)} + k_2^{(9)} \pmod{2^{16}} \quad [2]$$

$$C_3 = C_2^{(9)} \boxplus k_3^{(9)} = C_2^{(9)} + k_3^{(9)} \pmod{2^{16}} \quad [3]$$

$$C_4 = C_4^{(9)} \odot k_4^{(9)} = C_4^{(9)} \cdot k_4^{(9)} \pmod{2^{16} + 1} \quad [4]$$

- לבסוף הטקסט מוצפן 64- ביטים מתקבל מהארבע בלוקים 16- ביטים  $C = C_1 C_2 C_3 C_4$ .

## מפתחות פענוח של IDEA

$$DK_1^{(1)} = \left(K_1^{(9)}\right)^{-1}, \quad DK_2^{(1)} = -\left(K_2^{(9)}\right), \quad DK_3^{(1)} = -\left(K_3^{(9)}\right), \quad DK_4^{(1)} = \left(K_4^{(9)}\right)^{-1},$$

$$DK_5^{(1)} = K_5^{(8)} \quad , \quad DK_6^{(1)} = K_6^{(8)} \quad .$$

DES 10 צופן

**אלגוריתם הצפנת DES :** נתון טקסט גלוי 64 ביטים  $x = x_1 \dots x_{64}$

- שלב [1]** מבצעים  $IP(x_1, x_2, \dots, x_{64})$  כאשר  $IP$  התמורה הסטטית ההתחלתית:

$$IP = \begin{pmatrix} 58 & 50 & 42 & 34 & 26 & 18 & 10 & 2 & 60 & 52 & 44 & 36 & 28 & 20 & 12 & 4 \\ 62 & 54 & 46 & 38 & 30 & 22 & 14 & 6 & 64 & 56 & 48 & 40 & 32 & 24 & 16 & 8 \\ 57 & 49 & 41 & 33 & 25 & 17 & 9 & 1 & 59 & 51 & 43 & 35 & 27 & 19 & 11 & 3 \\ 61 & 53 & 45 & 37 & 29 & 21 & 13 & 5 & 63 & 55 & 47 & 39 & 31 & 23 & 15 & 7 \end{pmatrix}$$

- שלב [2]** מחלקים  $IP(x)$  לשניים.  $IP(x) = L_0 R_0$  כאשר  $L_0$ -ה-32 ביטים הראשונים של  $x_0$  ו- $R_0$ -ה-32 האחרונים:

$$L_0 = x_{58}, x_{50}, x_{42}, x_{34}, x_{26}, x_{18}, x_{10}, x_2, x_{60}, x_{52}, x_{44}, x_{36}, x_{28}, x_{20}, x_{12}, x_4 \\ x_{62}, x_{54}, x_{46}, x_{38}, x_{30}, x_{22}, x_{14}, x_6, x_{64}, x_{56}, x_{48}, x_{40}, x_{32}, x_{24}, x_{16}, x_8,$$

$$R_0 = x_{57}, x_{49}, x_{41}, x_{33}, x_{25}, x_{17}, x_9, x_1, x_{59}, x_{51}, x_{43}, x_{35}, x_{27}, x_{19}, x_{11}, x_3, \\ x_{61}, x_{53}, x_{45}, x_{37}, x_{29}, x_{21}, x_{13}, x_5, x_{63}, x_{55}, x_{47}, x_{39}, x_{31}, x_{23}, x_{15}, x_7.$$

- שלב [3]** מבצעים 16 מחזורים של אלגוריתם פייסטל:

כאשר  $k_1, \dots, k_{16}$  תת-מפתחות כל אחד 48 ביטים שמתקבלים ממפתח התחלתי  $k$ .

- שלב [4]**  $y = IP^{-1}(R_{16}L_{16})$  כאשר  $IP^{-1}$  התמורה ההופכית:

$$IP^{-1} = \begin{pmatrix} 40 & 8 & 48 & 16 & 56 & 24 & 64 & 32 & 39 & 7 & 47 & 15 & 55 & 23 & 63 & 31 \\ 38 & 6 & 46 & 14 & 54 & 22 & 62 & 30 & 37 & 5 & 45 & 13 & 53 & 21 & 61 & 29 \\ 36 & 4 & 44 & 12 & 53 & 20 & 60 & 28 & 35 & 3 & 43 & 11 & 51 & 19 & 59 & 27 \\ 34 & 2 & 42 & 10 & 50 & 18 & 58 & 26 & 33 & 1 & 41 & 9 & 49 & 17 & 57 & 25 \end{pmatrix}$$

## הפונקציית ליבה של DES

$$f : \{0, 1\}^{32} \times \{0, 1\}^{48} \rightarrow \{0, 1\}^{32}.$$

נסמן הארגומנטים של  $f$  ב-  $f(A, J)$  כאשר  $A \in \{0, 1\}^{32}, J \in \{0, 1\}^{48}$ .  $f$  מתוארת על ידי האלגוריתם הבא:

**שלב [1]** מגדילים  $A$  לרצף 48 ביטים באמצעות התמורה ההגדלה

$$E = \begin{pmatrix} 32 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 1 \end{pmatrix}$$

- שלב [2]** מחשבים  $E(A) \oplus J$  ורושמים התשובה כשירשור של שמונה רצפים 6 ביטים:

$$B = B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8, \quad B_j \in \{0, 1\}^6.$$

- שלב [3]** רושמים  $B_j = b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$  כאשר  $b_i \in \{0, 1\}$ .

- שלב [4]** בשלב זה משתמשים ההחלפות  $S_1, \dots, S_8$ . כל  $S_j$  היא מטריצה מסדר  $4 \times 16$  שנתון למטה. לכל  $1 \leq j \leq 8$ :

$$C_j = (S_j(r, c))_2, \quad r = (b_1 b_6)_{10}, \quad c = (b_2 b_3 b_4 b_5)_{10}$$

כאשר  $r$  בספרות דצמליות,  $c$  בספרות דצמליות, ו-  $S_j(r, c)$  האיבר בשורה  $r$  ועמודה  $c$  של המטריצה  $S_j$ . לבסוף ממירים  $C_j$  לספרות ביניאריות.

**שלב 5]**  $f(A, J) = P(C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6 C_7 C_8)$  כאשר  $P$  התמורה

$$P = \begin{pmatrix} 16 & 7 & 20 & 21 \\ 29 & 12 & 28 & 17 \\ 1 & 15 & 23 & 26 \\ 5 & 18 & 31 & 10 \\ 2 & 8 & 24 & 14 \\ 32 & 27 & 3 & 9 \\ 19 & 13 & 30 & 6 \\ 22 & 11 & 4 & 25 \end{pmatrix}$$

התזמון המפתח של DES: נתון מפתח התחלתי 64 ביטים,  $k$ .

$$PC_1 = \begin{pmatrix} 57 & 49 & 41 & 33 & 25 & 17 & 9 \\ 1 & 58 & 50 & 42 & 34 & 26 & 18 \\ 10 & 2 & 59 & 51 & 43 & 35 & 27 \\ 19 & 11 & 3 & 60 & 52 & 44 & 36 \\ 63 & 55 & 47 & 39 & 31 & 23 & 15 \\ 7 & 62 & 54 & 46 & 38 & 30 & 22 \\ 14 & 6 & 61 & 53 & 45 & 37 & 29 \\ 21 & 13 & 5 & 28 & 20 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

- שלב [2]** נסמן  $PC_1(k) = C_0 D_0$  כאשר  $C_0$  ה-28 ביטים הראשונים ו- $D_0$  ה-28 ביטים האחרונים.

- שלב [3]** לכל  $1 \leq i \leq 16$ , מחשבים

$$PC_2\text{-ו-}LS_i = \left\{ \begin{array}{ll} \text{הזזה מקום אחת שמאלה} & i = 1, 2, 9, 16, \\ \text{הזזה שתי מקומות שמאלה} & i = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \end{array} \right\} \text{ כאשר}$$

$$PC_2 = \begin{pmatrix} 14 & 17 & 11 & 24 & 1 & 5 \\ 3 & 28 & 15 & 6 & 21 & 10 \\ 23 & 19 & 12 & 4 & 26 & 8 \\ 16 & 7 & 27 & 20 & 13 & 2 \\ 41 & 52 & 31 & 37 & 47 & 55 \\ 30 & 40 & 51 & 45 & 33 & 48 \\ 44 & 49 & 39 & 56 & 34 & 53 \\ 46 & 42 & 50 & 36 & 29 & 32 \end{pmatrix}.$$

הבלוקים של ההחלפות של DES

$S_1$	14	4	13	1	2	15	11	8	3	10	6	12	5	9	0	7
	0	15	7	4	14	2	13	1	10	6	12	11	9	5	3	8
	4	1	14	8	13	6	2	11	15	12	9	7	3	10	5	0
	15	12	8	2	4	9	1	7	5	11	3	14	10	0	6	13
$S_2$	15	1	8	14	6	11	3	4	9	7	2	13	12	0	5	10
	3	13	4	7	15	2	8	14	12	0	1	10	6	9	11	5
	0	14	7	11	10	4	13	1	5	8	12	6	9	3	2	15
	13	8	10	1	3	15	4	2	11	6	7	12	0	5	14	9
$S_3$	10	0	9	14	6	3	15	5	1	13	12	7	11	4	2	8
	13	7	0	9	3	4	6	10	2	8	5	14	12	11	15	1
	13	6	4	9	8	15	3	0	11	1	2	12	5	10	14	7
	1	10	13	0	6	9	8	7	4	15	14	3	11	5	2	12
$S_4$	7	13	14	3	0	6	9	10	1	2	8	5	11	12	4	15
	13	8	11	5	6	15	0	3	4	7	2	12	1	10	14	9
	10	6	9	0	12	11	7	13	15	1	3	14	5	2	8	4
	3	15	0	6	10	1	13	8	9	4	5	11	12	7	2	14
$S_5$	2	12	4	1	7	10	11	6	8	5	3	15	13	0	14	9
	14	11	2	12	4	7	13	1	5	0	15	10	3	9	8	6
	4	2	1	11	10	13	7	8	15	9	12	5	6	3	0	14
	11	8	12	7	1	14	2	13	6	15	0	9	10	4	5	3
$S_6$	12	1	10	15	9	2	6	8	0	13	3	4	14	7	5	11
	10	15	4	2	7	12	9	5	6	1	13	14	0	11	3	8
	9	14	15	5	2	8	12	3	7	0	4	10	1	13	11	6
	4	3	2	12	9	5	15	10	11	14	1	7	6	0	8	13
$S_7$	4	11	2	14	15	0	8	13	3	12	9	7	5	10	6	1
	13	0	11	7	4	9	1	10	14	3	5	12	2	15	8	6
	1	4	11	13	12	3	7	14	10	15	6	8	0	5	9	2
	6	11	13	8	1	4	10	7	9	5	0	15	14	2	3	12
$S_8$	13	2	8	4	6	15	11	1	10	9	3	14	5	0	12	7
	1	15	13	8	10	3	7	4	12	5	6	11	0	14	9	2
	7	11	4	1	9	12	14	2	0	6	10	13	15	3	5	8
	2	1	14	7	4	10	8	13	15	12	9	0	3	5	6	11