המחלקה למדעי המחשב

תשפ"ג 20/07/23
09 : 00 − 12 : 00

אלגברה 2

מועד ב'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר,

תשפ"ג סמסטר ב'

השאלון מכיל 6 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (2 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.

==

שאלה 1 (25 נקודות)

א) (10 נקודות) הוכיחו כי אופרטור לינארי $T : V \to V$ הפיך אם ורק אם האיבר החופשי של הפולינום האופייני שלו שונה מאפס.

ב) (15 נקודות) נתון אופרטור לינארי $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x + y + 12z \\ -8x + 2y + 15z \\ -2x + 5z \end{pmatrix}$

1) (7 נקודות) מצאו את ערכי הפרמטרים a, b, c, d עבור $T^{-1} = aI + bT + cT^2 + dT^3$ (רמז: השתמשו במשפט קיילי המילטון).

2) (3 נקודות) חשבו את $T^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) (5 נקודות) בדקו אם תת המרחב $W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ הוא T- שמור.

שאלה 2 (25 נקודות)

יהיו $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ כך ש- $A^2 = B$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

א) (10 נקודות) מצאו את הערכים העצמיים ומרחבים עצמיים של מטריצה B, רשמו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש- $D = P^{-1}BP$.

ב) (7 נקודות) רשמו את כל האפשרויות עבור הערכים העצמיים ושל הפולינום האופייני של A.

ג) (4 נקודות) האם יתכן שכל איברי A ממשיים? נמקו את תשובתכם.

ד) (4 נקודות) האם יתכן שמטריצה A צמודה לעצמה? נמקו את תשובתכם.

שאלה 3 (25 נקודות)

א) (19 נקודות) נתון מרחב וקטורי $\mathbb{R}_3[x]$ (פולינומים מדרגה 3 לכל היותר) עם מכפלה פנימית אינטגרלית בקטע $[-1, 1]$:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\, dx\ .$$

1) **(11 נקודות)** מצאו בסיס אורתוגונלי למרחב $U = \text{span}\{1, x, x^2\}$.

2) **(8 נקודות)** מצאו את ההיט להאור תוגונלישל כל אחד מהווקטורים: $w_1 = 5 + 13x - 27x^2$, $w_2 = x^3$, על תת המרחב U.

ב) **(6 נקודות)** תהי $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ מטריצה המקיימת $m_A(x) = (x+5)^2(x-1)$, $p_A(x) = (x+5)^4(x-1)$.
מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A.

שאלה 4 (25 נקודות)

לכל אחת מהטענות הבאות ענו אם היא נכונה. אם כן, הוכיחו זאת, אחרת הביאו דוגמה נגדית.

א) **(5 נקודות)** סכום של מטריצות אוניטריות היא מטריצה אוניטרית.

ב) **(5 נקודות)** אם $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ניתנת לליכסון ויש לה רק ערך עצמי אחד אז היא מטריצה סקלרית (מטריצה A נקראת סקלרית אם קיים סקלר λ כך ש- $A = \lambda I$)

ג) **(5 נקודות)** אם מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מקיימת $A + \bar{A} = A^3 + 5A^2 + 6I$ אז A ניתנת לליכסון אוניטרי.

ד) **(5 נקודות)** אם $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה צמודה לעצמה, אז המטריצה $A - iI$ הפיכה.

ה) **(5 נקודות)** אם A מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{C}$ המקיימת $A = A^t$ אז נורמלית.

שאלה 5 (25 נקודות)

א) **(17 נקודות)**
מצאו את ערכי $a, b \in \mathbb{R}$ עבורם $(1-(a+2b)^2) + (1-b)^2 + (1-a)^2$ מינימלי.

ב) **(8 נקודות)**
יהי V מרחב מכפלה פנימית, $T : V \to V$ אופרטור לינארי. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

1) **(4 נקודות)** אם לכל $\text{v} \in V$, $\langle T(\text{v}), \text{v}\rangle = 0$ אז $T = 0$.

2) **(4 נקודות)** אם לכל $u, \text{v} \in V$, $\langle T(\text{v}), u\rangle = 0$ אז $T = 0$.

פתרונות

שאלה 1 (25 נקודות)

א) (10 נקודות) נניח כי B בסיס של V.

T הפיך $\Leftrightarrow$ $[T]_B$ הפיכה $\Leftrightarrow$ $|[T]_B| \neq 0$ $\Leftrightarrow$ האיבר החופשי של הפולינום האופייני שונה מ-0.

ב) (15 נקודות) נתון אופרטור לינארי $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x+y+12z \\ -8x+2y+15z \\ -2x+5z \end{pmatrix}$

1) (7 נקודות)

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) = & \begin{vmatrix} \lambda+6 & -1 & -12 \\ 8 & \lambda-2 & -15 \\ 2 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix} \\ =& 2\left(15+12\lambda-24\right) + (\lambda-5)\left(\lambda^2+4\lambda-12+8\right) \\ =& 24\lambda - 18 + (\lambda-5)\left(\lambda^2+4\lambda-4\right) \\ =& 24\lambda-18+\lambda^3+4\lambda^2-4\lambda-5\lambda^2-20\lambda+20 \\ =& \lambda^3-\lambda^2+2 \end{aligned}$$

האיבר החופשי שונה מ-0 לכן T הפיך.
לפי משפט קיילי המילטון,

$$p_T(T) = T^3 - T^2 + 2I = 0\ .$$

נכפיל ב- T^{-1}:

$$T^2 - T + 2T^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad T^{-1} = \frac{1}{2}\left(T - T^2\right)$$

לכן $a=0, b=\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{2}, d=0$.

2) (3 נקודות)

$$T\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad T^2\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3) (5 נקודות)

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 17 \\ 5 \end{pmatrix} \notin W$$

לכן W אינו T שמור.

שאלה 2 (25 נקודות)

$A^2 = B$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

א) (10 נקודות)

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 3 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 + 3 = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1) \ .$$

$\underline{\lambda = 1}$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $x = -y, \ \ y \in \mathbb{R}$.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\underline{\lambda = -1}$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $x = -\frac{1}{3}y, \ \ y \in \mathbb{R}$.

$$V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

ב) (7 נקודות) $\lambda = 1$ ערך עצמי של B. לכן,

$$0 = |I - B| = |I - A^2| = |(I - A)(I + A)| = |I - A| \cdot |I + A| \ .$$

לכן $\lambda = 1$ או $\lambda = -1$ הוא ערך עצמי של A.
$\lambda = -1$ ערך עצמי של B. לכן,

$$0 = |-I - B| = |-I - A^2| = |I + A^2| = |A - iI||A + iI| \ .$$

לכן $\lambda = i$ או $\lambda = -i$ הוא ערך עצמי של A.
האפשרויות לערכים העצמיים של A:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \qquad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -i, \qquad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = i, \qquad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -i.$$

האפשרויות לפולינום אופייני:

$$(x-1)(x-i)\ ,\quad (x-1)(x+i)\ ,\quad (x+1)(x-i)\ ,\quad (x+1)(x+i)\ .$$

ג) (4 נקודות) $|A^2|=|A|^2=|B|=-1$ לכן $|A|$ הוא לא מספר ממשי $\Leftarrow$ לא כל האיברים של A הם מספרים ממשיים.

ד) (4 נקודות) נניח כי A צמודה לעצמה, כלומר $A=\bar{A}$. אז

$$B=A\cdot A=\bar{A}\cdot\bar{A}=\left(\bar{A}\right)^2=\bar{B}$$

כלומר B חייבת להיות צמודה לעצמה. $B=\begin{pmatrix}2&1\\-3&-2\end{pmatrix}$ היא מעל $\mathbb{R}$ ולא סימטרית לכן היא לא צמודה לעצמה.
ז"א A לא יכולה להיות צמודה לעצמה.

שאלה 3 (25 נקודות)

א) (19 נקודות)

1) (11 נקודות)
נסמן

$$\mathrm{v}_1=1,\quad \mathrm{v}_2=x\ ,\quad \mathrm{v}_3=x^2\ .$$

$U=\mathrm{span}\left\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3\right\}$.
נבנה בסיס אורתוגונלי באמצעות תהליך גרם שמידט:

$$u_1=\mathrm{v}_1=1\ .$$

$$u_2=\mathrm{v}_2-\frac{\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1$$

$$\|u_1\|^2=\int_{-1}^{1}dx\,(1)^2=[x]_{-1}^{1}=2\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle=\int_{-1}^{1}dx\,x=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=0\ .$$

לכן

$$u_2=\mathrm{v}_2-\frac{\langle \mathrm{v}_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1=x-\frac{0}{2}x=x\ .$$

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} dx\, x^2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\ .$$

$$\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle = \int_{-1}^{1} dx\, x^2\cdot x = \int_{-1}^{1} dx\, x^3 = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0\ .$$

$$\|u_2\|^2 = \int_{-1}^{1} dx\, x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\ .$$

לכן

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 = x^2 - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{2}\cdot 1 - \frac{0}{\left(\frac{2}{3}\right)}x = x^2 - \frac{1}{3}$$

קיבלנו בסיס אורתוגונלי של U:

$$U = \left\{u_1 = 1,\quad u_2 = x\ ,\quad u_3 = x^2 - \frac{1}{3}\right\}\ .$$

2) **(8 נקודות)**

$w_1 = 5 + 13x - 27x^2 \in U$ לכן $P_U(w_1) = w_1$.

$w_2 = x^3$.

$$P_U(w_2) = \frac{\langle w_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 + \frac{\langle w_2, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 + \frac{\langle w_2, u_3\rangle}{\|u_3\|^2}u_3$$

$$\langle w_2, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} dx\, x^3 = 0\ .$$

$$\langle w_2, u_2\rangle = \int_{-1}^{1} dx\, x^4 = \frac{2}{5}\ .$$

$$\langle w_2, u_3\rangle = \int_{-1}^{1} dx\, x^2\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = 0\ .$$

לפיכך

$$P_U(w_2) = \frac{3}{5}u_2 = \frac{3}{5}x\ .$$

ב) **(6 נקודות)** האפשרויות לצורת ז'ורדן:

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,\qquad \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 4 **(25 נקודות)**

א) (5 נקודות) לא נכון. דוגמה נגדית: $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ מטריצות אוניטריות אבל

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

לא אוניטרית.

ב) (5 נקודות) נכון. אם A ניתנת ללכסון ויש לה ערך עצמי אחד λ, לפולינום המינימלי יש צורה $m_A(x)=x-\lambda$.
לכן $A-\lambda I=0$ ז"א $A=\lambda I$ מטריצה סקלרית.

ג) (5 נקודות)

$$\begin{aligned}
A+\bar{A} &= A^3+5A^2+6I\\
\Rightarrow \bar{A} &= A^3+5A^2_A+6I\\
\Rightarrow A\cdot\bar{A} &= A\cdot\left(A^3+5A^2-A+6I\right)=A^4+5A^3-A^2+6A\\
\Rightarrow \bar{A}\cdot A &= \left(A^3+5A^2-A+6I\right)\cdot A=A^4+5A^3-A^2+6A
\end{aligned}$$

ז"א $A\bar{A}=\bar{A}A$ כלומר A מטריצה נורמלית לכן היא לכסינה אוניטרית.

ד) (5 נקודות) נכון. A צמודה לעצמה $\Leftarrow$ הערכים העצמיים שלה ממשיים $\Leftarrow$ i הוא לא ערך עצמי של A $\Leftarrow$
$|A-iI|\neq 0$ $\Leftarrow$ $A-iI$ הפיכה.

ה) (5 נקודות) לא נכון. דוגמה נגדית: $A=\begin{pmatrix}1&i\\i&2\end{pmatrix}$. $A=A^t$ אבל

$$A\bar{A}=\begin{pmatrix}1&i\\i&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-i\\-i&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&i\\-i&5\end{pmatrix},\qquad \bar{A}A=\begin{pmatrix}1&-i\\-i&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&i\\i&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-i\\i&5\end{pmatrix},$$

$A\bar{A}\neq\bar{A}A$ לכן A לא נורמלית.

שאלה 5 **(25 נקודות)**

א) (17 נקודות)

נגדיר $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $u=\begin{pmatrix}a+2b\\b\\a\end{pmatrix}$. צריך למצוא את ערכי a,b עבורם $\|\mathrm{v}-u\|^2$ מינימלי. נסמן $\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,
$\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$. נסמן $U=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$. אז צריך למצוא וקטור $u\in U$ עבורו $\|\mathrm{v}-u\|^2$ מינימלי.
לכן $u=P_U(\mathrm{v})$. נבנה בסיס אורתוגונלי של U:

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\ ,$$

$\|u_1\|^2 = 2$.

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{2} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\ .$$

$$P_U(\mathrm{v}) = \frac{\langle \mathrm{v}, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 + \frac{\langle \mathrm{v}, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 = \frac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

ז"א $\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+2b\\b\\a\end{pmatrix}$, לכן

$$a = \frac{2}{3},\quad b = \frac{1}{3}\ .$$

ב) (4 נקודות) לא נכון. דוגמה נגדית: $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$.

ג) (4 נקודות) הטענה נכונה. נניח בשלילה שלכל $u,\mathrm{v}\in V$ $\langle T(\mathrm{v}), u\rangle = 0$ ו- $T\neq 0$.
בפרט, עבור $u = T(\mathrm{v})$ מתקיים

$$\langle T(\mathrm{v}), T(\mathrm{v})\rangle = 0$$

לכל $\mathrm{v}\in V$. מכאן $T(\mathrm{v}) = 0$ לכל $\mathrm{v}\in V$. ז"א בהכרח $T = 0$, בסתירה לכך ש- $T\neq 0$.