

# שעור 1

## מרחבי מכפלת פנימית

### 1.1 הגדרה של מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$

#### הגדרה 1.1 מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$

יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $\mathbb{R}$ . מכפלה פנימית על  $V$  היא פונקציה  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  המתאימה לכל זוג וקטורים  $u, v$  סקלר ממשי המסומן ב-  $\langle u, v \rangle$  כך שמתקיימות התכונות הבאות. לכל  $u, v, w \in V$  ולכל סקלר  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

(1) סימטריות:

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle .$$

(2) לינאריות ברכיב הראשון:

(א)

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle .$$

(ב)

$$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle .$$

(3) חיוביות:

$$\langle u, u \rangle \geq 0$$

וגם  $\langle u, u \rangle = 0$  אם ורק אם  $u = 0$ .

#### הגדרה 1.2 מרחב אווקלידי

מרחב וקטורי  $V$  מעל  $\mathbb{R}$  יחד עם מכפלה פנימית מסויימת נקרא מרחב אווקלידי.

#### משפט 1.1 לינאריות ברכיב השני

יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $\mathbb{R}$  ו  $\langle, \rangle$  מכפלה פנימית. אז

(1) לכל  $u, v, w \in V$ ,

$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

(2) לכל  $u, v \in V$  ולכל סקלר  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle .$$

הוכחה:

(1)

$$\langle u, v + w \rangle = \langle v + w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

(2)

$$\langle u, \lambda v \rangle = \langle \lambda v, u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle = \lambda \langle u, v \rangle .$$

■

## 1.2 דוגמאות של מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$

### 1.1 דוגמה

$$V = \mathbb{R}^n, \text{ לכל וקטורים } v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ נגדיר}$$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i .$$

אז זה מכפלה פנימית מעל  $\mathbb{R}^n$ .

### 1.2 דוגמה

$$\text{יהיו } \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ מספרים חיוביים. לכל שני וקטורים ב- } \mathbb{R}^n, u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ נגדיר}$$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i .$$

הוכיחו כי המכפלה הזאת היא מכפלה פנימית.

### פתרון:

(1)

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i x_i = \langle v, u \rangle$$

$$(2) \text{ נגדיר } w = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \text{ אז}$$

$$\langle u + v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i + y_i) \cdot z_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i \cdot z_i + y_i \cdot z_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \cdot z_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \cdot z_i = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

(3)

$$\langle ku, v \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i (k x_i) y_i = \sum_{i=1}^n k \cdot \lambda_i x_i y_i = k \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i = k \langle u, v \rangle$$

(4)

$$\langle u, u \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq 0$$

כי  $\lambda_i > 0$  לכל  $1 \leq i \leq n$ .

$$\langle u, u \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 = 0 \text{ אם } x_i = 0, \forall i$$

## 1.3 המכפלות הפנימיות העיקריות מעל $\mathbb{R}$

### הגדרה 1.3 מכפלה פנימית לפי בסיס

יהי  $V$  מרחב וקטורי נוצר סופית מעל  $\mathbb{R}$ . נבחר בסיס של  $V$ :

$$B = \{b_1, \dots, b_n\}.$$

לכל  $u, v \in V$ ,

$$u = \sum_{i=1}^n x_i b_i, \quad v = \sum_{i=1}^n y_i b_i.$$

מכפלה פנימית לפי בסיס  $B$  מסומנת  $(\cdot, \cdot)_B$  ומוגדרת

$$(u, v)_B = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

קל להוכיח שזה מכפלה פנימית.

### הגדרה 1.4 מכפלה פנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^n$

לכל  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , נניח כי בבסיס הסטנדרטי,

$$u = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad v = \sum_{i=1}^n y_i e_i.$$

המכפלה פנימית הסטנדרטית מסומנת  $(\cdot, \cdot)$  ומוגדרת

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

### הגדרה 1.5 העקבה של מטריצה ריבועית

לכל מטריצה  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  העקבה של  $A$  זה סכום איברי האלכסון של  $A$ . העקבה מסומנת

$$\text{tr } A.$$

## משפט 1.2 תכונות של העקבה

לכל  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ :

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \quad (1)$$

$$\lambda \in \mathbb{F} \quad \text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A) \quad (2)$$

$$\text{tr}(A^t) = \text{tr}(A) \quad (3)$$

## הגדרה 1.6 המכפלה הפנימית הסטנדרטית של מטריצות

תהינה  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . המכפלה הפנימית הסטנדרטית של מטריצות היא פונקציה  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  שמוגדרת ע"י

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t \cdot A) \quad .$$

המכפלה הזאת נקראת המכפלה הפנימית הסטנדרטית במרחב  $\mathbb{R}^{n \times m}$  גם.

## דוגמה 1.3

הוכיחו כי המכפלה הפנימית הסטנדרטית של מטריצות בהגדרה הקודמת מקיינת את התכונות של מכפלה פנימית.

### פתרון:

(1)

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t \cdot A) = \text{tr}((A^t \cdot B)^t) = \text{tr}(A^t \cdot B) = \langle B, A \rangle \quad .$$

(2) א

$$\langle A + B, C \rangle = \text{tr}(C^t \cdot (A+B)) = \text{tr}(C^t \cdot A + C^t \cdot B) = \text{tr}(C^t \cdot A) + \text{tr}(C^t \cdot B) = \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle \quad .$$

(ב)

$$\langle \lambda A, C \rangle = \text{tr}(B^t \lambda A) = \text{tr}(\lambda(B^t A)) = \lambda \text{tr}(B^t A) = \lambda \langle A, B \rangle \quad .$$

(3)

$$\langle A, A \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ji}^2 \geq 0$$

$\langle A, A \rangle = 0$  אם  $a_{ji} = 0, \forall i, j$ , כלומר אם  $A = 0$ .

## הגדרה 1.7 המכפלה הפנימית הסטנדרטית של פונקציות

תהינה  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ו-  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות שמוגדרות בקטע  $[a, b] \in \mathbb{R}$ . המכפלה הפנימית הסטנדרטית של פונקציות מוגדרת

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad .$$

## 1.4 מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$

### הגדרה 1.8 מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$

יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $\mathbb{C}$ . מכפלה פנימית על  $V$  היא פונקציה  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  המתאימה לכל זוג וקטורים  $u, v \in V$  סקלר ב- $\mathbb{C}$  המסומן ב- $\langle u, v \rangle$  כך שמתקיים התנאים הבאים. לכל וקטורים  $u, v, w \in V$  ולכל סקלר  $\lambda \in \mathbb{C}$ :

(1) הרמיטיות:

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}.$$

(2) לינאריות ברכיב הראשון:

(א)

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

(ב)

$$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

(3) חיוביות:  $\langle u, u \rangle$  הוא מספר ממשי אי-שלילי.  $\langle u, u \rangle = 0$  אם ורק אם  $u = 0$ .

### הגדרה 1.9 מרחב אוניטרי

מרחב וקטורי  $V$  מעל  $\mathbb{C}$  יחד עם מכפלה פנימית מסויימת נקרא מרחב אוניטרי.

### משפט 1.3 לינאריות חלקית של מ"פ מעל $\mathbb{C}$

יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית. אזי

(א) לכל  $u, v, w \in V$ ,

$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle.$$

(ב) לכל  $u, v \in V$  ולכל סקלר  $\lambda$ :

$$\langle u, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle.$$

הוכחה:

(א)

$$\langle u, v + w \rangle = \overline{\langle v + w, u \rangle} = \overline{\langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle} = \overline{\langle v, u \rangle} + \overline{\langle w, u \rangle} = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle.$$

(ב)

$$\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\langle \lambda v, u \rangle} = \overline{\lambda \langle v, u \rangle} = \bar{\lambda} \overline{\langle v, u \rangle} = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle.$$

■

## 1.5 דוגמאות של מרחבים אוניטריים

## דוגמה 1.4

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \text{ לכל}$$

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i.$$

הוכיחו שזאת מרחב מכפלה פנימית.

## פתרון:

(1)

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = \sum_{i=1}^n \overline{\bar{x}_i} \bar{y}_i = \sum_{i=1}^n \overline{\bar{x}_i y_i} = \sum_{i=1}^n \overline{y_i \bar{x}_i} = \sum_{i=1}^n \overline{y_i \bar{x}_i} = \overline{\sum_{i=1}^n y_i \bar{x}_i} = \overline{(v, u)}.$$

(2)

$$(u + v, w) = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) \cdot \bar{z}_i = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \bar{z}_i + \sum_{i=1}^n y_i \cdot \bar{z}_i = (u, w) + (v, w).$$

(3)

$$(u, u) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \geq 0$$

$$(u, u) = 0 \iff u = 0$$

מכפלה פנימית זו נקראת המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{C}^n$ .

## דוגמה 1.5

נתון

$$u = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+i \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3+i \\ -i \end{pmatrix}.$$

$u, v \in \mathbb{C}^2$ . חשבו את

(א)  $(u, v)$

(ב)  $(v, u)$

(ג)  $(u, u)$

(ד)  $(u, (1+i)v)$

## פתרון:

(א)

$$(u, v) = (1-i)(3-i) + (2+i) \cdot i = 3 - 4i - 1 + 2i - 1 = 1 - 2i$$

(ב)

$$(v, u) = (3+i)(1+i) - i(2-i) = 3 + 4i - 1 - 2i - 1 = 1 + 2i$$

(ג)

$$(u, u) = (1 - i)(1 + i) + (2 + i)(2 - i) = 2 + 5 = 7$$

(ד)

$$(u, (1 + i)v) = \overline{(1 + i)}(u, v) = (1 - i)(1 - 2i) = 1 - 3i - 2 = -1 - 3i.$$

## 1.6 הנורמה והמרחק

### הגדרה 1.10 הנורמה

יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית. הנורמה  $\|u\|$  של וקטור  $u \in V$  היא מספר ממשי אי-שלילי הניתנת ע"י

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

במרחבים  $\mathbb{R}^2$  ו- $\mathbb{R}^3$  הנורמה היא בעצם האורך של וקטור.

### דוגמה 1.6

יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית מעל שדה  $\mathbb{F}$ ,  $u \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{F}$ . הוכיחו כי

(א)

$$\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$$

(ב)

$$\left\| \frac{1}{\|u\|} u \right\| = 1$$

פתרון:

(א)

$$\|\lambda u\| = \sqrt{(\lambda u, \lambda u)} = \sqrt{\lambda(u, \lambda u)} = \sqrt{\lambda \cdot \bar{\lambda}(u, u)} = \sqrt{|\lambda|^2(u, u)} = |\lambda| \|u\|.$$

$$(ב) \quad \frac{1}{\|u\|} > 0 \quad \text{לכן לפי סעיף א'}$$

$$\left\| \frac{1}{\|u\|} u \right\| = \frac{1}{\|u\|} \cdot \|u\| = 1$$

עבור כל וקטור  $u \neq 0$  אפשר למצוא סקלר  $\lambda$  כך ש- $\lambda u$  יהיה וקטור יחידה.

לפעולה,  $u \rightarrow \frac{u}{\|u\|}$ , קוראים נרמול של וקטור  $u$ .

לוקטור היחידה  $\frac{u}{\|u\|}$  קוראים הוקטור המנורמל.

## 1.7 דוגמאות של הנורמה

## דוגמה 1.7

במרחב  $\mathbb{C}^2$  עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית חשבו את הנורמה של הוקטור  $u = \begin{pmatrix} i \\ 1+i \end{pmatrix}$  וחשבו את הוקטור המנורמל.

### פתרון:

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{i\bar{i} + (1+i)(1+i)} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}.$$

ננרמל את הוקטור:

$$\frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}i \\ \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}i \end{pmatrix}$$

## דוגמה 1.8

במרחב של הפונקציות הממשיות בקטע  $[0, 1]$

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_0^1 f^2(x) dx}$$

לדוגמה, עבור  $f(x) = 1$

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_0^1 1^2 dx} = 1$$

עבור  $f(x) = x^3$

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_0^1 x^6 dx} = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

ננרמל את הוקטור הזה:

$$\frac{f(x)}{\|f(x)\|} = \sqrt{7} \cdot x^3.$$

אז

$$\|\sqrt{7}x^3\| = \sqrt{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} = 1.$$

## דוגמה 1.9

במרחב  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית נקח  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\|A\| = \sqrt{(A, A)} = \sqrt{\text{tr}(A^t \cdot A)} = \sqrt{14}.$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{tr}(A^t \cdot A) = 10 + 4 = 14.$$

ננרמל את הוקטור:

$$\frac{1}{\sqrt{14}} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 \end{pmatrix}$$



## 1.8 משפט פיתגורס, משפט קושי שוורץ, אי-שוויון משולש

### משפט 1.4 משפט פיתגורס המוכלל של ווקטורים במרחב מכפלה פנימית

לכל שני וקטורים  $u, v$  במרחב מכפלה פנימית מתקיים:

$$\|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 \pm 2\operatorname{Re} \langle u, v \rangle + \|v\|^2 \quad (1)$$

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \quad (2)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle && \text{(הגדרה של המכפלה פנימית)} \\ &= \langle u, u + v \rangle + \langle v, u + v \rangle && \text{(לינאריות)} \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle && \text{(לינאריות חלקית)} \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \overline{\langle u, v \rangle} + \langle v, v \rangle && \text{(הרמיטיות)} \\ &= \|u\|^2 + \langle u, v \rangle + \overline{\langle u, v \rangle} + \|v\|^2 && \text{(הגדרה של הנורמה)} \\ &= \|u\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle u, v \rangle + \|v\|^2 && \text{(ראו הסבר למטה).} \end{aligned}$$

הסבר של שלב האחרון: לכל מספר  $z = a + bi$

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\operatorname{Re} z.$$

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle u, v \rangle + \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &= 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \end{aligned} \quad (2)$$

השוויון האחרון במרחב  $\mathbb{R}^2$  מבטא את משפט גאומטרי: במקבילית, סכום ריבועי האלכסונים שווה לסכום ריבועי הצלעות.

■

### משפט 1.5 אי-שוויון קושי-שוורץ

לכל וקטורים  $u$  ו- $v$  במרחב מכפלה פנימית מתקיים

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

הוכחה: אם  $u = \bar{0}$  אז מקבלים  $0 \leq 0$ .

נניח ש- $u \neq \bar{0}$ . לכל סקלר  $\lambda$  מתקיים

$$\langle \lambda u + v, \lambda u + v \rangle \geq 0, \quad (\#)$$

לפי משפט הקיטוב האגף השמאל הוא

$$\begin{aligned}\langle \lambda u + v, \lambda u + v \rangle &= \|\lambda u\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle \lambda u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &= \|\lambda u\|^2 + \langle \lambda u, v \rangle + \overline{\langle \lambda u, v \rangle} + \|v\|^2 \\ &= \lambda \bar{\lambda} \|u\|^2 + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \overline{\langle u, v \rangle} + \|v\|^2\end{aligned}$$

נציב זה באגף השמאל של (#) ונקבל

$$\lambda \bar{\lambda} \|u\|^2 + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \overline{\langle u, v \rangle} + \|v\|^2 \geq 0$$

$$\text{נציב } \bar{\lambda} = \frac{-\langle u, v \rangle}{\|u\|^2}, \lambda = \frac{-\overline{\langle u, v \rangle}}{\|u\|^2} \text{ ונקבל}$$

$$\frac{\overline{\langle u, v \rangle} \langle u, v \rangle}{\|u\|^2} - \frac{\overline{\langle u, v \rangle} \langle u, v \rangle}{\|u\|^2} - \frac{\overline{\langle u, v \rangle} \langle u, v \rangle}{\|u\|^2} + \|v\|^2 \geq 0$$

נכפיל ב-  $\|u\|^2$ :

$$-\langle u, v \rangle \overline{\langle u, v \rangle} + \|u\|^2 \|v\|^2 \geq 0$$

$$\text{נציב } \langle u, v \rangle \overline{\langle u, v \rangle} = |\langle u, v \rangle|^2 \text{ ונקבל}$$

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

מש"ל. ■

אפשר לשים לב שבמרחב  $\mathbb{R}^2$  הביטוי  $\|u - v\|$  הוא המרחק בין שתי הנקודות במישור המתאימה ל-  $u$  ול-  $v$ .

ישנה הכללה של מושג המרחק בכל מרחב מכפלה פנימית.

### הגדרה 1.11 המרחק

יהיו  $u$  ו-  $v$  שני וקטורים במרחב מכפלה פנימית. המרחק בין  $u$  ו-  $v$  הוא מספר ממשי אי-שלילי המוגדר ע"י

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

### משפט 1.6 תכונות של המרחק ואי-שוויון המשולש

נראה כי מושג המרחק החדש מקיים תכונות בסיסיות של המרחק המוכר במישור.

(1)

$$d(u, v) = d(v, u)$$

הוכחה:

$$d(u, v) = \|u - v\| = \|(-1)(v - u)\| = 1 \cdot \|v - u\| = d(v, u)$$

$$(2) \quad d(u, v) \geq 0 \quad \text{אם } d(u, v) = 0 \text{ אם ורק אם } u = v.$$

(3)

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$$

זאת תכונה הנקראת אי-שוויון המשולש.

**הוכחה:** לכל שני וקטורים  $u, v$ , לפי משפט הקיטוב,

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle u, v \rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2|\langle u, v \rangle| + \|v\|^2 \quad (\#1)$$

הסבר:

$$z = \langle u, v \rangle = a + ib \text{ נסמן}$$

$$\bar{z} = a - ib$$

$$|\langle u, v \rangle|^2 = z\bar{z} = a^2 + b^2 \text{ נרשום}$$

$$|\langle u, v \rangle| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ לכן}$$

$$2\operatorname{Re} \langle u, v \rangle = 2\operatorname{Re} z = 2a \text{ מצד שני}$$

$$2\operatorname{Re} \langle u, v \rangle = 2a \leq 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2|\langle u, v \rangle| \text{ לכן נקבל}$$

נציב אי-שוויון קושי-שוורץ ב- (#1) ונקבל

$$\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

נציב את  $-v$  במקום  $v$ :

$$\|u - v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$$

לכן

$$\|u - v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

נציב כעת את  $u - w$  במקום  $u$  ו  $v - w$  במקום  $v$ :

$$\|(u - w) - (v - w)\| \leq \|u - w\| + \|v - w\|$$

ז"א

$$\|u - v\| \leq \|u - w\| + \|v - w\|$$

קיבלנו את אי-שוויון המשולש:

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(v, w)$$

## 1.9 אורתוגונליות

### הגדרה 1.12 ווקטורים אורתוגונליים

וקטורים  $u, v$  במרחב מכפלה פנימית נקראים אורתוגונליים זה לזה (או מאונכים זה לזה) אם

$$\langle u, v \rangle = 0$$

סימון:

$$u \perp v$$

(1) אם  $\langle u, v \rangle = 0$  אז

$$\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle} = \bar{0} = 0$$

כלומר יחס האורתוגונליות הוא סימטרי.

(2) וקטור האפס אורתוגונל לכל וקטור  $v$ .

(3) במרחב  $\mathbb{R}^n$  עם המכפלה פנימית הסטנדרטית, מושג האורתוגונליות מתלכד עם מושג האורתוגונליות המוגדר על סמך המכפלה סלקרית.

**דוגמה 1.10**

במרחב הפונקציות הרציפות בקטע  $[0, 1]$ ,

$$f(x) = 2x - 1, \quad g(x) = 2x^2 - 2x + \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}(f, g) &= \int_0^1 (2x - 1) \left( 2x^2 - 2x + \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( 4x^3 - 6x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \left[ x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x \right]_0^1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

לכן  $f(x) \perp g(x)$ .

**דוגמה 1.11**

במרחב  $\mathbb{C}^4$  עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}(u, v) &= 1 \cdot \bar{i} + i \cdot \bar{1} + 1 \cdot \bar{i} + i \cdot \bar{1} \\ &= -i + i - i + i \\ &= 0\end{aligned}$$

לכן  $u \perp v$ .

**דוגמה 1.12**

הוכיחו שאם  $u \perp v$  אז

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \quad (\text{א})$$

$$\|u + v\| = \|u - v\| \quad (\text{ב})$$

**פתרון:**

(א)

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle u, v \rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

המשמעות הגאומטרית ב-  $\mathbb{R}^2$  - משפט פיתגורס.

(ב)

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle u, v \rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle u, v \rangle$$

בגלל ש  $\langle u, v \rangle = 0$ . לכן

$$\|u - v\|^2 = \|u + v\|^2$$

ולכן

$$\|u - v\| = \|u + v\|$$

הפירוש הגאומטרי ב-  $\mathbb{R}^2$ : האלכסונים של מלבן שווים זה לזה.

### הגדרה 1.13 ווקטור האורתוגונלי לתת-מרחב

נניח ש  $V$  מרחב מכפלה פנימית ו-  $U \subset V$  תת-מרחב של  $V$ . נניח ש  $v \in V$ . אומרים כי  $v$  אורתוגונלי ל-  $U$  אם  $v$  אורתוגונלי לכל וקטור  $u \in U$ . כלומר, אם

$$\langle v | u \rangle = 0$$

לכל  $u \in U$ , אז הווקטור  $v$  אורתוגונלי לתת-מרחב  $U$ .  
סימון:

$$v \perp U.$$

### הגדרה 1.14 המשלים האורתוגונלי

נניח ש  $V$  מרחב מכפלה פנימית ו-  $U \subset V$  תת-מרחב של  $V$ . נניח ש  $v \in V$ . המשלים האורתוגונלי של  $U$  מסומן ב-  $U^\perp$  ומוגדר לפי התנאי שכל וקטור ב-  $U^\perp$  אורתוגונלי לכל וקטור ב-  $U$ .  
כלומר:

$$\langle a | b \rangle = 0$$

לכל  $a \in U$  ולכל  $b \in U^\perp$ .

### דוגמה 1.13

נניח ש-  $V = \mathbb{R}_2[x]$ , ו-  $U = \text{span}\{x\}$ . מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי  $U^\perp$ . כאשר המכפלה הפנימית היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית בקטע  $[0, 1]$ .

**פתרון:**

וקטור  $p(x) = a + bx + cx^2 \in U^\perp$  אם  $\langle x, p(x) \rangle = 0$ .

$$\langle x, p(x) \rangle = \langle x, a + bx + cx^2 \rangle = \int_0^1 dx \, x \cdot (a + bx + cx^2) = \left[ \frac{ax^2}{2} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^4}{4} \right]_0^1 = \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} = 0.$$

לכן

$$U^\perp = \{a + bx + cx^2 \mid 6a + 4b + 3c = 0\}.$$

נמצא בסיס של  $U^\perp$ :

$$a = -\frac{2}{3}b - \frac{1}{2}c, \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

לכן

$$a + bx + cx^2 = -\frac{2}{3}b - \frac{1}{2}c + bx + cx^2 = b \left( -\frac{2}{3} + x \right) + c \left( -\frac{1}{2} + x^2 \right), \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

לכן  $\{1 - 2x^2, 2 - 3x\}$  בסיס של  $U^\perp$ . נשים לב כי

$$3 = \dim(V) = \overbrace{\dim(U)}^{=1} + \overbrace{\dim(U^\perp)}^{=2}$$

לכן  $V = U \oplus U^\perp$

## דוגמה 1.14

מצאו בסיס ל-  $U^\perp$  בכל אחד מהמקרים הבאים:

$$U = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1+i \\ i \end{pmatrix} \right\}, V = \mathbb{C}^2 \quad \textbf{(1)}$$

$$U = \text{span} \{(x, x^2)\}, V = \mathbb{R}_2[x] \quad \textbf{(2)}$$

$$U = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, V = \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad \textbf{(3)}$$

## פתרון:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1+i \\ i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in U^\perp \quad \textbf{(1)}$$

$$\left( \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ i \end{pmatrix} \right) = z_1 \overline{(1+i)} + z_2 \bar{i} = 0 \Rightarrow z_2 = \frac{i}{1-i} z_1 = \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right) z_1$$

לכן

$$U^\perp = \left\{ \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right) z \mid z \in \mathbb{C} \right\}.$$

בסיס של  $U^\perp$ :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{pmatrix} \right\}$$

$$(p(x), x^2) = 0 \text{ וגם } (p(x), x) = 0 \Leftrightarrow p(x) = a + bx + cx^2 \quad \textbf{(2)}$$

$$(p(x), x) = \int_0^1 (a + bx + cx^2)x \, dx = \left[ \frac{ax^2}{2} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^4}{4} \right]_0^1 = \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} = 0$$

$$(p(x), x^2) = \int_0^1 (a + bx + cx^2)x^2 \, dx = \left[ \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^4}{4} + \frac{cx^5}{5} \right]_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5} = 0$$

לכן

$$U^\perp = \left\{ a + bx + cx^2 \mid \begin{matrix} 6a + 4b + 3c = 0 \\ 20a + 15b + 12c = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow 3R_2 - 10R_1} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow 5R_1 - 4R_2} \begin{pmatrix} 30 & 0 & -9 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

$$c \in \mathbb{R} \quad b = -1.2c \quad a = 0.3c$$

$$a + bx + cx^2 = \frac{3}{10}c - \frac{12}{10}cx + cx^2 = c \left( \frac{3}{10} - \frac{12}{10}x + x^2 \right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

לכן נקבל בסיס של  $U^\perp$ :

$$B_{U^\perp} = \{3 - 12x + 10x^2\}$$

$$(3) \text{ נסמן } U = \text{span}(A_1, A_2) \Leftarrow A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U^\perp = \{B \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid (B, A_1) = 0, (B, A_2) = 0\}$$

$$\text{נסמן } B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(B, A_1) = \text{tr}(A_1^t \cdot B) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \text{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a = 0$$

$$(B, A_2) = \text{tr}(A_2^t \cdot B) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \text{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = a + b = 0$$

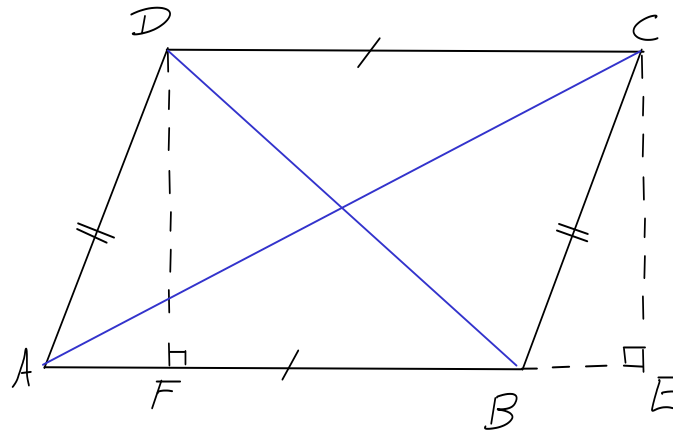
לכן

$$U^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

בסיס של  $U^\perp$ :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

## 1.10 \* העשרה: סכום ריבועי האלכסונים של במקבילית שווה לסכום ריבועי הצלעות של



הוכחה:

$$AC^2 = AE^2 + CE^2 \text{ (פיתגורס).}$$

$$\text{לכן } AC^2 = (AB + BE)^2 + CE^2$$

$$AC^2 = AB^2 + BE^2 + 2 \cdot AB \cdot BE + CE^2 \quad (*)$$

$CD = EF$  בגלל ש  $CDFE$  מלבן.  
אבל  $CD = AB$  לכן  $AB = CD = EF$

גם  $CE = DF$  (מרחק בין שני ישרים מקבילים).  
 לכן  $\triangle AFD \cong \triangle BEC$  (משולשים חופפים)  
 לכן  $AF = BE$ .

נסתכל אל המשולש ישר זווית  $\triangle DFB$ .  
 (פיתגורס)  $BD^2 = BF^2 + DF^2$ .  
 לכן  $BD^2 = (EF - BE)^2 + CE^2$  בגלל ש  $DF = CE$ .  
 לכן  $BD^2 = (AB - BE)^2 + CE^2$  בגלל ש  $EF = AB$ .  
 לכן

$$BD^2 = AB^2 + BE^2 - 2 \cdot AB \cdot BE + CE^2 \quad (*)2$$

נחבר את הביטויים  $(*)1 + (*)2$  ונקבל

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= AB^2 + BE^2 + 2 \cdot AB \cdot BE + CE^2 + AB^2 + BE^2 - 2 \cdot AB \cdot BE + CE^2 \\ \Rightarrow AC^2 + BD^2 &= 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot BE^2 + 2 \cdot CE^2 \\ \Rightarrow AC^2 + BD^2 &= 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot (BE^2 + CE^2) \end{aligned} \quad (*)3$$

במשולש ישר זווית  $\triangle BEC$   
 (פיתגורס)  $BC^2 = BE^2 + CE^2$  לכו נקבל ממשוואה  $(*)3$

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot BC^2 \\ \Rightarrow AC^2 + BD^2 &= AB^2 + AB^2 + BC^2 + BC^2 \\ \Rightarrow AC^2 + BD^2 &= AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 \end{aligned}$$

לכן סכום ריבועי האלכסונים שווה לסכום ריבועי הצלעות.