תוכן העניינים

1 מכונות טיורינג

הגדרה 1: מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעיה $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ כאשר:

Q	קבוצת מצבים סופית ולא ריקה	
Σ	א"ב הקלט סופי	$\_ \notin \Sigma$
Γ	א"ב הסרט סופי	$\Sigma \cup \{\_\} \subseteq \Gamma$
δ	פונקציית המעברים	$\delta : (Q \backslash \{q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}\} \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$
q_0	מצב התחלתי.	
q_{acc}	מצב מקבל יחיד.	
q_{rej}	מצב דוחה יחיד.	

הגדרה 2: קונפיגורציה

בהינתן מכונת טיורינג M ומילה $w \in \Sigma^*$. **קונפיגורציה** בריצה של M על w היא שלושה (u, q, v) (או $uq\text{v}$ לשם קיצור) כאשר:

- $u \in \Sigma^*$: המילה מתחילת הסרט עד (לא כולל) התו שמתחת לראש.
- $\text{v} \in \Sigma^*$: המילה שמתחילה מהתו שמתחת לראש ועד (לא כולל) ה- $\_$ הראשון.

הגדרה 3: גרירה בצעד אחד

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M. נסמן

$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם כשנמצאים ב- c_1 עוברים ל- c_2 בצעד בודד.

הגדרה 4: גרירה בכללי

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M. נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם ניתן לעבור מ- c_1 ל- c_2 ב- 0 או יותר צעדים.

הגדרה 5: קבלה ודחייה של מילה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}\ , q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $w \in \Sigma^*$ מחרוזת. אומרים כי

- M **מקבלת** את w אם $q_0 w \vdash_M^* u\ q_{\text{acc}}\, \text{v}$
- M **דוחה** את w אם $q_0 w \vdash_M^* u\ q_{\text{rej}}\ \text{v}$

עבור $\text{v}, u \in \Gamma^*$ כלשהם.

הגדרה 6: הכרעה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}\ , q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מכריעה** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים

- $w \in L \Leftarrow M$ מקבלת את w.

- $L \Leftarrow w \notin L$ ... $M \Leftarrow w \notin L$ דוחה את w.

הגדרה 7: קבלה של שפה
תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מקבלת** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים
- אם $w \in L$ אז M מקבלת את w.
- אם $w \notin L$ אז M לא מקבלת את w.

במקרה כזה נכתוב ש- $L(M) = L$.

הגדרה 8: מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה f
תהי $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ ותהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג. אומרים כי M מחשבת את f אם:
- $\Sigma = \Sigma_1$ ו- $\Sigma_2 \subset \Gamma$.
- לכל $w \in \Sigma_1^*$ מתקיים $q_0 w \vdash q_{\text{acc}} f(w)$.

הגדרה 9: מודלים שקולים חישובית
יהיו A ו- B מודלים חישוביים. אומרים כי A ו- B שקולים אם לכל שפה L מתקיימים:
1) קיימת מ"ט במודל A שמכריעה את L אם"ם קיימת מ"ט במודל B שמכריעה את L.
2) קיימת מ"ט במודל A שמקבלת את L אם"ם קיימת מ"ט במודל B שמקבלת את L.

הגדרה 10: מכונט טיורינג מרובת סרטים
מכונת טיורינג מרובת סרטים היא שביעייה:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר Q, Σ, Γ, q_0, q_{acc},q_{rej} מוגדרים כמו מ"ט עם סרט יחיד (ראו הגדרה 1).
ההבדל היחיד בין מ"ט עם סרט יחיד לבין מטב"ס הוא הפונקצית המעברים. עבור מטמ"ס הפונקצית המעברים היא מצורה הבאה:

$$\delta_k : (Q \backslash \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$$

הקונפיגורציה של מכונת טיורנג מרובת סרטים מסומנת $(u_1 q \ \mathsf{v}_1 \ , \ u_2 q \ \mathsf{v}_2 \ , \ \ldots \ , \ u_k q \ \mathsf{v}_k \ .)$

משפט 1: שקילות בין מ"ט מרובת סרטים למ"ט עם סרט יחיד
לכל מטמ"ס M קיימת מ"ט עם סרט יחיד M' השקולה ל- M.
כלומר, לכל קלט $w \in \Sigma^*$:
- אם M מקבלת את w $\Leftarrow$ M' מקבלת את w.
- אם M דוחה את w $\Leftarrow$ M' דוחה את w.
- אם M לא עוצרת על w $\Leftarrow$ M' לא עוצרת על w.

הגדרה 11: מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית (מ"ט א"ד) היא שביעייה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}$ מוגדרים כמו במ"ט דטרמיניסטי (ראו הגדרה 1).
Δ היא פונקצית המעברים

$$\Delta : (Q \backslash \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma \to P\left(Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}\right) \ .$$

$$\Delta(q, a) = \{(q_1, a, S) \ \ , \ \ (q_2, b, L) \ \ , \ \ \ldots\} \ .$$

כלומר, לכל זוג $q \in Q, \alpha \in \Gamma$ ייתכן מספר מעברים אפשריים, 0, 1 או יותר.

- קונפיגורציה של מ"ט א"ד זהה לקונפיגורציה של מ"ט דטרמיניסטית.
- לכל קונפיגורציה ייתכן מספר קונפיגורציות עוקבות.
- לכל מילה $w \in \Sigma^*$ ייתכן מספר ריצות שונות:
    - ריצות שמגיעות ל- q_{acc}.
    - ריצות שמגיעות ל- q_{rej}.
    - ריצות שלא עוצרות.
    - ריצות שנתקעות.

הגדרה 12: קבלה ודחייה של מילה ושפה של מכונט טיורינג אי דטרמיניסטית

מילה $w \in \Sigma^*$ מתקבלת במ"ט א"ד M אם קיימת לפחות ריצה אחת שמגיעה ל- q_{acc}. השפה של מ"ט א"ד M היא

$$L(M) = \left\{ w \in \Sigma^* \ \middle| \ \exists u, \mathsf{v} \in \Gamma^* \ \ : \ \ q_0 w \vdash_* \ \ u \ q_{\text{acc}} \ \mathsf{v} \right\}$$

כלומר:

- $w \in L(M)$ אם קיימת ריצה אחת שבה M מקבלת את w.
- $w \notin L(M)$ אם בכל ריצה של M על w, M דוחה או לא עוצרת, או נתקעת.

הגדרה 13: מ"ט אי דטרמיניסטית המכריעה שפה L

אומרים כי מ"ט אי דטרמיניסטית M מכריעה שפה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $L \ni w \Leftarrow$ M מקבלת את w.
- אם $L \not\ni w \Leftarrow$ M דוחה את w.

הגדרה 14: מ"ט א"ד המקבלת שפה L

אומרים כי מ"ט אי דטרמיניסטית M מקבלת שפה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $L \ni w \Leftarrow$ M מקבלת את w.
- אם $L \not\ni w \Leftarrow$ M דוחה את w או M לא עוצרת על w.

משפט 2: שקילות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטית ב- RE

לכל מ"ט א"ד N קיימת מ"ט דטרמיניסטית D כך ש-

$$L(N) = L(D) \ .$$

כלומר לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם N מקבלת את w $\Leftarrow$ D תקבל את w.
- אם N לא מקבלת את w $\Leftarrow$ D לא תקבל את w.

2 המחלקות החישוביות R, RE ו- $Co\,RE$ ותכונותן

הגדרה 15: כוכב קליני

בהינתן השפה L. השפה L^* מוגדרת:

$$L^* = \{\varepsilon\} \cup \left\{ w = w_1 w_2 \cdots w_k \;\middle|\; \forall\ 1 \leqslant i \leqslant k \ ,\ w_i \in L \right\}$$

הגדרה 16:

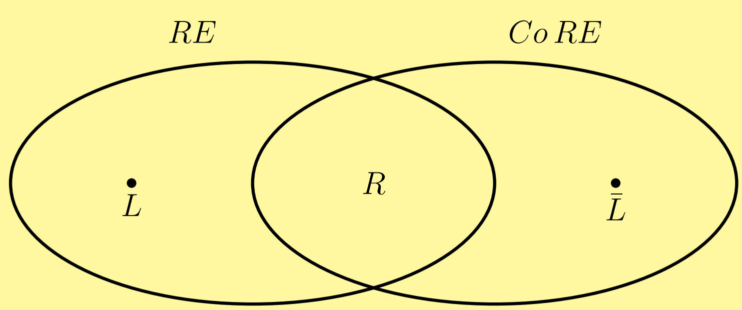
- אוסף השפות הכריעות מסומן R ומוגדר $R = \left\{ L \subseteq \Sigma^* \;\middle|\; \text{קיימת מ"ט המכריעה את } L \right\}$.
- אוסף השפות הקבילות מסומן R ומוגדר $RE = \left\{ L \subseteq \Sigma^* \;\middle|\; \text{קיימת מ"ט המקבלת את } L \right\}$.
- אוסף השפות שהמשלימה שלהן קבילה מסומן R ומוגדר $Co\,RE = \left\{ L \subseteq \Sigma^* \;\middle|\; \bar{L} \in RE \right\}$.

משפט 3: סגירות של השפות הכריעות והשפות הקבילות

- R סגורה תחת: **1)** איחוד **2)** חיתוך **3)** שרשור **4)** סגור קלין **5)** משלים.
- RE סגורה תחת: **1)** איחוד **2)** חיתוך **3)** שרשור **4)** סגור קלין.

משפט 4: תכונות של השפות החישוביות

1. אם $L \in RE$ וגם $\bar{L} \in RE$ אזי $L \in R$.
2. אם $L \in RE \backslash R$ אזי $\bar{L} \notin RE$ (כי $\bar{L} \in Co\,RE \backslash R$).
3. $RE \cap Co\,RE = R$.



הגדרה 17: מכונת טיורינג אוניברסלית
מ"ט אוניברסלית U מקבלת כקלט זוג, קידוד של מ"ט $\langle M \rangle$ וקידוד של מילה $\langle w \rangle$, ומבצעת סימולציה של ריצה של M על w ועונה בהתאם.

$$L(U) = \left\{ \langle M, w \rangle \;\middle|\; w \in L(M) \right\} \ .$$

3 אי-כריעות

משפט 5: סיווג שפות ידועות - חישוביות

	כריעה	קבילה
L_{acc}	$\times$	$\checkmark$
$\overline{L_{\text{acc}}}$	$\times$	$\times$
L_{d}	$\times$	$\times$
L_{Halt}	$\times$	$\checkmark$
$\overline{L_{\text{Halt}}}$	$\times$	$\times$
L_{E}	$\times$	$\times$
$\overline{L_{\text{E}}}$	$\times$	$\checkmark$
L_{EQ}	$\times$	$\times$
$\overline{L_{\text{EQ}}}$	$\times$	$\times$
L_{REG}	$\times$	$\times$
L_{NOTREG}	$\times$	$\times$

$L_{\text{acc}} = \{\langle M, w\rangle | w \in L(M)\}$ $\quad \in RE \backslash R$

$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w\rangle |\ \text{עוצרת על } w \ M\}$ $\quad \in RE \backslash R$

$L_M = \{\langle M\rangle \ ||\ \langle M\rangle \text{ המקבלת את } M\ \}$ $\quad \in RE \backslash R$

$L_{\text{d}} = \{\langle M\rangle | \langle M\rangle \notin L(M)\}$ $\quad \in Co\,RE \backslash R$

$L_E = \{\langle M\rangle | L(M) = \varnothing\}$ $\quad \in Co\,RE \backslash R$

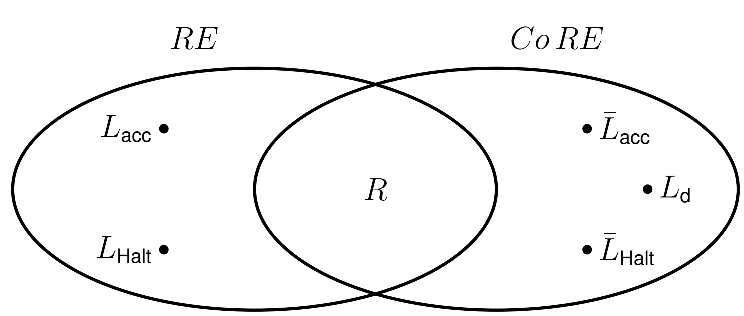
$L_{EQ} = \{\langle M_1, M_2\rangle | L(M_1) = L(M_2)\}$ $\quad \notin RE \backslash R, \notin Co\,RE \backslash R$

$L_{REG} = \{\langle M\rangle |\ \text{רגולרית } L(M)\}$ $\quad \notin RE \backslash R, \notin Co\,RE \backslash R$

$L_{NOTREG} = \{\langle M\rangle |\ \text{לא רגולרית } L(M)\}$ $\quad \notin RE \backslash R, \notin Co\,RE \backslash R$

משפט 6:

$$L_{\text{acc}} \in RE \backslash R \quad \Rightarrow \quad \bar{L}_{\text{acc}} \notin RE\ ,$$
$$L_{\text{halt}} \in RE \backslash R \quad \Rightarrow \quad \bar{L}_{\text{halt}} \notin RE\ ,$$
$$L_{\text{d}} \notin RE \backslash R\ .$$



4 רדוקציות

הגדרה 18: מ"ט המחשבת פונקציה
בהינתן פונקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ אומרים כי מ"ט M מחשבת את f אם לכל $x\in\Sigma^*$:
- M מגיעה ל- q_{acc} בסוף החישוב של $f(x)$ וגם
- על סרט הפלט של M רשום $f(x)$.

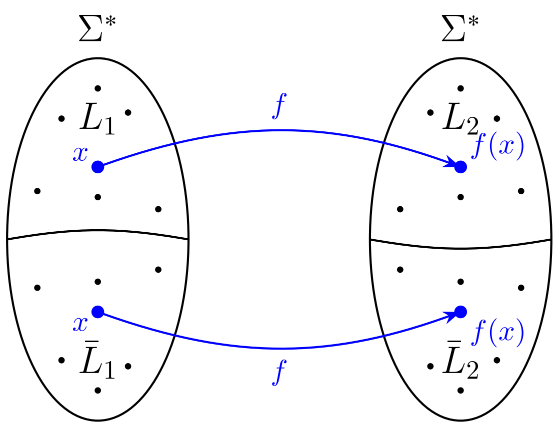
הגדרה 19: מ"ט המחשבת פונקציה
בהינתן פונקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ אומרים כי f חשיבה אם קיימת מ"ט המחשבת את f.

הגדרה 20: רדוקציה
בהינתן שתי שפות $L_1,L_2\subseteq\Sigma^*$ אומרים כי L_1 ניתנת לרדוקציה ל- L_2, ומסמנים

$$L_1\leqslant L_2\ ,$$

אם קיימת פונקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ המקיימת:
1) f חשיבה
2) לכל $x\in\Sigma^*$:

$$x\in L_1\quad\Leftrightarrow\quad f(x)\in L_2\ .$$



משפט 7: משפט הרדוקציה
לכל שתי שפות $L_1,L_2\subseteq\Sigma^*$, אם קיימת רדוקציה $L_1\leqslant L_2$ אזי

$$L_1\in R\quad\Leftarrow\quad L_2\in R$$
$$L_1\in RE\quad\Leftarrow\quad L_2\in RE$$
$$L_1\in Co\,RE\quad\Leftarrow\quad L_2\in Co\,RE$$
$$L_1\notin R\quad\Rightarrow\quad L_2\notin R$$
$$L_1\notin RE\quad\Rightarrow\quad L_2\notin RE$$
$$L_1\notin Co\,RE\quad\Leftarrow\quad L_2\notin Co\,RE$$

משפט 8: תכונות של רדוקציה

- לכל שפה L מתקיים: $L \leqslant L$.
- אם $L_1 \leqslant L_2$ אזי $\bar{L}_1 \leqslant \bar{L}_2$.
- אם $L_1 \leqslant L_2$ וגם $L_2 \leqslant L_3$ אזי $L_1 \leqslant L_3$.
- לכל $L \in R$ ולכל L' שאינה $\varnothing, \Sigma^*$ מתקיים $L \leqslant L'$.

משפט 9: משפט רייס

עבור כל תכונה S של שפות שאינה טריויאלית מתקיים: $L_S \notin R$

- תכונה S לא טריויאלית היא קבוצה של שפות ב RE כך ש $S \neq RE$ וגם $S \neq \varnothing$.
- $L_S = \{\langle M \rangle \mid L(M) = S\}$.

5 סיבוכיות

משפט 10:

לכל מ"ט מרובת סרטים M הרצה בזמן $f(n)$, קיימת מ"ט סרט יחיד M' השקולה ל- M ורצה בזמן $O\left(f^2(n)\right)$.

משפט 11:

לכל מ"ט א"ד N הרצה בזמן $f(n)$, קיימת מ"ט דטרמיניסטית D השקולה ל- N ורצה בזמן $2^{(f(n))}$.

הגדרה 21: אלגוריתם אימות

אלגוריתם אימות עבור בעייה A הוא אלגוריתם V כך שלכל קלט $w \in \Sigma^*$ מתקיים:

$w \in A$ אם ורק אם קיימת מילה y באורך פולינומיאלי ב- $|w|$ כך ש- V מקבל את הזוג (w, y). כלומר:

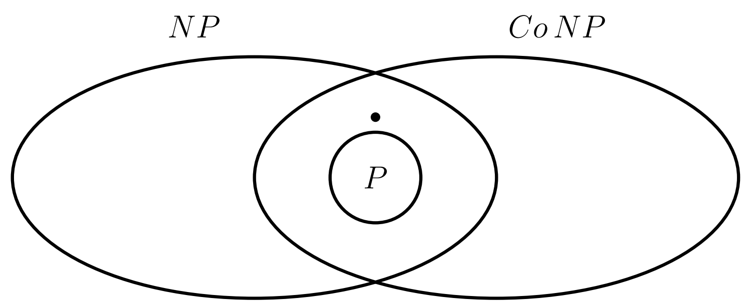
- אם $w \in A$ $\Leftarrow$ קיים $y \in \Sigma^*$ כך ש- $V(w, y) = T$.
- אם $w \notin A$ $\Leftarrow$ לכל $y \in \Sigma^*$ מתקיים $V(w, y) = F$.

הגדרה 22:

- $P =$ קבוצת כל השפות שיש להן מ"ט דטרמיניסטית המכריעה אותן בזמן פולינומי.
- $NP =$ קבוצת כל השפות שיש להן אלגוריתם אימות המאמת אותן בזמן פולינומי.
  הגדרה שקולה:
- $NP =$ קבוצת כל השפות שיש להן מ"ט אי-דטרמיניסטית המכריעה אותן בזמן פולינומי.
- $CoNP =$ קבוצת כל השפות שהמשלימה שלהן שייכת ל- NP $\quad CoNP = \left\{A \mid \bar{A} \in NP\ .\right\}$.

משפט 12: תכונות של P ו- NP

- $P \subseteq NP$.
- P סגורה תחת משלים: אם $A \in P$ אזי גם $\bar{A} \in P$.
- $P \subseteq NP \cap CoNP$.



6 רדוקציה פולינומיאלית

הגדרה 23: פונקציה פולינומיאלית
בהינתן פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$. אומרים כי f חשיבה בזמן פולינומיאלי אם קיים אלגוריתם (מ"ט דטרמיניסטית) המחשב את f בזמן פולינומיאלי.

הגדרה 24: רדוקציה פולינומיאלית
בהינתן שתי הבעיות A ו- B. אומרים כי A ניתנת לרדוקציה פולינומיאלית ל- B, ומסמנים $A \leqslant_P B$, אם קיימת פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ המקיימת:
1) f חשיבה בזמן פולינומיאלי
2) לכל $w \in \Sigma^*$:

$$w \in A \quad \Leftrightarrow \quad f(w) \in B \ .$$

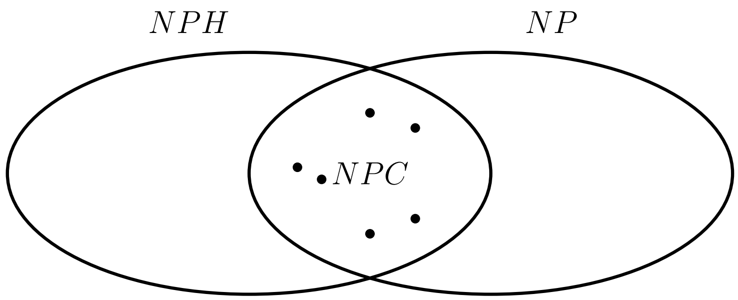
משפט 13: משפט הרדוקציה
לכל שתי בעיות A ו- B, אם $A \leqslant_P B$ אזי

$$\begin{aligned} A \in P \quad &\Leftarrow \quad B \in P \\ A \in NP \quad &\Leftarrow \quad B \in NP \\ A \notin P \quad &\Rightarrow \quad B \notin P \\ A \notin NP \quad &\Rightarrow \quad B \notin NP \end{aligned}$$

7 NP שלמות

הגדרה 25: NP - קשה (NP-hard)
בעייה B נקראת NP קשה אם לכל בעייה $A \in NP$ קיימת רדוקציה $A \leqslant_P B$.

הגדרה 26: NP- שלמה (NP-complete)
בעייה B נקראת NP שלמה אם
1) $B \in NP$
2) לכל בעייה $A \in NP$ קיימת רדוקציה $A \leqslant_p B$.



משפט 14: תכונות של רדוקציה פולינומיאלית

- אם קיימת שפה $B \in NPC$ (NP שלמה) וגם $B \in P$ אזי $P = NP$.
- אם $B \leqslant_P A$ אזי $\bar{B} \leqslant_P \bar{A}$.
- אם $B \leqslant_p A$ וגם $C \leqslant_p B$ אזי $C \leqslant_p A$.
- לכל $A \in P$ ולכל B שאינה $\varnothing, \Sigma^*$ מתקיים $A \leqslant_P B$.

משפט 15:
תהי B בעייה NP- שלמה. אזי לכל בעייה $C \in NP$, אם $B \leqslant_p C$ אזי גם C היא NP שלמה.

8 בעיית הספיקות (SAT)

הגדרה 27: נוסחת CNF
נוסחת CNF, ϕ היא נוסחה בוליאנית מעל n משתנים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ המכילה m פסוקיות $C_1, C_2, \ldots, C_m$, כאשר כל פסוקית מכילה אוסף של ליטרלים ($x_i \backslash \bar{x}_i$) המחוברים ע"י OR ($\vee$) בוליאני והפסוקיות מחוברות ע"י AND ($\wedge$) בוליאני. לדוגמה:

$$\phi = \left(\overset{C_1}{x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4 \vee \bar{x}_7}\right) \wedge \left(\overset{C_2}{x_3 \vee x_5 \vee \bar{x}_8}\right) \wedge \quad \cdots$$

הגדרה 28: נוסחת $3CNF$
נוסחת $3CNF$, ϕ היא נוסחה CNF שבה בכל פסקוית יש בדיוק שלוש ליטרלים. לדוגמה:

$$\phi = \left(\overset{C_1}{x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4}\right) \wedge \left(\overset{C_2}{x_3 \vee x_5 \vee \bar{x}_8}\right) \wedge \quad \cdots$$

הגדרה 29: נוסחת CNF ספיקה
נוסחת CNF, ϕ היא ספיקה אם קימת השמה למשתנים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ע"י $T \backslash F$ כך ש- ϕ מקבלת ערך T, כלומר בכל פסוקית ישנו לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך T.

הגדרה 30: בעיית SAT
קלט: נוסחת CNF, ϕ.
פלט: האם ϕ ספיקה?

$$SAT = \{\langle\phi\rangle \mid \text{נוסחת } CNF \text{ ספיקה } \phi\}$$

הגדרה 31: בעיית $3SAT$
קלט: נוסחת $3CNF$ ϕ.
פלט: האם ϕ ספיקה?

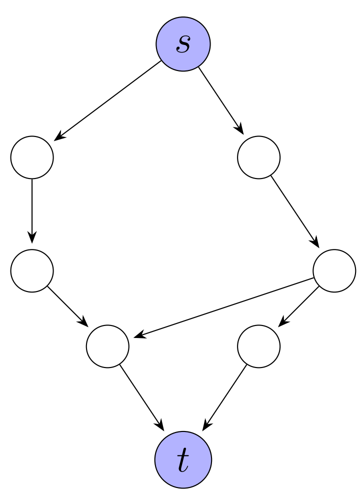
$$3SAT = \{\langle\phi\rangle \mid \text{נוסחת } 3CNF \text{ ספיקה } \phi\}$$

משפט 16:
- $SAT \in NP$.
- **משפט קוק לוין:** $SAT \in NPC$.
- $3SAT \in NPC$.
- $SAT \in P \Leftrightarrow P = NP$.

9 סיווג שפות ידיועות - סיבוכיות

הגדרה 32: בעיית מסלול $PATH$
קלט: גרף מכוון G ושני קודקודים s ו- t.
פלט: האם G מכיל מסלול מקודקוד s לקודדוק t.

$$PATH = \{\langle G, s, t\rangle \mid G \text{ גרף מכוון המכיל מסלול מ- } s \text{ ל- } t\}$$

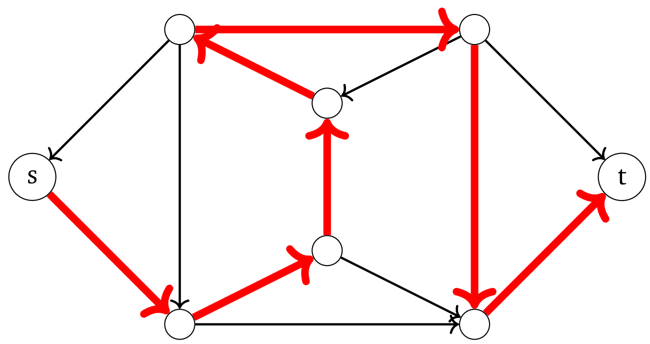


הגדרה 33: בעיית $RELPRIME$
קלט: שני מספרים x ו- y.

<u>פלט:</u> האם x ו- y זרים?

$$RELPRIME = \{\langle x,y\rangle \mid \gcd(x,y)=1\} \ .$$

הגדרה 34: מסלול המילטוני
בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$ ושני קודקודים $s,t\in V$. מסלול המילטוני מ- s ל- t הוא מסלול מ- s ל- t שעובר דרך כל קודקוד ב-G בדיוק פעם אחת.



הגדרה 35: בעיית מסלול המילטוני - $HAMPATH$
<u>קלט:</u> גרף מכוון $G=(V,E)$ ושני קודקודים $s,t\in V$.
<u>פלט:</u> האם G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t?

$$HAMPATH = \{\langle G,s,t\rangle \mid \text{גרף מכוון המכיל מסלול המילטוני מ- } s \text{ ל- } t\text{?}\ G\}$$

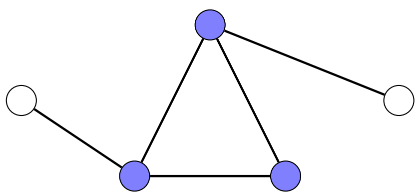
הגדרה 36: מעגל המילטוני
בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$.
מעגל המילטוני הוא מסלול מעגלי שעובר כל קודקוד ב- G בדיוק פעם אחת.

הגדרה 37: בעיית מעגל המילטוני - $HAMCYCLE$
<u>קלט:</u> גרף מכוון $G=(V,E)$.
<u>פלט:</u> האם G מכיל מעגל המילטוני?

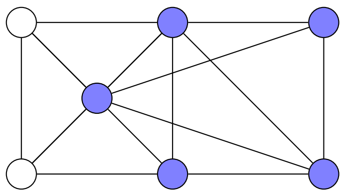
$$HAMCYCLE = \{\langle G\rangle \mid \text{גרף מכוון המכיל מעגל המילטוני.}\ G\}$$

הגדרה 38: קליקה
בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$.
קליקה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $C\subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u,\mathsf{v}\in C$ מתקיים $(u,\mathsf{v})\in E$.

קליקה בגודל $k=3$:



קליקה בגודל $k=5$:



הגדרה 39: בעיית הקליקה - $CLIQUE$

<u>קלט</u>: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר k.

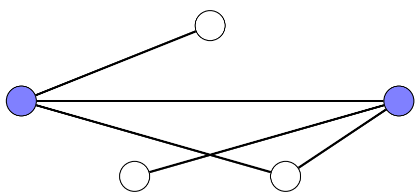
<u>פלט</u>: האם G קליקה בגודל k?

$$CLIQUE=\left\{\langle G,k\rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל } k \text{ } G\right\}$$

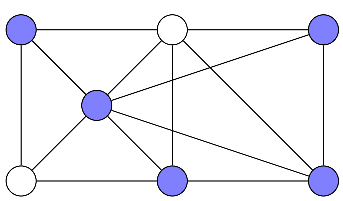
הגדרה 40: כיסוי בקודקודים

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$, כיסוי בקודקודים ב- G הוא תת-קבוצה של קודקודים $C\subseteq V$ כך שלכל צלע $u,\mathsf{v}\in S$ מתקיים $u\in C$ או $\mathsf{v}\in C$.

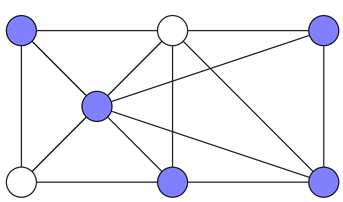
כיסוי בקדקודים בגודל $k=2$:



כיסוי בקדקודים בגודל $k=5$:



כיסוי בקדקודים בגודל $k=5$:



הגדרה 41: בעיית VC

<u>קלט</u>: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר k.

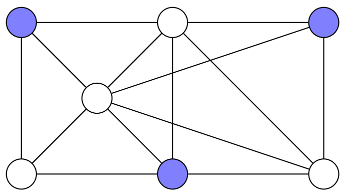
<u>פלט</u>: האם קיים כיסוי בקודקודים ב- G בגודל k?

$$VC=\left\{\langle G,k\rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל כיסוי בקודקודים בגודל } k \text{ } G\right\}$$

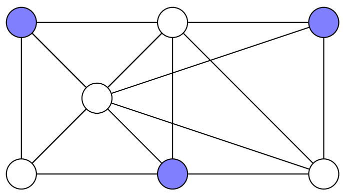
הגדרה 42: קבוצה בלתי תלויה

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$, קבוצה בלתי תלויה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $S\subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u,\mathsf{v}\in S$ מתקיים $(u,\mathsf{v})\notin E$.

קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k=3$:



קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k=3$:



הגדרה 43: בעיית IS

<u>קלט</u>: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר k.

<u>פלט</u>: האם קיימת קבוצה בלתי תלויה ב- G בגודל k?

$$IS=\left\{\langle G,k\rangle \ \middle|\ \text{גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \ G\right\}$$

הגדרה 44: בעיית $PARTITION$

<u>קלט</u>: קבוצת מספרים שלמים $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$.

<u>פלט</u>: האם קיימת תת-קבוצה $Y\subseteq S$ כך ש- $\sum\limits_{y\in S\setminus Y} y=\sum\limits_{y\in Y} y$?

$$PARTITION=\left\{S \ \middle|\ \text{קבוצת שלמים, וקיימת תת-קבוצה } Y\subseteq S \text{ כך ש- } \sum_{y\in S\setminus Y} y=\sum_{y\in Y} y \ \ S\right\}$$

הגדרה 45: בעיית $SubSetSum$

<u>קלט</u>: קבוצת מספרים $S=\{x_1,x_2,\quad\ldots\quad x_n\}$ ומספר t.

<u>פלט</u>: האם קיימת תת-קבוצה של S שסכום איבריה שווה t?

$$SubSetSum=\left\{\langle S,t\rangle \ \middle|\ \text{קיימת } S\supseteq Y \text{ כך ש- } \sum_{x\in Y} x=t\right\}$$

משפט 17:

$PATH = \{\langle G,s,t\rangle \mid$ גרף מכוון המכיל מסלול מ- s ל- t $G\}$	$\in P$
$RELPRIME = \{\langle x,y\rangle \mid \mathsf{gcd}(x,y)=1\}$	$\in P$
$SAT = \{\langle \phi\rangle \mid$ ϕ היא נוסחת CNF ספיקה $\}$	$\in NP, \in NPC$
$3SAT = \{\langle \phi\rangle \mid$ ϕ היא נוסחת $3CNF$ ספיקה $\}$	$\in NP, \in NPC$
$IS = \{\langle G,k\rangle \mid$ G גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל $k\}$	$\in NP, \in NPC$
$CLIQUE = \{\langle G,k\rangle \mid$ G גרף לא מכוון המכיל קליקה בגודל $k\}$	$\in NP, \in NPC$
$VC = \{\langle G,k\rangle \mid$ G גרף לא מכוון המכיל כיסוי בקודקודים בגודל $k\}$	$\in NP, \in NPC$
$HAMPATH = \{\langle G,s,t\rangle \mid$ G גרף מכוון המכיל מסלול המילטוני מ- s ל- $t\}$	$\in NP, \in NPC$
$HAMCYCLE = \{\langle G\rangle \mid$ G גרף מכוון המכיל מעגל המילטוני $\}$	$\in NP$
$SubSetSum = \left\{\langle S,t\rangle \mid \right.$ קיימת $Y \subseteq S$ כך ש- $\left.\sum_{x\in Y} x = t\right\}$	$\in NP$
$\overline{HAMPATH}$	$\in CoNP$
$\overline{CLIQUE}$	$\in CoNP$

משפט 18: בעיות פתוחות בתורת הסיבוכיות

- האם $P = NP$?
- האם $CoNP = NP$?
- האם $CoNP \cap NP = P$?

10 רדוקציות זמן פולינומיאליות

משפט 19: רדוקציות פולינומיאליות

$$\begin{aligned}
SAT &\leqslant_P 3SAT\\
3SAT &\leqslant_P CLIQUE\\
CLIQUE &\leqslant_P IS\\
IS &\leqslant_P VC\\
SubSetSum &\leqslant_P PARTITION\\
HAMPATH &\leqslant_P HAMCYCLE
\end{aligned}$$