המחלקה למדעי המחשב

תשפ"ג $29/11/23 12:00 - 26/11/23 12:00$

אלגברה 2

מועד ב'

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר, ד'ר שי סרוסי.

תשפ"ג סמסטר ק'

השאלון מכיל 12 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

אחר / הערות

- יש לפתור את כל השאלות.
- המשקל של כל שאלה מפורט להלן:
  - שאלה 1: 30 נקודות.
  - שאלה 2: 20 נקודות.
  - שאלה 3: 20 נקודות.
  - שאלה 4: 30 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבירו היטב את מהלך הפתרון. תשובה ללא הסבר (גם נכונה) לא תתקבל.
- אסור לחלוטין לקבל עזרה מסטודנט אחר או מאף אחד.
- עליכם להעלות את הפתרונות שלכם דרך אתר המודל של הקורס אלגברה 2 למדמ"ח לא יאוחר משעה $12:00$ ביום ד' $23-11-29$. פתרונות שהוגשו אחרי המועד הזה לא יתקבלו.
- מותר להשתמש בחומר של הקורס, התרגילים של הקורס והספרים של הקורס בלבד, אבל אסור להשתמש בשום מקורות אחרים.
- אחרי הגשת פתרונות אתם תקבלו הזמנה למבחן קצר בעל פה על הפתרונות שלכם. ייתכן שלא תעבור את המבחן או יורידו נקודות במקרה שאתם לא יכולים להסביר הפתרונות שלכם היטב.
- **סטודנט יהיה זכאי להגיש ערעור / בקשות שונות לגבי הבוחן במשך 5 ימים בלבד מיום קבלת הציון.**

==

<u>שאלה 1</u> תהי $T:\mathbb{C}^{2\times 2}\to\mathbb{C}^{2\times 2}$ האופרטור $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a-6ib & 6ia+5b \\ c & 2d \end{pmatrix}$.

א) מצאו בסיס של וקטורים של $\mathbb{C}^{2\times 2}$ המורכב מווקטורים עצמיים של T.

ב) חשבו את $T\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

ג) הוכיחו כי $T^4\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14642-7320i & 7321-14640i \\ 3 & 112 \end{pmatrix}$.

<u>שאלה 2</u> תהי $A\in\mathbb{R}^{5\times 5}$.

א) הוכיחו כי אם סכום של האיברים בכל שורה שווה ל- 5 אז $\lambda=5$ ערך עצמי של A.

ב) נניח כי $B=\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$. הוכיחו כי $\lambda=0$ ערך עצמי של B.

ג) הוכיחו כי

$$B^4\cdot(B-5I)=0\ .$$

ד) הוכיחו כי לא קיים ערך עצמי של B חוץ מ- $\lambda=0$ ו- $\lambda=5$.

<u>שאלה 3</u> תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נניח כי $u\in\mathbb{F}^n$ ווקטור עצמי של A וגם ווקטור עצמי של B. הוכיחו כי $\det(AB-BA)=0$.

<u>שאלה 4</u> תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ שמקיימות

$$AB-BA=2B\ .$$

נניח כי λ ערך עצמי של A עם רכיב הממשי הגדול ביותר. יהי u הווקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ. הוכיחו כי $Bu=0$.

פתרונות

שאלה 1

א) המטריצה המייצגת של האופרטור לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{C}^{2\times 2}$ $E=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$:

$$[T]_E=\begin{pmatrix}5&-6i&0&0\\6i&5&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\ .$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=11$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=2$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=-1$ מריבוי אלגברי 1.

$\lambda=1$ מריבוי אלגברי 1.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 11</u>

$$V_{11}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-i\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\ .$$

וקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי 11:

$$u_{11}=\begin{pmatrix}-i&1\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 2</u>

$$V_{2}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\ .$$

וקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי 2:

$$u_{2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\ .$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי -1

$$V_{-1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} .$$

וקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי -1:

$$u_{-1} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 1

$$V_{1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} .$$

וקטור עצמי של T ששייך לערך עצמי 1:

$$u_{1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

ב) נסמן הווקטור $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ לפי הבסיס הסטנדרטי ב-ס $a = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

נשים לב כי המטריצה המייצגת $[T]_E$ ממשית וסימטרית, ולכן $[T]_E$ נורמלית.
לפיכך לפי המשפט הפירוק הספקטרלי,

$$[T]^4 a = 11^4 P_{V_{11}}(a) + 2^4 P_{V_2}(a) + (-1)^4 P_{V_{-1}}(a) + 1^4 P_{V_1}(a)$$

$$P_{V_{11}}(a) = \frac{1}{\|u_{11}\|^2} \langle a, u_{11} \rangle u_{11} = \frac{-2i+1}{2} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{i}{2} \\ -i + \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$P_{V_2}(a) = \frac{1}{\|u_2\|^2}\langle a, u_2\rangle u_2 = \frac{7}{1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} .$$

$$P_{V_{-1}}(a) = \frac{1}{\|u_{-1}\|^2}\langle a, u_{-1}\rangle u_{-1} = \frac{2i+1}{2}\begin{pmatrix}i\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+\frac{i}{2}\\ i+\frac{1}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} .$$

$$P_{V_1}(a) = \frac{1}{\|u_1\|^2}\langle a, u_1\rangle u_1 = \frac{3}{1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} .$$

$$[T]^4 a = 11^4 \cdot \begin{pmatrix}-1-\frac{i}{2}\\ -i+\frac{1}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + 2^4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1+\frac{i}{2}\\ i+\frac{1}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14642-7320i\\ 7321-14640i\\ 3\\ 112\end{pmatrix}$$

לפיכך:

$$T^4\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14642-7320i & 7321-14640i\\ 3 & 112\end{pmatrix} .$$

שאלה 2

א) נגדיר $u = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ ונסמן $A = \begin{pmatrix}A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5}\\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} & A_{2,5}\\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} & A_{3,5}\\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} & A_{4,5}\\ A_{5,1} & A_{5,2} & A_{5,3} & A_{5,4} & A_{5,5}\end{pmatrix}$.

$$A \cdot u = \begin{pmatrix}A_{1,1}+A_{1,2}+A_{1,3}+A_{1,4}+A_{1,5}\\ A_{2,1}+A_{2,2}+A_{2,3}+A_{2,4}+A_{2,5}\\ A_{3,1}+A_{3,2}+A_{3,3}+A_{3,4}+A_{3,5}\\ A_{4,1}+A_{4,2}+A_{4,3}+A_{4,4}+A_{4,5}\\ A_{5,1}+A_{5,2}+A_{5,3}+A_{5,4}+A_{5,5}\end{pmatrix} .$$

אם סכום של האיברים בכל שורה שווה ל- 5 אז

$A_{1,1}+A_{1,2}+A_{1,3}+A_{1,4}+A_{1,5} = 5$,

$A_{2,1}+A_{2,2}+A_{2,3}+A_{2,4}+A_{2,5}=5$
וכן הלה, ונקבל

$$A\cdot u=\begin{pmatrix}5\\5\\5\\5\\5\end{pmatrix}=5\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=5u\ ,$$

ז"א 5 ערך עצמי של A ששייך לווקטור עצמי $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

ב) במטריצה B יש שורות זהות (ועמודות זהות) לכן $|B|=0$ לכן B לא הפיכה לכן ל- B יש ערך עצמי ששווה ל- 0.

ג) נחשב את הפולינום האופייני של B:

$$B^2=\begin{pmatrix}5&5&5&5&5\\5&5&5&5&5\\5&5&5&5&5\\5&5&5&5&5\\5&5&5&5&5\end{pmatrix}=5B\ .$$

$$B^3=B\cdot B^2=B\cdot 5B=5B^2=25B$$

$$B^4=B\cdot B^3=B\cdot 25B=25B^2=125B\ .$$

$$B^5=B\cdot B^4=B\cdot 125B=125B^2=625B\ .$$

$$B^5-5B^4=0\ .$$

ד) מסעיף הקודם B מאפסת את הפולינום $f(x)=x^5-5x^4=x^5(x-5)=0$.
הפולינום המינימלי מחלק כל פולינום שמתאפס ע"י B.
נניח שלפולינום המינימלי יש שורשים מלבד מ- 5 ו- 0.
אז הפולינום המינימלי לא מחלק את $f(x)$.
סתירה.

שאלה 3 $Au=\alpha u$ ו- $Bu=\beta u$ כאשר $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ סקלרים.

$$(AB-BA)u=ABu-BAu=\beta Au-\alpha Bu=(\alpha\beta-\beta\alpha)u=0$$

כלומר $(AB-BA)u=0$.
u ווקטור עצמי לכן $u\neq 0$ לכן $|AB-BA|=0$.

שאלה 4

$$ABu-BAu=2Bu \qquad \Rightarrow \qquad ABu-\lambda Bu=2Bu \qquad \Rightarrow \qquad ABu=(\lambda+2)Bu\ .$$

נגדיר $w=Bu$. נניח כי $w\neq 0$. אז

$$Aw=(\lambda+2)w\ .$$

ז"א $\lambda+2$ ערך עצמי של A ששייך לווקטור עצמי w.
$\mathrm{Re}(\lambda+2)>\mathrm{Re}\lambda$. סתירה. לכן $w=Bu=0$.