המחלקה למדעי המחשב

06/07/2025
09 : 00 – 12 : 00

חדו"א 2 למדמ"ח

מועד א'

ד"ר מרינה ברשדסקי   ד"ר ירמיהו מילר   ד"ר זהבה צבי

תשפ"ה סמסטר ב'

בהצלחה!

השאלון מכיל 6 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

סדר התשובות הינו חשוב. הסבירו היטב את מהלך הפתרון.

תשובה ללא הסבר (גם נכונה) לא תתקבל.

חומר עזר:

- מחשבון (ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן).
- דפי הנוסחאות המצורפים לשאלון המבחן.

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- שאלות 1,2,3 - יש לענות על כל השאלות.
- שאלות 4,5,6 - יש לענות שתי שאלות בלבד מתוך שלוש.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה אחת בלבד מתוך שתיים.

שאלות $3-1$ חובה

שאלה 1 (24 נקודות)

נתונה הפונקציה $z(x,y)=xye^{-(x+y)}$.

א) (12 נק') מצאו אקסטרמומים לוקליים של פונקציה זו ובררו את סוגן.

ב) (12 נק') בתחום החסום ע"י משולש עם קודקודים $A(1,-1),\ \ B(1,0),\ \ C(0,0)$ מצאו את הערך הגודל ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה הנתונה.

שאלה 2 (18 נקודות)

א) (9 נק') שרטטו את תחום האינטגרציה, שנו את סדר האינטגרציה באינטגרל $\int_{-3}^{3} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} dy\ e^{(x^2+y^2)}$.

ב) (9 נק') חשבו בעזרת אינטגרל כפול את נפח הגוף החסום ע"י המשטחים: חשבו את הנפח הגוף המוגבל על ידי המשטחים הנתונים וציירו את הגוף במערכת שיעורים מרחבית xyz וצייר בנפרד גם את היטלו של הגוף על המישור xy.

$$z=0,\ \ x^2+y^2=1,\ \ z-x=0\ .$$

שאלה 3 (18 נקודות)

הראו שסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול סופי ומצא את הגבול

$$a_1=5,\ \ a_{n+1}=\frac{a_n}{\ln\ a_n},\ \ n\geq 1\ .$$

רמז: ראשית בדקו תחומי עליה וירידה, ונקודות קיצון לפונקציה תואמת $y=\frac{x}{\ln\ x}$.

תענו על 2 מתוך 3 השאלות $6-4$

שאלה 4 (12 נקודות)

א) (6 נק') מצאו את המרחק בין הישרים:

$$l_1:\ \ \begin{cases} 2x-y+z &= 1 \\ x+y-z &= 2 \end{cases} \qquad\qquad l_2:\ \ \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{2}\ .$$

האם הישרים האלה הם נחתכים, מצטלבים, מקבילים או מתלכדים?

ב) (6 נק') הוכיחו או הפריכו שסדרה $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\ \ \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות.

שאלה 5 **(12 נקודות)** תהיינה $f(x,y,z) = xz - \frac{y}{z} - z + 2$ ו- $P(1,0,-1)$.

א) **(6 נק')** רשמו את משוואת המישור המשיק למשטח הרמה של הפונקציה $f(x,y,z)$ אשר עובר דרך הנקודה P.

ב) **(6 נק')** תנו דוגמה של וקטור $\vec{a}$ כך שיתקיים:

$$\frac{df(P)}{d\vec{a}} = 0 \ .$$

נמקו את התשובה.

שאלה 6 **(12 נקודות)**

א) **(6 נק')** חשבו את הגבול

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{xy + (x+y)^2}$$

או הוכיחו שהוא אינו קיים.

ב) **(6 נק')** הוכיחו שטור הפונקציות

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sin x}\right)^n$$

מתבדר לכל x ממשי.

שאלה 7 **(16 נקודות)** יהי

$$M(t) = A + t\vec{a}$$

ישר במרחב x,y,z כאשר A נקודה על הישר ו- $\vec{a}$ הווקטור הכיוון של הישר. תהי $B(x_0,y_0,z_0)$ נקודה כלשהי שלא נמצאת על הישר. הוכיחו כי המרחק של הנקודה מהישר $M(t)$ נתון על ידי הנוסחה

$$d = \frac{\left|\vec{AB} \times \vec{a}\right|}{|\vec{a}|}$$

שאלה 8 **(16 נקודות)** הוכח ש-

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

פתרונות

שאלה 1

א) (12 נק')
לפי התנאי הכרחי לנקודות קיצון

$$\begin{cases} f_x = ye^{-(x+y)} - xye^{-(x+y)} = 0, \ \rightarrow \ y(1-x) = 0 \\ f_y = xe^{-(x+y)} - xye^{-(x+y)} = 0, \ \rightarrow \ x(1-y) = 0 \end{cases}$$

נקבל את נקודות קריטיות $(1,1)$,$(0,0)$. נחשב את הנגזרות מסדר השני :

$$f''_{xx} = (xy-2y)e^{-(x+y)}$$

$$f''_{yy} = (xy-2x)e^{-(x+y)}$$

$$f''_{xy} = (xy-x-y+1)e^{-(x+y)}$$

עבור הנקודת קריטית $P_1(0,0)$:

$$f''_{xx}(0,0) = 0 \ , \qquad f''_{yy}(0,0) = 0 \ , \qquad f''_{xy}(0,0) = 1, \qquad \Delta(0,0) = -1 < 0 \ .$$

לכן הנקודה $P_1(0,0)$ היא נקודת אוכף.
עבור הנקודת קריטית $P_2(1,1)$:

$$f_{xx}(1,1) = -1 < 0, \qquad \Delta(1,1) = 1 - 0 = 1 > 0 \ .$$

לכן הנקודה $P_2(1,1)$ היא נקודת מקסימום. $\max f = f(1,1) = e^{-2}$.

ב) (12 נק')
ראשית נבנה את המשוואות הישרים העוברים דרך כל זוג של נקודות A, B, C.

AB	$x = 1$
AC	$y = -x$
BC	$y = 0$

נציב כל אחד מהם לפונקציה נתונה: $z(x,y) = xye^{-(x+y)}$.

<u>על השפה AB</u>

$$z(1,y) = ye^{-(1+y)}$$

$$z'_y(1,y) = e^{-(1+y)} - ye^{-(1+y)} = e^{-(1+y)}(1-y) = 0, \ \rightarrow \ y = 0, \ x = 1$$

לכן קיבלנו את הנקודה $(1,0)$, אשר היא הנקודה B.

על השפה AC

$$z(x,-x) = -x^2 e^{-(x-x)} = -x^2$$
$$z'_x(x,-x) = -2x = 0, \ \rightarrow \ x = 0, \ y = -x = 0$$

לכן קיבלנו את הנקודה $(0,0)$, אשר היא הנקודה C.

על השפה BC

$$z(x,0) = -x \cdot 0 \cdot e^{-(x+0)} = 0$$

זוהי פונקציה קבועה עבורה קיימת נקודת קיצון.

נקודה	ערך של הפונקציה
$P_1(0,0)$	0
$P_2(1,1)$	$\frac{1}{e^2}$
$A(1,-1)$	-1
$B(1,0)$	0
$C(0,0)$	0

מכאן:

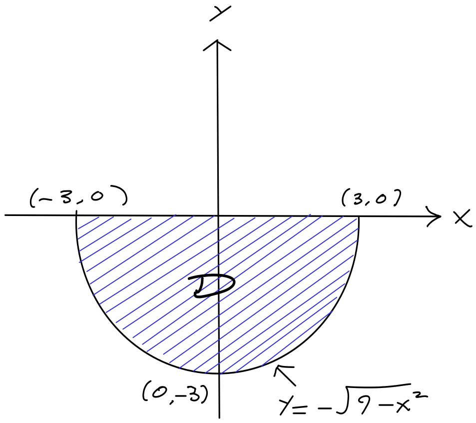
$$\max_D z(x,y) = \frac{1}{e^2} \ , \qquad \operatorname*{argmax}_D z(x,y) = P_2(1,1) \ .$$

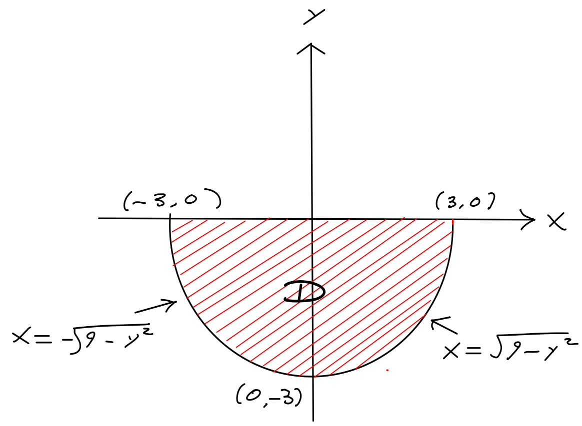
$$\min_D z(x,y) = -1 \ , \qquad \operatorname*{argmax}_D z(x,y) = A(1,-1) \ .$$

שאלה 2 (18 נקודות)

א) (9 נק')

שרטוט של התחום





התחום של האינטגרל הנתון הוא

$$D=\{(x,y)\ \big|\ -\sqrt{9-x^2}\le y\le 0\ ,\ -3\le x\le 3\}\ .$$

אם נהפוך את הסדר של האינטגרלים (כלומר האינטגרל של מעל x ראשון והאינטגרל מעל y שני) נצטרך לרשום את התחום בצורה הבאה:

$$D=\{(x,y)\ \big|\ -\sqrt{9-y^2}\le x\le \sqrt{9-y^2}\ ,\ -3\le y\le 0\}\ .$$

<u>שינוי סדר של האינטגרל:</u>

$$\int\limits_{-3}^{3}dx\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0}dy\ e^{(x^2+y^2)}=\int\limits_{-3}^{0}dy\int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}dx\ e^{(x^2+y^2)}$$

<u>חישוב של האינטגרל:</u>

$$\begin{aligned}\int\limits_{-3}^{3}dx\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0}dy\ e^{(x^2+y^2)}&=\int_{\pi}^{2\pi}d\theta\int_0^3 e^{r^2}\,r\,dr\\&=\int_{\pi}^{2\pi}d\theta\int_{r=0}^{r=3}e^t\frac{t'}{2}\,dr\\&=\int_{\pi}^{2\pi}d\theta\int_{t=0}^{t=9}e^t\,dt\\&=\int_{\pi}^{2\pi}d\theta\left[e^t\right]_0^9\\&=\pi\left(e^9-1\right)\ .\end{aligned}$$

ב) (9 נק')

$$V = \iint_D x\,dx\,dy$$

במונחי משתנים (r,θ) התחום D הוא (r,θ):

$$D = \left\{-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\ ,\ 0 \le r \le 1\right\}$$

במונחי משתנים (r,θ) האינטגרל הכפול הוא

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 dr\, r\cdot r\cos\theta &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\ \cos\theta \int_0^1 dr\, r^2 \\ &= [\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}\ .\end{aligned}$$

לכן $V = \frac{2}{3}$.

שאלה 3 (18 נקודות)

שלב 1) ראשית, לפי הרמז נחפש נקודות קיצון של הפונקציה התואמת $f(x) = \frac{x}{\ln x}$:

$$f'(x) = \frac{\ln\ x - 1}{\ln^2\ x} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = e\ .$$

התחום ההגדרה של $f(x)$ הוא $x > 0$. לאור זה התחומי עליה וירידה של $f(x)$ הינם כמפורט בטבלה:

x	$0 < x < e$	$x > e$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

ז"א לכל $x > e$ הפונקתיה עולה מונוטונית.

בנוסף ל- $f(x)$ יש נקודת מינימום ב- $x = e$ ובנקודה זו $f(e) = e$. לכן הנקודה (e,e) היא נקודת מינימום.

לאור זה נוכיח כי הסדרה היא עולה מונוטונית וחסומה מלמטה על ידי החסם התחתון $a_n \ge e$ לכל $n \ge 1$.

שלב 2) נמצא גבול של סדרה. נניח שגבול של סדרה קיים ושווה ל- L עבור $n \to \infty$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\ln\ a_n}$$

$$L = \frac{L}{\ln\ L}$$

$$L \ln\ L - L = 0$$

$$L(\ln\ L - 1) = 0$$

$$L_1 = 0,\ \ L_2 = e$$

ידוע ש $a_n > 0$.

משפט 1 אם יש גבול לסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אז הוא יחיד.

לפי יחידות של גבול רק אחד מהם ערך נכון שהוא $L = e$

שלב 3) נוכיח שסדרה חסומה ע"י e לפי אינדוקציה.

$$n = 1:\ \ a_1 = 5 > e$$

נניח

$$n = k,\ \ a_k > e$$

ונוכיח

$$n = k+1:\ \ a_{k+1} > e$$

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{\ln\ a_k}$$

לפי בדיקה קודם ראינו שפונקציה תואמת עולה וחסומה על"י e בתכום הגדרה $x \in (e, \infty)$. לכן גם

$$a_{k+1} = y(a_k) = \frac{a_k}{\ln\ a_k} > e$$

נעשה כאן שימוש בהנחת האינדוקציה. קיבלנו כלומר, חסם ,תחתון.

שלב 4) לפי מה שמצאנו ב- 0, סדרה עולה. .נוכיח מונוטוניות

$$a_n > e$$

$$\ln\ a_n > \ln\ e$$

$$\ln\ a_n > 1$$

$$\frac{1}{\ln\ a_n} < 1$$

עכשיו נבדוק:

$$a_{n+1} > a_n$$

או

$$a_{n+1} < a_n$$

כלומר,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

או

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_n \ln\ a_n} = \frac{1}{\ln\ a_n} < 1$$

סדרה מונוטונית יורדת.

משפט 2 לכל סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית וחסומה, יש גבול לכל n

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

ומתקיים $L \le M$ או $L \ge m$.
לפי משפט מתכנסת. לכן גבול

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e$$

שאלה 4 (12 נקודות)

א) (6 נק') הוקטור הכיוון של הישר l_1 הוא

$$\vec{a} = (2,-1,1) \times (1,1,-1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k} = (0,3,3) = 3(0,1,1)$$

הוקטור הכיוון של הישר l_2 הוא

$$\vec{b} = (1,2,2)\ .$$

נמצא נקודה על הישר l_1 על ידי להציב $z = 0$ ולפתור את המערכת:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad 2x - (2-x) = 1 \quad \Rightarrow \quad 3x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1\ .$$

לכן נקודה על הישר l_1 היא $M(1,1,0)$.

נקודה על הישר l_2 יהא $N(1,-1,-2)$.

כעת נציב את $\vec{a}$, $\vec{b}$,M ו- N בהנוסחה למרחק בין שני ישרים: $d=\dfrac{\vec{MN}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$ ראשית נחשב את $\vec{a}\times\vec{b}$:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=0\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}=(0,1,-1)\ .$$

הוקטור $\vec{MN}$ הוא $\vec{MN}=(0,-2,-2)$. לכן

$$d=\frac{(0,-2,-2)\cdot(0,1,-1)}{|(0,1,-1)|}=\frac{0}{\sqrt{2}}=0\ .$$

ז"א הישרים נחתכים.

ב) (6 נק') הטענה לא נכונה.

שאלה 5 **(12 נקודות)**

א) (6 נק') נתון משטח רמה $f(x,y,z)=C$ משוואת המישור המשיק למשטח בנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ נתונה על ידי הנוסחה

$$f'_x(P)(x-x_0)+f'_y(P)(y-y_0)+f'_z(P)(z-z_0)\ .$$

הרי

$$\begin{aligned} f'_x &= z && \Rightarrow \quad f'_x(P)=-1\ ,\\ f'_y &= \frac{-1}{z} && \Rightarrow \quad f'_y(P)=1\ ,\\ f'_z &= x+\frac{y}{z^2}-1 && \Rightarrow \quad f'_z(P)=0\ . \end{aligned}$$

מכאן המשוואת המישור המשיק למשטח בנקודה P היא

$$-(x-1)+y=0 \quad\Rightarrow\quad -x+y+1=0\ .$$

ב) (6 נק') הגראדיאנט הוא $\nabla f(P)=\big(f'_x(P),f'_y(P),f'_z(P)\big)=(-1,1,0)$. מכאן:

$$\frac{df(P)}{d\vec{a}}=\frac{\nabla f(P)\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{(-1,1,0)\cdot(a_x,a_y,a_z)}{|\vec{a}|}=\frac{-a_x+a_y}{|\vec{a}|}$$

לכן כל וקטור מהצורה $\vec{a}=(a_x,a_x,a_z)$ כך ש- $|\vec{a}|\neq 0$ מקיים את התנאי $\dfrac{df(P)}{d\vec{a}}=0$. לדוגמה: $\vec{a}=(1,1,2)$.

שאלה 6 (12 נקודות)

א) (6 נק') אם הערך של הגבול תלוי על הכיוון שעליו אנחנו מחשבים את הגבול אז הגבול לא קיים. אנחנו נחשב את הגבול על הישר $y = 2x$ ואחר כך על הישר $y = 3x$ ואז נשווה בין התשובות.

ראשית נחשב את הגבול על הישר $y = 2x$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{xy + (x+y)^2} \overset{y=2x}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-3x^2}{2x^2 + (3x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x^2}{11x^2} = \frac{-3}{11} \ .$$

כעת נחשב את הגבול על הישר $y = 3x$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{xy + (x+y)^2} \overset{y=3x}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-8x^2}{3x^2 + (4x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-8x^2}{19x^2} = \frac{-8}{19} \ .$$

ז"א עבור שני כיוונים שונים קיבלנו שתי תשובות שונות לאותו גבול ולכן הגבול לא קיים.

ב) (6 נק') ניתן לרשום את הטור בשאלה $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sin x}\right)^n$ בצורת טור הנדסי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ כאשר לכל x ממשי, האיבר ההתחלתי הוא $a = \frac{1}{\sin x}$ והמנת הטור הוא $q = \frac{1}{\sin x}$. טור הנדסי מתכנס אם $|q| < 1$ ומתבדר אם $|q| \geq 1$. בדוגמה זו: $|q| = \frac{1}{|\sin x|}$. הפונקציה $\sin x$ היא פונקציה חסומה בין -1 ו- 1. כלומר:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq |\sin x| \leq 1 \ .$$

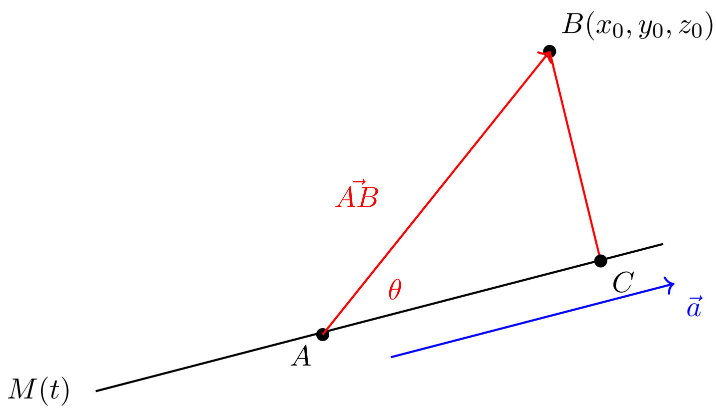
מכאן

$$\frac{1}{|\sin x|} \geq 1 \ .$$

לכן לכל x ממשי, המנת הטור $|q| \geq 1$ ולכן לא קיים x ממשי עבורו הטור מתכנס, ולפיכך הטור מתבדר לכל x ממשי.

שאלה 7 (16 נקודות)

נסמן את הישר העובר דרך הנקודה A ומקביל לווקטור $\vec{a}$ ב- $M(t)$. תהי C נקודה על הישר כך שהישר BC הוא מאונך לישר $M(t)$ כמתואר בתרשים למטה. אזי הנקודה C היא הנקודה על הישר $M(t)$ הקרובה ביותר לנקודה B. המרחק של B מהישר $M(t)$ מוגדר להיות המרחק מהנקודה B לנקודה על הישר $M(t)$ הקרובה ביותר לנקודה B, דהיינו הנקודה C. ז"א המרחק הוא המרחק BC.



מכיוון שהשלוש נקודות ABC יוצרות משולש זווית ישירה, אז מתקיים:

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad |BC| = |AB|\sin\theta\ . \tag{*}$$

אם $\vec{a}$ הוא הווקטור הכיוון של הישר $M(t)$ אז מתקיים:

$$\vec{AB} \times \vec{a} = |AB||a|\sin\theta \tag{\#}$$

אם אנחנו נציב $|AB|\sin\theta = |BC|$ ממשוואה (*) הרי נקבל

$$\vec{AB} \times \vec{a} = |BC||a|$$

ולכן

$$|BC| = \frac{\vec{AB} \times \vec{a}}{|a|}\ .$$

לכן המרחק, $|BC|$ של הנקודה B מהישר הוא

$$d = \frac{\vec{AB} \times \vec{a}}{|a|}\ .$$

שאלה 8 (16 נקודות)

לפי כלל הסנדוויץ נגדיר נחלק הוכח ל-3 מקרים: $a = 1,\ \ a > 1,\ \ a < 1$

מקרה $a = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$$

$a > 1$

$$1 < a < n$$

לא משנה עד כמה a גדולה תמיד יש n גדולה יותר.

$$\sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$$

לפי כלל הסנדוויץ' תרגיל קודם

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

$0 < a < 1$ נסמן $b = \frac{1}{a}$ אזי $1 < b$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b_n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = 1$$