

שעור 3

משחקים בצורה אסטרטגית רחבה ושיווי משקל נאש

3.1 הגדרה של משחק בצורה רחבה אסטרטגית

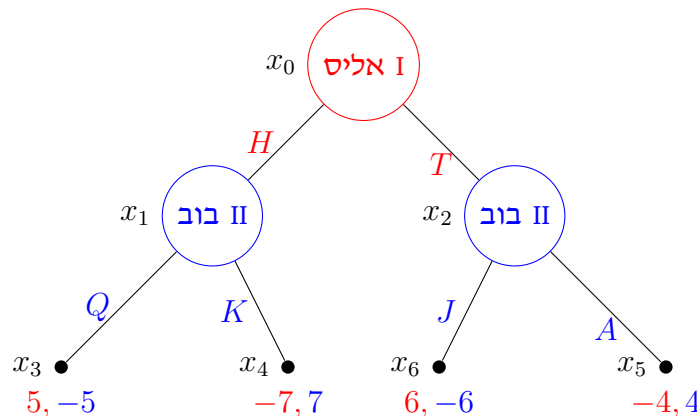
דוגמה 3.1 (התאמת מטבעות אם ידיעה שלמה)

נתבונן על המשחק הבא:

שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
אחר כך, אם אליס בחרה H אז שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).
אחרת אם אליס בחרה T בוב בוחר קלף נסיך (J) או קלף אס (A).

- אם אליס בחרה H ובוב בחר Q אז בוב משלם לאליס ₪5.
- אם אליס בחרה H ובוב בחר K אז אליס משלם לבוב ₪7.
- אם אליס בחרה T ובוב בחר J אז בוב משלם לאליס ₪6.
- אם אליס בחרה T ובוב בחר A אז אליס משלם לבוב ₪4.

ניתן לרשום את עץ המשחק בצורה אסטרטגית:



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H, T .
אומרים כי לשחקן I יש **קבוצה ידיעה אחת**.
לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I = (H, T) .$$

לשחקן II יש שני קדקודים x_1, x_2 בהם הוא מקבל החלטה.
אומרים גם כי לשחקן II יש 2 קבוצות ידיעה, x_1, x_2 אשר מייצגות שתי אפשרויות שונות המנובעות מההחלטה הקודמת של שחקן I בקדקוד x_0 .
כל קבוצת ידיעה מכילה הפעולות הבאות:

$$x_1 : (Q, K) \quad x_2 : (J, A)$$

מכיוון שלשחקן II יש שתי קבוצות ידיעה x_1, x_2 ובכל אחד יש שתי פעולות אפשריות, אז יש לבוב $2 \times 2 = 4$ אסטרטגיות:

$$S_{II} = (Q/J, Q/A, K/J, K/A)$$

(נהוג לרשום את האסטרטגיות מלמעלה עד למטה ומשמאל לימין).
הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

$II \backslash I$	Q/J	Q/A	K/J	K/A
H	5, -5	5, -5	-7, 7	-7, 7
T	6, -6	-4, 4	6, -6	-4, 4

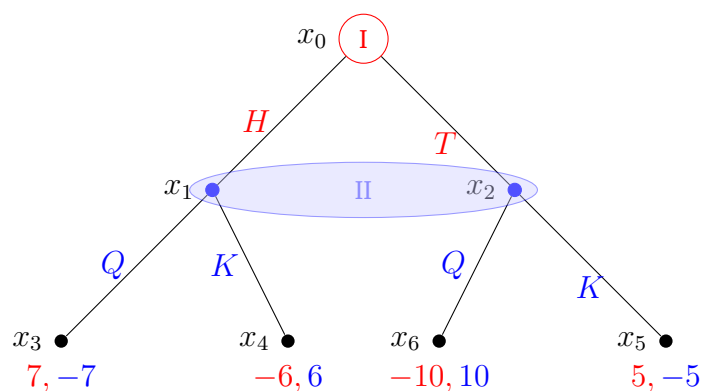
דוגמה 3.2 (התאמת מטבעות אם ידיעה לא שלמה)

בשונה לדוגמה הקודמת נתבונן על המשחק הבא עבורו שחקן II לא יודע את ההחלטה של שחקן I עד סוף המשחק.

שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
אחר כך, בלי ידיעה של הבחירה של אליס, שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).

- אם אליס בחרה H ובוב בחר Q אז בוב משלם לאליס 7.
- אם אליס בחרה H ובוב בחר K אז אליס משלם לבוב 6.
- אם אליס בחרה T ובוב בחר Q אז אליס משלם לבוב 10.
- אם אליס בחרה T ובוב בחר K אז בוב משלם לאליס 5.

ניתן לרשום את עץ המשחק בצורה רחבה אסטרטגית:



לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H, T .
כלומר לאליס יש **קבוצה ידיעה אחת**.
לכן קבוצת האסטרטגיות של שחקן I הינה

$$S_I = (H, T) .$$

בניגוד לדוגמה הקודמת, לבוב (שחקן II) יש רק קבוצת ידיעה אחת שמכילה שני קדקודים.
ז"א בוב לא יודע איזה אופציה אליס בחרה, H או T , אז בוב לא יודע על איזה קדקוד הוא נמצא, x_1 או x_2 .
בגלל שהוא לא יודע מה ההחלטה של אליס, הוא בוחר בין רק שתי אפשרויות, בלי ידיעה של ההחלטה של אליס.

לכן אנחנו מסתכלים אל הקדקודים x_1x_2 **קבוצת ידיעה אחת** שממנה יוצאות רק שתי הפעולות:

$$x_1x_2 : (Q, K) ,$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של בוב הינה

$$S_{II} = (Q , K)$$

נשים לב כי מכל אחד של הקדקודים x_1 ו- x_2 יוצאות אותן קבוצת פעולות. אחרת בוב היה יודע מה ההחלטה של אליס.

II	Q	K
H	7, -7	-6, 6
T	-10, 10	5, -5

דוגמה 3.3 (התאמת מטבעות אם ידיעה שלמה)

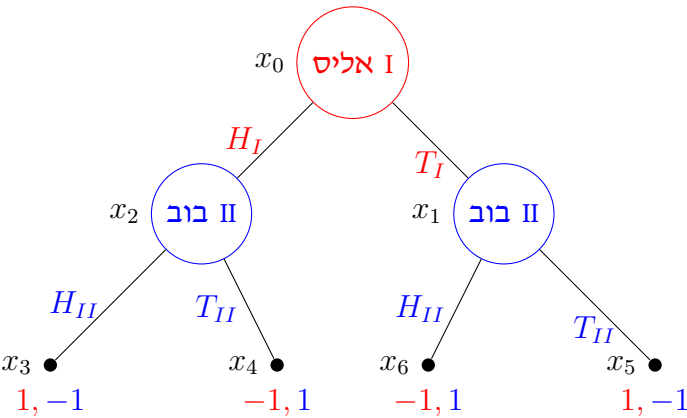
שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
אחר כך שחקן II (בוב) בוחר H או T .

- אם שני השחקנים בוחרים באותו צד, משלם שחקן השני לשחקן הראשון 1.
- אם הם בוחרים בצדדים שונים, משלם שחקן הראשון לשחקן השני 1.

- סעיף א)** רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית רחבה.
- סעיף ב)** רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית בלבד.

פתרון:

סעיף א) נשים לב שזה משחק עם ידיעה שלמה. לכן עץ המשחק הינו



סעיף ב) לשחקן I (אליס) יש קבוצת ידיעה אחת:

$$x_0 : (H_I, T_I) .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של אליס היא

$$S_I = (H_I, T_I) .$$

לשחקן II (בוב) יש שתי קבוצות ידיעה של :

$$x_1 : (H_{II}, T_{II}) , \quad x_2 : (H_{II}, T_{II}) .$$

לכן קבוצת האסטרטגיות של אליס היא

$$S_{II} = (H_{II}/H_{II} , H_{II}/T_{II} , T_{II}/H_{II} , T_{II}/T_{II}) .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

$I \backslash II$	H_{II}/H_{II}	H_{II}/T_{II}	T_{II}/H_{II}	T_{II}/T_{II}
H_I	1, -1	1, -1	-1, 1	-1, 1
T_I	-1, 1	1, -1	-1, 1	1, -1



דוגמה 3.4 (התאמת מטבעות אם ידיעה לא שלמה)

שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי). הוא רושם בחירותו על פתק, חותם עליו ומעביר אותו לשופט. אחר כך שחקן II (בוב) בוחר H או T. רושם בחירותו על פתק, חותם עליו ומעביר אותו לשופט.

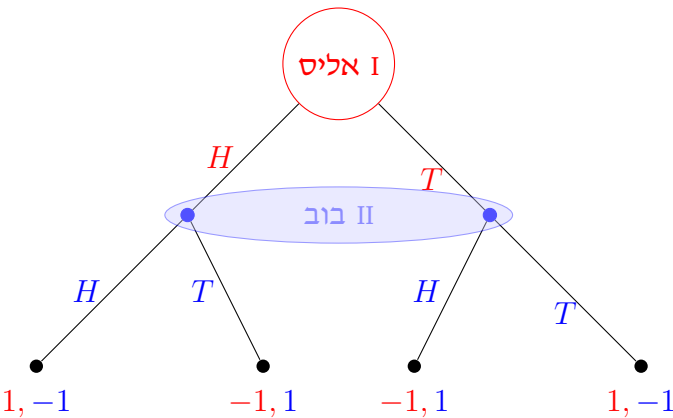
- אם שני השחקנים בוחרים באותו צד, משלם שחקן השני לשחקן הראשון 1.
- אם הם בוחרים בצדדים שונים, משלם שחקן הראשון לשחקן השני 1.

סעיף א) רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית רחבה.

סעיף ב) רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית בלבד.

פתרון:

נשים לב שזה משחק עם ידיעה לא שלמה, בגלל ששחקן II (בוב) לא יודע מה ההחלטה של שחקן I (אליס). לכן עץ המשחק הוא:



קבוצות ידיעה של שחקן I (אליס):

$$x_0 : (H_I, T_I) .$$

קבוצות ידיעה של שחקן II (בוב):

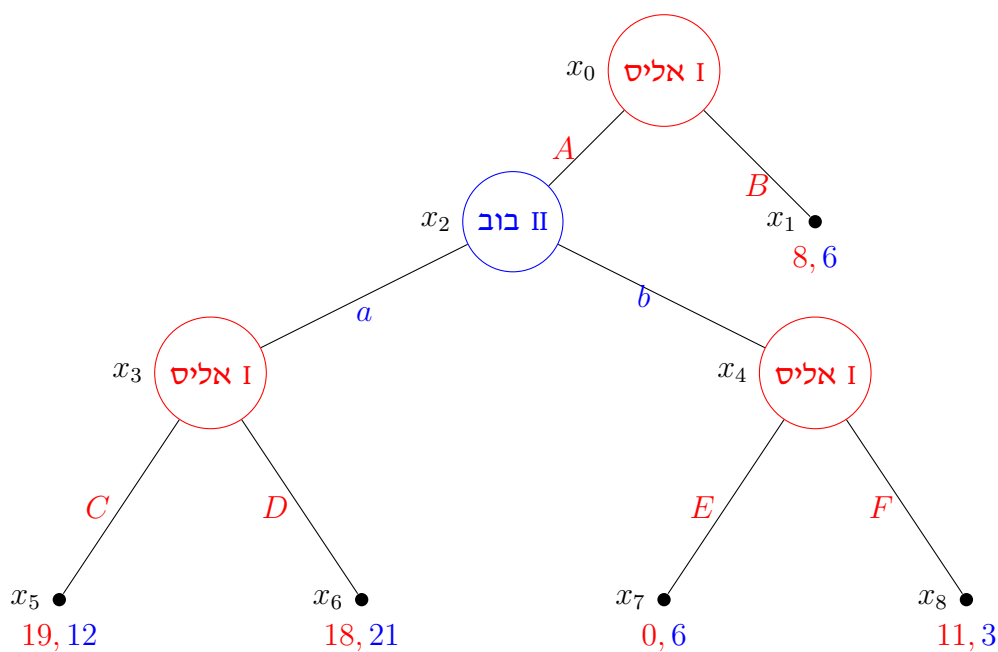
$$x_1 x_2 : (H_{II}, T_{II}) .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

$I \backslash II$	H_{II}	T_{II}
H_I	1, -1	-1, 1
T_I	-1, 1	1, -1

דוגמה 3.5 ()

נתון המשחק הבא בצורה רחבה אסטרטגית. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

במשחק הזה, אליס (שחקן I) פותח עם המהלך הראשון, ואחר כך בוב מבצע המהלך השני, ואז אליס מבצע מהלך שוב.

המשחק הוא משחק עם ידיעה שלמה.

לאליס יש שלוש קבוצות ידיעה:

$$x_0 : (A, B) , \quad x_3 : (C, D) , \quad x_4 : (E, F) .$$

בכל אחד של הקדקודים האלה לאליס יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לה $2 \times 2 \times 2 = 8$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_I = (A/C/E , A/C/F , A/D/E , A/D/F , B/C/E , B/C/F , B/D/E , B/D/F) .$$

לבוב יש קבוצות ידיעה אחת:

$$x_2 : (a, b) .$$

בקבוצת ידיעה הזאת של בוב יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לו 2 קבוצות אסטרטגיות:

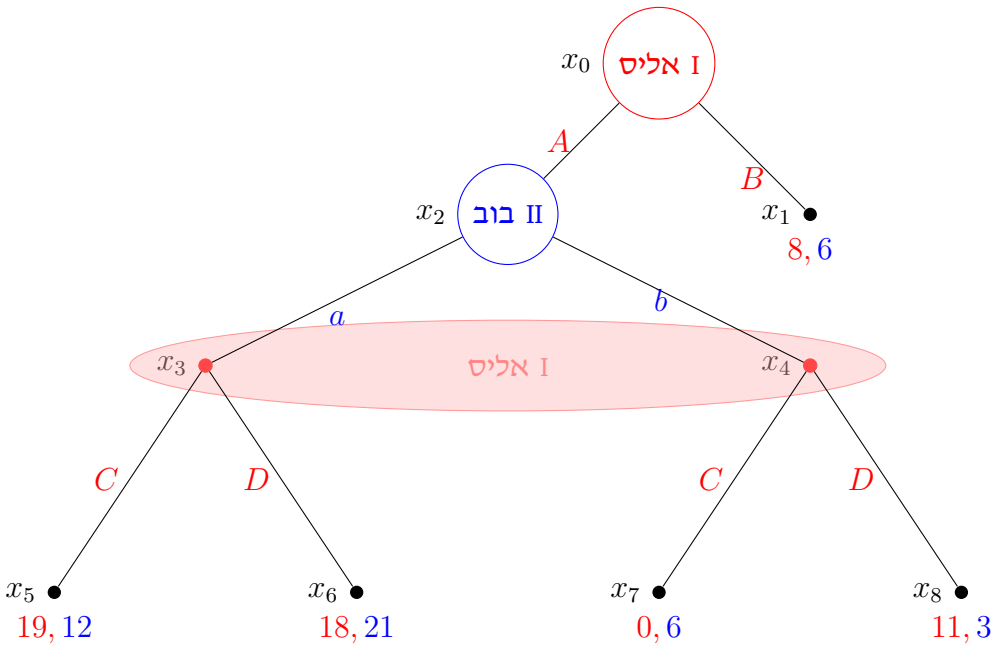
$$S_{II} = (a , b) .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

$I \backslash II$	a	b
$A/C/E$	19, 12	0, 6
$A/C/F$	19, 12	11, 3
$A/D/E$	18, 21	0, 6
$A/D/F$	18, 21	11, 3
$B/C/E$	8, 6	8, 6
$B/C/F$	8, 6	8, 6
$B/D/E$	8, 6	8, 6
$B/D/F$	8, 6	8, 6

דוגמה 3.6 ()

נתון המשחק הבא בצורה רחבה אסטרטגית. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

שימו לב, בהשוואה עם הדוגמה הקודמת, הקדקודים x_3 ו- x_4 באותה קבוצת ידיעה של אליס בגלל שהיא לא יודעת מה החלטה של בוב בקדקוד x_2 , כלומר אליס לא יודעת אם בוב בחר a או b . לכן הפעולות היוצאות מקדקוד x_3 הן אותן פעולות שיוצאות מקדקוד x_4 , בגלל שאם היו פעולות אפשריות שונות היוצאות ב- x_3 ו- x_4 , אז אליס היתה יודעת איזה פעולה בוב בחר, a או b . כלומר אם לאליס יש החלטה בין הפעולות E ו- F אז היא היתה יודעת שהיא נמצאת בקדקוד x_4 בעץ המשחק ובוב בחר b . ולהפך, אם היתה לה בחירה בין הפעולות C ו- D במקום הבחירה בין הפעולות E ו- F אז היא היתה יודעת שהיא נמצאת ב- x_3 ושוב בחר a . לאליס יש שתי קבוצות ידיעה:

$$x_0 : (A, B) , \quad x_3 x_4 : (C, D) .$$

בכל אחד של הקדקודים האלה לאליס יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לה $2 \times 2 = 4$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_I = (A/C , A/D B/C B/D) .$$

לבוב יש קבוצות ידיעה אחת:

$$x_2 : (a, b) .$$

בקבוצת ידיעה הזאת של בוב יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לו 2 קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a, b) .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

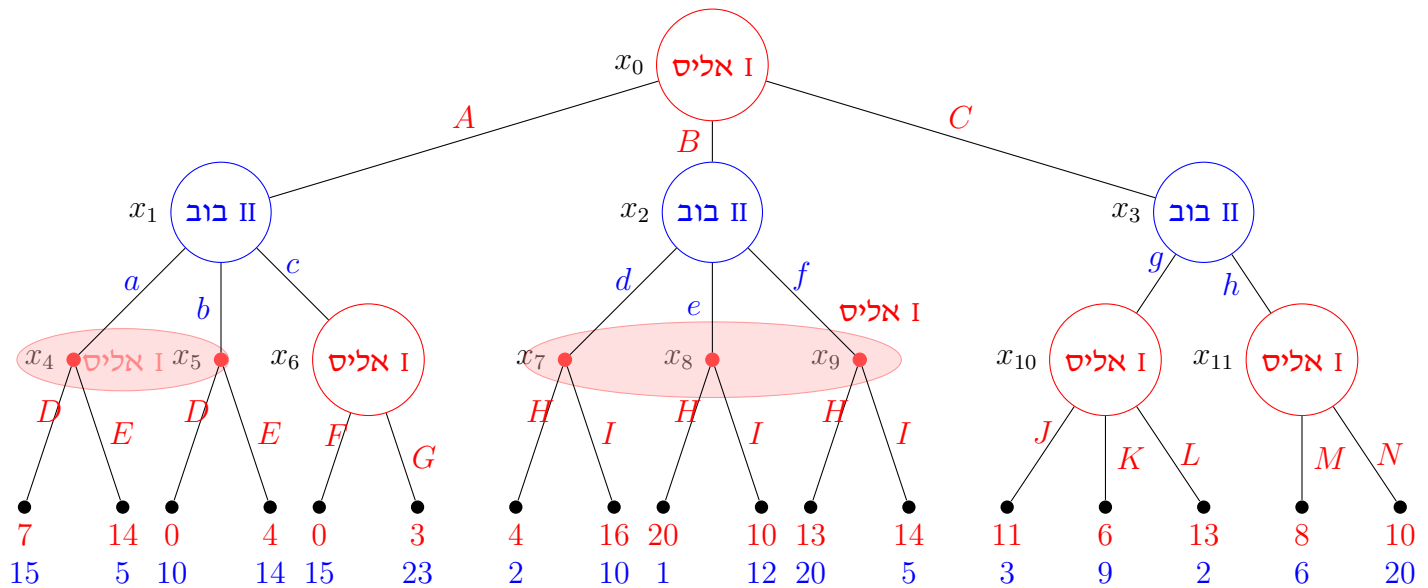
$I \backslash II$	a	b
A/C	19, 12	0, 6
A/D	18, 21	11, 3
B/C	8, 6	8, 6
B/D	8, 6	8, 6

כלל 3.1 פעולות שיוצאות מקבוצת ידיעה ללא ידיעה שלמה

לשחקן יש אותה קבוצה של פעולות אפשריות בכל קדקוד שמוכל אותה קבוצת ידיעה.

דוגמה 3.7 ()

נתון המשחק הבא בצורה רחבה אסטרטגית. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

המשחק הוא משחק עם ידיעה לא שלמה.

לאליס יש 5 קבוצות ידיעה:

$$x_0 : (A, B, C), \quad x_4 x_5 : (D, E), \quad x_6 : (F, G), \quad x_7 x_8 x_9 : (H, I), \quad x_{10} : (J, K, L), \quad x_{11} : (M, N) .$$

לכן יהיו לאליס $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 144$ קבוצות אסטרטגיות.

$$S_I = (A/D/E/F/G/H/J/M, A/D/E/F/G/H/J/N, \dots, C/E/G/I/L/N) .$$

לבוב יש 3 קבוצות ידיעה:

$$x_1 : (a, b, c), \quad x_2 : (d, e, f), \quad x_3 : (g, h).$$

לכן לבוב יהיו: $3 \times 3 \times 2 = 18$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = (a/d/g, a/d/h, \dots, c/f/h).$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד



3.2 שיטת תשובה הטובה ביותר למציאת שיווי משקל נאש

הגדרה 3.1 ווקטור אסטרטגיות

נתון משחק עם N שחקנים.

נניח כי לחקן 1 יש קבוצה של אסטרטגיות אפשריות S_1 ,
 לחקן 2 יש קבוצה של אסטרטגיות אפשריות S_2 ,
 ...
 ולחקן N יש קבוצה של אסטרטגיות אפשריות S_N .

ווקטור אסטרטגיות הוא רשימה של אסטרטגיות

$$(s_1, s_2, \dots, s_N)$$

כאשר $s_1 \in S_1$ אסטרטגיה של שחקן 1, $s_2 \in S_2$ אסטרטגיה של שחקן 2,
 ... ו- $s_N \in S_N$ אסטרטגיה של שחקן N .

הגדרה 3.2 שיווי משקל נאש במשחקים עם שני שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים 1 ו-2. נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, ו- S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2.

קבוצת אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ נקראת **שיווי משקל נאש (שמ"ן)** אם התנאים הבאים מתקיימים:

$$u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*) \quad , \text{ לכל } s_1 \in S_1$$

$$u_{II}(s_1^*, s_2^*) \geq u_{II}(s_1^*, s_2) \quad , \text{ לכל } s_2 \in S_2$$

הגדרה 3.3 שיווי משקל נאש במשחקים עם שלוש שחקנים

נתון משחק עם שלוש שחקנים 1, 2 ו-3. נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2 ו- S_3 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 3.

קבוצת אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, s_2^*, s_3^*)$ נקראת **שיווי משקל נאש**

אם התנאים הבאים מתקיימים:

$$u_1(s_1^*, s_2^*, s_3^*) \geq u_1(s_1, s_2^*, s_3^*) \quad , \quad s_1 \in S_1 \quad \text{לכל}$$

$$u_2(s_1^*, s_2^*, s_3^*) \geq u_2(s_1^*, s_2, s_3^*) \quad , \quad s_2 \in S_2 \quad \text{לכל}$$

$$u_3(s_1^*, s_2^*, s_3^*) \geq u_3(s_1^*, s_2^*, s_3) \quad , \quad s_3 \in S_3 \quad \text{לכל}$$

הגדרה 3.4 תשובה הטובה ביותר במשחקים עם שני שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים 1 ו-2.
נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, ו- S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2.

- אסטרטגיה $t_1 \in S_1$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 1 לוקטור אסטרטגיות (t_1, s_2) אם

$$u_1(t_1, s_2) = \max_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_2) \quad .$$

- אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 2 לוקטור אסטרטגיות (s_1, t_2) אם

$$u_2(s_1, t_2) = \max_{s_2 \in S_2} u_2(s_1, s_2) \quad .$$

הגדרה 3.5 תשובה הטובה ביותר במשחקים עם שלוש שחקנים

נתון משחק עם שני שחקנים 1, 2 ו-3.
נניח כי S_1 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 1, S_2 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 2, ו- S_3 מסמן קבוצת האסטרטגיות האפשריות של 3.

- אסטרטגיה $t_1 \in S_1$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 1 לוקטור אסטרטגיות (t_1, s_2, s_3) אם

$$u_1(t_1, s_2, s_3) = \max_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_2, s_3) \quad .$$

- אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 2 לוקטור אסטרטגיות (s_1, t_2, s_3) אם

$$u_2(s_1, t_2, s_3) = \max_{s_2 \in S_2} u_2(s_1, s_2, s_3) \quad .$$

- אסטרטגיה $t_3 \in S_3$ נקראת תשובה טובה ביותר של שחקן 3 לוקטור אסטרטגיות (s_1, s_2, t_3) אם

$$u_3(s_1, s_2, t_3) = \max_{s_3 \in S_3} u_3(s_1, s_2, s_3) \quad .$$

3.3 דוגמאות

דוגמה 3.8 (מציאת שיווי משקל נאש במשחק עם שני שחקנים)

נתון המשחק בצורה אסטרטגית הבא:

$I \backslash J$	x	y	z
a	2, 1	0, 0	1, 2
b	0, 3	2, 2	3, 1
c	1, 1	3, 2	2, 2

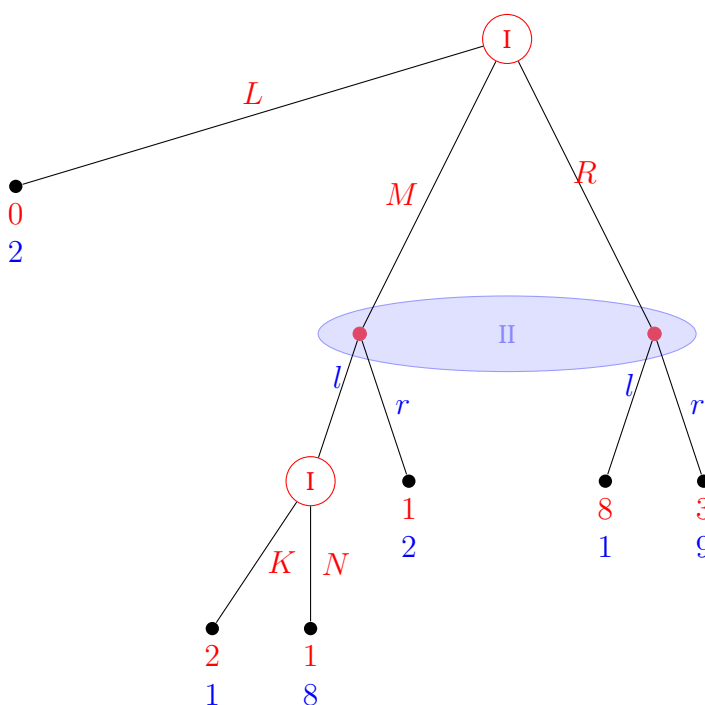
פתרון:

$I \backslash J$	x	y	z
a	2, 1	0, 0	1, 2
b	0, 3	2, 2	3, 1
c	1, 1	3, 2	2, 2

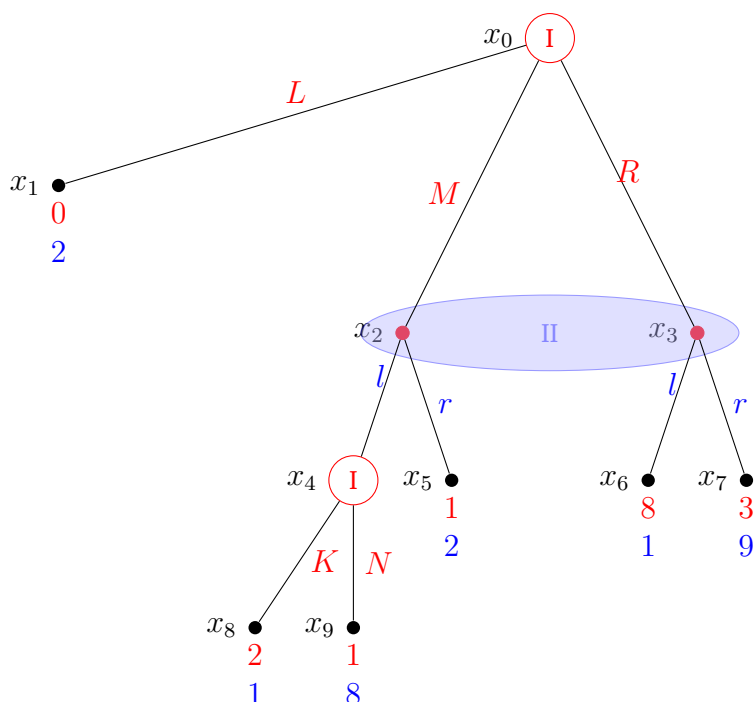
לכן ווקטור אסטרטגיות של שיווי משקל נאש הינו

$$(s_1^*, s_2^*) = (c, y) .$$

דוגמה 3.9 ()



פתרון:



קבוצת אסטרטגיות של שחקן 1:

$$S_1 = (L/K, M/K, R/K, L/N, M/N, R/N).$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן 2:

$$S_2 = (l, r).$$

מכאן הצורה אסטרטגית של המשחק היא:

$I \backslash II$	l	r
L/K	0, 2	0, 2
M/K	2, 1	1, 2
R/K	8, 1	3, 9
L/N	0, 2	0, 2
M/N	1, 8	1, 2
R/N	8, 1	3, 9

נשתמש בשיטת תשובה טובה ביותר כדי למצוא את השיווי משקל של המשחק:

$I \backslash II$	l	r
L/K	0, 2	0, 2
M/K	2, 1	1, 2
R/K	8 , 1	3 , 9
L/N	0, 2	0, 2
M/N	1, 8	1, 2
R/N	8 , 1	3 , 9

לכן הווקטור אסטרטגיות

$$(s_1^*, s_2^*) = (R/N, r)$$

שיווי משקל וגם הווקטור אסטרטגיות

$$(s_1^*, s_2^*) = (R/K, r)$$

שיווי משקל.