

## שיעור 8

### רדוֹקצִיה

## 8.1 טבלה של רדוֹקצִיות

### טבלה של רדוֹקצִיות

עמוד	רדוקציה
דוגמה 8.6 עמוד 84	$L_{\text{HALT}} \leq L_{\text{acc}}$
דוגמה 8.11 עמוד 88	$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{\text{NOTREG}}$
דוגמה 8.12 עמוד 89	$L_{\text{acc}} \leq L_{\text{NOTREG}}$
דוגמה 8.13 עמוד 90	$L_{\text{HALT}} \leq L_{\text{NOTREG}}$
דוגמה 8.15 עמוד 92	$L_{\text{acc}} \leq L_{\text{REG}}$
דוגמה 8.14 עמוד 91	$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{\text{REG}}$
דוגמה 8.16 עמוד 93	$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \cap !M_2}$ כאשר $.L_{M_1 \cap !M_2} = \{\langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2)\}$
דוגמה 8.17 עמוד 93	$\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \subset M_2}$ כאשר $.L_{M_1 \subset M_2} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) \subset L(M_2)\}$

## 8.2 מכונת טיורינג המחשבת פונקציה

### הגדרה 8.1 מכונת טיורינג המחשבת פונקציה

בහינתן פונקציה  $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  :  $f$  אומרים כי מ"ט  $M$  מחשבת את  $f$  אם לכל  $x \in \Sigma^*$

- $M$  מגיעה ל-  $q_{\text{acc}}$  בסוף החישוב של  $f(x)$  וגם
- על סרט הפלט של  $M$  רשום  $f(x)$ .

### הערה 8.1

מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה עוצרת תמיד.

### הגדרה 8.2 פונקציה חשיבה

בහינתן פונקציה  $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  :  $f$  אומרים כי  $f$  חסיבה אם קיימת מכונת טיורינג המחשבת את  $f$ .

**דוגמה 8.1**

$$f_1(x) = xx . \quad (8.1)$$

$f_1(x)$  חסיבה.

**דוגמה 8.2**

$$f_2(x) = \begin{cases} x & |x| \text{ זוגי} \\ xx & |x| \text{ אי-זוגי} \end{cases} . \quad (8.2)$$

$f_2(x)$  חסיבה.

**דוגמה 8.3**

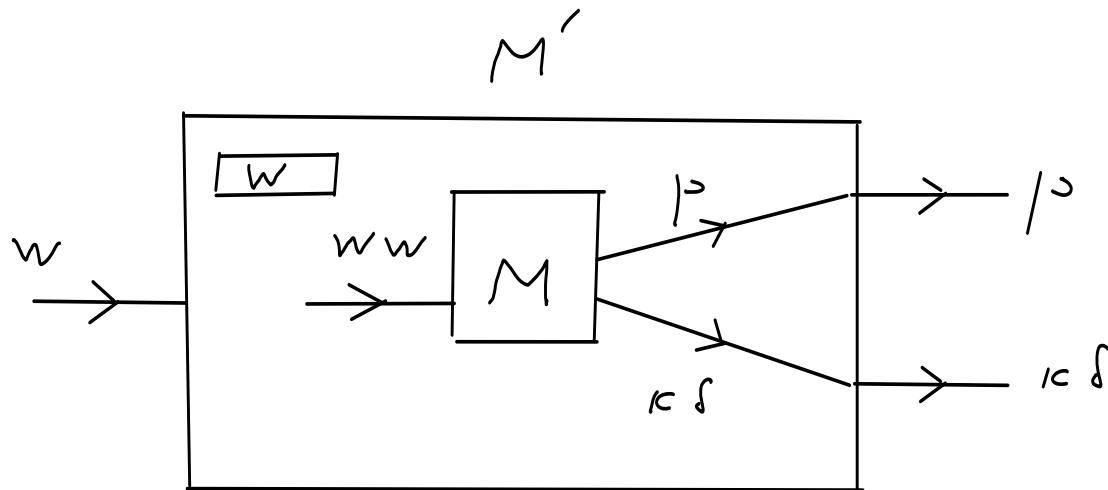
$$f_3(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M \rangle \\ \langle M^* \rangle & x \neq \langle M \rangle \end{cases} . \quad (8.3)$$

כאשר

$M^*$  מ"ט שמקבלת כל קלט.

$M'$  מ"ט המכבלת את השפה

$$L(M') = \{w \in \Sigma^* \mid ww \in L(M)\} .$$



חסיבה כי ניתן לבנות מ"ט שבודקת האם  $\langle M \rangle = x$ . אם לא, מחזירה קידוד קבוע  $\langle M^* \rangle$ . ואם כן, מחזירה קידוד  $\langle M' \rangle$  ע"י הוספת מעברים המשכפלים את הקלט בתחילת הקידוד  $\langle M \rangle$ .

**דוגמה 8.4**

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & x = \langle M \rangle \wedge \langle M \rangle \in L(M) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad (8.4)$$

לא חשיבה כי יתכונו קלטים  $x$  ו-  $M$  לא עוצרת על  $\langle M \rangle$ .  $f_4(x)$

**8.3 רדוקציות****הגדרה 8.3 רדוקציות**

בහינתן שתי שפות  $\Sigma^* \subseteq L_1, L_2$  אומרים כי  $L_1$  ניתנת לרדוקציה ל-  $L_2$ , ומסמנים

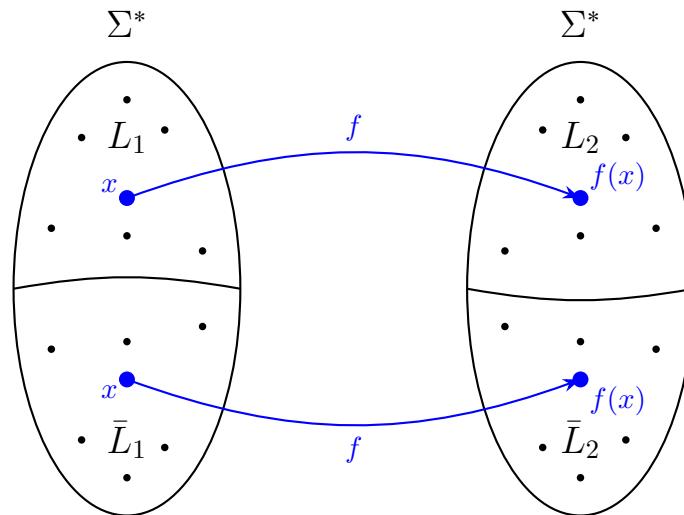
$$L_1 \leq L_2 ,$$

אם  $\exists$  פונקציה  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  המקיים:

(1)  $f$  חשיבה

(2) לכל  $x \in \Sigma^*$

$$x \in L_1 \iff f(x) \in L_2 .$$

**דוגמה 8.5**

נתונות השפות

$$L_1 = \{x \in \{0,1\}^* \mid \text{זוגי } |x|\} ,$$

$$L_2 = \{x \in \{0,1\}^* \mid \text{אי-זוגי } |x|\} .$$

הוכיחו כי

$$L_1 \leq L_2 .$$

**פתרונות:**

נדיר את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{זוגי } |x|, \\ 10 & \text{אי-זוגי } |x| \end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

$$\cdot f(x) \in L_2 \Leftarrow |f(x)| \Leftarrow f(x) = 1 \Leftarrow |x| \Leftarrow x \in L_1$$

$$\cdot f(x) \notin L_2 \Leftarrow |f(x)| \Leftarrow f(x) = 10 \Leftarrow |x| \Leftarrow x \notin L_1$$

### משפט 8.1 משפט הרדוקציה

לכל שתי שפות  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ , אם קיימת רדוקציה

$$L_1 \leq L_2$$

אזי התנאים הבאים מתקיימים:

$$L_1 \in R \Leftarrow L_2 \in R \quad (1)$$

$$L_1 \in RE \Leftarrow L_2 \in RE \quad (2)$$

$$L_1 \notin R \Rightarrow L_2 \notin R \quad (3)$$

$$L_1 \notin RE \Rightarrow L_2 \notin RE \quad (4)$$

הוכחה: מכיוון ש-

$$L_1 \leq L_2$$

קיימת פונקציה  $f$  חסיבה המקיים:

$$x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$$

לכל  $x \in \Sigma^*$ תהי  $M_f$  מ"ט המחשבת את  $f$ .

$$(1) \quad \underline{\text{נוכיח}} \quad L_1 \in R \Leftarrow L_2 \in R$$

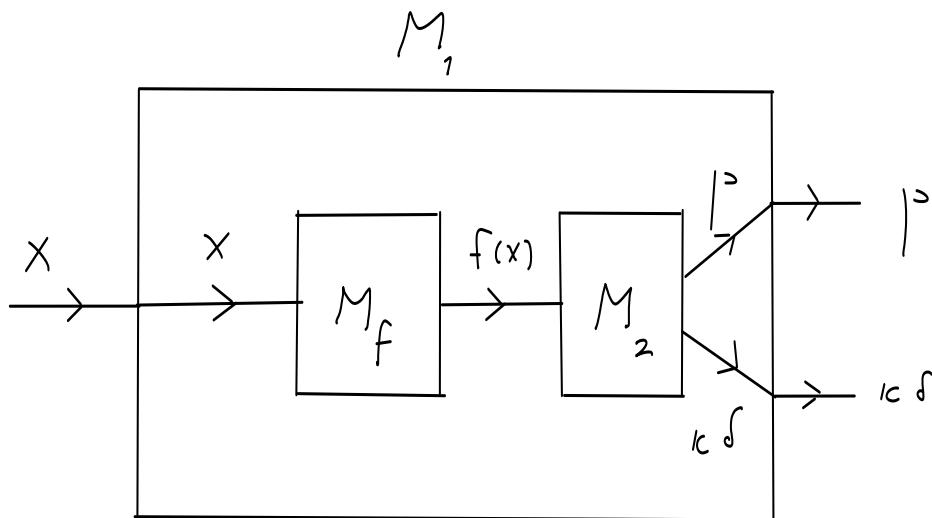
תהי  $M_2$  מ"ט המכריעה את  $L_2$ .נבנה מ"ט  $M_1$  המכריעה את  $L_1$ .התאור של  $M_1$  $= \text{על קלט } x = M_1$ 1. מחשבת את  $f(x)$  בעזרת  $M_f$ .2. מריצה את  $M_2$  על  $f(x)$  ועונה כמורה.נוכיח כי  $M_1$  מכריעה את  $L_1$ .

$$x \in L_1 \Leftarrow f(x) \in L_2 \Leftarrow M_2 \text{ מקבלת את } M_1 \Leftarrow f(x) \in L_2 \Leftarrow x \in L_1 \text{ אם }$$

$$x \in M_1 \iff f(x) \in M_2 \text{ דוחה את } M_2 \iff f(x) \notin L_2 \iff x \notin L_1 \bullet$$

$$\underline{L_1 \in RE \iff L_2 \in RE} \quad (2)$$

תהי  $M_2$  מ"ט המקבלת את  $L_2$   
نبנה מ"ט  $M_1$  המקבלת את  $L_1$ .



התאור של  $M_1$

$$x = \text{על קלט} : M_1$$

1. מחשבת את  $f(x)$  בעזרת  $M_f$ .

2. מרים את  $M_2$  על  $f(x)$  ועונה כmoה.

נוכיח כי  $M_1$  מקבלת את  $L_1$ :

$$x \in M_1 \iff f(x) \in M_2 \text{ מקבלת את } x \iff f(x) \in L_2 \iff x \in L_1 \bullet$$

$$x \in M_1 \iff f(x) \notin M_2 \text{ לא מקבלת את } x \iff f(x) \notin L_2 \iff x \notin L_1 \bullet$$

(3)

(4)

### כל 8.1

- אם רוצחים להוכיח כי שפה כלשהי  $L' \in RE$ , בוחרים שפה אחרת  $L \in RE$  ומראים שקיים רדוקציה

$$L \leq L' .$$

לדוגמה:

$$L \leq L_{\text{acc}}$$

(כנ"ל לגבי  $R$ )

- אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי  $L' \neq RE$  בוחרים שפה אחרת  $L$  ומראים שקיימת רדוקציה

$$L' \leq L .$$

לדוגמה

$$L_d \leq L$$

(כנ"ל לגבי  $R$ ).

## דוגמה 8.6

$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ עצור על } M\}$  ו  $L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\}$  הוכיחו כי  $L_{\text{acc}} \leq L_{\text{halt}}$  ע"י רדוקציה  $L_{\text{acc}} \notin R$

פתרונות:

בנייה פונקציה  $f$  חשיבה ומקיימת

$$x \in L_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{\text{halt}} .$$

$w$  מתקבלת על  $M'$  מתקבלת על  $w$   $\Leftarrow$   $M$  מקבלת את  $w$

$w$  לא מתקבלת על  $M'$   $\Leftarrow$   $M$  דוחה את  $w$

$M'$  לא עצרת את  $w$   $\Leftarrow$   $M$  לא עצרת את  $w$ .

$$f(x) = \begin{cases} \langle M', w \rangle & : x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\text{loop}}, \varepsilon \rangle & : x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

$M'$  מ"ט שלא עצרת על אף קלט.

$M'$  מ"ט המתנהגת כמו  $M$  פרט למקומות בהם  $M$  עצרה ודחתה,  $M'$  תיכנס ללולאה אינסופית.

### nocnoot\_hrdoktsia

$f$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבודק האם  $x = \langle M, w \rangle$

אם לא, תחזיר קידוד קבוע  $\langle M_{\text{loop}}, w \rangle$

אם כן, תחזיר קידוד  $\langle M', w \rangle$  ע"י ביצוע שינויים לוקלים בקידוד של  $M$

$$x \in L_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{\text{halt}}$$

אם  $:x \in L_{\text{acc}}$

$$w \in L(M) \text{ ו } x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$$

$$\text{ומקצתה } M' \text{ ו } f(x) = \langle M', w \rangle \Leftarrow$$

$$f(x) \in L_{\text{halt}} \Leftarrow$$

אם  $x \notin L_{\text{acc}}$  אז שני מקרים:

### מקרה 1:

$$f(x) \notin L_{\text{halt}} \Leftarrow \text{לא עוצרת על } M_{\text{loop}} \text{ ו } f(x) = \langle M_{\text{loop}}, \varepsilon \rangle \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$$

### מקרה 2:

$$f(x) = \langle M', w \rangle \Leftarrow w \notin L(M) \text{ ו } x = \langle M, w \rangle$$

מקרה א:  $M$  לא עוצרת על  $w$   $\Leftarrow w \in L_{\text{acc}}$

מקרה ב:  $M$  דוחה את  $w$   $\Leftarrow w \notin L(M)$

לסיום, הוכחנו רדוקציה (7.4) אז ממשט הרדוקציה 8.1, מתקיים  $L_{\text{acc}} \leq L_{\text{halt}}$ . ומכיון ש-  $R$  (משפט 7.4) אז  $L_{\text{acc}} \leq L_{\text{halt}}$   $\Leftarrow L_{\text{halt}} \notin R$

## 8.7 דוגמה

נתונה השפה

$$L_{\Sigma^*} = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^*\}$$

ונתונה השפה

$$\bar{L}_{\Sigma^*} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \neq \Sigma^*\} \cup \{x \neq \langle M \rangle\} .$$

הוכיחו כי:

$$L_{\Sigma^*} \notin RE \quad (\text{א})$$

$$L_{\Sigma^*} \notin R \quad (\text{ב})$$

$$\bar{L}_{\Sigma^*} \notin RE \quad (\text{ג})$$

### פתרונות:

nocich ci  $R$  ע"י  $L_{\Sigma^*} \notin R$

$$L_{\text{acc}} \leq L_{\Sigma^*} .$$

בנייה פונקצייתית חשיבה  $f$  המקיים

$$x \in L_{\text{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L_{\Sigma^*} .$$

$$L(M') = \Sigma^* \Leftarrow w \in L(M)$$

$$L(M') \neq \Sigma^* \Leftarrow w \notin L(M)$$

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & : x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & : x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- $M_\emptyset$  מ"ט שדוכה כל קלט.
- $M'$  היא מ"ט שעל כל קלט  $x$ , מתעלמת מ-  $x$  ומריצה את  $M$  על  $w$  ועונה כמוות.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & : w \in L(M) \\ \emptyset & : w \notin L(M) \end{cases}$$

נכונות הרדוקציה:

$f$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם  $.x = \langle M, w \rangle$

אם לא תחזר קידוד קבוע  $\langle M_\emptyset \rangle$

אם כן, תחזר קידוד  $\langle M' \rangle$  ע"י הוספה קוג ל-  $M$  שמוחק את הקלט מהסרט וכותב  $w$  במקומו.

נוכיח כי

$$\begin{aligned} x \in L_{\text{acc}} &\Leftrightarrow f(x) \in L_{\Sigma^*} \\ \Leftarrow L(M') = \Sigma^* \quad f(x) = \langle M' \rangle &\Leftarrow w \in L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \Leftarrow x \in L_{\text{acc}} \quad \text{אם} \\ .f(x) \notin L_{\Sigma^*} &\Leftarrow L(M_\emptyset) = \emptyset \wedge f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle \quad \text{מקרה 1} \\ .f(x) \notin L_{\Sigma^*} &\Leftarrow L(M') = \emptyset \quad \text{ולפי האבחנה } f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow w \notin L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \quad \text{מקרה 2} \end{aligned}$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $L_{\text{acc}} \leq L_{\Sigma^*} \neq R$  (משפט 7.4) אז ממשט הרדוקציה 8.1, מתקיים  $L_{\Sigma^*} \notin R$ .

## 8.8 דוגמה

נתונה השפה

$$L_d = \{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M)\}$$

ונתונה השפה

$$\bar{L}_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \notin L(M)\} \cup \{x \neq \langle M, w \rangle\} .$$

הוכיחו כי  $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$  ע"י רדוקציה

$$L_d \leq \bar{L}_{\text{acc}} .$$

**פתרונות:**בנייה פונקצייתית חשיבה  $f$  המקיים

$$x \in L_d \Leftrightarrow f(x) \in L_{\text{acc}} .$$

$$w' \notin L(M') \Leftarrow \langle M \rangle \notin L(M)$$

$$w' \in L(M') \Leftarrow \langle M \rangle \in L(M)$$

$$f(x) = \begin{cases} \langle M, \langle M \rangle \rangle & : x = \langle M \rangle \\ \langle M^*, \varepsilon \rangle & : x \neq \langle M \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M^*$  המ"ט שמקבלת כל קלט.

נכונות הרדוקציה:

$f$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם  $x = \langle M, w \rangle$ .

אם לא תחזיר קידוד קבוע  $\langle M^*, \varepsilon \rangle$ .

אם כן, תחשב  $\langle M, \langle M \rangle \rangle$ .

נוכיח כי

$$x \in L_d \Leftrightarrow f(x) \in \bar{L}_{\text{acc}}$$

$$\Leftrightarrow \langle M \rangle \notin L(M) \text{ ו } f(x) = \langle M, \langle M \rangle \rangle \Leftrightarrow \langle M \rangle \notin L(M) \text{ ו } x = \langle M \rangle \Leftrightarrow x \in L_d \text{ אם } f(x) \in \bar{L}_{\text{acc}}$$

אם שני מקרים:

$$. f(x) \notin \bar{L}_{\text{acc}} \Leftrightarrow \varepsilon \in L(M^*) \text{ ו } f(x) = \langle M^*, \varepsilon \rangle \Leftrightarrow x \neq \langle M \rangle \quad : \underline{\text{מקרה 1}}$$

$$. f(x) \notin \bar{L}_{\text{acc}} \Leftrightarrow \langle M \rangle \in L(M) \text{ ו } f(x) = \langle M, \langle M \rangle \rangle \Leftrightarrow \langle M \rangle \in L(M) \text{ ו } x = \langle M \rangle \quad : \underline{\text{מקרה 2}}$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $L_d \leq \bar{L}_{\text{acc}}$ , ומכיון ש-  $L_d \leq RE$  (משפט 7.3) אז ממשט הרדוקציה 8.1, מתקיים  $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$ .

## משפט 8.2 ממשפט הרדוקציה בין שפות משלימות

אם קיימת רדוקציה  $\bar{L}_1 \leq \bar{L}_2$ , אז קיימת רדוקציה  $\bar{L}_2 \leq \bar{L}_1$ .

הוכחה:

אם  $\exists$  רדוקציה

$$L_1 \leq L_2$$

אז  $\exists$  פונקציה חשיבה  $f$  המקיים  $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$

ולכן עבור אותה פונקציה  $f$  היא גם חשיבה וגם מקיימת

$$x \in \bar{L}_1 \Leftrightarrow f(x) \in \bar{L}_2$$

ולכן

$$\bar{L}_1 \leq \bar{L}_2 .$$



## 8.4 דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה בין שפות משלימות (משפט 8.2)

### דוגמה 8.9

הוכחנו בדוגמה 8.7 רדוקציה

$$L_{\text{acc}} \leq L_{\Sigma^*} .$$

לכן לפי משפט 8.2 קיימת רדוקציה

$$\bar{L}_{\text{acc}} \leq \bar{L}_{\Sigma^*} .$$

מכיוון ש-  $\bar{L}_{\Sigma^*} \notin RE$ , אז ממשפט הרדוקציה 8.1 מתקיים

מכיוון ש-  $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$ , אז ממשפט הרדוקציה 8.1 מתקיים

### דוגמה 8.10

הוכחנו בדוגמה 8.8 רדוקציה

$$L_d \leq \bar{L}_{\text{acc}} .$$

לכן לפי משפט 8.2 קיימת רדוקציה

$$\bar{L}_d \leq L_{\text{acc}} .$$

מכיוון ש-  $\bar{L}_d \in RE$ , אז ממשפט הרדוקציה 8.1 מתקיים

## 8.5 דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה (משפט 8.1)

### דוגמה 8.11

תהי  $L_{\text{NOTREG}}$  השפה

$$L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית}\} .$$

הוכחו כי השפה  $L_{\text{NOTREG}}$  לא כרעה על ידי רדוקציה מ-

**פתרונות:**

השפה  $\bar{L}_{\text{acc}}$  מוגדרת

$$\bar{L}_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ לא מקבלת } w\} \cup \{x \neq \langle M, w \rangle\} .$$

והשפה  $L_{\text{NOTREG}}$  מוגדרת

$$L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית}\} .$$

נגידר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ w' \in PAL & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M'$  מ"ט הבאה:

$M' = \text{על כל קלט } y$

(1) אם  $y \in PAL \iff \text{מקבלת } y$

(2) אחרת מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוות.

### הוכחת נכונות הרדוקציה

אם  $x \in \bar{L}_{\text{acc}}$       ⇐      שני מקרים:

מקרה 1:  $x = \langle M, w \rangle$

$w$  לא מקבלת  $M$  ⇐

$L(M') \in PAL$  ⇐

$\langle M' \rangle \in PAL$  ⇐

$f(x) \in PAL$  ⇐

$.f(x) \in L_{\text{NOTREG}}$  ⇐

מקרה 2:  $.f(x) \in L_{\text{NOTREG}} \Leftarrow f(x) \in PAL \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$

אם  $.f(x) \in L_{\text{NOTREG}}$       ⇐       $f(x) \in \Sigma^*$       ⇐       $L(M') = \Sigma^*$       ⇐       $w$  מקבלת  $M$       ⇐       $x \notin \bar{L}_{\text{acc}}$

לכן הוכחנו כי  $f(x)$  היא רדוקציה מ-  $L_{\text{acc}}$  ל-  $L_{\text{NOTREG}}$  ⇔  $f(x) \in NOTERG$ .

השפה  $\bar{L}_{\text{acc}}$  לא כריעה. לפיכך, לפי משפט הרדוקציה גם  $L_{\text{NOTREG}}$  לא כריעה.

### דוגמה 8.12

תהי  $L_{\text{NOTREG}}$  השפה

$$L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית}\}.$$

הוכיחו כי השפה  $L_{\text{NOTREG}}$  לא כרעה על ידי רדוקציה מ-  $L_{\text{acc}}$ .

**פתרון:**

השפה  $L_{\text{acc}}$  מוגדרת  $L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ מקבלת } M\}$ .

והשפה  $L_{\text{NOTREG}}$  מוגדרת  $L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית}\}$ .

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M'$  מ"ט הבאה:

$M' = M'$  על כל קלט  $w$ :

(1)  $M'$  מריצה  $M$  על  $w$ .

(2) אם  $M$  דוחה ⇐  $M'$  דוחה.

- אם  $M$  מקבלת  $\Rightarrow M'$  בודקת אם  $y$  פלינדרום.

\* אם כן  $\Rightarrow$  מקבלת.

\* אם לא  $\Rightarrow$  דוחה.

### הוכחת נכונות הרדוקציה

$$\begin{aligned} f(x) \in L_{\text{NOTREG}} &\Leftarrow f(x) \in PAL & \Leftarrow L(M') = PAL &\Leftarrow M \text{ מקבלת } w &\Leftarrow x \in L_{\text{acc}} \\ &&&&.f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} &\Leftarrow \text{שני מקרים.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle M' \rangle \notin L_{\text{NOTREG}} &\Leftarrow L(M') = \emptyset \text{ ו } f(x) = \langle M' \rangle &\Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle &\text{מקרה 1:} \\ &.f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} &\Leftarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle M' \rangle \notin L_{\text{NOTREG}} &\Leftarrow L(M') = \emptyset &\Leftarrow w \text{ לא מקבלת } M \text{ ו } x = \langle M, w \rangle &\text{מקרה 2:} \\ &.f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} &\Leftarrow \end{aligned}$$

### **דוגמה 8.13** $L_{\text{HALT}} \leq L_{\text{NOTREG}}$

תהי השפה  $L_{\text{NOTREG}}$  הטענה  
 $L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית}\}$ .

הוכיחו כי השפה  $L_{\text{NOTREG}}$  לא כרעה על ידי רדוקציה מ-  $L_{\text{HALT}}$ .

### **פתרון:**

השפה  $L_{\text{HALT}}$  מוגדרת  
 $L_{\text{HALT}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ עצרת על } M\}$ .

והשפה  $L_{\text{NOTREG}}$  מוגדרת  
 $L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית}\}$ .

נדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}.$$

כאשר  $M'$  מ"ט הבאה:

: $y$  על כל קלט  $y$   $= M'$

(1)  $M'$  מרכיבת  $M$  על  $w$ .

• אם  $M$  דוחה  $\Rightarrow$  דוחה. (2)

• אם  $M$  מקבלת  $\Rightarrow$  ממשיכה לשלב (3).

(3)  $.y \in PAL$  אם  $M'$  בודקת אם  $y$  פלינדרום.

• אם כן  $\Rightarrow$  מקבלת.

• אם לא  $\Rightarrow$  דוחה.

הוכחת נכונות

$$\cdot L(M') \in L_{\text{NOTREG}} \iff L(M') \in PAL \iff x \in L_{\text{HALT}}$$

$$\text{שני מקרים:} \iff x \notin L_{\text{HALT}}$$

$$\begin{array}{lcl} \langle M_\emptyset \rangle \notin L_{\text{NOTREG}} & \Leftarrow & L(M_\emptyset) = \emptyset \wedge f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle \\ & & f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \langle M_\emptyset \rangle \notin L_{\text{NOTREG}} & \Leftarrow & L(M_\emptyset) = \emptyset \Leftarrow \text{לא עוצרת על } w \\ & & f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} \end{array}$$

**דוגמה 8.14**  $\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{\text{REG}}$

$$L_{\text{REG}} = \{\langle M \rangle \mid \text{רגולרית } L(M)\}.$$

הוכחו כי השפה  $L_{\text{REG}}$  לא כריעה על ידי רדוקציה מ-

תהי  $L_{\text{REG}}$  השפה

$$\begin{array}{l} \text{השפה } \bar{L}_{\text{acc}} \text{ מוגדרת} \\ \bar{L}_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ לא מקבלת } M\} \cup \{x \mid x \neq \langle M, w \rangle\}. \\ \text{והשפה } L_{\text{REG}} \text{ מוגדרת} \\ L_{\text{REG}} = \{\langle M \rangle \mid \text{רגולרית } L(M)\}. \end{array}$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M_\emptyset$  המ"ט שדוחה כל קלט ו-  $M'$  מ"ט הבאה:

$M' = \text{על כל קלט } z$ :

(1) מריצה  $M$  על  $w$ .

(2) • אם  $M$  דוחה  $\Leftarrow$  דוחה.

• אם  $M$  מקבלת  $\Leftarrow$  בודקת אם  $w$  פלינדרום:

• אם כן  $\Leftarrow$  מקבלת.

• אם לא  $\Leftarrow$  דוחה.

אבחנה

$$L(M') = \begin{cases} PAL & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

הוכחת נכונות הרדוקציה

אם שני מקרים:  $\Leftarrow x \in \bar{L}_{\text{acc}}$

מקרה 1:  $f(x) \in L_{\text{REG}} \Leftarrow \langle M_{\emptyset} \rangle \in L_{\text{REG}} \Leftarrow L(M_{\emptyset}) = \emptyset \wedge f(x) = \langle M_{\emptyset} \rangle \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$

מקרה 2:  $\langle M_{\emptyset} \rangle \in L_{\text{REG}} \Leftarrow L(M') = \emptyset \wedge f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow x \notin L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \wedge f(x) \in L_{\text{REG}} \Leftarrow$

$f(x) \in PAL \Leftarrow L(M') \in PAL \wedge f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow w \in L(M) \Leftarrow x \notin \bar{L}_{\text{acc}} \wedge f(x) \notin L_{\text{REG}} \Leftarrow$

### דוגמה 8.15

תהי  $L_{\text{REG}}$  השפה

$$L_{\text{REG}} = \{\langle M \rangle \mid \text{רגולרית } L(M)\}.$$

הוכיחו כי השפה  $L_{\text{REG}}$  לא כריעה על ידי רדוקציה מ-

### פתרונות:

השפה  $L_{\text{acc}}$  מוגדרת  $L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ מקבלת } M\}$ .

והשפה  $L_{\text{REG}}$  מוגדרת  $L_{\text{REG}} = \{\langle M \rangle \mid \text{רגולרית } L(M)\}$ .

נדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{PAL} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M_{PAL}$  המ"ט שמכריע את השפה של פלינדרומים, ו-  $M'$  מ"ט הבאה:

$M' = \text{על כל קלט } y$ :

(1)  $M'$  בודקת אם  $y$  פלינדרום:

- אם כן  $\Leftarrow$  מקבלת.
- אם לא מרים  $M$  על  $w$  ועונה כמוות.

### הוכחת נכונות הרדוקציה

$.f(x) \in REG \Leftarrow L(M') = \Sigma^* \Leftarrow w \text{ מקבלת } M \Leftarrow x \in L_{\text{acc}}$  אם

שני מקרים:  $\Leftarrow x \notin L_{\text{acc}}$

מקרה 1:  $\langle M_{PAL} \rangle \notin L_{\text{REG}} \Leftarrow L(M_{PAL}) = PAL \wedge f(x) = \langle M_{PAL} \rangle \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle \wedge f(x) \notin L_{\text{REG}} \Leftarrow$

מקרה 2:  $\langle M' \rangle \notin L_{\text{REG}} \Leftarrow L(M') = PAL \Leftarrow w \text{ לא מקבלת } M \wedge x = \langle M, w \rangle \wedge f(x) \notin L_{\text{REG}} \Leftarrow$

**דוגמה 8.16**

נתונה השפה הבאה:

$$L = \{\langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2)\} .$$

הוכחנו כי  $L \notin RE$  ע"י רדוקציה מ-**פתרון:**פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M^*, M, w \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- $M^*$  היא מ"ט שמקבלת כל קלט.
- $M_\emptyset$  היא מ"ט שדוחה כל קלט.

נכונות הרדוקציה:

ראשית,  $f$  חסיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם  $x = \langle M, w \rangle$  או לא, תחזר קידוד קבוע  $\langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle$ . אם לא, תחזר קידוד  $\langle M^*, M, w \rangle$ .

נכיח כי

$$x \in \bar{L}_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{M_1 \rightarrow M_2} .$$

אם שני מקרים:

$$f(x) \in \iff \varepsilon \notin L(M_\emptyset) \wedge \varepsilon \in L(M^*) \wedge f(x) = \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle \quad \text{מקרה 1:} \\ \bar{L}_{M_1 \rightarrow M_2} .$$

$$w \notin L(M) \wedge w \in L(M^*) \wedge f(x) = \langle M^*, M, w \rangle \iff w \notin L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \quad \text{מקרה 2:} \\ f(x) \in L_{M_1 \rightarrow M_2} \iff$$

$$w \notin L(M) \wedge w \in L(M^*) \wedge f(x) = \langle M^*, M, w \rangle \iff w \in L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \iff x \notin \bar{L}_{\text{acc}} \quad \text{אם} \\ f(x) \notin L_{M_1 \rightarrow M_2} \iff$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$ , ומכיון ש-  $\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \rightarrow M_2}$  ממשפט הרדוקציה מתקיים**דוגמה 8.17**

נתונה השפה הבאה:

$$L = \{\langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2)\} .$$

הוכחנו כי  $L \notin RE$  ע"י רדוקציה מ-**פתרון:**פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M_\emptyset, M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset, M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- $M_\emptyset$  היא מ"ט שדועה כל קלט.
- $M'$  היא מ"ט של קלט  $y$  מתעלמת מ-  $y$  ומריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוות.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases} .$$

נכונות הרדוקציה:

ראשית,  $f$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם  $x = \langle M, w \rangle$ . אם לא, תחזיר קידוד קבוע  $\langle M_\emptyset, M_\emptyset \rangle$ . אם כן, תחזיר קידוד קבוע  $\langle M'_\emptyset, M'_\emptyset \rangle$ , כאשר  $M'_\emptyset$  הוסיף ע"י הוספת קוד ל-  $\langle M \rangle$  המוחק את הקלט  $y$  ורושם  $w$  במקומו.

נוכיח כי

$$x \in L_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{M_1 \subset M_2} .$$

$$L(M') = \Sigma^* \quad f(x) = \langle M_\emptyset, M' \rangle \iff w \in L(M) \quad \text{ואם } x = \langle M, w \rangle \iff x \in L_{\text{acc}}$$

$$\cdot f(x) \in L_{M_1 \subset M_2} \iff L(M_\emptyset) \subset L(M') \iff$$

$$\text{שני מקרים:} \iff x \notin L_{\text{acc}}$$

$$\text{מקרה 1: } .f(x) \notin L_{M_1 \subset M_2} \iff L(M_\emptyset) = L(M_\emptyset) \quad \text{ואם } f(x) = \langle M_\emptyset, M_\emptyset \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle$$

$$\text{מקרה 2: } L(M') = \emptyset \quad \text{ולפי האבחנה } f(x) = \langle M_\emptyset, M' \rangle \iff w \notin L(M) \quad \text{ואם } x = \langle M, w \rangle$$

$$\cdot f(x) \notin L_{M_1 \subset M_2} \quad L(M') = L(M_\emptyset) \iff$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה מתקיים  $L_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \subset M_2}$ , ומכיון רדוקציה מתקיים  $L_{M_1 \subset M_2} \leq R$ , ומכיוון ש-  $R \neq L_{\text{acc}}$  ממשפט הרדוקציה מתקיים  $L_{\text{acc}} \leq R$ .