שיעור 13
סיבוכיות מקום ושלמות ב PSPACE

13.1 הגדרה של סיבוכיות מקום

הגדרה 13.1 סיבוכיות מקום של מכונת טיורינג

הסיבוכיות מקום של מ"ט M על קלט w היא פונקציה $f(|w|)$ השווה למספר התאי סרט לכל היותר של המכונה M שבהם נעשה שימוש בחישוב של M על w.

הגדרה 13.2 המחלקה $SPACE(f(n))$

מחלקת $SPACE(f(n))$ היא אוסף כל השפות L עבורן קיימת מכונת טיורינג דטרמיניסטית M שמכריעה אותה כך ש:
על כל קלט w באורך $n = |w|$, המכונה M משתמשת לכל היותר $O(f(n))$ תאי סרט.

$$SPACE(f(n)) = \{L \mid \text{מ"ט } M \text{ שמכריעה } L \text{ ומשתמשת לכל היותר ב- } O(f(n)) \text{ תאי סרט} \exists\} \ .$$

דוגמה 13.1

נראה כי ניתן לפתור את הבעיה SAT ע"י אלגוריתם שהוא רץ במקום ליניארי. כלומר:

$$SAT \in SPACE(n) \ .$$

תהי ϕ נוסחה בוליאנית כלשהי. נסמן $n = |\phi|$ ונסמן ב- m את מספר המשתנים ב- ϕ. נגדיר מכונה M שפועלת כך:

$M =$ על כל קלט $\langle\phi\rangle$:

(1 M רושמת את המחרוזת $\langle\phi\rangle$ על סרט הקלט.

(2 לכל השמה $a_1, a_2, \ldots, a_m$ (כאשר $a_i \in \{0,1\}$ הוא הערך הנוכחי של x_i):

א) M רושמת את מחרוזת של ההשמה $a_1 a_2 \cdots a_m$ על סרט העבודה.

ב) M מחשבת את הערך של ϕ עבור ההשמה הנוכחית $a_1, \ldots a_m$ ע"י סריקה של הקלט $\langle\phi\rangle$ שרשום על סרט הקלט.

ג) אם מתקבל $\phi(a_1, \ldots, a_m) = 1$ אז M מקבלת.

(3 אם עבור כל ההשמות התקבל $\phi(a_1, \ldots, a_m) = 0$ אז M דוחה.

מכאן אנחנו רואים כי המכונה M_1 רצה במקום ליניארי. בפרט:

- M שומרת על סרט העבודה את ההשמה $a_1 \ldots a_m$ וזה נדרש $O(m)$ תאים.
- המספר המשתנים, m הוא n לכל היותר.
- לכן M רצה במקום $O(n)$.

לפיכך:

$$SAT \in SPACE(n) \ .$$

הגדרה 13.3 המחלקה $NSPACE\left(f(n)\right)$

מחלקת $NSPACE\left(f(n)\right)$ היא אוסף כל השפות L עבורן קיימת מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית N שמכריעה אותה כך ש:
על כל קלט w באורך $n=|w|$ המכונה N משתמשת לכל היותר $O\left(f(n)\right)$ תאי סרט מתוך כל המסלולי חישוב של N.

$NSPACE\left(f(n)\right) = \{L \mid$ ∃ מ"ט א"ד N שמכריעה L ומשתמשת לכל היותר ב- $O\left(f(n)\right)$ תאי סרט. $\}$.

דוגמה 13.2

תהי ALL_{NFA} השפה הבאה:

$$ALL_{NFA} = \{\langle A\rangle \mid \text{ הוא } NFA \text{ עבורו } L(A)=\Sigma^* \; A\} \ .$$

הוכיחו כי $ALL_{NFA} \in NSPACE(n)$.

פתרון:
הפתרון מתבוסס על זה שזה פשוט יותר לבנות אלגוריתם המכריע את השפה המשלימה:

$$\overline{ALL_{NFA}} = \{\langle A\rangle \mid \text{ קיימת } w\in\Sigma^* \text{ עבורה } A \text{ דוחה } w\} \ .$$

לפני שנתאר את האלגוריתם עצמו, נגדיר סימון שנשתמש בו בבניית האלגוריתם. נניח ש- $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ היא מכונת NFA כלשהי. תהי $P(Q)$ הקבוצת החזקה של Q. עבור כל NFA הפונקצית המעברים היא מהצורה

$$\delta: Q\times\Sigma \to P(Q) \ .$$

בהינתן מילה $w=a_1a_2\cdots a_n$ כאשר $a_i\in\Sigma$ הוא התו ה- i של המילה, $1\leqslant i\leqslant n$. נגדיר את הסדרה הבאה:

$$S_0 \ , \ S_1 \ , \ S_2 \ , \quad \ldots \quad , \ S_n$$

כאשר

$$S_0 \triangleq \{q_0\} \ , \quad S_{i+1}\triangleq \delta\left(S_i,a_i\right) \ ,$$

כאשר $S_i\in P(Q)$ לכל $0\leqslant i\leqslant n$.

<u>**בניית האלגוריתם**</u>

נבנה אלגוריתם לא-דטרמיניסטי, N המכריע את $\overline{ALL_{NFA}}$ באופן הבא:

$N=$ "על כל קלט x:

1) בודקת אם $x=\langle M\rangle$, כאשר $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ היא מכונת NFA.
- אם לא $\Leftarrow N$ תדחה.

2) יהי $q=|Q|$ מספר המצבים של M. נגדיר $S_0=\{q_0\}$.

3) N מבצעת את הלולאה הבאה:
לכל $0\leqslant i\leqslant 2^q-1$:

א) בוחרת באופן אי־דטרמיניסטי תו קלט $a_i \in \Sigma$.

ב) מחשבת

$$S_{i+1} = \delta\left(S_i, a_i\right).$$

ג) אם $S_{i+1} \cap F \neq \varnothing \Leftarrow N$ תדחה.

4) אם בסיום הלולאה לא היה מצב-קבלה באף אחת מן הקבוצות $S_i \Leftarrow N$ תקבל. "

אם $x \in \overline{ALL_{NFA}}$:

$\Leftarrow$ $x = \langle A \rangle$, כאשר A היא מכונת NFA. וקיימת מילה $w \in \Sigma^*$ כך ש־ A תדוחה.

$\Leftarrow$ קיימת מילה w' באורך לכל היותר 2^q ש־A תדחה.

$\Leftarrow$ קיימת ריצה של N שבה N בוחרת את התווים של w' בלולאה.

$\Leftarrow$ במהלך הריצה של A על w', אין מצב קבלה באף אחת מן הקבוצות S_i.

$\Leftarrow$ N לא דחתה עד סוף הלולאה.

$\Leftarrow$ בסופה N תקבל.

אם $x \notin \overline{ALL_{NFA}}$ אז שני מקרים:

מקרה 1) $x \neq \langle A \rangle \Leftarrow N$ תדחה בשלב 1.

מקרה 2) $x = \langle A \rangle$ ו־ $L(A) = \Sigma^*$.

$\Leftarrow$ לכל מילה $w \in \Sigma^*$, קיים שלב שבו A נמצא במצב קבלה.

$\Leftarrow$ בכל ריצה של N, קיימת איטרציה i עבורה $S_i \cap F \neq \varnothing$.

$\Leftarrow$ באיטרציה זו N תדחה.

$\Leftarrow$ בכל ריצה N, תדחה.

$\Leftarrow$ N דוחה את x.

הגדרה 13.4 סיבוכיות מקום של בעיה/שפה

בהינתן קלט w באורך $n = |w|$. אומרים כי ניתן להכריעה שפה L בזמן $f(n)$ אם קיימת מ"ט M המכריעה את L כך שלכל $w \in \Sigma^*$, הסיבוכיות מקום של M על w חסום ע"י $f\left(|w|\right)$.

13.2 משפט סביץ'

13.3 המחלקה PSPACE

הגדרה 13.5 PSPACE

PSPACE היא מחלקת כל הבעיות שניתן לפתור על ידי מכונת טיורינג דטרמיניסטית תוך שימוש בסיבוכיות מקום פולינומית.

הגדרה 13.6 NPSPACE

NPSPACE היא מחלקת כל הבעיות שניתן לפתור על ידי מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית תוך שימוש בסיבוכיות מקום פולינומית.

13.4 שלמות ב- PSPACE

13.5 המחלקה L

13.6 המחלקה NL

13.7 שלמות ב- NL

13.8 שיוויון NL ו- coNL