שיעור 6
אי-כריעות משפט הרדוקציה

הגדרה 6.1 L_{acc}

$$L_{\text{acc}} = \left\{ \langle M, w \rangle \;\middle|\; w \in L(M) \right\} \in RE \backslash R$$

הגדרה 6.2 L_{halt}

$$L_{\text{halt}} = \left\{ \langle M, w \rangle \;\middle|\; \text{עוצרת על } w \; M \right\} \in RE \backslash R$$

הגדרה 6.3 L_{d}

$$L_{\text{d}} = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; \langle M \rangle \notin L(M) \right\} \notin RE$$

משפט 6.1 $L_{\text{acc}} \in RE$

$$L_{\text{acc}} \in RE \;.$$

הוכחה: מכיוון ש- $L(U) = L_{\text{acc}}$, כאשר U המכונת טיורינג האוניברסלית אשר מקבלת את L_{acc}, לכן $L_{\text{acc}} \in RE$. ■

משפט 6.2 $L_{\text{halt}} \in RE$

$$L_{\text{halt}} \in RE \;.$$

הוכחה: נבנה מ"ט U' שהיא למעשה U פרט למקום שבו U עצרה ודחתה, U' תעצור ותקבל.

נוכיח כי U' מקבלת את L_{halt}:

אם $x \in L_{\text{halt}}$

$\Leftarrow$ $x = \langle M, w \rangle$ ו- M עוצרת על w

$\Leftarrow$ U' עוצרת ומקבלת את x.

אם $x \notin L_{\text{halt}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

- $x \neq \langle M, w \rangle$ $\Leftarrow$ U' דוחה את x.
- $x = \langle M, w \rangle$ ו- M לא עוצרת על w $\Leftarrow$ U' לא עוצרת על x.

■

משפט 6.3 $L_{\mathrm{d}} \notin RE$

$$L_{\mathrm{d}} \notin RE\ .$$

הוכחה:
נניח בשלילה כי $L_{\mathrm{d}} \in RE$.

$\Leftarrow$ $\exists$ מ"ט M_{d} המקבלת את L_{d}.

$\Leftarrow$ $L(M_{\mathrm{d}}) = L_{\mathrm{d}}$.

נבדוק ריצה של M_d על $\langle M_d \rangle$:

- אם $\langle M_{\mathrm{d}} \rangle \in L(M_{\mathrm{d}})$ $\Leftarrow$ $\langle M_{\mathrm{d}} \rangle \notin L_{\mathrm{d}}$ $\Leftarrow$ $L(M_{\mathrm{d}}) \neq L_{\mathrm{d}}$.
- אם $\langle M_{\mathrm{d}} \rangle \notin L(M_{\mathrm{d}})$ $\Leftarrow$ $\langle M_{\mathrm{d}} \rangle \in L_{\mathrm{d}}$ $\Leftarrow$ $L(M_{\mathrm{d}}) \neq L_{\mathrm{d}}$.

בשני המקרים קיבלנו סתירה לכך ש- $L(M_{\mathrm{d}}) = L_{\mathrm{d}}$ ולכן $L_{\mathrm{d}} \notin RE$. ■

משפט 6.4 L_{acc} **לא כריעה**

$$L_{\mathrm{acc}} = \left\{ \langle M, w \rangle \ \middle|\ w \in L(M) \right\} \notin R\ .$$

הוכחה:
נניח בשלילה כי $L_{\mathrm{acc}} \in R$ ותהי M_{acc} המ"ט המכריעה את L_{acc}.

נשתמש ב- M_{acc} כדי לבנות מ"ט M_{d} המכריעה את L_{d} (בסתירה לכך ש- $L_{\mathrm{d}} \notin RE$ כפי שהוכחנו במשפט 6.3).

<u>התאור של M_{d}</u>

$M_{\mathrm{d}} =$ על קלט x:

(1 בודקת האם $x = \langle M \rangle$. אם לא $\Leftarrow$ דוחה.

(2 מחשבת את $\langle x \rangle = \langle \langle M \rangle \rangle$.

(3 מריצה את M_{acc} על הזוג $\langle M, \langle M \rangle \rangle$:

- אם M_{acc} מקבלת $\Leftarrow$ M_{d} דוחה.
- אם M_{acc} דוחה $\Leftarrow$ M_{d} מקבלת.

כעת נוכיח כי M_{d} מכריעה את L_{d}:

אם $x \in L_{\mathrm{d}}$

$\Leftarrow$ $x = \langle M \rangle$ ו- $\langle M \rangle \notin L(M)$

$\Leftarrow$ M_{acc} דוחה את הזוג $\langle M, \langle M \rangle \rangle$

$\Leftarrow$ M_{d} מקבלת את x.

אם $x \notin L_{\mathrm{d}}$ שני מקרים:

מקרה (1): $x \neq \langle M \rangle \Leftarrow M_{\mathrm{d}}$ דוחה את x.

מקרה (2): $x = \langle M \rangle$ ו- $\langle M \rangle \in L(M)$

$\Leftarrow$ M_{acc} מקבלת את זוג $\langle M, \langle M \rangle \rangle$

$\Leftarrow$ M_{d} דוחה את x.

■

משפט 6.5 L_{halt} לא כריעה

$$L_{\mathrm{halt}} = \left\{ \langle M, w \rangle \;\middle|\; \text{עוצרת על } w \;\; M \right\} \notin R \ .$$

הוכחה: נניח בשלילה כי $L_{\mathrm{halt}} \in R$ ותהי M_{halt} מ"ט המכריעה את L_{halt}.

נשתמש ב- M_{halt} כדי לבנות מ"ט M_{acc} המכריעה את L_{acc} (בסתירה לכך ש- $L_{\mathrm{acc}} \notin R$ כפי שהוכחנו במשפט 6.4).

<u>התאור של M_{acc}</u>

$M_{\mathrm{acc}} =$ על קלט x:

1) מריצה את M_{acc} על x.

- אם M_{halt} דוחה $\Leftarrow$ M_{acc} דוחה.
- אם M_{halt} מקבלת $\Leftarrow$ M_{acc} מריצה את U על x ועונה כמוה.

<u>אבחנה</u>

נוכיח כי M_{acc} מכריעה את L_{acc}:

אם $x \in L_{\mathrm{acc}}$

$\Leftarrow$ $x = \langle M, w \rangle$ ו- $\langle w \rangle \in L(M)$

$\Leftarrow$ M_{halt} מקבלת את x וגם U מקבלת את x

$\Leftarrow$ M_{acc} מקבלת את x.

אם $x \notin L_{\mathrm{acc}} \Leftarrow$ שני מקרים:

מקרה (1): $x \neq \langle M, w \rangle$

$\Leftarrow$ M_{halt} דוחה את x

$\Leftarrow$ M_{acc} דוחה את x.

מקרה (2): $x = \langle M, w \rangle$ ו- $\langle w \rangle \notin L(M) \Leftarrow$ שני מקרים:

מקרה (א): M לא עוצרת על w $\Leftarrow$ M_{halt} דוחה את x $\Leftarrow$ M_{acc} דוחה את x.

מקרה (ב): M דוחה את w $\Leftarrow$ M_{halt} מקבלת את x אבל U דוחה את x $\Leftarrow$ M_{acc} דוחה את x.

הראנו כי M_{acc} מכריעה את L_{acc} בסתירה לכך ש- $L_{\text{acc}} \notin R$.
לכן $L_{\text{halt}} \notin R$. ■

משפט 6.6

$$\begin{aligned} L_{\text{acc}} \in RE \backslash R \quad &\Rightarrow \quad \bar{L}_{\text{acc}} \notin RE \ , \\ L_{\text{halt}} \in RE \backslash R \quad &\Rightarrow \quad \bar{L}_{\text{halt}} \notin RE \ , \\ L_{\text{d}} \notin RE \backslash R \ . \end{aligned}$$

6.1 מ"ט המחשבת את פונקציה

הגדרה 6.4 מ"ט המחשבת פונקציה

בהינתן פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ אומרים כי מ"ט M מחשבת את f אם לכל $x \in \Sigma^*$:

- M מגיעה ל- q_{acc} בסוף החישוב של $f(x)$ וגם
- על סרט הפלט של M רשום $f(x)$.

הערה 6.1

מ"ט שמחשבת פונקציה עוצרת תמיד.

הגדרה 6.5 מ"ט המחשבת פונקציה

בהינתן פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ אומרים כי f חישבה אם קיימת מ"ט המחשבת את f.

דוגמה 6.1

$$f_1(x) = xx \ . \tag{6.1}$$

$f_1(x)$ חשיבה.

דוגמה 6.2

$$f_2(x) = \begin{cases} x & \text{זוגי}\ |x| \\ xx & \text{אי-זוגי}\ |x| \end{cases} \ . \tag{6.2}$$

$f_2(x)$ חשיבה.

דוגמה 6.3

$$f_3(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M \rangle \\ \langle M^* \rangle & x \neq \langle M \rangle \end{cases} . \tag{6.3}$$

כאשר

- M^* מ"ט שמקבלת כל קלט.
- M' מ"ט המקבלת את השפה

$$L(M') = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; ww \in L(M) \ .\right\}$$

$f_3(x)$ חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שבודקת האם $x = \langle M \rangle$. אם לא, מחזירה קידוד קבוע $\langle M^* \rangle$. ואם כן, מחזירה קידוד $\langle M' \rangle$ ע"י הוספת מעברים המשכפלים את הקלט בתחילת הקידוד $\langle M \rangle$.

דוגמה 6.4

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & x = \langle M \rangle \wedge \langle M \rangle \in L(M) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \tag{6.4}$$

$f_4(x)$ לא חשיבה כי ייתכנו קלטים $x = \langle M \rangle$ ו- M לא עוצרת על $\langle M \rangle$.

6.2 רדוקציות

הגדרה 6.6 רדוקציות

בהינתן שתי שפות $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ אומרים כי L_1 ניתנת לרדוקציה ל- L_2, ומסמנים

$$L_1 \leqslant L_2 \ ,$$

אם $\exists$ פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ המקיימת:

(1 f חשיבה

(2 לכל $x \in \Sigma^*$:

$$x \in L_1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_2 \ .$$

דוגמה 6.5

נתונות השפות

$$L_1 = \left\{ x \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \text{זוגי } |x| \right\} \ ,$$
$$L_2 = \left\{ x \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \text{אי-זוגי } |x| \right\} \ .$$

הוכיחו כי

$$L_1 \leqslant L_2 \ .$$

פתרון:
נגדיר את הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x| \text{ זוגי},\\ 10 & |x| \text{ אי-זוגי}\end{cases}$$

<u>הוכחת הנכונות:</u>

$x\in L_1$ $\Leftarrow$ $|x|$ זוגי $\Leftarrow$ $f(x)=1$ $\Leftarrow$ $|f(x)|$ אי-זוגי $f(x)\in L_2$.

$x\notin L_1$ $\Leftarrow$ $|x|$ אי-זוגי $\Leftarrow$ $f(x)=10$ $\Leftarrow$ $|f(x)|$ זוגי $f(x)\notin L_2$.

משפט 6.7 משפט הרדוקציה

לכל שתי שפות $L_1,L_2\subseteq\Sigma^*$, אם קיימת רדוקציה

$$L_1 \leqslant L_2$$

אזי התנאים הבאים מתקיימים:

(1) $L_2\in R \quad \Rightarrow \quad L_1\in R$

(2) $L_2\in RE \quad \Rightarrow \quad L_1\in RE$

(3) $L_2\notin R \quad \Leftarrow \quad L_1\notin R$

(4) $L_2\notin RE \quad \Leftarrow \quad L_1\notin RE$

הוכחה: מכיוון ש-

$$L_1\leqslant L_2$$

קיימת פונקציה f חשיבה המקיימת:

$$x\in L_1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)\in L_2$$

לכל $x\in\Sigma^*$.

תהי M_f מ"ט המחשבת את f.

(1) <u>נוכיח $L_2\in R \Leftarrow L_1\in R$</u>

תהי M_2 מ"ט המכריעה את L_2.
נבנה מ"ט M_1 המכריעה את L_1.

<u>התאור של M_1</u>

$M_1 =$ על קלט x:

1 . מחשבת את $f(x)$ בעזרת M_f.
2 . מריצה את M_2 על $f(x)$ ועונה כמוה.

נוכיח כי M_1 מכריעה את L_1.

- אם $x\in L_1$ $\Leftarrow$ $f(x)\in L_2$ $\Leftarrow$ M_2 מקבלת את $f(x)$ $\Leftarrow$ M_1 מקבלת את x.
- אם $x\notin L_1$ $\Leftarrow$ $f(x)\notin L_2$ $\Leftarrow$ M_2 דוחה את $f(x)$ $\Leftarrow$ M_1 דוחה את x.

(2) נוכיח $L_1 \in RE \Leftarrow L_2 \in RE$

תהי M_2 מ"ט המקבלת את L_2.

נבנה מ"ט M_1 המקבלת את L_1.

התאור של L_1

$M_1 =$ על קלט x:

1. מחשבת את $f(x)$ בעזרת M_f.
2. מריצה את M_2 על $f(x)$ ועונה כמוה.

נוכיח כי M_1 מקבלת את L_1:

- אם $x \in L_1$ $\Leftarrow$ $f(x) \in L_2$ $\Leftarrow$ M_2 מקבלת את $f(x)$ $\Leftarrow$ M_1 מקבלת את x.
- אם $x \notin L_1$ $\Leftarrow$ $f(x) \notin L_2$ $\Leftarrow$ M_2 לא מקבלת את $f(x)$ $\Leftarrow$ M_1 לא מקבלת את x.

(3)

■

כלל 6.1

- אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי $L \in RE$, בוחרים שפה אחרת $L' \in RE$ ומראים שקיימת רדוקציה

$$L \leqslant L' \ .$$

לדודמה:

$$L \leqslant L_{\text{acc}}$$

(כנ"ל לגבי R)

- אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי $L \notin RE$ בוחרים שפה אחרת $L' \notin RE$ ומראים שקיימת רדוקציה

$$L' \leqslant L \ .$$

לדוגמה

$$L_{\text{d}} \leqslant L$$

(כנ"ל לגבי R).