המחלקה למדעי המחשב

05/06/24 כ"ח באייר תשפ"ד
09 : 00 – 12 : 00

חדו"א 1 למדמ"ח

מועד ג'

מרצה: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר, ד"ר מרינה ברשדסקי.

תשפ"ד סמסטר א'

השאלון מכיל 8 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דף נוסחאות מצורף לשאלון (5 עמודים בפורמט $A4$).

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות בלבד מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** בלבד מתוך **שתיים**.

==

שאלות 1 ו- 2 - חובה!

שאלה 1 (21 נקודות)

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x)=x^2e^{1-x}$.

א) (3 נק') תחום הגדרה וחיתוך עם הצירים וסימני הפונקציה.

ב) (3 נק') אסימפטוטות.

ג) (3 נק') תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון.

ד) (3 נק') תחומי קמירות ונקודות פיתול.

ה) (5 נק') ציירו את סקיצת הגרף של הפונקציה $f(x)$.

ו) (4 נק') ציירו את סקיצת הגרף של הפונקציה $f(|x|)$.

שאלה 2 (24 נקודות)

פתרו את האינטגרלים הבאים. יש לענות על 2 מתוך 3 הסעיפים הבאים:

א) (12 נק') $\int \frac{x^2-6x+18}{2x-5}dx$.

ב) (12 נק') $\int e^{2x}\cos(2e^x)dx$.

ג) (12 נק') $\int \frac{1}{4\cos x+5}dx$.

ענו על 3 מתוך 4 השאלות $3-6$

שאלה 3 (15 נקודות)

א) (12 נק') מצאו את משוואת המשיק ואת משוואת הנורמל לפונקציה $y(x)$ המוגדרת על ידי

$$\ln\left(x^2+y^2\right)-x=1 \ , y<0$$

בנקודה שבה $x=0$.

ב) (3 נק') בדקו אם האינטגרל הבא מתכנס: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$.

שאלה 4 (15 נקודות)

א) (5 נק')
חשבו את השטח של התחום החסום על ידי הקווים $y = x^3$ ו- $y = x$.

ב) (5 נק') עבור אילו ערכי a, b הפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & x \geq \frac{\pi}{2} \\ a - bx & x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ גזירה בנקודה $x = \frac{\pi}{2}$?

ג) (5 נק') עבור אילו ערכים של הפרמטר $y = -kx$ יהיה מאונך להיפרבולה $y = -\frac{3}{x}$?

שאלה 5 (15 נקודות) חשבו את הגבולות הבאים:

א) (6 נק') $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{\ln x^6}{3x^2 - x - 2} \right)$.

ב) (6 נק') $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x^4}{1 - \cos(2x^2)} \right)$.

ג) (3 נק') עבור אילו ערכים של הפרמטר a הפונקציה $y = \arcsin\left(\frac{1}{x^2 + a}\right)$ תהיה מוגדרת לכל x?

שאלה 6 (15 נקודות)

א) (9 נק') מצאו את פולינום מקלורן של הפונקציה הבאה עד סדר 2: $\begin{cases} x &= \ln(t+2) \\ y &= (t+2)^2 \end{cases}$ $(t > -2)$

ב) (6 נק') הוכיחו כי למשוואה $(1 - x)^3 = \arctan(x)$ יש שורש אחד ויחיד.

ענו על 1 **מתוך** 2 **השאלות** $7 - 8$

שאלה 7 (10 נקודות)

על הגרף של הפונקציה $y = \sqrt{x}$ $(y > 0)$ מצאו את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $(4, 0)$.

שאלה 8 (10 נקודות) הוכיחו כי לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$.

פתרונות

שאלה 1

$$f(x) = x^2 e^{1-x}\ .$$

א) (3 נק')
תחום הגדרה: $x \in (-\infty, \infty)$.

נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0,0)$.

$f(x) \geq 0$ לכל x.

ב) (3 נק') אסימפטוטה אנכית: איו.
אסימפטוטה אופקית: הישר $y = 0$ אסימפטוטה אופקית ב- $x = +\infty$. ב- $x = -\infty$ אין אסימפטוטה אופקית.

אסימפטוטה משופעת: אין.

ג) (3 נק')
תחומי עליה וירידה: $f'(x) = -e^{1-x}(x-2)x$. ישנו נקודות קריטיות ב- $(0,0)$ ו- $(2, 4/e)$

x	$x<0$	$x=0$	$0<x<2$	$x=2$	$x>2$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	מינימום	$\nearrow$	מקסימום	$\searrow$

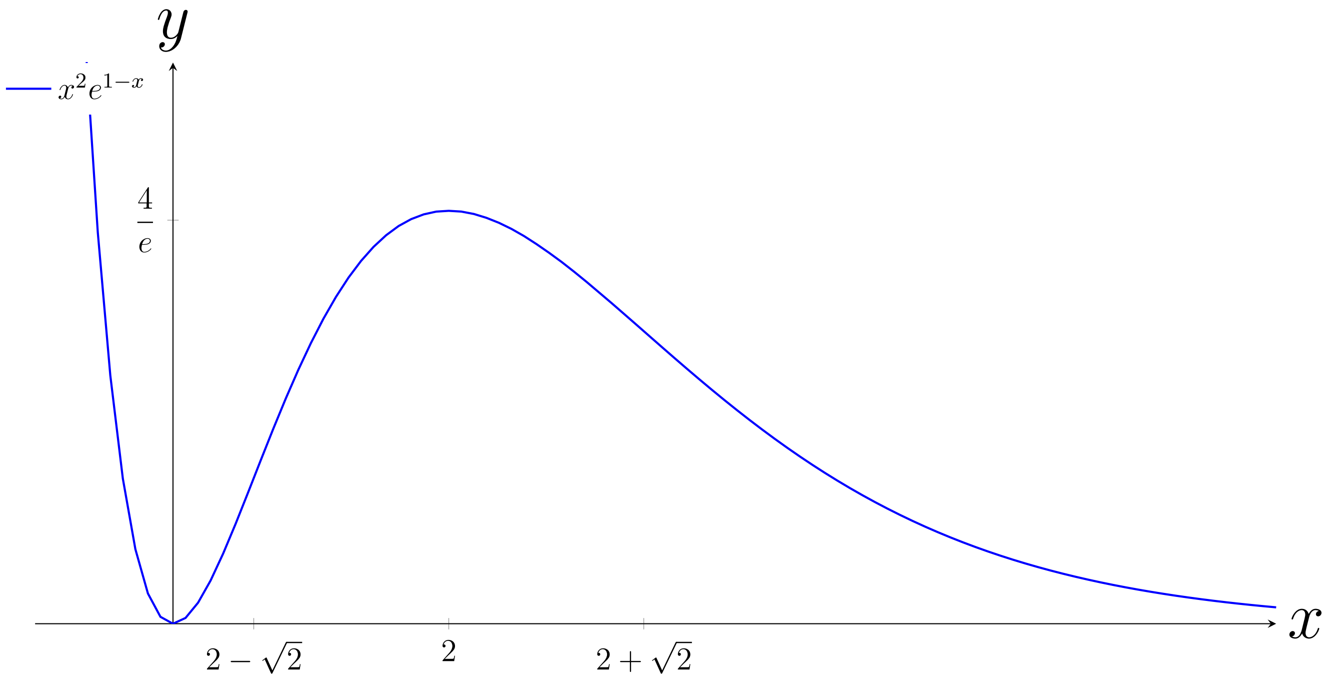
ד) (3 נק') תחומי קמירות:

$$f''(x) = e^{1-x}\left(x^2 - 4x + 2\right) = e^{1-x}\left(x - 2 + \sqrt{2}\right)\left(x - 2 - \sqrt{2}\right)$$

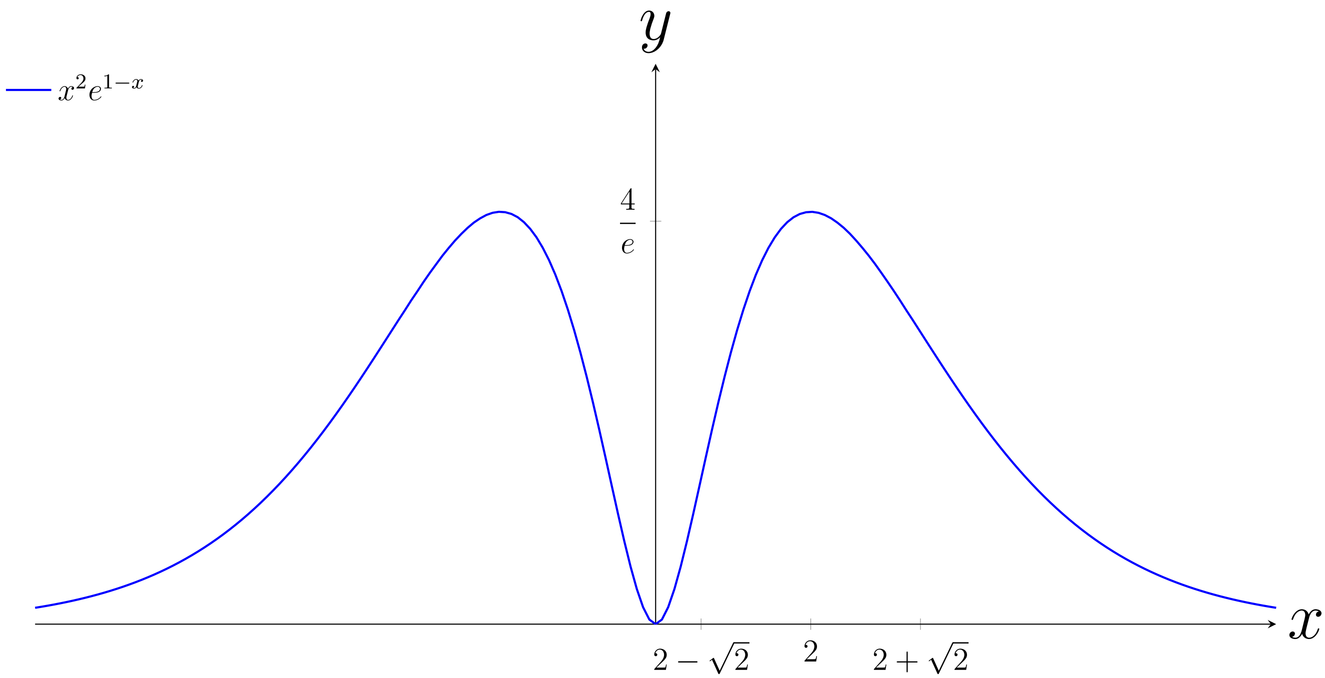
יש נקודת פיתול ב- $x = 2 - \sqrt{2}$ ו- $x = 2 + \sqrt{2}$.

x	$x < 2-\sqrt{2}$	$x \in (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$	$x > 2+\sqrt{2}$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	קמורה $\uparrow$	קמורה $\downarrow$	קמורה $\uparrow$

ה) (3 נק') שרטוט:



ו) (4 נק')



שאלה 2 (24 נקודות)

פתרו את האינטגרלים הבאים. יש לענות על 2 מתוך 3 הסעיפים הבאים:

א) (12 נק')

$$\int \frac{\ln(3x)}{(x+5)^2}dx \ , \quad x>0 \ .$$

$u=\ln|3x|$, $v'=(x+5)^{-2}$, $u'=\frac{1}{x}$, $v=\frac{-1}{x+5}$.

$$\begin{aligned}\int uv'dx &= uv-\int u'v dx\\ &=-\frac{\ln|3x|}{x+5}+\int\frac{1}{x(x+5)}dx\\ &=-\frac{\ln|3x|}{x+5}+\int\left(\frac{\frac{1}{5}}{x}-\frac{\frac{1}{5}}{x+5}\right)dx\\ &=-\frac{\ln|3x|}{x+5}+\frac{1}{5}\ln|x|-\frac{1}{5}\ln|x+5|+C \ .\end{aligned}$$

ב) (12 נק')

$$\int e^{2x}\cos\left(2e^x\right)dx$$

$t=e^x$

$$\int e^{2x}\cos\left(2e^x\right)dx=\int e^xe^x\cos\left(2e^x\right)dx=\int e^x\cos\left(2e^x\right)e^xdx=\int t\cos\left(2t\right)t'dx$$
$$=\int t\cos\left(2t\right)dt\ .$$

$.\mathrm{v}=\frac{1}{2}\sin(2t)$,$u'=1$,$\mathrm{v}'=\cos(2t)$,$u=t$

$$\int u\mathrm{v}'dt=u\mathrm{v}-\int u'\mathrm{v}dt$$
$$\int t\cos\left(2t\right)dt=\frac{t}{2}\sin(2t)-\int\frac{1}{2}\sin(2t)dt$$
$$=\frac{t}{2}\sin(2t)+\frac{1}{4}\cos(2t)+C$$
$$=\frac{e^x}{2}\sin\left(2e^x\right)+\frac{1}{4}\cos\left(2e^x\right)+C$$

ג) (12 נק')

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{4\cos x+5}dx$$

$.t'=\frac{1}{2}1+t^2$,$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$,$t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\int_0^1\left(\frac{1}{\frac{4(1-t^2)}{1+t^2}+5}\right)\left(\frac{t'}{t'}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{\frac{4(1-t^2)}{1+t^2}+5}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{2}(1+t^2)}\right)dt$$
$$=2\int_0^1\frac{1}{4-4t^2+5+5t^2}dt$$
$$=2\int_0^1\frac{1}{9+t^2}dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{t}{3}\right)\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}\arctan\left(0\right)$$
$$=\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\ .$$

שאלה 3 (15 נקודות)

א) (12 נק') נציב $x=0$:

$$\ln\left(y(0)^2\right)=1 \quad\Rightarrow\quad y(0)^2=e$$

נתון כי $y<0$ ולכן $y=-\sqrt{e}$ כלומר הנקודה הינה $(0,-\sqrt{e})$. נגזור:

$$\frac{1}{x^2+y^2}\cdot(2x+2yy')-1=0$$

נציב $x=0$:

$$\frac{1}{y(0)^2}\cdot 2y(0)y'(0)=1$$

נציב $y(0)^2=e$ ו- $y(0)=-\sqrt{e}$:

$$\frac{-2\sqrt{e}\,y'(0)}{e}=1 \quad\Rightarrow\quad y'(0)=-\frac{\sqrt{e}}{2}\ .$$

משוואת המשיק:

$$y+\sqrt{e}=-\frac{\sqrt{e}}{2}\cdot x \quad\Rightarrow\quad y=-\sqrt{e}-\frac{\sqrt{e}}{2}\cdot x$$

משוואת הנורמל:

$$y+\sqrt{e}=\frac{2}{\sqrt{e}}\cdot x \quad\Rightarrow\quad y=-\sqrt{e}+\frac{2}{\sqrt{e}}\cdot x$$

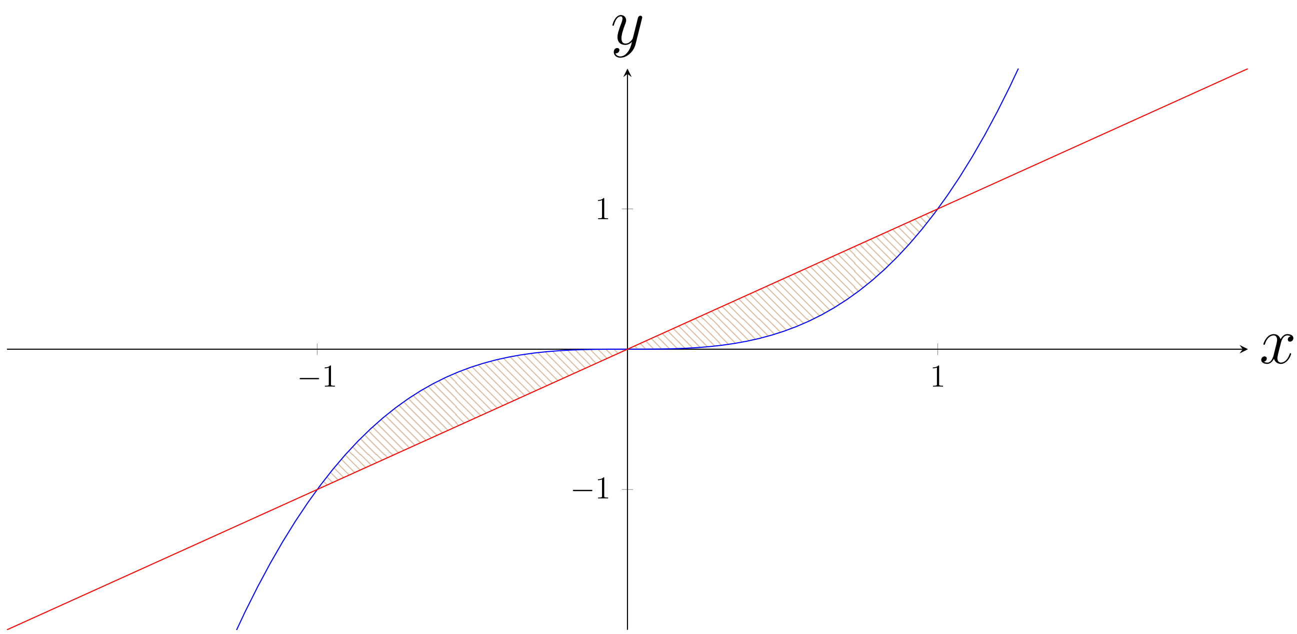
ב) (3 נק')

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2+3x+2}dx \le \int_1^\infty \frac{1}{x^2+3x+2}dx < \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty=1\ .$$

מתכנס.

שאלה 4 (15 נקודות)

א) (9 נק')



$$S = 2\int_0^1 (x - x^3) = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ .$$

ב) **(6 נק')** $f(x)$ גזירה ורציפה לכל x לכן התנאים של משפט לגרנז' מתקיימים. כמו כן f רציפה בקטע $[1,6]$ וגזירה בקטע $(1,6)$. לכן, לפי לגרנז' קיימת $c \in (1,6)$ כך ש-

$$\frac{f(6)-f(1)}{6-1} = f'(c) < 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(6)-3}{5} < 10 \quad \Rightarrow \quad f(6) < 50 + f(1) = 53\ .$$

f רציפה בקטע $[6,8]$ וגזירה בקטע $(6,8)$. שוב לפי לגרנז' לכל $c \in (6,8)$ מתקיים:

$$\frac{f(8)-f(6)}{8-6} = f'(c) < 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{9-f(6)}{2} < 10 \quad \Rightarrow \quad 9 - f(6) < 20 \quad \Rightarrow \quad f(6) > -11\ .$$

לכן הוכחנו כי

$$-11 < f(6) < 53\ .$$

שאלה 5 (15 נקודות)

א) **(6 נק')**

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x^6}{3x^2 - x - 2}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{6\ln x}{3x^2 - x - 2}\right) = \frac{0}{0} \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{6}{x}}{6x - 1}\right) = \frac{6}{5}$$

ב) **(6 נק')**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^4}{1-\cos\left(2x^2\right)}\right)=\frac{0}{1-\cos(0)}=\frac{0}{0}$$
$$\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{4x^3}{4x\sin\left(2x^2\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin\left(2x^2\right)}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^2}{\sin\left(2x^2\right)}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

ג) **(3 נק')** $\frac{1}{x^2+a}$ מוגדר לכל x אם $a>0$ ואם כך $\frac{1}{x^2+a}$ יהיה חיובי לכל x. הפונקציה $\arcsin(c)$ מוגדר, אם $-1\leq c\leq 1$. לפיכך נדרש $0<\frac{1}{x^2+a}\leq 1 \Leftarrow x^2+a\geq 1$ לכל x. ז"א $a\geq 1$.

שאלה 6 (15 נקודות)

א) **(9 נק')**

$$x=0 \quad\Rightarrow\quad \ln(t+2)=0 \quad\Rightarrow\quad t+2=1 \quad\Rightarrow\quad t=-1\ .$$

$$y(x=0)=y(t=-1)=1\ .$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2(t+2)}{\left(\frac{1}{t+2}\right)}=2(t+2)^2\ .$$

$$y'_x(x=0)=y'_x(t=-1)=2\ .$$

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{4(t+2)}{\left(\frac{1}{t+2}\right)}=4(t+2)^2$$

$$y''_{xx}(x=0)=y''_{xx}(t=-1)=4\ .$$

$$P_2(x)=y(x=0)+y'_x(x=0)x+\frac{y''_{xx}(x=0)}{2}x^2=1+2x+2x^2\ .$$

ב) <u>**(6 נק')**</u> נגדיר $f(x) = (1-x)^3 - \arctan(x)$.

$$f(1) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4} < 0 \ , \quad f(0) = 1 - \arctan(0) = 1 > 0 \ .$$

לפי משפט ערך ביניים של בולנצו קיימת $c \in (0,1)$ שבה $f(c) = 0$. הוכחנו קיום. נוכיח יחידות:

$$f'(x) = -3(1-x)^2 - \frac{1}{1+x^2} = -\left(3(1-x)^2 + \frac{1}{1+x^2}\right) \ .$$

$f'(x) < 0$ לכל x. $\Leftarrow$ f יורדת מונוטונית לכל x $\Leftarrow$ f חד חד ערכית $\Leftarrow$ השורש יחיד.

<u>שאלה 7</u> <u>(10 נקודות)</u>

$$d^2 = (x-4)^2 + (y-0)^2$$

$$\left(d^2\right)' = 2(x-4) + 2yy' = 2(x-4) + 2\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x - 8 + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$2x = \frac{15}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{15}{4} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

תשובה סופית: $\left(\frac{15}{4}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

<u>שאלה 8</u> <u>(10 נקודות)</u> נגדיר $f(x) = \frac{1}{x+3}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x+3} & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -\frac{1}{(x+3)^2} & f'(0) &= -\frac{1}{9} \\ f''(x) &= \frac{2}{(x+3)^3} & f''(0) &= \frac{2}{27} \\ f'''(x) &= \frac{-6}{(x+3)^4} & f'''(0) &= \frac{-6}{81} = \frac{-2}{27} \ . \end{aligned}$$

נחשב את הטור מקלורן של $f(x)$ עד סדר 1: $f(x) = f(0) + f'(0)x + R_1(x)$ כאשר $R_1(x) = \frac{f''(c)}{2}x^2 = \frac{1}{(c+3)^3}x^2$ שארית הטור, $(0 < c < x)$. נקבל

$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{3} - \frac{x}{9} + \frac{1}{2!}\frac{2}{(c+3)^3}x^2 = \frac{1}{3} - \frac{x}{9} + \frac{1}{(c+3)^3}x^2$$

מכיוון ש- $0<c<1$ אז $\frac{1}{(c+3)^3}>0$. בנוסף $x^2>0$ לכל $0<x<1$. אז בהכרח מתקיים $\frac{1}{(3+c)^3}x^2>0$
לפיכך

$$\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3}-\frac{x}{9}+\frac{1}{(3+c)^3}x^2>\frac{1}{3}-\frac{x}{9}\ .$$

הוכחנו את הצד שמאול של אי-השוויון.

כעת נחשב את הטור מקלורן של $f(x)$ עד סדר 2: $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+R_2(x)$
כאשר $R_2(x)=\frac{f'''(c)}{3!}x^3=\frac{-1}{(c+3)^4}x^3$ שארית הטור, ($0<c<x$). נקבל

$$\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3}-\frac{x}{9}+\frac{x^2}{27}-\frac{1}{(c+3)^4}x^3$$

מכיוון ש- $0<c<1$ אז $\frac{1}{(3+c)^4}>0$. בנוסף $x^3>0$ לכל $0<x<1$. אז בהכרח מתקיים $\frac{1}{(3+c)^4}x^3>0$.
ולכן לכל $0<x<1$ מתקיים $-\frac{1}{(3+c)^4}x^3<0$, לכן

$$\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3}-\frac{x}{9}+\frac{x^2}{27}-\frac{1}{(3+c)^4}x^3<\frac{1}{3}-\frac{x}{9}+\frac{x^2}{27}\ .$$

הוכחנו את הצד ימין של אי-השוויון.