

שעור 6

אסטרטגיות מעורבות

6.1 אסטרטגיות מעורבות

הגדרה 6.1 אסטרטגיה מעורבת

נתון משחק בצורה אסטרטגית $G = ((S_1, \dots, S_n), (u_1, \dots, u_n))$. אסטרטגיה מעורבת היא פונקציה הסתברות על כל קבוצות האסטרטגיות של השחקנים.

כלומר, אם $S_1 = (s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1k_1})$ אז נגדיר פונקציה הסתברות

$$P_{S_1}(s_{11}) = p_{11}, \quad P_{S_1}(s_{12}) = p_{12}, \quad \dots \quad P_{S_1}(s_{1k_1}) = p_{1k_1}.$$

אם $S_2 = (s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2k_2})$ אז נגדיר פונקציה הסתברות

$$P_{S_2}(s_{21}) = p_{21}, \quad P_{S_2}(s_{22}) = p_{22}, \quad \dots \quad P_{S_2}(s_{2k_2}) = p_{2k_2}.$$

אם $S_n = (s_{n1}, s_{n2}, \dots, s_{nk_n})$ אז נגדיר פונקציה הסתברות

$$P_{S_n}(s_{n1}) = p_{n1}, \quad P_{S_n}(s_{n2}) = p_{n2}, \quad \dots \quad P_{S_n}(s_{nk_n}) = p_{nk_n}.$$

דוגמה 6.1 ()

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס.

$I \backslash II$	L	R
	T	B
T	4	1
B	2	3

(א) מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות טהורות.

(ב) מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

(א)

$I \backslash II$	L	R	$\min_{s_2 \in S_2}$
	T	B	
T	4	1	1
B	2	3	2
$\max_{s_1 \in S_1}$	4	3	2, 3

ערך המקסמין של שחקן 1:

$$\underline{v} = \max_{s_1 \in \{T, B\}} \min_{s_2 \in \{L, R\}} = 2.$$

ז"א שחקן 1 יכול להבטיח שיקבל לפחות 2 אם הוא ישחק B .

ערך המינימקס של שחקן 2:

$$\bar{v} = \min_{s_2 \in \{L, R\}} \max_{s_1 \in \{T, B\}} = 3.$$

ז"א שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר 3 אם הוא ישחק R .

$$\bar{v} = 3 > 2 = \underline{v}.$$

למשחק אין ערך.

ב) כאשר לשחקן 1 יש שתי אסטרטגיות טהורות T ו- B , נזהה את האסטרטגיה המעורבת

$$[x(T), (1-x)(B)]$$

עם ההסתברות x שבה נבחרת האסטרטגיה הטהורה T .

באופן דומה, כאשר יש לשחקן 2 יש שתי אסטרטגיות טהורות L ו- R , נזהה את האסטרטגיה המעורבת

$$[y(L), (1-y)(R)]$$

עם ההסתברות y שבה נבחרת האסטרטגיה הטהורה L .

לכל זוג אסטרטגיות מעורבות התשלום ניתן על ידי פונקצית התועלת

$$U(x, y) = 4xy + 1x(1-y) + 2(1-x)y + 3(1-x)(1-y) = 4xy - 2x - y + 3.$$

ראשית נחשב לכל $x \in [0, 1]$ את

$$\min_{y \in [0, 1]} U(x, y) = \min_{y \in [0, 1]} (4xy - 2x - y + 3) = \min_{y \in [0, 1]} (y(4x - 1) - 2x + 3)$$

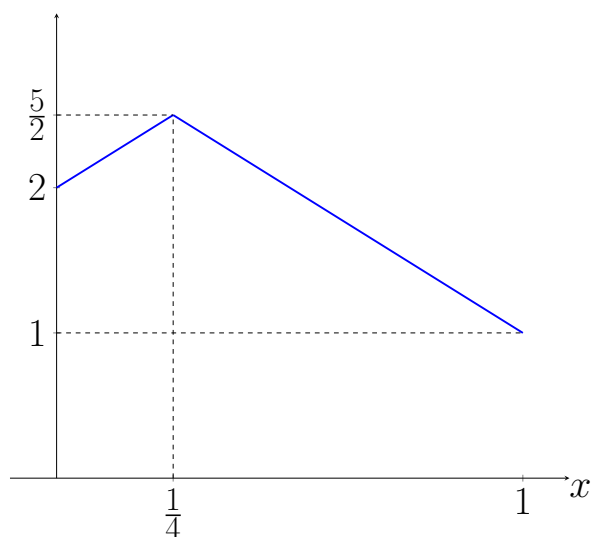
עבור x קבוע זוהי פונקציה לינארית ב- y , ולכן הנקודה שבה המינימום מתקבל נקבעת לפי השיפוע $4x - 1$.

אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה והמינימום מתקבל ב- $y = 0$.

אם השיפוע שלילי הפונקציה יורדת והמינימום מתקבל ב- $y = 1$.

אם השיפוע 0 הפונקציה קבועה וכל הנקודות הן נקודות מינימום. לכן

$$\min_{y \in [0, 1]} u(x, y) = \begin{cases} 2x + 2 & x \leq \frac{1}{4}, \\ -2x + 3 & x \geq \frac{1}{4}, \end{cases}$$

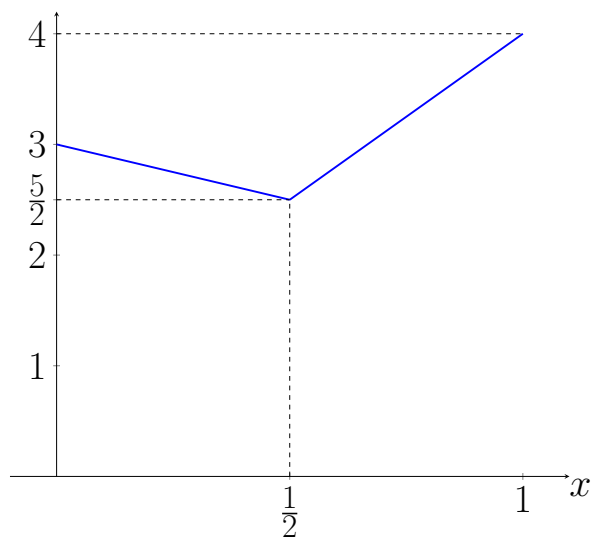


לפונקציה זו של x יש מקסימום יחיד ב- $x = \frac{1}{4}$ וערכו $\frac{5}{2}$. לכן

$$\underline{v} = \max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} U(x, y) = \frac{5}{2}.$$

באופן דומה נחשב:

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0,1]} U(x, y) &= \max_{x \in [0,1]} [4xy - 2x - y + 3] \\ &= \max_{x \in [0,1]} [x(4y - 2) - y + 3] \\ &= \begin{cases} -y + 3 & y \leq \frac{1}{2}, \\ 3y + 1 & y \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$



לפונקציה זו של y יש מינימום יחיד ב- $y = \frac{1}{2}$ וערכו $\frac{5}{2}$. לכן

$$\bar{v} = \min_{y \in [0,1]} \max_{x \in [0,1]} U(x, y) = \frac{5}{2}.$$

כלומר, למשחק יש ערך $v = \underline{v} = \bar{v} = \frac{5}{2}$, והאסטרטגיות האופטימליות הן $x^* = \frac{1}{4}$, $y^* = \frac{1}{2}$.

מכיוון ש- x^* ו- y^* הן אסטרטגיות האופטימליות היחידות של השחקנים, אז (x^*, y^*) הוא שיווי המשקל נאש היחיד במשחק.

■

דוגמה 6.2 ()

נתון משחק שני שחקנים (שאינו סכום אפס) בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

$I \backslash II$	L	R
T	1, -1	0, 2
B	0, 1	2, 0

מצאו התשלום מקסמין והתשלום מינמקס באסטרטגיות מעורבות.

מצאו שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

ראשית נחשב את התשלום מקסמין של השחקנים.

קבוצות האסטרטגיות של שחקן 1:

$$S_1 = \{[x(T), (1-x)(B)] \mid x \in [0, 1]\}.$$

המזוהה עם הקטע $[0, 1]$.

קבוצות האסטרטגיות של שחקן 2:

$$S_2 = \{[y(L), (1-y)(R)] \mid y \in [0, 1]\}.$$

פונקצית התועלת של שחקן 1:

$$U_1(x, y) = xy + 2(1-x)(1-y) = 3xy - 2x - 2y + 2.$$

פונקצית התועלת של שחקן 2:

$$U_2(x, y) = -xy + 2x(1-y) + y(1-x) = -4xy + 2x + y.$$

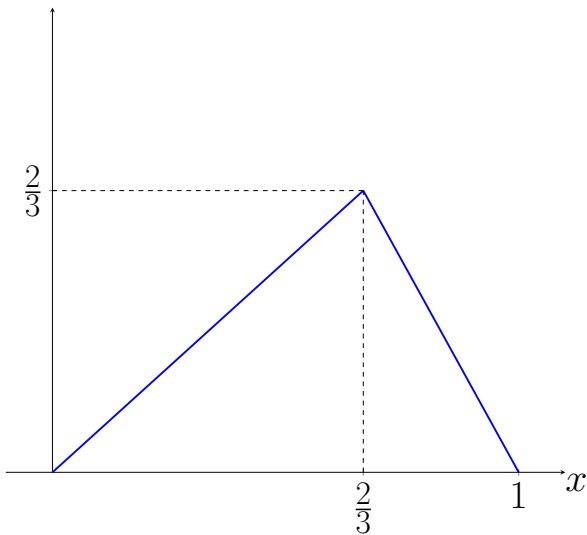
התשלום מקסמין של שחקן 1 הינו:

$$\underline{v}_1 = \max_{x \in [0, 1]} \min_{y \in [0, 1]} U_1(x, y).$$

התשלום מקסמין של שחקן 2 הינו:

$$\underline{v}_2 = \max_{y \in [0, 1]} \min_{x \in [0, 1]} U_2(x, y).$$

$$\begin{aligned}\min_{y \in [0,1]} U_1(x, y) &= \min_{y \in [0,1]} 3xy - 2x - 2y + 2 \\ &= \min_{y \in [0,1]} y(3x - 2) - 2x + 2 \\ &= \begin{cases} x & x \leq \frac{2}{3} \\ -2x + 2 & x \geq \frac{2}{3} \end{cases}\end{aligned}$$



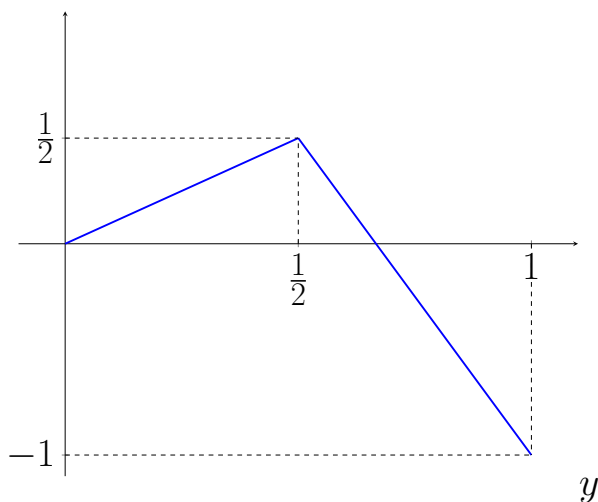
לפונקציה זו יש מקסימום ב- $x = \frac{2}{3}$. לפיכך

$$\underline{v}_1 = \max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} U_1(x, y) = \frac{2}{3} .$$

התשלום מקסמין של שחקן 2 הינו:

$$\underline{v}_2 = \max_{y \in [0,1]} \min_{x \in [0,1]} U_2(x, y) .$$

$$\begin{aligned}\min_{x \in [0,1]} U_2(x, y) &= \min_{x \in [0,1]} 3xy - 2x - 2y + 2 \\ &= \min_{x \in [0,1]} x(2 - 4y) + y \\ &= \begin{cases} y & y \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 3y & y \geq \frac{1}{2} \end{cases}\end{aligned}$$



לפונקציה זו יש מקסימום ב- $y = \frac{1}{2}$. לפיכך

$$\underline{v}_2 = \max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} U_2(x, y) = \frac{1}{2}.$$

כעת נחשב את השיווי משקל של המשחק באסטרטגיות מעורבות. נסמן תשובה טובה ביותר של שחקן 2 לאסטרטגיה x של שחקן 1 כ:

$$\sigma_2(x) = \operatorname{argmax}_{y \in [0,1]} U_2(x, y) = \{y \in [0, 1], U_2(x, y) \geq U_2(x, z) \forall z \in [0, 1]\}$$

במילים פשוטות $\sigma_2(x)$ הוא אוסף של כל הערכים של y עבורם ל- $U_2(x, y)$ יש מקסימום.

כדי לחשב את $\sigma_2(x)$ רושמים בצורה

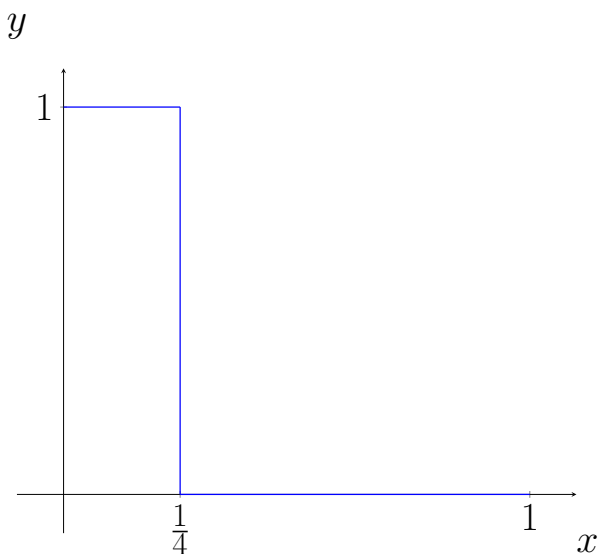
$$U_2(x, y) = y(1 - 4x) + 2x.$$

עבור x קבוע זוהי פונקציה לינארית ב- y , ולכן הנקודה שבה המינימום מתקבל נקבעת לפי השיפוע $1 - 4x$.

אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה והמקסימום מתקבל ב- $y = 1$.

אם השיפוע שלילי הפונקציה יורדת והמקסימום מתקבל ב- $y = 0$.

אם השיפוע 0 הפונקציה קבועה וכל הנקודות הן נקודות מקסימום. הסימן של השיפוע משתנה ב- $x = \frac{1}{4}$. הגרף של $\sigma_2(x)$ מתואר להלן.



שימו לב ש- $\sigma_2(x)$ לא פונקציה בגלל ש- $\sigma_2\left(\frac{1}{4}\right)$ לא שווה לנקודה אלא לתחום $[0, 1]$.

נסמן תשובה טובה ביותר של שחקן 1 לאסטרטגיה y של שחקן 2 כ:

$$\sigma_1(y) = \operatorname{argmax}_{x \in [0,1]} U_1(x, y) = \{x \in [0, 1], U_1(x, y) \geq U_1(x, z) \forall z \in [0, 1]\}$$

במילים פשוטות $\sigma_1(y)$ הוא אוסף של כל הערכים של x עבורם ל- $U_1(x, y)$ יש מקסימום.

כדי לחשב את $\sigma_1(y)$ רושמים $U_1(x, y)$ בצורה

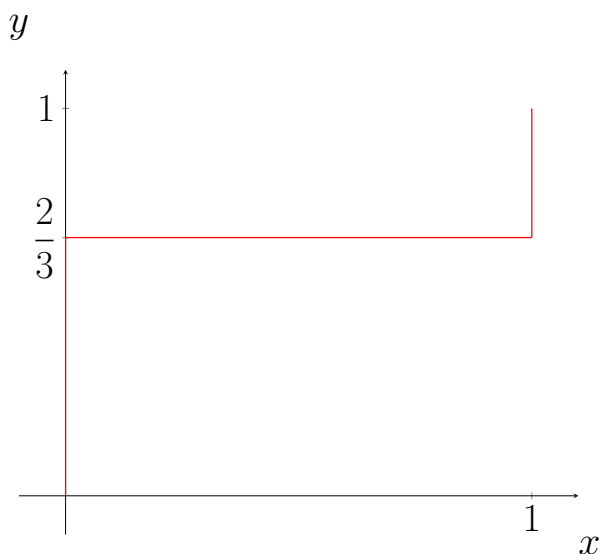
$$U_1(x, y) = x(3y - 2) - 2y + 2.$$

עבור y קבוע זוהי פונקציה לינארית ב- x , ולכן הנקודה שבה המינימום מתקבל נקבעת לפי השיפוע $3y - 2$.

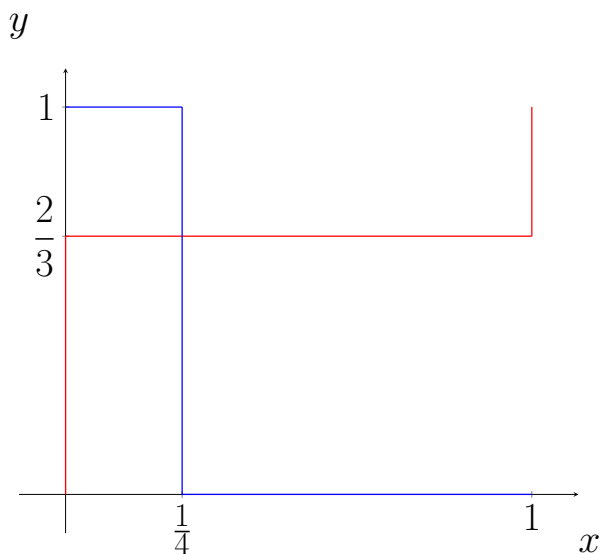
אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה והמקסימום מתקבל ב- $x = 1$.

אם השיפוע שלילי הפונקציה יורדת והמקסימום מתקבל ב- $x = 0$.

אם השיפוע 0 הפונקציה קבועה וכל הנקודות הן נקודות מקסימום. הסימן של השיפוע משתנה ב- $y = \frac{2}{3}$. הגרף של $\sigma_1(y)$ מתואר להלן.



הצמד אסטרטגיות (x^*, y^*) נקודת שיווי משקל אם ורק אם $x^* \in \sigma_1(y^*)$ ו- $y^* \in \sigma_2(x^*)$. במילים אחרות נדרש כי הנקודה (x^*, y^*) תהיה על שני הגרפים של $\sigma_2(x)$ ו- $\sigma_1(y)$. הנקודה היחידה שמקיימת את התנאי הזה היא $\left(x^* = \frac{1}{4}, y^* = \frac{2}{3}\right)$.



לכן השיווי משקל היחיד של המשחק הוא $\left(x^* = \frac{1}{4}, y^* = \frac{2}{3}\right)$ והתשלומים לשחקן 1 ולשחקן 2 של השיווי משקל הם

$$U_1(x^*, y^*) = \frac{2}{3}, \quad U_2(x^*, y^*) = \frac{1}{2}.$$

■

6.2 שיטה ישירה למציאת אסטרטגיה אופטימלית

דוגמה 6.3 ()

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

$I \backslash II$	L	R
T	5	0
B	3	4

מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

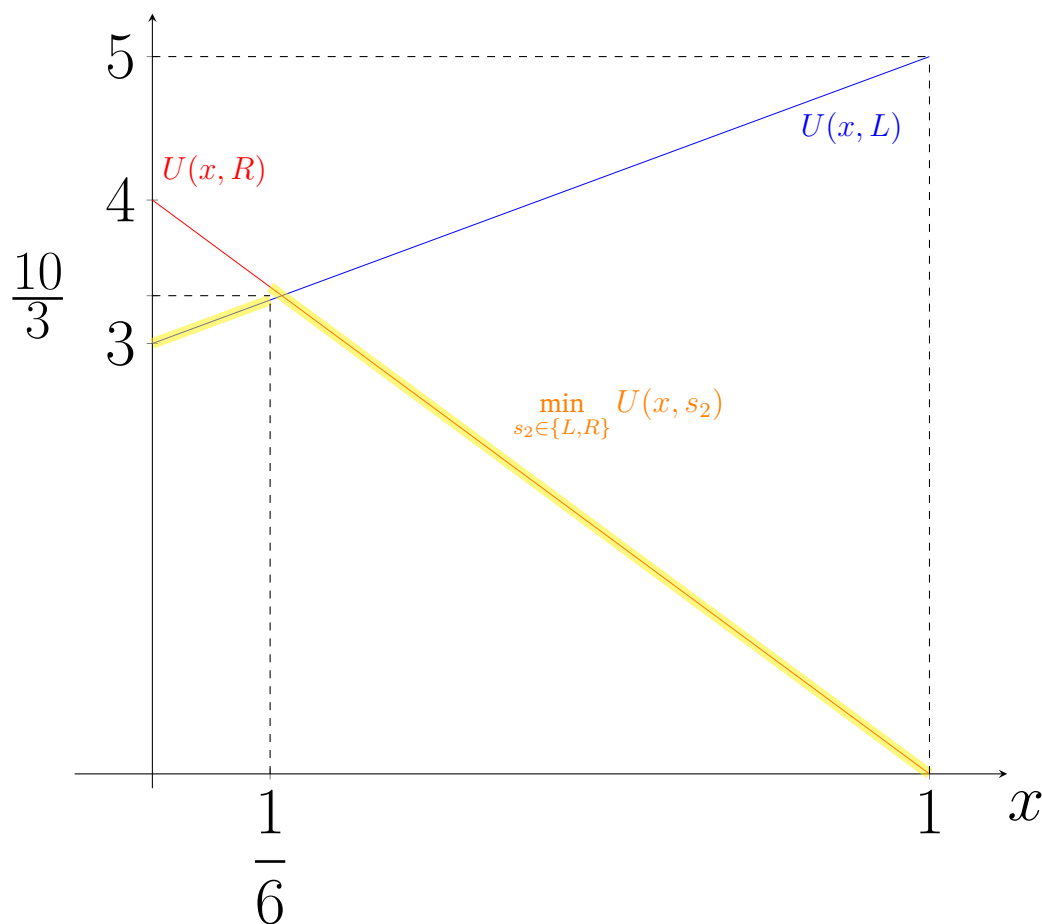
פתרון:

תחילה נחשב את המקסמין של שחקן 1. אם שחקן 1 משחק את האסטרטגיה המעורבת $[x(T), (1-x)(B)]$ התשלום שלו כפונקציה של x תלוי על האסטרטגיה של שחקן 2:

• אם שחקן 2 משחק L אז $U(x, L) = 5x + 3(1-x) = 2x + 3.$

• אם שחקן 2 משחק R אז $U(x, R) = 4(1-x) = -4x + 4.$

הגרף למטה מראה את הגרפים של הפונקציות האלו. הקו של $\min_{s_2 \in \{L, R\}} U(x, s_2)$ מראה את התשלום המינימלי ששחקן 1 יקבל אם הוא משחק x . הקו הזה נקרא **מעטפת תחתונה** של התשלומים.



הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות שווה ל- $\max_{x \in [0,1]} \min_{s_2 \in \{L,R\}} U(x, s_2)$, אשר מתקבל בנקודת מקסימום של המעטפת התחתונה. המקסימום מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של שתי הפונקציות, כלומר בנקודה

$$2x + 3 = -4x + 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{6}.$$

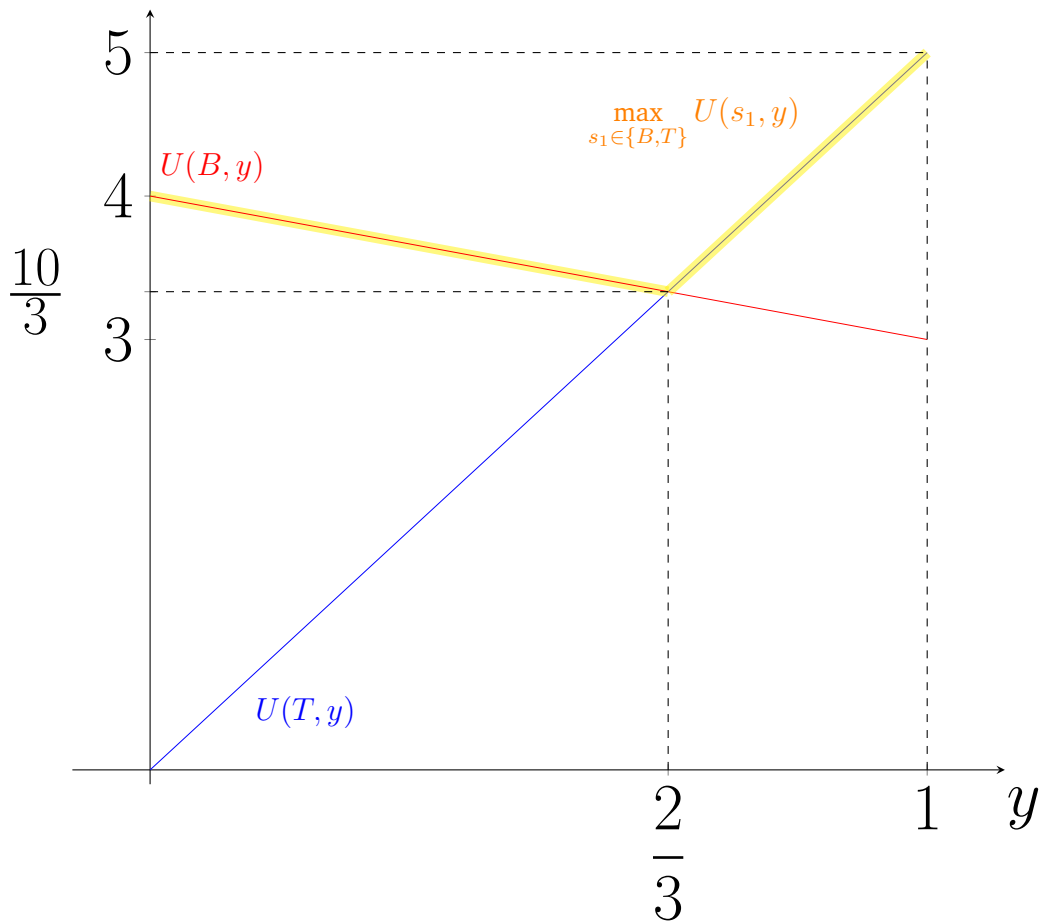
מכאן האסטרטגיה האופטימלית של שחקן 1 היא $x^* = \left(\frac{1}{6}(T), \frac{5}{6}(B)\right)$. הערך של המשחק שווה לגובה של הנקודת חיתוך: $v = \frac{10}{3}$.

כעת נחשב את המינמקס של שחקן 2. אם שחקן 2 משחק את האסטרטגיה המעורבת $[y(L), (1-y)(R)]$ התשלום שלו כפונקציה של y תלוי על האסטרטגיה של שחקן 1:

• אם שחקן 1 משחק T אז $U(T, y) = 5y$.

• אם שחקן 1 משחק B אז $U(B, y) = 4 - y$.

הגרף למטה מראה את הגרפים של הפונקציות האלו. הקו של $\max_{s_1 \in \{B,T\}} U(s_1, y)$ מראה את התשלום המקסימלי ששחקן 2 יקבל אם הוא משחק y . הקו הזה נקרא **מעטפת עליונה** של התשלומים.



הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות שווה ל- $\min_{y \in [0,1]} \max_{s_1 \in \{B,T\}} U(s_1, y)$, אשר מתקבל בנקודת מינימום של המעטפת העליונה. המינימום מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של שתי הפונקציות, כלומר בנקודה

$$5y = 4 - y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}.$$

מכאן האסטרטגיה האופטימלית של שחקן 2 היא $y^* = \left(\frac{2}{3}(L), \frac{1}{3}(R)\right)$. הערך של המשחק שווה לגובה של הנקודת

חיתוך: $v = \frac{10}{3}$. ■

דוגמה 6.4 ()

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

$I \backslash II$	L	M	R
T	2	5	-1
B	1	-2	5

מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

נחשב את המקסמין של שחקן 1. אם שחקן 1 משחק את האסטרטגיה המעורבת $[x(T), (1-x)(B)]$ התשלום שלו כפונקציה של x תלוי על האסטרטגיה של שחקן 2:

• אם שחקן 2 משחק L אז $U(x, L) = 2x + (1-x) = 1 + x$.

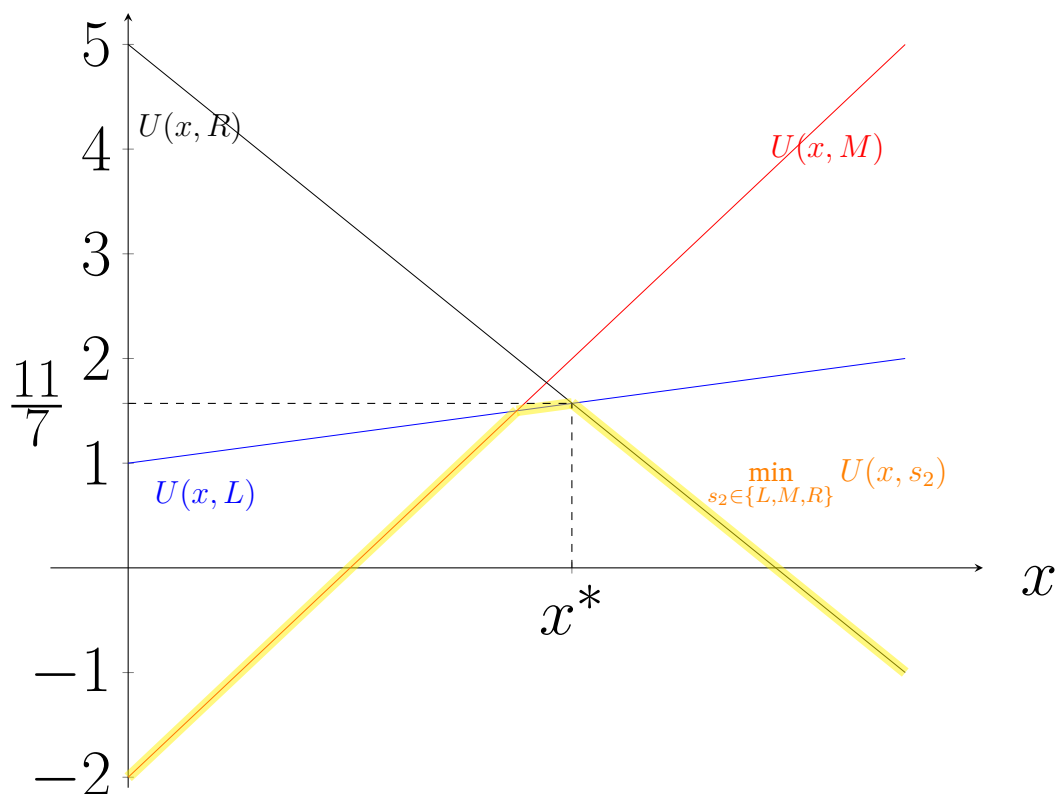
$$U(x, M) = 5x - 2(1 - x) = 7x - 2.$$

• אם שחקן 2 משחק M אז

$$U(x, R) = -x + 5(1 - x) = -6x + 5.$$

• אם שחקן 2 משחק R אז

התרשים למטה מתאר את הגרפים של שלוש פונקציות אלו.



המקסימום של המעטפת התחתונה מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של $U(x, L)$ ו- $U(x, R)$:

$$1 + x \stackrel{!}{=} -6x + 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{7}$$

■

6.3 חישוב נקודות שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות

דוגמה 6.5 ()

נתון משחק שני שחקנים בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

$I \backslash II$	F	C
F	2, 1	0, 0
C	0, 0	1, 2

מצאו שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

לכל אסטרטגיה מעורבת, $[x(F), (1-x)(C)]$ של שחקן 1, הקבוצת תשובות טובות ביותר של שחקן 2 הן

$$\sigma_2(x) = \arg \max_{y \in [0,1]} u_2(x, y) = \{y \in [0, 1] \mid u_2(x, y) \geq u_2(x, z) \forall z \in [0, 1]\} .$$

כדי לחשב את $\sigma_2(x)$, נרשום את $U_2(x, y)$:

$$U_2(x, y) = xy + 2(1-x)(1-y) = 3xy - 2x - 2y + 2 = y(3x - 2) - 2x + 2 .$$

לכל x קבוע זוהי פונקציה לינארית של y .

$$\bullet \quad x > \frac{2}{3} \Leftrightarrow \text{השיפוע חיובי ויש מקסימום ב- } y = 1 .$$

$$\bullet \quad x < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \text{השיפוע שלילי ויש מקסימום ב- } y = 0 .$$

$$\bullet \quad x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \text{השיפוע שווה אפס והפונקציה קבוע וכל נקודה } y \in [0, 1] \text{ נקודת מקסימום} .$$

השיפוע משתנה מחיובי לשלילי ב- $x = \frac{2}{3}$. הגרף של $\sigma_2(x)$ מתואר בתרשים למטה.

באותה מידה, לכל אסטרטגיה מעורבת, $[y(F), (1-y)(C)]$ של שחקן 2, הקבוצת תשובות טובות ביותר של שחקן 1 הן

$$\sigma_1(y) = \arg \max_{x \in [0,1]} u_1(x, y) = \{x \in [0, 1] \mid u_1(x, y) \geq u_1(z, y) \forall z \in [0, 1]\} .$$

כדי לחשב את $\sigma_1(y)$, נרשום את $U_1(x, y)$:

$$U_1(x, y) = 2xy + (1-x)(1-y) = 3xy - x - y + 1 = x(3y - 1) - y + 1 .$$

לכל y קבוע זוהי פונקציה לינארית של x .

$$\bullet \quad y > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{השיפוע חיובי ויש מקסימום ב- } x = 1 .$$

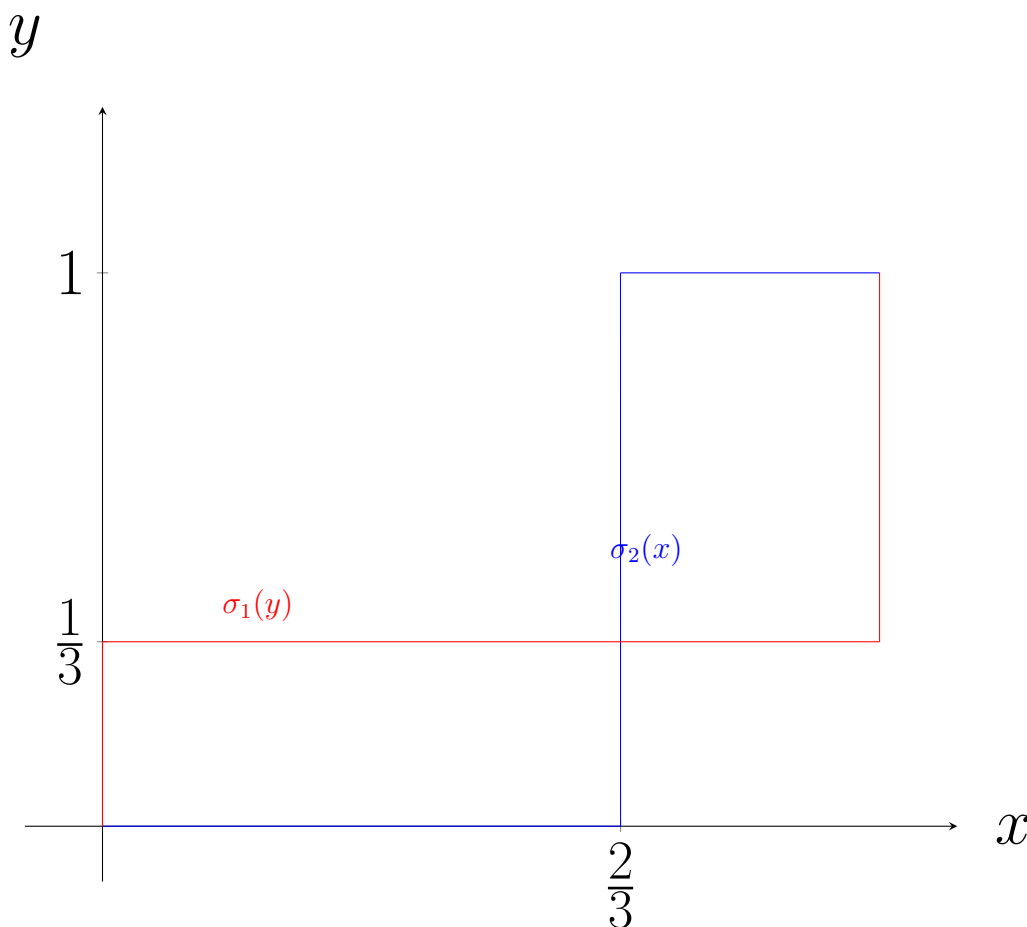
$$\bullet \quad y < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{השיפוע שלילי ויש מקסימום ב- } x = 0 .$$

$$\bullet \quad y = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{השיפוע שווה אפס והפונקציה קבוע וכל נקודה } x \in [0, 1] \text{ נקודת מקסימום} .$$

השיפוע משתנה מחיובי לשלילי ב- $y = \frac{1}{3}$. הגרף של $\sigma_1(y)$ מתואר בתרשים למטה.

לסיכום, עבור משחק זה,

$$\sigma_2(x) = \begin{cases} 0 & x < \frac{2}{3} , \\ [0, 1] & x = \frac{2}{3} , \\ 1 & x > \frac{2}{3} , \end{cases} , \quad \sigma_1(y) = \begin{cases} 0 & y < \frac{1}{3} , \\ [0, 1] & y = \frac{1}{3} , \\ 1 & y > \frac{1}{3} , \end{cases}$$



נקודה (x^*, y^*) היא שיווי משקל אם ורק אם $x^* \in \sigma_1(y^*)$ ו- $y^* \in \sigma_2(x^*)$. ז"א (x^*, y^*) נקודת שיווי משקל אם ורק אם היא נקודת חיתוך של הגרפים של $\sigma_1(y)$ ו- $\sigma_2(x)$. יש 3 נקודות חיתוך:

• $(x^*, y^*) = (0, 0)$ אשר מתאימה לאסטרטגיה טהורה (C, C) .

• $(x^*, y^*) = (1, 1)$ אשר מתאימה לאסטרטגיה טהורה (F, F) .

• $(x^*, y^*) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ אשר היא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות

$$x^* = \left[\frac{2}{3}(F), \frac{1}{3}(C) \right], \quad y^* = \left[\frac{1}{3}(F), \frac{2}{3}(C) \right],$$

■

6.4 תחרות דואפול על פי קורנוט

דוגמה 6.6 ()

שני יצרניים 1 ו-2 מייצרים אותו מוצר ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאליים. היצרנים מחליטים סימולטנית על הכמות שהם ייצרו, וההיצע הכולל קובע את מחיר המוצר, שהוא זהה לשני היצרנים. נסמן ב- q_1 וב- q_2 את הכמויות שמייצרים היצרנים 1 ו-2 בהתאמה. אזי הכמות הכוללת של מוצרים בשוק היא $q_1 + q_2$. נניח כי המחיר של יחידה שווה ל-

$$2 - q_1 - q_2.$$

עלות הייצור של יחידה ליצרן הראשון היא $c_1 > 0$ וליצרן השני היא $c_2 > 0$. האם קיים שיווי משקל במשחק

זה, ואם כן, מה הוא?

פתרון:

זהו משחק שני שחקנים (היצרנים 1 ו-2) שבו קבוצת האסטרטגיות של כל שחקן היא $[0, \infty)$. אם שחקן 1 בוחר באסטרטגיה q_1 ושחקן 2 בוחר באסטרטגיה q_2 , התשלום לשחקן 1 הוא

$$u_1(q_1, q_2) = q_1(2 - q_1 - q_2) - q_1 c_1 = q_1(2 - c_1 - q_1 - q_2), \quad (*)$$

והתשלום לשחקן 2 הוא

$$u_2(q_1, q_2) = q_2(2 - q_1 - q_2) - q_2 c_2 = q_2(2 - c_2 - q_1 - q_2).$$

התשובה בטובה ביותר של שחקן 1 לאסטרטגיה q_2 של שחקן 2 הוא ערך q_1 המביא למקסימום את $u_1(q_1, q_2)$. הפונקציה $q_1 \mapsto u_1(q_1, q_2)$ היא פונקציה ריבועית עם מקסימום בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = 0.$$

על ידי גזירה של אגף ימין של משוואה (*) נקבל את התנאי $2 - c_1 - 2q_1 - q_2 = 0$ או

$$q_1 = \frac{2 - c_1 - q_2}{2}. \quad (1*)$$

באותו אופן, התשובה הטובה ביותר של שחקן 2 לאסטרטגיה q_1 של שחקן 1 היא ערך q_2 שבו הנגזרת של $u_2(q_1, q_2)$ לפי q_2 מתאפסת. על ידי גזירה נקבל

$$q_2 = \frac{2 - c_2 - q_1}{2}. \quad (2*)$$

פתרון המשוואות (1*) ו-(2*) נותן

$$q_1^* = \frac{2 - 2c_1 + c_2}{3}, \quad q_2^* = \frac{2 - 2c_2 + c_1}{3}.$$

זה אמנם שיווי משקל וזהו שיווי משקל היחיד של המשחק. התשלומים של השחקנים בשיווי משקל זה הם

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{2 - 2c_1 + c_2}{3} \right)^2 = (q_1^*)^2, \quad u_2(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{2 - 2c_2 + c_1}{3} \right)^2 = (q_2^*)^2.$$

כעת נוכיח כי הצמד אסטרטגיות (q_1^*, q_2^*) מהווה נקודת שיווי משקל. יש להוכיח כי q_1^* תשובה טובה ביותר לשחקן 1 ביחס ל- q_2^* ולהפך.

$$u(q_1, q_2^*) = q_1(2 - c_1 - q_1 - q_2^*) = -q_1^2 + (2 - c_1 - q_2^*)q_1.$$

לכן $u(q_1, q_2^*)$ פולינום מסדר 2 של q_1 , כאשר המקדם של q_1^2 הוא -1. לכן המקסימום המתקבל הוא

$$q_1 = \frac{(2 - c_1 - q_2^*)}{2} = \frac{(2 - c_1 - \frac{2 - 2c_2 + c_1}{3})}{2} = q_1^*.$$

בפרט q_1^* תשובה טובה ביותר של שחקן 2 ביחס ל- q_2^* .

