תרגילים 9: סיבוכיות

שאלה 1 נתונות שתי בעיות A ו- B מעל אותו אלפיביט Σ, שני אלגוריתמי אימות V_1 ו- V_2 עבור A ו- B (בהתאמה) הרצים בזמן פולינומיאלי.

א) בנו אלגוריתם אימות V עבור הבעיה $A \cup B$. תארו במילים את האלגוריתם והוכיחו את נכונה הבניה.

ב) הוכיחו כי אלגוריתם שבניתם בסעיף א' רץ בזמן פולינומיאלי.

שאלה 2 בעיית $PARTITION$ מוגדרת באופן הבא:

בהינתן קבוצת מספרים $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, האם קיימת חלוקה של A לשתי קבוצות A_1 ו- A_2 כך ש-

- $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
- $A_1 \cup A_2 = A$
- $\sum_{a_i \in A_1} a_i = \sum_{a_i \in A_2} a_i = \frac{1}{2} \sum_{a_i \in A} a_i$.

בנו מכונט טיורינג אי-דטרמיניסטית המכריעה את $PARTITION$ בזמן פולינומיאלי.

שאלה 3 נתונה בעיה A ונתון אלגוריתם M_A המכריע עת A בזמן פולינומיאלי. נגדיר את הבעיה $B = \left\{ww \;\middle|\; w \in A\right\}$.

א) בנו אלגוריתם M_B המכריע את B. תארו במילים את האלגוריתם והוכיחו את נכונות הבניה.

ב) האם האלגוריתם שבניתם רץ בזמן פולינומיאלי? הסבירו.

שאלה 4 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לשאלה פתוחה:

קיים אלגוריתם המקבל כקלט גרף לא מכוון G ומכריע בזמן פולינומיאלי האם G מכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל 1000.

תשובות

שאלה 1

א) הרעיון:

V מקבל בקלט זוג (w,y) ורוצה לבדוק האם y הוא עדות לזה ש- $w \in A \cup B$.

לצורך זה V מריץ את V_1 על הזוג (w,y).
אם V_1 קיבל אזי V מקבל.
אחרת, V מריץ את V_2 על הזוג (w,y) ועונה כמוה.

האלגוריתם

$V =$ על קלט (w,y):

1) מריץ את V_1 על (w,y).

- אם V_1 מקבל $\Leftarrow$ V מקבל.
- אם V_1 דוחה $\Leftarrow$ V מריץ את V_2 על (w,y) ועונה כמוה.

נכונות

אם $w \in A \cup B$

$\Leftarrow$ $w \in A$ או $w \in B$

$\Leftarrow$ קיימת עדות y כך ש- V_1 מקבל את הזוג (w,y) או V_2 מקבל את הזוג (w,y).

$\Leftarrow$ קיימת עדות y כך ש- V מקבל את הזוג (w,y).

אם $w \notin A \cup B$

$\Leftarrow$ $w \notin A$ וגם $w \notin B$

$\Leftarrow$ לכל עדות y, V_1 דוחה את הזוג (w,y) וגם V_2 דוחה את הזוג (w,y).

$\Leftarrow$ לכל עדות y, V דוחה את הזוג (w,y).

ב) נסמן p_1 הפולינום של V_1.
נסמן p_2 הפולינום של V_2.

אזי זמן הריצה של V חסום על ידי $O\left(p_1\left(|w|\right)+p_2\left(|w|\right)\right)$ ולכן V פולינומיאלי בגודל $|w|$.

שאלה 2

נבנה מ"ט א"ד M המכריעה את $PARTITION$ בזמן פולינומיאלי.

$M =$ על קלט $\langle A\rangle$:

1) בוחרת באופן א"ד תת-קבוצות A_1 של A.

2) בודקת האם סכום האיברים של A_1 שווה חצי מסכום האיברים של A.

- אם כן $\Leftarrow$ מקבלת.
- אם לא $\Leftarrow$ דוחה.

<u>נכונות הבנייה</u>

אם $\langle A\rangle \in PARTITION$

$\Leftarrow$ קיימת חלוקה של A ל- A_1 ו- A_2 כך ש- $\sum_{a_i\in A_1} a_i = \sum_{a_i\in A_2} a_i = \frac{1}{2}\sum_{a_i\in A} a_i$

$\Leftarrow$ קיימת ריצה של M בה תבחר את A_1 ותבדוק שהסכום שלה שווה חצי הסכום של A

$\Leftarrow$ קיימת ריצה של M בה תקבל את $\langle A\rangle$.

אם $\langle A\rangle \notin PARTITION$

$\Leftarrow$ לא קיימת חלוקה של A ל- A_1 ו- A_2 כך ש- $\sum_{a_i\in A_1} a_i = \sum_{a_i\in A_2} a_i = \frac{1}{2}\sum_{a_i\in A} a_i$

$\Leftarrow$ בכל ריצה של M על A היא תבחר תת-קבוצה A_1 ותבדוק ותדחה

$\Leftarrow$ בכל ריצה של M על $\langle A\rangle$, M תדחה את $\langle A\rangle$.

זמן הריצה של M פולינומיאלי בגודל הקלט $\langle A\rangle$.

<u>שאלה 3</u>

א) $M_B =$ על קלט $w' = \sigma_1 \dots \sigma_n$:

1) אם $w' = \varepsilon$ מריץ את M_A על w'.

- אם M_A מקבל $\Leftarrow$ M_B מקבל.
- אם M_A דוחה $\Leftarrow$ M_B דוחה.

2) $i \leftarrow 1$

3) בודק האם $\sigma_1 \cdots \sigma_i = \sigma_{i+1} \cdots \sigma_n$ (או לבדוק האם $i = \frac{n}{2}$)

- אם כן $\Leftarrow$ מריץ את M_A על $\sigma_1 \cdots \sigma_i$.
  - אם M_A מקבל $\Leftarrow$ M_B מקבל.
  - אם M_A דוחה $\Leftarrow$ M_B דוחה.

4) $i \leftarrow i+1$.

5)
- אם $i < n$ $\Leftarrow$ חוזר ל- (3).
- אחרת $\Leftarrow$ M_B דוחה.

<u>נכונות</u>

אם $w' \in B$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

- $w' = \varepsilon$ וגם $\varepsilon \in A$ $\Leftarrow$ M_B מקבלת את w'.
- $w' = ww \neq \varepsilon$ וגם $w \in A$ $\Leftarrow$ עבור $i = \frac{|w'|}{2}$ מתקיים $\sigma_1 \cdots \sigma_i = \sigma_{i+1} \cdots \sigma_n$ וגם $\sigma_1 \cdots \sigma_i \in A$ $\Leftarrow$ באיטרציה i, M_B מקבלת את w'.

אם $w' \notin B$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

- $w'=\varepsilon$ וגם $A \Leftarrow \varepsilon \notin A$ M_B דוחה את w'.
- $w' \neq \varepsilon \Leftarrow$ שני מקרים
  - עבור $i=\frac{|w'|}{2}$ מתקיים $\sigma_1\cdots\sigma_i \neq \sigma_{i+1}\cdots\sigma_n \Leftarrow M_B$ דוחה את w'.
  - עבור $i=\frac{|w'|}{2}$ מתקיים $\sigma_1\cdots\sigma_i = \sigma_{i+1}\cdots\sigma_n$ אבל $\sigma_1\cdots\sigma_i \notin A \Leftarrow M_B$ דוחה את w'.

ב) נסמן ב- p_A הפולינום של M_A.

מבצעים לכל היותר $|w'|$ איטרציות ובכל איטרציה עושים בדיקה האם $\sigma_1\cdots\sigma_i = \sigma_{i+1}\cdots\sigma_n$ בזמן $O\left(|w'|\right)$, ואם כן, מריצים את M_A על $\sigma_1\cdots\sigma_i$ בזמן $p_A\left(|w'|\right)$.

ולכן זמן הריצה הוא

$$O\left(|w'|^2 + p_A\left(|w'|\right)\right)$$

שאלה 4 הטענה נכונה.

ניתן לבנות אלגוריתם שיעבור על כל התתח-קבוצות בגודל 1000 קודקודים מ- G ויבדוק לכל תת-קבוצה האם היא קבוצה בלתי תלויה בזמן פולינומיאלי ויחזיר תשובה בהתאם.

מכיוון שמספר התת-קבוצות בגודל 1000 שווה $2^{1000} \approx$ שזה קבוע, זמן הריצה של האלגוריתם פולינמיאלי.