שיעור 13
אינטגרציה של פונקציוצת טריגונומטריות ואי רציאונליות

13.1 הצבה אוניברסלית

בהינתן אינטגרל מצורה

$$\int f(\sin x, \cos x)\, dx$$

כאשר f פונקציה רציונלית, לדוגמה

$$\int \frac{2\sin x + 3\cos x + 2}{4\cos^2 x + 3}\, dx$$

קיימת הצבה אוניברסלית:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$\Leftarrow$

$$t' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(1+t^2)\ .$$

ניתו לבטא הפונקציות הטריגונומטריות באמצעות t כפי רשום בטבלה:

$\sin x$	$\frac{2t}{1+t^2}$
$\cos x$	$\frac{1-t^2}{1+t^2}$
$\tan x$	$\frac{2t}{1-t^2}$
t'	$\frac{1}{2}(1+t^2)$

הוכחה של הזהויות (לא צריך לדעת אבל כיף לקרוא)

$$\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)} = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{\left(1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

דוגמה 13.1

חשבו את: $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$

פתרון:

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$t' = \frac{1+t^2}{2}$

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\cdot t'dx &= \int\frac{2}{(1+t^2)\cdot\frac{2t}{1+t^2}}\,dt\\ &= \int\frac{1}{t}\,dt\\ &= \ln|t| + C = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\end{aligned}$$

■

דוגמה 13.2

חשבו את: $\int \frac{1}{3+\sin x+\cos x}\,dx$

פתרון:

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$t' = \frac{1+t^2}{2}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{(1+t^2)}\cdot t'dx &= \int \frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{(1+t^2)}dt\\
&= \int \frac{2}{3+3t^2+2t+1-t^2}dt\\
&= \int \frac{2}{4+2t^2+2t}dt\\
&= \int \frac{1}{2+t^2+t}dt\\
&= \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}dt\\
&= \int \frac{1}{z^2+\frac{7}{4}}dt\\
&=\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2z}{\sqrt{7}}\right)+C\\
&=\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{7}}\right)+C\\
&=\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{7}}\right)+C\\
&=\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{7}}\right)+C\ .
\end{aligned}$$

■

דוגמה 13.3

חשבו את: $\int \frac{1}{4\sin x-3\cos x-5}\,dx$

פתרון:

$t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$

$t'=\frac{1+t^2}{2}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{4\sin x - 3\cos x - 5}\,dx &= \int \left(\frac{1}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2} - 3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} - 5}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,t'\,dx \\
&= \int \left(\frac{2}{8t - 3(1-t^2) - 5(1+t^2)}\right)dt \\
&= \int \left(\frac{2}{8t - 3 + 3t^2 - 5 - 5t^2}\right)dt \\
&= \int \left(\frac{2}{8t - 8 - 2t^2}\right)dt \\
&= \int \left(\frac{-1}{t^2 - 4t + 4}\right)dt \\
&= \int \left(\frac{-1}{(t-2)^2}\right)dt \\
&= \frac{1}{t-2} + C \\
&= \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 2} + C
\end{aligned}$$

■

13.2 אינטגרציה של $\displaystyle\int \sin^m x \cos^n x\,dx$

1) אם $m \in \mathbb{N}$ מספר זוגי, מגדירים $t = \sin x$.

2) אם $n \in \mathbb{N}$ מספר זוגי, מגדירים $t = \cos x$.

3)
- אם $n, m \geq 0 \in \mathbb{N}$ זוגיים,
- האינטגרל מצורה $\displaystyle\int \sin^m x\,dx$
- האינטגרל מצורה $\displaystyle\int \cos^m x\,dx$

משתמשים בזהויות טריגונומטריות:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\ , \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\ , \qquad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}\ .$$

דוגמה 13.4

חשבו את: $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$

פתרון:

$$\begin{aligned}
\int \cos^3 x dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x\,dx \\
&= \int (1 - \sin^2 x)\cos x\,dx
\end{aligned}$$

$t = \sin x$ $t' = \cos x$

$$\begin{aligned}\int (1-t^2)t'\,dx =& \int (1-t^2)\,dt\\ =& t - \frac{t^3}{3} + C\\ =& \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C\end{aligned}$$

■

דוגמה 13.5

חשבו את: $\int \cos^2 x \sin^3 x\,dx$

פתרון:

$$t = \cos x$$
$$t' = -\sin x$$

$$\begin{aligned}\int (1-t^2)t^3\,dx =& -\int (1-t^2)t^2\cdot t'\,dx\\ =& -\int (1-t^2)t^2\,dt\\ =& -\int (t^2-t^4)\,dt\\ =& \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C\\ =& \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C\ .\end{aligned}$$

■

דוגמה 13.6

חשבו את: $\int \sin^2 x\,dx$

פתרון:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx =& \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx\\ =& \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C\end{aligned}$$

■

דוגמה 13.7

חשבו את: $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$

פתרון:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \int (\sin x \cos x)^2 \, dx \\ &= \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \, dx \\ &= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C\end{aligned}$$

■

13.3 אינטגרציה של פונקציות אי-רציונליות (חיסול שורשים)

בהינתן אינטגרל מצורה

$$\int f(x,\sqrt{a^2-x^2}) \ , \qquad \int f(x,\sqrt{a^2+x^2}) \ , \qquad \int f(x,\sqrt{x^2-a^2})$$

כאשר f פונקציה רציונלית, קיימת הצבה אוניברסלית:

מקרה 1) $\sqrt{a^2-x^2}$

$x = a \cdot \sin t$

מקרה 2) $\sqrt{a^2+x^2}$

$x = a \cdot \tan t$

מקרה 3) $\sqrt{x^2-a^2}$

$x = \dfrac{a}{\sin t}$

דוגמה 13.8

חשבו את: $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$

פתרון:

$$x = 2\sin t$$

$$x'_t = 2\cos t$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx &= \int \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t}dx \\
&= \int \frac{2\sqrt{1-\sin^2 t}}{4\sin^2 t}dx \\
&= \int \frac{2\cos t}{4\sin^2 t}dx \\
&= \int \frac{2\cos t}{4\sin^2 t} \cdot \left(\frac{2\cos t}{x'_t}\right) dx \\
&= \int \frac{4\cos^2 t}{4\sin^2 t}dt \\
&= \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt \\
&= \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt \\
&= \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right) dt \\
&= (\cot t - t) + C \\
&= \cot\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C \ .
\end{aligned}$$

■

דוגמה 13.9

חשבו את: $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}\, dx$

פתרון:

$x = \frac{1}{\sin t}$

$x'_t = \frac{\cos t}{\sin^2 t}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}dx =& \int \frac{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}}{\frac{1}{\sin^3 t}}dx \\
=& \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}\sin^3 t}{\sin t}dx \\
=& \int \cos t \sin^2 t dx \\
=& \int \cos t \sin^2 t \cdot \left(\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)\frac{1}{x'_t}\,dx \\
=& \int \cos^2 t\,dt \\
=& \int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt \\
=& \frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+C \\
=& \frac{\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}{2}+\frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{2}+C\ .
\end{aligned}$$

■

דוגמה 13.10

חשבו את: $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+9}\,dx$

פתרון:

$$x=3\tan t\ , \qquad x'_t=\frac{3}{\cos^2 t}$$

$$\int 3\tan t\cdot\sqrt{9\tan^2 t+9}\,dx=\int 3\tan t\cdot 3\sqrt{\tan^2 t+1}\,dx$$

זהות: $\tan^2 t+1=\dfrac{1}{\cos^2 t}$

$$\begin{aligned}
9\int \tan t\cdot\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}\,dx =& 9\int \tan t\cdot\frac{1}{\cos t}\,dx \\
=& 9\int \tan t\cdot\frac{1}{\cos t}\cdot x'_t\cdot\frac{1}{x'_t}\,dx = \quad 9\int \tan t\cdot\frac{1}{\cos t}\cdot x'_t\,dt \\
=& 9\int \tan t\cdot\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{3}{\cos^2 t}\,dt \\
=& 27\int \tan t\cdot\frac{1}{\cos^3 t}\,dt \\
=& 27\int \frac{\sin t}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos^3 t}\,dt \\
=& 27\int \frac{\sin t}{\cos^4 t}\,dt
\end{aligned}$$

$$z = \cos t \qquad z'_t = -\sin t$$

$$\begin{aligned} 27 \int \frac{\sin t}{\cos^4 t}\, dt &= 27 \int \frac{z'}{z^4}\, dt \\ &= 27 \int \frac{1}{z^4}\, dz \\ &= 27 \cdot \frac{-1}{3z^3} + C \\ &= \frac{81}{3\cos^3 t} + C \\ &= \frac{81}{3\cos^3\left(\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right)} + C \end{aligned}$$

■