

תרגילים: גרם שמידט

שאלה 1 נתון התת מרחב

$$U = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

של המרחב מכפלה פנימית \mathbb{C}^3 .

(א) מצאו בסיס אורתוגונלי.

(ב) מצאו בסיס אורתונורמלי.

שאלה 2 מצאו בסיס אורתוגונלי של התת-מרחב

$$U = \text{span} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

של המרחב מכפלה פנימית $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

שאלה 3 מצאו בסיס אורתוגונלי של התת-מרחב

$$U = \text{span} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

של המרחב מכפלה פנימית $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

שאלה 4 יהי $V = R_{\leq 2}[x]$ מרחב מכפלה פנימית עם המכפלה הפנימית הבאה:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

ונתבונן בתת המרחב הבא: $W = \text{span}\{1, x\}$.

(א) מצאו בסיס אורתוגונלי ל W .

(ב) השלימו את הבסיס האורתוגונלי שמצאתם בסעיף א לבסיס אורתוגונלי למרחב V .

(ג) נסמן ב- $P_W : V \rightarrow V$ את אופרטור ההטלה האורתוגונלית על W . נניח ש- B הוא הבסיס הסדור שמצאתם בסעיף ב של V כך שאברי הבסיס B_W הם האברים הראשונים. מצאו את $[P_W]_B^B$.

שאלה 5

נתון מרחב ווקטורי $\mathbb{R}_3[x]$ עם מכפלה פנימית אינטגרלית בקטע $[-1, 1]$:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) dx.$$

(א) מצאו בסיס אורתוגונלי למרחב $V = \text{span} \{1 - 3x, x, 5x^3 + 8\}$.

(ב) מצאו את ההיטל האורתוגונלי של כל אחד מהווקטורים:

$$w_1 = 38 - 16x + 24x^3, \quad w_2 = 3x^2 + 5x^3,$$

שאלה 6 נתון מרחב וקטורי $\mathbb{R}_3[x]$ (פולינומים מדרגה 3 לכל היותר) עם מכפלה פנימית אינטגרלית בקטע $[-1, 1]$

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx.$$

מצאו בסיס אורתוגונלי למרחב $U = \text{span} \{1, x, x^2\}$.

תשובות

שאלה 1

(א) נבנה בסיס אורתוגונלי של V_2 ע"י שיטת גרם שמידט:

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \|u_1\|^2 = 2.$$

$$\begin{aligned} u_2 &= v_2 - \frac{1}{\|u_1\|^2} \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1 \\ &= \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

בסה"כ קיבלנו בסיס אורתוגונלי של V_2 :

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ i \end{pmatrix} \right\}.$$

(ב) כעת נבנה בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{ \hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \hat{u}_2 = \sqrt{\frac{1}{6}} \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ i \end{pmatrix} \right\}.$$

שאלה 2 נמצא בסיס א"ג של

$$\{v_1, v_2, v_3\}$$

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\|u_1\|^2 = \text{tr}(u_1^t \cdot u_1) = \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

$$\langle v_2, u_1 \rangle = \text{tr} (u_1^t \cdot v_2) = \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 .$$

לכן

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

$$\langle v_3, u_1 \rangle = \text{tr} (u_1^t \cdot v_3) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0 .$$

$$\langle v_3, u_2 \rangle = \text{tr} (u_2^t \cdot v_3) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = 2 .$$

$$\|u_2\|^2 \text{tr} (u_2^t \cdot u_2) = \frac{6}{7} \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2 .$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן בסיס אורתונורמלי:

$$U = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

שאלה 3 נשים לב כי הקבוצה $\{v_1, v_2, v_3\}$ בת"ל ו- $v_4 = 2v_3$. לכן $\dim(U) = 3$. נמצא בסיס א"ג של $\{v_1, v_2, v_3\}$.

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\|u_1\|^2 = \text{tr} (u_1^t \cdot u_1) = \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 14 .$$

$$\langle v_2, u_1 \rangle = \text{tr} (u_1^t \cdot v_2) = \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2 .$$

לכן

$$u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ 4 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} .$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

$$\langle v_3, u_1 \rangle = \text{tr} (u_1^t \cdot v_3) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right) = 15 .$$

$$\langle v_3, u_2 \rangle = \text{tr} (u_2^t \cdot v_3) = \frac{6}{7} \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{15}{14} & -\frac{15}{7} \\ 0 & \frac{25}{14} \end{pmatrix} = \frac{5}{14} \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} -\frac{85}{78} & -\frac{80}{39} \\ \frac{20}{39} & \frac{45}{26} \end{pmatrix}$$

לכן בסיס אורתונורמלי:

$$U = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{6}{7} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -\frac{85}{78} & -\frac{80}{39} \\ \frac{20}{39} & \frac{45}{26} \end{pmatrix} \right\} .$$

שאלה 4

$V = R_{\leq 2}[x]$ מרחב מכפלה פנימית:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx .$$

נסמן

$$W = \text{span} \{ u_1 = 1, u_2 = x \} .$$

(א) נמצא בסיס אורתונורמלי ל W .

$$v_1 = u_1 = 1 .$$

$$\|v_1\|^2 = 1$$

$$\begin{aligned} v_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \\ &= x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{1} \cdot 1 \\ &= x - \langle x, 1 \rangle . \end{aligned}$$

$$\langle x, 1 \rangle = \int_0^1 dx \, 1 \cdot x = \int_0^1 dx \, x = \int_0^1 dx \, x = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

לכן

$$v_2 = x - \frac{1}{2} .$$

לכן נקבל הבסיס האורתונורמלי

$$B = \left\{ v_1 = 1, v_2 = \left(x - \frac{1}{2} \right) \right\}$$

$$\|v_1\|^2 = 1$$

$$\|v_2\|^2 = \langle v_2, v_2 \rangle = \int_0^1 dx \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

לכן נקבל הבסיס האורתונורמלי

$$\hat{B} = \left\{ 1, \sqrt{12} \left(x - \frac{1}{2}\right) \right\}$$

(ב) נמצא בסיס אורתוגונלי של W^\perp . נסמן $p(x) = a + bx + cx^2$.

$$p(x) \in W^\perp \Leftrightarrow \langle p(x), 1 \rangle = 0, \quad \langle p(x), x \rangle = 0.$$

$$\langle a + bx + cx^2, 1 \rangle = \int_0^1 dx (a + bx + cx^2) = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$$

$$\langle a + bx + cx^2, x \rangle = \int_0^1 dx x \cdot (a + bx + cx^2) = \int_0^1 dx (ax + bx^2 + cx^3) = \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4}$$

$$\left. \begin{aligned} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} &= 0 \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 6a + 3b + 2c = 0 \\ 6a + 4b + 3c = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

פתרון: $(a, b, c) = \left(\frac{1}{6}, -1, 1\right) c = \frac{1}{6} (1, -6, 6) c$ לכן

$$B_{W^\perp} = \{1 - 6x + 6x^2\}$$

(ג) לכל $w \in W$:

$$P_W(w) = w.$$

לכל $w^\perp \in W^\perp$:

$$P_W(w^\perp) = 0.$$

לכן

$$[P_W]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

(א) נסמן

$$v_1 = 1 - 3x, \quad v_2 = x, \quad v_3 = 5x^3 + 8.$$

$$u_1 = v_1 = 1 - 3x.$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\|u_1\|^2 = \int_{-1}^1 dx (1 - 3x)^2 = \left[\frac{(1 - 3x)^3}{-9} \right]_{-1}^1 = \frac{(-2)^3 - 4^3}{-9} = \frac{-72}{-9} = 8.$$

$$\langle v_2, u_1 \rangle = \int_{-1}^1 dx x(1 - 3x) = \int_{-1}^1 dx (x - 3x^2) = \left[\frac{x^2}{2} - x^3 \right]_{-1}^1 = -2.$$

לכן

$$u_2 = \frac{x + 1}{4}.$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

$$\langle v_3, u_1 \rangle = \int_{-1}^1 dx (5x^3 + 8)(1 - 3x) = \int_{-1}^1 dx (5x^3 - 15x^4 + 8 - 24x) = \left[\frac{5x^4}{4} - 3x^5 + 8x - 12x^2 \right]_{-1}^1 = 10.$$

$$\langle v_3, u_2 \rangle = \int_{-1}^1 dx \frac{1}{4}(x+1)(5x^3 + 8) = \int_{-1}^1 dx \left(\frac{5x^4}{4} + \frac{5x^3}{4} + 2x + 2 \right) = \left[\frac{x^5}{4} + \frac{5x^4}{16} + x^2 + 2x \right]_{-1}^1 = \frac{9}{2}.$$

$$\|u_2\|^2 = \int_{-1}^1 dx \left(\frac{x+1}{4} \right)^2 = \frac{1}{16} \int_{-1}^1 dx (x+1)^2 = \frac{1}{16} \left[\frac{(x+1)^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{6}.$$

לכן

$$\begin{aligned} u_3 &= 5x^3 + 8 - \frac{10}{8}(1 - 3x) - \frac{\left(\frac{9}{2}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)} \cdot \left(\frac{x+1}{4}\right) \\ &= 5x^3 + 8 - \frac{5}{4} + \frac{15x}{4} - \frac{27}{4} \cdot (x+1) \\ &= 5x^3 + 8 - \frac{32}{4} - \frac{12x}{4} \\ &= 5x^3 + 8 - 8 - 3x \\ &= 5x^3 - 3x. \end{aligned}$$

בסיס אורתונורמלי:

$$U = \left\{ u_1 = 1 - 3x, \quad u_2 = \frac{x+1}{4}, \quad u_3 = 5x^3 - 3x \right\}.$$

(ב) $w_1 \in U$ לכן

$$P_U(w_1) = w_1 .$$

$$P_U(w_2) = \frac{\langle w_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle w_2, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 + \frac{\langle w_2, u_3 \rangle}{\|u_3\|^2} u_3$$

$$\langle w_2, u_1 \rangle = \int_{-1}^1 dx (5x^3 + 3x^2) (1 - 3x) = \int_{-1}^1 dx (-15x^4 - 4x^3 + 3x^2) = [-3x^5 - x^4 + x^3]_{-1}^1 = -4 .$$

$$\langle w_2, u_2 \rangle = \int_{-1}^1 dx \frac{1}{4}(x+1) (5x^3 + 3x^2) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dx (5x^4 + 8x^3 + 3x^2) = \frac{1}{4} [x^5 + 2x^4 + x^3]_{-1}^1 = 1 .$$

$$\begin{aligned} \langle w_2, u_3 \rangle &= \int_{-1}^1 dx (5x^3 - 3x) (5x^3 + 3x^2) \\ &= \int_{-1}^1 dx (25x^6 + 15x^5 - 15x^4 - 9x^3) \\ &= \left[\frac{25x^7}{7} + \frac{15x^6}{6} - \frac{15x^5}{5} - \frac{9x^4}{4} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{25}{7} + \frac{5}{2} - 3 - \frac{9}{4} - \left(\frac{25 \cdot (-1)}{7} + \frac{5}{2} - 3 \cdot (-1) - \frac{9}{4} \right) \\ &= \frac{25}{7} + \frac{25}{7} - 3 - 3 \\ &= \frac{50}{7} - 6 \\ &= \frac{50 - 42}{7} \\ &= \frac{8}{7} . \end{aligned}$$

$$\|u_3\|^2 = \int_{-1}^1 dx (5x^3 - 3x)^2 = \int_{-1}^1 dx (25x^6 - 30x^4 + 9x^2) = \left[\frac{25x^7}{7} - 6x^5 + 3x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{8}{7} .$$

$$\begin{aligned} P_U(w_2) &= \frac{-4}{8}(1 - 3x) + \frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)} \left(\frac{x+1}{4} \right) + \frac{\left(\frac{8}{7}\right)}{\left(\frac{8}{7}\right)} (5x^3 - 3x) \\ &= \frac{-1}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{6}{4}(x+1) + 5x^3 - 3x \\ &= \frac{-1}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{3}{2} + 5x^3 - 3x \\ &= 1 + 3x + 5x^3 - 3x \\ &= 1 + 5x^3 . \end{aligned}$$

שאלה 6

נסמן

$$v_1 = 1, \quad v_2 = x, \quad v_3 = x^2.$$

$$U = \text{span} \{v_1, v_2, v_3\}$$

נבנה בסיס אורתוגונלי באמצעות תהליך גרם שמידט:

$$u_1 = v_1 = 1.$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\|u_1\|^2 = \int_{-1}^1 dx (1)^2 = [x]_{-1}^1 = 2.$$

$$\langle v_2, u_1 \rangle = \int_{-1}^1 dx x = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = 0.$$

לכן

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = x - \frac{0}{2} x = x.$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

$$\langle v_3, u_1 \rangle = \int_{-1}^1 dx x^2 = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}.$$

$$\langle v_3, u_2 \rangle = \int_{-1}^1 dx x^2 \cdot x = \int_{-1}^1 dx x^3 = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = 0.$$

$$\|u_2\|^2 = \int_{-1}^1 dx x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}.$$

לכן

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = x^2 - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{2} \cdot 1 - \frac{0}{\left(\frac{2}{3}\right)} x = x^2 - \frac{1}{3}$$

קיבלנו בסיס אורתוגונלי של U :

$$U = \left\{ u_1 = 1, \quad u_2 = x, \quad u_3 = x^2 - \frac{1}{3} \right\}.$$