חדו"א 1

תוכן העניינים

שיעור 1
תכונות של פונקציה ופונקציות אלמנטריות

קבוצות של מספרים

קבוצה זה אוסף של עצמים. ישנן שתי דרכים להגדרת קבוצה ספציפית.

<u>דרך 1:</u>

לתת רשימה שלמה של איברים. לדוגמה:

$$A=\{1,2,3,4,5\}$$

<u>דרך 2:</u>

לתת תנאי שמאפיין את איברי הקבוצה, בצורה

$$A=\{x|x \text{ תנאי שמאפיין את}\}$$

לגודמה:

$$A=\{x|2\le x\le 5 \text{ מספר ממשי וגם } x\}$$

אם $A=\{1,3,4,5\}$ אז $1,3,4,5$ שייכים לקבוצה A ומספרים $1\in A$, $3\in A$, $4\in A$, $5\in A$.

סדר האיברים בקבוצה אינו חשוב, לכן

$$\{1,2,3\}=\{2,1,3\}\ .$$

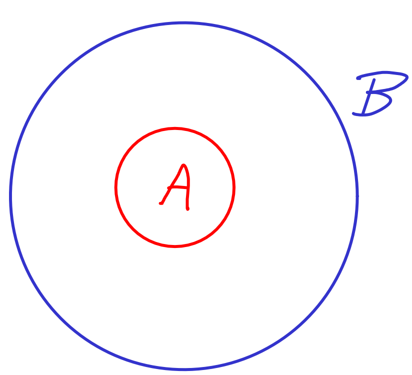
לא משנה כמה פעמים איבר מופיע ברשימה האיברים, ז"א

$$\{1,2,3\}=\{1,2,3,2\}\ .$$

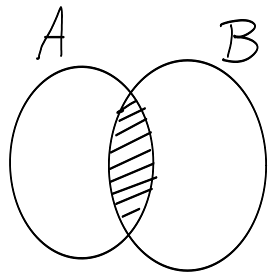
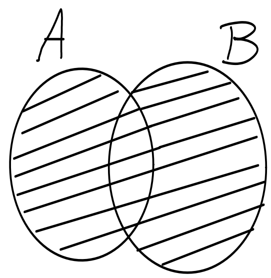
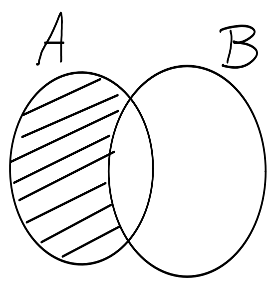
קבוצה ללא איברים מסומנת ב- $\emptyset$. כלומר

$$\emptyset=\{\}\ .$$

אומרים ש- A היא תת קבוצה של B אם כל איבר של A שייך ל- B. מסמנים תת קבוצה בצורה $A\subset B$.



פעולות בין קבוצות

חיתוך של קבוצות		$A \cap B = \{x \mid x \in A$ וגם $x \in B\}$
איחוד של קבוצות		$A \cup B = \{x \mid x \in A$ או $x \in B\}$
הפרש בין קבוצות		$A - B = \{x \mid x \notin B$ וגם $x \in A\}$

קבוצות של מספרים

קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

קבוצת המספרים השלמים: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

קבוצת המספרים הרציונלים: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid n \neq 0, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}\}$

שים לב,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}\ .$$

המספרים הרציונלים מקיימים את תכונת הצפיפות. ז"א בין כל שני מספרים רציונלים יש מספר רציונלי אחר. אבל עדיין קיימות הרבה מאוד נקודות על הציר שלא מתאימות לאף מספר רציונלי.

1.1 טענה.
לא קיים מספר רציונלי שהריבוע שלו שווה ל-2.

הוכחה.
נוכיח בדרך השלילה. נניח שקיים מספר רציונלי $\frac{m}{n}$ כך ש-

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \ .$$

אפשר להניח ש- $\frac{m}{n}$ שבר מצומצם. אז
$$m^2 = 2n^2 \ ,$$
ז"א m^2, מספר זוגי, ולכן גם m מספר זוגי. כלומר ניתן לבטא m כ $m = 2k$ כאשר $k \in \mathbb{Z}$ (k מספר שלם).
אז נקבל
$$m = 2k \qquad \Rightarrow \qquad 4k^2 = 2n^2 \qquad \Rightarrow \qquad n^2 = 2k^2 \ .$$
לכן n^2 זוגי $\Leftarrow$ n זוגי. זאת אומרת m ו- n מספרים זוגיים. לכן אפשר לצמצם את השבר ב- 2. סתירה.
כלומר, לא קיים מספר רציונלי שריבועו שווה ל- 2. ■

אחרי שממלאים את כל הציר, מקבלים את קבוצת המספרים הממשיים, $\mathbb{R}$. ז"א

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

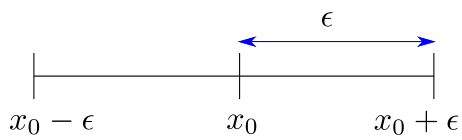
סביבות וקטעים

קטע סגור	$[a,b]$	$=$	$\{x \vert a \le x \le b\}$
קטע פתוח	(a,b)	$=$	$\{x \vert a < x < b\}$
קטע חצי פתוח	$[a,b)$	$=$	$\{x \vert a \le x < b\}$
קטע חצי פתוח	$(a,b]$	$=$	$\{x \vert a < x \le b\}$
קטע חד פתוח	$[a,\infty)$	$=$	$\{x \vert x \ge a\}$
קטע חד פתוח	(a,∞)	$=$	$\{x \vert x > a\}$
קטע חד פתוח	$(-\infty,b]$	$=$	$\{x \vert x \le b\}$
קטע חד פתוח	$(-\infty,b)$	$=$	$\{x \vert x < b\}$
קטע חד פתוח	$(-\infty,\infty)$	$=$	$\{x \vert -\infty < x < \infty\} = \mathbb{R}$

1.2 הגדרה: (סביבה של נקודה)

א) כל קטע פתוח (a,b) שמכיל נקודה x_0 נקרא סביבה של x_0.

ב) קטע פתוח $(x_0+\epsilon, x_0-\epsilon)$ נקרא ϵ- סביבה של נקודה x_0.



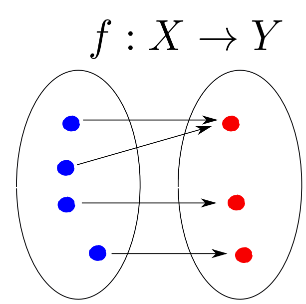
x_0 נמצא באמצע הקטע ϵ- מרחק מהאמצע עד הקצה.

מושג של פונקציה

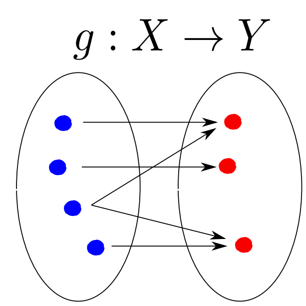
1.1 הגדרה: (פונקציה)
פונקציה

$$f:X\to Y$$

היא כלל המתאימה לכל איבר $x\in X$ איבר יחיד $y\in Y$.



פונקציה



לא פונקציה

1.2 הגדרה: (תחום הגדרה, טווח ותמונה של פונקציה)
תהי f הפונקציה

$$f:X\to Y$$

מקבוצה X לקבוצה Y.

א) הקבוצה X נקראת **תחום ההגדרה** של f. התחום הגדרה מסומן ב- $\mathrm{dom}(f)$, כלומר

$$\mathrm{dom}(f)=X\ .$$

ב) הקבוצה Y נקראת ה **טווח** של f. הטווח מסומן ב- $\text{Rng}(f)$, ז"א

$$\text{Rng}(f) = Y \ .$$

ג) **התמונה** של פונקציה f מסומנת ב- $\text{Im}(f)$ ומוגדרת באופן הבא:

$$\text{Im}(f) = \{y | \forall y \in Y \ \exists \ x \in X \ : \ f(x) = y\}$$

או במילים פשוטות,

$\text{Im}(f)$ היא הקבוצה $\{y\}$ כך שלכל $y \in Y$ קיים $x \in X$ כך ש $f(x) = y$ מתקיים.

דוגמא.
תהי f הפונקציה המוגדרת ע"י הנוסחה

$$f(x) = (x+2)^2.$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \ , \qquad \text{Rng}(f) = \mathbb{R} \ , \qquad \text{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \ .$$

כאשר $\mathbb{R}^+$ מסמן את הקבוצת המספרים הממשיים גדולים או שווים ל-0.

1.3 הגדרה: (חד חד ערכית)
תהי

$$f : X \to Y$$

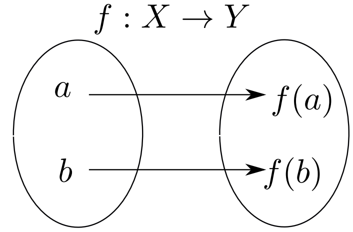
פונקציה. f תקרא חד חד ערכית אם לכל $a, b \in X$,

$$a \neq b \qquad \Rightarrow \qquad f(a) \neq f(b) \ ,$$

או שקול

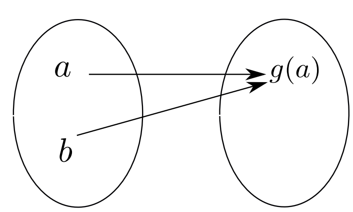
$$f(a) = f(b) \qquad \Rightarrow \qquad a = b \ .$$

$f : X \to Y$



פונקציה חח"ע

$g : X \to Y$



פונקציה לא חח"ע

1.4 הגדרה: (על)
תהי

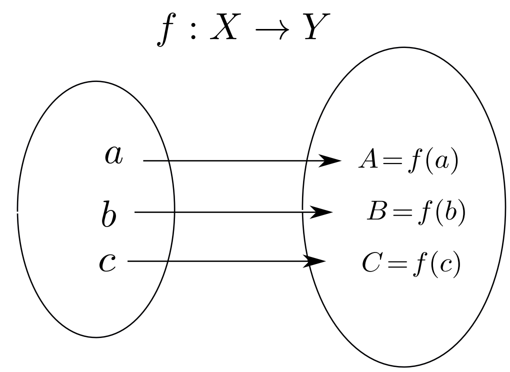
$$f : X \to Y$$

פונקציה. f תקרא על Y, אם לכל $y \in Y$ קיים $x \in X$ כך ש-

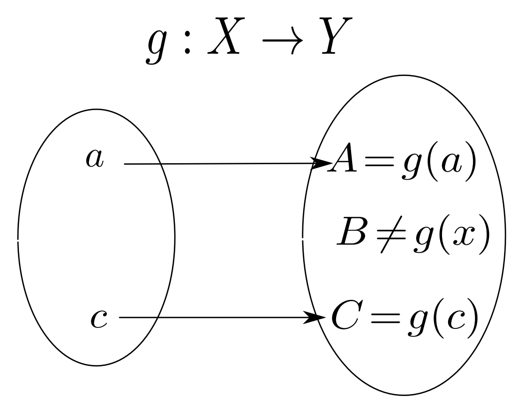
$$f(x) = y \ .$$

במילים אחרות, $\mathrm{Im}(f) = Y$.

פונקציה על

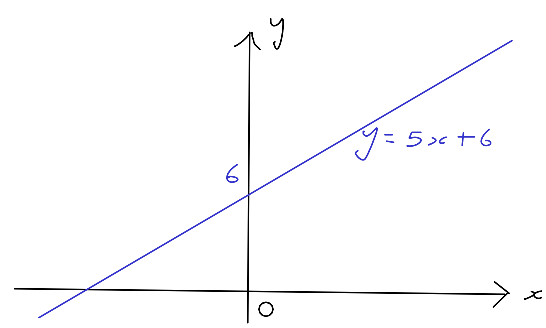


פונקציה לא על



דוגמאות.

1. $f(x) = 5x + 6$.

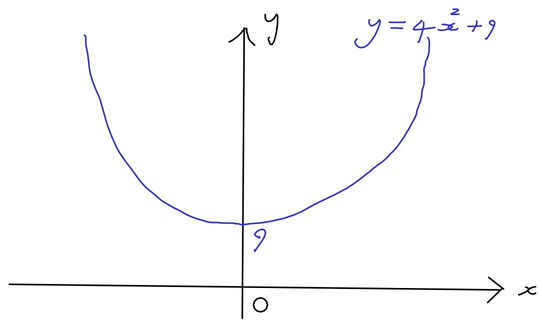


$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \ , \quad \mathrm{Rng}(f) = \mathbb{R} \ , \quad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \ .$$

f חד חד ערכית ועל.

---

2. $f(x) = 4x^2 + 9$.

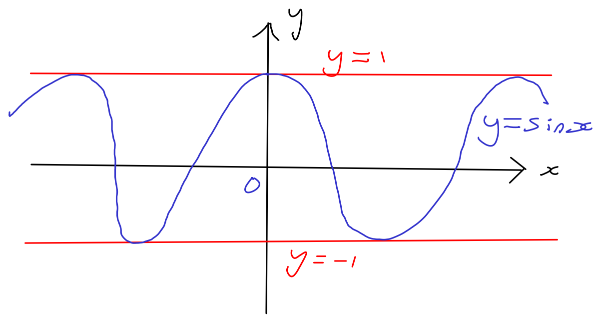


$$\text{Dom}(f)=\mathbb{R}\ ,\quad \text{Rng}(f)=\mathbb{R}\ ,\quad \text{Im}(f)=[9,\infty)$$

f לא חד חד ערכית ולא על.

---

3. $f(x)=\sin x$.

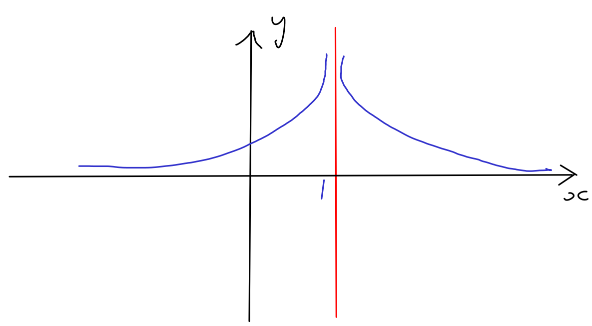


$$\text{Dom}(f)=\mathbb{R}\ ,\quad \text{Rng}(f)=\mathbb{R}\ ,\quad \text{Im}(f)=[-1,1]$$

f לא חד חד ערכית ולא על.

---

4. $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$.



$$\text{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}\cap x\neq 1\}\ ,\quad \text{range}(f)=\mathbb{R}\ ,\text{Im}(f)=(0,\infty)$$

f לא חד חד ערכית ולא על.

5. $f(x)=2x^2-3$.

$$\text{Dom}(f)=\mathbb{R}\ ,\quad \text{Rng}(f)=\mathbb{R}\ ,\quad \text{Im}(f)=[-3,\infty)$$

f לא חד חד ערכית ולא על.

.6 $.f(x)=\sqrt{1-x^2}$

$$\mathrm{Dom}(f)=[-1,1]\ ,$$

f לא חד חד ערכית.

תכונות של פונקציות

I זוגיות

1.5 הגדרה: (פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית)
נניח ש $f(x)$ פונקציה המוגדרת בתחום D. $f(x)$ נקראת פונקציה זוגית אם לכל $x\in D$ מתקיים:

$$f(-x)=f(x)\ .$$

גרף של פונקציה זוגית סימטרי ביחס לציר ה-y.

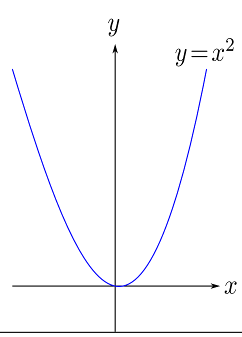
$f(x)$ נקראת פונקציה אי-זוגית אם לכל $x\in D$ מתקיים:

$$f(-x)=-f(x)\ .$$

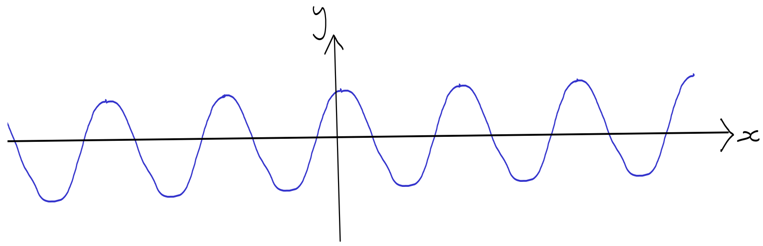
גרף של פונקציה זוגית סימטרי יחסית ראשית הצירים.

דוגמאות.

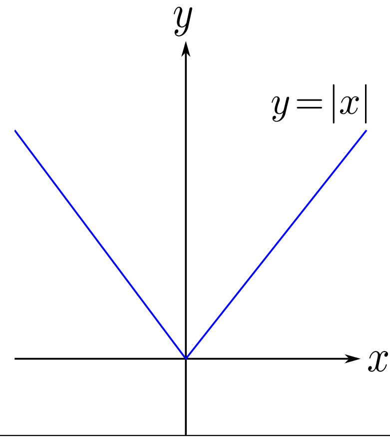
$y=x^2$ זוגית.



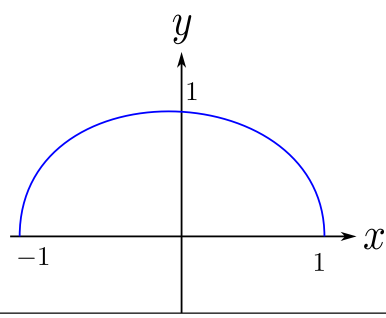
$y = \cos x$ זוגית.



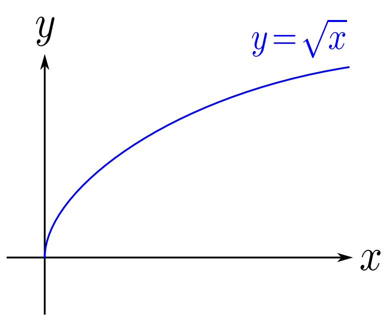
$y = |x|$ זוגית.



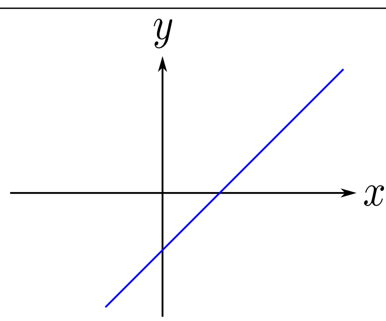
$y = \sqrt{1-x^2}$ זוגית.



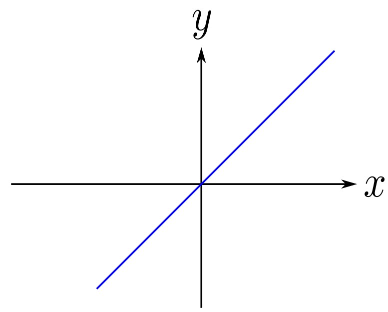
$y = \sqrt{x}$ לא זוגית.



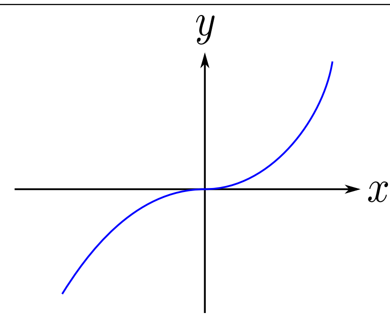
$y = x - 1$ לא זוגית.



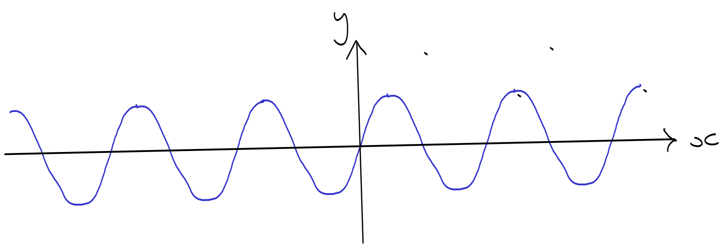
$y = x$ אי זוגית.



$y = x^3$ אי זוגית.



$y = \sin x$ אי זוגית.



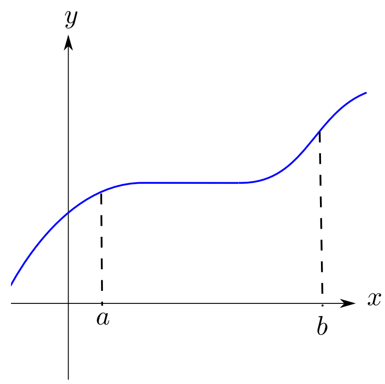
II מונוטוניות

1.6 הגדרה: (עלייה וירידה של פונקציה)

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בתחום D. אומרים כי:

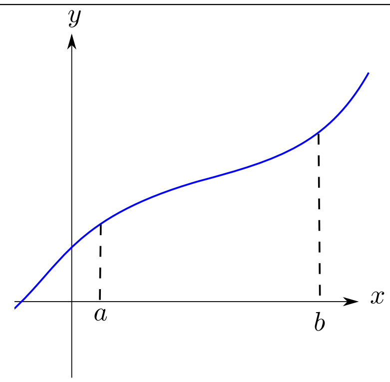
1. f **עולה מונוטונית** בתחום זה אם לכל $a,b \in D$

$$b > a \quad \Rightarrow \quad f(b) \geq f(a)\ ,$$



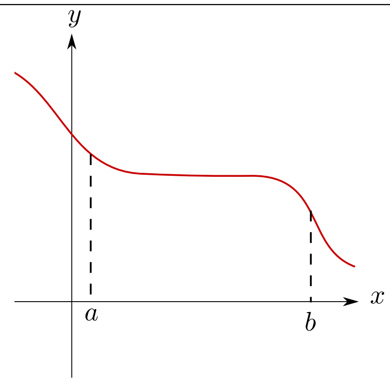
2. f **עולה מונוטונית ממש** בתחום זה אם לכל $a,b \in D$

$$b > a \quad \Rightarrow \quad f(b) > f(a)\ ,$$



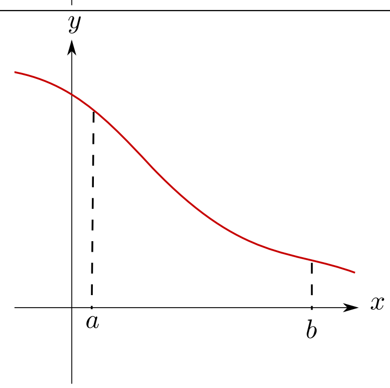
3. f **יורדת מונוטונית** בתחום זה אם לכל $a,b \in D$

$$b > a \quad \Rightarrow \quad f(b) \leq f(a)\ ,$$



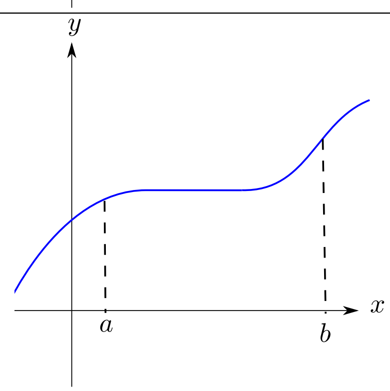
4. f **יורדת מונוטונית ממש** בתחום זה אם לכל $a,b \in D$

$$b > a \quad \Rightarrow \quad f(b) < f(a)\ ,$$



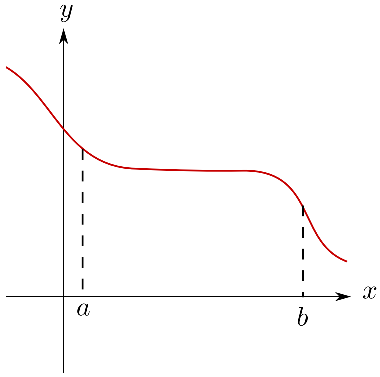
5. f **לא יורדת** בתחום זה אם לכל $a,b \in D$

$$b > a \quad \Rightarrow \quad f(b) \geq f(a)\ ,$$



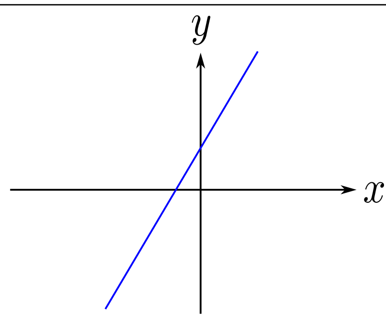
6. f **לא עולה** בתחום זה אם לכל $a, b \in D$

$$b > a \quad \Rightarrow \quad f(b) \leq f(a) \ ,$$

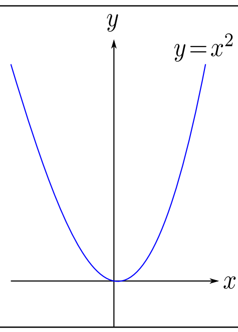


דוגמאות.

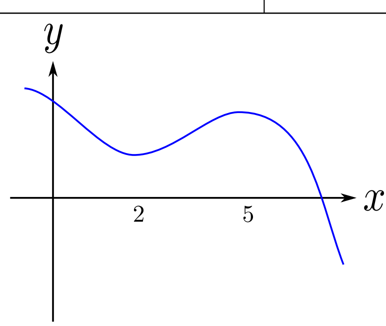
$f(x) = 2x + 1$ עולה מונוטונית ממש.



$f(x) = x^2$ עולה ממש בתחום $(0, \infty)$ ויורדת ממש בתחום $(-\infty, 0)$.



הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחומים $(-\infty, 2)$, $(5, \infty)$ ועולה בתחום $(2, 5)$.



III חסימות

1.7 הגדרה: (חסימות של פונקציה)

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בתחום D. אומרים כי:

1) f **חסומה מלמעלה** אם קיים מספר M כך שלכל $x \in D$ מתקיים

$$f(x) < M \ ,$$

2) f **חסומה מלמטה** אם קיים מספר m כך שלכל $x \in D$ מתקיים

$$f(x) > m \ ,$$

3) f **חסומה** אם קיים מספרים m ו- M כך שלכל $x \in D$ מתקיים

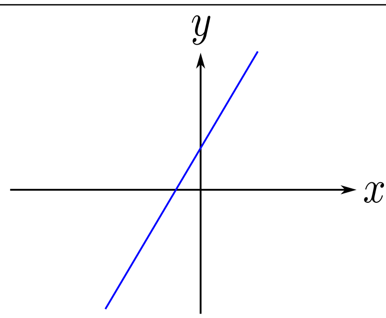
$$m < f(x) < M \ ,$$

או באופן שקול, אם קיים מספר M כך שלכל $x \in D$ מתקיים

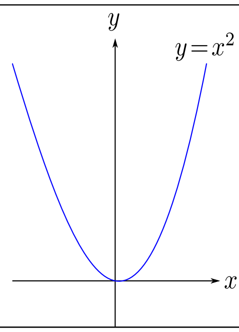
$$|f(x)| < M \ .$$

דוגמאות.

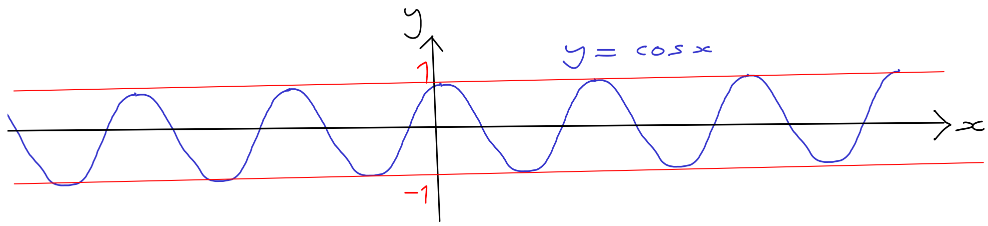
$f(x) = 2x + 1$ עולה מונוטונית ממש.

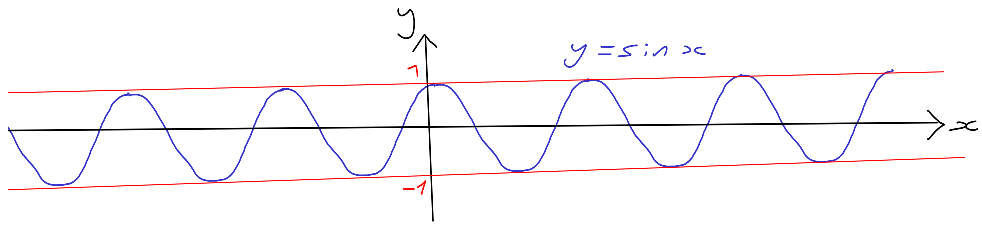


$y = x^2$ חסומה מלמטה אבל לא חסומה מלמעלה.



הפונקציות $y = \sin x$, $y = \cos x$ חסומות:
$-1 \le \sin x \le 1$, $-1 \le \cos x \le 1$.





IV מחזוריות

1.8 הגדרה: (פונקציה מחזורית)
פונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום D נקראת מחזורית אם קיים מספר $T>0$ כך שלכל $x\in D$ גם $x\pm T\in D$.

$$f(x+T)=f(x)\ ,\qquad f(x-T)=f(x)\ .$$

מספר $T>0$ כזה הקטן ביותר נקרא **המחזור** של f.

דוגמאות.

$T=2\pi$	$y=\sin x$
$T=2\pi$	$y=\cos x$
$T=\pi$	$y=\tan x$
$T=\pi$	$y=\cot x$

דוגמא.
תהי $f(x)=\sin(2x+3)$. נחפש את המחזור של T.

$$f(x+T)=f(x)\qquad\rightsquigarrow\qquad \sin(2(x+T)+3)=\sin((2x+3)+2T)=\sin(2x+3)\ .$$

לכן $2T=2\pi \Leftarrow T=\pi$.

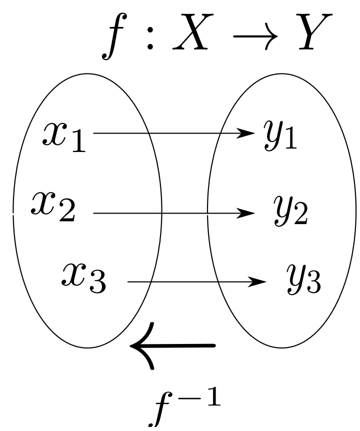
פונקציה הפוכה

1.9 הגדרה: (פונקציה הפוכה)
תהי

$$f : X \to Y$$

פונקציה. אם $f(x)$ חד חד ערכית אז ניתן להגדיר פונקציה הפוכה, שתסומן $f^{-1} : \mathrm{Dom}(f) \to X$ באופן הבא.

$$f(x) = y \qquad \Leftrightarrow \qquad x = f^{-1}(y) \ .$$



$$f^{-1}(y_1) = x_1 \ ,$$
$$f^{-1}(y_2) = x_2 \ ,$$
$$f^{-1}(y_3) = x_3 \ .$$

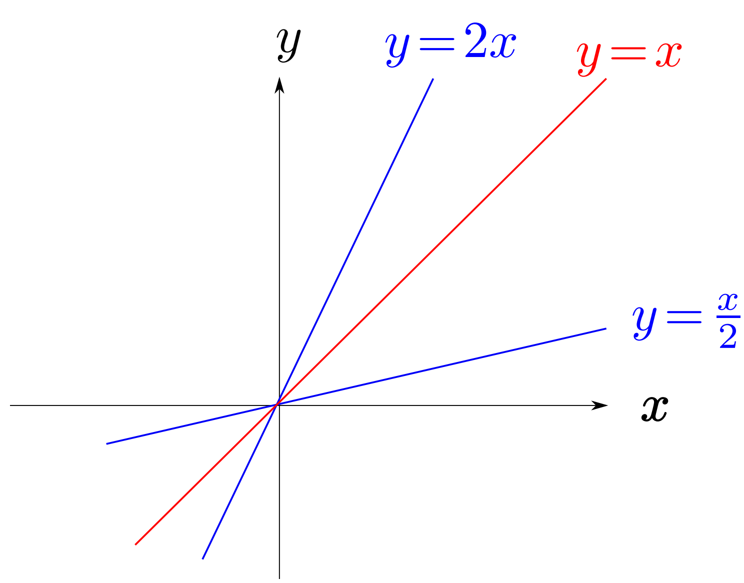
דוגמאות.

1) $f(x) = 2x$.

$$y = 2x \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{y}{2}$$

לכן

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2} \ .$$

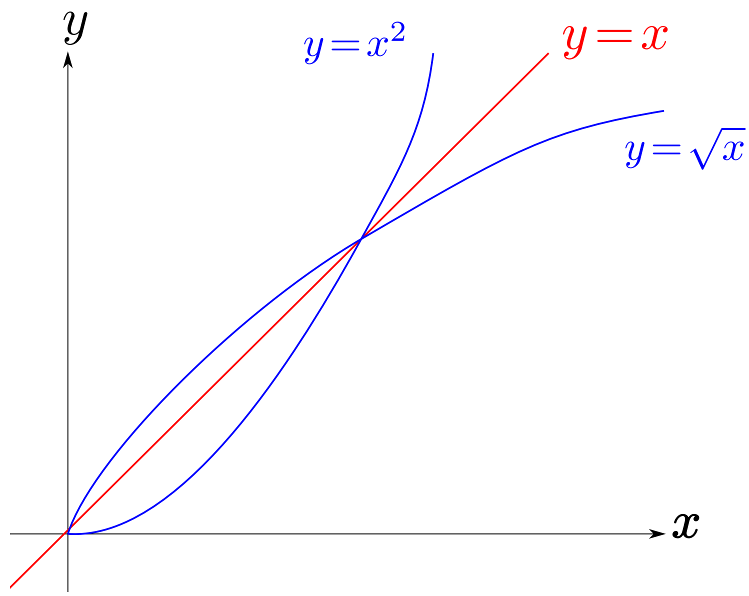


2) $f(x)=x^2$, $x\geq 0$.

$$y=x^2 \qquad \Rightarrow \qquad x=\sqrt{y}$$

לכן

$$f^{-1}(x)=\sqrt{x}\ .$$



1.10 הערה. הגרפים של שתי פונקציות הפוכות אחד לשניה סימטריים ביחס לקו $y=x$. ■

1.11 משפט. (תחום הגדרה ותמונה של פונקציה הפוכה)
שים לב לפי הגדרה של פונקציה הפוכה, התמונה של f שווה לתחום ההגדרה של f^{-1} ולהפך.

דוגמא.
נתונה הפונקציה

$$y=\sqrt{x+5}-2\ .$$

מצאו את

1) תחום הגדרה ותמונה של הפונקציה

2) פונקציה ההפוכה

3) תחום הגדרה של פונקציה ההפוכה

4) התמונה של פונקציה ההפוכה

5) צייר הגרפים שלהם.

פיתרון.

(1 <u>תחום ההגדרה של הפונקציה:</u>

$.[-5,\infty)$

<u>תמונה של הפונקציה:</u>

$[-2,\infty)$

(2 <u>פונקציה ההפוכה:</u>

$$y=\sqrt{x+5}-2 \qquad \Rightarrow \qquad x=(y+2)^2-5$$

לכן פונקציה ההפוכה היא

$$f^{-1}(x)=(x+2)^2-5\ .$$

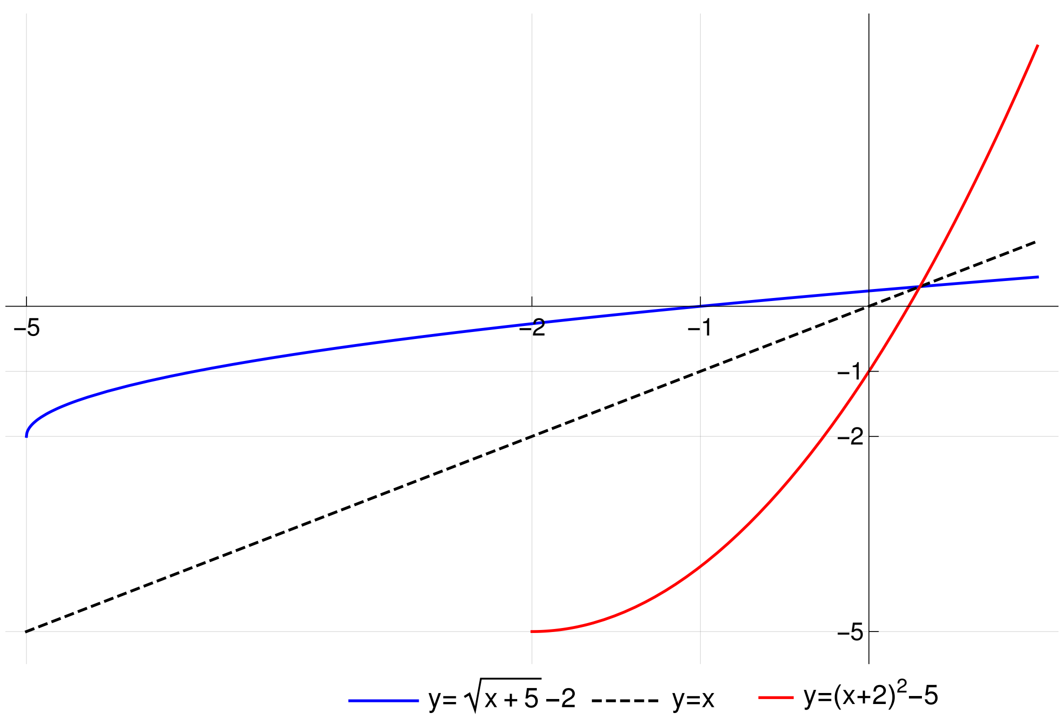
(3 <u>תחום הגדרה של פונקציה ההפוכה :</u>

$.[-2,\infty)$

(4 <u>התמונה של פונקציה ההפוכה:</u>

$.[-5,\infty)$

(5 <u>שירטוט של הגרפים של f ו- f^{-1}:</u>



■

פונקציה מורכבת

1.12 הגדרה: (פונקציה מורכבת)
נניח ש $y = f(u)$ ו- $u = g(x)$, אז לפונקציה $y = f(g(x))$ קוראים **פונקציה מורכבת**.

דוגמאות.

1)

$$y = \sin(x^2)$$

הוא פונקציה המורכבת מהפונקציה $y = \sin u$ ו- $u = x^2$.

2)

$$y = e^{\sqrt{x}}$$

הוא פונקציה המורכבת מהפונקציה $y = e^u$ ו- $u = \sqrt{x}$.

3)

$$y = \frac{1}{(x^2-3)^3}$$

הוא פונקציה המורכבת מהפונקציה $y = \frac{1}{u^3}$ ו- $u = x^2 - 3$.

טרנספורמציות של הגרפים במערכת הצירים

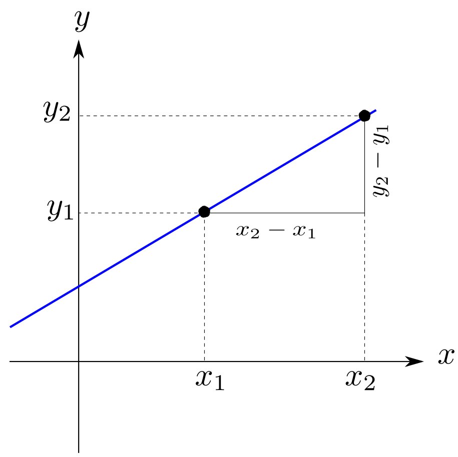
תהי f פונקציה כלשהי. להלן מתואר מה יקרה עם הגרף $y = f(x)$ תחת הטרנספורמציות הבאות:

.1	$f(x)+a$	הזזת הגרף ב- $\lvert a\rvert$ יחידות למעלה אם $a > 0$ או למטה אם $a < 0$.
.2	$f(x+a)$	הזזת הגרף ב- $\lvert a\rvert$ יחידות שמאלה אם $a > 0$ או ימינה אם $a < 0$.
.3	$-f(x)$	היפוך של הגרף לעומת ציר ה- x (שיקוף הגרף ביחס לציר ה-x).
.4	$f(-x)$	היפוך של הגרף לעומת ציר ה- y (שיקוף הגרף ביחס לציר ה-y).
.5	$k \cdot f(x)$	$(k>0)$ מתיחה, אם $k > 1$, או כיווץ, אם $0 < k < 1$, של הגרף בכיוון של ציר ה- y.
.6	$f(k \cdot x)$	$(k>0)$ כיווץ, אם $k > 1$, או מתיחה, אם $0 < k < 1$, של הגרף בכיוון של ציר ה- x.
.7	$\lvert f(x)\rvert$	שיקוף של חלקי הגרף הנמצאים מתחת לציר ה-x לעומת ציר ה- x
.8	$f(\lvert x\rvert)$	החלפת חלק הגרף הנמצא משמאל לציר y בשיקופו של החלק הימין של הגרף לעומת ציר ה- y
.9	$f(-\lvert x\rvert)$	החלפת חלק הגרף הנמצא מימין לציר y לשיקוף של החלק השמאלי של הגרף לעומת ציר ה- y
.10	$\lvert f(x)-a\rvert + a$	שיקוף לעומת ישר $y = a$ של חלקי הגרף הנמצאים מתחת לישר זה
.11	$f(\lvert x-a\rvert + a)$	ההחלפת החלק הגרף הנמצא משמאל לישר $x = a$ לשיקוף לעומת ישר זה של חלק הגרף אשר מימין לישר $x = a$

פונקציות אלמנטריות בסיסיות

קו ישר

1.13 כלל: (שיפוע של גרף של קו ישר)
בהינתן גרף של קו ישר כמתואר בתרשים.



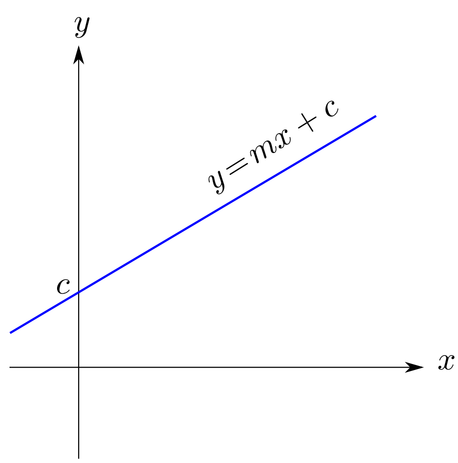
בכדי למצוא השיפוע, בוחרין כל שתי נקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) והשיפוע ניתן ע"י הנוסחה:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \ .$$

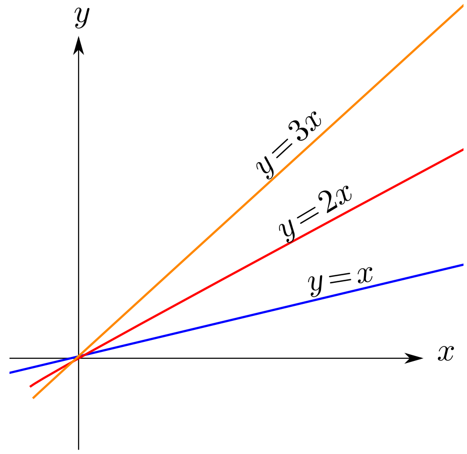
1.14 כלל: (גרף של קו ישר)
הפונקציה הניתנת ע"י הנוסחה

$$y = mx + c$$

הינה קו ישר עם שיפוע m שחותכת את ציר ה- y בנקודה $(0, c)$.



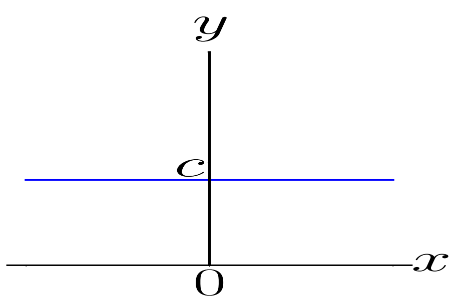
לכן ככל ש- m גדול יותר, השיפוע גבוה יותר (ולהפך).



---

1) פונקציה קבועה

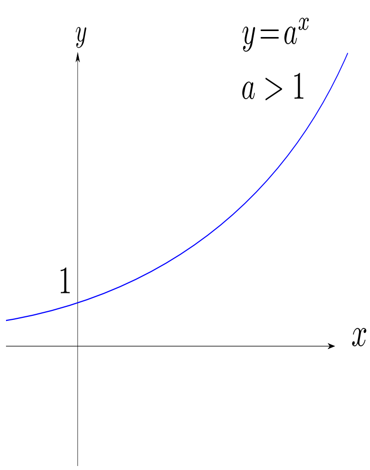
$$y = c \ .$$

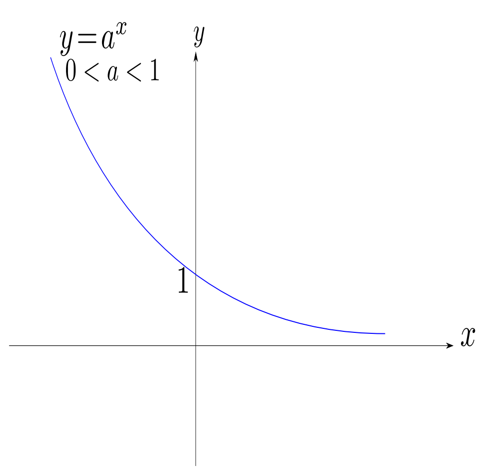


2) פונקציה מעריכית

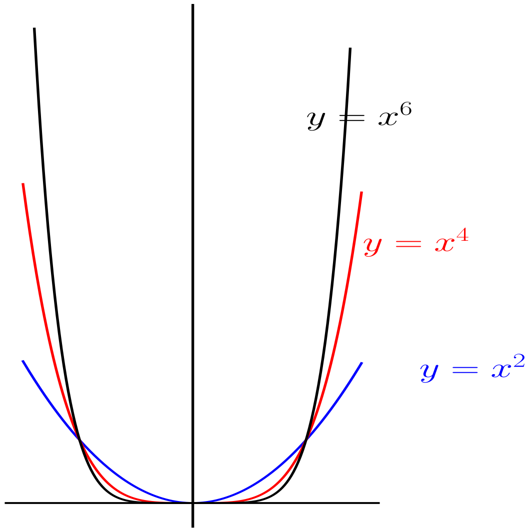
$$y = a^x \ , \qquad a \neq 1 \ , a > 0$$

תחום הגדרה:	$\mathbb{R}$
התמונה:	$y \in (0,\infty)$.

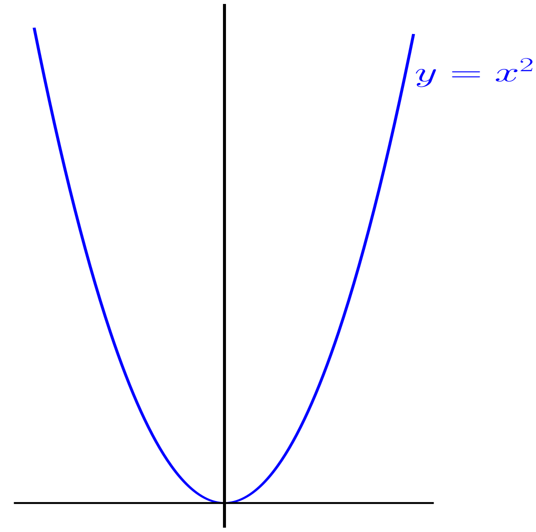




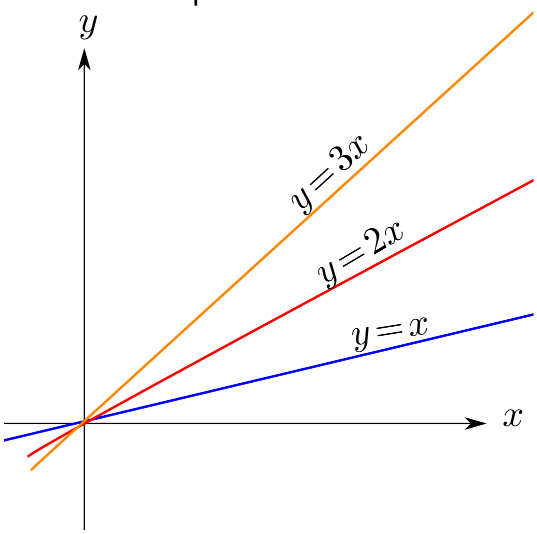
3) פונקציה חזקה



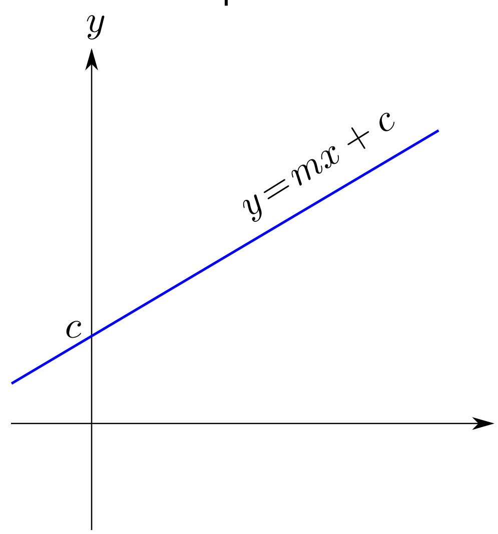
$y = x^6$
$y = x^4$
$y = x^2$



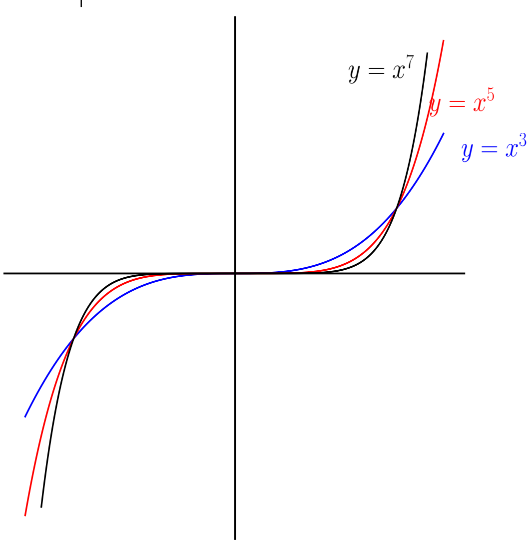
$y = x^2$



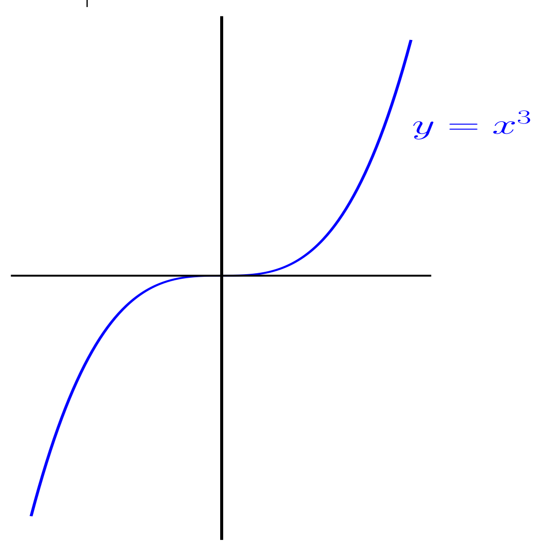
y
$y=3x$
$y=2x$
$y=x$
x



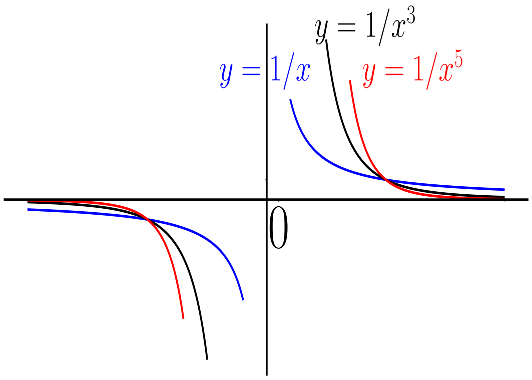
y
$y=mx+c$
c
x

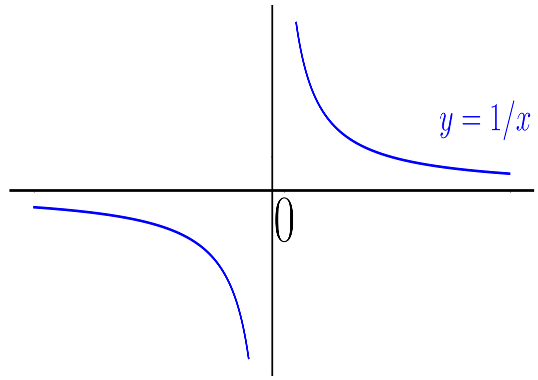


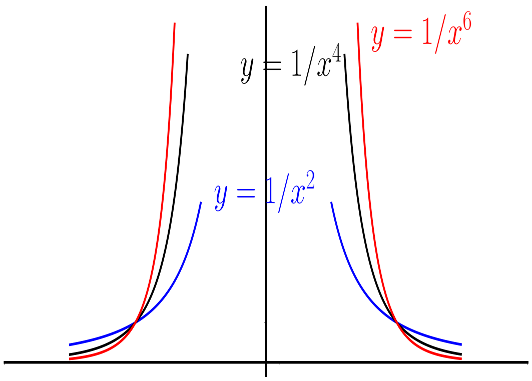
$y = x^7$
$y = x^5$
$y = x^3$

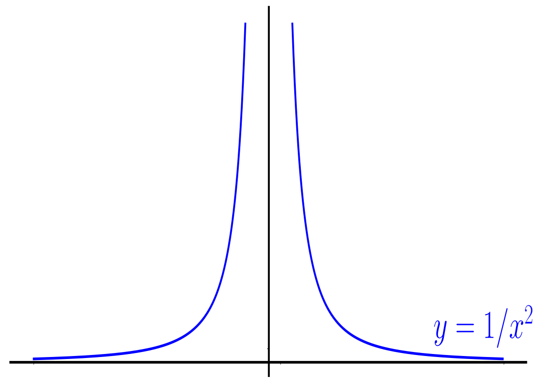


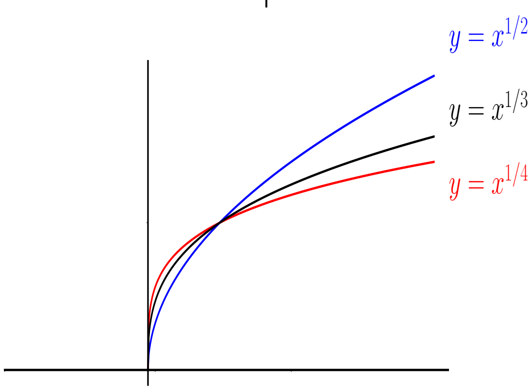
$y = x^3$

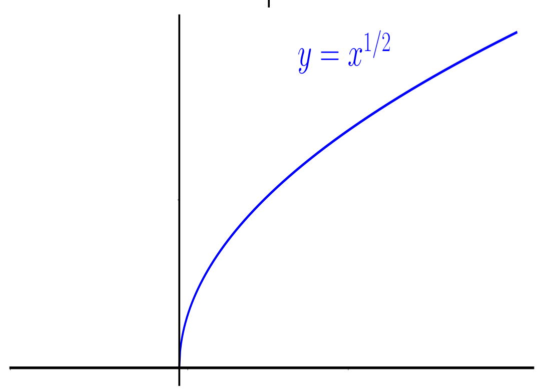












4) פונקציה לוגריתמית

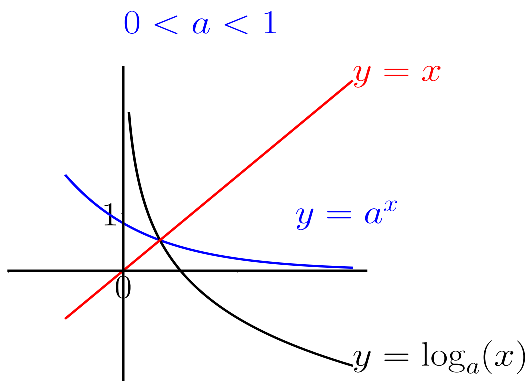
פונקציה לוגריתמית היא פונקציה הפוכה לפונקציה מעריכית. כלומר

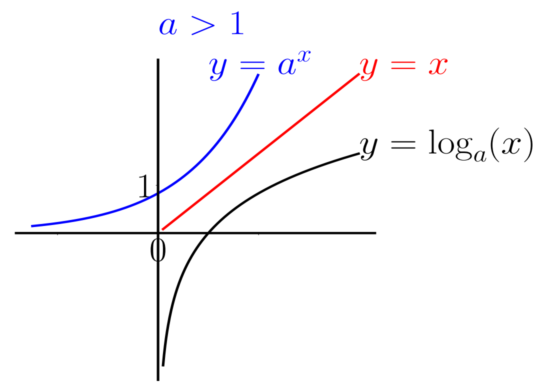
$$y = a^x$$

אם ורק אם $x = \log_a y$. מכאן נובע

$$a^{\log_a y} = y \ .$$

מכיוון שתחום הגדרה של $y = a^x$ הוא $\mathbb{R}$ והתמונה היא $y > 0$, תחום ההגדרה של פונקציה $y = \log_a x$ הוא $x > 0$. קיימים שני סוגים של גרף לפונקציה $y = \log_a x$:





<u>נוסחאות של $\log_a x$</u>

1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

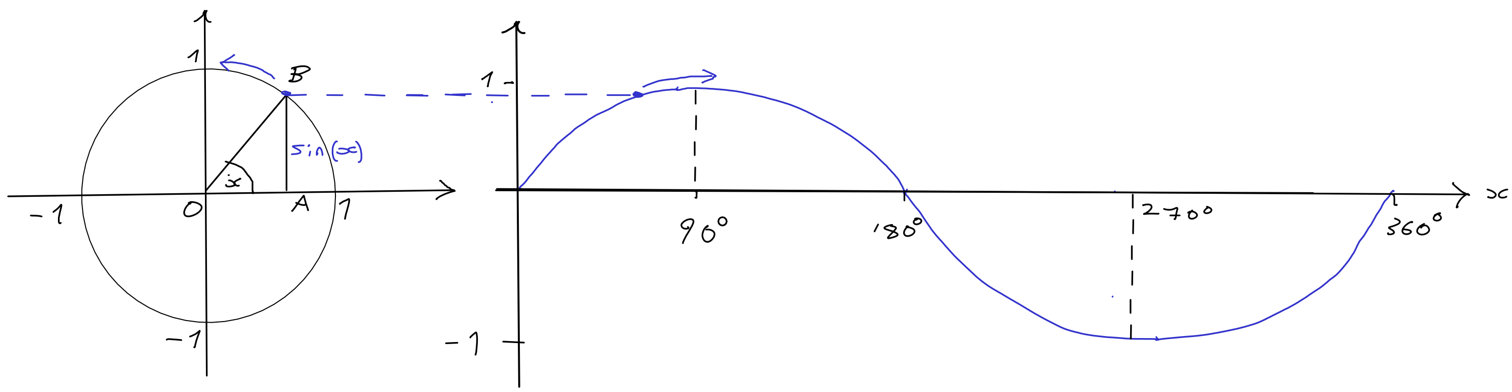
2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

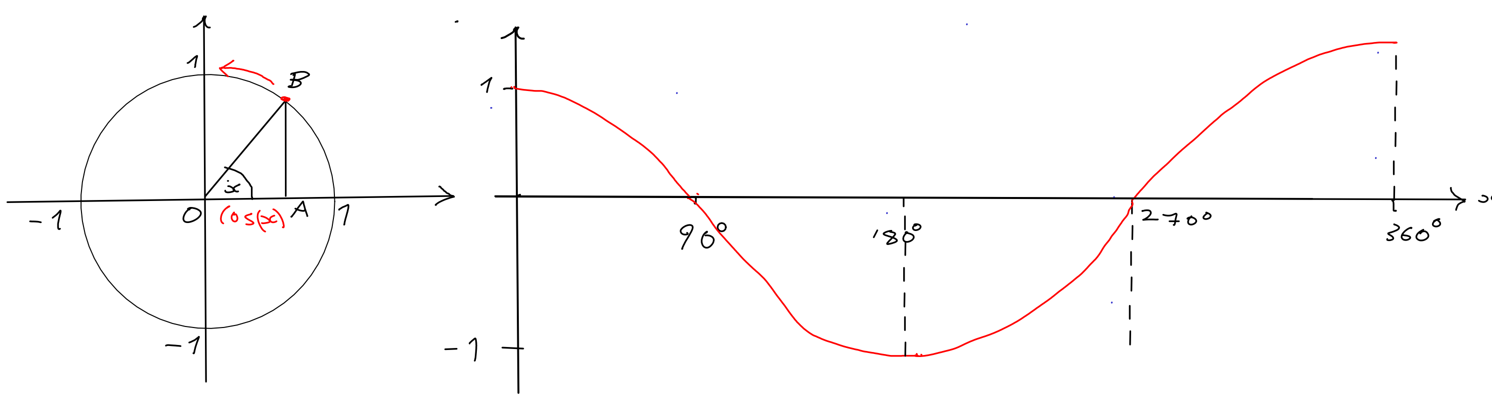
עבור $a = e$ מסמנים $\log_e x = \ln x$.

5) פונקציה טריגונומטריות

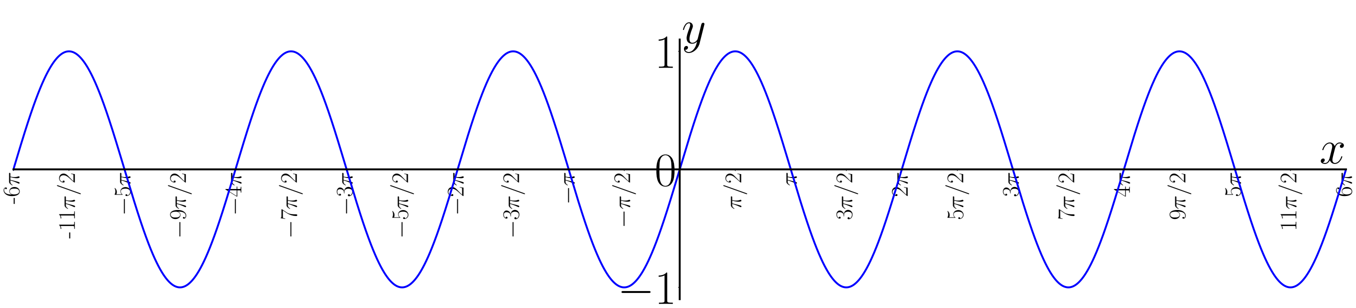
פונקציות הטריגונומטריות מוגדרות ע"י מעגל היידה:

$$\sin x = AB \ , \qquad \cos x = OA \ , \qquad \tan x = \frac{AB}{OA} = \frac{\sin x}{\cos x} \ , \qquad \cot x = \frac{OA}{AB} = \frac{\cos x}{\sin x} \ .$$





$y = \sin x$



ערכים עיקריים:

$$\sin(0) = 0 \ , \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1 \ , \qquad \sin(\pi) = 0 \ , \qquad \sin(\tfrac{3\pi}{2}) = 1 \ , \qquad \sin(2\pi) = 0 \ .$$

פונקציה אי-זוגית:

$$\sin(-x) = -\sin(x) \ .$$

פונקציה מחזורית עם מחזור $T = 2\pi$:

$$\sin(x + 2\pi n) = \sin(x) \ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

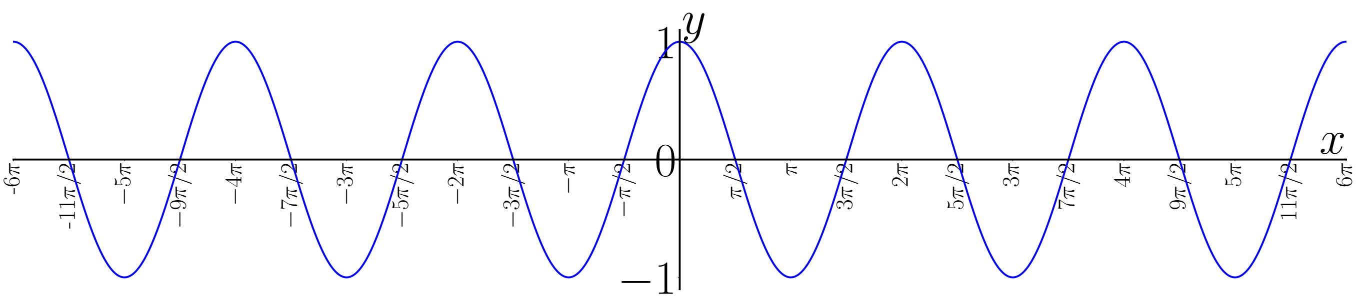
ערכים מחזוריים:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \ , \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1 \ , \quad \sin(n\pi) = 0 \ , \quad \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n \ , \quad n \in \mathbb{Z} \ .$$

ערכים שיקופיים:

$$\sin(\pi - x) = \sin x \ , \qquad \sin(x - \pi) = -\sin x \qquad \sin(x + \pi) = -\sin(x) \ .$$

$\underline{y = \cos x}$



ערכים עיקריים:

$$\cos(0) = 1 \ , \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \ , \qquad \cos(\pi) = -1 \ , \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \ , \qquad \cos(2\pi) = 0 \ .$$

פונקציה זוגית:

$$\cos(-x) = \cos(x) \ .$$

פונקציה מחזורית עם מחזור $T = 2\pi$:

$$\cos(x + 2\pi n) = \cos(x) \ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

ערכים מחזוריים:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0 \ , \qquad \cos(2\pi n) = 1 \ , \qquad \cos(\pi + 2\pi n) = -1 \ , \qquad \cos(n\pi) = (-1)^n \ , \qquad n \in \mathbb{Z} \ .$$

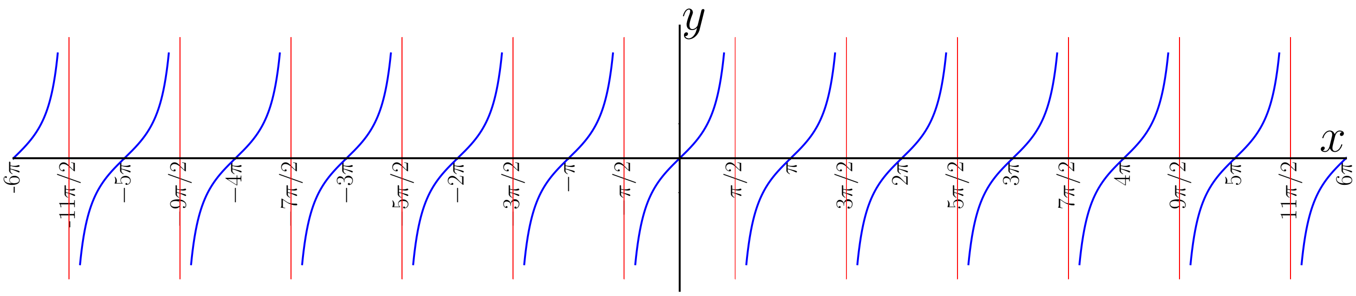
ערכים שיקופיים:

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \ , \qquad \cos(x - \pi) = -\cos x \qquad \cos(x + \pi) = -\cos(x) \ .$$

$\underline{y = \tan x}$

תחום הגדרה:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \ , \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \ .$$



ערכים עיקריים:

$$\tan(0) = 0 \ , \qquad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \ , \qquad \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \ , \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \to \infty \ , \qquad \tan\left(-\frac{\pi}{2}\right) \to -\infty \ .$$

פונקציה אי-זוגית:

$$\tan(-x) = -\tan(x) \ .$$

פונקציה מחזורית עם מחזור $T = \pi$:

$$\tan(x + \pi n) = \tan(x) \ , \qquad n \in \mathbb{Z}$$

ערכים מחזוריים:

$$\tan\left(\frac{|n|\pi}{2}\right) \to \infty \ , \qquad \tan\left(-\frac{|n|\pi}{2}\right) \to -\infty \ , \qquad \tan(n\pi) = 0 \ , \qquad n \in \mathbb{Z} \ .$$

ערכים שיקופיים:

$$\tan(\pi - x) = -\tan x \ , \qquad \tan(x - \pi) = \tan x \qquad \tan(x + \pi) = \tan(x) \ .$$

6) פונקציה טריגונומטריות הפוכות

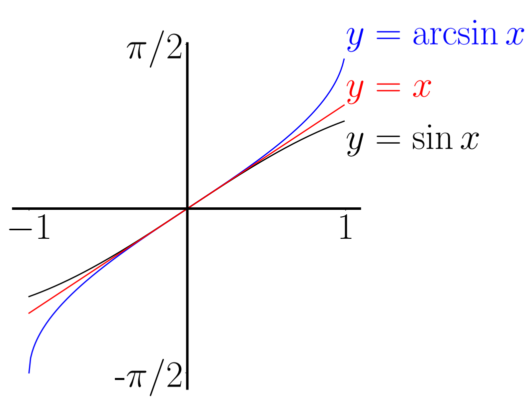
$$y = \arcsin x \ , \qquad y = \arccos x \ , \qquad y = \arctan x \ .$$

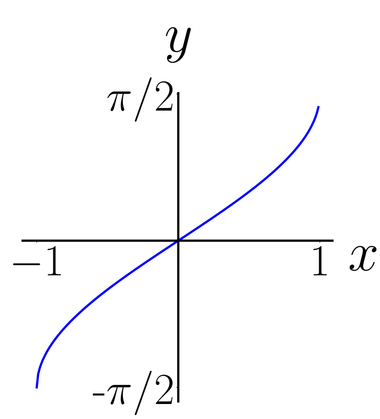
$y = \arcsin x$

$y = \arcsin x$ היא פונקציה הפוכה ל- $y = \sin x$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

$$y = \sin x \ , \qquad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \ , \qquad -1 \leq y \leq 1$$

לכן תחום ההגדרה של $y = \arcsin x$ הוא $-1 \leq x \leq 1$ והתמונה של $y = \arcsin x$ היא $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.





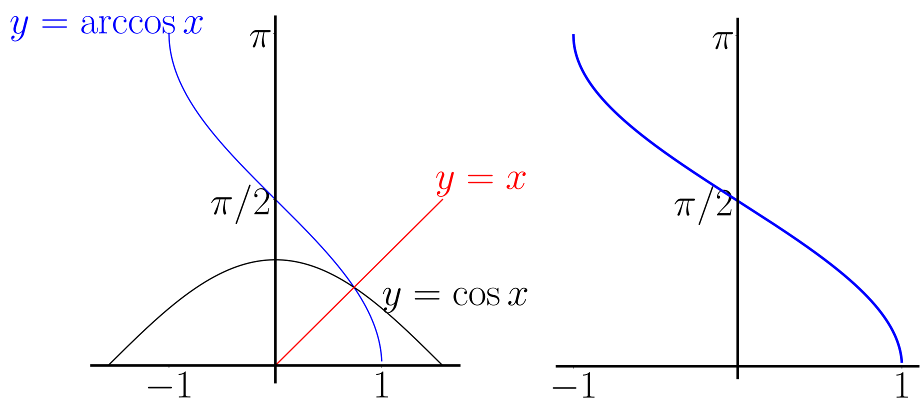
$y = \arccos x$

$y = \arccos x$ היא פונקציה הפוכה ל- $y = \cos x$ בתחום $0 \le x \le \pi$. זאת אומרת

$$y = \cos x \ , \qquad 0 \le x \le \pi \ , \qquad -1 \le y \le 1$$

לכן

$$y = \arccos x \ , \qquad -1 \le x \le 1 \ , \qquad 0 \le y \le \pi \ .$$



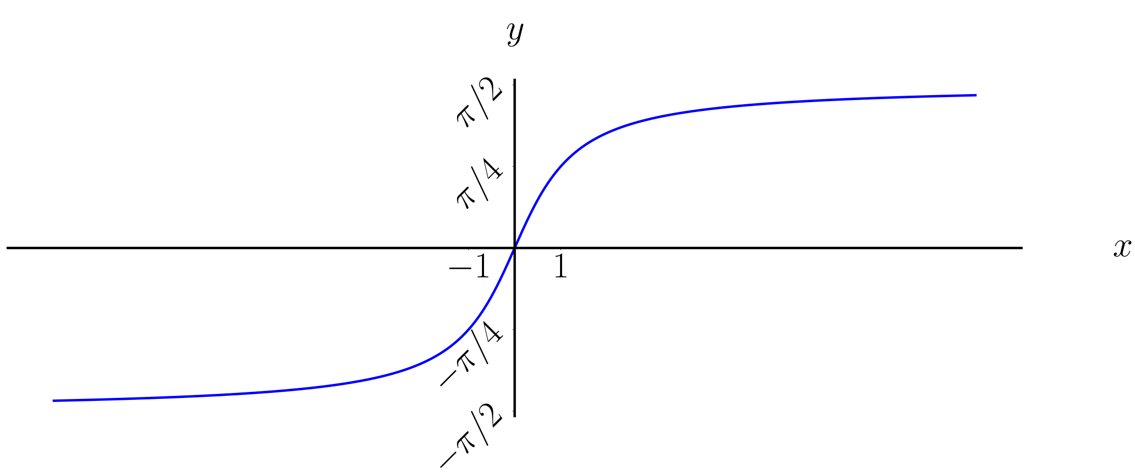
$y = \arctan x$

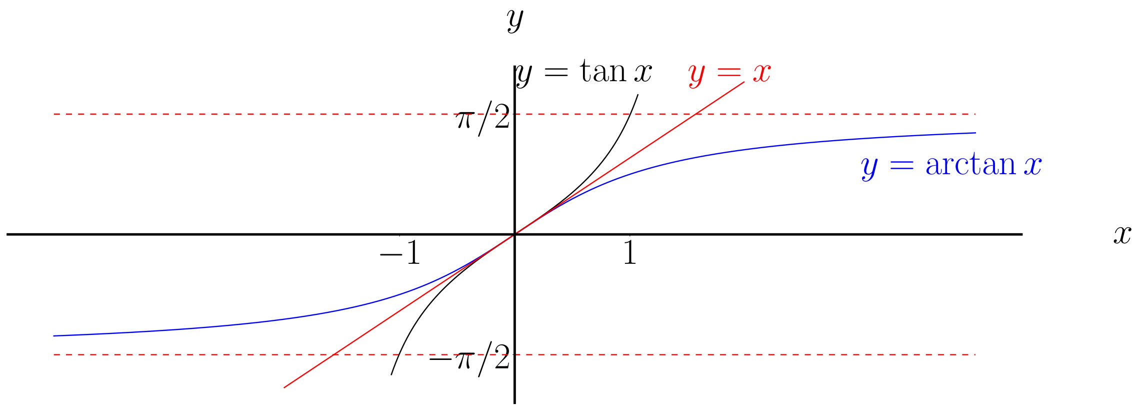
$y = \arctan x$ היא פונקציה הפוכה ל- $y = \tan x$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. זאת אומרת

$$y = \tan x \ , \qquad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \ , \qquad -\infty \le y \le \infty$$

לכן

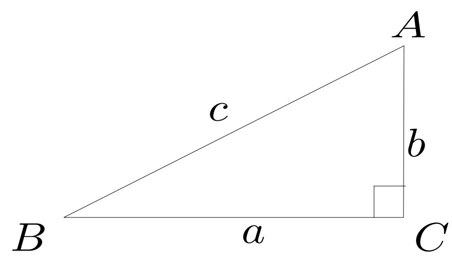
$$y = \arctan x \ , \qquad -\infty \le x \le \infty \ , \qquad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \ .$$




y
$y = \tan x$
$y = x$
$\pi/2$
$y = \arctan x$
x
-1
1
$-\pi/2$

שיעור 2
פונקציות טריגונומטריות

פיתגורס, סינוסת קוסינוס וטנגנט

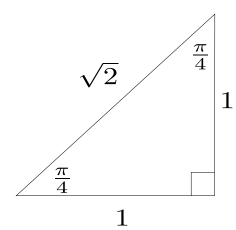


$$\sin(\angle A) = \frac{a}{c}\ , \qquad \cos(\angle A) = \frac{b}{c}\ , \qquad \tan(\angle A) = \frac{a}{b}\ .$$

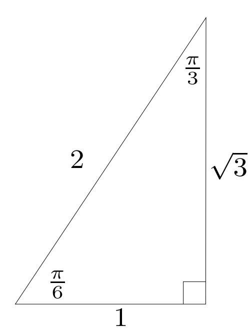
משפט פיתגורס:

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad c = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$



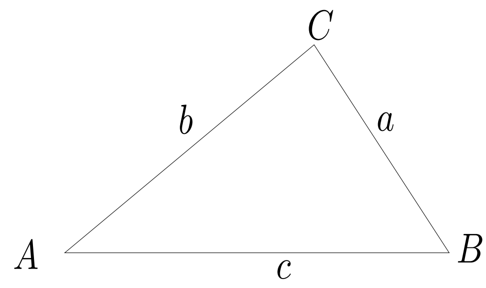
משפט הסינוסים ומשפט הקוסינוסים

משפט הסינוסים:

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)} \ .$$

משפט הקוסינוסים:

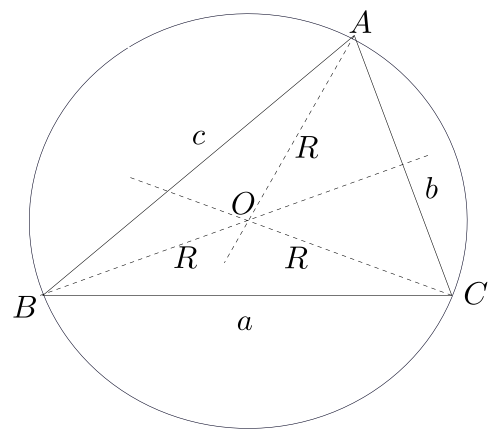
$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\angle C)) \ , \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\angle B) \ , \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\angle A) \ . \end{aligned}$$



רדיוס של משולש החסום במעגל:

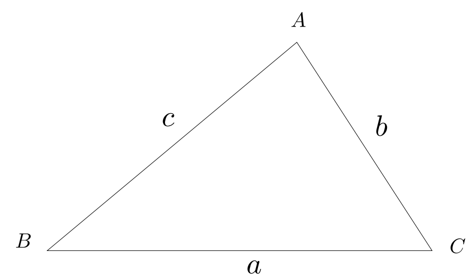
$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)} = 2R \ .$$

כאשר R הוא הרדיוס המעגל החוסם את המשולש.



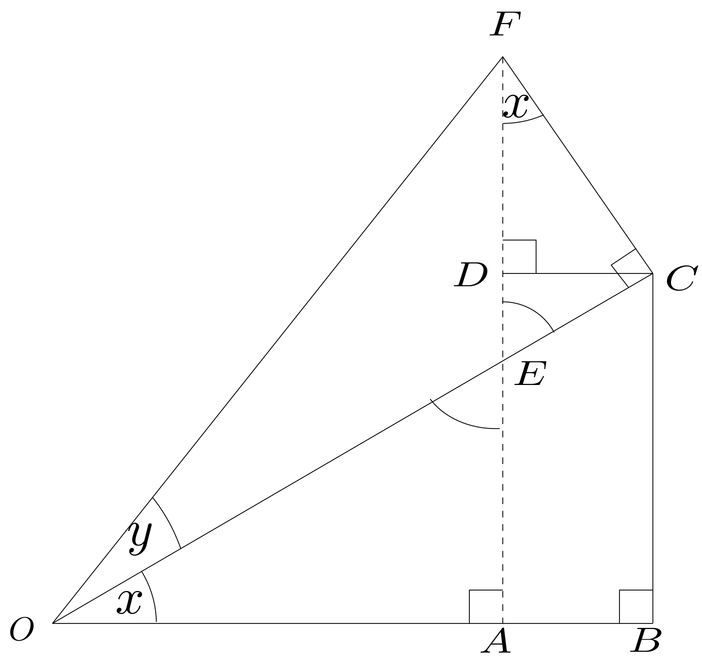
שטח משולש:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot AB \cdot \sin(\sphericalangle A)}{2} \ .$$



זיהויות טריגונומטריות

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$



משולשים ישרי זוויתים OPQ ו- OQR מכילים את הזוויות x ו- y כמתואר בתרשים. הזווית URQ שווה ל- x.

$$
\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \frac{AF}{OF} = \frac{AD+DF}{OF} = \frac{BC+DF}{OF} \\
&= \frac{BC}{OC} \times \frac{OC}{OF} + \frac{DF}{CF} \times \frac{CF}{OF} \\
&= \sin x \cos y + \cos x \sin y
\end{aligned}
$$

הנוסחה עבור $\cos(x+y)$ ניתנת להוכיח בדרך הדומה:

$$
\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \frac{OA}{OF} = \frac{OB-AB}{OF} = \frac{OB-DC}{OF} \\
&= \frac{OB}{OC} \times \frac{OC}{OF} - \frac{DC}{CF} \times \frac{CF}{OF} \\
&= \cos x \cos y - \sin x \sin y
\end{aligned}
$$

מהנוסחאות האלה נובעות כי

$$\begin{aligned}
\tan(x+y) =& \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} \\
=& \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} \\
=& \frac{\dfrac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \dfrac{\sin y \cos x}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \dfrac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} \\
=& \frac{\dfrac{\sin x \cancel{\cos y}}{\cos x \cancel{\cos y}} + \dfrac{\sin y \cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x} \cos y}}{\dfrac{\cancel{\cos x \cos y}}{\cancel{\cos x \cos y}} - \dfrac{\sin x}{\cos x}\dfrac{\sin y}{\cos y}} \\
=& \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\sin y}{\cos y}}{1 - \dfrac{\sin x}{\cos x}\dfrac{\sin y}{\cos y}} \\
=& \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\
\sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \\
\\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\
\cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \\
\\
\tan(x+y) &= \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} \\
\tan(x-y) &= \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}
\end{aligned}}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x)\\ &= 2\cos^2(x) - 1\\ &= 1 - 2\sin^2(x)\end{aligned}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\cos(x)\right)$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(x)\right)$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \quad = 2\cos^2(x) - 1 \quad = 1 - 2\sin^2(x)$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)) \qquad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad 1 + \cot^2(x) = \mathrm{cosec}^2(x) \qquad \tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$

עוד זיהויות טריגונומטריות*

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\cos(x)\right)$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(x)\right)$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$$

$$\sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)-\sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x)-\cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$2\sin(x)\cos(y) = \sin(x+y)+\sin(x-y)$$

$$2\cos(x)\sin(y) = \sin(x+y)-\sin(x-y)$$

$$2\cos(x)\cos(y) = \cos(x+y)+\cos(x-y)$$

$$-2\sin(x)\sin(y) = \cos(x+y)-\cos(x-y)$$

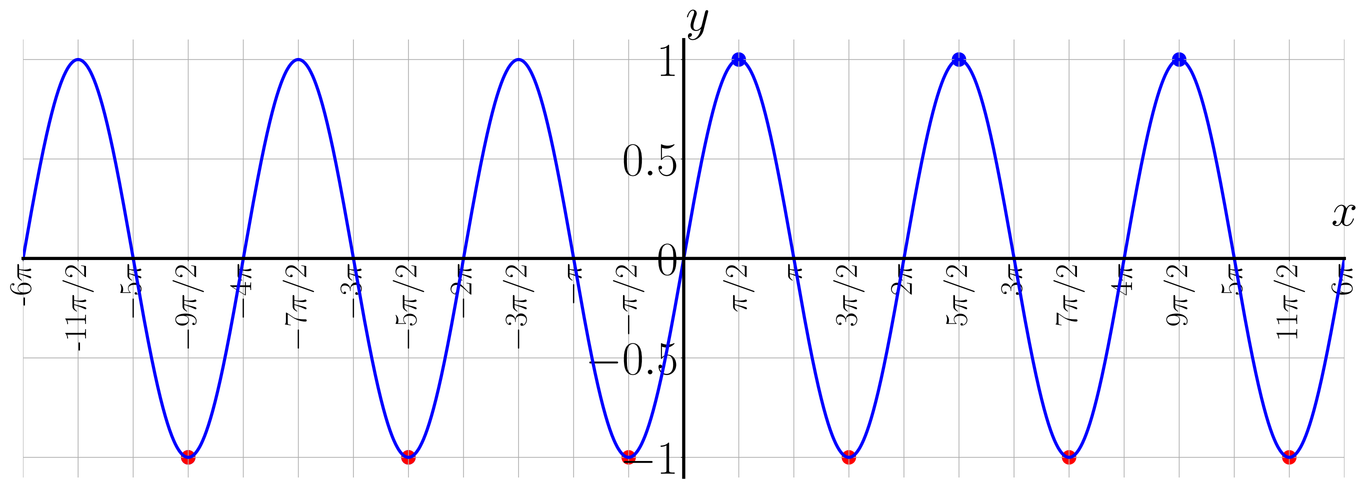
$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin(3x) = 3\sin(x)-4\sin^3(x) \qquad \cos(3x) = 4\cos^3(x)-3\cos(x)$$

גרפים של פונקציות טריגונומטריות

$y = \sin x$



ערכים עיקריים:

$$\sin(0)=0\ ,\qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=1\ ,\qquad \sin\left(\pi\right)=0\ ,\qquad \sin(\tfrac{3\pi}{2})=1\ ,\qquad \sin(2\pi)=0\ .$$

פונקציה אי-זוגית:

$$\sin(-x)=-\sin(x)\ .$$

פונקציה מחזורית עם מחזור $T=2\pi$:

$$\sin(x+2\pi n)=\sin(x)\ ,\quad n\in\mathbb{Z}$$

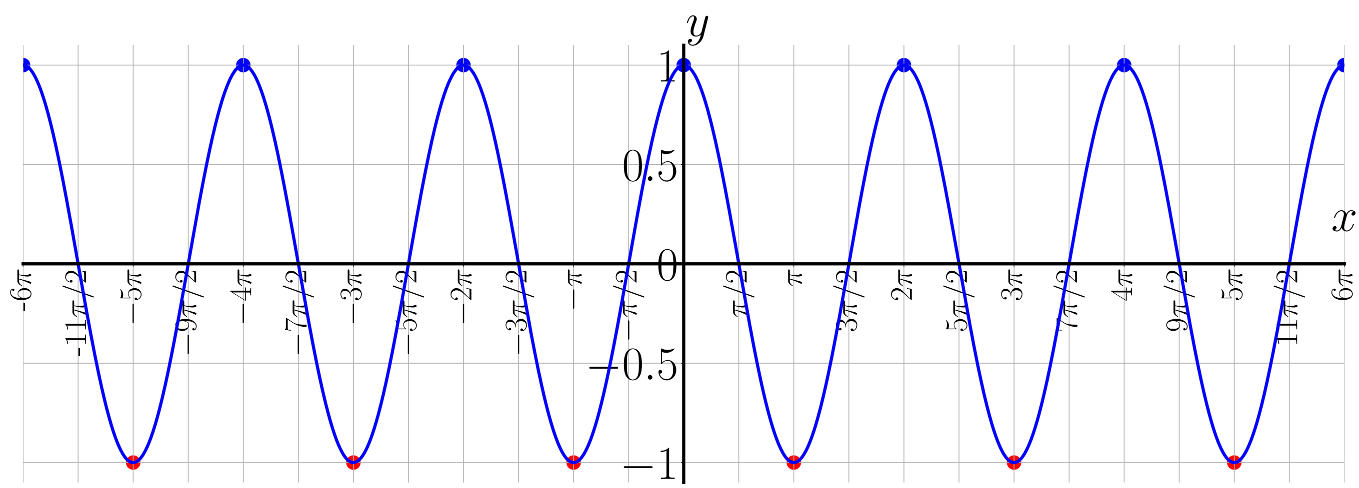
ערכים מחזוריים:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=1\ ,\quad \sin\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=-1\ ,\quad \sin(n\pi)=0\ ,\quad \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n\ ,\quad n\in\mathbb{Z}\ .$$

ערכים שיקופיים:

$$\sin(\pi-x)=\sin x\ ,\qquad \sin(x-\pi)=-\sin x\qquad \sin(x+\pi)=-\sin(x)\ .$$

<u>$y=\cos x$</u>



ערכים עיקריים:

$$\cos(0)=1\ ,\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\ ,\qquad \cos\left(\pi\right)=-1\ ,\qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\ ,\qquad \cos(2\pi)=0\ .$$

פונקציה זוגית:

$$\cos(-x) = \cos(x) \ .$$

פונקציה מחזורית עם מחזור $T = 2\pi$:

$$\cos(x + 2\pi n) = \cos(x) \ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

ערכים מחזוריים:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0 \ , \qquad \cos(2\pi n) = 1 \ , \qquad \cos(\pi + 2\pi n) = -1 \ , \qquad \cos(n\pi) = (-1)^n \ , \qquad n \in \mathbb{Z} \ .$$

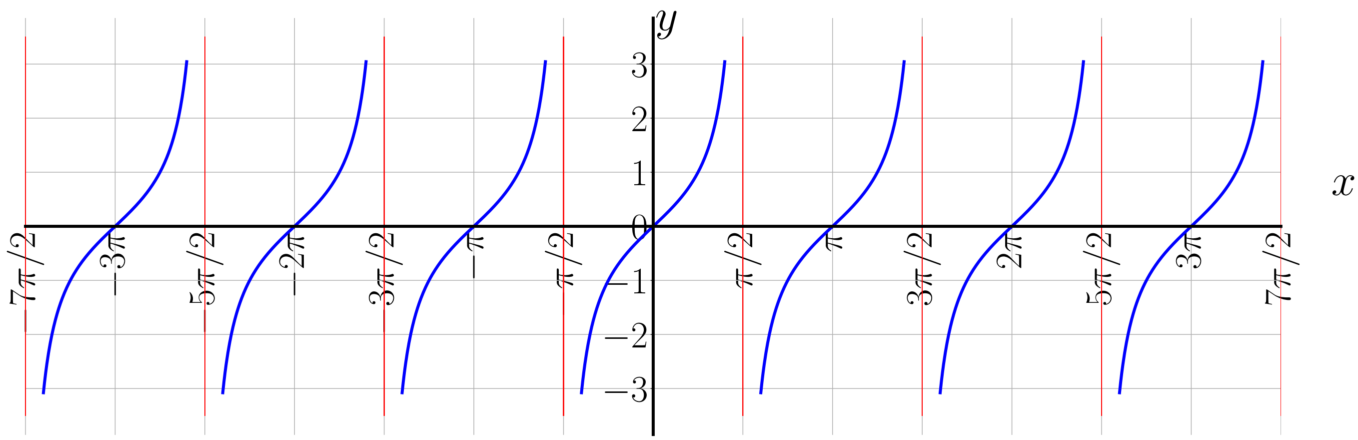
ערכים שיקופיים:

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \ , \qquad \cos(x - \pi) = -\cos x \qquad \cos(x + \pi) = -\cos(x) \ .$$

$\underline{y = \tan x}$

תחום הגדרה:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \ , \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ .$$



ערכים עיקריים:

$$\tan(0) = 0 \ , \qquad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \ , \qquad \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \ , \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \to \infty \ , \qquad \tan\left(-\frac{\pi}{2}\right) \to -\infty \ .$$

פונקציה אי-זוגית:

$$\tan(-x) = -\tan(x) \ .$$

פונקציה מחזורית עם מחזור $T = \pi$:

$$\tan(x + \pi n) = \tan(x) \ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

ערכים מחזוריים:

$$\tan\left(\frac{|n|\pi}{2}\right) \to \infty \ , \qquad \tan\left(-\frac{|n|\pi}{2}\right) \to -\infty \ , \qquad \tan(n\pi) = 0 \ , \qquad n \in \mathbb{Z} \ .$$

ערכים שיקופיים:

$$\tan(\pi - x) = -\tan x \ , \qquad \tan(x - \pi) = \tan x \qquad \tan(x + \pi) = \tan(x) \ .$$

פונקציות טריגונומטריות הפוכות

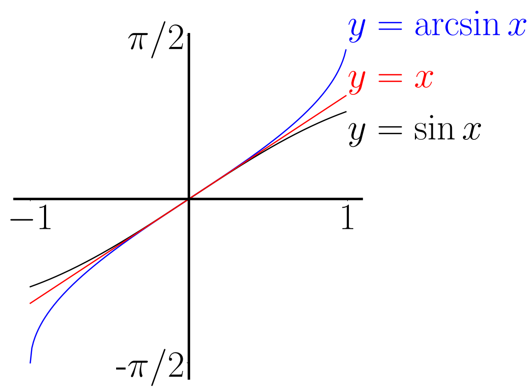
$$y = \arcsin x \ , \qquad y = \arccos x \ , \qquad y = \arctan x \ .$$

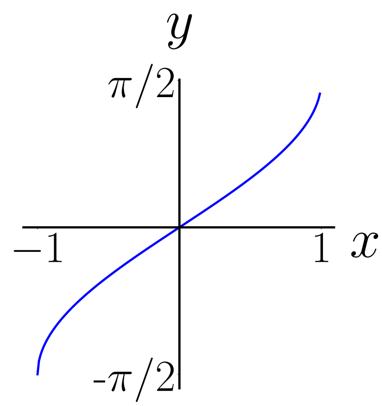
<u>$y = \arcsin x$</u>

$y = \arcsin x$ היא פונקציה הפוכה ל- $y = \sin x$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

$$y = \sin x \ , \qquad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \ , \qquad -1 \le y \le 1$$

לכן תחום ההגדרה של $y = \arcsin x$ הוא $-1 \le x \le 1$ והתמונה של $y = \arcsin x$ היא $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.





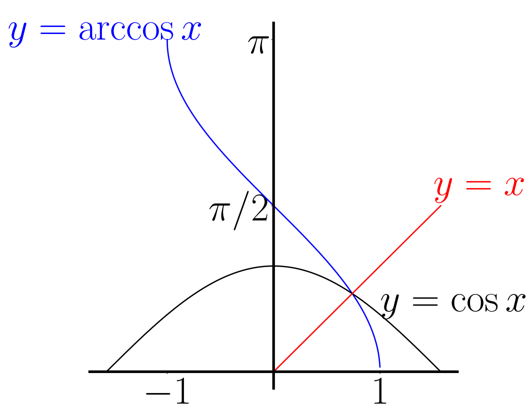
<u>$y = \arccos x$</u>

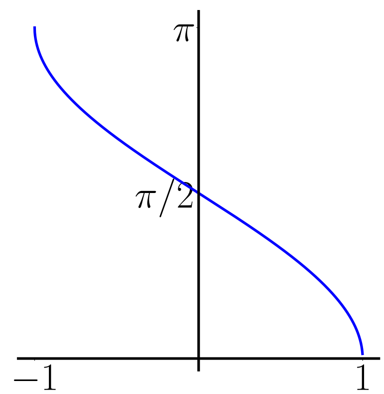
$y = \arccos x$ היא פונקציה הפוכה ל- $y = \cos x$ בתחום $0 \le x \le \pi$. זאת אומרת

$$y = \cos x \ , \qquad 0 \le x \le \pi \ , \qquad -1 \le y \le 1$$

לכן

$$y = \arccos x \ , \qquad -1 \le x \le 1 \ , \qquad 0 \le y \le \pi \ .$$





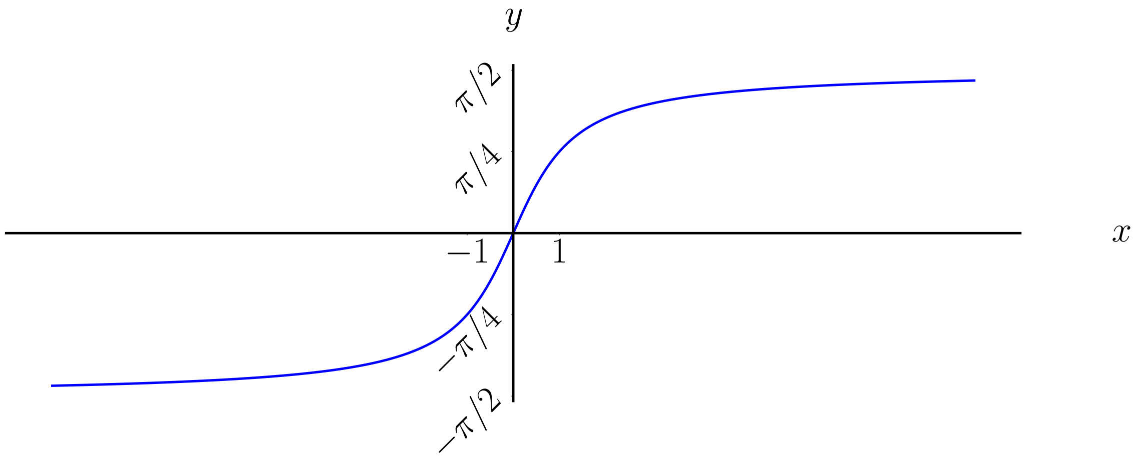
<u>$y = \arctan x$</u>

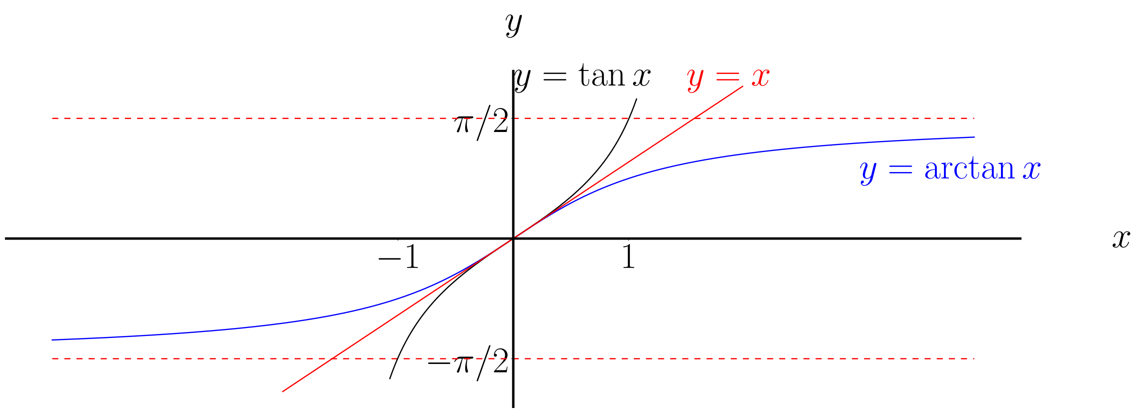
$y = \arctan x$ היא פונקציה הפוכה ל- $y = \tan x$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. זאת אומרת

$$y = \tan x \ , \qquad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \ , \qquad -\infty \le y \le \infty$$

לכן

$$y = \arctan x \ , \qquad -\infty \le x \le \infty \ , \qquad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \ .$$





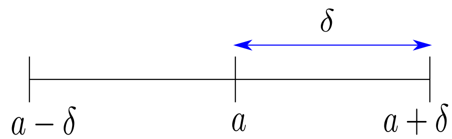
שיעור 3
גבול של פונקציה

גבול של פונקציה

3.1 הגדרה: (סביבה של נקודה)

א) כל קטע פתוח (b, c) שמכיל נקודה a נקרא "סביבה" של a.

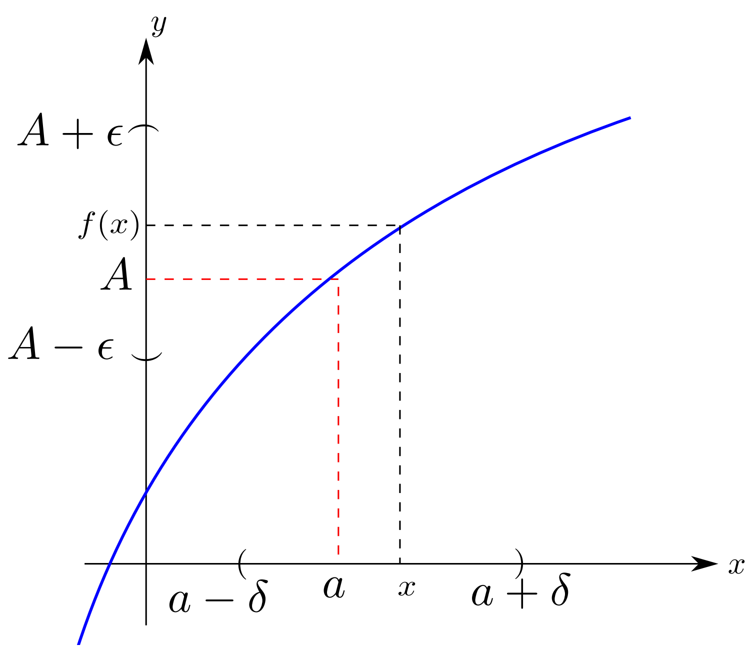
ב) קטע פתוח $(a+\delta, a-\delta)$ נקרא "δ- סביבה" של נקודה a.



a נמצא באמצע הקטע מרחק- δ מהאמצע עד הקצה.

3.2 הגדרה: (גבול דו-צדדי של פונקציה)
מספר A נקרא גבול של פונקציה $f(x)$ בנקודה a אם לכל סביבה של A קיימת סביבה של a כך שלכל $x \neq a$ השייך לסביבה של a מתקיים $f(x)$ שייך לסביבה של A.

במילים פשוטות, כאשר x מתקרב ל- a, $f(x)$ מתקרב ל- A.



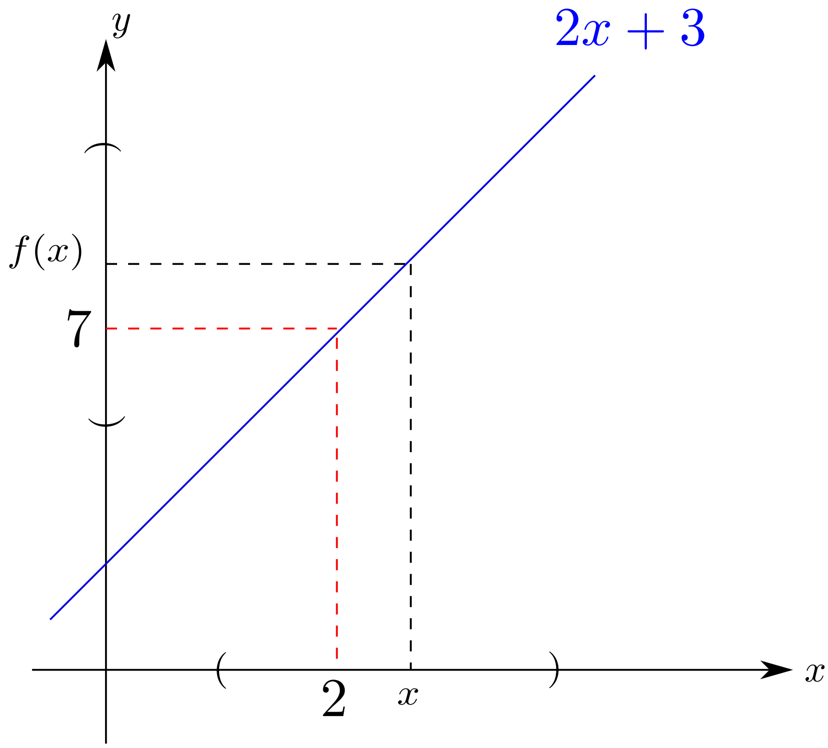
3.3 הערה.
במידה שהפונקציה מוגדרת בנקודה a, בכדי לחשב את $\lim_{x\to a} f(x)$ יש להציב את $x = x_0$ בנוסחה המגדירה את $f(x)$. ■

דוגמאות.

1. $\lim_{x\to 4}(x^2+\sqrt{x}) = 4^2+\sqrt{4} = 18$.

2. $\lim_{x\to \pi}(2^{\cos x}) = 2^{\cos\pi} = 2^{-1} = 0.5$.

3. $\lim_{x\to 2}(2x+3) = 7$.



4. $\lim_{x\to a} C = C$

5.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x\neq 2 \\ 1 & x=2 \end{cases}.$$

$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.

גבולות חד צדדיים

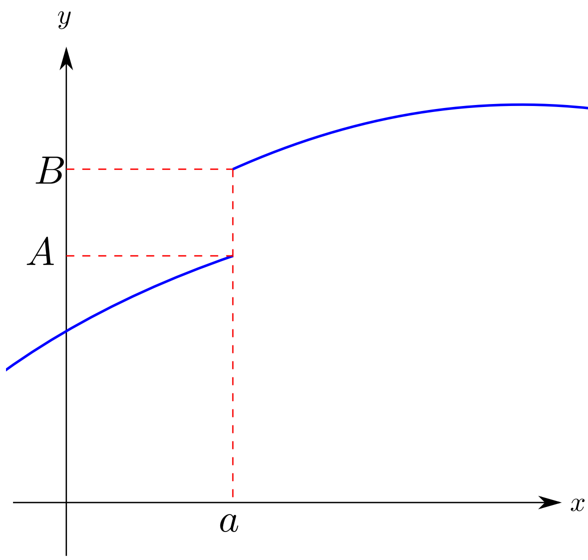
בהגדרה של גבול של פונקציה $\lim_{x\to a} f(x) = A$ לא משנה איך x שואף ל- a (מצד ימין או מצד שמאל), $f(x)$ מתקרב ל-A. לפעמים התוצאה תלויה באופן ההתקרבות של x ל a.

בגרף בתרשים, כאשר x שואף ל a משמאל, $f(x)$ מתקרב ל A, וכאשר x שואף ל a מימין, $f(x)$ מתקרב ל B.

סימנים:

$$\lim_{x\to a^-} = A\ , \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = B\ .$$

3.4 הגדרה: (גבול חד-צדדי של פונקציה)



1) הגבול משמאל של פונקציה $f(x)$ בנקודה a שווה ל- A אם לכל סביבה של A קיימת סביבה של a שך שלכל $x<a$ מהסביבה של a, גם $f(x)$ שייך לסביבה של A.

סימון: $\lim\limits_{x\to a^-} = A$.

2) הגבול מימין של פונקציה $f(x)$ בנקודה a שווה ל- B אם לכל סביבה של B קיימת סביבה של a שך שלכל $x>a$ מהסביבה של a, גם $f(x)$ שייך לסביבה של B.

סימון: $\lim\limits_{x\to a^+} = B$.

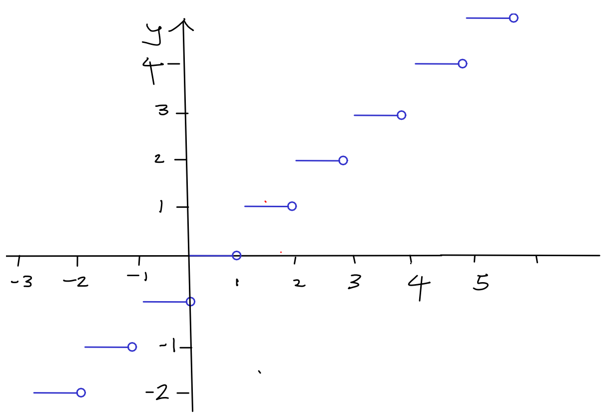
3.5 משפט. (קיום גבול דו-צדדי)

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ אם ורק אם $\lim\limits_{x\to a^+} = \lim\limits_{x\to a^-} = A$.

3.6 דוגמא.

$f(x) = \lfloor x \rfloor$ (פונקציית הריצפה - המספר השלם הקרוב ביותר ל x שלא גדול ממנו.)

$$\lfloor -2.3 \rfloor = -3 \ , \qquad \lfloor 2.8 \rfloor = 2 \ , \qquad \lfloor 2.3 \rfloor = 2 \ .$$



נבדוק אם קיים $\lim\limits_{x\to 2} \lfloor x \rfloor$.

$$\lim_{x\to 2^-} \lfloor x \rfloor = 1 \ , \qquad \lim_{x\to 2^+} \lfloor x \rfloor = 2 \ .$$

ז"א הגבולות החד צדדיים שונים ולכם לא קיים $\lim_{x\to 2} \lfloor x \rfloor$.

לעומת זאת,

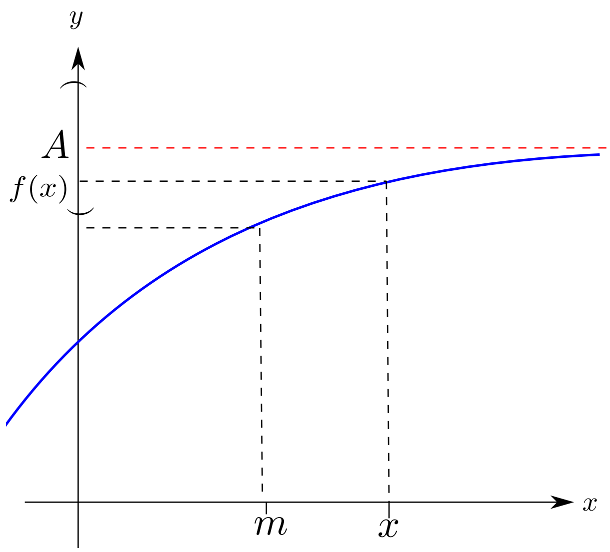
$$\lim_{x\to 2.5}\lfloor x\rfloor = 2$$

כן קיים.

גבול של פונקציה ב $x \to \infty$

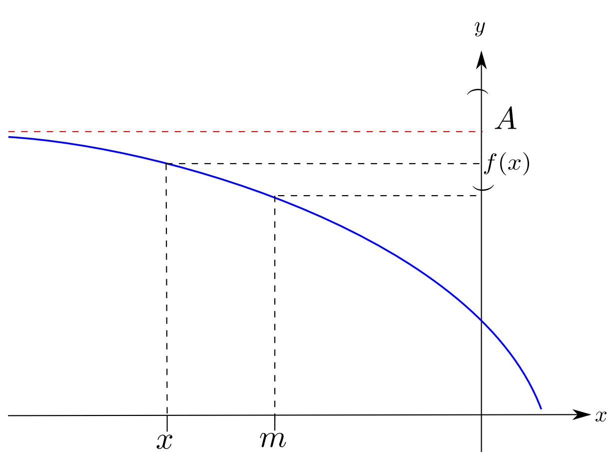
3.7 הגדרה: (גבול של פונקציה כאשר $x \to \infty$)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$



$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ אם לכל סביבה של A קיים מספר m כך שלכל $x > m$ מתקיים: $f(x)$ שייך לסביבה של A.

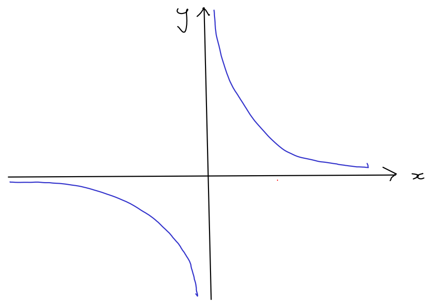
3.8 הגדרה: (גבול של פונקציה כאשר $x \to -\infty$)



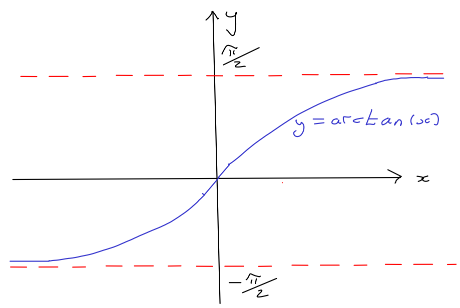
$\lim_{x\to-\infty} = A$ אם לכל סביבה של A קיים מספר m כך שלכל $x < m$ מתקיים: $f(x)$ שייך לסביבה של A.

דוגמאות.

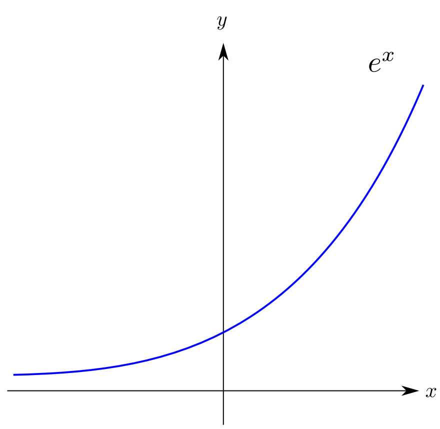
1. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0^+$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0^-$.



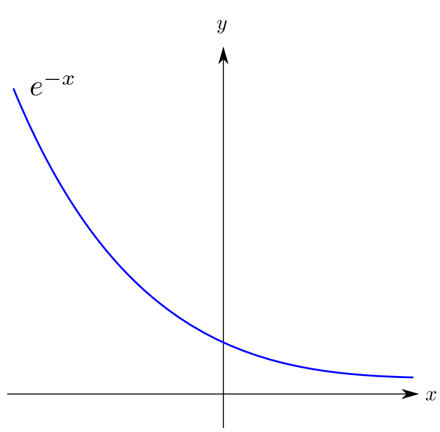
2. $\lim_{x\to-\infty}\arctan(x)=-\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to\infty}\arctan(x)=\frac{\pi}{2}$.



3. $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$.



4. $\lim_{x\to\infty}e^{-x}=0$.



5. הגבולות $\lim_{x\to\infty}\cos x$, $\lim_{x\to-\infty}\cos x$, $\lim_{x\to\infty}\sin x$, $\lim_{x\to-\infty}\sin x$ לא קיימים.

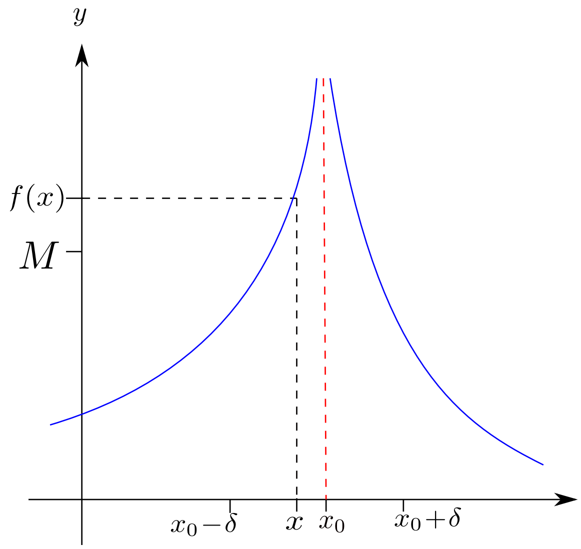
גבול אינסופי בנקודה

3.9 הגדרה: (גבול אינסופי של פונקציה בנקודה)

(i)

$$\lim_{x\to a} f(x) \to \infty$$

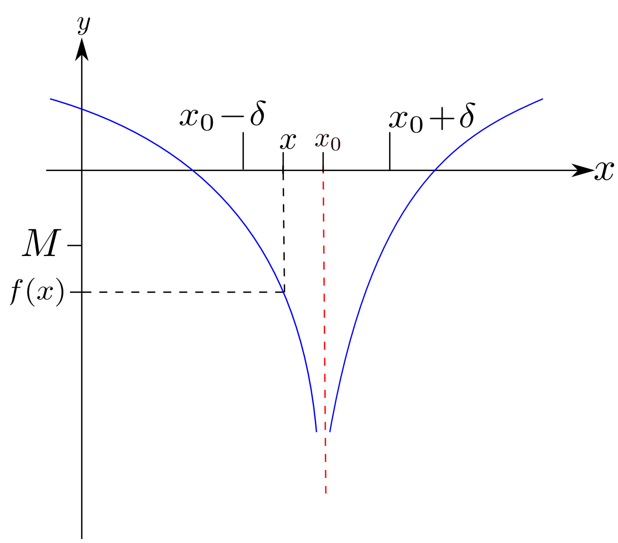
אם לכל M קיימת סביבה של נקודה a, כך שלכל x השייך לסביבה של a, $f(x) > M$.



(ii)

$$\lim_{x\to a} f(x) \to -\infty$$

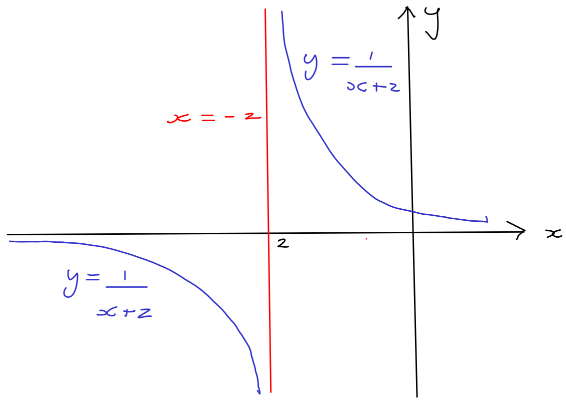
אם לכל M קיימת סביבה של a כך שלכל x השייך לסביבה של a, $f(x) < M$.



דוגמאות.

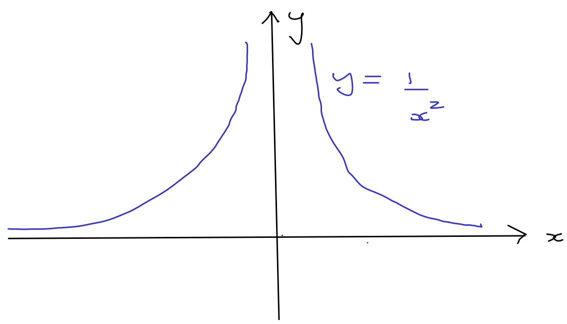
.1

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x+2} = \infty,$$
$$\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty.$$



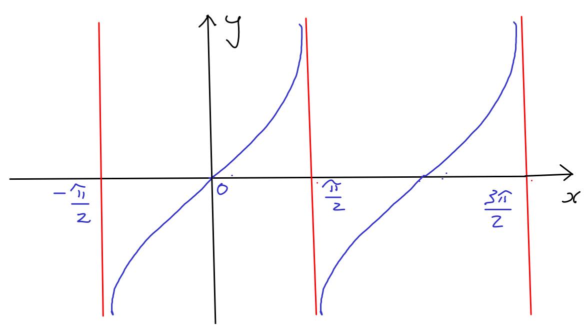
.2

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty.$$



.3

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty,$$
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty.$$



משפטים יסודיים של גבולות

משפט 3.10. (גבולות מסוימות)

א) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

ב) $\lim_{x\to\infty} p^x = \begin{cases} 0 & (0 < p < 1) \\ \infty & p > 1 \end{cases}$

ג) . $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1 \ , \qquad (p>0)$

ד) . $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

דוגמאות לחישוב גבולות

דוגמאות.

דוגמא 1.

$$\lim_{x\to 1}(3x^2-2x+7) = 3\cdot 1^2 - 2\cdot 1 + 7 = 8 \ .$$

דוגמא 2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8} &= \left[\frac{0}{0}\right]\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x+16)}{(x-4)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{18}{-2}\\ &= -9 \ .\end{aligned}$$

דוגמא 3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5} &= \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}\\ &= \frac{1}{2} \ .\end{aligned}$$

דוגמא 4.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1} &= \left[\frac{0}{0}\right]\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{\sqrt{x^2+3x}+2}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{(x-1)\cdot(\sqrt{x^2+3x}+2)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)\cdot(\sqrt{x^2+3x}+2)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x+4}{\sqrt{x^2+3x}+2}\\ &= \frac{5}{4} \ .\end{aligned}$$

דוגמא 5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^x+4^x+3^x}{5^x-4^x-2\cdot 3^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+(\frac{4}{5})^x+(\frac{3}{5})^x}{1-(\frac{4}{5})^x-2\cdot(\frac{3}{5})^x} = \quad 1 \ .$$

דוגמא 6.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x+4^x+3^x}{5^x-4^x-2\cdot 3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{5}{3})^x+(\frac{4}{3})^x+1}{(\frac{5}{3})^x+(\frac{4}{3})^x-2}= \quad -\frac{1}{2}\ .$$

דוגמא 7.

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)^n\right)=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^n$$

גדלים בלתי מוגדרים

1. $\left[\frac{a}{\infty}\right]=0$ לכל מספר a.

$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ לא מוגדר.

2. $\left[\frac{a}{0^+}\right]=\infty$, $\left[\frac{a}{0^-}\right]=-\infty$ לכל מספר $a>0$.

$\left[\frac{0}{0}\right]$ לא מוגדר.

$\left[\frac{\infty}{0^+}\right]=\infty$, $\left[\frac{\infty}{0^-}\right]=-\infty$.

3. $[\infty\cdot\infty]=\infty$, $a\cdot\infty=\infty$ לכל מספר $a>0$.

$[0\cdot\infty]$ לא מוגדר.

4. $[a+\infty]=\infty$, $[a-\infty]=-\infty$ לכל מספר a.

$[\infty+\infty]=\infty$.

$[\infty-\infty]$ לא מוגדר.

5. $[a^{\infty}]=\infty$, $[a^{-\infty}]=0$ לכל מספר $a>1$.

$[a^{\infty}]=0$, $[a^{-\infty}]=\infty$ לכל מספר $0<a<1$.

$[0^{\infty}]=0$, $[\infty^{\infty}]=\infty$.

1^{∞} לא מוגדר, 0^0 לא מוגדר, ∞^0 לא מוגדר.

דוגמאות.

דוגמא 1.

$$\lim_{x\to\infty}[2^x]^{1/x}=[\infty^0]=\lim_{x\to\infty}2^{x/x}=2^1=2$$

דוגמא 2.

$$\lim_{x\to\infty}[2^x]^{1/\sqrt{x}}=[\infty^0]=\lim_{x\to\infty}[2^{\sqrt{x}}]=2^{\infty}=\infty$$

דוגמא 3.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{1/x}=[0^0]=\frac{1}{2}\ ,$$

דוגמא 4.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{1/\sqrt{x}}=[0^0]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}=0\ .$$

דוגמא 5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\cdot x=[0\cdot\infty]=2$$

דוגמא 6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\cdot x^3=[0\cdot\infty]=\infty$$

לא מוגדר.

דוגמא 7.

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-x)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}x(x-1)=\infty\ .$$

משפטים יסודיים של גבולות

3.11 משפט. (משפטים של גבולות)
אם $\lim f(x)=A$ ו- $\lim f(x)=B$, אז

א)

$$\lim_{x\to a}(cf(x))=c\cdot A$$

כאשר c קבוע.

ב)

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$$

ג)

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$$

ד)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$$

בתנאי $B\neq 0$.

דוגמאות.

1)

$$\lim_{x\to\infty}3\cdot\frac{x^2-2x}{x^2+3x}=3\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{x^2+3x}=3\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x}}=3\cdot\frac{1-\frac{2}{\infty}}{1+\frac{3}{\infty}}=3\cdot\frac{1}{3}=1\ .$$

2)

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(x+4)}{2x^2-8}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(x+4)}{2(x+2)(x-2)}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{2(x-2)}\right)\cdot\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+4}{x+2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{4}=3\ .$$

3)

$$\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{x}{x-1}+\frac{2x}{x-3}\right)=\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{x}{x-1}\right)+\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{2x}{x-3}\right)=\frac{3}{2}+\frac{6}{0^+}=\frac{3}{2}+\infty=\infty\ .$$

(4

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{x^2-16}{x+8}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{(x-4)(x+4)}{x+8}\right)=\frac{\lim_{x\to 4}(x-4)(x+4)}{\lim_{x\to 4}(x+8)}=\frac{0}{12}=0\ .$$

3.12 משפט. (גבולות מיוחדים)

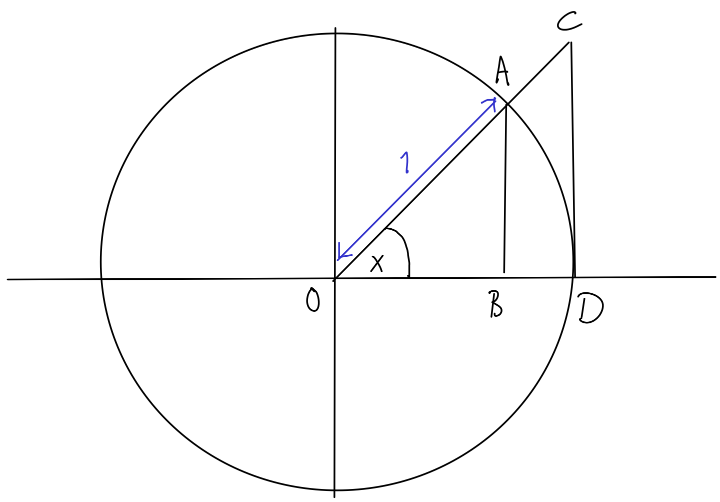
א) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

ב) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

ג) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

הוכחה.

$\underline{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$



$$S_{\Delta OAB}<S_{\Delta OAD}<S_{\Delta OCD}$$

$$S_{\Delta OAB}=\frac{OB\cdot OA}{2}=\frac{\sin x\cdot\cos x}{2}\ ,$$

$$S_{\Delta OAD}=\frac{AD\cdot OA}{2}=\frac{1\cdot 1\cdot x}{2}=\frac{x}{2}\ ,$$

$$S_{\Delta OCD}=\frac{CD\cdot OA}{2}=\frac{1\cdot\tan x}{2}=\frac{\tan x}{2}\ ,$$

$$\frac{\sin x\cdot\cos x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\tan x}{2}$$

שימו לב $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$. נחלק את האי-שוויון ב- $\sin x$:

$$\frac{\cos x}{2}<\frac{x}{2\sin x}<\frac{1}{2\cos x}$$

נכפיל את האי-שוויון ב- 2:

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

נקח אצ הגבול $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \cos x < \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} < \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \qquad \Rightarrow \qquad 1 < \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} < 1$$

לכן לפי כלל הסנדוויץ'

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \ .$$

■

דוגמאות

דוגמאות.

1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4} \frac{x^2-18x+56}{x^2-6x+8} &= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x-14)}{(x-4)(x-2)}\\ &= \lim_{x\to 4} \frac{x-14}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 4} \frac{-10}{-2}\\ &=5 \ .\end{aligned}$$

□

2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}x+\frac{5}{x^2}} = \frac{1}{2} \ .$$

□

3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{\sqrt{x^2+3x}+2}\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{(x-1)\sqrt{x^2+3x}+2}\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x+4)(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^2+3x}+2}\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x+4}{\sqrt{x^2+3x}+2}\\ &=\frac{5}{4} \ .\end{aligned}$$

□

.4

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^x+4^x+3^x}{5^x-4^x-2\cdot 3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\left(\frac{4}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^x-2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x}=1$$

☐

.5

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x+4^x+3^x}{5^x-4^x-2\cdot 3^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^x+\left(\frac{4}{3}\right)^x+1}{\left(\frac{5}{3}\right)^x-\left(\frac{4}{3}\right)^x-2}=-\frac{1}{2}\ .$$

☐

.6

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{2\cdot\frac{x}{2}}\\ &= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y}\\ &= e^2\ .\end{aligned}$$

☐

.7

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(1+2x)^{\frac{5}{x}} &= (1+2x)^{10\cdot\frac{1}{2x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left((1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^{10}\\ &= e^{10}\ .\end{aligned}$$

☐

.8

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos(2x)\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(1+\cos(2x)-1\right)^{\frac{1}{\cos(2x)-1}\cdot\frac{\cos(2x)-1}{x^2}}=\left(1+\cos(2x)-1\right)^{\frac{1}{\cos(2x)-1}\cdot\frac{\cos(2x)-1}{x^2}}$$

שים לב:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=-2$$

לכן

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos(2x)\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(1+\cos(2x)-1\right)^{\frac{-2}{\cos(2x)-1}}=\lim_{y\to 0}\left(1+y\right)^{\frac{-2}{y}}=e^{-2}\ .$$

☐

שיעור 4
רציפות בנקודה

4.1 הגדרה: (רציפות בנקודה)
נניח ש- $f(x)$ פונקציה המוגדרת בנקודה a ובסביבה של a.
נקרא רציפה בנקודה a אם

1. $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$, כלומר הגבול הדו-צדדי $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ קיים,
2. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

מכיוון ש $\lim_{x\to a} x = a$, מקבלים $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = f\left(\lim_{x\to a} x\right)$, ז"א סימן של lim נכנס לתוך הפונקציה.

דוגמאות.

דוגמא 1) $\lim_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e^1 = e$

דוגמא 2) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln\left[(1+x)^{1/x}\right] = \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right] = \ln e = 1$.

4.2 משפט. (תכונות של פונקציה רציפה)

1) אם פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפות בנקודה a, אז הפונקציות $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ רציפות בנקודה a.
הפונקציה $\frac{f}{g}$ רציפה בנקודה a בתנאי $g(a)\neq 0$.

2) נניח ש $y=f(u)$, $u=g(x)$, $g(a)=b$, פונקציה g רציפה בנקודה a ופונקציה f רציפה בנקודה b, אז הפונקציה $y=f(g(x))$ רציפה בנקודה a.

3) כל פונקציה אלמנטרית רציפה בכל נקודה פנימית של תחום הגדרתה.

4.3 הגדרה: (אי-רציפות בנקודה)
תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה a אבל לא בהכרח בנקודה a עצמה.

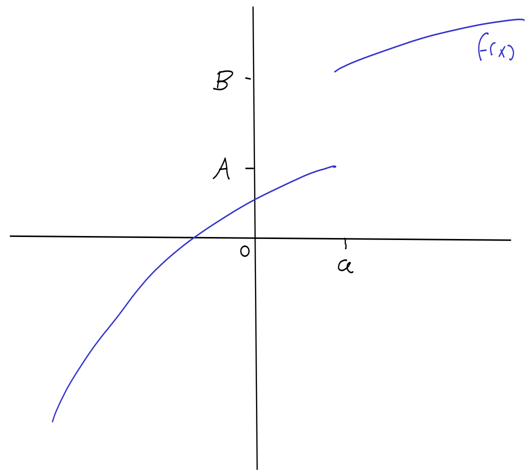
א) אם קיימים הגבולות החד-צדדים הסופיים ו-

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \neq f(a)$$

או ש $f(a)$ לא מוגדר, אומרים כי a היא נקודת אי-רציפות סליקה של $f(x)$.

ב) נקודה a היא נקודת אי-רציפות ממין ראשון של $f(x)$ אם קיימים הגבולות החד-צדדים הסופיים $\lim_{x\to a^-} f(x) = A$, ו- $\lim_{x\to a^+} f(x) + B$ אבל $A\neq B$, כלומר

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)\ .$$

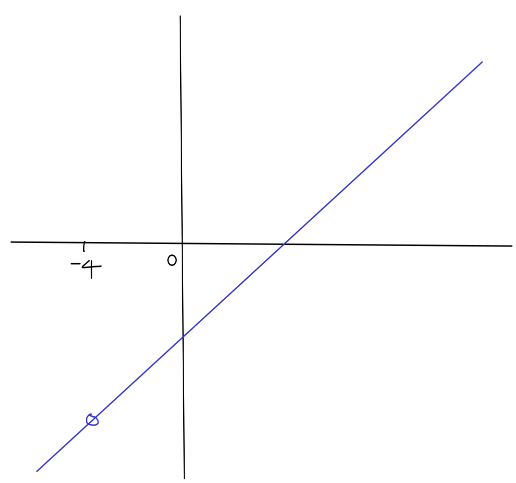


ג) נקודה a נקראת אי רציפות ממין שני של פונרציה $f(x)$ אם לפ[חות אחד הגבולות החד צדדיים $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ או $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ שווה ל- ∞ או $-\infty$ או לא קיים.

4.4 דוגמא. $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+4}$ לא רציפה בנקודה $x=-4$.

$$\lim_{x\to -4}\frac{x^2-16}{x+4}=\lim_{x\to -4}\frac{(x+4)(x-4)}{x+4}=\lim_{x\to -4}(x-4)=-8$$

$f(x)$ לא מוגדרת בנקודה $x=-4$. לכן $x=-4$ נקודת אי-רציפות סליקה.



4.5 דוגמא. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\ ,\\ 2 & x=0\ .\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ ,$$

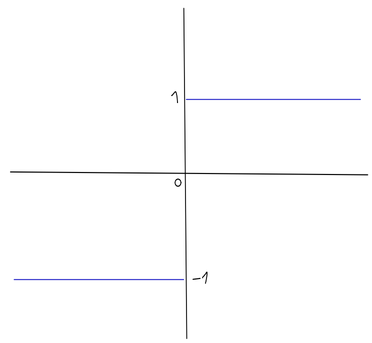
אבל $f(0)=2$. ז"א $\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$ $\Leftarrow$ נקודת אי-רציפות סליקה.

4.6 דוגמא. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

$x = 0$ נקודת אי-רציפות.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \ , \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{-x} = -1$$

לכן $x = 0$ נקודת אי-רציפות ממין ראשון.



4.7 דוגמא. $f(x) = \begin{cases} x-1 & -1 < x < 2 \ , \\ 2-x & 2 \leq x \leq 4 \ . \end{cases}$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x-1) = 1 \ , \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2-x) = 0 \ .$$

לכן $x = 2$ נקודת אי-רציפות ממין ראשון.

4.8 דוגמא. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{2}{x-1}\right)$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \arctan\left(\frac{2}{x-1}\right) = -\frac{\pi}{2} \ , \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \arctan\left(\frac{2}{x-1}\right) = \frac{\pi}{2} \ .$$

$x = 1$ נקודת אי רציפות ממין ראשון.

4.9 דוגמא.

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$$

לכן $x = 2$ נקודת אי-רציפות ממים שני.

4.10 דוגמא.

$$f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

לא קיים. לכן $x=0$ נקודת אי-רציפות ממים שני.

4.11 דוגמא.

מצאו את נקודות אי הרציפות של הפונרציה הבאה וברר את סוגן:

$$f(x)=\frac{x}{x+3}+2^{-1/x^2}$$

פיתרון. נקודות אי רציפות: $x=0,-3$.

$\underline{x=-3}$

$$\lim_{x\to -3^+}\left(\frac{x}{x+3}+2^{-1/x^2}\right)=\infty$$

$x=-3$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

$\underline{x=0}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x+3}+2^{-1/x^2}\right)=0+0=0$$

$x=0$ נקודת אי-רציפות סליקה. ■

4.12 דוגמא.

מצאו את נקודות אי הרציפות של הפונרציה הבאה וברר את סוגן:

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}+\frac{\tan x}{x}$$

פיתרון.

נקודות אי רציפות: $x=-1,3,0$, $\frac{\pi}{2}+n\pi$.

$\underline{x=-1}$

$$\lim_{x\to-1^-}\left(\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}+\frac{\tan x}{x}\right)=-\infty$$

$x=-1$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

<u>$x=3$</u>

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}+\frac{\tan x}{x}\right)=\frac{3}{2}+\frac{\tan 3}{3}=0$$

$x=3$ נקודת אי-רציפות סליקה.

<u>$x=0$</u>

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}+\frac{\tan x}{x}\right)=3+1=4$$

$x=0$ נקודת אי-רציפות סליקה.

<u>$x=\frac{\pi}{2}+n\pi$</u>

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^-}\left(\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}+\frac{\tan x}{x}\right)=\infty\ .$$

$x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ נקודת אי-רציפות ממין שני.

■

4.13 דוגמא.

נתונה פונקציה

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x} & x\leq 1\\ ax^2 & -1<x\leq 1\\ \sqrt{x+b} & x>1\end{cases}$$

עבור אילו ערכי a,b $f(x)$ רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$?

פיתרון.

<u>אי-רציפות בנקודה $x=-1$</u>

$$\lim_{x\to-1^-}f=2^{-(-1)}=2\ ,\qquad \lim_{x\to-1^+}f=a(-1)^2=a\ .$$

לכן f רציפה ב- $x=-1$ אם $a=2$.

$$\lim_{x\to1^-} f = a1^2 = a(=2)\ , \qquad \lim_{x\to1^+} f = \sqrt{1+b}\ .$$

לכן f רציפה ב- $x=1$ אם

$$\sqrt{1+b} = 2 \quad \Rightarrow \quad b=3\ .$$

■

דוגמא.

נתונה פונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2\left(\sqrt{a^2+1}\cdot x\right)}{2x^2} & x<0 \\ b & x=0 \\ x+5 & x>0 \end{cases}$$

א. עבור אילו ערכי a,b $f(x)$ רציפה ב- $x=0$?

ב. עבור אילו ערכי a,b $f(x)$ הנקודה $x=0$ נקודת אי-רציפות ממין ראשון?

ג. עבור אילו ערכי a,b $f(x)$ הנקודה $x=0$ נקודת אי-רציפות סליקה?

פיתרון.

א.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^-} f(x) &= \lim_{x\to0^-} \frac{\sin^2\left(\sqrt{a^2+1}\cdot x\right)}{2x^2} \\ &= \lim_{x\to0^-} \frac{a^2+1}{2}\frac{\sin^2\left(\sqrt{a^2+1}\cdot x\right)}{\left(\sqrt{a^2+1}\cdot x\right)^2} \\ &= \lim_{x\to0^-} \frac{a^2+1}{2}\ ,\end{aligned}$$

ו-

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} f(x) &= \lim_{x\to0^+}(x+5) \\ &= 5\ ,\end{aligned}$$

ו- $f(0)=b$. כדי ש- f תהיה רציפה נדרש כי $\lim_{x\to0^-} f = \lim_{x\to0^+} f = f(0)$ וזה מתקיים אם $\frac{a^2+1}{2}=5=b$ או שקול

$$b=5\ , \qquad a=\pm3\ .$$

ב. הגבול $\lim_{x\to0^+} f(x)=5$ קיים לכל $b\in\mathbb{R}$ והגבול $\lim_{x\to0^-} f(x)=\frac{a^2+1}{2}$ קיים לכל $b\in\mathbb{R}$. לכן $x=0$ תהיה נקודת אי-רציפות ממין ראשון אם

$$\frac{a^2+1}{2}\neq5 \qquad \Rightarrow \qquad a\neq\pm3$$

לכל $b\in\mathbb{R}$.

ג. הגבולות $\lim_{x\to0^\pm} f$ זהים אם $a=\pm3$ ו-

$$\lim_{x\to0^\pm} f \neq f(0)=b$$

אם $b\neq 5$.

■

שיעור 5
רציפות בקטע והגדרת הנגזרת

רציפות פונקציה בקטע

5.1 הגדרה: (רציפות בקטע בקטע פתוח)
פונקציה $f(x)$ נקראת רציפה בקטע פתוח (a,b) אם היא רציפה בכל נקודה $c\in(a,b)$ ז"א לכל $a<c<b$

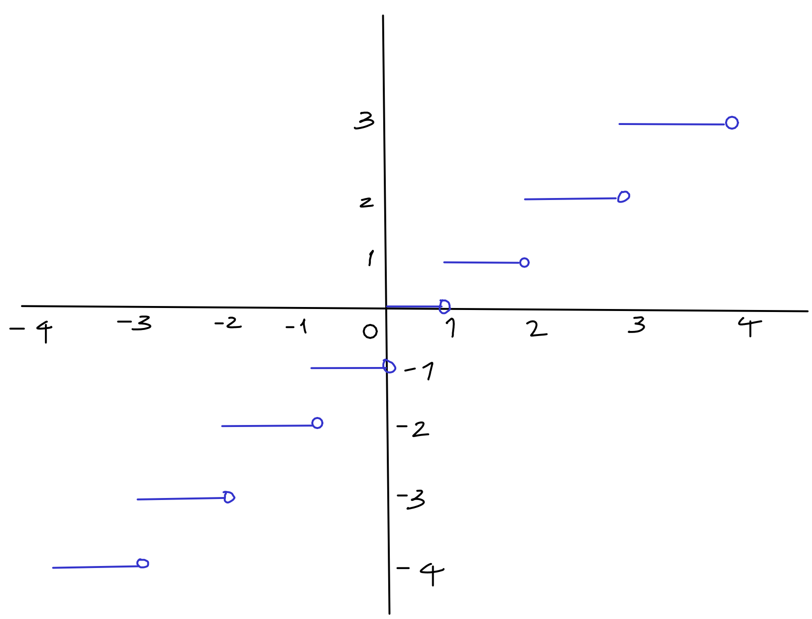
$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = f(c) \ .$$

5.2 הגדרה: (רציפות בקטע בקטע סגור)
פונקציה $f(x)$ נקראת רציפה בקטע פתוח $[a,b]$ אם היא רציפה בכל נקודה פנימית של הקטע, כלומר לכל $c\in(a,b)$, וגם

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \ , \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b) \ .$$

5.3 דוגמא. $f(x)=[x]$

הערך השלם של x (ז"א המספר השלם הקרוב ביותר ל x שלא גדול מ x).



נבדוק אם $f(x)$ רציפה בקטע $[1,2]$.

בקטע הסגור $(1,2)$ הפונקציה היא $y=1$ - רציפה.

$$\lim_{x\to 1^+}[x]=1 \ , \qquad \lim_{x\to 2^-}[x]=1 \ , \qquad f(2)=2.$$

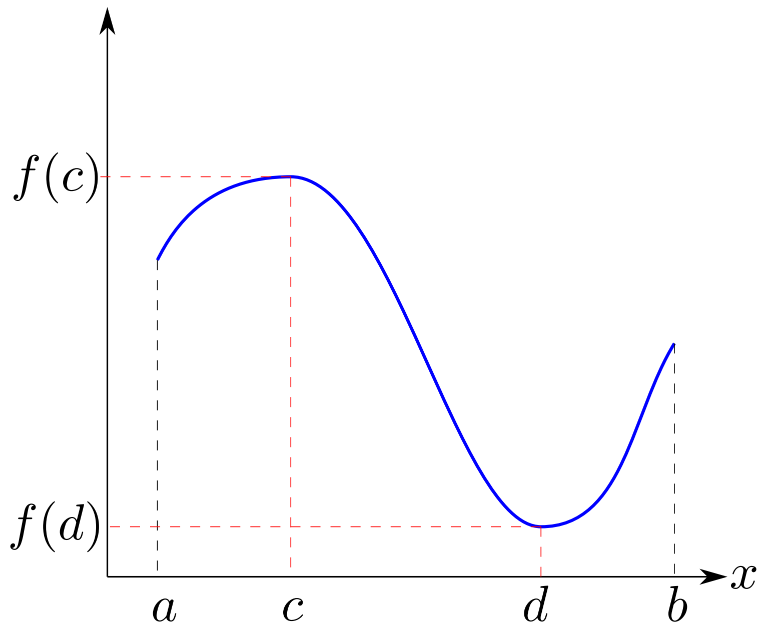
לכן $f(x)$ לא רציפה משמאל בנקודה $x=2$, ו- $f(x)$ רציפה מימים בנקודה $x=1$.

כלומר $f(x)$ לא רציפה בקטע סגור $[1,2]$. $f(x)$ רציפה בקטע $[1,2)$.

משפטים היסודיים של רציפות פונקציה בקטע סגור

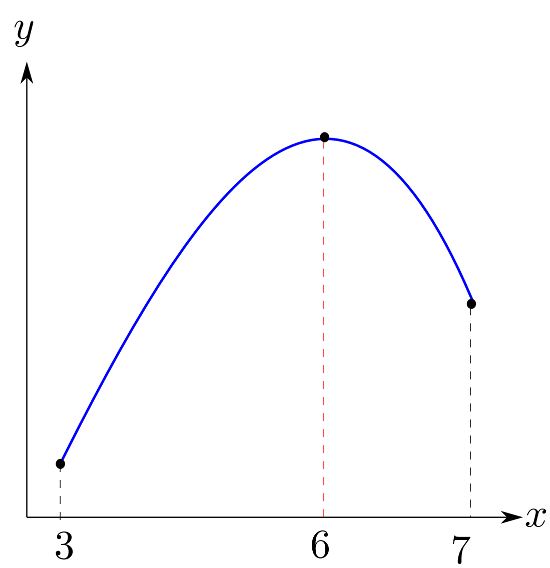
5.4 תורת. (משפט ויירשטראס - ערך גדול ביותר וקטן ביותר של פונקציה)
אם פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$, אז $f(x)$ מקבלת בקטע הזה את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר. ז"א קיים מספרים c ו- d בקטע $[a,b]$ כך ש

$$f(d) \leq f(x) \leq f(c) \qquad \forall x \in [a,b] \ .$$



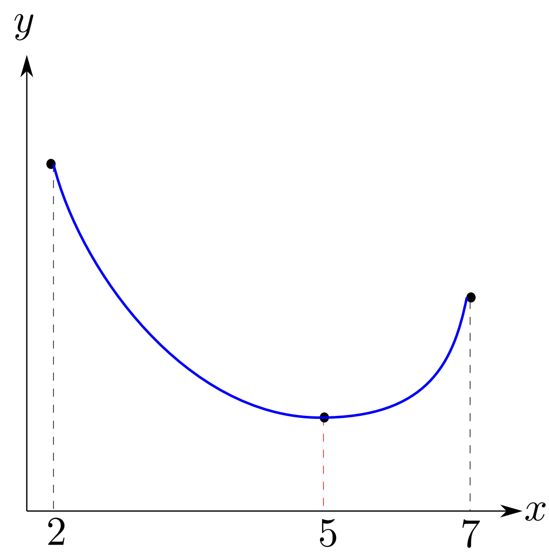
דוגמאות.

1 $f(x) = -(x-2)(x-10)$ רציפה קטע $[3,7]$.



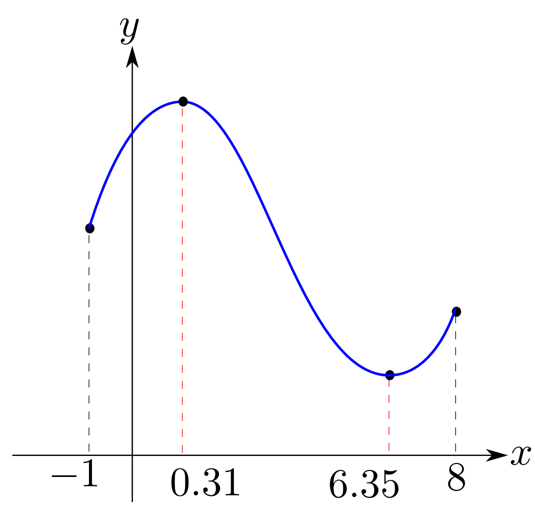
מינימום	$f(3)$
מקסימום	$f(6)$

2 $f(x)=x^2-10x+30$ רציפה קטע $[2,7]$.



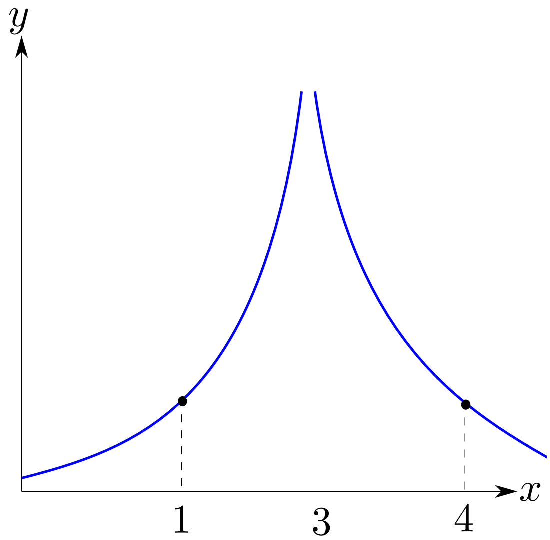
מינימום	$f(5)$
מקסימום	$f(2)$

3 $f(x)=x^3-10x^2+6x+150$ רציפה קטע $[2,7]$.



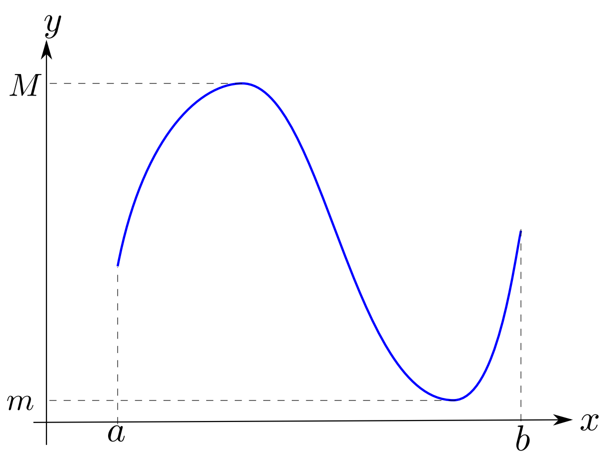
מינימום	$f(0.31)$
מקסימום	$f(6.35)$

4 $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ בקטע $I=[1,4]$. f לא רציפה בקטע I ולכן לא מקבלת ערך מינימום.

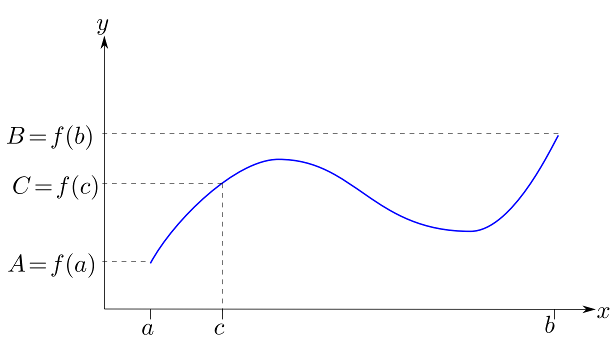


5.5 תורת. (משפט חסימות של פוקציה של ויירשטראס)
אם פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$, אז היא חסומה בקטע הזה. ז"א קיימים מספרים m ו- M כך ש

$$m \le f(x) \le M \qquad \forall x \in [a,b]\ .$$

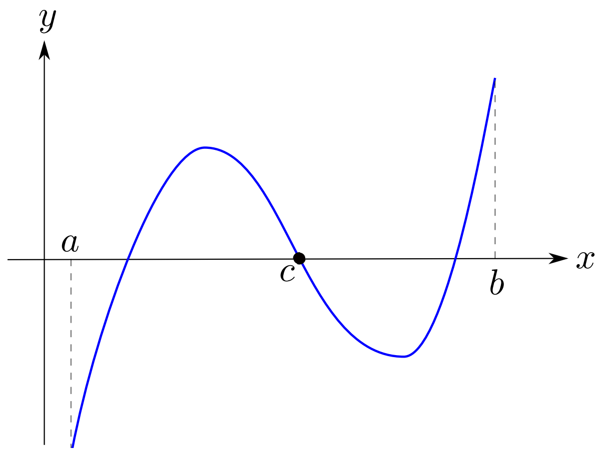


5.6 משפט. (1 משפט ערך הביניים)
אם פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ ומקבלת בקצוות הקטע ערכים שונים (ז"א
$f(a)=A$,$f(b)=B$,$A\neq B$, אז $f(x)$ מקבלת בקטע הזה את כל הערכים בין A ו- B.



5.7 משפט. **(משפט ערך הביניים 2 (משפט בולזנו))**
נניח ש $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ ובקצוות הקטע $f(x)$ מקבלת ערכים מסימנים שונים, כלומר (ז"א $f(a)\cdot f(b)<0$) אז קיימת לפחות נקודה אחד c, כך ש $a<c<b$ ו-

$$f(c)=0 \ .$$



5.8 דוגמא. הוכח כי למשוואה

$$e^{2x+1}+x^2-5=0$$

יש שורש ממשי אחת ומצא אותו עם דיוק של שתי ספרות.

פיתרון.
נגדיר פונקציה

$$f(x)=e^{2x+1}+x^2-5 \ .$$

שים לב

$$f(0)=-5+e<0 \ , \qquad f(1)=-4+e^3>0 \ .$$

מכיוון ש- $f(x)$ פונקציה אלמנטרית ומוגדרת בקטע $[0,1]$, אז f רציפה בקטע זו. $f(0)<0$ ו- $f(1)>0$
לכן לפי משפט בולזנו (משפט 5.7) קיים c בתחום $0<c<1$ כך ש- $f(c)=0$.

בנוסף f חח"ע בקטע $I=[0,1]$ ולכן f עולה ממש או יורדת ממש (ומכיון ש $f(0)<f(1)$ אז f עולה ממש).
לכן הנקודה שבה $f(c)=0$, יחידה.

$f(0)$	$-2.281<0$
$f(0.1)$	$-1.669<0$
$f(0.2)$	$-0.904<0$
$f(0.3)$	$0.043>0$

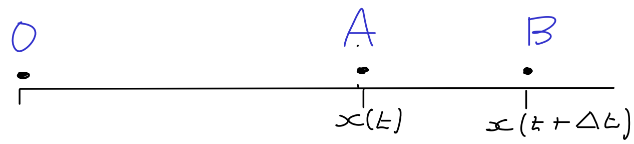
לכן $0.2<c<0.3 \Leftarrow c\approx 0.2$.

$f(0.29)$	$-0.06<0$
$f(0.3)$	$0.043>0$

$0.29<c<0.3 \Leftarrow c\approx 0.29$. ■

מושג הנגזרת

1 המשמעות הפיזית של נגזרת



נניח שגוף הנמצא בנקודה $x(t)$ בזמן התחלתי t, נע לנקודה $x(t+\Delta t)$ ומסתיים שם בזמן סופי $t+\Delta t$. המהירות הממוצעת היא

$$\bar{\mathrm{v}} = \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \ .$$

מכאן המהירות הרגעית בנקודה A היא

$$\mathrm{v} = \lim_{\Delta t\to 0} \bar{\mathrm{v}} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = x'(t) \ .$$

ז"א המשמעות הפיזית של הנגזרת היא מהירות.

2 הגדרת הנגזרת

5.9 הגדרה: (הנגזרת)
הנגזרת של פונקציה $f(x)$ בנקודה x תסומן $f'(x)$ ותוגדר

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \ .$$

דוגמאות.

1. $f(x)=c$

$$c' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = 0 \ .$$

2. $f(x)=x$

$$x' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x} = 1 \ .$$

3. $f(x)=x^2$

$$\begin{aligned}(x^2)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2\Delta x \cdot x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x \cdot x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (2 \cdot x + \Delta x) \\ &= 2x \ .\end{aligned}$$

$f(x) = x^n$ .4

$$\begin{aligned}(x^n)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^{n-k}\Delta x^k + \cdots + \Delta x^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^{n-k}\Delta x^k + \cdots + \Delta x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^{n-k}\Delta x^{k-1} + \cdots + \Delta x^{n-1} \right) \\ &= nx^{n-1} \ .\end{aligned}$$

$f(x) = \ln x$ .5

$$\begin{aligned}(\ln x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left[\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x}\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x}}\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \ln\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] \\ &= \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] \\ &= \frac{1}{x} \cdot \ln\left(\lim_{\Delta x \to 0} \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]\right) \\ &= \frac{1}{x} \cdot \ln(e) \\ &= \frac{1}{x} \ .\end{aligned}$$

.6 $f(x) = \frac{1}{x}$

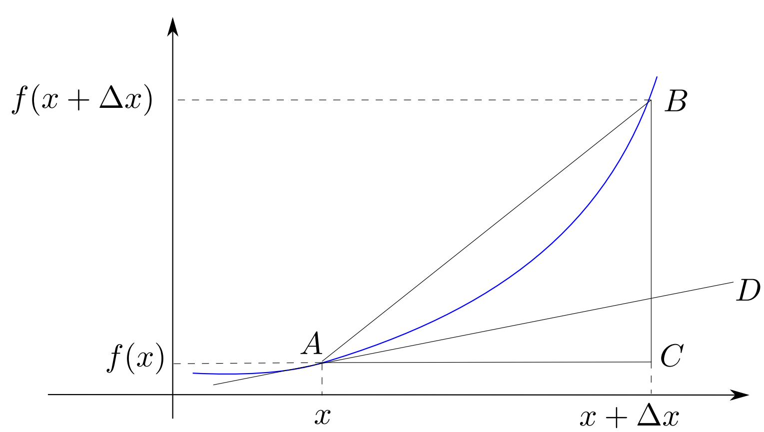
$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-\Delta x}{x\cdot(x+\Delta x)\cdot \Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-1}{x\cdot(x+\Delta x)} \\ &= \frac{-1}{x^2} \ .\end{aligned}$$

.7 $\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \ .\end{aligned}$$

---

3 משמעות הגאומטרית של נגזרת



השיפוע של הגרף בנגודה A מוגדרת להיות השיפוע של המשיק לגרף בנקודה A - ז"א השיפוע של הישר AD. יהי A הנקודה $(x, f(x))$ ו- B הנקודה $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$. אז המיתר AB מתלכד עם המשיק AD בגבול כאשר B מתקרב לנקודה A, וזה מתרחש כאשר $\Delta x \to 0$. לכן ניתן לחשב השיפוע של המשיק ע"י השיפוע של הישר AB בגבול ש- $\Delta x \to 0$. נקבל

$$\text{שיפוע של המשיק} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{BC}{AC} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

אבל אגף הימין הוא דווקא הנגזרת של $f(x)$ בנקודה A, לכן מצאנו כי השיפוע של גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה-x שווה להנגזרת בנקודה הזאת.

משוואת משיק ונורמל

5.10 כלל: (משיק ונורמל של גרף)
משוואת הישר המשיק לקו $y=f(x)$ בנקודה x_0 היא

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

משוואת הישר הנורמל לקו $y=f(x)$ בנקודה x_0 היא

$$y-y_0=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

5.11 דוגמא. $f(x)=x^2$. מצא את משוואת המשיק ומשוואת הנורמל בנקודה $x=2$.

פיתרון.
משוואת המשיק:

$$y-2^2=2\cdot 2(x-2) \qquad \Rightarrow \qquad y-4=4(x-2)\ .$$

ומשוואת הנורמל:

$$y-2^2=\frac{-1}{2\cdot 2}(x-2) \qquad \Rightarrow \qquad y-4=-\frac{1}{4}(x-2)\ .$$

■

גזירות

5.12 הגדרה: (נגזרת החד צדדי)
הנגזרת החד-צדדי מצד שמאל של $f(x)$ בנקודה a מוגדרת להיות הגבול

$$f'(a^-)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

והנגזרת החד-צדדי מצד ימין של $f(x)$ בנקודה a מוגדרת להיות הגבול

$$f'(a^+)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\ .$$

5.13 הגדרה: (גזורית)
$f(x)$ נקראת גזירה בנקודה a אם הנגזרת מצד שמאל שווה לנגזרת מצד ימין בנקודה a , כלומר

$$f'(a^-)=f'(a^+)\ .$$

5.14 משפט. (קשר בין גזירות ורציפות)
אם פונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה a אז היא רציפה בנקודה הזאת.

בכיוון ההפוך זה לא מתקיים, ז"א אם פונקציה רציפה בנקודה a, היא לא בהכרח גזירה בה.

5.15 דוגמא.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \ .$$

נבדוק אם $f(x)$ רציפה בנקודה $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0 \ , \qquad \lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0 \ .$$

לכן $f(x)$ רציפה בנקודה $x = 0$.

נבדוק אם $f(x)$ גזירה בנקודה $x = 0$:

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 \ ,$$
$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \ .$$

לכן מכיוון ש- $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ אז f אינה גזירה ב- $x = 0$. ז"א לא קיים משיק בנקודה $x = 0$.

5.16 דוגמא.

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \ .$$

נבדוק אם $f(x)$ רציפה בנקודה $x = 0$. שים לב $\sin(\frac{1}{x})$ חסומה ולפיו

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \ .$$

שים לב $f(0) = 0$ ולכן $f(x)$ רציפה ב- $x = 0$.

נבדוק אם $f(x)$ גזירה בנקודה $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(0+\Delta x)\sin\left(\frac{1}{0+\Delta x}\right) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x \cdot \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)}{\Delta x} \ .$$

הגבול לא קיים ולכן $f(x)$ אינה גזירה ב- $x = 0$.

כללי הנגזרת

5.17 משפט. (כללים יסודיים של נגזרות)

1. סכום של פונקציות

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x) \ .$$

2. מכפלת פונקציה בסקלר

$$(\alpha f(x))' = \alpha f'(x) \ .$$

3. כלל הכפל

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \ .$$

4. כלל המנה

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2} \ .$$

5. כלל השרשרת

$$[f\left(g(x)\right)]' = f\left(g\right)'_g \cdot g(x)'_x \ .$$

דוגמאות

5.18 דוגמא.

$$\left[\ln\left(x^4-2x^2+6\right)\right]' = \frac{1}{x^4-2x^2+6}\cdot\left(4x^3-4x\right)$$

5.19 דוגמא.

$$\left[7^{x^2-4x}\right]' = 7^{x^2-4x}\cdot\ln 7\cdot(2x-4) \ .$$

5.20 דוגמא. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ בנקודה $A(\pi/2,2)$.

פיתרון.

$$f'(x) = 8\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{2} \ .$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -8\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} = -8\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = -2 \ .$$

משוואת המשיק:

$$y-2 = -2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

משוואת הנורמל:

$$y-2 = \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

■

זווית בין קווים עקומים

5.21 דוגמא. מצא את הזווית בין הקווים $y=\frac{x}{2}$ ו- $y=\frac{1}{1+x}$ בנקודת החיתוך שלהם שבה $x>0$. צייר את הסקיצה המתאימה.

פיתרון.
נקודת חיתוך:

$$\frac{x}{2}=\frac{1}{x+1} \qquad \Rightarrow \qquad x(x+1)=2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2+x-2=0 \qquad \Rightarrow \qquad x=1\ .$$

נקודת חיתוך: $(1,0.5)$

שיפוע של y_1:

$$y_1=\frac{x}{2}\ , \qquad y_1'=\frac{1}{2}\ , \qquad y_1'(1)=\frac{1}{2}=m_1\ .$$

שיפוע של y_2:

$$y_2=\frac{1}{x+1}\ , \qquad y_2'=\frac{-1}{(x+1)^2}\ , \qquad y_1'(1)=\frac{-1}{4}=m_2\ .$$

חישוב הזווית בין y_1 ו- y_2:

$$\tan\alpha=\frac{|m_1-m_2|}{1+m_1\cdot m_2}=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{6}{7}$$

כך ש-

$$\alpha=40.6^\circ\ .$$

■

נגזרת של פונקציה סתומה

5.22 דוגמא. נתונה הפונקציה $y(x)$ הניתנת ע"י

$$x^2+y^2=1\ .$$

מצא את הנגזרת $y'(x)$.

פיתרון.
נגזור את אגף השמאך ואגף הימין:

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2y \cdot y' = -2x \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{x}{y} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \ .$$

■

דוגמא. נתונה הפונקציה $y(x)$ הניתנת ע"י

$$e^x - x - y + x \cdot e^y = 0 \ .$$

מצא את משוואת המשיק בנקודה $(0,1)$.

פיתרון.
נגזור את אגף השמאל ואגף הימין:

$$e^x - 1 - y' + e^y + x \cdot y' \cdot e^y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e^x - 1 + e^y = y'\left(1 - x \cdot e^y\right) \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{e^x - 1 + e^y}{1 - x \cdot e^y} \ .$$

ולפיו בנקודה $(0,1)$,

$$y' = \frac{1 - 1 + e}{1} = e$$

כך שמשוואת המשיק בנקודה זו היא

$$y - 1 = e \cdot x \ .$$

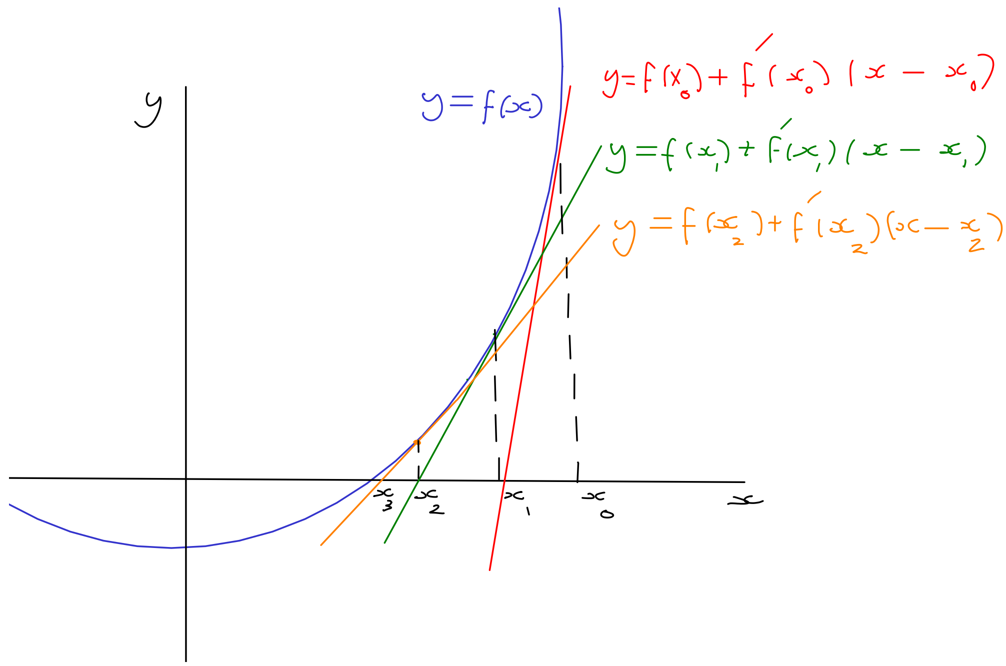
■

שיעור 6

נגזרת מסדר גבוה, נגזרת של פונקציה הפוכה, פרמטרית וסתומה

שיטת המשיקים של ניוטון לפתרון המקורב של משוואות

שוטה זו מבוססת על קירוב הפונקציה $f(x)$ ע"י המשיק $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ בנקודה התחלתית x_0 ומציאת השורש x_1 של משיק זה".



<u>שלב 1</u> נבחור נקודה התחלתית x_0

<u>שלב 2</u> נחשב משוואת המשיק בנקודה x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

<u>שלב 3</u> נמצוא נקודת חיתוך של משיק זו עם ציר ה- x:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

<u>שלב 4</u> נחזור לשלבים 1-3 עם נקודת התחלתית x_1 במקום x_0:

<u>שלב' 1</u> נתחיל עם נקודת התחלתית x_1 הנמצא בשלב הקודם.

<u>שלב' 2</u> נחשב משוואת המשיק בנקודה x_1:

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

<u>שלב' 3</u> נמצוא נקודת חיתוך של משיק זו עם ציר ה- x:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

<u>שלב' 4</u> נחזור לשלבים 1-3 עם נקודת התחלתית x_2 במקום x_1:

וכן הלאה...

דוגמא.
מצא את שורש אחד של פונקציה $f(x) = x^2 - x - 13$.

פיתרון.
נתחיל עם נקודה התחלתית $x_0 = 10$:

$f(x_0) = 85$	$x_0 = 10$	$n = 0$
$f(x_1) = 11.56$	$x_1 = 4.6$	$n = 1$
$f(x_2) = 1.98741$	$x_2 = 3.19024$	$n = 2$
$f(x_3) = 0.136437$	$x_3 = 2.82087$	$n = 3$
$f(x_4) = 0.00086398$	$x_4 = 2.79148$	$n = 4$

■

נגזרת של פונקציה סתומה

דוגמא.
מהו משוואת המשיק לקו של הפונקציה $x^2 + y^2 = 1$ ($y \geq 0$) בנקודה $x = 0.5$.

פיתרון.
נגזור את שני הצדדים:

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{x}{y}$$

שים לב

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

, לכן עבור $y \geq 0$ נקבל

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \ .$$

מכאן בנקודה $x = 0.5$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ו- $y' = \frac{-1}{\sqrt{3}}$. לכן משוואת המשיק בנקודה $x = 0.5$ היא

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}(x - \tfrac{1}{2}) \ .$$

■

דוגמא.
נתונה $e^x - x - y + xe^y = 0$ מצא את משוואת המשיק בנקודה $(0, 1)$.

פיתרון.
נגזור שני הצדדים:
$$e^x - 1 - y' + e^y + xy'e^y = 0 \ .$$
נציב את הנקודה $(0,1)$ ונקבל
$$1 - 1 - y'(0) + e = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y'(0) = e \ .$$
לכן משוואת המשיק היא
$$y = 1 + ex \ .$$
■

דוגמא.
מצא את משוואת המשיק והנורמל לקו
$$e^x y + \ln(xy+1) = 1$$
בנקודה שבה $x = 0$.

פיתרון.
נציב $x = 0$ לתוך המשוואה:
$$e^0 y + \ln(1) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y = 1 \ .$$
נגזור את שני הצדדים של המשוואה:
$$e^x y + e^x y' + \frac{1}{xy+1} \cdot (y + xy') = 0$$
נציב את הנקודה $(0,1)$:
$$1 + y' + 1 \cdot (1 + 0 \cdot y') = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -2 \ .$$
לכן עבור משוואת המשיק נקבל
$$y = 1 - 2x$$
ועבור משוואת הנורמל נקבל
$$y = 1 + \frac{x}{2} \ .$$
■

דוגמא.
פונקציה $y(x)$ מוגדרת בצורה סתומה ע"י המשוואה
$$xe^{2y} + y \ln x + \sin(2y) = 1 \ .$$
מצא את הזווית שהמשיק בנקודה $A(1,0)$ יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x.

פיתרון.
שים לב, הנגזרת של פונקציה $y(x)$ בנקודה A שווה ל tan של הזווית שהמשיק יוצר עם ציר ה- x. לכן מספיק למצוא את הנגזרת בנקודה זו.

$$e^{2y}+2xy'e^{2y}+y'\ln x+\frac{y}{x}+2\cos(2y)\cdot y'=0\ .$$

נציב את הנקודה $A(1,0)$:

$$1+2y'(1)+y'(1)\ln(1)+\frac{0}{1}+2\cos(2\cdot 0)\cdot y'(1)=0 \qquad \Rightarrow \qquad 1+2y'(1)+2y'(1)=0 \qquad \Rightarrow \qquad y'(1)=-\frac{1}{4}\ .$$

לכן $\tan\alpha=-\frac{1}{4}$ ולפיו $\alpha=\arctan\left(-\frac{1}{4}\right)=-14.3^\circ$ ■

נגזרת של פונקציה הפוכה

נניח ש $y=f^{-1}(x)$ אז $x=f(y)$. כלומר

$$y=f^{-1}(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad x=f(y)\ .$$

להיעזר בכלל השרשרת נגזור את שני הצדדים של $x=f(y(x))$

$$x'=f(y)'_y\cdot y(x)'_x \qquad \Rightarrow \qquad 1=f(y)'_y\cdot y(x)'_x \qquad \Rightarrow \qquad y(x)'_x=\frac{1}{f(y)'_y}$$

שים לב $y(x)=f^{-1}(x)$ לפי ההגדרה לעיל אז נקבל היחס

$$f^{-1}(x)'_x=\frac{1}{f(y)'_y}\ .$$

דוגמא.
מהי הנגזרת של $y=\arcsin(x)$.

פיתרון.

$$y=\arcsin(x) \qquad \Rightarrow \qquad x=\sin(y)\ .$$

הפונקציה ההפוכה היא $f^{-1}(x)=\arcsin(x)$ והפונרציה f היא $f(y)=\sin y$. לכן לפי הנוסחה,

$$\arcsin(x)'_x=\frac{1}{\sin(y)'_y}=\frac{1}{\cos y}$$

נשתמש בזהות $\sin^2 y+\cos^2 y=1$ שנובע ל- $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}$ ונקבל

$$\arcsin(x)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

או שקול, מכיוון ש $x=\sin y$,

$$\arcsin(x)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

■

דוגמא.
מהי הנגזרת של $y=\arctan(x)$.

פיתרון.

$$y=\arctan(x) \qquad \Rightarrow \qquad x=\tan(y)\ .$$

הפונקציה ההפוכה היא $f^{-1}(x)=\arctan(x)$ והפונרציה f היא $f(y)=\tan y$. לכן לפי הנוסחה,

$$\arctan(x)'_x=\frac{1}{\tan(y)'_y}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\cos^2 y$$

נשתמש בזהות $\frac{1}{\cos^2 y}=\tan^2 y+1$ שנובע ל- $\cos^2 y=\frac{1}{\tan^2 y+1}$ ונקבל

$$\arctan(x)'_x=\frac{1}{1+\tan^2 y}$$

או שקול, מכיוון ש $x=\tan y$,

$$\arctan(x)'_x=\frac{1}{1+x^2}\ .$$

■

פונקציה פרמטרית

פונקציה פרמטרית היא פונקציה הנתונה בצורה

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$

באמצעות פרמטר t.

דוגמא.
נתונה הפונקציה

$$\begin{cases} x=t^3 \\ y=t^2 \end{cases}$$

הבע אותו בצורה קנונית.

פיתרון.

$$y=t^2=\left(t^3\right)^{2/3}=x^{2/3}\ .$$

■

נגזרת של פונקציה פרמטרית

בהינתן פונקציה בצורה פרמטרית

$$y = f(t) \ , \qquad x = g(t) \ .$$

מכאן

$$t = g^{-1}(x)$$

זאת אומרת ניתן להסתכל אל הפרמטר t כפונקציה של x. ע"י כלל השרשרת,

$$y'_x = f\,(t)'_x = f(t)'_t \cdot t'_x = f(t)'_t \cdot g^{-1}(x)'_x$$

אבל $g^{-1}(x)'_x = \dfrac{1}{g(t)'_t}$ ולכן

$$y'_x = \frac{f(t)'_t}{g(t)'_t} \ .$$

דוגמא.
נתונה הפונקציה

$$x = \ln(t+2) \ , \qquad y = t^2 - 3t \ .$$

מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y(x)$ בנקודה שבה $x = 0$.

פיתרון.
נציב $x = 0$:

$$\ln(t+2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t+2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad t = -1 \ .$$

נציב את $t = -1$ לתוך הנוסחה של y:

$$y = (-1)^2 - 3(-1) = 4 \ .$$

נגזור את הפונקציה הפרמטרית:

$$x'_t = \frac{1}{t+2} \ , \qquad y'_t = 2t - 3 \ , \qquad \Rightarrow \qquad y'_x = \frac{2t-3}{\left(\frac{1}{t+2}\right)} = (t+2)(2t-3)$$

נציב $t = -1$:

$$y'_x = (1)(-2-3) = -5 \ .$$

משוואת המשיק:

$$y = 4 - 5x \ .$$

■

דוגמא.
מצאו את משוואת המשיק והנורמל לגרף הפונקציה $y(x)$ הנתונה ע"י

$$x = (t-2)e^t \ , \qquad y = t^2 + t - 1$$

בנקודה שבה $t = 0$.

פיתרון.
בנקודה $t=0$,
$$x=-2\ ,\qquad y=-1\ .$$
הנגזרת היא
$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2t+1}{(t-1)e^t}$$
ובנקודה $t=0$:
$$y'_x(t=0)=-1\ .$$
משוואת המשיק:
$$y=-1-(x+2)\ .$$
משוואת הנורמל:
$$y=-1+(x+2)$$
■

דוגמא.
נתונה הפונקציה
$$x=4\cos t\ ,\qquad y=3\sin t\ .$$
מהי המשוואת המשיק בנקודה $(4,3)$.

פיתרון.
שים לב ע"י הזהוי $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ ניתן לבטא הפונקציה בצורה
$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$
וזו דווקא הצורה של משוואה של אליפסה.

הנקודה $(2,3\sqrt{3}/2)$ מתאימה לערך $t=\pi/3$.

$$x(t)'_t=-4\sin t\ ,\qquad y(t)'_t=3\cos t\ .$$
בנקודה $t=\pi/3$,
$$x'_t=-2\sqrt{3}\ ,\qquad y'_t=3/2\ ,$$
ולכן לפי הנוסחה
$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{-\sqrt{3}}{4}\ .$$
משוואת המישק:
$$y=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2)\ .$$
■

גזירה באמצעות לוגריתמים

דוגמא.
מצא את הנגזרת של הפונקציה

$$y = \frac{(x^2+2)\sqrt[4]{(x-1)^3}e^x}{(x+5)^3}$$

פיתרון.
נפעיל ln על שני הצדדים:

$$\ln y = \ln(x^2+2) + \frac{3}{4}\ln(x-1) + x - 3\ln(x+5)$$

נגזור את שני הצדדים:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}$$

מכאן

$$y' = y\left[\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right]$$

$$y' = \frac{(x^2+2)\sqrt[4]{(x-1)^3}e^x}{(x+5)^3}\left[\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right]$$

■

דוגמא.
מצא את הנגזרת של

$$y = x^x \ .$$

פיתרון.

$$y = x^x \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = \ln x^x = x \ln x \ .$$

נגזור את שני הצדדים:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \ .$$

מכאן

$$y' = y\left(\ln x + 1\right) = x^x\left(\ln x + 1\right) \ .$$

■

דוגמא.
מצא את הנגזרת של

$$y = (\sin 2x)^{x^2+1} \ .$$

פיתרון.

$$\ln y = (x^2+1)\cdot \ln(\sin 2x)\ .$$

נגזור את שני הצדדים:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = 2x\cdot \ln(\sin 2x) + (x^2+1)\cdot \frac{1}{\sin 2x}\cdot 2\cos 2x\ ,$$

מכאן

$$y' = y\left[2x\cdot \ln(\sin 2x) + (x^2+1)\cdot \frac{1}{\sin 2x}\cdot 2\cos 2x\right]$$
$$y' = (\sin 2x)^{x^2+1}\left[2x\cdot \ln(\sin 2x) + (x^2+1)\cdot \frac{2\cos(2x)}{\sin 2x}\right]$$
$$y' = (\sin 2x)^{x^2+1}\left[2x\cdot \ln(\sin 2x) + (x^2+1)\cdot 2\tan 2x\right]\ .$$

■

נגזרת מסדר גבוהה

נגזרת ראשונה	$f(x)'$
נגזרת שניה	$f(x)''$ או $f(x)^{(2)}$
נגזרת שלישית	$f(x)'''$ או $f(x)^{(3)}$
נגזרת רביעית	$f(x)^{(4)}$
נגזרת חמישית	$f(x)^{(5)}$
נגזרת ה- n	$f(x)^{(n)}$

דוגמא.

$f(x)$	$\sin x$
$f(x)'$	$\cos x$
$f(x)''$	$-\sin x$
$f(x)^{(3)}$	$-\cos x$
$f(x)^{(4)}$	$\sin x$

נגזרת מסדר גבוה של פונקציה סתומה

דוגמא.

נתונה הפונקציה $x^2+y^2=1$ מהי הנגזרת השניה של y?

פיתרון.

נגזור את שני הצדדים:

$$2x+2yy'=0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{x}{y}\ .$$

נגזור שוב פעם:

$$2 + 2y'y' + 2yy'' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y'' = \frac{-1-(y')^2}{y} = \frac{-1-\frac{x^2}{y^2}}{y} = - = \frac{x^2+y^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3} \ .$$

■

דוגמא.
נתונה הפונקציה $e^x + xy = 1$ מהי הנגזרת השניה של y?

פיתרון.
נגזור את שני הצדדים:

$$e^x + y + xy' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{(e^x+y)}{x} \ .$$

נגזור שוב פעם:

$$\begin{aligned} y'' &= -\left(\frac{(e^x+y')\cdot x - (e^x+y)}{x^2}\right) = -\left(\frac{e^x\cdot x - (e^x+y) - e^x - y}{x^2}\right) \\ &= -\left(\frac{e^x\cdot(x-2) - 2y}{x^2}\right) \\ &= -\left(\frac{e^x\cdot(x-2) - \frac{2(1-e^x)}{x}}{x^2}\right) \\ &= -\left(\frac{e^x x(x-2) - 2(1-e^x)}{x^3}\right) \end{aligned}$$

■

נגזרת מסדר גבוה של פונקציה פרמטרית

בהינתן פונקציה פרמטרית

$$y = y(t) \ , \qquad x = x(t) \ .$$

הנגזרת הראשונה היא

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \ .$$

דרך זה נקבל פונקציה פרמטרית חדשה:

$$y'_x = y'_x(t) \ , \qquad x = x(t) \ .$$

נגזור אותה לפי אותו כלל ונקבל

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

דוגמא.

$$y = \sin t \ , \qquad x = \cos t \ .$$

פיתרון.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\cot t \ .$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \ .$$

$$(y'_x)'_t = -(\cot t)'_t = -\frac{1}{\sin^2 t} \ .$$

לכן

$$y''_{xx} = \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \frac{-1}{\sin t} = \frac{1}{\sin^3 t} \ .$$

■

דוגמא.

$$y = \ln t \ , \qquad x = \sin t \ .$$

פיתרון.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{t}}{\cos t} = \frac{1}{t \cdot \cos t} \ .$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \ .$$

$$(y'_x)'_t = \left(\frac{1}{t \cdot \cos t}\right)'_t = \frac{-(\cos t - t \sin t)}{t^2 \cos^2 t} \ .$$

לכן

$$y''_{xx} = \frac{\left(\frac{-(\cos t - t \sin t)}{t^2 \cos^2 t}\right)}{\cos t} = \frac{-\cos t + t \sin t}{t^2 \cos^3 t} \ .$$

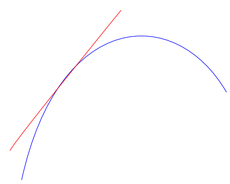
■

שיעור 7
קמירות אסימפטוטות ודוגמאות לחקירה

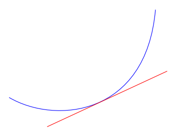
תחומי קמירות ונקודות פיתול

7.1 הגדרה: (פונקציה קמורה)

פונקציה $f(x)$ שגזירה בקטע (a,b) נקראת קמורה כלפי מטה אם בכל נקודה $x \in (a,b)$ המשיק לגרף הפונקציה נמצא מעל הגרף.



פונקציה $f(x)$ שגזירה בקטע (a,b) נקראת קמורה כלפי מעלה אם בכל נקודה $x \in (a,b)$ המשיק לגרף הפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה



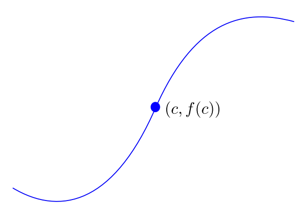
7.2 משפט:

אם $f''(x) < 0$ לכל $x \in (a,b)$ אז $f(x)$ קמורה כלפי מטה בקטע (a,b).

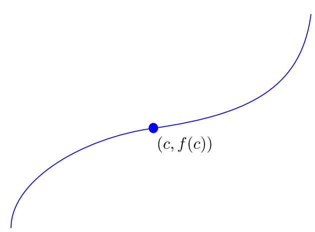
אם $f''(x) > 0$ לכל $x \in (a,b)$ אז $f(x)$ קמורה כלפי מעלה בקטע (a,b).

7.3 הגדרה: (נקודת פיתול)

נקודה בגרף $(c,f(c))$ נקראת נקודת פיתול של הפונקציה אם היא נמצאת בין שני תחומי קמירות שונים.



או



7.4 משפט:

אם $f''(c) = 0$ או $f''(c)$ לא קיימת ובמעבר דרך נקודה c, $f''(c)$ מחליף סימן, אז הנקודה $(c, f(c))$ היא נקודת פיתול.

דוגמא.

נתונה הפונקציה

$$f(x) = x^5 - x + 5$$

מצאו את נקודות פיתול של הפונקציה.

פיתרון.

$$f(x) = x^5 - x + 5 \ , \qquad f'(x) = 5x^4 - 1 \ , \qquad f''(x) = 20x^3 = 0$$

לכן קיימת נקודת פיתול בנקודה $(0, f(0)) = (0, 5)$. ■

אסימפטוטה אנכית

7.5 הגדרה: (אסימפטוטה אנכית)
קו ישר $x = a$ נקרא אסימפטוטה אנכית של פונקציה $f(x)$ אם לפחות אחד הגבולות החד צדדיים $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ או $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ שווה ל- $+\infty$ או $-\infty$.

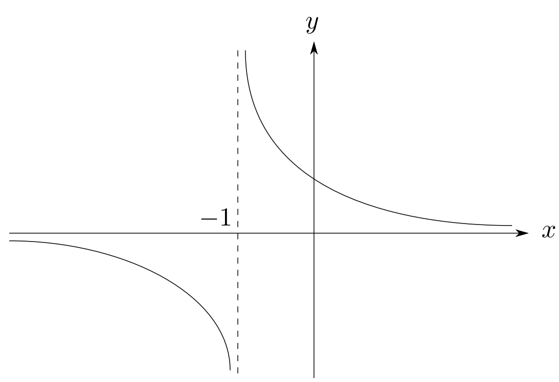
דוגמא.
מצאו את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה

$$f(x) = \frac{2}{x+1}$$

פיתרון.
שים לב

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2}{x+1} = +\infty \ , \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{2}{x+1} = -\infty$$

ולכן ישנה אסימפטוטה אנכית ב- $x = -1$.



■

אסימפטוטה אופקית

7.6 הגדרה: (אסימפטוטה אופקית)
קו ישר $y = b$ נקרא אסימפטוטה אופקית של פונקציה $f(x)$ אם $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ או $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

דוגמא.
מצאו את האסימפטוטות האופקיות של הפונקציה

$$f(x) = \frac{2}{x+1}$$

פיתרון.
שים לב

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x+1} = 0 \ , \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x+1} = 0$$

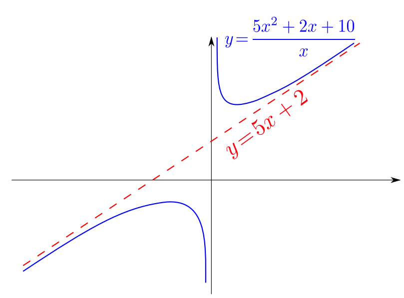
ולכן $y=0$ אסימפטוטה אופקית ב- $\pm\infty$. ■

אסימפטוטה משופעת

7.7 הגדרה: (אסימפטוטה משופעת)
קו ישר $y = m\cdot x + n$ נקרא אסימפטוטה משופעת של פונקציה $f(x)$ אם המרחק בין גרף הפונקציה לבין הקו $y = m\cdot x + n$ שואף ל- 0 כאשר x שואף ל ∞ או $-\infty$. ז"א

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (mx+n)) = 0 \qquad \text{או} \qquad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - (mx+n)) = 0$$

.



7.8 כלל: (נוסחה למציאת אסימפטוטה משופעת)

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \ , \qquad n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$$

(אותו דבר עבור $x\to-\infty$). אם m, n מספרים סופיים, אז קיימת אסימפטוטה משופעת.

דוגמאות

1. $.f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-2}{x(x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-2}{x^2-2x} = 1\ .$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2-x-2}{x-2} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-2-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x-2} = 1\ .$$

לכן הקו $y = x+1$ אסימפטוטה משופעת ב- $+\infty$.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x-2}{x(x-2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x-2}{x^2-2x} = 1\ .$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^2-x-2}{x-2} - x\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x-2-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{x-2} = 1\ .$$

לכן הקו $y = x+1$ אסימפטוטה משופעת ב- $-\infty$.

2. $.f(x) = x\cdot e^x$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty\ .$$

לכן אין אסימפטוטה משופעת ב- $+\infty$.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0\ .$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to-\infty} [xe^x - 0\cdot x] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0\ .$$

לכן הקו $y = 0$ אסימפטוטה משופעת (אופקית) ב- $-\infty$.

שלבים לחקירה מלאה של פונקציה

1. תחום הגדרה
2. נקודות חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה
3. התנהגות סביב נקודות אי הגדרה, אסימפטוטות אנכיות.
4. התנהגות באינסוף, אסימפטוטות אופקיות.
5. אסימפטוטות משופעות.
6. תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון
7. תחומי קמירות, נקודות פיתול.
8. גרף הפונקציה.

דוגמאות לחקירה מלאה של פונקציה

דוגמא.
חוקר באופן מלא את הפונקציה הבאה (תחום הגדרה, נקודות חיתוך, אסימפטוטות אנכיות אופקיות ומשופעות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול), וצייר סקיצת הגרף של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

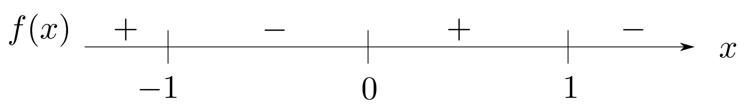
פיתרון.

1. <u>תחום הגדרה:</u> $x \neq \pm 1$

2א <u>נקודות חיתוך עם הצירים:</u> $(0,0)$

2ב <u>סימני הפונקציה</u>

$f(x)$	x
$+$	$x<-1$
$-$	$-1<x<0$
$+$	$0<x<1$
$-$	$x>1$



3. <u>אסימפטוטות אנכיות.</u>

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{1-x^2} = \infty \ , \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{1-x^2} = -\infty \ .$$

$x=1$ אסימפטוטה אנכית.

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x}{1-x^2} = \infty \ , \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{1-x^2} = -\infty \ .$$

$x=-1$ אסימפטוטה אנכית.

4. <u>אסימפטוטות אופקיות.</u>

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}-1} = 0 \ , \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{1-x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}-1} = 0 \ .$$

$y=0$ אסימפטוטה אופקית ב- $\pm\infty$.

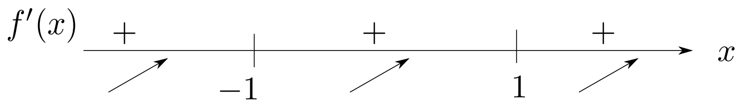
5. <u>אסימפטוטות משופעות:</u> אין

6. <u>תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון</u>

$$f'(x) = \frac{1-x^2-x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$$

מכאן $f'(x)$ לא שווה אפס באף נקודה בתחום הגדרה של הפונקציה (אף על פי שהמונה של $f'(x)$ מתאסס ב- $x=\pm 1$, באותן נקודות נמצאת אסימפטוטות אנכיות בגלל שהפונקציה המקורית $f(x)$ לא מוגדרת בהן).

x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$



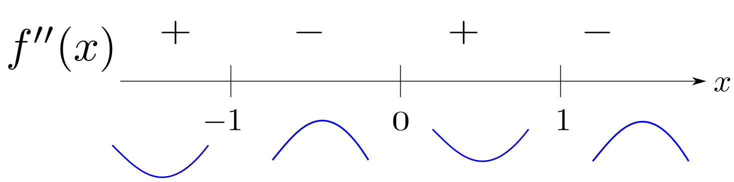
אין נקודת קיצון.

7. <u>תחומי קמירות, נקודות פיתול.</u>

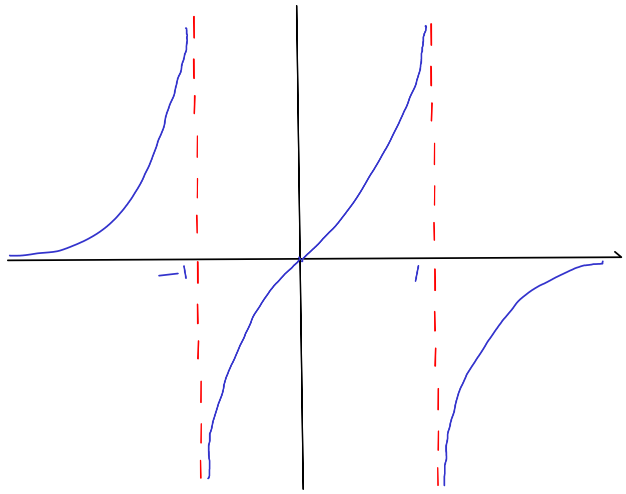
$$
\begin{aligned}
f''(x) =& \frac{2x(1-x^2)^2 - 2(1-x^2)(-2x)(x^2+1)}{(1-x^2)^4} \\
=& \frac{2x(1-x^2)\left[1-x^2+2(x^2+1)\right]}{(1-x^2)^4} \\
=& \frac{2x(1-x^2)\left[1-x^2+2x^2+2)\right]}{(1-x^2)^4} \\
=& \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}
\end{aligned}
$$

לכן $f''(x)=0$ כאשר $x=0$. הנקודה $(0,0)$ נקודת פיתול.

x	$x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$x>1$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$



8. <u>גרף הפונקציה.</u>



■

דוגמא.
חוקר באופן מלא את הפונקציה הבאה (תחום הגדרה, נקודות חיתוך, אסימפטוטות אנכיות אופקיות ומשופעות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול), וצייר סקיצת הגרף של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$$

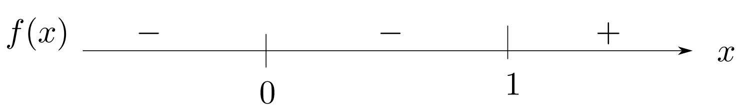
פיתרון.

1. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 0$

2א <u>נקודות חיתוך עם הצירים</u>: $(1,0)$

2ב <u>סימני הפונקציה</u>

x	$f(x)$
$x<0$	$f(x)<0$
$0<x<1$	$f(x)<0$
$x>1$	$f(x)>0$



3. <u>אסימפטוטות אנכיות.</u>

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^3-1}{x^2} = -\infty , \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3-1}{x^2} = +\infty .$$

$x=0$ אסימפטוטה אנכית.

4. <u>אסימפטוטות אופקיות.</u>

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^3-1}{x^2} = \infty , \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-1}{x^2} = \infty .$$

$y=0$ אין אסימפטוטה אופקית ב- $\pm\infty$.

5. <u>אסימפטוטות משופעות.</u>

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^3}=1\ ,\qquad n=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^2}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x^2}=0\ .$$

לכן הקו $y=x$ אסימפטוטה משופעת ב- $+\infty$.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x^3}=1\ ,\qquad n=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x^2}-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x^2}=0\ .$$

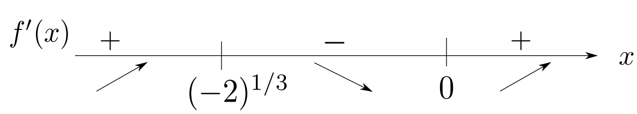
לכן הקו $y=x$ אסימפטוטה משופעת ב- $-\infty$.

6. <u>תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון</u>

$$f'(x)=\frac{3x^2\cdot x^2-2x(x^3-1)}{x^4}=\frac{x^4+2x}{x^4}=1+\frac{2}{x^3}$$

מכאן $f'(x)=0$ בנקודות $x=0$ ו- $x=(-2)^{1/3}$.

x	$x<(-2)^{1/3}$	$x=(-2)^{1/3}$	$(-2)^{1/3}<x<0$	$x=0$	$x>0$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$	$\nexists$	$\nearrow$

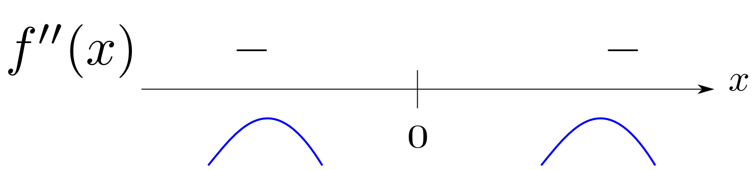


שים לב הפונקציה לא מוגדרת בנקודה $x=0$ ולכן הנקודה $(-2^{1/3},f(-2^{1/3}))=(-2^{1/3},-1.89)$ נקודת מקסימום.

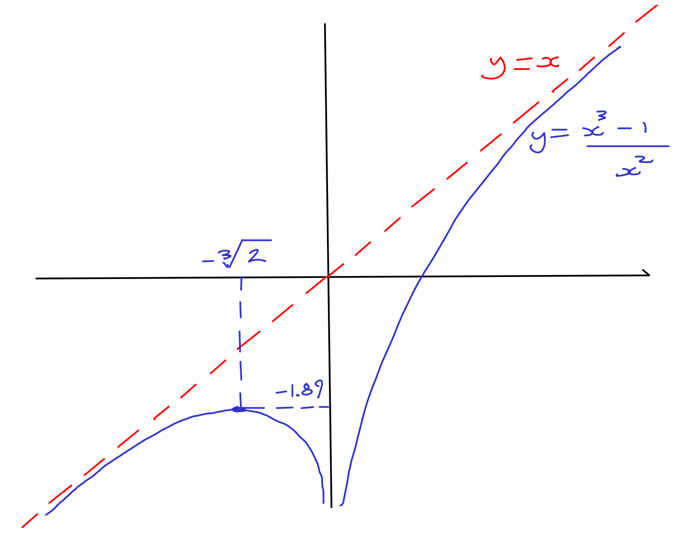
7. <u>תחומי קמירות, נקודות פיתול.</u>

$$f''(x)=\frac{-6}{x^4}<0$$

x	$x<0$	0	$x>0$
$f''(x)$	$-$	0	$-$



8. גרף הפונקציה.



■

דוגמא.
חוקר באופן מלא את הפונקציה הבאה (תחום הגדרה, נקודות חיתוך, אסימפטוטות אנכיות אופקיות ומשופעות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול), וצייר סקיצת הגרף של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$$

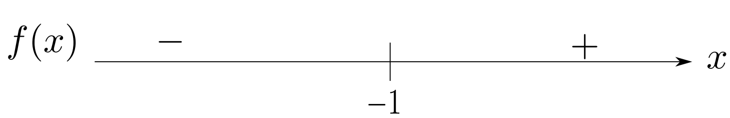
פיתרון.

1. תחום הגדרה: $x \neq -1$

2א נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,1)$

2ב סימני הפונקציה

$f(x)$	x
$-$	$x < -1$
$+$	$x > -1$



3. אסימפטוטות אנכיות.

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{e^{2x}}{1+x} = -\infty \ , \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{e^{2x}}{1+x} = +\infty \ .$$

$x = -1$ אסימפטוטה אנכית.

4. <u>אסימפטוטות אופקיות.</u>

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{1+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{1}=\infty\ , \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{1+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^{2x}}{1}=0\ .$$

$y=0$ אין אסימפטוטה אופקית ב- $-\infty$.

5. <u>אסימפטוטות משופעות.</u>

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4e^{2x}}{2}=\infty\ .$$

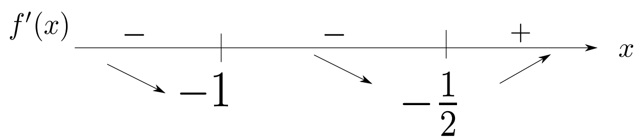
לכן אין אסימפטוטה משופעת ב- $+\infty$.

6. <u>תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון</u>

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(1+x)-e^{2x}\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{e^{2x}(2x+1)}{(1+x)^2}$$

מכאן $f'(x)=0$ בנקודות $x=\frac{-1}{2}$.

x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<\frac{-1}{2}$	$x=\frac{-1}{2}$	$x>\frac{-1}{2}$
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$\frac{2}{e}$	$\nearrow$

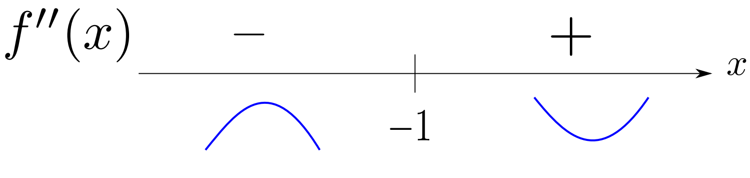


שים לב הפונקציה לא מוגדרת בנקודה $x=-1$ ולכן הנקודה $(-\frac{1}{2},f(-\frac{1}{2}))=(-\frac{1}{2},\frac{2}{e})=(-\frac{1}{2},0.74)$ נקודת מינימום.

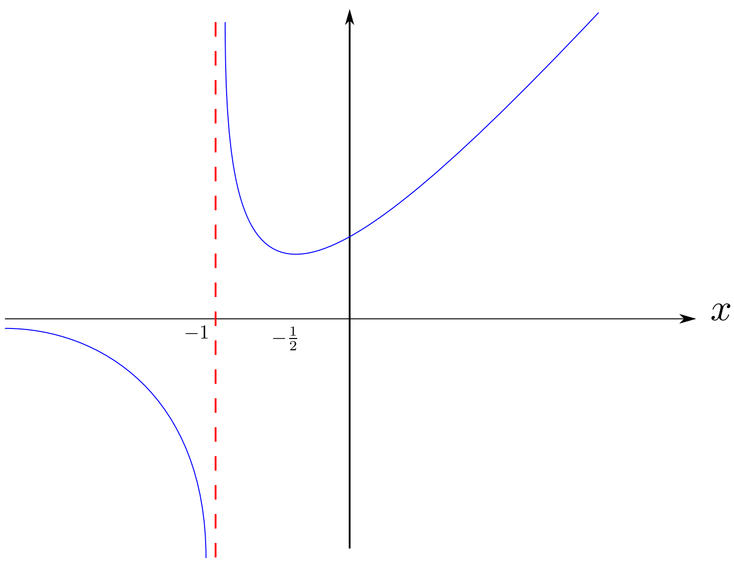
7. <u>תחומי קמירות, נקודות פיתול.</u>

$$\begin{aligned}f''(x)=&\frac{\left[2e^{2x}(2x+1)+2e^{2x}\right](1+x)^2-e^{2x}(2x+1)\cdot 2(1+x)}{(1+x)^4}\\=&\frac{2e^{2x}(1+x)\left[(2x+2)(1+x)-(2x+1)\right]}{(1+x)^4}\\=&\frac{2e^{2x}\left[2x^2+2+3x-2x-1\right]}{(1+x)^3}\\=&\frac{2e^{2x}\left[2x^2+x+1\right]}{(1+x)^3}\end{aligned}$$

x	$x<-1$	-1	$x>-1$
$f''(x)$	$-$	$\nexists$	$-$



8. <u>גרף הפונקציה.</u>



■

דוגמא.
חוקר באופן מלא את הפונקציה הבאה (תחום הגדרה, נקודות חיתוך, אסימפטוטות אנכיות אופקיות ומשופעות, תחומי עליה ורידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול), וצייר סקיצת הגרף של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$$

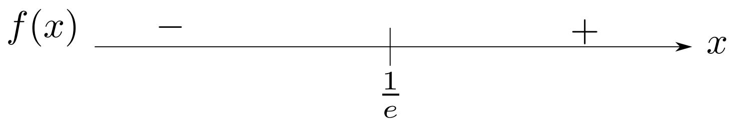
פיתרון.

1. <u>תחום הגדרה:</u> $x > 0$

2א <u>נקודות חיתוך עם הצירים:</u> $(0, \frac{1}{e})$

2ב <u>סימני הפונקציה</u>

x	$f(x)$
$x < \frac{1}{e}$	$-$
$x > \frac{1}{e}$	$+$



3. אסימפטוטות אנכיות.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\ln x}{x}=-\frac{\infty}{0^+}=-\infty\ .$$

$x=0$ אסימפטוטה אנכית.

4. אסימפטוטות אופקיות.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}==0\ .$$

$y=0$ אין אסימפטוטה אופקית ב- $+\infty$.

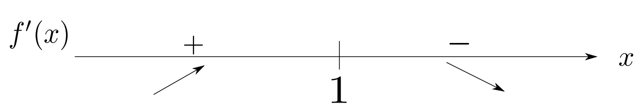
5. אסימפטוטות משופעות: אין

6. תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(1+\ln x)}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$$

מכאן $f'(x)=0$ בנקודות $x=1$.

x	$x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$



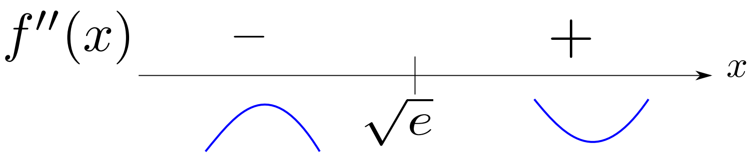
$x=1$ נקודת מקסימום מקומי. $f(1)=1$.

7. תחומי קמירות, נקודות פיתול.

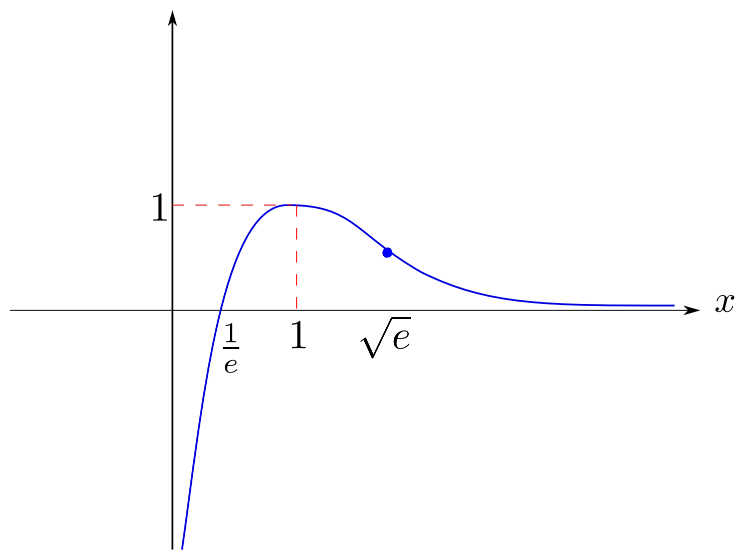
$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2+\ln x\cdot 2x}{x^4}=\frac{2\ln x-1}{x^3}$$

מכאן $f''(x)=0$ בנקודות $x=\sqrt{e}$.

x	$x<-\sqrt{e}$	$x=\sqrt{e}$	$x>\sqrt{e}$
$f''(x)$	$-$	0	$+$



8. גרף הפונקציה.



■

דוגמא.
חוקר באופן מלא את הפונקציה הבאה (תחום הגדרה, נקודות חיתוך, אסימפטוטות אנכיות אופקיות ומשופעות, תחומי עליה ורידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול), וצייר סקיצת הגרף של הפונקציה.

$$f(x)=\frac{x^2}{|x|-1}$$

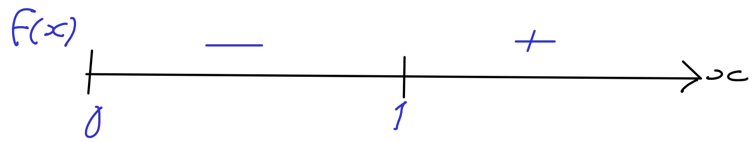
פיתרון.
שים לב הפונקציה זוגית ולכן הגרף שלה סומיטרית ביחס לציר ה- y. נבנה את גרף הפונקציה בתחום $x\geq 0$.

1. תחום הגדרה: $x\geq 0$, $x\neq 1$.

2א נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$

2ב סימני הפונקציה

$f(x)$	x
$-$	$x<1$
$+$	$x>1$



3. <u>אסימפטוטות אנכיות.</u>

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty \ , \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \infty \ .$$

$x=1$ אסימפטוטה אנכית.

4. <u>אסימפטוטות אופקיות.</u> שים לב

$$f(x) = x+1+\frac{1}{x-1}$$

לכן $y=x+1$ אסימפטוטה משופעת ב- $+\infty$.

5. <u>אסימפטוטות משופעות:</u> אין

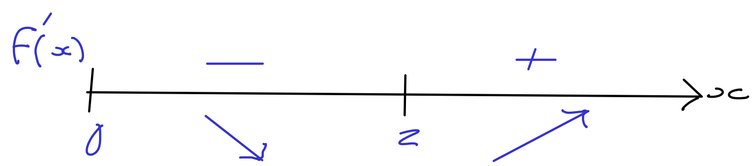
6. <u>תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון</u>

$$f'(x) = 1-\frac{1}{(x-1)^2}$$

מכאן $f'(x)=0$ בנקודות שבהן $(x-1)^2=1$:

$$(x-1)^2=1 \qquad \Rightarrow \qquad x-1=\pm 1 \qquad \Rightarrow \qquad x=0,2 \ .$$

x	$0<x<2$	$x=2$	$x>2$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	4	$\nearrow$

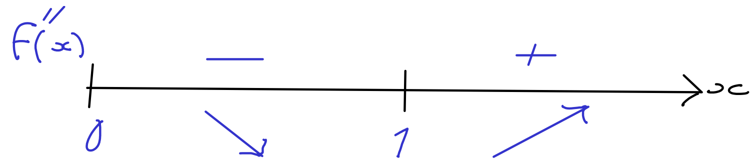


$x=2$ נקודת מינימום מקומי. $f(2)=4$.

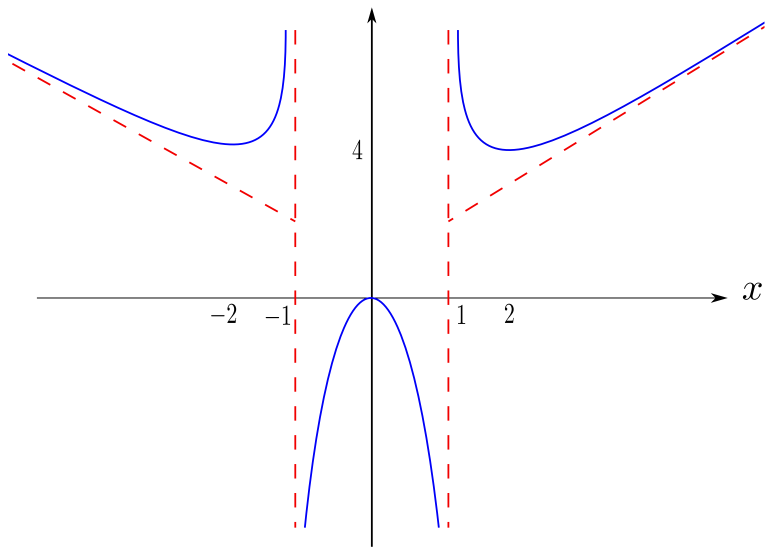
7. <u>תחומי קמירות, נקודות פיתול.</u>

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

x	$0<x<1$	$x=1$	$x>1$
$f''(x)$	$-$	$\nexists$	$+$



8. גרף הפונקציה.

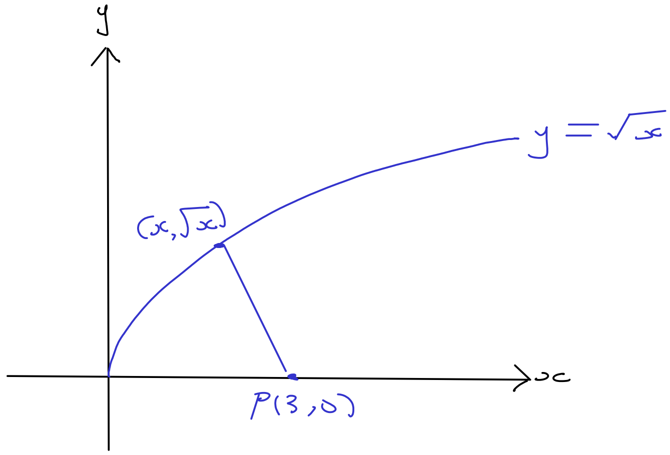


■

בעיות קיצון

דוגמא.
על הקו $y=\sqrt{x}$ מצא את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $P(3,0)$.

פיתרון.



נבחר נקודה שרירותית $(x,\sqrt{x})$ על גרף הפונקציה $y=\sqrt{x}$. נרשום את הנוסחה למרחק בין שתי נקודות $P(3,0)$ ו- $(x,\sqrt{x})$:

$$d=\sqrt{(x-3)^2+(\sqrt{x}-0)^2}=\sqrt{(x-3)^2+x}\ .$$

מכאן

$$d^2=(x-3)^2+x\ .$$

יש למצוא x שעבורו d^2 יקבל ערך מינימלי:

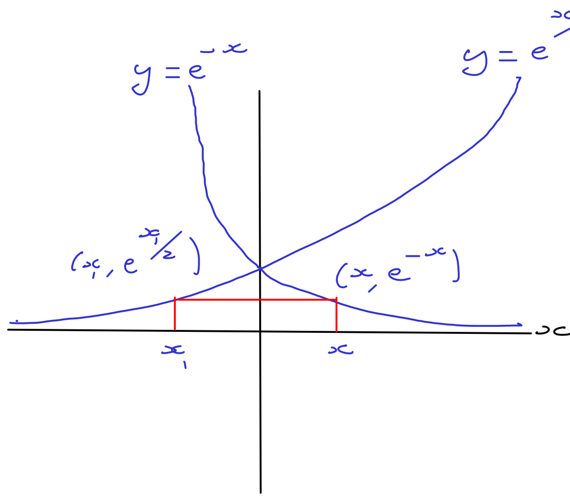
$$\left(d^2\right)'_x=2(x-3)+1=2x-5$$

מכאן $(d^2)'_x=0$ כאשר $x=2.5$.

תשובה סופית: הנקודה הקרובה ביותר היא $(2.5,f(2.5))=(2.5,\sqrt{2.5})$. ■

דוגמא.
בין הגרפים של פונקציה $y=e^{-x}$ ו- $y=e^{x/2}$ וציר ה- x חסום מלבן. מצא את שטח המקסימלי האפשרי של המלבן הזה.

פיתרון.



$$e^{x_1/2} = e^{-x} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = -2x \ .$$

$$S = (x + |x_1|)e^{-x} = 3x \cdot e^{-x} \ .$$

$$S'_x = 3e^{-x} - 3xe^{-x} = 3e^{-x}(1-x) \ .$$

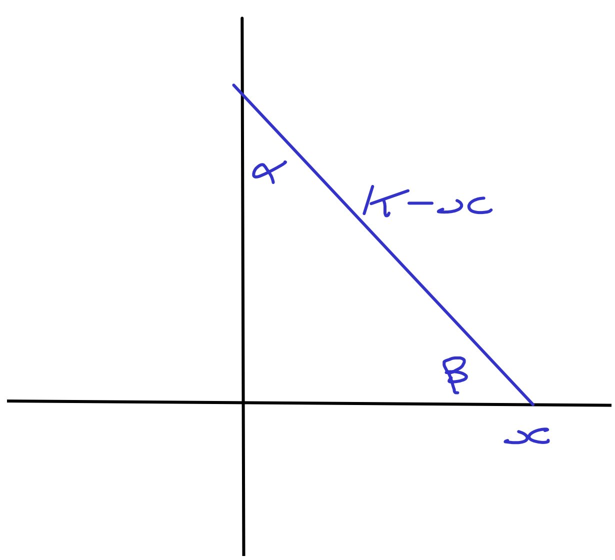
שים לב $S'_x = 0$ בנקודה $x = 1$. לכן הנקודה $x = 1$ מקסימום מקומי.

$$S_{\max} = 3 \cdot 1 \cdot e^{-1} = \frac{3}{e} \ .$$

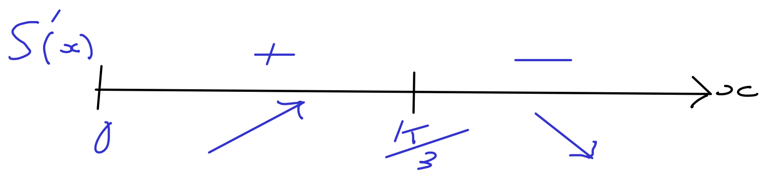
■

דוגמא.
מצא את הזווית של משולש ישר זוויות בעל השטח הגדול ביותר שבו סכום אורכי היתר ואחד הניצבים שווה ל- K.

פיתרון.



נסמן את אורכי אחד הניצבים ב-x. אז אורך היתר הוא $k-x$ ואורך הניצב השני הוא
$$\sqrt{(k-x)^2-x^2}=\sqrt{k^2-2kx}$$
אז
$$S=\frac{x\cdot\sqrt{k^2-2kx}}{2}$$
$$\begin{aligned}S'_x=&x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-2k}{2\sqrt{k^2-2kx}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k^2-2kx}\\=&\frac{1}{2}\left[\frac{-kx}{\sqrt{k^2-2kx}}+\sqrt{k^2-2kx}\right]\\=&\frac{1}{2\sqrt{k^2-2kx}}\left(-kx+k^2-2kx\right)\\=&\frac{1}{2\sqrt{k^2-2kx}}k\left(k-3x\right)\end{aligned}$$
$S'_x=0$ כאשר $x=\frac{k}{3}$.

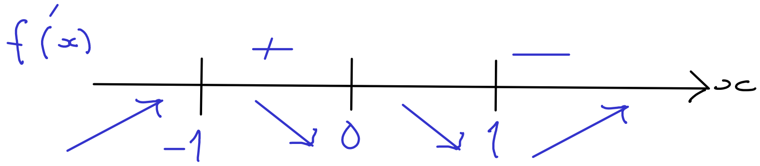


$x=\frac{k}{3}$ נקודת מקסימום.
$$\sin\alpha=\frac{x}{k-x}=\frac{\frac{k}{3}}{k-\frac{k}{3}}=\frac{1}{2}\ ,\qquad\Rightarrow\qquad\alpha=\frac{\pi}{6}\ .$$
הזווית השניה
$$\beta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\ .$$
■

תרגילים לשימוש בחקרית פונקציה

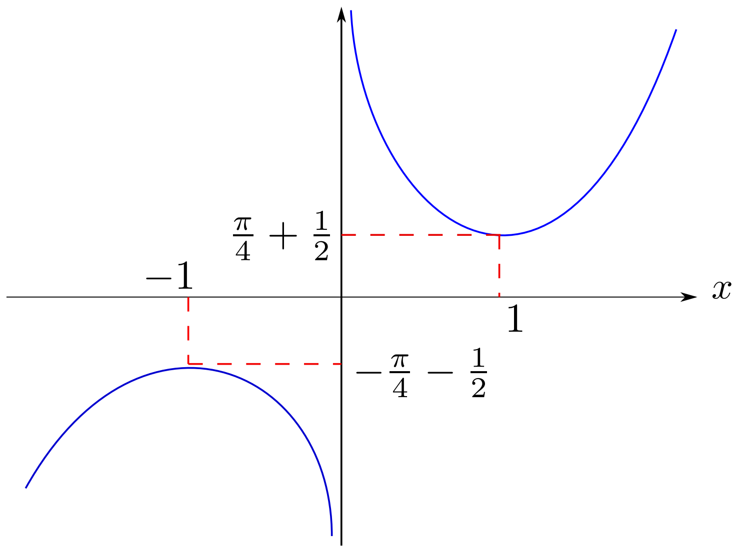
דוגמא.
הוכח כי לכל $x\neq 0$ מתקיים
$$\left|\frac{1}{2x}+\arctan x\right|\geq\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ .$$

פיתרון.
נגדיר $f(x)=\frac{1}{2x}+\arctan x$.
$$f'(x)=-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2-1}{2x^2(x^2+1)}$$
ולפיו $f'(x)=0$ בנקודה $x=\pm 1$.



$x=1$ נקודה מינימום מקומי $f(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

$x=-1$ נקודה מקסימום מקומי $f(-1)=-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$



ז"א $f(x)>\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ או $f(x)<-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. לכן

$$\left|\frac{1}{2x}+\arctan x\right|\geq\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2} \ .$$

■

דוגמא.
הוכח כי למשוואת

$$6x^6-6x^4+1=0$$

אין פתרונות ממשיים.

פיתרון.
נגדיר $f(x)=6x^6-6x^4+1$.

$$f'(x)=36x^5-24x^3=12x^3(3x^2-2)=12x^3(\sqrt{3}\cdot x+\sqrt{2})(\sqrt{3}\cdot x-\sqrt{2}) \ .$$

מכאן $f'(x)=0$ בנקודות $x=0,\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}$. שים לב בנקודות $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ יש לפונקציה $f(x)$ מינימום, ו- $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{9}>0$ לכן $f(x)>0$ לכל x. ■

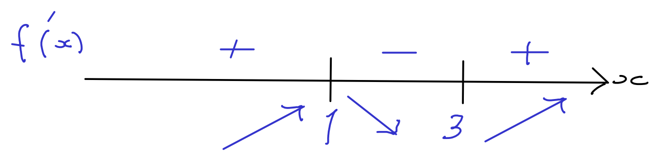
דוגמא.
מצא את מספר השורשים הממשיים של המשוואת

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 10$$

פיתרון.
נגדיר $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10$.

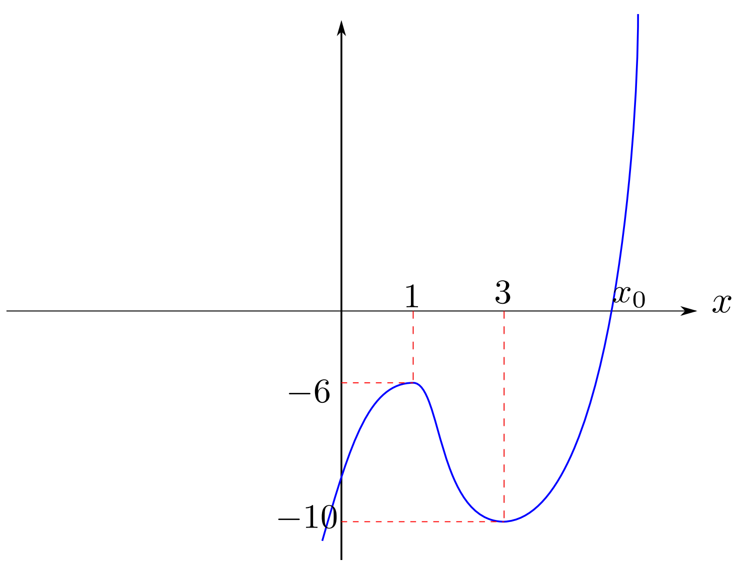
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \ .$$

מכאן $f'(x) = 0$ בנקודות $x = 1, 3$.



$x = 3$	נקודה מינימום מקומי	$f(3) = -10$
$x = 1$	נקודה מקסימום מקומי	$f(1) = -6$

לכן יש שורש אחד למשוואה.



■

שיעור 8
משפטים יסודיים על פונקציות גזירות וכלל לופיטל

משפטים יסודיים על פונקציות גזירות

8.1 משפט. (משפט פרמה)
אם $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה בקטע פתוח (a,b). אם c נקודת קיצון (מקסימום או מינימום) פנימית של פונקציה $f(x)$ אז
$$f'(c)=0\ .$$

8.2 משפט. (רול)
אם $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה בקטע פתוח (a,b), כך ש- $f(a)=f(b)$, אז קיימת לפחות נקודה אחד $c\in(a,b)$ כך ש-
$$f'(c)=0\ .$$

הוכחה.
$f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$. לכן לפי משפט וויארטראס (עין משפט 5.4 לעיל) היא מקבלת בקטע הזה את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר. נסמן אותם ב- M ו- m בהתאמה. ישנן 2 אפשרויות.

<u>מצב 1. $m=M$</u>

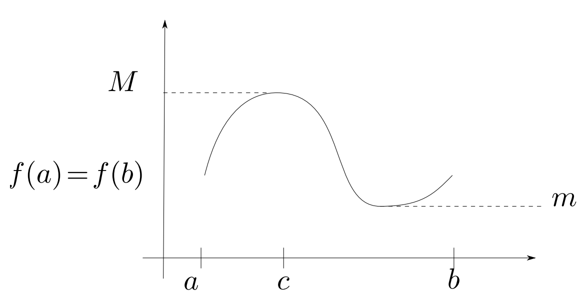
אם $M=m$ אז $f(x)$ פונקציה קבועה, ולכן $f'(x)=0$ לכל $a<x<b$.

<u>מצב 2. $m<M$</u>

מכיוון ש- $f(a)=f(b)$, אז f מתקבל לפחות אחד הערכים מ- m ו- M בנקודה c בפנים הקטע הפתוח (a,b).

<u>f מקבלת הערך M בפנים הקטע (a,b)</u>

כלומר קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $f(c)=M$. ז"א לכל $x\in(a,b)$, $f(x)\leq f(c)$.
נוכיח כי $f'(c)=0$:



$$f'_{-}(c)=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\geq0$$

בגלל ש- $f(c+\Delta x)-f(c)\leq0$ ו- $\Delta x<0$.

$$f'_{+}(c)=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\leq0$$

בגלל ש- $f(c+\Delta x)-f(c)\leq 0$ ו- $\Delta x>0$. $f(x)$ גזירה בנקודה c, אז בהכרח $f'(c)=f'_-(c)=f'_+(c)$.
לכן $f'(c)=0$.

<u>f מקבלת הערך m בפנים הקטע (a,b)</u>

קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $f(c)=m$. ז"א לכל $x\in(a,b)$, $f(x)\geq f(c)$.
נוכיח כי $f'(c)=0$:

$$f'_-(c)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\leq 0$$

בגלל ש- $f(c+\Delta x)-f(c)\geq 0$ ו- $\Delta x<0$.

$$f'_+(c)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\geq 0$$

בגלל ש- $f(c+\Delta x)-f(c)\geq 0$ ו- $\Delta x>0$. $f(x)$ גזירה בנקודה c, אז בהכרח $f'(c)=f'_-(c)=f'_+(c)$.
לכן $f'(c)=0$.

■

משמעות של משפט רול

בגרף של פונקציה קיימת נקודה c שבה המשיק מקביל לציר ה- x.

8.3 משפט. (משפט ערך הממוצע המוכלל של קושי)
אם $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות רציפות בקטע סגור $[a,b]$ וגזירות בקטע פתוח (a,b), ו- $g'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$,
אז קיימת לפחות נקודה אחת $c\in(a,b)$ כך ש-

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\ .$$

או שקול

$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(c)=\big(g(b)-g(a)\big)f'(c)\ .$$

8.4 מסקנה. (משפט ערך הממוצע של לגרנז')
לכל פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b), קיימת לפחות נקודה אחת $c\in(a,b)$ כך ש-

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)\ .$$

הוכחה.
נגדיר $g(x)=x$ ונשתמש במשפט קושי 8.3:

קיים c כך ש- $a<c<b$ ו

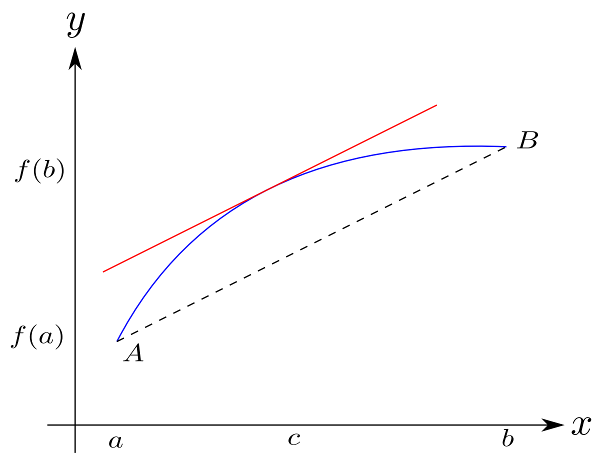
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\ .$$

שים לב $g(b)=b$, $g(a)=a$, $g'(c)=1$ לכן

$$\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}=f'(c)\ .$$

■

8.5 הערה. (המשמעות של משפט לגרנז)



הביטוי $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ הוא השיפוע של הקו AB. המשיק בנקודה c מקביל לקו AB.

8.6 מסקנה. ()
אם $f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$ אז $f(x)$ פונקציה קבועה בקטע (a,b).

הוכחה.
יהיו

$$a<x_1<x_2<b\ .$$

לפי משפט לגרנז' 8.4 קיים $c\in(x_1,x_2)$ כך ש-

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_2-x_1)\ .$$

לפי הנתון, $f'(c)=0$ לכן $f(x_1)=f(x_2)$ לכל $x_1,x_2\in(a,b)$. ז"א $f(x)$ פונקציה קבועה. ■

8.7 מסקנה. ()
אם $f'(x)=g'(x)$ לכל $x\in(a,b)$ אז קיים c כך ש- $f(x)=g(x)+c$.

הוכחה.
תהי

$$h(x)=f(x)-g(x).$$

מכאן

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$$

לכל $x\in(a,b)$. לכן לפי מסקנה 8.6 $h(x)$ פונקציה קבועה, ז"א קיים c כך ש $h(x)=c$ לכל $x\in(a,b)$.
כלומר

$$f(x)=g(x)+c$$

לכל $x\in(a,b)$. ■

דוגמאות

דוגמא.
הוכח כי $\frac{\pi}{2} = \arcsin x + \arccos x$ לכל $x \in (-1,1)$.

פיתרון.
תהי
$$f(x) = \arcsin x + \arccos x \ .$$
אז
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$
לכל $x \in (-1,1)$. לפי מסקנה 8.7, $f(x) = c$ לכל $-1 < x < 1$.

נמצא את c:

נציב $x = 0$ ונקבל
$$f(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$
לכן $c = \frac{\pi}{2}$. ■

דוגמא.
הוכח שלכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

פיתרון.
נציב $f(x) = \sin x$.

שים לב $f(x)$ רציפה בקטע $[y,x]$ וגזירה בקטע (y,x). לכן קיים $c \in (y,x)$ כך ש
$$f(x) - f(y) = f'(c) \cdot (x - y) \ ,$$
כלומר
$$\sin x - \sin y = \cos c \cdot (x - y) \qquad \Rightarrow \qquad |\sin x - \sin y| = |\cos c| \cdot |x - y| \ .$$
אבל $|\cos c| \leq 1$ אז
$$|\sin x - \sin y| = |\cos c| \cdot |x - y| \leq |x - y| \ .$$
■

דוגמא.
הוכח כי לכל $0 < x < y$, $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים
$$\frac{x-y}{x} < \ln\left(\frac{x}{y}\right) < \frac{x-y}{y} \ .$$

פיתרון.
נגדיר $f(x) = \ln x$. שים לב $f(x)$ רציפה בקטע $[x, y]$ וגזירה בקטע (x, y). לכן לפי משפט לגרנז' 8.4, קיים $c \in (x, y)$ כך ש

$$f(y) - f(x) = f'(c) \cdot (y - x) \ .$$

ז"א

(#)
$$\ln y - \ln x = \frac{1}{c} \cdot (y - x) \qquad \Rightarrow \qquad \ln x - \ln y = \frac{1}{c} \cdot (x - y) \qquad \Rightarrow \qquad \ln \frac{x}{y} = \frac{x - y}{c} \ .$$

שים לב $0 < c < y \Leftarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{y}$, לכן

$$\frac{y - x}{y} < \frac{y - x}{c} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x - y}{y} > \frac{x - y}{c} \ .$$

לכן לפי **(#)** נקבל

$$\ln \frac{x}{y} < \frac{x - y}{y} \ .$$

שים לב $0 < x < c \Leftarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{c}$, לכן

$$\frac{y - x}{c} < \frac{y - x}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x - y}{c} > \frac{x - y}{x} \ .$$

לכן לפ **(#)**

$$\ln \frac{x}{y} > \frac{x - y}{x} \ .$$

■

דוגמא.
יהיו $f(x)$, $g(x)$ פונקציות גזירות בקטע (a, b). תהי $c \in (a, b)$ נקודה שבה

(#1)
$$f(c) = g(c)$$

ו-

(#2)
$$f'(x) > g'(x) \qquad \forall x \in (a, b) \ , \ x < c \ .$$

הוכח כי

(#3)
$$g(x) > f(x) \qquad \forall x \in (a, b) \ , \ x < c \ .$$

פיתרון.
יהי $h(x) := f(x) - g(x)$. לפי **(#2)**, $h'(x) > 0$ לכל $x \in (a, b) \ , \quad x < c$. אז לפי משפט לגרנז' 8.4, $h(x)$ עולה מונוטונית. לכן

(#4)
$$h(n) > h(m) \qquad \Leftrightarrow \qquad n > m \qquad \forall m, n < c \ .$$

אבל $h(c) = 0$, לכן

(#5)
$$h(x) < 0 \quad \forall x < c \ .$$

ומכאן

(#6)
$$f(x) - g(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) > f(x) \quad \forall x < c \ .$$

■

דוגמא.
יהיו $f(x)$, $g(x)$ פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b) כך ש-

(1*)
$$f(a)=g(a)$$

אם

(2*)
$$f'(x)<g'(x) \qquad \forall x\in(a,b)\ ,$$

הוכח כי

(3*)
$$f(x)<g(x) \qquad \forall x\in(a,b]\ .$$

פיתרון.
יהי $h(x):=f(x)-g(x)$. לפי (1*),

(4*)
$$h(a)=0\ .$$

לפי (2*),

(5*)
$$h'(x)<0 \qquad \forall x\in(a,b).$$

לכל $x\in(a,b)\ ,\quad x<c$. אז לפי משפט לגרנז' 8.4, $h(x)$ יורדת מונוטונית. לכן

(6*)
$$h(n)<h(m) \qquad \Leftrightarrow \qquad n>m \qquad \forall m,n<(a,b)\ .$$

אבל לפי (4*) $h(a)=0$, לכן

(7*)
$$h(x)<0 \quad \forall a<x\leq b\ .$$

ומכאן

(8*)
$$f(x)-g(x)<0 \quad \Rightarrow \quad g(x)>f(x) \quad \forall x\in(a,b]\ .$$

■

דוגמא.
הוכח כי למשוואה
$$x^3-7x^2+25x+8=0$$
יש פתרון יחיד.

פיתרון.
נגדיר
$$f(x)=x^3-7x^2+25x+8\ .$$
שים לב
$$f(0)=8\ , \qquad f(-1)=-25\ ,$$

אז לפי משפט ערך ביניים 5.6, קיימת לפחות נקודה אחת שבה הפונקציה מקבלת הערך 0. נניח שקיימת יותר מנקודה אחת, a, b, שבהן

$$f(a)=f(b)=0\ .$$

$f(x)$ פולינום ולכן היא רציפה וגזירה בכל x. לכן לפי משפט רול 8.2, קיים נקודה $c\in(a,b)$ כל ש-

$$f'(c)=0. \tag{\#}$$

שים לב,

$$f'(x)=3x^2-14x+25$$

לכן אם (#) מתקיים,

$$3c^2-14c+25=0 \qquad \Rightarrow \qquad c=\frac{7\pm\sqrt{26}i}{3}$$

סתירה. לכן אין יותר מפתרון אחד. ■

דוגמא.
הוכח שלכל ערכים ממשיים a ו- b מתקיים

$$|\arctan(2b)-\arctan(2a)|\leq 2\,|b-a|$$

פיתרון.
פונקציה $f(x)=\arctan(x)$ היא אלמנטרית ומוגדרת לכל x ממשי. לכן היא רציפה וגזירה לכל x ממשי ולכן מקיימת את תנאיי משפט לגרנז' 8.4 עבור גל קטע $[a,b]$. לכן קיים ערך c מקטע זו כך ש-

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ .$$

מכאן

$$\frac{|f(b)-f(a)|}{|b-a|}=|f'(c)| \tag{**}$$

שים לב,

$$f'(x)=\frac{2}{1+4x^2}$$

ולכן לפי (**),

$$\frac{|\arctan(2b)-\arctan(2a)|}{|b-a|}=\frac{2}{1+4c^2}\leq 2$$

מש"ל. ■

כלל לופיטל

8.8 משפט. (כלל לופיטל)
יהיו $f(x)$, $g(x)$ פונקציות רציפות וגזירות בסביבה של נקודה a. אם התנאים הבאים מתקיימים:

.1

$$\lim_{x\to a} f(a)=0\ , \qquad \lim_{x\to a} g(a)=0$$

או

$$\lim_{x\to a} f(a)=\pm\infty\ , \qquad \lim_{x\to a} g(a)=\pm\infty$$

2. $g'(x) \neq 0$ בסביבה של a,

3. הגבול $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים וסופי,

אז

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

דוגמאות

דוגמא.
קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x\cdot \ln x}$$

פיתרון.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x\cdot \ln x} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)'}{(x\cdot \ln x)'} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{(1+\ln x)} \\ &= \frac{1}{(1+\ln 1)} = \frac{1}{(1+0)} = 1\end{aligned}$$

■

דוגמא.
קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 6x}{2x^2}$$

פיתרון.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 6x}{2x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 6x)'}{(2x^2)'} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{6\sin 6x}{4x} \ .\end{aligned}$$

<u>דרך 1</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{6\sin 6x}{4x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(6\sin 6x)'}{(4x)'} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{36\cdot \cos 6x}{4} \\ &= \frac{36\cdot \cos 0}{4} \\ &= \frac{36}{4} \ .\end{aligned}$$

דרך 2

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{4x} &= \lim_{x\to 0}\frac{6}{4}\cdot\frac{6\sin 6x}{6x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{36}{4}\cdot\frac{\sin 6x}{6x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{36}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}\\ &= \frac{36}{4}\ .\end{aligned}$$

■

דוגמא.
קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan 3x}{\tan 5x}$$

פיתרון.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan 3x}{\tan 5x} &= \lim_{x\to\pi/2}\frac{(\tan 3x)'}{(\tan 5x)'}\\
&= \lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}}\\
&=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x}\\
&=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{2}(1+\cos 10x)}{\frac{1}{2}(1+\cos 6x)}\\
&=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{(1+\cos 10x)}{(1+\cos 6x)}\\
&=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{(1+\cos 10x)'}{(1+\cos 6x)'}\\
&=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{-10\cdot\sin 10x}{-6\cdot\sin 6x}\\
&=\frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin 10x}{\sin 6x}\\
&=\frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{(\sin 10x)'}{(\sin 6x)'}\\
&=\frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{10\cdot\cos 10x}{6\cdot\cos 6x}\\
&=\frac{25}{9}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos 10x}{\cos 6x}\\
&=\frac{25}{9}\cdot\frac{\cos(5\pi)}{\cos(3\pi)}\\
&=\frac{25}{9}\cdot\frac{-1}{-1}\\
&=\frac{25}{9}\ .
\end{aligned}
$$

■

דוגמא.
קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x\to 2}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)(2-x)\right]$$

פיתרון.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)(2-x)\right] &= \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\cot\left(\frac{\pi}{4}x\right)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{-1}{\frac{\pi}{4}\cdot\frac{-1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)}}\\
&=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}}\\
&=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}}\\
&=\frac{4}{\pi}\ .
\end{aligned}
$$

■

דוגמא.
קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

פיתרון.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\cdot\ln x}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\cdot\ln x)'}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1-1/x}{\ln x+(x-1)/x}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(1-1/x)'}{(\ln x+(x-1)/x)'}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{-1/x^2}{1/x+1/x^2}\\
&=\frac{1}{2}\ .
\end{aligned}
$$

■

דוגמא.
קבע את הערך של הגבול

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2}$$

פיתרון.

דרך 1

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2} &= \lim_{x\to 0}\left[\Big(1+(\cos 2x-1)\Big)^{1/(\cos 2x-1)}\right]^{(\cos 2x-1)/x^2}\\ &= \lim_{x\to 0} e^{(\cos 2x-1)/x^2}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x-1)/x^2}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0}(-2\sin 2x)/2x}\\ &= e^{-2}\ .\end{aligned}$$

דרך 2

תהי $f(x)=(\cos 2x)^{1/x^2}$. אז

$$\ln f(x)=\frac{1}{x^2}\ln\cos(2x)$$

ו-

$$f(x)=e^{\ln f(x)}\ .$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos(2x)}{x^2}}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin(2x)}{2x\cos 2x}}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{(-2)}{\cos 2x}}\\ &= e^{-2}\ .\end{aligned}$$

■

שיעור 9
מונוטוניות, נקודות קיצון ונוסחת טיילור

נוסחת טיילור ומקלורן

כדי למצוא ערכים של פונקציה מקרבים אותה באמצעות פולינום.

9.1 משפט. (משפט טיילור)
תהי f פונקציה מוגדרת בסביבה של נקודה a וגזירה לפחות $n+1$ פעמים בנקודה a. אז לכל x בסביבה לנקודה a קיימת נקודה c בין a ל- x כך ש-

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

הנוסחה זו נקראת נוסחת טיילור. האיבר הסופי

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

נקרא השארית. זאת אומרת

$$f(x)=\overbrace{f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}^{n \text{ פולינום טיילור מסדר}}+R_n(x)$$

נוסחת מקלורן היא נוסחת טיילור עבור $a=0$.

9.2 משפט. (מקלורן)
תהי f פונקציה מוגדרת בסביבה של נקודה 0 וגזירה לפחות $n+1$ פעמים בנקודה 0. אז לכל x בסביבה לנקודה 0 קיימת נקודה c בין 0 ל- x כך ש-

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$

כאשר

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\ .$$

דוגמאות

.1 $\underline{f(x)=e^x}$

נרשום פולינום מקלורן מסדר n:

$$f(0)=e^0=1$$

ו-

$$f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$$

לכן

$$f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=e^0=1\ ,$$

ונקבל

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\ .$$

.2 $\underline{f(x) = \sin x}$

נרשום פולינום מקלורן מסדר n:
$$f(0) = \sin(0) = 0 \ .$$

ו-
$$f'(x) = \cos x \ , \qquad f'(0) = \cos(0) = 1 \ .$$
$$f''(x) = -\sin x \ , \quad f''(0) = -\sin(0) = 0 \ .$$
$$f'''(x) = -\cos x \ , \quad f'''(0) = -\cos(0) = -1 \ .$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x \ , \qquad f^{(4)}(0) = \sin(0) = 0 \ .$$
$$f^{(5)}(x) = \cos x \ , \qquad f^{(5)}(0) = \cos(0) = 1 \ .$$
$$f^{(6)}(x) = -\sin x \ , \quad f^{(6)}(0) = -\sin(0) = 0 \ .$$
$$f^{(7)}(x) = -\cos x \ , \quad f^{(7)}(0) = -\cos(0) = -1 \ .$$

לכן
$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ .$$

.3 $\underline{f(x) = \cos x}$

נרשום פולינום מקלורן מסדר n:
$$f(0) = \cos(0) = 1 \ .$$

ו-
$$f'(x) = -\sin x \ , \quad f'(0) = -\sin(0) = 0 \ .$$
$$f''(x) = -\cos x \ , \quad f''(0) = -\cos(0) = -1 \ .$$
$$f^{(3)}(x) = \sin x \ , \qquad f^{(3)}(0) = \sin(0) = 0 \ .$$
$$f^{(4)}(x) = \cos x \ , \qquad f^{(4)}(0) = \cos(0) = 1 \ .$$
$$f^{(5)}(x) = -\sin x \ , \quad f^{(5)}(0) = -\sin(0) = 0 \ .$$
$$f^{(6)}(x) = -\cos x \ , \quad f^{(6)}(0) = -\cos(0) = -1 \ .$$
$$f^{(7)}(x) = \sin x \ , \qquad f^{(7)}(0) = \sin(0) = 0 \ .$$

לכן
$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ .$$

תרגילים

דוגמא.
רשום את פולינום מקלורן מסדר 3 עבור הפונקציה $y = \arctan(x+1)$.

פיתרון.

$$f(0)=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}\ .$$

$$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2+1}\ ,\qquad f'(0)=\frac{1}{2}\ .$$

$$f''(x)=\frac{-2(x+1)}{\left((x+1)^2+1\right)^2}\ ,\quad f''(0)=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}\ .$$

.

$$P_2(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2\cdot 2!}=\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}\ .$$

■

דוגמא.
ידוע שפולינום מקלורן מסדר 3 של פונקציה $f(x)$ הוא $x+2x^2-x^3$. חשב את $f''(0)\cdot f'''(0)$.

פיתרון.

$$P_3(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3=x+2x^2-x^3\ .$$

לכן

$$f'(0)=1\ ,\qquad \frac{f''(0)}{2!}=2,\qquad \frac{f^{(3)}(0)}{3!}=-1$$

ז"א

$$f''(0)\cdot f'''(0)=4\cdot(-6)=-24\ .$$

■

דוגמא.
רשום פולינום מקלורן מסדר 2 עבור פונקציה $y(x)$ הנתונה בצורה סתומה:

$$xy+y^3=\cos(2x)\ .$$

פיתרון.
נציב $x=0$:

$$y(0)^3=\cos(2\cdot 0)=1\qquad\Rightarrow\qquad y(0)=1\ .$$

נגזור את שני הצדדים:

$$y+xy'+3y^2\cdot y'=-2\sin(2x)$$

נציב $x=0$, $y(0)=1$:

$$1+3\cdot 1^2\cdot y'(0)=-2\sin(2\cdot 0)\qquad\Rightarrow\qquad 1+3\cdot y'(0)=0\qquad\Rightarrow\qquad y'(0)=-\frac{1}{3}\ .$$

נגזור את שני הצדדים פעם שניה:

$$y' + y' + xy'' + 6y \cdot (y')^2 + 3y^2 \cdot y'' = -4\cos(2x)$$

נציב $x = 0$, $y(0) = 1$ $y'(0) = -\frac{1}{3}$:

$$-\frac{2}{3} + 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 3y'' = -4 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 3y'' = -4 \qquad \Rightarrow \qquad y'' = -\frac{4}{3} \ .$$

$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{3 \cdot 2!}x^2 = 1 - \frac{x}{3} - \frac{2}{3}x^2$$

■

דוגמא.
רשום פולינום מקלורן מסדר 2 עבור פונקציה $y(x)$ הנתונה בצורה פרמטרית:

$$x = \ln(t+2) \ , \qquad y = t^2 - 3t \ .$$

פיתרון.

$$x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ln(t+2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = -1 \ .$$

לכן

$$y = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) = 4 \ .$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t-3}{\frac{1}{t+2}} = (2t-3)(t+2) = 2t^2 + t - 6 \ .$$

$$y'_x(t=-1) = -5 \ .$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{4t+1}{\frac{1}{t+2}} = (4t+1)(t+2) \ .$$

$$y''_x(t=-1) = -3 \ .$$

לכן

$$P_2(x) - 5 - 5x - \frac{3x^2}{2!} = 4 - 5x - \frac{3x^2}{2} \ .$$

■

תחומי עליה וירידה של פונקציה

9.3 משפט. (תנאי הכרחי למונוטוניות)
תהי f פונקציה גזירה בקטע (a,b) ועולה בקטע זו. אז $f'(x) \geq 0$ לכל $x \in (a,b)$.

תהי f פונקציה גזירה בקטע (a,b) ויורדת בקטע זו. אז $f'(x) \leq 0$ לכל $x \in (a,b)$.

הוכחה.
נניח ש f עולה בקטע (a,b).

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ז"א

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

נתבונן ב- $f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. $\Delta x > 0$ ו- $f(x+\Delta x) - f(x) > 0$ לכן $f'_+(x) > 0$.

עבור $f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, $\Delta x < 0$ ו- $f(x+\Delta x) - f(x) < 0$ לכן $f'_-(x) > 0$.

$f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$ לכן $f'(x) \geq 0$. ■

הערה.
לא ניתן להשתמש במשפט הזה בכיוון הפוך. כלומר, לכל $x \in (a,b)$

$f(x)$ עולה מונוטונית $\Leftarrow$ $f'(x) \geq 0$

$f(x)$ עולה מונוטונית $\not\Rightarrow$ $f'(x) \geq 0$

ו-

$f(x)$ יורדת מונוטונית $\Leftarrow$ $f'(x) \leq 0$

$f(x)$ יורדת מונוטונית $\not\Rightarrow$ $f'(x) \leq 0$

■

9.4 משפט. (תנאי המספיק למונוטוניות)
תהי f פונקציה גזירה בקטע (a,b). לכל $x \in (a,b)$:

$f'(x) > 0$ $\Leftarrow$ $f(x)$ עולה מונוטונית

$f'(x) < 0$ $\Leftarrow$ $f(x)$ יורדת מונוטונית

הוכחה.
נניח ש $f'(x) > 0$ לכל $x \in (a,b)$. נקח $x_1 < x_2$ בתוך הקטע. לפי משפט לגרנז' 8.4 קיים c כך ש- $x_1 < c < x_2$ ו-

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)\ .$$

לפי הנתון, $f'(c) > 0$, לכן $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftarrow f(x_2) > f(x_1)$. ז"א f עולה מונוטונית בקטע (a,b). ■

תרגילים

דוגמא.
בדוק את תחומי עליה וירידה של פונקציה $f(x)=x^3-3x-4$.

פיתרון.

$$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)\ .$$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

■

דוגמא.
הראו כי למשוואה $2\ln x+x^2-5=0$ יש שורש ממשי אחד בדיוק.

פיתרון.
נגדיר $f(x)=2\ln x+x^2-5$. שים לב

$$f(1)=-4<0\ ,\qquad f(2)=2\ln 2-1>0\ .$$

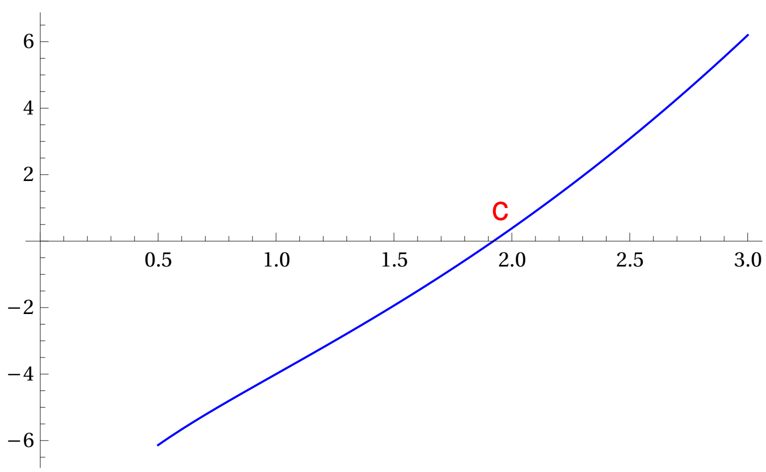
תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא $x>0$. מכיוון ש $f(x)$ פונקציה אלמנטרית, ומוגדרת בקטע $[1,2]$, אז היא רציפה בקטע זו וגזירה בקטע $(1,2)$. לפי משפט ערך הביניים 5.6 קיים $c\in(1,2)$ כך ש- $f(c)=0$.

נוכיח שהשורש c היא יחיד:

שים לב

$$f'(x)=\frac{2}{x}+2x>0$$

לכל x בתחום ההגדרה. לכן, f עולה מונוטונית בתחום $(0,\infty)$. ז"א השורש הוא יחיד.



■

נקודות קיצון

9.5 משפט. (נקודת מקסימום)
נקודה a נקראת נקודת מקסימום מקומי של פונקציה $f(x)$ אם קיימת סביבה של a כך שלכל $x \neq a$ השייך לסביבה, מתקיים

$$f(x) < f(a) \ .$$

9.6 משפט. (נקודת מינימום)
נקודה a נקראת נקודת מינימום מקומי של פונקציה $f(x)$ אם קיימת סביבה של a כך שלכל $x \neq a$ השייך לסביבה, מתקיים

$$f(x) > f(a) \ .$$

נקודות מקסימום ומינימום נקראים **נקודות קיצון** אן גם **נקודות אקסטרמום.**

9.7 משפט. (משפט פרמה (תנאי הכרחי לאקסטרמום))
תהי f פונקציה גזירה בסביבה של נקודה a. נניח ש- $x = a$ נקודת קיצון של $f(x)$. אז $f'(a) = 0$.

המשמעות הגיאומטרית: בנקודהת קיצון המשיק מקביל לציר ה- x.

הערה.
שים לב המשפט ההפוך לא נכון. כלומר בהינתן פונקציה גזירה בסביבה של נקודה a.

a נקודת קיצון של f $\quad \Leftarrow \quad$ $f'(a) = 0$

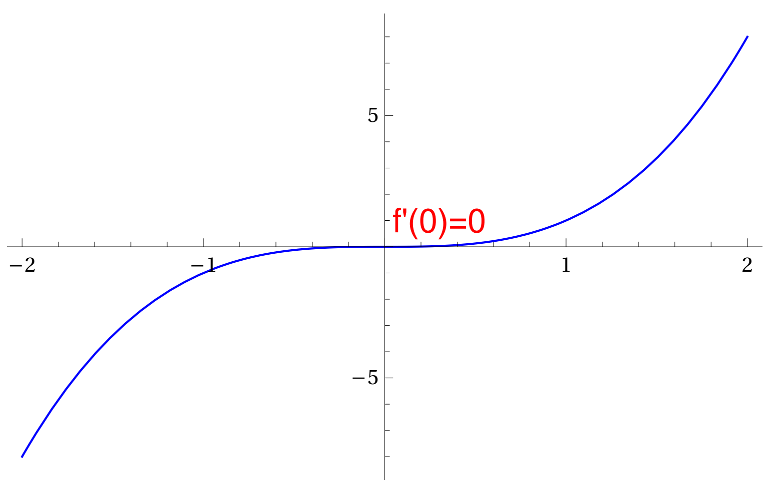
$f'(a) = 0$ $\quad \not\Leftarrow \quad$ a נקודת קיצון של f

■

לדוגמה: $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2 \ , \qquad \Rightarrow \qquad f'(0) = 0$$

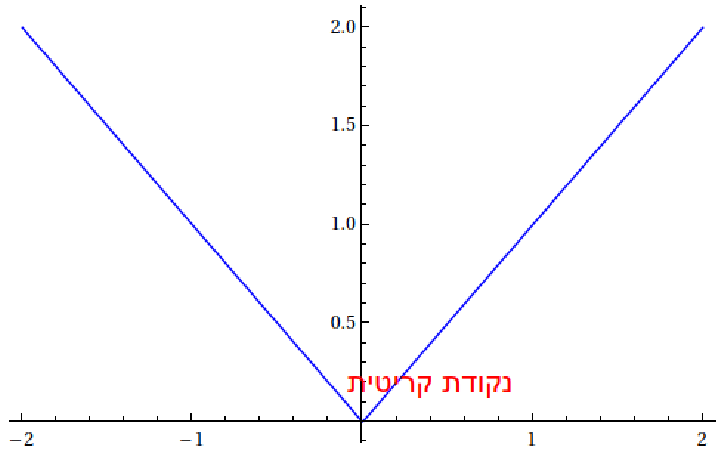
אבל $x = 0$ לא נקודת קיצון (עיין תרשים להלן)



גם קיימות פונקציות שיש להן נקודת קיצון אבל הן לא גזירות בנקודה הזאת. לדוגמה:

$f(x) = |x|$

$f'(0)$ לא קיימת אבל הנקודה $x = 0$ נקודת מינימום (עיין תרשים להלן)



9.8 כלל: (נקודת קריטית)
נקודת אקסטרמום של פונקציה יכולה להיות בין הנקודות שבהן הנגזרת שווה ל- 0 או לא קיימת. נקודות האלה נקראים נקודות קריטיות (או נקודות חשודות לאקסטרמום).

9.9 משפט. (תנאי המספיק למונוטוניות)
תהי f פונקציה מוגדרת בנקודה a וגזירה בסביבה של a, אבל לא בהכרח גזירה ב- a. תהי a היא נקודה חשודה לקיצון. אזי:

1) אם במעבר דרך הנקודה a משמאל לימין $f'(x)$ משנה את הסימן מ $+$ ל- $-$ אז a נקודת מקסימום מקומי.

2) אם במעבר דרך הנקודה a משמאל לימין $f'(x)$ משנה את הסימן מ $-$ ל- $+$ אז a נקודת מינימום מקומי.

תרגילים

דוגמא.
מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x) = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$.

פיתרון.

$$f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{3\sqrt[3]{x}}$$

הנקודות החשודות לקיצון $x = 0, 8$.

x	$(-\infty,0)$	$(0,8)$	$(8,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

לכן $(0,f(0))=(0,0)$ נקודת מקסימום מקומי.

$(8,f(8))=(8,-\frac{4}{3})$ נקודת מינימום מקומי. ■

דוגמא.
מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$.

פיתרון.

$$f'(x)=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

הנקודות הקריטיות הן $x=-1,1,3$.

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

לכן נקבל:

$x=3$ נק' מינימום מקומי: $f(3)=8$.
$x=-1$ נק' מקסימום מקומי: $f(-1)=0$.

■

מציאת הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של פונקציה רציפה בקטע סגור

תהי f רציפה בקטע סגור $[a,b]$. אז לפי משפט ווירשטרס 5.4, $f(x)$ מקבלת בקטע $[a,b]$ את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר.

הערך הזה יכול להתקבל בנקודה פנימית של הקטע, (אז היא נקודה קריטית של פונקציה $f(x)$) או באחד הקצוות של הקטע. לכן השלבים למציאת הערך הגדול ביותר והקטן ביותר הם:

1. למצוא את כל הנקודות החשודות לאקסרמום השייכות לקטע (a,b).

2. לחשב את הערך של $f(x)$ בכל הנקודות של סעיף הקודם.

3. לחשב את $f(a)$ ו- $f(b)$.

4. מתוך הערכים שחישבנו לבחור את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר.

דוגמא.
מצא את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של פונקציה

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$$

בקטע $[-2, -\frac{1}{2}]$

פיתרון.

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1)$$

לכן $f'(x) = 0$ בנקודות $x = 0, -1$. הנקודה הקריטית השייכת לקטע $[-2, -\frac{1}{2}]$ היא $x = -1$. $f(-1) = 0$.
נוסיף את הקצוות:

$$f(-2) = 17 \ , \qquad f(-\frac{1}{2}) = \frac{11}{16} \ .$$

הערך הגדול ביותר היא 17 המתקבל בנקודה $x = -2$.

הערך הגדול ביותר היא 0 המתקבל בנקודה $x = -1$. ■

שיעור 10
אינטגרלים לא מסויימים

אינטגרלים לא מסויימים

10.1 הגדרה: (פונקציה קדומה)
אם $F'(x) = f(x)$ אז אומרים כי $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$.

דוגמא.

$$(x^2)' = 2x \ ,$$

לכן $F(x) = x^2$ פונקציה קדומה של $f(x) = 2x$

10.2 משפט. (פונקציה קדומה)
אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$, אז $F(x) + C$ (לכל $C \in \mathbb{R}$ קבוע) היא גם פונקציה קדומה של $f(x)$.

ז"א אם פונקציה קדומה של $f(x)$ קיימת, בהכרח ישנם אינסוף פונקציות קדומות של $f(x)$.

דוגמא.

$$(x^2 + C)' = 2x \ ,$$

לכן לפונקציה $f(x) = 2x$ יש אינסוף פונקציות קדומות מהצורה $F(x) = x^2 + C$.

10.3 הגדרה: (האינטגרל הלא מסויים)
האוסף של כל הפונקציות הקדומות של $f(x)$, נקרא האינטגרל הלא מסויים של $f(x)$, מסומן $\int f(x)dx$.
ז"א

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad \Leftrightarrow \qquad (F(x) + C)' = f(x) \ .$$

dx נקרא הדיפרנציאל של x.

דוגמאות

1) $\displaystyle\int 2x\,dx = x^2 + C$

2) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

3) $\displaystyle\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

4) $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$

לינאריות של אינטגרל לא מסויים

10.4 הגדרה: (לינאריות של אינטגרל לא מסויים)

נתונות פונקציות $f(x)$, $g(x)$ וסקלר a.

(i) $\int a\cdot f(x)\,dx = a\cdot \int f(x)\,dx$.

(ii) $\int [f(x)\pm g(x)]\;dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

הוכחה.

(i) אם $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$, ז"א $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, אז $F'(x)=f(x)$. לפיו ולפי משפט 5.17 (מספר 2),

$$a\cdot f(x) = a\cdot F'(x) = (aF(x))'\ .$$

נפעיל אינטגרל לא מסויים על שני הצדדים ונקבל

$$\int a\cdot f(x)\,dx = a\cdot F(x)+C\ .$$

■

טבלת האינטגרלים חלקית

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C\ , \qquad (a \neq -1)$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C\ ,$$
$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ ,$$
$$\int e^x\,dx = e^x + C\ ,$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C\ ,$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + C\ ,$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C\ ,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C\ ,$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C\ ,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C\ ,$$

תרגילים

(1

$$\begin{aligned}\int \left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^2 dx &= \int \left(1+2x^{2/3}+x^{4/3}\right) dx \\ &= x + 2\frac{x^{2/3}}{5/3} + \frac{x^{4/3}}{7/3} + C \\ &= x + \frac{6x^{2/3}}{5} + \frac{3x^{4/3}}{7} + C\end{aligned}$$

(2

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\,dx &= \int x^{-2/5}dx \\ &= \frac{5}{3}x^{1-2/5} + C \\ &= \frac{5}{3}x^{3/5} + C\end{aligned}$$

(3

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x}\,dx &= \int \left(1+\frac{1}{x}\right) dx \\ &= x + \ln|x| + C\end{aligned}$$

החלפת משתנה / אינטגרציה ע"י הצבה

10.5 משפט. (אינטגרציה ע"י הצבה)

נתון אינטגרל מצורה

$$\int f\left(t(x)\right) \cdot u'(x)\, dx$$

כאשר $f\left(u(x)\right)$ פונקציה של הפונקציה $u(x)$ ו- $u'(x)$ הנגזרת של $u(x)$. אז

$$\int f\left(u(x)\right) \cdot u'(x)\, dx = \int f(u)\, du\ .$$

10.6 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \sin(2x) dx$$

פיתרון.

$$u = 2x\ , \qquad u'(x) = 2\ , \qquad \frac{1}{2}u'(x) = 1\ .$$

$$\begin{aligned}\int \sin(2x)dx =& \frac{1}{2}\int \sin u \cdot u'\, dx\\ =& -\frac{1}{2}\cos u + C\\ =& -\frac{1}{2}\cos(2x) + C\end{aligned}$$

■

10.7 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int e^{ax} dx$$

פיתרון.

$$u = ax\ , \qquad u'(x) = a\ , \frac{1}{a}u'(x) = 1\ .$$

$$\begin{aligned}\int e^{ax}dx =& \int e^{u(x)} \cdot \frac{1}{a} \cdot u'(x)\, dx\\ =& \frac{1}{a}\int e^{u}\, du\\ =& \frac{1}{a}e^{u} + C\\ =& \frac{1}{a}e^{ax} + C\end{aligned}$$

■

10.8 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{1}{x^2+8}\,dx$$

פיתרון.

$$u(x) = \frac{x}{\sqrt{8}}\ , \qquad u'(x) = \frac{1}{\sqrt{8}}\ , \qquad \Rightarrow \qquad 1 = \sqrt{8}\,u'(x).$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+8}\,dx =& \int \frac{1}{8u^2+8}\,\sqrt{8}u'(x)\ , dx\\ =&\sqrt{8}\int \frac{1}{8u^2+8}\,du\\ =&\frac{\sqrt{8}}{8}\int \frac{1}{u^2+1}\,du\\ =&\frac{1}{\sqrt{8}}\arctan(u)+C\\ =&\frac{1}{\sqrt{8}}\arctan\left(\frac{x}{8}\right)+C\end{aligned}$$

באופן כללי,

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C\ .$$

■

10.9 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{1}{5x+2}\,dx$$

פיתרון.

$$u(x) = 5x+2\ , \qquad u'(x) = 5\ , \qquad \frac{1}{5}u'(x) = 1\ .$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{5x+2}\,dx =& \int \frac{1}{u(x)}\cdot\frac{u'(x)}{5}\,dx\\ =&\frac{1}{5}\int \frac{1}{u(x)}\,du\\ =&\frac{1}{5}\ln|u|+C\\ =&\frac{1}{5}\ln|5x+2|+C\end{aligned}$$

באופן כללי,

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+C\ .$$

■

10.10 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int (3x-1)^{24}\ dx$$

פיתרון.

$$u(x)=3x-1\ ,\qquad u'=3\ ,\qquad \frac{1}{3}u'(x)=1$$

$$\begin{aligned}\int (3x-1)^{24}\ dx &= \int u^{24}\cdot\frac{u'(x)}{3}\,dx\\ &=\frac{1}{3}\int u^{24}\,du\\ &=\frac{1}{3}\cdot\frac{u^{25}}{25}+C\\ &=\frac{1}{75}\,(3x-1)^{25}+C\end{aligned}$$

■

10.11 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \tan x\,dx$$

פיתרון.

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$u=\cos x\ ,\qquad u'=-\sin x\ .$$

$$\begin{aligned}\int \tan x\,dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx\\ &=-\int \frac{1}{u}\,u'(x)dx\\ &=-\int \frac{1}{u}\,du\\ &=-\ln|u|+C\\ &=-\ln|\cos x|+C\end{aligned}$$

■

10.12 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \cot x\,dx$$

פיתרון.

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$$

$$u(x) = \sin x\ , \qquad u'(x) = \cos x\ .$$

$$\begin{aligned}\int \cot x\, dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx \\ &= \int \frac{1}{u}\, u'(x) dx \\ &= \int \frac{1}{u}\, du \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|\sin x| + C\end{aligned}$$

■

10.13 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int x(x+2)^{69}\, dx$$

פיתרון.

$$u = (x+2)\ , \qquad u'(x) = 1\ , \qquad x = u-2$$

$$\begin{aligned}\int x(x+2)^{69}\, dx &= \int (u-2)u^{69}\, u'(x)\, dx \\ &= \int (u-2)u^{69}\, du \\ &= \int \left(u^{70} - 2u^{69}\right)\, du \\ &= \frac{u^{71}}{71} - \frac{2u^{70}}{70} + C \\ &= \frac{(x+2)^{71}}{71} - \frac{(x+2)^{70}}{35} + C\end{aligned}$$

■

10.14 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{1}{\cot^5 x \cdot \sin^2 x}\, dx$$

פיתרון.

$$u = \cot x\ , \qquad u'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cot^5 x \cdot \sin^2 x}\, dx &= -\int \frac{1}{u^5} u'(x)\, dx \\ &= -\int \frac{1}{u^5}\, du \\ &= -\int u^{-5}\, du \\ &= -\frac{u^{-4}}{-4} + C \\ &= \frac{1}{4\cot^4 x} + C\end{aligned}$$

■

10.15 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{\cos x}{3+\sin x}\, dx$$

פיתרון.

$$u = \sin x\ , \qquad u'(x) = \cos x\ .$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{3+\sin x}\, dx &= \int \frac{1}{u+3}\, u'(x)\, dx \\ &= \int \frac{1}{u+3}\, du \\ &= \ln|u+3| + C \\ &= \ln|\sin x + 3| + C\end{aligned}$$

■

10.16 דוגמא.
חשב את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{1}{e^x+1}\, dx$$

פיתרון.

$$u = e^x\ , \qquad u'(x) = e^x\ , \qquad u'(x)e^{-x} = \frac{1}{u}\cdot u'(x)\ .$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^x+1}\, dx &= \int \frac{1}{u(u+1)}\, u'(x)\, dx \\ &= \int \frac{1}{u(u+1)}\, du \\ &= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du \\ &= \ln|u| - \ln|u+1| + C \\ &= \ln(e^x) - \ln(e^x+1) + C \\ &= x - \ln(e^x+1) + C\end{aligned}$$

■

אינטגרציה בחלקים

10.17 משפט. (אינטגרציה בחלקים)
יהיו $u(x)$ $\mathrm{v}(x)$ פונקציות של משתנה x.

$$\int u\mathrm{v}'\,dx = u\mathrm{v} - \int u'\mathrm{v}\,dx$$

הוכחה.
לפי כלל הכפל של נגזרות (עיין משפט 5.17 מספר 3)

$$(u\mathrm{v})' = u'\mathrm{v} + u\mathrm{v}' \qquad \Rightarrow \qquad u\mathrm{v}' = (u\mathrm{v})' - u'\mathrm{v}$$

נפעיל אינטגרל על שני הצדדים:

$$\int u\mathrm{v}'\,dx = \int (u\mathrm{v})'\,dx - \int u'\mathrm{v}\,dx\ . \qquad (*)$$

לפי משפט 10.5 ניתן לכתוב אגף השמאל של (*) כ

$$\int u\mathrm{v}'(x)\,dx = \int u\,d\mathrm{v} \qquad (\#1)$$

האיבר הראשון באגף הימין של (*) הוא

$$\int (u\mathrm{v})'dx = u\mathrm{v} + C \qquad (\#2)$$

לפי משפט 10.5 האיבר השני באגף הימין של (*) הוא

$$\int u'\mathrm{v}\,dx = \int \mathrm{v}\,du \qquad (\#3)$$

נציב (#1), (#2), ו- (#3) לתוך (*) ונקבל

$$\int u\,d\mathrm{v} = u\mathrm{v} - \int \mathrm{v}\,du$$

ז"א

$$\int u\mathrm{v}'\,dx = \int (u\mathrm{v})'\,dx - \int u'\mathrm{v}\,dx$$

■

10.18 דוגמא.
חשב את האינטגרל

$$\int x \cdot e^x\,dx$$

פיתרון. $u = x$ $\text{v}' = e^x$ $u'(x) = 1$ $v = e^x$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx$$
$$= xe^x - e^x + C$$

■

10.19 כלל: (מקרים נפוצים של שימוש באינטגרציה בחלקים)

1) במקרה

א $\int p(x) \cdot e^{kx}\,dx$,

ב $\int p(x) \cdot \sin(kx)\,dx$,

ג $\int p(x) \cdot \cos(kx)\,dx$

כאשר $p(x)$ פולינום, מגדירים $u = p(x)$.

2) במקרה

א $\int p(x) \cdot \operatorname{arcsin}(kx)\,dx$,

ב $\int p(x) \cdot \operatorname{arccos}(kx)\,dx$,

ג $\int p(x) \cdot \operatorname{arctan}(kx)\,dx$,

ד $\int p(x) \cdot \ln|kx|\,dx$,

ה $\int p(x) \cdot \operatorname{arccot}(kx)\,dx$,

כאשר $p(x)$ פולינום, מגדירים $\text{v}' = p(x)$.

3) במקרה

א $\int e^{ax} \cdot \sin(bx)\,dx$,

ב $\int e^{ax} \cdot \cos(bx)\,dx$,

מגדירים $u = e^{ax}$.

דוגמאות

10.20 דוגמא. חשב את האינטגרל

$$\int (2x+1)e^{3x}\,dx$$

פיתרון.

$$u = 2x+1\ , \qquad \text{v}' = e^{3x} \qquad u' = 2 \qquad \text{v} = \frac{1}{3} \cdot e^{3x}$$

$$\begin{aligned}\int (2x+1)e^{3x}\,dx =& \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3}\int e^{3x}\,dx \\ =& \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C\end{aligned}$$

■

10.21 דוגמא. חשב את האינטגרל

$$\int \ln(x)\,dx$$

פיתרון.

$$u = \ln(x)\ , \qquad \mathrm{v}' = dx\ , \qquad u' = \frac{1}{x}\ , \qquad \mathrm{v} = x$$

$$\int \ln x\,dx = x\cdot \ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C$$

■

10.22 דוגמא. חשב את האינטגרל

$$\int \arctan(x)\,dx$$

פיתרון.

$$u = \arctan(x)\ , \qquad \mathrm{v}' = 1\ , \qquad u' = \frac{1}{1+x^2}\ , \qquad \mathrm{v} = x$$

$$\int \arctan x\,dx = x\cdot\arctan x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$u = x^2+1\ , \qquad u' = 2x$$

$$\begin{aligned}\int \arctan x\,dx =& x\cdot\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du \\ =& x\cdot\arctan x - \frac{1}{2}\int \ln|u| + C \\ =& x\cdot\arctan x - \frac{1}{2}\int \ln|x^2+1| + C\end{aligned}$$

■

10.23 דוגמא. חשב את האינטגרל

$$I = \int x^2\sin(2x)\,dx$$

פיתרון.

$$u = x^2 \ , \qquad \mathrm{v}' = \sin(2x) \ , \qquad u' = 2x \ , \qquad \mathrm{v} = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2}x^2 \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2}\int 2x \cdot \cos(2x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2 \cdot \cos(2x) + \int x \cdot \cos(2x)\,dx \end{aligned}$$

$$u = x \ , \qquad \mathrm{v}' = \cos(2x) \ , \qquad u' = 1 \ , \qquad \mathrm{v} = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2}x^2 \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2}x \cdot \sin(2x) - \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2 \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2}x \cdot \sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C \end{aligned}$$

■

10.24 דוגמא. חשב את האינטגרל

$$I = \int e^x \sin x\,dx$$

פיתרון.

$$u = e^x \ , \qquad \mathrm{v}' = \sin(x) \ , \qquad u' = e^x \ , \qquad \mathrm{v} = -\cos(x)$$

$$I = -e^x \cos x + \int e^x \cdot \cos(x)\,dx$$

$$u = e^x \ , \qquad \mathrm{v}' = \cos(x) \ , \qquad u' = e^x \ , \qquad \mathrm{v} = \sin(x)$$

$$\begin{aligned} I &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cdot \sin(x)\,dx \\ &= -e^x \cos x + e^x \sin x - I \end{aligned}$$

לכן

$$2I = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

ז"א

$$I = \frac{1}{2}\left(-e^x \cos x + e^x \sin x\right) + C$$

■

10.25 דוגמא. חשב את האינטגרל

$$I = \int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$$

פיתרון.

$$u = x \ , \qquad \mathrm{v}' = \frac{1}{\cos^2(x)} \ , \qquad u' = 1 \ , \qquad \mathrm{v} = \tan(x)$$

$$\begin{aligned} I &= x\tan x - \int \tan(x)\,dx \\ &= x\tan x + \ln|\cos x| + C \end{aligned}$$

■

10.26 דוגמא. חשב את האינטגרל
$$I = \int \ln\left(x^2+4\right)\, dx$$

פיתרון.
$$u = \ln\left(x^2+4\right) \ , \qquad \mathrm{v}' = 1 \ , \qquad u' = \frac{2x}{x^2+4} \ , \qquad \mathrm{v} = x \ .$$
$$\begin{aligned} I =& x\ln\left(x^2+4\right) - 2\int \frac{x^2}{x^2+4}\, dx \\ =& x\ln\left(x^2+4\right) - 2\int \frac{(x^2+4)-4}{x^2+4}\, dx \\ =& x\ln\left(x^2+4\right) - 2\int \left(1 - \frac{4}{x^2+4}\right)\, dx \\ =& x\ln\left(x^2+4\right) - 2\left(x - 4\cdot\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C \\ =& x\ln\left(x^2+4\right) - 2x + 4\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C \ . \end{aligned}$$

■

שיעור 11
אינטגרלים מסויימים

אינטגריה של שברים אלגבריים (פונקציות רצינליות)

11.1 הגדרה: (פונקציה רציונלית)

פונקציה רציונלית (שבר אלגברי) זאת פונקציה מהצורה
$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} ,$$
כאשר $P(x)$, $Q(x)$ פולינומים.

דוגמא. (פונקציה רציונלית)

$f(x) = \dfrac{x^4-5x+9}{x-2}$ פונקציה רציונלית: $P(x) = x^4-5x+9$ $Q(x) = x-2$.

11.2 הגדרה: (פונקציה רציונלית אמיתי)

שבר אלגברי
$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$
נקרא אמיתי אם
$$\deg(P) < \deg(Q) .$$
אם שבר אלגברי לא אמיתי, יש לעשות חילוק פולינומים.

דוגמא. (חילוק פולינומים)

חשבו את האינטגרל
$$\int \frac{x^4-5x+9}{x-2} .$$

פיתרון.
שלב ראשון בחישוב אינטגרל של שבר אלגברי לא אמיתי, להגיע לשבר אלגברי אמיתי ע"י חילוק פולינומים.
ע"י חילוק ארוך:
$$\frac{x^4-5x+9}{x-2} = x^3+2x^2+4x+3+\frac{15}{x-2}$$
לכן
$$\int \frac{x^4-5x+9}{x-2} = \int \left(x^3+2x^2+4x+3+\frac{15}{x-2}\right) = \frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+2x^2+3x+15\ln|x-2|+C .$$
■

יש 4 סוגים של שברים אלגבריים פשוטים:

סוג 1

$$\frac{A}{x-a}$$

סוג 2

$$\frac{A}{(x-a)^n}\ , \qquad n\in\mathbb{N}\ , \quad n\geq 2\ .$$

סוג 3

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\ ,$$

כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.

סוג 4

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\ , n\in\mathbb{N}\ , \quad n\geq 2$$

כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

חשבו את $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-3x+1}$

פיתרון.

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+1}=\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$
$$A(x-2)+B(x-1)=2x+1$$

$$x=2 \quad\Rightarrow\quad B=5$$
$$x=1 \quad\Rightarrow\quad A=-3$$

$$\int\frac{2x+1}{x^2-3x+1}\,dx=\int\left(\frac{-3}{x-1}+\frac{5}{x-2}\right)dx=-3\ln|x-1|+5\ln|x-2|+C\ .$$

■

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

חשבו את $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2}$

פיתרון.

$$\frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{x-3}\ .$$
$$A(x-3)^2+B(x-2)+C(x-3)(x-2)=x^2+4$$

$$\begin{aligned} x=3 \quad &\Rightarrow \quad B=13 \\ x=2 \quad &\Rightarrow \quad A=8 \\ x=0 \quad &\Rightarrow \quad 9A-2B+6C=4 \to C=-7 \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2}\,dx = \int \left(\frac{8}{x-2}+\frac{13}{(x-3)^2}-\frac{7}{x-3}\right)dx = 8\ln|x-2| - \frac{13}{x-3} - 7\ln|x-3| + C \ .$$

■

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

חשבו את $\int \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}$

פיתרון.

$$\frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+1} \ .$$

$$A(x^2+1)^2+Bx(x^2+1)+(Cx+D)x^2 = x^3+1$$

$$\begin{aligned} x^3: &\quad B+C=1 \\ x^2: &\quad A+D=0 \\ x: &\quad B=0 \\ x^0: &\quad A=1 \end{aligned}$$

לכן

$$D=-1\ , \qquad C=1\ .$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}dx = \int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx = \int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = -\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|x^2+1|-\arctan(x)+C\ .$$

■

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

חשבו את $I=\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}$

פיתרון.

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5} \ .$$

$$A(x^2-2x+5)+(Bx+C)(x-1) = 2x^2-3x-3$$

$$\begin{aligned} x^2 :&\quad A+B=2 \\ x :&\quad -2A+C-B=-3 \\ x^0 :&\quad 5A-C=-3 \end{aligned}$$

לכן

$$A=-1\ , \qquad B=3\ , \qquad C=-2\ .$$

$$I=\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx=\int \left(-\frac{1}{x-1}+\frac{3x-2}{x^2-2x+5}\right)dx=-\ln|x-1|+\int \left(\frac{3x-2}{(x-1)^2+4}\right)dx\ .$$

נגדיר $u=x-1$:

$$\begin{aligned} I=&\ln|x-1|+\int \frac{3(u+1)-2}{u^2+4}du \\ =&\ln|x-1|+\int \frac{3(u+1)-2}{u^2+4}du \\ =&\ln|x-1|+3\int \frac{u}{u^2+4}du-\int \frac{1}{u^2+4}du \\ =&\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|u^2+4|-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u}{2}\right) \\ =&\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|(x-1)^2+4|-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) \end{aligned}$$

■

11.1 כלל: (שלבים באינטגרציה של שברים אלגבריים)

<u>שלב 1.</u> לחלק במכנה (חילוק פולינומי) במידה ש $\deg(P)\geq\deg(Q)$.

<u>שלב 2.</u> להציב שבר אלגברי אמיתי כסכום של שברים פשוטים.

<u>שלב 3.</u> לבצע אינטגרציה של כל שבר פשוט.

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

חשבו את $I=\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$

פיתרון.

ע"י חילוק ארוך:

$$\frac{x^5+2x+4x+4}{x^4+x^3+2x^2}=x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+4\left(\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}\right)$$

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

$$A(x^2+2x+2)+Bx(x^2+2x+2x)+(Cx+D)x^2=x^3+x^2+x+1$$

$$\begin{aligned} x^3 :&\quad B+C=1 \\ x^2 :&\quad 2A+2B+D=1 \\ x :&\quad 2A+2B=1 \\ x^0 :&\quad 2A=1 \end{aligned}$$

לכן

$$A=\frac{1}{2}\ , \qquad B=0\ , \qquad C=1\ , \qquad D=\frac{1}{2}\ .$$

$$I=\int \left(x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}\right)dx \int \left(x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{(x+1)^2+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+4\int \frac{x+\frac{1}{2}}{(x+1)^2+1}dx\ .$$

נגדיר $u=x+1$:

$$\begin{aligned} I=&\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+4\int \frac{u-\frac{1}{2}}{u^2+1}du \\ =&\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln|u^2+1|-2\arctan(u)+C \\ =&\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln|(x+1)^2+1|-2\arctan(x+1)+C \end{aligned}$$

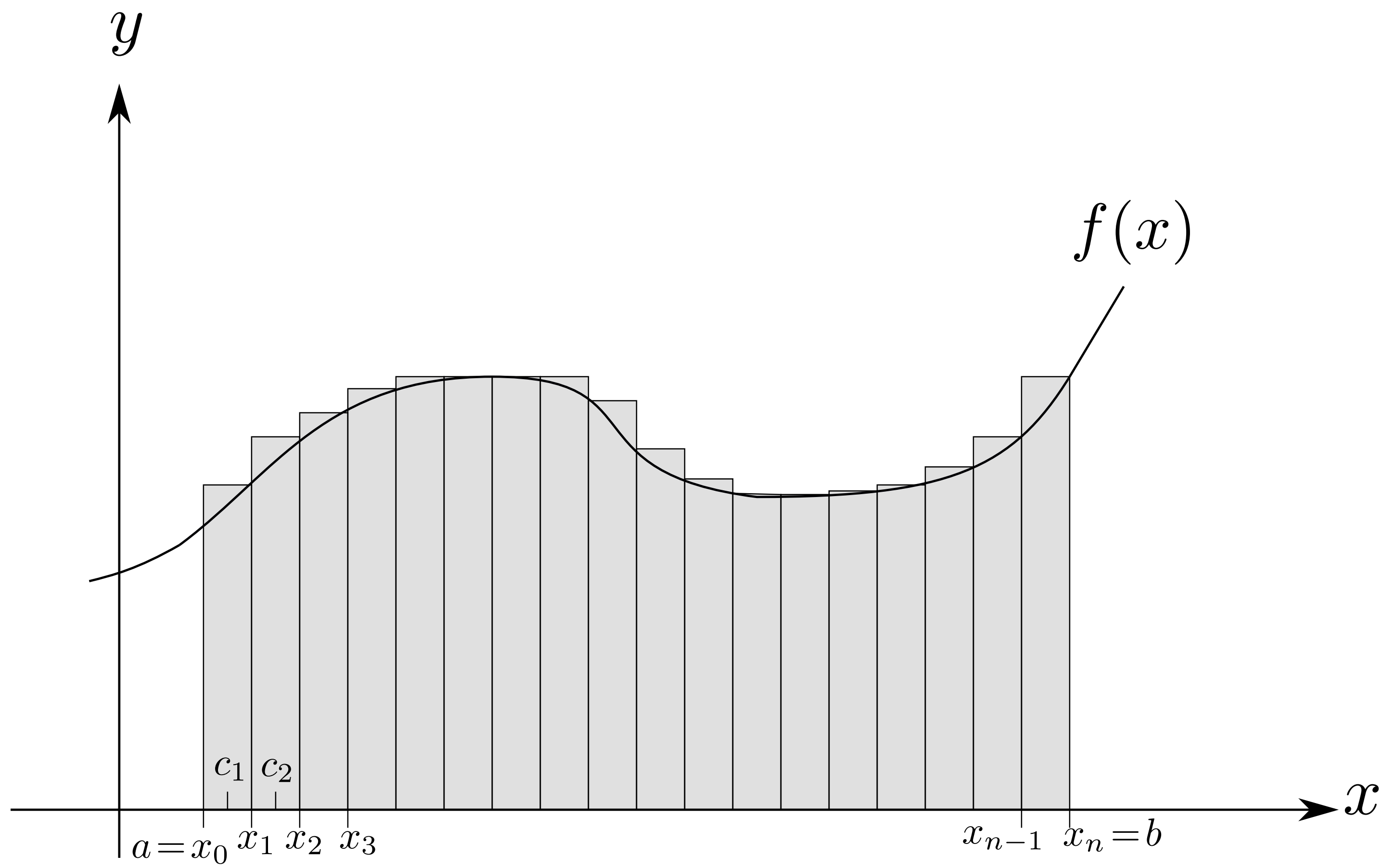
■

אינטגרל מסוים

11.2 הגדרה: (אינטגרל מסוים)

נניח שפונקציה $y=f(x)$ מוגדרת בקטע $[a,b]$. נחלק את הקטע $[a,b]$ לקטעים קטנים על ידי נקודות

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\ .$$



מכל קטע $[x_i, x_{i+1}]$ נבחר נקודה c_i באופן שרירותי. נבנה סכום אינטגרלי:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \ .$$

נסמן $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. נפעיל את הגבול כאשר $\max(\Delta x_i) \to 0$. נקבל

$$\lim_{\max(\Delta x_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \ .$$

האגף הימין הוא האינטגרל המסויים של $f(x)$ בקטע $[a,b]$.

11.3 משפט. (קיום אינטגרל מסוים)

אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ אז האינטגרל מסויים $\int_a^b f(x)\,dx$ קיים.

11.4 משפט. (משמעות הגיאומטרית של אינטגרל מסוים)

אם $f(x) \geq 0$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)\,dx$ שווה לשטח הטרפז העקום החסום ע"י הקווים $y=0$, $y=f(x)$ מלמעלה ו- $x=a$, $x=b$ בצדדים.

11.5 משפט. (נוסחת ניוטון לייבניץ)

אם $\int f(x)dx = F(x) + C$ אז $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

דוגמאות.

1. $\int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - 0 = 9$.
2. $\int_{-2}^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-2}^2 = \frac{1}{2}\left[\arctan(1) - \arctan(-1)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{4}$.
3. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\cdot\ln x}\,dx = [\ln|\ln x|]_e^{e^2} = \left[\ln|\ln e^2 - \ln e|\right] = [\ln|2-1|] = 0$.

11.6 משפט. (תכונות של אינטגרל מסויים)

1. $\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$.
2. $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$.
3. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.
4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ עבור $a<c<b$.
5. $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x)$.

הוכחה.

1.
2.
3.
4.
5.

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

כאשר $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$. לכן

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = (F(x)-F(a))'_x = F'(x) = f(x)\ .$$

■

דוגמא.

עבור אילו ערכי x לגרף הפונקציה
$$f(x)=\int_0^x e^{-(t+2)^2}$$
יש נקודת פיתול?

פיתרון.

$$f'(x)=e^{-(x+2)^2}\ .$$
$$f''(x)=-2(x+2)e^{-(x+2)^2}=0 \qquad \Rightarrow \qquad x=-2\ .$$

■

11.7 דוגמא. (החלפת משתנים באינטגרל מסויים)

חשבו את $\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

פיתרון.
נגדיר
$$u=\ln x\ , \qquad u'=\frac{1}{x}\ , \qquad u(e^2)=2\ , \qquad u(1)=0\ .$$
$$\int_1^{e^2}\frac{\ln^2 x}{x}\,dx=\int_0^2 u^2\,u'dx=\int_0^2 u^2\,du=\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}\ .$$

■

11.8 דוגמא. (החלפת משתנים באינטגרל מסויים)

חשבו את $\displaystyle\int_0^4\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

פיתרון.
נגדיר
$$u=\sqrt{x}\ , \qquad u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2u}\ , \qquad u(4)=2\ , \qquad u(0)=0\ .$$
$$\begin{aligned}\int_0^4\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx&=\int_0^2\frac{1}{1+u}\cdot 2u\cdot\frac{1}{2u}\,dx\\&=\int_0^2\frac{1}{1+u}\cdot 2u\cdot u'\,dx\\&=\int_0^2\frac{2u}{1+u}\,du\\&=\int_0^2\left(2-\frac{2}{1+u}\right)\,du\\&=\left[2u-2\ln|1+u|\right]_0^2\\&=4-2\cdot\ln 3\ .\end{aligned}$$

■

11.9 דוגמא. (החלפת משתנים באינטגרל מסויים)

חשבו את $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\, dx$

פיתרון.
נגדיר

$$u=\sqrt{e^x-1}\ , \qquad u'=\frac{1}{2\sqrt{e^x-1}}\cdot e^x=\frac{u^2+1}{2u}\ , \qquad u(\ln 2)=1\ , \qquad u(0)=0\ .$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx &= \int_0^{\ln 2} u\cdot\frac{u^2+1}{2u}\cdot\frac{2u}{u^2+1}\,dx\\ &= \int_0^{\ln 2} u\cdot\frac{2u}{u^2+1}\cdot u'\,dx\\ &= \int_0^1 u\cdot\frac{2u}{u^2+1}\,du\\ &= \int_0^1 \frac{2u^2}{u^2+1}\,du\\ &= \int_0^1\left(2-\frac{2}{u^2+1}\right)\,du\\ &= \left[2u-2\arctan(u)\right]_0^1\\ &=2-2\cdot\frac{\pi}{4}\ .\end{aligned}$$

■

11.10 דוגמא. (החלפת משתנים באינטגרל מסויים)

חשבו את $\int_{-1}^{2} \sqrt{2-x}\, dx$

פיתרון.
נגדיר

$$u=\sqrt{2-x}\ , \qquad u'=\frac{1}{2\sqrt{2-x}}\cdot(-1)=\frac{-1}{2u}\ , \qquad u(2)=0\ , \qquad u(-1)=\sqrt{3}\ .$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2}\sqrt{2-x}\,dx &= \int_{-1}^{2} u\cdot(-2u)\cdot\frac{-1}{2u}\,dx\\
&= \int_{-1}^{2} u\cdot(-2u)\cdot u'\,dx\\
&= \int_{\sqrt{3}}^{0}(-2u^2)du\\
&= \int_{0}^{\sqrt{3}} 2u^2du\\
&= \left[\frac{2}{3}u^3\right]_0^{\sqrt{3}}\\
&=\frac{2}{3}3^{3/2}\ .
\end{aligned}$$

■

11.11 כלל: (אינטגרציה בחלקים באינטגרל מסויים)

$$\int_a^b u\,d\mathrm{v} = [u\mathrm{v}]_a^b - \int_a^b \mathrm{v}du$$

$$\int_a^b u\,\mathrm{v}'\,dx = [u\mathrm{v}]_a^b - \int_a^b \mathrm{v}u'\,dx$$

11.12 דוגמא. (אינטגרציה בחלקים באינטגרל מסויים)

חשבו את $\int_1^e x\cdot\ln x\,dx$

פיתרון.

נגדיר

$$u=\ln x\ ,\qquad \mathrm{v}'=x\ ,\qquad u'=\frac{1}{x}\ ,\qquad \mathrm{v}=\frac{x^2}{2}\ .$$

$$\begin{aligned}
\int_1^e x\cdot\ln x\,dx &= \left[\ln x\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx\\
&= \left[\ln x\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e\frac{x}{2}\,dx\\
&= \left[\ln x\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e\\
&= \left[\ln e\cdot\frac{e^2}{2}-\ln 1\cdot\frac{1}{2}\right] - \left[\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right]\ ,\\
&=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}\\
&=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}\ .
\end{aligned}$$

■

11.13 דוגמא. (אינטגרציה בחלקים באינטגרל מסויים)

חשבו את $\int_0^\pi x \cdot \sin x \, dx$

פיתרון.
נגדיר

$$u = x \ , \qquad \mathrm{v}' = \sin x \ , \qquad u' = 1 \ , \qquad \mathrm{v} = -\cos x .$$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x \cdot \sin x \, dx &= [-x \cdot \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) \, dx \\ &= [-x \cdot \cos x]_0^\pi + [\sin x]_0^\pi \\ &= [-\pi \cdot \cos \pi + 0 \cdot \cos 0] + \sin \pi - \sin 0 \\ &= \pi \ .\end{aligned}$$

■

11.14 דוגמא.

חשבו את $\int_{-3}^3 e^{-x^2} \sin x \, dx$

פיתרון.

$$\int_{-3}^3 e^{-x^2} \sin x \, dx = 0$$

בגלל ש- $e^{-x^2} \sin x$ פונקציה אי-זוגית והתחום סימטרי ביחס לראשית הצירים. ■

11.15 דוגמא.

עבור אילו ערכי a מתקיים $I = \int_0^2 \min(x, a) \, dx = 1$?

פיתרון.

$\underline{a \leq 0}$:

$$I = \int_0^2 a \, dx = [ax]_0^2 = 2a \neq 1 \ .$$

$\underline{a \geq 2}$:

$$I = \int_0^2 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2 \neq 1 \ .$$

$\underline{1 < a < 2}$:

$$I=\int_0^a x\,dx+\int_a^2 a\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a+[ax]_a^2==\frac{a^2}{2}+2a-a^2=-\frac{a^2}{2}+2a=1\ .$$

$$a^2-4a+2=0$$

$$a=2\pm\sqrt{2}$$

לכן התשובה היא $a=2-\sqrt{2}$. ■

11.16 דוגמא.

חשבו את $I=\int_0^{2\pi}\cos(\max(x,\pi))\,dx$

פיתרון.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos(\max(x,\pi))\,dx&=\int_0^{\pi}\cos(\pi)\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}\cos(x)\,dx\\&=[-x]_0^{\pi}+[\sin x]_{\pi}^{2\pi}\\&=-\pi\ .\end{aligned}$$

■

11.17 דוגמא.

חשבו את $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{2+3\sin x}\,dx$

פיתרון.

נגדיר

$$\begin{aligned}u=2+3\sin x\ ,\qquad u'=3\cos x.\\\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{2+3\sin x}\,dx&=\int_0^{\pi/2}\frac{\frac{u'}{3}}{u}\,dx\\&=\int_2^5 frac13\cdot\frac{1}{u}\,du\\&=\left[\frac{1}{3}\ln u\right]_2^5\\&=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}\ .\end{aligned}$$

■

11.18 דוגמא.

חשבו את $I = \int_0^5 |2x-4|\,dx$

פיתרון.

$$\begin{aligned}\int_0^5 |2x-4|\,dx &= \int_2^5 (2x-4) + \int_0^2 \big(-(2x-4)\big)\,dx\\ &= \int_2^5 (2x-4) + \int_0^2 (4-2x)\,dx\\ &= \left[x^2-4x\right]_2^5 + \left[4x-x^2\right]_0^2\\ &= [25-20-4+8]+[8-4]\\ &= 13\ .\end{aligned}$$

■

11.19 דוגמא.

מצא את ערכו של t ($t>0$) עבורו האינטגרל $I = \int_0^t \left(2-te^{-0.5x}\right)dx$ היא מקסימאלי. חשבו את הערך המקסימאלי.

פיתרון.

$$F(t) = \int_0^t \left(2-te^{-0.5x}\right)dx = \left[2x+2te^{-0.5x}\right]_0^t = 2t+2te^{-0.5t}-2t = 2te^{-0.5t}\ .$$

$$F'(t) = 2e^{-0.5t}\left(1-\frac{t}{2}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t=2\ .$$

עבור $t=2$ ל $F(t)$ יש ערך מקסימלי.

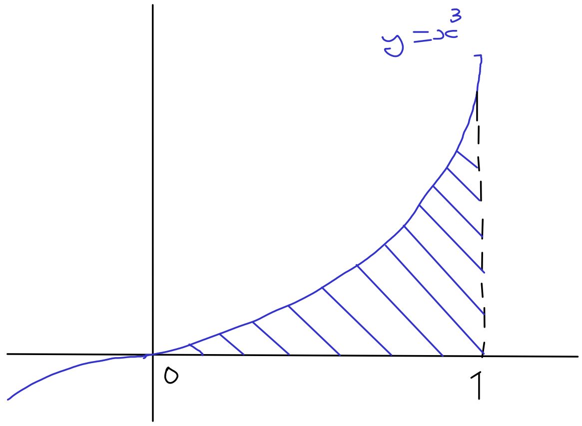
$$F(2) = 2\cdot 2\cdot e^{-0.5\cdot 2} = \frac{4}{e}\ .$$

■

11.20 דוגמא. (חישוב שטח)

מצאו את השטח החסום ע"י גרף הפונקציה $y=x^3$ והישרים $x=1$, $y=0$.

פיתרון.



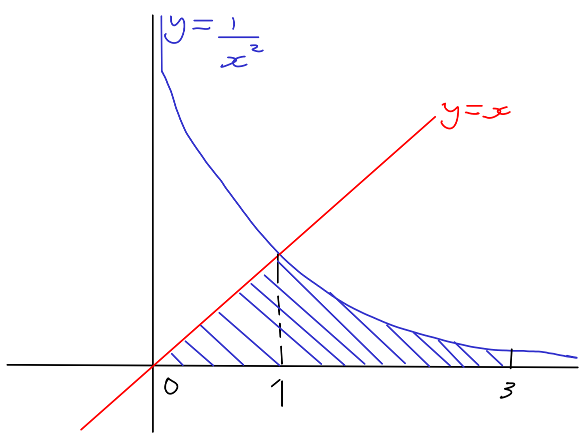
$$S=\int_0^1 x^3\,dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}\ .$$

■

11.21 דוגמא. (חישוב שטח)

מצאו את השטח החסום ע"י $y=\frac{1}{x^2}$, $y=x$, $x=3$, $y=0$.

פיתרון.



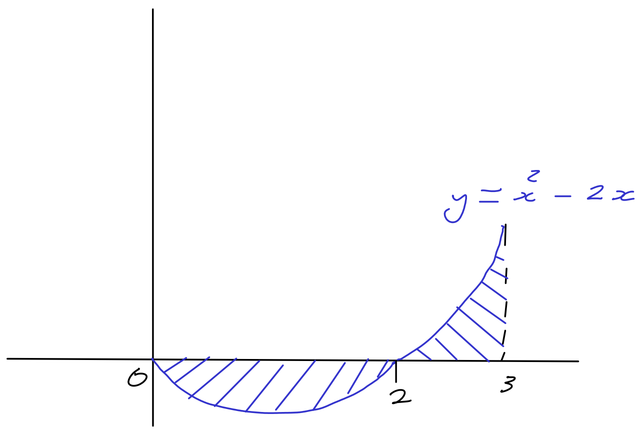
$$S=\int_0^1 x\,dx+\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\left[\frac{1}{x}\right]_1^3=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1=\frac{7}{6}\ .$$

■

11.22 דוגמא. (חישוב שטח)

מצאו את השטח החסום ע"י $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=3$, $x=0$.

פיתרון.



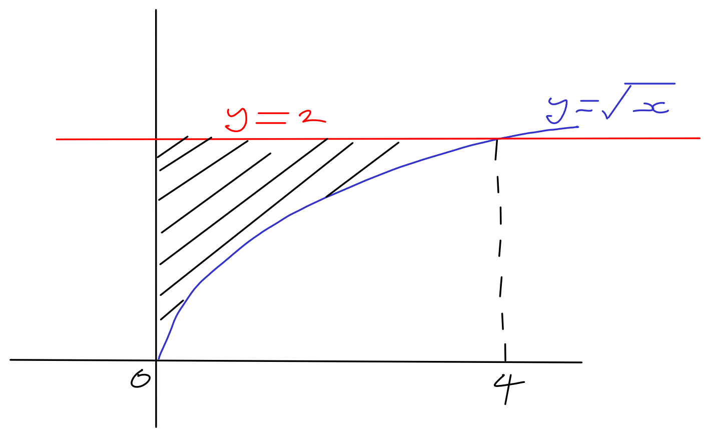
$$\begin{aligned}S&=-\int_0^2\left(x^2-2x\right)\,dx+\int_2^3\left(x^2-2x\right)\,dx\\&=-\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3\\&=-\left[\frac{2^3}{3}-2^2\right]+\left[\frac{3^3}{3}-3^2-\frac{2^3}{3}+2^2\right]\\&=-\frac{8}{3}+4+9-9-\frac{8}{3}+4\\&=\frac{8}{3}\ .\end{aligned}$$

■

11.23 דוגמא. (חישוב שטח)

מצאו את השטח החסום ע"י $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $y=2$.

פיתרון.



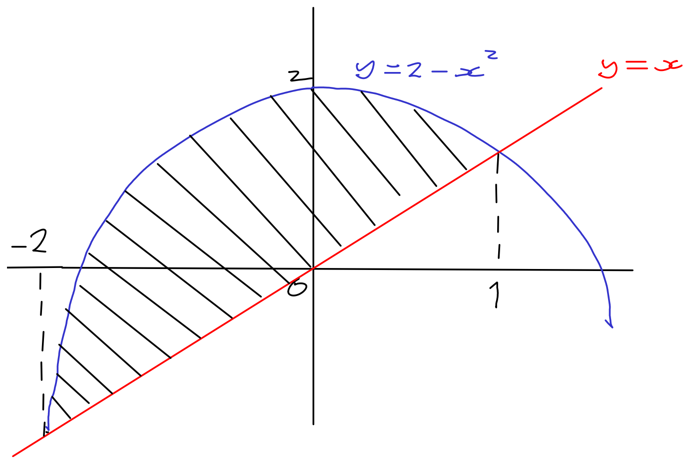
$$
\begin{aligned}
S =& \int_0^4 2\,dx - \int_0^4 \sqrt{x}\,dx \\
=& [2x]_0^4 - \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 \\
=& 8 - \frac{2}{3}\cdot 4^{3/2} \\
=& \frac{8}{3}\ .
\end{aligned}
$$

■

11.24 דוגמא. (חישוב שטח)

מצאו את השטח החסום ע"י $y = x$, $y = 2 - x^2$.

פיתרון.



$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\, dx \\
&= \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} \\
&= \left[2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right] - \left[-4 + \frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right] \\
&= \frac{9}{2} \ .
\end{aligned}
$$

■

11.25 דוגמא. (חישוב שטח)

מצאו את השטח החסום ע"י $y = x^2 - 2x + 2$, המשיק לפרבולה הזאת בנקודה $(3,5)$ וציר ה- y.

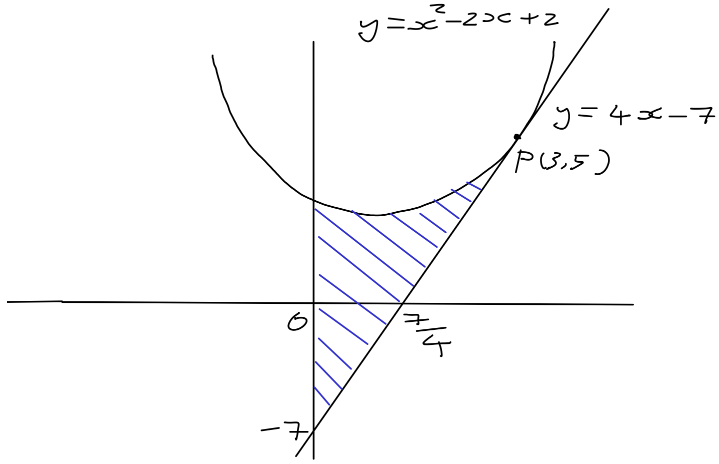
פיתרון.

נמצא את משוואת המשיק:

$$
\begin{aligned}
y' &= 2x - 2 \\
y'(3) &= 4
\end{aligned}
$$

משוואת המשיק:

$$
y - 5 = 4(x - 3) \qquad \Rightarrow \qquad y = 4x - 7 \ .
$$



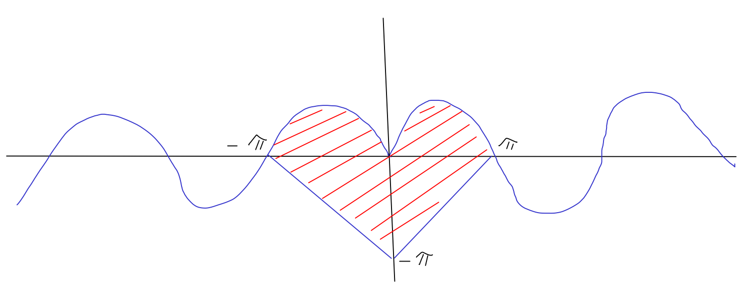
$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^3 \left((x^2-2x+2) - (4x-7) \right)\, dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right]_0^3 - \left[2x^2 - 7x \right]_0^3\, dx \\
&= \left[\frac{3^3}{3} - 3^2 + 6 \right] - [18-21] \\
&= 9 \ .
\end{aligned}
$$

■

11.26 דוגמא. (חישוב שטח)

מצאו את השטח החסום ע"י $y=\sin|x|$, $y=|x|-\pi$.

פיתרון.



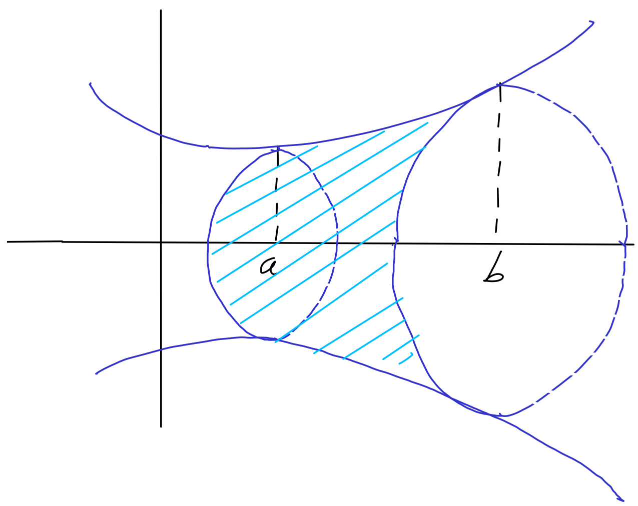
$$
\begin{aligned}
S =&2\int_0^{\pi} \left(\sin x - (x-\pi)\right)\, dx\\
=&2\left[-\cos x - \frac{x^2}{2} + \pi x\right]_0^{\pi}\\
=&2\left[1-\frac{\pi^2}{2}+\pi^2\right] 0 - 2\left[-1\right]\\
=&4+\pi^2\ .
\end{aligned}
$$

■

11.27 משפט. (חישוב נפח גוף סיבוב סביב ציר ה- x)

בהינתן גרף של פונקציה $y=f(x)$ בקטע $[a,b]$. הנפח של גוף סיבוב סביב ציר ה- x הוא

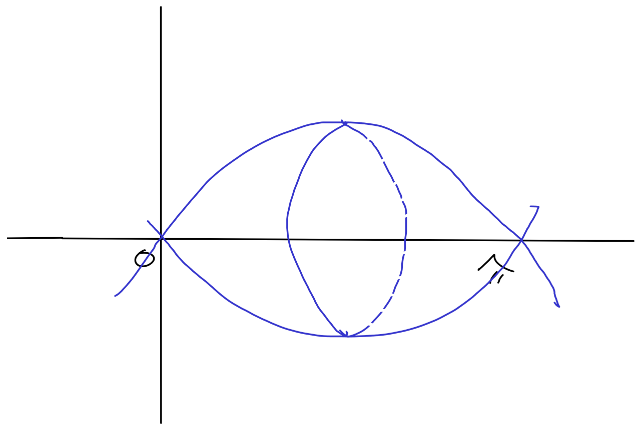
$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\, dx\ .$$



11.28 דוגמא. (חישוב נפח)

מצאו את נפח גוף הסיבוב סביב ציר ה- x של התחום המישורי החסום ע"י $y=\sin x$ בתחום $0\leq x\leq \pi$.

פיתרון.



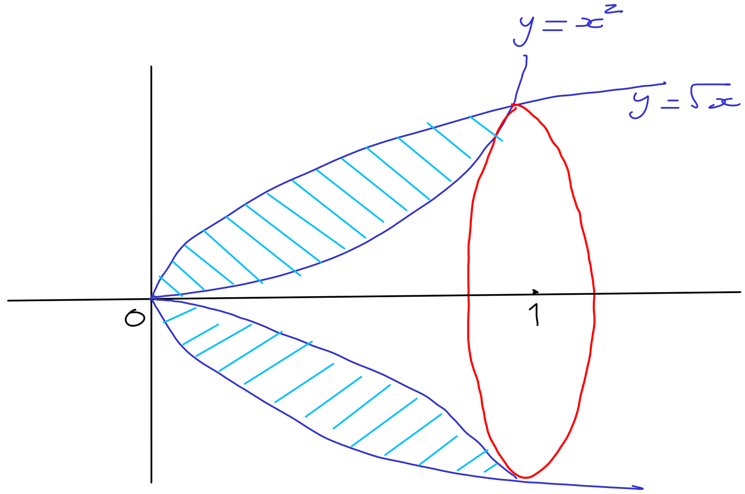
$$\begin{aligned} V =& \pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx \\ =& \pi \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx \\ =& \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^\pi \\ =& \frac{\pi^2}{2} \ . \end{aligned}$$

■

11.29 דוגמא. (חישוב נפח)

מצאו את נפח גוף הסיבוב סביב ציר ה- x של התחום החסום ע"י $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

פיתרון.



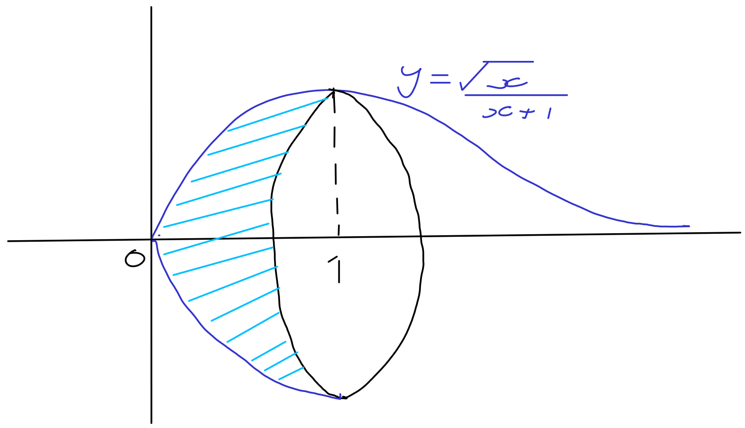
$$
\begin{aligned}
V =&\pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2\, dx - \pi \int_0^1 x^4\, dx \\
=&\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 \\
=&\pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right] \\
=&\frac{3\pi}{10}\ .
\end{aligned}
$$

■

11.30 דוגמא. (חישוב נפח)

חשבו את נפח גוף הסיבוב סביב ציר ה- x של התחום החסום ע"י $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ בתחום $0 \le x \le 1$.

פיתרון.



$$V=\pi\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2}\,dx\ .$$

$$\frac{x}{(x+1)^2}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}=\frac{A+B(x+1)}{(x+1)^2}\ .$$

$$\begin{aligned} x:&\quad B=1\\ x^0:&\quad A+B=0\ \Rightarrow\ A=-1. \end{aligned}$$

$$V=\pi\int_0^1\left(-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}\right)\,dx=\pi\left[\frac{1}{x+1}+\ln|x+1|\right]_0^1=\pi\left[\frac{1}{2}+\ln|2|-1\right]=\pi\left(\ln|2|-\frac{1}{2}\right)\ .$$

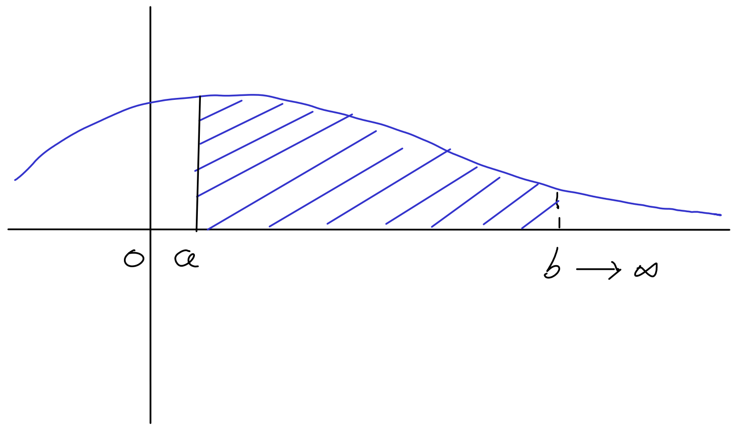
■

אינטגרל לא אמיתי

11.31 הגדרה: (אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון)

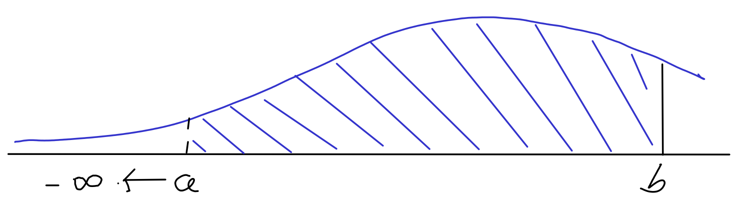
.1 נניח שפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע (a,∞). אז

$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$



2. נניח שפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $(-\infty, b)$. אז

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$



3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

לכל $-\infty < c < \infty$.

אם התשובה של האינטגרל הלא אמיתי היא מספר סופי אז אומרים שהאינטגרל מתכנס, אחרת אומרים שהאינטגרל מתבדר.

דוגמא. (אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון)

חשבו את $I = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$.

פיתרון.

$$I = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \ln|b| - \ln|1| = \infty \ .$$

האינטגרל מתבדר. ■

דוגמא. **(אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון)**

חשבו את $I = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$.

פיתרון.

$$I = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-1}{b} + 1\right] = 1 \ .$$

האינטגרל מתכנס. ■

דוגמא. **(אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון)**

חשבו את $I = \int_{-\infty}^0 \cos x\, dx$.

פיתרון.

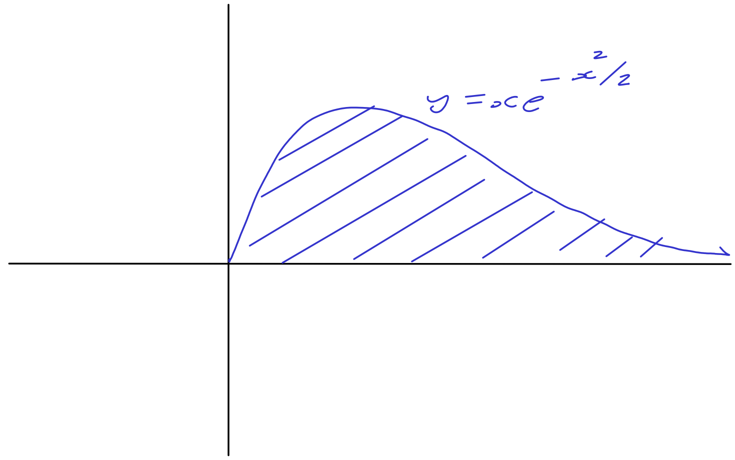
$$I = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \cos x\, dx = \lim_{a\to-\infty} [\sin 0 - \sin a] = \lim_{a\to-\infty} \sin(a)$$

לא קיים. האינטגרל לא מתכנס. ■

דוגמא. **(אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון)**

חשבו את השטח החסום ע"י $f(x) = xe^{-x^2/2}$, $y = 0$ $x \geq 0$.

פיתרון.



$$S = \lim_{b\to\infty} \int_0^b xe^{-x/2} \ .$$

נגדיר

$$u = \frac{x^2}{2} \ , \qquad u' = x \ .$$

כך

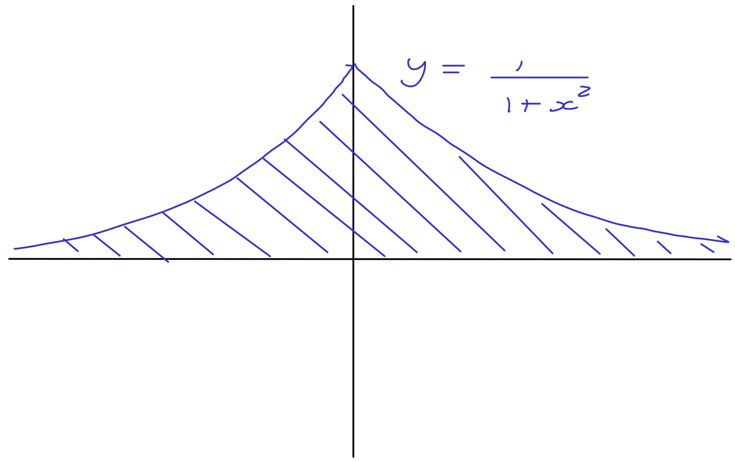
$$\begin{aligned} S =& \lim_{b\to\infty} \int_0^b u' e^{-u}\, dx \\ =& \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-u}\, du \\ =& \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-b} + 1\right] \\ =& 1 \ . \end{aligned}$$

האינטגרל מתבדר. ■

דוגמא. (אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון)

חשבו את השטח החסום ע"י $y = \dfrac{1}{x^2+1}$, $y = 0$ $x \geq 0$.

פיתרון.



$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^1+1}\, dx \\
&= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^1+1}\, dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^1+1}\, dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{x^1+1}\, dx + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{x^1+1}\, dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} \left[\arctan 0 - \arctan a\right] + \lim_{b\to\infty} \left[\arctan b - \arctan 0\right] \\
&= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 \\
&= \pi \ .
\end{aligned}
$$

■

11.32 משפט. (מבחן השוואה הראשון)

נניח שפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפות בקטע $[a,\infty)$ ולכל x השייך לקטע מתקיים

$$0 \le f(x) \le g(x) \ .$$

אז

1. אם $\int_a^{\infty} g(x)\, dx$ מתכנס אז גם $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ מתכנס.

2. אם $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ מתבדר אז גם $\int_a^{\infty} g(x)\, dx$ מתבדר.

דוגמא. (מבחן השוואה הראשון)

האם מתכנס האינטגרל $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(1+3^x)}\, dx$

פיתרון.

נגדיר $f(x)=\dfrac{1}{x^2(1+3^x)}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$. לכל $x\geq 1$ מתקיים $f(x)\leq g(x)$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=1$$

מתכנס, לכן גם

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2(1+3^x)}dx$$

מתכנס. ■

11.33 משפט. (מבחן השוואה השני)

נניח שפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפות בקטע $[a,\infty)$, $f(x)>0$, $g(x)>0$, וגם

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$$

כאשר $0<k<\infty$. אז $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ו- $\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתכנסים או מתבדרים בו זמנים.

דוגמא. (מבחן השוואה השני)

האם האינטגרל $\int_1^\infty \ln\left(\dfrac{x^1+1}{x^2}\right)\,dx$ מתכנס?

פיתרון.

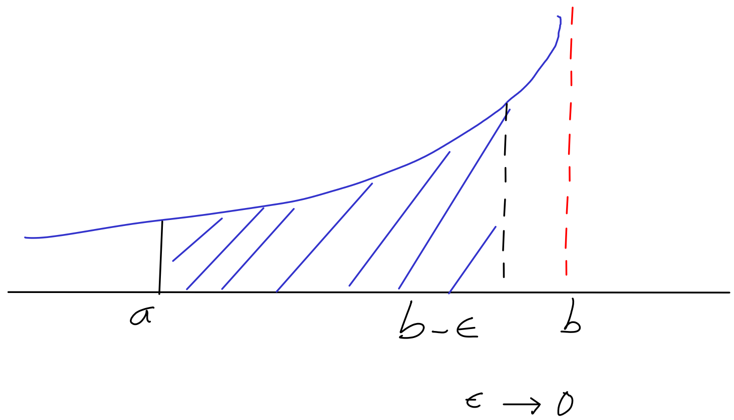
נגדיר $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^1+1}{x^2}\right)$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$. אז

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x^1+1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}=\ln e=1<\infty$$

$\int_1^\infty g(x)\,dx$ מתכנס, אז גם $\int_1^\infty f(x)\,dx$ מתכנס. ■

11.34 הגדרה: (אינטגרל לא אמיתי מסוג שני)

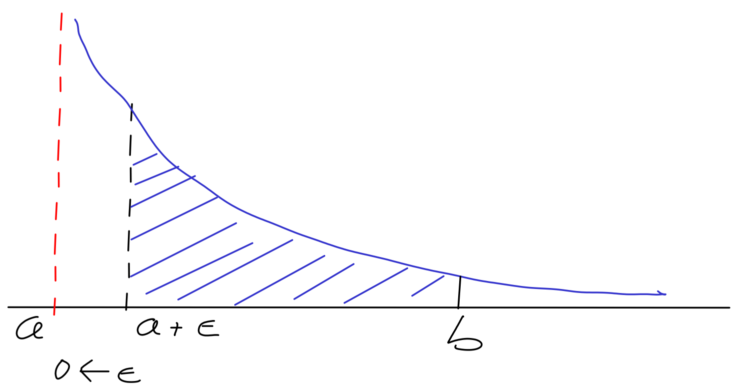
מצב 1. פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ ו- $\lim_{x\to b^-}f(x)=\infty$



אז

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx \ .$$

מצב 2. פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ ו- $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$



אז

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx \ .$$

אם התשובה של האינטגרל הלא אמיתי היא מספר סופי אז אומרים שהאינטגרל מתכנס, אחרת אומרים שהאינטגרל מתבדר.

דוגמא. (אינטגרל לא אמיתי מסוג שני)

חשבו את האינטגרל $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$

פיתרון.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{1}{\epsilon}-1\right] \\ &=\infty \end{aligned}$$

■

דוגמא. (אינטגרל לא אמיתי מסוג שני)

חשבו את האינטגרל $I=\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

פיתרון.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{3-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^{3-\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\arcsin\left(\frac{3-\epsilon}{3}\right)-\arcsin 0\right] \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\arcsin\left(\frac{3-\epsilon}{3}\right) \\ &=\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

■

דוגמא. (הערכת סכומים)

הוכח שלכל n טבעי מתקיים

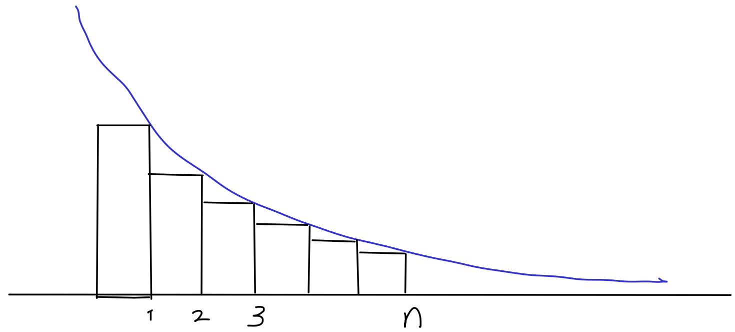
$$\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}<2\ .$$

פיתרון.

נגדיר

$$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

פונקציה יורדת.



$$f(2) + f(3) + \ldots + f(n) < \int_1^n f(x)\,dx = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^n = -\frac{2}{\sqrt{n}} + 2 < 2 \ .$$

■

דוגמא. (הערכת סכומים)

הוכח שלכל n טבעי מתקיים

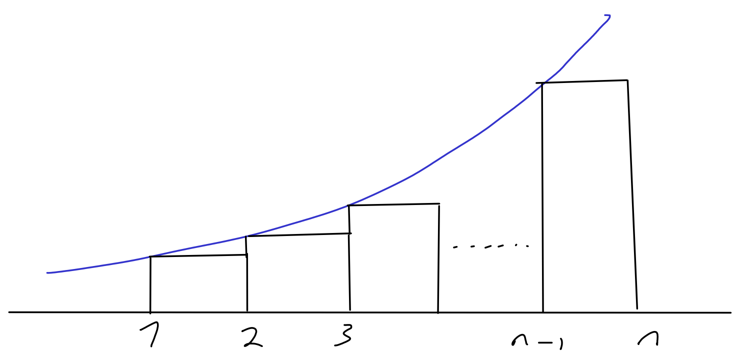
$$\frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 < \frac{n^3}{3} + n^2 \ .$$

פיתרון.

נגדיר

$$f(x) = x^2$$

פונקציה עולה.



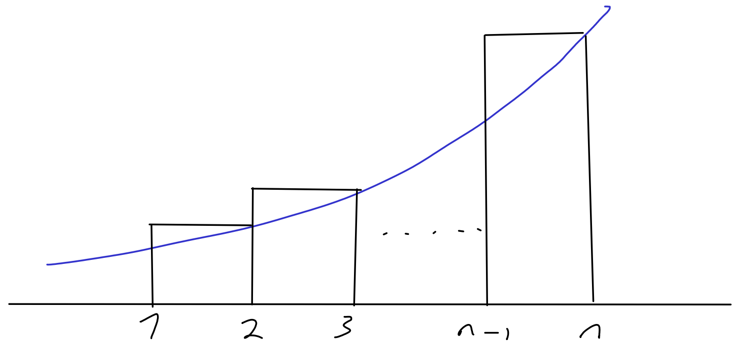
$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) < \int_1^n f(x)\,dx \ .$$

לכן

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 < \int_1^n x^2 dx = \frac{n^3}{3} - \frac{1}{3}$$

נוסיף n^2 לשני הצדדים:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 < \frac{n^3}{3} - \frac{1}{3} + n^2 < \frac{n^3}{3} + n^2 \qquad (1*)$$



$$f(2)+\ldots+f(n)>\int_1^n f(x)\,dx\ .$$

לכן

$$2^2+3^2\ldots+n^2>\frac{n^3}{3}-\frac{1}{3}$$

נוסיף 1 לשני הצדדים:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2>\frac{n^3}{3}-\frac{1}{3}+1=\frac{n^3}{3}+\frac{2}{3}>\frac{n^3}{3}\ . \qquad (2*)$$

■

שיעור 12
אינטגרציה של פונקציוצת טריגונומטריות ואי רציאונליות

הצבה אוניברסלית

בהינתן אינטגרל מצורה

$$\int f(\sin x, \cos x)\, dx$$

כאשר f פונקציה רציונלית, לדוגמה

$$\int \frac{2\sin x + 3\cos x + 2}{4\cos^2 x + 3}\, dx$$

קיימת הצבה אוניברסלית:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$\Leftarrow$

$$t' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(1 + t^2)\ .$$

ניתו לבטא הפונקציות הטריגונומטריות באמצעות t כפי רשום בטבלה:

$\sin x$	$\frac{2t}{1+t^2}$
$\cos x$	$\frac{1-t^2}{1+t^2}$
$\tan x$	$\frac{2t}{1-t^2}$
t'	$\frac{1}{2}(1+t^2)$

הוכחה של הזהויות (לא צריך לדעת אבל כיף לקרוא)

$$\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)} = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)=\frac{\left(1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}=\frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

12.1 דוגמא. ()

חשבו את: $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$

פיתרון.

$t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$

$t'=\frac{1+t^2}{2}$

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\cdot t'dx&=\int\frac{2}{(1+t^2)\cdot\frac{2t}{1+t^2}}\,dt\\&=\int\frac{1}{t}\,dt\\&=\ln|t|+C=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\end{aligned}$$

■

12.2 דוגמא. ()

חשבו את: $\int\frac{1}{3+\sin x+\cos x}\,dx$

פיתרון.

$t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$t'=\frac{1+t^2}{2}$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{(1+t^2)} \cdot t' dx &= \int \frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{(1+t^2)} dt \\
&= \int \frac{2}{3+3t^2+2t+1-t^2} dt \\
&= \int \frac{2}{4+2t^2+2t} dt \\
&= \int \frac{1}{2+t^2+t} dt \\
&= \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} dt \\
&= \int \frac{1}{z^2+\frac{7}{4}} dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2z}{\sqrt{7}}\right)+C \\
&= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{7}}\right)+C \\
&= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{7}}\right)+C \\
&= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{7}}\right)+C \ .
\end{aligned}
$$

■

12.3 דוגמא. ()

חשבו את: $\int \frac{1}{4\sin x - 3\cos x - 5}\, dx$

פיתרון.

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$t' = \frac{1+t^2}{2}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{4\sin x - 3\cos x - 5}\,dx &= \int \left(\frac{1}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2} - 3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} - 5}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,t'\,dx \\
&= \int \left(\frac{2}{8t - 3(1-t^2) - 5(1+t^2)}\right)dt \\
&= \int \left(\frac{2}{8t - 3 + 3t^2 - 5 - 5t^2}\right)dt \\
&= \int \left(\frac{2}{8t - 8 - 2t^2}\right)dt \\
&= \int \left(\frac{-1}{t^2 - 4t + 4}\right)dt \\
&= \int \left(\frac{-1}{(t-2)^2}\right)dt \\
&= \frac{1}{t-2} + C \\
&= \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 2} + C
\end{aligned}$$

■

אינטגרציה של $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$

1) אם $n \in \mathbb{N}$ מספר אי זוגי, מגדירים $t = \sin x$.

2) אם $m \in \mathbb{N}$ מספר אי זוגי, מגדירים $t = \cos x$.

3) אם $n, m \geq 0 \in \mathbb{N}$ זוגיים, משתמשים בזהויות טריגונומטריות:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\ , \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\ , \qquad \sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2}\ .$$

12.4 דוגמא. ()

חשבו את: $\int \cos^3 x\,dx$

פיתרון.

$$\begin{aligned}
\int \cos^3 x dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x\,dx \\
&= \int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx
\end{aligned}$$

$t' = \cos x \;\; t = \sin x$

$$\begin{aligned}\int (1-t^2)t'\,dx &= \int (1-t^2)\,dt \\ &= t - \frac{t^3}{3} + C \\ &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C\end{aligned}$$

■

12.5 דוגמא. ()

חשבו את: $\int \cos^2 x \sin^3 x\,dx$

פיתרון.

$t = \cos x$

$t' = -\sin x$

$$\begin{aligned}\int (1-t^2)t^3\,dx &= -\int (1-t^2)t^2 \cdot t'\,dx \\ &= -\int (1-t^2)t^2\,dt \\ &= -\int (t^2 - t^4)\,dt \\ &= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C \\ &= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C\ .\end{aligned}$$

■

12.6 דוגמא. ()

חשבו את: $\int \sin^2 x\,dx$

פיתרון.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx &= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C\end{aligned}$$

■

12.7 דוגמא. ()

חשבו את: $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

פיתרון.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \int (\sin x \cos x)^2 \, dx \\ &= \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \, dx \\ &= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C\end{aligned}$$

■

אינטגרציה של פונקציות אי-רציונליות (חיסול שורשים)

בהינתן אינטגרל מצורה

$$\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \ , \qquad \int f(x, \sqrt{a^2 + x^2}) \ , \qquad \int f(x, \sqrt{x^2 - a^2})$$

כאשר f פונקציה רציונלית, קיימת הצבה אוניברסלית:

מקרה 1) $\sqrt{a^2 - x^2}$

$x = a \cdot \sin t$

מקרה 2) $\sqrt{a^2 + x^2}$

$x = a \cdot \tan t$

מקרה 3) $\sqrt{x^2 - a^2}$

$x = \dfrac{a}{\sin t}$

12.8 דוגמא. ()

חשבו את: $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2} \, dx$

פיתרון.

$x = 2\sin t$

$x'_t = 2\cos t$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx &= \int \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t}dx \\
&= \int \frac{2\sqrt{1-\sin^2 t}}{4\sin^2 t}dx \\
&= \int \frac{2\cos t}{4\sin^2 t}dx \\
&= \int \frac{2\cos t}{4\sin^2 t}\cdot\left(\frac{2\cos t}{x'_t}\right)dx \\
&= \int \frac{4\cos^2 t}{4\sin^2 t}dt \\
&= \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt \\
&= \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt \\
&= \int \left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt \\
&= (\cot t - t) + C \\
&= \cot\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C\ .
\end{aligned}$$

■

12.9 דוגמא. ()

חשבו את: $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}\,dx$

פיתרון.

$x = \frac{1}{\sin t}$

$x'_t = \frac{\cos t}{\sin^2 t}$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}dx &= \int \frac{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}}{\frac{1}{\sin^3 t}}dx \\
&= \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}\sin^3 t}{\sin t}dx \\
&= \int \cos t \sin^2 t dx \\
&= \int \cos t \sin^2 t \cdot \left(\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)\frac{1}{x'_t}\, dx \\
&= \int \cos^2 t\, dt \\
&= \int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\, dt \\
&= \frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+C \\
&= \frac{\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}{2}+\frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{2}+C \ .
\end{aligned}
$$

■

12.10 דוגמא. ()

חשבו את: $\int x\sqrt{x^2+9}\, dx$

פיתרון.

$$x = 3\tan t \ , \qquad x'_t = \frac{3}{\cos^2 t}$$

$$\int 3\tan t\cdot\sqrt{9\tan^2 t+9}\, dx = \int 3\tan t\cdot 3\sqrt{\tan^2 t+1}\, dx$$

$\tan^2 t + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 t}$:זהות

$$
\begin{aligned}
9\int \tan t\cdot\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}\,dx =& 9\int \tan t\cdot\frac{1}{\cos t}\,dx\\
=& 9\int \tan t\cdot\frac{1}{\cos t}\cdot x'_t\cdot\frac{1}{x'_t}\,dx = \quad 9\int \tan t\cdot\frac{1}{\cos t}\cdot x'_t\,dt\\
=& 9\int \tan t\cdot\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{3}{\cos^2 t}\,dt\\
=& 27\int \tan t\cdot\frac{1}{\cos^3 t}\,dt\\
=& 27\int \frac{\sin t}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos^3 t}\,dt\\
=& 27\int \frac{\sin t}{\cos^4 t}\,dt
\end{aligned}
$$

$$z = \cos t \qquad z'_t = -\sin t$$

$$
\begin{aligned}
27\int \frac{\sin t}{\cos^4 t}\,dt =& 27\int \frac{z'}{z^4}\,dt\\
=& 27\int \frac{1}{z^4}\,dz\\
=& 27\cdot\frac{-1}{3z^3} + C\\
=& \frac{81}{3\cos^3 t} + C\\
=& \frac{81}{3\cos^3\left(\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right)} + C
\end{aligned}
$$

■

שיעור 13
אינטגרציה של פונקציות רציונליות

13.1 הגדרה: (פונקציה רציונלית)

פונקציה רציונלית (שבר אלגברי) זאת פונקציה מהצורה

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} ,$$

כאשר $P(x)$, $Q(x)$ פולינומים.

דוגמא. (פונקציה רציונלית)

$f(x) = \frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2}$ פונקציה רציונלית: $P(x) = x^4 - 5x + 9$ $Q(x) = x - 2$.

13.2 הגדרה: (פונקציה רציונלית אמיתי)

שבר אלגברי

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

נקרא אמיתי אם

$$\deg(P) < \deg(Q) .$$

אם שבר אלגברי לא אמיתי, יש לעשות חילוק פולינומים.

דוגמא. (חילוק פולינומים)

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} .$$

פיתרון.
שלב ראשון בחישוב אינטגרל של שבר אלגברי לא אמיתי, להגיע לשבר אלגברי אמיתי ע"י חילוק פולינומים. ע"י חילוק ארוך:

שלב 1:

$$x-2 \overline{\big) \; x^4 \quad -5x+9}$$

שלב 2:

$$\begin{array}{r|lllll} & & x^3 & & & \\ \cline{2-6} x-2 & x^4 & & & -5x & +9 \\ & x^4 & -2x^3 & & & \\ \cline{2-6} & & 2x^3 & & -5x & +9 \end{array}$$

שלב 3:

$$\begin{array}{r|lllll} & & x^3 & +2x^2 & & \\ \cline{2-6} x-2 & x^4 & & & -5x & +9 \\ & x^4 & -2x^3 & & & \\ \cline{2-6} & & 2x^3 & & -5x & +9 \end{array}$$

שלב 4:

$$\begin{array}{r|lllll} & & x^3 & +2x^2 & & \\ \cline{2-6} x-2 & x^4 & & & -5x & +9 \\ & x^4 & -2x^3 & & & \\ \cline{2-6} & & 2x^3 & & -5x & +9 \\ & & 2x^3 & -4x^2 & & \\ \cline{2-6} & & & 4x^2 & -5x & +9 \end{array}$$

שלב 5:

$$\begin{array}{r|lllll} & & x^3 & +2x^2 & +4x & \\ \cline{2-6} x-2 & x^4 & & & -5x & +9 \\ & x^4 & -2x^3 & & & \\ \cline{2-6} & & 2x^3 & & -5x & +9 \\ & & 2x^3 & -10x^2 & & \\ \cline{2-6} & & & 4x^2 & -5x & +9 \\ & & & 4x^2 & -8x & \\ \cline{2-6} & & & & 3x & +9 \end{array}$$

שלב 6:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & & x^3 & +2x^2 & +4x & +\ 3 \\ \cline{2-6}
x-2 & x^4 & & & -5x & +\ 9 \\
 & x^4 & -2x^3 & & & \\ \cline{2-6}
 & & 2x^3 & & -5x & +\ 9 \\
 & & 2x^3 & -10x^2 & & \\ \cline{2-6}
 & & & 4x^2 & -5x & +\ 9 \\
 & & & 4x^2 & -8x & \\ \cline{2-6}
 & & & & 3x & +\ 9 \\
 & & & & 3x & -\ 6 \\ \cline{2-6}
 & & & & & 15
\end{array}
$$

תשובה סופית:

$$\frac{x^4-5x+9}{x-2}=x^3+2x^2+4x+3+\frac{15}{x-2}$$

לכן

$$\int\frac{x^4-5x+9}{x-2}=\int\left(x^3+2x^2+4x+3+\frac{15}{x-2}\right)=\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+2x^2+3x+15\ln|x-2|+C\ .$$

ז"א שלב ראשון בחישוב אינטגרל של שבר אלגברי:

ע"י חילוק ארוך פולינומים להגיע לשבר אלגברי אמיתי. כל שבר אלגברי אמיתי ניתן להציג כסכום של שברים פשוטים. ■

יש 4 סוגים של שברים אלגבריים פשוטים:

שבר אלגברי			שבר פשוט
סוג 1:	$\dfrac{m}{x-a}$		
סוג 2:	$\dfrac{m}{(x-a)^2}$		
	$\dfrac{m}{(x-a)^n}$	$n \in \mathbb{N}\ , \quad n \geq 2$	
סוג 3:	$\dfrac{mx+n}{x^2+px+q}$		כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.
סוג 4:	$\dfrac{mx+b}{(x^2+px+q)^2}$		כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.
	$\dfrac{mx+b}{(x^2+px+q)^n}$	$n \in \mathbb{N}\ , \quad n \geq 2$	כאשר ל- x^2+px+q אין שורשים.

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

חשבו את $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-3x+1}$

פיתרון.

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+1} = \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$
$$A(x-2)+B(x-1) = 2x+1$$

$$x=2 \quad \Rightarrow \quad B=5$$
$$x=1 \quad \Rightarrow \quad A=-3$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+1}\,dx = \int \left(\frac{-3}{x-1} + \frac{5}{x-2}\right) dx = -3\ln|x-1| + 5\ln|x-2| + C \ .$$

■

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

חשבו את $\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2}$

פיתרון.

$$\frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x-3} \ .$$
$$A(x-3)^2 + B(x-2) + C(x-3)(x-2) = x^2+4$$

$$\begin{array}{lll} x=3 & \Rightarrow & B=13 \\ x=2 & \Rightarrow & A=8 \\ x=0 & \Rightarrow & 9A-2B+6C=4 \Rightarrow C=-7 \end{array}$$

$$\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2}\,dx = \int \left(\frac{8}{x-2} + \frac{13}{(x-3)^2} - \frac{7}{x-3}\right) dx = 8\ln|x-2| - \frac{13}{x-3} - 7\ln|x-3| + C \ .$$

■

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

חשבו את $\int \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}$

פיתרון.

$$\frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \ .$$
$$A(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1) + (Cx+D)x^2 = x^3+1$$

$$\begin{array}{ll} x^3: & B+C=1 \\ x^2: & A+D=0 \\ x: & B=0 \\ x^0: & A=1 \end{array}$$

לכן

$$D = -1\ , \qquad C = 1\ .$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}\right) dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \arctan(x) + C\ .$$

■

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

חשבו את $I = \int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}$

פיתרון.

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5}\ .$$

$$A(x^2-2x+5) + (Bx+C)(x-1) = 2x^2-3x-3$$

$$\begin{array}{ll} x^2: & A+B=2 \\ x: & -2A+C-B=-3 \\ x^0: & 5A-C=-3 \end{array}$$

לכן

$$A = -1\ , \qquad B = 3\ , \qquad C = -2\ .$$

$$I = \int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx = \int \left(-\frac{1}{x-1} + \frac{3x-2}{x^2-2x+5}\right) dx = -\ln|x-1| + \int \left(\frac{3x-2}{(x-1)^2+4}\right) dx\ .$$

נגדיר $u = x-1$:

$$\begin{aligned} I &= \ln|x-1| + \int \frac{3(u+1)-2}{u^2+4}du \\ &= \ln|x-1| + \int \frac{3(u+1)-2}{u^2+4}du \\ &= \ln|x-1| + 3\int \frac{u}{u^2+4}du - \int \frac{1}{u^2+4}du \\ &= \ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|u^2+4| - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u}{2}\right) \\ &= \ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|(x-1)^2+4| - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) \end{aligned}$$

■

13.1 כלל: (שלבים באינטגרציה של שברים אלגבריים)

<u>שלב 1.</u> לחלק במכנה (חילוק פולינומי) במידה ש $\deg(P) \geq \deg(Q)$.
<u>שלב 2.</u> להציב שבר אלגברי אמיתי כסכום של שברים פשוטים.
<u>שלב 3.</u> לבצע אינטגרציה של כל שבר פשוט.

דוגמא. (אינטגרל של פונקציה רציונלית)

חשבו את $I = \displaystyle\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$

פיתרון.

שלב 1:

$$x^4+2x^3+2x^2\overline{\big)x^5 \quad +2x^3 \quad +4x+4}$$

שלב 2:

$$\begin{array}{rl}
 & x \\
x^4+2x^3+2x^2 & \overline{\big)x^5 \qquad\quad +2x^3 \quad +4x+4} \\
 & \underline{x^5+2x^4+2x^3 \qquad\qquad\quad} \\
 & -2x^4 \qquad\qquad\quad +4x+4
\end{array}$$

שלב 3:

$$\begin{array}{rl}
 & x-2 \\
x^4+2x^3+2x^2 & \overline{\big)x^5 \qquad\quad +2x^3 \qquad\quad +4x+4} \\
 & \underline{x^5+2x^4+2x^3 \qquad\qquad\qquad\quad} \\
 & -2x^4 \qquad\qquad\qquad\quad +4x+4 \\
 & \underline{-2x^4-4x^3-4x^2 \qquad\qquad\quad} \\
 & 4x^3+4x^2+4x+4
\end{array}$$

לכן ע"י חילוק ארוך קיבלנו

$$\frac{x^5+2x+4x+4}{x^4+x^3+2x^2} = x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} = x-2+4\left(\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}\right)$$

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2} = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

$$A(x^2+2x+2)+Bx(x^2+2x+2x)+(Cx+D)x^2 = x^3+x^2+x+1$$

$$\begin{aligned}
x^3 :&\quad B+C=1\\
x^2 :&\quad 2A+2B+D=1\\
x :&\quad 2A+2B=1\\
x^0 :&\quad 2A=1
\end{aligned}$$

לכן

$$A=\frac{1}{2}\ , \qquad B=0\ , \qquad C=1\ , \qquad D=\frac{1}{2}\ .$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \left(x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}\right) dx\\
&= \int \left(x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{(x+1)^2+1}\right) dx\\
&= \frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+4\int \frac{x+\frac{1}{2}}{(x+1)^2+1} dx\ .
\end{aligned}$$

נגדיר $u=x+1$:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+4\int \frac{u-\frac{1}{2}}{u^2+1} du\\
&= \frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln|u^2+1|-2\arctan(u)+C\\
&= \frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln|(x+1)^2+1|-2\arctan(x+1)+C
\end{aligned}$$

■
