שעור 9
משפט הפירוק הספקטרלי

ניתן לסכם את כל המושגים הנלמדים על העתקות נורמליות במשפט הבא:

משפט 9.1 סכום ישר של מרחבים עצמיים של העתקה נורמלית

תהי T העתקה נורמלית במרחב מכפלה אוניטרי V ויהיו $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ כל הערכים העצמיים השונים של T.
אם $V_1,\ldots,V_k$ הם התת-מרחבים העצמיים השייכים ל- $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ בהתאמה, אזי

(1 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k$

(2 $V_i\perp V_j$ לכל $i\neq j$.

הוכחה:

(1 T נורמלית ולכן לכסינה אוניטרי (משפט לכסון אוניטרי 8.15). לכן סכום המימדים של כל התת-מרחביים העצמיים שווה למימד של V, כלומר

$$\dim(V)=\dim(V_1)+\ldots+\dim(V_k)\ .$$

נסמן $\dim(V_i)=n_i$ ו-

$$\{\mathrm{v}_{i1},\ldots,\mathrm{v}_{in_i}\}$$

בסיס של V_i. אז הקבוצה

$$\bigcup_{i=1}^{k}\{\mathrm{v}_{i1},\ldots,\mathrm{v}_{in_i}\}$$

היא בסיס של V. ז"א כל וקטור של V הוא צירוף ליניארי של הוקטורים העצמיים. לכן לכל $u\in V$,

$$u\in V_1+V_2+\ldots+V_k\ .$$

אפשר להראות כי $V_i\cap V_j=\{\bar{0}\}$ דרך השלילה. נניח ש $\exists\ u\neq\bar{0}\in V_i\cap V_j$ כאשר V_i המרחב עצמי של λ_i ו- V_j המרחב עצמי של λ_j ו $\lambda_j\neq\lambda_i$. אז $T(u)=\lambda_i\cdot u$ וגם $T(u)=\lambda_j\cdot u$, ומכאן

$$\lambda_i u=\lambda_j u\quad\Rightarrow\quad(\lambda_i-\lambda_j)u=0$$

$u\neq\bar{0}$ כי הוא וקטור עצמי לכן $\lambda_i=\lambda_j$, סתירה.

לכן

$$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k\ .$$

(2 עבור T נורמלית, וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים הם אורתוגונלים (משפט 8.8), לכן $\forall i\neq j\ V_i\perp V_j$.

■

המטרה שלנו היא לנסח משפט שקול הידוע בשם "משפט הפירוק הספקטרלי". אנחנונראה כי כל עתקה נורמלית במרחב מכפלה פנימית נוצר סופית היא צירוף ליניארי של הטלת אורתוגונלית על המרחבים העצמיים שלה. המקדמים של הצירוף הליניארי הם הערכים העצמיים של ההעתקה. נראה את זה קודםם בדוגמה.

דוגמה 9.1

$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$T(\mathrm{v})=\begin{pmatrix}3&2\\2&0\end{pmatrix}\cdot \mathrm{v}$$

T העתקה סימטרית במרחב אוקלידי, לכן היא נורמלית.

$$T-\lambda I=\begin{vmatrix}3-\lambda&2\\2&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda-4=(\lambda+1)(\lambda-4)=0$$

ערכים עצמיים: $\lambda_1=4$, $\lambda_2=-1$.

$\underline{\lambda=4}$

$$\begin{pmatrix}-1&2\\2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to -R_1}\begin{pmatrix}1&-2\\2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\end{pmatrix}$$

$x=2y$, $y\in\mathbb{R}$. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y\\y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

$$V_4=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ בסיס של V_4.

$\underline{\lambda=-1}$

$$\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to \frac{1}{4}\cdot R_1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&0\end{pmatrix}$$

$x=-\frac{1}{2}y$, $y\in\mathbb{R}$. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\cdot y\\y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$.

$$V_{-1}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ בסיס של V_{-1}.

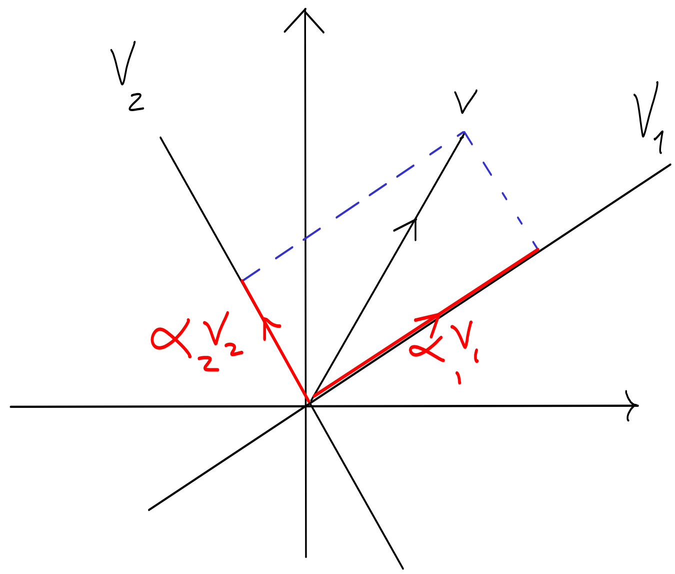
לכן $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2$ בסיס של $\mathbb{R}^2$. לכן לכל $\mathrm{v}\in\mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{v}=\alpha_1\mathrm{v}_1+\alpha_2\mathrm{v}_2\ .$$

מכאן

$$\mathrm{v}=\alpha_1\lambda_1\mathrm{v}_1+\alpha_2\lambda_2\mathrm{v}_2=4\alpha_1\mathrm{v}_1-\alpha_2\mathrm{v}_2\ .$$

נשים לב ש- $\alpha_1\mathrm{v}_1$ הוא ההיטל האורתוגונלי (ראו הגדרה 2.4) של v על V_1 ו- $-\alpha_2\mathrm{v}_2$ ההיטל האורתוגונלי של v על V_2.



אם נסמן ב- P_i $(i=1,2)$ את העתקת ההטלה האורתוגונלית על תת המרחב V_i, נוכל לרשום

$$P_1(\mathrm{v})=\alpha_1\mathrm{v}_1\ , \qquad P_2(\mathrm{v})=\alpha_2\mathrm{v}_2\ .$$

מכאן

$$T(\mathrm{v})=4P_1(\mathrm{v})+(-1)P_2(\mathrm{v})=(4P_1-P_2)(\mathrm{v})\ .$$

כלומר $T=4P_1-P_2$.

ז"א ההעתקה T היא צירוף לינארי של הטלות אורתוגונליות P_1 ו- P_2 על המרחבים העצמיים של T ומקדמי הצירוף הם הערכים העצמיים המתאימים.

במילים אחרות, כדי להפעיל את T על וקטור v, צריך להטיל אותו על המרחבים V_1 ו- V_2, לכפול את ההטלות ב- λ_1, λ_2 בהתאמה, ולחבר את הוקטורים המתקבלים.

נשים לב: ההטלות P_1 ו- P_2 מקיימות שתי תכונות נוספות:

1) $P_1+P_2=I$

2) $P_1\cdot P_2=P_2\cdot P_1=0$

<u>הוכחה:</u>

1) לכל $\mathrm{v}\in V$,

$$\mathrm{v}=\alpha_1\mathrm{v}_1+\alpha_2\mathrm{v}_2=P_1(\mathrm{v})+P_2(\mathrm{v})=(P_1+P_2)(\mathrm{v})$$

לכן $P_1+P_2=I$.

2)

$$\left(P_1\cdot P_2\right)(\mathrm{v})=P_2\left(P_1(\mathrm{v})\right)=P_2(\alpha_1\mathrm{v}_1)=0$$

כי $\alpha_1\mathrm{v}_1\perp V_2$.

3) $P_1\cdot P_2=P_2\cdot P_1=0$

המשפט הבא הנקרא "המשפט הפירוק הספקטרלי" מכליל את הדוגמה האחרונה.

משפט 9.2 משפט הפירוק הספקטרלי

תהי T העתקה נורמלית במרחב אוניטרי V נוצר סופית יהיו $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ כל הערכים העצמיים השונים של T ויהיו $V_1,\ldots,V_k$ המרחבים העצמיים המתאימים. לכל $1\leq i\leq k$ נסמן ב- P_i את ההעתקה ההטלה האורתוגונלית על V_i. אזי

1) $T=\lambda_1P_1+\ldots+\lambda_kP_k$

2) $I=P_1+\ldots+P_k$

3) לכל $i\neq j$, $P_i\cdot P_j=0$

4) לכל i, $P_i^2=P_i$

5) לכל i, $\bar{P}_i=P_i$.

הוכחה:

1) לפי משפט 9.1, $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k$ וגם $V_i\perp V_j$ עבור $i\neq j$ לכן כל וקטור $\mathrm{v}\in V$ ניתן להציג בצורה

$$\mathrm{v}=\mathrm{v}_1+\ldots+\mathrm{v}_k$$

כאשר $\mathrm{v}_i\in V_i$ ($1\leq i\leq k$). אז

$$T(\mathrm{v})=T(\mathrm{v}_1)+\ldots+T(\mathrm{v}_k)=\lambda_1\mathrm{v}_1+\ldots+\lambda_k\mathrm{v}_k=\lambda_1P_1(\mathrm{v})+\ldots+\lambda_kP_k(\mathrm{v})=\left(\lambda_1P_1+\ldots+\lambda_kP_k\right)(\mathrm{v})\ .$$

לכן

$$T=\lambda_1P_1+\ldots+\lambda_kP_k\ .$$

2) לכל $\mathrm{v}\in V$,

$$\left(P_1+\cdots+P_k\right)(\mathrm{v})=P_1(\mathrm{v})+\ldots+P_k(\mathrm{v})=\mathrm{v}_1+\ldots+\mathrm{v}_k=\mathrm{v}$$

לכן $P_1+\ldots+P_k=I$.

3) לכל $i\neq j$ ולכל $\mathrm{v}\in V$,

$$\left(P_iP_j\right)(\mathrm{v})=P_i\left(P_j(\mathrm{v})\right)=P_i(\mathrm{v}_j)=0$$

כי $V_i\perp V_j$ לכן $P_iP_j=0$ לכל $i\neq j$.

4) לכל $\mathrm{v}\in V$,

$$P_i^2(\mathrm{v})=P_i\left(P_i(\mathrm{v})\right)=P_i(\mathrm{v}_i)=\mathrm{v}_i=P_i(\mathrm{v})$$

לכן $P_i^2=P_i$,

5) לכל $u,\mathrm{v}\in V$,

$$u=u_1+\ldots+u_k\ ,\qquad \mathrm{v}=\mathrm{v}_1+\ldots+\mathrm{v}_k$$

כאשר $u_i,\mathrm{v}_i\in V_i$ ($1\leq i\leq k$). אז

$$\langle P_i(\mathrm{v}),u\rangle=\langle\mathrm{v}_i,u_1+\ldots+u_k\rangle=\langle\mathrm{v}_i,u_i\rangle$$

מצד שני:

$$\langle\mathrm{v},P_i(u)\rangle=\langle\mathrm{v}_1+\ldots=+\mathrm{v}_k,u_i\rangle=\langle\mathrm{v}_i,u_i\rangle$$

ז"א

$$\langle P_i(\mathrm{v}),u\rangle=\langle\mathrm{v},P_i(u)\rangle$$

לכל $u,\mathrm{v}\in V$. לכן $\bar{P}_i=P_i$.

■

9.1 שימושים של הפירוק הספקטרלי

דוגמה 9.2

נתונה העתקה $T = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$ אזי

$$\begin{aligned} T^2 &= \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \lambda_i \lambda_j P_i P_j \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 P_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 P_i \end{aligned}$$

קל להוכיח באינדוקציה:

$$T^n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n P_i$$

דוגמה 9.3

במקרה של $\mathbb{F} = \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \overline{\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i \right)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i \bar{P}_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i P_i \end{aligned}$$

לכן, אם כל הערכים עצמיים הם ממשיים, אז

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i P_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i = T \end{aligned}$$

כלומר T צמודה לעצמה.

דוגמה 9.4

אם כל הערכים העצמיים מקיימים $|\lambda_i| = 1$ נקבל

$$\begin{aligned}
T \cdot \bar{T} &= \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i P_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \lambda_i \bar{\lambda}_j P_i P_j \\
&= \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i|^2 P_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k} |P_i \\
&= I
\end{aligned}$$

לכן T אוניטרית.