

שיעור 3

כפל מטריצות וייצוג מערכת באמצעות $AX = b$

3.1 מושג של מטריצה

מטריצה זאת טבלה של מספרים. הצורה הכללית של מטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

A מטריצה מסדר $m \times n$ (m שורות ו- n עמודות).

אם כל האיברים מספרים ממשיים אומרים כי A מטריצה מעל השדה \mathbb{R} בעלת m שורות ו- n עמודות. סימון: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

האיבר בשורה i בעמודה j מסומן

$$A_{ij}$$

האינדקס הראשון, " i " מסמן את משורה, והאינדקס השני " j " מסמן את העמודה. מפתח לזכור האינדקסים:

$$A_{xy}$$

כאשר ה- " x " מסמן את השורה וה- " y " מסמן את העמודה.

3.1 דוגמה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 23 & 45 & 2 \\ 12 & 34 & 67 & 87 & 55 \\ 22 & 33 & 66 & 89 & 19 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 5}.$$

האיבר בשורה 3 בעמודה 4 הוא 89. נסמן

$$A_{34} = 89$$

האיבר בשורה 1 בעמודה 5 הוא 2. נסמן

$$A_{15} = 2$$

האיבר בשורה 2 בעמודה 3 הוא 67. נסמן

$$A_{23} = 67$$



אם $m = n$ למטריצה קוראים מטריצה ריבועית.

3.2 מטריצות ריבועיות מיוחדות

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{מטריצה אלכסונית:}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{מטריצה משולשית עליונה}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{מטריצה משולשית תחתונה}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{מטריצת האפס}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{מטריצה היחידה}$$

דוגמה 3.2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(1) מטריצה אלכסונית.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(2) מטריצה אלכסונית.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(3) מטריצה אלכסונית.}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ לא מטריצה אלכסונית.}$$

3.3 חיבור מטריצות וכפל מטריצות בסקלר

הגדרה 3.1 חיבור מטריצות

לכל מטריצות A, B מסדר $m \times n$ מוגדרת מטריצה $A + B$:

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1n} + B_{1n} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2n} + B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} + B_{m1} & A_{m2} + B_{m2} & \cdots & A_{mn} + B_{mn} \end{pmatrix}$$

במילים אחרות, האיבר ה- ij של המטריצה $A + B$ ניתן ע"י

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}.$$

אפשר לחבר מטריצות של אותו גודל בלבד!

לדוגמה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ לא מוגדר!

הגדרה 3.2 כפל מטריצה בסקלר

לכל מטריצות A מסדר $m \times n$:

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \cdots & \alpha A_{1n} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} & \cdots & \alpha A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha A_{m1} & \alpha A_{m2} & \cdots & \alpha A_{mn} \end{pmatrix}$$

במילים אחרות, האיבר ה- ij של המטריצה $\alpha \cdot A$ ניתן ע"י

$$(\alpha \cdot A)_{ij} = \alpha \cdot A_{ij}.$$

דוגמה 3.3 חיבור מטריצות

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 11 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+8 & 5+9 \\ 3+11 & 4+5 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 14 \\ 14 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.4 כפל מטריצה בסקלר

$$7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 & 7 \cdot 2 \\ 7 \cdot 3 & 7 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \end{pmatrix}$$

■

משפט 3.1 תכונות של חיבור מטריצות וכפל מטריצות

יהיו $A, B, C \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ו- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. אזי:

(1) חוק החילוף של חיבור מטריצות:

$$A + B = B + A .$$

(2) חוק הקיבוץ של חיבור מטריצות:

$$(A + B) + C = A + (B + C) .$$

(3)

$$A + 0 = A .$$

(4)

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B .$$

(5)

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A .$$

(6)

$$\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A .$$

הוכחה מיידיית מההגדרות.

3.4 מטריצה משוחלפת

הגדרה 3.3 מטריצה משוחלפת

בהינתן מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ (מטריצה בעלת m שורות ו- n עמודות):

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

המטריצה המשוחלפת של A מסומנת ב- A^t והיא מטריצה בעלת n שורות ו- m עמודות המתקבלת מהמטריצה A ע"י להחליף שורות עם עמודות:

$$A^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

במילים אחרות, האיבר ה- i, j של המטריצה המשוחלפת של A ניתן ע"י

$$A_{ij}^t = A_{ji}.$$

דוגמה 3.5 מטריצה משוחלפת

נתונה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ מצאו את המשוחלפת שלה, כלומר A^t .

פתרון:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

משפט 3.2 תכונות של מטריצה משוחלפת

תהינה A, B מטריצה כך שהסכומים והמכפלות מוגדרים ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. מתקיים:

1.

$$(A^t)^t = A$$

2.

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

3.

$$(\alpha A)^t = \alpha A^t$$

4.

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

שימו לב, הסדר השתנה.

הוכחה: תרגיל בית.

3.5 כפל מטריצה בווקטור

הגדרה 3.4 מכפלה של מטריצה בווקטור

תהי $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ מטריצה מסדר $m \times n$ ו- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$ ווקטור מסדר n . המכפלה של המטריצה A עם הווקטור X , שמסומנת $A \cdot X$, נותנת ווקטור מסדר m שמוגדר

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n \\ \vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n A_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n A_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n A_{mj}x_j \end{pmatrix}.$$

במילים אחרות, האיבר ה- i של הווקטור $A \cdot X$ ניתן ע"י

$$(A \cdot X)_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j.$$

כללים של כפל מטריצה בווקטור:

(1) כפל של מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ עם ווקטור $X \in \mathbb{F}^n$ מחזירה ווקטור ב- \mathbb{F}^m .

(2) אפשר להכפיל מטריצה עם ווקטור רק אם מספר העמודות של המטריצה שווה למספר השורות של הווקטור.

דוגמה 3.6 כפל מטריצה בווקטור

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 3 \\ 7 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 122 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.7

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \\ 4 \cdot 3 + 5 \cdot 6 \\ 7 \cdot 3 + 8 \cdot 6 \\ 10 \cdot 3 + 11 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 42 \\ 79 \\ 96 \end{pmatrix}$$

3.6 כפל מטריצות

הגדרה 3.5 מכפלה של שתי מטריצות

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kn} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{m \times k} \text{ מטריצה מסדר } m \times k \text{ ו-} A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mk} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{m \times k}$$

מטריצה מסדר $k \times n$. המכפלה של השתי מטריצות A, B מסומנת $A \cdot B$ ומוגדרת

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + \cdots + A_{1k}B_{k1} & A_{11}B_{12} + \cdots + A_{1k}B_{k2} & \cdots & A_{11}B_{1n} + \cdots + A_{1k}B_{kn} \\ A_{21}B_{11} + \cdots + A_{2k}B_{k1} & A_{21}B_{12} + \cdots + A_{2k}B_{k2} & \cdots & A_{21}B_{1n} + \cdots + A_{2k}B_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B_{11} + \cdots + A_{mk}B_{k1} & A_{m1}B_{12} + \cdots + A_{mk}B_{k2} & \cdots & A_{m1}B_{1n} + \cdots + A_{mk}B_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{p=1}^k A_{1p}B_{p1} & \sum_{p=1}^k A_{1p}B_{p2} & \cdots & \sum_{p=1}^k A_{1p}B_{pn} \\ \sum_{p=1}^k A_{2p}B_{p1} & \sum_{p=1}^k A_{2p}B_{p2} & \cdots & \sum_{p=1}^k A_{2p}B_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{p=1}^k A_{mp}B_{p1} & \sum_{p=1}^k A_{mp}B_{p2} & \cdots & \sum_{p=1}^k A_{mp}B_{pn} \end{pmatrix}$$

במילים אחרות, האיבר ה- ij של המכפלה $A \cdot B$ ניתנת ע"י הנוסחה:

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{p=1}^k A_{ip}B_{pj}.$$

כללים של כפל מטריצות:

(1) ניתן להכפיל מטריצה A במטריצה B רק כאשר A מטריצה מסדר $m \times k$ ו- B מטריצה מסדר $k \times n$. זאת אומרת מספר עמודות של A שווה למספר השורות של B .

(2) אם A מסדר $m \times k$ ו- B מסדר $k \times n$ אז $A \cdot B$ היא מטריצה מסדר $m \times n$.

דוגמה 3.8

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.9

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 8 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 + 0 \cdot 8 + 4 \cdot 1 & -1 \cdot 5 + 0 \cdot 7 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 32 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.10

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 11 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 21 & 1 \cdot 12 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 22 & 1 \cdot 13 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 23 & 1 \cdot 14 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 24 \\ 0 \cdot 11 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 21 & 0 \cdot 12 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 22 & 0 \cdot 13 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 23 & 0 \cdot 14 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & 90 & 96 & 102 \\ 203 & 218 & 233 & 248 \end{pmatrix}$$

הגדרה 3.6 מטריצה היחידה

למטריצה ריבועית מסדר $n \times n$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

קוראים מטריצת היחידה.

דוגמה 3.11

המטריצה $I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה $I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה $I \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

משפט 3.3 כפל מטריצה במטריצה היחידה

(1) תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ו- $I \in \mathbb{F}^{n \times n}$ אז

$$A \cdot I = A.$$

(2) תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ו- $I \in \mathbb{F}^{m \times m}$ אז

$$I \cdot A = A.$$

הוכחה: תרגיל בית!

דוגמה 3.12

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 7 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 8 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 7 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 8 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.13

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

משפט 3.4 תכונות של כפל מטריצות

תהינה A, B, C מטריצות כך שהסכומים והמכפלות מוגדרים ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. אזי

(א) חוק הקיבוץ:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

(ב) חוק הפילוג:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

(ג) חוק הפילוג:

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$$

$$\alpha(A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B) \quad (ד)$$

(ה) אם $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ו- $I_{n \times n}$ מטריצת היחידה מסדר $n \times n$ ו- $I_{m \times m}$ מטריצת היחידה מסדר $m \times m$ אז

$$I_{m \times m} \cdot A = A = A \cdot I_{n \times n}.$$

הוכחה: תרגיל בית!

כלל 3.1 כפל מטריצות לא קומוטטיבית

נתונות $A \in \mathbb{F}^{m \times k}$ ו- $B \in \mathbb{F}^{k \times n}$. באופן כללי, $A \cdot B$ לא בהכרח שווה ל- $B \cdot A$. כלומר

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

באופן כללי.

דוגמה 3.14

אם A מטריצה מסדר 2×3 ו- B מטריצה מסדר 3×4 , אז $A \cdot B$ מוגדר, אבל $B \cdot A$ לא מוגדר.

דוגמה 3.15

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ -13 & 27 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 19 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$$

ז"א $A \cdot B \neq B \cdot A$.

דוגמה 3.16 כפל מטריצה אינה קומוטטיבית

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. חשבו $A \cdot B$ ו- $B \cdot A$. האם A ו- B מתחלפות (קומוטטיביות)?

פתרון:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 27 \end{pmatrix}$$

אבל

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 22 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$ לכן A ו- B לא מתחלפות.

כלל 3.2 מטריצות דומות

נתונות מטריצות A, B, C ו- $A \neq 0$.

אם $AB = AC$ אז B לא בהכרח שווה ל- C . ז"א $B \neq C$ באופן כללי.

דוגמה 3.17

תנו דוגמה של $A, B, C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ כך ש- $AB = AC$ ו- $A \neq 0$ אבל $B \neq C$.

פתרון:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הרי $AB = AC$ ו- $A \neq 0$ אבל $B \neq C$.

כלל 3.3 מכפלה מטריצות המתאפסת

נתונות מטריצות A, B .

אם $AB = 0$ אז A לא בהכרח מטריצה האפס ו- B לא בהכרח מטריצה האפס.

ז"א אם קיימות $A \neq 0$ ו- $B \neq 0$ כך ש- $A \cdot B = 0$.

דוגמה 3.18

תנו דוגמה של $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ כך ש- $A, B \neq 0$ אבל $A \cdot B = 0$.

פתרון:

דוגמה (1) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

דוגמה (2) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \neq 0$

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} b \in \mathbb{R} \neq 0$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

הגדרה 3.7 העלאה מטריצה בחזקה

תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ויהי $k \in \mathbb{N}$. נגדיר

$$A^k = \overbrace{A \cdot A \cdots A}^{k \text{ פעמים}}$$

אם $A \neq 0$, ונגדיר

$$A^0 = I_{n \times n}.$$

3.7 מטריצה הפוכה

הגדרה 3.8 מטריצה הפוכה

נניח ש- A מטריצה ריבועית מסדר $n \times n$. מטריצה ריבועית B מסדר $n \times n$ נקראת ההופכית של A (המטריצה ההפוכה של A) אם מתקיים

$$A \cdot B = B \cdot A = I.$$

סימון: במקום B רושמים A^{-1} . ז"א

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

דוגמה 3.19

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.8 שיטה למציאת מטריצה ההופכית

נתונה מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. כדי למצוא את המטריצה ההופכית A^{-1} רושמים

$$(A|I)$$

כאשר $I \in \mathbb{F}^{n \times n}$ המטריצה היחידה מסדר $n \times n$ ונדרג עד שנקבל המטריצה היחידה בצד שמאול:

$$(A|I) \xrightarrow{\text{פעולות אלמנטריות של דירוג}} (I|A^{-1}).$$

3.20 דוגמה

נתונה המטריצה $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

מצאו את A^{-1} .

פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

לפיכך

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3.21 דוגמה

נתונה $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

מצאו את A^{-1} .

פתרון:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \\
 & \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \\
 & \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 6R_2} \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow -\frac{1}{14}R_3} \\
 & \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_3} \\
 & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3R_3} \\
 & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} & & & \end{array} \right) \\
 & A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

משפט 3.5 ההופכית של מטריצה יחידה

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. אם ל- A קיימת מטריצה ההופכית אז היא יחידה.

הוכחה:

נניח ש B הופכית של A ו- C הופכית של A , ו- $B \neq C$. אז

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B,$$

בסתירה לכך ש- $B \neq C$.

משפט 3.6 לא כל מטריצה הפיכה

במספרים, אם מספר $a \in \mathbb{R}$ ו- $a \neq 0$ אז קיים a^{-1} .

במטריצות זה לא המצב. ז"א לא לכל מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ קיימת מטריצה הופכית $A^{-1} \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

אם למטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ קיימת $A^{-1} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ אומרים כי A הפיכה.
אם לא קיימת מטריצה הופכית אז אומרים כי A לא הפיכה.

דוגמה 3.22

נתונה $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

מצאו את A^{-1} .

פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2 \cdot R_1}$$

אי אפשר לקבל מטריצה היחידה בצד שמאול ולכן המטריצה לא הפיכה.

דוגמה 3.23

מצאו מטריצה X המקיימת את המשוואה

$$XA = B \quad (\text{א})$$

$$AX = B \quad (\text{ב})$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{כאשר}$$

פתרון:

(א)

$$XA = B \Rightarrow XAA^{-1} = BA^{-1} \Rightarrow X = BA^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 5R_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow -R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 + 2R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 + 8R_3 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -19 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -19 & -7 & -8 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ לפיכך}$$

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -19 & -7 & -8 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 \\ -7 & -3 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(ב)

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B .$$

לפיכך

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -19 & -7 & -8 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 \\ -15 & -11 & 15 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

דוגמה 3.24

מצאו מטריצה X המקיימת

$$A \cdot X = B ,$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ כאשר}$$

פתרון:

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B .$$

נחפש את A^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) .$$

לא נוכל להגיע ל- I בצד שמאול, לכן A^{-1} לא קיימת. לכן נפתור בדרך אחרת: נסמן $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ אז

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2z & 3y + 2w \\ 6x + 4z & 6y + 4w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{cases} 3x + 2z = 1 \\ 3y + 2w = -2 \\ 6x + 4z = 2 \\ 6y + 4w = -4 \end{cases}$$

נרשום את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & | & -2 \\ 6 & 0 & 4 & 0 & | & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - 2R_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow \frac{1}{3} \cdot R_1 \\ R_2 \rightarrow \frac{1}{3} \cdot R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & | & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & | & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$x = -\frac{2}{3}z + \frac{1}{3}, \quad y = -\frac{2}{3}w - \frac{2}{3}, \quad z, w \in \mathbb{R}.$$

לכן

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}z + \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}w - \frac{2}{3} \\ z & w \end{pmatrix},$$

לכל $z, w \in \mathbb{R}$.

משפט 3.7 תכונות של מטריצה הפוכה

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad \text{א)}$$

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \quad \text{ב)}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \quad \text{ג)}$$

הוכחה: תרגיל בית.

3.9 הצגת מערכת משוואות באמצעות כפל מטריצות

נתונה מערכת משוואות ליניאריות:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

נגדיר את המטריצה של מקדמים $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, את הווקטור $b \in \mathbb{F}^m$ ואת המווקטור של משתנים $X \in \mathbb{F}^n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

אז ניתן לרשום את המערכת בתורה

$$A \cdot X = b$$

כלומר

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

דוגמה 3.25

אם נתונה המערכת $\begin{cases} 5x + y - z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$ ניתן לרשום אותה בצורה $AX = b$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

דוגמה 3.26

אם נתונה המערכת $\begin{cases} 7x - y = 1 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ ניתן לרשום אותה בצורה $AX = b$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

דוגמה 3.27

פתרו את המערכת $\begin{cases} 7x - y = 1 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ ע"י מציאת המטריצה ההופכית של מטריצת המקדמים של המערכת.

פתרון:

נרשום את המערכת בצורה $AX = b$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$AX = b \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot b \Rightarrow X = A^{-1} \cdot b$$

נחפש את A^{-1} :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{7}R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{23}{7} & -\frac{2}{7} & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{7}{23}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{23} & \frac{7}{23} \end{array} \right) & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + \frac{1}{7}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{23} & \frac{1}{23} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{23} & \frac{7}{23} \end{array} \right) \end{aligned}$$

לכן

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{23} & \frac{1}{23} \\ -\frac{2}{23} & \frac{7}{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 33 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$(x, y) = \left(\frac{8}{23}, \frac{33}{23} \right) .$$

דוגמה 3.28

פתרו את המערכת $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + 4y = 4 \end{cases}$ ע"י מציאת המטריצה ההופכית של מטריצת המקדמים של המערכת.

פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

התשובה היא

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$(x, y) = (0, 1) .$$

דוגמה 3.29

$$x + 2y + 3z = 1$$

$$2x - 2y + 4z = 2$$

$$x + y + 5z = 3$$

$$AX = b \Rightarrow X = A^{-1}b$$

כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \\
 & \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \\
 & \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 6R_2} \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow -\frac{1}{14}R_3} \\
 & \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_3} \\
 & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3R_3} \\
 & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} & & & \end{array} \right) \\
 & A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

משפט 3.8 קיום ומספר פתרונות של מערכת משוואות

נתונה מערכת משוואות

$$A \cdot X = b$$

כאשר $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית של המקדמים, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ הווקטור של המשתנים ו- $b \neq 0 \in \mathbb{F}^n$

הווקטור של הצד ימין של המערכת.

(א) אם A הפיכה אז למערכת קיים פתרון אחד והוא יחיד.

במקרה ש- A לא הפיכה, אז למערכת יש אינסוף פתרונות או לא קיים פתרון.

(ב) אם $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) < n$ אז למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

(ג) אם $\text{rank}(A) \neq \text{rank}(A|b)$ אז למערכת לא קיים פתרון.

הוכחה:

1. תרגיל בית.

2. נלמד את ההוכחה בהמשך הקורס.

3. נלמד את ההוכחה בהמשך הקורס.

