חישוביות וסיבוכיות

מועד ב'

ד"ר יוחאי טוויטו,   ד"ר ירמיהו מילר   .

סמסטר א, תשפ"ו'

מספר העמוד הנוכחי ומספר העמודים הכולל בשאלון מופיעים בתחתית כל עמוד. בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות

שאלוני בחינה

- ☑ לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ☐ לשאלון הבחינה יש לצרף כריכה בלבד.
- ☐ יש להחזיר את השאלון ביחד עם המחברת/כריכה.

שימוש במחשבונים

- ☐ ניתן להשתמש במחשבון.
- ☑ לא ניתן להשתמש במחשבון.

חומר עזר

- ☑ לא ניתן להשתמש בחומר עזר כלל.
- ☐ ניתן להשתמש בחומר עזר/דף נוסחאות, כמפורט:
- ☐ הבחינה עם חומר פתוח ▯ מותר להשתמש בכל חומר עזר מודפס או כתוב.

הנחיות

נא קראו בעיון את ההנחיות הבאות בטרם תתחילו לפתור את הבחינה. מומלץ לקרוא בקצרה את כלל השאלות לפני שמתחילים לפתור את הבחינה. ניתן לענות על השאלות בכל סדר שתרצו.

1. המבחן כולל 5 שאלות. יש לענות על כולן.
2. שאלות הבחינה שוות משקל - כל שאלה 20 נקודות.
3. כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תדלגו על שלבים.
4. המבחן כולל נספחים, לשימושכם. הסתייעו בהם במידת הצורך.
5. הקפידו על כתב יד ברור וקריא.
6. הקפידו לרשום בגדול ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
7. כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבלתם. רק הן נבדקות !
8. ניתן לקחת את השאלון כאשר הבחינה מסתיימת.

בהצלחה!

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג:

הבחינה

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

סעיף ב' (10 נקודות)

שאלה 2: וריאציות על מכונות טיורינג (20 נקודות)

שאלה 3: אי כריעות (20 נקודות)

סעיף א' (12 נקודות)

סעיף ב' (8 נקודות)

שאלה 4: אי-כריעות

סעיף א' (10 נקודות)

תהי L השפה הבאה:

$$L = \left\{\langle M_1, M_2, M_3\rangle \;\middle|\; L(M_1) = L(M_2) = L(M_3) \text{ מכונות טיורנג עבורן } M_1, M_2, M_3 \right\} .$$

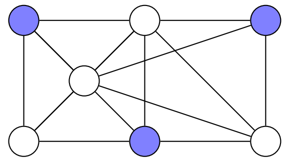
הוכיחו כי $L \notin R$.

סעיף ב' (10 נקודות)

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: $\overline{L_{\text{acc}}} \backslash L_{\text{halt}} \in RE$.

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, קבוצה בלתי תלויה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $S \subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u, v \in S$ מתקיים $(u, v) \notin E$. התרשים מראה דוגמה של קבוצה בלתי תלוייה בגודל $k = 3$:



הבעיית IS מוגדרת באופן הבא:

<u>קלט</u>: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר k.

<u>פלט</u>: האם קיימת קבוצה בלתי תלויה ב- G בגודל k?

$$IS = \left\{ \langle G,k \rangle \;\middle|\; \text{גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ } G \right\}$$

הבעיית $3SAT$ מוגדרת באופן הבא:

$$3SAT = \left\{ \langle \phi \rangle \middle| \text{ נוסחה בוליאנית } 3CNF \text{ ספיקה } \phi \right\} .$$

הוכיחו כי קיימת רדוקציה פולינומיאלית מ- $3SAT$ ל- IS, כלומר:

$$3SAT \leqslant IS .$$

חישוביות וסיבוכיות

מועד ב'

פתרון לדוגמא

ד"ר יוחאי טוויטו , ד"ר ירמיהו מילר .

סמסטר א, תשפ"ו'

מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הינן פתרונות לדוגמא. ניתן לפתור חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

פתרונות

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

סעיף ב' (10 נקודות)

שאלה 2: וריאציות על מכונות טיורינג (20 נקודות)

שאלה 3: אי כריעות (20 נקודות)

שאלה 4: אי-כריעות

סעיף א' נראה שקיימת רדוקציה משפה $L_{EQ} = \{\langle M, M' \rangle \mid L(M) = L(M')\}$ לשפה L. מכיוון ש- $L_{EQ} \notin R$ אז ממשפט הרדוקציה $L \notin R$.

<u>בניית הרדוקציה</u>

$$f(x) = \begin{cases} \langle M, M', M' \rangle & : x = \langle M, M' \rangle \ , \\ \langle M_\varnothing, M_\varnothing, M^* \rangle & : x \neq \langle M, M' \rangle \ , \end{cases}$$

כאשר $M_\varnothing$ המכונת טיורינג הדוחה כל קלט ו- M^* המכונת טיורינג המקבלת כל קלט.

<u>הוכחת נכונות</u>

<u>הוכחה לכיוון $\Leftarrow$</u>

אם $x \in L_{EQ}$

$\Leftarrow$ $x = \langle M, M' \rangle$ ו- $L(M) = L(M')$.

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M, M', M' \rangle$ וגם $L(M) = L(M') = L(M')$.

$\Leftarrow$ $\langle M, M', M' \rangle \in L$.

$\Leftarrow$ $f(x) \in L$.

הוכחה לכיוון $\Rightarrow$

אם

אם $x \in L_{EQ}$ **אז שני מקרים:**

מקרה 1) $x \neq \langle M, M' \rangle$

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M_\varnothing, M_\varnothing, M^* \rangle$ ו- $L\left(M_\varnothing\right) = \varnothing$ ו- $L\left(M^*\right) = \Sigma^*$.

$\Leftarrow$ $L\left(M_\varnothing\right) \neq L\left(M^*\right) = \Sigma^*$.

$\Leftarrow$ $\langle M_\varnothing, M_\varnothing, M^* \rangle \notin L$

$\Leftarrow$ $f(x) \notin L$.

מקרה 2) $x = \langle M, M' \rangle$ ו- $L(M) \neq L(M')$.

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle M, M', M' \rangle$ וגם $L(M) \neq L(M')$.

$\Leftarrow$ $\langle M, M', M' \rangle \notin L$.

$\Leftarrow$ $f(x) \notin L$.

הוכחנו כי

$$x \in L_{EQ} \iff f(x) \in L$$

לכן $L_{EQ} \leqslant L$.

$L_{EQ} \notin R$ **אז ממשפט הרדוקציה** $L \notin R$.

סעיף ב' ראשית נשים לב שאם $x \in \overline{L_{\text{acc}}} \backslash L_{\text{halt}}$ אז שני מקרים:

1) $x \neq \langle M, w \rangle$,

2) $x = \langle M, w \rangle$ וגם $w \notin L(M)$ וגם M לא עוצרת על w.

לכן:

$$\overline{L_{\text{acc}}} \backslash L_{\text{halt}} = \overline{L_{\text{halt}}} \ .$$

מכיוון ש: $\overline{L_{\text{Halt}}} \notin RE$ אז גם $\overline{L_{\text{acc}}} \backslash L_{\text{Halt}} \notin RE$.

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

בניית הרדוקציה

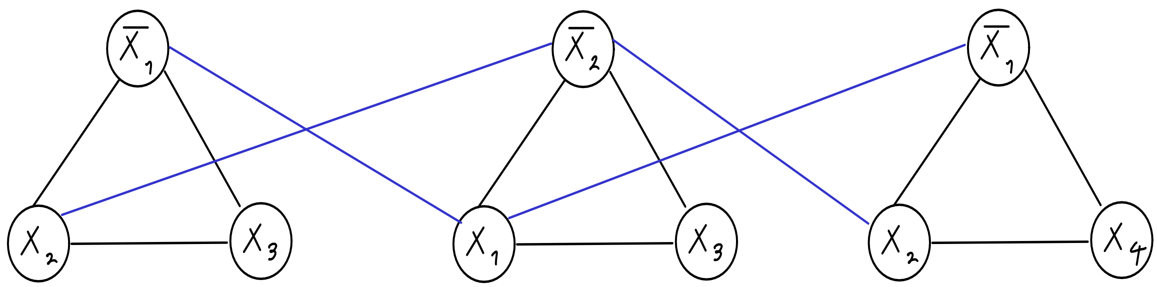
$$f\left(\langle \phi \rangle\right) = \langle G, k \rangle \ ,$$

כאשר:

פתרונות

- לכל ליטרל בנוסחה ϕ ניצור קודקוד מתאים בגרף G.
- לכל פסוקית C_i של ϕ נגדיר שלושה של קודקודים t_i, כאשר הקודקודים ב- t_i מתאימים לליטרלים של הספוקית C_i.
- לכל זוג קודקודים של אותה שלושה מחוברים ניצור צלע המחברת ביניהם.
- עבור כל זוג של משתנה ומשלימו בשלושות שונות ניצור צלע המחברת ביניהם.
- נגידר $k =$ מספר הפסוקיות בנוסחה ϕ.

לדוגמה, אם $\phi = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4)$**, נוסחת בוליאנית** $3CNF$ **בעל** $k = 3$ פסוקיות, אז הפונקצית הרדוקציה פולטת את הזוג $\langle G, k = 3 \rangle$ כאשר G הוא הגרף המתואר בתרשים למטה.



<u>הוכחת הנכונות</u>

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

נניח $\langle \phi \rangle \in 3SAT$.

$\Leftarrow$ ϕ נוסחה בוליאנית $3CNF$ וקיימת השמה X שמספקת את ϕ.

$\Leftarrow$ אם $\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \quad \cdots \quad \wedge C_k$ וגם X השמה מספקת של ϕ, אז הפסוקית C_i מכילה לפחות ליטרל אחד שמקבל את הערך אמת 1.

$\Leftarrow$ קיימת קבוצה של k קודקודים ממשולשים שונים, כל אחד של משתנה עם ערך אמת 1, שאינם מחוברים זה לזה.

(הסבר: כל קודקוד בקבוצה זו שייך לליטרל עם ערך אמת 1. נניח בשלילה שיש זוג קודקודים בקבוצה זו שמחוברים. אז יש שני קודקודים ממשולשים שונים של זוג משתנים שאינם משתנים משלימים, בסתירה לכך שקודקודים ממושלשים שונים מחוברים רק אם הם שייכים למשתנים משלימים.)

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל k.

$\Leftarrow$ $\langle G,k\rangle \in IS$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

אם $\langle G,k\rangle \in IS$.

$\Leftarrow$ קיימת קבוצה בלתי תלויה S ב- G בגודל k.

$\Leftarrow$ ב- S יש בדיוק קודקוד אחד מכל משולש, בגלל שבגרף כל קודקודים מאותה משולש מחוברים (לפי ההגדרה של הרדוקציה).

$\Leftarrow$ ב- S אין משתנים משלימים, בגלל שבין כל זוג משתנים משלימים יש צלע.

$\Leftarrow$ ניתן לתת השמה לכל משתנה ב- S ערך אמת 1.

$\Leftarrow$ בכל משולש יש לפחות משתנה אחד עם ערך אמת 1.

$\Leftarrow$ בכל פסוקית של ϕ יש לפחות ליטרל אחד עם ערך אמת 1.

$\Leftarrow$ קיימת השמה מספקת ל- ϕ.

$\Leftarrow$ $\langle \phi\rangle \in 3SAT$.

<u>סיבוכיות זמן</u>

הפונקציית הרדוקציה מקבלת כקלט נוסחה בוליאנית ϕ עם k פסוקיות ופולטת גרף המורכב מ- k גרפי K_3, אחד לכל פסוקית של ϕ.