

תרגילים: שפות כריעות ושפות קבילות

שאלה 1 בהינתן השפה L . השפה L^* מוגדרת:

$$L^* = \{\varepsilon\} \cup \{w = w_1w_2 \cdots w_k \mid \forall 1 \leq i \leq k, w_i \in L\}$$

(א) בהינתן מכונת טיורינג M המקבלת שפה L .
בנו מכונת טיורינג אי דטרמיניסטית M^* המקבלת את השפה L^* .

(ב) בהינתן מכונת טיורינג M המכריעה שפה L .
בנו מכונת טיורינג אי דטרמיניסטית M^* המכריעה את השפה L^* .

שאלה 2 האם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה.
לכל מכונת טיורינג M , אם $L(M) \in CoRE$ אזי $L(M) \in R$.

שאלה 3 האם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה.
אם $L_1 \cap L_2 \in R$ אזי $L_1 \in RE$ או $L_2 \in CoRE$.

שאלה 4 הוכיחו כי לכל 3 שפות L_1, L_2, L_3 כך ש-

$$1. L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \Sigma^*$$

$$2. L_i \cap L_j = \emptyset \text{ לכל } 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j$$

$$3. L_i \in RE \text{ לכל } 1 \leq i \leq 3. \text{ הוכיחו כי } L_i \in R \text{ לכל } 1 \leq i \leq 3.$$

שאלה 5 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה.
לכל שתי שפות L_1 ו- L_2 , אם $L_1 \cap L_2 \in RE$ וגם $L_1 \cup L_2 \in RE$ אזי $L_1 \in RE$ או $L_2 \in RE$.

שאלה 6 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה.
 $L_{\Sigma^*} \setminus L_d \in RE$

שאלה 7 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה.
אם $L = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in RE\}$ ו- $L' = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in CoRE\}$ אזי $L' = L$.

שאלה 8 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה.
לכל מספר n מתקיים $\langle n, n+1 \rangle \in RELPRIME$.

שאלה 9 נתונה השפה הבאה: $L = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| \geq 3\}$. כלומר L מכילה קידודים של מכונות שמקבלות לפחות 3 מילים שונות. הוכיחו כי $L \in RE$.

שאלה 10 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לשאלה פתוחה:
לכל שתי שפות L_1 ו- L_2 , אם $L_2 \setminus L_1 \in RE$ אזי $L_1 \in RE$ או $L_2 \in RE$.

שאלה 11 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לשאלה פתוחה:
אם $L = \{\langle M \rangle \mid L(M) \notin RE\}$ אזי $L \notin R$.

תשובות

שאלה 1

(א) תהי M מכונת טיורנג שמזהה את L .
נבנה מכונת טיורנג M^* אי-דטרמיניסטית המקבלת את L^* .

תאור הבנייה

$M^* = \text{על קלט } w$:

1. אם $w = \varepsilon$ אז M^* מקבלת.
 2. אחרת M^* בוחרת באופן אי דטרמיניסטי חלוקה של w ל- $w = w_1, w_2, \dots, w_k$ כאשר $k \in \mathbb{N}^+$.
 3. לכל $1 \leq i \leq k$:
 - M^* מריצה את M על w_i ועונה כמוה.
 - * אם M קיבלה חוזרים לשלב 3.
 4. אם M קיבלה את כל המחרוזות $\{w_i\}$ אזי M^* מקבלת.
- M^* - ניתנת לחישוב - מספר הפירוקים האפשריים ל- w הוא סופי ולכן הניחוש הוא סופי, לפיכך כתיבה על הסרט והרצת M ניתן לחישוב.

הוכחת נכונות: $L^* = L(M^*)$

כיוון \Leftarrow

נניח כי $w \in L(M^*)$

\Leftarrow קיימת חלוקה $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) כך שעבור כל w_i ($1 \leq i \leq k$) M קיבלה.
 \Leftarrow כל $w_i \in L(M)$, בפרט, $L(M) = L$.
 $\Leftarrow w_i \in L$
 $\Leftarrow w = w_1 w_2 \dots w_k \in L^*$
 $\Leftarrow L(M^*) \subseteq L^*$

כיוון \Rightarrow

נניח כי $w \in L^*$

\Leftarrow קיימת חלוקה $w = w_1 w_2 \dots w_k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) כך שכל $w_i \in L$ ($1 \leq i \leq k$)
 $\Leftarrow M^*$ תנחש את הפירוק הזה עבור w
 \Leftarrow המכונה M תקבל כל w_i כזה
 $\Leftarrow M^*$ תקבל את w
 $\Leftarrow w \in L(M^*)$
 $\Leftarrow L^* \subseteq L(M^*)$
 לכן, מאחר ומצאנו ש- $L(M^*) \subseteq L^*$ ו- $L^* \subseteq L(M^*)$ אזי $L(M^*) = L^*$.

(ב)

תהי M מכונת טיורנג שמכריעה את L .
נבנה מכונת טיורנג M^* אי-דטרמיניסטית המכריעה את L^* .

תאור הבנייה

$M^* =$ על קלט w :

1. אם $w = \varepsilon$ אז M^* מקבלת.

2. אחרת M^* בוחרת באופן אי דטרמיניסטי חלוקה של w ל- $w = w_1, w_2, \dots, w_k$ כאשר $k \in \mathbb{N}^+$.

3. לכל $1 \leq i \leq k$:

• M^* מריצה את M על w_i .

* אם M דחתה אז M^* דוחה.

* אחרת אם M קיבלה חוזרים לשלב 3).

4. אם M קיבלה את כל המחרוזות $\{w_i\}$ אזי M^* מקבלת.

M^* - ניתנת לחישוב - מספר הפירוקים האפשריים ל- w הוא סופי ולכן הניחוש הוא סופי, לפיכך כתיבה על הסרט והרצת M ניתן לחישוב.

הוכחת נכונות: $L^* = L(M^*)$

כיוון \Leftarrow

נניח כי $w \in L(M^*)$

\Leftarrow קיימת חלוקה $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) כך שעבור כל w_i ($1 \leq i \leq k$) M קיבלה.

\Leftarrow כל $w_i \in L(M)$, בפרט, $L(M) = L$.

$\Leftarrow w_i \in L$

$\Leftarrow w = w_1 w_2 \dots w_k \in L^*$

$\Leftarrow L(M^*) \subseteq L^*$

כיוון \Rightarrow

נניח כי $w \in L^*$

\Leftarrow קיימת חלוקה $w = w_1 w_2 \dots w_k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) כך שכל $w_i \in L$ ($1 \leq i \leq k$)

$\Leftarrow M^*$ תנחש את הפירוק הזה עבור w

\Leftarrow המכונה M תקבל כל w_i כזה

$\Leftarrow M^*$ תקבל את w

$\Leftarrow w \in L(M^*)$

$\Leftarrow L^* \subseteq L(M^*)$

לכן, מאחר ומצאנו ש- $L(M^*) \subseteq L^*$ ו- $L^* \subseteq L(M^*)$ אזי $L(M^*) = L^*$.

שאלה 2 הטענה נכונה:

לכל כלל מכונת טיורינג מתקיים, לפי ההגדרה: $L(M) \in RE$.
 לכן, אם $L(M) \in CoRE$ אזי
 $L(M) \in RE \cap CoRE = R$.

שאלה 3 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

יהי $L_1 = L_{\Sigma^*} \notin RE$ כאשר
 $L_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^* \}$
 ותהי $L_2 = \overline{L_{\Sigma^*}}$.

בורר ש- $L_1 \cap L_2 = \emptyset \in R$.

מצד שני, $L_1 = L_{\Sigma^*} \notin RE$ וגם $L_1 \notin CoRE$,

ו- $L_2 = \overline{L_{\Sigma^*}} \notin CoRE$ וגם $L_2 \notin RE$.

שאלה 4**שיטה 1**

מכיוון ש- $L_i \in RE$ קיימת מכונת טיורינג M_i המקבלת את L_i לכל $1 \leq i \leq 3$.
 נבנה מכונת טיורינג M_i^* המכריעה את L_i לכל $1 \leq i \leq 3$ באופן הבא.

נראה את הבנייה עבור M_1^* , באופן דומה אפשר לבנות את M_2^* ו- M_3^* .

$M_1^* = \text{על קלט } w$:

• מריצה במקביל את שלושת המכונות M_1, M_2, M_3 .

○ אם M_1 קיבלה M_1^* מקבלת.

○ אם M_2 קיבלה M_2^* דוחה.

○ אם M_3 קיבלה M_3^* דוחה.

נכונות הבנייה:

נראה כי M_1^* מכריעה את L_1 .

אם $w \in L_1 \Leftarrow M_1$ מקבלת את $w \Leftarrow M_1^*$ מקבלת את w .

אם $w \notin L_1 \Leftarrow M_1 \Leftarrow M_2 \cup M_3 \Leftarrow w \in M_2 \cup M_3 \Leftarrow M_2$ מקבלת את w או M_3 מקבלת את $w \Leftarrow M_1^*$ דוחה את w .

שיטה 2

נשים לב כי $L_2 \cup L_3 = \bar{L}_1$ ואם $L_2 \in RE$ וגם $L_3 \in RE$ אזי לפי סגירות RE תחת איחוד, גם $\bar{L}_1 \in RE$.

אזי קיבלנו ש- $L_1 \in RE$ וגם $\bar{L}_1 \in RE$, ולכן ניתן להוכיח כי $L_1 \in R$.

כנ"ל עבור L_2 ו- L_3 .

שאלה 5 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

נתונה השפה

$$L_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^* \}$$

ונתונה השפה

$$\overline{L_{\Sigma^*}} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \neq \Sigma^* \} \cup \{x \neq \langle M \rangle\} .$$

הוכחנו בכיתה כי:

$$L_{\Sigma^*} \notin RE \quad (\text{א})$$

$$L_{\Sigma^*} \notin R \quad (\text{ב})$$

$$\overline{L_{\Sigma^*}} \notin RE \quad (\text{ג})$$

תהיינה L_1, L_2 השפות הבאות:

$$L_1 = L_{\Sigma^*} , \quad L_2 = \overline{L_{\Sigma^*}} .$$

מכאן

$$L_1 \cap L_2 = \emptyset \in RE , \quad L_1 \cup L_2 = \Sigma^* \in RE ,$$

אבל $L_1 \notin RE$ וגם $L_2 \notin RE$.

שאלה 6 הטענה לא נכונה.

השפה L_{Σ^*} היא

$$L_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^* \}$$

והשפה L_d היא

$$L_d = \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \} \quad \Rightarrow \quad \overline{L_d} = \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \in L(M) \} \cup \{x \neq \langle M \rangle\}$$

לכן

$$L_{\Sigma^*} \setminus L_d = L_{\Sigma^*} \cap \overline{L_d} = L_{\Sigma^*} \notin RE .$$

שאלה 7 הטענה לא נכונה.

המ"ט אוניברסלית U מקבלת כקלט זוג, קידוד של מ"ט $\langle M \rangle$ וקידוד של מילה $\langle w \rangle$, ומבצעת סימוציה של ריצה של M על w ועונה בהתאם.

עבור המכונה האוניברסלית U , מתקיים:

$$L(U) = L_{\text{acc}} \in RE .$$

ולכן $\langle U \rangle \in L$, אבל $\langle U \rangle \notin L'$, מכיוון ש- $L(U) = L_{\text{acc}} \notin CoRE$.

שאלה 8 הטענה נכונה.

$$\gcd(n, n+1) = \gcd(n+1, 1) = 1$$

ולכן $\langle n, n+1 \rangle \in RELPRIME$

שאלה 9 נבנה מ"ט אי-דטרמיניסטית M_L המקבלת את L .

$$M_L = \text{על קלט } x:$$

(1) בודקת האם $x = \langle M \rangle$. אם לא דוחה.

(2) בוחרת באופן אי-דטרמיניסטי 3 מילים w_1, w_2, w_3 .

- מריצה את M על w_1 .
- אם M דוחה $M_L \Leftarrow$ דוחה.
- מריצה את M על w_2 .
- אם M דוחה $M_L \Leftarrow$ דוחה.
- מריצה את M על w_3 ועונה כמוה.

נכונות:

אם $x \in L$

$$x = \langle M \rangle \Leftarrow |L(M)| \geq 3$$

$$\Leftarrow \text{קיימת 3 מילים } w_1, w_2, w_3 \text{ המתקבלות ב- } M$$

$$\Leftarrow \text{קיימת ריצה של } M_L \text{ בה תבחר } w_1, w_2, w_3 \text{ ותריץ עליהם את } M$$

$$\Leftarrow M_L \text{ מקבלת את } x$$

אם $x \notin L$ שני מקרים:

$$\bullet \quad M_L \Leftarrow x \neq \langle M \rangle \text{ דוחה את } L.$$

$$\bullet \quad x = \langle M \rangle \Leftarrow |L(M)| < 3$$

$$\Leftarrow \text{לכל 3 מילים } w_1, w_2, w_3 \text{ לפחות אחת מהן לא מתקבלת ב- } M$$

$$\Leftarrow \text{בכל ריצה של } M_L \text{ בה היא תבחר 3 מילים } w_1, w_2, w_3, \text{ לפחות אחת הריצות של } M \text{ על מילים אלו תדחה או לא תעצור}$$

$$\Leftarrow \text{בכל ריצה של } M_L \text{ על } x, M_L \text{ תדחה או לא תעצור}$$

$$\Leftarrow M_L \text{ לא מקבלת את } x.$$

שאלה 10 הטענה לא נכונה: תהיינה

$$L_1 = L_2 = L_d$$

$$L_d = \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \}$$

$$L_2 \setminus L_1 = \emptyset \in RE, \text{ אבל, כפי שהוכחנו בכיתה, } L_d \notin RE, \text{ ז"א } L_1 \notin RE \text{ וגם } L_2 \notin RE.$$

שאלה 11 הטענה לא נכונה.

$$L = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \notin RE \} = \emptyset \in R.$$