סימון לקבוצות אסטרטגיות ווקטורי אסטרטגיות

קבוצת אסטרטגיות של שחקן 1: $S_1 = (s_1^1, s_1^2, \ldots, s_1^i, \ldots)$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן 2: $S_2 = (s_2^1, s_2^2, \ldots, s_2^i, \ldots)$

$\vdots$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן k: $S_k = (s_k^1, s_k^2, \ldots, s_k^i, \ldots)$

ווקטור אסטרטגיות: במשחק N שחקנים ווקטור אסטרטגיה הוא

$$s = (s_1, s_2, \ldots, s_N) \ .$$

כאשר s_1 אסטרטגיה של שחקן 1, s_2 אסטרטגיה של שחקן 2,..., ו-s_N אסטרטגיה של שחקן N.

שליטה

אסטרטגיה נשלטת חזק במשחק שני שחקנים:
נתון משחק שני שחקנים:
אומרים כי אסטרטגיה s_1 של שחקן 1 נשלטת חזק ע"י אסטרטגיה t_1 של שחקן 1 אם

$$u_1(s_1, s_2) < u(t_1, s_2)$$

לכל אסטרטגיה s_2 של שחקן 2.

אומרים כי אסטרטגיה s_2 של שחקן 2 נשלטת חזק ע"י אסטרטגיה t_2 של שחקן 2 אם

$$u_1(s_1, s_2) < u(s_1, t_2)$$

לכל אסטרטגיה s_1 של שחקן 1.

אסטרטגיה נשלטת חזק במשחק N שחקנים:
אסטרטגיה s_i של שחקן i נקראת **נשלטת חזק** אם קיימת אסטרטגיה t_i של שחקן i כך שלכל וקטור אסטרטגיות s_{-i} של שאר השחקנים מתקיים

$$u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(t_i, s_{-i}) \ .$$

תשובה טובה ביותר

תשובה טובה ביותר במשחק שני שחקנים:
אסטרטגיה $s_1^* \in S_1$ היא תשובה טובה ביותר לאסטרטגיה s_2 אם מתקיים:

$$u_1\left(s_1^*, s_2\right) \geq u_1\left(s_1, s_2\right) \qquad \forall s_1 \in S_1 \ .$$

אסטרטגיה $s_2^* \in S_2$ היא תשובה טובה ביותר לאסטרטגיה s_1 אם מתקיים:

$$u_2\left(s_1, s_2^*\right) \geq u_2\left(s_1, s_2\right) \qquad \forall s_2 \in S_2 \ .$$

תשובה טובה ביותר במשחק N שחקנים:
אסטרטגיה $s_i^* \in S_i$ של שחקן i היא תשובה טובה ביותר לאסטרטגיות $s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_N$ של שאר השחקנים אם מתקיים:

$$u_i\left(s_1, \ldots, s_i^*, \ldots, s_N\right) \geq u_i\left(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_N\right) \qquad \forall s_i \in S_i \ .$$

שיווי משקל נאש

שיווי משקל נאש במשחק שני שחקנים:
ווקטור אסטרטגיות $s^* = \left(s_1^*, s_2^*\right)$ הוא **שיווי משקל** אם מתקיים:

$$u_1\left(s_1^*, s_2^*\right) \geq u_1\left(s_1, s_2^*\right) \qquad \forall s_1 \in S_1 \ ,$$
$$u_2\left(s_1^*, s_2^*\right) \geq u_2\left(s_1^*, s_2\right) \qquad \forall s_2 \in S_2 \ .$$

שיווי משקל נאש במשחק N שחקנים:
ווקטור אסטרטגיות $s^* = \left(s_1^*, \ldots, s_N^*\right)$ הוא **שיווי משקל** אם מתקיים:

$$u_i\left(s_1^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_N^*\right) \geq u_i\left(s_1^*, \ldots, s_i, \ldots, s_N^*\right) \qquad \forall s_i \in S_i \ .$$

משפט השקילות שין אסטרטגיה השולטת חזק יחידה ושיווי משקל:
נתון משחק n שחקנים: $G = \left(\left(1, \ldots, N\right), \left(S_1, \ldots, S_n\right), \left(u_1, \ldots, u_n\right)\right)$.

אם הווקטור אסטרטגיות $s^* = \left(s_1^*, \ldots, s_n^*\right)$ שיווי משקל נאש, אז s^* הוא פתרון באסטרטגיות השולטות חזק.

אם ווקטור אסטרטגיות $s^* = \left(s_1^*, \ldots, s_n^*\right)$ הוא פתרון באסטרטגיות שולטות חזק אז s^* הוא השיווי משקל היחיד של המשחק.

ערך המקסמין

ערך מקסמין במשחק 2 שחקנים:
הערך המקסמין של שחקן 1 בעל פונקצית התשלום u_1 באסטרטגיות טהורות הוא:

$$\underline{\mathrm{v}}_1 = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) \ .$$

הערך המקסמין של שחקן 2 בעל פונקצית התשלום u_2 באסטרטגיות טהורות הוא:

$$\underline{\mathrm{v}}_2 = \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2) \ .$$

אסטרטגית מקסמין במשחק 2 שחקנים:
אסטרטגיה s_1^* המבטיחה לשחקן 1 ערך מקסמין $\underline{\mathrm{v}}_1$ נקראת **אסטרטגית מקסמין** ומקיימת:

$$u_1\left(s_1^*, s_2\right) \geq \underline{\mathrm{v}}_1 \qquad \forall s_2 \in S_2 \ .$$

אסטרטגיה s_2^* המבטיחה לשחקן 2 ערך מקסמין $\underline{\mathrm{v}}_2$ נקראת **אסטרטגית מקסמין** ומקיימת:

$$u_2\left(s_1, s_2^*\right) \geq \underline{\mathrm{v}}_2 \qquad \forall s_1 \in S_1 \ .$$

משחק שני שחקנים סכום אפס

משחק שני שחקנים סכום אפס:
במשחק 2 שחקנים סכום אפס, סכום של התשלומים של שחקן 1 ושחקן 2 שווה לאפס לכל וקטור אסטרטגיות (s_1, s_2):

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0 \ .$$

נסמן

$$u(s_1, s_2) := u_1(s_1, s_2) = -u_2(s_1, s_2)$$

כאשר $u(s_1, s_2)$ נקרא **פונקצית התשלום** של המשחק סכום אפס.

צורה אסטרטגית של משחק שני שחקנים סכום אפס:

$I \backslash II$	s_2^1	s_2^2	$\cdots$	s_2^n
s_1^1	$a, -a$	$b, -b$		$e, -e$
s_1^2	$c, -c$	$d, -d$		$f, -f$
$\vdots$				
s_1^m	$g, -g$	$h, -h$		$u, -u$

צורה אסטרטגית של משחק שני שחקנים סכום אפס במקרה פרטי שלכל שחקן יש 2 אסטרטגיות טהורות:

$I \backslash II$	L	R
T	$a, -a$	$b, -b$
B	$c, -c$	$d, -d$

ערך המקסמין וערך המינמקס במשחק שני שחקנים סכום אפס

ערך המקסמין של משחק שני שחקנים סכום אפס (באסטרטגיות טהורות):

$$\underline{\mathrm{v}} = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u.$$

ערך המינמקס של משחק שני שחקנים סכום אפס (באסטרטגיות טהורות):

$$\bar{\mathrm{v}} = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u.$$

אסטרטגית מקסמין של שחקן 1 היא אסטרטגיה המבטיחה לשחקן 1 את התשלום $\underline{\mathrm{v}}$.

אסטרטגית מינמקס של שחקן 2 היא אסטרטגיה המבטיחה לשחקן 2 את התשלום $\bar{\mathrm{v}}$.

משפט המקסמין:
לכל משחק שני שחקנים סכום אפס באסטרטגיות טהורות מתקיים

$$\underline{\mathrm{v}} \leq \bar{\mathrm{v}}.$$

במקרה ש- $\underline{\mathrm{v}} = \bar{\mathrm{v}}$ אומרים כי למשחק יש ערך שמסומן v ומוגדר

$$\mathrm{v} := \underline{\mathrm{v}} = \bar{\mathrm{v}}.$$

אסטרטגיות אופטימליות (s_1^*, s_2^*) הן האסטרטגיות של שחקנים 1 ו- 2 המבטיחות לשניהם הערך של המשחק v במקרה שלמשחק יש ערך.

דואפול

פונקצית המחיר של יחדיה אחת של המוצר:

$$P = a - Q = a - q_1 - q_2$$

כאשר a **פרמטר הביקוש**, q_1 הכמות של יצרן 1 ו- q_2 הכמות של יצרן 2.

פונקציות התשלום במשחק דואפול:

$$u_1 = q_1(a - q_1 - q_2) - c_1 q_1, \qquad u_2 = q_2(a - q_1 - q_2) - c_2 q_2,$$

כאשר c_1 פרמטר העלות לייצור יחידה אחת לשחקן 1 ו- c_2 פרמטר העלות לייצור יחידה אחת לשחקן 2.

אסטרטגיות מעורבות

הרחבה של משחק 2 שחקנים מאסטרטגיות טהורות לאסטרטגיות מעורבות:

נתון משחק שני שחקנים באסטרטגיות טהורות $G\left((I,II),(S_1,S_2),(u_1,u_2)\right)$,
כאשר S_1 ו- S_2 הן הקבוצות אסטרטגיות טהורות:

$$S_1 = \left(s_1^1, s_1^2, \ldots, s_1^m\right) \ , \qquad S_2 = \left(s_2^1, s_2^2, \ldots, s_2^n\right) \ .$$

ההרחבה של המשחק לאסטרטגיות מעורבות היא $\Gamma\left((I,II),(\Sigma_1,\Sigma_2),(U_1,U_2)\right)$,
כאן U_1 הוא תוחלת התשלום של שחקן 1, U_2 הוא תוחלת התשלום של שחקן 2, ו- Σ_1, Σ_2 הן הקבוצות אסטרטגיות טהורות:

$$\Sigma_1 = \left\{\sigma_1^1, \sigma_1^2, \ldots, \sigma_1^m\right\} \ , \qquad \Sigma_2 = \left\{\sigma_2^1, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_2^n\right\} \ , \qquad 0 \le \sigma_1^i \le 1, \ 0 \le \sigma_2^j \le 1 \ .$$

σ_1^i הוא ההסתברות ששחקן 1 ישחק לפי האסטרטגיה s_1^i,

σ_2^j הוא ההסתברות ששחקן 2 ישחק לפי האסטרטגיה s_2^j.

נסמן אסטרטגיה מעורבת מסויימת של שחקן 1 ב- x, ונסמן אסטרטגיה מעורבת מסויימת של שחקן 2 ב- y:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \ , \qquad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \ , \qquad 0 \le x_i \le 1, \ 0 \le y_j \le 1 \ .$$

x_i הוא ההסתברות ששחקן 1 ישחק לפי האסטרטגיה s_1^i,

y_j הוא ההסתברות ששחקן 2 ישחק לפי האסטרטגיה s_2^j.

$I \backslash II$	s_2^1	s_2^2	$\cdots$	s_2^n
s_1^1	(a,b)	(c,d)		$(\ , \ )$
s_1^2	(e,f)	(g,h)		$(\ , \ )$
$\vdots$				
s_1^m	$(\ , \ )$	$(\ , \ )$		$(\ , \ )$

$\rightarrow$

$I \backslash II$	$y_1(s_2^1)$	$y_2(s_2^2)$	$\cdots$	$y_m(s_2^n)$
$x_1(s_1^1)$	(a,b)	(c,d)		$(\ , \ )$
$x_2(s_1^2)$	(e,f)	(g,h)		$(\ , \ )$
$\vdots$				
$x_m(s_1^m)$	$(\ , \ )$	$(\ , \ )$		$(\ , \ )$

כאשר:

$$0 \le x_i \le 1 \ , \quad 0 \le y_j \le 1 \ , \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1 \ , \qquad y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1 \ .$$

הרחבה של משחק 2 שחקנים מאסטרטגיות טהורות לאסטרטגיות מעורבות במקרה פרטי שלכל שחקן יש 2 אסטרטגיות טהורות:

$I \backslash II$	L	R
T	a,b	c,d
B	e,f	g,h

$\rightarrow$

$I \backslash II$	$y(L)$	$(1-y)(R)$
$x(T)$	a,b	c,d
$(x-1)(B)$	e,f	g,h

שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות

שיווי משקל במשחק שני שחקנים באסטרטגיות מעוברות:

נתון משחק שני שחקנים באסטרטגיות מעורבות $\Gamma\left((I,II),(\Sigma_1,\Sigma_2),(U_1,U_2)\right)$.

וקטור אסטרטגיות $\sigma^* = \left(\sigma_1^*,\sigma_2^*\right)$ הוא שווי משקל אם מתקיים:

$$\begin{aligned} U_1\left(\sigma_1^*,\sigma_2^*\right) &\ge U_1\left(\sigma_1,\sigma_2^*\right) \qquad \forall \sigma_1 \in \Sigma_1 \ , \\ U_2\left(\sigma_1^*,\sigma_2^*\right) &\ge U_2\left(\sigma_1^*,\sigma_2\right) \qquad \forall \sigma_2 \in S_2 \ . \end{aligned}$$

שיווי משקל במשחק N שחקנים באסטרטגיות מעוברות:

נתון משחק שני שחקנים באסטרטגיות מעורבות $\Gamma\left(N,(\Sigma_1,\ldots,\Sigma_N),(U_1\ldots,U_N)\right)$.

ווקטור אסטרטגיות $\sigma^* = \left(\sigma_1^*,\ldots,\sigma_N^*\right)$ הוא שיווי משקל אם מתקיים:

$$U_i\left(\sigma_1^*,\ldots,\sigma_i^*,\ldots,\sigma_N^*\right) \ge U_i\left(\sigma_1^*,\ldots,\sigma_i,\ldots,\sigma_N^*\right) \qquad \forall \sigma_i \in \Sigma_i \ .$$

תוחלת השתלשום של שחקנים משחק שני שחקנים:

תוחלת השלום של שחקן 1 משחק באסטרטגיות מעורבות:

$$U_1\left(\sigma_1,\sigma_2\right) = \sum_{\substack{s_1\in S_1 \\ s_2 \in S_2}} \sigma_1\left(s_1\right)\sigma_2\left(s_2\right)u_1\left(s_1,s_2\right)$$

תוחלת השלום של שחקן 2 משחק באסטרטגיות מעורבות:

$$U_2\left(\sigma_1,\sigma_2\right) = \sum_{\substack{s_1\in S_1 \\ s_2 \in S_2}} \sigma_1\left(s_1\right)\sigma_2\left(s_2\right)u_2\left(s_1,s_2\right)$$

עקרון אדישות

עקרון אדישות למשחק שני שחקנים:

נתון משחק שני שחקנים באסטרטגיות מעורבות, שבו לכל שחקן יש שתי אסטרטגיות כמתואר בצורה האסטרטגית:

$I \backslash II$	$y(L)$	$(1-y)(R)$
$x(T)$	a,b	c,d
$(x-1)(B)$	e,f	g,h

תהי x^* אסטרטגיה מעורבת בשווי משקל של שחקן 1, ותהי y^* אסטרטגיה מעורבת בשווי משקל של שחקן 2.

אזי **עקרון האדישות** אומר

- אם שחקן 1 משחק לפי האסטרגיה המעורבת שווי משקל x^*, אזי שחקן 2 אדיש בין האסטרטגיה הטהורה L לבין האסטרטגיה הטהורה R:

$$u_2(x^*, y^*) = u_2(x^*, L) = u_2(x^*, R) \ ,$$

- ואם שחקן 2 משחק לפי האסטרגיה המעורבת שווי משקל y^*, אזי שחקן 1 אדיש בין האסטרטגיה הטהורה T לבין האסטרטגיה הטהורה B:

$$u_1(x^*, y^*) = u_1(T, y^*) = u_1(B, y^*) \ .$$

עקרון אדישות למשחק N שחקנים:

יהי σ^* שיווי משקל במשחק בצורה אסטרטגית, ותהיינה s_i ו- $\hat{s}_i$ שתי אסטרטגיות טהורות של שחקן i. אם $\sigma_i^*\left(s_i\right) > 0$ וכן $\sigma_i^*\left(\hat{s}_i\right) > 0$ אזי

$$U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) = U_i\left(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*\right) \ .$$

משפט של אסטרטגיות מעורבות:

יהי σ^* שיווי משקל במשחק בצורה אסטרטגית, ותהיינה s_i ו- $\hat{s}_i$ שתי אסטרטגיות טהורות של שחקן i.

1) אם $U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) < U_i\left(\sigma^*\right)$ אז $\sigma_i^*\left(s_i\right) = 0$.

2) אם $U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) < U_i\left(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*\right)$ אז $\sigma_i^*\left(s_i\right) = 0$.

3) אם $\sigma_i^*\left(s_i\right) > 0$ וכן $\sigma_i^*\left(\hat{s}_i\right) > 0$ אז $U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) = U_i\left(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*\right)$.

4) אם s_i נשלטת חזק על ידי $\hat{s}_i$ אז $\sigma_i^*\left(s_i\right) = 0$.

שווי משקל באסטרטגיות מעורבות למשחק שני שחקנים ריבועי

נתון משחק שני שחקנים ריבועי באסטרטגיות מעורבות.
תהי $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצת התשלומים של המשחק:

$$U = \begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & \cdots & (a_{1n}, b_{1n}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) & \cdots & (a_{2n}, b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1}, b_{n1}) & (a_{n2}, b_{n2}) & \cdots & (a_{nn}, b_{nn}) \end{pmatrix}$$

המטריצת התשלומים של שחקן 1 מסומנת $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, מטריצת התשלומים של שחקן 2 מסומנת $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, והן מוגדרות:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \ .$$

יהיו

- u_1^* התשלום לשחקן 1 בשווי משקל,

- u_2^* והתשלום לשחקן 2 בשווי משקל.
- $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ האסטרטגיה המעורבת של שחקן 1 בשווי משקל,
- $y^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*)$ והאסטרטגיה המעורבת של שחקן 2 בשווי משקל.

אזי

$$u_1^* = \frac{1}{e^t A^{-1} e} \ , \qquad u_2^* = \frac{1}{e^t B^{-1} e} \ , \qquad x^* = \frac{e^t B^{-1}}{e^t B^{-1} e} \ , \qquad y^* = \frac{A^{-1} e}{e^t A^{-1} e} \ .$$

שווי משקל באסטרטגיות מעורבות למשחק שני שחקנים ריבועי סכום אפס

נתון משחק שני שחקנים ריבועי סכום אפס באסטרטגיות מעורבות. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצת התשלומים. יהיו:

- u^* התשלום של המשחק בשווי משקל,
- $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ האסטרטגיה המעורבת של שחקן 1 בשווי משקל,
- $y^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*)$ והאסטרטגיה המעורבת של שחקן 2 בשווי משקל.

אזי

$$u^* = \frac{1}{e^t A^{-1} e} \ , \qquad x^* = \frac{e^t A^{-1}}{e^t A^{-1} e} \ , \qquad y^* = \frac{A^{-1} e}{e^t A^{-1} e} \ .$$