חישוביות וסיבוכיות

מועד א'

פתרון לדוגמא

ד"ר יוחאי טוויטו, ד"ר ירמיהו מילר, .

סמסטר א, תשפ"ה'

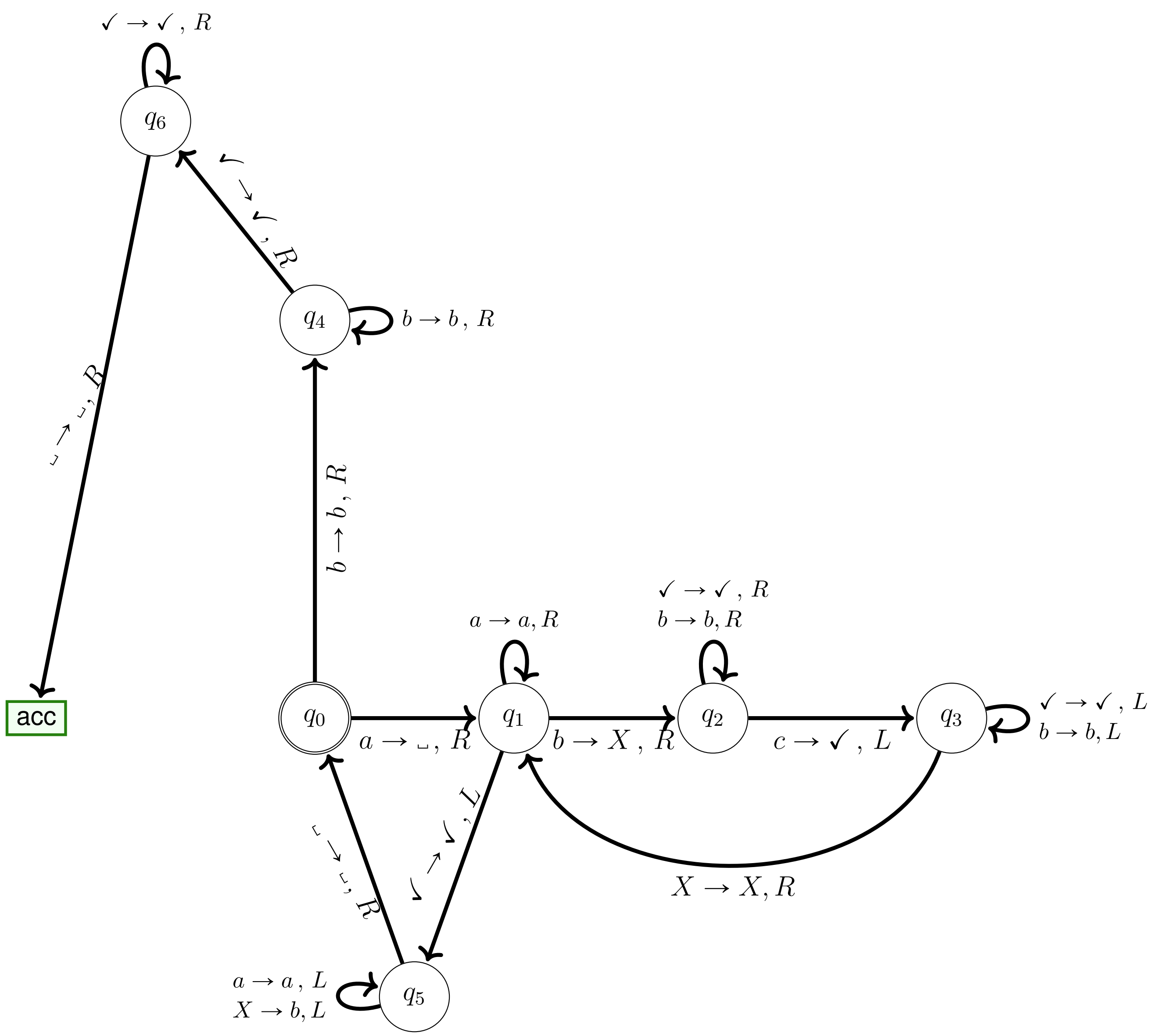
מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הינן פתרונות לדוגמא. ניתן לפתור חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *

פתרונות

שאלה 1:   מכונת טיורינג 20 נקודות

סעיף א'



פתרונות

סעיף ב' הפונקציה שאותה המכונה מחשבת היא הפונקציה:

$$f(x) = x \mod 3 \ .$$

כלומר, המכונה מחשבת את שארית החלוקה ב- 3 של המספר האונרי הנתון כקלט.

סעיף ג' הפונקציה שאותה המכונה מחשבת היא הפונקציה:

$$f\left(1^i \# 1^j\right) = 1^{|i-j|} \ .$$

כלומר, המכונה מחשבת את הערך המוחלט של ההפרש בין שני מספרים $1^i, 1^j$, הנתונים בקלט.
הסבר:

$$q_0\ 1\#1 \ \vdash\ q_1\#1 \ \vdash_*\ \#1q_1 \ \vdash\ \#q_2 1 \ \vdash_*\ q_{\text{back}} \sqcup \# \ \vdash\ q_0\# \ \vdash\ \text{acc}\ .$$

לכן $f(1\#1) = 0$.

$$q_0\ 11\#1 \ \vdash\ q_1\ 1\#1 \ \vdash_*\ 1\#1q_1 \ \vdash\ 1\#q_2 1 \ \vdash_*\ q_{\text{back}} \sqcup 1\# \ \vdash\ q_0\ 1\#$$

$$\vdash\ q1\ \# \ \vdash\ \#q_1 \sqcup \ \vdash\ q_2\ \# \sqcup \ \vdash\ q_4 \sqcup 1 \ \vdash\ \sqcup\ \text{acc}\ 1$$

לכן $f(11\#1) = 1$.

נסתכל על קלט כללי $1^i\#1^j$ כאשר $i \geqslant j$:

$$q_0\ 1^i\#1^j \ \vdash_*\ 1^{i-1}\#q_1 1^j \ \vdash_*\ 1^{i-1}\#1^j q_1 \sqcup \ \vdash\ 1^{i-1}\#1^{j-1}q_2 1 \ \vdash\ 1^{i-1}\#1^{j-2}q_{\text{back}}\ 1 \sqcup$$

$$\vdash_*\ q_{\text{back}} \sqcup 1^{i-1}\#1^{j-1} \ \vdash\ q_0\ 1^{i-1}\#1^{j-1}$$

$$\vdots$$

$$\vdash_*\ q_0\ 1^{i-j}\#\sqcup \ \vdash_*\ 1^{i-j-1}\#q_1\sqcup \ \vdash\ 1^{i-j-1}q_2\# \ \vdash\ 1^{i-j-2}q_4\ 11 \ \vdash_*\ q_4 \sqcup 1^{i-j}$$

$$\vdash\ \text{acc}\ 1^{i-j}$$

לכן

$$f(1^i\#1^j) = 1^{i-j}\ , \qquad i \geqslant j\ . \qquad (*1)$$

נסתכל על קלט כללי $1^i\#1^j$ כאשר $i < j$:

$$q_0\ 1^i\#1^j \vdash_* 1^{i-1}\#q_1 1^j \vdash_* 1^{i-1}\#1^j q_1 \sqcup \vdash 1^{i-1}\#1^{j-1}q_2 1 \vdash 1^{i-1}\#1^{j-2}q_{\text{back}}\ 1 \sqcup$$

$$\vdash_* q_{\text{back}} \sqcup 1^{i-1}\#1^{j-1} \vdash q_0\ 1^{i-1}\#1^{j-1}$$

$$\vdots$$

$$\vdash_* q_0\ \#1^{j-i} \sqcup \vdash \text{acc}\ 1^{j-i} \sqcup$$

לכן

$$f(1^i\#1^j) = 1^{j-i}\ , \qquad i < j\ . \qquad (*2)$$

המשוואות (*1) ו- (*2) אומרות ש:

$$f(1^i\#1^j) = 1^{|i-j|}\ . \qquad (*3)$$

שאלה 2: וריאציות על מכונת טיורינג 20 נקודות

שאלה 3: התזה של צ'רץ' טיורינג 20 נקודות

שאלה 4: אי-כריעות 20 נקודות

נתון: השפה $L_{M_1\cup M_2}$ מוגדרת:

$$L_{M_1\cup M_2} = \left\{\langle M_1, M_2, w\rangle \ \middle|\ w \in L(M_1) \cup L(M_2)\right\}$$

ז"א $L_{M_1\cup M_2}$ השפה שכוללת כל המחרוזות $\langle M_1, M_2, w\rangle$ כאשר w שייך לאחת השפות $L(M_1)$ או $L(M_2)$ לפחות.

צריך להוכיח: קיימת רדוקציה התאמה בין השפה A_{TM} לשפה $L_{M_1\cup M_2}$, כלומר

$$A_{TM} \leqslant L_{M_1\cup M_2}\ .$$

הגדרת הרדוקציה:

פתרונות

בהינתן $\langle M,w\rangle$ קלט של A_{TM} ניצור $\langle M_1,M_2,w\rangle$ קלט של $L_{M_1\cup M_2}$ כך שמתקיים התנאי הבא:

$$\begin{aligned} \langle M,w\rangle \in A_{TM} &\quad\Rightarrow\quad \langle M_1,M_2,w\rangle \in L_{M_1\cup M_2}\ , \\ \langle M,w\rangle \notin A_{TM} &\quad\Rightarrow\quad \langle M_1,M_2,w\rangle \notin L_{M_1\cup M_2}\ . \end{aligned}$$

נגדיר את פונקציית הרוקציה באופן הבא:

$M_1 =$ "על כל קלט x $M_1 \leftarrow$ rej."

$M_2 =$ "על כל קלט x:

- מריצה M על w ועונה כמוה.

<u>נכונות הרדוקציה:</u>

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

אם $\langle M,w\rangle \in A_{TM}$

$\Leftarrow$ $w\in L(M)$

$\Leftarrow$ $w\in L(M_2)$.

$\Leftarrow$ $w\in L(M_2)\cup\varnothing$

$\Leftarrow$ $w\in L(M_2)\cup L(M_1)$

$\Leftarrow$ $\langle M_1,M_2,w\rangle \in L_{M_1\cup M_2}$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

אם $\langle M,w\rangle \notin A_{TM}$

$\Leftarrow$ $w\notin L(M)$.

$\Leftarrow$ $w\notin L(M_2)$.

$\Leftarrow$ $w\notin L(M_2)$ וגם $w\notin L(M_1)$ (כי השפה של M_1 היא $\varnothing$).

$\Leftarrow$ $\langle M_1,M_2,w\rangle \notin L_{M_1\cup M_2}$.

שאלה 5: סיבוכיות זמן 20 נקודות

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג:

פתרונות

פונקצית הרדוקציה:

נגדיר פונקצית הרדוקציה f שבהינתן זוג $\langle G,k\rangle \in IS$, (הקלט של IS), יוצרת $\langle G',k'\rangle \in VC$, (הקלט של VC), אשר מקיימת את התנאי:

$$\langle G,k\rangle \in IS \quad \Leftrightarrow \quad \langle G',k'\rangle \in VC \ . \qquad (*2)$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

1) בהינתן הגרף $G=(V,E)$, אז הגרף G' הוא אותו גרף $G=(V,E)$.

2) $k'=|V|-k$.

נכונות הרדוקציה

כעת נוכיח שמתקיים: $\langle G',k'\rangle \in VC \quad \Leftrightarrow \quad \langle G,k\rangle \in IS$.

כיוון $\Leftarrow$

בהינתן גרף $G=(V,E)$ ושלם k.
נניח כי $\langle G,k\rangle \in IS$.

$\Leftarrow$ G מכיל קבוצה בלתי תלוייה S בגודל k לפחות: $|S|\geqslant k$.

$\Leftarrow$ אם $u_1,u_2\in S$ אז $(u_1,u_2)\notin E$.
כלומר, כל שני קדקודים ב- S לא מחוברים בצלע ב- G.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:
אם $(u_1,u_2)\in E$ אז $u_1\notin S$ או $u_2\notin S$.

$\Leftarrow$ אם $(u_1,u_2)\in E$ אז $u_1\in V\backslash S$ או $u_2\in V\backslash S$.

$\Leftarrow$ התת-קבוצה $V\backslash S$ היא כיסוי קודקודים של G.
$|S|\geqslant k$ ו- $|V\backslash S|=|V|-S$ לכן $|V\backslash S|\leqslant |V|-k$.

$\Leftarrow$ $G'=G$ מכיל כיסוי קודקודים U בגודל $k'=\leqslant |V|-k$ לכל היותר.

$\Leftarrow$ $\langle G',k'\rangle \in VC$.

כיוון $\Rightarrow$

בהינתן גרף G' ושלם k'.
נניח כי $\langle G',k'\rangle \in VC$.

פתרונות

$\Leftarrow$ $G' = (V, E)$ מכיל כיסוי קדקודים U בגודל k' לכל היותר: $|U| \leqslant k'$.

$\Leftarrow$ אם $(u_1, u_2) \in E$ אז $u_1 \in U$ או $u_2 \in U$.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם $u_1 \notin U$ וגם $u_2 \notin U$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

$\Leftarrow$ השלילה הלוגית של הגרירה הזאת:

אם $u_1 \in V \backslash U$ וגם $u_2 \in V \backslash U$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.

$\Leftarrow$ התת-קבוצה $S = V \backslash U$ היא קבוצה בלתי תלויה.

$|S| = |V| - |U|$ ו- $|U| \leqslant k'$ אז $|S| \geqslant |V| - k'$.

$\Leftarrow$ $G' = G$ מכיל קבוצה בלתי תלויה S בגודל $k = |V| - k'$ לפחות.

$\Leftarrow$ $\langle G, k \rangle \in IS$.