'

שעור 6
מקסמין באסטרטגיות מעורבות

דוגמה 6.1 (ערך המקסמין של משחק סכום אפס באסטרטגיות מעורבות)

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס.

$I \backslash II$	L	R
T	4	1
B	2	3

א) מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות טהורות.

ב) מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

א)

$I \backslash II$	L	R	$\min\limits_{s_2\in S_2}$
T	4	1	1
B	2	3	2
$\max\limits_{s_1\in S_1}$	4	3	$2,3$

ערך המקסמין של שחקן 1:

$$\underline{\mathrm{v}} = \max_{s_1\in\{T,B\}} \min_{s_2\in\{L,R\}} = 2 \ .$$

ז"א שחקן 1 יכול להבטיח שיקבל לפחות 2 אם הוא ישחק B.

ערך המינמקס של שחקן 2:

$$\bar{\mathrm{v}} = \min_{s_2\in\{L,R\}} \max_{s_1\in\{T,B\}} = 3 \ .$$

ז"א שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר 3 אם הוא ישחק R.

$$\bar{\mathrm{v}} = 3 > 2 = \underline{\mathrm{v}} \ .$$

למשחק אין ערך.

ב) כאשר לשחקן 1 יש שתי אסטרטגיות טהורות T ו- B, נזהה את האסטרטגיה המעורבת

$$[x(T)\ ,\ (1-x)(B)]$$

עם ההסתברות x שבה נבחרת האסטרטגיה הטהורה T.

באופן דומה, כאשר יש לשחקן 2 יש שתי אסטרטגיות טהורות L ו- R, נזהה את האסטרטגיה המעורבת

$$[y(L)\ ,\ (1-y)(R)]$$

עם ההסתברות y שבה נבחרת האסטרטגיה הטהורה L.

לכל זוג אסטרטגיות מעורבות התשלום ניתן על ידי פונקצית התועלת

$$U(x,y) = 4xy + 1x(1-y) + 2(1-x)y + 3(1-x)(1-y) = 4xy - 2x - y + 3\ .$$

ראשית נחשב לכל $x \in [0,1]$ את

$$\min_{y\in[0,1]} U(x,y) = \min_{y\in[0,1]} (4xy - 2x - y + 3) = \min_{y\in[0,1]} (y(4x-1) - 2x + 3)$$

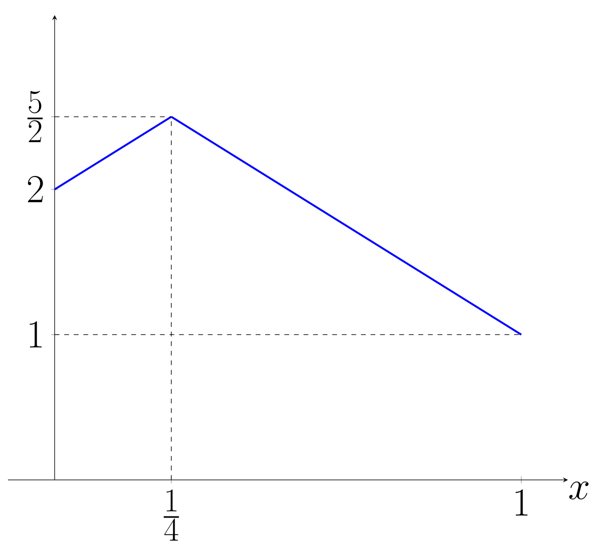
עבור x קבוע זוהי פונקציה לינארית ב- y, ולכן הנקודה שבה המינימום מתקבל נקבעת לפי השיפוע $4x-1$.

אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה והמינימום מתקבל ב- $y=0$.

אם השיפוע שלילי הפונקציה יורדת והמינימום מתקבל ב- $y=1$.

אם השיפוע 0 הפונקציה קבועה וכל הנקודות הן נקודות מינימום. לכן

$$\min_{y\in[0,1]} u(x,y) = \begin{cases} 2x+2 & x \leq \frac{1}{4}\ , \\ -2x+3 & x \geq \frac{1}{4}\ , \end{cases}$$

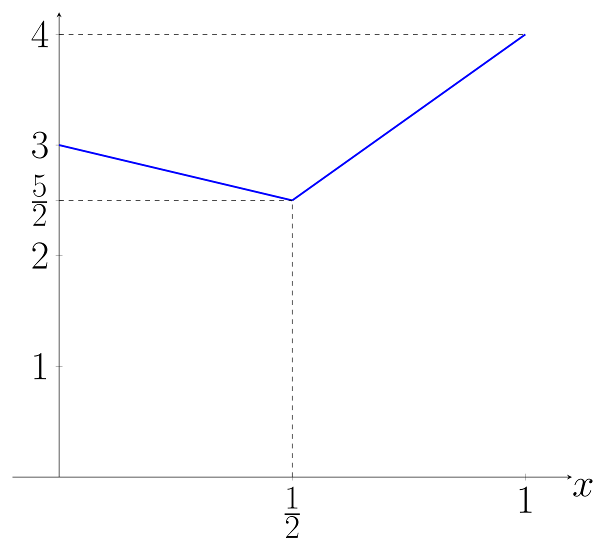


לפונקציה זו של x יש מקסימום יחיד ב- $x=\frac{1}{4}$ וערכו $\frac{5}{2}$. לכן

$$\underline{\mathrm{v}} = \max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} U(x,y) = \frac{5}{2}\ .$$

באופן דומה נחשב:

$$\begin{aligned}\max_{x\in[0,1]} U(x,y) &= \max_{x\in[0,1]} [4xy-2x-y+3]\\ &= \max_{x\in[0,1]} [x(4y-2)-y+3]\\ &= \begin{cases} -y+3 & y\leq \frac{1}{2}\ , \\ 3y+1 & y\geq \frac{1}{2}\ , \end{cases}\end{aligned}$$



לפונקציה זו של y יש מינימום יחיד ב- $y=\frac{1}{2}$ וערכו $\frac{5}{2}$. לכן

$$\bar{\text{v}} = \min_{y\in[0,1]} \max_{x\in[0,1]} U(x,y) = \frac{5}{2}\ .$$

כלומר, למשחק יש ערך $\text{v}=\underline{\text{v}}=\bar{\text{v}}=\frac{5}{2}$, והאסטרטגיות האופטימליות הן $y^*=\frac{1}{2},\ x^*=\frac{1}{4}$.

מכיוון ש- x^* ו- y^* הן אסטרטגיות האופטימליות היחידת של השחקנים, אז (x^*,y^*) הוא שיווי המשקל נאש היחיד במשחק.

■

דוגמה 6.2 (מקסמין של משחק שני שחקנים באסטרטגיות מעורבות)

נתון משחק שני שחקנים (שאינו סכום אפס) בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

I \ II	L	R
T	$1,-1$	$0,2$
B	$0,1$	$2,0$

מצאו התשלום מקסמין והתשלום מינמקס באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

ראשית נחשב את התשלום מקסמין של השחקנים.

קבוצות האסטרטגיות של שחקן 1:

$$\Sigma_1 = \{[x(T), (1-x)(B)] \ , \ x \in [0,1]\} \ .$$

המזוהה עם הקטע $[0,1]$.

קבוצות האסטרטגיות של שחקן 2:

$$\Sigma_2 \{[y(L), (1-y)(R)] \ , \ y \in [0,1]\} \ .$$

פונקצית התועלת של שחקן 1:

$$U_1(x,y) = xy + 2(1-x)(1-y) = 3xy - 2x - 2y + 2 \ .$$

פונקצית התועלת של שחקן 2:

$$U_2(x,y) = -xy + 2x(1-y) + y(1-x) = -4xy + 2x + y \ .$$

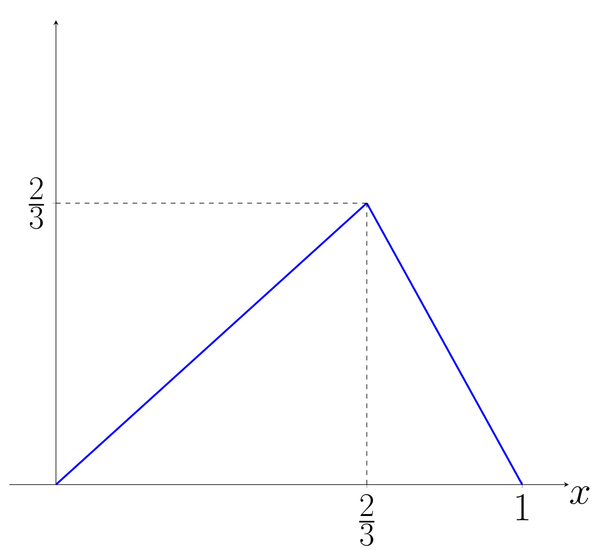
התשלום מקסמין של שחקן 1 הינו:

$$\underline{\mathrm{v}}_1 = \max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} U_1(x,y) \ .$$

התשלום מקסמין של שחקן 2 הינו:

$$\underline{\mathrm{v}}_2 = \max_{y\in[0,1]} \min_{x\in[0,1]} U_2(x,y) \ .$$

$$\begin{aligned} \min_{y\in[0,1]} U_1(x,y) &= \min_{y\in[0,1]} 3xy - 2x - 2y + 2 \\ &= \min_{y\in[0,1]} y\,(3x-2) - 2x + 2 \\ &= \begin{cases} x & x \leq \frac{2}{3} \\ & \\ -2x+2 & x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \end{aligned}$$



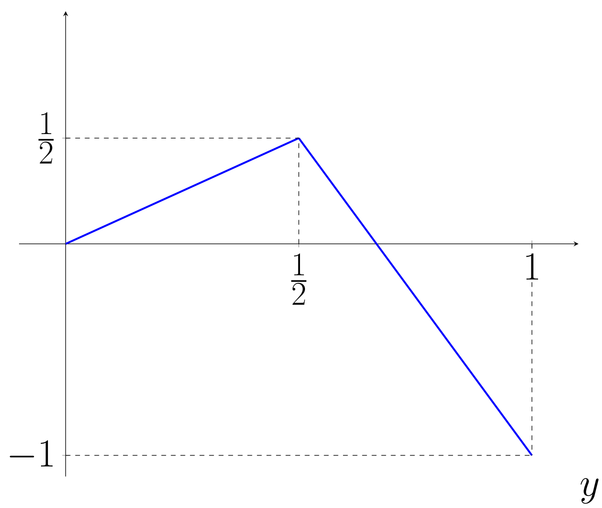
לפונקציה זו יש מקסימום ב- $x=\frac{2}{3}$. לפיכך

$$\underline{\mathrm{v}}_1=\max_{x\in[0,1]}\min_{y\in[0,1]}U_1(x,y)=\frac{2}{3}\ .$$

התשלום מקסמין של שחקן 2 הינו:

$$\underline{\mathrm{v}}_2=\max_{y\in[0,1]}\min_{x\in[0,1]}U_2(x,y)\ .$$

$$\begin{aligned}\min_{x\in[0,1]}U_2(x,y)&=\min_{x\in[0,1]}3xy-2x-2y+2\\&=\min_{x\in[0,1]}x\,(2-4y)+y\\&=\begin{cases}y & y\leq\frac{1}{2}\\ \\ 2-3y & y\geq\frac{1}{2}\end{cases}\end{aligned}$$



לפונקציה זו יש מקסימום ב- $y=\frac{1}{2}$. לפיכך

$$\underline{\mathrm{v}}_2=\max_{x\in[0,1]}\min_{y\in[0,1]}U_2(x,y)=\frac{1}{2}\ .$$

■

דוגמה 6.3 (ערך ואסטרטגיה אופטימלית של משחק סכום אפס באסטרטגיות מעורבות)

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

$I \backslash II$	L	R
T	5	0
B	3	4

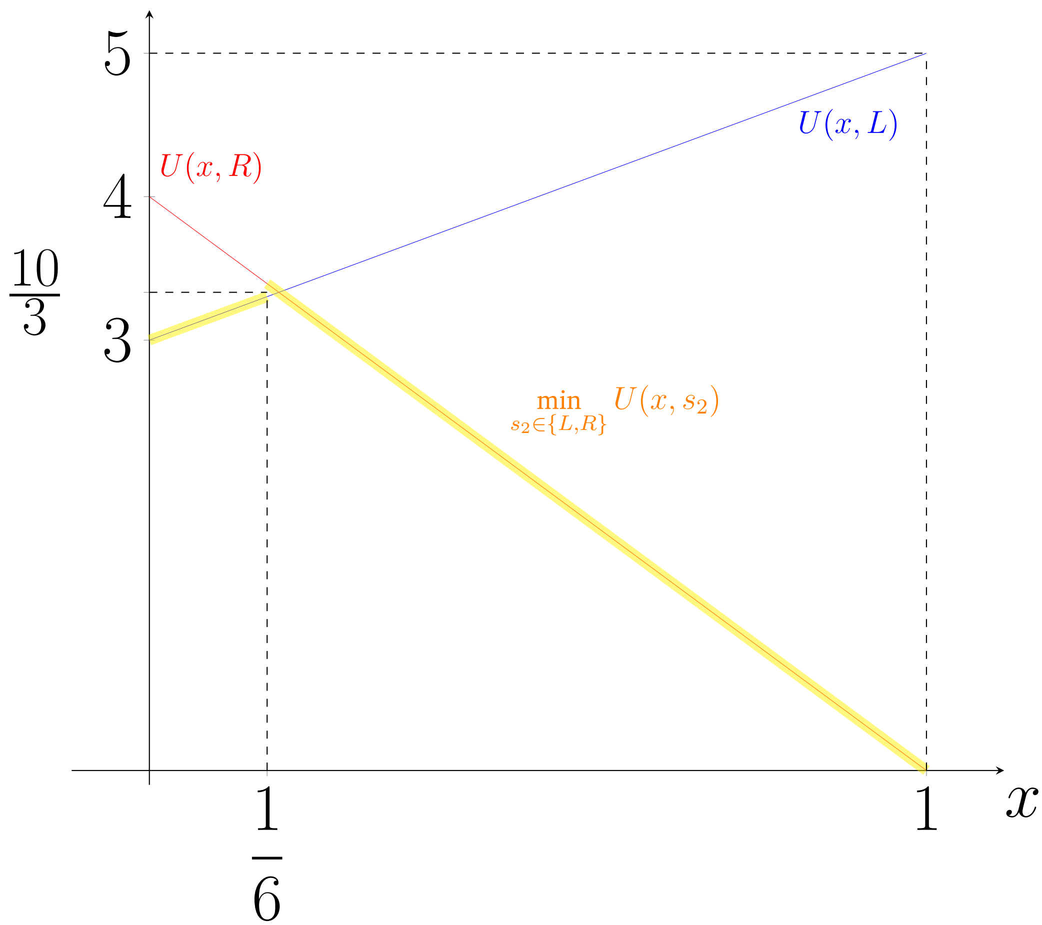
מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

תחילה נחשב את המקסמין של שחקן 1. אם שחקן 1 משחק את האסטרטגיה המעורבת $[x(T),(1-x)(B)]$ התשלום שלו כפונקציה של x תלוי על האסטרטגיה של שחקן 2:

- אם שחקן 2 משחק L אז $U(x,L)=5x+3(1-x)=2x+3.$
- אם שחקן 2 משחק R אז $U(x,R)=4(1-x)=-4x+4.$

הגרף למטה מראה את הגרפים של הפונקציות האלו. הקו של $\min\limits_{s_2\in\{L,R\}} U(x,s_2)$ מראה את התשלום המינימלי ששחקן 1 יקבל אם הוא משחק x. הקו הזה נקרא **מעטפת תחתונה** של התשלומים.



הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות שווה ל- $\max\limits_{x\in[0,1]}\min\limits_{s_2\in\{L,R\}} U(x,s_2)$, אשר מתקבל בנקודת מקסימום של המעטפת התחתונה. המקסימום מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של שתי הפונקציות, כלומר בנקודה

$$2x+3=-4x+4 \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{1}{6}\ .$$

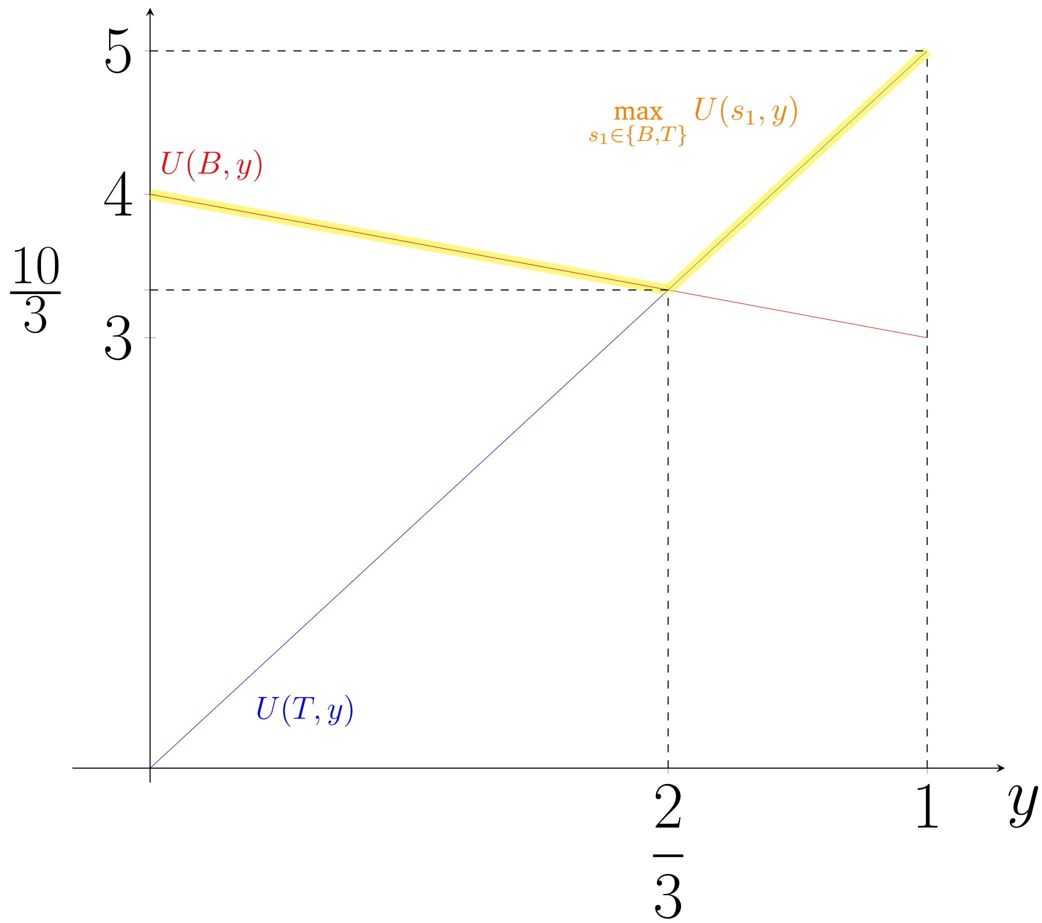
מכאן האסטרטגיה האופטילית של שחקן 1 היא $x^*=\left(\frac{1}{6}(T),\frac{5}{6}(B)\right)$. הערך של המשחק שווה לגובה של הנקודת חיתוך: $\mathrm{v}=\frac{10}{3}$.

כעת נחשב את המינמקס של שחקן 2. אם שחקן 2 משחק את האסטרטגיה המעורבת $[y(L),(1-y)(R)]$ התשלום שלו כפונקציה של y תלוי על האסטרטגיה של שחקן 1:

- אם שחקן 1 משחק T אז $U(T,y)=5y.$

- אם שחקן 1 משחק B אז $U(B,y)=4-y.$

הגרף למטה מראה את הגרפים של הפונקציות האלו. הקו של $\max\limits_{s_1\in\{B,T\}} U(s_1,y)$ מראה את התשלום המקסימלי ששחקן 2 יקבל אם הוא משחק y. הקו הזה נקרא **מעטפת עליונה** של התשלומים.



הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות שווה ל- $\min\limits_{y\in[0,1]} \max\limits_{s_1\in\{B,T\}} U(s_1,y)$, אשר מתקבל בנקודת מינימום של המעטפת העליונה. המינימום מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של שתי הפונקציות, כלומר בנקודה

$$5y=4-y \qquad \Rightarrow \qquad y=\frac{2}{3} \ .$$

מכאן האסטרטגיה האופטילית של שחקן 2 היא $y^*=\left(\frac{2}{3}(L),\frac{1}{3}(R)\right)$. הערך של המשחק שווה לגובה של הנקודת חיתוך: $\mathrm{v}=\frac{10}{3}$. ■

דוגמה 6.4 ()

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

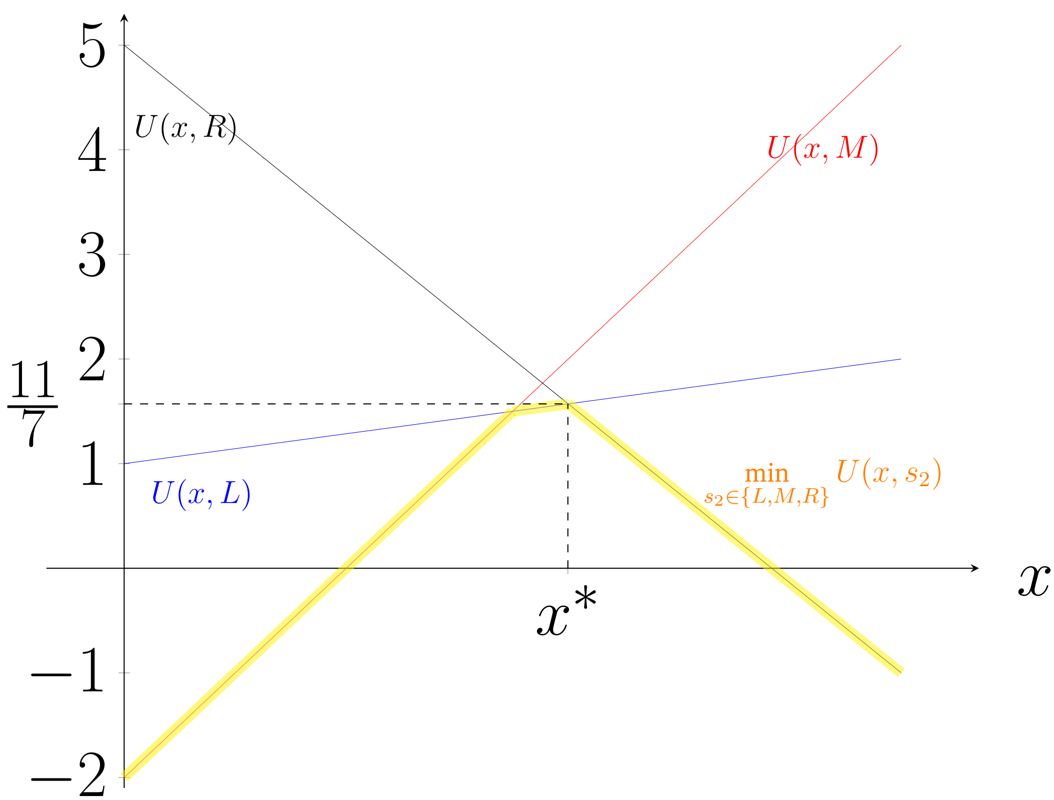
$I \backslash II$	L	M	R
T	2	5	-1
B	1	-2	5

מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:
נחשב את המקסמין של שחקן 1. אם שחקן 1 משחק את האסטרטגיה המעורבת $[x(T),(1-x)(B)]$ התשלום שלו כפונקציה של x תלוי על האסטרטגיה של שחקן 2:

- אם שחקן 2 משחק L אז $U(x,L)=2x+(1-x)=1+x.$
- אם שחקן 2 משחק M אז $U(x,M)=5x-2(1-x)=7x-2.$
- אם שחקן 2 משחק R אז $U(x,R)=-x+5(1-x)=-6x+5.$

התרשים למטה מתאר את הגרפים של שלוש פונקציות אלו.



המקסימום של המעטפת התחתונה מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של $U(x,L)$ ו- $U(x,R)$:

$$1+x \stackrel{!}{=} -6x+5 \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{4}{7}$$

■