תרגילים: שפות כריעות ושפות קבילות

שאלה 1 בהינתן השפה L. השפה L^* מוגדרת:

$$L^* = \{\varepsilon\} \cup \left\{ w = w_1 w_2 \cdots w_k \;\middle|\; \forall\, 1 \leq i \leq k \;,\; w_i \in L \right\}$$

א) בהינתן מכונת טיורינג M המקבלת שפה L.
בנו מכונט טיורינג אי דטרמיניסטית M^* המקבלת את השפה L^*.

ב) בהינתן מכונת טיורינג M המכריעה שפה L.
בנו מכונט טיורינג אי דטרמיניסטית M^* המכריעה את השפה L^*.

שאלה 2 האם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה.
לכל מכונת טיורינג M, אם $L(M) \in Co\,RE$ אזי $L(M) \in R$.

שאלה 3 האם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה.
אם $L_1 \cap L_2 \in R$ אזי $L_1 \in RE$ או $L_2 \in Co\,RE$.

שאלה 4 הוכיחו כי לכל 3 שפות L_1, L_2, L_3 כך ש-

1. $L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \Sigma^*$.
2. $L_i \cap L_j = \emptyset$ לכל $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 3$.
3. $L_i \in RE$ לכל $1 \leq i \leq 3$. הוכיחו כי $L_i \in R$ לכל $1 \leq i \leq 3$.

שאלה 5 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה.
לכל שתי שפות L_1 ו- L_2, אם $L_1 \cap L_2 \in RE$ וגם $L_1 \cup L_2 \in RE$ אזי $L_1 \in RE$ או $L_2 \in RE$.

שאלה 6 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה.
$L_{\Sigma^*} \backslash L_{\mathrm{d}} \in RE$

שאלה 7 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה.
אם $L = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; L(M) \in RE \right\}$ ו- $L' = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; L(M) \in Co\,RE \right\}$ אזי $L' = L$.

שאלה 8 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה.
לכל מספר n מתקיים $\langle n, n+1 \rangle \in RELPRIME$.

שאלה 9 נתונה השפה הבאה: $L = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; |L(M)| \geq 3 \right\}$. כלומר L מכילה קידודים של מכונות שמקבלות לפחות 3 מילים שונות. הוכיחו כי $L \in RE$.

שאלה 10 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לשאלה פתוחה:
לכל שתי שפות L_1 ו- L_2, אם $L_2 \backslash L_1 \in RE$ אזי $L_1 \in RE$ או $L_2 \in RE$.

שאלה 11 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לשאלה פתוחה:
אם $L = \{\langle M \rangle \mid L(M) \notin RE\}$ אזי $L \notin R$.

שאלה 12 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה:
לכל שלוש שפות L_1, L_2, L_3 אם $L_1 \leq L_2$ וגם $L_1 \leq L_3$ אזי $L_1 \leq (L_2 \cap L_3)$.

תשובות

שאלה 1

א) תהי M מכונת טיורנג שמזהה את L.
נבנה מכונת טיורינג M^* אי-דטרמיניסטית המקבלת את L^*.

תאור הבנייה

$M^* =$ על קלט w:

1. אם $w = \varepsilon$ אז M^* מקבלת.
2. אחרת M^* בוחרת באופן אי דטרמיניסטי חלוקה של w ל- $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$ כאשר $k \in \mathbb{N}^+$.
3. לכל $1 \leq i \leq k$:
   - M^* מריצה את M על w_i ועונה כמוה.
     - אם M קיבלה חוזרים לשלב 3.
4. אם M קיבלה את כל המחרוזות $\{w_i\}$ אזי M^* מקבלת.

M^* - ניתנת לחישוב - מספר הפירוקים האפשריים ל- w הוא סופי ולכן הניחוש הוא סופי, לפיכך כתיבה על הסרט והרצת M ניתן לחישוב.

הוכחת נכונות: $L^* = L\left(M^*\right)$

כיוון $\Leftarrow$

נניח כי $w \in L\left(M^*\right)$

$\Leftarrow$ קיימת חלוקה $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) כך שעבור כל w_i ($1 \leq i \leq k$) M קיבלה.

$\Leftarrow$ כל $w_i \in L(M)$. בפרט, $L(M) = L$.

$\Leftarrow$ $w_i \in L$

$\Leftarrow$ $w = w_1 w_2 \ldots w_k \in L^*$

$\Leftarrow$ $L\left(M^*\right) \subseteq L^*$.

כיוון $\Rightarrow$

נניח כי $w \in L^*$

$\Leftarrow$ קיימת חלוקה $w = w_1 w_2 \cdots w_k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) כך שכל $w_i \in L$ ($1 \leq i \leq k$)

$\Leftarrow$ M^* תנחש את הפירוק הזה עבור w

$\Leftarrow$ המכונה M תקבל כל w_i כזה

$\Leftarrow$ M^* תקבל את w

$\Leftarrow$ $w \in L(M^*)$

$\Leftarrow$ $L^* \subseteq L\left(M^*\right)$.

לכן, מאחר ומצאנו ש- $L\left(M^*\right) \subseteq L^*$ ו- $L^* \subseteq L\left(M^*\right)$ אזי $L\left(M^*\right) = L^*$.

ב) תהי M מכונת טיורנג שמכריעה את L.
נבנה מכונת טיורינג M^* אי-דטרמיניסטית המכריעה את L^*.

תאור הבנייה

$M^* =$ על קלט w:

1. אם $w = \varepsilon$ אז M^* מקבלת.
2. אחרת M^* בוחרת באופן אי דטרמיניסטי חלוקה של w ל- $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$ כאשר $k \in \mathbb{N}^+$.
3. לכל $1 \leq i \leq k$:
   - M^* מריצה את M על w_i.
     - אם M דחתה אז M^* דוחה.
     - אחרת אם M קיבלה חוזרים לשלב 3).
4. אם M קיבלה את כל המחרוזות $\{w_i\}$ אזי M^* מקבלת.

M^* - ניתנת לחישוב - מספר הפירוקים האפשריים ל- w הוא סופי ולכן הניחוש הוא סופי, לפיכך כתיבה על הסרט והרצת M ניתן לחישוב.

הוכחת נכונות: $L^* = L\left(M^*\right)$

כיוון $\Leftarrow$

נניח כי $w \in L\left(M^*\right)$

$\Leftarrow$ קיימת חלוקה $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) כך שעבור כל w_i ($1 \leq i \leq k$) M קיבלה.

$\Leftarrow$ כל $w_i \in L(M)$. בפרט, $L(M) = L$.

$\Leftarrow$ $w_i \in L$

$\Leftarrow$ $w = w_1 w_2 \ldots w_k \in L^*$

$\Leftarrow$ $L\left(M^*\right) \subseteq L^*$.

כיוון $\Rightarrow$

נניח כי $w \in L^*$

$\Leftarrow$ קיימת חלוקה $w = w_1 w_2 \cdots w_k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) כך שכל $w_i \in L$ ($1 \leq i \leq k$)

$\Leftarrow$ M^* תנחש את הפירוק הזה עבור w

$\Leftarrow$ המכונה M תקבל כל w_i כזה

$\Leftarrow$ M^* תקבל את w

$\Leftarrow$ $w \in L(M^*)$

$\Leftarrow$ $L^* \subseteq L\left(M^*\right)$.

לכן, מאחר ומצאנו ש- $L\left(M^*\right) \subseteq L^*$ ו- $L^* \subseteq L\left(M^*\right)$ אזי $L\left(M^*\right) = L^*$.

שאלה 2 הטענה נכונה:

לכל לכל מכונת טיורינג מתקיים, לפי ההגדרה: $L(M) \in RE$.
לכן, אם $L(M) \in Co\,RE$ אזי

$$L(M) \in RE \cap Co\,RE = R \ .$$

שאלה 3 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

יהי $L_1 = L_{\Sigma^*} \notin RE$ כאשר

$$L_{\Sigma^*} = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; L(M) = \Sigma^* \right\}$$

ותהי $L_2 = \overline{L_{\Sigma^*}}$.

בורר ש- $L_1 \cap L_2 = \emptyset \in R$.

מצד שני, $L_1 = L_{\Sigma^*} \notin RE$ וגם $L_1 \notin Co\,RE$,

ו- $L_2 = \overline{L_{\Sigma^*}} \notin Co\,RE$ וגם $L_2 \notin RE$.

שאלה 4

שיטה 1

מכיוון ש- $L_i \in RE$ קיימת מכונת טיורינג M_i המקבלת את L_i לכל $1 \leq i \leq 3$.
נבנה מכונת טיורינג M_i^* המכריעה את L_i לכל $1 \leq i \leq 3$ באופן הבא.

נראה את הבנייה עבור M_1^*, באופן דומה אפשר לבנות את M_2^* ו- M_3^*.

$M_1^* =$ על קלט w:

- מריצה במקביל את שלושת המכונות M_1, M_2, M_3.
  - אם M_1 קיבלה $\Leftarrow$ M_1^* מקבלת.
  - אם M_2 קיבלה $\Leftarrow$ M_2^* דוחה.
  - אם M_3 קיבלה $\Leftarrow$ M_3^* דוחה.

נכונות הבנייה:

נראה כי M_1^* מכרעיה את L_1.

אם $w \in L_1$ $\Leftarrow$ M_1 מקבלת את w $\Leftarrow$ M_1^* מקבלת את w.

אם $w \notin L_1$ $\Leftarrow$ $w \in M_2 \cup M_3$ $\Leftarrow$ M_2 מקבלת את w או M_3 מקבלת את w $\Leftarrow$ M_1^* דוחה את w.

שיטה 2

נשים לב כי $L_2 \cup L_3 = \bar{L}_1$ ואם $L_2 \in RE$ וגם $L_3 \in RE$ אזי לפי סגירות RE תחת איחוד, גם $\bar{L}_1 \in RE$.

אזי קיבלנו ש- $L_1 \in RE$ וגם $\bar{L}_1 \in RE$, ולכן ניתן להוכיח כי $L_1 \in R$.

כנ"ל עבור L_2 ו- L_3.

שאלה 5 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

נתונה השפה

$$L_{\Sigma^*} = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; L(M) = \Sigma^* \right\}$$

ונתונה השפה

$$\overline{L_{\Sigma^*}} = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; L(M) \neq \Sigma^* \right\} \cup \{ x \neq \langle M \rangle \} \ .$$

הוכחנו בכיתה כי:

א) $L_{\Sigma^*} \notin RE$

ב) $L_{\Sigma^*} \notin R$

ג) $\overline{L_{\Sigma^*}} \notin RE$

תהיינה L_1, L_2 השפות הבאות:

$$L_1 = L_{\Sigma^*} \ , \qquad L_2 = \overline{L_{\Sigma^*}} \ .$$

מכאן

$$L_1 \cap L_2 = \emptyset \in RE \ , \qquad L_1 \cup L_2 = \Sigma^* \in RE \ ,$$

אבל $L_1 \notin RE$ וגם $L_2 \notin RE$.

שאלה 6 הטענה לא נכונה.

השפה L_{Σ^*} היא

$$L_{\Sigma^*} = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; L(M) = \Sigma^* \right\}$$

והשפה L_{d} היא

$$L_{\mathrm{d}} = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; \langle M \rangle \notin L(M) \right\} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{L_{\mathrm{d}}} = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; \langle M \rangle \in L(M) \right\} \cup \{ x \neq \langle M \rangle \}$$

לכן

$$L_{\Sigma^*} \backslash L_{\mathrm{d}} = L_{\Sigma^*} \cap \overline{L_{\mathrm{d}}} = L_{\Sigma^*} \notin RE \ .$$

שאלה 7 הטענה לא נכונה.

המ"ט אוניברסלית U מקבלת כקלט זוג, קידוד של מ"ט $\langle M \rangle$ וקידוד של מילה $\langle w \rangle$, ומבצעת סימוציה של ריצה של M על w ועונה בהתאם.

עבור המכונה האוניברסלית U, מתקיים:

$$L(U) = L_{\mathrm{acc}} \in RE \ .$$

ולכן $\langle U \rangle \in L$, אבל $\langle U \rangle \notin L'$, מכיוון ש- $L(U) = L_{\mathrm{acc}} \notin Co\,RE$.

שאלה 8 הטענה נכונה.

$$\text{gcd}\,(n, n+1) = \text{gcd}\,(n+1, 1) = 1$$

ולכן $\langle n, n+1 \rangle \in RELPRIME$.

שאלה 9 נבנה מ"ט אי-דטרמיניסטית M_L המקבלת את L.

$M_L =$ על קלט x:

(1) בודקת האם $x = \langle M \rangle$. אם לא דוחה.

(2) בוחרת באופן אי-דטרמיניסטי 3 מילים w_1, w_2, w_3.

- מריצה את M על w_1.
  - אם M דוחה $\Leftarrow M_L$ דוחה.
- מריצה את M על w_2.
  - אם M דוחה $\Leftarrow M_L$ דוחה.
- מריצה את M על w_3 ועונה כמוה.

נכונות:

אם $x \in L$

$\Leftarrow$ $x = \langle M \rangle$ ו- $|L(M)| \geq 3$

$\Leftarrow$ קיימת 3 מילים w_1, w_2, w_3 המתקבלות ב- M

$\Leftarrow$ קיימת ריצה של M_L בה תבחר w_1, w_2, w_3 ותריץ עליהם את M

$\Leftarrow$ M_L מקבלת את x.

אם $x \notin L \Leftarrow$ שני מקרים:

- $x \neq \langle M \rangle \Leftarrow M_L$ דוחה את L.
- $x = \langle M \rangle$ ו- $|L(M)| < 3$

$\Leftarrow$ לכל 3 מילים w_1, w_2, w_3 לפחות אחת מהן לא מתקבלת ב- M

$\Leftarrow$ בכל ריצה של M_L בה היא תבחר 3 מילים w_1, w_2, w_3, לפחות אחת הריצות של M על מילים אלו תדחה או לא תעצור

$\Leftarrow$ בכל ריצה של M_L על x, M_L תדחה או לא תעצור

$\Leftarrow$ M_L לא מקבלת את x.

שאלה 10 הטענה לא נכונה: תהיינה

$$L_1 = L_2 = L_{\text{d}}$$

כאשר $L_{\text{d}} = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; \langle M \rangle \notin L(M) \right\}$.
$L_2 \backslash L_1 = \emptyset \in RE$ אבל, כפי שהוכחנו בכיתה, $L_{\text{d}} \notin RE$, ז"א $L_1 \notin RE$ וגם $L_2 \notin RE$.

שאלה 11 הטענה לא נכונה.

$$L=\left\{\langle M\rangle \;\middle|\; L(M)\notin RE\right\}=\emptyset\in R\ .$$

שאלה 12

שיטה 1

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$L_1=L_{\text{acc}}\ ,\qquad L_2=L_{\text{halt}}\ ,\qquad L_3=L_{\Sigma^*}\ .$$

תזכורת: $L_{\Sigma^*}=\left\{\langle M\rangle \;\middle|\; L(M)=\Sigma^*\right\}$.
הוכחנו כי $L_{\text{acc}}\leq L_{\text{halt}}$ וגם $L_{\text{acc}}\leq L_{\Sigma^*}$.
לכן לפי הבחירה של השפות L_1,L_2,L_3, מתקיים $L_1\leq L_2$ וגם $L_1\leq L_3$.
אבל מכיוון ש- $L_{\text{halt}}\cap L_{\Sigma^*}=\emptyset$, ז"א $L_2\cap L_3=\emptyset$, אזי לא קיימת רדוקציה $L_{\text{acc}}\leq\left(L_{\text{halt}}\cap L_{\Sigma^*}\right)$.

שיטה 2

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$L_1=L_{\text{halt}}\ ,\qquad L_2=L_{\text{acc}}\ ,\qquad L_3=\overline{L_{\text{acc}}}\ .$$

מתקיים $L_{\text{halt}}\leq L_{\text{acc}}$ לכן $L_1\leq L_2$.

בנוסף $L_{\text{halt}}\leq\overline{L_{\text{acc}}}$ לכן $L_1\leq L_3$.

מצד שני: $L_2\cap L_3=\emptyset$ ולכן $L_1\nleq L_3$ (אחרת $L_{\text{halt}}\leq\emptyset$ ומכיוון ש- $\emptyset\in R$ אזי $L_{\text{halt}}\in R$ בסתירה לכך ש- $L_{\text{halt}}\notin R$).