

חדו"א 1

סמסטר א' תשפ"ד

עבודה עצמית 1

שאלות שמסומנות עם * מיועדות להעשרה בלבד ולא על הסילבוס.

שאלה 1

נתונה הפונקציה

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

(א) בנו את גרף הפונקציה

(ב) הוכיחו כי $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$.

שאלה 2

נגדיר פונקציה $y = f(x)$ ($x \geq 0$) כמות המספרים הראשונים הקטנים או שווים ל- x . בנה את גרף הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 20$.

שאלה 3 שרטטו את הגרפים של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & x < 2 \\ -(x - 3)^2 & x \geq 2 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3}{2x^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ \cos x & x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{ג})$$

$$i(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ -x + 2 & x > 0 \end{cases} \quad (\text{ד})$$

שאלה 4

נתונה פונקציה $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$. מצאו את

(א) $\frac{1}{f(x)}$

(ב) $f\left(\frac{1}{x}\right)$

(ג) $f(x) + 1$

(ד) $f(x+1)$

(ה) $f(-x)$

(ו) $f(0)$

שאלה 5

(א) הגדר את הפונקציות

(1) $\max(x, y)$

(2) $\min(x, y)$

(3) $|x|$

(ב) פתרו את המשוואות

(1) $|x| < 1$

(2) $|x| > 1$

(3) $0 < |x-2| < 3$

(4) $|x-3| < 2$

(ג) הוכיחו כי

$$\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$$

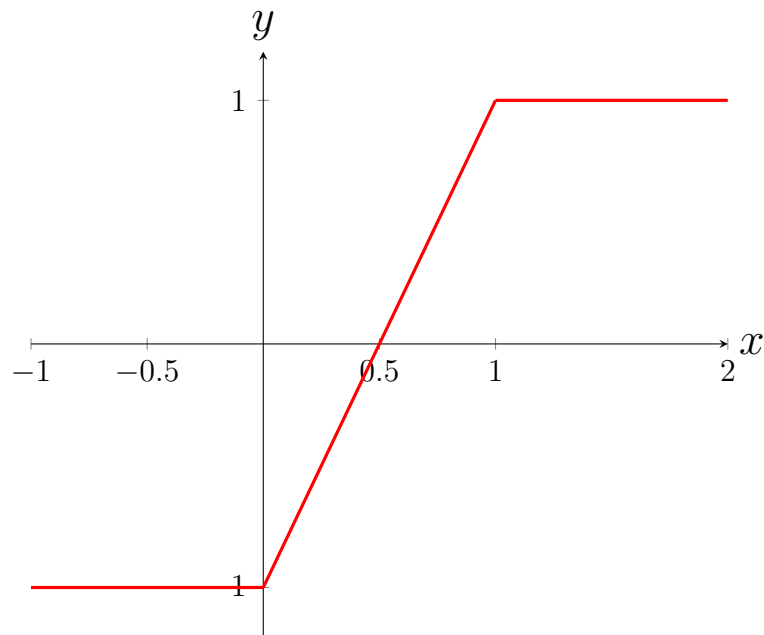
(ד) הוכיחו כי

$$\max(x, y) - \min(x, y) = |x - y|$$

(ה) הבעו את $\max(x, y)$ ו- $\min(x, y)$ בעזרת הפונקציה ערך מוחלט.

שאלה 6

באיור נתון גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בקטע $[-1, 2]$.



ציירו את הגרפים של הפונקציות

(א) $f(x+1)$

(ב) $f(x-1)$

(ג) $f(x)+1$

(ד) $f(x)-1$

(ה) $f(-x)$

(ו) $-f(x)$

(ז) $f(2x)$

(ח) $f\left(\frac{x}{2}\right)$

(ט) $\frac{f(x)}{2}$

(י) $f(|x|)$

(יא) $|f(x)|$

(יב) $f(\max(x, 0))$

(יג) $f(\min(x, 0))$

(יד) $\max(f(x), 0)$

שאלה 7 נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$. שרטטו הפונקציות הבאות:

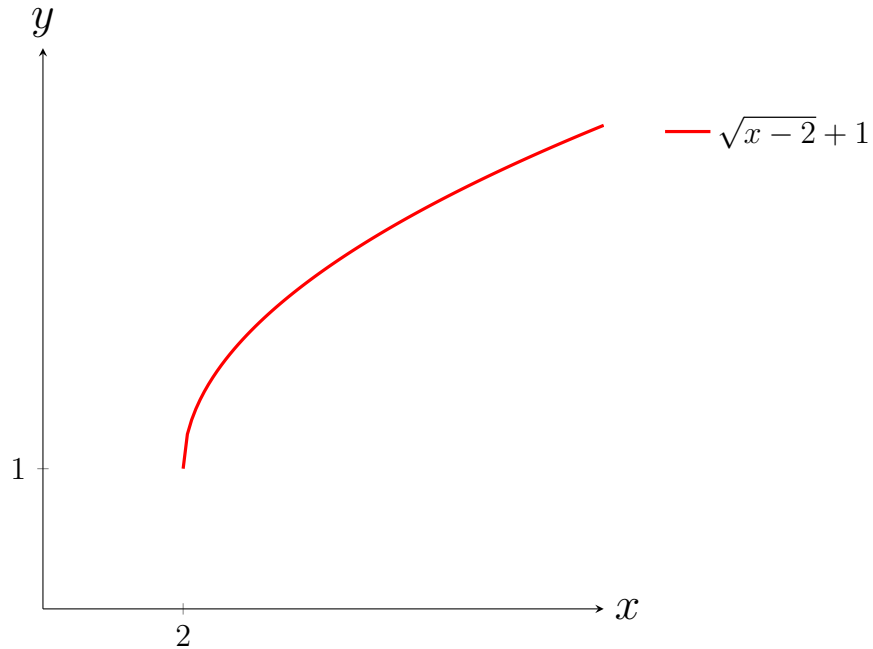
- (א) $f(x)$
- (ב) $f(x + 2)$
- (ג) $f(x) + 4$
- (ד) $f(x + 3)$
- (ה) $f(|x| + 3)$
- (ו) $f(x + 3) + 4$
- (ז) $f(x) + 8$
- (ח) $f(x - 5)$
- (ט) $f(|x| - 5)$
- (י) $f(x - 5) + 8$
- (יא) $f(-x)$
- (יב) $-f(x)$

שאלה 8 נתונה הפונקציה $f(x) = x^3$. שרטטו הפונקציות הבאות:

- (א) $f(x)$
- (ב) $|f(x)|$
- (ג) $f(x + 2)$
- (ד) $|f(x + 2)|$
- (ה) $f(x - 3)$
- (ו) $f(x + 3)$
- (ז) $f(|x| + 3)$
- (ח) $f(x + 3) + 4$
- (ט) $f(x) + 8$
- (י) $f(x - 5)$
- (יא) $f(|x| - 5)$
- (יב) $f(x - 5) + 8$
- (יג) $f(-x)$

יד) $-f(x)$

שאלה 9 באיור נתון גרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$ המוגדרת בקטע $[2, \infty)$.



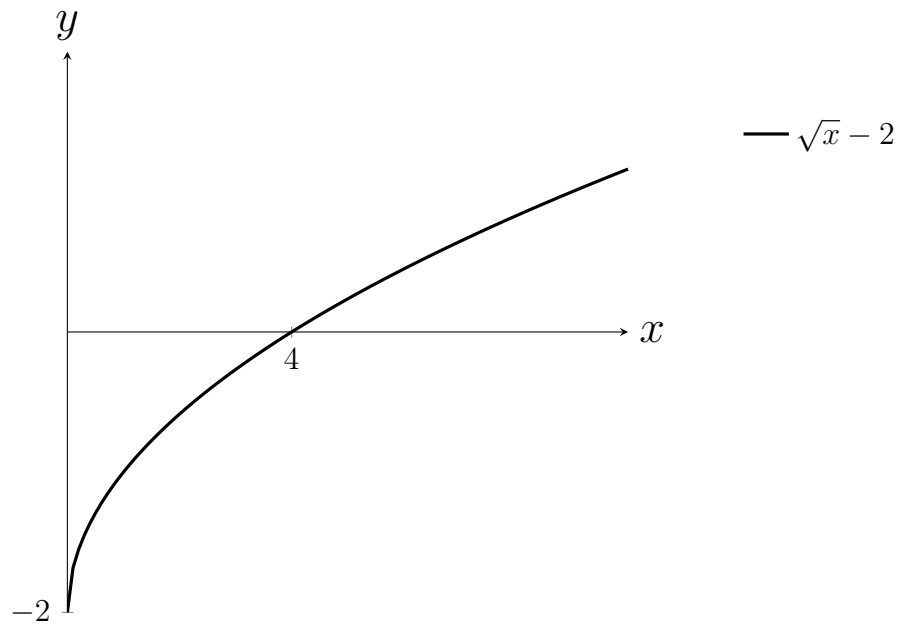
ציירו את הגרפים של הפונקציות

א) $f(x-2)$

ב) $f(x+2)$

ג) $f(x) - 1$

שאלה 10 באיור נתון גרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{x} - 2$ המוגדרת בקטע $[0, \infty)$.



ציירו את הגרפים של הפונקציות

(א) $f(-x)$

(ב) $f(|x|)$

(ג) $|f(x)|$

(ד) $-|f(x)|$

(ה) $f(-|x|)$

שאלה 11 * הוכיחו את הטענות הבאות ע"י אינדוקציה מתמטית או בכל דרך אחרת:

(א) $2^n \geq n^2$ לכל $n \geq 4$.

(ב) $2^n > 2n + 1$ לכל מספר טבעי $n \geq 3$.

(ג) $3^n > 3n + 1$ לכל מספר טבעי $n \geq 2$.

(ד) $(1 + a)^n \geq 1 + na$ לכל מספר טבעי n ולכל מספר ממשי $a \geq -1$.

(ה) $2^n > n^3$ לכל מספר טבעי $n \geq 10$.

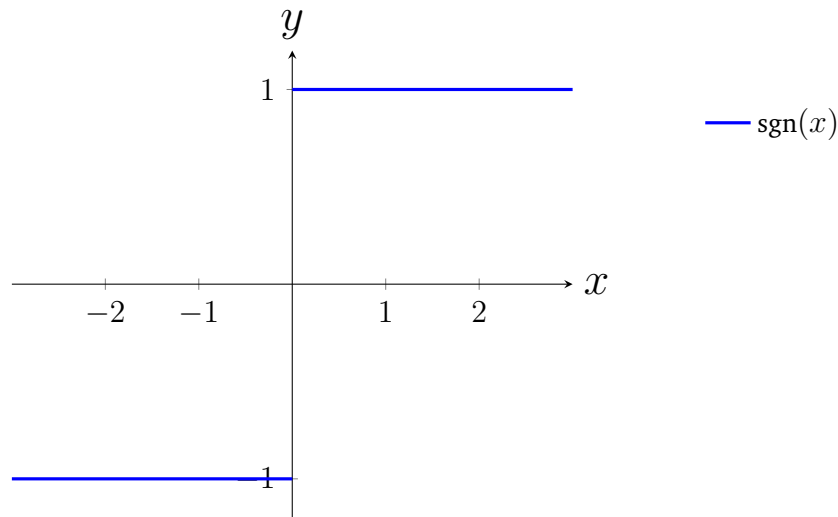
(ו) $2^n > n^4$ לכל מספר טבעי $n \geq 17$.

שאלה 12 * הוכיחו כי לכל x ממשי וחיוני, מתקיים $\frac{x+1}{x} > 1$.

פתרונות

שאלה 1

(א)



(ב) בתחום $x > 0$, נשים לב כי $|x| = x$ ו- $\operatorname{sgn}(x) = 1$, לכן $\operatorname{sgn}(x) \cdot x = 1 \cdot x = x$. לפיכך

$$|x| = x = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$$

כשאר $x > 0$.

בתחום $x < 0$, נשים לב כי $|x| = -x$ ו- $\operatorname{sgn}(x) = -1$, לכן $\operatorname{sgn}(x) \cdot x = -1 \cdot x = -x$. לפיכך

$$|x| = -x = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$$

כשאר $x < 0$.

ב- $x = 0$, $|x| = 0 = \operatorname{sgn}(x) \cdot x$. בסה"כ

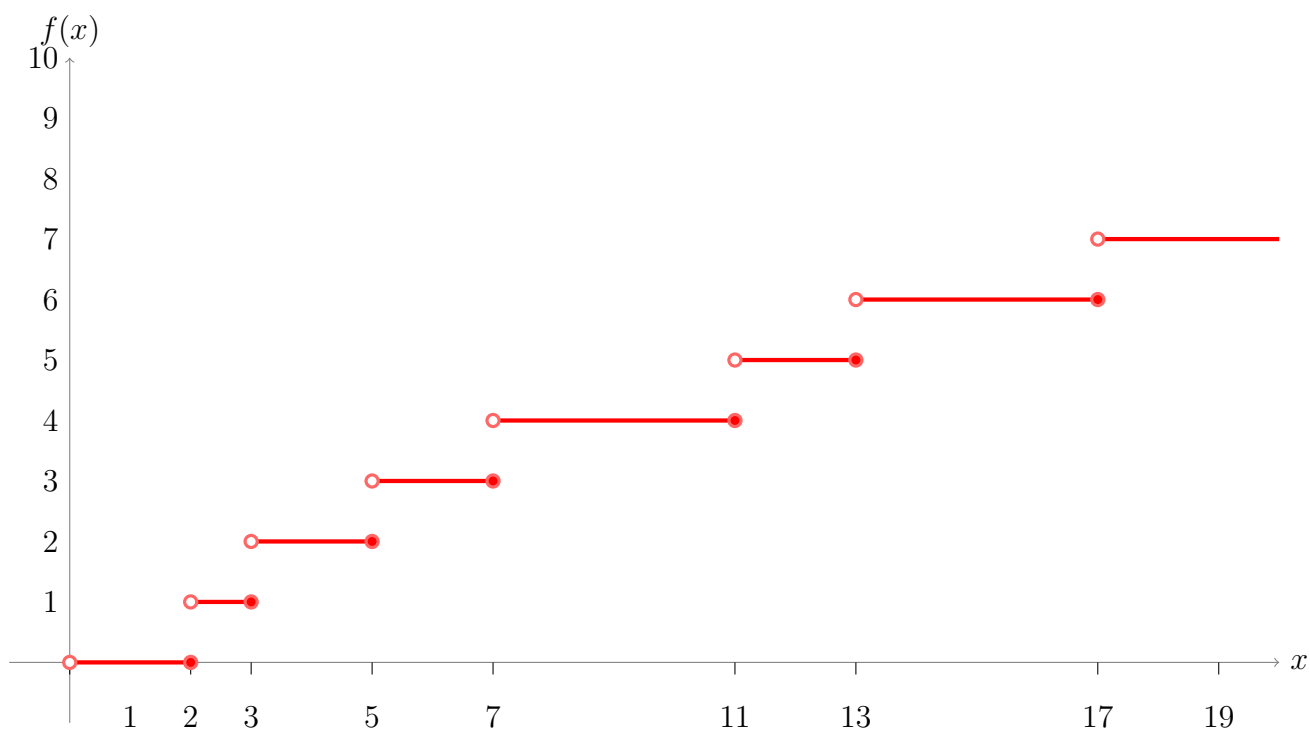
$$|x| = \operatorname{sgn}(x) \cdot x$$

לכל x .

שאלה 2

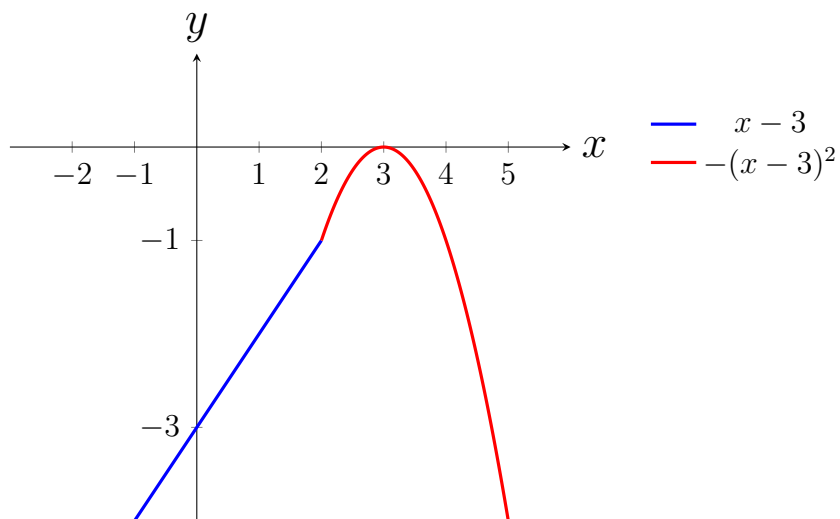
מספר ראשוני הוא מספר גדול מ-1 שמתחלק בעצמו או שמתחלק ב-1 בלבד.

| x | $f(x)$ | מספרים ראשוניים קטן או שווה ל- x |
|-------------|--------|------------------------------------|
| $x = 0$ | 0 | $\{\}$ |
| $x < 1$ | 0 | $\{\}$ |
| $x = 1$ | 0 | $\{\}$ |
| $x \leq 2$ | 1 | $\{2\}$ |
| $x \leq 3$ | 2 | $\{2, 3\}$ |
| $x \leq 4$ | 2 | $\{2, 3\}$ |
| $x \leq 5$ | 3 | $\{2, 3, 5\}$ |
| $x \leq 7$ | 4 | $\{2, 3, 5, 7\}$ |
| $x \leq 11$ | 5 | $\{2, 3, 5, 7, 11\}$ |
| $x \leq 13$ | 6 | $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ |
| $x \leq 17$ | 7 | $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ |
| $x \leq 19$ | 6 | $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ |

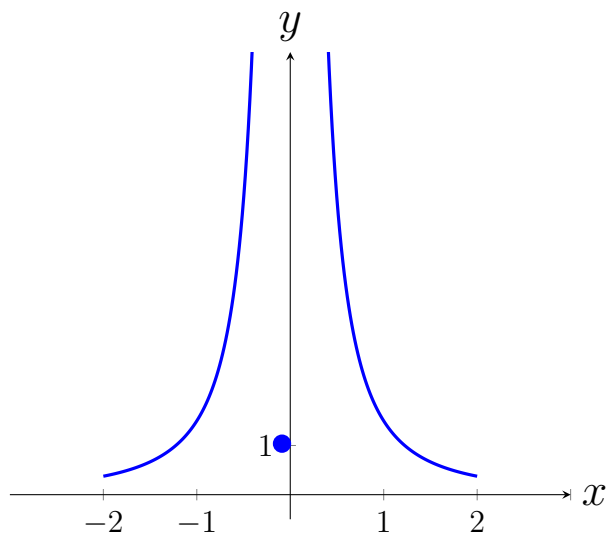


שאלה 3

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & x < 2 \\ -(x - 3)^2 & x \geq 2 \end{cases} \quad (\text{א})$$

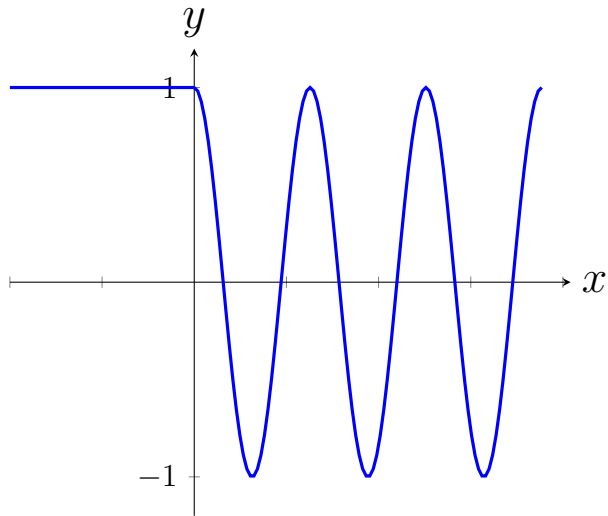


$$g(x) = \begin{cases} \frac{3}{2x^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad \text{ב)}$$



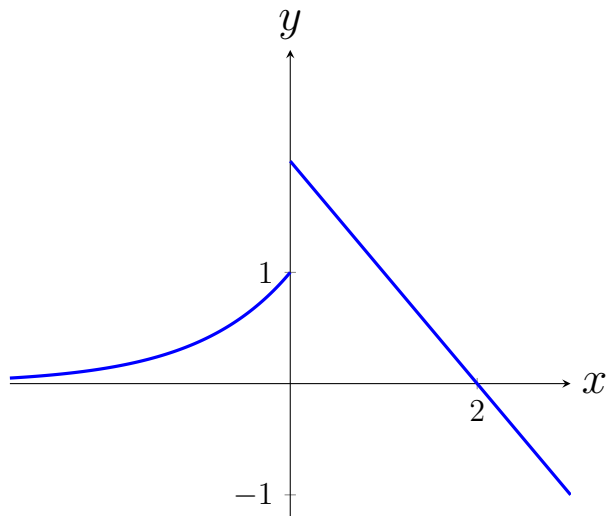
$$g(x)$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ \cos x & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ג)}$$



— $h(x)$

$$i(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ -x + 2 & x > 0 \end{cases} \quad (\text{ד})$$



— $i(x)$

שאלה 4

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1+x}{1-x} \quad (\text{א})$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x+1} \quad (\text{ב})$$

$$f(x) + 1 = \frac{2}{x+1} \quad (\text{ג})$$

$$f(x+1) = \frac{1-(x+1)}{1+x+1} = \frac{-x}{2+x} \quad (\text{ד})$$

$$f(-x) = \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{f(x)} \quad (\text{ה})$$

ו) $f(0) = 1$

שאלה 5

(א) (1)

$$\max(x, y) = \begin{cases} x & x \geq y \\ y & y \geq x \end{cases}.$$

(2)

$$\min(x, y) = \begin{cases} y & x \geq y \\ x & y \geq x \end{cases}.$$

(ב) (1)

$$|x| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < x < 1$$

(2)

$$|x| > 1 \quad \Rightarrow \quad \{x < -1\} \cup \{x > 1\}$$

(3)

$$\begin{aligned} 0 < |x - 2| < 3 \\ \text{ז"א } 0 < x - 2 < 3 \text{ או } -3 < x - 2 < 0 \\ \text{ז"א } 2 < x < 5 \text{ או } -1 < x < 2 \\ \text{ז"א} \end{aligned}$$

$$\{-1 < x < 2\} \cup \{2 < x < 5\}.$$

(ג)

מצב 1: $x = y$

$$\max(x, y) = x = y,$$

$$\min(x, y) = x = y,$$

לכן

$$\max(x, y) + \min(x, y) = x + y.$$

מצב 2: $x > y$

$$\max(x, y) = x,$$

$$\min(x, y) = y,$$

לכן

$$\max(x, y) + \min(x, y) = x + y.$$

מצב 3: $x < y$

$$\max(x, y) = y,$$

$$\min(x, y) = x,$$

לכן

$$\max(x, y) + \min(x, y) = y + x = x + y .$$

(ד) מצב 1: $x = y$

$$\max(x, y) = x = y,$$

$$\min(x, y) = x = y,$$

$$\max(x, y) - \min(x, y) = x - x = 0,$$

וגם $|x - y| = 0$, לפיכך

$$\max(x, y) - \min(x, y) = |x - y| .$$

מצב 2: $x > y$

$$\max(x, y) = x,$$

$$\min(x, y) = y,$$

לכן

$$\max(x, y) - \min(x, y) = x - y ,$$

וגם $|x - y| = x - y$, לפיכך

$$\max(x, y) - \min(x, y) = |x - y| .$$

מצב 3: $x < y$

$$\max(x, y) = y,$$

$$\min(x, y) = x,$$

לכן

$$\max(x, y) - \min(x, y) = y - x ,$$

וגם $|x - y| = y - x$, לפיכך

$$\max(x, y) - \min(x, y) = |x - y| .$$

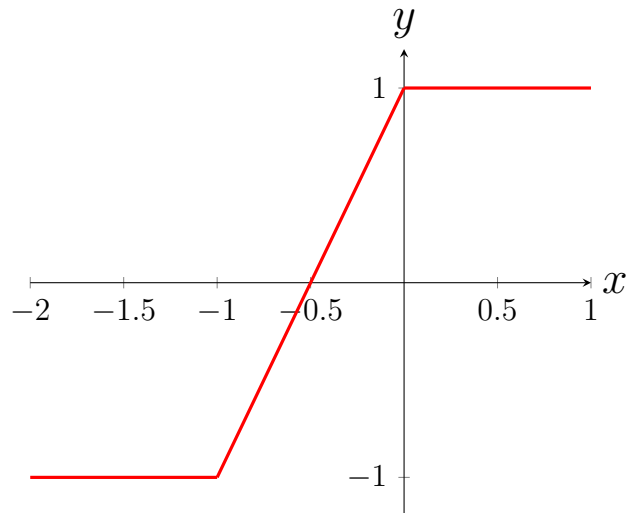
(ה)

$$\max(x, y) = \frac{1}{2} (\max(x, y) + \min(x, y)) + \frac{1}{2} (\max(x, y) - \min(x, y)) = \frac{1}{2} (x + y) + \frac{1}{2} |x - y|$$

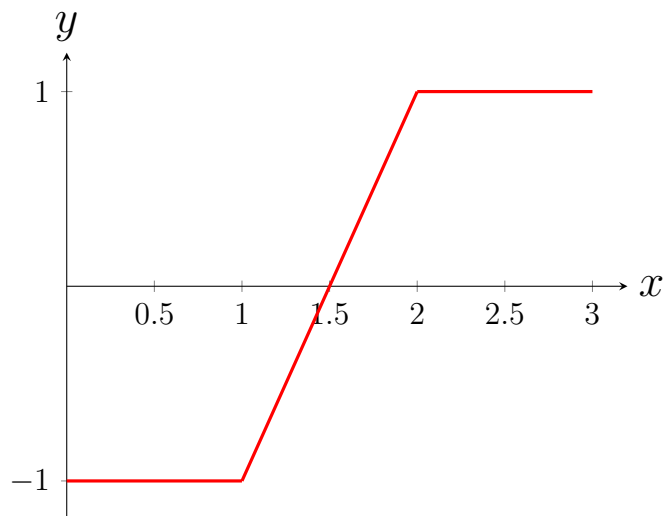
$$\min(x, y) = \frac{1}{2} (\max(x, y) + \min(x, y)) - \frac{1}{2} (\max(x, y) - \min(x, y)) = \frac{1}{2} (x + y) - \frac{1}{2} |x - y|$$

שאלה 6

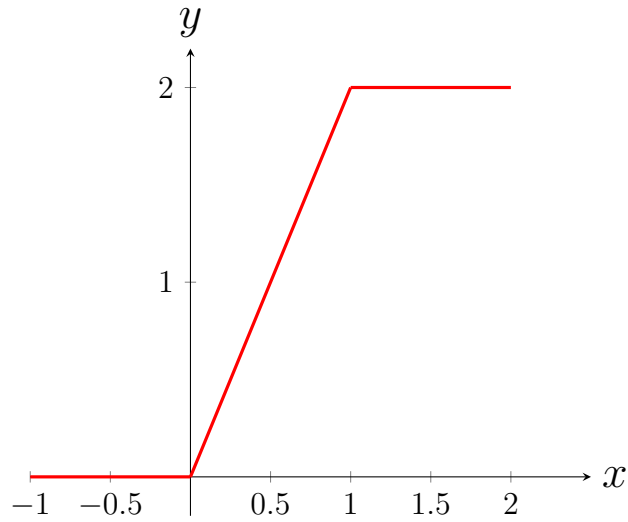
(א) $f(x+1)$



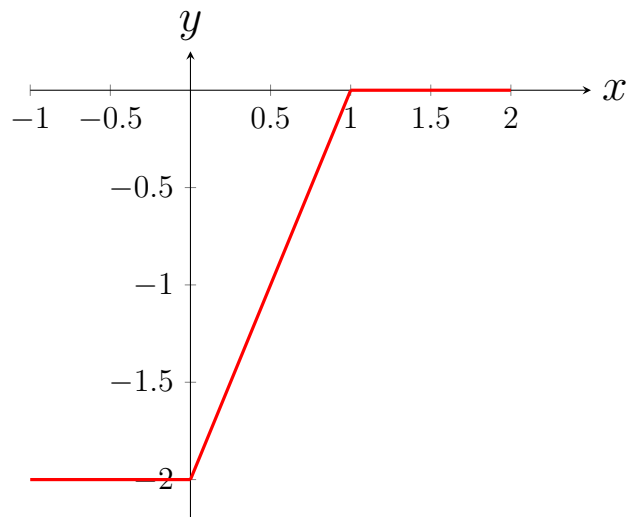
(ב) $f(x-1)$



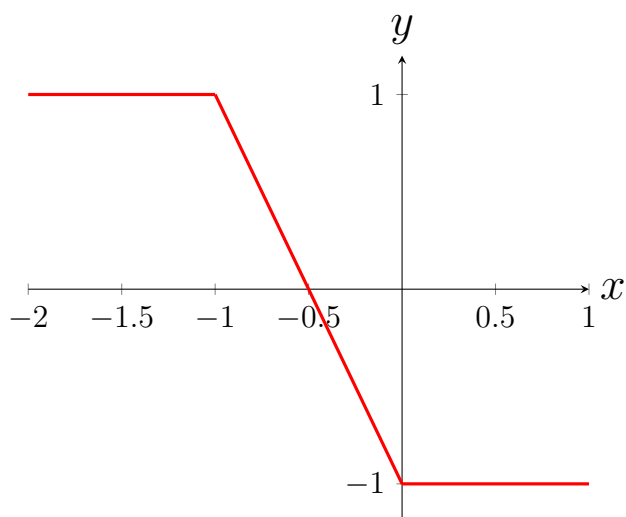
(ג) $f(x)+1$



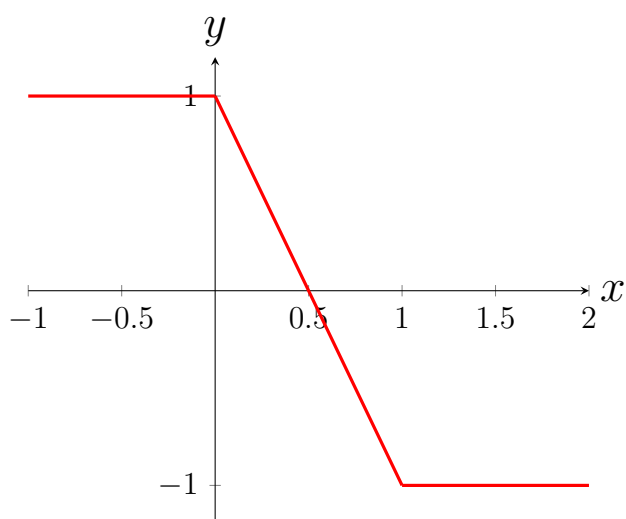
(ד) $\underline{f(x) - 1}$



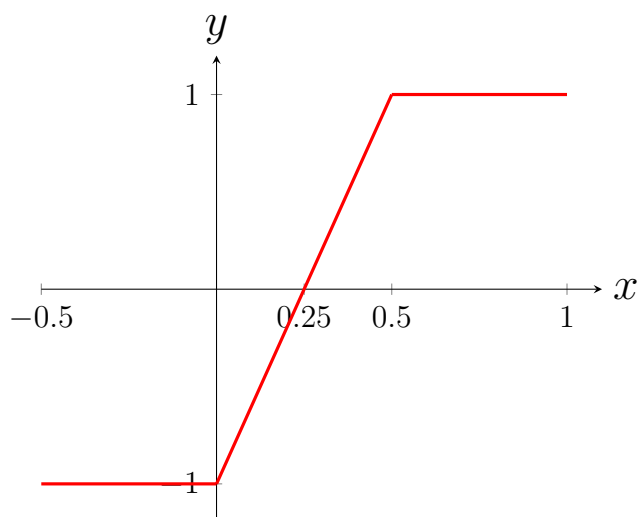
(ה) $\underline{f(-x)}$



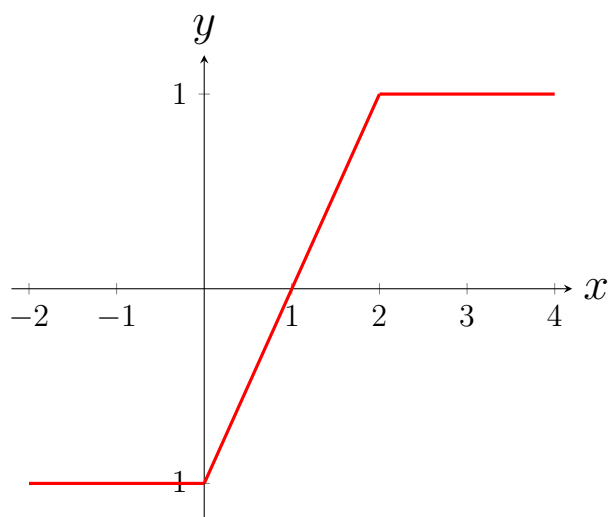
$-f(x)$ 6



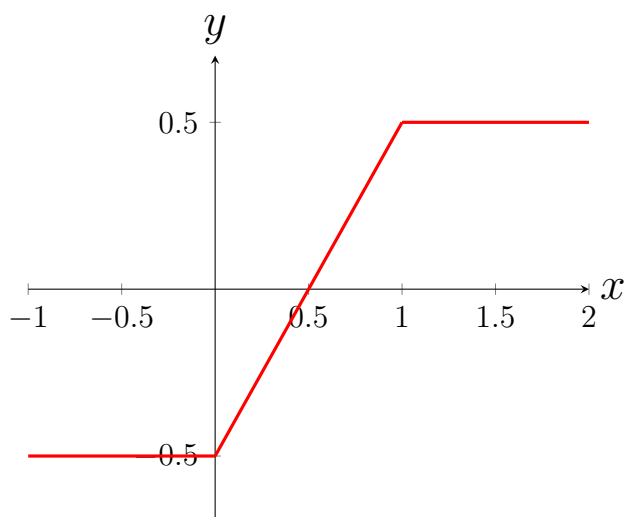
$f(2x)$ 7



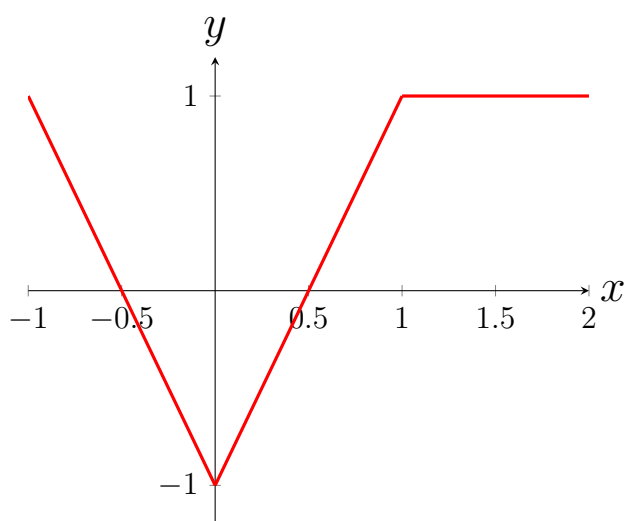
$f\left(\frac{x}{2}\right)$ (ה)



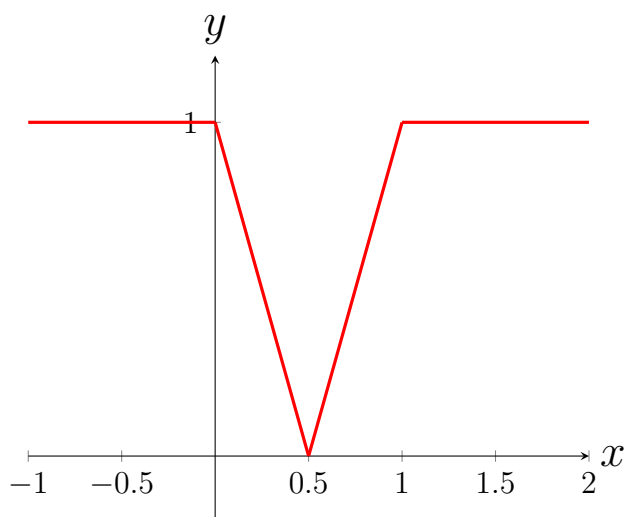
$\frac{f(x)}{2}$ (ט)



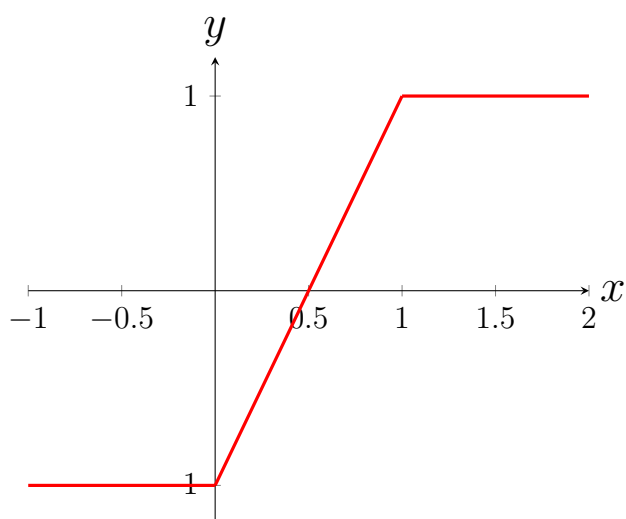
$\underbrace{f(|x|)}_{\text{פ}}$



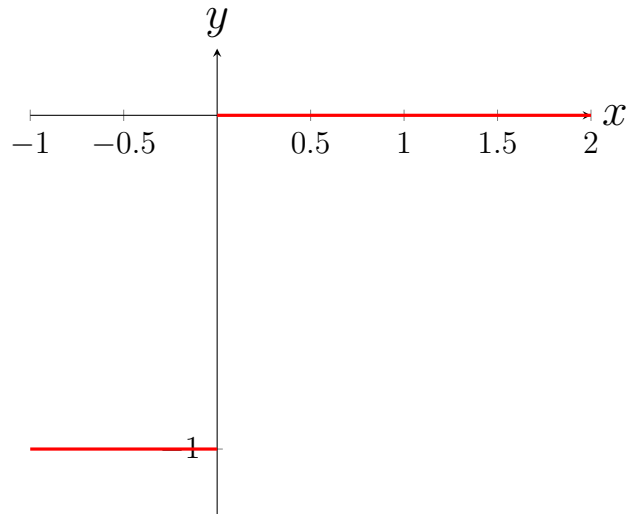
$\underbrace{|f(x)|}_{\text{יא}}$



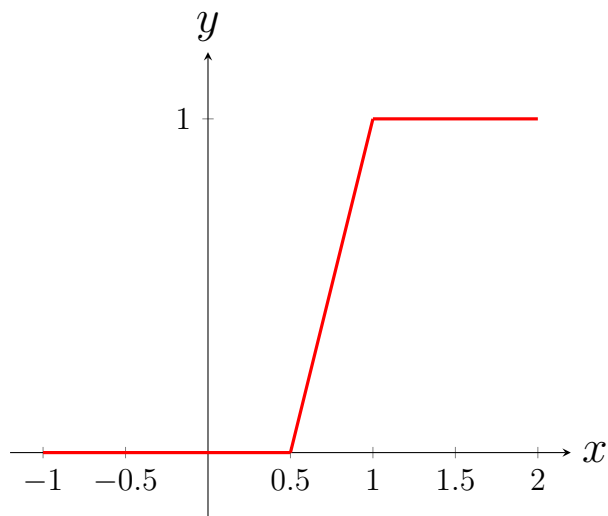
(ב) $f(\max(x, 0))$



(ג) $f(\min(x, 0))$

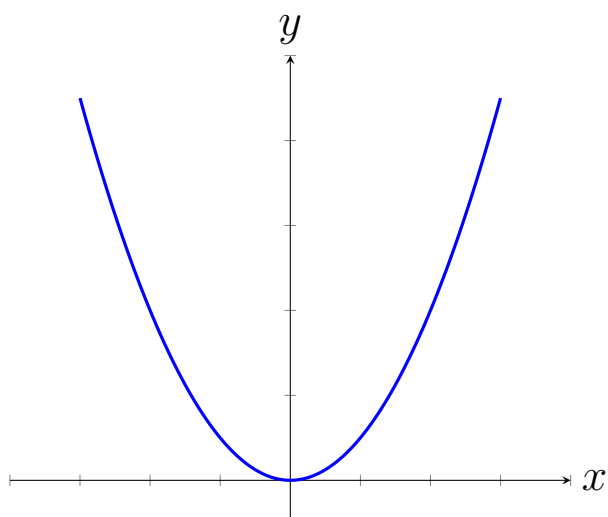


(יד) $\max(f(x), 0)$



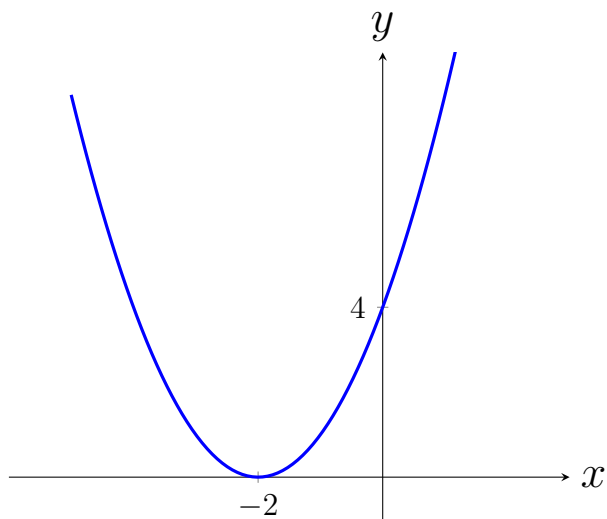
שאלה 7

(א)



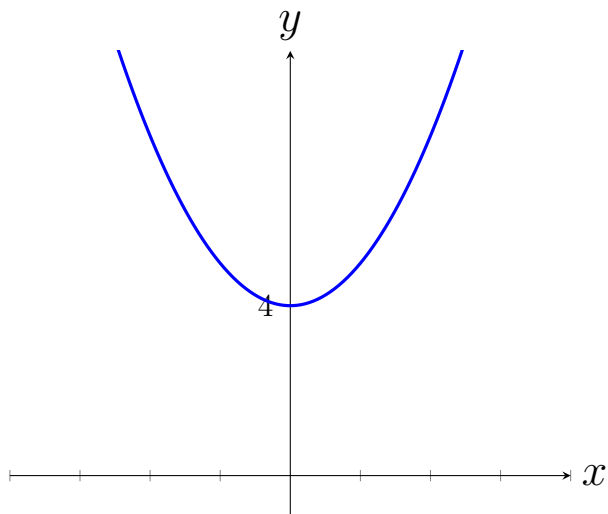
$$x^2$$

(ב)



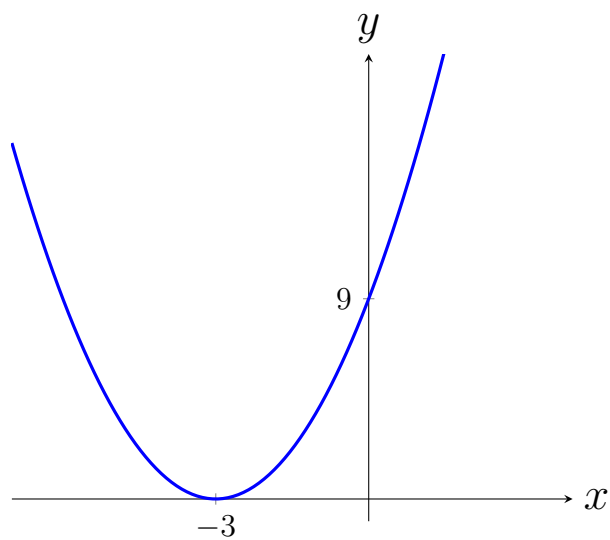
$$(x + 2)^2$$

(ג)



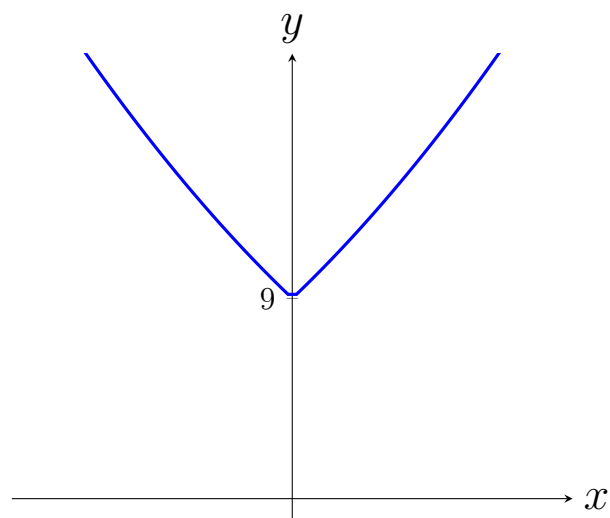
$$x^2 + 4$$

(ד)



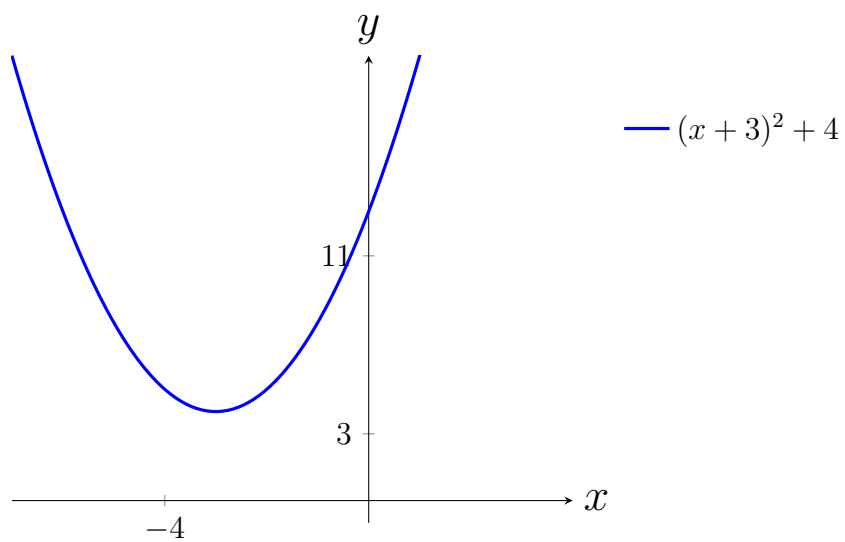
— $(x + 3)^2$

(ה)

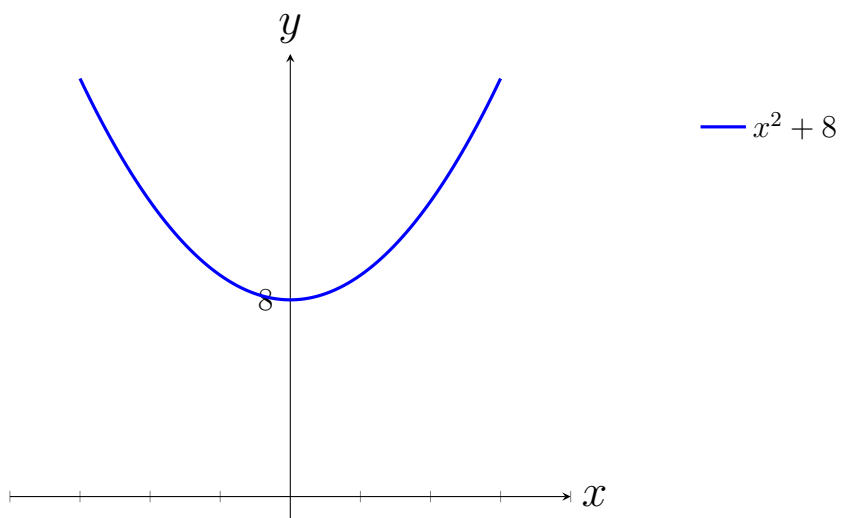


— $(|x| + 3)^2$

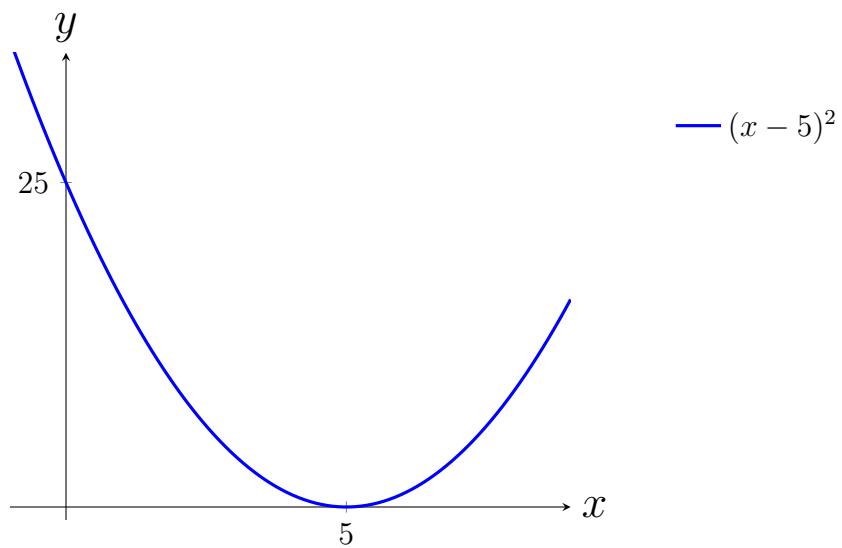
(ו)



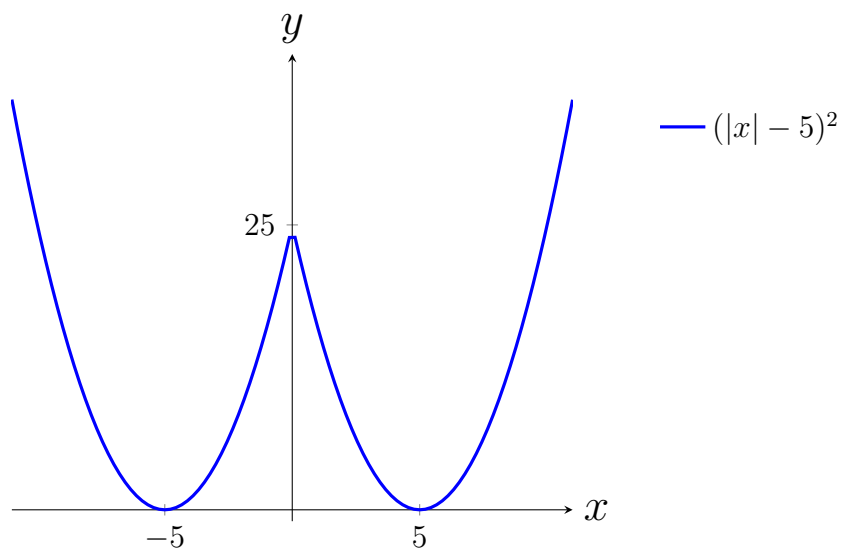
(ז)



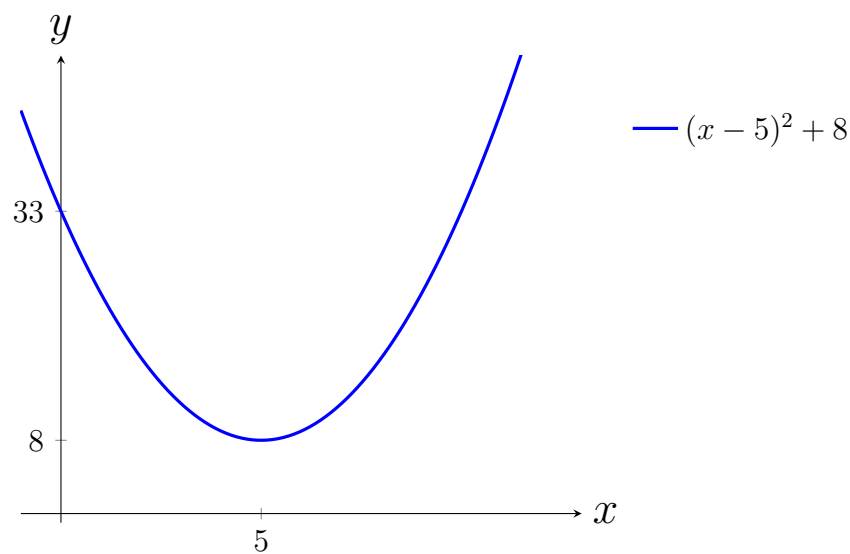
(ח)



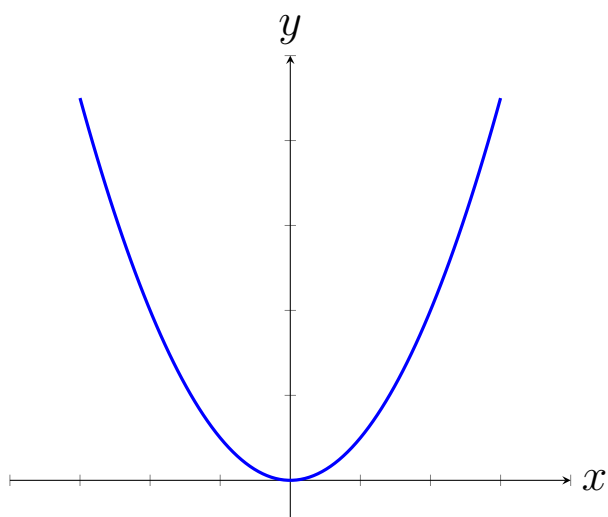
(ט)



(י)

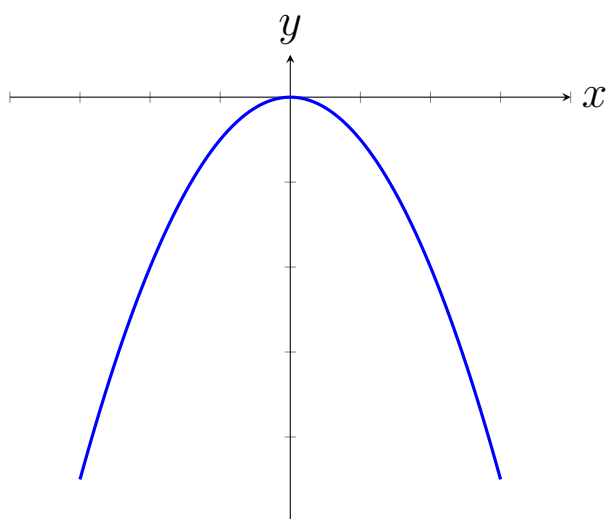


(יא)



$$(-x)^2$$

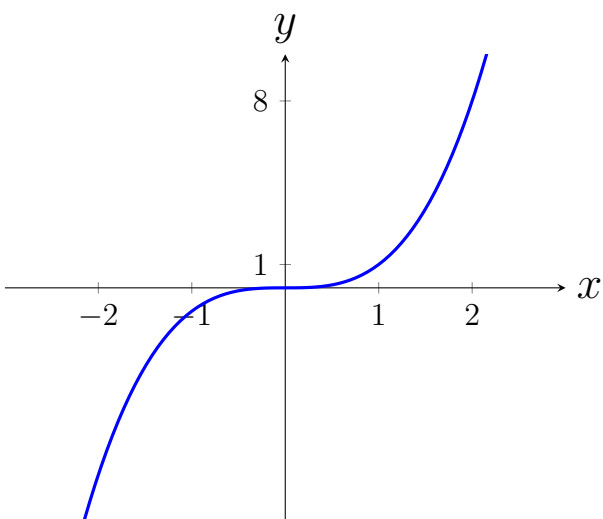
(ב)



$$-x^2$$

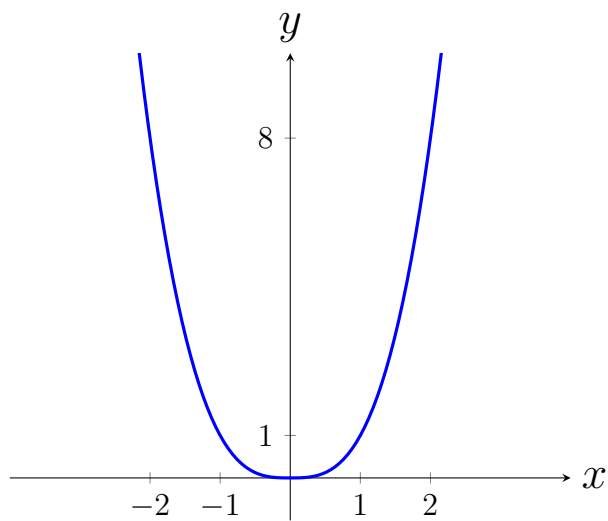
שאלה 8

(א)



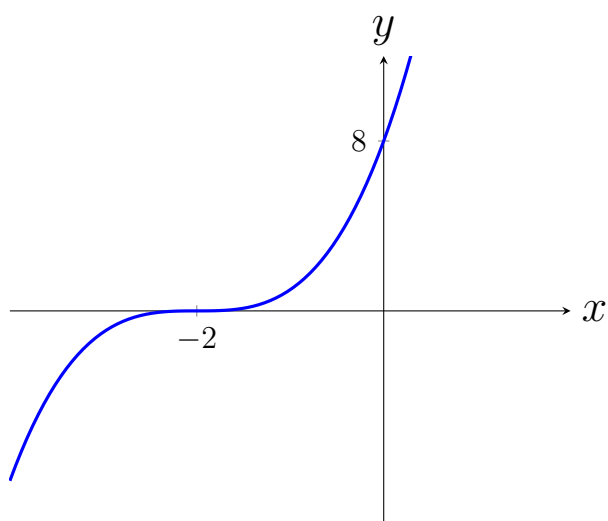
$$x^3$$

(ב)



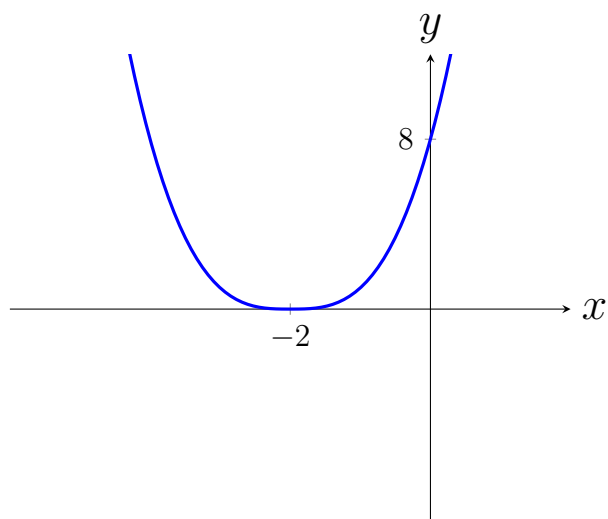
$$— |x^3|$$

(ג)



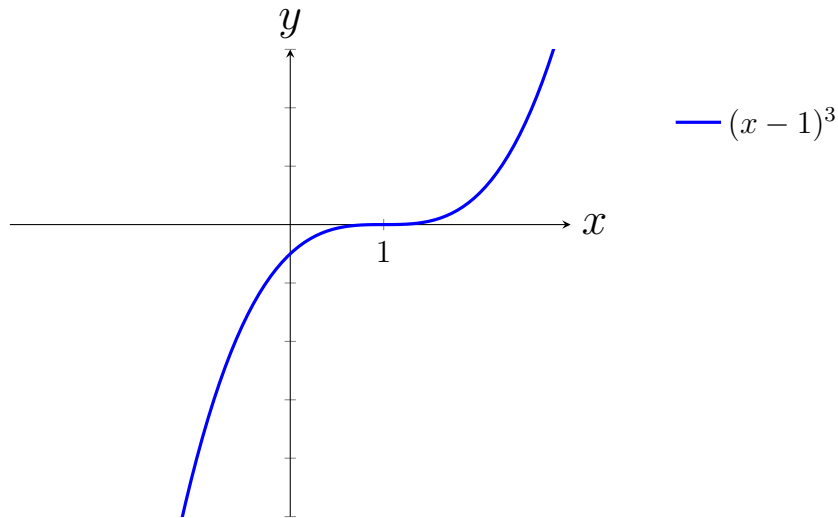
$$— (x+2)^3$$

(ד)



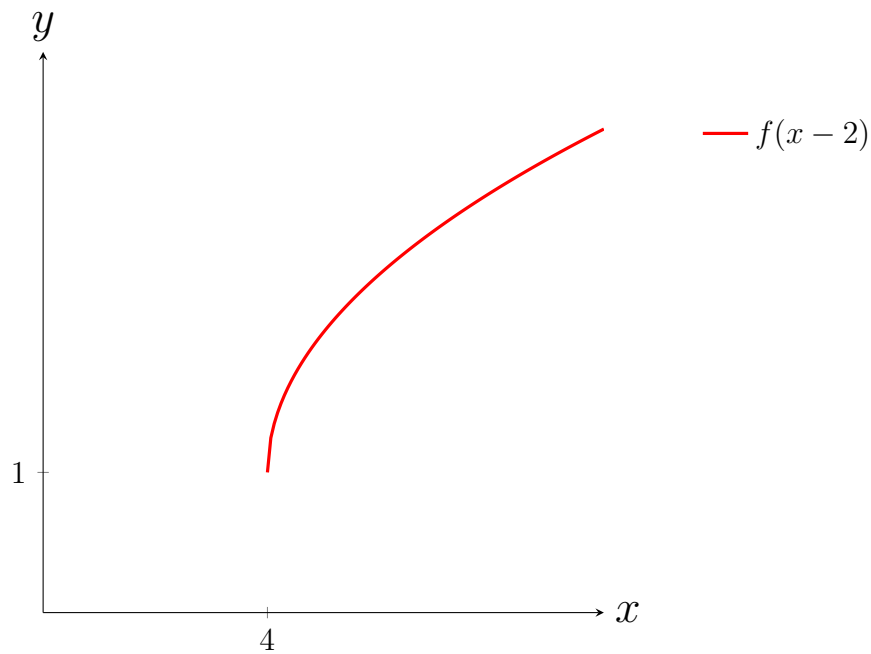
$$— |(x+2)^3|$$

(ה)

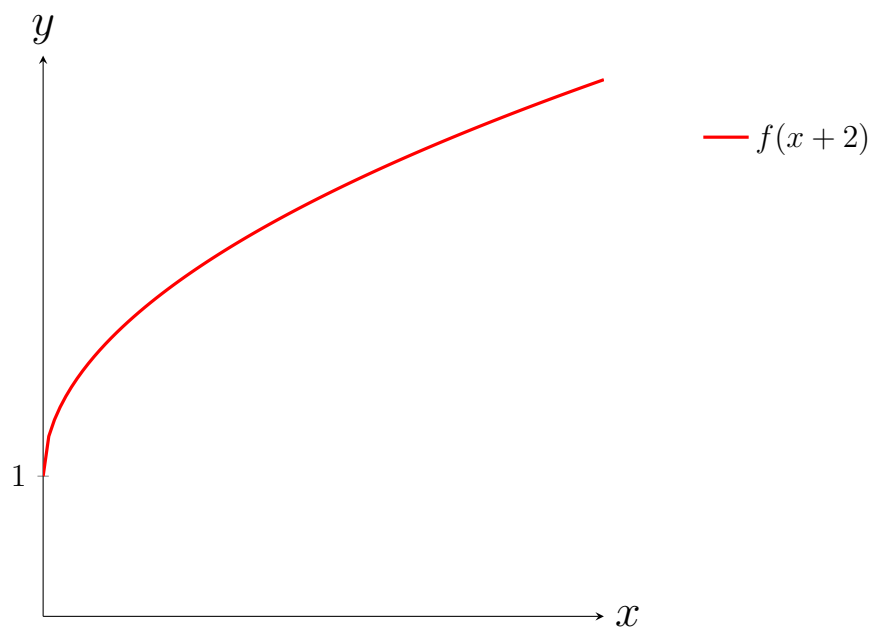


שאלה 9

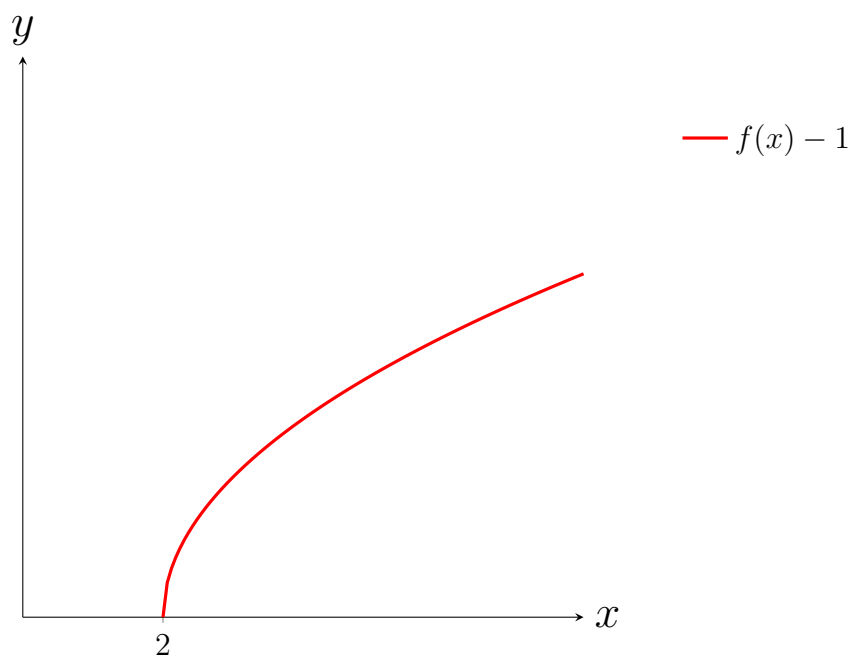
(א)



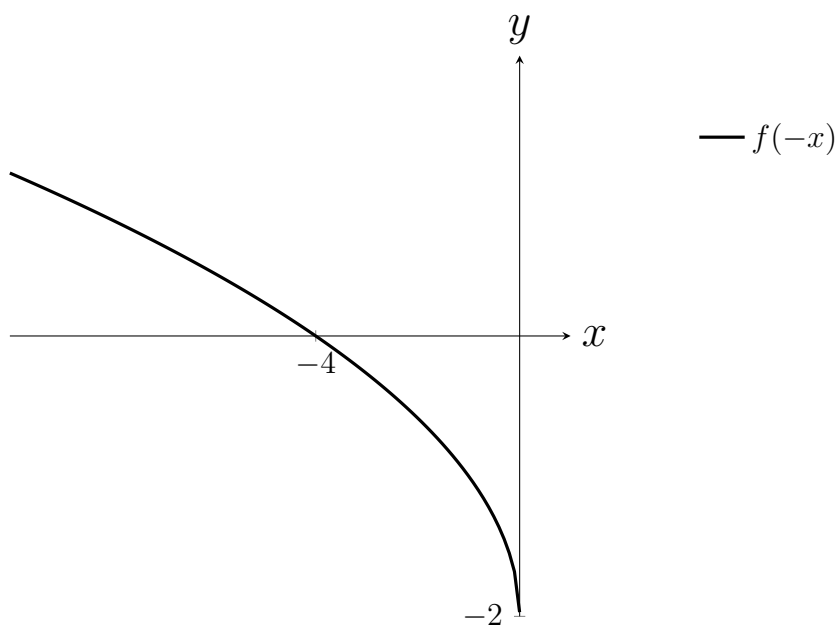
(ב)



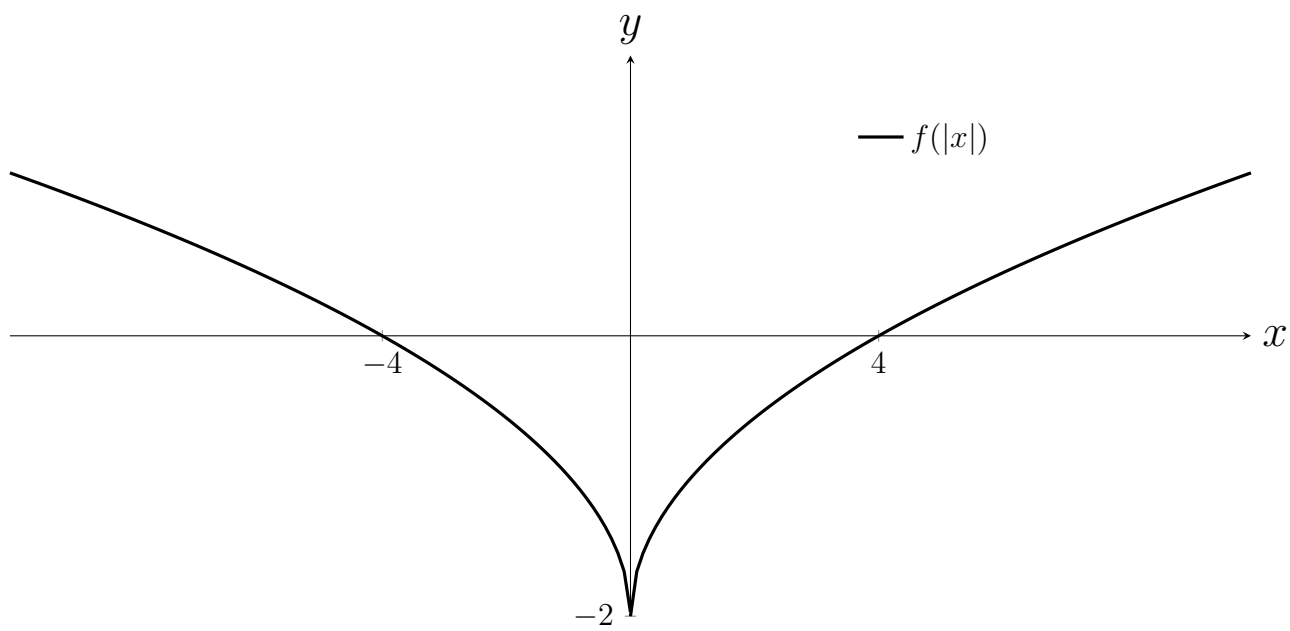
(ג)

שאלה 10

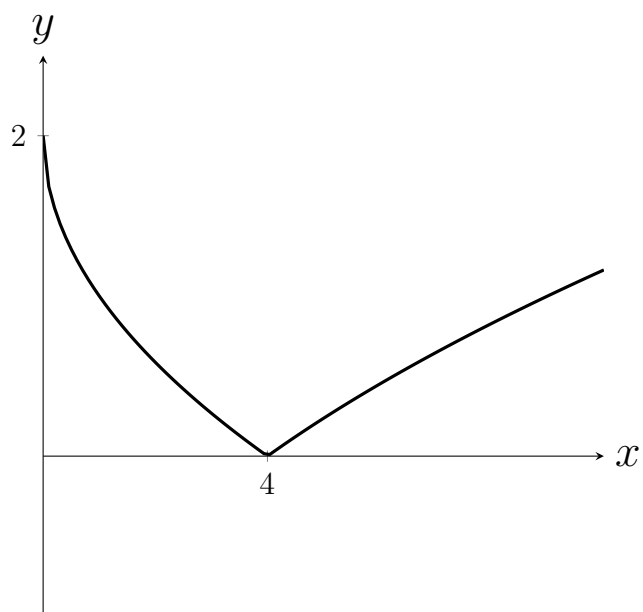
(א)



(ב)

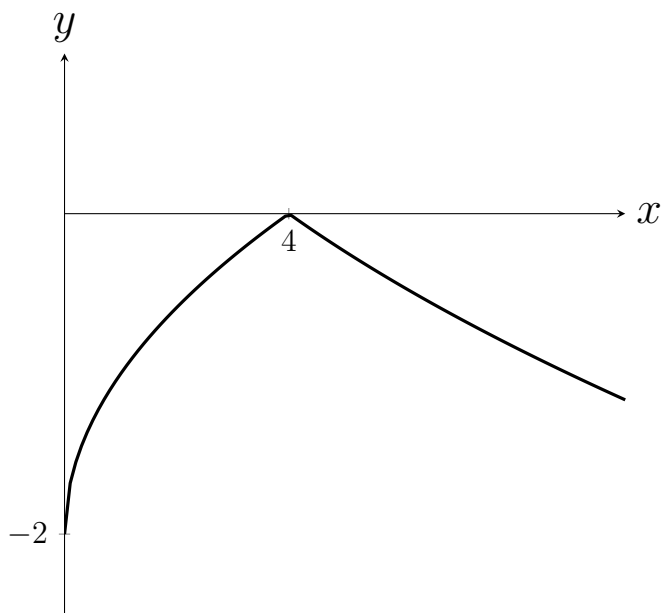


(ג)



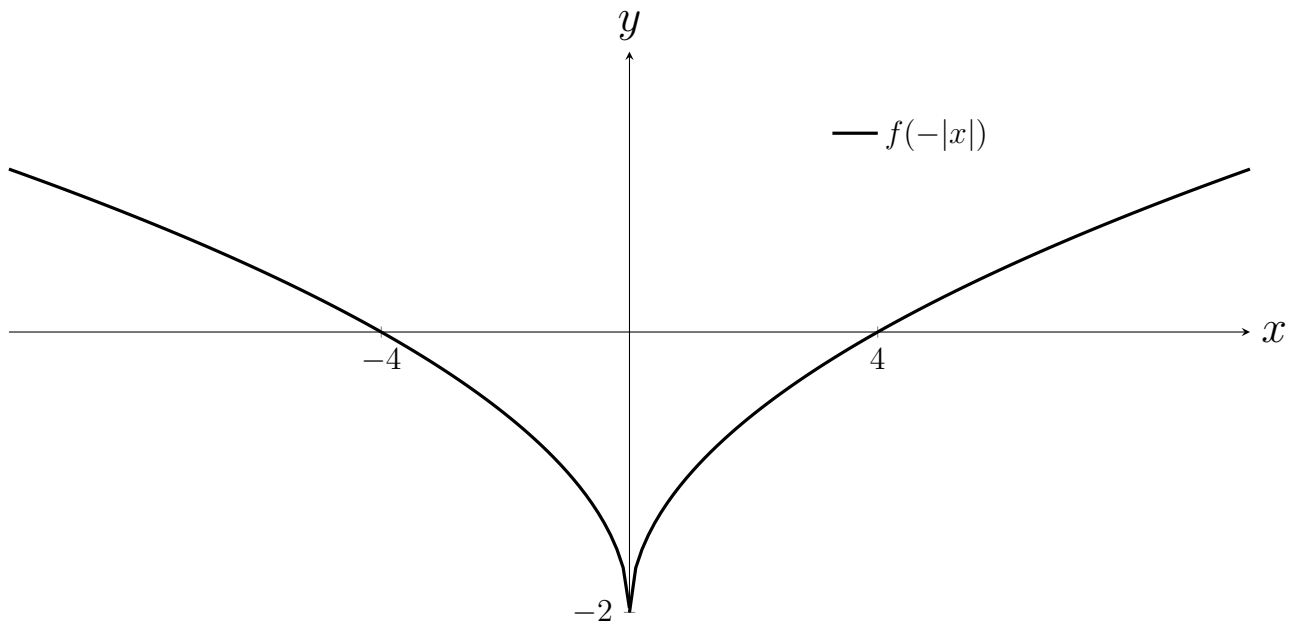
— $|f(x)|$

(ד)



— $-|f(x)|$

(ה)



שאלה 11

(א) שלב הבסיס:

עבור $n = 4$, נשים לב כי $2^4 = 16$ ו- $4^2 = 16$ לכן $4^2 = 2^4$. מתקיים.

שלב האינדוקציה

נניח כי $2^m > m^2$ כאשר $m > 4$ שלם. נוכיח כי $2^{m+1} > (m+1)^2$. הרי

$$2^{m+1} = 2 \cdot 2^m$$

לפי ההנחת האינדוקציה, $2^m > m^2$. לפיכך

$$2^{m+1} > 2 \cdot m^2 = m^2 + m^2.$$

מכיוון ש- $m > 5$ אז

$$\begin{aligned} 2^{m+1} &> m^2 + 5 \cdot m \\ &= m^2 + 2 \cdot m + 3 \cdot m \\ &> m^2 + 2m + 3 \cdot 5 \\ &= m^2 + 2m + 15 \\ &> m^2 + 2m + 1 \\ &= (m+1)^2. \end{aligned}$$

ז"א $2^{m+1} > (m+1)^4$. לכן הוכחנו ע"י אינדוקציה כי $2^m > m^4$ לכל $m \geq 17$.

(ב) שלב הבסיס:

עבור $n = 3$,

$$2^3 > 2 \cdot 3 + 1$$

מתקיים.

שלב האינדוקציה :

נניח שעבור $m > 3$ טבעי $2^m > 2m + 1$. נוכיח כי $2^{m+1} > 2(m+1) + 1$:

$$2^{m+1} = 2 \cdot 2^m > 2 \cdot (2m + 1) = 4m + 2$$

לפי ההנחת האינדוקציה. מכיון ש- $m > 3$ אז

$$\begin{aligned} 2^{m+1} &> 4m + 2 \\ &= 2m + 2m + 2 \\ &> 2m + 2 \cdot 3 + 2 \\ &= 2m + 7 \\ &= 2(m+1) + 5 \\ &> 2(m+1) + 1. \end{aligned}$$

ז"א $2^{m+1} > 2(m+1) + 1$. הוכחנו ע"י אינדוקציה כי $2^m > 2m + 1$.

שלב הבסיס:

(ג)

עבור $n = 2$,

$$3^2 > 3 \cdot 2 + 1$$

מתקיים.

שלב האינדוקציה :

נניח שעבור $m > 2$ טבעי $3^m > 3m + 1$. נוכיח כי $3^{m+1} > 3(m+1) + 1$:

$$3^{m+1} = 3 \cdot 3^m > 3 \cdot (3m + 1) = 9m + 3$$

לפי ההנחת האינדוקציה. מכיון ש- $m > 2$ אז

$$\begin{aligned} 3^{m+1} &> 9m + 3 \\ &= 3m + 6m + 3 \\ &> 3m + 3 \cdot 6 + 3 \\ &= 3m + 19 \\ &= 3(m+1) + 16 \\ &> 3(m+1) + 1. \end{aligned}$$

ז"א $3^{m+1} > 3(m+1) + 1$. הוכחנו ע"י אינדוקציה כי $3^m > 3m + 1$.

שלב הבסיס:

(ד)

עבור $n = 1$, לכל $a \geq -1$ ממשי מתקיים

$$(1+a)^1 = 1+a.$$

שלב האינדוקציה:

נניח כי עבור $a \geq -1$ ממשי ו- $m > 1$ טבעי מתקיים

$$(1+a)^m \geq 1+ma.$$

נוכיח כי $(1+a)^{m+1} > 1+(m+1)a$. הרי

$$(1+a)^{m+1} = (1+a) \cdot (1+a)^m. \quad (*)1$$

נשים לב, מכיוון ש- $a \geq -1$ אז $(1+a) \geq 0$. לכן, בגלל ש- $(1+a)^m > 1+ma$ לפי ההנחת האינדוקציה, אז גם $(1+a) \cdot (1+a)^m > (1+a) \cdot (1+ma)$. לכן נובע מ- $(*)1$ כי

$$(1+a)^{m+1} > (1+a) \cdot (1+ma) = 1+a+ma+ma^2 = 1+(m+1)a+ma^2. \quad (*)2$$

נשים לב, $a^2 \geq 0$ ו- $m > 1$ לכן $ma^2 > 0$. לפיכך נובע מ- $(*)2$ כי

$$(1+a)^{m+1} > 1+(m+1)a.$$

לכן, הוכחנו ע"י אינדוקציה כי $(1+a)^m > 1+ma$ לכל $a \geq 1$ ולכל m טבעי.

ה) שלב הבסיס:

עבור $n = 10$, הרי $2^{10} > 10^3$ מתקיים.

שלב האינדוקציה

נניח כי $2^m > m^3$ כאשר $m > 10$ שלם. נוכיח כי $2^{m+1} > (m+1)^3$. הרי

$$2^{m+1} = 2 \cdot 2^m$$

לפי ההנחת האינדוקציה, $2^m > m^3$. לפיכך

$$2^{m+1} > 2 \cdot m^3 = m^3 + m^3.$$

מכיוון ש- $m > 10$ אז

$$\begin{aligned} 2^{m+1} &> m^3 + 10 \cdot m^2 \\ &= m^3 + 3 \cdot m^2 + 7 \cdot m^2 \\ &> m^3 + 3m^2 + 7 \cdot 10 \cdot m \\ &= m^3 + 3m^2 + 70 \cdot m \\ &= m^3 + 3m^2 + 3m + 67m \\ &> m^3 + 3m^2 + 3m + 67 \cdot 10 \\ &= m^3 + 3m^2 + 3m + 670 \\ &> m^3 + 3m^2 + 3m + 1 \\ &= (m+1)^3. \end{aligned}$$

ז"א $2^{m+1} > (m+1)^3$. לכן הוכחנו ע"י אינדוקציה כי $2^m > m^3$ לכל $m \geq 10$.

ו) שלב הבסיס:

עבור $n = 17$, נשים לב כי $2^{17} = 131072$ ו- $17^4 = 83521$ לכן $2^{17} > 17^4$. מתקיים.

שלב האינדוקציה

נניח כי $2^m > m^4$ כאשר $m > 17$ שלם. נוכיח כי $2^{m+1} > (m+1)^4$. הרי

$$2^{m+1} = 2 \cdot 2^m$$

לפי ההנחת האינדוקציה, $2^m > m^4$. לפיכך

$$2^{m+1} > 2 \cdot m^4 = m^4 + m^4.$$

מכיוון ש- $m > 17$ אז

$$\begin{aligned} 2^{m+1} &> m^4 + 17 \cdot m^3 \\ &= m^4 + 4 \cdot m^3 + 13 \cdot m^3 \\ &> m^4 + 4m^3 + 13 \cdot 17 \cdot m^2 \\ &= m^4 + 4m^3 + 221 \cdot m^3 \\ &> m^4 + 4m^3 + 221 \cdot 17m^2 \\ &= m^4 + 4m^3 + 3757m^2 \\ &= m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 3751m^2 \\ &> m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 3751 \cdot 17m \\ &= m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 63869m \\ &= m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 63865m \\ &> m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 63865 \cdot 17 \\ &= m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1 \\ &= (m+1)^4. \end{aligned}$$

ז"א $2^{m+1} > (m+1)^4$. לכן הוכחנו ע"י אינדוקציה כי $2^m > m^4$ לכל $m \geq 17$.

שאלה 12

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}.$$

מכיוון ש- $x > 0$ אז גם $\frac{1}{x} > 0$. לכן

$$1 + \frac{1}{x} > 1 + 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{x} > 1.$$

נציב $1 + \frac{1}{x} = \frac{1+x}{x}$ ונקבל

$$\frac{1+x}{x} > 1.$$