

שיעור 1

מכונות טיורינג

1.1 הגדרה של מכונת טיורינג

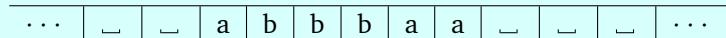
הגדירה 1.1 מבנות טיריניג (הגדרה היוריסטית)

הקלט והסרט

- מוכנות טיריניג (מ"ט) קורא קלט.
 - הקלט עצמו נמצא על סרט אינסופי מחולק למשבצות.
 - כל תו של הקלט כתוב במשבצת אחת של הסרט.
 - במכונות טיריניג אנחנו מניחים שהסרט אינסופי לשני הצדדים.

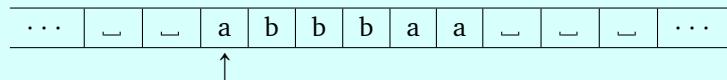
* משמאלי לתחילת הקלט יש רצף אינסופי של תווים רווח " ".

* מימין לסוף הקלט יש רצף אינסופי של תווים רווח " ".



הראש

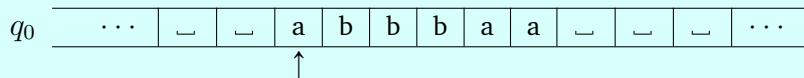
- במצב ההתחלתי הראש בקצתה השמאלי של הקלט.



- הראש יכול לזרז ימינה על הסרט וגם שמאלה על הסרט.
 - הראש קורא את התוכן של המשבצת שבה הוא נמצא.
 - הראש יכול לכתוב על משבצת, אבל רק על המשבצת שבה הראש נמצא.

תאור העבודה של המכונה

- בהרבה החלטות השרות כאשר מימינו נמצא רצף אינסופי של תווים – ים.
 - בראש מכביע על התא הראשון בשרות והמכונה נמצאת במצב התחלתי q_0 .



- בכל צעד חישוב, בהתחם למספר הנוכחי ולאות שמתוחת לראש (הטו הנקרה), המכונה מחליטה:
 - * לאיזה מצב עובר מהו לכתוב מתוחת לראש (הטו הנקטב)
 - * لأن להזיז את הראש (תא אחד ימינה, או תא אחד שמאלה, או להישאר במקום).
 - המכונה ישנים שני מצבים מיוחדים:
 - * q_{acc} : אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל- q_{acc} היא עוברת ומקבלת.
 - * q_{rej} : אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל- q_{rej} היא עוברת ודוחה.
 - אם המכונה לא מגיעה ל- q_{acc} או q_{rej} היא תמשיך לרווץ לנצח.

הגדרה 1.2 מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כasher:

Q	קובוצת מצבים סופית ולא ריקה
Σ	אלפבית הקלט
Γ	אלפבית הסרט
δ	פונקציית המעברים
q_0	מצב התחלתי
q_{acc}	מצב מקבל יחיד
q_{rej}	מצב דוחה יחיד

דוגמה 1.1

בנייה מכונת טיורינג אשר מקבלת מילה אם היא בשפה

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#a_w = \#b_w\}.$$

ז"א השפט כל המילים עם מספר שווה אותיות a ו b . הפאודו-קוד של המכונה, כדלקמן.**פאודו-קוד**

1) סורקים את הקלט משמאול לימין.

- אם לא מצאנו a וגם לא מצאנו $b \Leftarrow$ מקבלת.
- אם האות הראשונה שהראש הוא מצא a , כתובים עליו ✓, וועברים לשלב (2).
- אם האות הראשונה שהראש הוא מצא b , כתובים עליו ✓, וועברים לשלב (3).

2) ממשיכים לוז ימינה עד שנמצא b תואם.

- אם לא מצאנו $b \Leftarrow$ דוחה.
- אם מצאנו b כתובים עליו ✓, חוזרים לתחלת הקלט וחוזרים לשלב (1).

3) ממשיכים לוז ימינה עד שנמצא a תואם.

- אם לא מצאנו $a \Leftarrow$ דוחה.
- אם מצאנו a כתובים עליו ✓, חוזרים לתחלת הקלט וחוזרים לשלב (1).

כעת נתן הגדרה פורמלית של המכונה טיורינג שמבצעת את האלגוריתם הזה.

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כasher Q הקבוצה המצביעים הבאה:

$$Q = \{q_0, q_a, q_b, q_{\text{back}}, q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}\}.$$

המשמעותם של כל המצביעים נרשמים בטבלה למטה:

q_0	ה מצב ההתחלתי. אליו נחזיר אחרי כל סבב התאמת של זוג אותיות.
q_a	מצב שבו ראיינו a ומחפשים b תואם.
q_b	מצב שבו ראיינו b ומחפשים a תואם.
q_{back}	מצב ששנשתמש בו כדי לחזור לказה השמאלי של הקלט ולהתחל את הסריקה הבאה (סבב ההתאמת הבא).
q_{acc}	מצב מקבל.
q_{rej}	מצב דוחה.

האלפבית של הקלט, Σ , והלפבית של השרת, Γ , הינם:

$$\Sigma = \{a, b\}, \quad \Gamma = \{a, b, _, \checkmark\}.$$

הפונקציית המעברים δ היא מוגדרת כדלקמן.

$$\begin{aligned}\delta(q_0, a) &= (q_a, \checkmark, R), \\ \delta(q_0, b) &= (q_b, \checkmark, R), \\ \delta(q_0, _) &= (q_{\text{acc}}, _, R), \\ \delta(q_a, \checkmark) &= (q_a, \checkmark, R), \\ \delta(q_a, a) &= (q_a, a, R), \\ \delta(q_a, b) &= (q_{\text{back}}, \checkmark, L), \\ \delta(q_b, \checkmark) &= (q_b, \checkmark, R), \\ \delta(q_b, b) &= (q_a, b, R), \\ \delta(q_b, a) &= (q_{\text{back}}, \checkmark, L).\end{aligned}$$

לעתים קל יותר לרשום את פונקציית המעברים δ בטבלה:

$\Gamma \setminus Q$	a	b	$_$	\checkmark
q_0	(q_a, \checkmark, R)	(q_b, \checkmark, R)	$(q_{\text{acc}}, _, R)$	(q_0, \checkmark, R)
q_a	(q_a, a, R)	$(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$	$(q_{\text{rej}}, _, L)$	(q_a, \checkmark, R)
q_b	$(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$	(q_a, b, R)	$(q_{\text{rej}}, _, L)$	(q_b, \checkmark, R)
q_{back}	(q_{back}, a, L)	(q_{back}, b, L)	$(q_0, _, R)$	$(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$

תרשים מצבוי



דוגמה 1.2

בדקו אם המכוון טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה `aab`.

פתרון:

-	q_0	a	a	b	-
-	✓	q_a	a	b	-
-	✓	a	q_a	b	-
-	✓		q_{back}	a	✓
-	q_{back}	✓	a	✓	-
q_{back}	-	✓	a	✓	-
-	q_0	✓	a	✓	-
-	✓	q_0	a	✓	-
-	✓	✓	q_a	✓	-
-	✓	✓	✓	q_a	-
-	✓	✓	rej	✓	-

דוגמה 1.3

בדקו אם המכוון טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה `.abbbbaaa`.

פתרון:

-	q_0	a	b	b	b	a	a	-
-	✓	q_a	b	b	b	a	a	-
-	q_{back}	✓	✓	b	b	a	a	-
q_{back}	-	✓	✓	b	b	a	a	-
-	q_0	✓	✓	b	b	a	a	-
-	✓	q_0	✓	b	b	a	a	-
-	✓	✓	q_0	b	b	a	a	-
-	✓	✓	✓	q_b	b	a	a	-
-	✓	✓	✓	b	q_b	a	a	-
-	✓	✓	✓	q_{back}	b	✓	a	-
-	✓	✓	q_{back}	✓	b	✓	a	-
-	✓	q_{back}	✓	✓	b	✓	a	-
q_{back}	-	✓	✓	✓	b	✓	a	-
-	q_0	✓	✓	✓	b	✓	a	-
-	✓	q_0	✓	✓	b	✓	a	-
-	✓	✓	q_0	✓	b	✓	a	-
-	✓	✓	✓	q_0	b	✓	a	-
-	✓	✓	✓	✓	q_b	✓	a	-
-	✓	✓	✓	✓	✓	q_b	a	-
-	✓	✓	✓	✓	q_{back}	✓	✓	-
-	✓	✓	✓	q_{back}	✓	✓	✓	-

—	✓	✓	q_{back}	✓	✓	✓	✓	—
—	✓	q_{back}	✓	✓	✓	✓	✓	—
—	q_{back}	✓	✓	✓	✓	✓	✓	—
q_{back}	—	✓	✓	✓	✓	✓	✓	—
—	q_0	✓	✓	✓	✓	✓	✓	—
—	✓	q_0	✓	✓	✓	✓	✓	—
—	✓	✓	q_0	✓	✓	✓	✓	—
—	✓	✓	✓	q_0	✓	✓	✓	—
—	✓	✓	✓	✓	q_0	✓	✓	—
—	✓	✓	✓	✓	✓	q_0	✓	—
—	✓	✓	✓	✓	✓	✓	q_{acc}	—

הגדרה 1.3 קונפיגורציה

תהי $M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיריניג. **קונפיגורציה** של M הינה מחרוזת

$$uq\sigma v$$

כאשר משמעות:

$$u, v \in \Gamma^*, \quad \sigma \in \Gamma, \quad q \in Q.$$

מצב המכוונה,	q
הסימן במקומות הראש	σ
תוכן הסרט משמאלי לראש,	u
תוכן הסרט מימין לראש.	v

דוגמה 1.4 (המשך של דוגמה 1.2)

u	q	σ	v
—	q_0	a	a b —
— ✓	q_a	a	b —
— ✓ a	q_a	b	—
— ✓	q_{back}	a	✓ —
—	q_{back}	✓	a ✓ —
—	q_{back}	—	✓ a ✓ —
—	q_0	✓	a ✓ —
— ✓	q_0	a	✓ —
— ✓ ✓	q_a	✓	—
— ✓ ✓ ✓	q_a	—	—
— ✓ ✓	q_{rej}	✓	—

דוגמה 1.5

בנו מכונת טיריניג אשר מקבלת כל מילה בשפה

$$L = \{a^n \mid n = 2^k, k \in \mathbb{N}\}$$

ז"א מילים בעלי מספר אותיות n אשר חזקה של 2.

פתרונות:

ראשית נשים לב למשפט הבא:

1.1 משפט

מספר שלם n שווה לחזקה אי-שלילית של 2, כלומר ($k \geq 0$) אם ורק אם קיימים שלם m ובראשו חילוק של $n - 2^m$ נקבע נותן.

הוכחה:
↳ כיוון

$\cdot \frac{n}{2^k} = 1$ $\Leftrightarrow n = 2^k$ ($k \geq 0$)

כיוון \Rightarrow

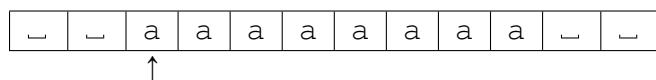
אם קיימים $m \geq 0$ עבורו $n = 2^m$ אז $\frac{n}{2^m} = n$ ולכן n שווה לחזקה אי-שלילית של 2.

לאורו המשפט הזה נבנה אלגוריתם אשר מחלק את מספר האותיות במילה ב- 2 שוב ושוב באורה איטרטיבית.

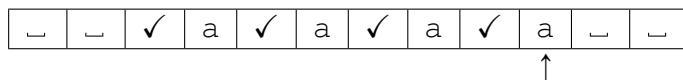
- אם אחרי סיבוב מסוים נקלט מספר אי-זוגי שונה מ-1, אז אין מצב שמספר האותיות a הוא חזקה של 2.
 - בצד שני אם אחרי סיבוב כלשהו נקלט בדיקות a אחת הנשארת, z^a אחרי מספר מסוים של חילוקים של המספר אותיות a קיבלנו 1, אז מובטח לנו שהמספר של אותיות a הוא שווה לחזקה של 2.

כעת נסביר כיצד המכונית טירינג מבצעת את השיטה הזאת בפועל כלהלן.

¹⁾ במאכג התחלתי יש מחרוזת של רצף אותיות *a* כתובות על הסרט והראש נמצא מתחת האות הראשוונה.



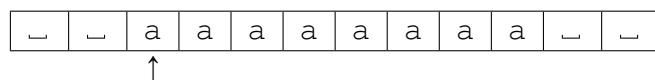
2) עוברים על הקלט משמאלי לימיון ומבצעים מחייקה לשירוגין של האות a. כלומר, אותן אחת נמחק ואות אחת נשאיר וכן הלאה, עד שmaguius לקצתה הימין של המילה.



3) אחרי שהראש הגיע לסוף המילה:

- אם מצאנו את a אחות בדיק \Leftarrow המכונה מקבל.
 - אם כתוב ✓ בתו האחרון \Leftarrow המכונה תדחה.
 - אחרת, אם כתוב a בתו האחרון הרשוח לתחילת המחרוזת וחוזרים לשלב 2).

כדוגמה של מילה המתקבלת על ידי האלגוריתם, למטה רשומות האיטרציות של האלגוריתם זהה על המילה $w = aaaaaaaaa$. במצב התחלתי הסרט נראה כדלקמן.

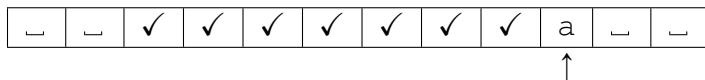


התו האחרון a אז ממשיכים לאיטרציה הבא.



איטרציה 2) בסוף האיטרציה $i = 2$ הסדרת נראית כך:

התו הראשון הוא a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

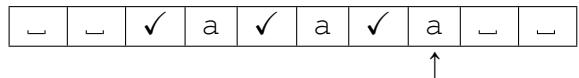
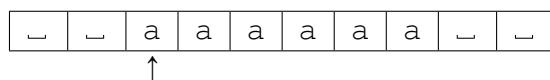


איטרציה 3) לאחר האיטרציה $i = 3$ הסדרת נראית כך:

התו האחרון הוא a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

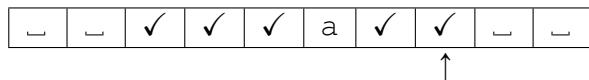
איטרציה 4) באיטרציה $i = 4$ יש אות a אחת בדיק אז המכונה מקבלת.

כדוגמה של מילה הלא המתבלת על ידי האלגוריתם, למטה רשומות האיטרציות של האלגוריתם זהה על המילה $w = aaaaaa$ (6 אותיות a). במצב ההתחלתי הסרט נראה כדלקמן.



איטרציה 1) לבסוף האיטרציה $i = 1$ הסדרת נראית כך:

התו האחרון a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.



איטרציה 2) לבסוף האיטרציה $i = 2$ הסדרת נראית כך:

התו הראשון הוא \checkmark אז דוחה.

כעת נתן הגדרה פורמלית של המכונת טיורנג שמקבלת השפה הזאת:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}) ,$$

כאשר $Q = \{q_0, \text{one}, \text{even}, \text{odd}, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}$, $\Gamma = \{a, _, \checkmark\}$, $\Sigma = \{a\}$ כאשר המשמעותם הם מפורטים למטה:

מצב `none`: מצב ההתחלתי. עדין לא קראנו a כתוצאה זה.

מצב `one`: קראנו a בודד.

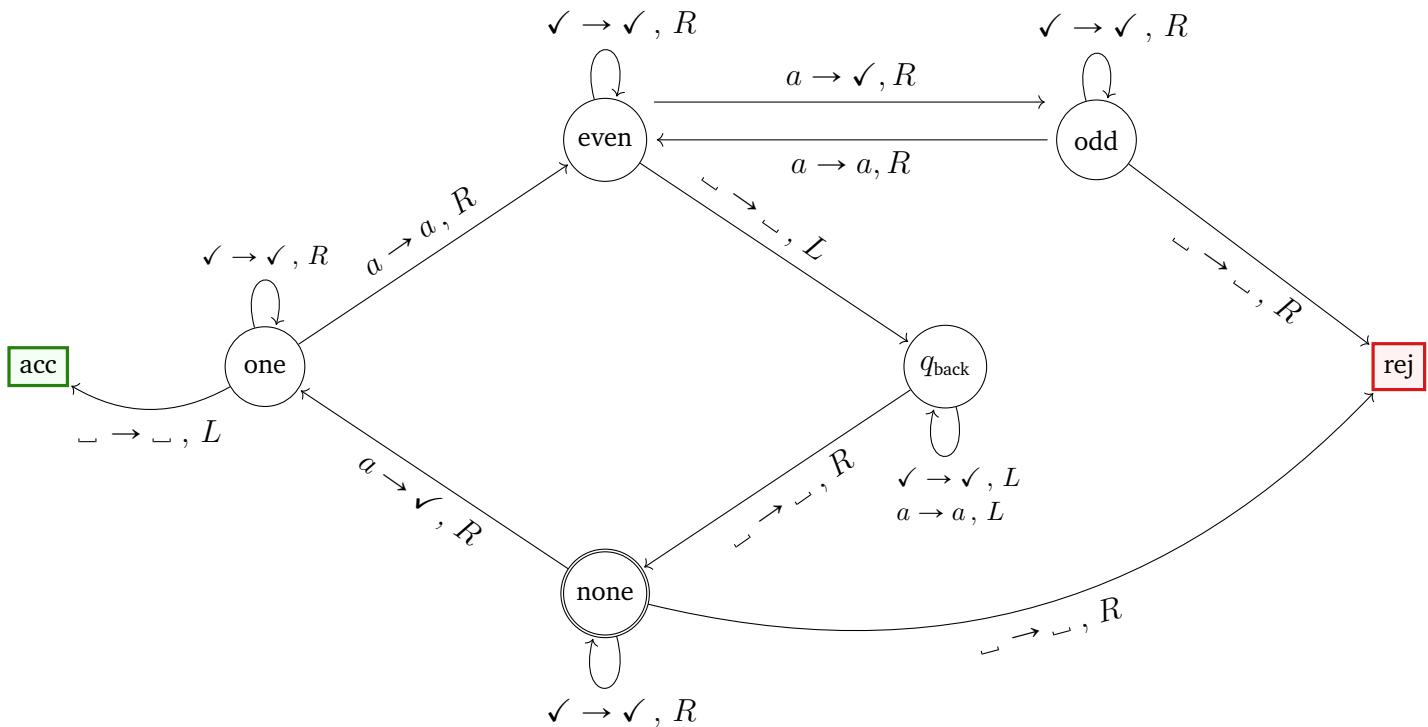
הפונקציית המעברים מתוארת על ידי התרשים

מצב `even`: קראנו מספר זוגי של a .

מצב `odd`: קראנו מספר אי-זוגי של a .

מצב q_{back} : חזרה שלמה.

מצבים למטה.

**דוגמה 1.6**

בדקו אם המילה $aaaa$ מתקבלת על ידי המכונת טירינג בדוגמה 1.5.

פתרונות:

[none	a	a	a	a]
[✓	one	a	a	a]
[✓	a	even	a	a]
[✓	a	✓	odd	a]
[✓	a	✓	a	even]
[✓	a	✓	back	a]
[✓	a	back	✓	a]
[✓	back	✓	a	✓]
[back	✓	a	✓	a]
[none	✓	a	✓	a]
[✓	none	a	✓	a]
[✓	✓	one	✓	a]
[✓	✓	✓	one	a]
[✓	✓	✓	a	even]
[✓	✓	✓	back	a]
[✓	✓	back	✓	a]
[back	✓	✓	✓	a]
[none	✓	✓	✓	a]
[✓	none	✓	✓	a]
[✓	✓	none	✓	a]

✓	✓	✓	none	a	—
✓	✓	✓	✓	one	—
✓	✓	✓	acc	✓	—

<i>u</i>	<i>q</i>	σ	v
—	none	a	aaa —
— ✓	one	a	aa —
— ✓ a	even	a	a —
— ✓ a ✓	odd	a	—
— ✓ a ✓ a	even	—	—
— ✓ a ✓	back	a	—
— ✓ a	back	✓	a —
— ✓	back	a	✓ a —
—	back	✓	a ✓ a —
—	back	—	✓ a ✓ a —
—	none	✓	a ✓ a —
— ✓	none	a	✓ a —
— ✓ ✓	one	✓	a —
— ✓ ✓ ✓	one	a	—
— ✓ ✓ ✓ a	even	—	—
— ✓ ✓ ✓	back	a	—
— ✓ ✓	back	✓ a	—
— ✓	back	✓	✓ a —
—	back	✓	✓✓ a —
—	back	—	✓✓✓ a —
—	none	✓	✓✓ a —
— ✓	none	✓	✓ a —
— ✓ ✓	none	✓	a —
— ✓ ✓ ✓	none	a	—
— ✓ ✓ ✓ ✓	one	—	—
— ✓ ✓ ✓	acc	✓	—

דוגמה 1.7

בדקו אם המילה aaa מתקבלת על ידי המכונת טיריניג בדוגמה 1.5.

פתרונות:

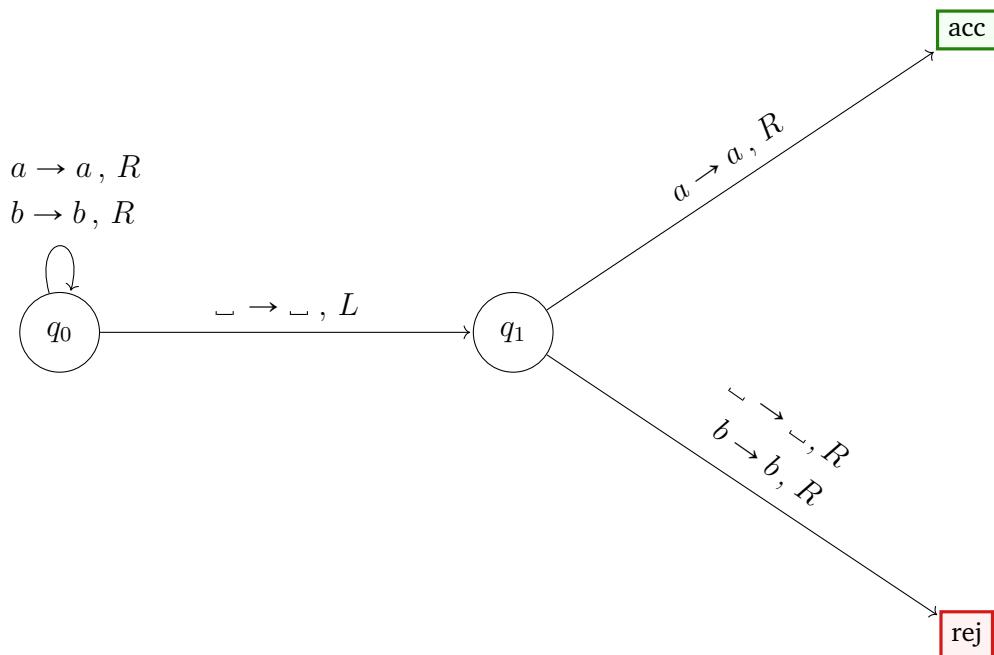
none	a	a	a	—
✓	one	a	a	—
✓	a	even	a	—
✓	a	✓	odd	—
✓	a	✓	—	rej

<i>u</i>	<i>q</i>	σ	v
—	none	a	aa —

$\sqcup \checkmark$	one	a	a \sqcup
$\sqcup \checkmark a$	even	a	\sqcup
$\sqcup \checkmark a \checkmark$	odd	\sqcup	\sqcup
$\sqcup \checkmark a \checkmark \sqcup$	rej	\sqcup	\sqcup

דוגמה 1.8

מהי השפה של המוכנה למטה:

**פתרון:**

1) סורקים את הקלט משמאל לימין.

- אם הtau הנקרא a או b עוברים לtau ימינה הבא וחוזרים לשלב 1).
- אם הtau הנקרא \sqcup הגיעו לסוף הקלט, ועוברים לשלב 2).

2) עוברים שמאלה לtau הארון של המילה.

- אם הtau הנקרא $a \leftarrow$ מקבל.
- אחרת דוחה.

לכן המוכנה מקבלת שפת המילים המסתויימות באוט a .**דוגמה 1.9**

מהי השפה של המוכנה למטה:



פתרונות:

1) במצב ההתחלתי:

- אם התו הנקרא $_$ \Leftarrow מקבל.
- אם התו הנקרא a מורידים אותו על ידי $_$ וועברים לשלב 2).
- אחרת \Leftarrow דוחה.

2) עוברים ימינה עד שמנגנים לסוף המילה.

- אם התו האחרון הוא b , מורידים אותו על ידי $_$, חוזרים לתחילת המילה וחוזרים לשלב 1).
- אחרת דוחה.

בכל איטרציה המכונה מורידה תו a בתחילת המילה וחזרת ומורידה תו b תואם בסוף המילה. בכל איטרציה אם המכונה לא מוצאת b תואם בסוף המילה היא דוחה המילה. אחרת אם המכונה לא דוחה המילה וכל האותיות נמחקוות או המילה מתקבלת. לכן המכונה מקבלת שפת המילים

$$\{a^n b^n \mid n \geq 0\} .$$

הגדרה 1.4 גירה בצעד אחד

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיריניג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M . נסמן

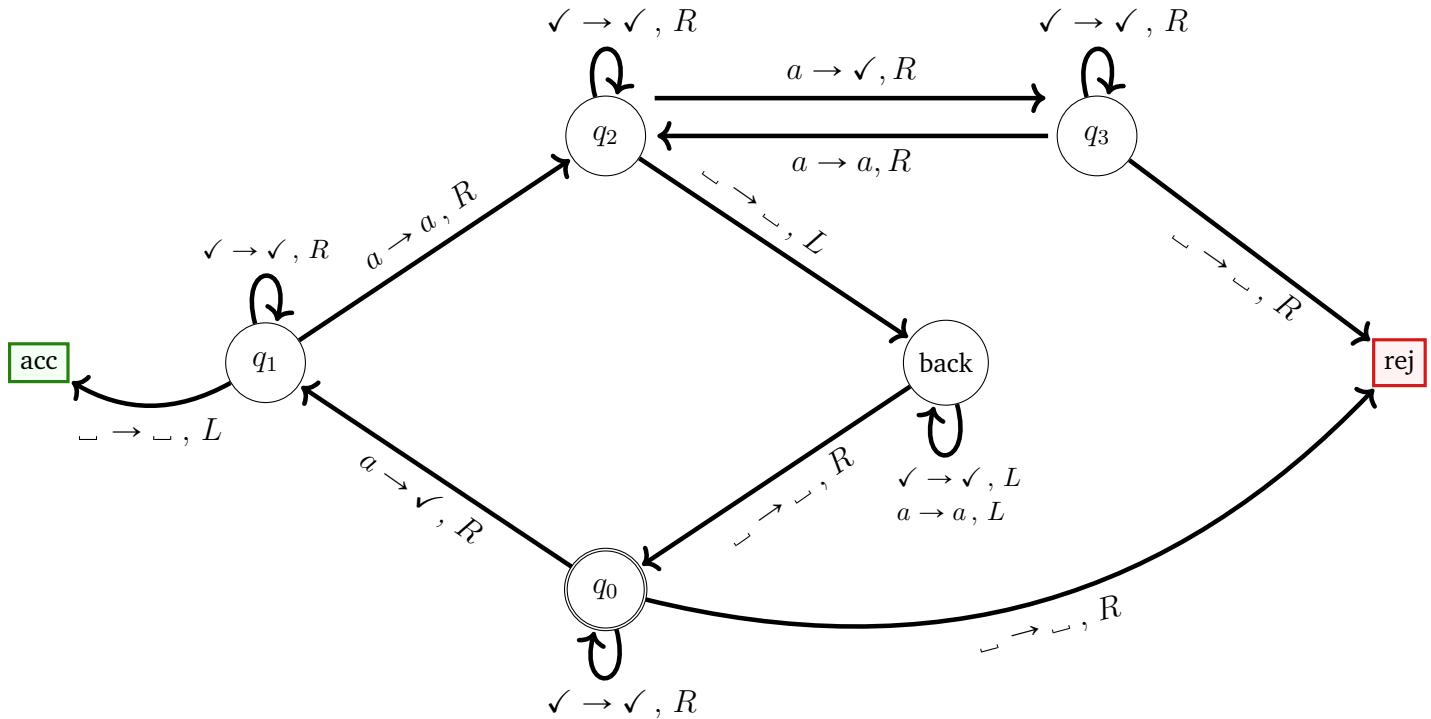
$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם כשנמצאים ב- c_1 עוברים ל- c_2 בצעד בודד.

דוגמה 1.10 (המשך של דוגמה 1.5)

עבור המكونת טיורינג שמתוארת בתרשים למטה מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$

**הגדרה 1.5 גירירה בכללי**

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מكونת טיורינג, ותהינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M
נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

אם ניתן לעבור מ- c_1 ל- c_2 ב- 0 או יותר צעדים.

דוגמה 1.11 (המשך של דוגמה 1.5)

עבור המكونת טיורינג שמתוארת בתרשים למטה מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M^* \checkmark \checkmark \checkmark q_4 a$$

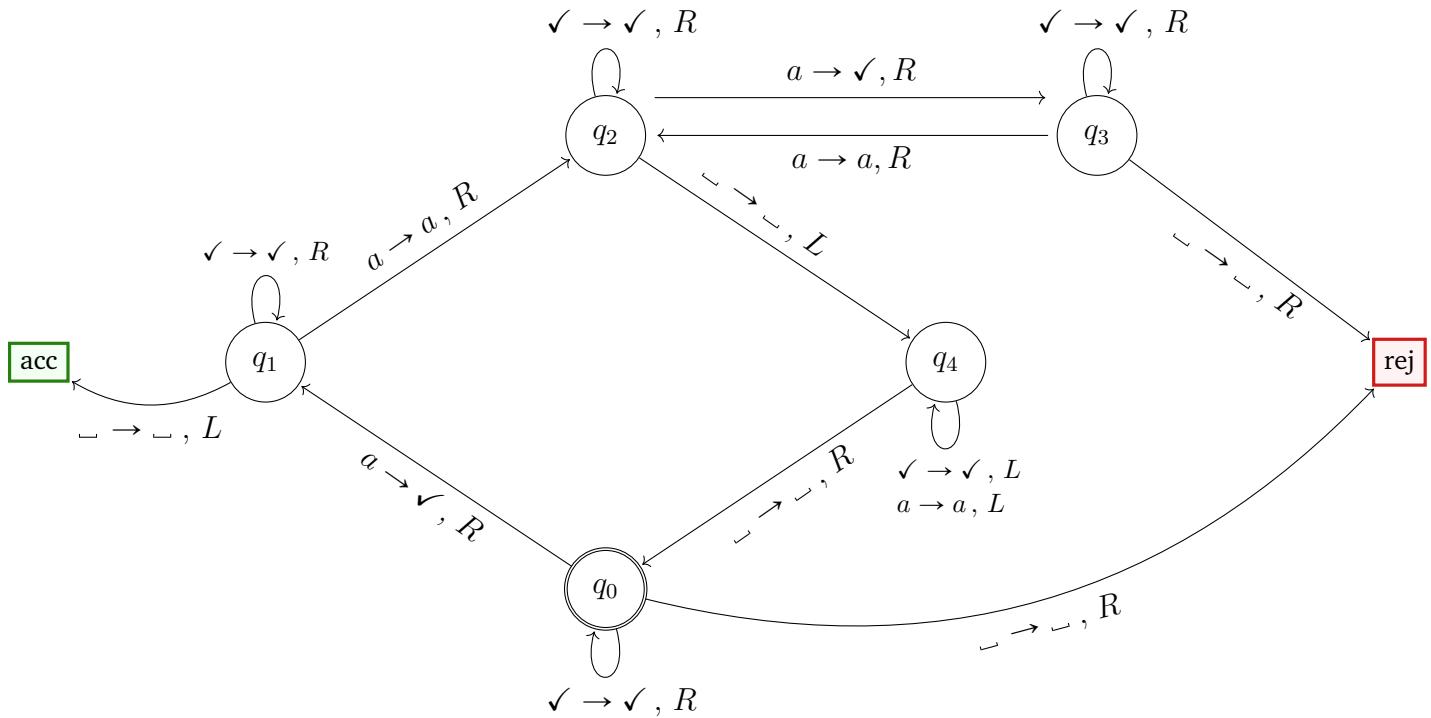
בגלל ש:

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark q_1 a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark a q_2 _$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark q_4 a .$$



הגדירה 1.6 קבלת ודוחיה של מחרוזות

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ מכונת טיורינג, ו- $w \in \Sigma^*$ מחרוזת. אומרים כי:

- **מקבלת את w אם**

$$q_0 w \vdash_M^* u q_{acc} \sigma v$$

כאשר $\Gamma^* v, \sigma \in \Gamma$ כלשהם.

- **דוחה את w אם**

$$q_0 w \vdash_M^* u q_{rej} \sigma v$$

כאשר $\Gamma^* v, \sigma \in \Gamma$ כלשהם.

הגדירה 1.7 הכרעה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, acc, q_{rej})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מכריעה** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים:

- M מקבלת את w .

- M דוחה את w .

הגדירה 1.8 קבלת של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מקבלת** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים:

- אם $w \in L$ מקבלת את w .

- אם $w \notin L$ לא מקבלת את w .

במקרה זה כאשר M מקבלת את השפה L , נכתב ש-

$$L(M) = L .$$

1.2 טבלת המעברים

דוגמה 1.12

בנו מכונה טיורינג שמכריעת את השפה

$$L = \{w = \{a, b, c\}^* \mid \#a_w = \#b_w = \#c_w\}$$

פתרון:

נתאר את המכונה על ידי הטבלת המעברים של המכונה. הסימן S מסמן כל זוג אותיות שונות מהקבוצה $\{a, b, c\}$ ללא חשיבות לסדר. ככלומר:

$$S = \{a, b\} , \quad S = \{b, c\} , \quad S = \{a, c\} .$$

מצב	מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	позה	תנאי
q_0	σ	$q.\sigma$	✓	R	$\sigma \in \{a, b, c\}$	
$q.\sigma$	σ	$q.\sigma$	✗	R	$\sigma \in \{a, b, c\}$	
$q.\sigma$	τ	$q.\{\sigma\tau\}$	✓	R	$\sigma, \tau \in \{a, b, c\} \wedge \sigma \neq \tau$	
$q.S$	σ	$q.S$	σ	R	$\sigma \in S$	
$q.S$	σ	q_{back}	✓	L	$\sigma \notin S$	
q_{back}	a, b, c, \checkmark	q_{back}	✗	L		
q_0	—	q_{acc}	✗	R		
q_{back}	a, b, c, \checkmark	q_{back}	✗	L		
q_{back}	—	q_0	✗	R		

כעת נתאר את המכונה על ידי תרשימים המצביעים של המכונה:



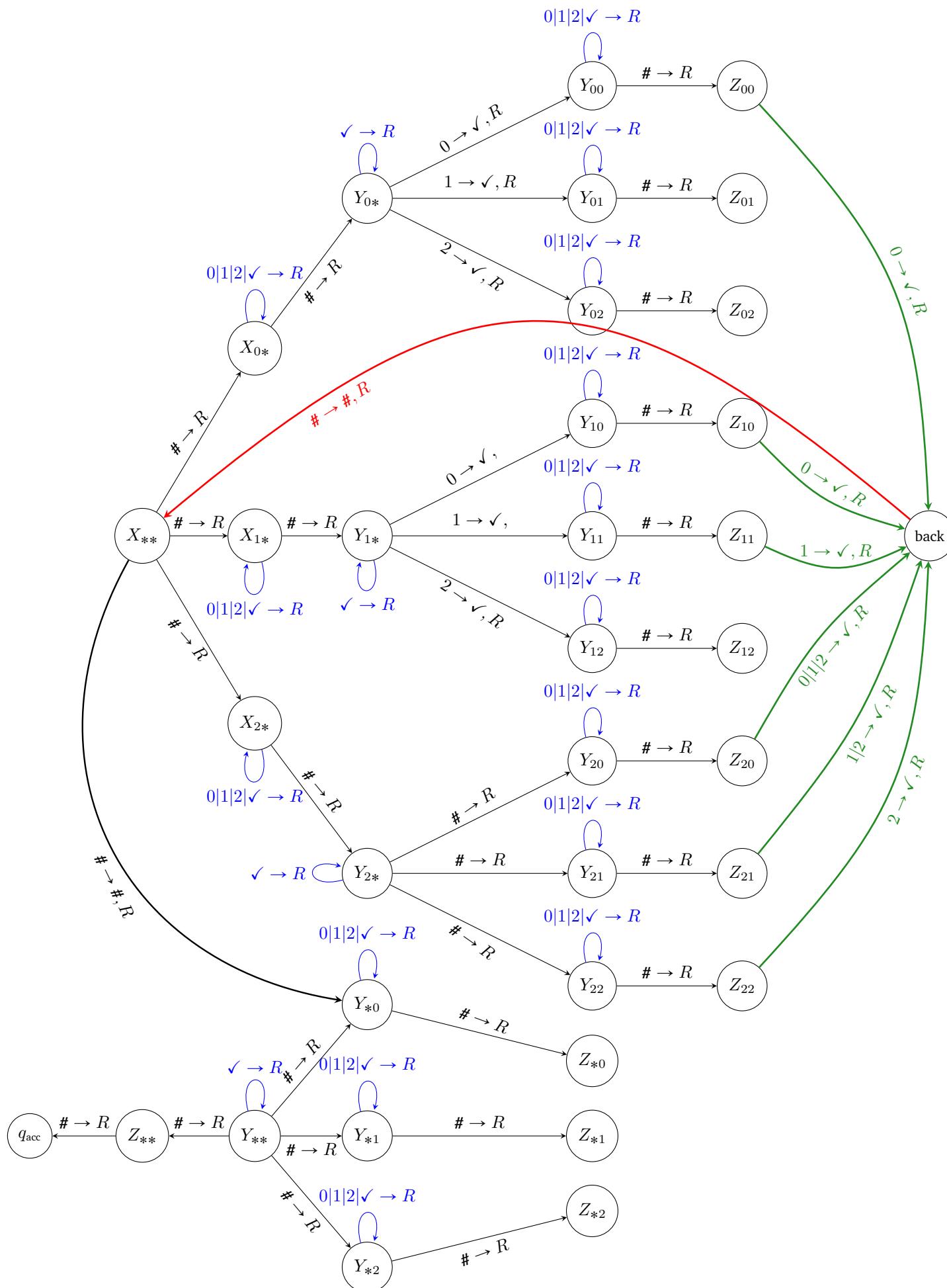
דוגמה 1.13

בנו מכונת טיורינג שמקריעה את השפה

$$\{x_1 \dots x_k \# y_1 \dots y_k \# z_1 \dots z_k \mid x_i, y_i, z_i \in \{0, 1, 2\}, \forall i, x_i \geq y_i \geq z_i\}$$

פתרונות:

מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזואה	תנאי
$X * *$	σ	$X\sigma*$	✓	R	
$X * *$	✓	$X * *$	✓	R	
$X\sigma*$	0, 1, 2, ✓	$X\sigma*$	∅	R	
$X\tau*$	#	$Y\tau*$	∅	R	
$Y\tau*$	σ	$Y\tau\sigma$	∅	R	
$Y\tau*$	✓	$Y\tau*$	∅	R	
$Y\tau\sigma$	0, 1, 2, ✓	$Y\tau\sigma$	∅	R	
$Y\tau_1\tau_2$	#	$Z\tau_1\tau_2$	∅	R	
$Z\tau_1\tau_2$	✓	$Z\tau_1\tau_2$	∅	R	
$Z\tau_1\tau_2$	σ	q_{back}	✓	L	
$Z * *$	—	q_{acc}	∅	R	$\tau_1 \geq \sigma \geq \tau_2$
q_{back}	0, 1, 2, ✓	q_{back}	∅	L	
q_{back}	—	$X * *$	∅	R	



1.3 חישוב פונקציות

הגדרה 1.9 מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה f

תהי $\Sigma_2^* \rightarrow \Sigma_1^*$ ותהי $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ מכונת טיורינג $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מוחשבת את f אם:

- $\Sigma_2 \subset \Gamma$ ו- $\Sigma = \Sigma_1$.
- לכל $q_0 w \vdash q_{\text{acc}}, f(w) \in \Sigma_1^*$ מתקיים.

דוגמה 1.14 חיבור אונרי

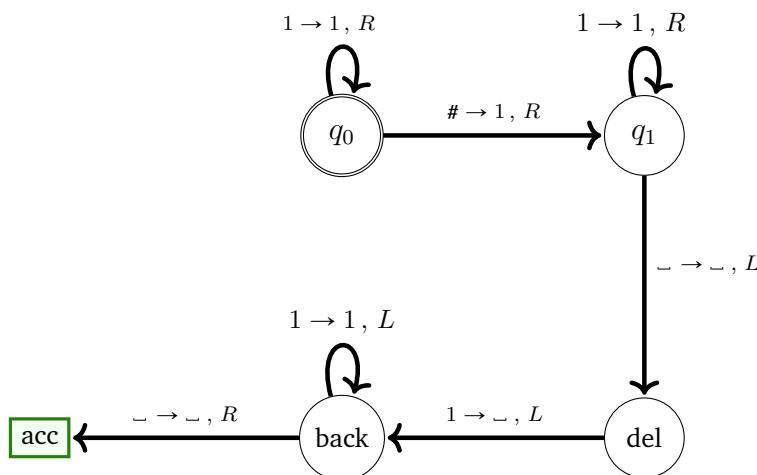
בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i \# 1^j$$

ומחזירה את פלט

$$1^{i+j}.$$

פתרונות:



דוגמה 1.15 כפל אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i \# 1^j$$

ומחזירה את פלט

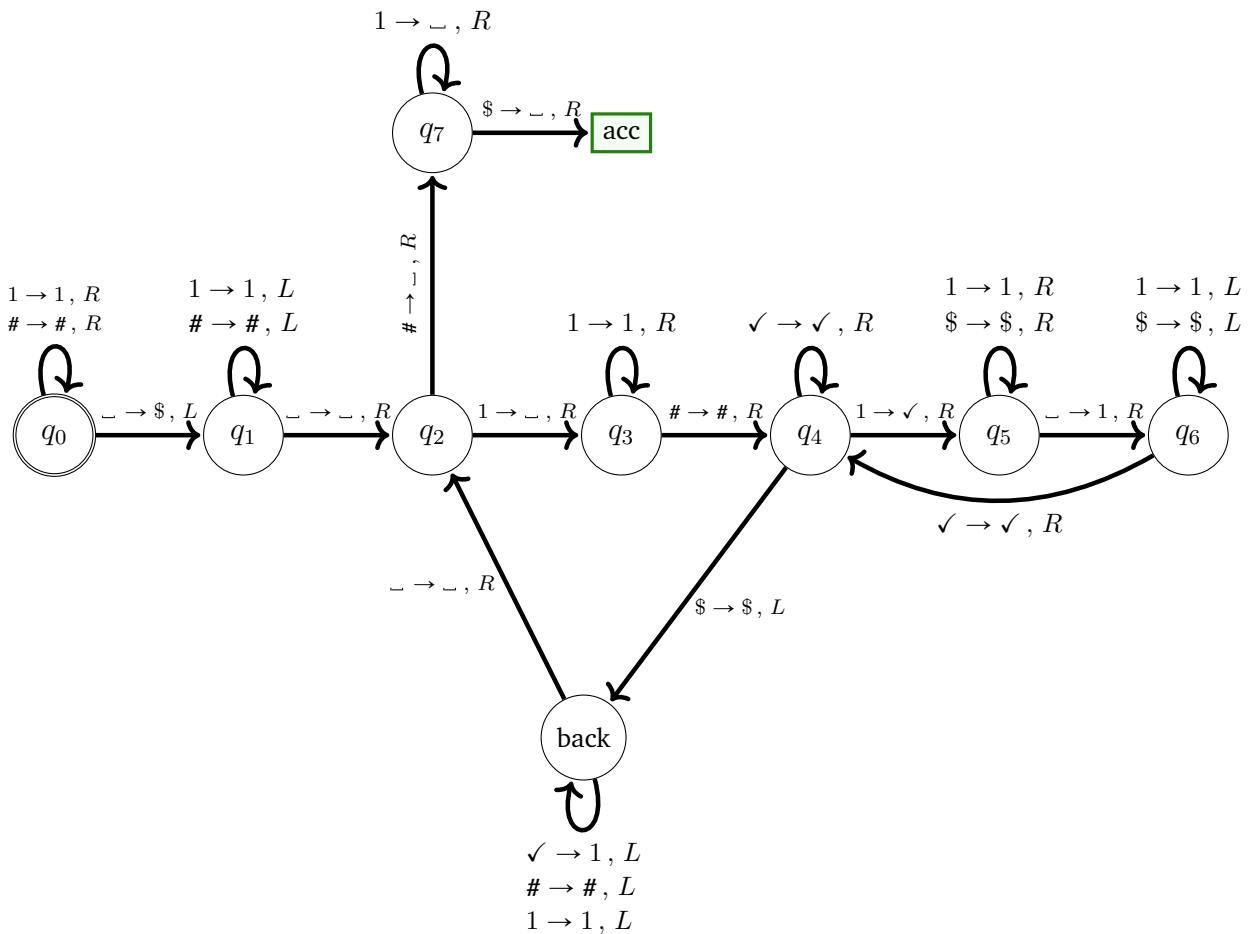
$$1^{i \cdot j}.$$

פתרונות:

- לדוגמה, נניח שהקלט הוא 2 כפול 2.

הקלט הוא 11#11.

- נרצה להבדיל בין הקלט לבין הפלט.
לכן בתחילת הריצה, נתקדם ימינה עד סוף הקלט ונוסף שם את התו \$.
לאחר מכן נחזור לתחילת הקלט.
- על כל אות 1 במילה השמאלית נעתק את המילה הימנית לאחר סימן ה- \$.
- לאחר מכן נשאיר רק את התווים שלאחר סימן ה \$. כמובן, נמחק את כל מה שאינו פלט.



μ	q	σ	ν
$_$	q_0	1	$1\#11_$
$_11\#11$	q_1	$_$	$_$
$_11\#11$	q_1	\$	$_$
$_$	q_1	$_$	$11\#11\$$
$_$	q_2	1	$1\#11\$$
$_ _$	q_3	1	$\#11\$$
$_ _1\#$	q_4	1	$1\$$
$_ _1\#\checkmark$	q_5	1	\$
$_ _1\#\checkmark 1\$$	q_5	$_$	$_$
$_ _1\#\checkmark 1\$1$	q_6	$_$	$_$
$_ _1\#$	q_6	\checkmark	$1\$1_$
$_ _1\#\checkmark$	q_4	1	$\$1_$
$_ _1\#\checkmark\checkmark$	q_5	\$	$1_$
$_ _1\#\checkmark\checkmark \1	q_5	$_$	$_$
$_ _1\#\checkmark\checkmark \11	q_6	$_$	$_$

$\sqcup \sqcup 1\# \checkmark$	q_6	\checkmark	\$11	\sqcup
$\sqcup \sqcup 1\#\checkmark\checkmark$	q_4	\$	11	\sqcup
$\sqcup \sqcup 1\#\checkmark$	back	\checkmark	\$11	\sqcup
$\sqcup \sqcup$	back	\sqcup	1#11\$11	\sqcup
$\sqcup \sqcup$	q_2	1	#11\$11	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup$	q_3	#	11\$11	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \#$	q_4	1	1\$11	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark$	q_5	1	\$11	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark 1\11	q_5	\sqcup	\sqcup	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark 1\111	q_6	\sqcup	\sqcup	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark$	q_6	\checkmark	1\\$111	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark$	q_4	1	\$111	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark \checkmark$	q_5	\$	111	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark \checkmark \111	q_5	\sqcup	\sqcup	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark \checkmark \1111	q_6	\sqcup	\sqcup	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark$	q_4	\checkmark	\$1111	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark \checkmark$	q_4	\$	1111	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark$	back	\checkmark	\$1111	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup$	back	\sqcup	#11\$1111	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup$	q_2	#	11\$1111	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup$	q_7	1	1\$1111	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup$	q_7	\$	1111	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup$	acc	1	111	\sqcup