

## שעור 3

### ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

### 3.1 ערכיים עצמיים, ווקטורים עצמיים של מטריצות

#### הגדרה 3.1 ערך עצמי ווקטור עצמי של מטריצה

תהי  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  מטריצה ריבועית מעל שדה  $\mathbb{F}$ . וקטור  $v \in F^n$  שלא שווה לוקטור האפס ( $v \neq \bar{0}$ ) יקרא וקטור עצמי של  $A$  אם קיים סקלר  $\lambda \in \mathbb{F}$  כך ש-

$$A \cdot v = \lambda v.$$

$\lambda$  נקרא ערך עצמי של  $A$  ששייך לוקטור עצמי  $v$ . המשוואה הזאת נקראת משוואת ערך עצמי של  $A$ .

#### 3.1 דוגמה

נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},$$

קבעו אם כל אחד מהוקטורים הבאים, הוא וקטור עצמי של  $A$  ומצאו את הערך העצמי המתאים:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (\text{א})$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ב})$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ג})$$

#### פתרון:

(א)

$$A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 8u_1.$$

ולכן  $u_1$  הוא הוקטור עצמי של  $A$  השייך לערך עצמי

$$\lambda_1 = 8.$$

(ב)

$$A \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0u_2.$$

ולכן  $u_2$  הוא הוקטור עצמי של  $A$  השייך לערך עצמי

$$\lambda_2 = 0.$$

(ג)

$$A \cdot u_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן  $u_3$  אינו וקטור עצמי של  $A$ .

### דוגמה 3.2

נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix},$$

קבעו אם כל אחד מהוקטורים הבאים, הוא וקטור עצמי של  $A$  ומצאו את הערך העצמי המתאים:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{א})$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ב})$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ג})$$

### פתרון:

(א)

$$A \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 10 \end{pmatrix} \neq \lambda u_1.$$

ולכן  $u_1$  אינו וקטור עצמי של  $A$ .

(ב)

$$A \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2u_2.$$

ולכן  $u_2$  הוא הוקטור עצמי של  $A$  השייך לערך עצמי

$$\lambda = 2.$$

(ג)

$$A \cdot u_3 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולכן  $u_3$  הוא הוקטור עצמי של  $A$  השייך לערך עצמי  $\lambda = 8$ .

### דוגמה 3.3

הראו ש  $u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  הינם וקטורי עצמיים של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

### פתרון:

$$A \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן  $u_1$  הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי  $\lambda_1 = 2$  ו  $u_2$  הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי  $\lambda_2 = 0$ .

### משפט 3.1

ערך עצמי של מטריצה יכול להיות 0.  
וקטור האפס לא יכול להיות וקטור עצמי של מטריצה.

### משפט 3.2 המשוואה האופייני של מטריצה

תהי  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , ויהי  $v$  וקטור עצמי של  $A$  ששייך לערך עצמי  $\lambda$ . אז לפי הגדרה 3.1,

$$A \cdot v = \lambda v ,$$

נעביר אגפים:

$$\bar{0} = \lambda v - Av \quad \Rightarrow \quad \bar{0} = (\lambda I - A) v$$

כאשר  $I$  המטריצה היחידה של  $\mathbb{F}^{n \times n}$ . קיבלנו את המשוואה

$$(\lambda I - A) v = \bar{0} .$$

$v$  וקטור עצמי אז הוא לא יכול להיות וקטור האפס. לכן הדטרמיננטה של המטריצה  $(\lambda I - A)$  שווה ל-0.  
כלומר

$$|\lambda I - A| = 0 .$$

המשוואה הזאת נקראת **משוואת האופייני של  $A$** .

הצד שמאל נקרא **פולינום האופייני של  $A$**  ומסומן  $p_A(\lambda)$ . כלומר

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| .$$

### משפט 3.3 סדר של פולינום האופייני

אם  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , אז הפולינום האופייני  $p_A(x)$  של  $A$  מסדר  $n$ .

### משפט 3.4 מרחב עצמי

תהי  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  ויהי  $\lambda$  ערך עצמי של  $A$ . נסמן ב-  $V_\lambda$  הקבוצה של כל הוקטורים עצמיים ששייכים לערך עצמי  $\lambda$ , בתוספת הוקטור האפס.  
 $V_\lambda$  תת-מרחב של  $\mathbb{F}^{n \times n}$ .

הוכחה: תרגיל בית.

### משפט 3.5 מרחב עצמי של ערך עצמי $\lambda$ שווה למרחב האפס של $A - \lambda I$

תהי  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , יהי  $\lambda$  ערך עצמי של  $A$  ויהי  $V_\lambda$  מרחב העצמי של  $A$ . אז

$$V_\lambda = \text{Nul}(A - \lambda I) .$$

**הוכחה:** נוכיח כי  $V_\lambda \subseteq \text{Nul}(A - \lambda I)$ .

יהי  $u$  וקטור עצמי של  $A$  ששייך לערך עצמי  $\lambda$ . אז  $u$  מקיים את משוואת הערך עצמי:

$$A \cdot u = \lambda u \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I) \cdot u = \bar{0}$$

כאשר  $\bar{0} \in \mathbb{F}^n$  וקטור האפס. לכן  $u \in \text{Nul}(A - \lambda I)$  לכל וקטור  $u \in V_\lambda$ . לכן

$$V_\lambda \subseteq \text{Nul}(A - \lambda I) .$$

נוכיח כי  $\text{Nul}(A - \lambda I) \subseteq V_\lambda$ .

יהי  $u \in \text{Nul}(A - \lambda I)$ . אז

$$(A - \lambda I) u = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad A \cdot u = \lambda u .$$

אז  $u$  וקטור עצמי של  $A$  ששייך לערך עצמי  $\lambda$ . לכן  $u \in V_\lambda$  לכל  $u \in \text{Nul}(A - \lambda I)$ . לכן

$$\text{Nul}(A - \lambda I) \subseteq V_\lambda .$$



### הגדרה 3.2 ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי של ערך עצמי של מטריצה

תהי  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , ויהי  $u_i$  ערך עצמי  $\lambda_i$ .

**הריבוי אלגברי** של  $\lambda_i$  הוא הריבוי של  $\lambda_i$  בפולינום האופייני של  $A$ . כלומר אם

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_i)^{m_i} \cdots (\lambda - \lambda_l)^{m_l} ,$$

אז הריבוי אלגברי של  $\lambda_i$  הוא  $m_i$ .

**הריבוי גיאומטרי** של  $\lambda_i$  הוא המימד של המרחב עצמי שלו. כלומר אם

$$V_{\lambda_i} = \{u_1, \dots, u_k\}$$

אז ל- $\lambda_i$  יש  $k$  וקטורים עצמיים ואומרים כי הריבוי גיאומטרי של  $\lambda_i$  הוא  $k$ .

### דוגמה 3.4

מצאו את כל הערכים עצמיים והוקטורים עצמיים של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

### פתרון:

נרשום את הפולינום האופייני של המטריצה:

$$|\lambda I - A| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

או שקול

$$(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

ולכן לפולינום אופייני יש שני פתרונות:

$$\lambda = 4$$

$$\lambda = -1$$

נמצא את הוקטורים עצמיים של כל אחד של הערכים עצמיים ע"י למצוא את  $\text{Nul}(A - \lambda I)$ .

$$\underline{\lambda = 4}$$

$$(A - \lambda I \mid \bar{0}) \stackrel{\lambda=4}{\equiv} (A - 4I \mid \bar{0}) = \left( \begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{פתרון: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ נסמן}$$

$$V_4 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

$V_4$  הוא ה **מרחב עצמי** השייך לערך עצמי  $\lambda = 4$ . נסמן

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$u_1$  הוא הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי  $\lambda = 4$ .

$\dim(V_4) = 1$  לכן הרכיבי גיאומטרי של  $\lambda = 4$ , הוא 1.

$$\underline{\lambda = -1}$$

$$(A - \lambda I \mid \bar{0}) \stackrel{\lambda=-1}{\equiv} (A + I \mid \bar{0}) = \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{הפתרון הוא: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ נסמן}$$

$$V_{-1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$V_{-1}$  הוא המרחב עצמי השייך להערך עצמי  $\lambda = -1$ . נסמן

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$u_2$  הוא הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי  $\lambda = -1$ .

$\dim(V_{-1}) = 1$  לכן הרכיבי גיאומטרי של  $\lambda = -1$ , הוא 1.

### 3.5 דוגמה

מצאו את כל הערכים עצמיים והוקטורים עצמיים של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## פתרון:

נרשום את הפולינום האופייני של המטריצה:

$$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2)((\lambda - 2)^2 - 1) = 0.$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

קיימים 3 ערכים עצמיים:

2.  $\lambda = 1$  מריבוי אלגברי

1.  $\lambda = 2$  מריבוי אלגברי

1.  $\lambda = 3$  מריבוי אלגברי

$$\underline{\lambda = 1}$$

$$(A - \lambda I \mid \bar{0}) \stackrel{\lambda=1}{=} (A - I \mid \bar{0}) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

הפתרון הוא  $\lambda = 1$  הוא המרחב עצמי ששייך לערך עצמי  $\lambda = 1$ .  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $z, w \in \mathbb{R}$

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בבסיס של  $V_1$  ישנם שני וקטורים. נסמן

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$u_1$  ו- $u_2$  הם הוקטורים עצמיים ששייכים לערך עצמי  $\lambda = 1$ .

כיוון ש  $\dim(V_1) = 2$ , אומרים כי **הריבוי גאומטרי** של הערך עצמי  $\lambda = 1$  הוא 2.

$$\underline{\lambda = 2}$$

$$(A - 2I \mid \bar{0}) = \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

פתרון:  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , המרחב עצמי ששייך לערך עצמי  $\lambda = 2$  הוא

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

בביס של  $V_2$  יש וקטור אחד. נסמן

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$u_3$  הוא הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי  $\lambda = 2$ . כיוון ש  $\dim(V_2) = 1$ , אז אומרים כי הריבוי גאומטרי של הערך עצמי  $\lambda = 2$  הוא 1.

$$\underline{\lambda = 3}$$

$$(A - 3I \mid \bar{0}) = \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow -R_1 \\ R_2 \rightarrow -R_2}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 + R_1 \\ R_4 \rightarrow -\frac{1}{2}R_4}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - 2R_3} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

פתרון:  $\lambda = 3$  הוא המרחב עצמי ששייך לערך עצמי  $\lambda = 3$  הוא  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R}.$

$$V_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

בבסיס של  $V_3$  יש וקטור אחד:

$$u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$u_4$  הוא הוקטור עצמי ששייך לערך עצמי  $\lambda = 3$ . כיוון ש- $\dim(V_3) = 1$  אז אומרים כי הריבוי גאומטרי של הערך עצמי  $\lambda = 3$  הוא 1.

## 3.2 לכסון של מטריצה



### הגדרה 3.3 לכסינות של מרטיצות

תהי  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ .  $A$  תקרא לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית. כלומר אם קיימת מטריצה הפיכה  $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$  ומטריצה אלכסונית  $D \in \mathbb{F}^{n \times n}$  כך ש-

$$D = P^{-1}AP.$$

### משפט 3.6 לכסינות של מרטיצות

תהי  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . אם הוקטורים עצמיים של  $A$  מהווה בסיס של  $\mathbb{F}^n$  אז  $A$  לכסינה.

נסמן הוקטורים עצמיים ב-  $\{u_1, \dots, u_n\}$  ששייכים לערכים עצמיים  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  בהתאמה (הערכים עצמיים לא בהכרח שונים זה מזה). מכאן נובע ש-

$$D = P^{-1}AP \quad \Leftrightarrow \quad A = PDP^{-1}$$

כאשר  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$  מטריצה אלכסונית ו  $P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$  מטריצה הפיכה.

**הוכחה:** הוכחה:  $A \cdot u_i = \lambda_i u_i$  לכל  $1 \leq i \leq n$ . לכן

$$\begin{aligned} A \cdot P &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A \cdot u_1 & A \cdot u_2 & \dots & A \cdot u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \dots & \lambda_n u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= PD. \end{aligned}$$

כלומר  $AP = PD$ . נתון כי הוקטורים עצמיים מהווים בסיס, אז  $\{u_1, \dots, u_n\}$  ולכן  $P$  הפיכה. לכן  $P^{-1}$  קיימת ומותר להכפיל מצד שמאל ב-  $P^{-1}$ . נקבל

$$A = P^{-1}PD.$$

■

### משפט 3.7 קריטריון 1 ללכסינות של מטריצה

תהי  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . אם ל-  $A$  יש  $n$  ערכים עצמיים שונים ב-  $\mathbb{F}$ , אז  $A$  לכסינה.

■

**הוכחה:** תרגיל בית.

### משפט 3.8 קריטריון 2 ללכסינות של מטריצה: סכום המימדים של מרחבים העצמיים

תהי  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . לכסינה אם"ס סכום המימדים של המרחבים העצמיים השונים שווה ל-  $n$ .

הוכחה: תרגיל בית.

### משפט 3.9 קריטריון 3 ללכסינות של מטריצה

תהי  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  אם

1. הפולינום האופייני שלה מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים מעל  $\mathbb{F}$ , לא בהכרח שונים, ו-

2. הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי שווה לריבוי הגיאומטרי שלו,

אז  $A$  לכסינה מעל  $\mathbb{F}$ .

הוכחה: תרגיל בית.

## 3.3 ערכים עצמיים של טרנספורמציות לינאריות

### הגדרה 3.4 אופרטור לינארי

יהי  $V$  מרחב וקטורי. טרנספורציה לינארי  $T : V \rightarrow V$  נקראת אופרטור לינארי.

### הגדרה 3.5 אופרטור לכסין

אופרטור לינארי  $T : V \rightarrow V$  נקראת לכסין אם קיים בסיס של  $V$  כך ש-  $[T]_B$  אלכסונית.

ז"א קיים בסיס  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  של  $V$  כך ש-

$$T(b_1) = \lambda_1 b_1, \quad T(b_2) = \lambda_2 b_2, \quad \dots, \quad T(b_n) = \lambda_n b_n.$$

אז

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(לא כל ה-  $\lambda$  בהכרח שונים זה מזה)

### הגדרה 3.6 ערך עצמי ווקטור עצמי של אופרטור לינארי

תהי  $T : V \rightarrow V$  אופרטור לינארי ו-  $\lambda$  סקלר.  $\lambda$  נקרא **ערך עצמי** של  $T$  אם קיים וקטור  $u \neq 0$  כך ש-

$$T(u) = \lambda u.$$

$u$  נקרא

וקטור עצמי ששייך לערך עצמי  $\lambda$ .

### משפט 3.10

אופרטור לינארי  $T : V \rightarrow V$  לכסינה אם"ם קיים בסיס של  $V$  המורכב מוקטורים עצמיים.

הוכחה:  $\Rightarrow$

נניח ש  $T$  לכסינה. ז"א קיים בסיס  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  כך ש-

$$T(u_1) = \lambda_1 u_1, \quad T(u_2) = \lambda_2 u_2, \quad \dots, \quad T(u_n) = \lambda_n u_n.$$

אז

$$[T]_U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(לא כל ה-  $\lambda$  בהכרח שונים זה מזה).

$\Leftarrow$

נניח שקיים בסיס  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  שמורכב מוקטורים עצמיים. ז"א קיימים סקלרים  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  כך ש-

$$T(u_1) = \lambda_1 u_1, \quad \dots, \quad T(u_n) = \lambda_n u_n.$$

לכן

$$[T]_U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

אלכסונית.

### הגדרה 3.7 פולינום האופייני של אופרטור לינארי

תהי  $T : V \rightarrow V$  אופרטור לינארי. נניח ש  $A$  המטריצה המייצגת של  $T$  לפי בסיס  $B$ . אז הפולינום

$$p_T(\lambda) = |\lambda I - A|$$

נקרא הפולינום האופייני של  $T$ .

### הגדרה 3.8 ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי של ערך עצמי של אופרטור לינארי

נניח  $T : V \rightarrow V$  אופרטור לינארי ו-  $\lambda$  ערך עצמי.

(1) הריבוי האלגברי של  $\lambda$  הוא הריבוי של  $\lambda$  בפולינום האופייני.

(2) הריבוי הגאומטרי של  $\lambda$  הוא  $\dim(V_\lambda)$ , כלומר, מספר הוקטורים העצמיים הבת"ל השייכים ל-  $\lambda$ .

### דוגמה 3.6

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$$

חפשו את הוקטורים עצמיים של  $T$  כך ש- $T(u) = \lambda u$ .  
האם  $T$  לכסינה?

#### פתרון:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$$

כאשר  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  המטריצה המייצגת של האופרטור.

פולינום האופייני:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0.$$

ערכים עצמיים:

$$\lambda = -1$$

$$\lambda = 4$$

$$\underline{\lambda = 4}$$

$$(A - 4I) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} y, y \in \mathbb{R}$ . לכן המרחב עצמי של  $\lambda = 4$  הוא  $V_4 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ . נסמן הוקטור עצמי שלו

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ב-}$$

$$\underline{\lambda = -1}$$

$$(A + I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} y, y \in \mathbb{R}$ . לכן המרחב עצמי של  $\lambda = -1$  הוא  $V_{-1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ . נסמן הוקטור

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ב-}$$

$u_1, u_2$  בת"ל:

$$(u_1 \ u_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

לכן הם מהווים בסיס של  $\mathbb{R}^2$ . לכן  $T$  לכסינה.

$$T(u_1) = 4 \cdot u_1, \quad T(u_2) = -1 \cdot u_2.$$

### משפט 3.11

יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $\mathbb{F}$  ויהי  $T : V \rightarrow V$  אופרטור ליניארי לכסיו. נניח ש-  $[T]_B$  המטריצה המייצגת של  $T$  לפי בסיס  $B$ . יהיו  $u_1, \dots, u_n$  הוקטורים עצמיים של  $T$  לפי בסיס  $B$ , ששייכים לערכים עצמיים  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (הם לא בהכרח שונים זה מזה). אז

$$[T]_B = PDP^{-1}$$

או באופן שקול

$$P^{-1}[T]_B P = D$$

כאשר  $P = \left( \begin{array}{c|c|c|c} | & | & \dots & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & \dots & | \end{array} \right)$  ו-  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

הוכחה:

$$\begin{aligned} [T]_B P &= [T]_B \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ [T]_B u_1 & [T]_B u_2 & \dots & [T]_B u_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \dots & \lambda_n u_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= PD, \end{aligned}$$

כלומר,  $[T]_B P = PD$ . הוקטורים עצמיים  $u_1, \dots, u_n$  בת"ל, אז  $P$  הפיכה לכן  $P^{-1}$  קיימת. לכן מותר להכפיל מצד ימין ב-  $P^{-1}$ . נקבל: ולכן

$$[T]_B = PDP^{-1}$$

ומכאן נובע כי

$$P^{-1}[T]_B P = D$$

### משפט 3.12

תהי  $T : V \rightarrow V$  העתקה ליניארית ו  $\lambda_0$  ערך עצמי. אם  $m$  הריבוי האלגברי ו-  $k$  הריבוי הגיאומטרי של  $\lambda_0$ , אז

$$k \leq m.$$

במילים: הריבוי הגיאומטרי קטן או שווה לריבוי האלגברי.

**הוכחה:** נניח ש- $\lambda_0$  ערך עצמי מריבוי אלגברי  $m$  וריבוי גיאומטרי  $k$ .  
ז"א קיימים  $k$  וקטורים בת"ל  $u_1, \dots, u_k$  ששייכים לערך עצמי  $\lambda_0$ .  
נשלים אותו לבסיס של  $V$ :

$$B = \{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}.$$

נחשב את המטריצה המייצגת של  $T$  ביחס לבסיס  $B$ :

$$T(u_1) = \lambda_0 u_1, \quad \dots, \quad T(u_k) = \lambda_0 u_k$$

לכן

$$[T]_B = \left( \begin{array}{cccc|cccc} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & & & & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & \end{array} \begin{array}{l} * \\ \\ \\ \\ \hline A' \end{array} \right)$$

הופולינום הופייני של  $A$  הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left| \begin{array}{cccc|cccc} \lambda - \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ 0 & \lambda - \lambda_0 & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - \lambda_0 & & & & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & \end{array} \begin{array}{l} * \\ \\ \\ \\ \hline \lambda I - A' \end{array} \right|$$

נחשב את הדטרמיננטה דרך העמודה הראשונה:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0) \cdot \left| \begin{array}{ccc|ccc} \lambda - \lambda_0 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \lambda - \lambda_0 & & & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & & & \end{array} \begin{array}{l} * \\ \\ \\ \hline \lambda I - A' \end{array} \right|$$

עד שנקבל

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k |\lambda I - A'| = (\lambda - \lambda_0)^k p_{A'}(\lambda)$$

לכן הריבוי האלגברי גדול או שווה ל- $k$ .

### דוגמה 3.7

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

**א** מצאו את הערכים העצמיים ומרחבים עצמיים של  $A$ .

**ב** האם  $A$  לכסינה? אם כן, רשמו מטריצה אלכסונית  $D$  ומטריצה הפיכה  $P$  כך ש

$$D = P^{-1}AP.$$

## פתרון:

א

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & -3 \\ 1 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1) \begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 \\ -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1+\lambda \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1) ((\lambda+1)(\lambda-1) - 9) - (0 - (1+\lambda)) \\ &= (\lambda+1)(\lambda^2 - 1 - 9 + 1) \\ &= (\lambda+1)(\lambda^2 - 9) \\ &= (\lambda+1)(\lambda+3)(\lambda-3) \end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

1.  $\lambda = -1$  מריבוי אלגברי 1.

1.  $\lambda = 3$  מריבוי אלגברי 1.

1.  $\lambda = -3$  מריבוי אלגברי 1.

$$\underline{\lambda = -1}$$

$$(A + I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y$ . המרחב עצמי השייך להערך עצמי  $\lambda = -1$  הוא

$$V_{-1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

הווקטור עצמי של  $\lambda = -1$  הוא  $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

$\dim(V_{-1}) = 1$  לכן הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי  $\lambda = -1$  הוא 1.

$$\underline{\lambda = 3}$$

$$(A - 3I) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & -12 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z}{4} \\ \frac{3}{4}z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ . המרחב עצמי השייך להערך עצמי  $\lambda = 3$  הוא

$$V_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

הוקטור עצמי של הערך עצמי  $\lambda = 3$  הוא

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$\dim(V_3) = 1$  לכן הריבוי גיאומטרי של הערך עצמי  $\lambda = 3$  הוא 1.

$$\underline{\lambda = -3}$$

$$(A + 3I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ -\frac{3}{2}z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ . המרחב עצמי השייך להערך עצמי  $\lambda = -3$  הוא

$$V_{-3} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

הוקטור עצמי של הערך עצמי  $\lambda = -3$  הוא

$$u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$\dim V_{-3} = 1$  לכן הריבוי גיאומטרי של הערך עצמי  $\lambda = -3$  הוא 1.

**ב**  $\dim V_1 + \dim V_3 + \dim V_{-3} = 3$  לכן קיים בסיס של  $\mathbb{R}^3$ :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ומטריצה  $A$  לכסינה:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$



### דוגמה 3.8

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

א מצאו את הערכים העצמיים ומרחבים עצמיים של  $A$ .

ב האם  $A$  לכסינה? אם כן, רשמו מטריצה אלכסונית  $D$  ומטריצה הפיכה  $P$  כך ש

$$D = P^{-1}AP.$$

### פתרון:

א

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 5 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 5) \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & \lambda - 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 5) ((\lambda - 5)^2 - 4) + 2(-2(\lambda - 5) - 4) + 2(-4 - 2(\lambda - 5)) \\ &= (\lambda - 5) (\lambda^2 - 10\lambda + 21) + 2(-2\lambda + 6) + 2(-2\lambda + 6) \\ &= (\lambda - 5) (\lambda - 7) (\lambda - 3) - 4(\lambda - 3) - 4(\lambda - 3) \\ &= (\lambda - 3) ((\lambda - 5) (\lambda - 7) - 8) \\ &= (\lambda - 3) (\lambda^2 - 12\lambda + 35 - 8) \\ &= (\lambda - 3) (\lambda^2 - 12\lambda + 27) \\ &= (\lambda - 3) (\lambda - 9)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

$\lambda = 3$  ערך עצמי מריבוי אלגברי 2.

$\lambda = 9$  ערך עצמי מריבוי אלגברי 1.

$$\underline{\lambda = 3}$$

$$(A - 3I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . המרחב עצמי השייך להערך עצמי  $\lambda = 3$  הוא

$$V_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(V_3) = 2$  אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי  $\lambda = 3$  הוא 2.

$$\underline{\lambda = 9}$$

$$(A - 9I) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . המרחב עצמי השייך להערך עצמי  $\lambda = 9$  הוא

$$V_9 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(V_9) = 1$ , אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי הוא 1.

**ב**  $\dim V_9 = 1, \dim V_3 = 2$ .

$$\dim V_3 + \dim V_9 = 3.$$

לכן קיים בסיס של  $\mathbb{R}^3$  המורכב מוקטורים עצמיים:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ומטריצה  $A$  לכסינה:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$D = P^{-1}AP$$

### 3.9 דוגמה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

האם  $A$  לכסינה?

## פתרון:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -12 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ = (\lambda - 1)\lambda(\lambda - 1) = 0$$

$\lambda = 0$  ערך עצמי מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = 1$  ערך עצמי מריבוי אלגברי 2.

$$\underline{\lambda = 1}$$

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  המרחב עצמי השייך להערך עצמי  $\lambda = 1$  הוא

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(V_1) = 1$  אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי  $\lambda = 1$  הוא 1.

$$\underline{\lambda = 0}$$

$$(A - 0 \cdot I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  המרחב עצמי השייך להערך עצמי  $\lambda = 0$  הוא

$$V_0 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(V_0) = 1$  אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי  $\lambda = 0$  הוא 1.

$$\dim V_0 = 1, \dim V_1 = 1$$

$$\dim V_1 + \dim V_0 = 2 < \dim(\mathbb{R}^3) .$$

לכן לא קיים בסיס של  $\mathbb{R}^3$  המורכב מוקטורים עצמיים. לכן  $A$  לא לכסינה.

### משפט 3.13 קריטריון 1 ללכסינות של אופרטור

יהי  $V$  מרחב עצמי מעל  $\mathbb{F}$ , ויהי  $T : V \rightarrow V$  אופרטור לינארי. נניח ש-  $\dim(V) = n$ . אם ל-  $T$  יש  $n$  ערכים עצמיים שונים ב-  $\mathbb{F}$ , אז  $T$  לכסינה.

הוכחה: תרגיל בית.

### משפט 3.14 קריטריון 2 ללכסינות של אופרטור: סכום המימדים של מרחבים העצמיים

יהי  $V$  מרחב עצמי מעל  $\mathbb{F}$ , ויהי  $T : V \rightarrow V$  אופרטור לינארי. נניח ש-  $\dim(V) = n$ . ל-  $T$  לכסין אם סכום המימדים של המרחבים העצמיים השונים שווה ל-  $n$ .

הוכחה: תרגיל בית.

### משפט 3.15 קריטריון 3 ללכסינות של אופרטור

יהי  $V$  מרחב עצמי מעל  $\mathbb{F}$ , ויהי  $T : V \rightarrow V$  אופרטור לינארי. אם

1. הפולינום האופייני של  $T$  מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים מעל  $\mathbb{F}$ , לא בהכרח שונים, ו-
2. הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי שווה לריבוי הגיאומטרי שלו,

אז  $T$  לכסין מעל  $\mathbb{F}$ .

הוכחה: תרגיל בית.

### דוגמה 3.10

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. האם  $A$  לכסינה מעל  $\mathbb{R}$ ?

2. האם  $A$  לכסינה מעל  $\mathbb{C}$ ?

### פתרון:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

1.  $p_A(\lambda)$  לא מתפרק לגורמים לינאריים מעל  $\mathbb{R}$ , לכן  $A$  לא לכסינה מעל  $\mathbb{R}$ .

2.

$$\lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i) = 0$$

1.  $\lambda = i$  ערך עצמי מריבוי אלגברי 1.

1.  $\lambda = -i$  ערך עצמי מריבוי אלגברי 1.

$$\underline{\lambda = i}$$

$$(A - iI) = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iy \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ . המרחב עצמי השייך להערך עצמי  $\lambda = i$  הוא

$$V_i = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(V_i) = 1$  אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי הוא 1.

$$\underline{\lambda = -i}$$

$$(A + iI) = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iy \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ . המרחב עצמי השייך להערך עצמי  $\lambda = -i$  הוא

$$V_{-i} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(V_{-i}) = 1$  אז הריבוי הגיאומטרי של הערך עצמי הוא 1.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad D = P^{-1}AP.$$

### משפט 3.16 וקטורים עצמיים ששייכים לערכים עצמיים שונים בת"ל

נתון  $T : V \rightarrow V$  אופרטור לינארי. וקטורים עצמיים של  $T$  ששייכים לערכים עצמיים שונים הם בת"ל.

הוכחה: נתון:

$T : V \rightarrow V$  אופרטור לינארי,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ערכים עצמיים שונים ששייכים לוקטורים עצמיים  $u_1, \dots, u_n$  של  $T$ .

צריך להוכיח:

$u_1, \dots, u_n$  בת"ל.

הוכחה:

נוכיח את הטענה ע"י אינדוקציה על  $n$ .

שלב הבסיס:

עבור  $n = 1$ :  $u_1 \neq \bar{0}$ , לכן הוא בת"ל.

שלב האינדוקציה:

נניח שעבור  $n, n > 1$  וקטורים עצמיים ששייכים ל  $n$  ערכים עצמיים שונים בת"ל. נניח  $u_1, \dots, u_{n+1}$  וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ . נרשום

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1} u_{n+1} = \bar{0} \quad (*)$$

אז

$$\alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \dots + \alpha_n T(u_n) + \alpha_{n+1} T(u_{n+1}) = \bar{0}$$

$$\alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n u_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} u_{n+1} = \bar{0} \quad (*1)$$

נכפיל (\*) ב  $\lambda_{n+1}$ :

$$\alpha_1 \lambda_{n+1} u_1 + \alpha_2 \lambda_{n+1} u_2 + \dots + \alpha_n \lambda_{n+1} u_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} u_{n+1} = \bar{0} \quad (*2)$$

נחסיר (\*2) מ (\*1):

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) u_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_{n+1}) u_2 + \dots + \alpha_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) u_n + \alpha_{n+1} (\lambda_{n+1} - \lambda_{n+1}) u_{n+1} = \bar{0}$$

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) u_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_{n+1}) u_2 + \dots + \alpha_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) u_n = \bar{0} \quad (*3)$$

לפי ההנחת האינדוקציה הוקטורים  $u_1, \dots, u_n$  בת"ל. לכן

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) = 0, \dots, \alpha_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) = 0. \quad (*4)$$

כל הערכים העצמיים שונים זה מזה, כלומר  $\lambda_i - \lambda_{n+1} \neq 0$  לכל  $i = 1, \dots, n$ . לכן

$$\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0. \quad (*5)$$

נציב (\*5) ב- (\*) ונקבל

$$\alpha_{n+1} u_{n+1} = \bar{0}$$

$u_1 \neq 0$  כי הוא וקטור עצמי לכן  $\alpha_1 = 0$ . לכן (\*) מצביע רק אם כל המקודמים  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} = 0$  לכן הוקטורים עצמיים  $u_1, \dots, u_{n+1}$  בת"ל.

■

## 3.4 שימושים של לכסון מטריצה

### משפט 3.17 חזקה של מטריצה הדומה למטריצה אלכסונית

אם  $A$  לכסינה, אז קיימת מטריצה אלכסונית  $D$  ומטריצה הפיכה  $P$  כך ש  $D = P^{-1}AP$ . לכן

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

**הוכחה:**

נוכיח את הטענה ע"י אינדוקציה.

שלב הבסיס:

$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow D = P^{-1}AP, n = 1$$

שלב האינדוקציה:

נניש שעבור  $n$  מתקיים  $A^n = PD^nP^{-1}$ . אז

$$A^{n+1} = (PD^nP^{-1}) \cdot PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

### דוגמה 3.11

נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 מצאו את הערכים עצמיים והמרחבים עצמיים של  $A$ .

2 האם  $A$  לכסינה? אם כן רשמו מטריצה אלכסונית  $D$  ומטריצה הפיכה  $P$  כך ש  $D = P^{-1}AP$ .

3 חשבו את  $A^{1001}$ .

**פתרון:**

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$$

$\lambda = 1$  מריבוי אלגברי 2.

$\lambda = -1$  מריבוי אלגברי 1.

$$\underline{\lambda = 1}$$

$$(A - I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מרחב עצמי:

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underline{\lambda = -1}$$

$$(A + I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מרחב עצמי:

$$V_{-1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim V_1 + \dim V_{-1} = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

לכן  $A$  לכסינה.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{1001} = P D^{1001} P^{-1}$$

נמצא את  $P^{-1}$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$D^{1001} = \begin{pmatrix} 1^{1001} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{1001} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{1001} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{לכן}$$

$$A^{1001} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### משפט 3.18

אם  $u$  וקטור עצמי של  $A$  השייך לערך עצמי  $\lambda$ , כלומר  $A \cdot u = \lambda u$  אז

$$A^n u = \lambda^n u.$$

**הוכחה:** נוכיח את הטענה ע"י אינדוקציה.



שלב הבסיס:

עבור  $n = 1$ ,  $A \cdot u = \lambda u$  מתקיים כי נתון ש-  $u$  וקטור עצמי של  $A$ .

שלב האינדוקציה:

נניח שעבור  $n > 1$ ,  $A^n u = \lambda^n u$ . אז

$$A^{n+1}u = A(A^n u) = A\lambda^n u = \lambda^n Au = \lambda^n \cdot \lambda u = \lambda^{n+1}u.$$

### דוגמה 3.12

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**א** מצאו את הערך העצמי וקטור עצמי של  $A$ .

**ב** האם  $A$  לכסינה? אם כן רשמו מטריצה אלכסונית  $D$  ומטריצה הפיכה  $P$  כך ש  $D = P^{-1}AP$ .

**ג** חשבו את  $A^{2023} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**פתרון:**

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 4 & 0 \\ -1 & \lambda + 4 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & 4 \\ -1 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 = 0$$

$\lambda = 1$  מריבוי אלגברי 1.

$\lambda = -2$  מריבוי אלגברי 2.

$$\underline{\underline{\lambda = -2}}$$

$$(A + 2I) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**פתרון:**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**מרחב עצמי:**

$$V_{-2} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 1}}$$

$$(A - I) = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מרחב עצמי:

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim V_1 + \dim V_{-2} = 1 + 1 = 2 < \dim \mathbb{R}^3$$

לכן  $A$  לא לכסינה.

$$\text{וקטור עצמי השייך ל } \lambda = -2, \text{ לכן } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{2023} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2)^{2023} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^{2024} \\ -2^{2023} \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 3.5 משפטים נוספים הקשורים ללכסון של מטריצה

### משפט 3.19 דטרמיננטה של מטריצה משולשית שווה למכפלה של איברי האלכסון הראשי

תהי  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  מטריצה משולשית עליונה או משולשית תחתונה. הדטרמיננטה של  $A$  שווה למכפלה של האיברים על האלכסון הראשי. כלומר

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad |A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

**הוכחה:** אידוקציה על  $n$ .

שלב הבסיס:

עבור  $n = 1$  הטענה נכונה באופן טריוויאלי. כלומר נתון  $A \in \mathbb{F}^{1 \times 1}$ . נסמן  $A = (a)$  כאשר  $a$  האיבר היחיד במטריצה  $A$ .

$$|A| = a.$$

$A$  מטריצה משולשית, והאיבר היחיד על האלכסון הראשי הוא  $a$ . לכן המכפלה של האיברים על האלכסון ראשי פשוט שווה ל- $a$ . לכן  $|A|$  שווה למכפלה של האיברים על האלכסון הראשי של  $A$ .

שלב האינדוקציה:

נניח שהטענה נכונה עבור  $n = N$  (הנחת האינדוקציה). נוכיח אותה עבור  $n = N + 1$ .

תהי  $A \in \mathbb{F}^{N \times N}$  מטריצה משולשית עליונה:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,N} & a_{1,N+1} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,N} & a_{2,N+1} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,N} & a_{3,N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N,N} & a_{N,N+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{N+1,N+1} \end{pmatrix}$$

נחשב הדטרמיננטה על השורה האחרונה:

$$|A| = a_{N+1,N+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,N} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,N} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N,N} \end{vmatrix}$$

לפי ההנחת האינדוקציה הדטרמיננטה של מטריצה  $N \times N$  משולשית עליחונה שווה למכפלה של האיברים על האלכסון הראשי, לכן

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,N} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,N} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N,N} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{N,N} .$$

לכן

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{N,N} \cdot a_{N+1,N+1}$$

■

### משפט 3.20 ערכים העצמיים של מטריצה משולשית

הערכים העצמיים של מטריצה משולשית עליונה (או משולשית תחתונה) הם האיברים הנמצאים על האלכסון הראשי.

**הוכחה:** תהי  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  משולשית, ויהיו  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  האיברים על האלכסון הראשי. אז

$$\lambda I - A$$

גם מטריצה משולשית והאיברים על האלכסון הראשי הם  $\{\lambda - \alpha_1, \lambda - \alpha_2, \dots, \lambda - \alpha_n\}$ . הדטרמיננטה של מטריצה משולשית היא המכפלה של האיברים על האלכסון הראשי, לכן לכן

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \alpha_1) \cdot (\lambda - \alpha_2) \dots (\lambda - \alpha_n)$$

לכן הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1) \cdot (\lambda - \alpha_2) \dots (\lambda - \alpha_n) = 0 .$$

השורשים הם

$$\lambda = \alpha_1, \quad \lambda = \alpha_2, \quad \dots \quad \lambda = \alpha_n .$$

ז"א הערכים עצמיים שווים לאיברים על האלכסון הראשי.

■

### הגדרה 3.9 הגדרת דמיון בין מטריצות

תהינה  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . נאמר ש- $A$  ו- $B$  דומות אם קיימת מטריצה הפיכה  $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$  כך ש-

$$B = P^{-1}AP.$$

### משפט 3.21 פולינום האופייני של מטריצות דומות

אם  $A$  ו- $B$  דומות אז יש להן אותו פולינום אופייני, ולכן אותם ערכים עצמיים.

הוכחה:

$$\begin{aligned} f_B(x) &= |xI - B| \\ &= |xI - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}xIP - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(xI - A)P| \\ &= |P^{-1}| |xI - A| |P| \\ &= |P|^{-1} |xI - A| |P| \\ &= |xI - A| |P|^{-1} |P| \\ &= |xI - A| \\ &= f_A(x) \end{aligned}$$

### משפט 3.22 קיום ווקטור עצמי של אופרטור לינארית

יהי  $V$  מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה  $\mathbb{F}$  ותהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה לינארית. קיים לפחות וקטור עצמי אחד של  $T$ .

הוכחה: נניח ש- $\dim(V) = n$ . יהי  $u_1 \neq \bar{0} \in V$  הקבוצה

$$\{u_1, T(u_1), T^2(u_1), \dots, T^n(u_1)\}$$

תלויה לינארית כי יש בה  $n+1$  וקטורים. לכן הצירוף לינארי הבא מתקיים רק אם אחד המקדמים  $a_0, \dots, a_n$  שונה מאפס:

$$a_0 u_1 + a_1 T(u_1) + a_2 T^2(u_1) + \dots + a_n T^n(u_1) = \bar{0}. \quad (*)$$

נרשום את זה בצורה

$$(a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \dots + a_n T^n) u_1 = \bar{0}.$$

בצד שמאל יש הצבת העתקה בפולינום מסדר  $n$ . לפי המשפט היסודי של האלגברה יש לפולינום הזה פירוק לגורמים לינאריים:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = c(z - \lambda_1) \dots (z - \lambda_n)$$

כ:  $1 \leq i \leq n, \lambda_i \in \mathbb{C}, c \neq 0 \in \mathbb{C}$ . לכן ניתן לפרק את (\*) כ:

$$a_0 u_1 + a_1 T(u_1) + a_2 T^2(u_1) + \dots + a_n T^n(u_1) = c(T - \lambda_1 I) \dots (T - \lambda_n I) u_1 = \bar{0}. \quad (**)$$

$c \neq 0 \in \mathbb{C}$ . אם קיים פתרון  $u_1 \neq 0$  למשוואה הומוגנית ב- (\*) אז בהכרח הדטרמיננטה של המטריצה שמכפילה  $u_1$  שווה לאפס. לפיכך

$$|c(T - \lambda_1 I) \dots (T - \lambda_n I)| = c |T - \lambda_1 I| \dots |T - \lambda_n I| = 0. \quad (***)$$

לכן קיים  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) עבורו  $|T - \lambda_i I| = 0$  לכן  $T$  יש לפחות ערך עצמי אחד.