10/07/2025 י"ד בתמוז תשפ"ה
09 : 00 – 12 : 00

המחלקה למדעי המחשב

אלגברה לינארית 2 למדמ"ח

מועד א'

מרצים: ד"ר זהבה צבי, ד"ר ירמיהו מילר .

תשפ"ה סמסטר ב'

השאלון מכיל 6 עמודים (כולל עמוד זה).

בהצלחה!

==

<u>הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה</u>

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

<u>חומר עזר</u>

- דפי נוסחאות של הקורס (3 עמודים בפורמט $A4$) מצורפים לשאלון.

<u>אחר / הערות</u> יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- יש לרשום בראש המחברת איזה שאלות לבדוק.

==

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *

שאלה 1 (25 נקודות)

א) (16 נק')
נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ מצאו צורת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש- $J = P^{-1}AP$.

ב) (3 נק')
תהי $B \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ מטריצה עבורה הפולינום האופייני הוא $p_B(x) = (x-1)^3(x-2)^3$
והפולינום המינימלי הוא $m_B(x) = (x-1)^2(x-2)$.
מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של B.

ג) (3 נק')
הוכיחו או הפריכו: קיימת מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ הרמיטית המקיימת $\text{trace}(A) = i$.

ד) (3 נק')
הוכיחו או הפריכו: אם $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ לכסינה וכל הערכים העצמיים שלה הם 1 או -1 אז $A^2 = I$.

שאלה 2 (25 נקודות)

א) (16 נק') נתונה העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ המוגדרת ע"י

$$T(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} A$$

לכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.
האם ההעתקה ניתנת ללכסון? במידה וכן, מצאו בסיס שבו המטריצה המייצגת של ההעתקה היא מטריצה אלכסונית. במידה ולא, נמקו מדוע.

יהי V מקחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ ויהיו שלושה וקטורים שונים $u_1, u_2, u_3 \in V$ בת"ל. ענו על הסעיפים ב' וג' הבאים:

ב) (5 נק') יהי $w \neq 0 \in V$ המקיים $\langle u_k, w\rangle = 0$ לכל $k = 1, 2, 3$. הוכיחו כי הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3, w\}$ בת"ל.

ג) (4 נק') נתון כי $\langle u_1 + u_2, u_1\rangle = \langle u_1 - u_3, u_2\rangle$. הוכיחו כי הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ אינה אורתוגונלית.

שאלה 3 (25 נקודות)

א) **(16 נק')** הוכיחו כי המטריצה $A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ לכסינה אורתוגונלית ומצאו מטקיצה אורתוגונלית P ומטריצה אלכסונית D כך ש- $P^tAP = D$. נמקו היטב את תשובתכם.

ב) **(9 נק')** הוכיחו כי מטריצה $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ היא צמודה לעצמה ואוניטרית אם ורק אם B לכסינה אוניטרית ומקיימת $B^2 = I$.

שאלה 4 (25 נקודות)

א) **(7 נקודות)** תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת $A^3 = 4A$. מצאו את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של A.

ב) **(6 נקודות)** תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת $A^3 = 4A$. מצאו את כל האפשרויות עבור $|A|$.

ג) **(6 נקודות)** תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה הרמיטית ונניח כי $A^k = I$ עבור $k \geq 1$ כלשהו. הוכיחו כי $A^2 = I$.

ד) **(6 נקודות)** תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית ויהיו $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ערכים עצמיים שונים של A וכן u_1, u_2 וקטורים עצמיים המתאימים ל- λ_1, λ_2. הוכיחו כי u_1, u_2 אורתוגונליים.

שאלה 5 (25 נקודות) יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב וקטורי V.

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הענות הבאות:

א) **(6 נק')** אם T אוניטרי אז הערך מוחלט של כל ערך עצמי של T שווה ל- 1.

ב) **(6 נק')** אם T נורמלי אז T צמוד לעצמו.

ג) **(6 נק')** יהי λ ערך עצמי של T, אז המרחב העצמי V_λ הוא T- שמור.

ד) **(7 נק')** אם T אנטי הרמיטי, אז כל ערך עצמי של T מדומה טהור.

מרחב אוקלידי: מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$.

מרחב אוניטרי: מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$.

הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי V מעל $\mathbb{R}$:
לכל $u, \mathrm{v}, w \in V$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{R}$:

1) סימטריות: $\langle u, \mathrm{v}\rangle = \langle \mathrm{v}, u\rangle$

2) ליניאריות: $\langle u+\mathrm{v}, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle \mathrm{v}, w\rangle$

$\langle \lambda u, \mathrm{v}\rangle = \lambda \langle u, \mathrm{v}\rangle$

3) חיוביות: $\langle u, u\rangle \geq 0.$

$\langle u, u\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$

הגדרת מכפלה פנימית במרחב ווקטורי V מעל $\mathbb{C}$:
לכל $u, \mathrm{v}, w \in V$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{C}$:

1) הרמיטיות: $\langle u, \mathrm{v}\rangle = \overline{\langle \mathrm{v}, u\rangle}$

2) ליניאריות: $\langle u+\mathrm{v}, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle \mathrm{v}, w\rangle$

$\langle \lambda u, \mathrm{v}\rangle = \lambda \langle u, \mathrm{v}\rangle$

3) חיוביות: $\langle u, u\rangle \geq 0$

$\langle u, u\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$

אי-שוויון קושי שוורץ: $|\langle u, \mathrm{v}\rangle| \leq \|u\| \cdot \|\mathrm{v}\|$

אי-שוויון המשולש: $\|u+\mathrm{v}\| \leq \|u\| + \|\mathrm{v}\|$

היטל אורתוגונלי של ווקטור v על תת מרחב בעל בסיס אורתוגונלי $u_1, \ldots, u_n$:

$$P_U(\mathrm{v}) = \frac{\langle \mathrm{v}, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle \mathrm{v}, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 + \cdots + \frac{\langle \mathrm{v}, u_n\rangle}{\|u_n\|^2} u_n \ .$$

תהליך גרם שמידט לבניית בסיס אורתוגונלי:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \mathrm{v}_1 \ , \\
u_2 &= \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \\
u_3 &= \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \\
&\vdots \\
u_n &= \mathrm{v}_n - \frac{\langle \mathrm{v}_n, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_n, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \ldots - \frac{\langle \mathrm{v}_n, u_{n-1}\rangle}{\|u_{n-1}\|^2} u_{n-1} \ .
\end{aligned}$$

$\lambda \in \mathbb{F}$ **ערך עצמי** ו- $u \in \mathbb{F}^n$ **ווקטור עצמי** ($u \neq 0$) של מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ אם: $Au = \lambda u$

$\lambda \in \mathbb{F}$ **ערך עצמי** ו- $u \in V$ **ווקטור עצמי** ($u \neq 0$) של אופרטור $T: V \to V$ אם: $T(u) = \lambda u$

פולינום אופייני של מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$: $p_A(\lambda) = |\lambda I - A|$

מרחב עצמי של מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ששייך לערך עצמי λ הוא כל וקטור $u \in \mathbb{F}^n$ כאשר $u \neq 0$ כך ש:
$$Au = \lambda u\ .$$

מרחב עצמי של אופרטור $T: V \to V$ ששייך לערך עצמי λ הוא כל וקטור $u \in \mathbb{V}$ כאשר $u \neq 0$ כך ש:
$$T(u) = \lambda u\ .$$

בסיס אורתונורמלי:

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. בסיס אורתונורמלי, מסומן $\{b_1, \ldots, b_n\}$, מקיים את התנאי
$$\langle b_i, b_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}\ , \qquad 1 \leq i, j \leq n\ .$$

כל וקטור $u \in V$ ניתן לרשום בבסיס אורתונורמלי:
$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, b_i\rangle\, b_i$$

סימון חלופי:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \langle u, b_1\rangle \\ \langle u, b_2\rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_i\rangle \\ \vdots \\ \langle u, b_n\rangle \end{pmatrix}_B$$

יהי $T: V \to V$ אופרטור. המצרטיצה המייצגת על פי בסיס B היא

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \langle T(b_1), b_1\rangle & \langle T(b_2), b_1\rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_1\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_1\rangle \\ \langle T(b_1), b_2\rangle & \langle T(b_2), b_2\rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_2\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_2\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_i\rangle & \langle T(b_2), b_i\rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_i\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_i\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle T(b_1), b_n\rangle & \langle T(b_2), b_n\rangle & \cdots & \langle T(b_i), b_n\rangle & \cdots & \langle T(b_n), b_n\rangle \end{pmatrix}\ .$$

כלומר האיבר ה- ij של המטריצה המייצגת של T על פי הבסיס B היא . $[T]_{ij} = \langle T(b_j), b_i\rangle$

ההגדרה של אופרטור הצמוד:

אם $T:V\to V$ אופרטור, ו- $u,w\in V$ שני וקטורים כלשהם של V, אזי האופרטור הצמוד של T מוגדר כך שמתקיים

(*1)
$$\langle T(u),w\rangle = \langle u,T^*(w)\rangle \ .$$

מההגדרה (*1) נובע:

(*2)
$$\langle T^*(u),w\rangle = \langle u,T(w)\rangle$$

נוסחה ל- $T(u)$ ו- $T^*(u)$ במונחי בסיס אורתונורמלי $\{b_1,\cdots,b_n\}$:

(*3)
$$T(u)=\sum_{i=1}^n \langle T(u),b_i\rangle\, b_i$$

(*4)
$$T^*(u)=\sum_{i=1}^n \langle u,T(b_i)\rangle\, b_i$$

משפט:

(*5)
$$T^{**}=T$$

משפט: המטריצה המייצגת של אופרטור צמוד T^* נתונה ע"י

(*6)
$$[T^*]=[T]^*$$

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית.

A הרמיטית:	$A=A^*$
A אנטי-הרמיטית:	$A^*=-A$
A אוניטרית:	$AA^*=I=A^*A$
A אורתוגונלית :	$AA^t=I=A^tA$
A נורמלית:	$AA^*=A^*A$

יהי $T:V\to V$ אופרטור מעל מרחב וקטורי V. נסמן המטריצה המייצגת $A=[T]$.

T צמוד לעצמו:	$A=A^*$	$\Leftrightarrow$	$T=T^*$
T אנטי-הרמיטי:	$A^*=-A$	$\Leftrightarrow$	$T^*=-T$
T אוניטרי:	$AA^*=I=A^*A$	$\Leftrightarrow$	$TT^*=I_V=T^*T$
T נורמלי:	$AA^*=A^*A$	$\Leftrightarrow$	$TT^*=T^*T$

מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה Q אוניטרית ומטריצה D אלכסונית כך ש:
$$A=QDQ^* \quad\Leftrightarrow\quad D=Q^*AQ \ .$$

מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אורתוגונלית אם קיימת מטריצה P אורתוגונלית ומטריצה D אלכסונית כך ש:
$$A=PDP^t \quad\Leftrightarrow\quad D=P^tAP \ .$$

פתרונות

שאלה 1

שאלה 2

א)

$$T\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\quad[T(e_1)]_E=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\quad[T(e_2)]_E=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1&0\\-2&0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\quad[T(e_3)]_E=\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\0\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&-1\\0&-2\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\quad[T(e_4)]_E=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

לכן המטירצה המייצגת הסנדרטית היא

$$[T]=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\2&0&-2&0\\0&2&0&-2\end{pmatrix}\ .$$

הפולינום האופייני של T הוא:

$$\begin{aligned}
p_T(x) = &\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & x+2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & x+2 \end{vmatrix} \\
=&(x-1)^2(x+2)^2 + 2(x-1)(x+2) + 2\left((x-1)(x+2)+2\right) \\
=&(x-1)(x+2)\left[(x-1)(x+2)+2\right] + 2\left[(x-1)(x+2)+2\right] \\
=&\left[(x-1)(x+2)+2\right]^2 \\
=&\left[x^2+x\right]^2 \\
=&\left[x\,(x+1)\right]^2 \\
=&x^2\,(x+1)^2 \ .
\end{aligned}$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda = 0$</u>

$$\text{Nul}\,(A - 0\cdot I) \quad = \quad \text{Nul}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_0 = \text{span}\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

<u>מרחב עצמי של $\lambda = -1$</u>

$$\text{Nul}\,(A + I) \quad = \quad \text{Nul}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{-1} = \text{span}\left\{ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

לכן בסיס שבו במטריצה המייצגת של ההעתקה היא אלכסונית הוא:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad w_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

ב) נוכיח כי

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 w = 0 \tag{\#}$$

מתקיים אם ורק אם $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. ראשית נקח את המכפלה פנימית עם w ונקבל

$$\langle w, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 w \rangle = \langle w, 0 \rangle = 0 \ .$$

נשתמש בתכונת ליניאריות של המכפלה פנימית כדי להרחיב את האגף השמאול באפן הבא:

$$\langle w, \alpha_1 u_1 \rangle + \langle w, \alpha_2 u_2 \rangle + \langle w, \alpha_3 u_3 \rangle + \langle w, \alpha_4 w \rangle = 0 \tag{*1}$$

כעת נוציא את הסקלר החוץ בכל מכפלה פנימית, בהתאם עם התכונת ליניאריות ונקבל ש:

$$\alpha_1 \langle w, u_1 \rangle + \alpha_2 \langle w, u_2 \rangle + \alpha_3 \langle w, u_3 \rangle + \alpha_4 \langle w, w \rangle = 0 \tag{*2}$$

$\langle u_k, w \rangle = 0$ לכל $k = 1, 2, 3$ לכן השלוש איברים הראשונים בצד שמאל של (*2) שווים ל- 0 ולכן

$$\alpha_4 \langle w, w \rangle = 0 \tag{*3}$$

נתון בשאלה כי $w \neq 0 \Leftarrow \langle w, w \rangle \neq 0 \Leftarrow$ נובע ממשוואה (*3) ש- $\alpha_4 = 0$. נציב $\alpha_4 = 0$ במשוואה (#) ונקבל ש-

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0 \tag{*4}$$

אבל נתון בשאלה כי השלושה וקטורים u_1, u_2, u_3 הם בלתי תלויים לינארית לכן (*4) מתקיים אם ורק אם $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

הוכחנו כי (#) מתקיים אם ורק אם $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ ולכן הווקטורים u_1, u_2, u_3, w הם בלתי תלויים ליניארית.

ג) נתון ש-

$$\langle u_1 - u_3, u_2 \rangle = \langle u_1 + u_2, u_1 \rangle \ .$$

לפי התכונת הליניאריות של המכפלה פנימית, אפשר להרחיב את המכפלות הפנימיות בשני האגפים ונקבל ש:

$$\langle u_1, u_2 \rangle - \langle u_3, u_2 \rangle = \langle u_1, u_1 \rangle + \langle u_2, u_1 \rangle \ .$$

נעביר את $\langle u_2, u_1 \rangle$ מהאגף הימין לאגף השמאול:

$$\langle u_1, u_2 \rangle - \langle u_3, u_2 \rangle - \langle u_2, u_1 \rangle = \langle u_1, u_1 \rangle \ .$$

מכיוון שהמכפלה פנימית היא מוגדרת במרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{R}$, אזי התכונת סימטריות תוקפת: $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_2, u_1 \rangle$. לכן שתי מכפלות פנימיות באגף השמאול מתבטלות ונקבל ש:

$$- \langle u_3, u_2 \rangle = \langle u_1, u_1 \rangle \ .$$

עכשיו נוכיח בשלילה שהקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ אינה אורתוגונלית.

נניח בשלילה כי הקבוצה כן אורתוגונלית. אזי $\{u_3, u_2\} = 0$. ז"א

$$\langle u_3, u_2\rangle = \langle u_1, u_1\rangle = 0 \ .$$

נתון בשאלה כי הקבוצת וקטורים $\{u_1, u_2, u_3\}$ היא בלתי תלויה ליניארית ולכן אף וקטור בקבוצה הזו לא שווה לוקטור האפס (כי קבוצת וקטורים המכילה וקטור האפס היא תלויה ליניארית, בסתירה לכך כי הקבוצה בת"ל).
לפיכך קיבלנו ש- $\langle u_1, u_1\rangle = 0$ ו- $u_1 \neq 0$, וזאת סותרת את התכונת חיוביות של מכפלה פנימית.

בגלל שהגענו לסתירה אזי הקבוצת וקטורים $\{u_1, u_2, u_3\}$ אינה אורתוגונלית.

שאלה 3

א) (16 נק')

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} = A$$

ז"א $A^t = A \Leftarrow A$ סימטרית $\Leftarrow A$ לכסינה אורתוגונלית.

$$\begin{aligned}
p_A(x) &= |xI - A| \\
&= \begin{vmatrix} x-11 & 8 & -4 \\ 8 & x+1 & 2 \\ -4 & 2 & x+4 \end{vmatrix} \\
&= (x-11)\begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ 2 & x+4 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -4 & x+4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 8 & x+1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (x-11)\left(x^2+5x\right) - 8\left(8x+40\right) - 4\left(4x+20\right) \\
&= x(x-11)\left(x+5\right) - 64\left(x+5\right) - 16\left(x+5\right) \\
&= x(x-11)\left(x+5\right) - 80\left(x+5\right) \\
&= \left(x^2 - 11x - 80\right)\left(x+5\right) \\
&= \left(x-16\right)\left(x+5\right)\left(x+5\right) \\
&= \left(x-16\right)\left(x+5\right)^2
\end{aligned}$$

מרחב עצמי של $\lambda = 16$

$$\text{Nul}\left(A-16I\right) = \begin{pmatrix}-5 & -8 & 4\\ -8 & -17 & -2\\ 4 & -2 & -20\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to 5R_3+4R_1]{R_2\to 5R_2-8R_1} \begin{pmatrix}-5 & -8 & 4\\ 0 & -21 & -42\\ 0 & -42 & -84\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2} \begin{pmatrix}-5 & -8 & 4\\ 0 & -21 & -42\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to \frac{-1}{21}R_2} \begin{pmatrix}-5 & -8 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1+8R_2} \begin{pmatrix}-5 & 0 & 20\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to \frac{-1}{5}R_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$V_{16} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}\setminus\{0\}$$

מרחב עצמי של $\lambda = -5$

$$\text{Nul}\left(A+5I\right) = \begin{pmatrix}16 & -8 & 4\\ -8 & 4 & -2\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to 4R_3-R_1]{R_2\to 2R_2+R_1} \begin{pmatrix}16 & -8 & 4\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to \frac{1}{4}R_1} \begin{pmatrix}4 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$V_{-5} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1/2\\1\\0\end{pmatrix} , \begin{pmatrix}-1/4\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\setminus\{0\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} , \begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}\right\}\setminus\{0\}$$

נסמן

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix} , \quad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix} , \quad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} .$$

נפעיל האלגוריתם של גרם שמידט כדי למצוא בסיס אורתוגונלי:

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix} .$$

$$u_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix} - \frac{0}{21}\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$$

$$u_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{\langle \mathrm{v}_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{0}{21}\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix} - \frac{-1}{17}\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix}16\\34\\4\end{pmatrix}$$

לכן מצאנו בסיס אורתוגונלי:

$$u_1 = \begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix} \ , \quad u_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix} \ , \quad u_3 = \begin{pmatrix}8\\17\\2\end{pmatrix} \ .$$

בסיס אורתונורמלי:

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix} \ , \quad \hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix} \ , \quad \hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{357}}\begin{pmatrix}8\\17\\2\end{pmatrix} \ .$$

ב) <u>כיוון $\Leftarrow$</u>

נניח כי B צמודה לעצמה וגם B אוניטרית.

(1) $\Leftarrow$ $B = B^*$ וגם $BB^* = I$.

(2) מכיוון ש- B צמודה לעצמה $\Leftarrow$ B נורמלית $\Leftarrow$ ממשפט הלכסון אוניטרית $\Leftarrow$ B לכסינה אוניטרית.

(3)

$$BB \overset{(1):\ B \text{ צמוד לעצמו}}{=} BB^* \overset{(1):\ B \text{ אוניטרי}}{=} I$$

לכן $B^2 = I$, כנדרש.

כנדרש.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

נניח כי $B^2 = I$ וגם B לכסינבה אוניטרית.

(1) $\Leftarrow$ $B^2 = I$ וגם קיימת Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $B = QDQ^*$.

(2)

$$I = B^2 = QDQ^*QDQ^* = QD^2Q^* \quad \Rightarrow \quad D^2 = Q^*IQ = Q^*Q = I \ .$$

לכן $D = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \quad \cdots \quad \lambda_n\right)$ כשאר $\lambda_i = \pm 1$

(3) $\Leftarrow$ D ממשית ואלכסונית $\Leftarrow$ $D = D^*$.

(4) לכן

$$B^* \overset{(1)}{=} (QDQ^*)^* = QD^*Q^* \overset{(3)}{=} QDQ^* = B$$

לכן $B = B^*$ ולכן B לעצמה, כנדרש.

(5)

$$BB^* \overset{(1)}{=} QDQ^*(QDQ^*)^* = QDQ^*QD^*Q = QDD^*Q \overset{(3)}{=} QD^2Q^* \overset{(2)}{=} QQ^* = I$$

לכן B אוניטרית, כנדרש.

שאלה 4

שאלה 5

א) נניח ש- $T : V \to V$ אופרטור אוניטרי, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v}) = \lambda \mathrm{v}$. אז

$$\begin{aligned} \langle T(\mathrm{v}), T(\mathrm{v})\rangle &= \langle \lambda \mathrm{v}, \lambda \mathrm{v}\rangle && \text{(v וקטור עצמי של } T\text{)} \\ &= \lambda \langle \mathrm{v}, \lambda \mathrm{v}\rangle && \text{(לינאריות של מכפלה פנימית)} \\ &= \lambda\bar{\lambda} \langle \mathrm{v}, \lambda \mathrm{v}\rangle && \text{(לינאריות חלקית של מכפלה פנימית)} \end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned} \langle T(\mathrm{v}), T(\mathrm{v})\rangle &= \langle \mathrm{v}, T^*T(\mathrm{v})\rangle && \text{(הגדרה של אופרטור הצמוד)} \\ &= \langle \mathrm{v}, I(\mathrm{v})\rangle && (T \text{ אוניטרי}) \\ &= \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle \end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda\bar{\lambda} \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle = \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle \quad \Rightarrow \quad (\lambda \cdot \bar{\lambda} - 1) \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle = 0 \ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow$ $\mathrm{v} \neq 0$ $\Leftarrow$ $\langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle \neq 0$ $\Leftarrow$ $(\lambda \cdot \bar{\lambda} - 1) = 0$ $\Leftarrow$ $\lambda\bar{\lambda} = 1$ $\Leftarrow$ $|\lambda|^2 = 1$.

ב) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:
האופרטור $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדר:

$$T(u) = Au \ , \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לכל $u \in \mathbb{R}^2$.

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad [T]^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T][T]^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [T][T]^*$$

לכן T נורמלי אבל $[T] \neq [T]^*$ לכן T לא צמוד לעצמו.

ג) **(6 נק')** אם λ ערך עצמי של T אזי לכל וקטור עצמי $u \in V_\lambda$ מתקיים

$$T(u) = \lambda u \in \text{span}\{u\} \subseteq V_\lambda$$

לכן לכל $u \in V_\lambda$ מתקיים $T(u) \in V_\lambda$.

ד) (7 נק')

שיטה 1

נניח ש- $T : V \to V$ אופרטור צמוד לעצמו, ונניח ש- λ ערך עצמי של T השייך לוקטור עצמי v. ז"א $T(\mathrm{v}) = \lambda \mathrm{v}$. אז

$$\begin{aligned} \langle T(\mathrm{v}), \mathrm{v}\rangle &= \langle \lambda \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle && \text{(v וקטור עצמי של } T\text{)} \\ &= \lambda \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle && \text{(לינאריות של מכפלה פנימית)} \end{aligned} .$$

מצד שני

$$\begin{aligned} \langle T(\mathrm{v}), \mathrm{v}\rangle &= \langle \mathrm{v}, T^*(\mathrm{v})\rangle && \text{(הגדרה של אופרטור הצמוד)} \\ &= \langle \mathrm{v}, -T(\mathrm{v})\rangle && (T\text{ אנטי-הרמיטי}) \\ &= -\langle \mathrm{v}, T(\mathrm{v})\rangle \\ &= -\langle \mathrm{v}, \lambda \mathrm{v}\rangle && \text{(v וקטור עצמי של } T\text{)} \\ &= -\bar{\lambda}\langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle && \text{(לינאריות חלקית של מכפלה פנימית)} \end{aligned}$$

נשווה ביניהם:

$$\lambda \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle = -\bar{\lambda}\langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle \quad \Rightarrow \quad (\lambda + \bar{\lambda})\langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle = 0 \ .$$

v וקטור עצמי $\Leftarrow \mathrm{v} \neq 0 \Leftarrow \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle \neq 0 \Leftarrow (\lambda + \bar{\lambda}) = 0 \Leftarrow \lambda = -\bar{\lambda}$.

שיטה 2

כל אופרטור ניתן לרשום בצורה

$$T = T_1 + T_2$$

כאשר T_1 אופרטור הרמיטי ו- T_2 אופרטור אנטי-הרמיטי.
ז"א

$$T^* = T_1 - T_2$$