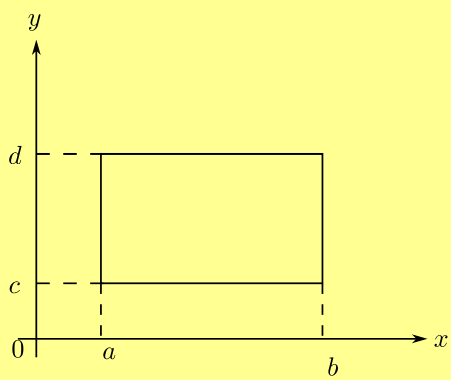
שיעור 10
אינטגרלים כפולים

משפט 10.1 אינטגרל כפול בתחום מלבני

במקרה של התחום המלבני

$$D = \{(x,y)|a \leq x \leq b \ , c \leq y \leq d\}$$

הסדר של האינטגרלים מעל x ו-y לא משנה את הערך של האינטגרל הכפול, כלומר



$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) = \int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x,y) \ . \qquad (*1)$$

דוגמה 10.1

חשבו את האינטגרל של הפונקציה $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + 6xy$ בתחום

$$D = \{(x,y)| -3 \leq x \leq 3, \ 2 \leq y \leq 8\}$$

פתרון:

נבדוק שהסדר של האינטגרלים אינו משנה את הערך של האינטגרל:

נבצע האינטגרל מעל x ואחר כך האינטגרל מעל y:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) &= \int_2^8 dy \int_{-3}^3 dx\,(3x^2 + 2y^2 + 6xy) \\
&= \int_2^8 dy\, \left[x^3 + 2xy^2 + 3x^2y\right]_{x=-3}^{x=3} \\
&= \int_2^8 dy\, \left(54 + 12y^2\right) \\
&= \int_2^8 dy\, \left[54y + 4y^3\right]_{y=2}^{y=8} \\
&= (432 - 108 + 2048 - 32) \\
&= 2340 \ .
\end{aligned}$$

נבצע האינטגרל מעל y ואחר כך האינטגרל מעל x:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) &= \int_{-3}^{3} dx \int_{2}^{8} dy\,(3x^2+2y^2+6xy)\\
&= \int_{-3}^{3} dx\,\left[3x^2y+\frac{2}{3}y^3+3xy^2\right]_{y=2}^{y=8}\\
&= \int_{-3}^{3} dx\,\left(18x^2+180x+336\right)\\
&= \left[6x^3+90x^2+336x\right]_{x=-3}^{x=3}\\
&= 2340\ .
\end{aligned}$$

דוגמה 10.2

חשבו את האינטגרל $\iint\limits_D \left(x^2-y\right)dx\,dy$ על המלבן

$$D=\{(x,y)|0\leq x\leq 3,\ 0\leq y\leq 4\}$$

פתרון:

נבצע האינטגרל של y ואז האינטגרל של x:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) &= \int_{0}^{3} dx \int_{0}^{4} dy\,\left(x^2-y\right)\\
&= \int_{0}^{3} dx\,\left[x^2y-\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{4}\\
&= \int_{0}^{3} dx\,\left(4x^2-8\right)\\
&= \left[\frac{4x^3}{3}-8x\right]_{x=0}^{3}\\
&= (36-24)\\
&= 12\ .
\end{aligned}$$

נבצע האינטגרל של x ואז האינטגרל של y:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) &= \int_{0}^{4} dy \int_{0}^{3} dx\,\left(x^2-y\right)\\
&= \int_{0}^{4} dy\,\left[\frac{x^3}{3}-xy\right]_{x=0}^{3}\\
&= \int_{0}^{4} dy\,[9-3y]_{x=0}^{3}\\
&= \left[9y-\frac{3y^2}{2}\right]_{y=0}^{4}\\
&= (36-24)\\
&= 12\ .
\end{aligned}$$

משפט 10.2 אינטגרל כפול של פונקציה בתחום בין שני קווים

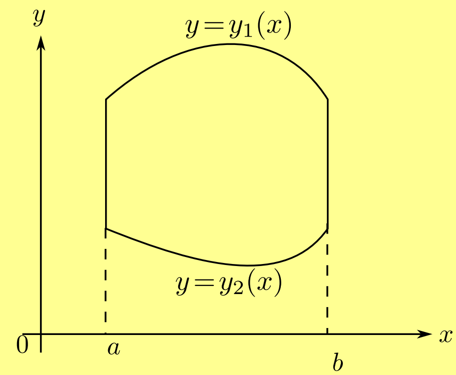
נתון אינטגרל כפול של פונקציה $f(x,y)$ מצורה

$$\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y)=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\,f(x,y)$$

בתחום

$$D=\{(x,y)|a\leq x\leq b\ ,y_1(x)\leq y\leq y_2(x)\}\ ,$$

אי-אפשר להחליף את סדר האינטגרלים. במקרה זה מבצעים את האינטגרל של y בין הקווים $y_1(x)$ ו- $y_2(x)$, ואחר כך מבצעים את האינטגרל של x.



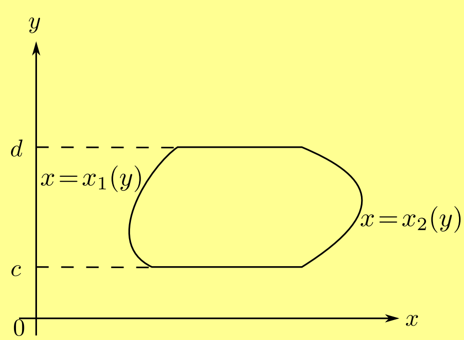
נתון אינטגרל כפול של פונקציה $f(x,y)$ מצורה

$$\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y)=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx\,f(x,y)$$

בתחום

$$D=\{(x,y)|x_1(y)\leq x\leq x_2(y)\ ,c\leq y\leq d\ ,\}\ ,$$

אי-אפשר להחליף את סדר האינטגרלים. מבצעים את האינטגרל של x בין הקווים $x_1(y)$ ו- $x_2(y)$, ואחר כך מבצעים את האינטגרל של y.

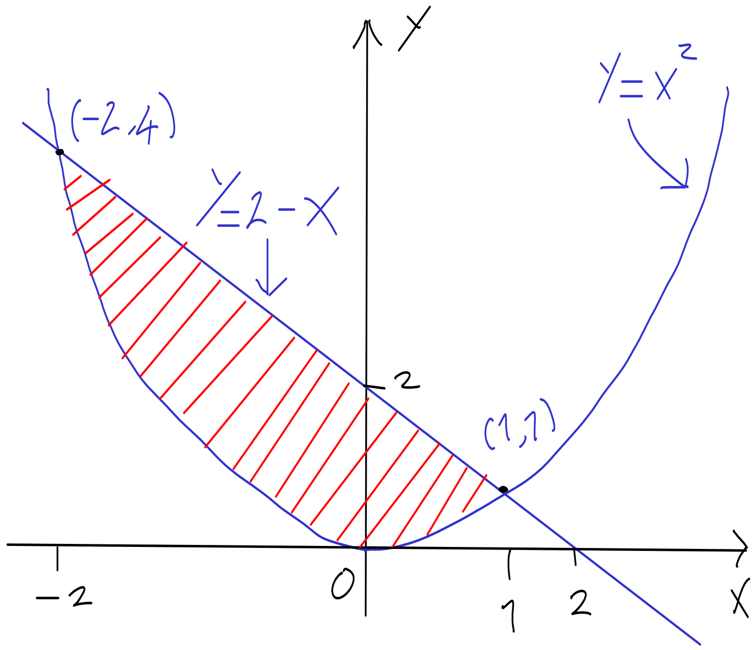


דוגמה 10.3

חשבו את $\iint\limits_D y\,dx\,dy$ כאשר D הוא התחום החסום על ידי הקווים $y=2-x$, $y=x^2$.

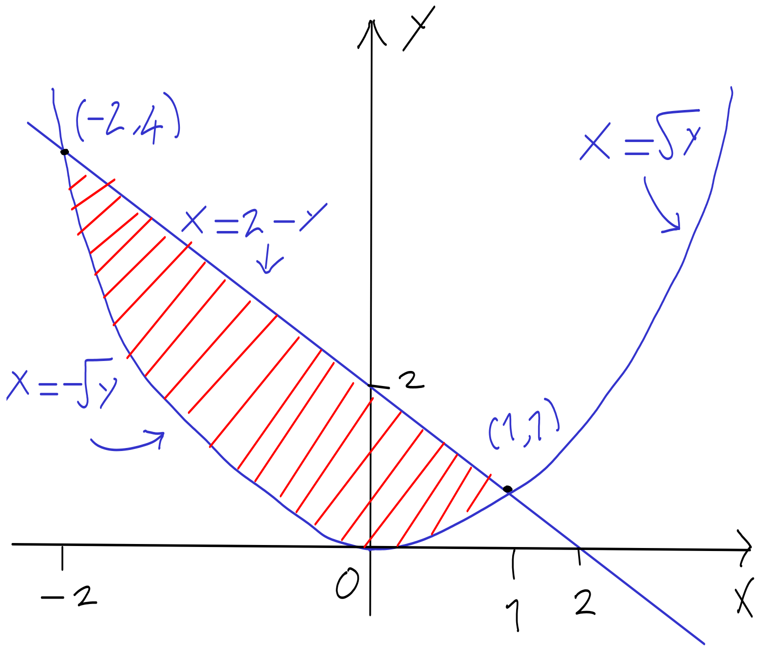
פתרון:

<u>שיטה 1</u>



$$\iint_D y\,dx\,dy = \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} y\,dy$$
$$= \int_{-2}^{1} dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{2-x}$$
$$= \int_{-2}^{1} dx \left(\frac{(2-x)^2}{2} - \frac{x^4}{2}\right)$$
$$= \left[\frac{-(2-x)^3}{6} - \frac{x^5}{10}\right]_{x=-2}^{1}$$
$$= \left[\frac{-1}{6} - \frac{1}{10}\right] - \left[-\frac{4^3}{6} - \frac{(-2)^5}{10}\right]$$
$$= \frac{-1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{64}{6} - \frac{32}{10}$$
$$= \frac{63}{6} - \frac{33}{10}$$
$$= \frac{432}{60}$$
$$= \frac{72}{10} = 7.2$$

<u>שיטה 2</u>

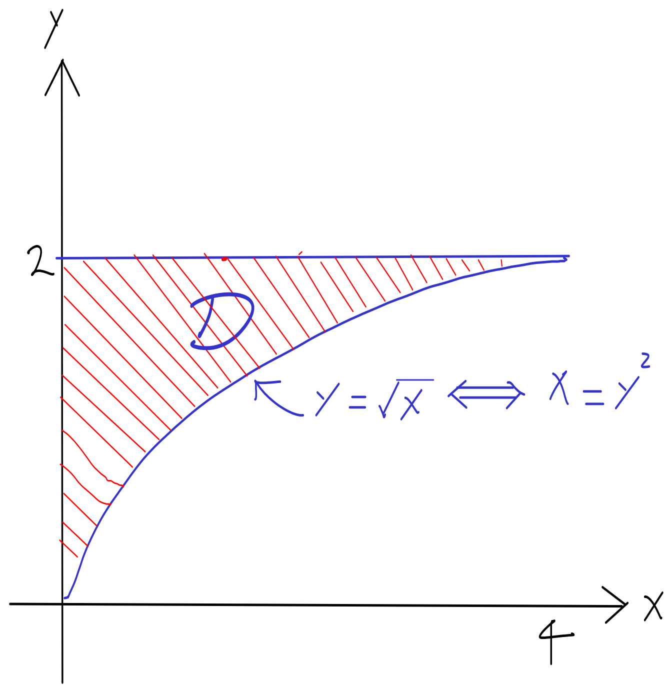


$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D y\,dx\,dy &= \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} y\,dx + \int_1^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} y\,dx \\
&= \int_0^1 dy\,[yx]_{x=-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} + \int_1^4 dy\,[yx]_{x=-\sqrt{y}}^{2-y} \\
&= \int_0^1 dy\,2y\sqrt{y}\; + \int_1^4 dy\,(y(2-y)+y\sqrt{y}) \\
&= \int_0^1 dy\,2y^{3/2}\; + \int_1^4 dy\,\left(2y-y^2+y^{3/2}\right) \\
&= \left[5y^{5/2}\right]_0^1 + \left[y^2-\frac{y^3}{3}+\frac{2}{5}y^{5/2}\right]_1^4 \\
&=5+\left(16-\frac{64}{3}+\frac{64}{5}\right)-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right) \\
&=5+64\cdot\frac{7}{15}-\frac{16}{15} \\
&=5-\frac{7}{60}-\frac{64}{60} \\
&=5-\frac{71}{60} \\
&=\frac{300-71}{60} \\
&=\frac{229}{60}
\end{aligned}
$$

דוגמה 10.4

חשבו את $\displaystyle\int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 dy\, e^{x/y}$

פתרון:
לא ניתן להחליף את האינטגרל הפנימי בעזרת פונקציה אלמנטריות.



$$\begin{aligned}
\int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 dx\, e^{x/y} &= \int_0^2 dy \int_0^{y^2} dx\, e^{x/y} \\
&= \int_0^2 dy\, \left[ye^{x/y}\right]_{x=0}^{y^2} \\
&= \int_0^2 dy\, (ye^y - y) \\
&= \left[ye^y - e^y - \frac{y^2}{2}\right]_0^2 \\
&= 2e^2 - e^2 - 2 - (-1) \\
&= e^2 - 1
\end{aligned}$$

דוגמה 10.5

(1 חשבו את האינטגרל dy $I = \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_0^{x^2} dy\, \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right)$

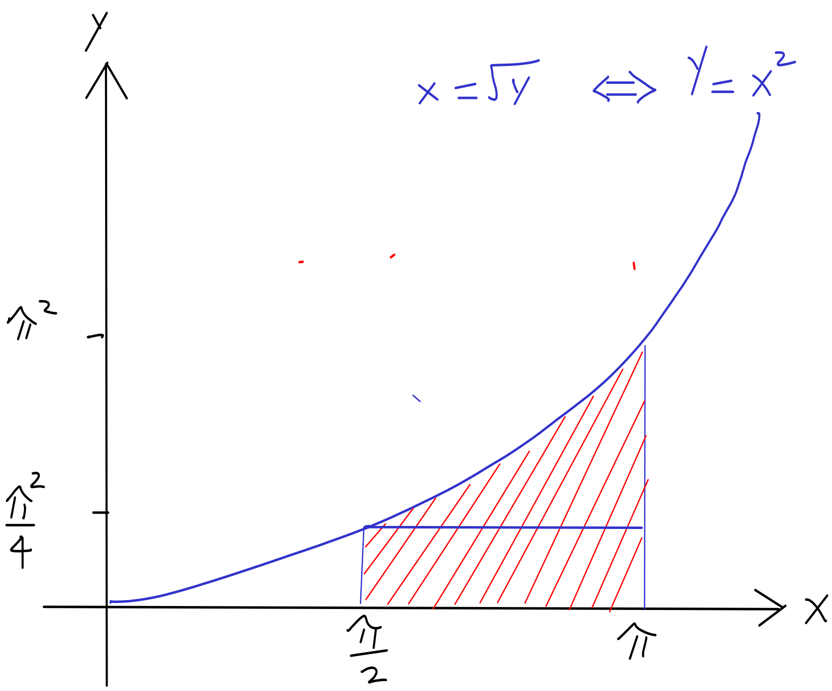
(2 שרטטו את תחום האינטגרציה ושנו את סדר האינטגרציה

פתרון:

1)

$$
\begin{aligned}
I =& \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_0^{x^2} dy \, \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \\
=& \int_{\pi/2}^{\pi} dx \, \left[\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]_0^{x^2} \\
=& \int_{\pi/2}^{\pi} dx \, (\sin x - \sin(0)) \\
=& \int_{\pi/2}^{\pi} dx \sin x \\
=& [-\cos x]_{\pi/2}^{\pi} \\
=& -\cos\pi + \cos\frac{\pi}{2} \\
=& 1 \ .
\end{aligned}
$$

2)



$$
I = \int_0^{\pi^2/4} dy \int_{\pi/2}^{\pi} dx \, \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \int_{\pi^2/4}^{\pi} dy \int_{\sqrt{y}}^{\pi} dx \, \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right)
$$

דוגמה 10.6 שינוי סדר של אינטגרלים

חשב את האינטגרל

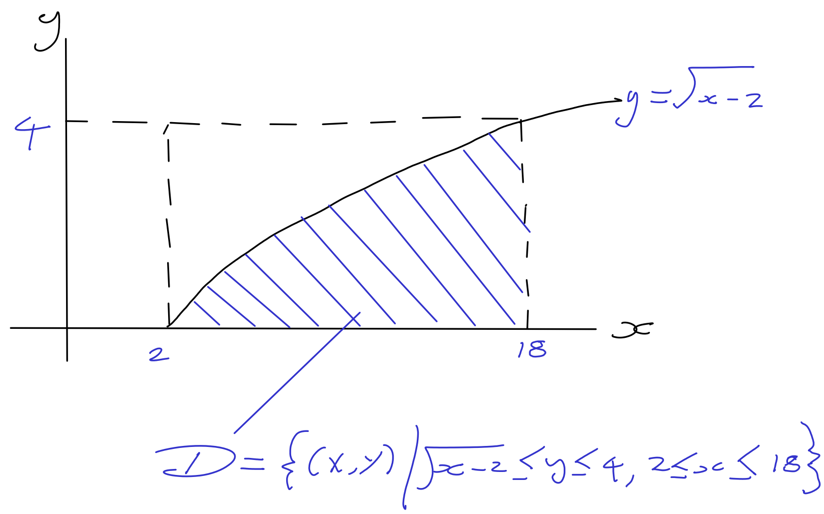
$$
I = \int_2^{18} dx \int_{\sqrt{x-2}}^{4} dy \; e^{-5(x-2)/y}
$$

פתרון:

התחום של האינטגרל הוא

$$D = \left\{(x,y) \mid 2 \le x \le 18 \ , \sqrt{x-2} \le y \le 4\right\}$$

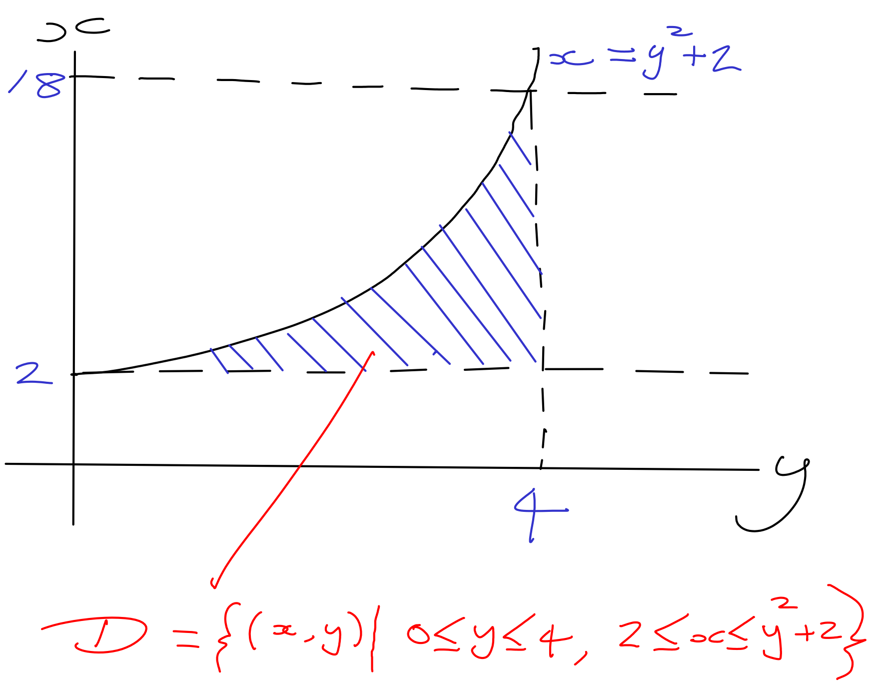
כמתואר בתרשים.



ניתן לשנות את הסדר של האינטגרלים של x ו- y כך שהתחום הוא

$$D = \left\{(x,y) \mid 0 \le y \le 4 \ , \ 2 \le x \le y^2+2\right\}$$

כמתואר בתרשים



$$\begin{aligned}
I &= \int_0^4 dy \int_2^{y^2+2} dx\; e^{-5(x-2)/y} \\
&= \int_0^4 dy \left[-\frac{y}{5}\cdot e^{-5(x-2)/y}\right]_2^{y^2+2} \\
&= -\frac{1}{5}\int_0^4 dy \left[y\cdot e^{-5(x-2)/y}\right]_2^{y^2+2} \\
&= -\frac{1}{5}\int_0^4 dy \left(y\cdot e^{-5(y^2+2-2)/y} - y\cdot e^{-5(0)/y}\right) \\
&= -\frac{1}{5}\int_0^4 dy \left(ye^{-5y} - y\right) \\
&= -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{5}ye^{-5y} + \frac{1}{25}e^{-5y} - \frac{y^2}{2}\right]_0^4 \\
&= -\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}e^{-20} + \frac{1}{25}e^{-20} - \frac{4^2}{2} + \frac{1}{25}\right)
\end{aligned}$$

10.1 תכונות חשובות של האינטגרל הכפול

משפט 10.3 תכונות האינטגרל הכפול

בהינתן אינטגרל כפולה מצורה

$$\iint_D dx\,dy\, f(x,y)$$

בתחום D בהמישור xy.

(1) אם הפונקציה $f(x,y)=1$ האינטגרל שווה לשטח התחום $S(D)$:

$$\iint_D dx\,dy = S(D)\ .$$

(2) נתון קבוע $c\in\mathbb{R}$, אז מתקיים

$$\iint_D dx\,dy\, c\cdot f(x,y) = c\cdot\iint_D dx\,dy\, f(x,y)\ .$$

(3) הפעולה של אינטגרציה כפולה שומרת סכום:

$$\iint_D dx\,dy\,\big(f_1(x,y)+f_2(x,y)\big) = \iint_D dx\,dy\, f_1(x,y) + \iint_D dx\,dy\, f_2(x,y)$$

(4) נתון שני תחומים D_1 ו- D_2. אם $D=D_1\cup D_2$ ו- $D_1\cap D_2=\emptyset$ אזי

$$\iint\limits_{D} dx\,dy\,f(x,y)=\int\int_{D_1} dx\,dy\,f(x,y)+\int\int_{D_2} dx\,dy\,f(x,y)$$

(5) אם $f(x,y)\geq 0$ בכל התחום D אז

$$\iint\limits_{D} dx\,dy\,f(x,y)\geq 0\ .$$

(6) אם $m\leq f(x,y)\leq M$ בתחום D אז

$$m\cdot S(D)\leq \iint\limits_{D} dx\,dy\,f(x,y)\leq M\cdot S(D)\ .$$

(7)

$$\left|\iint\limits_{D} dx\,dy\,f(x,y)\right|\leq \iint\limits_{D} dx\,dy\,|f(x,y)|\ .$$

10.2 שטח של תחום ע"י אינטגרל כפול

משפט 10.4 שטח התחום

במקרה שבתוך האינטגרל הכפול בנוסחא (1*) הפונקציה $f(x,y)=1$, אז האינטגרל הכפול שווה לשטח של התחום D:

$$\iint\limits_{D} dx\,dy\,(1)=S(D)\ .$$

כאשר $S(D)$ מסמן את שטח התחום D.

דוגמה 10.7

חשבו את שטח המלבן המוגדר ע"י התחום

$$D=\{(x,y)|2\leq x\leq 5\,,3\leq y\leq 6\ \}$$

באמצעות אינטגרציה כפולה.

פתרון:

$$
\begin{aligned}
S(D) &= \int_2^5 dx \int_3^6 dy \\
&= \int_2^5 dx\, [y]_3^6 \\
&= \int_2^5 dx\, (6-3) \\
&= \int_2^5 dx\, 3 \\
&= 3\int_2^5 dx \\
&= 3[x]_2^5 \\
&= 3(5-2) \qquad\qquad = 9 \ .
\end{aligned}
$$

דוגמה 10.8

חשבו את הערך של האינטגרל של הפונקציה $z(x,y)=3x^2+4y^2$ בין הקווים $y_1=x+4$ $y_2=-x+2$ בקטע $1\le x\le 2$.

פתרון:

$$
\begin{aligned}
\iint_D dx\, dy\, z(x,y) &= \int_1^2 dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\ \left(3x^2+4y^2\right) \\
&= \int_1^2 dx\ \left[3x^2y+\frac{4}{3}y^3\right]_{y_1}^{y_2} \\
&= \int_1^2 dx\ \left(3x^2y_2+\frac{4}{3}y_2^3-3x^2y_1-\frac{4}{3}y_1^3\right) \\
&= \int_1^2 dx\ \left(3x^2(x+4)+\frac{4}{3}(x+4)^3-3x^2(2-x)-\frac{4}{3}(2-x)^3\right) \\
&= \int_1^2 dx\ \left(3x^3+12x^2+\frac{4}{3}(x+4)^3-6x^2+3x^3-\frac{4}{3}(2-x)^3\right) \\
&= \int_1^2 dx\ \left(6x^3+6x^2+\frac{4}{3}(x+4)^3-\frac{4}{3}(2-x)^3\right) \\
&= \left[\frac{3}{2}x^4+2x^3+\frac{1}{3}(x+4)^4+\frac{1}{3}(2-x)^4\right]_1^2 \\
&= \left(24+16+432-\frac{3}{2}-2-\frac{625}{3}-\frac{1}{3}\right) \\
&= \left(470-\frac{3}{2}-\frac{626}{3}\right) \\
&= \frac{1559}{6}
\end{aligned}
$$

דוגמה 10.9

מהו השטח של האליפסה הנתון ע"י

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

בשטח התחום

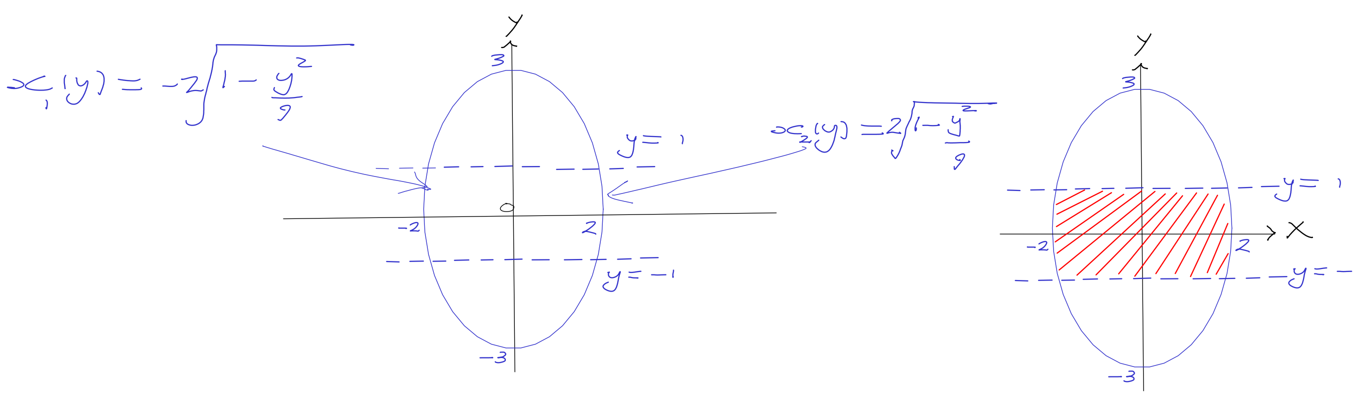
$$-1\le y\le 1\ .$$

פתרון:

הקו של האליפסה מוצג בתרשים והתחום D מוצג בתרשים בצבע אדום. שים לב:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \qquad \Rightarrow \qquad x=\pm 2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}$$

במונחים של x.



הקו של האליפסה בצד שמאל ניתן ע"י

$$x_1(y)=-2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}$$

והקו של האליפסה בצד ימין ניתן ע"י

$$x_2(y)=+2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}$$

השטח ניתן באמצעות האינטגרל הכפול

$$\begin{aligned}
A&=\iint\limits_D dx\,dy\\
&=\int_{-1}^{1}dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}dx\\
&=\int_{-1}^{1}dy\ [x]_{x_1(y)}^{x_2(y)}\\
&=\int_{-1}^{1}dy\left(2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}-(-2)\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}\right)\\
&=\int_{-1}^{1}dy\,4\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}
\end{aligned}$$

בכדי לחשב את האינטגרל של y ניתן להשתמש בהטבלה של אינטגרלים הסטנדרטים להלן:

$$\begin{aligned} A =&4\left[\frac{1}{2}\left(y\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}+3\sin^{-1}\left(\frac{y}{3}\right)\right)\right]_{-1}^{1} \\ =&2\left(\sqrt{\frac{8}{9}}+3\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)-(-1)\sqrt{\frac{8}{9}}-3\sin^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)\right) \quad = 7.84928\ . \end{aligned}$$

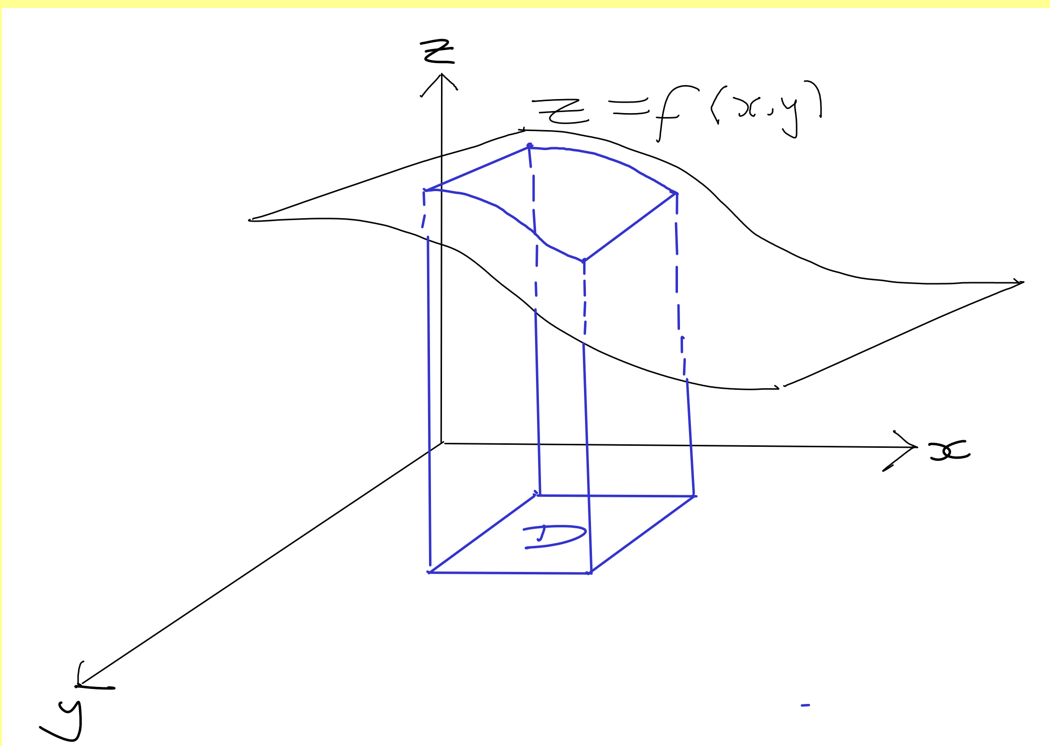
10.3 נפח מתחת משטח בתחום ע"י אינטגרל כפול

משפט 10.5 נפח תחת משטח בתחום D

נתון פונקציה $f(x,y)$ האי-שלילית ותחום D במישור xy (כלומר $f(x,y)\geq 0$ בכל נקודה בתחום D).
הנפח מתחת המשטח $z=f(x,y)$ בתוך התחום D ניתן ע"י האינטגרל הכפול

$$V=\iint\limits_{D} dx\,dy\,f(x,y)\ .$$

הנפח מדובר מוצג בתרשים להלן בכחול.



דוגמה 10.10 נפח פירמידה

מהו הנפח מתחת המישור הניתן ע"י המשוואה

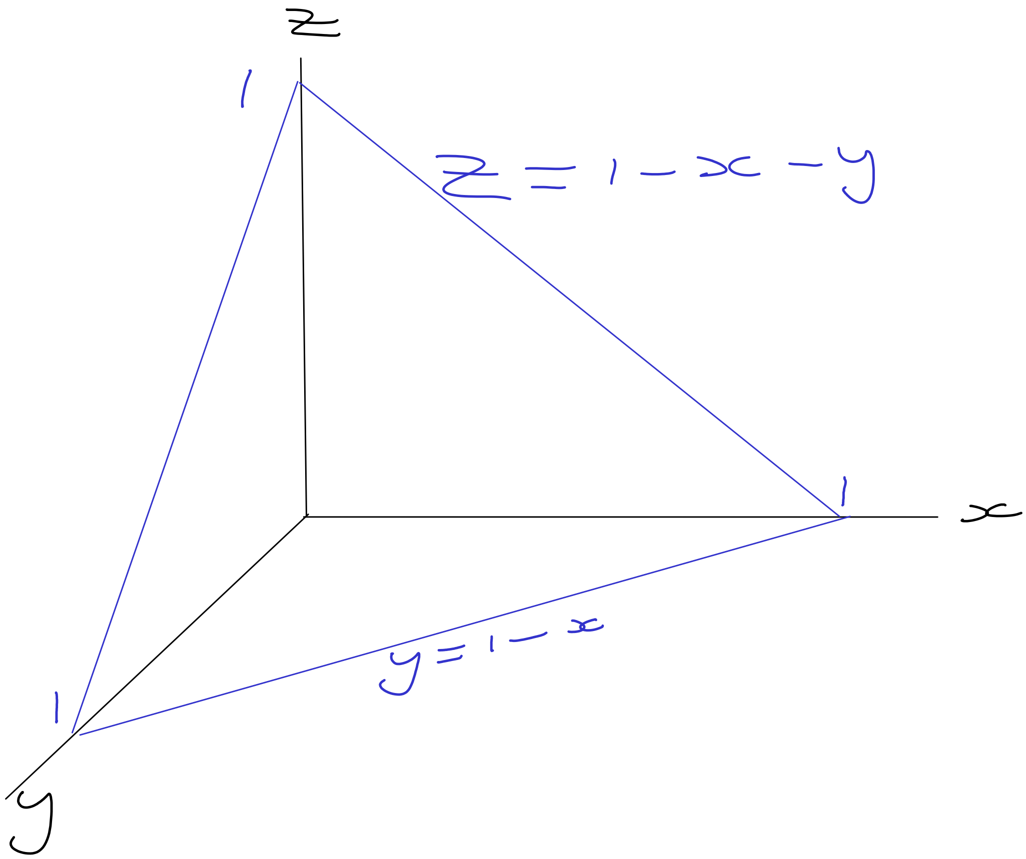
$$z=f(x,y):=1-x-y$$

בתחום

$$D=\{(x,y)|0\leq x\leq 1\ ,0\leq y\leq 1-x\ \}$$

פתרון:

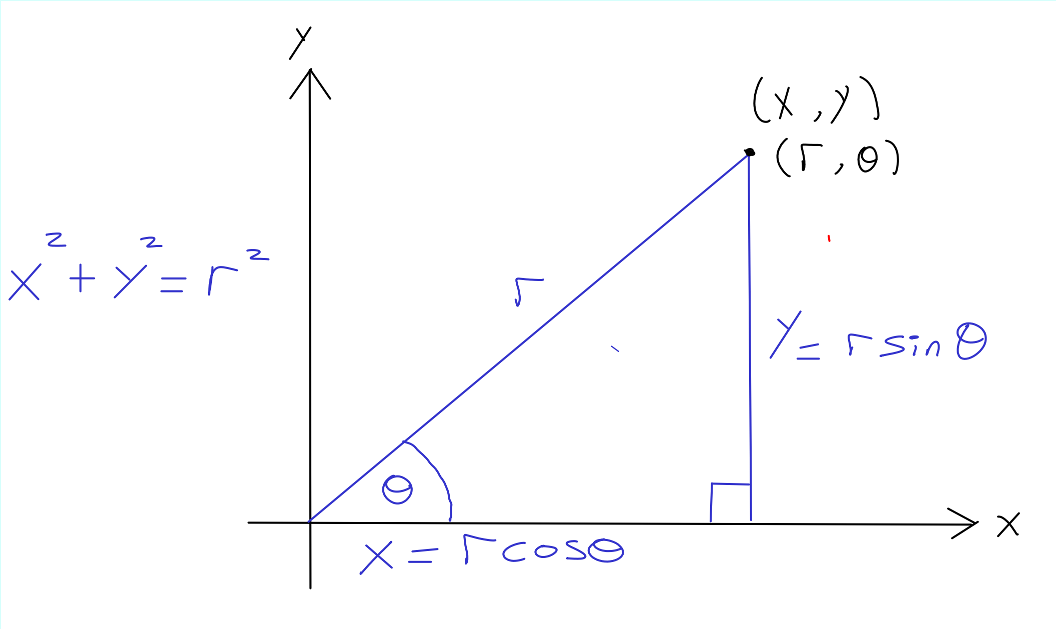
שים לב, הנפח מדובר הינו נפח של פירמדיה משולשית, כמתואר בתרשים להלן.



$$
\begin{aligned}
V &= \iint\limits_D dx\, dy\, f(x,y) \\
&= \int_0^1 dx\, \int_0^{y=1-x} dy\, (1-x-y) \\
&= \int_0^1 dx\, \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} \\
&= \int_0^1 dx\, \left((1-x) - x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2 \right) \\
&= \int_0^1 dx\, \left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right) \\
&= \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6}\ .
\end{aligned}
$$

10.4 קואורדינטות קוטביות

הגדרה 10.1 קואורדינטות קוטביות



מקואורדינטות קרטיזיות לקואורדינטות קוטביות:

$$x = r\cos\theta\ , \qquad y = r\sin\theta\ .$$

מקואורדינטות קוטביות לקואורדינטות קרטיזיות:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\ , \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\ .$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta\ .$$

דוגמה 10.11

חשבו את האינטגרל

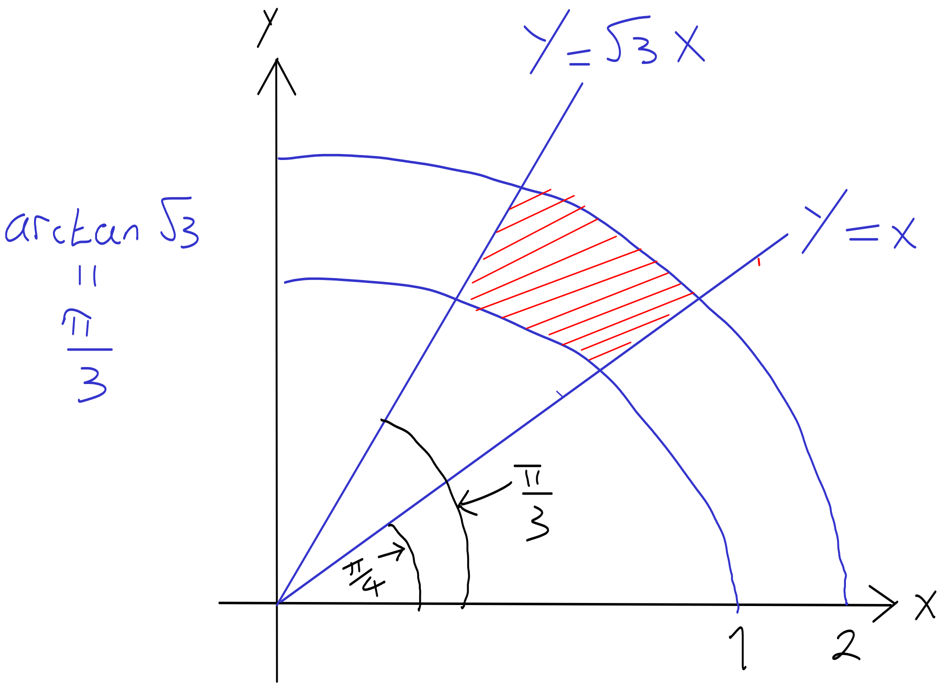
$$\iint\limits_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right)dx\,dy$$

כאשר

$$D = \{(x,y)|1\leq x^2+y^2\leq 4, x\leq y\leq \sqrt{3}\cdot y\}$$

פתרון:

$$D = \{(r,\theta)|\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{3}, 1\leq r\leq 2\ .\}$$

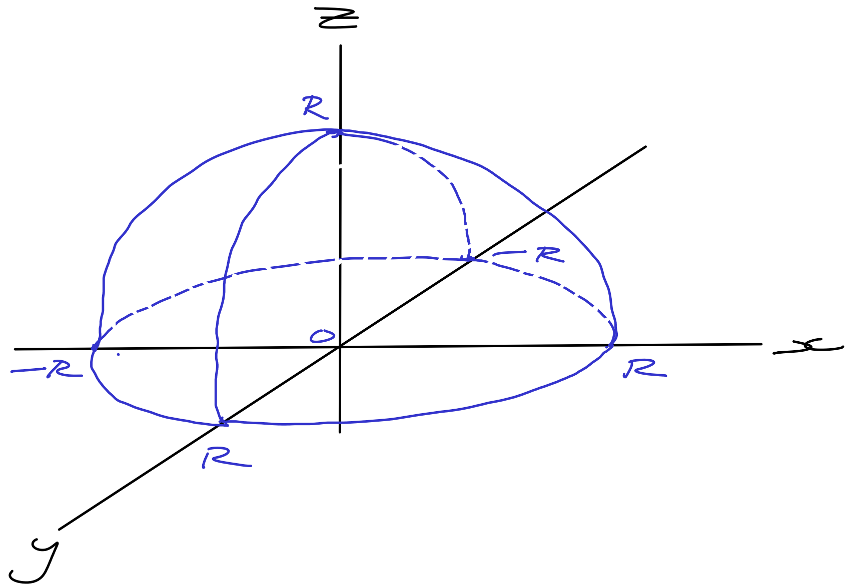


$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\,dx\,dy &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_1^2 \arctan\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right) r\,dr\\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_1^2 \arctan\left(\tan\theta\right) r\,dr\\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta\,\theta \int_1^2 r\,dr\\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta\,\theta \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2\\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta\,\theta \left[\frac{3}{2}\right]\\
&= \frac{3}{2}\cdot\int_{\pi/4}^{\pi/3} \theta\,d\theta\\
&= \frac{3}{2}\cdot\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/3}\\
&= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi^2}{16}\right]\\
&= \frac{3}{4}\cdot\frac{7\pi^2}{144}\\
&= \frac{7\pi^2}{192}
\end{aligned}
$$

דוגמה 10.12 נפח של ספירה

מהו הנפח של ספירה מרדיוס R?

פתרון:



$$f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}=\sqrt{R^2-r^2}$$

$$V=\int_0^R dr\int_0^\pi d\theta\, r\sqrt{R^2-r^2}$$

יהי $w=r^2$ משתנה חדש. שים לב:

$$w'=2r$$

כך ש-

$$V=\int_0^R dr\int_0^\pi d\theta\,\frac{w'}{2}\sqrt{R^2-w}$$

לפי שיטת אינטגרציה ע"י הצבה ניתן לחשב את האינטגרל של r באמצעות אינטגרל של w:

$$\begin{aligned}V=&\frac{1}{2}\int_{w=0}^{w=R^2}dw\int_0^\pi d\theta\,\sqrt{R^2-w}\\=&\frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta\,\left[-\frac{2}{3}\cdot\left(R^2-w\right)^{3/2}\right]_{w=0}^{w=R^2}\\=&\frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta\,\frac{2R^3}{3}\\=&\frac{R^3}{3}\int_0^\pi d\theta\\=&\frac{\pi R^3}{3}\ .\end{aligned}$$

10.5 החלפת משתנים - קואורדינטות עקומות

משפט 10.6 החלפת משתנים באינטגרל כפול והיעקוביאן

נניח שקואורדינטות u, v מוגדרות באמצעי קואורדינטות קרטיזיות x, y ע"י הביטוים

$$x = x(u, \text{v}) \ , \qquad x = x(u, \text{v}) \ .$$

נתון אינטגרל כפול $\iint_D f(x, y) dx\, dy$. ניתן לעבור לאינטגרל של הקואורדינטות u, v דרך היחס

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_D f\left(x(u, \text{v}), y(u, \text{v})\right) |J|\, du\, d\text{v},$$

כאשר

$$J = \det \begin{pmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_\text{v} & y'_\text{v} \end{pmatrix} \ .$$

J נקרא היעקוביאן.

דוגמה 10.13

קואורדינטות קוטביות:

$$J = \det \begin{pmatrix} x'_r & y'_r \\ x'_\theta & y'_\theta \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r \ .$$

דוגמה 10.14

קואורדינטות פרבוליות:

$$x = u \cdot \text{v} \ , \qquad y = \frac{1}{2}\left(u^2 - \text{v}^2\right)$$

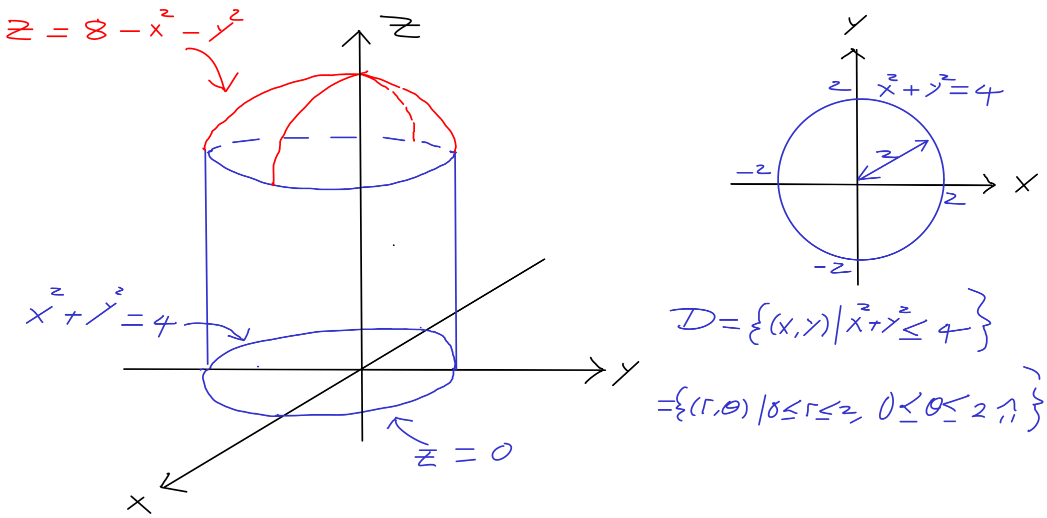
$$J = \det \begin{pmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_\text{v} & y'_\text{v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \text{v} & u \\ u & -\text{v} \end{pmatrix} = -\text{v}^2 - u^2 \ .$$

דוגמה 10.15

חשבו בעזרת אינטגרל כפול את נפח הגוף החסום ע"י המשטחים:

$$x^2 + y^2 = 4 \ , \qquad z = 0 \ , \qquad z = 8 - x^2 - y^2 \ .$$

פתרון:



$$V = \iint_D (8 - x^2 - y^2)dx\,dy \ , \qquad D = \{(x, y)|x^2 + y^2 \le 4\} = \{(r, \theta)|0 \le r \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

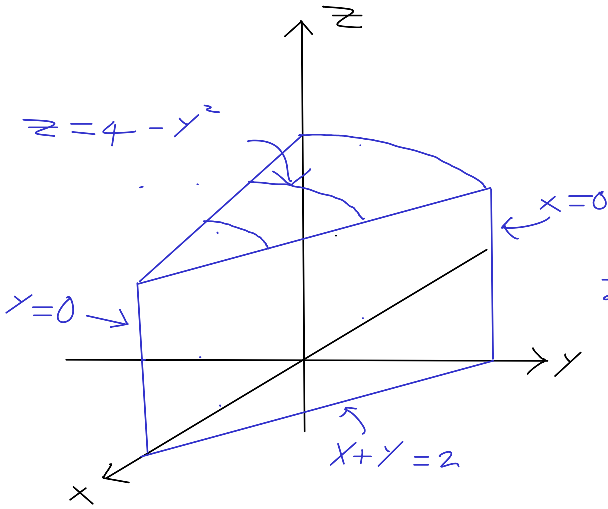
$$\begin{aligned}
V &= \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta\, r(8 - r^2)\\
&= \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta\, (8r - r^3)\\
&= \int_0^{2\pi} d\theta\, \left[4r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2\\
&= \int_0^{2\pi} d\theta\, (16 - 4)\\
&=12 \cdot [\theta]_0^{2\pi} = 24\pi \ .
\end{aligned}$$

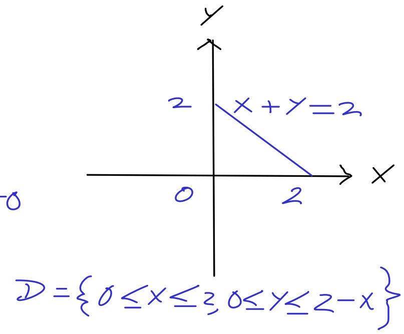
דוגמה 10.16

חשבו בעזרת אינטגרל כפול את נפח הגוף החסום ע"י המשטחים:

$$z = -y^2 + 4 \ , \qquad z = 0 \ , \qquad x + y = 2 \ , \qquad y = 0 \ , \qquad x = 0 \ .$$

פתרון:





$$V=\iint\limits_{D}(4-y^2)dx\,dy\ ,\qquad D=\{(x,y)|0\leq x\leq 2\ ,0\leq y\leq 2-x\}$$

$$\begin{aligned}V=&\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(4-y^2)dy\\ =&\int_0^2 dx\left[4y-\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{2-x}\\ =&\int_0^2 dx\left(4(2-x)-\frac{(2-x)^3}{3}\right)\\ =&\left[-2(2-x)^2+\frac{(2-x)^4}{12}\right]_{x=0}^{2}\\ =&8-\frac{16}{12}\\ =&8-\frac{4}{3}\\ =&\frac{20}{3}\ .\end{aligned}$$

10.6 מרכז מסה

משפט 10.7 מרכז מסה

נתון תחום D ופונקציה $\rho(x,y)\geq 0$ לכל $x,y\in D$. המסה של התחום D עם צפיפות $\rho(x,y)$ מוגדרת

$$M=\iint\limits_{D}\rho(x,y)dx\,dy\ .$$

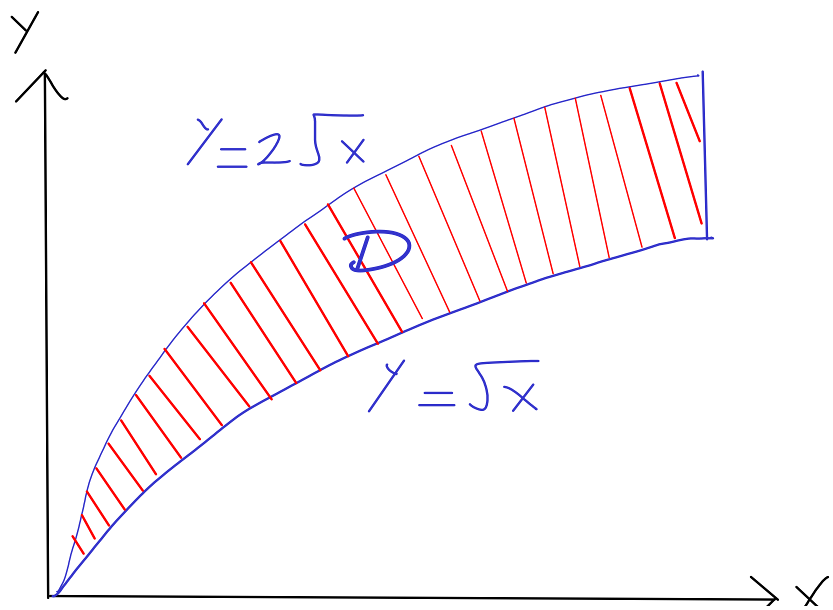
המרכז מסה של D היא נקודה $(x_c, y_c) \in D$ שניתנת ע"י

$$x_c = \frac{\iint_D x\,\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy}\ , \qquad y_c = \frac{\iint_D y\,\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy}\ .$$

דוגמה 10.17

מצאו את המסה של הגוף מישורי המוגדר ע"י הקווים $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 4$ כאשר הצפיפות החומר היא $\rho(x, y) = 4 - x$.

פתרון:



$$
\begin{aligned}
M &= \iint_D (4-x)dx\,dy \\
&= \int_0^4 dx\ \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4-x)dy \\
&= \int_0^4 dx\,(4-x)\left[y\right]_{y=\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \\
&= \int_0^4 (4-x)\sqrt{x}\,dx \\
&= \int_0^4 (4x^{1/2}-x^{3/2})\,dx \\
&= \left[4\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{2}{5}\cdot x^{5/2}\right]_0^4 \\
&=\frac{64}{3}-\frac{64}{5} \\
&=\frac{320-192}{15} \\
&=\frac{128}{15}\ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\iint_D\ x\cdot\rho(x,y)dx\,dy &= \iint_D (4x-x^2)dx\,dy \\
&= \int_0^4 dx\ \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4x-x^2)dy \\
&= \int_0^4 dx\,(4x-x^2)\left[y\right]_{y=\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \\
&= \int_0^4 (4x-x^2)\sqrt{x}\,dx \\
&= \int_0^4 (4x^{3/2}-x^{5/2})\,dx \\
&= \left[4\cdot\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{2}{7}\cdot x^{7/2}\right]_0^4 \\
&=\frac{256}{5}-\frac{256}{7} \\
&=\frac{512}{35}\ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D y\cdot\rho(x,y)dx\,dy &= \iint\limits_D (4-x)y\,dx\,dy \\
&= \int_0^4 dx\ \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4-x)y\,dy \\
&= \int_0^4 dx\,(4-x)\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \\
&= \int_0^4 dx\,(4-x)\left(2x-\frac{x}{2}\right) \\
&= \int_0^4 dx\,(4-x)\cdot\frac{3}{2}x \\
&=\frac{3}{2}\int_0^4 dx\,(4x-x^2) \\
&=\frac{3}{2}\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^4 \\
&=\frac{3}{2}\left(32-\frac{64}{3}\right) \\
&=\frac{3}{2}\cdot\frac{64}{6} \\
&=16\ .
\end{aligned}
$$

$$
x_c = \frac{\iint\limits_D x\cdot\rho(x,y)dx}{M} = \frac{\frac{512}{35}}{\frac{128}{15}} = \frac{3}{7}\cdot\frac{512}{128} = \frac{3}{7}\cdot 4 = \frac{12}{7}\ .
$$

$$
y_c = \frac{\iint\limits_D y\cdot\rho(x,y)dx}{M} = \frac{16}{\frac{128}{15}} = 15\cdot\frac{16}{128} = 15\cdot\frac{1}{8} = \frac{15}{8}
$$