שיעור 4
תמורות וצופן אניגמה

4.1 תמורות

הגדרה 4.1 תמורה

תמורה על קבוצה סופית $\Sigma = \{x_1, \ldots, x_n\}$ היא פונקציה $\pi : \Sigma \to \Sigma$ אשר היא חד-חד ערכית ו "על" Σ.
בהינתן $x_i \in \Sigma$ ותמורה π. אזי
$$\pi(x_i) = x_j \in \Sigma \ .$$

תזכורת:

- π חד-חד ערכית. ז"א אם $x_i \neq x_j$ אזי $\Sigma(x_i) \neq \Sigma(x_j)$.
- π "על" Σ. ז"א לכל $y \in \Sigma$ קיים $x \in \Sigma$ כך ש- $\pi(x) = y$.

כתוצאה מכך, אם π פועלת על כל האיברים של Σ אזי נקבל אותה קבוצה Σ רק לא באותו בסדר של הסדר המקורי:
$$\{\pi(x_1) \ , \ \pi(x_2) \ , \quad \ldots \quad \pi(x_n)\} \ .$$

דוגמה 4.1

x	1	2	3	4	5	6
$\pi(x)$	4	1	6	5	2	3

דוגמה 4.2

x	1	2	3	4	5	6
$\sigma(x)$	2	1	5	4	6	3

דוגמה 4.3

תהי Σ קבוצה סופית ותהי $\pi : \Sigma \to \Sigma$ פונקציה. הוכיחו: אם π חד-חד ערכית אז היא תמורה.

פתרון:

נתון לנו הפונקציה $\pi : \Sigma \to \Sigma$ כאשר Σ קבוצה נוצר סופית. כדי להוכיח כי π תמורה יש להראות כי π חד-חד-ערכית ו"על" Σ. כבר נתון לנו ש- π חח"ע אז נשאר רק להראות כי π על Σ.

Σ היא קבוצה סופית לכן קיים שלם $n \geq 0$ עבורו $|\Sigma| = n$. תהי $\pi(\Sigma)$ התמונה של π. מכיוון ש- π היא פונקציה מהקבוצה Σ אל הקבוצה Σ, אזי התמונה שלה היא תת-קבוצה של Σ, כלומר:
$$\pi(\Sigma) \subseteq \Sigma \ .$$

לכן
$$|\pi(\Sigma)| \leq |\Sigma| = n \ .$$

נראה כי $|\Sigma| = |\pi(\Sigma)|$. נניח בשלילה כי $|\Sigma| < |\pi(\Sigma)|$. אז בהכרח קיימים איברים $x_1, x_2 \in \Sigma$ כך ש:

$\Sigma\left(x_1\right)=\Sigma\left(x_2\right)$, בסתירה לכך ש: π חד-חד-ערכית. לכן הוכחנו דרך השלילה כי

$$|\pi\left(\Sigma\right)|=|\Sigma|=n\ .$$

הוכחנו כי $\Sigma\subseteq\Sigma$ $\pi\left(\Sigma\right)$ וגם $|\pi\left(\Sigma\right)|=|\Sigma|$ אז בהכרח

$$\pi\left(\Sigma\right)=\Sigma$$

ולפיכך $\pi:\Sigma\to\Sigma$ היא פונקציה "על" Σ.

■

הגדרה 4.2 הרכבה של תמורות

תהי Σ קבוצה נוצר סופית ותהיינה $\pi:\Sigma\to\Sigma$ ו- $\sigma:\Sigma\to\Sigma$ תמורות על הקבוצה Σ. ההרכבה של π ו- σ מוגדרת להיות הפונקציה שמסומנת $\sigma\pi$ ומוגדרת לפי התנאי:
לכל $x\in\Sigma$, אם $\pi(x)=y\in\Sigma$ ואם $\sigma(y)=z\in\Sigma$ אזי

$$\sigma\pi(x)=z\ .$$

הסימון $\sigma\pi(x)$ אומר " קודם π פועלת על x ואז σ פועלת על $\pi(x)$".

דוגמה 4.4

נתון התמורות π ו- σ:

x	1	2	3	4	5	6
$\pi(x)$	4	1	6	5	2	3

x	1	2	3	4	5	6
$\sigma(x)$	3	5	4	2	6	1

אזי ההרבה $\sigma\pi$ היא:

x	1	2	3	4	5	6
$\sigma\pi(x)$	2	3	1	6	5	4

לעומת זאת ההרבה ההפוכה $\pi\sigma$ היא:

x	1	2	3	4	5	6
$\pi\sigma(x)$	6	2	5	1	3	4

כלומר $\sigma\pi\neq\pi\sigma$.

משפט 4.1 הרכבה של תמורות היא תמורה

תהי Σ קבוצה נוצר סופית ותהיינה $\pi:\Sigma\to\Sigma$ ו- $\sigma:\Sigma\to\Sigma$ תמורות על הקבוצה Σ. ההרכבה $\sigma\pi$ היא תמורה על Σ.

הוכחה: מספיק להוכיח כי $\sigma\pi$ היא פונקציה חד-חד-ערכית ו"על" Σ.

- **חח"ע**

  נניח בשלילה כי $\sigma\pi$ לא חח"ע.

  אזי קיימים $x_1,x_2\in\Sigma$ כך ש- $\sigma\left(\pi(x_1)\right)=\sigma\left(\pi(x_2)\right)$.

  נסמן $y_1=\pi\left(x_1\right)$ ו- $y_2=\pi\left(x_2\right)$.

  מכיוון ש- π תמורה אז π חח"ע ולכן $y_1\neq y_2$. ומכיוון ש- σ תמורה אזי $\sigma(y_1)\neq\sigma(y_2)$. לכן

  $$\sigma\left(\pi(x_1)\right)\neq\sigma\left(\pi(x_2)\right)\ ,$$

בסתירה לכך ש- $\sigma\left(\pi(x_1)\right) = \sigma\left(\pi(x_2)\right)$.

לכן הוכחנו דרך השלילה כי $\sigma\pi$ פונקציה חח"ע.

- **<u>על</u>**

נניח בשלילה כי $\sigma\pi$ לא פונקצית "על". נסמן $\sigma\pi\left(\Sigma\right)$ התמונה של $\sigma\pi$. אזי

$$\sigma\pi\left(\Sigma\right) \neq \Sigma \ .$$

ראשית מכיוון ש- $\sigma\pi\left(\Sigma\right)$ הוא התמונה של $\sigma\pi$ אזי $\sigma\pi\left(\Sigma\right) \subseteq \Sigma$.

לכן אם $\sigma\pi\left(\Sigma\right) \neq \Sigma$ אז $\sigma\pi\left(\Sigma\right) \subset \Sigma$. מכאן

$$\left|\sigma\pi\left(\Sigma\right)\right| < \left|\Sigma\right| \ .$$

לכן בהכרח קיים לפחות שני איברים $x_1, x_2 \in \Sigma$ עבורם $\sigma\pi\left(x_1\right) = \sigma\pi\left(x_2\right)$. זאת בסתירה לכך ש- $\sigma\pi$ חח"ע, שמוכח בסעיף הקודם.

לכן הוכחנו דרך השלילה כי הפונקציה $\sigma\pi$ היא "על" Σ.

■

הגדרה 4.3 תמורות מתחלפות

תהיינה $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ ו- $\pi : \Sigma \to \Sigma$ תמורות. אומרים כי π ו- σ מתחלפות אם לכל $x \in \Sigma$ מתקיים

$$\pi\sigma(x) = \sigma\pi(x) \ .$$

הגדרה 4.4 תמורות מתחלפות

תהי $\pi : \Sigma \to \Sigma$ תמורה על הקבוצה Σ. התמורה ההופכית של π מסומנת π^{-1} ומוגדרת:

$$\pi\pi^{-1}(x) = x = \pi^{-1}\pi(x)$$

לכל $x \in \Sigma$.

דוגמה 4.5

נתונה התמורה π:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(x)$	6	3	5	1	2	4	8	7

התמורה ההופכית היא:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi^{-1}(x)$	4	5	2	6	3	1	8	7

הגדרה 4.5 נקודת שבת ונקודה זזה

תהי $\pi : \Sigma \to \Sigma$ תמורה.

- אם קיימת נקודה $x \in \Sigma$ כך ש: $\Sigma(x) = x$ אז אומרים כי x היא **נקודת שבת** של π.
- אם קיימת נקודה $x \in \Sigma$ כך ש: $\Sigma(x) \neq x$ אז אומרים כי x היא **נקודה זזה** של π.

הגדרה 4.6 תמורה הזהות

התמורה הזהות מסומנת $\text{id}:\Sigma\to\Sigma$ ומוגדרת כך שלכל $x\in\Sigma$:

$$\text{id}(x)=x\ .$$

במילים אחרות אם $\text{id}:\Sigma\to\Sigma$ היא התמורה הזהות אזי כל נקודה $x\in\Sigma$ היא נקודת שבת של id.

משפט 4.2 תמורה ההופכית של תמורה מורכבת

תהיינה $\pi_1,\cdots,\pi_t$ תמורות על הקבוצה Σ. אזי

$$(\pi_1\cdots\pi_t)^{-1}=\pi_t^{-1}\cdots\pi_1^{-1}\ .$$

הוכחה: נוכיח את הטענה באינדוקציה.

שלב הבסיס

עבור $t=2$, לכל $x\in\Sigma$ יש לנו:

$$\pi_2^{-1}\pi_1^{-1}\pi_1\pi_2(x)=\pi_2^{-1}\ \text{id}\ \pi_2(x)=\pi_2^{-1}\pi_2(x)=\text{id}(x)=x\ .$$

לכן הוכחנו כי $(\pi_1\pi_2)^{-1}=\pi_2^{-1}\pi_2^{-1}$.

שלב האינדוקציה

נניח כי הטעהה מתקיימת עבור $t=k>2$ (זאת היא ההנחת האינדוקציה). אז נראה כי הטענה נכונה גם כן עבור $t=k+1$ באופן הבא. נתבונן על ההתמורה המורכבת $\pi_1\cdots\pi_k\pi_{k+1}$. נסמן התמורה המורכבת מ- k תמורות כך: $\sigma=\pi_1\cdots\pi_k$. הסימון הזה מאפשר לנו להביע את התמורה המורכבת מ- $k+1$ תמורות כתמורה המורכבת מ- 2 תמורות באופן הבא:

$$\pi_1\cdots\pi_k\pi_{k+1}=\sigma\pi_{k+1}\ .$$

מכאן ולפי השלב הבסיס מהופכית היא

$$(\sigma\pi_{k+1})^{-1}=\pi_{k+1}^{-1}\sigma^{-1}\ .$$

כעת נחזיר את ההגדרה $\sigma=\pi_1\cdots\pi_k$ ונשתמש בההנחת האינדוקציה שלנו כדי להוכיח את הטענה עבור $t=k+1$:

$$(\pi_1\cdots\pi_k\pi_{k+1})^{-1}=\pi_{k+1}^{-1}\left(\pi_1\cdots\pi_k\right)^{-1}=\pi_{k+1}^{-1}\pi_k^{-1}\cdots\pi_1^{-1}$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בההנחת האינדוקציה.

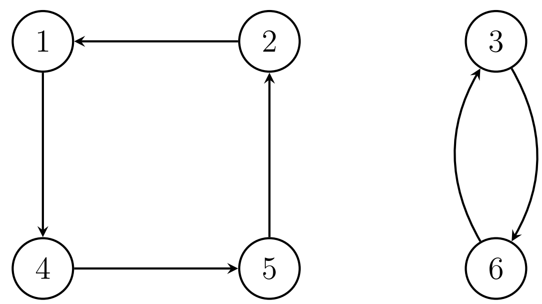
■

4.2 פירוק למחזורים של תמורה

עד כה ראינו תמורות בייצוג של טבלה. אבל המבנה האמיתי של תמורה נגלה עם נציג תמורה כגרף. לדוגמה, תהי π תמורה הבאה על $\Sigma=\{1,2,3,4,5,6\}$:

x	1	2	3	4	5	6
$\pi(x)$	4	1	6	5	2	3

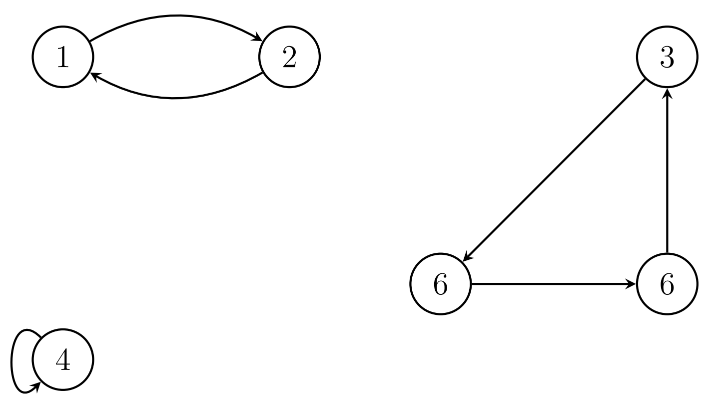
נגדיר הגרף המכוון $G_\pi = (V, E)$ כאשר הקבוצת הקודקודים היא $V = \Sigma$, ולכל $x \in \Sigma$ נגדיר צלע מ- x ל- $\pi(x)$. ז"א $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ כאשר $e_i = x_i\pi(x_i)$ היא הצלע מקודקוד x_i לקודקוד $\pi(x_i)$. על פי ההגדרה הזאת הגרף G_π של התמורה π היא כמתוארת באיור למטה.



כדוגמה נוספת אם σ היא התמורה

x	1	2	3	4	5	6
$\sigma(x)$	2	1	5	4	6	3

אזי הגרף G_σ הינו:



בגרף של תמורה, כל קודקוד שייך לבדיוק מעגל מכוון אחד (שייתכן הוא עובר דרך קודקוד אחד בלבד). הרי קיים התאמה אחת-אחת בין תמורה על Σ לבין גרף שמכסה כל המעגלים המכוונים של Σ. התופעה זו היא המוטיבציה לסימון מחזורים של תמורות.

הגדרה 4.7 מחזור

תהי $\Sigma \to \Sigma : \pi$ תמורה על הקבוצה Σ. אם קיימים k איברים שונים $a_1, \ \ldots \ , a_k \in \Sigma$ כך ש-

$$\pi(a_1) = a_2, \quad \pi(a_2) = a_3, \quad \cdots \quad \pi(a_{k-1}) = a_k \ , \quad \pi(a_k) = a_1$$

אז אומרים כי קיים מחזור באורך k ב- π שמסומן:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \end{pmatrix} .$$

משפט 4.3 פירוק למחזורים של תמורה

כל תמורה $\pi : \Sigma \to \Sigma$ על קבוצה סופית Σ מתפרקת למחזורים זרים.

הוכחה: שאלה לעבודת הגשה. ■

דוגמה 4.6

נתונה התמורה π:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(x)$	4	5	2	6	3	1	8	7

הפירוק למחזורים הוא:

$$\pi = \begin{pmatrix}1 & 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 7\end{pmatrix}$$

משפט 4.4

תהי $\pi : \Sigma \to \Sigma$ תמורה על קבוצה סופית Σ ויהי $G_\pi = (V, E)$ הגרף של התמורה.
π מכילה מחזור באורך k אם ורק אם הגרף G_π מכילה מעגל המילטוני באורך k.

הוכחה:

<u>כיוון אם</u>

נניח ש- π מכילה מחזור באורך k.

$\Leftarrow$ קיימים איברים שונים $a_1, \ldots, a_k \in \Sigma$ כך ש: $\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \ldots & \subseteq a_k\end{pmatrix} \in \pi$.

$\Leftarrow$ $\pi(a_1) = a_2 \ , \quad \pi(a_2) = a_3 \ , \quad \ldots \quad \pi(a_{k-1}) = a_k \ , \quad \pi(a_k) = a_1$.

$\Leftarrow$ בגרף $G_\pi = (V, E)$ של התמורה קיימות הצלעות

$$a_1\pi(a_1) \ , \ a_2\pi(a_2) \ , \quad \cdots \quad , \ a_{k-1}\pi(a_{k-1}) \ , \ a_k\pi(a_k) \in E \ .$$

$\Leftarrow$ בגרף $G_\pi = (V, E)$ קיימות הצלעות

$$a_1a_2 \ , \ a_2a_3 \ , \quad \cdots \quad , \ a_{k-1}a_k \ , \ a_ka_1 \in E \ .$$

$\Leftarrow$ G_π מכילה מעגל המילטוני באורך k.

<u>כיוון רק אם</u>

נניח ש- G_π מכיל מעגל המילטוני באורך k.

$\Leftarrow$ קיימים קבוצות $a_1, \ldots, a_k \in \Sigma$ עבורם

$$a_1a_2 \ , \ a_2a_3 \ , \quad \cdots \quad , \ a_{k-1}a_k \ , \ a_ka_1 \in E \ .$$

$\Leftarrow$ מכיוון ש- G_π הוא הגרף של התמורה π אזי

$$\pi(a_1) = a_2 \ , \pi(a_2) = a_3 \ , \qquad \pi(a_{k-1}) = a_k \ , \pi(a_k) = a_1$$

$\Leftarrow$ π מכילה מחזור באורך k:

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \ldots & \subseteq a_k\end{pmatrix} \subseteq \pi \ .$$

■

הגדרה 4.8 המחלקה של תמורה

תהי $\pi:\Sigma\to\Sigma$ תמורה. אומרים כי π שייכת למחלקה $[1^{z_1}2^{z_2}\cdots n^{z_n}]$ אם בפירוק למחזורים של π יש בדיוק z_1 מחזורים באורך- 1, z_2 מחזורים באורך- 2, z_3 מחזורים באורך- 3, וכן הלה.

במילים אחרות:

$$\pi\in[1^{z_1}2^{z_2}\cdots n^{z_n}]$$

אם לכל $i=1,\ldots,n$ בפירוק למחזורים של π יש z_i מחזורים באורך i.

דוגמה 4.7

תהי $\Sigma=\{A,B,C,D,E,F\}$.

- התמורה $(A\ B)(C\ D)(E\ F)\in[2^3]$.
- התמורה $(A\ B\ C\ D)\in[1^2 4^1]$.
- התמורה $(A\ D\ C)(E\ F)\in[1^1 2^1 3^1]$.

4.3 תמורות צמודות

הגדרה 4.9 תמורות צמודות

תהיינה π,σ תמורות על הקבוצה סופית Σ. התמורה הצמודה של σ על ידי π היא המורה המורכבת $\pi\sigma\pi^{-1}$.

משפט 4.5 משפט ההזזה של תמורות צמודות

תהיינה $\sigma:\Sigma\to\Sigma$ ו- $\pi:\Sigma\to\Sigma$ תמורות על הקוצה סופית Σ. לכל $x,y\in\Sigma$ אם $\sigma(x)=y$ אזי

$$\pi\sigma\pi^{-1}\left(\pi(x)\right)=\pi(y)\ .$$

הוכחה: נניח ש: $y=\sigma(x)$. אזי

$$\pi\sigma\pi^{-1}\left(\pi(x)\right)=\pi\sigma\pi^{-1}\pi(x)=\pi\sigma(x)=\pi\left(y\right)\ .$$

■

משפט 4.6 פירוקים למחזורים של תמורות צמודות שווים

תהיינה $\sigma:\Sigma\to\Sigma$ ו- $\pi:\Sigma\to\Sigma$ תמורות על הקוצה סופית Σ. ונניח כי הפירוק למחזורים של σ הוא

$$\sigma=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_l\end{pmatrix}\cdots\quad .$$

אזי הפירוק למחזורים של $\pi\sigma\pi^{-1}$ הוא:

$$\pi\sigma\pi^{-1}=\begin{pmatrix}\pi\left(a_1\right) & \pi\left(a_2\right) & \cdots & \pi\left(a_k\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi\left(b_1\right) & \pi\left(b_2\right) & \cdots & \pi\left(b_l\right)\end{pmatrix}\cdots\quad .$$

הוכחה: עבור כל מחזור $\left(a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_k\right)$ של σ, מתקיים

$$\sigma\left(a_i\right)=a_{i+1} \quad (1\leq i\leq k-1), \qquad \sigma\left(a_k\right)=a_1 \ .$$

מנובע ממשפט כי לכל מחזור של σ מתקיים:

$$\pi\sigma\pi^{-1}\left(\pi(a_i)\right)=\pi\left(a_{i+1}\right) \quad (1\leq i\leq k-1), \qquad \pi\sigma\pi^{-1}\left(\pi(a_k)\right)=\pi\left(a_1\right) \ .$$

■

משפט 4.7 המחלקה של תמורות צמודות נשמרת

תהיינה $\sigma:\Sigma\to\Sigma$ ו- $\tau:\Sigma\to\Sigma$ תמורות על הקוצה סופית Σ.
τ צמודה ל- σ אם ורק אם σ ו- τ שייכות לאותה מחלקה.

הוכחה:
<u>כיוון אם:</u>

נניח ש- σ ו- τ צמודות. אזי קיימת תמורה π עבורה $\tau=\pi\sigma\pi^{-1}$.
אם הפירוק למחזורים של σ הוא

$$\sigma=\left(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_k\right)\left(b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad \pi\left(b_l\right)\right)\cdots$$

אזי לפי משפט 4.6 הפירוק למחזורים של $\tau=\pi\sigma\pi^{-1}$ הוא

$$\pi\sigma\pi^{-1}=\left(\pi\left(a_1\right) \quad \pi\left(a_2\right) \quad \cdots \quad \pi\left(a_k\right)\right)\left(\pi\left(b_1\right) \quad \pi\left(b_2\right) \quad \cdots \quad \pi\left(b_l\right)\right)\cdots$$

ולכן ל- τ ול- σ יש אותו מבנה של מחזורים ולכן הן שייכות לאותה מחלקה.

<u>כיוון רק אם:</u>

■

4.4 צופן אניגמה

הגלגלי האתחול של צופן אניגמה הם 3 תמורות קבועות שמוגדרות:

x	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
$\alpha_1(x)$	E	K	M	F	L	G	D	Q	V	Z	N	T	O	W	Y	H	X	U	S	P	A	I	B	R	C	J

x	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
$\alpha_2(x)$	A	J	D	K	S	I	R	U	X	B	L	H	W	T	M	C	Q	G	Z	N	P	Y	F	V	O	E

x	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
$\alpha_3(x)$	B	D	F	H	J	L	C	P	R	T	X	V	Z	N	Y	E	I	W	G	A	K	M	U	S	Q	O

המשקף הקבוע הוא תמורה הבאה:

x	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
$\rho(x)$	Y	R	U	H	Q	S	L	D	P	X	N	G	O	K	M	I	E	B	F	Z	C	W	V	J	A	T

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (AELTPHQXRU)(BKNW)(CMOY)(DFG)(IV)(JZ)(S) && \in [1^1\, 2^2\, 3^1\, 4^2\, 10^1],\\
\alpha_2 &= (A)(JB)(CDKLHUP)(ESZ)(FIXVYOMW)(GR)(NT)(Q) && \in [1^2\, 2^3\, 3^1\, 7^1\, 8^1],\\
\alpha_3 &= (ABDHPEJT)(CFLVMZOYQIRWUKXSG)(N) && \in [1^1\, 8^1\, 17^1],\\
\rho &= (AY)(BR)(CU)(DH)(EQ)(FS)(GL)(IP)(JX)(KN)(MO)(TZ)(VW) && \in [2^{13}].
\end{aligned}$$

הגדרה 4.10 כלל מצפין וכלל מפענח של צופן אניגמה

יהי π משקף כלשהו מעל האלפבית $A,\ldots,Z$. הבחירה של המשקף מהווה את הלוח התקעים.
יהי $w = x_1x_2\ldots x_n$ מילה של טקסט גלוי. לכל $i = 1,\ldots,n$ הכלל מצפין והכלל מפענח של האות במיקום ה-i בטקסט הם:

$$e(x_i) = \Delta_i(x_i) = d(x_i)$$

כאשר Δ_i היא התמורה המורכבת

$$\Delta_i = \pi\ \left[\alpha_3^i\right]^{-1}\ \alpha_2^{-1}\ \alpha_1^{-1}\ \rho\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3^i\ \pi(x_i)$$

כאשר

$$\alpha_3^i = \sigma_{-i}\ \alpha_3\ \sigma_i\ , \qquad \left[\alpha_3^i\right]^{-1} = \sigma_{-i}\ \alpha_3^{-1}\ \sigma_i\ .$$

אם נגדיר את התמורה המורכבת $\tau_i = \sigma_{-i}\,\alpha_3\,\sigma_i\,\alpha_2\,\alpha_1\,\pi$ אזי $\tau_i^{-1} = \pi\,\alpha_1^{-1}\,\alpha_2^{-1}\,\sigma_{-i}\,\alpha_3^{-1}\ \sigma_i$ ולכן

$$\Delta_i = \tau_i^{-1}\,\rho\,\tau_i\ .$$

ז"א לכל $i = 1,\ldots,n$ התמורה המורכבת, Δ_i היא הצמודה של ρ על ידי τ_i.

דוגמה 4.8 הצפנה על ידי צופן אניגמה

נתון הטקסט גלוי

$$\texttt{hello}\ .$$

נניח כי הלוח התקעים הוא

$$\pi = \big(AX\big)\,\big(HF\big)\,\big(LP\big)\ .$$

חשבו את הטקסט מוצפן.

פתרון:

1) $x_1 = \texttt{H}$

$$H \xrightarrow{\pi} F \xrightarrow{\sigma_1} G \xrightarrow{\alpha_3} C \xrightarrow{\sigma_{-1}} B \xrightarrow{\alpha_2} J \xrightarrow{\alpha_1} Z \xrightarrow{\rho} T$$
$$\xrightarrow{\alpha_1^{-1}} L \xrightarrow{\alpha_2^{-1}} K \xrightarrow{\sigma_1} L \xrightarrow{\alpha_3^{-1}} F \xrightarrow{\sigma_{-1}} E \xrightarrow{\pi} E$$

2) $x_2 = \texttt{E}$

$$E \xrightarrow{\pi} E \xrightarrow{\sigma_2} G \xrightarrow{\alpha_3} C \xrightarrow{\sigma_{-2}} A \xrightarrow{\alpha_2} A \xrightarrow{\alpha_1} E \xrightarrow{\rho} Q$$
$$\xrightarrow{\alpha_1^{-1}} H \xrightarrow{\alpha_2^{-1}} L \xrightarrow{\sigma_2} N \xrightarrow{\alpha_3^{-1}} N \xrightarrow{\sigma_{-2}} L \xrightarrow{\pi} P$$

3) $\underline{x_3 = \mathtt{L}}$

$$L \xrightarrow{\pi} P \xrightarrow{\sigma_3} S \xrightarrow{\alpha_3} G \xrightarrow{\sigma_{-3}} D \xrightarrow{\alpha_2} K \xrightarrow{\alpha_1} N \xrightarrow{\rho} K$$
$$\xrightarrow{\alpha_1^{-1}} B \xrightarrow{\alpha_2^{-1}} J \xrightarrow{\sigma_3} M \xrightarrow{\alpha_3^{-1}} V \xrightarrow{\sigma_{-3}} S \xrightarrow{\pi} S$$

4) $\underline{x_4 = \mathtt{L}}$

$$L \xrightarrow{\pi} P \xrightarrow{\sigma_4} T \xrightarrow{\alpha_3} A \xrightarrow{\sigma_{-4}} W \xrightarrow{\alpha_2} F \xrightarrow{\alpha_1} G \xrightarrow{\rho} L$$
$$\xrightarrow{\alpha_1^{-1}} E \xrightarrow{\alpha_2^{-1}} Z \xrightarrow{\sigma_4} D \xrightarrow{\alpha_3^{-1}} B \xrightarrow{\sigma_{-4}} X \xrightarrow{\pi} A$$

5) $\underline{x_5 = \mathtt{O}}$

$$O \xrightarrow{\pi} O \xrightarrow{\sigma_5} T \xrightarrow{\alpha_3} A \xrightarrow{\sigma_{-5}} V \xrightarrow{\alpha_2} Y \xrightarrow{\alpha_1} C \xrightarrow{\rho} U$$
$$\xrightarrow{\alpha_1^{-1}} R \xrightarrow{\alpha_2^{-1}} G \xrightarrow{\sigma_5} L \xrightarrow{\alpha_3^{-1}} F \xrightarrow{\sigma_{-5}} A \xrightarrow{\pi} X$$

לפיכך הטקסט מוצפן הוא: EPSAX. ■

דוגמה 4.9 הצפנה על ידי צופן אניגמה

חשבו את הטקסט הגלוי של המילה המתקבלת בדוגמה הקודמת עם אותו לוח-התקעים.

פתרון:

1) $\underline{y_1 = \mathtt{E}}$

$$E \xrightarrow{\pi} E \xrightarrow{\sigma_1} F \xrightarrow{\alpha_3} L \xrightarrow{\sigma_{-1}} K \xrightarrow{\alpha_2} L \xrightarrow{\alpha_1} T \xrightarrow{\rho} Z$$
$$\xrightarrow{\alpha_1^{-1}} J \xrightarrow{\alpha_2^{-1}} B \xrightarrow{\sigma_1} C \xrightarrow{\alpha_3^{-1}} G \xrightarrow{\sigma_{-1}} F \xrightarrow{\pi} H$$

2) $\underline{y_2 = \mathtt{P}}$

$$P \xrightarrow{\pi} L \xrightarrow{\sigma_2} N \xrightarrow{\alpha_3} N \xrightarrow{\sigma_{-2}} L \xrightarrow{\alpha_2} H \xrightarrow{\alpha_1} Q \xrightarrow{\rho} E$$
$$\xrightarrow{\alpha_1^{-1}} A \xrightarrow{\alpha_2^{-1}} A \xrightarrow{\sigma_2} C \xrightarrow{\alpha_3^{-1}} G \xrightarrow{\sigma_{-2}} E \xrightarrow{\pi} E$$

3) $\underline{y_3 = \mathtt{S}}$

$$S \xrightarrow{\pi} S \xrightarrow{\sigma_3} V \xrightarrow{\alpha_3} M \xrightarrow{\sigma_{-3}} J \xrightarrow{\alpha_2} B \xrightarrow{\alpha_1} K \xrightarrow{\rho} N$$
$$\xrightarrow{\alpha_1^{-1}} K \xrightarrow{\alpha_2^{-1}} D \xrightarrow{\sigma_3} G \xrightarrow{\alpha_3^{-1}} S \xrightarrow{\sigma_{-3}} P \xrightarrow{\pi} L$$

4) $y_4 = \mathtt{A}$

$$A \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{\sigma_4} B \xrightarrow{\alpha_3} D \xrightarrow{\sigma_{-4}} Z \xrightarrow{\alpha_2} E \xrightarrow{\alpha_1} L \xrightarrow{\rho} G$$
$$\xrightarrow{\alpha_1^{-1}} F \xrightarrow{\alpha_2^{-1}} W \xrightarrow{\sigma_4} A \xrightarrow{\alpha_3^{-1}} T \xrightarrow{\sigma_{-4}} P \xrightarrow{\pi} L$$

5) $y_5 = \mathtt{X}$

$$X \xrightarrow{\pi} A \xrightarrow{\sigma_5} F \xrightarrow{\alpha_3} L \xrightarrow{\sigma_{-5}} G \xrightarrow{\alpha_2} R \xrightarrow{\alpha_1} U \xrightarrow{\rho} C$$
$$\xrightarrow{\alpha_1^{-1}} Y \xrightarrow{\alpha_2^{-1}} O \xrightarrow{\sigma_5} T \xrightarrow{\alpha_3^{-1}} J \xrightarrow{\sigma_{-5}} O \xrightarrow{\pi} O$$

לפיכך הטקסט הגלוי הוא: HELLO. ■

4.5 משפט רייבסקי וההתקפה על הצופן האניגמה

הגדרה 4.11 משקף

תהי Σ קבוצה נוצר סופית באורך זוגי. כלומר $n = |\Sigma|$ זוגי. תהי $\rho : \Sigma \to \Sigma$ תמורה. אומרים כי התמורה ρ היא משקף אם

$$\rho \in \left[2^{n/2}\right] \ .$$

משפט 4.8 תכונות של תמורה משקפת

תהי Σ קבוצה נוצר סופית באורך זוגי, ותהי $\rho : \Sigma \to \Sigma$ תמורה. אזי ρ היא משקף אם ורק אם התנאים הבאים מתקיימים:

1) $\rho^{-1} = \rho$.

2) לכל $x \in \Sigma$ מתקיים $\rho(x) \neq x$.

הוכחה:

<u>כיוון אם</u>

נניח כי ρ משקף. נראה כי $\rho = \rho^{-1}$ באופן הבא. נניח ש:

$$\rho = (x_1 \ y_1)\,(x_2 \ y_2) \cdots \left(x_{n/2} \ y_{n/2}\right) \ .$$

לכל מחזור $(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_k)$ המחזור ההפוכי הוא $(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_k)^{-1} = (a_k \ a_{k-1} \ \cdots \ a_1)$. לכן

$$\begin{aligned}\rho^{-1} &= (x_1 \ y_1)^{-1}\,(x_2 \ y_2)^{-1} \cdots \left(x_{n/2} \ y_{n/2}\right)^{-1}\\ &= (y_1 \ x_1)\,(y_2 \ x_2) \cdots \left(y_{n/2} \ x_{n/2}\right)\\ &= (x_1 \ y_1)\,(x_2 \ y_2) \cdots \left(x_{n/2} \ y_{n/2}\right)\\ &= \rho \ .\end{aligned}$$

כעת נראה שאם $x \in \Sigma$ אז $\rho(x) \neq x$. נניח בשלילה שקיימת נקודה $x \in \Sigma$ עבורה $\rho(x) = x$. אזי $\rho \in [1^{z_1} \cdots]$ כאשר $z_1 > 0$, כלומר ρ מכילה קיים לפחות מחזור אחד באורך 1, בסתירה לכך ש- ρ היא משקף.

כיוון רק אם

נניח כי $\rho:\Sigma\to\Sigma$ היא תמורה כך שלכל $x\in\Sigma$ מתקיים $\rho(x)\neq x$ ו- $\rho=\rho^{-1}$. נוכיח כי ρ היא משקף. נניח בשלילה כי ρ לא משקף. אזי ρ מכילה לפחות מחזור אחד באורך $k\neq 2$. נניח כי קיים מחזור באורך 1. אזי קיימת נקודת שבת של ρ, כלומר קיימת $x\in\Sigma$ עבורו $\rho(x)=x$. והגענו לסתירה. מצד שני נניח כי קיים מחזור באורך $k>2$ ב- ρ. אזי ניתן לרשום ρ כהרכבה באופן הבא:

$$\rho=(x_1\ x_2\ x_3\ \ldots)\,\rho' \quad ,$$

כאשר $(x_1\ x_2\ x_3\ \ldots)$ הוא מחזור באורך $k>2$. ז"א ההופכית של ρ היא

$$\rho^{-1}=\rho'^{-1}(x_1\ x_2\ x_3\ \ldots)^{-1}=\rho'^{-1}(\ldots x_3\ x_2\ x_1)\neq\rho\ ,$$

בסתירה לכך ש- $\rho=\rho^{-1}$. ■

משפט 4.9 הכלל מצפין של אניגמה הוא משקף על האלפבית האנגלית

הכלל מצפין (והכלל מפענח) של צופן אניגמה הוא משקף על האלפבית האנגלית.

הוכחה: הכלל מצפין והכלל מפענח של צופן אניגמה הם

$$e(x_i)=\Delta_i(x_i)=\tau_i^{-1}\,\rho\,\tau_i(x_i)$$

כאשר $\tau_i=\sigma_{-i}\,\alpha_3\,\sigma_i\,\alpha_2\,\alpha_1\,\pi$ ו- ρ המשקף הקבוע של צופן אניגנה.

⇐ לכל $i=1,\ldots,n$ התמורה המורכבת Δ_i היא הצמודה של ρ על ידי τ_i.

⇐ מכיוון ש: ρ הוא משקף על האלפיבית האנגלית אזי $\rho\in[2^{13}]$.

⇐ לפי משפט 4.7 $\Delta_i\in[2^{13}]$.

⇐ לפי הגדרה 4.11 התמורה Δ_i היא משקף.

■

משפט 4.10

יהיו ρ_1 ו- ρ_2 משקפים על הקבוצה סופית Σ.
לכל $x\in\Sigma$, אם $\rho_1(x)=y_1$ וגם $\rho_2(x)=y_2$ אזי $\rho_2\rho_1(y_1)=y_2$.

הוכחה: מכיוון ש- ρ_1 משקף ו- $\rho_1(x)=y_1$ אזי

$$\rho_1(x)=y_1 \quad\Longleftrightarrow\quad \rho_1^{-1}(\rho_1(x))=\rho_1^{-1}(y_1) \quad\Longleftrightarrow\quad x=\rho_1^{-1}(y_1) \quad\Longleftrightarrow\quad x=\rho_1(y_1)\ .$$

ז"א הוכחנו ש- $x=\rho(y_1)$. מכאן

$$\rho_2\rho_1(y_1)=\rho_2(x)=y_2\ ,$$

כנדרש.

■

דוגמה 4.10

נניח שיש לנו טקסט שמוצפן ע"י צופן אניגמה שמתחיל ב- ICPWLV. אזי אנחנו יודעים שקיימים $x,y,z\in\Sigma$ כך ש:

$$\mathtt{ICPWLV}=\Delta_1(x)\Delta_2(y)\Delta_3(z)\Delta_4(x)\Delta_5(y)\Delta_6(z)\ ,$$

כאשר ה- Δ_i הוא הכלל מצפין של צופן אניגמה המורכב מהתמורות הנעלמות. מצד שני אנחנו כן יודעים שכל Δ_i הוא משקף על פי . לכן, בזכות משפט , אפשר להסיק כי:

$$\Delta_4\Delta_1(\mathtt{I})=\mathtt{W}\ ,\qquad \Delta_5\Delta_2(\mathtt{C})=\mathtt{L}\ ,\qquad \Delta_6\Delta_3(\mathtt{P})=\mathtt{V}\ .$$

משפט 4.11 משפט רייבסקי

יהיו ρ_1 ו- ρ_2 משקפים על הקבוצה סופית Σ. אם המחזור

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_t\end{pmatrix}$$

מופיע בפירוק למחזורים של התמורה המורכבת $\rho_2\rho_1$, אזי בהכרח המחזור

$$\begin{pmatrix}\rho_1(a_t) & \rho_1(a_{t-1}) & \cdots & \rho_1(a_2) & \rho_1(a_1)\end{pmatrix}$$

גם מופיע בפירוק למחזורים של התמורה המורכבת $\rho_2\rho_1$, ובנוסף הוא שונה מהחזור $\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_t\end{pmatrix}$.

דוגמה 4.11

נניח ש-

$$\Delta_4\Delta_1=(\mathtt{OGKRYSD})(\mathtt{ZUQWFIB})(\mathtt{MJXCP})(\mathtt{HLNVE})(\mathtt{A})(\mathtt{T})$$

זה בדיוק הסוג של פירוק למחזורים הנקבע על ידי משפט רייבסקי: יש זוג מחזורים באורך 7, זוג מחזורים באורך 5, וזוג מחזורים באורך 1. מכיוון שיש רק שני מחזורים מכל אורך, אזי אנחנו יודעים כיצד להתאים אותם:

$$(\mathtt{OGKRYSD})(\mathtt{ZUQWFIB})=(\mathtt{OGKRYSD})\Big(\Delta_1(\mathtt{D})\,\Delta_1(\mathtt{S})\,\Delta_1(\mathtt{Y})\,\Delta_1(\mathtt{R})\,\Delta_1(\mathtt{K})\,\Delta_1(\mathtt{G})\,\Delta_1(\mathtt{O})\Big)$$

דוגמה 4.12 קריפטו-אנליזה של צופן אניגמה

נתונות התמורות הבאות של צופן אניגמה:

$$\Delta_4\Delta_1=(\mathtt{ZRYS})(\mathtt{JNVU})(\mathtt{GPDOFWHQB})(\mathtt{ACIKETMLX})\ ,$$

$$\Delta_5\Delta_2=(\mathtt{DO})(\mathtt{IA})(\mathtt{STYHJ})(\mathtt{BPMZX})(\mathtt{NWFVLR})(\mathtt{CEUKGQ})\ ,$$

$$\Delta_6\Delta_3=(\mathtt{MOE})(\mathtt{CNK})(\mathtt{WBIZ})(\mathtt{AGLY})(\mathtt{VFPXTJ})(\mathtt{DHRSUQ})\ .$$

פענחו את הקסט מוצפן

ILBDA

פתרון:

שלב 1) התמורה $\Delta_4\Delta_1$

ראשית נסתכל על התמורה $\Delta_4\Delta_1$.

	$\Delta_4\Delta_1$	Δ_1	Δ_4
A	C		
B	G		
C	I		
D	O		
E	T		
F	W		
G	P		
H	Q		
I	K		
J	N		
K	E		
L	X		
M	L		
N	V		
O	F		
P	D		
Q	B		
R	Y		
S	Z		
T	M		
U	J		
V	U		
W	H		
X	A		
Y	S		
Z	R		

נתחיל עם הזוג תמורות $(\mathtt{JNVU})(\mathtt{ZRYS})$. לפי משפט רייבסקי:

$$\Delta_1(\mathtt{U}) = \mathtt{Z}\ ,\quad \Delta_1(\mathtt{V}) = \mathtt{R}\ ,\quad \Delta_1(\mathtt{N}) = \mathtt{Y}\ ,\quad \Delta_1(\mathtt{J}) = \mathtt{S}\ .$$

	$\Delta_4\Delta_1$	Δ_1	Δ_4
A	C		
B	G		
C	I		
D	O		
E	T		
F	W		
G	P		
H	Q		
I	K		
J	N		
K	E		
L	X		
M	L		
N	V		
O	F		
P	D		
Q	B		
R	Y		
S	Z		
T	M		
U	J		
V	U		
W	H		
X	A		
Y	S		
Z	R		

עבור הזוג תמורות $(\mathtt{ACIKETMLX})\,(\mathtt{GPDOFWHQB})$, לפי משפט רייבסקי:

$$\Delta_1(\mathtt{X}) = \mathtt{G}\ ,\quad \Delta_1(\mathtt{L}) = \mathtt{P}\ ,\quad \Delta_1(\mathtt{M}) = \mathtt{D}\ ,\quad \Delta_1(\mathtt{T}) = \mathtt{O}\ ,\quad \Delta_1(\mathtt{E}) = \mathtt{F}\ ,$$

$$\Delta_1(\mathtt{K}) = \mathtt{W}\ ,\quad \Delta_1(\mathtt{I}) = \mathtt{H}\ ,\quad \Delta_1(\mathtt{C}) = \mathtt{Q}\ ,\quad \Delta_1(\mathtt{A}) = \mathtt{B}\ .$$

	$\Delta_4\Delta_1$	Δ_1	Δ_4
A	C	B	
B	G		
C	I	Q	
D	O		
E	T	F	
F	W		
G	P		
H	Q		
I	K	H	
J	N	S	
K	E	W	
L	X	P	
M	L	D	
N	V	Y	
O	F		
P	D		
Q	B		
R	Y		
S	Z		
T	M	O	
U	J	Z	
V	U	R	
W	H		
X	A	G	
Y	S		
Z	R		

בנוסף Δ_1 הוא משקף, לכן, אם למשל $\Delta_1(\mathtt{A}) = \mathtt{B}$ אז בהכרח $\Delta_1(\mathtt{B}) = \mathtt{A}$. על פי זה אפשר להשלים את העמודה של Δ_1 של הטבלה:

	$\Delta_4\Delta_1$	Δ_1	Δ_4
A	C	B	
B	G	A	
C	I	Q	
D	O	M	
E	T	F	
F	W	E	
G	P	X	
H	Q	I	
I	K	H	
J	N	S	
K	E	W	
L	X	P	
M	L	D	
N	V	Y	
O	F	T	
P	D	L	
Q	B	C	
R	Y	V	
S	Z	J	
T	M	O	
U	J	Z	
V	U	R	
W	H	K	
X	A	G	
Y	S	N	
Z	R	U	

הערכים של התמורה Δ_4 נתונים ע"י העמודות Δ_1 ו- $\Delta_4\Delta_1$. למשל, לפי השורה הראשונה:

$$\Delta_1(\mathtt{A}) = \mathtt{B} \quad \text{ו-} \quad \Delta_4(\Delta_1(\mathtt{A})) = \mathtt{C} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta_4(\mathtt{B}) = \mathtt{C}\ .$$

כדוגמה נוספת, לפי השורה השנייה:

$$\Delta_1(\mathtt{B}) = \mathtt{A} \quad \text{ו-} \quad \Delta_4(\Delta_1(\mathtt{B})) = \mathtt{G} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta_4(\mathtt{A}) = \mathtt{G}\ .$$

לפי השורה השלישית:

$$\Delta_1(\mathtt{C}) = \mathtt{Q} \quad \text{ו-} \quad \Delta_4(\Delta_1(\mathtt{C})) = \mathtt{I} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta_4(\mathtt{Q}) = \mathtt{I}\ ,$$

וכן הלה. באופן הזה אפשר למצוא את כל הערכים של התמורה Δ_4 על האותיות של האלפבית:

	$\Delta_4\Delta_1$	Δ_1	Δ_4
A	C	B	G
B	G	A	C
C	I	Q	B
D	O	M	L
E	T	F	W
F	W	E	T
G	P	X	A
H	Q	I	K
I	K	H	Q
J	N	S	Z
K	E	W	H
L	X	P	D
M	L	D	O
N	V	Y	S
O	F	T	M
P	D	L	X
Q	B	C	I
R	Y	V	U
S	Z	J	N
T	M	O	F
U	J	Z	R
V	U	R	Y
W	H	K	E
X	A	G	P
Y	S	N	V
Z	R	U	J

שלב 2) התמורה $\Delta_5\Delta_2$

כעת נסתכל על התמורה $\Delta_5\Delta_2$:

	$\Delta_5\Delta_2$	Δ_2	Δ_5
A	I		
B	P		
C	E		
D	O		
E	U		
F	V		
G	Q		
H	J		
I	A		
J	S		
K	G		
L	R		
M	Z		
N	W		
O	D		
P	M		
Q	C		
R	N		
S	T		
T	Y		
U	K		
V	L		
W	F		
X	B		
Y	H		
Z	X		

נתחיל עם הזוג תמורות $(\mathtt{IA})\,(\mathtt{DO})$. לפי משפט רייבסקי:

$$\Delta_2\,(\mathtt{A}) = \mathtt{D}\ ,\quad \Delta_2\,(\mathtt{I}) = \mathtt{O}\ .$$

עבור הזוג תמורות $(\mathtt{CEUKGQ})\,(\mathtt{NWFVLR})$, לפי משפט רייבסקי:

$$\Delta_2\,(\mathtt{Q}) = \mathtt{N}\ ,\quad \Delta_2\,(\mathtt{G}) = \mathtt{W}\ ,\quad \Delta_2\,(\mathtt{K}) = \mathtt{F}\ ,\quad \Delta_2\,(\mathtt{U}) = \mathtt{V}\ ,\quad \Delta_2\,(\mathtt{E}) = \mathtt{L}\ ,\quad \Delta_2\,(\mathtt{C}) = \mathtt{R}\ .$$

עבור הזוג תמורות $(\mathtt{BPMZX})\,(\mathtt{STYHJ})$, לפי משפט רייבסקי:

$$\Delta_2\,(\mathtt{X}) = \mathtt{S}\ ,\quad \Delta_2\,(\mathtt{Z}) = \mathtt{T}\ ,\quad \Delta_2\,(\mathtt{M}) = \mathtt{Y}\ ,\quad \Delta_2\,(\mathtt{P}) = \mathtt{H}\ ,\quad \Delta_2\,(\mathtt{B}) = \mathtt{J}\ .$$

	$\Delta_5\Delta_2$	Δ_2	Δ_5
A	I	D	
B	P	J	
C	E	R	
D	O		
E	U	L	
F	V		
G	Q	W	
H	J		
I	A	O	
J	S		
K	G	F	
L	R		
M	Z	Y	
N	W		
O	D		
P	M		
Q	C	N	
R	N		
S	T		
T	Y		
U	K	V	
V	L		
W	F		
X	B	S	
Y	H		
Z	X	T	

בנוסף Δ_2 הוא משקף, לכן, אם למשל $\Delta_2(\mathtt{A}) = \mathtt{D}$ אז בהכרח $\Delta_2(\mathtt{D}) = \mathtt{A}$. על פי זה אפשר להשלים את העמודה של Δ_2 של הטבלה:

	$\Delta_5\Delta_2$	Δ_2	Δ_5
A	I	D	
B	P	J	
C	E	R	
D	O	A	
E	U	L	
F	V	K	
G	Q	W	
H	J	P	
I	A	O	
J	S	B	
K	G	F	
L	R	E	
M	Z	Y	
N	W	Q	
O	D	I	
P	M	H	
Q	C	N	
R	N	C	
S	T	X	
T	Y	Z	
U	K	V	
V	L	U	
W	F	G	
X	B	S	
Y	H	M	
Z	X	T	

הערכים של התמורה Δ_5 נתונים ע"י העמודות Δ_2 ו- $\Delta_5\Delta_2$. למשל, לפי השורה הראשונה:

$$\Delta_2(\texttt{A}) = \texttt{D} \quad \text{ו-} \quad \Delta_5(\Delta_2(\texttt{A})) = \texttt{I} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta_5(\texttt{D}) = \texttt{I} \ .$$

כדוגמה נוספת, לפי השורה השנייה:

$$\Delta_2(\texttt{B}) = \texttt{J} \quad \text{ו-} \quad \Delta_5(\Delta_2(\texttt{B})) = \texttt{P} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta_5(\texttt{J}) = \texttt{P} \ .$$

לפי השורה השלישית:

$$\Delta_2(\texttt{C}) = \texttt{R} \quad \text{ו-} \quad \Delta_5(\Delta_2(\texttt{C})) = \texttt{E} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta_5(\texttt{R}) = \texttt{E} \ ,$$

וכן הלה. באופן הזה אפשר למצוא את כל הערכים של התמורה Δ_5 על האותיות של האלפבית:

Δ_5	Δ_2	$\Delta_5\Delta_2$	
O	D	I	A
S	J	P	B
N	R	E	C
I	A	O	D
R	L	U	E
G	K	V	F
F	W	Q	G
M	P	J	H
D	O	A	I
P	B	S	J
V	F	G	K
U	E	R	L
H	Y	Z	M
C	Q	W	N
A	I	D	O
J	H	M	P
W	N	C	Q
E	C	N	R
B	X	T	S
X	Z	Y	T
L	V	K	U
K	U	L	V
Q	G	F	W
T	S	B	X
Z	M	H	Y
Y	T	X	Z

שלב 3) התמורה $\Delta_6\Delta_3$

כעת נסתכל על התמורה $\Delta_6\Delta_3$:

	$\Delta_6\Delta_3$	Δ_3	Δ_6
A	G		
B	I		
C	N		
D	H		
E	M		
F	P		
G	L		
H	R		
I	Z		
J	V		
K	C		
L	Y		
M	O		
N	K		
O	E		
P	X		
Q	D		
R	S		
S	U		
T	J		
U	Q		
V	F		
W	B		
X	T		
Y	A		
Z	W		

נתחיל עם הזוג תמורות (CNK) (MOE). לפי משפט רייבסקי:

$$\Delta_3\,(\mathtt{K}) = \mathtt{M}\ ,\quad \Delta_3\,(\mathtt{N}) = \mathtt{O}\ ,\quad \Delta_3\,(\mathtt{C}) = \mathtt{E}\ .$$

עבור הזוג תמורות (AGLY) (WBIZ), לפי משפט רייבסקי:

$$\Delta_3\,(\mathtt{Y}) = \mathtt{W}\ ,\quad \Delta_3\,(\mathtt{L}) = \mathtt{B}\ ,\quad \Delta_3\,(\mathtt{G}) = \mathtt{I}\ ,\quad \Delta_3\,(\mathtt{A}) = \mathtt{Z}\ .$$

עבור הזוג תמורות (DHRSUQ) (VFPXTJ), לפי משפט רייבסקי:

$$\Delta_3\,(\mathtt{Q}) = \mathtt{V}\ ,\quad \Delta_3\,(\mathtt{U}) = \mathtt{F}\ ,\quad \Delta_3\,(\mathtt{S}) = \mathtt{P}\ ,\quad \Delta_3\,(\mathtt{R}) = \mathtt{X}\ ,\quad \Delta_3\,(\mathtt{H}) = \mathtt{T}\ ,\quad \Delta_3\,(\mathtt{D}) = \mathtt{J}\ .$$

	$\Delta_6\Delta_3$	Δ_3	Δ_6
A	G	Z	
B	I		
C	N	E	
D	H	J	
E	M		
F	P		
G	L	I	
H	R	T	
I	Z		
J	V		
K	C	M	
L	Y	B	
M	O		
N	K	O	
O	E		
P	X		
Q	D	V	
R	S	X	
S	U	P	
T	J		
U	Q	F	
V	F		
W	B		
X	T		
Y	A	W	
Z	W		

בנוסף Δ_3 הוא משקף, לכן, אם למשל $\Delta_3(\mathtt{A})=\mathtt{Z}$ אז בהכרח $\Delta_3(\mathtt{Z})=\mathtt{A}$. על פי זה אפשר להשלים את העמודה של Δ_3 של הטבלה:

	$\Delta_6\Delta_3$	Δ_3	Δ_6
A	G	Z	
B	I	L	
C	N	E	
D	H	J	
E	M	C	
F	P	U	
G	L	I	
H	R	T	
I	Z	G	
J	V	D	
K	C	M	
L	Y	B	
M	O	K	
N	K	O	
O	E	N	
P	X	S	
Q	D	V	
R	S	X	
S	U	P	
T	J	H	
U	Q	F	
V	F	Q	
W	B	Y	
X	T	R	
Y	A	W	
Z	W	A	

הערכים של התמורה Δ_6 נתונים ע"י העמודות Δ_3 ו- $\Delta_6\Delta_3$. למשל, לפי השורה הראשונה:

$\Delta_3(\mathtt{A}) = \mathtt{Z}$ ו- $\Delta_6(\Delta_3(\mathtt{A})) = \mathtt{G} \quad \Rightarrow \quad \Delta_6(\mathtt{Z}) = \mathtt{G}$.

כדוגמה נוספת, לפי השורה השנייה:

$\Delta_3(\mathtt{B}) = \mathtt{L}$ ו- $\Delta_6(\Delta_3(\mathtt{B})) = \mathtt{I} \quad \Rightarrow \quad \Delta_6(\mathtt{L}) = \mathtt{I}$.

לפי השורה השלישית:

$\Delta_3(\mathtt{C}) = \mathtt{E}$ ו- $\Delta_6(\Delta_3(\mathtt{C})) = \mathtt{N} \quad \Rightarrow \quad \Delta_6(\mathtt{E}) = \mathtt{N}$,

וכן הלה. באופן הזה אפשר למצוא את כל הערכים של התמורה Δ_6 על האותיות של האלפבית:

	$\Delta_6\Delta_3$	Δ_3	Δ_6
A	G	Z	W
B	I	L	Y
C	N	E	M
D	H	J	V
E	M	C	N
F	P	U	Q
G	L	I	Z
H	R	T	J
I	Z	G	L
J	V	D	H
K	C	M	O
L	Y	B	I
M	O	K	C
N	K	O	E
O	E	N	K
P	X	S	U
Q	D	V	F
R	S	X	T
S	U	P	X
T	J	H	R
U	Q	F	P
V	F	Q	D
W	B	Y	A
X	T	R	S
Y	A	W	B
Z	W	A	G

שלב 4) <u>פענוח</u>:

$$\Delta_1(\sigma_1) = \texttt{I}\ , \quad \Delta_2(\sigma_2) = \texttt{L}\ , \quad \Delta_3(\sigma_3) = \texttt{B}\ , \quad \Delta_4(\sigma_4) = \texttt{D}\ , \quad \Delta_5(\sigma_5) = \texttt{A}\ .$$

לפיכך:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 =&\Delta_1(\texttt{I}) &= \texttt{H}\ ,\\
\sigma_2 =&\Delta_2(\texttt{L}) &= \texttt{E}\ ,\\
\sigma_3 =&\Delta_3(\texttt{B}) &= \texttt{L}\ ,\\
\sigma_4 =&\Delta_4(\texttt{D}) &= \texttt{L}\ ,\\
\sigma_5 =&\Delta_5(\texttt{A}) &= \texttt{O}\ .
\end{aligned}$$

■