אלגברה לינארית סמסטר סתו 2022-23
עבודה עצמית 4

שאלות

שאלה 1 חשבו את הדטרמיננטות הבאות:

א)
$$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -6 & -7 \end{vmatrix}$$

ב)
$$\begin{vmatrix} 3m-2 & 4 \\ 5m+3 & 7 \end{vmatrix}$$

ג)
$$\begin{vmatrix} -4 & -5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

ד)
$$\begin{vmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

ה)
$$\begin{vmatrix} 2m-3 & m-4 & 3m-1 \\ 1 & -2 & 1 \\ m & 4m+1 & 2 \end{vmatrix}$$

ו)
$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & -2 \\ -1 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

ז)
$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

ח)
$$\begin{vmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{vmatrix}$$

ט)
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$$

י)
$$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$$

יא)
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

שאלה 2 פתרו את המשוואות הבאות:

א)
$$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

ב)
$$\begin{vmatrix} x & 3x-8 \\ x-2 & 2x-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & x-1 \\ x+1 & 2x-4 \end{vmatrix}$$

שאלה 3 נתון $t = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$. חשבו את $\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 3x & 3y & 3z \\ -p & -q & -r \end{vmatrix}$.

שאלה 4 תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, ונניח ש- $|A| = a$, $|B| = b \neq 0$. מצאו את:

א) $|AB|$

ב) $|7A|$

ג) $|7AB^{-1}A^2|$

ד) $|A+A|$

ה) $|4A^tB^3A^2(B^t)^{-1}|$

שאלה 5 פתרו את המערכות הבאות בעזרת כלל קרמר:

א)
$$\begin{cases} -3x - 6y + 2z = -1 \\ x + 8y - z = 12 \\ -5x - 9y + 3z = 0 \end{cases}$$

ב)
$$\begin{cases} -5x + y - 4z = 1 \\ -4x - y = 8 \\ 5x + 2z = -5 \end{cases}$$

ג)
$$\begin{cases} -5x - 4y + 5z - 2t = -2 \\ 4x - y - 5z - 2t = -9 \\ 4x - y - 4z - t = -10 \\ 2x - y - 3z - 2t = -5 \end{cases}$$

שאלה 6

א)
$$\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 1 \\ x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \end{cases}$$

ב)
$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$$

ג)
$$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ x + 5y - z = 7 \\ 3x + ky + 4z = k^2 \end{cases}$$

ד)
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = -2 \end{cases}$$

שאלה 7 תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. הבוכח או הפרך:

א) $|A+B| = |B+A|$.

ב) אם $AB + AC$ אז $|B| = |C|$.

ג) אם קיים $v \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ כך ש- $(AB) \cdot v = 0$ אז $|A| = 0$ או $|B| = 0$.

ד) $|A+B| = |A| + |B|$.

ה) $|AB| = |BA|$.

ו) $|A^tB| = B^tA|$.

ז) $|A^{-1}| = |A|$ אז $A = I$.

ח) $A^2 = I$ אז לפחות אחת מהמטריצות $A - I$ או $A + I$ איננה הפיכה.

פתרונות

שאלה 1

א)
$$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = 15$$
■

ב)
$$\begin{vmatrix} 3m-2 & 4 \\ 5m+3 & 7 \end{vmatrix} = -26+m$$
■

ג)
$$\begin{vmatrix} -4 & -5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$
■

ד)
$$\begin{vmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
■

ה)
$$\begin{vmatrix} 2m-3 & m-4 & 3m-1 \\ 1 & -2 & 1 \\ m & 4m+1 & 2 \end{vmatrix} = 11m^2-7m+22$$
■

ו)
$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & -2 \\ -1 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$
■

ז)
$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$
■

ח)
$$\begin{vmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{vmatrix} = t^3-12t-16$$
■

ט) $$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

■

י) $$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$$

■

יא) $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = -(a-b)(a-c)(b-c)$$

■

שאלה 2 המשוואה היא $-x^2+9x-16=x^2-7$, או שקול $2x^2+9=9x$. פתרון: $x=3,\dfrac{3}{2}$.

■

שאלה 3

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 3x & 3y & 3z \\ -p & -q & -r \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 3x & 3y & 3z \\ p & q & r \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3t.$$

■

שאלה 4 $|A|=a$, $|B|=b\neq 0$. A, B מסדר $n\times n$.

א) $|AB|=|A|\cdot|B|=ab$.

■

ב) $|7A|=7^n|A|=7^na$.

■

ג) $|7AB^{-1}A^2| = 7^n|A||B^{-1}||A|^2 = 7^n \cdot a \cdot \frac{1}{b} \cdot a^2 = 7^n\frac{a^3}{b}$.

■

ד) $|A+A| = |2A| = 2^n|A| = 2^n \cdot a$

■

ה) $|4A^tB^3A^2(B^t)^{-1}| = 4^n|A^t||B|^3|A|^2|B^t|^{-1} = 4^n \cdot a \cdot b^3 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{b} = 4^b a^3 b^2.$

■

<u>שאלה 5</u>

א)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -3x & - & 6y & + & 2z & = & -1 \\ x & + & 8y & - & z & = & 12 \\ -5x & - & 9y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 1 & 8 & -1 \\ -5 & -9 & 3 \end{vmatrix} = 5 \ ,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -6 & 2 \\ 12 & 8 & -1 \\ 0 & -9 & 3 \end{vmatrix} = -15 \ ,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 1 & 12 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 10 \ ,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & -6 & -1 \\ 1 & 8 & 12 \\ -5 & -9 & 0 \end{vmatrix} = 5 \ .$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -3 \ , \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2 \ , \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1 \ .$$

■

ב)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -5x & + & y & - & 4z & = & 1 \\ -4x & - & y & & & = & 8 \\ 5x & & & + & 2z & = & -5 \end{array}\right.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 \\ -4 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \ ,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 8 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \ ,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 \\ -4 & 8 & 0 \\ 5 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 8 \ ,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 8 \\ 5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1 \ , \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -4 \ , \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0 \ .$$

■

ג)

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} -5x & - & 4y & + & 5z & - & 2t & = & -2 \\ 4x & - & y & - & 5z & - & 2t & = & -9 \\ 4x & - & y & - & 4z & - & t & = & -10 \\ 2x & - & y & - & 3z & - & 2t & = & -5 \end{array} \right.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & -5 & -2 \\ 4 & -1 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 5 & -2 \\ -9 & -1 & -5 & -2 \\ -10 & -1 & -4 & -1 \\ -5 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & -2 & 5 & -2 \\ 4 & -9 & -5 & -2 \\ 4 & -10 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -16$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & -4 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -9 & -2 \\ 4 & -1 & -10 & -1 \\ 2 & -1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & -5 & -9 \\ 4 & -1 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 8$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1 \ , \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 4 \ , \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1 \ , \qquad w = \frac{\Delta_4}{\Delta} = -2 \ .$$

■

שאלה 6

א) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & k \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = k-5$.

$k \neq 5$

■

ב) $\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^3 - 3k + 2 = (k-1)^2(k+2)$

$k \neq 1, -2$

■

ג) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & k & 4 \end{vmatrix} = k + 62$

$k \neq -62$

■

ד) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2$

$k \neq 1$

■

שאלה 7

א) $|A+B| = |B+A|$.

טענה נכונה. הוכחה:

$$A+B = B+A \qquad \Rightarrow \qquad |A+B| = |B+A| \ .$$

■

ב) אם $AB = AC$ אז $|B| = |C|$.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

$$AB = AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

$|B| = 1$, $|C| = 4$.

■

ג) אם קיים $v \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ כך ש- $(AB) \cdot v = 0$ אז $|A| = 0$ או $|B| = 0$.

טענה נכונה. הוכחה:

אם קיים וקטור $v \neq 0$ כך ש- $(AB) \cdot v = 0$ אז v הוא פתרון לא טריוויאלי של המערכת ההומוגנית $(AB)X = 0$. לכן למערכת יש אינסוף פתרונות. לכן $|AB| = 0$ ולכן $|AB| = |A| \cdot |B| = 0$. מכאן $|A| = 0$ או $|B| = 0$.

■

ד) $|A + B| = |A| + |B|$.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

$$|A + B| = 1 \ , \qquad |A| + |B| = 0 \ .$$

■

ה) $|AB| = |BA|$.

טענה נכונה. הוכחה:

$$|AB| = |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A| = |BA| \ .$$

■

ו) $|A^t B| = B^t A|$.

טענה נכונה. הוכחה:

$$|A^t B| = |A^t| \cdot |B| = |A| \cdot |B| \ ,$$
$$|B^t A| = |B^t| \cdot |A| = |B| \cdot |A| = |A| \cdot |A| \ .$$

לכן

$$|A^t B| = |B^t A| \ .$$

■

ז) $|A^{-1}| = |A|$ אז $A = I$.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$
$$|A| = |A^{-1}| \ .$$

■

ח) $A^2 = I$ אז לפחות אחת מהמטריצות $A - I$ או $A + I$ איננה הפיכה.

טענה נכונה. הוכחה:

$$A^2 - I = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - I)(A + I) = 0 \quad \Rightarrow \quad |A - I| = 0 \ \wedge \ |A + I| = 0$$

לכן $A + I$ או $A - I$ איננה הפיכה.

■