

שיעור 8

תלות לינארית

הגדרה של תלות לינארית

8.1 הגדרה: (תלות לינארית)

נניח ש V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} , $v_1, \dots, v_n \in V$. וקטורים v_1, \dots, v_n נקראים תלויים לינארית אם קיימים סקלרים $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{F}$ שלא כולם אפסים כך ש-

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n = \bar{0}.$$

דוגמא.

$$3v_1 - v_2 = \bar{0} \text{ תלויים לינארית כי } v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

דוגמא.

$$iv_1 + v_2 = \bar{0} \text{ תלויים לינארית כי } v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

דוגמא.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{aligned} 2k_1 + 6k_2 &= 0 \\ k_1 + 4k_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$k_2 = 0, k_1 = 0$ לכן v_2, v_1 בלתי תלויים לינארית.

דוגמא.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + v_3 = \bar{0}.$$

דוגמא.

בדקו אם הוקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

תלויים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם ששווה לוקטור האפס.

פיתרון.

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = \bar{0}$$

קיבלנו מערכת משוואות הומוגנית:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 4R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$(k_1, k_2, k_3) = (2k_3, -k_3, k_3), \quad k_3 \in \mathbb{R}.$$

למערכת יש פתרון, לכן הוקטורים ת"ל.

נציב $k_3 = 1$ ונקבל

$$(k_1, k_2, k_3) = (2, -1, 1),$$

ונקבל

$$2v_1 - v_2 + v_3 = \bar{0}$$

■

8.2 משפט. ()

עמודות מטריצה בלתי תלויה לינארית אם ורק אם למערכת $A \cdot X = 0$ יש רק פתרון טריויאלי, ז"א למטריצה המדורגת כל העמודות מובילות.

דוגמא.

האם הוקטורים של מרחב $P_2(\mathbb{R})$

$$p_1(x) = 3 - x + x^2, \quad p_2(x) = x + 5x^2, \quad p_3(x) = 1,$$

הם תלויים לינארית? אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריויאלי שלהם שווה לוקטור האפס.

פיתרון.

$$k_1 p_1(x) + k_2 p_2(x) + k_3 p_3(x) = \bar{0},$$

$$k_1 (3 - x + x^2) + k_2 (x + 5x^2) + k_3 \cdot 1 = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2,$$

לכן

$$(3k_1 + k_3) + (-k_1 + k_2)x + (k_1 + 5k_2)x^2 = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

השוויון אמור להתקיים לכל x , לכן

$$\left. \begin{aligned} 3k_1 + k_3 &= 0 \\ -k_1 + k_2 &= 0 \\ k_1 + 5k_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_1 - 3R_3]{R_2 \rightarrow R_1 + 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

למערכת יש פתרון יחיד $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$. לכן הוקטורים בת"ל. ■

דוגמא.

במרחב וקטורי $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ נתונים שלושה וקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

בדקו אם הוקטורים u_1, u_2, u_3 תלויים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם שווה לוקטור האפס.

פיתרון.

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \bar{0},$$

$$k_1 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \bar{0},$$

לכן

$$\begin{pmatrix} -2k_1 + 5k_2 - k_3 & k_1 - k_2 + 4k_3 \\ 4k_2 + 4k_3 & -k_1 - 3k_2 - 6k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

השוויון אמור להתקיים לכל x , לכן

$$\left. \begin{aligned} -2k_1 + 5k_2 - k_3 &= 0 \\ k_1 - k_2 + 4k_3 &= 0 \\ 4k_2 + 4k_3 &= 0 \\ -k_1 - 3k_2 - 6k_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 4 & | & 0 \\ 0 & 4 & 4 & | & 0 \\ -1 & -3 & -6 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_1 + 2R_2 \\ R_4 \rightarrow R_1 - 2R_4}} \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 & | & 0 \\ 0 & 3 & 7 & | & 0 \\ 0 & 4 & 4 & | & 0 \\ 0 & 11 & 11 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 & | & 0 \\ 0 & 3 & 7 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_2 - 3R_3 \\ R_4 \rightarrow R_2 - 3R_4}} \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 & | & 0 \\ 0 & 3 & 7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 & | & 0 \\ 0 & 3 & 7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

למערכת ההומוגנית יש פתרון יחיד, טריוויאלי, לכן u_1, u_2, u_3 בת"ל. ■

דוגמא.

נתונים וקטורים $v_1 = x, v_2 = e^x, v_3 = x^2$ במרחב וקטורי $f(\mathbb{R})$. בדקו אם הוקטורים תלויים לינארית.

פיתרון.

שיטה 1

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = \bar{0}$$

ז"א

$$k_1 x + k_2 e^x + k_3 x^2 = 0$$

לכל $x \in \mathbb{R}$.

נציב $k_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow k_1 + k_3 = 0 \\ x = -1 \Rightarrow -k_1 + k_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow k_1 = 0, k_3 = 0.$$

לכן הוקטורים בת"ל.

שיטה 2: וורונסקיאן

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 \\ u''_1 & u''_2 & u''_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & e^x & x^2 \\ 1 & e^x & 2x \\ 0 & e^x & 2 \end{vmatrix} = 0$$

■ $W(x) = 0$ לכל x לכן הוקטורים בת"ל.

דוגמא.

במרחב וקטורי \mathbb{Z}_5^3 נתונים וקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{3} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{4} \\ \bar{2} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \end{pmatrix}.$$

בדקו אם הוקטורים תלויים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם שווה לוקטור האפס.

פיתרון.

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = \bar{0}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & 0 \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} & 0 \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_1 + 3R_3]{R_1 \rightarrow R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & 0 \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & 0 \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & 0 \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & 0 \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{2}k_1 + k_3 = \bar{0} \\ \bar{4}k_2 + \bar{3}k_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{2}k_1 = \bar{4}k_3 \\ \bar{4}k_2 = \bar{2}k_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k_1 = \bar{2}k_3 \\ k_2 = \bar{3}k_3 \end{array} \right\}$$

פתרון

$$(k_1, k_2, k_3) = (\bar{2}k_3, \bar{3}k_3, k_3), \quad k_3 \in \mathbb{Z}_5.$$

נציב $k_3 = \bar{1}$ ונקבל $(k_1, k_2, k_3) = (\bar{2}, \bar{3}, \bar{1})$. אז

$$\bar{2}v_1 + \bar{3}v_2 + v_3 = \bar{0}.$$

■

תכונות של תלות לינארית

8.3 משפט. (תכונות בסיסיות של תלות לינארית)

- כלל תלות לינארית (1) וקטור u תלוי לינארית אם ורק אם $u = \bar{0}$.
- כלל תלות לינארית (2) שני וקטורים תלויים לינארית אם ורק אם אחד מהם הוא צירוף לינארי של הוקטור השני.
- כלל תלות לינארית (3) וקטורים v_1, \dots, v_n תלויים לינארית אם ורק אם לפחות אחד מהם הוא צירוף לינארי של שאר הוקטורים.
- כלל תלות לינארית (4) כל קבוצת וקטורים שמכילה את וקטור האפס, היא תלויה לינארית.
- כלל תלות לינארית (5) אם $v_1, \dots, v_n \in V$ תלויים לינארית, אז כל קבוצת הוקטורים שמכילה את v_1, \dots, v_n היא תלויה לינארית.
- כלל תלות לינארית (6) אם קבוצת וקטורים $\{v_1, \dots, v_n\}$ בת"ל, אז כל תת קבוצה שלה היא בת"ל.

הוכחה.

כלל תלות לינארית (1)

u ת"ל אם ורק אם קיים סקלר $k \in \mathbb{F}$ כך ש $ku = \bar{0}$ $\Leftrightarrow u = \bar{0}$.

כלל תלות לינארית (2)

v_1, v_2 ת"ל \Leftrightarrow קיימים סקלרים k_1, k_2 שלא כולם אפסים כך ש

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 = \bar{0}$$

נניח בלי הגבלת הכלליות ש $k_1 \neq 0$, אז

$$v_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right) v_2.$$

כלל תלות לינארית (3)

v_1, \dots, v_n ת"ל \Leftrightarrow קיימים $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{F}$ שלא כולם אפסים כך ש

$$k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = \bar{0}.$$

נניח ש $k_i \neq 0$. אז זה מתקיים אם ורק אם

$$v_i = \left(-\frac{k_1}{k_i}\right) v_1 + \dots + \left(-\frac{k_{i-1}}{k_i}\right) v_{i-1} + \left(-\frac{k_{i+1}}{k_i}\right) v_{i+1} + \dots + \left(-\frac{k_n}{k_i}\right) v_n$$

כלל תלות לינארית (4)

לכל $v_1, \dots, v_n \in V$,

$$0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n + 1 \cdot \bar{0} = \bar{0}$$

לכן $\bar{0}, v_1, \dots, v_n$ ת"ל.

כלל תלות לינארית (5)

נניח ש v_1, \dots, v_n ת"ל. אז קיימים סקלרים $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{F}$ שלא כולם אפסים כך ש

$$k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = \bar{0}.$$

אז לכל $u_1, \dots, u_m \in V$ מתקיים:

$$k_1 v_1 + \dots + k_n v_n + 0 \cdot u_1 + \dots + 0 \cdot u_m = \bar{0}$$

לכן $v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m$ ת"ל.

כלל תלות לינארית (6)

נוכיח את הטענה בדרך השלילית.

$\{v_1, \dots, v_n\}$ בת"ל. ז"א הצירוף לינארי הבא

$$k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = \bar{0}$$

מתקיים אם ורק אם $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$. נניח שקיימת תת קבוצה של $\{v_1, \dots, v_n\}$ שהיא תלויה לינארית. כלומר קיימת קבוצה $\{v_1, \dots, v_m\}$ שהיא ת"ל. ז"א הצירוף לינארי

$$k_1 v_1 + \dots + k_m v_m = \bar{0}$$