# שיעור 6
# תת מרחב

**6.1 הגדרה: (תת מרחב)**
נניח כי $V$ מרחב וקטורי מעל שדה, $\mathbb{F}$.

תת קבוצה $W$ של $V$ נקראת תת מרחב (ת"מ) של $V$ אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

**(1)** $\bar{0} \in W$.

**(2)** לכל $u, v, \in W$,
$$u + v \in W \ .$$

**(3)** לכל $u \in W$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים
$$\alpha \cdot u \in W \ .$$

---

**6.2 דוגמא.**
נגדיר $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, $W \subseteq \mathbb{R}^2$. האם $W$ ת"מ של $\mathbb{R}^2$?

---

**פיתרון.** לא. דוגמה נגדית:
$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \notin W \ .$$

לכן $W$ לא ת"מ של $\mathbb{R}^2$. ■

---

**6.3 דוגמא.**
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \middle| k \in \mathbb{R} \right\} \ .$$

$W \subseteq \mathbb{R}^2$. האם $W$ ת"מ של $\mathbb{R}^2$?

---

**פיתרון.**

**1)** לכל $u = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \in W$, $v = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \in W$,
$$u + v = \begin{pmatrix} k+t \\ 2(k+t) \end{pmatrix} \in W \ ,$$

**2)** לכל $u = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \in W$, ולכל סקלר $t \in \mathbb{R}$,
$$tu = \begin{pmatrix} tk \\ 2(tk) \end{pmatrix} \in W \ ,$$

**3)**
$$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \in W \ .$$

לכן השלושה התנאים של ת"מ בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן $W$ ת"מ של $\mathbb{R}^2$. ■

---

**6.4 דוגמא.**

$$W=\left\{\begin{pmatrix} a\\ a+2\end{pmatrix}\middle| a\in\mathbb{R}\right\} \ .$$

האם $W$ ת"מ של $\mathbb{R}^2$?

---

**פיתרון.** $W \notin \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \bar{0}$ לכן $W$ לא ת"מ של $\mathbb{R}^2$. ■

---

**6.5 דוגמא.**

$$W=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\middle| x\geq 0, x,y\in\mathbb{R}\right\} \ .$$

האם $W$ ת"מ של $\mathbb{R}^2$?

---

**פיתרון.**
לא. דוגמה נגדית:

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\in W \ , \qquad (-1)\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}\notin W \ .$$

■

---

**6.6 דוגמא.**

$$W=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\middle| x^2-y^2=0\right\} \ .$$

האם $W$ ת"מ של $\mathbb{R}^2$?

---

**פיתרון.**
לא. דוגמה נגדית:

$$u=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\in W \ , \qquad v=\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}\in W \ , \qquad u+v=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}\notin W \ .$$

■

---

**6.7 דוגמא.**

$$W=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\middle| \begin{array}{rl} x-2y+z & =0\\ y-z & =0\end{array}\right\} \ .$$

האם $W$ ת"מ של $\mathbb{R}^3$?

---

**פיתרון.**
כן:

**1)** צ"ל $\bar{0}\in W$:

$$\bar{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} .$$

$$\begin{cases} 0-2\cdot 0+0 &=0\\ 0-0 &=0\end{cases} \Leftarrow \bar{0}\in W .$$

**2)** נניח $W \ni \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=u$. ז"א מתקיים $\begin{cases} x-2y+z &=0\\ y-z &=0\end{cases}$. נקח סקלר $k$. צ"ל: $ku\in W$.

$$ku=\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} kx-2ky+kz &=k(x-2y+z) &=0\\ ky-kz &=k(y-z) &=0\end{cases}$$

לכן $ku\in W$.

**3)** נקח $W \ni \begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=u$, $W \ni \begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=\mathrm{v}$. ז"א מתקיים

$$\begin{cases} x_1-2y_1+z_1 &=0\\ y_1-z_1 &=0\end{cases} \text{וגם} \begin{cases} x_2-2y_2+z_2 &=0\\ y_2-z_2 &=0\end{cases}$$

אז

$$u+\mathrm{v}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix} .$$

נבדוק אם $u+\mathrm{v}\in W$.

$$(x_1+x_2)-2(y_1+y_2)+(z_1+z_2)=(x_1-2y_1+z_1)+(x_2-2y_2+z_2)=0 ,$$

$$(y_1+y_2)-(z_1+z_2)=(y_1-z_1)+(y_2-z_2)=0 ,$$

לכן $u+\mathrm{v}\in W$. לכן השלושה התנאים של ת"מ בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן $W$ ת"מ של $\mathbb{R}^3$.

■

---

**6.8 דוגמא.**

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\middle| a+b+c=d\right\} .$$

האם $W$ ת"מ של $M_{2\times 2}(\mathbb{F})$?

---

**פיתרון.**

**1)**

$$\bar{0}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in W$$

כי $0+0+0=0$.

**2)** נקח

$$u=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in W\ .$$

ז"א מתקיים $a+b+c=d$. נקח סקלר $k$. אז

$$ku=\begin{pmatrix}ka&kb\\kc&kd\end{pmatrix}\in W\ .$$

$ka+kb+kc=k(a+b+c)=kd$. לכן $ku\in W$.

**3)**

$$u=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}\in W\ ,\qquad \mathrm{v}=\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}\in W\ .$$

צ"ל $u+\mathrm{v}\in W$.

$u\in W \Leftarrow a_1+b_1+c_1=d_1$.

$\mathrm{v}\in W \Leftarrow a_2+b_2+c_2=d_2$.

$$u+\mathrm{v}=\begin{pmatrix}a_1+a_2&b_1+b_2\\c_1+c_2&d_1+d_2\end{pmatrix}$$

$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)=(a_1+b_1+c_1)+(a_2+b_2+c_2)=d_1+d_2$ ז"א $u+\mathrm{v}\in W$.

לכן השלושה התנאים של ת"מ בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן $W$ ת"מ של $M_{2\times2}(\mathbb{F})$. ■

---

**6.9 דוגמא.**
תהי

$$W=\left\{p(x)\middle|\deg(p(x))=2\ ,p(x)\in\mathbb{F}[x]\right\}$$

קבוצת כל הפולינומים במעלה 2 בדיוק עם מקדמים מתוך שדה $\mathbb{F}$. קבעו אם $W$ ת"מ של $\mathbb{F}[x]$.

---

**פיתרון.**
$W$ לא ת"מ של $\mathbb{F}[x]$. הסבר:

$\bar{0}\notin W$. ■

---

**6.10 דוגמא.**
נסמן

$$\mathbb{F}_2[x]=\left\{p(x)\in\mathbb{F}[x]\middle|\deg(p(x))\leq 2\right\}$$

קבוצת כל הפולינומים של $\mathbb{F}[x]$ מסדר 2 לכל היותר.

$\mathbb{F}_2[x]$ ת"מ של $\mathbb{F}[x]$.

---

**6.11 דוגמא.**

$$W=\left\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}\middle|f(3)=0\right\}$$

$W\subseteq F(\mathbb{R})$. קבעו האם $W$ ת"מ של $F(\mathbb{R})$.

---

**פיתרון.**

**1)** האיבר $\bar{0}$ הינו הפונקציה $f(x)=0$. לכן $\bar{0}(3)=0 \Leftarrow \bar{0}\in W$.

**2)** אם $f\in W$ ו- $k\in\mathbb{R}$, אז $f(3)=0$ לכן

$$(kf)(3)=k(f(3))=k\cdot 0=0\ .$$

ז"א $kf\in W$.

**3)** נניח $f,g\in W$, ז"א $f(3)=0$ , $g(3)=0$. אז

$$(f+g)(3)=f(3)+g(3)=0+0=0\ ,$$

כלומר $f+g\in W$.

לכן השלושה התנאים של ת"מ בהגדרה 6.1 מתקיימים. לכן $W$ ת"מ של $F(\mathbb{R})$. ■

---

**6.12 דוגמא.**

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle|\ \begin{array}{rl}3x+y-z&=1\\2x+5y&=0\\-x+10y-z&=5\end{array}\right\}$$

קבעו האם $W$ ת"מ של $\mathbb{R}^3$.

---

**פיתרון.**

$W$ לא ת"מ של $\mathbb{R}^3$, $\bar{0}\notin W$. ■

---

**6.13 משפט. (מרחב האפס הוא ת"מ)**

לכל מטריצה $A$ מסדר $m\times n$ מעל שדה $\mathbb{F}$, אוסף הפתרונות של מערכת הומוגנית $A\cdot X=0$ הוא ת"מ של $\mathbb{F}^n$.

---

**הוכחה.**

נסמן

$$\text{Nul}(A)=\left\{X\middle|A\cdot X=0, X\in\mathbb{F}^n\right\}$$

נוכיח כי $\text{Nul}(A)$ ת"מ של $\mathbb{F}^n$.

**1)** צ"ל $\bar{0}\in\text{Nul}(A)$, כאשר $\bar{0}$ מטריצה האפס.

$$A\cdot\bar{0}=0\ ,$$

לכן $\bar{0}\in\text{Nul}(A)$.

**2)** נניח $u,\mathrm{v}\in\text{Nul}(A)$. צ"ל $u+\mathrm{v}\in\text{Nul}(A)$.

$u\in\text{Nul}(A) \Leftarrow A\cdot u=0$.

$\mathrm{v}\in\text{Nul}(A) \Leftarrow A\cdot\mathrm{v}=0$.

לכן

$$A(u+\mathrm{v})=Au+A\mathrm{v}=0+0=0\quad\Rightarrow\quad u+\mathrm{v}\in\text{Nul}(A)$$