

פתרונות

חישוביות וסיבוכיות

מועד ב'

פתרון לדוגמא

ד"ר יוחאי טוויטו, ד"ר ירמיהו מילר.

סמסטר א, תשפ"ה

מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הינן פתרונות לדוגמא. ניתן לפתור חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

עמוד 1 מתוך 10

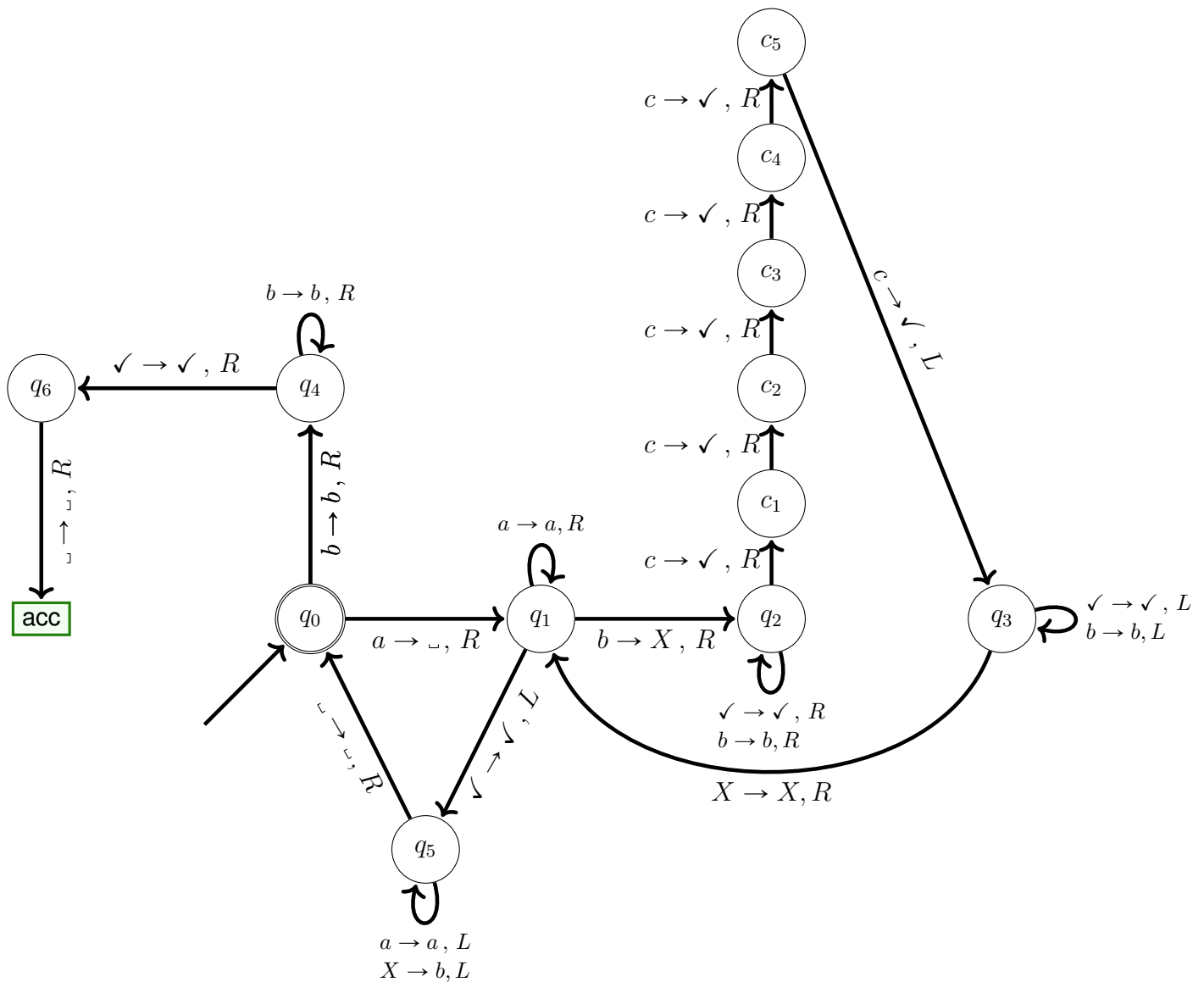
המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245,84 | www.sce.ac.il | חייג: ☎ 08-9400777

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

כל מעברים לא מופיעים בתרשים, עוברים למצב rej .



עמוד 2 מתוך 10

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

פתרונות

סעיף ב' (10 נקודות)

$$\sigma \in \{0, \dots, 9\}, \quad \tau \in \{0, \dots, 9, *\}.$$

| מצב | סימון בסרט | מצב חדש | כתיבה | תזוזה | תנאי |
|-------------------|------------------------------|-------------------|-------|-------|--|
| $X.*.*$ | σ | $X.\sigma.*$ | ✓ | R | |
| $X.*.*$ | ✓ | $X.*.*$ | ↻ | R | |
| $X.\sigma.*$ | $0, 1, \dots, 9, \checkmark$ | $X.\sigma.*$ | ↻ | R | |
| $X.\tau.*$ | # | $Y.\tau.*$ | ↻ | R | |
| $Y.\tau.*$ | σ | $Y.\tau.\sigma$ | ✓ | R | |
| $Y.\tau.*$ | ✓ | $Y.\tau.*$ | ↻ | R | |
| $Y.\tau.\sigma$ | $0, 1, \dots, 9, \checkmark$ | $Y.\tau.\sigma$ | ↻ | R | |
| $Y.\tau_1.\tau_2$ | # | $Z.\tau_1.\tau_2$ | ↻ | R | |
| $Z.\tau_1.\tau_2$ | ✓ | $Z.\tau_1.\tau_2$ | ↻ | R | |
| $Z.\tau_1.\tau_2$ | σ | back | ✓ | L | $\sigma \neq \tau_1 \wedge \sigma \neq 2\tau_2 \wedge \sigma \geq \tau_1 + \tau_2$ |
| $Z**$ | ⌊ | acc | ↻ | R | |
| back | $0, 1, \dots, 9, \checkmark$ | back | ↻ | L | |
| back | ⌊ | $X.*.*$ | ↻ | R | |

כל שאר המעברים עוברים ל rej.

שאלה 2: וריאציות על מכונות טיורינג (20 נקודות)

כיוון ראשון

עמוד 3 מתוך 10

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245, 84 | חייג: 052-7724584 | www.sce.ac.il

פתרונות

תהי

$$M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O) ,$$

במודל O החד כיווני. נבנה מכונה

$$M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T) ,$$

שקולה במודל הדו כיווני T .

רכיבי המ"ט M^T זהים לאלו של המ"ט M^O , מלבד מהתכונה שהראש של M^O לא זז מעבר לקצה השמאלי של הקלט.

לכן כדי ש- M^T תהיה שקולה ל- M^O יש להוסיף מעברים לפונקציות המעברים של M^T כדי שהראש של M^T לא זז מעבר לקצה השמאלי של הקלט.

הרעיון הוא לסמן את המשבצת שמשמאל לתחילת הקלט עם סימן מיוחד $\$,$ ואז להוסיף מעברים לפונקציות המעברים של M^T שמבטיחים שאם הראש נמצא למשבצת שמסומנת $\$$ אז הוא מיד חוזר ו- M^T חוזרת למצב ההתחתי של המ"ט M^O . זה מתבצע על ידי הוספת השורות האלו למטה לטבלת המעברים של M^T :

| תנאי | תזוזה | כתיבה | מצב חדש | סימון | מצב |
|---------------------|-------|-------------------|---------|----------|---------|
| | L | \hookrightarrow | $q_\$$ | σ | q_0^T |
| | R | $\$$ | q_0^O | \perp | $q_\$$ |
| $\forall q \in Q^O$ | R | $\$$ | q | $\$$ | q |

$$Q^T = Q^O \cup \{q_0^T, q_\$\}, \quad \Sigma^T = \Sigma^O, \quad \Gamma^T = \Gamma^O \cup \{\$\}, \quad \text{acc}^T = \text{acc}^O, \quad \text{rej}^T = \text{rej}^O .$$

כיוון שני

תהי

$$M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T) ,$$

במודל T הדו כיווני. נבנה

$$M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O) ,$$

במודל O החד כיווני.

נתאר סימולציה של הככונה החד-כיוונית במודל הדו-כיוונית.

הרעיון הוא לסמן קו על הסרט במשבצת באמצע הקלט, ואז לקפל את הסרט בקו הזה. באופן הזה נקבל סרט עם קצה שמאלי ואינסופי ימינה. במשבצות של הסרט החדש המקופל יש שני תווים, אחד למעלה (U) ואחד למטה (D), מלבד מנקודת הקיפול שבו יש משבצת אחת שמסומנת $\$$.

באופן הזה אפשר לסמלץ את המכונה M^O במכונה M^T על ידי הוספת המעברים הבאים לטבלת המעברים של M^T . לכל $\tau, \sigma, \pi \in \Gamma^T$:

פתרונות

| תנאי | תזוזה | כתיבה | מצב חדש | סימון | מצב |
|--|-------|----------------------|-----------|--------------------|------------|
| תזוזה שמאלה: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$ | L | π τ | $p.D$ | π σ | $q.D$ |
| | R | τ π | $p.U$ | σ π | $q.U$ |
| תזוזה שמאלה: $(q, \sqcup) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$ | L | \sqcup τ | $p.D$ | \sqcup | $q.D$ |
| | R | τ \sqcup | $p.U$ | \sqcup | $q.U$ |
| תזוזה ימינה: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$ | R | π τ | $p.D$ | π σ | $q.D$ |
| | L | τ π | $p.U$ | σ π | $q.U$ |
| תזוזה ימינה: $(q, \sqcup) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$ | R | \sqcup τ | $p.D$ | \sqcup | $q.D$ |
| | L | τ \sqcup | $p.U$ | \sqcup | $q.U$ |
| | R | \mathcal{Q} | $q.U$ | \$ | $q.D$ |
| | R | \mathcal{Q} | $q.D$ | \$ | $q.U$ |
| אתחול | | | | | |
| $\tau \in \Sigma \cup \{\sqcup\}$ $\sigma \in \Sigma$ | R | \$ | $q.\tau$ | τ | q_0^O |
| | R | \sqcup σ | $q.\tau$ | τ | $q.\sigma$ |
| | L | \sqcup | back | \sqcup | $q.\sqcup$ |
| | L | \mathcal{Q} | back | \sqcup τ | back |
| | R | \mathcal{Q} | $q_0^T.D$ | \$ | back |
| סיום | | | | | |
| | | | acc^O | הכל | $acc^T.D$ |
| | | | acc^O | הכל | $acc^T.U$ |
| | | | rej^O | הכל | $rej^T.D$ |
| | | | rej^O | הכל | $rej^T.U$ |
| כל השאר עוברים ל- rej | | | | | |

עמוד 5 מתוך 10

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

פתרונות

$$\Gamma^O \supseteq (\Gamma^T \times \Gamma^T) \cup \{\$\}.$$

שאלה 3: התזה של צ'רץ'-טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

$$S \rightarrow \$Ca\# \rightarrow \$aaC\# \rightarrow \$aaE \rightarrow \$aEa \rightarrow \$Eaa \rightarrow aa$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \$Ca\# \rightarrow \$aaC\# \rightarrow \$aaD\# \rightarrow \$aDa\# \rightarrow \$Daa\# \rightarrow \$Caa\# \\ &\rightarrow \$aaCa\# \rightarrow \$aaaaC\# \rightarrow \$aaaaE \rightarrow \$aaaEa \rightarrow \$aaEaa \rightarrow \$aEaaa \rightarrow \$Eaaaa \\ &\rightarrow aaaaa \end{aligned}$$

באמצעות אינדוקציה על k ניתן להוכיח כי

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid w = \varepsilon \vee (w = a^{2^n}, n \in \mathbb{N})\}.$$

סעיף ב' (10 נקודות)

$$S \rightarrow aBC \rightarrow abC \rightarrow abc$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSBC \rightarrow aaBCBC \rightarrow aaBHBC \rightarrow aaBBCC \rightarrow aabBCC \rightarrow aabbCC \\ &\rightarrow aabbC \rightarrow aabbcc. \end{aligned}$$

אפשר להוכיח, ע"י אינדוקציה על n , כי

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid w = a^n b^n c^n, n \in \mathbb{N}^+\}.$$

שאלה 4: אי כריעות (20 נקודות)

עמוד 6 מתוך 10

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245,84 | חייג: 08-9888888 | www.sce.ac.il

פתרונות

סעיף א' (10 נקודות)

נבנה מ"ט אי-דטרמיניסטית $M_{L \geq 3}$ המכריעה את $L_{\geq 3}$.

התיאור הבא הוא תיאור של תוכנית אי-דטרמיניסטית של המכונת טיורינג $M_{L \geq 3}$.

$M_{L \geq 3} = \text{על קלט } x$:

1. $M_{L \geq 3}$ בודקת האם הקלט x הוא מכונת טיורינג.

אם לא אז $M_{L \geq 3}$ דוחה.

2. $M_{L \geq 3}$ בוחרת באופן אי-דטרמיניסטי 3 מילים w_1, w_2, w_3 .

• מריצה את M על w_1 .

* אם M דוחה $\Leftarrow M_{L \geq 3}$ דוחה.

• מריצה את M על w_2 .

* אם M דוחה $\Leftarrow M_{L \geq 3}$ דוחה.

• מריצה את M על w_3 ועונה כמוה.

נכונות.

$|L(M)| \geq 3$ - $x = \langle M \rangle \Leftarrow x \in L_{\geq 3}$.

$\Leftarrow \exists$ 3 מילים w_1, w_2, w_3 המתקבלים ב- M .

$\Leftarrow \exists$ ריצה של $M_{L \geq 3}$ בה תבחר את w_1, w_2, w_3 ותריץ עליהם את M ותקבל

$\Leftarrow M_{L \geq 3}$ מקבלת את x .

$x \notin L_{\geq 3} \Leftarrow$ שני מקרים:

מצב 1. $x \neq \langle M \rangle \Leftarrow M_{L \geq 3}$ דוחה את L .

מצב 2. $|L(M)| < 3$ - $x = \langle M \rangle$

\Leftarrow לכל 3 מילים שונות w_1, w_2, w_3 לפחות אחת מהן לא מתקבלת ב- M .

\Leftarrow בכל ריצה של $M_{L \geq 3}$ בה היא תבחר 3 מילים w_1, w_2, w_3 השונות זו מזו, ולפחות אחת הריצות

של M על מילים אלו תדחה או לא תעצור

\Leftarrow בכל ריצה של $M_{L \geq 3}$ על x , $M_{L \geq 3}$ תדחה או לא תעצור

$\Leftarrow M_{L \geq 3}$ לא מקבלת את x .

סעיף ב' (10 נקודות)

נבנה רדוקציה מ- A_{TM} .

הפונקציה הרדוקציה היא:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\emptyset} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

פתרונות

כאשר M_\emptyset היא מ"ט הדוחה כל קלט ו- M' היא מ"ט שעל כל קלט x מריצה את M ועונה כמוה.

אבחנה

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

נכונות הרדוקציה

נניח ש- $x \in A_{TM}$

$$w \in L(M) \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$$

$$f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow$$

$$L(M') = \Sigma^* \Leftarrow$$

$$|L(M')| = \infty \Leftarrow$$

$$f(x) \in L_{\geq 3} \Leftarrow$$

נניח ש- $x \notin A_{TM}$

אז יש שני מקרים:

$$x \neq \langle M, w \rangle \quad \text{מצב 1:}$$

$$|L(M_\emptyset)| = 0 \text{ ו- } f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \Leftarrow$$

$$f(x) \notin L_{\geq 3} \Leftarrow$$

$$w \notin L(M) \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle \quad \text{מצב 2:}$$

$$f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow$$

$$L(M') = \emptyset \Leftarrow$$

$$|L(M')| = 0 \Leftarrow$$

$$f(x) \notin L_{\geq 3} \Leftarrow$$

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

סעיף א' (8 נקודות)

נבנה פונקצית הרדוקציה $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ שמוגדרת

$$f(\langle S, t \rangle) = \langle A \rangle$$

כאשר $\langle S, t \rangle$ קלט של SUBSETSUM ו- $\langle A \rangle$ קלט של PARTITION.

עמוד 8 מתוך 10

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245, 84 | חייג: 08-9377777 | www.sce.ac.il

פתרונות

$$(1) \text{ יהי } \sigma = \sum_{x \in S} x$$

(2) נגדיר את הקבוצה החדשה A על ידי הוספת האיבר $\sigma - 2t$ לקבוצה S :

$$A = S \cup \{\sigma - 2t\}.$$

סעיף ב' (6 נקודות)

⇐ כיוון

נניח ש- $\langle S, t \rangle \in SUBSETSUM$.

$$\Leftarrow \text{קיימת תת-קבוצה } Y \subseteq S \text{ כך ש- } t = \sum_{y \in Y} y$$

$$\Leftarrow \sum_{x \in A} x = \sum_{x \in S} x + \sigma - 2t = 2\sigma - 2t$$

$$\Leftarrow \text{אם נגדיר } A_1 = Y \cup \{\sigma - 2t\} \text{ ו- } A_2 = A \setminus A_1 \text{ אז}$$

$$\sum_{x \in A_1} x = \sum_{x \in Y} x + \sigma - 2t = t + \sigma - 2t = \sigma - t$$

וכן

$$\sum_{x \in A_2} x = \sum_{x \in A \setminus A_1} x = \sum_{x \in A} x - \sum_{x \in A_1} x = 2\sigma - 2t - (\sigma - t) = \sigma - t.$$

$$\sum_{x \in A_1} x = \sum_{x \in A_2} x = \frac{1}{2} \sum_{x \in A} x \Leftarrow$$

$$\text{וגם } A_1 \cap A_2 = A_1 \cap (A \setminus A_1) = \emptyset$$

$$\text{וגם } A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A \setminus A_1) = A$$

$$\Leftarrow \text{קיימת חלוקה של } A \text{ ש- } A_1, A_2 \subset A$$

$$\Leftarrow f(x) = \langle A \rangle \in PARTITION$$

⇒ כיוון

נניח ש- $\langle A \rangle \in PARTITION$.

$$\Leftarrow \text{קיימות תת-קבוצות } A_1, A_2 \subseteq S' \text{ כך ש:}$$

$$\sum_{x \in A_1} x = \sum_{x \in A_2} x = \frac{1}{2} \sum_{x \in A} x$$

$$\text{וגם } A_1 \cap A_2 = A_1 \cap (A \setminus A_1) = \emptyset$$

$$\text{וגם } A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A \setminus A_1) = A$$

עמוד 9 מתוך 10

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245, 84 | חייג: 08-9400777 | www.sce.ac.il

פתרונות

⇐ לפי הבניית הרדוקציה: $A = \{\sigma - 2t\} \cup S$ כאשר $t \leq \sigma$ שלם ו- S קבוצת שלמים ו- $\sigma = \sum_{x \in S} x$.

⇐ קיימת הקבוצה $S = A \setminus \{\sigma - 2t\}$.

⇐ מכיוון ש: $A = \{\sigma - 2t\} \cup S$ ו- A_1, A_2 מהוות חלוקה של A אז $\{\sigma - 2t\}$ שייך ל- A_1 או A_2 .
ללא הגבחת כלליות נניח ש: $\{\sigma - 2t\} \in A_1$

⇐ קיימת הקבוצה $A_1 \setminus \{\sigma - 2t\}$.

⇐ נגדיר הקבוצה:

$$Y = A_1 \setminus \{\sigma - 2t\} \subseteq A \setminus \{\sigma - 2t\} = S.$$

⇐

$$\sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in A_1} y - (\sigma - 2t) = \frac{1}{2} \sum_{y \in A} y - (\sigma - 2t) = \frac{1}{2} (2\sigma - 2t) - (\sigma - 2t) = t.$$

⇐ קיימת תת-קבוצה $Y \subseteq S$ כך ש: $\sum_{y \in Y} y = t$

⇐ $\langle S, t \rangle \in SUBSETSUM$

סעיף ג' (6 נקודות)

הפונקציה הרדוקציה f , על קלט $\langle S, t \rangle$ מחזירה את הפלט $\langle A \rangle$ כאשר $A = S \cup \{\sigma - 2t\}$.

לכן, על קלט $\langle S, t \rangle$ הפונקציה f תבצע לכך:

(שלב 1) מחשבת את הסכום σ של כל האיברים שבקבוצה S

(שלב 2) מחשבת את החיסור $\sigma - 2t$.

(שלב 3) בונה את הקבוצה $S \cup \{\sigma - 2t\}$.

נסמן ב- $n = |\langle S, t \rangle|$ אורך הקלט.

• שלב (1) עולה $O(|S|)$ צעדים.

• שלב (2) עולה $O(|S|)$ צעדים.

• שלב (3) עולה n צעדים לכל היותר.

לכן בסה"כ הסיבוכיות זמן של f היא:

$$O(|S|) + O(|S|) + O(n) = O(n).$$