שעור 4
ערך המקסמין ומשחקים סכום אפס

4.1 ביטחון: מושג המקסמין

אליס (שחקן 1) ובוב (שחקן 2) משחקים את המשחק הבא:

אליס 1 \ בוב 2	L	R
T	$2,1$	$2,-20$
M	$3,0$	$-10,1$
B	$-100,2$	$3,3$

נסמן את כל התשובות הטובות ביותר של השחקנים:

אליס 1 \ בוב 2	L	R
T	$2,\underline{1}$	$2,-20$
M	$\underline{3},0$	$-10,\underline{1}$
B	$-100,2$	$\underline{3},\underline{3}$

מכאן השיווי משקל היחיד במשחק זה הוא $s^*=(B,R)$ עם תשלום. אך בחירות השחקנים של אסטרטגיות אלה מסוכנות!

אליס עשויה להסס מאוד לבחור B, מחשש שמא בוב (שחקן 2) יבחר L (אם משום שאינו רציונלי אם בטעות).
כיוון שהתשלום של (B,L) קטסטרופי בשביל אליס, ייתכן שהיא תשחק אסטרטגיה T המבטיחה לה תשלום 2 ללא סיכון להפסיד 100.

אם כן בוב חושב שיש סיכוי שאליס תבחר T הוא יחשוש מלבחור את אסטרטגיה שיווי המשקל R ולהסתכן בתשלום -20.
לאור זה ייתכן בוב ישחק אסטרטגיה L.

למעשה, אסטרטגיה T של אליס (שחקן 1) מבטיחה התשלום הטובה ביותר שניתן לקבל מבלי "לסמוך" על הרציונליות של שחקן 2, ובהנחות הפסימיות ביותר על ההתנהגותו של בוב (שחקן 2.)

באופן כללי, נתון משחק שני שחקנים. נניח כי שחקן 1 משחק אסטרטגיה $s_1\in S_1$. התשלום הנמוך ביותר שהוא עלול לקבל הוא

$$\min_{t_2\in S_2} u_1\left(s_1,t_2\right) \ .$$

שחקן 1 יכול לבחור באסטרטגיה s_1 הממקסמת ערך זה. כלומר, בלי לסמוך על הרציונליות של שאר השחקנים הוא יכול להבטיח לעצמו

$$\underline{\mathrm{v}}_1=\max_{s_1\in S_1}\min_{t_2\in S_2} u_1(s_1,t_2) \ .$$

הגודל $\underline{\mathrm{v}}_1$ נקרא **ערך המקסמין** של שחקן 1 או **רמת הביטחון** של שחקן 1.
אסטרטגיה s_1 המבטיחה ערך זה נקראת **אסטרטגיה מקסמין**.

דוגמה 4.1 (ערך המקסמין)

מצאו את הערך המקסמין של כל השחקנים במשחק הבא:

1 \ 2	L	R
T	$2,1$	$2,-20$
M	$3,0$	$-10,1$
B	$-100,2$	$3,3$

פתרון:

1 \ 2	L	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$
T	$2,1$	$2,-20$	2
M	$3,0$	$-10,1$	-10
B	$-100,2$	$3,3$	-100

$$\underline{\mathrm{v}}_1 = \max_{s_1\in S_1}\min_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2) = 2\ .$$

1 \ 2	L	R
T	$2,1$	$2,-20$
M	$3,0$	$-10,1$
B	$-100,2$	$3,3$
$\min\limits_{s_1\in S_1} u_2(s_1,s_2)$	0	-20

$$\underline{\mathrm{v}}_2 = \max_{s_2\in S_2}\min_{s_1\in S_1} u_2(s_1,s_2) = 0\ .$$

ערך המקסמין של שחקן-1 הוא 2, ואסטרטגית המקסמין המבטיחה תשלום זה היא T.

ערך המקסמין של שחקן-2 הוא 0, ואסטרטגית המקסמין המבטיחה תשלום זה היא L.

נהוג לרשום את התשלומים המינימלים בטבלה אחת:

1 \ 2	L	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$
T	$2,1$	$2,-20$	2
M	$3,0$	$-10,1$	-10
B	$-100,2$	$3,3$	-100
$\min\limits_{s_1\in S_1} u_2(s_1,s_2)$	0	-20	$\underline{\mathrm{v}}_1 = 2$ \ $\underline{\mathrm{v}}_2 = 0$

בתרשים זה, מימין בכל שורה מופיע התשלום הנמוך ביותר לשחקן 1 אם היא בוחרת באסטרטגיה המתאימה לשורה זה. ומתחת לכל עמודה מופיע התשלום הנמוך ביותר לשחקן 2, אם הוא בוחר באסטרטגיה המתאימה לעמודה זו. בפינה הימינית תחתונה של התרשים, באדום מופיעים המקסמין של השחקנים.

שימו לב: אם שני השחקנים בוחרים באסטרטגיות המקסמין שלהם, אז הווקטור אסטרטגיות של המשחק הוא (T,L) והתשלומים הם $(2,1)$.
שחקן 2 מקבל תשלום 1, אשר גבוהה יותר מהמקסמין שלו ($\underline{\mathrm{v}}_2=1$).

■

דוגמה 4.2 (ערך המקסמין)

נתון משחק עם שני שחקנים בצורה אסטרטגית כמתואר בטבלה.

1 \ 2	L	R
T	$3,1$	$0,4$
B	$2,3$	$1,1$

א) מצאו אסטרטגיה מקסמין של שחקן 1 והרמת הביטחון שלו.

ב) מצאו אסטרטגיה מקסמין של שחקן 2 והרמת הביטחון שלו.

ג) מהם התשלומים לשני השחקנים אם שניהם בוחרים באסטרטגיות המקסמין שלהם.

פתרון:

א)

I \ II	L	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$
T	$3,1$	$0,4$	0
B	$2,3$	$1,1$	1

$$\underline{\mathrm{v}}_1=\max_{s_1\in S_1}\min_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)=1\ .$$

ערך המקסמין של שחקן 1 הוא 1 ואסטרטגית המקסמין שלו היא B.

ב)

1 \ 2	L	R
T	$3,1$	$0,4$
B	$2,3$	$1,1$
$\min\limits_{s_1\in S_1} u_2(s_1,s_2)$	1	1

$$\underline{\mathrm{v}}_2=\max_{s_2\in S_2}\min_{s_1\in S_1} u_1(s_1,s_2)=1\ .$$

ערך המקסמין של שחקן 2 הוא 1. גם L וגם R הן אסטרטגיות מקסמין.

ג)

1 \ 2	L	R	$\min_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$
T	$3,1$	$0,4$	0
B	$2,3$	$1,1$	1
$\min_{s_1\in S_1} u_2(s_1,s_2)$	1	1	$\underline{v}_1=1$ \ $\underline{v}_2=1$

לכן כאשר שחקן 1 בוחר באסטרטגיה המקסמין שלו, B, וכאשר שחקן 2 בוחר באסטרטגיה המסמין שלו (L או R) התשלום עשוי להיות $u(B,L)=(2,3)$ או $u(B,R)=(1,1)$. או $(1,1)$ עבור (B,R), בהתאם לאסטרטגית המקסמין שיבחר שחקן 2.

■

4.2 משפטים: היחס בין שיווי משקל ואסטרטגית מקסמין

משפט 4.1

במשחק n שחקנים, אם אסטרטגיה s_i^* של שחקן i שולטת (לא בהכרח חזק) על כל שאר האסטרטגיות שלו, אז

א) s_i^* היא אסטרטגית מקסמין של שחקן i.

ב) s_i^* היא תשובה טובה ביותר של שחקן i לכל ווקטור אסטרטגיות של שאר השחקנים.

הוכחה:

א) תהי s_i^* אסטרטגיה ששולטת (לא בהכרח חזק) על כל שאר האסטרטגיות של שחקן i.

תהי $s_i\in S_i$ אסטרטגיה של שחקן i ותהי $t_{-i}\in S_{-i}$ אסטרטגיה של $-i$ כך ש-

$$u_i\left(s_i^*,t_{-i}\right)=\min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i\left(s_i^*,s_{-i}\right) \ .$$

אז

$$\min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i\left(s_i^*,s_{-i}\right)=u_i\left(s_i^*,t_{-i}\right)\geq u_i\left(s_i,t_{-i}\right)\geq \min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i\left(s_i,s_{-i}\right) \ .$$

ז"א $\min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i\left(s_i^*,s_{-i}\right)\geq \min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i\left(s_i,s_{-i}\right)$ או במילים שקולות:

$$\min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i\left(s_i^*,s_{-i}\right)=\max_{s_i\in S_i}\min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i\left(s_i,s_{-i}\right)=\underline{v}_i \ .$$

לפיכך s_i^* היא אסטרטגיה מקסמין של שחקן i.

ב) s_i^* שולטת חלש על כל שאר האסטרטגיות, אז לכל $s_{-i}\in S_{-i}$ מתקיים

$$u_i\left(s_i,s_{-i}\right)\leq u_i\left(s_i^*,s_{-i}\right) \ .$$

מכאן s_i^* היא תשובה טובה ביותר של שחקן i לכל ווקטור אסטרטגיות s_{-i} של שאר השחקנים.

■

משפט 4.2

במשחק n שחקנים, אם לכל שחקן i יש אסטרטגיה s_i^* ששולטת (לא בהכרח חזק) על כל שאר האסטרטגיות שלו, אז התנאים הבאים מתקיימים.

א) הווקטור אסטרטגיות $(s_1^*,\cdots,s_n^*)$ הוא שיווי משקל של המשחק.

ב) לכל שחקן i, s_i^* היא אסטרטגית מקסמין של שחקן i.

הוכחה:

א) נניח כי $(s_1^*,\cdots,s_n^*)$ ווקטור אסטרטגיות כך ש- s_i^* שולטת על כל שאר האסטרטגיות של שחקן i.

אז לפי משפט 4.1 (חלק ב') למעלה, s_i^* היא תשובה טובה ביותר של שחקן i לכל ווקטור אסטרטגיות s_{-i} של שאר השחקנים. ז"א

$$u_i(s_i^*,s_{-i}) \geq u_i(s_i,s_{-i})$$

לכל שחקן i. לפיכך הווקטור אסטרטגיות $s^*=(s_1^*,\cdots,s_n^*)$ הוא נקודת שיווי משקל.

ב) לפי משפט 4.1 (חלק א'), s_i^* היא אסטרטגית מקסמין של שחקן i.

לפיכך הווקטור אסטרטגיות $s^*=(s_1^*,\cdots,s_n^*)$ הוא ווקטור אסטרטגיות מקסמין.

■

למה 4.1

במשחק n שחקנים. אם לכל שחקן יש אסטרטגיה s_i^* ששולטת חזק על כל שאר האסטרטגיות שלו, אז התנאים הבאים מתקיימים:

א) הווקטור אסטרטגיות $(s_1^*,\ldots,s_n^*)$ הוא שיווי המשקל היחיד של המשחק.

ב) הווקטור אסטרטגיות $(s_1^*,\ldots,s_n^*)$ הוא הווקטור אסטרטגיות מקסמין היחיד של המשחק.

הוכחה: תרגיל בית. ■

משפט 4.3

אם s^* היא שיווי משקל אז $u_i\left(s^*\right) \geq \underline{\mathrm{v}}_i$ לכל שחקן i.

הוכחה: לכל אסטרטגיה $s_i\in S_i$,

$$u_i\left(s_i,s_{-i}^*\right) \geq \min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i\left(s_i,s_{-i}\right) .$$

לפי ההגדרה של שיווי משקל, $u_i\left(s^*\right)=\max_{s_i\in S_i} u_i\left(s_i,s_{-i}^*\right)$. מכאן

$$u_i\left(s^*\right)=\max_{s_i\in S_i} u_i\left(s_i,s_{-i}^*\right) \geq \max_{s_i\in S_i}\min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i\left(s_i,s_{-i}\right)=\underline{\mathrm{v}}_i .$$

■

4.3 משחקי שני שחקנים סכום אפס

הגדרה 4.1 משחק שני שחקנים סכום אפס

משחק שני משחקים נקרא **משחק סכום אפס** אם לכל זוג אסטרטגיות (s_1, s_2) מתקיים

$$u_1(s_1,s_2)+u_2(s_1,s_2)=0 \ .$$

במילים אחרות, משחק שני שחקנים סכום אפס הוא מערכת סגורה מבחינת התשלומים: כל ששחקן אחד מרוויח השחקן השני מפסיד.
ברור אן כן שבמשחק כזה האינטרטסטים של שני השחקנים מנוגדים לחלוטים.

דוגמה 4.3 (משחק שני שחקנים סכום אפס)

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס הבא.

1 \ 2	L	C	R
T	$3,-3$	$-5,5$	$-2,2$
M	$1,-1$	$4,-4$	$1,-1$
B	$6,-6$	$-3,3$	$-5,5$

מצאו את האסטרטגיה מקסמין של כל שחקן.

פתרון:

1 \ 2	L	C	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u_1(s_1,s_2)$
T	$3,-3$	$-5,5$	$-2,2$	-5
M	$1,-1$	$4,-4$	$1,-1$	1
B	$6,-6$	$-3,3$	$-5,5$	-5
$\min\limits_{s_1\in S_1} u_2(s_1,s_2)$	-6	-4	-1	$\underline{\mathrm{v}}_1=1$ / $\underline{\mathrm{v}}_2=-1$

אסטרטגיות המקסמין: $s^*=(M,R)$.

■

הגדרה 4.2 פונקצית תשלום של משחק שני שחקנים סכום אפס

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס. לכל ווקטור אסטרטגיות (s_1, s_2), פונקצית ההתשלום של המשחק מסומנת $u(s_1, s_2)$ ומוגדרת

$$U(s_1,s_2)=u_1(s_1,s_2)=-u_2(s_1,s_2) \ .$$

דוגמה 4.4 (המשך של דוגמה 4.3)

הטלא למטה מראה את פונקצית התשלום של המשחק סכום אפס בדוגמה הקודמת, לכל ווקטור אסורוגיות של המשחק.

$1 \backslash 2$	L	C	R
T	3	-5	-2
M	1	4	1
B	6	-3	-5

למשל,

$$U(M,L) = 1 \ .$$

הגדרה 4.3 מטריצת המשחק של משחק שני שחקנים סכום אפס

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס ויהי U פונקצית התשלום של המשחק.
תהי S_1 קבוצה סודרת של האסטרטגיות של שחקן 1:

$$S_1 = \left(s_1^1, s_1^2, \ldots, s_1^m\right)$$

ותהי S_2 קבוצה סודרת של האסטרטגיות של שחקן 2:

$$S_2 = \left(s_2^1, s_2^2, \ldots, s_2^n\right)$$

המטריצת המשחק היא מטריצה $m \times n$ אשר האיבר ה- i,j ניתן על ידי

$$A_{ij} = U\left(s_1^i, s_2^j\right) \ .$$

דוגמה 4.5 (המשך של דוגמה 4.3)

מטריצת המשחק של המשחק בדוגמה הקודמת הינה

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & -3 & -5 \end{pmatrix} \ .$$

משפט 4.4 המקסמין והמינמקס של משחק

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס.

ערך המקסמין של שחקן 1 נתון על ידי

$$\underline{\mathrm{v}}_1 = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} U(s_1, s_2) \ .$$

זוהי רמת הביטחון של שחקן 1 במשחק: התשלום שהוא יכול להבטיח לעצמו.

הערך המקסמין של שחקן 2 הוא

$$\underline{\mathrm{v}}_2 = \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2) = \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} \left[-U(s_1, s_2)\right] = \max_{s_2 \in S_2} \left[-\max_{s_1 \in S_1} U(s_1, s_2)\right] = -\min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} U(s_1, s_2)$$

נגדיר הערך המקסמין של המשחק מסומן $\underline{\mathrm{v}}$ ומוגדר

$$\underline{\mathrm{v}} = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} U(s_1, s_2) \ .$$

הערך המינמקס של המשחק מסומן $\bar{\mathrm{v}}$ ומוגדר

$$\bar{\mathrm{v}} = \min_{s_2\in S_2} \max_{s_1\in S_1} U(s_1,s_2)$$

המשמעות:
שחקן 1 יכול להבטיח שיקבל לפחות $\underline{\mathrm{v}}$.
שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר $\bar{\mathrm{v}}$.

אסטרטגיה של שחקן 1 המבטיחה את $\underline{\mathrm{v}}$ נקראת **אסטרטגיה מקסמין**.
אסטרטגיה של שחקן 2 המבטיחה את $\bar{\mathrm{v}}$ נקראת **אסטרטגיה מינמקס**.

דוגמה 4.6 (המקסמין ומינמקס של משששא)

נתון המשחק סכום אפס הבא בצורה אסטרטגית.

1 \ 2	L	R
T	$3,-3$	$-2,2$
B	$-1,1$	$5,-5$

מצאו את המקסמין, המינמקס האסטרטגיה מקסמין והאסטרטגיה מינמקס של המשחק.

פתרון:

הפונקצית התשלום של המשחק היא:

1 \ 2	L	R
T	3	-2
B	-1	5

נחשב את המקסמין והמינמקס על פי הטבלא של הפונקצית תשלום:

1 \ 2	L	R	$\min_{s_2\in S_2} U$
T	3	-2	-2
B	-1	5	-1
$\max_{s_1\in S_1} U$	3	5	$\underline{\mathrm{v}}=-1$ / $\bar{\mathrm{v}}=3$

$$\underline{\mathrm{v}} = \max_{s_1\in S_1} \min_{s_2\in S_2} U = -1 \ ,$$

$$\bar{\mathrm{v}} = \max_{s_2\in S_2} \min_{s_1\in S_1} U = 3 \ .$$

האסטרטגיה המקסמין של שחקן 1 היא B.
האסטרטגיה המינמקס של שחקן 2 היא L.

■

דוגמה 4.7 (המקסמין ומינמקס של משששס"א)

מצאו את ערך המקסמין, ערך המינמקס, אסטרטגיה מקסמין ואסטרטגיה מינמקס של המשחק סכום אפס הבא:

1 \ 2	L	R
T	-2	5
B	3	0

פתרון:

הפונקצית התשלום כבר נתון בשאלה. נחשב את המקסמין והמינמקס על פי הטבלא של הפונקצית תשלום:

1 \ 2	L	R	$\min\limits_{s_2\in S_2} u(s_1,s_2)$
T	-2	5	-2
B	3	0	0
$\max\limits_{s_1\in S_1} u(s_1,s_2)$	3	5	$\underline{\mathrm{v}}=0$ / $\bar{\mathrm{v}}=5$

ערך המקסמין של המשחק הוא . $\underline{\mathrm{v}}=\max\limits_{s_1\in S_1}\min\limits_{s_2\in S_2} u(s_1,s_2)=0$

ערך המינמקס של המשחק הוא . $\bar{\mathrm{v}}=\min\limits_{s_2\in S_2}\max\limits_{s_1\in S_1} u(s_1,s_2)=3$

אסטרטגיה המקסמין היא: B.

אסטרטגיה המינמקס היא: L.

משמעות:

שחקן 1 אינו יכול להבטיח יותר מ- 0 ואסטרטגיה המקסמין היא B.

שחקן 2 אינו יכול להבטיח (שישלם) פחות מ- 3 ואסטרטגיה המינמקס היא L. ■

הגדרה 4.4 ערך המשחק ואסטרטגיות אופטימליות

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס.

אם מתקיים $\underline{\mathrm{v}}=\bar{\mathrm{v}}$ אז אומרים כי הגודל

$$\mathrm{v}=\underline{\mathrm{v}}=\bar{\mathrm{v}}$$

הוא **הערך של המשחק.**

במקרה זה הווקטור אסטרטגיות אשר מבטיח הערך של המשחק נקרא **ווקטור אסטרטגיות אופטימלי.**

דוגמה 4.8 (משחק סכום אפס אשר יש לו ערך)

נתון המשחק שני שחקנים סכום אפס הבא.

$1 \backslash 2$	L	C	R
T	3	-5	-2
M	1	4	1
B	6	-3	-5

נחשב את המקסמין והמינמקס שלו:

$1 \backslash 2$	L	C	R	$\min\limits_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2)$
T	3	-5	-2	-5
M	1	4	1	1
B	6	-3	-5	-5
$\max\limits_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2)$	6	4	1	$\underline{\mathrm{v}} = 1$, $\bar{\mathrm{v}} = 1$

$$\bar{\mathrm{v}} = 1 = \underline{\mathrm{v}}$$

לכן הערך המשחק הוא $\mathrm{v} = 1$.

הוקטור אסטרטגיות האופטימלי הוא : $s^* = (s_1^*, s_2^*) = (M, R)$.

שחקן 1 יכול להבטיח שיקבל לפחות 1 באמצעות האסטרטגיה האופימלית M.

שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר 1 באמצעות האסטרטגיה האופימלית R.

נשים לב $s = (M, R)$ גם שיווי משקל נאש של המשחק.

4.4 משפט המקסמין

משפט 4.5 משפט המקסמין

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס. יהי $\underline{\mathrm{v}}$ הערך המקסמין ו- $\bar{\mathrm{v}}$ הערך המינמקס. אזי

$$\underline{\mathrm{v}} \leq \bar{\mathrm{v}} \ .$$

הוכחה: תהי A המטריצה של המשחק. אז

$$\underline{\mathrm{v}} = \max_i \min_j A_{ij} \ , \qquad \bar{\mathrm{v}} = \min_j \max_i A_{ij} \ .$$

נשים לב כי לכל i, מתקיים $\min\limits_j A_{ij} \leq A_{ij}$,

ולכל j, מתקיים $\max\limits_i A_{ij} \geq A_{ij}$.
מכאן

$$\min_j A_{ij} \leq A_{ij} \leq \max_i A_{ij}$$

ולכן

$$\min_j A_{ij} \le \max_i A_{ij} \tag{*}$$

נשים לב כי הצד ימין לא תלוי על i. ז"א משוואה (*) מתקיימת לכל i. בפרט, ניתן לקחת את ה- i אשר ממקסם את הצד ימין והרי נקבל

$$\max_i \min_j A_{ij} \le \max_i A_{ij} \tag{\#}$$

כעת נשים לב כי הצד שמאל לא תלוי על j. ז"א משוואה (#) מתקיימת לכל j. בפרט, ניתן לקחת את ה- j אשר ממזער את הצד ימין והרי נקבל

$$\max_i \min_j A_{ij} \le \min_j \max_i A_{ij}$$

מש"ל. ■

4.5 משפט השקילות בין שיווי משקל לבין אסטרטגיה אופטימלית

משפט 4.6

אם למשחק שני שחקנים סכום אפס יש ערך v, ואם $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ הן אסטרטגיות אופטימליות לשחקנים, אזי $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ הוא שיווי משקל עם תשלום $u = (\mathrm{v}, -\mathrm{v},)$.

הוכחה: אם נניח ש- s_1^* היא אסטרטגיה אופטימלית לשחקן 1 במשחק שערכו v אז $\min\limits_{s_2 \in S_2} u(s_1^*, s_2) = \mathrm{v}$, ולכן לכל $s_2 \in S_2$ מתקיים

$$u(s_1^*, s_2) \ge \mathrm{v} \ .$$

באותה מידה אם נניח ש- s_2^* היא אסטרטגיה אופטימלית לשחקן 2 במשחק שערכו v אז $\max\limits_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2^*) = \mathrm{v}$, ולכן לכל $s_1 \in S_1$ מתקיים

$$u(s_1, s_2^*) \le \mathrm{v} \ .$$

לסיכום, אם s_1^*, s_2^* אסטרטגיות אופטימליות אז

$$u(s_1^*, s_2) \ge \mathrm{v} \qquad \forall s_2 \in S_2 \ , \tag{*1}$$
$$u(s_1, s_2^*) \le \mathrm{v} \qquad \forall s_1 \in S_1 \ . \tag{*2}$$

על ידי הצבת s_2^* במשוואה (1*), נקבל כי $u(s_1^*, s_2^*) \ge \mathrm{v}$.
על ידי הצבת s_1^* במשוואה (2*), נקבל כי $u(s_1^*, s_2^*) \le \mathrm{v}$.
לכן

$$\mathrm{v} = u(s_1^*, s_2^*) \ .$$

נציב זאת במשוואות (1*) ו- (2*) ונקבל

$$u(s_1^*, s_2) \ge u(s_1^*, s_2^*) \quad \Rightarrow \quad -u_2(s_1^*, s_2) \ge -u_2(s_1^*, s_2^*) \quad \Rightarrow \quad u_2(s_1^*, s_2^*) \ge u_2(s_1^*, s_2) \ .$$

$\forall s_2 \in S_2$ ו-

$$u(s_1, s_2^*) \le u(s_1^*, s_2^*) \quad \Rightarrow \quad u_1(s_1, s_2^*) \le u_1(s_1^*, s_2^*) \quad \Rightarrow \quad u_1(s_1^*, s_2^*) \ge u_1(s_1, s_2^*) \ .$$

$\forall s_1 \in S_1$.
לכן (s_1^*, s_2^*) הוא שיווי משקל עם תשלום $(\mathrm{v}, -\mathrm{v})$. ■

משפט 4.7

במשחק שני שחקנים סכום אפס, אם $s^*=(s_1^*,s_2^*)$ הוא שיווי משקל, אזי יש למשחק ערך $\mathrm{v}=u(s_1^*,s_2^*)$, והאסטרטגיות $s^*=(s_1^*,s_2^*)$ הן אסטרטגיות אופטימליות.

הוכחה: מכיוון ש- (s_1^*,s_2^*) הוא שיווי משקל, שום שחקן אינו יכול להרוויח על ידי סטייה:

$$u_1(s_1,s_2^*)\le u_1(s_1^*,s_2^*) \quad\Rightarrow\quad u(s_1,s_2^*)\le u(s_1^*,s_2^*) \quad \forall s_1\in S_1\ , \qquad (\#1)$$

$$u_2(s_1^*,s_2)\le u_2(s_1^*,s_2^*) \quad\Rightarrow\quad -u_2(s_1^*,s_2)\ge -u_2(s_1^*,s_2^*) \quad\Rightarrow\quad u(s_1^*,s_2)\ge u(s_1^*,s_2^*) \quad \forall s_2\in S_2\ . \qquad (\#2)$$

נסמן $\mathrm{v}=u(s_1^*,s_2^*)$ ונוכיח כי v אמנם ערך המשחק.
ממשוואה (#2) נקבל

$$u(s_1^*,s_2)\ge \mathrm{v}\quad \forall s_2\in S_2 \quad\Rightarrow\quad \min_{s_2\in S_2} u(s_1^*,s_2)\ge \mathrm{v} \quad\Rightarrow\quad \max_{s_1\in S_1}\min_{s_2\in S_2} u(s_1^*,s_2)\ge \mathrm{v} \quad\Rightarrow\quad \underline{\mathrm{v}}\ge \mathrm{v}\ .$$

ממשוואה (#1) נקבל

$$u(s_1,s_2^*)\le \mathrm{v}\quad \forall s_1\in S_1 \quad\Rightarrow\quad \max_{s_1\in S_1} u(s_1,s_2^*)\le \mathrm{v} \quad\Rightarrow\quad \min_{s_2\in S_2}\max_{s_1\in S_1} u(s_1,s_2)\le \mathrm{v} \quad\Rightarrow\quad \bar{\mathrm{v}}\le \mathrm{v}\ .$$

מכיוון ש- $\underline{\mathrm{v}}\le\bar{\mathrm{v}}$ מתקיים תמיד אזי

$$\mathrm{v}\le\underline{\mathrm{v}}\le\bar{\mathrm{v}}\le\mathrm{v}\ .$$

ולפיכך בהכרח

$$\underline{\mathrm{v}}=\mathrm{v}=\bar{\mathrm{v}}\ .$$

■

הגדרה 4.5 נקודת אוכף

במשחק שני שחקנים סכום אפס, זוג אסטרטגיות (s_1^*,s_2^*) נקרא **נקודת אוכף** של הפונקציה $u:S_1\times S_2\to\mathbb{R}$ אם

$$u(s_1^*,s_2^*)\ge u(s_1,s_2^*) \qquad \forall s_1\in S_1\ ,$$
$$u(s_1^*,s_2^*)\le u(s_1^*,s_2) \qquad \forall s_2\in S_2\ .$$

במילים אחרות, $u(s_1^*,s_2^*)$ הוא המספר הגדול ביותר בעמודה s_2^* והקטן ביותר בשורה s_1^*.

אם אנחנו רושמים את $u(s_1,s_2)$ בהצגת מטריצה:

$$A_{ij}=u(s_{1,i},s_{2,j})$$

אז הזוג אסטרטגיות (s_{i^*},s_{j^*}) הוא נקודת אוכף אם

$$A_{i^*j^*}\ge A_{ij^*}\quad \forall i\ ,$$
$$A_{i^*j^*}\le A_{i^*j}\quad \forall j\ .$$

משפט 4.8 יחס בין נקודת אכף ווקטור אסטרטגיות

במשחק שני שחקנים סכום אפס. $u(s_1^*,s_2^*)$ היא נקודת אוכף אם ורק אם

- s_1^* היא אסטרטגיה אופטימלית לשחקן 1,
- s_2^* היא אסטרטגיה אופטימלית לשחקן 2.

במקרה זה $u\left(s_1^*,s_2^*\right)$ הוא ערך המשחק.

ניסוח חלופי של המשפט:

$$\left.\begin{array}{ll} A_{i^*j^*}\geq A_{ij^*} & \forall i \\ A_{i^*j^*}\leq A_{i^*j} & \forall j \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \max_i\min_j A_{ij}=\min_j\max_i A_{ij}=\text{v}$$

הוכחה: יהי G משחק שני שחקנים סכום אפס. נניח כי $\left(s_1^*,s_2^*\right)$ נקודת אוכף:

$$u\left(s_1^*,s_2^*\right)\geq u\left(s_1,s_2^*\right)\qquad \forall s_1\in S_1\ , \tag{1*}$$

$$u\left(s_1^*,s_2^*\right)\leq u\left(s_1^*,s_2\right)\qquad \forall s_2\in S_2\ . \tag{2*}$$

(1*) מתקיים אם ורק אם

$$u\left(s_1^*,s_2^*\right)\geq \max_{s_1\in S_1} u\left(s_1,s_2^*\right)\geq \min_{s_2\in S_2}\ \max_{s_1\in S_1} u\left(s_1,s_2\right)=\bar{\text{v}}\ .$$

(2*) מתקיים אם ורק אם

$$u\left(s_1^*,s_2^*\right)\leq \min_{s_2\in S_2} u\left(s_1^*,s_2\right)\leq \max_{s_1\in S_1}\ \min_{s_2\in S_2} u\left(s_1,s_2\right)=\underline{\text{v}}\ .$$

לפי משפט המקסמין 4.5: $\underline{\text{v}}\leq\bar{\text{v}}$. לכן

$$u\left(s_1^*,s_2^*\right)\leq\underline{\text{v}}\leq\bar{\text{v}}=u\left(s_1^*,s_2^*\right)\quad\Rightarrow\quad \underline{\text{v}}=\bar{\text{v}}=\text{v}\ .$$

■