כאשר

- $M_\varnothing$ היא מ"ט שדוחה כל קלט.
- M' היא מ"ט שעל קלט y מתעלמת מ- y ומריצה M על w ועונה כמוה.

<u>אבחנה:</u>

$$L\left(M'\right)=\begin{cases}\Sigma^* & w\in L(M)\\ \varnothing & w\notin L(M)\end{cases}\ .$$

<u>נכונות הרדוקציה:</u>

ראשית, f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x=\langle M,w\rangle$. אם לא, תחזיר קידוד קבוע $\langle M_\varnothing, M_\varnothing\rangle$ ואם כן, תחזיר קידוד $\langle M^*, M'\rangle$, כאשר $M_\varnothing$ היא קידוד קבוע ו- M' נוצר ע"י הוספת קוד ל- $\langle M\rangle$ המוחק את הקלט y ורושם w במקומו.

נוכיח כי

$$x\in L_{\text{acc}}\quad\Leftrightarrow\quad f(x)\in L_{M_1\subset M_2}\ .$$

אם $x\in L_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ $x=\langle M,w\rangle$ ו- $w\in L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x)=\langle M_\varnothing, M'\rangle$ ולפי האבחנה $L\left(M'\right)=\Sigma^*$ $\Leftarrow$ $L\left(M_\varnothing\right)\subset L\left(M'\right)$ $\Leftarrow$ $f(x)\in L_{M_1\subset M_2}$.

$x\notin L_{\text{acc}}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

<u>מקרה 1</u>: $x\neq\langle M,w\rangle$ $\Leftarrow$ $f(x)=\langle M_\varnothing, M_\varnothing\rangle$ ו- $L\left(M_\varnothing\right)=L\left(M_\varnothing\right)$ $\Leftarrow$ $f(x)\in \bar{L}_{M_1\subset M_2}$.

<u>מקרה 2</u>: $x=\langle M,w\rangle$ ו- $w\notin L(M)$ $\Leftarrow$ $f(x)=\langle M_\varnothing, M'\rangle$ ולפי האבחנה $L\left(M'\right)=\varnothing$ $\Leftarrow$ $L\left(M'\right)=L\left(M_\varnothing\right)$ $f(x)\notin L_{M_1\subset M_2}$.

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $L_{\text{acc}}\leqslant L_{M_1\subset M_2}$, ומכיוון ש- $L_{\text{acc}}\notin R$ ממשפט הרדוקציה מתקיים $L_{M_1\subset M_2}\notin R$.

שיעור 8
מבוא לסיבוכיות

8.1 הגדרה של סיבוכיות

הערה 8.1

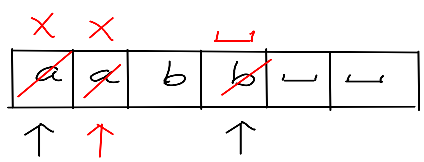
זמן ריצה של מ"ט M על קלט w, נמדד ביחס לגודל הקלט w, כלומר $f(|w|)$.

הגדרה 8.1

נאמר כי ניתן להכריע שפה L בזמן $f(n)$, אם קיימת מ"ט M המכריעה את L ולכן קלט $w \in \Sigma^*$, זמן הריצה של M על w חסום ע"י $f(|w|)$.

דוגמה 8.1

נבנה מ"ט M המכריעה השפה $L = \{a^n b^n \mid n \geqslant 0\}$.



<u>התאור של M:</u>

על קלט w:

(1) אם התו שמתחת לראש הוא $\sqcup$ $\Leftarrow$ מקבלת.

(2) אם התו שמתחת לראש הוא b $\Leftarrow$ דוחה.

(3) מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י X.

(4) מזיזה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאל ל- $\sqcup$.

- אם התו הוא a או X $\Leftarrow$ דוחה.
- מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י $\sqcup$, מזיזה את הראש שמאלה עד התו הראשון מימין ל- X וחוזרת ל- (1).

<u>זמן הריצה</u>

- $\frac{|w|}{2}$ איטרציות.
- בכל איטרציה מבצעים $O(|w|)$ צעדים.

$$\frac{|w|}{2} \cdot O(|w|) = O\left(|w|^2\right) .$$

הגדרה 8.2 זמן הריצה

זמן הריצה של מ"ט M על קלט w היא פונקציה $f\left(|w|\right)$ השווה למספר הצעדים הנדרש בחישוב של M על w.

הערה 8.2

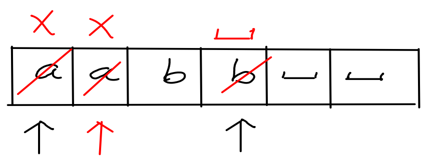
זמן הריצה של מ"ט נמדד ביחס לגודל הקלט $|w|$.

הגדרה 8.3

אומרים כי ניתן להכריע שפה L בזמן $f(n)$ אם קיימת מ"ט M המכריעה את L כך שלכל $w \in \Sigma^*$, זמן הריצה של M על w חסום ע"י $f\left(|w|\right)$.

דוגמה 8.2

נבנה מ"ט M עם סרט יחיד שמכריעה את השפה $L = \left\{a^n b^n \;\middle|\; n \geqslant 0\right\}$.



<u>התאור של M:</u>

על קלט w:

(1) אם התו שמתחת לראש הוא $\sqcup$ $\Leftarrow$ מקבלת.

(2) אם התו שמתחת לראש הוא b $\Leftarrow$ דוחה.

(3) מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י X.

(4) מזיזה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאל ל- $\sqcup$.

- אם התו הוא a או X $\Leftarrow$ דוחה.
- מוחקת את התו שמתחת לראש ע"י $\sqcup$, מזיזה את הראש שמאלה עד התו הראשון מימין ל- X וחוזרת ל- (1).

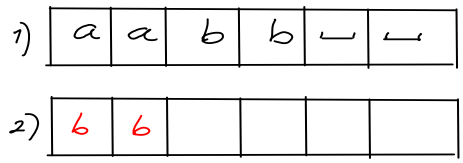
<u>זמן הריצה</u>

- M מבצעת $\frac{|w|}{2}$ איטרציות.
- בכל איטרציה M סורקת את הסרט פעמיים וזה עולה $O\left(|w|\right)$.
- לכן סה"כ זמן הריצה של M חסום ע"י

$$\frac{|w|}{2} \cdot O\left(|w|\right) = O\left(|w|^2\right) \ .$$

דוגמה 8.3

נבנה מ"ט מרובת סרטים M' שמכריעה את השפה $L = \{a^n b^n \mid n \geqslant 0\}$.



<u>התאור של M':</u>

על קלט w:

(1) מעתיקה את ה- b -ים לסרט 2 (ותוך כדי בודקת האם w מהצורה a^*b^*). $O(|w|)$.

(2) מזיזה את הראשים לתחילת הסרטים. $O(|w|)$.

(3) אם שני הראשען מצביעים על ⊔ $\Leftarrow$ מקבלת.

(4) אם אחד הראשים מצביע על ⊔ והשני לא $\Leftarrow$ לא.

(5) מזיזה את שהע הראשים ימינה וחוזרת לשלב (3). שלבים (3-5): $O(|w|)$.

<u>זמן הריצה</u>

זמן הריצה של M' הוא $O(|w|)$.

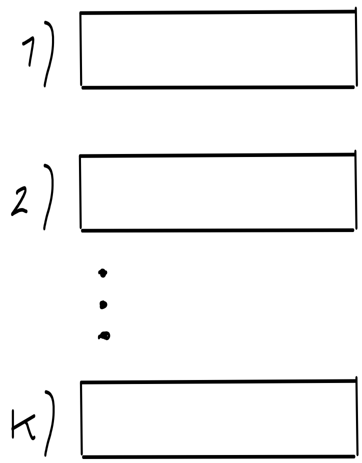
8.2 היחס בין המודלים השונים

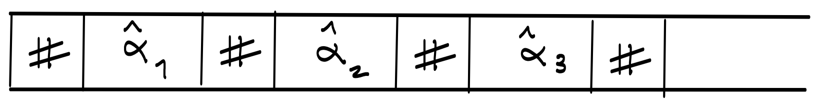
משפט 8.1

לכל מ"ט מרובת סרטים M הרצה בזמן $f(n)$ קיימת מ"ט סרט יחיד M' השקולה ל- M ורצה בזמן $O(f^2(n))$.

הוכחה:
בהינתן מ"ט מרובת סרטים M, הרצה בזמן $f(n)$, נבנה מ"ט עם סרט יחיד M' באותו אופן כמו בהוכחת השקילות במשפט 3.1.

כלומר, M' שומרת את התוכן של k סרטים של M על הסרט היחיד שלה (עם הפרדה ע"י #), ובכל צעד חישוב, M' סורקת את הסרט שלה כדי לזהות שת האותיות שמתחת לראשים (שמסומנות ב- $\hat{\alpha}$) ואחרי זה, משתמשת בפונקצית המעברים של M, וסורקת את הסרט פעם נוספת כדי לעדכן את התוכן בכל אחד מהסרטים ואת מיקום הראש בכל אחד מהסרטים.





כמה לוקח ל- M' לסרוק את הסרט שלה? מכיוון שהסרט של M' מכיל את התוכן של k הסרטים של M, והגודל של כל אחד מהסרטים של M חסום ע"י $f(n)$, גודל הסרט של M' חסום ע"י

$$k \cdot f(n) = O\left(f(n)\right) \ .$$

העלות של הסריקה של M' לסרט שלה היא $O\left(f(n)\right)$ וזה עלות של צעד חישוב בריצה של M' על הקלט.

מכיוון ש- M רצה בזמן $f(n)$, זמן היצרה של M' חסום ע"י

$$f(n) \cdot O\left(f(n)\right) = O\left(f^2(n)\right) \ .$$

■

הגדרה 8.4

בהינתן מ"ט א"ד M, זמן הריצה של M על קלט w, היא פונקציה $f\left(|w|\right)$ השווה למספר הצעדים בחישוב המקסימלי של M על w.

משפט 8.2

לכל מ"ט א"ד N הרצה בזמן $f(n)$, קיימת מ"ט דטרמיניסטית D השקולה ל- N ורצה בזמן $2^{)(f(n))}$.

הוכחה:

בהינתן מ"ט א"ד N הרצה בזמן $f(n)$ מ"ט דטרמיניסטית D באותו אופן כמו בהוכחת השקילות במשפט 4.1.

כלומר, בהינתן קלט w, D תסרו' את עץ החישוב של N ו- w לרוחב ותקבל כל אחד החישובים של N המסתיים ב- q_{acc}.