המחלקה למדעי המחשב

06/07/2025
09 : 00 − 12 : 00

חדו"א 2 למדמ"ח

מועד א'

ד"ר מרינה ברשדסקי   ד"ר ירמיהו מילר   ד"ר זהבה צבי

תשפ"ה סמסטר ב'

בהצלחה!

השאלון מכיל 6 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

סדר התשובות הינו חשוב. הסבירו היטב את מהלך הפתרון.

תשובה ללא הסבר (גם נכונה) לא תתקבל.

<u>חומר עזר:</u>

- מחשבון (ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן).
- דפי הנוסחאות המצורפים לשאלון המבחן.

<u>הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה</u>

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.

<u>יש לענות על השאלות באופן הבא:</u>

- שאלות 1,2,3 - יש לענות על כל השאלות.
- שאלות 4,5,6 - יש לענות שתי שאלות בלבד מתוך שלוש.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה אחת בלבד מתוך שתיים.

שאלות $1-3$ חובה

שאלה 1 (24 נקודות) נתונה הפונקציה $z(x,y)=xye^{-(x+y)}$.

א) (12 נק') מצאו אקסטרמומים לוקליים של פונקציה זו ובררו את סוגן.

ב) (12 נק') בתחום החסום ע"י משולש עם קודקודים $C(0,0)$, $B(1,0)$, $A(1,-1)$ מצאו את הערך הגודל ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה הנתונה.

שאלה 2 (18 נקודות)

א) (9 נק') שרטטו את תחום האינטגרציה, שנו את סדר האינטגרציה באינטגרל $\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} dy\ e^{(x^2+y^2)}$.

ב) (9 נק') חשבו בעזרת אינטגרל כפול את נפח הגוף החסום ע"י המשטחים: חשבו את הנפח הגוף המוגבל על ידי המשטחים הנתונים וציירו את הגוף במערכת שיעורים מרחבית xyz וצייר בנפרד גם את היטלו של הגוף על המישור xy.

$$z=0,\ \ x^2+y^2=1,\ \ z-x=0\ .$$

שאלה 3 (18 נקודות) הראו שסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול סופי ומצא את הגבול

$$a_1=5,\ \ a_{n+1}=\frac{a_n}{\ln\ a_n},\ \ n\geq 1\ .$$

רמז: ראשית בדקו תחומי עליה וירידה, ונקודות קיצון לפונקציה תואמת $y=\frac{x}{\ln x}$.

תענו על 2 מתוך 3 השאלות $4-6$

שאלה 4 (12 נקודות)

א) (6 נק') מצאו את המרחק בין הישרים:

$$l_1:\ \begin{cases} 2x-y+z &=1\\ x+y-z &=2\end{cases} \qquad\qquad l_2:\ \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{2}\ .$$

האם הישרים האלה הם נחתכים, מצטלבים, מקבילים או מתלכדים?

ב) (6 נק') הוכיחו או הפריכו שסדרה $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, אם $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות.

שאלה 5 **(12 נקודות)** תהיינה $f(x,y,z) = xz - \frac{y}{z} - z + 2$ ו- $P(1,0,-1)$.

א) **(6 נק')** רשמו את משוואת המישור המשיק למשטח הרמה של הפונקציה $f(x,y,z)$ אשר עובר דרך הנקודה P.

ב) **(6 נק')** תנו דוגמה של וקטור $\vec{a}$ כך שיתקיים:

$$\frac{df(P)}{d\vec{a}} = 0 \ .$$

נמקו את התשובה.

שאלה 6 **(12 נקודות)**

א) **(6 נק')** חשבו את הגבול

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{xy + (x+y)^2}$$

או הוכיחו שהוא אינו קיים.

ב) **(6 נק')** הוכיחו שטור הפונקציות

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sin x}\right)^n$$

מתבדר לכל x ממשי.

שאלה 7 **(16 נקודות)** יהי

$$M(t) = A + t\vec{a}$$

ישר במרחב x,y,z כאשר A נקודה על הישר ו- $\vec{a}$ הווקטור הכיוון של הישר. תהי $B(x_0,y_0,z_0)$ נקודה כלשהי שלא נמצאת על הישר. הוכיחו כי המרחק של הנקודה מהישר $M(t)$ נתון על ידי הנוסחה

$$d = \frac{\left|\vec{AB} \times \vec{a}\right|}{|\vec{a}|}$$

שאלה 8 **(16 נקודות)** הוכח ש-

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

פתרונות

שאלה 1

א) (12 נק')
לפי התנאי הכרחי לנקודות קיצון

$$\begin{cases} f_x = ye^{-(x+y)} - xye^{-(x+y)} = 0, \ \rightarrow \ y(1-x)=0 \\ f_y = xe^{-(x+y)} - xye^{-(x+y)} = 0, \ \rightarrow \ x(1-y)=0 \end{cases}$$

נקבל את נקודות קריטיות $(1,1)$,$(0,0)$. נחשב את הנגזרות מסדר השני :

$$f''_{xx} = (xy-2y)e^{-(x+y)}$$

$$f''_{yy} = (xy-2x)e^{-(x+y)}$$

$$f''_{xy} = (xy-x-y+1)e^{-(x+y)}$$

עבור הנקודת קריטית $P_1(0,0)$:

$$f''_{xx}(0,0)=0 \ , \qquad f''_{yy}(0,0)=0 \ , \qquad f''_{xy}(0,0)=1, \qquad \Delta(0,0)=-1<0 \ .$$

לכן הנקודה $P_1(0,0)$ היא נקודת אוכף.
עבור הנקודת קריטית $P_2(1,1)$:

$$f_{xx}(1,1)=-1<0, \qquad \Delta(1,1)=1-0=1>0 \ .$$

לכן הנקודה $P_2(1,1)$ היא נקודת מקסימום. $\max f = f(1,1) = e^{-2}$.

ב) (12 נק')
ראשית נבנה את המשוואות הישרים העוברים דרך כל זוג של נקודות A,B,C.

AB	$x=1$
AC	$y=-x$
BC	$y=0$

נציב כל אחד מהם לפונקציה נתונה: $z(x,y)=xye^{-(x+y)}$.

<u>על השפה AB</u>

$$z(1,y) = ye^{-(1+y)}$$

$$z'_y(1,y) = e^{-(1+y)} - ye^{-(1+y)} = e^{-(1+y)}(1-y) = 0, \ \rightarrow \ y=0, \ x=1$$

לכן קיבלנו את הנקודה $(1,0)$, אשר היא הנקודה B.

על השפה AC

$$z(x,-x) = -x^2 e^{-(x-x)} = -x^2$$
$$z'_x(x,-x) = -2x = 0, \;\to\; x = 0, \; y = -x = 0$$

לכן קיבלנו את הנקודה $(0,0)$, אשר היא הנקודה C.

על השפה BC

$$z(x,0) = -x \cdot 0 \cdot e^{-(x+0)} = 0$$

זוהי פונקציה קבועה עבורה קיימת נקודת קיצון.

ערך של הפונקציה	נקודה
0	$P_1(0,0)$
$\frac{1}{e^2}$	$P_2(1,1)$
-1	$A(1,-1)$
0	$B(1,0)$
0	$C(0,0)$

מכאן:

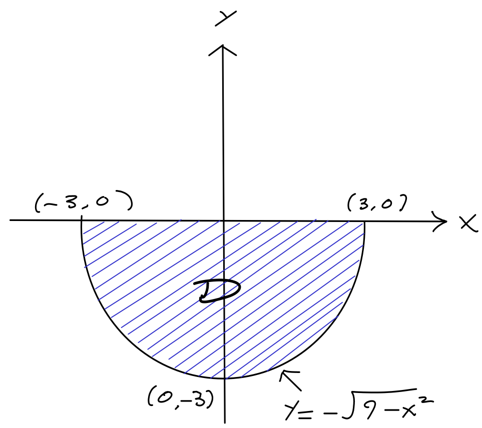
$$\max_D z(x,y) = \frac{1}{e^2} \;, \qquad \operatorname*{argmax}_D z(x,y) = P_2(1,1) \;.$$

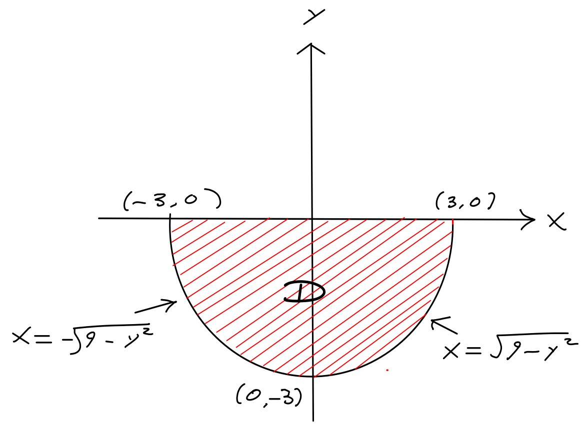
$$\min_D z(x,y) = -1 \;, \qquad \operatorname*{argmax}_D z(x,y) = A(1,-1) \;.$$

שאלה 2 (18 נקודות)

א) (9 נק')

שרטוט של התחום





התחום של האינטגרל הנתון הוא

$$D = \{(x,y) \;\big|\; -\sqrt{9-x^2} \le y \le 0 \;,\; -3 \le x \le 3\} \;.$$

אם נהפוך את הסדר של האינטגרלים (כלומר האינטגרל של מעל x ראשון והאינטגרל מעל y שני) נצטרך לרשום את התחום בצורה הבאה:

$$D = \{(x,y) \;\big|\; -\sqrt{9-y^2} \le x \le \sqrt{9-y^2} \;,\; -3 \le y \le 0\} \;.$$

<u>שינוי סדר של האינטגרל:</u>

$$\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} dy \; e^{(x^2+y^2)} = \int\limits_{-3}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} dx \; e^{(x^2+y^2)}$$

<u>חישוב של האינטגרל:</u>

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} dy \; e^{(x^2+y^2)} &= \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_0^3 e^{r^2}\, r\, dr \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{r=3} e^t \frac{t'}{2}\, dr \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_{t=0}^{t=9} e^t\, dt \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \left[e^t\right]_0^9 \\
&= \pi\left(e^9 - 1\right) \;.
\end{aligned}$$

ב) (9 נק')

$$V = \iint_D x\,dx\,dy$$

במונחי משתנים (r,θ) התחום D הוא (r,θ):

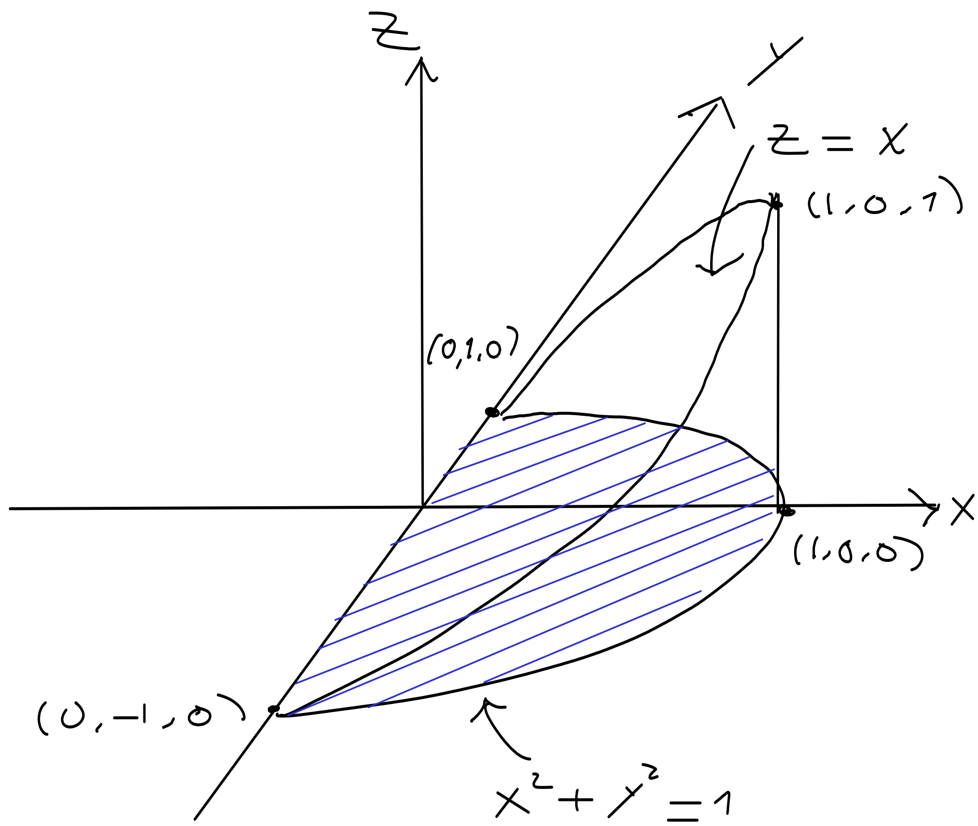
$$D = \left\{-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\ ,\ 0 \le r \le 1\right\}$$

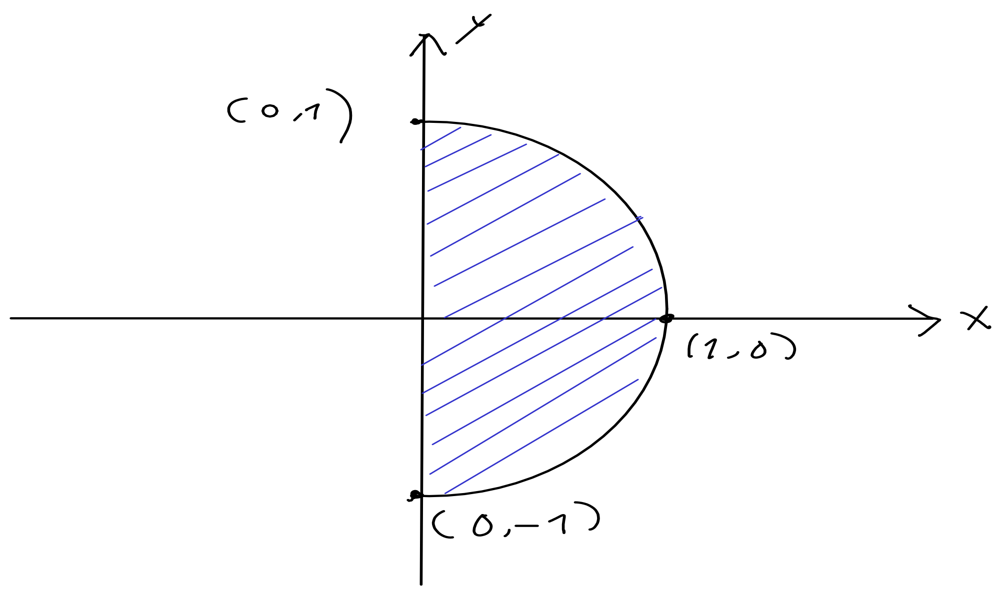
במונחי משתנים (r,θ) האינטגרל הכפול הוא

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 dr\, r \cdot r\cos\theta &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\ \cos\theta \int_0^1 dr\, r^2 \\ &= [\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}\ .\end{aligned}$$

לכן $V = \frac{2}{3}$.

השרטוטים של הגוף במרחב xyz וההיטלו במישור xy נמצאים בדף הבא.





שאלה 3 **(18 נקודות)** ראשית נשים לב שהסדרה מוגדרת רק אם $a_n > 0$ ו- $\ln a_n \neq 0 \Leftarrow a_n \neq 1$.

מונוטוניות

נסתכל על שלוש מקרים: $a_n > e$, $a_n = e$ ו- $a_n < e$.

- לכל $a_n > e$ מתקיים $\ln a_n > 1$ ז"א $\frac{1}{\ln a_n} < 1$ ולכן

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\ln a_n} < a_n \ .$$

מכאן לכל $a_n > e$ הסדרה יורדת מונוטונית.

- אם $a_n = e$ אזי $a_{n+1} = \frac{e}{\ln e} = 1$. לכן e הוא נקודת שבת של הסדרה.
- אם $0 < a_n < e$ מתקיים $0 < \ln a_n < 1$ אז $0 < \frac{1}{\ln a_n} < 1$ ולכןs

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\ln a_n} < a_n \ .$$

מכאן לכל $a_n < e$ הסדרה עולה מונוטונית.

חסימות

- הוכחנו למעלה כי $a_n \geq e$ לכל n.
- בנוסף האיבר ההתחלתי הוא $a_1 = 5$ והסדרה יורדת לכן בהכרח $a_n \leq 5$ לכל $n \geq 1$. ז"א לכל $n \geq 1$ מתקיים:

$$e \leq a_n \leq 5$$

ולכן הסדרה חסומה.

הגבול

הסדרה מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת. נסמן:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n \ , \qquad L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \ .$$

ואז נקח את הגבול של הסדרה $a_{n+1} = \frac{a_n}{\ln a_n}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\ln a_n} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{L}{\ln L} \quad \Rightarrow \quad L(\ln L - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad L = e \ .$$

הערה: אי אפשר להסיק כי $L = 0$ כי הערך הזה לא בתחום ההגדרה של $\ln(L)$.

שאלה 4 (12 נקודות)

א) (6 נק') הווקטור הכיוון של הישר l_1 הוא

$$\vec{a} = (2,-1,1)\times(1,1,-1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k} = (0,3,3) = 3(0,1,1)$$

הוקטור הכיוון של הישר l_2 הוא

$$\vec{b} = (1,2,2)\ .$$

נמצא נקודה על הישר l_1 על ידי להציב $z=0$ ולפתור את המערכת:

$$\left.\begin{aligned} 2x-y &= 1 \\ x+y &= 2 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad 2x-(2-x)=1 \quad\Rightarrow\quad 3x=3 \quad\Rightarrow\quad x=1 \quad\Rightarrow\quad y=1\ .$$

לכן נקודה על הישר l_1 היא $M(1,1,0)$.

נקודה על הישר l_2 יהא $N(1,-1,-2)$.

כעת נציב את $\vec{a}$, $\vec{b}$, M ו- N בהנוסחה למרחק בין שני ישרים: $d = \dfrac{\vec{MN}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$ ראשית נחשב את $\vec{a}\times\vec{b}$:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} = (0,1,-1)\ .$$

הוקטור $\vec{MN}$ הוא $\vec{MN} = (0,-2,-2)$. לכן

$$d = \frac{(0,-2,-2)\cdot(0,1,-1)}{|(0,1,-1)|} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0\ .$$

ז"א הישרים נחתכים.

ב) (6 נק') הטענה לא נכונה.

שאלה 5 (12 נקודות)

א) (6 נק') נתון משטח רמה $f(x,y,z)=C$ משוואת המישור המשיק למשטח בנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ נתונה על ידי הנוסחה

$$f'_x(P)(x-x_0) + f'_y(P)(y-y_0) + f'_z(P)(z-z_0)\ .$$

הרי

$$\begin{aligned} f'_x &= z && \Rightarrow \quad f'_x(P) = -1\ , \\ f'_y &= \frac{-1}{z} && \Rightarrow \quad f'_y(P) = 1\ , \\ f'_z &= x + \frac{y}{z^2} - 1 && \Rightarrow \quad f'_z(P) = 0\ . \end{aligned}$$

מכאן המשוואת המישור המשיק למשטח בנקודה P היא

$$-(x-1) + y = 0 \quad \Rightarrow \quad -x + y + 1 = 0\ .$$

ב) (6 נק') הגראדיאנט הוא $\nabla f(P) = \big(f'_x(P), f'_y(P), f'_z(P)\big) = (-1,1,0)$. מכאן:

$$\frac{df(P)}{d\vec{a}} = \frac{\nabla f(P)\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(-1,1,0)\cdot(a_x,a_y,a_z)}{|\vec{a}|} = \frac{-a_x + a_y}{|\vec{a}|}$$

לכן כל וקטור מהצורה $\vec{a} = (a_x, a_x, a_z)$ כך ש- $|\vec{a}| \neq 0$ מקיים את התנאי $\frac{df(P)}{d\vec{a}} = 0$. לדוגמה: $\vec{a} = (1,1,2)$.

שאלה 6 **(12 נקודות)**

א) (6 נק') אם הערך של הגבול תלוי על הכיוון שעליו אנחנו מחשבים את הגבול אז הגבול לא קיים. אנחנו נחשב את הגבול על הישר $y = 2x$ ואחר כך על הישר $y = 3x$ ואז נשווה בין התשובות.

ראשית נחשב את הגבול על הישר $y = 2x$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{xy + (x+y)^2} \overset{y=2x}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-3x^2}{2x^2 + (3x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x^2}{11x^2} = \frac{-3}{11}\ .$$

כעת נחשב את הגבול על הישר $y = 3x$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{xy + (x+y)^2} \overset{y=3x}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-8x^2}{3x^2 + (4x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-8x^2}{19x^2} = \frac{-8}{19}\ .$$

ז"א עבור שני כיוונים שונים קיבלנו שתי תשובות שונות לאותו גבול ולכן הגבול לא קיים.

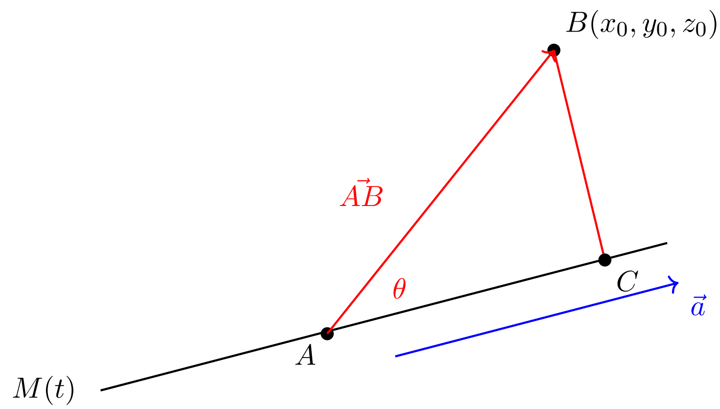
ב) (6 נק') ניתן לרשום את הטור בשאלה $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sin x}\right)^n$ בצורת טור הנדסי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ כאשר לכל x ממשי, האיבר ההתחלתי הוא $a = \frac{1}{\sin x}$ והמנת הטור הוא $q = \frac{1}{\sin x}$. טור הנדסי מתכנס אם $|q| < 1$ ומתבדר אם $|q| \geq 1$. בדוגמה זו: $|q| = \frac{1}{|\sin x|}$. הפונקציה $\sin x$ היא פונקציה חסומה בין -1 ו- 1. כלומר:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq |\sin x| \leq 1\ .$$

מכאן
$$\frac{1}{|\sin x|} \ge 1 \ .$$
לכן לכל x ממשי, המנת הטור $|q| \ge 1$ ולכן לא קיים x ממשי עבורו הטור מתכנס, ולפיכך הטור מתבדר לכל x ממשי.

שאלה 7 (16 נקודות)

נסמן את הישר העובר דרך הנקודה A ומקביל לווקטור $\vec{a}$ ב- $M(t)$. תהי C נקודה על הישר כך שהישר BC הוא מאונך לישר $M(t)$ כמתואר בתרשים למטה. אזי הנקודה C היא הנקודה על הישר $M(t)$ הקרובה ביותר לנקודה B. המרחק של B מהישר $M(t)$ מוגדר להיות המרחק מהנקודה B לנקודה על הישר $M(t)$ הקרובה ביותר לנקודה B, דהיינו הנקודה C. ז"א המרחק הוא המרחק BC.



מכיוון שהשלוש נקודות ABC יוצרות משולש זווית ישירה, אז מתקיים:
$$\frac{|BC|}{|AB|} = \sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad |BC| = |AB|\sin\theta \ . \tag{*}$$
אם $\vec{a}$ הוא הווקטור הכיוון של הישר $M(t)$ אז מתקיים:
$$\vec{AB} \times \vec{a} = |AB||a|\sin\theta \tag{\#}$$
אם אנחנו נציב $|AB|\sin\theta = |BC|$ ממשוואה (*) הרי נקבל
$$\vec{AB} \times \vec{a} = |BC||a|$$
ולכן
$$|BC| = \frac{\vec{AB} \times \vec{a}}{|a|} \ .$$
לכן המרחק, $|BC|$ של הנקודה B מהישר הוא
$$d = \frac{\vec{AB} \times \vec{a}}{|a|} \ .$$

שאלה 8 **(16 נקודות)**

נוכיח את הטענה עבור שלוש מקרים: $0<a<1$, $a=1$ ו- $a>1$.

- מקרה $a=1$ באופן טריוויאלי מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = \lim_{n\to\infty} 1^{1/n} = 1^{1/\infty} = 1^0 = 1 \ .$$

- מקרה $a>1$

יהי $a>1$. קיים מספר טבעי n אשר יותר גדול מ- a, כלומ $1<a<n$. אזי

$$1<a<n \quad \Rightarrow \quad 1^{1/n}<a^{1/n}<n^{1/n} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} 1^{1/n} < \lim_{n\to\infty} a^{1/n} < \lim_{n\to\infty} n^{1/n} \quad \Rightarrow \quad 1 < \lim_{n\to\infty} a^{1/n} < 1$$

כאשר במעבר האחרון הצבנו את $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ מהדף הנוסחאות. לכן מכלל הסנדוויץ', לכל $a>1$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1 \ .$$

- מקרה $0<a<1$

כדי להוכיח את הטענה עבור המקרה $0<a<1$ נוח להגדיר $b=\dfrac{1}{a}$. בגלל ש- $0<a<1$ אזי $b>1$. הוכחנו בסעיף הקודם כי לכל $b>1$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} b^{1/n}=1$. לכן:

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^{1/n} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} b^{1/n}} = 1$$