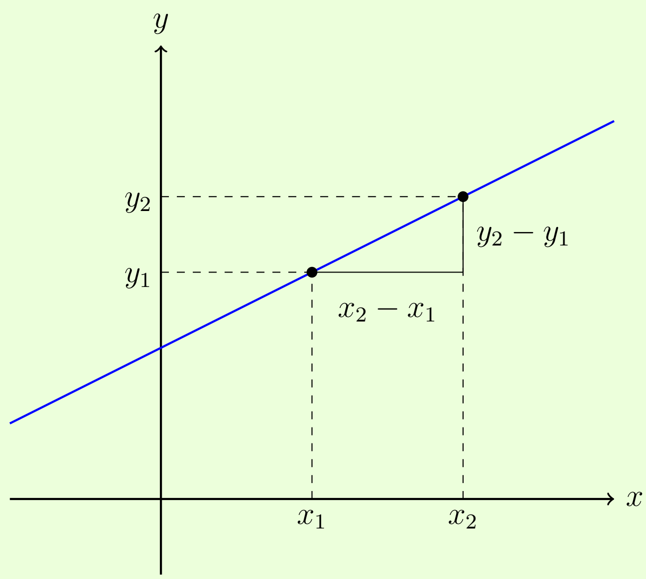
שיעור 2
פונקציות אלמנטריות בסיסיות

2.1 קו ישר

כלל 2.1 שיפוע של גרף של קו ישר

בהינתן גרף של קו ישר כמתואר בתרשים.



בכדי למצוא השיפוע, בוחרין כל שתי נקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) והשיפוע ניתן ע"י הנוסחה:

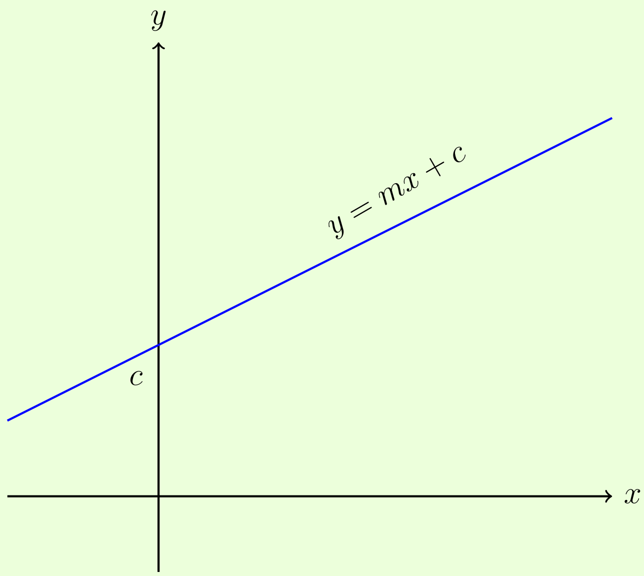
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \ .$$

כלל 2.2 גרף של קו ישר

הפונקציה הניתנת ע"י הנוסחה

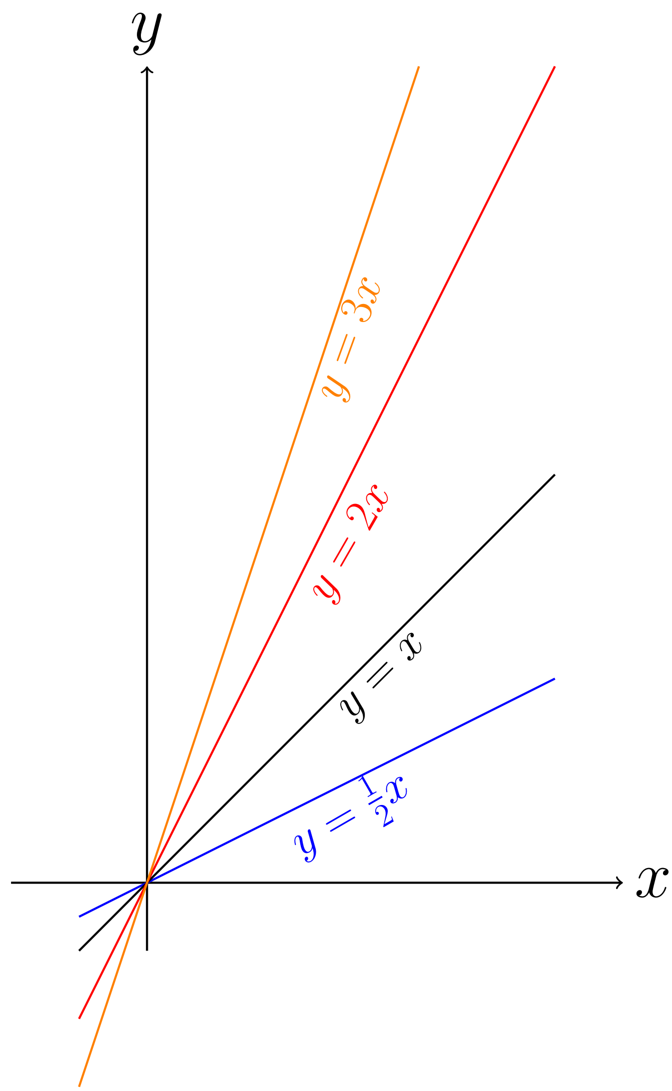
$$y = mx + c$$

הינה קו ישר עם שיפוע m שחותכת את ציר ה- y בנקודה $(0, c)$.

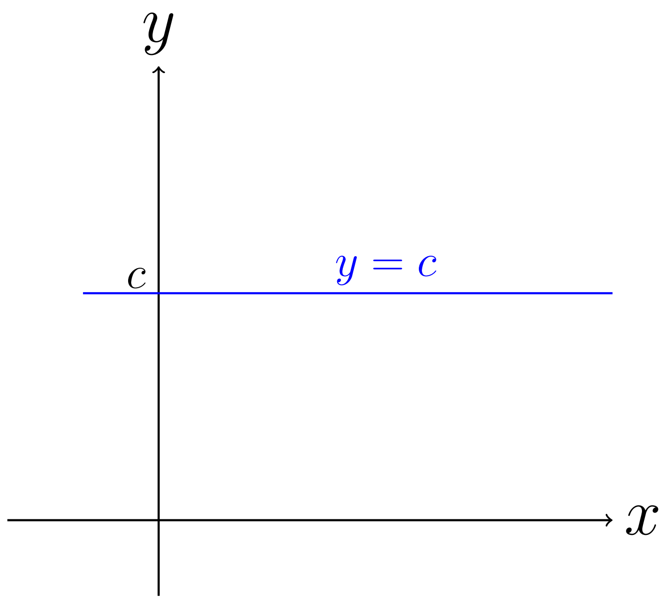


לכן ככל ש- m גדול יותר, השיפוע גבוה יותר (ולהפך).

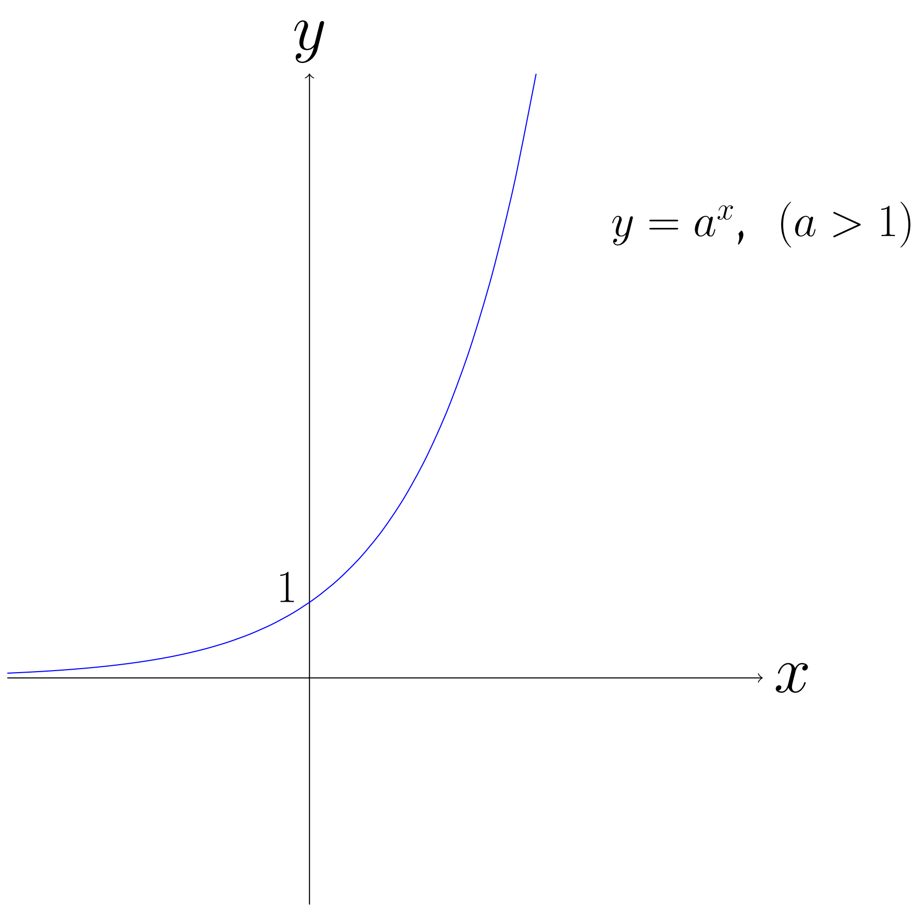
דוגמה 2.1

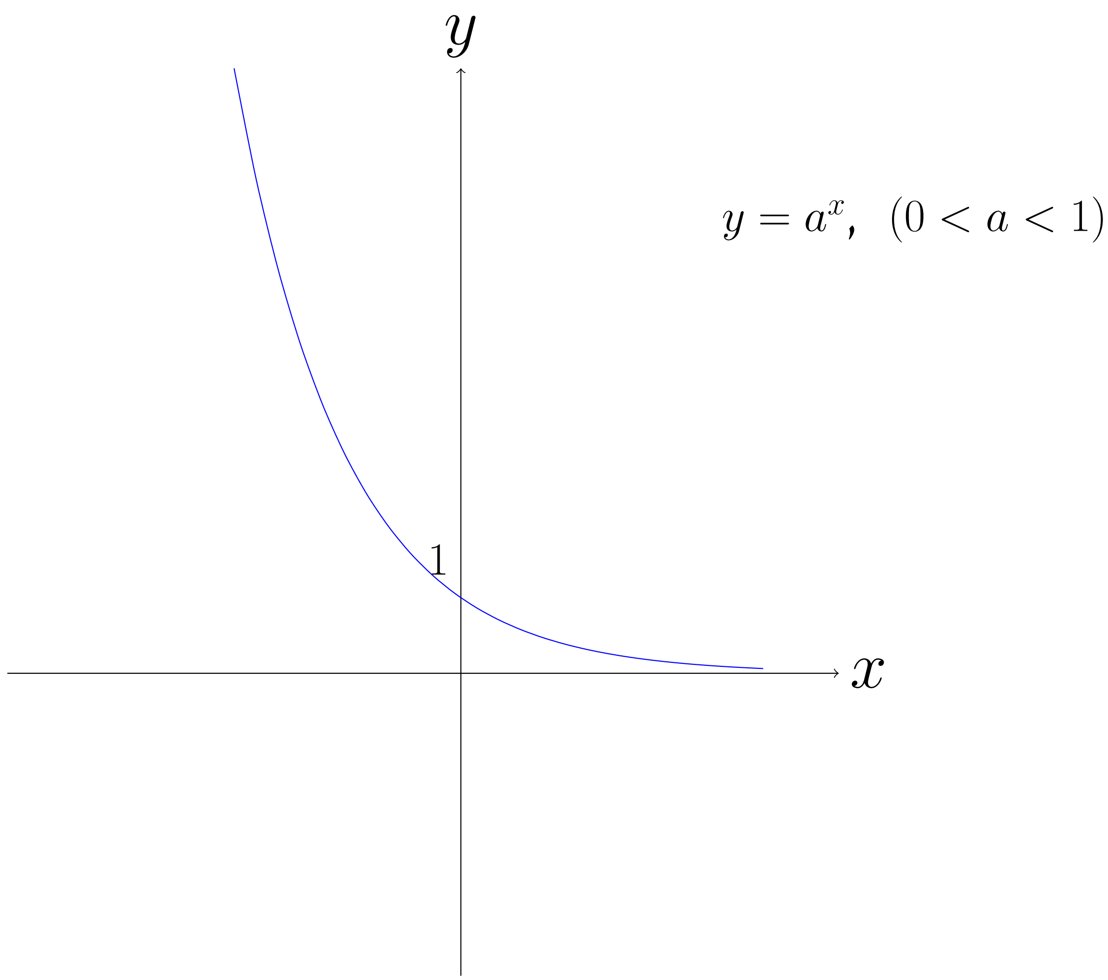


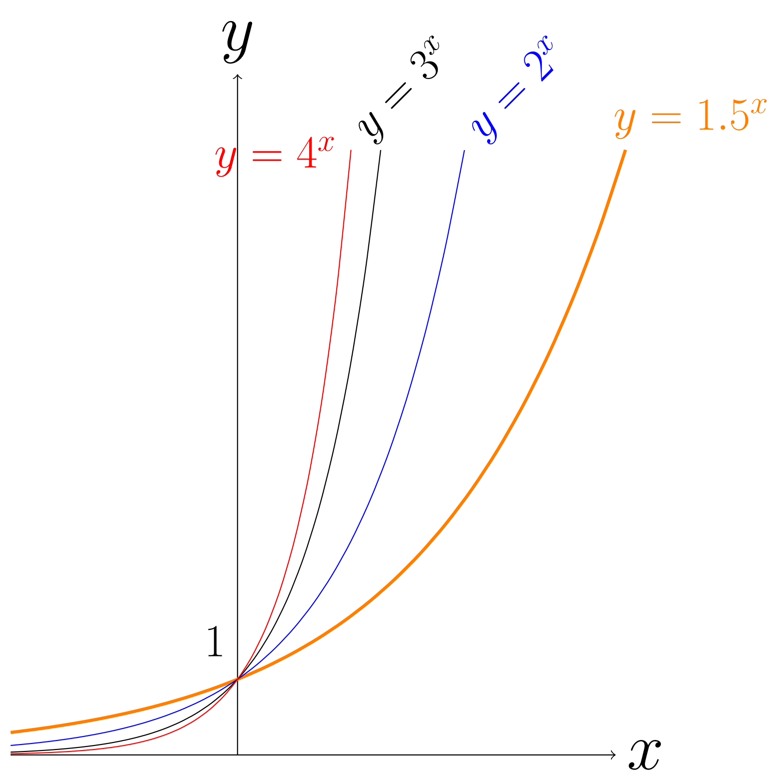
2.2 פונקציה קבועה

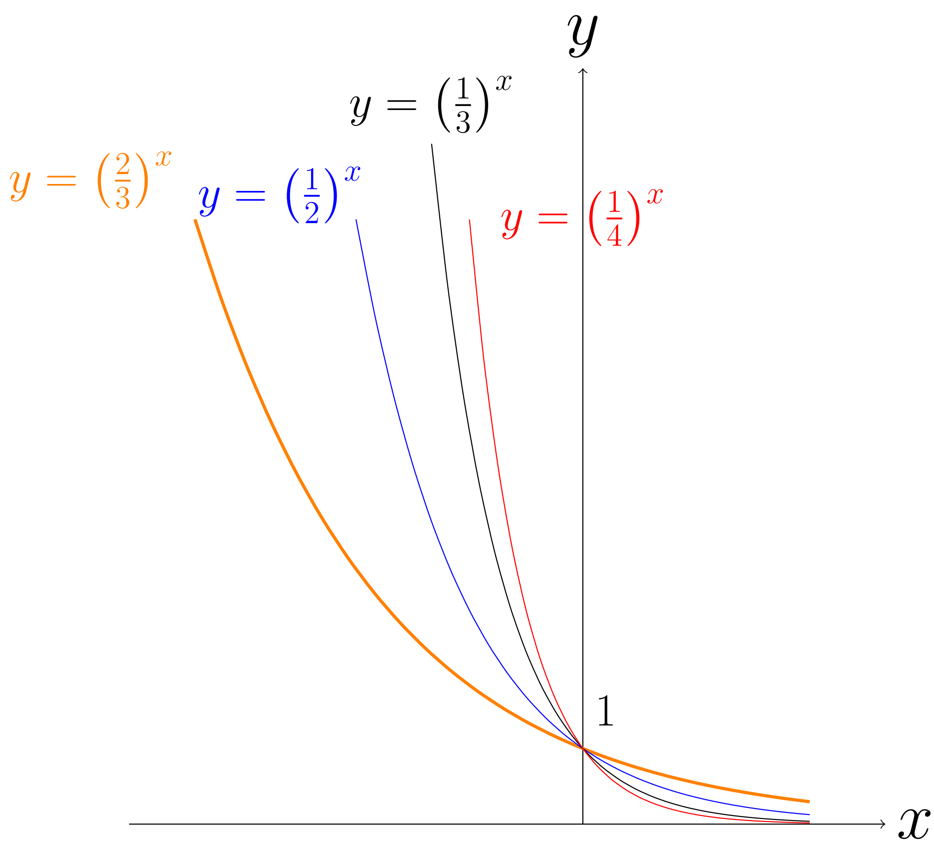


2.3 פונקציה מעריכית

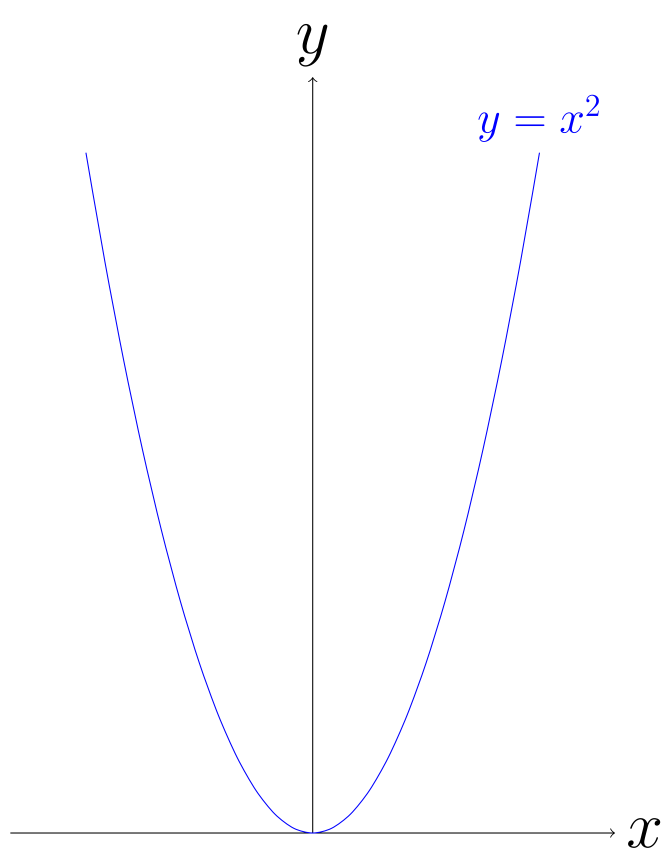


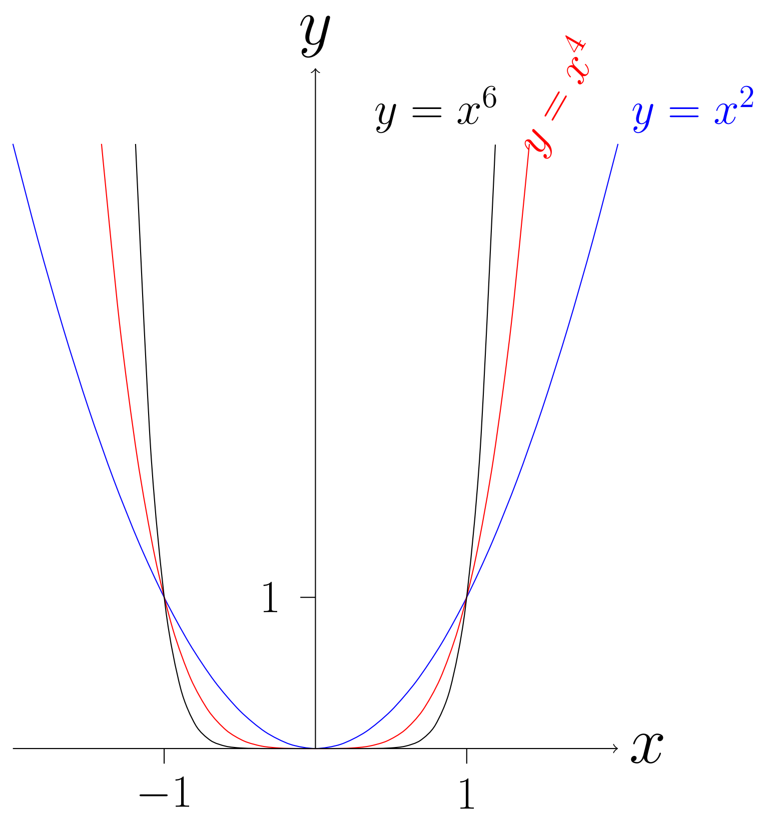

y
x
1
$y = a^x, \ \ (0 < a < 1)$


y
x
1
$y = 4^x$
$y = 3^x$
$y = 2^x$
$y = 1.5^x$

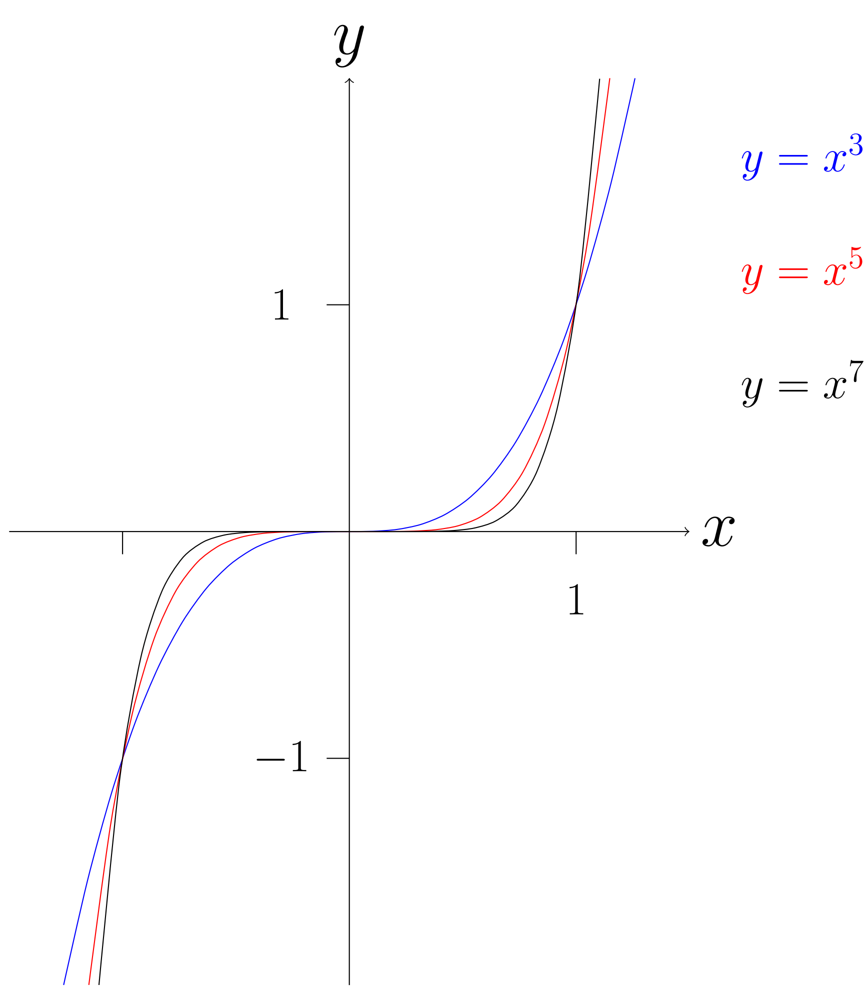


2.4 פונקציה חזקה

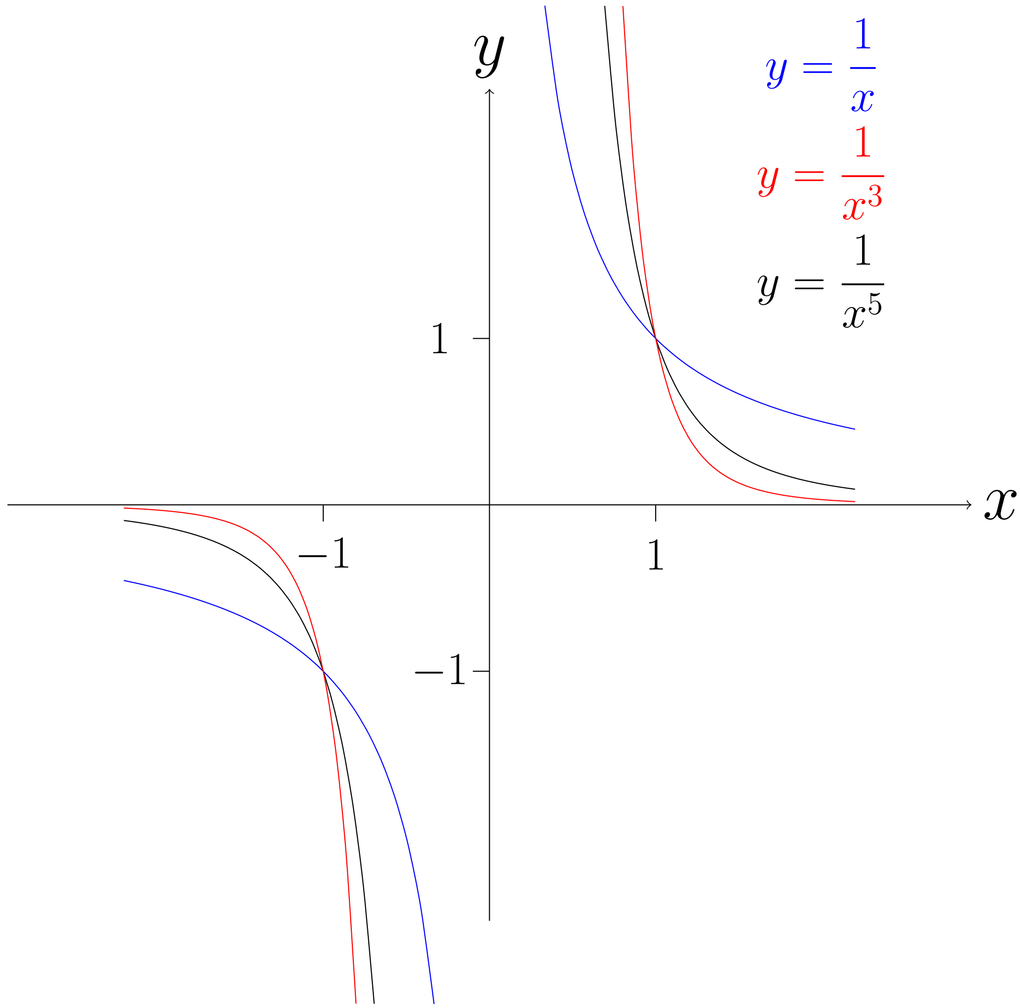


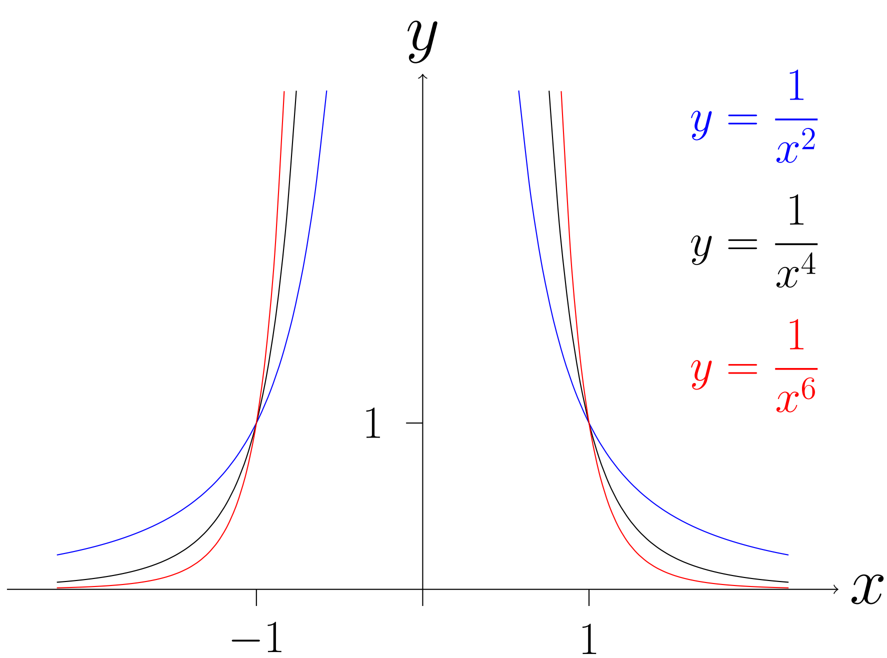


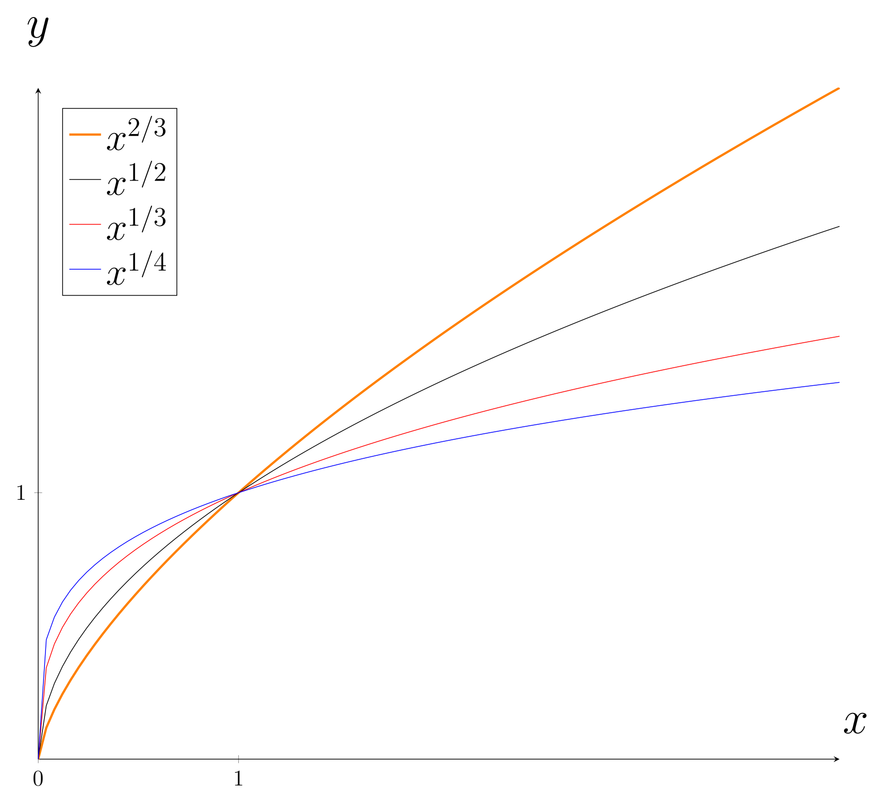
y
$y = x^6$
$y = x^4$
$y = x^2$
1
x
-1
1



y
$y = x^3$
$y = x^5$
$y = x^7$
1
x
1
-1


$y = \frac{1}{x}$
$y = \frac{1}{x^3}$
$y = \frac{1}{x^5}$
x
y
1
-1
1
-1


$y = \frac{1}{x^2}$
$y = \frac{1}{x^4}$
$y = \frac{1}{x^6}$
x
y
1
-1
1



2.5 פונקציה לוגריתמית

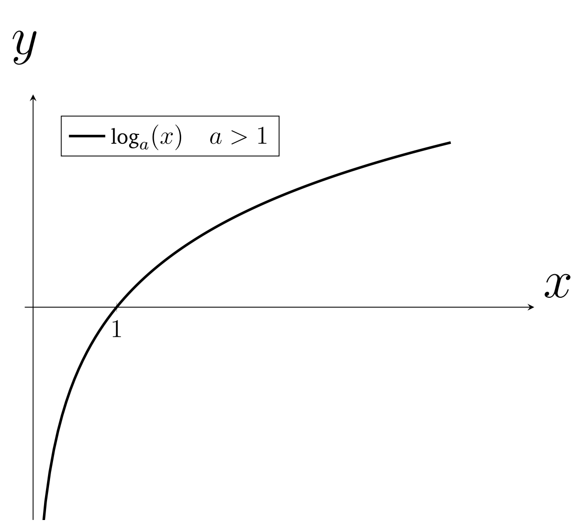
פונקציה לוגריתמית היא פונקציה הפוכה לפונקציה מעריכית. כלומר

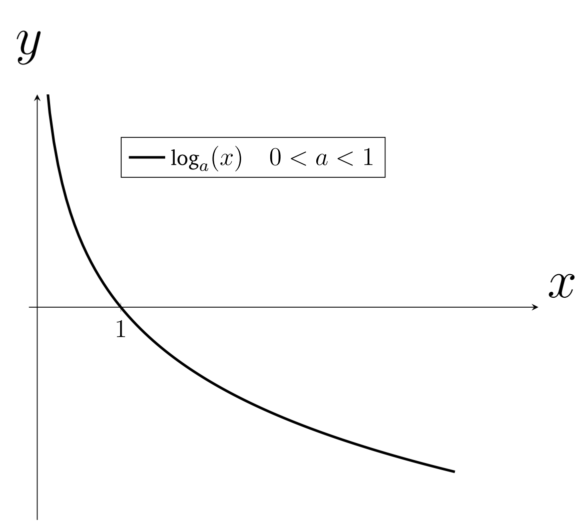
$$y = a^x$$

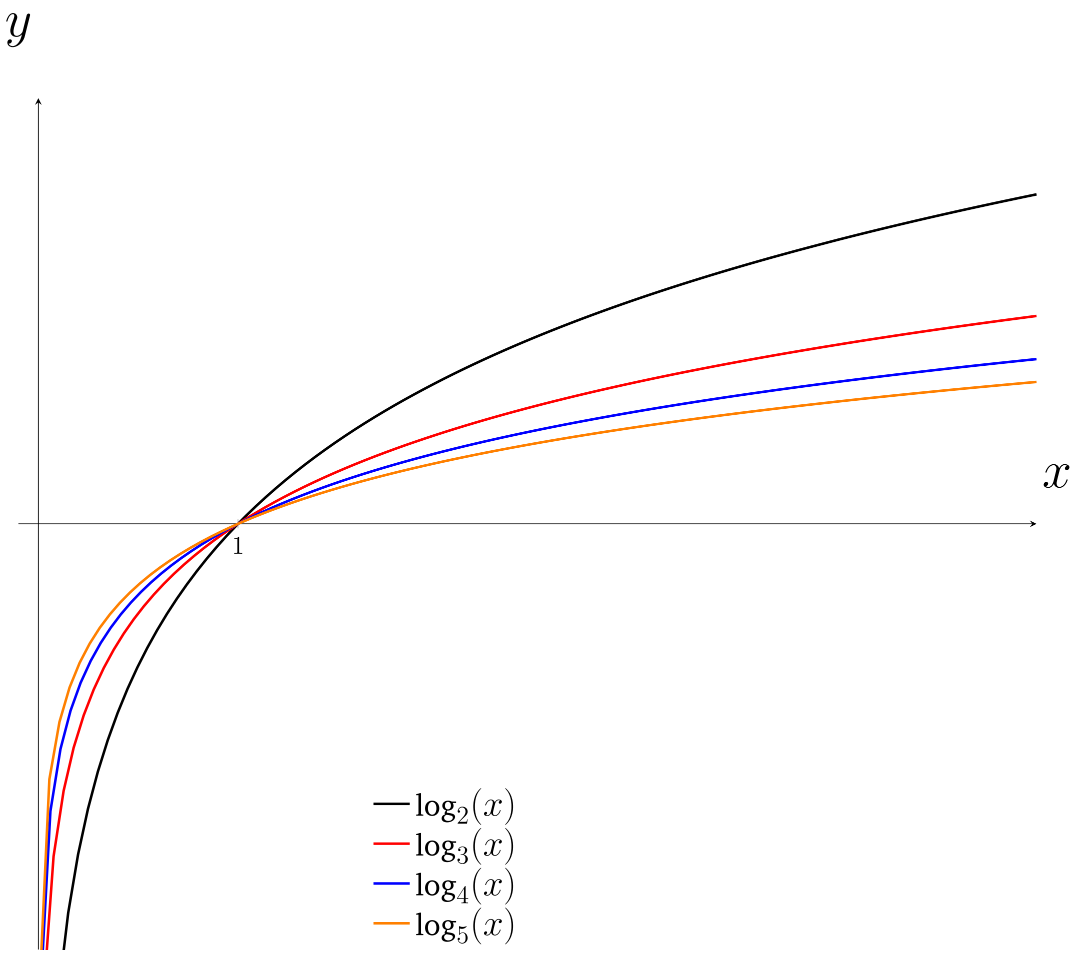
אם ורק אם $x = \log_a y$. מכאן נובע

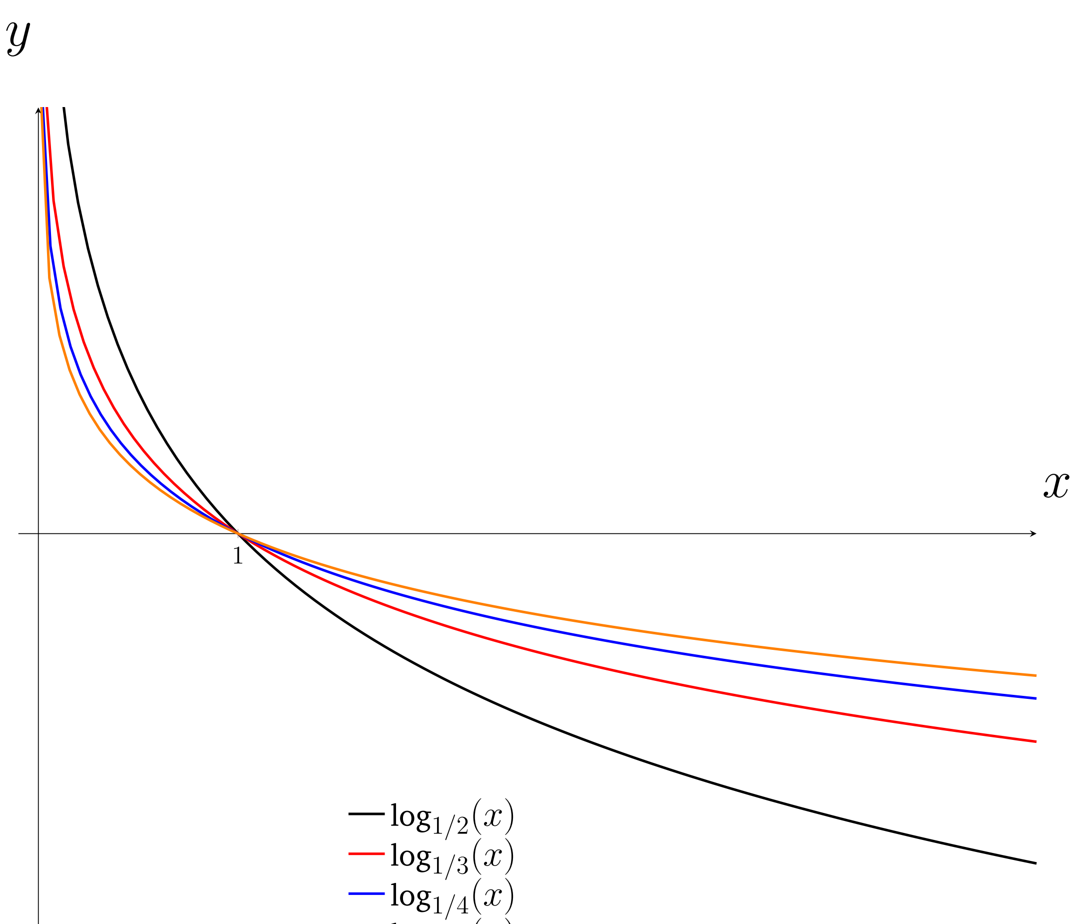
$$a^{\log_a y} = y\ .$$

מכיוון שתחום הגדרה של $y = a^x$ הוא $\mathbb{R}$ והתמונה היא $y > 0$, תחום ההגדרה של פונקציה $y = \log_a x$ הוא $x > 0$.
קיימים שני סוגים של גרף לפונקציה $y = \log_a x$:






y
x
1
log₂(x)
log₃(x)
log₄(x)
log₅(x)


y
x
1
log1/2(x)
log1/3(x)
log1/4(x)

משפט 2.1 נוסחאות של $\log_a x$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

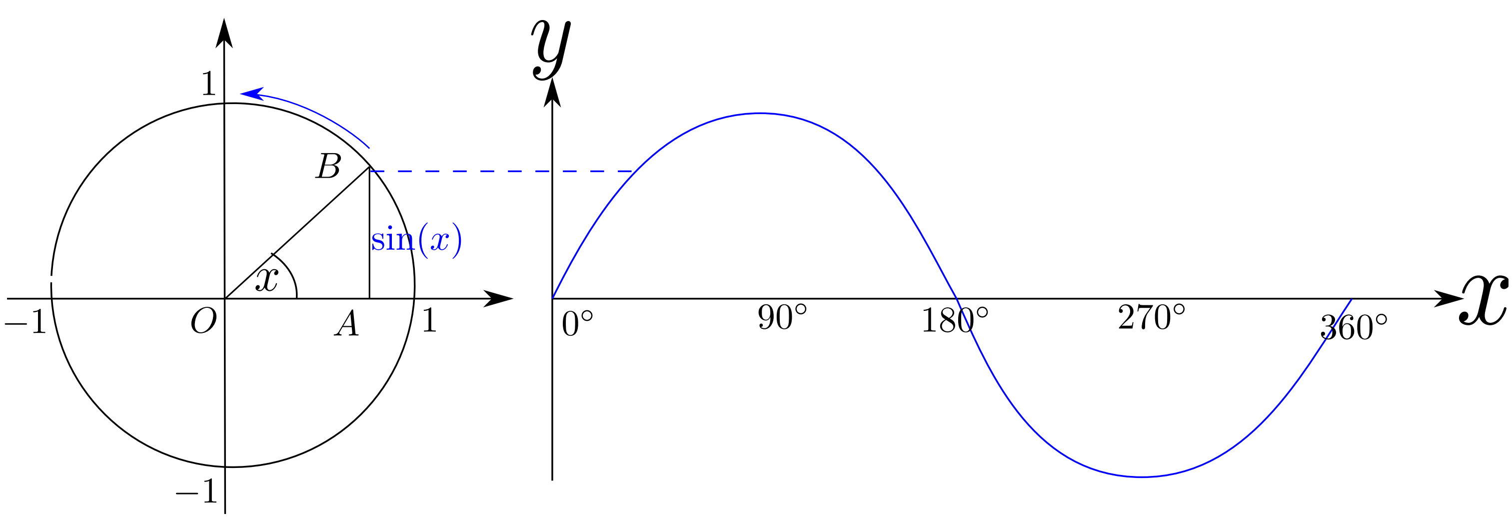
הגדרה 2.1 הלוגריתם הטבעי

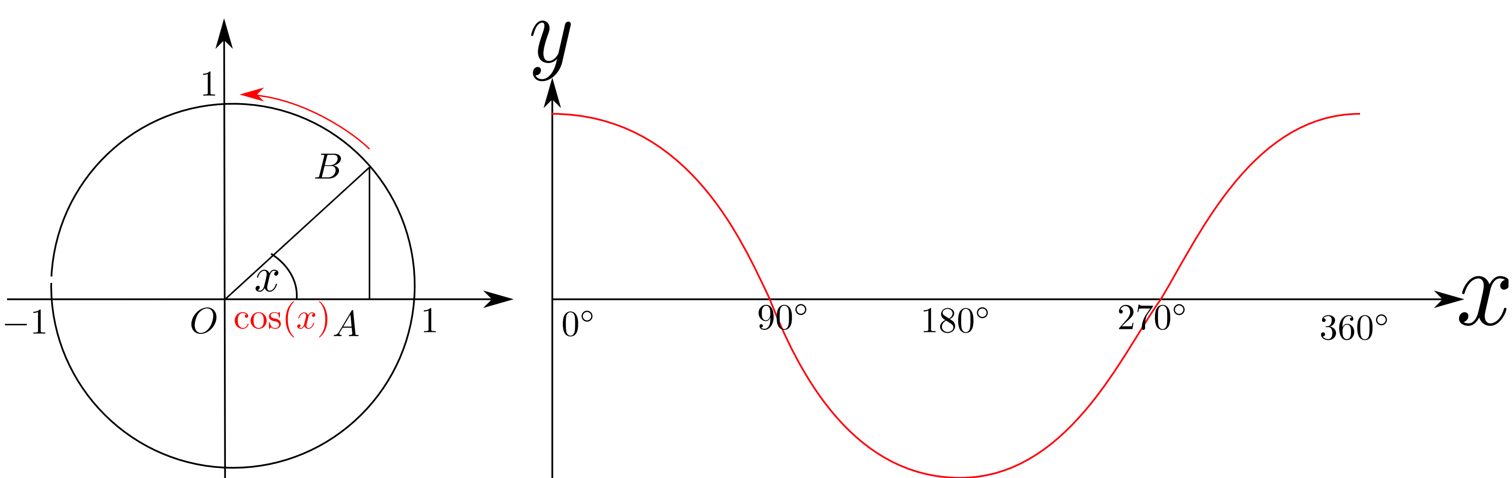
כאשר הבסיס של הלוגריתם הוא e מסמנים $\log_e x = \ln x$.

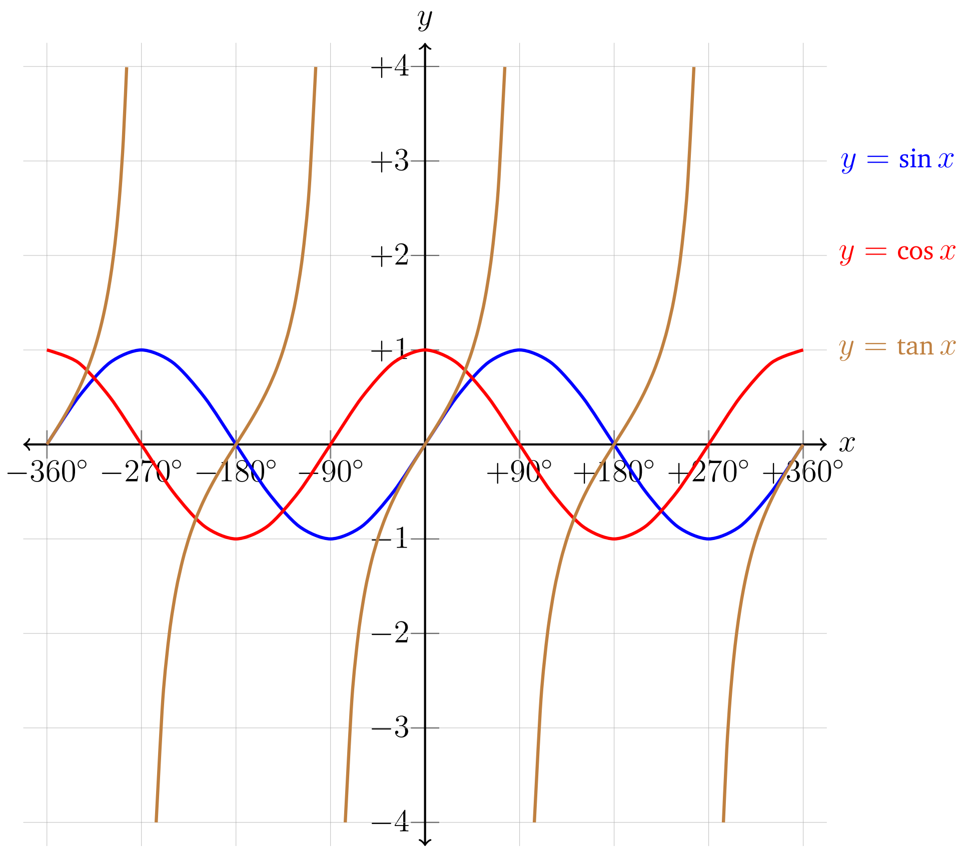
2.6 פונקציה טריגונומטריות

פונקציות הטריגונומטריות מוגדרות ע"י מעגל היחידה:

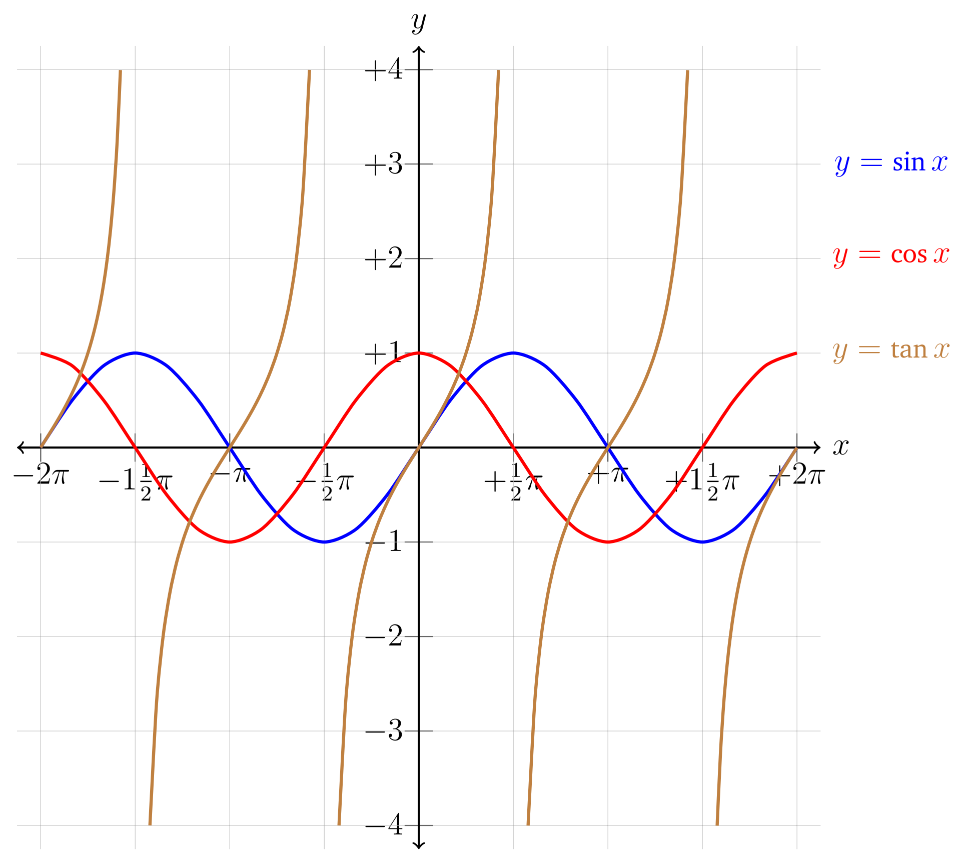
$$\sin x = AB\ , \qquad \cos x = OA\ , \qquad \tan x = \frac{AB}{OA} = \frac{\sin x}{\cos x}\ , \qquad \cot x = \frac{OA}{AB} = \frac{\cos x}{\sin x}\ .$$





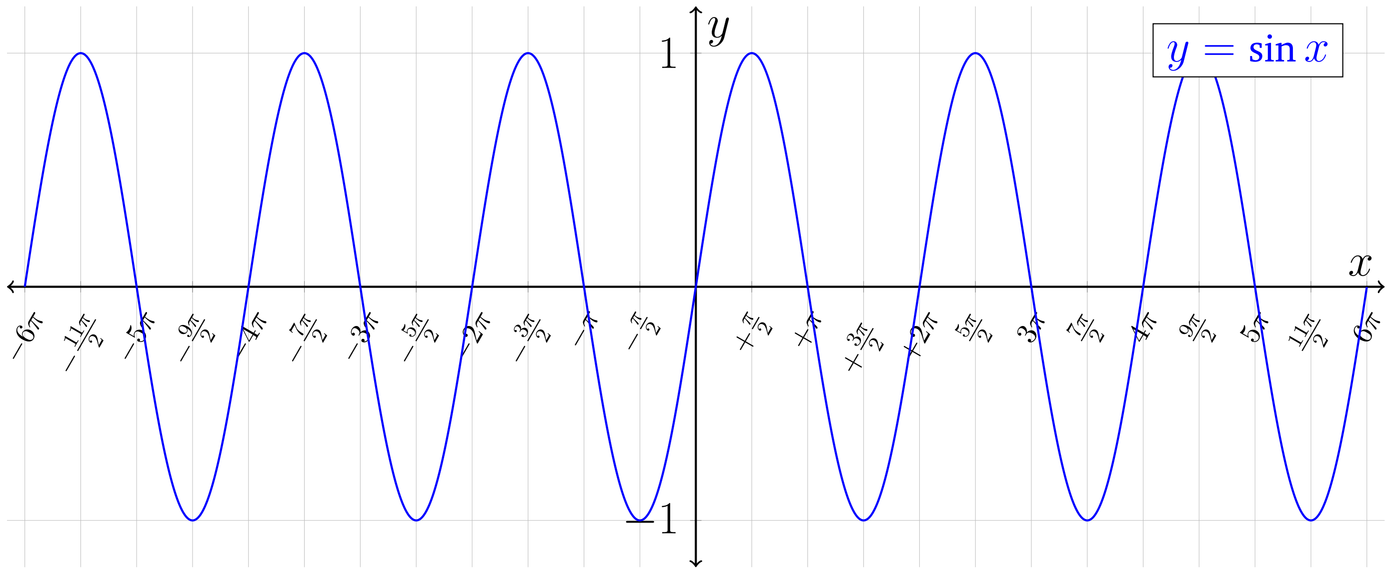


y
x
$+4$
$+3$
$+2$
$+1$
-1
-2
-3
-4
$-360°$ $-270°$ $-180°$ $-90°$ $+90°$ $+180°$ $+270°$ $+360°$
$y = \sin x$
$y = \cos x$
$y = \tan x$



y
x
$+4$
$+3$
$+2$
$+1$
-1
-2
-3
-4
-2π $-1\frac{1}{2}\pi$ $-\pi$ $-\frac{1}{2}\pi$ $+\frac{1}{2}\pi$ $+\pi$ $+1\frac{1}{2}\pi$ $+2\pi$
$y = \sin x$
$y = \cos x$
$y = \tan x$

סינוס



כלל 2.3 ערכים חשובים של $\sin x$

ערכים עיקריים:

$$\sin(0)=0\ ,\qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=1\ ,\qquad \sin\left(\pi\right)=0\ ,\qquad \sin(\tfrac{3\pi}{2})=1\ ,\qquad \sin(2\pi)=0\ .$$

$\sin x$ פונקציה אי-זוגית:

$$\sin(-x)=-\sin(x)\ .$$

$\sin x$ פונקציה מחזורית עם מחזור $T=2\pi$:

$$\sin(x+2\pi n)=\sin(x)\ ,\quad n\in\mathbb{Z}$$

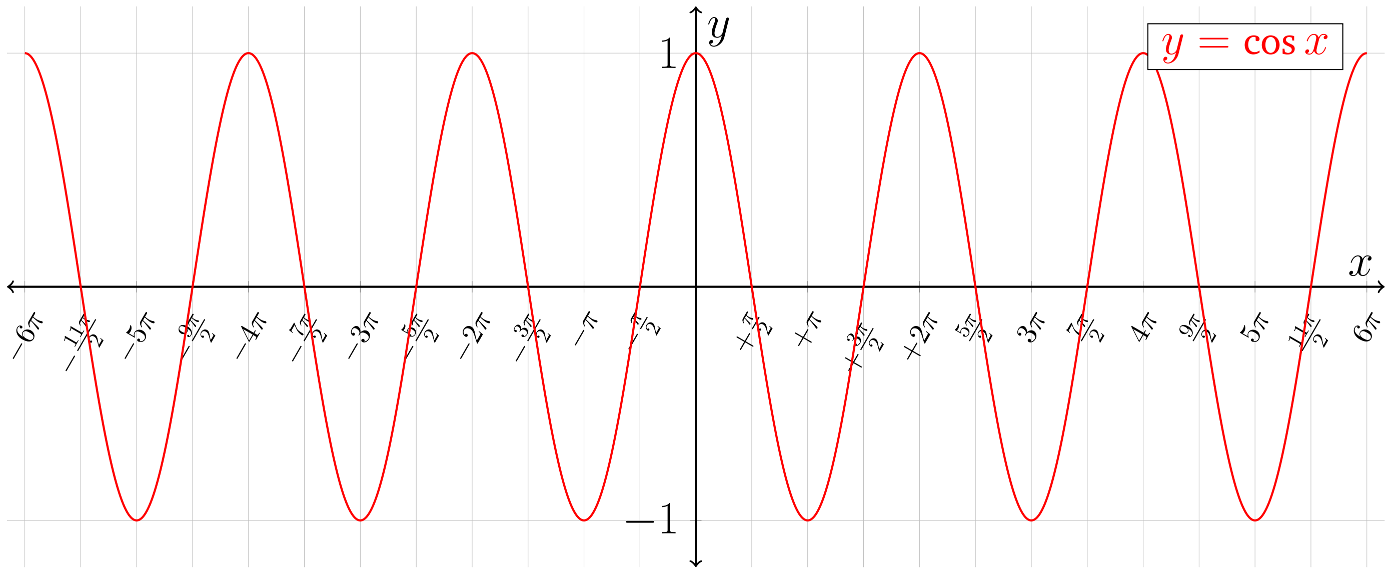
ערכים מחזוריים:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=1\ ,\quad \sin\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=-1\ ,\quad \sin(n\pi)=0\ ,\quad \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n\ ,$$

כאשר $n\in\mathbb{Z}$ מספר שלם. ערכים שיקופיים:

$$\sin(\pi-x)=\sin x\ ,\qquad \sin(x-\pi)=-\sin x\qquad \sin(x+\pi)=-\sin(x)\ .$$

קוסינוס



כלל 2.4 ערכים חשובים של $\cos x$

ערכים עיקריים:

$$\cos(0) = 1 \ , \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \ , \qquad \cos\left(\pi\right) = -1 \ , \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \ , \qquad \cos(2\pi) = 0 \ .$$

$\cos x$ פונקציה זוגית:

$$\cos(-x) = \cos(x) \ .$$

$\cos x$ פונקציה מחזורית עם מחזור $T = 2\pi$:

$$\cos(x + 2\pi n) = \cos(x) \ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

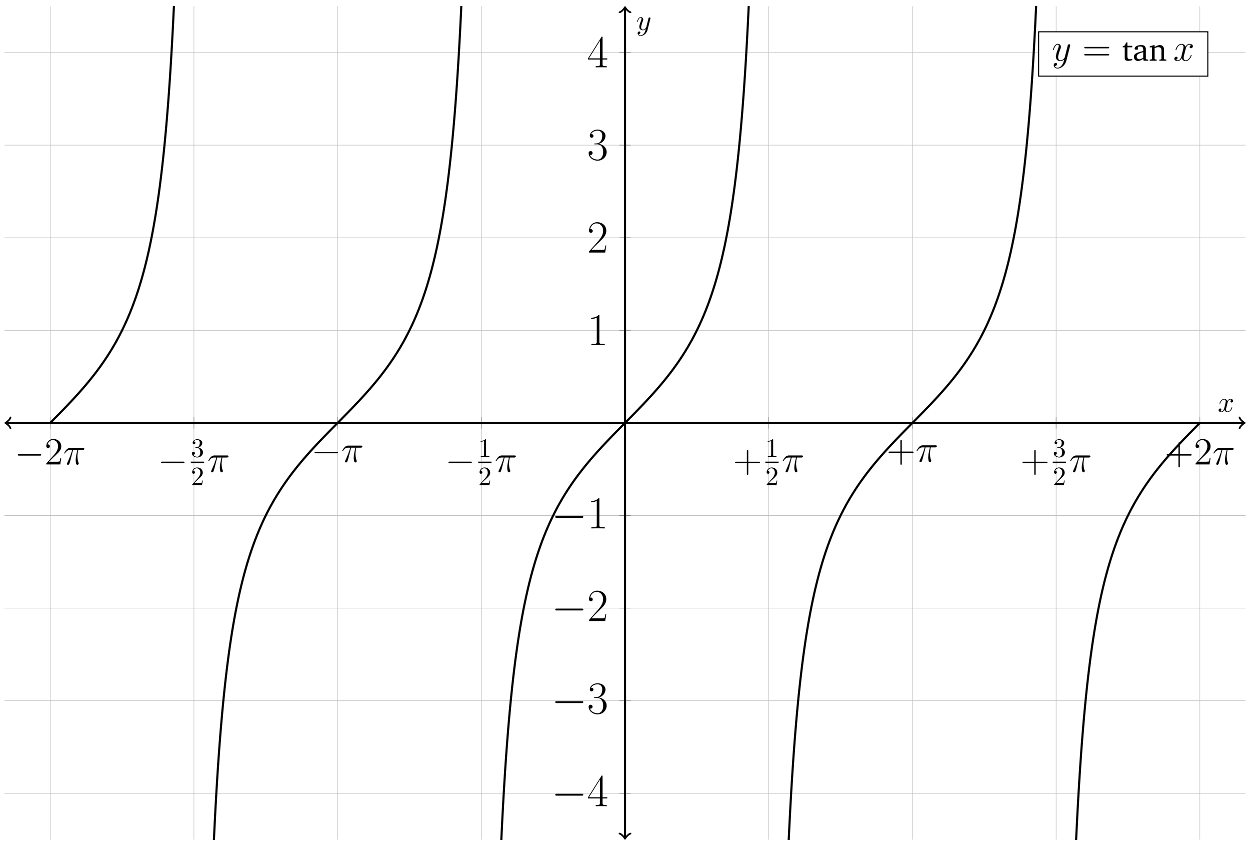
ערכים מחזוריים:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0 \ , \qquad \cos\left(2\pi n\right) = 1 \ , \qquad \cos(\pi + 2\pi n) = -1 \ , \qquad \cos(n\pi) = (-1)^n \ , \qquad n \in \mathbb{Z} \ .$$

ערכים שיקופיים:

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \ , \qquad \cos(x - \pi) = -\cos x \qquad \cos(x + \pi) = -\cos(x) \ .$$

טנגנט



כלל 2.5 ערכים חשבוים של $\tan x$

תחום הגדרה:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \ , \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ .$$

ערכים עיקריים:

$$\tan(0) = 0 \ , \qquad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \ , \qquad \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \ , \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \to \infty \ , \qquad \tan\left(-\frac{\pi}{2}\right) \to -\infty \ .$$

$\tan x$ פונקציה אי-זוגית:

$$\tan(-x) = -\tan(x) \ .$$

$\tan x$ פונקציה מחזורית עם מחזור $T = \pi$:

$$\tan(x + \pi n) = \tan(x) \ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

ערכים מחזוריים:

$$\tan\left(\frac{|n|\pi}{2}\right) \to \infty \ , \qquad \tan\left(-\frac{|n|\pi}{2}\right) \to -\infty \ , \qquad \tan(n\pi) = 0 \ , \qquad n \in \mathbb{Z} \ .$$

ערכים שיקופיים:

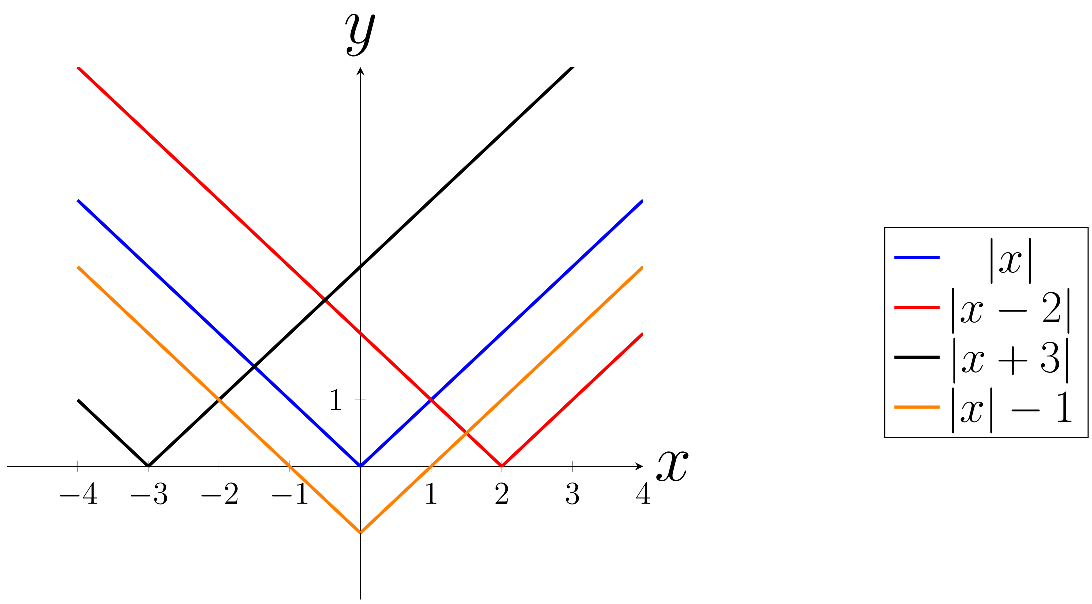
$$\tan(\pi - x) = -\tan x \ , \qquad \tan(x - \pi) = \tan x \qquad \tan(x + \pi) = \tan(x) \ .$$

2.7 פונקצית ערך מוחלט

הגדרה 2.2 פונקצית ערך מוחלט

$$|x| = \begin{cases} x & \text{אם } x \geq 0 \\ -x & \text{אם } x < 0 \ . \end{cases}$$

דוגמה 2.2



2.8 פונקציית מקסימום ופונקציית מינימום

הגדרה 2.3 פונקצית מקסימום

$$\max(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 & \text{אם } x_1 \geq x_2 \\ x_2 & \text{אם } x_2 \geq x_1 \ . \end{cases}$$

לדוגמה,

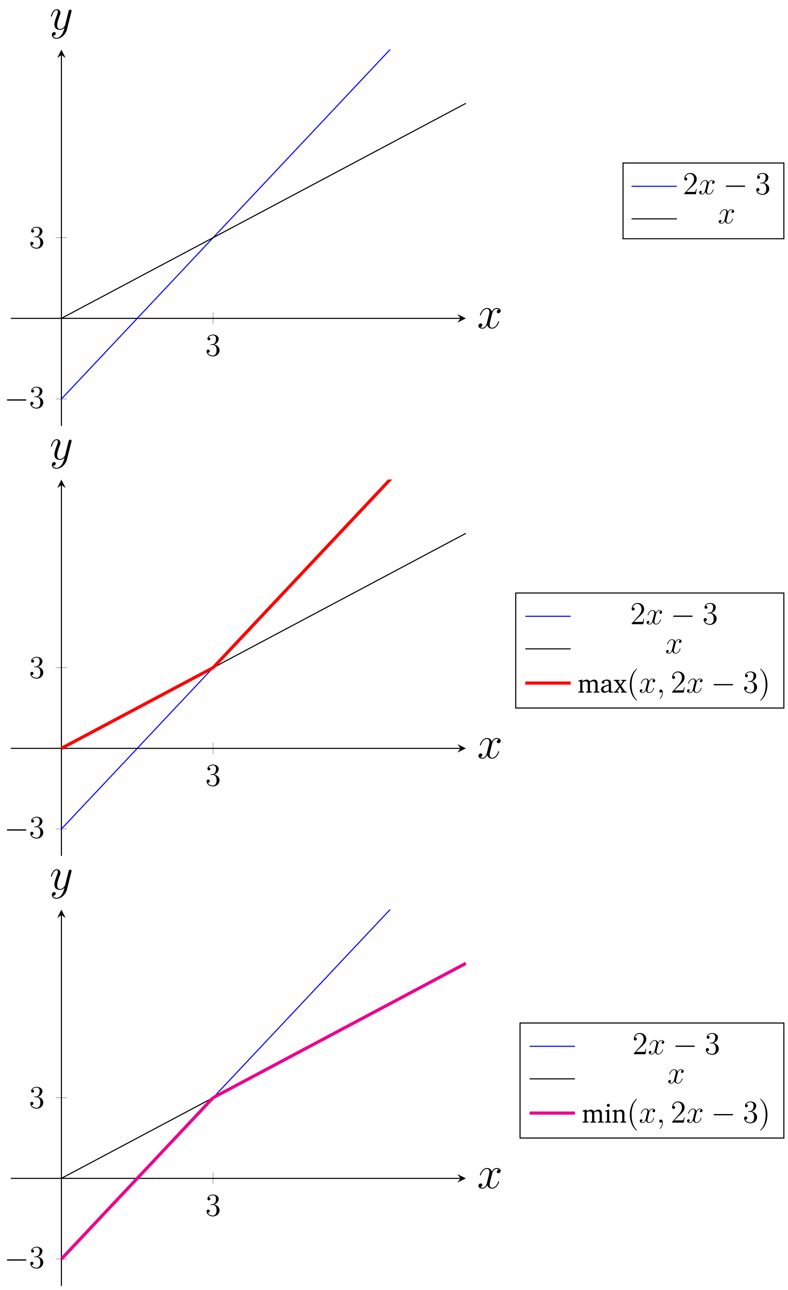
$$\max(1,2) = 2 \ , \quad \max(3,1) = 3 \ , \quad \max(100,-2) = 100 \ , \quad \max(2.1, 2.05) = 2.1, \quad \max(10,10) = 10 \ .$$

הגדרה 2.4 פונקצית מינימום

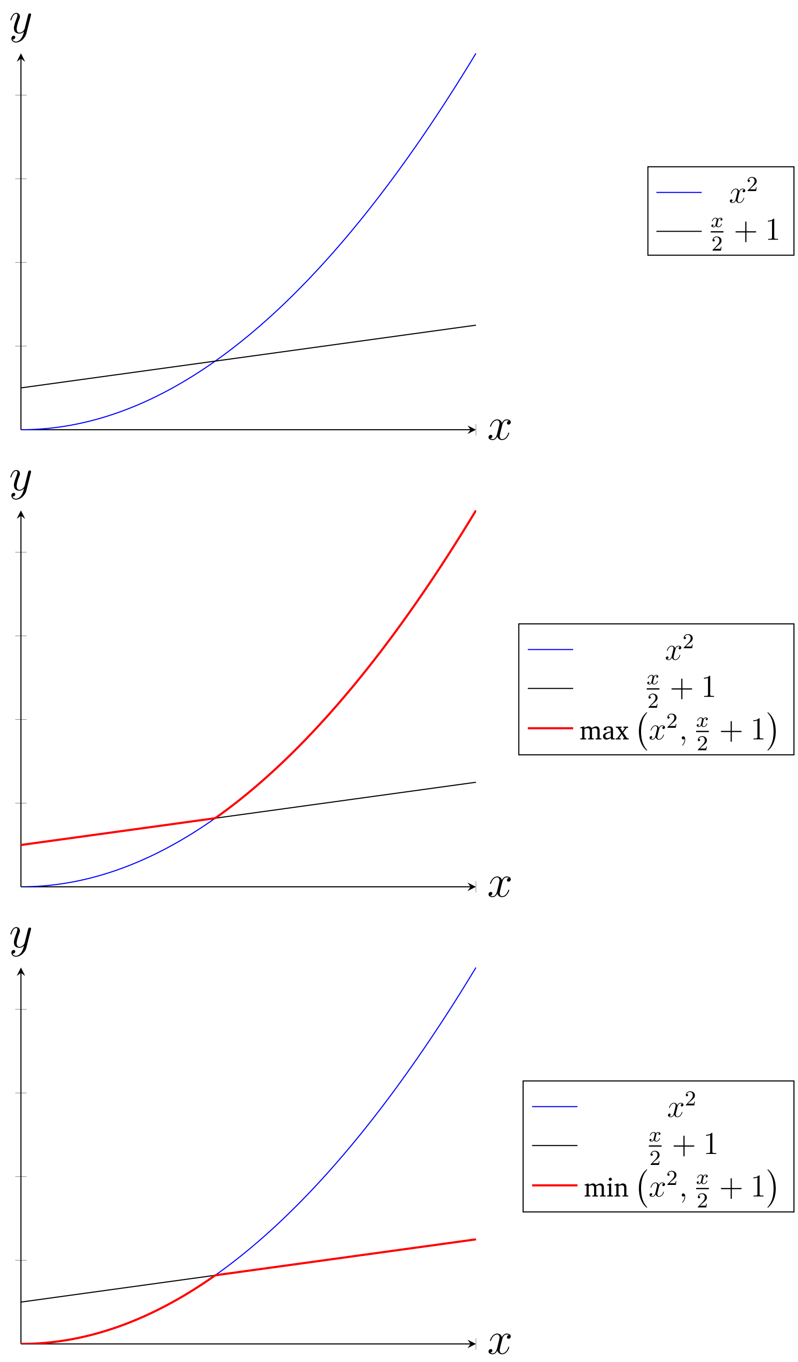
$$\min(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 & \text{אם } x_1 \leq x_2 \\ x_2 & \text{אם } x_2 \leq x_1 \ . \end{cases}$$

$$\min(1,2)=1\ ,\quad \min(3,1)=1\ ,\quad \min(100,-2)=-2\ ,\quad \min(2.1,2.05)=2.05,\quad \min(10,10)=10\ .$$

דוגמה 2.3



דוגמה 2.4



2.9 פונקציות רציונליות

הגדרה 2.5 פונקציות רציונליות

פונקציה מצורה

$$y(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} ,$$

כאשר $P(x)$ ו- $Q(x)$ פולינונים, נקראת **פונקציה רציונלית**.

נסמן הסדר של $P(x)$ ב- $\deg(P)$, והסדר של $Q(x)$ ב- $\deg(Q)$.

א) אם $\deg(P) < \deg(Q)$ אז אומרים כי $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **פונקצית רציונלית אמיתית.**

ב) אם $\deg(P) \geq \deg(Q)$ אז אומרים כי $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **פונקצית רציונלית לא אמיתית.**

משפט 2.2 תכונות של פונקציה רציונלית

תהי $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ פונקציה רציונלית.

1) אם $\deg(P) > \deg(Q)$, אז $f(x)$ ישאף לאינסוף כאשר x שואף לאינסוף.

2) אם $\deg(P) = \deg(Q)$, אז תהיה אסימפטוטה אופקית ב- $x \to \infty$ וב- $x \to -\infty$.

3) אם $\deg(P) < \deg(Q)$ אז הציר ה- x הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה ב- $x \to \infty$ וב- $x \to -\infty$.

4) במקרה שאין ל- $Q(x)$ שורשים אז הגרף הוא קו רציף.

5) אם יש ל- $Q(x)$ שורשים, תהיה אסימפטוטה אנכית בכל ערך של x השווה לאחד השורשים של Q המתאימות להשורשים.

דוגמה 2.5

חשבו את $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ כאשר $g(x) = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 1$ ו- $f(x) = x^2 - 4x + 7$.

פתרון:

$$f(x)\overline{)g(x)} \qquad = \qquad x^2 - 4x + 7\overline{)2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 1}$$

<u>שלב 1</u>

$$\begin{array}{r} 2x^2 \\ x^2 - 4x + 7\overline{)2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 1} \end{array}$$

<u>שלב 2</u>

$$\begin{array}{r} 2x^2 \qquad\qquad\quad \\ x^2 - 4x + 7\overline{)2x^4 - 3x^3 + \ \ 7x^2 - 4x + 1} \\ 2x^4 - 8x^3 + 14x^2 \qquad\qquad \end{array}$$

שלב 3

$$
\begin{array}{r|l}
 & \phantom{2x^4-3x^3+{}}2x^2 \\
\cline{2-2}
x^2-4x+7 & 2x^4-3x^3+\ \ 7x^2-4x+1 \\
 & \underline{2x^4-8x^3+14x^2} \\
 & \phantom{2x^4-{}}5x^3-\ \ 7x^2-4x+1
\end{array}
$$

שלב 1'

$$
\begin{array}{r|l}
 & \phantom{2x^4-3x^3+{}}2x^2+5x \\
\cline{2-2}
x^2-4x+7 & 2x^4-3x^3+\ \ 7x^2-4x+1 \\
 & \underline{2x^4-8x^3+14x^2} \\
 & \phantom{2x^4-{}}5x^3-\ \ 7x^2-4x+1
\end{array}
$$

שלב 2'

$$
\begin{array}{r|l}
 & \phantom{2x^4-3x^3+{}}2x^2+\ \ 5x \\
\cline{2-2}
x^2-4x+7 & 2x^4-3x^3+\ \ 7x^2-\ \ 4x+1 \\
 & \underline{2x^4-8x^3+14x^2} \\
 & \phantom{2x^4-{}}5x^3-\ \ 7x^2-\ \ 4x+1 \\
 & \phantom{2x^4-{}}5x^3-20x^2+35x
\end{array}
$$

שלב 3'

$$
\begin{array}{r|l}
 & \phantom{2x^4-3x^3+{}}2x^2+\ \ 5x \\
\cline{2-2}
x^2-4x+7 & 2x^4-3x^3+\ \ 7x^2-\ \ 4x+1 \\
 & \underline{2x^4-8x^3+14x^2} \\
 & \phantom{2x^4-{}}5x^3-\ \ 7x^2-\ \ 4x+1 \\
 & \phantom{2x^4-{}}\underline{5x^3-20x^2+35x} \\
 & \phantom{2x^4-3x^3-{}}13x^2-39x+1
\end{array}
$$

שלב 1''

$$
\begin{array}{r|l}
 & \phantom{2x^4-3x^3+{}}2x^2+\ \ 5x+13 \\
\cline{2-2}
x^2-4x+7 & 2x^4-3x^3+\ \ 7x^2-\ \ 4x+\ \ 1 \\
 & \underline{2x^4-8x^3+14x^2} \\
 & \phantom{2x^4-{}}5x^3-\ \ 7x^2-\ \ 4x+\ \ 1 \\
 & \phantom{2x^4-{}}\underline{5x^3-20x^2+35x} \\
 & \phantom{2x^4-3x^3-{}}13x^2-39x+\ \ 1
\end{array}
$$

<u>שלב 2"</u>

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 5x + 13 \\
\hline
x^2-4x+7 & 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 1 \\
 & \underline{2x^4 - 8x^3 + 14x^2} \\
 & \quad 5x^3 - 7x^2 - 4x + 1 \\
 & \quad \underline{5x^3 - 20x^2 + 35x} \\
 & \qquad 13x^2 - 39x + 1 \\
 & \qquad 13x^2 - 52x + 91
\end{array}
$$

<u>שלב 3"</u>

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 5x + 13 \\
\hline
x^2-4x+7 & 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 1 \\
 & \underline{2x^4 - 8x^3 + 14x^2} \\
 & \quad 5x^3 - 7x^2 - 4x + 1 \\
 & \quad \underline{5x^3 - 20x^2 + 35x} \\
 & \qquad 13x^2 - 39x + 1 \\
 & \qquad \underline{13x^2 - 52x + 91} \\
 & \qquad\qquad 13x - 90
\end{array}
$$

<u>שלב 4</u> deg של השארית פחות מ deg של $f(x)$ אז התהליך מסתיים כאן.

<u>שלב 5</u> התשובה המתקבלת היא

$$\frac{g(x)}{f(x)} = 2x^2 + 5x + 13 + \frac{13x-90}{f(x)} \ .$$

■

דוגמה 2.6

מהי השארית לאחר לחלק $g(x)=x^4-4x^3+5x+7$ ב- $(x-4)$?

פתרון:
השארית שווה ל- $g(4)=27$.
שים לב, קל לבדוק כי ע"י חילוק ארוך:

$$\frac{x^4-4x^3+5x+7}{x-4} = x^3+5+\frac{27}{x-4} \ ,$$

כלומר השארית היא 27.

■

דוגמה 2.7

פרקו את הפולינום $g(x)=x^3-x^2-5x-3$ לגורמים לינאריים.

פתרון:

נבדוק אם כל אחת מהגורמים של האיבר הקבוע, 3, הוא שורש של הפולינום. כלומר נבדוק אם כל אחת מ $1,3,-1,-3$ הוא שורש. קל לראות כי 3 הוא כן שורש, קרי $g(3)=3^3-3^2-5\cdot 3-3=27-9-15-3=0$ ולכן $x-3$ הוא אחת מן הגורמים. ע"י חילוק ארוך נקבל

$$\frac{x^3-x^2-5x-3}{x-3}=x^2+2x+1=(x+1)^2$$

ולכן

$$x^3-x^2-5x-3=(x-3)(x+1)^2\ .$$

שים לב, במקרה זה $x=-1$ הוא **שורש מרובה** (ראו הגדרה 2.6). ■

משפט 2.3 גרף של פולינום

יהי $P(x)$ פולינום.

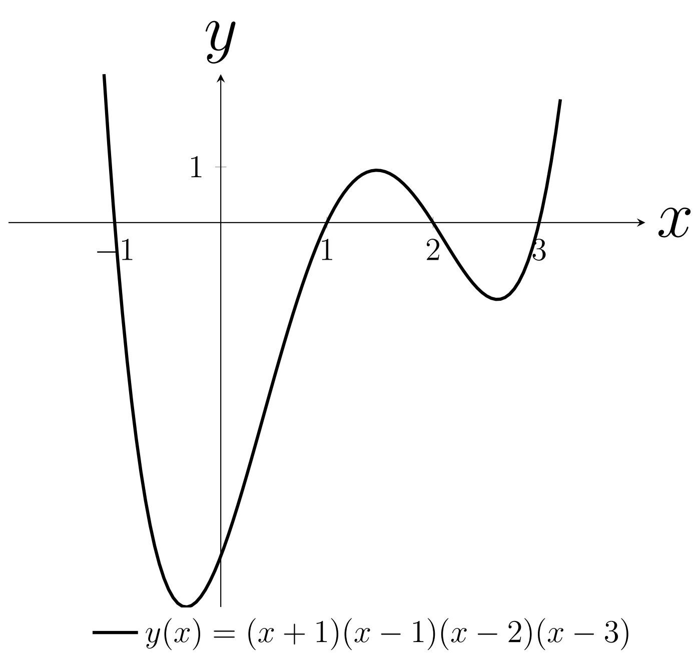
א) בשורש בעל ריבוי אי-זוגי, הגרף חותך את ציר ה- x, והפונקציה $P(x)$ מחליפה סימנה בנקודה זו.

ב) בשורש בעל ריבוי זוגי, הגרף רק משיק לציר ה- x, והפונקציה $P(x)$ לא משנה סימן בנקודה זו.

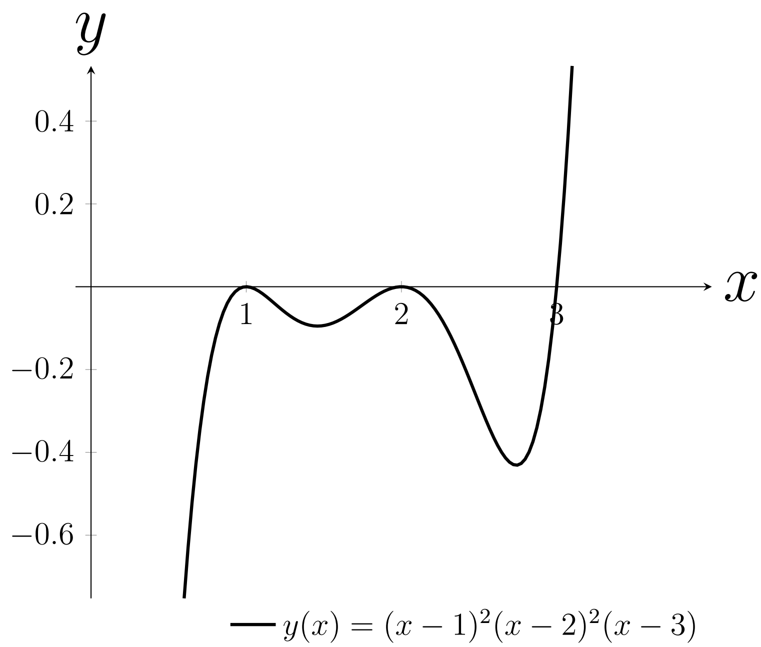
ג) שורש x_i בעל ריבוי m_i זוגי הוא תמיד נקודת קיצון של רב-האיבר.

ד) במידה שריבוי השורש x_i הוא אי-זוגי וגדול מ- 1, גרף של רב-איבר גם חותך וגם משיק את ציר ה- x בנקודה x_i. במקרה זה הנקודה $x=x_i$ היא נקודת **פיתול** של הגרף.

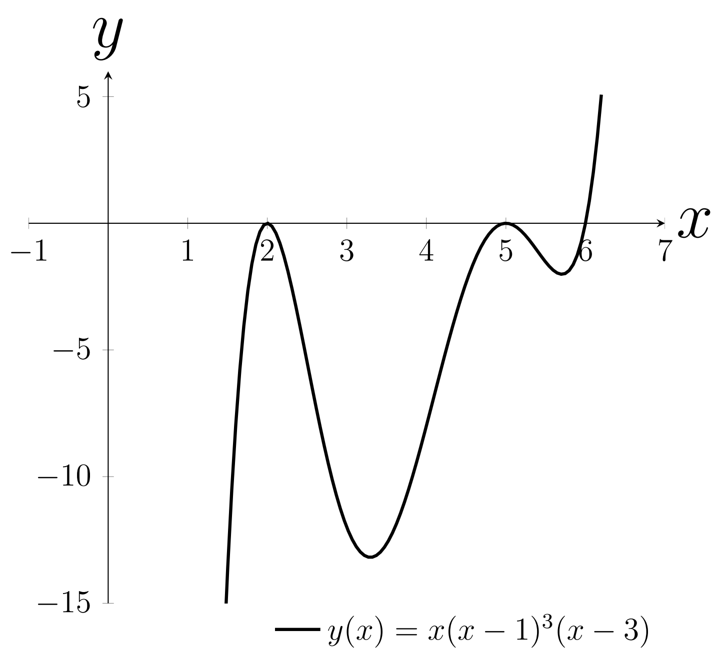
דוגמה 2.8



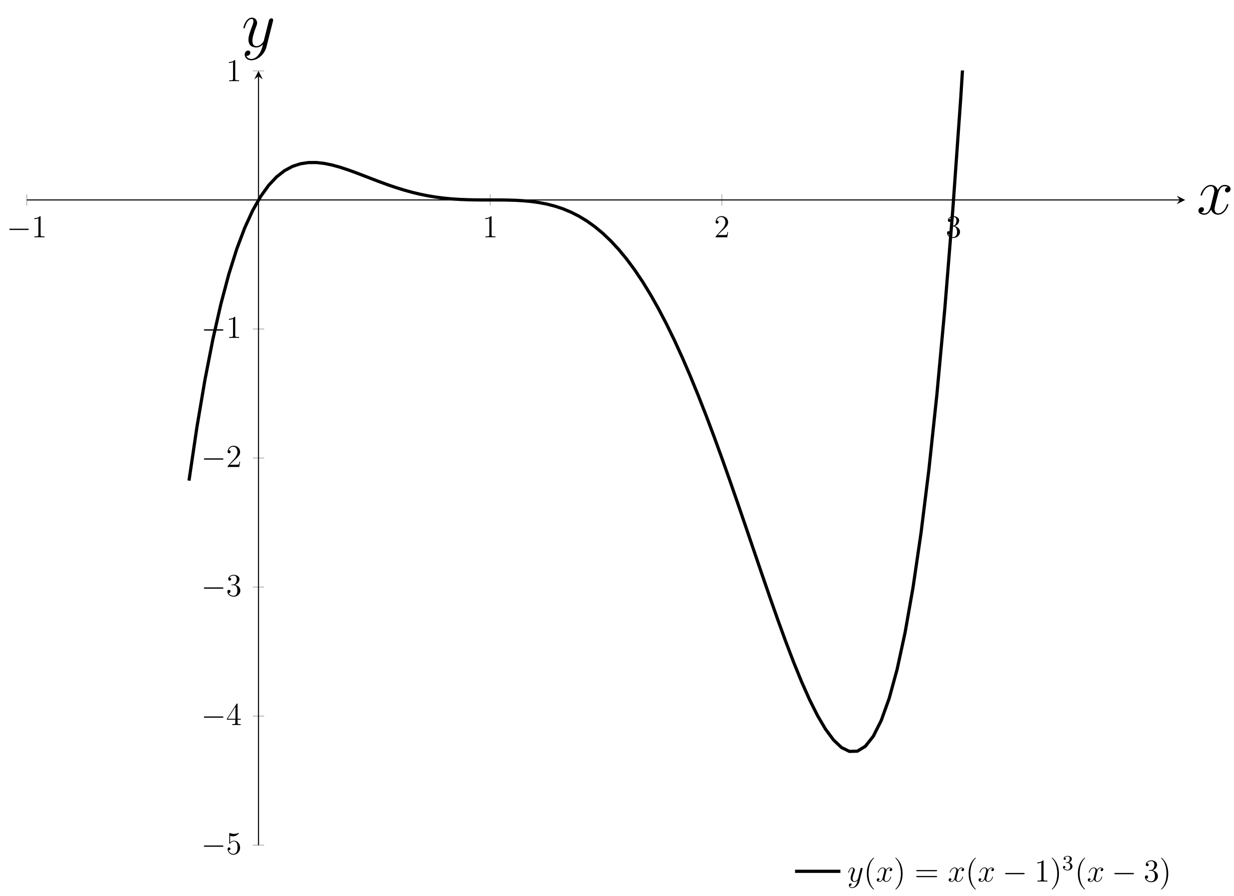
דוגמה 2.9



דוגמה 2.10



דוגמה 2.11



2.10 טרנספורמציות של הגרפים במערכת הצירים

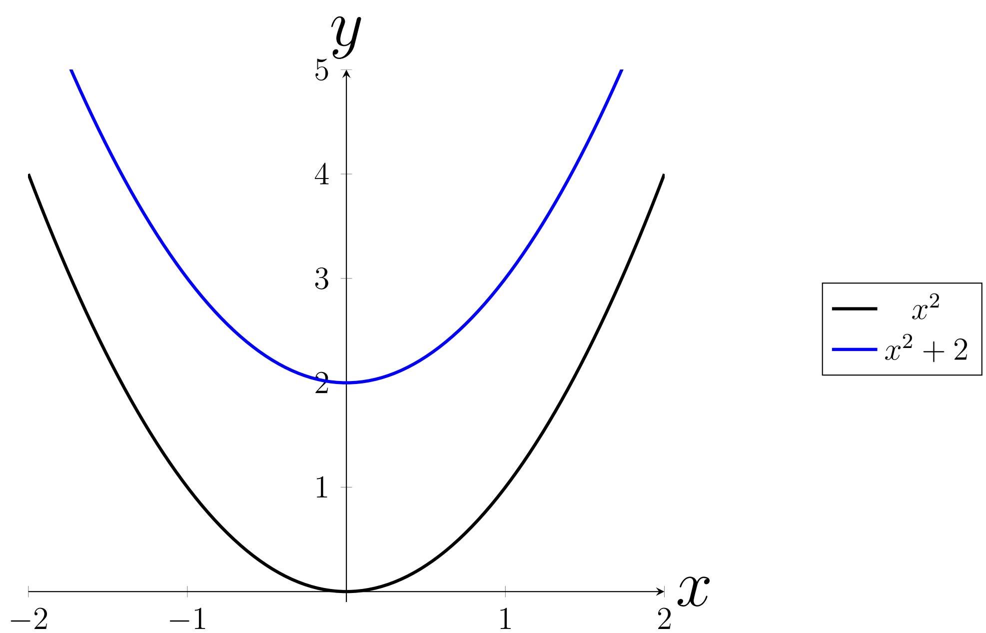
משפט 2.4 טרנספורמציות של הגרפים במערכת הצירים

תהי f פונקציה כלשהי. להלן מתואר מה יקרה עם הגרף $y=f(x)$ תחת הטרנספורמציות הבאות:

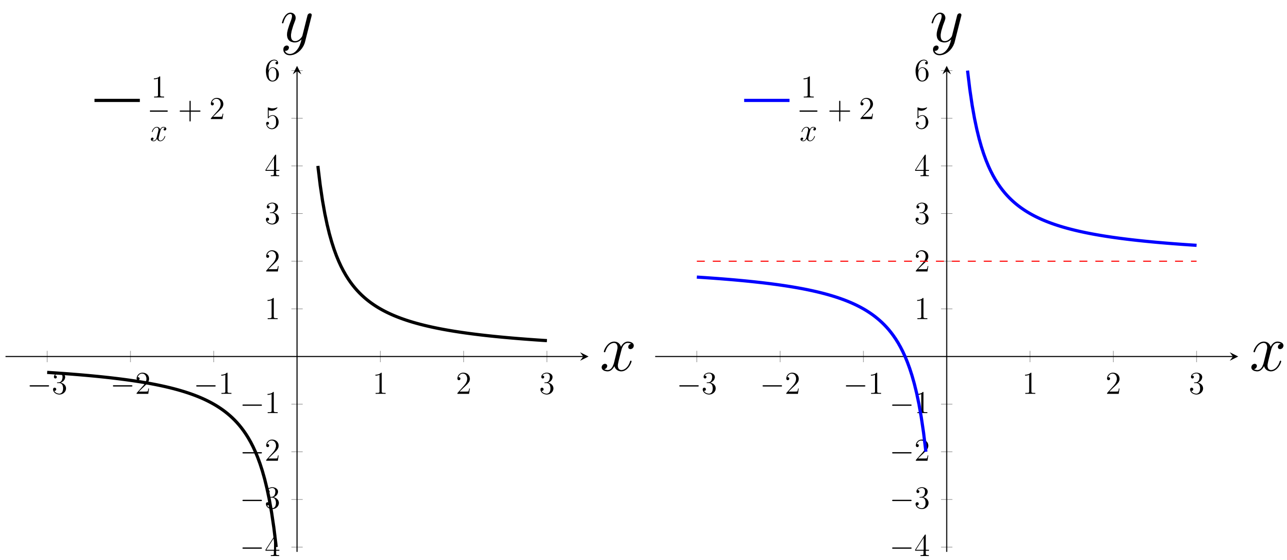
1	$f(x)+a$	הזזת הגרף ב- $\|a\|$ יחידות למעלה אם $a>0$ או למטה אם $a<0$.
2	$f(x+a)$	הזזת הגרף ב- $\|a\|$ יחידות שמאלה אם $a>0$ או ימינה אם $a<0$.
3	$-f(x)$	היפוך של הגרף לעומת ציר ה- x (שיקוף הגרף ביחס לציר ה-x).
4	$f(-x)$	היפוך של הגרף לעומת ציר ה- y (שיקוף הגרף ביחס לציר ה-y).
5	$k\cdot f(x)$	$(k>0)$ מתיחה, אם $k>1$, או כיווץ, אם $0<k<1$, של הגרף בכיוון של ציר ה- y.
6	$f(k\cdot x)$	$(k>0)$ כיווץ, אם $k>1$, או מתיחה, אם $0<k<1$, של הגרף בכיוון של ציר ה- x.
7	$\|f(x)\|$	שיקוף של חלקי הגרף הנמצאים מתחת לציר ה-x לעומת ציר ה- x

החלפת חלק הגרף הנמצא משמאל לציר y בשיקופו של החלק הימין של הגרף לעומת ציר ה- y	$f(\|x\|)$	**8**
החלפת חלק הגרף הנמצא מימין לציר y לשיקוף של החלק השמאלי של הגרף לעומת ציר ה- y	$f(-\|x\|)$	**9**
שיקוף לעומת ישר $y = a$ של חלקי הגרף הנמצאים מתחת לישר זה	$\|f(x) - a\| + a$	**10**
ההחלפת החלק הגרף הנמצא משמאל לישר $x = a$ לשיקוף לעומת ישר זה של חלק הגרף אשר מימין לישר $x = a$	$f(\|x - a\| + a)$	**11**

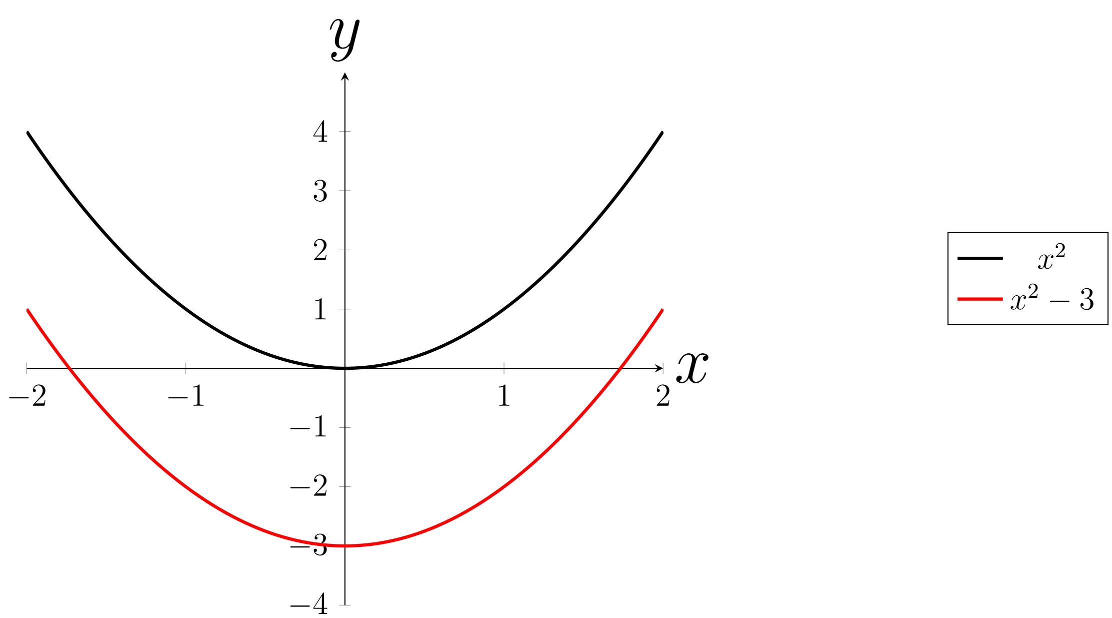
דוגמה 2.12



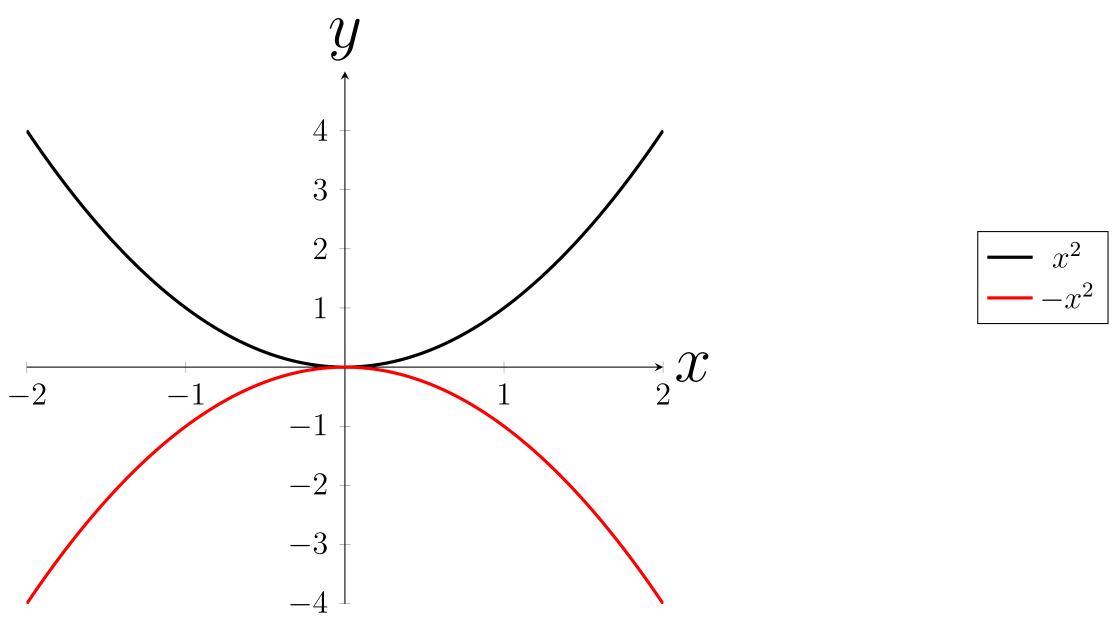
דוגמה 2.13



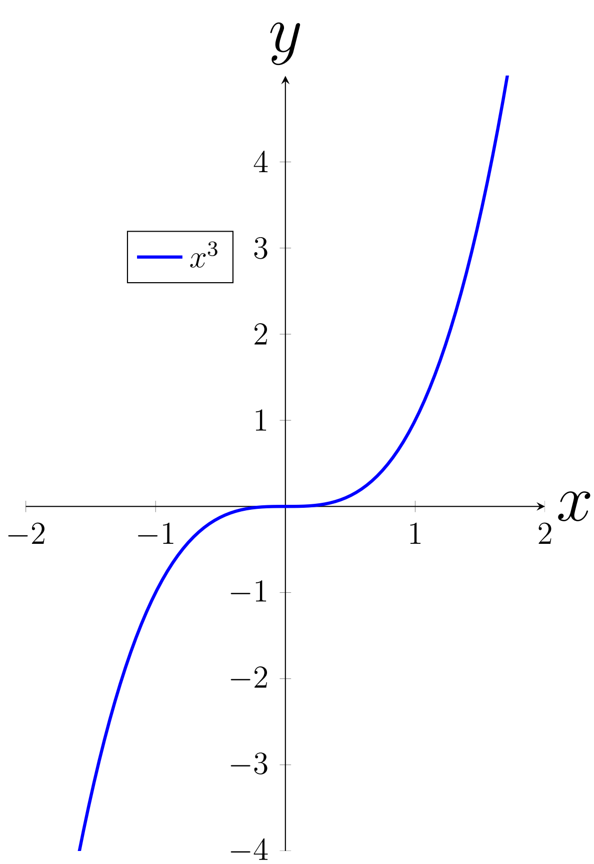
דוגמה 2.14

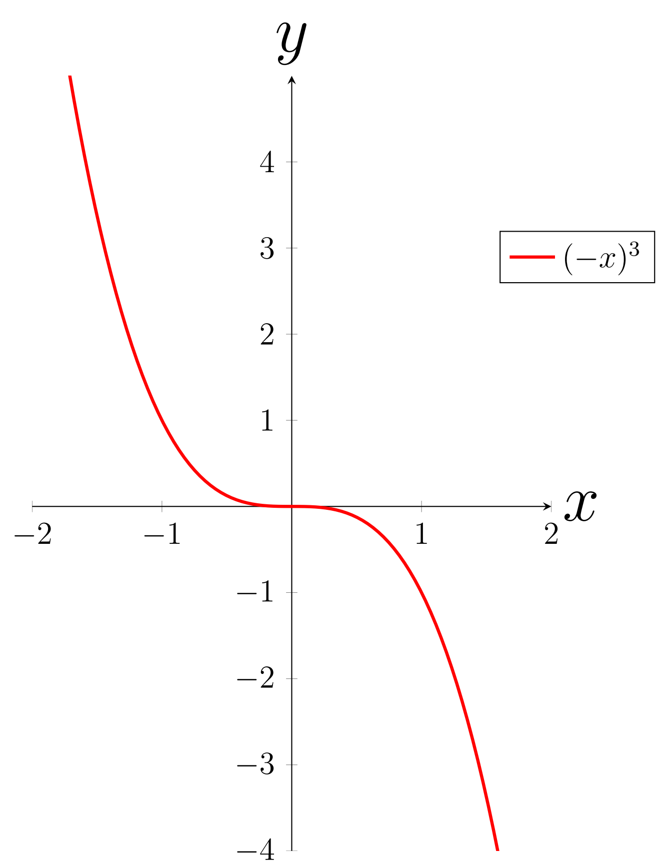


דוגמה 2.15

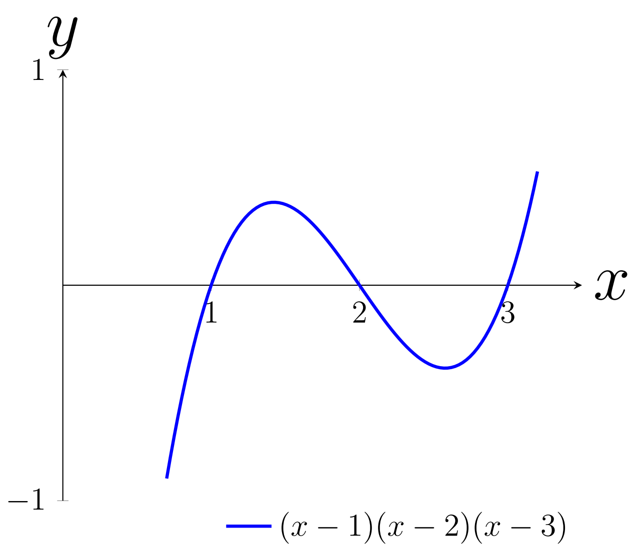


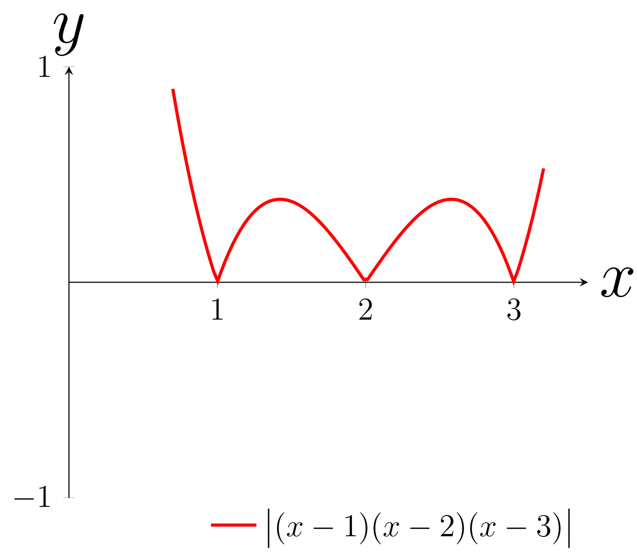
דוגמה 2.16



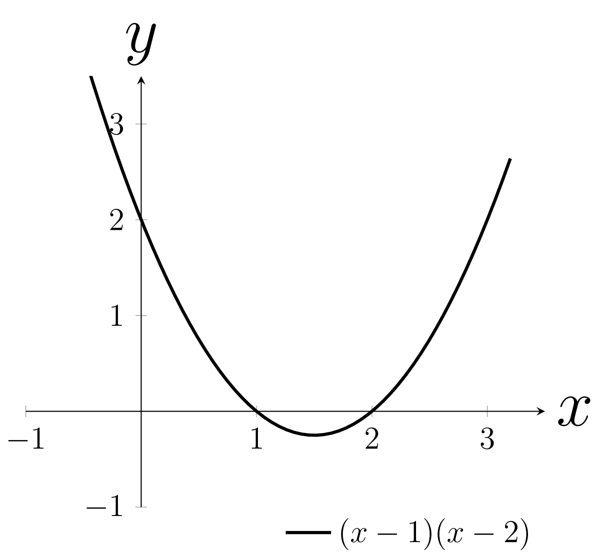


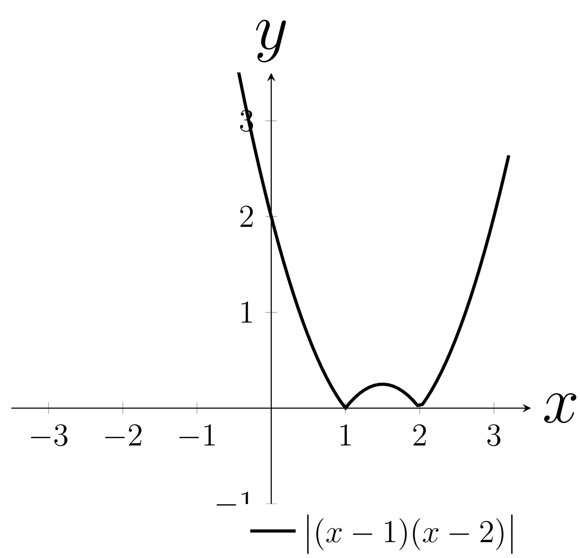
דוגמה 2.17



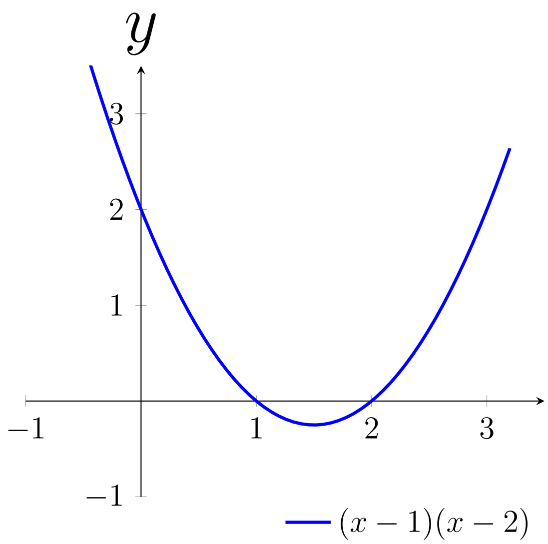


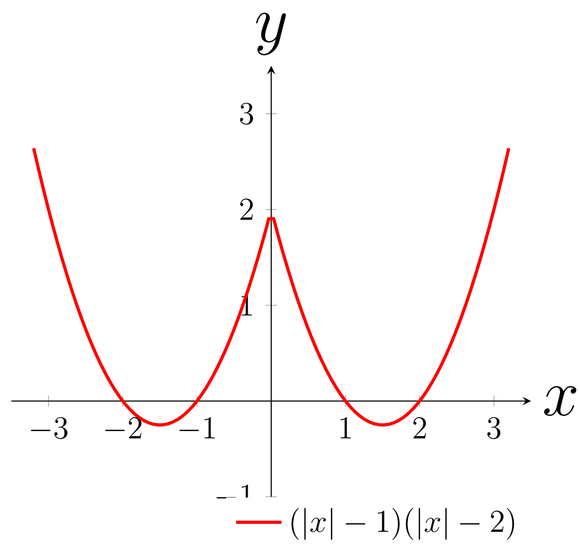
דוגמה 2.18



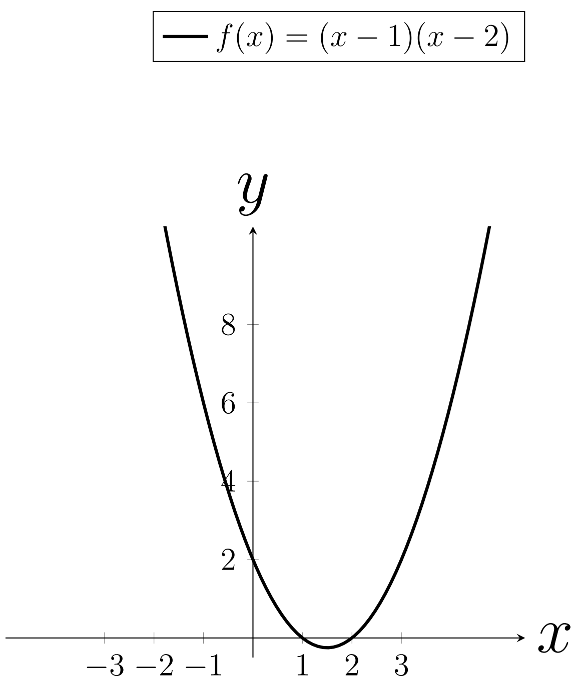


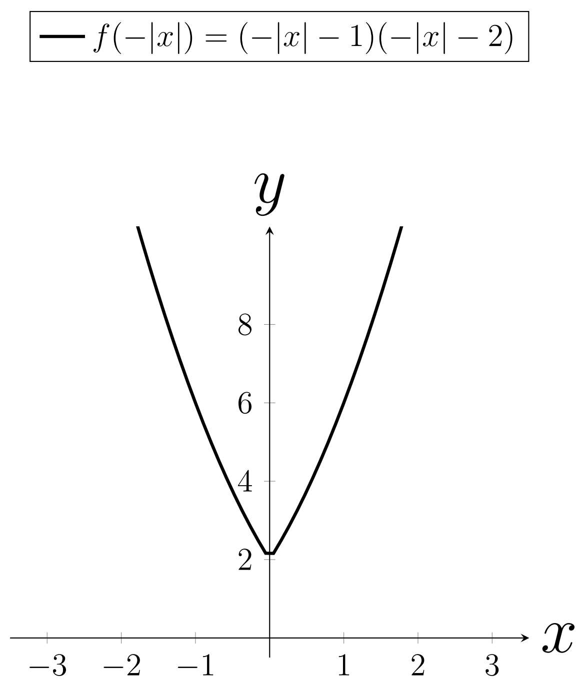
דוגמה 2.19



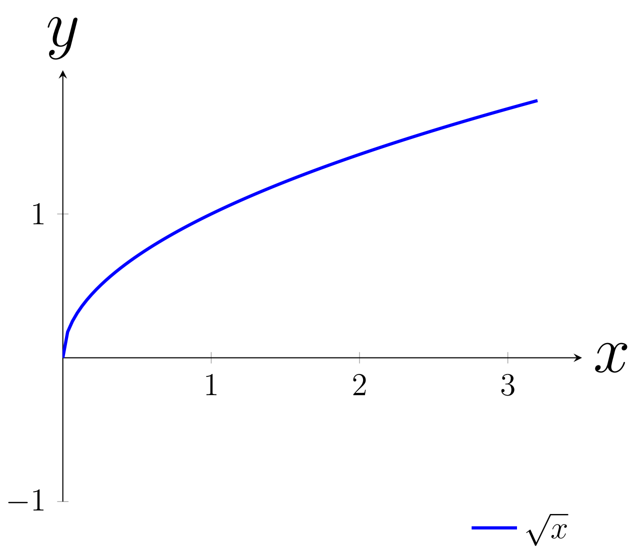


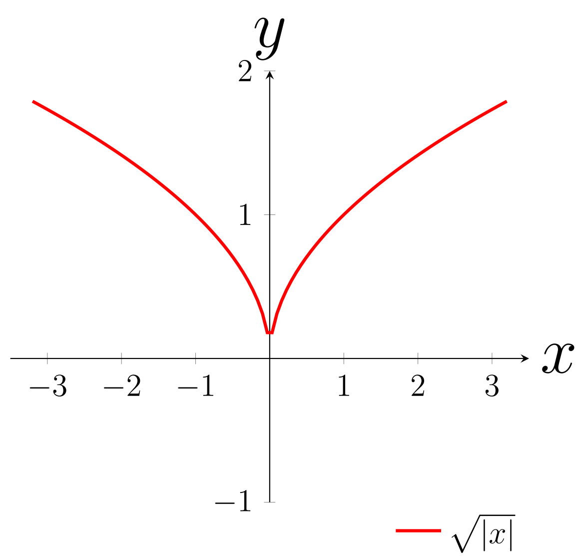
דוגמה 2.20





דוגמה 2.21





2.11 העשרה*

משפט 2.5 משפט החילוק

יהיו $f(x)$, $g(x)$ פולינומים כך ש- $\deg(f) \leq \deg(g)$. קיימים פולינומים יחידים, $q(x)$, $r(x)$, כך ש-

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x)$$

כאשר $\deg(r) \leq \deg(f)$.

הוכחה:

<u>יחידות</u>

נוכיח יחידות. נניח כי

$$g(x) = q_1(x)f(q) + r_1(x)$$

כאשר $\deg(r_1) < \deg(f)$ ו-

$$g(x) = q_2(x)f(q) + r_2(x)$$

כאשר $\deg(r_2) < \deg(f)$. ניקח את החיסור ונקבל

$$(q_1(x) - q_2(x))\, f(x) = r_2(x) - r_1(x)\ . \qquad (*)$$

$\deg(r_1) < \deg(f)$ ו- $\deg(r_2) < \deg(f)$ לכן $\deg(r_2 - r_1) < \deg(f)$.

לכן, כיוון שלפי $(*)$ $\deg(r_2 - r_1) = \deg\Big((q_1(x) - q_2(x))\, f(x) \Big)$, אז נקבל

$$\deg\Big((q_1(x) - q_2(x))\, f(x) \Big) < \deg(f)\ .$$

זה מתקיים אם ורק אם $q_1(x) - q_2(x)$ פולינום האפס, לכן $q_1(x) = q_2(x)$, ולכן גם $r_1(x) = r_2(x)$.

■

משפט 2.6 משפט השארית

השארית המתקבלת לאחר חילוק של $g(x)$ ב- $(x-k)$ היא $g(k)$ לכל מספר ממשי k.

הוכחה: לפי משפט החילוק, $g(x)=q(x)(x-k)+r(x)$ כאשר $\deg(r)<\deg(x-k)$, כאשר $\deg(x-k)=1$, לכן $\deg(r)<1$. ז"א $r(x)$ מספר קבוע שנסמן C. לפיכך

$$g(x)=q(x)(x-k)+C\ .$$

נציב $x=k$ ונקבל $g(k)=C$, לכן

$$g(x)=q(x)(x-k)+g(k)\ .$$

■

משפט 2.7 משפט גורם של פולינום

יהי $f(x)$ פולינום.
$g(k)=0$ אם ורק אם $(x-k)$ גורם של הפולינום.

הוכחה: לפי משפט השארית,

$$f(x)=q(x)(x-k)+f(k)\ .$$

מכאן $f(k)=0$ אם"ם קיים פולינום $q(x)$ כך ש- $f(x)=q(x)(x-k)$.
ז"א $f(k)=0$ אם"ם $(x-k)\mid f(x)$,
ז"א $f(k)=0$ אם"ם $(x-k)$ גורם של $f(x)$.

■

דוגמה 2.22

נתונה $g(x)=x^n-1$. מצאו אחת הגורמים ליניאריים שלה.

פתרון:
נשים לב כי $g(1)=0$ ולכן $x-1$ הוא גורם ליניארי של $g(x)$. ע"י חילוק ארוך נקבל

$$\frac{x^n-1}{x-1}=(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^2+x+1\right)\ .$$

■

הגדרה 2.6 ריבוי אלגברי של שורש

יהי $g(x)$ פולינום. נניח כי $g(x)$ מתפרק לגורמים ליניאריים בצורה

$$g(x)=(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}(x-x_3)^{m_3}\ldots\ .$$

אומרים כי הריבוי אלגברי של השורש x_1 הוא m_1, הריבוי אלגברי של השורש x_2 הוא m_2, וכו'.

אם הריבוי אלגברי של שורש של פולינום הוא $m=1$ אז אומרים כי השרוש הוא **שורש פשוט**.

אם הריבוי אלגברי של שורש של פולינום הוא $m > 1$ אז אומרים כי השרוש הוא **שורש חוזר**.

משפט 2.8 משפט היסודי של אלגברה (גאוס)

יהי $P(x)$ פולינום מסדר n. אז קיים פירוק מצורה

$$P(x) = a(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_k)^{m_k} Q(x)$$

כאשר $Q(x)$ פולינום מסדר m שאין לו שורשים ממשיים, ו- $m_1+m_2+\cdots+m_k+m = n$ ו- $x_1, x_2, \dots, x_k$ שושרים ממשיים שונים של $P(x)$.