מחלקה למדעי המחשב

30/04/24 כ"ב בניסן תשפ"ד
$09:10 - 12:10$

אלגברה ליניארית 1 למדמ"ח

מועד א'

מרצים: ד'ר ירמיהו מילר, ד'ר מרינה ברשדסקי, ד'ר זהבית צבי.

תשפ"ד סמסטר א'

השאלון מכיל 11 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט $A4$), מצורפים לשאלון.

אחר / הערות יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
- סדר התשובות אינו משנה, אך יש לרשום ליד כל תשובה את מספרה.
- הסבר היטב את מהלך הפתרון.
- יש לציין את השאלות שעניתם עליהן בתחילת המחברת.

==

שאלה 1 (25 נקודות)

במרחב $\mathbb{R}^{2\times 2}$ נתונים הווקטורים הבאים:

$$u_1=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\ ,\quad u_2=\begin{pmatrix}1&3\\k-3&2\end{pmatrix}\ ,\quad u_3=\begin{pmatrix}1&k\\1&-2k+8\end{pmatrix}\ ,\quad u_4=\begin{pmatrix}1&1\\k^2-1&k^2-3\end{pmatrix}\ ,$$

א) (5 נקודות) לאילו ערכי הפרמטר k הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ בת"ל?

ב) (5 נקודות) לאילו ערכי הפרמטר k הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ פורשת את $\mathbb{R}^{2\times 2}$?

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית :

ג) (5 נקודות)
תהיינה $A,B,C\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ו- $A,B,C\neq 0_{n\times n}$ כאשר $0_{n\times n}$ מטריצה האפס של $\mathbb{F}^{n\times n}$.
אם $AB=AC$ אז $B=C$.

נתונה הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ של ווקטורים במרחב ווקטורי $\mathbb{R}^3$.
הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

ד) (5 נקודות)
אם הווקטורים $\{u_1,u_2,u_3\}$ בת"ל אז הווקטורים $\{u_1,u_2\}$ בת"ל.

ה) (5 נקודות)
אם הווקטורים $\{u_1,u_2\}$ בת"ל אז הווקטורים $\{u_1,u_2,u_3\}$ בת"ל.

שאלה 2 (25 נקודות)

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-k-4&2k-k^2\\-2&k+2&6-2k\end{pmatrix}$.

א) (10 נקודות) לכל ערך של k מצאו את המימד והבסיס של $\mathrm{col}(A)$.

ב) (3 נקודות) לכל ערך של k מצאו את המימד של $\mathrm{Nul}(A)$ (אין צורך למצוא את הבסיס).

ג) (3 נקודות) עבור אילו ערכי k למערכת $AX=0$ קיים פתרון לא טריוויאלי? נמקו את תשובתכם.

תהיינה $A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

ד) (3 נקודות) אם $A^2-2A-3I=0$ אז A הפיכה.

ה) (3 נקודות) אם קיים $X\neq 0\in\mathbb{R}^n$ כך ש- $(AB)X=0$ אז $|A|=0$ או $|B|=0$.

ו) **(3 נקודות)** אם $AB = AC$ ו- $A \neq 0$ אז $|B| = |C|$.

שאלה 3 (25 נקודות)

נתונים וקטורים ב- $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4-2a \\ a \end{pmatrix} , \quad u_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 2 \\ 4+b \end{pmatrix} .$$

א) מצאו את ערכי a עבורם u_3 שייך לפרישה הלינארית של u_1, u_2.

ב) עבור כל אחד מערכי a שמצאת בסעיף א' רשמו את u_3 כצירוף ליניארי של u_1 ו- u_2.

ג) מצאו את ערכי a, b עבורם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ היא בסיס של $\mathbb{R}^4$. נמקו את תשובתכם.

ד) תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הוכיחו כי אם A הפיכה ו- $A+B$ הפיכה אז

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(A+B)^{-1} .$$

שאלה 4 (25 נקודות)

א) פתרו את המערכת הבאה מעל $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} 2iz_1 + 3z_2 &= 2+i \\ z_1 - iz_2 &= 1-i \ . \end{aligned}$$

ב) נתונה המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$. עבור אילו ערכי הפרמטרים a, b המטריצה הפיכה.

ג) נתון כי $A^4 + A = 0$ ו- A מטריצה הפיכה מסדר 6×6. מצאו את $|A|$.

ד) הוכיחו או הפריכו: אם $A^3 + A = 0$ ו- A מטירצה מסדר 3×3 אז A לא הפיכה.

ה) יהי V מרחב וקטורי בעל מימד n. נתון ש $u_1, \dots, u_n$ בסיס של V אולם $w \notin \text{span}\{u_2, \dots, u_n\}$.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
$w \in \text{span}\{u_1\}$.

ו) הקבוצה $\{w, u_2, \dots, u_n\}$ מהווה בסיס ל V.

שאלה 5 (25 נקודות)

תהי $T:\mathbb{R}_{\leq 2}[x]\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ העתקה לינארית שמוגדרת

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=\begin{pmatrix} 3a+2b & 2a+4b+10c \\ a+2b+5c & 4a+4b+5c \end{pmatrix}$$

א) (5 נקודות) מצאו את הבסיס והמימד של $\mathrm{Im}(T)$.

ב) (5 נקודות) מצאו את הבסיס והמימד של $\ker(T)$.

ג) (7 נקודות) יהי

$$B=\left\{1+x,x+x^2,2-x^2\right\}$$

בסיס של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ ויהי

$$C=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

בסיס של $\mathbb{R}^{2\times 2}$. מצאו את המטריצה המייצגת של ההעתקה $[T]_C^B$, לפי הבסיס B והבסיס C.

נניח כי $\{u_1,\cdots,u_k\}\in\mathbb{R}^n$ קבוצת ווקטורים בת"ל ונניח ש $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$.
הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

ד) (4 נקודות) אם $\{Au_1,\cdots,Au_k\}$ בת"ל אז גם $\{u_1,\cdots,u_k\}$ בת"ל.

ה) (4 נקודות) אם $\{u_1,\cdots,u_k\}$ בת"ל אז גם $\{Au_1,\cdots,Au_k\}$ בת"ל.

פתרונות

שאלה 1

א) נשתמש באיזומורפיזם הטבעי לקבלת הווקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\4\end{pmatrix},\quad u_2=\begin{pmatrix}1\\3\\k-3\\2\end{pmatrix},\quad u_3=\begin{pmatrix}1\\k\\1\\-2k+8\end{pmatrix},\quad u_4=\begin{pmatrix}1\\1\\k^2-1\\k^2-3\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&3&k&1\\1&k-3&1&k^2-1\\4&2&8-2k&k^2-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{R_3\to R_3-R_1\\R_4\to R_4-4R_1}]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&k-2&-1\\0&k-4&0&k^2-2\\0&-2&4-2k&k^2-7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4\to R_4+2R_2]{R_3\to R_3-(k-4)R_2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&k-2&-1\\0&0&-(k-4)(k-2)&(k-2)(k+3)\\0&0&0&(k-3)(k+3)\end{pmatrix}$$

ב) הקבוצה בת"ל אס"ם $k\neq 2,4$. (במדורגת המתקבלת יש מוביל בכל עמודה).

ג) עבור $k\neq 2,4,3,-3$ הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ פורשת את $\mathbb{R}^{2\times 2}$. (במדורגת המתקבלת יש מוביל בכל שורה). $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$.

$$AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\quad AC=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

הרי $AB=AC$ אבל $B\neq C$.

ד) טענה נכונה. נוכיח דרך השלילה:
נניח ש- $\{u_1,u_2,u_3\}$ בת"ל ו- $\{u_1,u_2\}$.
$\Leftarrow$ קיימים סקלרים t_1,t_2 שלא כולם אפסים כך ש-

$$t_1u_1+t_2u_2=\bar{0}$$

כאשר $\bar{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ווקטור האפס של $\mathbb{R}^3$. נוסיף $0\cdot u_3$:

$$t_1u_1+t_2u_2+0\cdot t_3=\bar{0}\ .$$

ז"א קיים צירוף לינארי של הווקטורים $\{u_1,u_2,u_3\}$ עם מקדמים שלא כולם אפסים שווה לווקטור האפס.
$\Leftarrow$ $\{u_1,u_2,u_3\}$ ת"ל,
בסתירה לכך ש- $\{u_1,u_2,u_3\}$ בת"ל.

ה) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\quad u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\ ,u_3=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

הרי $\{u_1,u_2\}$ בת"ל ו- $\{u_1,u_2,u_3\}$ ת"ל בגלל ש- $u_3=2u_1$.

שאלה 2

א)

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-k-4&2k-k^2\\-2&k+2&6-2k\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3+2R_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-k-6&-k^2+2k-3\\0&k+6&12-2k\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-k-6&-k^2+2k-3\\0&0&9-k^2\end{pmatrix}$$

אם $k=\pm3$ אז עמודה 1 ועמודה 2 מובילות. לפי זה, עבור $k=3$ בסיס של $\mathrm{col}(A)$ הינו:

$$B_{\mathrm{col}(A)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-k-4\\k+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-7\\5\end{pmatrix}\right\}$$

ו- $\dim(\mathrm{col}(A))=2$.

עבור $k=-3$ בסיס של $\mathrm{col}(A)$ הינו:

$$B_{\mathrm{col}(A)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-k-4\\k+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

ו- $\dim(\mathrm{col}(A))=2$.

אם $k=-6$
אז עמודה 1 ועמודה 3 מובילות. לפי זה, עבור $k=-6$ בסיס של $\mathrm{col}(A)$ הינו:

$$B_{\mathrm{col}(A)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2k-k^2\\6-2k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-24\\-6\end{pmatrix}\right\}$$

ו- $\dim(\text{col}(A)) = 2$.

לכל $k \neq \pm 3, 6$ ל- A יש 3 עמודות מובילות. כך כל העמודות של A מהוות בסיס של $\text{col}(A)$ ו- $\dim(\text{col}(A)) = 3$.

ב) משפט הדרגה: $\dim\left(\text{col}(A)\right) + \dim\left(\text{nul}(A)\right) = n = 3$. לכן עבור $k = \pm 3$:

$$2 + \dim\left(\text{nul}(A)\right) = 3 \quad \Rightarrow \quad \dim\left(\text{nul}(A)\right) = 1 \ .$$

עבור $k = -6$:

$$2 + \dim\left(\text{nul}(A)\right) = 3 \quad \Rightarrow \quad \dim\left(\text{nul}(A)\right) = 1 \ .$$

עבור $k \neq \pm 3, 6$: עבור $k = \pm 3$:

$$3 + \dim\left(\text{nul}(A)\right) = 3 \quad \Rightarrow \quad \dim\left(\text{nul}(A)\right) = 0 \ .$$

ג) נניח כי A מטריצה ריבועית. למערכת $AX = 0$ יש פתרון לא טריוויאלי אם $\dim\left(\text{Nul}(A)\right) > 0$. לפיכך יש פתרון לא טריוויאלי אם $k = \pm 3$ או אם $k = 6$.

ד) טענה נכונה. הוכחה:

$$A^2 - 2A - 3I = 0 \quad \Rightarrow \quad A^2 - 2A = 3I \quad \Rightarrow \quad A(A - 2I) = 3I \quad \Rightarrow \quad |A||A - 2I| = 3^n \ .$$

נניח כי A לא הפיכה. ז"א $|A| = 0$ ואז נקבל $0 = 3^n$. סתירה.

ה) אם למערכת $(AB)X = 0$ קיים פתרון $X \neq 0$ אז המטריצה AB לא הפיכה. ז"א

$$|AB| = 0 \quad \Rightarrow \quad |A| \cdot |B| = 0 \ .$$

לכן בהכרח $|A| = 0$ או $|B| = 0$.

ו) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

ז"א $AB = AC$.
$|B| = 1$, $|C| = 2$, ז"א $|B| \neq |C|$.

שאלה 3

א)

$$u_3 = xu_1 + yu_2 \ .$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 6 & 4-2a \\ 3 & 3 & a \end{array}\right) \xrightarrow[R_4\to 2R_4-3R_1]{\substack{R_2\to 2R_2-R_1 \\ R_3\to R_3+R_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 8 & 5-2a \\ 0 & 0 & 2a-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_2+2R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 3-2a \\ 0 & 0 & 2a-3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4\to R_4+R_3} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 3-2a \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון אם $a=\frac{3}{2}$. לכן עבור $a=\frac{3}{2}$ הווקטור u_3 שייך לפרישה לינארית של u_1,u_2.

ב)

$$u_3 = xu_1 + yu_2 \ .$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1\to \frac{1}{2}R_2]{R_2\to \frac{-1}{4}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{4}$. לפיכך עבור $a=\frac{3}{2}$ מתקיים:

$$u_3 = \frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_2 \ .$$

ג)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & b \\ -2 & 6 & 4-2a & 2 \\ 3 & 3 & a & b+4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to 2R_4-3R_1]{\substack{R_2\to 2R_2-R_1 \\ R_3\to R_3+R_1}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 2b-2 \\ 0 & 8 & 5-2a & 4 \\ 0 & 0 & 2a-3 & 2b+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+2R_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 2b-2 \\ 0 & 0 & 3-2a & 4b \\ 0 & 0 & 2a-3 & 2b+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\to R_4+R_3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 2b-2 \\ 0 & 0 & 3-2a & 4b \\ 0 & 0 & 0 & 6b+2 \end{pmatrix}$$

עבור $b\neq -\frac{1}{3}$, $a\neq \frac{3}{2}$, כל העמודות מובילות לכן $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ בת"ל.

$\dim(\mathbb{R}^4)=4$ לכן $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ מהווים בסיס של $\mathbb{R}^4$.

ד) נכפיל מצד ימין ב- $A+B$:

$$(A+B)^{-1}(A+B)=A^{-1}(A+B)-A^{-1}B(A+B)^{-1}(A+B)=I_{n\times n}+A^{-1}B-A^{-1}BI_{n\times n}=I_{n\times n}\ .$$

שאלה 4

א)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2i & 3 & 2+i \\ 1 & -i & 1-i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to 2iR_2-R_1} \begin{pmatrix} 2i & 3 & 2+i \\ 0 & -1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to -R_2} \begin{pmatrix} 2i & 3 & 2+i \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_1\to\frac{-i}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3i}{2} & -i+\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1+\frac{3i}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-i \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$$

פתרון: $(z_1,z_2)=(2-i,-i)$.

ב)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-aR_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{vmatrix}$$

עבור $a\neq b$ המטריצה תהיה הפיכה.

ג)

$$A^4+A=0 \quad\Rightarrow\quad A^4=-A \quad\Rightarrow\quad |A^4|=(-1)^6|A| \quad\Rightarrow\quad |A|^4=|A|$$

A הפיכה לכן $|A|\neq 0$ לכן אפשר לחלק ב- $|A|$:

$$|A|^4=|A| \quad\Rightarrow\quad |A|^3=1 \quad\Rightarrow\quad |A|=1\ .$$

ד)

$$A^3+A=0 \quad\Rightarrow\quad A^3=-A \quad\Rightarrow\quad |A^3|=|-A| \quad\Rightarrow\quad |A|^3=-|A|\ .$$

נניח כי A הפיכה. אז $|A|\neq 0$ ז"א קיים $\dfrac{1}{|A|}$. אז נקבל

$$|A|^2=-1\ .$$

בסתירה לכך ש- $|A|^2$ חיובי.

ה) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $V=\mathbb{R}^2$,

$$B=\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\ ,$$

ו- $w=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. נשים לב:

$$w\in\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

אבל $w\notin\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ וגם $w\notin\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

ו) הטענה נכונה.

הוכחה:

$\{u_2,\dots,u_n\}$ קבוצה בת"ל (נתון).

$w\notin\text{span}\{v_2,\dots,v_n\}$.

לכן $\{w,u_2,\dots,u_n\}$ קבוצה בת"ל.

מאחר ו- $\dim V=n$ כל קבוצה בת"ל בעלת n ווקטורים מהוה בסיס.

שאלה 5

א) המטריצה המייצגת הסטנדרטית של ההעתקה הינה

$$A=\begin{pmatrix}| & | & |\\ [T(e_1)]_E & [T(e_2)]_E & [T(e_3)]_E\\ | & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&0\\2&4&10\\1&2&5\\4&4&5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3&2&0\\2&4&10\\1&2&5\\4&4&5\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to 3R_4-4R_1]{\substack{R_2\to 3R_2-2R_1\\ R_3\to 3R_3-R_1}}\begin{pmatrix}3&2&0\\0&8&30\\0&4&15\\0&4&15\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to 2R_4-R_2]{R_3\to 2R_3-R_2}\begin{pmatrix}3&2&0\\0&8&30\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

בסיס של $\text{col}(A)$ הינו

$$B_{\text{col}(A)}=\left\{\begin{pmatrix}3\\2\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\2\\4\end{pmatrix}.\right\}$$

ו- $\dim\left(\text{col}(A)=3\right)$. לכן בסיס של $\text{Im}(T)$ הינו

$$B_{\text{Im}(T)}=\left\{\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&4\\2&4\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim\left(\text{Im}(T)\right)=2$.

ב)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 4 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: $(x,y,z) = \left(\frac{5}{2}z, -\frac{15}{4}z, z\right)$

$$B_{\text{Nul}(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_{\text{Ker}(T)} = \left\{10 - 15x + 4x^2\right\} \ .$$

.$\dim\left(\ker(T)\right) = 1$

ג)

$$[T(b_1)]_E = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \ , \quad [T(b_2)]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \ , \quad [T(b_3)]_E = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \ ,$$

$$[T(b_1)]_C = 8 \cdot c_1 - 5c_2 + 3c_3 - c_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_C$$

$$[T(b_2)]_C = 9 \cdot c_1 - 2c_2 + 7c_3 - 12c_4 = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 7 \\ -12 \end{pmatrix}_C$$

$$[T(b_3)]_C = 3 \cdot c_1 - 6c_2 - 3c_3 + 12c_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix}_C$$

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(b_1)]_C & [T(b_2)]_C & [T(b_3)]_C \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 3 \\ -5 & -2 & -6 \\ 3 & 7 & -3 \\ -1 & -12 & -12 \end{pmatrix} \ .$$

ד) טענה נכונה. הסבר:

נניח ש- $\{Au_1, \dots, Au_k\}$ בת"ל.

הקבוצה בת"ל לכן ווקטור האפס לא בקבוצה $\{Au_1, \dots, Au_k\}$. לכן $A \neq 0$.

נוכיח ש- $\{u_1, \cdots, u_k\}$ בת"ל דרך השלילה.

נניח כי $\{u_1, \cdots, u_k\}$ ת"ל.

ז"א קיימים סקלרים שלא כולם אפסים כך ש- $t_1u_1 + \cdots + t_ku_k = \bar{0}$.

ז"א קיימים סקלרים שלא כולם אפסים כך ש-

$$A(t_1u_1 + \cdots + t_ku_k) = A\bar{0} \quad \Rightarrow \quad t_1Au_1 + \cdots t_kAu_k = \bar{0}$$

ז"א $\{Au_1, \dots, Au_k\}$ ת"ל.

בסתירה לכך ש- $\{Au_1, \dots, Au_k\}$ בת"ל.

ה) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$\left\{u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} .$$

$u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$ קבוצת בת"ל.

תהי $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ מטריצה האפס: $A = 0$. אז הקבוצה $\left\{Au_1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, Au_2 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$ ת"ל.