15/02/2023
09 : 00 – 12 : 00

חדו"א 1

מועד ב'

מרצה:

תשע"ג סמסטר א'

השאלון מכיל עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

==

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דף נוסחאות מצורף לשאלון (עמודים בפורמט $A4$).

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות בלבד מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** בלבד מתוך **שתיים**.

==

שאלות 1 ו-2 חובה!

שאלה 1 (21 נקודות)

א) (18 נקודות)
חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = (x^2 - 7)\, e^{x/3}$ (תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, זוגיות, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וציירו את סקיצת הגרף של הפונקציה.

ב) (3 נקודות)
שרטטו את הפונקציה $f(|x|)$.

שאלה 2 (24 נקודות)

פתרו 2 מתוך 3 האינטגרלים הבאים:

1) (12 נק') $\int_0^{\pi/2} 8x\, \sin^2 x\, dx$

2) (12 נק') $\int \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\, dx$

3) (12 נק') $\int \frac{x-2}{x^3+4x^2}\, dx$

ענו על 3 מתוך 4 השאלות 3-6:

שאלה 3 (15 נקודות)

א) (7 נק') רשמו את פולינום מקלורן מסדר 2 של הפונקציה $\begin{cases} x = e^{2t} - 1 \\ y = t^2 + 2t + 2 \end{cases}$.

ב) (8 נק') הוכיחו כי למשוואה $3x + \arctan(x) = 2$ קיים שורש ממשי יחיד.

שאלה 4 (15 נקודות)

א) (12 נק') חשבו את הגבולות הבאים:

1) (6 נק') $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}\right)^2$

2) (6 נק') $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}\right)^x$

ב) (3 נק') שרטטו את גרף הפונקציה $y=e^{\ln\left(x^2-4x+3\right)}$.

שאלה 5 (15 נקודות)

א) (7 נק') חשבו את השטח החסום ע"י $y=3x$ ו $y=4-x^2$.

ב) (8 נק') חשבו את הנפח של הגוף המתקבל ע"י סיבוב סביב ציר ה-x של השטח החסום ע"י הקווים $y=2\sqrt{x}$ ו $y=2x$.

שאלה 6 (15 נקודות)

א) (10 נק') מצאו את משוואת המשיק ומשוואת הנורמל של הקו $x^2+y^2=4$ בנקודה שבה $x=1$ ו $y>0$.

ב) (5 נק') חשבו את האינטגרל $\int_1^\infty \min\left(\frac{1}{x^2},\frac{1}{4}\right)\,dx$.

ענו על 1 מתוך 2 השאלות 7-8:

שאלה 7 (10 נקודות)

הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים

$$\frac{x}{1+x^2}<\arctan x<x\ .$$

שאלה 8 (10 נקודות)

למלבן $OABC$ קודקוד O בראשית הצירים, הקודקודים A ו- C הם על צירי המערכת והקודקוד B נמצא על הקו $y=\frac{3}{x^2}+x^2$. הוכיחו ששטחו של המלבן $OABC$ גדול מ- $\sqrt{15}$.

1 פתרונות

שאלה 1 **(21 נקודות)**

סעיף א **(15 נקודות)**

שלב 1 תחום הגדרה: $x \in \mathbb{R}$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(-\sqrt{7}, 0)$, $(\sqrt{7}, 0)$, $(0, -7)$.

x	$x < -\sqrt{7}$	$-\sqrt{7} < x < 0$	$0 < x < \sqrt{7}$	$x\sqrt{7}$
$f(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: אין.

שלב 4 אסימפטוטה אופקית:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-7)e^{x/3} = \infty.$$

ז"א אין אסימפטוטה אופקית ב $x = \infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2-7)e^{x/3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-7}{e^{-x/3}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-\frac{1}{3}e^{-x/3}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\frac{1}{9}e^{-x/3}} = \frac{2}{\frac{1}{9}e^{\infty/3}} = 0$$

ז"א $y = 0$ אסימפטוטה אופקית ב $x = -\infty$.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת: אין.

שלב 6 תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = \frac{1}{3}e^{x/3}(x-1)(x+7)\ .$$

נקודות קריטיות: $(1, -6 \cdot e^{1/3})$ ו- $\left(-7, \frac{42}{e^{7/3}}\right)$.

x	$x < -7$	$x = -7$	$-7 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	מקס	$\searrow$	מינימום	$\nearrow$

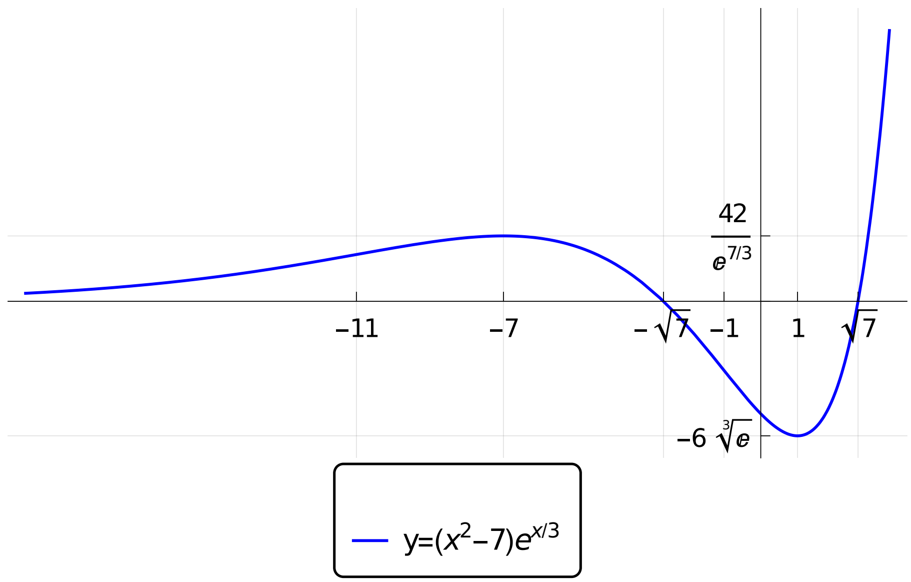
<u>שלב 7</u> תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{1}{9}e^{x/3}(x+1)(x+11)$$

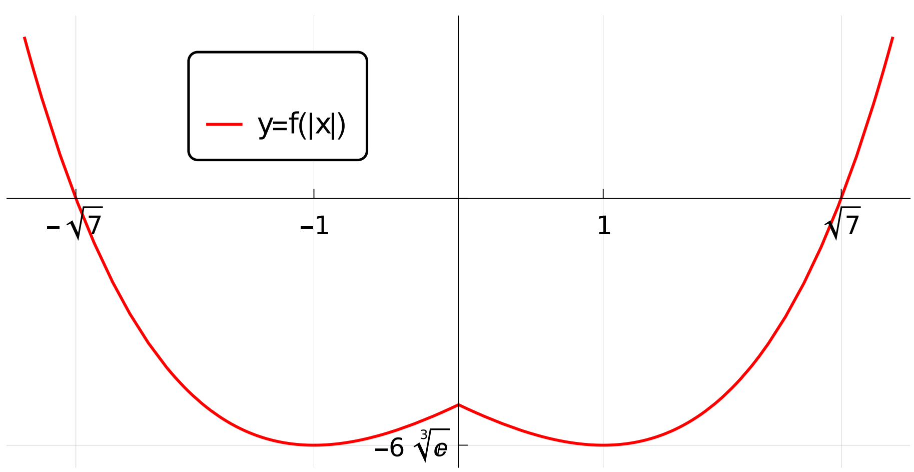
הנקודות $x=-1$ ו $x=-11$ חשודות לפיתול.

x	$x<-11$	$-11<x<-1$	$x>-1$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	קמורה $\uparrow$	קמורה $\downarrow$	קמורה $\uparrow$

<u>שלב 8</u> שרטוט:



סעיף ב)



שאלה 2 (24 נקודות)

חלק 1) $\int_0^{\pi/2} 8x\ \sin^2 x\, dx$.

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\int_0^{\pi/2} 8x\ \cdot \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\ = \int_0^{\pi/2} (4x\ - 4x\cos 2x)\ dx$$

$$= \left[2x^2\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 4x\cos 2x\, dx$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - \int_0^{\pi/2} 4x\cos 2x\, dx$$

$$u = 4x\ ,\quad \mathrm{v}' = \cos 2x\ ,\quad u' = 4\ ,\qquad \mathrm{v} = \frac{\sin 2x}{2}\ .$$

$$\frac{\pi^2}{2} - \int_0^{\pi/2} 4x\cos 2x\, dx = \frac{\pi^2}{2} - \left[4x\cdot\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 4\cdot\frac{\sin 2x}{2}\, dx$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - 2\left[x\cdot\sin 2x\right]_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} \sin 2x$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - 2\left[\frac{\pi}{2}\cdot\sin\pi - 0\cdot\sin(0)\right] + 2\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - \left[\cos(\pi) - \cos(0)\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + 2\ .$$

חלק 2) $I = \int \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\, dx$.

$$t = \frac{1}{x}\ ,\quad t' = -\frac{1}{x^2}\ ,$$

$$\int \cos(t)\cdot(-t')dx = -\int \cos t\,dt = -\sin t + C = -\sin\left(\frac{1}{x}\right) + C\ .$$

חלק 3)

$$\int \frac{x-2}{x^3+4x^2}\,dx = \int \frac{x-2}{x^2(x+4)}\,dx$$

$$\frac{x-2}{x^2(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+4} = \frac{Ax(x+4)+B(x+4)+Cx^2}{x^2(x+4)}\ .$$

$$x-2 = Ax(x+4)+B(x+4)+Cx^2 = (4A+B)x + 4B + (A+C)x^2\ .$$

לפי המקדמים של x^0:

$4B=-2 \Leftarrow B=-\frac{1}{2}$.

לפי המקדמים של x:

$4A+B=1 \Leftarrow A=\frac{3}{8}$.

לפי המקדמים של x^2:

$C=-A=-\frac{3}{8}$.

לכן

$$\frac{x-2}{x^2(x+4)} = -\frac{1}{2x^2} - \frac{3}{8(x+4)} + \frac{3}{8x}$$

$$\int \frac{x-2}{x^2(x+4)}\,dx = \int\left(-\frac{1}{2x^2} - \frac{3}{8(x+4)} + \frac{3}{8x}\right)dx = \frac{1}{2x} - \frac{3}{8}\ln|x+4| + \frac{3}{8}\ln|x| + C\ .$$

<u>שאלה 3</u> (15 נקודות)

סעיף א (7 נק') $\begin{cases} x = e^{2t}-1 \\ y = t^2+2t+2 \end{cases}$.

$$x=0 \qquad \Rightarrow \qquad t=0\ .$$

$$y(x=0) = y(t=0) = 2\ .$$

נגזור את הפונקציה $y(x)$:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1}{2}e^{-2t}(2t+2)\ .$$

בנקודה $t=0$:

$$y'_x(x=0) = y'_x(t=0) = 1\ .$$

$$y''_{xx} = \frac{1}{2}e^{-2t}\left(e^{-2t} - e^{-2t}(2t+2)\right) = -\frac{1}{2}e^{-4t}(2t+1)\ .$$

$$y''_{xx}(x=0) = y''_{xx}(t=0) = \frac{-1}{2} \ .$$

$$P_2(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 = 2 + x - \frac{x^2}{4} \ .$$

סעיף ב) (8 נק') נגדיר

$$f(x) = 3x + \arctan x - 2 \ .$$

התחום הגדרתה של f הוא כל x. f פונרציה אלמנטרית ולכן f רציפה וגזירה בכל x.

$$f(1) = 1 + \frac{\pi}{4} > 0 \ , \qquad f(-1) = -5 - \frac{\pi}{4} \ .$$

לפי משפט ערך הביניים קיימת $c \in (-1,1)$ שבה $f(c)=0$. נוכיח כי היא יחידה:

$$f' = 3 + \frac{1}{x^2+1} \ .$$

$f'(x) > 0$ לכל x, ז"א f עולה מונוטונית. לכן f חח"ע. כתוצאה הנקודה c יחידה.

שאלה 4

סעיף א)

חלק 1) (6 נק')

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}\right)^x &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+3}+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^x \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^x \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-1}\cdot\frac{2x-1}{x^2+3}\cdot x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-1}}\right]^{\frac{x(2x-1)}{x^2+3}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(2x-1)}{x^2+3}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+3}} \\
&= e^2 \ .
\end{aligned}$$

חלק 2) (6 נק')

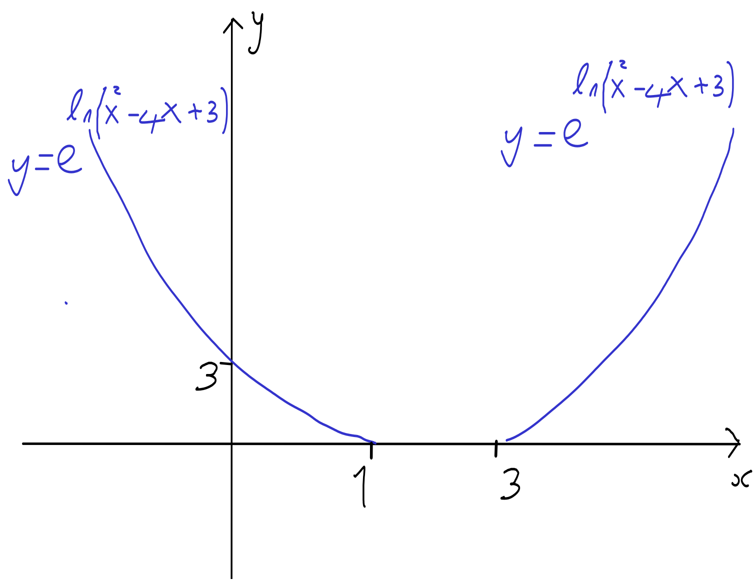
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}\right]\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{4\sin 4x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4\cos 2x}{16\cos 4x}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}\ .$$

לכן

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}\right)^2=\left(\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}\right]\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}\ .$$

סעיף ב)



<u>שאלה 5</u>

סעיף א) (7 נק')

נקודת חיתוך:

$$4-x^2=3x \qquad\Rightarrow\qquad x^2+3x-4=0 \qquad\Rightarrow\qquad (x+4)(x-1)=0$$

לכן הגרפים נחתכים ב $x = 1$, $x = -4$.

$$\int_{-4}^{1} \left(4 - x^2 - 3x\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right]_{-4}^{1} = \frac{125}{6} \ .$$

סעיף ב (7 נק')

הגרפים נחתכים ב $x = 0$ ו $x = 1$.

$$V = \pi \int_0^1 \left((2\sqrt{x})^2 - (2x)^2\right) dx = \pi \int_0^1 \left(4x - 4x^2\right) dx = \pi \left[2x^2 - \frac{4}{3}x^3\right]_0^1 = \pi \left[1 - \frac{4}{3}\right] = \frac{2\pi}{3} \ .$$

שאלה 6 (15 נקודות)

סעיף א (10 נק')

נציב $x = 1$ במשוואת הקו:

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad 1^2 + y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4 - 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{3}$$

שימו לב שנתון $y > 0$, ולכן הערך הנדרש הוא $y = \sqrt{3}$. בפרט, הנקודה הרצויה היא $(1, \sqrt{3})$.
נגזור את משוואת הקו:

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \left(x^2 + y^2\right)' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y} \ .$$

נציב את הקואורדינטות $(1, \sqrt{3})$ ונקבל

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

הישר המשיק לקו בנקודה $(1, \sqrt{3})$ הוא ישר ששיפועו הוא $m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ולכן משוואת הישר המשיק היא:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

הישר הנורמל לקו בנקודה $(1, \sqrt{3})$ הוא ישר ששיפועו הוא $\frac{-1}{(-\frac{\sqrt{3}}{3})} = \sqrt{3}$ ולכן משוואת הישר הנורמל היא:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - \sqrt{3} = \sqrt{3}(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{3}x$$

סעיף ב (5 נק')

נחשב את נקודת החיתוך בין שני הקווים $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

לכן אפשר לראות:

$$\min\left(\frac{1}{x^2}, \frac{1}{4}\right) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 1 < x \leq 2; \\ \frac{1}{x^2}, & x > 2. \end{cases}$$

לכן נחשב את האינטגרל על ידי פיצול התחום לשני קטעים:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \min\left(\frac{1}{x^2}, \frac{1}{4}\right) dx &= \int_1^2 \frac{1}{4}\, dx + \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{4}\, dx + \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{4}\, [x]_1^2 + \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_2^b \\ &= \frac{1}{4}\, [2-1] + \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-1}{b} + \frac{1}{2}\right] \\ &= \frac{1}{4} + \left[\frac{-1}{\infty} + \frac{1}{2}\right] \\ &= \frac{3}{4}\ . \end{aligned}$$

שאלה 7 צריך להוכיח:

$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$ לכל $x > 0$.

נגדיר פונקציה $f(x) = \arctan x$. נתבונן בקטע $[0, x]$. הפונקציה $f(x) = \arctan x$ פונקציה אלמנטרית, לכן $f(x)$ רציפה בקטע $[0, x]$ וגזירה בקטע $(0, x)$. לכן אפשר להשתמש במשפט הערך הממוצע (משפט לגרנז').

לפי משפט לגרנז' קיימת $c \in (0, x)$ כך ש-

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$$

ז"א

$$\frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} = \arctan(c)' = \frac{1}{1+c^2}\ .$$

$\arctan(0) = 0$ לכן נקבל

$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{1}{1+c^2} \ .$$

נכפיל ב-x:

(#1)
$$\arctan x = \frac{x}{1+c^2} \ .$$

מאי-השוויון

$$0 < c < x$$

נובע כי

(#2)
$$\frac{x}{1+c^2} > \frac{x}{1+x^2} \ ,$$

$c^2+1>1$ לכן ו-

(#3)
$$\frac{x}{1+c^2} < \frac{x}{1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x}{1+c^2} < x \ .$$

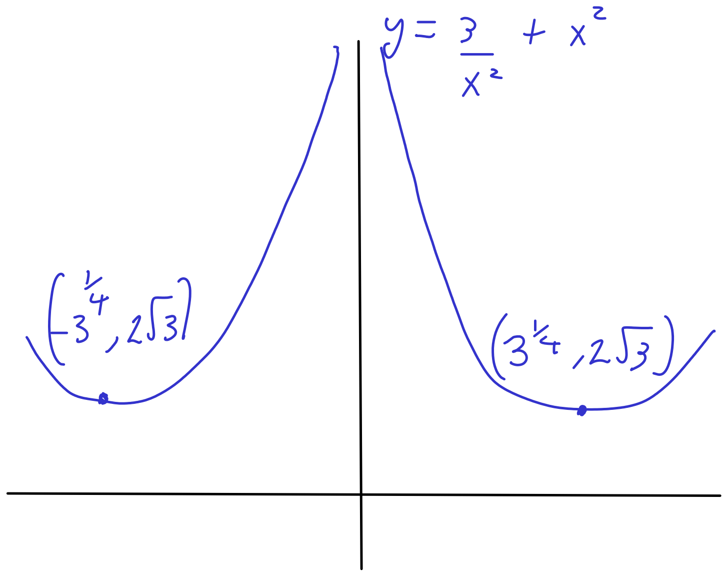
לכן, מ (#2) ו- (#3) נקבל

(#4)
$$\frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+c^2} < x \ .$$

לפי (#1) נציב $\arctan x$ ב- $\dfrac{x}{1+c^2}$ ונקבל

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \ .$$

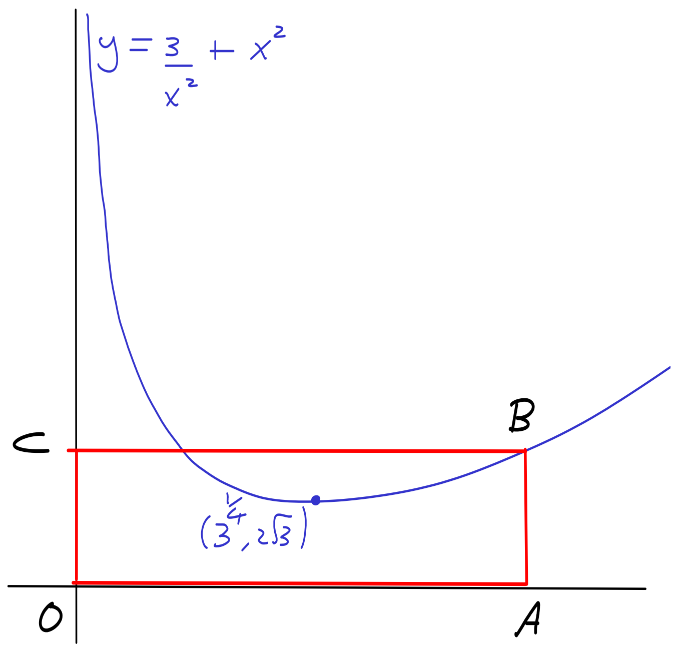
<u>שאלה 8</u> לגרף של הפונקציה $y = \dfrac{3}{x^2} + x^2$ ישנם שני ענפים כמתואר בשרטוט.



לכן יש שתי אפשרויות: הנקודה B נמצאת על הענף הימיני או על הענף השמאלי.

אין צורך להציג שתי פונקציות אלא ניתן להשתמש בעובדה שהפונקציה זוגית.

נניח ש- B נמצאת על הענף הימיני המלבן, כמתואר בשרטוט. הנקודה B נמצאת בתחום $x > 0$.



נסמן (x, y) הקואורדינטות של הנקודה B. שטחו של המלבן $OABC$ הינו

$$S_{OABC} = OA \cdot AB = x \cdot y$$

הנקודה B נמצאת על הקו $y = \frac{3}{x^2} + x^2$ לכן

$$S_{OABC} x \cdot \left(\frac{3}{x^2} + x^2 \right) = \frac{3}{x} + x^3 \ .$$

נמצא את הערך המינימלי של השטח ע"י להשוות את הנגזרת לאפס:

$$S'_x = -\frac{3}{x^2} + 3x^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{3}{x^2}\left(x^4 - 1\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm 1$$

הנקודה B נמצאת בתחום $x > 0$ אז נקח את הערך החיובי. עבור $x = 1$:

$$S_{OABC}(x = 1) = 4 \ ,$$

ז"א הערך המינימלי של השטח הוא $S_{\min} = 4$.