שיעור 11
מטריצה המעבר מבסיס לבסיס וטנרספורמציות

משפט 11.1

נניח כי $V \ni \mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ בסיס של מ"ו V מעל שדה $\mathbb{F}$. אז כל ווקטור $u \in V$ ניתן לרשום כצ"ל יחיד של $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$.

הוכחה: $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ בסיס של V, לכן $V=\mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$. מכאן נובע שלכל $u\in V$, $u\in \mathrm{span}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)$. ז"א קיימים סקלרים $k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{F}$ כך ש

$$u=k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_n\mathrm{v}_n\ .$$

נוכיח שהצ"ל הוא יחיד בדרך השלילה:
נניח שקיים צ"ל אחר:

$$u=t_1\mathrm{v}_1+\ldots+t_n\mathrm{v}_n\ .$$

אש קיים $1\leq i\leq n$ כך ש $k_i\neq t_i$. לכן

$$(k_1-t_1)\mathrm{v}_1+\ldots+(k_i-t_i)\mathrm{v}_i+\ldots+(k_n-t_n)\mathrm{v}_n=\bar{0}$$

ו $k_i-t_i\neq 0$. ז"א ווקטורים $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ ת"ל. סתירה. ■

הגדרה 11.1

אם $V \ni \mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ בסיס של מ"ו V מעל שדה $\mathbb{F}$ ו $u\in V$ אז

$$u=k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_n\mathrm{v}_n\ .$$

לווקטור

$$\begin{pmatrix} k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n$$

קוראים ווקטור הקואורדינטות של ווקטור u לפי בסיס $B=\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\}$.
סימון:

$$[u]_B=\begin{pmatrix} k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}\ .$$

דוגמה 11.1

$E=\{e_1,e_2,e_3\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$, $u=\begin{pmatrix}2\\-1\\10\end{pmatrix}$

$$u=2e_1+(-1)e_2+10e_3$$

$$[u]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

דוגמה 11.2

$E = \{1, x, x^2\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$, $p(x) = 1 + 8x - 5x^2$. אז

$$p(x) = 1 \cdot 1 + 8x - 5x^2 = 1e_1 + 8e_2 - 5e_3$$

$$[p(x)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

דוגמה 11.3

הראו כי קבוצת הווקטורים

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מצאו את $[u]_B$ עבור וקטור $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$.

פתרון:

נבדוק אם B בת"ל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן b_1, b_2, b_3 בת"ל.

$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, לכן $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ בסיס של $\mathbb{R}^3$.

נמצא את הקואורדינטות של וקטור u לפי בסיס B.

$$u = k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right)$$

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ -9 \end{pmatrix}$$

דוגמה 11.4

נתונים שני בסיסים של מרחב V, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ ו $C = \{c_1, \dots, c_n\}$. נתון $[u]_B$. מהו $[u]_C$?

פתרון:

נרשום את u כצ"ל של בסיס B.

$$u = x_1b_1 + \ldots + x_nb_n \qquad \Rightarrow \qquad [u]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

כל ווקטור b_i $(1 \le i \le n)$ הוא צ"ך של בסיס C

$$\begin{aligned} b_1 =& b_{11}c_1 + b_{21}c_2 + \ldots + b_{n1}c_n \\ b_2 =& b_{12}c_1 + b_{22}c_2 + \ldots + b_{n2}c_n \\ &\vdots \\ b_n =& b_{1n}c_1 + b_{2n}c_2 + \ldots + b_{nn}c_n \end{aligned}$$

מכאן מקבלים

$$\begin{aligned} u =& x_1(b_{11}c_1 + b_{21}c_2 + \ldots + b_{n1}c_n) + x_2(b_{12}c_1 + b_{22}c_2 + \ldots + b_{n2}c_n) + \ldots + x_n(b_{1n}c_1 + b_{2n}c_2 + \ldots + b_{nn}c_n) \\ =& (x_1b_{11} + x_2b_{12} + \ldots + x_nb_{1n})c_1 + (x_1b_{21} + x_2b_{22} + \ldots + x_nb_{2n})c_2 + \ldots + (x_1b_{n1} + x_2b_{n2} + \ldots + x_nb_{nn})c_n \end{aligned}$$

לפיכך

$$[u]_C = \begin{pmatrix} x_1b_{11} + x_2b_{12} + \ldots + x_nb_{1n} \\ x_1b_{21} + x_2b_{22} + \ldots + x_nb_{2n} \\ \vdots \\ x_1b_{n1} + x_2b_{n2} + \ldots + x_nb_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & & \ldots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & & \ldots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot [u]_B$$

למטריצה

$$P_{B\to C} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & & \ldots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

קוראים מטריצה המעבר מבסיס B לבסיס C. ז"א קיבלנו נוסחה :

$$[u]_C = P_{B\to C}[u]_B$$

כאשר

$$P_{B\to C} = ([b_1]_C \ldots [b_2]_C)$$

דוגמה 11.5

נתונים שני בסיסים של $\mathbb{R}^3$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ כאשר

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

נתון $[u]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. מצאו את $[u]_C$.

פתרון:
נשתמש בנוסחה

$$[u]_C = P_{B\to C} \cdot [u]_B \ .$$

כדי למצוא את $P_{B\to C}$ צריך לפתור את המערכת:

$$\begin{aligned} C \cdot X =& b_1 \\ C \cdot X =& b_2 \\ C \cdot X =& b_3 \end{aligned}$$

כאשר מטריצה C מורכבת מווקטורים c_1,c_2,c_3 העומדים בעמודות.
מכיוון ש c_1,c_2,c_3 בסיס, למערכת $C \cdot X = b_i$ יש פתרון יחיד, לכן בדירוג ניתן להגיע למטירצה היחידה I.
ז"א בתהליך גאווס נגיע למצבים:

$$(C|b_1) \to \ldots \to (I|P_{B\to C} \text{ של העמודה הראשונה})$$

$$\vdots$$

$$(C|b_n) \to \ldots \to (I|P_{B\to C} \text{ של } n\text{העמודה ה})$$

מכיוון שבדירוג מבצעים את אותן הפעולות האלמנטריות, אפשר לפתור את כל המעכות בבת אחת!

$$(C|B) \to \ldots \to (I|P_{B\to C})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -7 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$P_{B\to C} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[u]_C = P_{B\to C} \cdot [u]_B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix}$$

דוגמה 11.6

נתון

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad b_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \qquad C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} , \quad c_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$$

שני בסיסים סדורים של $\mathbb{R}^2$.
מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס C.
יהי $V \in \mathbb{R}^2$ כך ש- $(V)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. מצאו את $(V)_C$.
מצאו את מטריצת המעבר מהבסיס C לבסיס B.

הגדרה 11.2 המרחב של פולינומים מסדר n

המרחב של פולינומים מסדר n יסומן $\mathbb{R}_n[x]$ או $P_n[x]$ ויוגדר- הקבוצה של כל הפולינומים מסדר n לכל היותר:

$$P_n[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n | a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

דוגמה 11.7

$$1 + 2x \in P_1[x] \ , \qquad 1 + 5x^2 \notin P_1[x] \ .$$

$$1 + 2x \in P_3[x] \ , \qquad 1 + 4x + 3x^2 \in P_3[x] \ , \qquad 3 + 8x + 7x^3 \in P_3[x] \ , \qquad 6x + 5x^4 \notin P_3[x] \ .$$

$$1 - 3x^4 + 6x^7 \in P_7[x] \ , \qquad 1 - 3x^4 + 6x^7 + 6x^8 - x^9 \notin P_7[x] \ .$$

משפט 11.2 תלות ליניארית של פולינומים

קבוצת פולינומים מסדר n

$$S = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n \ \ldots\}$$

בת"ל אם"ם קבוצת הווקטורים של המקדמים בת"ל, כלומר אם הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \ldots \right\}$$

בת"ל.

אם נגדיר המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & \\ a_1 & b_1 & \\ \vdots & \vdots & \ldots \\ a_n & b_n & \end{pmatrix}$$

אז הפולינומים בת"ל אם"ם

$$\det\left(A^t A\right) \neq 0 \ .$$

משפט 11.3 בסיס הסטנדרטי של פולינומים

הקבוצה

$$E = \{e_1 = 1, \quad e_2 = x, \quad e_3 = x^2, \quad \ldots, \quad e_{n+1} = x^n\}$$

הינה בסיס של המרחב וקטורי של פולינומים מסדר n ונקרא הבסיס הסטנדרטי של $P_n[x]$.

משפט 11.4 הוורונסקיאן

נתון קבוצה

$$F=\{f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x)\}$$

של n פונקציות במרחב V של כל הפונקציות מעל $\mathbb{R}$. נגדיר את הוורונסקיאן

$$W(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} .$$

אם קיים $x_0\in\mathbb{R}$ כך ש-

$$W(x_0)\neq 0$$

אז F בת"ל.

הוכחה: יהיו

$$F=\{f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x)\}$$

קבוצה של n פונקציות במרחב V של כל הפונקציות מעל $\mathbb{R}$. הקבוצה בת"ל אם"ם הצ"ל

$$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_nf_n(x)=0$$

לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים רק אם $c_i=0$ לכל $i=1,2,\ldots,n$. נגזור את הצ"ל $n-1$ פעמים כדי לקבל

$$c_1f_1^{(i)}(x)+c_2f_2^{(i)}(x)+\cdots+c_nf_n^{(i)}(x)=0$$

לכל $x\in\mathbb{R}$. כמשוואה מטריציאלית

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} .$$

הדטרמיננטה של המטריצה המקדמים נקראת **הוורונסקיאן** של הקבוצה $\{f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x)\}$ ומסומן ב $W(x)$. לכן אם קיים נקודה $x_0\in\mathbb{R}$ כך ש $W(x_0)\neq 0$ אז המטריצה המקדמים איננה אפס בנקודה $x=x_0$ ולכן כל המקדמים $c_i=0$. לכן, אם הוורונסקיאן אינו שווה אפס בנקודה $x_0\in\mathbb{R}$, אז הקבוצה $F=\{f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x)\}$ בת"ל.

■

דוגמה 11.8

עבור המרחב $P_2[x]$,
מצאו מטריצת מעבר מהבסיס הסדור

$$B=\left\{b_1=1-2x+x^2,\quad b_2=3-5x+4x^2,\quad b_3=2x+3x^2\right\}$$

לבסיס הסטנדרטי

$$E=\left\{e_1=1,\quad e_2=x,\quad e_3=x^2\right\}$$

ומצאו את הווקטור $-1+2x$ לפי הבסיס B.

פתרון:

נחשב את $P_{B\to E}$:

$$(E|B)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&0\\0&1&0&-2&-5&2\\0&0&1&1&4&3\end{array}\right)$$

וסיימנו.

$$P_{B\to E}=\begin{pmatrix}1&3&0\\-2&-5&2\\1&4&3\end{pmatrix}$$

$$[u]_B=P_{E\to B}[u]_E\ .$$

$$P_{E\to B}=P^{-1}_{B\to E}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&1&0&0\\-2&-5&2&0&1&0\\1&4&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2+2R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&1&0&0\\0&1&2&2&1&0\\0&1&3&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&1&0&0\\0&1&2&2&1&0\\0&0&1&-3&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&1&0&0\\0&1&0&8&3&-2\\0&0&1&-3&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-3R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-23&-9&6\\0&1&0&8&3&-2\\0&0&1&-3&-1&1\end{array}\right)$$

לכן $P_{E\to B}=\begin{pmatrix}-23&-9&6\\8&3&-2\\-3&-1&1\end{pmatrix}$.

$$[u]_B=P_{E\to B}[u]_E=\begin{pmatrix}-23&-9&6\\8&3&-2\\-3&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}_B$$

בדיקה:

$$\begin{aligned}5b_1-2b_2+1b_3=&5\left(1-2x+x^2\right)-2\left(3-5x+4x^2\right)+1\left(2x+3x^2\right)\\=&5-6-10x+10x+2x+5x^2-8x^2+3x^2\\=&-1+2x\ .\end{aligned}$$