עבודה עצמית 6

שאלה 1 לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבעו האם היא תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

א)
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x = y = -z \right\}$$

ב)
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x = 3y \right\}$$

ג)
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| y = z^2 \right\}$$

ד)
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + y - z = 0 \right\}$$

ה)
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + y \geq 0 \right\}$$

ו)
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x = 0 \right\}$$

ז)
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + y = -z \right\}$$

ח)
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

ט)
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + y - z = 1 \right\}$$

י)
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\}$$

שאלה 2 לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבעו האם היא תת מרחב של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ (מרחב הפולינומים ממעלה עד 2).

א) $W = \left\{ax^2+bx+c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \;\middle|\; b=0\right\}$

ב) $W = \left\{ax^2+bx+c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \;\middle|\; a+b+c=0\right\}$

ג) $W = \left\{ax^2+bx+c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \;\middle|\; a>b>c\right\}$

ד) $W = \left\{ax^2+bx+c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \;\middle|\; a=b=c\right\}$

ה) $W = \left\{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \;\middle|\; p(1)=0\right\}$

ו) $W = \left\{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \;\middle|\; p(1)=1\right\}$

ז) $W = \left\{ax^2+bx+c \in \mathbb{C}_{\leq 2}[x]] \;\middle|\; a,b,c\in\mathbb{C}, a+b=\bar{c}\right\}$

שאלה 3

לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבעו האם היא תת מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

א) $W = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}, a,b\in\mathbb{R}\right\}$

ב) $W = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix}, a,b,c\in\mathbb{R}, c\neq 0\right\}$

ג) $W = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; |A|=0\right\}$

ד) $W = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; |A|\neq 0\right\}$

ה) $W = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \middle| A\cdot B=0, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6\end{pmatrix}\right\}$

שאלה 4

לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבעו האם היא תת מרחב של $\{f | f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}\}$.

א) $W = \{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R} | f(1)=0\}$

ב) $W = \{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R} | f(1)+f(2)=0\}$

ג) $W = \{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R} | \forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(-x)\}$

ד) $W = \left\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R} | \forall x\in\mathbb{R}, f(x^2)=(f(x))^2\right\}$

שאלה 5

יהי V מרחב ווקטורי ויהיו W_1, W_2 תת מרחבים של V.

א) הוכיחו:

$$W_1\cap W_2 = \{x\in V | x\in W_1 \wedge x\in W_2\}$$

הינו תת-מרחב של V.

ב) הוכיחו:
$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1\ ,\ w_2 \in W_2\}$$
הינו תת-מרחב של V.

ג) הפריכו:
$$W_1 \cup W_2 = \{x \in V | x \in W_1 \vee x \in W_2\}$$
הינו תת-מרחב של V.

שאלה 6 לכל אחת מהקבוצות הבאות, מצאו איבר הנמצא בה וקבעו האם היא תת מרחב של $\mathbb{R}[x]$ (מרחב הפולינומים עם מקדמים ממשיים):

א) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | \deg(p) = 3\}$

ב) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | \deg(p) \text{ even} \cup \{\bar{0}\}\}$

ג) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | p(0) \in \mathbb{Z}\}$

פתרונות

שאלה 1

א) $$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle| x=y=-z\right\}$$

דוגמה: $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\in W$.

תנאי 1) הווקטור האפס $\bar{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ מקיים את התנאי $x=y=-z$ לכן $\bar{0}\in W$.

תנאי 2) נניח ש- $u_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\in W$ וגם $u_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\in W$. לפי זה u_1, u_2 מקיימים את התנאי של W:

(*) $$x_1=y_1=-z_1\ ,\qquad x_2=y_2=-z_2\ .$$

נבדוק אם הווקטור $u_1+u_2=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix}$ שייך ל- W. נובע מ- **(*)** כי

$$x_1+x_2=y_1+y_2=-z_1-z_2=-(z_1+z_2)\ .$$

כלומר u_1+u_2 מקיים את התנאי של W, ולכן $u_1+u_2\in W$.

תנאי 3) נניח $u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in W$ ו- k סקלר. כיוון ש- $u\in W$ אז

(#) $$x=y=-z\ .$$

נבדוק אם הווקטור $ku=\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$ שייך ל- W. מ- **(#)** נובע כי $kx=ky=k(-z)=-(kz)$, כלומר ku מקיים את התנאי של W ולכן $ku\in W$.

הוכחנו ש- W מקיים את כל התנאים של תת-מרחב לפיכך W תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

ב) $$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle| x=3y\right\}$$

דוגמה: $\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\in W$.

תנאי 1) הווקטור האפס $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\bar{0}$ מקיים את התנאי $x=3y$ לכן $\bar{0}\in W$.

תנאי 2) נניח ש- $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\in W$ $u_1=$ וגם $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\in W$ $u_2=$. אז

(*) $$x_1=3y_1\ ,\qquad x_2=3y_2\ .$$

מתקיים. נבדוק אם הווקטור $u_1+u_2=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix}$ שייך ל- W. מ- (*) נובע כי

$$x_1+x_2=3y_1+3y_2=3(y_1+y_2)\ .$$

ז"א u_1+u_2 מקיים את התנאי של W, ולפיו $u_1+u_2\in W$.

תנאי 3) נניח $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in W$ $u=$ ו- k סקלר. כיוון ש- $u\in W$ אז

(#) $$x=3y\ .$$

נבדוק אם הווקטור $ku=\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$ שייך ל- W. מ- (#) נקבל $k\cdot x=k\cdot(3y)=3\cdot(ky)$, ולפי זה ku מקיים את התנאי של W, ז"א $ku\in W$.

הוכחנו ש- W מקיים את כל התנאים של תת-מרחב לפיכך W תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

ג) $$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|\,y=z^2\right\}$$

לדוגמה: $u=\begin{pmatrix}1\\9\\3\end{pmatrix}$.

W אינו תת-מרחב. דוגמה נגדית:

$\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}\in W$ $u=$ כי $2^2=4$ אבל $3u=\begin{pmatrix}0\\6\\12\end{pmatrix}$ ו- $6^2\neq 12$. לכן $u\notin W$.

ד) $$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|\,x+y-z=0\right\}$$

לדוגמה: $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\in W$ $u=$.

תנאי 1) הווקטור האפס $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\bar{0}$ מקיים את התנאי $x+y-z=0$ לכן $\bar{0}\in W$.

תנאי 2) נניח ש- $\in W$ $u_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ וגם $\in W$ $u_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$. זאת אומרת

(*)
$$x_1+y_1-z_1=0\ ,\qquad x_2+y_2-z_2=0\ .$$

מתקיים. נבדוק אם הווקטור $u_1+u_2\in W$:

$$u_1+u_2=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix}\ .$$

נבדוק אם u_1+u_2 מקיים את התנאי של W:

$$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-(z_1+z_2)==\underbrace{x_1+y_1-z_1}_{=0}+\underbrace{x_2+y_2-z_2}_{=0}=0$$

כאשר $x_1+y_1-z_1=0$ מכיוון ש- $u_1\in W$ ו- $x_2+y_2-z_2=0$ מכיוון ש- $u_2\in W$. לכן u_1+u_2 מקיים את התנאי של W, ז"א $u_1+u_2\in W$.

תנאי 3) נניח $\in W$ $u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ו- k סקלר. כיוון ש- $u\in W$ אז

(#)
$$x+y-z=0\ .$$

נבדוק אם הווקטור $\in W$ $ku=\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$. כתוצאה של (#) נקבל

$$k\cdot(x+y-z)=0\qquad\Rightarrow\qquad=k\cdot x+k\cdot y-k\cdot z=0\ ,$$

לכן ku מקיים את התנאי של W, ז"א $ku\in W$.

הוכחנו ש- W מקיים את כל התנאים של תת-מרחב לפיכך W תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

ה)
$$\underline{W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|x+y\geq 0\right\}}$$

לדוגמה: $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\in W$.

W אינו תת-מרחב. דוגמה נגדית:

$\in W$ $u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ כי $1+2+3\geq 0$. נבחר $k=-1$.

$k\cdot u=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}\notin W$ בגלל ש- $-1-2<0$.

ו) $$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|x=0\right\}$$

לדוגמה: $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\in W$.

תנאי 1) הווקטור האפס $\bar{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ מקיים את התנאי $x=0$ לכן $\bar{0}\in W$.

תנאי 2) נניח ש- $u_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\in W$ וגם $u_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\in W$. אז

$$x_1=0\ ,\qquad x_2=0\ . \tag{*}$$

מתקיים. נבדוק אם הווקטור $u_1+u_2=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix}$ שייך ל- W.

מ- (*) נובע כי $(x_1+x_2)=0$. לכן u_1+u_2 מקיים את התנאי של W, ז"א $u_1+u_2\in W$.

תנאי 3) נניח $u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in W$ ו- k סקלר. כיוון ש- $u\in W$ אז

$$x=0\ . \tag{\#}$$

נבדוק אם הווקטור $ku=\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$ שייך ל- W.

מ- (#) נקבל

$$k\cdot(x)=0\qquad\Rightarrow\qquad kx=0\ ,$$

אזי ku מקיים את התנאי של W, ז"א $ku\in W$.

הוכחנו ש- W מקיים את כל התנאים של תת-מרחב לפיכך W תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

ז) $$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|x+y=-z\right\}$$

לדוגמה $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\in W$.

תנאי 1) $\bar{0}=\big(0,0,0\big)$, $0+0=-0\Leftarrow\bar{0}\in W$.

תנאי 2) נניח ש- $\in W$ $u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, וגם $\in W$ $u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

ז"א $x_1 + y_1 = -z_1$, $x_2 + y_2 = -z_2$. נבדוק אם הווקטור

$$u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

מקיים את התנאי של W:

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = -z_1 - z_2 = -(z_1 + z_2)$$

לכן $u_1 + u_2 \in W$.

תנאי 3) נניח $\in W$ $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$. נבדוק אם הווקטור $ku \in W$:

$$ku = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix} \qquad , \qquad kx + ky = k(x + y) = k(-z) = -kz$$

לכן ku מקיים את התנאי של W לפיכך $ku \in W$.

הוכחנו ש- W מקיים את כל התנאים של תת-מרחב לפיכך W תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

ח)
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

לדוגמה: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$.

W אינו תת-מרחב. דוגמה נגדית:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$$

אבל

$$-1 \cdot u = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin W \ .$$

ט)
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + y - z = 1 \right\}$$

דוגמה: $W \ni \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

אינו תת-מרחב בגלל ש- $W \notin \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \bar{0}$ כי $0+0-0 \neq 1$. לכן W לא תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

י) $W = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2+y^2+z^2=0 \right\}$

הווקטור היחידי שמקיים את התנאי הוא ווקטור האפס: $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \bar{0}$, ז"א $W = \{\bar{0}\}$.

1) $\bar{0} \in W$.

2) $\bar{0}+\bar{0} = \bar{0} \in W$.

3) $k \cdot \bar{0} = \bar{0}$

הוכחנו ש- W מקיים את כל התנאים של תת-מרחב לפיכך W תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

שאלה 2

א) $W = \left\{ ax^2+bx+c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \;\middle|\; b=0 \right\}$.
לדוגמה: $x^2+1 \in W$.

תנאי 1) $\bar{0} = 0x^2+0x+0 \in W$.

תנאי 2) נניח $u_1 = a_1x^2+c_1 \in W$, $u_2 = a_2x^2+c_2 \in W$. אזי

$$u_1+u_2 = (a_1+a_2)x^2+(c_1+c_2) \in W$$

תנאי 3) נקח $u = ax^2+c \in W$. אז לכל $k \in \mathbb{R}$

$$k \cdot u = (ka_1)x^2 + kc \in W \ .$$

מסקנה: W תת-מרחב של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

ב) $W = \left\{ ax^2+bx+c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \;\middle|\; a+b+c=0 \right\}$
לדוגמה: $x^2+x-2 \in W$.

תנאי 1) $\bar{0} = 0x^2+0x+0 \in W$.

תנאי 2) נניח $u_1 = a_1x^2+b_1x+c_1 \in W$, $u_2 = a_2x^2+b_2x+c_2 \in W$.
אז $a_1+b_1+c_1=0$ וגם $a_2+b_2+c_2=0$.

$$u_1+u_2 = (a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2) \ .$$

$$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2) = (a_1+b_1+c_1)+(a_2+b_2+c_2) = 0+0 = 0 \ .$$

לכן $u_1+u_2 \in W$.

תנאי 3) נקח $u = ax^2 + bx + c \in W$. ז"א $a + b + c = 0$. אז לכל $k \in \mathbb{R}$

$$k \cdot u = (ka)x^2 + (kb)x + (kc) \ .$$

$$ka + kb + kc = k(a + b + c) = k \cdot 0 = 0 \ .$$

לכן $ku \in W$.

מסקנה: W תת-מרחב של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

ג) $$W = \left\{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \ \middle| \ a > b > c\right\}$$

W לא תת-מרחב. דוגמה נגדית: $u = 3x^2 + 2x + 1 \in W$ בגלל ש- $3 > 2 > 1$.

אבל $(-1) \cdot u = -3x^2 - 2x - 1 \notin W$ בגלל ש- $-1 < -2 < -3$.

ד) $W = \left\{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \ \middle| \ a = b = c\right\}$.

לדוגמה: $x^2 + x + 1 \in W$.

ז"א ניתן לרשום W בצורה $W = \{ax^2 + ax + a \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid a \in \mathbb{R}\}$.

תנאי 1) $\bar{0} = 0x^2 + 0x + 0 \in W$. (עבור $a = 0$).

תנאי 2) נניח $u_1 = a_1x^2 + a_1x + a_1 \in W$ ו- $u_2 = a_2x^2 + a_2x + a_2 \in W$.
אז $u_1 + u_2 = (a_1 + a_2)x^2 + (a_1 + a_2)x + (a_1 + a_2) \in W$.

תנאי 3) נניח $u = ax^2 + ax + a \in W$ ו- k סקלר. אז

$$ku = k(ax^2 + ax + a) = (ka)x^2 + (ka)x + ka \in W$$

מסקנה: W תת מרחב של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

ה) $W = \left\{p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \ \middle| \ p(1) = 0\right\}$.

לדוגמה: $x^2 + x - 2 \in W$.

נסמן $p(x) = ax^2 + bx + c$.

$$p(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a + b + c = 0 \ .$$

ז"א ניתן לרשום W כך:

$$W = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \ \big| \ a + b + c = 0\} \ .$$

הוכחנו בסעיף ב' שזה תת מרחב של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

ו) $$W = \left\{p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \ \middle| \ p(1) = 1\right\}$$

$\bar{0} = 0x^2 + 0x + 0 \notin W$ בגלל ש- $\bar{0}(1) = 0 \cdot 1^2 + 0 \cdot 1 + 0 \neq 1$.

לפיכך W לא תת-מרחב.

ז) $$W = \left\{ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) \ \middle| \ a, b, c \in \mathbb{C}, a + b = \bar{c}\right\}$$

W לא תת-מרחב. דומגה נגדית: $p(x) = x^2 + ix + (1 - i) \in W$

$(1+i)\cdot p = (1+i)x^2 + (-1+i)x + 2$

$(1+i) + (-1+i) = 2i \neq 2$.

מסקנה, W לא תת-מרחב של $P_2(\mathbb{C})$.

שאלה 3

א) $W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \middle| A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

תנאי 1) $\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$ (עבור $a = 0$, $b = 0$)

תנאי 2) נניח $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$.

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} \in W$$

תנאי 3) נניח $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in W$. אז לכל $k \in \mathbb{R}$, $k \cdot A = \begin{pmatrix} ka & 0 \\ 0 & kb \end{pmatrix} \in W$.

לכן W תת מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

ב) $W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \middle| A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0 \right\}$

דומגה: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W$.

$0_{2\times 2} \notin W$ בגלל ש- $0_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ($c = 0$). לכן W לא תת מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

ג) $W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \middle| \quad |A| = 0 \right\}$.

לא תת מרחב. דוגמה נגדית: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

אז $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin W$. לכן W לא תת מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

ד) $W = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad | \quad |A| \neq 0\}$.

$0_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W$ כי $\left|0_{2\times 2}\right| = 0$.

לכן W לא תת מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

ה) $W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} | A \cdot B = 0, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \right\}$

דוגמה: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$.

תנאי 1) $0_{2\times 2} \in W$ כי $0_{2\times 2} \cdot B = 0$

תנאי 2) נניח $A_1, A_2 \in W$. ז"א $A_1 \cdot B = 0$ ו- $A_2 \cdot B = 0$. אז

$$(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B = 0 + 0 = 0$$

לכן $A_1 + A_2 \in W$.

תנאי 3) נניח $A \in W$ ז"א $A \cdot B = 0$.
אז לכל סקלר k מתקיים $(kA) \cdot B = k(A \cdot B) = k \cdot 0 = 0$.
לכן $kA \in W$.

לכן W תת מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

שאלה 4

א) $W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | f(1) = 0\}$
לדוגמה: $f(x) = x - 1$.

תנאי 1)

$$\bar{0}(x) = 0 \ \Rightarrow\ \bar{0}(1) = 0 \ \Rightarrow\ \bar{0} \in W\ .$$

תנאי 2) נניח $f, g \in W$. ז"א $f(1) = 0$ וגם $g(1) = 0$.
אז $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$.
לכן $f + g \in W$.

תנאי 3) נניח $f \in W$ ז"א $f(1) = 0$. אז לכל $k \in \mathbb{R}$,

$$(k \cdot f)(1) = k \cdot (f(1)) = k \cdot 0 = 0\ .$$

לכן $kf \in W$.

מסקנה: W ת"מ של $F(\mathbb{R})$.

ב) $W = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | f(1) + f(2) = 0\}$
דוגמה: $f(x) = (x - 1)(x - 2)$.

תנאי 1)

$$\bar{0}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{0}(1) = 0\ ,\ \bar{0}(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{0}(1) + \bar{0}(2) = 0$$

לכן $\bar{0} \in W$.

תנאי 2) נניח $f_1, f_2 \in W$. ז"א $f_1(1) + f_1(2) = 0$ וגם $f_2(1) + f_2(2) = 0$.
אז

$$(f_1 + f_2)(1) + (f_1 + f_2)(2) = [f(1) + f_1(2)] + [f_2(1) + f_2(2)] = 0 + 0 = 0\ .$$

לכן $f_1 + f_2 \in W$.

תנאי 3) נניח $f \in W \Leftarrow f(1) + f(2) = 0$. אז לכל $k \in \mathbb{R}$,

$$(k \cdot f)(1) + (k \cdot f)(2) = k \cdot (f(1) + f(2)) = k \cdot 0 = 0\ .$$

לכן $kf \in W$.

מסקנה: W ת"מ של $F(\mathbb{R})$.

ג) $W=\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}|\forall x\in\mathbb{R},f(x)=f(-x)\}$

דוגמה: $f(x)=x^2$.

תנאי 1)

$$\bar{0}(x)=\bar{0}(-x)=0$$

לכל $x\in\mathbb{R}$ לפיכך $\bar{0}\in W$.

תנאי 2) נניח $f,g\in W$ ז"א $f(x)=f(-x)$, $g(x)=g(-x)$.
אז

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=f(-x)+g(-x)=(f+g)(-x)$$

לכן $f+g\in W$.

תנאי 3) נניח $f\in W$, $k\in\mathbb{R}$. אז $f(x)=f(-x)$. לכן

$$(kf)(x)=k(f(x))=kf(-x)=(kf)(-x)$$

לכן $kf\in W$.

מסקנה: W ת"מ של $F(\mathbb{R})$.

ד) $W=\left\{f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}|\forall x\in\mathbb{R},f(x^2)=(f(x))^2\right\}$

W לא תת-מרחב. דוגמה נגדית: $f(x)=x^2\in W$, $g(x)=1\in W$,

$$(f+g)(x)=x^2+1\notin W\ .$$

מסקנה: W לא ת"מ של $F(\mathbb{R})$.

שאלה 5

א) נתון: W_1,W_2 תת מרחבים של V.
צריך להוכיח: $W_1\cap W_2$ תת מרחבים של V.
הוכחה:

תנאי 1) צריך להוכיח: $\bar{0}\in W_1\cap W_2$.

$$\left\{\begin{array}{l}W_1 \text{ תת-מרחב, לכן } \bar{0}\in W_1\\ W_2 \text{ תת-מרחב, לכן } \bar{0}\in W_2\end{array}\right.\Leftarrow \bar{0}\in W_1\cap W_2.$$

תנאי 2) נקח $u_1,u_2\in W_1\cap W_2$ $\Leftarrow$ $\left\{\begin{array}{lll}u_1\in W_1, & u_1\in W_2, & \text{וגם}\\ u_2\in W_1, & u_2\in W_2 & \end{array}\right\}$

$$\left\{\begin{array}{l}W_1 \text{ תת-מרחב, לכן } u_1+u_2\in W_1\\ W_2 \text{ תת-מרחב, לכן } u_1+u_2\in W_2\end{array}\right.\Leftarrow u_1+u_2\in W_1\cap W_2.$$

תנאי 3) נניח $u\in W_1\cap W_2$, $k\in\mathbb{R}$.
אז $u\in W_1$, $u\in W_2$.

$$\left\{\begin{array}{l}W_1 \text{ תת-מרחב, לכן } ku\in W_1\\ W_2 \text{ תת-מרחב, לכן } ku\in W_2\end{array}\right.\Leftarrow ku\in W_1\cap W_2.$$

מסקנה: $W_1 \cap W_2$ תת-מרחב של V.

ב) $\underline{W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1 \ , \ w_2 \in W_2\}}$

צריך להוכיח: $W_1 + W_2$ תת מרחב של V.

תנאי 1) W_1 תת-מרחב $\Leftarrow \bar{0} \in W_1$, ו- W_2 תת-מרחב $\Leftarrow \bar{0} \in W_2$.

$\bar{0} \in W_1 + W_2 \Leftarrow \bar{0} = \bar{0} + \bar{0}$.

תנאי 2) נקח $u, \text{v} \in W_1 + W_2$. $\Leftarrow$ $\left\{ \begin{array}{lll} w_2 \in W_2 & ,w_1 \in W_1 & u = w_1 + w_2, \\ w_2' \in W_2 & ,w_1' \in W_1 & \text{v} = w_1' + w_2', \end{array} \right\}$

W_1 תת מרחב, לכן $w_1 + w_1' \in W_1$,
W_2 תת מרחב, לכן $w_2 + w_2' \in W_2$,
אז

$$u + \text{v} = (w_1 + w_2) + (w_1' + w_2') = \overbrace{(w_1 + w_1')}^{\in W_1} + \overbrace{(w_2 + w_2')}^{\in W_2}$$

לכן $u + \text{v} \in W_1 + W_2$.

תנאי 3) נניח כי $u \in W_1 + W_2$. $\Leftarrow$ $u = w_1 + w_2$, $w_1 \in W_1$ ו- $w_2 \in W_2$.
אז לכל $k \in \mathbb{R}$,

$$ku = k(w_1 + w_2) = kw_1 + kw_2 \ .$$

$ku \in W_1 + W_2 \Leftarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} W_1 \text{ ת"מ, לכן } kw_1 \in W_1 \\ W_2 \text{ ת"מ, לכן } kw_2 \in W_2 \end{array} \right.$

מסקנה: $W_1 + W_2$ תת-מרחב של V.

ג) $\underline{W_1 \cup W_2 = \{x \in V | x \in W_1 \vee x \in W_2\}}$

דוגמה נגדית:

$$W_1 = \{(x, y) | y = x\} \ , \qquad W_2 = \{(x, y) | y = 2x\}$$

W_1, W_2 תת-מרחבים של $\mathbb{R}^2$.

$u = (1, 1) \in W_1$ אז $u = W_1 \cup W_2$.

$\text{v} = (1, 2) \in W_2$ אז $\text{v} = W_1 \cup W_2$.

$u + \text{v} = (2, 3)$, $u + \text{v} \notin W_1$ וגם $u + \text{v} \notin W_2$.
לכן $u + \text{v} \notin W_1 \cup W_2$.

שאלה 6

א) $W = \{p \in \mathbb{R}[x] | \deg(p) = 3\}$

דוגמה: $p = x^3 + x^2 + x + 1 \in W$.

$\bar{0} \notin W$ כי $\deg(\bar{0}) = 0$

לכן W לא תת-מרחב של $p(\mathbb{R})$.

ב) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | \deg(p) \text{ even} \cup \{\bar{0}\}\}$

דוגמה: $p(x) = x^2 + 1 \in W$.

W לא תת-מרחב. דוגמה נגדית: $p(x) = x^2 + x + 1 \in W$, $q(x) = -x^2 + x \in W$,

$p(x) + q(x) = 2x + 1 \notin W$ כי $\deg(p+q) = 1$.

לכן W לא תת-מרחב של $\mathbb{R}[x]$.

ג) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | p(0) \in \mathbb{Z}\}$

דוגמה: $p(x) = x + 1 \in W$ כי $1 \in \mathbb{Z}$.

W לא תת-מרחב של $\mathbb{R}[x]$.

דוגמה נגדית: $p(x) = x + 1 \in W$,

$\pi \cdot p = \pi \cdot x + \pi \notin W$ בגלל ש- $\pi \notin \mathbb{Z}$.