תרגילים: שפות כריעות ושפות קבילות

 L^* מוגדרת: בהינתן השפה L^* מוגדרת:

$$L^* = \{\varepsilon\} \cup \{w = w_1 w_2 \cdots w_k \mid \forall \ 1 \le i \le k \ , \ w_i \in L\}$$

- L בהינתן מכונת טיורינג M המקבלת שפה בהינתן בהינתן בהינת א L^* המכונט טיורינג אי דטרמיניסטית המקבלת את בנו מכונט טיורינג אי
- .L המכריעה שפה M בהינתן מכונת טיורינג בהינתן המכריעה את השפה M^* המכריעה את השפה בנו מכונט טיורינג אי דטרמיניסטית
- שאלה 2 האם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה. $L(M) \in R$ אזי $L(M) \in CoRE$ אכל מכונת טיורינג M, אם
- שאלה 3 האם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה. $L_2 \in Co\,RE \,\,$ או $L_1 \in RE$ אזי $L_1 \cap L_2 \in R$

שאלה 4 הוכיחו כי לכל 3 שפות L_1, L_2, L_3 כך ש-

$$L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \Sigma^*$$
 .1

$$1 \leq i,j \leq 3$$
 , $i \neq j$ לכל ל $L_i \cap L_j = \emptyset$.2

 $1 \leq i \leq 3$ לכל $L_i \in R$ כי הוכיחו הו $1 \leq i \leq 3$ לכל לכל $L_i \in RE$

... שאלה לבעיה פתוחה. פתוחה. לא נכונה, לא נכונה, לא נכונה אם הטענה הבאה לבעיה $L_1\in RE$ אזי $L_1\in RE$ אזי $L_1\in RE$ אזי $L_1\cap L_2\in RE$ אכל שתי שפות $L_1\cap L_2\in RE$ אם

שאלה 6 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה. $L_{\Sigma^*} \backslash L_{\rm d} \in RE$

שאלה 7 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה. $L'=L \text{ אזי } L'=\left\{\langle M\rangle \ \middle| \ L(M)\in Co\,RE\right\} -1 \ L=\left\{\langle M\rangle \ \middle| \ L(M)\in RE\right\}$ אם

שאלה 8 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה. לכל מספר n מתקיים nלכל מספר n

שאלה 9 מכילה קידודים של מכונות שמקבלות . $L=\left\{ \langle M \rangle \ \middle| \ |L(M)| \geq 3 \right\}$ נתונה השפה הבאה: $L=\{\langle M \rangle \ \middle| \ |L(M)| \geq 3 \}$ נתונה השפה הבאה: $L\in RE$ לפחות 3 מילים שונות. הוכיחו כי

שאלה לשאלה שקולה או נכונה, או נכונה, אם הטענה הבאה תחה: $L_2 \in RE$ או $L_1 \in RE$ אוי איי $L_2 \setminus L_1 \in RE$ אכל שתי שפות $L_2 \in RE$ או איי

שאלה 11 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לשאלה פתוחה: $L \notin R$ אזי $L = \big\{ \langle M \rangle \mid L(M) \notin RE \big\}$ אם

תשובות

שאלה 1

L את מכונת טיורנג שמזהה את M

 L^* אי-דטרמיניסטית אמקבלת אי-דטרמיניסטית טיורינג M^*

תאור הבנייה

:w על קלט $=M^*$

.1. אם w=arepsilon אז M^* מקבלת.

 $k \in \mathbb{N}^+$ כאשר $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$ ל- w ל- מלוקה של אי דטרמיניסטי דטרמיניסטי אווקה $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$ בוחרת באופן אי

i < i < k לכל.

. ועונה כמוה w_i על M את מריצה $M^* ullet$

 \star אם M קיבלה חוזרים לשלב 3).

.4 אזי M^* אזי $\{w_i\}$ אזי כל המחרוזות אזי M מקבלת.

כתיבה הוא סופי הוא סופי ולכן הניחוש הוא סופי, לפיכך כתיבה - w - ניתנת לחישוב - מספר הפירוקים האפשריים לw - מספר הפירוקים האפשריים לw - גיתן לחישוב.

 $\underline{L^{*}}=L\left(M^{*}
ight)$:הוכחת נכונות

⇒ כיוון

 $w\in L\left(M^{st}
ight)$ נניח כי

. קיבלה M ($1 \leq i \leq k$) w_i כך שעבור כל ($k \in \mathbb{N}^+$) $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_k$ קיימת חלוקה

L(M) = L בפרט, בפרט. $w_i \in L(M)$ \Leftarrow

 $w_i \in L \Leftarrow$

 $w = w_1 w_2 \dots w_k \in L^* \Leftarrow$

 $L(M^*) \subseteq L^* \Leftarrow$

\Rightarrow כיוון

 $w \in L^*$ נניח כי

 $(1 \leq i \leq k) \ w_i \in L$ כך שכל ($k \in \mathbb{N}^+$) $w = w_1 w_2 \cdots w_k$ קיימת חלוקה $k \in \mathbb{N}^+$

w תנחש את הפירוק הזה עבור $M^* \Leftarrow$

כזה w_i כזה תקבל כל M

w תקבל את $M^* \Leftarrow$

 $w \in L(M^*) \Leftarrow$

 $L^* \subset L(M^*) \Leftarrow$

 $L\left(M^{st}
ight)=L^{st}$ אזי אזי $L^{st}\subseteq L\left(M^{st}
ight)$ ו- $L\left(M^{st}
ight)\subseteq L^{st}$ אזי שלכן, מאחר ומצאנו ש

.L את מכונת טיורנג שמכריעה את מכונת מיורנג M^* אי-דטרמיניסטית המכריעה את גבנה מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

תאור הבנייה

:w על קלט $=M^*$

- .1. אם w=arepsilon מקבלת.
- $k \in \mathbb{N}^+$ כאשר $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$ ל- w ל- בוחרת באופן אי דטרמיניסטי חלוקה של $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$ בוחרת באופן אי
 - $1 \le i \le k$ לכל.
 - w_i על Mעל מריצה את M^*
 - . דוחה M^* אם M דוחה או M^*
 - אחרת אם M קיבלה חוזרים לשלב 3). \ast
 - .4 אזי M^* אזי $\{w_i\}$ אזי לכל המחרוזות M מקבלת.

ניתנת לחישוב - מספר הפירוקים האפשריים ל- w הוא סופי ולכן הניחוש הוא סופי, לפיכך כתיבה - M^st על הסרט והרצת M ניתן לחישוב.

$L^{st}=L\left(M^{st} ight)$ הוכחת נכונות:

 \Leftarrow כיוון

 $w\in L\left(M^{st}
ight)$ ננית כי

- קיבלה. M ($1 \leq i \leq k$) w_i כך שעבור כל ($k \in \mathbb{N}^+$) $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_k$ קיימת חלוקה
 - L(M) = L בפרט, בפרט. $w_i \in L(M)$ כל
 - $w_i \in L \Leftarrow$
 - $w = w_1 w_2 \dots w_k \in L^* \Leftarrow$
 - $L(M^*) \subseteq L^* \Leftarrow$

\Rightarrow כיוון

 $w \in L^*$ נניח כי

- $(1 \leq i \leq k) \ w_i \in L$ כך שכל ($k \in \mathbb{N}^+$) $w = w_1 w_2 \cdots w_k$ קיימת חלוקה $k \in \mathbb{N}^+$
 - w תנחש את הפירוק הזה עבור $M^* \Leftarrow$
 - כזה w_i כזה תקבל כל M כזה \Leftarrow
 - w תקבל את $M^* \Leftarrow$
 - $w \in L(M^*) \Leftarrow$
 - $L^* \subseteq L(M^*) \Leftarrow$

 $L\left(M^{*}
ight)=L^{*}$ אזי אזי $L^{*}\subseteq L\left(M^{*}
ight)$ -ו $L\left(M^{*}
ight)\subseteq L^{*}$ אזי ישחר ומצאנו ש

שאלה 2 הטענה נכונה:

 $L(M) \in RE$. ההגדרה: מתקיים, לפל מכונת טיורינג מתקיים, לפי ההגדרה: $L(M) \in Co\:RE \mapsto L(M) \in RE \cap Co\:RE = R \;.$

שאלה 3 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

יהי
$$L_1 = L_{\Sigma^*}
otin RE$$
 כאשר

$$L_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^* \}$$

$$.L_2=\overline{L_{\Sigma^*}}$$
 ותהי

$$.L_1\cap L_2=\emptyset\in R$$
 -בורר ש

,
$$L_1
otin Co \, RE$$
 מצד שני, $L_1 = L_{\Sigma^*}
otin RE$ וגם

$$L_2
otin RE$$
 וגם $L_2 = \overline{L_{\Sigma^*}}
otin Co\,RE$ -י

שאלה 4

שיטה 1

 $.1 \leq i \leq 3$ לכל L_i את המקבלת M_i טיורינג סיורינג קיימת קיימת שר קיימת שר $L_i \in RE$ את מכונת אם לכל המכריעה המכריעה M_i^* המכריעה או נבנה מכונת הורינג ל L_i המכריעה את המכריעה את אורינג לבנה מכונת המכריעה את המכריעה את אוריים המכריעה את המכריעה את אוריים המכריעה את המכר

 M_3^* -ו M_2^* את הבנייה עבור באופן דומה אפשר לבנות את הבנייה עבור M_1^*

$$:w$$
 על קלט $=M_1^*$

 M_1,M_2,M_3 מריצה במקביל את שלושת במקביל •

. אם
$$M_1^* \Leftarrow$$
 מקבלת סיבלת אם M_1

. דוחה
$$M_2^* \Leftarrow \eta$$
 קיבלה $M_2 \Leftrightarrow \eta$

. דוחה
$$M_3^* \Leftarrow$$
 קיבלה M_3 דוחה ס

נכונות הבנייה:

 $.L_1$ את מכרעיה את M_1^st נראה כי

.w את מקבלת $M_1^* \Leftarrow w$ את מקבלת $M_1 \Leftarrow w \in L_1$ אם

.w את דוחה $M_1^* \Leftarrow w$ את מקבלת את את מקבלת את מקבלת $M_2 \Leftarrow w \in M_2 \cup M_3 \Leftarrow w \notin L_1$ אם

שיטה 2

 $ar{L}_1\in RE$ נשים לב כי RE תחת איחוד, גם $L_2\in RE$ וגם $L_2\in RE$ ואם לב כי $L_3=ar{L}_1$ נשים לב כי $L_1\in R$ ואם לב $L_1\in RE$ וגם לב כי $L_1\in RE$ איי קיבלנו ש-

 $\cdot L_3$ -ו $\cdot L_2$ כנ"ל עבור

שאלה 5 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

נתונה השפה

$$L_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^* \}$$

ונתונה השפה

$$\overline{L_{\Sigma^*}} = \left\{ \langle M \rangle \mid L(M) \neq \Sigma^* \right\} \cup \left\{ x \neq \langle M \rangle \right\} .$$

הוכחנו בכיתה כי:

$$L_{\Sigma^*}
otin RE$$
 (8

$$L_{\Sigma^*}
otin R$$
 (2

$$\overline{L_{\Sigma^*}}
otin RE$$
 (2

תהיינה L_1, L_2 השפות הבאות:

$$L_1 = L_{\Sigma^*}$$
, $L_2 = \overline{L_{\Sigma^*}}$.

מכאן

$$L_1 \cap L_2 = \emptyset \in RE$$
, $L_1 \cup L_2 = \Sigma^* \in RE$,

 $L_2
otin RE$ אבל $L_1
otin RE$ וגם

שאלה 6 הטענה לא נכונה.

השפה L_{Σ^*} היא

$$L_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^* \}$$

והשפה $L_{
m d}$ היא

$$L_{
m d}=\left\{\langle M
angle \ \ \middle| \ \ \langle M
angle
otin L_{
m d}=\left\{\langle M
angle \ \ \middle| \ \ \langle M
angle\in L(M)
ight\}\cup \left\{x
eq\langle M
angle
ight\}$$
 לכך
$$L_{\Sigma^*}\backslash L_{
m d}=L_{\Sigma^*}\cap \overline{L_{
m d}}=L_{\Sigma^*}
otin RE \ .$$

שאלה 7 הטענה לא נכונה.

המ"ט אוניברסלית $\langle w \rangle$ מקבלת כקלט זוג, קידוד של מ"ט מ"ט מיט אוניברסלית מקבלת כקלט זוג, קידוד של מ"ט מ"ט אוניברסלית מקבלת כקלט זוג, אוג, קידוד של מ"ט מ"ט מיט מיט מיט מקבלת בהתאם.

עבור המכונה האוניברסלית U, מתקיים:

$$L(U) = L_{\rm acc} \in RE$$
.

 $L(U) = L_{
m acc}
otin Co \, RE$ - ולכן אבל ' $\langle U
angle
otin L'$ אבל ' $\langle U
angle \in L$ ולכן

שאלה 8 הטענה נכונה.

$$\gcd(n,n+1)=\gcd(n+1,1)=1$$

 $.\langle n,n+1 \rangle \in RELPRIME$ ולכן

L את המקבלת את המקבלת את נבנה מ"ט אי-דטרמיניסטית ובנה מ

:x על קלט $=M_L$

- . אם אם אם $x=\langle M \rangle$ בודקת בודקת (1)
- $.w_1, w_2, w_3$ בוחרת אי-דטרמיניסטי 3 מילים אי-דטרמיניסטי (2)
 - $.w_1$ על M על ullet
 - . דוחה $M_L \Leftarrow \sigma$ דוחה אם σ
 - $.w_2$ על M על \bullet
 - אם M דוחה $M_L \Leftarrow 0$ דוחה.
 - . על w_3 על M על כמוה ullet

נכונות:

 $x \in L$ אם

$$|L(M)| > 3$$
 -1 $x = \langle M \rangle \Leftarrow$

- M -ם המתקבלות ב- w_1, w_2, w_3 מילים מילים \Leftarrow
- M את עליהם ותריץ ותריץ עליהם הבחר בה תבחר w_1, w_2, w_3 בה בה אל שליהם ליימת ריצה של
 - .x את מקבלת את $M_L \Leftarrow$

אם אפני מקרים: $x \notin L$ אם

- .L את דוחה $M_L \Leftarrow x \neq \langle M \rangle$
 - |L(M)| < 3 -1 $x = \langle M \rangle$ •
- M-ב מתקבלת מהן אחת לפחות לפחות w_1, w_2, w_3 מילים מילים לכל \Leftarrow
- על מילים אלו אחת אחת אחת לפחות מילים 3 מילים מילים בה בכל היא בכל בכל בה אלו בה אוM בה של Mבה אול היא לפחות לפחות מילים מילים מילים מילים אלו בה בכל היא תעצור
 - על א, תדחה או או תאור M_L על א, M_L של ריצה בכל ריצה של
 - .x לא מקבלת את $M_L \Leftarrow$

שאלה 10 הטענה לא נכונה: תהיינה

$$L_1 = L_2 = L_d$$

 $L_{\mathsf{d}} = ig\{ \langle M
angle \mid \langle M
angle
otin L(M) ig\}$ כאשר

 $L_2
otin RE$ אבל, כפי שהוכחנו בכיתה, $L_1
otin RE$ א"א אבל, כפי שהוכחנו בכיתה, בכיתה $L_2
otin RE$

שאלה 11 הטענה לא נכונה.

$$L = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \notin RE \} = \emptyset \in R .$$