תרגילים: שפות כריעות ושפות קבילות

שאלה 1 בהינתן השפה L. השפה L^* מוגדרת:

$$L^* = \{\varepsilon\} \cup \left\{ w = w_1 w_2 \cdots w_k \;\middle|\; \forall\ 1 \le i \le k\ ,\ w_i \in L \right\}$$

א) בהינתן מכונת טיורינג M המקבלת שפה L.
בנו מכונט טיורינג אי דטרמיניסטית M^* המקבלת את השפה L^*.

ב) בהינתן מכונת טיורינג M המכריעה שפה L.
בנו מכונט טיורינג אי דטרמיניסטית M^* המכריעה את השפה L^*.

שאלה 2 האם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה.
לכל מכונת טיורינג M, אם $L(M) \in Co\,RE$ אזי $L(M) \in R$.

שאלה 3 האם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה.
אם $L_1 \cap L_2 \in R$ אזי $L_1 \in RE$ או $L_2 \in Co\,RE$.

תשובות

שאלה 1

א) תהי M מכונת טיורנג שמזהה את L.
נבנה מכונת טיורינג M^* אי-דטרמיניסטית המקבלת את L^*.

תאור הבנייה

$M^* =$ על קלט w:

1. אם $w = \varepsilon$ אז M^* מקבלת.
2. אחרת M^* בוחרת באופן אי דטרמיניסטי חלוקה של w ל- $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$ כאשר $k \in \mathbb{N}^+$.
3. לכל $1 \leq i \leq k$:
   - M^* מריצה את M על w_i ועונה כמוה.
     - אם M קיבלה חוזרים לשלב 3).
4. אם M קיבלה את כל המחרוזות $\{w_i\}$ אזי M^* מקבלת.

M^* - ניתנת לחישוב - מספר הפירוקים האפשריים ל- w הוא סופי ולכן הניחוש הוא סופי, לפיכך כתיבה על הסרט והרצת M ניתן לחישוב.

הוכחת נכונות: $L^* = L\left(M^*\right)$

כיוון $\Leftarrow$

נניח כי $w \in L\left(M^*\right)$

$\Leftarrow$ קיימת חלוקה $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) כך שעבור כל w_i ($1 \leq i \leq k$) M קיבלה.

$\Leftarrow$ כל $w_i \in L(M)$. בפרט, $L(M) = L$.

$\Leftarrow$ $w_i \in L$

$\Leftarrow$ $w = w_1 w_2 \ldots w_k \in L^*$

$\Leftarrow$ $L\left(M^*\right) \subseteq L^*$.

כיוון $\Rightarrow$

נניח כי $w \in L^*$

$\Leftarrow$ קיימת חלוקה $w = w_1 w_2 \cdots w_k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) כך שכל $w_i \in L$ ($1 \leq i \leq k$)

$\Leftarrow$ M^* תנחש את הפירוק הזה עבור w

$\Leftarrow$ המכונה M תקבל כל w_i כזה

$\Leftarrow$ M^* תקבל את w

$\Leftarrow$ $w \in L(M^*)$

$\Leftarrow$ $L^* \subseteq L\left(M^*\right)$.

לכן, מאחר ומצאנו ש- $L\left(M^*\right) \subseteq L^*$ ו- $L^* \subseteq L\left(M^*\right)$ אזי $L\left(M^*\right) = L^*$.

ב) תהי M מכונת טיורנג שמכריעה את L.
נבנה מכונת טיורינג M^* אי-דטרמיניסטית המכריעה את L^*.

תאור הבנייה

$M^* =$ על קלט w:

1. אם $w = \varepsilon$ אז M^* מקבלת.
2. אחרת M^* בוחרת באופן אי דטרמיניסטי חלוקה של w ל- $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$ כאשר $k \in \mathbb{N}^+$.
3. לכל $1 \le i \le k$:
   - M^* מריצה את M על w_i.
     - אם M דחתה אז M^* דוחה.
     - אחרת אם M קיבלה חוזרים לשלב 3).
4. אם M קיבלה את כל המחרוזות $\{w_i\}$ אזי M^* מקבלת.

M^* - ניתנת לחישוב - מספר הפירוקים האפשריים ל- w הוא סופי ולכן הניחוש הוא סופי, לפיכך כתיבה על הסרט והרצת M ניתן לחישוב.

הוכחת נכונות: $L^* = L(M^*)$

כיוון $\Leftarrow$

נניח כי $w \in L(M^*)$

$\Leftarrow$ קיימת חלוקה $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) כך שעבור כל w_i ($1 \le i \le k$) M קיבלה.

$\Leftarrow$ כל $w_i \in L(M)$. בפרט, $L(M) = L$.

$\Leftarrow$ $w_i \in L$

$\Leftarrow$ $w = w_1 w_2 \ldots w_k \in L^*$

$\Leftarrow$ $L(M^*) \subseteq L^*$.

כיוון $\Rightarrow$

נניח כי $w \in L^*$

$\Leftarrow$ קיימת חלוקה $w = w_1 w_2 \cdots w_k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) כך שכל $w_i \in L$ ($1 \le i \le k$)

$\Leftarrow$ M^* תנחש את הפירוק הזה עבור w

$\Leftarrow$ המכונה M תקבל כל w_i כזה

$\Leftarrow$ M^* תקבל את w

$\Leftarrow$ $w \in L(M^*)$

$\Leftarrow$ $L^* \subseteq L(M^*)$.

לכן, מאחר ומצאנו ש- $L(M^*) \subseteq L^*$ ו- $L^* \subseteq L(M^*)$ אזי $L(M^*) = L^*$.

<u>שאלה 2</u> הטענה נכונה:

לכל לכל מכונת טיורינג מתקיים, לפי ההגדרה: $L(M) \in RE$.
לכן, אם $L(M) \in Co\,RE$ אזי
$L(M) \in RE \cap Co\,RE = R$.

<u>שאלה 3</u> הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

יהי $L_1 = L_{\Sigma^*} \notin RE$ כאשר

$$L_{\Sigma^*} = \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; L(M) = \Sigma^* \right\}$$

ותהי $L_2 = \overline{\overline{L_{\Sigma^*}}}$.

בורר ש- $L_1 \cap L_2 = \emptyset \in R$.

מצד שני, $L_1 = L_{\Sigma^*} \notin RE$ וגם $L_1 \notin Co\,RE$,

ו- $L_2 = \overline{L_{\Sigma^*}} \notin Co\,RE$ וגם $L_2 \notin RE$.