

שיעור 12

העתקות לינאריות

12.1 תחום, מול-תחום, גרעין ותמונה

הגדרה 12.1 התחום והטווח של פונקציה

תהיינה A ו- B קבוצות. פונקציה f מ- A ל- B היא כלל המתאים לכל איבר $a \in A$ איבר יחיד $f(a) \in B$.
נסמן

$$f : A \rightarrow B .$$

הקבוצה A נקראת התחום של f , הקבוצה B נקראת הטווח של f .

הגדרה 12.2 פונקציה

פונקציה $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ מ- \mathbb{R}^n ל- \mathbb{R}^m היא כלל המתאים לכל וקטור $X \in \mathbb{R}^n$ ווקטור יחיד $T(X) \in \mathbb{R}^m$.
לוקטור $T(X)$ קוראים התמונה של X תחת T .
 X יקרא המקור של $T(X)$.

הגדרה 12.3 גרעין ותמונה של פונקציה

תהי

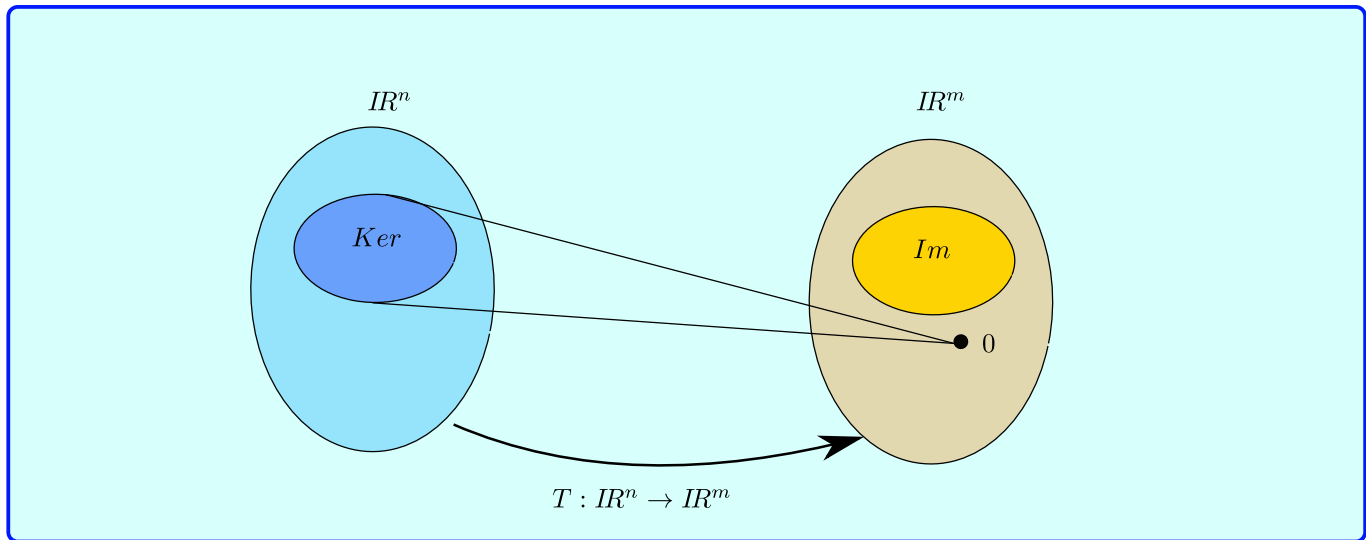
$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m .$$

התמונה של T , מסומנת $\text{Im}(T)$ ומוגדרת

$$\text{Im}(T) = \{T(X) | X \in \mathbb{R}^n\}$$

הגרעין של T מסומן $\text{Ker}(T)$ ומוגדר

$$\text{Ker}(T) = \{X \in \mathbb{R}^n | T(X) = 0\}$$



דוגמה 12.1

נסמן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

נגדיר $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ע"י

$$T(X) = A \cdot X \quad \forall X \in \mathbb{R}^2.$$

(א) מצאו נוסחה ל- T . כלומר, לכל $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ מצאו $T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$.

(ב) מצאו את $T(u)$.

(ג) מצאו $X \in \mathbb{R}^2$ כך ש- $T(X) = b$. במילים אחרות, מצאו ווקטור מקור ל- b . האם יש יותר מאחד?

(ד) האם $c \in \text{Im}(T)$? במילים אחרות, האם קיים $X \in \mathbb{R}^2$ כך ש- $T(X) = c$?

(ה) מצאו $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.

(ו) האם $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(T)$?

(ז) האם $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(T)$?

(ח) מצאו $\text{Ker}(T)$.

פתרון:

(א) יהי $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}$$

(ב) לפי הנוסחה שמצאנו בסעיף הקודם

$$T(u) = T \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3(-1) \\ 3 \cdot 2 + 5(-1) \\ -2 + 7 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

כמובן אפשר גם לכפול את A ב- u :

$$T(u) = A \cdot u = T \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

(ג) דרוש $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ כך ש- $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b$. נראה זאת בשתי דרכים:

דרך ראשונה:

נדרוש

$$\begin{pmatrix} x_2 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$x_1 - 3x_2 = 3$$

$$3x_1 + 5x_2 = 2$$

$$-x_1 + 7x_2 = -5$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 + R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - 4R_2]{R_2 \rightarrow \frac{1}{14}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 3R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ולכן נמצא כי $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{3}{2}$ כך ש-

$$T \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

דרך שניה:

נדרוש

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b$$

נדרג את המטריצה המורחבת הבאה:

$$(A | b)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{array} \right)$$

(ד) סעיף זה דומה לסעיף הקודם, אבל בסעיף זה אנו לא מתבקשים למצוא מקור ל- c אלא לענות האם יש מקור. במילים אחרות, האם יש פתרון למשוואה

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c.$$

נקבל

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow \frac{1}{14}R_2 \\ R_3 \rightarrow \frac{1}{2}R_3}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow R_1 + 3R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{array} \right)$$

למערכת אין פתרון, ולכן אין מקור לוקטור c .

(ה) נשים לב ש- $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ולכן $T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ לא מוגדר.

(ו) כמו קודם, $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ולכן $\text{Ker}(T) \subseteq \mathbb{R}^2$. בפרט

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \text{Ker}(T).$$

(ז) קל לראות שהתשובה חיובית, שכן

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \\ -0 + 7 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(T).$$

(ח) למציאות $\text{Ker}(T)$, עלינו למצוא את כל המקורות ב- \mathbb{R}^2 של ווקטור האפס ב- \mathbb{R}^3 , כלומר לפתור את המשוואה

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ניתן להשתמש בחישובים לעיל:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow \frac{1}{14}R_2 \\ R_3 \rightarrow \frac{1}{2}R_3}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow R_1 + 3R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ולמערכת יש רק את הפתרון הטריוויאלי. כלומר, המקור של ווקטור האפס ב- \mathbb{R}^3 הוא רק ווקטור האפס ב- \mathbb{R}^2 . במילים אחרות,

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

12.2 הגדרה של העתקה ליניארית

הגדרה 12.4 העתקה ליניארית

פונקציה $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ נקראת **העתקה ליניארית** אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

(1)

$$T(u + w) = T(u) + T(w)$$

לכל $u, w \in \mathbb{R}^n$ (שומרת על סכום).

(2)

$$T(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot T(u)$$

לכל $u \in \mathbb{R}^n$ ולכל $\alpha \in \mathbb{R}$ (שומרת על כפל בסקלר).

דוגמה 12.2

האם הפונקציה $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

העתקה ליניארית?

פתרון:

נבדוק את שני התנאים ההרכחים:

(1) יהיו $X, Y \in \mathbb{R}^2$ כך ש-

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$T(X+Y) = A \cdot (X+Y) = \begin{pmatrix} 1(x_1+y_1) - 3(x_2+y_2) \\ 3(x_1+y_1) + 5(x_2+y_2) \\ -(x_1+y_1) + 7(x_2+y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 - 3y_2 \\ 3y_1 + 5y_2 \\ -y_1 + 7y_2 \end{pmatrix} = A \cdot X + A \cdot Y$$

(2) יהי $X \in \mathbb{R}^2$ ו $\alpha \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot X) = \begin{pmatrix} 1(\alpha x_1) - 3(\alpha x_2) \\ 3(\alpha x_1) + 5(\alpha x_2) \\ -(\alpha x_1) + 7(\alpha x_2) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix} = \alpha A \cdot X$$

משפט 12.1

(עיין משפט 3.4.) נניח ש- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ו- $u, w \in \mathbb{R}^n$ ו- $\alpha \in \mathbb{R}$. מתקיים:

(1)

$$A \cdot (u + w) = A \cdot u + A \cdot w$$

(2)

$$A \cdot (\alpha \cdot u) = \alpha \cdot (A \cdot u)$$

משפט 12.2

תהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. ההעתקה $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ המוגדרת ע"י

$$T(x) = A \cdot x$$

לכל $x \in \mathbb{R}^n$ היא העתקה ליניארית.

הוכחה:

יהיו $u, w \in \mathbb{R}^n$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. לפי משפט 12.1 מתקיים

(1)

$$T(u + w) = A \cdot (u + w) = A \cdot u + A \cdot w = T(u) + T(w)$$

(2)

$$T(\alpha \cdot u) = A \cdot (\alpha \cdot u) = \alpha \cdot (A \cdot u) = \alpha \cdot T(u)$$

■

משפט 12.3 "2 תכונות חשובות של העתקה ליניארית"

תהי $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית. מתקיים:

(1)

$$T(0) = 0$$

(2)

$$T(\alpha v + \beta u) = \alpha T(v) + \beta T(u)$$

לכל $u, v \in \mathbb{R}^n$ ולכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(3) מכאן נובע כי עבור T העתקה ליניארית, מתקיים

$$T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n).$$

בקצרה, תכונה יסודית של העתקה ליניארית:

$$T(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T \text{ העתקה ליניארית}$$

דוגמה 12.3

נגדיר $T : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$ ע"י

$$T(w) = 5w \quad \forall w \in \mathbb{R}^7.$$

האם T העתקה ליניארית?

פתרון:

כן. הוכחה:

יהיו $u, w \in \mathbb{R}^7$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. מתקיים:

$$T(u + w) = 5 \cdot (u + w) = 5 \cdot u + 5 \cdot w = T(u) + T(w) \quad (1)$$

$$T(\alpha \cdot u) = 5 \cdot (\alpha \cdot u) = \alpha \cdot (5 \cdot u) = \alpha \cdot T(u) \quad (2)$$

12.4 דוגמה

נגדיר $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ע"י

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

האם T העתקה ליניארית?

פתרון:

לא. כל העתקה ליניארית S מקיימת $S(0) = 0$. בדוגמה הזו

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן T איננה העתקה ליניארית.

12.5 דוגמה

נגדיר $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ע"י

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y \\ 0 \\ 5x+2y \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

האם T העתקה ליניארית?

פתרון:

כן. הוכחה:

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

נבדוק האם שני התנאים של הגדרה 12.4 מתקיימים:

(1)

$$\begin{aligned} T \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) &= T \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1+x_2)-3(y_1+y_2) \\ 0 \\ 5(x_1+x_2)+2(y_1+y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1+2x_2-3y_1-3y_2 \\ 0 \\ 5x_1+5x_2+2y_1+2y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x_1-3y_1 \\ 0 \\ 5x_1+2y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2-3y_2 \\ 0 \\ 5x_2+2y_2 \end{pmatrix} \\ &= T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{לכן } T \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ מתקיים.}$$

(2)

$$\begin{aligned} T\left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) &= T\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\alpha x_1) - 3(\alpha y_1) \\ 0 \\ 5(\alpha x_1) + 2(\alpha y_1) \end{pmatrix} \\ &= \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2x_1 - 3y_1 \\ 0 \\ 5x_1 + 2y_1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha \cdot T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לכן $T\left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = \alpha \cdot T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ מתקיים.

דוגמה 12.6

נגדיר $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ע"י

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ 9x + 5y \\ x + 7y \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

האם T העתקה ליניארית?

פתרון:

לא. ניקח למשל

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אמת כי

$$T\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix}$$

אבל

$$2 \cdot T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix}$$

כך ש-

$$T\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \neq 2 \cdot T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן בגלל שמצאנו דוגמה המקיימת

$$T(\alpha \cdot u) \neq \alpha \cdot T(u)$$

אז התכונה ההכרחית $T(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot T(u)$ איננה מתקיימת בכללי.

דוגמה 12.7

תהי $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ העתקה ליניארית המקיימת

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(א) מצאו את $T \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ב) מצאו את $T \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(ג) מצאו את $T \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(ד) מצאו נוסחה ל T . כלומר, לכל $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ מצאו $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

פתרון:

(א)

$$T \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = T \left(3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 3 \cdot T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

(ב)

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = T \left(5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 5 \cdot T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 35 \\ 40 \end{pmatrix}$$

(ג)

$$T \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = T \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = T \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 35 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 36 \\ 44 \\ 52 \end{pmatrix}$$

(ד)

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= T \left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \right) = T \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = T \left(x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + T \left(y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= x \cdot T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x \\ 4x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5y \\ 6y \\ 7y \\ 8y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x + 5y \\ 2x + 6y \\ 3x + 7y \\ 4x + 8y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

במילים אחרות:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

12.3 מטריצה המייצגת הסטנדרטית

משפט 12.4 מטריצה המייצגת הסטנדרטית

תהי $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית. אז קיימת מטריצה אחת ויחידה $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ כך ש-

$$T(X) = A \cdot X$$

לכל $X \in \mathbb{R}^n$. מתקיים

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ T(e_1)_E & T(e_2)_E & \cdots & T(e_n)_E \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

כאשר e_1, e_2, \dots, e_n הווקטורים של הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^n ו- E הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^m .

A נקראת **המטריצה המייצגת הסטנדרטית (ממ"ס)** של ההעתקה ליניארית T .

משפט 12.5 תנאי מספיק של העתקה ליניארית

(i) נתונה $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. אם $T(X) = A \cdot X$ לכל $X \in \mathbb{R}^n$ אז

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

הינו העתקה ליניארית.

(ii) אם $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית אז קיימת $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ כך ש-

$$T(X) = A \cdot X$$

לכל $X \in \mathbb{R}^n$.

12.8 דוגמה

נתונה פונקציה $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ 0 \\ 5x + 2y \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

המהווה העתקה ליניארית. מצאו ממ"ס שלה.

פתרון:ווקטורי היחידה של \mathbb{R}^2 הינם

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

לכן, הממ"ס של T היא:

$$A = \left(T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

12.4 פונקציה על ופונקציה חח"ע**הגדרה 12.5 פונקציה על ופונקציה חח"ע**נתונה פונקציה $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (i) T על \mathbb{R}^m אם לכל $b \in \mathbb{R}^m$ קיים (לפחות אחד) $X \in \mathbb{R}^n$ כך ש-

$$T(X) = b.$$

(ii) T חד-חד ערכית (חח"ע) אם לכל $b \in \mathbb{R}^m$ קיים לכל היותר $X \in \mathbb{R}^n$ אחד כך ש-

$$T(X) = b.$$

12.9 דוגמהתהי $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ מוגדרת ע"י

$$T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y + z \\ x + |y| - z \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

תהי

$$T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

מוגדרת ע"י

$$T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y \\ z \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

תהי

$$T_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

מוגדרת ע"י

$$T_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

(א) הוכיחו או הפריכו:

T_1 העתקה ליניארית.

(ב) הוכיחו או הפריכו:

T_2 העתקה ליניארית.

(ג) הוכיחו או הפריכו:

T_3 העתקה ליניארית.

לכל אחת מההעסקות הליניאריות שמצאת,

(ד) מצא מטריצה מייצגת סטנדרטית.

(ה) האם ההעסקה על?

(ו) האם ההעסקה חח"ע?

פתרון:

(א) T_1 איננה העסקה ליניארית. ניקח למשל

$$T_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 0 \\ 0 + |1| - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1 \left(-1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = T_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) + 0 \\ 0 + |-1| - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אבל

$$-1 \cdot T_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$T_1 \left(-1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \neq -1 \cdot T_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ב)

$$T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

מוגדרת ע"י

$$T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y \\ z \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

נתבונן במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} T_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & T_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & T_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נשים לב שלכל $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ מתקיים:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y \\ z \end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

כלומר, לכל $X \in \mathbb{R}^3$ מתקיים

$$T_2(X) = AX$$

ולכן, לפי משפט 12.5 (i), העתקה ליניארית.

שימו לב ש- A הינה הממ"ס של T .

(ג) T_3 איננה העתקה ליניארית בדומה לדוגמה של T_1 . ניקח למשל

$$T_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T_3 \left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = T_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

אבל

$$2 \cdot T_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$T_3 \left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \neq 2 \cdot T_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ד) עיין סעיף (ב)

(ה) נזכיר שההעתקה היא על אם לכל $b \in \mathbb{R}^3$ קיים (לפחות אחד) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ כך ש-

$$T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b,$$

כלומר, אם"ס לכל $b \in \mathbb{R}^3$ למערכת

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$$

יש פתרון.

נדרג את המטריצה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - b_1 \end{array} \right)$$

על סמך הדרוג, קיים $b \in \mathbb{R}^3$ כך שלמערכת $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$ אין פתרון (כי תיתכן שורת סתירה), ולכן ההעתקה איננה על.

(ו) נזכיר שההעתקה היא חח"ע אם לכל $b \in \mathbb{R}^3$ קיים לכל היותר $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ אחד כך ש-

$$T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b,$$

כלומר, אם"ם לכל $b \in \mathbb{R}^3$ למערכת

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$$

יש לכל היותר פתרון אחד.

על סמך הדרוג, קיים $b \in \mathbb{R}^3$ (למשל, ווקטור האפס) כך שלמערכת

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$$

יש אינסוף פתרונות (כי יש משתנה חופשי), ולכן ההעתקה איננה חח"ע.

משפט 12.6

תהי $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית ותהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T . התנאים הבאים שקולים:

(א) T על (\mathbb{R}^m) .

(ב) במדורגת המתקבלת מ- A קיים איבר מוביל בכל שורה.

(ג) עמודות A פורשות את \mathbb{R}^m .

משפט 12.7

תהי $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית ותהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T . התנאים הבאים שקולים:

(א) T חח"ע.

(ב) במדורגת המתקבלת מ- A קיים איבר מוביל בכל עמודה

(ג) עמודות A בת"ל.

12.5 הצגת העתקה ליניארית בבסיסים שונים

משפט 12.8

יהי V מרחב ווקטורי עם בסיס סדור

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\},$$

יהי W מרחב ווקטורי עם בסיס סדור

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$$

ותהי

$$T : V \rightarrow W$$

העתקה ליניארית. אזי, לכל $X \in V$ מתקיים

$$[T(X)]_C = [T]_C^B \cdot [X]_B$$

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(b_1)]_C & [T(b_2)]_C & \dots & [T(b_n)]_C \\ | & | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

$[T]_C^B$ נקראת המטריצה המייצגת של ההעתקה T ביחס לבסיסים B ו- C .

דוגמה 12.10

נתון

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

העתקה ליניארית המוגדרת ע"י

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 4y \\ 4x + 5y \\ 6y \end{pmatrix}$$

לכל $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, ונתון

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

בסיס של \mathbb{R}^2 .

(א) מהי המטריצה המייצגת הסטנדרטית ?

(ב) מהי המטריצה המייצגת ביחס לבסיס B ?

(ג) נתון הווקטור X בעל קואורדינטות $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ביחס לבסיס הסטנדרטית E של \mathbb{R}^2 . מהו הווקטור X_B ביחס לבסיס B ?

(ד) הוכיחו כי

$$[T]_{\bar{E}}^E [X]_E = [T]_{\bar{E}}^B [X]_B$$

כאשר \bar{E} הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^3 .

פתרון:

נתון ווקטור

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$$

ביחס לבסיס הסטנדרטית $E = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ של \mathbb{R}^2 . אז ההעתקה ליניארית T מחזירה ווקטור

$$(3x - 4y) \cdot e_1 + (4x + 5y) \cdot e_2 + 6y \cdot e_3$$

ביחס לבסיס הסטנדרטית $\bar{E} = \left\{ \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ של \mathbb{R}^3 .

(א) ניתן לכתוב את ההעתקה ליניארית באמצעות המטריצה המייצגת הסטנדרטית בצורה

$$[T(X)]_{\bar{E}} = [T]_{\bar{E}}^E \cdot [X]_E$$

כאשר

$$[T]_{\bar{E}}^E = \begin{pmatrix} | & | \\ T(e_1) & T(e_2) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

המטריצה המייצגת הסטנדרטית.

(ב) המטריצה המייצגת ביחס לבסיס B ניתנת ע"י

$$[T]_{\bar{E}}^B = \begin{pmatrix} | & | \\ T(b_1) & T(b_2) \\ | & | \end{pmatrix}.$$

שים לב,

$$b_1 = e_1 + e_2, \quad b_2 = e_1 - e_2, \quad \Leftrightarrow \quad e_1 = \frac{1}{2} \cdot b_1 + \frac{1}{2} \cdot b_2, \quad e_2 = \frac{1}{2} \cdot b_1 - \frac{1}{2} \cdot b_2,$$

כך ש-

$$T(b_1) = T(e_1) + T(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$T(b_2) = T(e_1) - T(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$[T]_{\bar{E}}^B = \begin{pmatrix} | & | \\ T(b_1) & T(b_2) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 9 & -1 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

(ג)

$$[X]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_E = 2 \cdot e_1 + 4 \cdot e_2 = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot b_1 + \frac{1}{2} \cdot b_2 \right) + 4 \left(\frac{1}{2} \cdot b_1 - \frac{1}{2} \cdot b_2 \right) = 3 \cdot b_1 - 1 \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_B$$

(ד)

$$[T]_{\bar{E}}^E \cdot [X]_E = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} -10 \\ 28 \\ 24 \end{pmatrix}_{\bar{E}}$$

-ו

$$[T]_{\bar{E}}^B \cdot [X]_B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 9 & -1 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -10 \\ 28 \\ 24 \end{pmatrix}_{\bar{E}}$$

12.11 דוגמה

נתון

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

העתקה ליניארית המוגדרת ע"י

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + y \\ 2x - y \\ 3y \end{pmatrix}$$

לכל $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, ונתון

$$C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

בסיס של \mathbb{R}^3 .

(א) מהי המטריצה המייצגת הסטנדרטית ?

(ב) מהי המטריצה המייצגת ביחס לבסיס C ?

(ג) נתון הווקטור $X_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_E$ ביחס לבסיס הסטנדרטית E , הוכיחו כי הווקטור המתקבל מההעתקה לינארית

$$[T]_C^E X_E$$

הוא שקול לווקטור המתקבל מההעתקה לינארית

$$[T]_E^E X_E$$

פתרון:

(א) נתון בסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^2 , קרי $E = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, והבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^3 , קרי $\bar{E} = \left\{ \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{aligned} [T(e_1)]_{\bar{E}} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\bar{E}} = 4 \cdot \bar{e}_1 + 2 \cdot \bar{e}_2 + 0 \cdot \bar{e}_3 \\ [T(e_2)]_{\bar{E}} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\bar{E}} = 1 \cdot \bar{e}_1 - 1 \cdot \bar{e}_2 + 3 \cdot \bar{e}_3 \end{aligned}$$

כך ש-

$$[T]_{\bar{E}}^E = \left(\begin{array}{c|c} [T(e_1)]_{\bar{E}} & [T(e_2)]_{\bar{E}} \\ \hline \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(ב) שים לב

$$\begin{aligned} c_1 &= \bar{e}_1 & \bar{e}_1 &= c_1 \\ c_2 &= \bar{e}_1 + \bar{e}_2 & \Rightarrow \bar{e}_2 &= c_2 - c_1 \\ c_3 &= \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 & \bar{e}_3 &= c_3 - c_2 \end{aligned}$$

כך ש-

$$[T(e_1)]_C = 4 \cdot c_1 + 2 \cdot (c_2 - c_1) = 2 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_C$$

$$[T(e_2)]_C = 1 \cdot c_1 - 1 \cdot (c_2 - c_1) + 3 \cdot (c_3 - c_2) = 2 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}_C$$

ולכן

$$[T]_C^E = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(e_1)]_C & [T(e_2)]_C \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(ג)

$$[T(X)]_{\bar{E}} = [T]_{\bar{E}}^E \cdot [X]_E = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}_{\bar{E}}$$

$$[T(X)]_C = [T]_C^E \cdot [X]_E = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}_C$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}_C = 6 \cdot c_1 - 6 \cdot c_2 + 6 \cdot c_3 = 6 \cdot \bar{e}_1 - 6(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + 6 \cdot (\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3) = 6 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + 6 \cdot \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}_{\bar{E}}.$$

דוגמה 12.12

נתונה העתקה ליניארית

$$T: \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$$

המוגדרת ע"י

$$T(a + bx + cx^2) = a + 2b + 3c + (2a + 4b + 5c)x + (3a + 6b + 9c)x^2 + (4a + 8b + 12c)x^3$$

(א) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T .

(ב) מצאו את המימד ובסיס של $\text{Im } T$.

(ג) מצאו את המימד ובסיס של $\text{ker } T$.

(ד) מצאו את המטריצה המייצגת של ההעתק ביחס לבסיסים הסדורים

$$B = \{b_1 = 1 + x, b_2 = x^2, b_3 = x\}$$

של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ וביחס לבסיס

$$C = \{c_1 = x^3, c_2 = x^2, c_3 = x, c_4 = 1\}$$

של $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

(ה) מצאו את

$$[T(1 + x + x^2 + x)]_C$$

פתרון:

(א) נסמן

$$E = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2\}$$

הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ ו-

$$\bar{E} = \{\bar{e}_1 = 1, \bar{e}_2 = x, \bar{e}_3 = x^2, \bar{e}_4 = x^3\}$$

הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$. המטריצה המייצגת הסטנדרטית היא

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} [T(e_1)]_{\bar{E}} & [T(e_2)]_{\bar{E}} & [T(e_3)]_{\bar{E}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} [T(1)]_{\bar{E}} & [T(x)]_{\bar{E}} & [T(x^2)]_{\bar{E}} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

(ב) מתקיים:

$$\text{Im } T = \text{Col } A .$$

נדרג את המטריצה המייצגת הסטנדרטית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל ש-

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$$

מהווה בסיס של $\text{Col } A$, ולכן $\dim(\text{Col } A) = 2$.

מכאן בסיס של $\text{Im } T$ הוא

$$\{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3, 3 + 5x + 9x^2 + 12x^3\}$$

ולכן $\dim(\text{Im } T) = 2$

(ג) מתקיים

$$\text{Ker } T \approx \text{Nul } A .$$

$$\text{Nul } A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

על סמך החישוב לעיל נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \\ 4 & 8 & 12 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

כך ש-

$$\text{Nul } A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b \in \mathbb{R} .$$

לכן בסיס של $\text{Nul } A$ הוא

$$B_{\text{Nul } A} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_E \right\}$$

-1

$$\dim(\text{Nul } A) = 1.$$

מכאן נקבל

$$B_{\text{Ker } T} = \{-2 + x\}$$

-1

$$\dim(\text{Ker } T) = 1.$$

(ד) נחשב את התמונות של ווקטורי הבסיס,

$$T(1+x) = 3+6x+9x^2+12x^3, \quad T(x^2) = 3+5x+9x^2+12x^3, \quad T(x) = 2+4x+6x^2+8x^3.$$

נזכיר ש-

$$C = \{c_1 = x^3, c_2 = x^2, c_3 = x, c_4 = 1\}$$

ולכן המטריצה המבוקשת היא

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} [T(b_1)]_C & [T(b_2)]_C & [T(b_3)]_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 8 \\ 9 & 9 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(ה)

$$[T(1+x+x^2+x)]_C = [T]_C^B \cdot [T(1+x+x^2+x)]_B = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 8 \\ 9 & 9 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 24 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}$$

12.6 קשר בין מרחב העמודות ומרחב האפס להעתקות לינאריות

משפט 12.9 קשר בין מרחב העמודות ומרחב האפס להעתקות לינאריות

עבור מרחבים ווקטוריים U ו- V והעתקה לינארית

$$T : U \rightarrow V$$

כך ש-

$$\text{Im } T = \left\{ T(u) \in V \mid u \in U \right\}$$

-1

$$\text{Ker } T = \left\{ u \in U \mid T(u) = 0 \right\}.$$

נשים לב שאם

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

אז T מוגדרת ע"י כפל במטריצה, כלומר

$$T(X) = A \cdot X$$

עבור מטריצה מסדר $m \times n$. במקרה זה,

$$\text{Im } T = \text{Col } A$$

-1

$$\text{Ker } T = \text{Nul } A$$

12.7 הגדרה של איזומורפיזם

משפט 12.10

יהי V מ"ו ויהי

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

בסיס סדור של V . ההעתקה

$$T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

הנתונה ע"י

$$T(X) = [X]_B \quad \forall X \in V$$

היא העתקה לינארית חח"ע ועל.

הגדרה 12.6 איזומורפיזם בין מרחבים ווקטורים

יהיו U, V מ"ו מעל \mathbb{R} . אם קיימת העתקה לינארית חח"ע ועל

$$T : U \rightarrow V,$$

נאמר ש- T איזומורפיזם. בנוסף, נאמר שהמרחבים U ו- V איזומורפיים ונסמן $U \approx V$.

12.8 האיזומורפיזמים הטבעיים

(1) נתון העתקה לינארית

$$T : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \rightarrow \mathbb{R}^4$$

ובסיס

$$E = \{1, x, x^2, x^3\}$$

של $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ כך ש- T מוגדרת ע"י

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = [a + bx + cx^2 + dx^3]_E = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_E.$$

אז

$$\mathbb{R}_{\leq 3}[x] \approx \mathbb{R}^4$$

ע"י האיזומורפיזם הטבעי

$$a + bx + cx^2 + dx^3 \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

(2) נתון העתקה ליניארית

$$T : \mathbb{R}^{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^6$$

ובסיס

$$\bar{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

של $\mathbb{R}^{2 \times 3}$ כך ש- T מוגדרת ע"י

$$T \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \right) = \left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \right]_{\bar{E}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}_{\bar{E}}.$$

אז

$$\mathbb{R}^{2 \times 3} \approx \mathbb{R}^6$$

ע"י האיזומורפיזם הטבעי

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}_{\bar{E}}.$$

משפט 12.11 ע

ל מנת להכריע שאלות במ"ו מסוים (מעל \mathbb{R}) ניתן לעבור ל- \mathbb{R}^n המתאים (ע"י ההעתקה לעיל ובחירת הבסיס הסטנדרטי).

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{T} & V \\
 \downarrow \phi & \begin{array}{c} X \mapsto T(X) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ [X]_B \mapsto [T(X)]_C \end{array} & \downarrow \psi \\
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

$$[T(X)]_C = [T]_C^B \cdot [X]_B$$

דוגמה 12.13

נתונה טרנספורמציה ליניארית

$$T : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

המוגדרת ע"י

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a + 2b + 3c & 2a + 4b + 5c \\ 3a + 6b + 9c & 4a + 8b + 12c \end{pmatrix}$$

(א) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T .

(ב) מצאו את המימד ובסיס של $\text{Im } T$.

(ג) מצאו את המימד ובסיס של $\text{Ker } T$.

(ד) מצאו את המטריצה המייצגת של ההעתקה ביחס לבסיס הסדור

$$B = \{b_1 = 1 + x, b_2 = x^2, b_3 = x\}$$

של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ וביחס לבסיס

$$C = \left\{ c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, c_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

פתרון:

(א)

$$[T]_{\bar{E}}^E \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} a + 2b + 3c \\ 2a + 4b + 5c \\ 3a + 6b + 9c \\ 4a + 8b + 12c \end{pmatrix}_{\bar{E}}$$

$$[T]_{\bar{E}}^E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} =: A$$

(ב)

$$\text{Im } T = \text{Col } A$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כך שבסיס של $\text{Col } A$ הינו

$$B_{\text{Col } A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$$

ומימדו 2. מכאן בסיס של $\text{Im } T$ הוא

$$B_{\text{Im } T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} \right\}$$

(ג)

$$\text{Ker } T \approx \text{Nul } A .$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \\ 4 & 8 & 12 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ולכן

$$\text{Nul } A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$$

ומימדו 1. מכאן

$$B_{\text{Ker } T} = \{-2 + x\}$$

(ד)

$$[T]_C^B = \left(\begin{array}{c|c|c} | & | & | \\ [T(b_1)]_C & [T(b_2)]_C & [T(b_3)]_C \\ | & | & | \end{array} \right)$$

לפי ההגדרה של T :

$$\begin{aligned} T(b_1) &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} = 12c_1 + 9c_2 + 6c_3 + 3c_4 = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}_C \\ T(b_2) &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} = 12c_1 + 9c_2 + 5c_3 + 3c_4 = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}_C \\ T(b_3) &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = 8c_1 + 6c_2 + 4c_3 + 2c_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}_C \end{aligned}$$

כך ש-

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 8 \\ 9 & 9 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

12.14 דוגמה

$$T: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

המוגדרת ע"י

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b + 3c \\ 2b + 3c + 4d \\ 5a + 3c + 4d \end{pmatrix}$$

(א) מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T .

(ב) מצאו את המימד ובסיס של $\text{Im } T$.

(ג) מצאו את המימד ובסיס של $\text{Ker } T$.

פתרון:

(א) שימו לב, ביחס לבסיס הסטנדרטית

$$E = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ וביחס לבסיס

$$\bar{E} = \left\{ \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

של \mathbb{R}^3 , אז

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_E$$

$$[T]_{\bar{E}}^E \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} a + 2b + 3c \\ 2b + 3c + 4d \\ 5a + 3c + 4d \end{pmatrix}_{\bar{E}}$$

$$[T]_{\bar{E}}^E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = A .$$

(ב) $\text{Im } T = \text{Col } A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -10 & -12 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 24 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

ולכן העמודות

$$B_{\text{Col } A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

מהווה בסיס של $\text{Im } T$ ומימדו 3.

(ג) $\text{Ker } T = \text{Nul } A$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 0 \end{array} \right)$$

ולכן

$$\text{Nul } A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \mid d \in \mathbb{R} \right\}$$

כך ש-

$$B_{\text{Nul } A} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ומימדו 1.

מכאן

$$B_{\text{Ker } T} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -8 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$