תרגילים: שפות כריעות ושפות קבילות

שאלה L^* מוגדרת: בהינתן השפה L^* מוגדרת:

$$L^* = \{\varepsilon\} \cup \{w = w_1 w_2 \cdots w_k \mid \forall \ 1 \le i \le k \ , \ w_i \in L\}$$

- L המקבלת שפה M המיורינג בהינתן בהינתן בהינת L^{\ast} המקבלת את המקבלת M^{\ast} דטרמיניסטית אי דטרמינט טיורינג אי
- .L המכריעה שפה M בהינתן מכונת טיורינג בהינתן המכריעה את השפה המכריעה את בנו מכונט טיורינג אי דטרמיניסטית M^*
- שאלה 2 האם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה. $L(M) \in R$ אזי $L(M) \in Co\,RE$ לכל מכונת טיורינג
- שאלה לבעיה שקולה לכונה, או שקולה לבעיה פתוחה. $L_2 \in Co\,RE \,\text{ או}\,\,L_1 \in RE \,$ אם $L_1 \cap L_2 \in R$

-שאלה 4 הוכיחו כי לכל 3 שפות L_1, L_2, L_3 כך ש

$$L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \Sigma^*$$
 .1

$$1 \leq i,j \leq 3$$
 , $i \neq j$ לכל ל $L_i \cap L_j = \emptyset$.2

 $1 \leq i \leq 3$ לכל $L_i \in R$ כיחו כי $1 \leq i \leq 3$ לכל לכל $L_i \in RE$

שאלה 5 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה. $L_1\in RE$ או $L_1\in RE$ או $L_1\in RE$ או $L_1\cap L_2\in RE$ או $L_1\cap L_2\in RE$ אכל שתי שפות L_1 וגם

. פתוחה שאלה או שקולה לבעיה נכונה, לא נכונה או קבעו אם קבעו אם לבעיה לבעיה לבעיה ל $L_{\Sigma^*} \backslash L_{\rm d} \in RE$

... פתוחה. פתוחה שאלה 7 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה. בעו אב L'=L אזי $L'=\left\{\langle M\rangle\ \middle|\ L(M)\in Co\,RE\right\}$ אם $L'=\left\{\langle M\rangle\ \middle|\ L(M)\in RE\right\}$

שאלה 8 קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה או שקולה לבעיה פתוחה. $\langle n,n+1\rangle \in RELPRIME$ לכל מספר n מתקיים

תשובות

שאלה 1

L את מכונת טיורנג שמזהה את M

 L^* אי-דטרמיניסטית אמקבלת אי-דטרמיניסטית טיורינג M^*

תאור הבנייה

:w על קלט $=M^*$

.1. אם w=arepsilon אז M^* מקבלת.

 $k \in \mathbb{N}^+$ כאשר $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$ ל- w ל- מלוקה של אי דטרמיניסטי דטרמיניסטי אווקה $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$ בוחרת באופן אי

i < i < k לכל.

. ועונה כמוה על w_i על M את מריצה $M^* ullet$

 \star אם M קיבלה חוזרים לשלב 3).

.4 אזי M^* אזי $\{w_i\}$ אזי כל המחרוזות אזי M מקבלת.

כתיבה הוא סופי הוא סופי ולכן הניחוש הוא סופי, לפיכך כתיבה - w - ניתנת לחישוב - מספר הפירוקים האפשריים לw - מספר הפירוקים האפשריים לw - גיתן לחישוב.

 $\underline{L^{*}}=L\left(M^{*}
ight)$:הוכחת נכונות

⇒ כיוון

 $w\in L\left(M^{st}
ight)$ נניח כי

. קיבלה M ($1 \leq i \leq k$) w_i כך שעבור כל ($k \in \mathbb{N}^+$) $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_k$ קיימת חלוקה

L(M) = L בפרט, בפרט. $w_i \in L(M)$ \Leftarrow

 $w_i \in L \Leftarrow$

 $w = w_1 w_2 \dots w_k \in L^* \Leftarrow$

 $L(M^*) \subseteq L^* \Leftarrow$

\Rightarrow כיוון

 $w \in L^*$ נניח כי

 $(1 \leq i \leq k) \ w_i \in L$ כך שכל ($k \in \mathbb{N}^+$) $w = w_1 w_2 \cdots w_k$ קיימת חלוקה $k \in \mathbb{N}^+$

w תנחש את הפירוק הזה עבור $M^* \Leftarrow$

כזה w_i כזה תקבל כל M

w תקבל את $M^* \Leftarrow$

 $w \in L(M^*) \Leftarrow$

 $L^* \subset L(M^*) \Leftarrow$

 $L\left(M^{st}
ight)=L^{st}$ אזי אזי $L^{st}\subseteq L\left(M^{st}
ight)$ ו- $L\left(M^{st}
ight)\subseteq L^{st}$ אזי שלכן, מאחר ומצאנו ש

.L את מכונת טיורנג שמכריעה את מכונת מיורנג M^* אי-דטרמיניסטית המכריעה את גבנה מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

תאור הבנייה

:w על קלט $=M^*$

- .1. אם w=arepsilon מקבלת.
- $k \in \mathbb{N}^+$ כאשר $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$ ל- w ל- בוחרת באופן אי דטרמיניסטי חלוקה של $w = w_1, w_2, \ldots, w_k$ בוחרת באופן אי
 - $1 \le i \le k$ לכל.
 - w_i על M מריצה את M^*
 - . דוחה M^* אם M דוחה או M^*
 - אחרת אם M קיבלה חוזרים לשלב 3). \ast
 - .4 אזי M^* אזי $\{w_i\}$ אזי לכל המחרוזות M מקבלת.

ניתנת לחישוב - מספר הפירוקים האפשריים ל- w הוא סופי ולכן הניחוש הוא סופי, לפיכך כתיבה - M^st על הסרט והרצת M ניתן לחישוב.

$L^{st}=L\left(M^{st} ight)$ הוכחת נכונות:

 \Leftarrow כיוון

 $w\in L\left(M^{st}
ight)$ ננית כי

- קיבלה. M ($1 \leq i \leq k$) w_i כך שעבור כל ($k \in \mathbb{N}^+$) $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_k$ קיימת חלוקה
 - L(M) = L בפרט, בפרט. $w_i \in L(M)$ כל
 - $w_i \in L \Leftarrow$
 - $w = w_1 w_2 \dots w_k \in L^* \Leftarrow$
 - $L(M^*) \subseteq L^* \Leftarrow$

\Rightarrow כיוון

 $w \in L^*$ נניח כי

- $(1 \leq i \leq k) \ w_i \in L$ כך שכל ($k \in \mathbb{N}^+$) $w = w_1 w_2 \cdots w_k$ קיימת חלוקה $k \in \mathbb{N}^+$
 - w תנחש את הפירוק הזה עבור $M^* \Leftarrow$
 - כזה w_i כזה תקבל כל M כזה \Leftarrow
 - w תקבל את $M^* \Leftarrow$
 - $w \in L(M^*) \Leftarrow$
 - $L^* \subseteq L(M^*) \Leftarrow$

 $L\left(M^{*}
ight)=L^{*}$ אזי אזי $L^{*}\subseteq L\left(M^{*}
ight)$ -ו $L\left(M^{*}
ight)\subseteq L^{*}$ אזי ישחר ומצאנו ש

שאלה 2 הטענה נכונה:

 $L(M) \in RE$. ההגדרה: מתקיים, לפל מכונת טיורינג מתקיים, לפי ההגדרה: $L(M) \in Co\:RE \mapsto L(M) \in RE \cap Co\:RE = R \;.$

שאלה 3 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

יהי
$$L_1 = L_{\Sigma^*}
otin RE$$
 כאשר

$$L_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^* \}$$

$$.L_2=\overline{L_{\Sigma^*}}$$
 ותהי

$$.L_1\cap L_2=\emptyset\in R$$
 -בורר ש

,
$$L_1
otin Co \, RE$$
 מצד שני, $L_1 = L_{\Sigma^*}
otin RE$ וגם

$$L_2
otin RE$$
 וגם $L_2 = \overline{L_{\Sigma^*}}
otin Co\,RE$ -י

שאלה 4

שיטה 1

 $.1 \leq i \leq 3$ לכל L_i את המקבלת M_i טיורינג סיורינג קיימת קיימת שר קיימת שר $L_i \in RE$ את מכונת אם לכל המכריעה המכריעה M_i^* המכריעה או נבנה מכונת הורינג ל L_i המכריעה את המכריעה את אורינג לבנה מכונת המכריעה את המכריעה את אוריים המכריעה את המכריעה את אוריים המכריעה את המכר

 M_3^* -ו M_2^* את הבנייה עבור באופן דומה אפשר לבנות את הבנייה עבור M_1^*

$$:w$$
 על קלט $=M_1^*$

 M_1,M_2,M_3 מריצה במקביל את שלושת במקביל •

. אם
$$M_1^* \Leftarrow$$
 מקבלת סיבלת אם M_1

. דוחה
$$M_2^* \Leftarrow \eta$$
 קיבלה $M_2 \Leftrightarrow \eta$

. דוחה
$$M_3^* \Leftarrow$$
 קיבלה M_3 דוחה ס

נכונות הבנייה:

 $.L_1$ את מכרעיה את M_1^st נראה כי

.w את מקבלת $M_1^* \Leftarrow w$ את מקבלת $M_1 \Leftarrow w \in L_1$ אם

.w את דוחה $M_1^* \Leftarrow w$ את מקבלת את את מקבלת את מקבלת $M_2 \Leftarrow w \in M_2 \cup M_3 \Leftarrow w \notin L_1$ אם

שיטה 2

 $ar{L}_1\in RE$ נשים לב כי RE תחת איחוד, גם $L_2\in RE$ וגם $L_2\in RE$ ואם לב כי $L_3=ar{L}_1$ נשים לב כי $L_1\in R$ ואם לב $L_1\in RE$ וגם לב כי $L_1\in RE$ איי קיבלנו ש-

 $\cdot L_3$ -ו $\cdot L_2$ כנ"ל עבור

שאלה 5 הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

נתונה השפה

$$L_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^* \}$$

ונתונה השפה

$$\overline{L_{\Sigma^*}} = \left\{ \langle M \rangle \mid L(M) \neq \Sigma^* \right\} \cup \left\{ x \neq \langle M \rangle \right\} \ .$$

הוכחנו בכיתה כי:

$$L_{\Sigma^*}
otin RE$$
 (x

$$L_{\Sigma^*}
otin R$$
 (2

$$\overline{L_{\Sigma^*}}
otin RE$$
 (2

:תהיינה L_1, L_2 השפות הבאות

$$L_1 = L_{\Sigma^*} , \qquad L_2 = \overline{L_{\Sigma^*}} .$$

מכאן

$$L_1 \cap L_2 = \emptyset \in RE$$
, $L_1 \cup L_2 = \Sigma^* \in RE$,

 $L_2
otin RE$ אבל $L_1
otin RE$ אבל

שאלה 6 הטענה לא נכונה.

השפה L_{Σ^*} היא

$$L_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^* \}$$

והשפה $L_{
m d}$ היא

$$L_{\rm d} = \big\{ \langle M \rangle \ \big| \ \langle M \rangle \notin L(M) \big\} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{L_{\rm d}} = \big\{ \langle M \rangle \ \big| \ \langle M \rangle \in L(M) \big\} \cup \{x \neq \langle M \rangle \}$$
 לכן

 $L_{\Sigma^*}\backslash L_{\mathrm{d}} = L_{\Sigma^*} \cap \overline{L_{\mathrm{d}}} = L_{\Sigma^*} \notin RE \ .$

שאלה 7 הטענה לא נכונה.

המ"ט אוניברסלית $\langle w \rangle$ מקבלת מ"ט מ"ט מ"ט מ"ט מוג, קידוד של מ"ט מקבלת כקלט זוג, קידוד של מ"ט מוניברסלית מקבלת כקלט זוג, קידוד של מ"ט מוניברסלית על מקבלת בהתאם.

עבור המכונה האוניברסלית U, מתקיים:

$$L(U) = L_{\rm acc} \in RE$$
.

 $.L(U) = L_{\rm acc} \notin Co\,RE$ -ש מכיוון ש
 , $\langle U \rangle \notin L'$ אבל , $\langle U \rangle \in L$ ולכן

שאלה 8 הטענה נכונה.

$$\gcd(n,n+1)=\gcd(n+1,1)=1$$

 $.\langle n, n+1 \rangle \in RELPRIME$ ולכן