שיעור 9
מימד ובסיס

בסיס של מרחב וקטורי

9.1 הגדרה: (בסיס)
קבוצת וקטורים $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n \in V$ נקראת בסיס של V אם היא מקיימת:

1) $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ בלתי תלוים לינארית.

2) $\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n)=V$.

דוגמא.

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\quad,\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\quad,\quad \ldots,e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\quad.$$

בסיס של $\mathbb{F}^n$ (בסיס הסטנדרטי).

הוכחה.

1) צ"ל $e_1,\ldots,e_n$ בת"ל.

$$k_1e_1+k_2e_2+\ldots+k_ne_n=\bar{0}$$

$$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\ldots+k_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad k_1=0,k_2=0,\quad k_n=0\ .$$

לכן $e_1,\ldots,e_n$ בת"ל.

2) צ"ל כי $\mathrm{sp}(e_1,\ldots,e_n)=\mathbb{F}^n$.

נקח וקטור שרירותי $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n$. צ"ל $\mathrm{v}=\mathrm{sp}(e_1,\ldots,e_n)$.

$$k_1e_1+\ldots k_ne_n=\mathrm{v}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad k_1 = x_1, k_2 = x_2, \quad \ldots, \quad k_n = x_n \ .$$

■

דוגמא.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \ldots, \quad E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad .$$

בסיס של $M_{2\times 3}(\mathbb{F})$ (הבסיס הסטנדרטי).

הוכחה.

1) נוכיח כי $E_1, \ldots, E_6$ בת"ל.

$$k_1E_1 + k_2E_2 + \ldots + k_6E_6 = \bar{0}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots + k_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad k_1 = 0, k_2 = 0, \quad k_6 = 0 \ .$$

לכן $E_1, \ldots, E_6$ בת"ל.

2) נוכיח כי $\mathrm{sp}(E_1, \ldots, E_6) = M_{2\times 3}(\mathbb{F})$.

לכל וקטור $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{F})$,

$$\mathrm{v} = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 + eE_5 + fE_6 \ .$$

ז"א

$\mathrm{v} \in \mathrm{sp}(E_1, \ldots, E_6)$.

■

דוגמא.

וקטורים

$$e_1 = 1 \ , \quad e_2 = x \ , \quad \ldots \ , \quad e_n = x^n$$

מהווים בסיס (הבסיס הסטנדרטי) של המרחב $\mathbb{F}_n[x]$.

הוכחה.

1) צ"ל $1, x, \ldots, x^n$ בת"ל.

$$k_1 \cdot 1 + k_2 x + \ldots + k_n x^n = \bar{0} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \ldots + 0 \cdot x^n$$

לכל x כאשר

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \quad \ldots, \quad k_n = 0 \ .$$

לכן $1, x, \ldots, x^n$ בת"ל.

2) נוכיח כי $\mathrm{sp}(1, x, \ldots, x^n) = \mathbb{F}_n[x]$.

לכל $p(x) = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{F}_n[x]$ מתקיים

$$p(x) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n$$

ז"א $p(x) = \mathrm{sp}(e_1, \ldots, e_n)$.

■

דוגמא.
בדקו כי הוקטורים

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \ , \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \ .$$

מהווה בסיס של $\mathbb{R}^3$.

פיתרון.

1) צ"ל u_1, u_2, u_3 בת"ל.

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \bar{0}$$

זאת מערכת משוואות הומוגניות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 14 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון יחיד: $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$
לכן u_1, u_2, u_3 בת"ל.

2) צ"ל $\mathrm{sp}(u_1, u_2, u_3) = \mathbb{R}^3$.

נקח $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. צ"ל $\mathrm{v} = \mathrm{sp}(u_1, u_2, u_3)$.

<u>דרך 1</u>:

$$xu_1 + yu_2 + zu_3 = \mathrm{v}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 5 & 1 & 4 & c \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 6 & 14 & 5a+c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5a+c-6b \end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון, לכן $\mathrm{v} \in \mathrm{sp}(u_1, u_2, u_3)$.

<u>דרך 2</u>:

למערכת $A \cdot X = 0$ יש פתרון יחיד, לכן מטריצה A הפיכה. מכאן נובע שלכל $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^3$, למערכת $A \cdot X = \mathrm{v}$ יש פתרון יחיד, ז"א $\mathrm{v} \in \mathrm{sp}(u_1, u_2, u_3)$.

■

9.2 משפט. ()
אם במרחב וקטורי V יש בסיס סופי, אז לכל בסיס של V יש את אותו מספר הוקטורים.

9.3 הגדרה: ()
נניח ש V מרחב וקטורי. למספר הוקטורים בבסיס של V קוראים המימד של V.
המימד של מרחב וקטורי יסומן

$$\dim(V) \ .$$

דוגמא.

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{F}^n) &= n \\ \dim(\mathbb{F}^n[x]) &= n+1 \\ \dim(M_{m\times n}(\mathbb{F})) &= m \cdot n \ . \end{aligned}$$

9.4 משפט. (מימד ובסיס של קבוצת וקטורים)
נניח כי V מרחב וקטורי, $\dim(V) = n$. אז

1) כל $n+1$ וקטורים של V הם תלוים לינארית.
2) כל קבוצה של n וקטורים בלתי תלויה לינארית, היא בסיב של V.
3) כל קבוצה של וקטורים שהיא בלתי תלויה לינארית , ניתן להשלים לבסיס של V.

דוגמא.
הוכיחו שהוקטורים

$$u_1 = 1 + x + x^2 \ , \qquad u_2 = 2x + 3x^2 \ , \qquad u_3 = -3x - 4x^2$$

מהווים בסיס של מרחב $\mathbb{R}_2[x]$.

פיתרון.
נוכיח כי u_1, u_2, u_3 בת"ל.

$$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = \bar{0}$$
$$k_1(1+x+x^2) + k_2(2x+3x^2) + k_3 - 3x - 4x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$
$$k_1(k_1 + 2k_2 - 3k_3)x + (k_1 + 3k_2 - 4k_3)x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$
$$\left.\begin{aligned} k_1 &= 0 \\ k_1 + 2k_2 - 3k_3 &= 0 \\ k_1 + 3k_2 - 4k_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad k_1 = 0\ , k_2 = 0, k_3 = 0$$

לכן u_1, u_2, u_3 בת"ל.
$\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$, לכן שלושה וקטורים בת"ל מהווים בסיס של $\dim(\mathbb{R}_2[x])$. ■

מציאת בסיס ומימד של תת מרחב

9.1 דוגמא.
מצאו בסיס ומימד של $\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$ כאשר

1)
$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} \quad .$$

2)
$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} \quad .$$

פיתרון.

1) נבדוק אם $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ בת"ל:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\2 & 0 & 2\\1 & 1 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 2 & 2\\0 & 2 & 3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 2 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות, לכן $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ בת"ל.
לכן $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ בסיס של $\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$.
$\dim(\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)) = 3$.

2) נבדוק אם $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ בת"ל:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\2 & 0 & 2\\1 & 1 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 2 & 2\\0 & 2 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 2 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ ת"ל, אבל $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ בת"ל.
לכן $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ בסיס של $\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$.
$\dim(\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)) = 2$.

■

דוגמא.
מצאו בסיס ואת המימד של תת מרחב הנפרש ע"י הוקטורים

$$\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1&-5\\-4&2\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&5\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_3=\begin{pmatrix}2&-4\\-5&7\end{pmatrix}\ ,\quad \mathrm{v}_4=\begin{pmatrix}1&-7\\-5&1\end{pmatrix}\ .$$

בטאו את וקטור $u=\begin{pmatrix}4&-14\\-13&11\end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של הבסיס שמצאתם.

פיתרון.

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+k_3\mathrm{v}_3+k_4\mathrm{v}_4=\bar{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&1&2&1\\-5&1&-4&-7\\-4&-1&-5&-5\\2&5&7&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to R_4-2R_1]{\substack{R_2\to R_2+5R_1\\R_3\to R_3+4R_1}}\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&6&6&-2\\0&3&3&-1\\0&3&3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&3&3&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

הוקטורים v_1, v_2 המתאימים לעמודות המובילות הם בת"ל. לכן v_1, v_2 מהווים בסיס של $\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3,\mathrm{v}_4)$.
$\dim(\mathrm{sp}(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3,\mathrm{v}_4))=2$.

$$u=x\mathrm{v}_1+y\mathrm{v}_2\ .$$

$$\begin{pmatrix}1&1&4\\-5&1&14\\-4&-1&-13\\2&5&11\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to R_4-2R_1]{\substack{R_2\to R_2+5R_1\\R_3\to R_3+4R_1}}\begin{pmatrix}1&1&4\\0&6&6\\0&3&3\\0&3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&4\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftarrow k_1=3,k_2=1$$

$$u=3\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\ .$$

■

דוגמא.
מצאו בסיס ומימד של $\mathrm{Nul}(A)$ כאשר

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\-2&-4&1&-2\\-1&-2&0&1\end{pmatrix}\ .$$

פיתרון.
$\mathrm{Nul}(A)$ -מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $A\cdot X=0$. נפתוך את המערכת:

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\-2&-4&1&-2\\-1&-2&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&0&-1&4\\0&0&-1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&0&-1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&0&-1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון כללי: $\begin{cases} x_1 &= -2x_2 + x_4 \\ x_3 &= 4x_4 \end{cases} \Leftarrow x_2, x_4 \in \mathbb{R}$. נרשום את הפתרון בצורת וקטור השייך ל $\text{Nul}(A)$:

$$\begin{pmatrix} -2x_2 + x_4 \\ x_2 \\ 4x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{sp}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

הוקטורים $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ מהווים בסיס של $\text{Nul}(A)$.

$\dim(\text{Nul}(A)) = 2$ ■

דוגמא.
במרחב $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ נתונים וקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} , \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} , \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} , \qquad \text{v} = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ -5 & a \end{pmatrix}$$

א) עבור אילו ערכי a וקטור v שייך לפרישה לינארית של u_1, u_2, u_3?

ב) עבור כל ערך של a שמצאתם בסעיף א', בטאו את וקטור v כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 בשתי דרכים שונות.

ג) לכל ערך של a מצאו את המימד ובסיס של $\text{sp}(u_1, u_2, u_3, \text{v})$.

ד) האם קיימים ערכי a עבורם

$$\text{sp}(u_1, u_2, u_3, \text{v}) = M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ .$$

פיתרון.

א)

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \text{v}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & a \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 3R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 0 & -2 & 2 & -3a-5 \\ 0 & 2 & -2 & -a-7 \\ 0 & 0 & 0 & -2a-6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 0 & -2 & 2 & -3a-5 \\ 0 & 0 & 0 & -4a-12 \\ 0 & 0 & 0 & -2a-6 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} -4a - 12 &= 0 \\ -2a - 6 &= 0 \end{cases} \Leftarrow$ עבור $a = -3$ למערכת יש פתרון, לכן $\text{v} \in \text{sp}(u_1, u_2, u_3)$.

ב) $\underline{a = -3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$k_1 = 1 - 2k_3 \ , \qquad k_2 = -2 + k_3 \ , \qquad k_3 \in \mathbb{R} \ .$$

נציב $k_3 = 1 \Leftarrow$

$$k_1 = -1 \ , \qquad k_2 = -1 \ , \qquad k_3 = 1$$

ונקבל

$$-u_1 - u_2 + u_3 = \mathrm{v} \ .$$

נציב $k_3 = 0 \Leftarrow$

$$k_1 = 1 \ , \qquad k_2 = -2 \ , \qquad k_3 = 0$$

ונקבל

$$u_1 - 2u_2 + 0 \cdot u_3 = \mathrm{v} \ .$$

ג) <u>עבור $a = -3$:</u>

$$\dim\left(\mathrm{sp}(u_1, u_2, u_3, \mathrm{v})\right) = 2$$

מספר העמודות המובילות

בסיס: u_1, u_2.

<u>עבור $a \neq -3$:</u>

$$\dim\left(\mathrm{sp}(u_1, u_2, u_3, \mathrm{v})\right) = 3$$

בסיס: u_1, u_2, v.

ד) הוקטורים $u_1, u_2, u_3, \mathrm{v}$ ת"ל לכל ערכי a, לכן לא קיימים ערכי a עבורם $\mathrm{sp}(u_1, u_2, u_3, \mathrm{v}) = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

■

דוגמא.

מצאו את המימד ובסיס של תת המרחב הנפרש ע"י הוקטורים

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \ , \qquad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \ , \qquad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

דוגמא.

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. לכל ערך של a מצאו את המימד ובסיס של $\mathrm{Nul}(A)$.

פיתרון.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - aR_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 \end{pmatrix}$$

$$a = 1, -2 \Leftarrow -a^2 - a + 2 = 0$$

<u>עבור $a=1$</u>: מקבלים

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(\mathrm{Nul}(A)) = 2$ - מספר העמודות הלא מובילות

$$x = -y - z \ , \qquad y \in \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\mathrm{Nul}(A)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>עבור $a=-2$</u>: מקבלים

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(\mathrm{Nul}(A)) = 1$ - מספר העמודות הלא מובילות

$$x = z \ , y = z \ , \qquad y \in \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\mathrm{Nul}(A)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

■

דוגמא.
במרחב $\mathbb{R}_2[x]$ נתונים וקטורים

$$p_1(x) = 2 - x + x^2 \ , \quad p_2(x) = 2x - 3x^2 + x^3 \ , \quad p_3(x) = 1 - x^2 \ , \quad p_4(x) = 3x - 6x^2 + x^3 \ .$$

א) בדקו אם הוקטורים $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ תלוים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם ששווה לוקטור האפס.

ב) מצאו בסיס ואת המימד של תת מרחב הנפרש ע"י הוקטורים $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$.

ג) בטאו כל וקטור מתוך $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ כצירוף לינרי של הבסיס המצאתם בסעיף ב'.

פיתרון.

א)

$$k_1p_1(t)+k_2p_2(t)+k_3p_3(t)+k_4p_4(t)=\bar{0}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לא כל העמודות מובילות, לכן $p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x)$ ת"ל.

$$k_1=k_4\ ,\quad k_2=-k_4\ ,\quad k_3=-2k_4\ ,\qquad k_4\in\mathbb{R}\ .$$

נציב $k_4=1 \Leftarrow$

$$k_1=1\ ,\quad k_2=-1\ ,\quad k_3=-2\ .$$

$$p_1-p_2-2p_3+p_4=\bar{0}$$

ב) $\dim(\mathrm{sp}(p_1,p_2,p_3,p_4))=3$ - מספר העמודות המובילות.
בסיס:
p_1,p_2,p_3.

ג)

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 1\cdot p_1(x)+0\cdot p_2(x)+0\cdot p_3(x) \\ p_2(x) &= 0\cdot p_1(x)+1\cdot p_2(x)+0\cdot p_3(x) \\ p_3(x) &= 0\cdot p_1(x)+0\cdot p_2(x)+1\cdot p_3(x) \\ p_4(x) &= -p_1(x)+p_2(x)+2\cdot p_3(x)\ . \end{aligned}$$

■

דוגמא.
מצאו את המימד ובסיס של מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z &= 0 \\ 2x+4y+5z &= 0 \\ 3x+6y+9z &= 0 \\ 4x+8y+12z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4-4R_1]{\substack{R_2\to R_2-2R_1 \\ R_3\to R_3-3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$