

חישוביות וסיבוכיות

תוכן העניינים

1	מכונות טיורינג
3	הגדרה של מכונת טיורינג
3	טבלת המעברים
16	חישוב פונקציות
20	
2	מודלים חישוביים שקולית
23	
3	מכונות טיורינג מרובת סרטים
27	מכונות טיורינג מרובה סרטים: הגדרה היוריסטית
27	מכונות טיורינג מרובה סרטים: הגדרה פורמלית
27	קונפיגורציה של מטם"ס
28	שקלות בין מטם"ס למ"ט עם סרט יחיד
30	
4	מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטיות
35	הגדרה של מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטיות
35	ע"ז החישוב של מ"ט א"ד
37	שקלות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטיות
38	
5	התזה של צרצ טיורינג ודקדוקים כלליים
42	היחס בין הכרעה וקבלה
42	שקלות של מכונת טיורינג ותוכנית מחשב
43	SIMPLE
43	דקודוקים כלליים
49	דקודוקים כלליים ומכונת טיורינג
55	היררכיה של חומסקי
56	כל שפה חסרת הקשר הינה כריעה
56	
6	תכונות סגורות של R ו- RE
58	הגדרה של השפות R ו- RE
58	קידוד של מ"ט דטרמיניסטיות
64	מ"ט אוניברסליות U
64	
7	אי-כריעות
67	השפות $L_{\text{halt}}, L_{\text{acc}}, L_{\text{d}}$ לא כריעות
67	השפה L_E לא כריעת
71	השפה L_{EQ} לא כריעת
73	סיכום: כריעות וקבילות של שפות
76	

77	8 רדוקציה
77	טבלה של רדוקציות
77	מ"ט המחשבת את פונקציה
79	רדוקציות
86	דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה בין שפות משלימות (משפט 8.2)
86	דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה (משפט 8.1)
93	9 מבוא לסיבוכיות
93	הגדרה של סיבוכיות
95	יחס בין הסיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס
96	יחס בין הסיבוכיות של מ"ט דטרמיניסטי ומ"ט א"ד
98	מחלקה P
98	בעיית PATH
100	בעיית RELPRIME
103	10 המחלקה P והמחלקה NP
103	מחלקה P
103	דוגמאות לבעיות ב- P
103	בעיית המסלול ההAMILTONI HAMPATH
104	אלגוריתם אימות
104	מחלקה NP
107	הקשר בין NP למ"ט א"ד
108	הקשר בין המחלקה P ו- NP
111	11 NP שלמות
111	מחלקות NP ו- NPC
112	בעיות הספיקות
112	בעיית SAT
113	משפט קוק לוין
113	גרסאות של $kSAT$
113	בעיית $3SAT$
115	הוכחת משפט קוק לוין*
121	12 רדוקציות פולינומיאליות
121	CLIQUE היא $-NP$ - שלמה
123	בעיית הקבוצה הבלתי תלולה
125	בעיית הכיסוי בקודקודים
126	הבעיה VC
127	$PARTITION$
127	רדוקציות פולינומיאליות
128	שפות NP שלמות
129	13 סיבוכיות מקום ושלמות ב PSPACE
129	משפט סבץ'
129	מחלקה PSPACE
129	שלמות ב- PSPACE
129	מחלקה L
129	מחלקה NL
129	שלמות ב- NL
129	שוויון NL ו- coNL

שיעור 1

מכונות טיורינג

1.1 הגדרה של מכונית טיריניג

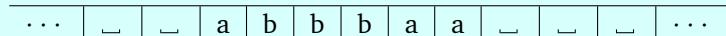
הגדרה 1.1 מבנות טיריניג (הגדרה היוריסטית)

הקלט והסרט

- מוכנות טיריניג (מ"ט) קורא קלט.
 - הקלט עצמו נמצא על סרט אינסופי מחולק למשבצות.
 - כל תו של הקלט כתוב במשבצת אחת של הסרט.
 - במכונות טיריניג אנחנו מניחים שהסרט אינסופי לשני הצדדים.

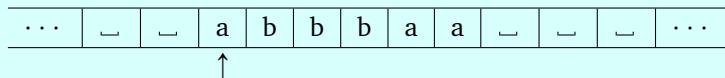
* משמאלי לתחילת הקלט יש רצף אינסופי של תווים רווח " ".

* מימין לסוף הקלט יש רצף אינסופי של תווים רווח " ".



הראש

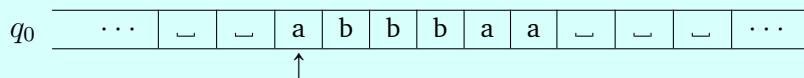
- במצב ההתחלתי הראש בקצת השמאלי של הקלט.



- הראש יכול לזרז ימינה על הסרט וגם שמאלה על הסרט.
 - הראש קורא את התוכן של המשבצת שבה הוא נמצא.
 - הראש יכול לכתוב על משבצת, אבל רק על המשבצת שבה הראש נמצא.

תאור העבודה של המכונה

- בראש ממצבי על התא הראשון בסרט והמכונה נמצאת במצב התחלתי q_0 .
 - בתחילת הריצה, הקלט כתוב בהתאם להרשות כאשר מימינו נמצא רצף אינסופי של תווים $_$ -ים.



- בכל צעד חישוב, בהתחם למספר הנוכחי ולאות שמתוחת לראש (הטו הנקרה), המכונה מחליטה:
 - * לאיזה מצב עובר מה לכתב מתוחת לראש (הטו הנכתב)
 - * لأن להזיז את הראש (טא אחד ימינה, או תא אחד שמאלה, או להישאר במקום).
 - למcona ישם שני מצבים מיוחדים:
 - * אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל- q_{acc} היא עוברת ומקבלת.
 - * אם במשך הריצה המכונה מגיעה ל- q_{rej} היא עוברת ודוחה.
 - אם המכונה לא מגיעה ל- q_{rej} או q_{acc} היא תמשיך לרווח נצח.

הגדרה 1.2 מכונת טיורינג

מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כasher:

Q	קובוצת מצבים סופית ולא ריקה
Σ	אלפבית הקלט
Γ	אלפבית הסרט
δ	פונקציית המעברים
q_0	מצב התחלתי
q_{acc}	מצב מקבל יחיד
q_{rej}	מצב דוחה יחיד

דוגמה 1.1

בנייה מכונת טיורינג אשר מקבלת מילה אם היא בשפה

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#a_w = \#b_w\}.$$

ז"א השפט כל המילים עם מספר שווה אותיות a ו b . הפאודו-קוד של המכונה, כדלקמן.**פאודו-קוד**

1) סורקים את הקלט משמאול לימין.

- אם לא מצאנו a וגם לא מצאנו $b \Leftarrow$ מקבלת.
- אם האות הראשונה שהראש הוא מצא a , כתובים עליו ✓, וועברים לשלב (2).
- אם האות הראשונה שהראש הוא מצא b , כתובים עליו ✓, וועברים לשלב (3).

2) ממשיכים לוז ימינה עד שנמצא b תואם.

- אם לא מצאנו $b \Leftarrow$ דוחה.
- אם מצאנו b כתובים עליו ✓, חוזרים לתחלת הקלט וחוזרים לשלב (1).

3) ממשיכים לוז ימינה עד שנמצא a תואם.

- אם לא מצאנו $a \Leftarrow$ דוחה.
- אם מצאנו a כתובים עליו ✓, חוזרים לתחלת הקלט וחוזרים לשלב (1).

כעת נתן הגדרה פורמלית של המכונה טיורינג שמבצעת את האלגוריתם זהה.

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כasher Q הקבוצה המכנים הבא:

$$Q = \{q_0, q_a, q_b, q_{\text{back}}, q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}\}.$$

המשמעותם של כל המצבים נרשמים בטבלה למטה:

q_0	המצב ההתחלתי. אליו נחזיר אחרי כל סבב התאמת של זוג אותיות.
q_a	מצב שבו ראיינו a ומחפשים b תואם.
q_b	מצב שבו ראיינו b ומחפשים a תואם.
q_{back}	מצב ששנשתמש בו כדי לחזור לказה השמאלי של הקלט ולהתחל את הסריקה הבאה (סבב ההתאמה הבא).
q_{acc}	מצב מקבל.
q_{rej}	מצב דוחה.

האלפבית של הקלט, Σ , והלפבית של השרת, Γ , הינם:

$$\Sigma = \{a, b\}, \quad \Gamma = \{a, b, _, \checkmark\}.$$

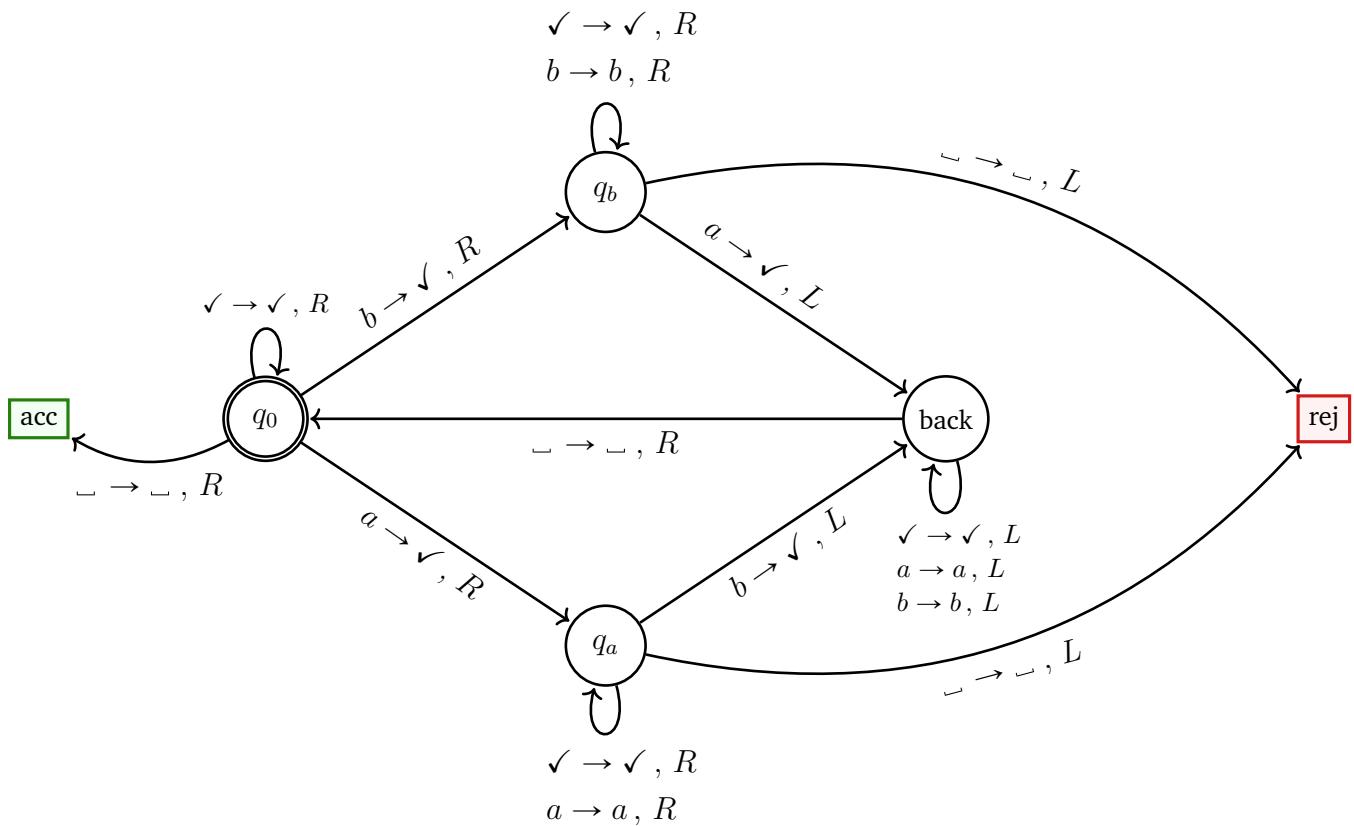
הפונקציית המעברים δ היא מוגדרת כדלקמן.

$$\begin{aligned}\delta(q_0, a) &= (q_a, \checkmark, R), \\ \delta(q_0, b) &= (q_b, \checkmark, R), \\ \delta(q_0, _) &= (q_{\text{acc}}, _, R), \\ \delta(q_a, \checkmark) &= (q_a, \checkmark, R), \\ \delta(q_a, a) &= (q_a, a, R), \\ \delta(q_a, b) &= (q_{\text{back}}, \checkmark, L), \\ \delta(q_b, \checkmark) &= (q_b, \checkmark, R), \\ \delta(q_b, b) &= (q_a, b, R), \\ \delta(q_b, a) &= (q_{\text{back}}, \checkmark, L).\end{aligned}$$

לעתים קל יותר לרשום את פונקציית המעברים δ בטבלה:

$\Gamma \setminus Q$	a	b	$_$	\checkmark
q_0	(q_a, \checkmark, R)	(q_b, \checkmark, R)	$(q_{\text{acc}}, _, R)$	(q_0, \checkmark, R)
q_a	(q_a, a, R)	$(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$	$(q_{\text{rej}}, _, L)$	(q_a, \checkmark, R)
q_b	$(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$	(q_a, b, R)	$(q_{\text{rej}}, _, L)$	(q_b, \checkmark, R)
q_{back}	(q_{back}, a, L)	(q_{back}, b, L)	$(q_0, _, R)$	$(q_{\text{back}}, \checkmark, L)$

תרשים מצבוי



דוגמה 1.2

בדקו אם המכוון טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה `aab`.

פתרון:

-	q_0	a	a	b	-
-	✓	q_a	a	b	-
-	✓	a	q_a	b	-
-	✓		q_{back}	a	✓
-	q_{back}	✓	a	✓	-
q_{back}	-	✓	a	✓	-
-	q_0	✓	a	✓	-
-	✓	q_0	a	✓	-
-	✓	✓	q_a	✓	-
-	✓	✓	✓	q_a	-
-	✓	✓	rej	✓	-

דוגמה 1.3

בדקו אם המכוון טיורינג של הדוגמה 1.1 מקבלת את המילה `.abbbbaaa`.

פתרון:

-	q_0	a	b	b	b	a	a	-
-	✓	q_a	b	b	b	a	a	-
-	q_{back}	✓	✓	b	b	a	a	-
q_{back}	-	✓	✓	b	b	a	a	-
-	q_0	✓	✓	b	b	a	a	-
-	✓	q_0	✓	b	b	a	a	-
-	✓	✓	q_0	b	b	a	a	-
-	✓	✓	✓	q_b	b	a	a	-
-	✓	✓	✓	b	q_b	a	a	-
-	✓	✓	✓	q_{back}	b	✓	a	-
-	✓	✓	q_{back}	✓	b	✓	a	-
-	✓	q_{back}	✓	✓	b	✓	a	-
q_{back}	-	✓	✓	✓	b	✓	a	-
-	q_0	✓	✓	✓	b	✓	a	-
-	✓	q_0	✓	✓	b	✓	a	-
-	✓	✓	q_0	✓	b	✓	a	-
-	✓	✓	✓	q_0	b	✓	a	-
-	✓	✓	✓	✓	q_b	✓	a	-
-	✓	✓	✓	✓	✓	q_b	a	-
-	✓	✓	✓	✓	q_{back}	✓	✓	-
-	✓	✓	✓	q_{back}	✓	✓	✓	-

—	✓	✓	q_{back}	✓	✓	✓	✓	—
—	✓	q_{back}	✓	✓	✓	✓	✓	—
—	q_{back}	✓	✓	✓	✓	✓	✓	—
q_{back}	—	✓	✓	✓	✓	✓	✓	—
—	q_0	✓	✓	✓	✓	✓	✓	—
—	✓	q_0	✓	✓	✓	✓	✓	—
—	✓	✓	q_0	✓	✓	✓	✓	—
—	✓	✓	✓	q_0	✓	✓	✓	—
—	✓	✓	✓	✓	q_0	✓	✓	—
—	✓	✓	✓	✓	✓	q_0	✓	—
—	✓	✓	✓	✓	✓	✓	q_{acc}	—

הגדרה 1.3 קונפיגורציה

תהי $M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיריניג. **קונפיגורציה** של M הינה מחרוזת

$uq\sigma v$

כאשר משמעות:

$$u, v \in \Gamma^*, \quad \sigma \in \Gamma, \quad q \in Q.$$

מצב המכוונה,	q
הסימן במקומות הראש	σ
תוכן הסרט משמאלי לראש,	u
תוכן הסרט מימין לראש.	v

דוגמה 1.4 (המשך של דוגמה 1.2)

u	q	σ	v
—	q_0	a	a b —
— ✓	q_a	a	b —
— ✓ a	q_a	b	—
— ✓	q_{back}	a	✓ —
—	q_{back}	✓	a ✓ —
—	q_{back}	—	✓ a ✓ —
—	q_0	✓	a ✓ —
— ✓	q_0	a	✓ —
— ✓ ✓	q_a	✓	—
— ✓ ✓ ✓	q_a	—	—
— ✓ ✓ ✓	q_{rej}	✓	—

דוגמה 1.5

בנו מכונת טיריניג אשר מקבלת כל מילה בשפה

$$L = \{a^n \mid n = 2^k, k \in \mathbb{N}\}$$

ז"א מילים בעלי מספר אותיות n אשר חזקה של 2.

פתרונות:

ראשית נשים לב למשפט הבא:

1.1 משפט

מספר שלם n שווה לחזקה אי-שלילית של 2, כלומר ($k \geq 0$) אם ורק אם קיימים שלם m ובראשו חילוק של $n - 2^m$ נקבעים נותן.

הוכחה:
↳ כיוון

$\cdot \frac{n}{2^k} = 1$ રાની $n = 2^k$ ($k \geq 0$) એન્દું

כיוון \Rightarrow

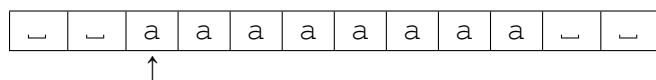
אם קיימים $m \geq 0$ עבורו $n = 2^m$ אז $\frac{n}{2^m} = n$ ולכן n שווה לחזקה אי-שלילית של 2.

לאורו המשפט הזה נבנה אלגוריתם אשר מחלק את מספר האותיות במילה ב- 2 שוב ושוב באורה איטרטיבית.

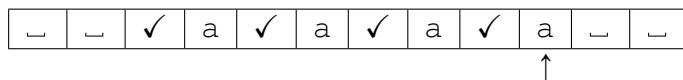
- אם אחרי סיבוב מסוים נקלט מספר אי-זוגי שונה מ-1, אז אין מצב שמספר האותיות a הוא חזקה של 2.
 - בצד שני אם אחרי סיבוב כלשהו נקלט בדיקות a אחת הנשארת, z^a אחרי מספר מסוים של חילוקים של המספר אותיות a קיבלנו 1, אז מובטח לנו שהמספר של אותיות a הוא שווה לחזקה של 2.

כעת נסביר כיצד המכונית טירינג מבצעת את השיטה הזאת בפועל כלהלן.

¹⁾ במאכג התחלתי יש מחרוזת של רצף אותיות *a* כתובות על הסרט והראש נמצא מתחת האות הראשוונה.



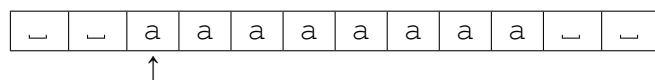
2) עוברים על הקלט משמאלי לימיון ומבצעים מחייקה לשירוגין של האות a. כלומר, אותן אחת נמחק ואאות אותן נשאיר וכן הלאה, עד שmaguius לקצתה הימין של המילה.



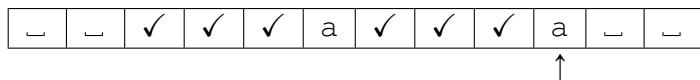
3) אחרי שהראש הגיע לסוף המילה:

- אם מצאנו את a אחות בדיק \Leftarrow המכונה מקבל.
 - אם כתוב ✓ בתו האחרון \Leftarrow המכונה תדחה.
 - אחרת, אם כתוב a בתו האחרון הרש charozot וחוורים לשלב 2).

כדוגמה של מילה המתקבלת על ידי האלגוריתם, למטה רשומות האיטרציות של האלגוריתם זהה על המילה $w = aaaaaaaaa$. במצב התחלתי הסרט נראה כדלקמן.

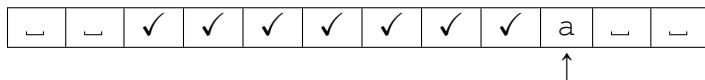


התו האחרון a אז ממשיכים לאיטרציה הבא.



איטרציה 2) בסוף האיטרציה $i = 2$ הסדרת נראית כך:

התו הראשון הוא a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

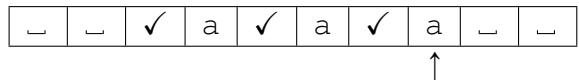
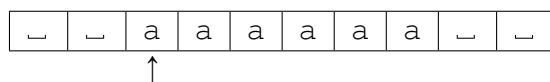


איטרציה 3) לאחר האיטרציה $i = 3$ הסדרת נראית כך:

התו האחרון הוא a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.

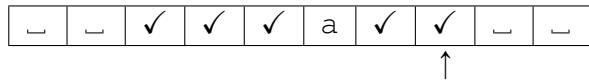
איטרציה 4) באיטרציה $i = 4$ יש אות a אחת בדיק אז המכונה מקבלת.

כדוגמה של מילה הלא המתבלת על ידי האלגוריתם, למטה רשומות האיטרציות של האלגוריתם זהה על המילה $w = aaaaaa$ (6 אותיות a). במצב ההתחלתי הסרט נראה כדלקמן.



איטרציה 1) לבסוף האיטרציה $i = 1$ הסדרת נראית כך:

התו האחרון a אז ממשיכים לאיטרציה הבאה.



איטרציה 2) לבסוף האיטרציה $i = 2$ הסדרת נראית כך:

התו הראשון הוא \checkmark אז דוחה.

כעת נתן הגדרה פורמלית של המכונת טיורנג שמקבלת השפה הזאת:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}) ,$$

כאשר $Q = \{q_0, \text{one}, \text{even}, \text{odd}, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}$, $\Gamma = \{a, _, \checkmark\}$, $\Sigma = \{a\}$ כאשר המשמעותם הם מפורטים למטה:

מצב `none`: מצב ההתחלתי. עדין לא קראנו a כתוצאה זה.

מצב `one`: קראנו a בודד.

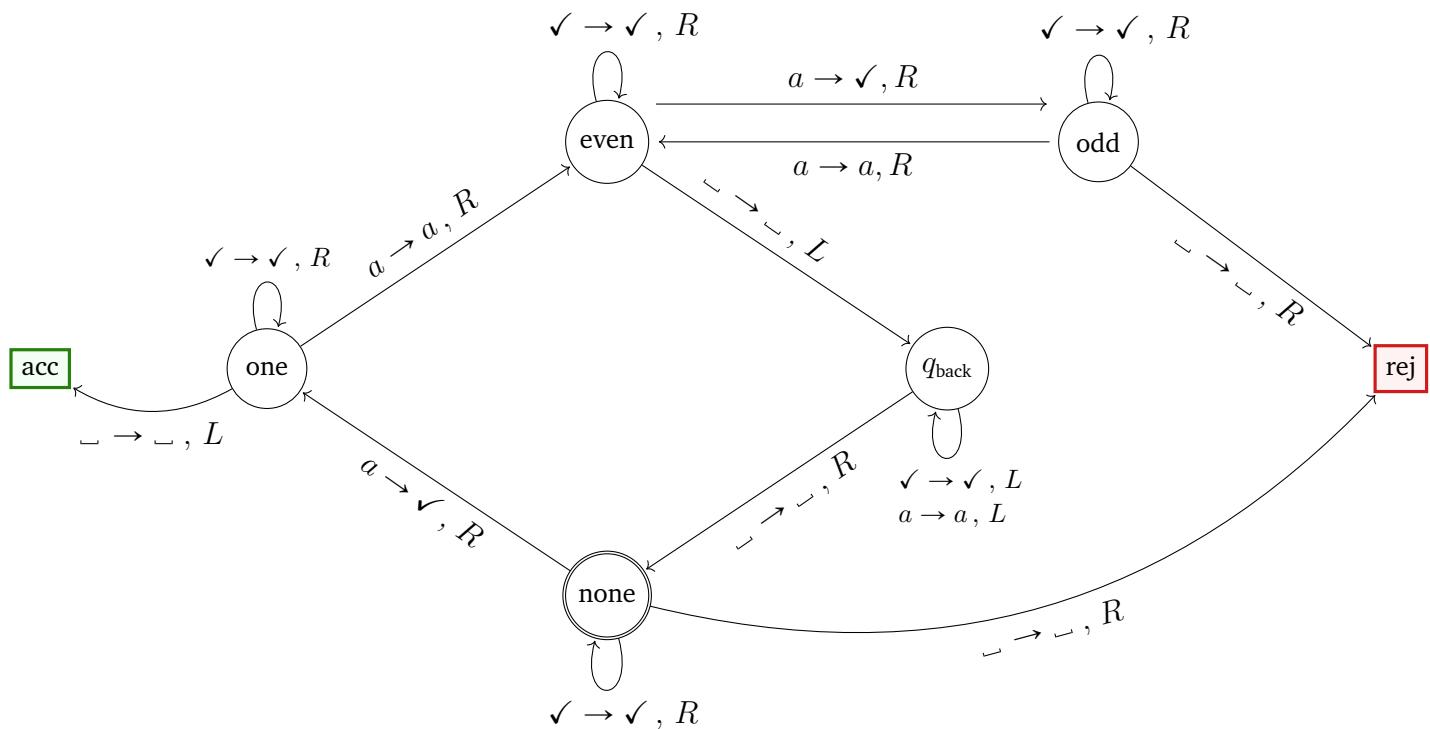
הפונקציית המעברים מתוארת על ידי התרשים

מצב `even`: קראנו מספר זוגי של a .

מצב `odd`: קראנו מספר אי-זוגי של a .

מצב q_{back} : חזרה שלמה.

מצבים למטה.

**דוגמה 1.6**

בדקו אם המילה $aaaa$ מתקבלת על ידי המכונת טירינג בדוגמה 1.5.

פתרונות:

[none	a	a	a	a]
[✓	one	a	a	a]
[✓	a	even	a	a]
[✓	a	✓	odd	a]
[✓	a	✓	a	even]
[✓	a	✓	back	a]
[✓	a	back	✓	a]
[✓	back	✓	a	✓]
[back	✓	a	✓	a]
[none	✓	a	✓	a]
[✓	none	a	✓	a]
[✓	✓	one	✓	a]
[✓	✓	✓	one	a]
[✓	✓	✓	a	even]
[✓	✓	✓	back	a]
[✓	✓	back	✓	a]
[back	✓	✓	✓	a]
[none	✓	✓	✓	a]
[✓	none	✓	✓	a]
[✓	✓	none	✓	a]

✓	✓	✓	none	a	—
✓	✓	✓	✓	one	—
✓	✓	✓	acc	✓	—

<i>u</i>	<i>q</i>	σ	v
—	none	a	aaa —
— ✓	one	a	aa —
— ✓ a	even	a	a —
— ✓ a ✓	odd	a	—
— ✓ a ✓ a	even	—	—
— ✓ a ✓	back	a	—
— ✓ a	back	✓	a —
— ✓	back	a	✓ a —
—	back	✓	a ✓ a —
—	back	—	✓ a ✓ a —
—	none	✓	a ✓ a —
— ✓	none	a	✓ a —
— ✓ ✓	one	✓	a —
— ✓ ✓ ✓	one	a	—
— ✓ ✓ ✓ a	even	—	—
— ✓ ✓ ✓	back	a	—
— ✓ ✓	back	✓ a	—
— ✓	back	✓	✓ a —
—	back	✓	✓✓ a —
—	back	—	✓✓✓ a —
—	none	✓	✓✓ a —
— ✓	none	✓	✓ a —
— ✓ ✓	none	✓	a —
— ✓ ✓ ✓	none	a	—
— ✓ ✓ ✓ ✓	one	—	—
— ✓ ✓ ✓	acc	✓	—

דוגמה 1.7

בדקו אם המילה aaa מתקבלת על ידי המכונת טיריניג בדוגמה 1.5.

פתרונות:

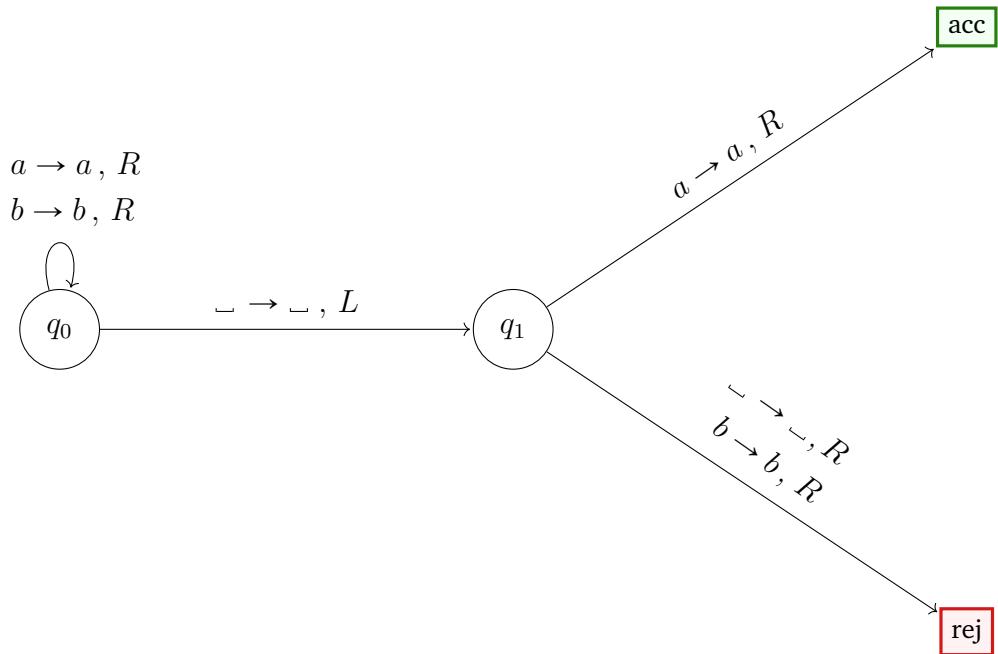
none	a	a	a	—
✓	one	a	a	—
✓	a	even	a	—
✓	a	✓	odd	—
✓	a	✓	—	rej

<i>u</i>	<i>q</i>	σ	v
—	none	a	aa —

$\sqsubset \checkmark$	one	a	a \sqsubset
$\sqsubset \checkmark a$	even	a	\sqsubset
$\sqsubset \checkmark a \checkmark$	odd	\sqsubset	\sqsubset
$\sqsubset \checkmark a \checkmark \sqsubset$	rej	\sqsubset	\sqsubset

דוגמה 1.8

מהי השפה של המוכנה למטה:

**פתרון:**

1) סורקים את הקלט משמאל לימין.

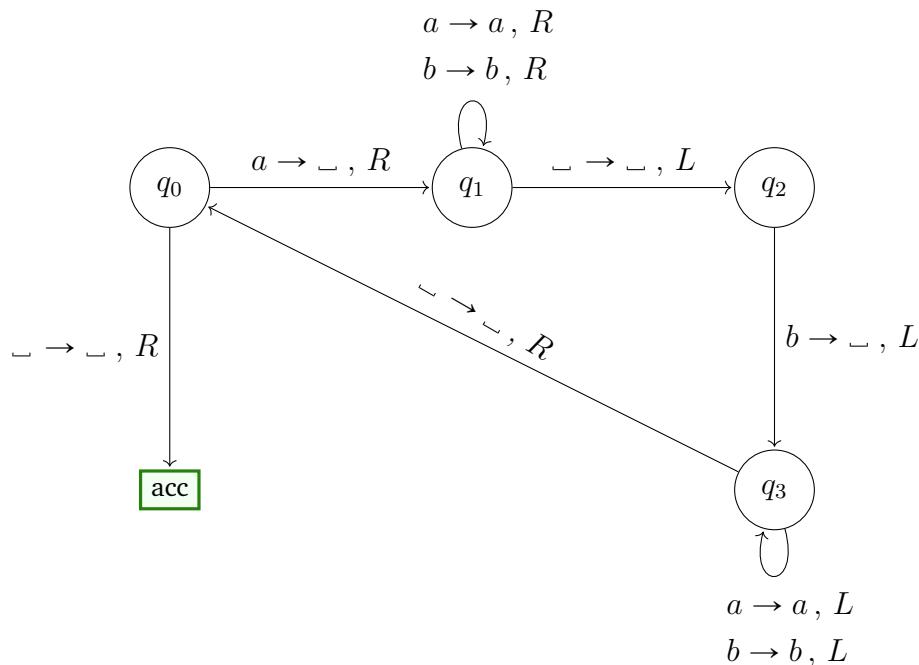
- אם הtau הנקרא a או b עוברים לtau ימינה הבא וחוזרים לשלב 1).
- אם הtau הנקרא \sqsubset אז הגענו לסוף הקלט, ועוברים לשלב 2).

2) עוברים שמאלה לtau הארון של המילה.

- אם הtau הנקרא $a \leftarrow$ מקבל.
- אחרת דוחה.

לכן המוכנה מקבלת שפת המילים המסתויימות באוט a .**דוגמה 1.9**

מהי השפה של המוכנה למטה:

**פתרונות:****1)** במצב ההתחלתי:

- אם התו הנקרא $_$ \Leftarrow מקבל.
- אם התו הנקרא a מורידים אותו על ידי $_$ וועברים לשלב 2).
- אחרת \Leftarrow דוחה.

2) עוברים ימינה עד שמנגנים לסוף המילה.

- אם התו האחרון הוא b , מורידים אותו על ידי $_$, חוזרים לתחילת המילה וחוזרים לשלב 1).
- אחרת דוחה.

בכל איטרציה המכונה מורידה תו a בתחילת המילה וחזרת ומורידה תו b תואם בסוף המילה. בכל איטרציה אם המכונה לא מוצאת b תואם בסוף המילה היא דוחה המילה. אחרת אם המכונה לא דוחה המילה וכל האותיות נמחקוות אז המילה מתקבלת. לכן המכונה מקבלת שפת המילים

$$\{a^n b^n \mid n \geq 0\} .$$

הגדרה 1.4 גיריה בצעד אחד

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ותהיינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M . נסמן

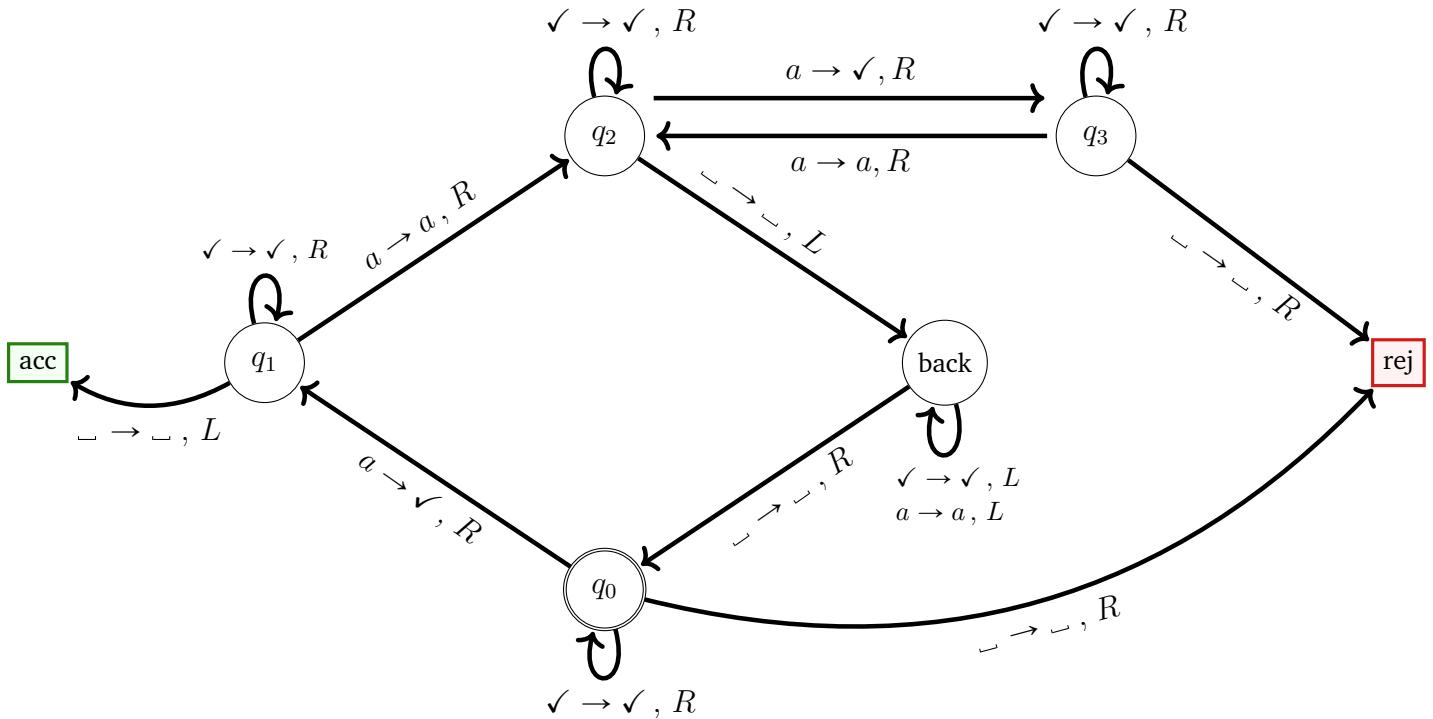
$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם כשנמצאים ב- c_1 עוברים ל- c_2 בצעד בודד.

דוגמה 1.10 (המשך של דוגמה 1.5)

עבור המكونת טיורינג שמתוארת בתרשים למטה מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 \checkmark a$$

**הגדרה 1.5 גירירה בכללי**

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מكونת טיורינג, ותהינה c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M
נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

אם ניתן לעבור מ- c_1 ל- c_2 ב- 0 או יותר צעדים.

דוגמה 1.11 (המשך של דוגמה 1.5)

עבור המكونת טיורинг שמתוארת בתרשים למטה מתקיים

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M^* \checkmark \checkmark \checkmark q_4 a$$

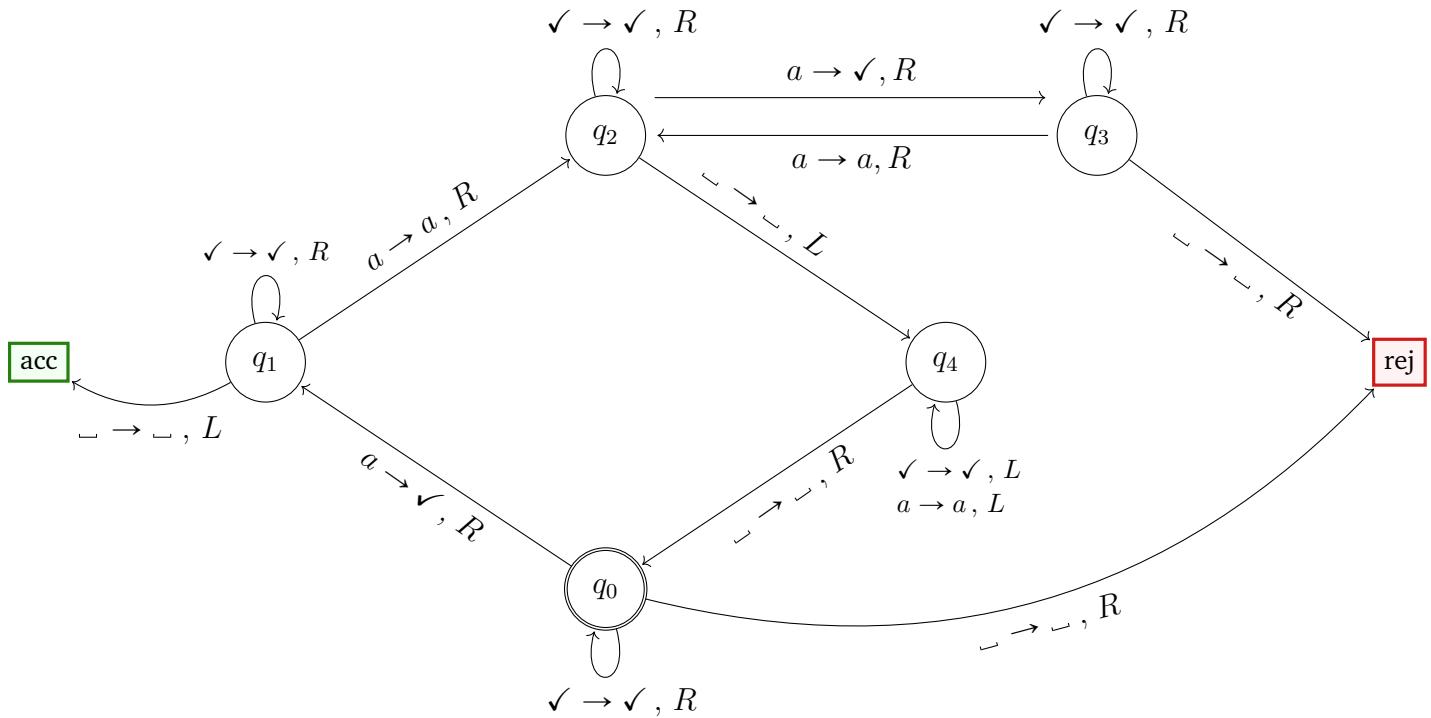
בגלל ש:

$$\checkmark q_0 a \checkmark a \vdash_M \checkmark \checkmark q_1 a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark q_1 a$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark a q_2 _$$

$$\vdash_M \checkmark \checkmark q_4 a .$$



הגדירה 1.6 קבלת ודוחיה של מחרוזות

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $w \in \Sigma^*$ מחרוזת. אומרים כי:

- **מקבלת את w אם**

$$q_0 w \vdash_M^* u q_{\text{acc}} \sigma v$$

כאשר $\Gamma^* v, \sigma \in \Gamma$ כלשהם.

- **דוחה את w אם**

$$q_0 w \vdash_M^* u q_{\text{rej}} \sigma v$$

כאשר $\Gamma^* v, \sigma \in \Gamma$ כלשהם.

הגדירה 1.7 הכרעה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מכריעה** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים:

- M מקבלת את w .

- M דוחה את w .

הגדירה 1.8 קבלת של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. אומרים כי M **מקבלת** את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים:

- אם $w \in L$ מקבלת את w .

- אם $w \notin L$ לא מקבלת את w .

במקרה זה כאשר M מקבלת את השפה L , נכתב ש-

$$L(M) = L .$$

1.2 טבלת המעברים

דוגמה 1.12

בנו מכונה טיורינג שמכריעת את השפה

$$L = \{w = \{a, b, c\}^* \mid \#a_w = \#b_w = \#c_w\}$$

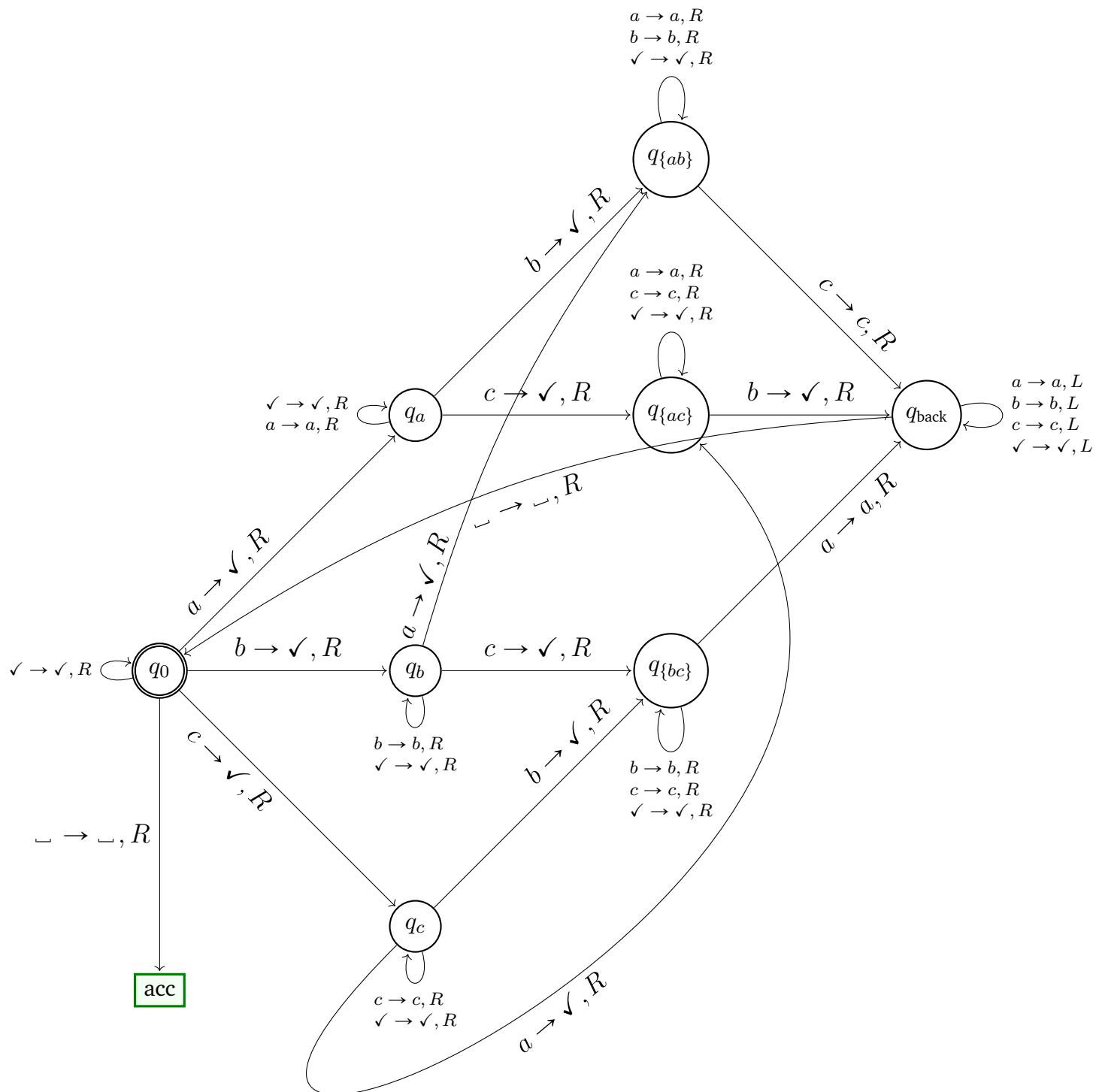
פתרון:

נתאר את המכונה על ידי הטבלת המעברים של המכונה. הסימן S מסמן כל זוג אותיות שונות מהקבוצה $\{a, b, c\}$ ללא חשיבות לסדר. ככלומר:

$$S = \{a, b\} , \quad S = \{b, c\} , \quad S = \{a, c\} .$$

מצב	מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	позה	תנאי
q_0	σ	$q.\sigma$	✓	R	$\sigma \in \{a, b, c\}$	
$q.\sigma$	σ	$q.\sigma$	✗	R	$\sigma \in \{a, b, c\}$	
$q.\sigma$	τ	$q.\{\sigma\tau\}$	✓	R	$\sigma, \tau \in \{a, b, c\} \wedge \sigma \neq \tau$	
$q.S$	σ	$q.S$	σ	R	$\sigma \in S$	
$q.S$	σ	q_{back}	✓	L	$\sigma \notin S$	
q_{back}	a, b, c, \checkmark	q_{back}	✗	L		
q_0	—	q_{acc}	✗	R		
q_{back}	a, b, c, \checkmark	q_{back}	✗	L		
q_{back}	—	q_0	✗	R		

כעת נתאר את המכונה על ידי תרשימים המצביעים של המכונה:



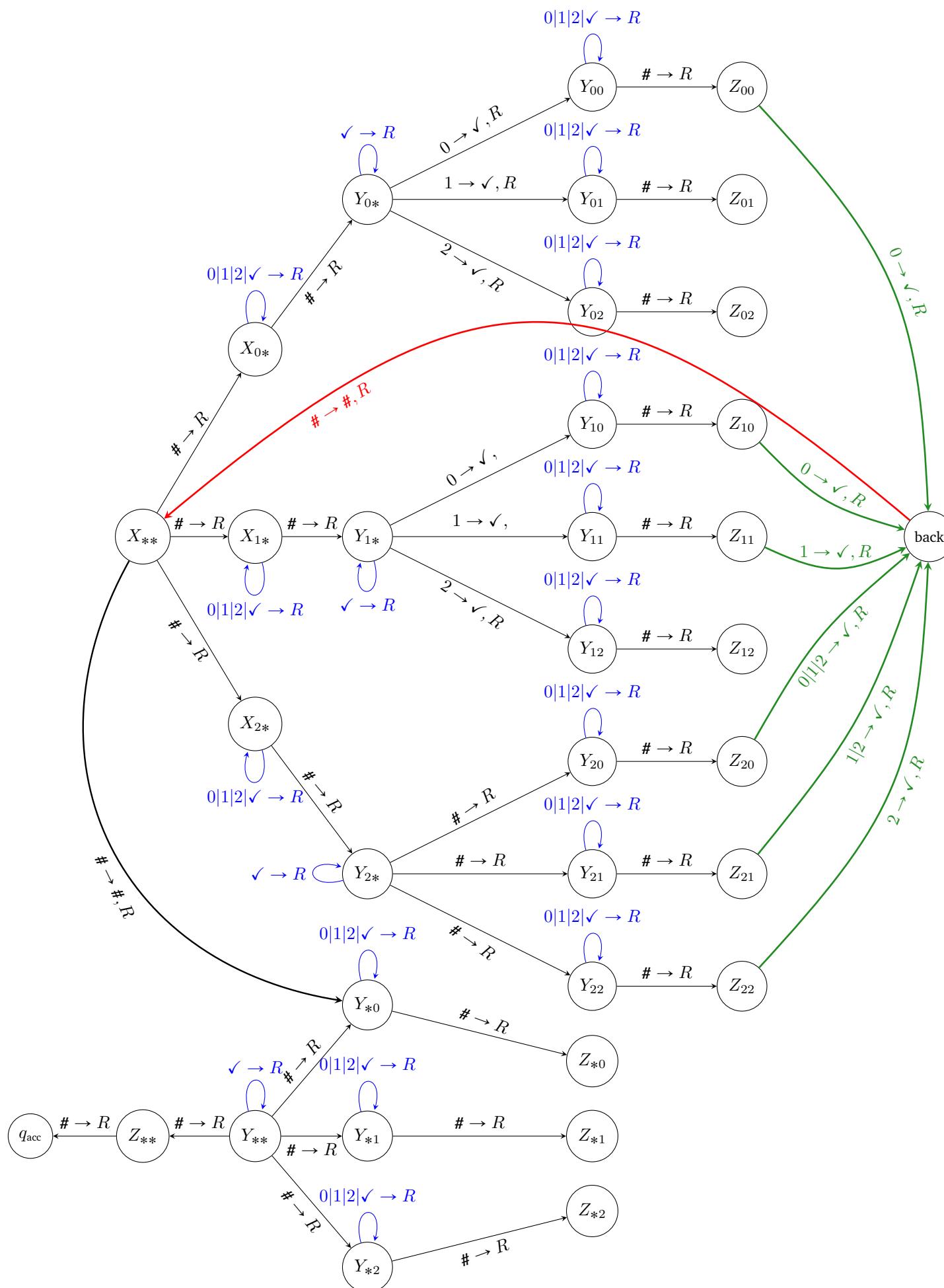
דוגמה 1.13

בנו מכונת טיורינג שמקreira את השפה

$$\{x_1 \dots x_k \# y_1 \dots y_k \# z_1 \dots z_k \mid x_i, y_i, z_i \in \{0, 1, 2\}, \forall i, x_i \geq y_i \geq z_i\}$$

פתרונות:

מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזואה	תנאי
$X * *$	σ	$X\sigma*$	✓	R	
$X * *$	✓	$X * *$	✓	R	
$X\sigma*$	0, 1, 2, ✓	$X\sigma*$	∅	R	
$X\tau*$	#	$Y\tau*$	∅	R	
$Y\tau*$	σ	$Y\tau\sigma$	∅	R	
$Y\tau*$	✓	$Y\tau*$	∅	R	
$Y\tau\sigma$	0, 1, 2, ✓	$Y\tau\sigma$	∅	R	
$Y\tau_1\tau_2$	#	$Z\tau_1\tau_2$	∅	R	
$Z\tau_1\tau_2$	✓	$Z\tau_1\tau_2$	∅	R	
$Z\tau_1\tau_2$	σ	q_{back}	✓	L	
$Z * *$	—	q_{acc}	∅	R	$\tau_1 \geq \sigma \geq \tau_2$
q_{back}	0, 1, 2, ✓	q_{back}	∅	L	
q_{back}	—	$X * *$	∅	R	



1.3 חישוב פונקציות

הגדרה 1.9 מכונת טיורינג שמחשבת פונקציה f

תהי $\Sigma_2^* \rightarrow \Sigma_1^*$ ותהי $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ מכונת טיורינג $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ מוחשבת את f אם:

- $\Sigma_2 \subset \Gamma$ ו- $\Sigma = \Sigma_1$.
- לכל $q_0 w \vdash q_{\text{acc}}, f(w) \in \Sigma_1^*$ מתקיים.

דוגמה 1.14 חיבור אונרי

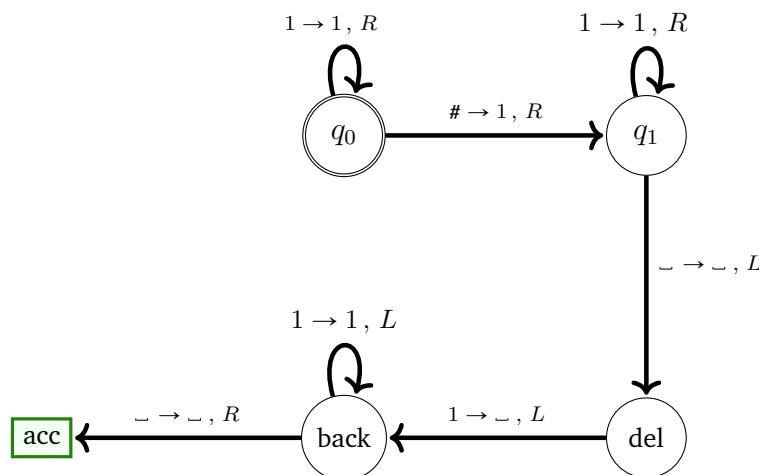
בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i \# 1^j$$

ומחזירה את פלט

$$1^{i+j}.$$

פתרונות:



דוגמה 1.15 כפל אונרי

בנו מכונת טיורינג אשר מקבלת את הקלט

$$1^i \# 1^j$$

ומחזירה את פלט

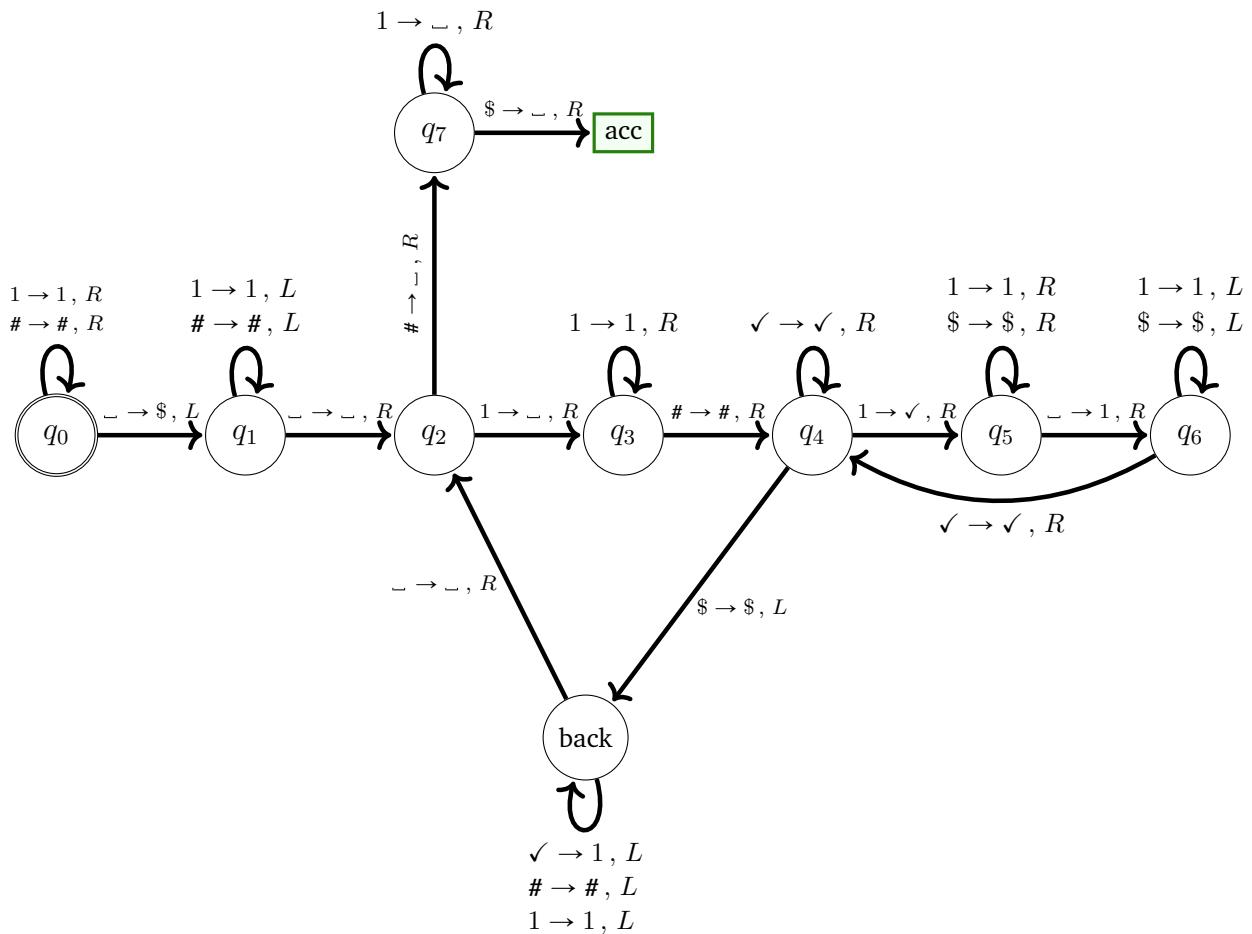
$$1^{i \cdot j}.$$

פתרונות:

- לדוגמה, נניח שהקלט הוא 2 כפול 2.

הקלט הוא 11#11.

- נרצה להבדיל בין הקלט לבין הפלט.
לכן בתחילת הריצה, נתקדם ימינה עד סוף הקלט ונוסף שם את התו \$.
לאחר מכן נחזור לתחילת הקלט.
- על כל אות 1 במילה השמאלית נעתק את המילה הימנית לאחר סימן ה- \$.
- לאחר מכן נשאיר רק את התווים שלאחר סימן ה \$. כמובן, נמחק את כל מה שאינו פלט.



μ	q	σ	ν
$\underline{\quad}$	q_0	1	$1\#11_\underline{\quad}$
$\underline{\quad}11\#11$	q_1	$\underline{\quad}$	$\underline{\quad}$
$\underline{\quad}11\#11$	q_1	\$	$\underline{\quad}$
$\underline{\quad}$	q_1	$\underline{\quad}$	$11\#11\$$
$\underline{\quad}$	q_2	1	$1\#11\$$
$\underline{\quad}\underline{\quad}$	q_3	1	$\#11\$$
$\underline{\quad}\underline{\quad}1\#$	q_4	1	$1\$$
$\underline{\quad}\underline{\quad}1\#\checkmark$	q_5	1	\$
$\underline{\quad}\underline{\quad}1\#\checkmark 1\$$	q_5	$\underline{\quad}$	$\underline{\quad}$
$\underline{\quad}\underline{\quad}1\#\checkmark 1\1	q_6	$\underline{\quad}$	$\underline{\quad}$
$\underline{\quad}\underline{\quad}1\#$	q_6	\checkmark	$1\$1\underline{\quad}$
$\underline{\quad}\underline{\quad}1\#\checkmark$	q_4	1	$\$1\underline{\quad}$
$\underline{\quad}\underline{\quad}1\#\checkmark\checkmark$	q_5	\$	$1\underline{\quad}$
$\underline{\quad}\underline{\quad}1\#\checkmark\checkmark\1	q_5	$\underline{\quad}$	$\underline{\quad}$
$\underline{\quad}\underline{\quad}1\#\checkmark\checkmark\11	q_6	$\underline{\quad}$	$\underline{\quad}$

$\sqcup \sqcup 1\# \checkmark$	q_6	\checkmark	\$11	\sqcup
$\sqcup \sqcup 1\#\checkmark\checkmark$	q_4	\$	11	\sqcup
$\sqcup \sqcup 1\#\checkmark$	back	\checkmark	\$11	\sqcup
$\sqcup \sqcup$	back	\sqcup	1#11\$11	\sqcup
$\sqcup \sqcup$	q_2	1	#11\$11	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup$	q_3	#	11\$11	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \#$	q_4	1	1\$11	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark$	q_5	1	\$11	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark 1\11	q_5	\sqcup	\sqcup	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark 1\111	q_6	\sqcup	\sqcup	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark$	q_6	\checkmark	1\\$111	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark$	q_4	1	\$111	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark \checkmark$	q_5	\$	111	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark \checkmark \111	q_5	\sqcup	\sqcup	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark \checkmark \1111	q_6	\sqcup	\sqcup	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark$	q_4	\checkmark	\$1111	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark \checkmark$	q_4	\$	1111	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \# \checkmark$	back	\checkmark	\$1111	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup$	back	\sqcup	#11\$1111	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup$	q_2	#	11\$1111	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup$	q_7	1	1\$1111	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup$	q_7	\$	1111	\sqcup
$\sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup$	acc	1	111	\sqcup

שיעור 2

מודלים חישוביים שקולית

הגדירה 2.1 מודל חישובי

מודל חישובי הוא אוסף של מכונות טיורינג שעבורן מוגדרים המושגים של הכרעה וקבלת של שפות.

הגדירה 2.2 מודלים שקולים חישובית

יהיו A ו- B מודלים חישוביים. אומרים כי A ו- B שקולים אם לכל שפה L התנאים הבאים מתקיימים:

- 1) קיימת מ"ט במודל A שמכריעה את L אם ו רק קיימת מ"ט במודל B שמכריעת את L .
- 2) קיימת מ"ט במודל A שמקבלת את L אם ו רק קיימת מ"ט במודל B שמקבלת את L .

דוגמה 2.1

נסמן ב- T את מודל המכונה הטיורינג הבסיסי.

במודל זה בכלל צעד ניתן לוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת הסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לשני הצדדים. בתחילת החישוב הראש נמצא בתחילת הקלט.

נסמן ב- O את מודל המכונה הטיורינג עם סרט ימינה בלבד.

במודל זה בכלל צעד ניתן לוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת הסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לכיוון אחד בלבד - ימינה. בתחילת החישוב, הקלט ממוקם בקצתה השמאלי של הסרט והראש נמצא בתחילת הקלט. החישוב מתנהל כמו במכונה במודל T , למעט כאשר הראש נמצא באותה המשבצת השמאלית ביותר הסרט וצריך לוז שמאלה - במקרה זה הראש נשאר במקום ולא זו.

הוכיחו כי המודל T והמודל O שקולים חישובית.

פתרון:

יש להוכיח ש:

- לכל מ"ט במודל O קיימת מ"ט שcolaה במודל T .
- לכל מ"ט במודל T קיימת מ"ט שcolaה במודל O .

כיוון ראשון

נווכיח כי לכל מ"ט במודל O קיימת מ"ט שcolaה במודל T . כלומר:

נתונה $(Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, acc^O, rej^O)$ במודל O .

نبנה $M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, acc^T, rej^T)$.

- רכיבי המ"ט M^T זהים לאלו של המ"ט M^O , מלבד מהתוכנה שהראש של M^O לעולם לא זו מעבר לказחה השמאלי של הקלט.
- נבודד רק עם צד ימין של הסרט האינסופי של M^T ואז M^T תהיהcolaה ל- M^O .

- כדי לדאוג שהראש של המוכונה הדו-כיוונית M^T לא יעבור לכמה השמאלי של הקלט, נוסיף מצבים חדשים וגם מעברים חדשים לפונקציית המעברים של M^T , שmbטיחים שהראש של M^T לא יעבור לכמה השמאלי של הקלט, באופן הבא.
- בתחילת כל חישוב, המוכונה M^T מסמנת את המשבצת מצד שמאל וליד המשבצת הראשונה של הקלט בסימן מיוחד \$.
לכן, המוכונה M^T השקולה למוכונה M^O היא
- ונדר את הפונקציית המעברים של M^T כך שכל פעם שהראש מגע למשבצת המסומנת \$, הראש חוזר ימינה למשבצת הראשונה של הקלט, כמפורט בטבלה המעברים למטה.

$$Q^T = Q^O \cup \{q_0^T, q_\$^T\}, \quad \Sigma^T = \Sigma^O, \quad \Gamma^T = \Gamma^O \cup \{\$\}, \quad q_{acc}^T = q_{acc}^O, \quad q_{rej}^T = q_{rej}^O$$

והפונקציית המעברים מתוארת בטבלה למטה.

מצב	סימון	מצב חדש	כתיבה	позזה	תנאי
q_0^T	σ	$q_\T	\emptyset	L	
$q_\T	-	q_0^O	\$	R	
q	\$	q	\$	R	$\forall q \in Q^O$

הוכחנו את הכיוון הראשון:
ראינו מוכנה דו-כיוונית השקולה למוכנה חד-כיוונית.

כעת נוכיח את הטענה בכיוון השני:
נראה מוכנה חד-כיוונית השקולה למוכנה דו-כיוונית.

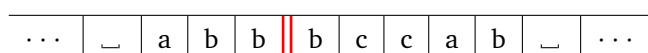
כיוון שני

נוכיח כי לכל מ"ט במודול T קיימת מ"ט שקופה במודול O . כלומר:

נתונה $M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, acc^T, rej^T)$ במודול T .

נבנה $M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, acc^O, rej^O)$ שקופה במודול O .

- נסמן "קו המפריד" על הסרט של המוכנה הדו-כיוונית M^T .



- נסמן את המשבצת הראשונה של הסרט של המוכנה החד-כיוונית M^O עם \$.
- כל שאר המשבצות של הסרט של M^O נחלק לשני צאים: חצי העליון U וחצי התחתון D .
- תוכן הסרט של המוכנה הדו-כיוונית M^T נכתב על סרטה של המוכנה החד-כיוונית M^O כך:
 - * החלק של הסרט שמצד שמאל של קו המפריד נכתב בשורה העליונה של סרט M^O בכיוון ההפוך (מיימין לשמאל).

- * החלק של הסרט שמצד ימין של קו המפריד נכתב בשורה התחתונה של סרט M^O בכוון הרגיל (משמאל לימין).

\$	b	b	a	—	—	—	—	...
b	c	c	a	b	—	—	—	...
...								

- * תזוזה ימינה של M^T **מצד ימין של קו המפריד** \Leftarrow תזוזה ימינה בשורה התחתונה של M^O .
- * תזוזה ימינה של M^T **מצד שמאל של קו המפריד** \Leftarrow תזוזה שמאלה בשורה העליונה של M^O .

תזוזה ימינה ב- M^T :

—	a \rightarrow	b \rightarrow		b \rightarrow	b \rightarrow	c \rightarrow	c \rightarrow	a \rightarrow	— \rightarrow
---	-----------------	-----------------	--	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

תזוזה שකולה ב- M^O :

\$	$\leftarrow b$	$\leftarrow b$	$\leftarrow a$	—	—	—	—
b \rightarrow	c \rightarrow	c \rightarrow	a \rightarrow	b \rightarrow	— \rightarrow	—	—

- * תזוזה שמאלה של M^T **מצד ימין של קו המפריד** \Leftarrow תזוזה שמאלה בשורה התחתונה של M^O .
- * תזוזה שמאלה של M^T **מצד שמאל של קו המפריד** \Leftarrow תזוזה ימינה בשורה העליונה של M^O .

תזוזה שמאלה ב- M^T :

—	a \leftarrow	b \leftarrow		b \leftarrow	b \leftarrow	c \leftarrow	c \leftarrow	a \leftarrow	— \leftarrow
---	----------------	----------------	--	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------

תזוזה שתקולה ב- M^O :

\$	$\rightarrow b$	$\rightarrow b$	$\rightarrow a$	—	—	—	—
b \leftarrow	c \leftarrow	c \leftarrow	a \leftarrow	b \leftarrow	— \leftarrow	—	—

לכן, המכונה M^O השકולה למכונה M^T היא

$$M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, q_{\text{acc}}^O, q_{\text{rej}}^O) ,$$

סביר את כל הרכיבים של M^O :

- לכל מצב $q \in Q^T$ נגדיר q_U ו- q_D של Q^O , כדי להבחין בין המצביעים שבהם הראש נמצא בחלק העליון לבין המצביעים שבהם הראש נמצא בחלק התיכון של הסרט.

$$\cdot \Sigma^O = \Sigma^T \bullet$$

$$\cdot \Gamma^O \subseteq (\Gamma^T \times \Gamma^T) \cup \{\$\} \bullet$$

$$\cdot q_{\text{acc}}^O = q_{\text{acc}}^T \bullet$$

$$\cdot q_{\text{rej}}^O = q_{\text{rej}}^T \bullet$$

- הפונקציית המעברים δ מותוארת בטבלת המעברים למטה. בטבלה, הסימנים σ, π, τ מסמנים כל תואם באלפבית Γ^T :

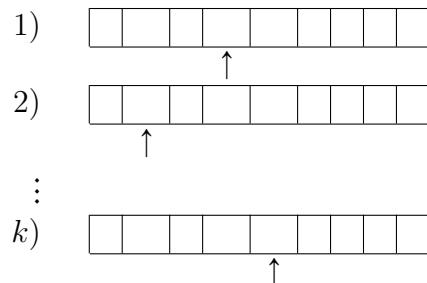
תנאי	תזואה	כתיבה	מצב חדש	סימון	מצב
אותחול					
q_0^O	τ	q_τ	\$	R	$\tau \in \Sigma \cup \{_\}$ $\sigma \in \Sigma$
q_σ	τ	q_τ	$_\sigma$	R	
$q._$	$_$	back	$_$ $_$	L	
q_{back}	$_\tau$	q_{back}	\cap	L	
q_{back}	\$	$q_0^T.D$	\cap	R	
תזואה מקורית שמאלת					
q_D	π σ	p_D	π τ	L	תזואה שמאלת: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$
q_U	σ π	p_U	τ π	R	
q_D	$_$	p_D	$_$ τ	L	תזואה שמאלת: $(q, _) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$
q_U	$_$	p_U	τ $_$	R	
תזואה מקורית ימינה					
q_D	π σ	p_D	π τ	R	תזואה ימינה: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$
q_U	σ π	p_U	τ π	L	
q_D	$_$	p_D	$_$ τ	R	תזואה ימינה: $(q, _) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$
q_U	$_$	p_U	τ $_$	L	
פגיעה בקצת					
q_D	\$	q_U	\cap	R	
q_U	\$	q_D	\cap	R	
כל השאר עוברים ל-rej					

שיעור 3

מכונות טיורינג מרובת סרטים

1.3. מכונת טיורינג מרובה סרטים: הגדרה היוריסטית

מכונת טיורינג מרובה סרטים (ΜΤΜ"ס) היא הכללה של ΜΤ עם סרט יחיד. ההבדל הוא שלΜΤΜ"ס ישנו מספר סופי של סרטים, נניח $1 < k$ סרטים.



- לכל סרט יש ראש שלו.
- בתחילת העבודה הקלט w כתוב בתחילת הסרט הראשון וכל הסרטים ריקים. הראשים בכל סרט מוצבאים על התא הראשון בסרט, והמכונה נמצאת במצב התחלתי q_0 .
- בכל צעד חישוב, לפי המצב הנוכחי ול- k התווים שמתוחת ל- k הראשים, המכונה מחליט לאיזה מצב לעבור, מה לכתוב מתחת לכל אחד מ- k הראשים ולאן להזיא את הראש בכל אחד מ- k סרטים.
- הראשים של הסרטים יכולים לזרז באופן בלתי- תלוי בהתאם לפונקציית המעברים שלΜΤΜ"ס.

2. מכונת טיורינג מרובה סרטים: הגדרה פורמלית

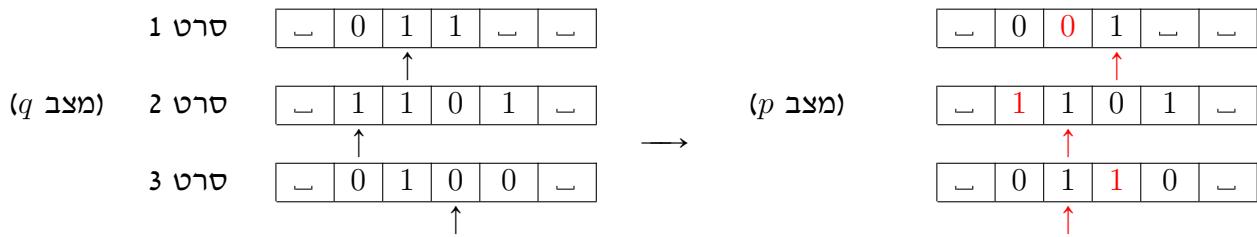
הגדרה 3.1 מכונת טיורинг מרובה סרטים

מכונת טיורינג מרובה סרטים היא שבייעיה:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}$ מוגדרים כמו ΜΤ עם סרט יחיד (ראו הגדרה 1.2).
ההבדל היחידי בין ΜΤ עם סרט יחיד לבין ΜΤΜ"ס הוא הפונקציית המעברים. עבור ΜΤΜ"ס הפונקציית המעברים היא מצויה הבא:

$$\delta_k : (Q \setminus \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$$

דוגמה 3.1

$$\delta_k \left(q, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left(p, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \\ L \end{pmatrix} \right).$$

3.3 קונפיגורציה של מטמ"ס

הכללה של קונפיגורציה של מ"ט עם סרט יחיד:

$$\begin{pmatrix} u_1 q \ v_1 \\ u_2 q \ v_2 \\ \vdots \\ u_k q \ v_k \end{pmatrix}$$

דוגמה 3.2

בנו מטמ"ס שמכריעת את השפה:

$$L_{w^R} = \{w = \{a, b\}^* \mid w = w^R\}.$$

כלומר שפת הפלינדרומים.

פתרון:

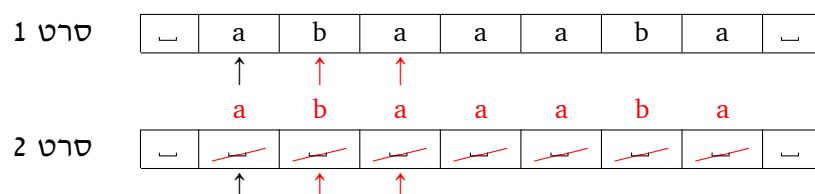
בנייה מ"ט עם שני סרטים:

תאואר המכונה:

נסמן M_2 המ"ט עם 2 סרטים שמכריעת את השפה L_{w^R} .

על הקלט $w = M_2$:

(1) מעתיקת את w לסרט 2.



(2) מזיהה את הראש בشرط 1 לתו הראשון ב- w ואת הראש בشرط 2 לתו האחרון ב- w .

(3) משווה בין התווים שמתוחת לראשים:

- אם התו שמתוחת לראש 1 הוא $_ . acc \Leftarrow$
- אם התווים שמתוחת לראשים שונים $. rej \Leftarrow$
- אחרת מזיהה את הראש בشرط 1 ימינה ואת הראש בشرط 2 שמאליה, וחוזרת לשלב (3).

הfonקציית המעברים של M_2 היא:

$$\begin{aligned}\delta\left(q_0, \begin{pmatrix} a \\ _ \end{pmatrix}\right) &= \left(q_0, \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}\right), \\ \delta\left(q_0, \begin{pmatrix} b \\ _ \end{pmatrix}\right) &= \left(q_0, \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}\right), \\ \delta\left(q_0, \begin{pmatrix} _ \\ _ \end{pmatrix}\right) &= \left(q_{back}, \begin{pmatrix} _ \\ _ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ L \end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

נשים לב כי הסיבוכיות זמן של המכונה עם שני סרטים, M_2 היא $O(|w|^2)$, כאשר w האורך של המילה.

כעת נבנה מ"ט עם סרט יחיד שמכריע את השפה L_{W^R} .

תאור המכונה:

נסמן M_1 המכונה עם סרט יחיד שמכריע את השפה L_{w^R} .

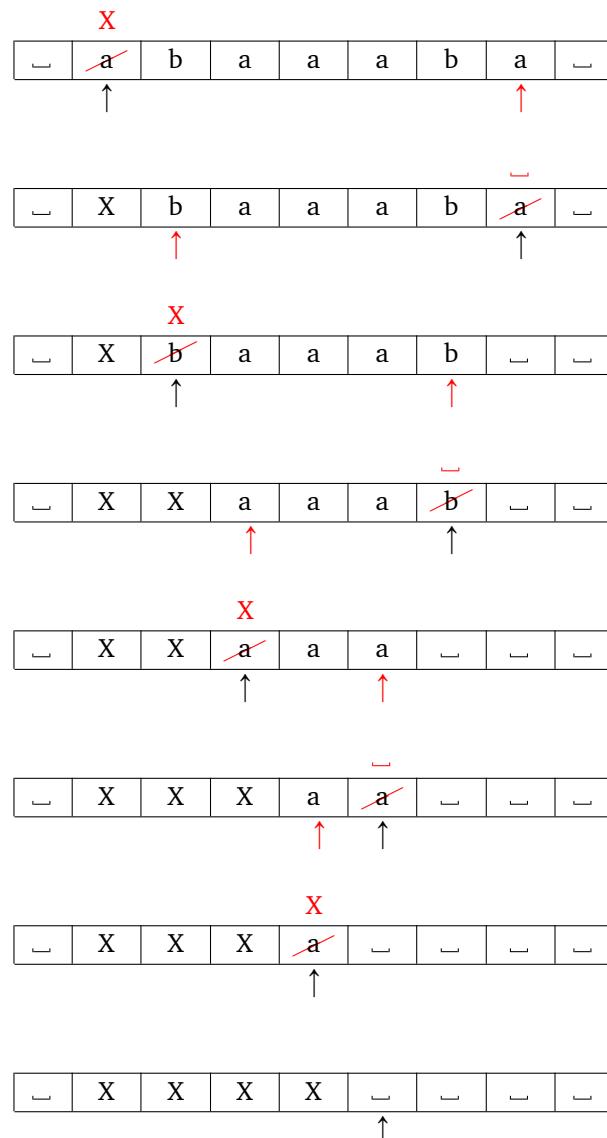
על הקלט w :

(1) אם התו שמתוחת לראש הוא $_ . acc \Leftarrow M_1 \Leftarrow$

(2) זכרת את התו שמתוחת לראש ומוחקת אותו ע"י X .

(3) מזיהה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאל ל- $_ .$

- אם התו שמתוחת לראש הוא $X . acc \Leftarrow$
- אם התו שונה מהתו שזכרנו $. rej \Leftarrow$
- מוחקת את התו שמתוחת לראש ע"י $_$, מזיהה את הראש שמאליה עד התו הראשון מימין ל- X וחוזרת לשלב (1).



3.4 שיקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

מ"ט עם סרט יחיד היא מקרה פרטי של מטמ"ס.

משפט 3.1 שיקילות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

לכל מטמ"ס M קיימת מ"ט עם סרט יחיד M' השkolah ל- M .

כלומר, לכל קלט $w \in \Sigma^*$:

- אם M מקבלת את w M' מקבלת את w .
- אם M דוחה את w M' דוחה את w .
- אם M לא עוצרת על w M' לא עוצרת על w .

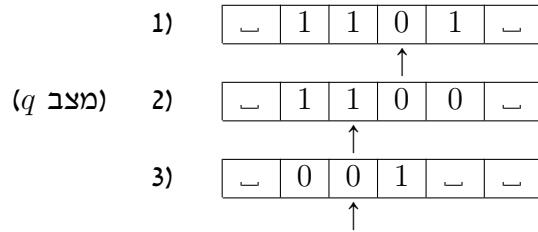
הוכחה:

בהתנן מטמ"ס $(Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q'_0, q'_{acc}, q'_{rej})$ עם סרטים, נבנה מ"ט עם סרט יחיד $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ השkolah ל- M באופן הבא:

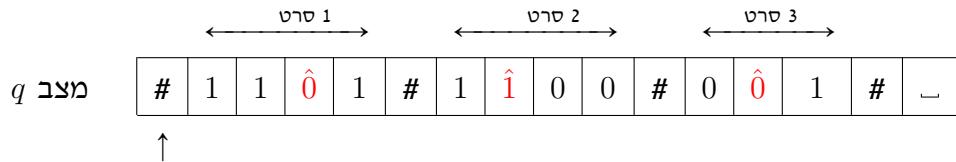
רעיון הבנייה:

בhinתן קלט $w \in \Sigma^*$, M' תבצע "סימולציה" של ריצה M על w .

M -ב



M' -ב



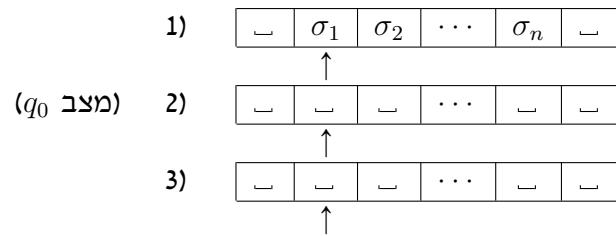
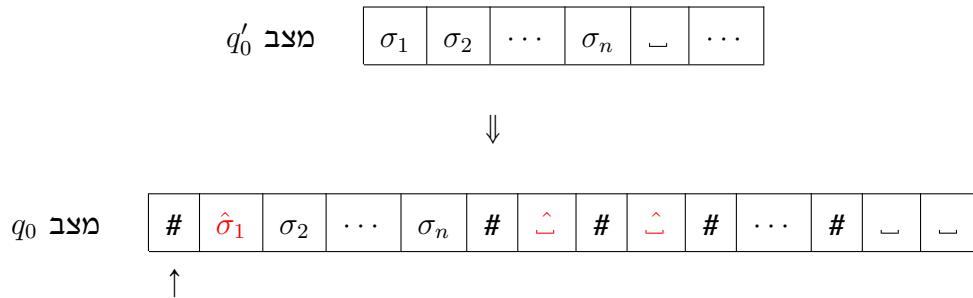
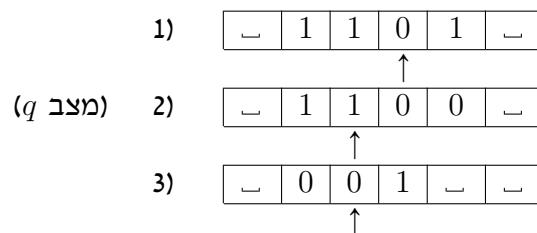
- M' תשמור את התוכן של k הסרטים של M על הסרט, רק שהתוכן של סרט i יופיע בין $\#_{i+1}$ ל- $\#_{i+1}$.
- M' תשמור את המיקום של הראשים של M ע"י הכפלת הא"ב Γ .
- כלומר, לכל אות $\Gamma \in \alpha$, M' תשמור שתי אותיות α ו- $\hat{\alpha}$ ב- Γ' , כך ש- $\hat{\alpha}$ תסמן את התו שמתוחת בראש הסרט.
- בכל צעד חישוב, M' סורקת את הסרט שלה משמאלי לימיין כדי ללמידה מהם התווים שמתוחת בראשים (התווים שמשמעותם ב- $\hat{\alpha}$).
- M' משתמש בפונקציית המעברים δ_k של M כדי לחשב את המעבר הבא.
- M' סורקת את הסרט שלה משמאלי לימיין כדי לעדכן את הסרטים ואת המיקום הראשים בהם.

תאור הבנייה של M'

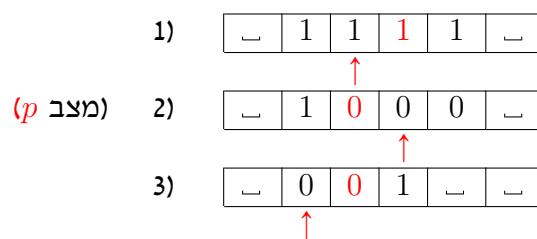
1) שלב האיתחול

בhinתן קלט $w = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$, M' מתחילה את הקוניגורציה ההתחלתית של M על הסרט שלה.

M -ב

 $M' - b$ (2) תאור צעד חישוב של $M - b$  $M - b$

$$\delta_k \left(q, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left(p, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ R \\ L \end{pmatrix} \right)$$



ב- M'

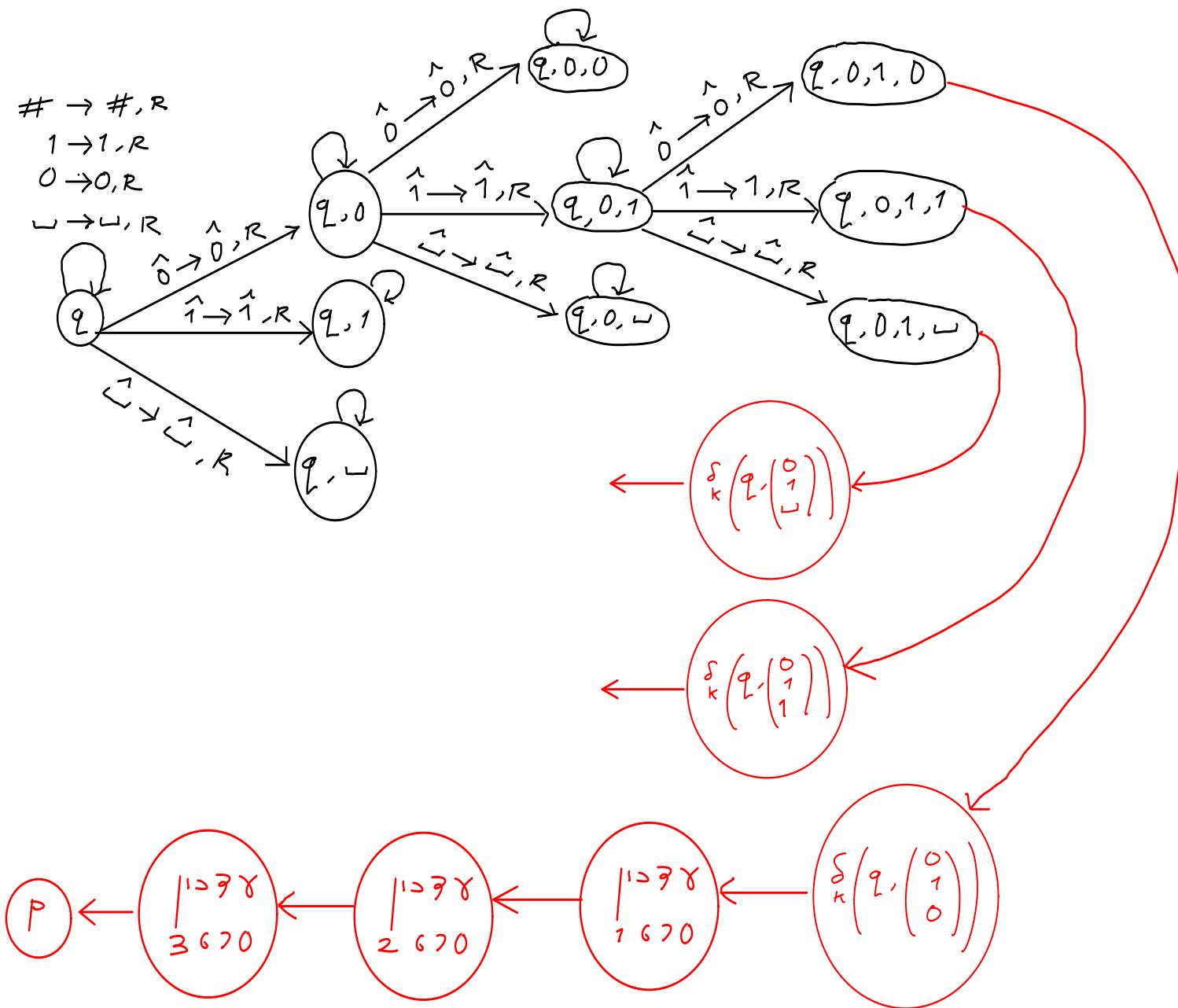
↓

- איסוף מידע
 - M' סורקת את הסרט שלה משמאלי לימיון ומזהה את התווים שמסומנים ב- \hat{a} . מידע זה ניתן לשמר במצבים. לדוגמה:

$$q, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

זה אפשרי מכיוון שמספר המצבים הנדרש הוא סופי:

$$|Q| \times |\Gamma|^k$$



- ## • עדכון הסרטים

M סורקת את הרטט שלה פעם נוספת כדי לפעול על פי פונקציית המעברים, ככלומר, לעדכן את התאים שמתוחת לראשים ולעדכן את מיקום הראשים.

שיעור 4

מכונת טיריניג אי-דטרמיניסטיבית

4.1 הגדרה של מכונת טיריניג אי-דטרמיניסטיבית

הגדרה 4.1 מכונת טיריניג אי-דטרמיניסטיבית

מכונת טיריניג אי-דטרמיניסטיבית (מ"ט א"ד) היא שביעייה

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}$ מוגדרים כמו במ"ט דטרמיניסטי (ראו הגדרה 1.2).

Δ היא פונקציה המעבירים

$$\Delta : (Q \setminus \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}) .$$

$$\Delta(q, a) = \{(q_1, a, S), (q_2, b, L), \dots\} .$$

כלומר, לכל זוג $q \in Q, a \in \Gamma$ יתכן מספר מעברים אפשריים, 0, 1 או יותר.

- קונפיגורציה של מ"ט א"ד זהה לקונפיגורציה של מ"ט דטרמיניסטיבית.

- לכל קונפיגורציה יתכן מספר קונפיגורציות עוקבות.

- לכל מילה $w \in \Sigma^*$ יתכן מספר ריצות שונות:

- * ריצות שמנגיעה ל- q_{acc} .

- * ריצות שמנגיעה ל- q_{rej} .

- * ריצות שלא עוזרות.

- * ריצות שנתקעות.

הגדרה 4.2

מילה $w \in \Sigma^*$ מתקבלת במ"ט א"ד M אם קיימת לפחות ריצה אחת שמנגעה ל- q_{acc} .

השפה של מ"ט א"ד M היא

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Gamma^* : q_0 w \vdash_* u q_{\text{acc}} v\}$$

כלומר,
 $w \in L(M)$ אם קיימת ריצה אחת שבה M מקבלת את w .

$w \notin L(M)$ אם בכל ריצה של M על w , M דוחה או לא עוזרת, או נתקעת.

הגדרה 4.3 מ"ט א"ד המכריעה שפה L

תהי M מ"ט א"ד.
אומרים כי מ"ט א"ד M מכריעה שפה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $w \in L \Leftarrow w$ מקבלת את w .
- אם $w \notin L \Leftarrow w$ דוחה את w .

הגדרה 4.4 מ"ט א"ד המקבלת שפה L

תהי M מ"ט א"ד.
אומרים כי מ"ט א"ד M מקבלת שפה L אם לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $w \in L \Leftarrow w$ מקבלת את w .
- אם $w \notin L \Leftarrow w$ דוחה את w או M לא עוצרת על w .

דוגמה 4.1

נתונה השפה

$$L = \{1^n \mid n \text{ איינו ראשוני}\}, \quad \Sigma = \{1\}.$$

בנו מ"ט המכריעה את השפה L .**פתרון:**הרעיוןنبנה מ"ט א"ד N המכריעה את L . N תבחר באופן א"ד מספר $n < t < n$ ותבדוק האם t מחלק את n .

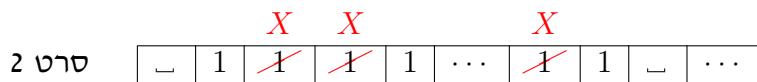
1 סרט 1	$\boxed{_ 1 1 1 1 1 1 1 1 \dots}$	n
---------	--	-----

2 סרט 2	$\boxed{_ 1 1 1 _ \dots}$	t
---------	---------------------------------------	-----

תאור הבניה $w = 1^n$ על קלט $:w = 1^n$ **שלב 1)**

- N בוחרת באופן א"ד מספר $n < t < n$.
- מעתקה את w לסרט 2.
- עוברת על העותק משמאליימין, ובכל תא מחליטה באופן א"ד האם להשאיר את ה- 1 או למחוק אותו ע"י X (לדאוג שהמספר שנבחר הוא לא 1 ולא n).

- בסוף המעבר המספר t שנבחר הוא כמוות ה- 1 -ים שלא נמחקו.



שלב 2) N בודקת האם t שנבחר מחלק את n .

- אם כן $\Leftarrow N$ מקבלת.
- אם לא $\Leftarrow N$ דוחה.

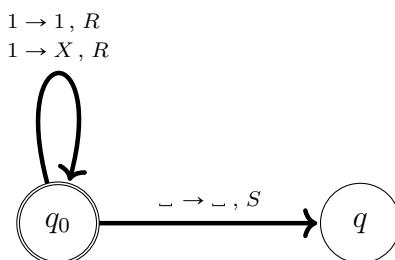
4.2 עץ חישוב של מ"ט א"ד

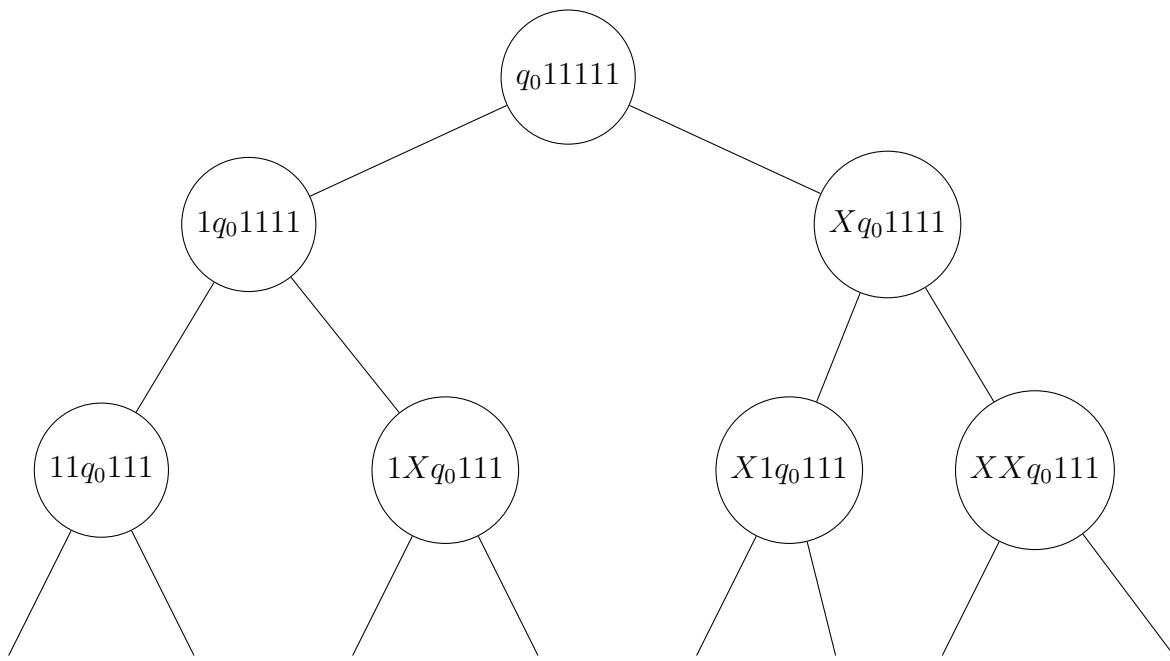
הגדרה 4.5 עץ חישוב של מ"ט א"ד

בהתנחת מ"ט א"ד M ומילה $w \in \Sigma^*$, עץ חישוב של M ו- w הוא עץ מושרש שבו:

- 1) כל קדקוד בעץ מתאר קונפיגורציה בחישוב של M על w .
- 2) שורש העץ מתאר את הקונפיגורציה ההתחלתית w_0 .
- 3) לכל קדקוד v בעץ הבנים של v הם כל הקדקודים הנובעים מהקונפיגורציה המתואמת ע"י v .

דוגמה 4.2





4.3 שיקולות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטיבית

משפט 4.1 **שיקולות בין מ"ט א"ד למ"ט דטרמיניסטיבית ב-** RE

לכל מ"ט א"ד N קיימת מ"ט דטרמיניסטיבית D כך ש-

$$L(N) = L(D).$$

כלומר לכל $w \in \Sigma^*$:

- אם N מקבלת את $w \iff D$ קיבל את w .
- אם N לא מקבלת את $w \iff D$ לא קיבל את w .

הוכחה: בהינתן מ"ט א"ד N נבנה מ"ט דטרמיניסטיבית D ונוכיח כי

$$L(N) = L(D).$$

רעיון ההוכחה

בהינתן קלט $w \in \Sigma^*$, D תבצע ריצה של כל החישובים האפשריים של N על w , ואם אחד החישובים מסתיים ב- q_{acc} אז D תעוצר ותקבל.

מכיוון שיתכננו חישובים אינסופיים, לא יוכל לסרוק את עץ החישוב לעומק. במקומות זה נסrox את העץ לרוחב. ככלומר, נבדוק את כל החישובים באורך 1, ולאחר מכן נבדוק את כל החישובים באורך 2, וכן הלאה. אם אחד החישובים הסטיים ב- q_{acc} , אז D תעוצר ותקבל.

תאור הבניה

מכיוון שלכל $q \in Q$ ולכל $\alpha \in \Gamma$

$$\Delta(q, \alpha) \subseteq Q \times \Gamma \times \{L, R, S\} .$$

אז

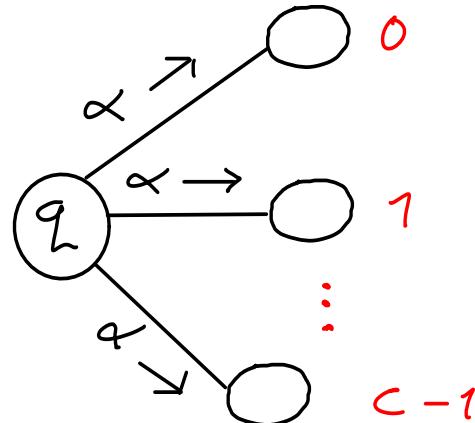
$$|\Delta(q, \alpha)| \leq |Q| \cdot |\Gamma| \cdot |\{L, R, S\}| = 3|Q| \cdot |\Gamma| .$$

נסמן:

$$C = 3|Q| \cdot |\Gamma| .$$

- לכל מצב $q \in Q$ ולכל אות $\alpha \in \Gamma$ נמספר את המעברים ב- $\Delta(q, \alpha)$ שירוטית

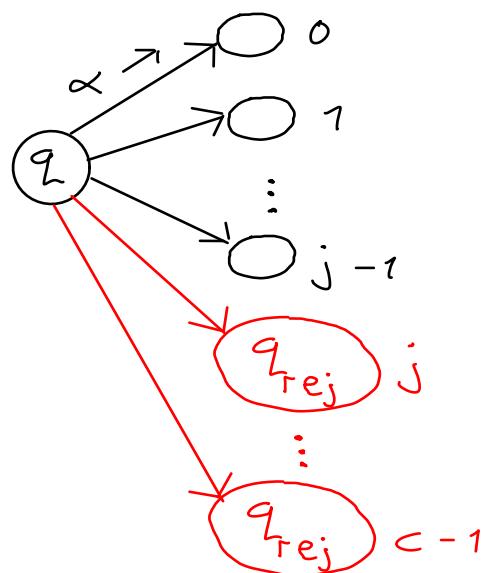
$$\{0, 1, 2, \dots, C - 1\} .$$



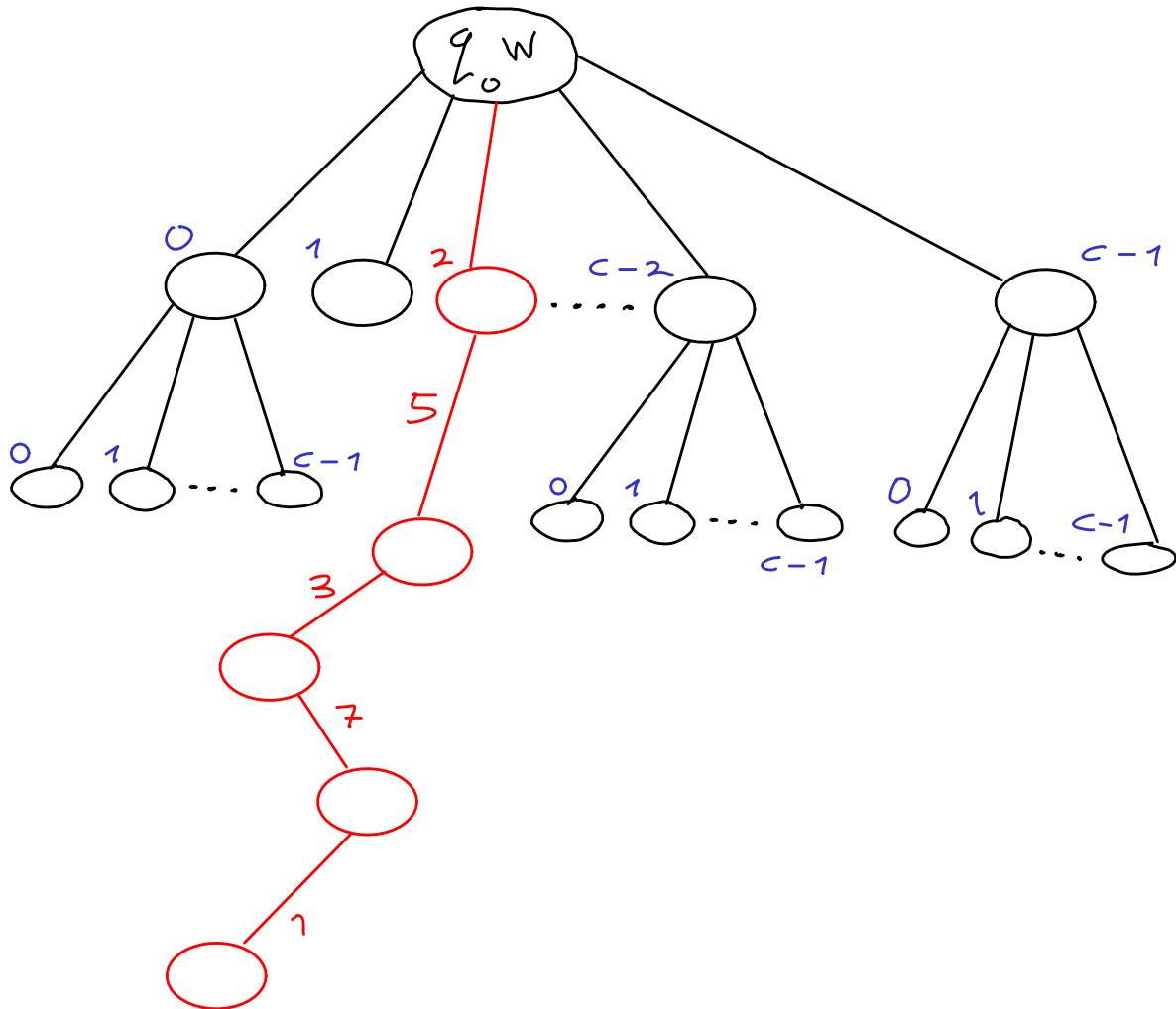
, $|\Delta(q, \alpha)| = j < C$ •

אי לכל $j \leq k \leq C - 1$

. $k = (q_{\text{rej}}, \alpha, S)$ נקבע



- נשים לב כי שינוי זה לא משנה את השפה של N .

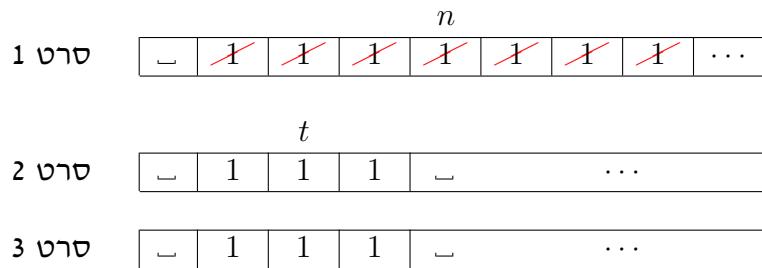


קידום לקסיקוגרפיה:

0	00	10	...	$(C - 1)0$	000
1	01	11	...	$(C - 1)1$	001
2	02	12	...	$(C - 1)2$	002
\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
$C - 1$	$0(C - 1)$	$1(C - 1)$...	$(C - 1)(C - 1)$	$00(C - 1)$

הבנייה של D

D מכילה 3 סרטים:



w על קלט $" = D$

(1) מתחילה את המחרוזת בסרט 3 ל-0.

(2) מעתקה את w לסרט 2.

(3) מרים את N על w לפי המחרוזת בסרט 3.

• אם N קיבלה את $w \Leftarrow D \Leftarrow$ עוצרת ומקבלת.

• אחרת, D מוחקת את סרט 2, מקדמת את המחרוזת בסרט 3 לקסיקוגרפיה וחזרת לשלב 2).

”



שיעור 5

התזה של צרץ טירינג ודקזוקים כלליים

5.1 היחס בין הכרעה וקבלה

משפט 5.1 כל שפה כריעה היא גם קבילה

כל שפה כריעת היא גם קבילה.

הוכחה: המכונה טירינג שמכריעה את L גם מקבלת אותה. נשאל שאלה. האם כל שפה קבילה היא גם כריעת? זאת שאלה שכרגע אין לנו מספיק כלים לענות עליה. נחזור לשאלת זו בפרק הבא. לבינתיים נוכיח טענה חלשה יותר.

משפט 5.2

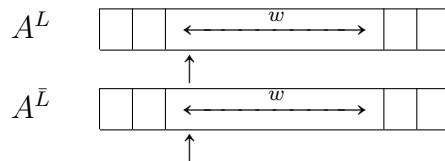
תהי L שפה.

אם גם L וגם \bar{L} קבילות אז L כריעת.

הוכחה: תהי A^L מ"ט שמקבלת את L , ותהי $A^{\bar{L}}$ מ"ט שמקבלת את \bar{L} .
נבנה מ"ט D^L שמכריעת את L .

כיצד תעבוד המ"ט D^L המכרייעת?

- נרים במקביל את A^L ואת $A^{\bar{L}}$.
- אם A^L מקבלת את המילה אז נעבור ל-acc.
- אם $A^{\bar{L}}$ מקבלת את המילה אז נעבור ל-rej.



- הסימולציה מתבצעת ע"י סימולץ צעד צעד.
- * צעד במכונה A^L .
- * צעד במכונה $A^{\bar{L}}$.
- ממשיך בסימולציה המקבילה עד שאחת המכונות מגיעה למצב acc.

- * אם A^L מקבלת $\text{acc} \leftarrow$.
- * אם $A^{\bar{L}}$ מקבלת $\text{rej} \leftarrow$.
- לא יכול להיות מצב כי אף אחת מהמכונות לא מגיעה במצב acc כי כל מחרוזת $L \in w$ או $\bar{L} \in w$.

5.2 שיקולות של מכונת טיורינג ותוכנית מחשב

- מכונת טיורינג היא מודל חישובי למחשב.
- מחשב = תוכנית מחשב.
- תוכנית מחשב כתובה בשפת תכנות, למשל
 - * ג'אווה
 - * פיתון
 - C *
 - SIMPLE *

- המרכיבים של שפת תכנות הם
 - * משתנים
 - * פעולות
 - * תנאים
 - * זרימה

נוכיח כי מכונת טיורינג ותוכנית מחשב שקולים חישובי.

SIMPLE 5.3

משתנים

- טבעיות:

i , j , k ,

מקבלים כערך מספר טבעי.

- אתחול: הקלט נמצא בתאים הראשונים של $[] A$
כל שאר המשתנים מאותחלים ל- 0.

פעולות

- השמה בקבוע:

$i = 3$, $B[i] = "#"$

- השמה בין משתנים:

$i = k$, $A[k] = B[i]$

- פעולות חשבונ:

$x = y + z$, $x = y - z$, $x = y \cdot z$

תנאים

- $B[i] == A[j]$ (מערכות).

- $y > x$ (משתנים טבעיות).

זרימה

- סדרה פקודות ממושפרות.

- goto : מותנה ולא מותנה.

- stop : עצירה עם ערך חוזרת.

```
one = 1
zero = 0
B[zero] = "0"
i=0
j=i
if A[i] == B[zero] goto 9
i=j + one
goto 3
C[one] = A[j]
if C[one] == A[zero] goto 12
stop(0)
stop(1)
```

כעת נגדיר את מושגי הקבלה והדחיה של מילים בשפה SIMPLE, ונגדיר את מושגי הכרעה והקבלת של שפות בשפה SIMPLE.

הגדרה 5.1 קבלת ודוחה של מחרוזת בשפה SIMPLE

עבור קלט a ותוכנית P בשפת SIMPLE. אומרים כי

- P מקבלת את a אם הריצה של P על a עוצרת עם ערך חוזה 1.
- P דוחה את a אם הריצה של P על a עוצרת עם ערך חוזה 0.

הגדרה 5.2 הכרעה וקבלת של מחרוזת בשפה SIMPLE

עבור שפה L ותוכנית P בשפת SIMPLE. אומרים כי

- P מכירעה את L אם היא מקבלת את המילים שב- L ודוחה את אלה שלא ב- L.
- P מקבלת את L אם היא מקבלת את כל ורקי המילים ב- L.

משפט 5.3

המודלים של מכונות טיריניג ותוכניות SIMPLE שקולים.

הוכחה:כיוון ראשון:

$\forall M \exists P . \text{סקולה } P$

במילים, לכל מ"ט M קיימת תוכנית P ש skolem.
בוצע סימולציה של מ"ט M במחשב P .

בליה להכנס, לפרטים די ברור שבשפה, עילית כגון ג'אווה, ניתן להגדיר מבני נתונים בעברור כל מרכיבי מכונת טיורינג:
• השרת.

• המצלבים.

• מיקום הראש.

• טבלת המעברים.

ובזרור שניתן לבצע סימולציה של פעילות המכונה.
ואם ניתן לעשות זאת בשפה עילית, ניתן לעשות זאת גם בשפת SIMPLE.

כיוון שני:

$\forall M \exists P . \text{סקולה } P$

במילים, לכל תוכנית P בשפה SIMPLE קיימת מ"ט skolem.

אנחנו צריכים להראות כיצד ניתן למש את הרכיבים השונים של תוכניות SIMPLE במ"ט.

הרכיבים הם:

• משתנים.

• פעולות.

• תנאים.

• זרימה.

משתנים

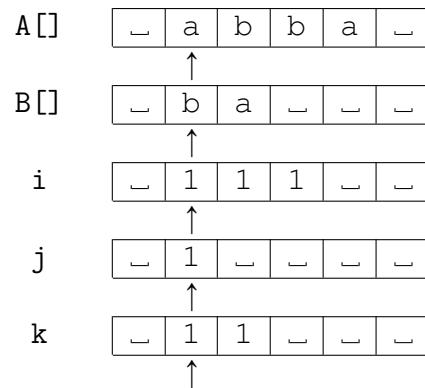
לכל משתנה יהיה סרט משלו.
המספר שהמשתנה יחזק יוצג בסיס אונרי.
בהתחלת הסרט יהיה רק עם רוחים, זה מייצג את המספר אפס בסיס אונרי.

לכל מערך יהיה סרט משלו.
בכל תא הסרט המערך תהיה אותן.
בהתחלת כל המערכות יהיו מאופסים למעט הסרט הראשון, שיחזק את הקלט.

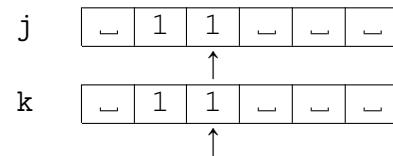
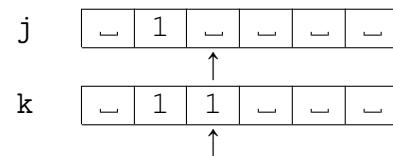
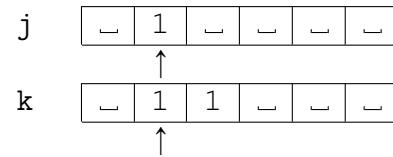
למשל ההשמה הבאה של משתנים בשפה SIMPLE:

```
A[1] = a, A[2] = b, A[3] = b , A[4] = a
B[1] = b, B[2] = a
i = 3
j = 1
k = 2
```

ניתן למש במ"ט על ידי לכתוב על סרטים, סרט אחד לכל משתנה:

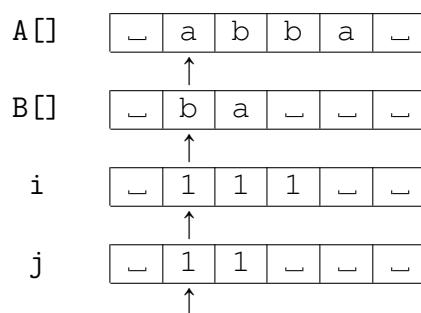
פעולות

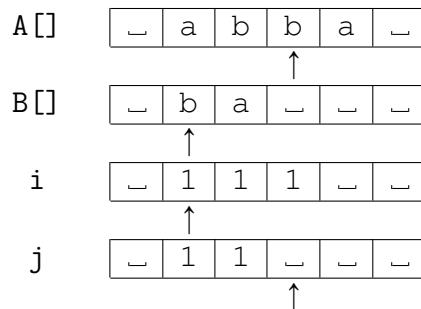
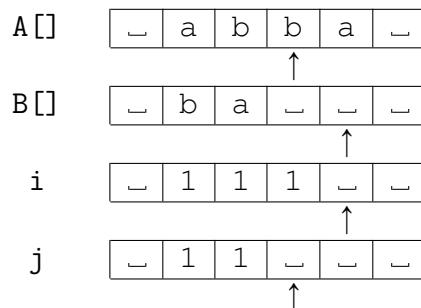
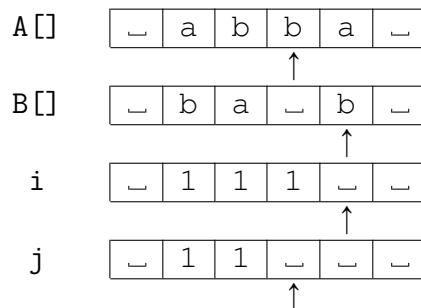
cut נניח שנשים

 $j = k$ אפשר למשם את ההשמה הזאת על ידי להעתיק את תוכן הסרט של המשתנה k לסרט של המשתנה j .

cut נניח שנשים $[j] = A[2], [B[i]] = A[3]$ ו $A[3] = B[3]$.
נמשם זה במת' ע"י להעתיק את תוכן משבצת 2 בסרט של A למשבצת 3 בסרט של B .

(שלב 1)



שלב 2**שלב 3****שלב 4**

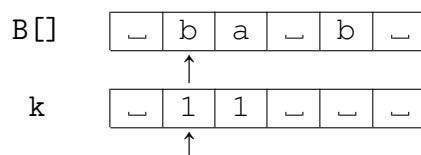
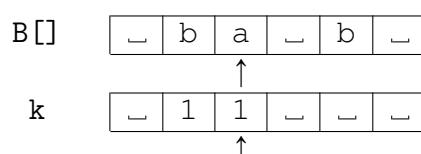
נניח עכשו שאנו רוצים לשים

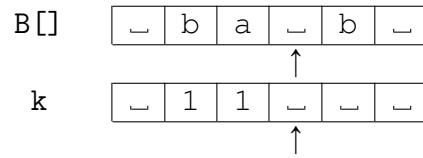
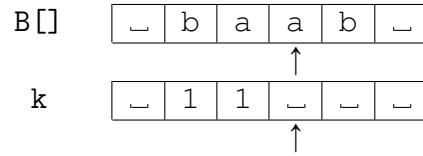
B [k] <- "a"

זה

B [3] <- "a"

נממש זה במת' ע"י על ידי הפעולות הבאות עם הסרט של B [] והסרט של k.

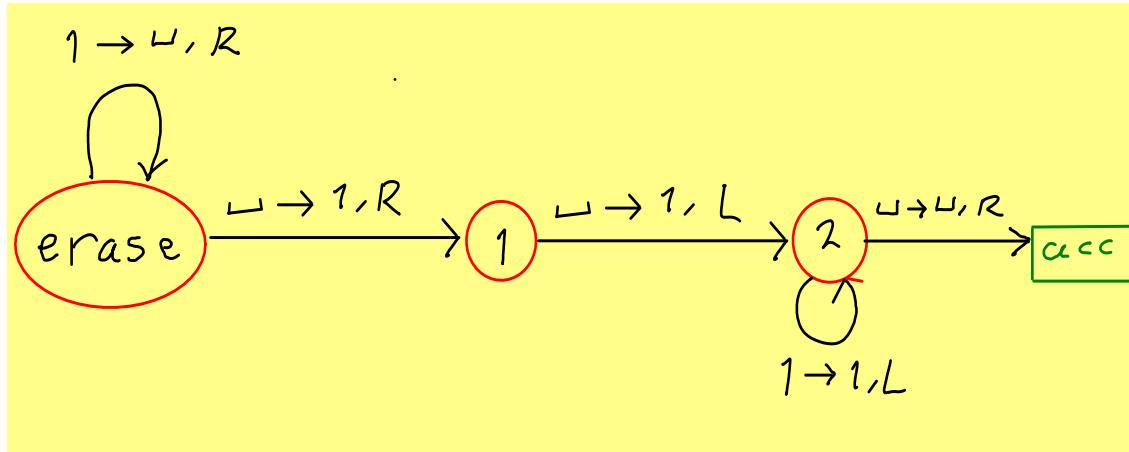
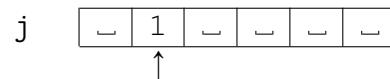
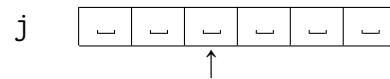
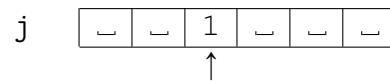
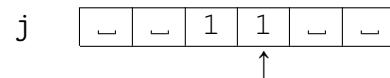
שלב 1**שלב 2**

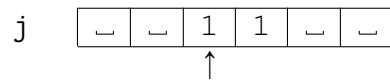
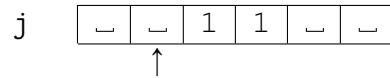
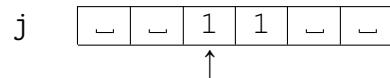
שלב 3**שלב 4**

cut נניח שאנו רוצים לשים

j = 2

אז נממש זה במת"ט עם הפעולות הבאות:

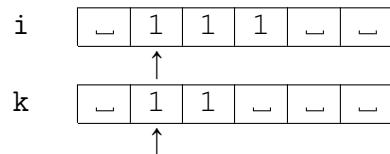
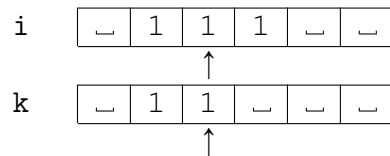
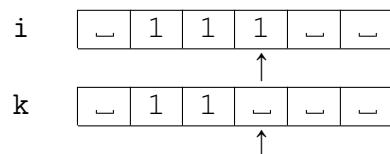
**שלב 1****שלב 2****שלב 3****שלב 4**

שלב 5)**שלב 6)****שלב 7)**תנאים

נניח שאנו רוצים למש את התנאי

$$i \geq k$$

ניתן לבדוק את התנאי במת' על ידי הפעולות הבאות:

שלב 1)**שלב 2)****שלב 3)****5.4 דקדוקים כלליים**

הגדרה 5.3 דקדוקים חסרי קשר

דקדוק חסר קשר הוא קבוצה

$$(V, \Sigma, R, S)$$

כאשר

- V קבוצה סופית של **משתנים** שמורכב מאותיות גדולות של אלףיבית.
- Σ קבוצה סופית של **טרמינלים** שמורכב מאותיות קטנות וסימנים של אלףיבית.
- R קבוצה של כללים. כל כלול הוא מצורה

$$\gamma \rightarrow u$$

כאשר $V \in \gamma$ משתנה בודד בצד שמאל ו- $u \in \Sigma^*$ מחרוזת של משתנים וטרמינלים בצד ימין
S המשתנה ההתחלתי.

דוגמה 5.1

נתון הדקדוק חסר קשר:

$$G_1 = (\{A, B\}, \{0, 1, \#\}, R, A)$$

הקבוצת משתנים היא $V = \{A, B\}$, הקבוצת טרמינלים היא $\{0, 1, \#\}$, המשתנה ההתחלתי הוא $S = A$ והכללים של הדקדוק הם

$$R = \begin{cases} A \rightarrow 0A1 \\ A \rightarrow B \\ B \rightarrow \# . \end{cases}$$

הגדרה 5.4 יצירה של מילה על ידי דקדוק חסר קשר

- 1) כתבו את המשתנה ההתחלתי S .
- 2) מצאו משתנה וכלל אשר מתחליל אם המשתנה זה, והחליפו אותו עם המחרוזות בצד ימין של הכלל.
- 3) חזרו על שלבים 1 ו- 2 עד שלא נשאר אף משתנים של V .

דוגמה 5.2הדקוק G_1 יוצר את המחרוזת 000#111

$$A \xrightarrow{A \rightarrow 0A1} 0A1 \xrightarrow{A \rightarrow 0A1} 00A11 \xrightarrow{A \rightarrow 0A1} 000A111 \xrightarrow{A \rightarrow B} 00B11 \xrightarrow{B \rightarrow \#} 000\#111$$

דוגמה 5.3

נתון את הדקדוק

$$G_2 = (\{S, T, F\}, \{(,), +, \times, a\}, R, S)$$

כאשר הכללים הם

$$R = \begin{cases} S \rightarrow S + T \\ S \rightarrow T \\ T \rightarrow T \times F \\ T \rightarrow F \\ F \rightarrow (S) \\ F \rightarrow a . \end{cases}$$

: $a + a$ יוצר את המילה: G_2

$$S \xrightarrow{S \rightarrow S+T} S + T \xrightarrow{S \rightarrow T} T + T \xrightarrow{T \rightarrow F} F + F \xrightarrow{F \rightarrow a} a + a$$

בדקdock כללי, גם בצד ימין וגם בצד שמאל יכולה להופיע מחרוזת של משתנים וטרמינליים. פורמלי:

הגדעה 5.5 דקדוקים כלליים

דקדוק חסר קשר הוא קבוצה

$$(V, \Sigma, R, S)$$

כאשר

- V קבוצה סופית של **משתנים** שמורכב מאותיות גדולות שלalfבית.
- Σ קבוצה סופית של **טרמינלים** שמורכב מאותיות קטנות וסימנים שלalfבית.
- R קבוצה של כללים. כל כלél הוא מצורה

$$\gamma \rightarrow u$$

כאשר $(\Sigma^* \cup V)^+$, $\gamma \in (V \cup \Sigma)^*$, $u \in \Sigma^*$. מחרוזת של משתנים וטרמינליים בצד ימין $S \in V$ המשתנה ההתחלתי.

דוגמה 5.4

נתון את הדקדוק

$$G = (\{S, [,]\}, \{a\}, R, S)$$

שבו הקבוצת משתנים היא $V = \{S, [,]\}$, הקבוצת טרמינליים היא $\Sigma = \{a\}$ והכללים הם

$$R = \begin{cases} S \rightarrow [S] \\ S \rightarrow a \\ [a \rightarrow aa[\\ [\rightarrow \varepsilon . \end{cases}$$

:aaaa יוצר את המילה: G

$$\begin{array}{ccccccc} S & \xrightarrow{S \rightarrow [S]} & [S] & \xrightarrow{S \rightarrow [S]} & [[S]] & \xrightarrow{S \rightarrow a} & [[a]] \\ & \xrightarrow{[\rightarrow \varepsilon } & [aa] & \xrightarrow{[a \rightarrow aa[} & aa[a] & \xrightarrow{[a \rightarrow aa[} & aa aa[] \\ & & & & & \xrightarrow{[\rightarrow \varepsilon } & aaaa \end{array}$$

דוגמה 5.5

נתון את הדקדוק

$$G = (\{S, [,]\}, \{a\}, R, S)$$

שבו הקבוצת משתנים היא $V = \{S, [,]\}$, הקבוצת טרמינליים היא $\Sigma = \{a\}$ והכללים הם

$$R = \begin{cases} S \rightarrow [S] \\ S \rightarrow a \\ [a \rightarrow aa] \\ [] \rightarrow \varepsilon . \end{cases}$$

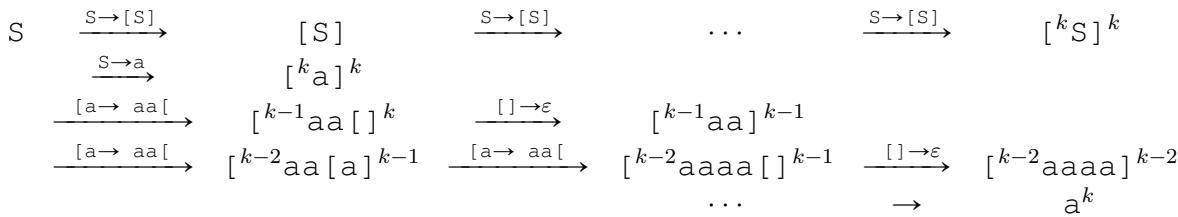
מהן המילים שנitin נוצר בעזרת הדקדוק הזה,
או במילים אחרות: מהי השפה של הדקדוק?

פתרון:

תשובה:

$$L(G) = \{a^n \mid n = 2^k, k \geq 1\} .$$

הסבר:



דוגמה 5.6

בנו דקדוק כללי אשר יוצר את הפסה

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#a_w = \#b_w\} .$$

פתרון:

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, R, \{S\})$$

$$S \rightarrow abS , \tag{1}$$

$$ab \rightarrow ba , \tag{2}$$

$$ba \rightarrow ab , \tag{3}$$

$$S \rightarrow \varepsilon . \tag{4}$$

$$S \xrightarrow{1} abS \xrightarrow{1} ababS \xrightarrow{2} baabS \xrightarrow{4} baab$$

שימוש לב: בדקדוק כללי אנו מאפשרים גם כליל'יצרה בהם מצד שמאל יש רק טרמינלים.
לכן, ניתן גם שנמשיך ונפתח מחזורות של טרמינלים. למשל

$$S \xrightarrow{1} abS \xrightarrow{1} ababS \xrightarrow{4} abab \xrightarrow{2} baab$$

נשאל שאלה כללית:

- אלו שפות ניתנים לצורך בעזרת דקדוק כללי?
- האם יש שפות שלא ניתנים לצורך בעזרת דקדוק כללי?
- האם יש מודל חישובי שמקבל שפות שנוצרות ע"י דקדוקים כלליים?

דוגמה 5.7

בנו דקדוק כללי שיוצר את השפה

$$w = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w = a^n b^n c^n\}$$

פתרון:

נראה דקדוק כללי עבור שפה זו.

שפה זו אינה חסרת הקשר.

לכן, לא ניתן לבנות עבורה דקדוק חסר הקשר.

אנו נבנה לה דקדוק כלל.

נעזר את האותיות c, a, b יחד.

נעsha זאת בצורה כזו שכדי לסיים את תהליך הגזירה יש לסדר את האותיות בסדר הרצוי:

תחילה a ,אחר מכן b ,ובסוף c .

$$S \rightarrow S'] \quad (1)$$

$$S' \rightarrow aS'bC \mid \varepsilon \quad (2)$$

$$Cb \rightarrow bC \quad (3)$$

$$C] \rightarrow]c \quad (4)$$

$$] \rightarrow \varepsilon \quad (5)$$

$$\begin{array}{llllll} S & \xrightarrow{1} & S'] & \xrightarrow{2} & aS'bC] & \xrightarrow{2} aaS'bCbC] & \xrightarrow{2} aaaS'bCbCbC] \\ & \xrightarrow{3} & aaaS'bbCCbc] & \xrightarrow{3} & aaaS'bbCbCC] & \xrightarrow{3} & aaaS'bbbCCC] \\ & \xrightarrow{4} & aaaS'bbbCC]c & \xrightarrow{4} & aaaS'bbbC]cc & \xrightarrow{4} & aaaS'bbb]ccc \\ & \xrightarrow{5} & aaaS'bbbccc & \xrightarrow{1} & aaabbccc & & \end{array}$$

דוגמה 5.8

בנו דקדוק כללי אשר יוצר את שפת המיללים

$$L = \{ uu \mid u \in \{a, b\}^*\}$$

פתרון:

דוגמא זאת תמחיש כיצד דקדוק כללי יכול "לפעול בדומה" למוכנת טיריניג.

דקודוק נשתמש במשתנים וכלי גירה שיאפשרו מעין תנעה על גבי המחרוזות הנזרת, בדומה לתנועת הראש של מוכנת טיריניג על גבי הסרט.

S → [H {	כל גזירה ייחיד מהמשתנה ההתחלתי. המשתנה H ידמה את הראש של המ"ט ש"יזוז" מצד לצד על המחרוזות הנגזרות. הסוגר המרובע] מסמן את הקצה השמאלי של המילה השמאלית. הסוגר המסלול } מסמן את הקצה השמאלי של המילה הימנית.	1
[H → [aH _a	כל זה מאפשר הוספת אות a לקצה השמאלי של המילה השמאלית. המשתנה H מוחלף במשתנה H _a כדי "לזכור" שיש עכשו להוסיף a גם במחוזות הימנית. (בדומה לזכרון של מ"ט).	2
H _a a → aH _a	כל זה מאפשר בראש "ליזוז" ימינה.	3
H _a { → H{a	כאשר המשתנה H _a "גינע" לסוגר המסלול, הוא יجوز אות a נוספת מימין לסוגר, שהוא הקצה השמאלי של המחרוזות הימנית. כך אפשרנו להוסיף שתי אותיות a: אחת מימין לסוגר] ואחת תואם ימין לסוגר } . כלומר אותן a בקצת השמאלי של כל אחת המחרוזות.	4
aH → Ha	cut צריך לאפשר למשתנה H לחזור שמאלה על גבי האותיות שבין הסוגרים, עד הסוגר].	5

ברגע "שהראש" H חזר לתחילת המחרוזות ועומד ליד הסוגר] עברים על שלבים 5-2 שוב. בסבב הבא נחק במחשב גם יקרה של שתי אותיות b.

[H → [bH _b	כל זה מאפשר הוספת אות b לקצה השמאלי של המילה השמאלית. המשתנה H מוחלף במשתנה H _b כדי "לזכור" שיש עכשו להוסיף b גם במחוזות הימנית.	2'
H _a a → aH _a H _a b → bH _a H _b a → aH _b H _b b → bH _b	כללים האלהאפשרים בראש "ליזוז" ימינה.	3'
H _b { → H{b	כאשר המשתנה H _b "גינע" לסוגר המסלול, הוא יجوز אות b נוספת מימין לסוגר, שהוא הקצה השמאלי של המחרוזות הימנית. כך אפשרנו להוסיף שתי אותיות b: אחת מימין לסוגר] ואחת תואם ימין לסוגר } . כלומר אותן b בקצת השמאלי של כל אחת המחרוזות.	4'
bH → Ha	Cut צריך לאפשר למשתנה H לחזור שמאלה על גבי האותיות שבין הסוגרים, עד הסוגר].	5'

בכדי לסייע את הגזירה יש להפטר ממשתני העזר על ידי הכללים הבאים:

H → ε [→ ε { → ε	הכללים האלה אפשרים להעלים את המשתנים } , [, H	6
-------------------------	--	---

למשל:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 S & \xrightarrow{1} & [H \{ & \xrightarrow{2} & [aH_a \{ & \xrightarrow{4} & [aH \{ a & \xrightarrow{5} & [Ha \{ a \\
 & & \xrightarrow{2} & & [aH_a a \{ a & \xrightarrow{3} & [aaH_a \{ a & \xrightarrow{4} & [aaH \{ aa & \xrightarrow{5} & [Haa \{ aa \\
 & & \xrightarrow{2} & & [bH_b a a \{ aa & \xrightarrow{3} & [baaH_b \{ aa & \xrightarrow{4} & [baaH \{ baa & \xrightarrow{5} & [Hbaa \{ baa \\
 & \xrightarrow{6} & baabaa & & & & & &
 \end{array}$$

5.5 דקדוקים כלליים ומכונת טיורינג

משפט 5.4 קדוקים כלליים ומכונת טיורינג

תהי L שפה. L קבילה אם ורק אם קיים דקדוק כללי G כך ש- $L = L(G)$.

הוכחה: **ביוון ראשון.**

נוכיח שאם קיים דקדוק כללי G אז $L(G)$ קבילה.

נניח שקיימים דקדוק כללי G . נוכיח כי $L(G)$ קבילה על ידי להוכיח שקיימת תוכנית מחשב P שמקבלת $P(L(G))$.

נתון דקדוק כללי G . נבנה תוכנית מחשב שמקבלת את $L(G)$.
יהי הקלט $w \in L(G)$, מילה בשפה G .

$w=S$ (1)

:repeat (2)

- פצל באופן לא דטרמיניסטי את w ל- xyz .
- בחר באופן לא דטרמיניסטי גזירה $v \rightarrow t$ של G .
- אם $t \neq y$ דחיה.
- $zv=x$ •
- אם $w==t$ קבל.

ביוון שני.

נוכיח שאם $L(G)$ קבילה אז קיים דקדוק כללי G .

צ"א, נניח שקיימות מ"ט M שמקבלת את השפה L . נוכיח שקיימים דקדוק כללי G כך ש- $L = L(G)$.
כלומר השפה המתקבלת על ידי M היא השפה של דקדוק כללי G .

נתונה מ"ט M בעלת הtablת המעברים להלן. נבנה דקדוק כללי G שممמש אותם צעדים.

תואזה	כתביה	מצב חדש	סימן	מצב
R	a	q_0	q_0	a
R	b	q_1	q_1	b
L	-	acc	acc	-
L	a	q_0	q_0	a
L	b	q_1	q_1	b

לפי הtablת המעברים קיימים הצעדים

$q q_0 b a b \vdash_M aaq_1 ab$

נניח שבדוק כללי G קיים אותו הצעד

$$q q_0 bab \xrightarrow{G} aaq_1 ab$$

ניתן למעשה צעד זה על ידי הכלל

$$q_0 \xrightarrow{b} a \quad q_1$$

באופן כללי,

- עבור כל פונקציית המעברים של M שגוררת תזוזה ימינה מצורה

$$\delta(q, \sigma) = (p, \pi, R)$$

נமמש מעבר זה על ידי כלל של הדקדוק G מצורה

$$q\sigma \rightarrow \pi p .$$

- עבור כל פונקציית המעברים של M שגוררת תזוזה שמאליה מצורה

$$\delta(q, \sigma) = (p, \pi, L)$$

או כלל $\Gamma \in \tau$ ב- G נממש מעבר זה על ידי הכלל

$$\tau q\sigma \rightarrow p\tau\pi .$$



5.6 היררכיה של חומסקי

מודל חישובי	דקדוק	משפחה שפות
מכונת טיורינג	כללי	קבילות
אוטומט מחסנית	חסרוות הקשר	אוטומט רולריים
אוטומט סופי	רגולרי	רגולריות

- היררכיה של חומסקי קושرت לנו בין משפחות של שפות דקדוקים ומודלים חישוביים.
- בתחום ההיררכיה נמצאות השפות הרגולריות שנוצרות על ידי דקדוקים רולריים וمتקבלות על ידי אוטומטים סופיים.
- מעלהן נמצאות השפות חסרות הקשר שנוצרות על ידי דקדוקים חסרי הקשר וمتקבלות על ידי אוטומטי מחסנית.
- מעלהן נמצאות השפות הקבילות שנוצרות על ידי דקדוקים כלליים וمتקבלות על ידי מכונות טיורינג.
- כל רמה בהיררכיה מכילה ממש את הרמה שמתחתה.
- * כל שפה רגולרית היא גם חסרת הקשר, אבל יש שפות חסרות הקשר רגולריות.
- * כל שפה חסרת הקשר היא קבילה, אבל יש שפות קבילות שאינן חסרות הקשר.

5.7 כל שפה חסרת הקשר אינה קריאה

לפי היררכיה של חומסקי אנחנו יודעים לקבוע שכל שפה חסרת הקשר היא קבילה.

האם כל שפה חסרת הקשר אינה קריאה?

משפט 5.5

יהי $G = (V, \Sigma, S, R)$ דקדוק חסר הקשר ו- $w \in L(G)$. אזי קיים עץ גזירה של w שעומקו לכל היותר $(|V| + 1)(|w| + 1)$.

הוכחה: יהי T עץ הגזירה הקטן ביותר (מבחינת מספר קודקודים) של w .
בשליליה נניח שב- T יש מסלול מהשורש לעלה שמכיל לפחות $(|V| + 1)(|w| + 1)$ קודקודים פנימיים.

נסמן מסלול זה ב-

$$p = (u_1, u_2, \dots, u_m) .$$

עבור קודקוד u_i במסלול נסמן ב- (u_i) את תת-המחרוזת של w שנוצרת מ- u_i .

מתקיים ש- s היא תת-מחרוזת של (u_i) . אומרים שקודקוד u_i הוא שימושותי אם (u_i) מכיל ממש את s .

כל קודקוד שימושותי מוסיף לפחות אחת ל- w .
לכן, ישנו לכל היותר $|w|$ קודקודים שימושותיים.

לכן, ברגע הקודקודים הפנימיים (u_1, u_2, \dots, u_m) שאורכו לפחות $(|V| + 1)(|w| + 1)$, בהכרח ישנו תת רצף $(u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+|V|+1})$ באורך $|V| + 1$, שבו כל הקודקודים לא משמשותיים.

ברצף זה בהכרח ישנים שני קודקודים, נאמר u_j, u_k , $j < k$ שימושונים עם אותו משתנה.

לכן בעץ הגזירה, ניתן להחליף את הקודקוד u_j יחד עם כל תת העץ שמתחתיו - בקודקוד u_k , יחד עם כל תת העץ שמתחתיו.

כיוון שכל הקודקודים שבין u_j ל- u_k (כולל) הם לא משמשותיים, החלפה זו לא משנה את המחרוזת הנוצרת.

כלומר, העץ החדש גם הוא עץ הגזירה עבור w .
בסתירה להנחה המינימלית של העץ.

משפט 5.6

כל שפה חסרת הקשר היא כריעה.

הוכחה: בהינתן דקדוק חסר הקשר (V, Σ, S, R) , התוכנית הלא דטרמיניס הבאה מכריעת את $L(G)$.

קלט: מחרוזת w .

פלט: כן או לא.

1) נחש עץ גזירה של הדקדוק G בעומק לכל היותר $(|V| + 1)(|w| + 1)$.

2) בדוק האם העץ יוצר את המחרוזת w . אם כן, החזר "כן" איתר החזר "לא".

שני שלבי התוכנית בהכרח מסוימים. לכן, זו תוכנית להכרעה. ישנו חישוב שמחזיר "כן" אם ורק אם $w \in L(G)$.
לכן זו תוכנית שמכריעת את $L(G)$.

שיעור 6

תכונות סגירות של R ו- RE

6.1 הגדרה של השפות R ו- RE

הגדרה 6.1

אוסף השפות הכריעות מסומן R ומוגדר

$$R = \{L \subseteq \Sigma^* : L \text{ קיימת מ"ט המכreira את } L\}.$$

הגדרה 6.2

אוסף השפות הקבילות מסומן RE ומוגדר

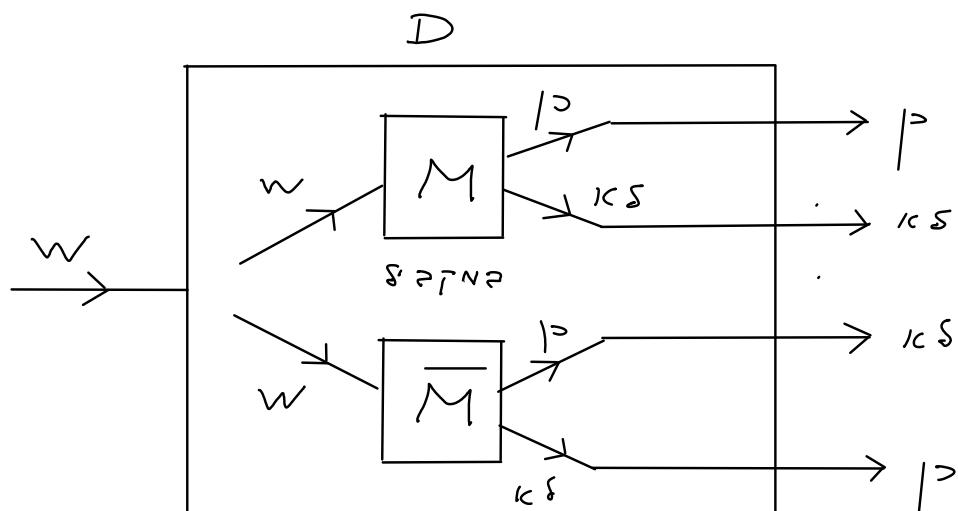
$$RE = \{L \subseteq \Sigma^* : L \text{ מקבלת את } L\}.$$

лемה 6.1

אם $L \in R$ אז $\bar{L} \in RE$ וגם $L \in RE$

הוכחה: תהי M מ"ט מקבלת את L ותהי \bar{M} מ"ט מקבלת את \bar{L} .

נבנה מ"ט D המכreira את L .



על קלט $w = D$:

1) D מעתקה את w לסדרת נוספת.

2) מריצה במקביל את M על w ואת \bar{M} על העותק של w .

- אם M מקבלת D מקבלת.
- אם \bar{M} מקבלת D דוחה.
- אם M דוחה D מקבלת.
- אם \bar{M} דוחה D מקבלת.

נוכיח כי D מכירעה את L .

אם $w \in L$

$w \in L(M) \Leftarrow$

(w מקבלת את M) או (w דוחה את M) \Leftarrow

עוצרת ומתקבלת את w .

אם $w \notin L$

$w \in \bar{L} \Leftarrow$

$w \in L(\bar{M}) \Leftarrow$

(w מקבלת את \bar{M}) או (w דוחה את \bar{M}) \Leftarrow

עוצרת ודוחה את w .



משפט 6.1 סגירות של השפות הכריעות

סגורה תחת: R

- 1) איחוד
- 2) חיתוך
- 3) משלימים
- 4) שרשור
- 5) סגור קלין



משפט 6.2 סגירות של השפות הקבילות

סגורה תחת: RE

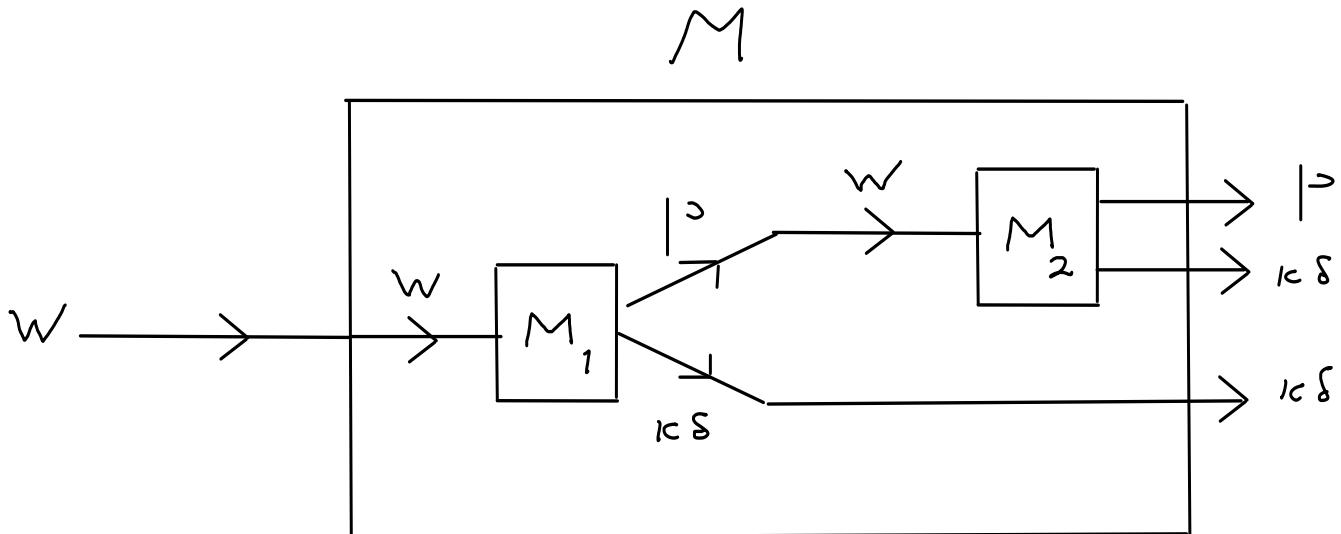
- 1) איחוד
- 2) חיתוך
- 3) שרשור
- 4) סגור קלין

1) חיתוך:

(א) סגורה תחת חיתוך R

נוכיח כי לכל שתי שפות $L_1 \cap L_2 \in R$ מתקיים $L_1, L_2 \in R$ המכריעה את $L_1 \cap L_2$.

תהי M_1 ו- M_2 מ"ט המכרייעות את L_1 ו- L_2 בהתאם. נבנה מ"ט M המכריעה את $L_1 \cap L_2$.

תאור הבנייה

על קלט $w = M$:

1) מעתיקת את w לסדרת נוספת.

2) מרכיב את M_1 על w .

- אם M_1 דוחה $\Leftarrow M$ דוחה.

- אחרת M מרכיב את M_2 על העותק של w ועונה כמוותה.

נכונות:

נוכיח כי M מכריעה את $L_1 \cap L_2$.

אם $w \in L_1 \cap L_2$

$w \in L_2$ וגם $w \in L_1 \Leftarrow$

w מקבלת את w וגם M_2 מקבלת את w $\Leftarrow M_1$ מקבלת את w \Leftarrow

M מקבלת את w \Leftarrow

אם $w \notin L_1 \cap L_2$

$w \notin L_2$ או $w \notin L_1 \Leftarrow$

w דוחה את w או M_2 דוחה את w $\Leftarrow M_1$ דוחה את w \Leftarrow

M דוחה את w \Leftarrow

(ב) סגורה תחת חיתוך

nocih ci lcl shi shfot RE matk'ym $L_1, L_2 \in RE$

tahiyeh M₁ -> M₂ shti m'conot tyorign m'kbelot at L₁ -> L₂ b'hetama.
n'bna m'yt M m'kbelat at L₁ ∩ L₂ ba'otzo open cmo (א).

(2) איחוד:

(א) סגורה תחת איחוד

nocih ci ld'l shi shfot R matk'ym $L_1, L_2 \in R$

tahiyeh M₁ m'yt m'kri'ah at L₁ -> M₂ m'yt m'kri'ah at L₂
n'bna m'yt M m'kri'ah at L₁ ∪ L₂

תאור הבנייה

על קלט w: $= M$

(1) מעתיקה את w לסדרת נסף.

(2) M מרים את M₁ על w.

- אם M₁ מקבלת M \Leftarrow M'kbelat.
- אחרת, M מרים את M₂ על העותק של w ועונה כמוות.

(ב) סגורה תחת איחוד

nocih ci lcl shi shfot RE matk'ym $L_1, L_2 \in RE$

tahiyeh M₁ m'yt m'kbelat at L₁ -> M₂ m'yt m'kbelat at L₂.
n'bna m'yt A'D M m'kbelat at L₁ ∪ L₂

תאור הבנייה

על קלט w: $= M$

(1) M בוחרת באופן A'D $i \in \{1, 2\}$

(2) M מרים את M_i על w ועונה כמוות.

(3) שרשור:

(א) Sgura Tahat Shorshor

nocih ci lcl shi shfot R matk'ym $L_1, L_2 \in R$ L₁ · L₂ căs'r

$$L_1 \cdot L_2 = \{w = w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\} .$$

tahiyeh M₁ m'yt m'kri'ah at L₁ -> M₂ m'yt m'kri'ah at L₂

n'bna m'yt A'D M m'kri'ah at L₁ · L₂

תאור הבנייה

על קלט w: $= M$

- 1) M בוחרת באופן א"ד חלוקה של w ל-
 $w = w_1 w_2$.
 2) מרים את M_1 על w_1 .
 • אם D דוחה $M \Leftarrow D$
 • אחרת, M מרים את M_2 על w_2 ועונה כמוות.

(ב) סגורה תחת שרשור RE
 RE סגורה תחת שרשור באותו אופן כמו ב- (א)

4) * **קליני**

א) R סגורה תחת * קליני

נוכיח כי לכל שפה L :

$$L \in R \Rightarrow L^* \in R$$

כasher

$$L^* = \{w = w_1 w_2 \cdots w_k \mid \forall 1 \leq i \leq k, w_i \in L\} .$$

תהי M מ"ט המכיריה את L .

نبנה מ"ט M^* א"ד המכיריה את L^* .

תאור הבנייה

על קלט $w = M^*$:

1) אם $w = \varepsilon$ אז M^* מקבלת.

2) אחרת M^* בוחרת באופן א"ד חלוקה של w ל-
 $w = w_1 \cdots w_k$.

3) לכל $1 \leq i \leq k$

מרים את M על w_i .

• אם M דוחה את w_i $M^* \Leftarrow w_i$ דוחה.

• אחרת חוזרים לשלב 3).

4) אם M קיבלה את כל המחרוזות $\{w_i\}$ אז M^* מקבלת.

ב) RE סגורה תחת *

5) **משלים**

א) R סגורה תחת המשלימים

נוכיח כי

$$L \in R \Rightarrow \bar{L} \in R ,$$

כasher

$$\bar{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\} .$$

תהי M מ"ט המכיריה את L .

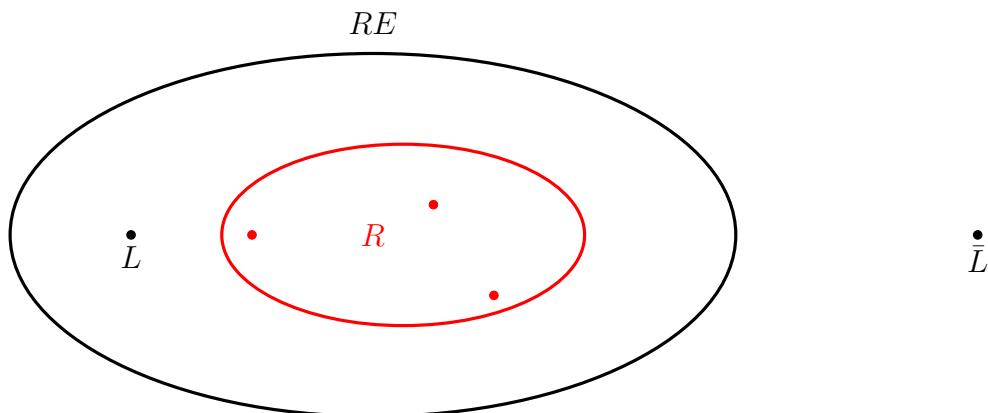
نبנה מ"ט \bar{M} המכיריה את \bar{L} .

על קלט $w = \bar{M}$:

- (1) מרייצה את M על w .
- אם M מקבלת דוחה.
 - אם דוחה M מקבלת.

ב) אין סגורה תחת המשיים**משפט 6.3 אין סגורה תחת המשיים**

$$L \in RE \setminus R \Rightarrow \bar{L} \notin RE .$$

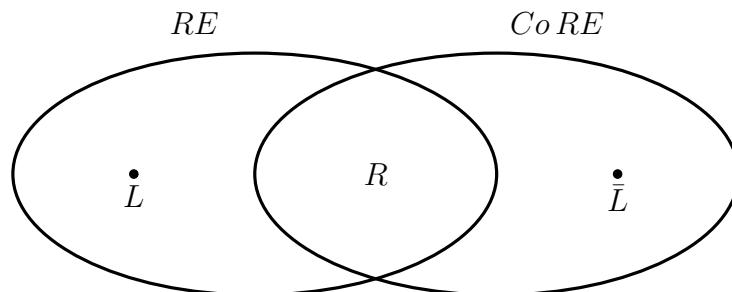


הוכחה:
נניח כי $L \in RE \setminus R$ ונניח בשליליה כי $\bar{L} \in RE$.

אזי לפי טענת עזר (лемה 6.1), $L \in R$ ואו סתיירה.

הגדרה 6.3

$$Co\ RE = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \bar{L} \in RE\} .$$



אבחנה

לפי למה 6.1:

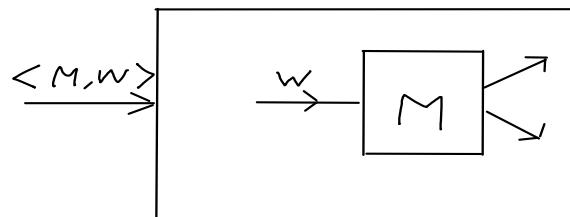
$$RE \cap Co\ RE = R .$$

6.2 קידוד של מ"ט דטרמיניסטי

הגדרה 6.4 קידוד של מ"ט

בاهינתן קבוצה O של עצמים מופשטים (למשל מכונת טיורינג, תוכנית מחשב, גרפ'). הקידוד של O , מסומן $\langle O \rangle$, הוא מיפוי של O אל מהירות מעל אלףית סופי שיש בו לפחות שני סימנים. במידה ויש רב עצמים O_1, \dots, O_k נסמן את הקידוד שלהם $\langle O_1, O_2, \dots, O_k \rangle$.

מ"ט אוניברסלית U



מ"ט אוניברסלית U מקבלת כקלט זוג, קידוד של מילה $\langle w \rangle$ וקידוד של מ"ט $\langle M \rangle$, וביצעת סימולציה של ריצה של M על w ועונה בהתאם.

תאור הפעולה של U

U על קלט x :

(1) בודקת אם x הוא קידוד של מ"ט $\langle M \rangle$ וקידוד של מילה $\langle w \rangle$.

- אם לא \Leftarrow דוחה.

(2) מבצעת סימולציה של M על w :

1	6	7	0	$\langle M \rangle$	-	$\langle w \rangle$...
---	---	---	---	---------------------	---	---------------------	-----

2	6	7	0	$\langle \rangle$	-	$\langle w \rangle$...
---	---	---	---	-------------------	---	---------------------	-----

- רושמת את הקוניגורציה ההתחלתית w_{q_0} על סרט 2.
 - מחשבת את הקוניגורציה הבאה בעזרת טבלת המעברים.
 - בסוף כל מעבר בין שתי קוניגורציות, U בודקת אם המצב הנוכחי הוא q_{acc} .
- * אם כן U עוצרת ומקבלת.

- * לאחרת U בודקת האם המצב הוא q_{rej} .
- * אם כן U עוצרת ודוחה.
- * אחרת U ממשיכה לكونפיגורציה הבאה.

מהי השפה של U ?

לכל x :

. x דוחה את $U \iff x \neq \langle M, w \rangle$ (1)

: $x = \langle M, w \rangle$ (2)

- אם M מקבלת w מקבלת את x .
- אם M דוחה את w דוחה את x .
- אם M לא עוצרת על w לא עוצרת על x .

$$L(U) = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} .$$

הגדרה 6.5 L_{acc}

$$L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} \in \text{RE} \setminus \text{R}$$

הגדרה 6.6 L_{halt}

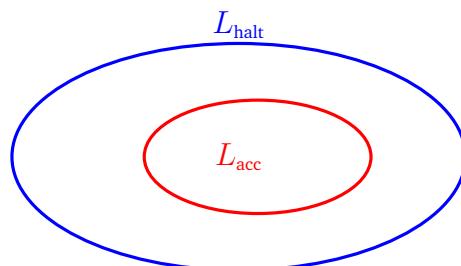
$$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ עוצרת על } M\} \in \text{RE} \setminus \text{R}$$

הגדרה 6.7 L_{d}

$$L_{\text{d}} = \{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M)\} \notin \text{RE}$$

אבחנה:

$$L_{\text{acc}} \subseteq L_{\text{halt}} .$$



משפט 6.4

$$L_{\text{acc}} \in RE .$$

הוכחה: מכיוון ש- $L_{\text{acc}} \in RE$ מקבלת את U , $L(U) = L_{\text{acc}}$

משפט 6.5

$$L_{\text{halt}} \in RE .$$

הוכחה: נבנה מ"ט U' שהוא למעשה U פרט למקום שבו U עצמה ומחטה, U' תעצור ותקבל.

נווכיח כי U' מקבלת את L_{halt} :

אם $x \in L_{\text{halt}}$

ו- M עוצרת על w $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$

x עוצרת ומתקבלת את $U' \Leftarrow$

אם $x \notin L_{\text{halt}}$ שני מקרים:

. x דוחה את $U' \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$ •

. M לא עוצרת על $U' \Leftarrow w$ לא עוצרת על $x = \langle M, w \rangle$ •



שיעור 7

אי-כריעות

7.1 השפות $L_d, L_{\text{halt}}, L_{\text{acc}}$ לא כריעות

הגדרה 7.1 L_{acc}

$$L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} \in RE \setminus R$$

הגדרה 7.2 L_{halt}

$$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ עוצרת על } M\} \in RE \setminus R$$

הגדרה 7.3 L_d

$$L_d = \{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M)\} \notin RE$$

משפט 7.1 $L_{\text{acc}} \in RE$

$$L_{\text{acc}} \in RE .$$

הוכחה: מכיוון ש- $L(U) = L_{\text{acc}}$ כאשר U המכונת טיורינג האוניברסלית אשר מקבלת את L_{acc} , לכן $L_{\text{acc}} \in RE$. ■

משפט 7.2 $L_{\text{halt}} \in RE$

$$L_{\text{halt}} \in RE .$$

הוכחה: נבנה מ"ט U' שהוא למעשה U פרט למקום שבו U עצמה ומחטה, U' תעוצר ותחזור ותקבל.

נווכיח כי U' מקבלת את L_{halt} :

אם $x \in L_{\text{halt}}$

w עוצרת על M ו- $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$

U' עוצרת ומקבלת את x .

אם $x \notin L_{\text{halt}}$ ⇐ שני מקרים:

• U' דוחה את x .

• M לא עוצרת על U' לא עוצרת על w .

משפט 7.3 $L_d \notin RE$

$$L_d \notin RE .$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי $L_d \in RE$.

• אם M_d מקבלת את L_d ⇐

$$. L(M_d) = L_d \Leftarrow$$

נבדוק ריצה של M_d על $\langle M_d \rangle$.

• אם $L(M_d) \neq L_d$ ⇐ $\langle M_d \rangle \notin L_d$ ⇐ $\langle M_d \rangle \in L(M_d)$.

• אם $L(M_d) \neq L_d$ ⇐ $\langle M_d \rangle \in L_d$ ⇐ $\langle M_d \rangle \notin L(M_d)$.

בשני המקרים קיבלנו סתיירה לכך ש- $L_d \notin RE$ ולכן $L(M_d) = L_d$.

משפט 7.4 $L_{\text{acc}} \text{ לא כריעה}$

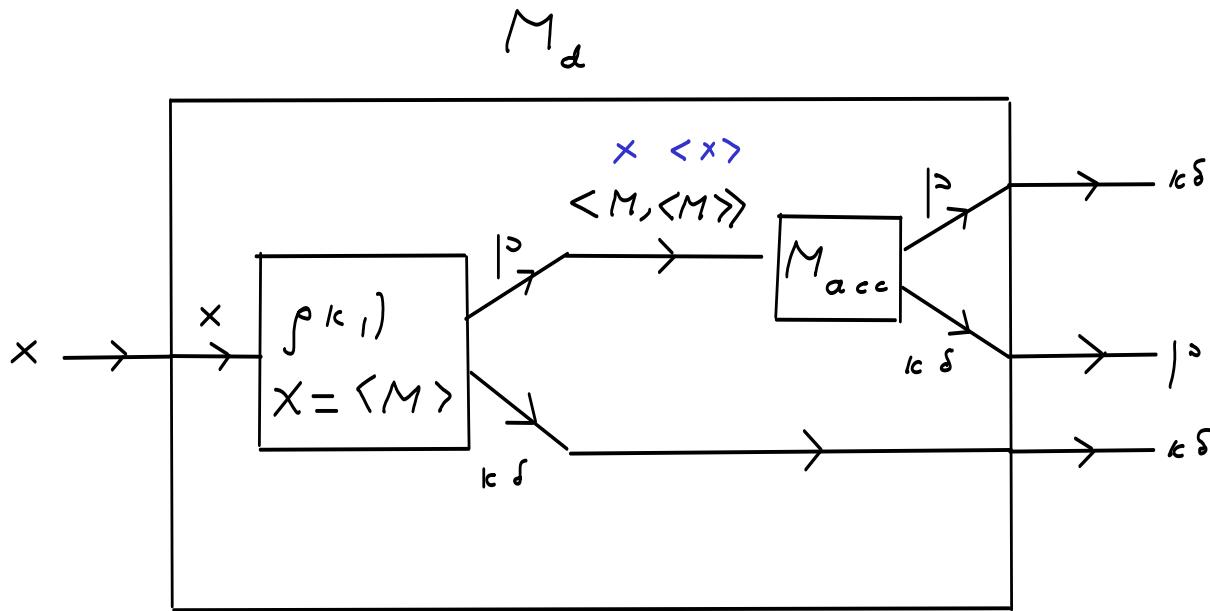
$$L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} \notin R .$$

הוכחה:

נניח בשלילה כי $L_{\text{acc}} \in R$ ותהי M_{acc} המכריעה את L_{acc} .

נשתמש ב- M_{acc} כדי לבנות מ"ט M_d המכריעה את L_d (בסתירה לכך ש- $L_d \notin RE$ כפי שהוכחנו במשפט 7.3).

$$L_d = \{\langle M, w \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M)\} .$$



התאור של M_d

: x על קלט $= M_d$

1) בודקת האם $x = \langle M \rangle$. אם לא \Leftarrow דוחה.

2) מחשבת את $\langle x \rangle = \langle\langle M \rangle\rangle$

3) מרייצה את $\langle M, \langle M \rangle \rangle$ על הזוג M_{acc}

- אם M_{acc} מקבלת $M_d \Leftarrow$ דוחה.

- אם M_{acc} דוחה \Leftarrow מקבלת.

כעת נוכיח כי M_d מכירעה את L_d :

אם $x \in L_d$

$\langle M \rangle \notin L(M) \rightarrow x = \langle M \rangle \Leftarrow$

$\langle M, \langle M \rangle \rangle$ דוחה את הזוג $M_{acc} \Leftarrow$

x מקבלת את $M_d \Leftarrow$

אם $x \notin L_d$ שני מקרים:

x דוחה את $M_d \Leftarrow x \neq \langle M \rangle$:1)

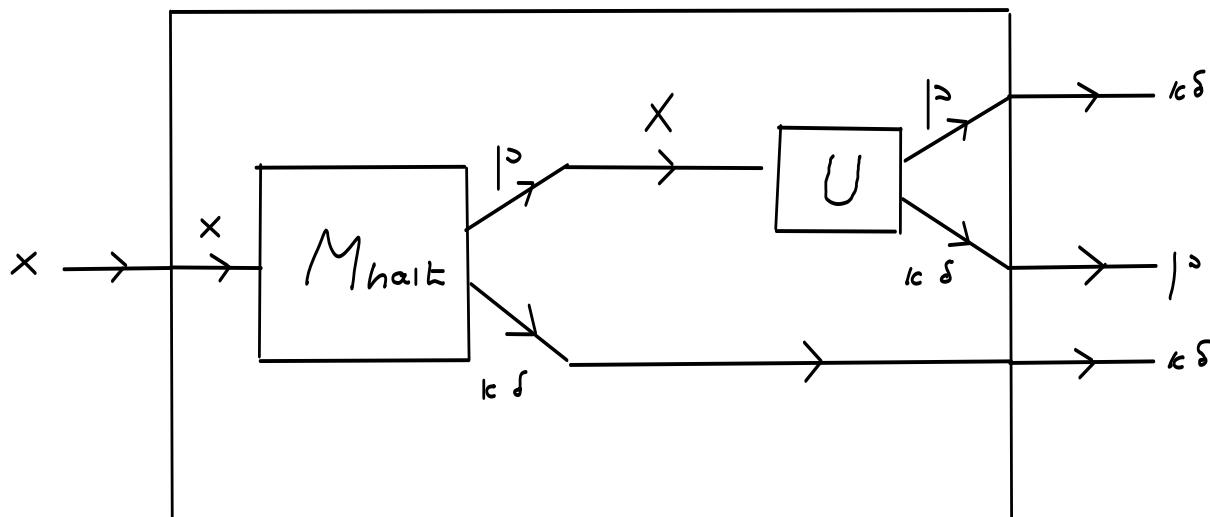
מקרה (2): $\langle M \rangle \in L(M) \rightarrow x = \langle M \rangle$

$\langle M, \langle M \rangle \rangle$ מקבלת את זוג $M_{acc} \Leftarrow$

x דוחה את $M_d \Leftarrow$

משפט 7.5 לא כריעה L_{halt}

$$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ עצרת על } M \} \notin R .$$

הוכחה:נניח בsvilleה כי $L_{\text{halt}} \in R$ ותהי M_{halt} מ"ט המכריעה את L_{halt} .נשתמש בו כדי לבנות מ"ט המכריעה את L_{acc} (בסתירה לכך שגם כפי שהוכחנו במשפט 7.4). M_{acc} התאור של M_{acc} x על קלט : M_{acc} 1) מ裏יצה את M_{acc} על x • אם M_{acc} דוחה M_{halt} .• אם M_{acc} מקבלת M_{halt} מ裏יצה את U על x ועונה כמוה.אבחןנהנוכיח כי M_{acc} מכריעה את L_{acc} אם $x \in L_{\text{acc}}$

$$\langle w \rangle \in L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$$

מקבלת את x וגם U מקבלת את x $M_{\text{halt}} \Leftarrow$ מקבלת את M_{acc} \Leftarrow $.x$ מקבלת את M_{acc} \Leftarrow

אם $x \notin L_{\text{acc}}$ ⇔ שני מקרים:

מקרה (1) $\langle M, w \rangle$:

דוחה את $M_{\text{halt}} \Leftarrow$
דוחה את $M_{\text{acc}} \Leftarrow$

מקרה (2) $\langle w \rangle \notin L(M)$ ו- $x = \langle M, w \rangle$:

מקרה (א): M לא עוצרת על w דוחה את x .

מקרה (ב): M דוחה את w מקבלת את x אבל $M_{\text{halt}} \Leftarrow$ דוחה את x .

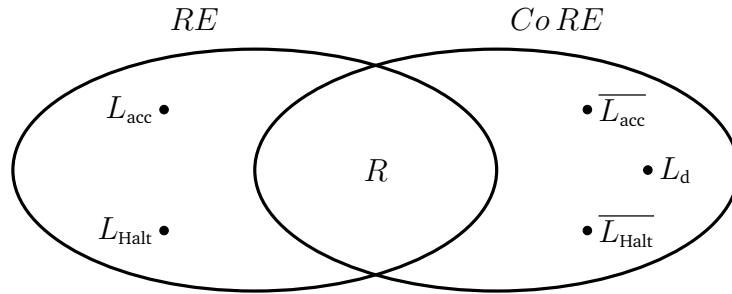
הראנו כי M_{acc} מכיריעת L_{acc} בסתייה לכך ש- $L_{\text{acc}} \notin R$.
 $L_{\text{halt}} \notin R$.

משפט 7.6

$$L_{\text{acc}} \in RE \setminus R \Rightarrow \bar{L}_{\text{acc}} \notin RE ,$$

$$L_{\text{halt}} \in RE \setminus R \Rightarrow \bar{L}_{\text{halt}} \notin RE ,$$

$$L_d \notin RE \setminus R .$$



7.2 השפה L_E לא כריעה

הגדרה 7.4 השפה L_E

$$L_E = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\} .$$

משפט 7.7 $L_E \notin R$

$$L_E \notin R .$$

כלומר L_E לא כריעה.

הוכחה:

נניח בשלילה כי L_E כריעה. אז נבנה מ"ט M_{acc} המכיריעת L_{acc} באופן הבא.

בנייה של M_w

ראשית נגדיר את המ"ט M_w :

על כל קלט $x = M_w$:

(1) אם $x \neq w$ ⇐ דוחה.

(2) אם $x = w$ אז מריצה M על w ועונה כמוות.

אבחנה

אם $x = w$ מקבלת את w אז $L(M_w) = \Sigma^*$.

אם $x \neq w$ או אם M דוחה את w אז $L(M_w) = \emptyset$.

בנייה של M_{acc}

נניח כי קיימת מ"ט M_E המכrica את L_E . אז נבנה מ"ט M_{acc} המכrica את L_{acc} :

על כל קלט $x = M_{\text{acc}}$:

(1) אם $x \neq \langle M, w \rangle$ ⇐ דוחה.

(2) אם $x = \langle M, w \rangle$, בעזרת התאור $\langle M, w \rangle$, בונה מ"ט M_w :

(3) מריצה M_E על M_w :

(4) • אם M_E מקבלת ⇐ דוחה.

• אם M_E דוחה ⇐ מקבלת.

נכונות

$\langle M_w \rangle$ דוחה M_E ⇐ $L(M_w) = \Sigma^* \neq \emptyset$ ⇐ $w \in L(M)$ ו- $x = \langle M, w \rangle$ ⇐ $x \in L_{\text{acc}}$ מקבלת. M_{acc} ⇐

אם $x \notin L_{\text{acc}}$ ⇐ שני מקרים:

מקרה 1: M_{acc} מקבלת M_E ⇐ $L(M_w) = \emptyset$ ⇐ $x \neq \langle M, w \rangle$

מקרה 2: M_{acc} ⇐ $\langle M_w \rangle$ M_E ⇐ $L(M_w) = \emptyset$ ⇐ $w \notin L(M)$ ו- $x = \langle M, w \rangle$

לסיכום:

אם L_E כרעה אז אפשר לבנות מ"ט M_{acc} המכrica את L_{acc} בסתירה לכך ש- $L_E \notin R$.

משפט 7.8 $L_E \notin RE$

$L_E \notin RE$

הוכחה:
הרעיון

נבנה מ"ט א"ד N מקבלת את

$$\bar{L}_E = \{\langle M \rangle \mid L(M) \neq \emptyset\}$$

 \square על קלט $x = N$ (1) אם $x \neq \langle M \rangle \Leftarrow$ דוחה.(2) אם $x \in N$ בוחרת מילה $w \in \Sigma^*$ בAOVN א"ד.(3) מರיצה M על w .• אם M מקבלת N מקבלת.• אם M דוחה N דוחה.הוכחת הנכונותאם $x \in \bar{L}_E$ $L(M) \neq \emptyset \wedge x = \langle M \rangle \Leftarrow$ $w \in L(M) \Leftarrow \text{קיימת מילה } w \in \Sigma^* \text{ כך ש-}$ $w \Leftarrow \exists \text{ נייחוש } w \in \Sigma^* \text{ כך ש } M \text{ מקבלת את } w$ $x = \langle M \rangle \Leftarrow \text{קיים חישוב של } N \text{ המכל את }$ $.x \in L(N) \Leftarrow$ לכן קיימת מ"ט א"ד N מקבלת את השפה \bar{L}_E שכן $\bar{L}_E \in RE$ cut נוכיח כי $L_E \notin RE$

$L_E \in R$, 6.1. הוכחנו לעלה ש- $\bar{L}_E \in RE$. לכן $L_E \in RE$ משפט 6.1. או בסתרה לכך ש- $L_E \notin R$. $L_E \notin RE$ לכן $L_E \notin RE$

7.3 השפה L_{EQ} לא כריעה**הגדרה 7.5**

$$L_{EQ} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\}$$

משפט 7.9

$$L_{EQ} \notin R$$

השפה L_{EQ} לא כריעה.

נניח בשלילה כי L_{EQ} כריעה. תהי M_{EQ} מ"ט המכריעה את L_E באופן הבא.

בנייה של M_E

על כל קלט $x = M_E$

• אם $x \neq \langle M \rangle$ דוחה. **(1)**

• אם x , מריצה M_\emptyset על M_{EQ} כאשר $\langle M, M_\emptyset \rangle$ המ"ט שדוחה כל קלט. **(2)**

• אם M_{EQ} מקבלת מקלט. **(3)**

• אם M_{EQ} דוחה M_E דוחה. **(4)**

נכונות

אם $x \in L_E$

$L(M) = \emptyset \wedge x = \langle M \rangle \Leftarrow$

$L(M) = L(M_\emptyset) \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle \in L_{EQ} \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle$ מקבלת $M_{EQ} \Leftarrow$

M_E מקבל. **מתקבל.**

אם $x \notin L_E$ שני מקרים:

• מקרה 1: $M_E \Leftarrow x \neq \langle M \rangle$

• מקרה 2: $L(M) \neq \emptyset \wedge x = \langle M \rangle \Leftarrow$

$L(M) \neq L(M_\emptyset) \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle \notin L_{EQ} \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle$ דוחה $M_{EQ} \Leftarrow$

M_E דוחה.

לסיכום:

אם $L_E \notin R$ כריעה אז אפשר לבנות מ"ט M_E המכריעה את L_E בסתיירה למשפט 7.7 האומר ש- $L_{EQ} \notin R$. לכן $L_{EQ} \notin R$.

משפט 7.10 $L_{EQ} \notin RE$

$L_{EQ} \notin RE$

לא קבילה.

הוכחה:

נניח בשלילה כי L_{EQ} קבילה. תהי M_{EQ} מ"ט המכבלת את L_E באופן הבא.

בנייה של M_E

x על כל קלט $= M_E$

1 אם $x \neq \langle M \rangle$ דוחה.

2 אם x , מריצה M_\emptyset על M_{EQ} כאשר $\langle M, M_\emptyset \rangle$ המ"ט שדוחה כל קלט.

• אם M_{EQ} מקבלת \Leftarrow מקבלת.

נכונות

אם $x \in L_E$

$L(M) = \emptyset \wedge x = \langle M \rangle \Leftarrow$

$L(M) = L(M_\emptyset) \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle \in L_{EQ} \Leftarrow$

$\langle M, M_\emptyset \rangle$ מקבלת $M_{EQ} \Leftarrow$

M_E מקבל.

לסיכום:

אם $L_E \notin RE$ קבילה אז אפשר לבנות מ"ט M_E מקבלת את L_E בסתייה למשפט 7.8 האומר ש-
לכן $L_{EQ} \notin RE$

משפט 7.11 $\bar{L}_{EQ} \notin RE$

$\bar{L}_{EQ} \notin RE$.

הוכחה:

נניח בsvilleה כי \bar{L} קבילה. תהי $M_{\bar{acc}}$ מ"ט מקבלת את \bar{L}_{EQ} . אז נבנה מ"ט M_{EQ} מקבלת את L_{acc} באופן הבא.

בנייה של M_1

ראשית נגדיר מ"ט M_1 באופן הבא:

x על קלט $= M_1$

1) מריצה M על w ועונה כמוות.

בנייה של $M_{\bar{acc}}$

x על כל קלט $= M_{\bar{acc}}$

1 אם $x \neq \langle M, w \rangle$ מקבלת.

(2) אם $x = \langle M, w \rangle$ אז בונה M_1 .

(3) מרים $\langle M_1, M^* \rangle$ על $M_{\overline{EQ}}$ כאשר M^* המ"ט שמקבלת כל קלט.

(4) • אם $M_{\overline{EQ}}$ מקבלת \Leftarrow מקבלת.

נכונות

אם $x \in L_{\overline{\text{acc}}}$

לא מקבלת $M \Leftarrow$

$L(M_1) = \emptyset \Leftarrow$

$\langle M_1, M^* \rangle \in L_{\overline{EQ}} \Leftarrow$

$\langle M_1, M^* \rangle$ מקבלת $M_{\overline{EQ}} \Leftarrow$

$M_{\overline{\text{acc}}} \Leftarrow$ מקבל.

סיכום:

אם $L_{\overline{\text{acc}}} \notin RE$ קבילה או אפשר לבנות מ"ט $M_{\overline{\text{acc}}}$ בסתירה למשפט 7.6 האומר ש-
לכן $L_{\overline{EQ}} \notin RE$.

7.4 סיכום: כרייעות וקבילות של שפות

קבילה	כרייעה	
✓	✗	L_{acc}
✗	✗	$\overline{L}_{\text{acc}}$
✗	✗	L_d
✓	✗	L_{Halt}
✗	✗	$\overline{L}_{\text{Halt}}$
✗	✗	L_E
✓	✗	\overline{L}_E
✗	✗	L_{EQ}
✗	✗	\overline{L}_{EQ}
✗	✗	L_{REG}
✗	✗	L_{NOTREG}

שיעור 8

רדוֹקצִיה

8.1 טבלה של רדוֹקצִיות

טבלה של רדוֹקצִיות

עמוד	רדוקציה
דוגמה 8.6 עמוד 82	$L_{HALT} \leq L_{acc}$
דוגמה 8.11 עמוד 86	$\bar{L}_{acc} \leq L_{NOTREG}$
דוגמה 8.12 עמוד 87	$L_{acc} \leq L_{NOTREG}$
דוגמה 8.13 עמוד 88	$L_{HALT} \leq L_{NOTREG}$
דוגמה 8.15 עמוד 90	$L_{acc} \leq L_{REG}$
דוגמה 8.14 עמוד 89	$\bar{L}_{acc} \leq L_{REG}$
דוגמה 8.16 עמוד 91	$\bar{L}_{acc} \leq L_{M_1 \neg M_2}$ כאשר $.L_{M_1 \neg M_2} = \{\langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2)\}$
דוגמה 8.17 עמוד 91	$\bar{L}_{acc} \leq L_{M_1 \subset M_2}$ כאשר $.L_{M_1 \subset M_2} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) \subset L(M_2)\}$

8.2 מ"ט המחשבת את פונקציה

הגדרה 8.1 מ"ט המחשבת פונקציה

בاهינתן פונקציה $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ אומרים כי מ"ט M מcomputes את f אם לכל $x \in \Sigma^*$:

- M מגיעה ל- q_{acc} בסוף החישוב של $f(x)$ וגם
- על סרט הפלט של M רשום $f(x)$.

הערה 8.1

מ"ט שמחשבת פונקציה עוצרת תמיד.

הגדרה 8.2 מ"ט המחשבת פונקציה

בاهינתן פונקציה $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ אומרים כי f חסיבה אם קיימת מ"ט המחשבת את f .

דוגמה 8.1

$$f_1(x) = xx . \quad (8.1)$$

$f_1(x)$ חסיבה.

דוגמה 8.2

$$f_2(x) = \begin{cases} x & |x| \text{ זוגי} \\ xx & |x| \text{ אי-זוגי} \end{cases} . \quad (8.2)$$

$f_2(x)$ חסיבה.

דוגמה 8.3

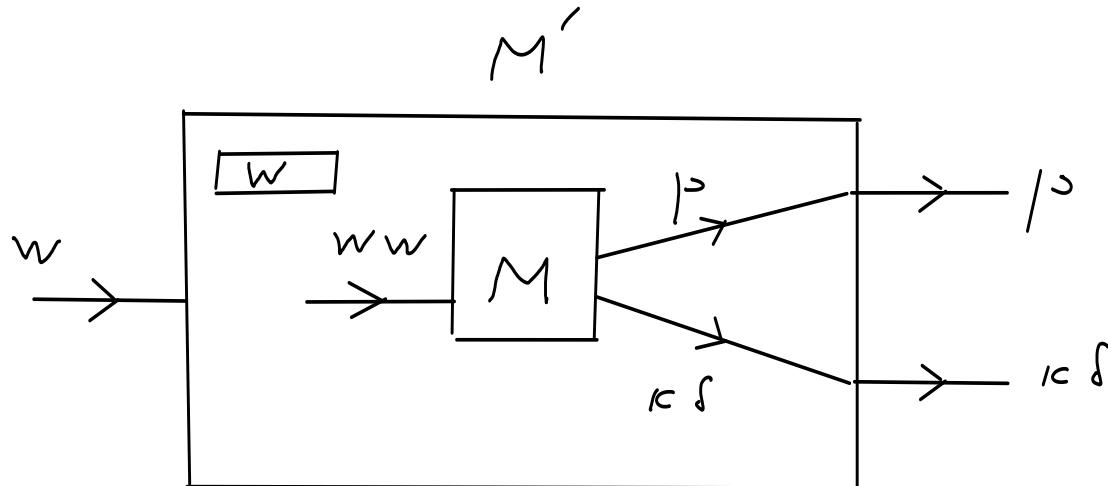
$$f_3(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M \rangle \\ \langle M^* \rangle & x \neq \langle M \rangle \end{cases} . \quad (8.3)$$

כאשר

M^* מ"ט שמקבלת כל קלט.

M' מ"ט המכבלת את השפה

$$L(M') = \{w \in \Sigma^* \mid ww \in L(M)\} .$$



חסיבה כי ניתן לבנות מ"ט שבודקת האם $\langle M \rangle = x$. אם לא, מחזירה קידוד קבוע $\langle M^* \rangle$. ואם כן, מחזירה קידוד $\langle M' \rangle$ ע"י הוספת מעברים המשכפלים את הקלט בתחילת הקידוד $\langle M \rangle$.

דוגמה 8.4

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & x = \langle M \rangle \wedge \langle M \rangle \in L(M) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad (8.4)$$

לא חשיבה כי יתכונו קלטים x ו- M לא עוצרת על $\langle M \rangle$. $f_4(x)$

8.3 רדוקציות**הגדרה 8.3 רדוקציות**

בහינתן שתי שפות $\Sigma^* \subseteq L_1, L_2$ אומרים כי L_1 ניתנת לרדוקציה ל- L_2 , ומסמנים

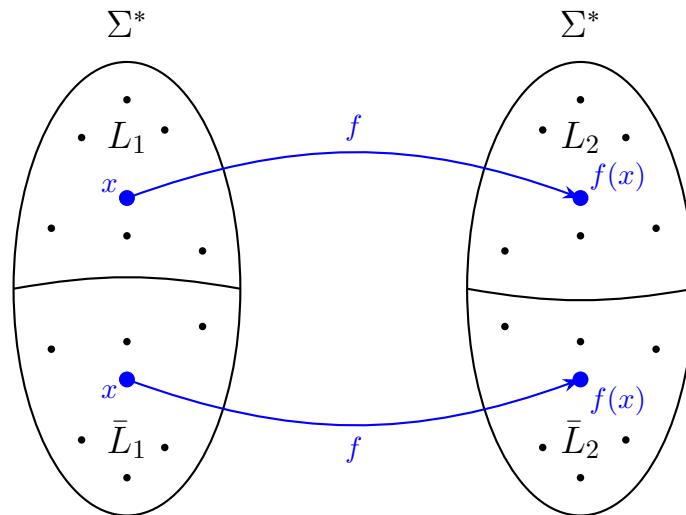
$$L_1 \leq L_2 ,$$

אם \exists פונקציה $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ המקיים:

(1) f חשיבה

(2) לכל $x \in \Sigma^*$

$$x \in L_1 \iff f(x) \in L_2 .$$

**דוגמה 8.5**

נתונות השפות

$$L_1 = \{x \in \{0,1\}^* \mid \text{זוגי } |x|\} ,$$

$$L_2 = \{x \in \{0,1\}^* \mid \text{אי-זוגי } |x|\} .$$

הוכיחו כי

$$L_1 \leq L_2 .$$

פתרונות:

נדיר את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{זוגי } |x|, \\ 10 & \text{אי-זוגי } |x| \end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

$$\cdot f(x) \in L_2 \text{ זוגי } |f(x)| \Leftarrow f(x) = 1 \Leftarrow |x| \Leftarrow x \in L_1$$

$$\cdot f(x) \notin L_2 \text{ זוגי } |f(x)| \Leftarrow f(x) = 10 \Leftarrow |x| \Leftarrow x \notin L_1$$

משפט 8.1 משפט הרדוקציה

לכל שתי שפות $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, אם קיימת רדוקציה

$$L_1 \leq L_2$$

אזי התנאים הבאים מתקיימים:

$$L_1 \in R \Leftarrow L_2 \in R \quad (1)$$

$$L_1 \in RE \Leftarrow L_2 \in RE \quad (2)$$

$$L_1 \notin R \Rightarrow L_2 \notin R \quad (3)$$

$$L_1 \notin RE \Rightarrow L_2 \notin RE \quad (4)$$

הוכחה: מכיוון ש-

$$L_1 \leq L_2$$

קיימת פונקציה f חסיבה המקיים:

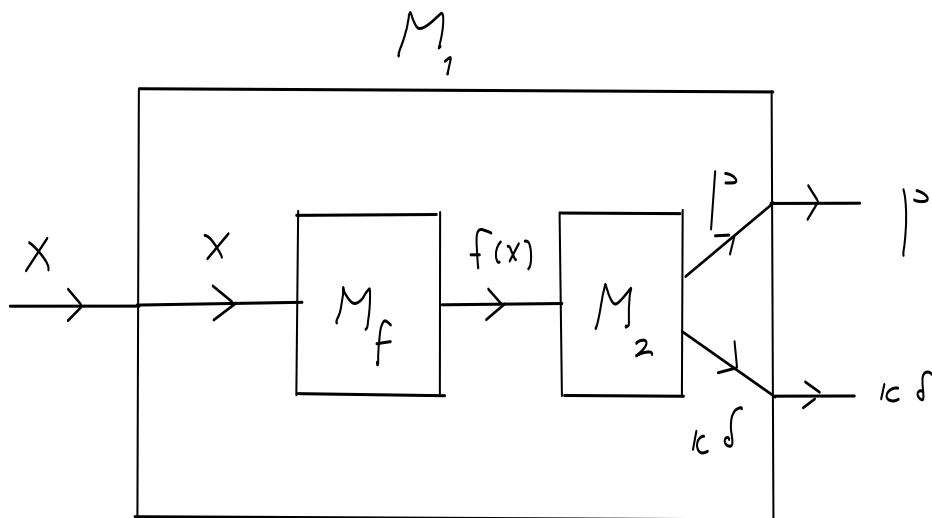
$$x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$$

לכל $x \in \Sigma^*$ תהי M_f מ"ט המחשבת את f .(1) נוכיחתהי M_2 מ"ט המכריעה את L_2 .نبנה מ"ט M_1 המכריעה את L_1 .התאור של M_1 $= M_1$ על קלט x :1. מחשבת את $f(x)$ בעזרת M_f .2. מריצה את M_2 על $f(x)$ ועונה כמורה.nocich ci M₁ מכריעת את L₁. x מתקבלת את M₁ מתקבלת את M₂ מתקבלת את f(x) •

$$x \in M_1 \iff f(x) \in M_2 \text{ דוחה את } M_2 \iff f(x) \notin L_2 \iff x \notin L_1 \bullet$$

$$\underline{L_1 \in RE \iff L_2 \in RE} \quad (2)$$

תהי M_2 מ"ט המקבלת את L_2
نبנה מ"ט M_1 המקבלת את L_1 .



התאור של M_1

$$x = \text{על קלט} : M_1$$

1. מחשבת את $f(x)$ בעזרת M_f .

2. מרים את M_2 על $f(x)$ ועונה כmoה.

נוכיח כי M_1 מקבלת את L_1 :

$$x \in M_1 \iff f(x) \in M_2 \text{ מקבלת את } x \iff f(x) \in L_2 \iff x \in L_1 \bullet$$

$$x \in M_1 \iff f(x) \notin M_2 \text{ לא מקבלת את } x \iff f(x) \notin L_2 \iff x \notin L_1 \bullet$$

(3)

(4)

כל 8.1

- אם רוצחים להוכיח כי שפה כלשהי $L' \in RE$, בוחרים שפה אחרת $L \in RE$ ומראים שקיים רדוקציה

$$L \leq L' .$$

לדוגמה:

$$L \leq L_{\text{acc}}$$

(כנ"ל לגבי R)

- אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי $L' \neq RE$ בוחרים שפה אחרת L ומראים שקיים רדוקציה

$$L' \leq L .$$

לדוגמה

$$L_d \leq L$$

(כנ"ל לגבי R).

8.6 דוגמה

$L_{\text{halt}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ עצור על } M\}$ ו $L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\}$
 הוכיחו כי $L_{\text{acc}} \leq L_{\text{halt}}$ ע"י רדוקציה $L_{\text{acc}} \notin R$

פתרונות:

בנייה פונקצייתית f חשיבה ומקיימת

$$x \in L_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{\text{halt}} .$$

w מתקבל על M' מקלט את w \Leftarrow M מקבלת את w

w דוחה על M' \Leftarrow M דוחה את w

M' לא עצרת את w \Leftarrow M לא עצרת את w .

$$f(x) = \begin{cases} \langle M', w \rangle & : x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\text{loop}}, \varepsilon \rangle & : x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

M' שלא עצרת על אף קלט.

M' מ"ט המתנהגת כמו M פרט למקומות בהם M עצרה ודחתה, M' תיכנס ללולאה אינסופית.

nocnoot_hrdoktsia

f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבודק האם $x = \langle M, w \rangle$

אם לא, תחזיר קידוד קבוע $\langle M_{\text{loop}}, w \rangle$

אם כן, תחזיר קידוד $\langle M', w \rangle$ ע"י ביצוע שינויים לוקלים בקידוד של M

$$x \in L_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{\text{halt}}$$

אם $:x \in L_{\text{acc}}$

$$w \in L(M) \text{ ו } x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$$

$$\text{ומקצתה } M' \text{ ו } f(x) = \langle M', w \rangle \Leftarrow$$

$$f(x) \in L_{\text{halt}} \Leftarrow$$

אם $x \notin L_{\text{acc}}$ אז שני מקרים:

מקרה 1:

$$f(x) \notin L_{\text{halt}} \Leftarrow \text{לא עוצרת על } M_{\text{loop}} \text{ ו } f(x) = \langle M_{\text{loop}}, \varepsilon \rangle \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$$

מקרה 2:

$$f(x) = \langle M', w \rangle \Leftarrow w \notin L(M) \text{ ו } x = \langle M, w \rangle$$

מקרה א: M לא עוצרת על w $\Leftarrow w \in L_{\text{acc}}$

מקרה ב: M דוחה את w $\Leftarrow w \notin L(M)$

לסיום, הוכחנו רדוקציה (7.4) אז ממשט הרדוקציה 8.1, מתקיים $L_{\text{acc}} \leq L_{\text{halt}}$. ומכיון ש- R (משפט 7.4) אז $L_{\text{acc}} \leq L_{\text{halt}}$ $\Leftarrow L_{\text{halt}} \notin R$

8.7 דוגמה

נתונה השפה

$$L_{\Sigma^*} = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^*\}$$

ונתונה השפה

$$\bar{L}_{\Sigma^*} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \neq \Sigma^*\} \cup \{x \neq \langle M \rangle\} .$$

הוכיחו כי:

$$L_{\Sigma^*} \notin RE \quad (\text{א})$$

$$L_{\Sigma^*} \notin R \quad (\text{ב})$$

$$\bar{L}_{\Sigma^*} \notin RE \quad (\text{ג})$$

פתרונות:

nocich ci R ע"י $L_{\Sigma^*} \notin R$

$$L_{\text{acc}} \leq L_{\Sigma^*} .$$

בנייה פונקצייתית חשיבה f המקיים

$$x \in L_{\text{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L_{\Sigma^*} .$$

$$L(M') = \Sigma^* \Leftarrow w \in L(M)$$

$$L(M') \neq \Sigma^* \Leftarrow w \notin L(M)$$

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & : x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & : x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- M_\emptyset מ"ט שדוכה כל קלט.
- M' היא מ"ט שעל כל קלט x , מתעלמת מ- x ומריצה את M על w ועונה כמוות.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & : w \in L(M) \\ \emptyset & : w \notin L(M) \end{cases}$$

נכונות הרדוקציה:

f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $.x = \langle M, w \rangle$

אם לא תחזר קידוד קבוע $\langle M_\emptyset \rangle$

אם כן, תחזר קידוד $\langle M' \rangle$ ע"י הוספה קוג ל- M שמוחק את הקלט מהסרט וכותב w במקומו.

נוכיח כי

$$\begin{aligned} x \in L_{\text{acc}} &\Leftrightarrow f(x) \in L_{\Sigma^*} \\ \Leftarrow L(M') = \Sigma^* \quad f(x) = \langle M' \rangle &\Leftarrow w \in L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \Leftarrow x \in L_{\text{acc}} \quad \text{אם} \\ .f(x) \notin L_{\Sigma^*} &\Leftarrow L(M_\emptyset) = \emptyset \wedge f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle \quad \text{מקרה 1} \\ .f(x) \notin L_{\Sigma^*} &\Leftarrow L(M') = \emptyset \quad \text{ולפי האבחנה } f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow w \notin L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \quad \text{מקרה 2} \end{aligned}$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $L_{\text{acc}} \leq L_{\Sigma^*} \neq R$ (משפט 7.4) אז ממשט הרדוקציה 8.1, מתקיים $L_{\Sigma^*} \notin R$.

8.8 דוגמה

נתונה השפה

$$L_d = \{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M)\}$$

ונתונה השפה

$$\bar{L}_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \notin L(M)\} \cup \{x \neq \langle M, w \rangle\} .$$

הוכיחו כי $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$ ע"י רדוקציה

$$L_d \leq \bar{L}_{\text{acc}} .$$

פתרונות:בנייה פונקצייתית חשיבה f המקיים

$$x \in L_d \Leftrightarrow f(x) \in L_{\text{acc}} .$$

$$w' \notin L(M') \Leftarrow \langle M \rangle \notin L(M)$$

$$w' \in L(M') \Leftarrow \langle M \rangle \in L(M)$$

$$f(x) = \begin{cases} \langle M, \langle M \rangle \rangle & : x = \langle M \rangle \\ \langle M^*, \varepsilon \rangle & : x \neq \langle M \rangle \end{cases}$$

כאשר M^* המ"ט שמקבלת כל קלט.

נכונות הרדוקציה:

f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x = \langle M, w \rangle$.

אם לא תחזיר קידוד קבוע $\langle M^*, \varepsilon \rangle$.

אם כן, תחשב $\langle M, \langle M \rangle \rangle$.

נוכיח כי

$$x \in L_d \Leftrightarrow f(x) \in \bar{L}_{\text{acc}}$$

$$\Leftrightarrow \langle M \rangle \notin L(M) \text{ ו } f(x) = \langle M, \langle M \rangle \rangle \Leftrightarrow \langle M \rangle \notin L(M) \text{ ו } x = \langle M \rangle \Leftrightarrow x \in L_d \text{ אם } f(x) \in \bar{L}_{\text{acc}}$$

אם שני מקרים:

$$. f(x) \notin \bar{L}_{\text{acc}} \Leftrightarrow \varepsilon \in L(M^*) \text{ ו } f(x) = \langle M^*, \varepsilon \rangle \Leftrightarrow x \neq \langle M \rangle \quad : \underline{\text{מקרה 1}}$$

$$. f(x) \notin \bar{L}_{\text{acc}} \Leftrightarrow \langle M \rangle \in L(M) \text{ ו } f(x) = \langle M, \langle M \rangle \rangle \Leftrightarrow \langle M \rangle \in L(M) \text{ ו } x = \langle M \rangle \quad : \underline{\text{מקרה 2}}$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $L_d \leq \bar{L}_{\text{acc}}$, ומכיון ש- $L_d \leq RE$ (משפט 7.3) אז ממשט הרדוקציה 8.1, מתקיים $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$.

משפט 8.2 ממשפט הרדוקציה בין שפות משלימות

אם קיימת רדוקציה $\bar{L}_1 \leq \bar{L}_2$, אז קיימת רדוקציה $L_1 \leq L_2$

הוכחה:

אם \exists רדוקציה

$$L_1 \leq L_2$$

אז \exists פונקציה חשיבה f המקיים $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$

ולכן עבור אותה פונקציה f היא גם חשיבה וגם מקיימת

$$x \in \bar{L}_1 \Leftrightarrow f(x) \in \bar{L}_2$$

ולכן

$$\bar{L}_1 \leq \bar{L}_2 .$$



8.4 דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה בין שפות משלימות (משפט 8.2)

דוגמה 8.9

הוכחנו בדוגמה 8.7 רדוקציה

$$L_{\text{acc}} \leq L_{\Sigma^*} .$$

לכן לפי משפט 8.2 קיימת רדוקציה

$$\bar{L}_{\text{acc}} \leq \bar{L}_{\Sigma^*} .$$

מכיוון ש- $\bar{L}_{\Sigma^*} \notin RE$, אז ממשפט הרדוקציה 8.1 מתקיים

מכיוון ש- $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$, אז ממשפט הרדוקציה 8.1 מתקיים

דוגמה 8.10

הוכחנו בדוגמה 8.8 רדוקציה

$$L_d \leq \bar{L}_{\text{acc}} .$$

לכן לפי משפט 8.2 קיימת רדוקציה

$$\bar{L}_d \leq L_{\text{acc}} .$$

מכיוון ש- $\bar{L}_d \in RE$, אז ממשפט הרדוקציה 8.1 מתקיים

8.5 דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה (משפט 8.1)

דוגמה 8.11

תהי L_{NOTREG} השפה

$$L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית}\} .$$

הוכחו כי השפה L_{NOTREG} לא כרעה על ידי רדוקציה מ-

פתרונות:

השפה \bar{L}_{acc} מוגדרת

$$\bar{L}_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ לא מקבלת } w\} \cup \{x \neq \langle M, w \rangle\} .$$

והשפה L_{NOTREG} מוגדרת

$$L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית}\} .$$

נגידר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ w' \in PAL & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M' מ"ט הבאה:

$M' = \text{על כל קלט } y$

(1) אם $y \in PAL \iff \text{מקבלת } y$

(2) אחרת מריצה M על w ועונה כמוות.

הוכחת נכונות הרדוקציה

אם $x \in \bar{L}_{\text{acc}}$ ⇐ שני מקרים:

מקרה 1: $x = \langle M, w \rangle$

w לא מקבלת M ⇐

$L(M') \in PAL$ ⇐

$\langle M' \rangle \in PAL$ ⇐

$f(x) \in PAL$ ⇐

$.f(x) \in L_{\text{NOTREG}}$ ⇐

מקרה 2: $.f(x) \in L_{\text{NOTREG}} \Leftarrow f(x) \in PAL \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$

אם $.f(x) \in L_{\text{NOTREG}}$ ⇐ $f(x) \in \Sigma^*$ ⇐ $L(M') = \Sigma^*$ ⇐ w מקבלת M ⇐ $x \notin \bar{L}_{\text{acc}}$

לכן הוכחנו כי $f(x)$ היא רדוקציה מ- L_{acc} ל- L_{NOTREG} ⇔ $f(x) \in NOTERG$.

השפה \bar{L}_{acc} לא כריעה. לפיכך, לפי משפט הרדוקציה גם L_{NOTREG} לא כריעה.

דוגמה 8.12

תהי L_{NOTREG} השפה

$$L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid \text{לא רגולרית } L(M)\}.$$

הוכיחו כי השפה L_{NOTREG} לא כרעה על ידי רדוקציה מ- L_{acc} .

פתרון:

השפה L_{acc} מוגדרת $L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ מקבלת } M\}$.

והשפה L_{NOTREG} מוגדרת $L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid \text{לא רגולרית } L(M)\}$.

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M' מ"ט הבאה:

$M' = M'$ על כל קלט w :

(1) M' מריצה M על w .

(2) אם M דוחה ⇐ M' דוחה.

- אם M מקבלת $\Rightarrow M'$ בודקת אם y פלינדרום.

* אם כן \Rightarrow מקבלת.

* אם לא \Rightarrow דוחה.

הוכחת נכונות הרדוקציה

$$\begin{aligned} f(x) \in L_{\text{NOTREG}} &\Leftarrow f(x) \in PAL & \Leftarrow L(M') = PAL &\Leftarrow M \text{ מקבלת } w &\Leftarrow x \in L_{\text{acc}} \\ &&&&.f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} &\Leftarrow \text{שני מקרים.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle M' \rangle \notin L_{\text{NOTREG}} &\Leftarrow L(M') = \emptyset \text{ ו } f(x) = \langle M' \rangle &\Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle &\text{מקרה 1:} \\ &.f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} &\Leftarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle M' \rangle \notin L_{\text{NOTREG}} &\Leftarrow L(M') = \emptyset &\Leftarrow w \text{ לא מקבלת } M \text{ ו } x = \langle M, w \rangle &\text{מקרה 2:} \\ &.f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} &\Leftarrow \end{aligned}$$

דוגמה 8.13 $L_{\text{HALT}} \leq L_{\text{NOTREG}}$

תהי השפה L_{NOTREG} הטענה
 $L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית}\}$.

הוכיחו כי השפה L_{NOTREG} לא כרעה על ידי רדוקציה מ- L_{HALT} .

פתרון:

השפה L_{HALT} מוגדרת
 $L_{\text{HALT}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ עצרת על } M\}$.

והשפה L_{NOTREG} מוגדרת
 $L_{\text{NOTREG}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית}\}$.

נדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}.$$

כאשר M' מ"ט הבאה:

: y על כל קלט $z = M'$

(1) M' מרכיבה M על w .

• אם M דוחה \Rightarrow דוחה. (2)

• אם M מקבלת \Rightarrow ממשיכה לשלב (3).

(3) $.y \in PAL$ אם M' בודקת אם y פלינדרום.

• אם כן \Rightarrow מקבלת.

• אם לא \Rightarrow דוחה.

הוכחת נכונות

$$\cdot L(M') \in L_{\text{NOTREG}} \iff L(M') \in PAL \iff x \in L_{\text{HALT}}$$

$$\text{שני מקרים:} \iff x \notin L_{\text{HALT}}$$

מקרה 1: $\langle M_\emptyset \rangle \notin L_{\text{NOTREG}} \iff L(M_\emptyset) = \emptyset \wedge f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle \wedge f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} \iff$

מקרה 2: $\langle M_\emptyset \rangle \notin L_{\text{NOTREG}} \iff L(M_\emptyset) = \emptyset \iff w \text{ לא עוצרת על } M \wedge x = \langle M, w \rangle \wedge f(x) \notin L_{\text{NOTREG}} \iff$

דוגמה 8.14 $\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{\text{REG}}$

תהי L_{REG} השפה

$$L_{\text{REG}} = \{\langle M \rangle \mid \text{רגולרית } L(M)\}.$$

הוכחו כי השפה L_{REG} לא כריעה על ידי רדוקציה מ-

פתרונות:

השפה \bar{L}_{acc} מוגדרת

$$\bar{L}_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ לא מקבלת } M\} \cup \{x \mid x \neq \langle M, w \rangle\}.$$

והשפה L_{REG} מוגדרת

$$L_{\text{REG}} = \{\langle M \rangle \mid \text{רגולרית } L(M)\}.$$

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M_\emptyset המ"ט שדוחה כל קלט ו- M' מ"ט הבאה:

$M' = \text{על כל קלט } z$:

(1) מריצה M על w .

(2) • אם M דוחה \iff דוחה.

• אם M מקבלת \iff בודקת אם w פלינדרום:

• אם כן \iff מקבלת.

• אם לא \iff דוחה.

אבחנה

$$L(M') = \begin{cases} PAL & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

הוכחת נכונות הרדוקציה

אם שני מקרים: $\Leftarrow x \in \bar{L}_{\text{acc}}$

מקרה 1: $f(x) \in L_{\text{REG}} \Leftarrow \langle M_{\emptyset} \rangle \in L_{\text{REG}} \Leftarrow L(M_{\emptyset}) = \emptyset \wedge f(x) = \langle M_{\emptyset} \rangle \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$

מקרה 2: $\langle M_{\emptyset} \rangle \in L_{\text{REG}} \Leftarrow L(M') = \emptyset \wedge f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow x \notin L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \wedge f(x) \in L_{\text{REG}} \Leftarrow$

$f(x) \in PAL \Leftarrow L(M') \in PAL \wedge f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow w \in L(M) \Leftarrow x \notin \bar{L}_{\text{acc}} \wedge f(x) \notin L_{\text{REG}} \Leftarrow$

דוגמה 8.15

תהי L_{REG} השפה

$$L_{\text{REG}} = \{\langle M \rangle \mid \text{רגולרית } L(M)\}.$$

הוכיחו כי השפה L_{REG} לא כריעה על ידי רדוקציה מ-

פתרונות:

השפה L_{acc} מוגדרת $L_{\text{acc}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ מקבלת } M\}$.

והשפה L_{REG} מוגדרת $L_{\text{REG}} = \{\langle M \rangle \mid \text{רגולרית } L(M)\}$.

נדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{PAL} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר M_{PAL} המ"ט שמכריע את השפה של פלינדרומים, ו- M' מ"ט הבאה:

$M' = \text{על כל קלט } y$:

(1) M' בודקת אם y פלינדרום:

- אם כן \Leftarrow מקבלת.
- אם לא מרים M על w ועונה כמוות.

הוכחת נכונות הרדוקציה

$.f(x) \in REG \Leftarrow L(M') = \Sigma^* \Leftarrow w \text{ מקבלת } M \Leftarrow x \in L_{\text{acc}}$ אם

שני מקרים: $\Leftarrow x \notin L_{\text{acc}}$

מקרה 1: $\langle M_{PAL} \rangle \notin L_{\text{REG}} \Leftarrow L(M_{PAL}) = PAL \wedge f(x) = \langle M_{PAL} \rangle \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle \wedge f(x) \notin L_{\text{REG}} \Leftarrow$

מקרה 2: $\langle M' \rangle \notin L_{\text{REG}} \Leftarrow L(M') = PAL \Leftarrow w \text{ לא מקבלת } M \wedge x = \langle M, w \rangle \wedge f(x) \notin L_{\text{REG}} \Leftarrow$

דוגמה 8.16

נתונה השפה הבאה:

$$L = \{\langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2)\} .$$

הוכחנו כי $L \notin RE$ ע"י רדוקציה מ-**פתרון:**פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M^*, M, w \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- M^* היא מ"ט שמקבלת כל קלט.
- M_\emptyset היא מ"ט שדוחה כל קלט.

 נכונות הרדוקציה:

ראשית, f חסיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x = \langle M, w \rangle$ או לא, תחזר קידוד קבוע $\langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle$. אם לא, תחזר קידוד $\langle M^*, M, w \rangle$.

נוכיח כי

$$x \in \bar{L}_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{M_1 \rightarrow M_2} .$$

אם שני מקרים:

$$f(x) \in \iff \varepsilon \notin L(M_\emptyset) \wedge \varepsilon \in L(M^*) \wedge f(x) = \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle \quad \text{מקרה 1:} \quad \bar{L}_{M_1 \rightarrow M_2} .$$

$$w \notin L(M) \wedge w \in L(M^*) \wedge f(x) = \langle M^*, M, w \rangle \iff w \notin L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \quad \text{מקרה 2:} \quad f(x) \in L_{M_1 \rightarrow M_2} \iff$$

$$w \notin L(M) \wedge w \in L(M^*) \wedge f(x) = \langle M^*, M, w \rangle \iff w \in L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \iff x \notin \bar{L}_{\text{acc}} \quad \text{אם } f(x) \notin L_{M_1 \rightarrow M_2} \iff$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$, ומכיון ש- $\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \rightarrow M_2}$ ממשפט הרדוקציה מתקיים**דוגמה 8.17**

נתונה השפה הבאה:

$$L = \{\langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2)\} .$$

הוכחנו כי $L \notin RE$ ע"י רדוקציה מ-**פתרון:**פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M_\emptyset, M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset, M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- M_\emptyset היא מ"ט שדועה כל קלט.
- M' היא מ"ט של קלט y מתעלמת מ- y ומריצה M על w ועונה כמוות.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases} .$$

נכונות הרדוקציה:

ראשית, f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם $x = \langle M, w \rangle$. אם לא, תחזיר קידוד קבוע $\langle M_\emptyset, M_\emptyset \rangle$. אם כן, תחזיר קידוד קבוע $\langle M'_\emptyset, M'_\emptyset \rangle$, כאשר M'_\emptyset הוסיף ע"י הוספת קוד ל- $\langle M \rangle$ המוחק את הקלט y ורושם w במקומו.

נוכיח כי

$$x \in L_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{M_1 \subset M_2} .$$

$$L(M') = \Sigma^* \quad f(x) = \langle M_\emptyset, M' \rangle \iff w \in L(M) \quad \text{ואם } x = \langle M, w \rangle \iff x \in L_{\text{acc}}$$

$$\cdot f(x) \in L_{M_1 \subset M_2} \iff L(M_\emptyset) \subset L(M') \iff$$

$$\text{שני מקרים:} \iff x \notin L_{\text{acc}}$$

$$\text{מקרה 1: } .f(x) \notin L_{M_1 \subset M_2} \iff L(M_\emptyset) = L(M_\emptyset) \quad \text{ואם } f(x) = \langle M_\emptyset, M_\emptyset \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle$$

$$\text{מקרה 2: } L(M') = \emptyset \quad \text{ולפי האבחנה } f(x) = \langle M_\emptyset, M' \rangle \iff w \notin L(M) \quad \text{ואם } x = \langle M, w \rangle$$

$$\cdot f(x) \notin L_{M_1 \subset M_2} \quad L(M') = L(M_\emptyset) \iff$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה מתקיים $L_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \subset M_2}$, ומכיון רדוקציה מתקיים $L_{M_1 \subset M_2} \leq R$, ומכיוון ש- $R \neq L_{\text{acc}}$ ממשפט הרדוקציה מתקיים $L_{\text{acc}} \leq R$.

שיעור 9

מבוא לסיבוכיות

9.1 הגדרה של סיבוכיות

הערה 9.1

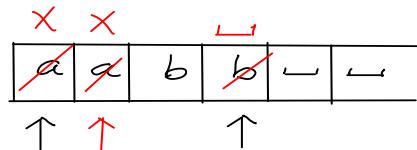
זמן ריצה של מ"ט M על קלט w , נמדד ביחס לגודל הקלט w , כЛОMER ($|w|$). $f(|w|)$

הגדרה 9.1

נאמר כי ניתן להכריע שפה L בזמן $f(n)$, אם קיימת מ"ט M המכ裏עה את L ולכן קלט $w \in \Sigma^*$, זמן הריצה של M על w חסום ע"י $f(|w|)$.

דוגמה 9.1

נבנה מ"ט M המכ裏עה השפה $.L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$



התאור של M :

על קלט w :

- (1) אם הינו שמתוחת לראש הוא $_ \leftarrow$ מקבלת.
- (2) אם הינו שמתוחת לראש הוא $b \leftarrow$ דוחה.
- (3) מוחקת את הינו שמתוחת לראש ע"י X .
- (4) מזיהה את הראש ימינה עד הינו הראשון משמאלו $_ \leftarrow$.
 - אם הינו הוא a או $X \leftarrow$ דוחה.
 - מוחקת את הינו שמתוחת לראש ע"י $_ \leftarrow$, מזיהה את הראש שמאליה עד הינו הראשון מימין לו $-X$ וחוזרת ל-(1).

זמן הריצה

• $\frac{|w|}{2}$ איטרציות.

• בכל איטרציה מבצעים $O(|w|)$ צעדים.

$$\frac{|w|}{2} \cdot O(|w|) = O(|w|^2).$$

הגדלה 9.2 זמן הריצה

זמן הריצה של מ"ט M על קלט w היא פונקציה $f(|w|)$ השווה למספר הצעדים הנדרש בחישוב של M על w .

הערה 9.2

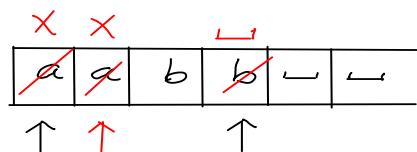
זמן הריצה של מ"ט נמדד ביחס לגודל הקלט $|w|$.

הגדלה 9.3

אומרים כי ניתן להכריעה שפה L בזמן $f(n)$ אם קיימת מ"ט M המכריעה את L כך שלכל Σ^* , $w \in \Sigma^*$, זמן הריצה של M על w חסום ע"י $f(|w|)$.

דוגמה 9.2

נבנה מ"ט M עם סרט ייחיד שמכריעה את השפה $.L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$



התאור של M :

על קלט w :

- (1) אם התו שמתוחת לראש הוא $_$ \Leftarrow מקבלת.
- (2) אם התו שמתוחת לראש הוא b \Leftarrow דוחה.
- (3) מוחקת את התו שמתוחת לראש ע"י X .
- (4) מזיהה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאלו ל- $_$.
 - אם התו הוא a או X \Leftarrow דוחה.
 - מוחקת את התו שמתוחת לראש ע"י $_$, מזיהה את הראש שמאליה עד התו הראשון מימין ל- $_$ X ו חוזרת ל- (1).

זמן הריצה

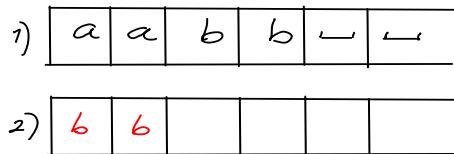
• M מבצעת $\frac{|w|}{2}$ איטרציות.

- בכלל איטרציה M סורקת את הסרט פעמיים וזה עולה $O(|w|)$.
- לכן סה"כ זמן הריצה של M חסום ע"י

$$\frac{|w|}{2} \cdot O(|w|) = O(|w|^2).$$

דוגמה 9.3

נבנה מ"ט מרובת סרטים' M' שמכריעת את השפה $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.



התאור של M' :

על קלט w :

- (1) מעתיקת את ה- b -ים לסרט 2 (ותוך כדי בודקת האם w מהצורה $a^* b^*$).
- (2) מזיהה את הראשים לתחילת הסרטים.
- (3) אם שני הראשים מצביעים על $_ \leftarrow$ מקבלת.
- (4) אם אחד הראשים מצביע על $_ \leftarrow$ והשני לא \leftarrow לא.
- (5) מזיהה את שהע הראשים ימיינה וחוזרת לשלב (3).

שלבים (3-5): $O(|w|)$

זמן הריצה

זמן הריצה של M' הוא $O(|w|)$.

9.2 יחס בין הסיבוכיות של מ"ט סרט יחיד ומטמ"ס

משפט 9.1

לכל מ"ט מרובת סרטים M הריצה בזמן $f(n)$ קיימת מ"ט סרט יחיד' M' השקולה לו- M ורצה בזמן $O(f^2(n))$.

הוכחה:
בבינתן מ"ט מרובת סרטים M , הריצה בזמן $f(n)$, נבנה מ"ט עם סרט יחיד' M' באותו אופן כמו בהוכחת השקילות במשפט 3.1.

כלומר, M' שומרת את התוכן של k סרטים של M על הסרט היחיד שלו (עם הפרדה ע"י '#), ובכל צעד חישוב, M' סורקמת את הסרט שלו כדי להזיהות שת האותיות שמתחאת הראשים (שםסומנות ב- $\hat{\alpha}$) ואחרי זה, משתמשת בפונקציית המעברים של M , וسورקמת את הסרט פעם נוספת כדי לעדכן את התוכן בכל אחד מהסרטים ואת מיקום הראש בכל אחד מהסרטים.

1)

2)

⋮
⋮
⋮

κ)

#	$\hat{\alpha}_1$	#	$\hat{\alpha}_2$	#	$\hat{\alpha}_3$	#	
---	------------------	---	------------------	---	------------------	---	--

כמה לוקח לנו לסרוק את הסרט שלה? מכיוון שהסרט של M' מכיל את התוכן של k הסרטים של M , והגודל של כל אחד מהסרטים של M חסום ע"י $f(n)$, גודל הסרט של M' חסום ע"י

$$k \cdot f(n) = O(f(n)) .$$

הוצאות של הסקירה של M' לסרט שלה היא $O(f(n))$ וזה עלות של צעד חישוב בדיקה של M' על הקלט.

מכיוון ש- M רצה בזמן $f(n)$, זמן היזהה של M' חסום ע"י

$$f(n) \cdot O(f(n)) = O(f^2(n)) .$$

9.3 יחס בין הסיבוכיות של מ"ט דטרמיניסטי ומ"ט א"ד

הגדרה 9.4

בהתנחת מ"ט א"ד M , זמן הריצה של M על קלט w , היא פונקציה $f(|w|)$ השווה במספר הצעדים בחישוב המקסימלי של M על w .

משפט 9.2

לכל מ"ט א"ד N הריצה בזמן $f(n)$, קיימת מ"ט דטרמיניסטי D השකלה ל- N ורצה בזמן $.2^{(f(n))}$.

הוכחה:

בhinתן מ"ט א"ד N הרצה בזמן $f(n)$ מ"ט דטרמיניסטי D באותו אופן כמו בהוכחת השקלות במשפט 4.1. כלומר, בהינתן קלט w , D תשרו את עץ החישוב של N ו- w לרוחב ותקבל כל אחד החישובים של N המסתויים ב- w .

בhinתן קלט w באורך n :

- כל מסלול בעץ החישוב של N על w חסום ע"י $f(n)$.
- מסמר החישובים ש- D מבצעת חסום ע"י מספר הקודקודים בעץ החישוב של N ו- w .
- מכיוון שמספר הבנים של כל קודקוד בעץ החישוב חסום ע"י

$$C = 3|Q| \cdot |\Gamma|$$

מספר הקודקודים בעץ החישוב חסום ע"י

$$C^0 + C^2 + \dots C^{f(n)} \leq C^{f(n)+1} = C \cdot C^{f(n)}.$$

ולכן זמן הריצה של D חסום ע"י

$$f(n) \cdot C \cdot C^{f(n)} \leq C^{f(n)} \cdot C^{f(n)} = C^{2f(n)} = (C^2)^{f(n)} = 2^{C' \cdot f(n)} = 2^{O(f(n))}.$$

נתיחס כאן לשני החסמים הבאים:

1) חסם פולינומיAli הוא חסם מהצורה n^c עבור $c > 0$ כלשהו.2) חסם אקספוננציאלי הוא חסם מהצורה 2^{n^c} עבור $c > 0$ כלשהו.

הגדרה 9.5 בעיית הכרעה

בעיית הכרעה מוגדרת באופן הבא:

"בהינתן קלט כלשהו, האם הקלט מקיים תנאים מסוימים"

דוגמה 9.4

בhinתן מספר n , האם n ראשוני?

כל בעיית הכרעה ניתנת לתאר כפשה שකולה:

$$L_{\text{prime}} = \{\langle n \rangle \mid n \text{ ראשוני}\}.$$

משפט 9.3

. שפה ≡ בעיית הכרעה

הגדרה 9.6 אלגוריתם זמן פולינומיAli

אומרים כי אלגוריתם A מכריע בעיה בזמן פולינומיAli אם קיים קבוע $c > 0$ כך שזמן הריצה של A על כל קלט w חסום ע"י $O(|w|^c)$.

משפט 9.4 התזה של צירץ' (Church Thesis)

אם קיים אלגוריתם המכריע בעיה בזמן פולינומיAli, אז קיימת מ"ט דטרמיניסטית המכריע את השפה השכללה לבעיה זו בזמן פולינומיAli.

. מכונת טיורינג ≡ אלגוריתם מכריע

9.4 המחלקה P **הגדרה 9.7 המחלקה P**

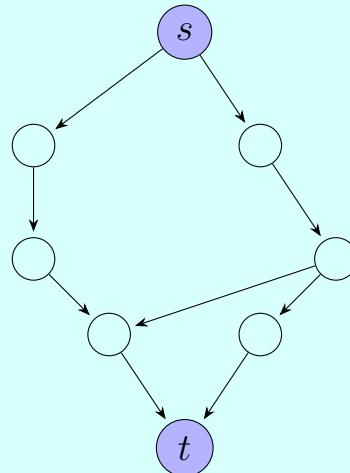
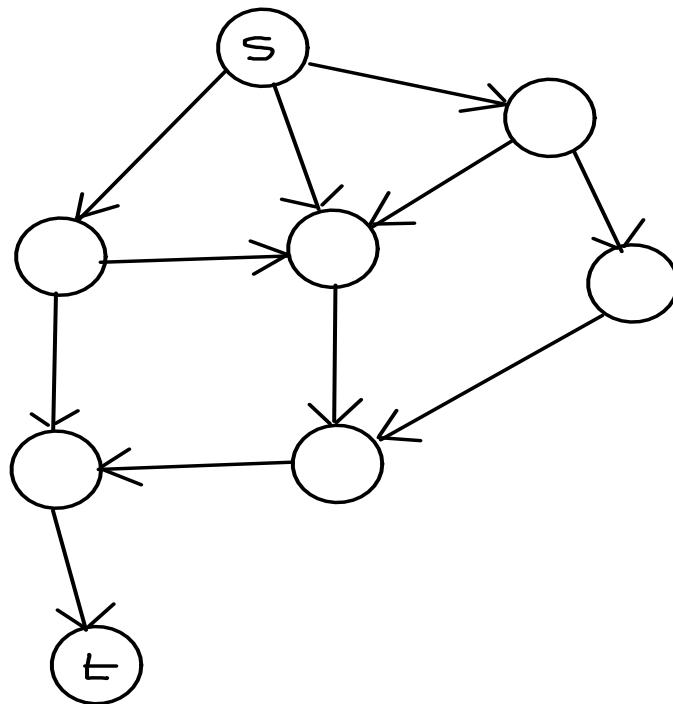
המחלקה P היא אוסף כל הבעיות (השפות) שקיים עבורן אלגוריתם (מכונת טיורינג דטרמיניסטית) המכריע אותן בזמן פולינומיAli.

דוגמה 9.5

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \in P .$$

9.5 בעיית PATH

הגדרה 9.8 בעיית המסלול בגרף מכון



קלט: גראף מכון $G = (V, E)$ ושני קודקודים $s, t \in V$

פלט: האם קיים מסלול ב- G מ- s ל- t ?

$$PATH = \{\langle G, s, t \rangle \mid \text{קיים מסלול ב- } G \text{ מ- } s \text{ ל- } t\}$$

משפט 9.5

$$PATH \in P .$$

הוכחה: בניית אלגוריתם A עבור הבעיה $PATH$

$\langle G, s, t \rangle = A$

(1) צבע את s .

(2) מבצע $|V| - 1$ פעמים:

- לכל צלע $(u, v) \in E$
- * אם u צבוע \Leftarrow צבע את v .
- אם t צבוע \Leftarrow החזיר "כן".
- אחרת \Leftarrow החזיר "לא".

זמן ריצה של האלגוריתם הוא $O(|V| \cdot |E|)$ פולינומיAli במספר הקודקודים $|V|$.

האם זה פולינומיAli בגודל הקלט $|\langle G \rangle|$?

איך נקודד את G ?

• נניח כי $n = |V| = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

• נניח כי הצלעות נתונות ע"י מטריצה M בגודל $n \times n$ כך ש-

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & (i, j) \in E \\ 0 & (i, j) \notin E \end{cases}.$$

• נניח כי מספרים מקודדים בסיסי ביניארי.

• אזי גודל הקידוד של G שווה $n^2 + n \log_2 n$, כלומר

$$|\langle G \rangle| = \Omega(|V|^2) \Rightarrow |V| = O(|\langle G \rangle|).$$

ולכן כל אלגוריתם הרץ בזמן פולינומיAli במספר הקודקודים $|V|$ ירוץ בזמן פולינומיAli בגודל הקידוד $|\langle G \rangle|$.

■
ולכן A רץ בזמן פולינומיAli בגודל הקלט.

9.6 בעית RELPRIME

הגדרה 9.9 מספרים זרים (Relatively prime)

שני מספרים x, y זרים אם המחלק המשותף הגדול ביותר, מסומן $\gcd(x, y)$, שווה 1.

הגדרה 9.10 בעית RELPRIME

קלט: שני מספרים x ו- y .

פלט: האם x ו- y זרים?

$$\text{RELPRIME} = \{\langle x, y \rangle \mid \gcd(x, y) = 1\}.$$

משפט 9.6

$$RELPRIME \in P .$$

הוכחה: נבנה אלגוריתם A המכרייע את $RELPRIME$ בזמן פולינומייאלי.

האלגוריתם מבוסס על העובדה ש-

$$\gcd(x, y) = 1 \iff \langle x, y \rangle \in RELPRIME .$$

ולכן נשתמש באלגוריתם האוקלידי לחישוב \gcd :

$$\gcd(x, y) = \begin{cases} x & y = 0 \\ \gcd(y, x \mod y) & y \neq 0 \end{cases} .$$

הוכחה: נסמן $d = \gcd(x, y)$. אזי קיימים שלמים s, t כך ש- $sx + ty = d$. נסמן $r = x \mod y$.

לכן

$$s(qy + r) + ty = d \Rightarrow sr + (t + sq)y = d \Rightarrow \gcd(x, y) = d = \gcd(y, r) .$$

לדוגמא:

$$\gcd(18, 32) = \gcd(32, 18) = \gcd(18, 14) = \gcd(14, 4) = \gcd(4, 2) = \gcd(2, 0) = 2 .$$

האלגוריתם האוקלידי:

על קלט x ו- y :

(1) כל עוד $y \neq 0$:

$$x \mod y \rightarrow x$$

$$\text{swap}(x, y)$$

(כלומר מחליפים בין x ו- y).

(2) מחזירים את x .

האלגוריתם A המכרייע $RELPRIME$

על קלט $\langle x, y \rangle = A$:

(1) מרים את האלגוריתם האוקלידי על x ו- y .

• אם האלגוריתם האוקלידי החזר $1 \Leftarrow$ מקבל.

• אחרת \Leftarrow דוחה.

נכונות האלגוריתם נובעת מנכונות האלגוריתם האוקלידי.

נוכיח כי A רץ בזמן פולינומייאלי בגודל הקלט.

טענת עזר:

$$\text{אם } x \mod y < \frac{x}{2} \text{ אזי } x > y$$

הוכחה:

יש שתי אפשרויות:

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ אם } y \leq \frac{x}{2} \\ x \mod y & < y \leq \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ נניח ש- } x < y < \frac{x}{2}$$

מכיוון ש- $(y - x) < 2y$, וגם $x = qy + (x \mod y)$ אז בהכרח $2 < q$ ולכן $x - y = x \mod y$.

לפיכך

$$x \mod y = x - y < \frac{x}{2}.$$



לפי טענת העזר, אחרי כל איטרציה x קטן לפחות חצי.

מכיוון שבכל איטרציה מחליפים בין x ו- y , אחרי כל שתי איטרציות גם x וגם y קטנים לפחות חצי.

ולכן לאחר $\log_2 y + \log_2 x$ איטרציות לפחות x או y שווים ל- 0.

ולכן מספר האיטרציות באlgorigithm האוקלידי חסום ע"י $\log_2 x + \log_2 y$, וזה בדיק זמן הריצה של האlgorigithm A .
ולכן A רץ בזמן פולינומילי בגודל הקלט.

ולכן

$$RELPRIME \in P.$$



שיעור 10

המחלקה P והמחלקה NP

10.1 המחלקה P

- המחלקה P היא אוסף כל הבעיה שקיים עboroן אלגוריתם המכרייע אותה בזמן פולינומיAli.
- אלגוריתם מכרייע \equiv מ"ט דטרמיניסטי , בעית הכרעה \equiv שפה ,
- אלגוריתם A מכרייע בעיה בזמן פולינומיAli אם קיים קבוע $c > 0$ כך שזמן הריצה של A על כל קלט w חסום ע"י $O(|w|^c)$.

10.2 דוגמאות לבעיות ב- P

$$PATH = \{ \langle G, s, t \rangle \mid \text{גרף } G \text{ מכיל מסלול מ- } s \text{ ל- } t \} \in P \quad (1)$$

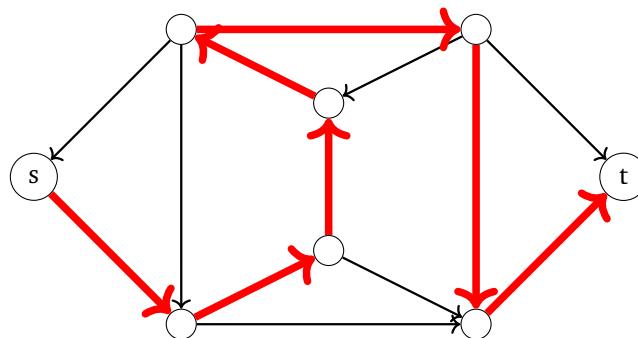
$$RELPRIME = \{ \langle x, y \rangle \mid x \text{ ו- } y \text{ זרים} \} \in P \quad (2)$$

10.3 בעית המסלול המילטוני HAMPATH

הגדרה 10.1 HAMPATH

בහינתן גרף מכון (V, E) ושני קודקודים $s, t \in V$. מסלול המילטוני מ- s ל- t ב- G הוא מסלול מ- s ל- t שעובר דרך כל קודקוד בגרף בדיקוק פעם אחת.

לדוגמה:



הגדרה 10.2 בעית HAMPATH

קלוט: גרף מכון $G = (V, E)$ ושני קודקודים $s, t \in V$.

פלט: האם G מכיל מסלול המילוטוני מ- s ל- t ?

$$HAMPATH = \{\langle G, s, t \rangle \mid \text{האם } G \text{ מכיל מסלול המילוטוני מ- } s \text{ ל- } t \text{ ?}\}$$

נשאל שאלת: האם $HAMPATH \in P$?

לא ידוע האם קיים אלגוריתם המכריע את $HAMPATH$ בזמן פולינומיAli (שאלת פתוחה).

- בהינתן קלט $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH$, האם $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH$?
- נעה על שאלת אחרת:

בהינתן קלט y , ומחרוזת w , האם $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH$?

- ניתן לבדוק האם y היא מסלול המילוטוני מ- s ל- t ב- G בזמן פולינומיAli ולענות בהתאם.
- במקרה זה, אומרים כי $HAMPATH$ ניתנת לאיומות בזמן פולינומיAli.

10.4 אלגוריתם איומות

הגדרה 10.3 אלגוריתם איומות

אלגוריתם איות עבור בעיה A הוא אלגוריתם V כך שלכל קלט $\Sigma^* \in w$ מתקיים:

($w, y \in A$ אם ורק אם קיימת מחרוזת (עדות) y באורך פולינומיAli ב- $|w|$ כך ש- V מקבל את הזוג (w, y))
כלומר:

- אם $w \in A$. $\exists y : V(w, y) = T \iff w \in A$
- אם $w \notin A$. $\forall y : V(w, y) = F \iff w \notin A$

הערה 10.1

- זמן ריצה של אלגוריתום איות נמדד ביחס לגודל הקלט $|w|$.
- אלגוריתם איות פולינומיAli אם הוא רץ בזמן פולינומיAli.

10.5 המחלקה NP

הגדרה 10.4 המחלקה NP

המחלקה NP היא אוסף כל הבעיה שקיים עבורן אלגוריתם איות פולינומיAli.

משפט 10.1 $HAMPATH \in NP$

בעיית המסלול המילוטוני : $HAMPATH$

קלט: גраф מכון $G = (V, E)$ ושני קודקודים $s, t \in V$

פלטו: האם G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t ?

$$HAMPATH = \{ \langle G, s, t \rangle \mid G \text{ גראף מכוכן המכיל מסלול המילטוני מ- } s \text{ ל- } t \}$$

הוכחה כי $HAMPATH \in NP$

הוכחה: בניית אלגוריתם אimotoת V עבור $HAMPATH$.

V על קלט $(\langle G, s, t \rangle, y)$:

1) בודק האם y היא סדרה של

$$u_1, u_2, \dots, u_n$$

השונים זה מזה.

- אם לא \Leftarrow דוחה.

2) בודק האם $u_n = t$ ו- $u_1 = s$.

- אם לא \Leftarrow דוחה.

3) בודק שככל הצלעות (u_i, u_{i+1}) (לכל $n \leq i \leq 1$) קיימות ב- G .

- אם כן \Leftarrow מקבל.

- אם לא \Leftarrow דוחה.

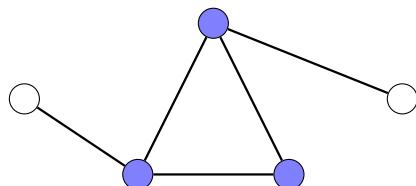
נכונות

- זמן הריצה של האלגוריתם הוא פולינומילי בגודל הקלט.
- אם G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t \Leftarrow עבור y שהוא קידוד של מסלול זה, V קיבל את הזוג $(\langle G, s, t \rangle, y)$.
- אם G לא מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t \Leftarrow לכל y , האלגוריתם ידחה את הזוג $(\langle G, s, t \rangle, y)$.

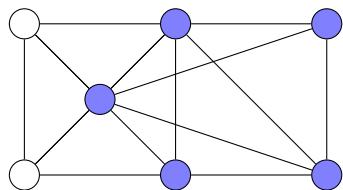


הגדרה 10.5 קליקה

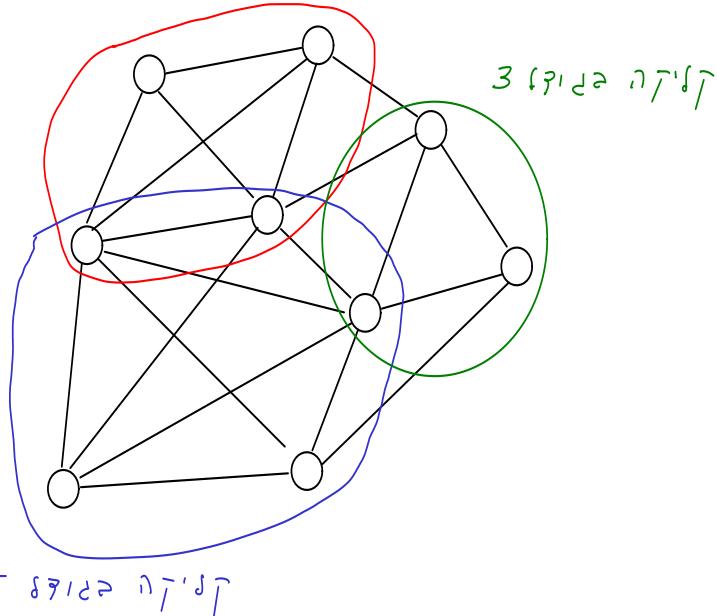
בහינתנו גראף לא מכוכן $G = (V, E)$, קליקה ב- G היא תת-קובוצה של קודקודים $C \subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u, v \in C$ מתקיים $(u, v) \in E$.



קליקה בגודל 3 : $k = 3$

קliquה בגודל 5 : $k = 5$

ליניאר חישובים 4

**הגדרה 10.6 בעיית הקלliquה**קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר k .פלט: האם G קלliquה בגודל k ?

$$\text{CLIQUE} = \{\langle G, k \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל קלliquה בגודל } k\}$$

משפט 10.2 CLIQUE $\in NP$

$$\text{CLIQUE} \in NP.$$

הוכחה: בניית אלגוריתם אימות V עבור $.CLIQUE$ על קלט $(\langle G, k \rangle, y)$:1) בודק האם y היא קבוצה של k קודקודים שונים מ- G .

- אם לא \Leftarrow דוחה.

2) בודק האם כל שני קודקודים מ- y מחוברים בצלע ב- G .

- אם כן \Leftarrow מקבל.

- אם לא \Leftarrow דוחה.

■

הגדרה 10.7 בעיית $SubSetSum$

קלט: קבוצת מספרים $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ומספר t .

פלט: האם קיימת תת-קבוצה של S שסכום איבריה שווה t ?

$$SubSetSum = \left\{ \langle S, t \rangle \mid \sum_{x \in Y} x = t \text{ כך ש- } Y \subseteq S \right\}$$

משפט 10.3 $SubSetSum \in NP$

$SubSetSum \in NP$.

הוכחה: נבנה אלגוריתם אimoto V עבור $.SubSetSum$

: על קלט $(\langle S, t \rangle, y) = V$

1) בודק האם y היא תת-קבוצה של S .

- אם לא \Leftarrow דוחה.

2) בודק האם סכום המספרים ב- y שווה t .

- אם לא \Leftarrow דוחה.

- אחרת \Leftarrow מקבל.

■

10.6 הקשר בין NP למ"ט א"ד

NP=Non-deterministic polynomial-time.

משפט 10.4

לכל בעיה A :

$A \in NP$ אם ורק אם קיימת מ"ט א"ד המכריעה את A בזמן פולינומיAli.

דוגמה 10.1

نبנה מ"ט א"ד M המכריעה את $CLIQUE$ בזמן פולינומיAli.

: על קלט $\langle G, k \rangle = M$

- בוחרת באופן א"ד קבוצה y של k קודקודים מ- G .

- בודקת האם כל שני קודקודים מ- y מחוברים בצלע ב- G .

- * אם כן \Leftarrow מקבלת.
- * אחרת \Leftarrow דוחה.

אלגוריתם אimoto \equiv מ"ט א"ד.

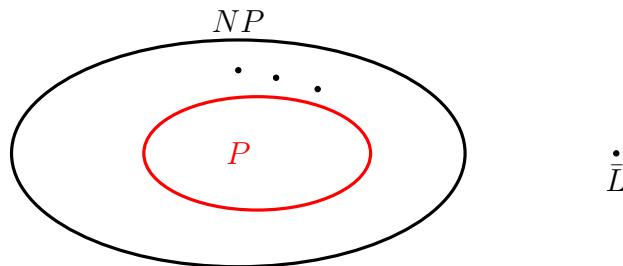
10.7 הקשר בין המחלקה P ו- NP

P = כל הבעיות שניתן להכרייה בזמן פולינומיAli.

NP = כל הבעיות שניתן לאמת בזמן פולינומיAli.

משפט 10.5

$$P \subseteq NP .$$



שאלה פתוחה: האם $P = NP$

משפט 10.6

P סגורה תחת משלים.

הוכחה: אם $\bar{A} \in P$ אז גם $A \in P$.

הגדרה 10.8

$$CoNP = \{A \mid \bar{A} \in NP\} .$$

לדוגמה:

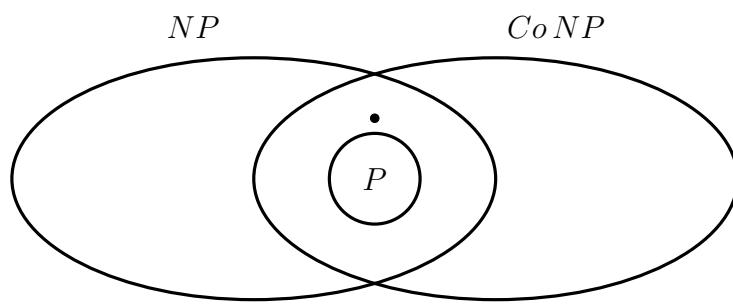
$$\overline{HAMPATH} \in CoNP .$$

$$\overline{CLIQUE} \in CoNP .$$

שאלה פתוחה: האם $NP = CoNP$

משפט 10.7

$$P \subseteq NP \cap CoNP .$$



שאלה פתוחה: האם $P = NP \cap Co\ NP$?

נדון בשאלה המרכזית: האם $P = NP$?

הגדרה 10.9 פונקציה פולינומיאלית

בහינתן פונקציה $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, אומרים כי f חסיבה בזמן פולינומיאלי אם קיים אלגוריתם (מ"ט דטרמיניסטי) המחשב את f בזמן פולינומיאלי.

הגדרה 10.10 רדוקציה פולינומיאלית

בහינתן שתי הבעיות A ו- B . אומרים כי A ניתנת לרדוקציה פולינומיאלית ל- B , ומסמנים $A \leqslant_P B$, אם קיימת פונקציה $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ המקיים:

(1) חסיבה בזמן פולינומיאלי

(2) לכל $w \in \Sigma^*$:

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B .$$

משפט 10.8 משפט הרדוקציה

לכל שתי בעיות A ו- B , אם $A \leqslant_P B$ אז $A \in P$

(1) אם $A \in P$ אז $B \in P$.

(2) אם $A \in NP$ אז $B \in NP$.

מסקנה מ- (1) ו- (2):

(3) אם $A \notin P$ אז $B \notin P$.

(4) אם $B \notin NP$ אז $A \notin NP$.

הוכחה: מכיוון שקיימת רדוקציה $B \leqslant_P A$, קיימת פונקציה f חסיבה בזמן פולינומיאלי המקיים, לכל $w \in \Sigma^*$,

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B .$$

יהי M_f האלגוריתם שמחשבת את f בזמן פולינומיאלי.

(1) נוכחות כי אם $B \in P$ אז $.A \in P$.

יהי M_B האלגוריתם שמכריע את B בזמן פולינומיאלי. נבנה אלגוריתם M_A המכrüע את A בזמן פולינומיאלי.

התאור של M_A

= על כל קלט w : M_A

1. מחשב את $f(w)$ ע"י M_f
2. מרים את M_B על ($f(w)$ ועונה כמוות).

נוכיח כי M_A מכריע את A בזמן פולינומיAli:

- אם M_B מקבל את w $\Leftarrow f(w) \in B \Leftarrow w \in A$
- ואם M_A דוחה את M_B $\Leftarrow f(w) \notin B \Leftarrow w \notin A$

נוכיח כי זמן הריצה של M_A הוא פולינומיAli בגודל הקלט $|w|$ בזמן פולינומיAli:

- נסמן ב- P_f את הפולינום של M_f .
- נסמן ב- P_B את הפולינום של M_B .

זמן הריצה של M_A על קלט w שווה

$$P_f(|w|) + P_B(|f(w)|)$$

מכיוון ש- $(|f(w)| \leq P_f(|w|))$, הזמן הריצה של M_A על w חסום ע"י

$$P_f(|w|) + P_B(P_f(|w|)) = P_f(|w|) + (P_B \circ P_f)(|w|)$$

כאשר $P_B \circ P_f$ מסמן את ההרכבה של שני פולינומים. לכן M_A רץ בזמן פולינומיAli בגודל $|w|$.



שיעור 11

NP שלמות

11.1 המחלקות NPH ו- NP

הגדרה 11.1 NP-hard

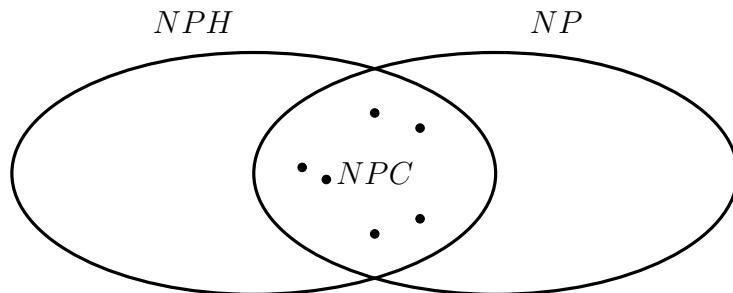
בשפה B נקראת NP קשה אם לכל בעיה $A \in NP$ קיימת רדוקציה . $A \leqslant_P B$

הגדרה 11.2 NP-complete

בשפה B נקראת NP שלמה אם

$$B \in NP \quad (1)$$

(2) לכל בעיה $A \in NP$ קיימת רדוקציה . $A \leqslant_p B$



משפט 11.1

אם B בעיה NP שלמה וגם $P = NP$ אז $A \leqslant_P B$ $\forall A \in NP$

הוכחה:

- הוכחנו כבר שה- . $P \subseteq NP$
- נוכח כי $NP \subseteq P$

לכל בעיה $A \in NP$ קיימת רדוקציה $A \leqslant_P B$ ומכיון שה- $B \in P$, מושפט הרדוקציה מתקיים . $A \leqslant_P B$

מסקנה 11.1

אם $\bar{A} \leqslant_P \bar{B}$ אז $A \leqslant_P B$

משפט 11.2

אם $A \leqslant_p C$ ו- $B \leqslant_p C$ וגם $A \leqslant_p B$ אז

הוכחה:

משפט 11.3

תהי B בעיה NP -שלמה. אז לכל בעיה $C \in NP$, אם $B \leq_p C$ אז גם C היא NP -שלמה.

הוכחה: מכיוון ש- B היא NP -שלמה, לכל בעיה $A \in NP$ קיימת רדוקציה $B \leq_p A$. מכיוון ש- מהטרנסיטיביות מתקיים $A \leq_p C \leq_p B$ לכל בעיה $A \in NP$ ולכן C היא NP -שלמה.

11.2 בעית הספיקות**הגדרה 11.3**

נוסחת ϕ היא נוסחה בוליאנית מעל n משתנים x_1, x_2, \dots, x_n המכילה m פסוקיות כאשר כל פסוקית מכילה אוסף של ליטרלים ($x_i \setminus \bar{x}_i$) המוחברים ע"י OR (\vee) בוליאני והפסוקיות מחוברים ע"י AND (\wedge) בוליאני.

לדוגמה

$$\phi = \left(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4 \vee \bar{x}_7 \right) \wedge \left(x_3 \vee x_5 \vee \bar{x}_8 \right) \wedge \dots$$

הגדרה 11.4 נוסחת CNF ספיקה

נוסחת ϕ היא ספיקה אם קיימת השמה למשתנים x_1, x_2, \dots, x_n ע"י $T \setminus F$ כך ש- ϕ מקבלת ערך T , כלומר בכל פסוקית ישנו לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך T .

11.3 בעית SAT**הגדרה 11.5 בעית SAT**

קלט: נוסחת ϕ , פלט: האם ϕ ספיקה?

$$SAT = \{ \langle \phi \rangle \mid \text{נוסחת CNF ספיקה } \phi \}$$

משפט 11.4

$$SAT \in NP$$

הוכחה: בניית אלגוריתם אimotoת V עבור SAT .

: על קלט $V = \langle \langle \phi \rangle, y \rangle$

(1) בודק האם y היא השמה למשתנים x_1, x_2, \dots, x_n .

- אם לא $\leq 3CNF \Leftrightarrow$ דוחה.

(2) בודק האם השמה זו מספקת את ϕ .

- אם כן \Leftrightarrow מקבל.
- אם לא \Leftrightarrow דוחה.

■

11.4 משפט קוק לוין

משפט 11.5 (1973) משפט קוק לוין

הבעית SAT היא NP - שלמה.

רעיון ההוכחה:

$A \leq_p SAT, A \in NP$ לכל $w \in \Sigma^*$

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in SAT,$$

$$\text{כאן } f(w) = \langle \phi_w \rangle$$

מסקנה 11.2

$$P = NP \Leftrightarrow SAT \in P.$$

11.5 גרסאות של $kSAT$

ישנן לכל היותר k ליטרלים בכל פסוקית:

$$.1SAT \in P \bullet$$

$$\phi = x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge \dots$$

$$.2SAT \in P \bullet$$

$$\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge \dots$$

$$.3SAT \in P \bullet \text{ היא } NP - \text{ שלמה.}$$

3SAT בעית 11.6

הגדרה 11.6 בעית 3SAT

קלט: נוסחת $\phi, 3CNF$

פלט: האם ϕ ספיקת?

$$3SAT = \{\langle \phi \rangle \mid \phi \text{ נוסחת } 3CNF \text{ ספיקת}\}$$

משפט 11.6 $3SAT \in NP$ שלמה. $3SAT \in NP$ שלמה.

הוכחה:

ישקיימים את השני תנאים הבאים:

(1) $3SAT \in NP$

ניתן לבנות אלגוריתם אimoto עבור $SAT \in NP$ דומה לאלגוריתם האimoto עבור SAT שבנו בהוכחה של המשפט קוק-ליין 11.5 לעילו.

(2) $3SAT \in NP$ קשה ע"י רדוקציה

$SAT \leq_p 3SAT$.

ואז בגלל ש- $SAT \in NP$ שלמה (לפי משפט קוק-ליין 11.5) ומכיון ש- $3SAT \in NP$ אז לפי משפט האסימפטוטית 11.2 גם $3SAT \in NP$ - שלמה.

קיים פונקציה הרדוקציה $SAT \leq_p 3SAT$

כעת נבנה את פונקציה הרדוקציה מ- SAT ל- $3SAT$.ראשית נזכיר כי כל נוסחה בוליאנית ϕ ניתנת לרשום בצורה CNF בזמן פולינומיAli.

בහינתנו נוסחת CNF , ϕ (הקלט של SAT) נבנה בזמן פולינומיAli נוסחת ϕ' (הקלט של $3SAT$) ואז נוכחים מתקיים

$\langle\phi'\rangle \in 3SAT \Leftrightarrow \langle\phi\rangle \in SAT$.

לכל פסוקית C ב- ϕ המכילה יותר מ- 3 ליטרלים, ניצור אוסף C' ב- ϕ' של פסוקיות כך שכל פסוקית ב- C' תכיל 3 ליטרלים. למשל בהינתן הפסוקית C הבאה של ϕ :

$$C = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5$$

ניצור את הפסוקית C' הבאה ב- ϕ' :

$$C' = (x_1 \vee x_2 \vee y_1) \wedge (\bar{y}_1 \vee x_3 \vee y_2) \wedge (\bar{y}_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)$$
.

באופן כללי, לכל פסוקית a_k המכיל $k > 3$ ליטרלים, ניצור אוסף C' של פסוקיות שבו כל פסוקית מכילה 3 ליטרלים, ע"י הוספה 3 משתנים y_1, y_2, \dots, y_{k-3} :

$$C' = (a_1 \vee a_2 \vee y_1) \wedge (\bar{y}_1 \vee a_3 \vee y_2) \wedge \dots \wedge (\bar{y}_{i-2} \vee a_i \vee y_{i-1}) \wedge \dots \wedge (\bar{y}_{k-3} \vee a_{k-1} \vee a_k)$$
.

בפרט, עבור כל פסוקית $(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k)$ נניח $a_i = 1$ הוא הלiteral הראשון שווה ל- 1. אז

• נשים $y_j = 1$ לכל $1 \leq j \leq i-2$

• ונסים $y_j = 0$ לכל $i-1 \leq j \leq k-3$

סימנו להגדר את הפונקציה הרדוקציה.

כעת נוכחים כי הפונקציה הזאת מקיימת את התנאי ההכרחי

$$\langle\phi'\rangle \in 3SAT \Leftrightarrow \langle\phi\rangle \in SAT$$
.

כיון \Leftarrow :

נניח כי $\langle\phi\rangle \in SAT$ ותהי X השמה המספקת את ϕ .
nocich שקיימת השמה X' מתאימה המספקת את ϕ' .

- בכל פסוקית C של ϕ , עבור הליטרלים a_1, a_2, \dots, a_k ניתן אותם ערכים כמו ב- X .
- מכיוון ש- X מספקת את ϕ , בכל פסוקית $C = (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k)$ יש לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך 1. נניח $a_i = 1$. אז על פי ההגדרה של פונקציית הרודוקציה:

$$\begin{aligned} * \text{ נשים } 1 = y_j \text{ לכל } 2 \leq j \leq i-1 \\ * \text{ ונשים } 0 = y_j \text{ לכל } i-1 \leq j \leq k-3 \end{aligned}$$

באופן זהה אנחנו נזכיר אוסף C' של פבוקיות עם המבנה הבא:

$$\begin{aligned} & \left(a_1 \vee a_2 \vee y_1 \right) \wedge \left(\bar{y}_1 \vee a_2 \vee y_2 \right) \wedge \dots \wedge \left(\bar{y}_{i-3} \vee a_{i-1} \vee y_{i-2} \right) \wedge \left(\bar{y}_{i-2} \vee a_i \vee y_{i-1} \right) \wedge \left(\bar{y}_{i-1} \vee a_{i+1} \vee y_i \right) \\ & \wedge \dots \wedge \left(\bar{y}_{k-3} \vee a_{k-1} \vee a_k \right) \end{aligned}$$

ולכן השמה זו מספקת את C' ולכן $\langle \phi' \rangle \in 3SAT$

כיוון: \Rightarrow

נניח כי $\langle \phi' \rangle \in 3SAT$ ותהי X' השמה המספקת את ϕ' .
נוכיח שקיימות השמה X המספקת את ϕ .

נסתכל על פסוקית $C = (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k)$ נניח בשלילה שלא קיימת השמה X המספקת את C . אז בהכרח

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$$

לפי זה, באוסף פסוקיות C' שנתקבל על פי ההגדרה של פונקציית הרודוקציה, $y_j = 1$ לכל $1 \leq j \leq k-3$ $y_j = 0$ לכל $y_1 = y_2 = \dots = y_{k-3} = 0$. כלומר מתקיים

$$C' = \left(a_1 \vee a_2 \vee y_1 \right) \wedge \left(\bar{y}_1 \vee a_3 \vee y_2 \right) \wedge \dots \wedge \left(\bar{y}_{i-2} \vee a_i \vee y_{i-1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\bar{y}_{k-3} \vee a_{k-1} \vee a_k \right)$$

הפסוקית האחרונה $\left(\bar{y}_{k-3} \vee a_{k-1} \vee a_k \right)$ אינה מסופקת.
לכן C' אינה מסופקת, בסתיו לכך X' מספקת את ϕ' .

ולכן $\langle \phi \rangle \in SAT$

$SAT \leq 3SAT$

כעת נוכיח כי הרודוקציה זו היא זמן פולינומיAli.

סיבוכיות

הчисוב של הפונקציה מתבצע בזמן פולינומיAli. ספציפי, אם האורך של הנוסחה ϕ הוא $| \phi | = n$ אז הרודוקציה היא $O(n)$.



11.7 הוכחת משפט קוק לוין*

משפט 11.7 משפט קוק לוין

הבעית SAT היא NP - שלמה.

הוכחה:

חישפה מלאה: ההוכחה הבאה מتبוססת על ההוכחה שנותונה בספר של Sipser.

על פי הגדירה 11.2 יש להוכיח שני התנאים הבאים מתקיימים:

תנאי 1: $SAT \in NP$

תנאי 2: $A \in NP \leq_p SAT$

ראשית נוכיח כי $SAT \in NP$:

כדי להוכיח כי SAT שייכת ל- NP , נוכיח כי אישור המרכיב מהשמה מספקת עבור נוסחת קלט ϕ ניתן לאיומות בזמן פולינומייאלי.

נניח כי $n = |\phi|$. כאמור ב- ϕ מופיעים n ליטרלים. "א" השמה כלשהי דורשת n משתני בוליאניים לכל היוטר.

- אלגוריתם האimotoות מחליף כל משתנה בנוסחה בערך המתאים לו על פי ההשמה. השלב זהה הוא $(n)O$.

- אחר כך האלגוריתם מחשב את ערכו של הביטוי:

* נניח כי הנוסחה ϕ מכילה k דורות של סוגרים בתוך סוגרים.

* החישוב מתחילה עם החישובים של הביטויים בתוך הסוגרים הכל בפנים.

* יש n סוגרים הći-בפנים לכל היוטר, וכל אחד של סוגרים אלה מכיל n ליטרלים לכל היוטר. לכן החישוב זהה הוא $(n^2)O$.

* יש k דורות של סוגרים לכן החישוב כולל הוא $(kn^2)O$.

- בסה"כ הסיבוכיות זמן הריצה היא

$$O(n) + O(kn^2) = O(n^2)$$

לפיכך אישור של השמה כלשהי מatabase בזמן פולינומייאלי.

- אם ערכו של הביטוי הוא 1 הנוסחה ספיקה.

הוכחנו כי $SAT \in NP$. עכשו נוכיח כי $SAT \leq_p A$.

תהי N מ"ט אי-דטרמיניסטי זמני-פולינומייאלית שמכריעה שפה A כלשהי בזמן $O(n^k)$ עבור k טבעי. התרשים למטה מראה טבלה של קונפיגורציות של N . ברשימה הבאה רשומות ההגדרות של הטבלה:

- כל שורה מראה את תוכן הסרט בשלב מסוים של מסלול אחד של N .

- בשורה הראשונה יש את הקונפיגורציה ההתחלתית.

- אנחנו מניחים כי האורך של המילה, כאמור אורץ הקלט הוא n .

הסימנים w_n, \dots, w_1 מסמנים את התווים של הקלט.

- בתא הראשון בכל שורה יש #, ולאחר מכן רשומה הקונפיגורציה של N . בסוף הקונפיגורציה בכל שורה יש #.
 - אחרי #- בקצתה הימין של המילה, בכל תא ישתו רוח עד הסוף של השורה. התוויו רוח לפני המשבצת הראשונה של הקונפיגורציה לא מופיעים בטבלה.
 - האורך של כל שורה הוא בדיק n^k תאים.
 - בטבלה יש בדיק n^k שורות לסיבת הבאה:
 - המכונת טיריניג מבצעת n^k צעדים לכל היותר.
 - בכל צעד המ"ט עוברת לקומונפיגורציה חדשה.
 - בכל שורה רשומה קונפיגורציה.
 - בסה"כ יש n^k שורות עבור ה- n^k קונפיגוריות שונות האפשריות.

אנחנו אומרים כי טבלה שליה היא טבלה המקבלת אם באחת השורות יש קונפיגורציה אשר N מקבלת אותה.

בעזרת הטבלה נתאר את הרדוקציה זמו-פולינומיאלית f משפה A כלשוי L - SAT .

הפונקציה הרדוקציה f מקבלת קלט w ומחזירה נוסחה $f(w) = \phi$, אשר לפי ההגדרה של פונקציה הרדוקציה, עומדת בתנאי הרא:

$$w \in A \quad \Leftrightarrow \quad f(w) \in SAT .$$

יהיו Q קבוצת המצבים ו- Γ האלפיבית של השרת של N . נגדיר

$$C = Q \cup \Gamma \cup \{\#\}.$$

נסמן ב- s איבר כלשהו של C .
 עבור כל תא ה- (i, j) של הטבלת הקונפיגורציות נגדיר משתנה בוליאני $x_{i,j,s}$ לכל $1 \leq i, j \leq n^k$ ולכל המשותנה x_{ijs} מוגדר על פי התנאי

$$x_{jjs} = 1$$

אם בתא ה- z_j של הטבלה יש $s \in C$. למשל, אם בתא ה- $(2, 5)$ של הטבלה מופיע התו a אז

$$x_{2,5,a} = 1$$

בעוד

$$x_{2,5,b} = 0 .$$

במובן זהה, התכנים של כל התאים של הטבלה מסומנים על ידי המשתנים של ϕ .

עכשו נבנה נוסחה ϕ על סמך התנאי שהשמה מספקת של ϕ תהיה מתאימה לטבלה המתקבלת של N . נגיד:

$$\phi = \phi_{\text{cell}} \wedge \phi_{\text{start}} \wedge \phi_{\text{move}} \wedge \phi_{\text{acc}} . \quad (11.1)$$

אנחנו נסביר את כל הנוסחאות $\phi_{\text{acc}}, \phi_{\text{start}}, \phi_{\text{cell}}, \phi_{\text{move}}$ כאחד אחד למטרה.

• נוסחה ϕ_{cell}

כפי שמצוין לעיל, אם המשתנה $x_{i,j,s}$ "דולק", כלומר אם $x_{i,j,s} = 1$, זאת אומרת שיש סימן s בתא ה- i,j של הטבלה. אנחנו רוצים להבטיח שהשמה כלשהי בנוסחה אשר מתאימה לקונפיגורציה של הטבלה, מדliquה בדיק משותה אחד לכל תא של הטבלה. למטרה זו נגיד ϕ_{cell} כך:

$$\phi_{\text{cell}} = \bigwedge_{1 \leq i, j \leq n^k} \left[\left(\bigvee_{s \in C} x_{i,j,s} \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{s,t \in C \\ s \neq t}} (\bar{x}_{i,j,s} \vee \bar{x}_{i,j,t}) \right) \right] \quad (11.2)$$

* האיבר הראשון בסוגרים מרובעים, מבטיח שלכל תא של הטבלה, לפחות משתנה אחד דולק.

* האיבר השני מבטיח שעבור כל תא של הטבלה, משתנה אחד לכל היוטר דולק.

לפיכך כל השמה מספקת עומדת בתנאי שיהיה בדיק סימן אחד, s , בכל תא של הטבלה.

• נוסחה ϕ_{start}

נוסחה ϕ_{start} מבטיחה ששורה הראשונה של הטבלה היא הקונפיגורציה ההתחלתית של N על הקלט w :

$$\begin{aligned} \phi_{\text{start}} = & x_{1,1,\#} \wedge x_{1,2,q_0} \wedge x_{1,3,w_1} \wedge x_{1,4,w_2} \\ & \wedge \dots \wedge \\ & x_{1,n+2,w_n} \wedge x_{1,n+3,_} \wedge \dots \wedge x_{1,n^k-1,_} \wedge x_{1,n^k,\#} \end{aligned} \quad (11.3)$$

• נוסחה ϕ_{acc}

הנוסחה ϕ_{acc} מבטיחה שקיים טבלה קונפיגורציה אשר המ"ט N מקבל אותה. בפרט ϕ_{acc} מבטיחה שהסימן q_{acc} מופיע בתא אחד של הטבלה דרך התנאי שלפחות אחד המשתנים $x_{i,j,q_{\text{acc}}}$ דולק:

$$\phi_{\text{acc}} = \bigvee_{1 \leq i, j \leq n^k} x_{i,j,q_{\text{acc}}} \quad (11.4)$$

• הנוסחה ϕ_{move}

הנוסחה ϕ_{move} מבטיחה שכל שורה של הטבלה היא "שורה חוקית".
כלומר בכל שורה, הקונפיגורציה היא כך שאפשר הגיע אליה על ידי תזוזה חוקית של N מהקונפיגורציה הקודמת שMOVEDה בשורה אחרת מעלה.

תזוזה חוקית בין כל שתי קונפיגורציות נקבעת על ידי הפונקציה המעברים של המ"ט N .
בשפה פורמלית, אם c_i הקונפיגורציה של שורה i , ו- c_{i+1} הקונפיגורציה של השורה $i + 1$ אחת למטה, אז
 ϕ_{move} מבטיחה כי לכל $1 \leq i \leq n^k - 1$ מתקיים

$$c_i \vdash_N c_{i+1} .$$

במנוחי הטבלה, אפשר להגיד תזוזה חוקית בין כל שתי שורות על ידי תת-טבלה מסדר 3×2 שמכילה 3
תאים מתאימים של שתי שורות שכנות.
 مكان ואילך אנחנו נקרא לתת-טבלה כזאת "חלון".

למטה יש דוגמאות של חלונות חוקיים:

<table border="1"><tr><td>a</td><td>q_1</td><td>b</td></tr><tr><td>q_2</td><td>a</td><td>c</td></tr></table>	a	q_1	b	q_2	a	c	<table border="1"><tr><td>a</td><td>q_1</td><td>b</td></tr><tr><td>a</td><td>a</td><td>q_2</td></tr></table>	a	q_1	b	a	a	q_2	<table border="1"><tr><td>a</td><td>a</td><td>q_1</td></tr><tr><td>a</td><td>a</td><td>b</td></tr></table>	a	a	q_1	a	a	b
a	q_1	b																		
q_2	a	c																		
a	q_1	b																		
a	a	q_2																		
a	a	q_1																		
a	a	b																		
<table border="1"><tr><td>#</td><td>b</td><td>a</td></tr><tr><td>#</td><td>b</td><td>a</td></tr></table>	#	b	a	#	b	a	<table border="1"><tr><td>a</td><td>b</td><td>a</td></tr><tr><td>a</td><td>b</td><td>q_2</td></tr></table>	a	b	a	a	b	q_2	<table border="1"><tr><td>b</td><td>b</td><td>b</td></tr><tr><td>c</td><td>b</td><td>b</td></tr></table>	b	b	b	c	b	b
#	b	a																		
#	b	a																		
a	b	a																		
a	b	q_2																		
b	b	b																		
c	b	b																		

החלונות האלה למטה הם דוגמאות לחלונות לא חוקיים:

<table border="1"><tr><td>a</td><td>b</td><td>a</td></tr><tr><td>a</td><td>a</td><td>a</td></tr></table>	a	b	a	a	a	a	<table border="1"><tr><td>a</td><td>q_1</td><td>b</td></tr><tr><td>q_1</td><td>a</td><td>a</td></tr></table>	a	q_1	b	q_1	a	a	<table border="1"><tr><td>b</td><td>q_1</td><td>b</td></tr><tr><td>q_2</td><td>b</td><td>q_2</td></tr></table>	b	q_1	b	q_2	b	q_2
a	b	a																		
a	a	a																		
a	q_1	b																		
q_1	a	a																		
b	q_1	b																		
q_2	b	q_2																		

הנוסחה ϕ_{move} קובעת שכל חלון של הטבלה חוקי. בפרט, כל חלון מכיל 6 תאים. לכן ϕ_{move} קובעת שהתכנים של ה-6 תאים של כל חלון מהוות חלון חוקי. ז"א

$$\phi_{\text{move}} = \bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq n^k \\ 1 \leq j \leq n^k}} (\text{חלון } i, j \text{ חוקי}) \quad (11.5)$$

אנטו מציירים בטקסט "חלון ה- i, j חוקי" את הנוסחה הבאה, כאשר a_6, \dots, a_1 מסמנים את התכנים של ה-6 תאים של כל חלון:

$$\bigvee_{\substack{\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} \\ \text{חלון חוקי}}} (x_{i,j-1,a_1} \wedge x_{i,j,a_2} \wedge x_{i,j+1,a_3} \wedge x_{i+1,j-1,a_4} \wedge x_{i+1,j,a_5} \wedge x_{i+1,j+1,a_6}) \quad (11.6)$$

עד כה הוכחנו שקיים רדוקציה מכל שפה $.SAT \rightarrow A \in NP$ כעת נוכיח כי הרדוקציה זו חישובית בזמן-פולינומייאלי.

הטבלה של N היא מסדר $n^k \times n$ ולכן היא מכילה n^{2k} תאים.

נחשב את הסיבוכיות של כל הנוסחים $\phi_{\text{move}}, \phi_{\text{acc}}, \phi_{\text{start}}, \phi_{\text{cell}}$.

• הנוסחה ϕ_{cell}

הנוסחה (11.2) של ϕ מכילה n^{2k} נוסחאות עם 3 ליטרלים. לכן

$$\phi_{\text{cell}} = O(n^{2k}) .$$

• הנוסחה ϕ_{start}

הנוסחה (11.3) של ϕ מכילה בדיק n^k ליטרלים. לכן

$$\phi_{\text{start}} = O(n^k) .$$

• הנוסחה ϕ_{acc}

הנוסחה (11.4) של ϕ מכילה בדיק n^k ליטרלים. לכן

$$\phi_{\text{acc}} = O(n^k) .$$

• הנוסחה ϕ_{move}

הנוסחה (11.6,11.5) של ϕ מכילה n^{2k} נוסחאות עם 6 ליטרלים. לכן

$$\phi_{\text{move}} = O(n^{2k}) .$$

לכן בסה"כ

$$\phi = O(n^{2k}) + O(n^k) + O(n^k) + O(n^{2k}) = O(n^{2k}) .$$

לפיכך קיימת רדוקציה חישובית בזמן פולינומייאלי מכל שפה L - SAT $\in NP$



שיעור 12

רذוקציות פולינומיאליות

CLIQUE 12.1 - NP היא - שלמה

משפט 12.1 $CLIQUE \in NPC$

הבעית CLIQUE היא (ראו הגדרה 10.5):

$$CLIQUE = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ מכיל קליקה בגודל } k \}.$$

היא NP - שלמה CLIQUE

הוכחה:

1) הוכחנו כי $CLIQUE \in NP$ במשפט 10.2.

2) נוכח כי $NP \leq_P CLIQUE$ קשה ע"י רذוקציה.

פונקציית הרذוקציה

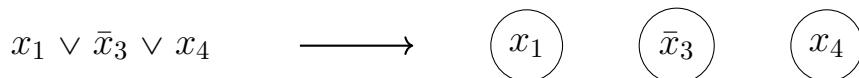
בhinintן נוסחת ϕ 3CNF מעל n משתנים x_1, x_2, \dots, x_n המכילה m פסוקיות, ניצור זוג $\langle G, k \rangle$ ונוכח כי

$$\langle \phi \rangle \in 3SAT \Leftrightarrow \langle G, k \rangle \in CLIQUE.$$

בנייה את הגרף G באופן הבא:

הקודקודים של G :

לכל פסוקית C_i ב- ϕ המכילה 3 ליטרלים ניצור שלשה 3 קודקודים המתאימים להחטறלים של C_i :



הצלעות של G :

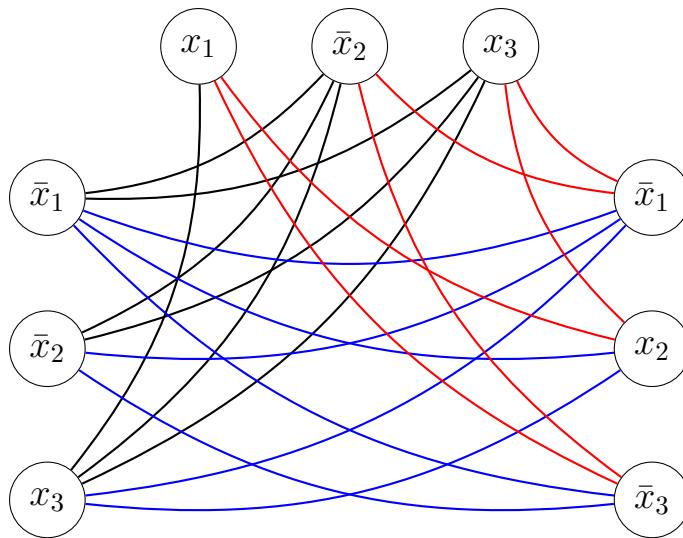
נבחר בין כל שני קודקודים פרט לזוגות הבאים:

- זוג קודקודים המתאימים למשתנה ומשלים שלו.
- זוג קודקודים שנמצאים באותו שלושה.

לדוגמא:

$$\phi = \left(\begin{array}{c} \textcolor{red}{T} \\ x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \end{array} \right) \wedge \left(\begin{array}{c} \textcolor{red}{T} \\ \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \end{array} \right) \wedge \left(\begin{array}{c} \textcolor{red}{T} \\ \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \end{array} \right)$$

$C_1 \qquad \qquad C_2 \qquad \qquad C_3$



נקבע $k = m$.

נכונות הרדוקציה

1) ניתן לבנות את G בזמן פולינומיائي בגודל ϕ .

2) נוכיח כי

$$\langle \phi \rangle \in 3SAT \Leftrightarrow \langle G, k \rangle \in CLIQUE .$$

כיוון \Leftarrow

- נניח כי ϕ ספיקה ונסתכל על השמה המספקת את ϕ .
- בכל פסוקית C_i ב- ϕ יש לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך T .
- נבחר מכל שלשה t_i בקודקוד אחד המתאים לליטרל שקיבל ערך T ב- C_i ונוסיף אותו לקליקה.
- מספר הקודקודים שבחרנו שווה k וכל שניים מהם מחוברים בצלע כי לא בחרנו שני קודקודים מאותה שלשה ולא בחרנו שני קודקודים המתאימים לשינוי ומשלים שלו.
- ולכן G מכיל קליקה בגודל k .

כיוון \Rightarrow

- נניח כי G מכיל קליקה בגודל k ונסתכל על קליקה כזו.
- לפי הבנייה הקליקה מכילה בדיזוק קודקוד אחד מכל שלשה t_i . ניתן השמה למשתנים של ϕ כך שהליטרל שמתאים לקודקוד שנמצא בклיקה יקבל ערך T .
- השמה זו אפשרית מכיוון שהקליקה לא מכילה שני קודקודים המתאימים לשינוי ומשלים שלו.

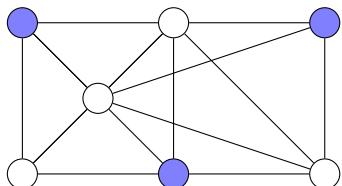
- בנוסף לשם זו מספקת את ϕ מכיוון שהקליקה מכילה קודקוד מכל שלשה t_i ולכן הliterל המתאים לקודקוד בשלה t_i קיבל ערך T ולכן הוא מספק את הפסוקית C_i .
- לכן ϕ ספיקה.

■

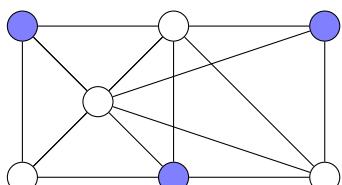
12.2 בעיית הקבוצה הבלתי תלויות

הגדרה 12.1 קבוצה בלתי תלויות

בاهינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, קבוצה בלתי תלויות ב- G היא תת-קבוצה של קודקודיים $S \subseteq V$ כך שלכל שני קודקודיים S $u, v \in S$ מתקיים $(u, v) \notin E$.



קבוצת בלתי תלויות בגודל 3: $k = 3$



קבוצת בלתי תלויות בגודל 3: $k = 3$

הגדרה 12.2 בעיית IS

קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר k .

פלט: האם קיימת קבוצה בלתי תלויות ב- G בגודל k ?

$$IS = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון המכיל קבוצה בלתי תלויות בגודל } k \}$$

משפט 12.2 $IS \in NPC$

הבעיה IS היא NP - שלמה.

הוכחה:

$$(1) \underline{IS \in NP}$$

בנייה אלגוריתם אimoto V עבור IS . $V = \langle G, k \rangle$ על קלט:

- בודק האם y היא קבוצה של k קודקודיים מ- G השוניים זה מזה.
 - אם לא \Rightarrow דוחה.
- בודק האם כל שני קודקודיים מ- y לא מחוברים בצלע ב- G .
 - אם כן \Rightarrow מקבל.

- אם לא \Rightarrow דוחה.

(2) נוכחות CIQUE \leq_P IS

פונקציית הרדוקציה:

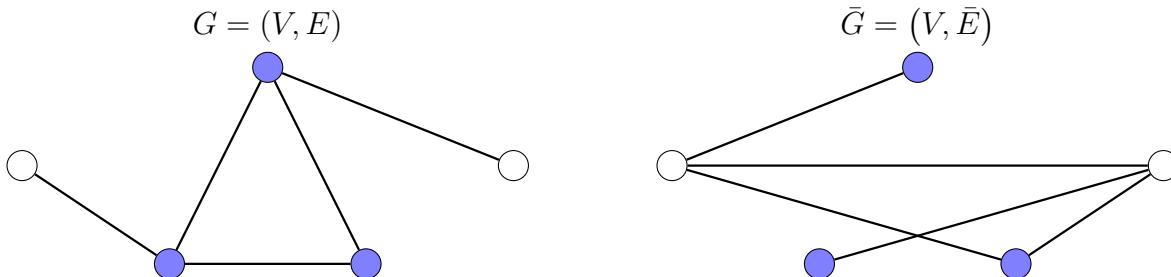
בhinתן זוג $\langle G, k \rangle$ הקלט של CLIQUE, ניצור זוג $\langle G', k' \rangle$, הקלט של IS, ונוכח כי:

$$\langle G, k \rangle \in CLIQUE \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in IS.$$

הfonקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקייםים:

- 1) נניח שהגרף הוא $G = (V, E)$. אז הגרף G' הוא הגרף המשלים של $G = (V, E)$ כאשר $G' = \bar{G} = (V, \bar{E})$ ו $\bar{E} = \{(u_1, u_2) \mid (u_1, u_2) \notin E\}$.
- 2) $k' = k$

לדוגמא, בהינתן הגרף $G = (V, E)$ שמכיל קliquה בגודל $3, k = 3$, הפונקציית הרדוקציה R מוחירה את הגרף $\bar{G} = (V, \bar{E})$ ואת המספר $3, k' = k = 3$, כמתואר בתרשימים למטה:



nocחות הרדוקציה

- 1) ניתן לבנות G' בזמן פולינומיائي בגודל G .
- 2) נוכחה כי $\langle G, k \rangle \in CLIQUE \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in IS$.

כיוון

- בhinתן גרף $G = (V, E)$ ושלם נניח כי $\langle G, k \rangle \in CLIQUE$.
- אם G מכיל קliquה S בגודל k , $\langle u_1, u_2 \rangle \in E$ (אם $u_1, u_2 \in S$ שני קודקודים בקliquה S אי-מחוברים בצלע של G).
- כלומר, כל שני קודקודים ב- S מחוברים בצלע של G .
- אם $u_1, u_2 \in S$ אי- $\langle u_1, u_2 \rangle \notin \bar{E}$.
- כלומר, כל שני קודקודים ב- S לא מחוברים בצלע של המשלים של הגרף \bar{G} , דהיינו $\langle G', k' \rangle \in IS$.

\Leftarrow אותה הקבוצה S היא קבוצה בלתי תלوية ב- G' בגודל $k' = k$.

\Leftarrow G' מכיל קבוצה בלתי תלوية בגודל k' .

$\langle G', k' \rangle \in IS \Leftarrow$

כיוון \Rightarrow

בhinתן גרף G' ושלם k' .

$\langle G', k' \rangle \in IS$.

$\Leftarrow G'$ מכיל קבוצה בלתי תלوية S בגודל k' .

\Leftarrow אם $u_1, u_2 \in S$ איזי $(u_1, u_2) \notin \bar{E}$.

כלומר, כל שני קדוקודים ב- S לא מחוברים בצלע של G' .

\Leftarrow אם $u_1, u_2 \in S$ איזי $(u_1, u_2) \in E$.

כלומר, כל שני קדוקודים ב- S מחוברים בצלע של $G(V, E)$.

\Leftarrow אותה הקבוצה S היא קליקה ב- G בגודל $k' = k$.

$\Leftarrow G$ מכיל קליקה בגודל k .

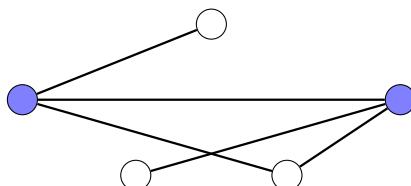
$\Leftarrow \langle G, k \rangle \in CLIQUE$.

■

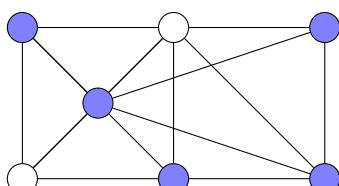
12.3 בעיית הcisוי בקדוקודים

הגדרה 12.3 cisוי בקדוקודים

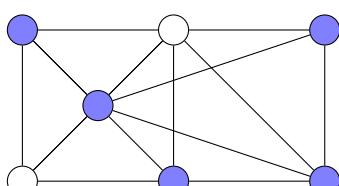
בhinתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, cisוי בקדוקודים ב- G הוא תת-קבוצה של קודוקודים $C \subseteq V$ כך שלכל צלע $S \in C$, $u \in C$ וותקיים $v \in S$ $u \neq v$.



cisוי בקדוקודים בגודל 2: $k = 2$



cisוי בקדוקודים בגודל 5: $k = 5$



cisוי בקדוקודים בגודל 5: $k = 5$

12.4 הבעיה VC

הגדרה 12.4 בעיית VC

קלט: גראף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר k .

פלט: האם קיימים כיסוי בקודקודים ב- G בגודל k ?

$$VC = \{\langle G, k \rangle \mid \text{גראף לא מכוון המכיל כיסוי בקודקודים בגודל } k\}$$

משפט 12.3 $VC \in NPC$

הבעיה VC היא NP - שלמה.

הוכחה:

$$\underline{VC \in NP}$$

בנייה אלגוריתם אימות VC עבור V .
על קלט $(\langle G, k \rangle, y) = V$:

- בודק האם כל צלע ב- G מכילה לפחות קצה אחד ב- y .

○ אם כן \Rightarrow מקבל.

○ אם לא \Rightarrow דוחה.

$$\underline{\text{נוכיח כי } VC \text{ היא } NP\text{-קשה ע"י רדוקציה}}$$

פונקציית הרדוקציה:

בהתנחת זוג $\langle G, k \rangle$ הקלט של IS , נוצר זוג $\langle G', k' \rangle$ הקלט של VC ונוכיח כי

$$\langle G, k \rangle \in IS \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in VC.$$

הפונקציית הרדוקציה מוגדרת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \text{נניח שהגרף הוא } .G = (V, E) \\ & \text{או הגרף } G' \text{ הוא אותו גראף } .G = (V, E) \end{aligned}$$

$$.k' = |V| - k \quad (2)$$

נכונות הרדוקציה

1) ניתן לבנות G' בזמן פולינומיאלי בגודל G .

$$2) \text{ נוכיח כי } .\langle G, k \rangle \in IS \Leftrightarrow \langle G', k' \rangle \in VC.$$

כיוון \Leftarrow

בהתנחת גראף $G = (V, E)$ ושלם k .

$$\text{nich ci } .\langle G, k \rangle \in IS$$

$\Leftarrow G$ מכיל קבוצה בלתי תלויות S בגודל k .
 \Leftarrow אם $u_1 \in S$ וגם $u_2 \in S$ אז $(u_1, u_2) \notin E$.
 כלומר, כל שני קדוקודים ב- S לא מחוברים בצלע ב- G .

\Leftarrow השלילה הלוגית של הגרירה הזאת היא:
 אם $u_2 \notin S$ אז $u_1 \notin S$ או $(u_1, u_2) \in E$.
 \Leftarrow אם $u_2 \in V \setminus S$ אז $u_1 \in V \setminus S$ או $(u_1, u_2) \in E$.
 \Leftarrow $k' = |V| - k$ היא כיסוי קדוקודים ב- G בגודל k' .
 \Leftarrow הגרף $G' = G$ מכיל כיסוי קדוקודים בגודל k' .
 $\Leftarrow \langle G', k' \rangle \in VC$ \Leftarrow

כיוון \Rightarrow

בהינתן גרף G' ושלם k' .
 $\langle G', k' \rangle \in VC$.

$\Leftarrow G''$ מכיל כיסוי בקדוקודים C בגודל k'' .
 \Leftarrow אם $u_2 \in C$ אז $u_1 \in C$ או $(u_1, u_2) \in E$.
 \Leftarrow השלילה הלוגית של הגרירה הזאת היא:
 אם $(u_1, u_2) \notin E$ אז $u_2 \notin C$ ו $u_1 \notin C$.
 \Leftarrow אם $(u_1, u_2) \notin E$ וגם $u_2 \in V \setminus C$ אז $u_1 \in V \setminus C$.
 \Leftarrow כל שני קדוקודים ב- $V \setminus C$ לא מחוברים בצלע ב- G'' .
 \Leftarrow $k = |V| - k'$ היא קבוצת בלתי תלויות ב- G'' בגודל k .
 \Leftarrow הגרף $G = G'$ מכיל קבוצה בלתי תלויות בגודל k .



PARTITION 12.5

הגדרה 12.5 בעית PARTITION

קלט: קבוצת מספרים שלמים $.S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
פלט: האם קיימת תת-קבוצה $Y \subseteq S$ כך ש-

$$\sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in S \setminus Y} y$$

$$PARTITION = \left\{ S \mid \sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in S \setminus Y} y \text{ קבוצת שלמים, וקיימת תת-קבוצה } Y \subseteq S \text{ כך ש-} \right\}$$

12.6 רדוקציות פולינומיאליות

משפט 12.4 רדוקציות פולינומיאליות

$$\begin{aligned}
 SAT &\leqslant_P 3SAT \\
 3SAT &\leqslant_P CLIQUE \\
 CLIQUE &\leqslant_P IS \\
 IS &\leqslant_P VC \\
 SubSetSum &\leqslant_P PARTITION \\
 HAMPATH &\leqslant_P HAMCYCLE
 \end{aligned}$$

משפט 12.7 שפות NP שלמות**משפט 12.5 שפות NP- שלמות**

(משפט קוק לוין) SAT - שלמה. $3SAT$ - שלמה. $HAMPATH$ - שלמה. $CLIQUE$ - שלמה. IS - שלמה. VC - שלמה.

שיעור 13

סיבוכיות מקומ ושלמות ב PSPACE

- 13.1 משפט סביץ'
- 13.2 המחלקה PSPACE
- 13.3 שלמות ב- PSPACE
- 13.4 המחלקה L
- 13.5 המחלקה NL
- 13.6 שלמות ב- NL
- 13.7 שיוויון NL ו- coNL