

שיעור 5

תכונות סגירות של R ו- RE

5.1 הגדרה של השפות R ו- RE

הגדרה 5.1 R

אוסף השפות הכריעות מסומן R ומוגדר

$$R = \{L \subseteq \Sigma^* : L \text{ מכריעה את } L\}.$$

הגדרה 5.2 RE

אוסף השפות הקבילות מסומן RE ומוגדר

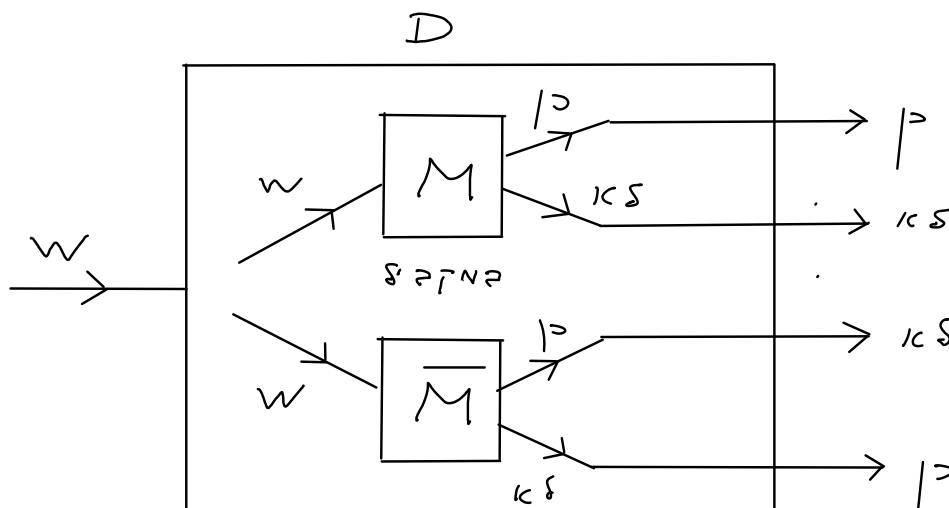
$$RE = \{L \subseteq \Sigma^* : L \text{ מקבלת את } L\}.$$

למה 5.1

אם $L \in RE$ וגם $\bar{L} \in RE$ אזי $L \in R$.

הוכחה: תהי M מ"ט המקבלת את L ותהי \bar{M} מ"ט המקבלת את \bar{L} .

נבנה מ"ט D המכריעה את L .



$D = \text{על קלט } w$

(1) D מעתיקה את w לסרט נוסף.

(2) מריצה במקביל את M על w ואת \bar{M} על העותק של w .

• אם M מקבלת $D \Leftarrow$ מקבלת.

• אם \bar{M} מקבלת $D \Leftarrow$ דוחה.

• אם M דוחה $D \Leftarrow$ דוחה.

• אם \bar{M} דוחה $D \Leftarrow$ מקבלת.

נוכיח כי D מכריעה את L .

אם $w \in L$

$w \in L(M) \Leftarrow$

$\Leftarrow (M \text{ מקבלת את } w) \text{ או } (\bar{M} \text{ דוחה את } w)$

$\Leftarrow D \text{ עוצרת ומקבלת את } w$.

אם $w \notin L$

$w \in \bar{L} \Leftarrow$

$\Leftarrow w \in L(\bar{M})$

$\Leftarrow (\bar{M} \text{ מקבלת את } w) \text{ או } (M \text{ דוחה את } w)$

$\Leftarrow D \text{ עוצרת ודוחה את } w$.



משפט 5.1 סגירות של השפות הכריעות

R סגורה תחת:

(1) איחוד

(2) חיתוך

(3) משלים

(4) שרשור

(5) סגור קליין

משפט 5.2 סגירות של השפות הקבילות

RE סגורה תחת:

(1) איחוד

(2) חיתוך

(3) שרשור

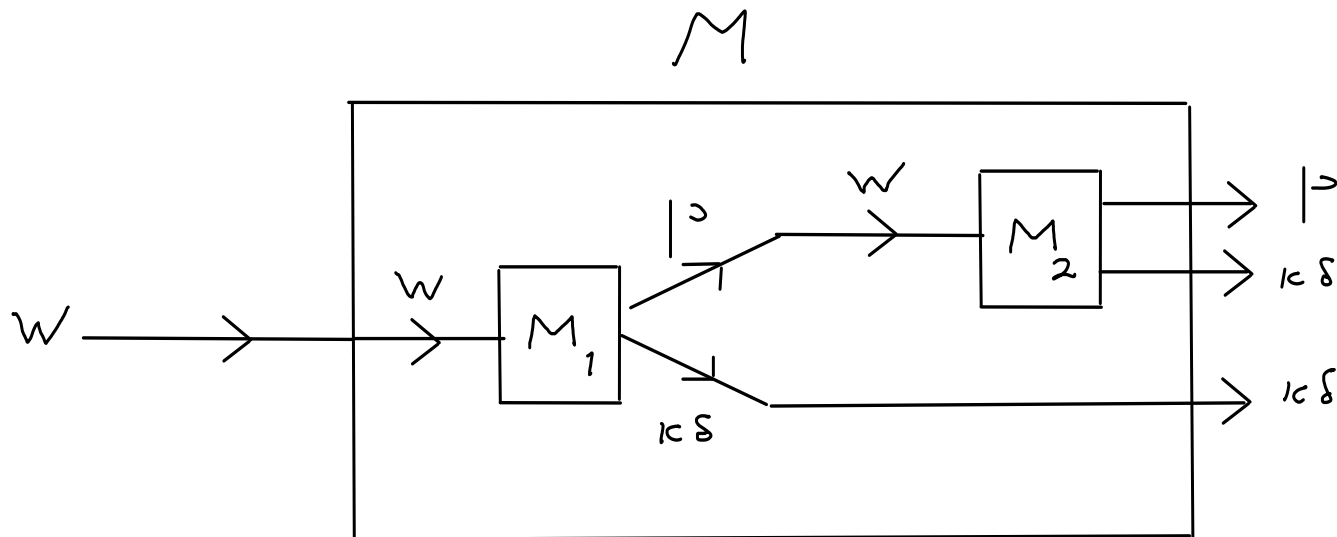
(4) סגור קליין

(1) חיתוך:

(א) סגורה תחת חיתוך

נוכיח כי לכל שתי שפות $L_1, L_2 \in R$ מתקיים $L_1 \cap L_2 \in R$.

תהי M_1 ו- M_2 מ"ט המכריעות את L_1 ו- L_2 בהתאמה. נבנה מ"ט M המכריעה את $L_1 \cap L_2$.

תאור הבנייה

$M =$ על קלט w :

(1) מעתיקה את w לסרט נוסף.

(2) מריצה את M_1 על w .

• אם M_1 דוחה $M \Leftarrow$ דוחה.

• אחרת M מריצה את M_2 על העותק של w ועונה כמוה.

נכונות:

נוכיח כי M מכריעה את $L_1 \cap L_2$.

אם $w \in L_1 \cap L_2$

$w \in L_1$ וגם $w \in L_2 \Leftarrow$

M_1 מקבלת את w וגם M_2 מקבלת את $w \Leftarrow$

M מקבלת את $w \Leftarrow$

אם $w \notin L_1 \cap L_2$

$w \notin L_1$ או $w \notin L_2 \Leftarrow$

M_1 דוחה את w או M_2 דוחה את $w \Leftarrow$

M דוחה את $w \Leftarrow$

RE סגורה תחת חיתוך (ב)

נוכיח כי לכל שתי שפות $L_1, L_2 \in RE$ מתקיים $L_1 \cap L_2 \in RE$.

תהיינה M_1 ו- M_2 שתי מכונות טיורינג המקבלות את L_1 ו- L_2 בהתאמה.

נבנה מ"ט M המקבלת את $L_1 \cap L_2$ באותו אופן כמו (א).

(2) איחוד:

R סגורה תחת איחוד (א)

נוכיח כי לדל שתי שפות $L_1, L_2 \in R$ מתקיים $L_1 \cup L_2 \in R$.

תהיינה M_1 מ"ט המכריעה את L_1 ו- M_2 מ"ט המכריעה את L_2 .

נבנה מ"ט M המכריעה את $L_1 \cup L_2$.

תאור הבנייה

$M = \text{על קלט } w$:

(1) מעתיקה את w לסרט נוסף.

(2) מריצה את M_1 על w .

• אם M_1 מקבלת $\Leftarrow M$ מקבלת.

• אחרת, M מריצה את M_2 על העותק של w ועונה כמוה.

RE סגורה תחת איחוד (ב)

נוכיח כי לכל שתי שפות $L_1, L_2 \in RE$ מתקיים $L_1 \cup L_2 \in RE$.

תהיינה M_1 מ"ט המקבלת את L_1 ו- M_2 מ"ט המקבלת את L_2 .

נבנה מ"ט א"ד M המקבלת את $L_1 \cup L_2$.

תאור הבנייה

$M = \text{על קלט } w$:

(1) M בוחרת באופן א"ד $i \in \{1, 2\}$.

(2) M מריצה את M_i על w ועונה כמוה.

(3) שרשור:

R סגורה תחת שרשור (א)

נוכיח כי לכל שתי שפות $L_1, L_2 \in R$ מתקיים $L_1 \cdot L_2 \in R$ כאשר

$$L_1 \cdot L_2 = \{w = w_1w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}.$$

תהיינה M_1 מ"ט המכריעה את L_1 ו- M_2 מ"ט המכריעה את L_2 .

נבנה מ"ט א"ד M המכריעה את $L_1 \cdot L_2$.

תאור הבנייה

$M = \text{על קלט } w$:

(1) M בוחרת באופן א"ד חלוקה של w ל- $w = w_1 w_2$.

(2) M מריצה את M_1 על w_1 .

• אם M_1 דוחה $\Leftarrow M$ דוחה.

• אחרת, M מריצה את M_2 על w_2 ועונה כמוה.

(ב) RE סגורה תחת שרשור

RE סגורה תחת שרשור באותו אופן כמו ב- (א)

(4) * קליני

(א) R סגורה תחת * קליני

נוכיח כי לכל שפה L :

$$L \in R \Rightarrow L^* R$$

כאשר

$$L^* = \{w = w_1 w_2 \cdots w_k \mid \forall 1 \leq i \leq k, w_i \in L\}.$$

תהי M מ"ט המכריעה את L .

נבנה מ"ט M^* א"ד המכריעה את L^* .

תאור הבנייה

$M^* =$ על קלט w :

(1) אם $w = \varepsilon$ אז M^* מקבלת.

(2) אחרת M^* בוחרת באופן א"ד חלוקה של w ל- $w = w_1 \cdots w_k$.

(3) לכל $1 \leq i \leq k$:

M^* מריצה את M על w_i .

• אם M דוחה את w_i אז M^* דוחה.

• אחרת חוזרים לשלב (3).

(4) אם M קיבלה את כל המחרוזות $\{w_i\}$ אזי M^* מקבלת.

(ב) RE סגורה תחת * קליני

(5) משלים

(א) R סגורה תחת המשלים

נוכיח כי

$$L \in R \Rightarrow \bar{L} \in R,$$

כאשר

$$\bar{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}.$$

תהי M מ"ט המכריעה את L .

נבנה מ"ט \bar{M} המכריעה את \bar{L} .

$\bar{M} =$ על קלט w :

(1) \bar{M} מריצה את M על w .

• אם M מקבלת $\bar{M} \Leftarrow$ דוחה.

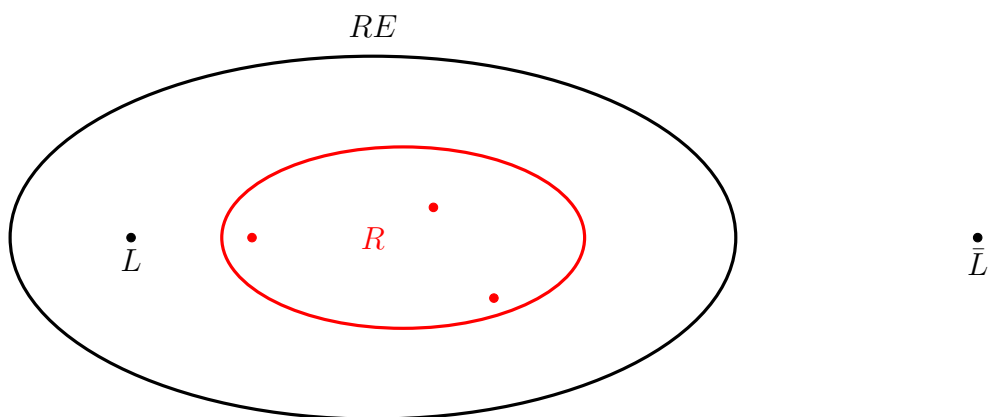
• אם M דוחה $\bar{M} \Leftarrow$ מקבלת.

(ב) RE אינה סגורה תחת המשלים

■

משפט 5.3 RE אינה סגורה תחת המשלים

$$L \in RE \setminus R \Rightarrow \bar{L} \notin RE.$$



הוכחה:

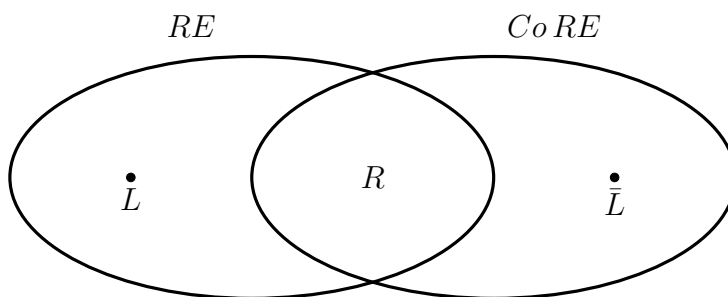
נניח כי $L \in RE \setminus R$ ונניח בשלילה כי $\bar{L} \in RE$.

אזי לפי טענת עזר (למה 5.1), $L \in R$ וזו סתירה.

■

הגדרה 5.3 $CoRE$

$$CoRE = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \bar{L} \in RE\}.$$



אבחנה

לפי למה 5.1:

$$RE \cap CoRE = R.$$

5.2 קידוד של מ"ט דטרמיניסטית

הגדרה 5.4 קידוד של מ"ט

בהינתן קבוצה O של עצמים מופשטים (למשל מכונת טיורינג, תוכנית מחשב, גרף). הקידוד של O , מסומן $\langle O \rangle$, הוא מיפוי של O אל מחרוזת מעל אלפבית סופי שיש בו לפחות שני סימנים.

במידה ויש רב עצמים O_1, \dots, O_k נסמן את הקידוד שלהם $\langle O_1, O_2, \dots, O_k \rangle$.

5.3 מ"ט אוניברסלית U



מ"ט אוניברסלית U מקבלת כקלט זוג, קידוד של מ"ט $\langle M \rangle$ וקידוד של מילה $\langle w \rangle$, ומבצעת סימוציה של ריצה של M על w ועונה בהתאם.

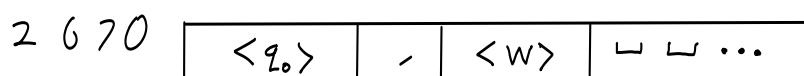
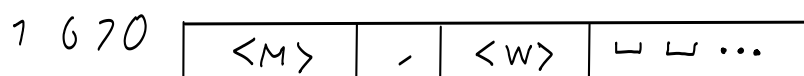
תאור הפעולה של U

$U = \text{על קלט } x$:

(1) בודקת האם x הוא קידוד של מ"ט $\langle M \rangle$ וקידוד של מילה $\langle w \rangle$.

• אם לא \Leftarrow דוחה.

(2) מבצעת סימולציה של M על w :



- רושמת את הקונפיגורציה ההתחלתית $q_0 w$ על סרט 2.
- מחשבת את הקונפיגורציה הבאה בעזרת טבלת המעברים.
- בסוף כל מעבר בין שתי קונפיגורציות, U בודקת האם המצב הנוכחי הוא q_{acc} .
- אם כן U עוצרת ומקבלת.

- * אחרת U בודקת האם המצב הוא q_{rej} .
- * אם כן U עוצרת ודוחה.
- * אחרת U ממשיכה לקונפיגורציה הבאה.

מהי השפה של U ?

לכל x :

(1) אם $U \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$ דוחה את x .

(2) אם $x = \langle M, w \rangle$:

- אם M מקבלת $w \Leftarrow U$ מקבלת את x .
- אם M דוחה את $w \Leftarrow U$ דוחה את x .
- אם M לא עוצרת על $w \Leftarrow U$ לא עוצרת על x .

$$L(U) = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} .$$

הגדרה 5.5 L_{acc}

$$L_{acc} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \} \in RE \setminus R$$

הגדרה 5.6 L_{halt}

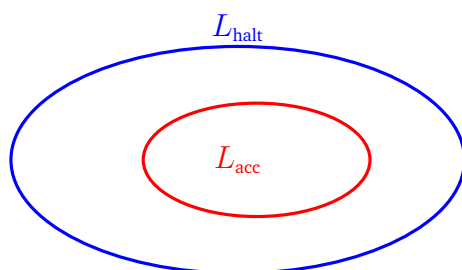
$$L_{halt} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ עוצרת על } w \} \in RE \setminus R$$

הגדרה 5.7 L_d

$$L_d = \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \} \notin RE$$

אבחנה:

$$L_{acc} \subseteq L_{halt} .$$



משפט 5.4

$$L_{\text{acc}} \in RE.$$

הוכחה: מכיוון ש- $L(U) = L_{\text{acc}}$, U מקבלת את L_{acc} ולכן $L_{\text{acc}} \in RE$. ■

משפט 5.5

$$L_{\text{halt}} \in RE.$$

הוכחה: נבנה מ"ט U' שהיא למעשה U פרט למקום שבו U עצרה ודחתה, U' תעצור ותקבל.

נוכיח כי U' מקבלת את L_{halt} :

אם $x \in L_{\text{halt}}$

$x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$ M עוצרת על w

U' עוצרת ומקבלת את x .

אם $x \notin L_{\text{halt}}$ שני מקרים:

• $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow U'$ דוחה את x .

• $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow M$ לא עוצרת על $w \Leftarrow U'$ לא עוצרת על x .

■