

עבודה עצמית 5

שאלה 1 חשבו את הדטרמיננטות הבאות:

$$(א) \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -6 & -7 \end{vmatrix}$$

$$(ב) \begin{vmatrix} 3m-2 & 4 \\ 5m+3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$(ג) \begin{vmatrix} -4 & -5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(ד) \begin{vmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(ה) \begin{vmatrix} 2m-3 & m-4 & 3m-1 \\ 1 & -2 & 1 \\ m & 4m+1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(ו) \begin{vmatrix} 7 & 8 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & -2 \\ -1 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(ז) \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

$$(ח) \begin{vmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{vmatrix}$$

$$(ט) \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$$

$$(י) \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$$

$$(יא) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

שאלה 2 פתרו את המשוואות הבאות:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{א})$$

$$\begin{vmatrix} x & 3x-8 \\ x-2 & 2x-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & x-1 \\ x+1 & 2x-4 \end{vmatrix} \quad (\text{ב})$$

שאלה 3

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 3x & 3y & 3z \\ -p & -q & -r \end{vmatrix} \cdot \text{חשבו את} \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = t$$

שאלה 4 תהינה $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ונניח ש- $|A| = a$, $|B| = b \neq 0$. מצאו את:

$$|AB| \quad (\text{א})$$

$$|7A| \quad (\text{ב})$$

$$|7AB^{-1}A^2| \quad (\text{ג})$$

$$|A + A| \quad (\text{ד})$$

$$|4A^t B^3 A^2 (B^t)^{-1}| \quad (\text{ה})$$

שאלה 5 פתרו את המערכות הבאות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{cases} -3x - 6y + 2z = -1 \\ x + 8y - z = 12 \\ -5x - 9y + 3z = 0 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$\begin{cases} -5x + y - 4z = 1 \\ -4x - y = 8 \\ 5x + 2z = -5 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$\begin{cases} -5x - 4y + 5z - 2t = -2 \\ 4x - y - 5z - 2t = -9 \\ 4x - y - 4z - t = -10 \\ 2x - y - 3z - 2t = -5 \end{cases} \quad (\text{ג})$$

שאלה 6 עבור אילו ערכים של k קיים פתרון יחיד למערכות הבאות:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 1 \\ x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ x + 5y - z = 7 \\ 3x + ky + 4z = k^2 \end{cases} \quad (ג)$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = -2 \end{cases} \quad (ד)$$

שאלה 7

תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. הוכיחו או הפריכו:

(א) $|A + B| = |B + A|$.

(ב) אם $AB + AC$ אז $|B| = |C|$.

(ג) אם קיים $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ כך ש- $(AB) \cdot X = 0$ אז $|A| = 0$ או $|B| = 0$.

(ד) $|A + B| = |A| + |B|$.

(ה) $|AB| = |BA|$.

(ו) $|A^t B| = |B^t A|$.

(ז) $|A^{-1}| = |A|$ אז $A = I$.

(ח) $A^2 = I$ אז לפחות אחת מהמטריצות $A + I$ או $A - I$ איננה הפיכה.

שאלה 8

(א) פתרו את המערכת הבאה באמצעות כלל קרמר:

$$\begin{cases} 2ix + 3y = 1 - 2i \\ x - 4iy = 3 + 5i \end{cases}$$

(ב) תהיינה A, B מטריצות מסדר 4×4 . נתונות הדטרמיננטות $|A| = a$, $|B| = b$, $(b \neq 0)$. מצאו את $|25A^3 B^{-1} A^2 B^2|$.

פתרונות

שאלה 1

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = 15 \quad \text{(א)}$$

$$\begin{vmatrix} 3m-2 & 4 \\ 5m+3 & 7 \end{vmatrix} = -26 + m \quad \text{(ב)}$$

$$\begin{vmatrix} -4 & -5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \quad \text{(ג)}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(ד)}$$

$$\begin{vmatrix} 2m-3 & m-4 & 3m-1 \\ 1 & -2 & 1 \\ m & 4m+1 & 2 \end{vmatrix} = 11m^2 - 7m + 22 \quad \text{(ה)}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & -2 \\ -1 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad \text{(ו)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(ז)}$$

$$\begin{vmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{vmatrix} = t^3 - 12t - 16 \quad \text{(ח)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(ט)}$$

$$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(י)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = -(a-b)(a-c)(b-c) \quad \text{(יא)}$$

שאלה 2

(א)

$$4x^2 - 13x + 3 = (x - 3)(4x - 1) = 0 \Rightarrow x = 3, \frac{1}{4}$$

(ב) המשוואה היא

$$-x^2 + 9x - 16 = x^2 - 7 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 9 = 0 \Rightarrow (2x - 3)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3, \frac{3}{2}.$$

שאלה 3

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 3x & 3y & 3z \\ -p & -q & -r \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 3x & 3y & 3z \\ p & q & r \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3t.$$

שאלה 4 נתון: $|A| = a, |B| = b \neq 0$.

A, B מסדר $n \times n$.

(א) $|AB| = |A| \cdot |B| = ab$

(ב) $|7A| = 7^n |A| = 7^n a$

(ג) $|7AB^{-1}A^2| = 7^n |A| |B^{-1}| |A^2| = 7^n |A| |B^{-1}| |A|^2 = 7^n \cdot a \cdot \frac{1}{b} \cdot a^2 = \frac{7^n a^3}{b}$

(ד) $|A + A| = |2A| = 2^n |A| = 2^n \cdot a$

(ה) $|4A^t B^3 A^2 (B^t)^{-1}| = 4^n |A^t| |B^3| |A^2| |B^t|^{-1} = 4^n |A| |B|^3 |A|^2 |B|^{-1} = 4^n \cdot a \cdot b^3 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{b} = 4^n (ab)^3.$

שאלה 5

(א)

$$\begin{cases} -3x - 6y + 2z = -1 \\ x + 8y - z = 12 \\ -5x - 9y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 1 & 8 & -1 \\ -5 & -9 & 3 \end{vmatrix} = 5 ,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -6 & 2 \\ 12 & 8 & -1 \\ 0 & -9 & 3 \end{vmatrix} = -15 ,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 1 & 12 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 10 ,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & -6 & -1 \\ 1 & 8 & 12 \\ -5 & -9 & 0 \end{vmatrix} = 5 .$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -3 , \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2 , \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1 .$$

(ב)

$$\begin{cases} -5x + y - 4z = 1 \\ -4x - y = 8 \\ 5x + 2z = -5 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 \\ -4 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 ,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 8 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 ,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 \\ -4 & 8 & 0 \\ 5 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 8 ,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 8 \\ 5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0 .$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1 , \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -4 , \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0 .$$

(ג)

$$\begin{cases} -5x - 4y + 5z - 2t = -2 \\ 4x - y - 5z - 2t = -9 \\ 4x - y - 4z - t = -10 \\ 2x - y - 3z - 2t = -5 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & -5 & -2 \\ 4 & -1 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 5 & -2 \\ -9 & -1 & -5 & -2 \\ -10 & -1 & -4 & -1 \\ -5 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & -2 & 5 & -2 \\ 4 & -9 & -5 & -2 \\ 4 & -10 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -16$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & -4 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -9 & -2 \\ 4 & -1 & -10 & -1 \\ 2 & -1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & -5 & -9 \\ 4 & -1 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 8$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 4, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1, \quad w = \frac{\Delta_4}{\Delta} = -2.$$

שאלה 6 למערכת $AX = b$ יש פתרון יחיד $\Leftrightarrow A$ הפיכה $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & k \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{א})$$

$|A| = k - 5$. לכן $|A| \neq 0$ לכל $k \neq 5$.

לכן A הפיכה לכל $k \neq 5$.

לכן למערכת יש פתרון יחיד לכל $k \neq 5$.

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \quad (\text{ב})$$

$|A| = (k - 1)^2(k + 2)$. לכן $|A| \neq 0$ לכל $k \neq 1, -2$.

לכן A הפיכה לכל $k \neq 1, -2$.

לכן יש פתרון יחיד לכל $k \neq 1, -2$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & k & 4 \end{pmatrix} \quad (\text{ג})$$

$|A| = k + 62$.

לכן $|A| \neq 0$ לכל $k \neq -62$.

לכן A הפיכה לכל $k \neq -62$. לכן יש פתרון יחיד לכל $k \neq -62$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \quad (ד)$$

$$|A| = k^2 - 2k + 1 = (k - 1)^2$$

$A \neq 0$ לכל $k \neq 1$.

לכן A הפיכה לכל $k \neq 1$.

לכן למערכת יש פתרון יחיד לכל $k \neq 1$.

שאלה 7

$$|A + B| = |B + A| \quad (א)$$

טענה נכונה. הוכחה: הקבוצה של מטריצות שדה לכן חוק החילוף מתקיים, ז"א

$$A + B = B + A \Rightarrow |A + B| = |B + A|.$$

$$AB = AC \text{ או } |B| = |C| \quad (ב)$$

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad AB = AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|B| = 1 \neq |C| = 4.$$

$$(AB) \cdot X = 0 \text{ ש- } X \neq 0 \in \mathbb{R}^n \text{ אם קיים } |B| = 0 \text{ או } |A| = 0 \quad (ג)$$

טענה נכונה. הוכחה:

למערכת $(AB) \cdot X = 0$ קיים פתרון לא טריוויאלי, כלומר $X \neq 0$.
לכן AB לא הפיכה.

$$\Rightarrow |AB| \neq 0 \Rightarrow |A| \cdot |B| \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0, |B| \neq 0.$$

$$|A + B| = |A| + |B| \quad (ד)$$

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|A + B| = 1, \quad |A| + |B| = 0.$$

$$\underline{|AB| = |BA|} \quad (\text{ה})$$

טענה נכונה. הוכחה:

$$|AB| = |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A| = |BA| .$$

$$\underline{|A^t B| = |B^t A|} \quad (\text{ו})$$

טענה נכונה. הוכחה:

$$|A^t B| = |A^t| \cdot |B| = |A| \cdot |B| = |A| \cdot |B^t| = |B^t| \cdot |A| = |B^t A| .$$

$$\underline{\text{אם } |A^{-1}| = |A| \text{ אז } A = I} \quad (\text{ז})$$

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$|A| = -1 = |A^{-1}| .$$

$$\underline{\text{אם } A^2 = I \text{ אז לפחות אחת מהמטריצות } A + I \text{ או } A - I \text{ איננה הפיכה.}} \quad (\text{ח})$$

טענה נכונה. הוכחה:

$$A^2 - I = 0 \Rightarrow (A - I)(A + I) = 0 \Rightarrow |(A - I)(A + I)| = 0 \Rightarrow |A - I| \cdot |A + I| = 0$$

מכאן $|A + I| = 0$ או $|A - I| = 0$.
לכן $A + I$ לא הפיכה או $A - I$ לא הפיכה.

שאלה 8

(א)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2i & 3 \\ 1 & -4i \end{vmatrix} = 5 , \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 - 2i & 3 \\ 3 + 5i & -4i \end{vmatrix} = -19i - 17 , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2i & 1 - 2i \\ 1 & 3 + 5i \end{vmatrix} = 8i - 11 .$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-17 - 19i}{5} , \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-11 + 8i}{5} .$$

(ב)

$$|25A^3 B^{-1} A^2 B^2| = 25^4 |A^3| \cdot |B^{-1}| \cdot |A^2| \cdot |B^2| = 25^4 |A|^3 \cdot \frac{1}{|B|} \cdot |A|^2 \cdot |B|^2 = 25^4 \cdot a^3 \cdot \frac{1}{b} \cdot a^2 \cdot b^2 = 25^4 \cdot a^5 \cdot b .$$