

חדו"א 1 למדמ"ח

מועד א'

מרצה: ד"ר זהבה צבי

תשפ"ד סמסטר ב'

השאלון מכיל 8 עמודים (כולל עמוד זה וכולל דף נוסחאות).

בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דף נוסחאות מצורף לשאלון (5 עמודים בפורמט A4).

אחר / הערות

יש לענות על השאלות באופן הבא:

- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.
- שאלות 1,2 - יש לענות על **כל** השאלות!
- שאלות 3,4,5,6 - יש לענות **שלוש** שאלות בלבד מתוך **ארבע**.
- שאלות 7,8 - יש לענות על שאלה **אחת** בלבד מתוך **שניים**.

שאלות 1 ו-2 - חובה!

שאלה 1 (21 נקודות)

חקרו באופן מלא את הפונקציה

$$f(x) = 2x + \ln(x^2 - 4) .$$

(א) (3 נק') תחום הגדרה וחיתוך עם הצירים וסימני הפונקציה.

(ב) (3 נק') אסימפטוטות.

(ג) (3 נק') תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון.

(ד) (3 נק') תחומי קמירות ונקודות פיתול.

(ה) (5 נק') שרטטו את סקיצת הגרף של הפונקציה $f(x)$.

(ו) (4 נק') שרטטו את סקיצת הגרף של הפונקציה $f(|x|)$.

שאלה 2 (24 נקודות)

פתרו את האינטגרלים הבאים. יש לענות על 2 מתוך 3 הסעיפים הבאים:

(א) (12 נק') $\int_0^{\pi/2} (3x - 1) \cos(2x) dx$

(ב) (12 נק') $\int \sin(2x) e^{5 \sin x} dx$

(ג) (12 נק') $\int \frac{x+1}{x^2+5x+6} dx$

ענו על 3 מתוך 4 השאלות 3 – 6

שאלה 3 (15 נקודות) חשבו את הגבולות הבאים:

(א) (7 נק') $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{1/x}$

(ב) (8 נק') $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(5x)}{xe^{3x}}$

שאלה 4 (15 נקודות) רשמו את פולינום מקלורן מסדר 2 של הפונקציה

$$x - 2y + \ln(y + 1) = 0$$

בנקודה $(0, 0)$.

שאלה 5 (15 נקודות) אין קשר בין הסעיפים בשאלה זו.

(א) (10 נק') תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב- \mathbb{R} . הוכיחו כי למשוואה $f(x) = x$ יש פתרון אם ורק אם למשוואה $f(f(x)) = x$ יש פתרון.

(ב) (5 נק') תהי $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת לכל $x \in [-1, 1]$ את המשוואה $x^2 + f^2(x) = 1$ ובנוסף נתון $f(0) = 1$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית: $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ לכל $x \in [-1, 1]$.

שאלה 6 (15 נקודות) אין קשר בין הסעיפים בשאלה זו.

(א) (9 נק') כמה פתרונות יש למשוואה $e^x + \sin x = e^{-x}$? הוכיחו את תשובתכם.

(ב) (6 נק') קבעו האם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1 + e^{-x}}{x} dx$ מתכנס או מתבדר. הוכיחו את תשובתכם.

ענו על 1 מתוך 2 השאלות 7 – 8

שאלה 7 (10 נקודות)

בין הגרפים של הפונקציות $y = e^{-x}$ ו- $y = e^{x/2}$ וציר ה- x חסום מלבן. מצאו את שטח המקסימלי האפשרי של מלבן זה.

שאלה 8 (10 נקודות)

הוכיחו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים: $2x \arctan x \geq \ln(x^2 + 1)$.