

## תרגילים 8: רדוקציות

**שאלה 1** נתונה השפה הבאה:

$$L_{\geq 3} = \{ \langle M \rangle \mid |L(M)| \geq 3 \}$$

$L_{\geq 3}$  מכילה קידודים של מכונות טיריניג שמקבלות לפחות 3 מילים שוות. הוכיחו כי  $\bar{L}_{\geq 3} \notin R$  ע"י רדוקציה מ-  $L_{\text{acc}}$ .

**שאלה 2** נתונה השפה הבאה:

$$L = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \wedge w \notin L(M_2) \} .$$

הוכיחו כי  $\bar{L} \notin RE$  ע"י רדוקציה מ-  $\bar{L}_{\text{acc}}$ .

**שאלה 3** תהי  $L$  השפה

$$L_{1a} = \{ \langle M \rangle \mid \text{מקבלת בדיקת מילה אחת המתחילה ב- } a \text{ מילוי } M \}$$

**a)** מצאו פונקציית רדוקציה מ-  $\bar{L}_{\text{acc}}$  ל-  $\bar{L}_{1a}$ .

**b)** הוכיחו כי  $\bar{L}_{1a} \notin RE$ .

**c)** הוכיחו כי  $\bar{L}_{1a} \notin R$ .

**שאלה 4** תהי  $L$  השפה

$$L_{\geq 1a} = \{ \langle M \rangle \mid \text{מקבלת לפחות מילה אחת המתחילה ב- } a \text{ מילוי } M \}$$

**a)** מצאו פונקציית רדוקציה מ-  $L_{\text{acc}}$  ל-  $\bar{L}_{1a}$ .

**b)** הוכיחו כי  $\bar{L}_{1a} \notin R$ .

**שאלה 5** תהי  $L$  השפה

$$L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} = \{ \langle M_1, M_2, M_3 \rangle \mid L(M_1) \subset L(M_2) \subset L(M_3) \}$$

**a)** מצאו פונקציית רדוקציה מ-  $\bar{L}_{\text{acc}}$  ל-  $\bar{L}_{M_1 \subset M_2 \subset M_3}$ .

**b)** הוכיחו כי  $\bar{L}_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} \notin R$ .

**c)** הוכיחו כי  $\bar{L}_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} \notin RE$ .

**שאלה 6** תהי  $L_\varepsilon$  השפה הבאה:

$$L_\varepsilon = \{ \langle M \rangle \mid \text{מילת הריקה } \varepsilon \text{ עוצרת על } M \}$$

a) האם  $L_\varepsilon$  כריעה?

b) האם  $L_\varepsilon$  קבילה?

**שאלה 7** נתונה השפה הבאה:

$$L = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \varepsilon \} .$$

הוכחו כי  $L \notin R$  ע"י רדוקציה מ-  $L_{\text{acc}}$ .

**שאלה 8** קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעה פתוחה.

אם  $R$  אז לכל שפה  $L_2 \notin R$  קיימת רדוקציה  $L_2 \leq L_1$

## תשובות

### שאלה 1

פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M_\emptyset$  היא מ"ט שדועה כל קלט ו-  $M'$  היא מ"ט שעל כל קלט  $y$ , מתעלמת מ-  $y$  ומריצה את  $M$  על  $w$  ועונה כמוות.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

נכונות הרדוקציה:

נוכיח כי

$$x \in L_{\text{acc}} \iff f(x) \in L_{\geq 3} .$$

אם  $L(M') = \Sigma^*$  ולפי האבחנה  $f(x) = \langle M' \rangle \iff w \in L(M)$  ו-  $x = \langle M, w \rangle \iff x \in L_{\text{acc}}$  ולכן  $f(x) \in L_{\geq 3} \iff |L(M')| = \infty$

אם שני מקרים:  $\iff x \notin L_{\text{acc}}$

מקרה 1:  $f(x) \notin L_{\geq 3} \iff |L(M_\emptyset)| = 0 \iff f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle$

מקרה 2:  $|L(M')| = 0 \iff L(M') = \emptyset$  ולפי האבחנה  $f(x) = \langle M' \rangle \iff w \notin L(M)$  ו-  $x \neq \langle M, w \rangle \iff f(x) \notin L_{\geq 3} \iff$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $L_{\geq 3} \notin R$ ,  $L_{\text{acc}} \notin R$  ולכן ממשפט הרדוקציה, מכיוון ש-  $R$  מתקיים  $L_{\text{acc}} \leq L_{\geq 3}$ .

### שאלה 2

פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M^*, M, w \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

$M^*$  מ"ט שמקבלת כל קלט •

$M_\emptyset$  מ"ט שדועה כל קלט. •

נכונות הרדוקציה:

ראשתי,  $f$  חסיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם  $x = \langle M, w \rangle$ . אם לא, תחזיר קידוד קבוע  $\langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle$ . אם כן, תחזיר קידוד  $\langle M^*, M, w \rangle$ .

נוכיח כי

$$x \in \bar{L}_{\text{acc}} \iff f(x) \in L .$$

אם  $x \in \bar{L}_{\text{acc}}$  שני מקרים:

מקרה 1:  $f(x) \in L \iff \varepsilon \notin L(M_\emptyset) \wedge \varepsilon \in L(M^*) \wedge f(x) = \langle M^*, M_\emptyset, \varepsilon \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle$

מקרה 2:  $w \notin L(M) \wedge w \in L(M^*) \wedge f(x) = \langle M^*, M, w \rangle \iff w \notin L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \iff f(x) \in L$

$w \notin L(M) \wedge w \in L(M^*) \wedge f(x) = \langle M^*, M, w \rangle \iff w \in L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \iff x \notin \bar{L}_{\text{acc}}$  ואם  $f(x) \notin L \iff$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $\bar{L}_{\text{acc}} \leq L$ , וכיון ש-  $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$  מושפט הרדוקציה מתקיים

### שאלה 3

a) פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \{ab''\} & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M'$  המ"ט הבאה:

$M' = M$  על כל קלט  $y$ :

**1)** אם  $y = "ab"$  מקבלת.

**2)** אחרת מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוות.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \{ab\} & w \notin L(M) \end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

אם  $x \in \bar{L}_{\text{acc}}$  שני מקרים:

מקרה 1:  $f(x) \in L_{1a} \iff f(x) = \{ab''\} \iff x \neq \langle M, w \rangle$

מקרה 2:  $f(x) \in L_{1a} \iff L(M') = \{ab''\}$  לפי האבחנה  $\iff w \notin L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle$

$L(M') = \Sigma^*$   $f(x) = \langle M' \rangle$  ולפי האבחנה  $\iff w \in L(M) \wedge x = \langle M, w \rangle \iff x \notin \bar{L}_{\text{acc}}$  ואם  $\langle M' \rangle \notin L_{1a} \iff a$  מכילה יותר ממילה אחת המתחילה ב-  $a$   $L(M') \iff f(x) \notin L_{1a} \iff$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $\bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{1a}$

b) מכיוון ש-  $L_{1a} \notin RE$  מושפט הרדוקציה מתקיים

ג) מכיוון ש-  $L_{1a} \notin R$  מושפט הרדוקציה מתקיים

**שאלה 4**

(א)

פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M_\emptyset$  היא מ"ט שדועה כל קלט ו-  $M'$  המ"ט הבא:על כל קלט  $y: M' =$ אם  $y \neq "ab"$  דועה.אחרת מריצה  $M$  על  $w$  ועונה כמוות.

אבחןה:

$$L(M') = \begin{cases} \{"ab"\} & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

$$L(M') = \{"ab"\} \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M' \rangle \iff w \in L(M) \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle \iff x \in L_{\text{acc}} \text{ אם } .f(x) \in L_{\geq 1a} \iff \langle M' \rangle \in L_{\geq 1a} \iff$$

אם שני מקרים:

$$\frac{L(M_\emptyset) = \emptyset \text{ ו- } f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle \text{ מקרה 1}}{.f(x) \notin L_{\geq 1a} \iff L(M_\emptyset) \notin L_{\geq 1a} \iff \text{לא מכילה מילה המתחילה ב- } a \text{ ל- } L(M_\emptyset)} \iff$$

$$\frac{\text{מקרה 2}}{L(M_\emptyset) \notin L_{1a} \text{ ו- } L(M') = \emptyset \text{ לפי האבחנה} \iff w \notin L(M) \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle \iff .f(x) \notin L_{1a}}$$

לסיכום, הוכחנו רדוקציה

.  $L_{\text{acc}} \subseteq L_{\geq 1a}$ 

(ב)

מכיוון ש-  $L_{\text{acc}} \notin R$  ממשפט הרדוקציה מתקיים **שאלה 5**

(א)

פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M_\emptyset, M', M^* \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset, M_{\text{even}}, M^* \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

•  $M_\emptyset$  היא מ"ט שדועה כל קלט,•  $M^*$  היא מ"ט שמקבלת כל קלט,•  $|x| \bmod 2 = 0$  מ"ט שמקבלת רק מילים  $x \in \Sigma^*$  עבורן 0

• המ"ט הבא:

על כל קלט  $y$ :  $M' = M'$

**1)** אם  $|y|$  אי-זוגי  $\Leftarrow$  מקבלת.

**2)** אחרת מרים  $M$  על  $w$  ועונה כמוותה.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \{y : |y| \bmod 2 = 0\} & w \notin L(M) \end{cases}$$

הוכחת הנכונות:

אם שני מקרים:  $\Leftarrow x \in \bar{L}_{\text{acc}}$

מקרה 1:

$$\begin{aligned} x \neq \langle M, w \rangle \\ L(M_\emptyset) \subset L(M_{\text{even}}) \subset L(M^*) \text{ ו } f(x) = \langle M_\emptyset, M_{\text{even}}, M^* \rangle \Leftarrow \\ .f(x) \in L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} \Leftarrow \end{aligned}$$

מקרה 2:

$$\begin{aligned} w \notin L(M) \text{ ו } x = \langle M, w \rangle \\ L(M') = \{y : |y| \bmod 2 = 0\} \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow \\ L(M_\emptyset) \subset L(M') \subset L(M^*) \Leftarrow \\ .f(x) \in L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} \Leftarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \notin \bar{L}_{\text{acc}} \text{ אם} \\ w \in L(M) \text{ ו } x = \langle M, w \rangle \Leftarrow \\ L(M') = \Sigma^* \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M_\emptyset, M', M^* \rangle \Leftarrow \\ L(M') \not\subset L(M^*) \Leftarrow \\ .f(x) \notin L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} \Leftarrow \\ \text{לסיכום, הוכחנו רדוקציה} \quad \bar{L}_{\text{acc}} \leq L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} \end{aligned}$$

**ב)** מכיוון ש-  $R$  ממשפט הרדוקציה מתקיים  $\bar{L}_{\text{acc}} \notin R$

**ג)** מכיוון ש-  $RE$  ממשפט הרדוקציה מתקיים  $\bar{L}_{\text{acc}} \notin RE$

**שאלה 6** נבנה רדוקציה מ-  $L_\epsilon$  ל-  $L_{\text{acc}}$ 

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\text{loop}} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M_{\text{loop}}$  מ"ט שלא עוצרת על אף קלט ו-  $M'$  המ"ט הבאה:

$=$  על כל קלט  $y$ :

1) מריצה  $M$  על  $\epsilon$ .

2) אם  $M$  מקבלת  $M'$  מקבלת.

3) אם  $M$  דוחה  $M'$  מקבלת.

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & \epsilon \text{ עוצרת על } M \\ \emptyset & \epsilon \text{ לא עוצרת על } M \end{cases}$$

הוכת הנכונות:

$$\langle M' \rangle \in L_{\text{acc}} \iff L(M') = \Sigma^* \iff \epsilon \text{ עוצרת על } M \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle \iff x \in L_\epsilon$$

$f(x) \in L_{\text{acc}} \iff \epsilon \text{ מקרים:}$

$$f(x) = \langle M_{\text{loop}} \rangle \iff x \neq \langle M, w \rangle$$

$$\text{מקרה 2: } \langle M' \rangle \notin L_{\text{acc}} \iff L(M') = \emptyset \iff \epsilon \text{ לא עוצרת על } M \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle \iff \langle M' \rangle \notin L_\epsilon$$

**שאלה 7** פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_\emptyset \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר  $M_\emptyset$  מכונה טיריניג שדוחה כל קלט.  
 $=$  על קלט  $y$ :

• שומרת את  $y$  על סרט נוסף.

• מריצה את  $M$  על  $w$ .

○ אם  $M$  דוחה  $M'$  דוחה.

○ אם  $M$  מקבלת  $M'$  בודקת האם  $y = \epsilon$

\* אם כן, מקבלת.

\* אם לא, דוחה.

אבחנה

$$L(M') = \begin{cases} \{\varepsilon\} & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}.$$

נכונות הרדוקציה

(1) חישיבה כי ניתן לבנות מכונת טיורינג שבודקת האם  $\langle M, w \rangle = x$ . אם לא, מחזירה קידוד קבוע של  $\langle M_\emptyset \rangle$ . אם כן, מחזירה קידוד של  $M'$  ע"י הוספת קוד שמעתיק את  $y$  לסדרט נספ' ומבצע השווה בין  $y$  ל- $x$ .

$$(2) \text{ נראה כי } w \in L_{\text{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L$$

$$x \in L_{\text{acc}} \text{ אם}$$

$$\begin{aligned} w \in L(M) \text{ ו } x = \langle M, w \rangle \Leftrightarrow \\ L(M') = \{\varepsilon\} \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M' \rangle \Leftrightarrow \\ f(x) \in L \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\text{אם } x \notin L_{\text{acc}} \Leftrightarrow \text{שני מקרים:}$$

$$f(x) \notin L \Leftrightarrow L(M_\emptyset) = \emptyset \text{ ו } f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \Leftrightarrow x \neq \langle M, w \rangle \bullet$$

$$f(x) \notin L \Leftrightarrow L(M') = \emptyset \text{ ולפי האבחנה } f(x) = \langle M' \rangle \Leftrightarrow w \notin L(M) \text{ ו } x = \langle M, w \rangle \bullet$$

$$\text{הראינו רדוקציה } L_{\text{acc}} \leq L \text{ ומכיון ש- } L_{\text{acc}} \notin R, \text{ ממשפט הרדוקציה מתקיים,}$$

שאלה 8

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:  $L_2 = \overline{L_{\text{acc}}}, L_1 = L_{\text{acc}}$ :

$$L_2 \notin R \text{ וגם } L_1 \notin R \bullet$$

$$\bullet \text{ נניח בשליליה כי } L_2 \leq L_1$$

$$\bullet \text{ נתון כי } L_1 = L_{\text{acc}} \text{我们知道: } L_1 \in RE \text{ ו } L_{\text{acc}} \in RE \text{ לכן}$$

$$\bullet \text{ אז ממשפט הרדוקציה } L_2 \in RE, L_1 \in RE \text{ בסתיירה לכך ש-}$$

הסביר: כדי שהוכחנו בכיתה, נניח בשליליה כי  $\overline{L_{\text{acc}}} \in RE$

מכיון ש-  $L_{\text{acc}} \in R$  אז  $\overline{L_{\text{acc}}} \in RE$  בהכרח

זאת סתיירה לכך ש-  $L_{\text{acc}}$  לא כריעה.