### תרגילים 8: רדוקציות

## שאלה 1 נתונה השפה הבאה:

$$L_{\geq 3} = \left\{ \langle M \rangle \mid |L(M)| \geq 3 \right\}$$

מכילה 3 מכילה שמקבלות טיורינג שמקבלות מכונות של מכונות ב $L_{\geq 3}$  מכילה ע"י רדוקציה מר $L_{\rm acc}$  מ''י רדוקציה ל $L_{\geq 3}\notin R$ 

# שאלה 2 נתונה השפה הבאה:

$$L = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \land w \notin L(M_2) \}.$$

 $ar{L}_{
m acc}$  -מ"י רדוקציה מL 
otin RE הוכיחו כי

### שאלה 3 תהי $\,L$ השפה

 $L_{1a} = ig\{\langle M 
angle \mid a$  - מקבלת בדיוק מילה אחת המתחילה  $M ig\}$ 

- $.L_{1a}$  ל- ל $.\bar{L}_{
  m acc}$  מצאו פונקצית רדוקציה מ
  - $L_{1a} 
    otin RE$  ב) הוכיחו כי
    - $L_{1a} 
      otin R$  הוכיחו כי

## שאלה 4 תהי $\,L\,$ השפה

 $L_{\geq 1a} = ig\{\langle M 
angle \mid a$  -מקבלת לפחות מילה אחת המתחילה ב $M ig\}$ 

- $L_{1a}$  -ל ל-  $L_{
  m acc}$  מצאו פונקצית רדוקציה מ
  - $.L_{1a}
    otin R$  בי הוכיחו כי

### שאלה 5 תהי $\,L$ השפה

$$L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3} = \left\{ \langle M_1, M_2, M_3 \rangle \mid L(M_1) \subset L(M_2) \subset L(M_3) \right\}$$

- $.L_{M_1\subset M_2\subset M_3}$  ל- ל-  $ar{L}_{
  m acc}$  מצאו פונקצית רדוקציה מ-
  - $I_{M}$  הוכיחו בי  $\notin R$  הוכיחו בי

שאלה 6 תהי $L_{arepsilon}$  השפה הבאה:

 $L_{arepsilon} = ig\{\langle M 
angle \ | \ arepsilon$  עוצרת על מילת הריקה  $M ig\}$ 

- אט כריעה? האם  $L_{arepsilon}$
- בילה? האם  $L_{arepsilon}$  קבילה?

שאלה 7 נתונה השפה הבאה:

$$L = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \varepsilon \} .$$

 $.L_{
m acc}$  - מ"י רדוקציה מL 
otin R הוכיחו כי

**שאלה 8** קבעו אם הטענה הבאה נכונה, לא נכונה, או שקולה לבעיה פתוחה. . $\bar{L} \leq L$  שפה או קיימת רדוקציה לב $L \neq \Sigma^*$  כך ש-  $L \in R$  לכל שפה

### תשובות

## שאלה 1

### פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\emptyset} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

w כאשר  $M_\emptyset$  היא מ"ט הדוחה כל קלט ו- M' היא מ"ט שעל כל קלט y, מתעלמת מ- y ומריצה את M על w ועונה מ"ט הדוחה כל קלט ו- M' היא מ"ט שעל כל קלט ו

### אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

### נכונות הרדוקציה:

נוכיח כי

$$x \in L_{\mathrm{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L_{\geq 3}$$
.

ולכן 
$$L\left(M'
ight)=\Sigma^*$$
 ולכן  $f(x)=\langle M'
angle \iff w\in L(M)$  - ו $x=\langle M,w
angle \iff x\in L_{\mathrm{acc}}$  ולכן  $f(x)=\langle M'
angle \iff x\in L(M)$  ולכן  $f(x)\in L_{\geq 3} \iff |L\left(M'
ight)|=\infty$ 

אם מקרים:  $\Leftarrow x \notin L_{\mathrm{acc}}$ 

$$f(x) 
otin L_{\geq 3} \quad \Leftarrow \quad |L\left(M_{\emptyset}
ight)| = 0 \quad \Leftarrow \quad f(x) = \langle M_{\emptyset} 
angle \quad \Leftarrow \quad x 
eq \langle M, w 
angle \quad :1$$
 מקרה ב

$$|L\left(M'\right)|=0\quad \Leftarrow\quad L\left(M'\right)=\emptyset \text{ האבחנה } f(x)=\left\langle M'\right\rangle \quad \Leftarrow\quad w\notin L(M) \text{ -1 } x\neq \left\langle M,w\right\rangle \text{ ...}$$
 מקרה בי  $f(x)\notin L$ 

 $L_{\geq 3} 
otin R$  מתקיים,  $L_{
m acc} 
otin R$ , מכיוון ש- ב $L_{
m acc} 
otin L_{
m acc} 
otin L_{
m acc} 
otin L_{
m acc}$ 

### שאלה 2

פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M^*, M, w \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M^*, M_{\emptyset}, \varepsilon \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- היא מ"ט שמקבלת כל קלט  $M^*$ 
  - . היא מ"ט שדוחה כל קלט.  $M_{\emptyset}$

### נכונת הרדוקציה:

ראשית, f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם  $x=\langle M,w\rangle$  האם שתבדוק מ"ט שתבדוק מ"ט לבנות מ"ט  $x=\langle M,w\rangle$  ואם  $x=\langle M,w\rangle$  ואם כן, תחזיר קידוד  $x=\langle M^*,M,w\rangle$ .

:שני מקרים  $\Leftarrow x \in ar{L}_{
m acc}$ 

$$f(x)\in ar{L} \quad \Leftarrow \quad arepsilon 
otin L\left(M_{\emptyset}
ight)$$
 - ו $arepsilon \in L\left(M^{st}
ight)$  -  $arepsilon \in L\left(M^{st}
ight)$  - ו $arepsilon \in L\left(M^{st}
ight)$  -  $arepsilon \in L\left(M^{st}
ight)$  - ا $arepsilon \in L\left(M^{st}
ight)$ 

$$w \notin L\left(M
ight)$$
 -ו  $w \in L\left(M^*
ight)$  ו-  $f(x) = \langle M^*, M, w \rangle \quad \Leftarrow \quad w \notin L(M)$  -  $x = \langle M, w \rangle$  :  $f(x) \in L \quad \Leftarrow$ 

$$w \notin L\left(M\right)$$
 -1  $w \in L\left(M^*\right)$  -1  $f(x) = \langle M^*, M, w \rangle \quad \Leftarrow \quad w \in L(M)$  -1  $x = \langle M, w \rangle \quad \Leftarrow \quad x \notin \bar{L}_{\mathrm{acc}}$  אם  $f(x) \notin L \Leftarrow$ 

L 
otin RE ממשפט הרדוקציה מתקיים, ומכיוון ש $ar{L}_{
m acc} 
otin RE$  ממשפט הרדוקציה מתקיים, ומכיוון ש

## שאלה 3

## א) פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \{\text{"ab"}\} & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

:כאשר M' המ"ט הבאה

y על כל קלט =M'

. אם "ab" אם (1

. ועונה כמוה w על M מריצה מריצה (2

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \{ab\} & w \notin L(M) \end{cases}$$

#### הוכחת הנכונות:

אם שני מקרים:  $\Leftarrow x \in \bar{L}_{\mathrm{acc}}$ 

$$f(x) \in L_{1a} \quad \Leftarrow \quad f(x) = \{\text{"ab"}\} \quad \Leftarrow \quad x \neq \langle M, w \rangle \quad \text{:1}$$
מקרה ב

$$f(x) \in L_{1a} \quad \Leftarrow \quad L\left(M'
ight) = \{\text{``ab''}\}$$
 מקרה 2:  $w 
otin L(M) - 1$  מקרה 2: מקרה 2:

$$L\left(M'
ight)=\Sigma^*$$
 אם  $f(x)=\langle M'
angle \iff w\in L(M)$  -  $x=\langle M,w
angle \iff x\notin \bar{L}_{\mathrm{acc}}$  אם  $\langle M'
angle \notin L_{1a} \iff a$  מכילה יותר ממילה אחת המתחילה ב-  $L\left(M'
ight) \iff f(x)\notin L_{1a} \iff f(x)\notin L_{1a}$ 

 $ar{L}_{
m acc} \leq L_{1a}$  לסיכום, הוכחנו רדוקציה

 $L_{1a} 
otin RE$  מכיוון ש- $ar{L}_{
m acc} 
otin ar{L}_{
m acc}$  ממשפט הרדוקציה מתקיים

### שאלה 4

## א) פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\emptyset} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

:כאשר M' המ"ט שדוחה כל קלט ו- M' המ"ט הבאה

y על כל קלט =M'

- . דוחה  $\Leftarrow y \neq "ab"$  אם (1
- . על w ועונה כמוה M אחרת מריצה M

#### אבחנה:

$$L\left(M'\right) = \begin{cases} \{\text{``ab''}\} & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

#### הוכחת הנכונות:

$$L\left(M'
ight)=\left\{ "ab"
ight\}$$
 ולפי האבחנה ול $f(x)=\langle M'
angle \quad \Leftarrow\quad w\in L(M)$  - ו $x=\langle M,w
angle \quad \Leftarrow\quad x\in L_{
m acc}$  אם  $f(x)\in L_{>1a}\quad \Leftarrow\quad \langle M'
angle \in L_{>1a}$ 

אם מקרים:  $\Leftarrow x \notin L_{\mathrm{acc}}$ 

$$L\left(M_{\emptyset}
ight)=\emptyset$$
 -1  $f(x)=\langle M_{\emptyset}
angle \quad x 
eq \langle M,w
angle \quad :1$  בקרה  $f(x) 
otin L_{\geq 1a} \quad \Leftarrow \quad L\left(M_{\emptyset}
ight) 
otin L_{\geq 1a} \quad \Leftarrow \quad L\left(M_{\emptyset}
ight)$  בא מכילה מילה המתחילה ב-  $f(x) 
otin L_{\geq 1a} \quad \Leftrightarrow \quad L\left(M_{\emptyset}
ight)$ 

$$L\left(M_{\emptyset}
ight)
otin L_{1a} \;L\left(M'
ight)=\emptyset$$
 לפי האבחנה  $w
otin L(M)$  -1  $x=\langle M,w \rangle$   $x=\langle M,w \rangle$  בקרה  $x=\langle M,w \rangle$  בקרה  $x=\langle M,w \rangle$  בי

 $L_{
m acc} \leq L_{\geq 1a}$  לסיכום, הוכחנו רדוקציה

 $L_{\geq 1a} 
otin R$  מכיוון ש- ב $L_{
m acc} 
otin R$  ממשפט הרדוקציה מתקיים

# שאלה 5

# א) פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M_{\emptyset}, M', M^* \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\emptyset}, M_{\text{even}}, M^* \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- ,היא מ"ט שדוחה כל קלט,  $M_\emptyset ullet$
- ,היא מ"ט שמקבלת כל קלט  $M^*$

y על כל קלט =M'

.אם 
$$|y|$$
 אי-זוגי אם (1

. על w ועונה כמוה מריצה M אחרת מריצה (2

אבחנה:

$$L\left(M'\right) = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \{y \ : \ |y| \mod 2 = 0\} & w \notin L(M) \end{cases}$$

## הוכחת הנכונות:

אם אפני מקרים:  $x \in \bar{L}_{\mathrm{acc}}$  אם

### :1 מקרה

$$x \neq \langle M, w \rangle$$
 
$$L\left(M_{\emptyset}\right) \subset L\left(M_{\mathrm{even}}\right) \subset L\left(M^{*}\right) \text{ -1 } f(x) = \langle M_{\emptyset}, M_{\mathrm{even}}, M^{*} \rangle \quad \Leftarrow \quad .f(x) \in L_{M_{1} \subset M_{2} \subset M_{3}} \quad \Leftarrow \quad .f(x) \in L_{M_{1} \subset M_{2} \subset M_{3}}$$

#### מקרה 2:

$$w
otin L(M')=\{y:|y|\mod 2=0\}$$
 ולפי האבחנה  $f(x)=\langle M'
angle$   $f(x)=\langle M'
angle$   $L(M_\emptyset)\subset L(M')\subset L(M^*)$   $\Leftrightarrow$  
$$f(x)\in L_{M_1\subset M_2\subset M_2}$$

$$x
otin ar{L}_{
m acc}$$
 אם  $x
otin ar{L}_{
m acc}$  אם  $w\in L(M)$  -1  $x=\langle M,w
angle$   $\Leftrightarrow$   $L\left(M'
ight)=\Sigma^*$  ולפי האבחנה  $f(x)=\langle M_\emptyset,M',M^*
angle$   $\Leftrightarrow$   $L\left(M'
ight)
otin L\left(M^*
ight)$   $\Leftrightarrow$   $f(x)
otin L_{M_1\subset M_2\subset M_3}$   $\Leftrightarrow$ 

 $ar{L}_{
m acc} \leq L_{M_1 \subset M_2 \subset M_3}$  לסיכום, הוכחנו רדוקציה

- $L_{M_1\subset M_2\subset M_3}
  otin R$  מכיוון ש- ממשפט הרדוקציה מתקיים ב ממשפט במ
- $L_{M,CM,CM} 
  otin RE$  מכיווו ש-  $\bar{L}_{con} 
  otin RE$  ממשפט הרדוקציה מתקיים

 $:L_{
m acc}$  -ל  $L_{arepsilon}$  ל ל-

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\text{loop}} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

:כאשר M' -מ"ט שלא עוצרת על אף קלט שלא מ"ט מ"ט מ"ט מ

y על כל קלט =M'

- .arepsilon מריצה M על
- . מקבלת  $M' \Leftarrow M'$  מקבלת M
  - .אם  $M' \Leftarrow$  מקבלת אם (3

### <u>אבחנה:</u>

$$L\left(M'
ight) = egin{cases} \Sigma^* & arepsilon & arepsilon \ \emptyset & arepsilon & arepsilon \ \end{pmatrix}$$
 עוצרת על  $M$ 

#### הוכת הנכונות:

$$\langle M' 
angle \in L_{
m acc} \quad \Leftarrow \quad L\left(M'
ight) = \Sigma^* \quad \Leftarrow \quad arepsilon \quad w$$
עוצרת על א ווארת על א  $M$  -ו  $x = \langle M, w 
angle \quad \Leftrightarrow \quad x \in L_arepsilon \quad f(x) \in L_{
m acc} \quad \Leftarrow$ 

:שני מקרים  $\Leftarrow x \notin L_{\varepsilon}$ 

$$f(x) 
otin L_{\mathrm{acc}} \quad \Leftarrow \quad f(x) = \langle M_{\mathrm{loop}} 
angle \quad \Leftarrow \quad x 
otin \langle M, w 
angle \quad :1$$
 מקרה ב

מקבלת M' ו- M' אשר שר לא  $\Leftrightarrow L\left(M'\right)=\emptyset \Leftrightarrow \varepsilon$  לא עוצרת על M ו-  $x=\langle M,w\rangle$  בערה בינ מקרה בינ M' לא עוצרת על M'

שאלה **7** פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\emptyset} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר לכל מכונת טיורינג שדוחה כל קלט. באשר  $M_{\emptyset}$  כאשר y קלט M'

- .שומרת את y על סרט נוסף  $\bullet$ 
  - w על M על  $\bullet$
- y=arepsilon אם M מקבלת  $M' \Leftarrow M$  מקבלת ס
  - \* אם כו. מקבלת.

אם M דוחה  $M' \Leftarrow \circ$ 

אבחנה

$$L(M') = \begin{cases} \{\varepsilon\} & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}.$$

### נכונות הרדוקציה

- . $\langle M_\emptyset \rangle$  אם אירה קידוד קבוע מכונת טיורינג שבודקת האם אם  $x=\langle M,w \rangle$  אם אם טיורינג שכונת טיורינג שבודקת אם אם אם כן, מחזירה קידוד של y ע"י הוספת קוד שמעתיק את או לסרט לסרט לסרט של אם כן, מחזירה קידוד של לy
  - $w \in L_{\mathrm{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L$  נראה כי (2)

 $x \in L_{\mathrm{acc}}$  אם

$$w \in L(M)$$
 -1  $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$ 

$$L(M') = \{ \varepsilon \}$$
 ולפי האבחנה  $f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow$ 

$$f(x) \in L \Leftarrow$$

 $x \notin L_{\mathrm{acc}}$  אם  $x \notin L_{\mathrm{acc}}$ 

- $f(x) \notin L \Leftarrow L(M_{\emptyset}) = \emptyset$  -1  $f(x) = \langle M_{\emptyset} \rangle \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$  •
- $f(x) \notin L \Leftarrow L\left(M'
  ight) = \emptyset$  ולפי האבחנה ולפי  $f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow w \notin L(M)$  ולפי ה $x = \langle M, w \rangle$

 $L \notin R$  , ומכיוון שר הרדוקציה ממשפט הרדוקציה ומכיוון שר בוקציה ומכיוון שר ומכיוון שר ומכיוו

 $L=L_{
m acc}$  : הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית אטענה שאלה 8

נניח בשלילה כי  $ar{L} \leq L$ . אזי

 $L_{
m acc}\in RE$  - בסתירה לכך ש,  $L_{
m acc}
otin T_{
m acc}
otin T_{
m acc}
otin RE$  אז  $\overline{L_{
m acc}}
otin RE$  אז המשפט הרדוקציה, מכיוון ש.  $\overline{L_{
m acc}}
otin RE$