שאלה 1 תהיינה $A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכח או הפרך:

א) אם $AB=AC$ אז $B=C$.

ב) אם $AB=0$ אז $A=0$ או $B=0$.

ג) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

ד) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

ה) $(AB)^t=A^tB^t$.

ו) $(A+B)^t=A^t+B^t$.

ז)

שאלה 2 הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

א) אם A מטריצה משולשת עליונה ו- B מטריצה משולשת עליונה, אז $A\cdot B$ מטריצה משולשת עליונה.

ב) אם A, B מטריצות אלכסוניות, אז $AB=BA$.

ג) אם A, B מטריצות ריבועיות המקיימות $AB=BA$ אז $AB^2=B^2A$.

שאלה 3 נניח ש- $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ מטריצה של משתנים ו- $b\in\mathbb{R}^n$. הוכיחו כי אם למערכת

$$AX=b\ ,\qquad b\neq\bar{0}\ .$$

יש יותר מפתרון אחד אז A לא הפיכה.

שאלה 4

א) נניח כי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו: אם A הפיכה אז $|A|\neq 0$.

ב) נניח כי $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו: אם AB הפיכה אז A הפיכה.

ג) תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הוכיחו כי אם A הפיכה ו- $A+B$ הפיכה אז

$$(A+B)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B(A+B)^{-1}\ .$$

שאלה 5 תהיינה $A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו:

א) אם A הפיכה ו- $BA=CA$ אז $B=C$.

ב) אם $AB = AC$ אז $B = C$.

ג) אם $AB = 0$ אז A ו- B אינן הפיכות.

ד) אם $AB = 0$ ו- $A \neq 0$ אז B איננה הפיכה.

ה) אם AB הפיכה אז A ו- B הפיכות.

ו) אם A הפיכה אז AB הפיכה.

ז) אם A הפיכה ו- B הפיכה אז $A+B$ הפיכה.

ח) אם A הפיכה ו- B לא הפיכה אז $A+B$ לא הפיכה.

ט) תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ויהי $f(x) = 2x^4 - x^2 + 3x - 2$ פולינום כך ש- $f(A) = 0$. אזי A הפיכה.

י) אם A הפיכה אז $A + A^t$ הפיכה.

שאלה 6 הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:
תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם A הפיכה ו- $A+B$ הפיכה אז

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(A+B)^{-1} \ .$$

שאלה 7 נתונה הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ של ווקטורים במרחב ווקטורי $\mathbb{R}^3$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:
אם הווקטורים $\{u_1, u_2\}$ בת"ל אז הווקטורים $\{u_1, u_2, u_3\}$ בת"ל.

שאלה 8 תהי $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. אומרים כי A מטריצה סטוקסטית אם הסכום של האיברים בכל עמודה שווה 1.
הוכיחו כי המכפלה של כל שתי מטריצות סטוקסטיות שווה למטריצה סטוקסטית.

שאלה 9 נניח ש- $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה המקדמים, ו- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$ ווקטור המשתנים של המערכת

הוכיחו: אם A הפיכה אז הפתרון היחיד למערכת $AX = 0$ הוא $X = 0$ (ווקטור האפס).

שאלה 10 תן דוגמא לשתי קבוצות S, T כך ש- $S \subseteq T$ ומתקיים:

א) T פורשת את $\mathbb{R}^4$ ו- S לא פורשת את $\mathbb{R}^4$.

ב) T לא פורשת את $\mathbb{R}^4$ ו- S לא פורשת את $\mathbb{R}^4$.

ג) T פורשת את $\mathbb{R}^4$ ו- S פורשת את $\mathbb{R}^4$.

שאלה 11

א) נתון כי $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ ומתקיים $A^8 + A = 0$. מצאו את $|A|$.

שאלה 12

הוכיחו או הפריכו: אם $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ ומתקיים $A^5 + A = 0$ אז A לא הפיכה.

שאלה 13

א) נניח כי $\{u_1, \cdots, u_k\} \in \mathbb{R}^n$ קבוצת וקטורים בת"ל ונניח ש $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

ב) אם $\{u_1, \cdots, u_k\}$ בת"ל אז גם $\{Au_1, \cdots, Au_k\}$ בת"ל.

ג) אם $\{Au_1, \cdots, Au_k\}$ בת"ל אז גם $\{u_1, \cdots, u_k\}$ בת"ל.

שאלה 14 תהיינה $X \subseteq Y$ קבוצות של וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$. הוכח או הפרך:

א) אם Y פורשת את $\mathbb{R}^n$ אז X פורשת את $\mathbb{R}^n$.

ב) אם $0 \in X$ אז X פורשת את $\mathbb{R}^n$.

ג) אם $0 \in X$ אז X לא פורשת את $\mathbb{R}^n$.

ד) אם X פורשת את $\mathbb{R}^n$ אז Y פורשת את $\mathbb{R}^n$.

ה) אם מספר הוקטורים ב- X גדול מ- n אז X פורשת את $\mathbb{R}^n$

ו) אם קיים $v \in Y$ כך ש- $v \notin X$ אז $\text{sp}(Y) \neq \text{sp}(X)$.

שאלה 15 תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times n}$. הוכח או הפרך:

א) אם למערכת $AX = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$ קיים פתרון אז למערכת $AX = \begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}$ קיים פתרון.

ב) אם למערכת $AX = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$ קיים פתרון יחיד אז למערכת $AX = \begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}$ קיים פתרון יחיד.

ג) אם $n = 3$ ולמערכת $AX = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$ קיים פתרון יחיד אז למערכת $AX = \begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}$ קיים פתרון יחיד.

ד) אם למערכת $AX = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ קיים פתרון אז למערכת $AX = \begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}$ קיים פתרון.

ה) יהיו $c, d \in \mathbb{R}^n$. אם למערכת $AX = c$ קיים פתרון ולמערכת $AX = d$ קיים פתרון, אז למערכת $AX = c + d$ קיים פתרון.

שאלה 16

תן דוגמא לשתי קבוצות S, T המוכלות ב - $\mathbb{R}^4$ כך ש- $S \subseteq T$ ומתקיים:

א) T בת"ל ו- S בת"ל.

ב) T ת"ל ו- S ת"ל.

ג) T ת"ל ו- S בת"ל.

שאלה 17

תהיינה $X \subseteq Y$ קבוצות של וקטורים ב - $\mathbb{R}^n$. הוכח או הפרך:

א) אם X בת"ל אז Y בת"ל.

ב) אם Y בת"ל אז X בת"ל.

ג) אם $0 \in X$ אז X ת"ל.

ד) אם מספר הוקטורים ב - X קטן מ - n אז X בת"ל.

שאלה 18 יהי V מרחב ווקטורי, $T : U \to V$ העתקה לינארית ונניח כי ווקטורים $\{u_1, \ldots, u_n\} \in U$ ווקטורים. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדיתאת הטענה הבאה:

א) אם $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ בת"ל אז $u_1, \ldots, u_n$ בת"ל.

ב) אם $u_1, \ldots, u_n$ בת"ל אז $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ בת"ל.

שאלה 19

א) תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times 2}$ כאשר F שדה. נתון שקיימים $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in \mathbb{F}^2$ כך ש $A\mathrm{v}_1 = A\mathrm{v}_2 = 0$ וכן $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ בת"ל. הוכיחו ש- $A = 0$.

ב) תהי A מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$ המקיימת את המשוואה

$$A^2 + 5A + I = 0 \ .$$

הוכיחו ש- A הפיכה ומצאו את A^{-1}.

שאלה 20 תהיינה $X \subseteq Y$ קבוצות של וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$. הוכח או הפרך:

א) אם Y פורשת את $\mathbb{R}^n$ אז X פורשת את $\mathbb{R}^n$.

ב) אם $0 \in X$ אז X פורשת את $\mathbb{R}^n$.

ג) אם $0 \in X$ אז X לא פורשת את $\mathbb{R}^n$.

ד) אם X פורשת את $\mathbb{R}^n$ אז Y פורשת את $\mathbb{R}^n$.

ה) אם מספר הוקטורים ב- X גדול מ- n אז X פורשת את $\mathbb{R}^n$.

ו) אם קיים $\mathrm{v} \in Y$ כך ש $\mathrm{v} \notin X$ אז $\mathrm{sp}(X) \neq \mathrm{sp}(Y)$.

פתרונות

שאלה 1

תהיינה $A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו:

א) אם $AB=AC$ אז $B=C$:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

$$A\cdot B=A\cdot C=0\ ,\qquad B\neq C\ .$$

ב) אם $AB=0$ אז $A=0$ או $B=0$:

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

$$A\cdot B=0\ ,\qquad A\neq 0\ ,B\neq 0\ .$$

ג) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$:

טענה לא נכונה. הסבר:

$$(A+B)^2=(A+B)\cdot(A+B)=A^2+AB+BA+B^2\neq A^2+2AB+B^2$$

עבור מטריצות A,B לא מתחלפות.

דוגמה נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&2\\0&0\end{pmatrix}.$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\0&0\end{pmatrix}\ ,\qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}-1&2\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}\ .$$

$AB\neq BA$ לכן

$$A^2+AB+BA+B^2\neq A^2+2AB+B^2\ .$$

ד) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$:

טענה לא נכונה. הסבר:

$$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2$$

רק עבור מטריצות מתחלפות, ז"א $AB = BA$.

דוגמה נגדית:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

לכן $AB \neq BA$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2 .$$

ה) <u>$(AB)^t = A^t B^t$:</u>

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} , \qquad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} .$$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^t \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 18 & 4 \end{pmatrix} .$$

ז"א $(AB)^t \neq A^t B^t$.

ו) <u>$(A+B)^t = A^t + B^t$:</u>

טענה נכונה. הוכחה:

נוכיח את הטענה לכל איבר A_{ij} של A וכל איבר B_{ij} של B ($i, j = 1, \ldots n$).

$$\left((A+B)^t\right)_{ij} = A_{ji} + B_{ji} = (A^t)_{ij} + (B^t)_{ij} = (A^t + B^t)_{ij}$$

לכל $i, j = 1, \ldots n$.

ז)

<u>שאלה 2</u>

א) <u>טענה:</u> אם A, B משולשית עליונה אז $A \cdot B$ משולשית עליונה.

מספיק להוכיח כי $(A \cdot B)_{ij} = 0$ לכל $i > j$.

הוכחה: נניח ש- $i > j$.

$$(A \cdot B)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots A_{in}B_{nj} \ .$$

לכל איבר $A_{ik}B_{kj}$ יש 5 אפשריות:

$i > j \geq k$:

A משולשית עליונה לכן $A_{ik} = 0$.

$i > k > j$:

A משולשית עליונה ו- B משולשית עליונה לכן $A_{ik} = 0$ ו- $B_{kj} = 0$.

$i = k > j$:

B משולשית עליונה לכן $B_{kj} = 0$.

$i > k = j$:

A משולשית עליונה לכן $A_{ik} = 0$.

$k > i \geq j$:

B משולשית עליונה לכן $B_{kj} = 0$.

בסה"כ עבור כל אחד מהאפשריות, כל איבר בסכום, $A_{ik}B_{kj} = 0$. כלומר כל איבר מתאפס בגלל ש- A משולשית עליונה ו- B משולשית עליונה.
לפיכך, מצאנו כי אם $i > j$ אז $(A \cdot B)_{ij} = 0$. מש"ל.

ב) טענה: אם A, B אלכסוניות, אז $AB = BA$.

צריך להוכיח: $(A \cdot B)_{ij} = (B \cdot A)_{ij}$.

הוכחה (שיטה 1):

המכפלה של שתי מטריצות אלכסוניות A, B שווה למטריצה אלכסונית, והאיברים באלכסון של המטריצה המתקבלת שווים למכפלה של האיברים על האלכסונים של A ו- B, כלומר אם

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix} ,$$

אז

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22}B_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn}B_{nn} \end{pmatrix} .$$

לכן

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22}B_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn}B_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{22}A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{nn}A_{nn} \end{pmatrix} = B\cdot A$$

מש"ל.

הוכחה (שיטה 1):

אם A, B אלכסוניות, אז

$$\begin{aligned}(A\cdot B)_{ij} =& A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{ii}B_{ij} + \ldots + A_{in}B_{nj} = A_{ii}B_{ij} \\ =& \begin{cases} A_{ii}B_{ii} & i=j\ , \\ 0 & i\neq j\ . \end{cases}\end{aligned}$$

מצד שני,

$$(B\cdot A)_{ij} = \begin{cases} B_{ii}A_{ii} & i=j\ , \\ 0 & i\neq j\ . \end{cases} = \begin{cases} A_{ii}B_{ii} & i=j\ , \\ 0 & i\neq j\ . \end{cases}$$

ז"א

$$(A\cdot B)_{ij} = (B\cdot A)_{ij}$$

לכן $AB=BA$. מש"ל.

שאלה 3

נוכיח דרך השלילה.
נניח ש- X_1, X_2 פתרונות למערכת $A\mathrm{x}=b$, כאשר $X_2\neq X_1$ ו- $b\neq\bar{0}$.
נניח ש- A הפיכה.
אז $AX_1=b$ ו- $AX_2=b$.
לכן

$$A\cdot(X_1-X_2) = b-b=\bar{0}\ .$$

A הפיכה אז A^{-1} קיימת. נכפיל ב- A^{-1} מצד שמאל ונקבל

$$A^{-1}\cdot A\cdot(X_1-X_2) = A^{-1}\cdot\bar{0} \quad\Rightarrow\quad I\cdot(X_1-X_2)=\bar{0} \quad\Rightarrow\quad X_1-X_2=\bar{0} \quad\Rightarrow\quad X_1=X_2\ ,$$

בסתירה לכך ש- $X_2\neq X_1$. לכן A לא יכולה להיות הפיכה.

שאלה 4

א) טענה נכונה. A הפיכה $\Leftarrow$ קיימת A^{-1} כך ש- $AA^{-1}=I$ $\Leftarrow$ $|AA^{-1}|=|I|=1$ $\Leftarrow$ $|A||A^{-1}|=1$ ולכן $|A|\neq 0$.

ב) AB הפיכה לכן $|AB|\neq 0$ לכן $|A||B|\neq 0$ לכן $|A|\neq 0$ ו- $|B|\neq 0$ לכן A הפכיה.

ג)

$$(A+B)^{-1}(A+B) = A^{-1}(A+B) - A^{-1}B(A+B)^{-1}(A+B) = I_{n\times n} + A^{-1}B - A^{-1}BI_{n\times n} = I_{n\times n} \ .$$

שאלה 5

א) <u>אם A הפיכה ו- $BA = CA$ אז $B = C$.</u>

טענה נכונה. הוכחה:

A הפיכה לכן קיימת A^{-1}. נכפיל מצד ימין ב- A^{-1}:

$$B \cdot A \cdot A^{-1} = C \cdot A \cdot A^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad B = C \ .$$

ב) <u>אם $AB = AC$ אז $B = C$.</u>

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ , \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \ .$$

$AB = AC = 0$, $B \neq C$.

ג) <u>אם $AB = 0$ אז A ו- B אינן הפיכות.</u>

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

$A \cdot B = 0$ ו- B הפיכה.

ד) <u>אם $AB = 0$ ו- $A \neq 0$ אז B איננה הפיכה.</u>

טענה נכונה. הוכחה:
נוכיח בדרך השליליה. נניח ש- $A \cdot B = 0$ ו- $A \neq 0$ ו- B הפיכה.
אז קיימת B^{-1}. נכפיל את $AB = 0$ מצד ימין ב- B^{-1}:

$$A \cdot B \cdot B^{-1} = 0 \cdot B^{-1} \quad \Rightarrow \quad A \cdot I = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \ ,$$

בסתירה דכך ש- $A \neq 0$.

ה) <u>אם AB הפיכה אז A ו- B הפיכות.</u>

טענה נכונה. הוכחה:
AB הפיכה $\Leftarrow$ $|AB| \neq 0$ $\Leftarrow$ $|A| \cdot |B| \neq 0$ $\Leftarrow$ $|A| \neq 0$ וגם $|B| \neq 0$. לפיכך A הפיכה וגם B הפיכה.

ו) <u>אם A הפיכה אז AB הפיכה.</u>

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

A הפיכה אבל AB לא הפיכה.

ז) אם A הפיכה ו- B הפיכה אז $A+B$ הפיכה.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + I_{2\times 2} , \qquad B = -I , \qquad A+B = I_{2\times 2} - I_{2\times 2} = 0_{2\times 2} .$$

$|A| = |I| = 1$,

$|B| = |-I| = (-1)^2|I| = 1$,

$|A+B| = 0$.

ז"א A הפיכה, B הפיכה, $A+B$ לא הפיכה.

ח) אם A הפיכה ו- B לא הפיכה אז $A+B$ לא הפיכה.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$|A| = 1$, $|B| = 0$, $|A+B| = 2$.
ז"א A הפיכה, B לא הפיכה, $A+B$ הפיכה.

ט) תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ויהי $f(x) = 2x^4 - x^2 + 3x - 2$ פולינום כך ש- $f(A) = 0$. אזי A הפיכה.

טענה נכונה. הוכחה:
לפי הנתון,

$$f(A) = 2A^4 - A^2 + 3A - 2I = 0 \quad \Rightarrow \quad A\cdot(2A^3 - A + 3) = 2I \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{2}\left(2A^3 - A + 3I\right)$$

ז"א A^{-1} קיימת לכן A הפיכה.

י) אם A הפיכה אז $A+A^t$ הפיכה.

טענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} , \qquad A + A^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} .$$

$|A| = 1 \Leftarrow A$ הפיכה.
$|A+A^t| = 0 \Leftarrow A+A^t$ לא הפיכה.

שאלה 6 הטענה נכונה. הוכחה:

נכפיל מצד ימין ב- $A+B$:

$$(A+B)^{-1}(A+B) = A^{-1}(A+B) - A^{-1}B(A+B)^{-1}(A+B) = I_{n\times n} + A^{-1}B - A^{-1}BI_{n\times n} = I_{n\times n} \ .$$

שאלה 7

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \ , \quad u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \ , u_3 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \ .$$

הרי $\{u_1,u_2\}$ בת"ל ו- $\{u_1,u_2,u_3\}$ ת"ל בגלל ש- $u_3 = 2u_1$.

שאלה 8

$$A_1 = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix} \ , \qquad A_2 = \begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix} \ .$$

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix}a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2\\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2\end{pmatrix}$$

$$a_1a_2+b_1c_2+c_1a_2+d_1c_2 = a_2(a_1+c_1)+c_2(b_1+d_1) = a_2+c_2 = 1 \ ,$$

$$a_1b_2+b_1d_2+c_1b_2+d_1d_2 = b_2(a_1+c_1)+d_2(b_1+d_1) = b_2+d_2 = 1 \ .$$

שאלה 9 נוכיח דרך השלילה. נניח ש A הפיכה ו קיים פתרון $X\neq 0$.
A הפיכה אז A^{-1} קיימת.

$$AX=0 \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}\cdot 0 \quad \Rightarrow \quad IX=0 \quad \Rightarrow \quad X=0$$

בסתירה לכך ש- $X\neq 0$.

שאלה 10

א) $S = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $T = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $S\subseteq T$. S לא פורשת את $\mathbb{R}^4$, T פורשת את $\mathbb{R}^4$ כי T הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^4$.

ב) $S = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $T = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $S\subseteq T$. S ו T לא פורשות את $\mathbb{R}^4$.

ג) $T = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$, $S = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$.

שאלה 11

$$A^8 + A = 0 \quad \Rightarrow \quad A^8 = -A \quad \Rightarrow \quad |A^8| = (-1)^8 |A| \quad \Rightarrow \quad |A|^8 = |A|$$

A הפיכה לכן $|A| \neq 0$ לכן אפשר לחלק ב- $|A|$:

$$|A|^8 = |A| \quad \Rightarrow \quad |A|^7 = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| = 1 \ .$$

שאלה 12

$$A^5 + A = 0 \quad \Rightarrow \quad A^5 = -A \quad \Rightarrow \quad |A^5| = |-A| \quad \Rightarrow \quad |A|^5 = -|A| \ .$$

נניח כי A הפיכה. אז $|A| \neq 0$ ז"א קיים $\frac{1}{|A|}$. אז נקבל

$$|A|^4 = -1 \ .$$

בסתירה לכך ש- $|A|^4$ חיובי.

שאלה 13

א) טענה נכונה. הסבר:

נניח ש- $\{Au_1, \ldots, Au_k\}$ בת"ל.

הקבוצה בת"ל לכן ווקטור האפס לא בקבוצה $\{Au_1, \ldots, Au_k\}$. לכן $A \neq 0$.

נוכיח ש- $\{u_1, \cdots, u_k\}$ בת"ל דרך השלילה.

נניח כי $\{u_1, \cdots, u_k\}$ ת"ל.

ז"א קיימים סקלרים שלא כולם אפסים כך ש- $t_1 u_1 + \cdots + t_k u_k = \bar{0}$.

ז"א קיימים סקלרים שלא כולם אפסים כך ש-

$$A(t_1 u_1 + \cdots + t_k u_k) = A\bar{0} \quad \Rightarrow \quad t_1 A u_1 + \cdots t_k A u_k = \bar{0}$$

ז"א $\{Au_1, \ldots, Au_k\}$ ת"ל.

בסתירה לכך ש- $\{Au_1, \ldots, Au_k\}$ בת"ל.

ב) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: הקבוצה $\left\{ u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} . \right\}$ בת"ל. נניח כי $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = 0$ (מטריצה האפס). אז $\left\{ Au_1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, Au_2 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} . \right\}$ ת"ל.

שאלה 14

א) $Y \subseteq X$ ו- Y פורשת $\mathbb{R}^n \Leftarrow X$ פורשת $\mathbb{R}^n$.

דוגמה נגדית:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \ , \qquad , \ , \ Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$X, Y \in \mathbb{R}^2$. Y פורשת את $\mathbb{R}^2$, X לא פורשת את $\mathbb{R}^2$.

ב) $X \ni 0 \Leftarrow X$ פורשת את $\mathbb{R}^n$.

דוגמה נגדית:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

X לא פורשת את $\mathbb{R}^2$.

ג) $X \ni 0 \Leftarrow X$ לא פורשת את $\mathbb{R}^n$.

דוגמה נגדית:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

X פורשת את $\mathbb{R}^2$.

ד) X פורשת את $\mathbb{R}^n \Leftarrow Y$ פורשת את $\mathbb{R}^n$.

נתון: $X \subseteq Y, \text{sp}(X) = \mathbb{R}^n$.
צ"ל: $\text{sp}(Y) = \mathbb{R}^n$.
הוכחה:
נקח $\text{v} \in \mathbb{R}^n$. אז $\text{v} \in \text{sp}(X)$. לכן קיימים $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$ כך ש

$$\text{v} = k_1 u_1 + \ldots + k_m u_m \ .$$

$X \subseteq Y$, לכן $u_1, \ldots, u_m \in Y$, $\Leftarrow$ $\text{v} \in \text{sp}(Y)$.

ה) מספר הוקטורים ב- X גדול מ- $n \Leftarrow X$ פורשת את $\mathbb{R}^n$

דוגמה נגדית:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

X אינה פורשת את $\mathbb{R}^2$.

ו) קיים $\text{v} \in Y$ כך ש- $\text{v} \notin X \Leftarrow \text{sp}(Y) \neq \text{sp}(X)$.

דוגמה נגדית:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \ , \qquad Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{sp}(Y) = \text{sp}(X) = \mathbb{R}^2 \ .$$

שאלה 15 $A\in\mathbb{R}^{3\times n}$, נסמן את העמודות $u_1,\ldots,u_n$. אז $u_1,\ldots,u_n\in\mathbb{R}^3$.

א) טענה: למערכת $AX=\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$ יש פתרון, ז"א וקטור $\mathrm{v}=\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}\in \mathrm{sp}(u_1,\ldots,u_n)$.

דוגמה נגדית: $u_1=\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$, $u_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. $\mathrm{v}\in\mathrm{sp}(u_1,u_2)$ וקטור $\mathrm{v}'=\begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}\notin\mathrm{sp}(u_1,u_2)$

ב) דוגמה נגדית: $u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $u_1=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}$. $\mathrm{v}\in\mathrm{sp}(u_1,u_2)$ כי $u_1+u_2=\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}=\mathrm{v}$. u_2,u_1 בת"ל, לכן למערכת $AX=\mathrm{v}$ יש פתרון יחיד.

נבדוק אם למערכת $AX=\begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}$ יש פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&7\\0&4&4\\0&7&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&2&7\\0&1&1\\0&7&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&2&7\\0&1&1\\0&0&-4\end{array}\right)$$

אין פתרון למערכת.

ג) $n=3$. למערכת $AX=\mathrm{v}$ יש פתרון יחיד, לכן הוקטורים u_1,u_2,u_3 בת"ל. לכן, u_1,u_2,u_3 מהווים בסיס של $\mathbb{R}^3$ $\Leftarrow$ למערכת $AX=\begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}$ יש פתרון יחיד.

ד) <u>דוגמה נגדית:</u>

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\quad u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\ .$$

למערכת $AX=0$ יש פתרון, למערכת $AX=\begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}$ אין פתרון.

ה) נסמם ב v_1 פתרון של המערכת $AX=c$, וב v_2 פתרון של המערכת $AX=d$.
ז"א

$$A\mathrm{v}_1=c\ ,\qquad A\mathrm{v}_2=d\ .$$

לכן

$$A(\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2)=A\mathrm{v}_1+A\mathrm{v}_2=c+d\ .$$

שאלה 16

א)

$$T=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\},\qquad S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ב)

$$T=\{\bar{0}\}\ ,\qquad S=\{\bar{0}\}$$

ג)

$$T=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\},\qquad S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

שאלה 17

א) נתון: $X,Y\in\mathbb{R}^n$, $X\subseteq Y$.

טענה: X בת"ל $\Leftarrow$ Y בת"ל.

דוגמה נגדית:

$X=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^2$ בת"ל, $Y=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^2$ ת"ל.

ב) נתון: $X\subseteq Y$, Y בת"ל.

צריך להוכיח: X בת"ל.

הוכחה:

נניח מדרך השלילה, $X=\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\}$ ת"ל. לכן קיימים סקלרים $k_1,\ldots,k_n$ שלא כולם אפסים כך ש- $k_1\mathrm{v}_1+\ldots+k_n\mathrm{v}_n=\bar{0}$. $X\subseteq Y \Leftarrow \mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\in Y$. מכאן נובע ש Y ת"ל. סתירה.

ג) נתון: $X\subseteq Y$, $\bar{0}\in X$

צ"ל : X ת"ל

הוכחה :

לכל $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n\in X$ מתקיים

$$0\cdot\mathrm{v}_1+\ldots 0\cdot\mathrm{v}_n+1\cdot\bar{0}=\bar{0}\ .$$

לכן X ת"ל.

■

ד) טענה: מספר הוקטורים ב - X קטן מ - $n \Leftarrow X$ בת"ל.

דוגמה נגדית:

$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^2$ ת"ל.

שאלה 18

הטענה נכונה. הסבר:

נתון: $T : U \to V$ העתקה לינארית. $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ בת"ל.

צריך להוכיח: $u_1, \ldots, u_n$ בת"ל.

הוכחה: נוכיח דרך השלילה. נניח כי $u_1, \ldots, u_n$ ת"ל. אז קיימים סקלרים $k_1, \ldots, k_n$ שכולם אפסים כך ש

$$k_1 u_1 + \ldots + k_n u_n = \bar{0} \ .$$

לכן

$$T(k_1 u_1 + \ldots + k_n u_n) = T(\bar{0}) = \bar{0}$$

$\Leftarrow$

$$k_1 \cdot T(u_1) + \ldots + k_n \cdot T(u_n) = \bar{0}$$

ז"א $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ ת"ל.
בסתירה לכך ש- $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ בת"ל.

א) טענה לא נכונה. דוגמה נגדית: נניח כי T העתקה לינארית שמוגדרת $T(u) = 0$ לכל $u \in U$. נניח כי הקבוצה $\{u_1, \ldots, u_n\}$ בת"ל. הקבוצה $\{T(u_1) = 0, \ldots, T(u_n) = 0\}$ ת"ל.

שאלה 19

א) תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times 2}$ כאשר F שדה. נתון שקיימים $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in \mathbb{F}^2$ כך ש $A\mathrm{v}_1 = A\mathrm{v}_2 = 0$ וכן $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ בת"ל. הוכיחו ש- $A = 0$.

נתון: $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ בת"ל, $A\mathrm{v}_1 = \bar{0}$,$A\mathrm{v}_2 = \bar{0}$.

צריך להוכיח:: $A = 0$

הוכחה:

$A\mathrm{v}_1 = \bar{0}$ ו- $A\mathrm{v}_2 = \bar{0}$ יהיו $k_1, k_2 \in F$ סקלירם כך ש- $k_1 \neq 0, k_2, \neq 0$. אז

$$k_1 \cdot A\mathrm{v}_1 + k_2 \cdot A\mathrm{v}_2 = \bar{0} \qquad \Rightarrow \qquad A \cdot (k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2) = \bar{0} \ .$$

ז"א $A = 0$ או $k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2 = 0$.

אם $k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2 = 0$ אז קיים צירוף לינארי של $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ השווה לאפס עם מקדמים שלא כולם אפסים.
ואז $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ ת"ל.
וזאת בסתירה לכך ש- $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ בת"ל.

לכן $A = 0$.

ב) נתון: $A^2 + 5A + I = 0$.
לכן

$$A^2 + 5A = -I \quad \Rightarrow \quad A(A+5I) = -I \quad \Rightarrow \quad |A| \cdot |A+5I| = (-1)^n \ .$$

נניח כי A לא הפיכה $\Leftarrow$ $|A| = 0$ ואז נקבל כי $(-1)^n = 0$. סתירה.
לכן A הפיכה.

$$-A(A+5I) = I \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = -(A+5I) \ .$$

שאלה 20

א) דוגמה נגדית:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

X לא פורשת את $\mathbb{R}^2$, Y פורשת את $\mathbb{R}^2$.

ב) דוגמה נגדית: $X = \{\bar{0}\}$ לא פורשת את $\mathbb{R}^2$.

ג) דוגמה נגדית: $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ פורשת את $\mathbb{R}^2$.

ד) נתון: $X \subseteq Y$

צ"ל: Y פורשת את $\mathbb{R}^n$.

הוכחה

$\mathrm{sp}(X) = \mathbb{R}^n$, לכן לכל $u \in \mathbb{R}^n$ קיימים $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n \in X$ כך ש

$$u = k_1\mathrm{v}_1 + \ldots + k_n\mathrm{v}_n \ .$$

$X \subseteq Y$ לכן $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n \in Y$ $\Leftarrow$ $u \in \mathrm{sp}(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$. ז"א $\mathrm{sp}(Y) = \mathbb{R}^n$.

ה) דוגמה נגדית: $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ לא פורשת את $\mathbb{R}^2$.

ו) דוגמה נגדית: $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathrm{sp}(X) = \mathrm{sp}(Y)$.