

שיעור 10

המחלקה P והמחלקה NP

10.1 המחלקה P

הגדרה 10.1 בעיית הכרעה

בעיית הכרעה מוגדרת באופן הבא:

"בהינתן קלט כלשהו, האם הקלט מקיים תנאי מסויים ? "

דוגמה 10.1 דוגמה של בעיית הכרעה

לדוגמה, בהינתן מספר n , האם n ראשוני?

משפט 10.1 שקיות בין בעייה לשפה

כל בעייה הכרעה ניתן לתאר כשפה שקולה:

. בעיית הכרעה \equiv שפה

דוגמה 10.2

לדוגמה, הבעיית הכרעה הבאה:

"בהינתן מספר n , האם n ראשוני? "

ניתנת לרשום כשפה הבאה:

$$L_{\text{prime}} = \{ \langle n \rangle \mid n \text{ ראשוני} \}.$$

הגדרה 10.2 אלגוריתם זמן פולינומיאלי

אומרים כי אלגוריתם A מכריע בעייה בזמן פולינומיאלי אם קיים קבוע $c > 0$ כך שזמן הריצה של A על קלט w חסום ע"י $O(|w|^c)$.

התזה של צרף' טיורינג אומר שאם קיים אלגוריתם המכריע בעייה בזמן פולינומיאלי, אזי קיימת מכונת טיורינג דטרמיניסטית המכריעה את השפה השקולה לבעייה זו בזמן פולינומיאלי.

. אלגוריתם מכריע \equiv מכונת טיורינג דטרמיניסטית

הגדרה 10.3 המחלקה P

המחלקה P היא אוסף כל הבעיות (השפות) שקיים עבורן אלגוריתם (מכונת טיורינג דטרמיניסטית) המכריע אותן בזמן פולינומיאלי.

10.2 דוגמאות לבעיות ב- P

(1)

$$PATH = \{ \langle G, s, t \rangle \mid t \text{ -} s \text{ מסלול מ-} G \} \in P$$

(2)

$$RELPRIME = \{ \langle x, y \rangle \mid x \text{ ו-} y \text{ זרים} \} \in P$$

10.3 בעיית המסלול ההמילטוני $HAMPATH$

הגדרה 10.4 $HAMPATH$

בהינתן גרף מכוון $G = (V, E)$ ושני קודקודים $s, t \in V$. מסלול ההמילטוני מ- s ל- t ב- G הוא מסלול מ- s ל- t שעובר דרך כל קודקוד בגרף בדיוק פעם אחת.

לדוגמה:



הגדרה 10.5 בעיית $HAMPATH$

קלט: גרף מכוון $G = (V, E)$ ושני קודקודים $s, t \in V$.

פלט: האם G מכיל מסלול ההמילטוני מ- s ל- t ?

$$HAMPATH = \{ \langle G, s, t \rangle \mid G \text{ גרף מכוון המכיל מסלול ההמילטוני מ-} s \text{ ל-} t \}$$

נשאל שאלה: האם $HAMPATH \in P$?

לא ידוע האם קיים אלגוריתם המכריע את $HAMPATH$ בזמן פולינומיאלי (שאלה פתוחה).

• בהינתן קלט $\langle G, s, t \rangle$, האם $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH$?

• נענה על שאלה אחרת:

בהינתן קלט $\langle G, s, t \rangle$, ומחרוזת y , האם $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH$?

• יתן לבדוק האם y היא מסלול ההמילטוני מ- s ל- t ב- G בזמן פולינומיאלי ולענות בהתאם.

• במקרה זה, אומרים כי $HAMPATH$ ניתנת לאימות בזמן פולינומיאלי.

10.4 אלגוריתם אימות

הגדרה 10.6 אלגוריתם אימות

אלגוריתם אימות עבור בעיית A הוא אלגוריתם V כך שלכל קלט $w \in \Sigma^*$ מתקיים:

אם $w \in A$ אז ורק אם קיימת מחרוזת (עדות) y באורך פולינומיאלי ב- $|w|$ כך ש- V מקבל את הזוג (w, y) כלומר:

• אם $w \in A \iff$ קיים y כך ש: $V(w, y) = T$.

• אם $w \notin A \iff$ לכל y מתקיים $V(w, y) = F$.

הערה 10.1

- זמן ריצה של אלגוריתם אימות נמדד ביחס לגודל הקלט $|w|$.
- אלגוריתם אימות פולינומיאלי אם הוא רץ בזמן פולינומיאלי.

10.5 המחלקה NP

הגדרה 10.7 המחלקה NP

המחלקה NP היא אוסף כל הבעיות שקיים עבורן אלגוריתם אימות פולינומיאלי.

משפט 10.2 $HAMPATH \in NP$

בעיית המסלול ההמילטוני $HAMPATH$:

קלט: גרף מכוון $G = (V, E)$ ושני קודקודים $s, t \in V$.

פלט: האם G מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- t ?

$$HAMPATH = \{ \langle G, s, t \rangle \mid \text{גרף מכוון המכיל מסלול המילטוני מ-} s \text{ ל-} t \}$$

הוכיחו כי $HAMPATH \in NP$.

הוכחה: נבנה אלגוריתם אימות V עבור $HAMPATH$.

$V(\langle G, s, t \rangle, y) = T$ על קלט $(\langle G, s, t \rangle, y)$:

(1) בודק האם y היא סדרה של

$$u_1, u_2, \dots, u_n$$

השונים זה מזה.

• אם לא \iff דוחה.

(2) בודק האם $u_1 = s$ ו- $u_n = t$.

• אם לא \Leftarrow דוחה.

(3) בודק שכל הצלעות (u_i, u_{i+1}) (לכל $1 \leq i \leq n$) קיימות ב- G .

• אם כן \Leftarrow מקבל.

• אם לא \Leftarrow דוחה.

נכונות

• זמן הריצה של האלגוריתם הוא פולינומיאלי בגודל הקלט.

• אם $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH \Leftarrow G$ מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- $t \Leftarrow$ עבור y שהוא קידוד של מסלול זה, V יקבל את הזוג $(\langle G, s, t \rangle, y)$.

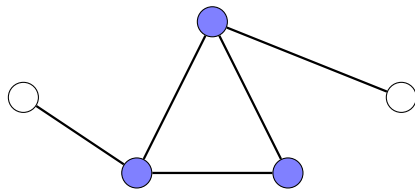
• אם $\langle G, s, t \rangle \notin HAMPATH \Leftarrow G$ לא מכיל מסלול המילטוני מ- s ל- $t \Leftarrow$ לכל y , האלגוריתם ידחה את הזוג $(\langle G, s, t \rangle, y)$.

■

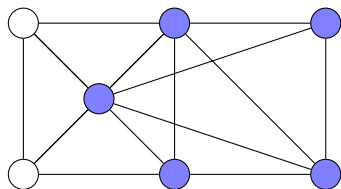
הגדרה 10.8 קליקה

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, קליקה ב- G היא תת-קבוצה של קודקודים $C \subseteq V$ כך שלכל שני קודקודים $u, v \in C$ מתקיים $(u, v) \in E$.

קליקה בגודל $k = 3$:



קליקה בגודל $k = 5$:





הגדרה 10.9 בעיית הקליקה

קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר k .

פלט: האם G קליקה בגודל k ?

$$CLIQUE = \{ \langle G, k \rangle \mid k \text{ המכיל קליקה בגודל } k \}$$

משפט 10.3 $CLIQUE \in NP$

$$CLIQUE \in NP.$$

הוכחה: נבנה אלגוריתם אימות V עבור $CLIQUE$.

$$V = \text{על קלט } (\langle G, k \rangle, y)$$

(1) בודק האם y היא קבוצה של k קודקודים שונים מ- G .

• אם לא \Leftarrow דוחה.

(2) בודק האם כל שני קודקודים מ- y מחוברים בצלע ב- G .

• אם כן \Leftarrow מקבל.

• אם לא \Leftarrow דוחה.

הגדרה 10.10 בעיית $SubSetSum$

קלט: קבוצת מספרים $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ומספר t .

פלט: האם קיימת תת-קבוצה של S שסכום איבריה שווה t ?

$$SubSetSum = \left\{ \langle S, t \rangle \mid \sum_{x \in Y} x = t \text{ ש-} Y \subseteq S \text{ קיימת} \right\}$$

משפט 10.4 $SubSetSum \in NP$

$$SubSetSum \in NP.$$

הוכחה: נבנה אלגוריתם אימות V עבור $SubSetSum$.

$V = \text{על קלט } (\langle S, t \rangle, y)$:

(1) בודק האם y היא תת-קבוצה של S .

• אם לא \Leftarrow דוחה.

(2) בודק האם סכום המספרים ב- y שווה t .

• אם לא \Leftarrow דוחה.

• אחרת \Leftarrow מקבל.



10.6 הקשר בין NP למכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

NP=Non-deterministic polynomial-time.

משפט 10.5

לכל בעייה A :

$A \in NP$ אם ורק אם קיימת מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית המכריעה את A בזמן פולינומיאלי.

דוגמה 10.3

נבנה מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית M המכריעה את $CLIQUE$ בזמן פולינומיאלי.

$M = \text{על קלט } \langle G, k \rangle$:

• בוחרת באופן אי-דטרמיניסטי קבוצה y של k קודקודים מ- G .

• בודקת האם כל שני קודקודים מ- y מחוברים בצלע ב- G .

* אם כן \Leftarrow מקבלת.

* אחרת \Leftarrow דוחה.

אלגוריתם אימות \equiv מ"ט א"ד.

10.7 הקשר בין המחלקה P ו-NP

$P =$ כל הבעיות שניתן להכריע בזמן פולינומיאלי.

$NP =$ כל הבעיות שניתן לאמת בזמן פולינומיאלי.

משפט 10.6

$$P \subseteq NP.$$



שאלה פתוחה: האם $P = NP$?

משפט 10.7

P סגורה תחת משלים.

הוכחה: אם $A \in P$ אזי גם $\bar{A} \in P$.

הגדרה 10.11 $CoNP$

$$CoNP = \{A \mid \bar{A} \in NP.\}$$

לדוגמה:

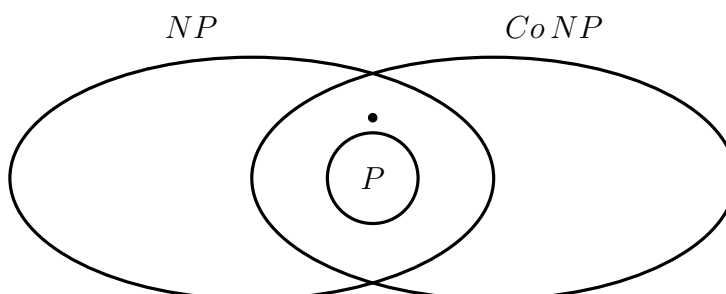
$$\overline{HAMPATH} \in CoNP.$$

$$\overline{CLIQUE} \in CoNP.$$

שאלה פתוחה: האם $NP = CoNP$?

משפט 10.8

$$P \subseteq NP \cap CoNP.$$



שאלה פתוחה: האם $P = NP \cap CoNP$?

נדון בשאלה המרכזית: האם $P = NP$?

הגדרה 10.12 פונקציה פולינומיאלית

בהינתן פונקציה $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, אומרים כי f חשיבה בזמן פולינומיאלי אם קיים אלגוריתם (מ"ט דטרמיניסטי) המחשב את f בזמן פולינומיאלי.

הגדרה 10.13 רדוקציה פולינומיאלית

בהינתן שתי בעיות A ו- B . אומרים כי A ניתנת לרדוקציה פולינומיאלית ל- B , ומסמנים $A \leq_P B$, אם קיימת פונקציה $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ המקיימת:

(1) חשיבה בזמן פולינומיאלי

(2) לכל $w \in \Sigma^*$:

$$w \in A \iff f(w) \in B.$$

משפט 10.9 משפט הרדוקציה

לכל שתי בעיות A ו- B , אם $A \leq_P B$ אזי

(1) אם $B \in P$ אזי $A \in P$.

(2) אם $B \in NP$ אזי $A \in NP$.

מסקנה מ- (1) ו- (2):

(3) אם $A \notin P$ אזי $B \notin P$.

(4) אם $A \notin NP$ אזי $B \notin NP$.

הוכחה: מכיוון שקיימת רדוקציה $A \leq_P B$, קיימת פונקציה f חשיבה בזמן פולינומיאלי המקיימת, לכל $w \in \Sigma^*$,

$$w \in A \iff f(w) \in B.$$

יהי M_f האלגוריתם שמחשבת את f בזמן פולינומיאלי.

(1) נוכיח כי אם $B \in P$ אזי $A \in P$.

יהי M_B האלגוריתם שמכריע את B בזמן פולינומיאלי. נבנה אלגוריתם M_A המכריע את A בזמן פולינומיאלי.

התאור של M_A

$M_A =$ על כל קלט w :

1. מחשב את $f(w)$ ע"י M_f .

2. מריץ את M_B על $f(w)$ ועונה כמוה.

נוכיח כי M_A מכריע את A בזמן פולינומיאלי:

- אם $w \in A$ $\iff f(w) \in B \iff M_B$ מקבל את $f(w)$ $\iff M_A$ מקבל את w .
- אם $w \notin A$ $\iff f(w) \notin B \iff M_B$ דוחה את $f(w)$ $\iff M_A$ דוחה את w .

נוכיח כי זמן הריצה של M_A הוא פולינומיאלי בגודל הקלט $|w|$ בזמן פולינומיאלי:

- נסמן ב- P_f את הפולינום של M_f .
- נסמן ב- P_B את הפולינום של M_B .

זמן הריצה של M_A על קלט w שווה

$$P_f(|w|) + P_B(|f(w)|)$$

מכיוו ש- $|f(w)| \leq P_f(|w|)$, זמו הריצה של M_A על w חסום ע"י

$$P_f(|w|) + P_B(P_f(|w|)) = P_f(|w|) + (P_B \circ P_f)(|w|)$$

כאשר $P_B \circ P_f$ מסמן את ההרכבה של שני פולינומים. לכן M_A רץ בזמן פולינומיאלי בגודל $|w|$.

