עבודה 10: לכסון אוניטרי

שאלה 1 לכל מטריצה נתונה A מצאו מטריצה אוניטרית Q ומטריצה אלכסונית D כך ש- $D = Q^{-1}AQ$.

א) $$A = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix}$$

ב) $$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+3i & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2-3i \end{pmatrix}$$

ג) $$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

ד) $$A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & 4 \\ -2 & 19 & -2 \\ 4 & -2 & 22 \end{pmatrix}$$

שאלה 2 תהי $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ המטריצה
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -33i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3i \\ 33i & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -17i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3i & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -9i \\ 3i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9i & 93 \end{pmatrix}.$$

א) הוכיחו כי A לכסינה אוניטרית.

ב) הוכיחו כי כל הערכים עצמיים של A יהיו ממשיים.

ג) הוכיחו כי קיים ערך עצמי λ של A כך ש- $|\lambda| \neq 1$.

ד) הוכיחו כי כל הערכים עצמיים של A^{100} יהיו ממשיים.

שאלה 3 תהי $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ המטריצה
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{3} & i \end{pmatrix}.$$

א) ללא חישוב ישר, הוכיחו כי A לכסינה אוניטרית.

ב) ללא חישוב ישר, הוכיחו כי לא כולם הערכים העצמיים של A ממשיים.

ג) מצאו Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $A = QD\bar{Q}$.

שאלה 4 תהי $A\in\mathbb{C}^{4\times 4}$ המטריצה $A=\begin{pmatrix} 2 & -i & 0 & 0\\ i & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & i\\ 0 & 0 & -i & 4\end{pmatrix}$.

א) ללא חישוב ישר, הוכיחו כי A לכסינה אוניטרית.

ב) הוכיחו כי כל הערכים עצמיים של A ממשיים.

ג) מצאו Q אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש- $A=QD\bar{Q}$.

שאלה 5 תהי $A\in\mathbb{C}^{8\times 8}$ המטריצה $A=\begin{pmatrix} 4 & -33i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3i\\ 33i & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 7 & -17i & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 17i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -3i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3i & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -9i\\ 3i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9i & 93\end{pmatrix}$.

א) הוכיחו כי A לכסינה אוניטרית.

ב) הוכיחו כי כל הערכים עצמיים של A יהיו ממשיים.

ג) הוכיחו כי קיים ערך עצמי λ של A כך ש- $|\lambda|\neq 1$.

ד) הוכיחו כי כל הערכים עצמיים של A^{100} יהיו ממשיים.

תשובות

<u>שאלה 1</u>

א)

$$\begin{aligned}|\lambda I-A| &= \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\lambda-(1+i) & -1\\ 1 & \lambda-(1-i)\end{pmatrix}\right|\\ &=\frac{1}{3}\left(\lambda^2-(1-i)\lambda-(1+i)\lambda+2+1\right)\\ &=\frac{1}{3}\left(\lambda^2-2\lambda+3\right)\end{aligned}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda=\frac{1+\sqrt{2}i}{\sqrt{3}}$ ו $\lambda=\frac{1-\sqrt{2}i}{\sqrt{3}}$

מרחבים עצמיים:

$$V_{(1+\sqrt{2}i)/2} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -i(\sqrt{2}+1) \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \ , \qquad V_{(1-\sqrt{2}i)/2} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} i(\sqrt{2}-1) \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}+4}} \\ \frac{i\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{i\left(-\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2\sqrt{2}+4}} \end{pmatrix} \ , \qquad D = \begin{pmatrix} \frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \ .$$

ב)

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+3i & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2-3i \end{pmatrix} \ .$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = \frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ ו $\lambda = \frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)$

מרחבים עצמיים:

$$V_{(1+\sqrt{3}i)/2} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} i(\sqrt{3}+2) \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \ , \qquad V_{(1-\sqrt{3}i)/2} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} i(\sqrt{3}-2) \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i\sqrt{\sqrt{3}+2} & \frac{i\left(\sqrt{3}-2\right)}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} \\ \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{3}+2}} & \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} \end{pmatrix} \ , \qquad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right) \end{pmatrix} \ .$$

ג)

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \ .$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = i$ ו $\lambda = -i$

מרחבים עצמיים:

$$V_i = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -i(\sqrt{2}+1) \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \ , \qquad V_{-i} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} i(\sqrt{2}-1) \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{i\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2\left(\sqrt{2}+2\right)}} & \frac{i\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2\left(\sqrt{2}+2\right)}} & \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} \ , \qquad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \ .$$

ד)

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & 4 \\ -2 & 19 & -2 \\ 4 & -2 & 22 \end{pmatrix}$$

ערכים עצמיים:

$\lambda = 27$ מריבוי אלגברי 1

ו $\lambda = 18$ מריבוי אלגברי 2.

מרחבים עצמיים:

$$V_{27}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}\ ,\qquad V_{18}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס אורתונורמלי:

$$U_{27}=\text{span}\left\{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}\ ,\qquad U_{18}=\text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{3\sqrt{2}}\\-\frac{1}{3}&0&\frac{2\sqrt{2}}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix}\ ,\qquad \bar{Q}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{3\sqrt{2}}&\frac{2\sqrt{2}}{3}&\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix}\ ,\qquad D=\begin{pmatrix}27&0&0\\0&18&0\\0&0&18\end{pmatrix}\ .$$

■

שאלה 2

א)

ב)

ג)

ד)

שאלה 3

א)

$$A=\begin{pmatrix}2&2\sqrt{2}&0&0\\2\sqrt{2}&9&0&0\\0&0&5i&2\sqrt{3}\\0&0&-2\sqrt{3}&i\end{pmatrix}\ ,\qquad \bar{A}=\begin{pmatrix}2&2\sqrt{2}&0&0\\2\sqrt{2}&9&0&0\\0&0&-5i&-2\sqrt{3}\\0&0&2\sqrt{3}&-i\end{pmatrix}\ .$$

$$\bar{A}\cdot A=\begin{pmatrix}12&22\sqrt{2}&0&0\\22\sqrt{2}&89&0&0\\0&0&37&-12i\sqrt{3}\\0&0&12i\sqrt{3}&13\end{pmatrix}\ ,\qquad A\cdot\bar{A}=\begin{pmatrix}12&22\sqrt{2}&0&0\\22\sqrt{2}&89&0&0\\0&0&37&-12i\sqrt{3}\\0&0&12i\sqrt{3}&13\end{pmatrix}\ ,$$

לכן $A\cdot\bar{A}=\bar{A}\cdot A$ לכן A נורמלית לכן A לכסינה אוניטרית.

ב) $\bar{A} \neq A$ לכן A לא צמודה לעצמה, אבל A נורמלית.
הערכים עצמיים של מטריצה נורמלית ממשיים אם ורק אם המטריצה צמודה לעצמה.
A לא צמודה לעצמה לפיכך לא כל הערכים עצמיים יהיו ממשיים.

ג)

$$
\begin{aligned}
p_A(x) =&|xI - A| = \begin{vmatrix} x-2 & -2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -2\sqrt{2} & x-9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-5i & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} & x-i \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & x-9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-5i & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & x-i \end{vmatrix} \\
&= ((x-2)(x-9)-8)\left((x-5i)(x-i)+12\right) \\
&= \left(x^2-11x+10\right)\left(x^2-6ix+7\right) \\
&=(x-10)(x-1)(x-7i)(x+i)
\end{aligned}
$$

ערכים עצמיים:
$\lambda = 10$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda = 7i$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda = -i$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 10</u>

$$
\begin{aligned}
(A-10I) \quad &= \quad \begin{pmatrix} -8 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10+5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{3} & -10+i \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_4 \to (-10+5i)R_4 + 2\sqrt{3}R_3} \begin{pmatrix} -8 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10+5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 107-60i \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} -8 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10+5i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
V_{10} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .
$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $7i$</u>

$$V_{7i} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\-\sqrt{3}i\\1\end{pmatrix}\right\} .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי $-i$</u>

$$V_{-i} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\i\\\sqrt{3}\end{pmatrix}\right\} .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 1</u>

$$V_{1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\sqrt{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} .$$

$$D = \begin{pmatrix}10 & 0 & 0 & 0\\0 & 7i & 0 & 0\\0 & 0 & -i & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} .$$

$$Q = \begin{pmatrix}| & | & | & |\\u_{10} & u_{7i} & u_{-i} & u_1\\| & | & | & |\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -2\sqrt{2}\\1 & 0 & 0 & 1\\0 & -i\sqrt{3} & \frac{i}{\sqrt{3}} & 0\\0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} .$$

שאלה 4

א)

$$A = \begin{pmatrix}2 & -i & 0 & 0\\i & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 4 & i\\0 & 0 & -i & 4\end{pmatrix} , \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix}2 & -i & 0 & 0\\i & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 4 & i\\0 & 0 & -i & 4\end{pmatrix} .$$

$\bar{A} = A$

לכן A צמודה לעצמה ולכן A נורמלית לכן A לכסינה אוניטרית.

ב) הערכים עצמיים של מטריצה נורמלית ממשיים אם ורק אם המטריצה צמודה לעצמה.
A צמודה לעצמה לפיכך כל הערכים עצמיים יהיו ממשיים.

ג) ערכים עצמיים:
$\lambda = 5$ מריבוי אלגברי 1.
$\lambda = 3$ מריבוי אלגברי 2.
$\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 1.

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 5</u>

$$V_5 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}\right\} .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 3</u>

$$V_3 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}\right\} .$$

<u>מרחב עצמי ששייך לערך עצמי 1</u>

$$V_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} .$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_5 & u_3 & u_3' & u_1 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ i & -i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

שאלה 5