שיעור 9
מונוטוניות, נקודות קיצון ונוסחת טיילור

נוסחת טיילור ומקלורן

כדי למצוא ערכים של פונקציה מקרבים אותה באמצעות פולינום.

9.1 משפט. (משפט טיילור)
תהי f פונקציה מוגדרת בסביבה של נקודה a וגזירה לפחות $n+1$ פעמים בנקודה a. אז לכל x בסביבה לנקודה a קיימת נקודה c בין a ל- x כך ש-

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

הנוסחה זו נקראת נוסחת טיילור. האיבר הסופי

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

נקרא השארית. זאת אומרת

$$f(x) = \overbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}^{\text{פולינום טיילור מסדר } n} + R_n(x)$$

נוסחת מקלורן היא נוסחת טיילור עבור $a=0$.

9.2 משפט. (מקלורן)
תהי f פונקציה מוגדרת בסביבה של נקודה 0 וגזירה לפחות $n+1$ פעמים בנקודה 0. אז לכל x בסביבה לנקודה 0 קיימת נקודה c בין 0 ל- x כך ש-

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

כאשר

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \ .$$

דוגמאות

.1 $\underline{f(x) = e^x}$

נרשום פולינום מקלורן מסדר n:

$$f(0) = e^0 = 1$$

ו-

$$f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$$

לכן

$$f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \ ,$$

ונקבל

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \ .$$

.2 $\underline{f(x) = \sin x}$

נרשום פולינום מקלורן מסדר n:

$$f(0) = \sin(0) = 0 \ .$$

ו-

$$f'(x) = \cos x \ , \qquad f'(0) = \cos(0) = 1 \ .$$
$$f''(x) = -\sin x \ , \quad f''(0) = -\sin(0) = 0 \ .$$
$$f'''(x) = -\cos x \ , \quad f'''(0) = -\cos(0) = -1 \ .$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x \ , \qquad f^{(4)}(0) = \sin(0) = 0 \ .$$
$$f^{(5)}(x) = \cos x \ , \qquad f^{(5)}(0) = \cos(0) = 1 \ .$$
$$f^{(6)}(x) = -\sin x \ , \quad f^{(6)}(0) = -\sin(0) = 0 \ .$$
$$f^{(7)}(x) = -\cos x \ , \quad f^{(7)}(0) = -\cos(0) = -1 \ .$$

לכן

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ .$$

.3 $\underline{f(x) = \cos x}$

נרשום פולינום מקלורן מסדר n:

$$f(0) = \cos(0) = 1 \ .$$

ו-

$$f'(x) = -\sin x \ , \quad f'(0) = -\sin(0) = 0 \ .$$
$$f''(x) = -\cos x \ , \quad f''(0) = -\cos(0) = -1 \ .$$
$$f^{(3)}(x) = \sin x \ , \qquad f^{(3)}(0) = \sin(0) = 0 \ .$$
$$f^{(4)}(x) = \cos x \ , \qquad f^{(4)}(0) = \cos(0) = 1 \ .$$
$$f^{(5)}(x) = -\sin x \ , \quad f^{(5)}(0) = -\sin(0) = 0 \ .$$
$$f^{(6)}(x) = -\cos x \ , \quad f^{(6)}(0) = -\cos(0) = -1 \ .$$
$$f^{(7)}(x) = \sin x \ , \qquad f^{(7)}(0) = \sin(0) = 0 \ .$$

לכן

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ .$$

תרגילים

דוגמא.
רשום את פולינום מקלורן מסדר 3 עבור הפונקציה $y = \arctan(x+1)$.

פיתרון.

$$f(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \ .$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2+1} \ , \qquad f'(0) = \frac{1}{2} \ .$$

$$f''(x) = \frac{-2(x+1)}{\left((x+1)^2+1\right)^2} \ , \quad f''(0) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \ .$$

.

$$P_2(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2\cdot 2!} = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} \ .$$

■

דוגמא.
ידוע שפולינום מקלורן מסדר 3 של פונקציה $f(x)$ הוא $x+2x^2-x^3$. חשב את $f''(0)\cdot f'''(0)$.

פיתרון.

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 = x+2x^2-x^3 \ .$$

לכן

$$f'(0) = 1 \ , \qquad \frac{f''(0)}{2!} = 2, \qquad \frac{f^{(3)}(0)}{3!} = -1$$

ז"א

$$f''(0)\cdot f'''(0) = 4\cdot(-6) = -24 \ .$$

■

דוגמא.
רשום פולינום מקלורן מסדר 2 עבור פונקציה $y(x)$ הנתונה בצורה סתומה:

$$xy + y^3 = \cos(2x) \ .$$

פיתרון.
נציב $x=0$:

$$y(0)^3 = \cos(2\cdot 0) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y(0) = 1 \ .$$

נגזור את שני הצדדים:

$$y + xy' + 3y^2\cdot y' = -2\sin(2x)$$

נציב $x=0$, $y(0)=1$:

$$1 + 3\cdot 1^2\cdot y'(0) = -2\sin(2\cdot 0) \qquad \Rightarrow \qquad 1+3\cdot y'(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y'(0) = -\frac{1}{3} \ .$$

נגזור את שני הצדדים פעם שניה:

$$y' + y' + xy'' + 6y \cdot (y')^2 + 3y^2 \cdot y'' = -4\cos(2x)$$

נציב $x = 0$, $y(0) = 1$ $y'(0) = -\frac{1}{3}$:

$$-\frac{2}{3} + 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 3y'' = -4 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 3y'' = -4 \qquad \Rightarrow \qquad y'' = -\frac{4}{3} \ .$$

$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{3 \cdot 2!}x^2 = 1 - \frac{x}{3} - \frac{2}{3}x^2$$

■

דוגמא.
רשום פולינום מקלורן מסדר 2 עבור פונקציה $y(x)$ הנתונה בצורה פרמטרית:

$$x = \ln(t+2) \ , \qquad y = t^2 - 3t \ .$$

פיתרון.

$$x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ln(t+2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = -1 \ .$$

לכן

$$y = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) = 4 \ .$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t-3}{\frac{1}{t+2}} = (2t-3)(t+2) = 2t^2 + t - 6 \ .$$

$$y'_x(t=-1) = -5 \ .$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{4t+1}{\frac{1}{t+2}} = (4t+1)(t+2) \ .$$

$$y''_x(t=-1) = -3 \ .$$

לכן

$$P_2(x) - 5 - 5x - \frac{3x^2}{2!} = 4 - 5x - \frac{3x^2}{2} \ .$$

■

תחומי עליה וירידה של פונקציה

9.3 משפט. (תנאי הכרחי למונוטוניות)
תהי f פונקציה גזירה בקטע (a,b) ועולה בקטע זו. אז $f'(x) \geq 0$ לכל $x \in (a,b)$.

תהי f פונקציה גזירה בקטע (a,b) ויורדת בקטע זו. אז $f'(x) \leq 0$ לכל $x \in (a,b)$.

הוכחה.
נניח ש f עולה בקטע (a,b).

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ז"א

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

נתבונן ב- $f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. $\Delta x > 0$ ו- $f(x+\Delta x) - f(x) > 0$ לכן $f'_+(x) > 0$.

עבור $f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, $\Delta x < 0$ ו- $f(x+\Delta x) - f(x) < 0$ לכן $f'_-(x) > 0$.

$f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$ לכן . $f'(x) \geq 0$ ■

הערה.
לא ניתן להשתמש במשפט הזה בכיוון הפוך. כלומר, לכל $x \in (a,b)$

$f(x)$ עולה מונוטונית $\Leftarrow$ $f'(x) \geq 0$

$f(x)$ עולה מונוטונית $\not\Rightarrow$ $f'(x) \geq 0$

ו-

$f(x)$ יורדת מונוטונית $\Leftarrow$ $f'(x) \leq 0$

$f(x)$ יורדת מונוטונית $\not\Rightarrow$ $f'(x) \leq 0$

■

9.4 משפט. (תנאי המספיק למונוטוניות)
תהי f פונקציה גזירה בקטע (a,b). לכל $x \in (a,b)$:

$f'(x) > 0$ $\Leftarrow$ $f(x)$ עולה מונוטונית

$f'(x) < 0$ $\Leftarrow$ $f(x)$ יורדת מונוטונית

הוכחה.
נניח ש $f'(x) > 0$ לכל $x \in (a,b)$. נקח $x_1 < x_2$ בתוך הקטע. לפי משפט לגרנז' **??** קיים c כך ש- $x_1 < c < x_2$ ו-

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)\ .$$

לפי הנתון, $f'(c) > 0$, לכן $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftarrow f(x_2) > f(x_1)$. ז"א f עולה מונוטונית בקטע (a,b). ■

תרגילים

דוגמא.
בדוק את תחומי עליה וירידה של פונקציה $f(x) = x^3 - 3x - 4$.

פיתרון.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1) \ .$$

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

■

דוגמא.
הראו כי למשוואה $2\ln x + x^2 - 5 = 0$ יש שורש ממשי אחד בדיוק.

פיתרון.
נגדיר $f(x) = 2\ln x + x^2 - 5$. שים לב

$$f(1) = -4 < 0 \ , \qquad f(2) = 2\ln 2 - 1 > 0 \ .$$

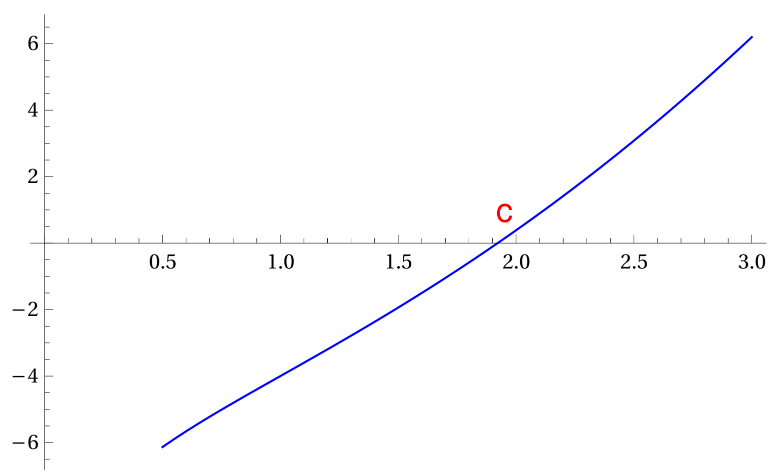
תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא $x > 0$. מכיוון ש $f(x)$ פונקציה אלמנטרית, ומוגדרת בקטע $[1, 2]$, אז היא רציפה בקטע זו וגזירה בקטע $(1, 2)$. לפי משפט ערך הביניים **??** קיים $c \in (1, 2)$ כך ש- $f(c) = 0$.

נוכיח שהשורש c היא יחיד:

שים לב

$$f'(x) = \frac{2}{x} + 2x > 0$$

לכל x בתחום ההגדרה. לכן, f עולה מונוטונית בתחום $(0, \infty)$. ז"א השורש הוא יחיד.



■

נקודות קיצון

9.5 משפט. (נקודת מקסימום)
נקודה a נקראת נקודת מקסימום מקומי של פונקציה $f(x)$ אם קיימת סביבה של a כך שלכל $x\neq a$ השייך לסביבה, מתקיים
$$f(x)<f(a)\ .$$

9.6 משפט. (נקודת מינימום)
נקודה a נקראת נקודת מינימום מקומי של פונקציה $f(x)$ אם קיימת סביבה של a כך שלכל $x\neq a$ השייך לסביבה, מתקיים
$$f(x)>f(a)\ .$$

נקודות מקסימום ומינימום נקראים **נקודות קיצון** או גם **נקודות אקסטרמום.**

9.7 משפט. (משפט פרמה (תנאי הכרחי לאקסטרמום))
תהי f פונקציה גזירה בסביבה של נקודה a. נניח ש- $x=a$ נקודת קיצון של $f(x)$. אז $f'(a)=0$.

המשמעות הגיאומטרית: בנקודהת קיצון המשיק מקביל לציר ה- x.

הערה.
שים לב המשפט ההפוך לא נכון. כלומר בהינתן פונקציה גזירה בסביבה של נקודה a.

a נקודת קיצון של f $\Rightarrow$ $f'(a)=0$

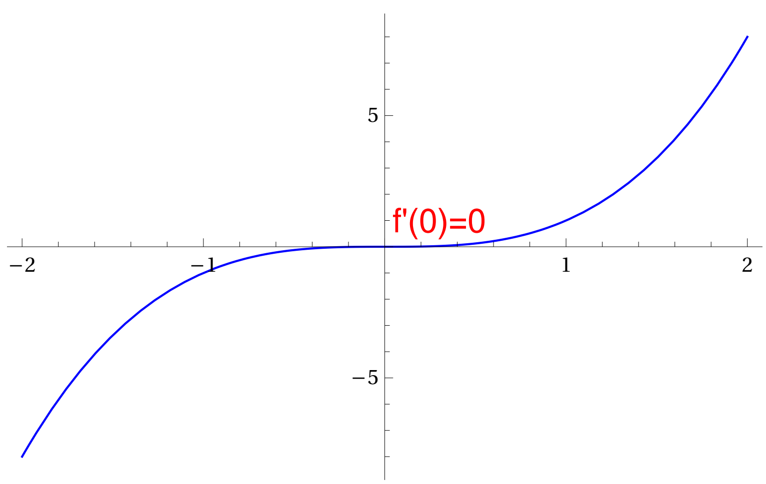
$f'(a)=0$ $\not\Rightarrow$ a נקודת קיצון של f

■

לדוגמה: $\underline{f(x)=x^3}$

$$f'(x)=3x^2\ ,\qquad\Rightarrow\qquad f'(0)=0$$

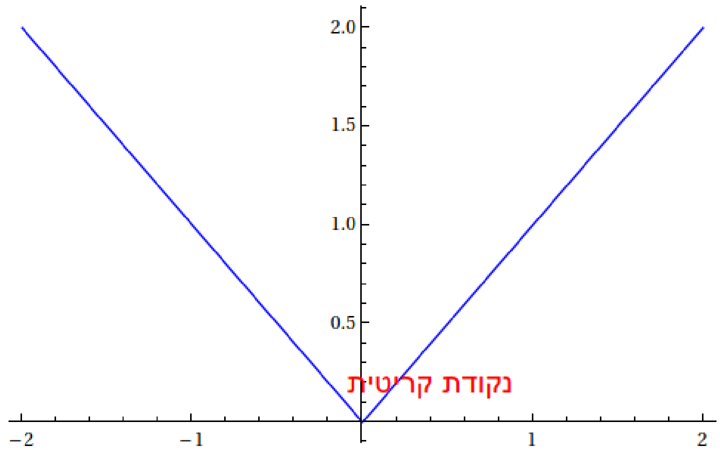
אבל $x=0$ לא נקודת קיצון (עיין תרשים להלן)



גם קיימות פונקציות שיש להן נקודת קיצון אבל הן לא גזירות בנקודה הזאת. לדוגמה:

$f(x) = |x|$

$f'(0)$ לא קיימת אבל הנקודה $x = 0$ נקודת מינימום (עיין תרשים להלן)



9.8 כלל: (נקודת קריטית)
נקודת אקסטרמום של פונקציה יכולה להיות בין הנקודות שבהן הנגזרת שווה ל- 0 או לא קיימת. נקודות האלה נקראים נקודות קריטיות (או נקודות חשודות לאקסטרמום).

9.9 משפט. (תנאי המספיק למונוטוניות)
תהי f פונקציה מוגדרת בנקודה a וגזירה בסביבה של a, אבל לא בהכרח גזירה ב- a. תהי a היא נקודה חשודה לקיצון. אזי:

1) אם במעבר דרך הנקודה a משמאל לימין $f'(x)$ משנה את הסימן מ $+$ ל- $-$ אז a נקודת מקסימום מקומי.

2) אם במעבר דרך הנקודה a משמאל לימין $f'(x)$ משנה את הסימן מ $-$ ל- $+$ אז a נקודת מינימום מקומי.

תרגילים

דוגמא.
מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x) = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$.

פיתרון.

$$f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{3\sqrt[3]{x}}$$

הנקודות החשודות לקיצון $x = 0, 8$.

x	$(-\infty,0)$	$(0,8)$	$(8,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

לכן $(0,f(0))=(0,0)$ נקודת מקסימום מקומי.

$(8,f(8))=(8,-\frac{4}{3})$ נקודת מינימום מקומי. ■

דוגמא.
מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$.

פיתרון.

$$f'(x)=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

הנקודות הקריטיות הן $x=-1,1,3$.

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

לכן נקבל:

$x=3$ נק' מינימום מקומי: $f(3)=8$.
$x=-1$ נק' מקסימום מקומי: $f(-1)=0$.

■

מציאת הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של פונקציה רציפה בקטע סגור

תהי f רציפה בקטע סגור $[a,b]$. אז לפי משפט וירשטרס **??**, $f(x)$ מקבלת בקטע $[a,b]$ את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר.

הערך הזה יכול להתקבל בנקודה פנימית של הקטע, (אז היא נקודה קריטית של פונקציה $f(x)$) או באחד הקצוות של הקטע. לכן השלבים למציאת הערך הגדול ביותר והקטן ביותר הם:

1. למצוא את כל הנקודות החשודות לאקסרמום השייכות לקטע (a,b).

2. לחשב את הערך של $f(x)$ בכל הנקודות של סעיף הקודם.

3. לחשב את $f(a)$ ו- $f(b)$.

4. מתוך הערכים שחישבנו לבחור את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר.