חישוביות וסיבוכיות תשפ"ה סמסטר א'
שיעור 5
בעיות NP שלמות

תוכן העניינים

5.1 הגדרה של זמן הריצה 1

5.2 המושג של אלגוריתם אימות 16

5.3 המחלקה NP 18

5.4 NP-שלמות 23

5.5 הבעיה של ספיקות 24

5.5.1 תזכורת: משתנים בוליאניים 24

5.5.2 הגדרה של נוסחה ספיקה 25

5.6 הגדרה של רדוקציה (תזכורת) 26

5.7 הגדרה של רדוקציה זמן-פולינומיאלית 26

5.8 ספיקות נוסחאות 3-CNF 27

5.9 NP שלמות 29

5.1 הגדרה של זמן הריצה

עד כה כל הבעיות החישוביות שעסקנו בהן הניחו שהמשאבים שעומדים לרשות מכונת הטיורינג שפותרת אותן הם **בלתי מוגבלים**. כעת נעבור לעסוק בשאלה מה קורה כאשר אנחנו מגבילים חלק ממשאבים אלו. יש סוגים רבים של משאבים שניתן לעסוק בהם, אבל שני הנפוצים ביותר בתיאוריה של מדעי המחשב הם

- **זמן החיושב**
- **הזיכרון שנדרש לצורך החיושב**.

אחת מהבעיות שבהן נתקלים:
כשמעוניינים למדוד את צריכת המשאבים הללו של אלגוריתם מסויים היא שלא ברור כיצד למדוד אותם.
האם זמן חישוב נמדד בשניות?
אם כן, כיצד ניתן לחשב את זמן החישוב עבור אלגוריתם נתון?
האם עלינו לקודד ולהריץ אותו על מחשב מסויים?

אבל במחשבים שונים האלגוריתם ירוץ זמנים שונים בשל

- יעילות המעבד,
- אופטימיזציות שמתבצעות ברמת המעבד,
- אופטימיזציות בזמן הקומפליצה,

וכיוצא בהן.

אפילו תנאים חיצוניים כמו החום בסביבת המעבד עשויים להשפיע על זמן הריצה. מכאן הרצון למצוא הגדרה **תיאורטית** של זמן ריצה, שאינה תלויה בחומרה זו או אחרת.

מכונת טיורינג היא סביבה טבעית להגדרה כזו:

הגדרה 5.1: זמן הריצה

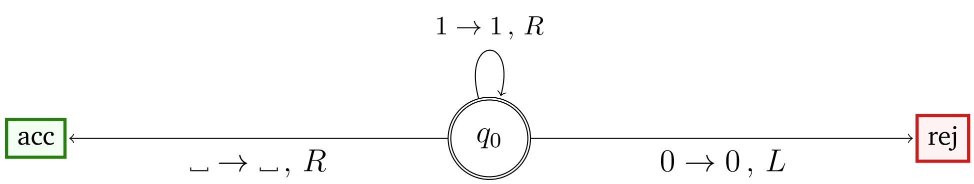
זמן הריצה של מכונת טיורינג M על קלט w הוא מספר צעדי החישוב ש- M מבצעת על w.

נשים לב לכך שמספר צעדי החישוב עשוי להיות אינסופי, אבל כמובן שסיטואציה כזו אינה רלוונטית לנו אם אנו מעוניינים להגביל את זמן הריצה.

בעיה נוספת היא שעל פי רוב, זמן הריצה של אלגוריתם תלוי ב **גודל הקלט** $|w|$ שמוזן אליו.

דוגמה 5.1

נתבונן על מ"ט $M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, \delta, \text{acc}, \text{rej})$ כאשר $\Sigma = \{0, 1\}$ ו- $\Gamma = \{0, 1, \llcorner\!\lrcorner\}$ שמכריעה את השפה $L = \{1^n | n \geq 1\}$ של מחרוזות האונימריות.



- על קלט w, המכונה פשוט עוברת סדרתית על כל תווי w.
- אם אחד מהם 0 היא דוחה,
- ואם הגיעה אל $\llcorner\!\lrcorner$ שבסוף הקלט היא מקבלת.
- ככל שהקלט ארוך יותר, כך M תבצע צעדי חישוב רבים יותר.

ברור כי המספר הצעדים המקסימלי הוא במקרה שבקלט w יש רק תווי 1 ולכן המ"ט תבצעת $n = |w|$ צעדי חישוב. בכל מקרה אחר היא תבצעת $< n$ צעדים.

אנחנו אומרים כי "זמן הריצה של M הוא n" כאשר n אורך הקלט, בגלל שמספר הצעדים המקסימלי הוא n.

באופן כללי, אם מכונה על קלט w מבצעת פחות מ- $|w|$ צעדי חישוב, המשמעות היא המכונה כלל לא קראה את כל הקלט, וזה אינו מקרה נפוץ במיוחד (אם כי הוא בהחלט קיים). אם כן ברור שמדידת זמן הריצה היא תמיד **ביחס לאורך הקלט**.

הגדרה 5.2: סיבוכיות זמן ריצה

תהי M מ"ט דטרמיניסטית אשר עוצרת על כל קלט. **הזמן הריצה** או **הסיבוכיות זמן** של M היא פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, כאשר $f(n)$ המספר צעדי חישוב המקסימלי ש- M מבצעת על קלט w של אורך n.

אם $f(n)$ זמן הריצה של M, אומרים כי M רץ בזמן $f(n)$ וש- M היא $f(n)$ זמן מכונת טיורינג

אנחנו נייצג את הזמן הריצה **בסימון אסימפטוטי** או **סימון O גדולה.**
למשל, נתונה הפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שמוגדרת $f(n)=6n^3+2n^2+20n+45$. בסימון $O(f)$ אנחנו רושמים רק החזקה הכי גדולה ללא המקדם, כלומר

$$f(n)=6n^3+2n^2+20n+45 \quad\Rightarrow\quad f(n)=O\left(n^3\right)\ .$$

הגדרה 5.3: סימון אסימפטוטי

תהיינה f,g פונקציות

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+\ ,\qquad g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$$

כאשר $\mathbb{R}^+$ הממשיים הלא שליליים.
אומרים כי

$$f(n)=O\left(g(n)\right)$$

אם קיימים שלמים c ו- n_0 עבורם לכל $n\geq n_0$ מתקיים

$$f(n)\leq cg(n)\ .$$

אם $f(n)=O\left(g(n)\right)$ אורמים כי $g(n)$ חסם עליון אסימפטוטי של $f(n)$.

דוגמה 5.2

תהי $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ פונקציה שמוגדרת

$$f(n)=6n^3+2n^2+20n+45\ .$$

הוכיחו כי $f(n)=O\left(n^3\right)$.

פתרון:

$f(n)=6n^3+2n^2+20n+45$. לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $n^2\leq n^3$, $n\leq n^3$, ו- $1\leq n^3$. לכן

$$f(n)=6n^3+2n^2+20n+45\leq 6n^3+2n^3+20n^3+45n^3=73n^3\ .$$

נגדיר $g(n)=n^3$. מצאנו $n_0=1$ ו- $c=73$ כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים

$$f(n)\leq cg(n)\ .$$

לכן $f(n)=O\left(g(n)\right)=O\left(n^3\right)$.

משפט 5.1:

לכל $a,b,n\in\mathbb{R}$,

$$\log_a n=\frac{\log_b n}{\log_b a}\ .$$

ז"א מעבר מבסיס a לבסיס b משנה את הערך של הלוגריתם עד פקטור של $\frac{1}{\log_b a}$. מכיוון ששינוי של המקדם לא משנה את החסם עליון אסימפטוטי, במידה שההתנהגות האסימפטוטית של פונקציה כלשהי היא $\log_a n$ אנחנו פשוט רושמים $O(\log n)$ ללא הבסיס.

דוגמה 5.3

נתונה הפונקציה $f: \to \mathbb{R}^+$ שמוגדרת

$$f(n) = 3n\log_2 n + 5n\log_2\log_2 n + 2 \ .$$

הוכיחו:

$$f(n) = O\left(n\log n\right) \ .$$

פתרון:

לכל $n \geq 2$ מתקיים

$$\log_2(n) \leq n \ , \qquad 2 \leq n\log_2 n$$

לפיכך

$$\begin{aligned} f(n) =& 3n\log_2(n) + 5n\log_2\left(\log_2(n)\right) + 2 \\ \leq& 3n\log_2(n) + 5n\log_2(n) + 2 \\ \leq& 3n\log_2(n) + 5n\log_2(n) + 2n\log_2(n) \\ =& 10n\log_2(n) \end{aligned}$$

נגדיר $g(n) = n\log_2(n)$. מצאנו $n_0 = 2$ ו- $c = 10$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים

$$f(n) \leq cg(n) \ .$$

לכן $f(n) = O\left(g(n)\right) = O\left(n\log n\right)$.

לעתים אנחנו רושמים פונקציות כסכום של התנהגויות אסימפטוטיות, לדוגמה הפונקציה

$$f(n) = 6n^2 + 2n$$

ניתנת לרשום בצורה

$$f(n) = O\left(n^2\right) + O\left(n\right) \ .$$

כל O בביטוי זה מייצג מקדם כלשהו מודחק. מכיוון שה- $O\left(n^2\right)$ שולטת על ה- $O\left(n\right)$ ביטוי זה שקול ל- $f(n) = O\left(n^2\right)$.

אנחנו ראינו כי הסימון $f(n) = O(g(n))$ אומר שהפונקציה $f(n)$ שווה אסימפטוטי ל- $g(n)$ לכל היותר. הסימון $f(n) = o\left(g(n)\right)$ אומר שהפונקציה $f(n)$ פחות אסימפטוטי מ- $g(n)$. פורמלי:

הגדרה 5.4:

תהיינה f,g פונקציות

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \ , \qquad g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \ .$$

אומרים כי

$$f(n) = o\left(g(n)\right)$$

אם

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \ .$$

במילים פשוטות, $f(n)=o(g(n))$ אם לכל מספר ממשי $c>0$ קיים מספר ממשי n_0 כך ש- $f(n)<cg(n)$ לכל $n\geq n_0$.

דוגמה 5.4

א) $\sqrt{n}=o(n)$

ב) $n=o\left(n\log\log n\right)$

ג) $n\log\log n=o\left(n\log n\right)$

ד) $n\log n=o\left(n^2\right)$

ה) $n^2=o\left(n^3\right)$

דוגמה 5.5

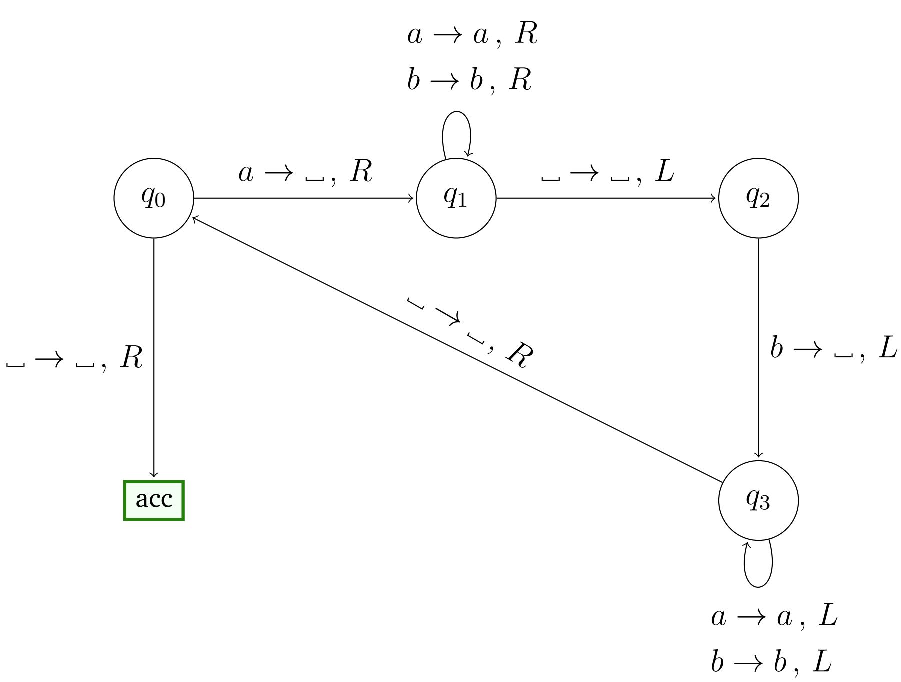
תהי M_1 המ"ט שמכריעה את השפת המילים

$$A=\left\{\mathrm{a}^n\mathrm{b}^n \;\middle|\; n\geq 0\right\} .$$

חשבו את הזמן הריצה של M_1.

פתרון:

המכונה שמכריעה את הפשה מתוארת בתרשים למטה. המכונה, באופן איטרטיבי, עוברת על הקלט ובכל מעבר מורידה a מתחילת המילה ומורידה b מסוף המילה ומחליפה אותן ברווח.
אם לאחר מספר מעברים כאלו הסרט ריק, המכונה מרבלת, וזה יתקיים לכל מילה ורק מילים בשפה $\{\mathrm{a}^n\mathrm{b}^n \mid n\geq 0\}$.



האלגוריתם של המכונה מפורט להלן:

1) הראש מתחיל בסימן הראשון של הקלט. q_0:

- אם תו הנקרא b, $\leftarrow$ rej.
- אם תו הנקרא $\sqcup$ $\leftarrow$ acc.
- אם תו הנקרא a, כותבים עליה $\sqcup$, זז לסוף הקטלט ועוברים לשלב 2).

2)
- אם תו הנקרא a או $\sqcup$, $\leftarrow$ rej.
- אם תו הנקרא b כותבים עליה $\sqcup$, זז לתחילת הקלט ועוברים לשלב 3).

3) חוזרים על שלבי 1) ו- 2) שוב ושוב עד שהמ"ט מגיע למצב acc או rej.

בסבב הראשון, בשלב 1) המספר הצעדים המקסימלי שהמכונה מבצעת הוא $n+1$:
n צעדים כדי לזוז לסוף המילה ועוד צעד נוסף כדי להחזיר את הראש למשבצת האחרונה של הקלט.
בשלב 2) המכונה מבצעת n צעדים:
$n-1$ צעדים כדי לחזור לתו רווח הראשון ועוד צעד אחד כדי לשים את הראש בתו הראשון שאינו תו רווח.

לכן אחרי הסבב הראשון המספר הצעדים המקסימלי הוא $2n+1$.

בסבב השני יש $n-2$ תווים שאינם תוי רווחים.
לכן בסבב השני המכונה תבצע $2n-3$ צעדים לכל היותר.

בסבב השלישי, יהיו $n-4$ סימנים לסרוק והמכונה תבצע $2n-9$ צעדים לכל היותר.

בכללי, בסבב ה- k -ית המכונה מבצעת $2n-4k+5$ צעדים לכל היותר.

בסה"כ יהיו $\frac{n}{2}$ סבבים מקסימלי.

לכן המספר הצעדים המקסימלי הוא

$$\sum_{k=1}^{n/2}(2n+5-4k)=\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{2}$$

לפיכך הזמן הריצה של M_1 הוא

$$O\left(n^2\right)+O\left(n\right)=O\left(n^2\right)\ .$$

דוגמה 5.6

תהי M_{L_2} המ"ט שמכריעה את השפת המילים

$$L_2=\left\{\mathrm{a}^n\ \middle|\ n=2^k\ ,k\geq 0\right\}\ .$$

חשבו את הזמן הריצה של M_{L_2}.

פתרון:

1) <u>סבב $k=1$</u>

נתון הקלט למשל

␣	␣	a	a	a	a	a	a	a	a	␣	␣
		↑									

נתחיל בתו הראשון ונעבור על סרט הקלט משמאל לימין ומבצעים מחיקה לסירוגין של האות a, כלומר אות אחת נמחק ואות אחת נשאיר וכן הלאה.

␣	␣	✓	a	✓	a	✓	a	✓	a	␣	␣
									↑		

אחרי סבב הראשון

- אם יש ✓ בתו האחרון ⇐ יש מספר אי-זוגי אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ⇐ אין חזקת 2 אותיות a. ← rej.
- אם יש a בתו האחרון ⇐ יש מספר זוגי אותיות a אחרי חילוק ב- 2 ונמשיך לשלב 2).

2) הראש חוזר לתו הראשון של הקלט

␣	␣	✓	a	✓	a	✓	a	✓	a	␣	␣
		↑									

3) חוזרים על שלבים 1) ו- 2), עד שהמכונה תגיע למצב rej או למצב שנשאר רק אות אחת של a, ואז המכונה עוברת למצב acc.

<u>סבב $k=2$</u>

1')

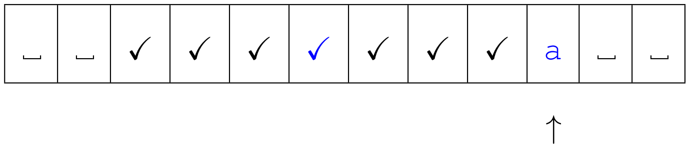
␣	␣	✓	✓	✓	a	✓	✓	✓	a	␣	␣
									↑		

2')

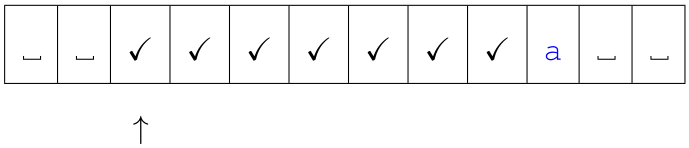
␣	␣	✓	✓	✓	a	✓	✓	✓	a	␣	␣
		↑									

<u>סבב $k=3$</u>

1'')

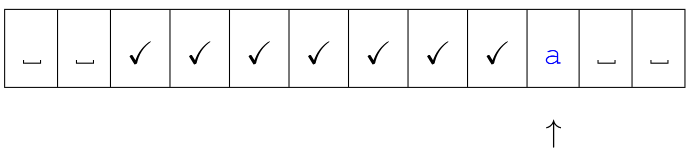


2")



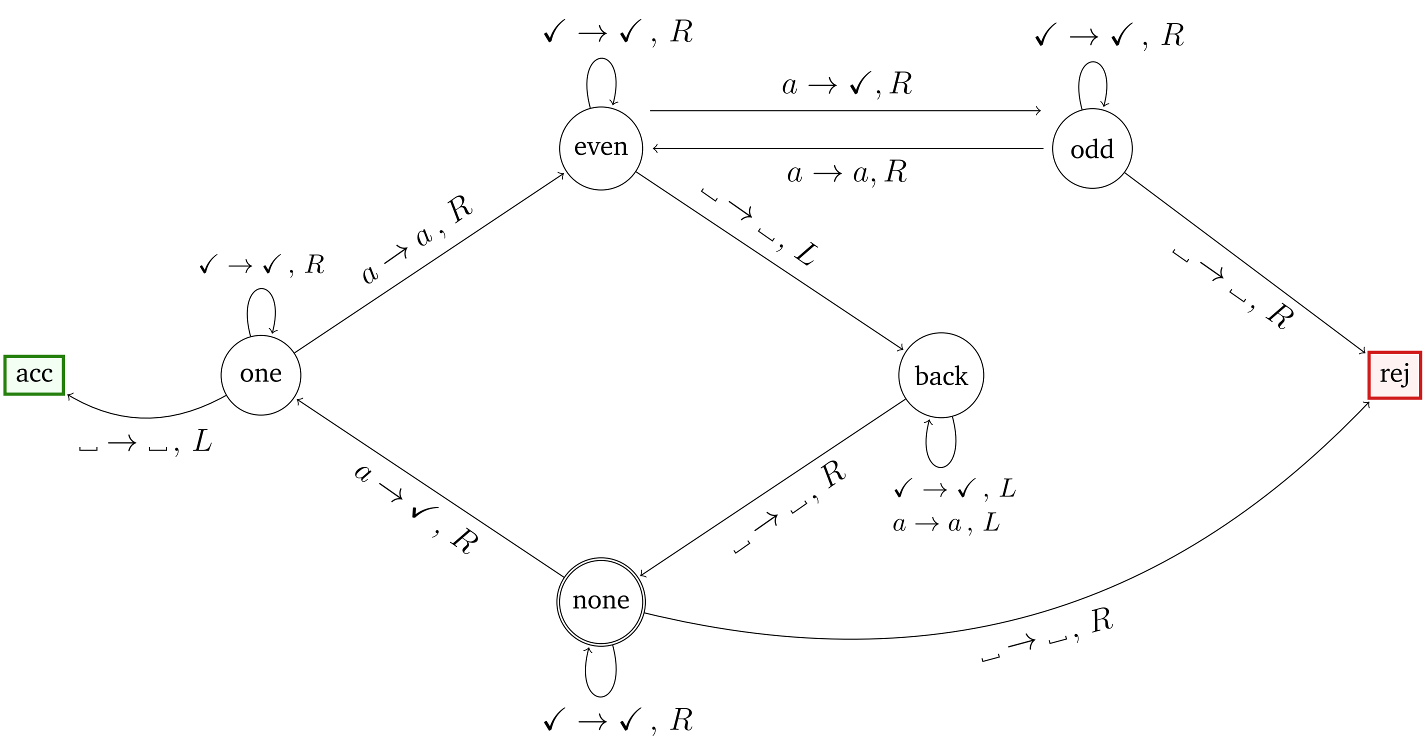
<u>סבב $k=4$</u>

1"')



נשאר בדיוק אות a והמכונה $\leftarrow$ acc.

המכונת טיורינג אשר מקבלת מילים בשפה זו מתוארת למטה.



בכל סבב, בסריקה מקצה השמאלי לקצה הימני המכונת טיורינג מבצעת $n+1$ צעדים לכל היותר:
n צעדים כדי לזוז לסוף הקלט וצעד אחד אחורה כדי להחזיר את הראש לתו האחרון של הקלט.
אחרי זה המכונה מבצעת $n+1$ צעדים כדי להחזיר את הראש לתו הראשון של הקלט: n צעדים לתו רווח הראשון וצעד אחד להחזיר את הראש לתחילת הקלט.

המכונה חוזרת על התהליך הזה עד שנשאר אות a אחת בלבד. בכל סבב המכונה מבצעת חילוק ב- 2, לכן ידרשו $\log_2(n)$ סבבים עד שנשאר אות a אחת בלבד.

בשלב האחרון המכונה בודקת האם יש בדיוק אות a אחת, אשר דורש n צעדים בשביל הסריקה מקצה השמאל לקצה הימין, ועוד צעד אחד לתו רווח הראשון אחרי התו האחרון של הקלט.

לפיכך, בסה"כ יהיו לכל היותר

$$2(n+1)\log_2(n)+n+1 = 2n\log_2(n)+2\log_2 n+n+1$$

צעדים. לכן זמן הריצה הוא

$$O(n\log n)+O(\log n)+O(n)+O(1)=O(n\log n)\ .$$

נקודה עדינה שנובעת מהגדרת סיבוכיות זמן ריצה בתור פונקציה של אורך הקלט היא שיש חשיבות **לאופן הייצוג** של הקלט כשאנו מנסים לקבוע אם אלגוריתם הוא יעיל או לא. דוגמה קלאסית היא האלגוריתם הנאיבי לבדיקת ראשוניות:

עבור מספר n ניתן לבדוק אם n ראשוני או לא על ידי מעבר סדרתי על כל המספרים $1<k<n$ ובדיקה האם k מחלק את n.

- אם כן $\leftarrow$ rej.
- אם לכל k הבדיקה נכשלה $\leftarrow$ acc.

אלגוריתם זה מבצע $O(n)$ פעולות חלוקה ולכן הוא לכאורה יעיל, כי "זמן ריצה לינארי הוא יעיל". אך בפועל זה אלגוריתם לא יעיל מאוד.
הסיבה לכך היא שכדי לייצג את המספר n אנחנו צריכים רק ל- $\log n$ ביטים, והאלגוריתמים שלנו לחיבור, כפל וכו' של מספרים פועלים בסיבוכיות $O(\log n)$ ו- $O(\log^2 n)$ וכדומה.
כלומר אם n מיוצג בבסיס בינארי אז האלגוריתם שראינו דורש זמן אקספוננציאלי **בגודל ייצוג** n.
לעומת זאת, אם n מיוצג בבסיס אונרי, כלומר בתור 1^n, אז האלגוריתם לבדיקת ראשוניות אכן יהיה $O(n)$.

הגדרה 5.5: מחלקה של סיבוכיות זמן

המחלקת הסיבוכיות זמן מסומנת $\mathrm{TIME}(t(n))$ ומוגדרת להיות אוסף של כל השפות אשר ניתנות להכרעה על ידי מכונת טיורינג בזמן $O(t(n))$.

דוגמה 5.7

השפה

$$A=\left\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n\geq 0\right\}$$

המכונת טיורינג M_1 מכריעה את השפה A בזמן $O(n^2)$ לכן $A\in\mathrm{TIME}(n^2)$.

דוגמה 5.8

קיימת מכונת טיורינג M_2 שמכריעה את השפה A בצורה יותר יעילה, בזמן ריצה $O(n\log n)$.

האלגוריתם

1) סורקים את סרט הקלט משמאל לימין.

- אם נמצא a לצד ימין של b $\leftarrow$ rej.
- אחרת עוברים לשלב 2).

2) סורקים את סרט הקלט משמאל לימין ובודקים אם המספר הכולל של אותיות a ו- b זוגי או אי-זוגי.

- אם אי-זוגי $\leftarrow$ rej.
- אחרת עוברים לשלב 3).

3) סורקים את הקלט שוב משמאל לימין.

- מבצעים מחיקה לסירוגין של האות a.
(כלומר מתחילים אם האות a הראשונה, אות אחת נמחק ואות אחת נשאר וכן הלאה.)
- אחר כך מבצעים מחיקה לסירוגין של האות b
(מתחילים אם האות הראשונה, אות אחת נמחק ואות אחת נשאר וכן הלאה.)

4) חוזרים על שלבים 2) ו- 3)

- עד שהמכונה מגיעה למצב rej,
- אחרת אם לא נשאר אף אותיות a או b המכונה עוברת ל- acc.

הסיבוכיות

הזמן הריצה של שלב 1) הוא $O(n)$.

הזמן הריצה של 2) הוא $O(n)$.

הזמן הריצה של שלב 3) הוא $O(n)$.

בכל סבב, בשלב 3) המכונה מורידה לפחות חצי של האותיות a ולפחות חצי של האותיות b.
לכן המכונה תבצע $1+\log_2 n$ סבבים לכל היותר.
לפיכך הזמן הריצה של M_2 יהיה

$$O(n)+2O(n)\left(1+O\left(\log_2 n\right)\right)=2O\left(n\log_2 n\right)+3O(n)=O(n\log n)\ .$$

לפיכך $A\in \text{TIME}\left(n\log n\right)$.

דוגמה 5.9

קיימת מכונת טיורינג M_3 עם שני סרטים שמכריעה את השפה A בצורה יותר יעילה, בזמן ריצה $O\left(n\right)$.
זמן הריצה זה נקרא **זמן ליניארי**.

האלגוריתם

בהתחלה על סרט 1 כתוב את הקלט.
סרט 2 ריק.

1) סורקים את סרט 1 משמאל לימין.

- אם המילה ריקה $\leftarrow$ acc.
- אם נמצא a לצד ימין של b $\leftarrow$ rej.
- אם תו הנקרא הראשון b $\leftarrow$ rej.
- אחרת עוברים לשלב 2).

2) סרקו את סרטים 1 ו- 2 משמאל לימין והעתיקו את כל האותיות a מסרט 1 לסרט 2 צעד צעד.

- אם התו הראשון אחרי האותיות a הוא "␣" $\leftarrow$ rej
- אם התו הראשון אחרי האותיות a הוא b עוברים לשלב 3).

3) אם נקרא אות b בסרט 1 נמחק אות a בסרט 2.

אחר כך הראש של סרט 1 זז ימינה צעד אחד והראש של סרט 2 זז שמאלה צעד אחד וחוזרים על השלב הזה.

- אם לא נשארות אף אותיות a בסרט 2 אבל עדיין נשארות אותיות b בסרט 1 אז $\leftarrow$ rej.
- אם כאשר כל האותיות a על סרט 2 נמחקו ולא נשארות אף אותיות b על סרט 1 אז $\leftarrow$ acc.

הסיבוכיות

הזמן הריצה של שלב 1) הוא $O(n)$.

הזמן הריצה של שלב 2) ושלב 3) ביחד הוא $O(n)$.
לפיכך הזמן הריצה של M_3 הוא

$$O(n)+O(n)=2O\left(n\right)=O(n)\ .$$

לפיכך $A\in \text{TIME}\left(n\right)$.

ראינו דוגמה של עקרון חשוב בסיבוכיות:

משפט 5.2:

הגדרת זמן הריצה שנתנו היא תלויה במודל של מכונת הטיורינג שאיתו אנחנו עובדים.

משפט 5.3:

תהי $t:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ פונקציה $t(n)$.
אם מתקיים

$$t(n)\geq n$$

אז לכל מכונת טיורינג $O\left(t(n)\right)$ רב-סרטי קיימת מ"ט $O\left(t^2(n)\right)$ עם סרט אחד.

הוכחה:
תהי M מ"ט k סרטים שרץ בזמן $O\left(t(n)\right)$.

נבנה מ"ט S עם סרט אחד שרץ בזמן $O\left(t^2(n)\right)$.

רושמים את התוכן של ה- k סרטים והמיקום של הראש של כל אחד הסרטים של M על הסרט היחיד של S.

להלן יש דוגמה לכך של מכונת טיורינג עם 3 סרטים:

<u>המכונת טיורינג M</u>

0	1	0	1	0	␣	␣
			$\uparrow$			

a	a	a	␣	␣	␣	␣
		$\uparrow$				

a	b	b	␣	␣	␣	␣
	$\uparrow$					

<u>המכונת טיורינג S</u>

#	0	1	0	1	0	#	a	a	a	#	a	b	b
				$\uparrow$					$\uparrow$			$\uparrow$	

כדי לסמלץ צעד אחד של M במ"ט S:

1) בהתחלה, S מאתחלת את הסרט שלה על ידי לכתוב את התוכן של כל אחד של ה- k סרטים על הסרט היחיד שלה, עם תו # להפריד בין שני סרטים של M כמתואר בדוגמה למעלה.

2) כדי לסמלץ צעד אחד של M על המכונה S, המכונה S מבצעת סריקה אחת מה- # הראשון בקצה השמאלי ל- # ה- $k+1$ -ית בקצה הימין.

בסריקה זו S זוכרת את הסימנים במיקומים של ה- k ראשים של M באמצעות k תאי זכרון.

3) אחר כך S מבצעת סריקה שנייה של הסרט. בסריקה זו, לפי הפונקצית המעברים S מבצעת

- כתיבה של הסימן החדש בסרט ה-i במיקום של כל ראש של סרט ה-i,
- תזוזה של הראש של סרט ה- i

לכל $1 \leq i \leq k$.

במקרה שכל אחד של הראשים של M זז ימינה לתו רווח בקצה הימין של הסרט שלו, כלומר למשבצת ריקה שטרם לא נקרא, S מוסיפה משבצת עם תו רווח לצד שמאל של ה- # ומזיזה את כל המשבצות מקום אחד ימינה.

האורך של הסרט של S שווה לסכום של הארכים של ה- k סרטים של M.
הזמן הריצה של M הוא $t(n)$.
ז"א M משתמשת ב- $t(n)$ משבצות לכל היותר ב- $t(n)$ צעדים.
לכן בהכרח האורך של הסרט של S הוא $t(n)$ לכל היותר,
לכן סריקה אחת של S דורשת $O(t(n))$ צעדים לכל היותר.

כדי לדמות צעד אחד של M, המכונה S מבצעת שתי סריקות.
כל סריקה לוקחת זמן $O(t(n))$.
לכן S לוקחת זמן $O(t(n))$ כדי לבצע צעד אחד של M.

בשלב האתחול S מבצעת $O(n)$ צעדים.

S מסמלצת כל אחד של ה- $t(n)$ צעדים של M, בזמן $O(t(n))$.

לפיכך הזמן הכולל הנדרש של S לבצע $t(n)$ צעדים של M הוא

$$t(n) \times O(t(n)) = O\left(t^2(n)\right) \ .$$

הסימלוץ הכולו לוקח

$$O(n) + O\left(t^2(n)\right) \ .$$

אנחנו הנחנו כי $t(n) \geq n$ לכן הזמן הריצה של S הוא

$$O\left(t^2(n)\right) \ .$$

■

הגדרה 5.6: זמן הריצה של מ"ט לא דטרמיניסטית

יהי N מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית.
הזמן הריצה של N מוגדרת להיות הפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כאשר $f(n)$ הוא המספר הצעדים המקסימלי אשר N מתוך כל הענפים של החישוב שלה על קלט של אורך n.

משפט 5.4:

תהי $t(n)$ פונקציה המקיימת $t(n) \geq n$. כל מ"ט $O(t(n))$ לא דטרמיניסטית N סרט אחד, שקולה למכונת טיורינג $2^{O(t(n))}$ דטרמיניסטית סרט אחד.

הגדרה 5.7: מכונת טיורינג פולינומית

מכונת טיורינג M תיקרא **פולינומית** או **יעילה** אם קיים $c \in \mathbb{N}$ כך ש- M פועלת בסיבוכיות זמן ריצה $O(n^c)$.

הגדרה 5.8: המחלקה P

המחלקה P היא אוסף השפות שקיימת מכונת טיורינג פולינומיאלית M המכריעה אותן. כלומר:

$$P = \bigcup_k \text{TIME}\left(n^k\right) \ .$$

הגדרה 5.9: המחלקה $POLY$

המחלקה $POLY$ היא אוסף הפונקציות שעבורן קיימות מכונת טיורינג פולינומיאלית M המחשבת אותן.

דוגמה 5.10 גרף מכוון

נתון גרף G שמכיל את הקדקודים s ו- t:
נגדיר בעיה $PATH$ להיות הבעיה לקבוע האם קיים מסלול בין s לבין t.

$$PATH = \left\{\langle G, s, t\rangle \,\middle|\, \text{גרף מכוון המכיל מסלול מכוון מ- } s \text{ ל- } t \ G\right\}$$

הוכיחו כי

$$PATH \in P \ .$$

פתרון:

נבנה אלגוריתם M פולינומי בשביל בעיה $PATH$ כמפורט להלן.

עבור הקלט $\langle G, s, t\rangle$ כאשר G גרף המכוון המכיל הקדקודים s ו- t:

1) מתחילים בנקודה s. מסמנים את הקדקוד s.

2) חוזרים על שלב 3) עד שלא נשארים אף קדקודים לא מסומנים באף מסלול שעובר דרך הקדקוד s. ב- G:

3) עוברים דרך כל הקשתות שניתן להגיע אליהן על ידי מסלול קשיר מקדקוד s.

- אם מוצאים קשת (a, b) מקדקוד מסומן לקדקוד הלא מסומן b, מסמנים את הקדקוד b.

4) אם קדקוד t מסומן, $\leftarrow$ acc.
אחרת $\leftarrow$ rej.

נניח של- G יש n קדקודים.

- שלב 1) מבוצע פעם אחת בלבד.
- ושלב 4) מבוצע פעם אחת בלבד.

שלב 3) מבוצע n פעמים לכל היותר בגלל כל פעם M מסמנת קדקוד נוסף עד שכל הקדקודים בגל המסלולים שעוברים דרך s הם מסומנים כבר.

- לכן מספר הצעדים לכל היותר הוא $n + 1 + 1$ לכל היותר.

לכן $M = O(n)$.

דוגמה 5.11

תהי $RELPRIME$ הבעיה לבדוק אם שני שלמים x, y זרים.

$$RELPRIME = \{\{x, y\} \in \mathbb{N} \mid \gcd(x, y) = 1\}$$

הוכיחו כי $RELPRIME \in P$.

פתרון:

נבנה אלגוריתם שמתבסס על האלגוריתם אוקלידס למצוא את ה- gcd. נסמן את האלגוריתם שמבצע האלגוריתם אוקלידס ב- E.
הקלט הוא הצמד שלמים $\{x, y\}$ בבסיס בינארי:

1) משימים $x \leftarrow x \mod y$

2) מחליפים x ו- y.

3) מחזירים x.

4) חוזרים על השלבים 1) - 3) עד שנקבל $y = 0$.

```
x = 625;
y = 75;

a=x;
b=y;

while y!=0:
    x = x % y

    y1 = x
    x = y
    y = y1

print("gcd(%d,%d) = %d" % (a,b,x))
```

האלגוריתם R פותר את הבעיה $RELPRIME$ על ידי שימוש של E כתת-אלגוריתם:
הקלט של R הוא הצמד שלמים $\{x,y\}$ בבסיס בינארי:

1) מריצים E על $\{x,y\}$.

2) אם הערך חזרה של E הוא 1 אז $\text{acc} \leftarrow$
אחרת $\text{rej} \leftarrow$.

אם E רץ בזמן פולינומי אז גם R ירוץ בזמן פולינומי אז מספיק לבדוק את הסיבוכיות זמן הריצה של E בלבד.

ללא הגבלת כלליות נניח ש- $x > y$. (המקרה של $x = y$ לא מעניין אותנו כי התשובה $\gcd(x,x) = x$ טריוויאלית).
משפט החילוק של אוקלידד אומר שלכל x, y שלמים קיימים שלמים q, r עבורם

$$x = qy + r \ ,$$

כאשר $x < y$ ו- $r < y$. השלם $q = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$ נקרא המנה ו- $r = x \mod y$ נקרא השארית.

אחרי ביצוע של שלב 1), שבו אנחנו משימים $x = x \mod y$, אז יהיה $x < y$.

אחרי ביצוע של שלב 2), שבו מחליפים x ו- y, אז יהיה $x > y$.

כעת יש שתי אפשרויות:

- אם אחרי שלב 2) יוצא כי $\frac{x}{2} \geq y$ אז $\frac{x}{2} \geq y > x \mod y$.

  לכן $\frac{x}{2} \leq y \mod x$.

  מכאן אנחנו רואים כי x יקטן לפחות בחצי.

- מצד שני נניח שאחרי שלב 2) יוצא כי $\frac{x}{2} < y$.

  מכיוון ש- $x = qy + (x \mod y)$, וגם $x < 2y$ אז בהכרח $q < 2$ ולכן $x = y + (x \mod y)$
  ולכן $x - y = x \mod y$.

  לפיכך

  $$x \mod y = x - y < \frac{x}{2} \ .$$

  לכן גם במקרה זה x יקטן לפחות בחצי.

x ו- y מתחלפים כל פעם ששלב 2) מתבצע, לכן אחרי 2 סבבים של האלגוריתם, הערך של x יקטן לפחות בחצי וגם הערך של y יקטן בחצי.

לפי זה מספר הפעמים המקסימלי ששלבים 1) ו- 2) מתבצעים הוא המינימום בין מספר פעמים שאפשר לחלק x ב- 2 לבין מספר פעמים שאפשר לחלק y בחצי. ז"א המינימום בין $2\log_2 x$ לבין $2\log_2 y$. כלומר, מספר הסבבים המקסימלי של האלגוריתם הוא

$$\min\left(2\log_2 x, 2\log_2 y\right) \ .$$

מכיוון ש- x ו- y נתונים בבסיס בינארי אז

$$\log_2 x = n_x - 1 \ , \qquad \log_2 y = n_y - 1$$

כאשר n_x אורך המספר x בבסיס בינארי ו- n_y אורך המספר y.

לכן מספר הצעדים המקסימלי של האלגוריתם E הוא

$$\min(n_x - 1, n_y - 1) \ .$$

זמן הריצה מוגדר להיות המספר הצעדים המקסימלי של האלגוריתם, לכן

$$E = O(n)$$

כאשר n אורך הקלט.

5.2 המושג של אלגוריתם אימות

הגדרה 5.10: מסלול המילטוני

מסלול המילטוני (Hamiltonian cycle) בגרף מכוון $G = (V, E)$ הוא מסלול אשר עובר כל קדקוד בדיוק פעם אחת.

גרף המכיל מסלול המילטוני מכונה **גרף המילטוני** (Hamiltonian). אחרת, הגרף מכונה **לא המילטוני** (non-Hamiltonian).

הגדרה 5.11: הבעיית מסלול המילטוני

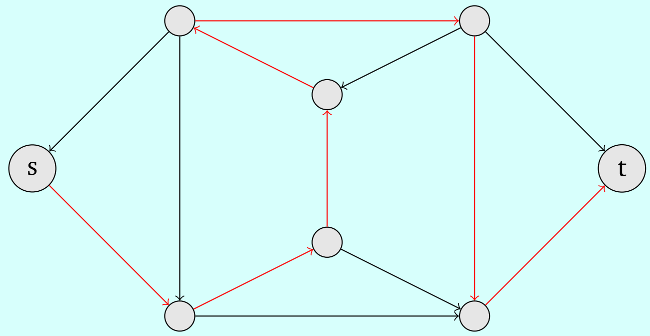
הבעיית המסלול ההמילטוני (the hamiltonian cycle problem) היא הבעיה:

" האם לגרף G יש מסלול המילטוני ?"

ניתן להגדיר כשפה פורמלית:

$$HAMPATH = \{\langle G, s, t\rangle \mid \text{הוא גרף מכוון המכיל מסלול המילטוני מ- } s \text{ ל- } t \text{. } G\}$$

התרשים למטה מראה דוגמה של מסלול המילטוני בגרף מכוון.



נשאל שאלה: מהו הסיבוכיות זמן הריצה של הבעיה $HAMPATH$? כעת זה לא ידוע האם הבעיה הזו ניתנת לפתור בזמן פולינומיאלי, כלומר האם $HAMPATH \in P$.

בכל זאת, נניח שחבר מספר לך כי גרף נתון G הוא המילטוני. אפשר לאמת את הטענה ע"י כך שנמנה את הקדקודים על פי סדרם לאורך המעגל ההמילטוני, ונבדוק אם קדקודיו הם תמורה של קדקודי V של G, ואם כל אחת מן הקשתות העוקבות לאורך המעגל אכן קיימת בגרף. בהמשך אנחנו נוכיח כי האלגוריתם האימות הזה ניתן לממש כך שירוץ בזמן $O\left(n^2\right)$, כאשר n הוא אורך הקידוד של G. ז"א הוכחה שגרף מכיל מעגל המילטוני ניתנת לאימות בזמן פולינומיאלי.

אף על פי שלא בהכרח יש לנו אלגוריתם שרץ בזמן פולינומיאלי שבדוק האם גרף מכיל מעגל המילטוני, בכל זאת במקרה שמעגל המילטוני היה נגלה, קל למדי לאמת את המעגל על ידי האלגוריתם לעיל.

הדוגמה הזאת היא מקרה שבה הביעה של לאמת פתרון לבעיה נתונה קלה יותר מהבעיה של למצוא פתרון לבעיה זו.

הגדרה 5.12: מספר פריק

מספר שלם x נקרא **פריק** (composite) אם קיימים שלמים $p>1, q>1$ כך ש-

$$x = pq \ .$$

במילים אחרות, x פריק אם ורק אם x לא ראשוני.

הגדרה 5.13: הבעיה $COMPOSITES$

הבעיה $COMPOSITES$ היא הבעיה:

" האם השלם x פריק? "

ניתן להגדיר כשפה פורמלית:

$$COMPOSITES = \left\{ x \;\middle|\; \text{קיימים שלמים } p,q>1 \text{ כך ש- } x=pq \right\}$$

קל למדי לאמת כי שלם x פריק: בהינתן הפתרון ש- $x \mid p$, אלגוריתם אימות הוא אלגוריתם אשר מחלק x ב- p ובודק שאין שארית והמנה המתקבל הוא שלם וגדול מ- 1. כעת נתן הגדרה פורמלית של אלגוריתם אימות

הגדרה 5.14: אלגוריתם אימות

אלגוריתם אימות של שפה A הוא אלגוריתם V כך ש-:

$$A = \left\{ w \;\middle|\; \text{מקבל } V \ \langle w,c\rangle \text{ על פי } c \right\}$$

במילים, **אלגוריתם אימות** הוא אלגוריתם V אשר מאמת כי הקלט w שייך לשפה A על פי התנאי c, שנקרא

אישור (certification).

אנחנו מגדירים את זמן הריצה של V על פי האורך של w. לכן **אלגוריתם אימות זמן-פולינומיאלי** רץ בזמן פולינומיאלי $O\left(n^k\right)$ כאשר n האורך של w.

5.3 המחלקה NP

הגדרה 5.15: מחלקת הסיבוכיות NP

- המחלקה NP היא מחלקת השפות שניתן לאמתן באמצעות אלגוריתם זמן-פולינומיאלי.

הגדרה חלופית למחלקה NP הינה:

- המחלקה NP היא מחלקת השפות שניתן להכרעה באמצעות מ"ט אי-דטרמיניסטית זמן-פולינומיאלית.

למטה במשפט 5.5.

דוגמה 5.12

הוכיחו כי

$$HAMPATH \in NP \ .$$

פתרון:

כזכור, הזמן הריצה של מ"ט אי-דטרמיניסטית מוגדר לפי הזמן הריצה של הענף הכי ארוך (הגדרה 5.6 שלעיל).
נבנה מ"ט אי-דטרמיניסטית N_1 אשר מכריעה את $HAMPATH$ -בזמן-פולינומיאלי.

יהיו m מספר הקדקודים של G ו- n מספר הקשתות של G:

$$n = |V| \ , \qquad m = |E| \ .$$

$N_1 =$ על הקלט $\langle G, s, t\rangle$, כאשר G גרף מכוון ו- s, t קדקודים של G:

(1 רושמים רשימה של n מספרים, $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
כל מספר נבחר בצורה אי-דטרמיניסטית מ- 1 עד n.

(2 בודקים אם יש חזרות ברשימה זו.
אם יש חזרות $\leftarrow$ rej.

(3 בודקים אם $s = p_1$ ו- $t = p_n$.
אם לא $\leftarrow$ rej.

(4 לכל $1 \leq i \leq n-1$ בודקים אם הקשת (p_i, p_{i+1}) שייכת לקבוצת הקשתות E של G.

- אם אף קשת לא שייכת ל- E $\leftarrow$ rej.
- אם כל הקשתות שייכות ל- E $\leftarrow$ acc.

כעת נבדוק את הסיבוכיות של האלגוריתם הזה.

- שלב 1) דורש n צעדים ולכן מתבצע בזמן פולינומיאלי.
- שלב 2) דורש n צעדים לכל היותר, ולכן מתבצע בזמן פולינומיאלי.
- שלב 3) דורש n צעדים לכל היותר, ולכן מתבצע בזמן פולינומיאלי.
- עבור שלב 4) לכל קשת (p_i, p_{i+1}), המ"ט N_1 בודקת אם יש קשת תואמת בקבוצת הקשתות E של G.
  לכן ידרשו m צעדים לכל היותר לכל i.
  לכן שלב 4) דורש $m(n-1)$ צעדים לכל היותר בסה"כ.

לכן הסיבוכיות זמן-הריצה של N_1 היא

$$O(n) + O(n) + O\left(m(n-1)\right) = O\left(m(n-1)\right)$$

לפיכך האלגוריתם הזה מתבצע אי-דטרמיניסטי בזמן פולינומיאלי.

משפט 5.5: $A \in NP$ אם"ם A ניתנת לאימות ע"י N_{TM}

שפה A כלשהי שייכת למחלקה NP אם ורק אם A ניתנת להכרעה על ידי מכונות טיורינג אי-דטרמיניסטית זמן-פולינומיאלית.

רעיון ההוכחה:
הרעיון הוא להראות כיצד להמיר אלגוריתם אימות זמן-פולינומיאלי למכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית זמן-פולינומיאלית ולהפך.
במילים פשוטות אלגוריתם אימות זמן-פולינומיאלי V שקול חישובי למ"ט אי-דטרמיניסטית זמן-פולינומיאלי N_{TM}:

- N_{TM} מדמה V על ידי ניחוש של האישור c.
- V מדמה N_{TM} באמצעות המסלול של N_{TM} אשר מקבל את השפה בתור האישור.

הוכחה:
$\Leftarrow$

ראשית נוכיח שאם $A \in NP$ אז A ניתנת לאימות ע"י N_{TM}.

$A \in NP$ לכן קיים אלגוריתם אימות זמן פולינומיאלי V של A.

נבנה מ"ט N שרץ בזמן $O\left(n^k\right)$ עבור k כלשהו.

$N =$ " על הקלט w של אורך n:

1) בצורה אי-דטרמיניסטית בוחרים מחרוזת c באורך n^k לכל היותר.

נשים לב שחייב להיות חסם עליון n^k על האורך של c עבור k כלשהו, בגלל ההנחה שלנו ש- V עצמו הוא אלגוריתם זמן-פולינומיאלי.

2) מריצים V על $\langle w, c\rangle$:

3)
- אם V מקבל אז $N \leftarrow$ acc.
- אחרת $N \leftarrow$ rej."

$\Rightarrow$

נוכיח שאם A ניתנת לאימות ע"י מ"ט אי-דטרמיניסטית זמן-פולינומיאלית אז $A \in NP$.

נניח ש- A ניתנת לאימות ע"י מ"ט אי-דטרמיניסטית זמן-פולינומיאלית N.
נבנה אלגוריתם אימות זמן פולינומיאלי כמפורט להלן:

בהינתן קלט w ומכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית N אשר מאמתת כי $w \in A$ בזמן-פולינומיאלי. נסמן ב- n את האורך של הקלט w.

ראשית הוכחנו בהפרק על מכונות טיורינג אי-דטרמיניסטיות, שכל מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית שקולה חישובית למכונת טיורינג דטרמיניסטית 3-סרטים:
(1) סרט הכספת, (2) סרט העבודה ו-(3) סרט הבחירות.
על סרט הבחירות המכונת טיורינג דטרמיניסטית רושמת כל הסדרות של הבחירות בסדר לקסיקוגרפי.
בנוסף מובטח לנו כי האורך של סרט הבחירות חסום מלמעלה על ידי n^k (עבור k טבעי כלשהו) מסיבה לכך שהנחנו ש- N רצה בזמן פולינומיאלי.

תהי c אחת הסדרות של הבחירות. שוב, אורך הסרט הבחיורת חסום מלעלה על יד n^k לכן גם c חסום מלמעלה על ידי n^k.
נבנה אלגוריתם אימות V כך:

$V =$ " על הקלט $\langle w, c\rangle$ כאשר w ו- c מחרוזות:

1) מריצים N על הקלט w.

V מתייחס לכל תו של c כתיאור של בחירה האי-דטרמיניסטית לבצע בכל צעד.

2)
- אם המסלול הנוכחי של החישוב של $N \leftarrow$ acc אז V מקבל את $\langle w, c\rangle$.
- אם המסלול הנוכחי של החישוב של $N \leftarrow$ rej אז V דוחה את $\langle w, c\rangle$."

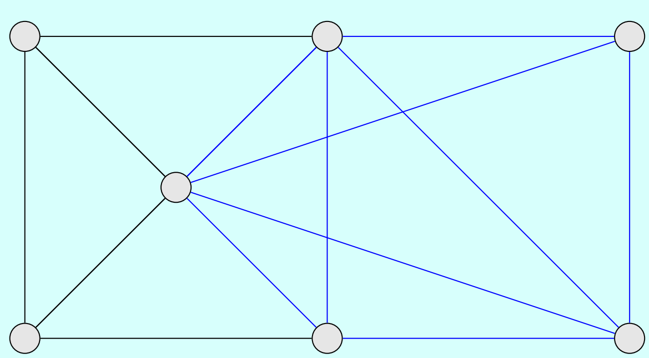
■

הגדרה 5.16: k-קליקה

נתון גרף בלתי-מכוון.

- קליקה בגרף בלתי-מכוון הוא תת-גרף שבו כל זוג קדקודים קשורים על ידי קשת.
- k- קליקה היא קליקה שבו יש בדיוק k קדקודים.

התרשים למטה מראה דוגמה של 5- קליקה.



דוגמה 5.13 בעיית הקליקה

בעיית הקליקה היא הבעיה לקבוע האם גרף מכיל k- קליקה עבור k מסוים:

$$CLIQUE = \left\{ \langle G,k\rangle \;\middle|\; \text{גרף בלתי-מכוון שמכיל } k\text{-} \ G \right\}$$

הוכיחו כי $CLIQUE \in NP$.

הוכחה: עבור הגרף $G=(V,E)$ יהי $n=|V|$ מספר הקדקודים ו- $m=|E|$ מספר הקשתות.

האלגוריתם הבא הוא מאמת V של $CLIQUE$:

$V =$ " על הקלט $\langle\langle G,k\rangle, c\rangle$:

1) בודקים האם c קבוצה של k קדקודים שבגרף G.

- אם לא ← rej.
- אם כן ממשיכים לשלב 2).

2) בודקים אם G מכיל את כל הקשתות אשר מקשרות בין כל הקדקודים ב- c.

- אם לא ← rej.
- אם כן ← acc."

- שלב 1) דורש k צעדים לכל היותר.
- שלב 2) בכל k-קליקה יש $\frac{1}{2}k(k-1) = \binom{k}{2}$ קשתות בסה"כ. לכן בשלב 2) האלגוריתם צריך לבדוק אם כל אחת של הקשתות מוכלת ב-G. ז"א לכל קשת של c האלגוריתם סורק את קבוצת הקשתות E אחת אחת ובודק אם יש קשת תואמת. לכן שלב 2) דורש $m \times \frac{1}{2}k(k-1)$ לכל היותר.

לפיכך הסיבוכיות זמן הריצה היא

$$O(k) + O\left(mk(k-1)\right) = O\left(m^3\right) \ .$$

כלומר האלגוריתם המאמתת רץ בזמן פולינומיאלי.
לכן $CLIQUE \in NP$. ∎

הגדרה 5.17: בעיית סכום התת קבוצה SUBSET-SUM

נתונה קבוצת שלמים

$$S = \{x_1, \ldots, x_k\}$$

ושלם t. נתונה קבוצה נוצרת סופית $S \subset \mathbb{N}$ של שלמים ונתון ערך מטרה $t \in \mathbb{N}$ שלם.
בבעיית סכום התת-קבוצה SUBSET-SUM, אנחנו שואלים אם קיימת תת-קבוצה $Y \subseteq S$ כך שהאיברים שלה מסתכמים לערך t.
נגדיר את הבעיה כשפה:

$$SUBSETSUM = \left\{ \langle S,t\rangle \;\middle|\; \text{קיימת תת-קבוצה } S \subseteq Y \text{ כך שמתקיים } \sum_{y\in Y} y = t \right\}$$

לדוגמה, אם
$$S=\{1,16,64,256,1040,1041,1093,1284\}$$
ו- $t=3754$ אזי התת-קבוצה
$$Y=\{1,16,64,256,1040,1093,1284\}$$
היא פתרון.

דוגמה 5.14

הוכיחו:
$$SUBSETSUM\in NP\ .$$

הוכחה: אנחנו נבנה מ"ט זמן-פולינומיאלי M אשר מאמת פתרון כלשהו לבעיית סכום התת-קבוצה.

תהי M מ"ט דטרמיניסטית 3 סרטים:

- על סרט S רשומים האיברים של הקבוצה S בבסיס אונרי עם תו "#" להפריד בין איברים.
- על סרט c רשומים האיברים של הקבוצה c בבסיס אונרי עם תו "#" להפריד בין איברים.
- על סרט t רשום המספר t בבסיס אונרי.

לדוגמה, אם
$$S=\{1,2,3,4\}\ ,\qquad c=\{2,3,4\}\ ,\quad t=9\ .$$
אז התכנים של הסרטים יהיו

S	␣	1	#	1	1	#	1	1	1	#	1	1	1	1	␣
		↑													
c	␣	1	1	#	1	1	1	#	1	1	1	1	␣	␣	␣
		↑													
t	␣	1	1	1	1	1	1	1	1	1	␣	␣	␣	␣	␣
		↑													

האלגוריתם של M מתואר להלן.

$M=$ " על הקלט $\langle\langle S,t\rangle\,,c\rangle$:
בשלב הראשון אנחנו בודקים אם S מכילה את כל השלמים שב- c.

שלב 1) הראש S והראש c זזים ימינה צעד אחד במקביל.

- אם ראש c קורא ␣ וראש S קורא 1 $\leftarrow$ rej.
- אם ראש c קורא 1 וראש S קורא ␣ $\leftarrow$ rej.
- אם ראש c קורא # וראש S קורא 1,
  או אם ראש c קורא 1 וראש- S קורא #:
  * ראש c חוזר לתחילת המחרוזת
  * ראש S זז למשבצת הבאה אחרי ה- #.
- אם ראש c קורא # וראש S קורא # אז הראש S והראש c זזים שניהם משבצת אחת ימינה וממשיכים לשלב 2).

שלב 2)
- אם ראש-c-קורא ␣ וראש- S קורא ␣, מחזירים ראש S וראש c לתחילת המחרוזת ועוברים לשלב 3).
- אחרת חוזרים על שלב 1)

בשלבים 3) ו- 4) אנחנו בודקים אם הסכום של האיברים של c שווה ל- t.

שלב 3) בשלב זה אנחנו מחברים את המספרים על סרט c:

עבור כל תו # בסרט c, כותבים עליו 1 ומוירדים תו 1 תואם מקצה הימין של הסרט, ומחזירים את הראש לתחילת הסרט c.

שלב 4) בשלב זה אנחנו בודקים שהמספרים על הסרים c ו- t שווים.

הראשים של c ושל t זזים ימינה צעד צעד במקביל.

- אם ראש c קורא $\sqcup$ וראש t קורא $1 \leftarrow$ rej.
- אם ראש c קורא 1 וראש t קורא $\sqcup \leftarrow$ rej.
- אם ראש c קורא $\sqcup$ וראש t קורא $\sqcup \leftarrow$ acc".

כעת נבדוק את הסיבוכיות של האלגוריתם. נסמן ב- n האורך המקסימלי מבין הסרטים S, c, t.

- שלבים 1) ו- 2) דורשים n^2 צעדים לכל היותר.
- שלב 3) דורש $2n$ שלבים לכל היותר.
- שלב 4) דורש n שלבים לכל היותר.

לכן

$$M = O\left(n^2\right) + O\left(2n\right) + O\left(n\right) = O\left(n^2\right)$$

לכן $SUBSETSUM \in NP$. ■

ההוכחה חלופית: נבנה מ"ט אי-דטרמיניסטית N שמכריעה את השפה SUBSET-SUM כמפורט להלן:

" $N =$ על הקלט $\langle S, t\rangle$:

1) נבחר בצורה אי-דטרמיניסטית תת-קבוצה c של השלמים S.

2) בודקים אם הסכום של האיברים של c שווה ל- t:

- אם $\sum\limits_{y\in c} y = t$ אז $N \leftarrow$ acc.
- אם $\sum\limits_{y\in c} y = t$ אז $N \leftarrow$ rej. "

5.4 NP-שלמות

עד כה אנחנו ראינו את הגדרות של המחלקות P ו- NP:

$P =$ מחלקת השפות שכריעות בזמן פולינומיאלי ,

$NP =$ מחלקת השפות שניתנות לאימות בזמן פולינומיאלי .

- ראינו שתי דוגמאות של שפות, $HAMPATH$ ו- $CLIQUE$ ששייכות ל- NP אך לא ידוע האם הן שייכות גם ל- P.
- שאלה מרכזית במדעי המחשב היא שאם $P = NP$, כלומר:

  האם כל שפה ששייכת ל- NP גם שייכת ל- P,

  וכל שפה ששייכת ל- P גם שייכת ל- NP?

  ננסח את השאלה כביטוי פורמלי. האם מתקיים

$$L \in NP \Leftrightarrow L \in P \ .$$

5.5 הבעיה של ספיקות

5.5.1 תזכורת: משתנים בוליאניים

סימן	פעולה
$\wedge$	AND
$\vee$	OR
$\neg$	NOT
$\oplus$	XOR

$0 \wedge 0 = 0$	$0 \vee 0 = 0$	$\neg 0 = 1$	$\bar{0} = 1$
$0 \wedge 1 = 0$	$0 \vee 1 = 1$	$\neg 1 = 0$	$\bar{1} = 0$
$1 \wedge 0 = 0$	$1 \vee 0 = 1$		
$1 \wedge 1 = 1$	$1 \vee 1 = 1$		

הגדרה 5.18: גרירה

יהיו p, q משתנים בוליאניים.

$p \to q = 0$ אם $p = 1$ ו- $q = 0$.

אחרת $p \to q = 1$.

הגדרה 5.19: אם ורק אם

יהיו
p, q משתנים בוליאניים.

$p \leftrightarrow q = 1$ אם $p = q = 0$ או אם $p = q = 1$, כלומר אם ל- p ו- q אותם ערכים.

אחרת
$$p \leftrightarrow q = 0 \ .$$

$0 \oplus 0 = 0$	$0 \leftrightarrow 0 = 1$	$0 \to 0 = 1$
$0 \oplus 1 = 0$	$0 \leftrightarrow 1 = 0$	$0 \to 1 = 1$
$1 \oplus 0 = 1$	$1 \leftrightarrow 0 = 0$	$1 \to 0 = 0$
$1 \oplus 1 = 0$	$1 \leftrightarrow 1 = 1$	$1 \to 1 = 1$

5.5.2 הגדרה של נוסחה ספיקה

נוסחה בוליניאית היא ביטוי במונחי משתנים בווליאניים ופעולות בוליאניות. למשל

$$\phi = (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{z}) \ .$$

הגדרה 5.20: נוסחה בוליאנית ספיקה

אומרים כי נוסחה בוליאנית ϕ ספיקה אם קיימת השמת ערכי אמת הגורמת לכך שהערך שמייצגת הנוסחה יהיה 1.

דוגמה 5.15

הנוסחה

$$\phi = (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{z})$$

ספיקה מסיבה לכך שקיימת השמה

$$x = 0, \quad y = 1, \quad z = 0$$

עבורה

$$\phi = 1 \ .$$

אומרים כי ההשמה $x = 0, y = 1, z = 0$ מספקת את ϕ.

דוגמה 5.16

נתונה הנוסחה

$$\phi = ((x_1 \leftarrow x_2) \vee \neg ((\neg x_1 \leftrightarrow x_3) \vee x_4)) \wedge \neg x_2$$

מצאו השמה מספקת ל- ϕ.

פתרון:

ההשמה

$$\langle x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1 \rangle$$

היא השמה מספקת. שכן:

$$\begin{aligned} \phi &= ((0 \leftrightarrow 0) \vee \neg ((\neg 0 \leftrightarrow 1) \wedge 1)) \wedge \neg 0 \\ &= (1 \vee \neg (1 \wedge 1)) \wedge 1 \\ &= (1 \vee 0) \wedge 1 \\ &= 1 \ . \end{aligned}$$

ולכן נוסחה ϕ זו שייכת ל- SAT.

הגדרה 5.21: בעיית הספיקות SAT

בעיית הספיקות שואלת אם נוסחה בוליאנית נתונה היא ספיקה. במונחי שפות פורמלית:

$$SAT = \left\{ \langle \phi \rangle \ \middle| \ \phi \text{ היא נוסחה בוליאנית ספיקה} \right\}$$

האלגוריתם הנאיבי הקובע אם נוסחה בוליאנית כלשהי היא ספיקה אינו רץ בזמן פולינומיאלי. עבור נוסחה ϕ המכילה n משתנים קיימות 2^n השמות אפשריות. אם האורך של $\langle \phi \rangle$ פולינומיאלי ב- n, אזי בדיקה כל ההשמות דורשות זמן על-פולינומיאלי. כפי שמוכיח המשפט שלהלן, לא קיים ככל הנראה אלגוריתם זמן-פולינומיאלי עבור בעיה זו.

5.6 הגדרה של רדוקציה (תזכורת)

הגדרה 5.22: פונקיצה הניתנת לחישוב

פונקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ ניתנת לחישוב אם קיימת מ"ט M, עבורה על הקלט w M עוצרת עם $f(w)$ על הסרט שלה.

הגדרה 5.23: פונקציה שניתנת לרדוקציה

השפה A ניתנת לרדוקציה לשפה B, נסמן $A\leq_m B$, אם קיימת פונקציה שניתנת לחישוב $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ כך שלכל

$$w\in A\Leftrightarrow f(w)\in B\ .$$

הפונקציה f נקראת הרדוקציה של A ל- B.

5.7 הגדרה של רדוקציה זמן-פולינומיאלית

הגדרה 5.24: פונקיצה הניתנת לחישוב זמן-פולינומיאלי

פונקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ ניתנת לחישוב זמן-פולינומיאלי אם קיימת מ"ט זמן-פולינומיאלית M, עבורה על הקלט w, M עוצרת עם $f(w)$ על הסרט שלה.

הגדרה 5.25: פונקציה שניתנת לרדוקציה זמן-פולינומיאלית

השפה A ניתנת לרדוקציה זמן-פולינומיאלית לשפה B, שנסמן $A\leq_P B$, אם קיימת פונקציה שנתנת לחישוב זמן-פולינומיאלית $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ כך שלכל

$$w\in A\Leftrightarrow f(w)\in B\ .$$

הפונקציה f נקראת **הרדוקציה זמן-פולינומיאלית** של A ל- B.

משפט 5.6: אם $B\leq_P A$ ו- $B\in P$ אז $A\in P$

אם $B\leq_P A$ ו- $B\in P$ אז $A\in P$.

הוכחה:

$B\in P$ לכן קיימת מ"ט M_B זמן-פולינומיאלית שמכריעה את B.

$B\leq_P A$ לכן קיימת רדוקציה זמן פולינומיאלית f מ-A ל- B.

נבנה מ"ט M_A שמכריעה את A:

$M_A=$ " על הקלט w:

1) מחשבים את $f(w)$.
2) מריצים M_B על הקלט $f(w)$.
3) מחזירים את הפלט של M_B.

מכיוון ש- f רדוקציה של B ל-A אז $f(w) \in B$ אם ורק אם $w \in A$.
לכן M_B מקבלת את $f(w)$ לכל $w \in A$.

הוכחנו כי M_A מכריעה את A.

כעת נוכיח כי $M_A \in P$.
f רדוקציה זמן פולינומיאלי $\Leftarrow$ שלב 1) מתבצע בזמן פולינומיאלי.
M_B מ"ט זמן פולינומיאלית ו- f חישובית זמן-פולינומיאלית $\Leftarrow$ שלב 2) מתבצע בזמן פולינומיאלי (מכיוון שהרכבה של שני פולינומים היא פולינום).

■

5.8 ספיקות נוסחאות 3-CNF

הגדרה 5.26: ליטרל (literal)

ליטרל (literal) בנוסחה בולינאנית הוא מופע של משתנה בוליאני $x \in \{0,1\}$ או שלילתו, $\bar{x}$.

הגדרה 5.27: פסוקית (clause)

פסוקית (clause) היא נוסחה בוליאנית שמכילה ליטרלים שמחוברים על ידי פעולות $\vee$.
למשל

$$x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \ .$$

הגדרה 5.28: צורה קוניונקטיבית נורמלית (CNF)

אומרים כי נוסחה בוליאנית היא **צורה קוניונקטיבית נורמלית** (conjunctive normal form) ובקיצור CNF אם היא מבוטאת כ- AND של פסוקיות שכל אחת מהן היא OR של ליטרלים אחד או יותר.
למשל

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_3 \vee \bar{x}_5 \vee x_6) \wedge (x_3 \vee \bar{x}_6) \ .$$

הגדרה 5.29: צורה 3-CNF

נוסחה בוליאנית נתונה בצורה 3-CNF (3-conjunctive normal form) אם כל פסוקית מכילה בדיוק שלושה ליטרלים שונים.
למשל

$$(x_1 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$$

היא נוסחה 3-CNF. הראשונה בשלוש הפסוקיות שלה היא $(x_1 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$, המכילה את שלושת הליטרלים $x_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2$.
דוגמה נוספת של 3-CNF:

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_5 \vee x_6) \wedge (x_3 \vee \bar{x}_6 \vee x_4) \wedge (x_4 \vee x_5 \vee x_6) \ .$$

הגדרה 5.30: הבעיית 3-SAT

בעיית ספיקותן של נוסחאות 3-CNF שואלת אם נוסחת 3-CNF בוליאנית נתונה ϕ היא ספיקה.
בשפה פורמלית:

$$3SAT = \left\{ \langle \phi \rangle \ \middle| \ \text{היא נוסחת 3-CNF ספיקה } \phi \right\}$$

משפט 5.7: 3-SAT ניתנת לרדוקציה זמן-פולינומיאלית ל- CLIQUE

בהביית 3-SAT ניתנת לרדוקציה זמן-פולינומיאלית לבעיית CLIQUE:

$$3SAT \leq_p CLIQUE \ .$$

הוכחה:
תהי ϕ נוסחה בוליאנית עם k פסוקיות:

$$\phi = (a_1 \vee b_1 \vee c_1) \wedge (a_2 \vee b_2 \vee c_2) \wedge \cdots \wedge (a_k \vee b_k \vee c_k) \ .$$

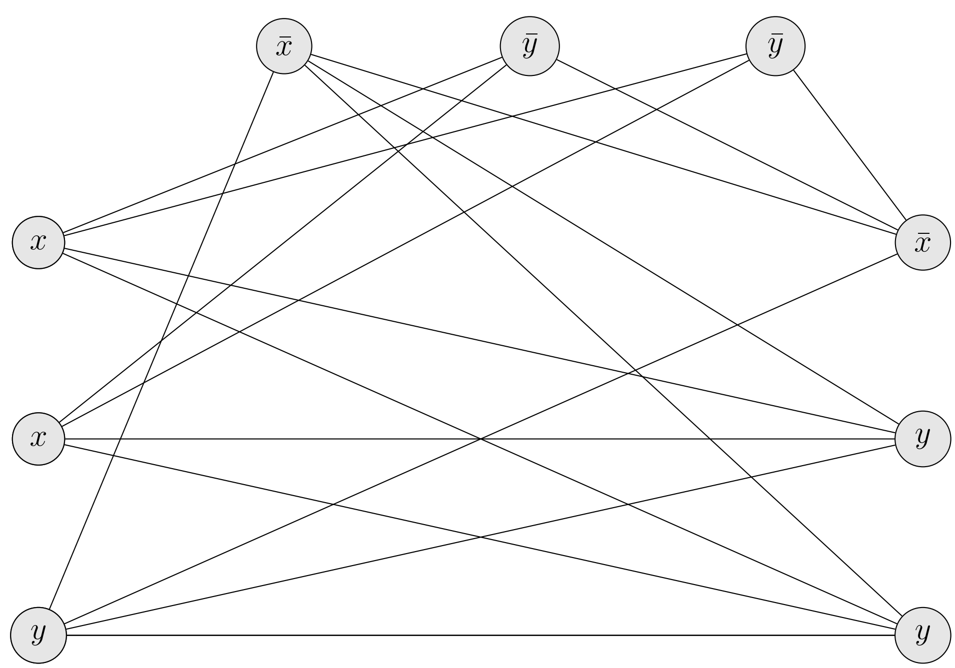
תהי R פונקצית הרדוקציה שיוצרת את המחרוזת $\langle G, k\rangle$ כאשר $G = (V, E)$ גרף בלתי-מכוון שמוגדר כמפורט להלן.

- עבור כל פסוקית $C_i = (a_i \vee b_i \vee c_i)$ נוסיף ל- V שלושה של קדקודים $T_i = (a_i, b_i, c_i)$.
- נחבר בקשת שני קדקודים v_i ו- v_j $(i, j = 1, \ldots, k)$ אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

תנאי 1) v_i ו- v_j שייכים לשלושות שונות, דהיינו $i \neq j$.

תנאי 2) הליטרלים המתאימים להם **קונסיסטנטיים**, כלומר v_i אינו שלילתו של v_j.

למשל בהינתן הנוסחה
$$\phi = (x \vee x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee y)$$
הגרף G אשר ה- 3CNF הזה יוצר מתואר בתרשים למטה:



כעת נוכיח כי ϕ ספיקה אם ורק אם G מכיל קליקה.

- נניח שעבור ϕ קיימת השמה מספקת.
- עבור ההשמה הזו בכל פסוקית יש לפחות ליטרל אחד אשר הוא "אמת" (שווה ל-1).

- נבחר ליטרל אשר הוא אמת בכל פסוקית.
- הקבוצת הקדקודים הנבחרים בשלב הקודם מהווים k- קליקה:
  הרי אנחנו בחרנו k קדקודים, ובנוסף מובטח לנו שכל זוג קדקודים מקושרים, בגלל שכל זוג קדקודים מקיים את השני התנאים שלעיל:

תנאי 1) אף זוג קדקודים אינם מאותה שלושת מכיוון שבחרנו ליטרל אחד מכל פסוקית.

תנאי 2) אף קדקוד לא השלילתו של קדקוד השני באף זוג כי כל ליטרל שבחרנו הוא אמת.

לכן G מכיל k-קליקה.

עכשיו נוכיח שאם G מכיל k-קליקה אז ϕ ספיקה.

- נניח ש- G מכיל k-קליקה.
- ב k-קליקה זו, אין אף זוג קדקודים שבאותה שלושת בגלל שקדקודים מאותה שלושת אינם מחוברים בקשת.
- נבחר השמת ערכים לליטרלים של ϕ כך שהליטרלים שמהווים הקדקודים של ה k-קליקה הם אמת.
  ההשמה הזו תמיד אפשרית מכיוון שב- G אין זוג קדקודים בעלי ערכים משלימים שמחוברים בקשת.
- ההשמה זו מספקת את ϕ בגלל שבכל פסוקית של 3 ליטרלים יהיה לפחות ערך אמת אחד, ולכן ϕ מסופקת.

■

מסקנה 5.1: $3SAT \in P \quad \Rightarrow \quad CLIQUE \in P$

לפי משפט 5.6 ומשפט 5.7:

אם $CLIQUE \in P$ אז $3SAT \in P$.

5.9 NP שלמות

רדוקציות זמן-פולינומיאליות מספקות אמצעי פורמלי שבעזרתו אפשר להראות כי בעיה אחת קשה לפחות כמו בעיה אחרת, עד כדי גורם זמן-פולינומיאלי. כלומר, אם $A \leq_p B$ אזי B קשה יותר מ- A בגורם פולינומיאלי לכל היותר. זוהי הסיבה לכך שהשימוש בסימן "$\leq$" לציון רדוקציה מתאים.
עכשיו אנחנו נגדיר את מחלקת השפות ה- NP- שלמות שהן הבעיות הקשות ביותר ב- NP.

הגדרה 5.31: NP-שלמות

שפה B היא **NP- שלמה** או **שלמה ב- NP** (NP-complete) אם היא מקיימת את השני התנאים הבאים:

1) $B \in NP$ וגם

2) $B \leq_p A$ עבור כל $A \in NP$.
במילים פשוטות: כל A ב- NP ניתנת לרדוקציה זמן-פולינומיאלית ל- B.

הגדרה 5.32: NP קשה

אם שפה B מקיימת את תכונה 2) אולם לא בהכרח את תכונה 1) בהגדרה 5.31
אז אומרים כי B **NP- קשה** או **קשה ב- NP** (NP-hard).

משפט 5.8:

אם B NP- שלמה ו- $B\in P$ אז $P=NP$.

הוכחה:
נניח ש- B NP- שלמה. אז:

- $B\in NP$ וגם
- כל שפה $A\in NP$ ניתנת לרדוקציה לשפה B בזמן-פולינומיאלי:

$$A\leq_p B \ .$$

בנוסף נניח ש- $B\in P$. ז"א קיימת מ"ט דטרמיניסטית זמן-פולינומיאלית M שמכריעה את B.

לכל $A\in NP$ $\exists$ רדוקציה חישובית זמן-פולינומיאלית R כך ש-

$$A\leq_p B \ .$$

ז"א הכרעה של B בזמן פולינומיאלי מאפשרת הכרעה של A בזמן פולינומיאלי.

- מכיוון ש- $B\in P$ אז כל שפה $A\in NP$ כריעה בזמן פולינומיאלי באמצעות הרדוקציה R זמן-פולינומיאלי והמ"ט דטרמיניסטית זמן-פולינומיאלית M.
- לכן $A\in P$ לכל $A\in NP$.

■

משפט 5.9: אסוציאטיביות של NP שלמות

אם השני תנאים הבאים מתקיימים:

1) B היא שפה NP- שלמה.
2) קיימת $C\in NP$ עבורה $B\leq_p C$.

אז C שפה NP- שלמה.

הוכחה:
כדי להוכיח ששפה C תהיה NP- שלמה, לפי הגדרה 5.31 יש להוכיח ש:

1) $C\in NP$
2) עבור כל שפה $A\in NP$ מתקיים $A\leq_p C$.

התנאי הראשון כבר נתון. נשאר רק להוכיח שתנאי השני מתקיים.

- B NP- שלמה $\xRightarrow{\text{הגדרה 5.31}}$ $B \geq_p A$ לכל $A\in NP$.

(כלומר כל שפה $A\in NP$ ניתנת לרדוקציה זמן-פולינומאלית ל- B).

- בנוסף נתון כי $B\leq_P C$ לכל $C\in NP$.

- ז"א $A \le_p B \le_p C$ לכן $A \le_p C$ לכל $A \in NP$.
  (כלומר, רדוקציות זמן-פולינומיאלית ניתנת להרכבה).

לכן קיבלנו ש-

$$A \le_p C$$

לכל $A \in NP$ ולכן השפה C היא NP- שלמה.

■

משפט 5.10: משפט קוק לוין

הבעיית SAT היא NP - שלמה.

הוכחה:
חשיפה מלאה: ההוכחה הבאה מתבססת על ההוכחה שנתונה בהספר של Sipser.

על פי הגדרה 5.31 יש להוכיח ששני התנאים הבאים מתקיימים:

תנאי 1: $SAT \in NP$.

תנאי 2: $A \le_p SAT$ לכל $A \in NP$.

ראשית נוכיח כי $SAT \in NP$:

כדי להוכיח כי SAT שייכת ל- NP, נוכיח כי אישור המורכב מהשמה מספקת עבור נוסחת קלט ϕ ניתן לאימות בזמן פולינומיאלי.
נניח כי $n = |\phi|$. כלומר ב- ϕ מופיעים n ליטרלים.
ז"א השמה כלשהי דורשת n משתני בוליאניים לכל היותר.

- אלגוריתם האימות מחליף כל משתנה בנוסחה בערך המתאים לו על פי ההשמה.
  השלב הזה הוא $O(n)$.
- אחר כך האלגוריתם מחשב את ערכו של הביטוי:
  * נניח כי הנוסחה ϕ מכילה k דורות של סוגריים בתוך סוגריים.
  * החישוב מתחיל עם החישובים של הביטויים בתוך הסוגריים הכי בפנים.
  * יש n סוגריים הכי-בפנים לכל היותר, וכל אחד של הסוגריים האלה מכיל n ליטרלים לכל היותר.
    לכן החישוב הזה הוא $O(n^2)$.
  * יש k דורות של סוגריים לכן החישוב כולו הוא $O(kn^2)$
- בסה"כ הסיבוכיות זמן הריצה היא

$$O(n) + O\left(kn^2\right) = O\left(n^2\right)$$

  לפיכך אישור של השמה כלשהי מתבצע בזמן פולינומיאלי.
- אם ערכו של הביטוי הוא 1 הנוסחה ספיקה.

הוכחנו כי $SAT \in NP$. עכשיו נוכיח כי $A \le_p SAT$.

תהי N מ"ט אי-דטרמיניסטית זמן-פולינומיאלית שמכריעה שפה A כלשהי בזמן $O\left(n^k\right)$ עבור k טבעי.
התרשים למטה מראה טבלה של קונפיגורציות של N.
ברשימה הבאה רשומות ההגדרות של הטבלה:

- כל שורה מראה את תוכן הסרט בשלב מסוים של מסלול אחד של N.
- בשורה הראשונה יש את הקונפיגורציה ההתחלתית.
- אנחנו מניחים כי האורך של המילה, כלומר אורך הקלט הוא n.
  הסימנים $w_1, \ldots, w_n$ מסמנים את התווים של הקלט.
- בתא הראשון בכל שורה יש #, ואחר כך רשומה הקונפיגורציה של N.
  בסוף הקונפיגורציה בכל שורה יש #.
  אחרי ה- # בקצה הימין של המילה, בכל תא יש תו רווח עד הסוף של השורה.
  התווי רווח לפני המשבצת הראשונה של הקונפיגורציה לא מופיעים בטבלה.
- האורך של כל שורה הוא בדיוק n^k תאים.
- בטבלה יש בדיוק n^k שורות לסיבה הבאה:
  - המכונת טיורינג מבצעת n^k צעדים לכל היותר.
  - בכל צעד המ"ט עוברת לקונפיגורציה חדשה.
  - בכל שורה רשומה קונפיגורציה.
  - בסה"כ יש n^k שורות עבור ה- n^k קונפיגוריות שונות האפשריות.

#	q_0	w_1	w_2	$\ldots$	w_n	$\sqcup$	$\ldots$	$\sqcup$	#
#	q_0								#
#	q_0								#
#									#

אנחנו אומרים כי טבלה שלהי היא **טבלה המקבלת** אם באחת השורות יש קונפיגורציה אשר N מקבלת אותה.

בעזרת הטבלה נתאר את הרדוקציה זמן-פולינומיאלית f משפה A כלשהי ל- SAT.

הפונקצית הרדוקציה

f מקבלת קלט w ומחזירה נוסחה $\phi = f(w)$, אשר לפי ההגדרה של פונקצית הרדוקציה, עומדת בתנאי הבא:

$$w \in A \qquad \Leftrightarrow \qquad f(w) \in SAT \ .$$

יהיו Q קבוצת המצבים ו- Γ האלפיבית של הסרט של N. נגדיר

$$C = Q \cup \Gamma \cup \{\#\} \ .$$

נסמן ב- s איבר כלשהו של C.

עבור כל תא ה- (i,j) של הטבלת הקונפיגורציות נגדיר משתנה בוליאני $x_{i,j,s}$ לכל $1 \leq i,j \leq n^k$.

המשתנה x_{ijs} מוגדר על פי התנאי

$$x_{ijs} = 1$$

אם בתא ה- ij של הטבלה יש $s \in C$. למשל, אם בתא ה- $(2,5)$ של הטבלה מופיע התו a אז

$$x_{2,5,\mathrm{a}} = 1$$

בעוד

$$x_{2,5,\mathrm{b}} = 0 \ .$$

במובן הזה, התכנים של כל התאים של הטבלה מסומנים על ידי המשתנים של ϕ.

עכשיו נבנה נוסחה ϕ על סמך התנאי שהשמה מספקת של ϕ תהיה מתאימה לטבלה המקבלת של N.
נגדיר

$$\phi = \phi_{\text{cell}} \wedge \phi_{\text{start}} \wedge \phi_{\text{move}} \wedge \phi_{\text{acc}} \ . \tag{1}$$

אנחנו נסביר את כל הנוסחאות ϕ_{cell}, ϕ_{start}, ϕ_{move} ו- ϕ_{acc} אחד אחד למטה.

- <u>הנוסחה ϕ_{cell}</u>

כפי שמצויין לעיל, אם המשתנה $x_{i,j,s}$ "דולק", כלומר אם $x_{i,j,s} = 1$, זאת אומרת שיש סימן s בתא ה- ij של הטבלה. אנחנו רוצים להבטיח שהשמה כלשהי בנוסחה אשר מתאימה לקונפיגורציה של הטבלה, מדליקה בדיוק משתנה אחד לכל תא של הטבלה. למטרה זו נגדיר ϕ_{cell} כך:

$$\phi_{\text{cell}} = \bigwedge_{1 \le i,j \le n^k} \left[\left(\bigvee_{s \in C} x_{i,j,s} \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{s,t \in C \\ s \neq t}} \left(\overline{x}_{i,j,s} \vee \overline{x}_{i,j,t} \right) \right) \right] \tag{2}$$

* האיבר הראשון בסוגריים מרובעים, $\bigvee\limits_{s \in C} x_{i,j,s}$ מבטיח שלכל תא של הטבלה, לפחות משתנה אחד דולק.
* האיבר השני $\bigwedge\limits_{\substack{s,t \in C \\ s \neq t}} \left(\overline{x}_{i,j,s} \vee \overline{x}_{i,j,t} \right)$ מבטיח שעבור כל תא של הטבלה, משתנה אחד לכל היותר דולק.

לפיכך כל השמה מספקת עומדת בתנאי שיהיה בדיוק סימן אחד, s, בכל תא של הטבלה.

- <u>הנוסחה ϕ_{start}</u>

נוסחה ϕ_{start} מבטיחה ששורה הראשונה של הטבלה היא הקונפיגורציה ההתחלתית של N על הקלט w:

$$\begin{aligned}\phi_{\text{start}} = & x_{1,1,\#} \wedge x_{1,2,q_0} \wedge x_{1,3,w_1} \wedge x_{1,4,w_2} \\ & \wedge \ldots \wedge \\ & x_{1,n+2,w_n} \wedge x_{1,n+3,\sqcup} \wedge \ldots \wedge x_{1,n^k-1,\sqcup} \wedge x_{1,n^k,\#}\end{aligned} \tag{3}$$

- <u>הנוסחה ϕ_{acc}</u>

הנוסחה ϕ_{acc} מבטיחה שקיימת טבלה קונפיגורציה אשר המ"ט N מקבלת אותה.

בפרט ϕ_{acc} מבטיחה שהסימן q_{acc} מופיע בתא אחד של הטבלה דרך התנאי שלפחות אחד המשתנים $x_{i,j,q_{\text{acc}}}$ דולק:

$$\phi_{\text{acc}} = \bigvee_{1\leq i,j\leq n^k} x_{i,j,q_{\text{acc}}} \tag{4}$$

- <u>הנוסחה ϕ_{move}</u>

הנוסחה ϕ_{move} מבטיחה שכל שורה של הטבלה היא "שורה חוקית".

כלומר בכל שורה, הקונפיגורציה היא כך שאפשר להגיע אליה על ידי תזוזה חוקית של N מהקונפיגורציה הקודמת שמופיעה בשורה אחת למעלה.

תזוזה חוקית בין כל שתי קונפיגורציות נקבעת על ידי הפונקצית המעברים של המ"ט N.

בשפה פורמלית, אם c_i הקונפיגורציה של שורה i, ו- c_{i+1} הקונפיגורציה של השורה $i+1$ אחת למטה, אז ϕ_{move} מבטיחה כי לכל $1\leq i\leq n^k-1$ מתקיים

$$c_i \vdash_N c_{i+1} \ .$$

במונחי הטבלה, אפשר להגדיר תזוזה חוקית בין כל שתי שורות על ידי תת-טבלה מסדר 2×3 שמכילה 3 תאים מתאימים של שתי שורות שכנות.

מכאן ואילך אנחנו נקרא לתת-טבלה כזאת "חלון".

למטה יש דוגמאות של חלונות חוקיים:

a	q_1	b
q_2	a	c

a	q_1	b
a	a	q_2

a	a	q_1
a	a	b

#	b	a
#	b	a

a	b	a
a	b	q_2

b	b	b
c	b	b

החלונות האלה למטה הם דוגמאות לחלונות לא חוקיים:

a	b	a
a	a	a

a	q_1	b
q_1	a	a

b	q_1	b
q_2	b	q_2

הנוסחה ϕ_{move} קובעת שכל חלון של הטבלה חוקי. בפרט, כל חלון מכיל 6 תאים. לכן ϕ_{move} קובעת שהתכנים של ה-6 תאים של כל חלון מהווה חלון חוקי. ז"א

$$\phi_{\text{move}} = \bigwedge_{\substack{1\leq i\leq n^k\\ 1\leq j\leq n^k}} \left(\text{חלון ה- } i,j \text{ חוקי}\right) \tag{5}$$

אנחנו מציבים בטקסט " חלון ה- i,j חוקי " את הנוסחה הבאה, כאשר $a_1,\ldots,a_6$ מסמנים את התכנים של ה-6 תאים של כל חלון:

$$\bigvee_{\substack{\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}\\ \text{חלון חוקי}}} \left(x_{i,j-1,a_1}\wedge x_{i,j,a_2}\wedge x_{i,j+1,a_3}\wedge x_{i+1,j-1,a_4}\wedge x_{i+1,j,a_5}\wedge x_{i+1,j+1,a_6}\right) \tag{6}$$

עד כה הוכחנו שקיים רדוקציה מכל שפה $A \in NP$ ל- SAT.
כעת נוכיח כי הרדוקציה זו חישובית בזמן-פולינומיאלי.

הטבלה של N היא מסדר $n^k \times n^k$ ולכן היא מכילה n^{2k} תאים.

נחשב את הסיבוכיות של כל הנוסחאות ϕ_{cell}, ϕ_{start}, ϕ_{acc}, ϕ_{move}.

- <u>הנוסחה ϕ_{cell}</u>

  הנוסחה (2) של ϕ_{cell} מכילה n^{2k} נוסחאות עם 3 ליטרלים. לכן

  $$\phi_{\text{cell}} = O\left(n^{2k}\right) \ .$$

- <u>הנוסחה ϕ_{start}</u>

  הנוסחה (3) של ϕ_{start} מכילה בדיוק n^k ליטרלים. לכן

  $$\phi_{\text{start}} = O\left(n^{k}\right) \ .$$

- <u>הנוסחה ϕ_{acc}</u>

  הנוסחה (4) של ϕ_{acc} מכילה בדיוק n^k ליטרלים. לכן

  $$\phi_{\text{acc}} = O\left(n^{k}\right) \ .$$

- <u>הנוסחה ϕ_{move}</u>

  הנוסחה (6,5) של ϕ_{move} מכילה n^{2k} נוסחאות עם 6 ליטרלים. לכן

  $$\phi_{\text{move}} = O\left(n^{2k}\right) \ .$$

לכן בסה"כ

$$\phi = O\left(n^{2k}\right) + O\left(n^{k}\right) + O\left(n^{k}\right) + O\left(n^{2k}\right) = O\left(n^{2k}\right) \ .$$

לפיכך קיימת רדוקציה חישובית בזמן פולינומיאלי מכל שפה $A \in NP$ ל- SAT.

■

משפט 5.11: 3-SAT היא NP שלמה.

3-SAT היא NP שלמה.

הוכחה:
יש לקיים את השני תנאים הבאים:

1) $3SAT \in NP$.

ניתן לבנות אלגוריתם אימות עבור $3SAT \in NP$ דומה לאלגוריתם האימות עבור SAT שבנינו בהוכחה של המשפט קוק-לוין 5.10 למעלה.

2) $3SAT$ היא NP קשה ע"י רדוקציה

$$SAT \leq_p 3SAT \ .$$

ואז בגלל ש- SAT היא NP שלמה (לפי משפט קוק-לוין 5.10) ומכיוון ש- $3SAT \in NP$ אז לפי משפט האסימפטוטית 5.9 גם $3SAT$ היא NP- שלמה.

קיום פונקצית הרדוקציה $SAT \leq_p 3SAT$

כעת נבנה את פונקציה הרדוקציה מ- SAT ל- $3SAT$.

ראשית נציין כי כל נוסחה בוליאנית ϕ ניתנת לרשום בצורה CNF בזמן פולינומיאלי.

בהינתן נוסחת CNF ϕ (הקלט של SAT) נבנה בזמן פולינומיאלי נוסחת 3-CNF ϕ' (הקלט של $3SAT$) ואז נוכיח שמתקיים

$$\langle \phi' \rangle \in 3SAT \quad \Leftrightarrow \quad \langle \phi \rangle \in SAT \ .$$

לכל פסוקית C ב- ϕ המכילה יותר מ- 3 ליטרלים, ניצור אוסף C' ב- ϕ' של פסוקיות כך שכל פסוקית ב- C' תכיל 3 ליטרלים. למשל בהינתן הפסוקית C הבאה של ϕ:

$$C = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5$$

ניצור את הפסוקית C' הבאה ב- ϕ':

$$C' = (x_1 \vee x_2 \vee y_1) \wedge (\bar{y}_1 \vee x_3 \vee y_2) \wedge (\bar{y}_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) \ .$$

באופן כללי, לכל פסוקית $C = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k$ המכיל $k > 3$ ליטרלים, ניצור אוסף C' של פסוקיות שבו כל פסוקית מכילה 3 ליטרלים, ע"י הוספת $k-3$ משתנים $y_1, y_2, \ldots, y_{k-3}$:

$$C' = (a_1 \vee a_2 \vee y_1) \wedge (\bar{y}_1 \vee a_3 \vee y_2) \wedge \ldots \wedge (\bar{y}_{i-2} \vee a_i \vee y_{i-1}) \wedge \ldots \wedge (\bar{y}_{k-3} \vee a_{k-1} \vee a_k) \ .$$

בפרט, עבור כל פסוקית $C = (a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k)$ נניח $a_i = 1$ הוא הליטרל הראשון ששווה ל- 1. אז

- נשים $y_j = 1$ לכל $1 \leq j \leq i-2$,
- ונשים $y_j = 0$ לכל $i-1 \leq j \leq k-3$.

סיימנו להגדיר את הפונקציה הרדוקציה.
כעת נוכיח כי הפונקציה הזאת מקיימת את התנאי ההכרחי

$$\langle \phi' \rangle \in 3SAT \quad \Leftrightarrow \quad \langle \phi \rangle \in SAT \ .$$

כיוון $\Leftarrow$:

נניח כי $\langle \phi \rangle \in SAT$ ותהי X השמה המספקת את ϕ.
נוכיח שקיימת השמה X' מתאימה המספקת את ϕ'.

- בכל פסוקית C של ϕ, עבור הליטרלים $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ניתן אותם ערכים כמו ב- X.
- מכיוון ש- X מספקת את ϕ, בכל פסוקית $C = (a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k)$ יש לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך 1. נניח $a_i = 1$. אז על פי ההגדרה של פונקצית הרודקציה:
  - נשים $y_j = 1$ לכל $1 \leq j \leq i-2$,
  - ונשים $y_j = 0$ לכל $i-1 \leq j \leq k-3$.

באופן הזה אנחנו ניצור אוסף C' של פבוקיות עם המבנה הבא:

$$\left(a_1 \vee a_2 \vee \overset{1}{y_1}\right) \wedge \left(\overset{0}{\bar{y}_1} \vee a_2 \vee \overset{1}{y_2}\right) \wedge \ldots \wedge \left(\overset{0}{\bar{y}_{i-3}} \vee a_{i-1} \vee \overset{1}{y_{i-2}}\right) \wedge \left(\overset{0}{\bar{y}_{i-2}} \vee \overset{1}{a_i} \vee \overset{0}{y_{i-1}}\right) \wedge \left(\overset{1}{\bar{y}_{i-1}} \vee a_{i+1} \vee \overset{0}{y_i}\right)$$
$$\wedge \ldots\ldots \wedge \left(\overset{1}{\bar{y}_{k-3}} \vee a_{k-1} \vee a_k\right)$$

ולכן השמה זו מספקת את C' ולכן $\langle \phi' \rangle \in 3SAT$.

כיוון $\Rightarrow$:

נניח כי $\langle \phi' \rangle \in 3SAT$ ותהי X' השמה המספקת את ϕ'.
נוכיח שקיימת השמה X המספקת את ϕ.

נסתכל על פסוקית $C = (a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k)$.
נניח בשלילה שלא קיימת השמה X המספקת את C. אז בהכרח

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$$

לפי זה, באוסף פסוקיות C' שנקבל על פי ההגדרה של פונקצית הרדוקציה, $y_j = 1$ לכל $1 \leq j \leq k-3$.
כלומר מתקיים $y_1 = y_2 = \ldots = y_{k-3} = 0$. לכן

$$C' = \left(\overset{0}{a_1} \vee \overset{0}{a_2} \vee \overset{1}{y_1}\right) \wedge \left(\overset{0}{\bar{y}_1} \vee \overset{0}{a_3} \vee \overset{1}{y_2}\right) \wedge \ldots \wedge \left(\overset{0}{\bar{y}_{i-2}} \vee \overset{0}{a_i} \vee \overset{1}{y_{i-1}}\right) \wedge \ldots \wedge \left(\overset{0}{\bar{y}_{k-3}} \vee \overset{0}{a_{k-1}} \vee \overset{0}{a_k}\right)$$

הפסוקית האחרונה $\left(\overset{0}{\bar{y}_{k-3}} \vee \overset{0}{a_{k-1}} \vee \overset{0}{a_k}\right)$ אינה מסופקת.
לכן C' אינה מסופקת, בסתירה לכך ש- X' מספקת את C'.

ולכן $\langle \phi \rangle \in SAT$.

הוכחנו שקיימת הרדוקציה $SAT \leq 3SAT$.

כעת נוכיח כי הרדוקציה הזו היא זמן פולינומיאלית.

סיבוכיות

החישוב של הפונקציה מתבצע בזמן פולינומיאלי. ספציפי, אם האורך של הנוסחה ϕ הוא $n = |\phi|$ אז הרודקציה היא $O(n)$.

■