שעור 5
אסטרטגיות מעורבות

5.1 הגדרה של אסטרטגיות מעורבות

הגדרה 5.1 אסטרטגיות מעורבות

יהי $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ משחק בצורה אסטרטגית שבו קבוצות האסטרטגיות של השחקנים סופיות.

נניח כי $S_1 = (s_1^1, s_1^2, \ldots, s_1^n)$ קבוצת אסטרטגיות של שחקן 1,
ונניח כי σ_1 היא פונקצית ההסתברות של הקבוצת אסטרטגיות S_1:

$$\sigma_1 : S_1 \to [0,1] \ .$$

קבוצת אסטרטגיה מעורבת של שחקן 1 מסומן σ_1 ומוגדר להיות הקבוצה

$$\sigma_1(S_1) = \left\{\sigma_1\left(s_1^1\right), \sigma_1\left(s_1^2\right), \ldots, \sigma_1\left(s_1^n\right)\right\}$$

כאשר:

$\sigma_1\left(s_1^1\right) =$ ההסתברות לשחקן 1 לשחק לפי האסטרטגיה s_1^1,
$\sigma_1\left(s_1^2\right) =$ ההסתברות לשחקן 1 לשחק לפי האסטרטגיה s_1^2,
וכן הלא.

באופן כללי, נניח כי $S_i = (s_i^1, s_i^2, \ldots, s_i^m)$ קבוצת אסטרטגיות של שחקן 1.
קבוצת אסטרטגיה מעורבת של שחקן i מסומן σ_i ומוגדר להיות הקבוצה

$$\sigma_i(S_i) = \left\{\sigma_i\left(s_i^1\right), \sigma_i\left(s_i^2\right), \ldots, \sigma_i\left(s_i^m\right)\right\}$$

כאשר:

$\sigma_i\left(s_i^1\right) =$ ההסתברות לשחקן i לשחק לפי האסטרטגיה s_i^1,
$\sigma_i\left(s_i^2\right) =$ ההסתברות לשחקן i לשחק לפי האסטרטגיה s_i^2,
וכן הלא.

סימון: ניתן לסמן אסטרטגיה מעורבת עם אותיות גדולות, ולסמן את ההסתברויות עצמן עם אותיות קטנות. למשל

$$\sigma\left(S_1\right) = \left\{\sigma\left(s_1^1\right), \sigma\left(s_1^2\right), \ldots, \sigma\left(s_1^n\right)\right\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

ז"א $x_1 = \sigma\left(s_1^1\right)$ מסמן את ההסתברות ששחקן 1 ישחק לפי אסטרטגיה s_1^1, ו- $x_2 = \sigma\left(s_1^2\right)$ מסמן את ההסתברות ששחקן 2 ישחק לפי אסטרטגיה s_1^2.

לפי תכונת החיובית של פונקצית הסתברות,

$$0 \le \sigma\left(s_i\right) \le 1 \qquad (*1)$$

לכל $s_i \in S_i$ ולפי תכונת הנרמול של פונקצית הסתברות, אם σ אסטרטגיה מעורבת של שחקן i אז מתקיים

$$\sigma\left(s_i^1\right) + \sigma\left(s_i^2\right) + \ldots + \sigma\left(s_i^n\right) = 1 \ . \qquad (*2)$$

תכונות (1*) ו- (2*) אומרות כי הקבוצה σ היא **סימפלקס**.

דוגמה 5.1 (אסטרטגיה מעורבת)

דוגמה 1) נניח שקבוצת האסורוגיות הטהורות של שחקן היא 1

$$S_1 = \{A, B, C\} \ .$$

את האסטרטגיות המעורבת σ שבה הוא בוחר כל אסטרטגיה טהורה בהסתברות $\frac{1}{3}$ נסמן על יד

$$\begin{aligned}\sigma(S_1) &= \{\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C)\}\\ &= \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

דוגמה 2 אם $S_1 = \{H, T\}$, האוסף של כל האסטרטגיות המעורבות, X של שחקן 1 מסומן

$$\Sigma_1 = \left\{\{\sigma_1(H), \sigma_1(T)\} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \ \middle|\ 0 \le x_1, x_2 \le 1, x_1 + x_2 = 1\right\} \ .$$

במקרה זה הקבוצה Σ_1 שקולה לקטע ב- $\mathbb{R}^2$ המחבר את $(1,0)$ עם $(0,1)$.

דוגמה 3 אם $S_2 = \{L, M, R\}$, אוסף של כל האסטרטגיות המעורבות Y של שחקן 2 מסומן

$$\Sigma_2 = \left\{\{\sigma_2(L), \sigma_2(M), \sigma_2(R)\} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \ \middle|\ 0 \le y_1, y_2, y_3 \le 1 \ , \ y_1 + y_2 + y_3 = 1\right\} \ .$$

במקרה זה Σ_2 שקולה למשולש ב- $\mathbb{R}^3$ שקדקודיו הם הנקודות $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ו- $(0,0,1)$.

דוגמה 5.2 (וקטור אסטרטגיות מעורב)

נתון המשחק G באסטרטגיות טהורות הנתון למטה:

$I \backslash II$	A	B
α	$1,1$	$2,-7$
β	$3,-2$	$5,6$

נניח כי באסטרטגיות מעורבות שחקן 1 משחק לפי אסטרטגיה A בהסתברות $\dfrac{1}{3}$ ולפי אסטרטגיה B בהסתברות $\dfrac{2}{3}$, ושחקן 2 משחק לפי אסטרטגיה α בהסתברות $\dfrac{2}{5}$ ולפי אסטרטגיה β בהסתברות $\dfrac{3}{5}$. וקטור האסטרגיות המעורב של שחקן 1 הוא

$$x = (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

ווקטור האסטרגיות המעורב של שחקן 2 הוא

$$y = (y_1, y_2) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) \ .$$

המשחק בצורה אסטרטגית מעורבת הינה

$I \backslash II$	$\frac{1}{3}(A)$	$\frac{2}{3}(B)$
$\frac{2}{5}(\alpha)$	$1,1$	$2,-7$
$\frac{3}{5}(\beta)$	$3,-2$	$5,6$

שימו לב X ו- Y הם סימפלקסים, בגלל ש- $x_1 + x_2 = 1$ ו- $y_1 + y_2 = 1$.

דוגמה 5.3 (וקטור אסטרטגיות מעורב)

נתון המשחק G באסטרטגיות טהורות הנתון למטה:

I \ II	L	C	R
t	$0,2$	$2,-7$	$3,2$
m	$3,-2$	$5,4$	$2,9$
b	$3,-2$	$5,6$	$7,-8$

נניח כי באסטרטגיות מעורבות שחקן 1 משחק לפי אסטרטגיה L בהסתברות $\frac{1}{7}$, לפי אסטרטגיה C בהסתברות $\frac{2}{7}$, ולפי אסטרטגיה R בהסתברות $\frac{4}{7}$, ושחקן 2 משחק לפי אסטרטגיה t בהסתברות $\frac{1}{9}$, לפי אסטרטגיה m בהסתברות $\frac{4}{9}$, ולפי אסטרטגיה b בהסתברות $\frac{5}{9}$.
וקטור האסטרגיות המעורב של שחקן 1 הוא

$$x=(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{4}{7}\right)$$

ווקטור האסטרגיות המעורב של שחקן 2 הוא

$$y=(y_1,y_2,y_3)=\left(\frac{1}{9},\frac{4}{9},\frac{5}{9}\right)\ .$$

המשחק בצורה אסטרטגית מעורבת הינה

I \ II	$\frac{1}{7}\,(L)$	$\frac{2}{7}\,(C)$	$\frac{4}{7}\,(R)$
$\frac{1}{9}\,(t)$	$0,2$	$2,-7$	$3,2$
$\frac{4}{9}\,(m)$	$3,-2$	$5,4$	$2,9$
$\frac{5}{9}\,(b)$	$3,-2$	$5,6$	$7,-8$

שימו לב X ו- Y הם סימפלקסים, בגלל ש- $x_1+x_2+x_3=\frac{1}{7}+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=1$ ו- $y_1+y_2+y_3=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{5}{9}=1$.

הגדרה 5.2 ההרחבה של משחק לאסטרטגיות מעורבות

יהי $G=\left(N,(S_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}\right)$ משחק בצורה אסטרטגית.
ההרחבה של G לאסטרטגיות מעורבות הוא המשחק

$$\Gamma=\left(N,(\Sigma_i)_{i\in N},(U_i)_{i\in N}\right) \tag{5.1}$$

כאשר:
Σ_i מסמן את האוסף של כל האסורוגיות המעורבות $\sigma_i\left(S_i\right)$ של שחקן i,
ו- U_i מסמן את פונקצית התשלום של שחקן i אשר מוגדרת

$$U_i\left(\sigma_1,\ldots,\sigma_N\right)=\sum_{s_1\in S_1,\ldots,s_N\in S_N} u_i(s_1,\ldots,s_n)\sigma_1(s_1)\sigma_2(s_2)\ldots\sigma_N(s_N)\ . \tag{5.2}$$

דוגמה 5.4 (פונקצית התשלום של משחק באסטרטגיות מעורבות)

נתון המשחק G באסטרטגיות טהורות:

I \ II	a	b
α	$1,1$	$2,-7$
β	$3,-2$	$5,6$

ונתון הוקטור האסטרגיות המעורבות של שחקן 1:

$$x = (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

והוקטור אסטרטגיות מעורבות של שחקן 2:

$$y = (y_1, y_2) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) \ .$$

ההרחבה של המשחק לאסטרטגיות מעורבות הינה

I \ II	$x_1\,(a)$	$x_2\,(b)$
$y_1\,(\alpha)$	$1,1$	$2,-7$
$y_2\,(\beta)$	$3,-2$	$5,6$

=

I \ II	$\frac{1}{3}\,(a)$	$\frac{2}{3}\,(b)$
$\frac{2}{5}\,(\alpha)$	$1,1$	$2,-7$
$\frac{3}{5}\,(\beta)$	$3,-2$	$5,6$

פונקצית התשלום של של שחקן i היא התוחלת התשלום של שחקן i:

$$U_1(x,y) = 1x_1x_2 + 2x_2y_1 + 3x_1y_2 + 5x_2y_2 = \frac{59}{15} \ .$$

$$U_2(x,y) = 1x_1x_2 - 7x_2y_1 - 2x_1y_2 + 6x_2y_2 = \frac{4}{15} \ .$$

ניתן לרשום את פונקצית התשלום במונחי המטריצות התשלומים של שחקן 1 ו- שחקן 2 בנפרד. המטריצת התשלומים של המשחק הינה

$$U = \begin{pmatrix} (1,1) & (2,-7) \\ (3,-2) & (5,6) \end{pmatrix}$$

והמטריצת התשלומים של השחקנים הנפרדים הינן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \ , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \ .$$

A המטיצת התשלומים של שחקן 1 ו- B המטירצת התשלומים של שחקן 2. במונחי A ו- B הפונקציות התשלומים שלהם באסטרטגיות מעורבות הן

$$U_1(x,y) = x^t A y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$U_2(x,y) = x^t B y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

דוגמה 5.5 (וקטור אסטרטגיות מעורב)

נתון המשחק G באסטרטגיות טהורות:

I \ II	L	C	R
t	$0,2$	$2,-7$	$3,2$
m	$3,-2$	$5,4$	$2,9$
b	$3,-2$	$5,6$	$7,-8$

ונתון וקטור האסטרגיות המעורבות של שחקן 1:

$$x=(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{4}{7}\right)$$

ווקטור האסטרגיות המעורבות של שחקן 2:

$$y=(y_1,y_2,y_3)=\left(\frac{1}{9},\frac{4}{9},\frac{5}{9}\right) \ .$$

המשחק בצורה אסטרטגית מעורבת הינה

I \ II	$x_1\,(L)$	$x_2\,(C)$	$x_3\,(R)$
$y_1\,(t)$	$0,2$	$2,-7$	$3,2$
$y_2\,(m)$	$3,-2$	$5,4$	$2,9$
$y_3\,(b)$	$3,-2$	$5,6$	$7,-8$

$=$

I \ II	$\frac{1}{7}\,(L)$	$\frac{2}{7}\,(C)$	$\frac{4}{7}\,(R)$
$\frac{1}{9}\,(t)$	$0,2$	$2,-7$	$3,2$
$\frac{4}{9}\,(m)$	$3,-2$	$5,4$	$2,9$
$\frac{5}{9}\,(b)$	$3,-2$	$5,6$	$7,-8$

פונקצית התשלום של של שחקן i היא התוחלת התשלום של שחקן i:

$$U_1(x,y)=0\cdot x_1x_2+2x_2y_1+3x_1y_2+3x_3y_1+3x_1y_2+5x_2y_2+2x_3y_2+3x_1y_3+5x_2y_3+7x_3y_3=\frac{107}{21} \ .$$

$$U_2(x,y)=2x_1y_1-7x_1y_2+2x_1y_3-2x_2y_1+4x_2y_2+9x_2y_3-2x_3y_1+6x_3y_2-8x_3y_3=\frac{10}{21} \ .$$

ניתן לרשום את פונקצית התשלום במונחי המטריצות התשלומים של שחקן 1 ו- שחקן 2 בנפרד. המטריצת התשלומים של המשחק הינה

$$U=\begin{pmatrix}(0,2) & (2,-7) & (3,2)\\ (3,-2) & (5,4) & (2,9)\\ (3,-2) & (5,6) & (7,-8)\end{pmatrix}$$

והמטריצת התשלומים של השחקנים הנפרדים הינן

$$A=\begin{pmatrix}0&2&3\\3&5&2\\3&5&7\end{pmatrix} \ , \qquad B=\begin{pmatrix}2&-7&2\\-2&4&9\\-2&6&-8\end{pmatrix} \ .$$

A המטיצת התשלומים של שחקן 1 ו- B המטירצת התשלומים של שחקן 2. במונחי A ו- B הפונקציות התשלומים שלהם באסטרטגיות מעורבות הן

$$U_1(x,y)=x^tAy=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&3\\3&5&2\\3&5&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$$U_2(x,y)=x^tBy=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-7&2\\-2&4&9\\-2&6&-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

5.2 שיווי משקל נאש ועקרון האדישות

הגדרה 5.3 שיווי משקל נאש באסטרטגיות מעורבות

יהי $G=\left(N,\left(S_i\right)_{i\in N},\left(u_i\right)_{i\in N}\right)$ משחק N שחקנים באסטרטגיות טהורות
ויהי $\Gamma=\left(N,\left(\Sigma_i\right)_{i\in N},\left(U_i\right)_{i\in N}\right)$ ההרחבה שלו לאסטרטגיות מעורבות.
$\sigma^*=\left(\sigma_1^*,\ldots,\sigma_N^*\right)$ הוא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות אם התנאי הבא מתקיים

$$U_i\left(\sigma^*\right)\geq U_i\left(\sigma_i,\sigma_{-i}^*\right)\ . \tag{5.3}$$

משפט 5.1 עקרון האדישות

יהי σ^* שיווי משקל במשחק בצורה אסטרטגית, ותהיינה s_i ו- $\hat{s}_i$ שתי אסטרטגיות טהורות של שחקן i.
אם $\sigma_i^*\left(s_i\right)>0$ וכן $\sigma_i^*\left(\hat{s}_i\right)>0$ אזי

$$U_i\left(s_i,\sigma_{-i}^*\right)=U_i\left(\hat{s}_i,\sigma_{-i}^*\right) \tag{5.4}$$

הוכחה: נניח בשלילה כי משוואה (5.4) אינה מתקיימת ובלי הגבלת הכלליות נניח כי

$$U_i\left(s_i,\sigma_{-i}^*\right)>U_i\left(\hat{s}_i,\sigma_{-i}^*\right)\ . \tag{5.5}$$

תהי σ_i האסטרטגיה של שחקן i המוגדרת באופן הבא:

$$\sigma_i(t_i)\triangleq\begin{cases}\sigma_i^*\left(t_i\right) & t_i\notin\left\{s_i,\hat{s}_i\right\}\ ,\\ 0 & t_i=\hat{s}_i\ ,\\ \sigma_i^*\left(s_i\right)+\sigma_i^*\left(\hat{s}_i\right) & t_i=s_i\ .\end{cases}$$

$$U_i\left(\sigma_i,\sigma_{-i}^*\right)=\sum_{t_i\in S_i}\sigma\left(t_i\right)U_i\left(t_i,\sigma_{-i}^*\right) \tag{5.6}$$

$$=\sum_{t_i\notin\{s_i,\hat{s}_i\}}\sigma^*\left(t_i\right)U_i\left(t_i,\sigma_{-i}^*\right)+\left(\sigma^*\left(s_i\right)+\sigma^*\left(\hat{s}_i\right)\right)U_i\left(s_i,\sigma_{-i}^*\right) \tag{5.7}$$

$$>\sum_{t_i\notin\{s_i,\hat{s}_i\}}\sigma^*\left(t_i\right)U_i\left(t_i,\sigma_{-i}^*\right)+\sigma^*\left(s_i\right)U_i\left(s_i,\sigma_{-i}^*\right)+\sigma^*\left(\hat{s}_i\right)U_i\left(\hat{s}_i,\sigma_{-i}^*\right) \tag{5.8}$$

$$=\sum_{t_i\in S_i}\sigma^*\left(t_i\right)U_i\left(t_i,\sigma_{-i}^*\right) \tag{5.9}$$

$$=U_i\left(\sigma^*\right)\ . \tag{5.10}$$

קיבלנו כי $U_i\left(\sigma_i,\sigma_{-i}^*\right)>U_i\left(\sigma^*\right)$ בסתירה לכך ש- X^* שיווי משקל. ■

דוגמה 5.6 ()

נתון משחק שני שחקנים (שאינו סכום אפס) בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

$I \backslash II$	L	R
T	$1,8$	$9,2$
B	$7,1$	$2,5$

מצאו את השיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

$I \backslash II$	$y(L)$	$(1-y)(R)$
$x(T)$	$1,8$	$9,2$
$(1-x)(B)$	$7,1$	$2,5$

$$U_1(x,y) = (2(1-x)+9x)(1-y) + (7(1-x)+x)y = -13xy + 7x + 5y + 2 \ .$$
$$U_2(x,y) = (5(1-x)+2x)(1-y) + (7x+1)y = 10xy - 3x - 4y + 5 \ .$$

לפי עקרון האדישות:

$$\begin{aligned} U_1(T,y^*) =& U_1(B,y^*) \\ \Rightarrow \quad U_1(1,y^*) =& U_1(0,y^*) \\ \Rightarrow \quad 9-8y^* =& 2+5y^* \\ \Rightarrow \quad y^* =& \frac{7}{13} \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2(x^*,L) =& U_2(x^*,R) \\ \Rightarrow \quad U_2(x^*,1) =& U_2(x^*,0) \\ \Rightarrow \quad 1+7x^* =& 5-3x^* \\ \Rightarrow \quad x^* =& \frac{2}{5} \ . \end{aligned}$$

לכן השיווי משקל הוא

$$x^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) \ , \qquad y^* = \left(\frac{7}{13}, \frac{6}{13}\right) \ .$$

■

דוגמה 5.7 ()

נתון משחק שני שחקנים (שאינו סכום אפס) בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

$I \backslash II$	L	R
T	$5,5$	$-2,-2$
B	$4,4$	$3,3$

מצאו את השיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

פתרון:

$I \backslash II$	$y(L)$	$(1-y)(R)$
$x(T)$	$5,5$	$-2,-2$
B	$4,4$	$3,3$

$$U_1(x,y) = (3(1-x)-2x)(1-y) + (4(1-x)+5x)y = 6xy - 5x + y + 3 \ .$$
$$U_2(x,y) = (3(1-x)-2x)(1-y) + (4(1-x)+5x)y = 6xy - 5x + y + 3 \ .$$

לפי עקרון האדישות:

$$\begin{aligned} U_1(T,y^*) &= U_1(B,y^*) \\ \Rightarrow \quad U_1(1,y^*) &= U_1(0,y^*) \\ \Rightarrow \quad -2+7y^* &= 3+y^* \\ \Rightarrow \quad y^* &= \frac{5}{6} \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2(x^*,L) &= U_2(x^*,R) \\ \Rightarrow \quad U_2(x^*,1) &= U_2(x^*,0) \\ \Rightarrow \quad 4+x^* &= 3-5x^* \\ \Rightarrow \quad x^* &= -\frac{1}{6} \notin [0,1] \ . \end{aligned}$$

אין השיווי משקל באסרטגיות מעורבות. ■

משפט 5.2 נוסחאות שיווי משקל למשחק שני-שחקנים ריבועי

יהי $G = (\{1,2\},\{S_1,S_2\},\{u_1,u_2\})$ משחק שני שחקנים ריבועי
שבו לכל שחקן יש n אסטרטגיות טהורות.

יהי $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ וקטור אסטרטגיות שיווי משקל של שחקן 1,

יהי $y^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ וקטור אסטרטגיות שיווי משקל של שחקן 2

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצת התשלומים של שחקן 1, תהי $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצת התשלומים של שחקן 2,

ויהו U_1^* ו- U_2^* התשלומי שיווי משקל של שחקן 1 ושחקן 2 בהתאמה.

אזי

$$x^{*t} = \frac{e^t B^{-1}}{\langle e, B^{-1}e\rangle} \ , \qquad U_1^* = \langle x^*, Ay^*\rangle = \frac{1}{\langle e, A^{-1}e\rangle}$$
$$y^* = \frac{A^{-1}e}{\langle e, A^{-1}e\rangle} \ , \qquad U_2^* = \langle x^*, By^*\rangle = \frac{1}{\langle e, B^{-1}e\rangle} \ .$$

כאשר $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ וקטור של $\mathbb{R}^n$ שבו כל איבר שווה ל- 1.

הוכחה:

- לפי עקרון האדישות, אם שחקן 1 משחק לפי האסורוגיה המעורבת x^* של שיווי המשקל אזי שחקו 2 יהיה אדיש בין האסטרטגיות הטהורות שלו. ז"א

$$x^{*t}B = U_2 e^t \ .$$

לכן

$$x^{*t} = U_2 e^t B^{-1} \ .$$

מכיוון שהסכום של ההסתברויות שווה ל- 1 אז

$$1 = x^{*t}e = U_2 e^t B^{-1} e \qquad \Rightarrow \qquad U_2 = \frac{1}{e^t B^{-1} e} = \frac{1}{\langle e, B^{-1}e\rangle} \ .$$

על ידי הצבה בביטוי הקודם נקבל

$$x^{*t} = \frac{e^t B^{-1}}{\langle e, B^{-1}e\rangle} \ .$$

- באותה מידה לפי עקרון האדישות, אם שחקן 2 משחק לפי האסורוגיה המעורבת y^* של שיווי המשקל אזי שחקו 1 יהיה אדיש בין האסטרטגיות הטהורות שלו. ז"א

$$Ay^* = U_2 e \ .$$

לכן

$$y^* = U_2 A^{-1} e \ .$$

מכיוון שהסכום של ההסתברויות שווה ל- 1 אז

$$1 = e^t y^* = U_2 e^t A^{-1} e \qquad \Rightarrow \qquad U_2 = \frac{1}{e^t A^{-1} e} = \frac{1}{\langle e, A^{-1}e\rangle} \ .$$

על ידי הצבה בביטוי הקודם נקבל

$$y^* = \frac{A^{-1}e}{\langle e, B^{-1}e\rangle} \ .$$

- $$\begin{aligned} U_1^* &= \langle x^*, Ay^*\rangle = x^{*t}Ay^* \\ &= \frac{e^t B^{-1} A A^{-1} e}{\langle e, A^{-1}e\rangle \langle e, B^{-1}e\rangle} \\ &= \frac{e^t B^{-1} e}{\langle e, A^{-1}e\rangle \langle e, B^{-1}e\rangle} \\ &= \frac{\langle e, B^{-1}e\rangle}{\langle e, A^{-1}e\rangle \langle e, B^{-1}e\rangle} \\ &= \frac{1}{\langle e, A^{-1}e\rangle} \ . \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} U_2^* &= \langle x^*, By^*\rangle = x^{*t}By^* \\ &= \frac{e^t B^{-1} B A^{-1} e}{\langle e, A^{-1}e\rangle \langle e, B^{-1}e\rangle} \\ &= \frac{e^t A^{-1} e}{\langle e, A^{-1}e\rangle \langle e, B^{-1}e\rangle} \\ &= \frac{\langle e, A^{-1}e\rangle}{\langle e, A^{-1}e\rangle \langle e, B^{-1}e\rangle} \\ &= \frac{1}{\langle e, B^{-1}e\rangle} \ . \end{aligned}$$

■

דוגמה 5.8 ()

$I \backslash II$	a	b	c
α	$1,1$	$1,2$	$2,1$
β	$1,2$	$3,1$	$0,1$
γ	$2,-1$	$1,1$	$1,2$

פתרון:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&3&0\\2&1&1\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\-1&1&2\end{pmatrix}\ .$$

$$A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-3&-1&6\\1&3&-2\\5&-1&-2\end{pmatrix}\ ,\qquad B^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1&3&-1\\5&-3&-1\\-3&3&3\end{pmatrix}\ .$$

לכן

$$U_1^*=\frac{1}{\langle e,A^{-1}e\rangle}=\frac{4}{3}\ .$$

$$U_2^*=\frac{1}{\langle e,B^{-1}e\rangle}=\frac{6}{5}\ .$$

$$x^*=U_2^*B^{-1}e=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\ .$$

$$y^*=U_1^*e^tA^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\ ,$$

■

מסקנה 5.1 נוסחאות שיווי משקל למשחק שני-שחקנים סכום-אפס ריבועי

במשחק סכום אפס ריבועי שבו לכל שחקן יש n אסטרטגיות טהורות. אם A המטריצת המשחק אז הווקטורי אסטרטגיות שיווי משקל x^* ו- y^* של שחקן 1 (שחקן השורות) ושחקן 2 (שחקן העמודות), והתשלום שיווי משקל נתונים על ידי

$$x^{*t}=\frac{e^tA^{-1}}{\langle e,A^{-1}e\rangle}\ ,\qquad y^*=\frac{A^{-1}e}{\langle e,B^{-1}e\rangle}\ ,\qquad U=\langle x^*,Ay^*\rangle=\frac{1}{\langle e,A^{-1}e\rangle}\ .$$

משפט 5.3

יהי $G=\left(N,(S_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}\right)$ משחק בצורה אסטרטגית ו- Γ ההרחבה שלו לאסטרטגיות מעורבות. וקטור אסטרטגיות מעורבות σ^* הוא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות במשחק Γ אם ורק אם לכל שחקן $i\in N$ ולכל אסטרטגיה טהורה $s_i\in S_i$ מתקיים

$$U_i(\sigma^*)\geq U_i\left(s_i,\sigma^*_{-i}\right)\ . \tag{5.11}$$

הוכחה: σ^* שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות במשחק Γ אז

$$U_i\left(\sigma^*\right) \geq U_i\left(\sigma_i, \sigma_{-i}^*\right)$$

לכל שחקן i ולכל אסטרטגיה מעורבת $\sigma_i \in \Sigma_i$.

כל אסטרטגיה טהורה היא אסטרטגיה מעורבת, אז

$$U_i\left(\sigma^*\right) \geq U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right)$$

לכל שחקן i ולכל אסטרטגיה טהורה $s_i \in S_i$.

להוכחת הכיוון ההפוך, נניח כי וקטור האסטרטגיות המעורבות σ^* מקיים את המשוואה (5.11) לכל שחקן $i \in N$ ולכל אסטרטגיה טהורה $s_i \in S_i$.
אזי לכל אסטרטגיה מעורבת σ_i של שחקן i:

$$U_i\left(\sigma_i, \sigma_{-i}^*\right) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i\left(s_i\right) U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) \tag{5.12}$$

$$\leq \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i\left(s_i\right) U_i\left(\sigma^*\right) \tag{5.13}$$

$$= U_i\left(\sigma^*\right) \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i\left(s_i\right) = U_i\left(\sigma^*\right)\ , \tag{5.14}$$

כאשר השוויון (5.12) נובע מכך ש- U_i היא פונקציה מולטי-לינארית והאי-שוויון (5.13) נובע מהאי-שוויון (5.11).
בפרט, σ^* הוא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות ב- Γ. ■

מסקנה 5.2

יהי σ^* שיווי משקל במשחק בצורה אסטרטגית, ותהיינה s_i ו- $\hat{s}_i$ שתי אסטרטגיות טהורות של שחקן i.

1) אם $U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) < U_i\left(\sigma^*\right)$ אז $\sigma_i^*\left(s_i\right) = 0$.

2) אם $U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) < U_i\left(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*\right)$ אז $\sigma_i^*\left(s_i\right) = 0$.

3) אם $\sigma_i^*\left(s_i\right) > 0$ ו- $\sigma_i^*\left(\hat{s}_i\right) > 0$ אז $U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) = U_i\left(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*\right)$.

4) אם s_i נשלטת חזק על ידי $\hat{s}_i$ אז $\sigma_i^*\left(s_i\right) = 0$.

הוכחה:

1) נניח $U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) < U_i\left(\sigma^*\right)$.
נניח בשלילה כי $\sigma_i^*\left(s_i\right) > 0$. לפי עקרון האדישות לכל אסטרטגיה טהורה $\hat{s}_i$ עבורה $\sigma_i^*\left(\hat{s}_i\right) > 0$ מתקיים $U_i\left(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*\right) = U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right)$ לכן

$$\begin{aligned}
U_i\left(\sigma^*\right) &= \sum_{\hat{s}_i \in S_i} \sigma_i^*\left(\hat{s}_i\right) U_i\left(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*\right) \\
&= \sum_{\substack{\hat{s}_i \in S_i \\ \sigma_i^*(\hat{s}_i) > 0}} \sigma_i^*\left(\hat{s}_i\right) U_i\left(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*\right) \\
&= \sum_{\substack{\hat{s}_i \in S_i \\ \sigma_i^*(\hat{s}_i) > 0}} \sigma_i^*\left(\hat{s}_i\right) U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) \\
&= U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right)
\end{aligned}$$

בסתירה לכך ש- $U_i\left(s_i,\sigma^*_{-i}\right) < U_i\left(\sigma^*\right)$.

2)

$$U_i\left(s_i,\sigma^*_{-i}\right) < U_i\left(\hat{s}_i,\sigma^*_{-i}\right) \overset{\text{אדישות}}{=} U_i\left(\sigma^*\right)$$

ז"א $U_i\left(s_i,\sigma^*_{-i}\right) < U_i\left(\sigma^*\right)$ ולכן לפי סעיף א' $\sigma^*_i\left(s_i\right)=0$.

3) עקרון האדישות (משפט 5.1).

4) נניח כי s_i נשלטת חזק על ידי $\hat{s}_i$. אזי

$$u_i\left(s_i,s_{-i}\right) < u_i\left(\hat{s}_i,s_{-i}\right) \qquad \forall s_{-i}\in S_{-i}\ .$$

מכאן

$$\begin{aligned} U_i\left(s_i,\sigma^*_{-i}\right) &= \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \sigma^*_{-i}\left(s_{-i}\right) u_i\left(s_i,s_{-i}\right) \\ &< \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \sigma^*_{-i}\left(s_{-i}\right) u_i\left(\hat{s}_i,s_{-i}\right) \\ &= U_i\left(\hat{s}_i,\sigma^*_{-i}\right) \end{aligned}$$

ז"א

$$U_i\left(s_i,\sigma^*_{-i}\right) < U_i\left(\hat{s}_i,\sigma^*_{-i}\right)$$

ולכן לפי סעיף ב' $\sigma^*_i\left(s_i\right)=0$.

■

5.3 דוגמאות

דוגמה 5.9 (מלחמת המינים)

המשחק הבא נקרא "מלחמת המינים". זוג מתכונן בילוי לערב שבת. האפשרויות העומדות לרשותם הן קונצרט (C) או צפייה שמשחק כדורגל (F). הגבר מעדיף צפייה במשחק הכדורגל, בעוד האישה מעדיפה את הוקנצרט, אך שניהם מעדיפים להיות יחד גם אם הבילוי המשותף הוא הפחות עדיף בעיניהם. מצאו את כל שיווי המשקל של המשחק.

$I \backslash II$	F	C
F	$2,1$	$0,0$
C	$0,0$	$1,2$

מצאו כל שיווי משקל של המשחק.

פתרון:
קודם כל נשים לב שיש למשחק שיווי משקל באסטרטגיות טהורות:

$I \backslash II$	F	C
F	$\underline{2},\underline{1}$	$0,0$
C	$0,0$	$\underline{1},\underline{2}$

כעת נבדוק אם יש שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

I \ II	$y(F)$	$(1-y)C$
$x(F)$	$\underline{2},\underline{1}$	$0,0$
$(1-x)(C)$	$0,0$	$\underline{1},\underline{2}$

לפי עקרון האדישות:

$$U_1(F,y^*) = U_1(C,y^*) \quad \Rightarrow \quad 2y^* = (1-y^*) \quad \Rightarrow \quad y^* = \frac{1}{3} \ .$$

$$U_2(x^*,F) = U_2(x^*,C) \quad \Rightarrow \quad x^* = 2(1-x^*) \quad \Rightarrow \quad x^* = \frac{2}{3} \ .$$

לכן הווקטור אסטרטגיות $\sigma^* = (X^*, Y^*)$ כאשר

$$\sigma_1^* = \left(\frac{2}{3}(F), \frac{1}{3}(C)\right) \ , \qquad \sigma_2^* = \left(\frac{1}{3}(F), \frac{2}{3}(C)\right)$$

הוא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

■

דוגמה 5.10 ()

במשחק הבא מצאו את כל שיווי המשקל של המשחק.

I \ II	L	R
T	$4,-4$	$-4,4$
M	$-4,4$	$4,3$
B	$-4,2$	$3,1$

פתרון:

נבדוק אם קיים שיווי משקל באסטרטגיות טהורות לפי שיטת תשובות הטובות ביותר:

I \ II	L	R
T	$\underline{4},-4$	$-4,\underline{4}$
M	$-4,\underline{4}$	$\underline{4},3$
B	$-4,\underline{2}$	$3,1$

לפיכך לא קיים שיווי משקל באסטרטגיות טהורות.

לפי משפט נאש בהכרח קיים שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.
אסטרטגיה B נשלטת על ידי M לכן שחקן 1 ישחק לפי אסטרטגיה B בהסתברות 0. לכן המשחק באסטרטגיות מעורבות הינו

I \ II	$y(L)$	$(1-y)(R)$
$x(T)$	$4,-4$	$-4,4$
$(1-x)(M)$	$-4,4$	$4,3$
$0(B)$	$-4,2$	$3,1$

לפי עקרון האדישות אם x^* שיווי משקל אז שחקן 2 אדיש בין האסטרטגיה L לבין האסטרטגיה R:

$$U_2(x^*,L)=U_2(x^*,R) \quad\Rightarrow\quad -4x^*+4(1-x^*)=4x^*+3(1-x^*) \quad\Rightarrow\quad -7x^*=-1 \quad\Rightarrow\quad x^*=\frac{1}{7}\ .$$

לפי עקרון האדישות אם y^* שיווי משקל אז 1 אדיש בין האסטרטגיה T לבין האסטרטגיה M:

$$U_1(T,y^*)=U_1(M,y^*) \quad\Rightarrow\quad 4y^*-4(1-y^*)=-4y^*+4(1-y^*) \quad\Rightarrow\quad 16y^*=8 \quad\Rightarrow\quad y^*=\frac{1}{2}\ .$$

לכן $\sigma^*=(\sigma_1^*,\sigma_2^*)$ שיווי משקל של המשחק באסטרטגיות מעורבות כאשר

$$\sigma_1^*=\left(\frac{1}{7},\frac{6}{7}\right)\ ,\qquad \sigma_2^*=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\ .$$

■

דוגמה 5.11 ()

נתון המשחק הבא.

I \ II	L	C	R
T	$0,0$	$7,6$	$6,7$
M	$6,7$	$0,0$	$7,6$
B	$7,6$	$6,7$	$0,0$

מצאו את כל שיווי המשקל של המשחק.

פתרון:

המטריצת התשלומים של שחקן I היא

$$A=\begin{pmatrix}0&7&6\\6&0&7\\7&6&0\end{pmatrix}$$

לכן $|A|=559$

$$A^{-1}=\frac{1}{559}\begin{pmatrix}-42&49&36\\36&-42&49\\49&36&-42\end{pmatrix}^t=\frac{1}{559}\begin{pmatrix}-42&36&49\\49&-42&36\\36&49&-42\end{pmatrix}\ .$$

המטריצת התשלומים של שחקן II היא

$$B=\begin{pmatrix}0&6&7\\7&0&6\\6&7&0\end{pmatrix}$$

לכן $|B|=559$

$$B^{-1}=\frac{1}{559}\begin{pmatrix}-42&36&49\\49&-42&36\\36&49&-42\end{pmatrix}^t=\frac{1}{559}\begin{pmatrix}-42&49&36\\36&-42&49\\49&36&-42\end{pmatrix}\ .$$

מכאן

$$\langle e,A^{-1}e\rangle=\frac{1}{559}\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}43\\43\\43\end{pmatrix}\right\rangle=\frac{129}{559}\ .$$

לכן התשלום בשיווי משקל לשחקן 1 הוא:

$$U_1^* = \frac{1}{\langle e, A^{-1}e\rangle} = \frac{559}{129}$$

$$\langle e, B^{-1}e\rangle = \frac{1}{559}\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}43\\43\\43\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{129}{559}\ .$$

לכן התשלום בשיווי משקל לשחקן 2 הוא:

$$U_2^* = \frac{1}{\langle e, B^{-1}e\rangle} = \frac{559}{129}$$

$$y^* = \frac{e^t A^{-1}}{\langle e, A^{-1}e\rangle} = \frac{559}{129}\cdot\frac{1}{559}\begin{pmatrix}43 & 43 & 43\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$x^* = \frac{B^{-1}e}{\langle e, B^{-1}e\rangle} = \frac{559}{129}\cdot\frac{1}{559}\begin{pmatrix}43\\43\\43\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$\blacksquare$