# שיעור 8 רדוקציה

## 8.1 טבלה של רדוקציות

## טבלה של רדוקציות

עמוד	רדוקציה
דוגמה 8.6 עמוד 86	$L_{ ext{HALT}} \leqslant L_{ ext{acc}}$
90 דוגמה 8.11 עמוד	$ar{L}_{ m acc} \leqslant L_{ m NOTREG}$
91 דוגמה 8.12 עמוד	$L_{ m acc} \leqslant L_{ m NOTREG}$
92 דוגמה 8.13 עמוד	$L_{ ext{HALT}} \leqslant L_{ ext{NOTREG}}$
94 דוגמה 8.15 עמוד	$L_{ m acc} \leqslant L_{ m REG}$
93 דוגמה 8.14 עמוד	$ar{L}_{ m acc} \leqslant L_{ m REG}$
95 עמוד 8.16 דוגמה	$ar{L}_{ m acc}\leqslant L_{M_1 eg M_2}$ כאשר $-(M,M,w)$
25 245	$L_{M_1 \neg M_2} = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \land w \notin L(M_2) \}$
דוגמה 8.17 עמוד 95	$ar{L}_{ m acc}\leqslant L_{M_1\subset M_2}$ כאשר $.L_{M_1\subset M_2}=\{\langle M_1,M_2 angle\  \ L\left(M_1 ight)\subset L\left(M_2 ight)\}$

# 8.2 מ"ט המחשבת את פונקציה

## הגדרה 8.1 מ"ט המחשבת פונקציה

 $x \in \Sigma^*$  אם לכל את מחשבת מ"ט מ"ט  $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$  אם לכל בהינתן בהינתן בהינתן אומרים אומרים אומרים אומרים בהינתן

- וגם f(x) או בסוף בסוף בסוף בסוף ל- מגיעה ל-  $q_{
  m acc}$ 
  - f(x) רשום M רשום •

#### 8.1 הערה

מ"ט שמחשבת פונקציה עוצרת תמיד.

#### הגדרה 8.2 מ"ט המחשבת פונקציה

f אומרים מ"ט המחשבת אם היימת ל $f:\Sigma^* o \Sigma^*$  אומרים בהינתן פונקציה ל

#### דוגמה 8.1

$$f_1(x) = xx . ag{8.1}$$

. חשיבה  $f_1(x)$ 

#### דוגמה 8.2

$$f_2(x) = \begin{cases} x & |x|$$
 זוגי $x = \begin{cases} x & |x| \end{cases}$  . (8.2)

. חשיבה  $f_2(x)$ 

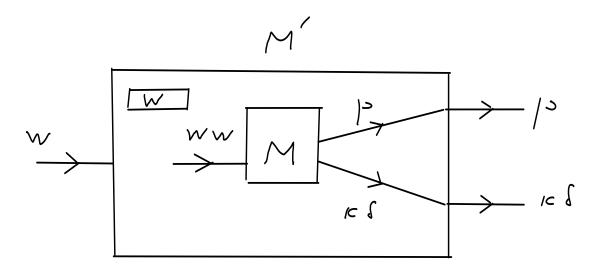
#### דוגמה 8.3

$$f_3(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M \rangle \\ \langle M^* \rangle & x \neq \langle M \rangle \end{cases}$$
 (8.3)

כאשר

- .ט שמקבלת כל קלט  $M^*$
- מ"ט המקבלת את השפה M' ullet

$$L(M') = \{ w \in \Sigma^* \mid ww \in L(M) . \}$$



, ואם כן,  $\langle M^* \rangle$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שבודקת האם  $x = \langle M \rangle$ . אם לא, מחזירה קידוד קבוע לבנות מעברים המשכפלים את הקלט בתחילת הקידוד  $\langle M' \rangle$ .

#### דוגמה 8.4

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & x = \langle M \rangle \land \langle M \rangle \in L(M) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$
 (8.4)

 $.\langle M \rangle$  לא עוצרת לM -ו  $x = \langle M \rangle$  קלטים קלטים כי ייתכנו לא אוצרת לא  $f_4(x)$ 

## 8.3 רדוקציות

## הגדרה 8.3 רדוקציות

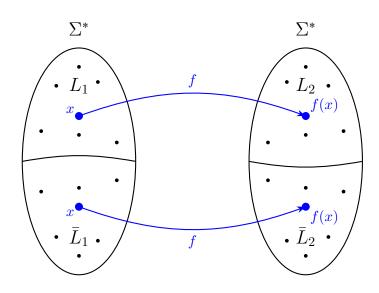
בהינתן שתי שפות  $L_1,L_2\subseteq \Sigma^*$  אומרים כי ניתנת לרדוקציה ל- ומסמנים בהינתן בהינתן ל

$$L_1 \leqslant L_2$$
,

:אם  $f:\Sigma^* o \Sigma^*$  המקיימת  $\exists$ 

- חשיבה f (1
- $x \in \Sigma^*$  לכל (2

$$x \in L_1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_2 \ .$$



#### דוגמה 8.5

נתונות השפות

$$L_1 = \left\{ x \in \{0,1\}^* \mid \mathsf{inc} \mid |x| \right\} \; ,$$
 
$$L_2 = \left\{ x \in \{0,1\}^* \mid \mathsf{inc} \mid |x| \right\} \; .$$

הוכיחו כי

$$L_1 \leqslant L_2$$
.

נגדיר את הפונקציה

$$f(x) = egin{cases} 1 & \text{ii.} & |x|, \ 10 & \text{iii.} & |x| \end{cases}$$

#### הוכחת הנכונות:

$$f(x) \in L_2$$
 אי-אוגי  $|f(x)| \Leftarrow f(x) = 1 \Leftarrow x$  אוגי  $|x| \Leftarrow x \in L_1$ 

$$f(x) \notin L_2$$
 אי-אוגי  $|f(x)| \Leftarrow f(x) = 10 \Leftarrow x$ אי-אוגי  $|x| \Leftarrow x \notin L_1$ 

### משפט 8.1 משפט הרדוקציה

לכל שתי שפות  $L_1,L_2\subseteq \Sigma^*$  אם קיימת רדוקציה

$$L_1 \leqslant L_2$$

אזי התנאים הבאים מתקיימים:

$$L_1 \in R \quad \Leftarrow \quad L_2 \in R \quad \text{(1)}$$

$$L_1 \in RE \quad \Leftarrow \quad L_2 \in RE \quad \text{(2)}$$

$$L_1 \notin R \quad \Rightarrow \quad L_2 \notin R \quad \quad \text{(3)}$$

$$L_1 \notin RE \implies L_2 \notin RE$$
 (4)

הוכחה: מכיוון ש-

$$L_1 \leqslant L_2$$

:קיימת פונקציה f חשיבה המקיימת

$$x \in L_1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_2$$

 $x \in \Sigma^*$  לכל

f מ"ט המחשבת את  $M_f$ 

## $L_1 \in R \Leftarrow L_2 \in R$ נוכיח (1)

 $.L_2$  את מכריעה את מ"ט המכריעה  $M_2$  נבנה מ"ט  $M_1$  המכריעה את גו

## $M_1$ של התאור

$$x$$
 על קלט  $= M_1$ 

- $M_f$  בעזרת f(x) את מחשבת . 1
- . מריצה את f(x) על  $M_2$  את מריצה . 2

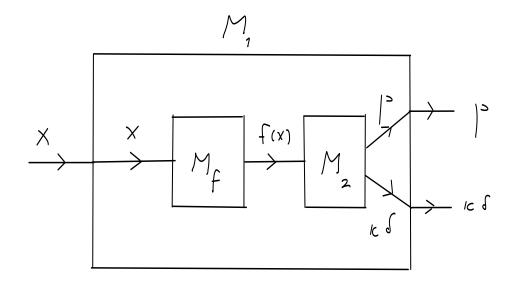
 $L_1$  מכריעה את מכריעה  $M_1$ 

x את את מקבלת את  $M_1 \quad \Leftarrow \quad f(x)$  אם  $M_2 \quad \Leftarrow \quad f(x) \in L_2 \quad \Leftarrow \quad x \in L_1$  אם •

 $A_1$  את את  $M_1$   $\in$  f(x) אם  $M_2$   $\in$   $f(x) 
otin L_2$   $\in$   $x 
otin L_1$  אם •

## $L_1 \in RE \Leftarrow L_2 \in RE$ נוכיח (2)

 $.L_2$  את המקבלת מ"ט מ"ט תהי  $.L_1$  את המקבלת את המקבלת מ"ט



## $M_1$ התאור של

x על קלט  $= M_1$ 

- $M_f$  בעזרת f(x) את מחשבת.1
- . ועונה כמוה. f(x) על  $M_2$  את מריצה .2

 $:\!L_1$  את מקבלת  $M_1$  נוכיח כי

- $M_1 \quad \Leftarrow \quad f(x)$  אם  $M_2 \quad \Leftarrow \quad f(x) \in L_2 \quad \Leftarrow \quad x \in L_1$  אם •

(3)

(4)

#### כלל 8.1

אם רדוקציה שקיימת פי<br/>  $L' \in RE$ אחרת שפה אחרת בוחרים אבה כלשהי שקיימת רדוקציה <br/> •  $L \leqslant L' \; .$ 

לדוגמה:

$$L \leqslant L_{\rm acc}$$

(R'כנ"ל לגבי)

אם רדוקציה שקיימת כלשהי בוחרים שפה אחרת בוחרים שקיימת רדוקציה אם רוצים להוכיח כי שפה כלשהי בוחרים שפה  $L'\notin RE$ 

$$L' \leqslant L$$
.

לדוגמה

$$L_{\rm d} \leqslant L$$

(R') (כנ"ל לגבי

#### דוגמה 8.6

$$L_{
m halt}=\left\{\langle M,w
angle\ \mid\ w$$
 נתונות השפות  $M$  ו-  $L_{
m acc}=\left\{\langle M,w
angle\ \mid\ w\in L(M)
ight\}$  נתונות השפות  $L_{
m acc}\leqslant L_{
m halt}$  ע"י רדוקציה  $L_{
m acc}\leqslant L_{
m halt}$ 

#### פתרון:

נבנה פונקציה f חשיבה ומקיימת

$$x \in L_{\mathrm{acc}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_{\mathrm{halt}} .$$

w' מקבלת את  $M' \iff w$  מקבלת M

w' את תעצור על  $M' \leftarrow w$  את את M

.w' את עצור על  $M' \ \ = \ \ w$  את עוצרת אל M

$$f(x) = \begin{cases} \langle M', w \rangle & : x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\text{loop}}, \varepsilon \rangle & : x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- .ט שלא עוצרת על מ"ט שלא עוצרת אף מ"ט  $M_{
  m loop}$
- . עצרה אינסופית ללולאה M' תיכנס תיכנס M' פרט ממקומות בהם אינסופית פרט מ"ט מ"ט ממתנהגת כמו מרט למקומות בהם אינסופית.

#### נכונות הרדוקציה

 $x = \langle M, w \rangle$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם f

 $\langle M_{\mathrm{loop}}, w 
angle$ אם לא, תחזיר קידוד קבוע

M ע:י ביצוע שינויים לוקלים בקידוד של ע:י ביצוע ע:י קידוד אינו אינויים או ואם כן, תחזיר אינו של

 $x \in L_{\mathrm{acc}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_{\mathrm{halt}}$  נוכיח כי

 $x \in L_{\mathrm{acc}}$  אם

$$w \in L(M)$$
 -1  $x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$ 

$$w$$
 את ומקבלת אוצרת  $M'$  -ו  $f(x) = \langle M', w \rangle \Leftarrow$ 

$$f(x) \in L_{\text{halt}} \Leftarrow$$

:אם מקרים אז שני  $x \notin L_{\mathrm{acc}}$ 

#### מקרה 1:

$$f(x) 
otin L_{
m halt} \quad \Leftarrow \quad arepsilon$$
 לא עוצרת על  $M_{
m loop}$  ו-  $f(x) = \langle M_{
m loop}, arepsilon 
angle \quad \Leftarrow \quad x 
otin \langle M, w 
angle$ 

### :2 מקרה

שני מקרים: 
$$\Leftarrow f(x) = \langle M', w \rangle \quad \Leftarrow \quad w \notin L(M)$$
 - ו $x = \langle M, w \rangle$ 

$$f(x) 
otin L_{ ext{halt}} \quad \Leftarrow \quad w$$
 לא עוצרת על  $M' \quad \Leftarrow \quad w$  לא עוצרת על  $M$ 

$$f(x) 
otin L_{ ext{halt}} \quad \Leftarrow \quad w$$
 לא עוצרת על  $M' \quad \Leftarrow \quad w$  דוחה את מקרה ב:

לסיכום, הוכחנו רדוקציה 8.1 ומכיוון ש-  $L_{
m acc} \notin R$  ומכיוון ש-  $L_{
m acc} \leqslant L_{
m halt}$  אז ממשט הרדוקציה . $L_{
m halt} \notin R$ 

#### דוגמה 8.7

נתונה השפה

$$L_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^* \}$$

ונתונה השפה

$$\bar{L}_{\Sigma^*} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \neq \Sigma^* \} \cup \{ x \neq \langle M \rangle \} .$$

הוכיחו כי:

$$L_{\Sigma^*}\notin RE$$
 (x

$$L_{\Sigma^*}
otin R$$
 (ع

$$ar{L}_{\Sigma^*}
otin RE$$
 (2

## פתרון:

נוכיח כי 
$$L_{\Sigma^*} \notin R$$
 ע"י רדוקציה

$$L_{\rm acc} \leqslant L_{\Sigma^*}$$
 .

נבנה פונקציה חשיבה f המקיימת

$$x \in L_{\mathrm{acc}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_{\Sigma^*} .$$

$$L(M') = \Sigma^* \quad \Longleftarrow \quad w \in L(M)$$

$$L(M') \neq \Sigma^* \quad \Longleftarrow \quad w \notin L(M)$$

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & : x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\varnothing} \rangle & : x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

- .ט שדוחה כל קלט  $M_{\varnothing}$  •
- . ועונה על את M על את ומריצה מ-x מתעלמת מ-x ועונה כמוה. M'

#### אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & : w \in L(M) \\ \varnothing & : w \notin L(M) \end{cases}$$

#### נכונות הרדוקציה:

 $x=\langle M,w
angle$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם f

 $\langle M_{arnothing} 
angle$ אם לא תחזיר קידוד קבוע

. אם כן, תחזיר קידוד  $\langle M' 
angle$  הוספת קוג ל- M שמוחק את הקלט מהסרט וכותב w במקומו.

נוכיח כי

$$x\in L_{
m acc}$$
  $\Leftrightarrow$   $f(x)\in L_{\Sigma^*}$   $\Leftrightarrow$   $L(M')=\Sigma^*$  ולפי האבחנה  $f(x)=\langle M'
angle$   $\Leftrightarrow$   $w\in L(M)$  -1  $x=\langle M,w
angle$   $\Leftrightarrow$   $x\in L_{
m acc}$  אם  $f(x)\in L_{\Sigma^*}$ 

אם מקרים:  $x \in L_{\mathrm{acc}}$  אם

$$.f(x) \notin L_{\Sigma^*} \quad \Leftarrow \quad L\left(M_{\varnothing}
ight) = arnothing f(x) = \langle M_{\varnothing} 
angle \quad \Leftarrow \quad x 
eq \langle M, w 
angle \quad :$$
מקרה ב

$$f(x) 
otin L_{\Sigma^*} \quad \Leftarrow \quad L\left(M'
ight) = arnothing$$
 ולפי האבחנה  $f(x) = \langle M' 
angle \quad \Leftarrow \quad w 
otin L(M) - 1 \ x = \langle M, w 
angle$  מקרה 2):

לסיכום, הוכחנו רדוקציה  $L_{
m acc} \notin R$  ומכיוון ש-  $L_{
m acc} \notin L_{
m S*}$  אז ממשט הרדוקציה . $L_{
m acc} \leqslant L_{
m S*}$  מתקיים . $L_{
m S*} \notin R$ 

#### דוגמה 8.8

נתונה השפה

$$L_{d} = \{ \langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M) \}$$

ונתונה השפה

$$\bar{L}_{acc} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \notin L(M) \} \cup \{ x \neq \langle M, w \rangle \} .$$

הוכיחו כי

ע"י רדוקציה  $ar{L}_{
m acc} 
otin RE$ 

$$L_{\rm d} \leqslant \bar{L}_{\rm acc}$$
.

#### פתרון:

נבנה פונקציה חשיבה f המקיימת

$$x \in L_d \Leftrightarrow f(x) \in L_{acc}$$
.

$$w' \notin L(M') \iff \langle M \rangle \notin L(M)$$
  
 $w' \in L(M') \iff \langle M \rangle \in L(M)$ 

$$f(x) = \begin{cases} \langle M, \langle M \rangle \rangle & : x = \langle M \rangle \\ \langle M^*, \varepsilon \rangle & : x \neq \langle M \rangle \end{cases}$$

.כאשר  $M^*$  המ"ט שמקבלת כל קלט

#### נכונות הרדוקציה:

 $x = \langle M, w 
angle$  חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם f

 $\langle M^*, arepsilon 
angle$ אם לא תחזיר קידוד קבוע

 $\langle M,\langle M \rangle \rangle$  אם כן, תחשב

נוכיח כי

$$x \in L_{\mathsf{d}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in \bar{L}_{\mathsf{acc}}$$

$$otin \langle M \rangle \notin L(M)$$
 -1  $f(x) = \langle M, \langle M \rangle \rangle \quad \Leftarrow \quad \langle M \rangle \notin L(M)$  -1  $x = \langle M \rangle \quad \Leftarrow \quad x \in L_{\mathrm{d}}$  בסר  $f(x) \in \bar{L}_{\mathrm{acc}}$ 

אם אפני מקרים:  $x \notin L_{\mathsf{d}}$ 

$$f(x) 
otin ar{L}_{
m acc} \quad \Leftarrow \quad arepsilon \in L\left(M^*
ight)$$
 ר-  $f(x) = \langle M^*, arepsilon 
angle \quad \Leftarrow \quad x 
otin \langle M 
angle \quad = \langle M 
angle$ מקרה ב

$$f(x) 
otin ar{L}_{
m acc} \quad \Leftarrow \quad \langle M 
angle \in L(M)$$
 -ו  $f(x) = \langle M, \langle M 
angle 
angle \quad \Leftarrow \quad \langle M 
angle \in L(M)$  -ו  $x = \langle M 
angle \quad \Leftrightarrow \quad \langle M 
angle \in L(M)$  מקרה 2):

לסיכום, הוכחנו רדוקציה 8.1, ומכיוון ש-  $L_{
m d} \notin RE$  (משפט 7.3) אז ממשט הרדוקציה , $L_{
m d} \leqslant \bar{L}_{
m acc}$  מתקיים . $\bar{L}_{
m acc} \notin RE$ 

## משפט 8.2 משפט הרדוקציה בין שפות משלימות

 $ar{L}_1\leqslantar{L}_2$  אם קיימת רדוקציה  $L_1\leqslant L_2$ , אזי קיימת רדוקציה

#### הוכחה:

אם ∃ רדוקציה

$$L_1 \leqslant L_2$$

אזי  $\exists$  פונקציה חשיבה f המקיימת

$$x \in L_1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_2$$

ולכן עבור אותה פונקציה f היא גם חשיבה וגם מקיימת

$$x \in \bar{L}_1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in \bar{L}_2$$

ולכן

$$\bar{L}_1 \leqslant \bar{L}_2$$
.

# 8.4 דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה בין שפות משלימות (משפט 8.2)

#### דוגמה 8.9

הוכחנו בדוגמה 8.7 רדוקציה

$$L_{\rm acc} \leqslant L_{\Sigma^*}$$
 .

לכן לפי משפט 8.2 קיימת רדוקציה

$$\bar{L}_{\rm acc} \leqslant \bar{L}_{\Sigma^*}$$
 .

 $ar{L}_{\Sigma^*} 
otin RE$  מתקיים 8.1 ממשפט הרדוקציה ל $ar{L}_{
m acc} 
otin RE$  מכיוון ש

#### דוגמה 8.10

הוכחנו בדוגמה 8.8 רדוקציה

$$L_{\rm d} \leqslant \bar{L}_{\rm acc}$$
 .

לכן לפי משפט 8.2 קיימת רדוקציה

$$\bar{L}_{\rm d} \leqslant L_{\rm acc}$$
 .

 $ar{L}_{
m d} \in RE$  מתקיים 8.1 ממשט הרדוקציה , $L_{
m acc} \in RE$  מכיוון ש

## 8.5 דוגמאות בשימוש של משפט הרדוקציה (משפט 8.1)

 $ar{L}_{
m acc} \leqslant L_{
m NOTREG}$  8.11 דוגמה

תהי  $L_{ ext{NOTREG}}$  השפה

$$L_{ ext{NOTREG}} = \left\{ \left\langle M 
ight
angle \; \middle| \; \; h$$
 לא רגולרית  $L(M) 
ight\}$  .

 $ar{L}_{
m acc}$  -א כריעה על ידי רדוקציה מ $L_{
m NOTREG}$  הוכיחו כי השפה

### פתרון:

השפה  $ar{L}_{
m acc}$  מוגדרת

$$\bar{L}_{\rm acc} = \big\{ \langle M, w \rangle \ \big| \ w$$
לא מקבלת א $M \big\} \cup \{ x \neq \langle M, w \rangle \}$  .

והשפה  $L_{ ext{NOTREG}}$  מוגדרת

$$L_{ ext{NOTREG}} = \left\{ \langle M \rangle \mid L(M) \right\}$$
 .

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ w' \in PAL & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

:כאשר M' מ"ט הבאה

$$y$$
 כל קלט  $=M'$ 

. אם  $y \in PAL$  אם (1

. על w ועונה כמוה M אחרת מריצה M

#### הוכחת נכונות הרדוקציה

אם שני מקרים: 
$$x \in \bar{L}_{\mathrm{acc}}$$

$$x = \langle M, w \rangle$$
 :1 מקרה

$$w$$
 לא מקבלת  $M \Leftarrow$ 

$$L(M') \in PAL \Leftarrow$$

$$\langle M' \rangle \in PAL \Leftarrow$$

$$f(x) \in PAL \Leftarrow$$

$$f(x) \in L_{\text{NOTREG}} \Leftarrow$$

$$f(x) \in L_{\text{NOTREG}} \Leftarrow f(x) \in PAL \Leftarrow x \neq \langle M, w \rangle$$
 בקרה 2:

$$f(x) \in L_{ ext{NOTREG}} \quad \Leftarrow \quad f(x) \in \Sigma^* \quad \Leftarrow \quad L\left(M'
ight) = \Sigma^* \quad \Leftarrow \quad w$$
 מקבלת אם  $M \quad \Leftarrow \quad x \notin \bar{L}_{ ext{acc}}$ 

 $L_{ ext{NOTREG}}$  ל-כן הוכחנו כי  $L_{ ext{acc}}$  ל-ג $L_{ ext{acc}}$  היא רדוקציה מ-f(x) ז"א א"ג,  $x\in ar{L}_{ ext{acc}}\Leftrightarrow f(x)\in NOTERG$ 

. לא כריעה. לפיכך, לפי משפט הרדוקציה לא בריעה. לא לא לא לא בריעה. השפה לא  $\bar{L}_{\rm acc}$ 

$$L_{
m acc} \leqslant L_{
m NOTREG}$$
 8.12 דוגמה

תהי  $L_{ ext{NOTREG}}$  השפה

$$L_{ ext{NOTREG}} = \left\{ \langle M 
angle \; \middle| \;$$
לא רגולרית  $L(M) 
ight\} \; .$ 

 $.L_{
m acc}$  -ם ידי רדוקציה על לא כריעה לא בריעה מ- הוכיחו כי השפה הוכיחו לא

## פתרון:

השפה  $L_{
m acc}$  מוגדרת

$$L_{
m acc} = \left\{ \langle M, w 
angle \; \middle| \; w$$
 מקבלת  $M 
ight\}$  .

והשפה מוגדרת  $L_{ ext{NOTREG}}$ 

$$L_{\text{NOTREG}} = \big\{ \langle M \rangle \ \big| \ \text{therefore} \ L(M) \big\}$$
 .

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\varnothing} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

:כאשר M' מ"ט הבאה

$$y$$
 על כל קלט  $=M'$ 

- .w על M מריצה M' (1
- אם M דוחה  $\Rightarrow$  דוחה. (2

- . בודקת אם y פלינדרום  $M' \Leftarrow M'$  מקבלת
  - \* אם כן  $\Rightarrow$  מקבלת.
    - \* אם לא  $\Rightarrow$  דוחה.

#### הוכחת נכונות הרדוקציה

$$f(x) \in L_{ ext{NOTREG}} \quad \Leftarrow \quad f(x) \in PAL \quad \Leftarrow \quad L\left(M'\right) = PAL \quad \Leftarrow \quad w$$
 מקבלת  $M \quad \Leftarrow \quad x \in L_{ ext{acc}}$ 

שני מקרים.  $\Leftarrow x \notin L_{\mathrm{acc}}$ 

$$\langle M_\varnothing 
angle 
otin L_{
m NOTREG} \quad \Leftarrow \quad L\left(M_\varnothing
ight) = \varnothing \,$$
 ר-  $f(x) = \langle M_\varnothing 
angle \, \leftarrow \quad x \neq \langle M, w 
angle \quad \underline{:1}$  מקרה  $f(x) \notin L_{
m NOTREG} \quad \Leftarrow \quad \underline{:1}$ 

$$\langle M' 
angle \notin L_{ ext{NOTREG}} \quad \Leftarrow \quad L\left(M'
ight) = \varnothing \quad \Leftarrow \quad w$$
 א מקבלת  $M \cdot H = \langle M, w 
angle \quad : \underline{f(x) \notin L_{ ext{NOTREG}}} \quad \Leftarrow \quad \underline{f(x) \notin L_{ ext{NOTREG}}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{f(x) \ker L_{ ext{NOTREG}}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{f(x) \ker L_{ ext{NOTREG}}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{f(x) \ker L_{ ext{NOTREG}}} \quad \Leftrightarrow \quad$ 

## $L_{ ext{HALT}} \leqslant L_{ ext{NOTREG}}$ 8.13 דוגמה

תהי  $L_{ ext{NOTREG}}$  השפה

$$L_{ ext{NOTREG}} = \left\{ \left\langle M 
ight
angle \; \middle| \; \; h$$
 לא רגולרית  $L(M) 
ight\}$  .

 $.L_{\scriptsize \rm HALT}$  -הוכיחו כי די לא כריעה לא  $L_{\scriptsize \rm NOTREG}$  השפה הוכיחו הוכיחו

## פתרון:

השפה  $L_{\mathrm{HALT}}$  מוגדרת

$$L_{ ext{HALT}} = \left\{ \langle M, w 
angle \mid w$$
 עוצרת על  $M 
ight\} \ .$ 

והשפה מוגדרת  $L_{ ext{NOTREG}}$ 

$$L_{ ext{NOTREG}} = \left\{ \langle M \rangle \mid L(M) \right\}$$
 .

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\varnothing} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}.$$

:כאשר M' מ"ט הבאה

y כל כל קלט =M'

- .w על M מריצה M' (1
- אם M דוחה  $\Rightarrow$  דוחה. (2
- אם M מקבלת  $\Leftarrow$  ממשיכה לשלב 3).
  - $y \in PAL$  בודקת אם M' (3
    - $\bullet$  אם כן  $\Rightarrow$  מקבלת.
      - אם לא ⇒ דוחה.

#### הוכחת הנכונות

$$L\left(M'\right) \in L_{\text{NOTREG}} \quad \Leftarrow \quad L\left(M'\right) \in PAL \quad \Leftarrow \quad x \in L_{\text{HALT}}$$

שני מקרים:  $\Leftarrow x \notin L_{\text{HALT}}$ 

$$\langle M_\varnothing \rangle \notin L_{\mathrm{NOTREG}} \quad \Leftarrow \quad L\left(M_\varnothing\right) = \varnothing \text{ -1 } f(x) = \langle M_\varnothing \rangle \quad \Leftarrow \quad x \neq \langle M, w \rangle \quad \underline{:1} \text{ agree } f(x) \notin L_{\mathrm{NOTREG}} \quad \Leftarrow \quad \underline{} f(x) \notin L_{\mathrm{NOTREG}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{:1} \text{ agree } f(x) \notin L_{\mathrm{NOTREG}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{} f(x)$$

$$\langle M_{\varnothing} \rangle \notin L_{\mathrm{NOTREG}} \quad \Leftarrow \quad L\left(M_{\varnothing} 
ight) = \varnothing \quad \Leftarrow \quad w$$
 אינערת על א עוצרת על א  $M$  - ו $x = \langle M, w \rangle$  בקרה בינ הקרה בינ היא אינער א אינער אייער אינער אייער אינער אייער אינער אייער אינער אינער

$$ar{L}_{
m acc} \leqslant L_{
m REG}$$
 8.14 דוגמה

תהי  $L_{ exttt{REG}}$  השפה

$$L_{ ext{REG}} = \left\{ \left\langle M \right
angle \; \middle| \; n$$
רגולרית  $L(M) \right\}$  .

. $ar{L}_{
m acc}$  -הוכיחו כי השפה לא כריעה על אידי ברוקציה מ $L_{
m REG}$ 

#### פתרון:

השפה  $ar{L}_{
m acc}$  מוגדרת

$$ar{L}_{
m acc} = ig\{\langle M, w 
angle \mid w$$
 לא מקבלת  $M ig\} \cup \{x \mid x 
eq \langle M, w 
angle \}$  .

והשפה  $L_{ exttt{REG}}$  מוגדרת

$$L_{ ext{REG}} = \{ \langle M \rangle \mid \text{ רגולרית } L(M) \}$$
 .

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\varnothing} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

:כאשר מ"ט מ"ט הבאה כל קלט אדוחה מ"ט הבאה מאכר מ"ט המ"ט אדוחה כל המ"ט באה

y על כל קלט =M'

- .w על M מריצה (1
- אם M דוחה  $\Rightarrow$  דוחה. (2
- אם y פלינדרום:  $\phi$  מקבלת  $\phi$  מקבלת  $\phi$ 
  - אם כן  $\Rightarrow$  מקבלת.
  - אם לא ⇒ דוחה.

#### אבחנה

$$L(M') = \begin{cases} PAL & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

אם מקרים:  $x \in \bar{L}_{\mathrm{acc}}$  אם

$$f(x) \in L_{\mathrm{REG}} \quad \Leftarrow \quad \langle M_{\varnothing} 
angle \in L_{\mathrm{REG}} \quad \Leftarrow \quad L\left(M_{\varnothing}
ight) = \varnothing$$
 ר-  $f(x) = \langle M_{\varnothing} 
angle \quad \Leftarrow \quad x \neq \langle M, w 
angle \quad :1$  מקרה בי

$$\langle M_\varnothing 
angle \in L_{\mathrm{REG}} \quad \Leftarrow \quad L\left(M'
ight) = \varnothing$$
 ולפי האבחנה  $f(x) = \langle M' 
angle \quad \Leftarrow \quad x \notin L(M)$  ולפי האבחנה  $f(x) \in L_{\mathrm{REG}} \Leftarrow \dots \cap f(x) \in L_{\mathrm{REG}} \Leftrightarrow \dots \cap f(x) \in L_{\mathrm{REG}} \Leftrightarrow \dots \cap f(x)$ 

$$f(x) \in PAL \quad \Leftarrow \quad L\left(M'\right) \in PAL \quad \text{ idea in a part } f(x) = \left\langle M'\right\rangle \quad \Leftarrow \quad w \in L\left(M\right) \quad \Leftarrow \quad x \notin \bar{L}_{\mathrm{acc}} \quad \Rightarrow \quad f(x) \notin L_{\mathrm{REG}} \Leftarrow \quad f(x) \notin L_{\mathrm{REG}} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - f(x) -$$

## $L_{ m acc} \leqslant L_{ m REG}$ 8.15 דוגמה

תהי  $L_{ exttt{REG}}$  השפה

$$L_{ ext{REG}} = \{ \langle M \rangle \mid \text{ רגולרית } L(M) \}$$
 .

 $.L_{
m acc}$  -הוכיחו כי השפה לא כריעה על בריעה על  $L_{
m REG}$ 

#### פתרון:

השפה  $L_{
m acc}$  מוגדרת

$$L_{
m acc} = \left\{ \langle M, w 
angle \mid w$$
 מקבלת  $M 
ight\}$  .

והשפה  $L_{ ext{REG}}$  מוגדרת

$$L_{ ext{REG}} = \{ \langle M \rangle \mid \text{ רגולרית } L(M) \}$$
 .

נגדיר הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{PAL} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

באה: מ"ט שמכריעה את השפה של פלינדרומים, ו- M' מ"ט הבאה: כאשר את המ"ט שמכריעה את השפה של הבאה

y על כל קלט =M'

- :פלינדרום y בודקת בודקת  $M^\prime$  (1
  - אם כן  $\Rightarrow$  מקבלת.
- . אם לא מריצה M על w ועונה כמוה.

#### הוכחת נכונות הרדוקציה

$$f(x) \in REG \quad \Leftarrow \quad L\left(M'
ight) = \Sigma^* \quad \Leftarrow \quad w$$
 מקבלת  $M \quad \Leftarrow \quad x \in L_{\mathrm{acc}}$  אם

:שני מקרים  $\Leftarrow x \notin L_{\mathrm{acc}}$ 

$$\langle M_{PAL} 
angle 
otin L_{\text{REG}} \quad \Leftarrow \quad L\left(M_{PAL}\right) = PAL$$
 -ו  $f(x) = \langle M_{PAL} 
angle \quad \Leftarrow \quad x \neq \langle M, w 
angle \quad \underline{:}$  מקרה  $f(x) \notin L_{\text{REG}} \quad \Leftarrow \quad f(x) \notin L_{\text{REG}}$ 

$$\langle M' 
angle \notin L_{\mathrm{REG}} \quad \Leftarrow \quad L\left(M' 
ight) = PAL \quad \Leftarrow \quad w$$
 א מקרה ב:  $x = \langle M, w 
angle \quad x = \langle M, w 
a$ 

$$ar{L}_{
m acc}\leqslant L_{M_1
eg M_2}$$
 8.16 דוגמה

נתונה השפה הבאה:

$$L = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \land w \notin L(M_2) \}.$$

 $ar{L}_{
m acc}$  -הוכיחו כי L 
otin RE ע"י רדוקציה מ

#### פתרון:

פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M^*, M, w \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M^*, M_{\varnothing}, \varepsilon \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- היא מ"ט שמקבלת כל קלט  $M^*$
- . היא מ"ט שדוחה כל קלט $M_{igotimes}$  •

נכונת הרדוקציה:

 $\langle M^*, M_\varnothing, \varepsilon \rangle$  אם לא, תחזיר קידוד קבוע מ"ט שתבדוק האם  $x = \langle M, w \rangle$  אם לא, מ"ט שתבדוק מ"ט שתבדוק האם האט מיט אם לא, תחזיר קידוד קבוע מ"ט שתבדוק האט כן, תחזיר קידוד  $\langle M^*, M, w \rangle$ .

נוכיח כי

$$x \in \bar{L}_{\mathrm{acc}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in L_{M_1 \neg M_2} .$$

אם  $x \in ar{L}_{
m acc}$  שני מקרים:

$$f(x) \in \quad \Leftarrow \quad \varepsilon \notin L\left(M_{\varnothing}
ight)$$
 -ו  $\varepsilon \in L\left(M^{*}
ight)$  -ו  $f(x) = \left\langle M^{*}, M_{\varnothing}, \varepsilon 
ight
angle \quad \Leftarrow \quad x \neq \left\langle M, w 
ight
angle \quad . \overline{L}_{M_{1} \neg M_{2}}$ 

$$w \notin L\left(M
ight)$$
 -1  $w \in L\left(M^*
ight)$  -1  $f(x) = \langle M^*, M, w \rangle \quad \Leftarrow \quad w \notin L(M)$  -1  $x = \langle M, w \rangle$  :  $f(x) \in L_{M_1 \neg M_2} \quad \Leftarrow$ 

$$w\notin L\left(M
ight)$$
 -1  $w\in L\left(M^*
ight)$  -1  $f(x)=\left\langle M^*,M,w
ight
angle$   $\Leftrightarrow$   $w\in L(M)$  -1  $x=\left\langle M,w
ight
angle$   $\Leftrightarrow$   $x\notin \bar{L}_{\mathrm{acc}}$   $f(x)\notin L_{M_1\lnot M_2}$   $\Leftrightarrow$   $f(x)\notin L_{M_1\lnot M_2}$ 

 $L_{M_1 op M_2} \notin RE$  ממשפט הרדוקציה מתקיים, הוכחנו  $ar{L}_{
m acc} \notin RE$  ממשפט, ומכיוון ש $ar{L}_{
m acc} \notin RE$  לסיכום, הוכחנו רדוקציה

$$L_{
m acc}\leqslant L_{M_1\subset M_2}$$
 8.17 דוגמה

נתונה השפה הבאה:

$$L = \{ \langle M_1, M_2, w \rangle \mid w \in L(M_1) \land w \notin L(M_2) \}.$$

 $.L_{
m acc}$  -ם ע"י רדוקציה מ $L \notin RE$  הוכיחו

#### פתרון:

פונקצית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M_{\varnothing}, M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\varnothing}, M_{\varnothing} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

כאשר

- . היא מ"ט שדוחה כל קלט.  $M_{\varnothing}$
- . ועונה על על w על M ומריצה y מתעלמת y מתעלמת שעל קלט y ועונה כמוה. M'

אבחנה:

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \varnothing & w \notin L(M) \end{cases}.$$

#### נכונת הרדוקציה:

ראשית, f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שתבדוק האם  $x=\langle M,w\rangle$  אם לא, תחזיר קידוד קבוע  $M_\varnothing$  ואם לא, תחזיר קידוד ל- $M_\varnothing$  כאשר  $M_\varnothing$  המוחק את הקלט M' נוצר ע"י הוספת קוד ל- $M_\varnothing$  המוחק את הקלט M ורושם M במקומו.

נוכיח כי

$$x \in L_{\mathrm{acc}} \Leftrightarrow f(x) \in L_{M_1 \subset M_2}$$
.

$$L\left(M'
ight)=\Sigma^*$$
 אם  $f(x)=\left\langle M_\varnothing,M'
ight
angle$   $\Leftrightarrow$   $w\in L(M)$  -1  $x=\left\langle M,w
ight
angle$   $\Leftrightarrow$   $x\in L_{\mathrm{acc}}$  אם  $f(x)\in L_{M_1\subset M_2}$   $\Leftrightarrow$   $L\left(M_\varnothing
ight)\subset L\left(M'
ight)$ 

שני מקרים:  $x \notin L_{\mathrm{acc}}$ 

$$f(x) 
otin L_{M_1 \subset M_2} \quad \Leftarrow \quad L\left(M_{\varnothing}\right) = L\left(M_{\varnothing}\right) ag{1.5} f(x) = \left\langle M_{\varnothing}, M_{\varnothing} 
ight
angle \quad \Leftarrow \quad x 
otin \left\langle M, w 
ight
angle \quad :1$$
 מקרה ב

$$L\left(M'
ight)=\varnothing$$
 ולפי האבחנה  $f(x)=\langle M_\varnothing,M'
angle \iff w\notin L(M)$  - ו $f(x)\notin L_{M_1\subset M_2}$  ב $f(x)\notin L_{M_1\subset M_2}$  ולפי האבחנה  $f(x)\notin L_{M_1\subset M_2}$  ב $f(x)\notin L_{M_1\subset M_2}$  ולפי האבחנה  $f(x)\in \mathcal{L}(M')$ 

 $.L_{M_1\subset M_2}
otin R$  ממשפט הרדוקציה מתקיים, ומכיוון ש- גומכיוון ש- גומרים, ומכיוון הדוקציה ומכינו רדוקציה ומכיוון ש- גומכיוון ש-