שיעור 11
NP שלמות

11.1 המחלקות NPC ו- NPH

הגדרה 11.1 NP-hard

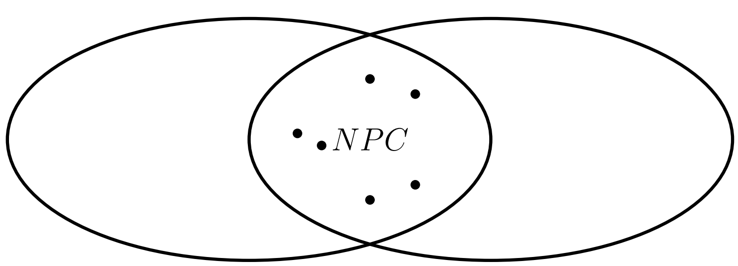
בעייה B נקראת NP קשה אם לכל בעייה $A \in NP$ קיימת רדוקציה $A \leqslant_P B$.

הגדרה 11.2 NP-complete

בעייה B נקראת NP שלמה אם

1) $B \in NP$

2) לכל בעייה $A \in NP$ קיימת רדוקציה $A \leqslant_p B$.



משפט 11.1

אם B בעייה NP שלמה וגם $B \in P$ אזי $P = NP$.

הוכחה:

- הוכחנו כבר ש- $P \subseteq NP$.
- נוכיח כי $NP \subseteq P$.

לכל בעייה $A \subseteq NP$ קיימת רדוקציה $A \leqslant_P B$ ומכיוון ש- $B \in P$, ממשפט הרדוקציה מתקיים $A \in P$.

■

מסקנה 11.1

אם $B \leqslant_P A$ אזי $\bar{A} \leqslant_P \bar{B}$.

משפט 11.2

אם $B \leqslant_p A$ וגם $C \leqslant_p B$ אזי $C \leqslant_p A$.

הוכחה:

■

משפט 11.3

תהי B בעייה NP- שלמה. אזי לכל בעייה $C \in NP$, אם $C \leqslant_p B$ אזי גם C היא NP שלמה.

הוכחה: מכיוון ש- B היא NP-שלמה, לכל בעייה $A \in NP$ קיימת רדוקציה $A \leqslant_p B$. מכיוון ש- $C \leqslant_p B$ מהטרנזטיביות מתקיים $A \leqslant_p C$ לכל בעייה $A \in NP$.
ולכן C היא NP- שלמה. ■

11.2 בעיית הספיקות

הגדרה 11.3

נוסחת CNF ϕ היא נוסחה בוליאנית מעל n משתנים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ המכילה m פסוקיות $C_1, C_2, \ldots, C_m$, כאשר כל פסוקית מכילה אוסף של ליטרלים $(x_i \backslash \bar{x}_i)$ המחוברים ע"י OR $(\vee)$ בוליאני והפסוקיות מחוברים ע"י AND $(\wedge)$ בוליאני.

לדוגמה

$$\phi = \Big(\overbrace{x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4 \vee \bar{x}_7}^{C_1}\Big) \wedge \Big(\overbrace{x_3 \vee x_5 \vee \bar{x}_8}^{C_2}\Big) \wedge \quad \cdots$$

הגדרה 11.4 נוסחת CNF ספיקה

נוסחת CNF ϕ היא ספיקה אם קיימת השמה למשתנים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ע"י $T \backslash F$ כך ש- ϕ מקבלת ערך T, כלומר בכל פסוקית ישנו לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך T.

11.3 בעיית SAT

הגדרה 11.5 בעיית SAT

<u>קלט</u>: נוסחת CNF, ϕ.
<u>פלט</u>: האם ϕ ספיקה?

$$SAT = \{\langle \phi \rangle \mid \text{נוסחת } CNF \text{ ספיקה } \phi\}$$

משפט 11.4 $SAT \in NP$

$$SAT \in NP \ .$$

הוכחה: נבנה אלגוריתם אימות V עבור SAT.

$V =$ על קלט $(\langle \phi \rangle, y)$:

1) בודק האם y היא השמה למשתנים $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

- אם לא $\Leftarrow 3CNF$ דוחה.

2) בודק האם השמה זו מספקת את ϕ.

- אם כן $\Leftarrow$ מקבל.
- אם לא $\Leftarrow$ דוחה.

■

11.4 משפט קוק לוין

משפט 11.5 (1973) משפט קוק לוין

הבעיית SAT היא NP - שלמה.

רעיון ההוכחה:
לכל $A \in NP$, $A \leqslant_p SAT$.
לכל $w \in \Sigma^*$:

$$w \in A \quad \Leftrightarrow \quad f(w) \in SAT ,$$

כאן $f(w) = \langle \phi_w \rangle$.

מסקנה 11.2

$$P = NP \quad \Leftrightarrow \quad SAT \in P .$$

11.5 גרסאות של $kSAT$

ישנן לכל היותר k ליטרלים בכל פסוקית:

- $1SAT \in P$.

$$\phi = x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge \cdots$$

- $2SAT \in P$.

$$\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge \cdots$$

- $3SAT$ היא NP - שלמה.

11.6 בעיית $3SAT$

הגדרה 11.6 בעיית $3SAT$

קלט: נוסחת $3CNF$, ϕ.
פלט: האם ϕ ספיקה?

$$3SAT = \{ \langle \phi \rangle \mid \text{ספיקה } 3CNF \text{ נוסחת } \phi \}$$

משפט 11.6 $3SAT$ היא NP שלמה.

$3SAT$ היא NP שלמה.

הוכחה:
יש לקיים את השני תנאים הבאים:

1) $3SAT\in NP$.

ניתן לבנות אלגוריתם אימות עבור $3SAT\in NP$ דומה לאלגוריתם האימות עבור SAT שבנינו בהוכחה של המשפט קוק-לוין 11.5 למעלה.

2) $3SAT$ היא NP קשה ע"י רדוקציה

$$SAT\leqslant_p 3SAT \ .$$

ואז בגלל ש- SAT היא NP שלמה (לפי משפט קוק-לוין 11.5) ומכיוון ש- $3SAT\in NP$ אז לפי משפט האסימפטוטית 11.2 גם $3SAT$ היא NP- שלמה.

קיום פונקצית הרדוקציה $SAT\leqslant_p 3SAT$

כעת נבנה את פונקציה הרדוקציה מ- SAT ל- $3SAT$.

ראשית נציין כי כל נוסחה בוליאנית ϕ ניתנת לרשום בצורה CNF בזמן פולינומיאלי.

בהינתן נוסחת CNF, ϕ (הקלט של SAT) נבנה בזמן פולינומיאלי נוסחת $3CNF$ ϕ' (הקלט של $3SAT$) ואז נוכיח שמתקיים

$$\langle\phi'\rangle\in 3SAT \quad\Leftrightarrow\quad \langle\phi\rangle\in SAT \ .$$

לכל פסוקית C ב- ϕ המכילה יותר מ- 3 ליטרלים, ניצור אוסף C' ב- ϕ' של פסוקיות כך שכל פסוקית ב- C' תכיל 3 ליטרלים. למשל בהינתן הפסוקית C הבאה של ϕ:

$$C=x_1\vee x_2\vee x_3\vee\bar{x}_4\vee\bar{x}_5$$

ניצור את הפסוקית C' הבאה ב- ϕ':

$$C'=(x_1\vee x_2\vee y_1)\wedge(\bar{y}_1\vee x_3\vee y_2)\wedge(\bar{y}_2\vee\bar{x}_4\vee\bar{x}_5) \ .$$

באופן כללי, לכל פסוקית $C=a_1\vee a_2\vee\ldots\vee a_k$ המכיל $k>3$ ליטרלים, ניצור אוסף C' של פסוקיות שבו כל פסוקית מכילה 3 ליטרלים, ע"י הוספת $k-3$ משתנים $y_1,y_2,\ldots,y_{k-3}$:

$$C'=(a_1\vee a_2\vee y_1)\wedge(\bar{y}_1\vee a_3\vee y_2)\wedge\ldots\wedge(\bar{y}_{i-2}\vee a_i\vee y_{i-1})\wedge\ldots\wedge(\bar{y}_{k-3}\vee a_{k-1}\vee a_k) \ .$$

בפרט, עבור כל פסוקית $C=(a_1\vee a_2\vee\ldots\vee a_k)$ נניח $a_i=1$ הוא הליטרל הראשון ששווה ל- 1. אז

- נשים $y_j=1$ לכל $1\leqslant j\leqslant i-2$,
- ונשים $y_j=0$ לכל $i-1\leqslant j\leqslant k-3$.

סיימנו להגדיר את הפונקציה הרדוקציה.
כעת נוכיח כי הפונקציה הזאת מקיימת את התנאי ההכרחי

$$\langle\phi'\rangle\in 3SAT \quad\Leftrightarrow\quad \langle\phi\rangle\in SAT \ .$$

כיוון $\Leftarrow$:

נניח כי $\langle\phi\rangle\in SAT$ ותהי X השמה המספקת את ϕ.
נוכיח שקיימת השמה X' מתאימה המספקת את ϕ'.

- בכל פסוקית C של ϕ, עבור הליטרלים $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ניתן אותם ערכים כמו ב- X.
- מכיוון ש- X מספקת את ϕ, בכל פסוקית $C = (a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k)$ יש לפחות ליטרל אחד שקיבל ערך
  1. נניח $a_i = 1$. אז על פי ההגדרה של פונקציית הרודקציה:
     - נשים $y_j = 1$ לכל $1 \leqslant j \leqslant i-2$,
     - ונשים $y_j = 0$ לכל $i-1 \leqslant j \leqslant k-3$.

באופן הזה אנחנו ניצור אוסף C' של פבוקיות עם המבנה הבא:

$$\left(a_1 \vee a_2 \vee \overset{1}{y_1}\right) \wedge \left(\overset{0}{\bar{y}_1} \vee a_2 \vee \overset{1}{y_2}\right) \wedge \ldots \wedge \left(\overset{0}{\bar{y}_{i-3}} \vee a_{i-1} \vee \overset{1}{y_{i-2}}\right) \wedge \left(\overset{0}{\bar{y}_{i-2}} \vee \overset{1}{a_i} \vee \overset{0}{y_{i-1}}\right) \wedge \left(\overset{1}{\bar{y}_{i-1}} \vee a_{i+1} \vee \overset{0}{y_i}\right)$$
$$\wedge \ldots\ldots \wedge \left(\overset{1}{\bar{y}_{k-3}} \vee a_{k-1} \vee a_k\right)$$

ולכן השמה זו מספקת את C' ולכן $\langle\phi'\rangle \in 3SAT$.

<u>כיוון $\Rightarrow$:</u>

נניח כי $\langle\phi'\rangle \in 3SAT$ ותהי X' השמה המספקת את ϕ'.
נוכיח שקיימת השמה X המספקת את ϕ.

נסתכל על פסוקית $C = (a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k)$.
נניח בשלילה שלא קיימת השמה X המספקת את C. אז בהכרח

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$$

לפי זה, באוסף פסוקיות C' שנקבל על פי ההגדרה של פונקצית הרדוקציה, $y_j = 1$ לכל $1 \leqslant j \leqslant k-3$.
כלומר מתקיים $y_1 = y_2 = \ldots = y_{k-3} = 0$. לכן

$$C' = \left(\overset{0}{a_1} \vee \overset{0}{a_2} \vee \overset{1}{y_1}\right) \wedge \left(\overset{0}{\bar{y}_1} \vee \overset{0}{a_3} \vee \overset{1}{y_2}\right) \wedge \ldots \wedge \left(\overset{0}{\bar{y}_{i-2}} \vee \overset{0}{a_i} \vee \overset{1}{y_{i-1}}\right) \wedge \ldots \wedge \left(\overset{0}{\bar{y}_{k-3}} \vee \overset{0}{a_{k-1}} \vee \overset{0}{a_k}\right)$$

הפסוקית האחרונה $\left(\overset{0}{\bar{y}_{k-3}} \vee \overset{0}{a_{k-1}} \vee \overset{0}{a_k}\right)$ אינה מסופקת.
לכן C' אינה מסופקת, בסתירה לכך ש- X' מספקת את C'.

ולכן $\langle\phi\rangle \in SAT$.

הוכחנו שקיימת הרדוקציה $SAT \leqslant 3SAT$.

כעת נוכיח כי הרדוקציה הזו היא זמן פולינומיאלית.

<u>סיבוכיות</u>

החישוב של הפונקציה מתבצע בזמן פולינומיאלי. ספציפי, אם האורך של הנוסחה ϕ הוא $n = |\phi|$ אז הרודקציה היא $O(n)$.

■

11.7 הוכחת משפט קוק לוין*

משפט 11.7 משפט קוק לוין

הבעיית SAT היא NP - שלמה.

הוכחה:

חשיפה מלאה: ההוכחה הבאה מתבססת על ההוכחה שנתונה בהספר של Sipser.

על פי הגדרה 11.2 יש להוכיח ששני התנאים הבאים מתקיימים:

תנאי 1: $SAT \in NP$.

תנאי 2: $A \leqslant_p SAT$ לכל $A \in NP$.

ראשית נוכיח כי $SAT \in NP$:

כדי להוכיח כי SAT שייכת ל- NP, נוכיח כי אישור המורכב מהשמה מספקת עבור נוסחת קלט ϕ ניתן לאימות בזמן פולינומיאלי.
נניח כי $n = |\phi|$. כלומר ב- ϕ מופיעים n ליטרלים.
ז"א השמה כלשהי דורשת n משתני בוליאניים לכל היותר.

- אלגוריתם האימות מחליף כל משתנה בנוסחה בערך המתאים לו על פי ההשמה.
  השלב הזה הוא $O(n)$.
- אחר כך האלגוריתם מחשב את ערכו של הביטוי:
  * נניח כי הנוסחה ϕ מכילה k דורות של סוגריים בתוך סוגריים.
  * החישוב מתחיל עם החישובים של הביטויים בתוך הסוגריים הכי בפנים.
  * יש n סוגריים הכי-בפנים לכל היותר, וכל אחד של הסוגריים האלה מכיל n ליטרלים לכל היותר.
    לכן החישוב הזה הוא $O(n^2)$.
  * יש k דורות של סוגריים לכן החישוב כולו הוא $O(kn^2)$
- בסה"כ הסיבוכיות זמן הריצה היא

$$O(n) + O\left(kn^2\right) = O\left(n^2\right)$$

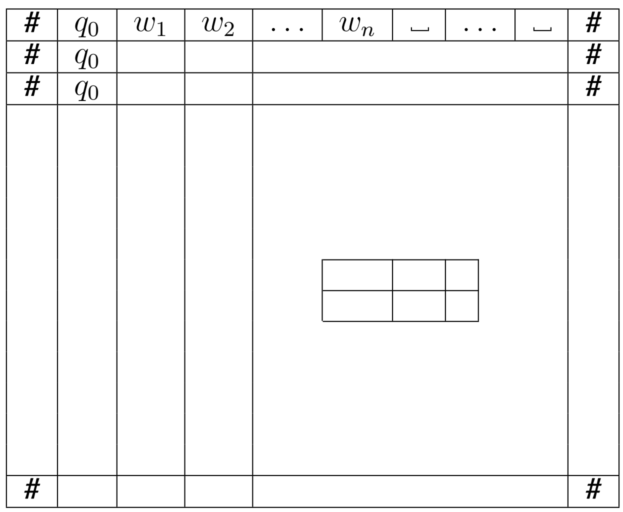
  לפיכך אישור של השמה כלשהי מתבצע בזמן פולינומיאלי.
- אם ערכו של הביטוי הוא 1 הנוסחה ספיקה.

הוכחנו כי $SAT \in NP$. עכשיו נוכיח כי $A \leqslant_p SAT$.

תהי N מ"ט אי-דטרמיניסטית זמן-פולינומיאלית שמכריעה שפה A כלשהי בזמן $O\left(n^k\right)$ עבור k טבעי.
התרשים למטה מראה טבלה של קונפיגורציות של N.
ברשימה הבאה רשומות ההגדרות של הטבלה:

- כל שורה מראה את תוכן הסרט בשלב מסוים של מסלול אחד של N.
- בשורה הראשונה יש את הקונפיגורציה ההתחלתית.
- אנחנו מניחים כי האורך של המילה, כלומר אורך הקלט הוא n.
  הסימנים $w_1, \ldots, w_n$ מסמנים את התווים של הקלט.

- בתא הראשון בכל שורה יש #, ואחר כך רשומה הקונפיגורציה של N.
  בסוף הקונפיגורציה בכל שורה יש #.
  אחרי ה- # בקצה הימין של המילה, בכל תא יש תו רווח עד הסוף של השורה.
  התווי רווח לפני המשבצת הראשונה של הקונפיגורציה לא מופיעים בטבלה.
- האורך של כל שורה הוא בדיוק n^k תאים.
- בטבלה יש בדיוק n^k שורות לסיבה הבאה:
  - המכונת טיורינג מבצעת n^k צעדים לכל היותר.
  - בכל צעד המ"ט עוברת לקונפיגורציה חדשה.
  - בכל שורה רשומה קונפיגורציה.
  - בסה"כ יש n^k שורות עבור ה- n^k קונפיגוריות שונות האפשריות.



אנחנו אומרים כי טבלה שלהי היא **טבלה המקבלת** אם באחת השורות יש קונפיגורציה אשר N מקבלת אותה.

בעזרת הטבלה נתאר את הרדוקציה זמן-פולינומיאלית f משפה A כלשהי ל- SAT.

הפונקצית הרדוקציה
f מקבלת קלט w ומחזירה נוסחה $\phi = f(w)$, אשר לפי ההגדרה של פונקצית הרדוקציה, עומדת בתנאי הבא:

$$w \in A \qquad \Leftrightarrow \qquad f(w) \in SAT \ .$$

יהיו Q קבוצת המצבים ו- Γ האלפיבית של הסרט של N. נגדיר

$$C = Q \cup \Gamma \cup \{\#\} \ .$$

נסמן ב- s איבר כלשהו של C.
עבור כל תא ה- (i,j) של הטבלת הקונפיגורציות נגדיר משתנה בוליאני $x_{i,j,s}$ לכל $1 \leqslant i,j \leqslant n^k$.
המשתנה x_{ijs} מוגדר על פי התנאי

$$x_{ijs} = 1$$

אם בתא ה- ij של הטבלה יש $s \in C$. למשל, אם בתא ה- $(2,5)$ של הטבלה מופיע התו a אז

$$x_{2,5,\mathrm{a}} = 1$$

בעוד

$$x_{2,5,\mathrm{b}} = 0 \ .$$

במובן הזה, התכנים של כל התאים של הטבלה מסומנים על ידי המשתנים של ϕ.

עכשיו נבנה נוסחה ϕ על סמך התנאי שהשמה מספקת של ϕ תהיה מתאימה לטבלה המקבלת של N.
נגדיר

$$\phi = \phi_{\text{cell}} \wedge \phi_{\text{start}} \wedge \phi_{\text{move}} \wedge \phi_{\text{acc}} \ . \tag{11.1}$$

אנחנו נסביר את כל הנוסחאות ϕ_{cell}, ϕ_{start}, ϕ_{move} ו- ϕ_{acc} אחד אחד למטה.

- <u>הנוסחה ϕ_{cell}</u>

כפי שמצויין לעיל, אם המשתנה $x_{i,j,s}$ "דולק", כלומר אם $x_{i,j,s}=1$, זאת אומרת שיש סימן s בתא ה- ij של הטבלה. אנחנו רוצים להבטיח שהשמה כלשהי בנוסחה אשר מתאימה לקונפיגורציה של הטבלה, מדליקה בדיוק משתנה אחד לכל תא של הטבלה. למטרה זו נגדיר ϕ_{cell} כך:

$$\phi_{\text{cell}} = \bigwedge_{1\leqslant i,j\leqslant n^k} \left[\left(\bigvee_{s\in C} x_{i,j,s} \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{s,t\in C\\ s\neq t}} \left(\overline{x}_{i,j,s} \vee \overline{x}_{i,j,t}\right) \right) \right] \tag{11.2}$$

* האיבר הראשון בסוגריים מרובעים, $\bigvee\limits_{s\in C} x_{i,j,s}$ מבטיח שלכל תא של הטבלה, לפחות משתנה אחד דולק.
* האיבר השני $\bigwedge\limits_{\substack{s,t\in C\\ s\neq t}} \left(\overline{x}_{i,j,s} \vee \overline{x}_{i,j,t}\right)$ מבטיח שעבור כל תא של הטבלה, משתנה אחד לכל היותר דולק.

לפיכך כל השמה מספקת עומדת בתנאי שיהיה בדיוק סימן אחד, s, בכל תא של הטבלה.

- <u>הנוסחה ϕ_{start}</u>

נוסחה ϕ_{start} מבטיחה ששורה הראשונה של הטבלה היא הקונפיגורציה ההתחלתית של N על הקלט w:

$$\begin{aligned}\phi_{\text{start}} =& x_{1,1,\#} \wedge x_{1,2,q_0} \wedge x_{1,3,w_1} \wedge x_{1,4,w_2} \\ & \wedge \ldots \wedge \\ & x_{1,n+2,w_n} \wedge x_{1,n+3,\sqcup} \wedge \ldots \wedge x_{1,n^k-1,\sqcup} \wedge x_{1,n^k,\#}\end{aligned} \tag{11.3}$$

- <u>הנוסחה ϕ_{acc}</u>

הנוסחה ϕ_{acc} מבטיחה שקיימת טבלה קונפיגורציה אשר המ"ט N מקבלת אותה.

בפרט ϕ_{acc} מבטיחה שהסימן q_{acc} מופיע בתא אחד של הטבלה דרך התנאי שלפחות אחד המשתנים $x_{i,j,q_{\text{acc}}}$ דולק:

$$\phi_{\text{acc}} = \bigvee_{1\leqslant i,j\leqslant n^k} x_{i,j,q_{\text{acc}}} \tag{11.4}$$

- <u>הנוסחה ϕ_{move}</u>

הנוסחה ϕ_{move} מבטיחה שכל שורה של הטבלה היא "שורה חוקית".

כלומר בכל שורה, הקונפיגורציה היא כך שאפשר להגיע אליה על ידי תזוזה חוקית של N מהקונפיגורציה הקודמת שמופיעה בשורה אחת למעלה.

תזוזה חוקית בין כל שתי קונפיגורציות נקבעת על ידי הפונקצית המעברים של המ"ט N.

בשפה פורמלית, אם c_i הקונפיגורציה של שורה i, ו- c_{i+1} הקונפיגורציה של השורה $i+1$ אחת למטה, אז ϕ_{move} מבטיחה כי לכל $1 \leqslant i \leqslant n^k - 1$ מתקיים

$$c_i \vdash_N c_{i+1} \ .$$

במונחי הטבלה, אפשר להגדיר תזוזה חוקית בין כל שתי שורות על ידי תת-טבלה מסדר 2×3 שמכילה 3 תאים מתאימים של שתי שורות שכנות.

מכאן ואילך אנחנו נקרא לתת-טבלה כזאת "חלון".

למטה יש דוגמאות של חלונות חוקיים:

a	a	q_1
a	a	b

a	q_1	b
a	a	q_2

a	q_1	b
q_2	a	c

b	b	b
c	b	b

a	b	a
a	b	q_2

#	b	a
#	b	a

החלונות האלה למטה הם דוגמאות לחלונות לא חוקיים:

b	q_1	b
q_2	b	q_2

a	q_1	b
q_1	a	a

a	b	a
a	a	a

הנוסחה ϕ_{move} קובעת שכל חלון של הטבלה חוקי. בפרט, כל חלון מכיל 6 תאים. לכן ϕ_{move} קובעת שהתכנים של ה-6 תאים של כל חלון מהווה חלון חוקי. ז"א

$$\phi_{\text{move}} = \bigwedge_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n^k \\ 1 \leqslant j \leqslant n^k}} \left(\text{חלון ה- } i,j \text{ חוקי}\right) \tag{11.5}$$

אנחנו מציבים בטקסט " חלון ה- i,j חוקי " את הנוסחה הבאה, כאשר $a_1,\ldots,a_6$ מסמנים את התכנים של ה-6 תאים של כל חלון:

$$\bigvee_{\substack{\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\} \\ \text{חלון חוקי}}} \left(x_{i,j-1,a_1} \wedge x_{i,j,a_2} \wedge x_{i,j+1,a_3} \wedge x_{i+1,j-1,a_4} \wedge x_{i+1,j,a_5} \wedge x_{i+1,j+1,a_6}\right) \tag{11.6}$$

עד כה הוכחנו שקיים רדוקציה מכל שפה $A \in NP$ ל- SAT.
כעת נוכיח כי הרדוקציה זו חישובית בזמן-פולינומיאלי.

הטבלה של N היא מסדר $n^k \times n^k$ ולכן היא מכילה n^{2k} תאים.

נחשב את הסיבוכיות של כל הנוסחאות ϕ_{cell}, ϕ_{start}, ϕ_{acc}, ϕ_{move}.

- <u>הנוסחה ϕ_{cell}</u>

הנוסחה (11.2) של ϕ_{cell} מכילה n^{2k} נוסחאות עם 3 ליטרלים. לכן

$$\phi_{\text{cell}} = O\left(n^{2k}\right) \ .$$

- <u>הנוסחה ϕ_{start}</u>

הנוסחה (11.3) של ϕ_{start} מכילה בדיוק n^k ליטרלים. לכן

$$\phi_{\text{start}} = O\left(n^{k}\right) \ .$$

- <u>הנוסחה ϕ_{acc}</u>

הנוסחה (11.4) של ϕ_{acc} מכילה בדיוק n^k ליטרלים. לכן

$$\phi_{\text{acc}} = O\left(n^{k}\right) \ .$$

- <u>הנוסחה ϕ_{move}</u>

הנוסחה (11.6,11.5) של ϕ_{move} מכילה n^{2k} נוסחאות עם 6 ליטרלים. לכן

$$\phi_{\text{move}} = O\left(n^{2k}\right) \ .$$

לכן בסה"כ

$$\phi = O\left(n^{2k}\right) + O\left(n^{k}\right) + O\left(n^{k}\right) + O\left(n^{2k}\right) = O\left(n^{2k}\right) \ .$$

לפיכך קיימת רדוקציה חישובית בזמן פולינומיאלי מכל שפה $A \in NP$ ל- SAT.

■