

עבודה עצמית 8 משטחים במרחב

שאלה 1

(א) נתון המשטח

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{2} + \frac{(z-4)^2}{4} = 1.$$

מצאו את משוואת המישור המשיק למשטח בנקודה $A(4, 3, 4)$ ומצאו את הזווית בין מישור זה לבין ציר ה- z .

(ב) מצאו את משוואת המשיק למשטח בנקודה $B(4, 3, 4)$.

שאלה 2 מצאו את משוואת המישור המשיק למשטח $\ln(xy - z) = 0$ בנקודה $P(2, 2, 3)$ והראו כי הוא נחתך עם ציר ה- y .

שאלה 3 מצאו את משוואת הספירה החסומה על ידי הפירמידה

$$x \geq 0, \quad y \leq 0, \quad 0 \leq z \leq 8 - 2x + 2y.$$

כך שהספירה משיקה לכל פאותיה של הפירמידה.

שאלה 4

מצאו את המרחק המינימאלי בין המשטחים

$$z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 + (z - 9)^2 = 1.$$

שאלה 5

(א) נתונה המשטח

$$225x^2 + 900x + 144y^2 - 288y + 400z^2 + 800z - 2156 = 0.$$

שרטטו את המשטח.

(ב) מצאו את הנקודות הקרובות ביותר על המשטח הזה למישור $x = 20$, ומצאו את המרחק ביניהן.

שאלה 6 נתון המשטח

$$x^2 + y^2 + z^2 + 37 = 4x + 10y + 6z$$

והישר שעובר דרך הנקודות $S(0, 0, 8)$, $R(8, 0, 0)$. מצאו את הנקודה על הישר הקרובה ביותר למשטח וחשבו את המרחק ביניהם.

פתרונות

שאלה 1

(א) המשטח הוא אליפסואיד. נרשום מחדש את המשוואה בצורה

$$(x-2)^2 + 2(y-3)^2 + (z-4)^2 = 4.$$

ונסמן

$$f(x, y, z) = (x-2)^2 + 2(y-3)^2 + (z-4)^2.$$

האליפסואיד הוא משטח הרמה $f(x, y, z) = 4$. וקטור נורמלי למישור המשיק בנקודה A נתון ע"י

$$\bar{n} = \nabla f(A).$$

משוואת המישור המשיק למשטח $f(x, y, z) = c$ בנקודה $A(x_0, y_0, z_0)$ היא

$$f'_x(A)(x-x_0) + f'_y(A)(y-y_0) + f'_z(A)(z-z_0) = 0.$$

$$\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (2(x-2), 4(y-3), 2(z-4)) \Rightarrow \nabla f(A) = (f'_x(A), f'_y(A), f'_z(A)) = (2, 4, -2).$$

עלכן, משוואת המישור המשיק למשטח בנקודה A היא

$$2x + 4y - 2z = 16.$$

הוקטור k הוא וקטור כיוון של ציר ה- z ולכן, סינוס הזווית בין המישור המשיק למשטח בנקודה A ובין ציר ה- z נתון ע"י

$$\sin \alpha = \frac{n \cdot k}{|n| |k|} = \frac{|(2, 4, -2) \cdot (0, 0, 1)|}{|(2, 4, -2)| |(0, 0, 1)|} = \frac{2}{\sqrt{24}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

(ב) בעזרת החישובים בסעיף א', נקבל שהנורמל למישור המשיק בנקודה B הוא

$$n = \nabla f(B) = (4, 0, 0).$$

ולכן, משוואת המישור המשיק בנקודה זו היא

$$x = 4.$$

שאלה 2 הנקודה $P(2, 2, 3)$ אכן נמצאת על המשטח $\ln(xy - z) = 0$ כיוון שמתקיים

$$\ln((2)(2) - (3)) = \ln(4 - 3) = \ln(1) = 0$$

המשטח הוא משטח רמה של הפונקציה $f(x, y, z) = \ln(xy - z)$. מקדמי משוואת המישור המשיק נתונים על ידי הקואורדינטות של הגרדיאנט של f בנקודה. לכן נחשב את הנגזרות החלקיות של f בנקודה P :

$$f'_x(x, y, z) = \frac{y}{xy - z} \Rightarrow f'_x(P) = \frac{(2)}{(2)(2) - (3)} = 2$$

$$f'_y(x, y, z) = \frac{x}{xy - z} \Rightarrow f'_y(P) = \frac{(2)}{(2)(2) - (3)} = 2$$

$$f'_z(x, y, z) = \frac{-1}{xy - z} \Rightarrow f'_z(P) = \frac{-1}{(2)(2) - (3)} = -1$$

נציב בנוסחא למשוואת מישור המשיק למשטח רמה בנקודה P ונקבל:

$$\begin{aligned} f'_x(P)(x - 2) + f'_y(P)(y - 2) + f'_z(P)(z - 3) &= 0 \\ \Rightarrow 2(x - 2) + 2(y - 2) - 1(z - 3) &= 0 \\ \Rightarrow 2x - 4 + 2y - 4 - z + 3 &= 0 \\ \Rightarrow 2x + 2y - z - 5 &= 0 \end{aligned}$$

יש מספר דרכים להראות שהמישור הנ"ל נחתך עם ציר y :

• נציב $x = 0, z = 0$ במשוואת המישור, ונקבל $y = \frac{5}{2}$, כך שנקודת החיתוך בין המישור לציר y היא הנקודה $(0, \frac{5}{2}, 0)$.

• וקטור כיוון של ציר ה- y הוא $\hat{j} = (0, 1, 0)$. הווקטור $\bar{n} = (2, 2, -1)$ הוא נורמל למישור. נחשב

$$\hat{j} \cdot \bar{n} = (0, 1, 0) \cdot (2, 2, -1) = 2 \neq 0$$

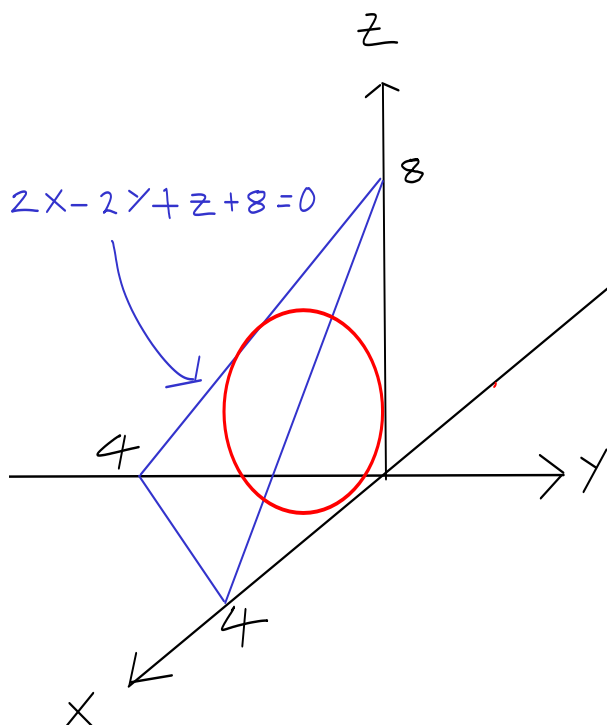
לכן הווקטורים \hat{j}, \bar{n} לא מאונכים זה לזה, מה שאומר שציר y לא מקביל למישור או מוכל בו ולכן נחתך איתו.

• אילו המישור היה מקביל לציר y (או מכיל אותו) אז המשתנה y לא היה מופיע במשוואת המישור. מכיוון שהמקדם של y במשוואה הוא $B = 2 \neq 0$, על כן, המישור נחתך עם הישר.

שאלה 3

משוואת ספירה בעלת רדיוס R שמרכזה בנקודה (a, b, c) היא

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$



כדי שכל אחד משלושת המישורים $x = 0, y = 0, z = 0$ ישיק לספירה וגם יגביל אותה בכיוון הנכון, כלומר כך שהספירה תהיה מוכלת בפרמידה (טטרדון), מרכז הספירה צריך להתקבל בנקודה $(R, -R, R)$. לכן, משוואת הספירה היא מהצורה

$$(x - R)^2 + (y + R)^2 + (z - R)^2 = R^2$$

כדי שהספירה תשיק גם למישור $2x - 2y + z - 8 = 0$, נדרוש שהמרחק ממרכז הספירה למישור זה יהיה גם כן שווה לרדיוס R , כלומר:

$$R = d(R, -R, R) = \frac{|(2)(R) + (-2)(-R) + (1)(R) + (-8)|}{\sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (1)^2}} = \frac{|5R - 8|}{3}$$

ולכן

$$3R = |5R - 8|$$

כלומר $R = 1$ או $R = 4$. אבל הנקודה $(4, -4, 4)$ לא מוכלת בפרמידה שכן אינה מקיימת את אי השיוויון $z \leq 8 - 2x + 2y$, ומשוואת הספירה היא:

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$$

שאלה 4

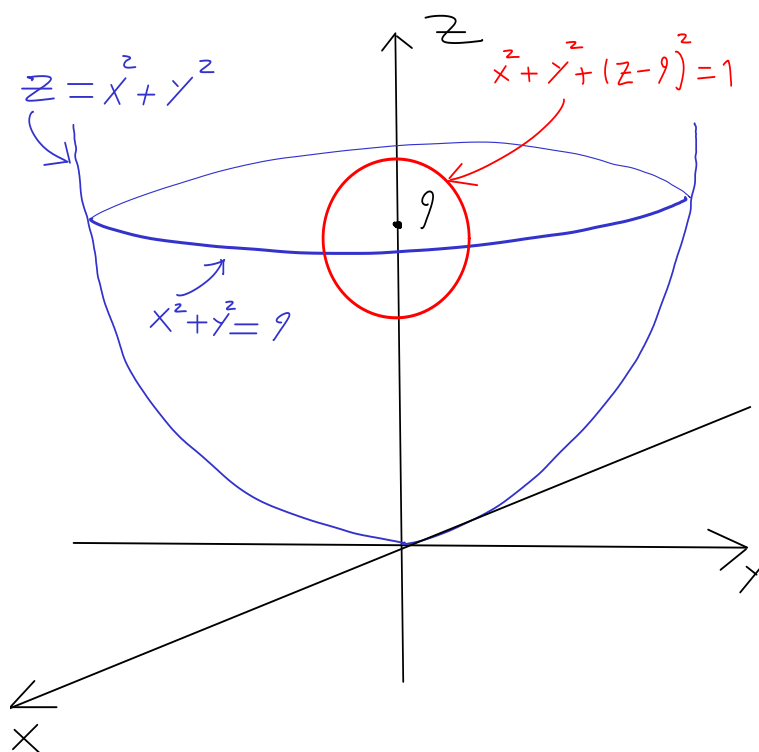
המשטח

$$z = x^2 + y^2$$

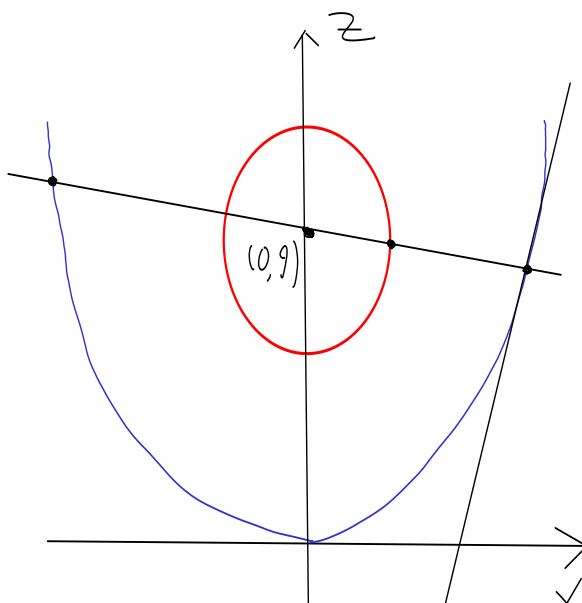
הוא פרבולואיד אליפטי (מעגלי). המשטח

$$x^2 + y^2 + (z - 9)^2 = 1$$

הוא ספירה ברדיוס 1 סביב $(0, 0, 9)$.



אף אחד מהמשטחים המעורבים בשאלה איננו משטח גלילי, ניתן להפוך את הבעיה לבעיה דו-מימדית על ידי כך שנשים לב ששני המשטחים הם גופי סיבוב סביב ציר ה- z ולכן ניתן למצוא את המרחק במישור xz ומכאן לקבל את המרחק במרחב בעזרת סימטריה סביב ציר ה- z . כלומר, נתבונן במרחק בין המעגל והפרבולה בסרטוט הבא:



ריבוע המרחק בין הנקודה $(x, z) = (x, x^2)$ על הפרבולה לבין מרכז המעגל $(0, 9)$ נתון על ידי

$$d(x) = (x - 0)^2 + (x^2 - 9)^2 = x^4 - 17x^2 + 81$$

$$d'(x) = 4x^3 - 36x = x(4x^2 - 36) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm\sqrt{\frac{17}{2}}$$

קל לראות שהנקודה $x = 0$ היא נקודת מקסימום מקומי של המרחק בעוד הנקודות $x = \pm\sqrt{\frac{17}{2}}$ הן נקודות מינימום (מוחלט) של המרחק. לכן, המרחק בין המעגל לפרבולה הוא כמו המרחק בין הנקודה $(\pm\sqrt{\frac{17}{2}}, \frac{17}{2})$ לבין מרכז המעגל בחיסור רדיוס המעגל, כלומר

$$D = \sqrt{\left(\frac{17}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{17}{2} - 9\right)^2} - 1 = \sqrt{\frac{35}{4}} - 1$$

כעת נחזור למודל התלת-ממדי. הנקודות הקרובות ביותר על הפרבולה לספירה הן מהצורה $(x, y, \frac{17}{2})$ כאשר

$$x^2 + y^2 = z = \frac{17}{2}$$

והמרחק בין הפרבולואיד והספירה הוא $D = \sqrt{\frac{35}{4}} - 1$. שהוא מעט פחות מהמרחק ביניהם בגובה קו המשווה של הספירה (והרבה פחות מהמרחק לנקודה הנמוכה ביותר בפרבולואיד).

שאלה 5

(א) נכתוב את המשוואה בצורה קנונית:

$$225x^2 + 900x + 144y^2 - 288y + 400z^2 + 800z - 2156 = 0$$

$$\Rightarrow 225x^2 + 900x + 144y^2 - 288y + 400z^2 + 800z = 2156$$

$$225 \left(x^2 + \frac{900}{225}x \right) + 144 \left(y^2 - \frac{288}{144}y \right) + 400 \left(z^2 + \frac{800}{400}z \right) = 2156$$

$$225 \left(x^2 + \frac{15 \cdot 60}{15 \cdot 15}x \right) + 144 \left(y^2 - \frac{144 \cdot 2}{144}y \right) + 400 \left(z^2 + \frac{400 \cdot 2}{400}z \right) = 2156$$

$$225 \left(x^2 + \frac{60}{15}x \right) + 144 (y^2 - 2y) + 400 (z^2 + 2z) = 2156$$

$$225 (x^2 + 4x) + 144 (y^2 - 2y) + 400 (z^2 + 2z) = 2156$$

$$225 ((x+2)^2 - 4) + 144 ((y-1)^2 - 1) + 400 ((z+1)^2 - 1) = 2156$$

$$225 (x+2)^2 - 4 \cdot 225 + 144 (y-1)^2 - 144 + 400 (z+1)^2 - 400 = 2156$$

$$225 (x+2)^2 + 144 (y-1)^2 + 400 (z+1)^2 - 4 \cdot 225 - 144 - 400 = 2156$$

$$225 (x+2)^2 + 144 (y-1)^2 + 400 (z+1)^2 - 1444 = 2156$$

$$225 (x+2)^2 + 144 (y-1)^2 + 400 (z+1)^2 = 2156 + 1444$$

$$225 (x+2)^2 + 144 (y-1)^2 + 400 (z+1)^2 = 3600$$

$$\frac{225 (x+2)^2 + 144 (y-1)^2 + 400 (z+1)^2}{3600} = 1$$

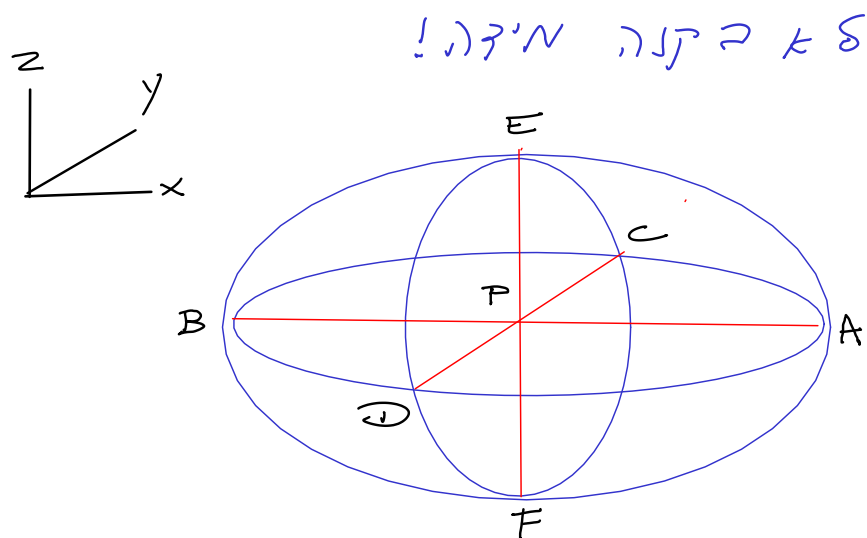
$$\frac{225}{3600} \cdot (x+2)^2 + \frac{144}{3600} \cdot (y-1)^2 + \frac{400}{3600} \cdot (z+1)^2 = 1$$

$$\frac{1}{16} \cdot (x+2)^2 + \frac{1}{25} \cdot (y-1)^2 + \frac{1}{9} \cdot (z+1)^2 = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{4^2} + \frac{(y-1)^2}{5^2} + \frac{(z+1)^2}{3^2} = 1$$

אליפסויד אשר מרכזו נמצא בנקודה

$$P(-2, 1, -1)$$



$$AP = BP = 4, \quad CP = DP = 5 \quad EP = FP = 3$$

$$P = (-2, 1, -1)$$

$$A = P + (4, 0, 0) = (2, 1, -1)$$

$$B = P - (4, 0, 0) = (-6, 1, -1)$$

$$C = P + (0, 5, 0) = (-2, 6, -1)$$

$$D = P - (0, 5, 0) = (-2, -4, -1)$$

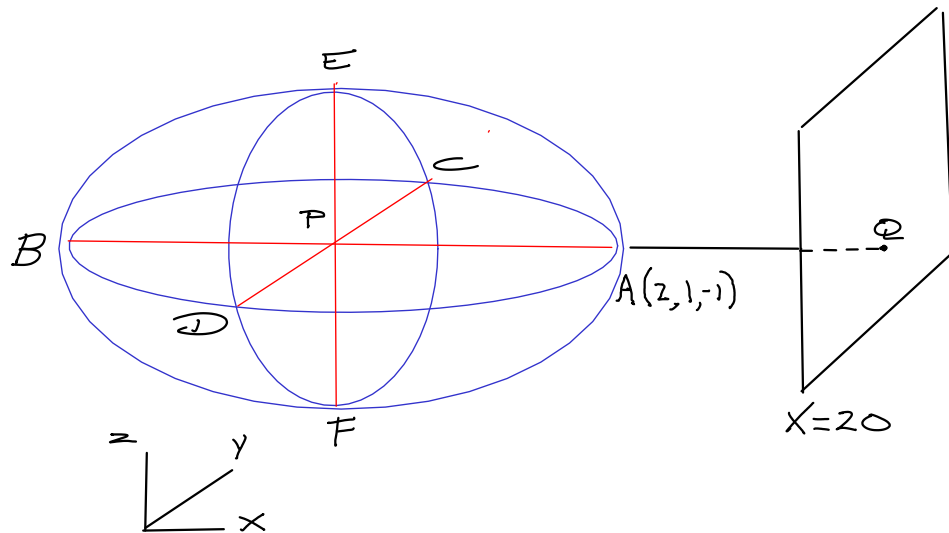
$$E = P + (0, 0, 3) = (-2, 1, 2)$$

$$F = P - (0, 0, 3) = (-2, 1, -4)$$

(ב)

שיטה 1

הנקודה הקרובה ביותר למישור $x = 20$ הינה $A(2, 1, -1)$ (עיין התרשים)



$$\begin{aligned} d &= 20 - x_A \\ &= 20 - 2 \\ &= 18. \end{aligned}$$

לכן המרחק בין A לנקודה Q על המישור הקרובה ביותר לאליפסואיד הוא

$$d = 20 - 2 = 18.$$

שיטה 2

בנקודה על המשטח הקרובה ביותר למישור, הנורמל מקביל לנורמל של המישור.

וקטור הנורמל למישור $x = 20$ הינו

$$\bar{n} = (1, 0, 0) ,$$

כלומר, מקביל לכיוון ה- x .

שים לב, משוואת המשטח היא

$$f(x, y, z) = \frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{25} + \frac{(z+1)^2}{9} - 1 = 0 .$$

הוקטור הנורמל למשטח בנקודה x, y, z ניתן ע"י הגראדיאנט:

$$\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = \left(\frac{2(x+2)}{16}, \frac{2 \cdot (y-1)}{25}, \frac{2 \cdot (z+1)}{9} \right)$$

הנקודה על המשטח הקרובה ביותר למישור היא הנקודה שבה הנורמל מקביל לנורמל של המישור, כך ש-

$$\nabla f = t \cdot \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2(x+2)}{16}, \frac{2 \cdot (y-1)}{25}, \frac{2 \cdot (z+1)}{9} \right) = t \cdot (1, 0, 0)$$

כך שמקבלים את משוואת הישר בין הנקודה על המשטח הרובה ביותר למישור בצורה:

$$\begin{cases} \frac{2(x+2)}{16} = t \\ \frac{2 \cdot (y-1)}{25} = 0 \\ \frac{2 \cdot (z+1)}{9} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4 = 16t \\ y-1 = 0 \\ z+1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8t-4 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

בכדי למצוא את הנקודה בה הישר חותך את המשטח (שנסמן ב- Q_1) נציב את משוואת הישר למשוואת המשטח:

$$\frac{(8t-4+2)^2}{16} + \frac{(1-1)^2}{25} + \frac{(-1+1)^2}{9} - 1 = 0$$

$$\frac{(8t-2)^2}{16} + \frac{(0)^2}{25} + \frac{(0)^2}{9} - 1 = 0$$

$$\frac{(8t-2)^2}{16} - 1 = 0$$

$$\frac{(8t-2)^2}{16} = 1$$

$$(8t-2)^2 = 16$$

$$8t-2 = \sqrt{16}$$

$$8t-2 = \pm 4$$

$$8t = \pm 4 + 2$$

$$t = \frac{3}{4} \text{ או } -\frac{1}{4} .$$

עכשיו נציב את הערך של t הזה לתוך משוואת הישר כדי למצוא את Q_1 :

$$Q_1 = (8t-4, 1, -1) = (2, 1, -1) \text{ או } (-6, 1, -1)$$

אחד מהם הינה הנקודה על המשטח הקרובה ביותר למישור. הישר חותך את המישור בנקודה

$$Q_2 = (20, 1, -1)$$

ולכן המרחק בין המשטח למישור הינו

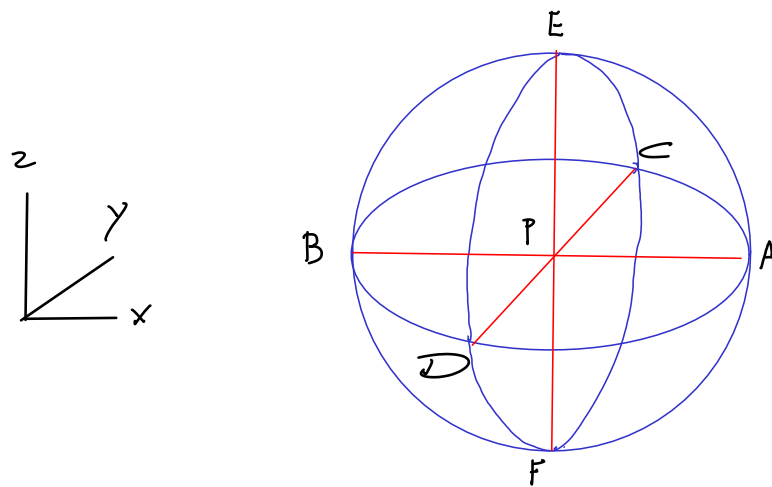
$$d = |\overline{Q_1 Q_2}| = \sqrt{(20-2)^2 + (1-1)^2 + (-1-(-1))^2} = \sqrt{(18)^2} = 18 .$$

שאלה 6 נכתוב את המשוואה בצורה קנונית:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + 37 &= 4x + 10y + 6z \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 37 - 4x - 10y - 6z &= 0 \\ x^2 - 4x + y^2 - 10y + z^2 - 6z + 37 &= 0 \\ (x-2)^2 - 4 + (y-5)^2 - 25 + (z-3)^2 - 9 + 37 &= 0 \\ (x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 - 1 &= 0 \\ (x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 &= 1 \end{aligned}$$

כדור מרדיוס 1 אשר מרכזו נמצאו בנקודה

$$P(2, 5, 3)$$



$$AP = BP = 1 \quad CP = DP = 1 \quad EP = FP = 1.$$

$$P = (2, 5, 3)$$

$$A = P + (1, 0, 0) = (3, 5, 3)$$

$$B = P - (1, 0, 0) = (1, 5, 3)$$

$$C = P + (0, 1, 0) = (2, 6, 3)$$

$$D = P - (0, 1, 0) = (2, 4, 3)$$

$$E = P + (0, 0, 1) = (2, 5, 4)$$

$$F = P - (0, 0, 1) = (2, 5, 2)$$

וקטור הכיוון של הישר בין הנקודות R ו- S הינו

$$\vec{a} = (0 - 8, 0 - 0, 8 - 0) = (-8, 0, 8)$$

או שקול

$$\vec{a} = (-1, 0, 1).$$

לכן משוואת הישר העובר דרך נקודות R ו- S היא

$$\ell_1 : (x, y, z) = (8, 0, 0) + t(-1, 0, 1) .$$

שים לב, אם המשטח הוא משטח של כדור, הנקודה על הישר הקרובה ביותר למשטח הוא אותה הנקודה על הישר הקרובה ביותר למרכז כדור $P(2, 5, 3)$. המרחק (בירבוע) בין נקודה על הישר $(x, y, z) = (8 - t, 0, t)$ ובין הנקודה $P(2, 5, 3)$ הוא

$$\begin{aligned} d^2 &= (8 - t - 2)^2 + (0 - 5)^2 + (t - 3)^2 \\ &= (6 - t)^2 + 5^2 + (t - 3)^2 \\ &= 36 - 12t + t^2 + 25 + t^2 - 6t + 9 \\ &= 70 - 18t + 2t^2 . \end{aligned}$$

נמצאו את הערך של הפרמטר t על הישר המתאים לנקודה על הישר הקרובה ביותר ל P ע"י לעשות את d^2 מינימום. נקח את הנגזרת של d^2 לפי t ואז נאפס אותה כדי למצוא את המינימום:

$$(d^2)' = 0 \quad \Rightarrow \quad -18 + 4t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{9}{2} .$$

נציב את הערך הזה לתוך משוואת הישר ונמצאו את הנקודה:

$$Q = \left(8 - \frac{9}{2}, 0, \frac{9}{2} \right) = \left(\frac{7}{2}, 0, \frac{9}{2} \right) .$$

המרחק בין הנקודה Q על הישר והנקודה P במרכז הכדור הוא

$$|PQ| = \sqrt{\left(\frac{7}{2} - 2\right)^2 + (0 - 5)^2 + \left(\frac{9}{2} - 3\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{100}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{118}{4}} = 5.43139$$

ולכן המרחק d בין Q למשטח של הכדור הוא $|PQ|$ פחות הרדיוס של הכדור (1). לכן התשובה הסופית היא

$$d = 5.43139 - 1 = 4.43139 .$$