

חישוביות וסיבוכיות

מועד ב'

ד"ר יוחאי טוויטו, ד"ר ירמיהו מילר .

סמסטר א, תשפ"ה

מספר העמוד הנוכחי ומספר העמודים הכולל בשאלון מופיעים בתחתית כל עמוד. בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות

שאלוני בחינה

- ☒ לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ☐ לשאלון הבחינה יש לצרף כריכה בלבד.
- ☐ יש להחזיר את השאלון ביחד עם המחברת/כריכה.

שימוש במחשבוני

- ☐ ניתן להשתמש במחשבון.
- ☒ לא ניתן להשתמש במחשבון.

חומר עזר

- ☒ לא ניתן להשתמש בחומר עזר כלל.
- ☐ ניתן להשתמש בחומר עזר/דף נוסחאות, כמפורט:
- ☐ הבחינה עם חומר פתוח ☑ מותר להשתמש בכל חומר עזר מודפס או כתוב.

עמוד 1 מתוך 6

הנחיות

נא קראו בעיון את ההנחיות הבאות בטרם תתחילו לפתור את הבחינה. מומלץ לקרוא בקצרה את כלל השאלות לפני שמתחילים לפתור את הבחינה. ניתן לענות על השאלות בכל סדר שתרצו.

1. המבחן כולל 5 שאלות. יש לענות על כולן.
2. שאלות הבחינה שוות משקל - כל שאלה 20 נקודות.
3. כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תדלגו על שלבים.
4. המבחן כולל נספחים, לשימושכם. הסתייעו בהם במידת הצורך.
5. הקפידו על כתב יד ברור וקריא.
6. הקפידו לרשום בגדול ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
7. כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבלתם. רק הן נבדקות!
8. ניתן לקחת את השאלון כאשר הבחינה מסתיימת.

בהצלחה!

הבחינה

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

נתון אלפבית הקלט $\Sigma = \{a, b, c\}$ ונתונה השפה הבאה:

$$L = \{a^i b^j c^{2i+3j} \mid i, j \in \mathbb{N}^+\}$$

תארו מכונת טיורינג סטנדרטית (כלומר, במודל הבסיסי) שמכריעה את השפה.

בסעיף זה עליכם לתאר את המכונה בצורה גרפית בעזרת תרשים דיאגרמת מצבים בלבד, ולא בדרכים אחרות. כלומר, לא בעזרת טבלת מעברים, לא בעזרת פסאודו-קוד, וכיוצא באלו.

תזכורת, \mathbb{N}^+ היא קבוצת הטבעיים החיוביים (כלומר, ללא המספר אפס).

סעיף ב' (10 נקודות)

בנומכונת טיורינג סטנדרטית (כלומר, במודל הבסיסי) שמכריעה את השפה הבאה:

$$L = \{x_1 \dots x_k \# y_1 \dots y_k \# z_1 \dots z_k \mid x_i, y_i, z_i \in \{0, \dots, 9\} \wedge \forall_i (z_i \neq x_i \wedge z_i \neq 2y_i \wedge z_i \geq x_i + y_i)\}$$

אתהמכונה יש לתאר בעזרת טבלת המעברים בלבד. אין לתאר את המכונה בעזרת תרשים ו/או פסאודו-קוד (תיאור מילולי).

שאלה 2: וריאציות על מכונות טיורינג (20 נקודות)

נסמן ב- T את מודל מכונת הטיורינג הבסיסי. במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לשני הכיוונים. בתחילת החישוב הראש נמצא בתחילת הקלט.

נסמן ב- O את מודל מכונת הטיורינג עם סרט ימינה בלבד. במודל זה בכל צעד ניתן לזוז ימינה או שמאלה. אך לא ניתן להישאר במקום, באותה המשבצת בסרט. במודל זה, הסרט הוא אינסופי לכיוון אחד בלבד - ימינה. בתחילת החישוב, הקלט ממוקם בקצה השמאלי של הסרט והראש נמצאת בתחילת הקלט. החישוב מתנהל כמו במכונה במודל T למעט כאשר הראש נמצא במשבצת השמאלית ביותר בסרט וצריך לזוז שמאלה - במקרה כזה הראש נשאר במקום ולא זז.

הוכיחו כי המודל T והמודל O שקולים חישובית. כיתבו הוכחה מלאה ומפורטת. אל תדלגו על שלבים. תארו באופן מפורט את פונקציית המעברים בשני כיווני ההוכחה. העזרו בטבלת מעברים בכדי לתאר באופן מלא את פונקציית המעברים.

שאלה 3: התזה של צ'רץ'-טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

נתון הדקדוק הבא. מהי השפה שהדקדוק יוצר? כלומר, מהי $L(G)$? כיתבו את השפה בצורה פורמלית, ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של השפה.

$$\begin{aligned} G &= (V, \Sigma, R, S) , \\ V &= \{S, C, D, E, \$, \#\}, \\ \Sigma &= \{a\} , \\ R &= \{ \end{aligned}$$

$$S \rightarrow \$Ca\# ,$$

$$S \rightarrow a ,$$

$$S \rightarrow \varepsilon ,$$

$$Ca \rightarrow aaC ,$$

$$\$D \rightarrow \$C ,$$

$$C\# \rightarrow D\# ,$$

$$C\# \rightarrow E ,$$

$$aD \rightarrow Da ,$$

$$aE \rightarrow Ea ,$$

$$\$E \rightarrow \varepsilon .$$

}

סעיף ב' (10 נקודות)

נתון הדקדוק הבא. מהי השפה שהדקדוק יוצר? כלומר, מהי $L(G)$? כיתבו את השפה בצורה פורמלית,

ברורה ומוגדרת היטב. ניתן גם להוסיף תיאור מילולי של השפה.

$$G = (V, \Sigma, R, S) ,$$

$$V = \{S, B, C, H\},$$

$$\Sigma = \{a, b, c\} ,$$

$$R = \{$$

$$S \rightarrow aSBC ,$$

$$S \rightarrow aBC ,$$

$$CB \rightarrow HB ,$$

$$HB \rightarrow HC ,$$

$$HC \rightarrow BC ,$$

$$aB \rightarrow ab ,$$

$$bB \rightarrow bb ,$$

$$bC \rightarrow bc ,$$

$$cC \rightarrow cc .$$

}

שאלה 4: אי כריעות (20 נקודות)

נתונה השפה הבאה:

$$L_{\geq 3} = \{ \langle M \rangle \mid |L(M)| \geq 3 \}$$

$L_{\geq 3}$ מכילה קידודים של מכונות טיורינג שמקבלות לפחות k מילים שונות.

סעיף א' (10 נקודות)

הוכיחו כי $L_{\geq 3}$ שפה קבילה.

סעיף ב' (10 נקודות)

הוכיחו כי $L_{\geq 3}$ לא כריעה.

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

עמוד 5 מתוך 6

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

בעיית סכום התת קבוצה $SUBSETSUM$: בהינתן קבוצת מספרים שלמים $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ומספר שלם t , האם קיימת תת קבוצה $Y \subseteq S$ שסכום איבריה הוא בדיוק t .
בעיית סכום התת קבוצה כשפה פורמלית:

$$SUBSETSUM = \left\{ \langle S, t \rangle \mid t = \sum_{y \in Y} Y \text{ כך ש-} Y \subseteq S \text{ קבוצת תת-קבוצה } S \text{ שלם וקיימת תת-קבוצה } Y \subseteq S \text{ כך ש-} t = \sum_{y \in Y} y \right\}$$

בעיית החלוקה ($PARTITION$) מוגדרת באופן הבא:

בהינתן קבוצת מספרים שלמים $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ האם קיימת חלוקה לשתי קבוצות A_1 ו- A_2 כך ש:

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \bullet$$

$$A_1 \cup A_2 = A \bullet$$

$$\sum_{a_i \in A_1} a_i = \sum_{a_i \in A_2} a_i = \frac{1}{2} \sum_{a_i \in A} a_i \bullet$$

בעיית החלוקה כשפה פורמלית:

$$PARTITION = \left\{ A \mid \begin{array}{l} A \text{ קבוצת שלמים וקיימות } A_1, A_2 \subset A \text{ כך ש:} \\ A_1 \cup A_2 = A \text{ וגם } A_1 \cap A_2 = \emptyset \text{ וגם } \sum_{a \in A_1} a = \sum_{a \in A_2} a = \frac{1}{2} \sum_{a \in A} a \end{array} \right\}$$

הוכיחו כי קיימת רדוקציית התאמה פולינומיאלית מהשפה $SUBSETSUM$ לשפה $PARTITION$. כלומר:

$$SUBSETSUM \leq_P PARTITION.$$

בשאלה זו עליכם:

סעיף א' (8 נקודות)

להגדיר במפורש את הרדוקציה.

סעיף ב' (6 נקודות)

להראות שהרדוקציה היא רדוקציית התאמה.

סעיף ג' (6 נקודות)

להראות שהרדוקציה פולינומיאלית.

תוכן העניינים

8	1 מכונות טיורינג
9	2 וריאציות של מכונות טיורינג
10	3 התזה של צ'רץ'-טיורינג
14	4 אי-כריעות
18	5 סיבוכיות זמן
21	6 נוסחאות נוספות

1 מכונות טיורינג

הגדרה 1: מכונת טיורינג

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$. מכונת טיורינג (מ"ט) היא שביעה .	
Q	קבוצת מצבים סופיות
Σ	א"ב קלט סופי
Γ	א"ב סרט סופי
$\delta : (Q \setminus \{\text{rej}, \text{acc}\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$	פונקציית המעברים
q_0	מצב התחלתי
acc	מצב מקבל
rej	מצב דוחה

הגדרה 2: קונפיגורציה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$ מכונת טיורינג.

קונפיגורציה של M הינה מחרוזת

$$uq\sigma v, \quad u, v \in \Gamma^*, \sigma \in \Gamma, q \in Q.$$

משמעות:

q	מצב המכונה,
σ	הסימון במיקום הראש
u	תוכן הסרט משמאל לראש,
v	תוכן הסרט מימין לראש.

הגדרה 3: גרירה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$ מכונת טיורינג, ותהי c_1 ו- c_2 קונפיגורציות של M .
נסמן

$$c_1 \vdash_M c_2$$

(במילים, c_1 גורר את c_2) אם כשנמצאים ב- c_1 עוברים ל- c_2 בצעד בודד.

נסמן

$$c_1 \vdash_M^* c_2$$

אם ניתן לעבור מ- c_1 ל- c_2 ב-0 או יותר צעדים.

הגדרה 4: קבלה ודחייה של מחרוזת

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$ מכונת טיורינג, ו- $w \in \Sigma^*$ מחרוזת.
נאמר כי:

- M מקבלת את w אם $q_0 w \vdash_M^* u \text{ acc } \sigma v$
 - M דוחה את w אם $q_0 w \vdash_M^* u \text{ rej } \sigma v$
- כאשר $v, u \in \Gamma^*, \sigma \in \Gamma$ כלשהם.

הגדרה 5: הכרעה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. נאמר כי M מכריעה את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים

- $M \Leftarrow w \in L$ מקבלת את w .
- $M \Leftarrow w \notin L$ דוחה את w .

הגדרה 6: קבלה של שפה

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$ מכונת טיורינג, ו- $L \subseteq \Sigma^*$ שפה. נאמר כי M מקבלת את L אם לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים

- אם $w \in L$ אז M מקבלת את w .
- אם $w \notin L$ אז M לא מקבלת את w .

במקרה כזה נכתוב ש- $L(M) = L$.

הגדרה 7: חישוב פונקציות

תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \text{acc}, \text{rej})$ מכונת טיורינג ותהי $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$. נאמר כי M מחשבת את f אם:

- $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma_2 \subset \Gamma$
- לכל $w \in \Sigma_1^*$ מתקיים $q_0 w \vdash_M^* \text{acc } f(w)$.

2 וריאציות של מכונות טיורינג**הגדרה 8: מודל חישוב**

מודל חישובי = אוסף של מכונות שעבורם מוגדרים המושגים של הכרעה וקבלה של שפות.

הגדרה 9: מודלים שקולים חישובית

יהיו A, B מודלים חישוביים. נאמר כי A ו- B שקולים אם לכל שפה L :

- קיימת מכונה במודל A שמכריעה את L אם"ס קיימת מכונה כזו במודל B .
- קיימת מכונה במודל A שמקבלת את L אם"ס קיימת מכונה כזו במודל B .

הגדרה 10: מכונות שקולות חישובית

שתי מכונות הן שקולות חישובית אם הן מקבלות ודוחות בדיוק את אותן המילים.

משפט 1: מכונת טיורינג עם סרט ימינה בלבד

מודל מ"ט סם סרט אינסופי לכיוון אחד בלבד (מודל O) שקול למודל אינסופי בשני הכיוונים (מודל T). כלומר, לכל שפה L :

- יש מ"ט ממודל O שמקבלת את L אם"ס יש מ"ט במודל T שמקבלת את L .
- יש מ"ט ממודל O שמכריעה את L אם"ס יש מ"ט במודל T שמכריעה את L .

משפט 2: מכונת טיורינג מרובת סרטים

במכונת טיורינג מרובת סרטים:

- יתכנו מספר סרטים.

מספר הסרטים סופי וקבוע מראש בזמן בניית המ"ט, ואינו תלוי בקלט או במהלך החישוב.

- לכל סרט יש ראש נפרד.

- הפעילות (תנועה וכתובה) בכל סרט נעשית בנפרד.

בפרט, הראשים יכולים לזוז בכיוונים שונים בסרטים שונים.

- ישנו בקר מרכזי יחיד, שקובע את הפעילות בכל אחד מהסרטים, על סמך המידע שמתקבל מכל הסרטים.

לכן, תוכן סרט אחד יכול להשפיע על הפעילות בשאר הסרטים.

- בתחילת החישוב, הקלט נמצא בסרט הראשון ושאר הסרטים ריקים.

משפט 3:

לכל k , המודל של מ"ט עם k סרטים שקול חישובי למודל של מ"ט עם סרט אחד.

משפט 4:

קבלה ודחייה של מחרוזות:

עבור מ"ט לא דטרמיניסטית N ומחרוזת w :

- N מקבלת את w אם קיים חישוב של N על w שמגיע למצב מקבל.

- N דוחה את w אם כל החישובים של N על w עוצרים במצב דוחה.

הכרעה וקבלה של שפות:

עבור מ"ט לא דטרמיניסטית N ושפה L :

- N מכריעה את L אם N מקבלת אף כל המילים ב- L ודוחה את כל המילים שאינן ב- L .

- N מקבלת את L אם N מקבלת אף כל המילים ב- L ולא מקבלת את כל המילים שאינן ב- L .

משפט 5:

לכל מ"ט לא דטרמיניסטית קיימת מ"ט דטרמיניסטית שקולה.

3 התזה של צ'רץ'-טיורינג

שמות נרדפים לשפות כריעות ושפות קבילות

Acceptable languages	שפות קבילות	Decideable languages	שפות כריעות
recognizable languages	שפות ניתנות לזיהוי	Recursive languages	שפות רקורסיביות
Semi-deidable languages	שפות כריעות למחצה		
Partially-deidable languages			
Recursively enumerable languages	שפות הניתנות למנייה רקורסיביות		

משפט 7: סגירות שפות קבילות

- איחוד
- חיתוך
- שרשור
- סגור קליין

משפט 6: סגירות שפות כריעות

השפות הכריעות סגורות תחת:

- איחוד
- חיתוך
- משלים
- שרשור
- סגור קליין

משפט 8: היחס בין הכרעה לקבלה

אם שפה הינה כריעה אז היא קבילה.

אם שפה והמשלים שלה קבילות אז היא כריעה.

הגדרה 11: שפת סימפלמשתנים

- טבעיים: i, j, k, \dots

מקבלים כערך מספר טבעי.

- מערכים: $A[], B[], C[], \dots$ בכל תא ערך מתוך א"ב Γ אין סופיים.
- אתחול: הקלט נמצא בתאים הראשונים של $A[]$.

כל שאר המשתנים מאותחלים ל-0.

פעולות

- השמה בקבוע:

 $i=3, B[i]="\#"$

- השמה בין משתנים:

 $i=k, A[k]=B[i]$

- פעולות חשבון:

 $x = y + z, x = y - z, x = y \cdot z$ תנאים

- $B[i] == A[j]$

- (מערכים).

- $x \geq y$

- (משתנים טבעיים).

כל משתנה מופיע רק פעם אחת בכל פעולה או תנאי.

זרימה

- סדרה פקודות ממוספרות.

- goto: מותנה ולא מותנה.

- stop עצירה עם ערך חזרה.

```

1 one = 1
2 zero = 0
3 B[zero] = "0"
4 i=0
5 j=i
6 if A[i] == B[zero] goto 9
7 i=j + one
8 goto 3
9 C[one] = A[j]
10 if C[one] == A[zero] goto 12
11 stop(0)
12 stop(1)
```

הגדרה 12: קבלה ודחייה של מחרוזת בשפה SIMPLE

עבור קלט

w ותוכנית

P בשפת SIMPLE. נאמר כי

- P מקבלת את w אם הריצה של P על w עוצרת עם ערך חזרה 1.

- P דוחה את w אם הריצה של P על w עוצרת עם ערך חזרה 0.

הגדרה 13: הכרעה וקבלה של שפות

עבור שפה L ותוכנית P בשפת SIMPLE. נאמר כי

- P מכריעה את L אם היא מקבלת את המילים שב-L ודוחה את אלה שלא ב-L.

- P מקבלת את L אם היא מקבלת את כל ורק המילים ב-L.

משפט 9:

המודלים של מכונת טיורינג ותוכניות SIMPLE שקולים.

משפט 10: מ"ט ותוכניות מחשב

מ"ט חזקה לפחות כמו תוכנית משחב.
 כל תוכנית מחשב ניתנת למימוש במ"ט.
 לכן, כל שפה שהינה כריעה ע"י מחשב היא כס כריעה ע"י מ"ט.
 וכמו כן, שפה שהינה קבילה ע"י מחשב היא גם קבילה ע"י מ"ט.

הגדרה 14: דקדוקים כלליים

בדקדוק כללי, בצד שמאל של כלל יצירה יכולה להופיעה מחרוזת (לא ריקה) כלשהי.
 פורמלית, כלל יצירה בדקדוק כללי הוא מהצורה

$$\gamma \rightarrow u$$

כאשר $u \in (V \cup \Sigma)^*$, $\gamma \in (V \cup \Sigma)^+$.

משפט 11:

תהי L שפה. L קבילה אם"ם קיים דקדוק כללי G כך ש- $L(G) = L$.

משפחת שפות	דקדוק	מודל חישובי
קבילות	כללי	מכונת טיורינג
חסרות הקשר	חסר הקשר	אוטומט מחסנית
רגולריות	רגולרי	אוטומט סופי

משפט 12:

כל שפה חסרת הקשר הינה כריעה.

משפט 13: התזה של צ'רץ' טיורינג

התזה של צ'רץ' טיורינג מודל מ"ט מגלם את המושג האבסטרקטי של "אלגוריתם".
 כלומר, כל אלגוריתם שניתן לתיאור כתהליך מכניסטי שבו:
 • התהליך מתבצע כסדרה של צעדים.
 • כל צעד מצריך כמות סופית של "עבודה".
 ניתן גם לתיאור כמ"ט.
 בפרט, אין מודל מכניסטי / אוטומטי יותר ממ"ט.

4 אי-כריעות

הגדרה 15: השפה ATM

$$ATM = \{(P, w) \mid P(w) = 1\} .$$

השפה ATM כוללת את כל הזוגות של מחרוזות P, w כך ש:

- P היא קוד (תקין) של תוכנית.
- w מחרוזת.
- מתקיים שאם מריצים את התוכנית P על הקלט w אז התוכנית עוצרת עם ערך חזרה 1.

הגדרה חלופית:

$$A_{TM} = \{\langle M, w \rangle \mid w \text{ מקבלת את } M\}$$

השפה A_{TM} כוללת את כל הזוגות של מחרוזות $\langle M, w \rangle$ של כל מכונת טיורינג M וכל קלט w כך ש- M מקבלת את w .

סיכום 1: התוכנה U

התוכנה U היא תוכנה שמקבלת כקלט זוג מחרוזות P, w ופועלת כך:

- U מחזירה את ערך החזרה שהתקבל מהריצה של P על w .
 - מריצה את התוכנה P על קלט w (במקרה שבו P אינה תוכנית מחשב תקינה אז U מחזירה ערך 0).
 - נשים לב שאם P לא עוצרת על w אז גם U לא עוצרת על הזוג P, w .
- התוכנה U פועלת באופן דומה לאופן שבה מערכת ההפעלה מפעילה תוכנות אחרות.

התוכנה U נקראת גם "תוכנה אוניברסלית" (או, בעולם מכונות טיורינג: "מכונת טיורינג אוניברסלית") כיוון שהיא תוכנה אחת שמדמה כל תוכנה אחרת.

U היא תוכנית שמקבלת את ATM . כלומר:

$$L(U) = ATM .$$

מסקנה: ATM קבילה.

שיטת ההוכחה:

אם שפה הינה קבילה אבל לא כריעה, אז המשלים שלה בהכרח אינה קבילה. לכן, בשביל להוכיח ששפה אינה קבילה, די להוכיח שהשפה לא כריעה, והמשלים שלה כן קבילה.

הגדרה 16: השפה HALT

$$HALT = \{(P, w) \mid P(w) \downarrow\} .$$

השפה HALT כוללת את כל הזוגות של מחרוזות P, w כך ש:

- P היא קוד (תקין) של תוכנית.
- w מחרוזת.
- מתקיים שאם מריצים את התוכנית P על הקלט w אז התוכנית עוצרת (הסימון \downarrow מסמן עצירה).

בעיית העצירה קבילה אבל לא כריעה.
כיוון שכך, המשלים שלה לא כריעה ולא קבילה.

הגדרה חלופית:

$$HALT_{TM} = \{ \langle M, w \rangle \mid w \text{ מכונת טיורינג שעוצרת על } w \}$$

השפה $HALT_{TM}$ כוללת את כל הזוגות של מחרוזות $\langle M, w \rangle$ של כל מכונת טיורינג M וכל קלט w כך ש- M עוצרת על w .

הגדרה 17: השפה E

$$E = \{ P \mid L(P) = \emptyset \}$$

השפה E כוללת את כל המחרוזות P כך ש-

- P היא קוד (תקין) של תוכנית.
- השפה של P ריקה.

כלומר, לכל קלט w , הריצה של P על w לא מחזירה 1.

הגדרה חלופית:

$$E_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset \text{ בתנאי } L(M) = \emptyset \}$$

השפה E_{TM} כוללת את כל מחרוזות $\langle M \rangle$ של כל מכונת טיורינג M כך ש- M לא מקבלת אף מילה. במילים אחרות, השפה של M ריקה: $L(M) = \emptyset$.

הגדרה 18: השפה EQ

$$EQ = \{ (P_1, P_2) \mid L(P_1) = L(P_2) \} .$$

השפה EQ כוללת את כל זוגות המחרוזות P_1, P_2 כך ש:

- P_1, P_2 הינן קודים (תרינים) של תוכניות.
- השפות של P_1, P_2 זהות.

כלומר, P_1, P_2 מקבלות בדיוק את אותן המילים.

הגדרה חלופית:

$$EQ_{TM} = \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2) \}$$

השפה EQ_{TM} כוללת את כל זוגות של מכונות טיורינג $\langle M_1, M_2 \rangle$ שמקבלות בדיוק אותן המילים. במילים אחרות, השפות של M_1 ו- M_2 זהות: $L(M_1) = L(M_2)$.

קבילה	כריעה	
✓	×	ATM
×	×	\overline{ATM}
✓	×	$HALT$
×	×	\overline{HALT}
×	×	E
✓	×	\overline{E}
×	×	EQ
×	×	\overline{EQ}

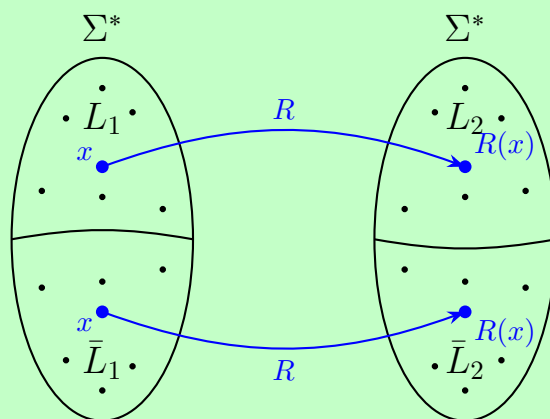
הגדרה 19: הרדוקציה

רדוקציית התאמה (many to one reduction) מקבוצה $L_1 \subseteq \Omega_1$ לקבוצה $L_2 \subseteq \Omega_2$ הינה פונקציה

$$R : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$$

כך שלכל $x \in \Omega_1$ מתקיים:

$$x \in L_1 \iff R(x) \in L_2 .$$



סימון: $L_1 \leq_m L_2$ ריימת רדוקציה התאמה ניתנת לחישוב מ- L_1 ל- L_2 .

משפט 14: משפט הרדוקציה

טענה:

אם:

- L_2 כריעה
- $L_1 \leq L_2$
- אז L_1 כריעה.

מסקנה:

אם:

- L_1 לא כריעה
- $L_1 \leq L_2$
- אז L_2 לא כריעה.

טענה:

אם:

- L_2 קבילה
- $L_1 \leq L_2$
- אז L_1 קבילה.

מסקנה:

אם:

- L_1 לא קבילה
- $L_1 \leq L_2$
- אז L_2 לא קבילה.

מתכון להוכחה ששפה L_2 לא כריעה:

1. בחר שפה L_1 לא כריעה.
2. מצא רדוקציית התאמה ניתנת לחישוב מ- L_1 ל- L_2 .

מתכון להוכחה ששפה L_2 לא קבילה:

1. בחר שפה L_1 לא קבילה.
2. מצא רדוקציית התאמה ניתנת לחישוב מ- L_1 ל- L_2 .

משפט 15: תכונות של רדוקציות

A	\leq_m	B
כריעה	\Leftarrow	כריעה
לא כריעה	\Rightarrow	לא כריעה

A	\leq_m	B
קבילה	\Leftarrow	קבילה
לא קבילה	\Rightarrow	לא קבילה

משפט 16: לכל שפה קיימת רדוקציה ל- A_{TM} מכל שפה כריעה A קיימת רדוקציה חישובית ל- A_{TM} .

כלומר

$$A \leq_m A_{TM}.$$

משפט 17: רדוקציה משפות כריעות

מכל שפה כריעה קיימת רדוקציה חשיבה לכל שפה אחרת שאינה \emptyset או Σ^* .

הגדרה 20:

$$NOTREG = \{P \mid L(P) \text{ לא רגולרית}\}.$$

השפה NOT-REG כוללת את כל המחרוזות P כך ש:

- P הינה קוד (תקין) של תוכנית.
- השפה של P לא רגולרית.

הגדרה חלופית:

$$NOTREG_{TM} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ לא רגולרית}\}.$$

השפה $NOTREG_{TM}$ כוללת את כל המחרוזות $\langle M \rangle$ של מ"ט M כך שהפשה של M לא רגולרית.

משפט 18: השפה $NOT - REG$ אינה קבילה.

השפה $NOT - REG$ אינה קבילה.

5 סיבוכיות זמן**הגדרה 21: זמן הריצה**

זמן הריצה של מכונת טיורינג M על קלט w הוא מספר צעדי החישוב ש- M מבצעת על w .

הגדרה 22: סיבוכיות זמן ריצה

תהי M מ"ט דטרמיניסטית אשר עוצרת על כל קלט. הזמן הריצה או הסיבוכיות זמן של M היא פונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, כאשר $f(n)$ המספר צעדי חישוב המקסימלי ש- M מבצעת על קלט w של אורך n .

אם $f(n)$ זמן הריצה של M , אומרים כי M רץ בזמן $f(n)$ וש- M היא $f(n)$ זמן מכונת טיורינג

הגדרה 23: מחלקה של סיבוכיות זמן

המחלקת הסיבוכיות זמן מסומנת $TIME(t(n))$ ומוגדרת להיות אוסף של כל השפות אשר ניתנות להכרעה על ידי מכונת טיורינג בזמן $O(t(n))$.

משפט 19:

הגדרת זמן הריצה שנתנו היא תלויה במודל של מכונת הטיורינג שאיתו אנחנו עובדים.

משפט 20:

תהי $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ פונקציה $t(n)$.
אם מתקיים

$$t(n) \geq n$$

אז לכל מכונת טיורינג $O(t(n))$ רב-סרטי קיימת מ"ט $O(t^2(n))$ עם סרט אחד.

הגדרה 24: זמן הריצה של מ"ט לא דטרמיניסטית

תהי N מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית.

הזמן הריצה של N מוגדרת להיות הפונקציה $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ כאשר $f(n)$ הוא המספר הצעדים המקסימלי אשר N מתוך כל הענפים של החישוב שלה על קלט של אורך n .

משפט 21:

תהי $t(n)$ פונקציה המקיימת $t(n) \geq n$. כל מ"ט $O(t(n))$ לא דטרמיניסטית N סרט אחד, שקולה למכונת טיורינג $2^{O(t(n))}$ דטרמיניסטית סרט אחד.

הגדרה 25: מכונת טיורינג פולינומית

מכונת טיורינג M תיקרא **פולינומית** או **יעילה** אם קיים $c \in \mathbb{N}$ כך ש- M פועלת בסיבוכיות זמן ריצה $O(n^c)$.

הגדרה 26: המחלקה P

המחלקה P היא אוסף השפות שקיימת מכונת טיורינג פולינומיאלית M המכריעה אותן. כלומר:

$$P = \bigcup_k \text{TIME}(n^k).$$

הגדרה 27: אלגוריתם אימות

אלגוריתם אימות של שפה A הוא אלגוריתם V כך ש-:

$$A = \{w \mid \langle w, c \rangle \text{ מקבל על פי } V\}$$

במילים, **אלגוריתם אימות** הוא אלגוריתם V אשר מאמת כי הקלט w שייך לשפה A על פי התנאי c , שנקרא **אישור** (certification).

אנחנו מגדירים את זמן הריצה של V על פי האורך של w . לכן **אלגוריתם אימות זמן-פולינומיאלי** רץ בזמן פולינומיאלי $O(n^k)$ כאשר n האורך של w .

הגדרה 28: מחלקת הסיבוכיות NP

• המחלקה NP היא מחלקת השפות שניתן לאמתן באמצעות אלגוריתם זמן-פולינומיאלי.

הגדרה חלופית למחלקה NP הינה:

• המחלקה NP היא מחלקת השפות שניתן להכרעה באמצעות מ"ט אי-דטרמיניסטית זמן-פולינומיאלית.

למטה במשפט 22.

משפט 22: $A \in NP$ אם ורק אם A ניתנת לאימות ע"י N_{TM} שפה A כלשהי שייכת למחלקה NP אם ורק אם A ניתנת להכרעה על ידי מכונות טיורינג אי-דטרמיניסטיות זמן-פולינומיאלית.

הגדרה 29: פונקציה הניתנת לחישוב זמן-פולינומיאלי פונקציה $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ ניתנת לחישוב זמן-פולינומיאלי אם קיימת מ"ט זמן-פולינומיאלית M , עבורה על הקלט w , M עוצרת עם $f(w)$ על הסרט שלה.

הגדרה 30: פונקציה שניתנת לרדוקציה זמן-פולינומיאלית השפה A ניתנת לרדוקציה זמן-פולינומיאלית לשפה B , שנסמן $A \leq_P B$, אם קיימת פונקציה שנתנת לחישוב זמן-פולינומיאלית $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ כך שלכל

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B.$$

הפונקציה f נקראת **הרדוקציה זמן-פולינומיאלית של A ל- B** .

משפט 23: אם $A \leq_P B$ ו- $B \in P$ אז $A \in P$ אם $A \leq_P B$ ו- $A \in P$ אז $B \in P$.

משפט 24: 3-SAT ניתנת לרדוקציה זמן-פולינומיאלית ל- CLIQUE בהביית 3-SAT ניתנת לרדוקציה זמן-פולינומיאלית לבעיית CLIQUE: $3SAT \leq_P CLIQUE$.

מסקנה 1: $3SAT \in P \Rightarrow CLIQUE \in P$ לפי משפט 23 ומשפט 24:

אם $3SAT \in P$ אז $CLIQUE \in P$.

הגדרה 31: NP-שלמות שפה B היא NP-שלמה או שלמה ב-NP (NP-complete) אם היא מקיימת את השני התנאים הבאים:

- (1) $B \in NP$ וגם
- (2) $A \leq_P B$ עבור כל $A \in NP$.

במילים פשוטות: כל A ב-NP ניתנת לרדוקציה זמן-פולינומיאלית ל- B .

הגדרה 32: NP קשה אם שפה B מקיימת את תכונה (2) אולם לא בהכרח את תכונה (1) בהגדרה 31 אז אומרים כי B NP-קשה או קשה ב-NP (NP-hard).

משפט 25:

אם $B \in \text{NP}$ - שלמה ו- $B \in P$ אז $P = \text{NP}$.

משפט 26: אסוציאטיביות של NP שלמות

אם השני תנאים הבאים מתקיימים:

(1) B היא שפה NP - שלמה.

(2) קיימת $C \in \text{NP}$ עבורה $B \leq_p C$.

אז C שפה NP - שלמה.

משפט 27: משפט קוק לוין

הבעיית SAT היא NP - שלמה.

משפט 28: 3-SAT היא NP שלמה.

3-SAT היא NP שלמה.

6 נוסחאות נוספות**הגדרה 33:** הבעיית הספיקות SAT

$$\text{SAT} = \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ היא נוסחה בוליאנית ספיקה} \}$$

במילים, בעיית SAT שואלת את השאלה: בהינתן נוסחה שמכילה רק קשרים \wedge, \vee, \neg ("גם", "או" ו"לא"), האם קיימת השמה של ערכי אמת למשתנים כך שהנוסחה ϕ תקבל ערך אמת? אם קיימת השמה כזו אז נאמר כי הנוסחה ϕ ספיקה.

הגדרה 34: הבעיית 3-SAT

$$3\text{SAT} = \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ היא נוסחת בוליאנית בצורה } 3\text{CNF} \text{ ספיקה} \}$$

במילים, 3SAT היא הבעיית SAT שמוגדר בהגדרה 33 במקרה הנוסחה שהנוסחה היא בצורה 3CNF . דוגמה של נוסחה בצורה 3CNF היא:

$$(x_1 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$$

הגדרה 35: הבעיית PATH

בהינתן גרף מכוון $G = (V, E)$.

הבעיית PATH שואלת את השאלה הבאה: בהינתן גרף מכוון $G = (V, E)$, וקדקודים s ו- t . האם הגרף G מסלול בין קדקוד s לבין קדקוד t .

$$\text{PATH} = \{ \langle G, s, t \rangle \mid t \text{ ל- } s \text{ מ- } G \text{ גרף מכוון שמכיל מסלול מכוון מ- } s \text{ ל- } t \}.$$

הגדרה 36: מסלול המילטוני

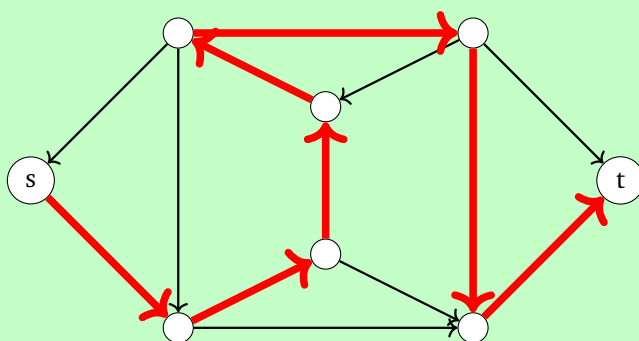
נתון גרף מכוון $G = (V, E)$.
מסלול המילטוני מקדקוד s לקדקוד t הוא מסלול אשר עובר דרך כל קדקוד בדיוק פעם אחת.

הגדרה 37: הבעיית מסלול המילטוני HAMPATH

בהינתן גרף מכוון $G = (V, E)$ וקדקודים s ו- t .
הבעיית המסלול ההמילטוני שואלת את השאלה: האם קיים מסלול המילטוני מקדקוד s לקדקוד t ?

$$HAMPATH = \{ \langle G, s, t \rangle \mid \text{גרף } G \text{ מכיל מסלול המילטוני מ- } s \text{ ל- } t \}$$

התרשים למטה מראה דוגמה של מסלול המילטוני בגרף מכוון.

**הגדרה 38:**

בהינתן שלמים x, y .

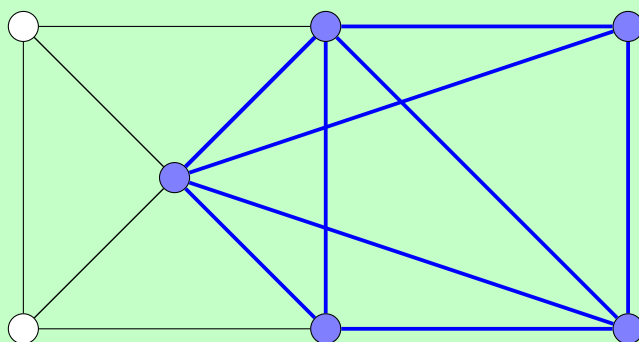
הבעייה RELPRIME שואלת את השאלה: האם x, y זרים.

$$RELPRIME = \{ \{x, y\} \in \mathbb{N} \mid \gcd(x, y) = 1 \}$$

הגדרה 39: קליקה

נתון גרף לא מכוון.

- קליקה בגרף לא מכוון הוא תת-גרף שבו כל זוג קדקודים קשורים על ידי קשת.
 - k -קליקה היא קליקה שבו יש בדיוק k קדקודים.
- התרשים למטה מראה דוגמה של 5-קליקה.



הגדרה 40: בעיית הקליקה

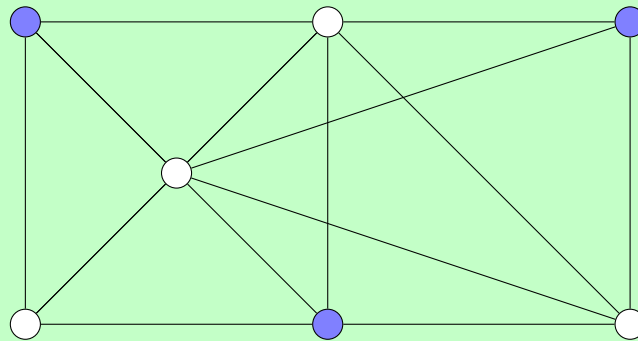
נתון גרף לא מכוון $G = (V, E)$. בעיית הליקה שואלת את השאלה: האם הגרף G מכיל קליקה בגודל k . בשפה פרומלית:

$$CLQ = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון שמכיל קליקה בגודל } k \text{ לפחות.} \}$$

הגדרה 41: קבוצה בלתי תלויה

נתון גרף לא מכוון $G = (V, E)$. קבוצה בלתי תלויה ב- G היא תת-קבוצה של קדקודים $S \subseteq V$ כך שלכל שני קדקודים $u_1, u_2 \in S$ מתקיים $(u_1, u_2) \notin E$.

התרשים למטה מראה דוגמה של גרף לא מכוון G שמכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל 3.

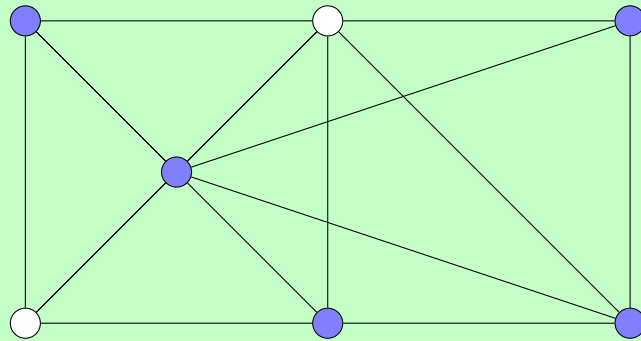
**הגדרה 42: בעיית בקבוצה הבלתי תלויה (Independent Set)**

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר טבעי k . הבעיה IS שואלת את השאלה: האם קיימת קבוצה בלתי תלויה ב- G בגודל k לפחות. בשפה פורמלית:

$$IS = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ מכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל } k \text{ לפחות.} \}$$

הגדרה 43: כיסוי קדקודים

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$. כיסוי קדקודים ב- G הוא תת-קבוצה של קדקודים $C \subseteq V$ כך שלכל צלע $(u_1, u_2) \in E$ מתקיים $u_1 \in C$ או $u_2 \in C$. הגרף למטה מכיל כיסוי קדקודים בגודל 5.

**הגדרה 44: הבעיית כיסוי קדקודים (Vertex Cover (VC)**

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר טבעי k .
 הבעיית כיסוי קדקודים שואלת את השאלה הבאה:
 האם קיים כיסוי בקדקודים ב- G בגודל k ?
 בשפה פורמלית:

$$VC = \{ \langle G, k \rangle \mid k \text{ מכיל כיסוי בקדקודים בגודל } k \}.$$

משפט 29: שפות NP-שלמות

SAT	-NP שלמה.	(משפט קוק לויין)
3SAT	-NP שלמה.	
HAMPATH	-NP שלמה.	
CLIQUE	-NP שלמה.	
INDEPENDENT-SET	-NP שלמה.	
VERTEX-COVER	-NP שלמה.	

פתרונות

חישוביות וסיבוכיות

מועד ב'

פתרון לדוגמא

ד"ר יוחאי טוויטו, ד"ר ירמיהו מילר.

סמסטר א, תשפ"ה

מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הינן פתרונות לדוגמא. ניתן לפתור חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

עמוד 1 מתוך 10

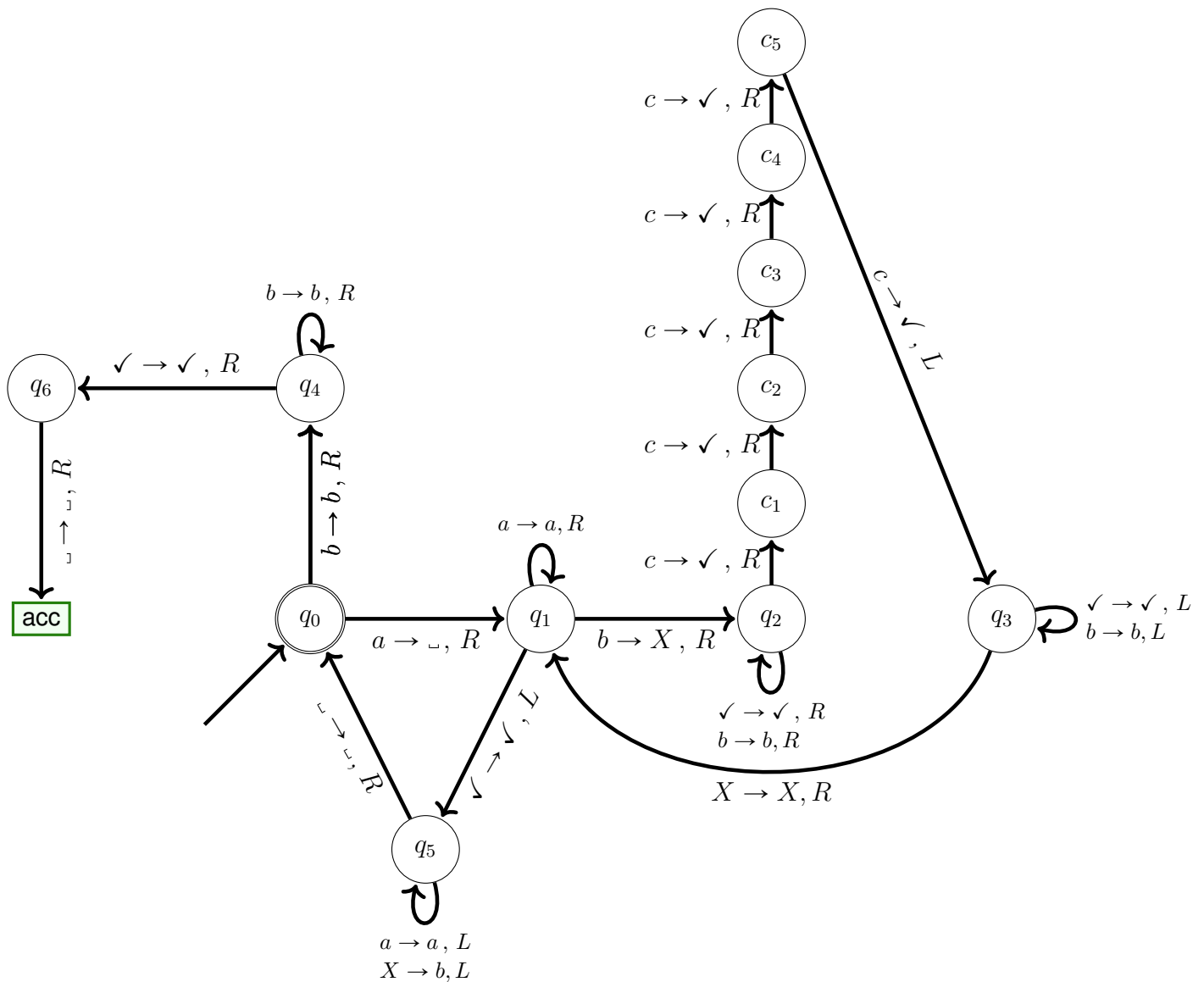
המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245,84 | www.sce.ac.il | חייג: ☎ 08-9400777

שאלה 1: מכונות טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

כל מעברים לא מופיעים בתרשים, עוברים למצב rej .



עמוד 2 מתוך 10

פתרונות

סעיף ב' (10 נקודות)

$$\sigma \in \{0, \dots, 9\}, \quad \tau \in \{0, \dots, 9, *\}.$$

מצב	סימון בסרט	מצב חדש	כתיבה	תזוזה	תנאי
$X.*.*$	σ	$X.\sigma.*$	✓	R	
$X.*.*$	✓	$X.*.*$	↻	R	
$X.\sigma.*$	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	$X.\sigma.*$	↻	R	
$X.\tau.*$	#	$Y.\tau.*$	↻	R	
$Y.\tau.*$	σ	$Y.\tau.\sigma$	✓	R	
$Y.\tau.*$	✓	$Y.\tau.*$	↻	R	
$Y.\tau.\sigma$	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	$Y.\tau.\sigma$	↻	R	
$Y.\tau_1.\tau_2$	#	$Z.\tau_1.\tau_2$	↻	R	
$Z.\tau_1.\tau_2$	✓	$Z.\tau_1.\tau_2$	↻	R	
$Z.\tau_1.\tau_2$	σ	back	✓	L	$\sigma \neq \tau_1 \wedge \sigma \neq 2\tau_2 \wedge \sigma \geq \tau_1 + \tau_2$
$Z**$	⌊	acc	↻	R	
back	$0, 1, \dots, 9, \checkmark$	back	↻	L	
back	⌊	$X.*.*$	↻	R	

כל שאר המעברים עוברים ל rej.

שאלה 2: וריאציות על מכונות טיורינג (20 נקודות)

כיוון ראשון

עמוד 3 מתוך 10

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245, 84 | www.sce.ac.il | חייג: 052-2333333

פתרונות

תהי

$$M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O) ,$$

במודל O החד כיווני. נבנה מכונה

$$M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T) ,$$

שקולה במודל הדו כיווני T .

רכיבי המ"ט M^T זהים לאלו של המ"ט M^O , מלבד מהתכונה שהראש של M^O לא זז מעבר לקצה השמאלי של הקלט.

לכן כדי ש- M^T תהיה שקולה ל- M^O יש להוסיף מעברים לפונקציות המעברים של M^T כדי שהראש של M^T לא זז מעבר לקצה השמאלי של הקלט.

הרעיון הוא לסמן את המשבצת שמשמאל לתחילת הקלט עם סימן מיוחד $\$,$ ואז להוסיף מעברים לפונקציות המעברים של M^T שמבטיחים שאם הראש נמצא למשבצת שמסומנת $\$$ אז הוא מיד חוזר ו- M^T חוזרת למצב ההתחתי של המ"ט M^O . זה מתבצע על ידי הוספת השורות האלו למטה לטבלת המעברים של M^T :

תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון	מצב
	L	\hookrightarrow	$q_\$$	σ	q_0^T
	R	$\$$	q_0^O	\perp	$q_\$$
$\forall q \in Q^O$	R	$\$$	q	$\$$	q

$$Q^T = Q^O \cup \{q_0^T, q_\$\}, \quad \Sigma^T = \Sigma^O, \quad \Gamma^T = \Gamma^O \cup \{\$\}, \quad \text{acc}^T = \text{acc}^O, \quad \text{rej}^T = \text{rej}^O .$$

כיוון שני

תהי

$$M^T = (Q^T, \Sigma^T, \Gamma^T, \delta^T, q_0^T, \text{acc}^T, \text{rej}^T) ,$$

במודל T הדו כיווני. נבנה

$$M^O = (Q^O, \Sigma^O, \Gamma^O, \delta^O, q_0^O, \text{acc}^O, \text{rej}^O) ,$$

במודל O החד כיווני.

נתאר סימולציה של הככונה החד-כיוונית במודל הדו-כיוונית.

הרעיון הוא לסמן קו על הסרט במשבצת באמצע הקלט, ואז לקפל את הסרט בקו הזה. באופן הזה נקבל סרט עם קצה שמאלי ואינסופי ימינה. במשבצות של הסרט החדש המקופל יש שני תווים, אחד למעלה (U) ואחד למטה (D), מלבד מנקודת הקיפול שבו יש משבצת אחת שמסומנת $\$$.

באופן הזה אפשר לסמלץ את המכונה M^O במכונה M^T על ידי הוספת המעברים הבאים לטבלת המעברים של M^T . לכל $\tau, \sigma, \pi \in \Gamma^T$:

פתרונות

תנאי	תזוזה	כתיבה	מצב חדש	סימון	מצב
תזוזה שמאלה: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$	L	π τ	$p.D$	π σ	$q.D$
	R	τ π	$p.U$	σ π	$q.U$
תזוזה שמאלה: $(q, \sqcup) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, L)$	L	\sqcup τ	$p.D$	\sqcup	$q.D$
	R	τ \sqcup	$p.U$	\sqcup	$q.U$
תזוזה ימינה: $(q, \sigma) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$	R	π τ	$p.D$	π σ	$q.D$
	L	τ π	$p.U$	σ π	$q.U$
תזוזה ימינה: $(q, \sqcup) \xrightarrow{M^T} (p, \tau, R)$	R	\sqcup τ	$p.D$	\sqcup	$q.D$
	L	τ \sqcup	$p.U$	\sqcup	$q.U$
	R	\mathcal{Q}	$q.U$	\$	$q.D$
	R	\mathcal{Q}	$q.D$	\$	$q.U$
אתחול					
$\tau \in \Sigma \cup \{\sqcup\}$ $\sigma \in \Sigma$	R	\$	$q.\tau$	τ	q_0^O
	R	\sqcup σ	$q.\tau$	τ	$q.\sigma$
	L	\sqcup	back	\sqcup	$q.\sqcup$
	L	\mathcal{Q}	back	\sqcup τ	back
	R	\mathcal{Q}	$q_0^T.D$	\$	back
סיום					
			acc^O	הכל	$acc^T.D$
			acc^O	הכל	$acc^T.U$
			rej^O	הכל	$rej^T.D$
			rej^O	הכל	$rej^T.U$
כל השאר עוברים ל- rej					

עמוד 5 מתוך 10

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

פתרונות

$$\Gamma^O \supseteq (\Gamma^T \times \Gamma^T) \cup \{\$\}.$$

שאלה 3: התזה של צ'רץ'-טיורינג (20 נקודות)

סעיף א' (10 נקודות)

$$S \rightarrow \$Ca\# \rightarrow \$aaC\# \rightarrow \$aaE \rightarrow \$aEa \rightarrow \$Eaa \rightarrow aa$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \$Ca\# \rightarrow \$aaC\# \rightarrow \$aaD\# \rightarrow \$aDa\# \rightarrow \$Daa\# \rightarrow \$Caa\# \\ &\rightarrow \$aaCa\# \rightarrow \$aaaaC\# \rightarrow \$aaaaE \rightarrow \$aaaEa \rightarrow \$aaEaa \rightarrow \$aEaaa \rightarrow \$Eaaaa \\ &\rightarrow aaaa \end{aligned}$$

באמצעות אינדוקציה על k ניתן להוכיח כי

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid w = \varepsilon \vee (w = a^{2^n}, n \in \mathbb{N})\}.$$

סעיף ב' (10 נקודות)

$$S \rightarrow aBC \rightarrow abC \rightarrow abc$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSBC \rightarrow aaBCBC \rightarrow aaBHBC \rightarrow aaBBCC \rightarrow aabBCC \rightarrow aabbCC \\ &\rightarrow aabbC \rightarrow aabbcc. \end{aligned}$$

אפשר להוכיח, ע"י אינדוקציה על n , כי

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid w = a^n b^n c^n, n \in \mathbb{N}^+\}.$$

שאלה 4: אי כריעות (20 נקודות)

עמוד 6 מתוך 10

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245,84 | חייג: 08-9400700 | www.sce.ac.il

פתרונות

סעיף א' (10 נקודות)

נבנה מ"ט אי-דטרמיניסטית $M_{L \geq 3}$ המכריעה את $L_{\geq 3}$.

התיאור הבא הוא תיאור של תוכנית אי-דטרמיניסטית של המכונת טיורינג $M_{L \geq 3}$.

$M_{L \geq 3} = \text{על קלט } x$:

1. $M_{L \geq 3}$ בודקת האם הקלט x הוא מכונת טיורינג.

אם לא אז $M_{L \geq 3}$ דוחה.

2. $M_{L \geq 3}$ בוחרת באופן אי-דטרמיניסטי 3 מילים w_1, w_2, w_3 .

• מריצה את M על w_1 .

* אם M דוחה $\Leftarrow M_{L \geq 3}$ דוחה.

• מריצה את M על w_2 .

* אם M דוחה $\Leftarrow M_{L \geq 3}$ דוחה.

• מריצה את M על w_3 ועונה כמוה.

נכונות.

$|L(M)| \geq 3$ - $x = \langle M \rangle \Leftarrow x \in L_{\geq 3}$.

$\Leftarrow \exists$ 3 מילים w_1, w_2, w_3 המתקבלים ב- M .

$\Leftarrow \exists$ ריצה של $M_{L \geq 3}$ בה תבחר את w_1, w_2, w_3 ותריץ עליהם את M ותקבל

$\Leftarrow M_{L \geq 3}$ מקבלת את x .

$x \notin L_{\geq 3} \Leftarrow$ שני מקרים:

מצב 1. $x \neq \langle M \rangle \Leftarrow M_{L \geq 3}$ דוחה את L .

מצב 2. $|L(M)| < 3$ - $x = \langle M \rangle$

\Leftarrow לכל 3 מילים שונות w_1, w_2, w_3 לפחות אחת מהן לא מתקבלת ב- M .

\Leftarrow בכל ריצה של $M_{L \geq 3}$ בה היא תבחר 3 מילים w_1, w_2, w_3 השונות זו מזו, ולפחות אחת הריצות

של M על מילים אלו תדחה או לא תעצור

\Leftarrow בכל ריצה של $M_{L \geq 3}$ על x , $M_{L \geq 3}$ תדחה או לא תעצור

$\Leftarrow M_{L \geq 3}$ לא מקבלת את x .

סעיף ב' (10 נקודות)

נבנה רדוקציה מ- A_{TM} .

הפונקציה הרדוקציה היא:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M' \rangle & x = \langle M, w \rangle \\ \langle M_{\emptyset} \rangle & x \neq \langle M, w \rangle \end{cases}$$

פתרונות

כאשר M_\emptyset היא מ"ט הדוחה כל קלט ו- M' היא מ"ט שעל כל קלט x מריצה את M ועונה כמוה.

אבחנה

$$L(M') = \begin{cases} \Sigma^* & w \in L(M) \\ \emptyset & w \notin L(M) \end{cases}$$

נכונות הרדוקציה

נניח ש- $x \in A_{TM}$

$$.w \in L(M) \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle \Leftarrow$$

$$.f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow$$

$$.L(M') = \Sigma^* \Leftarrow$$

$$.|L(M')| = \infty \Leftarrow$$

$$.f(x) \in L_{\geq 3} \Leftarrow$$

נניח ש- $x \notin A_{TM}$

אז יש שני מקרים:

$$.x \neq \langle M, w \rangle \quad \text{מצב 1:}$$

$$|L(M_\emptyset)| = 0 \text{ ו- } f(x) = \langle M_\emptyset \rangle \Leftarrow$$

$$.f(x) \notin L_{\geq 3} \Leftarrow$$

$$.w \notin L(M) \text{ ו- } x = \langle M, w \rangle \quad \text{מצב 2:}$$

$$f(x) = \langle M' \rangle \Leftarrow$$

$$.L(M') = \emptyset \Leftarrow$$

$$.|L(M')| = 0 \Leftarrow$$

$$.f(x) \notin L_{\geq 3} \Leftarrow$$

שאלה 5: סיבוכיות זמן (20 נקודות)

סעיף א' (8 נקודות)

נבנה פונקצית הרדוקציה $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ שמוגדרת

$$f(\langle S, t \rangle) = \langle A \rangle$$

כאשר $\langle S, t \rangle$ קלט של SUBSETSUM ו- $\langle A \rangle$ קלט של PARTITION.

עמוד 8 מתוך 10

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245, 84 | חייג: 08-9888888 | www.sce.ac.il

פתרונות

$$(1) \text{ יהי } \sigma = \sum_{x \in S} x$$

(2) נגדיר את הקבוצה החדשה A על ידי הוספת האיבר $\sigma - 2t$ לקבוצה S :

$$A = S \cup \{\sigma - 2t\}.$$

סעיף ב' (6 נקודות)

⇐ כיוון

נניח ש- $\langle S, t \rangle \in SUBSETSUM$.

$$\Leftarrow \text{קיימת תת-קבוצה } Y \subseteq S \text{ כך ש- } t = \sum_{y \in Y} y$$

$$\Leftarrow \sum_{x \in A} x = \sum_{x \in S} x + \sigma - 2t = 2\sigma - 2t$$

$$\Leftarrow \text{אם נגדיר } A_1 = Y \cup \{\sigma - 2t\} \text{ ו- } A_2 = A \setminus A_1 \text{ אז}$$

$$\sum_{x \in A_1} x = \sum_{x \in Y} x + \sigma - 2t = t + \sigma - 2t = \sigma - t$$

וכן

$$\sum_{x \in A_2} x = \sum_{x \in A \setminus A_1} x = \sum_{x \in A} x - \sum_{x \in A_1} x = 2\sigma - 2t - (\sigma - t) = \sigma - t.$$

$$\Leftarrow \sum_{x \in A_1} x = \sum_{x \in A_2} x = \frac{1}{2} \sum_{x \in A} x$$

$$\text{וגם } A_1 \cap A_2 = A_1 \cap (A \setminus A_1) = \emptyset$$

$$\text{וגם } A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A \setminus A_1) = A$$

$$\Leftarrow \text{קיימת חלוקה של } A \text{ ל- } A_1, A_2$$

$$\Leftarrow f(x) = \langle A \rangle \in PARTITION$$

⇒ כיוון

נניח ש- $\langle A \rangle \in PARTITION$.

$$\Leftarrow \text{קיימות תת-קבוצות } A_1, A_2 \subseteq S' \text{ כך ש:}$$

$$\sum_{x \in A_1} x = \sum_{x \in A_2} x = \frac{1}{2} \sum_{x \in A} x$$

$$\text{וגם } A_1 \cap A_2 = A_1 \cap (A \setminus A_1) = \emptyset$$

$$\text{וגם } A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A \setminus A_1) = A$$

עמוד 9 מתוך 10

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 77245, 84 | חייג: 08-9400777 | www.sce.ac.il

פתרונות

⇐ לפי הבניית הרדוקציה: $A = \{\sigma - 2t\} \cup S$ כאשר $t \leq \sigma$ שלם ו- S קבוצת שלמים ו- $\sigma = \sum_{x \in S} x$.

⇐ קיימת הקבוצה $S = A \setminus \{\sigma - 2t\}$.

⇐ מכיוון ש: $A = \{\sigma - 2t\} \cup S$ ו- A_1, A_2 מהוות חלוקה של A אז $\{\sigma - 2t\}$ שייך ל- A_1 או A_2 .
ללא הגבחת כלליות נניח ש: $\{\sigma - 2t\} \in A_1$

⇐ קיימת הקבוצה $A_1 \setminus \{\sigma - 2t\}$.

⇐ נגדיר הקבוצה:

$$Y = A_1 \setminus \{\sigma - 2t\} \subseteq A \setminus \{\sigma - 2t\} = S.$$

⇐

$$\sum_{y \in Y} y = \sum_{y \in A_1} y - (\sigma - 2t) = \frac{1}{2} \sum_{y \in A} y - (\sigma - 2t) = \frac{1}{2} (2\sigma - 2t) - (\sigma - 2t) = t.$$

⇐ קיימת תת-קבוצה $Y \subseteq S$ כך ש: $\sum_{y \in Y} y = t$

⇐ $\langle S, t \rangle \in SUBSETSUM$

סעיף ג' (6 נקודות)

הפונקציה הרדוקציה f , על קלט $\langle S, t \rangle$ מחזירה את הפלט $\langle A \rangle$ כאשר $A = S \cup \{\sigma - 2t\}$.

לכן, על קלט $\langle S, t \rangle$ הפונקציה f תבצע לכך:

(שלב 1) מחשבת את הסכום σ של כל האיברים שבקבוצה S

(שלב 2) מחשבת את החיסור $\sigma - 2t$.

(שלב 3) בונה את הקבוצה $S \cup \{\sigma - 2t\}$.

נסמן ב- $n = |\langle S, t \rangle|$ אורך הקלט.

• שלב (1) עולה $O(|S|)$ צעדים.

• שלב (2) עולה $O(|S|)$ צעדים.

• שלב (3) עולה n צעדים לכל היותר.

לכן בסה"כ הסיבוכיות זמן של f היא:

$$O(|S|) + O(|S|) + O(n) = O(n).$$