

חדו"א 1 סמסטר א' תשפד דף חזרה

תוכן העניינים

1	1 משוואת המשיק והנורמל
3	2 כלל לופיטל
5	3 פולינום מקלורן
7	4 חקירה מלאה
8	5 בעיות קיצון
9	6 משפטים רול ולגרנז'
11	7 אינטגרלים
15	8 תשובות

1 משוואת המשיק והנורמל

שאלה 1

מצאו את משוואת המשיק והנורמל לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הנתונות

$$(א) \quad x = -2, y = \frac{x-1}{x+1}$$

$$(ב) \quad x = 4, y = x\sqrt{x} - 6\sqrt{x}$$

שאלה 2 מצאו את משוואות שלושת המשיקים לגרף הפונקציה

$$y = 3x^3 + 5x^2 + 3x - 3$$

שעוברים בנקודה $(1, 0)$.

שאלה 3 מצאו את הזווית בין הגרפים של הפונקציות

$$y = x^3, \quad y = x^3 + x^2 - 3x + 2$$

בנקודת החיתוך השמאלית שלהן.

שאלה 4 מצאו משוואת משיק ונורמל ל-

$$x^5 + y^5 = 2xy$$

בנקודה $(1, 1)$. מצאו את ערך הנגזרת השניה בנקודה $(1, 1)$.

שאלה 5 מצאו משוואת משיק ונורמל ל-

$$\begin{cases} x = \tan t, \\ y = \sin^2 t \end{cases}$$

בנקודה שבה $x = 1$. מצאו את ערך הנגזרת השניה בנקודה זו.

שאלה 6 לאילו ערכים של הפרמטר a לפונקציה

$$y = x^{a+7} \ln(x + 17)$$

יש אסימפטוטה אופקית?

שאלה 7 מצאו את הזווית בין

$$\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = t + \tan(2t) \end{cases}$$

-1

$$x + y + xy = 0$$

בראשית הצירים.

שאלה 8

(א) הוכיחו שהמשיקים לגרפים של הפונקציות

$$y = \sqrt{ax}, \quad y = \sqrt{0.5a^2 - ax}, \quad (a > 0)$$

בנקודת החיתוך שלהם מאונכים זו לזו.

(ב) הוכיחו ששטח המשולש שנוצר בין המשיקים וציר ה- x גדול פי 4 משטח המשולש שנוצר בין המשיקים וציר ה- y .

שאלה 9

פונקציה $y(x)$ מוגדרת על ידי המשוואה

$$11xy^3 - 7x^2y^2 = 60x$$

כאשר $y(1) = 2$. מצאו את ערכו של $y'(1)$.

שאלה 10 תהי פונקציה $f(x)$ גזירה לכל x וידוע ש- $f(0) = 3$ ו- $f'(0) = 5$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 5.$$

נגדיר $g(x) = f(x) \cdot \ln(3x + e)$. מצאו את

$$g'(0).$$

שאלה 11 פונקציה $y(x)$ מוגדרת על ידי המשוואה $9y^5 + 6x^5 = 15xy$ כאשר $y(1) = 1$. מצאו את ערכו של $y'(1)$.

שאלה 12 מצאו את השיפוע של המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{4x+4}{5x+10}$ בנקודה $x = 4$.

שאלה 13 תהי פונקציה $f(x)$ גזירה לכל x וידוע ש- $f(0) = 3$ ו- $f'(0) = 4$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 4.$$

נגדיר $g(x) = f(x) \cdot \ln(2x + e)$. מצאו את

$$g'(0).$$

2 כלל לופיטל

שאלה 14 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \ln x - 1}{e^x - e}$

שאלה 15 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{e^x}}{x + e^x}$

שאלה 16 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}$

שאלה 17 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$

שאלה 18 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{100}}{e^x}$

שאלה 19 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

שאלה 20 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2}$$

שאלה 21

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$$

שאלה 22

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

שאלה 23

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

שאלה 24

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$$

שאלה 25

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - \sin \frac{1}{x} - 1 \right)$$

שאלה 26

שאלה 27 פתרו את הגבול הבא:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{5x} - 5x - 1}{3x^3 + x^2} \right) .$$

שאלה 28 פתרו את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin(2x))}{\ln(\sin(11x))} .$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{x}$$

שאלה 29

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 3^x}{3^x + 4^x}$$

שאלה 30

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right]^{1/x^2}$$

שאלה 31

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan(x)}{1 + \sin(x)} \right)^{\frac{1}{\sin(x)}}$$

שאלה 32

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + \sin(\pi x))^{\frac{1}{\log(x)}}$$

שאלה 33

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x + 1} \right)^{x+1}$$

שאלה 34

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{\cos(4x) - 1} \quad \text{שאלה 35}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} (x - 5)^{\frac{x}{x-6}} \quad \text{שאלה 36}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{1+x} \right)^{2x} \quad \text{שאלה 37}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2(x))^{\frac{1}{\tan^2(x)}} \quad \text{שאלה 38}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (6 - 5x)^{\frac{1}{\log(2-x)}} \quad \text{שאלה 39}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^{\log(x)} \quad \text{שאלה 40}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\cot(x)} \quad \text{שאלה 41}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\log(2x^2 + x) - 2 \log(x)) \quad \text{שאלה 42}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{x})^{\cot(\sqrt{x})} \quad \text{שאלה 43}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x^2)^{\frac{3}{1 - \cos(2x)}} \quad \text{שאלה 44}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad \text{שאלה 45}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x})^{\frac{1}{1-x}} \quad \text{שאלה 46}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x - \sin(2x)} \quad \text{שאלה 47}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x^2}} (1-x)^{\frac{1}{x^2}} \quad \text{שאלה 48}$$

(א) רשמו פולינום מקלורן מסדר 2 לפונקציה $y(x)$ המוגדרת בצורה סתומה:

$$y^5 + xy + e^x = 33 .$$

(ב) רשמו פולינום מקלורן מסדר 2 לפונקציה $y(x)$ המוגדרת בצורה פרמטרית:

$$y = t^2 + 2t + 1 , \quad x = te^t .$$

(ג) ידוע שפולינום מקלורן מסדר 3 של $f(x)$ הוא

$$P_3(x) = x - 3x^2 + 2x^3 .$$

חשב את

$$f''(0) + f'''(0) .$$

שאלה 50

(א) מצאו את נוסחת מקלורן של הפונקציה $f(x) = \ln(1+x)$.

(ב) הוכיחו שלכל $x > 0$ מתקיים

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

שאלה 51 חשבו בעזרת נוסחת מקלורן מתאימה את

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} .$$

שאלה 52 רשמו את פולינום מקלורן מסדר 2 של פונקציה

$$f(x) = \ln|9x+4|$$

$$P_2(x) = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}x + \underline{\hspace{2cm}}x^2 .$$

שאלה 53

הגדר מהי אסימפטוטה משופעת של פונקציה ומצא את האסימפטוטות המשופעות של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad (\text{א})$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \quad (\text{ב})$$

$$f(x) = x - e^x \quad (\text{ג})$$

4 חקירה מלאה

שאלה 54 שרטטו את הפונקציה $f(x) = -(x+2)^2$.

שאלה 55 שרטטו את הפונקציה $f(x) = x^2(x-2)^2$.

שאלה 56 שרטטו את הפונקציה $f(x) = \frac{x}{x^2+9}$.

שאלה 57

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$.

שאלה 58

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = \frac{2x^3}{x^2-4}$.

שאלה 59

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = x^2e^{1-x}$.

שאלה 60

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

שאלה 61

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = (x+2)e^{1/x}$.

שאלה 62

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$.

שאלה 63

חקרו באופן מלא את הפונקציה $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

שאלה 64 שרטטו את הגרף של הפונקציה $f(x) = \frac{x^4 - x^3 - 2x^2}{(x-3)^2}$.

שאלה 65 (סמסטר ב תשע"ח מועד ב שאלה 1)

חקרו באופן מלא את הפונקציה

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

(תחום הגדרה, חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וצייר את סקיצת הגרף של הפונקציה.

שאלה 66 (סמסטר א תשע"ח מועד א שאלה 1)

חקרו באופן מלא את הפונקציה

$$f(x) = \frac{(x+2)^2}{x-2}$$

(תחום הגדרה, חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וצייר את סקיצת הגרף של הפונקציה.

שאלה 67 (סמסטר א תשע"ט מועד ב שאלה 1) חקור באופן מלא את הפונקציה

$$f(x) = \frac{2-x^2}{e^x}$$

(תחום הגדרה, חיתוך עם הצירים, סימני הפונקציה, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וצייר את סקיצת הגרף של הפונקציה.

5 בעיות קיצון

שאלה 68 על הקו המוגדר ע"י המשוואה $x^2 - y^2 = 1$ מצא את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(0, 1)$.

שאלה 69 על גרף הפונקציה $y = \frac{1}{x^3}$ מצא את הנקודה הקרובה ביותר לישר $y + 3x = 1$.

שאלה 70 בין הגרפים של פונקציה $y = e^{-x}$ ו- $y = e^{x/2}$ וציר ה- x חסום מלבן. מצא את שטח המקסימלי האפשרי של המלבן הזה.

שאלה 71 מצא את הזווית של משולש ישר זוויות בעל השטח הגדול ביותר שבו סכום אורכי היתר ואחד הניצבים שווה ל- K .

שאלה 72 נתונות שתי פונקציות $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = bx^2$, $(b > 0)$. הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודות A ו- B . מצא את ערכו של b שעבורו אורך הקטע AO יהיה מינימאלי, כאשר O ראשית הצירים. צייר ואת הסקיצה המתאימה.

שאלה 73 מצאו את הנקודה על המעגל $x^2 + y^2 = 16$ הקרובה ביותר לנקודה $A(6, 5)$.

שאלה 74

על העקומה $x^2 + y^2 = 4$ מצא את כל הנקודות $M(x_0, y_0)$ שבהן המשיק לעקומה מקביל לקו $x + y = 1$.

שאלה 75 (להעשרה בלבד) מצאו לאילו ערכי הפרמטר a השטח החסום ע"י הקווים $x = 0$, $y = 0$, $y = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2a^2}$ יהיה מינימדי וחשבו את השטח המינימלי.

6 משפטים רול ולגרנז'

שאלה 76 מצא את C עבורו $f(x) = g(x) + C$ או הוכח שהוא לא קיים.

(א) $f(x) = \frac{\cos^4 x}{4} - \frac{\cos^2 x}{2}$ ו- $g(x) = \frac{\sin^4 x}{4}$

(ב) $f(x) = \arcsin x$ ו- $g(x) = -\arccos x$

(ג) $f(x) = \frac{\cos^2 x}{2}$ ו- $g(x) = \frac{\sin^2 x}{2}$

רמז: השתמש במשפט הבא: אם $f'(x) = g'(x)$ אז $f(x) = g(x) + C$, כאשר C מספר קבוע.

שאלה 77 הוכיחו שהפונקציה $f(x) = 3x - \sin(2x)$ עולה בכל \mathbb{R} .

שאלה 78 הוכיחו שלמשוואה $x + e^{2x} = 2$ יש פתרון יחיד.

שאלה 79 לאילו ערכי a ו- b מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{1/x} - ax - b) = 0.$$

שאלה 80 לאילו ערכי a ו- b הישר $y = bx$ משיק לפרבולה $y = x^2 + a$?

שאלה 81 מצא את הזוויות של משולש ישר זווית בעל השטח הגדול ביותר שבו סכום אורכי היתר ואחד הניצבים שווה ל- K .

שאלה 82 בדקו שהפונקציה $f(x) = \frac{4}{x^2}$ מקיימת את תנאי משפט לגרנז' בקטע $[-2, -1]$ ומצאו את הנקודה c המופיע במשפט.

שאלה 83 יהי $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ פולינום המוגדר על קטע סגור $[a, b]$. הוכיחו שהנקודה c שבמשפט לגרנז' יוצאת במרכז הקטע.

שאלה 84 תהי $f(x)$ פונקציה גזירה על כל הישר הממשי. נניח ש- $f'(x) \leq 7$ לכל x ממשי וכן $f(9) = 68$, $f(1) = 20$. הוכיחו כי $54 \leq f(7) \leq 62$.

שאלה 85 תהי $f(x)$ פונקציה גזירה על כל הישר הממשי. נניח ש- $|f'(x)| \leq 5$ לכל x ממשי וכן $f(2) = 10$. הוכיחו כי $0 \leq f(4) \leq 20$.

שאלה 86 תהי $f(x)$ גזירה לכל x ונניח כי $f'(x) \leq 4$ לכל x ו- $f(-3) = 2$. הוכיחו כי $f(0) \leq 14$.

שאלה 87 נתונה פונקציה $f(x)$ גזירה לכל x . נניח כי $f'(x) \leq 3$ לכל x ו- $f(-2) = 5$. הוכיחו כי $f(1) \leq 14$.

שאלה 88 הוכיחו את האי-שוויונים הבאים בעזרת משפט לגרנז':

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a} \quad (\text{א})$$

$$(0 < a < b < \frac{\pi}{2}) \quad \frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan(b) - \tan(a) < \frac{b-a}{\cos^2 b} \quad (\text{ב})$$

$$(a > 1) \quad a \cdot 2^{a-1} < 3^a - 2^a < a \cdot 3^{a-1} \quad (\text{ג})$$

$$(x > 0) \quad \frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \quad (\text{ד})$$

$$\sin 73^\circ - \sin 28^\circ < \frac{\pi}{4} \quad (\text{ה})$$

$$x, y \in \mathbb{R} \quad \text{לכל} \quad |\sin x - \sin y| \leq |x - y| \quad (\text{ו})$$

שאלה 89 הוכיחו כי לכל $x, y \in \mathbb{R}, 0 < x < y$ מתקיים

$$\frac{x-y}{x} < \ln \left(\frac{x}{y} \right) < \frac{x-y}{y}.$$

שאלה 90 יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות גזירות בקטע (a, b) . תהי $c \in (a, b)$

נקודה שבה

$$f(c) = g(c) \quad (\#1)$$

ג

$$f'(x) > g'(x) \quad \forall x \in (a, b), \quad x < c. \quad (\#2)$$

הוכיחו כי

$$g(x) > f(x) \quad \forall x \in (a, b), \quad x < c. \quad (\#3)$$

שאלה 91 יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות רציפות בקטע $[a, b]$ וגזירות בקטע (a, b) כך ש-

$$f(a) = g(a) \quad (1*)$$

אם

$$f'(x) < g'(x) \quad \forall x \in (a, b), \quad (2*)$$

הוכיחו כי

$$f(x) < g(x) \quad \forall x \in (a, b]. \quad (3*)$$

שאלה 92 הוכיחו כי למשוואה

$$x^3 - 7x^2 + 25x + 8 = 0$$

יש פתרון יחיד.

שאלה 93 הוכיחו שלכל ערכים ממשיים a ו- b מתקיים

$$|\arctan(2b) - \arctan(2a)| \leq 2|b - a|$$

שאלה 94 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) . ידוע כי

$$f(a) = f(b) = 0.$$

הראו שקיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש-

$$f(c) + f'(c) = 0.$$

רמז: הסתכלו על פונקציה $g(x) = e^x f(x)$

שאלה 95 הוכיחו או הפריכו: למשוואה $e^x = -x$ יש 2 שורשים.

שאלה 96

(א) הוכיחו כי למשוואה $e^x = (1+x)^2$ יש שלושה שורשים לכל היותר.

(ב) הוכיחו כי למשוואה $e^x = (1+x)^2$ יש לפחות שלושה שורשים.

שאלה 97

תהי $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה בקטע $(0, 1)$. יהי $f(0) = 0$ ו- $f(x) > 0$ לכל $x \in (0, 1]$. הוכיחו כי קיימת $c \in (0, 1)$ כך ש-

$$\frac{f'(1-c)}{f(1-c)} = \frac{2f'(c)}{f(c)}.$$

רמז: הגדירו את פונקציה $g(x) = f(x)^2 f(1-x)$.

7 אינטגרלים

שאלה 98

(א) מהי הפונקציה הקדומה ל- $f(x)$? תן את ההגדרה ואת הדוגמאות המתאימות.

(ב) בדקו שהפונקציה $F(x)$ הנתונה היא קדומה ל- $f(x)$:

(1)

$$f(x) = \frac{3}{9+x^2}, F(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right)$$

(2)

$$f(x) = \frac{2}{x^2-1}, F(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

(ג) רשום פונקציה קדומה לפונקציה הנתונה:

(1)

$$f(x) = e^{3x}$$

(2

$$f(x) = \cos(5x + 6)$$

(3

$$m \neq 0, f(x) = (mx + n)^{1/3}$$

(4

$$(n \neq -1, a \neq 0) f(x) = (ax + b)^n$$

שאלה 99 חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{(x+2)^2}{\sqrt[3]{x}} dx \quad \text{(א)}$$

$$\int e^{-3x+2} dx \quad \text{(ב)}$$

$$\int \frac{3^{2x} + 5^{x+1}}{4^x} dx \quad \text{(ג)}$$

$$\int \frac{x}{x+1} dx \quad \text{(ד)}$$

$$\int \sin^2 x dx \quad \text{(ה)}$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx \quad \text{(ו)}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 12x}} dx \quad \text{(ז)}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{12x - 2x^2}} dx \quad \text{(ח)}$$

$$\int \sqrt[3]{2 - 5x} dx \quad \text{(ט)}$$

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx \quad \text{(י)}$$

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad \text{(יא)}$$

$$\int \sin(3x) \cos(5x) dx \quad \text{(יב)}$$

$$\int \cot^2(x) dx \quad \text{(יג)}$$

$$\int \frac{(2x+1)}{x^2+x+1} dx \quad \text{(ד')}$$

שאלה 100 חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \ln x \, dx \quad \text{(א)}$$

$$\int 2x \ln x \, dx \quad \text{(ב)}$$

$$\int x^2 \sin(2x) \, dx \quad \text{(ג)}$$

$$\int x^2 \arctan(x) \, dx \quad \text{(ד')}$$

$$\int 9x^2 e^{3x} \, dx \quad \text{(ה)}$$

שאלה 101 חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{(x+1)}{x(x-3)} dx \quad \text{(א)}$$

$$\int \frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)} dx \quad \text{(ב)}$$

$$\int \frac{5x^3-17x^2+18x-5}{(x-1)^3(x-2)} dx \quad \text{(ג)}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2-4x+3} dx \quad \text{(ד)}$$

$$\int \frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5} dx \quad \text{(ה)}$$

$$\int \frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x} dx \quad \text{(ו)}$$

שאלה 102 חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{1}{3+\sin x} dx \quad \text{(א)}$$

$$\int \frac{1}{1+5\cos x} dx \quad \text{(ב)}$$

$$\int \frac{1}{\sin x + 2 \cos x + 6} dx \quad \text{ג)}$$

שאלה 103 בצעו את ההצבה המביאה את חישוב האינטגרל לאינטגרציה של שבר אלגברי וחשבו את האינטגרל:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx \quad \text{א)}$$

$$\int \frac{\sqrt{x+2}}{x} dx \quad \text{ב)}$$

$$\int \frac{1+e^x}{(1-e^{2x})e^x} dx \quad \text{ג)}$$

שאלה 104 חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx \quad \text{א)}$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx \quad \text{ב)}$$

$$\int \cos^6 x dx \quad \text{ג)}$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad \text{ד)}$$

8 תשובות

שאלה 1

(א) משוואת המשיק:

$$y = 2x + 7$$

משוואת הנורמל:

$$y = 2 - \frac{x}{2}$$

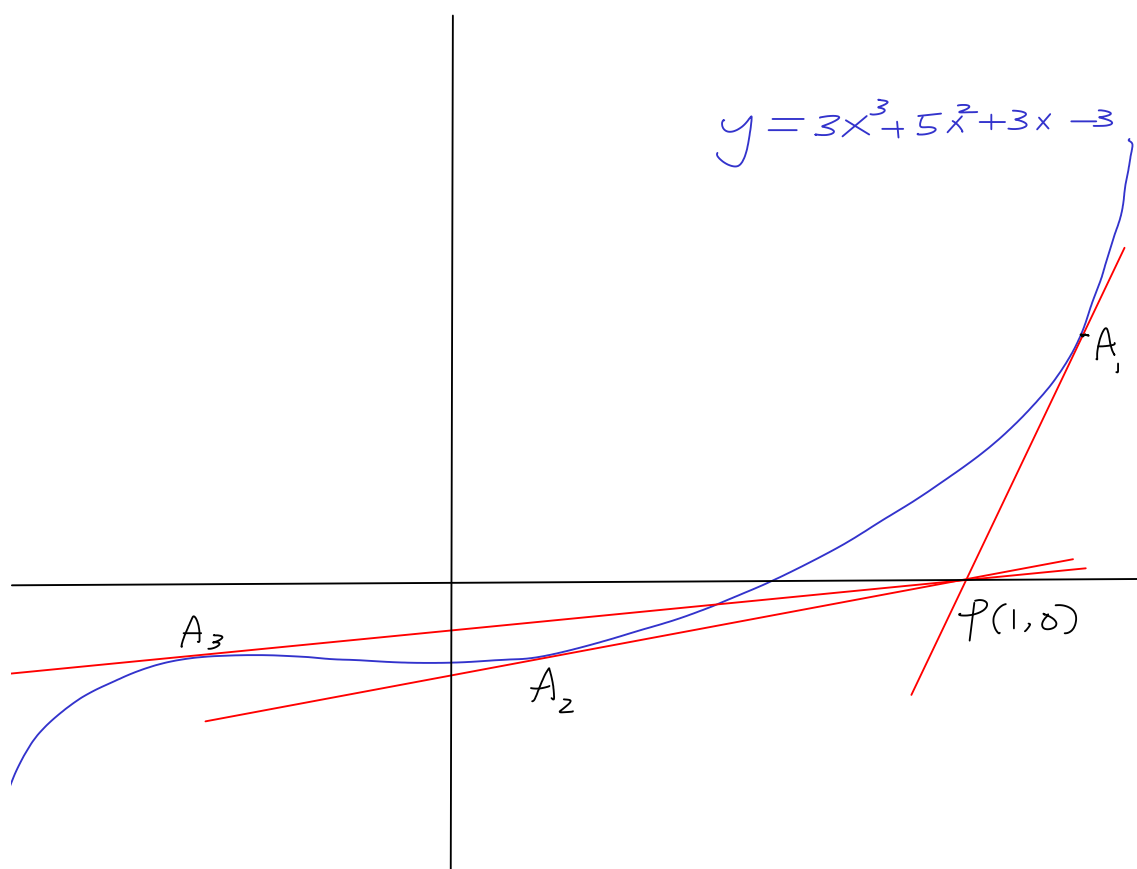
(ב) משוואת המשיק:

$$y = \frac{3}{2}x - 3$$

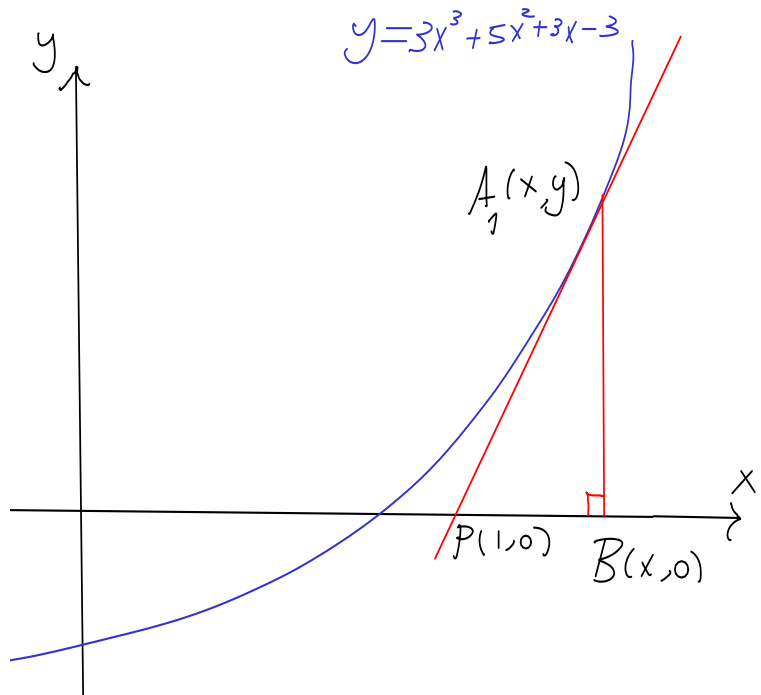
משוואת הנורמל:

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

שאלה 2 נחפש את המשוואות של השלוש המשיקים A_3P, A_2P, A_1P לגרף של $y = 3x^3 + 5x^2 + 3x - 3$ בנקודה P (ראו שרטוט).



נסתכל אל המשיק A_1P (ראו שרטוט למטה).



נמצא את הקואורדינטות (x, y) של הנקודה A_1 . מגיאומטריה השיפוע של המשיק הוא

$$m = \frac{BA_1}{PB} = \frac{y - 0}{x - 1} = \frac{y}{x - 1}$$

בשיפוע גם ניתן ע"י הנזרת של y על הנקודה A :

$$m = y'(x).$$

נשווה ביניהם:

$$\frac{y}{x - 1} = y'(x)$$

$$\text{נציב } y = 3x^3 + 5x^2 + 3x - 3$$

$$\frac{3x^3 + 5x^2 + 3x - 3}{x - 1} = (3x^3 + 5x^2 + 3x - 3)' \Rightarrow \frac{3x^3 + 5x^2 + 3x - 3}{x - 1} = 9x^2 + 10x + 3$$

$$\Rightarrow 3x^3 + 5x^2 + 3x - 3 = (9x^2 + 10x + 3)(x - 1) \Rightarrow 3x^3 + 5x^2 + 3x - 3 = 9x^3 + 10x^2 + 3x - 9x^2 - 10x - 3$$

$$\Rightarrow 6x^3 - 4x^2 - 10x = 0 \Rightarrow 2x(3x^2 - 2x - 5) = 0 \Rightarrow 2x(3x - 5)(x + 1) = 0$$

$$\text{הפתרון הוא } x = 0, \frac{5}{3}, -1$$

$$\underline{\text{עבור } x = 0}$$

$$y'(0) = 9 \cdot 0^2 + 10 \cdot 0 + 3 = 3, \quad y(0) = 3 \cdot 0^3 + 5 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 3 = -3$$

לכן משוואת המשיק:

$$y + 3 = 3x .$$

עבור $x = \frac{5}{3}$:

$$y' \left(\frac{5}{3} \right) = 9 \cdot \left(\frac{5}{3} \right)^2 + 10 \cdot \frac{5}{3} + 3 = \frac{134}{3} , \quad y \left(\frac{5}{3} \right) = 3 \cdot \left(\frac{5}{3} \right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{5}{3} \right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{5}{3} \right) - 3 = \frac{268}{9}$$

לכן משוואת המשיק:

$$y - \frac{268}{9} = \frac{134}{3} \left(x - \frac{5}{3} \right) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{134}{3}x - \frac{134}{3} .$$

עבור $x = -1$:

$$y'(-1) = 9 \cdot (-1)^2 + 10 \cdot (-1) + 3 = 2 , \quad y(-1) = 3 \cdot (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 3 = -4$$

לכן משוואת המשיק:

$$y + 4 = 2(x + 1) , \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 2 .$$

תשובה סופית:

$$y = -2 + 2x , \quad y = -3 + 3x , \quad y = -\frac{134}{3} + \frac{134}{3}x .$$

שאלה 3

$$y = x^3 , \quad y = x^3 + x^2 - 3x + 2$$

הנוסחה לזווית בין שני הגרפים היא:

$$\tan \alpha = \left| \frac{f'(a) - g'(a)}{1 + f'(a) \cdot g'(a)} \right|$$

(הנוסחה מופיעה בדף הנוסחאות שלכם). כאשר $(a, g(a)) = (a, f(a))$ נקודת ההשקה.

$$g(x) = x^3 , \quad f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 2 .$$

נמצא את נקודת החיתוך:

$$x^3 + x^2 - 3x + 2 = x^3 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1, 2$$

נקודת החיתוך השמאלית היא נקודה שבה $x = 1$ ז"א $a = 1$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 3 , \quad f'(1) = 2 , \quad g'(x) = 3x^2 , \quad g'(1) = 3 .$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{2 - 3}{1 + 2 \cdot 3} \right| = \frac{1}{7} , \quad \alpha = \arctan \left(\frac{1}{7} \right) .$$

שאלה 4

$$x^5 + y^5 = 2xy , \quad (\#1)$$

שלב 1: לגזור (*1):

$$5x^4 + 5y^4 y' = 2y + 2xy' , \quad (\#2)$$

שלב 2: להציב $x = 1, y = 1$ ב (*2):

$$5 + 5y(1)^4 y'(1) = 2y(1) + 2y'(1) \quad \Rightarrow \quad y'(1) = -1 . , \quad (\#3)$$

שלב 3: להציב במשוואת המשיק בנקודה a :

$$y - y(a) = y'(a)(x - a)$$

נציב $y(1) = -1, y(1) = 1, a = 1$ ונקבל

$$y - 1 = -1(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -x + 2 .$$

שלב 4: להציב במשוואת הנורמל בנקודה a :

$$y - y(a) = -\frac{1}{y'(a)}(x - a)$$

נציב $y'(1) = -1, y(1) = 1, a = 1$ ונקבל

$$y - 1 = \frac{-1}{-1}(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = x .$$

שלב 5: נגזור (*2):

$$\begin{aligned} (5x^4 + 5y^4 y')' &= (2y + 2xy')' \\ 20x^3 + (5y^4 y')' &= 2y' + (2xy')' \\ 20x^3 + (5y^4)' y' + 5y^4 y'' &= 2y' + 2y' + 2xy'' \\ 20x^3 + (20y^3 y') y' + 5y^4 y'' &= 2y' + 2y' + 2xy'' \\ 20x^3 + 20y^3 y'^2 + 5y^4 y'' &= 4y' + 2xy'' , \end{aligned} \quad (\#3)$$

שלב 6: נציב $x = 1, y(1) = 1, y'(1) = -1$: (#3):

$$\begin{aligned} 20 + 20y^3(1)y'(1)^2 + 5y^4(1)y''(1) &= 4y'(1) + 2y''(1) \\ 20 + 20 + 5y''(1) &= -4 + 2y''(1) \\ 3y''(1) &= -44 \\ y''(1) &= \frac{-44}{3} . \end{aligned} \quad \text{(#4)}$$

שאלה 5

בנקודה $x = 1, \tan t = 1$ ולכן $t = \frac{\pi}{4}$ ו-

$$y\left(t = \frac{\pi}{4}\right) = y(x = 1) = \frac{1}{2} .$$

$$x'_t = \frac{1}{\cos^2 t} , \quad y'_t = 2 \sin t \cos t , \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2}{\sin} t \cos^3 t .$$

נציב $t = \frac{\pi}{4}$:

$$y'_x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} .$$

משוואת המשיק:

$$y = \frac{x}{2} .$$

משוואת הנורמל:

$$y = -2x + \frac{5}{2} .$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{2(\cos^4 t + \sin t \cdot 3 \cos^2 t \cdot (-\sin t))}{\frac{1}{\cos^2 t}}$$

נציב $t = \frac{\pi}{4}$:

$$y''_{xx} = -\frac{1}{2} .$$

שאלה 6 אסימפטוטה מושפעת קיימת כאשר $\lim_{x \rightarrow \infty} y$ מספר סופי.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{a+7} \ln(x+17)$$

כעת ישנן שתי אופציות. אם החזקה של x^{a+7} גדול או שווה ל-0, כלומר $a+7 \geq 0$, אז בוודאות $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{a+7} \ln(x+17) = \infty$. אבל אם החזקה של x^{a+7} קטן מ-0, כלומר $a+7 < 0$, אז הגבול לא שווה ל- ∞ .
בסיכום:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{a+7} \ln(x+17) = \begin{cases} \infty & a+7 \geq 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+17)}{x^{-a-7}} & a+7 < 0 \end{cases}$$

נבדוק את הערך של הגבול עבור המצב ש $a + 7 < 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+17)}{x^{-a-7}} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \\ &\stackrel{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+17)'}{(x^{-a-7})'} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(x+17)}}{(-a-7)x^{-a-8}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(-a-7)(x+17)x^{-a-8}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(-a-7)\left(1 + \frac{17}{x}\right)x^{-a-7}} \\ &= \frac{1}{(-a-7)\left(1 + \frac{17}{\infty}\right)\infty^{-a-7}} \\ &= \frac{1}{(-a-7)(1+0)\infty^{-a-7}} \\ &= \frac{1}{(-a-7)\infty^{-a-7}} \end{aligned}$$

שימו לב $a + 7 < 0$ לכן $-a - 7 > 0$ ולכן $\infty^{-a-7} = \infty$, לכן

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+17)}{x^{-a-7}} &= \frac{1}{(-a-7)\infty^{-a-7}} \\ &= \frac{1}{(-a-7)\infty} \\ &= 0 \end{aligned}$$

תשובה סופית: $y = 0$ אסימפטוטה אופקית כאשר

$$a < -7.$$

שאלה 7 $\alpha = \arctan(2) = 63.44^\circ$

שאלה 8

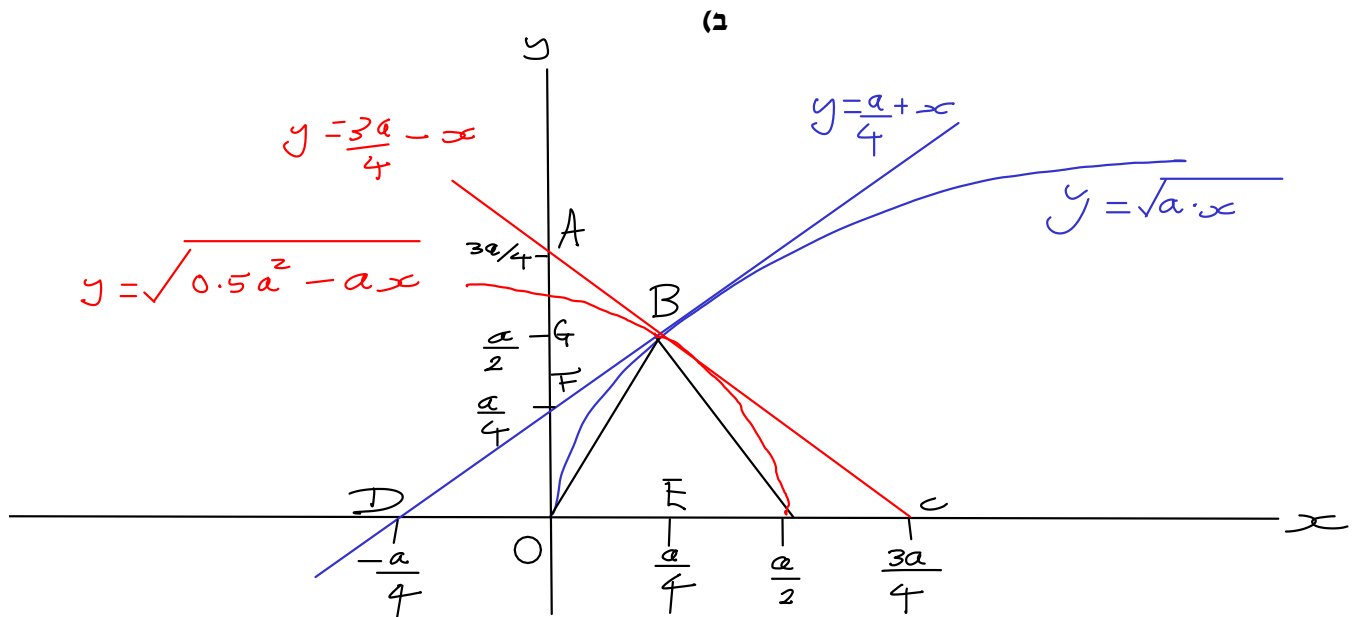
(א) נקודת חיתוך:

$$(0.25a, 0.5a)$$

$$m1 = (\sqrt{ax})' = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{a}}{2 \cdot 0.5 \cdot \sqrt{a}} = 1,$$

$$m2 = (\sqrt{0.5a^2 - ax})' = \frac{-a}{2\sqrt{0.5a^2 - ax}} = \frac{-a}{2\sqrt{0.5a^2 - 0.25 \cdot a^2}} = \frac{-a}{2 \cdot 0.5 \cdot a} = -1,$$

$$m1 \cdot m2 = -1$$



המשולש שנוצר בין המשיקים וציר ה- x הוא המשולש $\triangle DBC$. שטח המשולש $\triangle DBC$ הוא

$$S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} DC \cdot EB = DE \cdot EB = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}.$$

המשולש שנוצר בין המשיקים וציר ה- y הוא המשולש $\triangle FAB$.

$$S_{\triangle FAB} = \frac{1}{2} FA \cdot GB = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} = \frac{a^2}{16}.$$

$$\frac{S_{\triangle DBC}}{S_{\triangle FAB}} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a^2}{16}} = 4$$

שאלה 9 נגזור:

$$(11xy^3 - 7x^2y^2)' = (60x)'$$

$$\Rightarrow 11y^3 + 11x \cdot 3y^2 \cdot y' - 14xy^2 - 7x^2 \cdot 2y \cdot y' = 60$$

$$\Rightarrow 11y^3 + 33xy^2y' - 14xy^2 - 14x^2yy' = 60$$

נציב $y(1) = 2, x = 1$:

$$11y(1)^3 + 33y(1)^2y'(1) - 14y(1)^2 - 14y(1)y'(1) = 60$$

$$\Rightarrow 11 \cdot 8 + 33 \cdot 4y'(1) - 14 \cdot 4 - 14 \cdot 2y'(1) = 60$$

$$\Rightarrow 88 + 132y'(1) - 56 - 28y'(1) = 60$$

$$\Rightarrow 32 + 104y'(1) = 60$$

$$\Rightarrow 104y'(1) = 28$$

$$\Rightarrow y'(1) = \frac{28}{104} = \frac{14}{52} = \frac{7}{26}.$$

שאלה 10 נשים לב כי

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} &= 5 \\ \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} &= 5 \\ \Rightarrow f'(0) &= 5 \end{aligned}$$

נגזור את הפונקציה $g(x) = f(x) \ln(3x + e)$

$$g'(x) = f'(x) \ln(3x + e) + f(x) \cdot \frac{3}{3x + e}$$

נציב $x = 0$

$$\begin{aligned} g'(0) &= f'(0) \ln(3 \cdot 0 + e) + f(0) \cdot \frac{3}{3 \cdot 0 + e} \\ &= f'(0) \ln(e) + \frac{3f(0)}{e} \\ &= f'(0) + \frac{3f(0)}{e} \end{aligned}$$

נציב $f(0) = 3$ ונקבל

$$g'(0) = 5 + \frac{9}{e}$$

שאלה 11 נגזור את המשווא לפי x :

$$\begin{aligned} (9y^5 + 6x^5)' &= (15xy)' \\ \Rightarrow (9y^5 + 6x^5)' &= (15xy)' \\ \Rightarrow 45y^4 \cdot y' + 30x^4 &= 15y + 15xy' \\ \Rightarrow 3y^4 \cdot y' + 2x^4 &= y + xy' \end{aligned}$$

נציב $y(1) = 1, x = 1$

$$\begin{aligned} 3y(1)^4 \cdot y'(1) + 2 \cdot 1^4 &= y(1) + 1 \cdot y'(1) \\ \Rightarrow 3y'(1) + 2 &= 1 + y'(1) \\ \Rightarrow 2y'(1) &= -1 \\ \Rightarrow y'(1) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

שאלה 12 השיפוע של הגרף ב- $x = 4$ ניתן ע"י $f'(4)$. נשים לב כי

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x + 4}{5x + 10} = \frac{4(x + 1)}{5(x + 2)} = \frac{4}{5} \left(\frac{x + 2 - 1}{x + 2} \right) = \frac{4}{5} \left(\frac{x + 2}{x + 2} - \frac{1}{x + 2} \right) = \frac{4}{5} \left(1 - \frac{1}{x + 2} \right) = \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{x + 2} \\ f'(x) &= \left(\frac{4}{5} \right)' - \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{x + 2} \right)' = 0 - \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{-1}{(x + 2)^2} \right) = \frac{4}{5(x + 2)^2} \end{aligned}$$

לכן

$$f'(4) = \frac{4}{5 \cdot 6^2} = \frac{4}{5 \cdot 36} = \frac{1}{45}.$$

שאלה 13 נשים לב כי

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 4 \\ \Rightarrow & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 4 \\ \Rightarrow & f'(0) = 4. \end{aligned}$$

נגזור את הפונקציה $g(x) = f(x) \ln(2x + e)$

$$g'(x) = f'(x) \ln(2x + e) + f(x) \cdot \frac{2}{2x + e}$$

נציב $x = 0$

$$\begin{aligned} g'(0) &= f'(0) \ln(2 \cdot 0 + e) + f(0) \cdot \frac{2}{2 \cdot 0 + e} \\ &= f'(0) \ln(e) + \frac{2f(0)}{e} \\ &= f'(0) + \frac{2f(0)}{e}. \end{aligned}$$

נציב $f(0) = 3$ ונקבל

$$g'(0) = 4 + \frac{6}{e}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \ln x - 1}{e^x - e} = \frac{3}{e} \quad \textbf{שאלה 26}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{e^x}}{x + e^x} = 0 \quad \textbf{שאלה 26}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} = 0 \quad \textbf{שאלה 26}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x} = 1 \quad \textbf{שאלה 26}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{100}}{e^x} = 0 \quad \textbf{שאלה 26}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{2} \quad \textbf{שאלה 26}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0 \quad \textbf{שאלה 26}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \quad \underline{\text{שאלה 26}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1 \quad \underline{\text{שאלה 26}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{1/2} \quad \underline{\text{שאלה 26}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{1/3} \quad \underline{\text{שאלה 26}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = e^2 \quad \underline{\text{שאלה 26}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - \sin \frac{1}{x} - 1 \right) = \frac{1}{2} \quad \underline{\text{שאלה 26}}$$

שאלה 27

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{5x} - 5x - 1}{3x^3 + x^2} \right) = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\stackrel{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(e^{5x} - 5x - 1)'}{(3x^3 + x^2)'} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5e^{5x} - 5}{9x^2 + 2x} \right)$$

$$= \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\stackrel{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(5e^{5x} - 5)'}{(9x^2 + 2x)'} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{25e^{5x}}{18x + 2} \right)$$

$$= \frac{25}{2} .$$

שאלה 28

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin(2x))}{\ln(\sin(11x))} &= \left[\frac{-\infty}{-\infty} \right] \\
&\stackrel{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2 \cos(2x)}{\sin(2x)}}{\frac{11 \cos(11x)}{\sin(11x)}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \tan(11x)}{11 \tan(2x)} \\
&= \left[\frac{0}{0} \right] \\
&\stackrel{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cdot 11 \sec(11x)}{11 \cdot 2 \sec(2x)} \\
&= \frac{\sec(0)}{\sec(0)} \\
&= 1 .
\end{aligned}$$

שאלה 29

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{x} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2(2x))'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(2x) 2 \cos(2x)}{1} = 4 \sin(0) \cos(0) = 0 .$$

שאלה 30

$$\frac{1}{\sqrt{e}}$$

שאלה 31

שאלה 32

$$e^{2-\pi}$$

שאלה 33

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + \sin(\pi x))^{\frac{1}{\log(x)}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(x^2 \cdot \left[1 + \frac{\sin(\pi x)}{x^2} \right] \right)^{\frac{1}{\log(x)}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} x^{2/\log x} \left(1 + \frac{\sin(\pi x)}{x^2} \right)^{\frac{1}{\log(x)}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} x^{2/\log x} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{\sin(\pi x)}{x^2} \right)^{\frac{1}{\log(x)}}
\end{aligned}$$

הגבול הראשון הוא

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{2/\log x} = \lim_{x \rightarrow 1} (e^{\log x})^{2/\log x} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{2 \log x / \log x} = e^2 .$$

הגבול השני הוא

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{\sin(\pi x)}{x^2} \right)^{1/\log(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\left(1 + \frac{\sin(\pi x)}{x^2} \right)^{x^2/\sin(\pi x)} \right]^{\sin(\pi x)/(x^2 \log(x))}$$

שים לב $\sin \pi x$ מתאפס כאשר $x \rightarrow 1$ ולכן $\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right)^{x^2/\sin(\pi x)} = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{1/y} = e$ לכן נקבל

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right)^{1/\log(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\sin(\pi x)/(x^2 \log(x))} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \sin(\pi x)/(x^2 \log(x))}$$

הגבול $\lim_{x \rightarrow 1} \sin(\pi x)/(x^2 \log(x))$ נמצא ע"י כלל לופיטל:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x^2 \log x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sin \pi x)'_x}{(x^2 \log x)'_x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{x + 2x \log x} = -\pi$$

לכן $\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{\sin(\pi x)}{x^2}\right)^{1/\log(x)} = e^{-\pi}$ סך הכל

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + \sin(\pi x))^{\frac{1}{\log(x)}} = e^{2-\pi}$$

שאלה 34 e

שאלה 35

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\cos(4x) - 1} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2 x)'}{(\cos(4x) - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{-4 \sin(4x)} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \sin x \cos x)'}{(-4 \sin(4x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x}{-16 \cos(4x)} = \frac{2 \cos^2 0 - 2 \sin^2 0}{-16 \cos(0)} = \frac{-2}{16} = \frac{-1}{8}.$$

שאלה 36 e^6

שאלה 37 e^4

שאלה 38 $\frac{1}{e}$

שאלה 39 e^5

שאלה 40 1

שאלה 41 e

שאלה 42 $\log(2)$

שאלה 43 e

שאלה 44 e^3

3 שאלה 45

שים לב:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} &= \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \cdot \frac{\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1}}{\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2}} \\
 &= \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2})}{(\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1})(\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1})} \cdot \frac{\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2}} \\
 &= \frac{x+2 - (3x-2)}{4x+1 - (5x-1)} \cdot \frac{\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2}} \\
 &= \frac{-2x+4}{-x+2} \cdot \frac{\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2}} \\
 &= \frac{-2(x-2)}{-(x-2)} \cdot \frac{\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2}} \\
 &= 2 \cdot \frac{\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2}}
 \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[2 \cdot \frac{\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2}} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[2 \cdot \frac{\sqrt{9} + \sqrt{9}}{\sqrt{4} + \sqrt{4}} \right] \\
 &= 3.
 \end{aligned}$$

$\frac{1}{\sqrt{e}}$ שאלה 46

-2 שאלה 47

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x - \sin(2x)} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(2x))'}{(x - \sin(2x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(2x)}{1 - 2 \cos(2x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos(2x)}{\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2 \cos(2x))} = \frac{2 \cos(0)}{(1 - 2 \cos(0))} = -2.$$

$\frac{1}{e}$ שאלה 48

שים לב

$$\begin{aligned}
 (1+x)^{\frac{1}{x^2}} (1-x)^{\frac{1}{x^2}} &= ((1+x)(1-x))^{\frac{1}{x^2}} \\
 &= (1-x^2)^{\frac{1}{x^2}}
 \end{aligned}$$

לכן, אם נגדיר משתנה חדש $y \equiv x^2$ ושים לב כי $y \rightarrow 0$ בתהליך כאשר $x \rightarrow 0$, אז

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x^2}} (1-x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1-x^2)^{\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} (1-y)^{\frac{1}{y}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} (1-y)^{\frac{-1}{-y}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1-y)^{\frac{1}{-y}} \right]^{-1} \\ &= e^{-1} = \frac{1}{e} . \end{aligned}$$

שאלה 49

(א)

$$y^5 + xy + e^x = 33 \quad (\#)$$

שלב 1 :

נציב $x = 0$:

$$\begin{aligned} y^5(0) + 0 \cdot y(0) + e^0 &= 33 \\ y^5(0) + 1 &= 33 \\ y^5(0) &= 32 \\ y(0) &= \sqrt[5]{32} \\ y(0) &= 2 . \end{aligned} \quad (\#1)$$

שלב 2 :

גוזרים (#):

$$\begin{aligned} 5y^4 y' + (xy)' + e^x &= 0 \\ 5y^4 y' + y + xy' + e^x &= 0 \end{aligned} \quad (\#2)$$

שלב 3 :

נציב $x = 0$ ב (#2):

$$\begin{aligned} 5y^4(0)y'(0) + y(0) + 0 \cdot y'(0) + e^0 &= 0 \\ 5y^4(0)y'(0) + y(0) + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (\#2)$$

נציב $y(0) = 2$ מ (#1) ונקבל:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 2^4 y'(0) + 2 + 1 &= 0 \\ 80y'(0) &= -3 \\ y'(0) &= \frac{-3}{80} . \end{aligned} \quad (\#3)$$

שלב 4 :

גוזרים (#2):

$$\begin{aligned} (5y^4 y')' + y' + (xy'')' + (e^x)' &= 0 \\ 20y^3 \cdot y' \cdot y' + 5y^4 \cdot y'' + y' + xy'' + y' + e^x &= 0 \\ 20y^3 \cdot y'^2 + 5y^4 \cdot y'' + 2y' + xy'' + e^x &= 0 \end{aligned} \quad (\#4)$$

שלב 5 :

נציב $x = 0$ ב (#4):

$$\begin{aligned} 20y^3(0) \cdot y'^2(0) + 5y^4(0) \cdot y''(0) + 2y'(0) + xy''(0) + e^0 &= 0 \\ 20y^3(0) \cdot y'^2(0) + 5y^4(0) \cdot y''(0) + 2y'(0) + xy''(0) + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$:y'(0) = -\frac{3}{80} \text{ ו } y(0) = 2 \text{ נציב}$$

$$\begin{aligned} 20 \cdot 2^3 \cdot \left(-\frac{3}{80}\right)^2 + 5 \cdot 2^4 \cdot y''(0) + 2 \cdot \frac{-3}{80} + 0 \cdot y''(0) + 1 &= 0 \\ \frac{18}{80} + 80 \cdot y''(0) - \frac{6}{80} + 1 &= 0 \\ 80 \cdot y''(0) &= \frac{-23}{20} \\ y''(0) &= \frac{-23}{1600} . \end{aligned} \quad (\#5)$$

נוסחת מקלורן מסדר 2 הוא

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 .$$

נציב (#1), (#3) ו (#5) ונקבל

$$P_2(x) = 2 - \frac{3}{80}x - \frac{23}{3200}x^2$$

(ב)

$$y = t^2 + 2t + 1, \quad x = te^t \quad (*)$$

שלב 1 :

נציב $x = 0$:

$$0 = te^t \Rightarrow t = 0. \quad (*1)$$

שלב 2 :

נציב $x = 0$ ב y

$$y(x = 0) = y(t = 0) = 1. \quad (*2)$$

שלב 3 :

גוזרים (*):

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t} \\ x'_t &= e^t + te^t = (1+t)e^t \\ y'_t &= 2t + 2 = 2(1+t) \\ y'_x &= \frac{2(1+t)}{(1+t)e^t} = \frac{2}{e^t} = 2e^{-t} \end{aligned} \quad (*3)$$

שלב 4 :

נציב $x = 0$ ב (*3):

$$y'(x = 0) = y'(t = 0) = 2 \quad (4*)$$

שלב 5 :

נחשב y''_{xx} :

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)_t}{x'_t}$$

נציב y'_x ו x'_t מ (*3):

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= \frac{(y'_x)_t}{x'_t} \\ y''_{xx} &= \frac{(2e^{-t})'_t}{(1+t)e^t} = \frac{-2e^{-t}}{(1+t)e^t} = \frac{-2e^{-2t}}{1+t} \end{aligned} \quad (*)5$$

שלב 6 :

$$:t = 0$$

$$y''_{xx}(x=0) = y''_{xx}(t=0) = \frac{-2e^{-0}}{1} = -2 . \quad (*)6$$

שלב 7 :

נוסחת מקלורן מסדר 2 הוא

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 .$$

נציב (*2), (*4) ו (*6) ונקבל

$$P_2(x) = 1 + 2x - x^2$$

ג) נתון כי פולינום מקלורן מסדר 3 של $f(x)$ הוא $P_3(x) = x - 3x^2 + 2x^3$. אז

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x - 3x^2 + 2x^3 .$$

כלומר

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 , \\ f'(0) &= 1 , \\ \frac{f''(0)}{2} &= -3 \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -6 , \\ \frac{f'''(0)}{6} &= 2 \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 12 . \end{aligned}$$

לכן

$$f''(0) + f'''(0) = -6 + 12 = 6$$

(א)

$f(x) = \ln(1+x)$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \frac{1}{1+x}$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$	$f''(0) = -1$
$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$	$f^{(3)}(0) = 2$
$f^{(4)}(x) = \frac{-3!}{(1+x)^4}$	$f^{(4)}(0) = -3!$
$f^{(5)}(x) = \frac{4!}{(1+x)^5}$	$f^{(5)}(0) = 4!$
\vdots	
$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$	$f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\
 &= 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n
 \end{aligned}$$

צריך להוכיח:

(ב)

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

הוכחה:

$$P_2(x) = x - \frac{x^2}{2} + R_2(x) ,$$

כאשר

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3 = \frac{1}{3(1+c)^3}x^3 > 0$$

לכן

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + R_2(x) > x - \frac{x^2}{2} . \quad (*)$$

$$P_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + R_3(x) ,$$

כאשר

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 = \frac{-1}{4(1+c)^4}x^4 < 0$$

לכן

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + R_3(x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} . \quad (**)$$

לפי (*) ו (**) נקבל

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} .$$

משל.

שאלה 51 נגדיר

$$f(x) = e^x \sin x - x(1+x) .$$

פולינום מקלורן מסדר 3 הוא

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + R_4(x) .$$

$f(x) = e^x \sin x - x(1+x)$	$f(0) = 0$
$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x - 1 - 2x$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = e^x \sin x + e^x \cos x - e^x \sin x + e^x \cos x - 2 = 2e^x \cos x - 2$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x$	$f'''(0) = 2$

לכן

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + R_4(x) \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 . \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x \right) = \frac{1}{3} . \end{aligned}$$

שאלה 52

$$f(x) = \ln |9x + 4| \quad \Rightarrow \quad f(0) = \ln(4) .$$

$$f'(x) = \frac{9}{9x + 4} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \frac{9}{4} .$$

$$f''(x) = \frac{-81}{(9x + 4)^2} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = \frac{-81}{16} .$$

נוסחת מקלורן היא

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 .$$

נציב ונקבל

$$P_2(x) = \ln(4) + \frac{9x}{4} - \frac{81x^2}{16} .$$

שאלה 53

קו ישר $y = m \cdot x + n$ נקרא אסימפטוטה משופעת של פונקציה $f(x)$ אם המרחק בין גרף הפונקציה לבין הקו $y = m \cdot x + n$ שואף ל-0 כאשר x שואף ל- ∞ או $-\infty$.
במידה ש $y = mx + n$ אסימפטוטה משופעת של $f(x)$, אז m ו n ניתנים ע"י הנוסחאות

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} , \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$$

(אותו דבר עבור $x \rightarrow -\infty$). אם m, n מספרים סולפיים, אז קיימת אסימפטוטה משופעת.

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad (\text{א})$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1} - 2x) = 0 .$$

לכן $y = 2x$ אסימפטוט המשופעת ב- $\pm\infty$.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \quad (\text{ב})$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = 1 .$$

לכן $y = x + 1$ אסימפטוט המשופעת ב- $\pm\infty$.

$$f(x) = x - e^x \quad \text{ג}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - e^x}{x} = -\infty$$

אין אסימפטוט המשופעת ב- $+\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - e^x}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^x - x) = 0 .$$

לכן $y = x$ אסימפטוט המשופעת ב- $-\infty$.

שאלה 54

שלב 1 תחום הגדרה: כל x .

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה- x :

$y = 0$ כאשר $x = -2$ ולכן נקודת חיתוך עם ציר x היא $(-2, 0)$.

נקודת חיתוך עם ציר ה- y :

$y = -4$ כאשר $x = 0$ ולכן נקודת חיתוך עם ציר y היא $(0, -4)$.

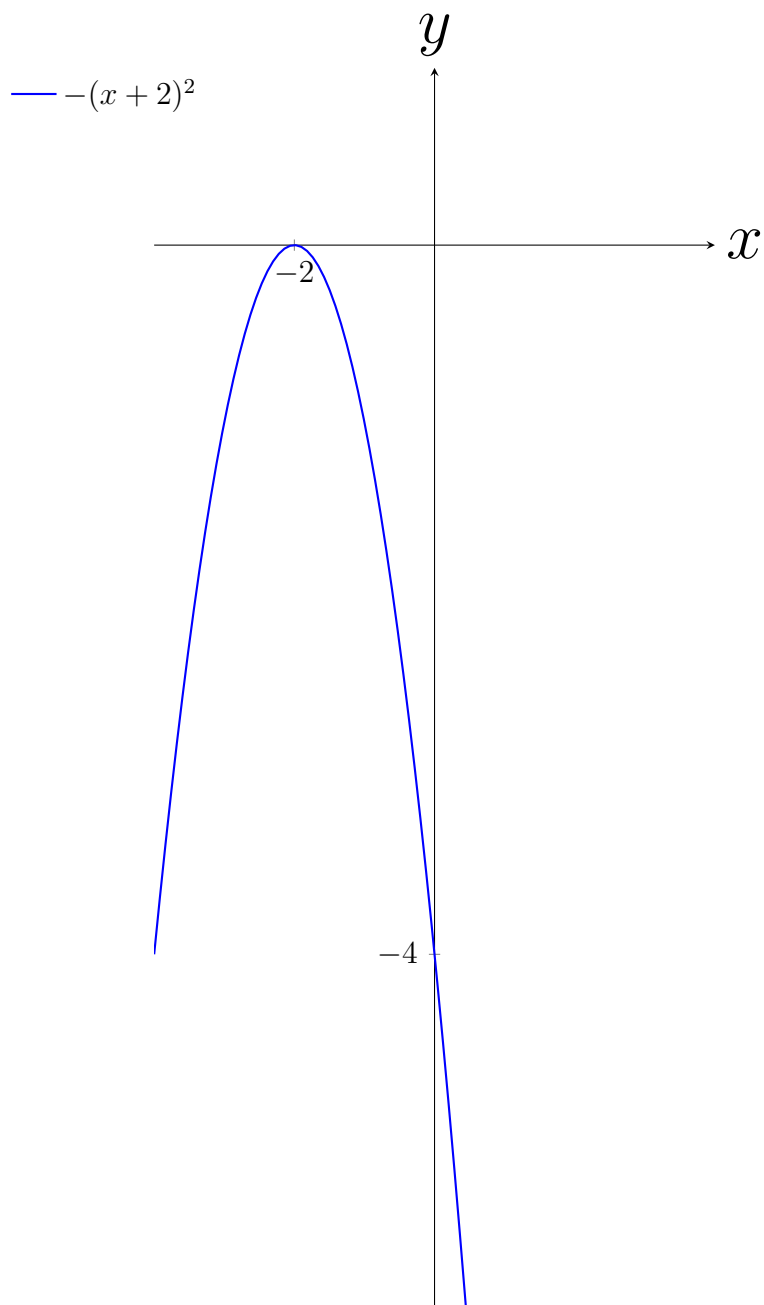
$y \leq 0$ בכל מקום בתחום.

שלב 3 הפונקציה מוגדרת בכל נקודה בתחום.

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \{-(x+2)^2\} = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \{-(x+2)^2\} = -\infty .$$

שלב 5



שאלה 55

שלב 1 תחום הגדרה: כל x .

שלב 2 נקודות חיתוך עם ציר ה- x :

$y = 0$ כאשר $x = 0$ או $x = 2$. ולכן נקודות חיתוך עם ציר ה- x הן $(0, 0)$ ו- $(2, 0)$.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y :

$y = 0$ כאשר $x = 0$ ולכן נקודת חיתוך עם ציר ה- y היא $(0, 0)$.

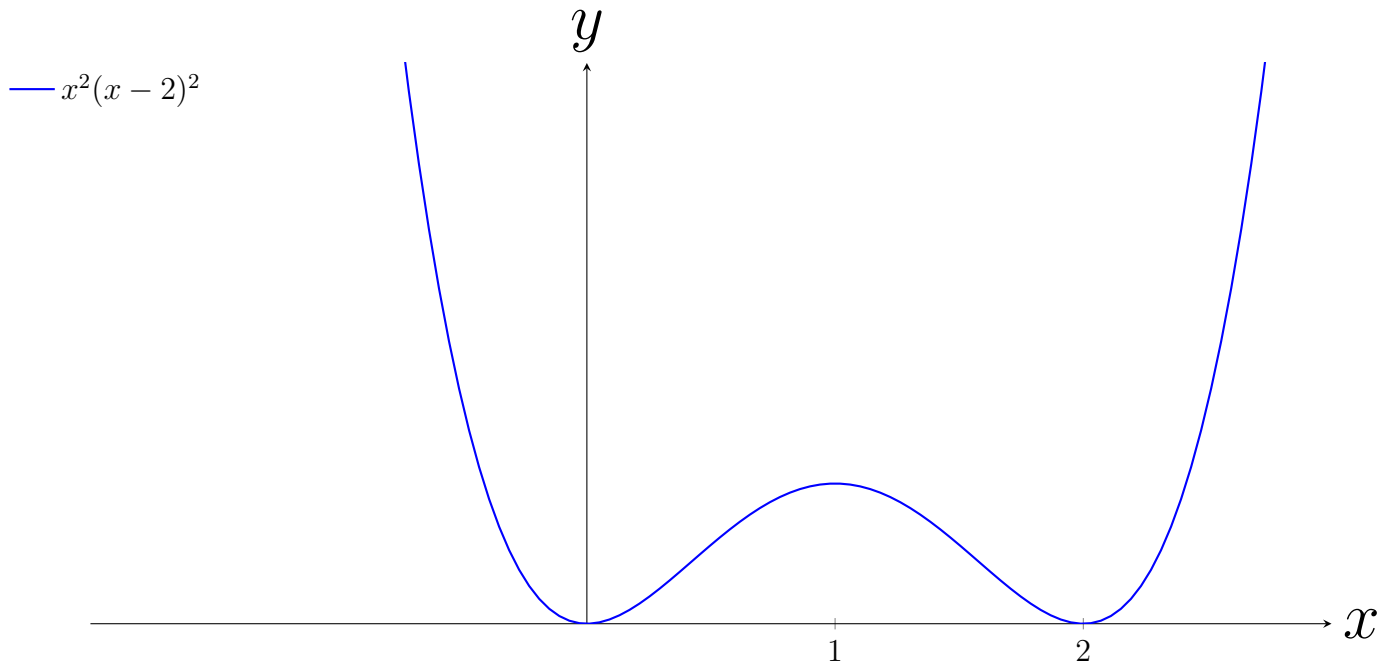
$y \geq 0$ בכל מקום בתחום.

שלב 3 הפונקציה מוגדרת בכל נקודה בתחום.

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \{x^2(x-2)^2\} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \{x^2(x-2)^2\} = +\infty.$$

שלב 5



שאלה 56

שלב 1 תחום הגדרה: כל x .

שלב 2 נקודת חיתוך עם ציר ה- x :

$y = 0$ כאשר $x = 0$. ולכן נקודת חיתוך עם ציר ה- x היא $(0, 0)$.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y :

נציב $x = 0$ בפונקציה ונקבל $y = 0$. לכן נקודת חיתוך עם ציר ה- y היא $(0, 0)$.

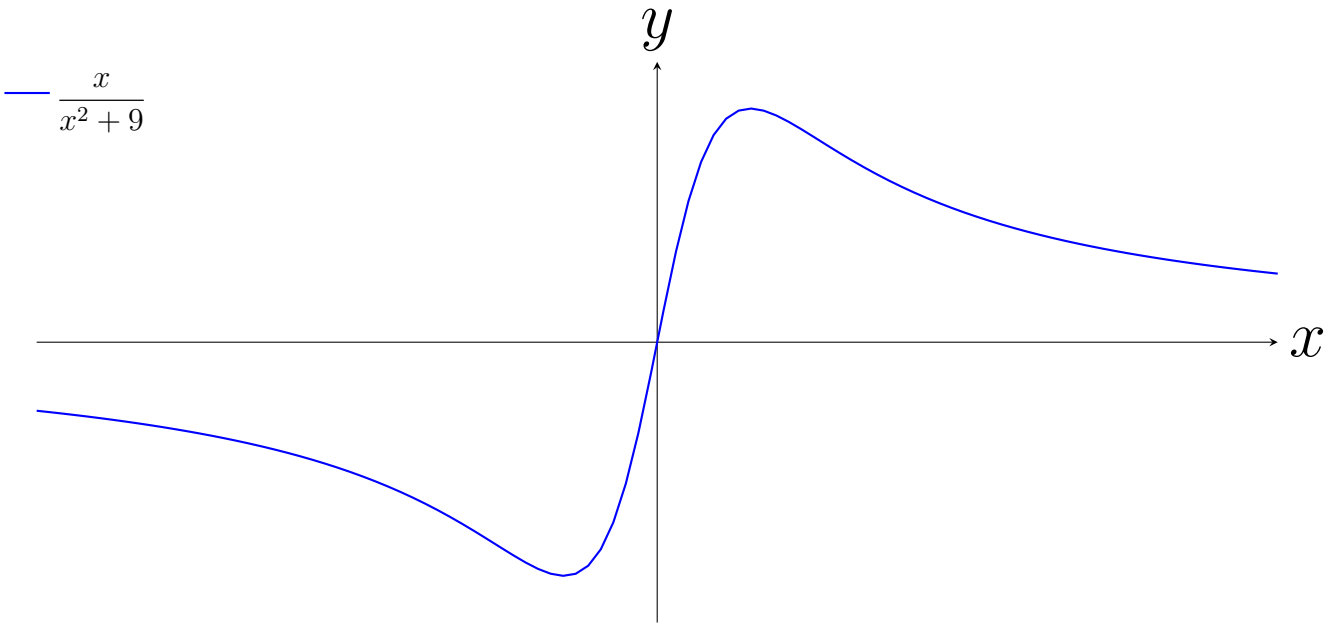
y	x
$y > 0$	$x > 0$
$y < 0$	$x < 0$
$y = 0$	$x = 0$

שלב 3 אינן נקודות בהן הפונקציה לא מוגדרת.

שלב 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

שלב 5



שאלה 57

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

שלב 1 תחום הגדרה: $x \neq -1$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0, -1), (1, 0)$.

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f(x)$	-	-	+

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x = -1$

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: $y = 0$ ב $\pm\infty$.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת: אין.

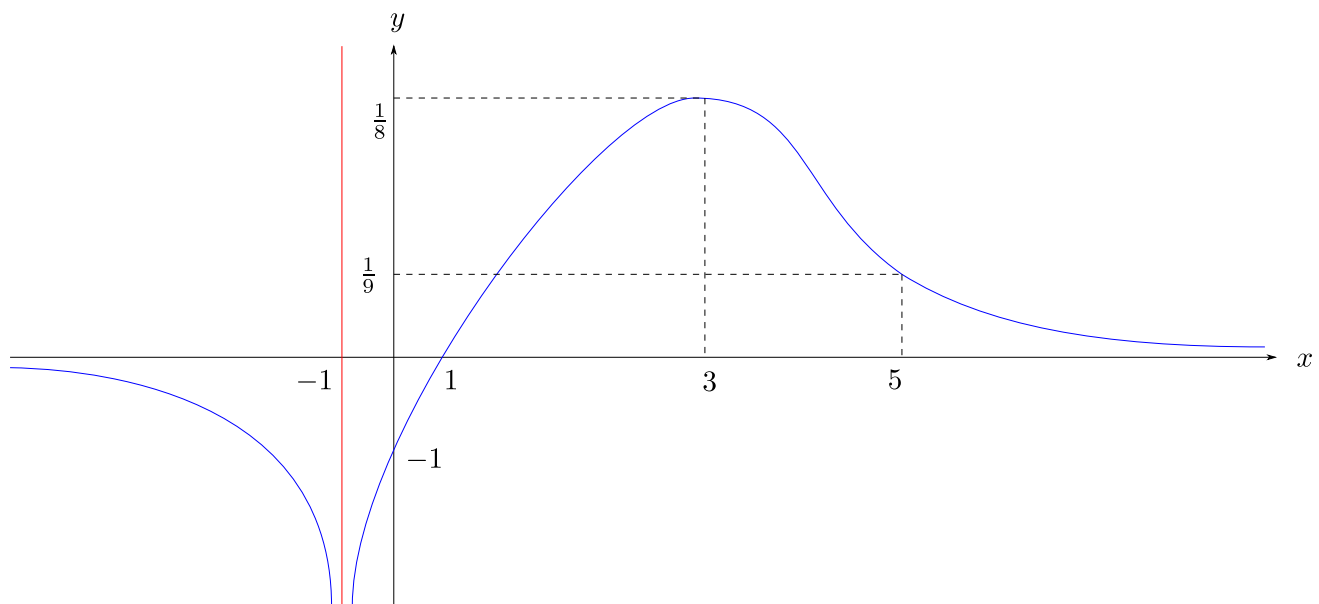
שלב 6 נקודות קריטיות: $f'(x) = \frac{3-x}{(1+x)^3}$. יש נקודת קריטית ב- $\left(3, \frac{1}{8}\right)$.

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$f'(x)$	$-$	\nexists	$+$	0	$-$
$f(x)$	\searrow	לא מוגדר	\nearrow	מקסימום	\searrow

שלב 7 תחומי קמירות: $f''(x) = \frac{2(x-5)}{(x+1)^4}$. נקודות פיתול: $\left(5, \frac{1}{9}\right)$.

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 5$	$x = 5$	$x > 5$
$f''(x)$	$-$	לא מוגדר	$-$	0	$+$
$f(x)$	קמורה \downarrow	לא מוגדר	קמורה \downarrow	נקודת פיתול	קמורה \uparrow

שלב 8 שרטוט:



שאלה 58

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 4}.$$

שלב 1 תחום הגדרה: $x \neq \pm 2$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0, 0)$.

x	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x = -2$ ו- $x = 2$.

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: אין.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת:

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = 2 ,$$

$$n_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m_1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3}{x^2 - 4} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = 0 .$$

לכן $y = 2x$ אסימפטוטה משופעת ב- $x = \infty$.

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = 2 ,$$

$$n_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m_2 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2 - 4} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 2x(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = 0 .$$

$y = 2x$ אסימפטוטה משופעת ב- $x = -\infty$.

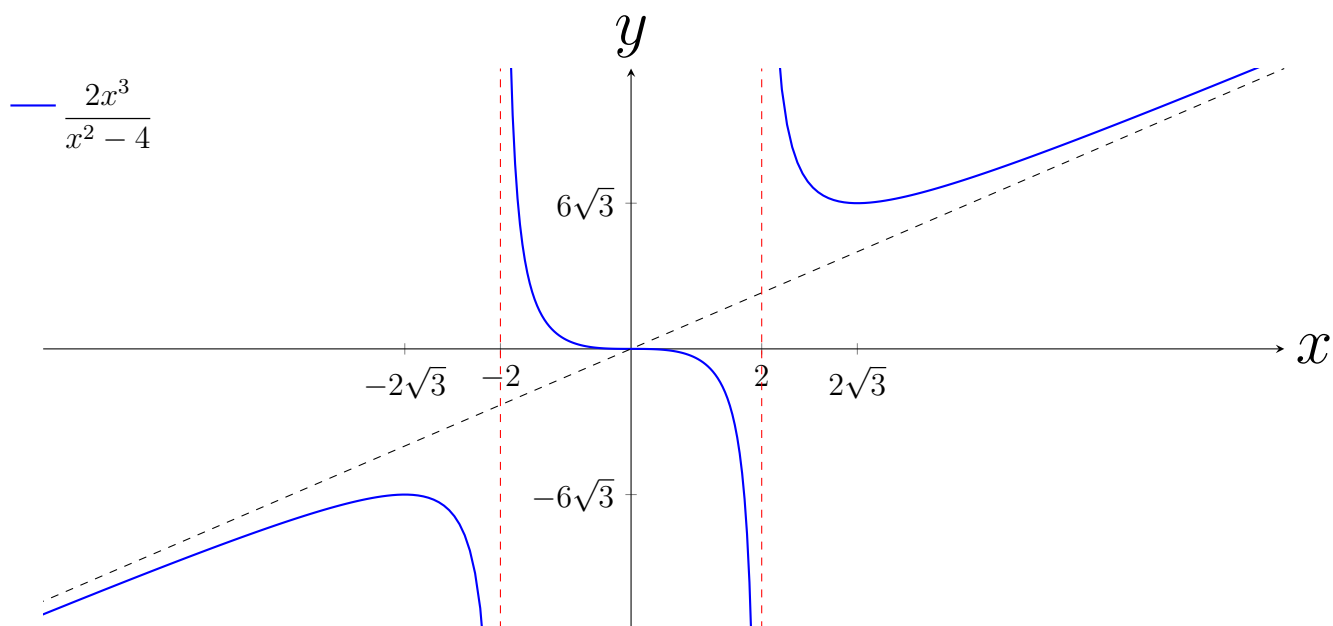
שלב 6 תחומי עליה וירידה: $f'(x) = \frac{2x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$. ישנן נקודות קריטיות ב- $(0, 0)$, $(-2\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ ו- $(2, \sqrt{3}, 6\sqrt{3})$.

x	$< -2\sqrt{3}$	$x = -2\sqrt{3}$	$\in (-2\sqrt{3}, -2)$	$\in (-2, 0)$	$x = 0$	$\in (0, 2)$	$\in (2, 2\sqrt{3})$	$x = 2\sqrt{3}$	$x > 2\sqrt{3}$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	מקס	\searrow	\searrow	פיתול	\searrow	\searrow	מינימום	\nearrow

שלב 7 תחומי קמירות: $f''(x) = \frac{16x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$. נקודות פיתול ב- $(0, 0)$.

x	$x < -2$	$x \in (-2, 0)$	$x \in (0, 2)$	$x > 2$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	קמורה \downarrow	קמורה \uparrow	קמורה \downarrow	קמורה \uparrow

שלב 8 שרטוט:



שאלה 59

$$f(x) = x^2 e^{1-x}.$$

שלב 1 תחום הגדרה: $x \in (-\infty, \infty)$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0, 0)$.

$$f(x) \geq 0 \text{ לכל } x.$$

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: אין.

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: הישר $y = 0$ אסימפטוטה אופקית ב- $x = +\infty$. ב- $x = -\infty$ אין אסימפטוטה אופקית.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת: אין.

שלב 6 תחומי עליה וירידה: $f'(x) = -e^{1-x}(x-2)x$. ישנו נקודות קריטיות ב- $(0, 0)$ ו- $(2, 4/e)$.

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\searrow	מינימום	\nearrow	מקסימום	\searrow

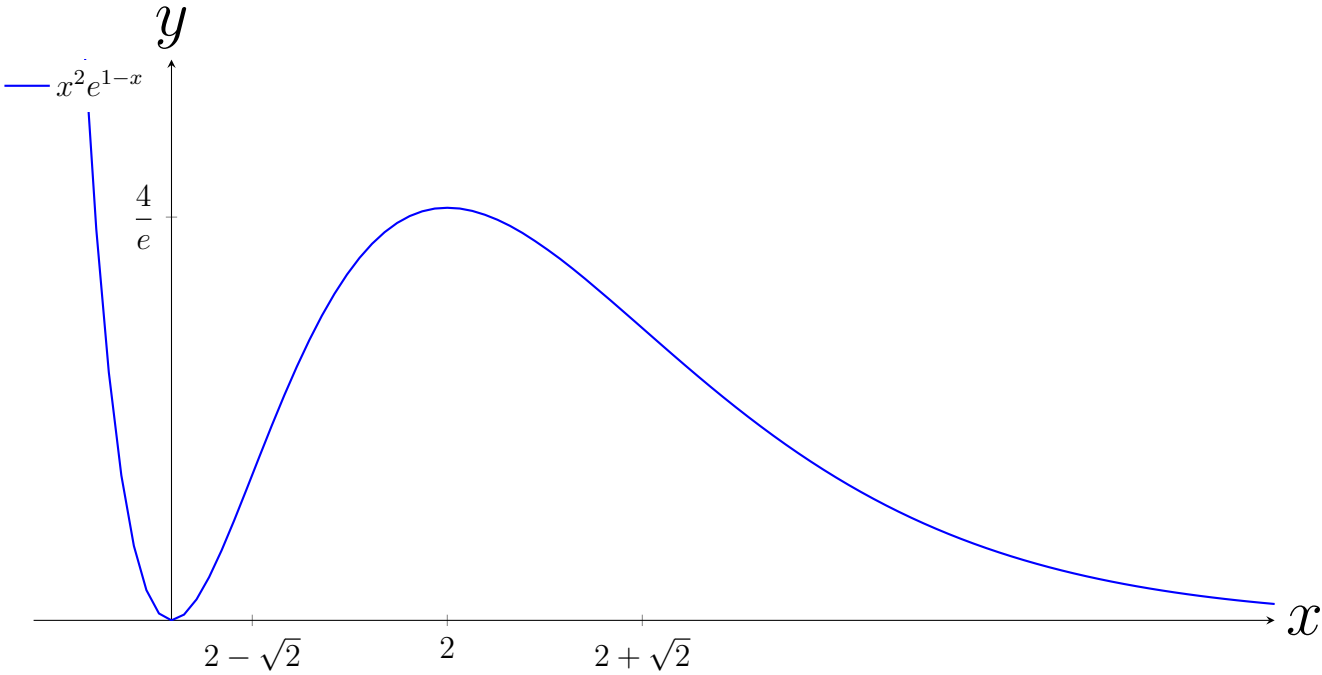
שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x) = e^{1-x} (x^2 - 4x + 2) = e^{1-x} (x - 2 + \sqrt{2}) (x - 2 - \sqrt{2})$$

יש נקודת פיתול ב- $x = 2 - \sqrt{2}$ ו- $x = 2 + \sqrt{2}$.

x	$x < 2 - \sqrt{2}$	$x \in (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$	$x > 2 + \sqrt{2}$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	קמורה ↑	קמורה ↓	קמורה ↑

שלב 8 שרטוט:



שאלה 60

$$f(x) = \frac{e^x}{x + 1} .$$

שלב 1 תחום הגדרה: $x \neq -1$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0, 1)$.

x	$x < -1$	$x > -1$
$f(x)$	-	+

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x = -1$.

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: ב- $x = +\infty$ אין אסימפטוטה אופקית. הישר $y = 0$ אסימפטוטה אופקית ב- $x = -\infty$.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת: אין.

שלב 6 תחומי עליה וירידה: $f'(x) = \frac{e^x x}{(x+1)^2}$. ישנו נקודות קריטיות ב- $(0, 1)$

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	\searrow	\searrow	מינימום	\nearrow

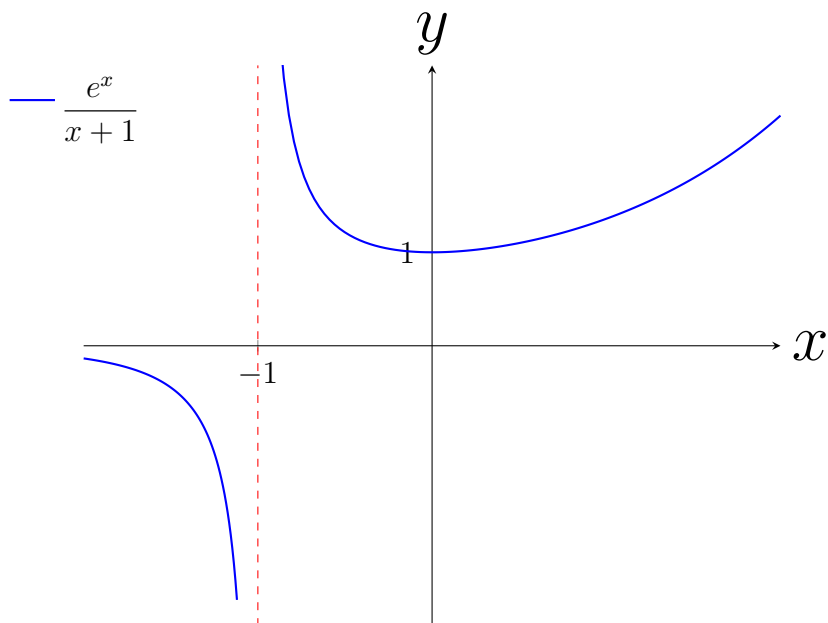
שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{e^x (x^2 + 1)}{(x+1)^3}$$

נקודת פיתול: אין.

x	$x < -1$	$x > -1$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	קמורה \downarrow	קמורה \uparrow

שלב 8 שרטוט:



שאלה 61

$$f(x) = (x+2)e^{1/x}.$$

שלב 1 תחום הגדרה: $x \neq 0$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0, 1)$.

x	$x < -2$	$x > -2$
$f(x)$	-	+

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x = 0$.

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: אין.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת: הישר $y = x + 3$ אסימפטוטה משופעת ב- $x = +\infty$ וב- $x = -\infty$.

שלב 6 תחומי עליה וירידה: $f'(x) = \frac{e^{1/x}(x^2 - x - 2)}{x^2}$. ישנו נקודות קריטיות ב-

$$\left(-1, \frac{1}{e}\right) \text{ ו- } (2, 4\sqrt{e})$$

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	מקסימום	\searrow	\searrow	מינימום	\nearrow

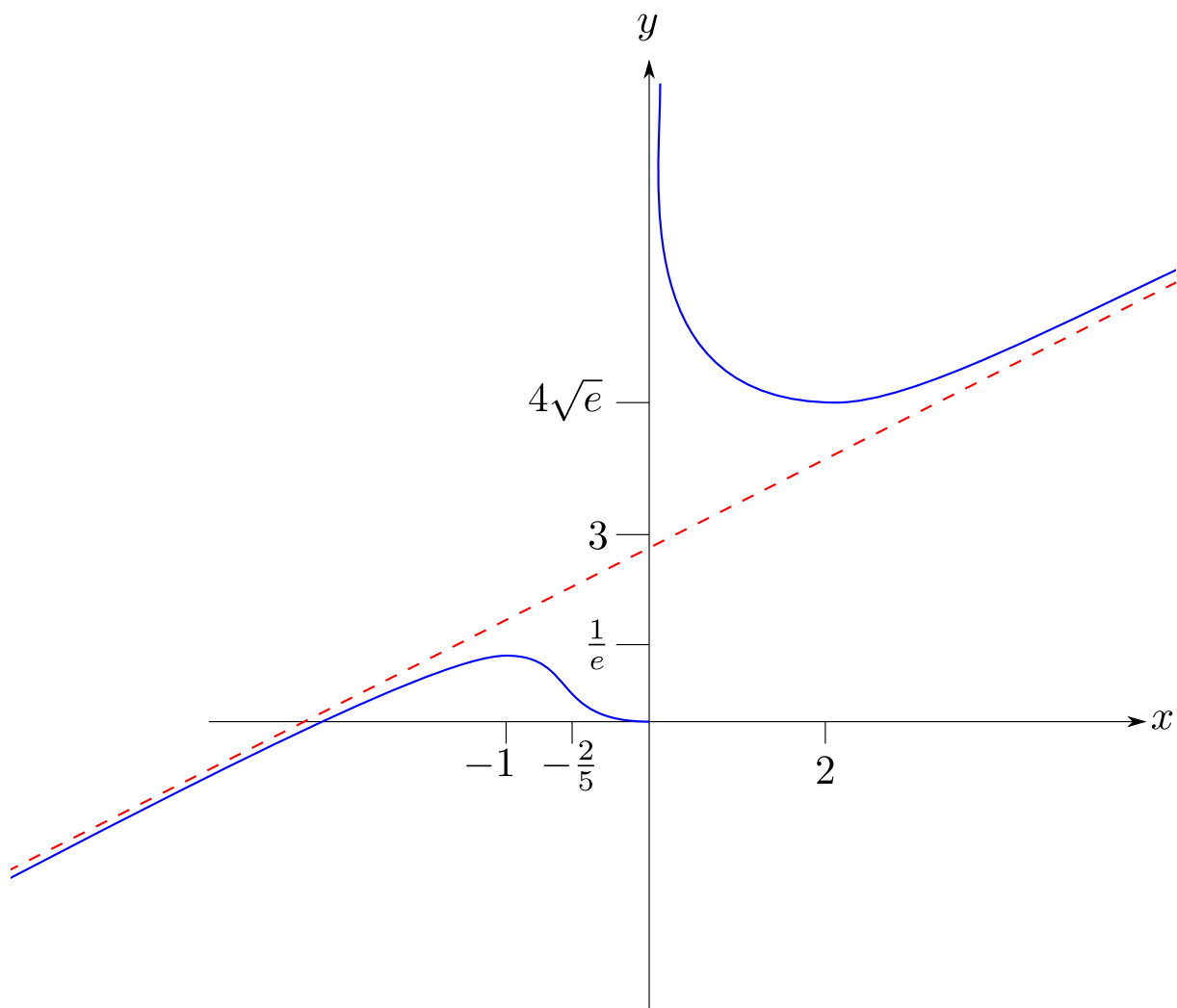
שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{e^{1/x}(5x+2)}{x^4}$$

נקודת פיתול ב- $\left(-\frac{2}{5}, \frac{8}{5e^{5/2}}\right)$ אין.

x	$x < -\frac{2}{5}$	$x = -\frac{2}{5}$	$x > -\frac{2}{5}$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	↓ קמורה	נקודת פיתול	↑ קמורה

שלב 8 שרטוט:



שאלה 62

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}.$$

שלב 1 תחום הגדרה: $(-\infty, -3]$ ו $[3, \infty)$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(-3, 0)$ ו $(3, 0)$.

x	$x < -3$	$-3 < x < 3$	$x > 3$
$f(x)$	$-$	\nexists	$+$

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: אין.

שלב 4 אסימפטוטה אופקית:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

ולפיו הקו $y = 1$ אסימפטוטה אופקית ב $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \text{infy}} f(x) = -1$$

ולפיו הקו $y = -1$ אסימפטוטה אופקית ב $-\infty$.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת: אין.

שלב 6 תחומי עליה וירידה: $f'(x) = \frac{9}{x^2\sqrt{x^2-9}}$. אינן נקודות קריטיות.

x	$x < -3$	$-3 < x < 3$	$x > 3$
$f'(x)$	+	\nexists	+
$f(x)$	\nearrow		\nearrow

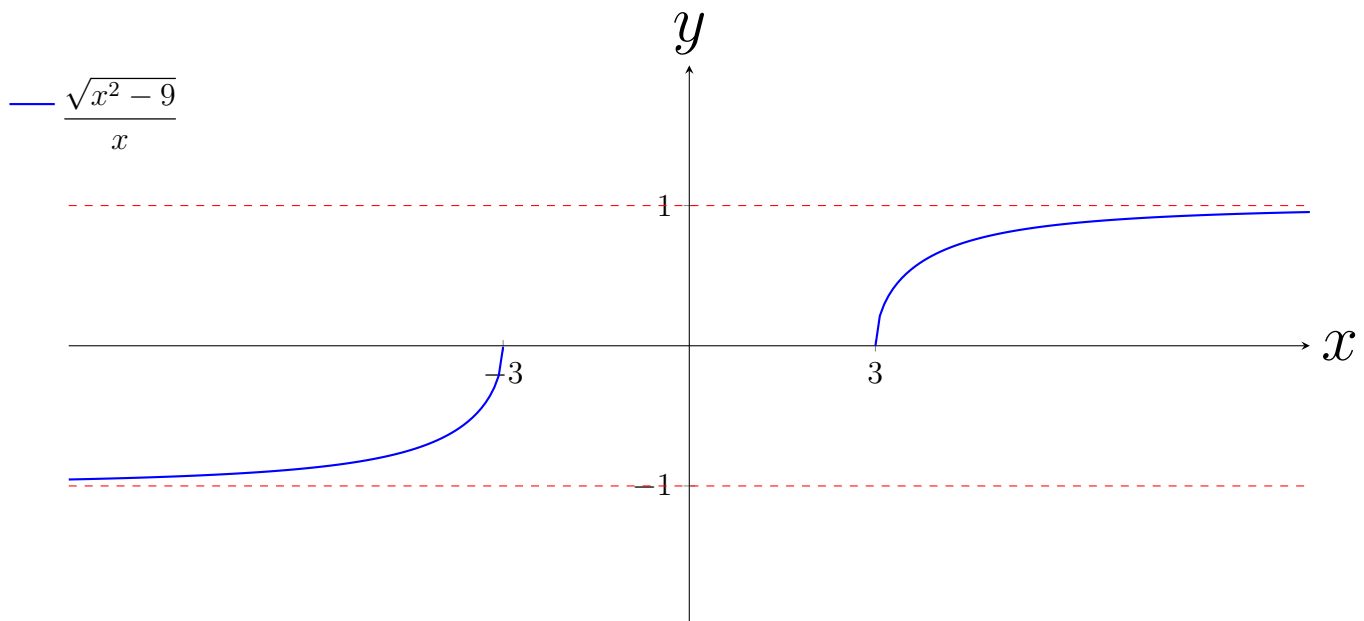
שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x) = -\frac{27(x^2-6)}{x^3(x^2-9)^{3/2}}$$

אינו נקודות פיתול בתופ הגדרתה של הפונקציה.

x	$x < -3$		$x > 3$
$f''(x)$	+		-
$f(x)$	קמורה \uparrow		קמורה \downarrow

שלב 8 שרטוט:



שאלה 63

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

שלב 1 תחום הגדרה: $x > 0$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(1, 0)$.

x	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f(x)$	$-$	0	$+$

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x = 0$.

שלב 4 אסימפטוטה אופקית:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

ולפיו הקו $y = 0$ אסימפטוטה אופקית.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת: אין.

שלב 6 תחומי עליה וירידה: $f'(x) = \frac{2 - \log(x)}{2x \cdot \sqrt{x}}$. יש נקודת קריטית ב- $(e^2, \frac{2}{e})$.

x	$0 < x < e^2$	$x = e^2$	$x > e^2$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	\nearrow	מקסימום	\searrow

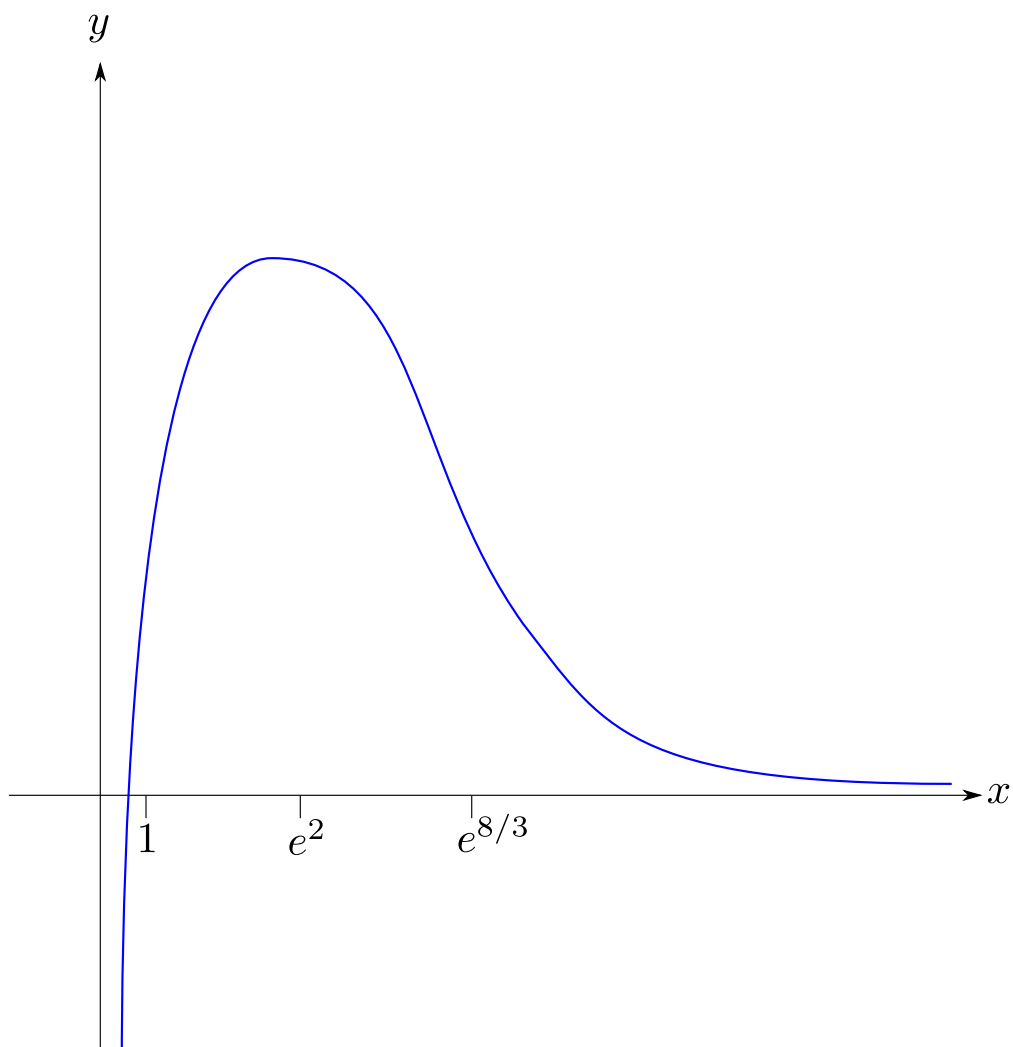
שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{3 \log(x) - 8}{4x^{5/2}}$$

יש נקודת פיתול ב- $(e^{8/3}, \frac{8}{3e^{4/3}})$.

x	$0 < x < e^{8/3}$	$x = e^{8/3}$	$x > e^{8/3}$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	קמורה \downarrow	נקודת פיתול	קמורה \uparrow

שלב 8 שרטוט:



שאלה 64

שלב 1 תחום הגדרה:

$$x \neq 3$$

שלב 2 נקודות חיתוך:

שים לב,

$$f(x) = \frac{x^2(x+1)(x-2)}{(x-3)^3}$$

ולכן קל לראות שהנקודות חיתוך הן $(0, 0)$, $(-1, 0)$ ו- $(2, 0)$.

סימני הפונקציה

y	x
$y < 0$	$x < -1$
$y > 0$	$-1 < x < 0$
$y > 0$	$0 < x < 2$
$y < 0$	$2 < x < 3$
$y > 0$	$x > 3$

שלב 3) אסימפטוטות אנכיות

$$x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty.$$

שלב 4) אסימפטוטות אופקיות

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

שלב 5) אסימפטוטות משופעת

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

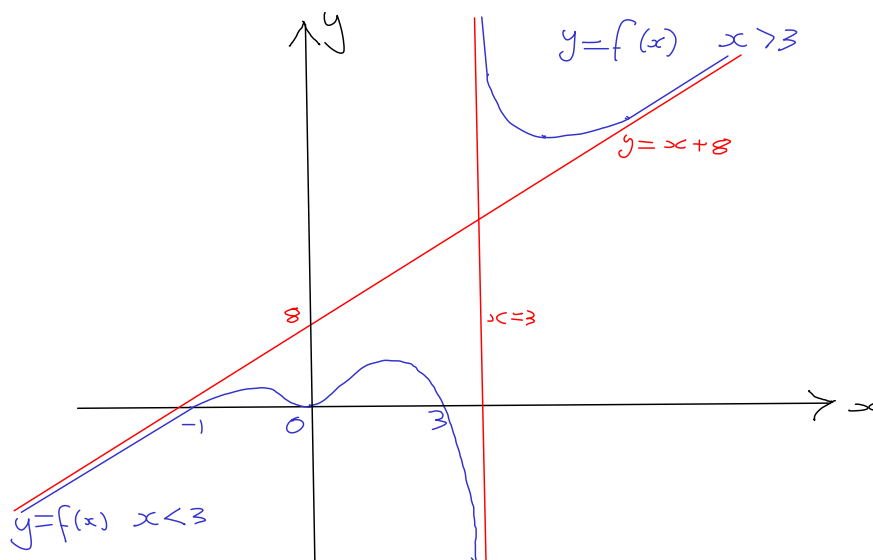
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = 8$$

לכן הישר $y = x + 8$ הוא אסימפטוטה משופעת כאשר $x \rightarrow +\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = 8$$

לכן הישר $y = x + 8$ הוא אסימפטוטה משופעת כאשר $x \rightarrow -\infty$.



שלב 1 תחום הגדרה: $x \neq -1$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0, 0)$.

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x > 0$
$f(x)$	$-$	$+$	$+$

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x = -1$

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: אין.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m \cdot x) = -1.$$

לכן הקו $y = x - 1$ אסימפטוטה משופעת בתהליך כאשר $x \rightarrow \infty$.

ב- $x \rightarrow -\infty$ אותו הדבר.

שלב 6 תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

נקודות קריטיות: $(-2, -4)$ ו- $(0, 0)$.

x	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	מקס	\searrow	\searrow	מינימום	\nearrow

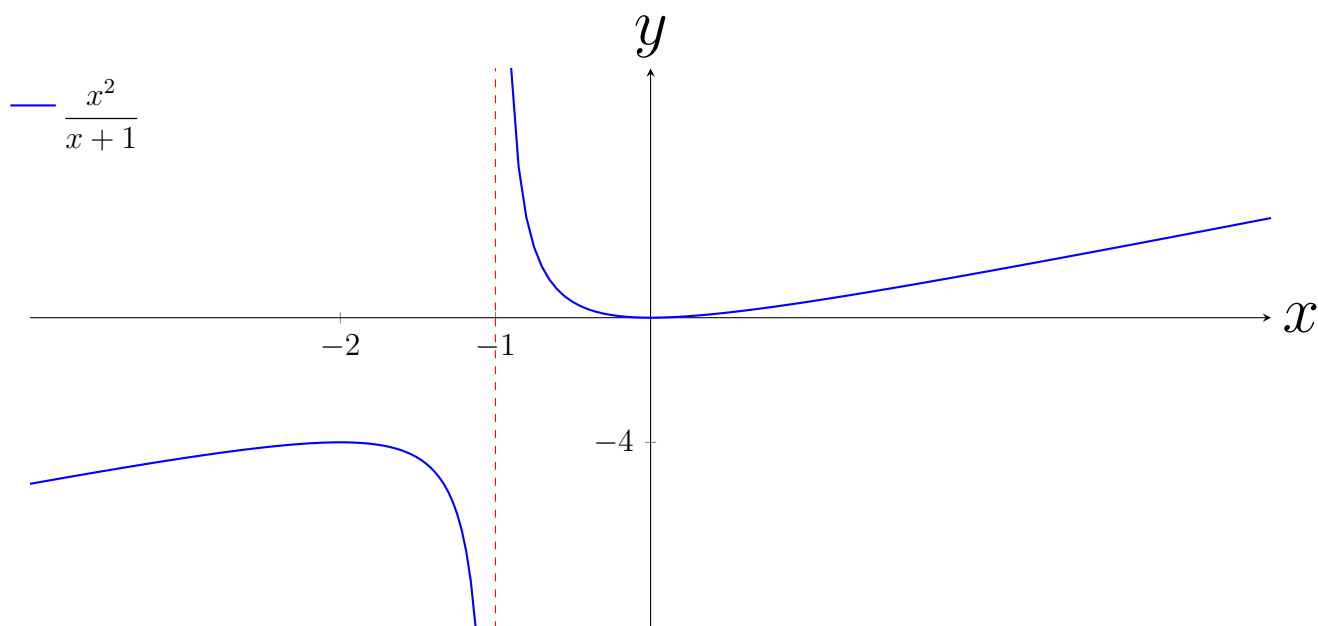
שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$$

נקודות פיתול: אין.

x	$x < -1$	$x > -1$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	קמורה \downarrow	קמורה \uparrow

שלב 8 שרטוט:



שאלה 66

שלב 1 תחום הגדרה: $x \neq 2$.

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(-2, 0)$ ו- $(0, -2)$.

x	$x < -2$	$-2 < x < 2$	$x > 2$
$f(x)$	–	–	+

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: $x = 2$

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: אין.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m \cdot x) = 6.$$

לכן הקו $y = x + 6$ אסימפטוטה משופעת בתהליך כאשר $x \rightarrow \infty$.

ב- $x \rightarrow -\infty$ אותו הדבר.

שלב 6 תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = \frac{(x-6)(x+2)}{(x-2)^2}$$

נקודות קריטיות: $(-2, 0)$ ו- $(6, 16)$.

x	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < 6$	$x = 6$	$x > 6$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	↗	מקס	↘	↘	מינימום	↗

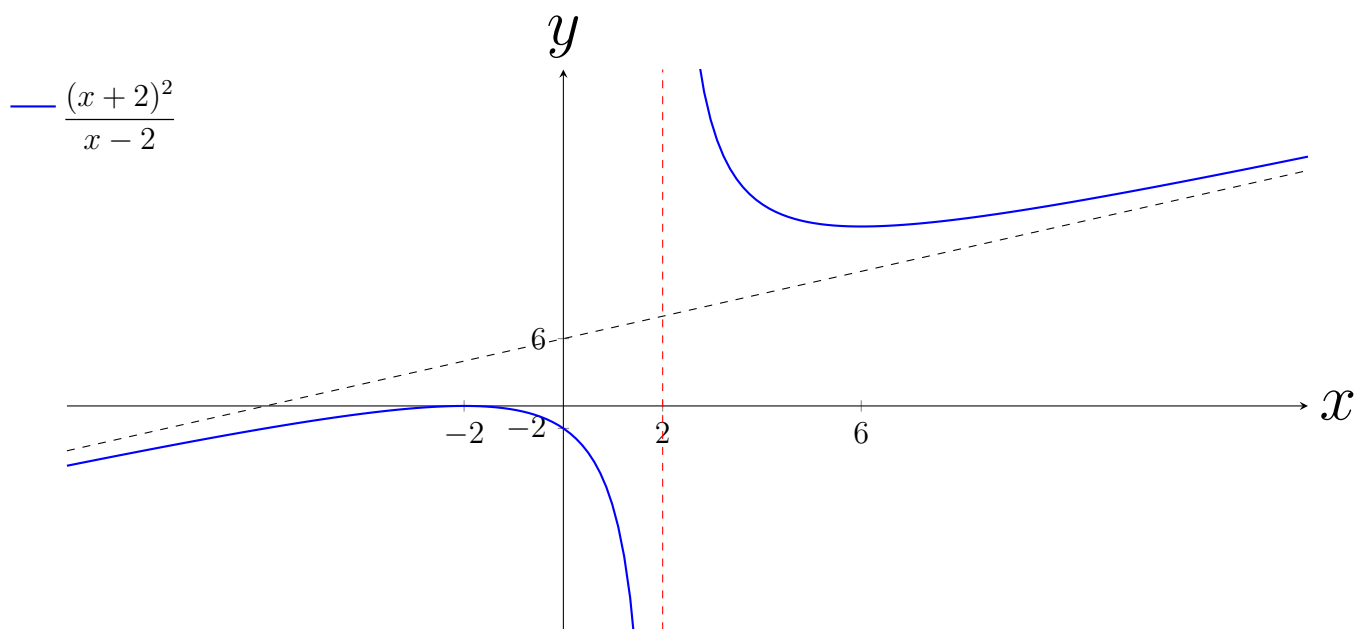
שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x) = \frac{32}{(x-2)^3}$$

נקודות פיתול: אין.

x	$x < 2$	$x > 2$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	↓ קמורה	↑ קמורה

שלב 8 שרטוט:



שאלה 67

שלב 1 תחום הגדרה: כל x .

שלב 2 נקודות חיתוך וסימני הפונקציה: $(0, 2), (-\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 0)$.

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x > 0$
$f(x)$	–	+	+

שלב 3 אסימפטוטה אנכית: אין.

שלב 4 אסימפטוטה אופקית: $y = 0$.

שלב 5 אסימפטוטה משופעת: אין.

שלב 6 תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{e^x}$$

נקודות קריטיות:

$$(1 - \sqrt{3}, 3.04437) = (-0.732051, 3.04437)$$

–

$$(1 + \sqrt{3}, -0.355635) = (2.73205, -0.355635) .$$

x	$x < 1 - \sqrt{3}$	$x = 1 - \sqrt{3}$	$1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$	$x = 1 + \sqrt{3}$	$x > 1 + \sqrt{3}$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	מקס	↘	מינימום	↗

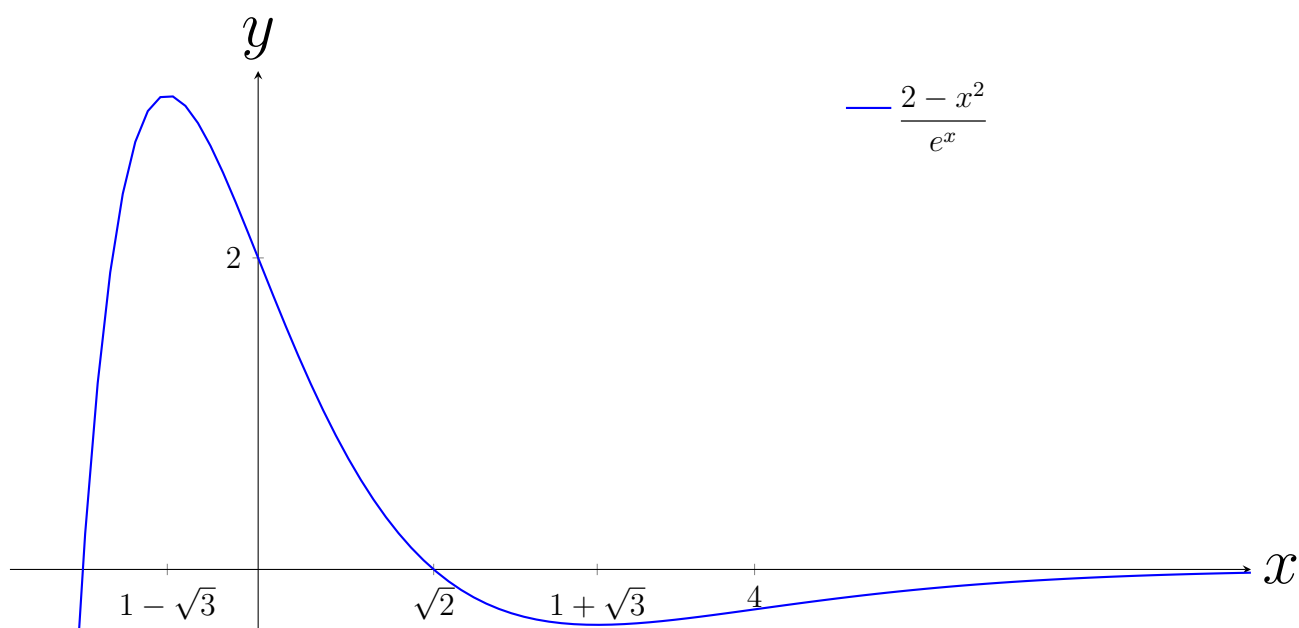
שלב 7 תחומי קמירות:

$$f''(x) = -\frac{x(x-4)}{e^x}$$

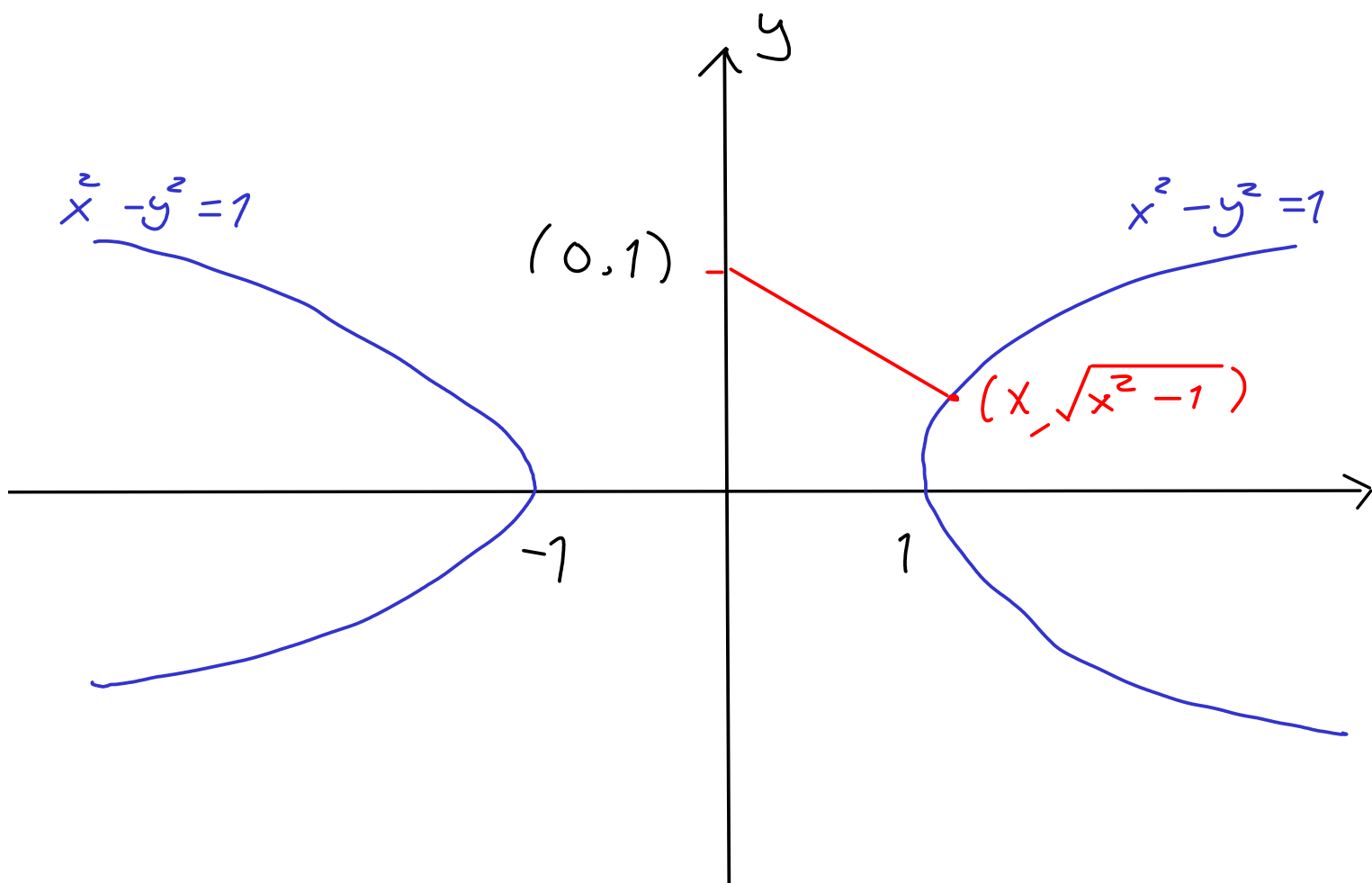
נקודות פיתול: $(0, 2)$ ו- $(4, -0.256419)$.

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$f''(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	קמורה ↓	פיתול	קמורה ↑	פיתול	קמורה ↓

שלב 8 שרטוט:



שאלה 68



נבחר נקודה שרירותית על הגרף:

$$(x, \sqrt{x^2 - 1})$$

המרחק בינה לבין הנקודה $(0, 1)$ הוא

$$d = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x^2 - 1} - 1)^2} \Rightarrow d^2 = x^2 + x^2 - 1 - 2\sqrt{x^2 - 1} + 1 = 2x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}$$

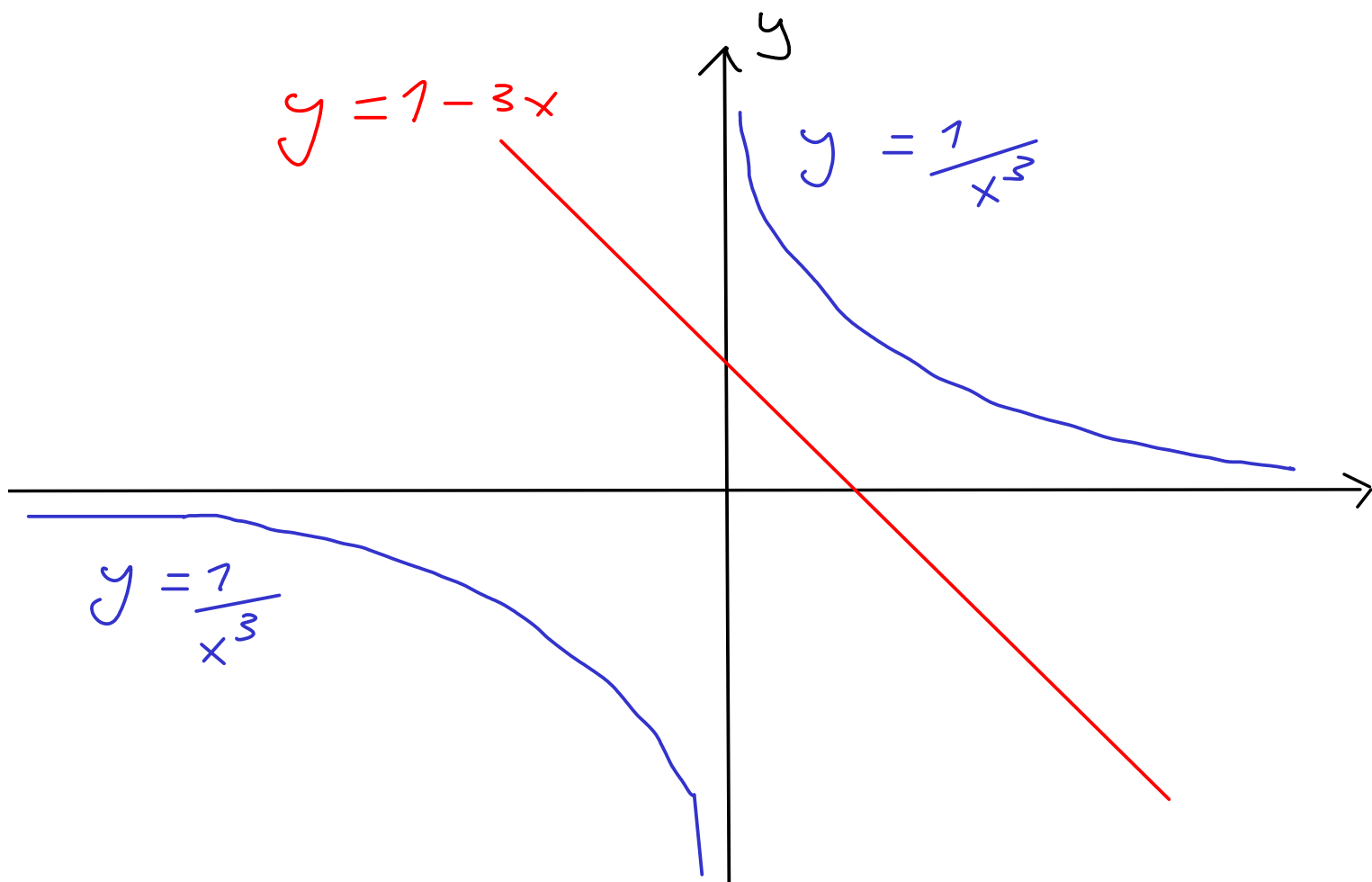
נמצא את המינימום של d^2 :

$$(d^2)' = 4x - 2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2x(2\sqrt{x^2 - 1} - 1)}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{2}, \quad x^2 - 1 = \frac{1}{4}, \quad x^2 = \frac{5}{4}, \quad x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

תשובה סופית: $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

שאלה 69

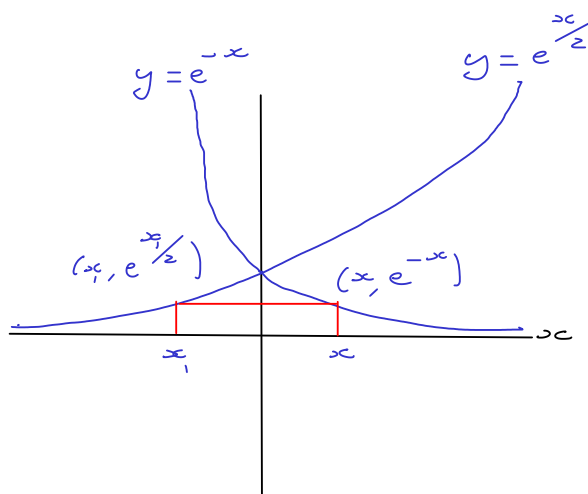


הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה על גרף הפונקציה בה שיפוע המשיק שווה לשיפוע של הקו הישר (המשיק מקביל לקו $y = 1 - 3x$). ז"א

$$y' = -\frac{3^4}{x} = -3 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = 1.$$

תשובה סופית: $(1, 1)$.

שאלה 70



$$e^{x_1/2} = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2x .$$

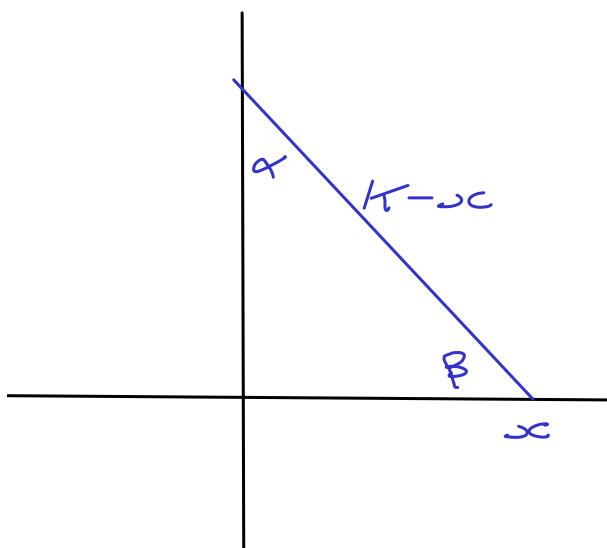
$$S = (x + |x_1|)e^{-x} = 3x \cdot e^{-x} .$$

$$S'_x = 3e^{-x} - 3xe^{-x} = 3e^{-x}(1 - x) .$$

שים לב $S'_x = 0$ בנקודה $x = 1$. לכן הנקודה $x = 1$ מקסימום מקומי.

$$S_{\max} = 3 \cdot 1 \cdot e^{-1} = \frac{3}{e} .$$

שאלה 71



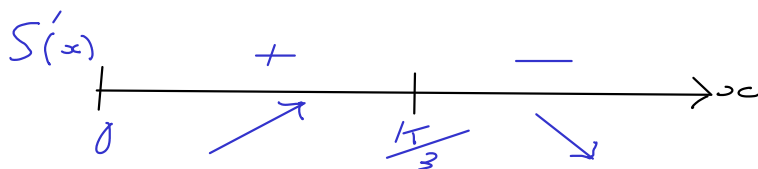
נסמן את אורכי אחד הניצבים ב- x . אז אורך היתר הוא $k - x$ ואורך הניצב השני הוא

$$\sqrt{(k-x)^2 - x^2} = \sqrt{k^2 - 2kx}$$

אז

$$\begin{aligned} S &= \frac{x \cdot \sqrt{k^2 - 2kx}}{2} \\ S'_x &= x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2k}{2\sqrt{k^2 - 2kx}} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{k^2 - 2kx} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-kx}{\sqrt{k^2 - 2kx}} + \sqrt{k^2 - 2kx} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{k^2 - 2kx}} (-kx + k^2 - 2kx) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{k^2 - 2kx}} k(k - 3x) \end{aligned}$$

$$S'_x = 0 \text{ כאשר } x = \frac{k}{3}$$



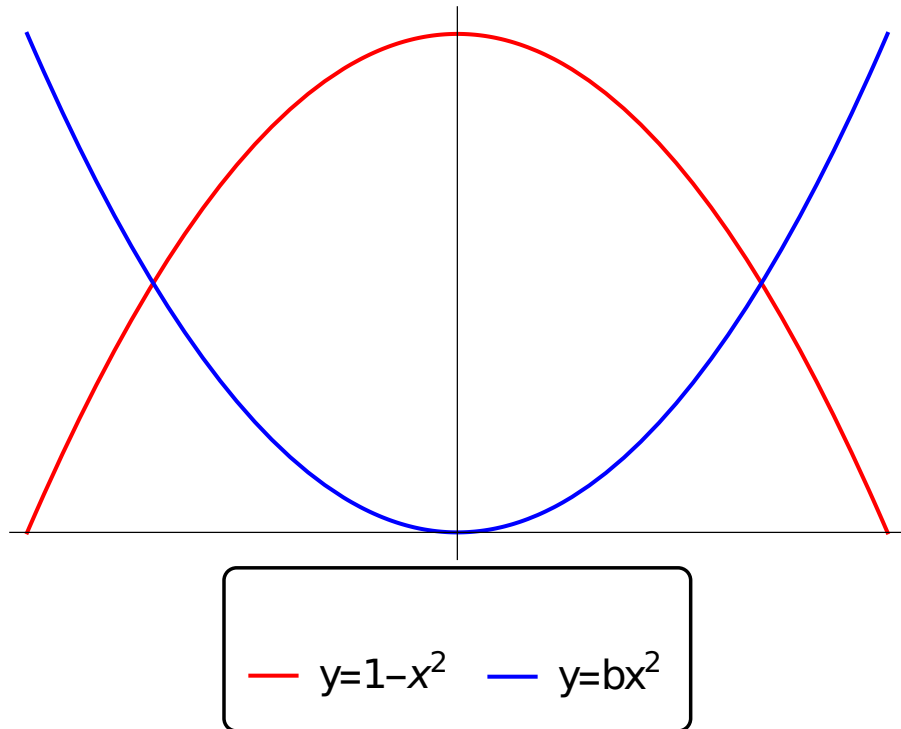
נקודת מקסימום. $x = \frac{k}{3}$

$$\sin \alpha = \frac{x}{k-x} = \frac{\frac{k}{3}}{k - \frac{k}{3}} = \frac{1}{2}, \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

הזווית השנייה

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

שאלה 72



נקודת חיתוך:

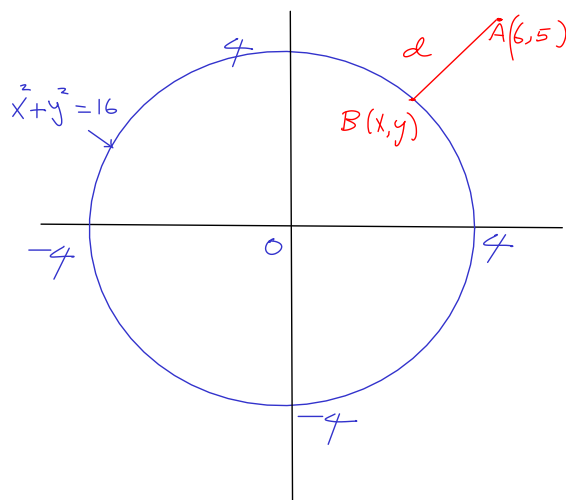
$$1 - x^2 = bx^2 \quad \Rightarrow \quad (x, y) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{b+1}}, \frac{b}{1+b} \right)$$

$$d^2 = OA^2 = (x_A - x_O)^2 + (y_A + y_O)^2 = \frac{1}{b+1} + \frac{b^2}{(1+b)^2}$$

$$(d^2)'_b = \frac{b-1}{(b+1)^3} .$$

$$(d^2)'_b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 1 .$$

שאלה 73



תהי $B(x, y)$ הנקודה על המעגל הקרובה ביותר לנקודה A . המרחק בריבוע בין A ל- B הוא

$$d^2 = (6 - x)^2 + (5 - y)^2 .$$

יש למזער את d^2 לפי x .

נפתח סוגריים ונקבל:

$$d^2 = x^2 - 12x + y^2 - 10y + 61$$

נציב את $y^2 = 16 - x^2$ ממשוואת המעגל ונקבל:

$$d^2 = -12x - 10y + 77$$

ואז נציב $y = \pm\sqrt{16 - x^2}$ ממשוואת המעגל:

$$d^2 = \mp 10\sqrt{16 - x^2} - 12x + 77 .$$

יש למזער d^2 לפי x :

$$(d^2)'_x = \mp \frac{10x}{\sqrt{16 - x^2}} - 12 = 0$$

הפתרון הוא

$$x_B = \frac{24}{\sqrt{61}} = \mp 3.07289 ,$$

וכדי לקבל ה- y המתאים נציב במשוואת המעגל ונקבל $y_B = \frac{20}{\sqrt{61}} = 2.56074$. הנקודה הקרובה ביותר ל $A(6, 5)$ היא $(3.07289, 2.56074)$ בעוד הנקודה הרחוקה ביותר היא $(-3.07289, 2.56074)$. לכן התשובה הסופית היא $B = (3.07289, 2.56074)$.

שאלה 74 השיפוע של הקו $x + y = 1$, או שקול $y = 1 - x$, הוא $m = -1$. לכן יש לחפש את כל הנקודות על העקומה שבהן השיפוע של המשיק שווה -1 . נגזור את משוואת העקומה:

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y} .$$

נציב $y' = -1$ ונקבל

$$-\frac{x}{y} = -1 \quad \Rightarrow \quad y = x . \quad (*)$$

נציב את היחס הזה לתוך משוואת העקומה, קרי $x^2 + y^2 = 4$ ונקבל:

$$2x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{2} , \quad x_2 = -\sqrt{2} .$$

נציב את הערכים האלה במשוואת המשיק $(*)$. עבור $x_1 = \sqrt{2}$ נקבל $y_1 = \sqrt{2}$ ועבור $x_2 = -\sqrt{2}$ נקבל $y_2 = -\sqrt{2}$. לכן מצאנו שתי נקודות על העקומה שבהן המשיק מקביל להקו: $P_1(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $P_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

שאלה 75 נסמן ב $S(a)$ (עבור $a > 0$) את הפונקציה המתארת את השטח המבוקש ונחשב את המקסימום.

$$S(a) = \int_0^a \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2a^2} \right) = \left[\arctan(x) + \frac{x}{2a^2} \right]_0^a = \arctan(a) + \frac{1}{2a} .$$

$$S'(a) = \frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{2a^2} = \frac{a^2 - 1}{2a^2(1+a^2)} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 1 .$$

כיוון ש $a > 0$ אז $a = 1$.

$$S(a = 1) = \arctan(1) + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} .$$

שאלה 76

נשתמש במשפט הבא: אם $f'(x) = g'(x)$ אז $f(x) = g(x) + C$, כאשר C מספר קבוע.

(א)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4 \cos^3 x \cdot (-\sin x)}{4} - \frac{2 \cos x \cdot (-\sin x)}{2} \\ &= -\cos^3 x \sin x + \cos x \sin x \\ &= \sin x \cos x (1 - \cos^2 x) \\ &= \sin x \cos x \cdot \sin^2 x \\ &= \sin^3 x \cos x, \end{aligned}$$

-1

$$g'(x) = \frac{4 \sin^3 x \cdot \cos x}{4} = \sin^3 x \cos x,$$

ולכן קיים C כך ש- $f(x) = g(x) + C$ שים לב

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\sin^4 x}{4} \\ &= \frac{1}{4} \sin^2 x \cdot \sin^2 x \\ &= \frac{1}{4} (1 - \cos^2 x) \cdot (1 - \cos^2 x) \\ &= \frac{1}{4} (1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{4} \cos^4 x \\ &= \frac{1}{4} + f(x) \end{aligned}$$

$$\text{לכן } f(x) = g(x) - \frac{1}{4} \text{ ו- } C = \frac{1}{4}.$$

(ב) הנגזרות של \arcsin ו \arccos הן $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ו $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. שימו לב שיש להם סימנים שונים. לכן, נתון $f(x) = \arcsin x$ ו- $g(x) = -\arccos x$ (שימו לב לסימן של g) אז $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ו- $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ כלומר הנגזרות שוות. לכן קיים C כך ש- $f(x) = g(x) + C$. נציב $x = 0$ ונמצא כי $C = \frac{\pi}{2}$.

(ג)

$$f'(x) = \frac{2 \cos x \cdot (-\sin x)}{2} = -\sin x \cos x$$

-1

$$g'(x) = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{2} = \sin x \cos x$$

ולכן $f'(x) \neq g'(x)$ ולפי המשפט לא קיים C כך ש- $f(x) = g(x) + C$.

שאלה 77

$$f'(x) = 3 + 2 \cos(2x)$$

$\cos(2x)$ פונקציה חסומה: $-1 \leq \cos(2x) \leq 1$ לכן

$$2 \leq 3 + 2 \cos(2x) \leq 4 \quad \Rightarrow \quad 2 \leq f'(x) \leq 4$$

ז"א $f'(x) \geq 0$, ולפי $f(x)$ עולה לכל x .

שאלה 78 נגדיר $f(x) = x + e^{2x} - 2$. נוכיח כי קיים שורש לפונקציה $f(x)$.

$f(0) = -1 < 0$ ו $f(1) = 6.380$. $f(x)$ אלמנטרית ומוגדרת בקטע $[0, 1]$ לכן היא רציפה וגזירה בקטע הזה. $f(1) > 0, f(0) < 0$. לכן לפי משפט בולנצו קיים c כך ש $f(c) = 0$.

נוכיח שהשורש יחיד:

$f'(x) = 1 + 2e^{2x} > 0$ לכל x , ז"א $f(x)$ עולה מונוטונית לכל x , לכן השורש הוא יחיד.

שאלה 79

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{1/x} - ax - b) = 0.$$

זאת ההגדרה של אסימפטוטה משופעת.

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{xe^{1/x}}{x} \right), \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{1/x} - ax),$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{xe^{1/x}}{x} \right) = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{1/x} - ax)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{1/x} - x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x (e^{1/x} - 1)$$

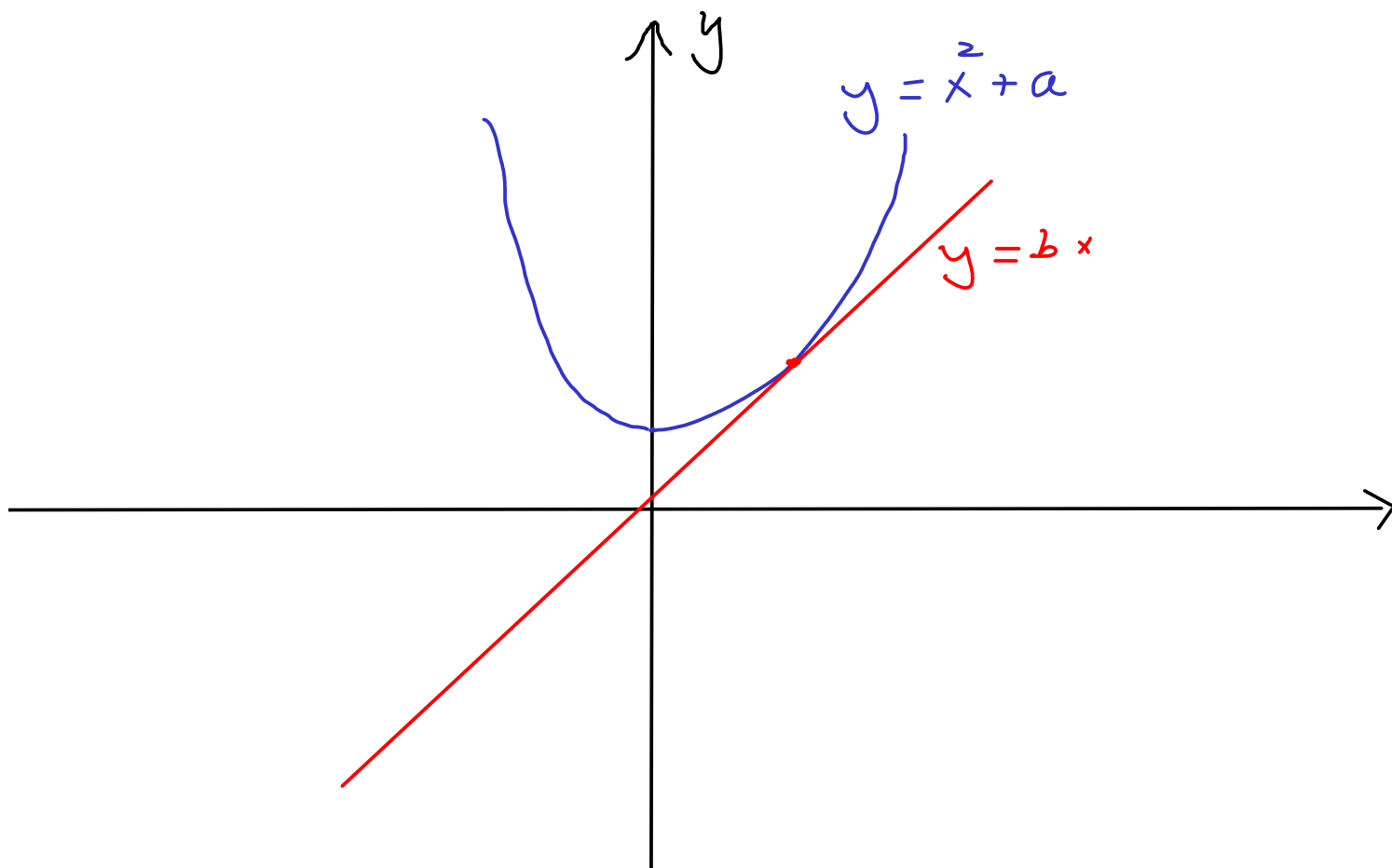
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} \right)$$

$$\stackrel{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} \right)$$

$$= 1$$

תשובה סופית: $b = 1, a = 1$.

שאלה 80



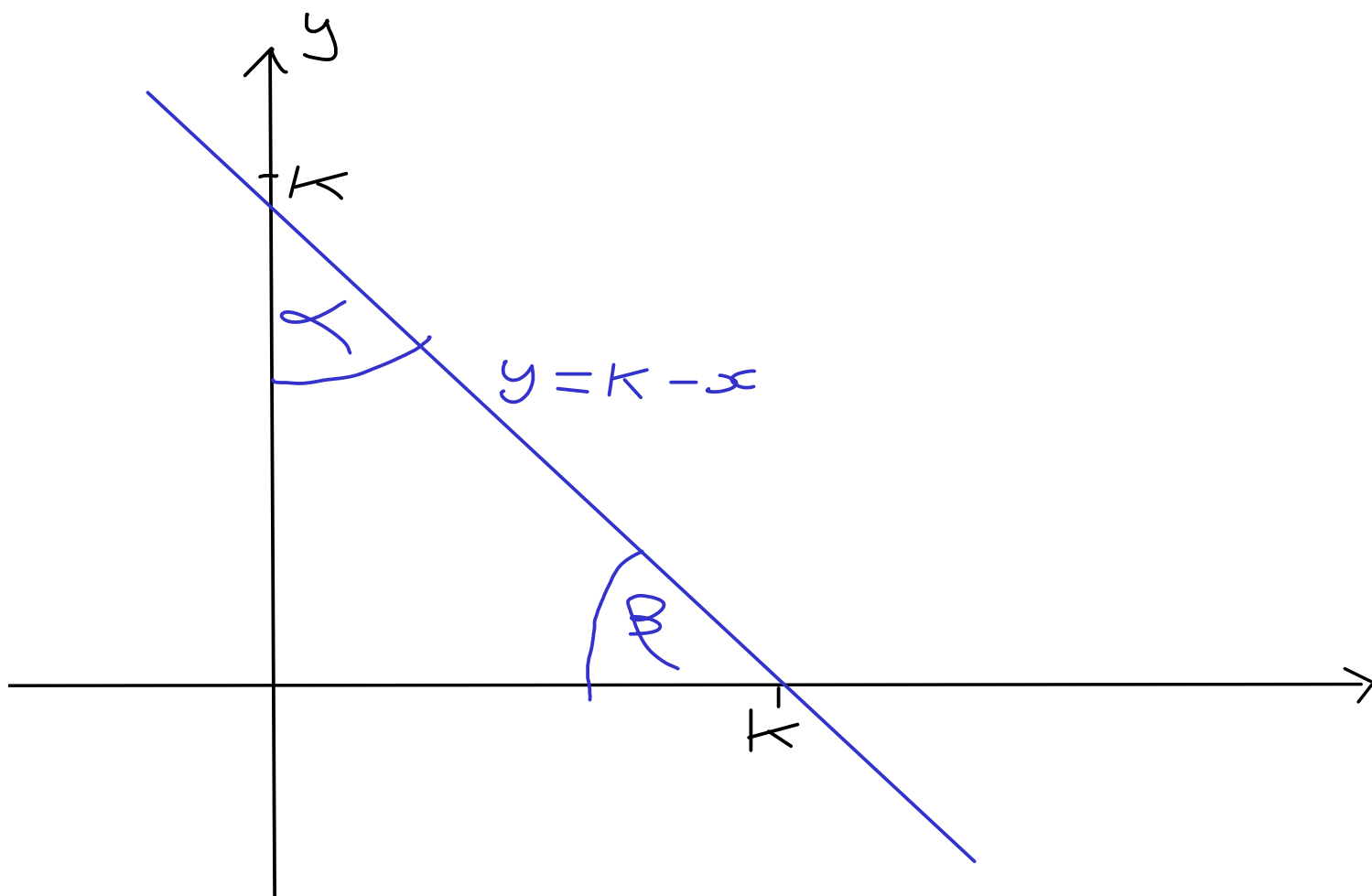
הקו $y = bx$ משיק לפרבולה כאשר יש נקודת חיתוך אחת עם הפרבולה. ז"א

$$x^2 + a = bx \quad \Rightarrow \quad x^2 - bx + a = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

יש פתרון אחד כאשר

$$b^2 - 4a = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \pm\sqrt{4a}, \quad a \geq 0$$

שאלה 81



נסמן ב x את האורך של ניצב אחד, אז אורך היתר $k - x$. לכן, אורך הניצב השני:

$$\sqrt{(k-x)^2 - x^2} = \sqrt{k^2 - 2kx}.$$

אז שטח המשולש שווה

$$S = \frac{x \cdot \sqrt{k^2 - 2kx}}{2}$$

נמתא את x עבורו S מקסימלי:

$$S' = \frac{1}{2} \left(\sqrt{k^2 - 2kx} + \frac{x \cdot (-2k)}{2\sqrt{k^2 - 2kx}} \right) = \frac{1}{2} \frac{k(k - 3x)}{\sqrt{k^2 - 2kx}}.$$

S'	+	0	-
S	\nearrow	מקס	\searrow

$x = \frac{k}{3}$ נקודת מקסימום. לכן

$$\sin \alpha = \frac{k}{3 \cdot (k - \frac{k}{3})} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30^\circ, \quad \beta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

תשובה סופית:
 $\beta = 60^\circ, \alpha = 30^\circ$

שאלה 82

ז"א $f(x) = \frac{4}{x^2}$ זאת פונקציה אלמנטרית ומוגדרת בקטע $[-2, -1]$.
 $f'(x) = -\frac{8}{x^3}$ מוגדרת בקטע הזה, ז"א $f(x)$ גזירה בקטע $(-2, -1)$. לכן לפי משפט לגרנז', קיימת נקודה c כך ש

$$f(-1) = f(-2) = f'(c)(-1 - (-2))$$

ז"א

$$\frac{4}{(-1)^2} - \frac{4}{(-2)^2} = -\frac{8}{c^3}.$$

\Downarrow

$$\frac{-8}{c^3} \Rightarrow c = -\frac{2}{\sqrt[3]{3}}.$$

שאלה 83

משפט לגרנז' $\Leftarrow \exists c \in (a, b)$ כך ש

$$P(b) - P(a) = (b - a)P'(c)$$

$$\Rightarrow \alpha b^2 + \beta b + \gamma - \alpha a^2 - \beta a - \gamma = (b - a)(2\alpha c + \beta)$$

$$\Rightarrow \alpha(b^2 - a^2) + \beta(b - a) = (b - a)(2\alpha c + \beta)$$

$$\Rightarrow \alpha(b + a)(b - a) + \beta(b - a) = (b - a)(2\alpha c + \beta)$$

נחלק אגף השמאל ואגף הימין בגורם משותף של $(b - a)$ ונקבל:

$$\alpha(b + a) + \beta = 2\alpha c + \beta \Rightarrow \alpha(b + a) = 2\alpha c \Rightarrow c = \frac{b + a}{2}.$$

שאלה 84

נוכח $f(7) \leq 62$:

לפי משפט לגרנז', קיימת $c \in [1, 7]$ כך ש-

(1*)

$$\frac{f(7) - f(1)}{7 - 1} = f'(c) \leq 7 \Rightarrow \frac{f(7) - f(1)}{6} \leq 7 \Rightarrow f(7) - 20 \leq 42 \Rightarrow f(7) \leq 62.$$

נוכח $f(7) \geq 54$:

לפי משפט לגרנז', קיימת $c \in [7, 9]$ כך ש-

(2*)

$$\frac{f(9) - f(7)}{9 - 7} = f'(c) \leq 7 \Rightarrow \frac{f(9) - f(7)}{2} \leq 7 \Rightarrow 68 - f(7) \leq 14 \Rightarrow 68 \leq 14 + f(7) \Rightarrow 54 \leq f(7).$$

לפיכך לפי (1*) ו- (2*):

$$54 \leq f(7) \leq 62.$$

שאלה 85 נתון כי $|f'(x)| \leq 5$ ו"א $-5 \leq f'(x) \leq 5$.

נוכח $f(4) \leq 20$:

לפי משפט לגרנז', קיימת $c \in [2, 4]$ כך ש-

$$\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = f'(c) \leq 5 \Rightarrow \frac{f(4) - 10}{2} \leq 5 \Rightarrow f(4) - 10 \leq 10 \Rightarrow f(4) \leq 20. \quad (1*)$$

נוכח $f(4) \geq 0$:

לפי משפט לגרנז', קיימת $c \in [2, 4]$ כך ש-

$$\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = f'(c) \geq -5 \Rightarrow \frac{f(4) - 10}{2} \geq -5 \Rightarrow f(4) - 10 \geq -10 \Rightarrow f(4) \geq 0. \quad (1*)$$

לפיכך לפי (1*) ו- (1*):

$$0 \leq f(4) \leq 10.$$

שאלה 86 נתון:

$f(-3) = 2$ ו- $f'(x) \leq 4$ לכל x . לפי משפט לגרנז' קיים $c \in (-3, 0)$ כך ש-

$$\frac{f(0) - f(-3)}{0 - (-3)} = f'(c). \quad (\#1)$$

נתון כי $f'(c) \leq 4$. נציב (#1):

$$\frac{f(0) - f(-3)}{3} \leq 4.$$

נציב $f(-3) = 2$ ונקבל

$$\frac{f(0) - 2}{3} \leq 4 \Rightarrow f(0) - 2 \leq 12 \Rightarrow f(0) \leq 14.$$

שאלה 87 נתון:

$$f(-2) = 5 \text{ ו- } f'(x) \leq 3 \text{ לכל } x.$$

לפי משפט לגרנז' קיים $c \in (-2, 1)$ כך ש-

$$\frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = f'(c) . \quad (\#1)$$

נתון כי $f'(c) \leq 3$. נציב (#1):

$$\frac{f(1) - f(-2)}{3} \leq 3 .$$

נציב $f(-2) = 5$ ונקבל

$$\frac{f(1) - 5}{3} \leq 3 \quad \Rightarrow \quad f(1) - 5 \leq 9 \quad \Rightarrow \quad f(1) \leq 14 .$$

לכן מצאנו כי

$$f(1) \leq 14$$

שאלה 88

(א) צריך להוכיח:

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

$\ln(x)$ רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה ב- (a, b) לכל $0 < a < b$. לכן לפי משפט לגרנז' קיימת $c \in [a, b]$ כך ש-
ז"א $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{(b-a)}{c} .$$

שים לב $0 < a < c < b$ כך ש-

$$\frac{(b-a)}{b} < \frac{(b-a)}{c} < \frac{(b-a)}{a} ,$$

ולכן

$$\frac{(b-a)}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{(b-a)}{a} .$$

(ב) צריך להוכיח:

$$(0 < a < b < \frac{\pi}{2}) \quad \frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan(b) - \tan(a) < \frac{b-a}{\cos^2 b}$$

$\tan(x)$ רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה ב- (a, b) לכל $0 < a < b < \pi/2$. לכן לפי משפט לגרנז' קיימת $c \in [a, b]$ כך ש-
ז"א $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

$$\tan(b) - \tan(a) = (b-a) \frac{1}{\cos^2 c} .$$

שים לב $0 < a < c < b < \frac{\pi}{2}$ והפונקציה $\cos x$ מונוטונית \downarrow ממש בקטע זה, ולכן

$$\cos a > \cos c > \cos b .$$

$\cos x$ חיובי בקטע $[0, \pi/2]$ אז

$$\cos^2 a > \cos^2 c > \cos^2 b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\cos^2 a} < \frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 b} .$$

לכן נקבל

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan(b) - \tan(a) = \frac{b-a}{\cos^2 b} .$$

צריך להוכיח:

(ג)

$$.(a > 1) \quad a \cdot 2^{a-1} < 3^a - 2^a < a \cdot 3^{a-1}$$

$a > 1$ רציפה בכל x וגזירה בכל x , ובפרט בקטע $[2, 3]$. לכן לפי משפט לגרנז' קיימת $c \in (2, 3)$ כך ש-

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = f'(c) \quad \Rightarrow \quad 3^a - 2^a = a \cdot c^{a-1} . \quad (\#)$$

שים לב, עבור $c \in (2, 3)$ ו- $a > 1$, $a \cdot 2^{a-1} < a \cdot c^{a-1} < a \cdot 3^{a-1}$. נציב $3^a - 2^a = a \cdot c^{a-1}$ מביטוי (#) ונקבל

$$a \cdot 2^{a-1} < 3^a - 2^a < a \cdot 3^{a-1} .$$

צריך להוכיח:

(ד)

$$(x > 0) \quad \frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$$

לפי משפט לגרנז' קיימת $c \in (0, x)$ כך ש-

$$\frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} = \arctan(c)' = \frac{1}{1+c^2}$$

ז"א

$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{1}{1+c^2} .$$

נכפיל ב- x :

$$\arctan x = \frac{x}{1+c^2} . \quad (\#1)$$

בגלל ש- $0 < c < x$ אז

$$\frac{x}{1+c^2} > \frac{x}{1+x^2} , \quad (\#2)$$

ו-

$$\frac{x}{1+c^2} < x . \quad (\#3)$$

לכן, מ (#2) ו- (#3) נקבל

$$\frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+c^2} < x . \quad \text{(#4)}$$

לפי (#1) נציב $\arctan x$ ב- $\frac{x}{1+c^2}$ ונקבל

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x .$$

(ה) צריך להוכיח:

$$\sin 73^\circ - \sin 28^\circ < \frac{\pi}{4}$$

נעבר לרדיאנים:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ רדיאן}$$

לכן

$$28^\circ = \frac{28\pi}{180} , \quad 73^\circ = \frac{73\pi}{180} .$$

לכן

$$\sin(28^\circ) = \sin\left(\frac{28\pi}{180}\right) , \quad \sin(73^\circ) = \sin\left(\frac{73\pi}{180}\right) .$$

לכן צריך להוכיח כי

$$\sin\left(\frac{73\pi}{180}\right) - \sin\left(\frac{28\pi}{180}\right) < \frac{\pi}{4} .$$

נקח קטע $\left[\frac{28\pi}{180}, \frac{73\pi}{180}\right]$. $f(x)$ רציפה בקטע הזה, וגזירה בקטע הפתוח, לכן קיים c כך ש $\frac{28\pi}{180} < c < \frac{73\pi}{180}$,

$$\sin\left(\frac{73\pi}{180}\right) - \sin\left(\frac{28\pi}{180}\right) = \cos c \cdot \left(\frac{73\pi}{180} - \frac{28\pi}{180}\right)$$

$$0 < \cos c < 1 \text{ ו } \frac{73\pi}{180} - \frac{28\pi}{180} < \frac{\pi}{4} . \quad \text{ז"א}$$

$$\sin(73^\circ) - \sin(28^\circ) < \frac{\pi}{4} .$$

(ו) צריך להוכיח:

$$| \sin x - \sin y | \leq | x - y | \text{ לכל } x, y \in \mathbb{R}$$

נגדיר $f(x) = \sin x$. f רציפה בכל x וגזירה לכל x . לכן לפי משפט לגרנז', לכל x, y $y > x$ קיימת $c \in [x, y]$ כך ש-

$$\frac{\sin y - \sin x}{y - x} = \sin'(c) = \cos c \quad \Rightarrow \quad \sin y - \sin x = (y - x) \cdot \cos c .$$

נקח את הערך מוחלט ונקבל

$$|\sin y - \sin x| = |(y - x) \cdot \cos c| = |y - x| \cdot |\cos c| .$$

או שקול

$$|\sin x - \sin y| = |x - y| \cdot |\cos c| .$$

$\cos c$ חסומה: $-1 \leq \cos c \leq 1$ אז $0 \leq |\cos c| \leq 1$. לכן

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y| .$$

שאלה 89 נגדיר $f(x) = \ln x$. שים לב $f(x)$ רציפה בקטע $[x, y]$ וגזירה בקטע (x, y) . לכן לפי משפט לגרנז' ??, קיים $c \in (x, y)$ כך ש

$$f(y) - f(x) = f'(c) \cdot (y - x) .$$

ז"א

$$\ln y - \ln x = \frac{1}{c} \cdot (y - x) \quad \Rightarrow \quad \ln x - \ln y = \frac{1}{c} \cdot (x - y) \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{x}{y} = \frac{x - y}{c} . \quad (\#)$$

שים לב $0 < c < y$ $\Leftrightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{c}$, לכן

$$\frac{y - x}{y} < \frac{y - x}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{x - y}{y} > \frac{x - y}{c} .$$

לכן לפי (#) נקבל

$$\ln \frac{x}{y} < \frac{x - y}{y} .$$

שים לב $0 < x < c$ $\Leftrightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$, לכן

$$\frac{y - x}{c} < \frac{y - x}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{x - y}{c} > \frac{x - y}{x} .$$

לכן לפי (#)

$$\ln \frac{x}{y} > \frac{x - y}{x} .$$

שאלה 90 יהי $h(x) := f(x) - g(x)$. לפי (#2), $h'(x) > 0$ לכל $x \in (a, b)$, אז לפי משפט לגרנז' ??, $h(x)$ עולה מונוטונית. לכן

$$h(n) > h(m) \quad \Leftrightarrow \quad n > m \quad \forall m, n < c . \quad (\#4)$$

אבל $h(c) = 0$, לכן

$$h(x) < 0 \quad \forall x < c . \quad (\#5)$$

ומכאן

$$f(x) - g(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) > f(x) \quad \forall x < c . \quad (\#6)$$

שאלה 91 יהי $h(x) := f(x) - g(x)$. לפי (1*),

$$h(a) = 0. \quad (4*)$$

לפי (2*),

$$h'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b). \quad (5*)$$

לכל $x \in (a, b)$, $x < c$. אז לפי משפט לגרנז' ??, $h(x)$ יורדת מונוטונית. לכן

$$h(n) < h(m) \Leftrightarrow n > m \quad \forall m, n < (a, b). \quad (6*)$$

אבל לפי (4*) $h(a) = 0$, לכן

$$h(x) < 0 \quad \forall a < x \leq b. \quad (7*)$$

ומכאן

$$f(x) - g(x) < 0 \Rightarrow g(x) > f(x) \quad \forall x \in (a, b]. \quad (8*)$$

שאלה 92 נגדיר

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 25x + 8.$$

שים לב

$$f(0) = 8, \quad f(-1) = -25,$$

אז לפי משפט ערך ביניים ??, קיימת לפחות נקודה אחת שבה הפונקציה מקבלת הערך 0. נניח שקיימת יותר מנקודה אחת, a, b , שבהן

$$f(a) = f(b) = 0.$$

$f(x)$ פולינום ולכן היא רציפה וגזירה בכל x . לכן לפי משפט רול ??, קיים נקודה $c \in (a, b)$ כל ש-

$$f'(c) = 0. \quad (\#)$$

שים לב,

$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 25$$

לכן אם (#) מתקיים,

$$3c^2 - 14c + 25 = 0 \Rightarrow c = \frac{7 \pm \sqrt{26}i}{3}$$

סתירה. לכן אין יותר מפתרון אחד.

שאלה 93 פונקציה $f(x) = \arctan(x)$ היא אלמנטרית ומוגדרת לכל x ממשי. לכן היא רציפה וגזירה לכל x ממשי ולכן מקיימת את תנאיי משפט לגרנז' ?? עבור גל קטע $[a, b]$. לכן קיים ערך c מקטע זה כך ש-

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

מכאן

$$\frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} = |f'(c)| \quad (**)$$

שים לב,

$$f'(x) = \frac{2}{1+4x^2}$$

ולכן לפי (**),

$$\frac{|\arctan(2b) - \arctan(2a)|}{|b-a|} = \frac{2}{1+4c^2} \leq 2$$

מש"ל.

שאלה 94

נתון:

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ב $[a, b]$ וגזירה ב (a, b) .

$$f(a) = f(b) = 0$$

צריך להוכיח:

$$f(c) + f'(c) = 0$$

הוכחה:

נגדיר $g(x) = e^x f(x)$.
 $f(x)$ רציפה ב $[a, b]$ וגזירה ב (a, b) , ו e^x רציפה וגזירה לכל x . לכן $g(x)$ רציפה ב $[a, b]$ וגזירה ב (a, b) .

$$f(a) = f(b) = 0 \text{ (נתון) לכן } g(a) = e^a f(a) = 0, g(b) = e^b f(b) = 0, \text{ ז"א}$$

$$g(a) = g(b) = 0.$$

לפי משפט רול קיימת $c \in (a, b)$ כך ש $g'(c) = 0$. ז"א

$$e^c f(c) + e^c f'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^c (f(c) + f'(c)) = 0$$

$$e^c > 0 \text{ לכל } c \text{ ממשי, לכן } f(c) + f'(c) = 0.$$

שאלה 95

נגדיר $f(x) = e^x + x$. נניח כי ל- $f(x)$ יש 2 שורשים. אז לפי רול קיימת c כך ש- $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = e^x + 1.$$

לא קיימת נקודה שבה הנגזרת מתאפסת, בסתירה לכך שקיימת c שבה $f'(c) = 0$.

שאלה 96

א) נגדיר

$$f(x) = e^x - (1+x)^2.$$

נוכיח כי ל- $f(x)$ יש שלושה שורשים לכל היותר, דרך השלילה.

נניח שיש ל- $f(x)$ ארבעה שורשים.

אם היו ארבעה שורשים אזי לפי רול הנגזרת הראשונה מתאפסת לפחות שלוש פעמים.
שוב לפי רולהנגזרת השנייה תתאפס לפחות פעמיים.
הנגזרת השנייה הינה

$$f''(x) = e^x - 2 .$$

ז"א הנגזרת מתאפסת רק פעם אחת, בסתירה לכך שהנגזרת מתאפסת פעמיים. לאור זאת אין ארבעה שורשים.

(ב) נגדיר

$$f(x) = e^x - (1+x)^2 .$$

$$f(-2) = \frac{1}{e^2} - 1 < 0 , \quad f(-1) = \frac{1}{e} > 0 , \quad f(0) = -1 < 0 , \quad f(3) = e^3 - 16 > 0 .$$

לכן לפי משפט ערך הביניים:

$$f(c_1) = 0 \text{ שבה } c_1 \in (-2, -1) \text{ קיימת}$$

$$f(c_2) = 0 \text{ שבה } c_2 \in (-1, 0) \text{ קיימת}$$

$$f(c_3) = 0 \text{ שבה } c_3 \in (0, 3) \text{ קיימת}$$

שאלה 97 נגדיר $g(x) = f(x)^2 f(1-x)$

$$g(0) = f(0)^2 \cdot f(1) = 0 , \quad g(1) = f(1)^2 f(0) = 0 .$$

לכן לפי משפט רול קיימת $c \in [0, 1]$ כך ש- $g'(c) = 0$.

$$g'(x) = 2f(x)f'(x)f(1-x) + f(x)^2 f'(1-x) \cdot (-1) = f(x) [2f'(x)f(1-x) - f(x)f'(1-x)] .$$

$$g'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(c) [2f'(c)f(1-c) - f(c)f'(1-c)] = 0$$

לכל $c \in (0, 1)$ נתון כי $f(c) > 0$. לכן $2f'(c)f(1-c) - f(c)f'(1-c) = 0$. לכן

$$\frac{f'(1-c)}{f(1-c)} = \frac{2f'(c)}{f(c)} .$$

שאלה 98

(א) הגדרה: $F(x)$ פונקציה קדומה של פונקציה $f(x)$ אם $F'(x) = f(x)$.
דוגמאות:

$$F(x) = x^2 \Leftarrow (x^2)' = 2x \text{ פונקציה קדומה ל- } f(x) = 2x .$$

$$F(x) = a^x \Leftarrow (a^x)' = a^x \ln a \text{ פונקציה קדומה ל- } f(x) = a^x \ln a .$$

(ב)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{3x} & (1) \quad (ג) \\ F(x) &= \frac{1}{3} e^{3x} \end{aligned}$$

$$f(x) = \cos(5x + 6) \quad (2)$$

$$F(x) = \frac{1}{5} \sin(5x + 6)$$

$$m \neq 0, f(x) = (mx + n)^{1/3} \quad (3)$$

$$F(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{m} \cdot (mx + n)^{4/3}$$

$$(n \neq -1, a \neq 0) f(x) = (ax + b)^n \quad (4)$$

$$F(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax + b)^{n+1}}{n + 1}$$

■

שאלה 99

(א)

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+2)^2}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{x^2 + 4x + 4}{\sqrt[3]{x}} dx \\ &= \int (x^{5/3} + 4x^{2/3} + 4x^{-1/3}) dx \\ &= \frac{3}{8}x^{8/3} + \frac{12}{5}x^{5/3} + 6x^{2/3} + C \end{aligned}$$

(ב)

$$\int e^{-3x+2} dx = -\frac{1}{3}e^{-3x+2} + C$$

(ג)

$$\begin{aligned} \int \frac{3^{2x} + 5^{x+1}}{4^x} dx &= \int \left(\left(\frac{9}{4} \right)^x + 5 \cdot \left(\frac{5}{4} \right)^x \right) dx \\ &= \frac{\left(\frac{9}{4} \right)^x}{\ln \left(\frac{9}{4} \right)} + 5 \cdot \frac{\left(\frac{5}{4} \right)^x}{\ln \left(\frac{5}{4} \right)} + C \end{aligned}$$

(ד)

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x+1} dx &= \int \frac{x+1-1}{x+1} dx \\ &= x - \ln|x+1| + C \end{aligned}$$

(ה)

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \frac{(1 - \cos(2x))}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right) + C \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2 + 2} dx \\
 &= \int \frac{1}{t^2 + 2} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) + C \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + C
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 12x}} dx &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x}} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2 - 9}} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t &= x - 3 \\
 t' &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{t^2 - 9}} dt \\
 &\stackrel{\text{נוסחה 11 בדף הנוסחאות}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| t + \sqrt{t^2 - 9} \right| + C \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x} \right| + C
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{12x - 2x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{6x - x^2}} dx \\
 &= \int \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{-(x^2 - 6x)}} dx \\
 &= \int \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{-((x-3)^2 - 9)}} dx \\
 &= \int \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{9 - (x-3)^2}} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t &= x - 3 \\
 t' &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{9 - t^2}} dt \\
 &\stackrel{\text{נוסחה 10 בדף הנוסחאות}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \left(\frac{t}{3} \right) + C \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \left(\frac{x-3}{3} \right) + C
 \end{aligned}$$

(4)

$$\int \sqrt[3]{2-5x} dx$$

$$\begin{aligned}t &= 2 - 5x \\ t' &= -5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{5}\int t^{1/3}dx &= -\frac{1}{5}\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+C \\ &= -\frac{3}{20}(2-5x)^{4/3}+C\end{aligned}$$

⤵

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$$

$$\begin{aligned}t &= \sqrt{x} \\ t' &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2-1}{t+1} \cdot 2t \cdot dt &= 2\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right)+C \\ &= 2\left(\frac{x^{3/2}}{3}-\frac{x}{2}\right)+C\end{aligned}$$

⌘

$$\begin{aligned}\int (\sin x + \cos x)^2 \, dx &= \int (\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x) \, dx \\ &= \int (1 + 2 \sin x \cos x) \, dx \\ &= \int (1 + \sin(2x)) \, dx \\ &= x - \frac{1}{2} \cos(2x) + C \, .\end{aligned}$$

⤵

$$\begin{aligned}\int \sin(3x) \cos(5x) \, dx &= \int \frac{\sin(8x) - \sin(2x)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{8} \cos(8x) + \frac{1}{2} \cos(2x) \right) + C\end{aligned}$$

⤵

$$\begin{aligned}\int \cot^2(x) \, dx &= \int \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - 1 \right) \, dx \\ &= -\cot(x) - x + C\end{aligned}$$

⤵

$$\int \frac{(2x+1)}{x^2+x+1}dx$$

$$\begin{aligned}t &= x^2+x+1 \\ t' &= 2x+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{t'}{t} dx &= \int \frac{1}{t} dt \\ &= \ln |t| + C \\ &= \ln |x^2 + x + 1| + C .\end{aligned}$$

■

שאלה 100

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx & \quad \textbf{(א)} \\ u &= \ln x \\ v' &= 1 \\ u' &= \frac{1}{x} \\ v &= x\end{aligned}$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C$$

■

$$\int 2x \ln x \, dx \quad \textbf{(ב)}$$

הנוסחה של אינטגרציה בחלקים:

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

עבור u ו v' נבחר:

$$u = \ln x , \quad v' = 2x , \quad u' = \frac{1}{x} , \quad v = x^2$$

כך ש

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx ,$$

$$\int 2x \ln x \, dx = x^2 \ln x - \int x \, dx = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + C$$

■

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin(2x) \, dx & \quad \textbf{(ג)} \\ u &= x^2 \\ v' &= \sin(2x) \\ u' &= 2x \\ v &= -\frac{1}{2} \cos(2x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin(2x) \, dx &= x^2 \left(-\frac{1}{2} \cos(2x) \right) - \int \left(-\frac{1}{2} \cos(2x) \right) \cdot 2x \, dx \\ &= -\frac{x^2}{2} \cos(2x) + \int x \cos(2x) \, dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u &= x \\ v' &= \cos(2x) \\ u' &= 1 \\ v &= \frac{1}{2} \sin(2x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -\frac{x^2}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} x \sin(2x) - \frac{1}{2} \int \sin(2x) \, dx \\ &= -\frac{x^2}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} x \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + C \, .\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}\int x^2 \arctan(x) \, dx & \quad \textcolor{teal}{(7)} \\ u &= \arctan(x) \\ v' &= x^2 \\ u' &= \frac{1}{1+x^2} \\ v &= \frac{x^3}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x^2 \arctan(x) &= \frac{x^3}{3} \arctan(x) - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{x^2+1} \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \arctan(x) - \frac{1}{3} \int \left(x - \frac{x}{x^2+1} \right) \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \arctan(x) - \frac{1}{3} \int x \, dx + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \arctan(x) - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} \ln |x^2+1| + C \, .\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}\int 9x^2 e^{3x} \, dx & \quad \textcolor{teal}{(8)} \\ u &= 9x^2 \\ v' &= e^{3x} \\ u' &= 18x \\ v &= \frac{e^{3x}}{3}\end{aligned}$$

$$\int 9x^2 e^{3x} \, dx = 3x^2 e^{3x} - \int 6x e^{3x} \, dx$$

$$\begin{aligned}u &= 6x \\ v' &= e^{3x} \\ u' &= 6 \\ v &= \frac{e^{3x}}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int 9x^2 e^{3x} dx &= 3x^2 e^{3x} - 2xe^{3x} + \int 2e^{3x} dx \\ &= 3x^2 e^{3x} - 2xe^{3x} + \frac{2}{3}e^{3x} + C .\end{aligned}$$

■

שאלה 101

$$\int \frac{(x+1)}{x(x-3)} dx \quad (\aleph)$$

$$\frac{(x+1)}{x(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} , \quad A(x-3) + Bx = x+1$$

$$B = \frac{4}{3} , A = -\frac{1}{3}$$

$$\int \left(-\frac{1}{3x} + \frac{4}{3(x-3)} \right) dx = -\frac{1}{3} \ln|x| + \frac{4}{3} \ln|x-3| + C$$

■

$$\int \frac{2x^2 + x + 3}{(x+2)(x^2 + x + 1)} dx \quad (\beth)$$

$$\frac{2x^2 + x + 3}{(x+2)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2 + x + 1} , \quad A(x^2 + x + 1) + (Bx+C)(x+2) = 2x^2 + x + 3$$

$$x^2 : , A + B = 2 , \quad x : A + 2B + C = 1 , \quad x^0 : A + 2C = 3$$

$$\begin{aligned}B &= -1 , A = 3 \\ C &= 0\end{aligned}$$

$$\int \left(\frac{3}{x+2} - \frac{x}{x^2 + x + 1} \right) dx = 3 \ln|x+2| - \int \frac{x}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx$$

$$\begin{aligned}t &= x + \frac{1}{2} \\ t' &= 1\end{aligned}$$

$$= 3 \ln|x+2| - \int \frac{t - \frac{1}{2}}{t^2 + \frac{3}{4}} dx$$

$$= 3 \ln|x+2| - \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + \frac{3}{4}} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}} dt$$

$$= 3 \ln|x+2| - \frac{1}{2} \ln|t^2 + \frac{3}{4}| + \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right) + C$$

$$= 3 \ln|x+2| - \frac{1}{2} \ln|x^2 + x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

■

$$\int \frac{5x^3 - 17x^2 + 18x - 5}{(x-1)^3(x-2)} dx \quad \text{ⓐ}$$

$$\frac{5x^3 - 17x^2 + 18x - 5}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x-2}$$

$$A(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)^2(x-2) + D(x-1)^3 = 5x^3 - 17x^2 + 18x - 5$$

$$A = -1$$

$$B = 0$$

$$C = 2$$

$$= \int \frac{-1}{(x-1)^3} dx + 2 \int \frac{1}{x-1} dx + 3 \int \frac{1}{x-2} dx$$

$$= \frac{1}{2(x-1)^2} + 2 \ln|x-1| + 3 \ln|x-2| + C$$

■

$$\int \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} dx = \int \left(1 + \frac{4x-3}{x^2 - 4x + 3} \right) dx = x + \int \frac{4x-3}{x^2 - 4x + 3} dx = x + \int \frac{4x-3}{(x-1)(x-3)} dx \quad \text{ⓑ}$$

$$\frac{4x-3}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}, \quad A(x-3) + B(x-1) = 4x-3.$$

$$A = -\frac{1}{2}$$

$$B = \frac{9}{2}$$

$$x + \int \left(-\frac{1}{2(x-1)} + \frac{9}{2(x-3)} \right) dx = x - \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{9}{2} \ln|x-3| + C$$

■

$$\int \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 6x + 5} dx \quad \text{ⓐ}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 6x + 5 \overline{) x^3 + x^2} \\ \underline{x^2 - 6x + 5} \\ x^3 + x^2 \\ \underline{x^3 - 6x^2 + 5x} \\ 7x^2 - 5x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x + 7 \\ x^2 - 6x + 5 \overline{) x^3 + x^2} \\ \underline{x^3 - 6x^2 + 5x} \\ 7x^2 - 5x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37x - 35 \\ 7x^2 - 42x + 35 \\ \underline{7x^2 - 42x + 35} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}=x+7+\frac{37x-35}{x^2-6x+5}=x+7+\frac{37x-35}{(x-5)(x-1)}$$

$$\frac{37x-35}{(x-5)(x-1)}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x-5)}{(x-5)(x-1)}$$

$$A(x-1)+B(x-5)=37x-35$$

נציב $x=1$:

$$-4B=2 \quad \Rightarrow \quad B=-\frac{1}{2}.$$

נציב $x=5$:

$$4A=150 \quad \Rightarrow \quad A=\frac{75}{2}.$$

לכן

$$\frac{37x-35}{(x-5)(x-1)}=\frac{75}{2(x-5)}-\frac{1}{2(x-1)}$$

ובסה"כ

$$\frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}=x+7+\frac{75}{2(x-5)}-\frac{1}{2(x-1)}.$$

לכן

$$\int \frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5} dx = \int \left(x+7+\frac{75}{2(x-5)}-\frac{1}{2(x-1)} \right) dx = \frac{x^2}{2}+7x+\frac{75}{2} \ln|x-5|-\frac{1}{2} \ln|x-1|.$$

■

$$\int \frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x} dx \quad \text{¶}$$

$$x^3+x \overline{) 3x^3+x^2+5x+1}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ x^3+x \overline{) 3x^3+x^2+5x+1} \\ \underline{3x^3+ +3x} \\ x^2+2x+1 \end{array}$$

$$\frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x}=3+\frac{x^2+2x+1}{x^3+x}$$

$$\frac{x^2+2x+1}{x^3+x}=\frac{x^2+2x+1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)}$$

$$A(x^2+1)+(Bx+C)x=x^2+2x+1$$

x^2 :	$A+B=1$
x :	$C=2$
x^0 :	$A=1$

לכן $C = 2, B = 0, A = 1$ ונקבל

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + x} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2 + 1}$$

ובסה"כ

$$\frac{3x^3 + x^2 + 5x + 1}{x^3 + x} = 3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2 + 1}$$

לכן

$$\int \frac{3x^3 + x^2 + 5x + 1}{x^3 + x} dx = \int \left(3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2 + 1} \right) dx = 3x + \ln|x| + 2 \arctan(x) + C$$

■

שאלה 102

$$\int \frac{1}{3 + \sin x} dx \quad (\text{א})$$

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$t' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(1 + t^2)$$

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \quad (\text{זהות})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3 + \sin x} dx &= \int \frac{1}{3 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} t' dx \\ &= \int \frac{2}{3(1+t^2) + 2t} dt \\ &= \int \frac{2}{3 + 3t^2 + 2t} dt \\ &= \frac{2}{3} \cdot \int \frac{1}{t^2 + \frac{2}{3}t + 1} dt \\ &= \frac{2}{3} \cdot \int \frac{1}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}} dt . \end{aligned}$$

$$z = t + \frac{1}{3}$$

$$z'_t = 1$$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3} \cdot \int \frac{1}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}} dt &= \frac{2}{3} \cdot \int \frac{1}{z^2 + \frac{8}{9}} dz \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{8}} \arctan \left(\frac{3}{\sqrt{8}} z \right) + C \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{8}} \arctan \left(\frac{3 \left(t + \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{8}} \right) + C \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{8}} \arctan \left(\frac{3 \left(\tan \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{8}} \right) + C .
\end{aligned}$$

■

$$\int \frac{1}{1 + 5 \cos x} dx \quad \text{ב)}$$

$$t = \tan \left(\frac{x}{2} \right)$$

$$t' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{x}{2} \right)} = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} (1 + t^2)$$

$$\text{(זהות)} \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1 + 5 \cos x} dx &= \int \frac{1}{1 + 5 \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right)} \cdot \left(\frac{2}{1 + t^2} \right) \cdot t' dx \\
&= \int \frac{2}{1 + t^2 + 5(1 - t^2)} dt \\
&= \int \frac{2}{6 - 4t^2} dt \\
&= \frac{-1}{2} \int \frac{1}{t^2 - \frac{3}{2}} dt .
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{t^2 - \frac{3}{2}} = \frac{1}{\left(t + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \left(t - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)} = \frac{A}{t + \sqrt{\frac{3}{2}}} + \frac{B}{t - \sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$A \left(t - \sqrt{\frac{3}{2}} \right) + B \left(t + \sqrt{\frac{3}{2}} \right) = 1$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}} , \quad B = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{2} \int \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\left(t - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)} - \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\left(t + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)} \right) dt &= -\frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| t - \sqrt{\frac{3}{2}} \right| + \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| t + \sqrt{\frac{3}{2}} \right| \\
&= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{t + \sqrt{\frac{3}{2}}}{t - \sqrt{\frac{3}{2}}} \right| \\
&= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{\frac{3}{2}}}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{\frac{3}{2}}} \right| + C
\end{aligned}$$

■

ג) $\int \frac{1}{\sin x + 2 \cos x + 6} dx$. זהויות של הצבה אוניברסלית:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) , \quad t' = \frac{1}{2}(1+t^2) , \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} , \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x + 2 \cos x + 6} dx &= \int \frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) + 2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) + 6} \cdot \left(\frac{2}{1+t^2}\right) \cdot t' dx \\
&= \int \frac{2}{2t + 2 - 2t^2 + 6 + 6t^2} dt \\
&= \int \frac{2}{8 + 2t + 4t^2} dt \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + \frac{t}{2} + 2} dt \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}} dt \\
z &= t + \frac{1}{4} , \quad z'_t = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int \frac{1}{z^2 + \frac{31}{16}} dz &= \frac{1}{2} \frac{4}{\sqrt{31}} \arctan\left(\frac{4z}{\sqrt{31}}\right) + C \\
&= \frac{1}{2} \frac{4}{\sqrt{31}} \arctan\left(\frac{4t+1}{\sqrt{31}}\right) + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{31}} \arctan\left(\frac{4 \tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{\sqrt{31}}\right) + C
\end{aligned}$$

■

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx \quad (\text{א})$$

$$t = \sqrt{x}$$

$$t' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx &= \int \frac{t}{1+t^2} dx \\ &= \int \frac{t}{1+t^2} \cdot \frac{1}{t'} \cdot t' dx \\ &= \int \frac{t}{1+t^2} \cdot \frac{1}{t'} dt \\ &= \int \frac{t}{1+t^2} \cdot 2t dt \\ &= \int \frac{2t^2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{2(1+t^2-1)}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{2(1+t^2)-2}{1+t^2} dt \\ &= \int \left(\frac{2(1+t^2)}{1+t^2} - \frac{2}{1+t^2} \right) dt \\ &= \int \left(2 - \frac{2}{1+t^2} \right) dt \\ &= 2t - 2 \arctan t + C \\ &= 2\sqrt{x} - 2 \arctan \sqrt{x} + C . \end{aligned}$$

■

$$\int \frac{\sqrt{x+2}}{x} dx \quad (\text{ב})$$

$$t = \sqrt{x+2} , \quad t' = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{1}{2t}$$

$$x = t^2 - 2 \quad \Leftarrow \quad x + 2 = t^2 \Leftarrow$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{t}{t^2-2} dx &= \int \frac{t}{t^2-2} \cdot \frac{1}{t'} \cdot t' dx \\
&= \int \frac{t}{t^2-2} \cdot \frac{1}{t'} dt \\
&= \int \frac{t}{t^2-2} \cdot 2t dt \\
&= \int \frac{2t^2}{t^2-2} dt
\end{aligned}$$

השבר בתוך האינטגרל ניתן לרשום כשברים חלקיים:

$$\begin{aligned}
\frac{2t^2}{t^2-2} &= \frac{2(t^2-2+2)}{t^2-2} \\
&= \frac{2(t^2-2)+2}{t^2-2} \\
&= \frac{2(t^2-2)}{t^2-2} + \frac{4}{t^2-2} \\
&= 2 + \frac{4}{t^2-2} \\
&= 2 + \frac{4}{(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})}
\end{aligned}$$

$$\frac{4}{(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})} = \frac{A}{t+\sqrt{2}} + \frac{B}{t-\sqrt{2}} = \frac{A(t-\sqrt{2})+B(t+\sqrt{2})}{(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})}$$

$$\begin{aligned}
B = \sqrt{2} &\Leftarrow 2\sqrt{2}B = 4 \Leftarrow :t = \sqrt{2} \\
A = -\sqrt{2} &\Leftarrow -2\sqrt{2}A = 4 \Leftarrow :t = -\sqrt{2}
\end{aligned}$$

לכן

$$\frac{2t^2}{t^2-2} = 2 + \frac{\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}$$

והאינטגרל הופך ל

$$\begin{aligned}
\int \frac{2t^2}{t^2-2} dt &= \int \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}} \right) dt \\
&= 2t + \sqrt{2} \ln |t-\sqrt{2}| - \sqrt{2} \ln |t+\sqrt{2}| + C \\
&= 2\sqrt{x+2} + \sqrt{2} \ln |\sqrt{x+2} - \sqrt{2}| - \sqrt{2} \ln |\sqrt{x+2} + \sqrt{2}| + C
\end{aligned}$$

■

$$\int \frac{1+e^x}{(1-e^{2x})e^x} dx$$

⌘

$$t = e^x$$

$$t' = e^x = t$$

$$\int \frac{1+t}{(1-t^2)t} dx = \int \frac{1+t}{(1-t^2)t^2} \cdot t' dx = \int \frac{1+t}{(1-t^2)t^2} dt = \int \frac{1}{(1-t)t^2} dt$$

$$\frac{1}{(1-t)t^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t} = \frac{At^2 + B(1-t) + Ct(1-t)}{(1-t)t^2}$$

$$At^2 + B(1-t) + Ct(1-t) = 1$$

$$t=0 \rightsquigarrow B=1, \quad t=1 \rightsquigarrow A=1, \quad t=2 \rightsquigarrow 4A-B-2C=1 \Rightarrow C=1.$$

$$\int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} \right) dt = -\ln|1-t| - \frac{1}{t} + \ln|t| + C = -\ln|1-e^x| - \frac{1}{e^x} + x + C$$

■

שאלה 104

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx \quad (\aleph)$$

$$t = \sin x, \quad t' = \cos x$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2, \quad \cos^4 x = (1 - t^2)^2.$$

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx = \int t^4 (1-t^2)^2 t' dx$$

$$= \int t^4 (1-t^2)^2 dt$$

$$= \int (t^8 - 2t^6 + t^4) dt$$

$$= \frac{t^9}{9} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^5}{5} + C$$

$$= \frac{\sin^9 x}{9} - \frac{2\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

■

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx \quad (\beth)$$

$$\sin^2 x \cos^2 = (\sin x \cos x)^2 = \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2x, = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{8} (1 - \cos 4x)$$

$$\int \frac{1}{8} (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + C$$

$$\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C$$

■

$$\int \cos^6 x dx \quad \spadesuit$$

$$\begin{aligned} \cos^6 x &= (\cos^2 x)^3 \\ &= \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{8} (1 + 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x + \cos^3 2x) \\ &= \frac{1}{8} \left(1 + 3 \cos 2x + 3 \left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right) + \cos^3 2x\right) \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{8} \left(1 + 3 \cos 2x + 3 \left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right) + \cos^3 2x\right) dx = \frac{x}{8} + \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{16} x + \frac{3}{64} \sin 4x + \int \cos^3 2x dx$$

$$t = \sin 2x, \quad t' = 2 \cos 2x$$

$$\begin{aligned} &\frac{x}{8} + \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{16} x + \frac{3}{64} \sin 4x + \frac{1}{8} \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x dx \\ &= \frac{x}{8} + \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{16} x + \frac{3}{64} \sin 4x + \frac{1}{8} \int (1 - t^2) \frac{t'}{2} dx \\ &= \frac{x}{8} + \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{16} x + \frac{3}{64} \sin 4x + \frac{1}{16} \int (1 - t^2) dt \\ &= \frac{x}{8} + \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{16} x + \frac{3}{64} \sin 4x + \frac{1}{16} \int (1 - t^2) dt \\ &= \frac{x}{8} + \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{16} x + \frac{3}{64} \sin 4x + \frac{1}{16} \left(t - \frac{t^3}{3}\right) \\ &= \frac{5x}{16} + \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x + \frac{1}{16} \left(\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3}\right) \\ &= \frac{5x}{16} + \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x + \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{48} \\ &= \frac{5x}{16} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C \end{aligned}$$

■

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x \, dx$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2} \, , \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \, .$$

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx &= \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x \, dx \\ &= \int \frac{\sin^2 x}{4} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int (\sin^2 x + \sin^2 2x \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} + \sin^2 2x \cos 2x \right) \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} + \sin^2 2x \cos 2x \right) \, dx \\ &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) \, dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{16} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} \right) + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x \end{aligned}$$

$$t = \sin 2x \, , \quad t' = 2 \cos 2x$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} \right) + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x &= \frac{1}{16} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} \right) + \frac{1}{8} \int t^2 \frac{t'}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{16} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} \right) + \frac{1}{16} \int t^2 \, dt \\ &= \frac{1}{16} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} \right) + \frac{1}{16} \frac{t^3}{3} + C \\ &= \frac{1}{16} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} \right) + \frac{1}{16} \frac{\sin^3 2x}{3} + C \\ &= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C \end{aligned}$$