

פרק 4

אוטומט לא דטרמיניסטיים

4.1 מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה היוריסטית

מכונת טיורינג מרובת סרטים (ΜΤΜ"ס) היא הכללה של ΜΤ עם סרט יחיד. ההבדל הוא שלΜΤΜ"ס ישנו מספר סופי של סרטים, נניח $1 < k$ סרטים.



- לכל סרט יש ראש שלו.
- בתחילת העבודה הקלט w כתוב בתחילת הסרט הראשון וכל שאר הסרטים ריקים. הראשים בכל סרט מוצבאים על התא הראשון בסרט, והמכונה נמצאת במצב התחלתי q_0 .
- בכל צעד חישוב, לפי המצב הנוכחי ול- k התווים שמתוחת ל- k הראשים, המכונה מחליט לאיזה מצב לעבור, מה לכתוב מתחת לכל אחד מ- k הראשים ולאן להזיא את הראש בכל אחד מ- k סרטים.
- הראשים של הסרטים יכולים לזרז באופן בלתי- תלוי בהתאם לפונקציית המעברים של הΜΤΜ"ס.

4.2 מכונת טיורינג מרובת סרטים: הגדרה פורמלית

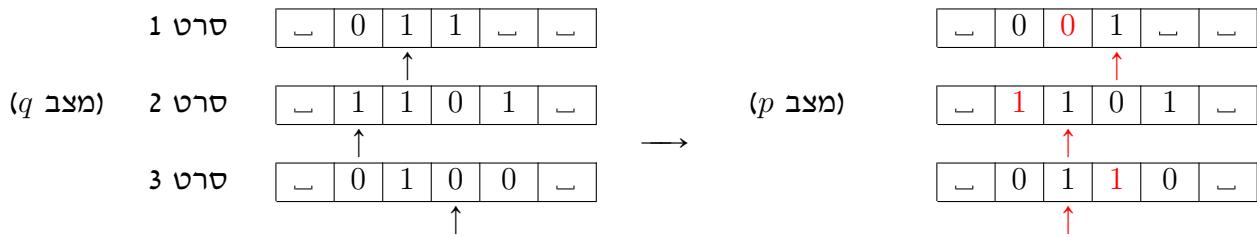
הגדרה 4.1 מכונת טיורינג מרובת סרטים

מכונת טיורינג מרובת סרטים היא שבייעה:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

כאשר $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{\text{rej}}, q_{\text{acc}}$ מוגדרים כמו ΜΤ עם סרט יחיד (ראו הגדרה 1.2).
ההבדל היחיד בין ΜΤ עם סרט יחיד לבין ΜΤΜ"ס הוא הפונקציית המעברים. עבור ΜΤΜ"ס הפונקציית המעברים היא מצורה הבא:

$$\delta_k : (Q \setminus \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$$

דוגמה 4.1

$$\delta_k \left(q, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left(p, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \\ L \end{pmatrix} \right).$$

4.3 קונפיגורציה של מטמ"ס

הכללה של קונפיגורציה של מ"ט עם סרט יחיד:

$$\begin{pmatrix} u_1 q \ v_1 \\ u_2 q \ v_2 \\ \vdots \\ u_k q \ v_k \end{pmatrix}$$

דוגמה 4.2

בנו מטמ"ס שמכריעת את השפה:

$$L_{w^R} = \{w = \{a, b\}^* \mid w = w^R\}.$$

כלומר שפת הפלינדרומים.

פתרון:

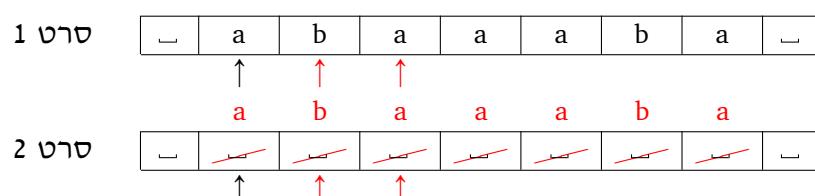
בנייה מ"ט עם שני סרטים:

תאoor המכונה:

נסמן M_2 המ"ט עם 2 סרטים שמכריעת את השפה L_{w^R} .

על הקלט $w = M_2$:

(1) מעתיקת את w לסרט 2.



(2) מזיהה את הראש בشرط 1 לתו הראשון ב- w ואת הראש בشرط 2 לתו האחרון ב- w .

(3) משווה בין התווים שמתוחת לראשים:

- אם התו שמתוחת לראש 1 הוא $\text{acc} \Leftarrow ___.$
- אם התווים שמתוחת לראשים שונים $\text{rej} \Leftarrow ___.rej$
- אחרת מזיהה את הראש בشرط 1 ימינה ואת הראש בشرط 2 שמאליה, וחוזרת לשלב (3).

הfonקציית המעברים של M_2 היא:

$$\begin{aligned}\delta\left(q_0, \begin{pmatrix} a \\ _ \end{pmatrix}\right) &= \left(q_0, \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}\right), \\ \delta\left(q_0, \begin{pmatrix} b \\ _ \end{pmatrix}\right) &= \left(q_0, \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}\right), \\ \delta\left(q_0, \begin{pmatrix} _ \\ _ \end{pmatrix}\right) &= \left(q_{\text{back}}, \begin{pmatrix} _ \\ _ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ L \end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

נשים לב כי הסיבוכיות זמן של המכונה עם שני סרטים, M_2 היא $O(|w|^2)$, כאשר w האורך של המילה.

כעת נבנה מ"ט עם סרט יחיד שמכריעה את השפה L_{W^R} .

תאור המכונה:

נסמן M_1 המכונה עם סרט יחיד שמכריע את השפה L_{w^R} .

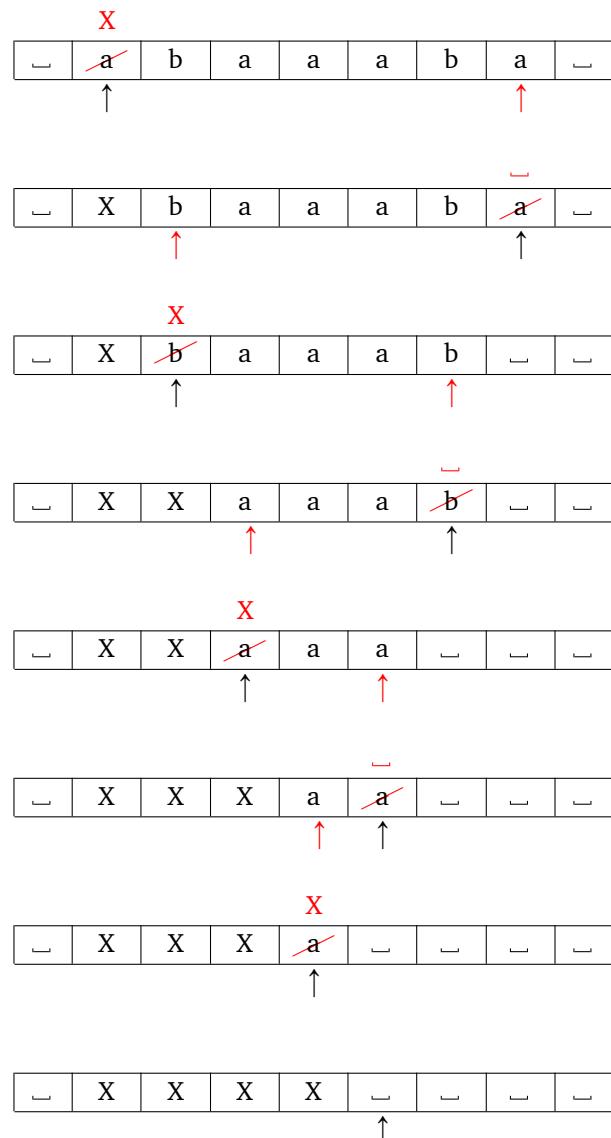
על הקלט w :

(1) אם התו שמתוחת לראש הוא $\text{acc} \Leftarrow M_1 ___ _$.

(2) זכרת את התו שמתוחת לראש ומוחקת אותו ע"י X .

(3) מזיהה את הראש ימינה עד התו הראשון משמאל ל- $___$.

- אם התו שמתוחת לראש הוא $X \text{acc} \Leftarrow ___ X$.
- אם התו שונה מהתו שזכרנו $\text{rej} \Leftarrow ___.$
- מוחקת את התו שמתוחת לראש ע"י $___$, מזיהה את הראש שמאליה עד התו הראשון מימין ל- X וחוזרת לשלב (1).



4.4 שיקולות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

מ"ט עם סרט יחיד היא מקרה פרטי של מטמ"ס.

משפט 4.1 שיקולות בין מטמ"ס למ"ט עם סרט יחיד

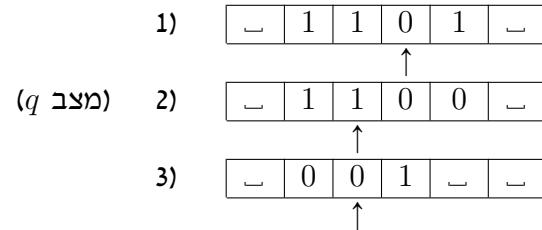
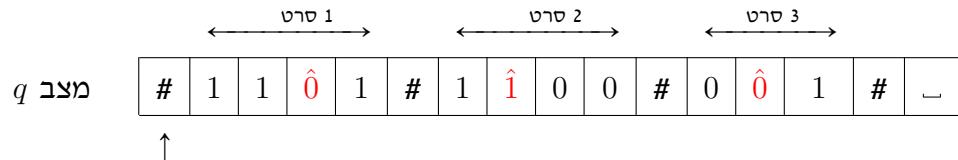
לכל מטמ"ס M קיימת מ"ט עם סרט יחיד M' השකולה לו M .

כלומר, לכל קלט $w \in \Sigma^*$:

- אם M מקבלת את w M' מקבלת את w .
- אם M דוחה את w M' דוחה את w .
- אם M לא עוצרת על w M' לא עוצרת על w .

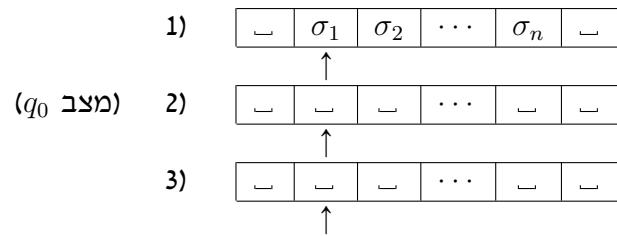
הוכחה:

בהתנון מטמ"ס $(Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q'_0, q'_{acc}, q'_{rej})$ עם סרטים, נבנה מ"ט עם סרט יחיד $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_k, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ השකולה לו M' באופן הבא:

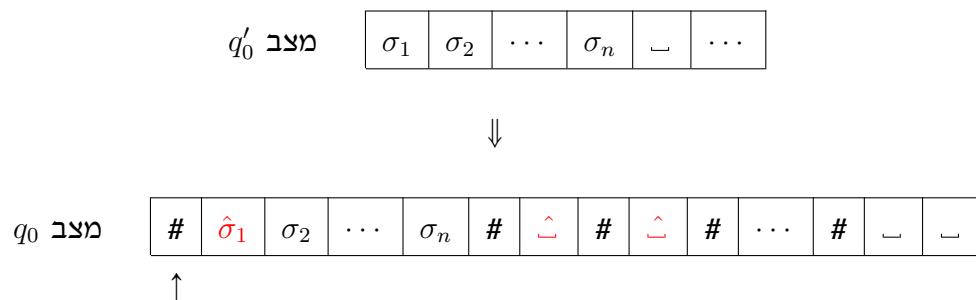
רעיון הבנייה:בhinתן קלט $w \in \Sigma^*$, M' תבצע "סימולציה" של ריצה M על w . M -ב M' -ב

- M' תשמור את התוכן של k הסרטים של M על הסרט, רק שהתוכן של סרט i יופיע בין $\#_i$ ל- $\#_{i+1}$.
- M' תשמור את המיקום של הראשים של M ע"י הכפלת הא"ב Γ .
- כלומר, לכל אות $\Gamma \in \alpha$, M' תשמור שתי אותיות α ו- $\hat{\alpha}$ ב- Γ' , כך ש- $\hat{\alpha}$ תסמן את התו שמתוחת בראש כל סרט.
- בכל צעד חישוב, M' סורקת את הסרט שלה משמאלי לيمין כדי ללמידה מהם התווים שמתוחת בראשים (התווים שמשמעותם ב- $\hat{\alpha}$).
- M' משתמש בפונקציית המעברים δ_k של M כדי לחשב את המעבר הבא.
- M' סורקת את הסרט שלה משמאלי לימין כדי לעדכן את הסרטים ואת המיקום הראשים בהם.

תאור הבנייה של M' 1) שלב האיתחולבhinתן קלט $w = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$, M' מתחילה את הקוניגורציה ההתחלתית של M על הסרט שלה. M -ב

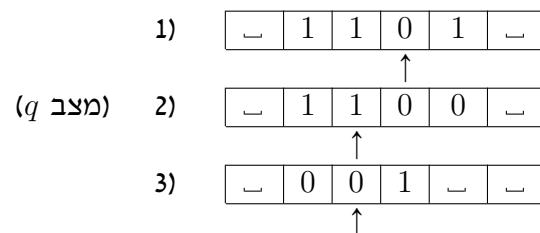


ב'- M'

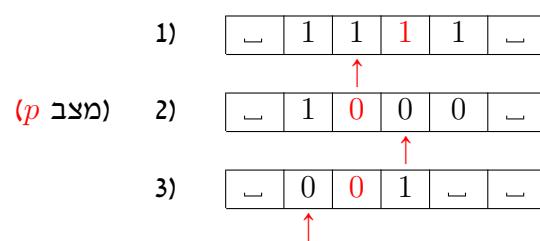


2) תאור צעד חישוב של M

M-ב



$$\delta_k \left(q, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left(p, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ R \\ L \end{pmatrix} \right)$$



M' ב-

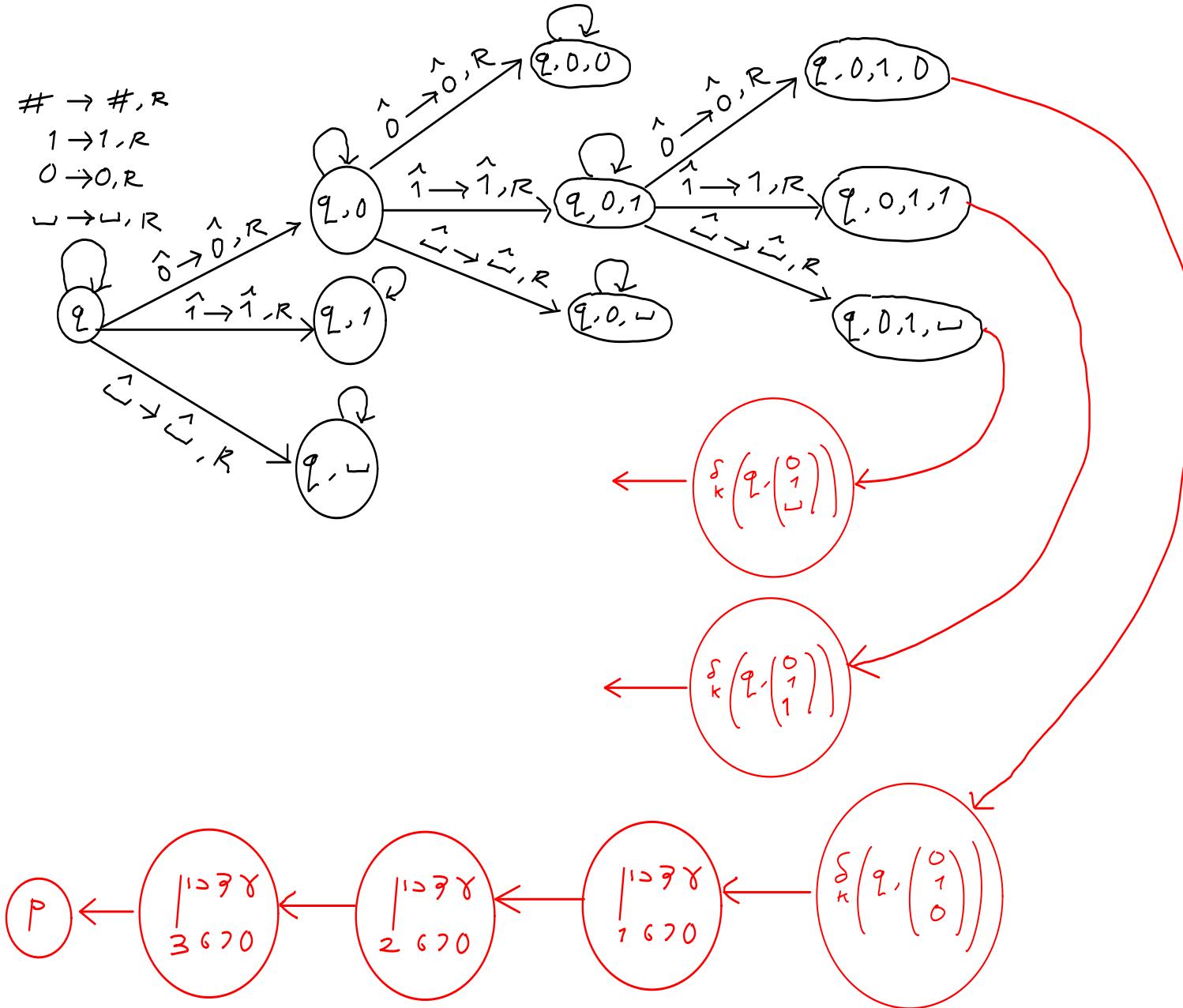
↓

- **איסוף מידע**
 - M' סורקת את הסרט שלה משמאלי לימיון ומזהה את התווים שמסומנים ב- \hat{a} . מידע זה ניתן לשמר במצבים. לדוגמה:

$$q, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

זה אפשרי מכיוון שמספר המצבים הנדרש הוא סופי:

$$|Q| \times |\Gamma|^k \enspace .$$



- ## • עדכון הסרטים

M סורקת את הרט שלה פעם נוספת כדי לפעול על פי פונקציית המעברים, ככלומר, לעדכן את התאים שמתוחת לראשים ולעדכן את מיקום הראשים.