שעור 5
שילוש מטריצה

5.1 מטריצה משולשית עילית

משפט 5.1 ערכים עצמיים ופולינום אופייני של מטאיצה משולשית

תהי A מטריצה משולשית מעל שדה $\mathbb{F}$. כלומר

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3n}\\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \ldots & a_{4n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

אז

(1

$$p_A(x)=(x-a_{11})(x-a_{22})\ldots(x-a_{nn}) ,$$

כלומר, הפולינום האופייני מתפרק לגורמים ליניאריים (לא בהכרח שונים) מעל $\mathbb{F}$.

(2 איברי האלכסון של מטריצה משולשית עליונה הם הערכים עצמיים.

המספר הפעמים שכל ערך עצמי מופיע באלכסון הוא הריבוי האלגברי של הערך עצמי.

הוכחה:

(1

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3n}\\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \ldots & a_{4n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda)=&|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n}\\ 0 & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda & a_{34} & \ldots & a_{3n}\\ 0 & 0 & 0 & a_{44}-\lambda & \ldots & a_{4n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}\\ =&(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\ldots(a_{nn}-\lambda) \end{aligned} \qquad (*)$$

(2 לפי $(*)$, $a_{11},a_{22},\ldots a_{nn}$ הם הערכים עצמיים של A. כל איבר על האלכסון הראשי מופיע בפולינום האופייני. לכן המספר הפעמים שאיבר מסוים מופיע על האלכסון הראשי שווה למספר הפעמים שהוא מופיע בפולינום

האופייני. מאותה מידה המספר הפעמים שאיבר מסוים מופיע על האלכסון הראשי שווה לריבוי אלגברי של הערך עצמי.

■

הגדרה 5.1 מטריצה ניתנת לשילוש

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. אומרים ש A ניתנת לשילוש מעל $\mathbb{F}$ אם A דומה למטריצה משולשית עליונה, כלומר אם קיימת מטריצה P הפיכה כך ש-

$$M=P^{-1}AP$$

מטריצה משולשית. P נקראת מטריצה משלשת.

דוגמה 5.1

מטריצה $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}$ ניתנת לשילוש מעל $\mathbb{R}$ כי קיימת $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ הפיכה ו- $M=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ משולשית כך ש- $P^{-1}AP=M$:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}$$

בנוסף קיימת $P=\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}$ הפיכה ו- $M=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&1\end{pmatrix}$ משולשית כך ש- $P^{-1}AP=M$:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&1\end{pmatrix}$$

משפט 5.2 תנאי לשילוש

תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$.
אם A ניתנת לשילוש מעל $\mathbb{F}$ אז הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים ליניאריים (לא בהכרח שונים) מעל $\mathbb{F}$.

הוכחה: נניח ש- A ניתנת לשילוש. אז קיימת P הפיכה ו-M משולשית כך ש- $M=P^{-1}AP$. למטריצות דומות יש אותו פוליניום האופייני, לכן

$$p_A(x)=p_M(x)\ .$$

הגורמים של $p_M(x)$ ליניאריים (לא בהכרח שונים) כי M מטריצה משולשית, לכן הגורמים של $p_A(x)$ ליניאריים (לא בהכרח שונים). ■

דוגמה 5.2

נתונה $A\in\mathbb{F}^{2\times 2}$. נניח ש $p(A)$ מתפרק למכפלה של גורמים ליניאריים מעל $\mathbb{F}$. הוכיחו כי A ניתנת לשילוש.

פתרון:
$p(A)$ מתפרק לגורמים ליניאריים, לכן קיים לפחות ערך עצמי אחד λ. יהי u_1 הוקטור עצמי השייך לערך עצמי λ. ז"א

$$A\cdot u_1=\lambda u_1\ .$$

נשלים את u_1 לבסיס של $\mathbb{F}^2$. נקבל בסיס $B=\{u_1,u_2\}$. אז

$$\begin{aligned} A\cdot u_1 =& \lambda u_1 + 0\cdot \mathrm{v}_1 \\ A\cdot u_2 =& \alpha_1 u_1 + \alpha_2 \cdot \mathrm{v}_2 \end{aligned}$$

A מייצגת את הטרנספורמציה $T_A:\mathbb{F}^2\to\mathbb{F}^2$ ביחס לבסיס הסטנדרטי E של $\mathbb{F}^2$. המטריצה המייצגת של $T:\mathbb{F}^2\to\mathbb{F}^2$ בבסיס B היא

$$[T_A]_B = \begin{pmatrix} | & | \\ T(b_1) & T(b_2) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \ .$$

נסמן ב- $P_{E\to B}$ המטריצה המעבר מבסיס E לבסיס B. אז

$$[T_A]_B = P_{E\to B}[T_A]_E P_{E\to B}^{-1}$$

כלומר

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} = P_{E\to B} A P_{E\to B}^{-1}$$

קיבלנו ש- A דומה למטריצה משולשית.

דוגמה 5.3

הוכיחו כי המטריצה $A=\begin{pmatrix} 5 & -\frac{3}{2} \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ ניתנת לשילוש מעל $\mathbb{R}$. מצאו מטריצה משולשית עבור A ומטריצה משלשת P.

פתרון:

נמצא את הערכים עמציים של A.

$$\begin{vmatrix} \lambda-5 & \frac{3}{2} \\ -6 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda+1)+9 = \lambda^2-4\lambda+4 = (\lambda-2)^2$$

יש ערך עצמי אחד $\lambda=2$ מריבוי אלגברי 2.

נמצא את הוקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda=2$:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -\frac{3}{2} \\ 6 & -1-\lambda \end{pmatrix} \stackrel{\lambda=2}{=} \begin{pmatrix} 3 & -\frac{3}{2} \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון $x=\frac{1}{2}y$, $y\in\mathbb{R}$. לכן הוקטור עצמי הוא $u_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. נשלים את u_1 לבסיס של $\mathbb{R}^2$:

$$u_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ , \qquad u_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot u_1 = 2u_1$$

$$A\cdot u_2 = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{3}{2} \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}u_1 + 2u_2$$

לכן A דומה למטריצה

$$M=\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

המטריצה המשלשת היא

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

5.2 העתקות ליניאריות ניתנות לשילוש

הגדרה 5.2 העתקה ליניארית ניתנת לשילוש

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $T:V\to V$ אופרטור. T נקרא ניתן לשילוש אם קיים בסיס B של V שעבורו המטריצה המייצגת $[T]_B$ היא מטריצה משולשית עליונה. הבסיס נקרא בסיס משלש עבור B.

משפט 5.3 תנאי לקיום שילוש מטריצה

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $T:V\to V$ אופרטור. אם T ניתנת לשילוש אז הפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים ליניאריים (לא בהכרח שונים) מעל $\mathbb{F}$.

משפט 5.4 קיום שילוש

לכל מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{C}$ ולכל $T\in \mathrm{Hom}(V)$, T ניתנת לשילוש.

הוכחה: כל פולינום מתפרק לגורמים ליניאריים מעל $\mathbb{C}$. ■

5.3 תת מרחבים שמורים (אינווריאנטיים)

הגדרה 5.3 העתקה ליניארית ניתנת לשילוש

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $T:V\to V$ אופרטור. תת מרחב W של V נקרא תת מרחב T שמור אם $T(W)\subseteq W$.

דוגמה 5.4

$$W=\{\bar{0}\}\subseteq V$$

תת מרחב שמור לכל $T:V\to V$.

דוגמה 5.5

אם $W=V_\lambda$ המרחב עצמי של λ ביחס לאופרטור T. אז לכל $u\in V_\lambda$,

$$T(u)=\lambda u\in V_\lambda$$

לכן V_λ
הוא תת מרחב שמור לכל $T:V\to V$.

דוגמה 5.6

הוכיחו כי לכל אופרטור $T:V\to V$:

א) תת מרחב T $\ker$ הוא תת מרחב T - שמור.

ב) תת מרחב T Im הוא תת-מרחב T - שמור.

פתרון:

א) צריך להוכיח ש T $\ker T$ שמור.

לכל $u \in \ker T$,
$$T(u) = \bar{0} \in \ker\,(T)$$
לכן תת מרחב T - שמור.

ב) צריך להוכיח ש T Im הוא תת-מרחב T- שמור.

לכל $u \in \mathrm{Im}\,(T)$,
$$T(u) \in \mathrm{Im}\,(T)$$
לכן $\mathrm{Im}\,(T)$ הוא תת מרחב T - שמור.

דוגמה 5.7

יהי u וקטור עצמי של אופרטור T ששייך לערך עצמי λ. נסמן $V_1 = \mathrm{span}(u)$. הוכיחו כי V_1 תת מרחב שמור.

פתרון:

צריך להוכיח ש $T(u_1) \subseteq V_1$.

נקח $u \in V_1$.
$\Leftarrow$
קיים $\alpha \in \mathbb{F}$ כך ש $u = \alpha u$. אז
$$T(u) = \alpha T(u) = \alpha \cdot \lambda u \in \mathrm{sp}(u) = V_1$$

5.4 *העתקה ניתנת לשילוש אא"ם קיימת סדרת תת מרחבים

משפט 5.5 העתקה ניתנת לשילוש אא"ם קיימת סדרת תת מרחבים T שמורים

יהי V מרחב וקטורי n-ממדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $T : V \to V$ אופרטור. T ניתנת לשילוש אם"ם קיימת סדרה של תת מרחבים $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$ כך ש- V_i הוא תת מרחב T שמור וגם $\dim(V_i) = i$ לכל $1 \le i \le n$.

הוכחה: <u>נוכיח אם</u>

נניח ש T ניתנת לשילוש. אז קיים בסיס $U=\{u_1,\dots,u_n\}$ שעבורו $[T]_U$ משולשית. ז"א

$$[T]_U=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{aligned} T(u_1)=&a_{11}u_1 \ , \\ T(u_2)=&a_{12}u_1+a_{22}u_2 \ , \\ &\vdots \\ T(u_n)=&a_{1n}u_1+a_{2n}u_2+\dots+a_{nn}u_n \ . \end{aligned}$$

נסמן $V_i=\text{span}(u_1,\dots,u_i)$. אז $\dim(V_i)=i$.

לכן, $V_1\subset V_2\subset\dots\subset V_n=V$,
בנוסף $T(u_1),\dots,T(u_i)\in V_i$.

יהי $u\in V_i$. אז $u=\alpha_1u_1+\dots+\alpha_iu_i$. לכן לכל $u\in V_i$:

$$T(u)=\alpha_1T(u_1)+\dots+\alpha_iT(u_i)\in V_i$$

ז"א V_i תת מרחב T שמור.

נוכיח רק אם

נניח שקיימת סדרת תת מרחבים T שמורים $V_1\subset V_2\subset\dots\subset V_{n-1}\subset V_n=V$ כך ש

$\forall i\ \dim(V_i)=i$.

נבנה בסיס $U=\{u_1,\dots,u_n\}$ של V כך שלכל $1\le i\le n$, $\{u_1,\dots,u_i\}$ הוא בסיס של V_i. את הבסיס U נבנה ע"י אינדוקציה על n.

עבור $n=1$:

$\dim(V_1)=1$ לכן קיים וקטור $u_1\in V_1$. הוקטור $\{u_1\}$ מהווה בסיס של V_1.

הנחת אינדוקציה:
נניח שעבור $1<i<n$ בנינו בסיס $\{u_1,\dots,u_i\}$ של V_i.

$\dim(V_{i+1})=\dim(V_i)+1$.

לכן, קיים $u_{i+1}\in V_{i+1}/V_i$. אז $u_1,\dots,u_i,u_{i+1}\in V_{i+1}$ בת"ל. לכן $\{u_1,\dots,u_i,u_{i+1}\}$ בסיס של V_{i+1}.
הוכחנו דרך אינדוקציה כי קיים בסיס $U=\{u_1,\dots,u_n\}$ של V כך שלכל $1\le i\le n$, $\{u_1,\dots,u_n\}$ בסיס של V_i.

כעת, כיוון ש- V_i תת מרחבים T שמורים, מקבלים

$$\begin{aligned}
T(u_1) =& a_{11}u_1 \ , \\
T(u_2) =& a_{12}u_1 + a_{22}u_2 \ , \\
T(u_3) =& a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3 \ , \\
& \vdots \\
T(u_n) =& a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + a_{3n}u_3 + \ldots + a_{nn}u_n \ .
\end{aligned}$$

לכן

$$[T]_U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \ldots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

מטריצה משולשית. ■

5.5 *אלגוריתם לשילוש מטריצה: פירוק שור

דוגמה 5.8

נתונה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה משולשית T כך ש

$$T = P^{-1}AP$$

פתרון:

<u>שלב 1:</u> נמצא ערכים עמצים של A:

$$|A - \lambda I| = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \ .$$

הערכים עמציים הם $\lambda = 1$, $\lambda = -1$, $\lambda = 2$.

<u>שלב 2:</u> נמצא הוקטור עצמי השייך חערך עצמי $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x, y, z) = (3, -2, 1)z$ $z \in \mathbb{R}$. לכן הוקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda = 1$ הוא $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>**שלב 3:**</u> **נשלים את** u_1 **לבסיס של** $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ואז נגדיר את המטריצה

$$U_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>**שלב 4:**</u> נגדיר

$$U_1^{-1} A U_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

<u>**שלב 5:**</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

עכשיו נחזור על שלבים $1-5$ עבור המטריצה A_1 המתקבל.

<u>**שלב 1':**</u> **נמצא ערכים עמצים של** A_1:

$$|A_1 - \lambda I| = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \ .$$

הערכים עמציים הם $\lambda = -1$, $\lambda = 2$.

<u>**שלב 2':**</u> **נמצא הוקטור עצמי השייך חערך עצמי** $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y) = (-\frac{1}{2}, 1)y$ $y \in \mathbb{R}$. לכן הוקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda = -1$ הוא $\mathrm{u}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>**שלב 3':**</u> **נשלים את** u_1 **לבסיס של** $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ואז נגדיר את המטריצה

$$M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ואת המטריצה

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

שלב 4': נגדיר

$$M_2^{-1}A_1M_2=\begin{pmatrix}-2&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{3}&\frac{4}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-\frac{8}{3}\\0&2\end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה משולשית עילית אז התהליך מסתיים כאן.

$$(U_1U_2)^{-1}A(U_1U_2)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{2}{3}\\0&-1&-\frac{8}{3}\\0&0&2\end{pmatrix}=T$$

לכן מצאנו P הפיכה ו T משולשית כך ש-

$$P^{-1}AP=T$$

דוגמה 5.9

נתונה $A=\begin{pmatrix}3&1&2&0\\0&7&4&0\\0&0&1&0\\0&0&1&2\end{pmatrix}$ מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה משולשית T כך ש

$$T=P^{-1}AP$$

פתרון:

<u>שלב 1:</u> נמצא ערכים עמצים של A:

$$|A-\lambda I|=\lambda^4-13\lambda^3+53\lambda^2-83\lambda+42=(\lambda-7)(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1)=0\ .$$

הערכים עמציים הם $\lambda=1$, $\lambda=2$, $\lambda=3$, $\lambda=7$.

<u>שלב 2:</u> נמצא הוקטור עצמי השייך חערך עצמי $\lambda=1$:

$$\begin{pmatrix}2&1&2&0\\0&6&4&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&1&2&0\\0&6&4&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&1&2&0\\0&3&2&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: $(x,y,z,w)=(2,2,-3,3)w$ $w\in\mathbb{R}$. לכן הוקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda=1$ הוא $u_1=\begin{pmatrix}2\\2\\-3\\3\end{pmatrix}$

שלב 3: **נשלים את u_1 לבסיס של $\mathbb{R}^4$:**

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2\\2\\-3\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}$$

ואז נגדיר את המטריצה

$$U_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שלב 4: נגדיר

$$U_1^{-1}AU_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0\\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 7 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 6 & 2 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & 4 & 0\\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

שלב 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 6 & 2 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & 4 & 0\\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0\\ \frac{3}{2} & 4 & 0\\ -\frac{3}{2} & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

עכשיו נחזור על שלבים $1-5$ עבור המטריצה A_1 המתקבל.

שלב 1': **נמצא ערכים עצמים של A_1:**

$$|A_1 - \lambda I| = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 41\lambda + 42 = -(\lambda-7)(\lambda-3)(\lambda-2) = 0\ .$$

הערכים עמציים הם $\lambda=2$, $\lambda=3$, $\lambda=7$.

שלב 2': **נמצא הוקטור עצמי השייך חערך עצמי $\lambda=2$:**

הוקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda=2$ הוא $\mathrm{u}_1 = \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}$

שלב 3': **נשלים את u_1 לבסיס של $\mathbb{R}^3$:**

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix} \right\}$$

ואז נגדיר את המטריצה

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ואת המטריצה

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שלב 4': נגדיר

$$M_2^{-1}A_1M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & 4 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 4 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה משולשית עילית אז התהליך מסתיים כאן.

שלב 5':

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \color{red}{4} & \color{red}{\frac{3}{2}} \\ 0 & \color{red}{2} & \color{red}{6} \end{pmatrix} , \qquad \color{red}{A_2 = \begin{pmatrix} 4 & \frac{3}{2} \\ 2 & 6 \end{pmatrix}} .$$

עכשיו נחזור על שלבים $1'-5'$ עבור המטריצה A_2 המתקבל.

שלב 1": נמצא ערכים עמצים של A_2:

$$|A_2 - \lambda I| = \lambda^2 - 10\lambda + 21 = -(\lambda-7)(\lambda-3) = 0 .$$

הערכים עמציים הם $\lambda = 3$, $\lambda = 7$.

שלב 2": נמצא הוקטור עצמי השייך חערך עצמי $\lambda = 3$:

הוקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda = 3$ הוא $\mathrm{w}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

שלב 3": נשלים את w_1 **לבסיס של** $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ואז נגדיר את המטריצה

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ואת המטריצה

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

שלב 4": נגדיר

$$M_3^{-1}A_2M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & \frac{3}{2} \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה משולשית עילית אז התהליך מסתיים כאן.

$$(U_1U_2U_3)^{-1}A(U_1U_2U_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = T$$

לכן מצאנו P הפיכה ו T משולשית כך ש-

$$P^{-1}AP = T$$