תרגילי הוכחות

שאלה 1 הוכיחו: תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. אם A הפיכה אז למערכת

$$A\mathrm{x} = b, \qquad b \neq 0 \ ,$$

קיים פתרון אחד והוא יחיד.

שאלה 2 הוכיחו: תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. אם A הפיכה אז $\dim\left(\text{Nul } A\right) = 0$.

שאלה 3 הוכיחו: תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. אם למערכת

$$A\mathrm{x} = b \ , \qquad b \neq \bar{0}$$

קיים רק פתרון אחד והוא יחיד אז $\dim\left(\text{Nul}(A)\right) = 0$.

שאלה 4 תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. אם למערכת

$$A\mathrm{x} = b \ , \qquad b \neq \bar{0} \ .$$

יש יותר מפתרון אחד אז A לא הפיכה.

שאלה 5 תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית, $\mathrm{x} \in \mathbb{F}^n$ וקטור עמודה ו- $\mathrm{x} \in \mathbb{F}^{1\times n}$ וקטור שורה. הוכיחו שי התנאים הבאים שקולים:

(1) הפתרון היחיד של המערכת $A \cdot \mathrm{x} = \bar{0}$ הוא $\mathrm{x} = \bar{0}$.

(2) העמודות של A בת"ל.

(3) קיימת מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש- $AB = I$.

(4) הפתרון היחיד של המערכת $\mathrm{y} \cdot A = \bar{0}$ הוא $\mathrm{y} = \bar{0}$.

(5) השורות של A בת"ל.

(6) קיימת מטריצה $C \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש- $CA = I$.

(7) A הפיכה.

שאלה 6

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית, $\mathrm{x} \in \mathbb{F}^n$ וקטור עמודה. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

(1) A הפיכה.

(2) למערכת $A \cdot \mathrm{x} = \bar{0}$ יש רק את הפתרון $\mathrm{x} = \bar{0}$.

(3) המדורגת של A היא I.

(4) למערכת $A \cdot \mathrm{x} = b$ יש לפחות פתרון אחד.

(5) קיימת מצטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש- $AB = I$.

שאלה 7 תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ויהי $u\in\mathbb{F}^n$ וקטור שמקיים שת המשוואה ההומוגנית

$$A\cdot u=\bar{0}\ .$$

הוכיחו שאם $u\neq\bar{0}$ אז $|A|=0$.

שאלה 8 יהי U תת מרחב של $\mathbb{R}^n$. נניח ש $\dim\,U=m$, ו $B=\{\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\ldots,\mathrm{x}_m\}$ קבוצה של m וקטורים זשל U. הוכיחו כי B בת"ל אס"ם B פורשת את U.

שאלה 9 יהי $U\subseteq W$ תתי מרחבים של $\mathbb{R}^n$. הוכיחו:

.1 $\mathrm{dim}U\leq\mathrm{dim}W$.

.2 אם $\mathrm{dim}U=\mathrm{dim}W$ אז $U=W$.

שאלה 10 תהי $T:U\to V$ העתקה ליניארית. נניח ש $\dim(U)=n$ ו $\dim(V)=m$, ותהי $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T.
התנאים הבאים שקולים:

(א) T על.

(ב) במדורגת המתקבלת מ- A קיים איבר מוביל בכל **שורה**

(ג) עמודות A פורשות את $\mathbb{R}^m$.

שאלה 11 תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

(1) $\mathrm{rank}(A)=n$.

(2) השורות של A פורשות את $\mathbb{R}^n$.

(3) העמודות של A בת"ל ב- $\mathbb{R}^m$.

(4) נתון $\mathrm{x}\in\mathbb{F}^n$. הפתרון היחיד של המערכת $A\mathrm{x}=\bar{0}$ הוא $\mathrm{x}=\bar{0}$ קיים פתרון.

שאלה 12 תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

(1) $\mathrm{rank}(A)=m$.

(2) העמודות של A פורשות את $\mathbb{R}^m$.

(3) השורות של A בת"ל ב- $\mathbb{R}^n$.

שאלה 13

תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית.

$$\dim\,V=\dim\left(\ker\,T\right)+\dim\left(\mathrm{Im}\,T\right)$$

פתרונות

<u>שאלה 1</u> <u>קיום:</u> A הפיכה אז נכפיל את המאוואה $A\mathrm{x}=b$ בההופכית ונקבל

$$A^{-1}\cdot A\cdot \mathrm{x}=A^{-1}b \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x}=A^{-1}b\ .$$

<u>יחידות:</u> נניח שקיימים $\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2$ כך ש- $\mathrm{x}_2\neq \mathrm{x}_1$ כך ש- $A\mathrm{x}_1=b$ ו- $A\mathrm{x}_2=b$. אז

$$A(\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2)=b-b=0$$

A הפיכה אז נכפיל בההופכית ונקבל

$$A^{-1}A(\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2)=A^{-1}\cdot 0=0 \qquad \Rightarrow \qquad I\cdot(\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2=0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{x}_1=\mathrm{x}_2\ .$$

סתירה.

<u>שאלה 2</u> תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה הפיכה. נניח שלמערכת $A\cdot\mathrm{x}=\bar{0}$ קיים פתרון $\mathrm{x}_1\neq\bar{0}$. אז

$$A\cdot \mathrm{x}_1=\bar{0}$$

A הפיכה לכן $\exists\ A^{-1}$. נכפיל מצד שמאל ב- A^{-1} ונקבל

$$A^{-1}\cdot A\cdot \mathrm{x}_1=A^{-1}\cdot\bar{0} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{x}_1=\bar{0}\ .$$

סתירה.

<u>שאלה 3</u> למערכת

$$A\mathrm{x}=b\ , \qquad b\neq\bar{0}\ ,$$

יש פתרון יחיד. נסמן אותו ב- x_1. נניח ש- $\dim\left(\mathrm{Nul}(A)\right)\neq 0$. אז למערכת $A\cdot\mathrm{x}=\bar{0}$ קיים פתרון $\mathrm{x}_2\neq\bar{0}$. לכן

$$A\cdot(\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2)=A\cdot\mathrm{x}_1+A\cdot\mathrm{x}_2=b+0=b\ .$$

קיבלנו שני פתרונות למערכת $A\cdot\mathrm{x}=b$: x_1 ו- $(\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2)$. סתירה.

<u>שאלה 4</u> נוכיח דרך השלילה. נניח ש- x_1, x_2 פתרונות למערכת $A\mathrm{x}=b$, (כאשר $\mathrm{x}_2\neq\mathrm{x}_1$ ו- $b\neq\bar{0}$) וגם A הפיכה. אז
$A\mathrm{x}_1=b$
ו-
$A\mathrm{x}_2=b$.
לכן

$$A\cdot(\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2)=b-b=\bar{0}\ .$$

A הפיכה אז A^{-1} קיימת. נכפיל ב- A^{-1} מצד שמאל ונקבל

$$A^{-1}\cdot A\cdot(\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2)=A^{-1}\cdot\bar{0} \quad \Rightarrow \quad I\cdot(\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2)=\bar{0} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2=\bar{0} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x}_1=\mathrm{x}_2\ .$$

סתירה.

<u>שאלה 5</u>

- **(1)⇐(2)**

נרשום $A=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ ו- $\mathrm{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. אם הפתרון היחיד של המערכת $A\cdot\mathrm{x}=\bar{0}$ הוא $\mathrm{x}=\bar{0}$, אז

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=x_1c_1+x_2c_2+\ldots+x_nc_n=\bar{0}$$

מתקיים רק אם $x_1=0,x_2=0,\quad\ldots\quad,x_n=0$ ולכן העמודות $c_1,c_2,\ldots,c_n$ בת"ל.

- **(2)⇐(3)**

נרשום $A=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$. אם העמודות של A בת"ל, אז $\mathrm{span}\{\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\ldots,\boldsymbol{c}_n\}=\mathbb{F}^n$. לכן קיימים סקלרים כך ש-

$$\begin{aligned} b_{11}\boldsymbol{c}_1+b_{21}\boldsymbol{c}_2+\ldots+b_{n1}\boldsymbol{c}_n&=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\ , \\ b_{12}\boldsymbol{c}_1+b_{22}\boldsymbol{c}_2+\ldots+b_{n2}\boldsymbol{c}_n&=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\ , \\ b_{1n}\boldsymbol{c}_1+b_{2n}\boldsymbol{c}_2+\ldots+b_{nn}\boldsymbol{c}_n&=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\ . \end{aligned} \tag{*1}$$

$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$. אז אפשר לרשום (1*) בצורה

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}\ ,$$

כלומר

$$AB=I\ .$$

- **(3)⇐(4)**

אם $\mathrm{y}\cdot A=\bar{0}$, אז לפי **(3)**,

$$\mathrm{y}\cdot A\cdot B=\bar{0}\cdot B=0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{y}\cdot I=0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{y}=\bar{0}\ .$$

- **(4)⇐(5)**

נרשום $A=\begin{pmatrix} - & r_1 & - \\ - & r_2 & - \\ & \vdots & \\ - & r_n & - \end{pmatrix}$ ו- $\mathrm{y}=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n\end{pmatrix}$. אם הפתרון היחיד של המערכת $\mathrm{y}\cdot A\cdot=\bar{0}$ הוא $\mathrm{y}=\bar{0}$, אז

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} - & r_1 & - \\ - & r_2 & - \\ & \vdots & \\ - & r_n & - \end{pmatrix}=y_1r_1+y_2r_2+\ldots+y_nr_n=\bar{0}$$

מתקיים רק אם $y_1=0,y_2=0, \quad \ldots \quad ,y_n=0$ ולכן השורות $r_1,r_2,\ldots,r_n$ בת"ל.

- **(5)⇐(6)**

נרשום $A=\begin{pmatrix} - & \boldsymbol{r}_1 & - \\ - & \boldsymbol{r}_2 & - \\ & \vdots & \\ - & \boldsymbol{r}_n & - \end{pmatrix}$. אם השורות של A בת"ל, אז $\mathrm{span}\{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_n\}=\mathbb{F}^{1\times n}$. לכן קיימים סקלרים כך ש-

$$\begin{aligned} c_{11}\boldsymbol{r}_1+c_{12}\boldsymbol{r}_2+\ldots+c_{1n}\boldsymbol{r}_n&=\begin{pmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix}\ , \\ c_{21}\boldsymbol{r}_1+c_{22}\boldsymbol{r}_2+\ldots+b_{2n}\boldsymbol{r}_n&=\begin{pmatrix}0 & 1 & \ldots & 0\end{pmatrix}\ , \\ c_{n1}\boldsymbol{r}_1+c_{n2}\boldsymbol{r}_2+\ldots+c_{nn}\boldsymbol{r}_n&=\begin{pmatrix}0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix}\ . \end{aligned} \qquad (*2)$$

$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn}\end{pmatrix}$. אז אפשר לרשום (2*) בצורה

$$C\cdot A=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} - & \boldsymbol{r}_1 & - \\ - & \boldsymbol{r}_2 & - \\ & \vdots & \\ - & \boldsymbol{r}_n & - \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix}\ ,$$

כלומר

$$CA=I\ .$$

- **(2)$\Leftrightarrow$(5)**

נוכיח **(2)$\Rightarrow$(5)**

העמודות של A בת"ל $\Leftarrow$ קיימת B כך ש- $AB=I$ $\Leftarrow$ הפתרון היחיד של $\mathrm{y}\cdot A=\bar{0}$ הוא $\mathrm{y}=\bar{0}$ $\Leftarrow$ השורות של A בת"ל.

נוכיח **(5)$\Rightarrow$(2)**

השורות של A בת"ל $\Leftarrow$ קיימת C כך ש- $CA=I$ $\Leftarrow$ הפתרון היחיד של $A\cdot\mathrm{x}=\bar{0}$ הוא $\mathrm{x}=\bar{0}$ $\Leftarrow$ העמודות של A בת"ל.

- **(5)$\Rightarrow$(7)**

(5) $\Leftarrow$ **(6)**, כלומר $\exists$ C כך ש-

$$CA=I$$

נכפיל מצד שמאל ב- A ונקבל

$$ACA=A \qquad \Rightarrow \qquad AC=I\ .$$

כלומר קיימת C כך ש-

$$CA=AC=I\ ,$$

לכן A הפיכה.

- **(2)$\Rightarrow$(7)**

(2) $\Leftarrow$ **(3)**, כלומר $\exists$ B כך ש-

$$AB=I$$

נכפיל מצד ימין ב- A ונקבל

$$ABA=A \qquad \Rightarrow \qquad BA=I\ .$$

כלומר קיימת B כך ש-

$$AB=BA=I\ ,$$

לכן A הפיכה.

שאלה 6

- **(1)$\Rightarrow$(2)**

אם A הפיכה אז קיימת A^{-1}. לכן

$$A\mathrm{x}=\bar{0} \qquad \Rightarrow \qquad A^{-1}A\mathrm{x}=A^{-1}\bar{0}=\bar{0} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{x}=\bar{0}\ .$$

- **(2)⇐(3)**

נניח שלמערכת $A\cdot \mathrm{x}=\bar{0}$ יש רק את הפתרון $\mathrm{x}=\bar{0}$ אבל המדוגת של A אינה שווה ל- I. נרשום את המטריצה המורחבת של המערכת, ונסמן את המטריצה המדורגת ב-U:

$$(A|\bar{0}) \to (U|\bar{0}) \ .$$

אם $U\neq I$ אז ב- U יש שורת אפסים. U מרטריצה ריבועית ולכן יהיה לפחות משתנה חופשי אחד. לכן למערכת $A\mathrm{x}=\bar{0}$ יהיו אינסוף פתרונות. סתירה.

- **(3)⇐(4)**

המטריצה המורחבת של המערכת $A\mathrm{x}=b$ היא

$$(A|b) \ .$$

לפי **(3)** המדורגת של A היא I לכן אחרי דירוג נקבל

$$(A|b)\to (I|c)$$

כאשר c וקטור. לכן למערכת $A\mathrm{x}=b$ יש פתרון יחיד: $\mathrm{x}=c$.

- **(4)⇐(5)**

נרשום $I=\begin{pmatrix}e_1 & e_2 & \cdots e_n\end{pmatrix}$ כאשר $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$. לפי **(4)** למערכת $A\mathrm{x}=e_i$ קיים פתרון יחיד $\mathrm{x}=c_i$ לכל $i=1,\ldots,n$. לכן קיימת מטריצה יחידה $C=\begin{pmatrix}| & | & & |\\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n\\ | & | & & |\end{pmatrix}$ כך ש-

$$AC=I \ .$$

- **(5)⇐(1)**

נניח ש- $AC=I$. אז

$$ACA=A \qquad \Rightarrow \qquad CA=I \ .$$

לכן קיבלנו כי קיימת C כך ש- $AC=CA=I$. לכן A הפיכה.

שאלה 7 נניח ש- $u\neq\bar{0}$ ו- $|A|\neq 0$. אז A הפיכה, כלומר ההופכית A^{-1} קיימת. נכפיל מצד שמאל ב- A^{-1} ונקבל

$$A^{-1}\cdot A\cdot u=\bar{0} \qquad \Rightarrow \qquad u=\bar{0} \ .$$

סתירה.

שאלה 8 $\Rightarrow$

נניח ש B בת"ל. נוכיח דרך השלילה ש B פורשת את U.

נניח ש B לא פורשת את U. אז ניתן להוסיף וקטורים ל B כדי לקבל בסיס של U. בבסיס חדש יהיו יותר מ- m וקטורים. ז"א $\dim(U) > m$. סתירה.

$\Leftarrow$

נניח ש B פורשת את U ו B ת"ל.

ניתן להוריד מ- B וקטורים כדי לקבל בסיס של U. בבסיס החדש יהיו פחות מ- m וקטורים. ז"א $\dim(U) < m$. סתירה.

שאלה 9

יהי B בסיס של U. נסמן $k = \dim(W)$.

1. אם $\dim(U) > \dim(W)$, אז B קבוצה בת"ל של וקטורים של W שבה יש יותר מ- k וקטורים. סתירה. לכן $\dim U \le \dim W$.
2. אם $\dim(U) = k$ אז B קבוצה בת"ל של וקטורים של W שבה יש $k = \dim(W)$ וקטורים. לכן, B פורשת את W. לכן $W = \text{span } B = U$.

שאלה 11

- **(1)$\Leftrightarrow$(2)**

$$\text{row}(A) \subseteq \mathbb{F}^n$$

ו- $\dim(\text{row } A) = n$ לפי **(1)**, לכן $\text{row}(A) = \mathbb{F}^n$.

- **(2)$\Leftrightarrow$(3)**

לפי **(2)**, $\text{row}(A) = \mathbb{R}^n$ אז $\text{rank}(A) = n$. ז"א $\dim(\text{col } A) = n$. מכיוון שה- n עמודות של A פורשות את $\text{col } A$, אז הן.

- **(3)$\Leftrightarrow$(4)** לפי **(3)**: נשרום

$$A\text{x} = \bar{0}\ . \qquad \textbf{(\#1)}$$

$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ c_1 & c_2 & & c_n \\ & | & & | \end{pmatrix}$ כאשר $\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ העמודות של A, $c_i \in \mathbb{F}^m$ לכל $1 \le i \le n$. נרשום $\text{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$$A\text{x} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad x_1 c_1 + x_2 c_2 + \ldots x_n c_n = \bar{0}\ . \qquad \textbf{(\#2)}$$

לפי **(3)**, $\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ בת"ל לכן (#2) מתקיים רק אם $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. לכן הפתרון היחיד של (#1) הוא $\mathrm{x} = 0$.

- **(4)⇐(1)**

לפי **(4)** הפתרון היחיד של המערכת $A\mathrm{x} = \bar{0}$. הוא $\mathrm{x} = \bar{0}$. אז לפי משפט **??** העמודות של A בת"ל. לכן $\dim(\mathrm{col}\ A) = n$. לכן $\mathrm{rank}(A) = n$.

שאלה 12

- **(1)⇐(2)**

לפי **(1)**, $\dim(\mathrm{col}\, A) = m$ לכן לפי משפט **??**, $\mathrm{col}\,(A) = \mathbb{F}^m$.

- **(2)⇐(3)**

לפי **(2)**, $\mathrm{col}(A) = \mathbb{F}^m$, אז $\mathrm{rank}(A) = m$. ז"א $\dim(\mathrm{row}\, A) = m$. מכיוון שה- m שורות של A פורשות את $\mathrm{row}\, A$, אז הן בת"ל.

- **(3)⇐(1)**

לפי **(3)** ה-m שורות של A בת"ל, לכן $\dim(\mathrm{row}\, A) = m$, ולכן $\mathrm{rank}(A) = m$.

שאלה 13 כל וקטור ב $\mathrm{Im}\ T$ אפשר לרשום בצורה $T(\mathrm{v})$ כאשר v וקטור ב V (ראו הגדרה **??**). יהי $\{T(e_1), \ldots, T(e_r)\}$ בסיס של $\mathrm{Im}\ T$ כאשר $\{e_1, \ldots, e_r\}$ וקטורים ב V. יהי $\{f_1, \ldots, f_k\}$ בסיס של $\ker\ T$. כך $\dim\,(\mathrm{Im}\ T) = r$ ו $\dim\,(\ker\ T) = k$. נוכיח כי $B = \{e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_k\}$ בסיס של V.

1) <u>B פורשת V</u>

אם $\mathrm{v} \in V$ אז $T(\mathrm{v}) \in \mathrm{Im}\ T$. לכן

$$T(\mathrm{v}) = t_1 T(e_1) + \ldots + t_r T(e_r)\ , \qquad t_i \in \mathbb{R}\ .$$

אזי $\mathrm{v} - t_1 e_1 - \ldots - t_r e_r \in \ker\ T$. לכן הוקטור הזה צירוף לינארי של $\{f_1, \ldots, f_k\}$. לכן v צירוף לינארי של הוקטורים ב B.

<u>B בת"ל</u>

נניח

$$t_1 e_1 + \ldots + t_r e_r + s_1 f_1 + \ldots + s_k f_k = \bar{0} \qquad \textbf{(\#)}$$

עבור סקלרים $t_i \in \mathbb{R}$ ו $s_j \in \mathbb{R}$. אזי

$$t_1 T(e_1) + \ldots + t_r T(e_r) + s_1 T(f_1) + \ldots + s_k T(f_k) = \bar{0} \qquad \textbf{(*1)}$$

אבל $T(f_i) = \bar{0}$ לכן

$$t_1 T(e_1) + \ldots + t_r T(e_r) = \bar{0}$$

$\{T(e_1),\ldots,T(e_r)\}$ בסיס של T Im לכן הקבוצה $\{T(e_1),\ldots,T(e_r)\}$ בת"ל, לכן $t_1 = \ldots = t_r = 0$.
מכאן (#) הופך ל

$$s_1 f_1 + \ldots + s_k f_k = \bar{0} \qquad (*2)$$

$\{f_1,\ldots,f_k\}$ בסיס של T ker לכן $\{f_1,\ldots,f_k\}$ קבוצה בת"ל לכן $s_1 = \ldots = s_k = 0$. בסה"כ קיבלנו ש B בת"ל.