# שיעור 10
# חיתוך וסכום תת מרחב

## הגדרה של חיתוך וסכום של תתי מרחבים

**10.1 משפט. (חיתוך של ת"מ)**
נניח ש $V$ מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, $V_1$, $V_2$ תתי מרחבים של $V$. אז $V_1\cap V_2$ היא תת מרחב של $V$.

---

**הוכחה.**

1) $V_1$, $V_2$ תתי מרחבים, לכן $\bar{0}\in V_1$ וגם $\bar{0}\in V_2$. לכן $\bar{0}\in V_1\cap V_2$.

2) נניח $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\in V_1\cap V_2 \Leftarrow \mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\in V_1$ וגם $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\in V_2$.
$V_1$ ת"מ, לכן $\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\in V_1$.
$V_2$ ת"מ, לכן $\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\in V_2$.
ז"א $\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\in V_1\cap V_2$.

3) נניח $\mathrm{v}\in V_1\cap V_2$ ו $k\in\mathbb{F}$.
אז $\mathrm{v}\in V_1$ ו $\mathrm{v}\in V_2$.
$V_1$ ת"מ לכן $k\cdot\mathrm{v}\in V_1$.
$V_2$ ת"מ לכן $k\cdot\mathrm{v}\in V_2$.
ז"א $k\cdot\mathrm{v}\in V_1\cap V_2$.

■

---

**10.2 דוגמא.**
עבור $V_1$,$V_2$ תתי מרחבים של מ"ו $V$ מעל שדה $\mathbb{F}$, האם $V_1\cup V_2$ בהכרח ת"מ של $V$?

---

**פיתרון.**
דוגמה נגדית:
$V=\mathbb{R}^2$.

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}\ ,\qquad V_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}\ .$$

אז $\mathrm{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in V_1$, $\mathrm{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in V_2$, אבל $\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2\notin V_1\cup V_2$ . ■

---

**10.3 משפט. (ת"מ הקטן ביותר)**
נניח ש $V$ מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, $V_1$, $V_2$ תתי מרחבים של $V$. אז הקבוצה

$$W=\{\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2|\mathrm{v}_1\in V_1,\mathrm{v}_2\in V_2\}$$

היא ת"מ הקטן ביותר שמכיל את $V_1$ ו $V_2$.

ז"א לכל ת"מ $W'$ שמכיל את $V_1$ ו $V_2$, מתקיים $W \subseteq W'$.

---

**הוכחה.**

1) נוכיח ש $W$ ת"מ של $V$.

א) $V_1 \ni \bar{0}$ וגם $V_2 \ni \bar{0}$. לכן
$$\bar{0} = \bar{0} + \bar{0} \in W \ .$$

ב) נניח $w_1 = u_1 + u_2 \in W$, $w_2 = \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \in W$.
אז $u_1, \mathrm{v}_1 \in V_1$ וגם $u_2, \mathrm{v}_2 \in V_2$.
$V_1$, $V_2$ תתי מרחבים.
לכן $u_1 + \mathrm{v}_1 \in V_1$, וגם $u_2 + \mathrm{v}_2 \in V_2$.
מכאן
$$w_1 + w_2 = (u_1 + u_2) + (\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2) = (u_1 + \mathrm{v}_1) + (u_2 + \mathrm{v}_2) \in W \ .$$

ג) נניח $w = u_1 + u_2 \in W$ ו $k \in \mathbb{F}$. אז $u_1 \in V_1$ ו $u_2 \in V_2$. $V_1, V_2$ תתי מרחבים, לכן $ku_1 \in V_1$, $ku_2 \in V_2$. מכאן
$$kw = k(u_1 + u_2) = ku_1 + ku_2 \in W$$

2) נוכיח כי $W$ התת מרחב הקטן ביותר

ברור כי $W$ מכיל את $V_1$ ו $V_2$ כי
לכל $u \in V_1$, $u = u + \bar{0} \in W$
וגם לכל $u \in V_2$, $u = \bar{0} + u \in W$.
נוכיח ש $W$ הוא ת"מ הקטן ביותר שמכיל את $V_1$ ו $V_2$.
נניח ש $W'$ איזשהו ת"מ שמכיל את $V_1$ ו $V_2$.
נוכיח כי $W \subseteq W'$.
נקח וקטור $w \in W$. אז $w = u_1 + u_2$, כאשר $u_1 \in V_1$, $u_2 \in V_2$.
$V_1 \in W' \Leftarrow u_1 \in W'$.
$V_2 \in W' \Leftarrow u_2 \in W'$.
$W'$ ת"מ, לכן $w = u_1 + u_2 \in W'$.
מש"ל.

■

---

**10.4 הערה.**
למרחב $W$ של משפט 10.3 (המשפט הקודם) נקרא הסכום של $V_1$ ו $V_2$ ומסומן ב $V_1 + V_2$. ■

---

**10.5 משפט. (סכום של ת"מ שווה לפרישה של האיחוד)**

$$V_1 + V_2 = \mathrm{sp}\left(V_1 \cup V_2\right) \ .$$

---

**הוכחה.**
נוכיח כי $V_1 + V_2 \subseteq \mathrm{sp}\left(V_1 \cup V_2\right)$:

$V_1, V_2 \subseteq \text{sp}(V_1 \cup V_2)$

לכן, לפי משפט 10.3,

$$V_1 + V_2 \subseteq \text{sp}(V_1 \cup V_2) \ .$$

נוכיח כי $\text{sp}(V_1 \cup V_2) \subseteq V_1 + V_2$:

נניח $w \in \text{sp}(V_1 \cup V_2)$. אז קיימים $u_1, \ldots, u_k \in V_1$ ו $\text{v}_1, \ldots, \text{v}_n \in V_2$ וסקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$ כך ש

$$w = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k + \beta_1 \text{v}_1 + \cdots + \beta_n \text{v}_n \ .$$

אז $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k \in V_1$ וגם $\beta_1 \text{v}_1 + \cdots + \beta_n \text{v}_n \in V_2$.

לכן $w \in V_1 + V_2$.

הוכחנו כי $V_1 + V_2 \subseteq \text{sp}(V_1 \cup V_2)$ וגם $\text{sp}(V_1 \cup V_2) \subseteq V_1 + V_2$ $\Leftarrow$

$$V_1 + V_2 = \text{sp}(V_1 \cup V_2) \ .$$

■

---

**10.6 דוגמא.**

נקח את המ"ו $V = \mathbb{R}^3$. נקח את התתי מרחבים $\mathbb{R}^3$: $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$, ו $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{R} \right\}$, קווים ישרים ב $\mathbb{R}^3$. אז הסכום שלהם הינו

$$V_1 + V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\} \ ,$$

ומהווה את המישור $z = 0$ ב $\mathbb{R}^3$.

---

## משפט המימדים של סכום וחיתוך

**10.7 משפט. (משפט המימדים)**

נניח ש $V$ מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, $V_1$, $V_2$ תתי מרחבים של $V$. אז

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

---

**10.8 הוכחה.**

נסמן $\dim(V_1) = k$, $\dim(V_2) = n$, $\dim(V_1 \cap V_2) = m$.

$V_1 \cap V_2 \subseteq V_1$ לכן $m \leq k$.

$V_1 \cap V_2 \subseteq V_2$ לכן $m \leq n$.

נבחר בסיס $u_1, \ldots, u_m$ של $V_1 \cap V_2$.

נשלים אותו לבסיס של $V_1$ ונקבל

$u_1, \ldots, u_m, a_1, \ldots, a_{k-m}$.
נשלים אותו גם לבסיס של $V_2$:
$u_1, \ldots, u_m, b_1, \ldots, b_{n-m}$.

נוכיח כי $V_1 + V_2 = \text{sp}\left(u_1, \ldots, u_m, a_1, \ldots, a_{k-m}, b_1, \ldots, b_{n-m}.\right)$:

נניח $w = \text{v}_1 + \text{v}_2 \in V_1 + V_2$. אז

$$\begin{aligned}\text{v}_1 &= \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k-m} a_{k-m} \in V_1 \ , \\ \text{v}_2 &= \alpha'_1 u_1 + \ldots + \alpha'_m u_m + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{n-m} b_{n-m} \in V_2 \ .\end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned}\text{v}_1 + \text{v}_2 = & \left(\alpha_1 + \alpha'_1\right) u_1 + \ldots + \left(\alpha_m + \alpha'_m\right) u_m \\ & + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k-m} a_{k-m} \\ & + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{n-m} b_{n-m}\end{aligned}$$

ז"א

$$\text{v}_1 + \text{v}_2 \in \text{sp}\left(u_1, \ldots, u_m, a_1, \ldots, a_{k-m}, b_1, \ldots, b_{n-m}\right)$$

נוכיח את ההכלה ההפוכה, כלומר $\text{sp}\left(u_1, \ldots, u_m, a_1, \ldots, a_{k-m}, b_1, \ldots, b_{n-m}\right) \in V_1 + V_2$:

נניח
$w \in \text{sp}\left(u_1, \ldots, u_m, a_1, \ldots, a_{k-m}, b_1, \ldots, b_{n-m}\right)$
אז קיימים סקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_{k-m}, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-m}$ כך ש

$$w = \alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k-m} a_{k-m} + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{n-m} b_{n-m}$$

נסמן

$$\begin{aligned}\text{v}_1 =& \alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k-m} a_{k-m} \\ \text{v}_2 =& \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{n-m} b_{n-m}\end{aligned}$$

אז

$$\text{v}_1 \in V_1, \qquad \text{v}_2 \in V_2, \qquad w = \text{v}_1 + \text{v}_2$$

כלומר $w \in V_1 + V_2$.

נשאר להוכיח שוקטורים $\{u_1, \ldots, u_m, a_1, \ldots, a_{k-m}, b_1, \ldots, b_{n-m}\}$ בת"ל:

נניח:

$$\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k-m} a_{k-m} + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{n-m} b_{n-m} = \bar{0} \ . \tag{*1}$$

אז

$$\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k-m} a_{k-m} = -\gamma_1 b_1 - \ldots - \gamma_{n-m} b_{n-m} := \text{v}. \tag{*2}$$

הוקטור באגף השמאל שייך ל $V_1$.
הוקטור באגף הימין שייך ל $V_2$.

לכן, לפי (2*) $\mathrm{v} \in V_1 \cap V_2$. $u_1, \ldots, u_m$ בסיס של $V_1 \cap V_2$ (נתון) . לכן קיימים סקלרים $\delta_1, \ldots, \delta_m$ כך ש

$$\mathrm{v} = \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m \ .$$

לכן

$$\begin{aligned} \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{n-m} b_{n-m} =& \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m - (-\gamma_1 b_1 - \ldots - \gamma_{n-m} b_{n-m}) \\ =& \mathrm{v} - \mathrm{v} \\ =& \bar{0} \ , \end{aligned}$$

ז"א

$$\delta_1 u_1 + \ldots + \delta_m u_m + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{n-m} b_{n-m} = \bar{0} \ . \tag{*3}$$

$u_1, \ldots u_m, b_1, \ldots, b_{n-m}$ בסיס של $V_2$ (נתון) . לכן הם בת"ל. לכן (3*) מתקיים רק אם

$$\delta_1 = \ldots = \delta_m = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{n-m} = 0 \ . \tag{*4}$$

מכאן מקבלים מ (1*) כי

$$\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_m u_m + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k-m} a_{k-m} = \bar{0} \ . \tag{*5}$$

$u_1, \ldots u_m, a_1, \ldots, a_{k-m}$ בסיס של $V_1$ (נתון) , לכן הם בת"ל.
לכן (5*) מתקיים רק אם

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \beta_1 = \ldots = \beta_{k-m} = 0. \tag{*6}$$

לכן, בגלל שהמקדמים ב (1*) כולם שווים ל $0$, כפי שהוכחנו ב (4*) ו (6*), אז הוקטורים
$u_1, \ldots u_m, a_1, \ldots, a_{k-m}, b_1, \ldots . b_{n-m}$ בת"ל. כלומר הם מהווים בסיס של $V_1 + V_2$.
מכאן

$$\dim(V_1 + V_2) = m + (k - m) + (n - m) = k + n - m = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

מש"ל. ■

---

**10.9 מסקנה. ( )**
נניח $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ תתי מרחבים ממימד 2, אז $\dim(V_1 \cap V_2) > 0$.

---

**הוכחה.**
$V_1, V_2$ תתי מרחבים של $\mathbb{R}^3$, לכן $\dim(V_1 + V_2) \leq 3$. לפי משפט 10.7,

$$4 = \dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) \leq 3 + \dim(V_1 \cap V_2)$$

לכן

$$\dim(V_1 \cap V_2) \geq 4 - 3 = 1 \ .$$

■

---

# כיצד למצוא בסיס ומימד של סכום וחיתוך ת"מ

נניח כי $U$, $V$ תתי מרחבים של $\mathbb{R}^n$. ונניח ש

$$\{\mathrm{u}_1,\ldots,\mathrm{u}_k\}$$

בסיס של $U$ ו

$$\{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_l\}$$

בסיס של $V$. כדי למצוא בסיס של $V+W$, נרשום מטריצה $Q$ מסדר $n\times(k+l)$ המורכב מהבסיסים של $U$ ו $V$:

$$Q=\begin{pmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ \mathrm{u}_1 & \mathrm{u}_2 & \ldots & \mathrm{u}_k & \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \ldots & \mathrm{v}_l \\ | & | & & | & | & | & & | \end{pmatrix}$$

אז המרחב העמודות של $U+V$ שווה למרחב העמודות של $Q$:

$$\mathrm{col}(Q)=\mathrm{col}(U+V)$$

ובסיס של $\mathrm{col}(Q)$ שווה גם לבסיס של $U+V$:

$$B(Q)=B(U+V)\ .$$

בסיס של $U\cap V$ ניתן למצוא ע"י המרחב האפס של $Q$, $\mathrm{Nul}(Q)$. נניח כי הוקטור x במרחב האפס של $Q$, כלומר $\mathrm{x}\in\mathrm{Nul}(Q)\subseteq\mathbb{R}^{k+1}$. נניח כי הרכיבים של x הם

$$\mathrm{x}=\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_k\\ b_1\\ \vdots\\ b_l\end{pmatrix}\ .$$

כיוון שוקטור x ב $\mathrm{Nul}(Q)$ אז

$$Q\cdot\mathrm{x}=\begin{pmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ \mathrm{u}_1 & \mathrm{u}_2 & \ldots & \mathrm{u}_k & \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \ldots & \mathrm{v}_l \\ | & | & & | & | & | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_k\\ b_1\\ \vdots\\ b_l\end{pmatrix}=a_1\mathrm{u}_1+\ldots+a_k\mathrm{u}_k+b_1\mathrm{v}_1+\ldots+b_l\mathrm{v}_l=\bar{0}\ . \tag{1*}$$

עכשיו נעביר את כל האיברים של הבסיס $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_l$ לאגף הימין ונקבל

$$a_1\mathrm{u}_1+\ldots+a_k\mathrm{u}_k=-b_1\mathrm{v}_1-\ldots-b_l\mathrm{v}_l\ . \tag{*2}$$

שימו לב הצירוף לינארי באגף השמאל הוא וקטור של $U$ והצירוף לינארי באגף הימין הוא וקטור של $V$. נקרא הוקטור הזה y:

$$\mathrm{y}:=a_1\mathrm{u}_1+\ldots+a_k\mathrm{u}_k=-b_1\mathrm{v}_1-\ldots-b_l\mathrm{v}_l\ . \tag{*3}$$

כך קיבלנו וקטור y השייך גם ל $U$ וגם ל $V$, או במילים אחרות

$$\mathrm{y}\in U\cap V\ .$$

**10.10 דוגמא.**
נתונים וקטורים

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad u_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad u_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\qquad u_4=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix}\ .$$

נסמן

$$V_1=\text{sp}(u_1,u_2)\ ,\qquad V_2=\text{sp}(u_3,u_4)\ .$$

מצאו בסיס ומימד של $V_1$,$V_2$ ו $V_1\cap V_2$.

---

**פיתרון.**

בסיס של $V_1$:

$$\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\0&1\\0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

בסיס של $V_1$:

$$B(V_1)=\{\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2\}$$

$\dim(V_1)=2$.

בסיס של $V_2$:

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&3\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&3\\0&-1\\0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&3\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

בסיס של $V_2$:

$$B(V_2)=\{\mathrm{u}_3,\mathrm{u}_4\}$$

$\dim(V_2)=2$.

$$Q=(\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2,\mathrm{u}_3,\mathrm{u}_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&1&0&3\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to R_4-R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&1\\0&1&1&0\\0&-1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4\to R_4-R_2]{R_3\to R_2+R_3}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&1\\0&0&-1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\to R_3+R_4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

העמודות 1, 2, 3 מובילות לכן בסיס של $V_1+V_2$ הוא

$$B(V_1+V_2)=\{\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2,\mathrm{u}_3\}$$

ו $\dim(V_1+V_2)=3$.