

## שיעור 10

## מרחב האפס, מרחב העמודות ומרחב השורות

## 10.1 דרגת המטריצה

## 10.1 הגדרה

נתונה מטריצה

 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  מעל שדה  $\mathbb{F}$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

למטריצה מקושרים 3 תת מרחבים:

(1) מרחב האפס של  $A$  שמסומן  $\text{Nul}(A)$  ומוגדר

$$\text{Nul}(A) = \{X \in \mathbb{F}^n \mid A \cdot X = \bar{0}\}.$$

(2) מרחב העמודות של  $A$  שמסומן  $\text{Col}(A)$  ומוגדר

$$\text{Col}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}.$$

 $\text{Col}(A)$  הוא התת מרחב הנפרש ע"י עמודות המטריצה.(3) מרחב השורות של  $A$  שמסומן  $\text{Row}(A)$  ומוגדר

$$\text{Row}(A) = \text{span} \{ (a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n}), \cdots, (a_{m1} \ a_{m2} \ \cdots \ a_{mn}) \}.$$

 $\text{Row}(A)$  הוא התת מרחב הנפרש ע"י שורות המטריצה.

## 10.1 דוגמה

נתונה המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 4 & -11 & 23 & 18 & 11 \end{pmatrix}$ . מצאו את בסיס ואת המימד של  $\text{Col}(A)$  ו- $\text{Row}(A)$ .

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 4 & -11 & 23 & 18 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow 2R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 6 & 7 \\ 0 & -3 & 7 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עמודות 1 ו-2 של המדורגת מובילות, לפיכך עמודות 1 ו-2 של  $A$  מהווים בסיס של  $\text{col}(A)$ :

$$\text{col}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$$

שורות 1 ו-2 של המדורגת מובילות, לפיכך שורות 1 ו-2 של  $A$  מהווים בסיס של  $\text{row}(A)$ :

$$\text{row}(A) = \text{span} \{ (1 \ -2 \ 4 \ 3 \ 1), (-2 \ 1 \ -1 \ 0 \ 5) \}$$

$\dim(\text{Col}(A)) = 2$ , מספר העמודות המובילות.

$\dim(\text{Row}(A)) = 2$ , מספר השורות שלא אפסים.

### משפט 10.1 בסיס ומימד של $\text{col}(A)$

תהי  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

(1) העמודות המובילות של  $A$  מהווים בסיס של  $\text{Col } A$ .

(2) השורות המובילות של  $A$  מהווים בסיס של  $\text{Row } A$ .

(3)  $\dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A))$

הוכחה:

(1) משפט 9.3.

(2) תרגיל בית.

(3)  $\dim(\text{Col}(A))$  הוא מספר העמודות המובילות במטריצה המדורגת של  $A$ .

ז"א  $\dim(\text{Col}(A))$  הוא מספר האיברים המובילים במטריצה המדורגת של  $A$ .

$\dim(\text{Row}(A))$  הוא מספר השורות שלא אפסים במטריצה המדורגת של  $A$ .

ז"א  $\dim(\text{Row}(A))$  הוא מספר האיברים המובילים במטריצה המדורגת של  $A$ .



## הגדרה 10.2 דרגה

למספר  $\dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A))$  קוראים דרגת המטריצה. סימון:  $\text{rank}(A)$ . ז"א

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A)) .$$

## משפט 10.2 מימד של $\text{Nul}(A)$

תהי  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  ונניח כי  $\text{rank}(A) = r$ . אז

$$\dim(\text{Nul}(A)) = n - r = (\text{מספר עמודות הלא מובילות}) .$$

**הוכחה: (להעשרה בלבד!)**

נניח כי  $\{u_1, \dots, u_k\}$  בסיס של  $\text{Nul}(A)$ .

נשלים אותו לבסיס של  $\mathbb{R}^n$ :  $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ .

הקבוצה  $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$  פורשת את  $\mathbb{R}^n$  לפיכך הקבוצה  $\{Au_1, \dots, Au_k, Au_{k+1}, \dots, Au_n\}$  פורשת את  $\text{col}(A)$ .

אבל  $Au_1 = 0, \dots, Au_k = 0 \Leftrightarrow \{u_1, \dots, u_k\} \in \text{Nul}(A)$

לפיכך  $\{Au_{k+1}, \dots, Au_n\}$  פורשת את  $\text{col}(A)$ .

כעת נוכיח כי  $\{Au_{k+1}, \dots, Au_n\}$  בת"ל: נרשום

$$s_{k+1}Au_{k+1} + \dots + s_nAu_n = \bar{0}$$

כאשר  $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$  ווקטור האפס ו-  $s_{k+1}, \dots, s_n$  סקלרים. מכאן

$$A(s_{k+1}u_{k+1} + \dots + s_nu_n) = \bar{0}$$

ז"א  $s_{k+1}u_{k+1} + \dots + s_nu_n \in \text{Nul}(A)$ . לפיכך ניתן לרשום אותו כצירוף לינארי של הבסיס  $\{u_1, \dots, u_k\}$ :

$$s_{k+1}u_{k+1} + \dots + s_nu_n = t_1u_1 + \dots + t_ku_k$$

$t_1, \dots, t_k$  סקלרים. נעביר אגפים ונקבל:

$$-t_1u_1 - \dots - t_ku_k + s_{k+1}u_{k+1} + \dots + s_nu_n = \bar{0} .$$

הקבוצה  $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$  בסיס לכן היא בת"ל לכן  $t_1 = \dots = t_k = s_{k+1} = \dots = s_n = 0$ .

לפיכך הקבוצה  $\{Au_{k+1}, \dots, Au_n\}$  בת"ל.

מצאנו כי  $\{Au_{k+1}, \dots, Au_n\}$  בת"ל ופורשת  $\text{col}(A)$  לכן היא בסיס של  $\text{col}(A)$ .  
נניח כי  $\dim(\text{col}(A)) = r$ .

$$\Rightarrow n - k = r \quad \Rightarrow k = n - r .$$

לפיכך

$$\dim(\text{Nul}(A)) = n - r = (\text{מספר עמודות הלא מובילות}) - (\text{מספר עמודות מובילות}) .$$

משפט 10.3 בסיס של  $\text{Nul}(A)$ 

תהי  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ . נניח שהפתרון הכללי למערכת  $AX = 0$  הוא

$$X_0 = y_1 u_1 + \cdots + y_k u_k$$

כאשר  $y_1, \dots, y_k$  המשתנים החופשיים של המערכת ו-  $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{F}^n$ .

אז הקבוצת ווקטורים  $B = \{u_1, \dots, u_k\}$  בסיס של  $\text{Nul}(A)$ .

**הוכחה: להעשרה בלבד!**

נניח כי  $\text{rank}(A) = r$ . אז יש  $n - r$  משתנים חופשיים, לכן יש  $k = n - r$  ווקטורים בקבוצה  $B$ .

$\dim(\text{Nul}(A)) = n - r$  והקבוצת ווקטורים  $B = \{u_1, \dots, u_{n-r}\}$  פורשת את  $\text{Nul}(A)$ .

לכן לפי משפט 9.4 הקבוצה  $B$  בת"ל לכן  $B$  מהווה בסיס של  $\text{Nul}(A)$ .

## דוגמה 10.2

במרחב  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  נתונים ווקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ -5 & a \end{pmatrix}$$

(א) עבור אילו ערכי  $a$  ווקטור  $v$  שייך לפרישה לינארית של  $u_1, u_2, u_3$ ?

(ב) עבור כל ערך של  $a$  שמצאתם בסעיף א', בטאו את ווקטור  $v$  כצירוף לינארי של  $u_1, u_2, u_3$  בשתי דרכים שונות.

(ג) לכל ערך של  $a$  מצאו את המימד ובסיס של  $\text{span}\{u_1, u_2, u_3, v\}$ .

(ד) האם קיימים ערכי  $a$  עבורם

$$\text{span}\{u_1, u_2, u_3, v\} = \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

## פתרון:

(א) נרשום  $v$  כצירוף לינארי של  $u_1, u_2, u_3$ :

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = v$$

נחשב את המקדמים:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & a \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 3R_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 0 & -2 & 2 & -3a-5 \\ 0 & 2 & -2 & -a-7 \\ 0 & 0 & 0 & -2a-6 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 0 & -2 & 2 & -3a-5 \\ 0 & 0 & 0 & -4a-12 \\ 0 & 0 & 0 & -2a-6 \end{array} \right)$$

אם  $a = -3$  לה יהיו שורת סתירה וקיים פתרון ואז  $v \in \text{span}\{u_1, u_2, u_3\}$ .

(ב)  $a = -3$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$k_1 = 1 - 2k_3, \quad k_2 = -2 + k_3, \quad k_3 \in \mathbb{R}.$$

נציב  $k_3 = 1$

$$k_1 = -1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 1$$

ונקבל

$$-u_1 - u_2 + u_3 = v.$$

נציב  $k_3 = 0$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 0$$

ונקבל

$$u_1 - 2u_2 + 0 \cdot u_3 = v.$$

(ג) עבור  $a = -3$ :

מסעיף (ב), עמודה 1 ועמודה 2 של  $A = \left( \begin{array}{c|c|c|c} | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & v \\ | & | & | & | \end{array} \right)$  מובילות, לכן הווקטורים  $u_1, u_2$  מהווים בסיס.

עבור  $a \neq -3$ :

מסעיף (ב), עמודה 1 עמודה 2 ועמודה 4 של  $A = \left( \begin{array}{c|c|c|c} | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & v \\ | & | & | & | \end{array} \right)$  מובילות, לכן הווקטורים  $u_1, u_2, v$  מהווים בסיס.

(ד) הווקטורים  $u_1, u_2, u_3, v$  ת"ל לכל ערכי  $a$ , לכן לא קיימים ערכי  $a$  עבורם  $\text{span}\{u_1, u_2, u_3, v\} = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

### 10.3 דוגמה

נתונה המטריצה  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ . לכל ערך של  $a$  מצאו את המימד ובסיס של  $\text{Nul}(A)$ .

**פתרון:**

$$\left( \begin{array}{ccc} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - aR_1}} \left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & -a^2 - a + 2 \end{array} \right)$$

$$a = 1, -2 \Leftarrow -a^2 - a + 2 = 0$$

עבור  $a = 1$  מקבלים

$$\left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\dim(\text{Nul}(A)) = 2 = \text{מספר העמודות הלא מובילות}$$

הפתרון הכללי הינו

$$\begin{aligned} x &= -y - z, & y &\in \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} &= y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

בסיס של  $\text{Nul}(A)$ :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

עבור  $a = -2$ : מקבלים

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim(\text{Nul}(A)) = 1 = \text{מספר העמודות הלא מובילות}$$

הפתרון הכללי הינו

$$\begin{aligned} x &= z, y = z, & y &\in \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} &= z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

בסיס של  $\text{Nul}(A)$ :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

#### משפט 10.4 משפט הדרגה

לכל מרטיצה  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  מסדר  $m \times n$ :

$$\text{rank}(A) + \dim(\text{Nul}(A)) = n.$$

הוכחה:

$\text{rank}(A)$  שווה למספר העמודות המובילות.

$\dim(\text{Nul}(A))$  שווה למספר העמודות הלא המובילות.

לכן  $\text{rank}(A) + \dim(\text{Nul}(A))$  שווה למספר העמודות של  $A$ .

#### דוגמה 10.4

עבור מרטיצה  $A \in \mathbb{R}^{5 \times 7}$  ידוע כי  $\dim(\text{Nul}(A)) = 2$ . מצאו את דרגת  $A$ .



### פתרון:

$$\dim(\text{Nul}(A)) = 2 \text{ לכו } \text{rank}(A) = 5$$

### דוגמה 10.5

האם למטריצה  $A \in \mathbb{R}^{6 \times 9}$  יכול להיות  $\dim(\text{Nul}(A)) = 2$ ? מצאו את דרגת  $A$ .

### פתרון:

נניח שקיימת מטריצה  $A \in \mathbb{R}^{6 \times 9}$  שעבורה  $\dim(\text{Nul}(A)) = 2$ .

$$\text{rank}(A) = 9 - 2 = 7$$

אבל  $\text{rank}(A)$  שווה למספר השורות שלא אפסים במטריצה המדורגת. במטריצה  $A$  יש 6 שורות.

$$\text{rank}(A) \leq 6$$

קיבלנו סתירה. לכן לא קיימת מטריצה  $A$  המקיימת את תנאי התרגיל.

### למה 10.1 סיכום של המימדים של מטריצה

תהי  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  מטריצה בעלת  $m$  שורות ו- $n$  עמודות. נסמן  $r = \text{rank}(A)$  אז

$$\begin{aligned} \dim(\text{col}(A)) = r &= (\text{מספר עמודות מובילות}) \\ \dim(\text{row}(A)) = r &= (\text{מספר שורות מובילות}) \\ \dim(\text{Nul}(A)) = n - r &= (\text{מספר עמודות הלא מובילות}) \end{aligned}$$

### משפט 10.5 תנאים שקולים של מטריצה הפיכה

עבור מטריצה ריבועית  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  התנאים הבאים שקולים זה לזה.

$$\text{rank}(A) = n \quad (1)$$

$A$  הפיכה. (2)

$$A \cdot X = 0 \text{ יש פתרון יחיד.} \quad (3)$$

$$|A| \neq 0 \quad (4)$$

כל השורות של  $A$  בת"ל. (5)

כל העמודות של  $A$  בת"ל. (6)

הוכחה:

תרגיל בית.

## 10.2 ווקטור קואורדינטות לפי בסיס

### משפט 10.6 קואורדינטות של ווקטור לפי בסיס מסוים יחיד

נניח כי  $u_1, \dots, u_n \in V$  בסיס של המרחב ווקטורי  $V$  מעל שדה  $\mathbb{F}$ . אז כל ווקטור  $a \in V$  ניתן לרשום כצירוף ליניארי יחיד של  $u_1, \dots, u_n \in V$ .

הוכחה:

$u_1, \dots, u_n \in V$  בסיס של  $V$ , לכן  $\text{span}\{u_1, \dots, u_n\} = V$ .

מכאן נובע שלכל  $a \in V$ ,

$$a \in \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$$

ז"א קיימים סקלרים  $k_1, \dots, k_n$  כך ש-

$$a = k_1 u_1 + \dots + k_n u_n.$$

נוכיח שהצירוף הלינארי הוא יחיד בדרך השלילה:

נניח שקיים צירוף לינארי אחר:

$$a = t_1 u_1 + \dots + t_n u_n.$$

כך ש-  $k_i \neq t_i$ .

לכן

$$(k_1 - t_1)u_1 + \dots + (k_i - t_i)u_i + \dots + (k_n - t_n)u_n = \bar{0}$$

ו-  $t_i - k_i \neq 0$ . ז"א ווקטורים  $\{u_1, \dots, u_n\}$  תלויים ליניארית. סתירה.

■

### הגדרה 10.3 ווקטור הקואורדינטות

אם  $B = \{u_1, \dots, u_n\} \in V$  בסיס של מרחב ווקטורי  $V$  מעל שדה  $\mathbb{F}$  ו-  $a \in V$  אז

$$a = k_1 u_1 + \dots + k_n u_n.$$

לוקטור

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

קוראים ווקטור הקואורדינטות של ווקטור  $a$  לפי בסיס  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  סימון:

$$[a]_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$



## 10.6 דוגמה

$$E = \{e_1, e_2, e_3\} \text{ הבסיס הסטנדרטי של } \mathbb{R}^3. u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$u = 2e_1 - e_2 + 10e_3.$$

לכן

$$[u]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

## 10.7 דוגמה

$$E = \{1, x, x^2\} \text{ הבסיס הסטנדרטי של } \mathbb{R}_2[x]. p(x) = 1 + 8x - 5x^2$$

$$p(x) = 1 \cdot 1 + 8 \cdot x - 5 \cdot x^2 = 1e_1 + 8e_2 - 5e_3.$$

לכן

$$[p]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

## 10.8 דוגמה

הראו כי קבוצת הווקטורים

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ מהווה בסיס של } \mathbb{R}^3 \text{ ומצאו את } [u]_B \text{ עבוטר הווקטור}$$

**פתרון:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_2 - 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

כל העמודות מובילות לכן  $b_1, b_2, b_3$  בסיס של  $\mathbb{R}^3$ . נמצא את הקואורדינטות של ווקור  $u$  לפי בסיס  $B$ .

$$u = xb_1 + yb_2 + zb_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 2 \\ -2 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 3 & 6 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_2 - 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 3 & 6 & | & 3 \\ 0 & 0 & 3 & | & -27 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2 \\ R_3 \rightarrow \frac{1}{3}R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 10 \\ 0 & 1 & 0 & | & 19 \\ 0 & 0 & 1 & | & -9 \end{pmatrix}$$

$$\cdot [u]_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ -9 \end{pmatrix}$$

## דוגמה 10.9 (מרחב האפס ובסיסו)

מצאו את בסיס ומימד של מרחב האפס של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

## פתרון:

כדי למצוא את המרחב האפס יש למצוא את הפתרונות של המערכת

$$\begin{aligned}
 & AX = \bar{0} \\
 & \left( \begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 + 3R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \end{array}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{5} \cdot R_2} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

## המערכת המתאימה היא

$$\begin{array}{rcccccl} x_1 & - & 2x_2 & & - & x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ & & & & & x_3 & + & 2x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \end{array}$$

ולכן הפתרון הוא

$$x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5, \quad x_3 = -2x_4 + 2x_5, \quad x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

ובצורה וקטורית

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

נרשום את הפתרון בצורה צ"ל של וקטורים ב  $\mathbb{R}^5$ :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_4 \\ 0 \\ -2x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3x_5 \\ 0 \\ 2x_5 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + x_4 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} + x_5 \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3}$$

כאשר  $x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$ . לכן

$$\text{Nul}(A) = \text{span} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\dim(\text{Nul}(A)) = 3$$

### משפט 10.7

נניח ש-  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  ותהי  $A^t$  המשוחלפת של  $A$ . אז

$$\text{Row } A = \text{Col } A^t, \quad \text{Col } A = \text{Row } A^t.$$

הוכחה: תרגיל בית.

### משפט 10.8

נניח ש-  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ . אם ניתן להגיע מ-  $A$  ל-  $B$  ע"י ביצוע מספר סופי של פעולות שורה אלמנטריות אז

$$\text{row } A = \text{row } B.$$

הוכחה: תרגיל בית.

### משפט 10.9

נניח ש-  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ונניח ש-  $B$  המטריצה המדורגת המתקבלת מ-  $A$ . אז

$$\text{Row } A = \text{Row } B, \quad \text{Nul } A = \text{Nul } B.$$

הוכחה: תרגיל בית.

## דוגמה 10.10

עבור המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

מצאו בסיס ל-

Row  $A$  (א)

Nul  $A$  (ב)

Col  $A$  (ג)

פתרון:

(א)

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow -R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - \frac{5}{13}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2 - 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ולכן הוקטורים הלא כולה אפסים

$$v_1 = (1 \ 0 \ 2 \ 0 \ 1) , \quad v_2 = (0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 1) , \quad v_3 = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1) .$$

מהווה בסיס של Row  $A$ .

(ב) בכדי למצוא בסיס של Nul  $A$  נפתור את המערכת ההומוגנית  $AX = 0$ . ע"י המטריצה המדורגת הנמצאת לעיל מקבלים את המערכת המתאימה

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_5 &= 0 & x_1 &= -2x_3 - x_5 \\ x_2 - x_3 + x_5 &= 0 & x_2 &= x_3 - x_5 \\ x_4 + x_5 &= 0 & x_4 &= -x_5 \end{aligned} \Rightarrow$$

כך ש-

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s - t \\ s - t \\ s \\ -t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

הינה בסיס של  $\text{Nul } A$ .

(ג) שיטה 1

לפי משפט 10.7 ניתן למצוא בסיס של  $\text{Col } A$  ע"ל למצוא בסיס של  $\text{Row } A^t$ :

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & -7 \\ 5 & -8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

המדורגת של  $A^t$  היא

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$B_{\text{Row } A^t} = \{(1 \ -2 \ 0 \ 3), (0 \ 1 \ 3 \ 0), (0 \ 0 \ -5 \ -13)\}$$

ואז לפי משפט 10.7:

$$B_{\text{Col } A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ -13 \end{pmatrix} \right\}$$

שיטה 2

לפי 10.1 העמודות של  $A$  המתאימות לעמודות של המדורגת  $U$  עם איבר מוביל, מהוות בסיס. מכיוון שיש איבר מוביל בעמודה ה-1 עמודה ה-2 ועמודה ה-4 בהמדורגת  $U$ , אז עמודה ה-1 עמודה ה-2 ועמודה ה-4 של  $A$  מהווה בסיס:

$$B_{\text{Col } A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$$