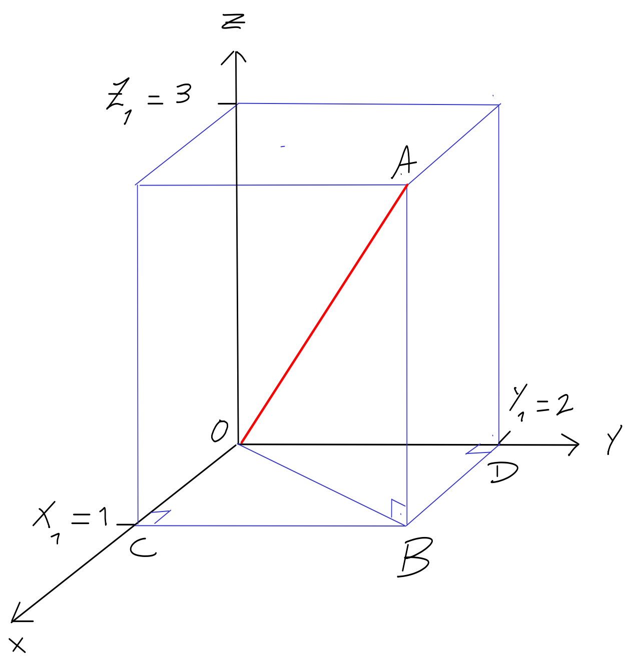
הנדסה גאומרית

נניח ש A נקודה עם קואורדינטות $(1,2,3)$ ביחס לראשית.



אפשר להגדיר הוקטור $\overline{OA}$ להיות הקו שמתחיל בנקודה O ומסתיים בנקודה A.

כדי לעבור מנקודה O לנקודה A, אפשר לעבור

יחידה אחת לאורך ציר ה- x (לאורך OC),
2 יחידות לאורך ציר ה- y (לאורך CB),
ו- 3 יחידות לאורך ציר ה- z (לאורך BA).

אומרים כי הקואורדינטות של הוקטור $\overline{OA}$ הן $(1,2,3)$ ביחס למערכת צירים. נסמן את הוקטור בצורה

$$\overline{OA} = (1,2,3) \ .$$

המספרים $(1,2,3)$ נקראים הקואורדינטות או הרכיבים של הוקטור. לוקטור יש גודל וכיוון. הגודל של הוקטור מוגדר להיות האורך של הקו של הוקטור מהזנב להראש.

נחשב את אורך הוקטור OA לפי פיתגרוס:

$$|OA|^2 = |OB|^2 + |AB|^2$$

$$|OB|^2 = |OC|^2 + |BC|^2 = x_1^2 + y_1^2 \ , \qquad |AB|^2 = z_1^2$$

לכן

$$|OA|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \ ,$$

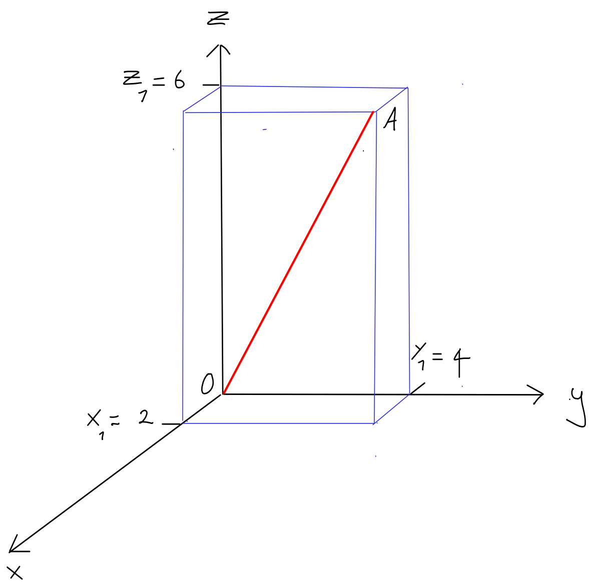
לכן גודל הוקטור $\overline{OA}$ הוא

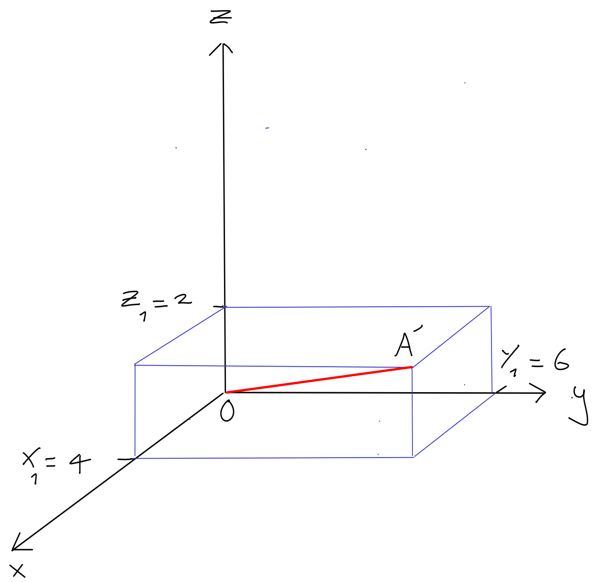
$$|OA| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{14} \ .$$

באופן כללי נתון וקטור $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ הגודל של הוקטור ניתן ע"י

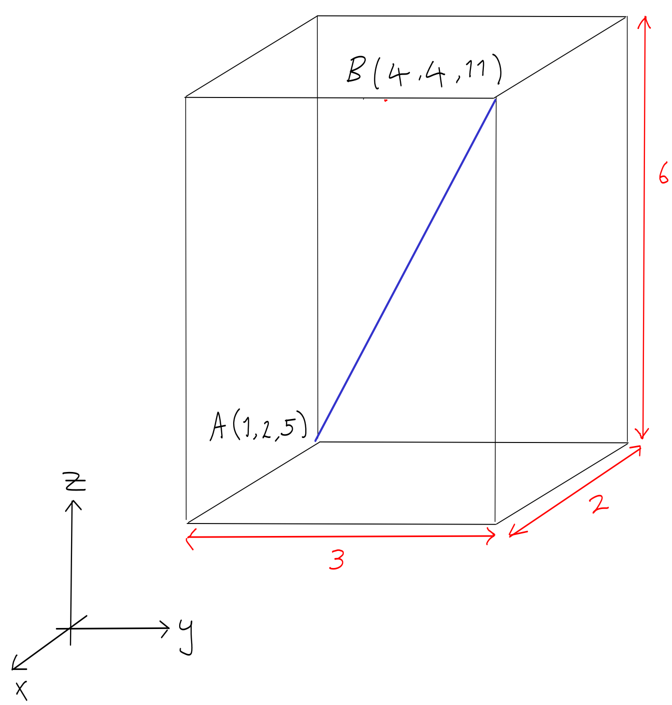
$$|\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \ .$$

לוקטור יש גודל וכיוון. בפרט, אפשר שלשני וקטורים יש גודל שווה אבל כיוונים שונים. לדוגמה יש לוקטורים $\overline{OA}=(2,4,6)$ ו $\overline{OA'}=(4,6,2)$ אותו גודל: $|OA|=|OA'|=\sqrt{56}$, אבל יש להם כיוונים שונים (ראו שרטוט).





נכליל את ההגדרה למעלה של וקטור מראשית לנקודה במרחב- xyz לוקטור מנקודה לנקודה, אשר אף משניהם לא בהכרח הראשית. לדוגמה, נתונות שתי נקודות $A(1,2,5)$ ו- $B(4,4,11)$, ניתן להגדיר את הוקטור מנקודה A לנקודה B.



כדי לעבור מנקודה A לנקודה B, יש לעבור

3 יחידות בכיוון ה- x,

2 יחידות בכיוון ה- y,
ו- 6 יחידות בכיוון ה- z.

לכן נגדיר את הוקטור $\overline{AB}$ כך:

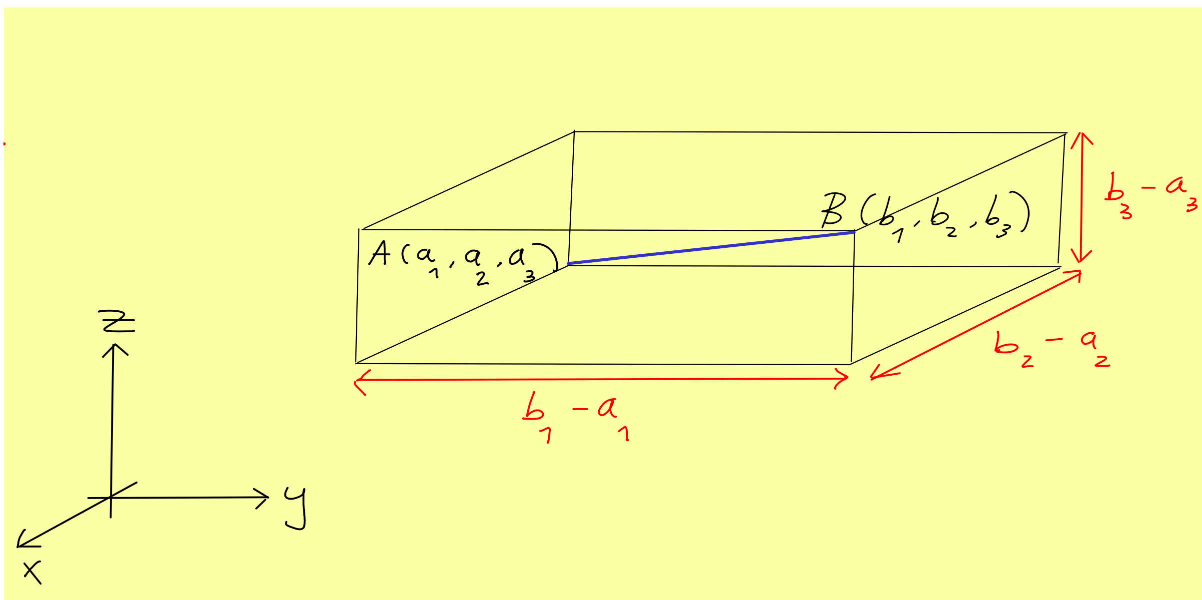
$$\overline{AB} = (3, 2, 6) \ .$$

הרכיב ה- x של $\overline{AB}$ הוא ההפרש בין הקואורדינטות ה- x של הנקודות A ו- B: $x_B - x_A = 3$.
מאותה מידה, הרכיב ה- y של $\overline{AB}$ הוא ההפרש בין הקואורדינטות ה- y של A ו- B: $y_B - y_A = 2$,
והרכיב ה- z של $\overline{AB}$ הוא ההפרש בין הקואורדינטות ה- z של A ו- B: $z_B - z_A = 6$.

הגדרה 1: וקטור בין שתי נקודות

באופן כללי, בהינתן שתי נקודות $A(a_1, a_2, a_3)$ ו- $B(b_1, b_2, b_3)$, הוקטור $\overline{AB}$ בין A ל- B הינו

$$\overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \ .$$



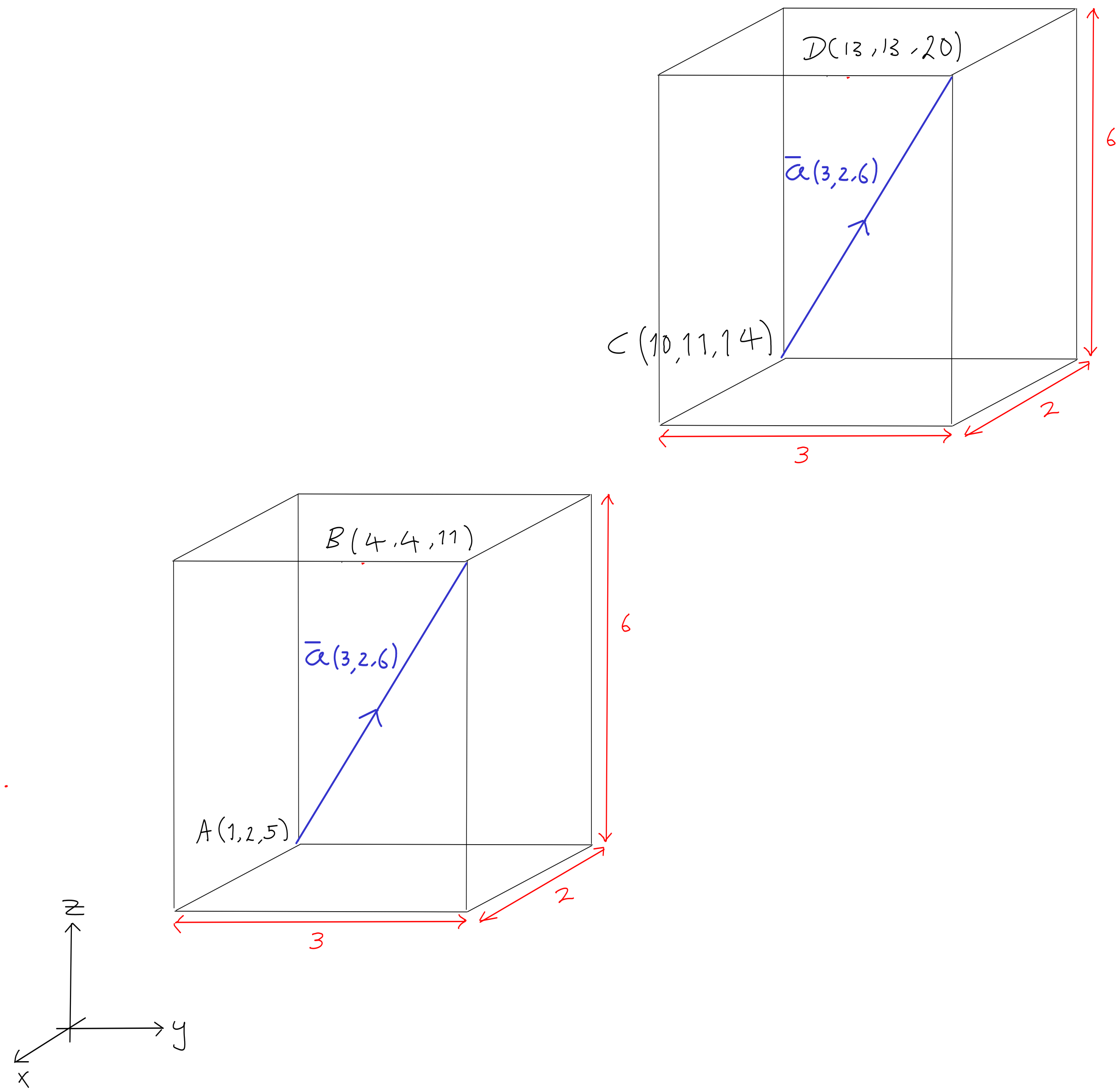
הגודל של הוקטור, לפי פיתגורוסת הינו

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} \ .$$

למעשה אנחנו לא צריכים נקודות מסוימות כדי להגדיר וקטור. לוקטור אין נקודת התחלתית קבועה אבל אפשר "להניח" אותו בכל נקודה במישור / מרחב. לדוגמה נקח הוקטור מדוגמה הקודמת. הוקטור בעל בת קואורדינטות $(3, 2, 6)$ התחיל בנקודה $A(1, 2, 5)$ והסתיים בנקודה $B(4, 4, 11)$. אבל ניתן לקחת אותו וקטור, להניח את הזנב על הנקודה $C(10, 11, 14)$ ונמצא כי הראש של הוקטור יהיה בנקודה

$$D = (10, 11, 14) + (3, 2, 6) = (13, 13, 20) \ ,$$

כלומר הוקטור $(3, 2, 6)$, כאשר הוא מתחיל בנקודה $C(10, 11, 14)$ מסתיים בנקודה $D(13, 13, 20)$ (ראו שרטוט למטה).



נשים לב כי יש לוקטורים $\overline{AB}$ ו- $\overline{CD}$ אותם רכיבים:

$$\overline{AB} = (3,2,6) = \overline{CD} \ ,$$

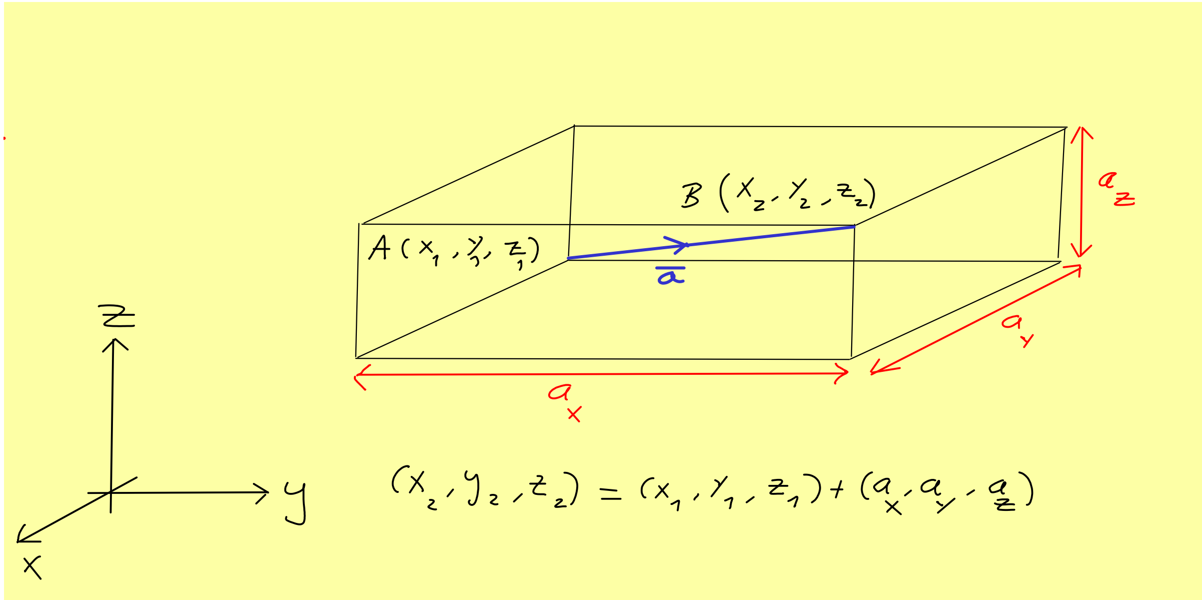
ויותר מזה הכיוונים של השני וקטורים שווים, כלומר הוקטורים מקבילים. זאת תוצאה של העובדה שיש להשני וקטורים אותם רכיבים. הכיוון של וקטור נקבע ע"י הרכיבים שלו.
האורך של הוקטור גם לא משתנה כאשר נניח אותו על נקודה התחלתית שונה. לפי פיתגורס:

$$|AB| = \sqrt{3^2+2^2+6^2} = 7 \ , \qquad |CD| = \sqrt{3^2+2^2+6^2} = 7 \ .$$

הגדרה 2: וקטור כיוון

נתון וקטור $\bar{a}\,(a_x, a_y, a_z)$ ונתון הנקודה $A = (x_1, y_1, z_1)$ כלשהי. אז כאשר הוקטור $\bar{a}$ מתחיל בנקודה A, הוא עובר לנקודה B בת קואורדינטות (x_2, y_2, z_2) כאשר

$$x_2 = x_1 + a_x \ , \qquad y_2 = y_1 + a_y \ , \qquad z_2 = z_1 + a_z \ .$$



משפט 1: אורך של וקטור

האורך (או גודל) של הוקטור $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ יסומן ב $|\bar{a}|$ או לעיתים a (בלי הגג מעל) וניתן ע"י הנוסחה של פיתגורס:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

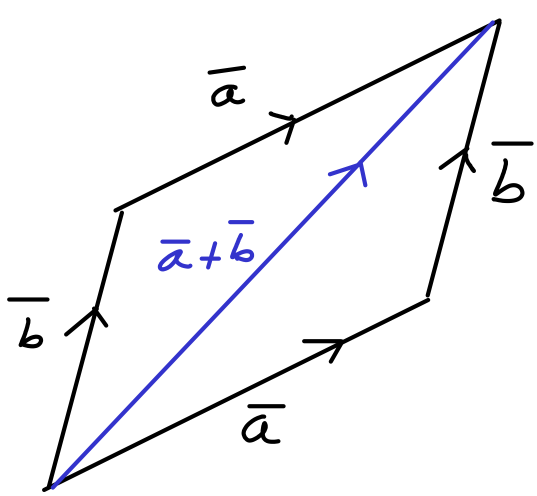
משפט 2: חיבור וקטורים

מבחינת קואורדינטות, הסכום של $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3$ ו- $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ נתון ע"י

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)\ .$$

גיאומטרית, החיבור מתבצע ע"י כלל המקבילית:

מניחים את שני הוקטורים כך שיתחילו באותה הנקודה ומניחים עותק של כל אחד מהם בקצה של השני כך שנוצרת מקבילית. האלכסון של המקבילית הוא הסכום.



משפט 3: כפל וקטור בסקלר

הכפלה של וקטור $\bar{a}$ בסקלר k תשנה אורכו.

אם $k>0$ כיוונו לא ישתנה,

אם $k<0$ כיוונו יהופך,

אם $k=0$ נקבל וקטור האפס.

אלגברית: אם $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ אז

$$k\bar{a}=(ka_1,ka_2,ka_3)\ .$$

משפט 4: תנאי קוליניאריות

אם שני וקטורים $\bar{a}$ ו- $\bar{b}$ קוליניאריות אז קיים $t\in\mathbb{R}$ כך ש-

$$\bar{b}=t\cdot\bar{a}\ .$$

פורמאלית:

$$\bar{b}||\bar{a}\quad\Leftrightarrow\quad\exists t:\bar{b}=t\cdot\bar{a}\ .$$

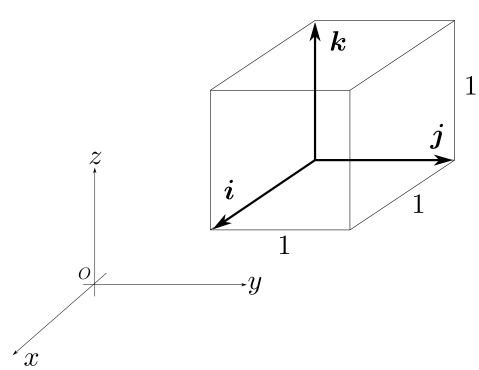
הגדרה 3: הבסיס הסטנדרטי

נגדיר שלושה וקטורים הבאים:

- הוקטור i מקביל לכיוון x וגודלו 1
- הוקטור j מקביל לכיוון y וגודלו 1
- הוקטור k מקביל לכיוון z וגודלו 1

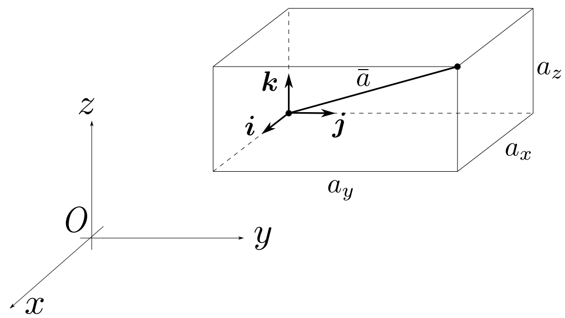
הקבוצה של הוקטורים i,j,k נקרא הבסיס הסטנדרטי. הקואורדינטות של הוקטורים אלו הן:

$$i(1,0,0)\ ,\qquad j(0,1,0)\ ,\qquad k(0,0,1)\ .$$



בהינתן וקטור $\bar{a}=(a_x,a_y,a_z)$ ניתן לבטא אותו במונחים של הבסיס מצורה

$$\bar{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\ .$$



הגדרה 4: וקטור יחידה

בהינתן וקטור $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ בעל אורך $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ נגדיר וקטור יחידה המסומן $\hat{a}$, אשר כיוונו שווה לכיוון של $\bar{a}$ ואורכו שווה 1.
$\hat{a}$ ניתן ע"י הנוסחה

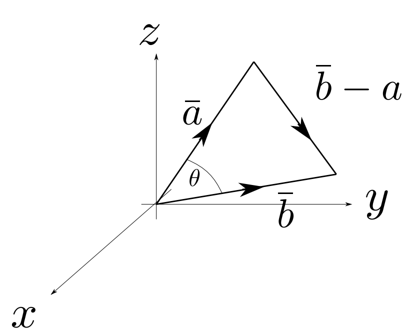
$$\hat{a} = \frac{1}{|\bar{a}|}\bar{a} = \left(\frac{a_x}{|\bar{a}|}, \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \frac{a_z}{|\bar{a}|}\right)$$

הגדרה 5: מכפלת סקלרית

נתונים שני וקטורים $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ו- $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, המכפלת סקלרית שלהם הוא

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 c_3 \ . \qquad (\#1)$$

משפט 5:



נתונים שני וקטורים $\bar{a}$ ו- $\bar{b}$, הזווית θ ביניהם, הינה

$$\cos\theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|\ |\bar{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \ .$$

משפט 6:

1. אם $\bar{=}0$ או $\bar{b} = 0$ אז $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.
2. אם $\bar{a}$ מאונך ל- $\bar{b}$ ($\theta = 90^\circ = \pi/2$) אז $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.
3. אם θ זווית קהה אז $\cos\theta < 0$ ולכן גם $\bar{a} \cdot \bar{b} < 0$.

.4

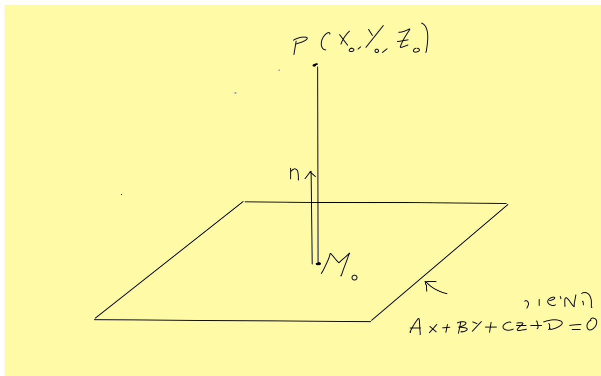
$$\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|^2$$

.5

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$$

לכל $\bar{a},\bar{b}\in\mathbb{R}^3$.

הגדרה 6: היטל של וקטור $\bar{a}$ על וקטור $\bar{b}$

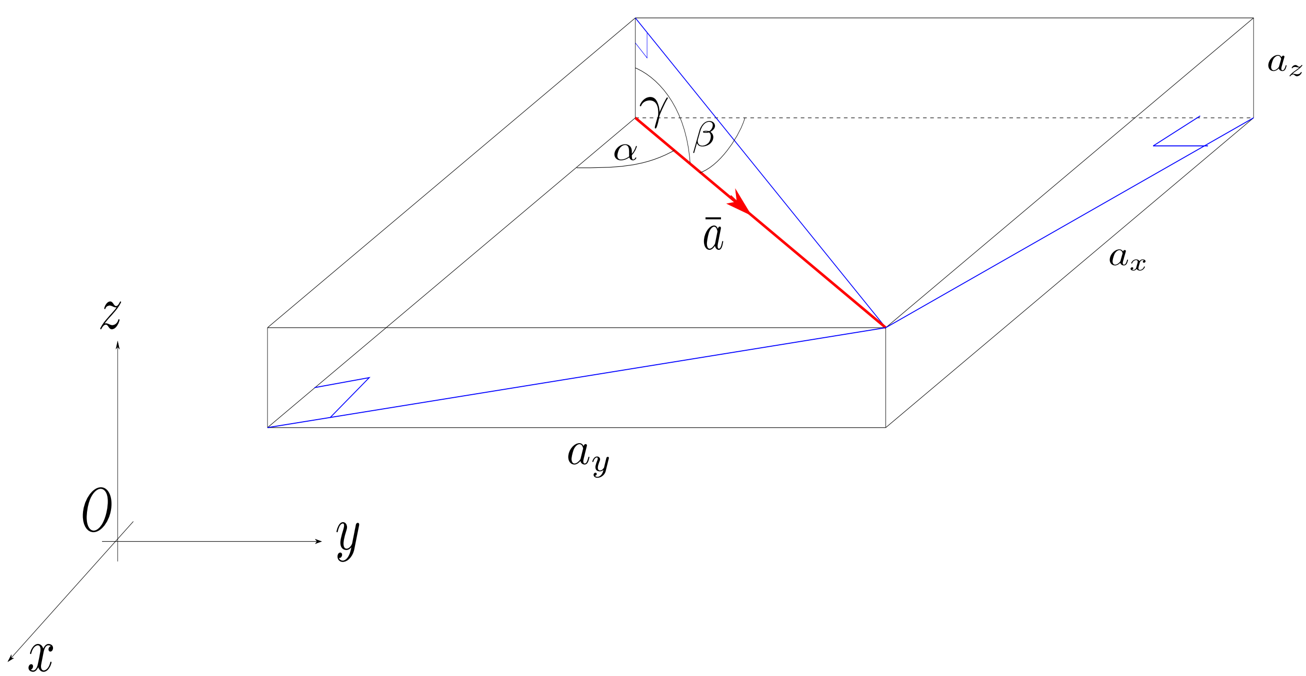


אורך ההיטל של $\bar{a}$ על וקטור $\bar{b}$ הוא

$$|\bar{b}|\cdot\cos(\alpha)\ .$$

לכן, $|\bar{a}\cdot\bar{b}|$ שווה למכפלת האורך של $\bar{a}$ באורך ההיטל של $\bar{b}$ על $\bar{a}$.

משפט 7: זוויות של וקטור



נתון וקטור $\bar{a}=(a_x,a_y,a_z)$. נניח ש-

α הזווית בין $\bar{a}$ וכיוון ה- x,

β הזווית בין $\bar{a}$ וכיוון ה- y,

γ הזווית בין $\bar{a}$ וכיוון ה- z,

(תראו תרשים לעיל). אז

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|} \ , \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|} \ , \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|} \ .$$

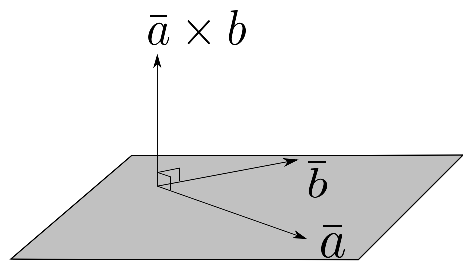
שים לב לפי משפט **??**, נתון וקטור $\bar{a}$ עם זוויות α, β, γ ביחס לצירים, הוקטור היחידה של $\bar{a}$ ניתן ע"י ז

$$\hat{a} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \ .$$

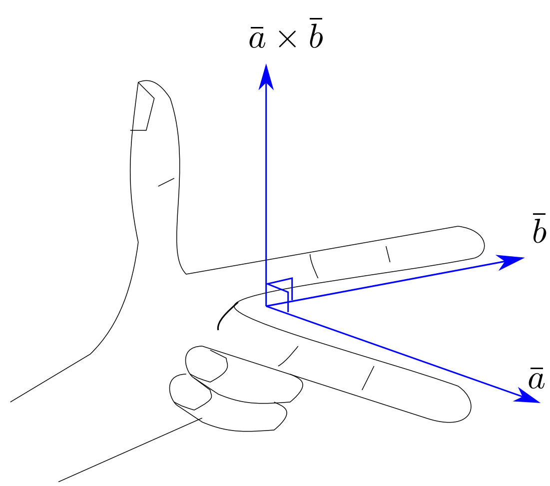
הגדרה 7: מכפלת וקטורית

נתון שני וקטורים $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ו- $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ המכפלת וקטורית מוגדרת להיות

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$



המכפלת וקטורית היא וקטור שניצב למישור בו נמצאים הוקטורים $\bar{a}$ ו- $\bar{b}$.



משפט 8: מכפלת וקטורית וזווית בין וקטורים

אם θ הזיית בין הוקטורים $\bar{a}$ ו- $\bar{b}$ אז מתקיים

$$|\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\theta \ .$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
|\bar{a}\times\bar{b}|^2 &= (y_1z_2-y_2z_1)^2+(z_1x_2-z_2x_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2\\
&=\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2+z_2^2\right)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2\\
&=|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2-(\bar{a}\cdot\bar{b})^2\\
&=|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2-|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\cos^2\theta\\
&=|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\left(1-\cos^2\theta\right)\\
&=|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\sin^2\theta \ .
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad |\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\theta \ .$$

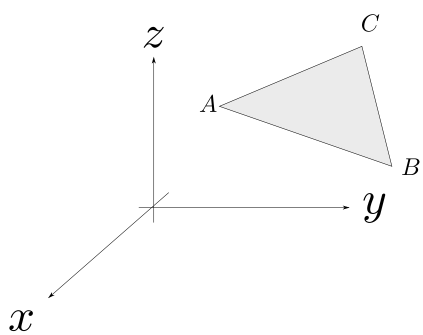
■

משפט 9: תנאי קופלנריות

שלושה וקטורים $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ נמצאים במישור אחת א"אם

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=0 \ .$$

משפט 10: שטח משולש



$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$$

משפט 11: מכפלה מעורבת

א) נתון שלושה וקטורים $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ המכפלה מעורבת מוגדרת להיות

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=\bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})=\bar{b}\cdot(\bar{c}\times\bar{a})=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$

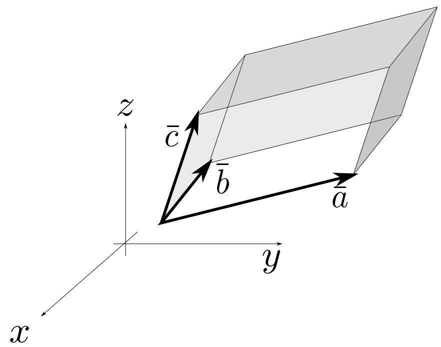
ב)

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=\bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})=\bar{b}\cdot(\bar{c}\times\bar{a}) \ .$$

ג) הערך מוחלט של המכפלה מעורבת שווה לנפח של המקבילון הנוצר ע"י השלושה וקטורים $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$

כמתואר בתרשים. כלומר

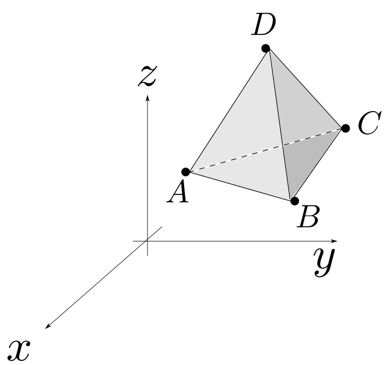
$$V_{\text{מקבילון}} = |\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})| \ .$$



ד) הוקטורים $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ הם קופלנריים (שלשתם נמצאים באותו מישור) אם ורק אם

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = 0 \ .$$

משפט 12: נפח פירמידה

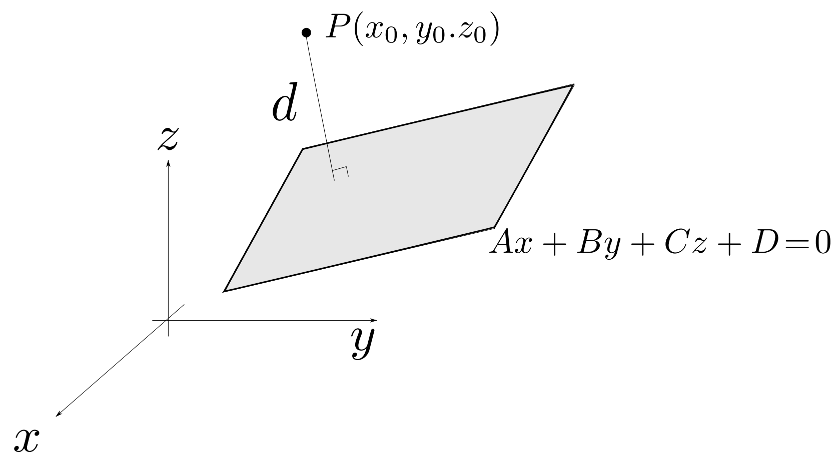


$$V = \frac{1}{6} \left| \overline{AD} \cdot \left(\overline{AB} \times \overline{AC} \right) \right|$$

משפט 13: מרחק מנקודה למישור

בהינתן נקודה $P(x_0, y_0, z_0)$ ומישור בעל משוואה $Ax + By + Cz + D = 0$, המרחק d בין P לנקודה הכי קרובה אליו הנמצא במישור ניתן ע"י

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \ .$$



xyz.

הגדרה 8: משוואת המישור

המשוואה המתארת מישור בכללי במרחב xyz
הינה

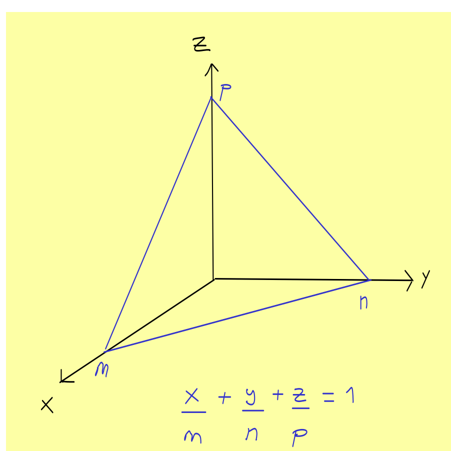
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

כאשר לפחות אחד המקדמים A, B, C אינו אפס.

ניתן לרשום משוואת המישור בצורה

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1 \ .$$

בצורה הזאת המספרים m, n, p הם הנקודות חיתוך של המישור עם הצירי x, y, z בהתאמה כמתואר בשרטוט.



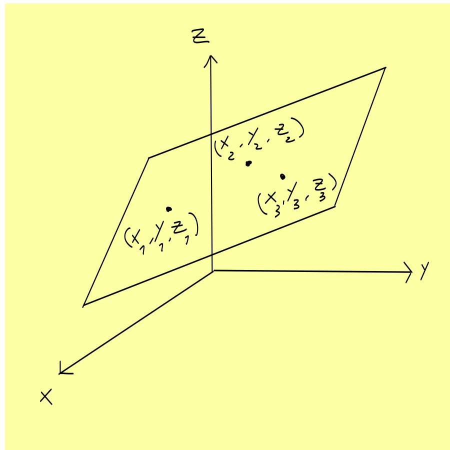
מישור מוגדר ע"י שלוש נקודות שבהן הוא עובר, בתנאי ששלושת הנקודות לא על אותו ישר (כלומר לא קולינאריות).

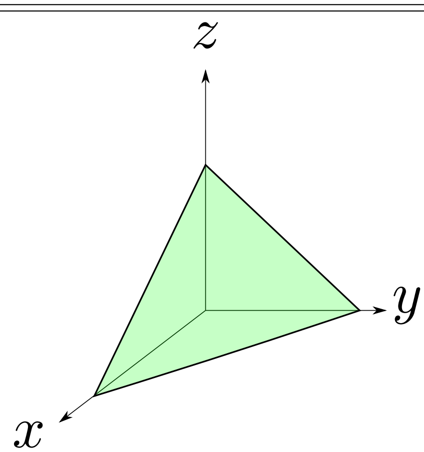
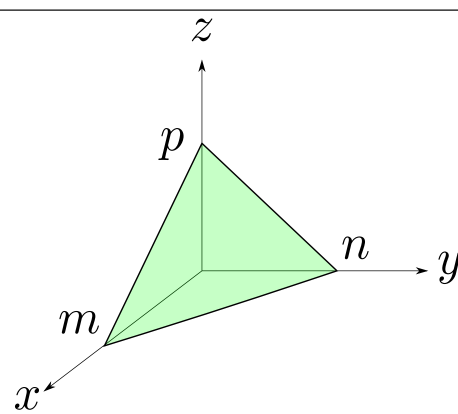
משפט 14: משוואת המישור העובר דרך שלוש נקודות

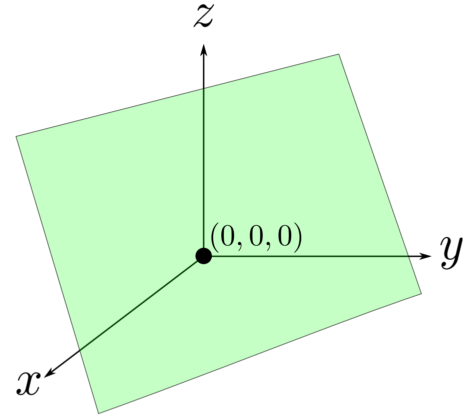
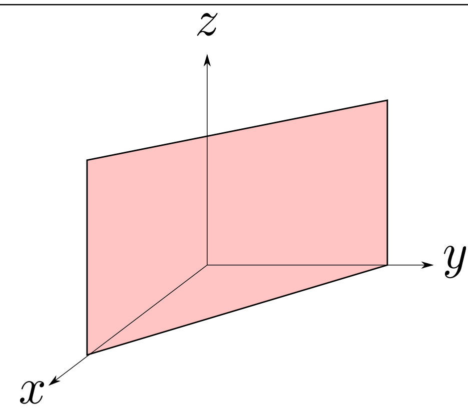
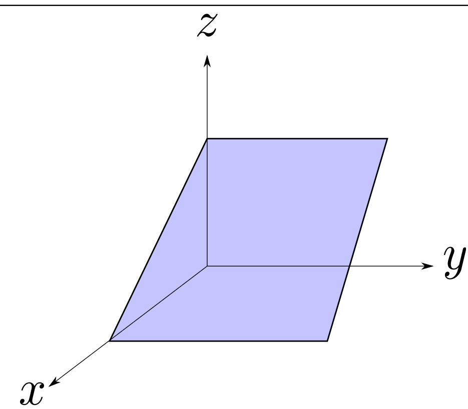
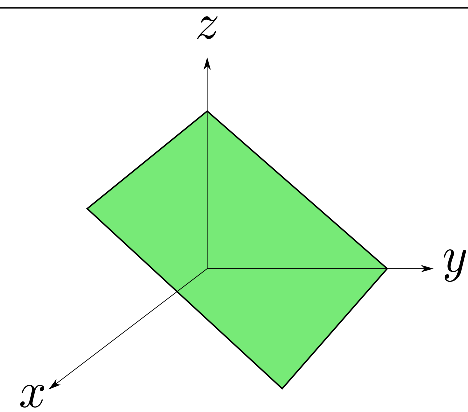
משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנתונות (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ו- (x_3, y_3, z_3) ניתן לרשום

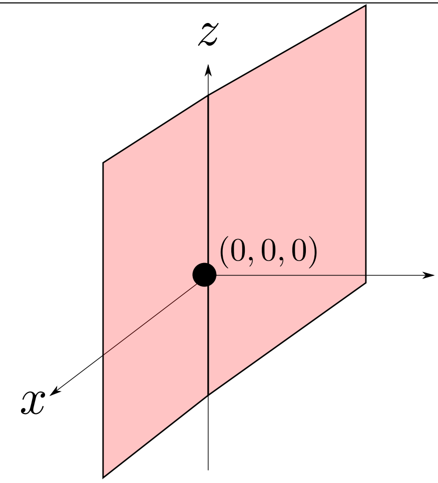
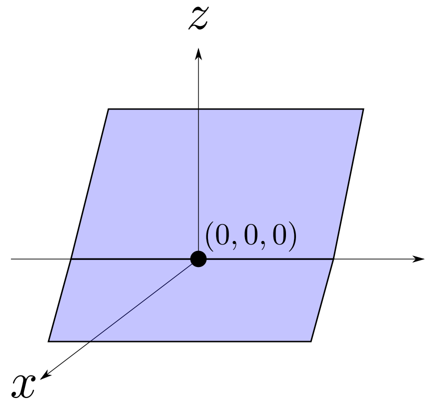
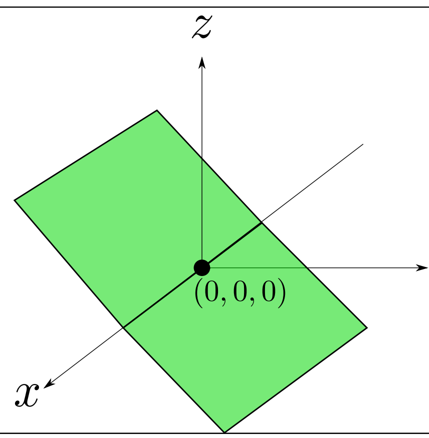
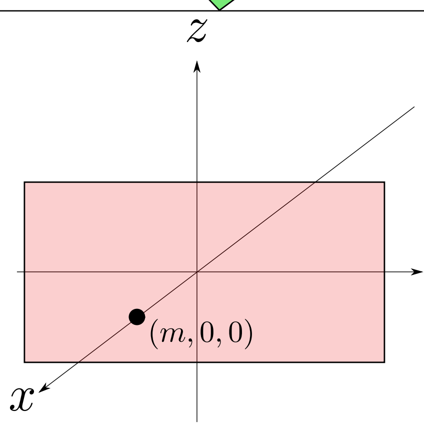
בצורה:

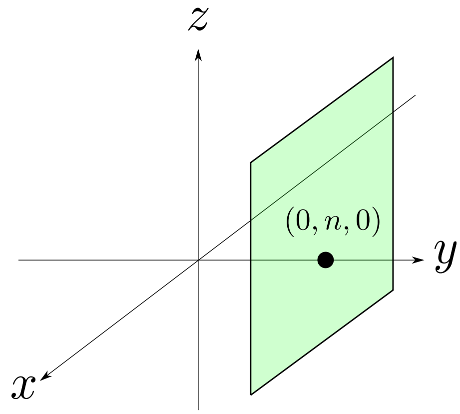
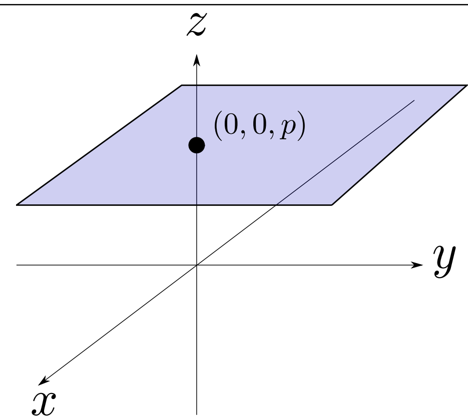
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ .$$



$Ax + By + Cz + D = 1$		$.A, B, C, D \neq 0$ המישור לא עובר את הראשית הצירים.
$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$		$.m, n, p \neq 0$ המישור לא עובר את הראשית הצירים. אין הבדל איכותי בתרשים הזה והתרשים לעיל. השני ביטוים האלה מציגים אותו מישור.

<table>
<tr>
<td>$Ax+By+Cz=0$</td>
<td>
</td>
<td>המישור עובר דרך הראשית הצירים.
המישור חותך את כל אחד של הצירים בנקודה $(0,0,0)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>$Ax+By+D=0$</td>
<td>
</td>
<td>$A,B,D\neq 0$.
משתנה ה- z לא משתתף במשוואת המישור.
המישור לא חותך את ציר ה-z ולא עובר דרך הראשית הצירים.</td>
</tr>
<tr>
<td>$Ax+Cz+D=0$</td>
<td>
</td>
<td>$A,C,D\neq 0$.
משתנה ה- y לא משתתף במשוואת המישור.
המישור לא חותך את ציר ה-y ולא עובר דרך הראשית הצירים.</td>
</tr>
<tr>
<td>$By+Cz+D=0$</td>
<td>
</td>
<td>$B,C,D\neq 0$.
משתנה ה- x לא משתתף במשוואת המישור.
המישור לא חותך את ציר ה-x ולא עובר דרך הראשית הצירים.</td>
</tr>
</table>

$Ax+By=0$		$A,B\neq 0$. משתנה ה- z לא משתתף במשוואת המישור. המישור עובר דרך הראשית הצירים. המישור מכיל את ציר ה-z.
$Ax+Cz=0$		$A,C\neq 0$. משתנה ה- y לא משתתף במשוואת המישור. המישור עובר דרך הראשית הצירים. המישור מכיל את ציר ה-y.
$By+Cz=0$		$B,C\neq 0$. משתנה ה- x לא משתתף במשוואת המישור. המישור עובר דרך הראשית הצירים. המישור מכיל את ציר ה-x.
$Ax+D=0\Leftrightarrow x=m$		$A,D\neq 0$. משתני y ו- z לא משתתפים במשוואת המישור. המישור חותך את ציר ה-x ב- $x=m$. המישור מקביל למישור yz.

$By+D=0 \Leftrightarrow y=n$		$B,D\neq 0$. משתני x ו- z לא משתתפים במשוואת המישור. המישור חותך את ציר ה-x ב- $y=n$. המישור מקביל למישור xz.
$Cz+D=0 \Leftrightarrow z=p$		$C,D\neq 0$. משתני x ו- y לא משתתפים במשוואת המישור. המישור חותך את ציר ה-x ב- $z=p$. המישור מקביל למישור xy.

משפט 15: שטח משולש במישור xy

שטחו S של המשולש אשר קדקודיו הם בנקודות (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) הוא

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$

משפט 16: מרחק מנקודה למישור

המרחק d מהנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ למישור $Ax+By+Cz+D=0$ הוא

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

משפט 17: נפח הפירמידה המשולשת במרחב xyz

הנפח V של הפירמידה המשולשת אשר קדקודיה הם בנקודות (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3), (x_4,y_4,z_4), הוא

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}$$

משפט 18: משוואת המישור במרחב

משוואת המישור המאונך לוקטור $n=(A,B,C)$ העובר דרך הנקודה $M=(x_0,y_0,z_0)$ היא

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \ .$$

אם נשווה למשוואה $Ax+By+Cz+D=0$ נקבל ש- $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

n נקרא הנורמל למישור.

הוכחה: עבור הנקודה $P=(x,y,z)$ במישור מתקיים כי

$$n\cdot\overline{MP}=0$$

בגלל ש n מאונך למישור ו- $\overline{MP}$ מוכל מקביל למישור.

$$\Rightarrow \qquad A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0 \ .$$

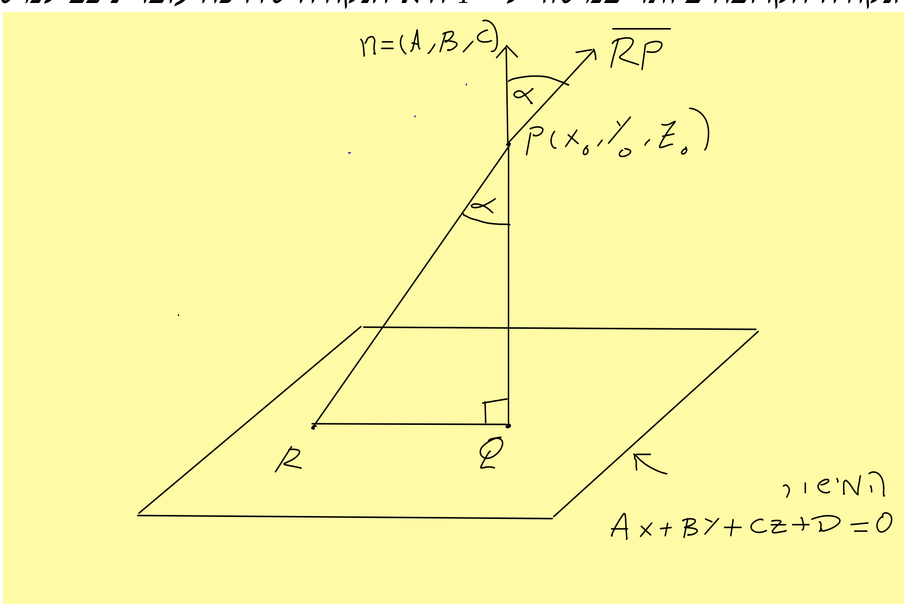
■

משפט 19: מרחק מנקודה למישור

המרחק d מהנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ למישור $Ax+By+Cz+D=0$ הוא

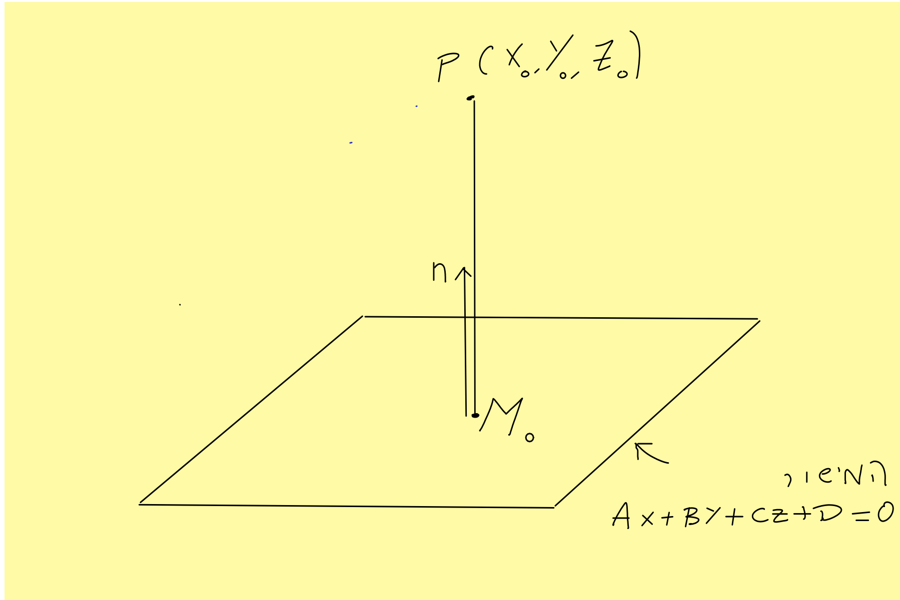
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \ .$$

הנקודה הקרובה ביותר במישור ל- P היא הנקודה שדרכה עובר ניצב למישור שעובר דרך P.



הגדרה 9: היטל של נקודה על מישור

ההיטל של נקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ על מישור $Ax+By+Cz+D=0$ היא הנקודה על המישור הקרובה ביותר ל- P. כלומר, נקודה M_0 כך ש- $\overline{M_0P}$ מקביל לנורמל n למישור.

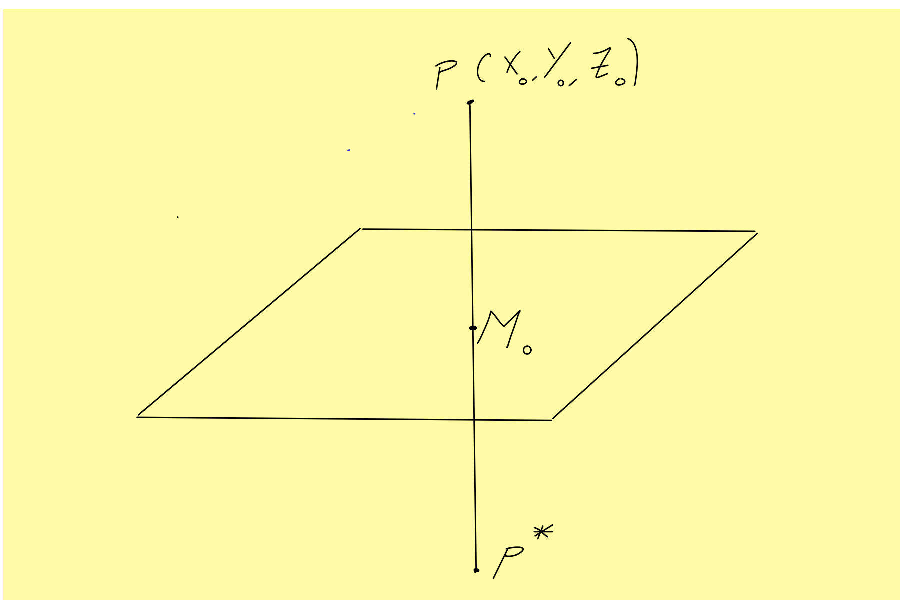


הגדרה 10: השיקוף של נקודה ביחס מישור

השיקוף P^* של נקודה $P(x_0, y_0, z_0)$ ביחס למישור מוגדר להיות

$$P^* = P - 2\overline{M_0P} \ ,$$

כאשר M_0 ההיטל של P על המישור.



<u>שיטה אחרת ויותר קלה:</u>

אם נרשום את הישר העובר את הנקודה P וההיטל שלו במישור בצורה

$$M(t) = P + t \cdot \bar{n}$$

כשאר $\bar{n}$ הנורמל של המישור. נניח ש- t_0 הוא הערך של הפרמטר t בנקודת ההיטל, M_0 של P ביחס למישור. אז השיקוף של P ביחס למישור זו ניתן ע"י

$$P^* = M(2t_0) = P + 2t_0\bar{n} \ .$$

בהינתן שני מישורים $\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1 &= 0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2 &= 0\end{aligned}\right\}$ ניתן להגדיר להם שלושה מצבים הדדיים: נחתכים, מתלכדים או מקבילים.

1) המישורים נחתכים אם הוקטורים (A_1,B_1,C_1) ו- (A_2,B_2,C_2) לא מקבילים. במצב זה החיתוך בין המישורים הוא קו ישר.

לדוגמה, נתונים שני מישורים $\left.\begin{aligned} 2x-3y+z+1 &= 0\\ x-z+3 &= 0\end{aligned}\right\}$. המישורים נחתכים בגלל ש- $(1,0,-1) \nparallel (2,-3,1)$.

2) המישורים מקבילים אם אין להם נקודה משותפת. כלומר אין פתרון למערכת במצב זה. הוקטור (A_1,B_1,C_1) מקביל לוקטור (A_2,B_2,C_2) אבל $\frac{D_2}{A_2} \neq \frac{D_1}{A_1}$ (ניתן להחליף ב- B או C).

לדוגמה, נתונים המישורים $\left.\begin{aligned} 2x-3y+z+1 &= 0\\ 6x-9y+3z+2 &= 0\end{aligned}\right\}$. $(6,-9,3) \parallel (2,-3,1)$ אבל $\frac{D_2}{A_2} \neq \frac{D_1}{A_1}$. לכן המישורים מקבילים.

3) המישורים מתלכדים אם כל הנקודות שלהם משותפות במצב זה, הוקטורים (A_1,B_1,C_1) ו- (A_2,B_2,C_2) מקבילים. מספיק שיש רק נקודה אחת משותפת שכן מישור נקבע ע"י נקודה ווקטור ניצבו.

לדוגמה, נתונים שני מישורים $\left.\begin{aligned} 2x-3y+z+1 &= 0\\ -4x+6y-2z-2 &= 0\end{aligned}\right\}$. המישורים מתלכדים בגלל ש- $(-4,6,-2) \parallel (2,-3,1)$ והנקודה $(0,0,-1)$ נקודה משותפת.

משפט 20: שטח משולש במישור xy

שטחו S של המשולש אשר קדקודיו הם בנקודות (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) הוא

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$

משפט 21: מרחק מנקודה למישור

המרחק d מהנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ למישור $Ax+By+Cz+D=0$ הוא

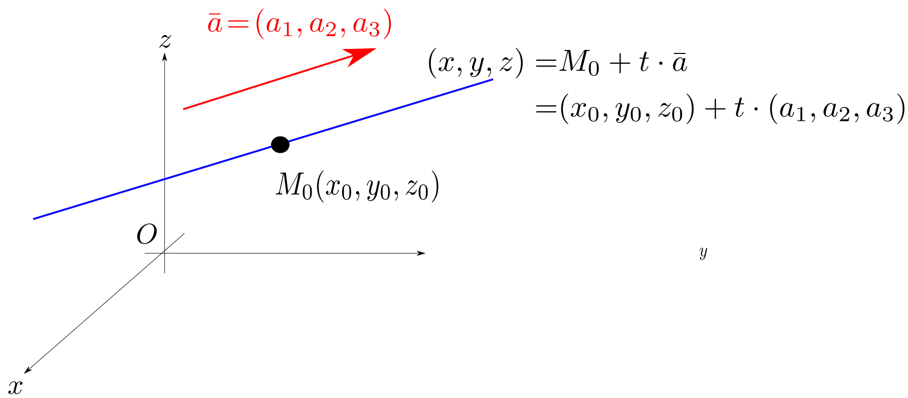
$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

משפט 22: נפח הפירמידה המשולשת במרחב xyz

הנפח V של הפירמידה המשולשת אשר קדקודיה הם בנקודות (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3), (x_4,y_4,z_4), הוא

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}$$

הגדרה 11: משוואת הישר בצורה פרמטרית



משוואת הישר העובר דרך הנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$ במקביל לוקטור $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, הוא

$$(x,y,z)=M_0+t\cdot\bar{a}=(x_0,y_0,z_0)+t(a_1,a_2,a_3)\ ,$$

או באופן שקול

$$x=x_0+a_1t\ ,\qquad y=y_0+a_2t\ ,\qquad z=z_0+a_3t\ .$$

הווקטור $\bar{a}$ נקרא וקטור הכיוון, הקואורדינטות (a_1,a_2,a_3) נקראות קואורדינטות הכיוון של הישר.

משפט 23: משוואת הישר בצורה קנונית

משוואת הישר העובר דרך נקודה נתונה $M_0(x_0,y_0,z_0)$ במקביל לוקטור נתון, $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ בצורה קנונית היא

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}\ .$$

- אם המקדם של x שווה אפס, כלומר אם $a_1=0$, נחליף את החלק שלו במשוואה ע"י

  $$x=x_0\ .$$

  ז"א הישר מוכל במישור של $x=x_0$.

- אם המקדם של y שווה אפס, כלומר אם $a_2=0$, נחליף את החלק שלו במשוואה ע"י

  $$y=y_0\ .$$

  ז"א הישר מוכל במישור של $y=y_0$.

- אם המקדם של z שווה אפס, כלומר אם $a_3=0$, נחליף את החלק שלו במשוואה ע"י

  $$z=z_0\ .$$

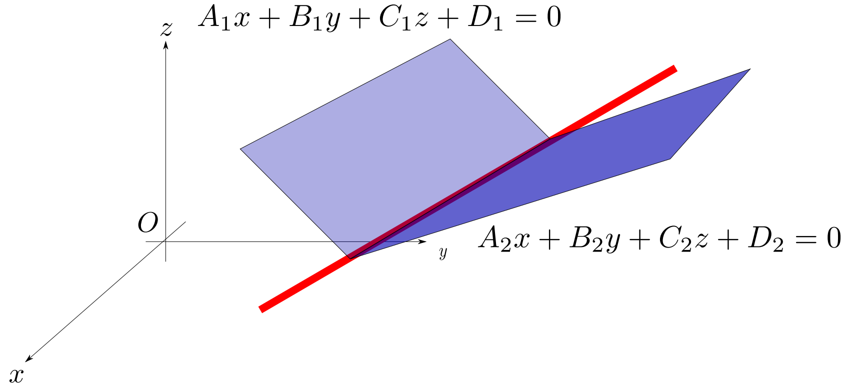
  ז"א שהישר מוכל במישור של $z=z_0$.

- במקרה ששניהם מהמקדמים הם אפס, למשל $a_1=a_2=0$, הישר נתון ע"י

  $$\left.\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \end{aligned}\right\}$$

  כלומר הישר מקביל לציר ה- z.

משפט 24: ישר כחיתוך של שני מישורים



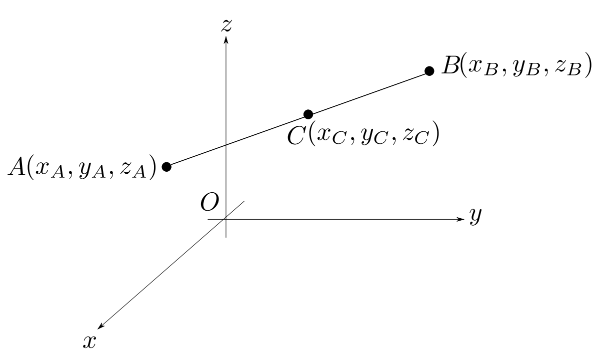
בהינתן שני מישורים

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1 &=0 \ , \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2 &=0 \ , \end{aligned}$$

שאינם מתלכדים או מקבילים קובעים את הישר שבו הם מפגשים. צמד המשוואות של שני המישרוים נקרא **משוואה כללית של הישר** .

מכיון שיש שתי משוואות בשלושה נעלמים, אז הפתרון יהיה בצורה קבוצה של אינסוף פתרונות באמצעות פרמטר חופשי, אשר הוא דווקא הפרמטר המופיע במשוואה פרמטרית של הישר.

משפט 25: חלוקה של וקטור ביחס נתון

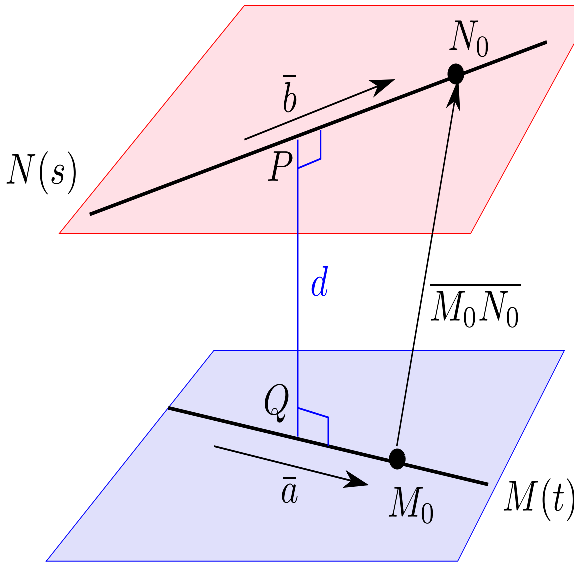


$$\frac{AC}{CB}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ .$$

$$x_c=\frac{\lambda_2x_A+\lambda_1x_B}{\lambda_1+\lambda_2} \ , \qquad y_c=\frac{\lambda_2y_A+\lambda_1y_B}{\lambda_1+\lambda_2} \ , \qquad z_c=\frac{\lambda_2z_A+\lambda_1z_B}{\lambda_1+\lambda_2} \ .$$

הגדרה 12: מרחק בין ישרים מצטלבים

יהיו $M(t): \quad (x,y,z)=M_0+t\bar{a}$, $N(t): \quad (x,y,z)=N_0+t\bar{b}$ ישרים מצטלבים. המרחק ביניהם מוגדר להיות המרחק בין השתי נקודות P ו- Q, הקרובות ביותר על הישרים.



ניתן לחשב את המרחק d ע"י לבחור כל שתי נקודות M_0 ו- N_0 על השני ישרים לפי הנוסחה:

$$d = \frac{\overline{M_0N_0} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})}{|\bar{a} \times \bar{b}|} \ .$$

משפט 26: מצב ההדדי בין שני ישרים במרחב

(1) נתונים שני ישרים

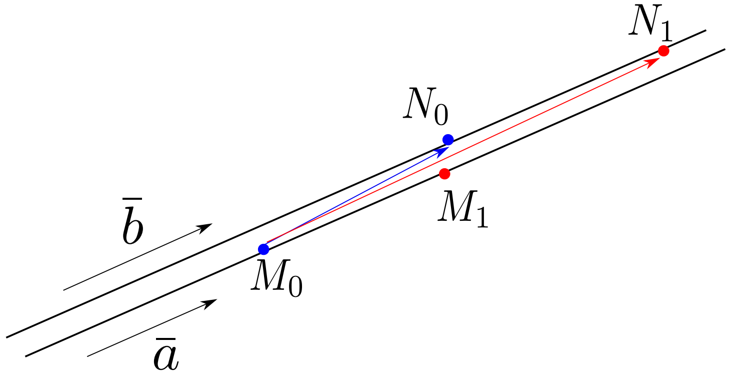
$$M(t): \qquad (x,y,z) = M_0 + t \cdot \bar{a} = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (a_1, a_2, a_3)$$

$$N(s): \qquad (x,y,z) = N_0 + s \cdot \bar{b} = (X_0, Y_0, Z_0) + s \cdot (b_1, b_2, b_3)$$

ונתון שתי נקודות M_1, M_2 על הישר $M(t)$ ושתי נקודות N_1, N_2 על הישר $N(t)$. ישנן ארבע אפשרויות למצב ההדדי ביניהם:

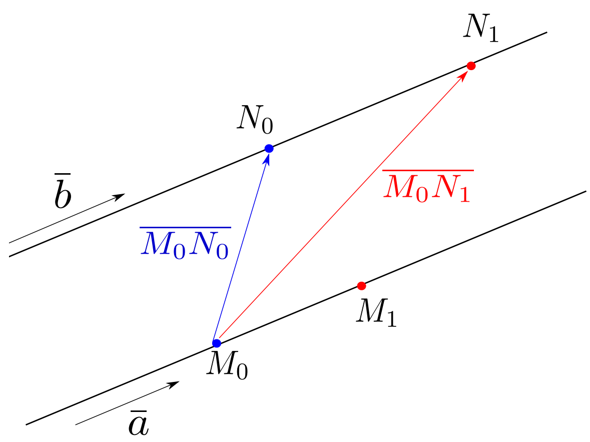
(2) **<u>מתלכדים</u>** אם

$(a_1, a_2, a_3) \parallel (b_1, b_2, b_3)$ ו- $\overline{M_0N_0} \times \overline{M_0N_1} = \bar{0}$ אז הישרים מתלכדים.



(3) **מקבילים** אם

$(a_1,a_2,a_3)\parallel(b_1,b_2,b_3)$ ו- $\overline{M_0N_0}\times\overline{M_0N_1}\neq\bar{0}$ אז הישרים מקבילים.
הישרים נמצאים באותו מישור.

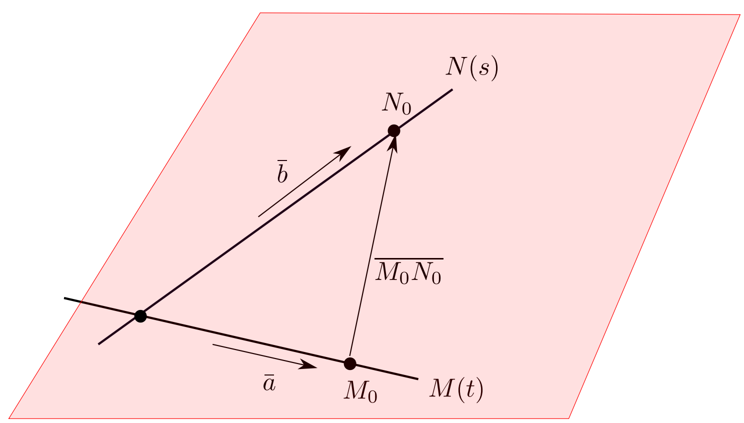


(4) **נחתכים** אם

$(a_1,a_2,a_3)\nparallel(b_1,b_2,b_3)$ ו-

$$d=\frac{\overline{M_0N_0}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})}{\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|}=0\ ,$$

כלומר והמרחק בין הישרים שווה לאפס, אז הישרים נחתכים.
הישירם נמצאים במישור באותו מישור ולכן הם נחתכים.

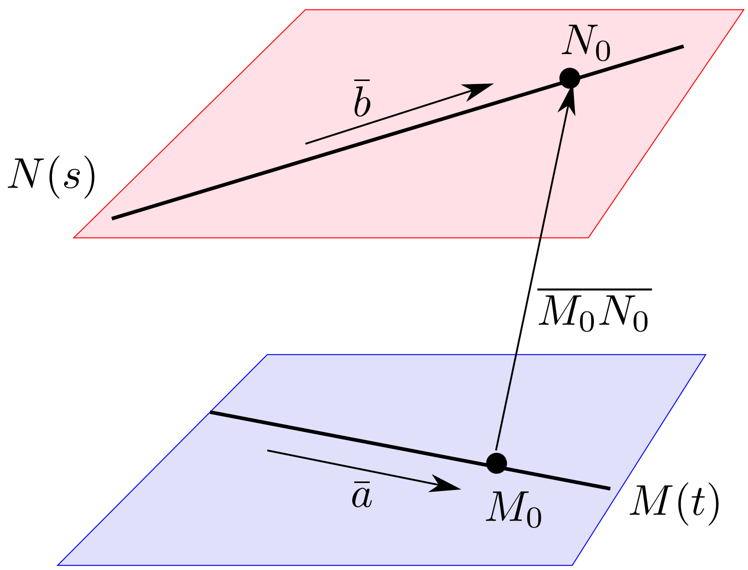


(5) **מצטלבים**

אם $(a_1,a_2,a_3)\nparallel(b_1,b_2,b_3)$ ו-

$$d=\frac{\overline{M_0N_0}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})}{\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|}\neq 0\ ,$$

כלומר והמרחק בין הישרים אינו שווה לאפס, אז הישרים מצטלבים.
הישירם אינם נמצאים באותו מישור ולכן הם מצטלבים.



משפט 27: מצב הדדי בין ישר למישור

בהינתן מישור $Ax+By+Cz+D=0$ וישר $M(t):(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t\cdot(a_1,a_2,a_3)$ יש ביניהם שלושה מצבים הדדיים אפשריים:

(א) <u>הישר מוכל במישור</u>

$$(A,B,C)\perp(a_1,a_2,a_3) \qquad \Rightarrow \qquad (A,B,C)\cdot(a_1,a_2,a_3)=0 \ .$$

וכל הנקודות של הישר נמצאות גם על המישור. מספיק שיהיו שתי נקודות.

(ב) <u>הישר מקביל למישור</u>

$$(A,B,C)\perp(a_1,a_2,a_3) \qquad \Rightarrow \qquad (A,B,C)\cdot(a_1,a_2,a_3)=0 \ .$$

ואין להם נקודה משותפת.

(ג) <u>הישר נחתך עם המישור</u>

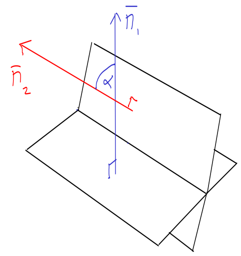
$$(A,B,C)\not\perp(a_1,a_2,a_3) \qquad \Rightarrow \qquad (A,B,C)\cdot(a_1,a_2,a_3)\neq 0 \ .$$

הווקטור הכיוון של הישר לא ניצב למישור ויש להם נקודה אחת משותפת.

הגדרה 13: זווית בין מישורים וישירם

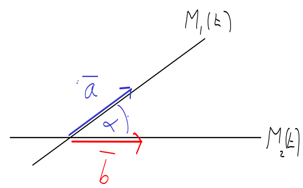
(א) הזווית בין שני מישורים מוגדרת להיות הזוית בין הווקטורים הנורמלים שלהם.

$$\cos\alpha=\frac{|\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2|}{|\bar{n}_1|\cdot|\bar{n}_2|}$$



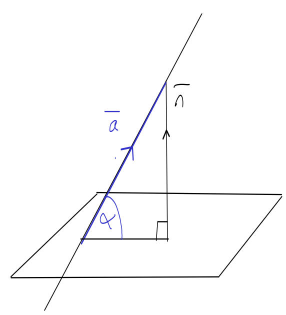
(ב) הזוית בין שני ישירים גם מצטלבים מוגדרת להיות הזוית בין וקטורים הכיוון שלהם.

$$\cos\alpha = \frac{|\bar a \cdot \bar b|}{|\bar a| \cdot |\bar b|}$$



(ג) הזוית בין מישור לישר מוגדרת להיות הזוית המשלימה לזוית בין הנורמל של המישור ווקטור הכיוון של הישר.

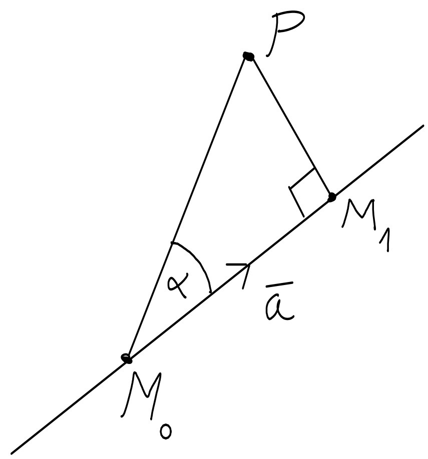
$$\sin\alpha = \frac{|\bar a \cdot \bar n|}{|\bar a| \cdot |\bar n|}$$



הגדרה 14: מרחק בין נקודה לישר

הנקודה הקרובה ביותר M_1 על הישר ל- P תהיה נקודה שבה $\overline{M_1P}$ ניצב ל- $\bar a$. ואז

$$d = |\overline{M_1P}| = |\overline{M_0P}|\sin\alpha = \frac{|\overline{M_0P} \times \bar a|}{|\bar a|}$$


P
M_1
α
$\bar{a}$
M_0