שעור 11
משפט הפירוק הפרימרי

11.1 הגדרה של חיתוך וסכום של תתי מרחבים

הגדרה 11.1

יהיו $V_1,V_2\subseteq V$ תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל השדה $\mathbb{F}$. התת מרחב V_1+V_2 מוגדר

$$V_1+V_2=\{u_1+u_2|u_1\in V_1,u_2\in V_2\}\ .$$

משפט 11.1 סכום של תת מרחב שווה לפרישה של האיחוד

יהיו $V_1,V_2\subseteq V$ תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל השדה $\mathbb{F}$. אזי

$$V_1+V_2=\text{span}\left(V_1\cup V_2\right)\ .$$

הוכחה:

נוכיח כי $V_1+V_2\subseteq \text{span}\left(V_1\cup V_2\right)$:

לכל $u_1\in V_1$ ו- $u_2\in V_2$ מתקיים $u_1+u_2\in\text{span}\left(V_1\cup V_2\right)$ אזי $V_1+V_2\subseteq\left(V_1\cup V_2\right)$.

נוכיח כי $\text{span}\left(V_1\cup V_2\right)\subseteq V_1+V_2$:

יהי $w\in\text{span}\left(V_1\cup V_2\right)$. אז קיימים $u_1,\ldots,u_k\in V_1$ ו $\text{v}_1,\ldots,\text{v}_n\in V_2$ וסקלרים $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{F}$, $\beta_1,\ldots,\beta_n\in\mathbb{F}$ כך ש

$$w=\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_ku_k+\beta_1\text{v}_1+\cdots+\beta_n\text{v}_n\ .$$

אז $\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_ku_k\in V_1$ וגם $\beta_1\text{v}_1+\cdots+\beta_n\text{v}_n\in V_2$.

לכן $w\in V_1+V_2$.

הוכחנו ש- $V_1+V_2\subseteq\text{span}\left(V_1\cup V_2\right)$ וגם $\text{span}\left(V_1\cup V_2\right)\subseteq V_1+V_2$ $\Leftarrow$ $V_1+V_2=\text{span}\left(V_1\cup V_2\right)$ כנדרש.

■

דוגמה 11.1

נקח את המרחב ווקטורי $V=\mathbb{R}^3$. נקח את התתי מרחבים $\mathbb{R}^3$: $V_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}\middle|x\in\mathbb{R}\right\}$, ו $V_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}\middle|y\in\mathbb{R}\right\}$, קווים ישרים ב $\mathbb{R}^3$. אז הסכום שלהם הינו

$$V_1+V_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\middle|x,y\in\mathbb{R}\right\}\ ,$$

ומהווה את המישור $z=0$ ב $\mathbb{R}^3$.

11.2 סכום ישר

הגדרה 11.2 סכום ישר

יהיו V_1,V_2 תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$.
אומרים כי התת מרחב $W\subseteq V$ הוא סכום ישר אם

1) $W=V_1+V_2$

2) לכל וקטור של W $w\in W$ קיימים וקטורים יחידים $u_1\in V_1$ ו- $u_2\in V_2$ עבורם

$$w=u_1+u_2\ .$$

סימון: $W=V_1\oplus V_2$.

משפט 11.2

יהיו V_1,V_2 תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$.
$W=V_1\oplus V_2$ אם ורק אם

א) $W=V_1+V_2$

ב) $V_1\cap V_2=\{\bar{0}\}$.

הוכחה:

כיוון $\Leftarrow$:

נניח כי $W=V_1\oplus V_2$.

1) לפי ההגדרה 11.2, $W=V_1+V_2$.

2) יהי $u\in V_1\cap V_2$. לכן קיים צרוף ליניארי יחיד כך ש-

$$u=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2$$

כאשר $u_1\in V_1,u_2\in V_2$ ו- $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{F}$ סקלרים.

הביטוי הזה מסופק על ידי ההשמה $u_1=u, u_2=0, \alpha_1=1$,

ועל ידי ההשמה $u_1=0, u_2=u, \beta_1=1$.

הצרוף ליניארי יחיד לכן בהכרח שתי ההשמות זהות.

הדרך היחידה לקיים שתיהן היא אם $u=0$.

כיוון $\Rightarrow$:

נניח שמתקיימים התנאים

1) $W=V_1+V_2$

2) $V_1\cap V_2=\{\bar{0}\}$.

אזי התנאי (1) של ההגדרה 11.2 מתקיים.
נותר להוכיח התנאי (2) של ההגדרה 11.2.
יהי $w\in W$. מכיוון ש- $W=V_1+V_2$ אזי קיימים $u_1\in V_1, u_2\in V_2$ עבורם $w=u_1+u_2$.
נוכיח כי הווקטורים u_1,u_2 יחידים.
נניח בשלילה ש-

$$w=u_1+u_2\ , \qquad w=u_1'+u_2'$$

כאשר $u_1\neq u_1'\in V_1$ וקטורים שונים $(u_1\neq u_1')$ ו- $u_2,u_2'\in V_2$ וקטורים שונים $(u_2\neq u_2')$. אזי

$$u_1-u_1'=u_2-u_2'\ .$$

לכן $u_1-u_1'\in V_1$ וגם $u_1-u_1'\in V_2$.

$\Leftarrow$ $u_1-u_1'\in V_1\cap V_2$.

מכיוון ש- $V_1\cap V_2=\{0\}$ אז $u_1=u_1'$, בסתירה לכך ש- $u_1\neq u_1'$.

■

משפט 11.3

יהיו V_1,V_2 תת מרחבים של מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$.
אם התנאים הבאים מתקיימים:

1) $W=V_1+V_2$

2) לכל $u_1\in V_1$, ו- $u_2\in V_1$ הקבוצה $\{u_1,u_2\}$ בלתי תלויה ליניארית

אזי $W=V_1\oplus V_2$.

הוכחה:
נוכיח כי התנאים (1) ו- (2) של משפט 11.2.
תנאי (1) שהוא $W=V_1+V_2$, מתקיים כי הוא אחד מההנחות של משפט זה.
נותר רק להוכיח שהתנאי (2) מתקיים, כלומר ש- $V_1\cap V_2=\{0\}$:
יהי $u\in V_1\cap V_2$. נגדיר $u_1=u\in V_1$ ונגדיר $u_2=-u\in V_2$.
אזי

$$u_1+u_2=u+(-u)=0\ .$$

$\{u_1,u_2\}$ בלתי-תלויים ליניארית לכן הדרך היחידה שזה מתקיים היא אם $u_1=0$ ו- $u_2=0$.
לכן $u=0$ ולכן $V_1\cap V_2=\{0\}$.

■