# שעור 3
# אסטרטגיות מעורבות

## 3.1 אסטרטגיות מעורבות

**הגדרה 3.1 אסטרטגיה מעורבת**

נתון משחק בצורה אסטרטגית $G = ((S_1, \ldots, S_n), (u_1, \ldots, u_n))$. אסטרטגיה מעורבת היא פונקצית הסתברות על כל קבוצות האסטרטגיותת של השחקנים.
כלומר, אם $S_1 = (s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1k_1})$ אז נגדיר פונקצית הסתברות

$$P_{S_1}(s_{11}) = p_{11} \ , \quad P_{S_1}(s_{12}) = p_{12} \ , \quad \ldots \quad P_{S_1}(s_{1k_1}) = p_{1k_1} \ .$$

אם $S_2 = (s_{21}, s_{22}, \ldots, s_{2k_2})$ אז נגדיר פונקצית הסתברות

$$P_{S_2}(s_{21}) = p_{21} \ , \quad P_{S_2}(s_{22}) = p_{22} \ , \quad \ldots \quad P_{S_2}(s_{2k_2}) = p_{2k_2} \ .$$

אם $S_n = (s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{nk_n})$ אז נגדיר פונקצית הסתברות

$$P_{S_n}(s_{n1}) = p_{n1} \ , \quad P_{S_n}(s_{n2}) = p_{n2} \ , \quad \ldots \quad P_{S_n}(s_{nk_n}) = p_{nk_n} \ .$$

**דוגמה 3.1 ()**

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס.

| $I \backslash II$ | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | 4 | 1 |
| $B$ | 2 | 3 |

**א)** מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות טהורות.

**ב)** מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

**פתרון:**

**א)**

| $I \backslash II$ | $L$ | $R$ | $\min\limits_{s_2 \in S_2}$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | 4 | 1 | 1 |
| $B$ | 2 | 3 | 2 |
| $\max\limits_{s_1 \in S_1}$ | 4 | 3 | $2, 3$ |

ערך המקסמין של שחקן 1:

$$\underline{v} = \max_{s_1 \in \{T,B\}} \min_{s_2 \in \{L,R\}} = 2 \ .$$

ז"א שחקן 1 יכול להבטיח שיקבל לפחות $2$ אם הוא ישחק $B$.

ערך המינמקס של שחקן 2:

$$\bar{\mathrm{v}} = \min_{s_2\in\{L,R\}} \max_{s_1\in\{T,B\}} = 3 \ .$$

ז"א שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר $3$ אם הוא ישחק $R$.

$$\bar{\mathrm{v}} = 3 > 2 = \underline{\mathrm{v}} \ .$$

למשחק אין ערך.

**ב)** כאשר לשחקן $1$ יש שתי אסטרטגיות טהורות $T$ ו- $B$, נזהה את האסטרטגיה המעורבת

$$[x(T)\ ,\ (1-x)(B)]$$

עם ההסתברות $x$ שבה נבחרת האסטרטגיה הטהורה $T$.

באופן דומה, כאשר יש לשחקן 2 יש שתי אסטרטגיות טהורות $L$ ו- $R$, נזהה את האסטרטגיה המעורבת

$$[y(L)\ ,\ (1-y)(R)]$$

עם ההסתברות $y$ שבה נבחרת האסטרטגיה הטהורה $L$.

לכל זוג אסטרטגיות מעורבות התשלום ניתן על ידי פונקצית התועלת

$$U(x,y) = 4xy + 1x(1-y) + 2(1-x)y + 3(1-x)(1-y) = 4xy - 2x - y + 3 \ .$$

ראשית נחשב לכל $x \in [0,1]$ את

$$\min_{y\in[0,1]} U(x,y) = \min_{y\in[0,1]} (4xy - 2x - y + 3) = \min_{y\in[0,1]} (y(4x-1) - 2x + 3)$$

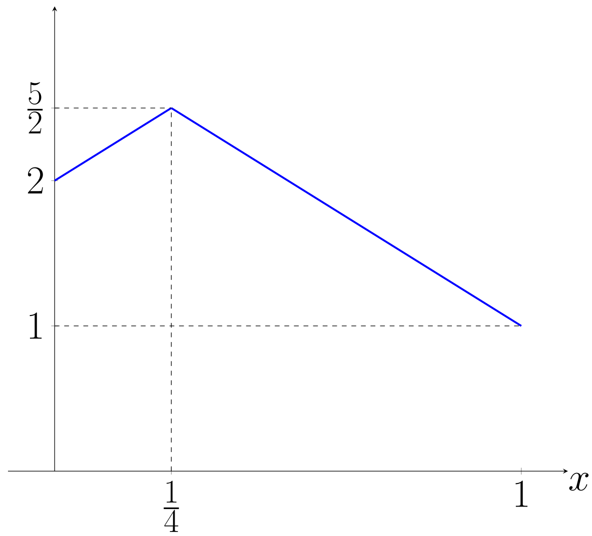
עבור $x$ קבוע זוהי פונקציה לינארית ב- $y$, ולכן הנקודה שבה המינימום מתקבל נקבעת לפי השיפוע $4x-1$.

אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה והמינימום מתקבל ב- $y=0$.

אם השיפוע שלילי הפונקציה יורדת והמינימום מתקבל ב- $y=1$.

אם השיפוע $0$ הפונקציה קבועה וכל הנקודות הן נקודות מינימום. לכן

$$\min_{y\in[0,1]} u(x,y) = \begin{cases} 2x+2 & x \leq \frac{1}{4}\ , \\ -2x+3 & x \geq \frac{1}{4}\ , \end{cases}$$

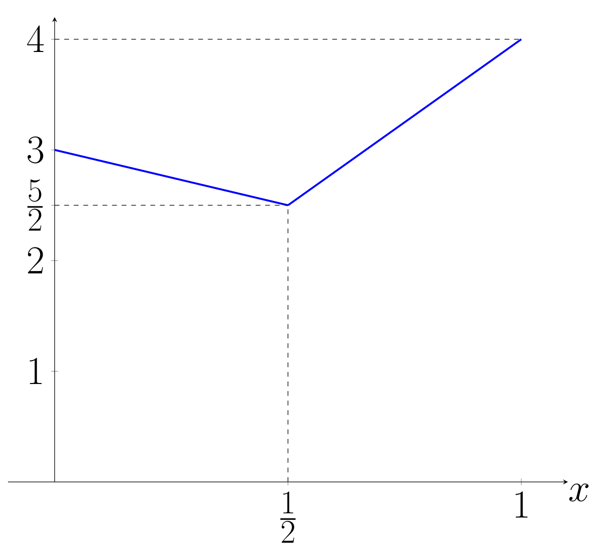



לפונקציה זו של $x$ יש מקסימום יחיד ב- $x=\frac{1}{4}$ וערכו $\frac{5}{2}$. לכן

$$\underline{\mathrm{v}}=\max_{x\in[0,1]}\min_{y\in[0,1]}U(x,y)=\frac{5}{2}\ .$$

באופן דומה נחשב:

$$\begin{aligned}\max_{x\in[0,1]}U(x,y)&=\max_{x\in[0,1]}\left[4xy-2x-y+3\right]\\&=\max_{x\in[0,1]}\left[x\left(4y-2\right)-y+3\right]\\&=\begin{cases}-y+3 & y\leq\frac{1}{2}\ ,\\ 3y+1 & y\geq\frac{1}{2}\ ,\end{cases}\end{aligned}$$




לפונקציה זו של $y$ יש מינימום יחיד ב- $y=\frac{1}{2}$ וערכו $\frac{5}{2}$. לכן

$$\bar{\mathrm{v}}=\min_{y\in[0,1]}\max_{x\in[0,1]}U(x,y)=\frac{5}{2}\ .$$

כלומר, למשחק יש ערך $\mathrm{v}=\underline{\mathrm{v}}=\overline{\mathrm{v}}=\frac{5}{2}$, והאסטרטגיות האופטימליות הן $x^*=\frac{1}{4},\ y^*=\frac{1}{2}$.

מכיוון ש- $x^*$ ו- $y^*$ הן אסטרטגיות האופטימליות היחיודת של השחקנים, אז $(x^*,y^*)$ הוא שיווי המשקל נאש היחיד במשחק.

■

### דוגמה 3.2 ()

נתון משחק שני שחקנים (שאינו סכום אפס) בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

| $I \backslash II$ | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $1,-1$ | $0,2$ |
| $B$ | $0,1$ | $2,0$ |

מצאו התשלום מקסמין והתשלום מינמקס באסטרטגיות מעורבות.

מצאו שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

**פתרון:**

ראשית נחשב את התשלום מקסמין של השחקנים.

קבוצות האסטרטגיות של שחקן 1:

$$S_1=\{[x(T),(1-x)(B)]\ \ ,\ x\in[0,1]\}\ .$$

המזוהה עם הקטע $[0,1]$.

קבוצות האסטרטגיות של שחקן 2:

$$S_2=\{[y(L),(1-y)(R)]\ \ ,\ y\in[0,1]\}\ .$$

פונקצית התועלת של שחקן 1:

$$U_1(x,y)=xy+2(1-x)(1-y)=3xy-2x-2y+2\ .$$

פונקצית התועלת של שחקן 2:

$$U_2(x,y)=-xy+2x(1-y)+y(1-x)=-4xy+2x+y\ .$$

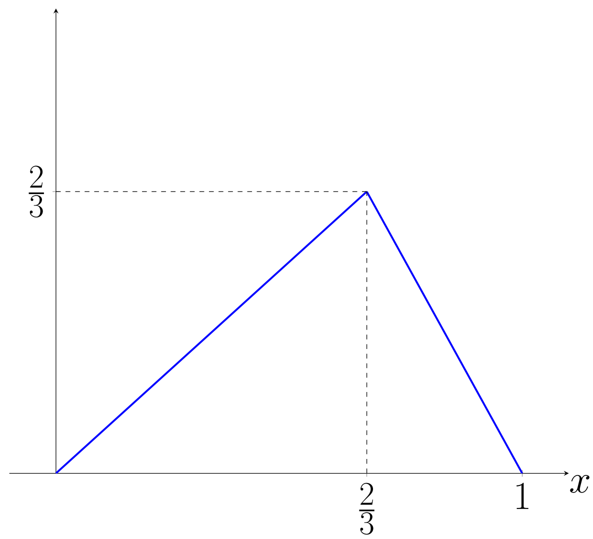
התשלום מקסמין של שחקן 1 הינו:

$$\underline{\mathrm{v}}_1=\max_{x\in[0,1]}\min_{y\in[0,1]}U_1(x,y)\ .$$

התשלום מקסמין של שחקן 2 הינו:

$$\underline{\mathrm{v}}_2=\max_{y\in[0,1]}\min_{x\in[0,1]}U_2(x,y)\ .$$

$$\begin{aligned}
\min_{y\in[0,1]} U_1(x,y) &= \min_{y\in[0,1]} 3xy - 2x - 2y + 2 \\
&= \min_{y\in[0,1]} y\,(3x-2) - 2x + 2 \\
&= \begin{cases} x & x \le \dfrac{2}{3} \\ \\ -2x+2 & x \ge \dfrac{2}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$



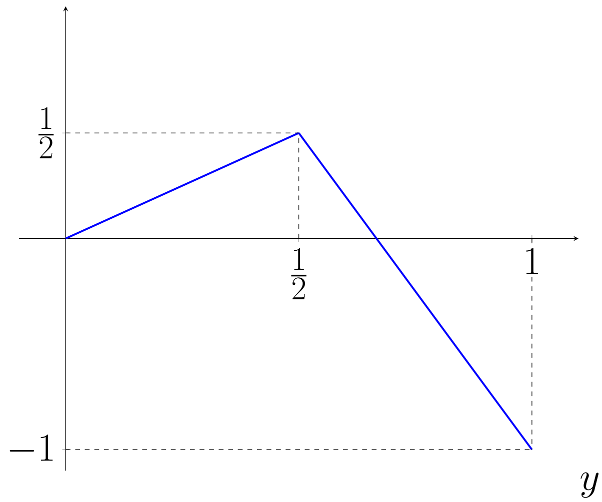

לפונקציה זו יש מקסימום ב- $x = \dfrac{2}{3}$. לפיכך

$$\underline{\mathrm{v}}_1 = \max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} U_1(x,y) = \frac{2}{3}\ .$$

התשלום מקסמין של שחקן 2 הינו:

$$\underline{\mathrm{v}}_2 = \max_{y\in[0,1]} \min_{x\in[0,1]} U_2(x,y)\ .$$

$$\begin{aligned}
\min_{x\in[0,1]} U_2(x,y) &= \min_{x\in[0,1]} 3xy - 2x - 2y + 2 \\
&= \min_{x\in[0,1]} x\,(2-4y) + y \\
&= \begin{cases} y & y \le \dfrac{1}{2} \\ \\ 2-3y & y \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$




לפונקציה זו יש מקסימום ב- $y = \frac{1}{2}$. לפיכך

$$\underline{\mathrm{v}}_2 = \max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} U_2(x,y) = \frac{1}{2} \ .$$

כעת נחשב את השיווי משקל של המשחק באסטרטגיות מעורבות. נסמן תשובה טובה ביותר של שחקן 2 לאסטרטגיה $x$ של שחקן 1 כ:

$$\sigma_2(x) = \operatorname*{argmax}_{y\in[0,1]} U_2(x,y) = \{y \in [0,1], U_2(x,y) \geq U_2(x,z) \forall z \in [0,1]\}$$

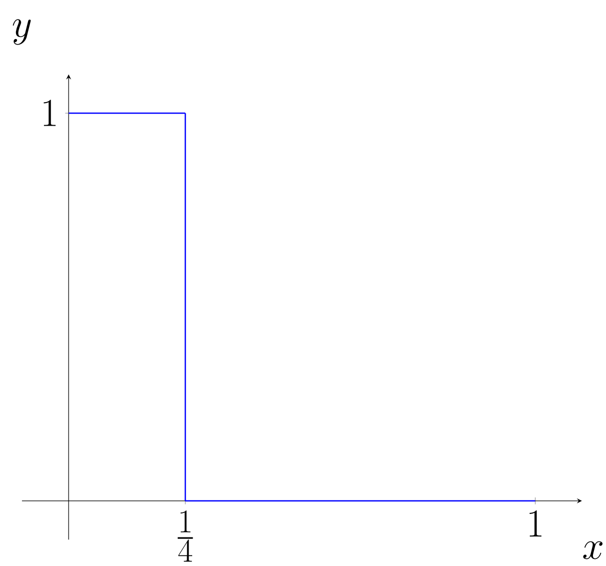
במילים פשוטות $\sigma_2(x)$ הוא אוסף של כל הערכים של $y$ עבורם ל- $U_2(x,y)$ יש מקסימום.

כדי לחשב את $\sigma_2(x)$ רושמים $U_2(x,y)$ בצורה

$$U_2(x,y) = y(1-4x) + 2x \ .$$

עבור $x$ קבוע זוהי פונקציה לינארית ב- $y$, ולכן הנקודה שבה המינימום מתקבל נקבעת לפי השיפוע $1-4x$.
אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה והמקסימום מתקבל ב- $y=1$.
אם השיפוע שלילי הפונקציה יורדת והמקסימום מתקבל ב- $y=0$.

אם השיפוע 0 הפונקציה קבועה וכל הנקודות הן נקודות מקסימום. הסימן של השיפוע משתנה ב- $x = \frac{1}{4}$. הגרף של $\sigma_2(x)$ מתואר להלן.



שימו לב ש- $\sigma_2(x)$ לא פונקציה בגלל ש- $\sigma_2\left(\frac{1}{4}\right)$ לא שווה לנקודה אלא לתחום $[0,1]$.

נסמן תשובה טובה ביותר של שחקן 1 לאסטרטגיה $y$ של שחקן 2 כ:

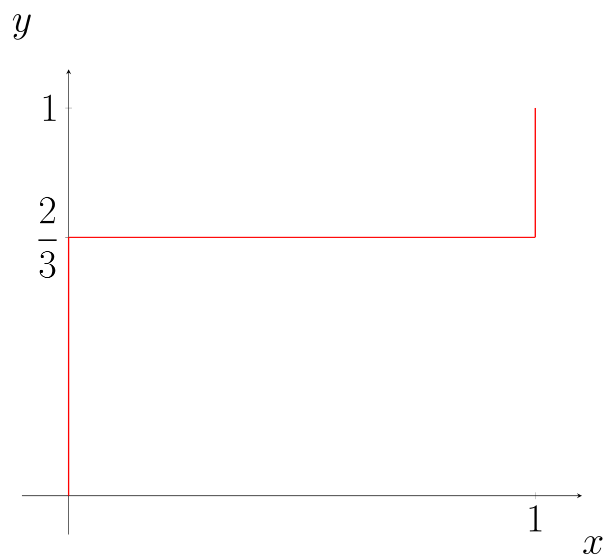
$$\sigma_1(y) = \underset{x\in[0,1]}{\text{argmax}}\, U_1(x,y) = \{x \in [0,1], U_1(x,y) \geq U_1(x,z) \forall z \in [0,1]\}$$

במילים פשוטות $\sigma_1(y)$ הוא אוסף של כל הערכים של $x$ עבורם ל- $U_1(x,y)$ יש מקסימום.

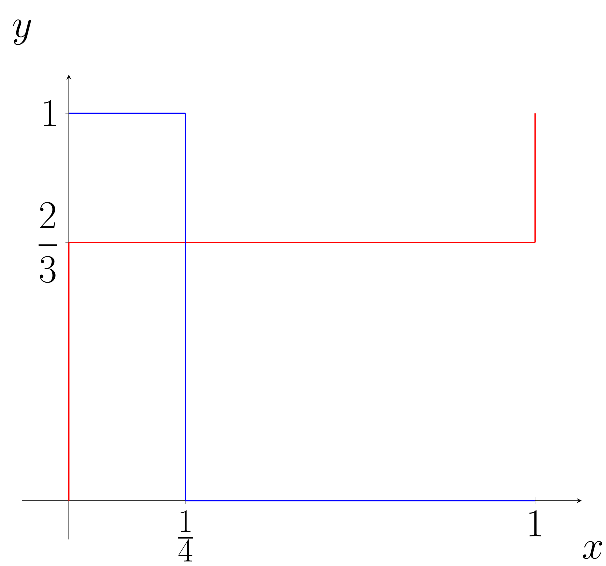
כדי לחשב את $\sigma_1(y)$ רושמים $U_1(x,y)$ בצורה

$$U_1(x,y) = x(3y-2) - 2y + 2\ .$$

עבור $y$ קבוע זוהי פונקציה לינארית ב- $x$, ולכן הנקודה שבה המינימום מתקבל נקבעת לפי השיפוע $3y-2$.
אם השיפוע חיובי הפונקציה עולה והמקסימום מתקבל ב- $x=1$.
אם השיפוע שלילי הפונקציה יורדת והמקסימום מתקבל ב- $x=0$.
אם השיפוע 0 הפונקציה קבועה וכל הנקודות הן נקודות מקסימום. הסימן של השיפוע משתנה ב- $y=\frac{2}{3}$. הגרף של $\sigma_1(y)$ מתואר להלן.




הצמד אסטרטגיות $(x^*,y^*)$ נקודת שיווי משקל אם ורק אם $x^* \in \sigma_1(y^*)$ ו- $y^* \in \sigma_2(x^*)$. במילים אחרות נדרש כי הנקודה $(x^*,y^*)$ תהיה על שני הגרפים של $\sigma_2(x)$ ו- $\sigma_1(y)$. הנקודה היחידה שמקיימת את התנאי הזה היא $\left(x^*=\frac{1}{4}, y^*=\frac{2}{3}\right)$.



לכן השיווי משקל היחיד של המשחק הוא $\left(x^*=\frac{1}{4},y^*=\frac{2}{3}\right)$ והתשלומים לשחקן 1 ולשחקן 2 של השיווי משקל הם

$$U_1\left(x^*,y^*\right)=\frac{2}{3}\ ,\qquad U_2\left(x^*,y^*\right)=\frac{1}{2}\ .$$

■

## 3.2 שיטה ישירה למציאת אסטרטגיה אופטימלית

**דוגמה 3.3 ()**

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

| $I \backslash II$ | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | 5 | 0 |
| $B$ | 3 | 4 |

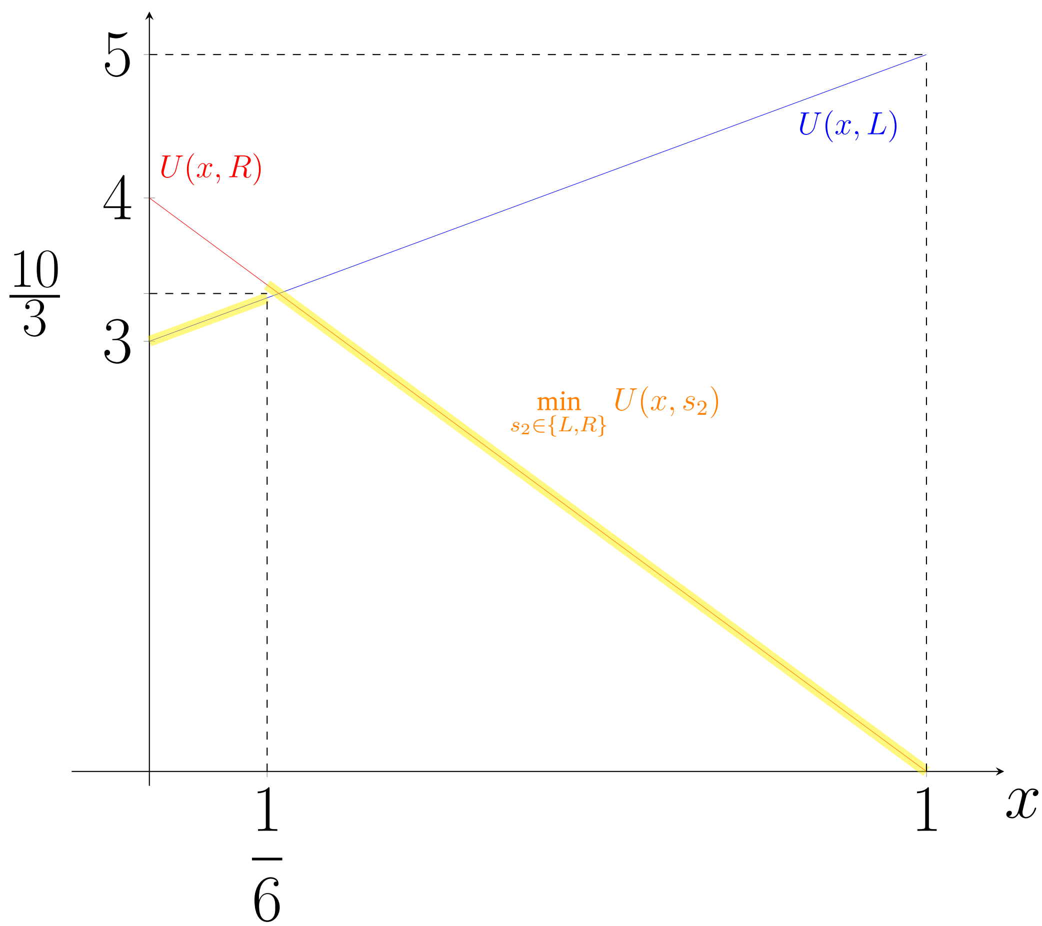
מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

**פתרון:**

תחילה נחשב את המקסמין של שחקן 1. אם שחקן 1 משחק את האסטרטגיה המעורבת $[x(T),(1-x)(B)]$ התשלום שלו כפונקציה של $x$ תלוי על האסטרטגיה של שחקן 2:

- אם שחקן 2 משחק $L$ אז $U(x,L)=5x+3(1-x)=2x+3.$
- אם שחקן 2 משחק $R$ אז $U(x,R)=4(1-x)=-4x+4.$

הגרף למטה מראה את הגרפים של הפונקציות האלו. הקו של $\min\limits_{s_2\in\{L,R\}} U(x,s_2)$ מראה את התשלום המינימלי ששחקן 1 יקבל אם הוא משחק $x$. הקו הזה נקרא **מעטפת תחתונה** של התשלומים.




הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות שווה ל- $\max_{x\in[0,1]} \min_{s_2\in\{L,R\}} U(x,s_2)$ , אשר מתקבל בנקודת מקסימום של המעטפת התחתונה. המקסימום מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של שתי הפונקציות, כלומר בנקודה

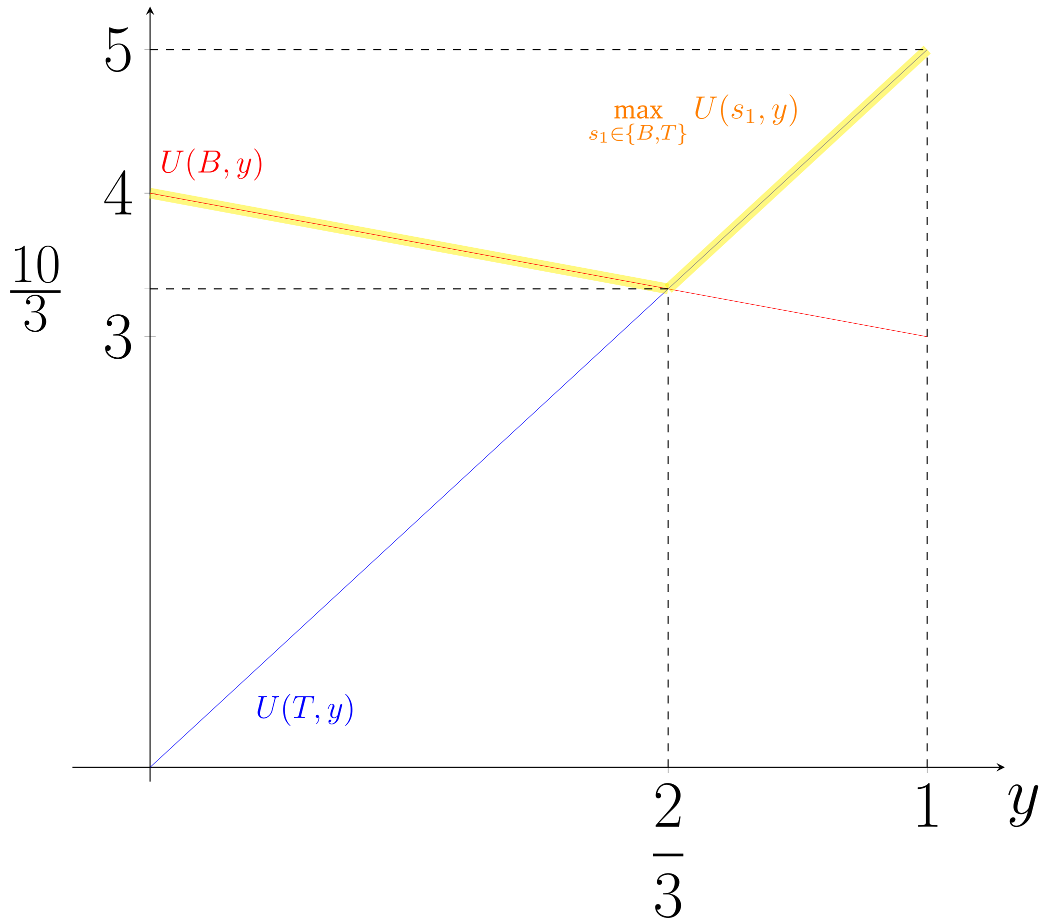
$$2x+3=-4x+4 \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{1}{6} \ .$$

מכאן האסטרטגיה האופטילית של שחקן 1 היא $x^*=\left(\frac{1}{6}(T),\frac{5}{6}(B)\right)$. הערך של המשחק שווה לגובה של הנקודת חיתוך: $\text{v}=\frac{10}{3}$.

כעת נחשב את המינמקס של שחקן 2. אם שחקן 2 משחק את האסטרטגיה המעורבת $[y(L),(1-y)(R)]$ התשלום שלו כפונקציה של $y$ תלוי על האסטרטגיה של שחקן 1:

- אם שחקן 1 משחק $T$ אז $U(T,y)=5y.$
- אם שחקן 1 משחק $B$ אז $U(B,y)=4-y.$

הגרף למטה מראה את הגרפים של הפונקציות האלו. הקו של $\max_{s_1\in\{B,T\}} U(s_1,y)$ מראה את התשלום המקסימלי ששחקן 2 יקבל אם הוא משחק $y$. הקו הזה נקרא **מעטפת עליונה** של התשלומים.




הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות שווה ל- $\min_{y\in[0,1]} \max_{s_1\in\{B,T\}} U(s_1,y)$, אשר מתקבל בנקודת מינימום של המעטפת העליונה. המינימום מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של שתי הפונקציות, כלומר בנקודה

$$5y = 4 - y \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{2}{3} \ .$$

מכאן האסטרטגיה האופטילית של שחקן 2 היא $y^* = \left(\frac{2}{3}(L), \frac{1}{3}(R)\right)$. הערך של המשחק שווה לגובה של הנקודת חיתוך: $\text{v} = \frac{10}{3}$. ■

### דוגמה 3.4 ()

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

| $I \backslash II$ | $L$ | $M$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | 2 | 5 | $-1$ |
| $B$ | 1 | $-2$ | 5 |

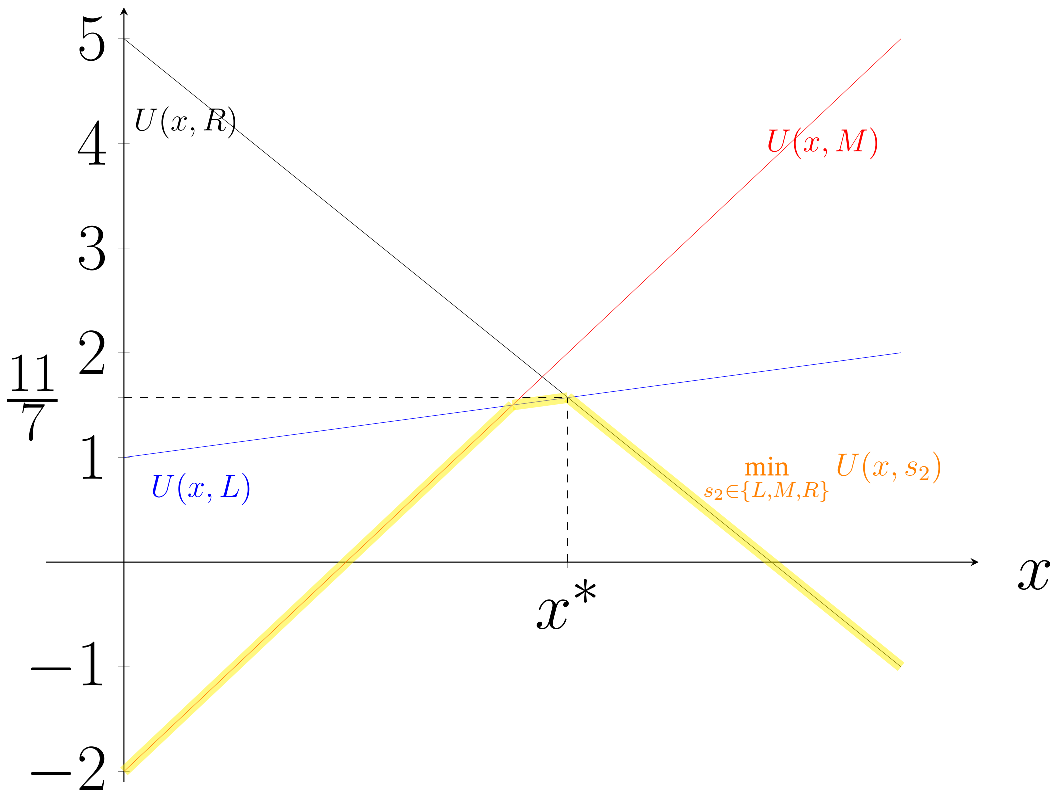
מצאו את הערך של המשחק באסטרטגיות מעורבות.

**פתרון:**
נחשב את המקסמין של שחקן 1. אם שחקן 1 משחק את האסטרטגיה המעורבת $[x(T),(1-x)(B)]$ התשלום שלו כפונקציה של $x$ תלוי על האסטרטגיה של שחקן 2:

- אם שחקן 2 משחק $L$ אז $U(x,L) = 2x + (1-x) = 1 + x.$

- אם שחקן 2 משחק $M$ אז $U(x,M) = 5x - 2(1-x) = 7x - 2.$
- אם שחקן 2 משחק $R$ אז $U(x,R) = -x + 5(1-x) = -6x + 5.$

התרשים למטה מתאר את הגרפים של שלוש פונקציות אלו.




המקסימום של המעטפת התחתונה מתקבל בנקודת חיתוך של הקווים של $U(x,L)$ ו- $U(x,R)$:

$$1 + x \stackrel{!}{=} -6x + 5 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{4}{7}$$

■

## 3.3 חישוב נקודות שיווי משקל באסטרטגיות מערבות

**דוגמה 3.5 ()**

נתון משחק שני שחקנים בצורה אסטרטגית על ידי המטריצה הבאה.

| $I$ \ $II$ | $F$ | $C$ |
|---|---|---|
| $F$ | $2,1$ | $0,0$ |
| $C$ | $0,0$ | $1,2$ |

מצאו שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

**פתרון:**

לכל אסטרטגיה מעורבת, $[x(F),(1-x)(C)]$ של שחקן 1, הקבוצת תשובות טובות ביותר של שחקן 2 הן

$$\sigma_2(x)=\underset{y\in[0,1]}{\arg\max}\, u_2(x,y)=\left\{y\in[0,1]\,\middle|\,u_2(x,y)\geq u_2(x,z)\forall z\in[0,1]\right\}\ .$$

כדי לחשב את $\sigma_2(x)$, נרשום את $U_2(x,y)$:

$$U_2(x,y)=xy+2(1-x)(1-y)=3xy-2x-2y+2=y(3x-2)-2x+2\ .$$

לכל $x$ קבוע זוהי פונקציה לינארית של $y$.

- $x>\dfrac{2}{3}$ ⇐ השיפוע חיובי ויש מקסימום ב- $y=1$.
- x$x<\dfrac{2}{3}$ ⇐ השיפוע שלילי ויש מקסימום ב- $y=0$.
- $x=\dfrac{2}{3}$ ⇐ השיפוע שווה אפס והפונקציה קבוע וכל נקודה $y\in[0,1]$ נקודת מקסימום.

השיפוע משתנה מחיובי לשלילי ב- $x=\dfrac{2}{3}$. הגרף של $\sigma_2(x)$ מתואר בתרשים למטה.

באותה מידה, לכל אסטרטגיה מעורבת, $[y(F),(1-y)(C)]$ של שחקן 2, הקבוצת תשובות טובות ביותר של שחקן 1 הן

$$\sigma_1(y)=\underset{x\in[0,1]}{\arg\max}\, u_1(x,y)=\left\{x\in[0,1]\,\middle|\,u_1(x,y)\geq u_1(z,y)\forall z\in[0,1]\right\}\ .$$

כדי לחשב את $\sigma_1(y)$, נרשום את $U_1(x,y)$:

$$U_1(x,y)=2xy+(1-x)(1-y)=3xy-x-y+1=x(3y-1)-y+1\ .$$

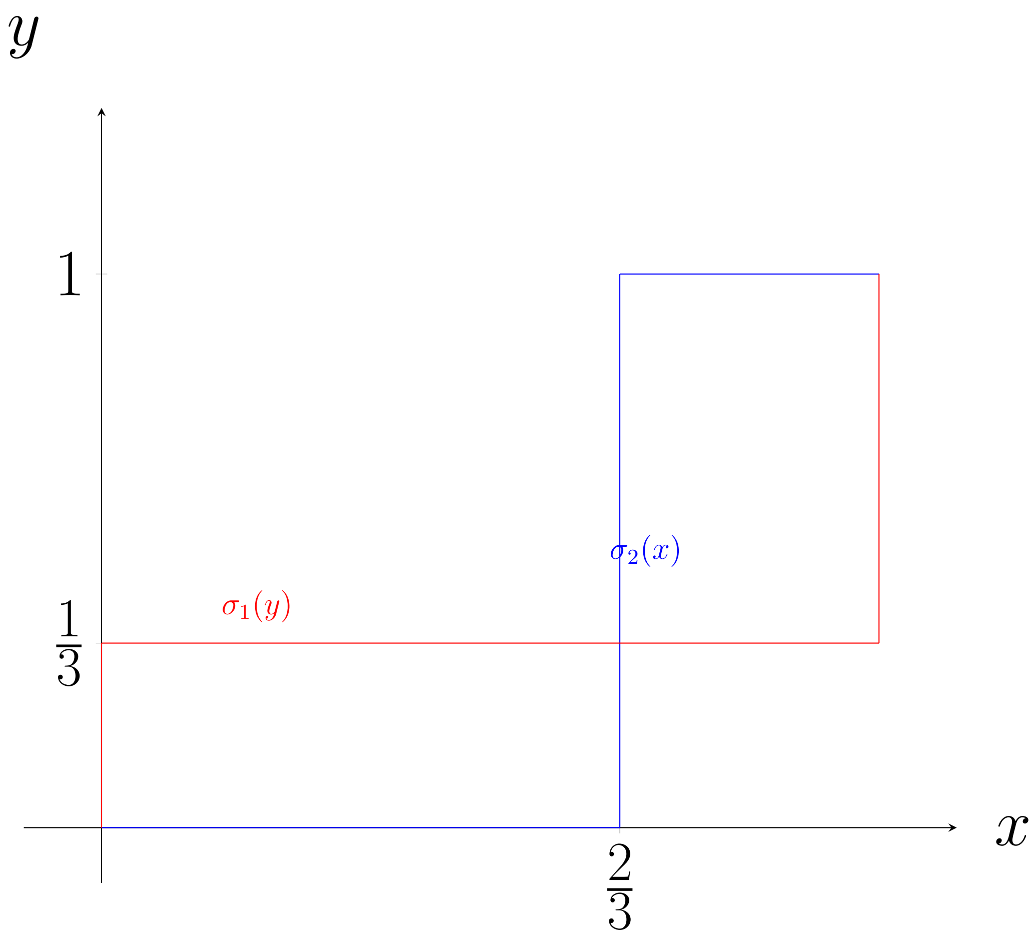
לכל $y$ קבוע זוהי פונקציה לינארית של $x$.

- $y>\dfrac{1}{3}$ ⇐ השיפוע חיובי ויש מקסימום ב- $x=1$.
- $y<\dfrac{1}{3}$ ⇐ השיפוע שלילי ויש מקסימום ב- $x=0$.
- $y=\dfrac{1}{3}$ ⇐ השיפוע שווה אפס והפונקציה קבוע וכל נקודה $x\in[0,1]$ נקודת מקסימום.

השיפוע משתנה מחיובי לשלילי ב- $y=\dfrac{1}{3}$. הגרף של $\sigma_1(y)$ מתואר בתרשים למטה.

לסיכום, עבור משחק זה,

$$\sigma_2(x)=\begin{cases}0 & x<\dfrac{2}{3}\ ,\\ [0,1] & x=\dfrac{2}{3}\ ,\\ 1 & x>\dfrac{2}{3}\ ,\end{cases}\ ,\qquad \sigma_1(y)=\begin{cases}0 & y<\dfrac{1}{3}\ ,\\ [0,1] & x=\dfrac{1}{3}\ ,\\ 1 & y>\dfrac{1}{3}\ ,\end{cases}$$




נקודה $(x^*, y^*)$ היא שיווי משקל אם ורק אם $x^* \in \sigma_1(y^*)$ ו- $y^* \in \sigma_2(x^*)$. ז"א $(x^*, y^*)$ נקודת שיווי משקל אם ורק אם היא נקודת חיתוך של הגרפים של $\sigma_1(y)$ ו- $\sigma_2(x)$. יש 3 נקודות חיתוך:

- $(x^*, y^*) = (0, 0)$ אשר מתאימה לאסטרטגיה טהורה $(C, C)$.
- $(x^*, y^*) = (1, 1)$ אשר מתאימה לאסטרטגיה טהורה $(F, F)$.
- $(x^*, y^*) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ אשר היא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות

$$x^* = \left[\frac{2}{3}(F), \frac{1}{3}(C)\right] , \qquad y^* = \left[\frac{1}{3}(F), \frac{2}{3}(C)\right] ,$$

■

## 3.4 תחרות דואפול על פי קורנוט

**דוגמה 3.6 ()**

שני יצרניים 1 ו- 2 מייצרים אותו מוצר ומתחרים על שוק הקונים הפוטנציאלים. היצרנים מחליטים סימולטנית על הכמות שהם ייצרו, וההיצע הכולל קובע את מחיר המוצר, שהוא זהה לשני היצרנים. נסמן ב- $q_1$ וב- $q_2$ את הכמויות שמייצרים היצרנים 1 ו- 2 בהתאמה. אזי הכמות הכוללת של מוצרים בשוק היא $q_1 + q_2$. נניח כי המחיר של יחידה שווה ל-

$$2 - q_1 - q_2 .$$

עלות הייצור של יחידה ליצרן הראשון היא $c_1 > 0$ וליצרן השני היא $c_2 > 0$. האם קיים שיווי משקל במשחק

זה, ואם כן, מה הוא?

**פתרון:**

זהו משחק שני שחקנים (היצרנים 1 ו- 2) שבו קבוצת האסטרטגיות של כל שחקן היא $[0,\infty)$. אם שחקן 1 בוחר באסטרטגיה $q_1$ ושחקן $q_2$ בוחר באסטרטגיה $q_2$, התשלום לשחקן 1 הוא

$$u_1(q_1,q_2) = q_1(2-q_1-q_2) - q_1c_1 = q_1(2-c_1-q_1-q_2)\ , \tag{*}$$

והתשלום לשחקן 2 הוא

$$u_2(q_1,q_2) = q_2(2-q_1-q_2) - q_1c_2 = q_2(2-c_2-q_1-q_2)\ .$$

התשובה בטובה ביותר של שחקן 1 לאסטרטגיה $q_2$ של שחקן 2 הוא ערך $q_1$ המביא למקסימום את $u_1(q_1,q_2)$. הפונקציה $q_1 \mapsto u_1(q_1,q_2)$ היא פונקציה ריבועית עם מקסימום בנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{\partial u_1(q_1,q_2)}{\partial q_1} = 0\ .$$

על ידי גזירה של אגף ימין של משוואה (*) נקבל את התנאי $2-c_1-2q_1-q_2=0$ או

$$q_1 = \frac{2-c_1-q_2}{2}\ . \tag{1*}$$

באותו אופן, התשובה הטובה ביותר של שחקן 2 לאסטרטגיה $q_1$ של שחקן 1 היא ערך $q_2$ שבו הנגדרת של $u_2(q_1,q_2)$ לפי $q_2$ מתאפסת. על ידי גזירה נקבל

$$q_2 = \frac{2-c_2-q_1}{2}\ . \tag{2*}$$

פתרון המשוואות (1*) ו- (2*) נותן

$$q_1^* = \frac{2-2c_1+c_2}{3}\ , \qquad q_2^* = \frac{2-2c_2+c_1}{3}\ .$$

זה אמנם שיווי משקל וזהו שיווי משקל היחיד של המשחק. התשלומים של השחקנים בשיווי משקל זה הם

$$u_1\left(q_1^*,q_2^*\right) = \left(\frac{2-2c_1+c_2}{3}\right)^2 = \left(q_1^*\right)^2\ , \qquad u_2\left(q_1^*,q_2^*\right) = \left(\frac{2-2c_2+c_1}{3}\right)^2 = \left(q_2^*\right)^2\ .$$

כעת נוכיח כי הצמד אסטרטגיות $(q_1^*,q_2^*)$ מהווה נקודת שיווי משקל. יש להוכיח כי $q_1^*$ תשובה טובה ביותר לשחקן 1 ביחס ל- $q_2^*$ ולהפך.

$$u(q_1,q_2^*) = q_1(2-c_1-q_1-q_2^*) = -q_1^2 + (2-c_1-q_2^*)q_1\ .$$

לכן $u(q_1,q_2^*)$ פולינום מסדר 2 של $q_1$, כאשר המקדם של $q_1^2$ הוא $-1$. לכן המקסימום המתקבל הוא

$$q_1 = \frac{(2-c_1-q_2^*)}{2} = \frac{\left(2-c_1-\frac{2-2c_2+c_1}{3}\right)}{2} = q_1^*\ .$$

בפרט $q_1^*$ תשובה טובה ביותר של שחקן 2 ביחס ל- $q_2^*$.

■