

# שיעור 8

## תלות לינארית

### 8.1 הגדרה של תלות לינארית

#### הגדרה 8.1 תלות לינארית

נניח ש  $V$  מרחב ווקטורי מעל שדה  $\mathbb{F}$ , ונניח ש-  $v_1, \dots, v_n \in V$ . ווקטורים של  $V$ .

•  $v_1, \dots, v_n$  נקראים תלויים לינארית אם קיימים סקלרים  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{F}$  שלא כולם אפסים כך ש-

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n = \bar{0}.$$

•  $v_1, \dots, v_n$  נקראים בלי תלויים לינארית אם

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n = \bar{0},$$

מתקיים רק אם  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$  כלומר המקדמים כולם אפסים.

#### 8.1 דוגמה

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad 3v_1 - v_2 = \bar{0} \text{ תלויים לינארית כי}$$

#### 8.2 דוגמה

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad i v_1 + v_2 = \bar{0} \text{ תלויים לינארית כי}$$

#### 8.3 דוגמה

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} 2k_1 + 6k_2 = 0 \\ k_1 + 4k_2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$k_2 = 0, k_1 = 0$  לכן  $v_2, v_1$  בלתי תלויים לינארית.

#### 8.4 דוגמה

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

תלויים לינארית כי

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + v_3 = \bar{0}.$$

## 8.5 דוגמה

בדקו אם הווקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

תלויים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם ששווה לווקטור האפס.

### פתרון:

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = \bar{0}$$

קיבלנו מערכת משוואות הומוגנית:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{3}R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 6R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 4R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$(k_1, k_2, k_3) = (2k_3, -k_3, k_3), \quad k_3 \in \mathbb{R}.$$

למערכת יש פתרון, לכן הווקטורים ת"ל.

נציב  $k_3 = 1$  ונקבל

$$(k_1, k_2, k_3) = (2, -1, 1),$$

ונקבל

$$2v_1 - v_2 + v_3 = \bar{0}$$

## 8.1 משפט

נניח ש-  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$

העמודות של  $A$  בלתי תלויות לינארית אם ורק אם למערכת  $A \cdot X = 0$  יש רק פתרון טריוויאלי.

(ז"א למטריצה המדורגת כל העמודות מובילות).

הוכחה: נרשום  $A$  בצורה

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$$AX = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots x_n u_n = 0.$$

$X$  פתרון הטריוויאלי, כלומר  $X = 0$  אם ורק אם  $x_1, x_2, \dots, x_n = 0$ , ולכן  $u_1, u_2, \dots, u_n$  בת"ל.

■

## 8.6 דוגמה

האם הווקטורים של מרחב  $P_2(\mathbb{R})$

$$p_1(x) = 3 - x + x^2, \quad p_2(x) = x + 5x^2, \quad p_3(x) = 1,$$

הם תלויים לינארית? אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם שווה לווקטור האפס.

**פתרון:**

$$k_1 p_1(x) + k_2 p_2(x) + k_3 p_3(x) = \bar{0},$$

$$k_1 (3 - x + x^2) + k_2 (x + 5x^2) + k_3 \cdot 1 = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2,$$

לכן

$$(3k_1 + k_3) + (-k_1 + k_2)x + (k_1 + 5k_2)x^2 = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

השוויון אמור להתקיים לכל  $x$ , לכן

$$\left. \begin{aligned} 3k_1 + k_3 &= 0 \\ -k_1 + k_2 &= 0 \\ k_1 + 5k_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_1 - 3R_3]{R_2 \rightarrow R_1 + 3R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 5R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

למערכת יש פתרון יחיד  $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$ . לכן הווקטורים בת"ל.

## 8.7 דוגמה

במרחב ווקטורי  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  נתונים שלושה ווקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

בדקו אם הווקטורים  $u_1, u_2, u_3$  תלויים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם שווה לווקטור האפס.

## פתרון:

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \bar{0} ,$$

$$k_1 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \bar{0} ,$$

לכן

$$\begin{pmatrix} -2k_1 + 5k_2 - k_3 & k_1 - k_2 + 4k_3 \\ 4k_2 + 4k_3 & -k_1 - 3k_2 - 6k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

השוויון אמור להתקיים לכל  $x$ , לכן

$$\left. \begin{aligned} -2k_1 + 5k_2 - k_3 &= 0 \\ k_1 - k_2 + 4k_3 &= 0 \\ 4k_2 + 4k_3 &= 0 \\ -k_1 - 3k_2 - 6k_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & -6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_4 \rightarrow R_1 - 2R_4]{R_2 \rightarrow R_1 + 2R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 11 & 11 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_4 \rightarrow R_2 - 3R_4]{R_3 \rightarrow R_2 - 3R_3} \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

למערכת ההומוגנית יש פתרון יחיד, טריוויאלי, לכן  $u_1, u_2, u_3$  בת"ל.

## 8.8 דוגמה

נתונים ווקטורים  $v_1 = x, v_2 = e^x, v_3 = x^2$  במרחב ווקטורי  $f(\mathbb{R})$ . בדקו אם הווקטורים תלויים לינארית.

## פתרון:

### שיטה 1

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = \bar{0}$$

ז"א

$$k_1 x + k_2 e^x + k_3 x^2 = 0$$

לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

נציב  $x = 0 \Leftrightarrow k_2 = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{נציב } x = 1 \Rightarrow k_1 + k_3 = 0 \\ \text{נציב } x = -1 \Rightarrow -k_1 + k_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow k_1 = 0, k_3 = 0.$$

לכן הווקטורים בת"ל.

**שיטה 2: וורונסקיאן**

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 \\ u''_1 & u''_2 & u''_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & e^x & x^2 \\ 1 & e^x & 2x \\ 0 & e^x & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$W(x) = 0$  לכל  $x$  לכן הווקטורים בת"ל.

## 8.9 דוגמה

במרחב ווקטורי  $\mathbb{Z}_5^3$  נתונים ווקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{3} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{4} \\ \bar{2} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \end{pmatrix}.$$

בדקו אם הווקטורים תלויים לינארית. אם כן, רשמו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם שווה לווקטור האפס.

**פתרון:**

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = \bar{0}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & 0 \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} & 0 \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_1 + 3R_3]{R_1 \rightarrow R_1 + R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & 0 \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & 0 \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & 0 \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & 0 \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{2}k_1 + k_3 = \bar{0} \\ \bar{4}k_2 + \bar{3}k_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{2}k_1 = \bar{4}k_3 \\ \bar{4}k_2 = \bar{2}k_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k_1 = \bar{2}k_3 \\ k_2 = \bar{3}k_3 \end{array} \right\}$$

פתרון

$$(k_1, k_2, k_3) = (\bar{2}k_3, \bar{3}k_3, k_3), \quad k_3 \in \mathbb{Z}_5.$$

נציב  $k_3 = \bar{1}$  ונקבל  $(k_1, k_2, k_3) = (\bar{2}, \bar{3}, \bar{1})$ . ז"א

$$\bar{2}v_1 + \bar{3}v_2 + v_3 = \bar{0}.$$

## 8.2 תכונות של תלות לינארית

## משפט 8.2 תכונות בסיסיות של תלות לינארית

- (1) ווקטור יחיד,  $u$ , תלוי לינארית אם ורק אם  $u = \bar{0}$ .
- (2) שני ווקטורים תלויים לינארית אם ורק אם אחד מהם הוא צירוף לינארי של הווקטור השני.
- (3) ווקטורים  $v_1, \dots, v_n$  תלויים לינארית אם ורק אם לפחות אחד מהם הוא צירוף לינארי של שאר הווקטורים.
- (4) כל קבוצת ווקטורים שמכילה את ווקטור האפס, היא תלויה לינארית.
- (5) אם  $v_1, \dots, v_n \in V$  תלויים לינארית, אז כל קבוצת הווקטורים שמכילה את  $v_1, \dots, v_n$  היא תלויה לינארית.
- (6) אם קבוצת ווקטורים  $\{v_1, \dots, v_n\}$  בת"ל, אז כל תת קבוצה שלה היא בת"ל.

הוכחה:

(1)

$$u \text{ ת"ל אם ורק אם קיים סקלר } k \in \mathbb{F} \text{ כך ש } ku = \bar{0} \Leftrightarrow u = \bar{0}.$$

(2)

$$v_2, v_1 \text{ ת"ל } \Leftrightarrow \text{קיימים סקלרים } k_2, k_1 \text{ שלא כולם אפסים כך ש}$$

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 = \bar{0}$$

נניח בלי הגבלת הכלליות ש  $k_1 \neq 0$ , אז

$$v_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right) v_2.$$

(3)

$$v_1, \dots, v_n \text{ ת"ל } \Leftrightarrow \text{קיימים } k_1, \dots, k_n \in \mathbb{F} \text{ שלא כולם אפסים כך ש}$$

$$k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = \bar{0}.$$

נניח ש  $k_i \neq 0$ . אז זה מתקיים אם ורק אם

$$v_i = \left(-\frac{k_1}{k_i}\right) v_1 + \dots + \left(-\frac{k_{i-1}}{k_i}\right) v_{i-1} + \left(-\frac{k_{i+1}}{k_i}\right) v_{i+1} + \dots + \left(-\frac{k_n}{k_i}\right) v_n$$

(4)

$$\text{לכל } v_1, \dots, v_n \in V,$$

$$0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n + 1 \cdot \bar{0} = \bar{0}$$

לכן  $v_1, \dots, v_n, \bar{0}$  ת"ל.

נניח ש  $v_1, \dots, v_n$  ת"ל. אז קיימים סקלרים  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{F}$  שלא כולם אפסים כך ש

$$k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = \bar{0}.$$

אז לכל  $u_1, \dots, u_m \in V$  מתקיים:

$$k_1 v_1 + \dots + k_n v_n + 0 \cdot u_1 + \dots + 0 \cdot u_m = \bar{0}$$

לכן  $v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m$  ת"ל.

נוכיח את הטענה בדרך השלילית.

$\{v_1, \dots, v_n\}$  בת"ל. ז"א הצירוף לינארי הבא

$$k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = \bar{0}$$

מתקיים אם ורק אם  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ . נניח שקיימת תת קבוצה של  $\{v_1, \dots, v_n\}$  שהיא תלויה לינארית. כלומר קיימת קבוצה  $\{v_1, \dots, v_m\}$  שהיא ת"ל. ז"א הצירוף לינארי

$$k_1 v_1 + \dots + k_m v_m = \bar{0}$$

מתקיים כאשר לפחות אחד של הסקלרים  $k_1, \dots, k_m$  לא שווה אפס. לכן

$$k_1 v_1 + \dots + k_m v_m + 0 \cdot v_{m+1} + \dots + 0 \cdot v_n = \bar{0}$$

מתקיים כאשר לפחות אחד של הסקלרים  $k_1, \dots, k_m$  לא שווה אפס. ז"א מצאנו צירוף לינארי של  $v_1, \dots, v_n$  שבו אחד של הסקלרים לא שווה אפס, ז"א  $v_1, \dots, v_n$  ת"ל. סתירה.

■

## דוגמה 8.10

נניח שווקטורים  $u, v, w \in V$  בת"ל. הוכיחו כי הווקטורים

$$u + v + w, \quad 2u - 4v, \quad u + v - w$$

בת"ל.

## פתרון:

נבנה צ"ל של ווקטורים  $u + v + w, 2u - 4v, u + v - w$ .

$$k_1(u + v + w) + k_2(2u - 4v) + k_3(u + v - w) = \bar{0}.$$

מכאן

$$(k_1 + 2k_2 + k_3)u + (k_1 - 4k_2 + k_3)v + (k_1 - k_3)w = \bar{0}.$$

$u, v, w$  בת"ל, לכן

$$\left. \begin{aligned} k_1 + 2k_2 + k_3 &= 0 \\ k_1 - 4k_2 + k_3 &= 0 \\ k_1 - k_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1}]{\phantom{R_2 \rightarrow R_2 - R_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_2 - 3R_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

יש פתרון יחיד למערכת:  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ . לכן הווקטורים  $u + v + w, 2u - 4v, u + v - w$  בת"ל.